

5
90 2000 233
50376
1996
127
N° d'ordre : 1744

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THESE

présentée pour l'obtention du

TITRE DE DOCTEUR EN MECANIQUE

par

Youcef HAMITOUCHE

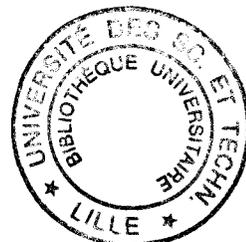
Intitulée

**SUR L'ANALYSE ET LA RECHERCHE DE SOLUTIONS
ANALYTIQUES AU NIVEAU DU RACCORDEMENT
DE COQUES AXISYMETRIQUES**

Soutenue le 07 Mai 1996 devant la commission d'examen :

Président :	M.	F. PARSY	Professeur USTL Lille
Rapporteurs :	MM.	J. OUDIN	Professeur UVHC Valenciennes
		M. TOURATIER	Professeur ENSAM Paris
Examineurs :	MM.	A. BERHAULT	Dir. Tech. BSL industries Paris
		G. DE SAXE	Professeur USTL Lille
		S. HARIRI	Enseignant Chercheur Mines de Douai

Laboratoire de Calcul des Structures
941, rue Charles Bourseul - BP 838 - 59508 Douai



*A mon épouse Fatima et ma fille Sirine,
à mes parents, mes frères et mes soeurs,
à ma famille et mes amis,
à Abdelkader.*

AVANT-PROPOS

Le présent travail a été effectué au laboratoire de calcul des structures du département Matériaux Métalliques de l'Ecole des Mines de Douai.

Cette thèse doit son aboutissement à Monsieur S. HARIRI, responsable du laboratoire de calcul des structures, à qui j'exprime ma profonde reconnaissance pour son aide constante et ses encouragements. Ses qualités scientifiques et humaines ont été un soutien important au cours de ces années de recherche.

Je remercie Monsieur F. PARSY, professeur des universités, qui a dirigé de près ce travail et qui a bien voulu présider la commission d'examen. Malgré sa lourde charge d'enseignement, Monsieur F. PARSY n'a pas hésité à me recevoir et à me conseiller à tout moment. Je le remercie pour le temps qu'il a bien voulu y consacrer.

Je remercie très sincèrement Messieurs M. TOURATIER et J. OUDIN, professeurs des universités, pour l'intérêt qu'il ont accordé à ce travail et qui ont spontanément accepté d'en être les rapporteurs. Leurs remarques pertinentes m'ont permis d'améliorer la qualité du manuscrit.

Je remercie vivement Messieurs G. DE SAXE, professeur des universités et A. BERHAULT, Directeur technique chez BSL industries, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner mon travail et de participer au jury de cette thèse.

Je suis reconnaissant à la direction de l'Ecole des Mines de DOUAI, notamment à son directeur des recherches et son adjoint, Messieurs D. BOULNOIS et M. FREMIOT, de m'avoir permis de mener à bien mes recherches.

Mes remerciements vont également à Mesdemoiselles C. ROBIN et R. VAUCHER et à Monsieur F. NUNIO pour l'aide qu'ils m'ont apporté.

Je remercie mes collègues du département Matériaux Métalliques qui ont contribué, par leur qualités professionnelles et humaines, à la réalisation de ce travail. J'adresse en particulier mes remerciements à E. VASSEUR et R. ADDA.

Je remercie très sincèrement mon ami A. HACHEMI et que tous ceux qui m'ont aidé dans l'aboutissement de ce travail trouvent ici mes sincères remerciements.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : GENERALITES SUR LA THEORIE DES COQUES	5
1. GEOMETRIE DES SURFACES	7
1.1. Tenseurs métriques	7
1.2. Courbures des surfaces	10
1.3. Différentiation sur les surfaces	11
2. HYPOTHESES CINEMATIQUES	13
2.1. Modèle de type membrane	14
2.2. Modèles du premier ordre	15
2.2.1. Modèle de Kirchhoff-Love	15
2.2.2. Modèle de Reissner-Mindlin	15
2.3. Modèles du troisième ordre	16
2.4. Modèle sinus	17
3. FORMULATION DU PROBLEME AUX LIMITES	18
3.1. Description géométrique	18
3.2. Champ de déplacement	19
3.3. Déformation d'une coque	21
3.4. Tenseur de contraintes	24
3.5. Formulation variationnelle	25
3.6. Relations constitutives	30
CHAPITRE II : APPLICATION DE LA THEORIE DES COQUES	33
1. ETUDE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE	33
1.1. Eléments géométriques	34
1.2. Champ de déplacement	35
1.3. Tenseur des déformations	36
1.4. Loi de comportement	37
1.5. Equations d'équilibre	38

2. ETUDE D'UNE COQUE CONIQUE	38
2.1. Eléments géométriques	39
2.2. Tenseur de déformation	40
2.3. Relations constitutives	42
2.4. Equations d'équilibre	42
3. ETUDE D'UNE COQUE SPHERIQUE	43
3.1. Aspects géométriques	43
3.2. Tenseur de déformation	44
3.3. Equations d'équilibre	45
3.3. Loi de comportement	46
4. COQUES AXISYMETRIQUES	46
4.1. Solutions analytiques par la théorie de la membrane	48
4.1.1. Coque cylindrique	48
4.1.2. Coque conique	49
4.1.3. Coque sphérique	49
4.2. Solutions analytiques par la théorie de Kirchhoff-Love	50
4.2.1. Coque cylindrique	50
4.2.2. Coque conique	52
4.2.3. Coque sphérique	57
CHAPITRE III : RACCORDEMENT DE COQUES MINCES	60
1. GENERALITES	60
1.1. Description d'un appareil à pression	60
1.1.1. Parties courantes	61
1.1.2. Zones de discontinuité géométrique	62
1.1.3. Accessoires	63
1.2. Approche générale d'un problème de raccordement	63
2. RACCORDEMENT CYLINDRE-CONE	65
2.1. Etude des conditions de bord au niveau du cylindre	65
2.1.1. Définition des éléments de liaison	65
2.1.2. Expression des déplacements en fonction des inconnues de liaison	66
2.2. Etude des conditions de bord au niveau du cône	66
2.2.1. Définition des éléments de liaison	66

2.2.2. Expression des déplacements en fonction des inconnues de liaison	68
2.3. Détermination des inconnues de liaison	69
2.3.1. Décomposition du problème de raccordement	69
2.3.2. Partie cylindrique	70
2.3.3. Partie conique	70
2.3.4. Calcul des inconnues de liaison	71
2.4. Calcul des contraintes	72
2.4.1. Calcul des contraintes le long d'un méridien de la coque cylindrique	72
2.4.2. Calcul des contraintes le long d'un méridien de la coque conique	73
3. RACCORDEMENT CYLINDRE–SPHERE	75
3.1. Définition des éléments de liaison de la coque sphérique	75
3.2. Expression des déplacements en fonction des inconnues de liaison	77
3.3. Détermination des inconnues de liaison	78
3.3.1. Décomposition du problème global	78
3.3.2. Calcul des inconnues de liaison	79
4. PRESENTATION DES RESULTATS	81
4.1 Raccordement cylindre-cône	81
4.1.1. Influence de l'angle α sur le niveau et la répartition des contraintes	82
4.1.2. Influence du paramètre géométrique η de la coque	84
4.1.3. Variation des contraintes de raccordement en fonction de α et de η	87
4.1.4 détermination des zones d'influence	89
4.2. Raccordement cylindre-sphère	90
4.2.1. Variation des contraintes en fonction de l'angle φ	91
4.2.2. Influence de η sur le niveau et la répartition des contraintes	92
4.3.3. Zones d'influence	93
4.2.4. Etude comparative entre les deux types de raccordement	94
4.3. Raccordement cylindre–sphère–cône	96
4.3.1. Etude du raccordement cylindre-sphère	97
4.3.2. Etude du raccordement cône-sphère	98
CHAPITRE IV : EXTENSIONS AUX MODELES RAFFINES	102
1. VALIDATION DE LA SOLUTION DE KIRCHHOFF-LOVE	102
1.1. Modèles géométriques pour le calcul en éléments finis	102
1.2. Description du maillage et des conditions aux limites	103
1.3. Influence des paramètres géométriques sur la solution au niveau du raccord	104
1.4. Influence des paramètres géométriques sur la solution loin de la zone du raccord	106

2. THEORIE GENERALE DES COQUES AXISYMETRIQUES	107
2.1. Champ de déplacement	107
2.2. Tenseur de déformation	108
2.3. Formulation variationnelle	109
2.4. Equations d'équilibre	111
3. APPLICATION A L'ETUDE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE	112
3.1. Equations générales	112
3.1.1. Description de la cinématique	113
3.1.2. Equations d'équilibre	113
3.2. Modèle de Kirchhoff-Love	114
3.2.1. Equations générales	114
3.2.2. Résolution	115
3.3. Modèle de Reissner-Mindlin	115
3.3.1. Equations générales	115
3.3.2. Résolution	116
3.4. Modèle du 3ème ordre	120
3.4.1. Equations générales	120
3.4.2. Résolution	121
3.5. Modèle sinus	127
3.5.1. Equations générales	127
3.5.2. Résolution	128
3.6. Influence des paramètres d'amortissement sur la solution générale	131
4. ETUDE DU RACCORDEMENT D'UN CYLINDRE AVEC UNE PLAQUE RIGIDE	
4.1. Solution par le modèle de Kirchhoff-Love	133
4.2. Solution par le modèle de Reissner-Mindlin	134
4.3. Solution par les modèles raffinés	135
4.4. Présentation des résultats	136
CONCLUSION GENERALE	146
REFERENCES	149

LISTE DES VARIABLES PRINCIPALES

$\theta^1, \theta^2, \theta^3$	lignes de coordonnées
Ω	domaine occupé par la coque
Γ	frontière de Ω
F	surface moyenne
\vec{r}	vecteur position
$\vec{a}_\alpha, \vec{a}_3$	vecteurs de la base naturelle
$\vec{e}_\alpha, \vec{e}_3$	vecteurs de la base physique (orthonormée)
$a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$	tenseurs métriques covariants, contravariants
$b_{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}, b_\alpha^\beta$	tenseurs de courbure covariant, contravariant, mixte
$\epsilon_{\alpha\beta}$	tenseur d'orthogonalité
$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda, \Gamma_{\alpha\beta}^3$	symboles de Christoffel
$1/R_1, 1/R_2$	courbures associées aux directions principales
H	courbure principale
K	courbure de Gauss
$\eta = h/R$	paramètre géométrique
L	longueur caractéristique
\vec{T}_i	vecteur contrainte
$\tau^{ij}, \sigma^{ij}, \sigma_{ij}$	tenseurs des contraintes
$n^{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}$	efforts de membrane
$m^{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}$	moments fléchissants
$q^\alpha, Q_{\alpha 3}, Q_2$	efforts tranchants
$\alpha_{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha\beta}^0$	déformations de membrane
$\beta_{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha\beta}^1$	déformations de flexion
$\gamma_{\alpha 3}, \epsilon_{\alpha 3}$	déformations du cisaillement transverse
Γ_V	frontière où les déplacements sont connus

Γ_σ	frontière où les contraintes sont connues
V, \hat{V}	espaces de Hilbert
H^1, H^2	espaces de Sobolev
E_{ijkl}	tenseur d'élasticité
V_i, U_i	déplacements d'un point situé sur la normale
v_i, u_i, u, w	déplacements d'un point de la surface moyenne
$w_\alpha, \omega_\alpha, \omega$	rotations de la normale
P_i	coefficients complexes
A'_i, A''_i	parties réelle, imaginaire des constantes d'intégration
P	pression interne
α_1, α_2	coefficients de la forme fondamentale
L_1, L_2	paramètres de Lamé
R	Rayon moyen du cylindre
ν	coefficient de Poisson
E	module de Young
h, e, t	épaisseurs du cône, du cylindre, de la sphère
δ^m, δ^f	déplacement radial de membrane, de flexion
V^m, V^f	rotation de la normale de membrane, de flexion
γ, λ	coefficients d'amortissement du cylindre, du cône
a, b, c	coefficients d'amortissements modèles raffinés
A_i, C_i	constantes d'intégration
D, B, G	rigidités - extension, flexion, cisaillement
α	demi angle au sommet du cône
r, s	rayon du cône ($r = R$) à la jonction, abscisse
$\xi = 2 \lambda s^{1/2}$	variable du cône
$(M_0, C_0), (T_0, Q_0)$	efforts de liaison (moments, efforts tranchants)
$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$	coefficients d'influence du cylindre
$(a_4, a_5, a_6), (b_4, b_5, b_6)$	coefficients d'influence du cône

$(a_7, a_8, a_9), (b_7, b_8, b_9)$	coefficients d'influence de la sphère
σ_{11}, σ_{22}	contraintes circonférentielles, longitudinales
I_1, I_2	contraintes adimensionnelles
$\bar{x}, \bar{d}, \bar{x}_s$	long. d'influence adimens. du cylindre, cône, sphère

CONVENTIONS

$(...)_\alpha$	dérivée par rapport à θ^α : $\partial (...)/\partial \theta^\alpha$
$(...)_3$	dérivée par rapport à θ^3 ou z : $\partial (...)/\partial z$
$(...) _\alpha$	dérivée covariante de surface
$(...) _i$	dérivée covariante de l'espace
$(...)^m$	membrane
$(...)^f$	flexion
$(...)^g$	global
\subset	inclusion
\wedge	produit vectoriel
$... $	norme ou valeur absolue
\in	appartenance
$\overline{(...)}$	quantités adimensionnelles
$(...)_0, (...)^0$	relatives aux bords à raccorder
T6	élément fini triangulaire à six noeuds
Q8	élément fini triangulaire à huit noeuds
2D	modèle axisymétrique
EF	éléments finis
K-L	modèle analytique de Kirchhoff-Love
R-M	modèle analytique de Reissner-Mindlin
3-ordre	modèle analytique de Reddy
sinus	modèle analytique de touratier

RESUME – Une contribution à l'analyse des problèmes de raccordement de coques axisymétriques de géométries différentes est proposée dans cette thèse. Nous établissons à l'aide du principe des travaux virtuels, le problème aux limites pour une coque géométriquement linéaire. La démarche proposée est purement analytique ; les solutions obtenues ont alors l'avantage d'être très simples d'utilisation et susceptibles de s'intégrer dans les codes de calculs des appareils à pression. Les modèles cinématiques retenus sont les modèles du premier ordre de Kirchhoff–Love et de Reissner–Mindlin, le modèle du troisième ordre de Reddy et le modèle sinus de Touratier.

Un intérêt particulier est porté à l'étude de l'influence cumulée des paramètres de discontinuité et des infiniments petits géométriques de la coque sur la solution au niveau de la jonction. Une étude préalable de raccordement d'une coque cylindrique avec une coque conique par le modèle de Kirchhoff-Love, a permis d'établir le domaine de validité de ce modèle où la solution de référence est obtenue par éléments finis en modèle axisymétrique. Nous justifions notre démarche de chercher des solutions qui tiennent compte du cisaillement transverse.

Afin de montrer la nécessité d'utiliser des modèles raffinés en présence de discontinuités géométriques, une analyse détaillée du raccordement d'une coque cylindrique avec un fond plat est proposée où une condition aux limites très sévère de type encastrement est retenue. Ce cas de discontinuité extrême a permis de mettre en évidence la sensibilité de chaque modèle vis à vis des effets de bord. Les résultats obtenus pour les différents modèles montrent la supériorité des modèles raffinés ; dans ce type de problème, le champ de déplacement doit être développé au moins à l'ordre trois. Nous établissons que pour des coques minces et en dehors des discontinuités géométriques, le modèle de Kirchhoff-Love est une bonne approximation de l'état de contraintes ; par contre, pour des coques moyennement épaisses et surtout en présence de discontinuités, les modèles raffinés deviennent nécessaire pour décrire un comportement plus exact de la jonction.

Le choix du modèle cinématique est alors guidé par le paramètre de la coque et par les paramètres de discontinuités géométriques.

MOTS CLES : Raccordement – coques axisymétriques – discontinuités géométriques – solutions analytiques – modèles classique et raffiné – cisaillement transverse – effets de bord – éléments finis.

ANALYSIS AND RESEARCH OF ANALYTICAL SOLUTIONS AT THE JUNCTION OF AXISYMMETRIC SHELLS

ABSTRACT – A contribution to analyse junction problems between axisymmetric shells of different geometry is presented in this thesis. This kind of discontinuity is one of the most common problems in pressure vessel analysis where the bending stresses are playing a leading part in the equilibrium equations. The present study is undertaken in response to a need for simple analytical solutions which are very convenient in the industrial field, to design and identify discontinuity stresses at the junction and at the fixed end of the shell. The boundary value problem is formulated by making use of the principle of virtual work. The shear theory which is geometrically linear, is developed for small elastic strains.

First, an analytical approach based on the Kirchhoff-Love hypothesis is used to find the solution for a cylinder with conical and spherical heads. Numerical solutions obtained by the finite element method in axisymmetrical modelling, which are considered as a reference, are used for the validation of the cylinder to cone juncture. Then, we justify the choice of kinematic models with transverse shear.

Analytical solutions based on the first order, the third order and the generalised shear deformation theories, are proposed to analyse a cylinder with a flat head. We show that according to the geometrical parameters and for thin shells, the Kirchhoff-Love model is a good approximation of the stress state ; but for thick shells, and especially in presence of a discontinuity, higher order models are necessary to have a better approximation of the stresses.

KEYWORDS : Junction – discontinuity – analytical solutions – axisymmetric shells – classical models – higher order models – transverse shear – finite element – edges effects.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Lors des dernières décennies, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude des plaques et coques, en vue d'établir une théorie qui permette de décrire leur comportement d'une manière satisfaisante. Grâce aux chercheurs et ingénieurs, les théories des coques élastiques ont connu, un progrès considérable. Celles-ci sont classées en théories linéaires dites du premier ordre et théories non linéaires dites du second ordre. Alors que dans le premier cas, les déplacements sont supposés petits devant les dimensions de la coque, dans les théories non linéaires (Budiansky [BUD68], Valid [VAL77], Pietraszkiewicz [PEI77], Alfutov [ALF89]), ces déplacements peuvent être très grand. Pour la première classe de théories linéaires, on distingue deux grandes écoles : les partisans des modèles classiques tels que Kirchhoff-Love, Timoshenko, Reissner-Mindlin et ceux des modèles raffinés tels que Whitney et Sun [WHT74], Bickford [BIC82], Reddy [RED84], Bhirmaraddi (1984), Doxsee [DOX89], Touratier [TOU92], [TOU89]. Tous ces modèles reposent principalement sur des hypothèses cinématiques sur le champ de déplacement, qui permet ou non de tenir compte du cisaillement transverse dans la coque.

Alors que dans la théorie de Kirchhoff-Love, le cisaillement transverse est négligé, celui-ci est considéré respectivement, constant, parabolique ou cosinusoïdal dans les modèles de Reissner [REI45], de Reddy [RED85] et de Touratier [TOU92]. Pour certains types de structures minces, les modèles classiques peuvent être considérés comme une bonne approximation de l'état de contrainte. Par contre, pour des structures épaisses et surtout en présence de discontinuités, les modèles d'ordre supérieur deviennent plus performants, du fait de leur sensibilité aux effets de bord.

Nous présenterons dans ce travail une étude de la solution dans les zones de raccordement de coques de géométries différentes, en vue du dimensionnement des enceintes sous pression. En effet, dans plusieurs domaines industriels (pétrole, chimie, nucléaire...), ce type de structure dit appareil à pression est très utilisé et d'une manière

générale, les zones de raccordement nécessitent un soin particulier aussi bien lors de la fabrication de l'appareil que lors de son dimensionnement, car souvent c'est dans ces zones que les contraintes sont maximales et par conséquent dimensionnantes.

Dans notre travail, on s'intéresse tout d'abord à la solution des coques cylindrique, conique et sphérique car ce sont les géométries les plus courantes ; de plus, pour des raisons de rendement et d'optimisation, les géométries employées dans l'industrie sont le plus souvent de révolution. On cherchera à établir la solution pour chaque géométrie, et par les techniques de raccordement s'appuyant sur la continuité physique entre les coques, on déterminera la solution générale du problème de raccordement.

Le modèle cinématique choisi pour chaque géométrie dépend bien évidemment des infiniments petits géométriques de la coque (le rapport de l'épaisseur, sur le rayon moyen ou sur une longueur caractéristique). Reste que pour les zones de raccord se pose le problème de :

"L'influence des paramètres géométriques de la discontinuité sur le choix du modèle cinématique".

Afin de répondre à ce problème, on cherchera à établir le domaine de validité des solutions analytiques pour les modèles cinématiques des différentes théories. La solution de référence est obtenue par éléments finis en modèle axisymétrique.

Le présent travail se décompose en quatre chapitres :

Chapitre I: Après un rappel historique sur le développement de la théorie des coques, on explicite dans le premier chapitre les principaux résultats de la géométrie différentielle. Pour se familiariser avec les notations tensorielles rencontrées dans beaucoup d'ouvrages, on donnera la démarche détaillée pour l'obtention des relations tensorielles ; ceci aidera le lecteur à comprendre les parties suivantes. Le problème aux limites pour une coque sera formulé à l'aide du principe des travaux virtuels en utilisant le modèle de Reissner-

Mindlin. On donnera néanmoins en plus des équations régissant une coque, la description générale des autres modèles.

Chapitre II : L'étude des problèmes de raccord ne pouvant se faire dans un cas général, quel que soit le type de coque, on présentera dans ce chapitre une application à quelques coques couramment rencontrées dans les appareils à pression où la partie centrale est le plus souvent une coque cylindrique. Les équations régissant cette coque sont alors développées par rapport à une base curviligne. Par la suite une application sera faite pour obtenir des quantités physiques et donc en adoptant une base orthonormée. Cette partie cylindrique étant toujours raccordée à d'autres coques, on présentera cette fois-ci une étude des coques coniques et sphériques directement dans la base orthonormée. Se limitant au cas axisymétrique, on étudie l'équilibre de chaque coque séparément et ce par les théories de la membrane et de Kirchhoff-Love. On détermine alors les effets de bord qui interviennent dans l'étude du raccordement.

Chapitre III : La solution générale pour les différentes coques établies dans le chapitre précédent, sera complétée de manière à assurer la continuité géométrique de ces coques au niveau du raccordement. On étudie dans cette partie, plusieurs types de raccordement :

- raccordement cylindre-cône,
- raccordement cylindre-sphère,
- raccordement cylindre-sphère-cône.

Une attention particulière sera portée à l'étude de l'influence des paramètres géométriques et des paramètres de discontinuité sur le niveau et la répartition des contraintes de part et d'autre de la jonction. On cherchera à déterminer les zones d'influence de chaque coque et on définira la zone à partir de laquelle les effets de bord s'annulent.

Chapitre IV : Dans ce chapitre, on cherchera le domaine de validité de la solution analytique de Kirchhoff-Love. Pour cela, nous établirons des solutions numériques obtenues par un calcul en éléments finis en élasticité axisymétrique. Ce modèle a été retenu car c'est celui qui se rapproche le plus de la solution exacte du problème. Pour les domaines où la solution de Kirchhoff-Love n'est plus valable, on utilisera des modèles cinématiques qui tiennent compte du cisaillement transverse. Le problème aux limites sera formulé à l'aide du principe des travaux virtuels.

L'introduction d'une fonction de cisaillement a permis de développer d'une manière élégante une théorie générale des coques [TOU92]. En effet, les expressions des déplacements, du tenseur des déformations linéarisées et des contraintes généralisées sont obtenues dans le cas général ; les théories classiques et raffinées s'en déduisent alors aisément. Les calculs sont développés jusqu'à l'obtention des équations d'équilibre et des conditions aux limites. Par la suite, nous appliquerons cette théorie à l'étude du raccordement d'une coque cylindrique avec un fond plat et nous présenterons les solutions analytiques obtenues pour les modèles de Reissner-Mindlin, de Reddy et de Touratier. Afin de mettre en évidence la sensibilité des différents modèles vis à vis des effets de bord, une condition aux limites sévère de type encastrement sera retenue. Une analyse détaillée des effets d'extrémité est alors proposée pour la coque cylindrique.

Comme pour le raccordement cylindre-cône, la solution de référence est une solution obtenue par éléments finis en modèle axisymétrique. Nous comparerons alors nos résultats à cette solution et nous discuterons de l'apport des modèles de Reissner-Mindlin et des modèles raffinés par rapport à celui de Kirchhoff-Love.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LA THEORIE DES COQUES

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LA THEORIE DES COQUES

Dans ce chapitre, nous présenterons les éléments de base de la théorie des coques élastiques ainsi que les hypothèses adoptées pour modéliser ce type de structure. Le problème aux limites sera formulé à l'aide du principe des travaux virtuels. La théorie, géométriquement linéaire, est développée dans le domaine des petits déplacements.

Une particularité d'une structure de type coque est que l'une des dimensions est très petite devant les autres. Ceci a permis le développement de plusieurs théories par intégration suivant cette petite dimension et donc l'obtention de modèles bidimensionnels.

Le précurseur dans ce domaine est bien Kirchhoff (1888) qui a émis l'hypothèse suivante :

"la normale à la surface moyenne avant déformation reste orthogonale à cette surface et ne subit pas de dilatation durant le processus de déformation, hypothèse équivalente à celle émise par Bernoulli pour les poutres".

D'autres auteurs, Von Karman (1910), Love (1934), Donnell [DON34] et Marguerre [MAR38] ont repris en partie les travaux de Kirchhoff. Pour tenir compte du cisaillement transversal, Reissner [REI45] a modifié cette hypothèse pour des plaques semi épaisses. Depuis, plusieurs ouvrages et publications ont paru dans le domaine de la théorie des coques (Naghdi [NAG63], Koiter [KOI60], Valid [VAL73], [VAL88], Whitney et Sun [WIT74], Reissner [REI75], Bernadou [BER78], Cheng [CHE79], Reddy [RED82], Bhirmaraddi [BHI84], [DES86], Doxsee [DOX89] et Touratier [TOU 92]).

Nous dressons ici un tableau récapitulatif de ces théories suivant les documents en notre possession :

Kirchhoff (1888)	Conservation de la normale
Von Karman (1910)	Théorie de Von Karman
Donnell (1934)	Stabilité des tubes minces
Love (1934)	Théorie des coques minces
Marguerre (1938)	Hypothèse sur le tenseur de variation de courbure
Reissner (1945)	Prise en compte du cisaillement transverse
Naghdi (1956)	Théorie des coques élastiques
Koiter (1960)	Théorie des coques minces
Valid (1973)	Application du calcul des structures aux coques
Whitney (1974)	Théorie raffinée pour les coques cylindriques
Wempner (1981)	Application de la mécanique des solides aux structures minces
Reddy (1982)	Théorie du troisième ordre
Bhirmaraddi (1984)	Théorie d'ordre supérieur pour les coques cylindriques
Basar (1988)	Modélisation numérique des coques - petites rotations
Doxsee (1989)	Théorie générale pour les coques composites
Touratier (1991)	Théorie du sinus

Du fait que les coques ont certaines particularités géométriques, on retrouve dans les ouvrages cités précédemment ainsi que dans d'autres (Flügge [FLU60], Timoshenko [TIM61], Novosilov [NOV70], Gill [GIL70], Basar [BAS85], Batoz [BAT90]), une partie plus ou moins importante consacrée à l'étude de la géométrie des surfaces dont nous donnerons quelques rappels.

1. GEOMETRIE DES SURFACES

Dans ce paragraphe, sont définis les champs de vecteurs de base, leurs dérivées, la métrique et les courbures de la surface moyenne de la coque dans un cas général, une application sera faite par la suite aux surfaces de révolution (cylindre, cône et sphère). Cette coque de surface moyenne F et d'épaisseur h est définie par le domaine Ω de frontière Γ plongé dans un espace à trois dimensions.

Le langage naturel qui a permis le développement d'une théorie générale des coques (les plaques n'étant qu'un cas particulier de celles-ci où les courbures sont nulles) en utilisant des écritures condensées est bien l'analyse tensorielle. Le lecteur peut consulter dans ce domaine les ouvrages spécialisés Lelong [LEL68], Bass [BAS78] et Hladik [HLA93]. Cette théorie générale repose en premier lieu sur les notions de géométrie différentielle dont nous allons donner les éléments de base en utilisant l'outil de l'analyse tensorielle. On adoptera la convention de sommation sur les indices répétés (ex : A_{ij}^j , il y a sommation sur l'indice j par contre pour la quantité A_{ij}^i il n'y a pas de sommation sur l'indice j). et on supposera que les indices grecs valent 1 ou 2 et que les indices latins valent 1, 2 ou 3.

1.1. Tenseurs métriques

Considérons une surface F de l'espace R^3 paramétrée par deux lignes de coordonnées θ^1 et θ^2 (Figure 1.1). Tout point m de cette surface est repéré par son vecteur position \bar{r} :

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \bar{r}(\theta^1, \theta^2) \\ &= \bar{r}(\theta^\alpha)\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

On définit par dérivation de \bar{r} , les deux vecteurs tangents à la surface F :

$$\bar{a}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{r}_{,\alpha}\tag{1.1.2}$$

Un accroissement d'arc de longueur ds le long d'une ligne de coordonnée θ^α est déterminé à partir du produit scalaire :

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \quad (1.1.3)$$

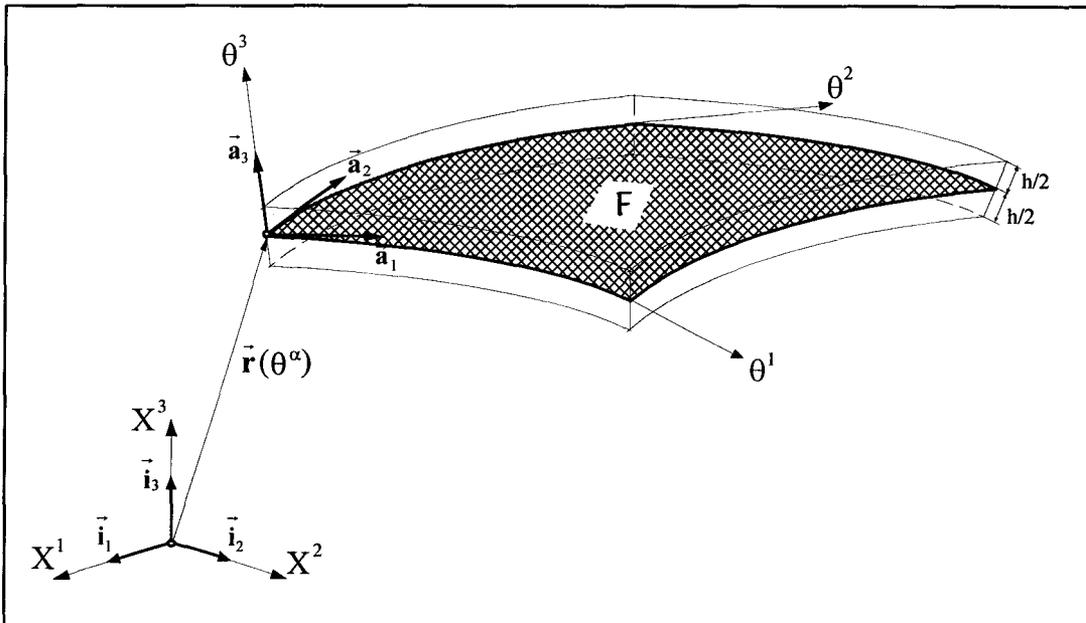


Figure 1.1. Définition d'une surface dans l'espace

La différentielle de \vec{r} est donnée par :

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta^\alpha} d\theta^\alpha \\ &= \vec{a}_\alpha d\theta^\alpha \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

ainsi,

$$ds^2 = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta d\theta^\alpha d\theta^\beta \quad (1.1.5)$$

Par définition, le tenseur métrique covariant associé à F est donné par :

$$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta \quad (1.1.6)$$

L'équation (1.1.5) constitue la première forme fondamentale ; elle permet d'exprimer la distance entre deux points de la surface moyenne .

A partir du produit scalaire $\bar{a}^\alpha \bar{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha$, on définit le tenseur métrique contravariant :

$$a^{\alpha\beta} = \bar{a}^\alpha \bar{a}^\beta \quad (1.1.7)$$

où δ_β^α est le symbole de Kronecker.

A la ligne de coordonnée θ^α , on associe le vecteur :

$$d\bar{s}_\alpha = \bar{a}_\alpha d\theta^\alpha \quad (1.1.8)$$

de norme

$$\begin{aligned} ds_\alpha &= \sqrt{a_{\alpha\alpha}} d\theta^\alpha \\ &= \sqrt{a} a^{\alpha\alpha} d\theta^\alpha \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

L'aire d'un élément de surface dF est donnée par :

$$dF = \sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 \quad (1.1.10)$$

où a est le déterminant de $a_{\alpha\beta}$.

Aux vecteurs de base \bar{a}_α et \bar{a}^α , on associe les vecteurs unitaires :

$$\begin{aligned} \bar{e}_\alpha &= \frac{\bar{a}_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \\ \bar{e}^\alpha &= \frac{\bar{a}^\alpha}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

1.2. Courbures des surfaces

En chaque point m de la surface F , on définit la normale unitaire sortante par :

$$\bar{a}_3(m) = \frac{\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2}{|\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2|} \quad (1.1.12)$$

d'où les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 \bar{a}_\alpha &= 0 \\ \bar{a}_3 \bar{a}^\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

On définit un tenseur d'orthogonalité noté $\epsilon_{\alpha\beta}$ qui permet le passage entre les vecteurs tangents \bar{a}_α et le vecteur normal \bar{a}_3 par :

$$\bar{a}_3 \wedge \bar{a}_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \bar{a}^\beta \quad (1.1.14)$$

dont les composantes sont données par :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.15)$$

Le produit scalaire

$$d\bar{a}_3 \, d\bar{r} = \bar{a}_{3,\alpha} \bar{a}_\beta \, d\theta^\alpha d\theta^\beta, \quad (1.1.16)$$

constitue la deuxième forme fondamentale. Cette relation nous permettra d'étudier les changements de courbure sur F . On note les composantes du tenseur de courbure associées à F par :

$$b_{\alpha\beta} = -\bar{a}_{3,\alpha} \bar{a}_\beta \quad (1.1.17)$$

Nous introduisons le tenseur de courbure mixte par ses composantes b_{α}^{β} telles que :

$$b_{\beta}^{\alpha} = a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta} \quad (1.1.18)$$

Dans un repère orthogonal ($a_{12} = 0$), les composantes du tenseur de courbure sont données par :

$$\begin{aligned} b_1^1 &= \frac{1}{R_1} \\ b_2^2 &= \frac{1}{R_2} \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

où R_1 et R_2 sont les deux rayons de courbure associés aux deux directions principales.

Les deux invariants H et K définis par :

$$H = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} \quad \text{et} \quad K = \frac{|b_{\alpha\beta}|}{|a_{\alpha\beta}|}, \quad (1.1.20)$$

sont appelés respectivement courbure principale et courbure de Gauss.

1.3. Différentiation sur les surfaces

On exprimera dans ce paragraphe, les dérivées partielles des vecteurs de base \bar{a}_{α} , \bar{a}^{α} et \bar{a}_3 par rapport aux coordonnées θ^{β} et θ^3 . A partir des identités $\bar{a}_3 \bar{a}_3 = 1$ et $\bar{a}_{\alpha} \bar{a}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{3,\beta} \bar{a}_3 &= 0 \\ \bar{a}_{\alpha,\lambda} \bar{a}^{\beta} &= -\bar{a}_{\alpha} \bar{a}^{\beta,\lambda} \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Nous introduisons alors la décomposition suivante :

$$\bar{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \bar{a}_{\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \bar{a}_3 \quad (1.1.22a)$$

$$\bar{a}_{3,\beta} = \Gamma_{3\beta}^{\lambda} \bar{a}_{\lambda} \quad (1.1.22b)$$

En multipliant (1.1.22a) successivement par les vecteurs (\bar{a}^{ρ} et \bar{a}_3) et (1.1.22b) par \bar{a}^{ρ} , on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} &= \bar{a}_{\alpha,\beta} \bar{a}^{\lambda} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^3 &= \bar{a}_{\alpha,\beta} \bar{a}_3 = b_{\alpha\beta} \\ \Gamma_{3\alpha}^{\lambda} &= \bar{a}_{3,\beta} \bar{a}^{\lambda} = -b_{\alpha}^{\lambda} \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

A partir des équations (1.1.21), nous déduisons la décomposition suivante:

$$\bar{a}^{\alpha}_{,\beta} = -\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} \bar{a}_{\lambda} + \Gamma_{3\beta}^{\alpha} \bar{a}_3 \quad (1.1.24)$$

où Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel du second ordre. Cette décomposition permet d'exprimer la dérivée partielle d'un vecteur dans les bases covariantes et contravariantes.

De même, les dérivées covariantes de tenseurs du premier et du second ordre sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A_{\alpha} |_{\beta} &= A_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} A_{\lambda} \\ A^{\alpha} |_{\beta} &= A^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} A^{\lambda} \\ A_{\alpha\beta} |_{\lambda} &= A_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\rho} A_{\rho\beta} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\rho} A_{\alpha\rho} \\ A^{\alpha\beta} |_{\lambda} &= A^{\alpha\beta}_{,\lambda} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\alpha} A^{\rho\beta} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\beta} A^{\alpha\rho} \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

où la barre verticale "|" représente la dérivée covariante par rapport à la surface moyenne.

2. HYPOTHESES CINEMATIQUES

La théorie des coques repose principalement sur l'amplitude du petit paramètre géométrique $\eta = h/L$, où h est l'épaisseur et L une longueur caractéristique de la coque. D'une manière générale, le champ de déplacement est développé en série polynomiale de la variable θ^3 :

$$\begin{cases} V_1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_1^{(0)}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 v_1^{(1)}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 v_1^{(2)}(\theta^1, \theta^2) + \dots \\ V_2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_2^{(0)}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 v_2^{(1)}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 v_2^{(2)}(\theta^1, \theta^2) + \dots \\ V_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_3^{(0)}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 v_3^{(1)}(\theta^1, \theta^2) + \dots \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Le tenseur de déformation associé à ce champ de déplacement est décomposé comme suit :

$$[\gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta^3 \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{31} \\ 0 & 0 & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix} + \dots \quad (1.2.2)$$

déformation de : membrane flexion cisaillement pincement

On négligera, dans un premier temps γ_{33} devant les autres composantes du tenseur de déformation et on écrit :

$$V_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_3^{(0)}(\theta^1, \theta^2) \quad (1.2.3)$$

On distingue suivant l'amplitude du paramètre géométrique η :

- le modèle de membrane,
- les modèles du premier ordre,
- les modèles d'ordre supérieur.

Une généralisation de ces modèles est donnée par la théorie du sinus.

2.1. Modèle de type membrane

C'est le cas des coques très minces où l'on suppose que celles-ci n'ont aucune rigidité à la flexion-torsion. On néglige alors les moments fléchissants et les efforts tranchants.

Le champ de déplacement est développé à l'ordre zéro et s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} V_1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_1(\theta^1, \theta^2) \\ V_2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_2(\theta^1, \theta^2) \\ V_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_3(\theta^1, \theta^2) \end{cases} \quad (1.2.4)$$

où les v_i sont les déplacements de membrane.

Les équations régissant l'équilibre d'une membrane (voir relation. 1.3.46) sont :

$$\begin{cases} n^{\alpha\beta}|_{\alpha} + p^{\beta} = 0 \\ b_{\alpha\beta}n^{\alpha\beta} + p^3 = 0 \end{cases} \quad (1.2.5)$$

La résolution des équations d'équilibre permet de déterminer directement les efforts de membrane $n^{\alpha\beta}$ en fonction du chargement (p^{β} , p^3). Le tenseur de déformation est déduit de la relation(1.2.2) :

$$[\gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

La théorie de la membrane a un domaine d'application assez limité car sous des conditions aux limites de type encastrement ou dans les zones de discontinuité, la flexion

est prépondérante et par conséquent, ce modèle ne permet pas de décrire l'état de contrainte quelles que soient les conditions de bord de la coque.

2.2. Modèles du premier ordre

2.2.1. Modèle de Kirchhoff-Love

C'est le cas des coques minces où le champ de déplacement est développé à l'ordre un et se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} V_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mu_\alpha^\rho v_\rho - \theta^3 v_{3,\alpha} \\ V_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_3 \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Ce modèle suppose que la normale à la surface moyenne avant déformation reste normale après déformation ; la déformation du cisaillement transverse est alors négligée. La théorie de Kirchhoff-Love est une théorie à trois paramètres cinématiques (v_1, v_2, v_3) .

2.2.2. Modèle de Reissner-Mindlin

C'est le cas des coques modérément épaisses où la normale ne reste pas perpendiculaire à la surface moyenne au cours de la déformation. Le champ de déplacement est développé à l'ordre un avec deux inconnues supplémentaires :

$$\begin{cases} V_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mu_\alpha^\rho v_\rho + \theta^3 w_\alpha \\ V_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_3 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

où les w_α sont les deux rotations de la normale.

La théorie de Reissner-Mindlin est décrite par cinq paramètres. Les rotations w_α du modèle de Kirchhoff-Love, sont données en fonction des déplacements de membrane :

$$w_\alpha = -(v_{3,\alpha} + b_\alpha^\rho v_\rho) \quad (1.2.9)$$

et plus généralement, les termes $b_\alpha^\rho v_\rho$ sont négligeable devant les dérivées $v_{3,\alpha}$ (hypothèse de Donnell-Marguerre) :

$$w_\alpha = -v_{3,\alpha} \quad (1.2.10)$$

2.3. Modèles du troisième ordre

Dans le modèle décrit précédemment, les composantes du tenseur de déformation du cisaillement transverse $\varepsilon_{\alpha 3}$ (et par conséquent les contraintes transversales $\sigma_{\alpha 3}$) sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Plus généralement, $\sigma_{\alpha 3}$ est maximal sur la surface moyenne ($\theta^3 = 0$) et nul sur les surfaces extrêmes ($\theta^3 = \pm h/2$). Plusieurs auteurs ont proposés des modèles cinématiques qui tiennent compte de ce fait :

Reddy :

$$\begin{cases} V_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mu_\alpha^\rho v_\rho + \theta^3 w_\alpha - \frac{4(\theta^3)^3}{3h^2} (w_\alpha + v_{3,\alpha}) \\ V_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_3 \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Kackowski :

$$\begin{cases} V_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mu_\alpha^\rho v_\rho + \frac{\theta^3}{4} (5w_\alpha + v_{3,\alpha}) - \frac{5(\theta^3)^3}{h^2} (w_\alpha + v_{3,\alpha}) \\ V_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_3 \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Ces champs de déplacement permettent d'obtenir des distributions paraboliques des déformations et des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la coque ; ce qui se rapproche de la réalité et permet d'éviter l'utilisation des coefficients de correction du cisaillement transverse.

2.4. Modèle sinus

Touratier [TOU92] a proposé un modèle plus général en prenant une distribution sinusoïdale du champ de déplacement :

$$\begin{cases} V_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mu_\alpha^p v_p - \theta^3 v_{3,\alpha} + f(\theta^3) \gamma_\alpha \\ V_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = v_3 \end{cases} \quad (1.2.13)$$

où $\gamma_\alpha = w_\alpha + v_{3,\alpha}$ est la rotation du cisaillement transversal et le cisaillement est pris en compte par la fonction :

$$f(\theta^3) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\theta^3}{h}\right) \quad (1.2.14)$$

La distribution des déformations du cisaillement transverse suivant l'épaisseur de la coque est donc cosinusoïdale, ce qui est en accord avec la remarque du paragraphe 2. 3. De plus, les modèles du premier et du troisième ordre peuvent être obtenus en développant cette relation à l'ordre voulu (ce modèle sera désigné par la suite par le modèle sinus). En effet, la fonction de cisaillement se développe sous la forme suivante :

$$f(\theta^3) = \theta^3 \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{(\theta^3)^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{(\theta^3)^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{(\theta^3)^6}{h^6} + \dots \right) \quad (1.2.15)$$

Avec l'introduction de la fonction du cisaillement transversal, les modèles décrits précédemment s'obtiennent par :

- modèle de membrane	$f(\theta^3) = 0$ et $\partial(\dots) / \partial x = 0$ (pas de flexion),
- modèle de Kirchhoff-Love	$f(\theta^3) = 0$,
- modèle de Reissner-Mindlin	$f(\theta^3) = \theta^3$,
- modèle de Reddy	$f(\theta^3) = \theta^3(1 - 4(\theta^3)^2 / 3h^2)$,
- modèle de Kackowski	$f(\theta^3) = 5\theta^3(1 - 4(\theta^3)^2 / 3h^2) / 4$,
- modèle de Touratier	$f(\theta^3) = (h / \pi) \sin(\pi\theta^3 / h)$.

