

N° d'Ordre 1785

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

(Pour obtenir le grade de)

DOCTEUR EN MECANIQUE

par

JEAN MARIE NIANGA

Enseignant - chercheur en Mathématiques appliquées et Statistiques -
à l'école des Hautes Etudes Industrielles (H.E.I.)

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU
COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES
PLAQUES MINCES EN PIEZOELECTRICITE
LINEAIRE**

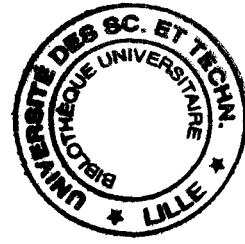
Soutenue le 12 Juillet 1996 devant la Commission d'Examen

RAPPORTEURS :

| | |
|-----------------|---|
| Mr G. MAUGIN | Président du jury, Professeur Paris VI, Directeur de recherches au CNRS |
| Mr N. E. ABRIAK | Responsable du laboratoire de Mécanique des solides (Ecole des Mines de Douai) |

EXAMINATEURS :

| | |
|----------------|---|
| Mr F. PARSY | Professeur, Lille I, Directeur de thèse |
| Mr G. De SAXCE | Professeur, Lille I |



50370
1996
166

A mon père,
à ma mère,
à mes enfants,
et à ma femme.

<< Nous ne touchons pas deux fois le même être, nous ne nous baignons pas deux fois dans le même fleuve.

Au moment où nous portons la main sur une chose, elle a déjà cessé d'être ce qu'elle était >>

HERACLITE.

REMERCIEMENTS

Monsieur le professeur F. PARSY, mon directeur de recherches, a permis la réalisation de cette thèse et m'a assuré de son soutien constant; je l'en remercie chaleureusement.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le professeur G. MAUGIN pour ses conseils et sa participation au jury.

Je remercie Monsieur N.E. ABRIAK pour ses nombreuses suggestions ainsi que pour sa participation au jury.

Je remercie également Monsieur le professeur G. DE SAXCE pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour sa participation au jury.

J'exprime ma très grande reconnaissance à l'Ecole des Hautes Etudes Industrielles de Lille qui m'a permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions possibles.

Je remercie Messieurs R. CAUDRON, R. MOTTE MOITROUX et R. DURIEUX qui ont particulièrement favorisé l'aboutissement de cette thèse. Mes remerciements vont également à Mesdames MERCIER et DETEZ, à Messieurs Jean DEHONDT et F.X. CORDONNIER, ainsi qu'à toute l'équipe du C.O.M.E.S. pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée. Je remercie Messieurs D. DELESALLE, A. IMAD, D. MARHABI, O. MOÏSES et J. BAUDUIN pour leur soutien amical.

Je tiens à remercier mes frères et amis qui m'ont été d'un précieux concours dans la réalisation de ce travail.

Enfin, je remercie LA CENTRALE DES SERVICES, qui avec soin et rapidité, a réalisé la dactylographie de cette thèse.

SOMMAIRE

| | Pages |
|---|--------------|
| Introduction générale | 1 - 5 |
| CHAPITRE A : Electrodynamique des milieux continus : Etude bibliographique | |
| I <u>Introduction</u> | A.2 |
| II <u>Rappel des lois fondamentales de l'électromagnétisme</u> | A.3 |
| Objet du paragraphe | |
| Grandeurs physiques | |
| Axiomes fondamentaux | |
| Equations de Maxwell | |
| III <u>Equations de Maxwell dans un milieu déformable en mouvement</u> | A.9 |
| Objet du paragraphe | |
| Equations de Maxwell dans le repère lié au mouvement | |
| Formulation globale et équations locales | |
| IV <u>Force, couple et énergie dans des corps électromagnétiques en mouvement</u> | A.16 |
| <u>IV - 1 Force et couple</u> | |
| Objet du paragraphe | |
| Aspect microscopique | |
| Aspect Macroscopique | |
| Notion de tenseur électromagnétique | |
| <u>IV - 2 Energie des forces électromagnétiques</u> | |
| Objet du paragraphe | |
| Aspects microscopiques et macroscopiques | |
| Force, couple et énergie électromagnétiques sur une surface de discontinuité | |
| V <u>Lois de comportement</u> | A.30 |
| <u>V - 1 Lois d'équilibre généralisées</u> | A.30 |
| Objet du paragraphe | |
| Formulation globale | |
| Formulation locale | |
| <u>V - 2 Lois de comportement</u> | A.36 |
| Inégalité de Clausius - Duhem | |
| Choix des variables indépendantes | |
| Conséquence de l'inégalité de Clausius - Duhem | |
| Symétries matérielles | |
| Lois de comportement des solides électro-magnéto-élastiques | |

CHAPITRE B

Présentation du problème tridimensionnel de la piézoélectricité

| | | |
|-----|---|-----|
| I | <u>Introduction</u> | B.2 |
| II | <u>Equations fondamentales</u> | B.2 |
| III | <u>Règles de condensation des tenseurs</u> | B.5 |
| IV | <u>Présentation d'un problème piézoélectrique</u> | B.6 |
| | IV - 1 Equations d'équilibre | |
| | IV - 2 Conditions aux limites | |

CHAPITRE C

Présentation du problème des plaques piézoélectriques

| | | |
|-----|---|------|
| I | <u>Introduction</u> | C.2 |
| II | <u>Formulation variationnelle</u> | C.4 |
| III | <u>Existence et unicité de la solution</u> | C.6 |
| IV | <u>Application de la méthode du zoom</u> | C.10 |
| V | <u>Calcul du développement asymptotique</u> | C.12 |
| | Calcul des termes d'ordre zéro | |
| | Théorème d'existence | |
| VI | <u>Conclusion</u> | C.16 |

CHAPITRE D

Estimation de l'erreur d'approximation de la solution

| | | |
|--|---|------|
| | $\overline{(\sigma^\varepsilon, \vec{D}^\varepsilon, \vec{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon)}$ par $\overline{(\sigma^{(0)}, \vec{D}^{(0)}, \vec{u}^{(0)}, \phi^{(0)})}$ | D.1 |
| | | D.11 |

CHAPITRE E :

Etude de la convergence de $\overline{(\sigma^\varepsilon, \vec{D}^\varepsilon, \vec{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon)}$ vers $\overline{(\sigma^{(0)}, \vec{D}^{(0)}, \vec{u}^{(0)}, \phi^{(0)})}$ en l'absence de régularité

| | | |
|----|--------------------------------------|-----|
| I | <u>Passage à la limite faible</u> | E.3 |
| II | <u>Etude de la convergence forte</u> | E.4 |

CHAPITRE F :

Modèle de plaques piézoélectriques multicouches.

Etude de trilames ou plaques sandwich

| | | |
|-----|---|-----|
| I | <u>Introduction</u> | F.2 |
| II | <u>Modèle de plaques multicouches membranaires minces</u> | F.4 |
| III | <u>Modèles de flexion des plaques multicouches</u> | F.5 |
| IV | <u>Modèle de plaques membranaires minces</u> | F.6 |
| V | <u>Modèle de plaques minces en flexion</u> | F.6 |

CHAPITRE G :

Conditions aux limites permettant d'absorber l'effet de bord

| | | |
|-----|---|------|
| I | Introduction | G.2 |
| II | Cas d'une anisotropie faible | G.2 |
| III | Cas d'une anisotropie forte | G.9 |
| IV | Estimation de l'erreur d'approximation de | G.11 |

$$\overline{(\sigma^\varepsilon, \vec{D}^\varepsilon, \vec{u}^\varepsilon, \phi^\varepsilon)} \text{ par } \overline{(\sigma^{(0)}, \vec{D}^{(0)}, \vec{u}^{(0)}, \phi^{(0)})}$$

CHAPITRE H

Une généralisation de l'intégrale de Rice

| | | |
|-----|---|-----|
| I | Introduction | H.2 |
| II | Influence des perturbations d'un domaine Ω sur les champs électromagnétiques et mécaniques | H.2 |
| | → | |
| III | Calcul du gradient de l'énergie dans la direction Θ | H.6 |
| IV | Autre version du gradient de l'énergie | H.7 |

CHAPITRE I :

Contribution à la propagation des fissures dans une plaque mince piézoélectrique

| | | |
|-----|---|------|
| I | Introduction | I.2 |
| II | Position du problème tridimensionnel | I.2 |
| III | Comportement asymptotique dans le critère de Griffith | I.5 |
| | → | |
| IV | Invariance vis à vis du choix de Θ | I.9 |
| V | Indépendance de $\frac{dw}{d\eta} \Theta$ par rapport au choix de la fonction Θ_1 dans le cas d'une anisotropie faible | I.12 |

CHAPITRE J

Contribution à l'étude de la couche limite

| | | |
|-----|---|------|
| I | Introduction | J.2 |
| II | Description de la piézoélectricité tridimensionnelle au voisinage de Γ_0 | J.2 |
| III | Equations de la couche limite au voisinage de Γ_0 | J.10 |
| IV | Calcul de la couche limite de torsion | J.16 |

Conclusion générale et perspectives

Bibliographie

INTRODUCTION GENERALE

1. HISTORIQUE DES PROBLEMES POSES PAR LA MODELISATION DES PLAQUES

De nos jours, le problème du passage du modèle tridimensionnel de la plaque en un modèle surfacique, donc bidimensionnel, n'a cessé de susciter l'intérêt de nombreux mécaniciens et ingénieurs.

Parmi les différents modèles bidimensionnels élaborés, le plus célèbre est celui de Kirchhoff - Love qui stipule que dans la déformation d'une plaque mince, la normale à la surface moyenne ne subit pas de dilatation et se transforme en la normale à la surface moyenne déformée.

Il faut cependant souligner le caractère cinématique de ces hypothèses et surtout le fait que celles-ci conduisent à des méthodes caractérisées par l'absence de validation du modèle continu.

Il faut attendre les travaux de Gol'denveizer basés sur la construction d'un développement asymptotique de la solution du problème tridimensionnel vis-à-vis de l'épaisseur de la plaque, pour commencer à obtenir les premières justifications de modèles.

C'est dans cet esprit que **CIARLET** et **DESTUYNDER** ont pu proposer des méthodes de modélisation reprenant dans une version mathématiquement plus rigoureuse l'approche de Gol'denveizer et introduisant par ailleurs, la technique du zoom qui consiste à travailler sur un ouvert de référence dans lequel il devient bien plus facile, lors de l'étude du comportement asymptotique de la solution du modèle tridimensionnel de l'élasticité, de contourner le problème lié au fait que le volume physique occupé par le solide étudié varie avec l'épaisseur, lorsque celle-ci tend vers zéro.

L'un des intérêts des méthodes dites de développements asymptotiques est d'avoir permis d'établir que les hypothèses de Kirchhoff-Love, bien que satisfaisantes à l'intérieur de la plaque, deviennent caduques au voisinage des frontières.

Il apparaît du reste, dans les travaux de **Ciarlet** et **Destuynder** une remise en question de l'hypothèse de Kirchhoff-Love relative à la négligence a priori des contraintes de cisaillement transverse, par leur mise en évidence dans le phénomène de propagation de fissure.

Un peu plus tard, une nouvelle dimension fut introduite à cette dernière approche de modélisation, par son extension aux problèmes magnéto-électromécaniques. L'intérêt d'une telle version, réside dans l'importance technologique que revêtent par exemple les plaques électro-supraconductrices dans des phénomènes de lévitation ou des plaques minces piézoélectriques dans l'acoustique sous-marine ...etc... .

C'est ainsi que **G. MAUGIN** s'intéressa à l'application de l'approche mathématique de **CIARLET** et **DESTUYNDER** à l'étude du comportement asymptotique des plaques minces en piézoélectricité ; étude que nous avons reprise puis prolongée dans cette thèse.

2. PRESENTATION DU MEMOIRE

Notre travail s'est fait en dix étapes :

- Dans le **CHAPITRE A**, nous présentons la théorie générale de l'électrodynamique des milieux continus qui apparaît comme fondement de la piézoélectricité.
- Dans le **CHAPITRE B**, nous décrivons le problème tridimensionnel de la piézoélectricité à travers ses équations fondamentales.
- Dans le **CHAPITRE C**, nous reprenons la formulation variationnelle du problème des plaques piézoélectriques selon **MAUGIN**, et développons un théorème d'existence et d'unicité de la solution, de ce problème, basé sur les travaux de **BREZZI** ; nous réintroduisons, toujours selon **MAUGIN**, la technique du zoom ainsi que le calcul succinct des termes d'ordre zéro du développement asymptotique, pour lesquels nous apportons explicitement la preuve de l'existence et de l'unicité.
- Dans le **CHAPITRE D**, nous abordons la partie fondamentalement plus personnelle de ce travail à travers l'estimation de l'erreur d'approximation de la solution tridimensionnelle par les termes de rang zéro du développement asymptotique.
- Dans le **CHAPITRE E**, nous nous intéressons à l'étude de la convergence de la solution tridimensionnelle vers les termes de rang zéro du développement asymptotique, en l'absence de régularité.
- Dans le **CHAPITRE F**, nous présentons une modélisation des plaques piézoélectriques multicouches, à travers l'étude d'un trilame pour lequel nous nous intéressons particulièrement aux modèles membranaires et de flexion. En outre, nous essayons de déduire de cette modélisation, des modèles correspondants pour des plaques piézoélectriques minces.
- Dans le **CHAPITRE G**, nous mettons en oeuvre des conditions aux bords permettant d'absorber l'effet de couche limite observé dans le chapitre D. Pour cela, nous examinons tour à tour les cas de faible et forte anisotropie, puis étudions une nouvelle fois, l'estimation correspondante de l'erreur d'approximation.
- Dans le **CHAPITRE H**, nous nous proposons d'appliquer aux milieux piézoélectriques, l'interprétation mathématique du critère de Griffith pour la propagation des fissures droites dans un milieu élastique.
- Dans le **CHAPITRE I**, nous essayons de donner un critère de propagation de fissures dans les plaques minces piézoélectriques.

- Dans le **CHAPITRE J**, nous amorçons une description de la solution tridimensionnelle du problème de la piézoélectricité linéaire au voisinage de la frontière latérale de la plaque étudiée.

Ce travail n'est qu'une modeste contribution à une étude plus large des problèmes de la piézoélectricité et du comportement des plaques.

CHAPITRE A

Electrodynamique des milieux continus :

Etude Bibliographique

I INTRODUCTION

Avant d'aborder l'étude du comportement asymptotique des plaques piézoélectriques, nous avons jugé opportun, en nous appuyant sur les travaux de **G. MAUGIN** et **C. ERINGEN**, (cf **MAUGIN** (1)) et de façon à mieux cerner le phénomène de la piézoélectricité, d'introduire l'électrodynamique des milieux continus comme fondement du comportement piézoélectrique.

Pour cela, nous nous sommes particulièrement intéressés

- à l'incidence des propriétés piézoélectriques sur les équations fondamentales de l'électromagnétisme,
- à l'étude du comportement des matériaux piézoélectriques soumis à des mouvements de vitesses excessivement grandes,
- à l'examen d'éventuelles forces et énergies pouvant agir dans de tels matériaux, ainsi qu'à l'étude de leurs lois d'équilibre et de comportement.

II RAPPEL DES LOIS FONDAMENTALES DE L'ELECTROMAGNETISME

Objet du paragraphe :

Le présent paragraphe est consacré aux équations dites de MAXWELL que nous introduirons ici sans explications expérimentales, pour lesquelles nous renvoyons aux ouvrages classiques (BECKER and SAUTER (1), G. BRUHAT (1), FANO et ADLER (1), PANO FSKY-PHILIPS (1)).

Ces équations résultent d'un ensemble de concepts bien connus (charge électrique, densité de courant) ainsi que de lois universelles classiques (conservation de la charge électrique, lois de Faraday).

GRANDEURS PHYSIQUES :

Les grandeurs électromagnétiques que nous introduirons sont :

1. LA CHARGE ELECTRIQUE

Elle sera représentée par le scalaire q qui ; suivant les cas, sera une densité volumique, surfacique ou linéique de charge électrique ; sans précision supplémentaire, il s'agira de densité volumique.

2. LA DENSITE DE COURANT

Elle sera représentée par un vecteur \vec{J} de \mathbb{R}^3 qui mesurera un flux de charges électriques : le flux de charges électriques à travers un élément de surface ds dans le sens de la normale \vec{n} à \vec{ds} est donné par le produit scalaire $\vec{J} \cdot \vec{n} ds$.

3. L'INDUCTION \vec{M} MAGNETIQUE

Ca sera un vecteur B de \mathbb{R}^3 .

4. LE CHAMP ELECTRIQUE \vec{E}

Ca sera un vecteur E de \mathbb{R}^3 .

Toutefois, d'autres grandeurs physiques seront éventuellement introduites dans la suite de l'exposé.

Remarque (A.1)

Notons qu'en l'absence de charges électriques, hypothèse à laquelle on se rattachera par la suite, on a bien évidemment :

$$q = 0$$

et dans ce cas, il ne circule aucun courant électrique dans le matériau envisagé.

Axiomes fondamentaux

1. Conservation de la charge électrique.

« Quel que soit le domaine \mathcal{D} fixe de \mathbb{R}^3 , de frontière $\partial\mathcal{D}$ régulière, la dérivée par rapport au temps de l'intégrale sur \mathcal{D} de la charge électrique est opposée à l'intégrale sur $\partial\mathcal{D}$, de la quantité $\vec{J} \cdot \vec{n}$ » ; ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{D}} q dv = - \iint_{\partial\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{A.1})$$

Physiquement, cette loi veut dire que la variation par unité de temps de la charge électrique contenue à l'intérieur de \mathcal{D} est produite par le flux de charges à travers $\partial\mathcal{D}$. \vec{n} est la normale extérieure unitaire à la frontière $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} .

2. Loi de Faraday

« La dérivée par rapport au temps du flux de l'induction magnétique \vec{B} à travers une portion de surface Σ fixe et limitée par un contour fermé C est opposée à la circulation de \vec{E} le long de C ».

Autrement dit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} ds + \int_C \vec{E} \cdot \vec{\tau} dl = 0 \quad (\text{A.2})$$

L'orientation de $\vec{\tau}$, vecteur unitaire tangent à C , et de \vec{n} , vecteur unitaire normal à Σ sont soumis à la règle d'orientation du théorème de Stokes. \rightarrow

De l'égalité (A.2) résulte, en particulier que le flux du vecteur \vec{B} à travers une surface fermée S est constant. On supposera toujours ce flux nul.

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (\text{A.3})$$

3. Conséquences des deux lois précédentes

Théorème d'Ampère

L'égalité (A.1) montre en effet que le scalaire q est la divergence d'un champ de vecteurs. Nous pouvons alors poser :

$$q = \operatorname{div} \vec{D} \quad (\text{A.4})$$

Le vecteur \vec{D} ainsi défini est habituellement appelé induction électrique ; C'est en fait un potentiel de charges. Par suite, tenant compte de la relation (A.4), nous pouvons alors mettre (A.1) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{D} \, dv = - \iint_{\partial \mathcal{D}} \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds \quad (\text{A.5})$$

Mais le domaine \mathcal{D} est fixe lorsque le temps varie ; ainsi peut-on écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{D} \, dv = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \, dv \quad (\text{A.6})$$

Et par suite de l'application du théorème de la divergence on obtient :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \, dv = \iint_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, ds$$

La loi de conservation de la charge (A.1) qui peut par conséquent se mettre sous la forme :

$$\iint_{\partial \mathcal{D}} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, ds = - \iint_{\partial \mathcal{D}} \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds$$

montre alors que si C est un contour fermé et S une portion de surface quelconque s'appuyant sur C , mais fixe lorsque le temps varie, le flux du vecteur

$$\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

reste constant si l'on déforme S en gardant pour \vec{n} l'orientation définie par continuité. On sait que l'on peut alors écrire ce flux égal à :

$$\iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \partial/\partial t \iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S (\vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_C \vec{H} \cdot \vec{\tau} \, dl \quad (\text{A.7})$$

où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire de la tangente à C , orienté comme l'indique le théorème de Stokes.

Le vecteur \vec{H} est, par définition, le champ magnétique ; et, le résultat du théorème de Stokes donné par (A.7) constitue ce que l'on appelle le **théorème d'Ampère**.

Equations de Maxwell

Définition préliminaire

Une famille \mathcal{F} d'ensembles ouverts D d'un domaine \mathcal{D} est dite dense dans \mathcal{D} si, pour tout point M intérieur à \mathcal{D} et pour tout voisinage V de M , il existe au moins un ensemble D_0 de la famille qui soit intérieur à V ; ce qui peut encore s'écrire :

$$(\forall M \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}, \forall v \in V(M), \exists D_0 \in \mathcal{F} \text{ tel que } D_0 \subset \overset{\circ}{V}) \Rightarrow \mathcal{F} \text{ dense dans } \mathcal{D}.$$

Où $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ est l'intérieur de \mathcal{D} , $V^{(M)}$ l'ensemble des voisinages du point M , et $\overset{\circ}{V}$ l'intérieur de V .

Lemme fondamental de la mécanique des milieux continus.

« Soit $\varphi(M)$ une fonction définie et continue dans le domaine \mathcal{D} et \mathcal{F} une famille dense dans \mathcal{D} ; si pour tout D de \mathcal{F} l'intégrale de φ dans D est nulle, alors la fonction φ est identiquement nulle dans \mathcal{D} .

Preuve

Par intégrale, il faut entendre intégrale de volume (respectivement de surface ou curviligne), si \mathcal{D} est un domaine volumique. (Respectivement surfacique ou linéique). Cependant, pour fixer les idées, nous allons supposer \mathcal{D} tridimensionnel.

Supposons que $\int_D \varphi \, dv = 0, \forall D \in \mathcal{F}$; \mathcal{F} famille dense dans \mathcal{D} et que $\exists M_0 \in \mathcal{D}$, avec $\varphi(M_0) \neq 0$, par exemple $\varphi(M_0) > 0$.

En vertu de la continuité de φ , on peut trouver un voisinage V de M_0 tel que $\varphi(M) > \frac{1}{2} \varphi(M_0), \forall M \in V$.

Soit alors $D \in \mathcal{F}$ tel que $D \subset \overset{\circ}{V}$;

$$\int_D \varphi \, dv > \frac{1}{2} \int_D \varphi(M_0) \, dv = \frac{1}{2} \varphi(M_0) (\text{volume de } D)$$

Ceci est contraire à l'hypothèse. La supposition faite est donc absurde.

Formulation des équations de Maxwell

Supposant \vec{E} et \vec{H} continuellement dérivables et appliquant le théorème de Stokes, on peut écrire :

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Sigma} \text{Rot} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{Rot} \vec{H} \cdot \vec{n} \, d\sigma ;$$

et les relations (A.2) et (A.7) peuvent alors se mettre respectivement sous la forme :

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, ds + \iint_{\Sigma} \text{Rot} \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\iint_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \vec{n} \, ds - \iint_S \text{Rot} \vec{H} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad (\text{A.9})$$

Appliquant le lemme fondamental de la mécanique des milieux continus aux dernières égalités, on obtient sous réserve de continuité des grandeurs électromagnétiques

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{J} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} :$$

$$\text{Rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \times (0, T) \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \text{ dans } \mathcal{D} \times (0, T) \quad (\text{A.11})$$

Reprenant par ailleurs la relation (A.3), et, appliquant successivement le théorème de la divergence et le lemme fondamental de la mécanique des milieux continus, on obtient :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \times (0, T) \quad (\text{A.12})$$

Les relations (A.4), (A.10), (A.11) et (A.12) constituent ce que l'on appelle **équations de Maxwell** rapportées au système d'unités (M.K.S.A) et à un repère galiléen fixe R_G , à l'instant t .

De ces équations, deux seulement sont essentielles, et ce sont d'elles que se déduisent les deux autres. Il s'agit des équations (A.10) et (A.11).

D'autre part, bien qu'elles soient à caractère universel, les équations de Maxwell ne constituent que six relations scalaires pour les quinze inconnues que représentent les composantes des vecteurs \vec{B} , \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} et \vec{J} ; par conséquent ; elles ne suffisent pas à elles seules à permettre la prédiction des phénomènes électromagnétiques.

Tout ceci justifie alors l'introduction de lois à caractère moins universel, dites lois de comportement.

Remarques (A.2)

– Dans le système d'unités de Lorentz-Heaviside, les équations de Maxwell dans un repère galiléen fixe, à l'instant t , s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{E} - 1/c \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0}, \text{ div } \vec{B} = 0, \text{ dans } \mathcal{D} \times (0, T) \\ \text{Rot } \vec{H} - 1/c \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= 1/c \vec{J}, \text{ div } \vec{D} = q, \text{ dans } \mathcal{D} \times (0, T) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

où c est la célérité

– Dans le cas particulier de matériaux piézoélectriques non conducteurs et non magnétisables, ces équations se réduisent à :

$$\text{Rot } \vec{E} = \vec{0}, \text{ div } \vec{D} = 0 \quad . \quad (\text{A.14})$$

On peut par ailleurs introduire la densité volumique de polarisation définie par :

$$\vec{P} = \vec{D} - \vec{E}$$

– En introduisant un nouveau repère R'_G en translation uniforme de vitesse \vec{v} par rapport au repère d'inertie de référence R_G , et en définissant de nouvelles grandeurs électromagnétiques par :

$$\begin{aligned} q' &= q, \vec{D}' = \vec{D}, \vec{B}' = \vec{B} \\ \vec{J}' &= \vec{J} - q\vec{V}, \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}, \\ \vec{H}' &= \vec{H} - \vec{V} \wedge \vec{D}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

on peut réaliser que les équations de Maxwell (A.13) restent valables dans ce nouveau repère. On dit alors que ces équations présentent l'invariance galiléenne.

III EQUATIONS DE MAXWELL DANS UN MILIEU DEFORMABLE EN MOUVEMENT

OBJET DU PARAGRAPHE

Soit \vec{v} le champ de vitesse d'un corps matériel Ω qui, au temps newtonien t occupe un ouvert simplement connexe N de E^3 admettant une frontière régulière ∂N de normale extérieure unitaire \vec{n} . Si nous désignons par R_C le repère lié au mouvement de Ω , ce paragraphe va contribuer à définir des quantités électromagnétiques correspondantes et à déduire à partir de celles-ci une formulation dans R_C , des équations de Maxwell.

EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE REPERE R_C

Pour définir les différents champs électromagnétiques dans R_C en fonction des champs liés à R_G , il suffit de poser

$$R'_G = R_C \text{ et } \vec{V} = -\vec{v}$$

où \vec{v} représente naturellement la vitesse uniforme de translation de R_G par rapport à R_C ; aussi peut-on écrire :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{J}} &= \vec{J} - q_f \vec{v} & \vec{\mathcal{M}} &= \vec{M} + 1/v \Lambda \vec{P} \\ \vec{\mathcal{E}} &= \vec{E} + 1/c \vec{v} \wedge \vec{B} & \vec{\mathcal{B}} &= \vec{B} - 1/c \vec{v} \wedge \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

où les lettres capitales désignent des champs exprimés dans R_C ; $\vec{\mathcal{E}}$ étant couramment appelé intensité électromotrice.

Remarque (A.3)

On pourrait également définir le champ magnétique $\vec{\mathcal{H}}$ de R_C sous la forme :

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{B} - \vec{\mathcal{M}} = \vec{H} - 1/c \vec{v} \wedge \vec{D} \quad (\text{A.17})$$

et réaliser que les équations (A.16) et (A.17) traduisent :

- La production d'un champ électrique dans R_C par un champ magnétique en mouvement
- La production dans R_C d'un champ magnétique par un champ électrique en mouvement
- **Et aussi, l'apparition d'un champ magnétique dans un corps polarisé en mouvement ; phénomène qui, dans le cas de matériaux piézoélectriques n'est perceptible qu'à des vitesses excessivement grandes.**

Proposition (A.1)

Soit \vec{A} un champ électromagnétique quelconque défini dans le repère de référence R_G et si l'on désigne par \vec{A}^* la quantité définie par :

$$\vec{A}^* = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{Rot}(\vec{A} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \text{ div } \vec{A},$$

alors les équations de Maxwell dans le repère R_c lié au mouvement du corps matériel s'expriment sous la forme :

$$\text{Rot } \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \vec{B}^* = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Rot } \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c} \vec{D}^* = \frac{1}{c} \vec{\mathcal{J}}, \quad \text{div } \vec{D} = q_f \quad (\text{A.19})$$

Preuve

En comparant les relations (A.13) et (A.16), il vient :

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{Rot} \left(\vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \text{Rot } \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c} \text{Rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \text{Rot } \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \vec{B}^* . \end{aligned}$$

$$\text{Rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{J} \text{ avec } \vec{\mathcal{J}} = \vec{J} - q_f \vec{v} .$$

équivalent à :

$$\text{Rot} \left(\vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{D} \right) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} (\vec{\mathcal{J}} + q_f \vec{v}) ,$$

soit

$$\text{Rot } \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c} \text{Rot}(\vec{D} \wedge \vec{v}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{v} \text{ div } \vec{D} + \frac{1}{c} \vec{v} \text{ div } \vec{D} = \frac{1}{c} \vec{\mathcal{J}} + \frac{1}{c} q_f \vec{v}$$

d'où:

$$\text{Rot } \vec{\mathcal{H}} - \frac{1}{c} \vec{D} = \frac{1}{c} \vec{\mathcal{J}}$$

C. Q. F. D.

Remarques (A4)

- Sachant que $\vec{D} = \vec{P} + \vec{E}$, la relation $\text{div } \vec{D} = q_f$ peut alors s'exprimer sous la forme

$$\text{div } \vec{E} = q_f^{**} \quad \text{où } q_f^{**} = q_f - \text{div } \vec{P}$$

q_f^{**} est dite charge effective dans Rc.

- Par ailleurs, reprenons l'équation (A.19)₁, soit :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{H}} - 1/c \vec{D} = 1/c \vec{J}^* ;$$

Après comparaison avec la relation (A.17), il vient :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \vec{\mathcal{M}}) - 1/c \vec{D} = 1/c \vec{J}^*$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \vec{\mathcal{M}}) - 1/c \vec{E} = 1/c \vec{P} + 1/c \vec{J}^*$$

$$\text{Ainsi, en posant } \vec{J}^* = \vec{J} + \vec{P} + c \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{M}} \quad (\text{A.20})$$

une alternative à la relation (A.18) est donc :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}} - 1/c \vec{E} = 1/c \vec{J}^* \quad (\text{A.21})$$

\vec{J}^* est dit Intensité de courant effectif dans Rc.

- De ce qui précède, il apparaît que l'on peut associer au repère lié au mouvement d'un matériau piézoélectrique les champs électromagnétiques $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{B}}$, $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ respectivement définis par :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= \vec{E}, \quad \vec{\mathcal{M}} = 1/c \vec{\nabla} \wedge \vec{P} \\ \vec{\mathcal{B}} &= -1/c \vec{\nabla} \wedge \vec{E}, \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{B} - \vec{\mathcal{M}} = -1/c \vec{\nabla} \wedge \vec{D} \end{aligned}$$

et satisfaisant dans ce repère aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{\mathcal{E}} &= \vec{0} ; \quad \text{Rot } \vec{\mathcal{B}} - 1/c \vec{E} = \vec{P} + c \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{M}} \\ \text{Rot } \vec{\mathcal{H}} - 1/c \vec{D} &= \vec{0} ; \quad \text{div } \vec{E} = -\text{div } \vec{P} \end{aligned}$$

(On s'est bien évidemment placé sous le cas où la vitesse \vec{v} est excessivement grande).

Formulation globale des équations de Maxwell dans un milieu déformable en mouvement

On considère que le corps matériel Ω étudié est balayé par une surface σ^* de discontinuité, de vitesse \vec{v} par rapport à R_G , dans la direction de sa normale unitaire \vec{n} .

On désigne par γ_σ une courbe fixe sur σ^* , ζ un ouvert matériel reposant sur une courbe fermée \mathcal{C} et par γ_ζ une courbe de discontinuité sur ζ , de vitesse \vec{v} : (\mathcal{C} fig A.1 et A.2).

La remarque (A.3) fondée d'une part sur la production d'un champ électrique dans R_c par un champ magnétique en mouvement et d'autre part, par la production d'un champ magnétique dans R_c par un champ électrique en mouvement, conduit, conjointement aux axiomes fondamentaux de l'électromagnétisme, aux lois d'équilibre suivantes :

Loi de Faraday

$$\int_{\sigma-\gamma_\zeta} \vec{e} \cdot d\vec{x} + 1/c \frac{d}{dt} \int_{\zeta-\gamma_\zeta} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Loi d'Ampère

$$\int_{\sigma-\gamma_\zeta} \vec{j} \cdot d\vec{x} - 1/c \frac{d}{dt} \int_{\zeta-\gamma_\zeta} \vec{D} \cdot d\vec{a} = 1/c \int_{\zeta-\gamma_\zeta} \vec{j} \cdot d\vec{a} - 1/c \int_{\gamma_\zeta} \vec{K} \cdot \vec{\tau} d\ell$$

Loi de Gauss

$$\int_{\partial\Omega-\sigma^*} \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_{\Omega-\sigma^*} q_f dv + \int_{\sigma-\gamma_\sigma} w_f da + \int_{\gamma_\sigma} [\hat{\pi} \cdot \vec{\tau}] d\ell \quad (A.22)$$

Loi de conservation du flux magnétique

$$\int_{\partial\Omega-\sigma^*} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Loi de conservation de la charge électrique

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega-\sigma^*} q_f dv + \int_{\partial\Omega-\sigma^*} \vec{j} \cdot d\vec{a} + \delta/\delta t \int_{\sigma-\gamma_\sigma} w_f da - \int_{\gamma_\sigma} [\hat{K} \cdot \vec{\tau}] d\ell = 0$$

\hat{K} et $\hat{\pi}$ désignant respectivement des courants de conduction surfacique et volumique, tangents aux surfaces sur lesquelles ils sont définis ; c'est à dire que l'on a :

$$\vec{K} \cdot \vec{n} = 0, \quad \hat{\pi} \cdot \vec{n} = 0$$

$\vec{\tau}$ est la binormale à γ_ζ ou γ_σ , $\delta/\delta t$ la dérivée temporelle totale à travers la surface σ^* de discontinuité dans son mouvement et w_f la densité surfacique de charges libres.

On a :

$$\delta/\delta t = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \partial/\partial \vec{n}; \quad \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{n}; \quad \partial/\partial \vec{n} = \vec{n} \cdot \nabla$$

Equations locales et conditions de saut

Les dernières équations d'équilibre étant indépendantes du choix de N , S , σ^* et γ , il s'en déduit les relations suivantes :

Loi de Faraday

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{E}} + 1/c \vec{B} &= 0 \text{ dans } N - \sigma^* \\ \vec{n} \wedge [\vec{\mathcal{E}} + 1/c \vec{B} \Lambda(\vec{v} - \vec{v}')] &= 0 \text{ à travers } \sigma^* - \gamma_\sigma \end{aligned}$$

Loi d'Ampère

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{H}} - 1/c \vec{D} &= 1/c \vec{\mathcal{J}} \text{ dans } N - \sigma^* \\ \vec{n} \wedge [\vec{\mathcal{H}} - 1/c \vec{D} \Lambda(\vec{v} - \vec{v}')] &= 1/c \vec{\mathcal{K}} \text{ à travers } \sigma^* - \gamma_\sigma \end{aligned}$$

Loi de Gauss

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= q_f \text{ dans } N - \sigma^* \\ [\vec{D}] \cdot \vec{n} &= w_f - \vec{\nabla}_\sigma \cdot \vec{\pi} \text{ à travers } \sigma^* - \gamma_\sigma \\ \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} &= 0 \text{ le long de } \partial\sigma^* - \gamma_\sigma \end{aligned}$$

Loi de conservation du flux magnétique

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \text{ dans } N - \sigma^* \\ [\vec{B}] \cdot \vec{n} &= 0 \text{ sur } \sigma^* - \gamma_\sigma \end{aligned}$$

Loi de conservation de la charge électrique

$$\begin{aligned} \partial q_f / \partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \text{ dans } N - \sigma^* \\ [\vec{J} - q_f \vec{v}] \cdot \vec{n} + \delta w_f / \delta t + \vec{\nabla}_\sigma \cdot \vec{\mathcal{K}} &= 0 \text{ à travers } \sigma^* - \gamma_\sigma \\ \vec{\mathcal{K}} \cdot \vec{\tau} &= 0 \text{ le long de } \partial\sigma^* - \gamma_\sigma \end{aligned}$$

Remarques (A.5)

Les conditions aux limites sur $\partial N - \sigma^*$ s'obtiennent naturellement en considérant que la surface σ^* coïncide avec la surface du corps Ω prise sans charge libre, polarisation, ni courant ;

Soit :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot [\vec{B}] &= 0, \vec{n} \cdot [\vec{D}] = 0 \\ \vec{n} \wedge [\vec{\mathcal{E}}] &= 0, \vec{n} \wedge [\vec{\mathcal{H}}] = 0 \\ [\vec{\mathcal{J}}] \cdot \vec{n} &= 0 \end{aligned}$$

Remarques (A.6)

— Dans le cas de la piézoélectricité, les lois d'équilibre précédentes se ramènent à :

$$\int_C \gamma_f \vec{\epsilon} \cdot d\vec{x} = 0$$

$$\int_C \gamma_f \vec{\tau} \cdot d\vec{x} - 1/c \frac{d}{dt} \int_S \gamma_f \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0$$

— Si on utilise les identités et théorèmes suivants :

Théorème de Green-Gauss généralisé

$$\int_{M-\sigma} \nabla \cdot A \, dv + \int_{\sigma(t)} [A] \cdot da = \int_{\partial M-\sigma} A \cdot da \text{ où } [A] = A^+ - A^-$$

Théorème de Stockes généralisé

$$\int_{S-\gamma} (\nabla \wedge A) \cdot da + \int_{\gamma(t)} [A] \cdot dx = \int_{\partial S-\gamma} A \cdot dx$$

Théorèmes fondamentaux de transport

$$\frac{d}{dt} \int_{S-\gamma} A \cdot da = \int_{S-\gamma} \overset{*}{A} \cdot da + \int_{\gamma(t)} [A \wedge (\vec{v} - \vec{v}')] \cdot dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_{M-\sigma} \varphi \, dv = \int_{M-\sigma} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (v\varphi) \right\} dv + \int_{\sigma(t)} [\varphi (v - v')] \cdot da$$

$$\text{avec } dx = k \, d\ell, \quad \tau = k \wedge n$$

$$\text{et } k \cdot \tau \, d\ell = k \cdot (k \wedge n) \, d\ell = k \cdot (n \wedge k) \, d\ell = - (k \wedge n) \cdot k \, d\ell = - (k \wedge n) \cdot dx,$$

les lois électromagnétiques d'équilibre peuvent encore être formulées sous la forme équivalente ci-dessous :

Loi de Faraday

$$\int_{S-\gamma} (\nabla \wedge \vec{\epsilon} + 1/c \overset{*}{B}) \cdot da + \int_{\gamma_f} [\vec{\epsilon} + 1/c \vec{B} \wedge (\vec{v} - \vec{v}')] \cdot dx = 0$$

Loi d'Ampère

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \wedge \mathcal{K} - 1/c D - 1/c \mathcal{J}) \cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{V}} \{ [\mathcal{K} - 1/c D \wedge (\mathbf{v} - \mathbf{v}')] - 1/c \mathcal{K} \wedge \mathbf{n} \} \cdot d\mathbf{x} = 0$$

Loi de Gauss

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot D - q_f) dv + \int_{\sigma} \{ [D] \cdot \mathbf{n} - w_f + \nabla_{\sigma} \cdot \boldsymbol{\pi} \} \cdot d\mathbf{a} - \int_{\partial\sigma} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = 0$$

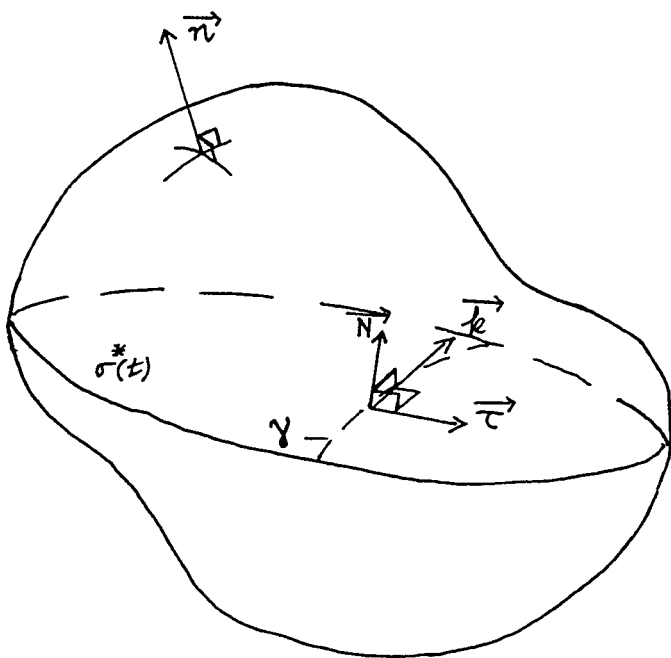
Loi de conservation du flux magnétique

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{B} dv + \int_{\sigma} [\mathbf{B}] \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Loi de conservation de la charge électrique

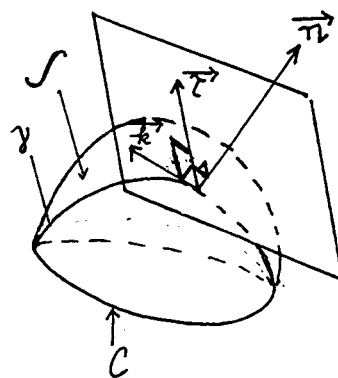
$$\int_{\mathcal{V}} (\partial q_f / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{J}) dv - \int_{\partial\sigma} \mathcal{K} \cdot \boldsymbol{\tau} dl + \int_{\sigma} ([\mathbf{J} - q_f \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} + \delta w_f / \delta t + \nabla_{\sigma} \cdot \mathcal{K}) da = 0$$

où: $\overline{\delta / \delta t} = \partial / \partial t - w \partial / \partial n$, $w = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.



A.1

ouvert matériel N
surface σ^* de discontinuité en mouvement.
 γ est fixe par rapport à σ .



A.2

surface matérielle \mathcal{S} .

IV FORCE, COUPLE ET ENERGIE DANS DES CORPS ELECTROMAGNETIQUES EN MOUVEMENT

IV - 1 Force et couple

Objet du paragraphe

Dans ce paragraphe sont déduites à partir de l'interaction entre les champs électromagnétiques et la matière, les expressions de la force et du couple pondéromoteurs, dont la construction fait usage de la théorie de l'électron de Lorentz.

Aspect microscopique

Soit ΔV un élément de volume contenant un microélément ΔV^α , toute charge élémentaire δq^α de ΔV^α est soumise à une force $\vec{\delta f}^\alpha$ dite force de Lorentz et définie par

$$\vec{\delta f}^\alpha = \delta q^\alpha [\vec{a}(x^\alpha) + 1/c \vec{v}^\alpha \wedge \vec{b}(x^\alpha)]$$

où :

$\vec{a}(x^\alpha)$ désigne le champ électrique à la position $x^\alpha = \vec{x} + \vec{\xi}^\alpha$ dans ΔV^α

$\vec{b}(x^\alpha)$ l'induction magnétique à la même position.

$\vec{v}^\alpha = \vec{v} + \dot{\vec{\xi}}^\alpha + \hat{\vec{v}}^\alpha$ la vitesse absolue de la charge δq^α dans R_G ,

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}}$$

\vec{x} la position du centre de gravité de ΔV ,

$\vec{\xi}^\alpha$ la position vectorielle de δq^α ,

$\hat{\vec{v}}^\alpha$ la vitesse de fluctuation de δq^α due à l'agitation thermique et contribuant au courant de conduction,

et \vec{x}^α la position moyenne de la charge δq^α ;

ainsi, la force et le couple, relatifs à \vec{x}^α , sont respectivement définis par :

$$\vec{M}^f \Delta V = \sum_{\alpha} \delta q^\alpha \vec{e}(x + \vec{\xi}) + 1/c \sum_{\alpha} \delta q^\alpha (\vec{v} + \dot{\vec{\xi}}^\alpha + \hat{\vec{v}}^\alpha) \wedge \vec{b}(x + \vec{\xi}^\alpha) \quad (\text{A.23})$$

$$\vec{M}^l \Delta V = \sum_{\alpha} \delta q^\alpha (x + \vec{\xi}^\alpha) \wedge \vec{e}(x + \vec{\xi}^\alpha) + 1/c \sum_{\alpha} \delta q^\alpha (x + \vec{\xi}^\alpha) \wedge [(\vec{v} + \dot{\vec{\xi}}^\alpha + \hat{\vec{v}}^\alpha) \wedge \vec{b}(x + \vec{\xi}^\alpha)]$$

Remarques (A.7)

Au repos, il n'y a donc aucune raison qu'en l'absence de charges électriques et de forces extérieures, qu'un matériau piézoélectrique soit soumis à une quelconque force, dans la mesure où la force de Lorentz dépend entièrement du mouvement des charges électriques.

