

THÈSE

pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1
(arrêté du 30.03.92)

Discipline : Mécanique des Fluides

présentée par
Christophe BRAGIER

MODÉLISATION D'UN TERRAIN ET GÉNÉRATION DE MAILLAGES ADAPTÉS À LA BATHYMÉTRIE



soutenue le vendredi 28 juin 1996 devant la commission d'examen :

MM	B.	Peroche	Professeur à l'EMSE	Rapporteur
	S.	Huberson	Professeur à l'Université du Havre	Rapporteur
	D.	Buisine	Professeur à l'Université de Lille	
	A.	Giovannini	Professeur à l'Université de Toulouse	
	H.	Naji	Maître de Conférences à l'Université de Lille	
	J.M.	Moreau	Maître assistant à l'EMSE	
	P.	Dewagenaere	Docteur Ingénieur au Laboratoire National d'Hydraulique (EDF)	
	P.	Sauvaget	Docteur Ingénieur au Laboratoire d'Hydraulique de France	

à ma femme et mes enfants

Table des matières

Remerciements	4
Introduction	6
I Modèle Numérique de Terrain : Facétisation des données bathymétriques et géométriques	17
1 Les données d'une étude à caractère hydraulique	19
1.1 Les modèles de terrain	20
1.1.1 Représentation du terrain	20
1.1.2 Positionnement à la surface de la terre	26
1.2 Les données géométriques	30
1.2.1 Interpolation altimétrique	32
1.2.2 Les limites du Modèle Numérique de Terrain	33
2 Facétisation d'un domaine discret et problèmes associés	37
2.1 Les techniques de facétisation	38
2.1.1 Maillage structuré	38
2.1.2 Maillage non structuré	40
2.2 Triangulation de Delaunay	44
2.2.1 Définition et propriétés	44
2.2.2 Contraintes	44
2.2.3 Techniques pour l'obtention d'un maillage de Delaunay	46
II Maillage adaptatif: respect du terrain et prise en compte	

de critères hydrauliques	55
3 Adaptation à une carte de tailles en respectant la bathymétrie	57
3.1 Simplification de surface	58
3.1.1 Conservation des points caractéristiques d'une surface	58
3.1.2 Minimisation d'une énergie pour la simplification de surface	60
3.2 Adaptation à une carte de tailles avec respect de la bathymétrie	64
3.2.1 Expression énergétique	65
3.2.2 Résolution	66
3.2.3 Limitations et conclusions	68
4 Adaptation à une carte de tailles en respectant la topologie	71
4.1 Triangulation adaptative	72
4.1.1 Adaptation par le h -raffinement	73
4.1.2 Adaptation par le p -raffinement	74
4.1.3 Adaptation par le r -raffinement	74
4.1.4 Adaptation à une carte de tailles	76
4.1.5 Conclusion et besoins propres	80
4.2 Définition de la carte de tailles	81
4.2.1 Structure de la carte de tailles	82
4.2.2 Critère pour une onde de gravité	82
4.2.3 Critère fondé sur la linéarisation des équations de Saint-Venant et de Navier-Stokes	83
4.2.4 Critère du Point Source	87
4.2.5 Lissage de la carte de tailles	87
4.3 Représentation géométrique minimale	88
4.3.1 Respect de la géométrie	89
4.3.2 Respect de la topologie	93
4.3.3 Influence sur la génération du maillage	94
4.4 Adaptation à la carte de tailles	95
4.4.1 Discrétisation des polygones suivant la carte de tailles	96
4.4.2 Ajout et positionnement des points dans le domaine	101
4.4.3 Interpolation	107
4.5 Qualité d'une triangulation	108
4.5.1 Distorsion des mailles	108
4.5.2 Progression des tailles de maille	109
4.5.3 Qualité de l'adaptation	109

4.5.4	Qualité bathymétrique	109
4.5.5	Mailles surcontraintes	110
4.5.6	Conclusion	111
5	Analyse et résultats	119
5.1	Etude de la Manche autour du port de Dunkerque	120
5.1.1	Le Modèle Numérique de Terrain	121
5.1.2	La carte de tailles	123
5.1.3	Le maillage de calcul	135
5.2	Etude de Sermenaz	143
5.2.1	Définition de l'étude	143
5.2.2	Le Modèle Numérique de Terrain	143
5.2.3	La carte de tailles	146
5.2.4	Résultats et analyse	147
5.3	Etude des marées dans la Manche	153
5.3.1	Définition de l'étude	153
5.3.2	Le Modèle Numérique de Terrain	154
5.3.3	La carte de tailles	154
5.3.4	Résultats et analyse	156
	Conclusion	165
	Références bibliographiques	169
	Annexe	174

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire National d'Hydraulique de EDF au sein du Groupe Environnement Expérimental et Informatique, en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique de Lille.

Je remercie donc messieurs Pierre-Louis Viollet et Jean-Paul Chabard, chefs successifs du LNH, et monsieur Philippe Dewagenaere, chef du GEEL, de m'y avoir accueilli.

J'aimerais remercier très sincèrement mon directeur de thèse monsieur Daniel Buissière, professeur à l'université de Lille 1, pour son soutien et son enthousiasme vis à vis de mon travail ainsi que pour toutes les fructueuses discussions que nous avons eues.

Je tiens à renouveler mes remerciements à monsieur Philippe Dewagenaere, qui a assuré l'encadrement de cette thèse à EDF, de m'avoir fait bénéficier de son expérience mais aussi pour son aide, ses remarques et sa patience à mon égard.

Je remercie cordialement monsieur Hassan Naji qui a suivi mes travaux, pour son soutien et ses conseils depuis la première année d'école d'ingénieur jusqu'à la fin de cette thèse.

Je remercie Messieurs Bernard Peroche et Serge Huberson qui malgré leur emploi du temps chargé ont accepté d'être les rapporteurs de mon travail. De leurs remarques constructives est né ce rapport qui j'espère servira à d'autres.

Je remercie également messieurs Patrick Sauvaget et André Giovannini pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je voudrais remercier Monsieur J.M. Moreau de l'EMSE pour l'intérêt constant qu'il a manifesté à l'égard de mes recherches. Son aide précieuse ainsi que ses encouragements qu'il m'a apporté tout au long de notre étroite collaboration m'a permis de déterminer les orientations décisives de mon travail.

J'aimerais remercier Soizic Péron et Olivier Quiquempoix pour leurs critiques constructives et de leurs soutiens constants.

J'aimerais exprimer ici ma marque d'estime et de sympathie pour toute l'équipe du GEEL, sans oublier toute l'équipe du GMFI.

J'exprime ma profonde reconnaissance à messieurs jean-michel Hervouet et jean-marc Janin qui m'ont initié à la modélisation des équations de Saint-Venant en me faisant bénéficier de leur expérience dans ce domaine.

Je remercie chaleureusement mes parents et toute la famille qui m'ont permis, par leurs encouragements d'aboutir.

Ces remerciements ne seraient pas complets si mon épouse Houria n'y figurait pas. Je tiens à lui assurer de l'affection que je lui porte et lui assure que ce rapport mettra un terme à mes études.

Pour finir, j'embrasse tendrement mes enfants, Jérémy et Grégory, qui par leurs sourirs et leurs jeux m'ont permis d'oublier les aléas de la recherche.

Introduction

Preliminaire

Lorsque de nouveaux aménagements sont construits à proximité de rivières ou de zones côtières, ils modifient les conditions d'écoulements et leur impact sur l'environnement doit être étudié.

Nous disposons aujourd'hui, pour résoudre les problèmes d'hydraulique à surface libre, de codes de calcul. Ces codes permettent également de calculer le transport de particules organiques chimiques et minérales.

Les modèles numériques utilisent une modélisation mathématique du phénomène physique étudié (les équations) sur une représentation géométrique du domaine de l'étude (le maillage). Suivant la physique étudiée et le type d'information recherché, une modélisation $1D$, $2D$ ou $3D$ définit la dimension de l'espace dans laquelle évolue l'écoulement. Dans les cas $1D$ et $2D$ le modèle mathématique qui régit les écoulements à surface libre est défini par les équations de Saint-Venant. En $3D$ le modèle mathématique est défini à l'aide des équations de Navier-Stokes.

La constitution d'un maillage, pour les modèles numériques, revêt une importance primordiale dans l'obtention d'une solution par les algorithmes de simulation, tant en ce qui concerne la précision que la rapidité de convergence. En effet, l'échelle caractéristique du maillage (la taille des mailles) doit être proportionnelle à l'échelle caractéristique de l'écoulement (propagation d'une onde, tourbillons, ...). De plus, pour que le schéma numérique utilisé limite les erreurs de troncatures numériques, on doit s'assurer que le maillage a les caractéristiques géométriques suivantes : équilatéralité des mailles, progression des tailles de mailles. Il serait évidemment possible de définir une discrétisation spatiale très fine pour répondre à ces contraintes. Cependant, le coût de la résolution numérique, c'est à dire le temps d'exécution, serait trop important. Il existe donc un maillage qui pour un nombre de points limité, limite le temps d'exécution et les erreurs de troncatures lié au schéma numérique. Ce maillage "optimal" ne peut être construit sans connaître la solution numérique, ce qui est notre inconnue. Un maillage "optimal" approché est donc construit en considérant des grandeurs connues considérés comme influençant l'écoulement. Ces paramètres qui sont pris en compte

lors de la construction du maillage sont variés et dépendent de l'étude envisagée. On citera notamment :

- la bathymétrie,
- l'existence de bancs découvrants (en domaine côtier) ou de zones inondables (pour les rivières),
- le voisinage d'ouvrages,
- l'existence de fronts raides (de fluide, de sédiments ou de contaminants),
- l'existence d'une direction dominante de l'écoulement (en rivière notamment),

Deux approches sont utilisées pour construire le maillage sur laquelle la solution numérique est calculée :

- soit le maillage est construit en anticipant sur l'écoulement ou la physique du phénomène sur lequel porte l'étude. Dans ce cas, la connaissance du site par le concepteur du modèle est déterminante.
- soit le maillage est reconstruit au cours de la simulation numérique tant que l'influence du maillage est perceptible sur la solution du calcul. Ce processus se nomme adaptation dynamique du maillage.

Pour ces deux approches, le maillage "initial" doit être suffisamment proche du maillage "optimal" qui minimise les erreurs de troncatures et le coût (en termes de temps calcul).

A ce jour la construction du maillage "initial" s'appuie principalement sur la discrétisation des frontières du domaine ou de zones découpant le domaine. La taille des mailles obtenues dans ces zones est proportionnelle à la discrétisation de ces frontières. Dans ce cas, le travail de construction du maillage peut être long et fastidieux et peut demander jusqu'à plus de la moitié du temps consacré à une étude. Quelques autres méthodes permettent de prendre en compte des critères pour la génération de maillage. Cependant soit elles sont limitées à des géométries simples, soit elles n'ont pas de critères associés aux études d'hydraulique à surface libre.

Pour les études 2D et 3D régies par les équations à surface libre, ces mailleurs ne sont donc pas intéressants dans un cadre industriel.

Objectif

Le Laboratoire National d'Hydraulique, de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, développe des codes de calcul résolvant les équations à surface libre.

Notamment, le système de modélisation TELEMAC propose une chaîne de traitement complète pour le calcul des mouvements d'eau, de substances dissoutes et de sédiments dans les domaines fluviaux, côtiers, estuariens et lacustres. Les logiciels de simulation du système TELEMAC (TELEMAC-2D, TELEMAC-3D, SUBIEF, TSEF, ARTEMIS, ...) sont basés sur la résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis.

L'inexistence d'un mailleur propre et totalement intégré à la chaîne de traitement TELEMAC a conduit le LNH à engager une recherche sur la génération de maillages sous contraintes et adaptatifs.

Le but de cette thèse est de développer les algorithmes de génération de maillages. Ce travail présente un mailleur de Delaunay piloté par une carte de tailles. Cette carte de tailles définit une distance souhaitée entre points, locale, traduisant des critères de densification physiques ou mathématiques.

Les difficultés suivantes sont prises en compte :

- modéliser précisément la géométrie et la bathymétrie de l'étude,
- générer un maillage adapté à différents critères,
- définir des critères hydrauliques et/ou géométriques,
- assurer que l'adaptation ne détériore pas les objets (frontière, infrastructure, ...) modélisés,
- mesurer la qualité du maillage de calcul.

Présentation du plan

Ce rapport comporte deux parties.

La première partie est consacrée à la description d'une modélisation de terrain contenant les informations nécessaires à la définition d'une étude. Ce modèle permet de définir la bathymétrie de l'étude et donc d'en déduire la cote des fonds, la plus proche de la réalité, aux noeuds du maillage de calcul. L'analyse de l'évolution des fonds sur le modèle numérique de terrain servira également à définir la discrétisation dans le maillage de calcul.

Nous étudions, dans un premier temps, en fonction du type de la représentation de surface utilisée (grille, triangulation) et des informations disponibles (courbes de niveau, numérisation de cartes, données issues de satellites, ...) la qualité de la modélisation du terrain. Ces aspects sont importants pour les Systèmes d'Information Géographique, [1]. La représentation retenue est fondée sur la triangulation de Delaunay contrainte [21], [23]. Les données sont des données bathymétriques issues de la numérisation de cartes et sont fournies sous forme discrète (semis de points et poly-lignes).

Les informations géométriques, servant à modéliser les objets (frontières liquides, infrastructures, ...), sont autant d'éléments entrant dans la définition d'une étude. Ces données sont également définies sous forme discrète et sont projetées sur la surface caractérisant le fond. Un Modèle Numérique de Terrain est construit, à l'aide d'une triangulation de Delaunay contrainte hiérarchisée, [28], sur les données bathymétriques et géométriques. Cette facétisation définit une surface, $2D^{1/2}$, $z = f(x, y)$, qui comporte tous les éléments susceptibles d'appartenir au maillage de calcul.

Une régularisation des données est effectuée afin que la représentation du terrain soit possible à l'aide d'une triangulation de Delaunay. Les algorithmes utilisent une arithmétique "mixte", [35].

La seconde partie correspond à la description des problèmes liés à la génération d'un maillage de calcul en considérant les critères adaptatifs.

Parmi les différentes techniques de génération adaptative (les méthodes h -raffinement, p -raffinement, r -raffinement), l'adaptation de Delaunay pilotée par une carte de tailles, [50], est une solution à notre problème. La qualité finale du maillage et la relative indépendance de la construction du maillage vis à vis des critères répondent en partie à nos objectifs. Les algorithmes du mailleur de Delaunay utilisés pour la génération du Modèle Numérique de Terrain servent de base au mailleur adaptatif présenté. On s'attache tout particulièrement, dans ce travail, à définir un processus adaptatif définissant un maillage de calcul optimal au vu de la carte de tailles et donc des critères adaptatifs l'initialisant. Ces critères sont définis en fonction de la géométrie de l'étude et des équations modélisant la simulation numérique.

Dans un premier temps, on présente une technique adaptative pour laquelle la représentation bathymétrique est considérée comme un critère important. La bathymétrie est donc respectée au même titre que les critères adaptatifs portant sur les phénomènes physiques étudiés. L'adaptation se base sur la minimisation d'une énergie d'un terme physique et bathymétrique. Le terme physique caractérise l'écart entre l'adaptation souhaitée et celle obtenue, tandis que le terme bathymétrique caractérise l'écart entre la bathymétrie du Modèle Numérique de Terrain et celle obtenue sur le maillage de calcul. L'écart entre deux surfaces est introduit en considérant la simplification de surface, [66], tandis que l'on quantifie la qualité de l'adaptation par l'écart entre la densité de points souhaitée sur la carte de tailles et la densité obtenue dans le maillage de calcul. Cette minimisation énergétique utilise comme variables le nombre de points, leurs positions et la connectivité.

Cette méthode ne générant pas un maillage de qualité satisfaisante, elle n'est pas retenue.

La méthode de génération de maillages adaptatifs utilisée est similaire sur bien des points à la technique précédente. Seule la représentation des fonds dans le maillage de calcul est considérée différemment. La bathymétrie n'est pas utilisée comme un critère adaptatif, mais comme une information que l'opérateur peut imposer dans le maillage de calcul. Ces choix, comme il sera précisé, peuvent ne pas être cohérents avec la carte de tailles et entraîner une mauvaise qualité du maillage. L'adaptation est obtenue par une minimisation énergétique monodimensionnelle et bidimensionnelle. Les termes énergétiques sont définis comme le carré de l'écart relatif entre la densité souhaitée sur la carte de tailles et la densité de points obtenue sur les polygones dans le cas $1D$ et dans le maillage pour le cas $2D$. Afin que l'adaptation soit totalement indépendante

de la structure de la carte de tailles, un estimateur $1D$, [64], et $2D$ spécifie une borne inférieure du nombre de points optimal dans le cas $1D$ et supérieure dans le cas $2D$. Ensuite pour un nombre de points fixé, les points sont déplacés afin de répartir l'énergie associée sur la suite de points, ou la triangulation. Le nombre de points est modifié et l'étape précédente est reconduite tant que l'ajout ou la destruction de points diminue l'énergie globale.

La discrétisation des polygones du Modèle Numérique de Terrain (frontière du domaine, infrastructures, courbes de niveaux,) est établie en assurant une représentation minimale de la forme géométrique de ces polygones. L'adaptation est entièrement pilotée par la carte de tailles qui ne tient pas forcément compte de la forme des objets modélisés par une polygone. Pour éviter une modification importante de ces objets, les points durs caractérisant la forme minimale géométrique de cette polygone sont automatiquement conservés après adaptation. Les points durs sont déduits d'un algorithme de simplification de courbes, [56]. Pour les mêmes raisons, les points qui sont topologiquement importants, les points d'intersection entre objets, sont conservés afin que la topologie du Modèle Numérique de Terrain soit restituée.

Les critères adaptatifs qui définissent la carte de tailles sont de deux catégories : hydrauliques et géométriques. Les équations de Saint-Venant résolues par le code TELEMAC- $2D$, [4], et les équations de Navier-Stokes pour le code TELEMAC- $3D$, [74], utilisant la transformation σ , ont permis de définir quelques critères, [58], [73], [75]. Cette analyse s'est limitée à déterminer l'influence de la bathymétrie sur la résolution de ces équations et non à définir des estimateurs d'erreurs dans le cadre d'une adaptation dynamique. Les autres critères sont géométriques, [45] et servent à l'utilisateur pour spécifier la densité de points souhaitée, localement, dans le maillage.

Le dernier chapitre est constitué de plusieurs cas tests mettant en évidence l'efficacité de ce processus adaptatif et montrant la corrélation entre l'évolution des fonds et de la taille des mailles du maillage pour une résolution optimale.

La méthode adaptative est appliquée à une étude industrielle pour montrer l'influence du critère lié aux ondes de gravité sur le maillage de calcul. La qualité de la triangulation et les différentes étapes de la construction du Modèle Numérique de Terrain et du maillage de calcul sont analysées. Les causes d'une qualité médiocre de la triangulation, provenant d'un mauvais choix des données imposé dans le maillage ou d'une mauvaise initialisation de la carte de tailles, ainsi que les solutions à envisager sont également présentées.

Une étude fluviale portant sur l'écoulement autour de piles de pont dans le Rhône et son affluent, le Canal de Miribel, n'a pu montrer de façon évidente l'influence du

maillage sur les résultats du code TELEMAC 2D résolvant les équations de Saint-Venant. Si l'on généralise, l'influence de la bathymétrie n'est pas aussi prépondérante dans le domaine fluvial.

Une étude maritime de géométrie et bathymétrie plus complexe, la Manche, a permis, pour l'étude de la composante principale de l'onde de marée, de mettre en évidence l'influence des critères bathymétriques sur la résolution numérique des équations de Saint-Venant.

Une annexe, précise, la formulation des équations de Saint-Venant et les schémas numériques utilisés dans le code de calcul TELEMAC 2D. Une étude adimensionnelle précise également les termes prépondérants des équations de Saint-Venant dans le cadre d'études maritimes de grande emprise (marées, surcotes) et côtières.

Première partie

Modèle Numérique de Terrain : Facétisation des données bathymétriques et géométriques

Chapitre 1

Les données d'une étude à caractère hydraulique

La résolution numérique des équations à surface libre s'appuie sur un maillage. Aux noeuds de ce maillage sont définies les inconnues des équations de Saint-Venant ou de Navier-Stokes, c'est à dire les composantes de la vitesse et la hauteur d'eau. Sur ce maillage de calcul, la représentation des fonds de l'étude est également définie. Ces fonds sont communément appelés : bathymétrie.

Pour garantir une représentation des fonds de qualité sur le maillage de calcul, un Modèle Numérique de Terrain est construit sur des données bathymétriques discrètes provenant de la numérisation de carte de l'Institut Géographique National. Une interpolation bathymétrique, sur le Modèle Numérique de Terrain, des noeuds du maillage permettra de définir la bathymétrie sur celui-ci.

Comme il sera précisé au chapitre 4 de la partie 2, la bathymétrie influence l'écoulement. L'analyse du Modèle Numérique de Terrain et donc de la bathymétrie est utilisée lors de la génération du maillage de calcul.

Sur ce Modèle Numérique de Terrain sont également reportés l'ensemble des informations géométrique de l'étude. Ces informations sont les frontières, les infrastructures, les points de rejet et autres informations non bathymétriques qui sont susceptibles d'être reportées dans le maillage de calcul. Le Modèle Numérique de Terrain définit donc la bathymétrie et comporte tous les objets (frontières, infrastructures, courbes de niveau, ...) susceptibles d'être reportés dans le maillage de calcul.

Ce chapitre introduit successivement :

- la définition de la représentation du terrain de l'étude. Il s'agira d'expliquer les différentes techniques de représentation de surfaces, le type de données associées, l'acquisition de ces informations altimétriques et leur précision,

- la modélisation spatiale et bathymétrique de l'étude. Les données bathymétriques et les informations purement géométriques sont regroupées dans une structure définissant l'étude.

1.1 Les modèles de terrain

La modélisation des fonds dépend du type d'informations disponibles. Il existe plusieurs techniques de relevés d'informations sur la représentation des fonds :

- les données satellitaires,
- les données aériennes,
- les données issues de cartes de l'Institut Géographique National (IGN).

Les Systèmes d'Informations Géographiques (SIG) [2], utilisés comme outils d'aide à la décision notamment dans les domaines de la voirie, du cadastre, et de l'agriculture doivent comme dans le cas des études fluviales ou maritimes définir une représentation du terrain. Ils utilisent le plus souvent l'ensemble des données précitées. Dans [1], on présente les différentes modélisations possibles du terrain en fonction des techniques d'acquisition de données, ainsi que les avantages, les inconvénients et la précision des différentes techniques d'acquisition. Comme on le verra dans le §1.1.1, il n'existe que deux types de structures pour modéliser le terrain à l'aide d'une surface : la grille et la triangulation.

En ce qui concerne la chaîne de traitement TELEMAT, les données bathymétriques proviennent de numérisation de cartes IGN ou de campagnes bathymétriques. La modélisation du terrain utilise donc une triangulation car les données ne sont pas données selon un échantillonnage régulier.

1.1.1 Représentation du terrain

Une surface a potentiellement un nombre infini de points la caractérisant. Pour limiter les informations, un modèle de surface est construit à l'aide des points caractéristiques du terrain.

1.1.1.1 Les lignes de niveau

Les courbes de niveau sont probablement les types de représentations du terrain qui nous sont les plus familières. Elles proviennent, soit de données intrinsèques (cartes

IGN), soit de données déduites d'un nuage de points. Le problème est qu'elles représentent les caractéristiques de la surface uniquement sur ces courbes. Les lignes de niveau sont elles mêmes discrètes, c'est-à-dire représentées par des segments de droite. Afin que la ligne de niveau soit proche de la courbe réelle et pour limiter le nombre de points qui la définissent, il faut numériser les courbes en conservant ses points caractéristiques : les points d'inflexion.

1.1.1.2 Les Grilles

Une grille est définie grâce à un incrément spatial constant entre les relevés altimétriques. Ce type de modèle est toujours utilisé dans le cas de données satellitaires. L'altitude d'un point de la surface situé sur la grille peut être évaluée sur une surface continue ou constante par morceaux, comme le montre la figure 1.1.

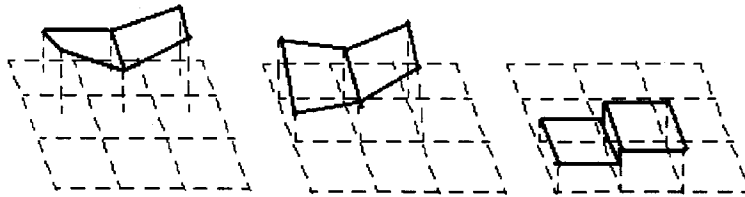


FIG. 1.1 - *Différentes interprétations de surface avec une grille*

La précision de la grille dans la représentation d'une surface dépend de son incrément. La méthode de stockage, qui ne garde que des points, conduit à des pertes de caractéristiques, telles que les trous ou les pics. La seule façon de considérer ces propriétés du faciès est d'augmenter la résolution, c'est-à-dire de diminuer l'incrément spatial. Cependant, si l'on augmente cette résolution, on risque d'obtenir des points superflus dans les parties du domaine qui ont de faibles variations de faciès.

Les images satellitaires "SPOT" utilisent ce type de représentation de terrain avec différentes précisions. Pour un même domaine, il existe différentes grilles de résolution pour bien caractériser tous les types de terrain.

1.1.1.3 Données irrégulières

Une surface peut aussi être représentée par une combinaison de points, de lignes et de polygones. Cette représentation permet de définir différentes caractéristiques telles que les trous, les pics, les cours d'eau, les côtes. Pour les modèles de terrain, l'échantillonnage des points et des lignes brisées proviennent le plus souvent de *stéréoplotters*

utilisant des photographies aériennes ou de données issues du système GPS¹. La triangulation de ces données de type points et polygones définit le modèle de terrain. La méthode principalement utilisée est la triangulation de Delaunay Contrainte. Comme cette méthode fait l'objet du chapitre 2, seuls ses avantages pour la modélisation du terrain sont présentés dans ce paragraphe.

Dans la mesure où la triangulation de Delaunay contrainte relie les points les plus proches entre eux et qu'elle peut respecter des segments imposés nommés *contraintes*, cette représentation de terrain est certainement celle qui modélise au mieux un terrain si l'on a pas d'autres renseignements. La limite d'une telle représentation est que l'on ne peut définir qu'une seule altitude pour un point donné, une telle surface sera donc considérée comme définie dans un espace de dimension $2^{1/2}D$, car sa définition est de la forme $z = f(x, y)$. On ne peut donc pas représenter par exemple une marche d'escalier.



FIG. 1.2 - *Modélisation d'une marche lorsqu'on utilise une facétisation*

La solution préconisée pour contourner ce type de difficultés est de créer deux lignes parallèles très proches à des altimétries différentes. Sur la figure 1.2, cette approche est appliquée au cas d'un marche d'escalier représentée dans le plan perpendiculaire à la surface $\{(x, y, z)/z = 0\}$.

Dans notre cadre d'étude, il paraît impossible de modéliser correctement des structures géométriques complexes comme la côte française à l'aide d'une grille, sauf au prix d'une modélisation très fine et donc d'un nombre de données trop important. De plus, la représentation de nouvelles infrastructures doit être facilement intégrable dans le modèle de terrain car la chaîne de traitement TELEMAC a pour but d'étudier l'impact d'un ouvrage d'art sur l'environnement.

C'est pourquoi, la chaîne de traitement TELEMAC utilise des données issues de la numérisation de cartes [3], ou/et des données provenant de relevés de campagnes bathymétriques [5]. La triangulation de ces informations définit notre modèle de terrain.

Nous allons présenter plus précisément la numérisation de données et les campagnes bathymétriques en mettant en évidence les avantages, les inconvénients et la précision de tels modes d'acquisition de données.

¹GPS : Global Positionning System

1.1.1.4 La numérisation

Saisie de points.

Grâce à une table à numériser, il est possible de saisir les coordonnées d'un point dans un repère, en fonction de l'échelle et de l'origine. Une "souris", à laquelle est adjointe une loupe avec un réticule, permet de bien positionner le point à saisir. La résolution pour les modèles de table les plus précis est de l'ordre de $1/10mm$. Les logiciels de saisie permettent en général de caler le document fixé sur la table par rapport à des points de repère dont on entre les coordonnées exactes. Des fonctions de saisie d'arcs et de saisie de surfaces sont également offertes.

Saisie d'arcs.

Pour la saisie d'arcs, il peut exister un mode point par point (les coordonnées ne sont enregistrées que lorsqu'on clique une des touches du curseur), et un mode continu (un point est enregistré à intervalles de temps ou de distance réguliers). Ce premier mode, génère peu de points et ne doit saisir que les points caractéristiques. En revanche dans le deuxième mode, on saisit en général trop de points sans que cela apporte une représentation plus précise.

Saisie des contours.

Pour la saisie des zones, il y a deux manières de procéder :

- On peut saisir une surface par ses contours. Dans ce cas, le contour de la surface (ou les contours si la surface a des trous et plusieurs composantes connexes) doit être saisi. Si on veut alors partager la géométrie d'une partie d'un contour avec un objet existant, cela peut s'avérer fastidieux.
- On peut aussi commencer par une saisie des arcs, puis créer les zones en pointant les faces constituant la surface. Cette solution facilite grandement le partage de la géométrie, diminue l'encombrement dans les bases de données et facilite certains algorithmes de traitement et de maintien de cohérence.

Les logiciels de saisie possèdent en général des fonctions d'aide à une saisie propre, du point de vue topologique, telles que le partage de la géométrie et de la topologie (cf. figure 1.3), ou l'accrochage d'un point sur le noeud ou l'arc le plus proche avec une tolérance donnée (cf. 1.4). Lors de la numérisation, opération manuelle par excellence, l'opérateur structure l'information géométrique de manière pertinente. Il précise de quels types sont les zones saisies (batiments, parcelles) et les valeurs des différents attributs (numéro de parcelles ...).

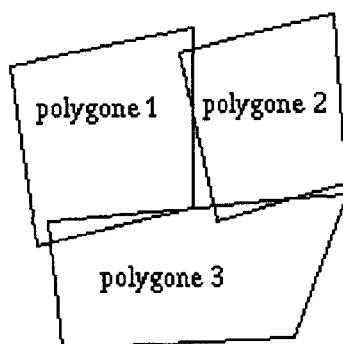


FIG. 1.3 - *Nécessité d'un partage de la géométrie et de la topologie*

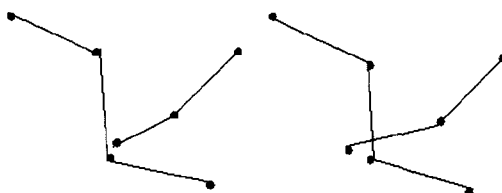


FIG. 1.4 - *Nécessité d'accrochage d'un point sur un arc*

La technique de numérisation présentée ici a été établie dans un cadre général. Dans la chaîne de traitement TELEMAT, le logiciel de numérisation SINUSX [3], ne dispose pas de toutes ces fonctionnalités. Par exemple, les fonctions d'aide à une saisie propre, du point de vue topologique, ne sont pas disponibles. Pour notre étude, cette étape devra être faite avant l'interprétation de ces données, c'est-à-dire avant la triangulation des données bathymétriques. Cette étape établira les points d'intersection de segments et de points, statuera sur les duplications d'éléments et établira une hiérarchisation des objets modélisés. Pour de plus amples précisions, on se référera au chapitre 2.

1.1.1.5 Les campagnes bathymétriques

Les campagnes bathymétriques sont un moyen d'acquérir les informations altimétriques dans les domaines fluviaux ou maritimes. Celles-ci sont utilisées lorsqu'on doit étudier au cours du temps l'évolution des fonds dans des zones précises. Pour le Laboratoire National d'Hydraulique de la DER d'EDF, un logiciel de bathymétrie légère assistée par ordinateur a été développé [5]. Cette bathymétrie est qualifiée de légère car l'ensemble des instruments doit tenir dans une petite embarcation pour permettre l'accès à des zones de faible tirant d'eau. Les relevés se font par profils pour des applications

fluviales ou cotières.

chaîne de mesure

La position et la profondeur sont les grandeurs mesurées au cours d'une campagne bathymétrique. La position est déterminée en fonction de la distance sur laquelle portent les mesures. Les différentes méthodes sont :

- *le positionnement optique*. Le bateau est visé par un laser depuis une station de référence à terre. Cette méthode est utilisée pour des distances relativement courtes, 2000 mètres au maximum.
- *le positionnement par radio-localisation terrestre*. Des balises radio (3 ou 4) situées sur terre à des endroits connus permettent de déterminer la position du bateau. Ce système autorise des mesures sur des portées plus longues (une dizaine de kilomètres).
- *le positionnement par radio-localisation par satellites*. Le positionnement du bateau est réalisé par le système GPS². Le récepteur embarqué reçoit des informations de distances de plusieurs satellites et des corrections à appliquer envoyées par une station fixe se trouvant en un point connu. Ce système autorise un positionnement précis à plusieurs dizaines de kilomètres de la station de référence.

La profondeur est obtenue grâce à un sondeur à ultra-sons. Une basse fréquence, 33 kHz, traverse les fonds mous et se réfléchit sur les fonds durs, tandis qu'une haute fréquence, 210 kHz, se réfléchit sur la vase. Le logiciel d'acquisition de données, **GALA**, sert également d'aide à la navigation afin que le barreur du bateau se place précisément sur un profil prédéterminé.

chaîne de traitement des données

Un traitement de ces relevés bathymétriques est ensuite établi grâce à **BATX**, [6]. Ce logiciel permet de corriger ou de filtrer les sondes, d'établir un modèle de terrain, et de quantifier l'évolution des fonds entre deux campagnes bathymétriques. Un exemple de modèle de terrain construit sur des données issues d'une campagne bathymétrique est présenté sur la figure 1.10 de la page 32. Il a été établi par une triangulation de Delaunay sur un semis de points. Le nombre de points est important car l'acquisition des données est faite trois fois par seconde. Le maillage est donc très dense et n'est pas représenté.

²GPS : Global Positionning System

1.1.2 Positionnement à la surface de la terre

On ne peut décrire les données géographiques et localiser les objets dans l'espace sans connaître au préalable la forme de la terre et les moyens de se repérer à sa surface. C'est l'objet de la géodésie (science de la terre) et des travaux d'équipements géographiques du territoire réalisés par l'IGN.

La géodésie pratique s'intéresse à la détermination des positions à la surface de la terre. A cette fin, elle propose d'établir sur cette surface un réseau de points matériels aux positions connues. Ce réseau constitue le squelette permettant, par interpolation, de résoudre les problèmes de localisation.

1.1.2.1 L'ellipsoïde

Au 17^{ième} siècle, Newton émit l'hypothèse que la terre avait plutôt la forme d'un ellipsoïde de révolution, c'est à dire d'une sphère aplatie aux pôles. Pour les cartographes, le souci est de pouvoir localiser les objets cartographiques sur une surface développable. Ainsi les cartographes utilisent l'ellipsoïde de référence, par exemple celui de Clarke (1880) pour l'Institut Géographique National (IGN) en France. En réalité, la surface de la terre n'est pas une surface géométrique simple comme l'ellipsoïde. Cependant les ondulations du relief (montagnes, vallées, fosses marines) ne dépassent pas $\pm 0.2\%$ du rayon terrestre.

1.1.2.2 Le géoïde

Pour les géodésiens, la référence a une forme moins régulière. Le *géoïde* est une surface, en chaque point de laquelle le module $\vec{g}$ (force de pesanteur) est identique. A priori, le plus simple est de choisir la pesanteur mesurée au niveau moyen des mers (niveau zéro obtenu en calculant la moyenne des enregistrements des mouvements d'un flotteur). Le géoïde est donc la forme que prend le niveau moyen des mers, niveau qui serait prolongé sur les continents.

1.1.2.3 L'altitude

L'altitude d'un point est définie par la différence entre le niveau potentiel de référence (niveau des mers) et celui du point à estimer. L'altitude d'un point est estimée grâce à la force de pesanteur.

En fait, en tout lieu nous possédons une direction : celle de la verticale (donnée par le fil de plomb); nous ferons les mesures par rapport à elle et donc par rapport au géoïde. Malheureusement cette surface physique se prête mal aux calculs, qui seront

donc menés sur un ellipsoïde de révolution "bien choisi", c'est-à-dire qui épouse au mieux la forme du *géοïde* dans la région considérée. Suivant l'étendue de la portion du globe étudiée, on adoptera des ellipsoïdes différents en forme, en dimension et de centre distincts.

1.1.2.4 Les coordonnées

La localisation d'un point dans l'espace peut se faire dans deux systèmes de coordonnées différents :

- les coordonnées géographiques,
- les coordonnées dans un système de projection.

a) Les coordonnées géographiques

Les coordonnées géographiques (latitude, longitude, altitude) sont très utilisées lorsque la courbure de la terre doit être prise en compte dans le positionnement. La latitude s'exprime par l'angle que forme la droite passant par le centre de la terre avec le plan de l'équateur. La longitude est l'angle de cette droite avec le plan contenant le méridien de référence (Greenwich) et l'axe de rotation (plan perpendiculaire au plan de l'équateur). Les définitions de la longitude (λ) et de la latitude (ϕ) sont celles illustrées dans la figure 1.5. L'altitude est exprimée à partir de la surface de référence du géοïde. On parle de coordonnées ellipsoïdales, lorsque l'altitude est exprimée par rapport à la surface de l'ellipsoïde de référence.

Dans le cas de domaine de grande emprise où la courbure de la terre est prise en compte les coordonnées géographiques sont utilisées. Pour construire le maillage de calcul bidimensionnel, ces données ne sont pas directement utilisables. Une projection de ces coordonnées est donc utilisée. Il existe plusieurs types de projection comme il est présenté ci-dessous. Dans le maillage de calcul, la courbure de la terre n'est pas représentée, mais est prise en compte dans les équations de Saint-Venant, [4].

b) Projection du globe terrestre

Les coordonnées géographiques ne peuvent être représentées que sur un globe, c'est à dire en trois dimensions. Nos possibilités de représentation sur des cartes n'étant malheureusement qu'à deux dimensions, projeter les coordonnées sur un plan est donc une nécessité.

Toute représentation plane de la surface terrestre nécessite le choix d'un mode de projection. La projection d'une sphère sur un plan ne peut être parfaite, et ne peut

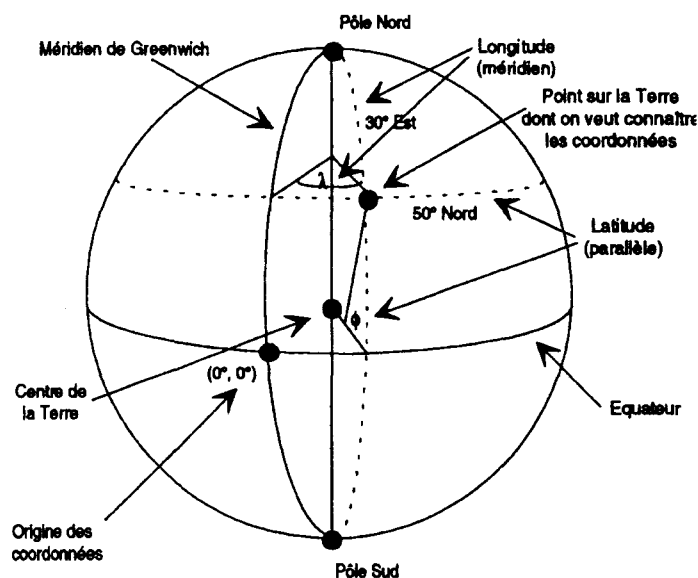
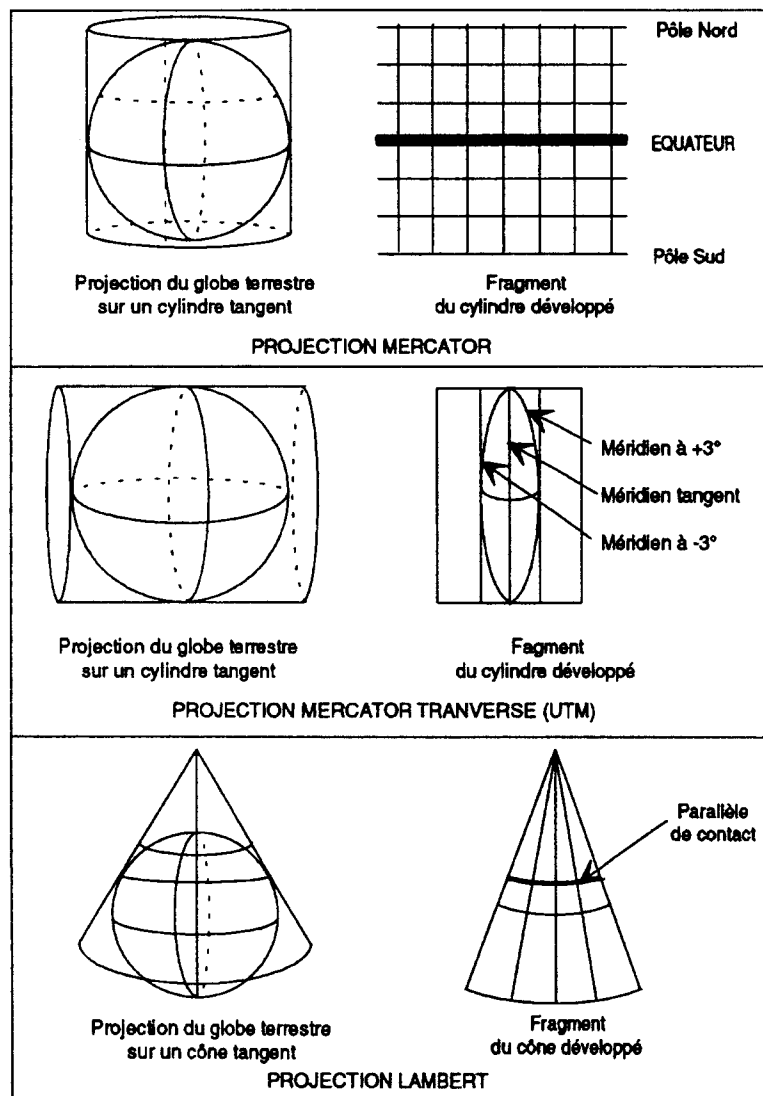


FIG. 1.5 - Définition de la longitude et de la latitude

conserver à la fois les angles, les distances et les surfaces. Les projections dites équivalentes conservent les rapports de surfaces, alors que les projections dites conformes, conservent les mesures d'angles observées sur le terrain (utiles en navigation). Passer des coordonnées géographiques en trois dimensions aux coordonnées en projection en deux dimensions nécessite d'abord de ramener tous les points de la surface de la terre sur l'ellipsoïde de référence, ceci pour simplifier les calculs de projection. Il existe plus de deux cent systèmes de projection. Nous présentons uniquement le système Lambert utilisé en France. A titre d'information, il existe les projections de Mercator dont la plus utilisée dans le monde est le système UTM (Universal Transverse Mercator). Trois systèmes de projection (Lambert, Mercator, Mercator Transverse) sont illustrés sur la figure 1.6.

c) Le système Lambert.

C'est une projection conforme des coordonnées (sur l'ellipsoïde de Clarke) sur un cône tangent à un parallèle, le sommet du cône étant dans le prolongement de l'axe des pôles. Les méridiens sont représentés par des droites concourantes, et les parallèles par des arcs de cercles concentriques. Dans une bande de 100 km de part et d'autre du parallèle tangent, la déformation des distances est inférieure à 12 cm par kilomètre. Elle atteint 37 cm par kilomètre à 200 kilomètres de distance. Les nouvelles cartes de France à moyennes et grandes échelles (supérieure au 1/50000) sont établies dans ce système. Pour réduire les erreurs, quatre zones ont été définies en France comme le

FIG. 1.6 - *Différents systèmes de projection*

montre la figure 1.7.

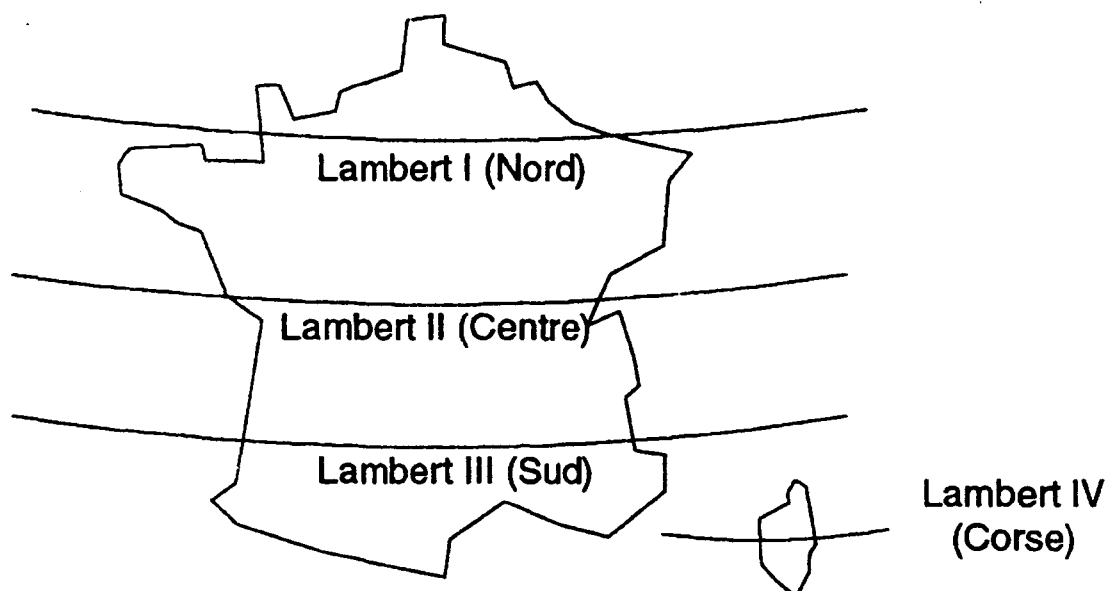


FIG. 1.7 - Représentation des quatre zones Lambert en France

1.2 Les données géométriques

L'information altimétrique, dont le traitement est primordial dans le cas des études de TELEMAC, n'est pas suffisante pour définir les bases d'une étude. Certains objets à modéliser dans l'étude n'ont pas directement l'information altimétrique. Seule la forme géométrique de ces objets est en effet disponible. Ces éléments peuvent être :

- des frontières,
- des ouvrages d'art,
- des définitions hydrauliques tels que le lit mineur, le lit majeur ou les points de rejet.

La modélisation du contour extérieur du domaine, sous forme discrète, est subjective dans la mesure où certaines portions de la frontière sont fictives. C'est le cas des frontières dites liquides, dont on a des exemples sur la figure 1.8. Ces portions de frontières ne s'appuient pas sur une courbe numérisée où l'altimétrie est connue.

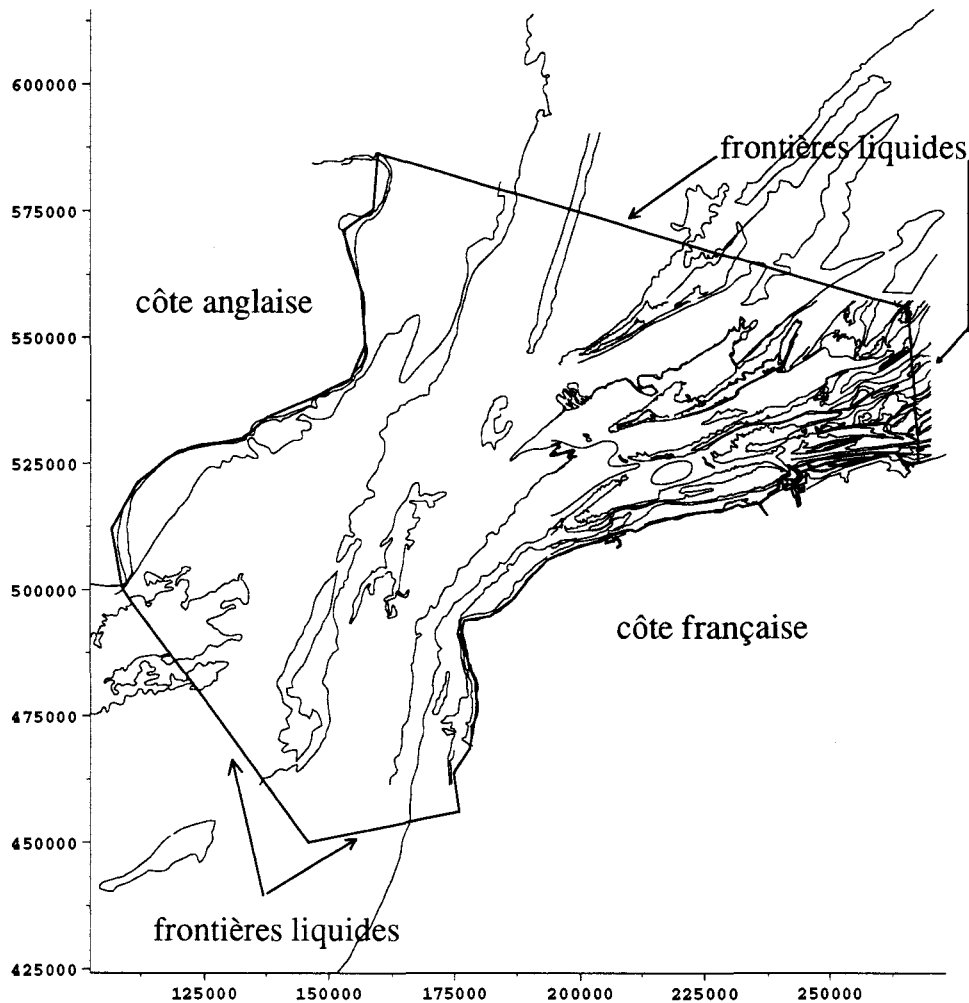


FIG. 1.8 - *Modélisation d'un contour extérieur d'une étude : les frontières liquides*

Pour les définitions hydrauliques du lit mineur ou du lit majeur (lit du fleuve lors d'inondations), le problème est le même. Ces courbes n'apparaissent pas obligatoirement lors de la numérisation de cartes IGN, puisqu'elles ne correspondent ni à une courbe de niveau ni à une courbe définie sur un semis de points. Enfin, dans le cas où l'on souhaite étudier l'impact de rejet de polluant ou la propagation d'information, comme le suivi d'une tache thermique dans un écoulement, on modélise l'emplacement du point d'émission par un point, ou par un ensemble de points, qui n'ont pas de raison particulière de correspondre à des points bathymétriques. L'ensemble de ces définitions sont dites géométriques puisque seule la trace dans le plan de référence (plan tel que l'altitude z est nulle) est disponible.