3. FORMULATION DU PROBLEME AUX LIMITES

Dans cette partie, nous développons, en utilisant le modèle de Reissner-Mindlin, la théorie linéaire des coques dans le cas général (coques non axisymétriques). Après avoir défini le champ de déplacements, les composantes des déformations linéarisées seront reliées aux composantes de ce dernier. Par la suite, nous utiliserons le principe des travaux virtuels ([BAS92], [TOU92b]) pour obtenir les équations d'équilibre et les conditions aux limites .

3.1. Description géométrique

Soit Ω le domaine de l'espace affine euclidien \mathbb{R}^3 (Figure 1.2), occupé par la coque à l'état initial :

$$\Omega = F \times \left[-\frac{h}{2}, +\frac{h}{2} \right] \quad (1.3.1)$$

Tout point M de Ω est relié au point m de F (de frontière Γ) par la relation suivante:

$$\vec{R}(M) = \vec{r}(m) + \theta^3 \vec{a}_3 \quad (1.3.2)$$

avec $-\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq +\frac{h}{2}$.

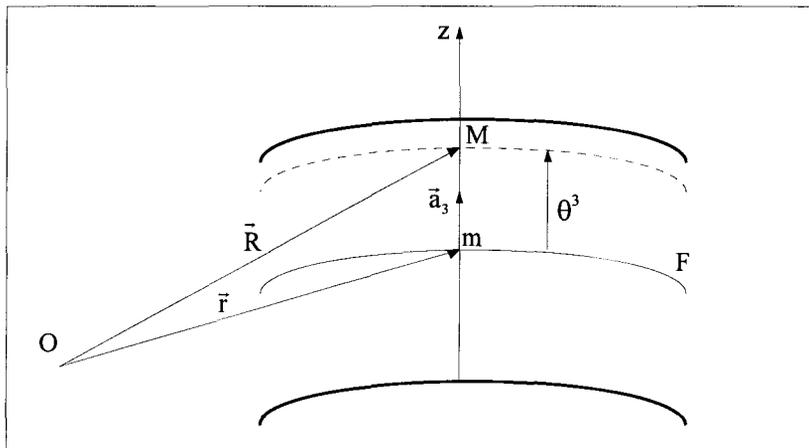


Figure 1.2. Définition d'une coque

Les coques sont caractérisées géométriquement par un petit paramètre adimensionnel qu'on notera par :

$$\eta = h/L \ll 1 \quad (1.3.3)$$

avec $L = \min\{R_{\min}, L_{\min}\}$, où R_{\min} est le minimum des rayons de courbure de F et L_{\min} le minimum des longueurs des arcs interceptés par Γ le long des lignes de courbure à la surface moyenne F.

3.2. Champ de déplacement

Une coque soumise à des sollicitations extérieures, se déforme pour occuper une position finale Ω' . Cette position est complètement définie par la détermination du champ de déplacement en tout point $M \in \Omega$. On notera ce champ de déplacement par :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M) &= V_i \bar{a}^i \\ &= V_\alpha \bar{a}^\alpha + V_3 \bar{a}_3 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Dans la base $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3)$, il se décompose comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{V}(M) &= U_i \bar{e}^i \\ &= U_\alpha \bar{e}^\alpha + U_3 \bar{e}_3 \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

où les composantes V_i et U_i du vecteur déplacement, respectivement dans les bases \bar{a}^i et \bar{e}^i sont reliées par:

$$\begin{aligned} U_\alpha &= V_\alpha \sqrt{a^{\alpha\alpha}} \\ U^\alpha &= V^\alpha \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Un point $M \in \Omega$ est relié à un point m de la surface moyenne F par :

$$\bar{V}(M) = \bar{v}(m) + \bar{w}(m)\theta^3 \tag{1.3.7}$$

où $\bar{w}(m) = \bar{a}'_3 - \bar{a}_3$ est le vecteur rotation et \bar{a}'_3 la normale en m' .

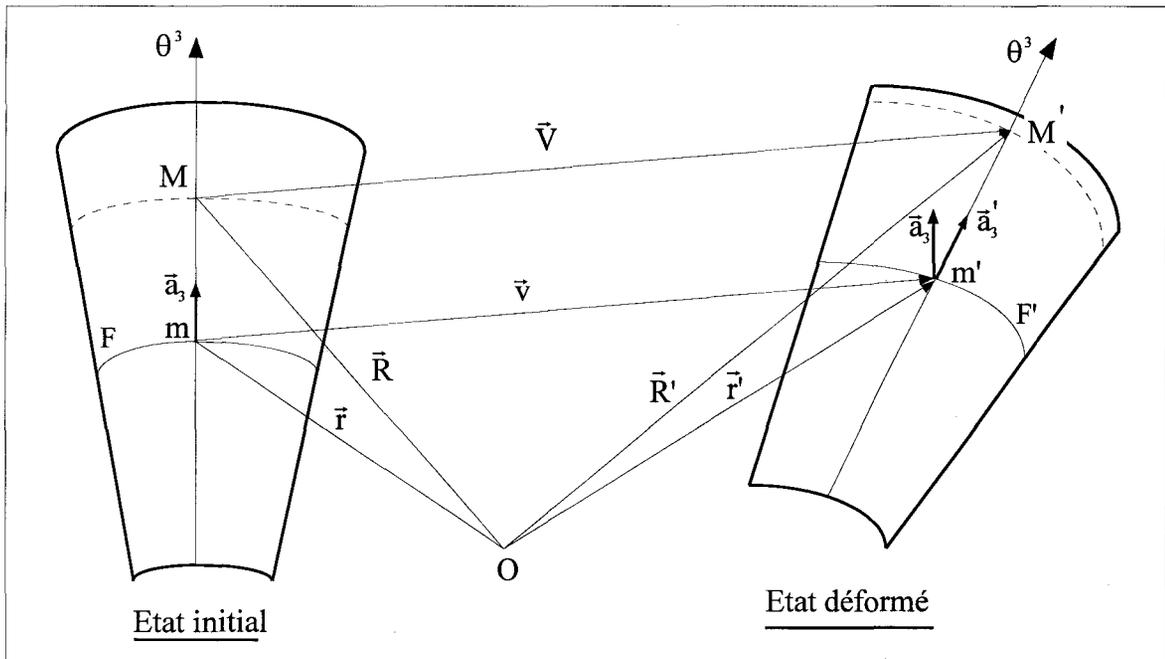


Figure 1.3. Cinématique des coques

Les vecteurs déplacement et rotation se décomposent dans les bases \bar{a}_i et \bar{e}_i comme suit :

$$\begin{aligned}\bar{v}(\mathbf{m}) &= v^\alpha \bar{a}_\alpha + v_3 \bar{a}_3 \\ &= u^\alpha \bar{e}_\alpha + u_3 \bar{e}_3\end{aligned}\tag{1.3.8}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}(\mathbf{m}) &= w^\alpha \bar{a}_\alpha \\ &= \omega^\alpha \bar{e}_\alpha\end{aligned}$$

Les relations entre les composantes du champ de déplacement dans les différentes coordonnées sont données par :

$$\begin{aligned}u^\alpha &= v^\alpha \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \\ \omega^\alpha &= w^\alpha \sqrt{a_{\alpha\alpha}}\end{aligned}\tag{1.3.9}$$

A ce champ de déplacement, nous associerons le tenseur des déformations linéarisées donné par ses composantes $\gamma_{ij}(M)$.

3.3. Déformation d'une coque

En tout point M et M' (Figure 1.3), on définit les vecteurs de base suivants :

$$\begin{aligned}\bar{G}_\alpha &= \bar{R}_{,\alpha} \\ &= \bar{r}_{,\alpha} + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha} \\ &= \bar{a}_\alpha + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha}\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

$$\begin{aligned}\bar{G}'_\alpha &= \bar{R}'_{,\alpha} \\ &= \bar{r}'_{,\alpha} + \theta^3 \bar{a}'_{3,\alpha} \\ &= \bar{a}'_\alpha + \theta^3 \bar{a}'_{3,\alpha}\end{aligned}\tag{1.3.11}$$

Le tenseur linéarisé des déformations $\gamma_{ij}(M)$ est défini ([ZER68] et [BAS85]) en fonction des vecteurs de base précédents par :

$$\begin{aligned} 2\gamma_{ij} &= V_{ij} + V_{ji} \\ &= G'_{ij} - G_{ij} \\ &= \vec{G}'_i \vec{G}'_j - \vec{G}_i \vec{G}_j \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

En tenant compte des relations (1.3.12), on exprime le tenseur de déformation $\gamma_{\alpha\beta}$ relatif à la surface moyenne F :

$$\begin{aligned} 2\gamma_{\alpha\beta} &= G'_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta} \\ &= \vec{G}'_\alpha \vec{G}'_\beta - \vec{G}_\alpha \vec{G}_\beta \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

En substituants (1.3.10) et (1.3.11) dans cette relation, on obtient :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \theta^3 \beta_{\alpha\beta} + \rho_{\alpha\beta} (\theta^3)^2 \quad (1.3.14)$$

avec

$$\begin{aligned} 2\alpha_{\alpha\beta} &= \vec{a}'_\alpha \vec{a}'_\beta - \vec{a}_\alpha \vec{a}_\beta \\ 2\beta_{\alpha\beta} &= \vec{a}'_\alpha \vec{a}'_{3,\beta} + \vec{a}'_{3,\alpha} \vec{a}_\beta - \vec{a}_\alpha \vec{a}'_{3,\beta} + \vec{a}'_{3,\alpha} \vec{a}_\beta \\ 2\rho_{\alpha\beta} &= \vec{a}'_{3,\alpha} \vec{a}'_{3,\beta} - \vec{a}_{3,\alpha} \vec{a}_{3,\beta} \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

En se plaçant dans le cadre de l'hypothèse donnée par la relation (1.3.3), les termes $\rho_{\alpha\beta}$ peuvent être négligés devant $\alpha_{\alpha\beta}$ et $\beta_{\alpha\beta}$.

Les vecteurs de base \vec{a}'_α et \vec{a}'_3 associés à la surface moyenne déformée F' sont donnés par :

$$\vec{a}'_\alpha = \vec{a}_\alpha + \vec{v}_{,\alpha} \quad (1.3.16)$$

$$\vec{a}'_3 = \vec{a}_3 + \vec{w} \quad (1.3.17)$$

où \bar{v} est le vecteur déplacement d'un point m de la surface moyenne et \bar{w} le vecteur rotation de la normale déformée. Ces deux vecteurs sont décomposés dans la base contravariante comme suit :

$$\bar{v} = v_\alpha \bar{a}^\alpha + v_3 \bar{a}^3 \quad (1.3.18)$$

$$\bar{w} = w_\alpha \bar{a}^\alpha \quad (1.3.19)$$

Après dérivation des relations (1.3.16) et (1.3.17) et en utilisant les définitions données par la relation (1.1.25), les équations (1.3.15) se transforment en :

$$\begin{aligned} 2\alpha_{\alpha\beta} &= v_\alpha|_\beta + v_\beta|_\alpha - 2b_{\alpha\beta}v_3 \\ 2\beta_{\alpha\beta} &= w_\alpha|_\beta + w_\beta|_\alpha - b_\alpha^\lambda v_\lambda|_\beta - b_\beta^\lambda v_\lambda|_\alpha + 2b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}v_3 \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

De la même façon, on exprime les composantes du tenseur de cisaillement transverse $\gamma_{\alpha 3}$ à partir de (1.3.12) :

$$2\gamma_{\alpha 3} = G'_{\alpha 3} - G_{\alpha 3} \quad (1.3.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{G}'_3 &= \bar{a}'_3 \\ &= \bar{a}_3 - \bar{w} \\ \bar{G}_3 &= \bar{a}_3 \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

En substituant ces deux relations dans (1.3.21), on obtient l'expression des composantes du tenseur $\gamma_{\alpha 3}$:

$$2\gamma_{\alpha 3} = w_\alpha + v_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda v_\lambda \quad (1.3.23)$$

Finalement, la variation relative de longueur suivant la normale est donnée par :

$$2\gamma_{33} = \bar{G}'_3 \bar{G}'_3 - \bar{G}_3 \bar{G}_3 \quad (1.3.24)$$

Les composantes du tenseur de déformation γ_{ij} sont résumées par l'écriture matricielle suivante :

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} + \theta^3 \beta_{\alpha\beta} & \gamma_{\alpha 3} \\ \gamma_{\alpha 3} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.3.25)$$

Dans la base unitaire $(\bar{\mathbf{e}}_\alpha, \bar{\mathbf{e}}_3)$, le tenseur de déformation ε_{ij} associé à γ_{ij} est :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \theta^3 \varepsilon_{\alpha\beta}^1 & \varepsilon_{\alpha 3} \\ \varepsilon_{\alpha 3} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.3.26)$$

où les composantes $(\varepsilon_{\alpha\beta}^0, \varepsilon_{\alpha\beta}^1, \varepsilon_{\alpha 3})$ sont reliées aux composantes $(\alpha_{\alpha\beta}, \beta_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha 3})$ de la base $(\bar{\mathbf{a}}_\alpha, \bar{\mathbf{a}}_3)$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\alpha} &= a_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\alpha\alpha}^0, & 2\alpha_{12} &= \sqrt{a} \varepsilon_{12}^0 \\ \beta_{\alpha\alpha} &= a_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\alpha\alpha}^1, & 2\beta_{12} &= \sqrt{a} \varepsilon_{12}^1 \\ \gamma_{\alpha 3} &= \varepsilon_{\alpha 3} \sqrt{a^{\alpha\alpha}} \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

et les composantes $\varepsilon_{\alpha\alpha}^0$ représentent physiquement les variations de longueur suivant la direction θ^α , ε_{12}^0 la demi variation d'angle droit dans le plan de la surface moyenne, $\varepsilon_{\alpha\beta}^1$ la variation de courbure et $\varepsilon_{\alpha 3}$ la variation d'angle droit dans le plan normal à la surface moyenne.

3.4. Tenseur de contraintes

Le tenseur de contraintes noté τ^{ij} est par définition symétrique. Ses composantes sont données à partir de la décomposition du vecteur contraintes $\bar{\mathbf{T}}_i$ dans la base $\bar{\mathbf{G}}_i$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_i &= \tau^{ij} \sqrt{G} \bar{\mathbf{G}}_j \\ &= (\tau^{i\alpha} \bar{\mathbf{G}}_\alpha + \tau^{i3} \bar{\mathbf{G}}_3) \sqrt{G} \\ &= (\tau^{i\alpha} \mu_\alpha^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \tau^{i3} \bar{\mathbf{a}}_3) \sqrt{G} \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

où

$$\mu_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} - \theta^3 b_{\alpha}^{\beta} \quad (1.3.29)$$

Dans la base $(\bar{a}_{\alpha}, \bar{a}_3)$, le vecteur \bar{T}_i se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{T}_i &= \sigma^{ij} \sqrt{a} \bar{a}_j \\ &= (\sigma^{i\alpha} \bar{a}_{\alpha} + \sigma^{i3} \bar{a}_3) \sqrt{a} \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

On établit alors les relations entre τ^{ij} et σ^{ij} :

$$\begin{aligned} \sigma^{i\alpha} &= \tau^{ip} \mu_p^{\alpha} \sqrt{G/a} \\ \sigma^{i3} &= \tau^{i3} \sqrt{G/a} \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

et avec l'hypothèse $G \approx a$, ces relations deviennent :

$$\begin{aligned} \sigma^{i\alpha} &= \tau^{ip} \mu_p^{\alpha} \\ \sigma^{i3} &= \tau^{i3} \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

Le tenseur σ^{ij} n'est donc pas symétrique. Dans une base orthogonale, il est noté par des indices covariants (σ_{ij}) et on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \left(1 + \frac{\theta^3}{R_{\alpha}}\right) \tau^{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{12} = \left(1 + \frac{\theta^3}{R_2}\right) \tau^{12} \\ \sigma_{21} &= \left(1 + \frac{\theta^3}{R_1}\right) \tau^{12}, \quad \sigma_{\alpha 3} = \tau^{\alpha 3} \\ \sigma_{3\alpha} &= \left(1 + \frac{\theta^3}{R_{\alpha}}\right) \tau^{3\alpha}, \quad \sigma_{33} = \tau^{33} \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

3.5. Formulation variationnelle

Le problème aux limites sera formulé à partir du principe des travaux virtuels. Pour cela on considère la coque Ω de frontière Γ (Figure 1.2). Sur la partie $\Gamma_{\sigma} \subset \Gamma$, on imposera les efforts et sur la partie complémentaire $(\Gamma_{\nu} \subset \Gamma)$, on imposera les déplacements. Les

efforts qui s'exercent sur les parties supérieure et inférieure de la coque sont de deux types, les forces et les moments répartis, exprimés respectivement par :

$$\bar{\mathbf{P}} dF = \bar{\mathbf{P}}\sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2, \quad \bar{\mathbf{C}} dF = \bar{\mathbf{C}}\sqrt{a} d\theta^1 d\theta^2 \quad (1.3.34)$$

Les vecteurs $\bar{\mathbf{P}}$ et $\bar{\mathbf{C}}$ sont décomposés dans les bases $\bar{\mathbf{a}}_i$ et $\bar{\mathbf{e}}_i$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}} &= p^\alpha \bar{\mathbf{a}}_\alpha + p^3 \bar{\mathbf{a}}_3 \\ &= P^\alpha \bar{\mathbf{e}}_\alpha + P^3 \bar{\mathbf{e}}_3 \\ \bar{\mathbf{C}} &= c^\alpha \bar{\mathbf{a}}_3 \wedge \bar{\mathbf{a}}_\alpha \\ &= C^1 \bar{\mathbf{e}}^2 - C^2 \bar{\mathbf{e}}^1 \end{aligned} \quad (1.3.35)$$

Se plaçant dans le cadre des hypothèses de Reissner-Mindlin, on considère les deux espaces de Hilbert V et \hat{V} :

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \mathbf{V}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha + \theta^3 (\gamma_\alpha - \mathbf{v}_{3,\alpha}) + z \mathbf{w}_\alpha; \mathbf{V}_3 = \mathbf{v}_3 : \gamma_\alpha = \mathbf{w}_\alpha + \mathbf{v}_{3,\alpha} + b_\alpha^\rho \mathbf{v}_\rho \right. \\ &\left. (\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{w}_\alpha) \in [H^1(F)]^2, \mathbf{v}_3 \in H^2(F); \mathbf{v}_i \text{ et } \mathbf{w}_\alpha \text{ sont connus sur } \Gamma_v \subset \Gamma \right\} \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \left\{ \hat{\mathbf{V}}_\alpha = \hat{\mathbf{v}}_\alpha + \theta^3 (\hat{\gamma}_\alpha - \hat{\mathbf{v}}_{3,\alpha}); \hat{\mathbf{V}}_3 = \hat{\mathbf{v}}_3 : \hat{\gamma}_\alpha = \hat{\mathbf{w}}_\alpha + \hat{\mathbf{v}}_{3,\alpha} + b_\alpha^\rho \hat{\mathbf{v}}_\rho \right. \\ &\left. (\hat{\mathbf{v}}_\alpha, \hat{\mathbf{w}}_\alpha) \in [H^1(F)]^2, \hat{\mathbf{v}}_3 \in H^2(F), \hat{\mathbf{V}}_\alpha \text{ est nul sur } \Gamma_v \subset \Gamma \right\} \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

munis de la norme H^1 , avec $H^1(F)$ un espace de Sobolev (pour une formulation par le principe des puissances virtuelles voir [TOU92]).

Le principe des travaux virtuels consiste à écrire que le travail des forces internes noté par δW_{int} est égal au travail des forces externes δW_{ext} :

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (1.3.38)$$

avec

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= - \int_{\Omega} \mu \sigma^{ij} \delta \hat{\gamma}_{ij} \sqrt{a} \, d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = - \int_{\text{F}} \left\{ \int_{-h/2}^{+h/2} \mu \sigma^{ij} \delta \hat{\gamma}_{ij} \, d\theta^3 \right\} d\text{F} \\ \delta W_{\text{ext}} &= \int_{\text{F}} (p^\alpha \delta \hat{v}_\alpha + p^3 \delta \hat{v}_3 + c^\alpha \delta \hat{w}_\alpha) d\text{F}\end{aligned}\quad (1.3.39)$$

où μ est donné par la relation (1.3.29).

Dans cette expression, σ^{ij} est le tenseur des contraintes et γ_{ij} le tenseur des déformations linéarisées défini dans l'espace tridimensionnel par :

$$\hat{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \hat{V}_{i||j} + \hat{V}_{j||i} \right\}, \quad (1.3.40)$$

où $(\dots)_{||i}$ désigne la dérivée covariante dans l'espace tridimensionnel.

Les dérivées de \mathbb{R}^3 sont reliées aux dérivées $V_{\alpha||\beta}$ de la surface moyenne (Librescu [LIB75]) par :

$$\begin{aligned}V_{\alpha||\beta} &= \mu_\alpha^\rho \left[(v_\rho + \theta^3 w_\rho)_{||\beta} - b_{\rho\beta} v_3 \right] \\ V_{\alpha||3} &= \mu_\alpha^\rho v_{\rho||3} \\ V_{3||3} &= v_{3,3}\end{aligned}\quad (1.3.41)$$

En remplaçant ces relations dans (1.3.40) et en tenant compte des relations (1.3.20) et (1.3.23), l'expression du travail interne devient :

$$\delta W_{\text{int}} = - \int_{\text{F}} (n^{\alpha\beta} \delta \hat{\alpha}_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \hat{\beta}_{\alpha\beta} + q^\alpha \delta \hat{\gamma}_{\alpha 3}) d\text{F}, \quad (1.3.42)$$

où nous avons introduit les contraintes généralisées ($n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$ et q^α), celles-ci sont reliées aux composantes du tenseur des contraintes σ^{ij} par :

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mu \sigma^{\alpha\beta} dz$$

$$m^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mu \sigma^{\alpha\beta} z dz \quad (1.3.43)$$

$$q^\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \mu \sigma^{\alpha 3} dz$$

Pour transformer la relation (1.3.42), on utilisera le théorème de Green-Gauss suivant :

$$\begin{aligned} \int_F n^{\alpha\beta} \delta \hat{v}_{\beta|\alpha} dF &= \int_F (n^{\alpha\beta} \delta \hat{v}_\beta)_{|\alpha} dF - \int_F n^{\alpha\beta}_{|\alpha} \delta \hat{v}_\beta dF \\ &= \oint_\Gamma n^{\alpha\beta} u_\alpha \delta \hat{v}_\beta ds - \int_F n^{\alpha\beta}_{|\alpha} \delta \hat{v}_\beta dF \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Tenant compte de cette relation, l'expression du principe des travaux virtuels se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_F \left\{ \left[n^{\alpha\beta}_{|\alpha} - (b_\rho^\beta m^{\rho\beta})_{|\alpha} - b_\alpha^\beta q^\alpha + p^\beta \right] \delta \hat{v}_\beta \right. \\ &\quad \left. + \left[b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - b_\rho^\beta b_{\alpha\beta} m^{\alpha\rho} + q^\alpha_{|\alpha} + p^3 \right] \delta \hat{v}_3 + \left[m^{\alpha\beta}_{|\alpha} - q^\alpha + c^\beta \right] \delta \hat{w}_\beta \right\} dF \\ &\quad - \oint_{\Gamma_t} \left\{ (n^{\alpha\beta} - b_\rho^\beta m^{\alpha\rho}) u_\alpha \delta \hat{v}_\beta + m^{\alpha\beta} u_\alpha \delta \hat{w}_\beta + q^\alpha u_\alpha \delta \hat{v}_3 \right\} dS \end{aligned} \quad (1.3.45)$$

On établit alors, pour tout $(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_3, \hat{w}_\alpha) \in V(F)$, les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta}_{|\alpha} - (b_\rho^\beta m^{\rho\beta})_{|\alpha} - b_\alpha^\beta q^\alpha + p^\beta &= 0 \\ b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - b_\rho^\beta b_{\alpha\beta} m^{\alpha\rho} + q^\alpha_{|\alpha} + p^3 &= 0 \\ m^{\alpha\beta}_{|\alpha} - q^\alpha + c^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.46)$$

De même, pour tout $(\hat{v}_\alpha, \hat{v}_3, \hat{w}_\alpha) \in V(\Gamma_\sigma)$, nous avons les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} n^\beta &= (n^{\alpha\beta} - b_\rho^\beta m^{\alpha\rho}) u_\alpha \\ m^\beta &= m^{\alpha\beta} u_\alpha \\ n^3 &= q^\alpha u_\alpha \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

où $(n^\beta, m^\beta$ et $n^3)$ sont connus sur la frontière Γ_σ dont le vecteur normal sortant est $\bar{u} = u_\alpha \bar{a}^\alpha$.

Avec l'hypothèse $h/R \ll 1$, on a :

$$n^\beta = n^{\alpha\beta} u_\alpha \quad (1.3.48)$$

Dans la base \bar{e}_i , ces relations seront désignées par :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}^0 &= N_{\alpha\beta} & (\theta^1 = 0 \text{ ou } L_1 \text{ et } \theta^2 = 0 \text{ ou } L_2) \\ M_{\alpha\beta}^0 &= M_{\alpha\beta} & (\theta^1 = 0 \text{ ou } L_1 \text{ et } \theta^2 = 0 \text{ ou } L_2) \\ Q_\alpha^0 &= Q_\alpha & (\theta^1 = 0 \text{ ou } L_1 \text{ et } \theta^2 = 0 \text{ ou } L_2) \end{aligned} \quad (1.3.49)$$

où $(N_{\alpha\beta}, Q_\alpha, M_{\alpha\beta})$ seront reliées à $(n^{\alpha\beta}, q^\alpha, m^{\alpha\beta})$ ultérieurement et $(L_1 \text{ et } L_2)$ sont deux longueurs caractéristiques de la surface moyenne.

Pour les coques axisymétriques, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} N_0 &= N_{22} & (x = 0 \text{ ou } L) \\ M_0 &= M_{22} & (x = 0 \text{ ou } L) \\ Q_0 &= Q_2 & (x = 0 \text{ ou } L) \end{aligned} \quad (1.3.50)$$

où $x = 0$ et $x = L$ correspondent aux deux bords de la coque.

Afin d'exprimer les variables précédentes dans la base orthonormée, nous introduisons le long des lignes de coordonnées $\theta^\alpha = c^{lc}$ d'un élément de la surface moyenne, la résultante par unité de longueur du vecteur contrainte \bar{N}^α et du vecteur moment des contraintes \bar{M}^α , exprimés dans la base unitaire $(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_3)$. Ces vecteurs sont reliés aux vecteurs \bar{n}^α et \bar{m}^α de la base naturelle $(\bar{a}_\alpha, \bar{a}_3)$ par :

$$\begin{aligned} \bar{N}^\alpha &= \frac{\bar{n}^\alpha}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} \\ \bar{M}^\alpha &= \frac{\bar{m}^\alpha}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} \end{aligned} \quad (1.3.51)$$

La décomposition des vecteurs \vec{N}^α et \vec{M}^α dans la base unitaire nous donne :

$$\begin{aligned}\vec{N}^\alpha &= N^{\alpha\beta} \vec{e}_\beta + Q^\alpha \vec{e}_3 \\ \vec{M}^\alpha &= M^{\alpha 1} \vec{e}^2 - M^{\alpha 2} \vec{e}^1\end{aligned}\tag{1.3.52}$$

De la même façon, on décompose les vecteurs \vec{n}^α et \vec{m}^α dans la base naturelle :

$$\begin{aligned}\vec{n}^\alpha &= n^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta + q^\alpha \vec{a}_3 \\ \vec{m}^\alpha &= m^{\alpha\beta} \vec{a}_3 \wedge \vec{a}_\beta\end{aligned}\tag{1.3.53}$$

A partir des expressions (1.3.51-53), on établit les relations entre les composantes physiques ($N^{\alpha\beta}$, Q^α , $M^{\alpha\beta}$) et les composantes tensorielles ($n^{\alpha\beta}$, q^α , $m^{\alpha\beta}$) :

$$\begin{aligned}N^{\alpha\beta} &= \sqrt{(a_{\beta\beta} / a^{\alpha\alpha})} n^{\alpha\beta} \\ M^{\alpha\beta} &= \sqrt{(a_{\beta\beta} / a^{\alpha\alpha})} m^{\alpha\beta} \\ Q^\alpha &= (1 / \sqrt{a^{\alpha\alpha}}) q^\alpha\end{aligned}\tag{1.3.54}$$

3.6. Relations constitutives

On considère que la coque est constituée d'un matériau homogène, isotrope et linéaire de module de Young E et de coefficient de Poisson ν . Dans ce paragraphe, on cherchera à relier les composantes ($n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$, q^α) à ($\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha 3}$). En élasticité linéaire, le tenseur des contraintes σ^{ij} est relié au tenseur des déformations γ_{ij} par :

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl} \gamma_{kl}\tag{1.3.55}$$

Les composantes du tenseur d'élasticité, E^{ijkl} sont définies par :

$$E^{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} G^{ij} G^{kl})\tag{1.3.56}$$

Par la suite, on supposera que $G_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ et $G^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}$. A partir de la définition des contraintes généralisées (1.3.43), on établit les relations entre les composantes du tenseur de déformation et les contraintes généralisées :

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta} &= B H^{\alpha\beta\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} \\ m^{\alpha\beta} &= D H^{\alpha\beta\lambda\mu} \beta_{\lambda\mu} \\ q^\alpha &= G a^{\alpha\lambda} \gamma_{\alpha\lambda} \end{aligned} \quad (1.3.57)$$

où les rigidités d'allongement, de flexion et de cisaillement, respectivement B, D et G sont :

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad G = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \quad (1.3.58)$$

et les composantes du tenseur d'élasticité $H^{\alpha\beta\lambda\mu}$ de la surface moyenne sont :

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1-\nu}{2} (a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda}) + \nu a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \quad (1.3.59)$$

ayant les propriétés de symétrie suivantes :

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = H^{\beta\alpha\lambda\mu} = H^{\lambda\mu\alpha\beta} = H^{\alpha\beta\mu\lambda} \quad (1.3.60)$$

Dans une base orthogonale, les relations (1.3.57) deviennent :

$$\begin{cases} N_{11} = B(\varepsilon_{11}^0 + \nu\varepsilon_{22}^0) \\ N_{22} = B(\varepsilon_{22}^0 + \nu\varepsilon_{11}^0) \\ N_{12} = G\varepsilon_{12}^0 \end{cases} \quad (1.3.61)$$

$$\begin{cases} M_{11} = D(\varepsilon_{11}^1 + \nu\varepsilon_{22}^1) \\ M_{22} = D(\varepsilon_{22}^1 + \nu\varepsilon_{11}^1) \\ M_{12} = (1-\nu)D\varepsilon_{12}^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{Eh}{2}(1+\nu)\varepsilon_{31} \\ Q_2 = \frac{Eh}{2}(1+\nu)\varepsilon_{32} \end{cases}$$

où, $N_{\alpha\beta}$ sont les efforts normaux, $M_{\alpha\beta}$ les efforts de flexion-torsion et Q_α les efforts tranchants.

En conclusion, nous avons présenté dans ce chapitre les résultats détaillés de la géométrie différentielle, outil indispensable au développement de la théorie des coques, ainsi que les principaux modèles cinématiques classiques et d'ordre supérieur. Le problème aux limites est formulé à l'aide du principe des travaux virtuels où le modèle de Reissner-Mindlin a été considéré. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont obtenues dans le cas général, laissant ainsi la possibilité de traiter le cas des coques non axisymétriques.

CHAPITRE II

APPLICATION DE LA THEORIE DES COQUES

CHAPITRE II

APPLICATION DE LA THEORIE DES COQUES

L'objet de ce chapitre est l'étude de coques de géométries différentes. Ce travail s'intéresse plus particulièrement aux zones de raccordement entre deux ou plusieurs coques. La répartition et le niveau de contraintes dépend entre-autres de la nature des discontinuités géométriques et par conséquent de la forme des coques à raccorder. Dans la pratique, il est impossible de construire une théorie générale tenant compte de toutes les formes de discontinuités. Pour cela, on propose d'étudier d'abord la solution pour des géométries classiquement rencontrées dans le domaine des appareils à pression, les conditions de raccord quant à elles, seront établies et discutées, en fonction des discontinuités et des petits paramètres géométriques des coques à raccorder au chapitre III.

La plupart des appareils à pression sont constitués d'une virole cylindrique raccordée à d'autres coques de géométries différentes (cône, sphère, tôle ...). Pour l'analyse de telles structures, on étudiera chaque partie séparément et on présentera les équations régissant les différentes coques cylindriques, coniques et sphériques dans les conditions des hypothèses de Reissner-Mindlin et par la suite celles de Kirchhoff-Love.

1. ETUDE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE

Par application de la théorie établie précédemment, on présente après une description géométrique, les équations régissant une coque cylindrique. Les calculs seront développés en utilisant les variables $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ auxquelles, on associera respectivement les variables (θ, x, z) .

1.1. Éléments géométriques

La surface moyenne F du cylindre sera paramétrée par les deux lignes de coordonnées (θ^1, θ^2) . Le vecteur position \vec{r} a pour équation :

$$\vec{r} = R \cos\theta^1 \vec{i}_1 + R \sin\theta^1 \vec{i}_2 + x \vec{i}_3 \quad (2.1.1)$$

où R est le rayon de la surface moyenne.

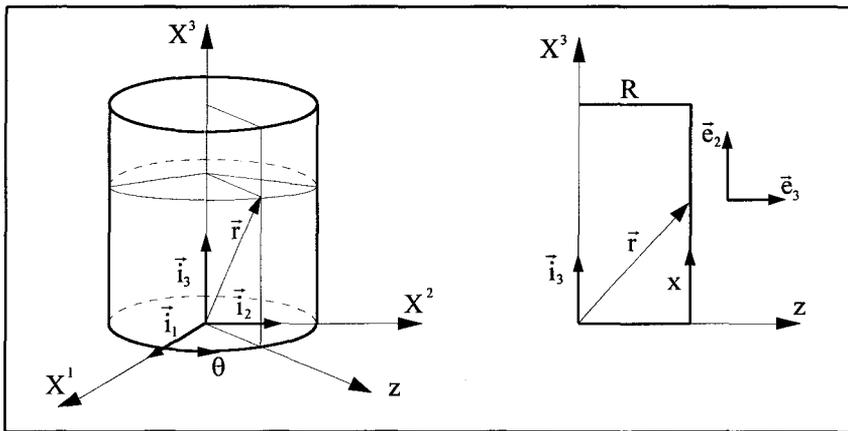


Figure 2.1. Description géométrique d'une coque cylindrique

Par application des relations (1.1.2), on définit les vecteurs de base suivants :

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = R(-\sin\theta^1 \vec{i}_1 + \cos\theta^1 \vec{i}_2) \\ \vec{a}_2 = \vec{i}_3 \\ \vec{a}_3 = \cos\theta^1 \vec{i}_1 + \sin\theta^1 \vec{i}_2 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{cases} \vec{a}^1 = (-\sin\theta^1 \vec{i}_1 + \cos\theta^1 \vec{i}_2) / R \\ \vec{a}^2 = \vec{i}_3 \\ \vec{a}^3 = \vec{a}_3 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Les vecteurs de la base orthogonale sont déterminés d'après les relations (1.1.11) :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{e}}_1 = -\sin\theta \bar{\mathbf{i}}_1 + \cos\theta \bar{\mathbf{i}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{\mathbf{i}}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 = \cos\theta \bar{\mathbf{i}}_1 + \sin\theta \bar{\mathbf{i}}_2 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Les composantes non nulles des tenseurs métrique et de courbure sont :

$$\begin{cases} a_{11} = R^2 \\ a^{11} = 1/R^2 \\ a_{22} = a^{22} = 1 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$\begin{cases} b_{11} = -R \\ b^1_1 = -1/R \end{cases} \quad (2.1.6)$$

et les symboles de Christoffel dans ce cas, sont tous nuls :

$$\forall \alpha, \beta \text{ et } \lambda, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = 0 \quad (2.1.7)$$

1.2. Champ de déplacement

Dans le cadre des hypothèses de Reissner-Mindlin, le développement à l'ordre un du champ de déplacement dans la base $(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3)$, donne :

$$\begin{cases} V_\alpha(\theta, x, z) = v_\alpha(\theta, x) + z [w_\alpha(\theta, x) + b_\alpha^\rho v_\rho(\theta, x)] \\ V_3(\theta, x, z) = v_3(\theta, x) \end{cases} \quad (2.1.8)$$

dans la base $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$, nous obtenons :

$$\begin{cases} U_1(\theta, x, z) = (1 + z b^1_1) u_1(\theta, x) + z \omega_1(\theta, x) \\ U_2(\theta, x, z) = u_2(\theta, x) + z \omega_2(\theta, x) \\ U_3(\theta, x, z) = u_3(\theta, x) \end{cases} \quad (2.1.9)$$

où les u_i et v_i sont les déplacements de la surface moyenne et w_α et ω_α les rotations de la normale. Les variables (θ, x, z) sont définies par la figure (2.1).

1.3. Tenseur des déformations

On exprimera dans cette partie les relations entre les composantes des tenseurs de déformation, de la surface moyenne $\alpha_{\alpha\beta}$, de variation de courbure $\beta_{\alpha\beta}$ et de cisaillement transverse $\gamma_{\alpha 3}$ en fonction du champ de déplacement et de rotation. Ces relations seront établies dans un premier temps dans la base $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ et par la suite dans la base orthonormée $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$:

$$\begin{cases} \alpha_{11} = v_{1,1} + \Gamma_{11}^2 v_2 - b_{11} v_3 \\ 2\alpha_{12} = v_{1,2} + v_{2,1} - \Gamma_{12}^1 v_1 \\ \alpha_{22} = v_{2,2} \end{cases} \quad (2.1.10)$$

$$\begin{cases} \beta_{11} = w_{1,1} - b_1^1 v_{1,1} + b_1^1 b_{11} v_3 \\ 2\beta_{12} = w_{1,2} + w_{2,1} - b_1^1 v_{1,2} \\ \beta_{22} = w_{2,2} \end{cases} \quad (2.1.11)$$

$$\begin{cases} 2\gamma_{13} = w_1 + v_{3,1} + b_1^1 v_1 \\ 2\gamma_{23} = w_2 + v_{3,2} \end{cases} \quad (2.1.12)$$

Dans la base orthogonale, les relations cinématiques (2.1.10), (2.1.11) et (2.1.12) se mettent respectivement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{R}(u_3 + u_{1,1}) \\ \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{R}(Ru_{1,2} + u_{2,1}) \\ \varepsilon_{22}^0 = u_{2,2} \end{cases} \quad (2.1.13)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = \frac{1}{R^2}(R\omega_{1,1} + u_{1,1} + u_3) \\ \varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{R^2}(u_{1,2} + \omega_{2,1} + R\omega_{1,2}) \\ \varepsilon_{22}^1 = \omega_{2,2} \end{cases} \quad (2.1.14)$$

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{31} = \frac{1}{R}(R\omega_1 + u_{3,1} - u_1) \\ 2\varepsilon_{32} = \omega_2 + u_{3,2} \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Si on néglige les termes de l'ordre de $1/R$ devant l'unité d'après les hypothèses de Donnell-Marguerre, les expressions (2.1.14) deviennent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = \frac{1}{R} \omega_{1,1} \\ \varepsilon_{22}^1 = \omega_{2,2} \\ \varepsilon_{12}^1 = \omega_{1,2} + \frac{1}{R} \omega_{2,1} \end{cases} \quad (2.1.16)$$

1.4. Loi de comportement

Par application des relations (1.3.23), (1.3.27) et (1.3.61), on obtient l'expression des efforts normaux $N_{\alpha\beta}$, des moments de flexion et de torsion $M_{\alpha\beta}$ et des efforts tranchants Q_α en fonction du champ de déplacement de la surface moyenne :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{B}{R} (u_3 + u_{1,1} + \nu R u_{2,2}) \\ N_{22} = \frac{B}{R} (R u_{2,2} + \nu u_3 + \nu u_{1,1}) \\ N_{12} = \frac{G}{R} (R u_{1,2} + u_{2,1}) \end{cases} \quad (2.1.17)$$

$$\begin{cases} M_{11} = \frac{D}{R^2} (R \omega_{1,1} + u_{1,1} + u_3 + \nu R^2 \omega_{2,2}) \\ M_{22} = \frac{D}{R^2} (R^2 \omega_{2,2} + \nu (R \omega_{1,1} + u_{1,1} + u_3)) \\ M_{12} = \frac{1-\nu}{2R} D (u_{1,2} + \omega_{2,1} + R \omega_{1,2}) \end{cases} \quad (2.1.18)$$

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{G}{R} (R \omega_1 + u_{3,1} - u_1) \\ Q_2 = G (\omega_2 + u_{3,2}) \end{cases} \quad (2.1.19)$$

En utilisant les relations (2.1.16), les moments de flexion et de torsion se mettent sous la forme simplifiée :

$$\begin{cases} M_{11} = D (\omega_{1,1} / R + \nu \omega_{2,2}) \\ M_{22} = D (\omega_{2,2} + \nu \omega_{1,1} / R) \\ M_{12} = G (\omega_{1,2} + \omega_{2,1} / R) \end{cases} \quad (2.1.20)$$

et avec les hypothèses de Kirchhoff-Love,

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{R}(u_1 - u_{3,1}) \\ \omega_2 = -u_{3,2} \end{cases} \quad (2.1.21)$$

les expressions (2.1.20) deviennent :

$$\begin{cases} M_{11} = \frac{D}{R^2}(u_{1,11} - u_{3,11} - \nu R^2 u_{3,22}) \\ M_{22} = \frac{D}{R^2}(R^2 u_{3,22} + \nu(u_{1,11} - u_{3,11})) \\ M_{12} = \frac{1-\nu}{2R} D(u_{1,2} - u_{3,12} - u_{3,22}) \end{cases} \quad (2.1.22)$$

1.5. Equations d'équilibre

Par application des relations (1.3.46) pour le cas d'une coque cylindrique, les équations d'équilibre des forces et des moments sont données par :

$$\begin{cases} N_{11,1} + RN_{12,2} + Q_1 + RP_1 = 0 \\ N_{12,1} + RN_{22,2} + RP_2 = 0 \\ -N_{11} + Q_{1,1} + RQ_{2,2} + RP_3 = 0 \end{cases} \quad (2.1.23)$$

$$\begin{cases} M_{11,1} + RM_{12} - RQ_1 + RC_1 = 0 \\ M_{12,2} + RM_{22,2} - RQ_2 + RC_2 = 0 \end{cases} \quad (2.1.24)$$

où les composantes $(P_1, P_2, P_3,)$ et (C_1, C_2) sont définies par les relations (1.3.35).

2. ETUDE D'UNE COQUE CONIQUE

Comme pour les coques cylindriques, nous établirons les équations régissant une coque conique. On travaillera directement dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, sachant que dans un premier temps les calculs ont été développés en utilisant les variables $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ auxquelles, nous avons associé les variables (θ, s, z) respectivement.

2.1. Éléments géométriques

De même que pour les coques cylindriques, la surface moyenne d'une coque conique est décrite par le vecteur position :

$$\vec{r} = r \cos\theta \vec{i}_1 + r \sin\theta \vec{i}_2 + (r - r_0) \cot\alpha \vec{i}_3 \quad (2.2.1)$$

avec $r = s \sin\alpha$, s étant l'abscisse du cône, α son demi-angle au sommet et r_0 le rayon à la petite base.