Aspect macroscopique**lemme (A.1)**

Relativement à la position moyenne \bar{x}^α de la charge élémentaire δq^α , la force et le couple pondéromoteurs sont respectivement définis par :

$$M^f_k \Delta V = \ell_k \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \right) + \ell_{k,m} \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_m^\alpha \right) + 1/c \varepsilon_{k\ell m} \left\{ v_\ell b_m \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \right) + b_m \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \hat{v}_\ell^\alpha \right) + v_\ell b_{m,n} \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_n^\alpha \right) + b_m \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \dot{\xi}_\ell^\alpha \right) + b_{m,n} \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \dot{\xi}_{[\ell}^\alpha \xi_{n]}^\alpha \right) \right\}$$

$$M^{\ell k} \Delta V = \varepsilon_{k\ell m} x_\ell M^f_m \Delta V + \varepsilon_{k\ell m} \left\{ \ell_m \sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_\ell^\alpha \right\} + 1/c \varepsilon_{mpq} \left[v_p b_q \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_\ell^\alpha \right) + b_q \cdot \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_{[\ell}^\alpha \dot{\xi}_{p]}^\alpha \right) \right]$$

$$\left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_{[\ell}^\alpha \dot{\xi}_{p]}^\alpha \right)$$

$$\text{où} \quad \xi_{[\ell}^\alpha \dot{\xi}_{p]}^\alpha = 1/2 \left(\dot{\xi}_{\ell p}^\alpha - \dot{\xi}_p^\alpha \xi_\ell^\alpha \right)$$

Preuve

On suppose $\vec{\ell}$ et \vec{b} suffisamment réguliers, de telle sorte qu'ils admettent un développement en série de Taylor au voisinage du centre x de gravité de ΔV . Par conséquent, les relations (A.23) peuvent alors respectivement s'écrire sous la forme :

$$M^f_k \Delta V = \sum_{\alpha} \delta q^\alpha \left\{ \ell_k(x) + \xi_m^\alpha \ell_{k,m} + 0(|\xi^\alpha|) \right\} + 1/c \varepsilon_{k\ell m} \left\{ \sum_{\alpha} \delta q^\alpha \left(v_\ell + \dot{\xi}_\ell^\alpha + \hat{v}_\ell^\alpha \right) \left(b_m(x) + x_s^\alpha B_{m,s} + 0(|\xi^\alpha|) \right) \right\}$$

$$= \ell_k(x) \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \right) + \ell_{k,m} \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_m^\alpha \right) + 1/c \varepsilon_{k\ell m} \left\{ v_\ell b_m \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \right) + v_\ell B_{m,s} \cdot \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_s^\alpha \right) + b_m \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \dot{\xi}_\ell^\alpha \right) + B_{m,s} \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_s^\alpha \dot{\xi}_\ell^\alpha \right) + b_m \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \hat{v}_\ell^\alpha \right) + B_{m,s} \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha v_\ell \xi_s^\alpha \right) \right\}$$

$$\left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_s^\alpha \right) + b_m \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \dot{\xi}_\ell^\alpha \right) + B_{m,s} \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \xi_s^\alpha \dot{\xi}_\ell^\alpha \right) + b_m \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \hat{v}_\ell^\alpha \right) + B_{m,s} \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha v_\ell \xi_s^\alpha \right) \right\}$$

$$M \Delta V = \sum_{\alpha} \left(\delta q^\alpha \varepsilon_{k\ell m} (x_\ell + \xi_\ell^\alpha) \left(\ell_k + \ell_{k,m} \xi_m^\alpha + 0(|\xi^\alpha|) \right) + 1/c \left(\sum_{\alpha} \delta q^\alpha \varepsilon_{k\ell m} \cdot \right) \right)$$

$$\cdot \left(x_\ell + \xi_\ell^\alpha \right) \varepsilon_{mpq} \left(v_p + \dot{\xi}_p^\alpha + \hat{v}_p^\alpha \right) \left(b_q + b_{q,s} \xi_s^\alpha + 0(|\xi^\alpha|) \right) \left. \right\}$$

$$= \varepsilon_{k\ell m} x_{\ell} M_{\ell m}^f \Delta V + \varepsilon_{k\ell m} \{ \ell_m (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha}) + (\ell_{m,n} + 1/c (\varepsilon_{mpq} v_p b_{q,n})) \cdot (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha} \xi_n^{\alpha}) + 1/c \varepsilon_{mpq} [v_p b_q (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha}) + b_q (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha} \dot{\xi}_p^{\alpha}) + b_q (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{v}_p^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha}) + b_{q,n} (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha} \xi_n^{\alpha} \dot{\xi}_p^{\alpha}) + b_{q,n} (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha} \xi_n^{\alpha} \dot{v}_p^{\alpha})] \}$$

si l'on suppose $\hat{v}_k^{\alpha} \ll \xi_k^{\alpha} \quad \forall k$, on obtient

$$\hat{v}_k^{\alpha} + \xi_k^{\alpha} \approx \xi_k^{\alpha} \text{ et, par suite, } \hat{v}_k^{\alpha} \xi_k^{\alpha} \approx 0$$

D'autre part, en négligeant pour des raisons de simplification,

$$\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_k^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha} \text{ et donc à fortiori :}$$

$\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha} \xi_p^{\alpha}$, $\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \hat{v}_p^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha} \xi_n^{\alpha}$ et $\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}_p^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha} \xi_n^{\alpha}$, il s'en suit les résultats du lemme (A.1).

Proposition (A.2)

A l'échelon macroscopique, la force et le couple pondéromoteurs liés au mouvement du solide étudié, sont définis par :

$$\begin{aligned} \vec{M}^f &= q_f \vec{\mathcal{E}} + 1/c (\vec{\mathcal{J}} + \vec{P}) \wedge \vec{B} + (\vec{P} \cdot \vec{V}) \vec{\mathcal{E}} + (\vec{V} B)_r \vec{\mathcal{M}} \\ \vec{M}^c &= x \wedge \vec{M}^f + \vec{P} \wedge \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Preuve

Introduisons les champs macroscopiques :

$$\vec{E}(x) \equiv \vec{\mathcal{E}}(x) \cdot \vec{B}(x) \equiv \vec{b}(x) ; q_f \Delta V \equiv \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} ; P_k \Delta V \equiv \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_k^{\alpha}$$

$$\mathcal{M}_k \Delta V \equiv (1/2 c) \varepsilon_{k\ell m} \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha} \xi_m^{\alpha} \text{ et } J_k \Delta V \equiv \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{v}_k^{\alpha}$$

si l'on tient compte de la transformation

$$\begin{aligned} \dot{P}_k \Delta V &= \overbrace{P_k \Delta V}^{\dot{P}_k \Delta V} - P_k \dot{\Delta V} \\ &= \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}_k^{\alpha} - P_k \dot{\Delta V} \\ &= \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}_k^{\alpha} - P_k (v_{k,\ell} \Delta V) ; \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \dot{P}_k \Delta V + P_k v_{\ell\ell} \Delta V &= \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}_k^{\alpha} \\ &= (\dot{P}_k + P_{\ell} v_{k,\ell}) \Delta V, \end{aligned}$$

car :

$$P_k = \dot{P}_k + P_k v_{\ell\ell} - P_{\ell} v_{k,\ell} \quad ,$$

les expressions respectives de la force et du couple pondéromoteurs introduits dans le lemme (A.1) peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} M_k^f &= E_k (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha}) + E_{k,m} (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_m^{\alpha}) + 1/c \varepsilon_{k\ell m} \{ v_{\ell} B_m (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha}) + B_m (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \hat{v}_{\ell}^{\alpha}) + \\ & v_{\ell} B_{m,n} (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_n^{\alpha}) + B_m (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{\ell}^{\alpha}) B_{m,n} (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{[\ell^{\alpha} n]}) \} \\ & \quad \rightarrow \rightarrow \quad \rightarrow \rightarrow \\ &= q_f E_k + P_m E_{k,m} + 1/c q_f (v \wedge B)_k + 1/c (\mathcal{I} \wedge B)_k + 1/c \varepsilon_{k\ell m} (v_{\ell} B_{m,n}) P_n + 1/c \varepsilon_{k\ell m} \\ & B_m \dot{P}_{\ell} + 1/c \varepsilon_{k\ell m} (B_m P_s v_{\ell s}) + 1/c B_{m,n} (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_{[\ell^{\alpha} n]}) \cdot \varepsilon_{k\ell m} \end{aligned}$$

Mais comme :

$$\begin{aligned} q_f E_k + 1/c q_f (v \wedge B) &= q_f \mathcal{E} \quad , \\ 1/c (\varepsilon_{k\ell m} B_m \dot{P}_{\ell}) + 1/c (\mathcal{I} \wedge B)_k &= 1/c ((\overset{*}{P} + \mathcal{I}) \wedge B)_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/c (\varepsilon_{k\ell m} (v_{\ell} B_{m,n}) P_n) + 1/c (\varepsilon_{k\ell m} (B_m P_s v_{\ell s})) &= 1/c \varepsilon_{k\ell m} P_n (v_{\ell} B_{m,n}) = 1/c P_n (\varepsilon_{k\ell m} \\ v_{\ell} B_{m,n}) &= 1/c P_n (\varepsilon_{k\ell m} v_{\ell} B_{m,n}) = 1/c ((P \cdot V) \{ v \wedge B \})_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{m,n} \cdot 1/c \varepsilon_{k\ell m} \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} (\xi_{[\ell^{\alpha} n]}) &= B_{m,n} \cdot 1/c \varepsilon_{k\ell m} \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} (\xi_{\ell}^{\alpha} \xi_n^{\alpha} + \xi_{\ell}^{\alpha} \xi_n^{\alpha}) \\ &= (1/2c) \varepsilon_{k\ell m} (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} (\xi_{\ell}^{\alpha} \xi_n^{\alpha})) B_{m,n} \\ &= ((\nabla B) \cdot \mathcal{M} \Delta V)_k, \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$M_k^f = q_f \mathcal{E} + 1/c (\mathcal{I} + P) \wedge B + (P \cdot \nabla) \mathcal{E} + (\nabla B) \cdot \mathcal{M}$$

et de manière plus évidente :

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ M^f & = & x \Lambda M^f & + & P \Lambda \mathcal{E} & + & M \Lambda B \end{matrix}$$

C. Q. F. D.

Remarque (A.8)

- Tenant compte des relations

$$\begin{aligned} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ - ((\nabla \wedge \mathcal{M}) \Lambda B)_k &= (B \wedge (\nabla \wedge \mathcal{M}))_k \\ &= \epsilon_{km} B_l (\epsilon_{mpq} \mathcal{M}_{q,p}) \\ &= \epsilon_{km} \epsilon_{mpq} B_l \mathcal{M}_{q,p} \\ &= \delta_{kp} S_{lq} B_l \mathcal{M}_{q,p} - \delta_{kp} \delta_{lp} B_l \mathcal{M}_{q,p} \\ &= B_q \mathcal{M}_{q,k} - B_l \mathcal{M}_{kl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ 1/c \epsilon_{km} B_{m,n} (\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi^{\alpha} \zeta^{\alpha}_n) &= (\nabla B \cdot \mathcal{M})_k \\ &= \epsilon_{km} \epsilon_{mpq} B_l \mathcal{M}_{q,p} \\ &= \delta_{kp} S_{lq} B_l \mathcal{M}_{q,p} - \delta_{kp} \delta_{lp} B_l \mathcal{M}_{q,p} \\ &= B_{m,k} \mathcal{M}_m - B_{m,m} \mathcal{M}_k \\ &= B_{m,k} \mathcal{M}_m \text{ car } B_{m,m} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \rightarrow \\ q^{\text{eff}} &= q_f - \nabla \cdot P, \\ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \\ J^{\text{eff}} &= J + P + C \nabla \wedge \mathcal{M}, \\ \rightarrow \rightarrow \\ \vec{L}^f &= q^{\text{eff}} \vec{\mathcal{E}} + 1/c J^{\text{eff}} \wedge \vec{B}, \end{aligned}$$

une formulation alternative de la force pondéromotrice est donc :

$$M^{fk} = L^{fk} + (P_l \mathcal{E}_k + B_l \mathcal{M} \delta_{lk} - B_l \mathcal{M}_k)_{,l} \tag{A.24}$$

où L^f est dite force effective de Lorentz dans un diélectrique magnétisé.

- Dans le cas particulier d'un matériau piézoélectrique en mouvement, la force pondéromotrice est définie par :

$$M^{fk} = L^{fk} + (P_l \mathcal{E}_k)_{,l}$$

où

$$\vec{L}^f = -(\nabla \cdot P) \vec{\mathcal{E}}$$

– Posant :

$$\overline{M^{t_{k\ell}}} = P \overrightarrow{\mathcal{E}}_k + B \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}} \delta_{k\ell} - B_k \mathcal{M}_k, \quad (\text{A.25})$$

l'expression de $\overline{M^f}$ peut alors se mettre sous la forme :

$$\overline{M^f_k} = L \overrightarrow{f}_k + \overline{M^{t_{k\ell}}},$$

de telle sorte que l'on puisse introduire le couple M^c par unité de volume défini à partir de l'expression du couple pondérateur M^c , par :

$$\begin{aligned} M^c_k &= M^c_k - x \Delta M^f_k \\ &= (P \overrightarrow{\mathcal{E}} + \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B})_k \\ &= \varepsilon_{km} \overline{M^{t_{\ell m}}} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Notion de tenseur électromagnétique

Cette notion est introduite par le théorème suivant, dû à Collet et Maugin [1].

Théorème (A.1)

Il existe au moins un tenseur du second ordre $M^{t_{k\ell}}$ et un vecteur \overrightarrow{G} vérifiant les équations :

$$\overline{M^f_\ell} = M^{t_{k\ell}} \partial G_k / \partial t \quad \text{et} \quad M^c_m = \varepsilon_{km} M^{t_{k\ell}}$$

dont une solution est :

$$M^{t_{k\ell}} = P_k \mathcal{E}_\ell - B_k \mathcal{M}_\ell + E_k E_\ell + B_k B_\ell - \frac{1}{2} (E^2 + B^2 - 2 \overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B}) \delta_{k\ell}$$

$$\overrightarrow{G} = 1/c \overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}$$

Remarques (A.9)

– On peut observer que le tenseur M^t introduit par le théorème (A.1) apparaît comme somme d'un tenseur symétrique F^t défini par :

$$F^{tk} = E_k E_l + B_k B_l - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{kl}$$

et du tenseur M^t défini par la relation (A.25).

– Le tenseur F^t qui traduit la contribution des champs \vec{E} et \vec{B} , est dit **tenseur de Maxwell**.

– Par ailleurs, il convient de souligner que le tenseur électromagnétique M^t n'est pas symétrique.

En effet,

La relation (A.26) implique :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kpq} M^{qk} &= \varepsilon_{kpq} \varepsilon_{k\ell m} M^{t\ell m} \\ &= (\delta_{p\ell} \delta_{qm} - \delta_{pm} \delta_{q\ell}) M^{t\ell m} \\ &= M^{tpq} - M^{tqp} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$M^{tpq} \neq M^{tqp}$$

– Dans le cas d'un matériau piézoélectrique, il n'y a évidemment aucune contrainte électromagnétique agissant en l'absence de toute sollicitation extérieure, cependant qu'à l'état de mouvement apparaissent des contraintes dûes uniquement à la polarisation et au champ électromagnétique $\vec{\mathcal{E}}$.

IV - 2 ENERGIE

Objet du paragraphe

Comme dans le paragraphe précédent, on s'appuie sur la théorie de l'électron de Lorentz, pour construire l'expression de l'énergie des forces électromagnétiques.

Aspect microscopique

Pour l'élément de volume ΔV , l'énergie des forces et couples électromagnétiques est définie par :

$$M^w \Delta V = \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} (\vec{V} + \vec{\xi}^{\alpha} + \vec{v}^{\alpha}) \cdot \vec{\ell} (x + \vec{\xi}^{\alpha}).$$

En développant $\vec{\ell}(x + \vec{\xi}^{\alpha})$ en série de Taylor et, en tenant compte de l'approximation

$$\hat{V}_{k \xi^{\alpha}}^{\alpha} = 0$$

introduite pour la première fois dans la preuve du lemme (A.1), il vient :

$$\begin{aligned} M^w \Delta V &= \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} (\vec{V}_k + \dot{\vec{\xi}}_k^{\alpha} + \hat{V}_k^{\alpha}) \cdot (\vec{\ell}_k(x) + \xi^{\alpha}_{\ell} \ell_{k,\ell}). \\ &= \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} V_k \ell_k + \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} V_k \xi^{\alpha}_{\ell} \ell_{k,\ell} + \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}^{\alpha}_k \ell_k + \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}^{\alpha}_k \xi^{\alpha}_{\ell} \ell_{k,\ell} + \\ &\quad \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \hat{V}_k^{\alpha} \ell_k. \end{aligned}$$

Aspect macroscopique

Proposition (A.3)

A l'échelle macroscopique, l'énergie électromagnétique M^w est définie par :

$$M^w = q_f \vec{E} \cdot \vec{v} + v \cdot \vec{E}_k P_k + E \cdot (\vec{P} + \vec{P}(\nabla \cdot \vec{V})) + c \vec{\mathcal{M}} \cdot (\nabla \wedge \vec{E}) + E \cdot \vec{\mathcal{J}}$$

Preuve :

Tenant compte des relations

$$\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} = q_f \Delta V, \quad \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi^{\alpha}_{\ell} = P_{\ell}, \quad \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}^{\alpha}_k = \dot{P}_k \Delta V + P_k v_{\ell} \ell_{k,\ell} \Delta V \quad \text{et}$$

$\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \hat{V}_k^{\alpha} = \mathcal{J}_k \Delta V$ (cf preuve de la proposition (A.2)), l'expression précédente de la quantité $M^w \Delta V$ conduit à :

$$M^w = q_f \vec{E} \cdot \vec{v} + v \cdot \vec{E}_k P_k + E \cdot (\vec{P} + \vec{P}(\nabla \cdot \vec{V})) + E_{\ell} \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \left(\frac{\vec{F}_m^{\alpha} \cdot \vec{F}_n^{\alpha} - \vec{F}_n^{\alpha} \cdot \vec{F}_m^{\alpha}}{2} \right) + E \cdot \vec{\mathcal{J}}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 E_{n,m} \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \left(\frac{\dot{\xi}_{\alpha}^m \dot{\xi}_{\alpha}^n - \dot{\xi}_{\alpha}^n \dot{\xi}_{\alpha}^m}{2} \right) \\
 = \frac{1}{2} \delta_{jm} \delta_{kn} E_{n,m} \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha}^j \dot{\xi}_{\alpha}^n - \frac{1}{2} \delta_{jn} \delta_{km} E_{n,m} \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha}^j \dot{\xi}_{\alpha}^k \\
 = c \cdot \left\{ \frac{1}{2} c \epsilon_{ijk} \left(\sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \dot{\xi}_{\alpha}^j \dot{\xi}_{\alpha}^k \right) \right\} \epsilon_{imn} E_{n,m} \\
 = c \vec{\mathcal{M}}_{\alpha} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_{\alpha}
 \end{aligned}$$

par conséquent

$$M^w = q_f \vec{E} \cdot \vec{v} + v \cdot \vec{E}_{,k} P_k + \vec{E} \cdot (\vec{P} + \vec{P}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})) + c \vec{\mathcal{M}}_{\alpha} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_{\alpha} + \vec{E} \cdot \vec{\mathcal{J}}$$

d'où la proposition (A.3).

Proposition (A.4)

Une première variante de la formulation de l'expression de l'énergie M^w est

$$M^w = \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{E} \cdot \vec{P} v_k)_{,k}$$

Preuve

Tenant compte des relations

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{M} + \vec{v} \wedge \vec{P} \text{ et } \dot{\vec{P}} + \vec{P}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + (\vec{P} v_k)_{,k}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
 M^w = & \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + v_k E_{,k} P_k + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + E_k P_{,k} v_k + E_k P_{,k} v_{k,k} + E_k P_{,k} v_{k,k} \\
 & + c \vec{\mathcal{M}}_{\alpha} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_{\alpha} + (\vec{v} \wedge \vec{P}) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})
 \end{aligned}$$

Cependant

$$\begin{aligned}
 q \vec{E} \cdot \vec{\nabla} &= \vec{J} \cdot \vec{E} - \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{E} \\
 \text{et } (\vec{\nabla} \wedge \vec{P}) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= \varepsilon_{ikm} v_\ell^p \varepsilon_{kpq} E_{q,p} \\
 &= \delta_{ip} \delta_{mq} v_\ell^p E_{q,p} - \delta_{iq} \delta_{mp} v_\ell^p E_{q,p} \\
 &= v_p^p E_{q,p} - v_q^p E_{q,p} = v_k^p E_{\ell,k} v_\ell^p E_{\ell,k}
 \end{aligned}$$

Ainsi donc

$$\begin{aligned}
 M^w &= \vec{J} \cdot \vec{E} - \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\mathcal{J}} + v_\ell^p E_{\ell,k} P_k + \vec{E} \cdot \partial \vec{P} / \partial t + E_\ell P_{\ell,k} v_k + E_\ell P_{\ell,k} v_{k,k} + \vec{C} \cdot \vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \\
 & v_k P_\ell E_{\ell,k} - v_\ell P_k E_{\ell,k} \\
 &= \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \partial \vec{P} / \partial t + \vec{C} \cdot \vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + (E_\ell P_{\ell,k})_{,k} \\
 &= \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \partial \vec{P} / \partial t - \vec{M} \cdot \partial \vec{B} / \partial t - (E \cdot P v_k)_{,k} \text{ car } 1/c \partial \vec{B} / \partial t = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E},
 \end{aligned}$$

d'où la preuve.

Proposition (A.5)

Une seconde variante de la formulation de l'énergie électromagnétique M^w est:

$$M^w = \vec{M} \cdot \vec{\nabla} + \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{E} - \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} + \rho \vec{E} \cdot \vec{\pi} \text{ où } \vec{\pi} = \vec{P} / \rho$$

Preuve

En introduisant l'énergie de la force et du couple pondérateur, on obtient

$$\begin{aligned}
 M^w &= \vec{M} \cdot \vec{\nabla} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \partial \vec{P} / \partial t - \vec{M} \cdot \partial \vec{B} / \partial t + (E \cdot P v_k)_{,k} - \vec{M} \cdot \vec{\nabla} \\
 M^w &= \vec{M} \cdot \vec{\nabla} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \partial \vec{P} / \partial t - \vec{M} \cdot \partial \vec{B} / \partial t + (E \cdot P v_k)_{,k} - (q(\vec{E} \cdot \vec{v}) - 1/c(\vec{J} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{v} + ((\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \\
 & \cdot \vec{P})_{,v} + ((\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{M})_{,v} - 1/c [(\vec{P} \wedge \vec{A})_{v_k}]_{,k} \cdot v + 1/c [\partial / \partial t (\vec{P} \wedge \vec{A})]_{,v}
 \end{aligned}$$

Si par ailleurs on tient compte des relations :

$$-q_f(\vec{E} \cdot \vec{v}) - 1/c (\vec{J} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = \vec{J} \cdot \vec{E},$$

$$-\vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \vec{B}) \cdot \vec{v} - 1/c (\vec{v} \wedge \vec{P}) \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - 1/c (\vec{v} \wedge \vec{P}) \cdot ((\vec{\nabla} \vec{B}) \cdot \vec{v}))$$

$$= -(\vec{M} + 1/c \vec{v} \wedge \vec{P}) \cdot (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{B}) \cdot \vec{v})$$

$$= -\vec{\mathcal{M}} \cdot \dot{\vec{B}},$$

et

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + (\vec{E} \cdot (\vec{P} \cdot \vec{v}_k))_{,k} - ((\vec{\nabla} \vec{E}) \cdot \vec{P}) \cdot \vec{v} + 1/c (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + 1/c (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{P} \cdot \vec{v}_k)_{,k} =$$

$$= \vec{E} \cdot \dot{\vec{P}},$$

$$-1/c [(\vec{P} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_k]_{,k} \cdot \vec{v} = 1/c \varepsilon_{ijl} P_{j,k} B_l v_k v_i + \varepsilon_{ijl} P_j B_{lk} v_k v_i + \varepsilon_{ijk} P_j B_l v_{k,k} v_i$$

$$= 1/c [\varepsilon_{jld} B_l v_i] P_{j,k} v_k + (\varepsilon_{dij} v_i P_j) (B_{lk} v_k) + (\varepsilon_{jld} B_l v_i) P_j v_{k,k}]$$

$$= -1/c (\vec{B} \wedge \vec{V})_j (P_j v_k)_{,k} + 1/c (\vec{V} \wedge \vec{P})_l (B_{lk} v_k)$$

$$= 1/c (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{P} v_k)_{,k},$$

$$\text{car } 1/c (\vec{V} \wedge \vec{P})_l (B_{lk} v_k) = 1/c (\vec{V} \wedge \vec{P}) \cdot (\vec{\nabla} \vec{B} \cdot \vec{V}) = 0,$$

alors l'énergie M^w peut être mise sous la forme :

$$M^w = \vec{M} \cdot \dot{\vec{v}} + \vec{J} \cdot \vec{E} - \vec{\mathcal{M}} \cdot \dot{\vec{B}} + \rho \vec{E} \cdot \dot{\vec{P}}$$

Remarques (A.10)

M^w est donc composé des puissances développées par la force et le couple pondéromoteurs, ainsi que d'une contribution volumique due à la polarisation, la magnétisation, puis l'électrisation du matériau étudié.

Dans le cas particulier des matériaux piézoélectriques,

$M^w = \overrightarrow{M} \cdot \dot{\overrightarrow{v}} - \overrightarrow{\mathcal{K}} \cdot \dot{\overrightarrow{B}} + \overrightarrow{\rho \mathcal{E}} \cdot \dot{\overrightarrow{\pi}}$ et il n'apparaît aucun facteur dû à l'électrisation puisqu'il est apparu que de tels matériaux ne sont jamais électrisés.

Force, couple et énergie électromagnétiques sur une surface de discontinuité

– Lorsque le matériau est balayé par une surface σ^* de discontinuité en mouvement de vitesse \vec{v} , on a :

$$\int_{\mathcal{N}} \vec{M}^f dv = \int_{\mathcal{N}-\sigma^*} \vec{M}^f dv + \int_{\sigma^*(t)} \vec{M}^f da$$

où \hat{M}^f est la contribution surfacique des forces intérieures.

Mais si l'on tient compte du théorème (A.1), on peut écrire :

$$\int_{\mathcal{N}-\sigma^*} \vec{M}^f dv = \int_{\mathcal{N}-\sigma^*} M^{tkl,k} - \int_{\mathcal{N}-\sigma^*} \partial G_l / \partial t dv ;$$

et par suite, en se référant aux théorèmes de transport (cf remarque (A.5)), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}-\sigma^*} \vec{M}^f dv &= \int_{\mathcal{N}-\sigma^*} M^{tkl,k} - \left\{ d/dt \int_{\mathcal{N}-\sigma^*} G_l dv - \left(- \int_{\sigma^*(t)} N_k [v_k G_l] da + \int_{\partial \mathcal{N}-\sigma^*} n_k v_k G_l da - \int_{\sigma^*(t)} [G_l(v-v)_k] N_k da \right) \right. \\ &= -d/dt \int_{\mathcal{N}-\sigma^*} G_l dv - \int_{\sigma^*(t)} [M^{tkl} + v_k G_l] N_k da + \int_{\mathcal{N}-\sigma^*} (M^{tkl} + v_k G_l) n_k da \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\int_{\mathcal{N}-\sigma^*} \vec{M}^f dv + \int_{\sigma^*(t)} [M^{tkl} + v_k G_l] N_k da = -d/dt \int_{\mathcal{N}-\sigma^*} G_l dv + \int_{\partial \mathcal{N}-\sigma^*} (M^{tkl} + v_k G_l) n_k da$$

d'où

$$\hat{M}^f = [M^{tkl} + v_k G_l] N_k \quad (A.27)$$

– Par ailleurs, si l'on multiplie scalairement la relation (A.13)₃ par \vec{E} , et si l'on prend en compte l'équation (A.13)₁ ainsi que l'identité

$$\vec{H} \cdot \text{Rot} \vec{E} - \nabla \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) \equiv \vec{E} \cdot \text{Rot} \vec{H},$$

il vient :

$$\vec{H} \cdot \partial \vec{B} / \partial t + \vec{E} \cdot \partial \vec{D} / \partial t = -\vec{J} \cdot \vec{E} - \nabla \cdot \vec{S}$$

où

$$\vec{S} \equiv c \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Mais,

$$\vec{D} = \vec{P} + \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{M} = \vec{B} - \vec{H}$$

et par conséquent, la proposition (A.4) permet d'écrire

$$M^w = -\partial/\partial t [\frac{1}{2} (E^2 + B^2)] - \nabla \cdot [\vec{S} - \vec{v}(\vec{E} \cdot \vec{P})]$$

or, soit $\vec{S} \equiv c \vec{E} \wedge \vec{H}$, il est facile d'établir la relation

$$S_i = s_i + [(M^{t_{ij}} - v_j G_i - \frac{1}{2} (E^2 + B^2 + 2E \cdot P) \delta_{ij}) v_j]$$

et par suite, l'expression

$$M^w = -\rho d/dt [\frac{1}{2} \rho (E^2 - B^2)] - [(M^{t_{ji}} - v_j G_i) v_i]_{,j} - \nabla \cdot \vec{S}$$

qui, en vertu des théorèmes de transport, conduit à l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^3} -\sigma M^w dv + \int_{\sigma(t)} [M^{t_{ji}} + v_j G_i] v_i - S_j - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) (v_j - v_j) N_j da =$$

$$- d/dt \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} (E^2 - B^2) dv - \int_{\sigma(t)} [M^{t_{ji}} + v_j G_i] v_i - S_j \} n_j da.$$

Ainsi, par le même type de raisonnement ayant conduit à la construction de \hat{M}^f , on peut poser :

$$\hat{M}^w \equiv [M^{t_{ji}} + v_j G_i] v_i - S_j - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) (v_j - v_j) N_j \quad (A.28)$$

D'une manière analogue, la contribution surfacique du couple pondéromoteur est définie par :

$$\hat{c}_i \equiv \varepsilon_{ijk} v_j [M^{t_{pk}} + v_p G_k] N_p \quad (A.29)$$

V LOIS D'EQUILIBRE ET DE COMPORTEMENT

V - 1 Lois d'équilibre généralisées

Objet du paragraphe

Le présent paragraphe est consacré aux lois d'équilibre de l'électrodynamique des milieux continus qui regroupent les équations de Maxwell, les lois mécaniques de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, ainsi que l'inégalité d'entropie.

Ces lois, axiomes fondamentaux de la mécanique et de la thermodynamique, restent valables, indépendamment de la géométrie et des propriétés du milieu étudié.

Formulation globale

Conservation de la masse

$$d/dt \int_{N-\sigma^*} \rho dv = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$d/dt \int_{N-\sigma^*} \rho v_i dv = \int_{N-\sigma^*} (f_i + M_i^f) dv + \int_{\partial N-\sigma^*} t_{(n)i} da + \int_{\sigma^*(t)} M_i^f da$$

Conservation du moment

$$d/dt \int_{N-\sigma^*} (x \wedge \rho v)_i dv = \int_{N-\sigma^*} \{ x \wedge (f + M^f) + M^c \}_i dv + \int_{\partial N-\sigma^*} (x \wedge t_{(n)})_i da + \int_{\sigma^*(t)} \hat{c}_i da$$

Conservation de l'énergie

$$d/dt \int_{N-\sigma^*} \rho (1/2 v^2 + \ell) dv = \int_{N-\sigma^*} (f \cdot v + \rho h + M^w) dv + \int_{\partial N-\sigma^*} (t_{(n)i} v_i + Q_{(n)}) da + \int_{\sigma^*(t)} \hat{M}^w da$$

Second principe de la thermodynamique

$$d/dt \int_{N-\sigma^*} \rho \eta dv \geq \int_{N-\sigma^*} \rho b dv + \int_{\partial N-\sigma^*} N_{(n)} da$$

où

t_{ij} définit le tenseur de contraintes de Cauchy, η l'entropie, \vec{q} le vecteur flux de chaleur, \vec{p} le vecteur flux d'entropie ;

$t_{(n)i} = n_j t_{ij}$ une densité surfacique de force

$Q_{(n)} = n_i q_i$ une densité surfacique d'énergie calorifique

θ la température thermodynamique, avec $p_i = 1/\theta q_i$

$N_{(n)} = n_i q_i$ une densité d'entropie par unité de surface, ρ la masse volumique.
 ℓ l'énergie interne, ρb une densité volumique d'entropie, ρh la densité volumique d'énergie calorifique.

On remarquera que ces équations se rapportent évidemment à un corps matériel balayé par une surface de discontinuité σ^* .

Ces équations ont été obtenues en négligeant
 -les effets ferromagnétiques et ferroélectriques,
 -les quadripôles électriques. (H)

D'autre part, les actions des champs électromagnétiques sont envisagées comme des actions à distance, au même titre que la gravitation en mécanique Newtonienne.

Formulation locale

Proposition (A.6)

La formulation locale des lois d'équilibre généralisées se présente sous la forme :

Loi de conservation de la masse

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho v_{k,k} &= 0 \quad \text{dans } N - \sigma^* \\ [\rho(v_i - v_i)] N_j &= 0 \quad \text{sur } \sigma^*(t) \end{aligned}$$

Loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= f_i + M_{,k}^i + t_{ji,j} \quad \text{dans } N - \sigma^* \\ [\rho v_i(v_j - v_j) - t_{ji} - (M_{,j}^i + v_j G_i)] N_j &= 0 \quad \text{sur } \sigma^*(t) \end{aligned}$$

Loi de conservation du moment

$$\varepsilon_{ijk} t_{jk} - M c_i = 0$$

Loi de conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} \rho \dot{\ell} &= t_{ji} v_{i,j} + \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{G}} + \rho \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\pi} - \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho h \quad \text{dans } N - \sigma^* \\ [\{ \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \ell + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \} (v_j - v_j) - (t_{ji} + M_{,j}^i + v_j G_i) v_i - (q_j - \mathcal{E}_j)] N_j & \text{ sur } \sigma^*(t) \end{aligned}$$

Inégalité d'entropie

$$\begin{aligned} \rho \dot{\eta} &\geq \theta^{-1} (\rho h_{,i} + \nabla \cdot \vec{q}) + q \cdot \nabla (\frac{1}{\theta}) \quad \text{dans } N - \sigma^* \\ [\rho \eta (v_j - v_j) - \theta^{-1} q_j] N_j &\geq 0 \quad \text{sur } \sigma^*(t) \end{aligned}$$

Preuve

• Les théorèmes de transport (cf remarque A.5) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{N-\sigma^*} \rho \, dv &= \int_{\sigma^*(t)} \{ \partial \rho / \partial t + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \rho) \} \, dv + \int_{\sigma^*(t)} [\rho (\vec{v} - \vec{v}^*)] \cdot \vec{da} \\ &= \int_{\sigma^*(t)} \{ \dot{\rho} + \rho v_{k,k} \} \, dv + \int_{\sigma^*(t)} [\rho (v_i - v_i^*)] N_i \, da = 0 \end{aligned}$$

Comme ces égalités sont vraies indépendamment du volume matériel N et de la surface de discontinuité σ^* , il s'en suit :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho v_{k,k} &= 0 \quad \text{dans } N - \sigma^* \\ [\rho (v_i - v_i^*)] N_i &= 0 \quad \text{sur } \sigma^*(t) \end{aligned}$$

• Appliquant conjointement les théorèmes fondamentaux de transport et la loi de conservation de la masse, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{N-\sigma^*} \rho v_i \, dv &= \int_{\sigma^*(t)} \partial / \partial t (\rho v_i) \, dv + \int_{N-\sigma^*} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \rho v_i) + \int_{\sigma^*(t)} [\rho v_i (\vec{v} - \vec{v}^*)] \cdot \vec{da} \\ &= \int_{N-\sigma^*} \{ \dot{\rho} v_i + \rho v_i \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \} \, dv + \int_{N-\sigma^*} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \rho v_i) \, dv + \int_{\sigma^*(t)} [\rho v_i (\vec{v} - \vec{v}^*)] \cdot \vec{da} \\ &= \int_{N-\sigma^*} \dot{\rho} v_i - \rho v_i v_{k,k} - \rho \dot{v}_i - \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho v_i) - \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho v_i) + \int_{\sigma^*(t)} [\rho v_i (\vec{v} - \vec{v}^*)] \cdot \vec{da} \\ &= \int_{N-\sigma^*} \rho \dot{v}_i \, dv + \int_{\sigma^*(t)} [\rho v_i (v_j - v_j^*)] N_j \, da. \end{aligned}$$

Mais,

$$\int_{\partial N - \sigma^*} t_{(n)i} \, da = \int_{\partial N - \sigma^*} t_{ji} n_j \, da = \int_{N - \sigma^*} t_{ji,j} \, dv + \int_{\sigma^*(t)} [t_{ji}] N_j \, da ;$$

et si par ailleurs, l'on tient compte de la relation (A.27), la loi de conservation de la quantité de mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{N-\sigma^*} \rho \dot{v}_i \, dv + \int_{\sigma^*(t)} [\rho v_i (v_j - v_j^*)] N_j \, da &= \int_{N-\sigma^*} (f_i + M f_i) \, dv + \int_{N-\sigma^*} t_{ji,j} \, dv \\ + \int_{\sigma^*(t)} [t_{ji}] N_j \, da + \int_{\sigma^*(t)} [M t_{ji} + v_j G_i] \, da \end{aligned}$$

Ainsi se déduit aisément la formulation locale de cette loi, à travers les relations:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= f_i + M f_i + t_{ji,j} \quad \text{dans } N - \sigma^* \\ [\rho v_i (v_j - v_j^*) - t_{ji} - (M t_{ji} + v_j G_i)] N_j &= 0 \quad \text{sur } \sigma^*(t) \end{aligned}$$

• La aussi, tenant compte des théorèmes fondamentaux de transport, et de la loi de conservation de la masse, il vient :

$$\begin{aligned}
 d/dt \int_{M-\sigma^*} (\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i dv &= \int_{M-\sigma^*} \{ \partial/\partial t (\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i + \nabla \cdot (\vec{v} (\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i) \} \int_{\sigma^*(t)} [(\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i (\vec{v} - \vec{v}_l)] \cdot d\vec{a} \\
 &= \int_{M-\sigma^*} \{ d/dt (\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i - \vec{v} \cdot \nabla (\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i + \nabla \cdot (\vec{v} (\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i) \} + \int_{\sigma^*(t)} [(\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i (\vec{v} - \vec{v}_l)] \cdot d\vec{a} \\
 &= \int_{M-\sigma^*} \{ d/dt (\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i + (\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i v_{\ell, \ell} \} dv + \int_{\sigma^*(t)} [(\vec{x} \wedge \rho \vec{v})_i (\vec{v} - \vec{v}_l)] \cdot d\vec{a} \\
 &= \int_{M-\sigma^*} \varepsilon_{ijk} x_j \rho \dot{v}_k + \int_{\sigma^*(t)} [\varepsilon_{ijk} x_j (\rho v_k) (v_l - v_l)] N_l da
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\int_{\partial M-\sigma^*} (\vec{x} \wedge \vec{t}_{(n)})_i da = \int_{\partial M-\sigma^*} \varepsilon_{ijk} x_j t_{ik} n_\ell da = \int_{\sigma^*(t)} [\varepsilon_{ijk} x_j t_{ik}] N_\ell da + \int_{M-\sigma^*} \varepsilon_{ijk} (x_j t_{ik, \ell}) dv$$

D'autre part, si l'on tient compte de la loi de conservation de la quantité de mouvement, on peut écrire :

$$\int_{M-\sigma^*} \{ \vec{x} \wedge (\vec{f} + \vec{M} \vec{f}) + \vec{M} \vec{e} \}_i dv = \int_{M-\sigma^*} \varepsilon_{ijk} x_j \rho \dot{v}_k - \varepsilon_{ijk} x_j t_{ik, \ell} dv + \int_{M-\sigma^*} M c_i dv$$

Mais tenant également compte de la relation (A.27) et de la proposition (A.5), il vient :

$$\int_{\sigma^*(t)} \hat{c}_i da = \int_{\sigma^*(t)} \varepsilon_{ijk} x_j [M t_{pk} - v_p G_k] N_p = \int_{\sigma^*(t)} \varepsilon_{ijk} x_j [\rho v_k (v_l - v_l) - t_{ik}] N_l$$

En définitive, la loi de conservation du moment s'écrit alors

$$\int_{M-\sigma^*} \varepsilon_{ijk} x_j \rho \dot{v}_k dv + \int_{\sigma^*(t)} [\varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k (v_l - v_l)] N_\ell da = \int_{M-\sigma^*} (\varepsilon_{ijk} x_j \rho \dot{v}_k - \varepsilon_{ijk} x_j t_{ik, \ell} + M c_i) dv + \int_{\sigma^*(t)} [\varepsilon_{ijk} x_j t_{ik}] N_\ell da + \int_{M-\sigma^*} \varepsilon_{ijk} x_j t_{ik, \ell} dv + \int_{\sigma^*(t)} \varepsilon_{ijk} x_j [\rho v_k (v_l - v_l) - t_{ik}] N_\ell da ;$$

Mais comme :

$$- \int_{\sigma^*(t)} [\varepsilon_{ijk} x_j t_{ik}] N_\ell da = - \int_{M-\sigma^*} \varepsilon_{ijk} (x_j t_{ik, \ell}) dv + \int_{M-\sigma^*} \varepsilon_{ijk} x_j t_{ik, \ell} dv,$$

la loi de conservation du moment se réduit à :

$$\int_{M-\sigma^*} (\varepsilon_{ijk} t_{jk} - M c_i) dv = 0$$

soit :

$$\varepsilon_{ijk} t_{jk} - M c_i = 0$$

• En vertu des théorèmes généraux de transport, on a également :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{N-\sigma^*} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) dv &= \int_{N-\sigma^*} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{v} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) \right) dv + \\ &\int_{\sigma^*} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) (\vec{v} - \vec{v}') \right] \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{N-\sigma^*} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) - \vec{v} \cdot \text{grad} \left(\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) \right) + \vec{v} \cdot \text{grad} \left(\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) \right) \\ &+ \int_{N-\sigma^*} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) v_{\ell\ell} + \int_{\sigma(t)} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) (\vec{v} - \vec{v}') \right] \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{N-\sigma^*} \rho (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \ell) + \int_{\sigma^*(t)} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) (\vec{v} - \vec{v}') \right] \cdot d\vec{a} \end{aligned}$$

Et, tenant compte de la proposition (A.5), il vient :

$$\int_{\partial N-\sigma^*} \left(\vec{f} \cdot \vec{v} + \rho h + {}_M W \right) dv = \int_{N-\sigma^*} \left(\vec{f} \cdot \vec{v} + \rho h + {}_M \vec{f} \cdot \vec{v} + \rho \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\pi} - \mathcal{M} \cdot \vec{B} + \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \right) dv$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{\partial N-\sigma^*} \left(\vec{t}_{(n)} \cdot \vec{v} + Q_{(n)} \right) da &= \int_{\partial N-\sigma^*} \left(n_j t_{ji} v_i + n_j q_j \right) da \\ &= \int_{\partial N-\sigma^*} n_j (t_{ji} v_i) da + \int_{\sigma^*(t)} q_{ij} da + \int_{\sigma^*(t)} [q_j] N_j da \\ &= \int_{N-\sigma^*} (t_{ji,j} v_i + t_{ji} v_{i,j}) dv + \int_{\sigma^*(t)} N_j [t_{ji} v_i] da \end{aligned}$$

et par suite, compte tenu de la relation (A.28), la loi de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{N-\sigma^*} \rho (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \ell) dv + \int_{\sigma^*(t)} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \ell \right) (\vec{v} - \vec{v}') \right] \cdot d\vec{a} &= \int_{N-\sigma^*} \left(\vec{f} \cdot \vec{v} + \rho h + {}_M \vec{f} \cdot \vec{v} + \rho \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\pi} - \right. \\ \left. \mathcal{M} \cdot \vec{B} + \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \right) dv + \int_{N-\sigma^*} (t_{ji,j} v_i + t_{ji} v_{i,j}) dv &+ \int_{\sigma^*(t)} N_j [t_{ji} v_i] da + \int_{\sigma^*(t)} [M t_{k\ell} + v_k G_\ell] v_\ell \\ - \zeta_k - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) (v_k - v'_k)] N_k \end{aligned}$$

Mais, d'après la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{f} \cdot \vec{v} + {}_M \vec{f} \cdot \vec{v} = \rho v_i v_i + v_i t_{ji,j}$$

et par conséquent, la loi de conservation de l'énergie se réduit aux relations

$$\rho \dot{\ell} = t_{ji} v_{i,j} + \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \rho \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\pi} - \mathcal{M} \cdot \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho h \quad \text{dans } N - \sigma^*$$

$$[\{ \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \mathcal{E} + \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \} (v_j - v_j) - (t_{ji} + M t_{ji} + v_j G_i) v_i - q_j - \zeta_j] N_j = 0 \text{ sur } \sigma^*(t)$$

• Tenant compte une fois de plus des théorèmes généraux de transport, on peut écrire :

$$\begin{aligned} d/dt \int_{N-\sigma^*} \rho \eta dv &= \int_{N-\sigma^*} \dot{\rho} \eta + \rho \dot{\eta} + \rho \eta v_{j,j} dv + \int_{\sigma^*(t)} [\rho \eta (v - v)] \cdot da \\ &= \int_{N-\sigma^*} \rho \dot{\eta} dv + \int_{\sigma^*(t)} [\rho \eta (v_j - v_j)] \cdot da \end{aligned}$$

Mais,

$$\int_{N-\sigma^*} \rho b dv = \int_{N-\sigma^*} \rho h/\theta dv,$$

$$\int_{\partial N-\sigma^*} N_{(n)} da = \int_{\partial N-\sigma^*} n_j p_j da = \int_{\partial N-\sigma^*} n_j \theta^{-1} q_j da = \int_{N-\sigma^*} \nabla \cdot (q/\theta) dv - \int_{\sigma^*(t)} [\theta^{-1} q_j] N_j da$$

et par conséquent, l'inégalité d'entropie devient

$$\int_{N-\sigma^*} \rho \dot{\eta} dv + \int_{\sigma^*(t)} [\rho \eta (v - v)] \cdot da \geq \int_{N-\sigma^*} \rho h/\theta + \int_{N-\sigma^*} \nabla \cdot (q/\theta) dv + \int_{\sigma^*(t)} [\theta^{-1} q_j] N_j da$$

D'où les relations :

$$\begin{aligned} \rho \dot{\eta} &\geq \theta^{-1} (\rho h + \nabla \cdot q) + q \cdot \nabla (1/\theta) \text{ dans } N - \sigma^* \\ [\rho \eta (v_j - v_j) - \theta^{-1} q_j] N_j &\geq 0 \text{ sur } \sigma^*(t) \end{aligned}$$

Remarques (A.11)

En comparant la formulation locale de la loi de conservation du moment avec la relation (A.26), on obtient :

$$\varepsilon_{ijk} t_{jk} + (P \wedge \mathcal{G} + \mathcal{M} \wedge B)_i = 0$$

En multipliant cette égalité membre à membre par ε_{imn} , il vient :

$$t_{[mn]} = \mathcal{G}_{[m} P_{n]} + B_{[m} \mathcal{M}_{n]}$$

Ainsi, sous l'hypothèse (H) (cf formulation globale des lois d'équilibre), le tenseur t de Cauchy n'est en général pas symétrique, alors que le tenseur total des contraintes, associant les tenseurs de Cauchy et de Maxwell sous la forme

$$\tau_{ij} = t_{ij} + M t_{ij}$$

est symétrique, car on a naturellement

$$\tau_{[ij]} = 0$$

V - 2 Lois de comportement

Inégalité de Clausius - Duhem

Eliminant le terme h dans les formulations locales de la loi de conservation de l'énergie et de l'inégalité d'entropie, il vient, si l'on introduit par ailleurs la fonction d'énergie libre ψ définie par :

$$\psi = \ell - \eta\theta,$$

on obtient :

$$-\rho (\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + t_{ji} U_{i,j} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \rho \dot{E} - \mathcal{M} \cdot \dot{B} + (q/\theta) \cdot \nabla\theta \geq 0 \text{ dans } N - \sigma \quad (A.30)$$

Remarques (A.12)

Cette inégalité d'importance capitale dans le développement de la théorie du comportement est dite **inégalité de Clausius - Duhem**.

