

THESE DE DOCTORAT

présentée

à

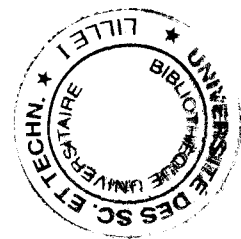
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

par

MIKOLAJCZAK Alain

MODELISATION DU COMPORTEMENT DE CRAIES SOUS
SOLLICITATIONS SIMPLES ET COMPLEXES

Soutenue à Lille le 28 Juin 1996 devant le jury composé de :



MM. I. SHAHROUR
R. CHARLIER
R. NOVA
J.F. SHAO
J. M. SIWAK

Ecole Centrale de Lille
Université de Liège
Université de Milan
Université de Lille
Ecole des Mines de Douai

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la direction conjointe de Monsieur J. M. SIWAK, responsable du département Génie Civil de l'Ecole des Mines de Douai, et de Monsieur J. P. HENRY, Professeur à l'université de Lille I, que je remercie vivement.

Je remercie l'Ecole des Mines de Douai pour le soutien matériel et financier qu'elle m'a apporté.

J'exprime ma plus profonde gratitude aux Professeurs R. CHARLIER et R. NOVA pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse.

Je remercie également Monsieur le Professeur I. SHAHROUR pour avoir accepté la présidence du jury ainsi que Monsieur le Professeur J.F. SHAO pour avoir bien voulu examiner ce travail.

Ma reconnaissance va également à G. PECQUEUR (dont les travaux expérimentaux sont à la base de mon travail), ainsi qu'à l'ensemble du personnel du département Génie-Civil de l'Ecole des Mines de Douai.

SOMMAIRE

	Pages
NOTATIONS.....	5
RESUME.....	7
INTRODUCTION.....	8

1^{er} PARTIE

CHAPITRE I. LA CRAIE

I.1 - Caractérisation physico-chimique.....	10
I.1.1 - Eléments de Géologie.....	10
I.1.2 - Caractérisation directe de la microstructure.....	10
I.1.2.1 - Résidu insoluble.....	11
I.1.2.2 - Observation au microscope électronique à balayage.....	11
I.1.3 - Caractérisation indirecte de la microstructure.....	12
I.1.3.1 - Densité.....	12
I.1.3.2 - La porosité.....	12
I.1.4 - Anisotropie de structure de la craie.....	13
I.1.5 - Influence de l'argile et de la silice.....	13
I.1.6 - Conclusion.....	14
I.2 - Caractérisation mécanique.....	14
I.2.1 - Principe des essais de compression isotrope et déviatorique.....	14
I.2.2 - Comportement de craies sous contraintes isotropes.....	15
I.2.3 - Comportement de craies sous contraintes déviatoriques.....	18
I.2.4 - Comportement sous contraintes tridimensionnelles.....	20
I.2.5 - Anisotropie mécanique de la craie.....	21
I.2.6 - Influence des liquides.....	21
I.2.7 - Perméabilité.....	22
I.2.8 - Influence du temps.....	23
I.2.9 - Conclusion.....	24
I.3 - Modélisation.....	25
I.3.1 - Préliminaires théoriques.....	25
I.3.1.1 - Invariants des tenseurs des contraintes.....	25
I.3.1.2 - Notion de contrainte effective.....	26
I.3.2 - Critères de rupture.....	26
I.3.3 - Modèles basés sur la plasticité.....	30
I.3.4 - Domaines de validité des différentes lois.....	34
I.4 - Conclusion.....	34

2ème PARTIE

INTRODUCTION.....	36
-------------------	----

CHAPITRE II. PRESENTATION DES CRAIES ETUDIEES

II.1 - Position géologique.....	37
II.2 - Analyse de la microstructure.....	37
II.3 - Caractérisation mécaniques.....	39
II.3.1 - Essais de compression simple.....	39
II.3.2 - Essais de compression isotrope.....	40
II.3.3 - Essais de compression déviatorique.....	41
II.3.4 - Essais de compression proportionnelle.....	42
II.4 - Essais de torsion sur la craie d'Haubourdin.....	43
II.4.1 - Principe de l'essai - Etat de contrainte de l'échantillon.....	43
II.4.2 - Résultats expérimentaux.....	47
II.5 - Etude de la variation des paramètres élastiques.....	54
II.5.1 - Variation des modules de compressibilité K_{dr}	54
II.5.2 - Variation des modules d'Young initiaux E_{init}	56
II.5.3 - Variation des modules d'Young de rechargement E_{dr}	57
II.6 - Vérification de quelques critères.....	60
II.6.1 - Critère de Coulomb.....	60
II.6.2 - Critère de Lade.....	62
II.6.3 - Critère de Matsuoka et Nakai.....	63
II.7 - Vérification de critères à partir d'essais avec rotation d'axes.....	64
II.8 - Conclusion.....	65