Les vecteurs de la base orthogonale sont donnés par :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = -\sin\theta \vec{i}_1 + \cos\theta \vec{i}_2 \\ \vec{e}_2 = \tan\alpha(\cos\theta \vec{i}_1 + \sin\theta \vec{i}_2) + \vec{i}_3 \\ \vec{e}_3 = \cos\alpha(\cos\theta \vec{i}_1 + \sin\theta \vec{i}_2 - \tan\alpha \vec{i}_3) \end{cases} \quad (2.2.2)$$

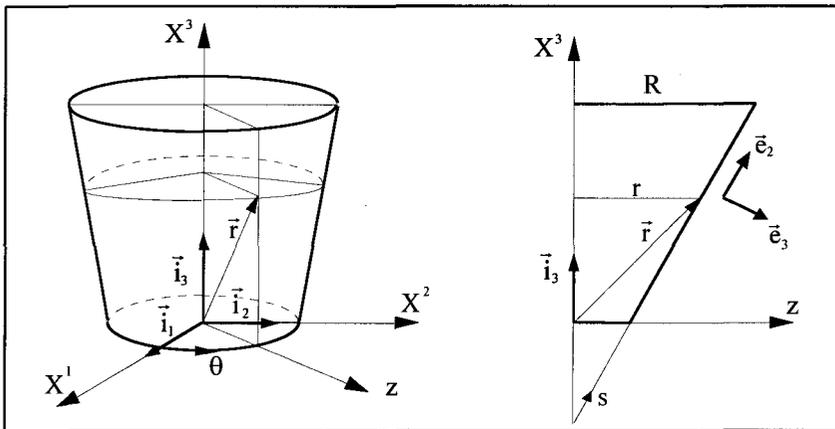


Figure 2.2. Description géométrique d'une coque conique

Les composantes non nulles des tenseurs métriques $a_{\alpha\beta}$, des tenseurs de courbure $b_{\alpha\beta}$ et b_{α}^{β} ainsi que des symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$ associés à notre paramétrage sont :

$$\begin{cases} a_{11} = r^2 \\ a_{22} = 1 + \tan^2 \alpha \end{cases} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{cases} a^{11} = 1/r^2 \\ a^{22} = 1/(1 + \tan^2 \alpha) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

$$\begin{cases} b_{11} = -r \cos \alpha \\ b_1^1 = -\cos \alpha / r \end{cases} \quad (2.2.5)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 = \tan \alpha / r \\ \Gamma_{12}^1 = \tan \alpha / r \\ \Gamma_{12}^1 = -r \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad (2.2.6)$$

2.2. Tenseur de déformation

Les composantes du tenseur de déformation associées au champ de déplacement de type Reissner-Mindlin

$$\begin{cases} U_1(\theta, r, z) = (1 + z b_1^1) u_1(\theta, r) + z \omega_1(\theta, r) \\ U_2(\theta, r, z) = u_2(\theta, r) + z \omega_2(\theta, r) \\ U_3(\theta, r, z) = u_3(\theta, r) \end{cases} \quad (2.2.7)$$

se décomposent de la manière suivante :

Tenseur de déformation de la surface moyenne

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{r} (\sin \alpha u_2 + \cos \alpha u_3 + u_{1,1}) \\ \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{r} (-\sin \alpha u_1 + r \cos \alpha u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \varepsilon_{22}^0 = \cos \alpha u_{2,2} \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Tenseur de déformation de flexion

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = \frac{1}{r^2} (\cos \alpha \sin \alpha u_2 + \cos^2 \alpha u_3 + \cos \alpha u_{1,1} + r \sin \alpha \omega_2 + r \omega_{1,1}) \\ \varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{r} (-\sin \alpha \omega_1 + r \cos \alpha \omega_{1,2} + \omega_{2,1} + \cos^2 \alpha u_{1,2}) \\ \varepsilon_{22}^1 = \cos \alpha \omega_{2,2} \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Si on néglige les termes de l'ordre de $1/r$ devant l'unité (hypothèse de Donnell-Marguerre pour les coques minces), les relations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = \frac{1}{r} (\sin \alpha \omega_2 + \omega_{1,1}) \\ \varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{r} (-\sin \alpha \omega_1 + r \cos \alpha \omega_{1,2} + \omega_{2,1}) \\ \varepsilon_{22}^1 = \cos \alpha \omega_{2,2} \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Tenseur de déformation du cisaillement transverse

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{13} = \omega_1 + \frac{1}{r} (u_{3,1} - \cos \alpha u_1) \\ 2\varepsilon_{23} = \omega_2 + \cos \alpha u_{3,2} \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff-Love, les deux rotations sont données en fonction du champ de déplacement par :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{r} (\cos \alpha u_1 - u_{3,1}) \\ \omega_2 = -\cos \alpha u_{3,2} \end{cases} \quad (2.2.13)$$

En substituant ces relations dans (2.2.11), on obtient l'expression simplifiée du tenseur de déformation de flexion :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = \frac{1}{r^2} (r \sin \alpha \cos \alpha u_{3,2} - u_{3,11} + \cos \alpha u_{1,1}) \\ \varepsilon_{12}^1 = \frac{2}{r^2} (\sin \alpha u_{1,2} - \sin \alpha \cos \alpha u_1 + r \cos^2 \alpha u_{1,2} / 2 - r \cos \alpha u_{3,21}) \\ \varepsilon_{22}^1 = -\cos^2 \alpha u_{3,22} \end{cases} \quad (2.2.14)$$

2.3. Relations constitutives

Les expressions des contraintes généralisées en fonction des déplacements de la surface moyenne et des rotations sont obtenues en utilisant les relations (1.3.20), (1.3.23), (1.3.27) et (1.3.61) :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{B}{r} (\sin \alpha u_2 + \cos \alpha u_3 + u_{1,1} + vr \cos \alpha u_{2,2}) \\ N_{22} = \frac{B}{r} (r \cos \alpha u_{2,2} + v(\sin \alpha u_2 + \cos \alpha u_3 + u_{1,1})) \\ N_{12} = \frac{G}{r} (-\sin \alpha u_1 + r \cos \alpha u_{1,2} + u_{2,1}) \end{cases} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{cases} M_{11} = \frac{D}{r^2} (\cos \alpha \sin \alpha u_2 + \cos^2 \alpha u_3 + \cos \alpha u_{1,1} + r \sin \alpha \omega_2 + r\omega_{1,1} + vr^2 \cos \alpha \omega_{2,2}) \\ M_{22} = \frac{D}{r^2} (v(\cos \alpha \sin \alpha u_2 + \cos^2 \alpha u_3 + \cos \alpha u_{1,1} + r \sin \alpha \omega_2 + r\omega_{1,1}) + r^2 \cos \alpha \omega_{2,2}) \\ M_{12} = (1 - \nu) \frac{D}{2r} (-\sin \alpha \omega_1 + r \cos \alpha \omega_{1,2} + \omega_{2,1} + \cos^2 \alpha u_{1,2}) \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$\begin{cases} Q_1 = G(r\omega_1 + u_{3,1} - \cos \alpha u_1) / r \\ Q_2 = G(\omega_2 + \cos \alpha u_{3,2}) \end{cases} \quad (2.2.18)$$

2.4. Equations d'équilibre

Pour une coque conique, les équations d'équilibre sont données par :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} N_{11,1} + \cos \alpha N_{12,2} + \frac{2 \sin \alpha}{r} N_{21} + \frac{\cos \alpha}{r} Q_1 + P_1 = 0 \\ \frac{\sin \alpha}{r} (N_{22} - N_{11}) + \frac{1}{r} N_{12,1} + \cos \alpha N_{22,2} + P_2 = 0 \\ -\frac{\cos \alpha}{r} N_{11} + \frac{1}{r} Q_{1,1} - \frac{c}{r^2} Q_1 + \cos \alpha Q_{2,2} + \frac{\sin \alpha}{r} Q_2 + P_3 = 0 \end{cases} \quad (2.2.19)$$

$$\begin{cases} \frac{2 \sin \alpha}{r} M_{12} + \frac{1}{r} M_{11,1} + \cos \alpha M_{12,2} - Q_1 + C_1 = 0 \\ \frac{1}{r} M_{12,1} + \cos \alpha M_{22,2} + \frac{\sin \alpha}{r} (-M_{22} - M_{11}) Q_2 + C_2 = 0 \end{cases} \quad (2.2.20)$$

Pour les conditions aux limites, celles-ci sont du même type que pour la coque cylindrique. Les variables en déplacement et en efforts généralisés sont désignées par les mêmes notations, seules la métrique et les courbures changent

3. ETUDE D'UNE COQUE SPHERIQUE

Dans cette partie, on appliquera la théorie des coques à l'étude d'une coque sphérique. Les équations sont présentées directement dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ en utilisant les variables (θ, φ, z) associées aux indices $(1,2,3)$, sachant que dans un premier temps les calculs ont été effectués par rapport à la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ et donc en fonction des variables $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$.

3.1. Aspects géométriques

Comme précédemment, on établit les équations du vecteur position \vec{r} :

$$\vec{r} = R(\cos\theta \sin\varphi \vec{i}_1 + \sin\theta \sin\varphi \vec{i}_2 - \cos\varphi \vec{i}_3), \quad (2.3.1)$$

et des vecteurs de la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = -\sin\theta \vec{i}_1 + \cos\theta \vec{i}_2 \\ \vec{e}_2 = \cos\theta \cos\varphi \vec{i}_1 + \sin\theta \cos\varphi \vec{i}_2 + \sin\varphi \vec{i}_3 \\ \vec{e}_3 = \cos\theta \sin\varphi \vec{i}_1 + \sin\theta \sin\varphi \vec{i}_2 + \cos\varphi \vec{i}_3 \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Par la suite, on détermine l'expression des composantes non nulles des tenseurs métrique $a_{\alpha\beta}$, des tenseurs de courbure $b_{\alpha\beta}$ et b_{α}^{β} et des symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$:

$$\begin{cases} a_{11} = R^2 \sin^2 \varphi \\ a_{22} = R^2 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{cases} b_{11} = R \sin^2 \varphi \\ b_{22} = -b_1^1 = -b_2^2 = 1/R \end{cases} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 = \cot \varphi \\ \Gamma_{11}^2 = \sin \varphi \cos \varphi \end{cases} \quad (2.3.5)$$

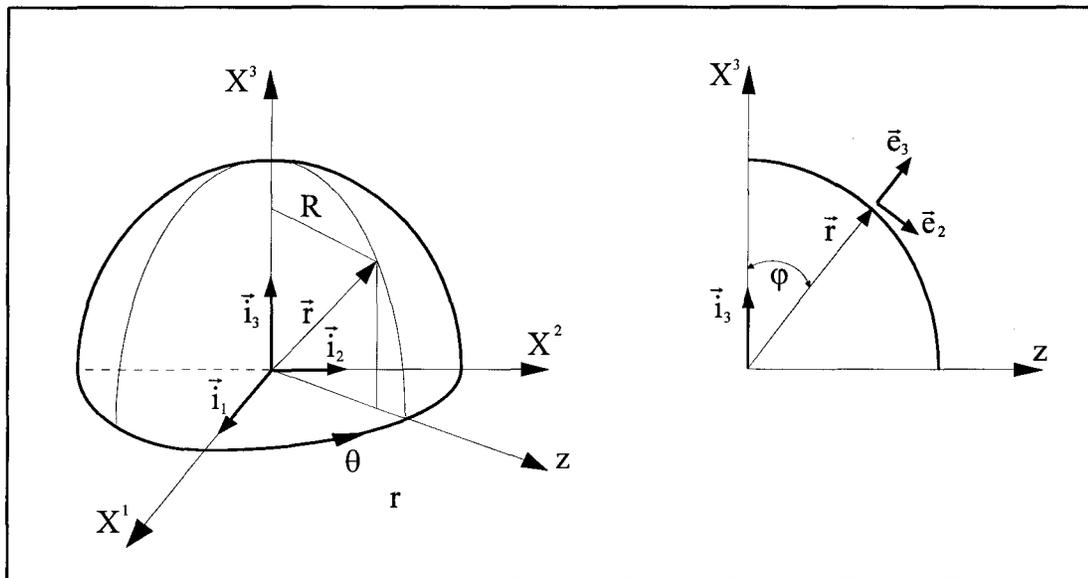


Figure 2.3. Description géométrique d'une coque sphérique

3.2. Tenseur de déformation

Le tenseur de déformation associé au champ de déplacement de Reissner-Mindlin

$$\begin{cases} U_1(\theta, \varphi, z) = (1 + z b_1^1) u_1(\theta, \varphi) + z \omega_1(\theta, \varphi) \\ U_2(\theta, \varphi, z) = (1 + z b_2^2) u_2(\theta, \varphi) + z \omega_2(\theta, \varphi) \\ U_3(\theta, \varphi, z) = u_3(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (2.3.6)$$

se décompose toujours de la même façon que les relations (1.3.15) :

$$\begin{cases} \epsilon_{11}^0 = \frac{1}{R \sin \varphi} (u_{1,1} + \cos \varphi u_2 + \sin \varphi u_3) \\ \epsilon_{12}^0 = \frac{1}{R \sin \varphi} (u_{1,2} + u_{2,1} - \cos \varphi u_1) \\ \epsilon_{22}^0 = \frac{1}{R} (u_{2,2} + u_3) \end{cases} \quad (2.3.7)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = \frac{1}{R \sin \varphi} (\omega_{1,1} + \cos \varphi \omega_2) + \frac{1}{R} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{R \sin \varphi} (\omega_{1,2} + \omega_{2,1} - \cos \varphi \omega_1) + \frac{1}{R} \varepsilon_{12}^0 \\ \varepsilon_{22}^1 = \frac{1}{R} \omega_{2,2} + \frac{1}{R} \varepsilon_{22}^0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{13} = \omega_1 + \frac{1}{R \sin \varphi} (\sin \varphi u_1 - u_{3,1}) \\ \varepsilon_{23} = \omega_2 + \frac{1}{R} (u_{3,2} - u_2) \end{cases} \quad (2.3.9)$$

En utilisant les hypothèses de Donnell-Marguerre, les relations (2.3.8) deviennent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = \frac{1}{R \sin \varphi} (\omega_{1,1} + \cos \varphi \omega_2) \\ \varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{R \sin \varphi} (\omega_{1,2} + \omega_{2,1} - \cos \varphi \omega_1) \\ \varepsilon_{22}^1 = \frac{1}{R} \omega_{2,2} \end{cases} \quad (2.3.10)$$

et avec les hypothèses de Kirchhoff-Love, nous avons :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = \frac{1}{R \sin \varphi} \left(\frac{1}{R} (u_{1,1} + \cos \varphi u_2) + u_{3,11} + \cos \varphi u_{3,2} \right) \\ \varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{R \sin \varphi} \left(\frac{1}{R} u_{1,2} + u_{2,1} - \cos \varphi u_1 - (1+R) u_{3,12} - R \cos \varphi u_{3,1} \right) \\ \varepsilon_{22}^1 = \frac{1}{R^2} (u_{2,2} - u_{3,22}) \end{cases} \quad (2.3.11)$$

3.3. Equations d'équilibre

Dans la base $(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_3)$, les équations d'équilibre des forces et des moments sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{11}}{\partial \theta} + (3 \sin \varphi - \cos \varphi) N_{12} + \sin \varphi \frac{\partial N_{12}}{\partial \varphi} + \sin \varphi Q_1 + R P_1 \sin \varphi = 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial N_{22}}{\partial \varphi} + \cos \varphi (N_{22} - N_{11}) + \sin \varphi Q_2 + R P_2 \sin \varphi = 0 \\ \sin \varphi (N_{11} + N_{22}) - \frac{\partial (\sin \varphi Q_2)}{\partial \varphi} - \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} - R P_3 \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (2.3.12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta} + (3 \sin \varphi - \cos \varphi) M_{12} + \sin \varphi \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} - R \sin \varphi Q_1 + RC_1 \sin \varphi = 0 \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + \cos \varphi (M_{22} - M_{11}) - R \sin \varphi Q_2 + RC_2 \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (2.3.13)$$

3.4. Loi de comportement

Les éléments de réduction sont reliés au champ de déplacement et de rotation par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{B}{R \sin \varphi} (u_{1,1} + \cos \varphi u_2 + \sin \varphi u_3 + \nu \sin \varphi (u_{2,2} + u_3)) \\ N_{22} = \frac{B}{R \sin \varphi} (\sin \varphi (u_{2,2} + u_3) + \nu (u_{1,1} + \cos \varphi u_2 + \sin \varphi u_3)) \\ N_{12} = \frac{G}{R \sin \varphi} (u_{1,2} + u_{2,1} - \cos \varphi u_1) \end{cases} \quad (2.3.14)$$

$$\begin{cases} M_{11} = \frac{B}{R \sin \varphi} (\omega_{1,1} + \cos \varphi \omega_2 + \nu \sin \varphi \omega_{2,2}) \\ M_{22} = \frac{B}{R \sin \varphi} (\sin \varphi \omega_{2,2} + \nu \omega_{1,1} + \nu \cos \varphi \omega_2) \\ M_{12} = \frac{B(1-\nu)}{2R \sin \varphi} (\omega_{1,2} + \omega_{2,1} - \cos \varphi \omega_1) \end{cases} \quad (2.3.15)$$

$$\begin{cases} Q_1 = G(\omega_1 + \frac{1}{R \sin \varphi} (\sin \varphi u_1 - u_{3,1})) \\ Q_2 = G(\omega_2 + \frac{1}{R} (u_{3,2} - u_2)) \end{cases} \quad (2.3.16)$$

4. COQUES AXISYMETRIQUES

Pour des raisons techniques, liées à la facilité de réalisation et de rendement géométrique, la plupart des appareils à pression sont d'une géométrie de révolution. Si de plus le chargement, les conditions aux limites et les matériaux constitutifs présentent une symétrie de révolution autour du même axe

Nous avons alors :

$$\begin{cases} \partial(\dots) / \partial \theta = 0 \\ u_1 = 0 \\ N_{12} = N_{21} = M_{12} = M_{21} = Q_1 = 0 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Dans ce paragraphe, on établira la solution analytique pour les coques de révolution. Pour les cônes non axisymétriques (cônes déportés), on peut considérer comme première approche qu'il est équivalent au cône axisymétrique en prenant comme demi angle au sommet l'angle qui génère la plus grande discontinuité géométrique.

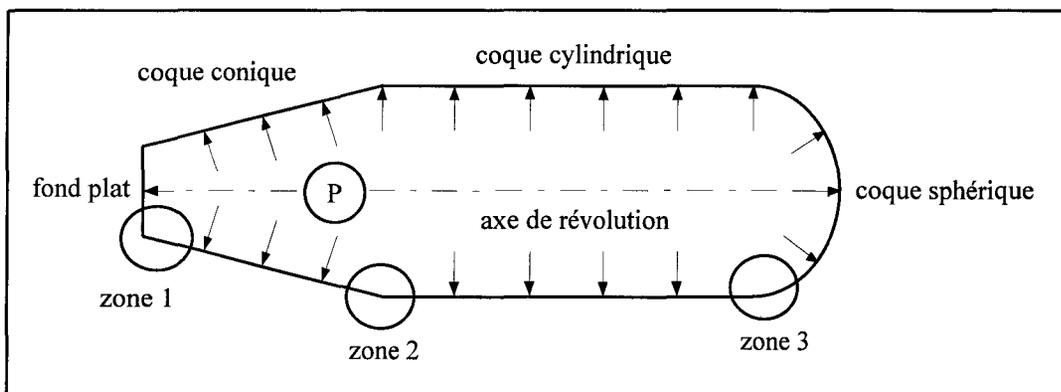


Figure 2.4. Exemple d'appareil à pression

Comme on peut le voir sur la figure 2.4, un appareil à pression se présente le plus souvent comme le raccordement d'une coque cylindrique à des coques de géométrie différente. Une coque cylindrique est raccordée d'un côté à une coque sphérique et de l'autre côté à une coque conique, qui elle-même est fermée par un fond plat. Dans cet exemple, nous sommes en présence de trois zones de discontinuité géométrique.

Selon la forme, la nature de la discontinuité et l'amplitude du paramètre η , on étudie l'équilibre de chaque coque puis de l'ensemble en utilisant les théories de la membrane et de Kirchhoff-Love.

4.1. Solutions analytiques par la théorie de la membrane

On exprime dans un premier temps, la solution pour les coques de révolution en l'absence de raccordement. Cette solution sera complétée de manière à assurer les continuités géométriques au niveau des bords des coques considérées. L'étude de l'appareil à pression représenté par la figure (2.4) sera décomposé suivant le schéma suivant :

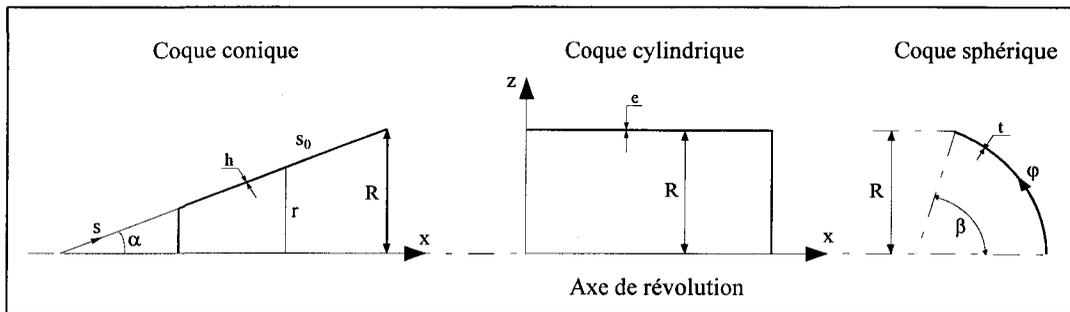


Figure 2.5. Description géométrique des coques de révolution

4.1.1. Coque cylindrique

Dans la théorie de la membrane, on néglige les moments et les efforts tranchants :

$$M_{\alpha\beta} = Q_{\alpha} = 0 \quad (2.4.2)$$

A partir des équations d'équilibre (1.3.5), on détermine les efforts de membrane :

$$\begin{cases} N_{11} = PR \\ N_{22} = PR/2 \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Par la suite, on détermine l'expression des déformations de membrane en utilisant les relations (1.3.61) et les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = \frac{(2-\nu)PR}{2Ee} \\ \varepsilon_{22}^0 = \frac{(1-2\nu)PR}{2Ee} \end{cases} \quad (2.4.4)$$

A partir des relations cinématiques, le déplacement radial (noté δ^m) et la rotation de la normale (notée V^m) de membrane, sont :

$$\begin{cases} \delta^m = \frac{2-\nu}{2Ee} PR^2 \\ V^m = 0 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

4.1.2. Coque conique

De la même façon que pour la coque cylindrique, on détermine :

– à partir des équations d'équilibre, les efforts de membrane :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{Pr}{\cos\alpha} \\ N_{22} = \frac{Pr}{2\cos\alpha} \end{cases} \quad (2.4.6)$$

– les déformations de membrane à partir des relations de comportement :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = \frac{2-\nu}{2E\cos\alpha} Pr \\ \varepsilon_{22}^0 = \frac{1-2\nu}{2E\cos\alpha} Pr \end{cases} \quad (2.4.7)$$

– le déplacement radial δ^m et la rotation de la normale V^m à partir des relations cinématiques :

$$\begin{cases} \delta_1^m = \frac{(2-\nu) Pr^2}{2Eh\cos\alpha} \\ V_1^m = \frac{3\tan\alpha Pr}{2Eh\cos\alpha} \end{cases} \quad (2.4.8)$$

4.1.3. Coque sphérique

Les efforts de membrane sont obtenus à partir des équations d'équilibre :

$$\begin{cases} N_{11} = PR/2 \\ N_{22} = PR/2 \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Par la suite, les relations (1.3.61) permettent d'obtenir l'expression des déformations de membrane :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = \frac{(1-\nu)PR}{2E} \\ \varepsilon_{22}^0 = \frac{(1-\nu)PR}{2E} \end{cases} \quad (2.4.10)$$

Et finalement, le déplacement radial et la rotation de la normale s'obtiennent à partir des relations cinématiques :

$$\begin{cases} \delta^m = \frac{Pa^2}{2Et} \frac{1-\nu}{\sin\beta} \\ V^m = 0 \end{cases} \quad (2.4.11)$$

où t est l'épaisseur de la coque sphérique.

4.2. Solutions analytiques par la théorie de Kirchhoff-Love

Cette partie de la solution est indispensable pour assurer la continuité géométrique des déplacements au niveau de la jonction. On exprime pour chaque coque les équations générales et par la suite la solution au niveau du raccord.

4.2.1. Coque cylindrique

A partir du champ de déplacement de type Kirchhoff-Love,

$$\begin{cases} U_2(x, z) = u_2(x) - z \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ U_3(x, z) = u_3(x) \end{cases} \quad (2.4.12)$$

on décompose le tenseur de déformation en la somme de deux tenseurs :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = \frac{u_3}{R} \\ \varepsilon_{22}^0 = \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{cases} \quad (2.4.13)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = 0 \\ \varepsilon_{22}^1 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \end{cases} \quad (2.4.14)$$

En utilisant les relations (2.1.17) et (2.1.18), les équations d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{22}}{\partial x} = 0 \\ N_{11} - R \frac{\partial Q_2}{\partial x} - PR = 0 \\ \frac{\partial M_{22}}{\partial x} - Q_2 = 0 \end{cases} \quad (2.4.15)$$

combinées aux lois de comportement

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{Ee}{R} u_3 \\ N_{22} = 0 \\ M_{22} = -D \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^2} \\ M_{11} = \nu M_{22} \end{cases} \quad (2.4.16)$$

aboutissent à l'équation différentielle qui caractérise le comportement d'une coque cylindrique :

$$\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4} + 4\gamma^4 u_3 = 0 \quad (2.4.17)$$

dont la solution générale est :

$$u_3 = e^{-\gamma x} [A_1 \cos(\gamma x) + A_2 \sin(\gamma x)] + e^{\gamma x} [A_3 \cos(\gamma x) + A_4 \sin(\gamma x)] \quad (2.4.18)$$

où $\gamma = [3(1-\nu^2) / R^2 e^2]^{1/4}$ est le coefficient d'amortissement du cylindre.

On considère que le cylindre est suffisamment long (voir chapitre III-4.1.4), alors les effets du bord ($x = 0$) n'ont aucune interaction sur ceux du bord ($x = L$). On choisit donc une solution à deux constantes qui décroît quand x augmente :

$$u_3 = e^{-\gamma x} [A_1 \cos(\gamma x) + A_2 \sin(\gamma x)] \quad (2.4.19)$$

Pour un cylindre, le déplacement radial δ^f et la rotation de la normale V^f de flexion sont :

$$\begin{cases} \delta^f = u_3 \\ V^f = -\gamma e^{-\gamma x} [(A_1 - A_2) \cos(\gamma x) + (A_1 + A_2) \sin(\gamma x)] \end{cases} \quad (2.4.20)$$

Finalement, on exprime les éléments de réduction en fonction des constantes A_1 et A_2 par :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{Eh}{R} e^{-\gamma x} [A_1 \cos(\gamma x) + A_2 \sin(\gamma x)] \\ M_{22} = 2 D \gamma^2 e^{-\gamma x} [A_2 \cos(\gamma x) - A_1 \sin(\gamma x)] \\ Q_2 = 2 D \gamma^3 e^{-\gamma x} [(A_1 - A_2) \sin(\gamma x) - (A_1 + A_2) \cos(\gamma x)] \end{cases} \quad (2.4.21)$$

4.2.2. Coque conique

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir des relations (1.3.24) :

$$\begin{cases} N_{11} - \frac{\partial(rN_{22})}{\partial r} = 0 \\ N_{11} - \tan \alpha \frac{\partial(rQ_2)}{\partial r} - \frac{Pr}{\cos \alpha} = 0 \\ M_{11} - \frac{\partial(rM_{22})}{\partial r} + \frac{rQ_2}{\sin \alpha} = 0 \end{cases} \quad (2.4.22)$$

En utilisant les hypothèses de Kirchhoff-Love, le champ de déplacement se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_1(r, z) = 0 \\ U_2(r, z) = u_2(r) - z \sin \alpha \frac{\partial u_3}{\partial r} \\ U_3(r, z) = u_3(r) \end{cases} \quad (2.4.23)$$

On décompose le tenseur de déformation associé à ce champ de déplacement en deux parties :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{r} (\sin \alpha u_2 + \cos \alpha u_3) \\ \varepsilon_{22}^0 = \sin \alpha \frac{\partial u_2}{\partial r} \end{cases} \quad (2.4.24)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = -\frac{\sin^2 \alpha}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} \\ \varepsilon_{22}^1 = -\sin^2 \alpha \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} \end{cases} \quad (2.4.25)$$

Et finalement, les relations constitutives sont données par :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{B}{r} (\sin \alpha u_2 + \cos \alpha u_3 + \nu r \sin \alpha \frac{\partial u_2}{\partial r}) \\ N_{22} = \frac{B}{r} (r \sin \alpha \frac{\partial u_2}{\partial r} + \nu (\sin \alpha u_2 + \cos \alpha u_3)) \end{cases} \quad (2.4.26)$$

$$\begin{cases} M_{11} = -\frac{D}{r} \sin^2 \alpha (\frac{\partial u_3}{\partial r} + \nu r \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2}) \\ M_{22} = -\frac{D}{r} \sin^2 \alpha (r \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial u_3}{\partial r}) \end{cases} \quad (2.4.27)$$

Pour résoudre ce problème, on effectue tout d'abord les changements de variable suivants :

$$\begin{cases} s = r \sin \alpha \\ U = s \tan \alpha Q_2 \\ V = \partial u_3 / \partial s \end{cases} \quad (2.4.28)$$

La combinaison des équations d'équilibre et des relations de comportement, aboutit à un système différentiel qui caractérise le comportement d'une coque conique :

$$\begin{cases} U = -B \tan \alpha \left(-\frac{V}{s} + \frac{\partial V}{\partial s} + s \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \right) \\ V = \frac{\tan \alpha}{Eh} \left(-\frac{U}{s} + \frac{\partial U}{\partial s} + s \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \right) \end{cases} \quad (2.4.29)$$

En définissant l'opérateur :

$$L(\dots) = \left[s \frac{d^2(\dots)}{ds^2} + \frac{d(\dots)}{ds} - \frac{(\dots)}{s} \right] \tan \alpha \quad (2.4.30)$$

le système (2.4.29) devient :

$$\begin{cases} U = -BL(V) \\ V = \frac{1}{Eh} L(U) \end{cases} \quad (2.4.31)$$

et par dérivation, on obtient :

$$L(L(U)) + \mu^4 U = 0 \quad (2.4.32)$$

avec

$$\mu^4 = 12(1 - \nu^2) / h^2 \quad (2.4.33)$$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$U = A_1 \text{Ber}_2(\zeta) + A_2 \text{Bei}_2(\zeta) + A_3 \text{Ker}_2(\zeta) + A_4 \text{Kei}_2(\zeta) \quad (2.4.34)$$

où les A_i sont des constantes et Ber_2 , Bei_2 , Ker_2 et Kei_2 sont des fonctions de KELVIN de second espèce qu'on peut transformer en fonctions de première espèce. Les fonctions de KELVIN de première espèce se développent en séries entières ou se calculent comme fonctions trigonométriques pour un argument :

$$\zeta = 2\lambda\sqrt{s} \quad (2.4.35)$$

où $\lambda = [3(1-\nu^2)/R^2h^2]^{1/4}$ est le coefficient d'amortissement de la coque conique.

L'équation (2.4.32) implique que :

$$L(U) \pm i\mu^2 U = 0 \quad (2.4.36)$$

alors

$$\begin{cases} U_1 = \varphi_1 + i\varphi_2 \\ U_2 = \varphi_3 + i\varphi_4 \\ U_3 = \varphi_1 - i\varphi_2 \\ U_4 = \varphi_3 - i\varphi_4 \end{cases} \quad (2.4.37)$$

sont solutions de l'équation (2.4.36). U est donc une combinaison linéaire des fonctions φ_i :

$$U = \sum_{i=1}^4 A_i \cdot \varphi_i \quad (2.4.38)$$

Par ailleurs, on montre que les fonctions Ber_2 et Bei_2 sont oscillatoires amorties quand ζ augmente à l'inverse de Ker_2 et Kei_2 et on pose $\text{Ber}_2 = \varphi_1$ et $\text{Bei}_2 = -\varphi_2$ [TIM61] et [DEM85]. On considère par la suite que le cône est suffisamment long pour que la solution au bord $r = r_0$ n'influe pas sur le bord ($r = R$). On verra plus loin dans la partie

détermination des zones d'influence que cette hypothèse est justifiée. Avec ces considérations, on retiendra la solution suivante :

$$\begin{aligned} U &= A_1 \text{Ber}2(\zeta) + A_2 \text{Bei}2(\zeta) \\ &= C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

Cette solution introduit deux constantes d'intégration qu'on déterminera par les conditions de raccordement.

La fonction $\varphi_1 + i\varphi_2$ étant solution de l'équation (2.4.36), nous avons alors :

$$\begin{cases} L(\varphi_1) = \lambda^2 \tan \alpha \varphi_2 \\ L(\varphi_2) = -\lambda^2 \tan \alpha \varphi_1 \end{cases} \quad (2.4.40)$$

Finalement, on exprime les éléments de réduction, en fonction de C_1 et C_2 :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{2\lambda^2 \tan \alpha}{\zeta} (C_1 \varphi_1' + C_2 \varphi_2') \\ N_{22} = \frac{4\lambda^2 \tan \alpha}{\zeta^2} (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) \end{cases} \quad (2.4.41)$$

$$\begin{cases} M_{11} = -\frac{2}{\zeta^2} [C_1 (2\varphi_2 + \nu \varphi_2' \zeta) - C_2 (2\varphi_1 + \nu \varphi_1' \zeta)] \\ M_{22} = -\frac{2}{\zeta^2} [C_1 (\zeta \varphi_2' + 2\nu \varphi_2) - C_2 (\zeta \varphi_1' + 2\nu \varphi_1)] \end{cases} \quad (2.4.42)$$

$$\begin{cases} Q_2 = \frac{4\lambda^2}{\zeta^2} (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) \end{cases} \quad (2.4.43)$$

De même, pour le déplacement radial δ^f et la rotation de la normale V^f du problème homogène :

$$\begin{cases} \delta^f = r \varepsilon_{11}^0 \\ V^f = \frac{\partial u_3}{\partial s} \end{cases} \quad (2.4.44)$$

nous obtenons :

$$\begin{cases} \delta^f = \frac{\sin \alpha \tan \alpha}{2Eh} [C_1(\zeta\varphi_1' - 2\nu\varphi_1) + C_2(\zeta\varphi_2' - 2\nu\varphi_2)] \\ V^f = \frac{\lambda^2 \tan \alpha}{Eh} [C_1\varphi_2 - C_2\varphi_1] \end{cases} \quad (2.4.45)$$

4.2.3. Coque sphérique

La prise en compte des hypothèses de Kirchhoff-Love permet d'avoir un champ de déplacement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_2(\varphi, z) = \left(1 + \frac{z}{R}\right)u_2 - \frac{z}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \\ U_3(\varphi, z) = u_3 \end{cases} \quad (2.4.46)$$

Le tenseur de déformation se décompose toujours en deux parties :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{R} (\cot \varphi u_2 + u_3) \\ \varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{R} (u_3 + u_{2,\varphi}) \end{cases} \quad (2.4.47)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^1 = \frac{\cot \varphi}{R^2} (u_2 - u_{3,\varphi\varphi}) \\ \varepsilon_{22}^1 = \frac{1}{R^2} (u_{2,\varphi} - u_{3,\varphi\varphi}) \end{cases} \quad (2.4.48)$$

Les éléments de réduction sont reliés au champ de déplacement par :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{B}{R} (\cot \varphi u_2 + u_3 + \nu(u_3 + u_{2,\varphi})) \\ N_{22} = \frac{B}{R} (u_3 + u_{2,\varphi} + \nu(\cot \varphi u_2 + u_3)) \end{cases} \quad (2.4.49)$$

$$\begin{cases} M_{11} = \frac{D}{R^2} (\cot \varphi (u_2 - u_{3,\varphi\varphi}) + \nu(u_{2,\varphi} - u_{3,\varphi\varphi})) \\ M_{22} = \frac{D}{R^2} (u_{2,\varphi} - u_{3,\varphi\varphi} + \nu \cot \varphi (u_2 - u_{3,\varphi})) \end{cases} \quad (2.4.50)$$

Après quelques transformations des équations d'équilibre,

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{22}}{\partial \varphi} + \cot \varphi (+N_{22} - N_{11}) Q_2 = 0 \\ \sin \varphi (N_{11} + N_{22}) - \frac{\partial (\sin \varphi Q_2)}{\partial \varphi} = RP \sin \varphi \\ \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + \cot \varphi (M_{22} - M_{11}) - RQ_2 = 0 \end{cases} \quad (2.4.51)$$

on aboutit à un système différentiel qui caractérise le comportement des coques sphériques

$$\begin{cases} Q_2 = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \cot \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} - (\cot^2 \varphi + \nu) V \right) \\ V = \frac{1}{Et} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \cot \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} + (\nu - \cot^2 \varphi) V \right) \end{cases} \quad (2.4.52)$$

Les deux premières équations se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} \\ N_{22} = \cot \varphi Q_2 \end{cases} \quad (2.4.53)$$

On suppose que les dérivées secondes de V et Q_2 sont très grandes devant les dérivées premières et devant V et Q_2 (hypothèse de Meissner), on obtient alors :

$$\begin{cases} Q_2 = \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \\ V = \frac{1}{Et} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \varphi^2} \end{cases} \quad (2.4.54)$$

et après dérivation, on obtient l'équation du quatrième degré :

$$\frac{\partial^4 Q_2}{\partial \varphi^4} + 4\chi^4 Q_2 = 0 \quad (2.4.55)$$

où $\chi = [3(1-\nu^2)(R^2/t^2)]^{1/4}$ est le coefficient d'amortissement de la coque sphérique.

Pour φ différent de 0° ($\varphi \geq 30^\circ$), l'équation précédente est une approximation très satisfaisante du système différentiel (2.4.52). La solution est alors donnée par :

$$Q_2 = e^{x\varphi} [A_1 \cos(\chi\varphi) + A_2 \sin(\chi\varphi)] + e^{-x\varphi} [A_3 \cos(\chi\varphi) + A_4 \sin(\chi\varphi)] \quad (2.4.56)$$

Pour un angle d'ouverture β assez grand, cette équation se met simplement en fonction de deux constantes, compte tenu de la remarque du paragraphe précédent :

$$Q_2 = Ae^{-x\psi} \sin(\chi\psi + \gamma) \quad (2.4.57)$$

où, nous avons effectué le changement de variable $\varphi = \beta - \psi$ et (A, γ) sont des constantes d'intégration qui seront déterminées par les conditions de raccordement.

Après dérivation de la relation (2.4.57), nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{cases} N_{11} = -\sqrt{2}A\chi e^{-x\psi} \cos(\lambda\psi + \gamma + \pi/4) \\ N_{22} = \cot \psi Ae^{-x\psi} \sin(\lambda\psi + \gamma) \\ M_{22} = \frac{R}{\sqrt{2}\chi} Ae^{-x\psi} \sin(\lambda\psi + \gamma + \pi/4) \end{cases} \quad (2.4.58)$$

$$\begin{cases} \delta^f = -\frac{\sqrt{2}R}{Et} \chi \sin \varphi Ae^{-x\psi} \cos(\lambda\psi + \gamma + \pi/4) \\ V^f = -\frac{2A\chi^2}{Et} e^{-x\psi} \cos(\lambda\psi + \gamma) \end{cases} \quad (2.4.59)$$

où l'indice (...) ^f désigne la partie flexion.

En conclusion, nous avons présenté les équations régissant les coques cylindriques, coniques et sphériques dans le cadre des hypothèses de Reissner-Mindlin et dans le cas non axisymétrique. Par la suite, nous avons proposé pour les coques considérées des solutions analytiques de Kirchhoff-Love dans le cas axisymétrique. Ces solutions seront complètement définies en tenant compte des conditions de raccordement, objet du chapitre suivant.

CHAPITRE III

RACCORDEMENT DE COQUES MINCES

CHAPITRE III

RACCORDEMENT DE COQUES MINCES

Après avoir étudié séparément chaque coque dans le cadre des hypothèses de Kirchhoff-Love, on complétera, dans cette partie, la solution afin d'assurer la continuité géométrique des coques au niveau des zones de raccordement. En effet, les solutions en déplacement et en rotation obtenues au chapitre II nécessitent la détermination des constantes d'intégration. Pour cela, on écrira que les déplacements et les rotations des surfaces moyennes de part et d'autre de la frontière commune aux deux coques sont égales.

1. GENERALITES

Afin de sensibiliser le lecteur aux problèmes rencontrés dans le dimensionnement des appareils à pression, on donnera dans un premier temps une description générale de ce type de structure ainsi que les méthodes utilisées pour leur dimensionnement. Par la suite, le problème de raccordement sera analysé et ceci pour plusieurs types de jonctions.

1.1. Description d'un appareil à pression

D'une manière générale, un appareil à pression peut être représenté par la figure 3.1 où l'exemple d'un appareil horizontal a été considéré. La même description peut être faite pour des appareils verticaux en utilisant un autre type de support (charpente, jupe). Pour le dimensionnement de cet appareil, celui-ci est décomposé comme suit :

- les parties courantes,
- les zones de discontinuités,
- et les accessoires.

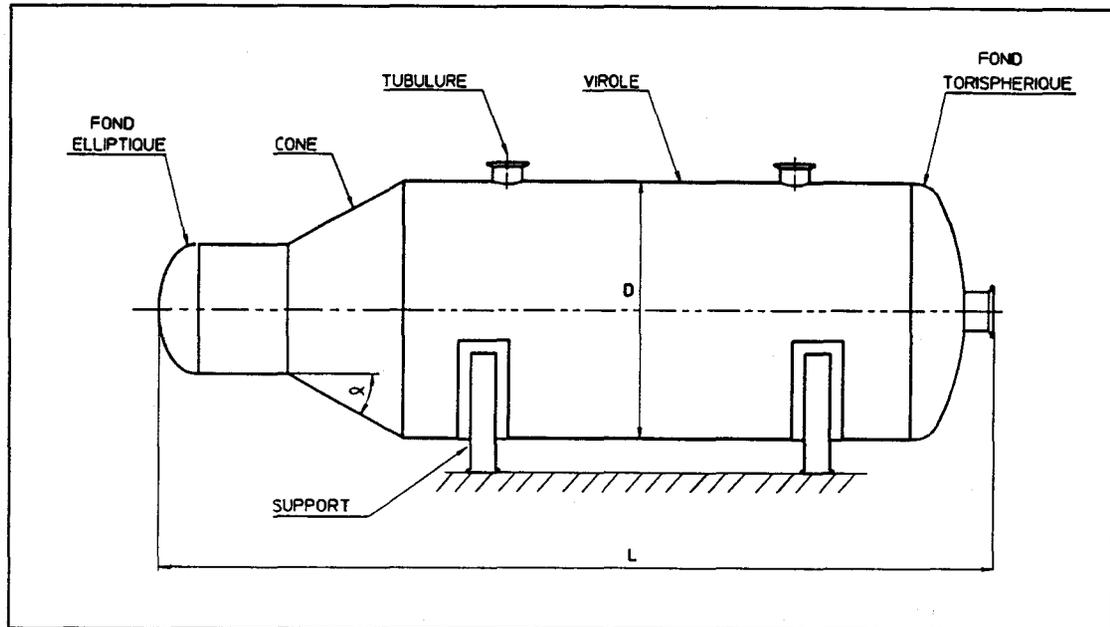


Figure 3.1 Description d'un appareil à pression horizontal

1.1.1 Parties courantes

Les parties courantes sont de deux types : les viroles et les fonds.

A] Viroles : Pratiquement, tous les appareils à pression sont constitués d'une virole cylindrique qui par sa géométrie optimale offre un profil idéal pour son utilisation comme enceinte sous pression ou réservoir de stockage. Les appareils dont la section transversale est carrée ou rectangulaire sont très rarement utilisés car ils conduisent à des épaisseurs non négligeable et exigent une attention particulière au niveau des sommets. Un deuxième type de virole est le cône dont l'utilisation est souvent indispensable pour certains procédés de fabrication définis par l'utilisateur de l'appareil.

B] Fonds : Dans la pratique, on distingue :

- les fonds elliptiques qui sont caractérisés par le rapport du grand rayon R_g sur le petit rayon R_p (exemple $R_g/R_p = 2.1, 2.0, 1.9\dots$).

-
- les fonds torisphériques qui sont constitués d'une partie centrale de forme sphérique de rayon R_s et d'une partie torique de rayon R_t . Le plus souvent, on prend R_s égal au diamètre de la virole (à laquelle ce fond sera raccordée) et un rapport $R_t/R_s = 0.1$.
 - les fonds hémisphériques sont constitués d'une demi-sphère. Ce profil assure, comme on le verra plus loin le niveau de contrainte minimale, mais du fait de l'encombrement qu'il peut engendré (longueur L sur la figure 3.1), celui-ci n'est pas d'une utilisation très courante.
 - les fonds plats qui peuvent se raccorder directement à la virole ou par l'intermédiaire d'un bord de forme torique. Par rapport aux fonds bombés, le fond plat conduit à une épaisseur plus grande.

Les parties courantes d'un appareil à pression sont dimensionnées par la théorie de la membrane.

1.1.2. Zones de discontinuité géométrique

Les zones de discontinuité sont principalement les zones de raccordement cylindre-cône et cylindre-fond plat. Pour ce type de problème, les codes de calcul des appareils à pression ([ASM95], [COD95], [ADM995], [BS94], [REG94]) prévoient une surépaisseur pour absorber les efforts de flexion induits par les variations de courbures et les discontinuités géométriques. Quelques auteurs ont étudiés ce type de jonction ([WAT59], [DEM85] et [HAM95b]). C'est cette partie que nous traiterons dans ce travail en mettant en évidence l'influence des paramètres géométriques sur la solution et la validité de celle-ci au niveau de la jonction. Pour le raccordement cylindre-fonds bombés, aucune exigence particulière n'est prévue du fait que la normale à la surface moyenne ne présente pas de discontinuité et donc les moments de flexion dans ces zones ne deviennent pas prépondérants. Toutefois, on évitera de mettre par exemple une ouverture dans cette zone. Plusieurs auteurs ont étudié ce type de raccordement, parmi eux [GIL68], [WAT53], [GAL60].