Premièrement, elle contient toutes les variables dépendantes ($\psi, \eta, t_{ji}, \vec{J}, \pi$ (ou \vec{E}), \mathcal{M} (ou B)) nécessaires à la construction des lois de comportement ; deuxièmement, comme loi physique universelle, valable pour tout processus thermodynamique, elle place des restrictions sur les lois de comportement.

Choix des variables indépendantes

Par ailleurs, cette inégalité admet plusieurs modalités, différentes l'une de l'autre par la donnée des variables indépendantes choisies pour décrire les interactions entre les champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{B} , et les densités de polarisation et de magnétisation \vec{P} et \vec{M} .

Et comme on sait que la polarisation, la magnétisation et le courant électrique résultent de micromouvements de charges, et que selon le principe du déterminisme, tout phénomène physique se rapportant à un matériau est déterminé par l'histoire de son mouvement jusqu'au temps présent, il paraît naturel de sélectionner comme variables indépendantes :

$$x(x',t'), \theta(x',t'), \vec{E}(x',t'), \vec{B}(x',t') \gg$$

représentant respectivement les mouvements, les températures, les champs électriques et les inductions magnétiques aux temps $t' \leq t$.

Ainsi, les équations de comportement expriment la dépendance fonctionnelle de l'ensemble

$$Z = \{\psi, \eta, t, q, p, \vec{M}, \vec{J}\}$$

sur l'ensemble

$$y(t-\tau') = \{\mathbf{C}_{KL}(t-\tau'), \theta(t-\tau'), \theta_{,K}(t-\tau'), \mathcal{E}_K(t-\tau'), B_{K,K}(t-\tau')\} ; 0 \leq \tau'$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{KL} &= x_{k,l} x_{k,K} ; \mathcal{E}_K = \mathcal{E}_k x_{k,K} \\ \theta_{,K} &= \theta_{,k} x_{k,K} ; B_K = B_k x_{k,K} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Proposition (A.7)

Soit $f = \rho_0 \psi$ où ψ est la fonctionnelle d'énergie libre ; on a, sous des conditions de régularité :

$$\dot{f} = -\eta \rho \dot{\theta} + 2_E T_{KL} \dot{\mathbf{C}}_{KL} - \pi_K \dot{\mathcal{E}}_K - M_K \dot{B}_K$$

$$\eta = -1/\rho_0 \partial f / \partial \theta = -1/\rho_0 \partial \dot{f} / \partial \dot{\theta} ; {}_E T_{KL} = 2 \partial f / \partial \mathbf{C}_{KL} = 2 \partial \dot{f} / \partial \dot{\mathbf{C}}_{KL}$$

$$\pi_K = -\partial f / \partial \mathcal{E}_K = -\partial \dot{f} / \partial \dot{\mathcal{E}}_K ; M_K = -\partial f / \partial B_K = -\partial \dot{f} / \partial \dot{B}_K$$

$$\partial f / \partial \theta_{,K} = \partial \dot{f} / \partial \dot{\theta}_{,K} = 0 ; 1/\theta Q_K \theta_{,K} + \mathcal{J}_K \mathcal{E}_K \geq 0$$

Preuve

Introduisons les grandeurs suivantes :

$$\begin{aligned} E T_{KL} &= J_{X_{K,k} X_{L,l}} E^{t_{kl}} ; J = \rho_0 / \rho \\ Q_K &= J_{X_{K,k}} q_k ; \pi_k = J_{X_{K,k}} P_k \\ M_K &= J_{X_{K,k}} \mathcal{M}_k ; J_K = J_{X_{K,k}} \end{aligned} \quad (\text{A.31})'$$

$$\text{avec } E^{t_{kl}} = t_{kl} + P_k \mathcal{E}_l + \mathcal{M}_k B_l$$

En substituant ces champs dans l'inégalité de Clausius-Duhem, on obtient :

$$-\rho_0 (\dot{\psi} - \eta \dot{\theta}) + 1/2 E T_{KL} \dot{\mathbf{C}}_{KL} + 1/\theta Q_K \theta_{,K} - \pi_K \dot{\mathcal{E}}_K - M_K \dot{B}_K + \mathcal{J}_K \mathcal{E}_K \geq 0 \quad (\text{A.32})$$

où

$$\psi = \Psi - 1/\rho_0 \pi_K \mathcal{E}_K = \ell - \theta \eta - 1/\rho_0 \pi_K \mathcal{C}_K$$

Mais si l'on suppose $f = \rho_0 \psi$ différentiable, on obtient :

$$df/dt = (\partial f / \partial \theta) \dot{\theta} + (\partial f / \partial C_{KL}) \dot{C}_{KL} + (\partial f / \partial \mathcal{E}_K) \dot{\mathcal{E}}_K + (\partial f / \partial B_K) \dot{B}_K + (\partial f / \partial \theta_{,K}) \dot{\theta}_{,K} \quad (A.33)$$

et, en comparant (A.32) et (A.33), il vient :

$$\begin{aligned} & -(\rho_0 \eta - \partial f / \partial \theta) \dot{\theta} + \frac{1}{2} (E^{TKL} - 2 \partial f / \partial C_{KL}) \dot{C}_{KL} - (\pi_K \partial f / \partial \mathcal{E}_K) \dot{\mathcal{E}}_K \\ & - (M_K - \partial f / \partial B_K) \dot{B}_K - \partial f / \partial \theta_{,K} \dot{\theta}_{,K} + 1/\theta Q_{Kq} \theta_{,K} + \mathcal{J}_K \mathcal{E}_K \geq 0 \end{aligned} \quad (A.34)$$

Mais, cette inégalité linéaire en $\dot{\theta}$, \dot{C}_{KL} , $\dot{\mathcal{E}}_K$, \dot{B}_K , $\dot{\theta}_{,K}$ ne peut être maintenue sous d'arbitraires variations de ces quantités, que si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\begin{aligned} \eta &= -1/\rho_0 \partial f / \partial \theta, \quad E^{TKL} = 2 \partial f / \partial C_{KL}, \quad \pi_K = -\partial f / \partial \mathcal{E}_K, \\ M_K &= -\partial f / \partial B_K, \quad \partial f / \partial \theta_{,K} = 0 \quad ; \quad 1/\theta Q_{Kq} \theta_{,K} + \mathcal{J}_K \mathcal{E}_K \geq 0 \end{aligned} \quad (A.35)$$

Par suite, si l'on substitue ces dernières expressions dans l'égalité (A.33), il vient la proposition (A.7)

Conséquences de l'inégalité de Clausius-Duhem

– La proposition (A.7) montre clairement que η , E^{TKL} , π_K et M_K sont essentiellement déterminés à l'aide de la fonctionnelle d'énergie libre ψ et que cette dernière est indépendante des gradients de température.

L'inéquation

$$1/\theta Q_{Kq} \theta_{,K} + \mathcal{J}_K \mathcal{E}_K \geq 0 \quad (A.36)$$

exprime en particulier le fait que les conceptions de chaleur et de courant augmentent l'entropie, c'est à dire qu'elles engendrent une dégradation de l'énergie, s'exprimant par la diminution de la possibilité de transformer la chaleur en travail.

– Par ailleurs, pour C_{KL} , B_K et \mathcal{E}_K fixés, avec $\mathcal{E}_K = 0$, on a au voisinage de $\theta_{,K} = 0$,

$$Q_K = Q_K^\circ - K_1 \theta_{,K} + o(\|\theta_{,K}\|)$$

Q_K étant supposé différentiable et comme

$$K_1 = -(\partial Q / \partial \theta_{,K})(C_{KL}, B_K, \mathcal{E}_K, \theta_{,K}) \Big|_{\substack{\theta_{,K} = 0 \\ \mathcal{E}_K = 0}}$$

alors l'inégalité (A.34) peut se mettre sous la forme

$$(Q_K(C_{KL}, B_K, 0, 0) - K_1 \theta_{,K} + 0 (\|\theta_{,K}\|)) \theta_{,K} \geq 0$$

Mais si d'autre part, on considère le produit scalaire $(Q_K(C_{KL}, B_K, 0, 0), \vec{\tau})$ où $\vec{\tau}$ est un vecteur tel que $\|\vec{\tau}\| = 1$, il vient :

$$-(Q_K(C_{KL}, B_K, 0, 0), \vec{\tau}) \leq \|K_1\| \|\theta_{,K}\|$$

Ainsi pour $\|\theta_{,K}\| \rightarrow 0$, on a :

$$(Q_K(C_{KL}, B_K, 0, 0), \vec{\tau}) \leq 0, \forall \vec{\tau}, \|\vec{\tau}\| = 1,$$

par conséquent, $Q_K(C_{KL}, B_K, 0, 0) = 0$

On en déduit alors que pour $\mathcal{E}_K = \theta_{,K} = 0$, $Q_k = 0$; (ce qui veut dire qu'il n'y a pas de conduction de chaleur, en l'absence de gradient de température ou d'intensité électromotrice.)

Par un raisonnement analogue, on peut établir que pour $\mathcal{E}_K = \theta_{,K} = 0, \mathcal{F}_k = 0$; c'est à dire qu'il n'y a pas de conduction de courant, en l'absence de gradient de température ou d'intensité électromotrice : ce qui va être vérifié dans le paragraphe suivant.

Symétries matérielles

- Le principe d'objectivité traduit le fait que la configuration de référence restant fixe, les lois de comportement sont les mêmes pour deux configurations déformées qui se correspondent à tout instant t donné, dans un déplacement euclidien (translation suivie d'une rotation).

Ainsi pour les fonctionnelles de réponse $\rho_t(\Omega_0)$ et $\rho^*_t(\Omega_0)$, on a :

$$\forall X \in \Omega_0, \varphi^*_t(X) = C(t) + Q(t)\varphi_t(X)$$

$$\text{où } C(t) \in E_3, Q(t) \in M_3(\mathbb{R}), QQ^T = I_3$$

$$C(0) = 0, Q(0) = I_3$$

-La notion de symétrie matérielle est quant à elle liée à la configuration de référence Ω_0

En effet, soit $\Omega_{x_0} : \Omega_0 \rightarrow \overline{\Omega_0}$ telle que
 $\dot{\varphi}_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ corresponde $\overline{\varphi}_t : \overline{\Omega_0} \rightarrow \Omega_t$ vérifiant les relations
 $\overline{\varphi}_t = \varphi_t \circ Q_{x_0}^{-1}$ et $x = \varphi_t(\bar{x}) = \varphi_t(x)$, on dit que Q_{x_0} est une **symétrie matérielle** au point x_0 pour ψ, Q et \mathcal{F} si

$$(\overline{\psi}, \overline{Q}, \overline{\mathcal{F}}) = (\psi, \overrightarrow{SQ} \text{ et } \overrightarrow{S\mathcal{F}})$$

où $S_{KL} = Q_{X_0}^{KL}$

Remarques (A.13)

Pour x_0 donné dans Ω_0 , les Q_{x_0} forment un groupe. Ainsi, un matériau sera dit homogène, si ce groupe est indépendant du point x_0 .

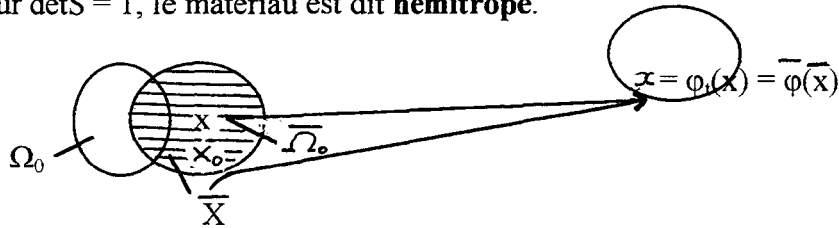
Le groupe **isotrope** est défini comme étant le groupe de toutes les transformations $\{S\}$ telles que :

$$\overline{X} = X_0 + S(X - X_0)$$

où $SS^T = S^T S = I$ et $\det S = \pm 1$

Le groupe $\{S\}$ laissant invariant X_0 , est en général un sous groupe du groupe orthogonal Q_+ ; et lorsque les deux coïncident, le matériau est dit **isotrope**.

Pour $\det S = 1$, le matériau est dit **hémitrope**.



Lois de comportement des solides électro-magnéto-élastiques

Etude du cas non linéaire

Dans le cas des solides isotropes, l'énergie libre est invariante sous le groupe Q_+ , et par conséquent, l'on a :

$$\begin{aligned} \phi_0 \psi &= f(\mathbb{C}, \overrightarrow{\mathcal{E}}, \overrightarrow{B}, \theta, x) \\ &= f(S \mathbb{C} S^T, \overrightarrow{S\mathcal{E}}, \overrightarrow{SB} \det S, \theta, x) \end{aligned}$$

Et si, par ailleurs f est une fonction scalaire de $\mathbb{C}, \overrightarrow{\mathcal{E}}$ et \overrightarrow{B} , alors f est fonction des invariants de ses arguments définis par :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \mathbb{C}, I_2 = \text{tr } \mathbb{C}^2, I_3 = \text{tr } \mathbb{C}^3, I_4 = E \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}}, I_5 = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B}, I_6 = \overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}}, I_7 = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{B}, \\ I_8 &= \overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{E}}, I_{10} = (\overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{B})^2, I_{11} = \overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot (\overrightarrow{B} \wedge \mathbb{C} \overrightarrow{\mathcal{E}}), I_{12} = \overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot (\overrightarrow{B} \wedge \mathbb{C}^2 \overrightarrow{\mathcal{E}}), \\ I_9 &= \overrightarrow{B} \cdot \mathbb{C}^2 \overrightarrow{B} \\ I_{13} &= \overrightarrow{B} \cdot (\mathbb{C} \overrightarrow{B} \wedge \mathbb{C}^2 \overrightarrow{B}), I_{14} = (\overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot \overrightarrow{B}) \overrightarrow{\mathcal{E}} \cdot (\overrightarrow{B} \wedge \mathbb{C} \overrightarrow{B}). \end{aligned} \tag{A.37}$$

Aussi peut on écrire :

$$\phi_0 \psi = f(I_1, I_2, \dots, \theta, x)$$

Ce qui permet, en comparant les relations (A.37) et (A.35), d'obtenir les lois de comportement non linéaires des solides électro-magnéto-électriques sous la forme :

$$\eta = -1/\rho_0 \partial f / \partial \theta,$$

$$\frac{1}{2} E^T = \partial f / \partial I_\alpha \partial I_\alpha / \partial C = \partial f / \partial I_1 \mathbb{1} + 2 \partial f / \partial I_2 c + 3 \partial f / \partial I_3 c^2 + \partial f / \partial I_6 \cdot$$

$$\begin{aligned} & \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}} + \partial f / \partial I_7 \vec{B} \otimes \vec{B} + 2 \partial f / \partial I_8 (\vec{\mathcal{E}} \otimes c \vec{\mathcal{E}})_s + 2 \partial f / \partial I_9 (\vec{B} \otimes c \vec{B}) + \\ & \partial f / \partial I_{11} \{ (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B}) \otimes \vec{E} \}_s + \partial f / \partial I_{12} \{ (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B}) \otimes (c \vec{\mathcal{E}}) + c (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B}) \otimes \vec{E} \}_s + \\ & \partial f / \partial I_{13} \{ [(c \vec{B}) \wedge \vec{B}] \otimes \vec{B} + [\vec{B} \wedge (c \vec{B})] \otimes (c \vec{B}) + c [\vec{B} \wedge (c \vec{B})] \otimes \vec{B} \}_s \\ & + c [\vec{B} \wedge (c \vec{B}) \otimes \vec{B}]_s + \partial f / \partial I_{14} \{ (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{B}) (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B}) \otimes \vec{B} \}_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\pi} = & -(\partial f / \partial I_\alpha) (\partial I_\alpha / \partial \vec{\mathcal{E}}) = -2(\partial f / \partial I_4) \vec{\mathcal{E}} - 2(\partial f / \partial I_6) c \vec{\mathcal{E}} - 2(\partial f / \partial I_8) c^2 \vec{\mathcal{E}} - 2(\partial f / \partial I_{10}) (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{B}) \vec{B} \\ & - (\partial f / \partial I_{11}) [\vec{B} \wedge (c \vec{\mathcal{E}}) + c (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B})] - (\partial f / \partial I_{12}) [\vec{B} \wedge (c^2 \vec{\mathcal{E}}) + c^2 (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B})] - (\partial f / \partial I_{14}) \cdot \\ & [\vec{B} \cdot \vec{\mathcal{E}} (\vec{B} \wedge (c \vec{B})) + (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{B}) + \vec{B} \wedge (c \vec{B})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M} = & -(\partial f / \partial I_\alpha) (\partial I_\alpha / \partial \vec{B}) = -2(\partial f / \partial I_5) \vec{B} - 2(\partial f / \partial I_7) c \vec{B} - 2 \partial f / \partial I_9 c^2 \vec{B} - 2 \partial f / \partial I_{10} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{B}) \vec{\mathcal{E}} \\ & - \partial f / \partial I_{11} (c \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{E}}) - \partial f / \partial I_{12} [(c^2 \vec{\mathcal{E}}) \wedge \vec{\mathcal{E}}] - (\partial f / \partial I_{13}) \{ (c \vec{B}) \wedge (c^2 \vec{B}) + c (c^2 \vec{B}) \wedge \vec{B} + c^2 [\vec{B} \wedge (c \vec{B})] \} \\ & - \partial f / \partial I_{14} [\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}} [\vec{B} \wedge (c \vec{B})] + \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{B} [(c \vec{B}) \wedge \vec{\mathcal{E}} + c (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B})] \} \end{aligned}$$

Par ailleurs, les équations de comportement des champs Q et J sont de la forme:

$$\begin{aligned} \vec{Q} = & k_1 \vec{\nabla} \theta + k_2 \vec{\mathcal{E}} + k_3 c \vec{\nabla} \theta + k_4 c \vec{\mathcal{E}} + k_5 \vec{\nabla} \theta \wedge \vec{B} + k_6 \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B} + k_7 c^2 \vec{\nabla} \theta + k_8 c \vec{\mathcal{E}} + \\ & k_9 [(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \theta) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{\nabla} \theta] + k_{10} [(\vec{B} \cdot \vec{\mathcal{E}}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{\mathcal{E}}] + k_{11} [c (\vec{\nabla} \theta \wedge \vec{B}) - (c \vec{\nabla} \theta) \wedge \vec{B}] + \\ & k_{12} [c (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B}) - (c \vec{\mathcal{E}}) \wedge \vec{B}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{J} = & \sigma_1 \vec{\mathcal{E}} + \sigma_2 \vec{\nabla} \theta + \sigma_3 c \vec{\mathcal{E}} + \sigma_4 c \vec{\nabla} \theta + \sigma_5 \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B} + \sigma_6 \vec{\nabla} \theta \wedge \vec{B} + \sigma_7 c^2 \vec{\mathcal{E}} + \sigma_8 c^2 \vec{\nabla} \theta + \\ & \sigma_9 [(\vec{B} \cdot \vec{\mathcal{E}}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{\mathcal{E}}] + \sigma_{10} [(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \theta) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{\nabla} \theta] + \sigma_{11} [c (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B}) - (c \vec{\mathcal{E}}) \wedge \vec{B}] + \\ & \sigma_{12} [c (\vec{\nabla} \theta \wedge \vec{B}) - (c \vec{\nabla} \theta) \wedge \vec{B}] \end{aligned}$$

→ où les k_1, k_2, \dots, k_{12} , et $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{12}$ sont des fonctions isotropes de $c, \vec{\mathcal{E}}, \vec{B}$, et $\vec{\nabla} \theta$.

Linéarisation

1er cas : Solides isotropes

La théorie quadratique

A partir des lois de comportement non linéaires décrites ci-dessus, la théorie quadratique consiste à ne retenir au plus que les termes du troisième degré se rapportant aux variables indépendantes.

Par ailleurs, les invariants sont exprimés en fonction du champ \mathbb{E} de telle sorte que les résultats ne dépendent que du tenseur Lagrangin E_{KL} sous la forme :

$$I_1 = \text{trE} \quad , \quad I_2 = \text{trE}^2 = E_{ij} E_{ji}, \quad I_3 = \text{trE}^3 = E_{ij} E_{jk} E_{ki},$$

$$I_4 = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{E}}, \quad I_5 = \vec{B} \cdot \vec{B}, \quad I_6 = \vec{\mathcal{E}}_E \vec{\mathcal{E}}, \quad I_7 = \vec{B}_E \vec{B},$$

Mettant f sous la forme

$$f = \alpha_0 I_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 I_1^2 + \frac{1}{3} \alpha_2 I_1^3 + \frac{1}{2} \alpha_3 I_1 I_2 + \frac{1}{2} \alpha_4 I_1 I_4 + \frac{1}{2} \alpha_5 I_1 I_5 + \frac{1}{2} \alpha_6 I_2 +$$

$$\frac{1}{3} \alpha_7 I_3 + \frac{1}{2} \alpha_8 I_4 + \frac{1}{2} \alpha_9 I_5 + \frac{1}{2} \alpha_{10} I_6 + \frac{1}{2} \alpha_{11} I_7 \tag{A.39}$$

où les α_k sont des fonctions de θ et X uniquement ; il vient, en tenant compte de la proposition (A.7),

$$E^T = (\alpha_0 + \alpha_1 \text{TrE} + \alpha_2 (\text{TrE})^2 + \frac{1}{2} \alpha_3 \text{TrE}^2 + \frac{1}{2} \alpha_4 \vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \alpha_5 \vec{B} \cdot \vec{B}) \mathbb{1} + (\alpha_3 \text{TrE} +$$

$$\alpha_6) \mathbb{E} + \alpha_7 \mathbb{E}^2 + \frac{1}{2} \alpha_{10} \vec{\mathcal{E}} \otimes \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \alpha_{11} \vec{B} \otimes \vec{B} \tag{A.40}$$

$$\vec{\pi} = -(\alpha_4 \text{TrE} - \alpha_8) \vec{\mathcal{E}} - \alpha_{10} \mathbb{E} \vec{\mathcal{E}} \tag{A.41}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = -(\alpha_5 \text{trE} + \alpha_9) \vec{B} - \alpha_{11} \mathbb{E} \vec{B} \tag{A.42}$$

Par ailleurs, on a:

$$Q = k_1 \nabla \theta + k_2 \vec{\mathcal{E}} + k_3 \mathbb{E} \nabla \theta + k_4 \mathbb{E} \vec{\mathcal{E}} + k_5 \nabla \theta \wedge \vec{B} + k_6 \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B} \tag{A.43}$$

$$\mathcal{J} = \sigma_1 \vec{\mathcal{E}} + \sigma_2 \nabla \theta + \sigma_3 \mathbb{E} \vec{\mathcal{E}} + \sigma_4 \mathbb{E} \cdot \nabla \theta + \sigma_5 \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{B} + \sigma_6 \nabla \theta \wedge \vec{B} \tag{A.44}$$

où les k_λ et σ_λ sont des fonctions de θ et X uniquement

Proposition (A.8)

Sous les considérations ci-dessous, l'inégalité d'entropie peut se mettre sous la forme:

$$k_{KL}\theta_{;K}\theta_{;L} + 2\tau_{KL}\theta_{;K}\mathcal{E}_L + \sigma_{KL}\mathcal{E}_K\mathcal{E}_L \geq 0$$

où

$$k_{KL} = \frac{1}{\theta} (k_1\delta_{KL} + k_3E_{KL}) \quad (A.45)$$

$$\sigma_{KL} = \sigma_1\delta_{KL} + \sigma_3E_{KL}$$

$$\tau_{KL} = \frac{1}{2} (\sigma_2 + k_2\theta^{-1})\delta_{KL}$$

Preuve

Tenant compte des relations (A.43) et (A.44), l'inégalité d'entropie prend la forme

$$\frac{1}{\theta} k_1 (\nabla\theta)^2 + \frac{(k_2 + \sigma_2)}{\theta} \mathcal{E} \cdot \nabla\theta + \frac{1}{\theta} k_3 E (\nabla\theta)^2 + \frac{(k_4 + \sigma_4)}{\theta} \mathcal{E} \cdot E \nabla\theta + \frac{1}{\theta} k_5 (\nabla\theta \wedge B) \cdot \nabla\theta$$

$$+ \frac{(k_6 + \sigma_6)}{\theta} (\mathcal{E} \wedge B) \cdot \nabla\theta + \sigma_1 \mathcal{E}^2 + \sigma_3 E \mathcal{E}^2 + \sigma_5 (\mathcal{E} \wedge B) \cdot \mathcal{E} \geq 0$$

Soit

$$\frac{1}{\theta} (k_1\delta_{KL} + k_3 E_{KL}) \theta_{;K}\theta_{;L} + (\sigma_1\delta_{KL} + \sigma_3 E_{KL}) \mathcal{E}_K \mathcal{E}_L + (\sigma_2 + k_2\theta^{-1}) \delta_{KL} \theta_{;K} \mathcal{E}_{;L}$$

$$+ \frac{(k_4 + \sigma_4)}{\theta} \mathcal{E} \cdot E \nabla\theta + \frac{k_5 (\nabla\theta \wedge B) \cdot \nabla\theta}{\theta} + \frac{(k_6 - \sigma_6)}{\theta} (\mathcal{E} \wedge B) \cdot \nabla\theta + \sigma_5 (\mathcal{E} \wedge B) \cdot \mathcal{E} \geq 0$$

Mais $(\mathcal{E} \wedge B) \cdot \mathcal{E} = (\nabla\theta \wedge B) \cdot \nabla\theta = 0$ car $\mathcal{E} \wedge B$ et $\nabla\theta \wedge B$ sont respectivement perpendiculaires à \mathcal{E} et $\nabla\theta$. De plus, en choisissant

$$\frac{(k_6 - \sigma_6)}{\theta} = \frac{k_4 + \sigma_4}{\theta} = 0,$$

l'inégalité précédente prend alors la forme (A.45)

Proposition (A.9)

Soit $F = \Lambda_{ij} y^i y^j$, $i, j = 1, 2, \dots, 6$

(où $y_1 = \theta, y_2 = \theta, y_3 = \theta, y_4 = \mathcal{E}_1; y_5 = \mathcal{E}_2; y_6 = \mathcal{E}_3$;

$$\Lambda = \begin{bmatrix} k_{KL} & \tau_{KL} \\ \tau_{KL} & \sigma_{KL} \end{bmatrix} \quad \text{une matrice définie par blocs et}$$

Telle que F représente une forme quadratique symétrique définie positive.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité d'entropie soit toujours vérifiée est que le déterminant de Λ ainsi que tous les mineurs pris en chaîne soient supérieurs à zéro.

Pour la démonstration de cette propriété, voir le théorème fondamental des formes quadratiques (PAPIN et KAUFMANN)

Remarques (A.14)

- Si pour des raisons de simplification, l'on se rapporte aux directions principales E_K du tenseur E_{KL} , les relations (A.45) s'écrivent alors :

$$k_{KL} = \frac{1}{\theta} (k_1 \delta_{KL} + k_3 E_K) \delta_{KL}$$

$$\sigma_{KL} = (\sigma_1 + \sigma_3 E_K) \delta_{KL}$$

$$\tau_{KL} = \frac{1}{2} (\sigma_2 + k_2 \theta^{-1}) \delta_{KL} \quad (\text{A.46})$$

où E_K est une valeur propre du tenseur E_{KL} , à K fixé.

- La proposition (A.9) qui se traduit par les relations

$$\text{implique} \quad \begin{aligned} & k_{KK} \geq 0, \quad k_{KK} \sigma_{KK} - \tau_{KK}^2 \geq 0, \quad K=1,2,3 \\ & \sigma_{KK} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Par ailleurs, on remarque que la positivité de k_{KK} et σ_{KK} reste vérifiée si l'on choisit

$$k_1 \geq 0, \quad k_3 \geq 0, \quad \sigma_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \sigma_3 \geq 0$$

D'autre part, en comparant (A.46) et (A.47), on peut interpréter cette dernière relation comme une inéquation du second degré en \mathbf{E} de la forme

$$\begin{aligned} & a\mathbf{E}^2 + b\mathbf{E} + c \geq 0 & (A.48) \\ \text{où} \quad & \left| \begin{aligned} a &= \frac{1}{\theta} k_3 \sigma_3 \\ b &= \frac{1}{\theta} (k_1 \sigma_3 + k_3 \sigma_1) \\ c &= \frac{1}{\theta} k_1 \sigma_1 - \frac{1}{4} (\sigma_2 + k_2 \theta^{-1})^2 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

aussi l'inéquation (A.48) ne peut être maintenue que si son discriminant est négatif avec a positif, c'est à dire

$$a \geq 0 \quad \text{et} \quad b^2 - 4ac \leq 0$$

- Les relations (A.43) et (A.44) révèlent des effets thermo-magnéto-électriques intéressants; en effet:

(1) Même en l'absence du gradient de température, la chaleur est tout de même produite par le champ électrique : c'est l'effet Peltier.

(2) La circulation du courant peut être produite par le gradient de température : C'est l'effet Seebeck.

Proposition (A.10)

La linéarisation des lois de comportement des solides isotropes, se déduit de la théorie quadratique en négligeant dans l'expression (A.39) les termes du troisième ordre et dans les relations (A.40) à (A.44), ceux du second ordre. Ainsi obtient-on :

$$\mathbf{f} = \alpha_0 \mathbf{I}_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \mathbf{I}_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_6 \mathbf{I}_2 + \frac{1}{2} \alpha_8 \mathbf{I}_4 + \frac{1}{2} \alpha_9 \mathbf{I}_5$$

$$\mathbf{E}^T = (\alpha_0 + \alpha_1 \text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{1} + \alpha_6 \bar{\mathbf{E}}$$

$$\vec{\pi} = -\alpha_8 \vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = -\alpha_9 \vec{B}$$

$$\vec{Q} = k_1 \vec{\nabla} \theta + k_2 \vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{j} = \sigma_1 \vec{\mathcal{E}} - \sigma_2 \vec{\nabla} \theta$$

2ème cas : Solides anisotropes

Proposition (A.11)

Dans le cas de solides anisotropes, les lois de comportement linéarisées sont de la forme

$$F = F^0 - \rho_0 \eta_0 \tilde{\theta} - \frac{\rho_0 \gamma}{2 \theta^2} \tilde{\theta}^2 + (\alpha_{kl} B_{kl} \tilde{\theta}) s_{kl} + \frac{1}{2} C_{klmn} s_{kl} s_{mn} - e_{km} \mathcal{E}_k s_{lm} - h_{km} B_k s_{lm} - (\pi_k^0 + \tilde{w}_k \tilde{\theta}) \mathcal{E}_k$$

$$- \frac{1}{2} \gamma_{kl}^E \mathcal{E}_l \mathcal{E}_k (m_k^0 + \gamma_k \tilde{\theta}) B_k - \frac{1}{2} \gamma_{kl}^B B_k B_l - \lambda_{kl} \mathcal{E}_k B_l$$

$$\eta = \eta_0 + \frac{\gamma}{\theta} \tilde{\theta} + \frac{1}{\rho_0} (B_{kl} s_{kl} + \tilde{w}_k \mathcal{E}_k + \gamma_k B_k)$$

$$E^{tkl} = \alpha_{kl} (1 - s_{rr}) - B_{kl} \tilde{\theta} + \alpha_{km} (s_{am} + \tilde{\Gamma}_{am}) + \alpha_{ml} (s_{km} + \tilde{\Gamma}_{km}) + C_{klmn} s_{mn} - e_{mkl} \mathcal{E}_m - h_{mkl} B_m$$

$$P_k = [(1 - s_{rr}) \delta_{kl} + s_{kl} + \tilde{\Gamma}_{kl}] \pi_k^0 + \tilde{w}_k \tilde{\theta} + \gamma_{kl}^E \mathcal{E}_l + e_{kkm} s_{lm} + \lambda_{kl} B_l$$

$$M_k = [(1 - s_{rr}) \delta_{kl} + s_{kl} + \tilde{\Gamma}_{kl}] m_k^0 + \gamma_k \tilde{\theta} + \gamma_{kl}^B B_l + h_{kkm} s_{lm} + \lambda_{kl} B_l$$

$$q_k = k_{kl} \tilde{\theta}_{,l} + k_{kl}^E \mathcal{E}_l$$

$$J_k = \sigma_{kl} \mathcal{E}_l + \sigma_{kl}^\theta \tilde{\theta}_{,l}$$

(δ_{kl} symbole devenant celui de Kröneckner lorsque les repères spatial et matériel coïncident) et $F^0 = F(E_{KL}, \theta, \mathcal{E}_K, B_K)$ (cf preuve)

Preuve

Soit \tilde{E}_{AB} une perturbation telle que

$$E_{AB} = E_{AB}^0 + \tilde{E}_{AB}$$

si l'on suppose $\theta = \theta^0 + \tilde{\theta}$, ($\tilde{\theta}/\theta^0 \ll 1$), $\theta^0 > 0$ et suffisamment différentiable en chacun de ses arguments $\theta, E_{KL}, \mathcal{E}_K, B_K$, il vient :

$$F = F(E_{KL}^0, \theta^0, \mathcal{E}_K, B_K) + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)_{(E_{KL}^0, \theta^0, \mathcal{E}_K, B_K)} \tilde{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \Big|_{(E_{KL}^0, \theta^0, \mathcal{E}_K, B_K)} \tilde{\theta}^2 + \dots \quad (A.49)$$

$$+ (A_{KL} \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \sum_{KLMN} \tilde{E}_{KL} \tilde{E}_{MN}) + (-\pi_K \mathcal{G}_K - \frac{1}{2} \chi_{KL}^E \mathcal{G}_K \mathcal{G}_L) + (-M_K^0 B_K - \frac{1}{2} \chi_{KL}^B B_K B_L)$$

$$+ (-E_{KLMN} \mathcal{G}_K \tilde{E}_{LM} - \tilde{w}_K \mathcal{G}_K \tilde{\theta} - \Lambda_{KL} \mathcal{G}_K B_L) + (-H_{KLM} B_K \tilde{E}_{LM} - \Gamma_K B_K \tilde{\theta})$$

Mais l'on sait que $\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\eta$ et que par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\eta.$$

($E_{KL}^0, \theta^0, \mathcal{G}_K, B_K$)

Par ailleurs, de la relation $\psi = \ell - \eta \theta$,

$$\text{on peut écrire } \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \ell}{\partial \theta} - \eta - \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta},$$

$$\text{Soit : } -\rho_0 \gamma = \rho_0 \frac{\partial \ell}{\partial \theta} - \rho_0 \eta - \rho_0 \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta},$$

$$\text{d'où } \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \gamma = -\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}.$$

(γ : capacité calorifique)

$$\text{finalement, } \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\frac{\gamma}{\theta} \text{ et par conséquent } \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -\frac{\rho_0 \gamma}{(\theta^0)^2}$$

($E_{KL}^0, \theta^0, \mathcal{G}_K, B_K$)

aussi, la relation (A.49) peut se mettre sous la forme :

$$f = f^0 - \rho_0 \eta_0 \theta - \frac{\rho_0 \gamma}{2 \theta^0} \tilde{\theta}^2 + \sum_{KL} \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} \sum_{KLMN} \tilde{E}_{KL} \tilde{E}_{MN} - E_{KLM} \mathcal{G}_K \tilde{E}_{LM}$$

$$- H_{KLM} B_K \tilde{E}_{LM} - \Psi_K^E \mathcal{G}_K - \frac{1}{2} \chi_{KL}^E \mathcal{G}_K \mathcal{G}_L - \Psi_K^B B_K - \frac{1}{2} \chi_{KL}^B B_K B_L - \Lambda_{KL} B_L \mathcal{G}_K,$$

(où $\Psi_K^E = \pi_K^0 + \tilde{w}_K \theta$, $\Psi_K^B = M_K^0 + \Gamma_K \theta$, et où f^0 , \sum_{KLMN} , E_{KLM} , H_{KLM} , Ψ_{KL}^E , Ψ_{KL}^B et Λ_{KL} sont des fonctions de θ et X uniquement).

Par ailleurs, comparant cette dernière expression de f avec la proposition (A.7), il vient:

$$\eta = \eta_0 - \frac{\gamma}{\vartheta} \theta + \frac{1}{\varrho} (B_{KL} \tilde{E}_{KL} + \tilde{w}_K \mathcal{G}_K + \Gamma_K B_K)$$

$$E^{TKL} = A_{KL} - B_{KL} \theta + \sum_{KLMN} \tilde{E}_{MN} - E_{MKL} \mathcal{G}_M - H_{MKL} B_M$$

$$\pi_K = \pi_K^\circ + \tilde{w}_K \theta + \Psi_{KL}^E \mathcal{G}_L + E_{KLM} \tilde{E}_{LM} + \Lambda_{KL} B_L$$

$$M_K = M_K^\circ + \Gamma_K \theta + \Psi_{KL}^B B_L + H_{KLM} \tilde{E}_{LM} + \Lambda_{KL} \mathcal{G}_L$$

Afin de compléter ces équations, on développe Q_K et J_K comme fonctions polynomiales linéaires des variables indépendantes sous la forme :

$$Q_K = k_{KL} \theta_{,L} + k_{KLM} E_{LM} + k_{KL}^E \mathcal{G}_L + k_{KL}^B B_L$$

$$J_K = \sigma_{KL} \mathcal{G}_L + \sigma_{KLM} E_{LM} + \sigma_{KL}^\theta \theta_{,L} + \sigma_{KL}^B B_L ;$$

Cependant, en vertu des conséquences de l'inégalité de Clausius - Duhem (Cf proposition (A.7)), on peut écrire :

$$k_{KLM} E_{LM} + k_{KL}^B B_L = 0 \quad \forall E_{LM} \text{ et } \forall B_L$$

$$\sigma_{KLM} E_{LM} + \sigma_{KL}^B B_L = 0$$

d'où :

$$k_{KLM} = k_{KL}^B = \sigma_{KLM} = \sigma_{KL}^B = 0 ;$$

et l'inégalité de Clausius - Duhem s'écrit alors :

$$\frac{1}{\theta} k_{KL} \theta_{,K} \theta_{,L} + \sigma_{KL} \mathcal{G}_K \mathcal{G}_L + (\sigma_{KL}^\theta + \frac{1}{\theta} k_{KL}^E) \theta_{,K} \mathcal{G}_L \geq 0$$

$$\text{avec } \begin{cases} Q_K = k_{KL} \theta_{,L} + k_{KL}^B \mathcal{G}_L \\ J_K = \sigma_{KL} \mathcal{G}_L + \sigma_{KL}^\theta \theta_{,L} \end{cases}$$

On retrouve ainsi les effets Peltier et Seebeck même pour des matériaux anisotropes.

Si l'on tient par ailleurs compte des relations (A.31) ainsi que des définitions suivantes :

$$\{ \pi_K^\circ, M_K^\circ, \tilde{w}_K, \Gamma_K \} \delta_{Kk} = \{ \pi_k^\circ, M_k^\circ, \tilde{w}_k, \gamma_k \}$$

$$\{ A_{KL}, B_{KL}, \Psi_{KL}^E, \Lambda_{KL} \} \delta_{Kk} = \{ \alpha_{k\ell}, \beta_{k\ell}, \Psi_{k\ell}^E, \lambda_{k\ell} \}$$

$$\{ E_{KLM}, H_{KLM} \} \delta_{Kk} \delta_{Mm} = \{ e_{km}, h_{km} \}$$

$$\sum_{KLMN} \delta_{Kk} \delta_{L\ell} \delta_{Mm} \delta_{Nn} = C_{klmn} ,$$

Il vient :

$$\alpha_{k\ell} - \beta_{k\ell}\tilde{\theta} = (A_{KL} - B_{KL}\tilde{\theta}) \delta_{Kk} \delta_{L\ell}$$

$$(\alpha_{k\ell} - \beta_{k\ell}\tilde{\theta}) \cdot s_{k\ell} = (A_{KL} - B_{KL}\tilde{\theta}) \delta_{Kk} \delta_{L\ell} s_{k\ell} = (A_{KL} - B_{KL}\tilde{\theta}) \tilde{E}_{KL}$$

$$\epsilon_{klm} \cdot \mathcal{E}_m s_{\ell m} = E_{KLM} \delta_{Kk} \delta_{L\ell} \delta_{Mm} \mathcal{E}_k s_{\ell m} = E_{KLM} \mathcal{E}_K \tilde{E}_{LM}$$

$$\frac{1}{2} C_{klmn} s_{k\ell} s_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{KLMN} \delta_{Kk} \delta_{L\ell} \delta_{Mm} \delta_{Nn} s_{k\ell} s_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{KLMN} \tilde{E}_{KL} \tilde{E}_{MN};$$

de même :

$$h_{klm} B_k s_{\ell m} = H_{KLM} B_K \tilde{E}_{LM},$$

$$(\pi_k^\circ + \tilde{w}_k \tilde{\theta}) \mathcal{E}_k = (\pi_K^\circ + \tilde{w}_K \tilde{\theta}) \mathcal{E}_K$$

$$\frac{1}{2} \chi_{k\ell}^E \mathcal{E}_k \mathcal{E}_\ell = \frac{1}{2} \chi_{KL}^E \mathcal{E}_K \mathcal{E}_L,$$

$$(m_k^\circ + \gamma_k \tilde{\theta}) B_k = (M_K^\circ + \Gamma_K \tilde{\theta}) B_K,$$

$$\frac{1}{2} \chi_{kl}^B B_k B_\ell = \frac{1}{2} \chi_{KL}^B B_K B_L,$$

$$\lambda_{kl} \mathcal{E}_k B_\ell = \Lambda_{KL} \mathcal{E}_K B_L$$

et la proposition (A.11) s'en déduit naturellement.

Signification physique des modules matériels

| | |
|-----------------|--------------------------------|
| η_0 | entropie à l'état naturel |
| γ | capacité calorifique |
| A_{KL} | contrainte à l'état naturel |
| \sum_{KLMN} | module élastique |
| H_{MKL} | module piézo-magnétique |
| \tilde{w}_K | polarisation pyroélectrique |
| χ_{KL}^E | susceptibilité diélectrique |
| M_{KE}° | magnétisation à l'état naturel |
| χ_{KL}^B | susceptibilité magnétique |
| B_{KL} | module de contrainte thermique |
| E_{MKL}° | module piézoélectrique |
| π_K° | polarisation à l'état naturel |
| Λ_{KL} | polarisation magnétique |
| Γ_K | module pyromagnétique |

Remarques (A.15)

- Si, à partir de la proposition (A.11), on suppose le matériau étudié non magnétique et non-conducteur, on obtient les lois de comportement de la piézoélectricité linéaire, sous la forme :

$$f = f^0 - \frac{1}{2} C_{klmn} s_{kl} s_{mn} - \zeta_{mkl} E_m s_{kl} - \frac{1}{2} \chi_{kl}^E E_{kl} E_l$$

$$E_{kl} = C_{klmn} s_{mn} - e_{mkl} E_m$$

$$P_k = \chi_{kl}^E E_l + e_{kln} s_{nl}$$

$$\text{où } s_{kl} = \frac{1}{2} (U_{k,l} + U_{l,k})$$

- Après avoir introduit le phénomène de la piézoélectricité, nous allons, dans les chapitres qui suivent, étudier le comportement asymptotique des plaques minces piézoélectriques, comme généralisation des travaux de P. Destuynder sur les plaques minces en élasticité linéaire. (Cf P. Destuynder (1)).

CHAPITRE B

Présentation du problème tridimensionnel de la piézoélectricité.

I Introduction

Ce chapitre présente une brève alternative à l'introduction des lois fondamentales de la piézoélectricité, ainsi que les règles générales de condensation des tenseurs liés aux matériaux piézoélectriques.