Le maillage de calcul doit contenir à la fois des informations géométriques et altimétriques. Deux types de stockage d'informations sont envisageables :

- le stockage des informations altimétriques dans le modèle de terrain, et le stockage des entités géométriques dans une autre structure,
- le stockage des informations altimétriques et géométriques dans une triangulation commune.

Comme les informations géométriques doivent être reportées dans le maillage de calcul avec l'altimétrie, il paraît plus simple de stocker l'altimétrie et la géométrie dans une même structure. Cependant on devra s'assurer que l'ajout de données géométriques ne modifie pas le modèle de terrain. Une projection des objets devra donc être établie comme expliquée dans le §1.2.1. Le modèle de terrain a donc une définition plus large qu'une simple représentation de terrain, puisque les informations géométriques y sont reportées. Cette nouvelle représentation du terrain sera appelée *Modèle Numérique de Terrain*.

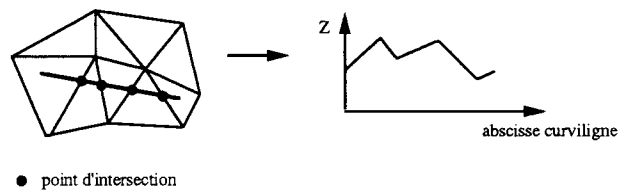
L'intégration d'informations géométriques supplémentaires dans le modèle de terrain est l'objet du chapitre suivant.

1.2.1 Interpolation altimétrique

Les objets géométriques sont définis, sous forme de points ou par des polygones, par la numérisation de données dans le plan de référence. La projection de ces éléments sur le modèle de terrain n'est pas une simple interpolation altimétrique des entités points. On rappelle que ce modèle de terrain est défini par une triangulation des données altimétriques numérisées sur des cartes IGN ou provenant de campagnes bathymétriques. Cette triangulation, temporaire, sera ensuite remplacée par le *Modèle Numérique de Terrain* qui inclut les informations géométriques.

Considérons un segment à projeter et une triangulation définissant l'altimétrie dans le domaine. Comme l'illustre la figure 1.9, la projection du segment sur le terrain est obtenue en redécoupant le segment afin que chaque portion de segment soit confondue avec les plans du modèle de terrain. Pour établir cette projection, on recherche toutes les intersections du segment avec la triangulation qui caractérise le terrain. Ensuite, on réalise l'interpolation altimétrique des extrémités du segment et des points d'intersection pour définir une projection du segment en cohérence avec la représentation du terrain.

A ce stade, toutes les informations nécessaires pour définir une étude ont été présentées. Dans notre cas ces informations sont obtenues par une numérisation sous forme de

FIG. 1.9 - *Projection d'un segment sur le terrain*

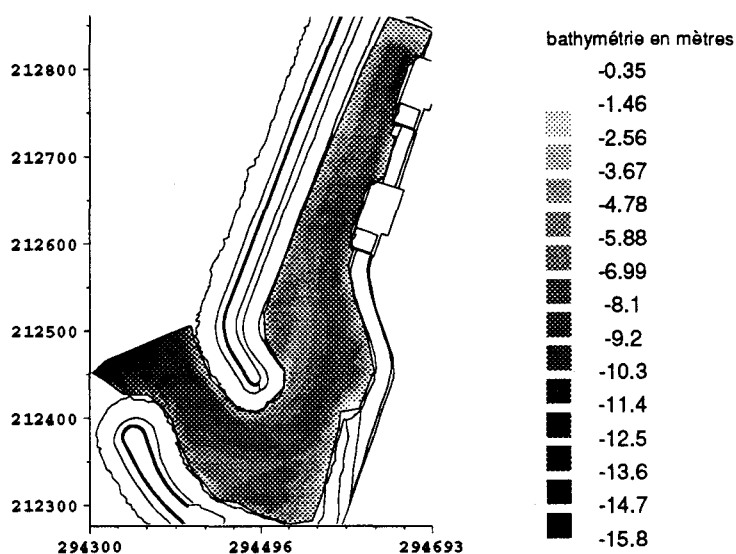
points et de polygones. La triangulation de Delaunay contrainte de ces données définit la représentation des fonds puisqu'en chacun des points est connue l'altimétrie. Comme ce modèle contient les informations altimétriques et géométriques qui sont nécessaires pour définir une étude, cette triangulation se nomme le *Modèle Numérique de Terrain*.

1.2.2 Les limites du Modèle Numérique de Terrain

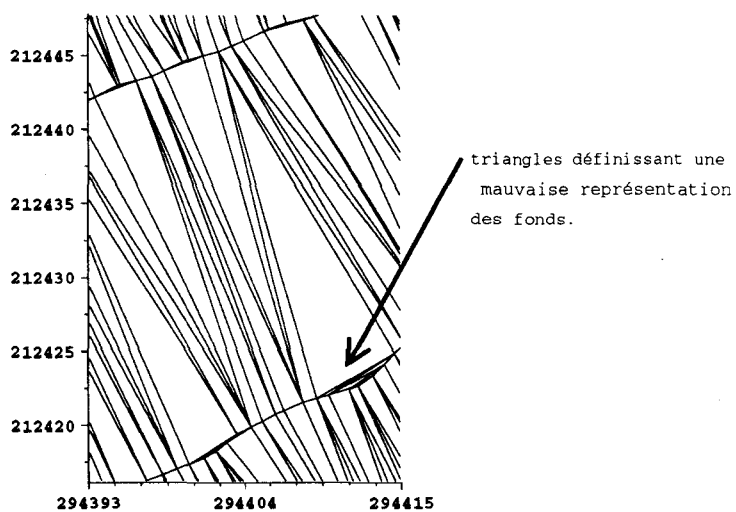
Bien que la triangulation de Delaunay contrainte semble être la meilleure structure pour caractériser une géométrie complexe, cette modélisation de surface peut ne pas être exacte, ou tout du moins celle "attendue". Ainsi, les données bathymétriques (informations altimétriques) pour une rivière, sont le plus souvent disponibles sous forme de profils. Un profil donne l'altimétrie le long d'une polyligne définie dans le plan de référence. La variation des fonds étant plus importante dans le plan orthogonal à l'écoulement que parallèlement à celui-ci, l'échelle des distances est donc plus faible pour les points d'un même profil que celle existant entre profils. On obtient donc des profils très espacés par rapport à la discrétisation des polygones qui les caractérisent. La modélisation "exacte" du fond de la rivière, au vue des données disponibles, est définie par une triangulation dont les mailles s'appuient sur deux profils consécutifs. Comme les échelles de distance sont différentes orthogonalement et parallèlement à l'écoulement, on obtient une distorsion de mailles.

Cette "anisotropie" ne peut être obtenue avec la triangulation de Delaunay contrainte, ce qui, comme on peut le voir sur la figure 1.10, peut introduire des problèmes dans la représentation du terrain. La triangulation de Delaunay obtenue à partir de profils bathymétriques, peut définir des triangles qui s'appuient sur un même profil. Cette modélisation du terrain est donc localement non correcte. De même, dans le cas de données sous forme de courbes de niveau, des triangles s'appuyant sur une même ligne de niveau peuvent apparaître. Cette facétisation génère donc des mailles de gradient nul, dites plates, dans la représentation du terrain, au lieu de générer des mailles définies sur deux lignes de niveau proches.

Ce défaut vient du fait que le critère de Delaunay, (voir 2.2.1), sur lequel se fonde



bathymétrie à proximité de la centrale de Flamanville



agrandissement du modèle de terrain : triangulation entre deux profils

FIG. 1.10 - Anomalie de la modélisation du terrain

la triangulation de Delaunay contrainte, est fortement lié à la notion de proximité : il a tendance à associer les points les plus proches, ce qui est le cas dans la figure 1.10. A titre de remarque, si les profils étaient définis par des droites dans le plan de référence, la représentation du fond serait “exacte” car un triangle ne pourrait pas s’appuyer sur un même profil sans avoir une surface nulle. Il est clair que cette remarque ne s’applique pas aux courbes de niveau dans cet exemple.

Deux types de solutions peuvent être préconisés pour résoudre ce problème :

- modifier le critère de Delaunay afin d’interdire la création de triangles s’appuyant sur une même courbe,
- utiliser une triangulation de Delaunay anisotrope.

La première solution est arbitraire, et ne peut être réutilisée dans le cadre d’une triangulation adaptative. La seconde s’appuie sur un champs de vecteurs qui définit la distorsion souhaitée pour créer la triangulation de Delaunay anisotrope [7]. On doit donc définir dans tout le domaine la distorsion souhaitée. De plus, si cette distorsion n’est pas suffisante, rien ne prouve que la triangulation obtenue soit celle escomptée. Cette solution a tout de même l’avantage de pouvoir être réutilisée dans le cadre d’une triangulation adaptative. Comme l’étude de l’anisotropie sort du cadre de cette thèse, cette analyse ne sera pas développée par la suite.

Chapitre 2

Facétisation d'un domaine discret et problèmes associés

L'obtention du Modèle Numérique de Terrain ainsi que la méthode adaptative développée dans le chapitre 4, s'appuient sur un ensemble d'algorithmes pour construire une triangulation de Delaunay contrainte hiérarchique. Ces algorithmes vont être présentés afin de déduire les avantages et les conséquences sur la représentation de terrain et la construction de maillages de calcul.

Pour que la triangulation soit conforme, les données définies sous forme de points et de polygones doivent définir un graphe planaire. Cette hypothèse sur les données ne peut être garantie lors de la construction du Modèle Numérique de Terrain, ni lors de processus adaptatif. Une opération de validation des données précède donc toute facétisation.

Le Modèle Numérique de Terrain et le maillage de calcul, définissent une surface $z = f(x, y)$. Pour garantir cette définition, il faut donc qu'aucun objet, définissant une surface, ne se superpose dans le plan de référence tel que $z = 0$. Une hiérarchisation du graphe est donc établie à l'aide d'une classe de priorité.

Après la construction d'un graphe hiérarchique, la triangulation de Delaunay contrainte est obtenue avec un algorithme récursif optimal en nombre d'opérations effectuées.

Pour garantir le résultat et sa cohérence, ces algorithmes utilisent une arithmétique mixte afin de pallier les erreurs de troncatures liées à l'arithmétique flottante disponible sur l'ordinateur.

2.1 Les techniques de facétisation

Pour valider le choix de la triangulation de Delaunay, on rappelle les différentes techniques de facétisation d'un domaine discret. On se limitera arbitrairement aux techniques développées dans le cas bidimensionnel puisque la plupart d'entre elles existent de manière homologue en 3D. Pour une présentation de tous les algorithmes existants, on se reportera à [13] qui est une excellente introduction aux techniques de maillage.

Il y a deux grandes familles de représentation discrète d'un domaine :

- les méthodes dites de construction structurée,
- les méthodes dites de construction non-structurée.

Cette notion de structuration vient du stockage de données utilisé dans la représentation spatiale de l'étude. De manière générale, la notion de voisinage est implicite dans le maillage structuré tandis que dans les maillages non structurés cette information doit être stockée. On rappelle que la discrétisation spatiale sert à résoudre numériquement des équations modélisant un phénomène physique à étudier.

2.1.1 Maillage structuré

Le principe du maillage structuré est de travailler sur un domaine simple régulier (une grille). Sauf s'il est déjà régulier, il faut donc transformer le domaine (cf. figure 2.1). Comme la résolution numérique se fait dans le domaine transformé, les équations qui modélisent le phénomène physique doivent également être modifiées en conséquence. L'intérêt de ce principe est que la résolution dans le domaine transformé est plus simple, plus efficace et donc plus rapide.

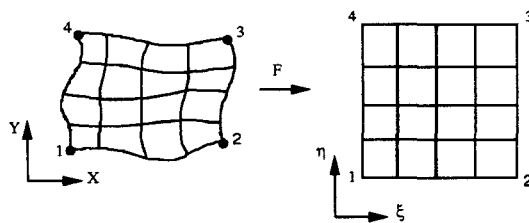


FIG. 2.1 - *Transformation du domaine*

La fonction $\mathcal{F}$ de transfert entre les domaines réel et transformé est, par exemple une fonction polynomiale, obtenue en assurant la correspondance entre les quatre frontières du domaine, fictives ou non, avec les quatre limites du domaine transformé $\eta = 1$, $\eta = 0$, $\xi = 1$, $\xi = 0$. On rappelle que la résolution numérique est établie dans la discrétisation

spatiale de l'espace transformé et que la solution du problème est ensuite reportée dans la discrétisation équivalente du domaine réel grâce à la transformation inverse $\mathcal{F}^{-1}$. La discrétisation du domaine réel est obtenue par transformation inverse de la discrétisation du domaine transformé. Les avantages de cette modélisation de l'étude sont évidents. Cependant, il existe quelques restrictions qui limitent l'emploi de cette méthode :

- la forme du domaine doit être proche d'une forme régulière. Si ce n'est pas le cas, on découpe le domaine en domaines plus élémentaires et on compose l'étude comme l'union de sous-domaines,
- le choix des frontières influe sur le résultat de la discrétisation. En effet, la structure régulière impose qu'il y ait la même discrétisation entre deux frontières homologues. Ce manque de souplesse, rend difficile la génération d'un maillage quelconque.

La fonction de transformation peut être définie de différentes manières. Les méthodes algébriques définissent explicitement la fonction de transfert $\mathcal{F}$. Ces méthodes ont une application limitée à des représentations géométries élémentaires. Dans le cas où l'on souhaite prendre en compte des trous, ou des formes plus complexes, la génération du maillage est obtenue en résolvant un système d'équations. Cette méthode, contrairement à la précédente, n'a pas une fonction de transfert déterminée à l'avance. Celle-ci est déterminée par la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles. Ce système peut être du type elliptique, si des conditions de Dirichlet¹ ou de Neuman² sont définies sur les frontières intérieures et extérieures, ou hyperbolique, voire parabolique, s'il n'existe pas de conditions appliquées sur la frontière du domaine. Comme pour la méthode précédente, c'est la distribution des points sur la frontière qui détermine la distribution dans le domaine. Néanmoins, grâce à l'utilisation de fonctions de contrôle, il est possible d'obtenir une plus grande souplesse pour le maillage. Ces dernières fonctions permettent donc l'attraction des lignes du maillage sur un point ou une ligne quelconque du domaine, et peuvent également déplacer le maillage afin qu'il s'adapte à la solution numérique du système. Pour une présentation des techniques de maillages structurés, on se référera tout particulièrement à [11] et [12].

¹condition de Dirichlet : on impose la grandeur au point

²condition de Neuman : on impose le gradient au point

2.1.2 Maillage non structuré

Dans les techniques de construction de maillages non structurés, le voisinage d'un point n'est pas directement connu. Cette information doit être stockée dans des tables réservées à cette effet. Il y a deux types de triangulation, ou maillage non structuré :

- les triangulations qui, comme dans les techniques précédentes, construisent le recouvrement du domaine à partir de son contour. Pour ces techniques, les points à l'intérieur du domaine sont définis automatiquement.
- les triangulations qui s'appuient uniquement sur les points de données, comme la triangulation de Delaunay.

La facétisation d'un domaine avec une création de points sera introduite grâce aux techniques de construction “quadtree” et “frontale”, tandis que la facétisation sans création de points présentera des techniques de triangulation vérifiant que le plus grand des angles ne dépasse pas un seuil donné ou que l'angle minimum est maximisé.

2.1.2.1 Les “quadtrees”

La méthode de recouvrement par “quadtree”, présentée dans [8], utilise une procédure de décomposition spatiale par quadrant du domaine. Soit une discrétisation des contours de l'objet que l'on doit mailler. La méthode des “quadtrees” utilise la discrétisation des frontières pour générer des points dans le domaine. Le processus de maillage est le suivant. L'objet à mailler est initialement placé à l'intérieur d'un rectangle. Ce rectangle représente la racine d'une structure d'arbre quaternaire [15] qui est récursivement redécoupé en quatre fils. En partant du rectangle initial, on redécoupe en quatre chaque rectangle (un élément quaternaire) afin que ceux-ci ne contiennent au plus qu'un seul point du contour. Le premier graphe de la figure 2.2 illustre un tel redécoupage. Un équilibrage est ensuite réalisé pour que la différence des niveaux de découpage entre les quatres fils de chaque rectangle n'excède pas un. Le second graphe de la figure 2.2 montre en grisé les rectangles qui ont été équilibrés, c'est à dire redécoupés. Comme l'illustre le premier graphe de la figure 2.3, les rectangles qui intersectent ou chevauchent le domaine sont déformés afin de respecter au mieux celui-ci. Les sommets des rectangles proches de la frontière sont déplacés sur celle-ci. Cette étape se nomme étape de régularisation. Le déplacement des points redécoupe la frontière et implique que certains éléments quaternaires ne sont plus des rectangles. A partir de cette partition du domaine, une triangulation est obtenue par un découpage des élé-

ments quaternaires définis par des trapèzes. Le second graphe de la figure 2.3 montre le maillage final obtenu par la méthode des “quadtrees”.

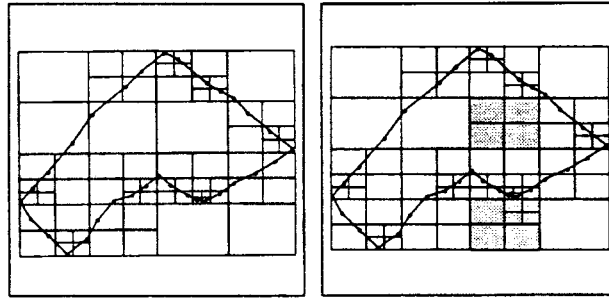


FIG. 2.2 - *Structure initiale et équilibrage de la grille*

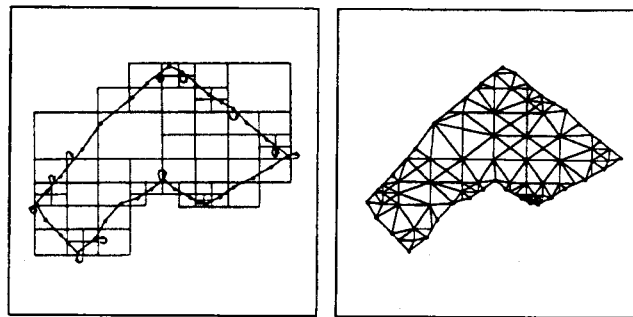


FIG. 2.3 - *Traitement des éléments frontières et résultat*

Il existe plusieurs variantes de cette technique en fonction du critère de redécoupage, de l'étape de régularisation et surtout du traitement de la frontière [9]. Ces variantes tentent de répondre aux problèmes suivants :

- la qualité de la triangulation finale est fortement pénalisée par les éléments frontières. On obtient des tailles de mailles très différentes et non souhaitées. De plus, en général, le contour initial n'est pas présent dans le maillage final,
- l'utilisation d'une structure d'arbre, par objet à modéliser, pose des problèmes pour représenter correctement la géométrie le long des frontières interfaces entre différentes régions.

2.1.2.2 Méthode frontale

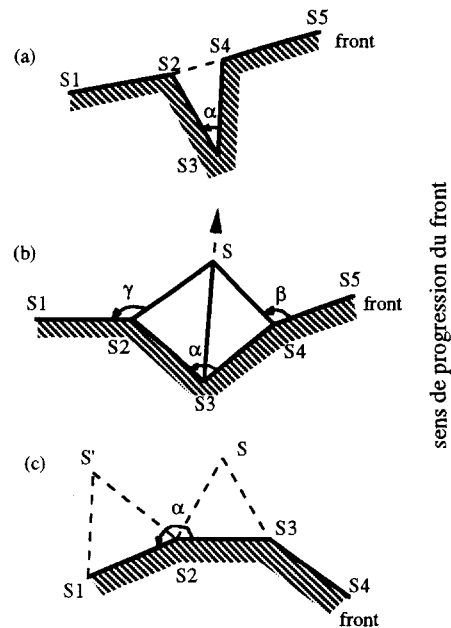
Adaptée aux géométries quelconques, [14], un mailleur qui utilise cette méthode, va construire le recouvrement du domaine Ω en triangles. Cette technique est fondée sur la progression itérative d'un front de triangles. Ce front est initialisé par le contour polygonal. L'analyse du front permet la création de points, internes au domaine, et donc de nouveaux éléments. Le front est ensuite remis à jour.

Soit F , un front lors du processus de triangulation. L'analyse du front, qui repose sur l'étude des propriétés géométriques des segments le constituant, permet de définir la position des nouveaux points à créer. Soit α l'angle formé par deux segments consécutifs du front F . La position des nouveaux points créés est définie de telle sorte qu'elle soit optimale, c'est-à-dire que les éléments s'appuyant sur ces points sont aussi réguliers que possible. Plusieurs cas sont à considérer pour que le point à créer soit dans le domaine et à l'extérieur des triangles déjà traités. Par souci de clarté, on se limitera aux trois cas d'analyse du front représentés sur la figure 2.4. Ces règles sont établies pour garantir des triangles aussi équilatéraux que possible :

1. pour $\alpha < 90^\circ$, les deux segments $[S_2, S_3]$ et $[S_3, S_4]$ (figure 2.4(a)) sont retenus et vont être les deux cotés du seul triangle créé,
2. pour $90^\circ < \alpha < 120^\circ$:
 - (a) si β et γ sont compris entre $[0, \frac{\pi}{5}[\cup]\frac{2\pi}{5}, 2\pi]$, on utilise la méthode du cas 1.
 - (b) sinon on construit un sommet S (figure 2.4(b)) sur la demi bissectrice de $S_2S_3S_4$, non contenue dans une maille déjà créé, et à une distance

$$d_{SS_3} = \frac{1}{6}(2d_{S_2S_3} + 2d_{S_3S_4} + d_{S_1S_2} + d_{S_4S_5}).$$
3. pour $\alpha > 120^\circ$, (figure 2.4(c)), deux triangles sont formés à partir de la longueur minimale des segments du front concernés.

Il faut veiller à ce que chaque point créé soit interne au domaine et n'appartienne pas à un élément déjà construit. Cette vérification, point crucial de ce type de méthode, repose sur la connaissance d'un voisinage adéquat de la zone en cours de traitement. On se servira également de cet espace de voisinage pour chercher si un point déjà existant peut être utilisé au lieu d'en créer un nouveau. Dans [14], l'espace de voisinage est une grille. Pour un candidat C (un nouveau point créé), on vérifie que le point est dans le domaine et qu'il n'existe pas d'autres points du front, dans un voisinage, qui permettent de construire un triangle correcte. Le voisinage de C est un disque de rayon r donné, centré sur C .

FIG. 2.4 - *Cas et constructions associées*

2.1.2.3 Techniques particulières

Il existe des techniques de triangulation qui maximisent le minimum des angles (Delaunay), ou garantissent que le plus grand des angles ne dépasse pas un seuil donné ([25], [26]), qui maximisent la plus petite arête ou minimisent la plus longue arête des triangles. Ces méthodes ajoutent ou non des sommets supplémentaires. En dehors de la triangulation de Delaunay, ces techniques sont peu utilisées dans la modélisation numérique du type éléments finis. Ceci vient du fait que les géométries doivent être simples et que la progression des tailles de mailles obtenues n'est pas satisfaisante. Cependant, ces méthodes sont intéressantes car elles garantissent les contraintes imposées sur le maillage : les angles de la triangulation doivent être ni trop grands ni trop petits. Certains algorithmes de triangulation utilisent une décomposition du domaine en sous-domaines convexes, qui sont ensuite triangulés avec des techniques simples qui garantissent les propriétés citées ci-dessus [18], [19]. La difficulté à décomposer des domaines complexes en sous-domaines convexes limite l'utilisation de tels algorithmes. De plus, la qualité de la triangulation est totalement dépendante de la décomposition puisque toutes les frontières des domaines convexes appartiennent à la triangulation finale.

2.1.2.4 La triangulation de Delaunay

La triangulation de Delaunay nous intéresse tout particulièrement et fera donc l'objet du §2.2.

2.2 Triangulation de Delaunay

2.2.1 Définition et propriétés

Dirichlet en 1850, a été le premier à proposer une méthode afin qu'un domaine puisse être décomposé en un ensemble de polyèdres convexes. Pour un ensemble de sites P_k , $k = \{1, \dots, K\}$, les régions V_k , $k = \{1, \dots, K\}$, sont les territoires assignés à chaque point P_k , tel que V_k représente l'espace plus proche de P_k que de tous les autres points de la distribution. Clairement, ces régions satisfont : $V_k = \{P : |P - P_i| < |P - P_j|, \forall j \neq i\}$.

Cette construction géométrique est connue comme le "pavage de Dirichlet" ou "le diagramme de Voronoï" [17]. Ces régions convexes sont appelées "régions" ou "cellules de Voronoï". Si on relie tous les sites qui ont en commun une médiatrice définissant une région de Voronoï, on obtient une triangulation de l'enveloppe convexe du nuage de sites P_k . Cette triangulation est la "triangulation de Delaunay". D'après les définitions, il est clair qu'en $2D$ un segment du diagramme de Voronoï est équidistant de deux points qu'il sépare. Les sommets du diagramme de Voronoï sont donc équidistants des trois points qui forment le triangle de Delaunay associé. On peut construire un cercle centré sur un sommet de Voronoï, qui passe par les trois points de ce triangle. D'après la définition des segments et des régions de Voronoï, on déduit qu'aucun cercle centré sur un sommet de Voronoï ne peut contenir de sites en son intérieur strict. Cette dernière condition est appelée "critère du cercle circonscrit" et est illustrée sur la figure 2.5.

2.2.2 Contraintes

Un des problèmes majeurs de la définition classique de la triangulation de Delaunay est qu'elle ne peut être généralisée à tous les types de domaines. Elle ne considère pas les contraintes imposées par les frontières d'une région contenant un nuage de sites. Ces problèmes sont souvent perceptibles dans les applications liées à la modélisation par éléments finis ou à la modélisation du terrain dans les Systèmes d'Informations Géographiques (SIG). La triangulation ne peut conserver les frontières polygonales et vérifier le critère de Delaunay.

Pour résoudre ce problème, une nouvelle définition pour les triangulations de Delaunay contraintes a été mise en place dans [23]. Le critère de construction de la trian-

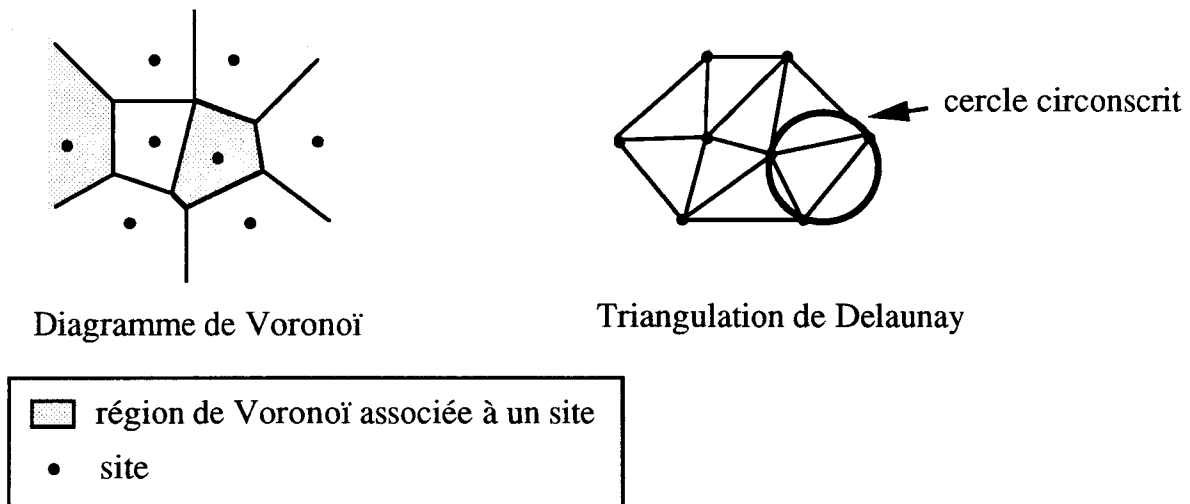


FIG. 2.5 - Dualité entre la triangulation de Delaunay et le diagramme de Voronoï

gulation de Delaunay contrainte utilise le critère du cercle circonscrit avec une notion de “visibilité”. Un triangle est “de Delaunay” si le critère du cercle est vérifié ou si les sites, contenus dans le cercle circonscrit à ce triangle, sont non visibles d’un des sommets du triangle. Un point P_1 est dit visible de P_2 si le segment $[P_1, P_2]$ n’intersecte aucune contrainte de la triangulation. On parlera alors de la triangulation de Delaunay contrainte d’un graphe planaire $G(A, S)$, où A est l’ensemble des arêtes (contraintes) du graphe et où S est l’ensemble des sommets.

Définissons plus clairement la notion et les propriétés d’un graphe planaire. Soient S un ensemble, A un sous-ensemble de $S \times S$ tel qu’un graphe est constitué par la donnée de la paire (S, A) . Chaque élément de S est appelé sommet ou noeud et chaque élément de A est une arête. La paire de sommets d’une arête constitue ses extrémités. Soient $G = (S, A)$ un graphe, S un ensemble de points du plan euclidien P et b une bijection de S vers S . Si, quelle que soit l’arête $a = (s, t)$ de A , il existe un élément unique ξ de l’ensemble G des courbes simples du plan, paramétrées dans $[0, 1]$, tel que $\xi(0) = b(s)$ et $\xi(1) = b(t)$, on dit qu’il existe une représentation topologique plane du graphe, constituée par la donnée du couple (S, G) . Une représentation topologique plane d’un graphe est représentée sur la figure 2.6.

Si deux courbes simples quelconques d’une représentation topologique plane ne se coupent, dans le pire des cas, qu’en leurs extrémités, on dit que le graphe admet une représentation planaire. Si, enfin, les courbes simples peuvent être remplacées par un ensemble de segments de droites fermées du plan P , (S, A) constitue ce qu’il est convenu d’appeler la représentation par segments d’un graphe planaire. Etant donné

$$S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$A = \{ (0,2); (3,4); (1,5) \}$$

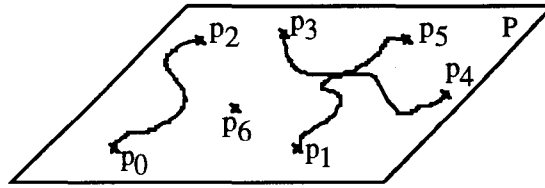


FIG. 2.6 - Représentation topologique plane d'un graphe

que les courbes que nous traitons sont composées de segments de droite, on parlera uniquement de graphe planaire.

Sur l'ensemble des combinaisons possibles pour mailler N points, la triangulation de Delaunay est celle qui maximise le minimum des angles. Cette propriété est importante pour la résolution numérique s'appuyant sur une discrétisation spatiale du type éléments finis. Bien que la limitation de l'angle maximal soit tout aussi importante, ce principe de triangulation est de plus en plus utilisée. Ceci provient du fait que les techniques de construction de la triangulation de Delaunay sont efficaces, rapides et adaptées aux domaines complexes grâce à la triangulation de Delaunay contrainte.

2.2.3 Techniques pour l'obtention d'un maillage de Delaunay

Le maillage de Delaunay d'un ensemble de points s'obtient en considérant le critère du cercle circonscrit. Comme il est présenté dans [21], il existe deux principes de construction :

- une construction itérative,
- une construction récursive.

L'objet de ce chapitre est de présenter ces deux principes.

2.2.3.1 Notation

la notation $O(N^2)$ est une notation qui renseigne sur la complexité d'un algorithme. Elle définit le nombre d'opérations élémentaires qu'effectue l'algorithme dans le pire des cas pour N points. Ici, l'algorithme à une évolution quadratique. Ce renseignement nous donne un ordre d'idée du temps d'exécution en fonction du nombre de données. Dans le cas de la triangulation de Delaunay, le nombre d'opérations élémentaires, dans le pire des cas, est dans $O(N \log N)$.

2.2.3.2 Construction itérative

Soient N points à trianguler, un domaine fictif (un carré ou un triangle) englobant tous ces points et une triangulation de Delaunay de ce domaine fictif. Le processus itératif d'insertion d'un point de la liste dans une triangulation de Delaunay se déroule comme suit. Soient une triangulation de Delaunay des $P - 1$ points de la liste à trianguler, et P le p -ième points de la liste à introduire dans la triangulation. Lorsqu'on a trouvé le triangle qui contient le point P , on insère ce point dans la connectivité en redécoupant en trois ce triangle. Ensuite, de proche en proche, on reconstitue une triangulation de Delaunay par un échange d'arêtes des triangles qui ne vérifient pas le critère de Delaunay. Des étapes de régularisation peuvent suivre cette construction. Celles-ci permettent de prendre en compte des contraintes (par échange d'arêtes), de détruire les triangles extérieurs au domaine non-convexe, ou intérieurs aux trous qui peuvent exister dans le domaine.

Ces méthodes sont en général en $O(N^2)$ dans le pire des cas, si N est le nombre de points, [33], [32], et ne sont donc pas optimales en nombre d'opérations effectuées pour obtenir la triangulation. Ces constructions itératives sont néanmoins très utilisées pour leur simplicité et dans les méthodes adaptatives du fait du processus itératif d'ajout de points. On reviendra plus précisément sur le processus adaptatif dans le chapitre 4 de la partie 2 qui présente l'adaptation à une carte de tailles.

Remarque : Des techniques de triangulation “randomisée” fondées sur un processus itératif apparaissent depuis quelques années [22]. La complexité de tels algorithmes est en $O(N \log N)$, grâce au tirage aléatoire des points qui rend quasi nulle la probabilité de générer une situation semblable au pire des cas.

2.2.3.3 Construction récursive

Le second principe de construction pour la triangulation de Delaunay est récursif et est optimal en nombre d'opérations effectuées : $O(N \log N)$. La construction récursive utilise le principe “Diviser pour Résoudre”.

Pour illustrer cette méthode, considérons le principe de l'algorithme de tri par fusion : on divise le vecteur à trier en deux parties égales, on appelle récursivement le tri par fusion sur ces deux parties qui sont retournées triées. Il ne reste plus qu'à parcourir les deux sous-listes triées en prenant l'élément minimum (ou maximum, suivant le sens du tri) à chaque étape. Cette opération se nomme “fusion” et prend un temps

proportionnel à la longueur de la liste triée. Si la liste à trier contient N éléments, la complexité $T(N)$ de l'algorithme est donnée par l'équation de récurrence suivante : $T(N) = 2T(\frac{N}{2}) + cN$ où c est une constante positive. Le premier terme met en évidence le tri des deux parties égales, tandis que le second terme caractérise la fusion des deux sous-listes triées pour définir la liste triée de N points. Une telle équation, généralisable dans le cas où $N \neq 2^k$, où k est un entier, montre que le tri par fusion de N éléments a une complexité en $O(N \log N)$.

Dans le processus de triangulation qui nous intéresse, la liste des points est également subdivisée en deux sous-ensembles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$ de tailles sensiblement égales, séparables par une droite verticale. Récursivement, la procédure est lancée sur les deux sous-ensembles. Ensuite, la fusion de ces deux maillages de Delaunay donne la triangulation de Delaunay des N points initiaux. La récursion s'arrête lorsque l'ensemble des points, passé en paramètre, a un nombre inférieur ou égal à trois : on peut alors construire d'une façon triviale la triangulation de Delaunay de ces données. Lors de la fusion, comme l'illustre la figure 2.7, on utilise les tangentes supérieure et inférieure (la base) du convexe formé par les deux maillages de Delaunay. Ces tangentes appartiennent obligatoirement à la triangulation de Delaunay non contrainte finale de ces deux sous-ensembles.

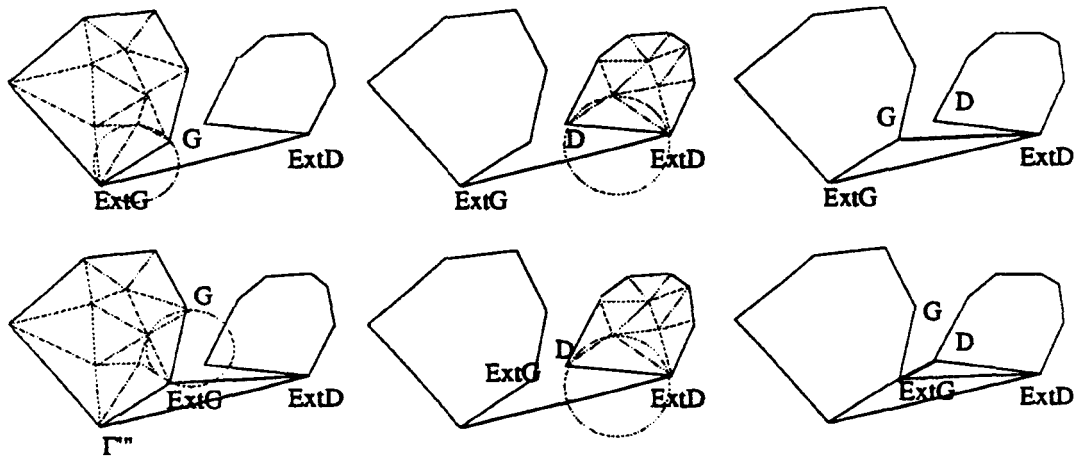


FIG. 2.7 - Principe de la fusion de l'algorithme de Delaunay

Soient Ext_G et Ext_D les points extrême gauche et extrême droit de la base. Soient G un site gauche et D un site droit tels que Ext_G et Ext_D soient extérieurs aux deux cercles circonscrits liés à D et G . D et G sont obtenus après l'opération d'élimination des triangles dont le cercle associé contient Ext_G ou Ext_D . A partir du quadrilatère constitué de la base, d'un segment du sous-ensemble gauche et d'un segment du sous-

ensemble droit, on détermine le triangle de Delaunay qui a comme arête la base. Il n'y a alors que deux possibilités, sauf cas particulier de co-cyclicité. La diagonale retenue est insérée dans la triangulation et sert de base pour recommencer le processus. Ce processus se termine lorsque la dernière base coïncide avec la tangente supérieure au convexe.

Comme il a été présenté lors de la définition des contraintes, en 2.2.2, la modélisation d'un domaine complexe doit être faite en respectant un graphe planaire $G(A, S)$ et également en satisfaisant la propriété d'équilatérilité liée au critère de Delaunay. La triangulation de Delaunay contrainte peut également être construite avec une méthode récursive en $O(N \log N)$.

La modélisation de terrain et la génération de maillage adaptatif fondé sur une facétisation par triangle est très souvent faite, à cause de ces propriétés, à l'aide d'une triangulation de Delaunay contrainte ou non. La construction itérative est la technique de construction de la triangulation de Delaunay la plus simple à mettre en oeuvre. De plus, dans le cadre d'une triangulation adaptative, l'ajout de points dans une triangulation de Delaunay existante permet de mettre en oeuvre des processus adaptatifs simples et efficaces. Bien que les avantages de la construction itérative soient indéniables, le choix du mailleur, pour la modélisation de terrain et la génération de maillage adaptatif dans le cadre d'études fluviales et maritimes, s'est porté sur une méthode de construction récursive car celui-ci construit une triangulation de Delaunay contrainte optimale. De plus, comme il est présenté au §2.2.3.4, toute triangulation est précédée d'une mise en conformité des données sous forme d'une graphe planaire. Cette étape permet de s'affranchir des conséquences d'une mauvaise définition des données.

2.2.3.4 Triangulation de Delaunay contrainte hiérarchique

La triangulation de Delaunay hiérarchisée [28] est une évolution importante de l'algorithme de triangulation de Delaunay contrainte [29]. Nous présenterons, la notion de graphe hiérarchique et ensuite les avantages, d'un point de vue pratique, de cet algorithme.

La triangulation de Delaunay contrainte de [31] et [29], présentée précédemment, considère un graphe planaire, $G(A, S)$, constitué de segments A et de sommets S . Ce maillage est établi relativement à la face externe implicite : la frontière de l'enveloppe convexe. Dans notre cas, les données sont définies par un graphe hiérarchique, c'est-à-dire par un graphe planaire représenté par l'union d'un ensemble fini de composantes connexes disjointes de la forme (P_i, V_i, E_i, H_i) . P_i est la i ème composante connexe de la frontière polygonale, V_i est l'ensemble des sommets, E_i est l'ensemble des arêtes et

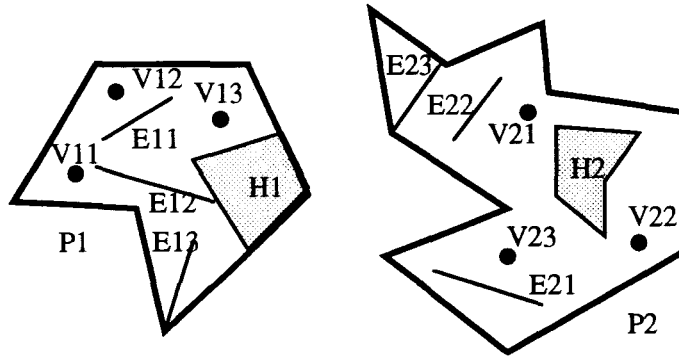


FIG. 2.8 - Exemple d'un graphe hiérarchique

H_i est un graphe hiérarchique (pouvant être vide). Tous ces ensembles constituent un sous-graphe planaire entièrement inclus dans la région intérieure à P_i . Les éléments de E_i et V_i (H_i) sont référencés comme les éléments (resp. les faces) des P_i . Ces éléments sont soit des points isolés (ex. information altimétrique), soit des arêtes isolées, soit une chaîne d'arêtes (ex. courbes de niveau). Ces arêtes sont également appelées *contraintes* pour la triangulation et les faces sont récursivement définies comme des sous-graphes hiérarchiques. Illustrons par un exemple, figure 2.8, cette notion de graphe hiérarchique. Considérons la frontière polygonale définie par deux composantes connexes P_1 , P_2 . (E_{11}, E_{12}, E_{13}) les arêtes incluses dans P_1 et (E_{21}, E_{22}, E_{23}) les arêtes incluses dans P_2 . De même, soient V_{11}, V_{12}, V_{13} et V_{21}, V_{22}, V_{23} les sommets inclus respectivement dans P_1 et dans P_2 . Soient H_1 et H_2 des graphes hiérarchiques inclus respectivement dans P_1 et dans P_2 . H_2 ne contient aucun élément en son intérieur et est donc un trou. Lors de l'étape de fusion, la triangulation de Delaunay hiérarchique n'est construite ni en dehors des composantes connexes disjointes du domaine, P_i , ni à l'intérieur du trou, H_2 . Avec ce type de hiérarchisation de données, il sera possible à terme de ne trianguler qu'une composante polygonale appartenant au graphe. On pourra donc, dans l'exemple de la figure 2.8, trianguler uniquement le complémentaire de H_1 , $P_1 \setminus H_1$, ou l'une des composantes connexes P_1 , P_2 , ou la totalité du domaine. On peut également souligner que cet algorithme a toujours une complexité dans le pire des cas dans $O(N \log N)$, où N représente le nombre de points.

Il est évidemment possible de construire la triangulation de Delaunay contrainte associée au graphe s'appuyant sur l'enveloppe convexe et ensuite de détruire de la liste des faces celles qui ne sont pas souhaitées. Cette solution entraîne dans le cas où le nombre de trous et le nombre de composantes connexes du domaine sont trop importants la construction puis la destruction d'un grand nombre de mailles. Cette solution peut être coûteuse en temps CPU pour des données complexe.

Pour illustrer les problèmes liés à l'élaboration d'un graphe hiérarchique pour des données $3D$, plaçons nous dans le cadre de la modélisation d'un terrain utilisé pour des études fluviales ou maritimes. On rappelle que ce graphe hiérarchique permet à l'aide d'une triangulation de Delaunay contrainte hiérarchique de définir une surface $z = f(x, y)$ qui caractérise le terrain.

Si l'on considère les informations issues de la numérisation de cartes (points altimétriques, profils bathymétriques, courbes de niveau, emprise du domaine, infrastructures, ...) nous avons trois types d'éléments (les points, les polygones, les polygones (faces)). Les traces dans le plan $z = 0$ de certaines de ces faces se chevauchent. Ceci vient d'une erreur lors de la numérisation ou d'un ajout d'informations qui demande une modification des données. La première cause étant facilement identifiable, nous développons la seconde en nous basant sur la figure 2.9, qui illustre l'ajout d'un objet $3D$ (une digue) dans un lit mineur.

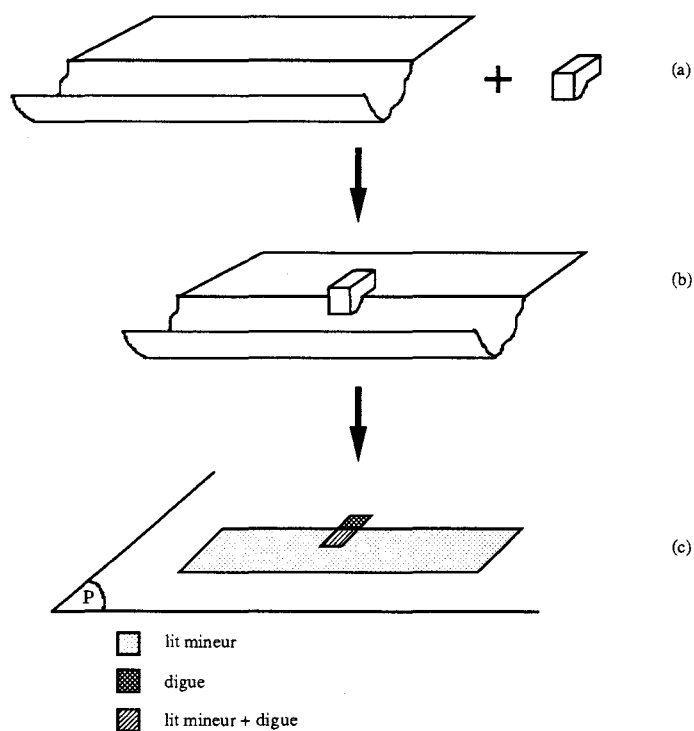


FIG. 2.9 - Exemple pour la hiérarchisation des données

Le schéma (c) de la figure 2.9, illustre le graphe planaire associé aux données dans le plan $z = 0$. On remarque qu'il existe une surface commune aux deux objets "lit mineur" et "digue". Ceci est physiquement impossible. L'analyse des données établit que cette surface commune ne peut appartenir qu'à la digue. Le lit mineur doit donc être modifié, comme le montre le schéma (b) de la figure 2.10, pour la trace de ces objets dans

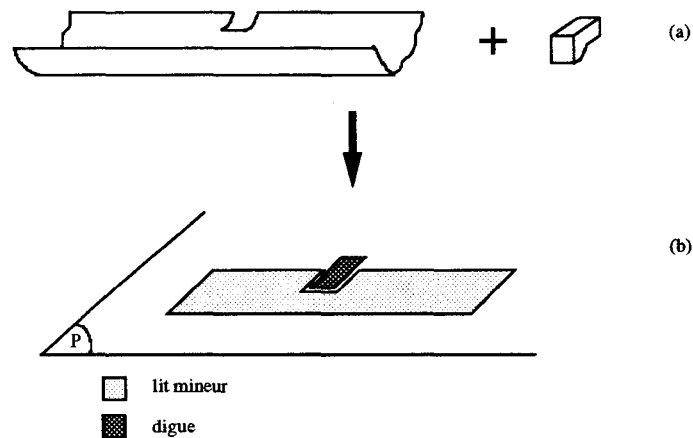


FIG. 2.10 - Hiérarchisation du graphe

le plan $z = 0$ ne se chevauche pas et soit définie par un graphe hiérarchique.

Comme nous cherchons à définir une représentation de terrain grâce à une surface $z = f(x, y)$, tous les objets 3D ne sont pas représentables. Par exemple, un pont est uniquement caractérisé par son influence sur le terrain, c'est à dire les piles de ponts. Cette modélisation n'est pas restrictive car dans le cadre des études du code TELEMAC, l'influence du tablier du pont sur l'écoulement n'est pas envisagée.

D'un point de vue plus général, les objets 3D que l'on utilise ont une emprise dans le plan $z = 0$ définie par des faces. L'altimétrie sur cette face est soit définie par l'objet s'il modifie localement le terrain, soit par les fonds du terrain lui-même. L'autre valeur altimétrique caractérisant l'élévation de la digue, d'une côte, de piles de pont, n'est pas fixée mais considérée comme infinie puisque l'objet est supposé infranchissable par l'écoulement. Cette hypothèse permet donc de construire une représentation des données grâce à un graphe hiérarchique 2D comme le montre la figure 2.10. L'information altimétrique est spécifiée aux sommets de ce graphe et permettra à l'aide d'une triangulation de Delaunay contrainte de définir une représentation fine du terrain.

La hiérarchisation d'un graphe permet donc de résoudre les conflits pouvant exister entre différentes faces. Le choix de la face prioritaire pour la construction du graphe hiérarchique est établi comme suit :

- une face est prioritaire par rapport au polygone caractérisant le domaine,
- pour deux faces, un indice unique associé aux faces lors de la définition établit la règle de priorité.

Une attention particulière devra donc être prise lorsque l'on définit l'indice d'une face, car ce choix n'est pas sans conséquence.

Comme il a été précisé, la régularisation des données se fait en plusieurs étapes. Dans un premier temps le graphe planaire des données dans le plan $z = 0$ est construit. Cette étape est obtenue en recherchant toutes les intersections de segments. L'algorithme utilisé [30] est fondé sur l'algorithme de Bentley-Ottman [34]. Ensuite le graphe hiérarchique est construit en modifiant les données pour qu'une face ne soit associée qu'à un seul objet. L'étape suivante redéfinit l'altimétrie pour les points d'intersections, elle précise sur quel segment est calculé l'altimétrie. Pour les points des faces qui étaient communs à deux objets, l'altimétrie est déduite de l'objet qui est hiérarchiquement supérieur. Une étape supplémentaire, qui n'a pas été présentée dans l'exemple précédent, sert à détruire les éléments non valides. Les segments ou les faces qui se trouvent en dehors du domaine ou dans des trous sont automatiquement détruits.