1.1.3. Accessoires

Pour des raisons de fonctionnement et de mise en service, les appareils à pression sont équipés d'accessoires annexes (tubulures, trous d'homme, brides, supports, anneaux raidisseurs, berceaux). Les ouvertures sont réalisées sur les viroles, les fonds plats, ou les parties centrales des fonds bombés. Du fait de l'affaiblissement de la structure dans cette zone, plusieurs solutions sont envisageables. On peut épaissir la virole ou la tubulure ou bien mettre un renfort ; une combinaison de ces solutions peut être utilisée. Ces ouvertures seront par la suite raccordées à des tubulures qui sont le plus souvent le lieu de contraintes supplémentaires dues aux dilatations thermiques et au poids propre des structures annexes. Ceci nécessite une étude particulière des effets locaux sur les parois de l'appareil. Les méthodes de dimensionnement sont basées sur les travaux de [ZIC51] et [BIJ57].

1.2. Approche générale d'un problème de raccordement

Les solutions de la membrane pour les différentes coques sont données par :

Cylindre

$$\begin{cases} \sigma_{11}^m = \frac{PR}{e} \\ \sigma_{22}^m = \frac{PR}{2e} \\ \delta_1^m = \frac{2-\nu}{2Ee} PR^2 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Cône

$$\begin{cases} \sigma_{11}^m = \frac{PR}{h \cos \alpha} \\ \sigma_{22}^m = \frac{PR}{2h \cos \alpha} \\ \delta_2^m = \frac{2-\nu}{2Eh \cos \alpha} PR^2 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Sphère

$$\begin{cases} \sigma_{11}^m = \frac{PR}{2t} \\ \sigma_{22}^m = \frac{PR}{2t} \\ \delta_3^m = \frac{2-\nu}{2Et \sin\varphi} PR^2 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

On montre que cette solution membranaire ne permet pas, à elle seule, d'assurer la continuité géométrique des déformées au niveau du raccordement (Figure 3.2).

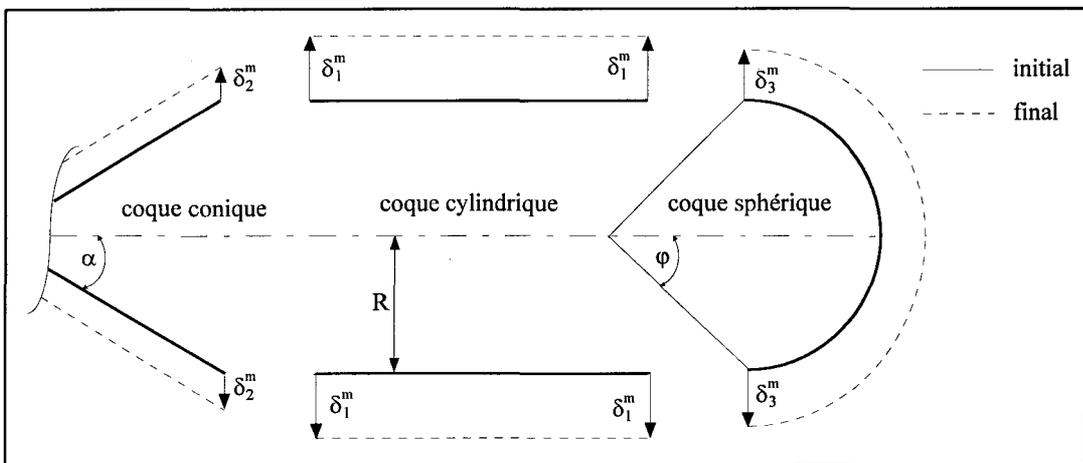


Figure 3.2. Description de la cinématique en l'absence de raccordement

Pour pallier à cette différence, il est donc nécessaire d'introduire des efforts de flexion (Figure 3.3) appelés aussi efforts de liaison (un moment fléchissant et un effort tranchant). Les déplacements générés par ces efforts, associés aux déplacements de membrane permettent d'assurer la continuité physique des déformées au niveau de la jonction. Par la suite, on appliquera cette démarche à chaque cas de raccordement.

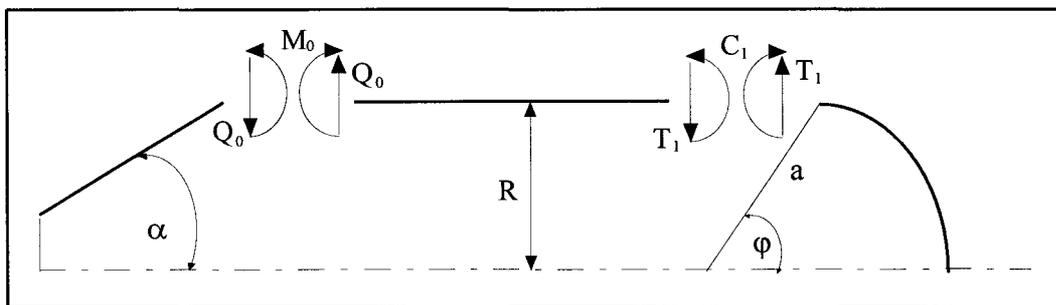


Figure 3.3. Introduction des efforts de liaison

2. RACCORDEMENT CYLINDRE-CÔNE

Comme on l'a vu dans l'approche générale, on décompose le problème en l'étude de la partie cylindrique et l'étude de la partie conique.

2.1. Etude des conditions de bord au niveau du cylindre

2.1.1. Définition des éléments de liaison

On supposera que le raccordement s'effectue au niveau du bord $x = 0$ (Figure 3.4).

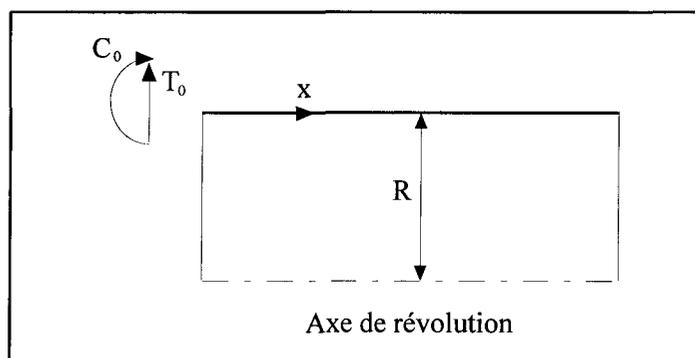


Figure 3.4. Etude de la partie cylindrique

Par projection et après identification avec le problème homogène, les efforts de liaison sont :

$$\begin{cases} C_0 = M_{22}(x=0) \\ T_0 = Q_2(x=0) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

A partir des relations (2.4.21), on exprime les deux inconnues de liaison en fonction des constantes d'intégration A_1 et A_2 :

$$\begin{cases} C_0 = 2A_2 D \gamma^2 \\ T_0 = -2D \gamma^3 (A_1 + A_2) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

En inversant cette relation, on obtient :

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{1}{2D\gamma^3}(\gamma C_0 + Q_0) \\ A_2 = \frac{C_0}{2D\gamma^2} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

2.1.2. Expression des déplacements en fonction des inconnues de liaison

Par sommation des deux solutions :

- de membrane :

$$\begin{cases} \delta_1^m = \frac{2-\nu}{2Ee} PR^2 \\ V_1^m = 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

- et de flexion :

$$\begin{cases} \delta_1^f = -\frac{1}{2B\gamma^3}(\gamma M_0 + Q_0) \\ V_1^f = \frac{1}{2B\gamma^2}(2\gamma M_0 + Q_0) \end{cases} \quad (3.2.5)$$

on déduit la solution globale :

$$\begin{cases} \delta_1^g = \delta_1^m + \delta_1^f \\ V_1^g = V_1^m + V_1^f \end{cases} \quad (3.2.6)$$

2.2. Etude des conditions de bord au niveau du cône

2.2.1. Définition des éléments de liaison

On s'intéresse dans cette partie à l'étude du raccordement au niveau de la grande base du cône (Figure 3.5) :

$$\begin{cases} s = s_0 = R / \sin \alpha \\ \zeta = \zeta_0 \end{cases} \quad (3.2.7)$$

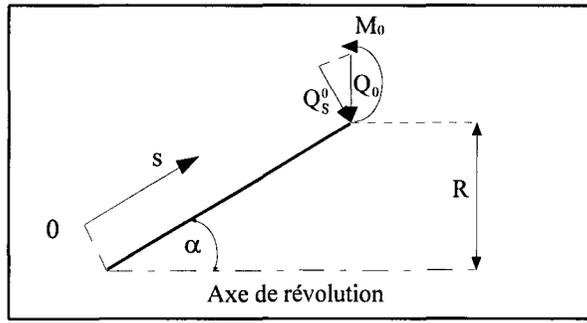


Figure 3.5. Etude du raccordement au niveau du cône

Les efforts de liaison au niveau du raccordement sont reliés aux contraintes généralisées par :

$$\begin{cases} M_0 = M_{22}(s = s_0) \\ Q_0 = \frac{Q_2(s = s_0)}{\cos \alpha} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

A partir des expressions (2.4.42 et 43), les relations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} Q_0 = \frac{4\lambda^2}{\zeta_0^2 \cos \alpha} (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2) \\ M_0 = -\frac{2}{\zeta_0^2} [C_1 (\zeta \varphi_2' + 2\nu \varphi_2) - C_2 (\zeta \varphi_1' + 2\nu \varphi_1)] \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Par la suite, les constantes C_1 et C_2 sont données en fonction de M_0 et Q_0 par :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\Delta} (\alpha_1 Q_0 + \alpha_2 M_0) \\ C_2 = \frac{1}{\Delta} (\alpha_3 Q_0 + \alpha_4 M_0) \end{cases} \quad (3.2.10)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\zeta_0^2}{4\lambda^2} \cos \alpha (\zeta_0 \varphi_1' + 2\nu \varphi_1) \\ \alpha_2 &= -\zeta_0^2 \varphi_2 / 2 \\ \alpha_3 &= \zeta_0^2 \cos \alpha (\zeta_0 \varphi_2' + 2\nu \varphi_2) / 4\lambda^2 \\ \alpha_4 &= \zeta_0^2 \varphi_1 / 2 \\ \Delta &= (\varphi_1 \varphi_1' + \varphi_2 \varphi_2') \zeta_0 + 2\nu (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

2.2.2. Expression des déplacements en fonction des inconnues de liaison

La solution du problème global est composée de la solution particulière donnée par la théorie de la membrane et de la solution en flexion obtenue par la résolution du problème homogène.

(a) Solution membranaire :

$$\begin{cases} \delta_2^m = \frac{2-\nu}{2Eh\cos\alpha} PR^2 \\ V_2^m = \frac{12\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2Eh^2\xi_0^2 \cos\alpha \sin\alpha} PR^2 \end{cases} \quad (3.2.12)$$

(b) Solution en flexion :

$$\begin{cases} \delta_2^f = \frac{\sin\alpha}{2Eh\Delta} \tan\alpha \xi_0^2 \left(\frac{\cos\alpha}{4\lambda^2} (H_2 \xi_0^2 - 4\nu^2 H_3) Q_0 + \frac{H_1}{2} M_0 \right) \\ V_2^f = -\frac{1}{Eh\Delta} \left(\frac{H_1}{4\lambda^2} \cos\alpha Q_0 + \frac{H_3}{2} \right) \end{cases} \quad (3.2.13)$$

avec

$$\begin{cases} H_1 = \xi_0(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1') \\ H_2 = (\varphi_1')^2 + (\varphi_2')^2 \\ H_3 = (\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 \end{cases} \quad (3.2.14)$$

$$\begin{cases} (\dots)^m \equiv \text{membrane} \\ (\dots)^f \equiv \text{flexion} \\ (\dots)^g \equiv \text{globale} \end{cases}$$

La solution globale est donc donnée par :

$$\begin{cases} \delta_2^g = \delta_2^m + \delta_2^f \\ V_2^g = V_2^m + V_2^f \end{cases} \quad (3.2.15)$$

2.3. Détermination des inconnues de liaison

2.3.1. Décomposition du problème de raccordement

Les deux inconnues de liaison sont déterminées en exprimant la continuité physique du champ de déplacement au niveau du raccordement. Pour cela, le problème est décomposé en une partie membranaire et une partie flexion (Figure 3.6).

Par comparaison avec les notations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} Q_0 = T_0 + \frac{PR}{2} \tan \alpha \\ M_0 = C_0 \end{cases} \quad (3.2.16)$$

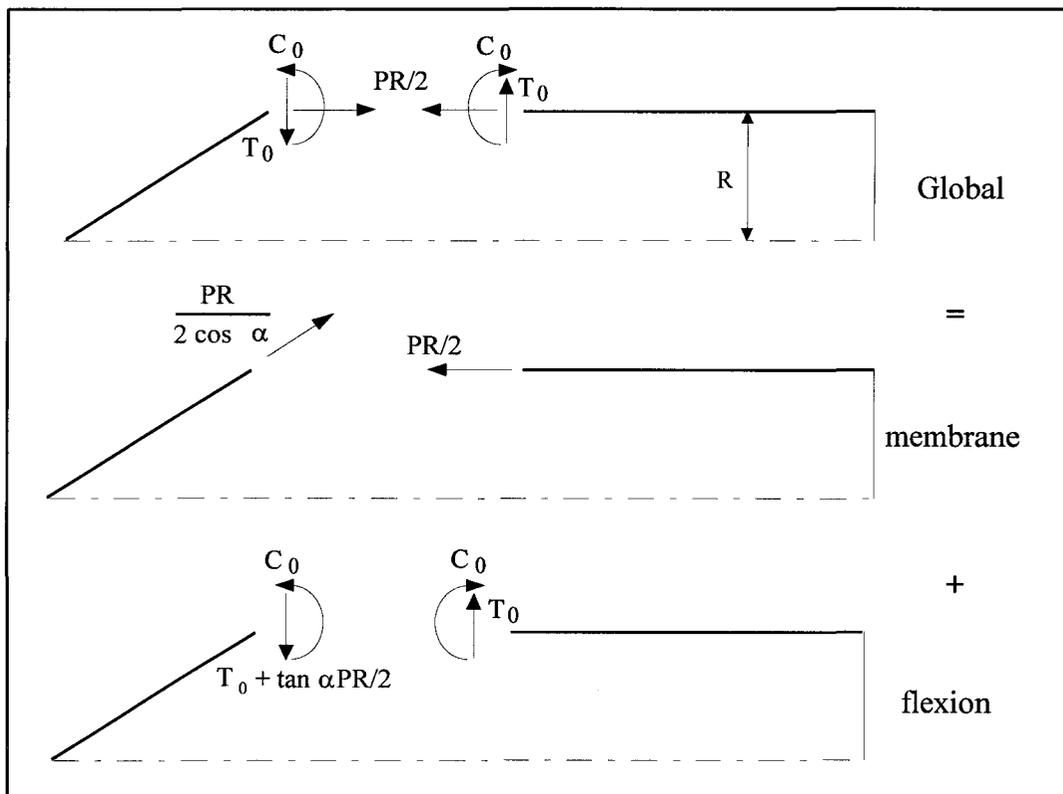


Figure 3.6. Décomposition du problème global

2.3.2. Partie cylindrique

Dans cette partie, on pose :

$$\begin{cases} \overline{M}_0 = M_0 / PR^2 \\ \overline{Q}_0 = Q_0 / PR \\ \overline{T}_0 = T_0 / PR \end{cases} \quad (3.2.17)$$

$$\begin{cases} \varpi = 2PR^2 / Eh \\ \overline{\mu} = -4PR^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} / Eh^2 \end{cases} \quad (3.2.18)$$

En injectant ces relations dans (3.2.6), les expressions du déplacement radial δ_1^g et de la rotation V_1^g en fonction des efforts de liaison sont données sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \delta_1^g / \varpi \\ V_1^g / \overline{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{M}_0 \\ \overline{T}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

où les coefficients d'influence a_i et b_i du cylindre sont :

$$\begin{cases} a_1 = -\sqrt{3(1-\nu^2)}(R/e)(h/e) \\ a_2 = -\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{R/e}(h/e) \\ a_3 = 0.25(2-\nu)(h/e) \end{cases} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{R/e}(h/e)^2 \\ b_2 = -0.5(h/e)^2 \\ b_3 = 0 \end{cases} \quad (3.2.21)$$

2.3.3. Partie conique

De même, la solution globale pour le cône est :

$$\begin{bmatrix} \delta_2^g / \varpi \\ V_2^g / \overline{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{M}_0 \\ \overline{T}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

où les constantes a_i et b_i appelées coefficients d'influence du cône sont :

$$\begin{cases} a_4 = H_1 \xi_0^2 \sin \alpha \tan \alpha / 8\Delta \\ a_5 = (H_2 \xi_0^2 - 4\nu^2 H_3) \sin \alpha / 4\Delta \\ a_6 = (2 - \nu) / 4 \cos \alpha - a_2 \tan \alpha / 2 \end{cases} \quad (3.2.23)$$

$$\begin{cases} b_4 = H_3 \xi_0^2 \tan \alpha / 4\Delta \\ b_5 = H_1 / 2\Delta \\ b_6 = -6 / \xi_0^2 \sin(2\alpha) - b_2 \tan \alpha / 2 \end{cases} \quad (3.2.24)$$

2.3.4. Calcul des inconnues de liaison

Les inconnues de liaison (\bar{M}_0 et \bar{Q}_0) sont déterminées à partir de la condition de continuité des déplacements et des rotations au niveau du raccordement :

$$\begin{cases} \delta_1^g(\text{cylindre}) = \delta_2^g(\text{cône}) \\ V_1^g(\text{cylindre}) = V_2^g(\text{cône}) \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Cette relation se met sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_0 \\ \bar{T}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}_0 \\ \bar{T}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

La résolution de ce système permet finalement, de déterminer les deux inconnues de liaison :

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 &= \frac{(a_6 - a_3)(b_2 - b_5) - (b_6 - b_3)(a_2 - a_5)}{(a_1 - a_4)(b_2 - b_5) - (b_1 - b_4)(a_2 - a_5)} \\ \bar{T}_0 &= \frac{(a_1 - a_4)(b_6 - b_3) - (b_1 - b_4)(a_2 - a_5)}{(a_1 - a_4)(b_2 - b_5) - (b_1 - b_4)(a_2 - a_5)} \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

2.4. Calcul des contraintes

2.4.1. Calcul des contraintes le long d'un méridien de la coque cylindrique

Les éléments de réduction sont donnés en fonction des inconnues de liaison par :

$$\begin{cases} N_{11} = PR + [-2\gamma R(\gamma M_0 + Q_0) \cos(\gamma x) - 2RM_0 \sin(\gamma x)] \exp(-\gamma x) \\ N_{22} = PR/2 \\ M_{22} = [M_0 \cos(\gamma x) - \gamma(\gamma M_0 + Q_0) \sin(\gamma x)] \exp(-\gamma x) \\ M_{11} = \nu [M_0 \cos(\gamma x) - \gamma(\gamma M_0 + Q_0) \sin(\gamma x)] \exp(-\gamma x) \\ Q_2 = [-(2\gamma M_0 + Q_0) \sin(\gamma x) + Q_0 \cos(\gamma x)] \exp(-\gamma x) \end{cases} \quad (3.2.28)$$

On déduit alors, les éléments de réduction adimensionnels :

$$\begin{cases} \bar{N}_{11} = 1 + R[-2\gamma(\gamma R\bar{M}_0 + \bar{Q}_0) \cos(\gamma x) - 2\bar{M}_0 \sin(\gamma x)] \exp(-\gamma x) \\ \bar{N}_{22} = 1/2 \\ \bar{M}_{22} = [\bar{M}_0 \cos(\gamma x) - \gamma(\gamma \bar{M}_0 + \bar{Q}_0/R) \sin(\gamma x)] \exp(-\gamma x) \\ \bar{M}_{11} = \nu [\bar{M}_0 \cos(\gamma x) - \gamma(\gamma \bar{M}_0 + \bar{Q}_0/R) \sin(\gamma x)] \exp(-\gamma x) \\ \bar{Q}_2 = [-(2\gamma \bar{M}_0/R + \bar{Q}_0) \sin(\gamma x) + \bar{Q}_0 \cos(\gamma x)] \exp(-\gamma x) \end{cases} \quad (3.2.29)$$

Finalement, les contraintes sont reliées aux efforts généralisés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = N_{11}/e + 12zM_{11}/e^3 \\ \sigma_{22} = N_{22}/e + 12zM_{22}/e^3 \\ \sigma_{23} = 3[1 - (2z/e^3)^2]Q_2/2e \end{cases} \quad (3.2.30)$$

d'où les contraintes adimensionnelles :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{11} = \bar{N}_{11} \pm 6R\bar{M}_{11}/e \\ \bar{\sigma}_{22} = \bar{N}_{22} \pm 6R\bar{M}_{22}/e \\ \bar{\sigma}_{23} = 3\bar{Q}_2/2 \end{cases} \quad (3.2.31)$$

et au niveau du raccordement, les relations (3.2.29) deviennent :

$$\begin{cases} \overline{N}_{11}^0 = 1 - 2\gamma(\gamma \overline{M}_0 + \overline{Q}_0) \\ \overline{N}_{22}^0 = 1/2 \\ \overline{M}_{11}^0 = \nu \overline{M}_0 \\ \overline{M}_{22}^0 = \overline{M}_0 \\ \overline{Q}_2^0 = \overline{Q}_0 \end{cases} \quad (3.2.32)$$

2.4.2. Calcul des contraintes le long d'un méridien de la coque conique

En utilisant les équations (2.4.41, 42 et 43) et (3.2.9 et 10), on obtient l'expression des éléments de réduction en fonction des inconnues de liaison et de la variable ζ :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{P\zeta^2 \tan \alpha}{4\lambda^2} + \frac{2\lambda^2 \tan \alpha}{\Delta \zeta} [(\alpha_1 Q_0 + \alpha_2 M_0) \text{Ber}'_2 - (\alpha_3 Q_0 + \alpha_4 M_0) \text{Bei}'_2] \\ N_{22} = \frac{P\zeta^2 \tan(\alpha)}{8\lambda^2} + \frac{4\lambda^2 \tan \alpha}{\Delta \zeta^2} [(\alpha_1 Q_0 + \alpha_2 M_0) \text{Ber}_2 - (\alpha_3 Q_0 + \alpha_4 M_0) \text{Bei}_2] \end{cases} \quad (3.2.33)$$

$$\begin{cases} M_{11} = -\frac{2}{\Delta \zeta^2} [(\alpha_1 Q_0 + \alpha_2 M_0)(-2\text{Bei}_2 + \nu \zeta \text{Bei}'_2) - (\alpha_3 Q_0 + \alpha_4 M_0)(2\text{Ber}_2 + \nu \zeta \text{Ber}'_2)] \\ M_{22} = -\frac{2}{\Delta \zeta^2} [(\alpha_1 Q_0 + \alpha_2 M_0)(-\zeta \text{Bei}'_2 - 2\nu \text{Bei}_2) - (\alpha_3 Q_0 + \alpha_4 M_0)(\zeta \text{Ber}'_2 + 2\nu \text{Ber}_2)] \\ Q_2 = \frac{4\lambda^2}{\zeta^2} [(\alpha_1 Q_0 + \alpha_2 M_0) \text{Ber}_2(\zeta) - (\alpha_3 Q_0 + \alpha_4 M_0) \text{Bei}_2(\zeta)] \end{cases}$$

où les fonctions de Bessel de seconde espèce (et leur dérivées) sont reliées aux fonctions de Bessel de première espèce (et leur dérivées) par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \text{Ber}_2(\zeta) = -\text{Ber} + 2\text{Bei}' / \zeta \\ \text{Bei}_2(\zeta) = -\text{Bei} - 2\text{Ber}' / \zeta \\ \text{Ber}'_2(\zeta) = -\text{Ber}' + 2\text{Ber} / \zeta - 4\text{Bei}' / \zeta^2 \\ \text{Bei}'_2(\zeta) = -\text{Bei}' + 2\text{Bei} / \zeta + 4\text{Ber}' / \zeta^2 \end{cases} \quad (3.2.34)$$

Les fonctions de Bessel de première espèce sont données, après le changement de variable $\xi = \zeta / \sqrt{2}$ et pour $\xi > 6$, par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \text{Ber}(\zeta) = \exp(\xi) \cos(\xi - \pi/8) / (2\pi\zeta) \\ \text{Bei}(\zeta) = \exp(\xi) \sin(\xi - \pi/8) / (2\pi\zeta) \\ \text{Ber}'(\zeta) = \exp(\xi) \cos(\xi + \pi/8) / (2\pi\zeta) \\ \text{Bei}'(\zeta) = \exp(\xi) \sin(\xi + \pi/8) / (2\pi\zeta) \end{cases} \quad (3.2.35)$$

Au niveau du raccordement, les éléments de réduction adimensionnels sont :

$$\begin{cases} \bar{N}_{11}^0 = 2a_1 \bar{M}_0 + (2a_2 + \nu \sin \alpha) \bar{Q}_0 \\ \bar{N}_{22}^0 = \sin \alpha \bar{Q}_0 + 0.5 \cos \alpha \\ \bar{M}_{11}^0 = 8(1 - \nu^2)(b_2 \bar{M}_0 + b_1 \bar{Q}_0) / (\xi_0^2 \tan \alpha) \\ \bar{M}_{22}^0 = \bar{M}_0 \\ \bar{Q}_2^0 = \bar{Q}_0 \cos \alpha \end{cases} \quad (3.2.36)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{N}_{11}^0 = N_{11}(\zeta = \zeta_0) / PR \\ \bar{N}_{22}^0 = N_{22}(\zeta = \zeta_0) / PR \\ \bar{M}_{11}^0 = M_{11}(\zeta = \zeta_0) / PR^2 \\ \bar{M}_{22}^0 = M_{22}(\zeta = \zeta_0) / PR^2 \\ \bar{Q}_2^0 = Q_2(\zeta = \zeta_0) / PR \end{cases}$$

et les contraintes adimensionnelles (3.2.30) deviennent :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{11} = (\bar{N}_{11} \pm 6R\bar{M}_{11} / h) / (h/e) \\ \bar{\sigma}_{22} = (\bar{N}_{22} \pm 6R\bar{M}_{22} / h) / (h/e) \\ \bar{\sigma}_{23} = 3\bar{Q}_2 / 2 \end{cases} \quad (3.2.38)$$

où, $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}(\zeta = \zeta_0) / \sigma^*$ sont des contraintes adimensionnelles et $\sigma^* = PR/e$ est la contrainte de membrane relative au cylindre.

Plus généralement, on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{cases} I_1 = \bar{\sigma}_{11} \\ I_2 = \bar{\sigma}_{22} \\ I_3 = \bar{\sigma}_{23} \end{cases} \quad (3.2.39)$$

où les coefficients I_1 et I_2 sont maximum en $z = \pm h/2$ et I_3 est maximum en $z = 0$.

3. RACCORDEMENT CYLINDRE-SPHERE

De la même manière que pour l'analyse du raccordement cylindre-cône, on décomposera le problème en deux parties [HAM95a]:

- étude de la partie cylindrique,
- étude de la partie sphérique.

L'étude de la partie cylindrique étant présentée dans le paragraphe précédent, on s'intéresse donc à l'étude du raccordement au niveau de la coque sphérique.

3.1. Définition des éléments de liaison de la coque sphérique

On suppose que le raccordement s'effectue au niveau du bord $\varphi = \beta$ (Figure 3.7).

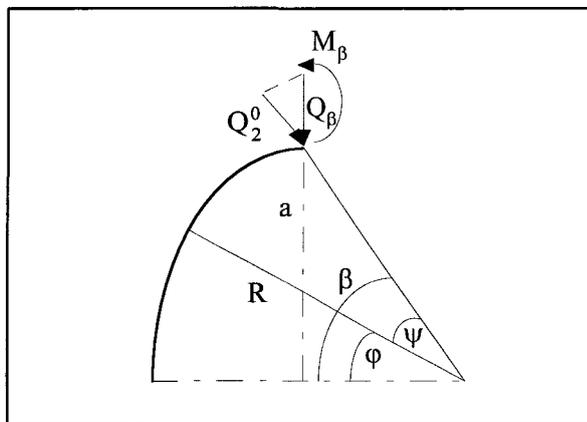


Figure 3.7. Définition des éléments de liaison

Les inconnues de liaison Q_β et M_β sont reliés aux éléments de réduction par:

$$\begin{cases} M_\beta = M_{22}^0 \\ Q_\beta = Q_2^0 / \sin \beta \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Au niveau du raccordement, les relations (2.4.58), (2.4.61) et (2.4.62) deviennent :

$$\begin{cases} Q_2^0 = A \sin \gamma \\ N_{11}^0 = -\sqrt{2} A \chi \cos(\gamma + \pi/4) \\ N_{22}^0 = A \cot \beta \sin \gamma \\ M_{22}^0 = \frac{RA}{\sqrt{2}\chi} \sin(\gamma + \pi/4) \end{cases} \quad (3.3.2)$$

$$\begin{cases} \delta = -\sqrt{2} \frac{RA}{Et} \chi \sin \varphi \cos(\gamma + \pi/4) \\ V = -\frac{2\chi^2}{Et} A \cos \gamma \end{cases} \quad (3.3.3)$$

où $(\dots)^0 \equiv (\dots)(\psi = 0)$.

Pour exprimer les constantes A et γ en fonction de M_β et Q_β , on utilise l'approche suivante:

(a) En appliquant un effort tranchant Q_β et en annulant le moment fléchissant $M_\beta = 0$ dans (3.3.2), les constantes A et γ sont :

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{\pi}{4} \\ A = -\sqrt{2} \sin \beta Q_\beta \end{cases} \quad (3.3.4)$$

(b) De façon analogue, en appliquant un moment fléchissant M_β et en annulant l'effort tranchant $Q_\beta = 0$ dans (3.3.2), on obtient :

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ A = 2\chi M_\beta / R \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Par superposition, les relations (3.3.2) et (3.3.3) se transforment en :

$$\begin{cases} N_{11}^0 = -2\chi \sin\beta Q_\beta + \frac{2\chi^2}{R} M_\beta \\ N_{22}^0 = \cos\beta Q_\beta \end{cases} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{cases} \delta_3^f = \frac{2}{Et} \chi \sin\beta \left(-\chi M_\beta + \frac{1}{R} \sin\beta Q_\beta \right) \\ V_3^f = -\frac{2}{Et} \chi^2 \left(\frac{2\chi}{R} M_\beta - \sin\beta Q_\beta \right) \end{cases} \quad (3.3.7)$$

3.2. Expression des déplacements en fonction des inconnues de liaison

Comme pour l'étude des coques cylindrique et conique, on décomposera le problème pour la coque sphérique en une partie membranaire et une partie en flexion :

(a) Solution membranaire :

$$\begin{cases} \delta_3^m = \frac{Pa^2}{2Et} \frac{1-\nu}{\sin\beta} \\ V_3^m = 0 \end{cases} \quad (3.3.8)$$

(b) Solution en flexion :

$$\begin{cases} \delta_3^f = \frac{2Pa^2}{Et} \left(f \frac{a}{t} \bar{M}_\beta - \sqrt{f \sin\beta} \frac{a}{t} \bar{Q}_\beta \right) \\ V_3^f = -\frac{4Pa^2}{Et^2} f \left(\sqrt{af/t \sin\beta} \bar{M}_\beta - \frac{1}{2} \bar{Q}_\beta \right) \end{cases} \quad (3.3.9)$$

où $a = R \sin\varphi$ est le rayon de raccordement, $f = \sqrt{3(1-\nu^2)}$, $\bar{M}_\beta = M_\beta / Pa^2$, $\bar{Q}_\beta = Q_\beta / Pa$.

Par sommation, la solution globale est donnée par :

$$\begin{cases} \delta_3^g = \delta_3^m + \delta_3^f \\ V_3^g = V_3^m + V_3^f \end{cases} \quad (3.3.10)$$

3.3. Détermination des inconnues de liaison

3.3.1. Décomposition du problème global

Les deux inconnues de liaison sont déterminées en exprimant la continuité physique du champ de déplacement au niveau du raccordement cylindre-sphère. Pour cela, Le problème est décomposé en une partie membranaire et une partie de flexion (Figure 3.8) :

Par comparaison avec les notations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} M_\beta = C_0 \\ Q_\beta = T_0 + \cot \beta Pa / 2 \end{cases} \quad (3.3.11)$$

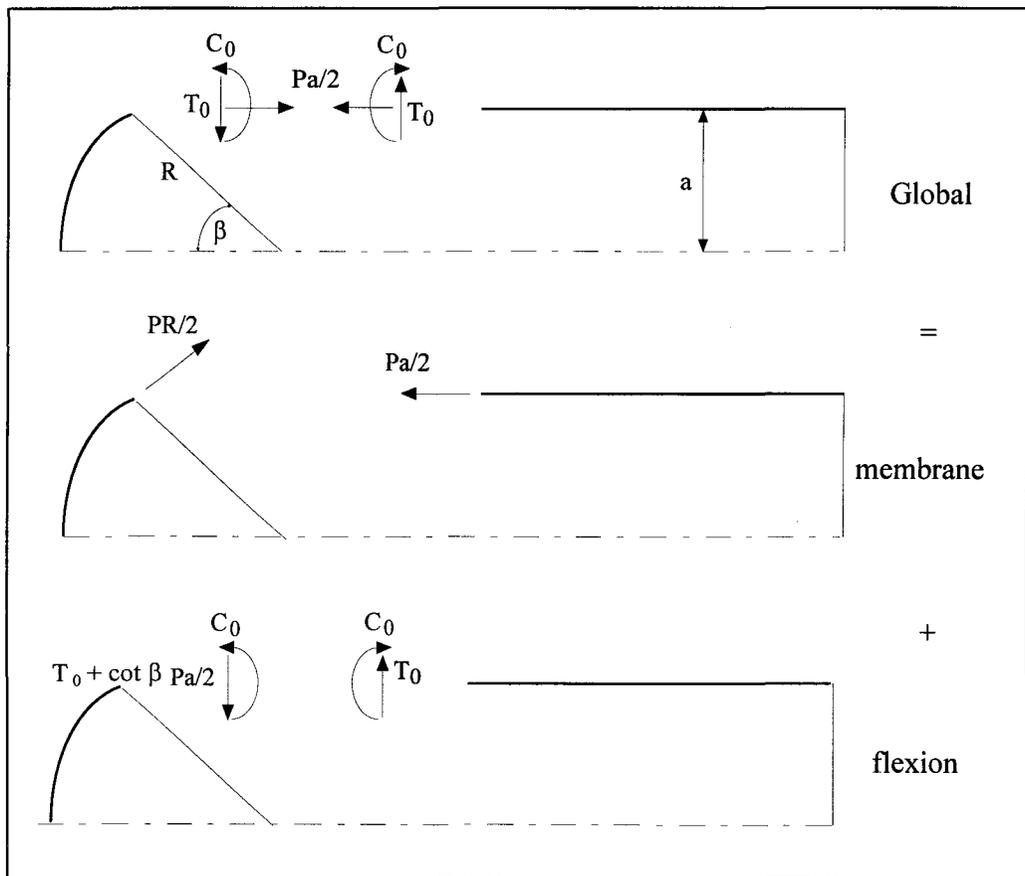


Figure 3.8. Décomposition du problème de raccordement cylindre-sphère

En remplaçant cette relation dans (3.3.10), la solution globale est donnée sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \delta_3 / \varpi \\ V_3 / \bar{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_7 & a_8 & a_9 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_0 \\ \bar{T}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

où $\varpi = 2Pa^2 / Et$, $\bar{\mu} = -4Pa^2 \sqrt{3(1-\nu^2)} / Et^2$, $\bar{C}_0 = C_0 / Pa^2$ et $\bar{T}_0 = T_0 / Pa$ sont des quantités adimensionnelles.

Les coefficients d'influence de la coque sphérique sont alors donnés par :

$$\begin{cases} a_7 = f(a/e)(e/t) \\ a_8 = -\sqrt{f}(a/e)^{1/2}(e/t)^{1/2}(\sin\beta)^{1/2} \\ a_9 = -a_8 \cot\beta / 2 + (1-\nu) / 4 \sin\beta \end{cases} \quad (3.3.14)$$

$$\begin{cases} b_7 = -\sqrt{f}(a/e)^{1/2}(e/t) + 1/2(\sin\beta)^{-1/2} \\ b_8 = +1/2 \\ b_9 = \cot\beta / 4 \end{cases} \quad (3.3.15)$$

3.3.2. Calcul des inconnues de liaison

En exprimant la continuité physique du déplacement radial et de la rotation au niveau du raccordement :

$$\begin{cases} \delta_1^g(\text{cylindre}) = \delta_3^g(\text{sphère}) \\ V_1^g(\text{cylindre}) = V_3^g(\text{sphère}) \end{cases} \quad (3.3.16)$$

on en déduit l'expression des éléments de liaison :

$$\begin{cases} \bar{C}_0 = \frac{(a_9 - a_3)(b_8 - b_5) - (b_9 - b_3)(a_2 - a_8)}{(a_1 - a_7)(b_2 - b_8) - (b_9 - b_4)(a_2 - a_8)} \\ \bar{T}_0 = \frac{(a_1 - a_7)(b_9 - b_3) - (b_1 - b_7)(a_2 - a_8)}{(a_1 - a_7)(b_2 - b_8) - (b_9 - b_4)(a_2 - a_8)} \end{cases} \quad (3.3.17)$$

Par la suite, les relations (3.3.4) et (3.3.5) injectées dans (3.3.16) permettent d'obtenir par superposition, l'expression des éléments de réduction, du déplacement radial et de la rotation de la normale relatifs à la partie sphérique :

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= -e^{-\chi\psi} \left(\frac{2\chi}{R} \sin(\chi\psi) M_\beta + \sqrt{2} \sin\beta \sin(\chi\psi - \frac{\pi}{4}) Q_\beta \right) \\
 N_{11} &= \frac{Pa}{2 \sin\beta} + 2\chi \sin\beta e^{-\chi\psi} \left(\frac{\sqrt{2}\psi}{R} \cos(\chi\psi + \frac{\pi}{4}) M_\beta + \cos(\chi\psi) Q_\beta \right) \\
 N_{22} &= \frac{Pa}{2 \sin\beta} - \cot\beta e^{-\chi\psi} \left(\frac{2\chi}{R} \sin(\chi\psi) M_\beta + \sqrt{2} \sin\beta \sin(\chi\psi - \frac{\pi}{4}) Q_\beta \right) \\
 M_{22} &= -ve^{-\chi\psi} \left(\sqrt{2} \sin(\chi\psi + \frac{\pi}{4}) M_\beta + \frac{R}{\chi} \sin\beta \sin(\chi\psi) Q_\beta \right) \\
 M_{11} &= -e^{-\chi\psi} \left(\sqrt{2} \sin(\chi\psi + \frac{\pi}{4}) M_\beta + \frac{R}{\chi} \sin\beta \sin(\chi\psi) Q_\beta \right) \tag{3.3.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \delta_3^g = \frac{Pa^2}{2Et} \frac{1-\nu}{\sin\beta} + \frac{2}{Et} \sin\beta e^{-\chi\psi} \left(\sqrt{2}\chi^2 \cos(\chi\psi + \frac{\pi}{4}) M_\beta + \sin\beta \chi R \cos(\chi\psi) Q_\beta \right) \\
 V_3^g = \frac{2}{Et} \chi^2 e^{-\chi\psi} \left(\frac{2\chi}{R} \cos(\chi\psi) M_\beta + \sqrt{2} \sin\beta \cos(\chi\psi - \frac{\pi}{4}) Q_\beta \right)
 \end{cases} \tag{3.3.19}$$

et on en déduit les éléments de réduction adimensionnels par :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_2 &= -\sin\beta e^{-\chi\psi} \left(2\chi \sin(\chi\psi) \bar{M}_\beta + \sqrt{2} \sin(\chi\psi - \frac{\pi}{4}) \bar{Q}_\beta \right) \\
 \bar{N}_{11} &= \frac{1}{2 \sin\beta} + 2\chi \sin\beta e^{-\chi\psi} \left(\sqrt{2}\psi \sin\beta \cos(\chi\psi + \frac{\pi}{4}) \bar{M}_\beta + \cos(\chi\psi) \bar{Q}_\beta \right) \\
 \bar{N}_{22} &= \frac{1}{2 \sin\beta} - \cot\beta e^{-\chi\psi} \left(2\chi \sin(\chi\psi) \bar{M}_\beta + \sqrt{2} \sin(\chi\psi - \frac{\pi}{4}) \bar{Q}_\beta \right) \\
 \bar{M}_{11} &= -ve^{-\chi\psi} \left(\sqrt{2} \sin(\chi\psi + \frac{\pi}{4}) \bar{M}_\beta + \frac{1}{\chi} \sin(\chi\psi) \bar{Q}_\beta \right) \\
 \bar{M}_{22} &= -e^{-\chi\psi} \left(\sqrt{2} \sin(\chi\psi + \frac{\pi}{4}) \bar{M}_\beta + \frac{1}{\chi} \sin(\chi\psi) \bar{Q}_\beta \right) \tag{3.3.20}
 \end{aligned}$$

Au niveau du raccordement, ces relations deviennent :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_2^0 &= \left(\bar{T}_0 + \frac{\cot\beta}{2} \right) \sin\phi \quad , \quad \bar{N}_{22}^0 = \left(\bar{T}_0 + \cot\beta/2 \right) \cos\beta, \\
 \bar{N}_{11}^0 &= \frac{1}{2 \sin\beta} + 2f\left(\frac{a}{t}\right) \bar{M}_0 + 2\lambda \sin\beta \left(\bar{T}_0 + \cot\beta/2 \right) \\
 \bar{M}_{11}^0 &= \nu \bar{M}_0 \quad , \quad \bar{M}_{22}^0 = \bar{M}_0
 \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Et finalement, les contraintes sont déterminées classiquement par les relations (3.2.30) données dans le paragraphe 2.4.1.

4. PRESENTATION DES RESULTATS

Afin d'étudier l'influence du raccordement dans une structure de type appareil à pression, nous présenterons la solution en contraintes adimensionnelles notées I_1 et I_2 :

- Contraintes circonférentielles adimensionnelles : $I_1 = \sigma_{11} / \sigma^*$
- Contraintes méridiennes adimensionnelles : $I_2 = \sigma_{22} / \sigma^*$

où, $\sigma^* = PR / e$ est la contrainte circonférentielle de membrane pour la partie cylindrique.

On s'intéressera plus spécialement au niveau et à la répartition des contraintes adimensionnelles le long d'un méridien de l'appareil à pression. On étudiera l'influence de deux classes de paramètres géométriques :

- (a) le rapport $\eta = h / R$ infiniment petit paramètre géométrique en théorie des coques,
- (b) les paramètres spécifiques à la discontinuité géométrique au niveau du raccordement ; dans notre cas ce sera le demi angle au sommet α du cône ou l'angle d'ouverture de la coque sphérique.

4.1. Raccordement cylindre-cône

Dans cette partie, nous exploiterons les résultats obtenus précédemment pour le raccordement coque cylindrique-coque conique. La géométrie étudiée est donnée par la figure 3.9 ci-après. Nous présenterons les distributions des contraintes adimensionnelles le long d'un méridien de la structure et nous étudierons surtout l'influence des paramètres géométriques précédemment cités, sur la solution dans les zones proches du raccord.