II Equations fondamentales

Dans un solide piézoélectrique, lorsqu'on utilise S_{ij} (Composante du tenseur de déformation), E_k (Composante du champs électrique) et T (la température). Comme des variables indépendantes, la différentielle totale de l'énergie interne U s'exprime sous la forme :

$$dU = S_{ij}d\sigma_{ij} + E_k dD_k + Td\eta \quad (\text{B.1})$$

où

σ_{ij} est une composante du tenseur de contraintes, D_k celle de l'induction électrique et η l'entropie, avec $i, j, k = 1, 2, 3$

L'expression de l'énergie interne en une Série de Taylor où sont négligés les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, se présente sous la forme :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{D, \eta} d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial U}{\partial D_j} \right)_{\sigma, \eta} dD_j + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{D, \sigma} d\eta \quad (\text{B.2})$$

d'où :

$$S_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{D, T}; E_k = \left(\frac{\partial U}{\partial D_k} \right)_{\sigma, T}; \eta = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{D, \sigma} \quad (\text{B.3})$$

B.3

Les différentielles totales des variables dépendantes σ , \vec{D} et η s'expriment comme fonctions des variables indépendantes sous la forme:

$$d\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_{kl}} \right)_{E,T} ds_{kl} + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_k} \right)_{s,T} dE_k + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_{s,E} dT \quad (\text{B.4})$$

$$dD_k = \left(\frac{\partial D_k}{\partial s_{ij}} \right)_{E,T} ds_{ij} + \left(\frac{\partial D_k}{\partial E_j} \right)_{s,T} dE_j + \left(\frac{\partial D_k}{\partial T} \right)_{s,E} dT \quad (\text{B.5})$$

$$d\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_{ij}} \right)_{E,T} ds_{ij} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial E_j} \right)_{s,T} dE_j + \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_{s,E} dT \quad (\text{B.6})$$

En négligeant les variations de température et en supposant un comportement linéaire du matériau, il vient, pour une transformation adiabatique.

$$\sigma_{ij} = C_{ij\ kl} S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (\text{B.7})$$

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j + e_{ikl} S_{kl} \quad (\text{B.8})$$

$$\left. \begin{aligned} C_{ij\ kl} &= \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial s_{kl}} \right)_{E,T} & e_{kij} &= - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_k} \right)_{s,E} = \left(\frac{\partial D_i}{\partial s_{kj}} \right)_{E,T} \\ \varepsilon_{ij} &= \left(\frac{\partial D_i}{\partial E_j} \right)_{s,T} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.9})$$

B.4

$C_{ij\ kl}$ est une composante du tenseur d'ordre quatre des constantes élastiques à champ électrique constant.

e_{kij} est une composante du tenseur d'ordre trois des constantes piézoélectriques à champ électrique constant.

ε_{ij} est une composante du tenseur d'ordre deux des constantes diélectriques à déformation constante.

Les équations (B-7) et (B-8) sont les équations d'état de la piézoélectricité.

On supposera par la suite, que les coefficients $C_{ij\ kl}$, e_{ij} , ε_{ij} vérifient les propriétés classiques de symétrie et de positivité, soit :

$$C_{ij\ kl} = C_{ji\ kl} = C_{klij}, \quad e_{kij} = e_{kji} \quad (\text{B.10})$$

$$\forall e_{ij}, e_{ij} = e_{ji}, \quad \exists \alpha_0 > 0 : C_{ijkl} e_{kl} e_{ij} \geq \alpha_0 e_{ij} e_{ji} \quad (\text{B.11})$$

$$\forall \xi_i, \quad \exists \alpha_1 > 0 : \varepsilon_{ij} \xi_j \xi_i \geq \alpha_1 \xi_i \xi_i \quad (\text{B.12})$$

où α_0 et α_1 sont des constantes.

III Règles de condensation des tenseurs

Selon le principe de notation de VOIGT relatif à la contraction des indices et symbolisé par le tableau suivant :

| | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|
| (ij) | (11) | (22) | (33) | (23) | (13) | (12) |
| α | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

les équations d'état de la piézoélectricité s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{\alpha} &= C_{\alpha\beta} s_{\beta} - e_{k\alpha} E_k \\
 D_i &= \epsilon_{ij} E_j + e_{i\beta} s_{\beta} \\
 \alpha, \beta &= 1, 2, \dots, 6 \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \right\} \quad (B.13)$$

Il est aussi à noter que l'on s'intéresse plus particulièrement aux matériaux piézoélectriques possédant un axe de symétrie d'ordre six; ce qui est le cas du sulfure de calcium (Cds) et de l'oxyde de Zinc (ZnO).

Par suite, du fait de cette symétrie, seuls quelques coefficients, à savoir :

$$C_{\alpha\beta} \text{ (5 coefficients)} \quad \left| \quad \begin{aligned}
 C_{11} = C_{22}, C_{13} = C_{23} = C_{31} = C_{32} \\
 C_{33}, C_{44} = C_{55}, C_{66} = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}).
 \end{aligned} \right.$$

$$e_{k\alpha} \text{ (3 Coefficients)} \quad e_{15} = e_{24}, e_{31} = e_{32}, e_{33}.$$

$$\epsilon_{ij} \text{ (2 Coefficients)} \quad \epsilon_{11} = \epsilon_{22}, \epsilon_{33}.$$

subsistent.

IV Présentation d'un problème piézoélectrique

IV-1 Equations d'équilibre

Dans l'hypothèse des petits déplacements, les équations d'état d'un milieu piézoélectrique sont complétées par les relations suivantes :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$E_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (\text{B.15})$$

où U_i est une composante du champ de déplacement et φ le potentiel électrique.

Par ailleurs, sont vérifiées, à l'intérieur du domaine piézoélectrique considéré, les deux équations suivantes:

Equation d'équilibre mécanique.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{B.16})$$

Cette équation exprime l'absence de forces volumiques qui, dans le cas des matériaux diélectriques, ne sont pas linéaires.

Equation d'équilibre électrique.

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{B.17})$$

Cette équation traduit l'absence de densité de charge électrique liée aux matériaux diélectriques.

IV-2 Conditions aux limites

On va distinguer les conditions aux limites mécaniques des conditions électriques.

Conditions aux limites mécaniques.

Si l'on désigne par Ω le domaine étudié, et par $\partial\Omega$ la frontière de celui-ci, on a :

- Sur une partie S_U de $\partial\Omega$,

$$U_i = U_i^* \quad (\text{B.18})$$

où U^* est un champ de déplacement imposé.

- Sur l'autre partie S_σ de $\partial\Omega$,

$$\sigma_{ij}n_j = T_i \quad (\text{B.19})$$

où \vec{T} est une force surfacique de traction et \vec{n} la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

Les conditions (B.18) sont dites conditions de type DIRICHLET et les conditions (B.19), celles de type NEUMANN.

Conditions aux limites électriques

- Sur une partie S_Q de $\partial\Omega$ dénuée d'électrode, il n'y a pas de charge électrique et l'on a :

$$D_i n_i = 0 \quad (\text{B.20})$$

Cette condition traduit le fait que le champ électrique est nul à l'extérieur du domaine Ω , ce qui revient à considérer la permittivité diélectrique du milieu extérieur comme négligeable devant celle du domaine.

B.8

- Sur une autre partie S_v de $\partial\Omega$, on considère qu'il y a des électrodes de surface portées à un potentiel φ^* .

- Remarque (A.1)

On peut observer que le couplage des relations (B.13), (B.16) et (B.17) conduit aux équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} \cdot s_{kl} - e_{kij} \cdot E_k) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{jkl} \cdot s_{kl} + \varepsilon_{ji} \cdot E_i) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

C.1

CHAPITRE C

PRESENTATION DU PROBLEME DES PLAQUES

PIEZOELECTRIQUES

I Introduction

On étudie un objet tridimensionnel piézoélectrique occupant dans l'espace le volume cylindrique Ω^ε (fermeture de ω^ε), où $\omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, avec ω , ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière γ et ε un réel strictement positif.

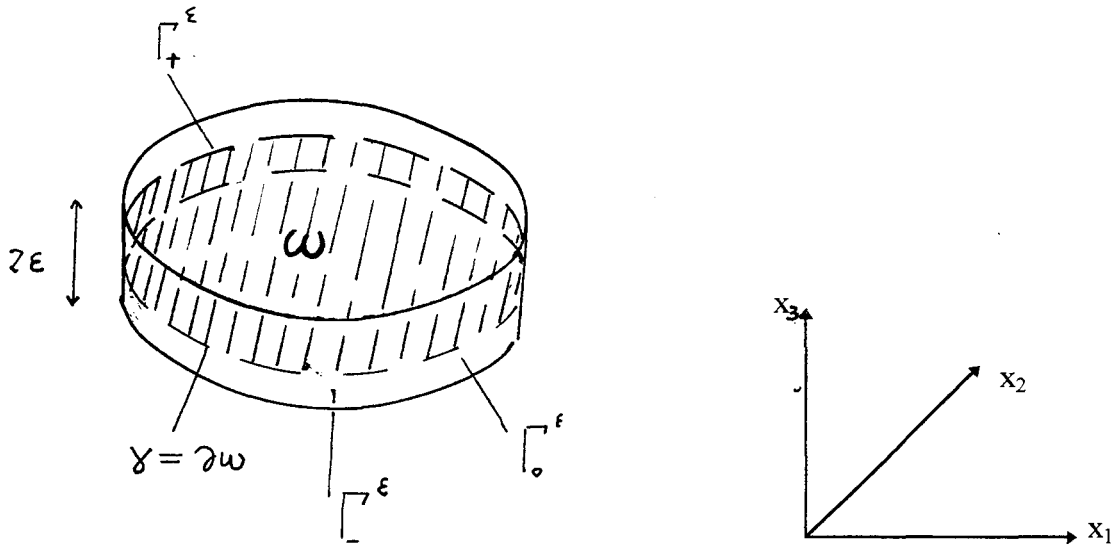


figure C.

Les coordonnées d'un point de ω sont désignées par x_1 et x_2 , alors que la coordonnée variant dans l'épaisseur de la plaque entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ est désignée par x_3^ε .
 On représentera par $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon$ la frontière de Ω^ε où :

$\Gamma_0^\varepsilon = \partial\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ est la frontière latérale,

$\Gamma_+^\varepsilon = \omega \times \{ \varepsilon \}$ et $\Gamma_-^\varepsilon = \omega \times \{ -\varepsilon \}$ respectivement les surfaces supérieure et inférieure.

C.3

D'autre part, on supposera ε relativement petit et par ailleurs :

- Des déplacements élastiques égaux à zéro sur la frontière latérale Γ_0^ε

$$U_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \quad (C.1)$$

- L'existence de forces de pression agissant sur les surfaces Γ_+^ε et Γ_-^ε :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} n_j^+ &= \bar{T}_i^+ \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon \\ \sigma_{ij} n_j^- &= \bar{T}_i^- \text{ sur } \Gamma_-^\varepsilon \end{aligned} \quad (C.2)$$

- Une accumulation de charges électriques sur Γ^ε :

$$[\varphi] = 0 \text{ sur } \Gamma^\varepsilon, \quad (C.3)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \rightarrow \\ n \cdot [D] &= 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon, \end{aligned} \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \rightarrow \\ n^\pm \cdot [D] &= W^\pm \text{ sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \end{aligned} \quad (C.5)$$

Les relations (C.1) sont dites Conditions d'encastrement ; et il est à noter que les faces Γ_+^ε et Γ_-^ε sont couvertes de fines électrodes d'épaisseur négligeable n'ayant aucune contribution mécanique, mais pouvant permettre au moment opportun d'imposer un certain potentiel.

Le matériau étudié étant supposé posséder un axe de symétrie d'ordre six parallèle à l'axe Ox_3 perpendiculaire au plan de la plaque, les lois de comportement dans ce plan s'écrivent alors :

$$\left| \begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= \sum_{\ell=1}^3 C_{\beta\ell\ell} u_{\ell\ell} + e_{31} \varphi_{,3} ; \quad \sigma_{33} = \sum_{\ell=1}^3 C_{3\ell\ell} u_{\ell\ell} + e_{33} \varphi_{,3} \\ \sigma_{\alpha 3} &= C_{55} (u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}) + e_{15} \varphi_{,3} ; \quad \sigma_{12} = C_{66} (u_{1,2} + u_{2,1}) \\ D_\alpha &= e_{15} (u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}) - \varepsilon_{11} \varphi_{,\alpha} ; \quad D_3 = e_{31} (u_{1,1} + u_{2,2}) + e_{33} u_{3,3} - \varepsilon_{33} \varphi_{,3} \end{aligned} \right. \quad (C.6)$$

II Formulation variationnelle

L'inversion des relations (C.6) s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= a_{1111} \sigma_{11} + a_{1122} \sigma_{22} + a_{1133} \sigma_{33} + b_{113} D_3 \\
 S_{22} &= a_{1122} \sigma_{11} + a_{2222} \sigma_{22} + a_{2233} \sigma_{33} + b_{223} D_3 \\
 S_{12} &= \frac{1}{2C_{66}} \sigma_{12} \\
 S_{23} &= \frac{\varepsilon_{11}}{2C_{44}\widetilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{23} + \frac{e_{15}}{2C_{44}\widetilde{\varepsilon}_{11}} D_2 \\
 S_{13} &= \frac{\varepsilon_{11}}{2C_{44}\widetilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{13} + \frac{e_{15}}{2C_{44}\widetilde{\varepsilon}_{11}} D_1 \\
 S_{33} &= a_{3311} \sigma_{11} + a_{3322} \sigma_{22} + a_{3333} \sigma_{33} + b_{333} D_3
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_{,1} &= \frac{-1}{\widetilde{\varepsilon}_{11}} D_1 + \frac{e_{15}}{C_{44}\widetilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{13} \\
 \phi_{,2} &= \frac{-1}{\widetilde{\varepsilon}_{11}} D_2 + \frac{e_{15}}{C_{44}\widetilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{23} \\
 \phi_{,3} &= \widetilde{a}_{311} \sigma_{11} + \widetilde{a}_{322} \sigma_{22} + \widetilde{a}_{333} \sigma_{33} + \widetilde{b}_{33} D_3
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

où $\widetilde{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} (1 + K^2)$ avec $K^2 = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11} C_{44}}$

K est un coefficient de couplage électromécanique.

Par ailleurs, de façon à décrire la formulation variationnelle du problème des plaques, on a besoin d'introduire les espaces fonctionnels suivants :

$$V^{\varepsilon} = \{ \vec{V} ; \vec{V} = \{ V_i \}, i=1, 2, 3, V_i \in H^1(\Omega^{\varepsilon}), \vec{V} = \vec{0} / \Gamma_0^{\varepsilon} \}$$

$$\Sigma^{\varepsilon} = \{ \tau ; \tau = \{ \tau_{ij} = \tau_{ji} \}, i, j=1, 2, 3 \tau_{ij} \in (L^2(\Omega^{\varepsilon}))^9 \}$$

L'espace V^ε est muni de la norme

$$\|\vec{v}\| = \left(\sum_{i=1}^3 \|\mathbf{v}_\lambda\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

et l'espace Σ^ε , de la norme

$$\|\tau\| = \left(\sum_{i,j=1,2,3} \|\tau_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Tenant compte de Duvaut and Lions (1), les espaces naturellement associés aux champs \vec{D} et ϕ sont respectivement :

$$\Delta^\varepsilon = \{ \vec{\delta} ; \vec{\delta} \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3, \operatorname{div} \vec{\delta} \in L^2(\Omega^\varepsilon) \}$$

$$\text{et } \Phi^\varepsilon = \{ \phi \in H^1(\Omega^\varepsilon) \}$$

La formule de Green appliquée aux relations (C.7) et (C.8) conduit au problème des plaques formulé comme suit :

Trouver $(\sigma, \vec{D}, \vec{u}, \phi)$ dans $\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \times V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon$ tel que :

$$\mathbf{A}^\varepsilon(\sigma, \vec{D}; \tau, \delta) + \mathbf{B}^\varepsilon(\tau, \delta; \vec{u}, \phi) = 0, \forall (\tau, \delta) \in \Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{B}^\varepsilon(\sigma, \vec{D}; \vec{V}, \phi) = \mathbf{F}^\varepsilon(\vec{V}, \phi), \forall (\vec{V}, \phi) \in V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon$$

$$\text{où } \mathbf{A}^\varepsilon(\sigma, \vec{D}; \tau, \delta) = \int_{\Omega^\varepsilon} \{ (a_{1111} + a_{1122}) \sigma_{11} \tau_{11} + (a_{1122} + a_{2222}) \sigma_{22} \tau_{22} +$$

$$b_{413} D_3 \tau_{11} + b_{223} D_3 \tau_{22} + \frac{1}{2C_{66}} \sigma_{12} \tau_{12} + \frac{\varepsilon_{11}}{2C_{44} \widetilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{23} \tau_{23} + \frac{e_{15}}{2C_{44} \widetilde{\varepsilon}_{11}} D_2 \tau_{23}$$

$$+ \frac{\varepsilon_{11}}{2C_{44} \widetilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{13} \tau_{23} + \frac{e_{15}}{2C_{44} \widetilde{\varepsilon}_{11}} D_1 \tau_{13} + a_{3311} \sigma_{11} \tau_{33} + a_{3322} \sigma_{22} \tau_{33}$$

$$+ a_{3333} \sigma_{33} \tau_{33} + b_{333} D_3 \tau_{33} \} + \int_{\Omega^\varepsilon} \left\{ \left(\frac{-1}{\widetilde{\varepsilon}_{11}} D_1 \delta_1 + \frac{e_{15}}{2C_{44} \widetilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{13} \delta_1 \right) + \right.$$

$$\left. \left(\frac{-1}{\widetilde{\varepsilon}_{11}} D_2 \delta_2 + \frac{e_{15}}{C_{44} \widetilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{23} \delta_2 \right) + (\widetilde{a}_{311} \sigma_{11} \delta_3 + \widetilde{a}_{322} \sigma_{22} \delta_3 + \widetilde{a}_{333} \sigma_{33} \delta_3 \right.$$

$$\left. + \widetilde{b}_{33} D_3 \delta_3 \right\}, \text{ et}$$

$$B^\varepsilon(\tau, \delta, \vec{u}, \phi) = - \int_{\Omega^\varepsilon} (\tau_{ji} u_{j,i} + \phi_{,k} \delta_k),$$

$$F^\varepsilon(\vec{V}, \varphi) = - \int_{\Gamma_\pm^\varepsilon} (\mathbf{T}_\pm^\varepsilon \cdot \vec{V} + \vec{W}_\pm^\varepsilon \varphi) ds$$

REMARQUE (C-O) : Pour des raisons de commodité d'écriture, nos vecteurs ne porteront plus de flèche.

III Existence et unicité de la solution

Ce paragraphe s'inspire des travaux de F. BREZZI (cf. BREZZI (1)) sur l'existence et l'unicité de la solution d'un certain type de problème variationnel.

Il est question ici, de rechercher des conditions suffisantes et nécessaires pour que le problème des plaques énoncé dans le paragraphe précédent, admette une solution unique ; ce qui en d'autres termes veut dire que si A^ε et B^ε sont respectivement les opérateurs associés à $A^\varepsilon(\sigma, D; \tau, \delta) + B^\varepsilon(\tau, \delta; v, \varphi)$, nous recherchons des conditions nécessaires et suffisantes telles que l'opérateur défini par :

$$\Gamma(\tau, \delta; v, \varphi) = (A^\varepsilon(\tau, \delta) + B^{\varepsilon'}(v, \varphi), B^\varepsilon(\tau, \delta)),$$

soit un isomorphisme; (avec $B^{\varepsilon'}$ tel que):

$$\langle B'(v, \varphi), (\tau, \delta) \rangle = \langle B(\tau, \delta), v, \varphi \rangle = B^\varepsilon(\tau, \delta; v, \varphi),$$

$$\forall (\tau, \delta; v, \varphi) \in \Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \times V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon$$

Pour cela introduisons l'espace

$$E = \text{Ker}(B) = \{ (\tau, \delta) / (\tau, \delta) \in \Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon, B^\varepsilon(\tau, \delta; u, \varphi) = 0, \forall (u, \varphi) \in V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon \}$$

E est un fermé du dual $(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)'$ de $(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)$

Soit E' l'espace dual de E , E' peut être identifié à un sous espace fermé de $(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)'$ contenant les éléments g de $(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)'$ tels que

$$\langle g, (\tau, \delta) \rangle = 0$$

$$\langle (\tau, \delta); (\alpha, \beta) \rangle = 0, \forall (\alpha, \beta) \in E$$

Désignons à présent par $\mathcal{M}: (\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)' \longrightarrow E'$, la projection orthogonale de $(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)'$ sur E' et par E^0 le sous espace fermé de $(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)'$ dont les éléments g sont tous ceux de $(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)'$ vérifiant

$$\mathcal{M}g = 0$$

On peut alors affirmer le résultat suivant :

Théorème (C-1)

L'opérateur Γ défini ci dessus est un isomorphisme de $(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon) \times (V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon)$ vers

$(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)' \times (V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon)'$ si et seulement si

i) \mathcal{A} est un isomorphisme de E vers E'

ii) $\exists k > 0$ tel que $\|B'(V, \varphi)\| > k \|(V, \varphi)\|, \forall (V, \varphi) \in V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon$

Preuve

Supposons que Γ soit un isomorphisme et définissons pour tout f de $(V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon)'$, S_f comme le premier élément du couple $\Gamma^{-1}(0, f)$ tel que:

$(\alpha, \beta) = S_f \Leftrightarrow \exists (u, \psi) \in V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon, \Gamma(\alpha, \beta, u, \psi) = (0, g)$; il vient compte tenu de la définition de Γ ,

$$BS = I, \text{ et } S \in \mathcal{L}((V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon)', (V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon))$$

Mais par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} \|B'(v, \varphi)\| &= \sup \frac{\langle B'(v, \varphi), (\tau, \delta) \rangle}{\|(\tau, \delta)\|} \\ &(\tau, \delta) \in (\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon) - \{(0, 0)\} \\ &= \sup \frac{\langle B(\tau, \delta), (v, \varphi) \rangle}{\|(\tau, \delta)\|} \geq \sup_{V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon} \frac{B^\varepsilon(SJ_{V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon}^{-1}(v, \varphi); (v, \varphi))}{\|SJ_{V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon}^{-1}(v, \varphi)\|} \\ &(\tau, \delta) \in (\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon) - \{(0, 0)\} \\ &= \frac{\|(v, \varphi)\|^2}{\|SJ_{V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon}^{-1}(v, \varphi)\|} \end{aligned}$$

$$\text{et } \|SJ_{V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon}^{-1}(v, \varphi)\| \leq S \|(v, \varphi)\| = \|S\| \|(v, \varphi)\|$$

$$\text{d'où } \|B'(v, \varphi)\| \geq \frac{\|(v, \varphi)\|}{\|S\|}$$

et par conséquent la relation ii) que l'on obtient, en posant $k = \frac{1}{\|S\|}$

C.8

avec $J_{V^c \times \Phi^c} \in \mathcal{L}(V^c \times \Phi^c, (V^c \times \Phi^c)')$ l'opérateur de représentation de Riesz de $(V^c \times \Phi^c)'$ vers $(V^c \times \Phi^c)$, défini par:

$$(J_{V^c \times \Phi^c} v', (u, \varphi)) = \langle v', (u, \varphi) \rangle, \forall v' \in (V^c \times \Phi^c)'; (u, \varphi) \in V^c \times \Phi^c$$

- Définissons à présent, pour tout $g \in E'$, Pg comme étant le premier élément du couple $\Gamma^{-1}(g, 0)$ tel que :

$$(\alpha, \beta) = Pg \Leftrightarrow \exists (u, \psi) \in V^c \times \Phi^c, \Gamma(\alpha, \beta, u, \psi) = (g, 0)$$

La relation ii) entraînant

$$\mathcal{M}B'(v, \varphi) = 0, \forall (v, \varphi) \in V^c \times \Phi^c,$$

il vient, compte tenu des deux relations précédentes :

$$\mathcal{M}APg = Mg = g$$

soit $\mathcal{M}A = I$

d'où la surjectivité de $\mathcal{M}A$

Considérons maintenant un élément e de E tel que $\mathcal{M}Ae = 0$,

alors $Ae \in E^0$ et il existe, en vertu de la relation ii), un élément

(u, ψ) dans $V^c \times \Phi^c$ tel que :

$$B'(u, \psi) = -Ae$$

Par suite, $\Gamma(u, \psi, \tau, \delta) = ((0, 0); (0, 0))$ avec $e = (\tau, \delta)$

et il s'en déduit que $\mathcal{M}A$ est aussi injective et, évidemment continue d'où la relation i)

- Supposons à présent que les relations i) et ii) soient vérifiées, la relation ii) permet d'affirmer que les problèmes

$$\Gamma(\tau, \delta, V, \varphi) = (g, f)$$

$$\text{et } \Gamma(\alpha, \beta, V, \varphi) = (g - A(\overline{\tau}, \overline{\delta}), 0)$$

sont équivalents ; (avec $(\tau, \delta) = (\alpha, \beta) + (\overline{\tau}, \overline{\delta})$ et $B(\overline{\tau}, \overline{\delta}) = f$)

Par conséquent ; Γ est un isomorphisme de $(\Sigma^c \times \Delta^c) \times (V^c \times \Phi^c)$ vers $(\Sigma^c \times \Delta^c)' \times (V^c \times \Phi^c)'$ si Γ_0 , restriction de Γ à $E \times V^c \times \Phi^c$ est un isomorphisme de $E \times V^c \times \Phi^c$ vers $(\Sigma^c \times \Delta^c)' \times \{(0, 0)\}$

Soit $g \in \Sigma^c \times \Delta^c$ et $(\alpha, \beta) \in E$ unique solution de l'équation $\mathcal{M}A(\alpha, \beta) = \mathcal{M}g$, dont l'existence découle de la proposition i); on a, en vertu de la relation

$$\mathcal{M}(g - A(\alpha, \beta)) = 0,$$

$$g - A(\alpha, \beta) \in E^0$$

Tenant compte de la relation ii), on peut affirmer l'existence d'un élément unique

(u, ψ) tel que $B'(u, \psi) = -A(\alpha, \beta) + g$

Ainsi, pour tout $g \in (\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon)'$, il existe un élément unique (α, β, u, ψ) tel que

$$\Gamma^\circ(\alpha, \beta, u, \psi) = (g, 0); \Gamma^\circ \text{ est donc un isomorphisme.}$$

Remarque C-1

On peut vérifier que Γ est l'opérateur associé à la forme

$$H((\tau, \delta; v, \varphi); (t, \eta; u, \psi))$$

$$= A^\varepsilon(\tau, \delta; t, \eta) + B^\varepsilon(\tau, \delta; u, \psi) + B^\varepsilon(t, \eta; v, \varphi)$$

Ainsi (cf BREZZI (1)), Γ est un isomorphisme si et seulement si il existe τ et $\bar{\tau}$ tels que:

$$\sup \frac{H(\tau, \delta; v, \varphi); (t, \eta; u, \psi)}{\|(\tau, \delta; v, \varphi)\|} \geq \tau \| (t, \eta; u, \psi) \|; \forall (t, \eta; u, \psi) \in \Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \times V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon$$

$$(\tau, \delta; v, \varphi) \in \Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \times V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon - \{ (0, 0, 0, 0) \}$$

$$\sup \frac{H(\tau, \delta; v, \varphi); (t, \eta; u, \psi)}{\|(\tau, \delta; v, \varphi)\|} \geq \bar{\tau} \| (t, \delta; v, \varphi) \|; \forall (t, \delta; v, \varphi) \in \Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \times V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon$$

$$(t, \eta; u, \psi) \in \Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \times V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon - \{ (0, 0, 0, 0) \}$$

Théorème C-2

Le problème des plaques piézoélectriques admet une solution unique.

Preuve

Il suffit de montrer que l'opérateur Γ introduit au début de ce dernier paragraphe et défini par

$\Gamma(\tau, \delta; V, \varphi) = A^\varepsilon(\tau, \delta) + B^{\varepsilon'}(V, \varphi), B^\varepsilon(\tau, \delta)$ sur l'espace $\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \times V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon$ est un isomorphisme.

Pour cela, il suffit de vérifier les conditions i) et ii) du théorème C-1

En effet, la condition i) est satisfaite, puisque l'on peut écrire

$$\| B'(v, \varphi) \| = \left(\sum_{i,j} \int_{\Omega} |\gamma_{ij}(v)|^2 + \sum_L \int_{\Omega} |\partial_i \varphi|^2 \right)^{1/2}$$

et que par ailleurs, du fait de l'inégalité de Korn (cf Durant - Lions (1)) et de l'équivalence des normes sur les espaces L^2 et H^1 , il existe $C > 0$ tel que :

$$\| B'(V, \varphi) \| \geq C \left(\sum_i \| V_i \|_{H^1}^2 + \| \varphi \|_{H^1}^2 \right)^{1/2}$$

D'autre part, la vérification de la condition ii) s'obtient en reprenant dans la démonstration du théorème C-1, l'étape qui suit la mise en œuvre de la condition i)

IV Application de la méthode du zoom

On désire ici étudier le comportement des champs électromécaniques σ, D, u, φ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Mais comme ces champs sont définis sur l'ensemble $\overline{\Omega^\varepsilon}$ qui lui même varie avec ε , il pourrait s'avérer difficile de comparer des champs définis pour des valeurs différentes de ε . Pour contourner cette difficulté, nous allons transformer le problème des plaques en un problème défini sur un ensemble indépendant de ε et obtenu par la méthode du zoom.

Pour cela, on pose :

$$\Omega = \omega \times]-1, 1[, \Gamma_\pm = \omega \times \{ \pm 1 \}, \Gamma_0 = \gamma \times]-1, 1[$$

Ainsi pour tout ε et pour tout point x de $\overline{\Omega}$, on associe par une bijection π^ε , le point x^ε de Ω^ε tel que :

$$\pi^\varepsilon(x) = \pi((x_1, x_2, x_3)) = x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \quad (C.10)$$

La transformation π^ε constitue une dilatation de coefficient $1/\varepsilon$, du vecteur unitaire dans la direction x_3 .

De la même manière, à toute fonction f^ε définie sur $\overline{\Omega^\varepsilon}$, on associe la fonction f

$$\text{définie sur } \overline{\Omega} \text{ par } f(x) = (f^\varepsilon \circ \pi^\varepsilon)(x) \quad (C.11)$$

et vérifiant les règles générales suivantes :

$$\varepsilon^{-1} \int_{\Omega^\varepsilon} f(\pi^\varepsilon x) dx^\varepsilon = \int_{\Omega} f(x) dx \quad (C.12)$$

$$\partial_\alpha f^\varepsilon(x^\varepsilon) = \partial_\alpha f(x); \partial_3 f^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \partial_3 f(x) \quad (C.13)$$

$$\alpha = 1, 2$$

$$\int_{\Gamma_0^\varepsilon} f^\varepsilon = \int_{\Gamma_0} f; \int_{\Gamma_\pm^\varepsilon} f^\varepsilon = \int_{\Gamma_\pm} f \quad (C.14)$$

Les relations (C.10) ou (C.14) conduisent en définitive au changement d'inconnues suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon = \sigma_{\alpha\beta} \circ \pi^\varepsilon, \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} \sigma_{\alpha 3} \circ \pi^\varepsilon, \sigma_{33}^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \sigma_{33} \circ \pi^\varepsilon \\ U_\alpha^\varepsilon = U_\alpha \circ \pi^\varepsilon, U_3^\varepsilon = \varepsilon U_3 \circ \pi^\varepsilon \\ D_\alpha^\varepsilon = D_\alpha \circ \pi^\varepsilon, D_3^\varepsilon = \varepsilon^{-1} D_3 \circ \pi^\varepsilon \\ \varphi_{,\alpha}^\varepsilon = \varphi_{,\alpha} \circ \pi^\varepsilon, \varphi_{,3}^\varepsilon = \varepsilon \varphi_{,3} \circ \pi^\varepsilon \end{array} \right. \quad (C.15)$$

$$W_{\pm}^{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} W_{\pm} O \pi^{\varepsilon}$$

Par suite, de simples calculs permettent d'établir le résultat suivant :

Théorème C.3

Soit $(\sigma^{\varepsilon}, D^{\varepsilon}, U^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon})$ l'élément de l'espace $\Sigma^{\varepsilon} \times \Delta^{\varepsilon} \times V^{\varepsilon} \times \Phi^{\varepsilon}$ construit à partir de la solution (σ, D, U, φ) du problème des plaques, à l'aide des relations (C.15) alors $(\sigma^{\varepsilon}, D^{\varepsilon}, U^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon})$ est l'unique solution du problème variationnel suivant :

Trouver $(\sigma^{\varepsilon}, D^{\varepsilon}, U^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}) \in \Sigma^{\varepsilon} \times \Delta^{\varepsilon} \times V^{\varepsilon} \times \Phi^{\varepsilon}$ tel que

$$(A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots)(\sigma^{\varepsilon}, D^{\varepsilon}, U^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}) + B^{\varepsilon}(\tau, \delta, U^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}) = 0$$

$$\forall (\tau, \delta) \in \Sigma^{\varepsilon} \times \Delta^{\varepsilon}$$

$$B_0(\sigma^{\varepsilon}, D^{\varepsilon}, V, \varphi) = F_0(V, \varphi), \quad \forall (V, \varphi) \in \Sigma^{\varepsilon} \times \Delta^{\varepsilon}$$

où

$$A_0 = \int_{\Omega} \left\{ (a_{1111} + a_{1122}) \sigma_{11}^{\varepsilon} \tau_{11} + (a_{1122} + a_{2222}) \sigma_{22}^{\varepsilon} \tau_{22} + \frac{1}{2C_{66}} \sigma_{12}^{\varepsilon} \tau_{12} \right\}$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{11}} D_1^{\varepsilon} \delta_1 + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{11}} D_2^{\varepsilon} \delta_2 \right)$$

$$A_1 = \int_{\Omega} \left\{ (b_{113} D_3^{\varepsilon} \tau_{11} + b_{223} D_3^{\varepsilon} \tau_{22}) + \left(\frac{e_{15}}{2C_{44}\tilde{\varepsilon}_{11}} D_2^{\varepsilon} \tau_{23} + \frac{e_{15}}{2C_{44}\tilde{\varepsilon}_{11}} D_1^{\varepsilon} \tau_{13} \right) \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega} \left(\frac{e_{15}}{C_{44}\tilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{13}^{\varepsilon} \delta_1 + \frac{e_{15}}{C_{44}\tilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{23}^{\varepsilon} \delta_2 + \widetilde{a_{311}} \sigma_{11}^{\varepsilon} \delta_3 + \widetilde{a_{322}} \sigma_{22}^{\varepsilon} \delta_3 \right) \right.$$

$$A_2 = \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{11}}{2C_{44}\tilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{23}^{\varepsilon} \tau_{23} + \frac{\varepsilon_{11}}{2C_{44}\tilde{\varepsilon}_{11}} \sigma_{13}^{\varepsilon} \tau_{13} \right) + (a_{3111} \sigma_{11}^{\varepsilon} \tau_{33} + a_{3322} \sigma_{22}^{\varepsilon} \tau_{33}) \right.$$

$$\left. + \widetilde{b_{33}} D_3^{\varepsilon} \delta_3 \right\}$$

$$A_3 = \int_{\Omega} (b_{333} D_3^{\varepsilon} \tau_{33} + \widetilde{a_{333}} \sigma_{33}^{\varepsilon} \delta_3); \quad A_4 = \int_{\Omega} (a_{1133} \sigma_{33}^{\varepsilon} \tau_{33} + a_{2233} \sigma_{33}^{\varepsilon} \tau_{33})$$

C.12

Dans la détermination des coefficients A_i , B_0 et F_0^ε , on a tenu compte de l'hypothèse de découplage entre les effets de cisaillement transverse et les effets de contraintes planes ($\sigma_{\alpha\beta}$) ce qui conduit à poser :

$$\bar{a}_{\alpha 333}^\varepsilon = a_{\alpha 3\beta\gamma}^\varepsilon = 0$$

Par la suite on supposera que les forces T_\pm^ε et W_\pm^ε ainsi que les caractéristiques du matériau sont indépendantes de l'épaisseur ε ; ce qui revient tout simplement à ne plus porter, sur les coefficients a_{ijkl} , b_{ij} , a_{ijk} , b_{ijk} et sur les forces T_\pm^ε et W_\pm^ε , l'indice ε . Cependant, la dépendance polynomiale en ε et le fait que ce dernier soit considéré comme suffisamment petit, suggèrent de rechercher la solution $(\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon, U^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ selon un développement asymptotique de la forme

$$(\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon, U^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = \sum_{i=0,1,\dots} \varepsilon^i (\sigma^{(i)}, D^{(i)}, U^{(i)}, \varphi^{(i)}) \quad (\text{C.16})$$

V Etude du développement asymptotique

Calcul des termes d'ordre zéro

En comparant les relations (C.16) avec le théorème (C.3), il vient le problème suivant :

Problème P_0

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\sigma^{(0)}, D^{(0)}, U^{(0)}, \varphi^{(0)}) \text{ tel que} \\ A_0(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, U^{(0)}, \varphi^{(0)}) + B_0(\tau, \delta, U^{(0)}, \varphi^{(0)}) = 0, \quad \forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta \\ B_0(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, V, \varphi) = F_0(V, \varphi), \quad \forall (V, \varphi) \in V \times \Phi \end{array} \right.$$

$$\text{où } A_0 = \int_{\Omega} \left\{ (a_{1111} + a_{1122}) \sigma_{11}^\varepsilon \tau_{11} + (a_{1122} + a_{2222}) \sigma_{22}^\varepsilon \tau_{22} + \frac{1}{2C_{66}} \sigma_{12}^\varepsilon \tau_{12} \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{11}} D_1^\varepsilon \delta_1 + \int_{\Omega} \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{11}} D_2^\varepsilon \delta_2 \right) \right.$$

$$B_0 = B^\varepsilon \quad ; \quad F_0 = F^\varepsilon$$

Localement, ce problème implique :

$$\sigma_{\delta\gamma}^{(\sigma)} = a_{\delta\gamma\beta\alpha}^{-1} U_{\beta,\alpha}^{(\sigma)}, \quad U_{3,\alpha}^{(\sigma)} + U_{\alpha,3}^{(\sigma)} = 0, \quad U_{3,3}^{(\sigma)} = 0 \quad (C.17)$$

$$\varphi_{,\alpha}^{(\sigma)} - \widetilde{b}_{\alpha\alpha} D_{\alpha}^{(\sigma)} = 0, \quad \varphi_{,3}^{(\sigma)} = 0;$$

et il s'en suit :

$$\begin{aligned} U_3^{(\sigma)} &= W(x_1, x_2), \quad U_{\alpha}^{(\sigma)} = \widetilde{U}_{\alpha}^{(\sigma)}(x_1, x_2) - x_3 U_{3,\alpha}^{(\sigma)}; \\ \varphi^{(\sigma)} &= \varphi(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (C.18)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(\sigma)} = a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} s_{\gamma\delta}(U^{(\sigma)}), \quad D_{\alpha}^{(\sigma)} = -\widetilde{\varepsilon}_{11} \varphi_{,\alpha}^{(\sigma)}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} (1 + K^2), \quad K^2 = e_{15}^2 / \varepsilon_{11} C_{55}$$

En outre, W et $\varphi^{(0)}$ vérifient les équations suivantes :

- Problème de flexion pour une plaque faiblement anisotrope et encastree

$$C_{11} (W_{,1111} + W_{,2222}) + (C_{11} + 2C_{12}) (W_{,1112} + W_{,1222}) + 2(C_{11} + 2C_{12}) W_{,1112} = F_3$$

dans ω ;

$$W = \frac{\partial W}{\partial n} \quad \text{sur } \gamma = \partial \omega \quad (C.19)$$

$$F_3 = 2 \langle T_3 + T_{\alpha,\alpha} \rangle \text{ dans } \omega$$

$$\text{où } \langle X \rangle = \frac{1}{2} (X^+ + X^-)$$

_ Problème de Poisson - Neumann

$$\widetilde{\varepsilon}_{11} \Delta_2 \varphi^{(\sigma)} = \langle W \rangle \text{ dans } \omega$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \varphi^{(\sigma)}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \gamma = \partial \omega \quad (C.20)$$

On a par ailleurs, (cf. Maugin (1)),

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha 3}^{(o)} &= -T_{\alpha}^{-} - \int_{-1}^{x_3} \sigma_{\alpha\beta, \beta}^{(o)}(x_1, x_2, \xi) d\xi \\
 \sigma_{33}^{(o)} &= -T_3^{-} - \int_{-1}^{x_3} \sigma_{\alpha 3, \alpha}^{(o)}(x_1, x_2, \xi) d\xi \\
 D_3^{(o)} &= -W^{-} - \int_{-1}^{x_3} D_{\alpha, \alpha}^{(o)}(x_1, x_2, \xi) d\xi \\
 &= -W^{-} + (1 + x_3) \Delta_2 \varphi^{(o)}
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

Théorème d'existence (C - 4)

Le problème P_0 admet une solution unique $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, U^{(0)}, \varphi^{(0)})$

Lemme (C - 1) (variante du théorème de BREZZI (BREZZI (1)))

Soient $\Sigma \times \Delta$, $V \times \Phi$ deux espaces de Hilbert de normes respectives $\| \cdot \|_{\Sigma \times \Delta}$ et $\| \cdot \|_{V \times \Phi}$

Soit $A : (\Sigma \times \Delta) \times (\Sigma \times \Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$

$B : (\Sigma \times \Delta) \times (V \times \Phi) \longrightarrow \mathbb{R}$

$F : V \times \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$

Supposons par ailleurs que la forme bilinéaire A vérifie :

$$\exists C > 0, \quad \forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta,$$

$$A(\tau, \delta, \tau, \delta) \geq C \|(\tau, \delta)\|_{\Sigma \times \Delta}^2$$

Et si de plus, $\exists k > 0, \forall (V, \psi) \in V \times \Phi$ tel que

$$\sup \frac{B((\tau, \delta); (V, \psi))}{\|(\tau, \delta)\|_{\Sigma \times \Delta}} \geq k \| (V, \psi) \|_{V \times \Phi}$$

alors il existe un élément (σ, D, U, φ) unique tel que :

$$\forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta, \quad A((\sigma, D); (\tau, \delta)) + B((\tau, \delta); (U, \varphi)) = 0$$

$$\forall (v, \psi) \in V \times \Phi, \quad B((\sigma, D); (v, \psi)) = F(v, \psi)$$

Preuve

Rappelons que

$$A_0(\sigma, D, \tau, \delta) = \int_{\Omega} (a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta} \tau_{\gamma\delta} + \sum_{\alpha=1,2} \widetilde{b_{\alpha\alpha}} D_{\alpha} D_{\alpha}) d\Omega$$

$$B_0(\tau, \delta, U, \varphi) = - \int_{\Omega} (\tau_{ij} U_{ji} + \phi_{,k} \delta_k) d\Omega$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 A_0(\sigma, D, \tau, \delta) &\leq \max_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} |a_{\alpha\beta\gamma\delta}| \left(\sum_{\alpha, \beta} \int_{\Omega} |\sigma_{\alpha\beta}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\gamma, \delta} \int_{\Omega} |\sigma_{\gamma\delta}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \max_{\alpha} (|\widetilde{b}_{\alpha\alpha}| \left(\sum_{\alpha=1, 2} \int_{\Omega} |D_{\alpha}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha} \int_{\Omega} |\delta_{\alpha}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}) \\
 &\leq C \|(\sigma, D)\| \|(\tau, \delta)\|
 \end{aligned}$$

où $C = \max(\max_{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} |a_{\alpha\beta\gamma\delta}|, \max_{\alpha} |\widetilde{b}_{\alpha\alpha}|)$

$$\text{et } \|(\sigma, D)\| = \left(\sum_{\alpha, \beta=1, 2} \int_{\Omega} |\sigma_{\alpha\beta}|^2 + \sum_{\alpha=1, 2} \int_{\Omega} |D_{\alpha}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

la norme $\|(\tau, \delta)\|$ étant définie d'une manière analogue ; A_0 est donc une forme bilinéaire bicontinue sur l'espace $(L^2(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^2$

$$\text{Mais } B_0(\tau, \delta, U, \phi) \leq \|(\tau, \delta)\| \|\gamma(U), \nabla\phi\|,$$

où $\nabla\phi$ est le gradient de ϕ , et

$$\|\gamma(u), \nabla\phi\| = \left(\sum_{i,j} \int_{\Omega} |\gamma_{ij}(u)|^2 + \sum_i \int_{\Omega} |\partial_i \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, du fait de l'équivalence des normes $\|\gamma(u), \nabla\phi\|$ et $\|U, \phi\|$ où

$$\|U, \phi\| \left(= \left(\sum_{V \times \Phi} \|U_i\|_{H_1(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{H_1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

On peut trouver un réel $k > 0$ vérifiant :

$$B_0(\tau, \delta, U, \phi) \leq k \|(\tau, \delta)\| \|U, \phi\|_{V \times \Phi} \tag{C.22}$$

B_0 est alors une forme bilinéaire bicontinue sur l'espace

$$(L^2(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^3 \times (V \times \Phi)$$

Introduisons à présent les espaces

$$V_{k\perp} = \{ v = (v_i); v_3 \in H_0^2(\omega), v_{\alpha} = \widetilde{v}_{\alpha} - x_3 \partial_3 v_3 \}$$

$$\text{et } \phi_N = \{ \phi \in H^1(\omega); \widetilde{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \gamma \};$$

On a bien évidemment :

$$V_{k\perp} \subset V \text{ et } \phi_N \subset \Phi$$

et par suite, l'équivalence des normes sur les espaces $V \times \Phi$ et $V_{k\perp} \times \Phi_N$

C.16

Ainsi, B_0 est aussi une forme bilinéaire sur l'espace $(L^2(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^2 \times V_{KL} \times \Phi_N$

Par ailleurs, comme $u \in V_{KL}$, on a par définition

$$\gamma_{i3} = 0,$$

et par suite :

$$\sup_{\|(\tau, \delta)\|} \frac{B_0(\tau, \delta, U, \phi)}{\|(\tau, \delta)\|} = \sup_{\|(\tau, \delta)\|} \frac{B_0(\tau, \delta, U, \phi)}{\|(\tau, \delta)\|} \geq C_1 \|U, \phi\| \quad (C.23)$$

$$(\tau, \delta) \in (L^2(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^2 \quad (\tau, \delta) \in \Sigma \times (L^2(\Omega))^2$$

avec $C_1 > 0$

D'autre part, la bicontinuité de B_0 entraîne l'existence d'un réel strictement positif défini par :

$$C_2 = \inf A_0\left(\frac{(\sigma, D)}{\|(\sigma, D)\|}, \frac{(\sigma, D)}{\|(\sigma, D)\|}\right) \quad (C.24)$$

$$\|(\sigma, D)\| = 1$$

Par conséquent il vient :

$$A_0((\sigma, D); (\sigma, D)) \geq C_2 \|(\sigma, D)\|^2,$$

(en se plaçant bien évidemment sous l'hypothèse d'une très forte diélectricité).