Bien que la régularisation du graphe soit établie par le processus de construction du graphe hiérarchique, il existe des cas où la définition des données doit être revue par l'opérateur. L'auto-intersection des faces ou du domaine est un de ces cas.

Pour terminer, la présentation de la triangulation de Delaunay contrainte hiérarchique, les différentes étapes de son élaboration utilisent une arithmétique mixte, [35], afin de garantir la précision et la robustesse des calculs géométriques. On pourra se reporter à [36] pour compléter ces notions d'arithmétique robuste.

Différentes techniques de facétisation d'un domaine ont été introduites. La méthode de "quatree" construit une facétisation du domaine d'après la définition des frontières. Des points sont créés dans le domaine, ce qui fait que cette méthode ne peut être utilisée pour la création du Modèle Numérique de Terrain. En effet, les points créés n'ont pas d'altimétrie. De plus, cette méthode n'est plus utilisée pour la création de maillages de calcul car la qualité du maillage est entièrement dépendante de la discrétisation du contour.

Pour la même raison que précédemment, la méthode dite frontale ne peut être utilisée pour la création du Modèle Numérique de Terrain. Par contre, ce processus de triangulation permet de créer des maillages de calcul ayant une qualité de progression de mailles très intéressante.

Finalement, la triangulation de Delaunay répond à notre attente. En effet, d'après ses propriétés, elle permet de construire le Modèle Numérique de Terrain qui a la bathymétrie la plus proche de la réalité. De plus, cette méthode peut également être utilisée pour la génération de maillage de calcul. Finalement, contrairement aux méthodes dites frontales, elle peut être établie avec des algorithmes robustes.

Ce chapitre a tout particulièrement décrit les algorithmes du mailleur de Delaunay contraint hiérarchique, [28], définis par l'Ecole des Mines de Saint-Etienne. Ceux-ci

seront modifiés afin d'établir la triangulation adaptative présentée dans le chapitre 4.

Deuxième partie

Maillage adaptatif: respect du terrain et prise en compte de critères hydrauliques

Chapitre 3

Adaptation à une carte de tailles en respectant la bathymétrie

Dans ce chapitre, nous allons présenter une technique adaptative qui considère la représentation bathymétrique comme un critère adaptatif important. Il sera respecté au même titre que des critères adaptatifs qui se fondent sur les phénomènes physiques étudiés. Comme il sera établi dans le chapitre 4, l'évolution des fonds est corrélée avec l'évolution des tailles de mailles pour le maillage "optimal" limitant les erreurs de troncatures et les coûts. L'adaptation se base sur la minimisation d'une énergie d'un terme physique et bathymétrique. Le terme physique caractérise l'écart entre une carte de tailles, spécifiant la densité de points souhaitée, et la distribution de points dans le maillage de calcul. Le terme bathymétrique caractérise l'écart entre la bathymétrie du Modèle Numérique de terrain et celle obtenue sur le maillage de calcul. Cette minimisation utilisera comme variables le nombre de points, leurs positions et la connectivité.

Cette méthode n'est pas utilisée pour la génération du maillage de calcul, car elle n'est pas satisfaisante en ce qui concerne la qualité du maillage généré.

Une autre méthode adaptative, uniquement pilotée par une carte de tailles, a été développée et fait l'objet du chapitre 4. La carte de tailles et les critères qui l'initialisent sont communs à ces deux méthodes et sont présentés dans le chapitre 4.

Avant de présenter la technique adaptative, nous allons présenter deux approches permettant de définir une surface simplifiée en fonction d'une erreur donnée. Cette présentation permettra d'introduire l'expression du terme énergétique pour qu'une surface simplifiée soit proche de la surface initiale qui définit la bathymétrie. Dans un deuxième temps sera présenté le processus adaptatif portant sur une minimisation énergétique.

3.1 Simplification de surface

Une surface est définie par des points et une connectivité. Chaque point est défini par un triplet (x, y, z) dans un repère orthonormé direct tel que z représente l'altimétrie. Si pour tout couple (x, y) on ne peut associer qu'un seul et unique point de la surface, celle-ci est dite représentable en $2D^{\frac{1}{2}}$. Dans le cas contraire cette surface est définie en $3D$.

Pour la simplification de surface il existe deux grands principes. Les méthodes qui conservent uniquement les points caractéristiques de la surface ou celles qui modifient les points et la connectivité pour que la surface simplifiée soit le plus proche possible des données initiales. On présentera un exemple de ces deux techniques et tout particulièrement celle qui est basée sur une minimisation énergétique.

3.1.1 Conservation des points caractéristiques d'une surface

Soit la simplification de surface, [67], qui conserve les points caractéristiques d'une surface $2D^{\frac{1}{2}}$: un terrain par exemple. Le principe de base de cette simplification est le suivant : pour chaque point de la surface initiale on vérifie que, si celui-ci n'existait pas, la surface associée serait modifiée au delà d'un seuil fixé. Si ce point n'est pas important pour la définition de la surface il est détruit, sinon il est conservé comme point caractéristique de la surface.

Dans [67], le critère de destruction d'un point est le suivant :

Soit P un point initial. Soit S_T le plan moyen passant par P (cf. figure 3.1). S_T est le plan perpendiculaire à $\vec{n}_P$:

$$\vec{n}_P = \frac{\sum_{i=1}^{N_P} \vec{n}_i A_i}{\sum_{i=1}^{N_P} A_i}$$

$\vec{n}_P$ est la moyenne des normales déterminant l'orientation de la surface tangentielle S_T en P .

N_P est le nombre de voisins de P dans la triangulation.

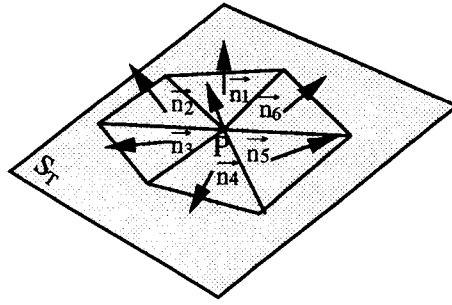
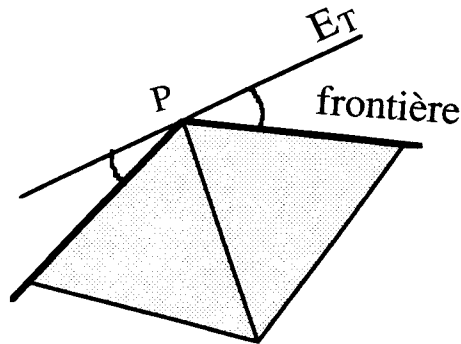
n_i est la normale à la surface du triangle i .

A_i est l'aire du triangle i .

La destruction conserve les points qui ont un angle a_{max}^P supérieur à un seuil fixé.

$$a_{max}^P = \max_{i=1}^{N_P} \left(\arccos \frac{\vec{n}_P \cdot \vec{n}_i}{\|\vec{n}_P\| \cdot \|\vec{n}_i\|} \right)$$

En ce qui concerne les points qui appartiennent à la frontière, le calcul de a_{max}^P est différent et considère la tangente au point (cf. figure 3.2).

FIG. 3.1 - *Plan tangent moyen pour un point*FIG. 3.2 - *Plan tangent moyen à un point frontière*

Si l'on se fixe un critère de qualité, on définit un angle maximal α_{max} , qui spécifie les points à détruire lorsque $a_{max}^P > \alpha_{max}$. Dans le cas où l'on impose un nombre de points pour la représentation de surface simplifiée, on trie les points selon les valeurs a_{max}^P et on détruit les N points les plus importants selon cette grandeur angulaire.

Lorsqu'un point est détruit, tous les triangles s'appuyant sur ce point sont également détruits. Pour garantir que le résultat final est une triangulation, la connectivité doit donc être reconstruite. Trois approches ont été envisagées :

Après avoir détruit tous les points non importants, une triangulation de Delaunay des points restants est effectuée. Cette solution permet d'obtenir une triangulation la plus uniforme, mais prend du temps car on reconstruit la connectivité des portions qui n'ont pas été modifiées.

La seconde possibilité est la reconstruction locale de la connectivité lorsqu'un point a été détruit. On n'a donc plus une triangulation de Delaunay.

La dernière méthode regroupe les trous pour reconstruire la connectivité. Cette dernière solution devait en principe être plus rapide. Il s'avère que le gain de temps sur le processus de destruction de points est perdu à cause du processus de triangulation. Les portions de domaine à trianguler peuvent être complexes.

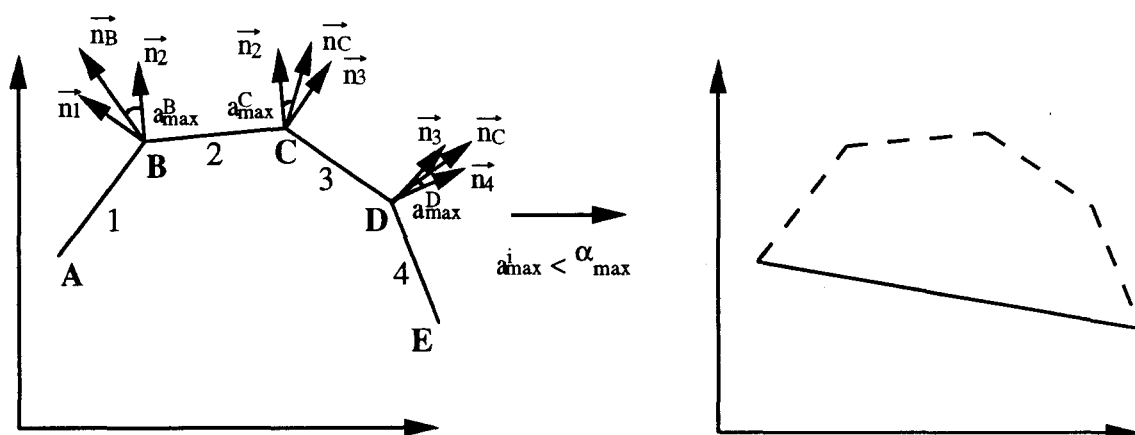


FIG. 3.3 - Propagation d'une destruction de points si le critère ne considère que la surface initiale

Le calcul de a_{max}^P , qui spécifie les points à détruire, est fait en considérant uniquement le maillage initial. Cette solution peut entraîner une propagation locale de la destruction de points. En effet, sur la figure 3.3, une suite de points doit être détruite selon le critère de qualité. Si ces points sont détruits, l'écart entre la surface simplifiée et la surface initiale peut être plus important que ce que l'on souhaite. Il faut donc à chaque destruction de points changer la valeur de a_{max}^P , car un point qui n'était pas important dans la surface initiale peut l'être dans la surface simplifiée. On établit donc après chaque destruction de point, une liste de points à détruire en considérant l'angle maximum a_{max}^P dans la surface initiale et dans la surface simplifiée.

3.1.2 Minimisation d'une énergie pour la simplification de surface

Contrairement à la méthode précédente, la simplification de surface fondée sur la minimisation énergétique déplace les points.

Dans la référence [67], après le processus de simplification de surface conservant les points caractéristiques, les points de la surface simplifiée sont déplacés vers les zones de la surface originale qui ont de fortes courbures. On calcule pour chaque triangle de la surface simplifiée un index caractérisant la courbure locale de la surface initiale. Cet index de courbure du triangle simplifié est déduit des gradients exprimés sur les points originaux contenus dans ce triangle. Plus l'index de courbure est important plus la destruction des points a accentué un écart entre la surface initiale et simplifiée. Soit un point P de la triangulation simplifiée qui définit des triangles avec ses voisins. Ce point P est déplacé vers les triangles ayant le plus fort index de courbure. Ce déplacement

est fait selon une ligne qui est définie d'après les arêtes des triangles voisins et les index de courbures associés à ces triangles. La position du point sur cette ligne est déduite d'une minimisation de la courbure.

Un autre principe de simplification de surface fondé sur une minimisation de l'écart entre la surface initiale et simplifiée est présenté dans [66].

Soit une surface initiale définie à l'aide d'un maillage surfacique, M . Ce maillage est défini par un couple (K, V) où K est un complexe simple qui caractérise la connectivité des sommets, arêtes et faces (la topologie du maillage) et $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, $v_i \in \mathbb{R}^3$, représente la position des points (la représentation géométrique). Un complexe simple K est un ensemble de sommets $\{1, \dots, m\}$ en relation avec un sous-ensemble non vide de sommets appelé simplexe de K . Les 0-simplexes $\{i\} \in K$ sont appelés sommets, les 1-simplexes $\{i, j\} \in K$ sont appelés arêtes et les 2-simplexes $\{i, j, k\} \in K$ sont appelés faces. Une représentation géométrique d'un maillage définie une surface $\mathbb{R}^3$ comme suit : pour un complexe simple K , on définit la relation topologique $|K|$ dans $\mathbb{R}^m$ en identifiant les sommets $\{1, \dots, m\}$ avec la base de vecteurs canoniques standards $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$. Pour chaque simplexe $s \in K$ notons $\|s\|$ l'enveloppe convexe de ces sommets dans $\mathbb{R}^m$, et notons $|K| = \cup_{s \in K} \|s\|$. Notons $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire qui relie le i^{eme} vecteur de base $e_i \in \mathbb{R}^m$ à $v_i \in \mathbb{R}^3$. Sur la figure 3.4 un complexe simple définit la connectivité pour les sommets $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ associés aux points v_1, v_2, v_3 .

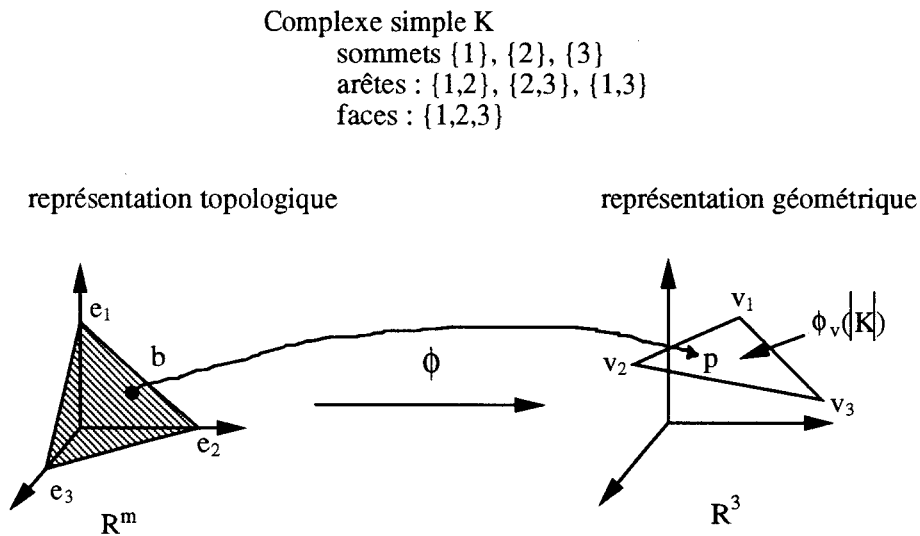


FIG. 3.4 - Représentation topologique et géométrique de M

La représentation géométrique M est l'image $\Phi_v(|K|)$, où la notation Φ_v signifie qu'elle est uniquement définie par les positions des segments $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Si Φ_v

est bijective, tout point $p \in \Phi_v(|K|)$ admet un antécédant unique dans $|K|$, tel que p est définie par $\Phi_v(\alpha e_r + \beta e_s + \gamma e_t)$.

Le but de la simplification de surface est de garantir un maillage qui respecte suffisamment la position des points initiaux $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et qui a un faible nombre de points. On recherche une connectivité K et un ensemble de positions de points V définissant un maillage $M = (K, V)$ qui minimise la fonction énergétique :

$$E(K, V) = E_{dist}(K, V) + E_{rep}(K) + E_{prox}(K, V)$$

$E_{dist}(K, V)$ est égale à la somme des carrés de la distance entre les points $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et le maillage M :

$$E_{dist}(K, V) = \sum_{i=1}^n d^2(x_i, \Phi_v(|K|))$$

$d(a, b)$ représente la distance euclidienne existant entre les points a et b .

E_{rep} est le terme énergétique qui pénalise les maillages ayant un grand nombre de sommets. Il est proportionnel au nombre de sommets m de K :

$$E_{rep} = c_{rep}m$$

c_{rep} est un paramètre qui contrôle le compromis entre la fidélité de la géométrie et une simplicité de la représentation.

$E_{prox}(K, V)$ est un terme énergétique qui garantit l'existence d'un minimum énergétique. On place sur chaque arête du maillage un ressort de longueur nulle et de raideur k :

$$E_{prox}(K, V) = \sum_{(j,k) \in K} k \|v_j - v_k\|^2$$

Pour minimiser $E(K, V)$ sur K et V , le problème est scindé en deux sous-problèmes : une minimisation interne sur V à connectivité K fixée et une minimisation externe sur K . La minimisation interne déplace les points à connectivité constante afin de minimiser la fonction énergie $E(K, V)$. On doit donc projeter sur le maillage M les points $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ pour pouvoir exprimer le terme $E_{dist}(K, V)$. Le terme E_{rep} n'intervient pas dans ce processus de minimisation car la connectivité et donc le nombre de points est constant. La minimisation est un problème des moindres carrés résolu par une technique des gradients conjugués sur les trois coordonnées des points. La

résolution du problème externe, qui recherche la minimisation de $E(K, V)$ sur K , utilise trois transformations élémentaires de base, la fusion d'arêtes, le découpage d'arêtes, l'échange d'arêtes (cf .figures 3.5).

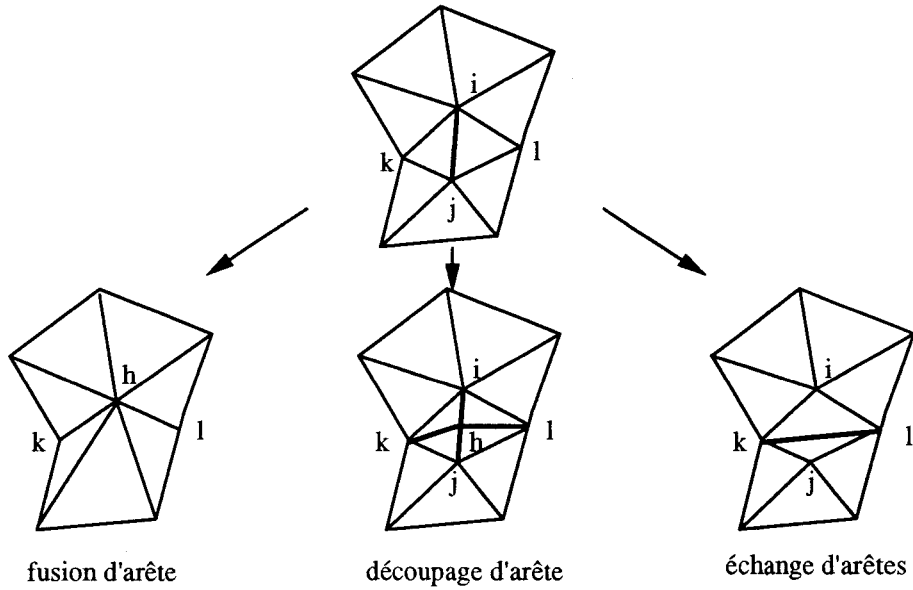


FIG. 3.5 - Transformations locales élémentaires

Chaque transformation est validée si l'énergie globale diminue, c'est à dire si cette transformation suivie d'une optimisation de la position des points diminue l'énergie. Pour accélérer le processus, on considère uniquement les transformations qui localement diminuent l'énergie sur une portion de maillage. Cette estimation est toujours pessimiste car une optimisation complète devrait diminuer encore plus l'énergie. Ces transformations élémentaires sont définies comme suit :

La fusion de l'arête $\{i, j\}$ en un sommet $\{h\}$ considère seulement trois optimisations sur la position de v_h : v_i, v_j et $\frac{1}{2}(v_i + v_j)$. Cette transformation est acceptée si l'énergie diminue et si le maillage ne s'intersecte pas. Dans le cas contraire, on teste la transformation suivante.

Le découpage de l'arête $\{i, j\}$ en $\{i, h\}$ et $\{h, j\}$ considère uniquement la position de v_h en $\frac{1}{2}(v_i + v_j)$. Comme pour le cas de la fusion d'arête on vérifie le maillage et si l'énergie ne diminue pas on passe à la transformation suivante.

L'échange d'arêtes remplace l'arête $\{i, j\}$ par l'arête $\{k, l\}$. Deux optimisations locales sont considérées pour cette transformation. la première considère la connectivité

autour de k pour définir localement la position optimale du sommet v_k . La seconde considère la connectivité autour de l pour définir localement la position optimale du sommet v_l . On conserve la transformation qui donne une énergie locale qui diminue et qui assure que le maillage ne s'intersecte pas.

Le terme énergétique E_{prox} est un terme de régularisation utile uniquement au début du processus de simplification. La contribution de ce terme est donc très faible par rapport aux termes E_{dist} et E_{rep} . Initialement le processus de simplification ajoute des points pour avoir une distribution de points homogène. Cette opération garantit un meilleur résultat final mais n'assure pas que tout point v_i du maillage a une contribution dans le terme énergétique E_{dist} . Pour ces points, seul le terme énergétique E_{prox} impose une position optimale lors de la minimisation énergétique. Lorsque le nombre de points diminue tous les points v_i ont une contribution énergétique dans le terme E_{dist} . Le terme E_{prox} n'a donc plus de raison d'être.

Cette méthode de simplification de surface 3D donne des résultats d'une grande qualité. Elle conserve les points dans les régions de forte courbure et les arêtes vives de la surface initiale. Comme on va le présenter, cette méthode peut être utilisée dans un processus adaptatif de génération de maillage piloté par une carte de tailles tout en respectant la représentation bathymétrique.

3.2 Adaptation à une carte de tailles avec respect de la bathymétrie

Une technique adaptative, proche de la simplification de surface présentée ci-dessus, a été testée. Cette méthode utilise une expression énergétique qui tient compte de la distance entre le maillage et les données bathymétriques initiales ainsi que d'une densité de points spécifiée par une carte de tailles. Cette carte de tailles et les critères qui l'initialisent ne sont pas présentés ici; on se référera au chapitre 4 pour plus de précisions. La carte de tailles contient donc une information distance entre points déduite de critères liés à la bathymétrie. Elle est définie sur la triangulation de Delaunay qui caractérise la bathymétrie et que l'on nomme Modèle Numérique de Terrain (cf. chapitre 1).

3.2.1 Expression énergétique

L'expression énergétique utilise un terme proportionnel à l'écart altimétrique entre les points du Modèle Numérique de Terrain $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et la surface définie par le maillage de calcul M . Un second terme relie les points v_i entre eux, $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Cette expression quantifie l'écart entre la distribution de points v_i et celle spécifiée par la carte de tailles. Les termes K, V, X, d, Φ que l'on utilisera ont la même définition que précédemment et ne seront donc pas redéfinis. Ainsi, l'expression énergétique s'exprime :

$$E(K, V) = E_{dist}(K, V) + E_{adap}(K, V)$$

Soit $b_i \in \|K\| \subset \mathbb{R}^m$ la projection de x_i selon Z sur M . Soit les sommets $\{r\}, \{s\}, \{t\}$ associés au simplexe concerné par la projection de x_i et $\Phi_v(r), \Phi_v(s), \Phi_v(t)$ les points de $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. On a :

$$E_{dist}(K, V) = \sum_{i=1}^n \frac{k}{2} (d(x, \Phi_v(j)) - d(\Phi_v(j), \Phi_v(b_i)))^2_{(j=r,s,t)}$$

Comme le montre la figure 3.6, cette expression énergétique est l'énergie des ressorts reliant x_i aux points v_r, v_s, v_t . La longueur initiale de ces ressorts est égale à la distance entre la projection de x_i sur le maillage M , $\Phi_v(b_i)$, et les points v_r, v_s, v_t . Cette énergie est nulle lorsque x_i et $\Phi_v(b_i)$ sont confondues, c'est à dire que le maillage M représente au mieux la bathymétrie.

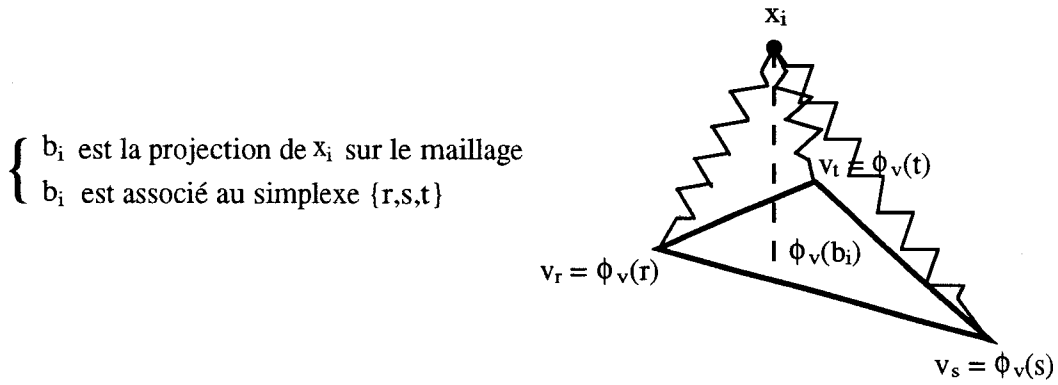


FIG. 3.6 - Expression énergétique de E_{dist} grâce à un système de ressorts

E_{adap} est le terme énergétique associé à la carte de tailles. Il s'exprime comme le carré de l'écart relatif entre la distribution de points spécifiée sur la carte de tailles et

la distribution de points obtenue dans le maillage de calcul M .

$$E_{adap}(K, V) = \sum_{\{j,k\} \in K} \left(\frac{d(v_j, v_k) - L_j^k}{L_j^k} \right)^2$$

$$L_j^k = \frac{L_j + L_k}{2}$$

où L_j est la distance entre points en v_j spécifiée sur la carte de tailles.

3.2.2 Résolution

Comme pour la simplification de surface cette minimisation est résolue en deux étapes. Une minimisation interne sur V à connectivité K constante et une minimisation externe sur K .

La minimisation interne déplace les points $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Elle est obtenue en recherchant l'état d'équilibre d'un système de forces équivalent. Le système de forces associé aux termes énergétiques E_{dist} et E_{adap} est le suivant. Soit x_i un point du Modèle Numérique de Terrain et $\Phi_v(r)$ un point du complexe simple K qui définit $\Phi_v(b_i)$, la projection de x_i sur M . L'énergie E_{dist} entre ces deux points est :

$$E_{dist}^{x_i, \Phi_v(r)} = \frac{k}{2} (d(x_i, \Phi_v(r)) - d(\Phi_v(r), \Phi_v(b_i)))^2$$

La force, entre $\Phi_v(r)$ et x_i , est déduite de l'analogie entre notre expression énergétique et l'énergie élastique d'un ressort de raideur k :

$$\|F_{\Phi_v(r)}^{x_i}\| = k(d(x_i, \Phi_v(r)) - d(\Phi_v(r), \Phi_v(b_i)))$$

Cette expression est égale à la force d'un ressort entre les points $\Phi_v(r)$ et x_i de raideur k et de longueur initiale $d(\Phi_v(r), \Phi_v(b_i))$.

Pour le terme énergétique E_{adap} considérons v_j et v_k deux points formant une arête de M .

$$E_{adap}^{(j,k)} = \left(\frac{d(v_j, v_k) - L_j^k}{L_j^k} \right)^2$$

La force entre v_j et v_k en utilisant la même analogie que précédemment :

$$\|F_{v_j}^{v_k}\| = 2 \left(\frac{1}{L_j^k} - \frac{1}{d(v_j, v_k)} \right) d(v_j, v_k)$$

Cette expression est égale à la force d'un ressort entre les points v_j , v_k de raideur $2(\frac{1}{L_j^k} - \frac{1}{d(v_j, v_k)})$ et ayant une longueur initiale nulle, (cf figure 3.7).

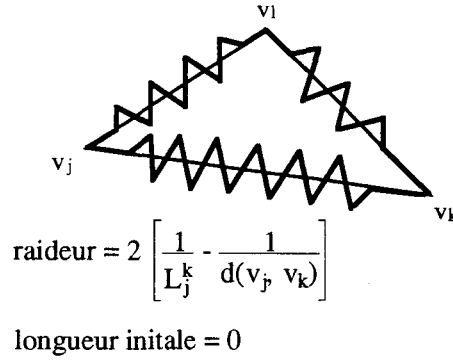


FIG. 3.7 - Expression énergétique de E_{adapt} grâce à un système de ressorts

Pour la minimisation interne, on a donc un système de ressorts à résoudre. Il doit être résolu par la construction d'une matrice de raideur globale. Cette matrice n'est pas linéaire, car les L_j^k dépendent de la position des v_j et v_k . La linéarisation de ce système et une suite de résolution matricielle permet d'établir la solution. Chaque système linéarisé est défini positif et la nouvelle position des $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ peut être obtenue par une résolution de type Gauss-Seidel.

Pour que le terme E_{adapt} caractérise bien l'écart entre la distribution souhaitée et obtenue, la triangulation doit relier les points les plus proches entre eux. De plus, comme le maillage final est un maillage de calcul, il doit avoir des triangles les plus équilatéraux possibles et avoir une progression de la taille des mailles limitée pour que la résolution numérique soit possible. La connectivité devra, au cours du processus de minimisation, être de Delaunay.

La minimisation externe sur K utilise deux transformations élémentaires : la fusion d'arêtes et le découpage d'arêtes (cf figure 3.5).

La fusion de l'arête $\{i, j\}$ en un sommet $\{h\}$ considère seulement trois optimisations sur la position de v_h : v_i, v_j et $\frac{1}{2}(v_i + v_j)$. Cette transformation est acceptée si l'énergie diminue. On ne vérifie pas que le maillage reste conforme car celui-ci va être reconstruit. Si cette transformation n'est pas acceptée, on utilise la transformation élémentaire suivante.

Le découpage de l'arête $\{i, j\}$ en $\{i, h\}$ et $\{h, j\}$ considère uniquement la position de v_h en $\frac{1}{2}(v_i + v_j)$. Comme précédemment, on ne vérifie pas que la triangulation reste conforme.

L'échange d'arêtes n'est pas considéré ici car seule la triangulation de Delaunay définit la connectivité. Pour accélérer le processus de minimisation on considère la contribu-

tion locale d'une transformation élémentaire. Si localement la transformation diminue l'énergie, elle est acceptée et sera reportée dans la prochaine triangulation qui considère les transformations élémentaires.

3.2.3 Limitations et conclusions

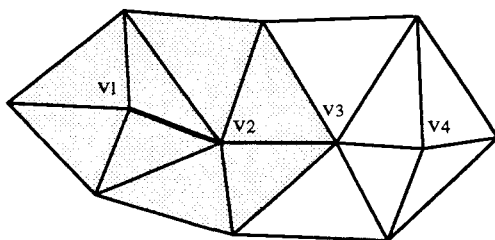
Une technique adaptative basée sur une minimisation énergétique a été présentée. Cette méthode établit un compromis entre une bonne représentation des fonds et une distribution de points en accord avec la carte de tailles. Le paramètre de raideur des ressorts de l'expression de E_{dist} quantifie la simplification de surface par rapport à l'adaptation à une carte de tailles.

Cette méthode n'a jamais donné de résultats satisfaisants pour deux raisons. L'évolution énergétique locale pour les transformations élémentaires ne tient pas compte des modifications de la connectivité car les transformations élémentaires sont intégrées dans le maillage en fin du processus de minimisation externe. En effet, si l'on considère la figure 3.8, la transformation élémentaire qui localement diminue l'énergie pour l'arête $[v_1, v_2]$ est la fusion des points en v_h . Cette modification n'est pas ensuite considérée pour les transformations élémentaires sur l'arête $[v_3, v_4]$. On utilise le maillage, où les transformations élémentaires locales n'ont pas été reportées. Cette solution n'est évidemment pas adéquate pour établir une minimisation énergétique.

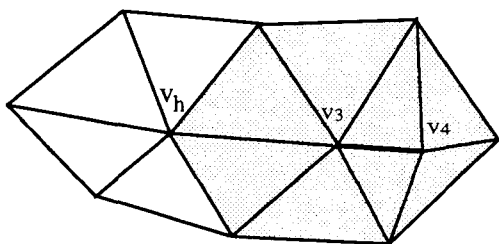
Finalement la principale faiblesse de cette méthode est de considérer la représentation des fonds sur le maillage de calcul comme étant de la même importance qu'une discrétisation spatiale adaptée à la résolution numérique. Bien que l'évolution des fonds doivent être prises en compte lors de la génération du maillage (cf. §4.2), la résolution numérique ne peut se faire que sur un maillage ayant des qualités géométriques suffisantes. la distorsion des mailles et la progression des tailles de mailles ne doit pas excéder un seuil spécifique à chaque code de calcul. La méthode qui a été présentée, définit un maillage de calcul à l'aide d'un compromis entre une "bonne" représentation des fonds et un maillage de calcul respectant une densité de points souhaitée. On ne peut garantir la qualité du maillage final que si la contribution du terme énergétique lié à la bathymétrie (E_{dist}) est négligeable par rapport au terme lié au processus d'adaptation à la carte de tailles (E_{adap}).

La méthode adaptative du chapitre 4 s'inspire de cette conclusion. L'adaptation est établie à l'aide d'une carte de tailles selon un processus de minimisation énergétique. Les informations bathymétriques importantes (isovaleurs, points altimétriques, ...) sont spécifiées par l'opérateur et sont incluses dans le maillage de calcul.

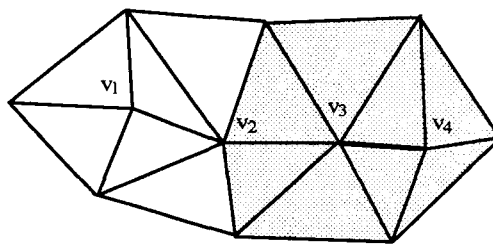
Soit une arête $[v_1 v_2]$ ou la fusion est acceptée



Les transformations élémentaires sur l'arête $[v_3 v_4]$ devrait considérer la connectivité (a), mais considère la connectivité (b) pour exprimer l'évolution énergétique locale.



(a)



(b)

FIG. 3.8 - Erreur de l'expression énergétique lorsque la connectivité ne considère pas les transformations locales

Chapitre 4

Adaptation à une carte de tailles en respectant la topologie

Les marées, les inondations et autres écoulements fluviaux ou maritimes sont modélisés par les équations de Saint-Venant et Navier-Stokes. La résolution numérique de ces équations s'appuie sur une modélisation spatiale de l'étude, que l'on nomme maillage. Pour que la résolution numérique soit correcte, il faut tout d'abord que le maillage de calcul ait une discrétisation spatiale qui suive l'évolution du phénomène physique étudié. La discrétisation doit être plus fine là où le phénomène physique a de fortes variations et doit être régulière dans le cas où il évolue peu. Lorsqu'on ne peut pas anticiper les résultats, le maillage de calcul est généré plusieurs fois pour obtenir le résultat de calcul final. L'analyse des résultats obtenus avec chaque maillage de calcul permet de construire le nouveau maillage. Quand la solution n'est plus dépendante du maillage le processus s'arrête. Cette technique de génération de maillage se nomme "maillage adaptatif dynamique".

Dans notre cas, il s'agit d'établir le maillage optimal dès la première étape. Comme la discrétisation doit suivre des critères géométriques ou liés à la bathymétrie, on peut générer le maillage de calcul en utilisant ces informations. Actuellement, ces critères ne sont pas tous définis ou validés. Le mailleur qui a été développé permettra justement de les déterminer. Cette technique adaptative est fondée sur un mailleur de Delaunay adapté à une carte de tailles. Ce mailleur de Delaunay utilise les algorithmes présentés dans le chapitre 2.

Soient la carte de tailles et le Modèle Numérique de Terrain (cf. chapitre 1) qui comportent les définitions et l'information bathymétrique. La triangulation adaptative construit un maillage de calcul qui respecte la densité définie sur la carte de tailles et qui a l'information bathymétrique. L'adaptation à la carte de tailles se décompose en

trois étapes :

- une discrétisation mono-dimensionnelle des polygones définies dans le Modèle Numérique de Terrain,
- une discrétisation bi-dimensionnelle à l'intérieur du domaine,
- une interpolation bathymétrique du maillage de calcul sur le Modèle Numérique de Terrain.

L'adaptation à la carte de tailles modifie la discrétisation des polygones et donc la représentation de l'étude. Pour garantir que le maillage de calcul reste cohérent avec le Modèle Numérique de Terrain, on conserve les points caractéristiques de l'étude. Ces points sont les points géométriquement importants de chaque polygone, et les points topologiquement importants de l'étude. Les points géométriques sont issus d'une simplification de courbe. Les points topologiques sont déduits d'une analyse du graphe hiérarchique du Modèle Numérique de Terrain.

Contrairement au chapitre précédent, la représentation minimale du fond n'est pas automatiquement assurée lors du processus adaptatif. On doit spécifier les points caractéristiques du terrain à reporter dans le maillage final. Un choix judicieux de ces points ou des polygones, caractéristiques du faciès du terrain, devra être fait afin de ne pas interférer avec la densité de points définie sur la carte de tailles. L'analyse de cette carte de tailles permet de savoir, avant que le processus d'adaptation ne commence, si le choix des points ou des polygones à reporter est correct.

4.1 Triangulation adaptative

Différentes méthodes de triangulation adaptative vont être présentées pour introduire la génération de maillages de calcul liés aux écoulements fluviaux et maritimes.

Dans ce chapitre, seule la triangulation adaptative non-structurée bi-dimensionnelle sera traitée. On s'appuiera sur la présentation des différentes techniques de facétisation qui a été faite au chapitre 2.

Il existe deux principes pour la triangulation adaptative :

- la triangulation adaptative pour la génération d'un maillage de calcul,
- la triangulation adaptative dynamique pour l'adaptation aux calculs numériques.

La génération du premier maillage de calcul ne s'appuie que sur les renseignements fournis par l'opérateur et par la géométrie. Par contre, la triangulation adaptative

dynamique modifie la facétisation ou le modèle mathématique au cours de la résolution pour mieux résoudre les caractéristiques de l'écoulement. Bien que ces méthodes ne soient pas utilisées dans le même but, les algorithmes sont semblables. Par la suite on ne parlera, sauf mention contraire, que de maillages adaptatifs.

Il existe quatre catégories d'adaptation :

- le h -raffinement, où les points sont ajoutés ou détruits,
- le p -raffinement, où le degré d'interpolation des fonctions évolue,
- le r -raffinement, où le nombre de points reste fixe mais leurs positions évoluent,
- les techniques de triangulation pilotées par une carte de tailles.

4.1.1 Adaptation par le h -raffinement

Ces méthodes d'adaptation (voir [37]) modifient localement la triangulation par un redécoupage des triangles qui doivent être raffinés. La connectivité, information permettant de définir la triangulation d'après une liste de points, reste donc peu modifiée, ce qui limite les modifications des matrices utilisées lors de la résolution numérique du problème.

Lorsque les régions à enrichir sont définies et que les éléments sont individuellement identifiés, il existe plusieurs stratégies pour l'insertion de points (figure 4.1).

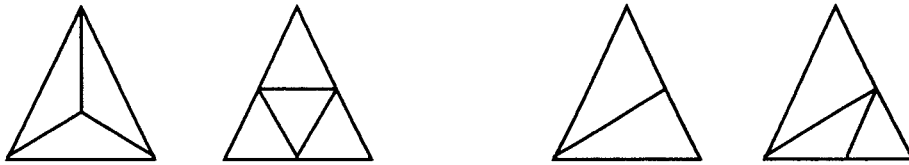


FIG. 4.1 - *Différents découpages de triangles*

Les deux premières possibilités d'ajout de points servent à raffiner le triangle concerné par l'adaptation tandis que les deux dernières solutions régularisent la triangulation. Cette régularisation assure une triangulation conforme (cf. chapitre 2) et une progression des tailles de mailles. La distribution obtenue est totalement dépendante de la triangulation initiale et n'a pas en général une répartition de points homogène. Ceci peut conduire à une progression importante de la taille des mailles entre deux triangles voisins. Si cette progression est trop prononcée, cela peut poser des problèmes de convergence pour la résolution numérique.

4.1.2 Adaptation par le p -raffinement

Cette méthode est exclusivement utilisée lors d'un processus d'adaptation dynamique. La triangulation n'est pas modifiée mais fait évoluer localement le degré d'interpolation des fonctions de base que l'on associe à chaque triangle. Cette modification influe donc sur l'algorithme qui résout les équations numériques du problème. L'intérêt de cette méthode est montré dans [38]. Lorsqu'elle est couplée avec une technique de h -raffinement, le nombre d'itérations de l'adaptation dynamique pour atteindre la solution finale est fortement limité. La technique de p -raffinement est néanmoins peu utilisée car elle intervient sur la résolution numérique. De plus, on peut obtenir un résultat similaire en n'agissant que sur le maillage.

4.1.3 Adaptation par le r -raffinement

Une alternative au raffinement est le déplacement des points dans les régions ayant une grande disparité dans la répartition des points ou ayant des erreurs importantes. Ces erreurs proviennent soit d'une simulation numérique, soit d'une analyse du maillage. Il va de soit que les points s'éloignent des régions ayant une répartition homogène de points ou de petites erreurs. Ces méthodes sont utilisées pour améliorer une triangulation ou pour les maillages qui évoluent au cours du temps (les techniques de résolution A.L.E: Arbitrary Lagrangien-Eulerien).

Dans le cas d'une régularisation de maillage, plusieurs solutions sont envisageables, cf. [13] pages 236-239. La plus utilisée, repositionne les points avec un barycentrage pondéré par la surface. D'autres pondérations peuvent être utilisées afin que les points se déplacent pour équilibrer une qualité "Q" dans le maillage. Cette étape de régularisation est souvent limitée à quelques itérations, car on souhaite améliorer l'aspect des triangles tout en conservant la distribution initiale de points. La régularisation peut également être interprétée comme une optimisation de maillage lorsqu'on recherche l'équilibre d'un système de ressorts modélisé par la triangulation, [42]. Lors de ces processus, la mobilité des points est limitée pour assurer la conformité de la triangulation. Dans [40] la conformité du maillage est assurée automatiquement. De plus, pour une répartition homogène des points, les points frontières sont également déplacés. Cette technique est fondée sur une minimisation d'une fonctionnelle prenant en compte l'équilatérarité des triangles, la conformité des triangles et la distribution des points frontières. L'équilatérarité des triangles est assurée en recherchant l'aire optimale pour chaque triangle. La conformité de la triangulation est assurée en tenant compte de l'aire signée des triangles déduit d'un produit vectoriel. Lorsque l'aire est négative,

le triangle n'est pas conforme. Et finalement, pour la frontière, on recherche une répartition homogène des points et on s'assure que la périodicité de la frontière est conservée dans le cas où un maillage est construit à l'aide d'une combinaison de maillages élémentaires. Par exemple, la figure ?? montre la modélisation d'une turbine à l'aide d'un maillage élémentaire unique. On peut également, lors d'une régularisation, combiner le déplacement des points et la modification de la connectivité pour obtenir une meilleure distribution. En effet, une triangulation régulière est obtenue si les points sont correctement positionnés et si chaque point n'admet que six voisins. Six est en effet le nombre optimal de triangles autour d'un point pour que ceux-ci soient équilatéraux. Dans [41], le déplacement des points est combiné avec une technique d'échanges d'arêtes pour que chaque point est un nombre de voisins proche du nombre optimal. Cette modification de la connectivité permet d'améliorer la qualité de la triangulation et la position des points. L'influence de la triangulation initiale sur la nouvelle distribution en est également limitée. Si un point a initialement un nombre important de voisins, le déplacement des points n'empêchera pas la distorsion des mailles. Cette distorsion sera répartie sur les triangles que définit le point. La référence [39], utilise le même principe tout en garantissant un minimum de voisins pour chaque point. Pour obtenir ce résultat l'auteur détruit des points.

Dans le cas où le maillage suit l'évolution des frontières du domaine (technique "ALE") le déplacement des points tient compte d'une distance entre points, fonction de la solution, [42]. L'influence des différents critères de déplacement sur la triangulation finale est testée dans [43]. Le test qui porte sur la maximisation de l'angle minimum permet de retarder la retriangulation par rapport au test qui utilise le principe du ressort de longueur nulle ou par rapport au test fondé sur une moyenne des positions idéales pour définir un triangle équilatéral. Il est parfois obligatoire, lors de grands déplacements, de remailler localement. Le déplacement des points ne peut plus améliorer le maillage s'il y a trop ou pas assez de points. Une méthode originale, [44], a été conçue lorsque le domaine varie fortement en espace : étude d'un cycle du piston et des soupapes dans un moteur. Les triangles qui, après déplacement, ont une distorsion trop importante sont regroupés en zones non conformes. Après destructions des triangles qui appartiennent à ces zones, ces trous sont remaillés localement grâce à une création de points. Cette technique donne une meilleure répartition des points qu'un appauvrissement local obtenu par la fusion de points. On n'a pas besoin, après destruction et raffinement d'une zone, de redéplacer les points pour améliorer la distribution.

Toutes ces méthodes sont utilisées pour améliorer la triangulation et tout particulièrement l'équilatérité des triangles. Dans le cas où une distorsion est souhaitée,

le déplacement de points doit en tenir compte. La matrice de raideur devient donc anisotrope dans le cas où la relocalisation des points est définie par un système de ressorts.

Les techniques de déplacement de points sont rarement utilisées comme techniques générant un maillage adaptatif. Elles servent principalement à pallier la mauvaise répartition des points obtenue par une autre technique adaptative et sont donc souvent combinées avec une modification locale de la connectivité.

4.1.4 Adaptation à une carte de tailles

La carte de tailles est une structure qui spécifie la densité de points dans le domaine, elle sert à piloter la génération du maillage de calcul. Les techniques fondées sur l'adaptation à une carte de tailles dérivent directement des méthodes de triangulation frontale introduite au chapitre 2. La génération des nouveaux points est obtenue en considérant une distance entre points interpolée sur une carte de tailles : une grille ou une triangulation. On utilise, dans un premier temps, la discrétisation des frontières pour en déduire la distance entre points dans le domaine. Des points ou segments sources peuvent être spécifiés par l'utilisateur pour obtenir la triangulation souhaitée. Ces points ou segments définissent localement la distance entre points par une augmentation de cette distance lorsque l'on s'éloigne de la source, [45]. Dans la référence [48], les sources spécifient non seulement la distance entre points mais aussi la direction prépondérante pour la progression de la distance entre points. On n'a plus une progression selon des cercles concentriques mais selon une ellipse par rapport à un point source. La distance entre points est donc connue pour quelques points du domaine et est définie sur toute la carte de tailles en résolvant un système elliptique. Cette résolution permet d'obtenir une bonne distribution des points lors de la construction du maillage par une méthode frontale.

Une alternative à ces méthodes est l'utilisation de la triangulation de Delaunay. En partant d'une triangulation qui s'appuie sur la discrétisation des frontières, un point est ajouté dans chaque triangle qui ne vérifie pas la distance entre points souhaitée. Ce point est placé au centre du cercle circonscrit ou inscrit au triangle considéré, [45], [47]. Il peut également être ajouté sur les arêtes du triangle [49], [51]. Une triangulation de Delaunay de ces points est ensuite établie. Ce processus continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de triangles à raffiner. Dans [49] et [45] la création et l'insertion de points est séquentielle tandis que pour [50] la création de points est globale et est ensuite suivie d'une étape qui rejette les points trop proches au vu de la carte de tailles. Un espace de voisinage, une grille, est utilisé pour limiter les tests sur la proximité des points

entre eux. L'insertion de tous les nouveaux points est effectuée dans la triangulation. Ces techniques d'ajout de points, fondées sur une triangulation de Delaunay, sont évidemment reconnues comme donnant une répartition des points moins homogène que celles obtenues par une triangulation frontale. On peut toujours améliorer la répartition des points en les déplaçant. Cependant, comme le précise [50], ce déplacement doit tenir compte de la carte de tailles et ne peut être fait par un "Laplacien" introduit dans la technique du " h -raffinement" (cf. §4.1.1). Malgré une répartition de moins bonne qualité, l'adaptation, grâce à une technique de Delaunay, est plus intéressante que celle obtenue par une technique frontale. En effet, la technique de triangulation est beaucoup plus fiable et simple, car elle s'affranchit des cas complexes de rencontre de plusieurs fronts.

On peut remarquer deux choses pour ces méthodes de triangulation frontale et de Delaunay. La méthode frontale est principalement utilisée lors de la génération du premier maillage de calcul, tandis que celle de Delaunay est plutôt utilisée lors d'un processus adaptatif. Il n'y a que pour la méthode de la référence [50] que le maillage de calcul est entièrement reconstruit au cours du processus adaptatif. Cette solution ne se soucie pas d'une mauvaise triangulation et ne considère que le résultat du calcul numérique. Les autres techniques modifient localement la triangulation ayant servi au calcul précédent. La technique de Delaunay pilotée par une carte de tailles est également utilisée dans le cadre d'une adaptation dynamique anisotrope, [49], [47], [7]. La notion de métrique locale est utilisée pour prendre en compte l'anisotropie et conserver les algorithmes de la triangulation de Delaunay.