CHAPITRE III. LE MODELE DE CAMBRIDGE

III.1 - Le concept d'état critique.....	66
III.1.1 - Le concept d'état critique en mécanique des sols.....	66
III.2 - Présentation du modèle Cam-Clay modifié (CC-M).....	67
III.3 - Réponse du modèle sous sollicitations triaxiales.....	69
III.4 - Principe de détermination des paramètres.....	69
III.4.1 - Détermination de k	69
III.5.3 - Détermination de M	70
III.5 - Détermination des paramètres des craies.....	71
III.5.1 - Paramètres élastiques.....	71
III.5.2 - Détermination de M	71
III.5.3 - Détermination de k	72
III.5.4 - Domaine d'élasticité initial.....	73
III.6 - Simulations des essais triaxiaux.....	75
III.6.1 - Simulations des essais de compression isotrope.....	75
III.6.2 - Simulations des essais de compression déviatorique.....	76
III.7 - Etude paramétrique.....	81
III.7.1 - Influence du module de compressibilité K_{dr}	81
III.7.2 - Influence du paramètre M	82
III.7.3 - Influence du paramètres k	83
III.8 - Validation sous chemin proportionnel.....	85
III.9 - Conclusion.....	86

CHAPITRE IV. LE MODELE DE NOVA

IV.1 - Présentation du modèle.....	88
IV.1.1 - Critère de Matsuoka et Nakai.....	88
IV.1.2 - Modèle de Nova.....	89
IV.2 - Etude d'une version simplifié du modèle.....	91
IV.2.1 - Détermination des paramètres.....	92
IV.2.2 - Domaine d'élasticité initial (prédiction du modèle).....	93
IV.2.3 - Simulations des essais triaxiaux.....	95
IV.2.3.1 - Simulations essais des compression isotrope.....	95
IV.2.3.2 - Simulations essais des compression déviatorique.....	96
IV.3 - Introduction d'une seconde variable d'écrouissage.....	98
IV.3.1 - Simulations des essais de compression déviatorique.....	99
IV.4 - Etude paramétrique.....	105
IV.4.1 - Influence des paramètres α et β	105
IV.4.2 - Influence du paramètre γ	106
IV.4.3 - Influence du paramètre ξ	107
IV.5 - Validation sous chemin proportionnel.....	108
IV.6 - Conclusion.....	109

CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE.....	110
---------------------------------------	-----

3ème PARTIE

INTRODUCTION.....	111
-------------------	-----

CHAPITRE V. MODELISATION NUMERIQUE

V.1 - Rappels de cinématique.....	112
V.1.1 - Gradient de la transformation.....	112
V.1.2 - Décomposition du tenseur taux de déformation.....	114
V.2 - Formulation variationnelle.....	115
V.2.1 - Principe des puissances virtuelles.....	115
V.2.2 - Forme taux du principe des puissances virtuelles.....	118
V.2.3 - Introduction de la loi de comportement dans le P P V.....	119
V.3 - Méthodes de résolution.....	122
V.3.1 - Résolution des équations d'équilibre.....	122
V.3.2 - Intégration des lois de comportement élastoplastique.....	122
V.3.2.1 - Configuration intermédiaire d'intégration.....	123
V.3.2.2 - Objectivité et consistance du schéma d'intégration.....	125
V.3.2.3 - Evaluation de la contrainte intermédiaire.....	125
V.3.2.4 - Découpage en sous intervalles.....	126
V.3.2.5 - Autres formes du schéma d'intégration.....	127
V.3.2.6 - Limites des schémas d'intégration.....	127
V.3.3 - Critères de convergence.....	130
V.4 - Discrétisation.....	131
V.4.1 - Discrétisation spatiale.....	131
V.4.2 - Discrétisation des équations.....	134

V.5 - Conclusion.....	137
 CHAPITRE VI. SIMULATIONS DES ESSAIS DE TORSION SUR UNE CRAIE D'HAUBOURDIN	
VI.1 - Généralités.....	138
VI.1.1 - Discrétisation de l'échantillon.....	138
VI.1.2 - Intégration sur le volume.....	140
VI.1.3 - Calcul des variations volumiques.....	140
VI.2 - Etude paramétrique.....	141
VI.2.1 - Détermination du nombre de sous incréments.....	141
VI.2.2 - Détermination de la valeur du critère de convergence.....	142
VI.2.3 - Validation du code.....	143
VI.2.4 - Influence de la dérivée objective.....	145
VI.3 - Simulations des essais de torsion de la craie d'Haubourdin.....	147
VI.3.1 - Simulations des essais de torsion compression isotrope.....	147
VI.3.2 - Simulations des essais de torsion compression déviatorique.....	151
VI.4 - Conclusion.....	159
 CONCLUSION DE LA TROISIEME PARTIE.....	
CONCLUSION GENERALE.....	161
 CONCLUSION GENERALE.....	
CONCLUSION GENERALE.....	162
 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	
Annexe 1 - Modèle Lade-Rock (1987).....	164
Annexe 1 - Modèle Lade-Rock (1987).....	172
Annexe 2 - Simulations des essais triaxiaux.....	174
Annexe 3 - Objectivité du schéma d'intégration.....	177
Annexe 4 - Calculs des tenseurs rotation.....	178
Annexe 5 - Algorithme simplifié du code de calcul.....	180