Les relations (C.22), (C.23) et (C.24) vérifient les conditions d'application du lemme

(C-1) et de ce fait, il existe une solution unique $(\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}, D_\alpha^{(0)}, U^{(0)}, \varphi^{(0)})$ dans l'espace

$(L^2(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^2 \times (V_{KL}) \times (\Phi_N)$ pour le problème défini par :

$$A_0(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, \tau, \delta) + B_0(\tau, \delta, U^{(0)}, \varphi^{(0)}) = 0, \quad \forall (\tau, \delta) \in (L^2(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^2$$

$$B_0(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, v, \psi) = F_0(v, \psi), \quad \forall (v, \psi) \in V_{KL} \times \Phi_N$$

VI Conclusion C

La solution trouvée pour les termes d'ordre zéro n'étant pas valable au voisinage de la frontière $\partial\omega$, il apparaît donc un problème de couche limite qui sera traité ultérieurement dans le chapitre J.

CHAPITRE D

Estimation de l'erreur d'approximation de la solution

$(\sigma^\varepsilon, \mathbf{D}^\varepsilon, \mathbf{U}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ par $(\sigma^{(0)}, \mathbf{D}^{(0)}, \mathbf{U}^{(0)}, \varphi^{(0)})$

D.2

Se référant à l'article de MAUGIN (G.A. MAUGIN et D. ATTOU (1)) il apparaît que $(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, U^{(1)}, \varphi^{(1)})$ est solution du problème :

$$\left\{ \begin{aligned} A_0(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \tau, \delta) + B_0(\tau, \delta, U^{(1)}, \varphi^{(1)}) \\ = -A_1(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, \tau, \delta), \quad \forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta \\ B_0(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, v, \phi) = 0, \quad \forall (v, \phi) \in V \times \Phi \end{aligned} \right. \quad (D.1)$$

Ce qui, par suite se traduit par :

$$\left\{ \begin{aligned} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - U_{\delta,\gamma}^{(1)} + b_{\gamma\delta 3} D_3^{(0)} &= 0 \\ U_{\alpha,3}^{(1)} + U_{3\alpha}^{(1)} &= b_{3\alpha\alpha} D_{\alpha}^{(0)} \\ U_{3,3}^{(1)} &= 0 \\ \varphi_{,\alpha}^{(1)} - b_{\alpha\alpha} \widetilde{D}_{\alpha}^{(1)} - a_{\alpha\alpha 3} \sigma_{\alpha,3}^{(0)} &= 0 \\ \varphi_{,3}^{(1)} - a_{3\alpha\beta} \widetilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (D.2)$$

d'où

$$U_3^{(1)} = \eta(x_1, x_2) \quad (D.3)$$

$$U_{\alpha}^{(1)} = \widetilde{U}_{\alpha}^{(1)} - x_3 \left(U_{3\alpha}^{(1)} + \frac{e_{15}}{C_{44}} \varphi_{,\alpha}^{(0)} \right) \quad (D.4)$$

$$= \widetilde{U}_{\alpha}^{(1)} - x_3 \widetilde{\eta}_{,\alpha}$$

$$\text{où } \widetilde{\eta} = \eta + \frac{e_{15}}{C_{44}} \varphi^{(0)} \quad (D.5)$$

Si par ailleurs, on pose

$$\varphi^{(1)} = 0 \text{ sur } \gamma \quad (D.6)$$

$$\text{il vient : } \varphi^{(1)} = -\frac{1}{2} x_3^2 a_{3\alpha\beta} \widetilde{a}_{\gamma\delta\beta\alpha}^{-1} W_{,\delta\gamma} \quad (D.7)$$

D.3

et par suite

$$D_{\alpha}^{(1)} = \widetilde{\varepsilon}_{11} (- \varphi_{,\alpha}^{(1)} + a_{\alpha\alpha 3} \{ - T_{\alpha} - \int_{-1}^{x_3} \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(0)} (x_1, x_2, \xi) d\xi \}) \quad (D.8)$$

$$\text{avec } a_{\alpha\alpha 3} = \frac{e_{15}}{\widetilde{\varepsilon}_{11} C_{44}} = K^2 = \frac{K^2}{1 + K^2} \quad (D.9)$$

D'autre part, η vérifie l'équation :

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} \eta_{,\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{11} K^2 (a_{\gamma\alpha\beta\alpha}^{-1} (\Delta_2 \varphi)_{,\delta\beta} - a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} \varphi_{,\gamma\delta\alpha\beta}) \quad (D.10)$$

Les équations (D-7) et (D-10) font apparaître que la solution w à caractère mécanique et d'ordre zéro pourrait permettre la détermination de la solution électrique du premier ordre $\varphi^{(1)}$ et, réciproquement la solution $\varphi^{(0)}$ à caractère électrique pourrait conduire à la détermination de la solution η à caractère mécanique et d'ordre un.

Il existe donc une sorte de symétrie entre les effets électriques et mécaniques.

Cependant, il s'avère que le terme $(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, U^{(1)}, \varphi^{(1)})$ n'est pas calculable puisqu'il est impossible de construire ne serait ce que $U_{\alpha}^{(1)}$ car, bien que $U_3^{(1)}$ et $U_{\alpha}^{(1)}$ soient des fonctions arbitraires, $U_{\alpha}^{(1)}$ ne peut vérifier les conditions aux limites sur la frontière Γ_0 de la plaque, car $\varphi^{(0)}$ n'a aucune raison de s'y annuler.

Il paraît à présent évident de s'orienter vers une technique autre que celle consistant à estimer l'erreur d'approximation par une évaluation directe de l'écart entre $(\sigma^{\varepsilon}, D^{\varepsilon}, U^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon})$ et $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, U^{(0)}, \varphi^{(0)})$.

I-Analyse de l'erreur d'approximation

Notons que matriciellement, les coefficients A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 4$) s'écrivent

$$A_i ((\sigma, D); (\tau, \delta)) = \int_{\Omega} (\sigma, D)_i A_i \begin{pmatrix} \tau \\ \delta \end{pmatrix} d\Omega; \quad (D.11)$$

où :

D.4

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma, D)_0 = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sigma_6 \quad D_1 \quad D_2 \quad 0) \\ (\sigma, D)_1 = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad 0 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6 \quad D_1 \quad D_2 \quad D_3) \\ (\sigma, D)_2 = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6 \quad 0 \quad 0 \quad D_3) \\ (\sigma, D)_3 = (0 \quad 0 \quad \sigma_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad D_3) \\ (\sigma, D)_4 = (0 \quad 0 \quad \sigma_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \end{array} \right. \quad (D.12)$$

$$A_0 =_{(9 \times 9)} \left(\begin{array}{cccccccc} \text{a}_{11} & \text{a}_{12} & & & & & & & \\ \text{a}_{12} & \text{a}_{22} & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \text{a}_{61} & \text{a}_{62} & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & \text{a}_{66} & & & \\ & & & & & & \tilde{\text{b}}_{11} & & \\ & & & & & & & \tilde{\text{b}}_{22} & \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right) \quad (D.13)$$

$$A_1 =_{(9 \times 9)} \left(\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \tilde{\text{a}}_{31} \\ & & & & & & & & \tilde{\text{a}}_{32} \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \tilde{\text{a}}_{24} \\ & & & & & & \tilde{\text{a}}_{15} & & \tilde{\text{a}}_{36} \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & \text{b}_{51} & & & \\ \text{b}_{13} & \text{b}_{23} & 0 & \text{b}_{42} & 0 & 0 & \text{b}_{63} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (D.14)$$

$$A_2 =_{(9 \times 9)} \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & \text{a}_{13} & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & 0 \\ \text{a}_{13} & \text{a}_{23} & 0 & & & & \text{a}_{63} & & \tilde{\text{b}}_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 4\text{a}_{44} & 4\text{a}_{45} & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\text{a}_{54} & 4\text{a}_{55} & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & \text{a}_{63} & 0 & & & & & 0 \end{array} \right) \quad (D.15)$$

D.5

$$A_3 =_{(9 \times 9)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & & \tilde{a}_{33} \\ & & & \text{Oval} & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad (D.16)$$

$$A_4 =_{(9 \times 9)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & a_{33} & & \\ & & & \text{Oval} & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad (D.17)$$

En supposant les coefficients $A_{i(\alpha\beta)}$ des matrices A_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) coercifs, il vient :

$$\left| \begin{aligned} A_0((\sigma, D); (\sigma, D)) &\geq C \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\sigma_{\alpha\beta}\|^2 + \sum_{\alpha=1,2} \|D_\alpha\|^2 \right) \\ \varepsilon A_1((\sigma, D); (\sigma, D)) &\geq 0; \varepsilon^3 A_3((\sigma, D); (\sigma, D)) \geq 0 \\ \varepsilon^2 A_2((\sigma, D); (\sigma, D)) &\geq \varepsilon^2 C \left(\sum_{\alpha=1,2} \|\sigma_{\alpha 3}\|^2 + \sum \|D_3\|^2 \right) \\ \varepsilon^4 A_4((\sigma, D); (\sigma, D)) &\geq \varepsilon^4 C \|\sigma_{33}\|^2 \end{aligned} \right. \quad (D.18)$$

Et par suite,

$$\sum_{i=0}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma, D); (\sigma, D)) \geq C \left\{ \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\sigma_{\alpha\beta}\|^2 + \sum_{\alpha=1,2} \|D_\alpha\|^2 \right) + \varepsilon^2 \left(\sum \|\sigma_{\alpha 3}\|^2 + \|D_3\|^2 \right) + \varepsilon^4 \|\sigma_{33}\|^2 \right\} \quad (D.19)$$

Par ailleurs, notons que nous aurons par la suite à nous inspirer du théorème suivant dû à J.L Lions (J.L Lions (1)).

Théorème (D-1)

Si φ désigne une fonction de l'espace $L^2(]-1, 1[; H^1(\omega))$ et si la frontière γ de ω est de classe \mathcal{E}^2 alors pour tout $\lambda > 0$, il existe deux fonctions $\varphi_0(\lambda)$ et $\varphi_1(\lambda)$ respectivement éléments des espaces $L^2(]-1, 1[; H^1(\omega))$ et $L^2(]-1, 1[; H_0^1(\omega))$ telles que

$$\varphi = \varphi_0(\lambda) + \varphi_1(\lambda)$$

et
$$\|\varphi_0(\lambda)\|_{L^2(]-1, 1[; H_0^1(\omega))} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|\varphi\|_{L^2(]-1, 1[; H^1(\omega))}$$

$$\|\varphi_1(\lambda)\|_{0, \Omega} \leq C \sqrt{\lambda} \|\varphi\|_{0, \Omega}$$

$$\Omega = \omega \times]-1, 1[$$

Ce théorème est en fait une conséquence du résultat ci-après :

Théorème (D-2)

Si φ est une fonction de l'espace $H^1(\omega)$ et si la frontière γ de ω est de classe \mathcal{E}^2 , alors pour tout $\lambda > 0$, il existe deux fonctions $\varphi_0(\lambda)$ et $\varphi_1(\lambda)$, respectivement éléments des espaces

$H_0^1(\omega)$ et $H^1(\omega)$ telles que:

D.7

$$\varphi = \varphi_0(\lambda) + \varphi_1(\lambda) \text{ sur } \omega$$

$$\text{et } \|\varphi_0(\lambda)\|_{1, \omega} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|\varphi\|_{1, \omega}$$

$$\|\varphi_1(\lambda)\|_{0, \omega} \leq C\sqrt{\lambda} \|\varphi\|_{0, \omega}$$

En vertu de ces théorèmes, $\sigma_{\alpha\beta}^{(\omega)}$ appartenant à $H^1(\omega)$ on peut écrire, tenant compte des relations (D-2),

$$\widetilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(\omega)} = h_{\sigma}^{\circ}(\varepsilon) + h_{\sigma}^1(\varepsilon)$$

$$\text{avec } \|h_{\sigma}^{\circ}(\varepsilon)\|_{L^2(-1, 1[; H_0^1(\omega))} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{D.20}$$

$$\|h_{\sigma}^1(\varepsilon)\|_{0, \Omega} \leq C\sqrt{\varepsilon} \tag{D.21}$$

Et si nous posons

$$\partial_3 \psi^{(1)} = h_{\sigma}^{\circ}(\varepsilon) \tag{D.22}$$

il s'en suit :

$$\partial_3 \psi^{(1)} = \widetilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(\omega)} - h_{\sigma}^1(\varepsilon) \tag{D.23}$$

Par ailleurs, la fonction nulle étant élément de $H^1(\omega)$, on peut écrire

$$0 = h_u^{\circ}(\varepsilon) + h_u^1(\varepsilon) \tag{D.24}$$

où $h_u^{\circ}(\varepsilon)$ et $h_u^1(\varepsilon)$ vérifient respectivement, à l'image de $h_{\sigma}^{\circ}(\varepsilon)$ et $h_{\sigma}^1(\varepsilon)$, les inégalités de même type que (D.20) et (D.21)

En posant

$$V_3^{(1)} = \int_{-1}^{x_3} \varepsilon h_u^0(\varepsilon)$$

il vient

$$\partial_3 V_3 = -h_u^1(\varepsilon)$$

Introduisant les variables d'écart

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon - \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon - \sigma_{\alpha 3}^{(0)} \tag{D.25}$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33}^\varepsilon - \sigma_{33}^{(0)}$$

$$\bar{U}_\alpha = U_\alpha^\varepsilon - U_\alpha^{(0)}$$

$$\bar{U}_3 = U_3^\varepsilon - U_3^{(0)} - \varepsilon V_3^{(1)}$$

$$\bar{D}_\alpha = D_\alpha^\varepsilon - D_\alpha^{(0)}$$

$$\bar{D}_3 = D_3^\varepsilon - D_3^{(0)} \tag{D.26}$$

$$\varphi = \varphi^\varepsilon - \varphi^{(0)} - \varepsilon \psi^{(1)}$$

On a, par bilinéarité des coefficients A_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$)

$$\sum_{i=0}^4 \varepsilon^i A_i((\bar{\sigma}, \bar{D}); (\bar{\sigma}, \bar{D})) = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \{A_i((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\bar{\sigma}, \bar{D})) - A_i((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (\bar{\sigma}, \bar{D}))\}$$

$$= -B^c((\bar{\sigma}, \bar{D}); (U^c, \varphi^c)) + B_0((\bar{\sigma}, \bar{D}); (U^{(0)}, \varphi^{(0)})) - \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (\bar{\sigma}, \bar{D}))$$

$$= -B^c((\bar{\sigma}, \bar{D}); (\bar{U}, \varphi)) + \varepsilon \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\alpha 3} V_{3,\alpha}^{(1)} - \varepsilon^2 \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{33} h_u^1(\varepsilon)$$

$$+ \varepsilon \int_{\Omega} \psi_{,\alpha}^{(1)} \bar{D}_\alpha + \varepsilon^2 \int_{\Omega} a_{3\alpha\beta} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)} \bar{D}_3 - \varepsilon^2 \int_{\Omega} h_\sigma^1(\varepsilon) \bar{D}_3 - \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (\bar{\sigma}, \bar{D}))$$

D.9

Mais comme $B^\varepsilon((\bar{\sigma}, \bar{D}); (\bar{U}, \bar{\varphi})) = 0$, et que:

$$\begin{aligned}
 | \varepsilon \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\alpha 3} V_{3,\alpha}^{(4)} | &\leq C \varepsilon^{1/2} \sum_{\alpha=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha 3} \| \\
 | \varepsilon \int_{\Omega} \psi_{,\alpha}^{(4)} \bar{D}_{\alpha} | &\leq C \varepsilon^{1/2} \| \bar{D}_{\alpha} \| \\
 | \varepsilon \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{33} h_u^1(\varepsilon) | &\leq C \varepsilon^{3/2} \| \bar{\sigma}_{33} \| \tag{D.27} \\
 | \varepsilon^2 \int_{\Omega} a_{3\alpha\beta} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(4)} \bar{D}_3 | &\leq C \varepsilon^2 \| \bar{D}_3 \| \\
 | \varepsilon^2 \int_{\Omega} h_{\sigma}^1(\varepsilon) \bar{D}_3 | &\leq C \varepsilon^{5/2} \| \bar{D}_3 \| \\
 | \sum_1^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (\bar{\sigma}, \bar{D})) | &\leq C \{ \varepsilon (\sum_{\alpha,\beta=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \| + \sum_{\alpha=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha 3} \| \\
 &\quad + \sum_{\alpha=1,2} \| \bar{D}_{\alpha} \| + \| \bar{D}_3 \|) + \varepsilon^2 (\sum_{\alpha=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha 3} \| + \| \bar{\sigma}_{33} \| + \sum_{\alpha,\beta=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \| + \| \bar{D}_3 \|) \\
 &\quad + \varepsilon^3 (\| \bar{\sigma}_{33} \| + \| \bar{D}_3 \|) + \varepsilon^4 \| \bar{\sigma}_{33} \| \}
 \end{aligned}$$

il s'en suit :

$$\begin{aligned}
 &C \{ (\sum_{\alpha,\beta=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \|^2 + \sum_{\alpha=1,2} \| \bar{D}_{\alpha} \|^2) + \varepsilon^2 (\sum_{\alpha=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha 3} \|^2 + \| \bar{D}_3 \|^2) + \varepsilon^4 \| \bar{\sigma}_{33} \|^2 \} \\
 &\leq (\varepsilon + \varepsilon^2) \sum_{\alpha,\beta=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \| + (\varepsilon + \varepsilon^{1/2}) \sum_{\alpha=1,2} \| \bar{D}_{\alpha} \| + (\varepsilon + \varepsilon^{1/2} + \varepsilon^2) \sum_{\alpha=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha 3} \| \\
 &\quad + (\varepsilon + 2 \varepsilon^2 + \varepsilon^{5/2} + \varepsilon^3) \| \bar{D}_3 \| + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^{3/2}) \| \bar{\sigma}_{33} \|
 \end{aligned}$$

et par suite :

$$C \{ (\sum_{\alpha,\beta=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \|^2 + \sum_{\alpha=1,2} \| \bar{D}_{\alpha} \|^2) + \varepsilon^2 (\sum_{\alpha=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha 3} \|^2 + \| \bar{D}_3 \|^2) + \varepsilon^4 \| \bar{\sigma}_{33} \|^2 \} \leq \varepsilon^{1/2}$$

soit :

$$(\sum_{\alpha,\beta=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \| + \sum_{\alpha=1,2} \| \bar{D}_{\alpha} \|) + \varepsilon (\sum_{\alpha=1,2} \| \bar{\sigma}_{\alpha 3} \| + \| \bar{D}_3 \|) + \varepsilon^2 \| \bar{\sigma}_{33} \| \leq C \varepsilon^{1/4}$$

D.10

D'autre part, pour tout $(\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta$, on a :

$$\begin{aligned}
 & -B^\varepsilon((\tau, \delta); ((U^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) - (U^{(0)}, \varphi^{(0)}))) = -B^\varepsilon((\tau, \delta); (U^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)) + B^\varepsilon((\tau, \delta); (U^{(0)}, \varphi^{(0)})) \\
 & = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\tau, \delta)) - A_0((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (\tau, \delta)) \\
 & = A_0((\bar{\sigma}, \bar{D}); (\tau, \delta)) + \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\tau, \delta)) \\
 & \leq C \left\{ \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\| + \sum_{\alpha=1,2} \|\bar{D}_\alpha\| \right) + \varepsilon \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\| + \sum_{\alpha=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\| + \sum_{\alpha=1,2} \|\bar{D}_\alpha\| + \|\bar{D}_3\| \right) \right. \\
 & + \varepsilon^2 \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\| + \|\bar{D}_{33}\| + \sum_{\alpha=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\| + \|\bar{D}_3\| \right) + \varepsilon^3 \left(\|\bar{\sigma}_{33}\| + \|\bar{D}_3\| \right) \\
 & \left. + \varepsilon^3 \|\bar{\sigma}_{33}\| \right\} \|(\tau, \delta)\|
 \end{aligned}$$

Mais comme

$$\sup_{(\tau, \delta) \in \Sigma \times \Phi} \frac{-B^\varepsilon((\tau, \delta); ((U^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) - (U^{(0)}, \varphi^{(0)})))}{\|(\tau, \delta)\|} \geq C \| (U^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) - (U^{(0)}, \varphi^{(0)}) \|$$

on peut alors déduire des deux dernières inégalités la relation suivante :

$$\| (U^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) - (U^{(0)}, \varphi^{(0)}) \| \leq C \varepsilon^{1/4} \tag{D.28}$$

En définitive, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition (D-1)

Si $T_\alpha^\pm \in H^1(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, $T_3^\pm \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, $W_\pm \in H^1(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$ et si les coefficients $a_{3\alpha\beta}$ sont de classe $\mathcal{C}^2(\bar{\omega})$, alors il existe des constantes C positives et indépendantes de ε telles que:

$$\| \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon - \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \| \leq C \varepsilon^{1/4}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$\| D_\alpha^\varepsilon - D_\alpha^{(0)} \| \leq C \varepsilon^{1/4}, \alpha = 1, 2; \quad \| (U^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) - (U^{(0)}, \varphi^{(0)}) \| \leq C \varepsilon^{1/4}$$

$$\varepsilon \left(\|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\| + \|\bar{D}_3\| \right) + \varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{33}\| \leq C \varepsilon^{1/4}, \alpha = 1, 2$$

Conclusion D

La proposition (D-1) exprime la convergence de $\sigma_{\alpha\beta}^\epsilon, D_{\alpha}^\epsilon, U^\epsilon, \varphi^\epsilon$ respectivement vers $\sigma^{(0)}, D^{(0)}, U^{(0)}, \varphi^{(0)}$. Mais comme les hypothèses de régularité ne relèvent généralement que de la théorie, nous allons donc nous proposer l'étude de convergence en l'absence de régularité de $(\sigma^\epsilon, D^\epsilon, U^\epsilon, \varphi^\epsilon)$ vers $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, U^{(0)}, \varphi^{(0)})$.

CHAPITRE E

Etude de la Convergence de

$(\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$ vers $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(0)}, \phi^{(0)})$

en l'absence de régularité.

En vertu du théorème C-1, relatif au problème variationnel des plaques piézoélectriques, on peut écrire :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\tau, \delta)) + B^\varepsilon((\tau, \delta); (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)), \forall (\tau, \delta) \in \Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{E.1})$$

$$\left| \begin{array}{l} B_0((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (v, \phi)) = F_0(v, \phi), \forall (v, \phi) \in V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{E.2})$$

Par suite en choisissant $(\tau, \delta) = (\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon)$ et $(v, \phi) = (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$, il vient :

$$\sum_{i=0}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon)) \leq C \|(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon} \quad (\text{E.3})$$

Mais comme

$$C \|(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon} \leq \sup_{(\tau, \delta) \in (\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon) - \{(o, o)\}} \frac{B^\varepsilon((\tau, \delta); (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon))}{\|(\tau, \delta)\|_{\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon}} \quad (\text{E.4})$$

il s'en suit l'existence d'un réel strictement positif C tel que :

$$\|(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon} + \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon\| + \sum_{\alpha=1,2} \|D_\alpha^\varepsilon\| \right) + \varepsilon \left(\sum_{\alpha=1,2} \|\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon\| + \|D_3^\varepsilon\| \right) + \varepsilon^2 \|\sigma_{33}^\varepsilon\| \leq C$$

Par conséquent, de la suite $(\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$, on peut extraire une sous-suite de même nom et telle que :

$$\left| \begin{array}{ll} (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \rightarrow (u^*, \varphi^*) & \text{dans } (V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon) \text{ faible} \\ (\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon, D^\varepsilon) \rightarrow (\sigma_{\alpha\beta}^*, D_\alpha^*) & \text{dans } (L^2(\Omega))^2 \text{ faible} \\ (\varepsilon \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon, \varepsilon D_3^\varepsilon) \rightarrow (L_{\alpha 3}^*, \ell_3^*) & \text{dans } (L^2(\Omega))^2 \text{ faible} \\ \varepsilon^2 \sigma_{33}^\varepsilon \rightarrow L_{33}^* & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{array} \right. \quad (\text{E.5})$$

I Passage à la limite faible :

Si l'on s'en tient aux champs v et φ tels que :

$$\begin{cases} v \in \{v = (v_i) / v_3 \in H_0^2(\omega); v_\alpha = \tilde{v}_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3, \tilde{v}_\alpha \in H_0^1(\omega)\} \\ \varphi \in \{\varphi \in H^1(\Omega) / \partial_3 \varphi = 0\}, \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

on peut écrire :

$$B^\varepsilon((\sigma^*, D^*); (v, \varphi)) = F((v, \varphi)) \quad (\text{E.7})$$

Si par ailleurs, on multiplie (E-2) par ε puis par ε^2 , il vient en faisant tendre ε vers zéro et pour les fonctions arbitraires v et φ :

$$\left| \begin{array}{l} \int_{\Omega} L_{\alpha 3}^* \partial_3 v_\alpha = 0, \int_{\Omega} L_{33}^* \partial_3 v_3 = 0 \\ \int_{\Omega} \ell_3^* \partial_3 \varphi = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.8})$$

Par suite, on peut écrire :

$$\left| \begin{array}{l} L_{i3}^* = 0 \text{ pour tout } i = 1, 2, 3 \\ \ell_3^* = 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.9})$$

Tenant compte de ces derniers résultats, il vient par passage à la limite faible et pour tout $(\tau, \delta) \in (\Sigma \times \Delta)$:

$$A_0((\sigma^*, D^*); (\tau, \delta)) = B((\tau, \delta); (u^*, \varphi^*)); \quad (\text{E.10})$$

Ce qui, par analogie avec la relation (C.26) conduit à :

$$((\sigma^*, D^*); (u^*, \varphi^*)) = ((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (u^{(0)}, \varphi^{(0)})) \quad (\text{E.11})$$

L'unicité de $((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (u^{(0)}, \varphi^{(0)}))$ ayant été établie, on peut déduire la convergence de $((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon))$ vers $((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (u^{(0)}, \varphi^{(0)}))$.

II Etude de la Convergence forte

Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon - \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \quad , \quad \bar{D}_\alpha = D_\alpha^\varepsilon - D_\alpha^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon - \sigma_{\alpha 3}^{(0)} \quad , \quad \bar{D}_3 = D_3^\varepsilon \\ \bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33}^\varepsilon \quad , \quad \bar{\varphi} = \varphi^\varepsilon - \varphi^{(0)} \\ \bar{u} = u^\varepsilon - u^{(0)} ; \end{array} \right. \quad (\text{E.12})$$

la relation (D – 19) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & C \left\{ \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|^2 + \sum_{\alpha=1,2} \|\bar{D}_\alpha\|^2 \right) + \Sigma^2 \left(\sum_{\alpha=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|^2 + \|\bar{D}_3\|^2 \right) + \varepsilon^4 \|\bar{\sigma}_{33}\|^2 \right\} \\ & \leq A_0((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\bar{\sigma}, \bar{D})) - A_0((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (\bar{\sigma}, \bar{D})) + \varepsilon A_1((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\bar{\sigma}, \bar{D})) \\ & \quad - \varepsilon \int_{\Omega} (\tilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \bar{D}_3 + \sum_{\alpha=1}^2 b_{3\alpha\alpha} D_\alpha^{(0)} \bar{\sigma}_\alpha) + \varepsilon^2 A_2((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\bar{\sigma}, \bar{D})) \\ & \quad - \varepsilon^2 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \bar{\sigma}_{33} + \varepsilon^3 A_3((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\bar{\sigma}, \bar{D})) + \varepsilon^4 A_4((\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon); (\bar{\sigma}, \bar{D})) \\ & = -B^\varepsilon((\bar{\sigma}, \bar{D}), (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)) + B_0((\bar{\sigma}, \bar{D}), (u^{(0)}, \varphi^{(0)})) - \varepsilon \int_{\Omega} \tilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \bar{D}_3 \\ & \quad + \sum_{\alpha=1}^2 b_{3\alpha\alpha} D_\alpha^{(0)} \bar{\sigma}_{\alpha 3} - \varepsilon^2 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \bar{\sigma}_{33} \\ & = - \varepsilon \int_{\Omega} (\tilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} D_3^\varepsilon + \sum_{\alpha=1}^2 b_{3\alpha\alpha} D_\alpha^{(0)} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon) - \varepsilon^2 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \sigma_{33}^\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Et, comme cette dernière quantité tend vers zéro avec ε , il s'en suit :

$$\begin{array}{l}
 \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon \rightarrow \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\
 D_\alpha^\varepsilon \rightarrow D_\alpha^{(0)} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\
 \varepsilon \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\
 \varepsilon D_3^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\
 \varepsilon^2 \sigma_{33}^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort}
 \end{array} \tag{E.14}$$

Par ailleurs, puisque

$$C \|(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) - (u^{(0)}, \varphi^{(0)})\| \leq \sup_{(\tau, \delta) \in (\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon) - \{(o, o)\}} \frac{-B^\varepsilon((\tau, \delta), ((u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) - (u^{(0)}, \varphi^{(0)})))}{\|(\tau, \delta)\|} \tag{E.15}$$

$$\leq C \left\{ \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\| + \sum_{\alpha=1,2} \|\bar{D}_\alpha\| \right) + \varepsilon \left(\sum_{\alpha=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\| + \|\bar{D}_3\| \right) + \varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{33}\| \right\},$$

on en déduit aisément la Convergence forte de $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ vers $(u^{(0)}, \varphi^{(0)})$ et par suite, le théorème suivant :

Théorème (E-1)

Sous l'hypothèse où le problème variationnel des plaques piézoélectriques (voir théorème C-1) admet une solution unique, il existe $(\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}, D_\alpha^{(0)}, u_i^{(0)}, \varphi^{(0)})$ dans $(L^2(\Omega))^4 \times (L^2(\Omega))^2 \times V \times \Phi$ tel que, pour ε tendant vers zéro :

$$\begin{array}{l}
 \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon \rightarrow \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \text{ dans } L^2(\Omega) \\
 D_\alpha^\varepsilon \rightarrow D_\alpha^{(0)} \text{ dans } L^2(\Omega) \\
 \varepsilon \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \\
 \varepsilon D_3^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \\
 \varepsilon^2 \sigma_{33}^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \\
 (u_i^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \rightarrow (u_i^{(0)}, \varphi^{(0)}) \text{ dans } (H^1(\Omega))^2
 \end{array}$$

CHAPITRE F

Modèle de plaques piézoélectriques multicouches.

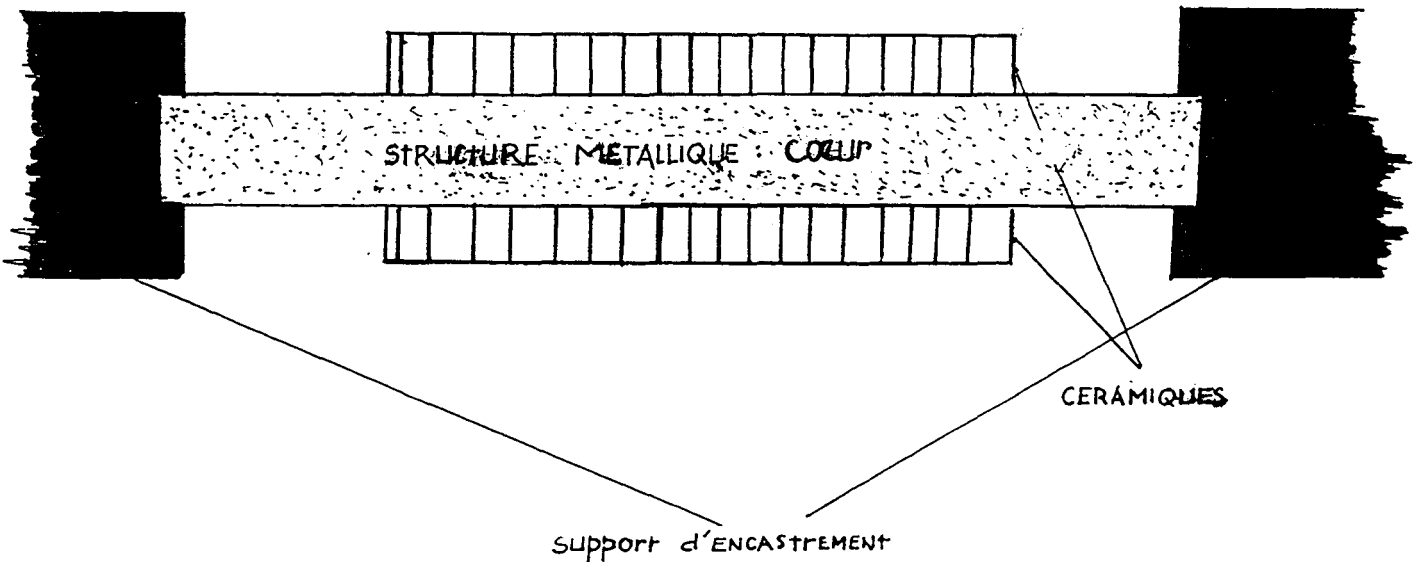
Etude des trilames piézoélectriques ou plaques " Sandwich ".

I Introduction

Comme plaque multicouche, nous nous intéressons plus particulièrement aux trilames piézoélectriques, éléments essentiels dans la construction de nombreux hydrophones, qui sont des détecteurs immergés d'ondes acoustiques, employés en sismologie, en détection pétrolière...etc...

Il s'agit de matériaux composites constitués par deux plaques minces de céramique piézoélectrique, généralement circulaires, collées de part et d'autre d'une structure métallique à périphérie encastrée, de même forme que les deux plaques, mais aux dimensions latérales généralement plus grandes.

Les faces des deux plaques portent des électrodes, et les polarisations leur sont normales ; mais en réalité, les faces supérieure et inférieure des plaques de céramique sont totalement couvertes de métal et constituent de ce fait des électrodes.(cf figure ci-dessous).



Si nous désignons respectivement par E, ν, h et Z le module de Young, le Coefficient de Poisson, l'épaisseur et la Côte du Coeur du trilame, on a, pour toute fonction $C(x_3)$ constante sur cette partie du matériau :

$$\begin{aligned}
 \int_{Z-\frac{h}{2}}^{Z+\frac{h}{2}} C(x_3) dx_3 &= hC(x_3) \\
 \int_{Z-\frac{h}{2}}^{Z+\frac{h}{2}} x_3 C(x_3) dx_3 &= hZC(x_3) \\
 \int_{Z-\frac{h}{2}}^{Z+\frac{h}{2}} x^2 C(x_3) dx_3 &= \frac{1}{12}(12hZ^2 + h^3)
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

Nous avons, pour des raisons de commodité, supposé que la disposition du matériau n'est pas symétrique par rapport à sa surface moyenne ω .

Ainsi, le modèle général de plaques en piézoélectricité linéaire, exprimé à travers les équations (C-17) à (C-20) consiste désormais à trouver un champ de déplacement $(\tilde{u}_\alpha^{(0)}, u_3^{(0)})$ dans $(H_0^1(\omega))^2 \times H_0^2(\omega)$, ainsi qu'un potentiel électrique $\varphi^{(0)}$ élément de $H^1(\omega)$ tels que :

$$\begin{aligned}
 \forall \tilde{v} &= (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in (H_0^1(\omega))^2, \\
 \int_{\omega} \int_{-1}^{Z-\frac{h}{2}} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta}(\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\alpha\beta}(\tilde{v}) &+ \int_{\omega} \int_{Z+\frac{h}{2}}^1 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta}(\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\alpha\beta}(\tilde{v}) \\
 + \int_{\omega} \frac{Eh}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\alpha\beta}(\tilde{v}) &+ \nu \gamma_{\mu\mu}(\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\mu\mu}(\tilde{v}) \} \\
 - \int_{\omega} \frac{EhZ}{(1-\nu^2)} (-\Delta u_3^{(0)} \partial_\alpha \tilde{v}_\alpha) & \\
 = \int_{\omega} (T_\alpha^+(x_1, x_2) + T_\alpha^-(x_1, x_2)) \tilde{v}_\alpha &
 \end{aligned} \tag{F.2}$$

$$\forall v_3 \in H_0^2(\omega)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \int_{-1}^{Z-\frac{h}{2}} x_3^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} v_3 - \int_{\omega} \int_{-1}^{Z-\frac{h}{2}} x_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta} (\tilde{u}^{(0)}) \partial_{\alpha\beta} v_3 \\ & + \int_{\omega} \frac{Eh(h^2 + 12Z^2)}{12(1-\nu^2)} \Delta u_3^{(0)} \Delta v_3 - \int_{\omega} \frac{ZEh}{(1-\nu^2)} \partial_{\alpha} \tilde{u}_{\alpha}^{(0)} \Delta v_3 \\ & \int_{\omega} \int_{Z+\frac{h}{2}}^1 x_3^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} v_3 - \int_{\omega} \int_{Z+\frac{h}{2}}^1 x_3 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta} (\tilde{u}^{(0)}) \partial_{\alpha\beta} v_3 \quad (F.3) \\ & = \int_{\omega} ((T_3^+(x_1, x_2) + T_3^-(x_1, x_2)) + \partial_{\alpha} (T_{\alpha}^+ + T_{\alpha}^-)) v_3 \end{aligned}$$

$$\forall \psi \in \left\{ \varphi \in H^1(\omega), \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \gamma \right\} \quad (F.4)$$

$$\int_{\omega} \int_{-1}^{Z-\frac{h}{2}} \tilde{\varepsilon}_{11}(\Delta_2 \varphi^{(0)}) \psi + \int_{\omega} \int_{Z+\frac{h}{2}}^1 \tilde{\varepsilon}_{11}(\Delta_2 \varphi^{(0)}) \psi = \int_{\omega} \langle W \rangle \psi ds$$

Remarques (F-1)

Si la surface moyenne du trilame coïncide avec la surface moyenne de sa partie métallique, alors Z prend la valeur zéro et de ce fait, les équations des plaques multicouches se découpent sous la forme suivante, dans le cas d'une faible anisotropie.

II Modèle de plaques multicouches membranaires minces

$$\forall \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in (H_0^1(\omega))^2$$

Trouver $\tilde{u}^{(0)}$ tel que :

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} \int_{-1}^{\frac{h}{2}} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta} (\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\alpha\beta} (\tilde{v}) + \int_{\omega} \int_{\frac{h}{2}}^1 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta} (\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\alpha\beta} (\tilde{v}) \\
& + \int_{\omega} \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left\{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta} (\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\alpha\beta} (\tilde{v}) + \nu \gamma_{\mu\mu} (\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\mu\mu} (\tilde{v}) \right\} \quad (F.5) \\
& = \int_{\omega} (T_{\alpha}^{+} + T_{\alpha}^{-}) \tilde{v}_{\alpha}
\end{aligned}$$

III Modèle de flexion des plaques multicouches

$$\forall v_3 \in H_0^2(\omega)$$

Trouver $u_3^{(0)}$ tel que : (F.6)

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} \int_{-1}^{\frac{h}{2}} x_3^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} v_3 + \int_{\omega} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta u_3^{(0)} \Delta v_3 + \int_{\omega} \int_{\frac{h}{2}}^1 x_3^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta} (u^{(0)}) \gamma_{\alpha\beta} (\tilde{v}) \\
& = \int_{\omega} ((T_3^{+}(x_1, x_2) + T_3^{-}(x_1, x_2) + \partial_{\alpha} (T_{\alpha}^{+}(x_1, x_2) + T_{\alpha}^{-}(x_1, x_2)))) v_3
\end{aligned}$$

A chacun de ces deux modèles se rajoute une contribution électrique énoncée comme suit :

$$\forall \psi \in \left\{ \varphi \in H^1(\omega), \tilde{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \gamma \right\}$$

Trouver $\varphi^{(0)} \in H^1(\omega)$ tel que (F.7)

$$\int_{\omega} \int_{-1}^{\frac{h}{2}} \tilde{\varepsilon}_{11} (\Delta_2 \varphi^{(0)}) \psi + \int_{\omega} \int_{\frac{h}{2}}^1 \tilde{\varepsilon}_{11} (\Delta_2 \varphi^{(0)}) \psi = \int_{\omega} (W^{+} + W^{-}) \psi ds$$

Cependant, des équations précédentes, se déduisent aisément les modèles membranaire et de flexion des plaques minces piézoélectriques sous l'hypothèse d'une faible anisotropie. Aussi obtient-on :

IV Modèle de plaques membranaires minces

$$\begin{aligned} \forall \tilde{v} &= (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in (H_0^1(\omega))^2 \\ \text{Trouver } \tilde{u}_\alpha^{(0)} &\text{ dans } (H_0^1(\omega))^2 \text{ tel que :} \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

$$\int_{\omega} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta}(\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\alpha\beta}(\tilde{v}) = \int_{\omega} (T_\alpha^+ + T_\alpha^-) \tilde{v}_\alpha$$

V Modèle de plaques minces en flexion

$$\begin{aligned} \forall v_3 &\in H_0^2(\omega) \\ \text{Trouver } \tilde{u}_3^{(0)} &\text{ dans } H_0^2(\omega) \text{ tel que :} \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

$$\frac{2}{3} \int_{\omega} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \gamma_{\alpha\beta} v_3 = \int_{\omega} \{ (T_3^+ + T_3^-) + \partial_\alpha (T_\alpha^+ + T_\alpha^-) \} v_3$$

L'aspect électrique se traduit quant à lui comme suit :

$$\begin{aligned} \forall \psi &\in \left\{ \varphi \in H^1(\omega), \tilde{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \gamma \right\} \\ \text{Trouver } \varphi^{(0)} &\in H^1(\omega) \text{ tel que} \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

$$\int_{\omega} \int_{-1}^1 \tilde{\varepsilon}_{11} (\Delta_2 \varphi^{(0)}) \psi = \int_{\omega} (W^+ - W^-) \psi$$

Remarque (F.2)

En explicitant l'équation (F-6), il apparaît que $u_3^{(0)}$ vérifie :

$$\begin{aligned} & \frac{8-h^3}{12} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot (\partial_{\alpha\beta\gamma\delta} u_3^{(0)}) + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 u_3^{(0)} \\ & = (T_3^+(x_1, x_2) + T_3^-(x_1, x_2) + \partial_\alpha (T_\alpha^+(x_1, x_2) + T_\alpha^-(x_1, x_2))) \text{ sur } \omega \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

$$u_3^{(0)} = 0 \quad (\text{F.12})$$

$$\frac{8-h^3}{12} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} n_\alpha n_\beta + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta u_3^{(0)} = 0 \text{ sur } \gamma$$

Ces équations constituent la version locale du modèle de flexion des plaques piézoélectriques multicouches.

En reprenant cette fois le modèle de flexion (F-9) des plaques minces, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta\gamma\delta} u_3^{(0)} & = T_3^+(x_1, x_2) + T_3^-(x_1, x_2) + \partial_\alpha (T_\alpha^+(x_1, x_2) + T_\alpha^-(x_1, x_2)) \\ & \text{sur } \omega \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \cdot n_\alpha n_\beta & = 0 \\ u_3^{(0)} & = 0 \end{aligned} \quad \text{sur } \gamma \quad (\text{F.14})$$

On réalise alors que les structures monocouches se déforment en flexion tout comme les plaques multicouches dès lors que l'on a :

$$\left(\frac{8-h^3}{12} C_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \frac{2}{3} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \right) \partial_{\alpha\beta\gamma\delta} u_3^{(0)} = 0 \quad (\text{F.15})$$

CHAPITRE G

Conditions aux limites permettant

d'absorber l'effet de bord.

I Introduction

Nous allons dans ce chapitre, mettre en oeuvre des conditions aux limites permettant d'absorber l'effet de couche limite observé dans le chapitre D. Nous distinguerons le cas des plaques faiblement anisotropes à celui plus complexe, des plaques à anisotropie forte.

II Cas d'une anisotropie faible

Reprenons le problème des plaques piézoélectriques.