La technique frontale est de moins bonne qualité, au vu de la carte de tailles, lorsque la répartition des distances entre points est importante ([52]), mais permet une répartition plus homogène des points. Les problèmes sont inverses pour la triangulation adaptative obtenue par une triangulation de Delaunay. La simplicité de ces algorithmes ne donne pas de limite d'utilisation, par contre, le caractère aléatoire du positionnement des points ne définit pas une répartition de ceux-ci aussi homogène qu'une technique frontale. Dans la référence [53], on associe l'avantage de la création de points par une technique frontale à l'algorithme incrémental de la triangulation de Delaunay. Une triangulation initiale de Delaunay qui s'appuie sur les points frontières définit la taille des mailles souhaitée dans le domaine. En partant d'un front initialisé sur la frontière, des nouveaux points sont créés afin de satisfaire la distance souhaitée. Le front est ensuite modifié après insertion des points dans la triangulation de Delaunay. Ce front est l'interface entre les régions ayant des triangles satisfaisants ou non. La procédure s'arrête lorsque le front est vide. La référence [52] utilise une méthode similaire en classant

les triangles à raffiner selon un ordre de priorité: "actif" ou "en attente". Ceux qui ont été raffinés et qui correspondent à la distribution souhaitée par la carte de tailles sont également répertoriés: triangles "satisfaisants". Les triangles "actifs", qui doivent être raffinés, sont les triangles voisins d'un triangle "satisfaisant" ou "externe". Un triangle "externe" est un triangle extérieur au domaine polygonal, ce dernier pouvant être concave. La triangulation de Delaunay est ici incluse dans l'enveloppe convexe des points. Ces triangles "actifs" doivent, comme dans le cas des techniques frontales, être les seuls triangles qui permettent la génération de nouveaux points. Les autres triangles à raffiner sont classés "en attente". A chaque création de points la triangulation de Delaunay change localement la connectivité et le classement des triangles doit également être modifié. Le positionnement des nouveaux points utilise la bissectrice du segment qui sépare un triangle "actif" et un triangle "satisfaisant". Ensuite, on recherche une position telle que le point créé n'est pas trop proche des autres points et assure donc une distribution qui n'entraîne pas une relocalisation des points. Dans ce mémoire deux techniques sont envisagées pour vérifier si les points créés ne sont pas trop proches. Soit on insère un à un les points en recherchant les triangles "actifs" qui ont le plus grand cercle circonscrit, soit on crée des points sur l'ensemble des triangles "actifs" et on fusionne les points trop proches entre eux. L'intérêt de ces méthodes qui allient les techniques frontales et de Delaunay est évident. La création de points n'est pas aléatoire et suit un principe de propagation de front. La répartition des points est donc plus homogène. De plus, l'utilisation de la triangulation de Delaunay évite les limitations inhérentes aux techniques de triangulation frontales.

Pour l'ensemble de ces triangulations pilotées par une carte de tailles, la rediscrétisation des frontières est envisagée. Deux techniques sont principalement utilisées. Dans le cas de frontières continues, comme en aérodynamique pour les ailes NACA, la frontière est définie par des fonctions Splines. Cette représentation conserve les courbures et est intéressante pour des formes régulières. Les points de la frontière sont créés, soit dans une étape spécifique, [50], soit lors du raffinement du domaine, [49]. Pour le premier cas, la discrétisation des frontières est obtenue par une progression géométrique des points selon l'abscisse curviligne de la frontière. Dans le cas où la rediscrétisation des frontières est établie lors du redécoupage des arêtes des triangles, les points créés sur les segments frontières sont ensuite repositionnés sur la frontière réelle. Pour ces techniques, la frontière a toujours une forme régulière. Dans le cas des écoulements fluviaux ou maritimes, la frontière est très découpée et est donc représentée par une polyligne. Le raffinement de ces frontières est obtenu en redécoupant les segments qui les définissent [57].

La carte de tailles, comme expliqué précédemment, permet de définir une triangulation adaptative de qualité grâce à la triangulation de Delaunay. La répartition des points est très homogène et respecte les informations de la carte de tailles. De plus, la triangulation de Delaunay permet de définir une connectivité qui donne des triangles les plus équilatéraux possibles. Cependant, cette technique adaptative ne considère pas toutes les contraintes liées à la génération d'un maillage de calcul. Comme l'analyse des formes des frontières n'est pas faite, la discrétisation de celles-ci peut ne pas convenir. Si l'on considère le domaine de la figure 4.2, la distance caractéristique au sens de la

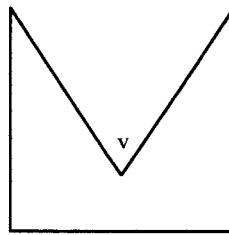


FIG. 4.2 - *Structure initiale et équilibrage de la grille*

carte de tailles est définie grâce à la frontière et donc grâce à la longueur minimale de ces arêtes. Cette distance ne considère pas que le point "v", de la figure 4.2, est très proche d'une arête frontière. Une technique adaptative considère automatiquement lors de la création des points la proximité des frontières, [54]. Cette méthode utilise le principe de l'axe médian qui définit le squelette du domaine. L'axe médian est défini comme l'ensemble des centres des cercles ayant au minimum deux points de contact avec la frontière du domaine. Il permet une analyse très fine de la géométrie du domaine, [55]. La méthode adaptative fondée sur ce principe perçoit la proximité des frontières et permet d'éviter les triangles surcontraints dans le maillage de calcul. Ces triangles sont définis par trois points frontières ce qui implique que localement dans le domaine fluide, l'écoulement est imposé par les conditions aux limites définies aux frontières. Dans le cas d'une triangulation de Delaunay, ces triangles sont modifiés a posteriori en ajoutant un point ou par un échange d'arêtes. Cette modification perturbe localement la distribution souhaitée et la qualité de la triangulation.

Une génération de maillage adaptée aux problèmes fluviaux et maritimes est présentée dans [60]. Cette technique génère des points selon les courbes de niveau d'une fonctionnelle $\mathcal{F}(x, y)$. Cette fonctionnelle peut dépendre des fonds $\mathcal{F}(x, y) = z$. On recherche dans un premier temps les lignes polygonales, les isovaleurs de la fonctionnelle. Ensuite, on crée, en considérant la valeur moyenne du gradient de $\mathcal{F}$ sur ces lignes polygonales, une distribution de points régulière. Les points sont ensuite dépla-

cés sur la polyligne afin de densifier la zone où le gradient est plus fort. La difficulté de cette méthode réside dans le choix de l'incrément entre les différentes isovaleurs de la fonctionnelle. De plus, cette méthode est surtout efficace lorsque la fonctionnelle $\mathcal{F}$ est régulière. En effet, une isovaleur peut être constituée de plusieurs polygones qui peuvent être très petites par rapport à la discrétisation souhaitée. Il faut donc analyser ces différentes polygones avant leur discrétisation. Les problèmes qui sont mentionnés ne sont pas résolus dans le papier de référence. Néanmoins, ce principe reste très intéressant et l'adaptation selon des lignes de niveau devra être considérée lors de notre adaptation.

4.1.5 Conclusion et besoins propres

L'ensemble des techniques de triangulation adaptative, dynamique ou non, a été introduit précédemment. La triangulation de Delaunay pilotée par une carte de tailles semble être une technique sur laquelle on porte un intérêt croissant. En effet l'algorithme de Delaunay couplé avec une bonne distribution de points permet d'obtenir une triangulation adaptative de qualité, dynamique ou non, anisotrope ou non. Cette méthode va être appliquée à la génération de maillages dans le cadre des études fluviales et maritimes. Nous allons définir ici et développer au cours des prochains chapitres nos besoins et une nouvelle triangulation adaptative spécifique aux problèmes des équations en eaux peu profondes.

Nos besoins concernent :

- la génération d'un maillage de calcul lié à des critères géométriques et bathymétriques,
- la qualité du maillage de calcul : distorsion et progression des mailles, respect de la carte de tailles,
- le respect de la bathymétrie,
- le respect d'une géométrie et d'une topologie minimales.

L'utilisation d'une carte de tailles permet de prendre en compte plusieurs critères d'adaptation sans changer la méthode d'ajout de points. Cette indépendance permet d'intégrer facilement des critères adaptatifs, ce qui est intéressant car tous les critères ne sont pas connus.

Etant donné que l'on n'établit pas, dans un premier temps, une triangulation adaptative dynamique, on privilégie la qualité de la triangulation par rapport à la rapidité

de sa construction. C'est pourquoi une technique d'adaptation fondée sur la minimisation de l'écart entre la densité de points définie sur la carte de tailles et celle obtenue dans le maillage de calcul est développée. Cette technique utilisera une triangulation de Delaunay avec un nombre optimal et une position optimale des points au vu de la carte de tailles. On pourra également quantifier cet écart et donc définir une qualité de la triangulation adaptative.

Une technique adaptative fondée sur un compromis entre une bonne représentation des fonds et une distribution de points en accord avec la carte de tailles a été présentée dans le chapitre 3. Cette solution n'était pas satisfaisante car elle ne garantissait aucune des deux conditions.

Il est préférable d'obtenir un maillage de calcul acceptable avec, si possible, le respect des caractéristiques importantes du faciès du terrain. C'est pourquoi on utilisera lors du processus d'adaptation à la carte de tailles les points et polygones bathymétriques afin d'assurer une bonne représentation des fonds. On veillera à éviter les interférences entre la carte de tailles et les informations bathymétriques imposées par l'utilisateur.

Parmi toutes les techniques adaptatives qui ont fait l'objet du §4.1, aucune ne construit le graphe planaire ou ne vérifie que la carte de segments est planaire et le reste au cours du processus adaptatif. En effet, on peut raffiner voire simplifier les frontières. Cette simplification de contours peut entraîner une modification de la géométrie et de la topologie. On définira, lors de la génération du maillage, une représentation minimale des différentes polygones du maillage de calcul afin que l'adaptation ne perturbe pas la représentation des différents objets ou frontières. Cette représentation minimale est obtenue en cherchant les points caractéristiques de chaque polygone. Cette opération s'applique sur chaque courbe et on ne vérifie donc pas que les mêmes règles d'inclusion sont conservées pour cette représentation minimale. Pour assurer une topologie minimale, on conservera, entre autres choses, les points d'intersection existant avant le raffinement entre les différents objets.

La technique adaptative qui va être développée dans les chapitres qui suivent prend en compte tous les besoins et toutes les remarques qui ont été faites. La carte de tailles et les critères adaptatifs seront définis et le principe de minimisation utilisé par la méthode adaptative sera développé.

4.2 Définition de la carte de tailles

La carte de tailles est une structure qui spécifie la densité de points dans le domaine, elle sert à piloter la génération du maillage de calcul. Nous allons définir plus précisé-

ment la structure de cette carte de tailles et les différents critères qui l'initialisent.

4.2.1 Structure de la carte de tailles

La carte de tailles pour les différentes techniques qui utilisent cette approche est soit une grille, soit une triangulation. L'intérêt de la grille est de pouvoir facilement interpoler au cours du processus adaptatif la distance entre points pour le point considéré. Cependant, cette structure n'est pas adaptée pour des domaines irréguliers et ayant une évolution importante de la distance entre points dans le domaine. De plus, les critères adaptatifs que l'on utilise, ou qui seront définis, sont principalement fondés sur une analyse du terrain, l'altimétrie, la variation de son gradient, les ruptures de pente, Cette information est disponible sur le Modèle Numérique du Terrain, qui a été défini dans le chapitre 1. Par souci de précision et pour être sûr que l'on tient compte des critères, on définit la carte de tailles sur le Modèle Numérique de Terrain. Comme on le verra dans le §4.3.2, cela permet également après analyse de la carte de tailles de vérifier que le respect de la géométrie et de la topologie ne perturbe pas la qualité du maillage final. La carte de tailles ou le Modèle Numérique de Terrain est donc une triangulation de Delaunay d'informations bathymétriques et géométriques définies sous forme de points et de polygones.

Après avoir défini la structure de la carte de tailles, on présente les différents critères qui initialisent la distance entre points.

4.2.2 Critère pour une onde de gravité

Soit une onde périodique simple qui représente la propagation d'un mouvement irrotationnel, telle que la pression soit constante à la surface libre et l'amplitude soit faible. La théorie hydrodynamique pour les ondes de faible amplitude, c'est à dire : $H/L \ll 1$ et $H/h \ll 1$, avec H la hauteur d'onde, L la longueur d'onde et h la hauteur d'eau, donne pour la vitesse apparente de propagation d'une intumescence :

$$c^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$$

avec g l'accélération de la pesanteur.

Cette formule se réduit pour les ondes longues ou ondes de faible profondeur, $L/h \gg 1$, à :

$$c^2 = gh$$

La propagation des ondes longues de faible profondeur est intéressante dans le cas des études de "tsunami", [58], ou de marées. Grâce à cette approximation de la célérité de

l'onde on peut établir une discrétisation pour obtenir un nombre de Courant proche de l'unité.

Soit C_r le nombre de Courant :

$$C_r = \frac{U \Delta t}{\Delta x}$$

où U représente la vitesse, Δt définit l'incrément temporel utilisé dans la résolution numérique et Δx l'incrément spatial du maillage. Dans le cas d'une onde, la vitesse U peut être décomposée en une vitesse de phase U_p et une vitesse courante U_c . Pour les ondes que l'on étudie, les ondes de gravité, $U_p \gg U_c \implies U \cong U_p$. Comme il a été mentionné précédemment la vitesse de phase U_p (ou vitesse de propagation) est proportionnelle à $\sqrt{gh}$.

Nous pouvons donc définir en chaque point de l'espace la distance entre points afin d'obtenir un nombre de Courant de propagation homogène et proche de l'unité.

$$\Delta x = \frac{U_p \Delta t}{C_r} = U_p \Delta t = \sqrt{gh} \Delta t$$

Cette distance dépend de l'altitude et ne peut être utilisée directement pour définir un maillage. En effet une hauteur d'eau nulle, définit une distance nulle, ce qui ne peut évidemment pas être accepté puisque nous souhaitons discrétiser l'étude avec un minimum de points. Nous allons donc introduire une distance minimale L_0 fixée pour l'étude considérée.

$$\Delta x = \sqrt{g(h + h_0)} \Delta t$$

avec pour $h = 0$, $\Delta x = L_0$ ce qui implique que $h_0 = \frac{L_0^2}{g \Delta t^2}$. On remarque également que pour l'adaptation au nombre de Courant dans le cadre des ondes de gravité, un pas de temps constant doit être donné pour l'étude.

Bien que la hauteur d'eau soit une inconnue du problème, cette variable est utilisée pour définir la carte de tailles. Ceci est possible car à l'initialisation de la résolution numérique, la cote de la surface libre est définie par une constante dans le domaine. La hauteur d'eau est donc égale à l'altimétrie à une constante près.

$$h = Z_{surf} - Z_{fond}$$

h est la hauteur d'eau, Z_{surf} est une cote de la surface libre, Z_{fond} est l'altimétrie du fond.

4.2.3 Critère fondé sur la linéarisation des équations de Saint-Venant et de Navier-Stokes

Dans TELEMAC-3D, autre logiciel du système qui s'appuie sur un maillage non-structuré de triangles suivant l'horizontale, les équations de Navier-Stokes sont résolues

via la transformation dite σ qui permet une grande simplification de traitement dans le direction verticale. Les autres avantages de cette technique sont :

- elle est efficace et simple,
- le traitement des conditions aux limites, sur la surface libre et les fonds, est simplifié,
- la bathymétrie est représentée avec précision.

Cette transformation σ est obtenue comme suit :

$$(t, x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\sigma} (\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (t, x_1, x_2, \frac{x_3 - Z_{fond}}{Z_{surf} - Z_{fond}})$$

où :

t est le temps,
 x_1, x_2 sont les coordonnées horizontales,
 x_3 la coordonnée verticale,
 Z_{surf} la cote de la surface libre,
 Z_{fond} la cote du fond,
 h la hauteur d'eau ($Z_{surf} - Z_{fond}$).

Si l'on évoque cette transformation, c'est qu'elle induit en revanche des contraintes de stabilité sur le maillage, en particulier dans les zones de gradients de fond marqués comme on va la voir. En tout état de cause ces contraintes sont à respecter pour TELEMAC-3D mais il est possible de faire une analogie avec les équations de Saint-Venant. L'analyse faite dans [75] permet donc, en s'appuyant sur la transformation σ utilisée, de définir un critère sur la carte de tailles. Pour cela on est amené tout d'abord à définir l'opérateur de dérivation comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + [(1 - \tilde{x}_3) \frac{\partial Z_{fond}}{\partial x_i} + \tilde{x}_3 \frac{\partial Z_{surf}}{\partial x_i}] \frac{\partial}{\partial x_3} \quad i = 1, 2$$

Comme on s'intéresse aux endroits où $\frac{\partial Z_{fond}}{\partial x_i}$ est significatif, on peut négliger $\frac{\partial Z_{surf}}{\partial x_i}$, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \simeq \frac{\partial}{\partial x_i} + [(1 - \tilde{x}_3) \frac{\partial Z_{fond}}{\partial x_i}] \frac{\partial}{\partial x_3} \quad i = 1, 2$$

La dérivée n-ième de f suivant $\tilde{x}_i$ s'écrit donc :

$$\frac{\partial^n f}{\partial \tilde{x}_i^n} \simeq \frac{\partial^n f}{\partial x_i^n} + [(1 - \tilde{x}_3) \frac{\partial Z_{fond}}{\partial x_i}]^n \frac{\partial^n f}{\partial x_3^n} \quad i = 1, 2$$

Soit A une valeur caractéristique de f et L_h, L_v des longueurs caractéristiques horizontales et verticales.

L'ordre de grandeur de $\frac{\partial^n f}{\partial \tilde{x}_i^n}$ est :

$$\max\left[\frac{A_h}{(L_h)^n}, [(1 - \tilde{x}_3) \frac{\partial Z_{fond}}{\partial x_i}]^n \frac{A_v}{(L_v)^n}\right] \quad i = 1, 2$$

La condition de stabilité du développement limité à l'ordre $n - 1$ de f est que :

$$\frac{\partial^n f}{\partial \tilde{x}_i^n} \Delta x^n \ll A$$

avec Δx la taille de la maille.

Soit :

$$\begin{cases} \frac{\Delta x^n}{L_h^n} \ll 1 \\ \frac{\Delta x^n}{L_v^n} \left(\frac{\partial Z_{fond}}{\partial x_i}\right)^n \ll 1 \end{cases}$$

La première relation est une condition classique d'une bonne discrétisation horizontale.

La seconde est obtenue en prenant $\tilde{x}_3 = 0$, cas le plus défavorable.

Si pour L_v , on prend comme longueur caractéristique la hauteur d'eau, ce qui est naturel dans cette direction, on a alors :

$$\frac{\Delta x}{h} \left(\frac{\partial Z_{fond}}{\partial x_i}\right) \ll 1$$

ou encore :

$$\frac{\Delta h}{h} \ll 1$$

Cette expression a été établie dans le cadre de la transformation σ , utilisée dans TELEMAC 3D. Si l'on considère les équations de Saint-Venant, la thèse de Nicole Goutal, [73], montre qu'une expression similaire doit être vérifiée pour s'assurer de l'unicité de la solution. En effet, dans le cadre d'une formulation des équations de Saint-Venant avec la formulation hauteur-débit, il est montré que :

$$\frac{1}{\Delta t \theta} > K \left(\frac{\nabla c^2}{c^2}\right)^2$$

avec :

$c^2 = g.h$, h la hauteur d'eau,
 Δt le pas de temps,
 θ le coefficient d'implicitation utilisé,
et K une constante dépendante de θ .

Cette expression est une contrainte sur le pas de temps dans le cas où le gradient de

la hauteur d'eau est important. Cette expression est équivalente au critère que l'on a défini pour la transformation σ , puisqu'elle peut s'exprimer comme :

$$\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 < \frac{1}{K \Delta t \theta}$$

Nous allons considérer comme critère adaptatif la relation suivante qui doit être vérifiée pour la discrétisation spatiale. La variation maximale de la hauteur d'eau sur la hauteur d'eau moyenne doit être inférieure à un coefficient α :

$$C_g : \frac{\Delta h_{max}}{h_{moyen}} \leq \alpha$$

Ce critère C_g doit nous permettre de définir la distance entre points souhaitée sur la carte de tailles en fonction de l'analyse du Modèle Numérique de terrain. Cette analyse est simplifiée car le Modèle Numérique de Terrain et la carte de tailles sont définis sur la même triangulation. Soit une arête $[A, B]$ de la triangulation du Modèle Numérique de Terrain et h_A et h_B la hauteur d'eau aux points A, B . Nous allons définir la distance entre points au point A afin que le critère C_g soit vérifié sur l'arête $[A, B]$. Soit G le point à une distance $d(A, G)$ du point A tel que le critère soit vérifié. On recherche donc $d(A, G)$ tel que :

$$\frac{|h_A - h_G|}{\frac{h_A + h_G}{2}} = \alpha$$

Pour avoir une expression de la distance entre points plus symétrique en fonction des hauteurs d'eau, on utilise l'expression suivante du critère pour l'arête $[A, B]$ au point A :

$$C_g : \frac{\Delta h_{max}}{h_A} \leq \alpha$$

Cette expression implique :

$$d(A, G) = \frac{h_A d(A, B) \alpha}{|h_B - h_A|}$$

avec $d(A, B)$ la longueur de l'arête $[A, B]$.

Dans le cas où $h_A = h_B$ l'évolution de la hauteur d'eau n'existe pas et le critère C_g ne précise pas de distance entre points. Ce critère définit donc localement des distances entre points. Il servira à modifier une carte de tailles déjà initialisée. Pour éviter le traitement d'une hauteur d'eau nulle, on s'assure, comme pour le critère lié aux ondes de gravité, que la hauteur d'eau n'est jamais nulle dans le domaine.

Soit B_i , $i \in [1, N]$, les voisins de A dans la triangulation définissant la carte de tailles. La distance entre points au point A s'exprime comme le minimum des distances établi par le critère C_g sur les arêtes $[A, B_i]$.

4.2.4 Critère du Point Source

La distance entre points ne dépend pas uniquement de la bathymétrie. D'autres éléments doivent être pris en compte, comme par exemple les points de dilution. Ces points modélisent le rejet dans l'écoulement d'un scalaire passif ou non. En première approximation pour la discrétisation spatiale, la taille des mailles doit progressivement augmenter lorsqu'on s'éloigne du point d'émission. Pour initialiser la carte de tailles selon ces considérations on utilise un point source [45]. Cette définition vient de l'analogie avec les points sources utilisés dans les fonctions de contrôle pour générer des maillages curvilignes grâce à des équations elliptiques [11]. On définit en ces points une amplitude, qui caractérise une distance entre points et un taux de croissance.

$$\Delta x = \Delta x_i \exp(\alpha(R_i - r))$$

Δx_i : caractérise la distance souhaitée pour le i^{eme} point source.

α : représente le taux de croissance lorsqu'on s'éloigne du i^{eme} point source.

R_i : représente la position des points sources.

r : représente la position du point à considérer.

Lorsqu'on s'éloigne du point source la distance souhaitée augmente. Comme la distance entre points est définie par le minimum des distances, calculées par différents critères, l'influence du point source diminue lorsque l'on s'en éloigne.

4.2.5 Lissage de la carte de tailles

Une fois la carte de tailles initialisée, elle définit une distance entre points dans le domaine. Comme certains critères spécifient localement la distance entre points, on doit "lisser" la carte de tailles pour éviter une forte variation de cette grandeur et donc une variation rapide de la distribution de points dans le maillage de calcul. On doit, pour éviter ce problème, s'assurer que, sur la carte de tailles, le gradient de la distance entre points ne dépasse pas un seuil.

La résolution d'un système elliptique pourrait être utilisée pour limiter le gradient de la distance entre points défini sur la carte de tailles. La résolution de ce système numérique doit s'appuyer sur un maillage et par conséquent sur le maillage du Modèle Numérique de Terrain qui définit la carte de tailles. Comme pour la résolution des équations de Saint-Venant, le maillage doit avoir des qualités géométriques telles que l'équilatérarité des mailles et la progression de la taille des mailles. Sur le maillage qui définit le Modèle Numérique de Terrain et la carte de tailles, bien que de Delaunay, ne peut garantir ces propriétés. Une heuristique, présentée ci-après a donc été utilisée.

Le “lissage” conserve les distances minimales et impose une pente positive maximale dans le domaine. La figure 4.3 illustre dans le cas 1D la modification de la distance entre points de telle sorte que son gradient ne soit pas trop important. Soit A le point tel que la distance entre points est minimale. Soit B un voisin de A tel que entre A, B le gradient de la distance entre points dépasse un seuil fixé. Si l’on considère dans un premier temps le point B , la pente étant négative, la distance entre points n’est pas modifiée. Par contre lorsque l’on considère le point A , le respect d’un gradient maximal impose que la valeur de la distance entre points en B soit modifiée. Cette solution permet de garantir que la distance entre points définie sur la carte de tailles est inférieure ou égale aux distances entre points définies par chaque critère.

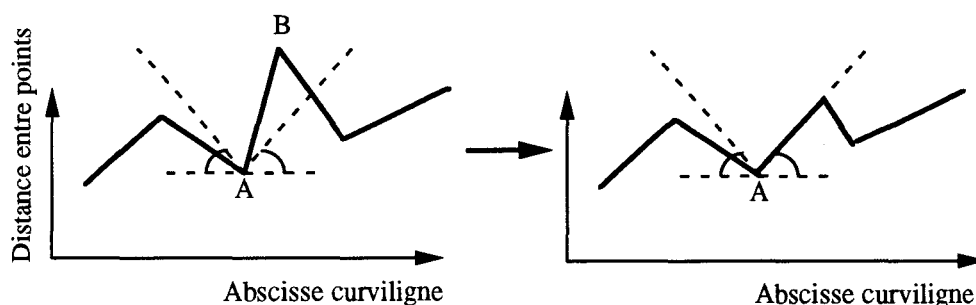


FIG. 4.3 - Lissage de la carte de tailles : limitation du gradient de la distance entre points

4.3 Représentation géométrique minimale

La carte de tailles stocke des distances entre points définies par des critères. Ces distances entre points ne tiennent pas compte des discrétisations des polygones du Modèle Numérique de Terrain. On rappelle que le Modèle Numérique de Terrain contient tous les points et toutes les polygones (frontières du domaine, courbes de niveau, ...), susceptibles d’être reportés dans le maillage de calcul. Ces polygones doivent, en fonction de la carte de tailles, être découpées ou simplifiées. L’ajout de points ne modifie pas la géométrie de la polygone. Par contre, la simplification d’une courbe peut grandement la modifier. Afin de garantir une forme minimale des objets, un algorithme de simplification de courbe définit la représentation minimale qui sera obligatoirement dans le maillage final. Cet algorithme est fondé sur une simplification de courbe par une méthode de découpage [56].

Pour les mêmes raisons, la simplification des polygones change la topologie des objets. Des objets qui se juxtaposaient sont dissociés et des objets qui étaient disjoints

s'intersectent. Le parcours du graphe hiérarchique permet de définir les points qui sont topologiquement importants. Ceux-ci seront reportés dans le maillage de calcul afin que la topologie du Modèle Numérique de Terrain soit conservée.

Ces deux vérifications permettent ensuite, après analyse de la carte de tailles, de définir si la carte de tailles est bien initialisée et si ces critères tiennent localement compte de la géométrie et de la topologie.

Le choix de l'opérateur, des données points et polygones reportées dans le maillage de calcul, influence forcément la distribution de points finale. On verra comment la triangulation est perturbée et quelles sont les solutions préconisées pour informer le plus rapidement possible l'opérateur dans ces choix. Celui-ci ne peut attendre la fin du processus d'adaptation pour vérifier si ces choix contredisent ses critères. Cette étape d'analyse de la carte de tailles permet également d'informer l'opérateur si ces critères considèrent suffisamment la géométrie et la topologie. Par la suite, cette analyse sera référencée comme la recherche d'interférences entre la carte de tailles et la représentation minimale respectant la géométrie et la topologie.

4.3.1 Respect de la géométrie

Soit une polyligne, une face ou une courbe. Nous allons définir sa représentation minimale, par rapport à une erreur donnée, en recherchant ses points caractéristiques dans le plan XoY tel que la cote z est nulle. L'information altimétrique n'est pas considérée, bien qu'elle existe sur chaque polyligne. On définit les points caractéristiques d'une polyligne grâce à un algorithme de simplification de courbe. Cet algorithme définit une courbe simplifiée, et donc les points caractéristiques de sa forme géométrique. Il existe plusieurs types d'algorithmes de simplification de courbes. En fonction de l'usage que l'on va en faire on exclut les algorithmes fondés sur la création de points. Dans la référence [62] a été faite la comparaison et l'analyse de différents algorithmes de simplification de courbe. Ceux-ci se classent comme suit :

- les méthodes fondées sur la courbure,
- les méthodes de fusion,
- les méthodes de découpage.

Un nombre important de références sur ces méthodes est également disponible dans ce même document. Le principe et les inconvénients de ces algorithmes vont être présentés avant d'introduire la solution retenue.

4.3.1.1 Méthodes fondée sur la courbure

Pour déterminer les points caractéristiques (points de coupures ou points critiques), on utilise la définition de la courbure le long de la polyligne.

La courbure mesure une variation de la tangente le long de la polyligne, elle caractérise la polyligne de la façon suivante :

- la courbure nulle caractérise un segment de droite,
- la courbure constante non nulle caractérise un arc de cercle,
- la changement de signe de la courbure caractérise un point d'inflexion,
- un maximum local de la courbure correspond à un point anguleux.

L'exploitation de la courbure pose un problème important : elle est très sensible au bruit le long de la polyligne. Le calcul de la courbure utilise une suite de plusieurs points, ce qui peut provoquer la détection de points d'inflexion y compris dans le cas d'une droite discrète parfaite. Pour pallier ce problème, cette technique est donc souvent combinée à un lissage. Cette solution n'est pas intéressante dans notre cadre d'étude car il est difficile de faire intervenir des critères subjectifs, comme l'écart entre les courbes initiale et simplifiée. Ce critère est souvent utilisé car il permet, dans une certaine mesure, de caractériser et d'éliminer le bruit. Sur la figure 4.4, le bruit est plus important en (b) qu'en (a). Cependant ce critère ne caractérise pas correctement le bruit comme le montre la figure 4.5.

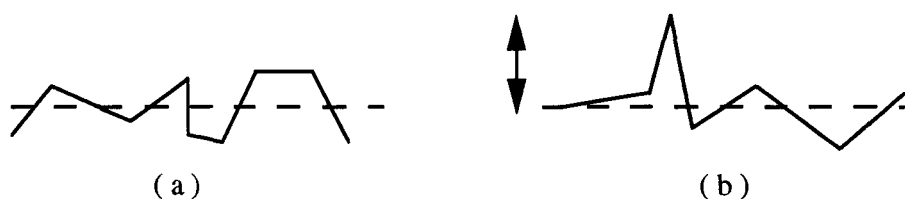


FIG. 4.4 - Caractérisation du bruit par l'écart maximal

4.3.1.2 Méthodes de fusion

Le principe des méthodes de fusion consiste à parcourir la polyligne du premier jusqu'au dernier point. Pendant ce parcours, les points sont fusionnés en un même segment tant que l'ensemble de ces points vérifie un certain critère. Le dernier point qui vérifie le critère correspond à l'extrémité du segment. On recommence à partir de ce point le processus de fusion.

Il existe plusieurs méthodes de fusion, qui se différencient par le choix du critère de coupure. Ainsi, on trouve des méthodes de fusion fondées sur :

- une approximation au sens des moindres carrés,
- un rectangle englobant dont la largeur correspond à un seuil de tolérance,
- l'évaluation de la surface entre le segment et la courbe pondérée par la longueur du segment.

Ces méthodes présentent un défaut considérable : les points de coupure sont généralement situés au delà des points de coupure souhaités. Le principe de l'algorithme consiste en effet à fusionner les points tant que le cumul de l'erreur ne dépasse pas un certain seuil. De plus, le point de coupure est fortement lié au point de démarrage puisqu'il cumule une erreur à partir de ce point. Dans le cas d'une polyligne fermée ce choix est donc délicat.

4.3.1.3 Méthodes de découpage

Le principe de la méthode de découpage est le suivant : dans un premier temps, la polyligne est approchée grossièrement, on relie les deux extrémités de la polyligne par un segment. L'existence d'un point caractéristique est ensuite recherchée sur la portion de la polyligne que modélise le segment approximant. Si ce point existe, le segment est remplacé par deux segments, l'un qui va d'une extrémité du segment au point caractéristique, l'autre qui va du point caractéristique à l'autre extrémité du segment. Ce processus est ensuite reconduit sur ces deux segments. Le point caractéristique généralement choisi est celui qui se situe le plus loin du segment selon une direction perpendiculaire à celui-ci. Si la distance de ce point à ce segment est inférieure à un seuil donné, l'approximation de la portion de segment considérée s'arrête.

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est très sensible au bruit. Le bruit peut introduire une mauvaise localisation des points de coupure, figure 4.6, et de mauvais points de coupure, figure 4.7. Elle est par ailleurs, plus coûteuse que les méthodes de fusion tant d'un point de vue espace mémoire que d'un point de vue complexité algorithmique. Cependant cette technique est très simple à mettre en oeuvre et permet de quantifier l'écart entre les polygones initiales et simplifiées.

4.3.1.4 Conclusion et choix de la méthode

Notre objectif principal est d'éliminer le maximum de points ne servant pas à définir la polyligne. On ne considère pas les méthodes de courbure car elles sont trop dépen-

dantes du bruit. Une modification de ces algorithmes peut évidemment améliorer cette lacune, mais ne prendra pas en compte et ne quantifiera pas l'écart entre les polygones initiales et simplifiées. Bien que la méthode de fusion semble plus efficace, la méthode de découpage a été préférée. La simplicité de ce dernier algorithme permet d'envisager une validation rapide ainsi que des améliorations facilement intégrables.

4.3.1.5 Algorithme de simplification de courbes

L'algorithme utilisé est un algorithme de découpage qui s'appuie sur les travaux de [61]. Afin de limiter le nombre de tests sur les points, un pas de fenêtre est défini en plus d'un écart entre les courbes simplifiées et initiales. Cet écart est nommé epsilon. Le pas de la fenêtre est donné par l'opérateur afin d'initialiser le processus de découpage. Celui-ci ne débute plus avec un segment reliant le premier et le dernier point. Une première phase "dégrossit" la courbe en conservant, dans le pire des cas, les points extrêmes de la fenêtre qui ont une longueur égale au pas. Ensuite une deuxième phase établit la simplification finale. Le pas et l'epsilon définissent donc une bande dans laquelle on doit rechercher le point caractéristique. Ce point est soit défini en considérant la distance maximale du point avec le segment (critère de base) soit en prenant en compte une approche énergétique fondée sur le principe de fusion. Cette énergie peut être fonction de l'écart, du périmètre ou de l'aire.

L'écart. Pour chaque point on calcule la distance qui sépare le point du segment formé par ses deux voisins. C'est un bon critère mais cette expression ne permet pas de faire la différence entre un bruit et un angle caractéristique. Sur la figure 4.8, le point P_1 et P_2 ont la même énergie.

Le périmètre. Pour chaque point, on compare la longueur du segment qui relie les deux points voisins (le segment approximant) avec la longueur de la portion approximée. Cette approche permet de différencier deux pics ayant la même forme, le plus petit a une énergie (différence entre le périmètre et le segment approximant) plus faible. De plus, pour deux pics qui seraient approchés par des segments de longueurs identiques, c'est le plus pointu qui a une énergie plus importante. Pour vérifier que l'approximation ne s'éloigne pas plus d'un certain écart, on peut calculer en chaque point celui-ci. En considérant l'énergie, on peut en déduire directement cet écart. L'écart h , figure 4.9, est maximal pour un triangle isocèle, $h = 1/2\sqrt{P^2 - L^2}$ où P est la longueur du périmètre, L la longueur du segment et $(P - L)$ l'énergie liée au périmètre.

L'aire. Une autre solution est de caractériser l'aire entre les polygones initiales et simplifiées. Pour chaque point on calcule l'aire du triangle défini par le point et ses deux voisins. Cette aire est liée au périmètre par la formule de Héron :

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

où p est le périmètre du triangle et a, b, c la longueur de ses cotés. Comme pour les autres critères, cette expression a ses propres limites dans la recherche du point caractéristique. Cette expression ne peut comparer les deux pics de la figure 4.10.

Ces expressions énergétiques sont simples et caractérisent suffisamment les courbes. Il faudra, pour obtenir une simplification satisfaisante, définir comment combiner ces critères entre eux. Ce travail n'a pas été réalisé mais mériterait que l'on s'y attarde. L'algorithme de simplification de courbes utilisée pour les exemples de ce document s'appuie uniquement sur une expression énergétique fondée sur la mesure de l'écart.

Soit donc un algorithme qui définit une forme simplifiée pour chaque courbe du Modèle Numérique de Terrain. Nous sommes capables de définir les points caractéristiques de celles-ci qui assureront, lors du processus d'adaptation, que la forme minimale est conservée. Cette garantie permet de limiter l'influence des critères d'initialisation de la carte de tailles ne prenant pas en compte la géométrie.

4.3.2 Respect de la topologie

La simplification de courbes ne permet pas de définir tous les points caractéristiques d'une polygone du Modèle Numérique de Terrain. En effet, l'interaction entre les différentes courbes n'est pas analysée.

Afin de garantir que la discrétisation des segments ne soit faite qu'une seule fois et que la régularisation des données soit prise en compte, on utilise les segments du graphe hiérarchique. Sur chaque segment est associé un couple de faces. Si le segment définit un polygone (une face), le couple de faces associé à ce segment est constitué de la face intérieure et d'une face extérieure au polygone. Dans le cas où le segment appartient à une polygone fermée ou non n'ayant pas la notion de face, une courbe de niveau par exemple, il n'y a qu'une seule face associée, la face qui contient la polygone. Sur la figure 4.11 un graphe hiérarchique illustre les deux cas ci-dessus.

Une décomposition du graphe hiérarchique en chaînes de segment maximales continues associées à un même couple de faces, structure les données de façon unique et permet de conserver les points topologiquement importants du graphe. En effet les points extrêmes de chaque chaîne sont communs à plusieurs chaînes et définissent donc

plusieurs faces. Ces points sont donc des caractéristiques importantes du graphe hiérarchique et seront conservés dans le maillage final car ils seront référencés comme étant des points durs. Sur la figure 4.12, il y a 4 objets. Seule une portion de la frontière polygonale "Objet" admet le même couple de faces (Objet, Objet_2). L'adaptation à la carte de tailles est ensuite établie sur cette chaîne constituée de points durs à caractère géométrique et topologique.

Cette approche permet de reporter dans le maillage de calcul les points d'intersection qui existent entre les segments appartenant à des faces. Par contre les points d'intersections entre les segments appartenant à des polygones de type courbe de niveau ne le sont pas puisqu'elles ne définissent pas des faces. Comme ces points sont tout aussi importants, on définit les points d'intersection comme des points si les polygones doivent être reportés dans le maillage de calcul.

Malgré cette solution, prenant en compte la géométrie et la topologie des objets, la discrétisation des polygones peut ne pas être satisfaisante. Ceci vient du fait que les points géométriques ne sont pas définis après l'obtention du graphe planaire. Cette simplification de courbe est établie à partir des données initiales. L'opérateur ou l'algorithme de simplification de courbe peut imposer un point dur qui est très proche d'un point qui sera topologiquement important. Ces deux points seront conservés dans le maillage final et perturberont sa qualité. Il serait judicieux par la suite d'établir les points durs géométriques à partir des chaînes de segment issues du graphe hiérarchique. Néanmoins, une analyse de la carte de tailles permet d'informer l'opérateur avant le début du processus adaptatif. Cet aspect est développé dans le paragraphe suivant qui porte sur l'interaction entre la carte de tailles et l'intervention de l'opérateur.

4.3.3 Influence sur la génération du maillage

L'opérateur spécifie les polygones et les points qui doivent être reportés dans le maillage de calcul. Ce choix peut donc définir une distribution de points non conforme à la carte de tailles. Sur la figure 4.13 on peut voir que le maillage, associé aux données définies sur le Modèle Numérique de Terrain, n'est pas satisfaisant. La distance entre points imposée par l'opérateur lorsqu'il spécifie les lignes de niveau reportées n'est pas en accord avec celle définie par la carte de tailles. Les polygones du Modèle Numérique de Terrain sont trop proches les uns des autres. On ne doit donc pas reporter par défaut toutes les polygones définies dans le Modèle Numérique de Terrain.

Les polygones, qui caractérisent une surface, sont toujours reportés dans le maillage de calcul. Par contre, pour les autres polygones, fermés ou non, l'opérateur spécifie si elles doivent être incluses dans le maillage final. Dans le cas où une polygone n'est

pas reportée dans le maillage final, les points d'intersections, existant entre cette polygône et celles qui appartiendront à la triangulation finale, ne doivent pas être imposés dans la liste des points. Ce choix donne moins de contraintes dans la discrétisation des polygones. On évite que les points durs géométriques soient trop proches de ces points topologiques qui ne sont plus importants. Cette solution assure une meilleure répartition des points sur les polygones qui appartiennent au maillage de calcul et donc une plus grande qualité de celui-ci.

La vérification des problèmes d'interférences entre la carte de tailles, la géométrie et la topologie est facilement obtenue en recherchant les triangles non équilatéraux et les points qui ne vérifient pas la distribution de la carte de tailles. Cependant, il est dommage de découvrir ces erreurs *a posteriori*. Une analyse de la carte de tailles sera faite, avant le début de processus d'adaptation, afin de vérifier que les choix de l'opérateur ne perturbent pas la géométrie et la topologie. On peut vérifier pour tout couple de points caractéristiques que la distance entre les points est plus importante que celle spécifiée par la carte de tailles. Cette information sera directement utilisable par l'opérateur pour corriger ce problème. On perçoit bien ici l'intérêt de définir la carte de tailles sur le Modèle Numérique de Terrain. Bien qu'intéressante, cette analyse de la carte de tailles ne pourra pas empêcher la création de triangles surcontraints. L'analyse de la triangulation est donc toujours de rigueur. La qualité d'une triangulation est définie en considérant les trois points suivants :

- l'équilatéralité des mailles,
- la progression des tailles de mailles,
- l'écart entre la distribution des points et celle définie sur la carte de tailles.

Ces différents critères seront développés dans le §4.5.

4.4 Adaptation à la carte de tailles

Le processus d'adaptation à la carte de tailles est fondé sur un processus de minimisation de l'écart entre une distribution spécifiée par la carte de tailles et celle obtenue dans le maillage de calcul. La génération d'un maillage de calcul utilise les données du Modèle Numérique de Terrain et l'information de la carte de tailles. Pour que les objets modélisés par le Modèle Numérique de Terrain soient conservés dans le maillage de calcul, un traitement spécifique des polygones doit être fait. Pour cette

raison, l'adaptation à la carte de tailles se décompose en deux étapes :

- une discrétisation des polygones selon l'information de la carte de tailles. Cette opération garantit une représentation géométrique minimale,
- une discrétisation du domaine, en considérant les polygones rediscrétisées et la carte de tailles. Les points obligatoires du Modèle Numérique de Terrain sont reportés dans le maillage de calcul.

Ces discrétisations quantifient et minimisent l'écart entre la carte de tailles et la distribution obtenue. Etant donné qu'il existe deux étapes, monodimensionnelle et bidimensionnelle, on définit deux types d'énergies. Ces deux termes énergétiques seront définis selon le même principe. L'énergie globale d'un nuage de points $v_i, i \in [1, \dots, N]$, est définie par la somme des énergies sur les arêtes $[v_i, v_j]$ de la connectivité K qui caractérise la polygone ou la triangulation. Chaque contribution est définie par le carré de l'écart relatif entre la distance réelle et souhaitée pour les points (v_i, v_j) . La distance souhaitée est déduite de la carte de tailles.

4.4.1 Discrétisation des polygones suivant la carte de tailles

L'ensemble des courbes à raffiner est inclus dans le Modèle Numérique de Terrain. Elles sont définies sous forme de polygones fermées, ou non, représentant, ou non, une face.

On rappelle brièvement sa définition et la notation que l'on utilisera :

Une polygone est constituée d'une suite de points $(V_0, \dots, V_N)$ telle que tout couple de points (V_i, V_{i+1}) soit associé à un segment de droite $[V_i, V_{i+1}]$.

Une polygone est définie par des points caractéristiques, que l'on nommera points *durs*, et d'autres points que l'on nommera points *souples*. Les points durs caractérisent la forme minimale géométrique et les points topologiquement important, tandis que les points souples complètent la définition de la polygone d'un point de vue altimétrique. Les points durs sont définis grâce à un algorithme de simplification de courbe ou par l'analyse du graphe hiérarchique du Modèle Numérique de Terrain.

L'adaptation, en accord avec la carte de tailles, ajoutera, s'il y a lieu, des points sur une portion de la polygone définie entre deux points durs. Cette création de points utilise un processus de minimisation de l'écart entre la distance spécifiée sur la carte de tailles et la suite de points obtenue le long de l'abscisse curviligne de cette polygone. Nous allons définir dans un premier temps l'énergie associée à une polygone.

Energie monodimensionnelle

Soit une polyligne définie par une suite de points $V_i = (x, y, z)$ définie dans un repère cartésien orthonormé direct R avec $i \in [0, N]$, telle que les extrémités V_0, V_N soient fixes et représentent deux points durs consécutifs. Il existe une transformation τ bijective de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à tout point V_i son abscisse curviligne. Soit un changement de repère de $R : (O, X, Y, Z) \xrightarrow{\mathcal{C}} R' : (A, U, V, W)$, où R' est un repère lié à la polyligne tel que un des axes soit colinéaire aux segments de la polyligne et que les autres définissent un repère orthonormé direct. Le changement de repère associe donc un point $V_i = (x, y, z)$ à $S_i = (\tau(V_i), 0, 0)$. On nommera $\|\cdot\|_R$ la norme euclidienne exprimée dans le repère R . Sur la polyligne, la carte de tailles spécifie une fonction $\mathcal{F}, C^0$, qui représente la distance entre points. $\mathcal{F}(V_i)$ définit donc la distance entre points au point V_i . La suite de points finale s_i , définie dans R' , telle que $s_0 = S_0$ et $s_M = S_N$ est obtenue en cherchant à minimiser et à répartir l'énergie globale de la suite de points. On définit la distance souhaitée entre deux points s_i, s_j par :

$$L_{s_i}^{s_j} = \frac{\mathcal{F}(s_i) + \mathcal{F}(s_j)}{2}$$

L'énergie globale E de la suite de points s_i de $M + 1$ points est définie comme suit :

$$\begin{cases} E = \sum_{i=0}^{M-1} E_i^{i+1} \\ E_i^{i+1} = \left(\frac{\|s_i \vec{s}_{i+1}\|_{R'} - L_{s_i}^{s_{i+1}}}{L_{s_i}^{s_{i+1}}} \right)^2 \quad \text{pour } i \in [0, M-1] \end{cases}$$

L_i^{i+1} représente la moyenne des distances souhaitées exprimées aux points s_i et s_{i+1} , et E_i^{i+1} représente l'énergie entre ces deux mêmes points.

$\|s_i \vec{s}_{i+1}\|_{R'}$ est égale à la différence des abscisses curvilignes associées aux points.

Après avoir introduit l'énergie d'une distribution, nous allons présenter la méthode définissant la suite de points qui minimise cette énergie.

Minimisation énergétique dans le cas monodimensionnel

Nous cherchons à obtenir une suite de points qui minimise l'énergie globale E . Elle s'appuie sur deux paramètres : le nombre de points et leurs positions sur la polyligne. Cette minimisation est obtenue grâce à un processus itératif qui porte sur le nombre de points :

- On initialise le nombre de points à créer grâce à un estimateur [64]. Soit M le résultat de l'estimateur.
- Ayant une répartition équidistante des points s_i $i \in [1, M]$, on déplace, pour un nombre de points constant, ces points afin de répartir l'énergie globale E . On

rappelle que $s_0 = S_0$ et $s_{M+1} = S_N$ sont les deux points durs extrêmes de la polyligne. Ceux-ci ne sont donc pas modifiés par le processus adaptatif.

- L'étape précédente est reconduite tant que l'ajout de point, $M = M + 1$, diminue l'énergie globale E définie sur la suite de points s_i .

Estimateur du nombre de points en 1D

Comme il a été précisé lors de la définition énergétique, la carte de tailles définit une fonction $\mathcal{F}$ qui spécifie la distance entre points sur la polyligne. $\mathcal{F}$ est définie par une somme de fonctions affines sur $[V_i, V_{i+1}[$, pour $i \in [0, N[$, telle que $\mathcal{F}(s)$, $s \in [\tau(V_i), \tau(V_{i+1})]$ est égale à :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(s) = \left(\frac{\mathcal{F}(V_{i+1}) - \mathcal{F}(V_i)}{\tau(V_{i+1}) - \tau(V_i)} \right) \cdot s + \frac{\mathcal{F}(V_i) \cdot \tau(V_{i+1}) - \mathcal{F}(V_{i+1}) \cdot \tau(V_i)}{\tau(V_{i+1}) - \tau(V_i)} & \text{si } \mathcal{F}(V_i) \neq \mathcal{F}(V_{i+1}) \\ \mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(V_i) & \text{si } \mathcal{F}(V_i) = \mathcal{F}(V_{i+1}) \end{cases}$$

On définit $L = \tau(V_N)$, la longueur de la polyligne selon l'abscisse curviligne.

On estime le nombre d'intervalles I et donc le nombre de points M à créer par l'intégration :

$$\begin{cases} T = \int_0^L \frac{ds}{\mathcal{F}(s)} \\ I = \lfloor T \rfloor \\ M = I - 1 \end{cases}$$

où $\lfloor T \rfloor$ représente la partie entière de T .

La fonction intégrée, inverse de $\mathcal{F}(s)$, peut être interprétée comme une fonction de densité le long de l'arête. Etant donnée la définition de $\mathcal{F}$ on exprime l'intégrale T par une sommation sur les segments définissant la polyligne :

$$T = \int_0^L \frac{ds}{\mathcal{F}(s)} = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\tau(V_i)}^{\tau(V_{i+1})} \frac{ds}{\mathcal{F}(s)}$$

On a donc :

$$\begin{cases} T = \int_0^L \frac{ds}{\mathcal{F}(s)} = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\tau(V_i)}^{\tau(V_{i+1})} \frac{ds}{\mathcal{F}(s)} \\ \int_{\tau(V_i)}^{\tau(V_{i+1})} \frac{ds}{\mathcal{F}(s)} = \begin{cases} \frac{\tau(V_{i+1}) - \tau(V_i)}{\mathcal{F}(V_{i+1}) - \mathcal{F}(V_i)} \ln \frac{\mathcal{F}(V_{i+1})}{\mathcal{F}(V_i)} & \text{si } \mathcal{F}(V_i) \neq \mathcal{F}(V_{i+1}) \\ \frac{\tau(V_{i+1}) - \tau(V_i)}{\mathcal{F}(V_i)} & \text{si } \mathcal{F}(V_i) = \mathcal{F}(V_{i+1}) \end{cases} \end{cases}$$

L'estimateur T , présenté ci-dessus, initialise le processus itératif de minimisation énergétique. Pour un nombre de points fixé, la répartition énergétique définit leur position.