NOTATIONS

NOTATIONS GENERALES

X	tenseur d'ordre n
X^{-1}	inverse du tenseur X
X^T	tenseur transposé de X
X^{-T}	tenseur transposé de l'inverse de X
$\det(X)$	déterminant de X
$\text{tr}(X)$	trace du tenseur X
$\dot{X}$	vitesse du tenseur X
$\text{sym}(X)$	partie symétrique du tenseur X
$\text{Asym}(X)$	partie antisymétrique du tenseur X
XY	produit des tenseurs X et Y
$X:Y$	$=\text{tr}(XY^T)$

NOTATIONS LATINES

P_0	limite élastique en compression isotrope
P_c	pression de confinement
P_{ct}	limite d'effondrement plastique
D	tenseur taux de déformation
E	module d'Young
E_{dr}	module d'Young de rechargement
E_{init}	module d'Young initial
F	tenseur gradient de déformation
f	fonction de charge
g	potentiel plastique
H^e	tenseur d'élasticité
H^{ep}	tenseur constitutif élastoplastique
I	tenseur unité
$I_1 = \text{tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$	1 ^{er} invariant du tenseur des contraintes
$I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_{ij}^2) = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$	2 nd invariant du tenseur des contraintes
$I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma_{ij}^3) = \frac{1}{3}(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3)$	3 ^{ème} invariant du tenseur des contraintes
J	jacobien de la transformation

$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(s_{ij}^2)$	2 nd invariant du tenseur "déviateur" des contraintes
$J_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(s_{ij}^3)$	3 ^{ème} invariant du tenseur "déviateur" des contraintes
K	module de compressibilité
K_{dr}	module de compressibilité de rechargement
L	tenseur gradient de vitesse de déformation
R	tenseur "rotation" orthogonal
S	contrainte de Piola-Kirchhoff de 2 nd espèce
$\bar{u}$	vecteur déplacement
U	tenseur de déformation pure gauche
V	tenseur de déformation pure droit
W	tenseur taux de rotation
w	déformation angulaire spécifique
$\bar{X}, \bar{x}, \bar{\chi}$	vecteurs position

NOTATIONS GRECQUES

ε	tenseur linéarisé des déformations
ε^e	partie élastique de ε
ε^p	partie plastique de ε
ε_v	déformation volumique
λ	multiplicateur plastique
σ	tenseur des contraintes de Cauchy
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	contraintes principales
θ	paramètre d'intégration

RESUME

La recherche et la validation de lois de comportement simples mais réalistes pour la craie a guidé les travaux qui sont présentés dans cette thèse. A partir d'essais triaxiaux effectués sur quatre craies, nous avons choisi un modèle élastoplastique classiquement utilisé en Mécanique des Sols : le modèle **Cam-Clay modifié**. Les résultats fournis par ce modèle sont dans une première approche satisfaisants. Il permet d'obtenir une bonne reproduction du comportement de la craie dans des essais de compression isotrope. Mais on montre que l'utilisation de ce modèle, pour simuler le comportement de craies dans des essais de compression déviatorique de révolution, conduit à des résultats de moindre qualité. En effet, on observe une mauvaise estimation de la rupture pour de faibles pressions de confinement, et une surestimation des déformations plastiques axiales et volumiques pour des pressions de confinement supérieures. Cependant, on montre qu'il permet une bonne représentation du passage du domaine fragile au domaine ductile. Pour pallier aux inconvénients du modèle précédent nous proposons l'utilisation du modèle de **Nova**. On démontre que les résultats obtenus à partir de celui-ci sont plus en accord avec les observations expérimentales. Pour valider ce modèle sous un autre type de chargement, des essais de torsion compression sur cylindre creux de craie ont été réalisés dans nos laboratoires. Ces essais permettent de soumettre l'échantillon à un état de contrainte réellement tridimensionnel, état dans lequel généralement se trouve le sol in-situ. Les dimensions adoptées pour l'échantillon impliquent une non-homogénéité du champ de contrainte. Pour alors comparer les résultats obtenus par le modèles aux résultats expérimentaux, nous avons élaboré un code de calcul par éléments finis permettant la simulation de ces essais. Nous avons porté une attention particulière sur l'obtention de la solution numérique. Différents points ont alors été abordés : méthodes de résolution des équations non linéaires, schémas d'intégration des lois de comportement élastoplastique et le maintien de l'objectivité incrémentale de la loi de comportement pendant un pas de temps. On présente enfin les simulations des essais de torsion sur une craie obtenues à partir du modèle de **Nova**.