En l'explicitant et en tenant compte du développement asymptotique introduit au théorème (C-1), il vient :

$$\int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \tau_{\gamma\delta} - \int_{\Omega} \tau_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta}^{(0)} = 0 \quad (G.1)$$

$$\int_{\Omega} \tau_{\alpha 3} (\partial_{\alpha} u_3^{(0)} + \partial_3 u_{\alpha}^{(0)}) = 0 \quad (G.2)$$

$$\int_{\Omega} \tau_{33} \partial_3 u_3^{(0)} = 0 \quad (G.3)$$

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \tilde{b}_{\alpha\alpha} D_{\alpha}^{(0)} \delta_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_{\alpha}^{(0)} \delta_{\alpha} = 0 \quad (G.4)$$

$$\int_{\Omega} \varphi_{,3}^{(0)} \delta_3 = 0 \quad (G.5)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \partial_{\alpha} v_{\beta} + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \partial_3 v_{\alpha} = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} T_{\alpha}^{\pm} v_{\alpha} \quad (G.6)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} \partial_{\alpha} v_3 + \int_{\Omega} \sigma_{33}^{(0)} \partial_3 v_3 = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} T_3^{\pm} v_3 \quad (G.7)$$

$$\int_{\Omega} (D_{\alpha}^{(0)} \partial_{\alpha} \psi + D_3^{(0)} \partial_3 \psi) = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} W^{\pm} \psi \quad (G.8)$$

G.3

Il est évident que les champs $\sigma_{\alpha 3}^{(0)}$ et $\sigma_{33}^{(0)}$ vérifient les relations (G-6) et (G-7) dès lors que :

Pour tout $v = (v_\alpha, v_3)$ élément d'un ensemble que nous aurons progressivement à construire, les relations suivantes sont satisfaites :

$$\int_{\Gamma_0} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} n_\alpha v_\beta = 0 \quad (\text{G.9})$$

$$\int_{\Gamma_0} \sigma_{\alpha 3}^{(0)} n_\alpha v_3 = 0 \quad (\text{G.10})$$

Ces deux relations peuvent encore s'exprimer sous la forme :

$$\int_{-1}^1 A_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma,\delta}^{(0)} n_\alpha v_\beta = 0 \quad (\text{G.11})$$

$$\int_{-1}^1 x_3 A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta}^{(0)} n_\alpha v_\beta = 0 \quad (\text{G.12})$$

$$\int_{-1}^1 \sigma_{\alpha 3}^{(0)} n_\alpha v_3 = 0 \quad (\text{G.13})$$

Par ailleurs, le champ $D_\alpha^{(0)}$ satisfait à la relation (G-8) si

$$\int_{-1}^1 D_\alpha^{(0)} n_\alpha \Psi = 0 \quad (\text{G.14})$$

soit
$$\int_{-1}^1 \tilde{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \eta} \Psi = 0 \quad (\text{G.15})$$

En outre si l'on tient compte de l'identité

$$v_\beta = n_\beta (n_\mu v_\mu) + n_\beta^\perp (n_\mu^\perp v_\mu), \quad (\text{G.16})$$

les relations (G-11) et (G-12) entraînent alors :

$$\int_{-1}^1 A_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma,\delta}^{(0)} n_\alpha n_\beta (n_\mu v_\mu) = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma,\delta}^{(0)} n_\alpha n_\beta \int_{-1}^1 n_\mu v_\mu = 0 ; \quad (\text{G.17})$$

G.4

$$\int_{-1}^1 A_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma,\delta}^{(0)} n_\alpha n_\beta^\perp (n_\mu^\perp v_\mu) = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{u}_{\gamma,\delta}^{(0)} n_\alpha n_\beta^\perp \int_{-1}^1 n_\mu^\perp v_\mu = 0; \quad (G.18)$$

$$\int_{-1}^1 x_3 A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta}^{(0)} n_\alpha n_\beta^\perp (n_\mu^\perp v_\mu) = A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta}^{(0)} n_\alpha n_\beta^\perp \int_{-1}^1 x_3 (n_\mu^\perp v_\mu) = 0; \quad (G.19)$$

Si à présent, nous choisissons l'élément (v, ψ) dans $(H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_{-1}^1 \psi dx_3 = 0 \quad (G.22)$$

$$\int_{-1}^1 n_\mu v_\mu dx_3 = 0 \quad (G.21)$$

$$\int_{-1}^1 (n_\mu^\perp v_\mu) x_3 dx_3 = 0 \quad (G.22)$$

les relations (G-17) et (G-18), donc à fortiori (G-11) sont évidemment vérifiées et il en est de même de la relation (G-15).

Par ailleurs, l'on a :

$$\int_{-1}^1 x_3 A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta}^{(0)} n_\alpha v_\beta = A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta}^{(0)} n_\alpha n_\beta \int_{-1}^1 x_3 (n_\mu v_\mu) = 0 \text{ sur } \gamma$$

en vertu de la relation (F-17), et en supposant une frontière polygonale. La relation (G-12) est donc également vérifiée.

Il ne nous reste plus qu'à construire des conditions naturelles supplémentaires qui permettraient d'assurer la validité de la relation (G-13).

En effet, en considérant $T_\alpha^- = 0$ dans un voisinage de la frontière Γ_0 , il vient :

$$\int_{-1}^1 \sigma_{\alpha 3}^{(0)} n_\alpha v_3 = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta}^{(0)} n_\alpha \int_{-1}^1 (x_3^2 - 1) v_3 - A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{3,\gamma\delta}^{(0)} n_\alpha \int_{-1}^1 (x_3 + 1) v_3;$$

Ainsi en choisissant v_3 tel que :

$$\int_{-1}^1 (x_3^2 - 1)v_3 = 0 \quad (\text{G.23})$$

$$\int_{-1}^1 (x_3 + 1)v_3 = 0 \quad (\text{G.24})$$

la relation (G-13) est alors vérifiée et tout ceci conduit au résultat suivant :

Théorème G-1

Soit g_α^\pm une fonction supposée nulle au voisinage de la frontière Γ_0^ε et si l'on suppose que la frontière γ est polygonale, alors les équations (G-1) à (G-8) admettent une solution unique $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(0)}, \varphi^{(0)})$ dans l'espace

$\Sigma \times \Delta \times V^{\varepsilon^{**}} \times \Phi^{\varepsilon^{**}}$ où :

$$V^{\varepsilon^{**}} = \left\{ v = \{v_i\} \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3; \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} n_\mu v_\mu = 0, \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} n_\mu^\perp v_\mu = 0, \right.$$

$$\left. \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3^\varepsilon (n_\mu^\perp v_\mu) = 0, \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (x_3^{\varepsilon^2} - \varepsilon^2)v_3 = 0, \right.$$

$$\left. \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (x_3 + \varepsilon)v_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \right\}$$

et

$$\Phi^{\varepsilon^{**}} = \left\{ \psi \in H^1(\Omega^\varepsilon) ; \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \right\}.$$

Cette solution vérifie en outre le problème consistant à trouver

$(\tilde{u}_\alpha^{(0)}, u_3^{(0)}) \in H_0^1(\omega) \times H^2(\omega)$ et $\varphi^{(0)}$ élément de l'ensemble

$\left\{ \xi \in H^1(\omega) ; \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \gamma \right\}$ tels que :

$$\forall \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) \in (H_0^1(\omega))^2$$

$$\int_\omega C_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta}(\tilde{u}^{(0)}) \gamma_{\alpha\beta}(\tilde{v}) = \int_\omega (T_\alpha^+ + T_\alpha^-) \tilde{v}_\alpha$$

$$\forall v_3 \in H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega),$$

$$\frac{2}{3} \int_\omega C_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} v_3 = \int_\omega ((T_3^+ + T_3^-) + \partial_\alpha (T_\alpha^+ + T_\alpha^-)) v_3$$

$$\begin{aligned}
& \forall \psi \in H^1(\omega) \\
& \int_{\omega} \tilde{\varepsilon}_{11}(\Delta_2 \varphi^{(0)}) \psi = \frac{1}{2} \int_{\omega} (W^+ - W^-) \psi \\
& \text{avec par ailleurs,} \\
& \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} (\tilde{u}_{\gamma}^{(0)} - x_3 u_{3,\gamma}^{(0)})_{,\delta}, \\
& \sigma_{\alpha 3}^{(0)} = - \int_{-1}^{x_3} \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(0)}(x_1, x_2, \xi) d\xi \\
& \sigma_{33}^{(0)} = - \int_{-1}^{x_3} \sigma_{\alpha 3,\alpha}^{(0)}(x_1, x_2, \xi) d\xi \\
& D_{\alpha}^{(0)} = - \tilde{\varepsilon}_{11} \varphi_{,\alpha}^{(0)} \\
& D_3^{(0)} = -W^- + (1+x_3) \Delta_2 \varphi^{(0)}.
\end{aligned}$$

Reprenons à présent le problème consistant à trouver $(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, u^{(1)}, \varphi^{(1)})$ tel que :

$$\begin{aligned}
& A_0(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \tau, \delta) + B_0(\tau, \delta, u^{(1)}, \varphi^{(1)}) \\
& \quad = -A_1(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, \tau, \delta), \quad \forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta, \quad (\text{G.25})
\end{aligned}$$

$$B_0(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \nu, \phi) = 0 \quad \forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta, \quad (\text{G.26})$$

Ces relations (cf chapitre D) se traduisent par :

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} - u_{\delta,\gamma}^{(1)} + b_{\gamma\delta 3} D_3^{(0)} = 0 \quad (\text{G.27})$$

$$u_{\alpha,3}^{(1)} + u_{3,\alpha}^{(1)} = b_{3\alpha\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}}^{(0)} \quad (\text{G.28})$$

$$u_{3,3}^{(1)} = 0 \quad (\text{G.29})$$

$$\varphi_{,\underline{\alpha}}^{(1)} - \tilde{b}_{\underline{\alpha}\underline{\alpha}} D_{\underline{\alpha}}^{(1)} - \tilde{a}_{\underline{\alpha}\alpha 3} \sigma_{\underline{\alpha} 3}^{(0)} = 0 \quad (\text{G.30})$$

$$\varphi_{,3}^{(1)} - \tilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \quad (\text{G.31})$$

L'équation (G-30) implique

$$u_3^{(1)} = \eta(x_1, x_2) \quad (\text{G.32})$$

et l'on doit avoir, compte tenu des conditions aux limites relatives à l'espace ν^{∞} :

$$u_3^{(1)} \in H_0^1(\omega) \quad (\text{G.33})$$

Considérant à présent l'équation (G-28), on obtient :

$$u_\alpha^{(1)} = \tilde{u}_\alpha^{(1)} - x_3(u_3^{(1)} + \frac{e_{15}}{c_{44}}\varphi^{(0)})_{,\alpha} \quad (\text{G.34})$$

où $\tilde{u}_\alpha^{(1)}$ est une fonction arbitraire de l'espace $H^2(\omega)$, puisque $\tilde{u}_\alpha^{(1)} \in H^1(\Omega)$.
On a d'ailleurs également $\varphi^{(0)}$ dans le même espace.

D'autre part, la condition

$$\int_{-1}^1 u_\alpha^{(1)} n_\alpha = 0 \quad (\text{G.35})$$

exige que $\tilde{u}_\alpha^{(1)} n_\alpha$ appartienne à $H_0^1(\omega)$.

Pour des raisons de commodité, nous choisirons $\tilde{u}_\alpha^{(1)}$ de telle sorte que $\tilde{u}_\alpha^{(1)} n_\alpha^\perp$ soit également nul ;

Aussi obtenons nous :

$$\tilde{u}_\alpha^{(1)} n_\alpha^\perp = -x_3(u_3^{(1)} + \frac{e_{15}}{c_{44}}\varphi^{(0)})_{,\alpha} n_\alpha^\perp \quad (\text{G.36})$$

Et par suite, de toute évidence :

$$\int_{-1}^1 u_\alpha^{(1)} n_\alpha^\perp = 0 \quad (\text{G.37})$$

Par ailleurs,

$$\int_{-1}^1 x_3 n_\alpha^\perp u_\alpha^{(1)} = -\frac{2}{3} (u_3^{(1)} + \frac{e_{15}}{c_{44}}\varphi^{(0)})_{,\alpha} n_\alpha^\perp \quad (\text{G.38})$$

or

$$u_3^{(1)} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0$$

et $\varphi^{(0)}$ vérifie en vertu des conditions aux limites de l'espace Φ^{**} :

$$\varphi^{(0)} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0,$$

par conséquent, on a :

$$\int_{-1}^1 x_3 n_\alpha^\perp u_\alpha^{(1)} = \int_{-1}^1 x_3^2 (\partial_\alpha u_3^{(1)} + \frac{e_{15}}{c_{44}}\varphi_{,\alpha}^{(0)}) n_\alpha^\perp = 0; \quad (\text{G.39})$$

En outre, les équations (G-30) et (G-31) impliquent

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{2} x_3^2 \tilde{a}_{3\alpha\beta} a_{\gamma\delta\beta\alpha}^{-1} u_{3,\delta\gamma}^{(0)}, \quad (\text{G.40})$$

avec évidemment

$$\int_{-1}^1 \varphi^{(1)} dx_3 = 0. \quad (\text{G.41})$$

Des équations (G-25) à (G-41) se déduit par conséquent le résultat suivant :

Théorème (G-2)

Sous les hypothèses du théorème (G-1),
les équations (G-2) à (G-31) admettent une solution $(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, u^{(1)}, \varphi^{(1)})$ dans
l'espace $(\mathbf{L}^2(\Omega))^4 \times (H^1(\Omega))^2 \times V^{**} \times \Phi^{**}$.

Remarque (G-1)

Les conditions aux limites sur V^{**} sont manifestement vérifiées si l'on envisage l'hypothèse d'encastrement de la plaque.

Par ailleurs, il est à noter que la solution $(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, u^{(1)}, \varphi^{(1)})$ n'est pas unique puisque le terme $u_\alpha^{(1)}$ n'a pas été précisément déterminé.

III Cas d'une anisotropie forte

Si nous choisissons l'élément (v, ψ) dans $(H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{-1}^1 \psi dx_3 = 0 \quad (G.42)$$

$$\int_{-1}^1 |n_\mu v_\mu|^2 dx_3 = 0 \quad (G.43)$$

$$\int_{-1}^1 |n_\mu^\perp v_\mu|^2 dx_3 = 0 \quad (G.44)$$

et si nous tenons compte de l'inégalité de Hölder, les relations (G-17) et (G-18), donc à fortiori (G-11) et (G-12) sont évidemment vérifiées.

Par ailleurs, la relation (G-15) est, en vertu des conditions aux limites (C-34), également satisfaite.

D'autre part, en considérant $T_\alpha^- = 0$ dans un voisinage à la frontière Γ_0 , on a :

$$\int_{-1}^1 \sigma_{\alpha 3}^{(0)} n_\alpha v_3 dx_3 = - \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^{x_3} \partial_\beta \{ A_{\alpha\beta\gamma\delta} (u_\gamma^{(0)} - tu_{3,\gamma}^{(0)}) \}_{,\delta} dt \right) n_\alpha v_3 dx_3 \quad (G.45)$$

Cette relation est vérifiée, d'après l'inégalité de Hölder, si l'on choisit v_3 tel que :

$$\int_{-1}^1 |v_3|^2 dx_3 = 0 \quad (C.46)$$

Par suite, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème (G-3)

Soit g_α^\pm une fonction supposée nulle au voisinage de la frontière Γ_0^ε , les équations

(G-1) à (G-8) admettent une solution unique dans l'espace $\Sigma \times \Delta \times V_1^{**} \times \Phi^{**}$

où :

$$V_1^{**} = \left\{ v = (v_i) \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3 : \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |n_\mu v_\mu|^2 dx_3 = 0, \right. \\ \left. \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |n_\mu^\perp v_\mu|^2 dx_3 = 0, \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v_3|^2 dx_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \right\}$$

Reprenant les relations (G-25) à (G-32), et tenant compte des conditions aux limites relatives à V_1^{**} , il vient :

$$\int_{-1}^1 |u_3^{(1)}|^2 dx_3 = 0 \quad (\text{G.47})$$

soit

$$u_3^{(1)} \in H_0^1(\omega) \quad (\text{G.48})$$

Par ailleurs, la condition $\int_{-1}^1 |u_\alpha^{(1)} n_\alpha|^2 dx_3 = 0$ où $u_\alpha^{(1)}$ est définie en (G-34), implique :

$$\tilde{u}_\alpha^{(1)} n_\alpha \in H_0^1(\omega)$$

car

$$\int_{-1}^1 |u_\alpha^{(1)} n_\alpha|^2 dx_3 = \frac{2}{3} (u_{3,\alpha}^{(1)} n_\alpha + \frac{e_{15}}{c_{44}} \varphi_{,\alpha}^{(0)} n_\alpha)^2 + \int_{-1}^1 |\tilde{u}_\alpha^{(1)} n_\alpha|^2 dx_3$$

et que

$$u_3^{(1)} \text{ et } \varphi^{(0)} \text{ sont tous deux nuls sur } \Gamma_0.$$

De la même manière, on a :

$$\int_{-1}^1 |u_\alpha^{(1)} n_\alpha^\perp|^2 dx_3 = 0$$

et par suite, le résultat suivant :

Théorème (G-4)

Sous les hypothèses du théorème (G-3), les équations (G-25) et (G-26) admettent une solution $(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, u^{(1)}, \varphi^{(1)})$ dans l'espace $(L^2(\Omega))^4 \times (H^1(\Omega))^2 \times V_1^{**} \times \Phi^{**}$.

Remarque (G-2)

La détermination de $u^{(1)}$ permet alors le calcul de $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ sous la forme :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\delta,\gamma}^{(1)} - A_{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\gamma\delta 3} D_3^{(0)} \quad (\text{G.49})$$

IV Estimation de l'erreur d'approximation de

$$\underline{(\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)} \text{ par } \underline{(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(0)}, \varphi^{(0)})}$$

En reprenant (D-19), il vient, après introduction des variables d'écart définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon - \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} - \varepsilon \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \\ \bar{\sigma}_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon - \sigma_{\alpha 3}^{(0)} \\ \bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33}^\varepsilon - \sigma_{33}^{(0)} \\ \bar{D}_\alpha = D_\alpha^\varepsilon - D_\alpha^{(0)} - \varepsilon D_\alpha^{(1)} \\ \bar{D}_3 = D_3^\varepsilon - D_3^{(0)} \\ \bar{\varphi} = \varphi^\varepsilon - \varphi^{(0)} - \varepsilon \varphi^{(1)} \\ \bar{u} = u^\varepsilon - u^{(0)} - \varepsilon u^{(1)} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & C \left\{ \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|^2 + \sum_{\alpha=1,2} \|\bar{D}_\alpha\|^2 \right) + \varepsilon^2 \left(\sum_{\alpha=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|^2 + \|\bar{D}_3\|^2 \right) + \varepsilon^4 \|\bar{\sigma}_{33}\|^2 \right\} \\ & \leq \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i A_i((\bar{\sigma}, \bar{D}), (\bar{\sigma}, \bar{D})) = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \left\{ A_i((\sigma^\varepsilon, D^{(2)}), (\bar{\sigma}, \bar{D})) - A_i((\sigma^{(0)}, D^{(0)}), (\bar{\sigma}, \bar{D})) \right\} \\ & \quad + \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1,2} \tilde{b}_{\alpha\alpha} D_\alpha^{(1)} \bar{D}_\alpha + \varepsilon \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{\sigma}_{\gamma\delta} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \tilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{D}_3 \\ & \quad - \varepsilon^3 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{\sigma}_{33} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1,2} b_{3\alpha\alpha} D_\alpha^{(1)} \bar{\sigma}_{\alpha 3} \\ & = -B((\bar{\sigma}, \bar{D}), (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)) + B_0((\bar{\sigma}, \bar{D}), (u^{(0)}, \varphi^{(0)})) + \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1,2} \tilde{b}_{\alpha\alpha} D_\alpha^{(1)} \bar{D}_\alpha \\ & \quad + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1,2} b_{3\alpha\alpha} D_\alpha^{(1)} \bar{\sigma}_{\alpha 3} - \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^{(0)}, D^{(0)}), (\bar{\sigma}, \bar{D})) + \varepsilon \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{\sigma}_{\gamma\delta} \\ & \quad + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \tilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{D}_3 - \varepsilon^3 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{\sigma}_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -B((\bar{\sigma}, \bar{D}), (u, \varphi)) + \varepsilon \int_{\Omega} (\bar{\sigma}_{ji} u_{i,j}^{(1)} + \varphi_{,k}^{(1)} \bar{D}_k) + \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1,2} \tilde{b}_{\alpha\alpha} D_{\alpha}^{(1)} \bar{D}_{\alpha} \\
 &+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1,2} b_{3\alpha\alpha} D_{\alpha}^{(1)} \bar{\sigma}_{\alpha 3} - \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^{(0)}, D^{(0)}), (\bar{\sigma}, \bar{D})) + \varepsilon \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{\sigma}_{\gamma\delta} \\
 &+ \varepsilon^2 \int_{\Omega} \tilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{\sigma}_{33} - \varepsilon^3 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^{(1)} \bar{\sigma}_{33}
 \end{aligned}$$

Mais comme $(\bar{u}, \bar{\varphi}) \in V^{**} \times \Phi^{**}$, alors

$$B((\sigma^{\varepsilon}, D^{\varepsilon}), (\bar{u}, \bar{\varphi})) = B((\sigma^{(0)}, D^{(0)}), (\bar{u}, \bar{\varphi}))$$

Et par suite :

$$B((\bar{\sigma}, \bar{D}), (\bar{u}, \bar{\varphi})) = -\varepsilon B((\sigma^{(1)}, D^{(1)}), (\bar{u}, \bar{\varphi}))$$

Par conséquent, l'on obtient, en vertu de l'inégalité de Schwartz :

$$\begin{aligned}
 &C \left\{ (\sum \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|^2 + \sum \|\bar{D}_{\alpha}\|^2) + \varepsilon^2 (\sum \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|^2 + \|\bar{D}_3\|^2) + \varepsilon^4 \|\bar{\sigma}_{33}\|^2 \right\} \\
 &\leq -B((\bar{\sigma}, \bar{D}), (\bar{u}, \bar{\varphi})) + C\varepsilon \leq C\varepsilon (1 + \|(\bar{u}, \bar{\varphi})\|) \\
 & \hspace{15em} V^{**} \times \Phi^{**}
 \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de l'inégalité

$$\sup_{(\tau, \delta) \in \Sigma \times \Phi} \frac{B^{\varepsilon}((\tau, \delta); (v, \phi))}{\|(\tau, \delta)\|} \geq C \|(v, \phi)\|,$$

$$(\tau, \delta) \in \Sigma \times \Phi$$

$$\forall (v, \phi) \in V^{**} \times \Phi^{**}$$

et si d'autre part, on considère la relation

$$\begin{aligned}
-B((\tau, \delta), (\bar{u}, \bar{\varphi})) &= \int_{\Omega} \tau_{ji} \bar{u}_{i,j} + \bar{\varphi}_{,k} \delta_k \\
&= \int_{\Omega} \tau_{ij} (u_{i,j}^{\varepsilon} - u_{i,j}^{(0)} - \varepsilon u_{i,j}^{(1)}) + (\varphi_{,k}^{\varepsilon} - \varphi_{,k}^{(0)} - \varepsilon \varphi_{,k}^{(1)}) \delta_k \\
&= -B((\tau, \delta); (u^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon})) + B((\tau, \delta); (u^{(0)}, \varphi^{(0)})) + \varepsilon B((\tau, \delta); (u^{(1)}, \varphi^{(1)})) \\
&= \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i A_i((\sigma^{\varepsilon}, D^{\varepsilon}), (\tau, \delta)) - A_0((\sigma^{(0)}, D^{(0)}); (\tau, \delta)) - \varepsilon A_0((\sigma^{(1)}, D^{(1)}); (\tau, \delta)) \\
&\quad - \varepsilon A_1((\sigma^{(0)}, D^{(0)}), (\tau, \delta))
\end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\|(\bar{u}, \bar{\varphi})\|_{V^m \times \Phi^m} &\leq C \varepsilon^4 + C \left\{ \left(\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\| + \sum_{\alpha=1,2} \|\bar{D}_{\alpha}\| \right) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \left(\sum_{\alpha=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\| + \|\bar{D}_3\| \right) + \varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{33}\| \right\}; \tag{G.50}
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'établir le résultat suivant :

Théorème (G-5)

Sous les mêmes hypothèses que le théorème (G-3) on a :

$$\begin{aligned}
\|\sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} - \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}\| &\leq C \varepsilon ; \alpha, \beta = 1, 2, \\
\|D_{\alpha}^{\varepsilon} - D_{\alpha}^{(0)}\| &\leq C \varepsilon ; \alpha = 1, 2, \\
\|\sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} - \sigma_{\alpha 3}^{(0)}\| + \|D_3^{\varepsilon} - D_3^{(0)}\| + \|\sigma_{33}^{\varepsilon} - \sigma_{33}^{(0)}\| &\leq C, \\
\|(u^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon}) - (u^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon})\| &\leq C \varepsilon.
\end{aligned}$$

Remarque (G-3)

En comparant le théorème (G-5) et la proposition (D-1), il apparaît, relativement au théorème (G-5), une amélioration de l'approximation de $(\sigma^{\varepsilon}, D^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}, \varphi^{\varepsilon})$ par $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(0)}, \varphi^{(0)})$, puisque nous passons globalement, d'une erreur en $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ à une erreur en ε (cf. théorème G-5).

CHAPITRE H

Une généralisation de l'intégrale de RICE

I Introduction

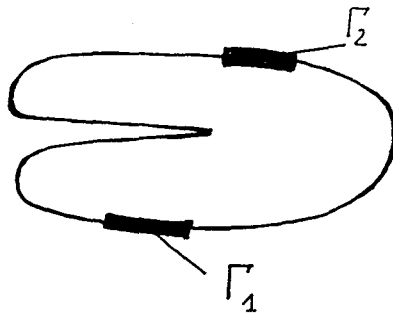
Nous nous proposons dans ce chapitre, d'appliquer aux milieux piézoélectriques, l'interprétation mathématique du critère de Griffith pour la propagation des fissures droites dans un milieu élastique (cf P. Destuynder (1)).

II Influence des perturbations d'un domaine Ω sur les champs électromagnétiques et mécaniques

Considérons des perturbations de l'ouvert Ω , en définissant, pour tout $\varepsilon > 0$, l'application

$$F^\varepsilon = I + \varepsilon \Theta : \Omega \rightarrow P \quad (\text{H.1})$$

où P est le plan engendré par Ω et Θ un champ de vecteurs défini sur Ω , supposé nul sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (cf figure H-1).

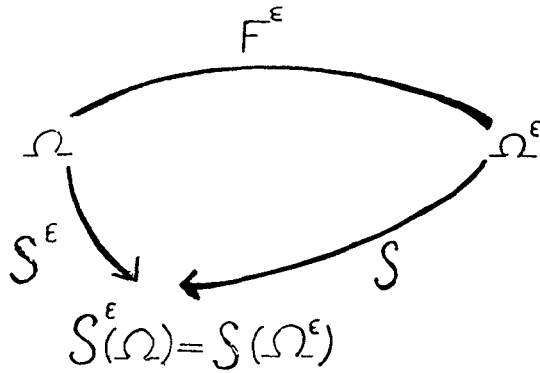


Soit à présent une application S définie sur l'ouvert $\Omega^\varepsilon = F^\varepsilon(\Omega)$; il lui est associé la fonction S^ε définie sur Ω telle que :

$$S^\varepsilon(M) = (S \circ F^\varepsilon)(M) \quad (\text{H.2})$$

et par suite

$$\int_{\Omega^\varepsilon} S = \int_{\Omega} S^\varepsilon (1 + \varepsilon \operatorname{div} \Theta + \varepsilon^2 \det \frac{\partial \Theta}{\partial M}); \quad (\text{H.3})$$



et si l'on désigne par u et ϕ respectivement, un champ de vecteurs et un potentiel électrique sur Ω^ε , on leur associera les champs

$$u^\varepsilon(M) = u \circ F^\varepsilon(M) \quad (\text{H.4})$$

$$\phi^\varepsilon(M) = \phi \circ F^\varepsilon(M)$$

Par suite

$$\left(\frac{\partial u}{\partial M^\varepsilon} \circ F^\varepsilon \right)(M) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial M} \circ \left(Id + \varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right)^{-1}(M) \quad (\text{H.5})$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial M^\varepsilon} \circ F^\varepsilon \right)(M) = \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial M} \circ \left(Id + \varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right)^{-1}(M)$$

Le problème de la piézoélectricité linéaire rapporté à l'ouvert Ω^ε s'écrit alors :

Trouver $(\sigma, D, u, \phi) \in \Sigma \times \Delta \times V \times \Phi$ tel que

$$\int_{\Omega^\varepsilon} (a_{ijkl} \sigma_{ij} \tau_{kl} + b_{ijp} D_p \tau_{ij}) d\Omega + \int_{\Omega} (\tilde{a}_{klp} \sigma_{lp} \delta_k + \tilde{b}_{kj} D_j \delta_k) d\Omega - \int_{\Omega^\varepsilon} \left\{ \text{tr} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial M^\varepsilon} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial M^\varepsilon} \cdot \delta \right\} d\Omega = 0, \quad \forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta \quad (\text{H.6})$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \left\{ \text{tr} \left(\sigma \frac{\partial v}{\partial M^\varepsilon} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial M^\varepsilon} \cdot D \right\} = \int_{\Gamma^\pm} (T^\pm v + W^\pm \phi), \quad \forall (v, \phi) \in V \times \Phi$$

Mais si à la solution (σ, D, u, ϕ) , nous associons les champs $\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon, u^\varepsilon$ et ϕ^ε définis par

$$\begin{aligned} \sigma^\varepsilon(M) &= (\sigma \circ F^\varepsilon)(M) \\ D^\varepsilon(M) &= (D \circ F^\varepsilon)(M) \\ u^\varepsilon(M) &= (u \circ F^\varepsilon)(M) \\ \phi^\varepsilon(M) &= (\phi \circ F^\varepsilon)(M) \end{aligned} \tag{H.7}$$

on peut énoncer les résultats suivants.

Théorème (H-1)

Sous l'hypothèse $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'élément $(\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon)$ défini ci-dessus est l'unique solution dans $(\Sigma \times \Delta) \times (V \times \Phi)$ du problème

Trouver $(\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon) \in \Sigma \times \Delta \times V \times \Phi$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta \quad \int_{\Omega} a_{ijkl} \sigma_{ij}^\varepsilon \tau_{kl} \det\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right) + (b_{ijp} D_p^\varepsilon \tau_{ij}) \det\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right) \\ &+ \int_{\Omega} \tilde{a}_{klp} \sigma_{ip}^\varepsilon \tau_k \det\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right) + (\tilde{b}_{kj} D_j^\varepsilon \delta_k) \det\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right) - \int_{\Omega} \text{tr}\left(\tau \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial M} \left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right)^{-1}\right) \det\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right) \\ &- \int_{\Omega} \delta \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial M} \cdot \left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right)^{-1} \det\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right) = 0 \\ &\forall (v, \varphi) \in V \times \Phi \\ &\int_{\Omega} \left\{ \text{tr}\left(\sigma^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial M} \left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right)^{-1}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial M} \left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right)^{-1} D^\varepsilon \right\} \det\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial M}\right) \\ &= \int_{\Gamma^\pm} (T^\pm v + W^\pm \varphi) ds \end{aligned}$$

Théorème (H-2)

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$, on a :

$$(\sigma^\varepsilon, D^\varepsilon, u^\varepsilon, \phi^\varepsilon) = (\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(0)}, \phi^{(0)}) + \varepsilon(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, u^{(1)}, \phi^{(1)}) + o(\varepsilon)$$

où $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(0)}, \phi^{(0)})$, $(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, u^{(1)}, \phi^{(1)})$ et $o(\varepsilon)$ sont des éléments de $(\Sigma \times \Delta) \times (V \times \Phi)$ tels que :

$$\text{i) } \lim_{(\Sigma \times \Delta) \times (V \times \Phi)} \|o(\varepsilon)\| = 0$$

ii) $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(0)}, \phi^{(0)})$ est la solution du problème de la piézoélectricité linéaire posé sur l'ouvert Ω .

iii) $(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, u^{(1)}, \phi^{(1)})$ est l'unique solution dans $(\Sigma \times \Delta) \times (V \times \Phi)$ du problème suivant :

$$\forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta$$

$$\int_{\Omega} (a_{ijkl} \sigma_{ij}^{(1)} \tau_{kl} + b_{ijp} D_p^{(1)} \tau_{ij}) + \int_{\Omega} (\tilde{a}_{klp} \sigma_{lp}^{(1)} \delta_k + \tilde{b}_{kj} D_j^{(1)} \delta_k) - \int_{\Omega} \left\{ \text{tr} \left(\tau \frac{\partial u^{(1)}}{\partial M} - \tau \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial M} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial M} - \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) \right\}$$

$$\forall (v, \varphi) \in V \times \Phi$$

$$\int_{\Omega} \text{tr} \left(\sigma^{(1)} \frac{\partial v}{\partial M} + \left\{ \sigma^{(0)} \frac{\partial v}{\partial M} \text{div} \frac{\partial v}{\partial M} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right\} \right) + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial M} D^{(1)} - \frac{\partial \varphi}{\partial M} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial M} D^{(0)} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial M} \right) D^{(0)} \text{div} \Theta \right\} = 0$$

La preuve est analogue à celle du théorème (1.5) (cf. P. Destuynder et M. Djaoua (1))

Remarque (H-1)

On peut observer que le problème iii) du théorème ci-dessus peut encore s'écrire :

« $(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, u^{(1)}, \phi^{(1)})$ est l'unique solution dans $(\Sigma \times \Delta) \times (V \times \Phi)$ vérifiant :

$$\forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta$$

$$\begin{aligned} A(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \tau, \delta) + B(\tau, \delta, u^{(1)}, \phi^{(1)}) = & - \int_{\Omega} \text{tr} \left(\tau \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) \\ & - \int_{\Omega} \text{tr} \left(\delta \left\{ \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right\}^T \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) \end{aligned} \quad (\text{H.8})$$

$$\forall (v, \varphi) \in V \times \Phi$$

$$\begin{aligned} B(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, v, \varphi) = & - \int_{\Omega} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial v}{\partial M} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) + \int_{\Omega} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial v}{\partial M} \right) \text{div} \Theta. \\ & - \int_{\Omega} \text{tr} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial M} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial M} D^{(0)} \right) + \int_{\Omega} \text{tr} \left(D^{(0)} \text{div} \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial M} \right)^T \right) \gg \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

III Calcul du Gradient de l'énergie dans la direction Θ

Nous définissons l'énergie du système constitué par le solide et les forces extérieures qui lui sont appliquées par :

$$W(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \text{tr} \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial M} \right) + \text{tr} \left(D (\nabla \phi)^T \right) \right\} \quad (\text{H.10})$$

où $(\nabla \phi)^T$ est un vecteur ligne.

La dérivée de $W(\Omega^\varepsilon)$ dans la direction Θ est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\Omega)}{\partial \Omega} \Theta = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W(\Omega^\varepsilon) - W(\Omega)}{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\Omega} \left\{ \text{tr} \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial M} \right) + D_i \phi_i \right\} \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} \left\{ \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) + D_i^{(0)} \phi_i^{(0)} \right\} \right); \\ = & -\frac{1}{2\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_f} (T_f u + W_f \phi) - \int_{\Gamma_f} (T_f u^{(0)} + W_f \phi^{(0)}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

où Γ_f est un morceau de la frontière de Ω invariant par F^ε ,

T_f une densité de forces surfaciques et W_f une densité surfacique de charges.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_f} (T_f (u - u^{(0)}) + \int_{\Gamma_f} W_f(\phi - \phi^{(0)}) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial M} \right) + \text{tr} \left\{ \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial M} \right) (D^{(0)})^T \right\} \\
&= \frac{1}{2} B_0(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(1)}, \phi^{(1)}) \\
&= -\frac{1}{2} A(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \sigma^{(0)}, D^{(0)}) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr} (D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \frac{\partial \Theta}{\partial M})
\end{aligned}$$

Mais si l'on impose la condition

$$\tilde{a}_{kip} \equiv b_{ipk},$$

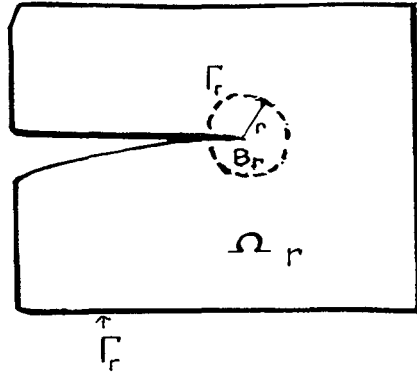
il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \Omega}(\Omega)\theta &= -\int_{\Omega} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) - \int_{\Omega} \text{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \text{div} \Theta + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \text{div} \Theta .
\end{aligned} \tag{H.13}$$

Cependant cette relation, par le fait qu'elle ne fournit pas de renseignements directement exploitables sur le gradient de l'énergie dans la direction Θ , est d'une utilisation pratique peu évidente.

IV Autre version du Gradient de l'énergie

Considérons la boule B_r de rayon r renfermant le sommet S d'une fissure (cf figure H-1)

FIG. H₁

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \Omega}(\Omega)\Theta &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ -\int_{\Omega_r} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) - \int_{\Omega_r} \text{tr} \left(D^{(0)} \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_{B_r} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) - \int_{B_r} \text{tr} \left(D^{(0)} \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \frac{\partial \Theta}{\partial M} \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \text{div} \Theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \text{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \text{div} \Theta + \frac{1}{2} \int_{B_r} \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \right) \text{div} \Theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \text{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \text{div} \Theta \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

Et en supposant par ailleurs que $\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \frac{\partial \Theta}{\partial M}$, $D^{(0)} \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \frac{\partial \Theta}{\partial M}$, $\text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \text{div} \Theta$

$D^{(0)} \text{div} \Theta \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M}$ sont intégrables dans Ω , alors, lorsque r tend vers zéro, les quatre intégrales portant sur B_r , ont toutes une mesure nulle.

D'autre part, tenant compte des identités

$$\text{tr} \left(C \frac{\partial u}{\partial M} \right) = -(\text{div} C)u + \text{div}(Cu) \quad (\text{H.15})$$

$$\alpha \text{div} q = -\text{Grad}(\alpha q) + \text{div}(\alpha q) \quad (\text{H.16})$$

Ainsi que des formules de Green, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \Omega}(\Omega) \otimes &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ \text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \right\} \otimes \bar{n} - \int_{\Gamma} \sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \otimes \bar{n} \quad (\text{H.17}) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \text{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \otimes \bar{n} - \int_{\Gamma} D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right) \otimes \bar{n} \end{aligned}$$

Cependant, la solution $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(0)}, \phi^{(0)})$ du problème de piézoélectricité linéaire vérifie :

$$\left| \begin{aligned} \text{div} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) &= \frac{1}{2} \text{Grad} \left(\text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{H.18})$$

$$\left| \begin{aligned} \text{div} \left(D^{(0)} \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right) &= \frac{1}{2} \text{Grad} \left(\text{tr} \left(D^{(0)} \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right) \right) \end{aligned} \right. \quad (\text{H.19})$$

En effet, sous la convention des indices répétés, on a :

$$\text{div} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) /_k = \sigma_{ij,i}^{(0)} u_{j,k}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(0)} u_{j,ki}^{(0)} \quad (\text{H.20})$$

$$\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} /_k = \sigma_{ij}^{(0)} u_{j,k}^{(0)}$$

Ainsi,

$$\text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) = \sigma_{ij}^{(0)} u_{j,i}^{(0)} \quad (\text{H.21})$$

et

$$\text{Grad} \left(\text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \right) /_k = \sigma_{ij,k}^{(0)} u_{j,i}^{(0)} + \sigma_y^{(0)} u_{j,ki}^{(0)} \quad (\text{H.22})$$

Mais comme :

$$\text{div} \sigma^{(0)} = 0 \quad (\text{H.23})$$

il vient :

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) - \frac{1}{2} \text{Grad} \left(\text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \right) /_k \\ = \frac{1}{2} (\sigma_y^{(0)} u_{j,ki}^{(0)} - \sigma_{ij,k}^{(0)} u_{j,i}^{(0)}) \end{aligned} \quad (\text{H.24})$$

Et puisque

$$\sigma_{ij}^{(0)} = A_{ijmn} u_{m,n}^{(0)}, \quad (\text{H.25})$$

alors

$$\sigma_{ij}^{(0)} u_{j,ki}^{(0)} - \sigma_{ij,k} u_{j,i}^{(0)} = A_{ijmn} u_{m,n}^{(0)} u_{j,ki}^{(0)} - A_{ijmn} u_{m,nk}^{(0)} u_{j,i}^{(0)} \quad (\text{H.26})$$

$$= A_{ijmn} u_{m,n}^{(0)} u_{j,ki}^{(0)} - A_{nmji} u_{j,i}^{(0)} u_{m,nk}^{(0)} \quad (\text{H.27})$$

Car $A_{ijmn} = A_{nmji}$;

d'où l'égalité :

$$\text{div} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) = \frac{1}{2} \text{Grad} \left(\text{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \right) \quad (\text{H.28})$$

Le même type de raisonnement conduit à :

$$\text{div} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) / k = D_{j,j}^{(0)} \phi_{,k}^{(0)} + D_j^{(0)} \phi_{,kj}^{(0)}, \quad (\text{H.29})$$

$$D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T / k = D_j^{(0)} \phi_{,k}^{(0)} ; \quad (\text{H.30})$$

et par suite

$$\text{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) = D_j^{(0)} \phi_j^{(0)} ; \quad (\text{H.31})$$

ainsi

$$\text{Grad} \left(\text{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \right) / k = D_{j,k}^{(0)} \phi_{,j}^{(0)} + D_j^{(0)} \phi_{,jk}^{(0)} \quad (\text{H.32})$$

Mais comme

$$\text{div} D^{(0)} = 0$$

il vient

$$\left(\text{div} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \right) - \frac{1}{2} \text{Grad} \left(\text{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \right) / k \quad (\text{H.33})$$

$$= \frac{1}{2} \left(D_j^{(0)} \phi_{,kj}^{(0)} - D_{j,k}^{(0)} \phi_{,j}^{(0)} \right)$$

et sachant par ailleurs que :

$$D_{\alpha}^{(0)} = -\tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \quad , \quad \alpha = 1,2$$

$$\phi_{,3}^{(0)} = 0$$

il s'en suit :

$$\left(\operatorname{div} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Grad} \left\{ \operatorname{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \right\} \right) / k = 0 \quad (\text{H.35})$$

d'où la relation

$$\operatorname{div} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Grad} \left(\operatorname{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \right); \quad (\text{H.36})$$

par conséquent, on a le résultat suivant

Théorème (H-3)

Le gradient de l'énergie dans la direction Θ est défini par

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \Omega}(\Omega)\Theta = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_r} \operatorname{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \Theta \bar{n} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_r} \operatorname{tr} \left(D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \Theta \bar{n} \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_r} \bar{n} \sigma^{(0)} \left(\frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) \Theta + \bar{n} D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \Theta \right\} \end{aligned}$$

où Γ_r désigne la frontière de l'ouvert Ω_r et \bar{n} sa normale extérieure.

Corrolaire (H-1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \Omega}(\Omega)\Theta = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \int_{c_r} \operatorname{tr} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} \right) + D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \Theta \bar{n} \right. \\ \left. - \int_{c_r} \bar{n} \left(\sigma^{(0)} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial M} + D^{(0)} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial M} \right)^T \right) \Theta \right) \end{aligned}$$

Preuve

Comme $\bar{n} \sigma^{(0)}$ et $\bar{n} D^{(0)}$ sont égaux à zéro sur une partie Γ_1 de la frontière et que $\Theta = 0$ hors d'un voisinage de la fissure, soit $\Theta = 0$, au voisinage de Γ_f et Γ_0 ; d'où le résultat du Corrolaire.

Remarque (H-2)

L'intégrale ainsi obtenue est une généralisation de l'intégrale bien connue en mécanique, dite intégrale de RICE.

CHAPITRE I

**Contribution à la propagation des fissures
dans une plaque mince piézoélectrique.**

I Introduction

Dans ce chapitre nous essayons de donner un critère de propagation des fissures dans les plaques minces piézoélectriques.

Nous supposons :

a) Que seule une force surfacique est appliquée normalement sur les faces inférieure et supérieure de la plaque.

b) Qu'il existe une fissure transversale de longueur L et que la surface fissurée a la forme d'un rectangle.

Le problème qui nous intéresse est celui de la mise en oeuvre des conditions de propagation de la fissure existante, en supposant que le comportement de la plaque est entièrement décrit par la théorie de la piézoélectricité et sous une optique énergétique.

Une justification électromécanique du critère de propagation basée sur une analyse thermodynamique des phénomènes irréversibles ayant déjà été obtenue par **C. DASCALU** et **G. MAUGIN** (1), (2), (3), nous nous sommes, dans cette thèse, contentés de postuler pour un milieu tridimensionnel piézoélectrique, le critère de propagation de Griffith. Nous montrons par ailleurs que ce critère peut, pour une plaque mince, se formuler uniquement à l'aide du premier terme du développement asymptotique de la solution tridimensionnelle.

Il convient de signaler que dans leurs travaux **C. DASCALU** et **G. MAUGIN** ont apporté des éclaircissements aux résultats antérieurs sur le problème de la propagation des fissures électrostatiques et ont en même temps, poursuivi le processus consistant à adapter les concepts de la mécanique de la rupture ainsi que leurs résultats, aux problèmes électrostatiques.

L'intérêt de notre démarche a été de partir du modèle tridimensionnel des plaques, et d'en déduire sans hypothèses à priori et à partir de développements asymptotiques, un critère de propagation de fissures piézoélectriques.

II Position du problème tridimensionnel

Le modèle tridimensionnel piézoélectrique consiste en la détermination de (σ, D, u, ϕ) élément de $(\Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon) \times (V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon)$ et tel que :

$$\begin{aligned} A^\varepsilon(\sigma, D; \tau, \delta) + B^\varepsilon(\tau, \delta; u, \phi) &= 0 & \forall (\tau, \delta) \in \Sigma^\varepsilon \times \Delta^\varepsilon \\ B^\varepsilon(\sigma, D; v, \varphi) &= F^\varepsilon(v, \varphi) & \forall (v, \varphi) \in V^\varepsilon \times \Phi^\varepsilon \end{aligned} \quad (I.1)$$

L'énergie piézoélectrique du système constitué par la plaque et les forces appliquées est :

$$W = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^e} (\sigma_{ij} \partial_i u_j + \phi_{,k} D_k) d\Omega \quad (I.2)$$

où (σ, D, u, ϕ) est solution de (I-1).

Reprenons la cinématique Θ du fond de la fissure, où $\Theta = (1, 0, 0) \in W^{2,\infty}(\bar{\omega})$ dans un voisinage du fond de la fissure.