La recherche du nombre de points optimal sera donc d'autant plus rapide que l'estimateur sera précis. L'analyse de cet estimateur et des tests ont montré que l'estimateur est "exact" quand la polyligne est un segment. Dans le cas où la polyligne est constituée de plusieurs segments, on peut donc déduire une borne supérieure pour le nombre de points. En effet, on peut considérer que pour deux segments, l'estimateur étant exact, la somme des arrondis de l'intégration ne peut définir qu'un seul point supplémentaire. Si l'estimateur spécifie I points pour N segments, la suite de points ayant une énergie minimale a un nombre de points $P \in [I, I + N - 1]$.

Répartition énergétique en 1D pour un nombre de points fixé

Soit une suite de $M + 2$ points s_i sur la polyligne initiale définie par les points V_j , $j \in [0, N]$. On recherche la nouvelle position des $(s_1, \dots, s_M)$, définis dans R' , afin que l'énergie globale de la suite de points soit répartie.

Comme nous recherchons pour chaque point s_i , $i \in [1, M]$, l'équilibre énergétique avec ses voisins s_{i-1} et s_{i+1} , on modélise la suite de points par un réseau de ressorts. On va donc exprimer le système de forces associé à l'énergie et rechercher l'équilibre de ce système de forces.

s_{i+1} exerce une force $F_i^{\vec{i}+1}$ d'énergie E_i^{i+1} sur s_i . L'expression du module de la force $F_i^{\vec{i}+1}$ est obtenue en utilisant l'analogie entre notre expression énergétique et l'énergie élastique pour un ressort dont l'allongement est ΔL et la raideur k .

$$\begin{cases} e = \frac{k}{2} \Delta L^2 \\ \|\vec{F}\| = k|\Delta L| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_i^{i+1} = \left(\frac{\|s_{i+1} \vec{s}_i\|_{R'} - L_{s_i}^{s_{i+1}}}{L_{s_i}^{s_{i+1}}} \right)^2 \\ \text{pour } i \in [1, M] \text{ en considérant } k = 1 \\ \|F_i^{\vec{i}+1}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\|s_{i+1} \vec{s}_i\|_{R'} - L_{s_i}^{s_{i+1}}}{L_{s_i}^{s_{i+1}}} \right| \end{cases}$$

On en déduit l'expression de la force :

$$F_i^{\vec{i}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\|s_{i+1} \vec{s}_i\|_{R'} - L_{s_i}^{s_{i+1}}}{L_{s_i}^{s_{i+1}}} \right) \frac{s_{i+1} \vec{s}_i}{\|s_{i+1} \vec{s}_i\|_{R'}}$$

Nous sommes également capables d'exprimer par le même processus $F_i^{\vec{i}-1}$, force de s_{i-1} sur s_i . En considérant que les forces sont colinéaires, que s_{i+1} est défini par $(u_{i+1}, 0, 0)$ dans R' que $s_i = (u_i, 0, 0)$ et que la distribution vérifie :

$$u_{i-1} < u_i < u_{i+1}$$

on obtient l'expression des forces suivantes :

$$\begin{cases} F_i^{i+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(u_{i+1}-u_i)-L_{s_i}^{s_{i+1}}}{L_{s_i}^{s_{i+1}}} \\ F_i^{i-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(u_i-u_{i-1})-L_{s_i}^{s_{i-1}}}{L_{s_i}^{s_{i-1}}} \end{cases}$$

L'équilibre du système de forces en s_i , nous donne :

$$\begin{cases} u_i = \frac{u_{i-1}L_{s_i}^{s_{i+1}} + u_{i+1}L_{s_i}^{s_{i-1}}}{L_{s_i}^{s_{i+1}} + L_{s_i}^{s_{i-1}}} & \text{pour } i \in [1, M] \\ \text{avec } L_{s_i}^{s_{i+1}} = \frac{\mathcal{F}(s_i) + \mathcal{F}(s_{i+1})}{2} \end{cases}$$

En généralisant l'équilibre du système de forces pour toute la distribution nous obtenons le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{L_{s_1}^{s_0}}{L_{s_1}^{s_2} + L_{s_1}^{s_0}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{L_{s_2}^{s_3}}{L_{s_2}^{s_3} + L_{s_2}^{s_1}} & 1 & \frac{L_{s_2}^{s_1}}{L_{s_2}^{s_3} + L_{s_2}^{s_1}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{L_{s_i}^{s_{i+1}}}{L_{s_i}^{s_{i+1}} + L_{s_i}^{s_{i-1}}} & 1 & \frac{L_{s_i}^{s_{i-1}}}{L_{s_i}^{s_{i+1}} + L_{s_i}^{s_{i-1}}} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{L_{s_{N-2}}^{s_{N-1}}}{L_{s_{N-2}}^{s_{N-1}} + L_{s_{N-2}}^{s_{N-3}}} & 1 & \frac{L_{s_{N-2}}^{s_{N-3}}}{L_{s_{N-2}}^{s_{N-3}} + L_{s_{N-2}}^{s_{N-1}}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{L_{s_{N-1}}^{s_{N-2}}}{L_{s_{N-1}}^{s_{N-2}} + L_{s_{N-1}}^{s_{N-4}}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \frac{L_{s_1}^{s_2}}{L_{s_1}^{s_2} + L_{s_1}^{s_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_N \frac{L_{s_{N-1}}^{s_N}}{L_{s_{N-1}}^{s_N} + L_{s_{N-1}}^{s_{N-2}}} \end{pmatrix} \quad \text{avec } s_0 = 0 \text{ et } s_N = \text{Longueur totale de la polyligne}$$

Ce système est non-linéaire puisque $L_{s_i}^{s_j}$ dépend de la position des points. Ce système est linéarisé sous la forme $Ax = B$, avec A une matrice non symétrique, tridiagonale, définie positive. Chaque système est résolu par la méthode de double balayage qui est une résolution directe. Cette solution sert à reconstruire les nouveaux coefficients de la matrice A et donc une nouvelle résolution. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que l'écart relatif entre deux itérations soit inférieur à un taux de convergence α fixé :

$$\max\left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{u_i^n}\right) < \alpha$$

avec :

u_i^{n+1} : valeur de u_i ($s_i = (u_i, 0, 0)$) à l'itération $n + 1$.

u_i^n : valeur de u_i ($s_i = (u_i, 0, 0)$) à l'itération n courante.

La solution finale donne une suite de valeur $u_i, i \in [0, M + 1]$ qui représente une suite de points $(s_0, \dots, s_{M+1})$, appartenant à la polyligne initiale et définie dans R' . La nouvelle polyligne $(v_0, \dots, v_{M+1})$, définie dans R , est obtenue par un changement de repère $R' \xrightarrow{C^{-1}} R$.

4.4.2 Ajout et positionnement des points dans le domaine

Le maillage de calcul est créé en considérant le résultat de la discrétisation des polygones du Modèle Numérique de Terrain. Comme pour le cas monodimensionnel, certains points du domaine peuvent être imposés par l'opérateur. Ces points ont une position spatiale qui ne doit pas être remise en cause par le processus adaptatif. Ils servent à modéliser spatialement un phénomène physique, comme les points de dilution, ou à conserver un point caractéristique du faciès du terrain.

La carte de tailles définit une surface $\mathcal{F}$ qui représente la distance entre points dans le domaine. Comme le nombre de points et de segments de la carte de tailles peut ne pas être en rapport avec le maillage de calcul attendu, la création des points est faite en ne considérant que la surface $\mathcal{F}$.

Comme pour le cas monodimensionnel, l'adaptation est fondée sur la minimisation d'une énergie qui quantifie l'écart entre la carte de tailles et la distribution obtenue. L'énergie d'un nuage de points $v_i, i \in [1, \dots, N]$, est définie par la somme des énergies sur les arêtes $[v_i, v_j]$ de la connectivité K de la triangulation. Chaque contribution est définie par le carré de l'écart relatif entre la distance réelle et souhaitée pour les points $\{v_i, v_j\}$. La distance souhaitée est déduite de la carte de tailles.

4.4.2.1 Définitions

On nomme **triangulation courante** une triangulation au cours du processus adaptatif. Celle-ci devient le maillage de calcul à la fin de ce processus.

Soient des points du domaine qui n'appartiennent pas aux polygones discrétisés du maillage de calcul. On nomme **point libre** tout point que l'adaptation est autorisée à déplacer ou à détruire. Par opposition, les points durs sont des points du Modèle Numérique de Terrain qui appartiennent au maillage de calcul. Ces points ne peuvent être ni déplacés ni détruits.

Pour quantifier l'écart entre la triangulation courante et la surface $\mathcal{F}$, on introduit l'énergie associée à un nuage de points. Cette énergie est égale à la somme des énergies existant sur l'ensemble des arêtes de la connectivité K de la triangulation de Delaunay. K est un complexe simple qui associe aux points du maillage $V = \{v_1, \dots, v_M\}$, des simplexes. Ces simplexes sont des 0-simplexes définissant des points $\{v_i\}$, des 1-simplexes définissant des arêtes $\{v_i, v_j\}$, des 2-simplexes définissant des faces $\{v_i, v_j, v_k\}$. L'énergie associée aux 0-simplexes de K s'exprime comme la somme des énergies sur les 1-simplexes de K .

$$\begin{cases} E = \sum_{\{v_i, v_j\} \in K} \left(\frac{\|v_i - v_j\| - L_{v_i}^{v_j}}{L_{v_i}^{v_j}} \right)^2 \\ L_{v_i}^{v_j} = \frac{\mathcal{F}(v_i) + \mathcal{F}(v_j)}{2} \end{cases}$$

Bien que les points fixes ne soient pas modifiés par ce processus adaptatif, ils interviennent dans l'expression énergétique. Dans le cas contraire, il nous serait impossible de comparer l'énergie d'une triangulation ne comportant qu'un seul point créé avec celle d'une triangulation constituée uniquement de points fixes.

4.4.2.2 Minimisation énergétique en 2D

Après avoir défini l'expression énergétique, nous allons établir la triangulation telle que l'énergie du nuage de points soit minimale. Nous allons pour cela, définir la position optimale des points libres et le nombre optimal de ces points. La connectivité de la triangulation intervient dans l'expression du terme énergétique, car elle spécifie les voisins d'un point. Afin de s'assurer que la distribution de points respecte la carte de tailles, les points les plus proches entre eux doivent être connectés. Cette caractéristique est assurée grâce à la triangulation de Delaunay. Bien que la connectivité n'intervienne pas explicitement comme une variable dans l'expression énergétique, on retriangule les données lors du déplacement des points (cf. 4.4.2.2). Cette solution assure que le maillage de calcul est de Delaunay et que la minimisation énergétique tient réellement compte de la proximité spatiale des points.

La minimisation énergétique est obtenue grâce à un processus itératif qui porte sur le nombre de points :

- On initialise le processus grâce à un estimateur qui définit par une analyse de la fonction $\mathcal{F}$ le nombre de points et leurs positions dans le domaine. Soit M le nombre de points créés.
- Soient M points qui avec les polygones et les points durs du domaine définissent

une triangulation. On déplace, pour un nombre de points fixes, les points libres afin de répartir l'énergie sur l'ensemble de ces points.

- L'étape précédente est réitérée tant que le nombre de points optimum ne définit pas l'énergie minimale. Ce nombre de points optimum est trouvé en évitant certains minima locaux énergétiques et grâce à un processus de convergence par dichotomie.

Ce processus va être détaillé suivant les trois axes principaux de la minimisation énergétique :

- la création initiale des points,
- le processus de minimisation sur le nombre de points,
- la répartition énergétique sur la distribution pour un nombre de points fixé.

Création initiale des points en 2D

L'analyse de la fonction $\mathcal{F}$ permet de définir une approximation du nombre de points à créer dans le domaine. L'estimation du nombre de points est obtenue par intégration sur le domaine d'une fonction "densité" déduite de $\mathcal{F}$:

$$\int_{\Omega} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}^2}$$

Cette expression est obtenue par une sommation des intégrales sur la triangulation sous-jacente.

$$\int_{\Omega} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}^2} = \sum_{i=1}^{triangles} \int_{triangle} \frac{d\Omega}{\mathcal{F}^2}$$

Localement, pour chaque triangle de la carte de tailles, on sait donc combien de points on souhaite créer. On profite de cette estimation pour créer les points.

Soit un triangle dans lequel on doit créer N points. Plusieurs méthodes d'ajout de points ont été envisagées dans [65]. L'optique de ce travail était d'obtenir une distribution de points qui respecte une densité de points dans un triangle. Si la distribution de points avait été satisfaisante, on aurait pu éviter ce processus de minimisation sur le nombre de points. Cela n'a pas été le cas car on n'a pas pu s'affranchir totalement de la connectivité sur laquelle est définie la fonction densité de points. La création de

points qui a été retenue est donc la suivante :

Pour définir N points dans le triangle nous allons tirer aléatoirement N valeurs comprises entre 0 et L . L représente le périmètre du triangle considéré. Nous aurons donc temporairement N points qui appartiennent aux trois arêtes du triangle. Pour chacun de ces points nous tirons aléatoirement une valeur comprise entre $]0, D[$. D représente la distance entre le point et le barycentre du triangle. Nous obtenons donc une distribution de N points dans le triangle concerné.

Le nombre de points dans un triangle de la carte de tailles est défini par la partie entière de l'intégrale définie ci-dessus. Afin que les points engendrés ne dépendent pas de la triangulation sur laquelle est définie $\mathcal{F}$, la partie décimale du calcul intégral est reportée sur un des triangles où l'estimation n'a pas encore eu lieu. C'est à dire que le reste de l'estimation du nombre de points, est reporté sur une triangle voisin. Cette méthode est une approximation d'un tirage uniforme aléatoire bidimensionnelle du fait que l'on utilise une composée de deux tirages aléatoires.

Processus de minimisation portant sur le nombre de points

On recherche le nombre de points optimal tel que l'énergie associée au nuage de points soit minimale. La valeur de l'énergie est établie lors d'un processus de répartition énergétique pour un nombre de points fixe. Ce processus est présenté dans le paragraphe qui suit. L'étape de recherche du nombre de points optimal se décompose en deux phases. Une phase de destruction rapide des points pour éviter certains minima locaux suivie d'un processus de convergence par dichotomie vers le nombre de points optimal. La première phase de destruction massive de points existe car notre estimateur définit une borne supérieure pour le nombre optimal de points. Cette information est importante et provient du fait que pour chaque estimation faite sur un triangle de la carte de tailles, la partie décimale du résultat de l'estimateur de points est ajoutée à la prochaine estimation. Comme l'évolution de l'énergie en fonction du nombre de points est très irrégulière, la destruction massive des points est une étape importante qui permet de localiser les bornes comprenant le nombre de points optimal. L'hypothèse est que la solution qui minimise l'énergie globale de la triangulation est celle qui donne une distance entre points très proche de la longueur des arêtes de la triangulation. On parcourt donc la triangulation et on détruit tous les points libres qui ont une arête associée de longueur inférieure à un pourcentage de la distance entre points requise. Pour éviter une propagation trop importante de la destruction des points, on gèle les voisins d'un point détruit. Cette étape est reconduite tant que l'on a pas trouvé une borne inférieure du nombre optimal de points.

La seconde phase permet de trouver le point optimal, après que la première nous ait assuré d'éviter certains minima locaux de l'énergie. Le nombre de points "optimal" et donc le maillage final, est obtenu à l'aide d'un processus de convergence par dichotomie. La première phase définit les bornes entre lesquelles le point optimal est inclus et sert donc à l'initialisation du processus de convergence par dichotomie.

Soit N_- une borne inférieure au nombre de points "optimal" et N_+ une borne supérieure. L'énergie globale associée à ces nuages de points est E_- et respectivement E_+ , avec E_- et E_+ supérieures à E_{mini} , la valeur minimale de l'énergie, obtenue pour le nombre de points optimum. La courbe énergie en fonction du nombre de points n'est pas monotone du fait que dans l'expression énergétique la connectivité intervient et que celle-ci n'est pas un paramètre utilisé pour la minimisation. Pour pouvoir définir le processus de dichotomie, on suppose que localement l'énergie globale en fonction du nombre de points a une évolution continue.

On recherche l'énergie associée $E_{+/-}$ pour un nombre de points $(N_- + N_+)/2$ et on en déduit les nouvelles bornes du point "optimal". Comme le montrent les figures 4.14 et 4.15, il existe un seul cas où l'on ne peut en fonction de E_- , E_+ et $E_{+/-}$ définir avec certitude les nouvelles bornes N_- , N_+ . C'est lorsque $E_{+/-}$ est inférieure à E_- et E_+ . Dans ces circonstances, on pose $N_+ = N_{+/-}$ afin de rechercher une triangulation ayant un nombre limité de points.

Il est évident que le nombre de points final, peut ne pas être le nombre de points "optimal" qui donne le minimum de l'énergie associée à un nuage de points. On sait que l'on est dans cette situation, lorsque le nombre de points $N_{+/-}$, pour le cas d'incertitude ci-dessus, est trouvé égal au nombre de points "optimal". Cela signifie que l'on se situait dans le cas (a) de la figure 4.14 et que l'on devait ajouter des points au lieu d'en détruire. Lorsqu'on est dans cette situation on devrait recommencer le processus de dichotomie avec des bornes du point "optimal" cohérentes.

Pour éviter de recréer des points lors du processus de minimisation, les points qui sont détruits sont conservés dans une liste. Cette liste est détruite si le processus continue à détruire des points, ou bien dans le cas contraire permet de restaurer des points. D'un point de vue algorithmique, tous les points sont stockés dans un Arbre Binaire de Recherche équilibré (ABR) [15] unique afin qu'il n'y ait aucune duplication. Les points de la carte de tailles, les points du maillage de calcul, les points détruits sont donc référencés afin que l'on statue correctement sur leur sort. La liste des points libres détruits est disponible grâce à un sous-chaînage dans l'ABR.

Répartition de l'énergie sur l'ensemble de la distribution en 2D

Nous allons présenter la technique qui permet de répartir, pour un nombre de points fixe, l'énergie du nuage de points. Soit une triangulation K de M points ayant N points libres. Cette triangulation de Delaunay contrainte s'appuie sur les M points et respecte les polygones issues de la discrétisation monodimensionnelle (cf §4.4.1). L'énergie du nuage de points est obtenue en considérant l'énergie sur chaque $\{1\}$ -simplexe $\{i, j\}$ (les arêtes) de K .

$$\begin{cases} E = \sum_{\{v_i, v_j\} \in K} \left(\frac{\|v_i \vec{v}_j\| - L_{v_i}^{v_j}}{L_{v_i}^{v_j}} \right)^2 \\ L_{v_i}^{v_j} = \frac{\mathcal{F}(v_i) + \mathcal{F}(v_j)}{2} \end{cases}$$

Comme pour la discrétisation des polygones suivant la carte de tailles, l'équilibre énergétique des points libres v_i , avec ses voisins v_j , sur les 1-simplexes $\{v_i, v_j\}$ de K est obtenu en modélisant la triangulation par un système de ressorts et en recherchant l'équilibre de ce système de ressorts. Le point v_j exerce une force $\vec{F}_{v_i}^{v_j}$ sur le point v_i d'énergie $E_{\{v_i, v_j\}}$: l'énergie sur le 1-simplexe $\{v_i, v_j\}$. On obtient l'expression du module de la force en utilisant l'analogie entre notre expression énergétique et l'énergie élastique pour un ressort dont l'allongement est ΔL et la raideur k .

$$\begin{cases} e = \frac{k}{2} \Delta L^2 \\ \|\vec{F}\| = k |\Delta L| \end{cases} \implies \begin{cases} E_{\{v_i, v_j\}} = \left(\frac{\|v_i \vec{v}_j\| - L_{v_i}^{v_j}}{L_{v_i}^{v_j}} \right)^2 \\ \|\vec{F}_{v_i}^{v_j}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\|v_i \vec{v}_j\| - L_{v_i}^{v_j}}{L_{v_i}^{v_j}} \right) \end{cases}$$

La recherche de l'équilibre d'un système de ressorts peut être obtenue en construisant une matrice de raideur globale [68]. Cette matrice est obtenue en assemblant des matrices locales construites pour chaque ressort. Comme pour le cas monodimensionnel cette matrice de raideur globale est symétrique et non-linéaire car $L_{v_i}^{v_j}$ dépend de la position des points. La solution finale est donc obtenue grâce à plusieurs résolutions de systèmes matriciels linéaires. Chaque résolution linéaire donne une nouvelle position des points libres ce qui implique une nouvelle expression des termes $L_{v_i}^{v_j}$ et donc une nouvelle matrice de raideur. Ce processus continue tant que la position des points évolue. Cette méthode n'a pas été implantée, mais le problème est résolu par une technique similaire qui demande un temps *CPU* plus important pour arriver à convergence. On parcourt un à un les points libres de la triangulation et on recherche leur équilibre local. Le calcul des $L_{v_i}^{v_j}$ est fondé sur une interpolation de la distance entre points sur la carte de tailles. Ce point sera développé dans le §4.4.3 qui suit.

Lors du déplacement des points on n'assure pas que la triangulation reste conforme puisque que ce processus est suivi d'une triangulation de Delaunay. Les points qui

sortent du domaine ou qui se situent dans des trous sont donc simplement détruits lors de la hiérarchisation du graphe avant chaque triangulation. De plus, on interdit à un point libre de redécouper une polyligne puisque toutes les polygones de la triangulation courante ont déjà été discrétisées en considérant la carte de tailles. D'un point de vue plus général, seuls les points isolés de la carte planaire sont susceptibles d'être modifiés lors du processus bidimensionnel. Cette constatation permet une construction plus rapide de la carte planaire à chaque nouvelle triangulation.

4.4.3 Interpolation

La minimisation énergétique bidimensionnelle interpole sur la carte de tailles la distance entre points après le déplacement des points du maillage. On doit donc rechercher le triangle de la carte de tailles qui contient le point à interpoler pour établir la distance entre points. Comme la carte de tailles est définie sur le Modèle Numérique de Terrain, l'interpolation altimétrique, en fin du processus adaptatif, est identique à l'interpolation des distances entre points sur la carte de tailles.

Initialement, dans le processus de minimisation bidimensionnelle, les points sont créés à partir de la carte de tailles. On profite de cette étape pour stocker une des arêtes du triangle qui contient le point. Ensuite, lorsqu'au cours du processus adaptatif le point se déplace, le triangle de la carte de tailles qui contient ce point (la cible) est obtenu par un parcours du graphe. En partant d'une arête du triangle qui à l'étape précédente contenait le point, on parcourt la triangulation de la carte de tailles par une progression en direction du point. Soient S_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, les sommets du triangle interpolant orientés dans le sens horaire et P le point à interpoler. On statue sur la position du point P en comparant le signe des produits vectoriels $\vec{PS_i} \wedge \vec{S_iS_j}$ à zéro, avec (i, j) défini par une permutation circulaire de $(1, 2, 3)$. Si les trois résultats sont négatifs, le point appartient au triangle (S_1, S_2, S_3) . Dans le cas contraire, s'il existe un produit vectoriel positif, cette arête désigne le triangle voisin associé pour un parcours vers la cible. Si un produit vectoriel est nul et si les deux autres sont positifs, le point appartient à l'arête du triangle qui définit un produit vectoriel nul. Lorsque deux produits vectoriels sont nuls, le point est confondu avec le sommet commun aux deux arêtes concernées.

Cette technique d'interpolation suppose que la triangulation du domaine est constituée d'une seule donnée connexe. Dans le cas contraire, cette technique peut ne pas aboutir. Il faudra dans ce cas utiliser une autre technique d'interpolation, comme la méthode "BOX SORT" [63].

4.5 Qualité d'une triangulation

Dans le cas d'une triangulation adaptative isotrope construite à l'aide d'une carte de tailles, la qualité du maillage se mesure en considérant les points suivants :

- la distorsion des mailles,
- la progression des tailles de maille,
- l'écart entre la distribution des points dans le maillage et celle spécifiée sur la carte de tailles,
- l'écart entre les fonds définis sur le maillage et le Modèle Numérique de Terrain.

Outre ces critères de qualité, la triangulation doit également ne pas contenir de triangles surcontraints. Ces triangles, définis par trois points frontières, seront ou modifiés ou entraîneront une modification de la carte de tailles.

4.5.1 Distorsion des mailles

La distorsion des mailles d'une triangulation se mesure en comparant la maille à un triangle équilatéral. Le critère le plus souvent utilisé, [53], est :

$$Q = \frac{R}{2r}$$

où R représente le rayon du cercle circonscrit au triangle, et r le rayon du cercle inscrit. Ce critère est égal à l'unité lorsque le triangle est équilatéral. Plus le triangle est distordu, plus le critère a une valeur importante. On considère qu'un triangle est satisfait pour une valeur de ce critère comprise dans $[1, 2]$. Dans [50], un critère semblable est utilisé.

$$Q' = \alpha \frac{P}{r}$$

P représente le périmètre du triangle, r le rayon du cercle inscrit et α est un paramètre qui assure que Q' est égal à l'unité pour un triangle équilatéral. Cette expression, comme Q , est proportionnelle à la distorsion des triangles. Le critère Q' est utilisé car il est moins coûteux à exprimer que Q . Les tests que j'ai effectué ont montré que pour une qualité fixée, le critère Q est plus restrictif que Q' .

Pour ces deux critères, une estimation de la qualité d'une triangulation est mesurée comme étant le maximum de la distorsion des mailles sur la triangulation.

4.5.2 Progression des tailles de maille

La progression des tailles de mailles est un autre critère qui renseigne sur la qualité de la triangulation. Il exprime le maximum du rapport de surface entre deux triangles qui partagent une même arête.

La valeur de ce critère pour deux triangles voisins de surface S_1, S_2 est :

$$Q_{prog} = \max(|\frac{S_1}{S_2} - 1|, |\frac{S_2}{S_1} - 1|)$$

La valeur idéale est donc 0 et permet d'avoir la même expression pour ces deux triangles.

4.5.3 Qualité de l'adaptation

Une indication sur la qualité de l'adaptation est également mesurée. Elle est définie comme le maximum de l'énergie sur les 1-simplexes (les arêtes) de la connectivité K . Cette énergie est égale au carré de l'écart relatif entre la distance souhaitée entre deux points, exprimée sur la carte de tailles, et la distance entre les points du maillage de calcul. Soit une arête $\{v_i, v_j\}$ de la triangulation, l'énergie s'exprime :

$$\begin{cases} Q_{\{v_i, v_j\}} = (\frac{\|v_i - v_j\| - L_{v_i}^{v_j}}{L_{v_i}^{v_j}})^2 \\ L_{v_i}^{v_j} = \frac{\mathcal{F}(v_i) + \mathcal{F}(v_j)}{2} \end{cases}$$

$Q_{\{v_i, v_j\}}$ est nulle quand les distances entre points de la triangulation et de la carte de tailles sont égales. Cette valeur est optimale. $Q_{\{v_i, v_j\}}$ est d'autant plus important que la position des points n'est pas en accord avec la carte de tailles. Comme pour les critères précédents, la qualité de l'adaptation est définie par le maximum du critère pour tous les points.

$$Q_a = \max(Q_{\{v_i, v_j\}}) \quad \{v_i, v_j\} \in K$$

Si l'on souhaite avoir une distribution de points ayant une distance entre points supérieure ou égal à 80% de la distance entre points spécifiée sur la carte de tailles, le critère de qualité doit être inférieur ou égal à 0.04.

4.5.4 Qualité bathymétrique

La qualité de la bathymétrie devrait normalement se mesurer en quantifiant le volume qui existe entre les surfaces $z = f(x, y)$ du Modèle Numérique de Terrain (la

réalité) et du maillage de calcul. Comme les deux maillages qui définissent ces surfaces ne sont pas communs, il est difficile de calculer ce volume. Une définition plus simple est utilisée afin de quantifier l'écart entre les deux représentations des fonds.

Soit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ avec $v_i = (x_i, y_i, z_i)$, les points du Modèle Numérique de Terrain et $f(x, y)$ la surface qui caractérise les fonds du maillage de calcul. La qualité de la représentation des fonds s'exprime comme l'écart selon l'axe z entre les points du Modèle Numérique de Terrain et la surface $f(x, y)$:

$$Q_{bath} = \max_{i=1,n} |f(x_i, y_i) - z_i|$$

Cette grandeur contrairement aux autres critères de qualité n'est pas adimensionnée.

4.5.5 Mailles surcontraintes

Outre ces critères de qualité, il ne doit pas exister de triangles surcontraints dans une triangulation. C'est à dire de triangles qui s'appuient sur trois points frontières (plus généralement sur trois points où des conditions sur l'écoulement sont imposées). Sur ces triangles l'écoulement n'est plus régi par les équations de Saint-Venant, mais est imposé par l'opérateur. Ces mailles doivent donc être recherchées, afin de s'assurer que la modélisation est régie par les équations. Ce problème est visible a posteriori, et est normalement résolu par un ajout de points ou un échange d'arêtes à la fin du processus adaptatif. Comme il a été présenté dans le chapitre 4.1.4, il est possible avec la technique de l'axe médian de définir la distance entre points dans le domaine pour éviter ce problème. Cependant cette technique n'est pas simple à mettre en oeuvre. Deux causes impliquent la création de triangles surcontraints. Soit la distance entre points spécifiée sur la carte de tailles est trop grande par rapport à la proximité des frontières, soit la triangulation de Delaunay a défini une mauvaise arête sur la distribution de points. Le deuxième cas se produit uniquement lorsque le triangle s'appuie sur trois points consécutifs de la même frontière et a un triangle voisin non contraint. Le premier cas concerne tous les autres triangles surcontraints existants. La figure 4.16 illustre un exemple qui permet de bien différencier les triangles surcontraints issus d'une carte de tailles mal définie de ceux issus de la triangulation de Delaunay. On devra après analyse des triangles surcontraints redéfinir localement la distance entre points sur la carte de tailles. Un autre processus adaptatif pourra ensuite être relancé sur cette carte de tailles. Cette solution peut être automatique et indépendante de l'opérateur. Néanmoins, il est évident que cette solution est moins efficace que l'utilisation de l'axe médian.

Ces deux solutions permettraient de définir une carte de tailles qui tienne compte de la proximité des frontières. Pour s'assurer que la triangulation finale ne contient pas de mailles surcontraintes, on n'aurait plus qu'à échanger des arêtes. En effet, les seuls triangles surcontraints qui subsisteraient seraient uniquement dus au critère de Delaunay. On peut également remarquer que tout échange d'arête doit être suivi par un déplacement des points, afin de répartir l'énergie et obtenir une meilleure qualité de la triangulation.

4.5.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté la technique adaptative qui permet de générer un maillage de calcul pour les domaines fluviaux et maritimes. Des critères hydrauliques et géométriques initialisent une carte de tailles. Cette carte de tailles spécifie la densité de points qui doit exister dans le maillage de calcul. Une triangulation de Delaunay contrainte est ensuite construite afin de minimiser l'écart entre la distribution de points spécifiée sur la carte de tailles et la répartition des points obtenue dans le maillage de calcul. La construction de ce maillage de calcul est faite en assurant que les frontières conservent une géométrie minimale et les points topologiquement importants. Ces deux propriétés permettent de s'assurer que le maillage final est cohérent avec l'étude définie par une triangulation des données bathymétriques et géométriques que l'on nomme Modèle Numérique de Terrain. Une analyse de la carte de tailles et du Modèle Numérique de Terrain (même triangulation) permet, avant adaptation, de détecter une mauvaise initialisation de la carte de tailles. On peut donc détecter que les points imposés par l'opérateur (les points durs) sont trop proches au vu de la carte de tailles ou que les points durs des frontières sont trop proches les uns des autres. Par contre, on ne peut anticiper toutes les créations des mailles surcontraintes. On doit analyser le maillage final pour en déduire quelle carte de tailles aurait dû être définie. Ce problème n'existerait pas si les critères qui initialisent la carte de tailles considéraient la proximité géométrique des frontières.

La bathymétrie est non seulement une information qui permet d'initialiser la carte de tailles, mais aussi une information reportée sur le maillage de calcul. On doit donc correctement la représenter dans le maillage de calcul. Dans le chapitre 3, cette information était considérée comme un critère adaptatif au même titre que les critères liés à l'écoulement. Cette technique adaptative, fondée sur un compromis entre une bonne représentation des fonds et une distribution de points en accord avec la carte de tailles, n'était pas compatible avec la construction d'un maillage de calcul ayant de bonne qualité (distorsion, ...). La bathymétrie était trop contraignante. On a donc

défini, dans ce chapitre, un processus adaptatif fondé sur une carte de tailles initialisée uniquement par des critères liés à l'écoulement. La bathymétrie est conservée grâce à des points ou des segments que l'on impose dans le maillage de calcul. Le choix des points ou polygones bathymétriques caractéristiques est fait par l'opérateur. Si ce choix n'est pas en accord avec la carte de tailles, le maillage final a une très mauvaise qualité. On pourrait, pour aider l'opérateur, utiliser au préalable une simplification de surface sur le Modèle Numérique de Terrain (cf chapitre 3). Cette simplification permettrait de définir automatiquement les points caractéristiques du terrain. Le problème est que ces méthodes considèrent uniquement la surface et ne tiennent pas compte des polygones (courbes de niveau, profils) incluses dans la triangulation. Cette simplification ne pourra donc définir quelles polygones doivent être reportées dans le maillage final. Plus simplement, pour informer l'opérateur sur les choix qu'il fait, une analyse de la carte de tailles permettrait avant adaptation de vérifier s'il n'impose pas des points trop proches au vu de la carte de tailles. Cette information permettrait de corriger rapidement ces choix.

La carte de tailles n'a pas été initialisée par des critères qui analysent la géométrie de l'étude. Elle ne considère donc pas la proximité des frontières, ce qui génère dans le maillage de calcul des mailles surcontraintes. Une analyse du maillage final permettrait de définir ce qu'aurait dû être la carte de tailles pour ne pas avoir de mailles surcontraintes. Après adaptation, il pourra évidemment subsister des mailles surcontraintes dans le maillage de calcul à cause du critère de Delaunay. Cependant, comme la position des points tiendrait compte de la proximité des frontières, il faudrait juste effectuer pour ces triangles un échange d'arêtes.

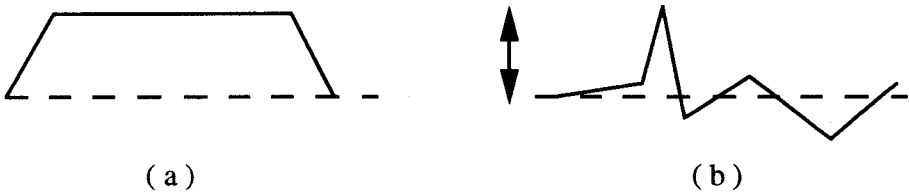


FIG. 4.5 - Limitation de l'écart maximal pour caractériser un bruit

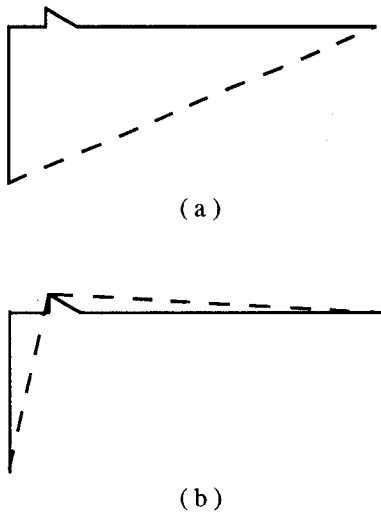


FIG. 4.6 - Influence du bruit : le coin est "cassé"

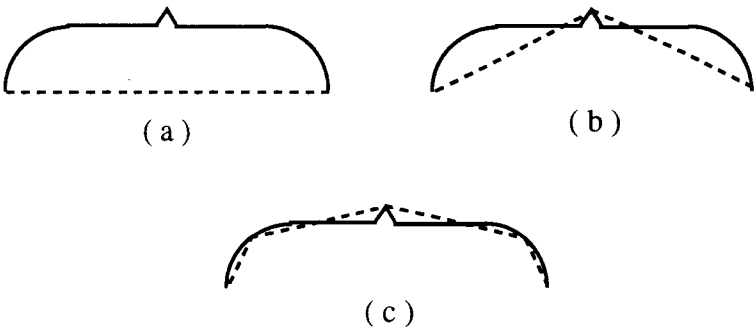


FIG. 4.7 - Influence du bruit: (a) état initial du processus (b) première étape (c) résultat final, une droite a été coupée à cause d'un bruit



FIG. 4.8 - Limite du critère de l'écart pour caractériser un bruit

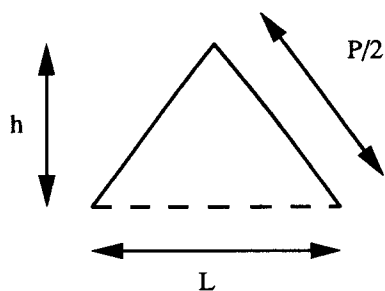


FIG. 4.9 - *L'écart est maximal pour un triangle isocèle*

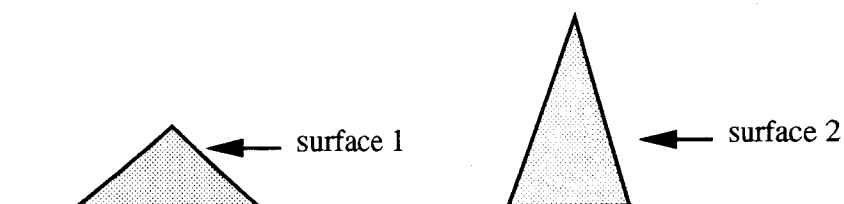


FIG. 4.10 - *La surface : les surfaces 1 et 2 sont égales*

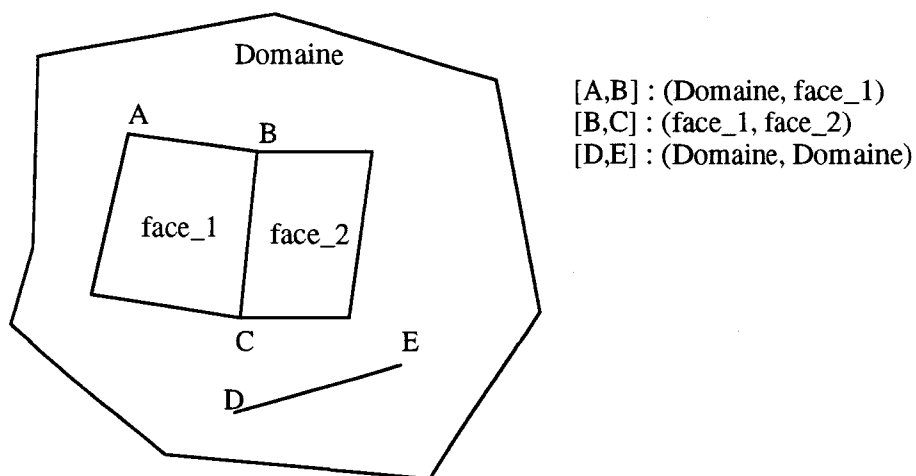


FIG. 4.11 - *Couple de faces associé à un segment*

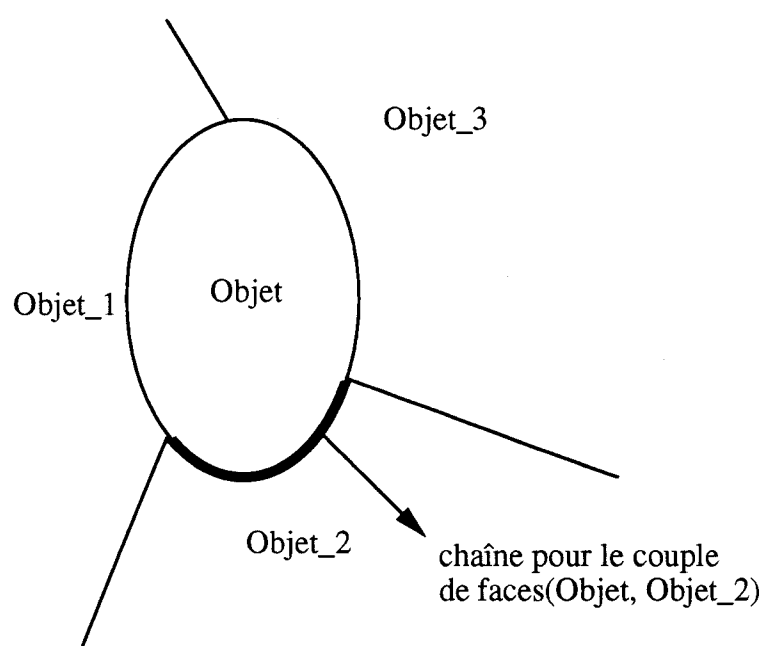


FIG. 4.12 - Définition d'une chaîne minimale topologique de segments

Etude de la Manche : port de Dunkerque

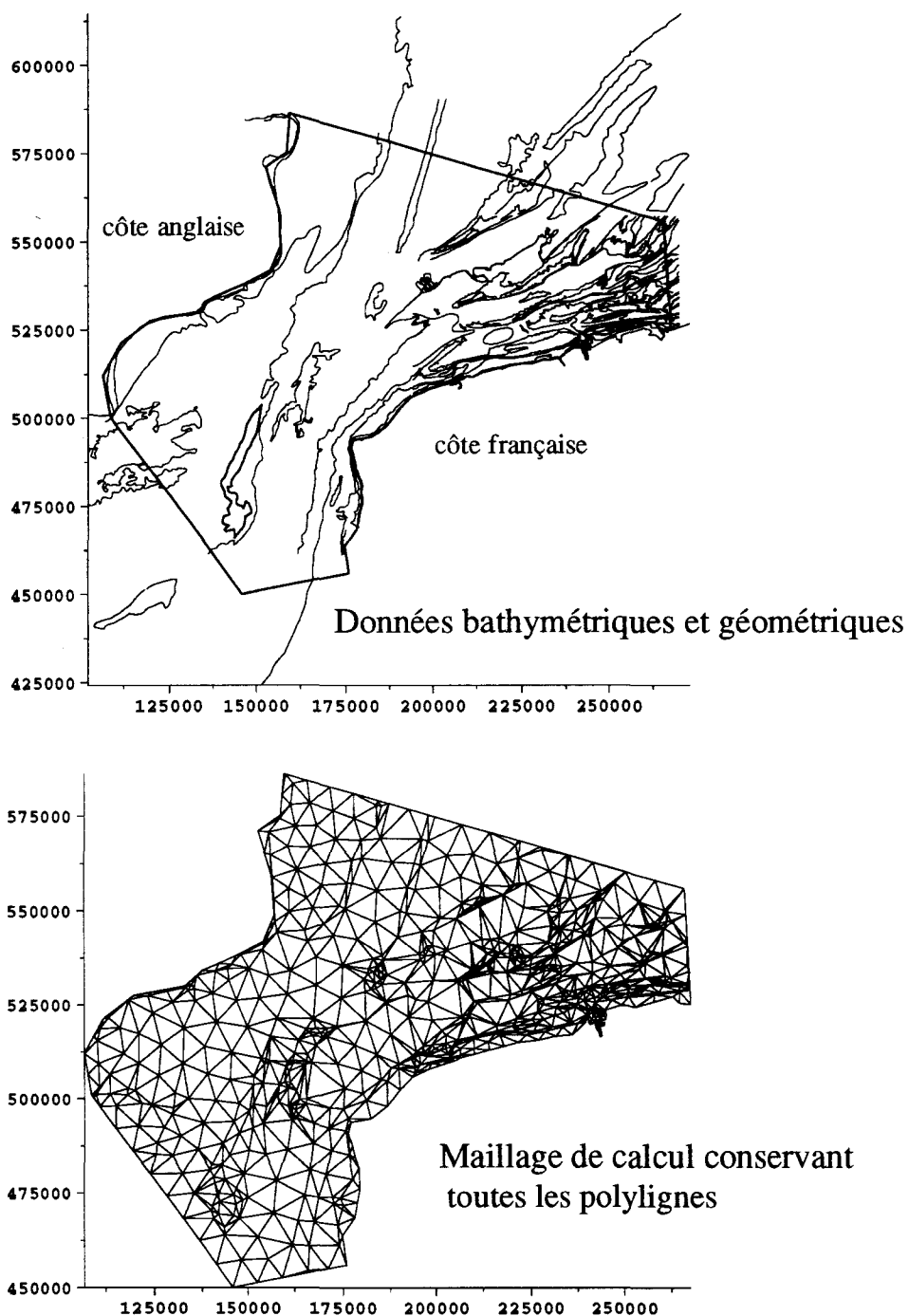


FIG. 4.13 - Influence des polygones du MNT reportées dans le maillage de calcul

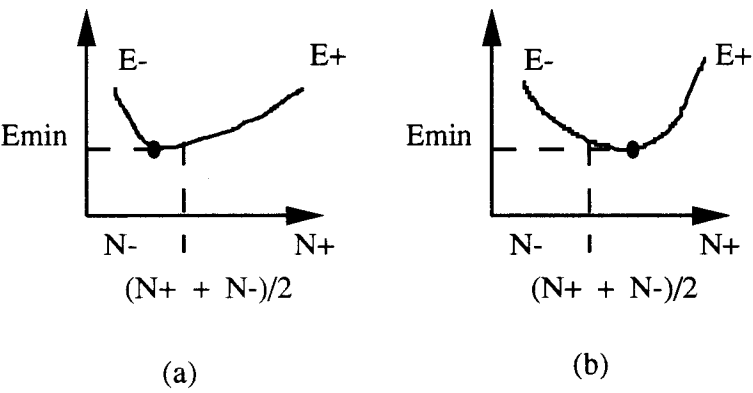


FIG. 4.14 - *Processus de dichotomie pour l'énergie globale : cas d'incertitude pour le choix des nouvelles bornes*

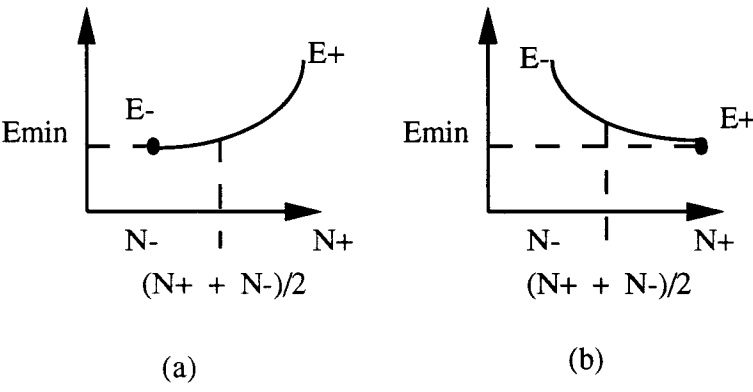


FIG. 4.15 - *Processus de dichotomie pour l'énergie globale : le choix des bornes est fait avec certitude*

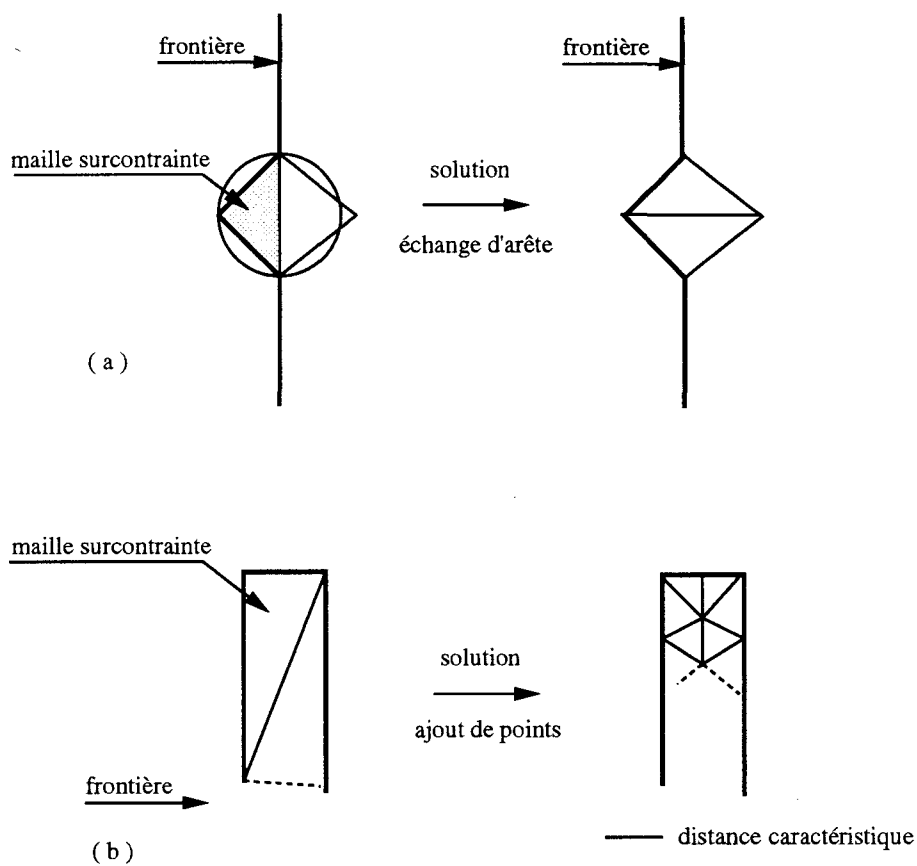


FIG. 4.16 - *Triangles surcontraints: (a) influence de Delaunay, (b) influence de la carte de tailles*

Chapitre 5

Analyse et résultats

Jusqu'à présent, un Modèle Numérique de Terrain, définissant la bathymétrie et la géométrie de l'étude, et une technique adaptative, pilotée par une carte de tailles, ont été introduits. Ce chapitre présente trois études du Laboratoire National d'Hydraulique de la D.E.R d'E.D.F. La première étude développe le processus de génération d'un maillage de calcul dans le cadre d'une géométrie et d'une bathymétrie complexes (la Manche). On introduira également lors de cette étude, une proposition de méthode pour la prise en compte de la propagation de la marée sur la discrétisation spatiale.

Pour les deux études suivantes, des simulations numériques du code de calcul TELEMAC sont réalisées sur les maillages de calcul générés par le processus adaptatif. Le but étant d'établir l'influence des critères adaptatifs sur les résultats de TELEMAC. Sur une étude fluviale, Sermenaz, les résultats du code TELEMAC sont analysés. L'influence du maillage étant limitée sur cette étude, on ne perçoit pas, ou très peu, l'amélioration de l'adaptation. Par contre, pour l'étude des marées sur la côte française, le critère lié à la linéarisation des équations de Saint-Venant améliore sensiblement les résultats et montre l'intérêt d'une bonne analyse de la bathymétrie. Pour cette étude il faut combiner les critères liés aux ondes de gravité et à la linéarisation des équations de Saint-Venant pour obtenir des résultats satisfaisant.