En Mécanique, l'un des objectifs est d'établir des lois de comportement des systèmes matériels qui nous entourent. Ces lois doivent reproduire aussi fidèlement que possible les phénomènes observés dans des conditions réelles ou en laboratoire. Elles doivent également reposer sur des principes physiques fondamentaux. Un autre point important concerne l'utilisation de ces lois. En effet, celles-ci doivent garder une forme simple de manière à faciliter leurs applications industrielles. Elles deviennent inutiles lorsqu'elles sont aussi compliquées que les phénomènes qu'elles sont censées reproduire. En Mécanique des roches ou des sols, les lois de comportement sont majoritairement établis à partir de l'observation du comportement des matériaux soumis à des sollicitations simples (essai de compression simple, essai triaxial de révolution, essai de fluage uniaxial,...). Ces techniques expérimentales sont de nos jours bien maîtrisées. Les lois, ainsi établies, doivent être ensuite validées en vue de leurs applications aux dimensionnements des ouvrages. Cette validation est effectuée à partir d'essais de laboratoire, reflétant au mieux la réalité, et sur ouvrages; autrement dit, à partir de mesures effectuées "in situ". Les récents développements techniques et théoriques en matières de calculs numériques facilitent maintenant l'étude de la validité des lois de comportement. Cependant, une attention particulière doit être portée sur l'obtention de la solution numérique, en effet, les sources d'erreurs sont nombreuses.

Dans le travail que nous présentons, nous avons adopté la démarche précédente pour l'étude de craies, matériaux que l'on rencontre souvent dans le domaine du Génie-Civil et pétrolier. La Craie s'est formée au Sénonien, à cette époque la mer transgressive atteint son extension maximale, elle recouvre une grande partie des plateaux continentaux. Elle s'étend en Europe de l'Irlande à l'Oural et de la Suède au sud du bassin Parisien. A peu près à la même époque d'autres bassins marins surgissent au Moyen-Orient et en Amérique du Nord. C'est au fond de ces mers que s'est formée la craie, celle-ci résulte de dépôts sédimentaires. De nos jours, elle forme une partie importante de la superficie de l'écorce terrestre. La multiplication des réalisations d'ouvrages souterrains (tunnels, centrales hydroélectriques), l'extraction de pétrole en mer du Nord, la réalisation de pierres taillées ou encore la production de chaux sont autant d'action qui ont amené les ingénieurs à s'intéresser au plus près à ce matériau. La craie est un matériau complexe tant par sa nature physico-chimique que par son comportement mécanique. Sa caractérisation est de nos jours facilitée par l'utilisation d'outils technologiques performants (porosimètre à mercure, microscope électronique à balayage). Leurs utilisations permettent une description détaillée de sa microstructure. D'un point de vue mécanique la caractéristique principale de la craie est que son comportement est assimilé tantôt à celui d'un sol tantôt à celui d'une roche.

Dans ce rapport quatre craies blanches provenant du nord de la France sont utilisées. Ces craies font l'objet depuis plusieurs années d'études expérimentales et théoriques dans nos laboratoires (Prévost, 1991; Siwak, 1994; Pecqueur, 1995). Le travail que nous présentons résulte en partie d'une observation faite à partir de ces travaux, à savoir, une certaine similitude de comportement de ces craies dans des essais de compression à l'appareil triaxial de révolution avec les argiles surconsolidées et normalement consolidées. Ce point méritait d'être étudié de manière plus approfondie. Le second point que nous traitons concerne la validation des modèles pour des

problèmes aux limites. Dans ce travail, nous étudions donc deux modèles élasto-plastiques contenant un nombre restreint de paramètres et nous étudions leur validité pour des sollicitations complexes. Les paramètres de ces modèles sont déterminés à partir d'essais triaxiaux de compression. L'étude de la validité de ces lois est ensuite analysée à partir des essais de torsion compression sur cylindre creux qui ont été réalisés dans nos laboratoires. Ce type d'essai permet de soumettre un échantillon à un état de contrainte réellement tridimensionnel; état dans lequel se trouve généralement le sol "in situ". Il permet également d'étudier son comportement sous l'influence conjuguée ou découplée de la rotation des axes principaux de contrainte et de la contrainte intermédiaire.

Pour présenter nos travaux, nous proposons la démarche suivante :

Dans la première partie, nous présentons une synthèse bibliographique des connaissances acquises durant ces dernières années sur la caractérisation physico-chimique de la craie et sur son comportement mécanique. L'influence de la de la microstructure et des phénomènes chimiques sur ce type de matériau sera illustrée au travers de nombreux exemples. Nous donnerons également un aperçu des travaux réalisés sur la modélisation de son comportement.

Dans la seconde partie nous abordons la modélisation des quatre craies. Dans le premier chapitre, nous détaillons leurs caractéristiques physiques, chimiques et mécaniques. Les résultats présentés au début de ce chapitre sont issus des travaux des différents chercheurs travaillant sur ce matériau. Une analyse plus personnelle du comportement de ces craies est présentée à la fin de ce chapitre. Les deuxième et troisième chapitres sont relatifs à la modélisation du comportement de ces craies respectivement à partir du modèle Cam-Clay modifié et du modèle de Nova. Nous détaillons les méthodes de détermination des paramètres, puis nous présentons les simulations des essais triaxiaux. On effectue ensuite une étude de sensibilité des paramètres. La validité de ces modèles est dans un premier temps étudiée à partir d'essais de compression proportionnelle. Dans cette partie, nous montrons les limites du modèle Cam-Clay modifié pour la modélisation du comportement des craies étudiées.