On admet en particulier que le support de Θ est un voisinage de la ligne de fond de la fissure, disjoint de Γ_0^e d'une part et du support des fonctions W^+, W^- et $T_3^+ + T_3^- + \partial_\alpha (T_\alpha^+ + T_\alpha^-)$ d'autre part.

Reprenons également la transformation F avec en particulier

$$F^n = I + n\Theta : \Omega^e \rightarrow \Omega_n^e$$

où n est un petit paramètre réel.

L'analogue du problème (I-1) posé sur l'ouvert $\Omega_n^e = F^n(\Omega^e)$ admet une solution $(\sigma(n), D(n), u(n), \phi(n))$, et l'énergie piézoélectrique associée est définie par :

$$W_n = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_n^e} (\sigma_{ij}(n) \partial_i u_j(n) + \phi_{,k}(n) D_k(n)) \quad (I.3)$$

avec, en vertu de la relation (H-13),

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dn}(\Theta) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \sigma_{ij} \partial_i u_j \partial_\ell \Theta_\ell - \int_{\Omega^e} \sigma_{il} \partial_k u_\phi \partial_i \Theta_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} D_i \phi_{,i} \partial_j \Theta_j - \int_{\Omega^e} D_i \phi_{,i} \partial_i \Theta_j \end{aligned} \quad (I.4)$$

où $\frac{dW}{dn}(\Theta)$ représente l'énergie disponible pour fracturer le matériau.

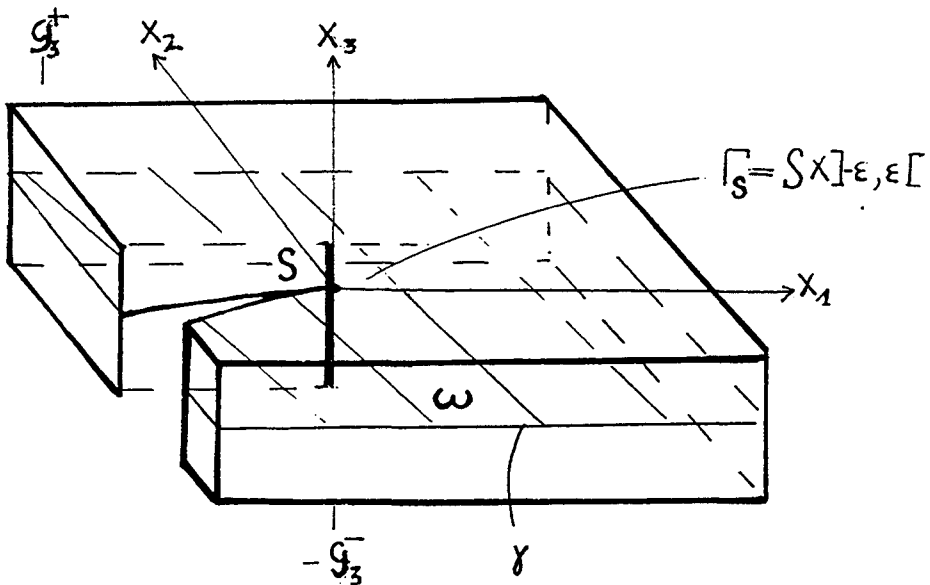
En admettant le critère de Griffith (cf BUI H.D mécanique de la rupture fragile ; Masson, Paris 1978),

il s'en suit que l'énergie qui permet de créer une fissure d'aire unité, est une contrainte γ_c du matériau.

Aussi, d'après ce critère, la fissure aura tendance à se propager si et seulement si :

$$\frac{\partial W}{\partial n} (\Theta) \leq -2\gamma_c < 0 \quad (I.5)$$

(Le coefficient 2 provenant de ce que deux surfaces sont créés dans la fissure).



Par ailleurs, comme l'aire créée dans le passage de Ω^ε à Ω_n^ε ($n = 1$) est unitaire, il vient :

$$\int_{\Gamma_s^\varepsilon} \Theta_1 = \text{mes}(\Gamma_s^\varepsilon) \Theta = 1$$

Il apparait ainsi clairement que Θ_1 varie comme l'inverse de l'épaisseur de la plaque.

III Comportement asymptotique dans le critère de Griffith

En posant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n}(\Theta) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^f} \sigma_{ij} \partial_i u_j \partial_l \Theta_l - \int_{\Omega^f} \sigma_{il} \partial_k u_l \partial_i \Theta_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega^f} D_i \phi_{,i} \partial_\gamma \Theta_\gamma - \int_{\Omega^f} D_i \phi_{,\gamma} \partial_i \Theta_\gamma \end{aligned} \quad (I.7)$$

où Θ est le champ de vecteurs dont le support est restreint au voisinage de la ligne du fond de la fissure.

En explicitant cette relation, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n}(\Theta) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega^f} \sigma_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta \partial_\gamma \Theta_\gamma + \int_{\Omega^f} \sigma_{\alpha 3} (\partial_\alpha u_3 + \partial_3 u_\alpha) \cdot \partial_\gamma \Theta_\gamma \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega^f} \sigma_{33} \partial_3 u_3 \partial_\gamma \Theta_\gamma \right\} - \int_{\Omega^f} \sigma_{\alpha\beta} \partial_\gamma u_\beta \partial_\alpha \Theta_\gamma \\ &\quad - \int_{\Omega^f} \sigma_{\alpha 3} \partial_\gamma u_3 \partial_\alpha \Theta_\gamma + \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega^f} D_\alpha \phi_{,\alpha} \partial_\gamma \Theta_\gamma + \int_{\Omega^f} D_3 \phi_{,3} \partial_\gamma \Theta_\gamma \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega^f} D_\alpha \phi_{,\beta} \partial_\alpha \Theta_\beta \right\} \end{aligned} \quad (I.8)$$

Et si l'on tient compte des relations (C-15) à (C-23) il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n}(\Theta) &= \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega^f} \sigma_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta^\varepsilon \partial_\gamma \Theta_\gamma - \varepsilon \int_{\Omega^f} \sigma_{\alpha\beta} \partial_\gamma u_\beta^\varepsilon \partial_\alpha \Theta_\gamma \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega^f} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon (\partial_\alpha u_3^\varepsilon + \partial_3 u_\alpha^\varepsilon) \partial_\gamma \Theta_\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega^f} \sigma_{33} \partial_3 u_3^\varepsilon \partial_\gamma \Theta_\gamma - \varepsilon \int_{\Omega^f} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \partial_\beta u_3^\varepsilon \partial_\alpha \Theta_\beta \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega^f} D_\alpha^\varepsilon \phi_{,\alpha}^\varepsilon \partial_\gamma \Theta_\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega^f} D_3^\varepsilon \phi_{,3}^\varepsilon \partial_\gamma \Theta_\gamma - \varepsilon \int_{\Omega^f} D_\alpha^\varepsilon \phi_{,\beta}^\varepsilon \partial_\alpha \Theta_\beta \end{aligned} \quad (I.9)$$

Mais Θ variant comme $\frac{1}{2\varepsilon}$ d'après la condition (I-6), il existe $\tilde{\Theta}$ indépendant de ε tel que :

$$\tilde{\Theta} = \varepsilon \Theta \quad (\text{I.10})$$

Ainsi la relation (I-9) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n}(\Theta) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} u_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} \partial_{\gamma} u_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\gamma} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} (\partial_{\alpha} u_3^{\varepsilon} + \partial_3 u_{\alpha}^{\varepsilon}) \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{33}^{\varepsilon} \partial_3 u_3^{\varepsilon} \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \partial_{\beta} u_3^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{\alpha}^{\varepsilon} \phi_{,\alpha}^{\varepsilon} \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_3^{\varepsilon} \phi_{,3}^{\varepsilon} \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} - \int_{\Omega} D_{\alpha}^{\varepsilon} \phi_{,\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} \quad (\text{I.11}) \end{aligned}$$

On voit que le passage à la limite dans l'expression (I.11) nécessite la connaissance du comportement asymptotique de la solution tridimensionnelle. Et, en vertu des chapitres D et E, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} &\rightarrow \sigma_{\alpha\beta}^{(0)} = -x_3 A_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} (u_3^{(0)}) \text{ dans } L^2(\Omega) \\ u_{\alpha}^{\varepsilon} &\rightarrow u_{\alpha}^{(0)} = -x_3 \partial_{\alpha} u_3^{(0)} \text{ dans } H^1(\Omega) \\ u_3^{\varepsilon} &\rightarrow u_3^{(0)} \text{ au sens de } L^2(\Omega) \\ \varepsilon D_3^{\varepsilon} &\rightarrow 0 \\ \varepsilon^2 \sigma_{33}^{\varepsilon} &\rightarrow 0 \\ \varepsilon \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} &\rightarrow 0 \text{ au sens de } L^2([-1,1[; H^{-2}(\omega)) \\ D_{\alpha}^{\varepsilon} &\rightarrow D_{\alpha}^{(0)} = -\tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \text{ au sens de } L^2(\Omega) \\ \phi^{\varepsilon} &\rightarrow \phi^{(0)} \text{ au sens de } L^2([-1,1[; H^{-2}(\omega)) \end{aligned}$$

Ainsi, en rappelant que $h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 x_3^2 A_{\alpha\beta\gamma\delta}$, il vient en tenant compte du fait que seule la composante $\tilde{\Theta}_1$ de $\tilde{\Theta}$ est non nulle :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} u_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} &= \frac{1}{2} \int_{\omega} h_{\alpha\beta\gamma\delta} (x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_1 \tilde{\Theta}_1 \cdot \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)} \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} \partial_{\gamma} u_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\gamma} &= - \int_{\omega} h_{\alpha\beta\gamma\delta} (x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{1\beta} \tilde{\Theta}_1 \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_1 \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_{\alpha}^{\varepsilon} \phi_{,\alpha}^{\varepsilon} \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} &= - \int_{\omega} \varepsilon_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} \partial_1 \tilde{\Theta}_1 \quad (I.13) \\
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Omega} D_{\alpha}^{\varepsilon} \phi_{,\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} &= 2 \int_{\omega} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_1
 \end{aligned}$$

Par suite, en explicitant les relations $(I-1)_1$, il vient :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^2 a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} + \varepsilon^3 b_{333} D_3^{\varepsilon} + \varepsilon^4 a_{3333} \sigma_{33}^{\varepsilon} &= \partial_3 u_3^{\varepsilon} \\
 \varepsilon \tilde{a}_{3\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon} + \varepsilon^3 \tilde{b}_{33} D_3^{\varepsilon} + \varepsilon^3 \tilde{a}_{333} \sigma_{33}^{\varepsilon} &= \phi_{,3}^{\varepsilon} \\
 \varepsilon \sum_{\alpha=1} b_{3\alpha\alpha} D_{\alpha}^{\varepsilon} &= u_{\alpha,3}^{\varepsilon} + u_{3,\alpha}^{\varepsilon} \quad (I.14) \\
 \varepsilon \sum_{\beta=1} b_{3\beta\beta} D_{\beta}^{\varepsilon} - \partial_3 u_{\beta}^{\varepsilon} &= \partial_{\beta} u_3^{\varepsilon}
 \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante C indépendante de ε telle que :

$$\begin{aligned}
 \|\partial_3 u_3^{\varepsilon}\|_{0,\Omega} &\leq C \varepsilon^2 \\
 \|\partial_3 \phi^{\varepsilon}\|_{0,\Omega} &\leq C \{ \varepsilon + \varepsilon^2 \|D_3^{\varepsilon}\|_{0,\Omega} + \varepsilon^3 \|\sigma_{33}^{\varepsilon}\|_{0,\Omega} \} \\
 \|\partial_{\alpha} u_3^{\varepsilon} + \partial_3 u_{\alpha}^{\varepsilon}\|_{0,\Omega} &\leq C \varepsilon \quad (I.15)
 \end{aligned}$$

d'où par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} (\partial_{\alpha} u_3^{\varepsilon} + \partial_3 u_{\alpha}^{\varepsilon}) \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} &= 0 \quad (I.16) \\
 \text{car } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{33}^{\varepsilon} \partial_3 u_3^{\varepsilon} \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$\text{car } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \sigma_{33}^{\varepsilon} = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} D_3^{\varepsilon} \phi_{,3}^{\varepsilon} \partial_{\gamma} \tilde{\Theta}_{\gamma} = 0 \quad (\text{I.18})$$

$$\text{car } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon D_3^{\varepsilon} = 0$$

Pour ce qui est de

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \partial_{\beta} u_3^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} \quad (\text{I.19})$$

On a :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \partial_{\beta} u_3^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} &= - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \left(\varepsilon \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha\alpha} D_{\alpha}^{\varepsilon} \right) \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} \\ &+ \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \partial_3 u_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Le premier terme de cette quantité tend vers 0 avec $\varepsilon \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon}$ en vertu de (I-12).

Le second terme peut s'écrire :

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \partial_3 (u_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta}) \quad (\text{I.21})$$

du fait que $\tilde{\Theta}$ est indépendant de x_3 .

Cependant en explicitant $(I-2)_2$, il vient :

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} v_{\alpha} + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \partial_3 v_{\alpha} = 0 \quad (\text{I.22})$$

et en posant

$$v_{\alpha} = u_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} \quad (\text{I.23})$$

il s'en suit :

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \partial_3 u_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} = - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha \beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} (u_{\gamma}^{\varepsilon} \partial_{\beta} \tilde{\Theta}_{\gamma}) \quad (\text{I.24})$$

et comme l'on a

$$\sigma_{\alpha \beta}^{\varepsilon} \rightarrow \sigma_{\alpha \beta}^{(0)} \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \varepsilon \rightarrow 0$$

et

$$u_{\gamma}^{\varepsilon} \partial_{\beta} \tilde{\Theta}_{\gamma} \rightarrow u_{\gamma}^{(0)} \partial_{\beta} \tilde{\Theta}_{\gamma} \quad \text{dans } H^1(\Omega) \\ \varepsilon \rightarrow 0$$

il vient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon} \partial_3 u_{\beta}^{\varepsilon} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_{\beta} = - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha \beta}^{(0)} \partial_{\alpha} (u_{\gamma}^{(0)} \partial_{\beta} \tilde{\Theta}_{\gamma}) \quad (\text{I.25}) \\ = \int_{\omega} h_{\alpha \beta \gamma \delta} (x_1, x_2) \partial_{\gamma \delta} (u_3^{(0)}) \partial_{\alpha} (\partial_1 u_3^{(0)} \partial_{\beta} \tilde{\Theta}_1)$$

Des relations (I-13) à (I-25) se déduit le théorème suivant :

Théorème (I-1)

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la quantité $\frac{dW}{dn}(\Theta)$ converge vers

$$\frac{d\tilde{W}}{dn}(\tilde{\Theta}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} h_{\alpha \beta \gamma \delta} (x_1, x_2) \partial_{\gamma \delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha \beta} u_3^{(0)} \partial_1 \tilde{\Theta}_1 \\ - \int_{\omega} h_{\alpha \beta \gamma \delta} (x_1, x_2) \partial_{\gamma \delta} (u_3^{(0)}) \partial_{1 \beta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_1 - \int_{\omega} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} \partial_1 \tilde{\Theta}_1 \\ + 2 \int_{\omega} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,1}^{(0)} \partial_{\alpha} \tilde{\Theta}_1 - \int_{\omega} h_{\alpha \beta \gamma \delta} (x_1, x_2) \partial_{\gamma \delta} (u_3^{(0)}) \partial_{\alpha} (\partial_1 u_3^{(0)} \partial_{\beta} \tilde{\Theta}_1)$$

IV Invariance vis à vis du choix de Θ

Soit C une courbe régulière de l'ouvert ω renfermant la pointe P de la fissure et contenue dans une région R où le déplacement Θ est constant.

Si nous désignons par \bar{R} le complémentaire de R dans ω , la relation exprimée dans le théorème ci-dessus devient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{W}}{dn}(\tilde{\Theta}) &= \frac{1}{2} \int_{\partial \bar{R}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_1 \\
&- \frac{1}{2} \int_{\bar{R}} \partial_1 (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} (u_3^{(0)}) \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)}) \tilde{\Theta}_1 \\
&- \int_{\partial \bar{R}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} (u_3^{(0)}) \partial_{1\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\alpha + \int_{\bar{R}} \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} (u_3^{(0)}) \partial_{1\beta} u_3^{(0)}) \tilde{\Theta}_1 \\
&- \int_{\partial \bar{R}} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,1}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_1 + \int_{\bar{R}} \partial_1 (\tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)}) \tilde{\Theta}_1 \\
&+ 2 \int_{\partial \bar{R}} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,1}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\alpha - 2 \int_{\bar{R}} \partial_\alpha (\tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,1}^{(0)}) \tilde{\Theta}_1 \\
&- \int_{\partial \bar{R}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} (u_3^{(0)}) \partial_1 u_3^{(0)} \partial_\beta \tilde{\Theta}_1 n_\alpha \tag{I.26} \\
&+ \int_{\partial \bar{R}} \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_1 u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\beta \\
&- \int_{\bar{R}} \partial_\beta \left\{ \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_1 u_3^{(0)} \right\} \tilde{\Theta}_1
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2} \int_{\bar{R}} \partial_1 (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)}) \tilde{\Theta}_1 + \int_{\bar{R}} \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{1\beta} u_3^{(0)}) \tilde{\Theta}_1 \\
&+ \int_{\bar{R}} \partial_1 (\tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)}) \tilde{\Theta}_1 - 2 \int_{\bar{R}} \partial_\alpha (\tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,1}^{(0)}) \tilde{\Theta}_1 \tag{I.27} \\
&- \int_{\bar{R}} \partial_\beta \left\{ \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_1 \tilde{u}_3^{(0)} \right\} \tilde{\Theta}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_{\bar{R}} \partial_1 (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 - \frac{1}{2} \int_{\bar{R}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{1\alpha\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 \\
&\quad + \int_{\bar{R}} \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_{1\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 + \int_{\bar{R}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha 1\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 \\
&\quad + 2 \int_{\bar{R}} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,1\alpha}^{(0)} \phi_{, \alpha}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 - 2 \int_{\bar{R}} \tilde{\varepsilon}_{11} \Delta_2 \phi^{(0)} \phi_{,1\alpha}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 - 2 \int_{\bar{R}} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{, \alpha}^{(0)} \phi_{,1\alpha}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 \\
&\quad - \int_{\bar{R}} \partial_{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_1 u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 - \int_{\bar{R}} \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_{1\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\bar{R}} \partial_1 (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 + \frac{1}{2} \int_{\bar{R}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{1\alpha\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 \\
&\quad - \int_{\bar{R}} \partial_{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_1 u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 - 2 \int_{\bar{R}} \tilde{\varepsilon}_{11} \Delta_2 \phi^{(0)} \phi_{,1}^{(0)} \tilde{\Theta}_1
\end{aligned}$$

Mais $\partial_{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) = T_3^+ + T_3^- + \partial_\alpha (T_\alpha^+ + T_\alpha^-)$, et $\tilde{\varepsilon}_{11} \Delta_2 \phi^{(0)} = \langle W \rangle$, dans ω ; et comme les supports de $\tilde{\Theta}_1$ et W^-, W^+ ou $T_3^+ + T_3^- + \partial_\alpha (T_\alpha^+ + T_\alpha^-)$, sont par ailleurs disjoints, on a donc

$$\left| \begin{array}{l} \int_{\bar{R}} \partial_{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_1 u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 = 0 \\ \text{et} \\ \int_{\bar{R}} \tilde{\varepsilon}_{11} \Delta_2 \phi^{(0)} \phi_{,1}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.28})$$

Ainsi

$$A = -\frac{1}{2} \int_{\bar{R}} \partial_1 (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 \quad (\text{I.29})$$

Remarque (I-1)

Pour une plaque faiblement anisotrope, $A=0$ et l'expression (I-26) ne se réduit plus qu'à ses termes portant sur $\partial \bar{R}$; ce qui conduit au résultat suivant :

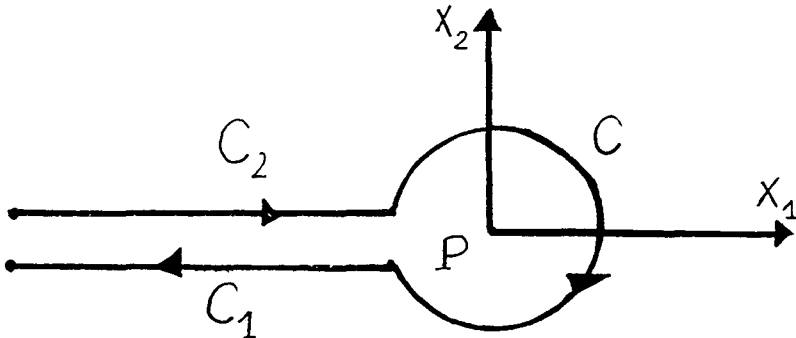
Théorème (I-1)

Pour une plaque faiblement anisotrope, la quantité

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{W}}{dn}(\tilde{\Theta}) &= \frac{1}{2} \int_{\partial \bar{R}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_1 \\ &- \int_{\partial \bar{R}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{1\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\alpha - \int_{\partial \bar{R}} \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{M}} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_1 \\ &+ 2 \int_{\partial \bar{R}} \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{M}} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\alpha - \int_{\partial \bar{R}} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_1 u_3^{(0)} \partial_\beta \tilde{\Theta}_1 n_\alpha \\ &+ \int_{\partial \bar{R}} \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_1 u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\beta \end{aligned}$$

V Indépendance de $\frac{d\tilde{W}}{dn}(\tilde{\Theta})$ par rapport au choix de la fonction $\tilde{\Theta}_1$ dans le cas d'une anisotropie faible

Notons qu'en réalité les intégrales intervenant dans le théorème (I-1) portent sur le contour suivant



Ainsi, sachant que $n_1 = 0$ sur les lèvres de la fissure et que :

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \int_{C_1} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_1 - \int_{C_1} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{1\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\alpha \\ &- \int_{C_1} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_1 + 2 \int_{C_1} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\alpha - \int_{C_1} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_1 u_3^{(0)} \partial_\beta \tilde{\Theta}_1 n_\alpha \\ &+ \int_{C_1} \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_1 u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\beta = - \frac{1}{2} \int_{C_1} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_1 \\ &+ \int_{C_2} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{1\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\alpha + \int_{C_2} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_1 - 2 \int_{C_2} \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\alpha \\ &+ \int_{C_2} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_1 u_3^{(0)} \partial_\beta \tilde{\Theta}_1 n_\alpha - \int_{C_2} h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{1\beta} u_3^{(0)} \tilde{\Theta}_1 n_\alpha \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{W}}{dn}(\tilde{\Theta}) &= \frac{1}{2} \int_C h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{\alpha\beta} u_3^{(0)} n_\alpha - \int_C h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)} \partial_{1\beta} u_3^{(0)} n_\alpha \\ &- \int_C \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,\alpha}^{(0)} n_1 + 2 \int_C \tilde{\varepsilon}_{11} \phi_{,\alpha}^{(0)} \phi_{,1}^{(0)} n_\alpha - \int_C \partial_\alpha (h_{\alpha\beta\gamma\delta}(x_1, x_2) \partial_{\gamma\delta} u_3^{(0)}) \partial_1 u_3^{(0)} n_\beta \end{aligned}$$

Remarques (I-2)

Après avoir établi que la solution tridimensionnelle de la piézoélectricité peut-être approchée par la solution du problème posé sur la surface moyenne de la plaque, nous avons pu montrer (voir théorème (I-1)), que le critère de propagation de la fissure peut s'exprimer uniquement à l'aide de cette solution approchée.

Par ailleurs, il est clairement apparu que même dans une théorie de plaque de Kirchhoff-Love, le cisaillement transverse peut jouer un rôle fondamental dans l'expression du critère de propagation de la fissure, comme l'avait déjà établi **DESTUYNDER**, dans le cadre de l'élasticité linéaire.

D'autre part, nous montrons que l'énergie disponible pour fracturer le matériau, valable quel que soit le contour C centré en P (voir la figure précédente) dépend des singularités de $u_3^{(0)}$ et $\phi^{(0)}$ en ce point, ainsi que des influences du champ électrique $E^{(0)}$ défini sur la surface moyenne de la plaque. Ce dernier résultat, au regard de la troisième intégrale de l'expression $\frac{d\tilde{W}}{dn}(\tilde{\Theta})$ confirme, du reste, l'influence négative que pourrait avoir le champ électrique sur le processus de fissuration (voir **C. DASCALU** et **G.A MAUGIN** (1, 2, 3)).

En dehors des deux intégrales qui caractérisent l'influence du champ $E^{(0)}$ sur la propagation de la fissure, les autres termes figurant dans l'expression $\frac{d\tilde{W}}{dn}(\tilde{\Theta})$ correspondent au travail exercé par la partie du matériau extérieur au contour C, sur celle qui lui est intérieure.

Il faut par ailleurs souligner, en vertu de la remarque (I-1), que dans le cas d'un matériau fortement anisotrope, l'énergie de fracturation dépendrait de la cinématique du fond de la fissure.

En perspective, il pourrait être intéressant d'apporter selon le procédé utilisé ici, une justification électromécanique convenable du critère de fissuration, en s'appuyant sur une analyse thermodynamique des phénomènes irréversibles et de façon à confronter ces résultats avec ceux obtenus par **C. DASCALU** et **G.A. MAUGIN**.

CHAPITRE J

Contribution à l'étude de la couche limite

I Introduction

Ce chapitre est consacré à la description de la solution tridimensionnelle du problème de la piézoélectricité linéaire au voisinage de la frontière latérale Γ_0^e de la plaque, frontière sur laquelle, nous supposons des déplacements et un potentiel électrique nuls.

II Description de la piézoélectricité tridimensionnelle au voisinage de Γ_0

II - 1 Généralités (cf Destuynder (1))

Associons à chaque point de la frontière Γ_0 de l'ouvert Ω , un trièdre orthonormé (a, b, k) tel que :

- a soit tangent à Γ_0
- b soit perpendiculaire à Γ_0
- et k perpendiculaire à la surface moyenne

Soit v_i les composantes dans le système de référence dans lequel on a travaillé jusque là, d'un champ de vecteurs défini sur Γ_0 .

Les composantes correspondantes q_i dans la base (a, b, k) sont définies par :

$$q_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2, \quad q_2 = b_1 v_1 + b_2 v_2, \quad q_3 = v_3 \quad (\text{J.1})$$

et comme par ailleurs

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0, \quad (\text{J.2})$$

on pourrait choisir b tel que :

$$b_1 = a_2 \quad (\text{J.3})$$

$$b_2 = -a_1 \quad (\text{J.4})$$

D'autre part, en désignant par s l'abscisse curviligne le long de γ , et par ξ celle suivant la normale b à Γ_0 , on a pour toute fonction f définie sur un voisinage de Γ_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \quad (\text{J.5})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial s}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \quad (\text{J.6})$$

où $(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, u^{(0)}, \phi^{(0)})$ élément de $\Sigma_B \times \Delta_B \times V_B \times \Phi_B$ vérifie les équations :

$$\left. \begin{aligned} A_0(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, \tau, \delta) + B_0(\tau, \delta, u^{(0)}, \phi^{(0)}) &= 0 \quad \forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta \\ B_0(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, v, \varphi) &= F_0(v, \varphi) \quad \forall (v, \varphi) \in V \times \Phi \end{aligned} \right\} \text{ (J.11)}$$

et où

$$\left. \begin{aligned} A_0(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \tau, \delta) + B_0(\tau, \delta, u^{(1)}, \phi^{(1)}) &= -A_1(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, \tau, \delta) \\ &\quad \forall (\tau, \delta) \in \Sigma \times \Delta \end{aligned} \right\} \text{ (J.12)}$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(1)} / \gamma &= 0 \quad \text{(J.13)} \\ \int_{-1}^1 u_i^{(1)}(x_1, x_2, x_3) dx_3 &= 0 \quad \text{pp sur } \gamma \end{aligned} \right\}$$

Par ailleurs, comme l'on doit avoir sur (Γ_0)

$$u^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad \phi^\varepsilon = 0 \quad \text{(J.14)}$$

il vient, tenant compte des conditions

$$u^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad \phi^{(0)} = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_0) \quad \text{(J.15)}$$

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)} + \mu^\varepsilon &= 0 \\ &\quad \text{sur } (\Gamma_0) \\ \phi^{(1)} + \psi^\varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ (J.16)}$$

et par suite, il apparait que $(\Sigma^\varepsilon, F^\varepsilon, \mu^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ vérifie les équations :

$$\left. \begin{aligned} (A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \varepsilon^3 A_3 + \varepsilon^4 A_4)(Z^\varepsilon, F^\varepsilon, \tau, \delta) \\ + B^\varepsilon(\tau, \delta, \mu^\varepsilon, \psi^\varepsilon) &= -\varepsilon A_1(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \tau, \delta) - \varepsilon A_2(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, \tau, \delta) \\ -\varepsilon^2 A_2(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \tau, \delta) - \varepsilon^2 A_3(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, \tau, \delta) &\quad \text{(J.17)} \\ -\varepsilon^3 A_3(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \tau, \delta) - \varepsilon^3 A_4(\sigma^{(0)}, D^{(0)}, \tau, \delta) \\ -\varepsilon^4 A_4(\sigma^{(1)}, D^{(1)}, \tau, \delta) &\quad \forall (\tau, \delta) \in \Sigma_B \times \Delta_B \end{aligned} \right\}$$

$$B_0(Z^\varepsilon, F^\varepsilon, v, \varphi) = 0, \quad \forall (v, \varphi) \in V_B \times \Phi_B \quad \text{(J.18)}$$

L'équation (J-18) entraine :

$$\left. \begin{array}{l} Z_{j,i,j}^\varepsilon = 0 \\ \\ F_{k,k}^\varepsilon = 0 \end{array} \right\} \text{ sur } B \quad (J.19)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_{i3}^\varepsilon = 0 \\ \\ F_3^\varepsilon = 0 \end{array} \right\} \text{ en } x_3 = \pm 1 \quad (J.20)$$

L'équation (J-17) implique

$$\left. \begin{array}{l} a_{\alpha\beta\gamma\delta} Z_{\gamma\delta}^\varepsilon + \varepsilon b_{\alpha\beta 3} F_3^\varepsilon + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta 33} Z_{33}^\varepsilon - \mu_{\beta,\alpha}^\varepsilon = -\varepsilon b_{\alpha\beta 3} D_3^1 - \varepsilon a_{\alpha\beta 33} \sigma_{33}^0 \\ \qquad \qquad \qquad - \varepsilon^2 a_{\alpha\beta 33} \sigma_{33}^1 \\ \varepsilon b_{3\alpha\alpha} F_\alpha^\varepsilon + 4\varepsilon^2 a_{\alpha 3\beta 3} Z_{\beta 3}^\varepsilon - (\mu_{\alpha,3}^\varepsilon + \mu_{3,\alpha}^\varepsilon) = -\varepsilon b_{3\alpha\alpha} D_\alpha^1 - 4\varepsilon a_{\alpha 3\beta 3} \sigma_{\beta 3}^0 \\ \qquad \qquad \qquad - 4\varepsilon^2 a_{\alpha 3\beta 3} \sigma_{\beta 3}^1 \quad (J.21) \\ \varepsilon^2 a_{\alpha\beta 33} Z_{\alpha\beta}^\varepsilon + \varepsilon^3 b_{333} F_3^\varepsilon + \varepsilon^4 a_{3333} Z_{33}^\varepsilon - \mu_{3,3}^\varepsilon = -\varepsilon a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^0 \\ \qquad \qquad \qquad - \varepsilon^4 a_{3333} \sigma_{33}^1 - \varepsilon^2 a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^1 - \varepsilon^2 b_{333} D_3^0 - \varepsilon^3 b_{333} D_3^1 - \varepsilon^3 a_{3333} \sigma_{33}^0 \\ \tilde{b}_{\alpha\alpha} F_\alpha^\varepsilon + \varepsilon \tilde{a}_{\alpha\alpha 3} Z_{\alpha 3}^\varepsilon - \psi_{,\alpha}^\varepsilon = -\varepsilon \tilde{a}_{\alpha\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^1 \\ \varepsilon \tilde{a}_{3\alpha\beta} Z_{\alpha\beta}^\varepsilon + \varepsilon^2 \tilde{b}_{33} F_3^\varepsilon + \varepsilon^3 \tilde{a}_{333} Z_{33}^\varepsilon - \psi_{,3}^\varepsilon = -\varepsilon \tilde{a}_{\alpha\alpha 3} \sigma_{\alpha\beta}^1 \\ \qquad \qquad \qquad - \varepsilon \tilde{b}_{33} D_3^0 - \varepsilon^2 \tilde{b}_{33} D_3^1 - \varepsilon^2 \tilde{a}_{333} \sigma_{33}^0 - \varepsilon^3 \tilde{a}_{333} \sigma_{33}^1 ; \end{array} \right\}$$

et il s'en suit :

$$F_\alpha^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4\tilde{b}_{11} a_{1313}} \left\{ -4a_{1313} \psi_{,\alpha}^\varepsilon + 4\varepsilon a_{1313} \tilde{a}_{113} \sigma_{\alpha 3}^1 \right. \quad (J.22) \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{a}_{113} (\mu_{\alpha,3}^\varepsilon + \mu_{3,\alpha}^\varepsilon) - \tilde{a}_{113} b_{311} D_\alpha^1 - 4a_{1313} \tilde{a}_{113} \sigma_{\alpha 3}^0 \right\} ;$$

$$F_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon \beta} \left\{ \beta_1 \mu_{\mu,\mu}^\varepsilon - \varepsilon \beta_2 D_3^1 - \varepsilon \beta_3 \sigma_{33}^0 - \varepsilon^2 \beta_4 \sigma_{33}^1 - \varepsilon^{-2} \beta_5 \mu_{3,3}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} \beta_6 \sigma_{\mu\mu}^0 \right. \\ \left. + \beta_7 \sigma_{\mu\mu}^1 + \beta_8 D_3^0 - \varepsilon^{-1} \beta_9 \psi_{,3}^\varepsilon \right\} \quad (\text{J.23})$$

où

$$\beta = 2b_{113} a_{1133} - \frac{a_{1111} + a_{1122}}{a_{1133}} b_{333} ;$$

$$\beta_1 = 1 + \frac{\alpha_0 \alpha_6}{\alpha}$$

$$\beta_2 = 2b_{113} - \frac{a_{1111} + a_{1122}}{a_{1133}} b_{333} - \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha}$$

$$\beta_3 = 2a_{1133} - \frac{a_{1111} + a_{1122}}{a_{1133}} a_{3333} - \frac{\alpha_0 \alpha_3}{\alpha}$$

$$\beta_4 = 2a_{1133} - \frac{a_{1111} + a_{1122}}{a_{1133}} a_{3333} - \frac{\alpha_0 \alpha_4}{\alpha}$$

$$\beta_5 = \frac{a_{1111} + a_{1122}}{a_{1133}} a_{3333} - \frac{\alpha_0 \alpha_5}{\alpha}$$

$$\alpha_3 = \alpha_4$$

$$\beta_6 = a_{1111} + a_{1122} + \frac{\alpha_0 \alpha_6}{\alpha}$$

$$\beta_7 = a_{1111} + a_{1122} + \frac{\alpha_0 \alpha_7}{\alpha}$$

$$\beta_8 = \frac{a_{1111} + a_{1122}}{a_{1122}} b_{333} - \frac{\alpha_1 \alpha_0}{\alpha}$$

$$\beta_9 = \frac{\alpha_0}{\alpha}$$

avec

$$\alpha = \tilde{a}_{333} - \frac{\tilde{a}_{311}}{a_{1133}} a_{3333} - \frac{\tilde{b}_{33} a_{1133} - \tilde{a}_{311} b_{333}}{2b_{113} a_{1133} - (a_{1111} + a_{1122}) b_{333}} (2a_{1133}^2 - a_{3333} (a_{1111} + a_{1122}))$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \tilde{b}_{33} - \frac{\tilde{a}_{311}}{a_{1133}} b_{333} - \frac{\tilde{b}_{33} a_{1133} - \tilde{a}_{311} b_{333}}{2b_{113} a_{1133} - a_{333} (a_{1111} + a_{1122})} \cdot \frac{b_{333} (a_{1111} + a_{1122})}{a_{1133}} \\
\alpha_2 &= \tilde{b}_{33} - \frac{\tilde{a}_{311}}{a_{1133}} b_{333} - \frac{\tilde{b}_{33} a_{1133} - \tilde{a}_{311} b_{333}}{2b_{113} a_{1133} - a_{333} (a_{1111} + a_{1122})} \cdot (2b_{1133} - \frac{a_{1111} + a_{1122}}{a_{1133}} b_{333}) \\
\alpha_3 &= \tilde{a}_{333} - \frac{\tilde{a}_{311}}{a_{1133}} a_{3333} - \frac{\tilde{b}_{33} a_{1133} - \tilde{a}_{311} b_{333}}{2b_{113} a_{1133} - a_{333} (a_{1111} + a_{1122})} (2a_{1133} - \frac{a_{1111} + a_{1122}}{a_{1133}} a_{3333}) \\
\alpha_5 &= \frac{\tilde{a}_{311}}{a_{1133}} - \frac{\tilde{b}_{33} a_{1133} - \tilde{a}_{311} b_{333}}{2b_{113} a_{1133} - b_{333} (a_{1111} + a_{1122})} \cdot \frac{a_{1111} + a_{1122}}{a_{1133}} \\
\alpha_6 &= \tilde{a}_{311} - \frac{\tilde{b}_{33} a_{1133} - \tilde{a}_{311} b_{333}}{2b_{113} a_{1133} - b_{333} (a_{1111} + a_{1122})} \cdot (a_{1111} + a_{1122}) \\
\alpha_7 &= \frac{\tilde{b}_{33} a_{1133} - \tilde{a}_{311} b_{333}}{2b_{113} a_{1133} - b_{333} (a_{1111} + a_{1122})} \\
\alpha_8 &= \frac{\tilde{b}_{33} a_{1133} - \tilde{a}_{311} b_{333}}{2b_{113} a_{1133} - b_{333} (a_{1111} + a_{1122})} \cdot (a_{1111} + a_{1122})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{\alpha\beta}^{\varepsilon} &= \frac{1}{2a_{1133}} \{ \varepsilon^{-2} \gamma_1 \mu_{3,3}^{\varepsilon} - \varepsilon^{-1} \gamma_2 \sigma_{\mu\mu}^0 - \gamma_3 \sigma_{\mu\mu}^1 - \varepsilon^2 \gamma_4 \sigma_{33}^1 - \gamma_5 \mathcal{D}_3^0 \\
&\quad - \varepsilon \gamma_6 \mathcal{D}_3^1 - \varepsilon \gamma_7 \sigma_{33}^0 - \gamma_8 \mu_{\mu,\mu}^{\varepsilon} - \varepsilon^{-1} \gamma_9 \psi_{,3}^{\varepsilon} \} \delta_{\alpha\beta} \quad (J.24) \\
&\quad - \frac{1}{2} \mu_{\mu,\mu}^{\varepsilon} \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\mu_{\alpha,\beta}^{\varepsilon} + \mu_{\beta,\alpha}^{\varepsilon})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 1 + \frac{\beta_5}{\beta} b_{333} + \frac{\alpha_5 a_{3333}}{\alpha} \\
\gamma_2 &= a_{1133} - \frac{\beta_6}{\beta} b_{333} - \frac{\alpha_6}{\alpha} a_{3333} \\
\gamma_3 &= a_{1133} + \frac{\beta_7}{\beta} b_{333} - \frac{\alpha_7}{\alpha} a_{3333} \\
\gamma_4 &= a_{3333} + \frac{\beta_4}{\beta} b_{333} + \frac{\alpha_4}{\alpha} a_{3333} \\
\gamma_5 &= b_{333} - \frac{\beta_5}{\beta} b_{333} - \frac{\alpha_1}{\alpha} a_{3333} \\
\gamma_6 &= b_{333} - \frac{\beta_2}{\beta} b_{333} - \frac{\alpha_2}{\alpha} a_{3333}
\end{aligned}$$

$$\gamma_7 = a_{3333} - \frac{\beta_3}{\beta} b_{333} - \frac{\alpha_3}{\alpha} a_{3333}$$

$$\gamma_8 = \frac{\beta_1}{\beta} b_{333}$$

$$\gamma_9 = \frac{\beta_9}{\beta} b_{333} - \frac{1}{\alpha} a_{3333}$$

$$Z_{\alpha 3}^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4\tilde{b}_{11} a_{1313}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} b_{311} \psi_{,\alpha}^\varepsilon - \tilde{a}_{113} b_{113} \sigma_{\alpha 3}^1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{b}_{11} (\mu_{\alpha,3}^\varepsilon - \mu_{3,\alpha}^\varepsilon) \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon} \tilde{b}_{11} b_{311} D_\alpha^1 - \frac{4}{\varepsilon} a_{1133} \tilde{b}_{11} \sigma_{\alpha 3}^0 \right\} \quad (J.25)$$

$$Z_{33}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2 \alpha} \left\{ \varepsilon^{-1} \psi_{,3}^\varepsilon - \alpha_1 D_3^0 - \varepsilon \alpha_2 D_3^1 - \varepsilon \alpha_3 \sigma_{33}^0 - \varepsilon^2 \alpha_4 \sigma_{33}^1 \right. \\ \left. - \varepsilon^{-2} \alpha_5 \mu_{3,3}^\varepsilon - \varepsilon^{-1} \alpha_6 \sigma_{\mu\mu}^0 - \alpha_6 \mu_{\mu,\mu}^\varepsilon - \alpha_7 \sigma_{\mu\mu}^1 \right\} \quad (J.26)$$

Si à présent, on tient compte des relations (J-9), les expressions précédentes deviennent alors :

$$F_\alpha^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4\tilde{b}_{11} a_{1313}} \left\{ -4a_{1313} \left(a_\alpha \left(1 - \frac{\xi}{R(s)} \right)^{-1} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial s} + b_\alpha \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \xi} \right) \right. \\ \left. + 4\varepsilon a_{1313} \tilde{a}_{113} \sigma_{\alpha 3}^1 + \frac{1}{\varepsilon} \left[\tilde{a}_{113} \mu_{\alpha,3}^\varepsilon + \tilde{a}_{113} a_\alpha \left(1 - \frac{\xi}{R(s)} \right)^{-1} \frac{\partial \mu_3^\varepsilon}{\partial s} \right. \right. \\ \left. \left. + \tilde{a}_{113} b_\alpha \frac{\partial \mu_3^\alpha}{\partial \xi} \right] - \tilde{a}_{113} b_{311} D_\alpha^1 - 4a_{1313} \tilde{a}_{113} \sigma_{\alpha 3}^0 \right\} \quad (J.27)$$

$$F_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon \beta} \left\{ \beta \left[a_\mu \left(1 - \frac{\xi}{R(s)} \right)^{-1} \frac{\partial \mu_\mu^\varepsilon}{\partial s} + b_\mu \frac{\partial \mu_\mu^\varepsilon}{\partial \xi} \right] - \varepsilon \beta_2 D_3^1 - \varepsilon \beta_3 \sigma_{33}^0 \right. \\ \left. - \varepsilon^2 \beta_4 \sigma_{33}^1 - \varepsilon^{-2} \beta_5 \mu_{3,3}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} \beta_6 \sigma_{\mu\mu}^0 + \beta_7 \sigma_{\mu\mu}^1 + \beta_8 D_3^0 \right. \\ \left. - \varepsilon^{-1} \beta_9 \psi_{,3}^\varepsilon \right\} \quad (J.28)$$

$$Z_{33}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2 \alpha} \left\{ \varepsilon^{-1} \psi_{,3}^\varepsilon - \alpha_1 D_3^0 - \varepsilon \alpha_2 D_3^1 - \varepsilon \alpha_3 \sigma_{33}^0 - \varepsilon^2 \alpha_4 \sigma_{33}^1 \right. \\ \left. - \varepsilon^{-2} \alpha_5 \mu_{3,3}^\varepsilon - \varepsilon^{-1} \alpha_6 \sigma_{\mu\mu}^0 - \alpha_6 \left[a_\mu \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial \mu_\mu^\varepsilon}{\partial s} \right. \right. \\ \left. \left. + b_\mu \frac{\partial \mu_\mu^\varepsilon}{\partial \xi} - \alpha_7 \sigma_{\mu\mu}^1 \right] \right\} \quad (J.29)$$

$$Z_{\alpha 3}^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4 \tilde{b}_{11} a_{1313}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} b_{311} \left[a_\alpha \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial s} + b_\alpha \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \xi} \right] \right. \\ \left. - \tilde{a}_{113} b_{311} \sigma_{\alpha 3}^1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{b}_{11} \left[\mu_{\alpha,3}^\varepsilon + a_\alpha \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial \mu_\alpha^\varepsilon}{\partial s} + b_\alpha \frac{\partial \mu_\alpha^\varepsilon}{\partial \xi} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon} \tilde{b}_{11} b_{311} D_\alpha^1 - \frac{4}{\varepsilon} a_{1133} \tilde{b}_{11} \sigma_{\alpha 3}^0 \right\} \quad (J.30)$$

$$Z_{\alpha\beta}^\varepsilon = \frac{1}{2a_{1133}} \left\{ \varepsilon^{-2} \gamma_1 \mu_{3,3}^\varepsilon - \varepsilon^{-1} \gamma_2 \sigma_{\mu\mu}^0 - \gamma_3 \sigma_{\mu\mu}^1 - \varepsilon^2 \gamma_4 \sigma_{33}^1 - \gamma_5 D_3^0 \right. \\ \left. - \varepsilon \gamma_6 D_3^1 - \varepsilon \gamma_7 \sigma_{33}^0 - \gamma_8 \left[a_\mu \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial \mu_\mu^\varepsilon}{\partial s} + b_\mu \frac{\partial \mu_\mu^\varepsilon}{\partial \xi} \right] \right. \\ \left. - \varepsilon^{-1} \gamma_9 \psi_{,3}^\varepsilon \right\} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \left[a_\mu \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial \mu_\mu^\varepsilon}{\partial s} + b_\mu \frac{\partial \mu_\mu^\varepsilon}{\partial \xi} \right] \delta_{\alpha\beta} \\ \frac{1}{2} \left[\left(a_\beta \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial \mu_\alpha^\varepsilon}{\partial s} + b_\beta \frac{\partial \mu_\alpha^\varepsilon}{\partial \xi} \right) + \left(a_\alpha \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial \mu_\beta^\varepsilon}{\partial s} + b_\alpha \frac{\partial \mu_\beta^\varepsilon}{\partial \xi} \right) \right] \quad (J.31)$$

$$\left. \begin{aligned} a_\alpha \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial Z_{\beta\alpha}^\varepsilon}{\partial s} + b_\alpha \frac{\partial Z_{\beta\alpha}^\varepsilon}{\partial \xi} + \partial_3 Z_{\beta 3}^\varepsilon &= 0 \\ a_\alpha \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial Z_{3\alpha}^\varepsilon}{\partial s} + b_\alpha \frac{\partial Z_{3\alpha}^\varepsilon}{\partial \xi} + \partial_3 Z_{33}^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur B} \\ a_\alpha \left(1 - \frac{\xi}{R(s)}\right)^{-1} \frac{\partial F_\alpha^\varepsilon}{\partial s} + b_\alpha \frac{\partial F_\alpha^\varepsilon}{\partial \xi} + \partial_3 F_3^\varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (J.32)$$

$$Z_{i3}^\varepsilon = 0 \quad \text{en } x_3 = \pm 1$$

$$F_3^\varepsilon = 0 \quad \text{en } x_3 = \pm 1$$

III Equations de la couche limite au voisinage de Γ_0

Nous désirons étudier l'approximation de la solution des équations (J.27) à (J.32) par la méthode du Zoom selon la direction normale à la frontière Γ_0 .