Les études qui sont présentées ont une géométrie et une bathymétrie complexes et ne sont donc pas définies en initialisant la carte de tailles avec un seul critère adaptatif. Des études ayant une bathymétries et une géométrie complexes, contrairement à une étude à géométrie simple validant un seul critère, permettent de s'assurer de la dépendance des résultats numériques avec le maillage de calcul. Cette hypothèse semble être confirmée par l'étude de Sermenaz où deux maillages sensiblement différents donnent des résultats de calcul TELEMAC pratiquement identiques. Il aurait donc été difficile de valider correctement chaque critère.

5.1 Etude de la Manche autour du port de Dunkerque

Les centrales nucléaires implantées sur le littoral en Manche Est et Sud de la Mer du Nord subissent fréquemment au printemps (avril-mai) des problèmes de colmatage des filtres du système de refroidissement dus à l'arrivée massive de cténaires (groseilles de mer), sortes de méduses appelées **Pleurobrachia pileus**. Les colmatages peuvent entraîner des arrêts d'urgence des tranches très coûteux comme en 1986, 1987 et 1993 à Gravelines.

Depuis 1988, un ensemble de mesures en nature, expérimentations et études a été réalisé par la DER à la demande de la Direction de l'Équipement et la Direction de la Production Thermique afin d'améliorer la connaissance des mécanismes biologiques et hydrométéorologiques concernés, celles-ci devant déboucher, à terme, sur une méthode de prévision des arrivées massives de ces organismes.

Un rapport, [69], présente l'application du modèle hydrodynamique TELEMAC 2D, développé par le Laboratoire National d'Hydraulique, aux déplacements des "groseilles" sous l'action des courants de marée, en les considérant comme des flotteurs inertes. L'exploitation du modèle TELEMAC pour comprendre et prévoir les déplacements des groseilles de mer a fourni des informations intéressantes mais limitées. Dans les conditions des incidents des 16/17 Mai 1993 à la centrale de Gravelines, les simulations de déplacements des flotteurs réalisées avec le code TELEMAC 2D indiquent que les groseilles arrivées à la centrale le 16 au matin proviennent probablement de la zone côtière située à quelques kilomètres de la centrale. L'étude a également montré que le maillage n'était pas assez fin pour bien représenter la courantologie côtière. De plus, les éventuels phénomènes tridimensionnels n'ont pas été représentés. Une deuxième phase de cette étude, avec un maillage plus détaillé mais d'emprise plus restreinte couvrant la zone entre Boulogne et Dunkerque, doit être réalisée en vue d'utiliser la version tridimensionnelle de TELEMAC.

La construction d'un maillage de calcul entre Boulogne et Dunkerque, répondant aux besoins de l'étude va être présentée. La construction du Modèle Numérique de Terrain et tout particulièrement la définition de la carte de tailles seront détaillées. Comme la modélisation numérique avec le code TELEMAC 3D n'a pas été réalisée, seule l'analyse du maillage de calcul est présentée.

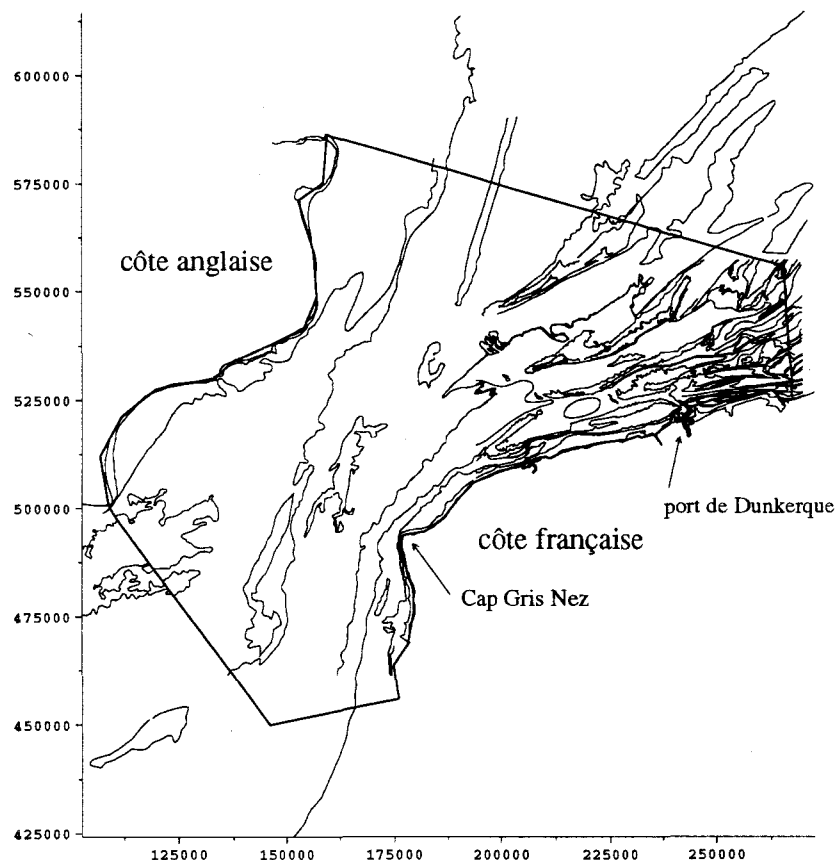
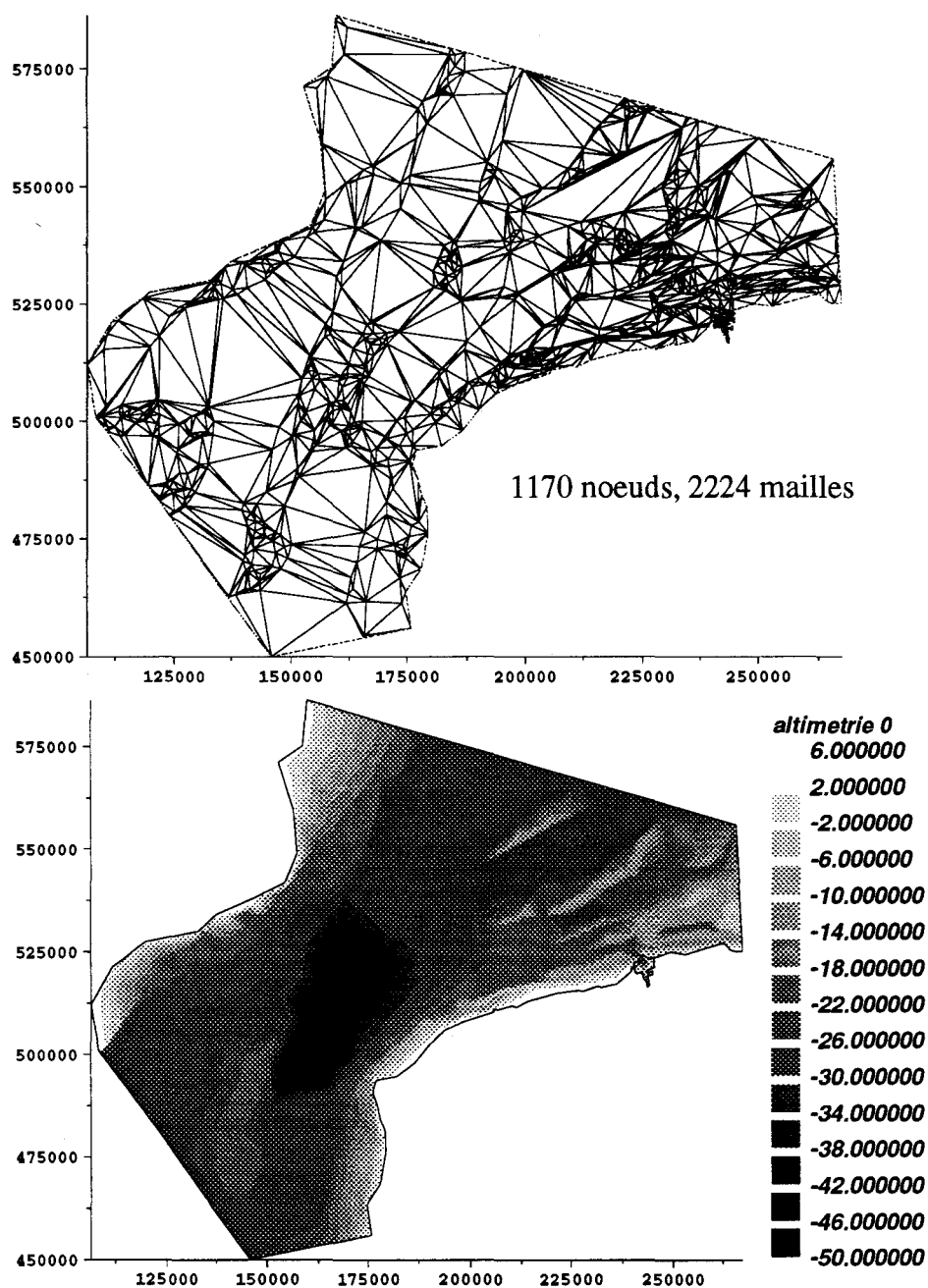


FIG. 5.1 - Données bathymétriques et géométriques autour du port de Dunkerque

5.1.1 Le Modèle Numérique de Terrain

Les données bathymétriques et géométriques ont été numérisées sur des cartes marines grâce au logiciel SINUSX. Ces informations sont sous forme de points et de polygones, figure 5.1. Les frontières liquides qui caractérisent la limite du domaine maritime n'ont pas été projetées sur les fonds de l'étude pour obtenir la bathymétrie sur ces portions de la frontière du domaine. Les intersections existant entre ces frontières liquides et les courbes isovaleurs permettent à la triangulation de Delaunay Contrainte Hiérarchisée de définir une interpolation des points d'intersection cohérente avec le terrain. Le maillage de ces données bathymétriques constitue notre Modèle Numérique de Terrain (cf. figure 5.2).

FIG. 5.2 - *Modèle Numérique de Terrain*

5.1.2 La carte de tailles

La simulation du déplacement des groseilles de mer nécessite la représentation sur le modèle des courants de marée d'une part, et des dérives des masses d'eau d'autre part, ce deuxième facteur étant lié à la fois à la marée et aux conditions météorologiques. Un rappel de ces phénomènes est présenté ci-après.

5.1.2.1 La marée

La marée dans la Manche résulte de la propagation sur le plateau continental des ondes générées très au large en grande profondeur, et de leurs réflexions sur les côtes. L'onde de marée se décompose en une somme d'ondes sinusoïdales élémentaires de pulsations différentes. De précédentes études [70], ont montré que les composantes les plus importantes en terme d'amplitude qu'il convient de prendre en compte pour obtenir une représentation réaliste de la marée sont les suivantes :

- M_2 : semi-diurne; onde lunaire; période $12h25'14''$
- S_2 : semi-diurne; onde solaire moyenne; période $12h$
- N_2 : semi-diurne; elliptique lunaire majeure; période $12h39'30''$
- N_2 : quart-diurne; 1^{ère} harmonique de M_2 ; période $6h12'37''$

L'élévation de la surface libre en un point s'écrit alors :

$$s(t) = a_{M_2} \cos(\omega_{M_2} + \phi_{M_2}) + a_{S_2} \cos(\omega_{S_2} + \phi_{S_2}) + a_{N_2} \cos(\omega_{N_2} + \phi_{N_2}) + a_{M_4} \cos(\omega_{M_4} + \phi_{M_4})$$

avec :

a : amplitude

ω : pulsation

ϕ : phase

La simulation, sur modèle, de la marée nécessite donc la connaissance aux frontières du domaine de calcul des amplitudes et phases de ces composantes. Ces valeurs peuvent être obtenues par un calcul préalable sur un domaine de très grande emprise pour lequel les conditions aux limites sont elles mêmes tirées d'abaques ou de mesures en nature. Dans ce type de modèle, d'éventuelles erreurs ou imprécisions sur les conditions aux limites n'ont qu'une faible incidence sur les résultats dans la zone d'intérêt. Dans le §5.3, la modélisation de l'onde M_2 a été réalisée.

5.1.2.2 La dérive lagrangienne

Les courants de marée en Manche et au Sud de la mer du Nord ont un caractère essentiellement alternatif. Cependant, une particule lâchée en un point A et à l'instant t ne revient pas à la même position après une marée complète. Le vecteur d'origine A ayant pour extrémité le point d'arrivée est appelé dérive lagrangienne au point A et à l'instant t sur une marée. La vitesse de dérive lagrangienne est obtenue par division par la période de la marée.

Cette dérive, qui intervient dans le devenir d'un traceur quelconque (concentration de groseilles de mer par exemple dans le cas présent), est fonction de multiples facteurs dont :

- l'hétérogénéité spatiale des courants, le trajet d'une particule n'étant pas identique dans les deux sens du déplacement (flot et jusant).
- la périodicité globale des marées, somme de fonctions sinusoïdales du temps est très supérieure à celle d'une marée. Ainsi deux marées consécutives n'ont pas le même coefficient de marée et ne provoquent donc pas des dérives identiques selon que les coefficients sont croissants (revif) ou décroissants (déclin).
- un autre terme déterministe dû à l'interaction des composantes de la marée.
- enfin une partie aléatoire liée aux conditions météorologiques : vents et gradients de pression, ces deux phénomènes étant par ailleurs corrélés.

Les trois premiers phénomènes sont bien représentés dès lors que la marée est correctement reproduite. Les conditions météorologiques interviennent à deux échelles différentes : à très grande échelle (plusieurs centaines de kilomètres), par leur influence sur les variations du niveau moyen d'une part (la cote de la mer réagissant en baromètre inverse des variations de pression), plus localement en créant des circulations qui peuvent être bidimensionnelles ou tridimensionnelles d'autre part.

5.1.2.3 Conditions aux limites

La prise en compte simultanée de l'ensemble des facteurs liés à la marée ou à la météorologie nécessite la mise en oeuvre successive de deux modèles distincts de grande emprise. Ces deux études permettent de définir des conditions aux limites adéquates sur le maillage de calcul.

Pour l'étude de la marée, le modèle utilise les amplitudes et les phases des composantes M_2 , S_2 , N_2 et M_4 fournies par un modèle empirique sur un domaine défini dans le §5.3.

Ce modèle [70] a fait l'objet d'une validation fine sur de nombreuses données du Service Hydrographique de la marine.

La prise en compte des effets météorologiques considère les informations météorologiques du modèle PERIDOT (météo france) et une marée aux limites simplifiée par sa seule composante M_2 , d'amplitude modulée par le coefficient de marée. Cette étude définit le niveau moyen de la surface libre.

5.1.2.4 Définition de la carte de tailles

La simulation du déplacement des groseilles de mer nécessite la représentation des courants de marée et des dérives de masses d'eau, ce deuxième facteur étant lié à la fois à la marée et aux conditions météorologiques. L'onde de marée est donc un phénomène important à considérer pour cette étude. Le maillage de calcul devra donc être construit afin que les mailles aient un nombre de Courant de propagation homogène : $c\Delta t/\Delta x$, avec c la célérité de la propagation de l'onde, Δt l'incrément temporel, Δx l'incrément spatial. Comme il a été introduit lors de l'analyse des ondes de gravité, §4.2.2, la célérité de l'onde est proportionnelle à la hauteur d'eau, $c = \sqrt{g.h}$. Pour que la courantologie côtière soit suffisamment bien modélisée, on utilise des points sources entre le Cap Gris Nez et le port de Dunkerque (cf. figure 5.1). C'est de cette zone que semblent provenir les groseilles de mer du port de Dunkerque pour la simulation souhaitée.

Avant de préciser ces critères adaptatifs, on rappelle que sur le Modèle Numérique de Terrain les points durs garantissent une forme minimale géométrique et les points topologiquement importants. Une simplification de courbes définit les points durs géométriques alors que les points durs topologiques sont établis lors de la planarisation du graphe du Modèle Numérique de Terrain. Sur la figure 5.3, les formes minimales géométriques des polygones du Modèle Numérique de Terrain sont représentées. Les points durs topologiques sont les points d'intersections entre polygones qui seront reportés dans le maillage de calcul. Comme il a déjà été mentionné dans le §4.3.3, le choix des polygones à reporter dans le maillage de calcul dépend de la carte de tailles. Si les polygones que l'on impose sont trop proches au vu de la carte de tailles, le maillage de calcul peut être de mauvaise qualité (cf figure 5.4).

Sur la carte de tailles, qui est également le Modèle Numérique de Terrain, on définit la distance entre points. L'un des critères est lié aux ondes de gravité.

Discrétisation du maillage cohérente avec la marée

L'étude du transport des groseilles de mer se base principalement sur les courants issus des marées. Le critère lié aux ondes de gravité, §4.2.2, rentre dans le cadre de ce type

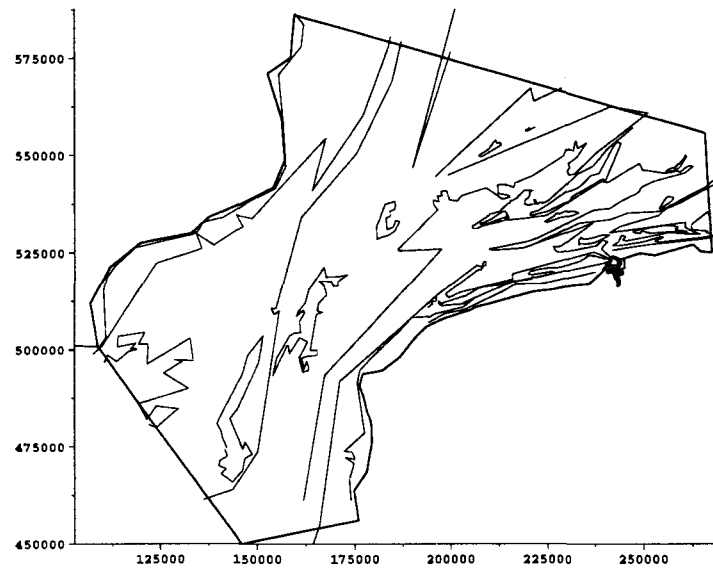


FIG. 5.3 - *Représentation minimale géométrique pour chacune des polygones*

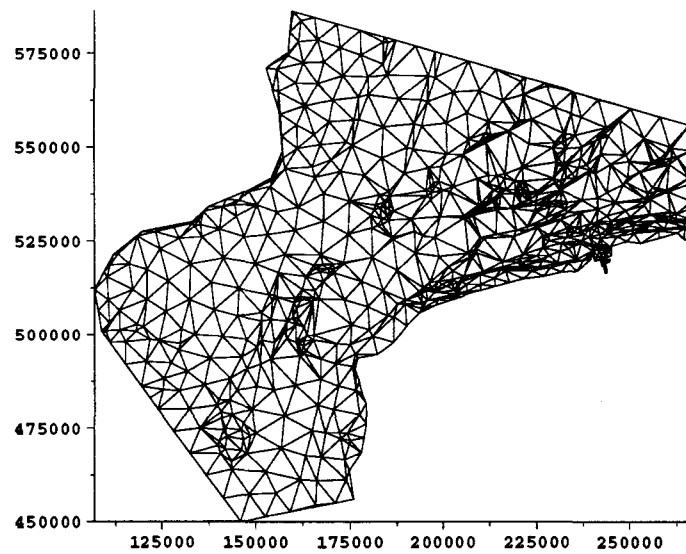


FIG. 5.4 - *Interférence entre la carte de tailles et les polygones imposées*

d'étude. Celui-ci définit une distance entre points afin que le nombre de Courant soit proche de l'unité. L'expression de la distance entre points est la suivante :

$$L = \Delta t \sqrt{g \cdot (h + h_0)}$$

avec :

Δt : un incrément temporel,

h : la hauteur d'eau,

h_0 : une hauteur garantissant que $L > L_0$, où L_0 est une distance minimale fixée.

Sur la figure 5.5, on voit que le maillage, obtenu en fixant les critères ci-dessus, suit bien l'évolution de la hauteur d'eau. L'ondulation des fonds proches du port de Dunkerque ainsi que la fosse au large de la côte influencent comme prévu la taille des mailles. Les critères de qualité du maillage, d'après les définitions du §4.5, sont les suivantes :

L'équilatérarité des mailles est définie par :

$$Q = \frac{R}{2r}$$

R représente le rayon du cercle circonscrit au triangle et r le rayon du cercle inscrit. La qualité d'une triangulation s'exprime comme le maximum de ce critère sur chacun de ces triangles. Pour la triangulation de la figure 5.5, la valeur maximale du critère portant sur l'équilatérarité des mailles est 7.23. Sur la figure 5.6, une surface colorée représente le critère pour tous les triangles. Lorsque que les triangles ont une valeur inférieure à cette valeur limite, 2, la triangulation est considérée comme étant de bonne qualité. Sur cette même figure un deuxième graphe montre la valeur maximale de ce critère d'équilatérarité dans une zone précise. Le triangle, d'équilatérarité 7.23, appartient au port de Dunkerque et est le résultat de la non prise en compte de la géométrie de la digue au niveau du port par le critère bathymétrique.

La progression des tailles de mailles est un autre critère renseignant la qualité de la triangulation. Il compare entre deux triangles voisins du domaine la progression de leur surface.

La valeur de ce critère pour deux triangles voisins de surface S_1, S_2 est :

$$Q_{prog} = \max(|\frac{S_1}{S_2} - 1|, |\frac{S_2}{S_1} - 1|)$$

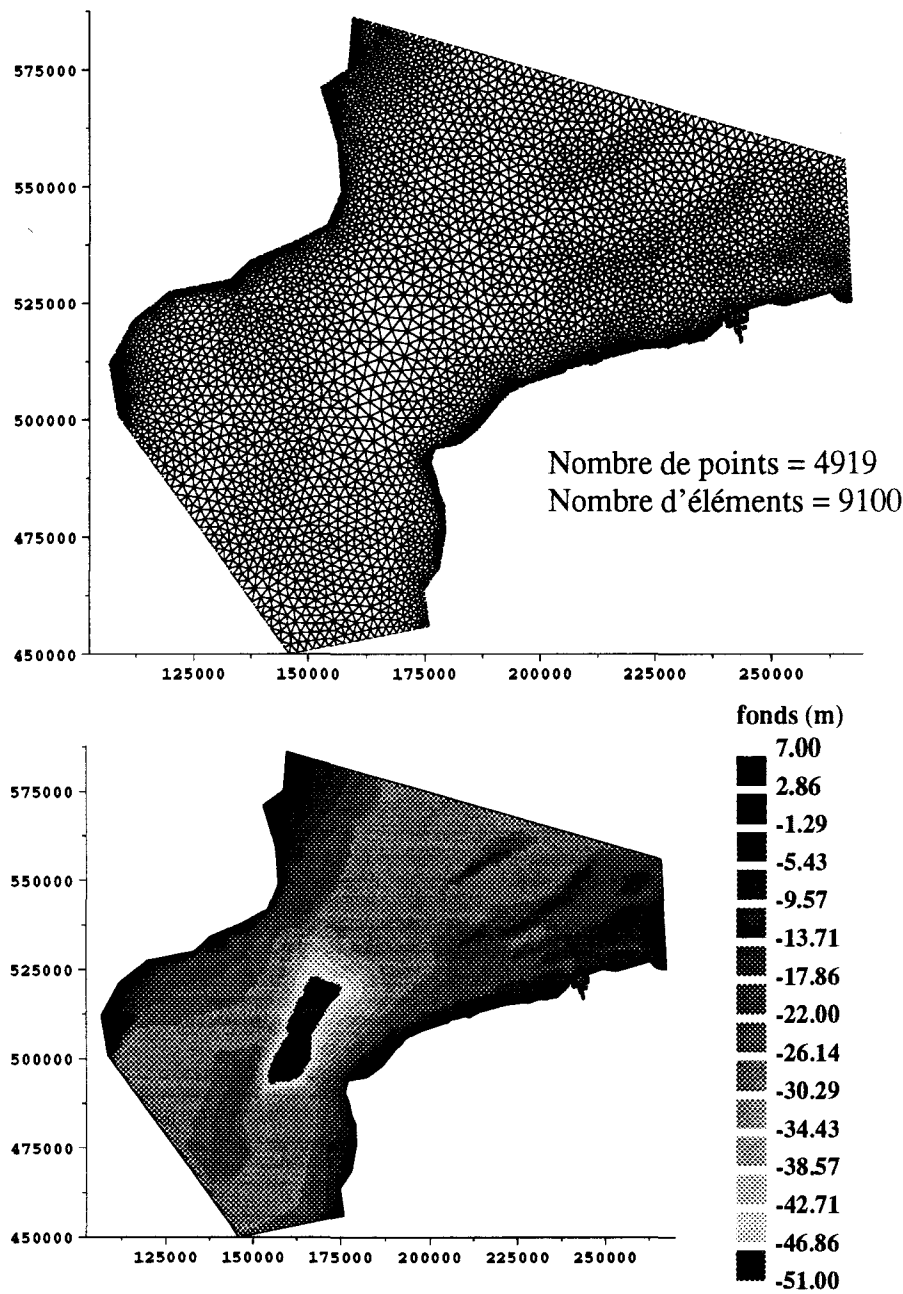


FIG. 5.5 - *Maillage de calcul et bathymétrie*

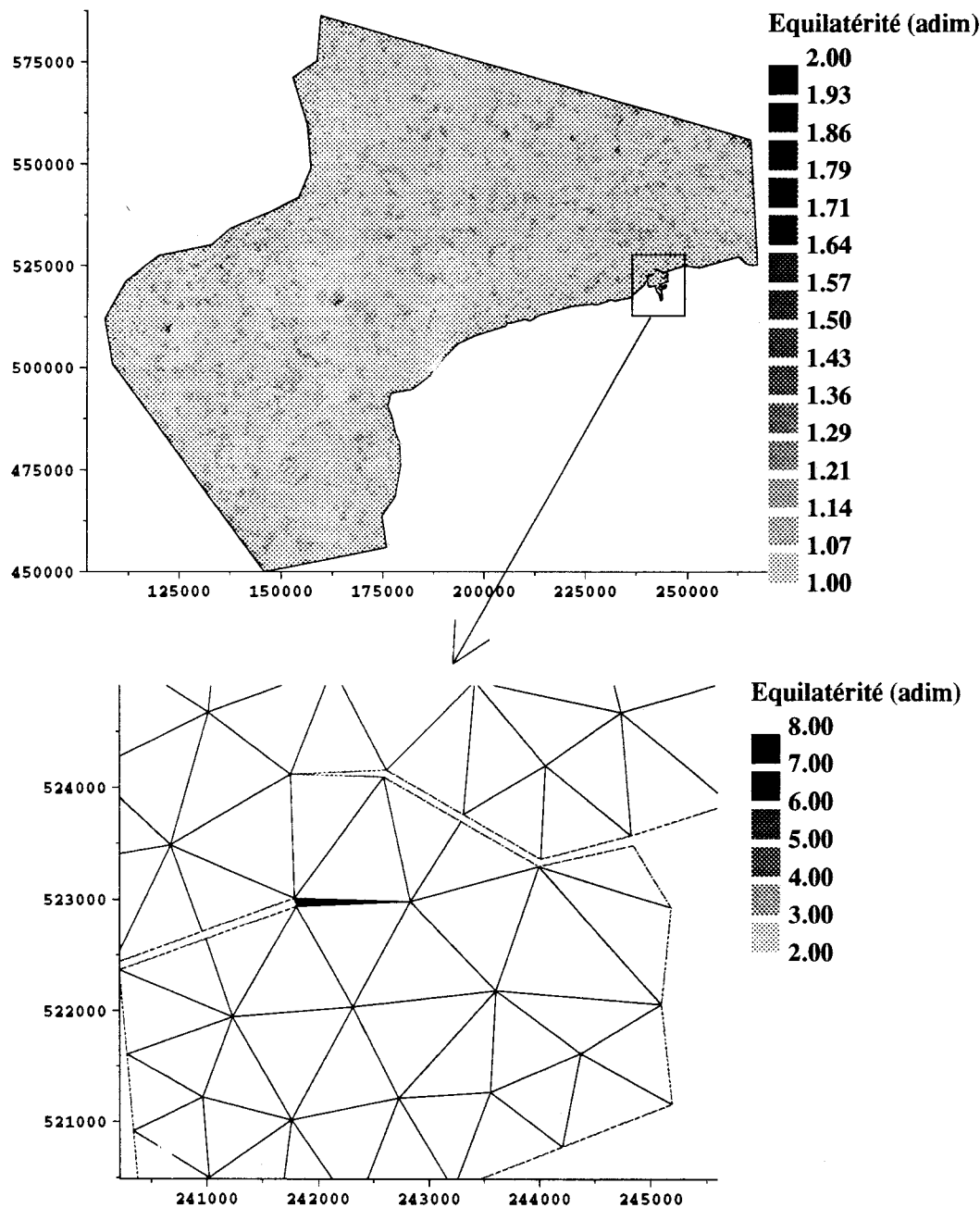


FIG. 5.6 - *Equilat rit  des mailles : $Q = \frac{R}{2r}$*



FIG. 5.7 - *Progression des tailles de mailles* : $Q = \max(|\frac{S_i}{S_j} - 1|)$

La valeur idéale est donc 0 et cette expression permet d'avoir la même expression pour ces deux triangles. Comme pour le critère précédent, la qualité d'une triangulation est établie en considérant la valeur maximale existant sur le maillage. Cette valeur pour le maillage considérée est égale à 13.6. Sur la figure 5.7, une surface colorée représente les valeurs du critère de Progression de la taille des mailles entre 0 et 1 pour tous les triangles. Les valeurs limites, $[0, 1]$, ne doivent normalement pas être dépassées si l'on souhaite définir une triangulation de qualité. Le triangle ayant la valeur du critère maximal appartient pour la même raison que précédemment au port de Dunkerque.

La *qualité de l'adaptation* est également mesurée. Elle est définie comme le maximum de l'énergie sur les arêtes de la triangulation. Cette énergie est égale au carré de l'écart relatif entre la distance souhaitée entre deux points, exprimée sur la carte de tailles, et la distance entre points existant dans le maillage. Soit une arête $\{v_i, v_j\}$ de la triangulation, l'énergie s'exprime :

$$\begin{cases} Q_{\{i,j\}} = \left(\frac{\|v_i v_j\| - L_{v_i}^{v_j}}{L_{v_i}^{v_j}} \right)^2 \\ L_{v_i}^{v_j} = \frac{\mathcal{F}(v_i) + \mathcal{F}(v_j)}{2} \end{cases}$$

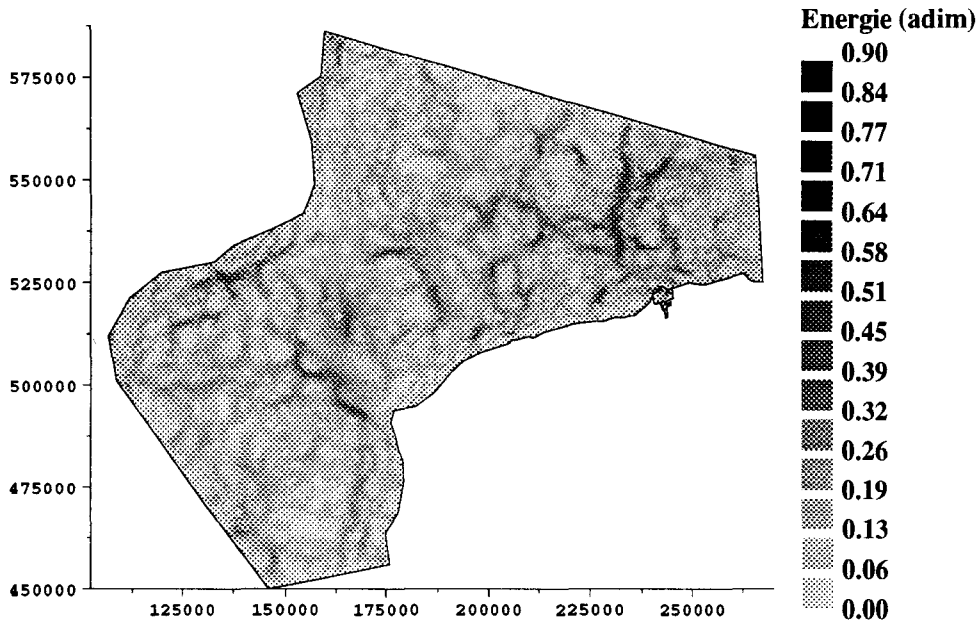


FIG. 5.8 - *Ecart de la distribution de points entre la carte de tailles et le maillage de calcul*

la qualité de la triangulation adaptative K est donc :

$$Q_a = \max(Q_{\{i,j\}}) \quad \{i,j\} \in K$$

Pour le maillage considéré cette grandeur est égale à 0.83.

La figure 5.8 montre une visualisation de ce critère pour le maillage de calcul. Pour les mêmes raisons que précédemment la valeur maximale du critère se situe dans le port de Dunkerque. On remarque que la répartition énergétique est établie. 89% des points ont une énergie inférieure à 0.18 ce qui signifie que la distance entre points est égale à la distance spécifiée sur la carte de tailles à 60%.

Le processus de génération du maillage donne pour le cas adaptatif bidimensionnel l'adaptation suivante :

Nombre de points initial : 5662, dont 4926 points 2D

énergie	nombre de points
736.76	5484
528.29	5001
526.0	4921
571.21	4792
554.61	4856
543.44	4888
539.81	4904
536.59	4912
535.85	4916
534.07	4918

Les quatre premières itérations détruisent les points qui ont une distance entre points sur la carte de tailles supérieure à la distance entre points existant dans le maillage. Ces étapes permettent d'éviter les minima locaux. Ayant la borne maximale et minimale du nombre de points, la recherche du nombre optimal de points est obtenue par dichotomie. La première étape est incontournable car l'évolution de l'énergie en fonction du nombre de points est très irrégulière. Ceci vient principalement de la forte dépendance de l'expression énergétique avec la connectivité. Pour un petit déplacement de point, une retriangulation, bien qu'elle soit de Delaunay, peut amener une évolution notable de l'énergie. La deuxième étape considère que localement, l'énergie est régulière et évolue de façon parabolique. Cette étape pourra être améliorée, en considérant localement une évolution parabolique de l'énergie pour déterminer le nombre optimal de points.

Sur la figure 5.9, on visualise *la qualité de la représentation des fonds* sur le maillage de calcul. L'écart altimétrique entre le Modèle Numérique de Terrain (la référence) et le maillage de calcul est de 20 mètres et se situe au niveau du port de Dunkerque. Cette dégradation altimétrique, relativement importante, provient du critère utilisé. La distance entre points est proportionnelle à la hauteur d'eau et ne tient pas compte du gradient important des fonds existant dans le port. La distance entre points est donc plus importante qu'il ne faudrait pour avoir une bonne représentation des fonds. Il faudrait, localement diminuer la distance entre points et respecter certaines courbes isovalues existant dans le port. On se rends compte ici de la limite d'une adaptation entièrement automatique, car on ne peut pas spécifier localement des critères différents.

Sur la figure 5.10, *les triangles surcontraints* du maillage de calcul sont répertoriés. Ces triangles s'appuient sur trois points dont les grandeurs sont imposées par des conditions

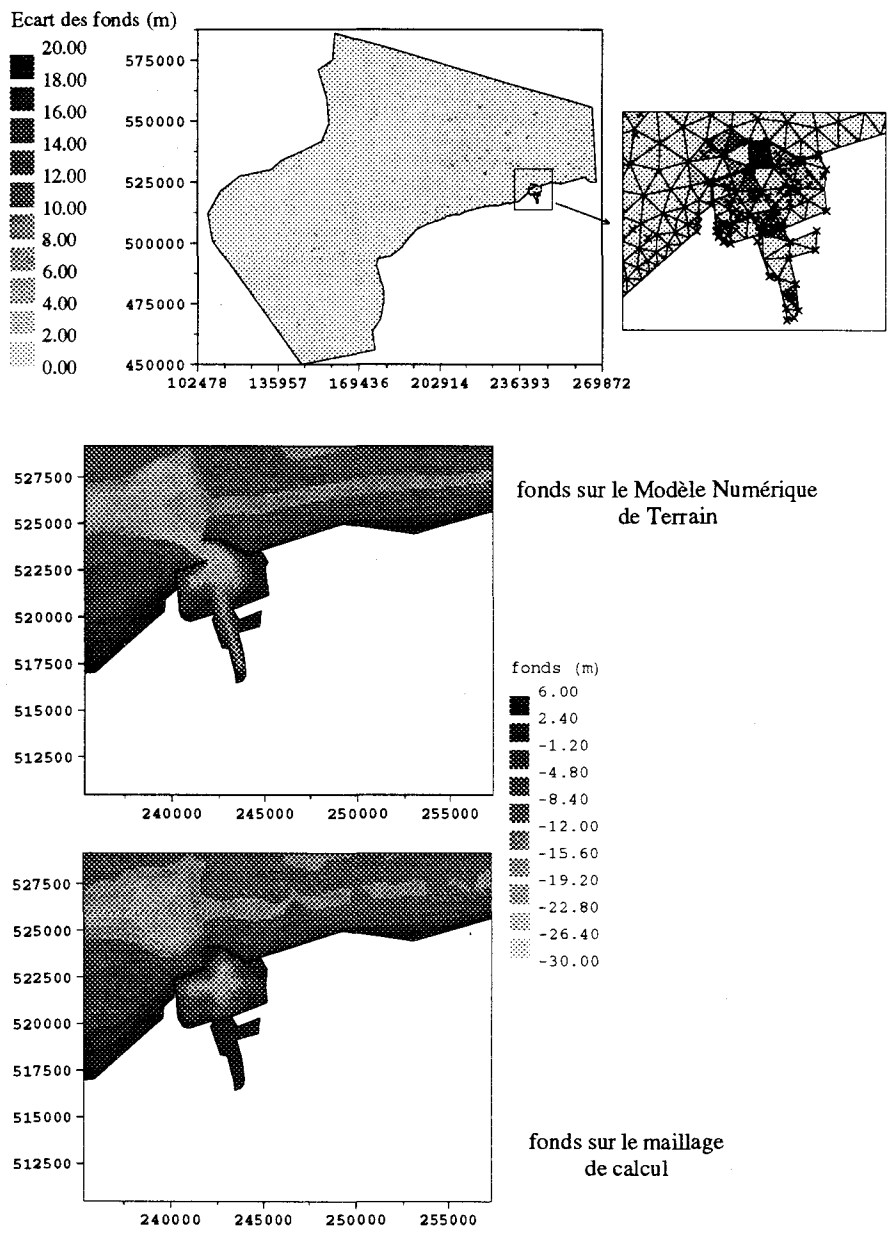


FIG. 5.9 - Ecart bathymétrique entre le maillage de calcul et le Modèle Numérique de Terrain

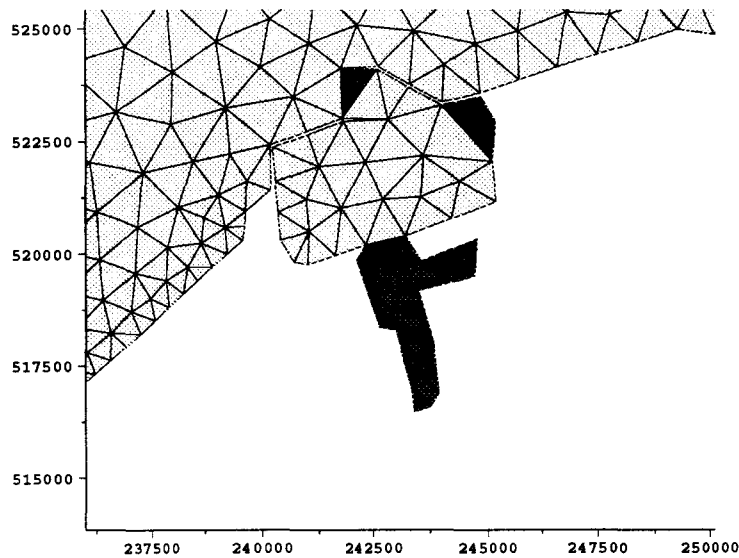


FIG. 5.10 - *Visualisation des mailles surcontraintes*

aux limites. L'écoulement dans ces mailles n'est donc plus régi par les équations de Saint-Venant, ce qui peut modifier les caractéristiques générales de l'écoulement. Ici, les mailles surcontraintes se situent aux frontières du domaine et tout particulièrement dans le port de Dunkerque. Comme il avait été mentionné dans le §4.5.5, ces mailles existent à cause d'une mauvaise initialisation de la carte de tailles et non pas à cause du choix de l'arête dans la triangulation de Delaunay.

Discrétisation du maillage en accord avec la courantologie proche des côtes

Pour que la courantologie côtière soit suffisamment bien modélisée, on utilise des points sources entre le Cap Gris Nez et le port de Dunkerque. C'est de cette zone que semblent provenir les groseilles de mer du port de Dunkerque pour la simulation souhaitée. Les points sources, §4.2.4, sont des points qui spécifient localement sur la carte de tailles la discrétisation souhaitée. L'évolution de la distance entre points augmente linéairement ou exponentiellement lorsque que l'on s'éloigne de ces points. Pour obtenir une discrétisation suffisante, 35 points sources ont été définis le long de la côte française. La distance entre points, est égale à 50 mètres pour une zone côtière de 15 kilomètres jusqu'à l'entrée du port de Dunkerque, et à 500 mètres pour les autres points. La progression de la distance entre points, lorsque l'on s'éloigne de ces points sources, est linéaire et est égale à 10% ou 15% suivant les points. Le maillage de calcul (figure 5.11) illustre l'influence de ces points sources sur la discrétisation finale.

La discrétisation de la carte de tailles influence la valeur de la distance entre points sur la carte de tailles. Si le point source n'appartient pas à la carte de tailles, la distance entre points que l'on obtient sur la carte de tailles peut ne pas être en rapport avec ce qui a été fixé. Soit un triangle de la carte de tailles tel que le point source corresponde au centre de gravité de celui-ci. Soient l_0 la distance entre points au point source et l_1, l_2, l_3 les valeurs aux points du triangle de la carte de tailles pour une progression linéaire par rapport au point source. Si l'on fait une interpolation sur la carte de tailles de la distance entre points pour le centre de gravité du triangle considéré, la valeur de la distance entre points est fonction de l_1, l_2, l_3 et peut-être très éloigné de l_0 . Il faudra donc veiller à ce que tout point source corresponde à un point de la carte de tailles (donc du Modèle Numérique de Terrain).

Lissage de la carte de tailles

La distance entre points spécifiée sur la carte de tailles pilote la génération du maillage final. Afin de limiter les gradients de la distance entre points sur la carte de tailles et donc le nombre de triangles de mauvaise qualité dans le maillage final, la carte de tailles après définition est lissée. Le critère de lissage (cf. 4.2.5) impose que l'évolution de la distance entre points ne dépasse pas une pente donnée. Pour notre étude, cette pente est égale à 1%.

5.1.3 Le maillage de calcul

La génération du maillage de calcul se base sur les critères liés aux ondes de gravité pour les courants de marée et des points sources pour les courants côtiers. Le maillage de calcul a été obtenu pour un critère lié aux ondes de gravité égale à : $l_0 = 7500$, $\Delta t = 300$ et des points sources définis comme ci-dessus. Le maillage de calcul est présenté sur la figure 5.11. La qualité de ce maillage est définie par :

- le critère d'équilatérarité des mailles (1.80), la figure 5.12 illustre ce critère pour tous les triangles du maillage de calcul.
- le critère de progression des tailles de mailles (1.60), la figure 5.14 illustre ce critère pour tous les triangles du maillage de calcul.
- le critère adaptatif (0.58), la figure 5.13 illustre ce critère pour tous les points du maillage de calcul. La valeur maximale intervient entre deux points appartenant à la forme géométrique minimale et est donc due à une mauvaise initialisation de la carte de tailles.

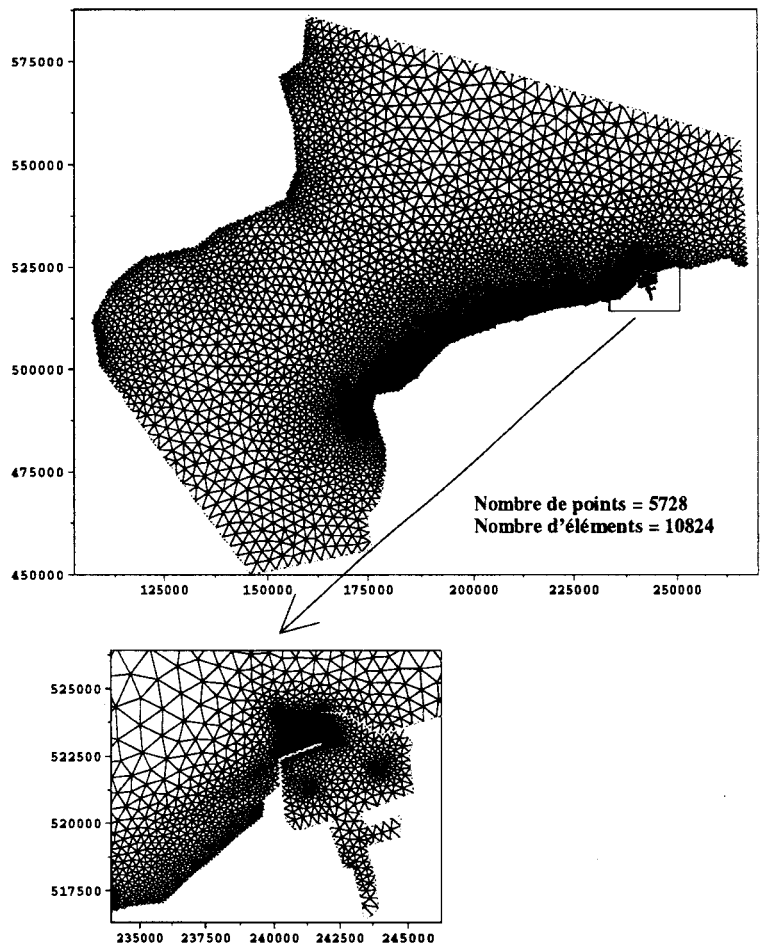


FIG. 5.11 - Visualisation du maillage de calcul

- le critère portant sur la représentation des fonds, la figure 5.16 illustre l'écart entre l'altimétrie définie sur le Modèle Numérique de Terrain et sur le maillage de calcul. L'écart maximum (17m) existe car la taille des mailles ne suit pas l'ondulation des fonds. Les courbes de niveau établissant cette évolution du fond n'ont pas été reportées dans le maillage. Si celles-ci étaient imposées dans le maillage on aurait des problèmes de distorsion du même type que sur la figure 5.4. Il faudrait imposer les courbes de façon partielles ou diminuer la distance entre points.

Les mailles surcontraintes sont représentées sur la figure 5.14. Ce maillage a été réalisé en prenant en compte les conclusions d'une première étude sur les groseilles de mers [69]. Ce travail a permis de mettre en avant les problèmes liés à la digitalisation des données. L'intersection de courbes de niveau se produit plus souvent que l'on ne croit. Ceci vient du fait que la digitalisation peut être faite sur plusieurs cartes et qu'une même ligne de niveau peut être digitalisée plusieurs fois. De plus, cette étude a également permis de tester le comportement des critères et le processus adaptatif. A ce jour, le calcul TELEMAC portant sur le déplacement des groseilles de mers dans la Manche n'a pas encore été effectué.