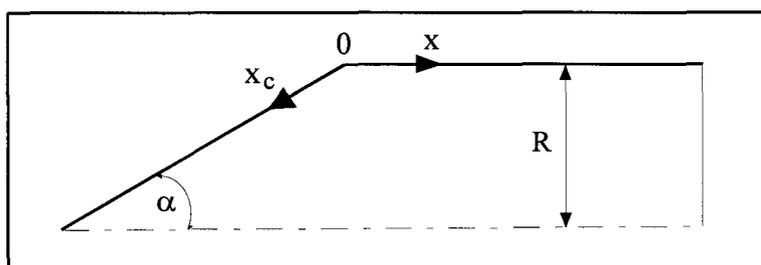
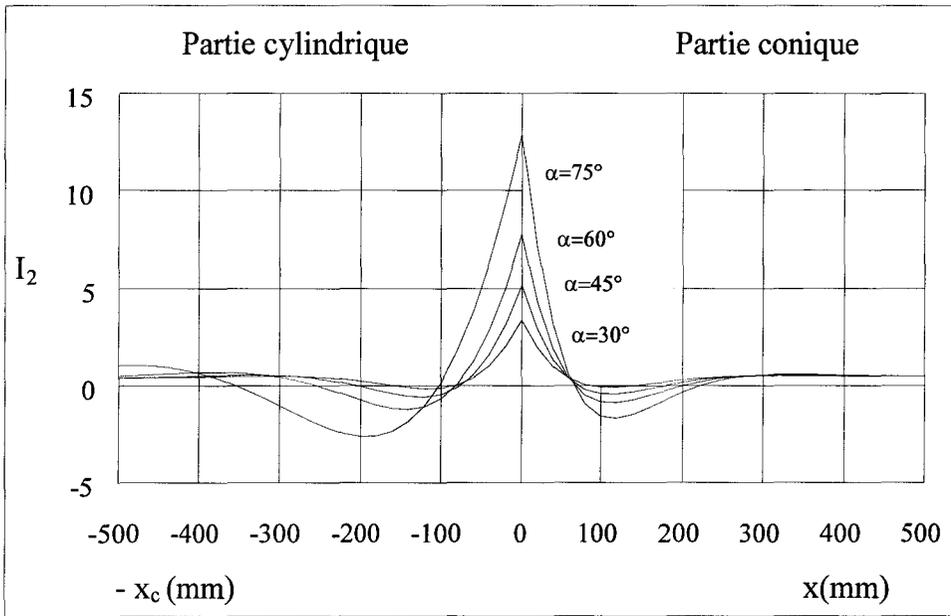


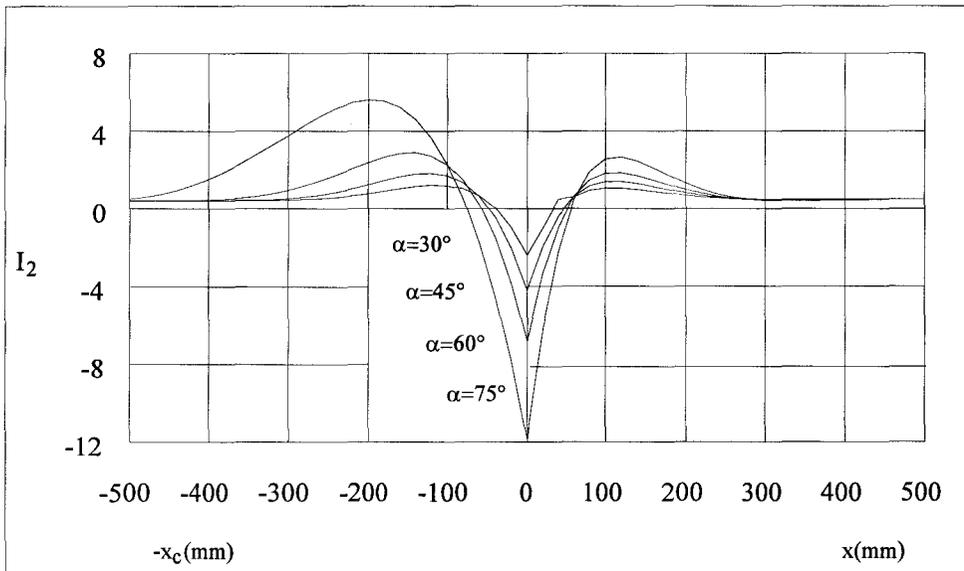
Figure 3.9. Définition des variables méridiennes

4.1.1. Influence de l'angle α sur le niveau et la répartition des contraintes

Pour illustrer cette étude, on prend $\eta = 1/80$ (ce qui correspond à des coques minces) et on fait varier α entre 30° et 75° .

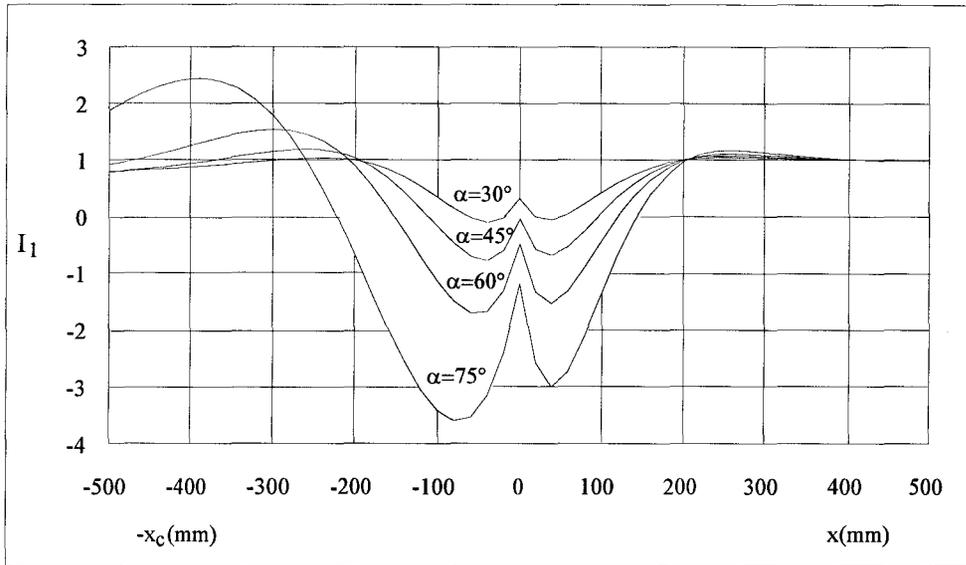


Graph 1. Répartition des contraintes méridiennes sur la surface interne

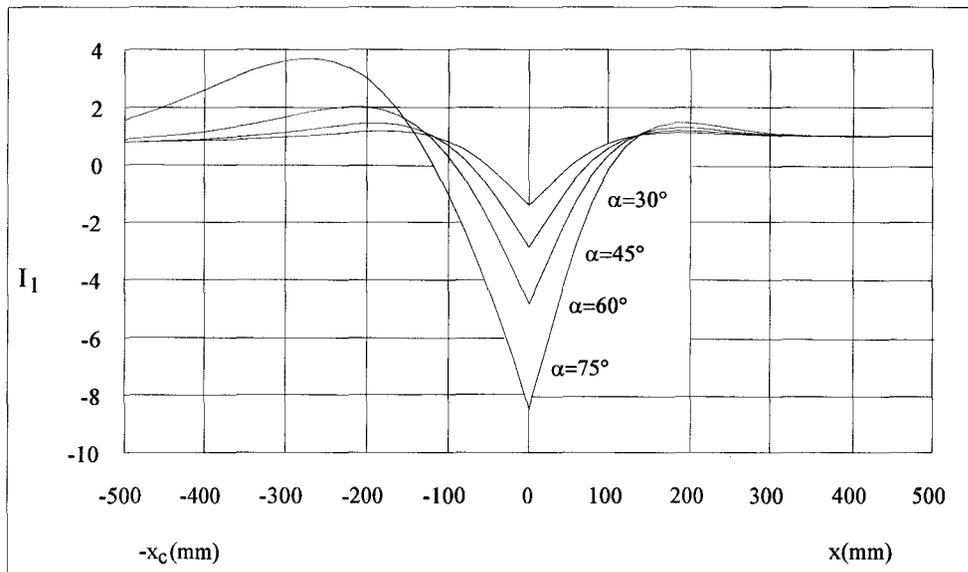


Graph 2. Répartition des contraintes méridiennes sur la surface externe

Les graphes 1 et 2 représentent les contraintes adimensionnelles longitudinales respectivement sur les faces internes et externes de part et d'autre de la discontinuité géométrique et pour des angles α de 30° , 45° , 60° et 75° .



Graph 3. Répartition des contraintes circonférentielles sur la surface interne



Graph 4. Répartition des contraintes circonférentielles sur la surface externe

De même, les graphes 3 et 4 représentent les contraintes adimensionnelles circonférentielles respectivement sur les faces interne et externe de part et d'autre de la discontinuité géométrique et pour des angles α de 30° , 45° , 60° et 75° .

Ces quatre graphes montrent que les contraintes sont extrémales au niveau du raccordement. Les contraintes longitudinales sur les faces extrêmes et la contrainte circonférentielle sur la face externe, atteignent leur maximum en valeur absolue au niveau de la discontinuité. Par contre, la contrainte circonférentielle sur la face interne présente un extremum au niveau de la discontinuité mais le maximum est atteint dans une zone proche de la discontinuité qui se situe du côté de la coque conique (graphe 3). Dans la zone de raccord, la coque peut être, en fonction des paramètres de discontinuité, en compression circonférentielle suivant toute son épaisseur (voir aussi graphe 13). Pouvant faire craindre à un risque par flambage local et sachant que de part et d'autre de la jonction, la structure est en traction, une étude complémentaire permettrait d'apporter les éléments nécessaires pour se prémunir contre tout risque de ruine.

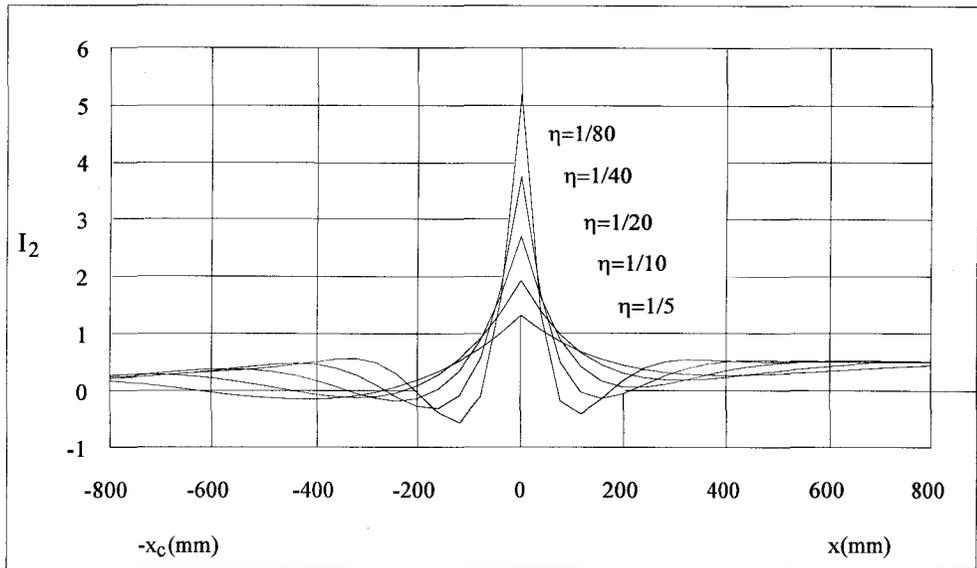
On montre donc que le niveau des contraintes augmente avec l'angle α et que la contrainte maximale est la contrainte longitudinale sur la surface interne. Dans tous les cas, loin de la zone d'influence du raccordement, les contraintes tendent vers la solution de membrane.

En résumé, pour une variation de l'angle de 30° à 75° , on constate une augmentation en valeur absolue du niveau de contraintes de :

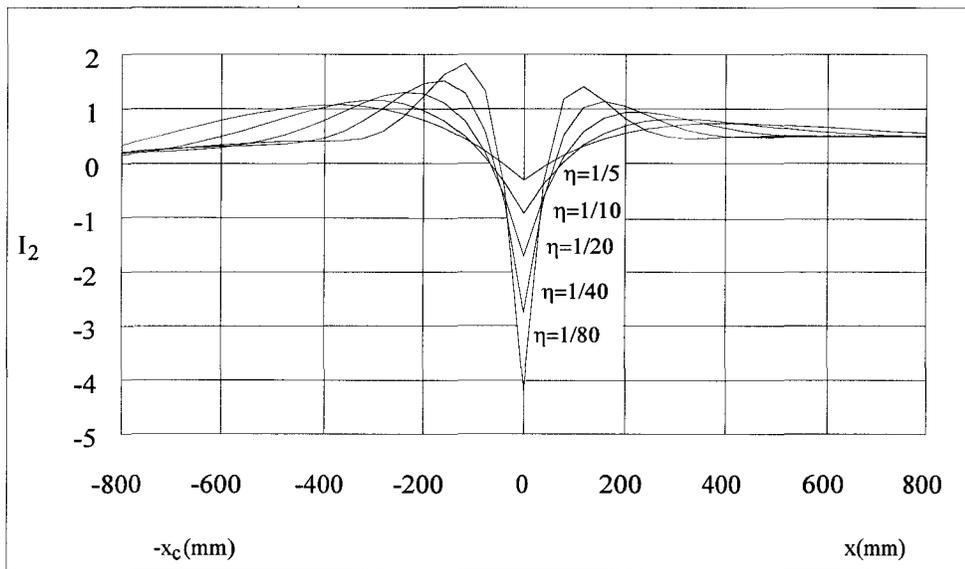
- 75 % pour les contraintes longitudinales internes,
- 80 % pour les contraintes longitudinales externes,
- 80 % pour les contraintes circonférentielles internes,
- 85 % pour les contraintes circonférentielles externes.

4.1.2. Influence du paramètre η sur le niveau et la répartition des contraintes

Pour étudier l'influence du petit paramètre géométrique $\eta = h/R$ sur la solution au niveau du raccordement, nous représenterons les contraintes adimensionnelles sur les faces interne et externe pour un angle $\alpha = 45^\circ$ et en faisant varier η de $1/5$ à $1/80$.

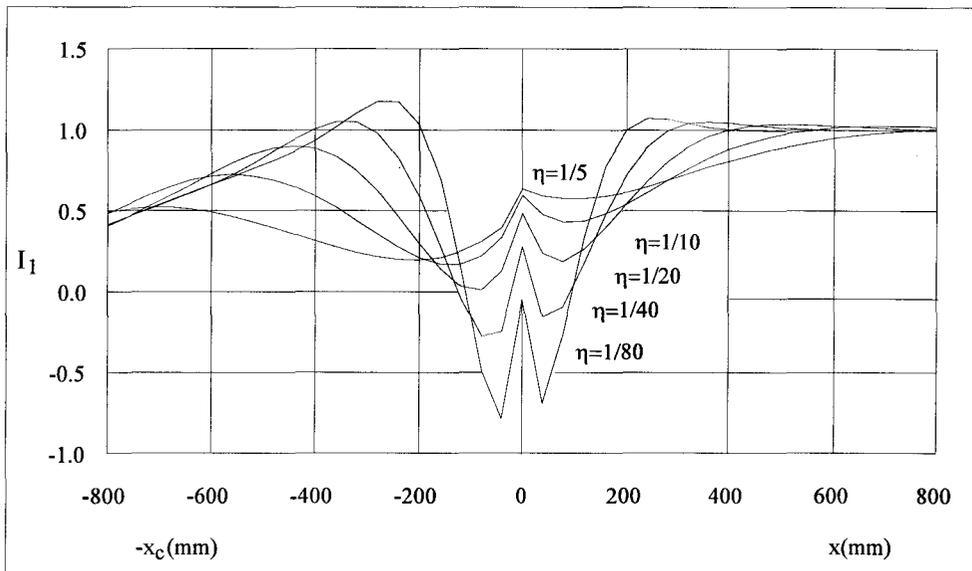


Graph 5. Répartition des contraintes méridiennes sur la surface interne

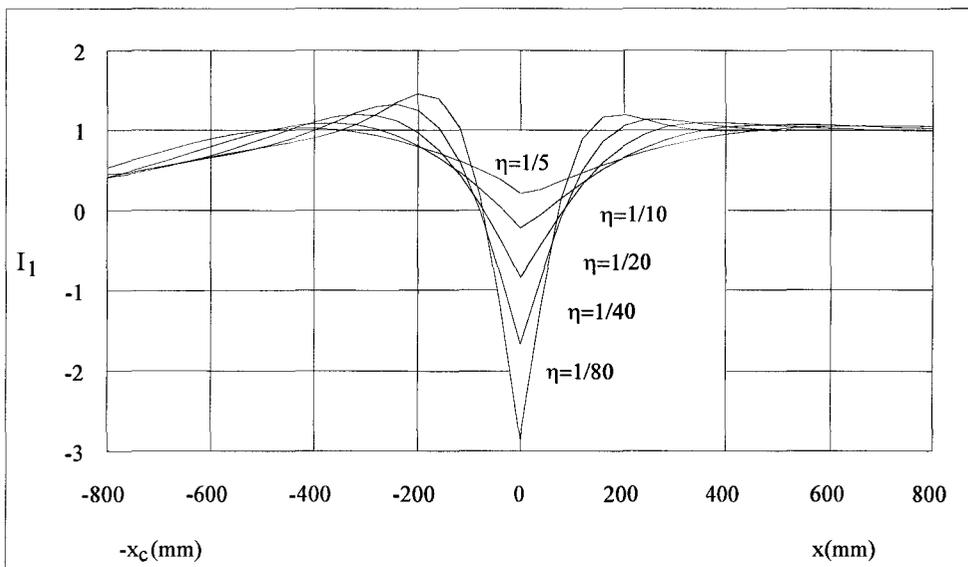


Graph 6. Répartition des contraintes méridiennes sur la surface externe

Les graphes 5 et 6 représentent les contraintes méridiennes adimensionnelles sur les surfaces extrêmes pour $h/R = 1/5, 1/10, 1/20, 1/50$ et $1/80$ et $\alpha = 45^\circ$.



Graph 7. Répartition des contraintes circonférentielles sur la surface interne



Graph 8. Répartition des contraintes circonférentielles sur la surface externe

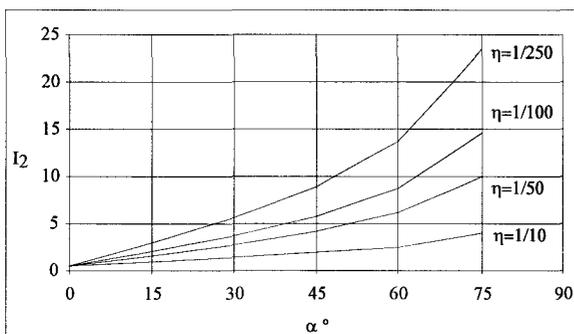
Les graphes 7 et 8 montrent que les contraintes circonférentielles sont de compression dans les zones de raccords. Comme pour le raccordement cylindre-cône, une étude complémentaire nous permettrait de donner les éléments supplémentaires pour se prémunir contre tout risque de ruine par flambage. Dans certains cas (réservoir de stockage), c'est ce procédé qui est utilisé comme système de sécurité contre d'éventuels dépassements de la pression limite. On provoque ainsi une rupture au niveau de la zone de raccord ; la partie principale qui permet de stocker le liquide ne sera donc pas affectée.

Ces résultats montrent l'influence du petit paramètre $\eta = h/R$ sur la répartition des contraintes dans la zone du raccord. Pour toutes les contraintes, le raccord est une zone d'extremum ; ainsi pour $I_1(z = +h/2)$ et $I_2(z = \pm h/2)$, cet extremum en valeur absolue est un maximum et pour $I_1(z = -h/2)$ le maximum est atteint dans la zone proche du raccordement. Comme dans le paragraphe précédent, on retrouve que l'influence du raccordement s'atténue pour atteindre la solution de membrane lorsqu'on s'éloigne de la zone de discontinuité. On vérifie que dans tous les cas, l'amplitude de la contrainte dans la zone de raccordement augmente quand le paramètre $\eta = h/R$ diminue, traduisant ainsi que la structure devient de plus en plus mince.

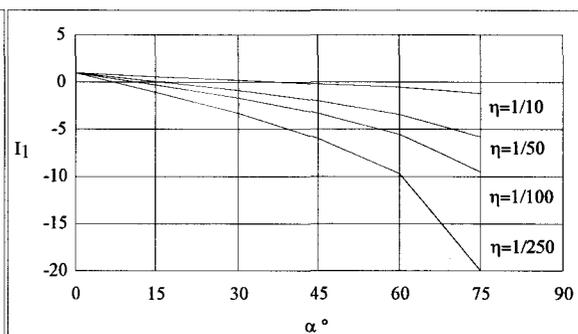
4.1.3. Variation des contraintes de raccordement en fonction de α et de η :

Afin de montrer l'influence cumulée des deux paramètres géométriques sur le niveau des contraintes dans la section de raccord, les résultats précédents sont regroupés dans les deux graphes 9 et 10 ; ces deux contraintes (en valeur absolue) seront comparées entre elles au graphe 11 :

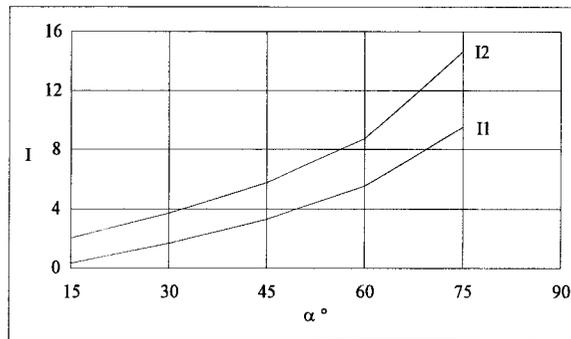
- (a) la contrainte méridionale maximale se situe au niveau de la surface interne I_2 ($x = 0$, $z = -h/2$) (voir graphe 9),
- (b) la contrainte circonférentielle maximale se situe au niveau de la surface externe I_1 ($x = 0$, $z = +h/2$) (voir graphe 10).



Graphe 9. Variation de I_2 en fonction α et h/R ($x = 0$ et $z = -h/2$).



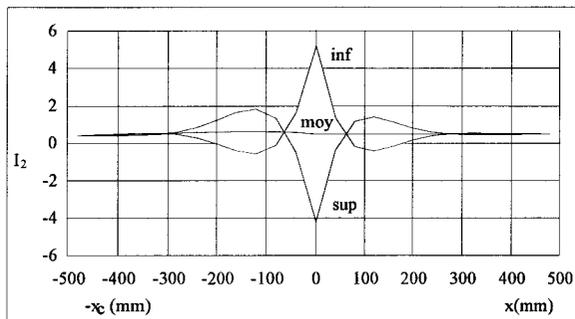
Graphe 10. Variation de I_1 en fonction α et h/R ($x = 0$ et $z = +h/2$).



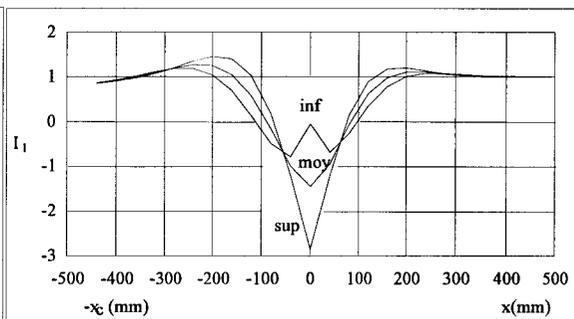
Graphe 11. Comparaison des contraintes méridiennes et circonférentielles en $x = 0$ ($h/R=1/80$)

On montre que pour tous couples $(\alpha, h/R)$, au niveau du raccordement, la contrainte maximale est la contrainte méridienne.

On présente finalement, la répartition des contraintes sur les surfaces inférieure (inf), moyenne (moy) et supérieure (sup) :



Gr 12. Distribution de I_2 le long des méridiens $z = \pm h/2, 0$ et pour $\alpha = 45^\circ$ et $\eta = 1/80$.



Gr 13. Distribution de I_1 le long des méridiens $z = \pm h/2, 0$ et pour $\alpha = 45^\circ$ et $\eta = 1/80$.

On montre qu'au niveau de la surface moyenne, les contraintes méridiennes (Graphe 12) sont de membrane. Par contre l'équilibre suivant la direction circonférentielle nécessite l'introduction des efforts de flexion (Graphe 13) pour assurer l'équilibre de la structure. Sur ce graphe, la section de raccord subit une compression totale suivant la direction circonférentielle (signe négatif).

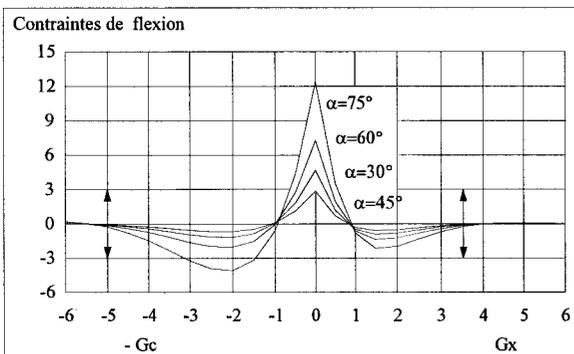
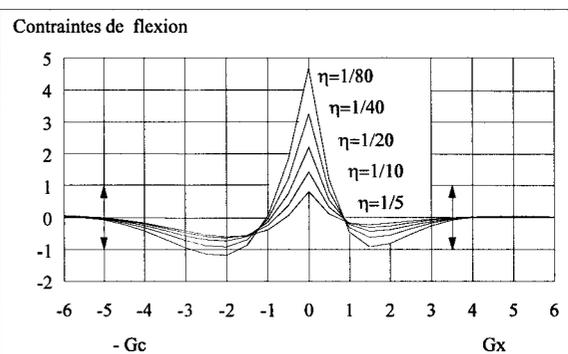
4.1.4. Détermination des zones d'influence

Dans la pratique industrielle, la localisation de la zone d'influence, zone où les contraintes sont encore influencées par la discontinuité, est très importante. Par exemple, ce sont des zones où on évitera de mettre des soudures qui sont dues aux accessoires annexes de l'appareil à pression tels que les tubulures, les brides, les renforts d'ouvertures, les trous d'homme... On évitera aussi que deux zones d'influence ne se superposent. Dans notre étude, on cherchera à déterminer la distance à partir de laquelle les contraintes de flexion s'annulent. Pour cela, on étudie la variation des contraintes dues au moment fléchissant longitudinal M_{22} en fonction des variables G_x pour le cylindre et G_c pour le cône, définies par :

$$\begin{aligned} G_x &= \gamma x \\ G_c &= 2\lambda(\sqrt{s_0} - \sqrt{s}) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Afin d'étudier les variations des zones d'influence, on présente (graphes 14 et 15) les distributions des contraintes adimensionnelles de flexion en fonction des quantités G_x et G_c .

Le graphe 14 donne la contrainte adimensionnelle de flexion en $z = -h/2$ et pour $\eta = 1/80$ et $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ et 75° . De même, le graphe 15 donne la variation de cette contrainte pour $\alpha = 45^\circ$ et $\eta = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$ et $1/80$.

Gr 14. Contraintes de flexion en fonction de l'angle α .Gr 15. Contraintes de flexion en fonction de η .

On montre qu'au-delà des valeurs $G_x \approx 3.5$ et $G_c \approx 5$, les contraintes de flexion s'annulent. En prenant $\nu = 0.3$, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{cases} x \approx 2.72\sqrt{Re} \\ s_0 - s \approx 2.72\sqrt{Rh/\cos\alpha} - 1.89h \tan\alpha \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Sous forme adimensionnelle, ces relations deviennent:

$$\begin{cases} \bar{x} \approx 2.72\sqrt{\eta} \\ \bar{d} \approx \frac{2.72}{\sqrt{\cos\alpha}} \sqrt{\bar{h}} \sqrt{\eta} - 1.89\bar{h}\eta \tan\alpha \end{cases} \quad (3.4.3)$$

avec $\bar{d} = (s_0 - s)/R$, $\bar{x} = x/R$ et $\bar{h} = h/e$.

On vérifie alors, que pour $\alpha = 0$, les expressions des zones d'influence pour le cylindre et le cône sont identiques.

4.2. Raccordement cylindre-sphère

Pour l'analyse du problème de raccord cylindre-sphère, on suivra la même démarche que précédemment. La description géométrique de ce type de structure est définie par la figure 3.9. Dans ce cas, les paramètres géométriques de raccordement sont :

- η l'infiniment petit géométrique,
- φ l'angle d'ouverture de la coque sphérique

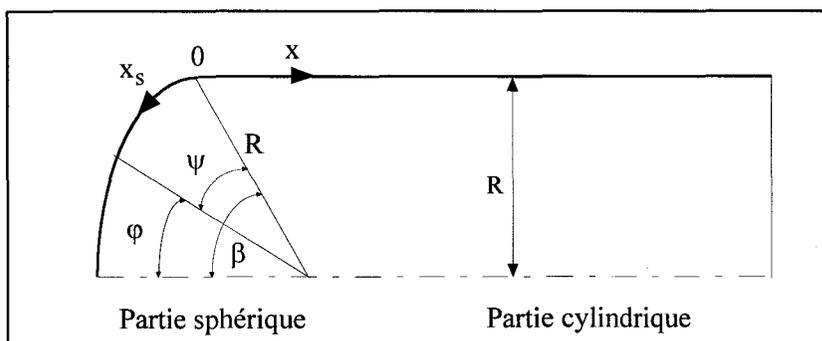


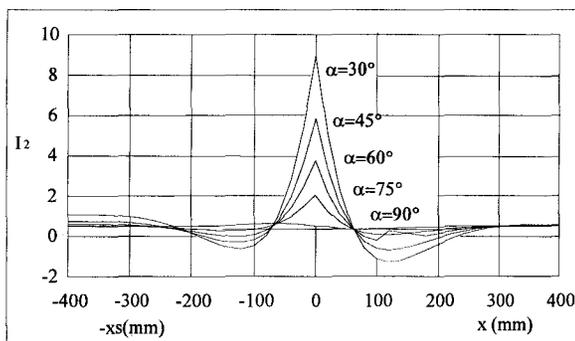
Figure 3.10. Description géométrique du raccordement cylindre-sphère

4.2.1. Variation des contraintes en fonction de l'angle φ

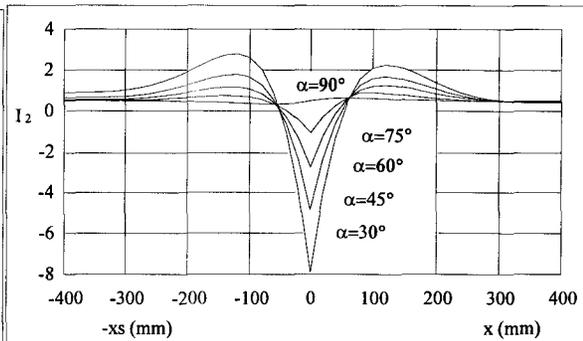
Nous présenterons les distributions des contraintes admissibles I_1 et I_2 sur les surfaces extrêmes de la structure. Les données numériques liées à cette étude sont :

$$\eta = 1/100,$$

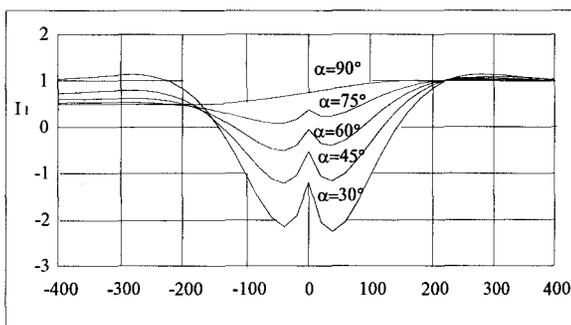
$$30^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ.$$



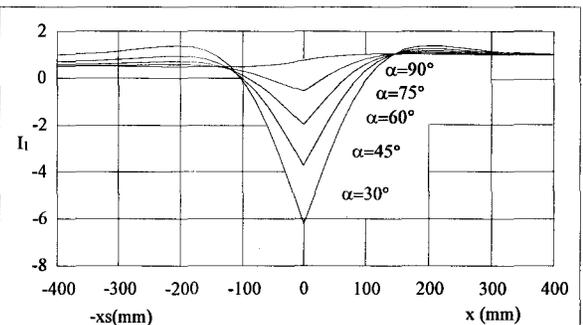
Gr 16. Distribution des contraintes longitudinales I_2 sur la surface interne.



Gr 17. Distribution des contraintes longitudinales I_2 sur la surface externe.



Gr 18. Distribution des contraintes circonférentielles I_1 sur la surface interne.



Gr 19. Distribution des contraintes circonférentielles I_1 sur la surface externe.

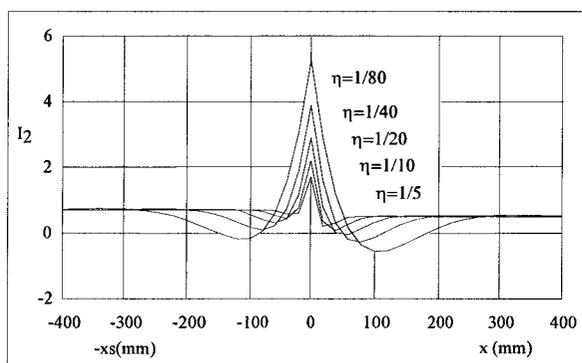
Ces graphes montrent l'influence de l'angle φ sur le niveau et la répartition des contraintes dans la zone proche de la discontinuité. On retrouve les mêmes allures qu'au paragraphe précédent ; ainsi toutes les contraintes atteignent un extremum au niveau du raccord avec une distribution spécifique des contraintes circonférentielle sur la face interne. Toutes les contraintes augmentent avec l'angle $(\pi/2 - \varphi)$ qui caractérise la discontinuité géométrique.

4.2.2. Influence de η sur le niveau et la répartition des contraintes

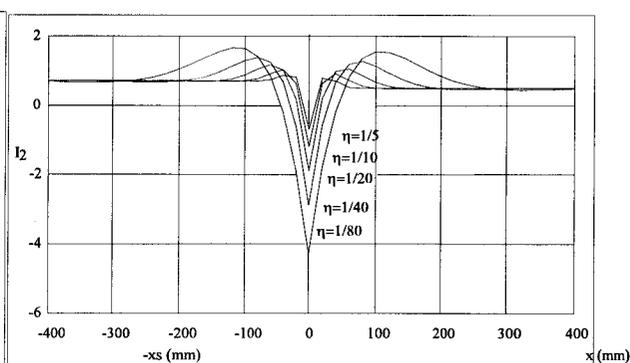
De même, pour montrer l'influence du paramètre géométrique η sur la solution au niveau de la jonction, nous présentons les graphes 20 et 24. Les valeurs numériques liées à cette étude sont :

$$\varphi = 45^\circ$$

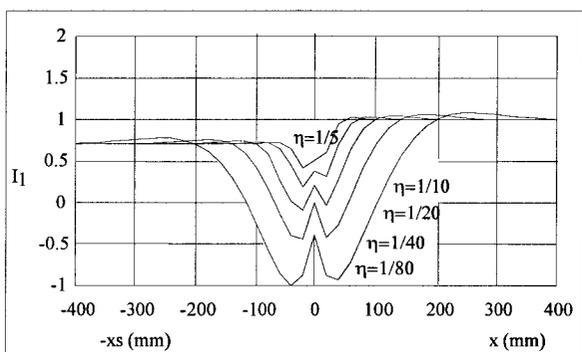
$$\eta = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40 \text{ et } 1/80.$$



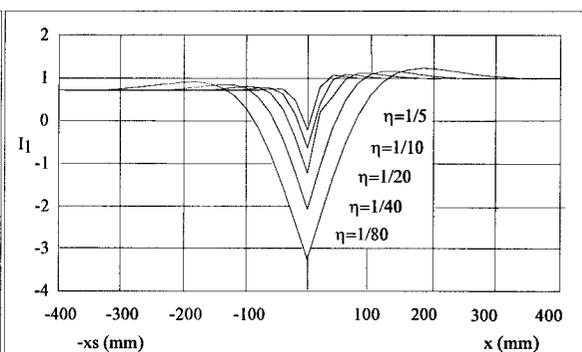
Gr 20. Distribution des contraintes longitudinales I_2 sur la surface interne.



Gr 21. Distribution des contraintes longitudinales I_2 sur la surface externe.



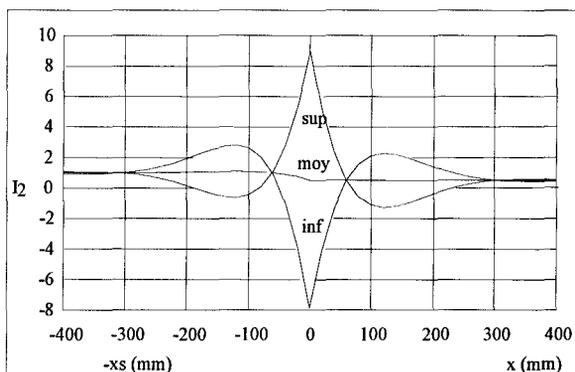
Gr 22. Distribution des contraintes circonférentielles I_1 sur la surface interne.



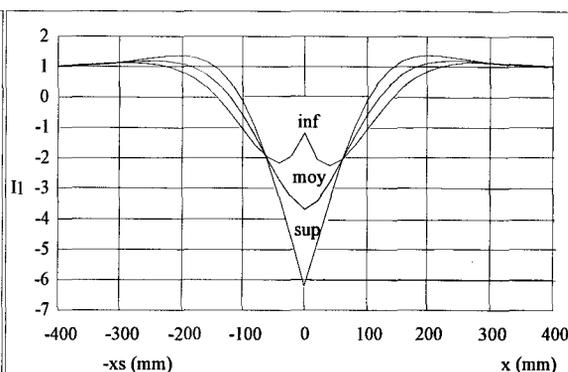
Gr 23. Distribution des contraintes circonférentielles I_1 sur la surface externe.

Ces graphes montrent l'influence du paramètre η sur la répartition des contraintes. Comme pour les cas précédents, on établit les graphes qui permettent de déterminer en fonction de η , le niveau et la répartition des contraintes dans les zones de raccordement.

Par la suite, les répartitions de ces contraintes suivant l'épaisseur sont données par les graphes 24 et 25, où nous avons pris $\varphi = 30^\circ$ et $\eta = 1/100$:



Gr 24. Distribution des contraintes longitudinales I_2 sur les surfaces moyenne et extrême.



Gr 25. Distribution des contraintes circonférentielles I_2 sur les surfaces moyenne et extrêmes.

Comme précédemment, on montre que le raccordement cylindre-sphère est principalement un problème de flexion. Pour $\varphi = 90^\circ$, le moment fléchissant est nul et seul un effort tranchant est nécessaire pour assurer l'équilibre dans la direction circonférentielle. Ceci s'explique par le fait que la normale à la surface moyenne ne présente pas de discontinuité au niveau du raccordement (ce qui n'est pas le cas pour le rayon de courbure). Dans la pratique industrielle, c'est ce cas qui est utilisé comme fond hémisphérique.

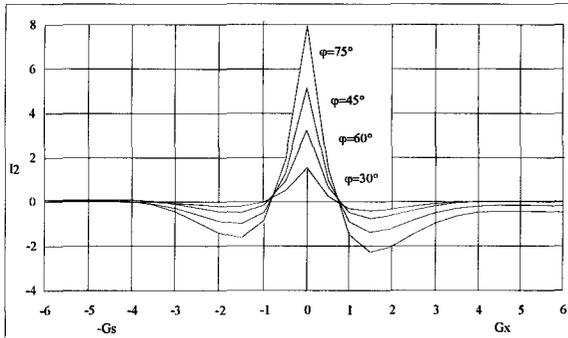
4.2.3. Zone d'influence

On cherche à déterminer, pour les mêmes raisons que pour le raccordement cylindre-cône, la distance à partir de laquelle les contraintes tendent vers la solution de membrane. On étudie alors la variation de la contrainte méridienne de flexion en fonction des variables G_s pour la sphère et G_x pour le cylindre :

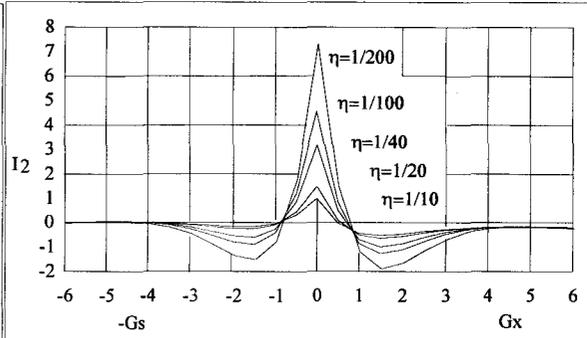
$$G_s = \chi x_s \sin\beta / a \tag{3.4.4}$$

Les valeurs numériques des paramètres géométriques qui interviennent dans la détermination des longueurs d'influence sont :

- (a) l'angle φ ($\varphi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ et 75°) avec $\eta = 1/100$,
- (b) le rapport η ($\eta = 1/10, 1/20, 1/40, 1/80$ et $1/200$) avec $\varphi = 45^\circ$.



Gr 24. Variation de la zone d'influence en fonction de l'angle φ .



Gr 25. Variation de la zone d'influence en fonction du rapport $\eta = h/R$.

On montre qu'au delà de $G_s \approx 3.5$ et $G_x \approx 3.5$, les contraintes de flexion s'annulent.

En prenant $\nu = 0.3$, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} s_\psi &\approx 2.72\sqrt{at} \\ x &\approx 2.72\sqrt{ae} \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Pour une même épaisseur, les longueurs d'influence sont égales.

Finalement, l'expression de la zone d'influence est donnée sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \bar{x}_s &\approx 2.72\sqrt{\eta}\sqrt{\bar{t}} \\ \bar{x} &\approx 2.72\sqrt{\eta} \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

où $\bar{x}_s = x$, $\bar{x} = x/R$ et $\bar{t} = t/e$.

4.2.4. Etude comparative entre les deux types de raccordement

Les paramètres géométriques liés à cette étude sont définis par la figure 3.11. On s'intéresse aux contraintes méridiennes de raccordement qui se situent sur la surface interne (contraintes maximales en valeur absolue). On effectue alors une comparaison entre les deux types de raccordement en prenant $\eta = 1/10, 1/50$ et $1/100$ et en faisant varier le demi angle au sommet α du cône entre 0° et 75° et le demi angle d'ouverture φ de la sphère entre 15° et 90° .

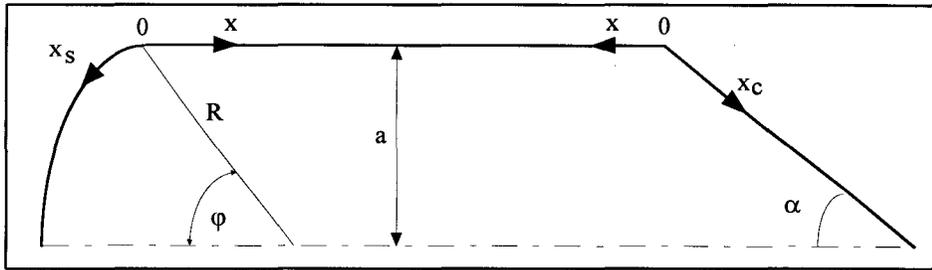


Figure 3.11. Etude comparative des deux types de raccordement

Les résultats de cette étude comparative sont résumés par les tableaux ci-dessous :

φ	90°	75°	60°	45°	30°	15°
α	0°	15°	30°	45°	60°	75°
Cylindre-Cône	0.5	0.94	1.41	1.92	2.49	2.52
Cylindre-sphère	0.5	0.99	1.53	2.19	3.15	5.14

Tableau 1. Comparaison des contraintes méridiennes $h/R=1/10$.

φ	90°	75°	60°	45°	30°	15°
α	0°	15°	30°	45°	60°	75°
Cylindre-Cône	0.5	1.57	2.75	4.16	6.18	10.01
Cylindre-sphère	0.5	1.60	2.80	4.27	6.42	10.88

Tableau 2. Comparaison des contraintes méridiennes pour $h/R=1/50$.

φ	90°	75°	60°	45°	30°	15°
α	0°	15°	30°	45°	60°	75°
Cylindre-Cône	0.5	2.04	3.711	5.76	8.73	14.66
Cylindre-sphère	0.5	2.05	3.75	5.83	8.87	15.19

Tableau 3. Comparaison des contraintes méridiennes pour $h/R=1/100$.

On montre qu'en dehors des fortes discontinuités $\alpha = 75^\circ$ ou $\varphi = 15^\circ$ (valeurs en gras) et pour $\alpha = \pi/2 - \varphi$, les contraintes méridiennes maximales (sur la surface interne) sont pratiquement identiques. Pour $\alpha = 75^\circ$ ou $\varphi = 15^\circ$, l'écart entre ces contraintes est assez important ; ceci s'explique en partie par le fait que la solution donnée pour la coque sphérique n'est pas valable au voisinage de $\varphi = 0^\circ$. Ainsi, pour des coques minces, le raccordement cylindre-cône peut être remplacé par un raccordement cylindre-sphère qui est beaucoup plus simple à formuler, à condition de tenir compte de la relation (3.4.7). En dehors de ces valeurs, l'écart entre les deux types de raccordement est inférieur à 3.8 %.