Pour cela, posons :

$$B^\varepsilon = \gamma \times \left] 0, \frac{L}{\varepsilon} \left[\times \right] -1, 1 \left[\quad (J.33)$$

et introduisons la transformation

$$F^\varepsilon : B^\varepsilon \rightarrow B \quad (J.34)$$

qui à l'élément (s, η, x_3) de B^ε fait correspondre l'élément $(s, \varepsilon \eta, x_3)$ de B , et telle que, à toute fonction f définie sur B , on associe une fonction \hat{f} définie sur B^ε et vérifiant les relations :

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}((s, \eta, x_3)) &= f \circ F^\varepsilon((s, \eta, x_3)) \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} &= \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_3} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \eta} &= \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (J.35)$$

auxquelles, on peut associer le changement d'inconnues ci-après, relativement aux composantes du champ « déplacement mécanique » dans la base (a, b, k) liée aux points de la frontière γ de ω ; et au potentiel électrique ψ^ε .

Dans cette base, les composantes du déplacement μ^ε s'écrivent respectivement :

$$\left. \begin{aligned} v^\varepsilon((s, \xi, x_3)) &= a_\alpha \mu^\varepsilon_\alpha((s, \xi, x_3)) \\ w^\varepsilon((s, \xi, x_3)) &= b_\alpha \mu^\varepsilon_\alpha((s, \xi, x_3)) \\ \mu^\varepsilon_3((s, \xi, x_3)) &= \mu^\varepsilon_3((s, \xi, x_3)); \end{aligned} \right\} \quad (J.36)$$

avec par ailleurs, un potentiel électrique ψ^ε qui reste inchangé.

D'autre part, sur l'ouvert B^ε , les valeurs correspondantes de ces composantes sont respectivement définies par :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{v}^\varepsilon((s, \eta, x_3)) = v^\varepsilon((s, \varepsilon \eta, x_3)) \\ \hat{w}^\varepsilon((s, \eta, x_3)) = \varepsilon w^\varepsilon((s, \varepsilon \eta, x_3)) \\ \hat{\mu}_3^\varepsilon((s, \eta, x_3)) = \mu_3^\varepsilon((s, \varepsilon \eta, x_3)) \end{array} \right. \quad (J.37)$$

avec

$$\left| \hat{\psi}^\varepsilon((s, \eta, x_3)) = \psi^\varepsilon((s, \varepsilon \eta, x_3)) \right.$$

L'expression des équations (J-27) à (J-32) à l'aide des champs $(\hat{v}^\varepsilon, \hat{w}^\varepsilon, \hat{\mu}_3^\varepsilon)$ et $\hat{\psi}^\varepsilon$ ainsi que des coordonnées (s, η, x_3) étant très lourde à mettre en oeuvre, nous allons donc, pour des raisons de commodité, conserver les inconnues Z_{ij}^ε et F_j^ε , tout en sachant que dans le repère (a, b, k) , elles s'écrivent respectivement:

$$\left| \begin{array}{l} Z_{\xi\xi}^\varepsilon = Z_{\alpha\beta}^\varepsilon b_\alpha b_\beta \\ Z_{\xi\xi}^\varepsilon = Z_{s\xi}^\varepsilon = Z_{\alpha\beta}^\varepsilon b_\alpha a_\beta \\ Z_{ss}^\varepsilon = Z_{\alpha\beta}^\varepsilon a_\alpha a_\beta \\ Z_{3\xi}^\varepsilon = Z_{\xi 3}^\varepsilon = Z_{\alpha 3}^\varepsilon b_\alpha \\ Z_{s3}^\varepsilon = Z_{3s}^\varepsilon = Z_{\alpha 3}^\varepsilon a_\alpha \\ F_s^\varepsilon = F_\alpha^\varepsilon b_\alpha \\ F_\xi^\varepsilon = F_\alpha^\varepsilon a_\alpha \end{array} \right. \quad (J.38)$$

Si par ailleurs, nous prenons en compte l'effet de Zoom, on pourrait associer aux champs Z et F, les transformations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{Z}_{\eta\eta}^\varepsilon(s, \eta, x_3) = \varepsilon^{-2} Z_{\xi\xi}^\varepsilon(s, \varepsilon \eta, x_3) \\ \hat{Z}_{\eta s}^\varepsilon(s, \eta, x_3) = \varepsilon^{-1} Z_{\xi s}^\varepsilon(s, \varepsilon \eta, x_3) \\ \hat{Z}_{ss}^\varepsilon(s, \eta, x_3) = Z_{ss}^\varepsilon(s, \varepsilon \eta, x_3) \\ \hat{Z}_{\eta 3}^\varepsilon(s, \eta, x_3) = Z_{\xi 3}^\varepsilon(s, \varepsilon \eta, x_3) \\ \hat{Z}_{33}^\varepsilon(s, \eta, x_3) = Z_{33}^\varepsilon(s, \varepsilon \eta, x_3) \end{array} \right. \quad (J.39)$$

$$\left| \begin{aligned} \hat{F}_n^\varepsilon(s, \eta, x_3) &= \varepsilon^{-1} F_\xi^\varepsilon(s, \varepsilon \eta, x_3) \\ \hat{F}_s^\varepsilon(s, \eta, x_3) &= F_s^\varepsilon(s, \varepsilon \eta, x_3) \end{aligned} \right.$$

Puisqu'il s'agit à présent de rechercher une approximation de ces équations, nous utiliserons pour cela, la méthode du développement asymptotique relativement à l'épaisseur 2ε de la plaque, en posant à priori, sous réserve que les fonctions mises en évidence soient susceptibles d'être prolongées sur l'ouvert B^ε avec $\varepsilon = 0$:

$$(\hat{v}^\varepsilon, \hat{w}^\varepsilon, \hat{\mu}_3^\varepsilon, \hat{\psi}^\varepsilon) = (\hat{v}^{(0)}, \hat{w}^{(0)}, \hat{\mu}_3^{(0)}, \hat{\psi}^{(0)}) + \varepsilon (\hat{v}^{(1)}, \hat{w}^{(1)}, \hat{\mu}_3^{(1)}, \hat{\psi}^{(1)}) + \dots \quad (J.40)$$

La détermination d'une approximation de la solution tridimensionnelle au voisinage de la frontière latérale Γ_0^ε de la plaque, se fera après que l'on ait déterminé le terme de rang zéro.

Aussi, comme l'on s'intéresse essentiellement au premier terme du développement asymptotique (J-38), il convient à présent de poser :

$$1 - \frac{\xi}{R} = 1 - \frac{\varepsilon n}{R} = 1 \quad (J.41)$$

Les équations (J-32) se transforment par conséquent sous la forme :

$$\left| \begin{aligned} \partial_n \hat{Z}_{nn}^\varepsilon + \partial_s \hat{Z}_{ns}^\varepsilon + \partial_3 \hat{Z}_{n3}^\varepsilon &= 0 \\ \partial_n \hat{Z}_{ns}^\varepsilon + \partial_s \hat{Z}_{ss}^\varepsilon + \partial_3 \hat{Z}_{s3}^\varepsilon &= 0 \\ \partial_n \hat{Z}_{n3}^\varepsilon + \partial_s \hat{Z}_{s3}^\varepsilon + \partial_3 \hat{Z}_{33}^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } B^\varepsilon \\ \partial_s \hat{F}_n^\varepsilon + \partial_n \hat{F}_s^\varepsilon + \partial_3 \hat{F}_3^\varepsilon &= 0 \end{aligned} \right. \quad (J.42)$$

$$\left| \begin{aligned} \hat{Z}_{n3}^\varepsilon = \hat{Z}_{s3}^\varepsilon = \hat{Z}_{33}^\varepsilon &= 0 \quad \text{en } x_3 = \pm 1 \\ \partial_3 \hat{F}_3^\varepsilon &= \partial_3 \hat{F}_s^\varepsilon \end{aligned} \right. \quad (J.43)$$

et les équations (J-27) à (J-31) sous la forme :

$$\hat{F}_n^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4 \tilde{b}_{11} a_{1313}} \left\{ -4 \varepsilon^{-1} a_{1313} \frac{\partial \hat{\psi}^\varepsilon}{\partial s} + 4 a_{1313} \tilde{a}_{113} \sigma_{s3}^1 \right. \quad (J.44)$$

$$\left. + \varepsilon^{-2} \tilde{a}_{113} \partial_3 \hat{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-2} \tilde{a}_{113} \frac{\partial \hat{\mu}_3^\varepsilon}{\partial s} - \tilde{a}_{113} b_{311} D_n^1 - 4 \varepsilon^{-1} a_{1313} \tilde{a}_{113} \sigma_{s3}^0 \right\}$$

$$\hat{F}_s^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113}b_{311} - 4\tilde{b}_{11}a_{1313}} \left\{ \varepsilon^{-1} \frac{\partial \hat{\psi}^\varepsilon}{\partial \eta} + 4\varepsilon a_{1313} \tilde{a}_{113} \sigma_{\eta 3}^1 \right. \quad (\text{J.45})$$

$$\left. \varepsilon^{-2} \tilde{a}_{113} \partial_3 \hat{w}^\varepsilon + \varepsilon^{-2} \tilde{a}_{113} \frac{\partial \hat{\mu}_{3,3}^\varepsilon}{\partial \eta} - \tilde{a}_{113} b_{311} D_s^1 - 4a_{1313} \tilde{a}_{113} \sigma_{\eta 3}^0 \right\}$$

$$\hat{F}_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon \beta} \left\{ \beta_4 \left[\frac{\partial \hat{v}^\varepsilon}{\partial s} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial \hat{w}^\varepsilon}{\partial \eta} \right] - \varepsilon \beta_2 D_3^1 - \varepsilon \beta_3 \sigma_{33}^0 \right. \quad (\text{J.46})$$

$$\left. -\varepsilon^2 \beta_4 \sigma_{33}^1 - \varepsilon^{-2} \beta_5 \mu_{3,3}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} \beta_6 \sigma_{\mu\mu}^0 + \beta_7 \sigma_{\mu\mu}^1 + \beta_8 D_3^0 \right. \\ \left. - \varepsilon^{-1} \beta_9 \psi_{,3}^\varepsilon \right\}$$

$$\hat{Z}_{33}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2 \alpha} \left\{ \varepsilon^{-1} \psi_{,3}^\varepsilon - \alpha_1 D_3^0 - \varepsilon \alpha_2 D_3^1 - \varepsilon \alpha_3 \sigma_{33}^0 - \varepsilon^2 \alpha_4 \sigma_{33}^1 \right.$$

$$\left. -\varepsilon^{-2} \alpha_5 \mu_{3,3}^\varepsilon - \varepsilon^{-1} \alpha_6 \sigma_{\mu\mu}^0 - \alpha_6 \left[\frac{\partial \hat{v}^\varepsilon}{\partial s} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial \hat{w}^\varepsilon}{\partial \eta} \right] \right. \quad (\text{J.47})$$

$$\left. -\alpha_7 \sigma_{\mu\mu}^1 \right\}$$

$$\hat{Z}_{3s}^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113}b_{311} - 4\tilde{b}_{11}a_{1313}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} b_{311} \frac{\partial \hat{\psi}^\varepsilon}{\partial s} - \tilde{a}_{113} b_{311} \sigma_{3s}^1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{b}_{11} (\partial_3 \hat{v}^\varepsilon \frac{\partial \hat{\mu}_{3,3}^\varepsilon}{\partial s}) \right.$$

$$\left. -\tilde{b}_{11} b_{311} D_\eta^1 - \frac{4}{\varepsilon} a_{1133} \tilde{b}_{11} \sigma_{3s}^0 \right\} \quad (\text{J.48})$$

$$\hat{Z}_{\eta 3}^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113}b_{311} - 4\tilde{b}_{11}a_{1313}} \left\{ \varepsilon^{-2} b_{311} \frac{\partial \hat{\psi}^\varepsilon}{\partial \eta} - \tilde{a}_{113} b_{311} \sigma_{\eta 3}^1 - \varepsilon^{-3} \tilde{b}_{11} (\partial_3 \hat{w}^\varepsilon \frac{\partial \hat{\mu}_{3,3}^\varepsilon}{\partial \eta}) \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\varepsilon} \tilde{b}_{11} b_{311} D_s^1 - \frac{4}{\varepsilon} a_{1133} \tilde{b}_{11} \sigma_{\eta 3}^0 \right\}$$

$$\hat{Z}_{\eta\eta}^\varepsilon = \frac{1}{2a_{1133}} \left\{ \varepsilon^{-4} \gamma_1 \hat{\mu}_{3,3}^\varepsilon - \varepsilon^{-3} \gamma_2 \sigma_{\mu\mu}^0 - \varepsilon^{-2} \gamma_3 \sigma_{\mu\mu}^1 - \gamma_4 \sigma_{33}^1 - \varepsilon^{-2} \gamma_5 D_3^0 \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon^{-1} \gamma_6 D_{33}^1 - \varepsilon^{-1} \gamma_7 \sigma_{33}^0 - \varepsilon^{-3} \gamma_9 \psi_{,3}^\varepsilon \} \\
 & + \frac{1}{2} \varepsilon^{-4} \left(1 - \frac{\gamma_8}{a_{1133}}\right) \frac{\partial \hat{w}^\varepsilon}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \left(1 - \frac{\gamma_8}{a_{1133}}\right) \frac{\partial \hat{v}^\varepsilon}{\partial s}
 \end{aligned} \tag{J.50}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{Z}_{ss}^\varepsilon &= \frac{1}{2a_{1133}} \left\{ \varepsilon^{-2} \gamma_1 \hat{\mu}_{3,3} - \varepsilon^{-1} \gamma_2 \sigma_{\mu\mu}^0 - \gamma_3 \sigma_{\mu\mu}^1 - \varepsilon^2 \gamma_4 \sigma_{33}^1 - \gamma_5 D_{33}^0 \right. \\
 & \left. - \varepsilon \gamma_6 D_{33}^1 - \varepsilon \gamma_7 \sigma_{33}^0 - \varepsilon^{-1} \gamma_9 \psi_{,3}^\varepsilon \right\} \\
 & - \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \left(1 + \frac{\gamma_2}{a_{1133}}\right) \frac{\partial \hat{w}^\varepsilon}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma_2}{a_{1133}}\right) \frac{\partial \hat{v}^\varepsilon}{\partial s}
 \end{aligned} \tag{J.51}$$

$$\hat{Z}_{\eta s}^\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial s} \hat{w}^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{v}^\varepsilon \right) \tag{J.52}$$

Si l'on tient compte de la relation (J-40) et que l'on fait tendre ε vers zéro, il vient :

$$\hat{F}_n^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4\tilde{b}_{11} a_{1313}} \varepsilon^{-2} \tilde{a}_{113} (\partial_3 \hat{w}^{(0)} + \frac{\partial \hat{\mu}_3^{(0)}}{\partial \eta}) \tag{J.53}$$

$$\hat{F}_s^\varepsilon = \frac{1}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4\tilde{b}_{11} a_{1313}} \varepsilon^{-2} \tilde{a}_{113} (\partial_3 \hat{w}^{(0)} + \frac{\partial \hat{\mu}_3^{(0)}}{\partial \eta}) \tag{J.54}$$

$$\hat{F}_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3 \beta} \left(\beta_1 \frac{\partial \hat{w}^{(0)}}{\partial \eta} - \beta_5 \partial_3 \hat{\mu}_3^{(0)} \right) \tag{J.55}$$

$$\hat{z}_{33}^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^4 \alpha} \left(\alpha_5 \partial_3 \hat{\mu}_3^{(0)} - \alpha_6 \frac{\partial \hat{w}^{(0)}}{\partial \eta} \right) \tag{J.56}$$

$$\hat{Z}_{3s}^\varepsilon = \frac{-1}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4\tilde{b}_{11} a_{1313}} \varepsilon^{-2} \tilde{b}_{11} (\partial_3 \hat{v}^{(0)} + \frac{\partial \hat{\mu}_3^{(0)}}{\partial s}) \tag{J.57}$$

$$\hat{Z}_{\eta s}^\varepsilon = \frac{-1}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4\tilde{b}_{11} a_{1313}} \varepsilon^{-3} \tilde{b}_{11} (\partial_3 \hat{w}^{(0)} + \frac{\partial \hat{\mu}_3^{(0)}}{\partial \eta}) \tag{J.58}$$

$$\hat{Z}_{\eta\eta}^\varepsilon = \frac{1}{2a_{1133}} \varepsilon^{-4} \left(\gamma_1 \partial_3 \hat{\mu}_3^{(0)} + a_{1133} \left(1 - \frac{\gamma_2}{a_{1133}}\right) \frac{\partial \hat{w}^{(0)}}{\partial \eta} \right) \tag{J.59}$$

$$\hat{Z}_{ss}^\varepsilon = \frac{1}{2a_{1133}} \varepsilon^{-2} \left(\gamma_1 \partial_3 \hat{\mu}_3^{(0)} - a_{1133} \left(1 + \frac{\gamma_2}{a_{1133}}\right) \frac{\partial \hat{w}^{(0)}}{\partial \eta} \right) \tag{J.60}$$

$$\hat{Z}_{\eta s}^\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \left(\frac{\partial \hat{w}^{(0)}}{\partial s} + \frac{\partial \hat{v}^{(0)}}{\partial \eta} \right) \quad (\text{J.61})$$

En comparant cette fois la relation (J-40) avec les expressions (J-42), il vient sur B^ε :

$$\begin{aligned} \gamma_1 \partial_{\eta 3} \hat{\mu}_3^{(0)} + a_{1133} \left(1 - \frac{\gamma_2}{a_{1133}} \right) \partial_{\eta \eta} \hat{w}^{(0)} &= 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\gamma_2}{a_{1133}} \partial_{s \eta} \hat{w}^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_{\eta \eta} \hat{v}^{(0)} + \left(\frac{\gamma_1}{2a_{1133}} - \frac{\tilde{b}_{11}}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4\tilde{b}_{11} a_{1313}} \right) \partial_{3s} \hat{\mu}_3^{(0)} \\ - \frac{\tilde{b}_{11}}{\tilde{a}_{113} b_{311} - 4\tilde{b}_{11} a_{1313}} \partial_{33} \hat{v}^{(0)} &= 0 \quad (\text{J.62}) \end{aligned}$$

$$\alpha_5 \partial_{33} \hat{\mu}_3^{(0)} - \alpha_6 \partial_{\eta 3} \hat{w}^{(0)} = 0$$

$$\beta_5 \partial_{\eta 3} \hat{w}^{(0)} - \beta_5 \partial_{33} \hat{\mu}_3^{(0)} = 0$$

Et par suite, en $x_3 = \pm 1$

$$\begin{aligned} \partial_3 \hat{w}^{(0)} + \partial_\eta \hat{\mu}_3^{(0)} &= 0 \\ \partial_3 \hat{v}^{(0)} + \partial_s \hat{\mu}_3^{(0)} &= 0 \\ \alpha_5 \partial_3 \hat{\mu}_3^{(0)} - \alpha_6 \partial_\eta \hat{w}^{(0)} &= 0 \quad (\text{J.63}) \\ \beta_1 \partial_{3\eta} \hat{w}^{(0)} \hat{\mu}_3^{(0)} - \beta_5 \partial_{33} \hat{\mu}_3^{(0)} &= 0 \\ \partial_{33} \hat{w}^{(0)} + \partial_{3\eta} \hat{\mu}_3^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

Les équations (J-53) à (J-62) constituent les équations de la couche limite au voisinage de Γ_0

Par ailleurs, les relations (J-16) entraînent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}^\varepsilon (s, o, x_3) = -a_\alpha u_\alpha^{(1)} (s, o, x_3) \\ \hat{w}^\varepsilon (s, o, x_3) = -b_\alpha u_\alpha^{(1)} (s, o, x_3) \\ \hat{\mu}_3^\varepsilon (s, o, x_3) = -u_3^{(1)} (s, o, x_3) \\ \hat{\psi}^\varepsilon (s, o, x_3) = \hat{\phi}^{(1)} (s, o, x_3) \end{array} \right. \quad (\text{J.64})$$

Par suite, du fait que les seconds membres des relations (J-64) ne dépendent pas de ε , il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}^{(0)} (s, o, x_3) = -a_\alpha u_\alpha^{(1)} (s, o, x_3) \\ \hat{w}^{(0)} (s, o, x_3) = -b_\alpha u_\alpha^{(1)} (s, o, x_3) \\ \hat{\mu}_3^{(0)} (s, o, x_3) = -u_3^{(1)} (s, o, x_3) \\ \hat{\psi}^{(0)} (s, o, x_3) = \hat{\phi}^{(1)} (s, o, x_3) \end{array} \right. \quad (\text{J.65})$$

Remarque (J-1)

Ces conditions aux limites en $\eta = 0$, expriment donc sur frontière latérale Γ_0 , un potentiel électrique, ainsi qu'un déplacement mécanique imposés.

Par contre en $\eta = \frac{L}{\varepsilon}$, les conditions aux limites ne sont sous aucune contrainte ; de façon à favoriser la réalisation de la condition de décroissance rapide de la couche limite vers l'intérieur de la plaque.

IV Calcul de la couche limite de torsion

Introduisant la décomposition

$$\hat{v}^{(0)} = \hat{v}_1^{(0)} + \hat{v}_2^{(0)},$$

les équations (J-62) à (J-64) se découpent en un problème en $\hat{v}_1^{(0)}$ et en un autre, en $\hat{v}_2^{(0)}$ de la manière suivante:

$$\partial_3 \hat{v}_1^{(0)}(s, \eta, \pm 1) = 0$$

$$\frac{2\tilde{b}_{11}}{4\tilde{b}_{11} a_{1313} - \tilde{a}_{113} b_{311}} \partial_{33} \hat{v}_1^{(0)} + \partial_{\eta\eta} \hat{v}_1^{(0)} = 0 \quad \text{sur } B_s$$

$$\hat{v}_1^{(0)}(s, 0, x_3) = -a_\alpha u_\alpha^{(1)}(s, 0, x_3) \quad (\text{J.66})$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{v}_1^{(0)}(s, \eta, x_3) = 0$$

$$\text{avec } \frac{2\tilde{b}_{11}}{4\tilde{b}_{11} a_{1313} - \tilde{a}_{113} b_{311}} > 0$$

$$\text{car } \tilde{b}_{11} = \frac{-1}{\tilde{\varepsilon}_{11}} \quad , \quad \tilde{a}_{113} = \frac{e_{15}}{c_{44} \tilde{\varepsilon}_{11}} > 0$$

$$\text{et } b_{311} = \frac{e_{15}}{2c_{44} \tilde{\varepsilon}_{11}} > 0 \quad ; \quad a_{1313} > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{2\tilde{b}_{11}}{4\tilde{b}_{11} a_{1313} - \tilde{a}_{113} b_{311}} \partial_{33} \hat{v}_2^{(0)} + \partial_{\eta\eta} \hat{v}_2^{(0)} &= \frac{\gamma_8}{a_{1133}} \partial_{s\eta} \hat{w}^{(0)} \\ &\quad - \left(\frac{\gamma_1}{2a_{1133}} - \frac{\tilde{b}_{11}}{a_{113} b_{311} - 4b_{311} a_{1313}} \right) \partial_3 \hat{\mu}_3^{(0)} \end{aligned}$$

$$\gamma_1 \partial_{\eta 3} \hat{\mu}_3^{(0)} + a_{1133} \left(1 - \frac{\gamma_8}{a_{1133}} \right) \partial_{\eta\eta} \hat{w}^{(0)} = 0$$

$$\alpha_5 \partial_{33} \hat{\mu}_3^{(0)} - \alpha_6 \partial_{\eta 3} \hat{w}^{(0)} = 0$$

$$\beta_1 \partial_{\eta 3} \hat{w}^{(0)} - \beta_5 \partial_{33} \hat{\mu}_3^{(0)} = 0$$

$$\partial_3 \hat{v}_2^{(0)}(s, \eta, \pm 1) = -\partial_\eta \hat{\mu}_3^{(0)}(s, \eta, \pm 1)$$

$$(\partial_3 \hat{w}^{(0)} + \partial_\eta \hat{\mu}_3^{(0)})(s, \eta, \pm 1) = 0$$

$$(\alpha_5 \partial_3 \hat{\mu}_3^{(0)} - \alpha_6 \partial_\eta \hat{w}^{(0)})(s, \eta, \pm 1) = 0$$

$$(\beta_1 \partial_{3\eta} \hat{w}^{(0)} - \beta_5 \partial_{33} \hat{\mu}_3^{(0)})(s, \eta, \pm 1) = 0$$

$$(\partial_{33} \hat{w}^{(0)} + \partial_{3\eta} \hat{\mu}_3^{(0)})(s, \eta, \pm 1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \hat{v}_2^{(0)}(s, o, x_3) &= 0 \\
 (\hat{w}^{(0)} + b_\alpha u_\alpha^{(1)})(s, o, x_3) &= 0 \\
 (\hat{\mu}_3^{(0)} + u_3^{(1)})(s, o, x_3) &= 0 \\
 (\hat{\psi}^{(0)} + \hat{\phi}^{(1)})(s, o, x_3) &= 0
 \end{aligned} \tag{J.67}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{v}_2^{(0)}(s, \eta, x_3) &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{w}^{(0)}(s, \eta, x_3) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{\mu}_3^{(0)}(s, \eta, x_3) = 0 \\
 \lim_{\eta \rightarrow \infty} \hat{\psi}^{(0)}(s, \eta, x_3) &= 0
 \end{aligned}$$

Remarque (J-2)

Si $b_\alpha u_\alpha^{(1)} = 0$ et $u_3^{(1)} = 0$,

les équations précédentes ne se ramènent plus qu'aux expressions (J-66), qui traduisent pour la plaque, un mouvement de rotation autour d'un axe normal à sa surface moyenne.

Ce sont les équations de la couche limite de torsion que nous allons à présent résoudre par la méthode de la séparation des variables.

Posons en effet :

$$\hat{v}_\eta^{(0)} = \hat{X}^{(0)}(x_3) \hat{Y}^{(0)}(\eta)$$

où

$$(x_3, \eta) \in]-1, 1[\times]0, \frac{L}{\varepsilon}[;$$

Il s'en suit, pour la deuxième équation (J-66) :

$$\frac{2\tilde{b}_1}{4\tilde{b}_{11} \alpha_{1313} - \tilde{a}_{113} b_{311}} \frac{\partial_{33} \hat{X}^{(0)}(x_3)}{\hat{X}^{(0)}(x_3)} = - \frac{\partial_{\eta\eta} \hat{Y}^{(0)}(\eta)}{\hat{Y}^{(0)}(\eta)} = k \tag{J.68}$$

où k est une constante.

et par suite :

$$\frac{2\tilde{b}_{11}}{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}} \partial_{33} \hat{X}^{(0)}(x_3) - k \hat{X}^{(0)}(x_3) = 0 \quad (J.69)$$

$$\partial_{\eta\eta} \hat{Y}^{(0)}(\eta) + k \hat{Y}^{(0)}(\eta) = 0$$

$k > 0$ conduirait à des solutions pouvant devenir infinies, il paraît donc naturel de se limiter à des valeurs négatives de k , ce qui nous conduit à poser :

$$k = -\omega^2$$

et par suite :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{X}^{(0)}(\eta) = C_1 e^{-\omega \eta} + C_2 e^{\omega \eta} \quad (I.70) \\ \hat{Y}^{(0)}(x_3) = C_3 \cos \omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} x_3 + C_4 \sin \omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} x_3 \end{array} \right.$$

Si l'on tient compte de la condition de décroissance de la couche limite vers l'intérieur de la plaque, il vient :

$$C_2 = 0$$

Mais si à présent on considère la condition aux limites (J-66)₁, on a :

$$\left| \begin{array}{l} -\omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} \sin \omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} \cdot C_3 \\ + \omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} \cos \omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} \cdot C_4 = 0 \\ -\omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} \sin \omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} \cdot C_3 \\ + \omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} \cos \omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} \cdot C_4 = 0 \end{array} \right.$$

et par suite

$$2\omega \sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}\alpha_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}} = n\Pi, \quad n \text{ entier naturel}$$

d'où

$$\omega = \frac{n\Pi}{\sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}\alpha_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}}} \quad (J.72)$$

Par conséquent, l'on peut poser $C_1C_3 = A_n$ et $C_1C_4 = B_n$, puisque ces coefficients dépendent désormais de n, et il apparait par ailleurs que

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est pair, } & B_n = 0 \text{ et que} \\ \text{si } n \text{ est impair, } & A_n = 0 \end{aligned}$$

En définitive, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition (J-1)

Une solution élémentaire du problème de couche limite de torsion est définie par :

$$\hat{v}_\eta^{(0)}(s, \eta, x_3) = e^{-\frac{n\Pi}{\sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}\alpha_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}}} \cdot \eta} \left(A_n \cos \frac{n\Pi}{2} x_3 + B_n \sin \frac{n\Pi}{2} x_3 \right)$$

$$\begin{aligned} \text{où, } & B_n = 0 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ & A_n = 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{aligned}$$

Par superposition des solutions élémentaires, on peut considérer comme solution générale du problème (J-66) l'expression :

$$\hat{v}_1^{(0)}(s, \eta, x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \frac{\Pi}{2\sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}\alpha_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}}} \cdot \eta} \left(A_n \cos \frac{n\Pi}{2} x_3 + B_n \sin \frac{n\Pi}{2} x_3 \right) \quad (J.73)$$

Cependant,

$$\partial_3 \hat{v}_1^{(0)}(s, o, x_3) = -a_\alpha u_\alpha^{(1)}(s, o, x_3),$$

et en admettant que la dérivation terme à terme de la série soit légitime, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} -A_n \cdot \frac{n\Pi}{2} \sin \frac{n\Pi}{2} x_3 + B_n \cdot \frac{n\Pi}{2} \cos \frac{n\Pi}{2} x_3 = -a_\alpha u_\alpha^{(1)}(s, o, x_3)$$

et par suite

$$A_n = -\int_{-1}^1 a_\alpha u_\alpha^1(s, o, x_3) \cos \frac{n\Pi}{2} x_3 dx_3 \tag{J.74}$$

$$B_n = -\int_{-1}^1 a_\alpha u_\alpha^1(s, o, x_3) \sin \frac{n\Pi}{2} x_3 dx_3 ;$$

Ce qui conduit à l'expression

$$\begin{aligned} \hat{v}_1^{(0)}(s, n, x_3) = \sum_{q \in \mathbb{N}} A_q \exp \left(\frac{-q \Pi}{\sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11} a_{1313} - \tilde{a}_{113} b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}}} \cdot \eta \right) \cos(q \Pi x_3) \\ + B_q \exp \left(\frac{-(2q+1) \Pi}{2\sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11} a_{1313} - \tilde{a}_{113} b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}}} \cdot \eta \right) \sin \left(\frac{2q+1}{2} \Pi x_3 \right) \end{aligned} \tag{J.75}$$

et finalement à la proposition :

Proposition (J-2)

Le déplacement tridimensionnel tangent à la frontière Γ_0^ε de la plaque Ω^ε est approché par :

$$a_\alpha u_\alpha^{(0)}(s, \xi, \frac{x_3^\varepsilon}{\varepsilon}) + \varepsilon a_\alpha u_\alpha^{(1)}(s, \xi, \frac{x_3^\varepsilon}{\varepsilon}) + \varepsilon \hat{v}_1^{(0)}(s, \frac{\xi}{\varepsilon}, \frac{x_3^\varepsilon}{\varepsilon})$$

où

$$\hat{v}_1^{(0)}(s, \frac{\xi}{\varepsilon}, \frac{x_3^\varepsilon}{\varepsilon}) = \sum_{q=1}^{\infty} (A_q \exp(-\frac{q \Pi}{\sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}}} \cdot \frac{\xi}{\varepsilon}) \cos(q \Pi \frac{x_3^\varepsilon}{\varepsilon}) + B_q \exp(-\frac{-(2q+1)}{2\sqrt{\frac{4\tilde{b}_{11}a_{1313} - \tilde{a}_{113}b_{311}}{2\tilde{b}_{11}}}} \cdot \frac{\xi}{\varepsilon}) \sin(\frac{2q+1}{2} \Pi \frac{x_3^\varepsilon}{\varepsilon}))$$

avec $A_0 = 0$, du fait de la condition $\int_{-1}^1 u_\alpha^{(1)}(s, \xi, x_3) dx_3 = 0$

Conclusion générale et perspectives

Les résultats obtenus dans cette thèse, ont permis, en s'appuyant sur les travaux de **G. MAUGIN (1)**, de généraliser à la piézoélectricité linéaire des méthodes de validation des modèles de plaques, basées sur les développements asymptotiques (cf. **P. DESTUYNDER (1)**)

La première partie de cette thèse a conduit d'une part, en vertu d'une théorie de l'erreur fondée sur la méthode des perturbations singulières de **LIONS (1)**, à l'évaluation de la qualité de l'approximation du modèle tridimensionnel de la piézoélectricité par un modèle de plaque et d'autre part, à la mise en évidence de l'importance du choix des conditions aux limites, sur la nature d'une telle approximation. Il s'en est ressorti une convergence des composantes de même nature des termes d'ordre zéro du développement asymptotique ; cependant, aucun renseignement significatif n'a pu être révélé sur le comportement des autres composantes, et il aurait peut-être suffi pour y arriver, de définir pour toutes ces quantités, un cadre fonctionnel approprié.

Pour ce qui concerne les conditions aux limites, nous avons pu établir, qu'en les choisissant judicieusement, nous pouvions faire disparaître l'effet de couche limite mis en évidence dans les travaux de **G. MAUGIN (1)**, et ainsi procéder au calcul des termes d'ordre un du développement asymptotique ; ce qui par ailleurs, permet de passer d'une erreur en $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$ à une erreur en $O(\varepsilon)$.

D'autre part, en nous basant sur la validation du modèle de plaque proposé, nous avons pu construire des modèles de plaques multicouches, desquels nous avons déduit, sous des conditions bien précises, et dans le cas d'une déformation en flexion, une analogie comportementale avec les structures monocouches.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous nous sommes, dans un premier temps, intéressés à la mise en oeuvre d'un critère de propagation des fissures dans les plaques minces piézoélectriques.

Une généralisation à la piézoélectricité de l'intégrale de **RICE** nous a permis de définir une expression de la force d'avancement d'une fissure tridimensionnelle, de laquelle nous avons pu, sans hypothèse a priori et à partir de développements asymptotiques, déduire le critère de propagation d'une fissure transversale dans une plaque piézoélectrique mince.

Dans cette étude, on a pu réaliser que le critère établi ne s'exprime dans le cas d'une anisotropie faible, qu'à l'aide de la solution électromécanique du problème limite se rapportant à la surface moyenne de la plaque, et que par ailleurs, le cisaillement transverse se révèle d'une grande importance dans la définition du critère.

Dans un second temps, nous nous sommes proposés d'analyser le comportement local de la solution tridimensionnelle au voisinage de la frontière latérale Γ_0^ε de la plaque.

De cette analyse, qu'il serait sans doute intéressant de reprendre ultérieurement par la méthode des éléments finis, s'en est suivi un système d'équations se découplant en un problème de calcul de la couche limite de torsion qui correspond en réalité à un mouvement de rotation de la plaque autour d'un axe normal à sa surface moyenne, et en un problème dit de couche limite de flexion-extension.

Nous avons jusque là pu résoudre le problème de la couche limite de torsion dont les équations se sont exclusivement réduites aux seuls champs mécaniques ; cependant dans l'avenir, nous avons l'intention de nous pencher sur le problème de la couche limite de flexion-extension et ainsi d'établir que même dans le cas de la piézoélectricité, on peut atteindre une amélioration de l'approximation du problème tridimensionnel en prenant en compte les phénomènes de couche limite.

Telle a été notre modeste contribution à l'étude du comportement asymptotique des plaques minces piézoélectriques.

BIBLIOGRAPHIE

- BLANCHARD. D.** and **FRANCFORT. G.A.**, Asymptotic thermoelastic behavior of flat plates ; Quarterly of Applied Mathematics, vol XLV, number 4 PP. 645-667 (1987)
- BOURQUIN. F.** , **CIARLET. P.G.**, **GEYMONAT. G.** et **RAOULT. A.** ,
 Γ – Convergence et analyse asymptotique des plaques minces ; C.R. Acad. Sci. Paris, t. 315, série I, pp; 1017 - 1024 (1992)
- BREZZI. F.**, on the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems by hybrid methods ; R.A.I.R.O., R-3, p 5-53 (1975)
- CIARLET. P. G.**
1. Justification of the Von Karman equations ; Rapport interne du laboratoire d'analyse numérique, LA 189, Université de Paris IV, (1979)
 2. Elasticité tridimensionnelle, collection recherche en mathématiques appliquées RMA 1, MASSON (1986)
 3. Plates and junctions in elastic multi-structures : An asymptotic analyses, MASSON (1990)
- CIARLET. P. G.** and **DESTUYNDER. PH.**, A justification of two dimensional linear plate model, J. Mecan. , Vol : 18 , N°2, (1979)
- COLLET. B.** and **MAUGIN. G.A.** , sur l'électrodynamique des milieux continus avec interactions ; C.R. Acad. Sci. Paris ; 279 B, 379-382
- DECUYPER. M** and **KUNTZMANN.** ,
1. Modèles mathématiques de la physique : DUNOD université, Paris (1972)
 2. C.2 - Signaux et systèmes ; exercices et problèmes ; DUNOD université, Paris (1969)
 3. Compléments de mathématiques ; C.2 - Signaux et systèmes, DUNOD université (1968)
- DESTUYNDER. PH.**, 1.Thèse d'état, université P. et M. CURIE ; Paris (1980)
2. Sur la propagation des fissures dans les plaques minces en flexion. J.Mecan. Théo. et App. ; Vol. 1, N°4, p 579 à 594 (1982)
 3. Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire ; Collection recherche en mathématiques appliquées, RMA 2. MASSON, Paris (1986)
- DESTUYNDER. PH.**, and **DJAOUA. M.**, sur une interprétation mathématique de l'intégrale de RICE en théorie de la rupture fragile, Mat. Meth. in the Appl. Sc., Vol. 3 (1981)

- DESTUYNDER. PH., PALAISEAU et M. DJAOUA., le Chesnay.,** sur une interprétation mathématique de l'intégrale de RICE en théorie de la rupture fragile Math. Meth. In the Appl. Sci. 3 (1981) 70-87.
- DUVAUT G., LIONS. ,** Les inéquations en mécanique et en physique, DUNOD Paris (1973)
- ERINGEN. A. C. and MAUGIN . G.A. ,** Electrodynamics of continua, Vol I (springer, New York) (1989)
- ERINGEN. A. C. ,** Electrodynamics of memory - dependent nonlocal elastic continua ; J. Math. Phys. 25 (1). (1984)
- GERMAIN. P. ,** Cours de l'école polytechnique, Paris (1980)
- GOUDJO and MAUGIN. G. A. ;** on the static and dynamic stability of soft ferromagnetic elastic plates ; Journal de Mécanique théorique et appliquée Vol 2, N°6, p 947-975 (1983)
- IVANENKO and L. A. FIL'SHTINSK II. ,** on the theory of regular piecewise homogeneous structures with piezoceramic matrix, PMM U.S.S.R. ; Vol 50, N°1, pp 92-97 (1986)
- JOSHI. S.P. ,** Non linear constitutive relations for piezoceramic materials Smart Mater. Struct.(1992)
- LAGNESE. J.E. and LIONS. J. L.,** Modelling analysis and control of thin plates ; collection recherche en mathématiques appliquées. RMAG. MASSON. (1988)
- LEKHNITSKIT. S. G. ,** Anisotropic plates ; Gordon and Breach science publishus (1968)
- LIONS. J. L.,**
1. Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, DUNOD (1968)
 2. Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal ; lecture notes in mathematics, Vol 323, Springer Verlag, Berlin (1973)
- LIONS. J.L. et MAGENES. E. ,** problèmes aux limites non homogènes et applications ; T.I. , DUNOD, Paris (1968)
- MAUGIN. G.A.**
1. Further comments on the equivalence of ABRAHAM'S, MINKOWSKI'S and others' electrodynamics ; Canadian Journal of physics ; Vol 58, N°8 pp 1163-1170 (1980)
 2. Continuum mechanics of electromagnetic solids (North Holland), Amsterdam (1988)
 3. A continuum theory of deformable ferrimagnets - I : field equations ; II : thermodynamics, constitutive theory ; J. Math. Phys. ,17, 1727-1738 ; 1731-1751 (1976)

4. On Maxwell's covariant equations in Matter ; Journal of the Franklin Institute ; Vol 305, N°1 (1978)

MAUGIN. G.A. et **ATTOU.**

1. An asymptotic theory of thin piezoelectric plates (Q.JL Mech. Appl. Math., Vol 43, Pt 3. (1990))
2. Mécanique des solides (Problèmes mathématiques de la mécanique) ; une théorie asymptotique des plaques minces piézoélectriques. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 304, série II . N° 15 (1987)

MAUGIN. G.A. et **C. DASCALU.** ,

1. ENERGY-RELEASE Rates and Path-independent. Integrals in electroelastic crack propagation. Int. J. Engng Sci. Vol 32, N° 5, pp 755-765 (1994)
2. On the dynamic fracture of piezoelectric materials (Q.JI Mech. Appl. Math. ; Vol 48, Pt . 2, (1995)
3. On the energy of electroelastic fracture. Z .angew Math. Phys. 46 (1995) (ZAMP)

MAUGIN. G.A. and **DAHER. N.**, phenomenological theory of elastic semi conductors; Int. J. Engng Sci. Vol 24, N° 5, pp 703-731 (1986)

MAUGIN. G.A. and **FOMETHE. A.** ; Viscoplasticity of ferromagnetic crystals and scattering of magnetoelastic waves by structural defects ; colloques internationaux du C.N.R.S. , N° 319- Comportement plastique des solides anisotropes.

MAUGIN. G.A. and **GOUDJO. C.** , The equations of soft-ferromagnetic elastic plates ; Int. J. Solides structures, Vol 18, N° 10, pp 889-912 (1992)

MAUGIN. G. A. and **HAKMI. A.** , Magnetoelastic surface waves in elastic ferromagnets - I : Orthogonal setting of the bias field ; J. Acoust. Soc. Am. 77 (3), (1985)

MAUGIN. G. A. and **POUCET. J.** , electroacoustic equations for one -dom-ferroelectric bodies ; J. Acoust. Soc. Am. G8 (2) (1980)

MAUGIN. G. A. and **TURBE'. N.** , Homogenization of piezoelectric composites via Bloch expansions. Applied Electromagnetics in Materials 2 (1991)

MAUGIN. G. A. et **WASA. ANI.** , Relation d'Hugoniot pour un diélectrique déformable dans l'approximation galiléenne - C. R. Acad. sci. Paris, t - 301, série II, N° 8. (1985)

NAOUM. Daher et **MAUGIN. G.A.** , Modèle phénoménologique de semi-conducteurs piézoélectriques. C. R. Acad. Sci. Paris, t 299, série II, N° 15 (1984)

PANOFSKY and **M. PHILIPS.**, Classical electricity and magnetism ; Addison - Wesley Publishing Compagny (1962)

- PARTON V.Z.** , Fracture Mechanics of piezoelectric materials. Acta. Astronautica Vol 3, pp 671-683 ; Pergamon Press (1976)
- SUO. Z., KUO. C. M., BARNETT and WILLIS. J. R.** , J. Mech. Phys. Solides Vol 40, N° 4, pp 739-765 (1992)
- SCHWARTZ. L.** Théorie des distributions, I , II. Hermann, Paris (1950-1951)
2ème édition (1957)
- SANCHEZ - PALENCIA.** , Non homogeneous media and vibration theory ; lecture notes un physics ; Springer - Verlag (1979)
- TURBE. N. and MAUGIN. G. A.** , On the linear piezoelectricity of composite materials, Mathematical Methods in the applied sciences, Vol 14 (1991)
- ZHOU. S. A, HSIEH. R. K. T. ; MAUGIN. G. A.** , Electric and elastic multipole defects in finite piezoelectric media, International Journal of solids and structures ; Vol 22, N° 12, pp 1411-1422 (1986)