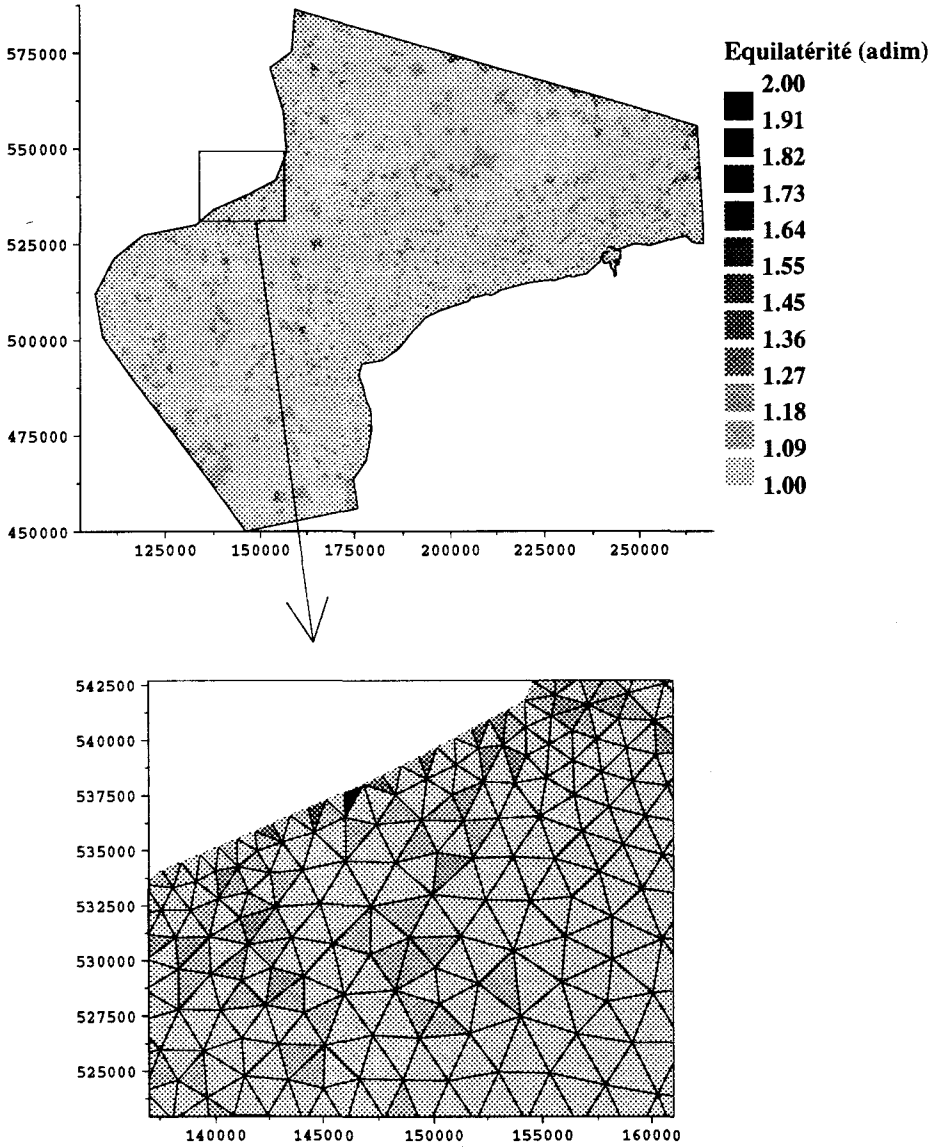


FIG. 5.12 - *Equilat rit  des mailles : $Q = \frac{R}{2r}$*

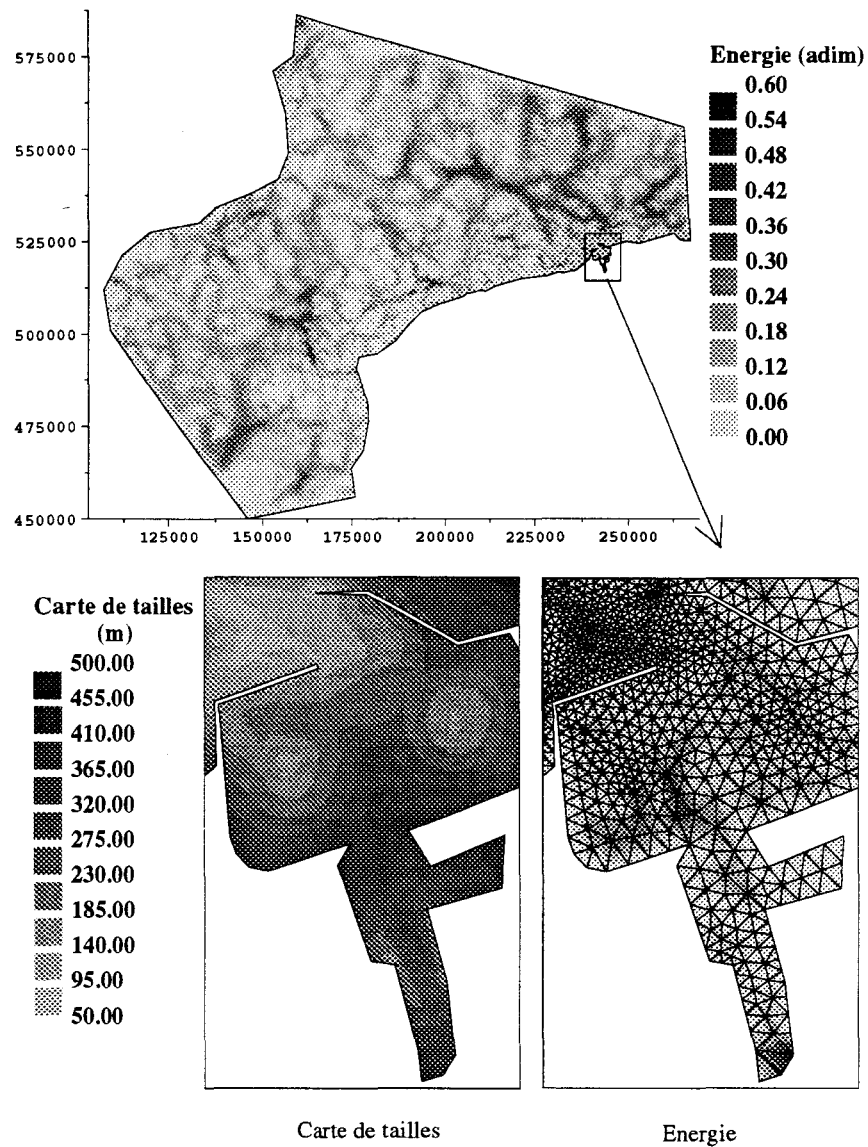


FIG. 5.13 - Energie adaptative de la distribution de points

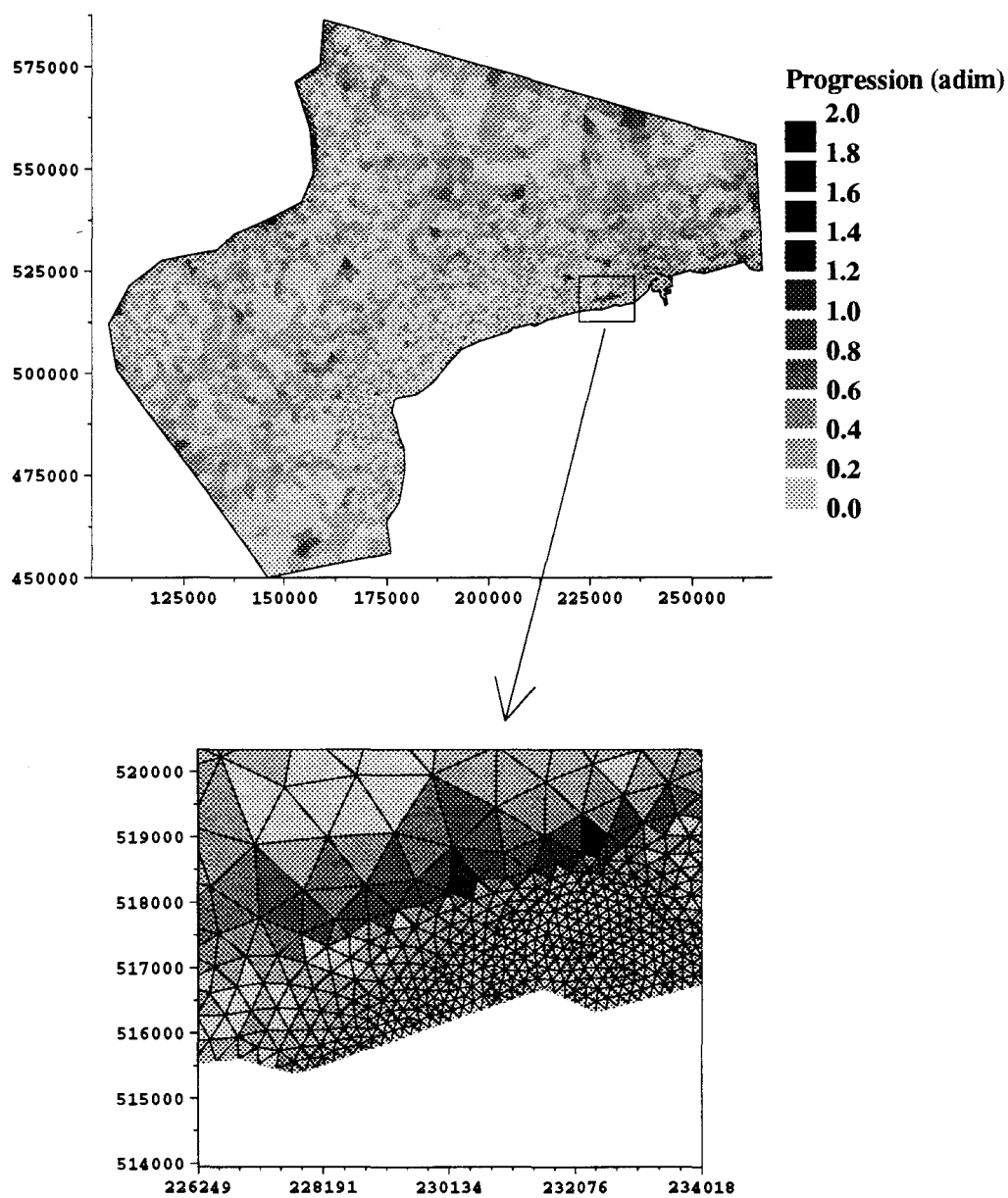


FIG. 5.14 - Progression des tailles de mailles : $Q = \max(|\frac{S_i}{S_j} - 1|)$

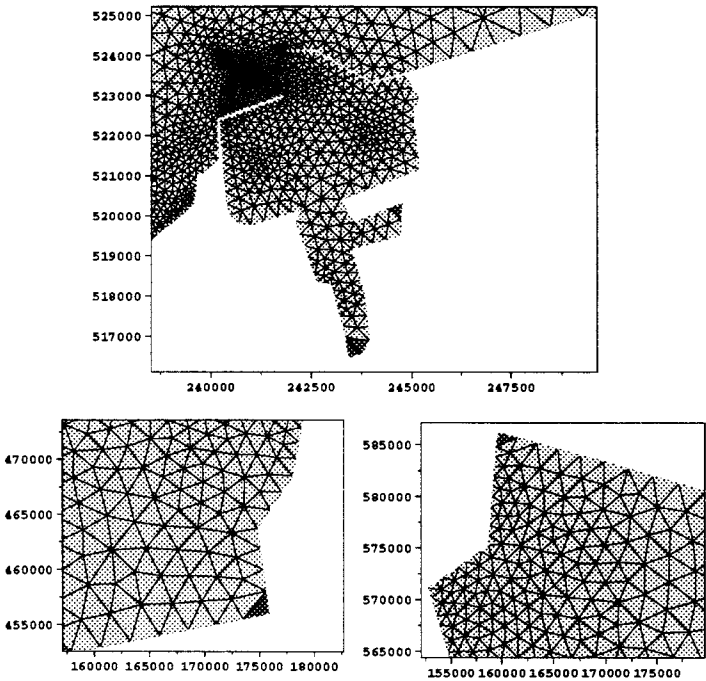


FIG. 5.15 - *Visualisation des mailles surcontraintes*

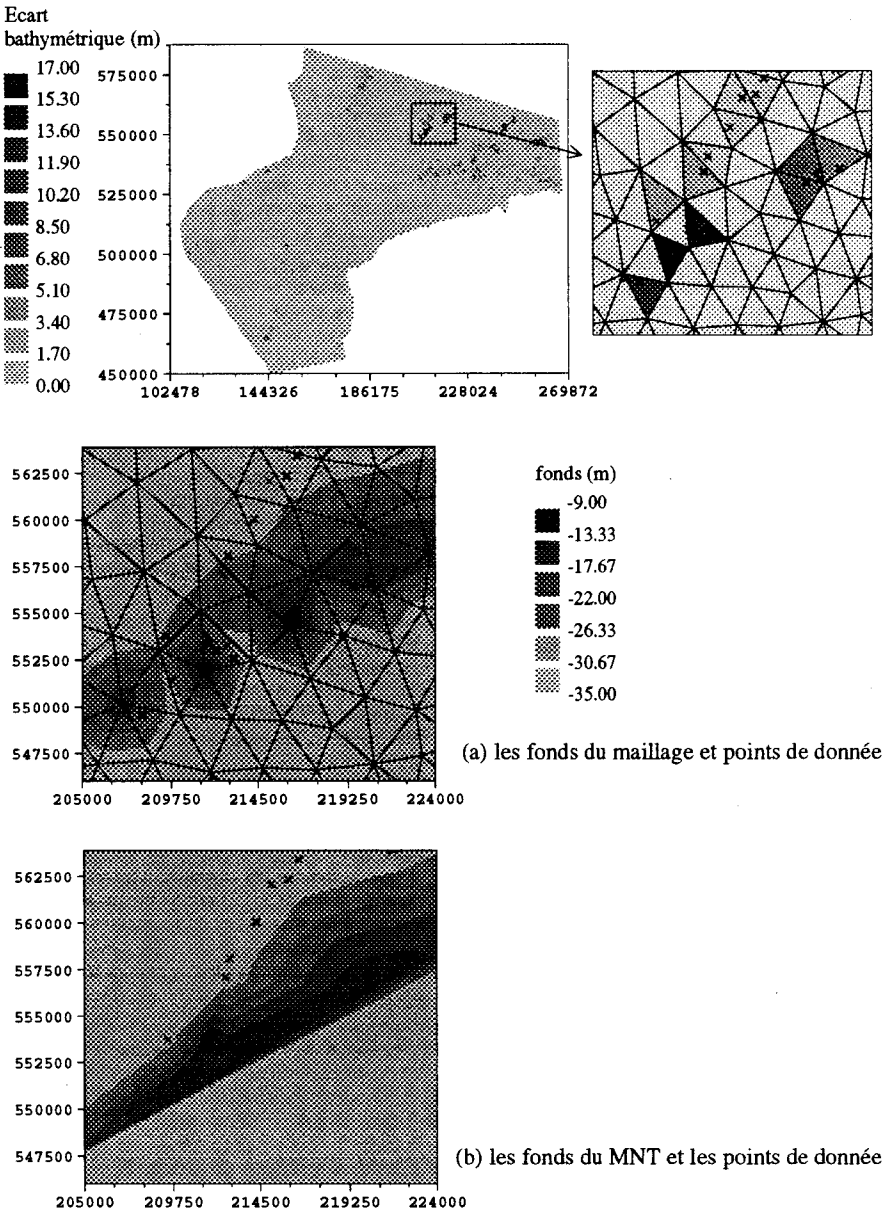


FIG. 5.16 - *Ecart bathymétrique entre le maillage de calcul et le Modèle Numérique de Terrain*

5.2 Etude de Sermenaz

La D.D.E du Rhône a demandé au LNH en 1989 d'étudier l'implantation du deuxième viaduc de Sermenaz, situé à l'amont immédiat de la ville de Lyon et traversant le lit majeur du Rhône. Cette étude a permis de définir l'emplacement des piles de pont afin que le projet du doublement du viaduc n'aggrave pas les conséquences des crues (exhaussement des lignes d'eau, vitesses, érosions et affouillements). Le franchissement du Vieux Rhône et du Canal de Miribel par le second viaduc de Sermenaz contraint à implanter deux nouvelles piles de pont dans le lit mineur des deux cours d'eau. En période de crue, les piles de pont provoquent un pincement de l'écoulement, d'où les deux conséquences fondamentales suivantes sur le comportement hydraulique :

- le niveau d'eau augmente en amont, c'est le phénomène de remous,
- l'écoulement est accéléré dans la zone du rétrécissement située de part et d'autre des piles, ce qui peut entraîner des affouillements mettant en cause la stabilité de l'ouvrage.

5.2.1 Définition de l'étude

Nous considérons pour notre étude les conclusions du projet [71]. Les nouvelles piles de pont ont été positionnées afin de minimiser leur influence sur l'écoulement. La simulation numérique avec le code TELEMAC sera ensuite comparée aux résultats de la précédente étude.

5.2.2 Le Modèle Numérique de Terrain

Les données bathymétriques et géométriques ont été digitalisées sur des cartes marines grâce au logiciel SINUSX. Ces informations sont sous forme de points et de polygones (figure 5.17). Les frontières liquides qui caractérisent la limite du domaine maritime ont été définies à l'aide des profils bathymétriques. Le maillage de Delaunay de ces données bathymétriques constitue notre Modèle Numérique de Terrain (cf. figure 5.18). Un manque de données bathymétriques en amont de l'étude donne une bathymétrie erronée car la triangulation de Delaunay crée une grande maille. En aval du Vieux Rhône, l'information bathymétrique ne m'a pas été fournie, ce qui explique que les limites du domaine ne soient pas identiques à celles de l'étude [71]. En l'absence d'autres informations bathymétriques, ce Modèle Numérique de Terrain a été utilisé comme interpolant bathymétrique dans le cadre de notre étude.

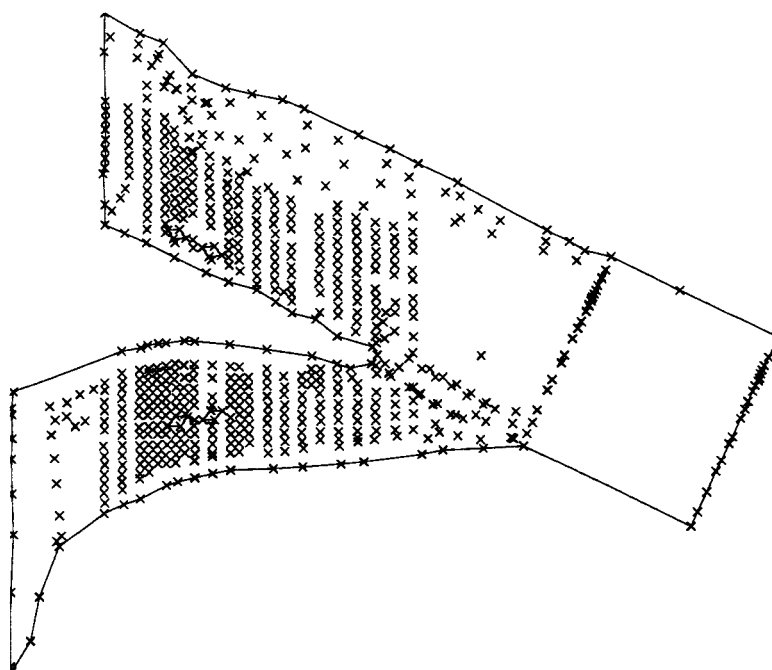


FIG. 5.17 - *Données bathymétriques et géométriques de Sermenaz*

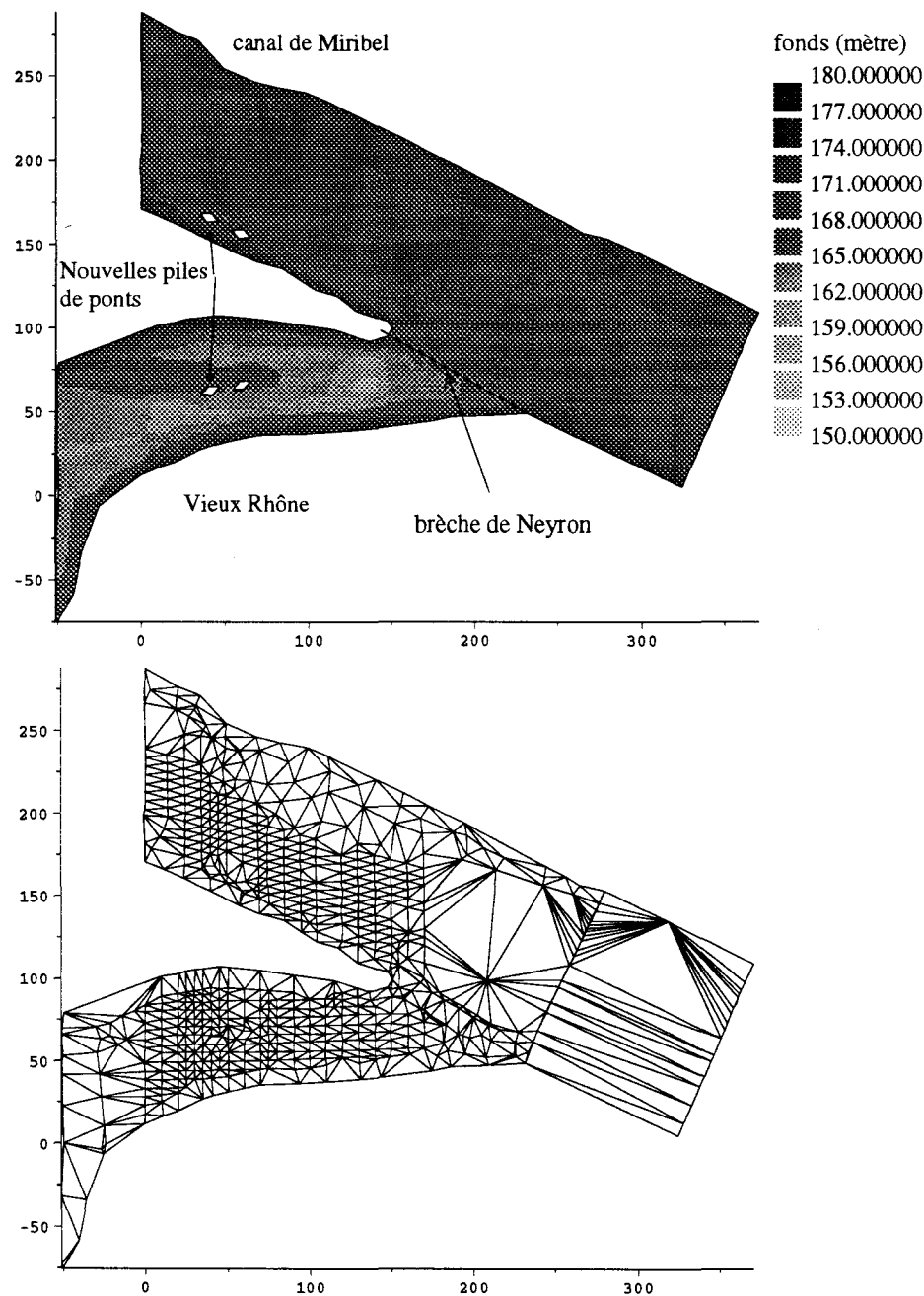


FIG. 5.18 - *Modèle Numérique de Terrain de l'étude Sermenaz*

5.2.3 La carte de tailles

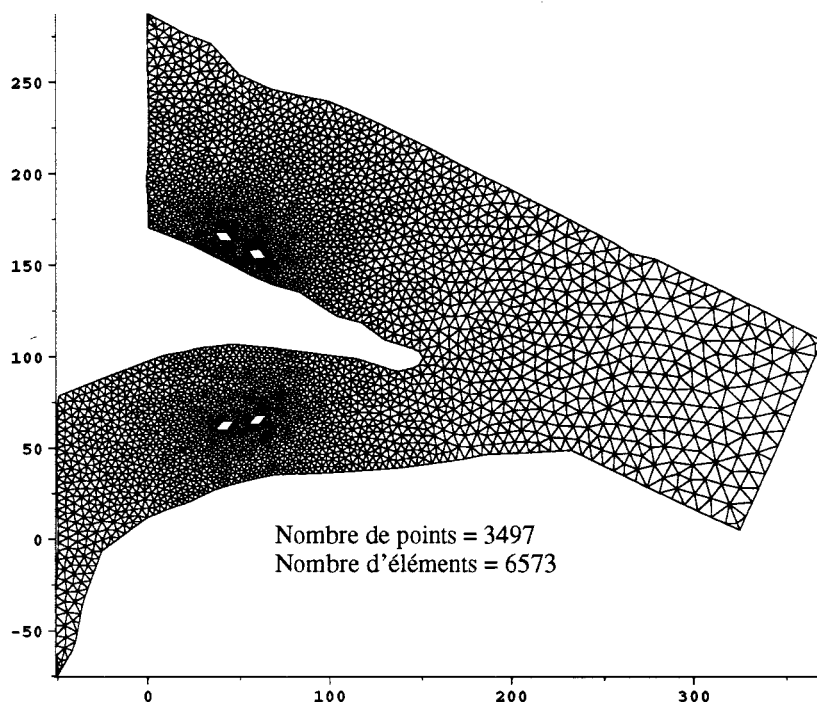
Dans le cas des études fluviales, la taille des mailles doit être inversement proportionnelle à la hauteur. En effet, la taille des mailles doit être petite dans le lit mineur (lit de la rivière) car les gradients de la vitesse sont importants, et plus grande dans le lit majeur (zone inondable) car les gradients de la vitesse sont moins importants. Dans le lit mineur, la hauteur d'eau est plus importante que dans le lit majeur, c'est pourquoi on parle d'une taille des mailles inversement proportionnelle à la hauteur d'eau.

Afin que la discrétisation spatiale soit en rapport avec la variation des vitesses dans l'écoulement, l'échelle des longueurs doit être plus fine dans le lit mineur que dans le lit majeur. De plus, on souhaite avoir une discrétisation anisotrope dans le lit mineur et isotrope dans le lit majeur. Cette discrétisation considère correctement la différence des échelles caractéristiques de la vitesse, perpendiculairement et parallèlement à l'écoulement. La génération de maillages anisotropes ne faisant pas l'objet de ces travaux, cela limite le nombre d'études fluviales si l'on souhaite conserver un nombre de points acceptables.

Dans le cadre de notre étude, l'impact des piles de pont sur l'écoulement a été prise en compte en associant aux piles de pont des points sources. La discrétisation globale dans le domaine a été faite en utilisant le critère lié aux ondes de gravité. Ce critère sert uniquement à spécifier une taille globale dans le lit mineur du Canal de Miribel et du Vieux Rhône. Les coefficients initialisant ses différents critères ont été définis afin que le nombre global de points soit équivalent à celui de l'étude [71].

Les points sources sont associés aux quatre points définissant les piles de pont et ont une distance entre points égale à 50 m. La progression de la distance entre points est linéaire lorsque l'on s'éloigne de ces points sources et est égale à 10%. Le critère lié aux ondes de gravité est utilisé principalement pour définir la discrétisation globale. Elle est définie par une longueur minimale $l_0 = 7500m$ et un pas de temps $\Delta t = 300$. Sur la figure 5.19, le maillage obtenu est présenté. Le maillage de calcul a été obtenu après redécoupage par la chaîne de traitement TELEMAC des mailles surcontraintes. Les critères de qualité associés au maillage ne sont donc pas définis sur le maillage de calcul, mais sur le maillage avant régularisation. La qualité de la triangulation est définie par :

- un critère d'équilatérarité (cf. 4.5.1) $\max(\frac{R}{2r}) : 1.8$,
- un critère de progression de la taille des mailles (cf. 4.5.2) $\max(|\frac{S_i}{S_j} - 1|) : 1.6$,

FIG. 5.19 - *Maillage de calcul*

- un critère adaptatif (cf. 4.5.3) $\max_{j,k} ((\frac{\|v_j \vec{v}_k\| - L_j^k}{L_j^k})^2) : 0.58$.

5.2.4 Résultats et analyse

Un calcul TELEMAC 2D résolvant les équations de Saint-Venant a été effectué sur le maillage de calcul (figure 5.19). Les conditions aux limites utilisées, ainsi que l'analyse des résultats de cette étude seront développées ci-dessous.

5.2.4.1 Conditions aux limites

Des études sur des modèles physiques ont permis de mettre en évidence que les conditions d'écoulement les plus pénalisantes au sens de la vitesse, jusqu'à la crue centennale, sont :

- dans le bras de la brèche de Neyron du vieux Rhône, les conditions en limite de débordement, c'est à dire correspondant à un débit variant de $1400 \text{ m}^3/\text{s}$ à $2000 \text{ m}^3/\text{s}$ à l'amont de Neyron,

- dans le canal de Miribel, pour une crue de l'ordre de $2800 \text{ m}^3/\text{s}$ à l'amont de Neyron.

Comme seul le lit mineur est simulé, les conditions aux limites en amont imposent un débit de l'ordre de $1600 \text{ m}^3/\text{s}$ dans le lit mineur afin de simuler un débit total : lit majeur et lit mineur, compris entre $1600 \text{ m}^3/\text{s}$ et $2000 \text{ m}^3/\text{s}$.

Les conditions en aval sont doubles car il faut définir une loi hauteur-débit à la fois pour le canal de Miribel et pour le Vieux Rhône, à la sortie du domaine. Le choix des hauteurs moyennes d'eau à l'aval conditionne la répartition du débit à travers les deux bras. Il faudra donc vérifier a posteriori que la répartition des débits est conforme aux mesures faites in situ ou sur modèle physique. Dans l'étude [71] les conditions aux limites en aval de l'écoulement ont été validées :

- $h_{\text{Miribel}} = 172 \text{ NGF}^1$ avec un débit de l'ordre de $700 \text{ m}^3/\text{s}$,
- $h_{\text{VieuxRhône}} = 171.6 \text{ NGF}$ avec un débit de l'ordre de $900 \text{ m}^3/\text{s}$.

La loi de frottement utilisée est celle de Strickler ([4]) avec un coefficient égal à 45.

5.2.4.2 Caractéristiques de l'écoulement

On trouve sur la figure 5.20, les caractéristiques générales du champs de vecteur vitesse.

A l'amont du canal de Miribel, les vitesses sont uniformément réparties avec des vitesses moyennes importantes de l'ordre de 2.5 à 3 m/s . Dans ce même canal, mais à l'aval, on constate que les vitesses les plus importantes sont comparables et sont situées au centre du canal. A l'aval de la Brèche, des survitesses, 3.8 m/s , apparaissent car le musoir réduit la section de l'écoulement.

Pour l'écoulement dans le vieux Rhône, la forme du musoir réduit la section de passage et canalise l'écoulement coté rive gauche du Vieux Rhône (on voit qu'une importante zone de recirculation se développe en rive droite à l'aval de la Brèche). Les vitesses au centre du Vieux Rhône et au droit de la Brèche peuvent ainsi atteindre 3 m/s . Par contre, les nouvelles piles de ponts sont dans une position optimale car elles ne modifient pas l'écoulement de manière prépondérante (figure 5.20). La vitesse, à proximité des nouvelles piles de ponts, est très limitée et permet de spécifier un enrochement adapté pour éviter les érosions.

¹NGF = la côte des fonds (z_f) + la hauteur d'eau (h)

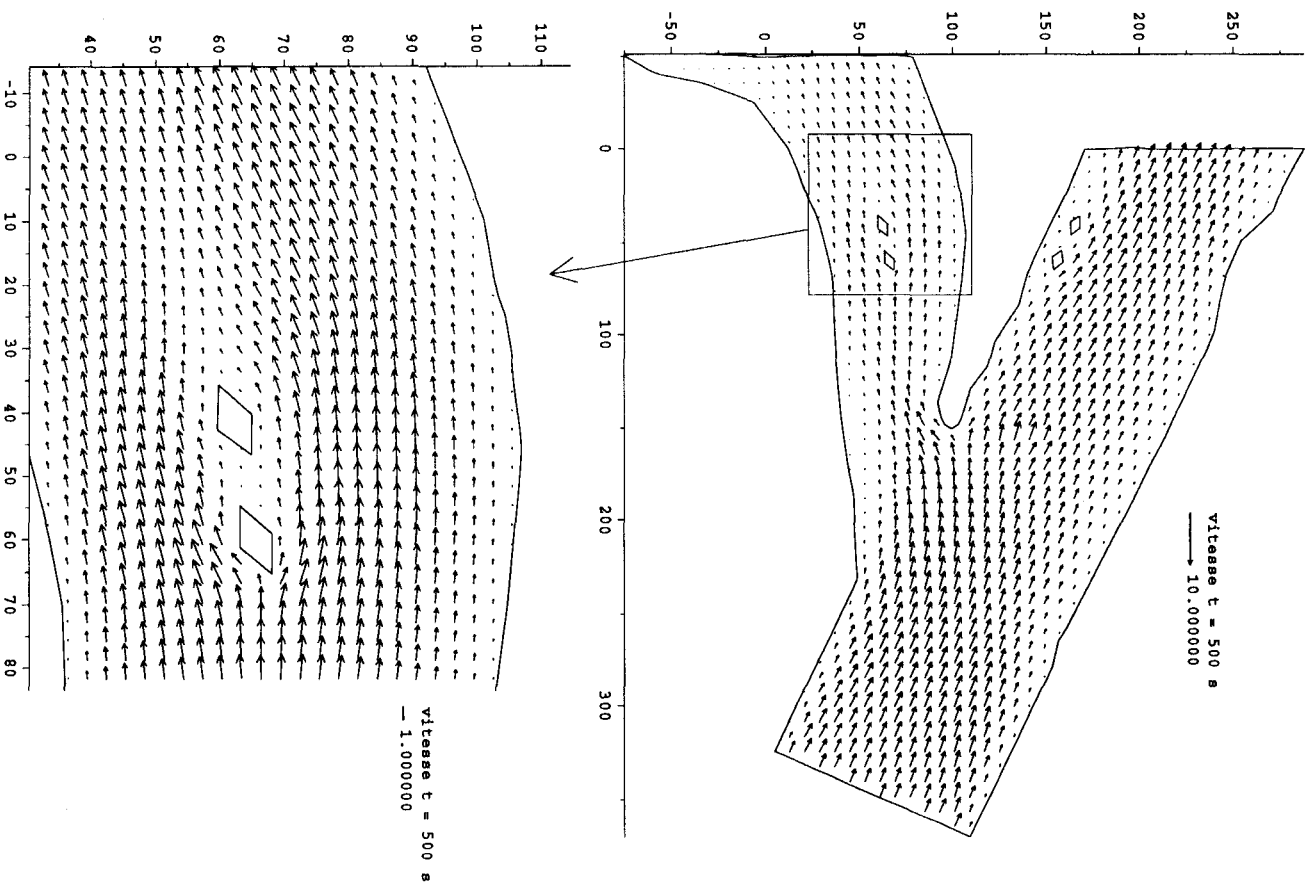


FIG. 5.20 - vecteur vitesse

Ces résultats sont cohérents avec l'étude qui a été précédemment réalisée (cf figure 5.21) et dont le maillage est représenté sur la figure 5.22. Cette étude n'étant pas fortement dépendante du maillage de calcul, on ne peut dégager une réelle amélioration des résultats numériques sur un maillage adaptatif. Le maillage adaptatif (3497 points et 6573 éléments) comporte plus de points que celui de [71] (3162 points et 6037 éléments) et admet le même temps d'exécution (305s respectivement 306s). Cette constatation peut vouloir dire que les éléments du maillage adaptatif sont plus proches de la taille idéale, telle que le nombre de Courant soit proche de l'unité, ce qui évite donc des itérations. Cette étude ne pouvant définir plus de renseignements, une étude plus complexe, dont la discrétisation spatiale est primordiale, a été entreprise. On pourra néanmoins souligner, que la génération adaptative est totalement automatique et demande une journée (traitement des données sinusx, simplification de courbes, paramètres adaptatif) alors que la génération des maillages TELEMAT avec des logiciels n'utilisant pas cette méthode demande à un spécialiste plusieurs jours uniquement sur le maillage.

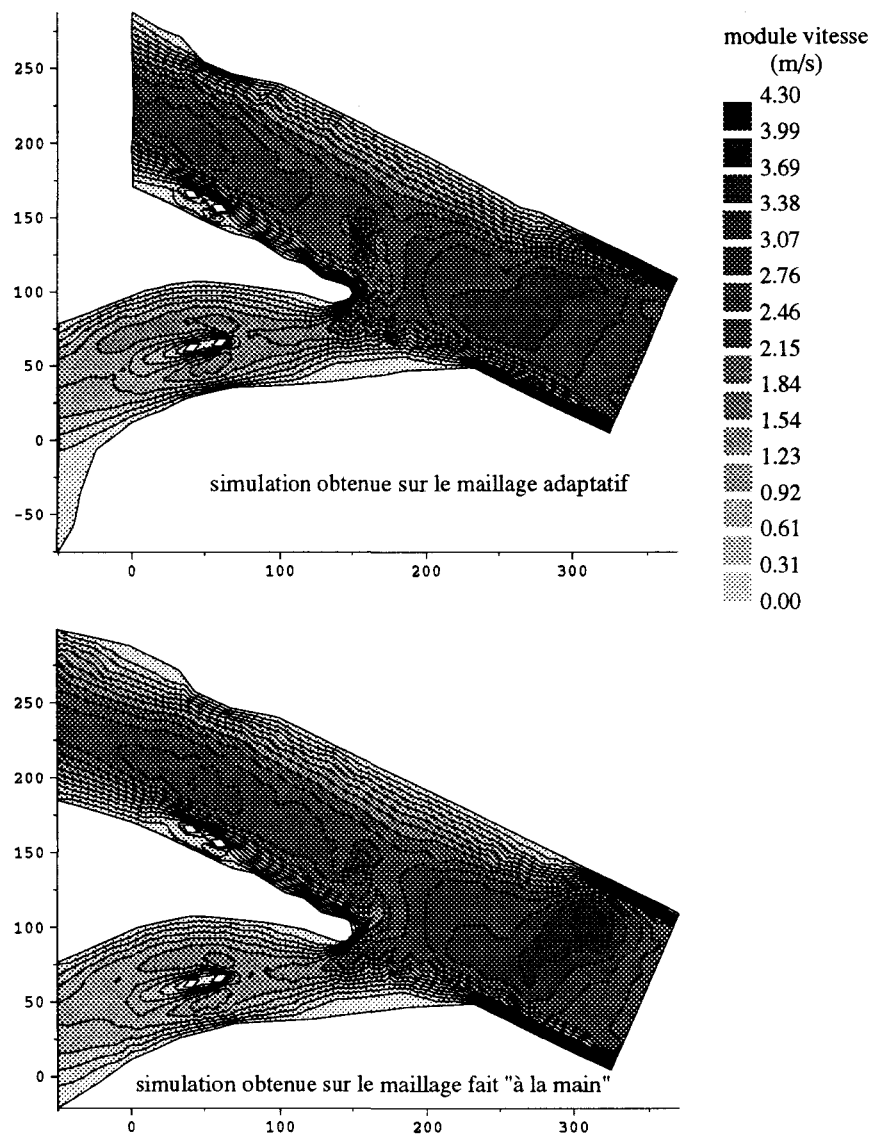


FIG. 5.21 - Comparaison des modules de la vitesse entre les deux études

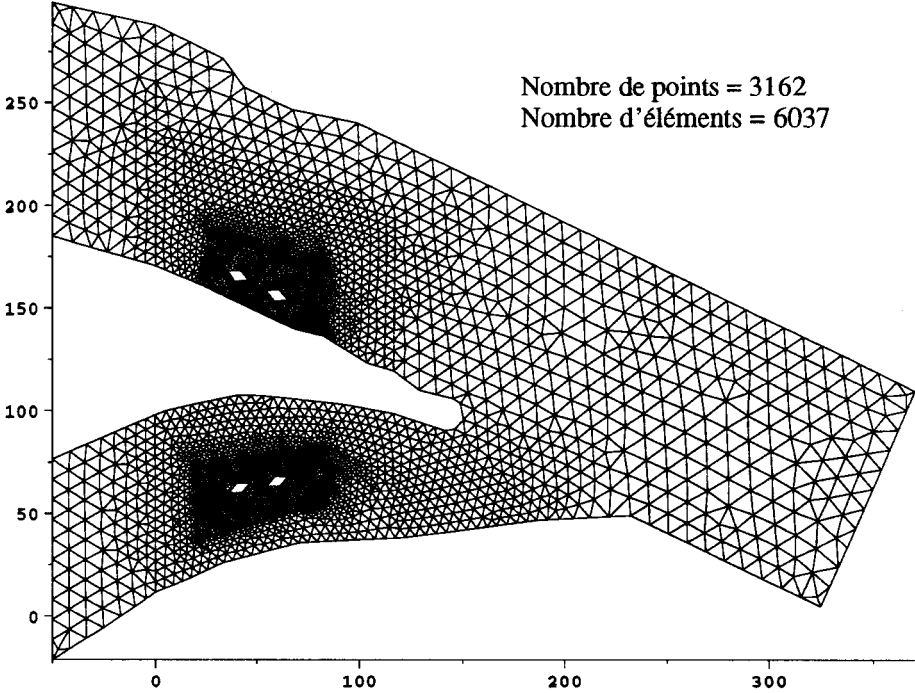


FIG. 5.22 - *Maillage de Sermenaz pour une étude précédente*

5.3 Etude des marées dans la Manche

La marée dans la Manche résulte de la propagation sur le plateau continental des ondes générées très au large en grande profondeur, et de leur réflexion sur les côtes. L'onde de marée se décompose en une somme d'ondes sinusoïdales élémentaires de pulsations différentes. De précédentes études [70], ont montré que les composantes les plus importantes en terme d'amplitude qu'il convient de prendre en compte pour obtenir une représentation réaliste de la marée sont les suivantes :

- M_2 : semi-diurne; onde lunaire; période $12h25'14''$
- S_2 : semi-diurne; onde solaire moyenne; période $12h$
- N_2 : semi-diurne; elliptique lunaire majeure; période $12h39'30''$
- N_2 : quart-diurne; 1^{ère} harmonique de M_2 ; période $6h12'37''$

L'élévation de la surface libre en un point s'écrit alors :

$$s(t) = a_{M_2} \cos(\omega_{M_2} + \phi_{M_2}) + a_{S_2} \cos(\omega_{S_2} + \phi_{S_2}) + a_{N_2} \cos(\omega_{N_2} + \phi_{N_2}) + a_{M_4} \cos(\omega_{M_4} + \phi_{M_4})$$

avec :

a : amplitude

ω : pulsation

ϕ : phase

La simulation de l'onde M_2 est l'objet de cette étude.

5.3.1 Définition de l'étude

Il s'agit d'une étude de grande emprise faisant partie du cahier de validation de la chaîne TELEMAC, [72]. Le domaine d'étude se situe entre le golfe de Gascogne, la Manche et la partie Sud de la mer du Nord. L'onde de marée M_2 (onde lunaire principale) est modélisée dans TELEMAC en tenant compte de :

- la force de Coriolis,
- le frottement sur le fond,
- la sphéricité de la Terre,
- les gradients de fond.

Cette étude est très sensible au maillage de calcul, et tout particulièrement au gradient de fond existant entre le plateau continental et la plaine abyssale (cf. figure 5.23). Nous allons montrer que les oscillations numériques de la surface libre sont en partie dues à la discrétisation spatiale le long de la ligne de pente maximum délimitant le plateau continental de la plaine abyssale. Un maillage optimal comportant le même nombre de points que celui ayant servi dans le dossier de validation du code TELEMAC,[72], a donc été construit. Le Modèle Numérique, la carte de tailles, et les résultats numériques sont analysés ci-après.

5.3.2 Le Modèle Numérique de Terrain

Les données bathymétriques et géométriques (le contour) ont été digitalisées à l'aide du logiciel SINUSX. Ces données sont sous forme de semis de points pour la bathymétrie et de polygones pour les limites du domaine. Pour ces polygones, l'information altimétrique a été interpolée. La représentation minimale des limites du domaine a été obtenue grâce à une simplification de courbe (§4.3.1.5). Cette étape a permis de caractériser les points importants devant être conservés par le processus adaptatif. La triangulation de Delaunay contrainte de ces données définit le Modèle Numérique de Terrain de l'étude (cf. figure 5.23). Ce Modèle Numérique de Terrain sert d'interpolant pour la bathymétrie.

5.3.3 La carte de tailles

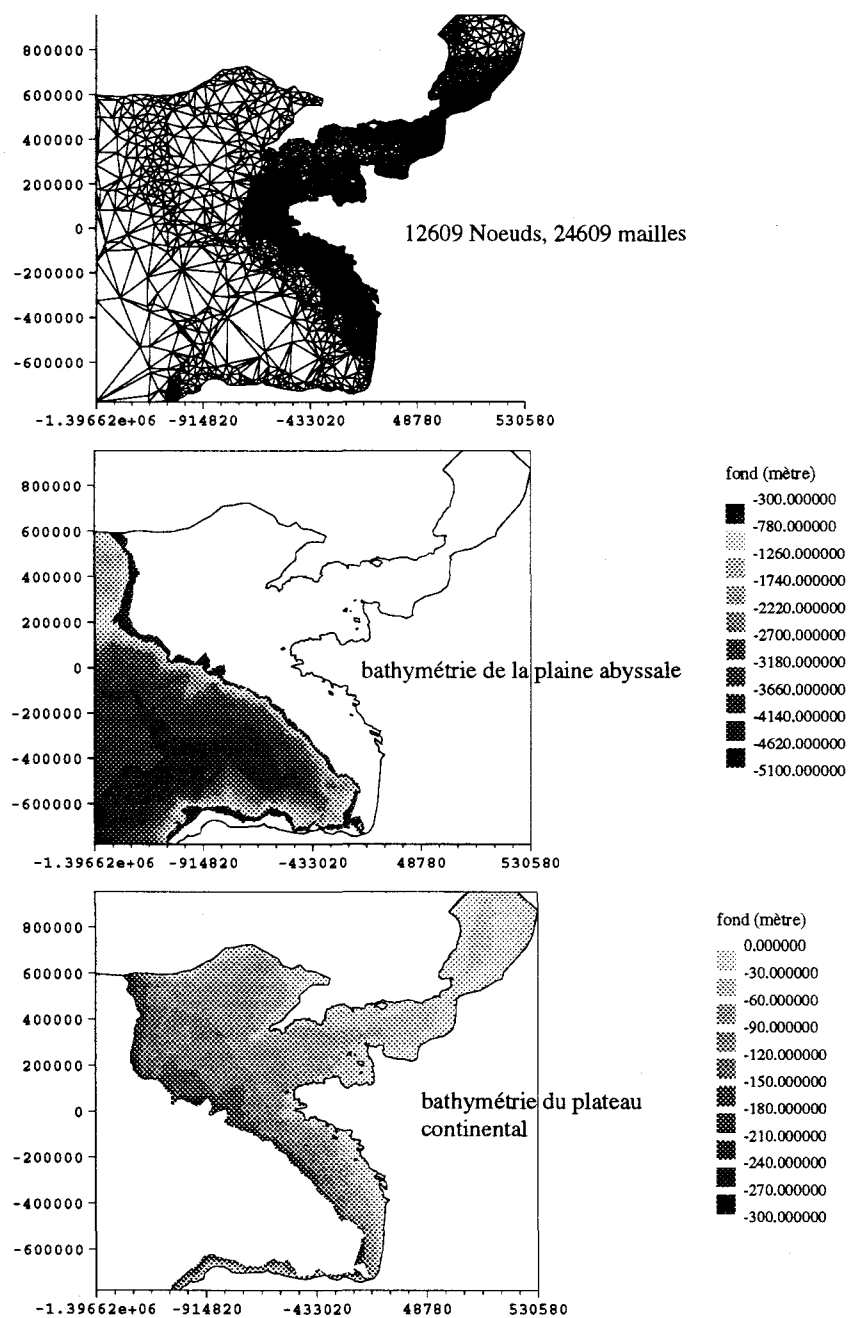
Pour cette étude deux critères ont été utilisés. Un critère lié aux ondes de gravité (cf. §4.2.2) car on étudie l'onde M_2 , et un critère fondé sur la linéarisation des équations de Saint-Venant (cf. §4.2.3) pour les fortes variations de la hauteur d'eau.

5.3.3.1 Critère lié aux ondes de gravité

Le critère lié aux ondes de gravité ayant déjà été utilisé seules les valeurs de ces coefficients sont présentées :

- $l_0 = 10000m,$

- $\Delta t = 650s.$

FIG. 5.23 - *Modèle Numérique de Terrain pour l'étude de l'onde M_2*

5.3.3.2 Critère lié à la linéarisation des équations de Saint-Venant et des équations de Navier Stokes

Ce critère comme il a été spécifié dans le §4.2.3, a été déduit d'une analyse sur la transformation σ utilisé par le code TELEMAC-3D résolvant les équations à surface libre. Une relation équivalente a été trouvée afin d'assurer l'unicité de la solution des équations de Saint-Venant dans sa formulation hauteur-débit. Ce critère stipule que le niveau d'eau doit évoluer d'autant moins rapidement que la hauteur d'eau est faible. La variation maximale de la hauteur d'eau sur la hauteur d'eau moyenne doit donc être inférieure à un coefficient α :

$$C_g = \frac{\Delta h_{max}}{h_{moyen}} \leq \alpha$$

α est ici égal à 1. Ce critère, contrairement à celui lié aux ondes de gravité, est purement local et intervient exclusivement le long de la ligne de pente maximum et près des côtes.

5.3.3.3 Lissage de la carte de tailles

La distance entre points spécifiée sur la carte de tailles pilote la génération du maillage final. Afin de limiter les gradients de la distance entre points sur la carte de tailles et donc des triangles de mauvaise qualité dans le maillage final, la carte de tailles après définition est lissée. Le critère de lissage (cf. §4.2.5) impose que l'évolution de la distance entre points ne dépasse pas une pente donnée. Pour notre étude, cette pente est égale à 20%.

5.3.4 Résultats et analyse

Un calcul TELEMAC 2D résolvant les équations de Saint-Venant a été réalisé sur le maillage de calcul 5.24. Les conditions aux limites ainsi que les différents coefficients physiques sont similaires à ceux utilisés pour l'étude de l'onde M_2 appartenant au cahier de validation de TELEMAC. Ceux-ci sont :

- Conditions aux limites des parois : imperméabilité, glissement à la paroi,
- Conditions aux limites : cote de la surface libre imposée, fonction sinusoïdale du temps,
- Conditions initiales : repos - plan horizontal,
- Modèle de turbulence : viscosité nulle,

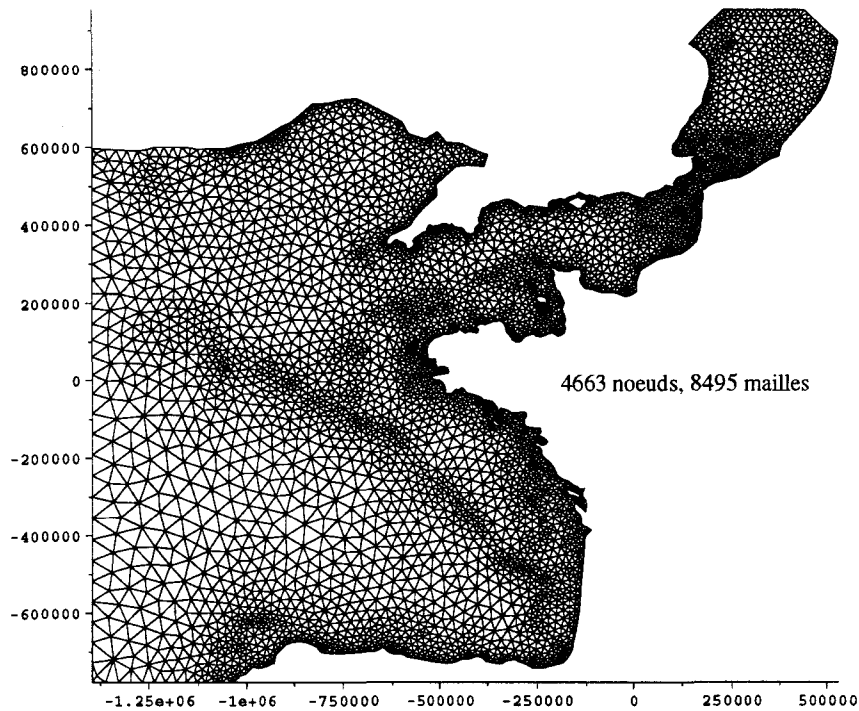


FIG. 5.24 - *Maillage de calcul de l'onde M_2*

- Frottement : loi de Chézy - coefficient variable par zone,
- Prise en compte de la force de Coriolis.

Comme pour notre étude il n'y a pas eu de calage entre la simulation numérique et les mesures dans des ports de référence, les grandeurs entre ces deux études ne devront donc pas être comparées de manière quantitative, mais qualitative.

Le maillage du cas test de validation est représenté sur la figure 5.25, et comporte un nombre de points similaire à celui maillage adaptatif.