La dernière partie est relative à la validation du modèle de Nova sous sollicitations avec rotation d'axes (essais de torsion compression isotrope et déviatorique), elle est composée de deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons les solutions théoriques et numériques qui ont été retenues pour l'élaboration d'un code de calcul aux éléments finis pour la résolution de problèmes aux limites. Nous y détaillons le développement de la formulation variationnelle adoptée ainsi que les choix possibles pour le maintien de l'objectivité de cette formulation et de la loi de comportement. A cet effet, une présentation des différentes dérivées objectives du tenseur des contraintes de Cauchy est effectuée. Nous décrivons également les méthodes numériques implantées dans le programme pour la résolution des équations d'équilibre et pour l'intégration de la loi de comportement. Dans le second chapitre, le code de calcul est utilisé pour simuler les essais de torsion effectués sur la craie d'Haubourdin. Le modèle utilisé est le modèle de Nova. On étudie tout d'abord l'influence de différentes dérivées objectives sur les résultats, pour ensuite présenter les simulations des différents essais de torsion.

Chapitre I

La Craie

I.1 - Caractérisation physico-chimique

I.1.1 - Eléments de géologie

Géologiquement la craie est une roche sédimentaire marine appartenant à la famille des calcaires d'origine organique. En effet, elle est constituée pour l'essentiel par l'accumulation de minuscules plaquettes (coccolithes) de calcite (CaCO_3) constituant la coque articulée d'algues marines pélagiques unicellulaires appartenant au groupe des coccolithophoridés; à ces éléments s'ajoutent souvent des foraminifères planctoniques (protozoaires marins), en proportion moindre toutefois. L'accumulation de ces tests carbonatés donne donc cette roche blanchâtre poreuse généralement tendre et friable. Les variétés de craies sont nombreuses et souvent dénommées en fonction des organismes accessoires qu'elle contient (craie à inocérames, à oursins, à spongiaires), et des minéraux particuliers associés lorsqu'ils présentent un certain pourcentage (craie dolomitisée, argileuse, phosphatée, glauconieuse..). L'importance de l'accumulation de cette roche durant la dernière période de l'ère secondaire a conduit les géologues à lui affecter le nom de "Crétacé" (tableau 1.1).

TERTIAIRE					65 MA
S E C O N D A I R E	C R E T A C E	supérieur	Sénonien	Maastrichtien	
				Campanien	
				Santonien	
				Coniacien	
		35 MA		Turonien	100 MA
				Cenomanien	
		Inférieur		Albien	
				Aptien	
				Barremien	
				Hauterivien	
30 MA	Néocomien	Valenginien	130 MA		
		Berriasien			
JURASSIQUE		75 MA			
TRIAS		45 MA			

Tableau 1.1 : Echelle des temps géologiques (MA: million d'année).

On distingue deux grandes familles de craies : les craies blanches (dites typiques) composées d'au moins 95% de CaCO_3 , et les craies dites atypiques. On identifie dans ce dernier cas les craies siliceuses, magnésiennes, ferrifères ou glauconnieuses, les craies à recristallisation partielle et les craies argileuses.

I.1.2 - Caractérisation directe de la microstructure

La compréhension du comportement mécanique de la craie passe par une analyse détaillée de sa microstructure. L'objet de cette analyse est de préciser la nature des différents constituants de la craie, d'étudier leur importance respective et d'observer leur agencement au sein du matériau; la craie n'étant pas exclusivement constituée de CaCO_3 .

I.1.2.1 - Résidu insoluble - Détermination du pourcentage de CaCO_3

Le résidu insoluble représente la fraction non carbonatée des constituants de la craie. Celui-ci est obtenu par attaque à l'acide chlorhydrique d'une solution d'eau distillée contenant en suspension quelques dizaines de grammes de craie finement broyée. La détermination du pourcentage de CaCO_3 se fait par mesure de la quantité de gaz carbonique qui se dégage. Une analyse physico-chimique permet ensuite de préciser la nature et l'importance des éléments non carbonatés constituant la craie. Elle permet notamment, de détecter la présence d'une fraction argileuse. Celle-ci est constamment présente dans la craie. Parmi les variétés de minéraux argileux, on retrouve le plus souvent les smectites, la kaolinite, l'illite, la chlorite, et la glauconite. Dans ce résidu, on décèle également des minéraux lourds (ilmémite, leucoxène, magnétite, tourmaline, zircon, grenat et biotite) ainsi que des minéraux légers, à savoir essentiellement du quartz. On montre par la suite que les proportions relatives de ces éléments sont des facteurs déterminants dans le comportement mécanique des craies.

I.1.2.2 - Observation au microscope électronique à balayage

Cette observation permet à l'opérateur de déterminer un nombre important de paramètres. Les forts grossissements qu'il autorise (parfois jusqu'à 50 000) donne une description détaillée de la microstructure de la craie. On définit ainsi le "nanofacies", ensemble des caractères minéralogiques et paléontologiques ainsi que leurs relations mutuelles.