4.3. Raccordement cylindre-sphère-cône

Dans le paragraphe 4.1, nous avons constaté que pour certaines valeurs des paramètres géométriques, les contraintes au niveau de la zone de raccordement sont très élevées. Dans la pratique, pour diminuer le niveau de ces contraintes, le raccordement entre les coques conique et cylindrique peut se réaliser par l'intermédiaire d'une partie sphérique ou torique. Cette solution permet, comme on va le voir, de baisser, en fonction des paramètres géométriques, le niveau des contraintes dans les zones de raccordement et ceci à condition que les zones d'influence ne se coupent pas. Pour illustrer ceci, nous traiterons le cas d'un appareil à pression complexe composé d'une virole cylindrique raccordée à un fond conique par l'intermédiaire d'une partie sphérique d'angle d'ouverture $\phi = \pi / 2 - \varphi$; la géométrie de cet appareil est indiquée par la figure 3.12 :

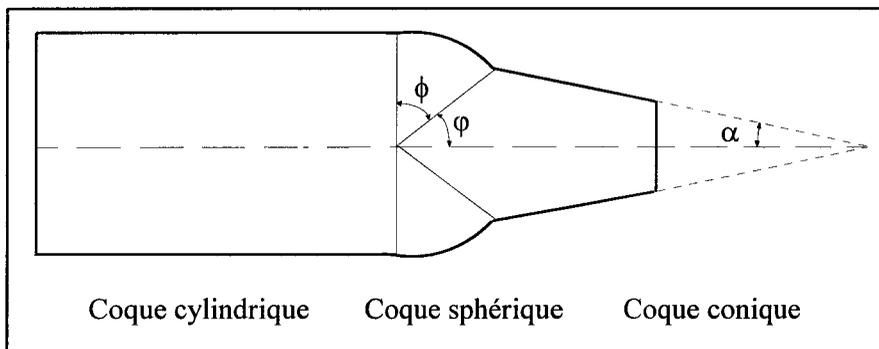


Figure 3.12. Description du raccordement cylindre-sphère-cône

A partir des résultats obtenus aux paragraphes 4.1.4 et 4.2.3, nous déterminons les longueurs d'influence relatives à chaque coque en prenant, pour des raisons de simplicité, la même épaisseur pour les trois coques :

$$\begin{cases} \bar{L}_1(\text{cylindre}) \approx 2.72\sqrt{\eta} \\ \bar{L}_2(\text{sphère}) \approx 2.72\sqrt{\eta} \\ \bar{L}_3(\text{cône}) \approx 2.72\sqrt{\eta / \cos\alpha} - 1.89\eta \tan\alpha \end{cases} \quad (3.4.7)$$

En se plaçant dans le cas où ces longueurs d'influence ne se coupent pas. L'étude de cet appareil à pression est alors décomposé en deux parties (figure 3.13) :

(a) étude du raccord cylindre-sphère,

(b) étude du raccord cône-sphère.

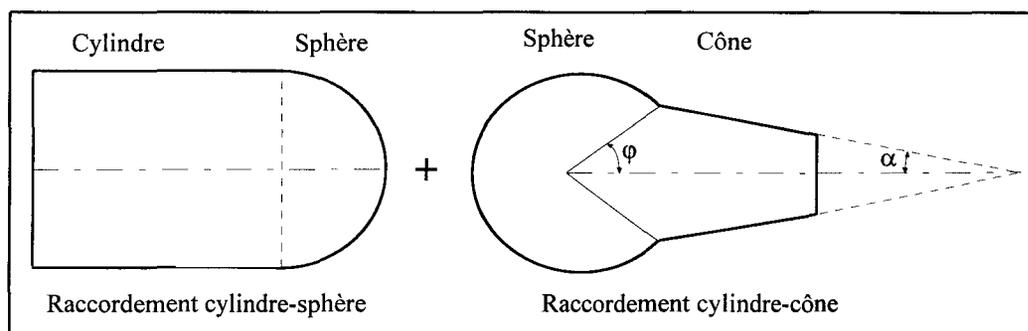
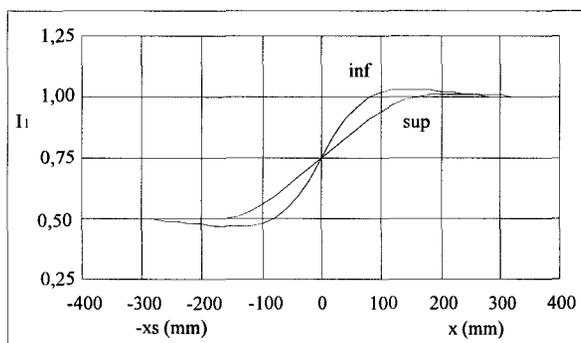


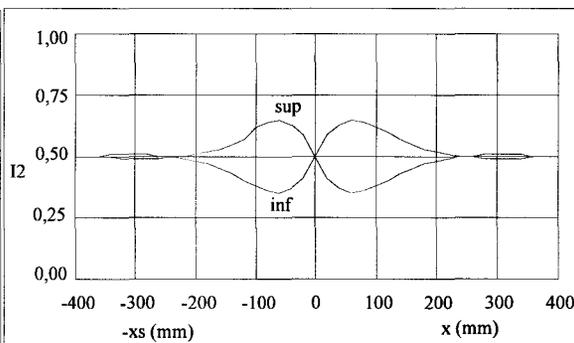
Figure 3.13. Problème équivalent au raccordement cylindre-sphère-cône

4.3.1. Etude du raccordement cylindre-sphère

Afin d'abaisser le niveau des contraintes dans la zone de raccordement, on prendra comme demi-angle d'ouverture de la coque sphérique $\varphi = 90^\circ$, qui d'après le paragraphe 4.2 assure le niveau minimal des contraintes à la jonction. Les solutions en contraintes adimensionnelles sont données par les graphes 28 et 29 :



Gr 28 : Contraintes longitudinales de membrane



Gr 29 : Contraintes circonférentielles de membrane

4.3.2. Etude du raccordement cône-sphère

Pour la solution au niveau de la coque conique, on utilisera les résultats du paragraphe 3.4.1 (chapitre III), en prenant $R = b/\sin \varphi$ où R est le rayon de la calotte sphérique, φ son demi-angle d'ouverture et b le rayon de la grande base du tronc de cône.

Les paramètres géométriques de cette étude sont décrits dans la figure 3.14 :

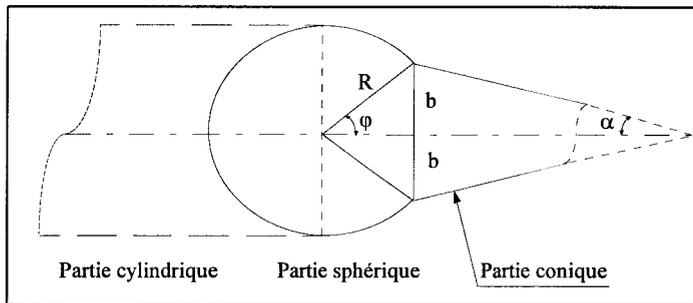


Figure 3.14. Description du raccordement cône-sphère

Pour la coque sphérique, on choisit une solution à deux constantes qui, cette fois-ci décroît quand φ augmente :

$$Q_2 = e^{-\chi\varphi} [A_3 \cos(\chi\varphi) + A_4 \sin(\chi\varphi)] \quad (3.4.8)$$

En effectuant le changement de variable $\varphi = \beta + \psi$, cette solution devient :

$$Q_2 = Ae^{-\chi\psi} \sin(\chi\psi + \gamma) \quad (3.4.9)$$

Par la suite, on exprime les éléments de réduction, le déplacement radial et la rotation de la normale en fonction des nouvelles constantes A et γ :

$$\begin{cases} N_{22} = -A \cot \varphi e^{-\chi\psi} \sin(\chi\psi + \gamma) \\ N_{11} = \sqrt{2}\chi A e^{-\chi\psi} \sin(\chi\psi + \gamma - \pi/4) \\ M_{22} = -RA e^{-\chi\psi} \sin(\chi\psi + \gamma + \pi/4) / \sqrt{2}\chi \\ M_{11} = \nu M_{22} \end{cases} \quad (3.4.10)$$

$$\begin{cases} \delta^f = -\frac{\sqrt{2}R}{Et} \chi \sin \phi A e^{-x\psi} \cos(\lambda\psi + \gamma + \pi/4) \\ V^f = -\frac{2A\chi^2}{Et} e^{-x\psi} \cos(\lambda\psi + \gamma) \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Au niveau du raccordement, les efforts généralisés, le déplacement radial et la rotation deviennent :

$$\begin{cases} Q_2^0 = A \sin \gamma \\ N_{11}^0 = -\sqrt{2}A\chi \cos(\gamma + \pi/4) \\ N_{22}^0 = A \cot \beta \sin \gamma \\ M_{22}^0 = \frac{RA}{\sqrt{2}\chi} \sin(\gamma + \pi/4) \end{cases} \quad (3.4.12)$$

$$\begin{cases} \delta_3^f = -\sqrt{2} \frac{RA}{Et} \chi \sin \phi \cos(\gamma + \pi/4) \\ V_3^f = -\frac{2\chi^2}{Et} A \cos \gamma \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Par la suite, on utilisera l'approche de superposition pour exprimer les constantes A et γ en fonction des éléments de liaison :

(a) en appliquant l'effort tranchant seul,

$$\begin{cases} A = -\sqrt{2} \sin \beta Q_\beta \\ \gamma = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (3.4.14)$$

(b) en appliquant un moment fléchissant seul :

$$\begin{cases} A = -2\chi M_\beta / R \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad (3.4.15)$$

Par superposition, on obtient :

$$\begin{cases} N_{11}^0 = -2\chi \sin \beta Q_\beta + 2\chi^2 M_\beta / R \\ N_{22}^0 = \cos \beta Q_\beta \\ M_{22}^0 = M_\beta \end{cases} \quad (3.4.16)$$

$$\begin{cases} \delta_3^f = \frac{2}{Et} \chi \sin \beta (-\chi M_\beta + \frac{1}{Et} R \sin \beta Q_\beta) \\ V_3^f = -\frac{2}{Et} \chi^2 (\frac{2\chi}{R} M_\beta - \sin \beta Q_\beta) \end{cases} \quad (3.4.17)$$

Le problème de raccordement est décomposé suivant le schéma de la figure 3.15., et par identification, les efforts de flexion de part et d'autre de la jonction sont donnés par:

$$\begin{cases} Q_0 = T_0 + Pb \tan \alpha / 2 \\ Q_\beta = T_0 + Pb \cot \alpha / 2 \\ M_0 = C_0 \end{cases} \quad (3.4.18)$$

Comme pour les deux premiers types de raccordement, on détermine les inconnues de liaison, les éléments de réduction et les contraintes adimensionnelles au niveau du raccordement.

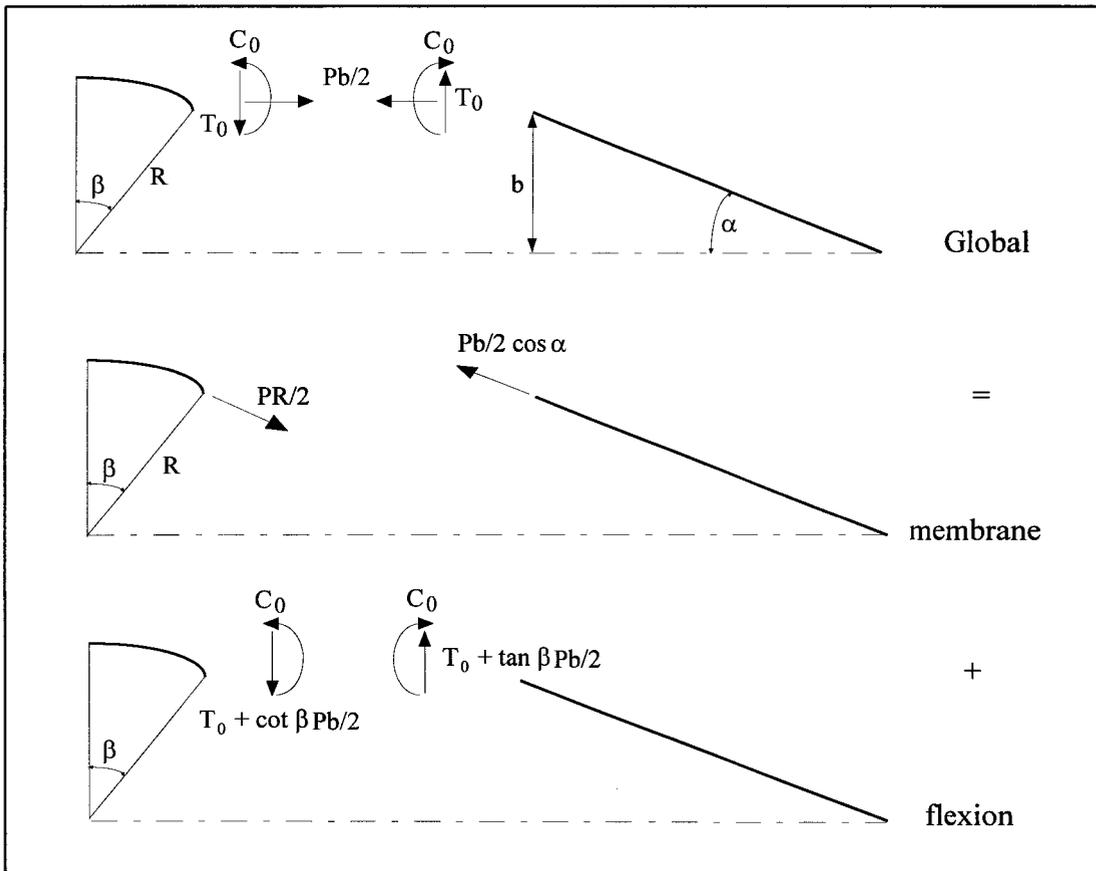
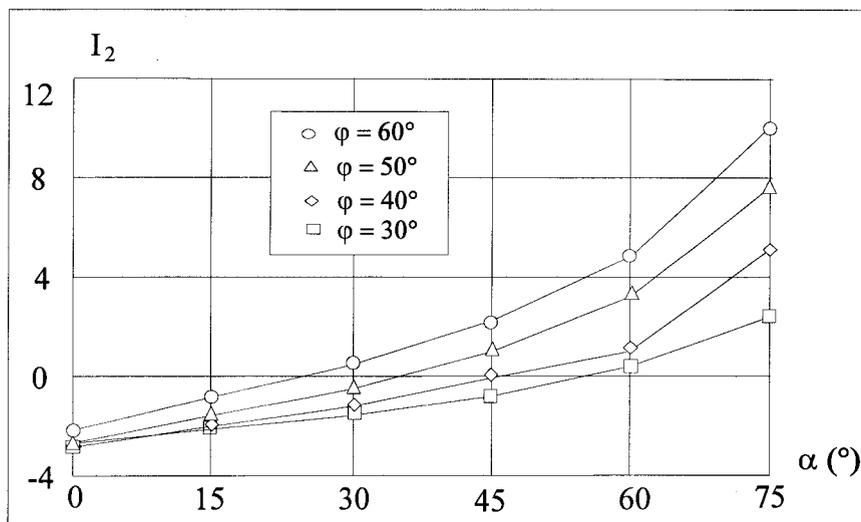


Figure 3.15. Décomposition du problème global

On s'intéressera plus particulièrement aux contraintes méridiennes sur la surface interne et on présente la variation de celles-ci en fonction des angles φ ($30^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$) et α ($0^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$). La section considérée est la section de raccordement.



Gr 30. Variation des contraintes de raccordement sur la surface interne.

On détermine le niveau des contraintes dans les zones de raccordement et on montre que pour une discontinuité telle que $\alpha = \pi/2 - \varphi$, les contraintes sont de type membranaire (ceci est dû à la non discontinuité de la normale au niveau de la jonction).

Le raccordement de deux cylindres de différents diamètres par une partie sphérique correspond à $\alpha = 0$. Dans ce cas, on préfère utiliser une partie conique qui est beaucoup plus pratique d'un point de vue industriel et on revient alors au problème traité dans le paragraphe III-1. En dehors des angles tels que $\alpha = \pi/2 - \varphi$, la flexion peut devenir prépondérante et nécessite alors un dimensionnement basé sur une théorie de flexion.

En conclusion, nous avons présenté dans cette partie, des solutions analytiques pour trois types de jonctions. Nous avons établi que dans un problème de raccordement la flexion est prépondérante. Dans chaque cas, les contraintes augmentent avec la discontinuité géométrique caractérisée par α pour le cône et par φ pour la sphère, et diminuent avec h/R . Ceci montre que la solution de Kirchhoff-Love dépend des couples (α, η) et (φ, η) , le domaine de validité de ce modèle cinématique sera établi dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

EXTENSIONS AUX MODELES RAFFINES

CHAPITRE IV

EXTENSIONS AUX MODELES RAFFINES

L'étude paramétrique précédente, avec comme champ de déplacement le champ de Kirchhoff-Love a montré que la solution dépend en plus de $\eta = h/R$, des paramètres géométriques liés à la discontinuité au niveau du raccordement. Dès lors la question de la validité de cette solution se pose. Dans un premier temps, nous établirons le domaine de validité des solutions de Kirchhoff-Love, puis dans les cas où cette solution n'est pas applicable, nous proposerons les solutions issues de champs de déplacement enrichis et nous discuterons de leur apport à la solution de Kirchhoff-Love. Nous prendrons comme solution de référence, la solution numérique obtenue par éléments finis pour un problème plan axisymétrique. Nous considérerons que cette solution de référence est celle qui se rapproche le plus de la solution du problème élastique de révolution.

1. VALIDATION DE LA SOLUTION DE KIRCHHOFF-LOVE

L'exemple que nous traiterons dans cette partie est celui du raccordement de la virole cylindrique avec une coque conique. On établira alors des solutions numériques considérées comme référence que l'on comparera par la suite aux solutions analytiques établies dans le chapitre III-2.

1.1. Modèles géométriques pour le calcul en éléments finis

La structure que nous avons modélisé est une coque axisymétrique constituée d'une virole cylindrique raccordée à une coque conique. L'épaisseur de cet appareil est supposée constante. Pour les différents modèles géométriques au niveau du raccordement, au moins trois solutions sont possibles ; ces solutions sont représentées par la figure 4.1.

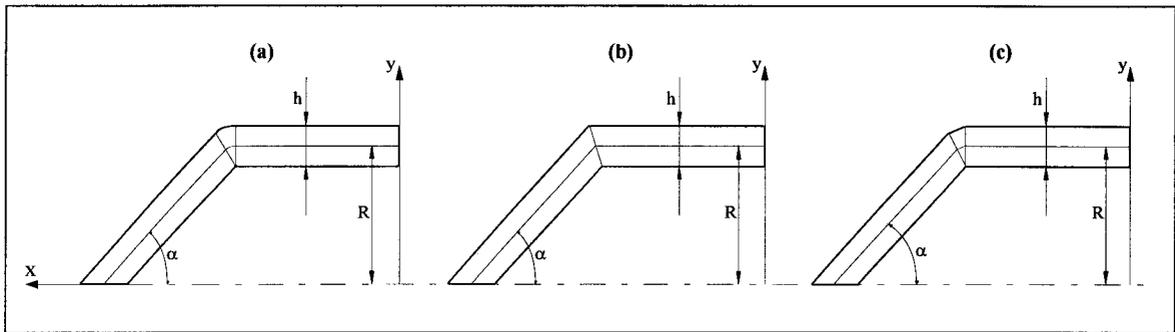


Figure 4.1. Raccordement cylindre-cône, (a)-par l'intermédiaire d'une partie torique, (b)-à angle vif, (c)-par l'intermédiaire d'une partie triangulaire.

Après une série de calcul, le modèle géométrique représenté par la figure 4.1 a été retenu.

1.2. Description du maillage et des conditions aux limites

Le modèle géométrique retenu a été maillé avec des éléments quadratiques à huit noeuds Q8 et six noeuds T6 (Figure 4.2) [BAT90], [ZIE71]. Dans la zone de raccordement, le maillage est plus affiné. Le nombre d'éléments suivant l'épaisseur de la coque dépend de h/R , par exemple, pour $h/R = 1/5$, nous avons considéré 20 éléments suivant z .

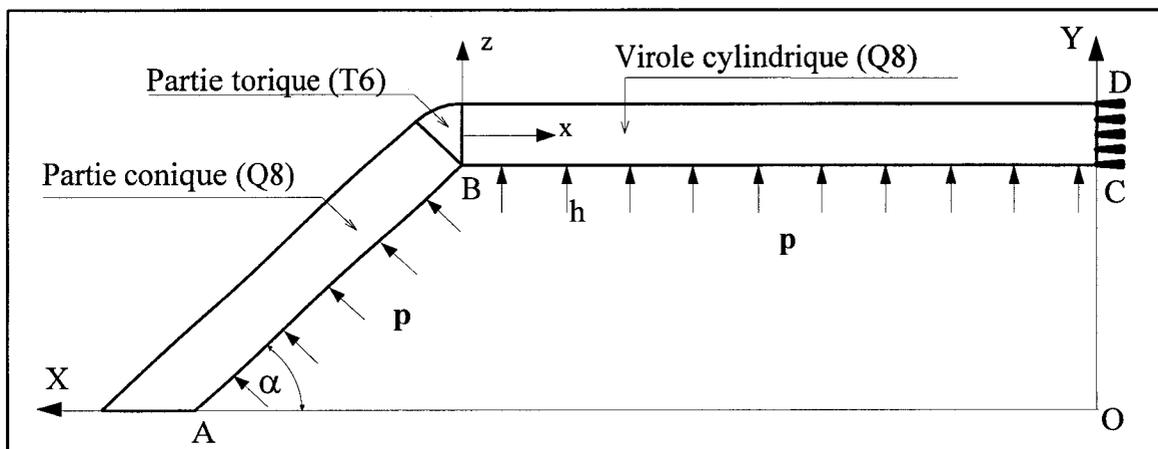


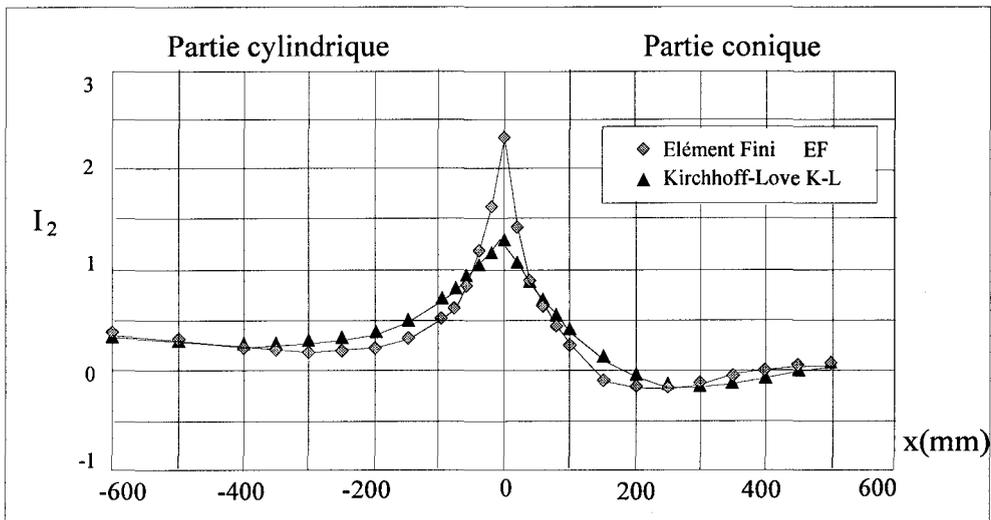
Figure 4.2. Maillage de la structure et conditions aux limites

Les conditions aux limites sont celles de l'axisymétrie par rapport à l'axe OX ; de plus, on impose un déplacement nul sur le côté CD. La pression $P=1$ MPa est appliquée sur les cotés AB et BC. Le matériau est un acier de module de Young $E=210000$ MPa et de

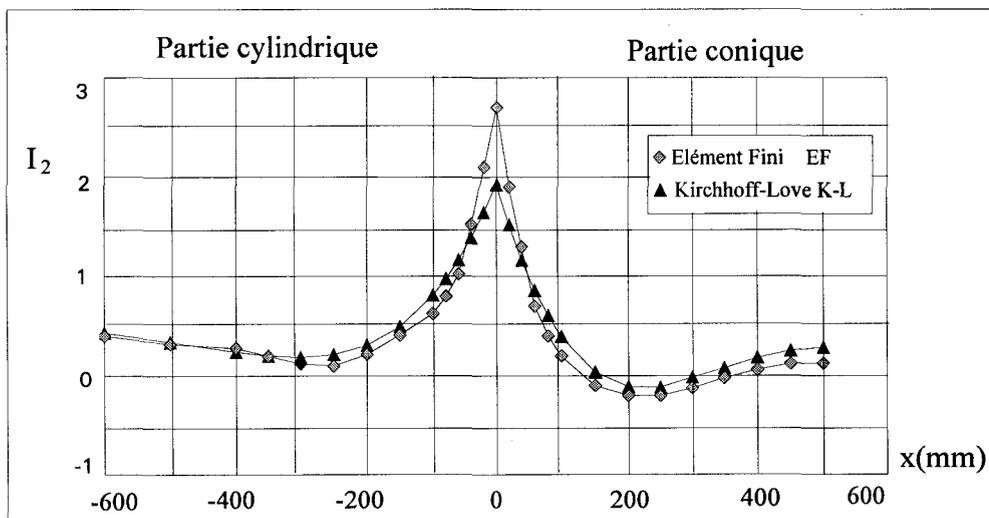
coefficient de Poisson $\nu=0.3$. Le rayon $R=1$ m est gardé constant et l'on fait varier l'épaisseur h entre 0.2m et 0.001m pour obtenir différentes valeurs du rapport h/R . L'angle α prend successivement les valeurs 30° , 45° et 60° .

1.3. Influence des paramètres géométriques sur la solution au niveau du raccord

Plusieurs calculs ont été réalisés en faisant varier l'angle α de 30° à 60° et le rapport η de $1/5$ à $1/100$. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux contraintes maximales qui dans ce cas sont les contraintes longitudinales au niveau de la zone de raccordement sur la surface interne.



Graph 31. Variation des contraintes méridiennes pour $h/R=1/5$



Graph 32. Variation des contraintes méridiennes pour $h/R=1/10$

Dans chaque cas, cette contrainte maximale calculée par éléments finis (notée par EF) est comparée à la même contrainte calculée analytiquement d'après le modèle cinématique de Kirchhoff-Love (noté par K-L). Afin d'annuler les effets de concentration de contraintes, le point qui caractérise la discontinuité n'a pas été considéré, la solution de référence dans ce cas est choisie dans une zone proche du raccord. Comme on pouvait s'y attendre, l'écart relatif entre ces deux valeurs de la contrainte longitudinale adimensionnelle augmente avec le rapport h/R . On retrouve ici que la solution de type Kirchhoff-Love s'éloigne de la solution de référence lorsque les coques deviennent de plus en plus épaisses. De plus, pour une même valeur de h/R , l'erreur relative augmente avec le demi-angle au sommet de la coque conique. Les tableaux ci-dessous donnent les valeurs de ces contraintes maximales adimensionnelles en $z = -h/2$, pour différentes valeurs des paramètres géométriques :

$\alpha = 30^\circ$	Variation des contraintes longitudinales en fonction de h/R				
h/R	1/5	1/10	1/20	1/50	1/100
K-L	1.06	1.41	1.87	2.75	3.71
EF	1.62	1.73	2.01	2.91	3.82
$\delta \%$	34.6	18.5	7.0	5.5	3.2

$\alpha = 45^\circ$	Variation des contraintes longitudinales en fonction de h/R				
h/R	1/5	1/10	1/20	1/50	1/100
K-L	1.31	1.92	2.71	4.16	5.76
EF	2.22	2.59	3.04	4.44	6.01
$\delta \%$	41.0	25.8	10.9	6.3	4.1

$\alpha = 60^\circ$	Variation des contraintes longitudinales en fonction de h/R				
h/R	1/5	1/10	1/20	1/50	1/100
K-L	1.39	2.49	3.82	6.18	8.72
EF	3.40	4.19	5.05	7.18	9.19
$\delta \%$	59.1	40.6	24.4	16.1	5.1

où δ est l'écart entre le modèle de Kirchhoff-Love (K-L) et le modèle numérique (EF).

Pour $h/R = 1/100$, les modèles analytique et numérique sont en bonne corrélation pour les différentes valeurs d'angle α . On peut donc conclure à ce niveau, que pour des angles α allant jusqu'à 60° et associés à $h/R = 1/100$, la solution analytique de type Kirchhoff-Love donne une bonne approximation de la solution au niveau de la zone de raccord. Ceci confirme le fait que la solution Kirchhoff-Love, utilisable pour des coques minces ($h/R = 1/100$), reste valable dans les zones de raccordement cylindre-cône avec un demi angle au sommet inférieur ou égal à 60° . Cependant, pour $h/R < 1/50$ la solution analytique se dégrade. En effet, pour $\eta = 1/20$, cet écart varie de 7 % à 25% respectivement pour $\alpha = 30^\circ$ et 60° . Ceci met en évidence l'influence du paramètre de discontinuité sur le niveau des contraintes. Ce phénomène s'accroît avec l'augmentation du paramètre h/R . L'écart relatif le plus important est atteint pour le plus grand angle α et le plus grand rapport h/R . Nous reviendrons plus loin sur le cas $\alpha = 90^\circ$ et h/R très grand.

1.4. Influence des paramètres géométriques sur la solution loin de la zone du raccord

Pour les coques axisymétriques étudiées précédemment, nous présenterons les répartitions des contraintes adimensionnelles de part et d'autre de la discontinuité en fonction de l'abscisse x . Pour tous les couples de paramètres (α, η) , on constate que lorsqu'on s'éloigne des zones d'influence, les deux solutions coïncident parfaitement (graphes 34 et 35).

Ainsi, nous justifions par cette étude comparative, notre choix de chercher des solutions qui tiennent compte du cisaillement transverse qui, dans la théorie de Kirchhoff-Love est négligé ; ce qui ne semble pas être justifié quel que soit les paramètres géométriques et surtout en présence d'une discontinuité comme c'est le cas des problèmes de raccordement. On présentera dans ce qui suit, une étude des coques axisymétriques par des modèles qui tiennent compte du cisaillement transverse.

2. THEORIE GENERALE DES COQUES AXISYMETRIQUES

Précédemment, nous avons établi des solutions analytiques basées sur le modèle de Kirchhoff-Love. Par la suite, nous avons déterminé le domaine de validité de ces solutions en utilisant une approche numérique et on a montré que pour des coques moyennement épaisses, le modèle Kirchhoff-Love n'est plus valable dans les zones de raccordement, la flexion étant prépondérante. Par contre, en dehors de ces zones, ce modèle est une bonne approximation de l'état de contrainte. On propose dans ce paragraphe une analyse des problèmes de raccordement en utilisant des champs de déplacement "enrichis" c'est à dire des champs qui tiennent compte du cisaillement transverse.

Nous présenterons une étude des coques axisymétriques dans un cadre général, une application à l'étude des coques cylindriques par différents modèles cinématiques sera faite par la suite. A partir du choix de la cinématique générale, le problème aux limites sera formulé à l'aide du principe des travaux virtuels. On obtient alors les équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites. Dans cette étude, nous nous sommes basés principalement sur les travaux de Touratier [TOU92].

2.1. Champ de déplacement

On introduit tout d'abord les paramètres de Lamé L_1 et L_2 :

$$\begin{cases} L_1 = \sqrt{a_{11}} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \\ L_2 = \sqrt{a_{22}} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

où, (R_1, R_2) sont les deux rayons de courbure principale définis dans (1.1.19) et (a_{11}, a_{22}) sont les métriques sur la surface moyenne définies par la relation (1.1.6).

Pour les coques axisymétriques, on prendra un champ de déplacement sous la forme suivante [TOU92]:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{L_1}{\sqrt{a_{11}}} u_1 - \frac{z}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial u_3}{\partial \theta^1} + \gamma f(z) \\ U_3 = u_3 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

où $f(z)$ est une fonction associée à la déformation du cisaillement transverse $\gamma = \omega + (1/\sqrt{a_{11}})(\partial u_3 / \partial \theta^1)$, ω est la rotation de la normale et où l'axe de révolution est confondue avec la ligne de coordonnée θ^1 .

Par la suite, on adoptera les notations suivantes :

$$\begin{aligned} [u, w, \omega] &\equiv [u_1, u_3, \omega_1] \\ [\gamma, \alpha_\beta, \theta_1] &\equiv [\gamma_1, (a_{\beta\beta})^{1/2}, \theta^1] \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

2.2. Tenseur de déformation

Dans le cas des petits déplacements, les composantes du tenseur de déformation sont reliées [TOU92] au champ de déplacement par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{1+z/R_1} \left[\frac{L_1}{\alpha_1^2} \frac{\partial u}{\partial \theta_1} - \frac{dR_1}{d\theta_1} \frac{u}{\alpha_1 R_1^2} z + \frac{f(z)-z}{\alpha_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial (\theta_1)^2} - \frac{f(z)-z}{\alpha_1^3} \frac{d\alpha_1}{d\theta_1} \frac{\partial w}{\partial \theta_1} + \frac{f(z)}{\alpha_1} \frac{\partial \omega}{\partial \theta_1} + \frac{w}{R_1} \right] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{1+z/R_2} \left[\frac{L_1}{\alpha_1^2 \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} u + \frac{f(z)-z}{\alpha_1^2 \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} \frac{\partial w}{\partial \theta_1} + \frac{f(z)}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_1} \omega + \frac{w}{R_2} \right] \\ 2\varepsilon_{13} &= \left[\frac{df}{dz} - \frac{f(z)}{R_1(1+z/R_1)} \right] \gamma \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Pour les problèmes géométriquement non linéaires, le lecteur peut consulter les ouvrages [BUD68], [LIB75], [VAL77], [TAY93].

2.3. Formulation variationnelle

On considère la coque Ω de frontière Γ définie au Chapitre I-2.1. Pour formuler le problème aux limites par le principe des travaux virtuels, on définit les deux espaces U et U^* par :

$$U = \left\{ U_1 = \frac{L_1}{\alpha_1} u + \frac{f(z) - z}{\alpha_1} \frac{\partial w}{\partial \theta_1} + f(z) \omega ; U_2 = 0 ; U_3 = w : (u, \omega) \in H^1(\theta_1) \times H^1(\theta_1); \right. \\ \left. w \in H^2(\theta_1), u, w, \omega \text{ et } \frac{\partial w}{\partial \theta_1} \text{ sont connus sur } \Gamma_u \subset \Gamma \right\} \quad (4.2.5)$$

$$U^* = \left\{ U_1^* = \frac{L_1}{\alpha_1} u^* + \frac{f(z) - z}{\alpha_1} \frac{dw^*}{d\theta_1} + f(z) \omega^* ; U_2^* = 0 ; U_3^* = w^* : \right. \\ \left. -(u^*, \omega^*) \in H^1(\theta_1) \times H^1(\theta_1); w^* \in H^2(\theta_1), u^* \text{ est nul sur } \Gamma_u \subset \Gamma \right\}$$

où (...) * sont des quantités virtuelles.

On cherche à trouver $(u, w, \omega) \in U$ tels que le travail des forces internes soit égal à celui des forces externes (ou forces de contact) :

$$W_i^* + W_c^* = 0 \quad (4.2.6)$$

Les expressions du travail des forces interne et externe sont données par :

$$\begin{cases} W_i^* = - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \\ W_c^* = + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{F} u^* ds \end{cases} \quad (4.2.7)$$

où, \hat{F} représente les forces de contact aux extrémités.

En utilisant les relations cinématiques (4.2.4), W_i^* se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 W_i^* = & -2\pi \int_0^1 \int_{-h/2}^{+h/2} \left\{ \frac{\sigma_{11}}{L_1/\alpha_1} \left(\frac{-z}{\alpha_1 R_1^2} \frac{dR_1}{d\theta_1} u^* + \frac{L_1}{\alpha_1^2} \frac{du^*}{d\theta_1} + \frac{f(z)-z}{\alpha_1^2} \frac{d^2 w^*}{d\theta_1^2} - \frac{f(z)-z}{\alpha_1^3} \frac{d\alpha_1}{d\theta_1} \frac{dw^*}{d\theta_1} \right. \right. \\
 & + \frac{f(z)}{\alpha_1} \frac{d\omega^*}{d\theta_1} + \frac{w^*}{R_1} \left. \right) + \frac{\sigma_{22}}{L_2/\alpha_2} \left(\frac{L_1}{\alpha_1^2 \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} u^* + \frac{f(z)-z}{\alpha_1^2 \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} \frac{dw^*}{d\theta_1} + \frac{f(z)}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} \omega^* + \frac{w^*}{R_2} \right) \\
 & \left. + \sigma_{13} \left(\frac{df}{dz} - \frac{f(z)}{R_1 L_1 / \alpha_1} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{dw^*}{d\theta_1} + \omega^* \right) \right\} L_1 L_2 d\theta_1 dz \quad (4.2.8)
 \end{aligned}$$

A partir de cette expression, on définit les contraintes généralisées suivantes :

$$\begin{aligned}
 N_{11} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_2}{\alpha_2} \sigma_{11} dz, & N_{22} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_1}{\alpha_1} \sigma_{22} dz \\
 M_{11} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_2}{\alpha_2} \sigma_{11} z dz, & M_{22} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_1}{\alpha_1} \sigma_{22} z dz \\
 \tilde{M}_{11} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_2}{\alpha_2} \sigma_{11} f(z) dz, & \tilde{M}_{22} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_1}{\alpha_1} \sigma_{22} f(z) dz \\
 \tilde{Q}_{13} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{df}{dz} - \frac{f(z)}{R_1 L_1 / \alpha_1} \right) \sigma_{13} \frac{L_1}{\alpha_1} \frac{L_2}{\alpha_2} dz
 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

où (N_{11}, N_{22}) sont les efforts normaux, (M_{11}, M_{22}) les moments de flexion, $(\tilde{M}_{11}, \tilde{M}_{22})$ les moments d'ordre supérieurs liés à la fonction de cisaillement et \tilde{Q}_{13} l'effort tranchant raffiné. En élasticité linéaire, les composantes du tenseur de contrainte σ_{ij} sont reliées aux composantes du tenseur de déformation ε_{ij} par :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) \\
 \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) \\
 \sigma_{13} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{13}
 \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

L'expression du travail des forces de contact est donnée par :

$$\begin{aligned} W_c^* &= 2\pi \int_{-h/2}^{+h/2} \left\{ \hat{F}_1 \left[\frac{L_1}{\alpha_1} u^* + \frac{f(z)-z}{\alpha_1} \frac{dw^*}{d\theta_1} + f(z)\omega^* \right] + \hat{F}_3 w^* \right\} L_2 dz \\ &= 2\pi \left[\left(\left(T_1 + \frac{C_1}{R_1} \right) u^* + \frac{\tilde{C}_1 - C_1}{\alpha_1} \frac{dw^*}{d\theta_1} + \tilde{C}_1 \omega^* + T_3 w^* \right) \alpha_2 \right]_0^1 \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

où,

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_2}{\alpha_2} \hat{F}_1 dz, & \tilde{C}_1 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_2}{\alpha_2} f(z) \hat{F}_1 dz \\ T_3 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_2}{\alpha_2} \hat{F}_3 dz, & C_1 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{L_2}{\alpha_2} z \hat{F}_1 dz \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

2.4. Equations d'équilibre

Après quelques transformations classiques ([TOU92], [BAS85]), on aboutit pour tout (u^*, w^*, ω^*) aux équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned} \square & \quad \frac{M_{11}}{\alpha_1 R_1^2} \frac{dR_1}{d\theta_1} - \frac{N_{22}}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} - \frac{M_{11}}{\alpha_1 \alpha_2 R_1} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} + \frac{1}{\alpha_1^2 \alpha_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[(N_{11} + \frac{M_{11}}{R_1}) \alpha_1 \alpha_2 \right] = 0 \\ \square & \quad -\frac{N_{11}}{R_1} - \frac{N_{22}}{R_2} + \frac{1}{\alpha_1^2 \alpha_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\left(\frac{\tilde{M}_{22} - M_{22}}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_1} + \tilde{Q}_{13} \right) \alpha_1 \alpha_2 \right] \\ & \quad - \frac{1}{\alpha_1^2 \alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial (\theta_1)^2} \left[(\tilde{M}_{11} - M_{11}) \alpha_2 \right] - \frac{1}{\alpha_1^2 \alpha_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[(\tilde{M}_{11} - M_{11}) \frac{d\alpha_1}{d\theta_1} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] + P = 0 \quad (4.2.13) \\ \square & \quad -\frac{\tilde{M}_{22}}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} - \tilde{Q}_{13} + \frac{1}{\alpha_1^2 \alpha_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\tilde{M}_{11} \alpha_1 \alpha_2) = 0 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sur les deux bords de la coque définis par $\theta_1 = 0$ et $\theta_1 = 1$, sont données, pour tout $(u^*, w^*, \partial w^* / \partial \theta_1, \omega^*)$ par les équations suivantes :

$$\blacksquare \quad T_1 + \frac{C_1}{R_1} - (N_{11} + \frac{M_{11}}{R_1}) \alpha_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad T_3 + \left(\frac{\partial \tilde{M}_{11}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} (\tilde{M}_{11} - M_{11}) \\ - \frac{1}{\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} (\tilde{M}_{22} - M_{22}) + \frac{1}{\alpha_1} \frac{d\alpha_2}{d\theta_1} (\tilde{M}_{11} - M_{11}) - \alpha_1 \tilde{Q}_{13} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

$$\blacksquare \quad \tilde{C}_1 - C_1 - (\tilde{M}_{11} - M_{11})\alpha_1 = 0$$

$$\blacksquare \quad \tilde{C}_1 - \tilde{M}_{11}\alpha_1 = 0$$

Les différents modèles cinématiques sont obtenus à partir de la théorie générale, en prenant pour $f(z)$, les expressions suivantes :

$$\bullet \quad \text{Modèle de Kirchhoff-Love : } f(z) = 0 \quad (4.2.15)$$

$$\bullet \quad \text{Modèle de Reissner-Mindlin : } f(z) = z \quad (4.2.16)$$

$$\bullet \quad \text{Modèle de Reddy : } f(z) = z(1 - 4z^2 / 3h^2) \quad (4.2.17)$$

$$\bullet \quad \text{Modèle de Touratier : } f(z) = (h / \pi) \sin(\pi z / h) \quad (4.2.18)$$

Si de plus la rotation de Kirchhoff-Love n'est pas considérée dans la relation (1.2.15), alors nous obtenons la théorie de la membrane.

3. APPLICATION A L'ETUDE D'UNE COQUE CYLINDRIQUE

On appliquera dans cette partie, la théorie générale développée précédemment à l'étude d'une coque cylindrique par les différents modèles cinématiques.

3.1. Equations générales

Après une description des paramètres géométriques, on présente suivant le modèle cinématique les solutions analytiques pour une coque cylindrique.

Les paramètres géométriques liés à cette coque sont :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & \alpha_2 &= R \\ R_1 &= \infty, & R_2 &= R \\ L_1 &= 1, & L_2 &= R(1 + z/R) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

3.1.1. Description de la cinématique

A partir du champ de déplacement

$$\begin{cases} U_1 = u - z w_{,1} + \gamma f(z) \\ U_3 = w \end{cases} \quad (4.3.2)$$

les composantes du tenseur de déformation sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{,1} - z w_{,11} + \gamma_{,1} f(z) \\ \varepsilon_{22} = \left(1 - \frac{z}{R}\right) \frac{w}{R} \\ 2\varepsilon_{13} = (w + w_{,1}) \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

où $\gamma = \omega + w_{,1}$ est la déformation de rotation.

3.1.2. Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir des équations générales (4.2.13) :

$$\begin{cases} N_{11,1} = 0 \\ -\frac{N_{22}}{R} + \tilde{Q}_{13,1} + (M_{11} - \tilde{M}_{11})_{,11} + P = 0 \\ \tilde{M}_{11,1} - \tilde{Q}_{13} = 0 \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Dans ce qui suit, on présentera une étude détaillée d'une coque cylindrique par les différents modèles classiques et raffinés.

3.2. Modèle de Kirchhoff-Love

Le modèle de Kirchhoff-Love est obtenu en prenant $f(z) = 0$.

3.2.1. Equations générales

La fonction $f(z)$ du cisaillement transverse étant nulle, alors :

$$\tilde{M}_{\alpha\alpha} = \tilde{Q}_{\alpha z} = \varepsilon_{13} = 0 \quad (4.3.5)$$

Le champ de déplacement est développé à l'ordre un :

$$\begin{cases} U_1 = u - z w_{,1} \\ U_3 = w \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Par dérivation, on obtient les composantes du tenseur de déformation :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{,1} - z w_{,11} \\ \varepsilon_{22} = \left(1 - \frac{z}{R}\right) \frac{w}{R} \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Et finalement, les équations d'équilibre sont obtenues à partir des relations(4.3.4) :

$$\begin{cases} N_{11,1} = 0 \\ -\frac{N_{22}}{R} + M_{11,11} = -P \end{cases} \quad (4.3.8)$$

où $N_{22} = 2N_{11} = PR$ est une solution particulière pour un cylindre fermé.