Pour mettre en évidence l'influence des critères bathymétriques sur le résultat d'une simulation numérique par le code TELEMAC, on se place dans le cas d'une basse mer dans la baie du mont Saint-Michel. Sur la figure 5.26, les caractéristiques générales de l'écoulement sont présentées : vecteurs vitesse, module de la vitesse. On remarque que pour les grands fonds les courants sont faibles, et que à proximité de la ligne de pente maximum les vitesses deviennent plus importantes, ce qui explique l'importance de la bathymétrie sur l'écoulement. On peut également remarquer qu'une basse mer pour le mont Saint-Michel correspond à un phase de flot pour Dunkerque. Ceci vient du

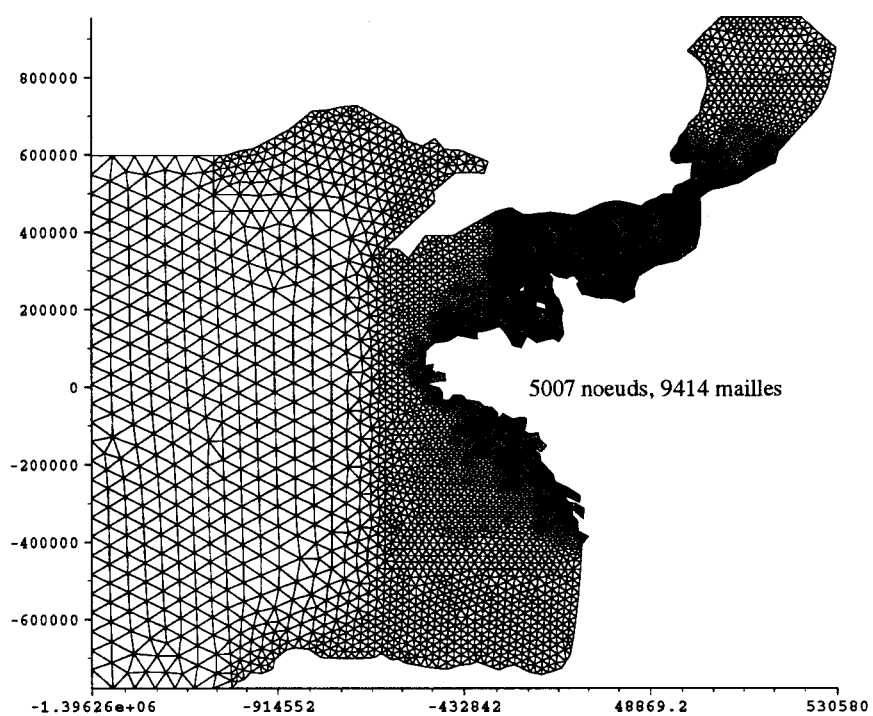


FIG. 5.25 - *Maillage du cas de test de validation du code TELEMAC*

fait que le décalage des marées entre le mont Saint-Michel et Dunkerque est de l'ordre d'une marée, c'est à dire 6 heures. Ces résultats sont similaires pour les deux études.

Si l'on considère la surface libre, l'influence du maillage est beaucoup plus prépondérante. Sur la figure 5.27, on remarque que la surface libre a des oscillations plus importantes pour le cas test de validation que pour la simulation déduite du maillage adapté à la bathymétrie. Ces oscillations sont purement numériques et ne peuvent exister physiquement. Ici, on ne considère pas la houle et la surface libre doit avoir une évolution très limitée spatialement. L'amélioration du résultat est essentiellement due à un meilleur échantillonnage des gradients de fond important.

Ces résultats ont montré que la solution est fortement dépendante du maillage. Un autre maillage a été généré en modifiant le critère lié à la linéarité des équations de Saint-Venant. En effet pour obtenir un maillage plus fin sur la ligne de rupture de pente et conserver un nombre de points proche de 5000, on a défini la variable "zone d'influence". Cette grandeur spécifie à partir de quelle hauteur d'eau le critère peut s'exercer. Cela permet donc d'éviter un raffinement trop important et non souhaité dans les zones de faible profondeur (comme dans le "Channel"). De plus, une longueur minimale spécifique à chaque critère a été introduite. Les nouveaux coefficients pour le critère lié à la linéarité des équations de Saint-Venant sont :

- $coef = \frac{\Delta H_{max}}{H_{moy}} = 0.6$
- $l_0 = 3000m,$
- zone d'influence : $H \geq 180m.$

La figure 5.28 montre le maillage associé. On remarque que la ligne de rupture de pente est nettement plus prononcée. Ce raffinement se produit au détriment des points proches de la côte française. On peut également souligner que proche de la côte espagnole, les forts gradients de la bathymétrie et donc de la hauteur d'eau sont également représentés. Comme précédemment les conditions aux limites et les coefficients physiques permettant l'initialisation du calcul TELEMAC sont identiques au cas test de validation traitant de l'onde M_2 . Le résultat de la figure 5.29, illustre les isovaleurs de la surface libre pour la même configuration que précédemment : une basse mer pour le mont Saint-Michel. On remarque que des oscillations supplémentaires apparaissent pour la surface libre. La ligne de rupture de pente n'est donc pas la seule cause de ces oscillations numériques. On peut également voir que la limitation des points dans le "Channel", n'a pas provoqué des oscillations qui n'existaient auparavant. Il semble que la discrétisation spatiale de la côte espagnole, et du sud de la côte française soit

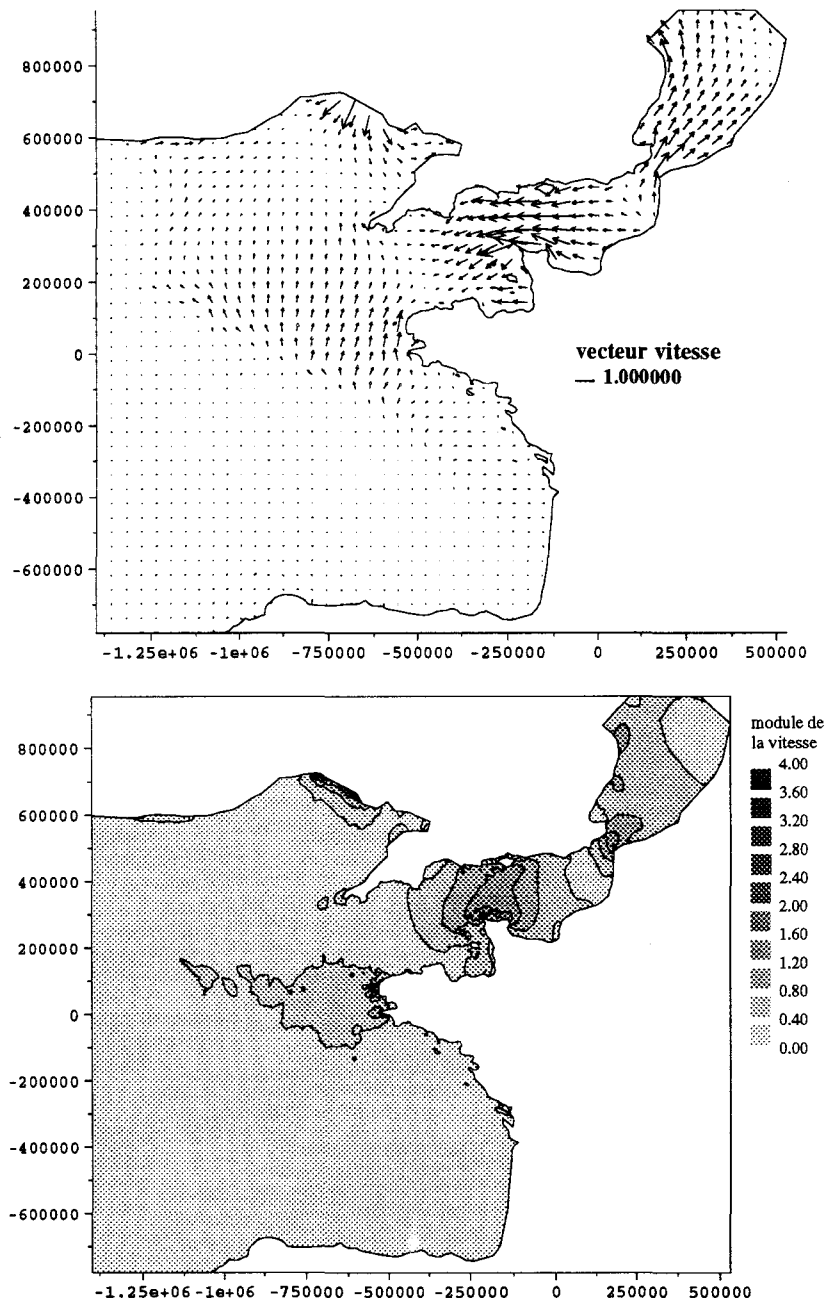


FIG. 5.26 - Champs de vitesse et module de la vitesse de l'écoulement

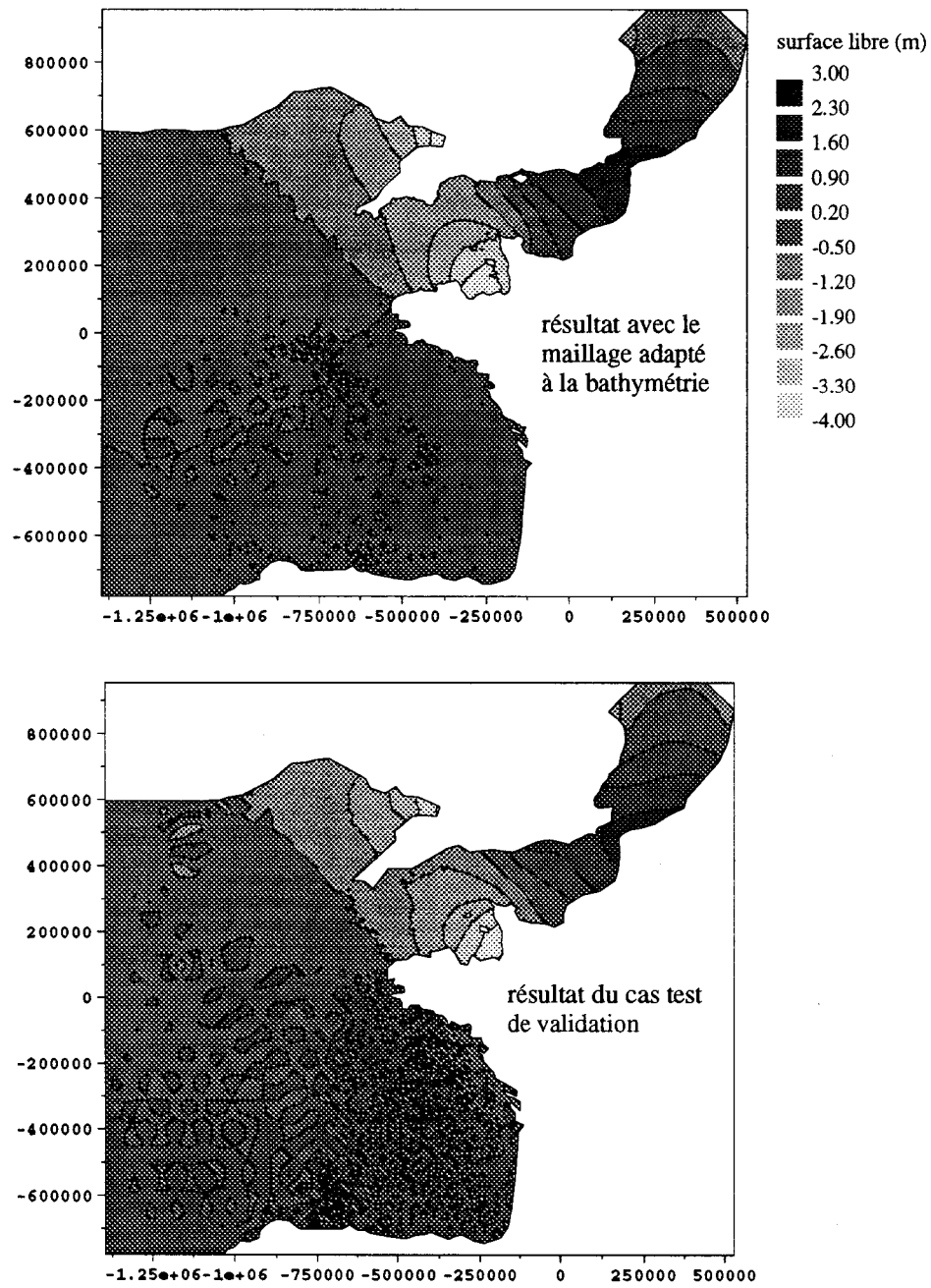
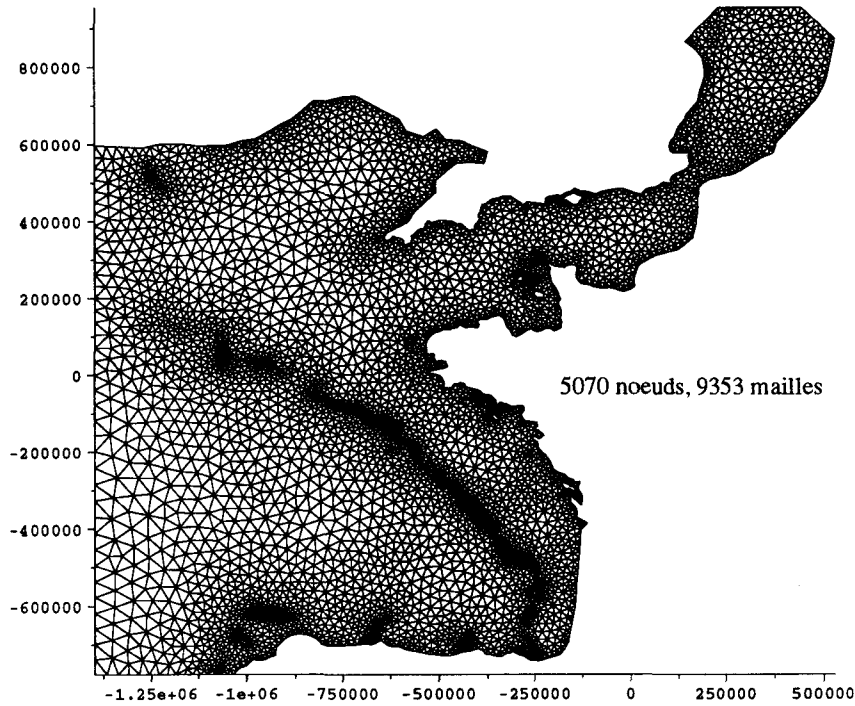


FIG. 5.27 - Comparaison des surfaces libres entre le cas test et notre étude

FIG. 5.28 - *Second maillage de calcul*

la cause de ces nouvelles oscillations. Le manque de points dans cette zone à cause de l'utilisation d'une zone d'influence telle que la hauteur d'eau soit supérieure à 180m a été préjudiciable. On comprend bien les limites d'une définition globale des critères. Ici, le critère fondé sur les gradients de la hauteur d'eau ne doit pas être le même dans le "Channel" et sur la côte sud française. D'un point de vue général une étude plus approfondie devra déterminer quel phénomène numérique intervient, et quel critère adaptatif peut en être déduit.

Le solveur utilisé, fondé sur la méthode du gradient conjugué, résout le problème matriciel (cf annexe) de la forme $Ax = B$ où x est le vecteur inconnue. La solution est atteinte, lorsque la précision souhaitée est obtenue. La précision est définie comme la norme L_∞ du rapport entre le résidu $(Ax - B)$ et le vecteur B :

$$precision = \max\left(\frac{(Ax - B)}{B}\right)$$

Actuellement seule une augmentation de la précision du solveur ($10^{-3} \rightarrow 10^{-4}$) a permis d'annuler ces oscillations numériques (cf figure 5.30).

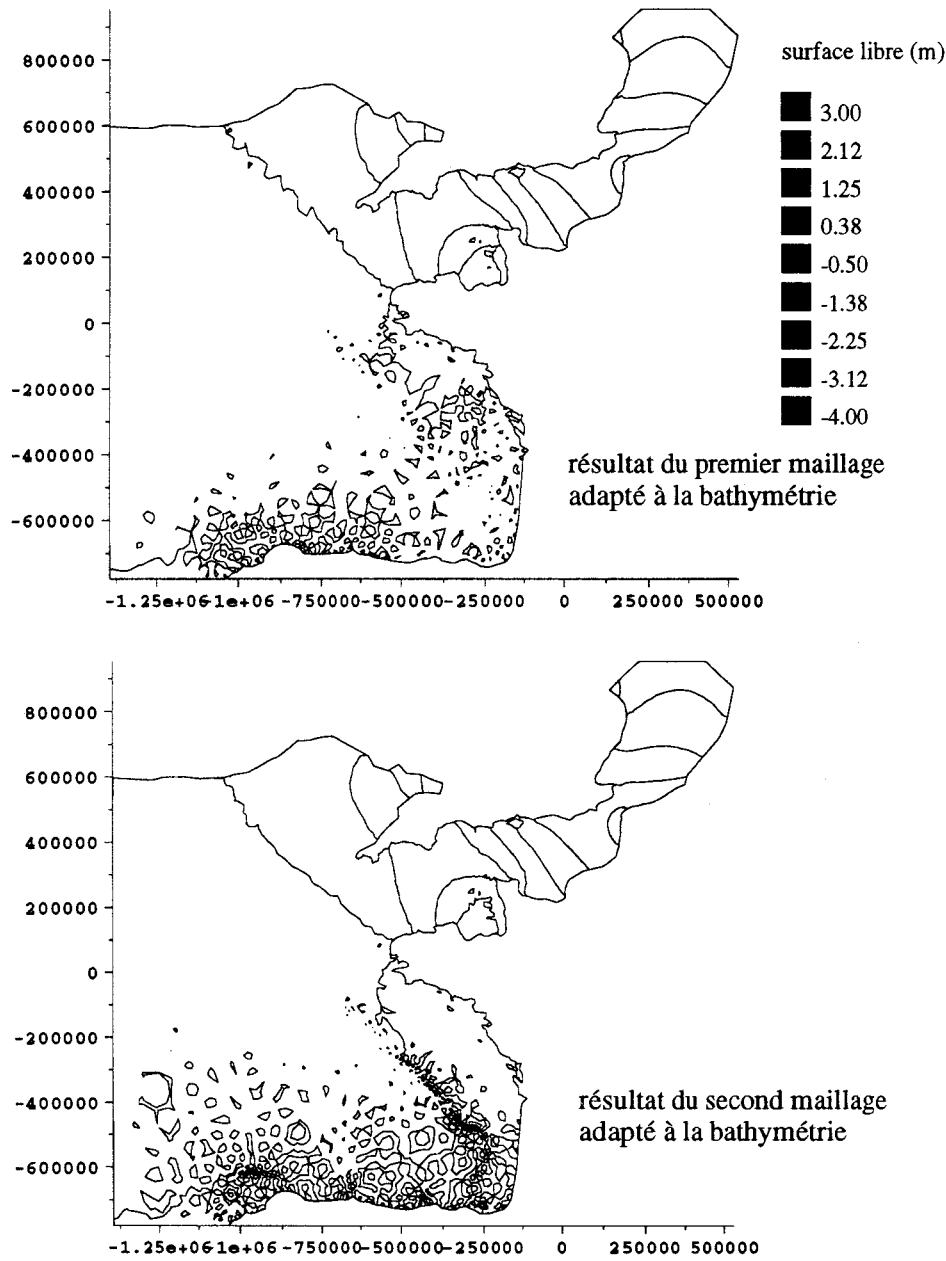


FIG. 5.29 - Comparaison des surfaces libres entre les deux maillages adaptés à la bathymétrie

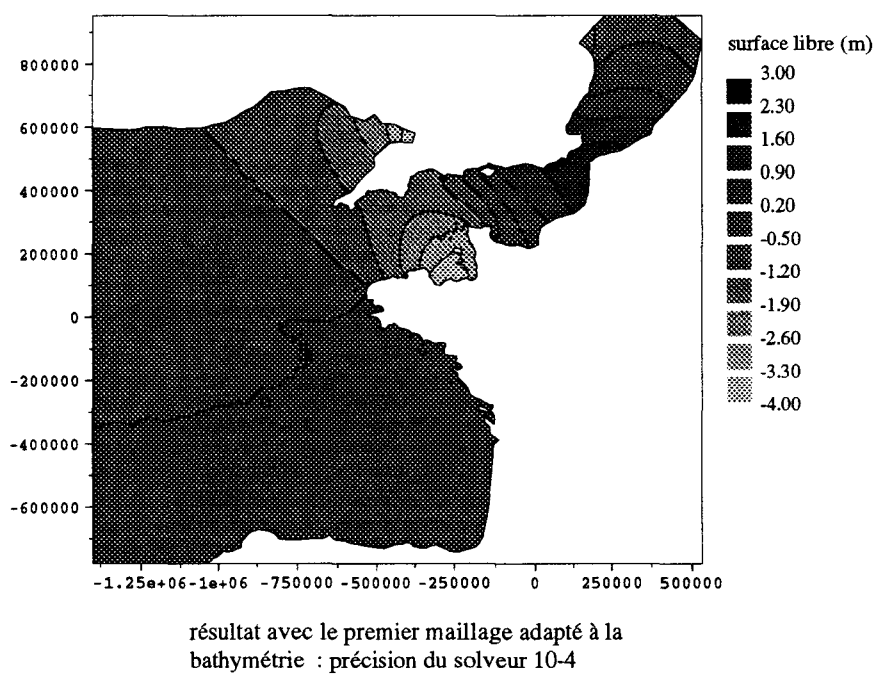


FIG. 5.30 - *Surface libre pour une précision du solveur égal à 10^{-4}*

Conclusion

Conclusion

Ce travail a permis la mise au point d'une méthode de génération de maillage de calcul pour la résolution des équations à surface libre.

Tout d'abord, comme la génération du maillage est fortement liée à l'analyse des fonds de l'étude, un Modèle Numérique de Terrain a été défini afin de représenter la bathymétrie. Cette surface est obtenue à l'aide d'une triangulation de Delaunay contrainte hiérarchisée sur des données bathymétriques provenant de la numérisation de cartes géographiques. Le Modèle Numérique de Terrain est une structure qui regroupe tous les objets (frontières, infrastructures, lignes de niveau, ...) de l'étude et une carte de tailles qui spécifie la discrétisation spatiale souhaitée.

Afin que la qualité du maillage soit contrôlée, un processus adaptatif a été développé en recherchant une minimisation de l'écart entre la densité souhaitée sur la carte de tailles et la distribution de points finale.

Cette méthode s'appuie sur les algorithmes d'un mailleur de Delaunay contraint hiérarchique, ce qui permet de s'assurer que les données sont toujours représentables avec un graphe planaire, avant chaque triangulation. Afin que les formes géométriques des objets définies à l'aide de polygones (frontières, lignes de niveau, infrastructures, ...) ne soit pas détériorées, on assure que l'adaptation conserve une forme minimale géométrique (ces points caractéristiques de la polygone sont déduits d'une simplification de courbe). Pour compléter cette notion de représentation minimale, les points qui sont topologiquement importants (les points d'intersection, les points communs à plusieurs faces) sont également reportés dans le maillage de calcul.

Ce processus adaptatif a été utilisé pour établir des maillages de calcul pour le code TELEMAC 2D, qui résout les équations de Saint-Venant. Des simulations numériques, principalement pour des applications maritimes où l'influence de la bathymétrie est prépondérante, ont donné des résultats satisfaisants.

Toutefois, de nombreux développements restent à faire.

D'une part, il est nécessaire de définir des critères dans le cadre des écoulements fluviaux. L'influence de la bathymétrie n'est pas prépondérante et la taille des mailles

doit être plus fine dans le lit mineur que dans le lit majeur étant donné la différence des échelles de vitesse existant entre ces deux domaines. Dans un premier temps, on pourrait à l'aide d'une face, définir le lit mineur et lui associer un critère en $1/h$. Le lit majeur est lui défini entre le lit mineur et le domaine extérieur et pourra être associé à un autre critère.

D'autre part, l'adaptation dynamique est envisageable dès que des estimateurs d'erreurs ou des critères fondés sur les résultats numériques auront été définis. Cependant, dans ce cas, il me semblerait raisonnable de modifier le processus adaptatif. En effet, l'utilisation d'une triangulation incrémentale de Delaunay améliorerait sensiblement le temps d'exécution. Ce qui est souhaitable dans le cadre d'une adaptation dynamique.

Pour finir, il me semble que la prise en compte de l'anisotropie des maillages est l'aspect le plus important à introduire. La triangulation adaptative anisotrope pourra utiliser en grande partie les principes et méthodes introduites dans la technique adaptative que ce travail présente. Cependant, on devra tout d'abord répondre au problème de la triangulation de Delaunay anisotrope dans le cadre d'une arithmétique mixte.

Bibliographie

- [1] R. LAURINI, F. MILLERET-RAFFORT, 1993, "Les bases de données en géomatique", *HERMES*, Traité des nouvelles Technologies, série Géomatique.
- [2] J. ABRAHAM, F.A. WILLIAMS AND F.V. BRACCO, 1985, "Surface Modelling with TIN", *ARC/INFO user's guide*.
- [3] M. PIRO, "SINUSX : système interactif de numérisation sousX Window - Manuel de l'utilisateur de la version 2.0", *EDF-DER-LNH*, HE-45/93.07.
- [4] J.-M. JANIN, "TELEMAC 2D version 2.0 : note de principe", *EDF-DER-LNH*, HE-43/92.13.
- [5] J.-M. HARMAND, "GALA : Logiciel de levés bathymétriques : Mode d'emploi et guide de mise en oeuvre de la version 5.0 ", *EDF-DER-LNH*, HE-45/95/027A.
- [6] J.-M. HARMAND, J.-G. LEDORTZ, "Système de traitement de la bathymétrie du LNH. Manuel utilisateur de la version 2.4 du logiciel BATX", *EDF-DER-LNH*, HE-45/96/002A.
- [7] M. G. VALLET, "Génération de maillages anisotropes adaptés - Application à la capture de couches limites", *Rapport de Recherche INRIA -Programme 7-*, No 1360, Décembre 1990.
- [8] M. A. YERRY AND M. S. SHEPARD, "Approaching the automatic generation of finite element meshes", *Computers in Mech. Eng.* , 1(4), 49-56 (1983).
- [9] P. L. BAEHMANN, M. S. SHEPARD, K. R. GRICE, M. A. YERRY, "Robust, geometrical based, automatic two-dimensional mesh generation", *Int. Journal for Num. Meth. in Eng.*, vol. 24, 1043-1078 (1987).
- [10] O. C. ZIENKIEWICZ AND D. V. PHILLIPS, "An automatic mesh generation for plane and curved surfaces by isoparametric co-ordinates", *Int. Journal for Num. Meth. in Eng.*, vol. 4, 519-528 (1976).
- [11] J. F. THOMPSON, Z. U. A. WARSI, C. W. MASTIN, "Numerical Grid Generation - foundations and applications", *Nort-Holland*, Amsterdam, 1985.
- [12] P. R. EISEMAN, "Adaptive Grid Generation", *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.*, 64, 321-376, (1976).
- [13] P. L. GEORGE, "Génération automatique de maillages - Application aux méthodes d'éléments finis", *Masson*.

- [14] P. L. GEORGE, E. SALTEL, "Mailleur frontal bidimensionnel contrôlé par une carte de tailles", *Rapport de Recherche INRIA -Programme 6-*, N 1917, Mai 1993.
- [15] A. V. AHO, J. E. HOPCROFT AND J. D. ULLMAN, "The Design and Analysis of Computer Algorithms", *Addison-Wesley* Reading, Mass., 1974.
- [16] G. L. DIRICHLET, "Über die reduction der positiven quadratischen formen mit drei unterestimmten ganzen zahlen", *Journal Reine Angewandte Mathematik*, vol 40 (3), 209-227 (1850).
- [17] S. FORTUNE, "A sweepline algorithm for Voronoï diagram", *Algorithmica*, vol 2, 153-174 (1987).
- [18] A. BYKAT, "I - Subdivision of a general polygon into convex subregions, II - triangulation of convex polygons", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol 10, 1329-1342 (1976).
- [19] B. JOE AND B. SIMPSON, "Triangular meshes for regions of complicated shape", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.*, vol 23, 751-778 (1986).
- [20] C. L. LAWSON, "Software for C^1 surface interpolation", *Math Software III*, Academic Press, J. R. Rice Ed., New York 1977.
- [21] D. T. LEE AND B. J. SCHACTER, "Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation", *Int. Journ. of Comp. and Infor.*, vol 9 (3), 219-242 (1980).
- [22] M. TEILLAUD, "Towards dynamic randomized algorithms in computational geometry", *Rapport de Recherche INRIA -Programme 4-*, N 1727, 1992.
- [23] L. DE FLORIANI, B. FALADIENO, C. PIENOVI, "Delaunay-based representation of surfaces defined over arbitrary shaped domains", *Computer Vision, Graphics and Image Proc.*, 32, 127-140 (1985).
- [24] G. D. FINLAYSON AND B. BHATTACHARYA, "A practical algorithm for the greedy triangulation of a convex polygon", *Proc. of the fourth Canadian Conf on Comp. Geometry*.
- [25] M. BERN AND D. EPPSTEIN, "Polynomial size nonobtuse triangulation of polygons", *ACM*(1991).
- [26] M. BERN, D. DOBKIN, D. EPPSTEIN, "Triangulating polygons without large angles", *8th Annual Computational Geometry* Berlin, Germany, June 1992.
- [27] J.-M. MOREAU, "Hiérarchisation et facétisation de la représentation par segments d'un graphe planaire dans le cadre d'une arithmétique mixte", *Thèse St Etienne, France*, 1990.
- [28] J.-M. MOREAU, "Hierarchical Delaunay Triangulation", in *Proc. of the 6th Canadian Conf. on Comp. Geometry* Saskatoon, Saskatchewan, August 2-6, 1994.
- [29] J.-M. MOREAU AND P. VOLINO, "Delaunay Triangulation revisited", in *Proc. of the 5th Canadian Conf. on Comp. Geometry* Waterloo, Canada, August 5-9, 1993.
- [30] J.-M. MOREAU, D. MICHELLUCCI, Y. BUDAUD, "off-line processing of terrains structured by semantic hierarchies", *Rapport interne EMSE* submitted to *Algorithmica*, 1996.
- [31] P. CHEW, "Constraint Delaunay Triangulation", in *Proc. of the 3rd ACM Symposium on Comp. Geometry* 215-222, 1987.
- [32] A. BOWYER, "Computing Dirichlet Tessellation", *the Comp. J.* Vol 24, N 2, 161-166, 1981.

- [33] S. W. SLOAN, "A fast algorithm for constructing a Delaunay triangulation in the plane", *Adv. Eng. Soft.* Vol 9, N 1, 34-55, 1987.
- [34] J. L. BENTLEY AND T. OTTMAN, "Algorithms for reporting and counting geometric intersections", *IEEE Trans. Comp.* c-28(9), 643-647, 1979.
- [35] D. MICHELLUCCI AND J.-M. MOREAU, "Lazy Arithmetic", accepté pour publication dans *IEEE Trans. Comp.* 1996.
- [36] C. M. HOFFMANN, "The Problems of Accuracy and the Robustness in Geometric Computation", *IEEE Comput.* 22, p 31-41, 1989.
- [37] M.-C. RIVARA, "Design and data structure of fully adaptive, multigrid, Finite-Element software", *ACM Tran. Math. Soft.* 10, p 242, 1984.
- [38] O. C. ZIENKIEWICZ AND J. Z. ZHU, "Adaptivity and mesh generation", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.* Vol. 32, 783-810, 1991.
- [39] R. RICHTER, "Discontinuity Capturing using Auto-Adaptive Finite Elements", *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields* Proc. of the 4th International Conf., Swansea, Wales, 1994.
- [40] A. G. STAMATIS AND K. D. PAPAILIOU, "An Unstructured Grid Optimization Method", *Proc. Finite Elements in Fluids* Spain, Barcelona, 1993, p 676-685.
- [41] W. H. FREY AND D. A. FIELD, "Mesh Relaxation: A New Technique for Improving Triangulations", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.* Vol. 31, 1121-1133, 1991.
- [42] B. PALMERIO, "Recent Developments in Adaptive Finite-Element Calculations of Compressible Flows", ? 1987.
- [43] E. A. DARI AND G. C. BUSCAGLIA, "Topics on Finite Element Meshes for Problems with Moving Boundaries", *Proc. Finite Elements in Fluids* Spain, Barcelona, 1993, p 726-735.
- [44] B. DUVAL - H. GUILLARD, "Gestion de maillages triangulaires déformables", *Rapport de Recherche INRIA -Programme 6-*, N 2272 juillet 1994.
- [45] N. P. WEATHERILL AND J. MARCHANT, "Grid Adaptation Using a Distribution of Sources Applied to Inviscid Compressible Flow Simulations", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.* Vol. 19, 739-764, 1994.
- [46] R. VILSMEIER AND D. HÄNEL, "Adaptive Solutions for Compressible Flows on Unstructured, Strongly Anisotropic Grids", *Proc. Comp. Fluid Dynamics* Vol. 2, 1992, Elsevier Sc. Publi., p 945-951.
- [47] R. VILSMEIER AND D. HÄNEL, "Generation and Adaptation of unstructured meshes" *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields* 1991, p 55-63.
- [48] S. PIRZADEH, "Structured Background Grids for Generation of Unstructured Grids by Advancing-Front Method" *AIAA Journ.* Vol. 31, No. 2, February 1993, p 257-265.
- [49] D. J. MAVRIPLIS, "Unstructured and Adaptive Mesh Generation for High Reynolds Number Viscous Flows" *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields* 1991, p 79-91.

- [50] E. BRIÈRE DE L'ISLE, P.-L. GEORGE, E. SALTEL, "Mailleur de Voronoï bidimensionnel contrôlé par une carte de tailles", *Rapport de Recherche INRIA -Programme 6-*, No. 2056, Octobre 1993.
- [51] D. G. HOLMES AND S. LAMSON, "Adaptive Triangular Meshes for Compressible Flow Solutions" *Proc. in Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics* Karlsruhe, West Germany, 1986, p 413-424.
- [52] S. REBAY, "Automatic Generation of Unstructured Delaunay Meshes for CFD", *Proc. Finite Elements in Fluids* Spain, Barcelona, 1993, p 630-638.
- [53] J.-D. MÜLLER, P. L. ROE AND H. DECONINCK, "A Frontal Approach for Internal Node Generation in Delaunay Triangulations", *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.* Vol. 17, p 241-255, 1993.
- [54] V. SRINIVISAN, L. R. NACKMAN, J.-M. TANG, S. N. MESHKAT, "Automatic Mesh Generation Using the Symmetric Axis Transformation of Polygonal Domains", *Proc. of the IEEE* Vol. 80, No. 9, Septembre 92, p 1485-1501.
- [55] H. BLUM AND R. N. NAGEL, "Shape Description Using Axis Features" *Pattern Recognition* Vol. 10, p 167-180, 1978.
- [56] N. BOBIN, "Module de Simplification de Courbes par la Méthode de Douglas-Peucker: Etude et Développement" *Rapport de stage de 3^{ème} année Option 3IA*. 1994.
- [57] K. KASHIYAMA T. OKADA, "Automatic Mesh Generation Method for Shallow Water Flow Analysis" *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.* Vol. 15, p 1037-1057, 1992.
- [58] K. KASHIYAMA AND M. KAWAHARA, "Finite Element Analysis of Tsunami Wave Propagation using Optimal Mesh" *Finite Elements in 90's* Barcelona 1991.
- [59] T. TANIGUCHI, K. P. HOLZ AND C. OHTA, "Grid Generation for 2D Flow Problem" *Int. Journ. for Num. Meth. in Fluids* Vol. 15, p 985-997, 1992.
- [60] L. ZOVATTO, G. UMGIESSER AND A. BERGAMASCO, "An Automatic Adjustable Finite Element Grid Generator", *Proc. Finite Elements in Fluids* Spain, Barcelona, 1993, p 611-619.
- [61] M. VISVALINGAM, J. D. WHYATT, "The Douglas-Peucker Algorithm for line Simplification: Re-evaluation through Visualisation" *Computer Graphics Forum* 9, p 213-228, 1990.
- [62] PH. GARNESSON, G. GIRAUDON, "L'approximation Polygonale Bilans et Perspectives", *Rapport de Recherche INRIA -Programme 4-*, No. 1621, Février 1992.
- [63] P. HOUTHUYS, "Box Sort a multidimensional binary sorting method for rectangular boxes, used for quick range searching" *The Visual Computer* Vol. 3, p 236-249, 1987.
- [64] W. H. FREY, "Selective refinement: a new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes", *Int. Journal for Num. Meth. in Eng.*, vol. 24, 2183-2200 (1987).
- [65] C. BRANCIER, "Génération de points aléatoirement, dans un triangle, selon différentes lois, en langage C sous UNIX" *Rapport de stage effectué à l'EMSE IUT A Lyon I*. 1994.
- [66] H. HOPPE, T. DEROSE, T. DUCHAMP, J. M. DONALD, W. STUETZLE, "Mesh Optimization", *Comp. Graphics Proc.*, pp 19-26 (1993).

- [67] F. SCHÖDER AND P. ROßBACH, "Managing the Complexity of Digital Terrain Models", *Comp. and Graphics*, vol. 18, No 6, pp 775-783 (1994).
- [68] H. GRANDIN JR., "Fundamentals of the Finite Element Method", *Macmillan Publishing Company* New York, 1986.
- [69] DONNARS PH., MALATRE K., "Utilisation du code TELEMAC 2D afin d'étudier les déplacements des cténaires (groseilles de mer) entre Paluel et Gravelines lors de la période critique de mai 1993", *EDF-DER-LNH*, HE-31/94/039/A.
- [70] JANIN J. M., BLANCHARD X., "Simulation des courants de marée en Manche et proche de l'atlantique. Rapport final", *EDF-DER-LNH*, HE-42/92/58.
- [71] J. DUPLEX, D. ROUGÉ, "Aménagement de Miribel, projet autoroutier : Etude de l'impact du second viaduc", *EDF-DER-LNH*, HE-43/89.53.
- [72] ROUGE D., BOULET T., "Code TELEMAC 2D, Version 2.0, Dossier de Validation", *EDF-DER-LNH*, HE-43/92.12.
- [73] N. GOUTAL, "Résolution des équations de Saint-Venant en régime transcritique par une méthode d'éléments finis : application aux bancs découvrant" *Bulletin de la DER d'EDF - série C*, No 4, 1987.
- [74] J.-M. JANIN, "Code TELEMAC 3D, Version 2.0", *EDF-DER-LNH*, HE-43/92.12.
- [75] E. DELEERSNIJDER AND J.-M. BECKERS, "On the use of the σ -coordinate system in regions of large bathymetric variations", *J. of Marine Syst.* 3 (1992), 381-390.

Annexe

1. Introduction

Afin de compléter l'analyse des équations de Saint-Venant qui a défini les critères adaptatifs du chapitre 4, nous présentons brièvement les équations de Saint-Venant.

Tout d'abord, une étude adimensionnelle des équations de Saint-Venant permet de comparer l'influence et le poids respectif des différents termes de l'équation en fonction de la nature de l'écoulement.

Dans la seconde partie, Nous décrirons brièvement la résolution des équations de Saint-Venant au sein du code TELEMAC-2D.

2. Analyse des équations de Saint-Venant

2.1 Formulation hauteur-vitesse

Compte tenu du caractère quasi horizontal des écoulements étudiés (propagation des ondes de marée, modélisation des courants côtiers ...) il est légitime de supposer que :

- les profils de vitesse horizontale sont quasi uniformes selon la verticale,
- l'accélération verticale des particules fluides est négligeable devant la gravité, ce qui revient à supposer que la pression est hydrostatique.

On peut alors réécrire les équations de Navier-Stokes en moyenne sur la verticale entre le fond et la surface libre à l'aide des variables moyennes $\bar{u}_i$, de h , hauteur d'eau et de Z , cote de la surface libre. Nous obtenons le système d'équations suivant auquel nous ferons référence sous le nom de formulation "hauteur-vitesse" :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(\bar{\vec{u}}h) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial t} + \bar{\vec{u}} \otimes \text{grad}(\bar{\vec{u}}) + g \text{grad} Z = K \Delta \bar{\vec{u}} + \bar{\vec{f}} \end{cases}$$

où K est un coefficient modélisant la dispersion due à la turbulence et aux inhomogénéités selon la verticale, et $\bar{\vec{f}}$ regroupe l'ensemble des termes sources :

$$\bar{\vec{f}} = 2\bar{\vec{\Omega}} \wedge \bar{\vec{u}} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P_{atm} + \bar{\vec{F}}_{RS} + \bar{\vec{F}}_{RF}$$

En premier lieu, on reconnaît la force de Coriolis proportionnelle à $\vec{\Omega}$, vecteur rotation instantanée de la terre, puis les termes sources provenant de contraintes en surface libre (gradient de la pression atmosphérique ainsi que le cisaillement dû au vent, $\vec{F}_{RS}$) et enfin les termes dissipatifs de frottement sur le fond, $\vec{F}_{RF}$.

Ces deux équations traduisent la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement.

2.2 Mise sous forme adimensionnelle

Par le choix de grandeurs de référence, on peut réécrire le système (P) sous forme adimensionnelle pour faire apparaître les nombres adimensionnels régissant l'écoulement. Cette méthode permet de comparer l'influence des poids respectifs des différents termes de l'équation en fonction de la nature de l'écoulement.

Si l'on choisit comme grandeur de référence :

- H : une hauteur caractéristique (la profondeur moyenne par exemple),
- L : une longueur caractéristique (longueur d'onde ou longueur du bassin),
- V : une vitesse caractéristique (vitesse moyenne) qui permet de définir l'échelle des temps $T = \frac{L}{V}$.

et que l'on indice d'un " $\wedge$ " les grandeurs adimensionnelles, définies par :

- $\hat{x} = \frac{x}{L}$, $\hat{y} = \frac{y}{L}$
 $\implies \hat{\text{div}}() = L \text{div}(); \hat{\text{grad}}() = L \text{grad}(); \hat{\Delta}() = L^2 \Delta()$
- $\hat{z} = \frac{z}{H}$, $\hat{h} = \frac{h}{H}$
- $\hat{u} = \frac{u}{V}$, $\hat{t} = \frac{t}{T}$

on obtient le système ($\hat{P}$) suivant :

$$(\hat{P}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \hat{\text{div}}(\vec{\hat{u}} \hat{h}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{\hat{u}}}{\partial \hat{t}} + \vec{\hat{u}} \otimes \text{grad}(\vec{\hat{u}}) + \frac{gH}{V^2} \text{grad} \hat{Z} - \frac{K'V}{L^2} \hat{\Delta} \vec{\hat{u}} = 2 \frac{\Omega L}{V} \vec{k} \wedge \vec{\hat{u}} - \frac{\vec{F}_{RF} L}{V^2} \end{array} \right.$$

avec K' une grandeur adimensionnée de la diffusion : $K' = \frac{T}{V^2} K$.

Cette analyse permet de retrouver les groupements adimensionnels classiques :

- $\frac{gH}{V^2} = \frac{1}{F^2}$ (inverse du nombre de Froude),

- $\frac{VK'}{L^2} = \frac{1}{Re}$ (inverse du pseudo nombre de Reynolds),
- $\frac{F_{RF}L}{V^2}$ (ne porte pas de nom particulier),
- $\frac{2\Omega L}{V} = \frac{1}{Ro}$ (inverse du nombre de Rossby).

Ces termes déterminent respectivement le poids du terme de propagation, des termes sources et des termes de dispersion rapportés aux termes d'inertie.

Nous allons voir que le nombre de Froude permet de caractériser la nature de l'écoulement.

2.3 Ordres de grandeur

Les valeurs du nombre de Froude varient sensiblement en fonction des problèmes étudiés.

Problèmes maritimes

Lorsque l'on s'intéresse à des problèmes maritimes de grande emprise (marées, surcotes, ...) les grandeurs caractéristiques sont de l'ordre de :

- Profondeur : $H = 50 \text{ m}$ à 150 m ,
- Dimension horizontale : $L = 50 \text{ km}$ à 500 km ,
- Vitesse des courants : marées : $V = 1 \text{ m/s}$ à 2 m/s , surcotes : $V = 0.25 \text{ m/s}$ à 0.5 m/s .

Ces valeurs caractéristiques impliquent des nombres de Froude de l'ordre de 10^{-2} . Dans ces conditions (si l'on admet que les gradients de u et v sont du même ordre de grandeur) les termes prépondérants sont alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \hat{d}v(\vec{\hat{u}}\hat{h}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{\hat{u}}}{\partial t} + \frac{1}{F^2} \text{grad } \hat{Z} = \dots \end{cases}$$

Après linéarisation sur $\hat{h}$ ($\hat{h} = 1$), dérivations partielles, en temps et en espace, des équations et conversion en variable physique :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \text{div grad } Z = \dots \\ \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \text{div grad } \vec{u} = \dots \end{cases}$$

avec $c = \sqrt{gH}$.

Depuis Euler, on sait que la solution d'une équation de type $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ est $f(x, t) = A(x - ct) + B(x + ct)$ caractérisant la propagation d'une onde à la célérité uniforme c . Dans notre cas, les quantités Z et u , sont solutions d'une équation d'onde se propageant à la célérité uniforme $c = \sqrt{gH}$. Cette étude adimensionnelle conforte le choix du critère lié aux ondes de marée établi dans le chapitre 4.

Problèmes côtiers

Lorsqu'on s'intéresse aux écoulements à proximité du littoral, les ordres de grandeurs des quantités de référence évoluent sensiblement et modifient progressivement la nature des équations.

En effet si l'on considère que les grandeurs caractéristiques sont de l'ordre de :

- Profondeur : $H = 10 \text{ cm}$ à 10 m ,
- Dimension horizontale : $L = 50 \text{ m}$ à 1 km ,
- Vitesse des courants : marées : $V = 0.5 \text{ m/s}$ à 2 m/s

On obtient des nombres de Froude compris entre 0.1 et 2, qui sont d'autant plus élevés que l'on se rapproche de la côte. Dans ces conditions les termes prépondérants du système $(\hat{P})$ se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \hat{div}(\vec{\hat{u}} \hat{h}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{\hat{u}}}{\partial t} + \vec{\hat{u}} \otimes \text{grad}(\vec{\hat{u}}) = \dots \end{cases}$$

L'écoulement est donc dominé dans les régions de faible tirant d'eau par un transport des quantités h et u à la vitesse du fluide.

En effet, les équations de la forme $\frac{\partial A}{\partial t} + U \frac{\partial A}{\partial x} = 0$ vérifient $\frac{dA}{dt}$ sur les courbes C d'équation $\frac{dx}{dt} = U$. Les courbes C s'appellent les caractéristiques et A l'invariant de Riemann.

Pour ces problèmes côtiers, comme le montre les équations adimensionnées, le phénomène physique important est le transport des inconnues à la vitesse du fluide qui est également inconnue. Contrairement aux problèmes maritimes un critère n'a pu être

établi en ne considérant que la seule information disponible, la bathymétrie.

2.4 Résolution des équations de Saint-Venant dans le code TELEMAC-2D

Le code TELEMAC-2D résout les équations de Saint-Venant bidimensionnelles par une méthode du type éléments finis. Bien que seule la formulation des équations de Saint-Venant sous forme “conservative” (variable hauteur, débit) assure une bonne prise en compte des discontinuités qui peuvent apparaître dans les solutions (ressaut hydraulique), d’autres raisons (stabilité des schémas, utilisation de la méthode des caractéristiques) ont conduit à adopter une formulation dite “non-conservative”.

La formulation “non-conservative” utilise les variables hauteur et vitesse et est définie par le système :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\text{grad}} h + h \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \otimes \vec{\text{grad}}(\vec{u}) = -g \vec{\text{grad}} Z + \frac{1}{h} \operatorname{div}(h \nu_e \vec{\text{grad}} \vec{u}) + \vec{f} \end{cases}$$

Les forces $\vec{f}$ représentent les forces volumiques autres que la pression et la pesanteur. Certaines de ces forces comme l’influence du vent, sont en fait superficielles en dimension 3, mais apparaissent dans les équations de Saint-Venant comme des termes sources appliqués à toute la masse d’eau, puisque les équations représentent une moyenne sur la verticale. Les différentes forces et termes sources pris en compte sont :

- le frottement au fond (loi de Chézy, Strickler, ...),
- la force de Coriolis,
- l’influence du vent,
- la pression atmosphérique,
- les sources de quantité de mouvement.

La viscosité relative ν_e est la sommation d’une viscosité moléculaire et d’une viscosité turbulente déduite du modèle de turbulence $k - \epsilon$. Cette viscosité comporte également les termes dit de dispersion issue des hétérogénéités de la vitesse sur la verticale.

Les algorithmes de résolution des équations de Saint-Venant “non-conservative” en formulation hauteur-vitesse vont brièvement être présentés pour permettre aux lecteurs de se faire une idée d’ensemble du schéma de résolution.

La résolution des équations de Saint-Venant utilise une méthode à pas fractionnaire afin de séparer les différents opérateurs et utiliser une résolution adéquate pour chacun d'eux. Dans le cas où l'on utilise la méthode des caractéristiques, le système d'équations est résolu en deux étapes.

- une étape de convection par la méthode des caractéristiques,
- une étape de diffusion, de propagation avec des termes sources à l'aide d'une formulation du type éléments finis.

L'intérêt de la méthode des caractéristiques est qu'elle est inconditionnellement stable et est positive. Cependant elle ne garantit pas la conservation de la masse et est diffusive. Pour l'étude des traceurs, grandeurs physiques n'influençant pas l'écoulement, d'autres méthodes de résolution ont été développées afin d'obtenir des résolutions plus conservatives et moins diffusives. Ces résolutions utilisent la technique des éléments finis fondée sur des formulations SUPG, PSI,....

L'étape de diffusion, propagation, termes sources, utilise donc une technique type élément finis. Une discrétisation en temps permet tout d'abord d'éliminer les non-linéarités des équations. Ensuite une formulation variationnelle, issue de la thèse de N. Goutal [73], et une discrétisation spatiale transforment les équations continues en un système linéaire discret dont les inconnues sont les valeurs des grandeurs physiques h, u, v aux noeuds du maillage. Ce système est ensuite résolu par une méthode itérative de type gradient conjugué.