Classiquement, on distingue les constituants suivants:

- les restes organiques
- les fragments détritiques
- les minéraux de néoformation

Les restes organiques représentent la part la plus importante des constituants des craies, leurs origines sont multiples. D'après Dessenne (1970), il faut distinguer principalement les foraminifères qui forment parfois jusqu'à 10% du sédiment et surtout les coccolhites qui en forment 80% et même plus. Ces restes se retrouvent dans la craie soit en débris isolés soit agglomérés en amas. On observe alors les particules élémentaires d'une taille variant de 0,2 à 3 microns et les amas de particules constituant des éléments de taille plus importante pouvant aller de 20 à 100 microns. Des micro fossiles (de 0,1 à 1 mm) peuvent également être décelés.

Les fragments détritiques proviennent du démantèlement de roches préexistantes. D'après Bignot (1973), les grains de grandes tailles ne sont pas courant dans les craies. Il est plus fréquent de rencontrer des grains de petite taille (de l'ordre du millimètre et en dessous). Parmi ceux-ci on trouve du quartz au Cénomaniens, quelquefois des minéraux lourds et de l'argile au Turonien (montmorillonite). Il précise que les craies blanches typiques sont presque totalement dépourvues d'éléments détritiques.

Dorémus (1978) a pu observer des particules néoformées dont la taille variait de 1 à 30 microns.

L'étude microscopique permet également d'observer les vides. Ceux-ci, tout comme les particules, existent en deux classes. Selon Dessenne (1970, 1971), la première est constituée par les espaces entre les particules élémentaires et la seconde par les espaces entre les amas de particules. Cette structure à deux échelles de pores est tout à fait classique dans les sols meubles.

L'analyse des photographies prises au microscope électronique à balayage (M. E. B.) autorise en dernier lieu une description des liaisons intergranulaires. Ces liaisons peuvent être plus ou moins complexes. On distingue trois types de liaisons :

- des liaisons par adhérence : cette liaison est caractérisée par une surface de contact importante entre deux grains successifs,
- des liaisons par coalescence : dans ce type de liaison les contacts se font par l'intermédiaire de surfaces de taille plus restreinte,
- des liaisons par pont de calcite : un pont de matière relie deux particules proches l'une de l'autre. Ces ponts sont de forme élancée et de petite taille.

La nature des liaisons conditionne la rigidité de l'ensemble du squelette solide. Ce sont elles, en particulier, qui donnent à la craie une cohésion initiale non nulle, ce qui la différencie des sols.

I.1.3 - Caractérisation indirecte de la microstructure

I.1.3.1 Densité

La densité d d'un matériau est le rapport entre sa masse M et le volume V qu'il occupe. On distingue généralement la densité apparente et la densité absolue. La densité apparente est déterminée à partir du matériau tel qu'il se présente à l'état naturel. Pour obtenir la densité absolue il faut préalablement le réduire en une poudre très fine afin d'éliminer tous les vides pouvant le constituer.

$$d = \frac{M}{V} \quad (1.1)$$

Une craie pure est caractérisée par une densité absolue de $2,72 \text{ g/cm}^3$. Les variations de cette densité donneront une indication sur la présence de minéraux annexes plus ou moins lourds.

I.1.3.2 - Porosité

Comme on le verra par la suite, d'un point de vue mécanique, la porosité est le paramètre le plus significatif de la microstructure. Elle illustre le volume des vides dans un matériau. Pour la déterminer, on peut étudier la dimension et la répartition des pores à l'aide du porosimètre à mercure. La manipulation consiste à injecter sous pression du mercure dans les vides d'un échantillon. Le volume de mercure injecté correspond au volume total des pores et la pression à laquelle il pénètre les vides est en relation avec leur taille. A partir de cet essai, on détermine également la surface spécifique qui intègre la surface développée des vides.

Pour les craies, la plage de porosité est très importante. En effet, on peut trouver des craies à faible ($\approx 10\%$) et forte porosité (40% et plus). La porosité influence de façon significative les résistances à la traction et à la compression des craies, et d'une manière générale les caractéristiques mécaniques. Ces dernières sont d'autant plus faibles que la porosité est élevée. Concernant le gonflement des craies, **Dorémus** (1978) observe que la porosité n'a pas d'influence contrairement à la surface spécifique qui devient alors le paramètre prépondérant. Ceci est bien sur à relier à la présence d'argiles très sensibles au phénomène de gonflement. En effet, à porosité égale, plus le pourcentage d'argile sera élevé plus la surface spécifique sera importante.

I.1.4 - Anisotropie de structure de la craie

L'anisotropie de structure de la craie résulte d'un arrangement particulier des grains, de leurs formes spécifiques, et/ou de la forme et de la répartition des pores. Cette anisotropie de structure induit le plus souvent une anisotropie mécanique. Son étude est d'une grande importance.