3.2.2. Résolution :

On exprime tout d'abord les éléments de réduction en fonction du champ de déplacement :

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(u_{,1} + \nu \frac{w}{R} \right) \\ N_{22} = \frac{Eh}{R} w \\ M_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} w_{,11} \end{cases} \quad (4.3.9)$$

On obtient alors, l'équation différentielle de degré 4 qui caractérise une coque cylindrique :

$$w_{,1111} + 4\lambda^4 w = 0 \quad (4.3.10)$$

avec $\lambda^4 = 3(1-\nu^2)/R^2h^2$.

La solution pour ce modèle est donnée dans le chapitre II-4.

3.3. Modèle de Reissner-Mindlin

Ce modèle est obtenu en prenant une fonction linéaire en z (relation 4.2.16).

3.3.1. Equations générales

Le champ de déplacement est développé à l'ordre un mais cette fois-ci, la rotation ω est une inconnue supplémentaire du problème :

$$\begin{cases} U_1 = u + z \omega \\ U_3 = w \end{cases} \quad (4.3.11)$$

Dans cette théorie [REI45], on suppose que la déformation du cisaillement transverse est constante suivant l'épaisseur de la coque. Les composantes du tenseur de déformation sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{,1} + z \omega_{,1} \\ \varepsilon_{22} = (1 - z/R)(w/R) \\ 2\varepsilon_{13} = \omega + w_{,1} \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir de la forme générale (4.2.22) :

$$\begin{cases} N_{11,1} = 0 \\ -N_{22}/R + \tilde{Q}_{13,1} = -P \\ M_{11,1} - \tilde{Q}_{13} = 0 \end{cases} \quad (4.3.13)$$

3.3.2. Résolution

On exprime les éléments de réduction en fonction du champ de déplacement :

$$\begin{cases} N_{11} = B(u_{,1} + vw/R) & (a) \\ N_{22} = B(w/R + vu_{,1}) & (b) \\ M_{11} = D(\omega_{,1} + u_{,1}/R) & (c) \\ \tilde{Q}_{13} = Gk(\omega + w_{,1}) & (d) \end{cases} \quad (4.3.14)$$

où, $k=5/6$ est le coefficient de correction du cisaillement transverse, les rigidités B , D et G sont définies par les relations(1.3.55).

La combinaison de (4.3.13-a) et (4.3.14-a) donne :

$$u_{,1} = -vw/R \quad (4.3.15)$$

et l'équation (4.3.14-c) devient :

$$M_{11} = D(\omega_{,1} - \nu w / R) \quad (4.3.16)$$

Les équations d'équilibre se mettent alors sous la forme suivante :

- $-\frac{1}{R^2} w + \frac{k}{2(1+\nu)} w_{,11} + \frac{k}{2(1+\nu)} \omega_{,1} = 0$
- $\omega_{,11} - \frac{6k(1-\nu)}{h^2} \omega - \left(\frac{6k(1-\nu)}{h^2} + \frac{\nu}{R^2} \right) w_{,1} = 0$

(4.3.17)

Après dérivation et séparation des variables, on obtient :

$$\square \quad w^{(4)} + \frac{\nu k - 2(1+\nu)}{kR^2} w^{(2)} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R^2} w = 0 \quad (4.3.18)$$

$$\square \quad \omega^{(4)} + \frac{\nu k - 2(1+\nu)}{kR^2} \omega^{(2)} + \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 R^2} \omega = 0 \quad (4.3.19)$$

On cherchera des solutions de l'équation (4.3.18), la rotation ω étant reliée au déplacement radial w par l'expression suivante :

$$\omega = \psi(\mu w - w_{,11})_{,1} \quad (4.3.20)$$

où,

$$\psi = \frac{h^2}{6k(1-\nu)} \quad (4.3.21)$$

$$\mu = \frac{2(1+\nu)}{kR^2} - \frac{\nu}{R^2} - \frac{6k(1-\nu)}{h^2}$$

La solution de l'équation différentielle :

$$w^{(4)} - Pw^{(2)} + Qw = 0 \quad (4.3.22)$$

est de la forme :

$$w = Ae^{px} \quad (4.3.23)$$

où, $P = [2(1 + \nu) - \nu k] / kR^2$ et $Q = 12(1 - \nu^2) / h^2 R^2$ sont deux quantités positives.

La résolution de ce problème revient à chercher p tel que :

$$p^4 - Pp^2 + Q = 0 \quad (4.3.24)$$

En posant $p^2 = X$, le polynôme $X^2 + AX + B = 0$ admet pour solutions :

$$\begin{aligned} X_1 &= (P + i\sqrt{4Q - P^2}) / 2 \\ X_2 &= (P - i\sqrt{4Q - P^2}) / 2 \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

La solution complète de l'équation différentielle (4.3.22) est finalement donnée par :

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{p_i x} \quad (4.3.26)$$

où,

$$\begin{aligned} p_1 &= b + ic, \quad p_2 = b - ic, \\ p_3 &= -p_1 \text{ et } p_4 = -p_2 \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

avec

$$\begin{aligned} b &= (P + 2\sqrt{Q})^{1/2} / 2 \\ c &= (-P + 2\sqrt{Q})^{1/2} / 2 \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Les constantes A_j sont définies dans le corps des complexes et sont décomposées en parties réelle et imaginaire :

$$A_j = A_j' + i A_j'' \quad (4.3.29)$$

Sachant que $w(x)$ est un réel (voir [BIL65]) et en remplaçant (4.3.27 et 29) dans (4.3.26), celle-ci se met sous la forme suivante :

$$w(x) = [F_1 \sin(cx) + F_2 \cos(cx)]e^{bx} + [F_3 \sin(cx) + F_4 \cos(cx)]e^{-bx} \quad (4.3.30)$$

où nous avons considéré de nouvelles constantes F_i .

On suppose que loin du bord ($x=0$), w est décroissant pour atteindre la solution de membrane. La relation précédente devient alors :

$$w(x) = [F_3 \sin(cx) + F_4 \cos(cx)]e^{-bx} \quad (4.3.31)$$

où, les constantes F_3 et F_4 seront déterminées par les conditions de raccordement.

Les dérivées de w sont données par :

$$\begin{aligned} w_{,1} &= -[F_5 \sin(cx) + F_6 \cos(cx)]e^{-bx} \\ w_{,11} &= [F_7 \sin(cx) + F_8 \cos(cx)]e^{-bx} \\ w_{,111} &= [-(bF_7 + cF_8) \sin(cx) + (bF_7 - cF_8) \cos(cx)]e^{-bx} \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

$$\text{où, } F_5 = bF_3 + cF_4, \quad F_6 = bF_4 - cF_3$$

$$F_7 = bF_5 + cF_6, \quad F_8 = bF_6 - cF_5$$

La rotation ω est obtenue à partir de la relation (4.3.20) :

$$\begin{aligned} \omega &= \psi e^{-bx} [(bF_7 + cF_8 - \mu F_5) \sin(cx) + (bF_8 - cF_7 - \mu F_6) \cos(cx)] \\ &= \psi e^{-bx} \left\{ [b(b^2 - 3c^2 - \mu)F_3 - c(b^2 - 3b^2 + \mu)F_4] \sin(cx) \right. \\ &\quad \left. + [c(c^2 - 3b^2 + \mu)F_3 + b(b^2 - 3c^2 - \mu)F_4] \cos(cx) \right\} \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

dont la dérivée se met sous la forme suivante :

$$\omega_{,1} = -\psi e^{-bx} [(bF_9 + cF_{10}) \sin(cx) + (bF_{10} - cF_9) \cos(cx)] \quad (4.3.34)$$

$$\begin{aligned} \text{où, } F_9 &= b(b^2 - 3c^2 - \mu)F_3 - c(c^2 - 3b^2 + \mu)F_4 \\ F_{10} &= c(c^2 - 3b^2 + \mu)F_3 + b(b^2 - 3c^2 - \mu)F_4 \end{aligned}$$

3.4. Modèle du 3ème ordre

Ce modèle est déduit de la théorie générale en prenant un développement à l'ordre trois du champ de déplacement de la relation (4.2.17).

3.4.1. Equations générales

Le champ de déplacement est développé à l'ordre trois :

$$\begin{cases} U_1 = u + z \omega - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} (\omega + w_{,1}) \\ U_3 = w \end{cases} \quad (4.3.35)$$

Les composantes non nulles du tenseur de déformation sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{,1} + z \omega_{,1} - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} (\omega_{,1} + w_{,11}) \\ \varepsilon_{22} = \left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{w}{R} \\ 2\varepsilon_{13} = (\omega + w_{,1}) \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \end{cases} \quad (4.3.36)$$

où ε_{22} est développé à l'ordre deux (hypothèse des coques semi-épaisses).

Les équations d'équilibre sont identiques aux relations (4.3.4) :

$$\begin{cases} N_{11,1} = 0 \\ -\frac{N_{22}}{R} + \tilde{Q}_{13,1} + (M_{11} - \tilde{M}_{11})_{,11} + P = 0 \\ \tilde{M}_{11,1} - \tilde{Q}_{13} = 0 \end{cases} \quad (4.3.37)$$

En utilisant les relations (4.2.9) et (4.3.36), on déduit l'expression des contraintes généralisées en fonction du champ de déplacement :

$$\begin{cases} N_{11} = B(u_{,1} + v w / R) + D(4\omega_{,1} - w_{,11}) / 5R \\ N_{22} = B(w / R + v u_{,1}) + D w / R^2 \\ \tilde{Q}_{13} = (8/15)G(\omega + w_{,1}) \end{cases} \quad (4.3.38)$$

$$\begin{cases} M_{11} = D[(u_{,1}/R) + (3v\eta^2 w / 20R^2) + (4\omega_{,1}/5) - (w_{,11}/5)] \\ M_{22} = D(4v\omega_{,1}/5 - w / R^2 - v w_{,11}/5) \end{cases} \quad (4.3.39)$$

$$\begin{cases} \tilde{M}_{11} = D[(4v\eta^2 w / 35R^2) + (4u_{,1}/5R) + (68\omega_{,1}/105) - (16w_{,11}/105)] \\ \tilde{M}_{22} = D[-(4w / 5R^2) + (68v\omega_{,1}/105) - (16v w_{,11}/105)] \end{cases} \quad (4.3.40)$$

3.4.2. Résolution :

En remplaçant les relations précédentes dans les équations d'équilibre, on obtient :

$$\begin{aligned} \square \quad u_{,11} + \frac{h^2}{15R} \omega_{,11} + \frac{v}{R} w_{,1} - \frac{h^2}{60R} w_{,11} &= 0 \\ \square \quad -\frac{12v}{R} u_{,1} + \frac{h^2}{5R} u_{,111} + \frac{48(1-v)}{15} \omega_{,1} + \frac{16h^2}{105} \omega_{,111} - \frac{12}{R^2} w + \frac{48(1-v)}{15} w_{,11} - \frac{h^2}{21} w_{,1111} &= 0 \\ \square \quad \frac{h^2}{5R} u_{,11} - \frac{48(1-v)}{15} \omega + \frac{68h^2}{105} \omega_{,11} - \frac{48(1-v)}{15} w_{,1} - \frac{16h^2}{105} w_{,111} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

dont la solution générale est de la forme :

$$\begin{cases} u = Ae^{px} \\ \omega = Be^{px} \\ w = Ce^{px} \end{cases} \quad (4.3.42)$$

Une autre méthode consiste à éliminer des équations d'équilibre, la composante axiale du champ de déplacement. En effet, en utilisant les équations (4.3.14) et (4.3.37), on exprime la dérivée première de u en fonction de w , ω et de leurs dérivées :

$$u_{,1} = \frac{1}{R} \left(-vw - \frac{h^2}{15} \omega_{,1} + \frac{h^2}{60} w_{,11} \right) \quad (4.3.43)$$

Les contraintes généralisées définies dans (4.3.38, 39 et 40) deviennent alors :

$$\begin{cases} N_{22} = B \left((1-v^2 + \frac{\eta^2}{12}) \frac{w}{R} + \frac{vh^2}{60R} w_{,11} - \frac{vh^2}{15R} \omega_{,1} \right) \\ M_{11} = D \left(-\frac{v}{R^2} (1 - \frac{3\eta^2}{20}) w + \frac{1}{5} (1 - \frac{\eta^2}{12}) (4\omega_{,1} - w_{,11}) \right) \\ \tilde{M}_{11} = D \left(-\frac{4v}{5R^2} (1 - \frac{\eta^2}{7}) w + \frac{68}{105} (1 - \frac{7\eta^2}{85}) \omega_{,1} - \frac{16}{105} (1 - \frac{7\eta^2}{80}) w_{,11} \right) \end{cases} \quad (4.3.44)$$

Les équations d'équilibre (4.3.41) se réduisent à un système de deux équations à deux inconnues :

$$\square \quad -\left(1-v^2 + \frac{\eta^2}{12}\right) \frac{w}{R^2} + \frac{4}{15} \left(1-v - \frac{v\eta^2}{8}\right) w_{,11} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{21} - \frac{\eta^2}{300}\right) w_{,1111} \\ + \frac{1}{15} (4-4v+v\eta^2) \omega_{,1} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{16}{105} - \frac{\eta^2}{75}\right) \omega_{,111} = 0 \quad (4.3.45)$$

$$\square \quad -\frac{4}{15} \left((1-v) + v\eta^2/4\right) w_{,1} - \frac{4h^2}{315} \left(1 - \frac{7\eta^2}{80}\right) w_{,111} - \frac{4}{15} (1-v) \omega \\ + \frac{17h^2}{315} \left(1 - \frac{7\eta^2}{85}\right) \omega_{,11} = 0$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} w = Ae^{px} \\ \omega = Be^{px} \end{cases} \quad (4.3.46)$$

En remplaçant cette expression dans (4.3.47), on obtient :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3.47)$$

où les polynômes $a_{\alpha\beta}$ sont :

$$\begin{aligned} a_{11} &= g_1 + g_2 p^2 + g_3 p^4, & a_{12} &= g_4 p + g_5 p^3 \\ a_{21} &= g_6 p + g_7 p^3, & a_{22} &= g_8 p + g_9 p^3 \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

et les coefficients g_i sont :

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{R^2}(1 - \nu^2 + \eta^2 / 12) & g_2 &= \frac{4}{15}(1 - \nu - \nu\eta^2 / 8) \\ g_3 &= -\frac{h^2}{12}(1/21 - \eta^2 / 300) & g_4 &= \frac{1}{15}[4(1 - \nu) + \nu h^2] \\ g_5 &= \frac{h^2}{12}(16/105 - h^2 / 75) & g_6 &= -\frac{1}{15}[4(1 - \nu) + \nu\eta^2] \\ g_7 &= -\frac{4h^2}{315}(1 - 7\eta^2 / 80) & g_8 &= -\frac{4}{15}(1 - \nu) \\ g_9 &= \frac{17h^2}{315}(1 - 7\eta^2 / 85) \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

La résolution de ce problème revient à trouver p tel que le déterminant de la matrice $(a_{\alpha\beta})$ soit nul. On cherchera donc les racines d'un polynôme bicarré du 6ème degré :

$$p^6 + Ap^4 + Bp^2 + C = 0 \quad (4.3.50)$$

avec,

$$\begin{aligned}
 A &= (g_2g_9 + g_3g_8 - g_4g_7 - g_5g_6) / \Delta \\
 B &= (g_1g_9 + g_2g_8 - g_4g_6) / \Delta \\
 C &= g_1g_8 / \Delta \\
 \Delta &= g_3g_9 - g_5g_7
 \end{aligned}
 \tag{4.3.51}$$

En effectuant le changement de variable $p^2 = Y - A / 3$, l'équation (4.3.50) devient :

$$Y^3 - PY + Q = 0 \tag{4.3.52}$$

où, $P = 2A^2 / 9 - B$ et $Q = A^3 / 27 + C$.

Le discriminant est donné par :

$$D_s = (Q / 2)^2 - (P / 3)^2 \tag{4.3.53}$$

Pour $D_s > 0$, on obtient les solutions suivantes :

$$\begin{cases}
 Y_1 = t + v \\
 Y_2 = -\frac{t+v}{2} + i\frac{t-v}{2}\sqrt{3} \\
 Y_3 = -\frac{t+v}{2} - i\frac{t-v}{2}\sqrt{3}
 \end{cases}
 \tag{4.3.54-a}$$

où t et v sont :

$$\begin{aligned}
 t &= (-Q / 2 + \sqrt{D_s})^{1/3} \\
 v &= (-Q / 2 - \sqrt{D_s})^{1/3}
 \end{aligned}
 \tag{4.3.54-b}$$

Les 6 racines du polynôme (4.3.49) se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{cases}
 p_1 = a \\
 p_2 = -a'
 \end{cases},
 \begin{cases}
 p_3 = -b + ic \\
 p_4 = -b - ic'
 \end{cases},
 \begin{cases}
 p_5 = b + ic \\
 p_6 = b - ic
 \end{cases}
 \tag{4.3.55}$$

où a , b et c sont des réels positifs définis par :

$$\begin{aligned} a &= (t + v - A/3)^{1/2} \\ b &= \left[\frac{t+v}{2} + \frac{A}{3} + \left(\left(\frac{t+v}{2} + \frac{A}{3} \right)^2 + 3 \left(\frac{t-v}{2} \right)^2 \right) / 2 \right]^{1/2} \\ c &= \left[-\frac{t+v}{2} - \frac{A}{3} + \left(\left(\frac{t+v}{2} + \frac{A}{3} \right)^2 + 3 \left(\frac{t-v}{2} \right)^2 \right) / 2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

La solution finale se met sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{i=1}^6 A_i e^{p_i x} \\ \omega(x) &= \sum_{i=1}^6 B_i e^{p_i x} \end{aligned} \quad (4.3.57)$$

où les constantes $A_j = A'_j + iA''_j$ et $B_j = B'_j + iB''_j$ sont des complexes.

En développant la première relation de (4.3.57), on obtient :

$$\begin{aligned} w(x) &= A'_1 e^{ax} + A'_2 e^{-ax} \\ &+ e^{-bx} \left[(A'_3 + A'_4) \cos(cx) + (A''_4 - A''_3) \sin(cx) \right] \\ &+ e^{bx} \left[(A'_5 + A'_6) \cos(cx) + (A''_6 - A''_5) \sin(cx) \right] \\ &+ i e^{-bx} \left[(A''_4 + A''_3) \cos(cx) + (A'_3 - A'_4) \sin(cx) \right] \\ &+ i e^{bx} \left[(A''_6 + A''_5) \cos(cx) + (A'_5 - A'_6) \sin(cx) \right] \end{aligned} \quad (4.3.58)$$

Tenant compte du fait que $w(x)$ est un réel et que l'effet de bord s'atténue quand x augmente (voir [BIL65]), la relation précédente devient :

$$w(x) = A'_2 e^{-ax} + e^{-bx} \left\{ 2A'_3 \cos(cx) + 2A''_4 \sin(cx) \right\} \quad (4.3.59)$$

De même, la rotation de la normale est :

$$\omega(x) = B'_2 e^{-ax} + e^{-bx} \left\{ 2B'_3 \cos(cx) + 2B''_4 \sin(cx) \right\} \quad (4.3.60)$$

Les constantes A_2', A_3' et A_4'' seront déterminées par les conditions de raccordement et les constantes B_2', B_3' et B_4'' sont calculées en tenant compte de la relation (4.3.47) et de l'équation $\det(a_{\alpha\beta}) = 0$. Nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{a_{11}}{a_{12}} \Big|_{p=-a} & A_2 &= J_2 A_2 \\ B_3 &= -\frac{a_{11}}{a_{12}} \Big|_{p=-b+ic} & A_3 &= J_3 A_3 \\ B_4 &= -\frac{a_{11}}{a_{12}} \Big|_{p=-b-ic} & A_4 &= J_4 A_4 \end{aligned} \quad (4.3.61)$$

où les parties réelles et imaginaires des constantes complexes J_i sont :

$$\begin{aligned} J_2' &= (g_1 + a^2 g_2 + a^4 g_3) / (ag_4 - a^3 g_5) \\ J_3' &= -(a_{11}' a_{12}' + a_{11}'' a_{12}'') / ((a_{12}')^2 + (a_{12}'')^2) \\ J_3'' &= -(a_{11}'' a_{12}' - a_{11}' a_{12}'') / ((a_{12}')^2 + (a_{12}'')^2) \\ J_2'' &= 0, J_4' = J_3', J_4'' = -J_3'' \end{aligned} \quad (4.3.62)$$

Les coefficients a_{ij}' et a_{ij}'' sont calculés pour $p = -b + ic$:

$$\begin{aligned} a_{11}' &= g_1 + (b^2 - c^2)g_2 + ((b^2 - c^2)^2 - 4b^2 c^2)g_3 \\ a_{11}'' &= -2bc(g_2 + 2g_3(b^2 - c^2)) \\ a_{12}' &= -bg_4 + (3bc^2 - b^3)g_5 \\ a_{11}'' &= cg_4 + (3b^2 c - c^3)g_5 \end{aligned} \quad (4.3.63)$$

Pour plus de simplicité, on adoptera par la suite les notations suivantes :

$$\begin{aligned} w(x) &= A_2 e^{-ax} + e^{-bx} \{A_3 \cos(cx) + A_4 \sin(cx)\} \\ \omega(x) &= B_2 e^{-ax} + e^{-bx} \{B_3 \cos(cx) + B_4 \sin(cx)\} \end{aligned} \quad (4.3.64)$$

avec, $B_2 = n_2 A_2$, $B_3 = n_3 A_3 + n_4 A_4$, $B_4 = -n_4 A_3 + n_3 A_4$ et où on a effectué le changement de notation $(n_2, n_3, n_4) = (J_2', J_3', J_3'')$.

3.5. Modèle sinus

3.5.1. Equations générales

La fonction associée au cisaillement transversal est donnée sous forme d'une fonction sinusoïdale (4.2.18). le champ de déplacement s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_1 = u - z w_{,1} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)(\omega + w_{,1}) \\ U_3 = w \end{cases} \quad (4.3.65)$$

Par dérivation de ces relations, on obtient l'expression des composantes du tenseur de déformation :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = u_{,1} - z w_{,11} + (h/\pi) \sin(\pi z/h)(\omega_{,1} + w_{,11}) \\ \varepsilon_{22} = \left[1 - z/R + (z/R)^2\right](w/R) \\ 2\varepsilon_{13} = (\omega + w_{,1}) \cos(\pi z/h) \end{cases} \quad (4.3.66)$$

La distribution du cisaillement transversal suivant une fonction cosinusoïdale justifie alors le choix de la fonction de cisaillement sous forme d'une fonction sinusoïdale.

En utilisant les lois de comportement en élasticité linéaire, les contraintes sont reliées au champ de déplacement par :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(u_{,1} + \frac{\nu w}{R} \right) - z \left(w_{,11} + \frac{\nu w}{R^2} \right) + z^2 \frac{\nu}{R^3} w + \frac{h}{\pi} (\omega_{,1} + w_{,11}) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{w}{R} + \nu u_{,1} \right) - z \left(\frac{w}{R^2} + \nu w_{,11} \right) + z^2 \frac{w}{R^3} + \frac{\nu h}{\pi} (\omega_{,1} + w_{,11}) \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ \sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\omega + w_{,1}) \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \end{cases} \quad (4.3.67)$$

Par intégration, on obtient les relations entre les contraintes généralisées et le champ de déplacement :

$$\begin{cases} N_{11} = B(u_{,1} + \nu \frac{w}{R}) + \frac{D}{R} \left[\left(\frac{24}{\pi^3} - 1 \right) w_{,11} + \frac{24}{\pi^3} \omega_{,1} \right] \\ N_{22} = B \left(\frac{w}{R} + \nu u_{,1} \right) + D \frac{w}{R^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{11} = D \left[\frac{1}{R} u_{,1} + \frac{3\nu\eta^2}{20R^2} w + \left(\frac{24}{\pi^3} - 1 \right) w_{,11} + \frac{24}{\pi^3} \omega_{,1} \right] \\ M_{22} = D \left[-\frac{w}{R^2} + \left(\frac{24}{\pi^3} - 1 \right) \nu w_{,11} + \frac{24\nu}{\pi^3} \omega_{,1} \right] \end{cases} \quad (4.3.68)$$

$$\begin{cases} \tilde{M}_{11} = D \left[\frac{24}{\pi^3 R} u_{,1} + \frac{6}{\pi^2} \omega_{,1} + \left(\frac{18}{\pi^5} (\pi^2 - 8) \nu \frac{\eta^2}{R^2} + \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) \right) w_{,11} \right] \\ \tilde{M}_{22} = D \left[\frac{6\nu}{\pi^2} \omega_{,1} - \frac{24}{\pi^3 R^2} w + \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) \nu w_{,11} \right] \end{cases}$$

$$\left\{ \tilde{Q}_{13} = \frac{Eh}{4(1+\nu)} (\omega + w_{,1}) \right.$$

3.5.2. Résolution :

En remplaçant ces relations dans (4.3.37), on obtient les équations d'équilibre exprimées en fonction de u , w et ω :

$$\begin{aligned} \square \quad & \frac{12}{h^2} u_{,11} + \frac{24}{\pi^3 R} \omega_{,11} + \frac{\nu}{R} \left(\frac{12}{h^2} - \frac{1}{R^2} \right) w_{,1} - \left(\frac{24}{\pi^3} - 1 \right) \frac{1}{R} w_{,11} = 0 \\ \square \quad & \frac{12\nu}{Rh^2} u_{,1} + \frac{1}{R} \left(\frac{24}{\pi^3} - 1 \right) u_{,111} - \frac{3(1-\nu)}{h^2} \omega_{,1} + \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{24}{\pi^3} \right) \omega_{,111} \\ & + \frac{12}{R^2} w - \frac{3(1-\nu)}{h^2} w_{,11} + \left(1 + \frac{6}{\pi^2} - \frac{48}{\pi^3} \right) w_{,1111} = 0 \\ \square \quad & \frac{1}{R} u_{,11} - \frac{\pi^3}{8} \frac{1-\nu}{h^2} \omega + \frac{\pi}{4} \omega_{,11} - \frac{\pi^3}{8} \frac{(1-\nu)}{h^2} w_{,1} + \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) w_{,111} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.69)$$

dont la solution est donnée par la relation (4.3.42).

Afin de simplifier notre démarche, on éliminera comme précédemment la dérivée du déplacement axial u , des relations (4.3.68) et par la suite des équations d'équilibre :

$$u_{,1} = -\frac{\nu}{R} w - \frac{2h^2}{R\pi^3} \omega_{,1} + \frac{h^2}{12R} \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) w_{,11} \quad (4.3.70)$$

les contraintes généralisées se mettent alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} N_{22} = B \left[\left(1 - \nu^2 + \frac{\eta^2}{12}\right) \frac{w}{R} + \frac{\nu h^2}{12R} \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) w_{,11} - \frac{2\nu h^2}{\pi^3 R} \omega_{,1} \right] \\ M_{11} = D \left[-\frac{\nu}{R^2} \left(1 - \frac{3\eta^2}{20}\right) w - \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) \left(1 - \frac{\eta^2}{12}\right) w_{,11} + \frac{24}{\pi^3} \left(1 - \frac{\eta^2}{12}\right) \omega_{,1} \right] \\ \tilde{M}_{11} = D \left[\frac{24\nu}{\pi^3 R^2} n_1 w + \frac{24}{\pi^3} n_2 w_{,11} + \frac{6}{\pi^6} \left(1 - \frac{8\eta^2}{\pi^4}\right) \omega_{,1} \right] \end{cases} \quad (4.3.71)$$

où,

$$n_1 = \left(1 - 8/\pi^2\right) \frac{3\eta^2}{4} - 1 \quad \text{et} \quad n_2 = \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) \frac{\eta^2}{12} + \frac{\pi}{4} - 1 \quad (4.3.72)$$

Tenant compte des relations (4.3.71), les équations d'équilibre deviennent :

$$\square \quad -\left(1 - \nu^2 + \frac{\eta^2}{12}\right) \frac{w}{R^2} + \left(\frac{1 - \nu}{4} - \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) \frac{\nu\eta^2}{6}\right) w_{,11} + \frac{h^2}{12} (n_3 + n_4 \eta^2) w_{,1111} \\ + \left(\frac{1 - \nu}{4} + \frac{2\nu\eta^2}{\pi^3}\right) \omega_{,1} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{6}{\pi^2} \left(\frac{4}{\pi} - 1\right) - \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) \frac{2\eta^2}{\pi^3} \right] \omega_{,111} = 0 \quad (4.3.73)$$

$$\square \quad -\left(\frac{1 - \nu}{4} + \frac{2\nu\eta^2}{\pi^3}\right) w_{,1} + \frac{2h^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi}{4} - 1 + \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) \frac{\eta^2}{12}\right) w_{,111} - \left(\frac{1 - \nu}{4}\right) \omega \\ + \frac{h^2}{2\pi^2} \left(1 - \frac{8\eta^2}{\pi^4}\right) \omega_{,11} = 0$$

où,

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{48}{\pi^3} - \frac{6}{\pi^2} - 1 \\ n_4 &= \frac{48}{\pi^6} - \frac{4}{\pi^3} + \frac{1}{12} \end{aligned} \quad (4.3.74)$$

dont la solution se met sous la forme :

$$\begin{cases} w = Ae^{px} \\ \omega = Be^{px} \end{cases} \quad (4.3.75)$$

En remplaçant cette expression dans les équations d'équilibre précédentes, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3.76)$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont :

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{1}{R^2} \left[1 - \nu^2 + \frac{\eta^2}{12} \right] + \left[\frac{1-\nu}{4} - \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) \frac{\nu\eta^2}{6} \right] p^2 + \left[(n_3 + n_4\eta^2) \frac{h^2}{12} \right] p^4 \\ a_{12} &= \left[\frac{1-\nu}{4} + \frac{2\nu\eta^2}{\pi^3} \right] p + \frac{h^2}{12} \left[\frac{6}{\pi^2} \left(\frac{4}{\pi} - 1\right) - \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) \frac{2\eta^2}{\pi^3} \right] p^3 \\ a_{21} &= -\left[\frac{1-\nu}{4} + \frac{2\nu\eta^2}{\pi^3} \right] p + \frac{2h^2}{\pi^3} \left[\frac{\pi}{4} - 1 + \left(1 - \frac{24}{\pi^3}\right) \frac{\eta^2}{12} \right] p^3 \\ a_{22} &= -\left[\frac{1-\nu}{4} \right] + \frac{h^2}{2\pi^2} \left[1 - \frac{8\eta^2}{\pi^4} \right] p^2 \end{aligned} \quad (4.3.77)$$

Comme précédemment, en annulant le déterminant de la matrice ($a_{\alpha\beta}$), on obtient 2 racines réelles et opposées et 4 racines complexes.

3.6. Influence des paramètres d'amortissement sur la solution générale

On résume sur le tableau suivant, la variation des paramètres γ , a , b et c pour les différentes théories en fonction de h/R . Les valeurs numériques liées à cette étude sont :

$$R = 1\text{m,}$$

$$h=0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.002 \text{ et } 0.001 \text{ m.}$$

	K-L	R-M		3ème ordre			sinus		
h/R	γ	b	c	a	b	c	a	b	c
1/5	2.8743	2.9944	2.7489	85.714	2.9874	2.7676	77.245	2.9873	2.7676
1/10	4.0648	4.1506	3.9771	171.46	4.1435	3.9884	154.52	4.1434	3.9886
1/20	5.7485	5.8095	5.6869	342.92	5.8037	5.6941	309.05	5.8036	5.6942
1/50	9.0892	9.0128	9.0503	857.32	9.1240	9.0546	772.65	9.1239	9.0547
1/100	12.854	12.881	12.827	1714.6	12.879	12.830	1545.3	12.879	12.830
1/500	28.743	28.755	28.730	8573.2	28.754	28.732	7726.5	28.754	28.732
1/1000	40.648	40.657	40.639	17146	40.656	40.640	15453	40.656	40.640

où K-L et R-M représentent respectivement les modèles de Kirchhoff-Love et de Reissner-Mindlin.

Les coefficients γ , a et b augmentent avec h/R , traduisant que pour les coques de plus en plus minces, les effets de bords s'atténuent à une distance de plus en plus courte. Le modèle de Kirchhoff-Love est décrit par un seul paramètre γ appelé coefficient d'amortissement. Cette constante intervient dans la quantité décroissante $e^{-\gamma x}$ et dans les fonctions trigonométriques $\cos(\gamma x)$ et $\sin(\gamma x)$ de la relation (2.4.18). Ceci résulte du fait que le discriminant du polynôme caractéristique de cette relation est un imaginaire. Pour le modèle de Reissner-Mindlin, Les coefficients d'amortissement (noté par b) et de périodicité (noté par c) sont distincts. Le discriminant du polynôme caractéristique dans ce cas est un complexe avec une partie réelle et une partie imaginaire.

L'introduction d'efforts généralisés d'ordre supérieur pour les modèles raffinés, a nécessité l'utilisation d'un paramètre supplémentaire (noté par a). Pour ces modèles, le polynôme caractéristique est du sixième ordre. On remarque que les coefficients b et c sont identiques et que pour ce paramétrage, nous avons la relation :

$$a(\eta = 1/5) = \frac{1}{2}a(\eta = 1/10) = \frac{1}{4}a(\eta = 1/20)\dots \quad (4.3.78)$$

Pour des coques moyennement épaisses, les coefficients γ , b et c sont sensiblement différents ; par contre pour η très petit, l'écart entre ces valeurs se réduit et s'annule pour η négligeable ($\eta = 1/1000$).

Nous dressons ci-après, un tableau pour résumer cette étude comparative entre les paramètres des différents modèles :

h/R	Reis-Mind		3ème ordre		sinus	
	δ_1 %	δ_2 %	δ_1 %	δ_2 %	δ_1 %	δ_2 %
1/5	4.18	4.36	3.94	3.71	3.93	3.71
1/10	2.11	2.16	1.94	1.88	1.94	1.88
1/20	1.06	1.07	0.96	0.95	0.96	0.95
1/50	0.43	0.43	0.38	0.38	0.38	0.38
1/100	0.21	0.21	0.20	0.19	0.2	0.19
1/500	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
1/1000	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

où, $\delta_1 = (b - \gamma) / \gamma$, $\delta_2 = (c - \gamma) / \gamma$.

La même démarche peut être faite pour un autre type de paramétrage, en prenant par exemple l'épaisseur h constante et le rayon R variable ($h = 0.05\text{m}$, $R = 0.25, 0.5, 1\text{ m}$). Nous aboutissons à des résultats similaires.

4. ETUDE DU RACCORDEMENT D'UN CYLINDRE AVEC UNE PLAQUE RIGIDE

Pour valider les solutions analytiques établies au paragraphe précédent, on propose d'étudier le problème de raccordement d'un cylindre avec un fond plat très rigide. On considère que le cylindre d'épaisseur h est fermé par une plaque d'épaisseur H telle que $H \gg h$. On suppose alors que ce cylindre est encastré à sa base ($x = 0$). La géométrie de cet appareil à pression est définie par la figure 4.4.

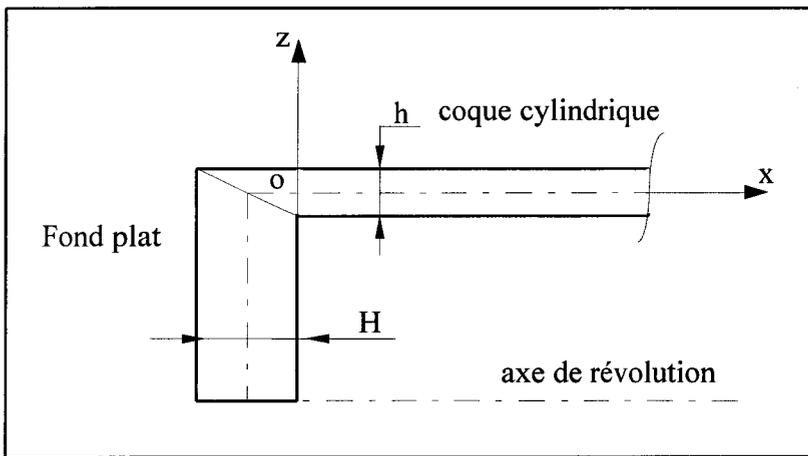


Figure 4.4. Raccordement d'un cylindre avec une plaque circulaire très rigide

On étudie la solution par les modèles classiques (Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin) et par les modèles raffinés (3ème ordre et sinus). Les expressions finales des solutions analytiques sont obtenues en tenant des conditions aux limites des coques à raccorder.

4.1. Solution par le modèle de Kirchhoff-Love

La solution analytique pour ce modèle, est donnée par :

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-\gamma x} [A_3 \cos(\gamma x) + A_4 \sin(\gamma x)] + (2 - \nu)PR^2 / (2Eh) \\ \omega(x) &= -\gamma e^{-\gamma x} [(A_3 - A_4) \cos(\gamma x) + (A_3 + A_4) \sin(\gamma x)] \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

où $\omega = w_{,1}$ est la rotation de Kirchhoff-Love.

A partir des conditions aux limites pour un cylindre encastré :

$$\begin{aligned} w(x=0) &= 0 \\ w_{,1}(x=0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

on détermine les constantes d'intégration :

$$\begin{aligned} A_3 &= -w^0 \\ A_4 &= -w^0 \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

où, $w^0 = (2 - \nu)PR^2 / (2Eh)$ est la solution de membrane.

Par la suite, en remplaçant ces expressions dans (4.4.1), on obtient :

$$\begin{aligned} w(x) &= w^0 \left[1 - \sqrt{2} e^{-\gamma x} \cos(\gamma x + \pi/4) \right] \\ \omega(x) &= 2\gamma w^0 e^{-\gamma x} \sin(\gamma x) \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Les expressions des efforts et des déformations seront finalement déterminées en utilisant les relations (4.3.7) et (4.3.9).

4.2. Solution par le modèle de Reissner-Mindlin

La solution analytique est donnée par les expressions du déplacement radial $w(x)$ et de la rotation de la normale $\omega(x)$:

$$\begin{aligned} w(x) &= w^0 + e^{-bx} [A_3 \cos(cx) + A_4 \sin(cx)] \\ \omega(x) &= \psi e^{-bx} [(\alpha A_4 - \beta A_3) \sin(cx) + (\alpha A_3 + \beta A_4) \cos(cx)] \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

avec,

$$\begin{aligned} \alpha &= b(b^2 - 3c^2 - \mu) \\ \beta &= c(c^2 - 3b^2 + \mu) \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

et où μ et ψ sont définis par les relations (4.3.21).

En exprimant les conditions aux limites pour le cylindre encastré en $x=0$:

$$\begin{aligned} w(x=0) &= 0 \\ \omega(x=0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

les constantes d'intégration s'obtiennent par :

$$\begin{aligned} A_3 &= -w^\circ \\ A_4 &= (\beta/\alpha)w^\circ \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Tenant compte de ces relations, la solution finale est :

$$\begin{aligned} w(x) &= w^\circ e^{-bx} [(\beta/\alpha) \sin(cx) - \cos(cx)] \\ \omega(x) &= \psi w^\circ e^{-bx} [2\beta \sin(cx) + ((\beta^2 - \alpha^2)/\alpha) \cos(cx)] \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

4.3. Solution par les modèles raffinés

Pour le modèle sinus et le modèle du 3ème ordre, la solution analytique est donnée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} w(x) &= w^\circ + A_2 e^{-ax} + e^{-bx} [A_3 \cos(cx) + A_4 \sin(cx)] \\ \omega(x) &= n_2 A_2 e^{-ax} + e^{-bx} [n_3 A_3 \cos(cx) + n_4 A_4 \sin(cx)] \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Les conditions d'encastrement sont :

$$\begin{aligned} w(x=0) &= 0 \\ \omega(x=0) &= 0 \\ w_{,1}(x=0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -a & -b & c \\ n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w^o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.12)$$

La résolution de ce système d'équation donne :

$$\begin{cases} A_2 = -\frac{bn_4 + cn_3}{(a-b)n_4 + c(n_2 - n_3)} w^o \\ A_3 = -\frac{an_4 + cn_2}{(a-b)n_4 + c(n_2 - n_3)} w^o \\ A_4 = -\frac{an_3 - bn_2}{(a-b)n_4 + c(n_2 - n_3)} w^o \end{cases} \quad (4.4.13)$$

Finalement, le calcul des constantes d'intégration permet de déterminer les champs de déplacement et de rotation et par la suite le niveau et la répartition des contraintes le long d'un méridien de la coque cylindrique. On présente dans ce qui suit les résultats de cette étude.

4.4. Présentation des résultats

Les différents paramètres liés à la coque cylindrique considérée sont le module de Young $E=210000\text{MPa}$, le coefficient de Poisson $\nu=0.3$, la pression interne $P=1\text{MPa}$ appliquée sur le côté AB (figure 4.5) et le rayon moyen $R=1\text{m}$. Afin d'effectuer une étude paramétrée en fonction de $\eta = h/R$, les épaisseurs considérées sont : $h=0.2, 0.1, 0.05, 0.02$ et 0.01m . Les longueurs de coques associées à ce paramétrage sont calculées à partir de la relation $L = 2.72\sqrt{Rh}$ (relation 3.4.2). La longueur maximale est obtenue pour $h/R=1/5$, soit $L=1.22\text{m}$ (on prendra par la suite $L=1.5\text{m}$). Le maillage et les conditions aux limites sont définis par la figure 4.5. Sur le côté AD, nous avons bloqué les déplacements suivant OX et OZ ; l'effet de fond est appliqué aux points B et C. La structure est maillée avec des éléments quadratiques à huit noeuds avec un maillage plus fin au niveau de l'encastrement. Le nombre d'éléments dépend de h/R , ainsi pour $h/R = 1/5$, nous avons considéré 20 éléments suivant z .

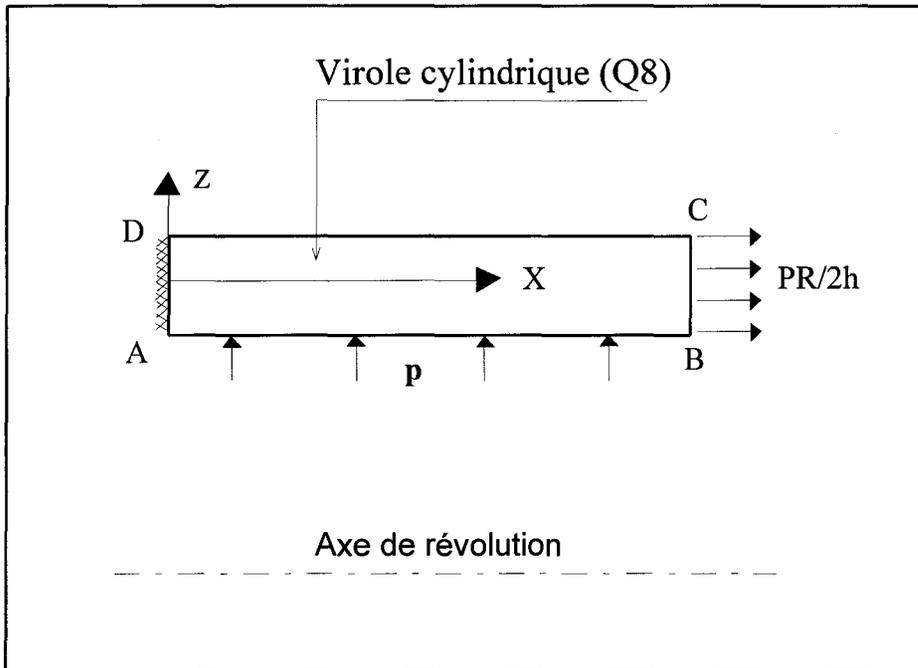
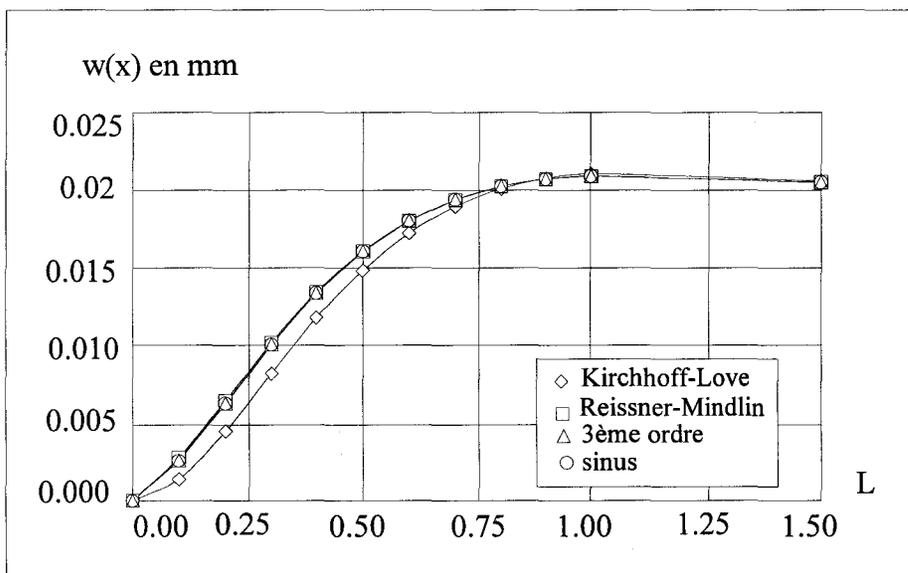
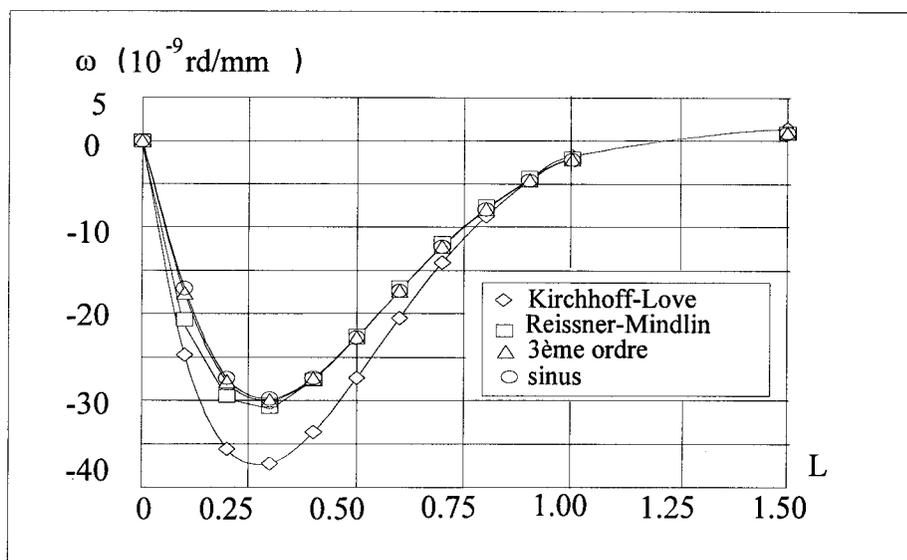


Figure 4.5. Maillage de la structure et conditions aux limites

On présente tout d'abord la distribution du déplacement radial et de la rotation le long de la surface moyenne de la coque cylindrique. Les paramètres liés à cette étude sont l'épaisseur $h = 0.2\text{m}$, le rayon moyen $R = 1\text{m}$ et la pression $P = 1\text{MPa}$.



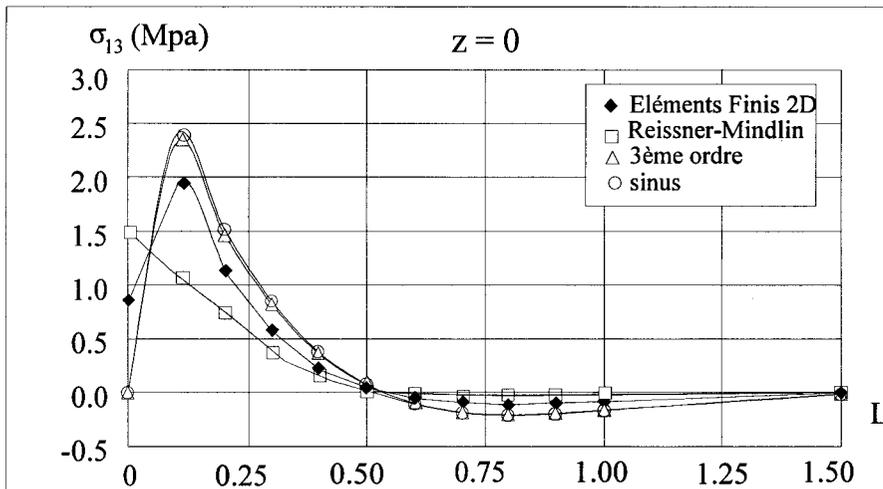
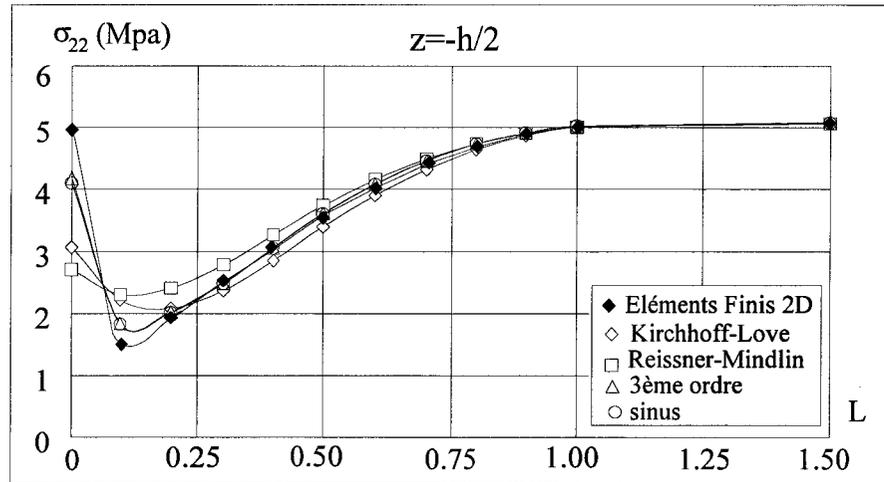
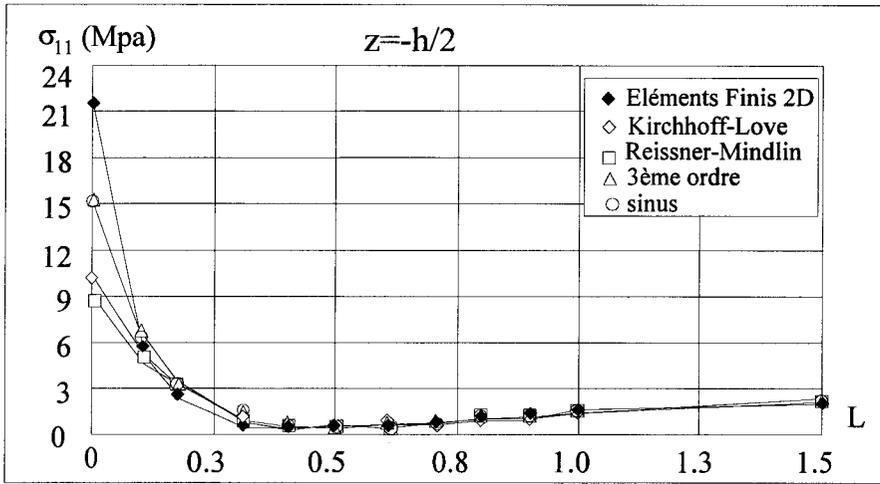
Graph 33 : Distribution du déplacement radial sur la surface moyenne de la coque cylindrique avec $h = 0.2\text{m}$, $R = 1\text{m}$, $P = 1\text{MPa}$, $z = 0$.



Graph 34 :Distribution de la rotation sur la surface moyenne de la coque cylindrique avec $h = 0.2\text{m}$, $R = 1\text{m}$, $P = 1\text{MPa}$, $z = 0$.

Pour le déplacement radial (graphe 33), nous avons comparé notre solution analytique à la solution numérique obtenue par éléments finis, donnée par Faye [FAY93]. On retrouve ainsi les mêmes allures. Cependant, notre solution tend vers une solution de membrane $\{w^o = (2-\nu)PR^2/2Eh = 0.02024 \text{ mm}\}$ avec effet de fond, et la solution donnée par Faye [FAY93] tend vers une solution de membrane $\{w^o = PR^2/2h = 0.0238 \text{ mm}\}$ sans effet de fond. Cette même remarque peut être généralisée pour les contraintes.

On constate que pour le déplacement radial, les modèles à cisaillement transverse (sinus, 3ème ordre et Reissner-Mindlin) sont en très bon accord et qu'ils s'écartent du modèle de Kirchhoff-Love. Les rotations obtenues par les modèles raffinés sont en bonne corrélation, la rotation de Reissner-Mindlin s'écarte légèrement de celles-ci. Par contre, la rotation de Kirchhoff-Love s'éloigne considérablement de celles données par les autres modèles et on remarque que ce modèle donne le plus petit déplacement radial et la plus grande rotation. Par la suite, on détermine le niveau et la répartition des contraintes axiales (σ_{11}), circonférentielles (σ_{22}) et transversales (σ_{13}) dans toute la structure et on présentera les distributions de ces contraintes, sur la surface interne ($z = -h/2$) pour σ_{11} et σ_{22} et sur la surface moyenne pour σ_{13} ($z = 0$).



Une comparaison des différents modèles avec la solution numérique, pour les contraintes axiales au niveau de l'encastrement (qui sont les contraintes maximales) est donnée par le tableau suivant :

Modèle	K-L	R-M	3ème-ordre	sinus	2D
σ_{11} (MPa)	10.22	9.01	15.35	15.08	22.9
δ %	55.37	60,66	32.97	34.15	/

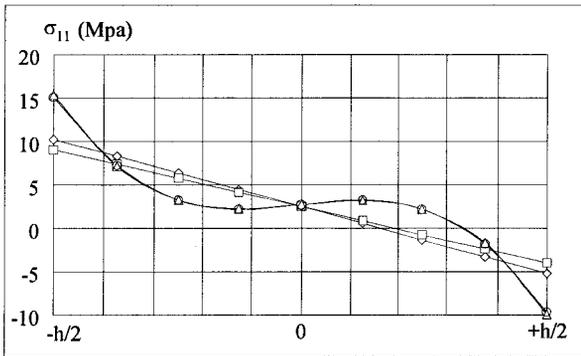
où l'écart δ est calculé par rapport à la solution de référence 2D.

On montre que les modèles raffinés sont en très bon accord et qu'ils sont supérieurs aux modèles classiques, par contre ils présentent un blocage au niveau de l'encastrement. Pour résoudre ce problème, on peut utiliser un champ de déplacement qui tient compte du pincement suivant l'épaisseur de la coque (tenir compte de la déformation normale jusque là négligée) ([DIS87], [TOU88]). On remarque par ailleurs que pour les contraintes principales, le modèle de Reissner-Mindlin n'améliore pas celui de Kirchhoff-Love ; par contre celui-ci donne une bonne approximation de la contrainte de cisaillement au niveau de la section de l'encastrement.

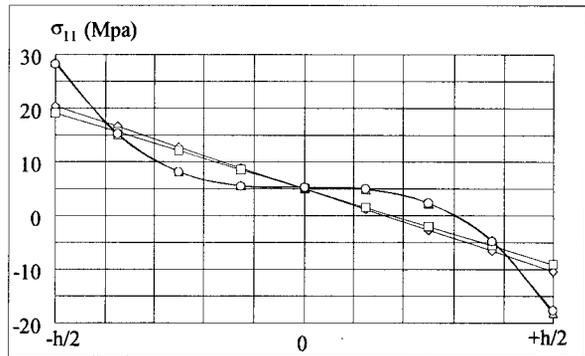
Comme au chapitre III, on constate que les contraintes maximales sont les contraintes axiales et qu'elles se situent au niveau de l'encastrement. En dehors de ces zones, tous les modèles convergent vers la solution de membrane.

Pour effectuer une étude comparative en fonction du paramètre h/R , on prendra un rayon R constant ($R=1m$) et on fait varier l'épaisseur h entre 0.2m et 0.01m. On présentera la distribution des contraintes dans l'épaisseur de la coque. Les sections considérées sont la section d'encastrement ($x=0$) pour σ_{11} et σ_{22} et la section située à $x=0.1m$ pour σ_{13} .

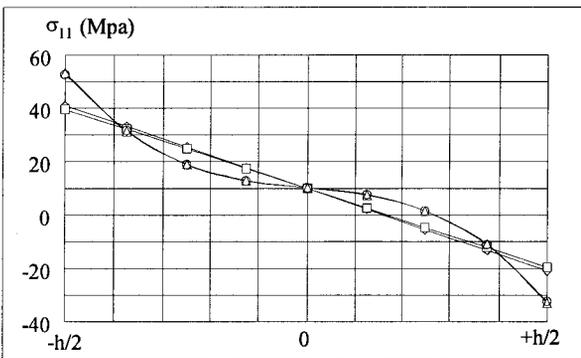
Pour garder un aspect analytique à notre approche, nous ne présenterons pas la solution numérique en 2D sur les graphes suivants :



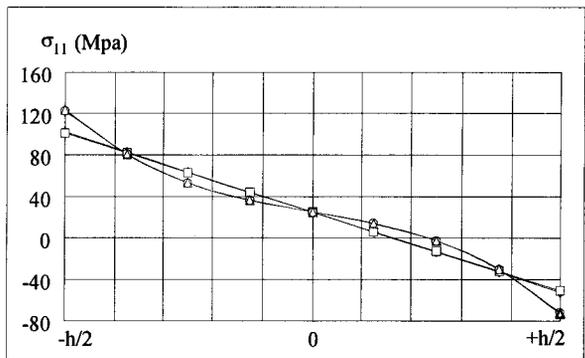
(a) $h/R=1/5$



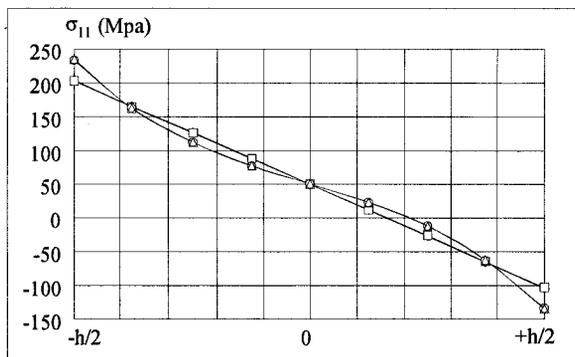
(b) $h/R=1/10$



(c) $h/R=1/20$



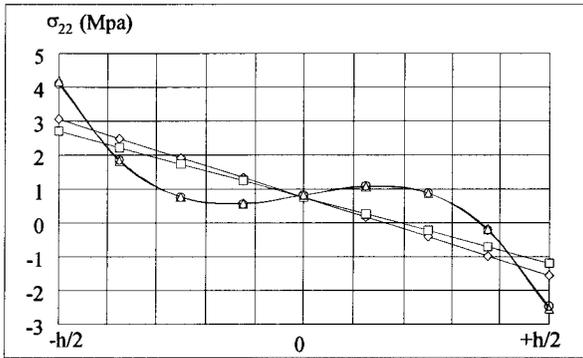
(d) $h/R=1/50$



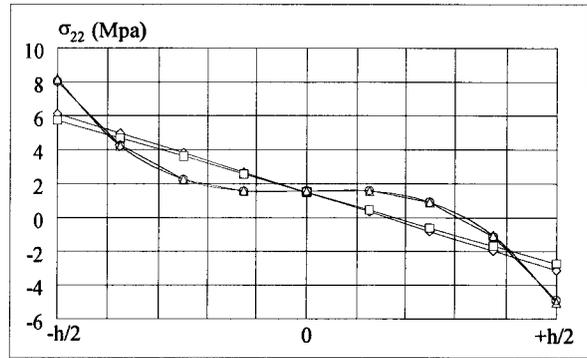
(e) $h/R=1/100$

Graph 38 : Distribution des contraintes axiales suivant l'épaisseur de la coque cylindrique avec $R=1m$, $P=1MPa$, $x=0$.

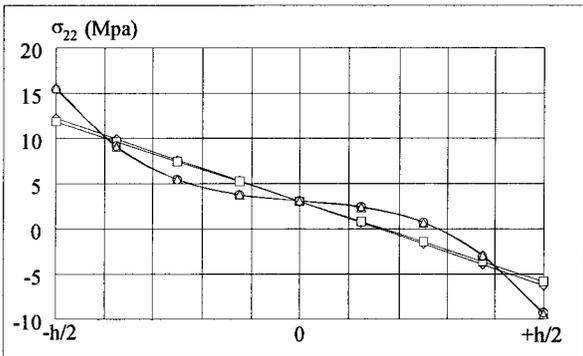
De même, l'étude comparative des contraintes circonférentielles et de cisaillement transversale par les différents modèles est résumée par les graphes 39 et 40 (a-e) suivants :



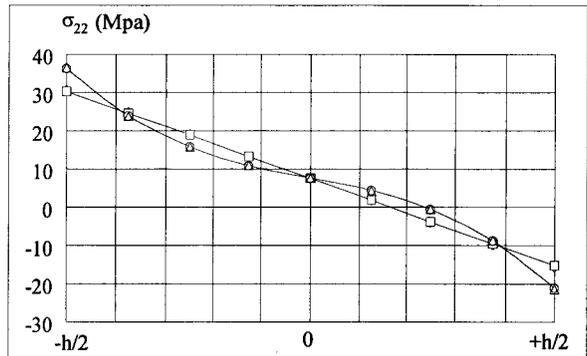
(a) $h/R=1/5$



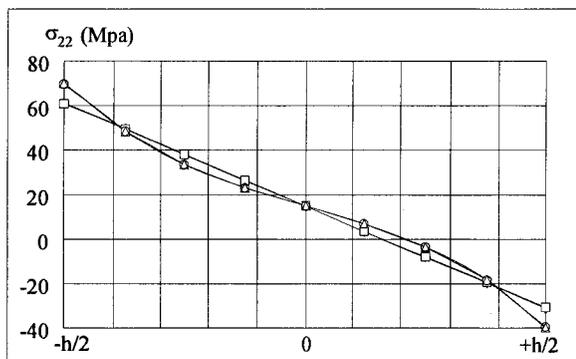
(b) $h/R=1/10$



(c) $h/R=1/20$



(d) $h/R=1/50$

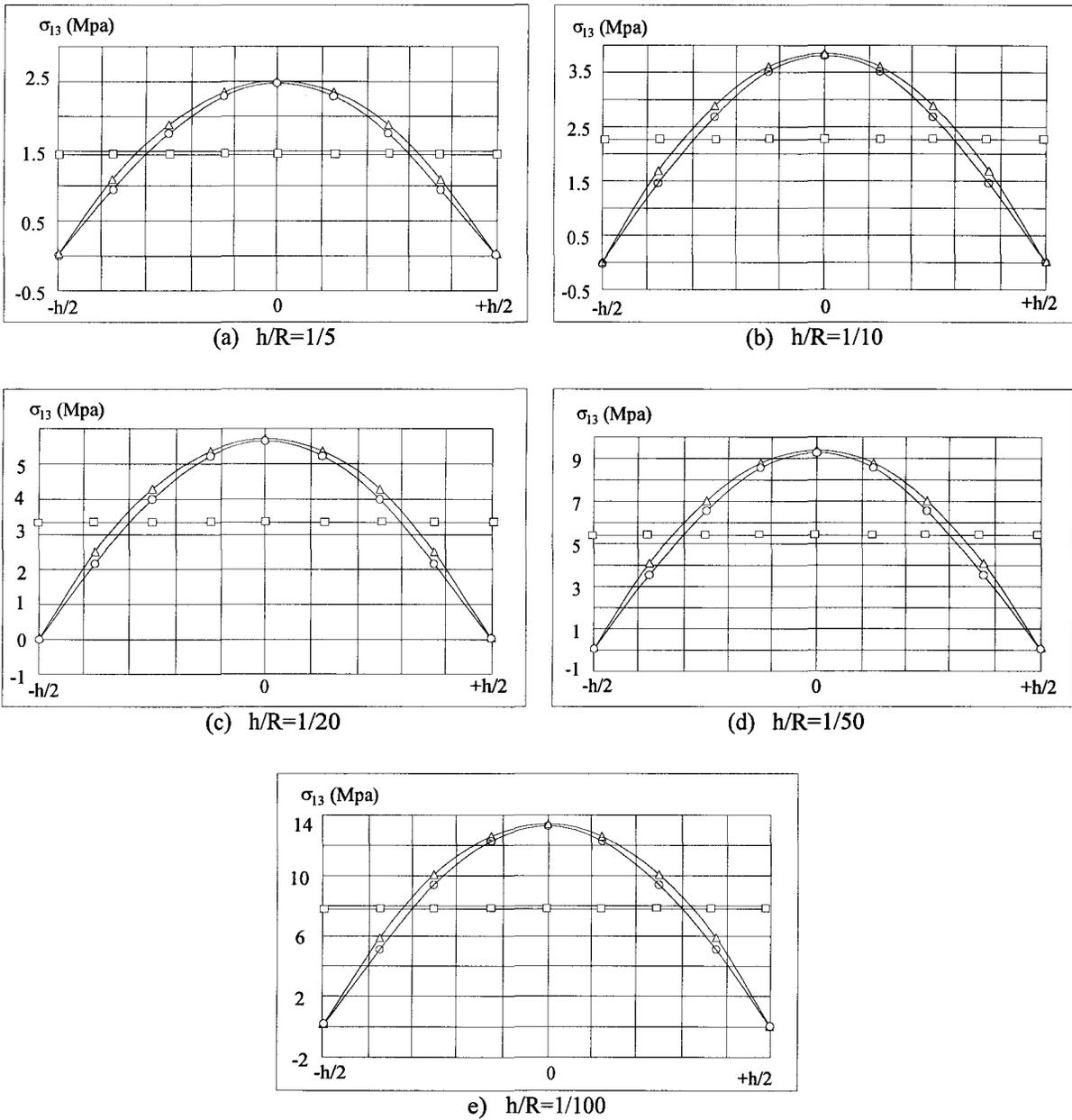


(e) $h/R=1/100$

Graphe 39 : Distribution des contraintes circonférentielles suivant l'épaisseur de la coque cylindrique avec $R=1m$, $P=1MPa$, $x=0$.

On peut remarquer que pour h/R très petit, l'hypothèse de la répartition linéaire des contraintes suivant l'épaisseur est justifiée. Par contre au-delà de $h/R = 1/50$, approximativement, cette hypothèse n'est plus valable.

Nous présentons finalement la distribution des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la coque. La section considérée est située à 0.1m de l'encastrement.



Graphe 40 :Distribution des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la coque cylindrique avec $R=1m$, $P=1MPa$, $x=0.1m$.

Sur les graphes 38, 39 et 40, les modèles analytiques sont désignés par : \diamond Kirchhoff-Love, \square Reissner-Mindlin, \triangle 3ème ordre et \circ sinus.

Pour montrer de combien le modèle de Kirchhoff-Love a été amélioré (ou non), nous dressons des tableaux comparatifs, en considérant ce modèle comme référence.

	Contrainte axiale en MPa ($z=-h/2$ et $x=0$)				
h/R	1/5	1/10	1/20	1/50	1/100
K-L	10.22	20.43	40.87	102.2	204.3
R-M	9.01	19.11	39.48	100.7	202.9
Red	15.35	28.62	53.39	123.2	234.9
sinus	15.08	28.22	52.80	122.3	233.6
δ_{RM} %	-11.8	-6.46	-3.4	-1.5	-0.7
δ_{Rd} %	50.2	40.1	30.6	20.5	15
δ_{Sin} %	47.6	38.1	29.2	19.7	14.3

	Contrainte circonférentielle en MPa ($z=-h/2$ et $x=0$)				
h/R	1/5	1/10	1/20	1/50	1/100
K-L	3.07	6.13	12.26	30.65	61.30
R-M	2.70	5.73	11.84	30.22	60.88
Rd	4.18	8.16	15.59	36.54	70.06
sinus	4.10	8.04	15.42	36.26	69.66
δ_{RM} %	-12.1	-6.5	-3.4	-1.4	-0.7
δ_{Rd} %	36.2	33.1	27.2	19.2	14.3
δ_{Sin} %	33.6	31.2	25.8	18.3	13.6

où δ est l'écart relatif par rapport à la solution de Kirchhoff-Love.

Dans tous les cas, les écarts obtenus correspondent aux modèles raffinés. Ainsi pour $h/R=1/5$, ces écarts sont :

- $\delta = 50$ % pour les contraintes axiales σ_{11} ,
- $\delta = 35$ % pour les contraintes circonférentielles σ_{22} .

Cet écart diminue avec le rapport h/R et devient identique pour les deux contraintes (σ_{11} et σ_{22}) au delà de $\eta = 1/50$:

- $\delta = 20$ % pour les contraintes axiales σ_{11} ,
- $\delta = 19$ % pour les contraintes circonférentielles σ_{22} .

Pour le modèle de Reissner-Mindlin, les écarts obtenus pour σ_{11} et σ_{22} sont identiques. Ainsi pour $\eta = 1/5$, on a :

- $\delta = 11.8$ % pour les contraintes axiales σ_{11} ,
- $\delta = 12.1$ % pour les contraintes circonférentielles σ_{22} .

On constate que pour les contraintes de cisaillement, le modèle de Reissner-Mindlin et les modèles d'ordre supérieur ne convergent pas vers la même valeur, même quand h/R devient très petit (graphe 40-e). Cependant, ces contraintes deviennent petites par rapport aux contraintes principales ; à titre d'exemple, pour $h/R = 1/100$, on a :

- $\sigma_{11} = 234$ MPa,
- $\sigma_{13} = 13.5$ MPa (soit 5.8 % de σ_{11}).

En conclusion, on peut dire que le modèle de Kirchhoff-Love permet d'obtenir une assez bonne approximation de l'état de contrainte pour $\eta < 1/50$. Au delà de cette valeur, les contraintes de cisaillement sont comparables aux contraintes principales (pour $h/R = 1/5$, celles-ci représentent 18 % de σ_{11} et 40.2 % de σ_{22}), les modèles d'ordre supérieur deviennent alors nécessaire pour décrire un problème de raccord où les discontinuités géométriques engendrent, comme on vient de le montrer, de fortes flexions.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Une contribution à l'analyse des problèmes de raccordement de coques de géométries différentes est proposée dans cette thèse. Pour répondre à un des grands problèmes rencontrés dans les secteurs industriels qui emploient des enceintes sous pression, nous avons mené une étude de plusieurs types de jonctions. Les modèles cinématiques retenus pour cette étude sont les modèles linéaires de Kirchhoff-Love et de Reissner-Mindlin et les modèles raffinés de Reddy et de Touratier. Un intérêt particulier est porté à l'étude des effets de bord par ces différents modèles.

Nous établissons dans cette étude que pour des coques très minces, la solution de membrane est suffisante. En effet, sans rigidité à la flexion, ce type de structure ne peut reprendre les efforts générés par des conditions aux limites de type jonction ou encastrement, où la flexion est prépondérante : les membranes très minces ne résistent que par leur forme. Pour des coques minces, les modèles de Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin permettent d'obtenir des solutions qui sont une bonne approximation de l'état de contrainte pour de faibles discontinuités géométriques. Dans le cas des coques semi-épaisses et des coques épaisses et principalement en présence de discontinuités, les modèles raffinés (3ème ordre et sinus) deviennent indispensable pour un dimensionnement correct.

Pour les cas de jonctions étudiés, la démarche adoptée est purement analytique. Les solutions établies ont ainsi l'avantage d'être facilement exploitable et peuvent s'intégrer dans des codes de calcul des appareils à pression.

Dans un premier temps, nous avons étudié trois types de raccordement cylindre-cône, cylindre-sphère et cylindre-sphère-cône. Nous avons établi des solutions analytiques basées sur le modèle de Kirchhoff-Love. Un intérêt particulier a été porté à l'étude de l'influence des paramètres géométriques et des paramètres de discontinuité, sur la solution au niveau de la jonction. On détermine les zones d'influence de chaque coque et on montre qu'à partir d'une distance caractéristique, les effets de bord s'annulent ; cette distance est fonction des paramètres, géométriques et de discontinuité. L'étude comparative des deux types de jonctions cylindre-cône et cylindre-sphère a montré une certaine ressemblance. En effet, pour des coques minces, les contraintes maximales au niveau de la jonction sont identiques, ceci montre que le tronçon de la coque sphérique au niveau de la jonction peut être remplacé par un élément de forme conique.

Pour la validation de ces solutions, nous avons mené, une étude numérique en éléments finis par le modèle axisymétrique en 2D et nous avons considéré cette solution comme une solution de référence. L'exemple traité dans cette partie est celui du raccordement cylindre-cône. On montre alors qu'au-delà d'un angle $\alpha = 60^\circ$ et d'un rapport $h/R = 1/50$, l'écart relatif entre les deux modèles est considérable. Ceci montre que le modèle de Kirchhoff-Love n'est plus valable dans ces domaines, et justifie notre choix de chercher des solutions analytiques basées sur des champs de déplacement enrichis.

L'extension aux modèles raffinés a permis d'analyser des problèmes de jonction de coques semi-épaisses, où la condition sévère d'encastrement a été retenue. La contribution des modèles enrichis dans les zones de discontinuité est très significative. L'exemple traité dans ce cas est celui d'une coque cylindrique fermée par un fond plat. Des solutions analytiques pour les modèles retenus sont obtenues dans le cas général en tenant compte des conditions de bord qui sont celles de l'encastrement, ces solutions sont complétées de manière à tenir compte des effets d'extrémité. Dans notre cas, les modèles de Kirchhoff-

Love, de Reissner-Mindlin, et les modèles raffinés du Sinus et du 3ème ordre sont décrits respectivement par un, deux et trois paramètres. La méthode utilisée pour leur identification est purement analytique ; on diminue ainsi le degré de complexité du problème et on évite l'utilisation des logiciels de calcul formel.

Nous établissons que les modèles raffinés ont une meilleure sensibilité aux effets de bord, de plus ils présentent l'avantage de se dispenser des coefficients de correction du cisaillement transverse. Nous confirmons par cette étude le résultat établi par l'analyse du raccordement cylindre-cône, qu'au delà de $h/R = 1/50$, et principalement en présence de discontinuités géométriques, les modèles raffinés deviennent indispensables pour un dimensionnement correct.

Pour des développements ultérieurs, on propose :

- de tester le comportement des différents modèles vis à vis des effets d'extrémité pour les raccordements cylindre-cône et cylindre-sphère,
- de tenir compte de la déformation normale dans le cas des coques semi-épaisses, ce qui permettrait d'éviter le blocage du cisaillement transverse au niveau des encastrements,
- d'étendre ce travail, à l'étude des zones plastiques en fonctions des discontinuités géométriques,
- d'étudier les problèmes de flambage circonférentiel dans les zones de raccordement.

REFERENCES

REFERENCES

- [ADM95] **AD-MERKBLATER** "Technical Rules For Pressure Vessels", English Edition, Carl Heymanns Verlag. Köln. Germain (1995).
- [ALF89] **ALFUTOV N. & POPOV B. G.** "Non Linear Analysis of composite structures", Handbook of composites, Vol.2, Struc. and Design, Ed. by C. T. Herabovitch (1989).
- [ASM 95] **A. S. M. E.** "Boiler and Pressure Vessel Code", American Society of Mechanical Engineers, New-York (1995).
- [BAT 90] **BATOZ J. L & DATT G.** "Modélisation des Structures par Eléments Finis". Volumes 1 et 3. Hermès (1990).
- [BAŞ 85] **BAŞAR Y & GRÄTZIG W. B.** "Mechanik der Flächentragwerke", Vieweg, Braunschweig. Germain (1985).
- [BAŞ 92] **BAŞAR Y.** "Modeling of shells", Cours de DEA à l'EUDIL, Lille (1992).
- [BAS 78] **BASS J.** "Cours de Mathématiques", tome 1, 5ème Edition, Masson, Paris (1978).
- [BEN 78] **BERNADOU M.** "Sur l'Analyse Linéaire Numérique du modèle de coques minces de W. T. Koiter - Algorithmes en Géométrie Euclidienne", Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI, Paris (1978).
- [BHI 84] **BHIRMARADDI A.** "A Higher Order Theory for Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells", IJSS, Vol 20, No. 7, pp. 623-630, USA (1984).
- [BHI 85] **BHIRMARADDI A.** "Dynamic Response of Orthotropic, Homogeneous and Laminated Cylindrical Shells", AIAA Journal, pp. 1834-1837, (1985).
- [BIC 82] **BICKFORD W. B.** "A Consistent Higher-Order Beam Theory", Devl. in Theor. and Appl. Mech. Vol. 11, pp. 137-150 (1982).
- [BIL65] **BILLINGTON D. P.** "Thin Shell Concrete Structures", Mc Graw-Hill London (1965).
- [BIJ57] **BIJLAARD P. P.** "Stresses from Radial Loads in Cylindrical Pressure Vessels", Welding Journal, Vol.33, (1954).
- [BIJ57] **BIJLAARD P. P.** "Local Stresses in Spherical Shells from Radial or Moment Loadings", Welding Journal (Research supplement), (1957).
- [CHE 79] **CHENG S.** "Elasticity Theory of Plates and a Refined Theory", Transactions of the ASME, Vol. 46, pp. 644-650, (1979).
- [CHEN 89] **CHEN P. S & ARCHER R. R.** "Solutions of a Twelfth Order Thick Plate Theory", Acta Mechanica, vol 79, pp. 97-111 Springer-Verlag, Amherst, Massachusetts (1989).
- [COD 95] **CODAP** "Code Français de Construction des Appareils à Pression (non soumis à la flamme)", Syndicat National de la Chaudronnerie , de la Tôlerie et de la Tuyauterie Industrielle, Paris (1995).

Références

- [DAU 88] **DAUTRAY R. & LIONS J. L.** "Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques", Masson, Paris (1988).
- [DEM 85] **DE METZ A.** "Etude Directe, en Elasticité, d'Appareils à Pression formés de Cônes et de Cylindres", Thèse de Doctorat, USTL, Lille (1985).
- [DES 86] **DESTUYNDER P.** "Plaques Minces en Elasticité linéaire", Masson (1986).
- [DES 90] **DESTUYNDER P.** "Modélisation des Coques Elastiques", Masson (1990).
- [DIN 64] **DINNO K. S & GILL S. S.** "The limit Analysis of a Pressure Vessel Consisting of the Junction of a cylindrical and spherical shell", Int. J. Mech. sci, Pergamon Press Ltd Great Britain (1964).
- [DIS 87] **DI SCIUVA M.** "An improved Shear-Deformation Theory for Moderately Thick Multilayered Anisotropic Shells and Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, pp. 589-596, (1987).
- [DON 34] **DONNELL L. H.** "Stability of thin walled tubes under torsion", NACA Rep 479. (1934)
- [DOX 89] **DOXSEE L. E.** "A Higher-Order Theory of Hygrothermal Behavior of Laminated Composite Shells", Int. J. Solids Structures, Vol. 25, N°4, pp. 339-355 (1989).
- [DRI 80] **DRIVAS V. & ROSENTHAL. L. & SEMESIS. Y.** "Les Tenseurs et Leurs Applications", Edt. Eyrolles, Paris (1980).
- [FAY 93] **FAYE J. P. & TOURATIER. M.** "Sur une famille d'Elément Fini Raffiné de Coque Axisymétrique et Effets de Bord". Communication du 11ème Congrès Français de Mécanique, Lille (1993).
- [FAY 93] **FAYE J. P. & TOURATIER. M.** "Un Nouvel Elément Fini Raffiné de Coque Axisymétrique Semi-Epaisse", Revue Européenne des Elements Finis, Vol. 2, N°3, pp. 287-318 (1993).
- [FAY 93] **FAYE J. P.** "Sur une Famille d'Eléments Finis Raffinés-Poutre Courbe et Coque Axisymétrique : Effets de bord numérique", Thèse de Doctorat, Univ. P. Sabatier, Toulouse (1993).
- [FLÜ 60] **FLÜGGE W.** "Stresses in Shells", Springer Verlag, Berlin (1960).
- [GALG 60] **GALLETLY G. D.** "Influence Coefficients and Pressure Vessel Analysis", Journal of Engineering for industry, pp. 259-269 (1960).
- [GALR 76] **GALLLAGER R. H.** "Introduction aux Eléments Finis", Editions Pluralis, (1976).
- [GER 86] **GERMAIN P. & MULLER. P.** "Introduction à la Mécanique des Milieux Continus", Masson, Paris (1986).
- [GIL 70] **GILL S. S.** "The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessel Components", Pergamon press, (1970).
- [GOL 61] **GOL'DENVEISER A. L.** "Theory of Elastic Thin Shells", Pergamon Press (1961).
- [GRE 68] **GREEN E. A & ZERNA W.** "Theoretical Elasticity". Clarendon press. Oxford, (1968).
- [HAM 95a] **HAMITOCHE Y. & S. HARIRI & ROBIN C. & PARSY F.** "Contraintes Maximales dans les Appareils à Pression de Formes Cylindrique, Conique et sphérique", 2ème Congrès International de Casablanca, Vol 2, pp 529-534, Maroc (1995).

- [HAM 95b] **HAMITOUCHE Y. & S. HARIRI** "Analyse des problèmes de Raccord dans les Appareils à Pression de Forme Cylindrique", Actes du 12ème Congrès Français de Mécanique, Vol. 2, pp. 169-172, Strasbourg (1995).
- [HAM 96] **HAMITOUCHE Y. & S. HARIRI & PARSY F.** "Analytical Solutions at the Junction of axisymmetrical Shells", MATEC, 5th Int. Conf. Improvement of Materials, pp. 237-243, Paris (1996).
- [HLA93] **HLADIK J.** "Le Calcul Tensoriel en Physique", Masson, Paris (1993).
- [HAR 88] **HARINTHO H & LOGAND L.** "Conical Shells with Discontinuities in Geometry", Journal of Structural Engineering, Vol. 114, No. 1 (1988).
- [IMB 84] **IMBERT J. F.** "Analyse des Structures par Elements Finis", Editions Cépadues (1984).
- [KOI 60] **KOITER W. T.** "A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells", Proceedings of the Symposium in the theory of thin elastic shells, pp. 12-33, North-Holland Publishing Co, Delft, Holland (1960).
- [KRA 67] **KRAUS H.** "A Comparison of Measured and Calculated Stresses in Pressure Vessels", Journal of Engineering for Power, pp. 341-344, (1967).
- [KRA 68] **KRAUS H.** "Elastic Stresses in Pressure Vessel Heads", Welding Research Council, Bulletin N° 129, pp. 1-26 (1968).
- [LEL 68] **LELONG FERRAND J.** "Géométrie Différentielle", Masson, Paris (1968).
- [LEM 90] **LEMAITRE J & CHABOCHE J. L.** "Mechanics of Solids Materials", University Press, Cambridge (1990).
- [LIB 75] **LIBRESCU L.** "Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogenous Shell-Type Structures", Noordhoff Int. Publ., Leyden (1975).
- [LIC 67] **LICHTNEROWICZ A.** "Eléments de Calcul Tensoriel", Armand Colin, Paris (1967).
- [LOV 44] **LOVE A. E. H.** "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publ., 4th Ed., New York Inc USA (1944).
- [MAR 38] **MARGUERRE K.** "Zur Theorie der Gekrümmten Plate großer Formänderung", Proc. of 5th Int. Cong. of Applied Mechanics", Cambridge, Mass., pp. 93-101 (1938).
- [NAG 63] **NAGHDI P. M.** "Foundations of Elastic Shell Theory", progress in Solid Mechanics, Vol. 4, I. N. Sneddon and R. Hill, North-Holland (1963).
- [NOV 70] **NOVOZHILOV N. V.** "Thin Shell Theory", Noordhoff, (1970).
- [PIE84] **PIETRASZKIEWICZ W.** "Lagrangian Description and Incremental Formulation in the Non-Linear Theory of thin shells", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 19, N° 2, pp. 115-140 (1984).
- [PIS 80] **PISCOUNOV N.** "Calcul Différentiel et Intégral", Ed. Mir. Moscou (1980).
- [RED 82] **REDDY J. N.** "Bending of Laminated Anisotropic Shells by a Shear Deformable Finite Element", Fibre science and Technology, Vol. 17, pp. 19-24 (1982).
- [RED 83] **REDDY J. N.** "Geometrically Nonlinear of Transcient Analysis of Laminated Composite Plates", AIAA JI, Vol. 21 (1983).

- [RED 84] **REDDY J. N.** "A Note on Symmetry Considerations in the Transient Response of Unsymmetrically Laminated Anisotropic Plates", *Int. J. for Num. Meths. in Engng.*, Vol. 20, pp. 175-181 (1984).
- [RED 85] **REDDY J. N & F. C. LIU.** "A Higher Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic shells", *Int. J. Engng. Sci.* Vol. 23, pp. 319-330 (1985).
- [RED 87] **REDDY J. N.** "A Small Strain and Moderate Rotation Theory of Laminated Anisotropic Plates", *Jl. of Appl. Mech. ASME*, Vol. 54, pp.623-626 (1987).
- [REI 45] **REISSNER E.** "The Effect of Transverse Shear Deformation on The Bending of Elastic Plates", *J. Appl. Mech.*, A69-77 (1945).
- [REI 66] **REISSNER E.** "On the Foundations of the Theory of Elastic Shells", *Int. Proc. 11th Int. Congress on Appl. Mech.*, Munich 1964, Edt H. Gortler, pp. 20-30, Springer, Berlin (1966).
- [REI 75] **REISSNER E.** "On the Transverse Bending of Plates Including the Effect of Transverse Shear Deformation", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 11, N°5, pp. 569-573 (1975).
- [TAY 93] **TAYEB O. M. M.** "Analyse Géométriquement Non Linéaire des Coques et Plaques : Application aux structures laminées", Thèse de Doctorat. Université de Lille I, Lille (1993).
- [TAQ 75] **TAQUOI M. J. P.** "Comparaison de deux Méthodes de Détermination d'un Fond Impossible à Calculer par les Abaques du Code de Calcul SNCT", *Colloque National sur la Technologie des Appareils à Pression*, Paris (1975).
- [TIM 61] **TIMOSHENKO S & WOINOWSKI-KRIEGER S.** "Théorie des Plaques et Coques", Dunod (1961).
- [TIM 68] **TIMOSHENKO S.** "Résistance des Matériaux", Dunod (1968).
- [TOU 88] **TOURATIER M.** "A Refined Theory of Thick Composite Plates", *Mechanics Research Communications*, Vol. 15/4, pp. 229-236, Pergamon Press, USA (1988).
- [TOU 89] **TOURATIER M.** "Un Modèle Simple et Efficace en Mécanique des Structures Composites", *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, pp. 933-938 (1989).
- [TOU 91] **TOURATIER M.** "An efficient Standard Plate Theory", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 29, N°8, pp. 901-916 (1991).
- [TOU 92] **TOURATIER M.** "A Generalisation of Shear Deformation Theories for Axisymmetric Multilayered Shells". *IJSS*, vol. 29, No. 11, pp. 1379-1399, Perg. Press Great Britain(1992).
- [TOU 92] **TOURATIER M.** "A Refined Theory of Laminated Shallow Shells". *IJSS*, vol. 29, No. 11, pp. 1401-1415, Pergamon Press Great Britain (1992).
- [VAL 88] **VALID R.** "Fondements de la Théorie des Coques : Une présentation Surfactive Simple", *J. de Méch. Théo. et Appl.*, Vol. 7, N° 2, pp. 135-156 (1988).
- [VAL 77] **VALID R.** "La Mécanique des Milieux Continus et le Calcul des Structures", *Collection des Etudes et Recherches d'Electricité de France*, N° 31, Edt Eyrolles (1977).
- [VAL 73] **VALID R.** "La Théorie Linéaire des Coques et son Application aux Calculs Inélastique", Thèse d'Etat, Poitiers (1973).

Références

- [WAT 52] **WATTS G. W & LANG H. A.** "Stresses in Pressure Vessel with Conical Head". Trans. ASME (1952).
- [WAT 53] **WATTS G. W & LOGAN H. A.** "The stresses in a Pressure Vessel with a Hemispherical Head", Transactions of the ASME, pp. 83-90, (1953).
- [WAT 52] **WATTS G. W & LANG H. A.** "The Stresses in a Pressure Vessel with a Flat Head Closure", Transactions of the ASME, pp. 1083-1091, (1952).
- [WEM 81] **WEMPNER G.** "Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies", Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands (1981).
- [WIT 74] **WITNEY J. M. & SUN C. T.** "A Refined Theory for Laminated Anisotropic Cylindrical Shells", J. of Appl. Mech., pp. 471-476 (1974).
- [ZIC 63] **ZICK L. P.** "Stresses in Large horizontal cylindrical pressure vessels on two saddle supports", Welding Journal (Research Supplement), (1951).
- [ZIC 51] **ZICK L. P & ST GERMAIN A. R.** "Circumferential Stresses in Pressure Vessel Shells of Revolution", Transactions of the ASME, 201-218, (1963).
- [ZIE 71] **ZIENKIEWICZ O. C.** "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc-Graw-Hill, London (1971).