A l'échelle microscopique ou nanoscopique, cette anisotropie peut être très marquée. En effet, les observations au microscope électronique ont révélé des formes et des tailles de grains ou/et de vides très variés (cf. I.1.3). Cependant, comme l'indique **Dorémus (1978)**, la présence de minéraux anisodimensionnels n'entraîne pas forcément une anisotropie de la structure macroscopique. En effet l'agglomération de grains en paquets isodimensionnels tend à rendre la structure isotrope.

Dessenne (1970) précise que si anisotropie il y a, celle-ci provient du mode de déposition horizontal des couches de craie qui ont alors subi un tassement vertical.

Pour notre part, nous citerons **Bonvalet (1978)** qui préconise une étude de l'anisotropie chaque fois que l'expérimentateur le juge nécessaire. En effet, les études qu'il a menées ne lui permettent pas de corrélérer le degré d'anisotropie des craies en fonction d'un faciès particulier ou d'un site de prélèvement précis.

I.1.5 - Influence de l'argile et de la Silice

L'argile est constamment présente dans les craies, on distingue généralement :

- Les craies à faible teneur en argile < 10%
- Les craies à forte teneur en argile > 10%

A des pourcentages inférieurs à 10% l'argile n'a que très peu d'influence sur les propriétés mécaniques des craies. Pour des pourcentages supérieurs, et particulièrement lorsque la craie est saturée en eau, l'argile tient un rôle prépondérant dans la chute des caractéristiques mécaniques et l'élévation des effets de viscosité.

Son influence se traduit également sur la porosité de la craie. En effet les minéraux argileux qui sont de taille réduite obstruent plus ou moins les pores. Une corrélation entre la porosité et le pourcentage d'argile est constatée par **Henry (1989)**. Une augmentation de la teneur en argile entraîne une diminution de la porosité.

En règle générale, les craies sénoniennes sont peu argileuses, les craies turoniennes le sont plus et certaines craies cénomaniennes sont riches en argile, **Tallon (1976)**.

La présence de silice dans les craies tend à améliorer ses caractéristiques d'un point de vue mécanique. En effet, celle ci agit dans le même sens qu'une diminution de porosité. On définit également :

- Les craies à forte teneur en silice > à 10%
- Les craies à faible teneur en silice < à 2%

La silice est souvent caractérisée par sa forme SiO_2 (quartz)

I.1.6 - Conclusion

La caractérisation physico-chimique des craies permet d'effectuer une première classification de celles-ci. L'étude des différents paramètres cités précédemment donnera à l'expérimentateur un aperçu du comportement futur du matériau qu'il étudie. Cette approche ne doit pas être négligée. Les paramètres prépondérants dans l'évolution des caractéristiques de la craie sont principalement la forme et la taille des grains et des vides, la nature de leurs liaisons, la porosité, la teneur en argile et en silice.

I.2 - Caractérisation mécanique

Si par le passé les essais classiquement utilisés en géotechnique suffisaient à prévoir le comportement de la craie pour les applications relativement simples (terrassement, remblais), ceux-ci ne suffisent plus pour répondre aux problèmes complexes rencontrés aujourd'hui face à ce matériau. Les problèmes de subsidence en mer du Nord auxquels sont confrontés les sociétés pétrolières en est un exemple.

On dispose aujourd'hui de moyens très performants qui permettent de réaliser des essais complexes en laboratoire. L'objectif de ces essais est d'extraire les paramètres régissant les mécanismes de déformation d'un matériau. La traduction mathématique du comportement observé expérimentalement permet ensuite d'établir des lois de comportement. Cette approche est de nos jours très utilisée en mécanique des roches ou des sols. Ci-dessous, nous présentons quelques essais utilisés pour les géomatériaux.

I.2.1 - Principe des essais de compression isotrope et déviatorique

Ces deux essais sont les plus utilisés pour l'étude des géomatériaux. Les échantillons peuvent être de forme cubique ou cylindrique (figure 1.1). Cette différence de forme se répercute sur la nature des résultats obtenus. En effet, la forme cubique permet de mesurer des déformations dans les trois directions. Cet essai permet d'établir des relations entre les efforts appliqués et les déformations relatives, d'évaluer une porosité de fissures et de mettre en évidence une anisotropie de fissuration ou de matrice induisant une anisotropie mécanique. Par contre, l'essai sur cylindre ne permet d'obtenir que des valeurs de déformation axiale et radiale; il ne peut pas servir à une détermination complète de l'anisotropie.

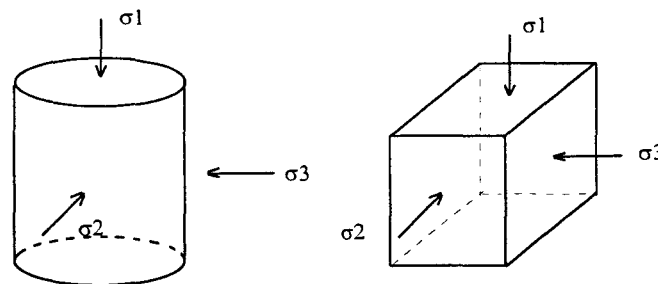


Fig 1.1 : Formes des échantillons et état de contrainte dans des essais de compression isotrope et déviatorique.

L'essai de compression isotrope consiste à soumettre un échantillon à une contrainte identique dans toutes les directions. La pression isotrope est alors définie par :

$$P = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$$

L'essai de compression déviatorique consiste, à partir d'un état de contrainte isotrope, à augmenter la contrainte selon une direction. On définit alors la pression de confinement P_c par la valeur de la plus petite contrainte principale : $P_c = \sigma_3$, $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, et le déviateur Q par : $Q = \sigma_1 - \sigma_3$.

D'une façon plus générale, lorsque l'état de contrainte est réellement tridimensionnel ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$), on décompose le tenseur des contraintes σ en une partie sphérique σ_m et une partie déviatorique s (figure 1.2). Ces quantités sont définies par :

$$\sigma_m = P$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j, = 0 \text{ si } i \neq j) \quad (1.2)$$

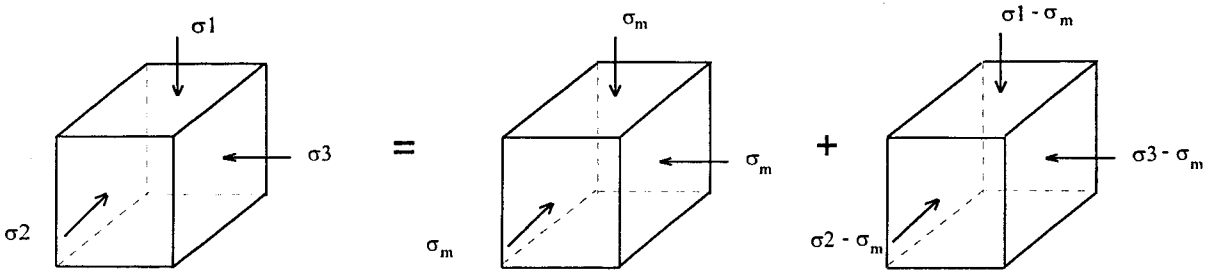


Fig 1.2 : Décomposition du tenseur des contraintes en ses parties sphérique et déviatorique.

Les échantillons de forme cylindrique ne permettent pas d'obtenir un état de contrainte réellement tridimensionnel, on a nécessairement $\sigma_2 = \sigma_3$.

1.2.2 - Comportement de craies sous contraintes isotropes

Dans ce type d'essai, la présence d'une phase initiale non linéaire traduit l'existence de micro-fissures (figure 1.4). Cette phase est appelée phase de serrage, elle correspond à la fermeture des fissures se trouvant initialement dans l'échantillon.

Sur les craies qu'il a étudiées, Dorémus (1978) n'observe pas de phase traduisant la présence de fissures. Il précise qu'en général les craies ne présentent pas ou très peu de porosité de fissures. (Cette remarque, justifiée à l'échelle de l'échantillon, n'est évidemment plus valable à une échelle plus importante). Les courbes qu'il obtient se décomposent en deux phases; dans la première la courbe est linéaire, dans la seconde la courbe s'infléchit traduisant un domaine de plus grandes déformations. En comparant les déformations dans les trois directions il a pu remarquer une anisotropie de matrice, mais celle-ci reste relativement faible. Selon Dessenne (1970), la deuxième phase commence lorsque les liens entre les particules sont tous brisés. Les éléments ainsi libérés comblent rapidement les vides. Comme nous le montrerons plus loin, certains auteurs expliquent le phénomène un peu différemment.

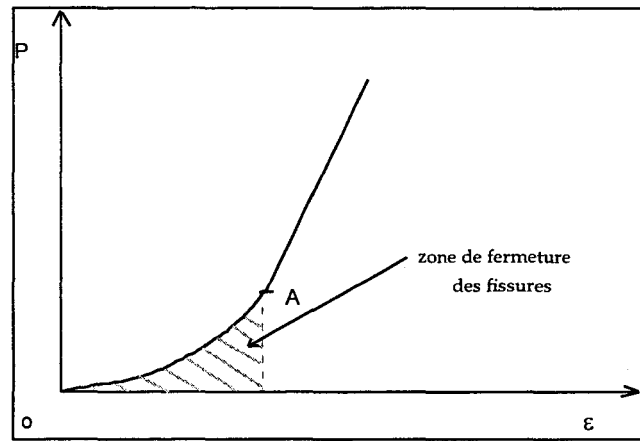


Fig 1.3 : Courbe *contrainte déformation*, phase de serrage.

Pellegrino (1970) et Duthoit et Al (1977), cités par Dorémus (1978), montrent l'existence d'une troisième zone lors d'un essai de compression isotrope. Plus récemment Shao (1987) et Siwak (1994) ont également observé ce phénomène. Sur la figure I.4, nous avons représenté la courbe caractéristique obtenue lors d'un essai de compression isotrope réalisé sur une craie.

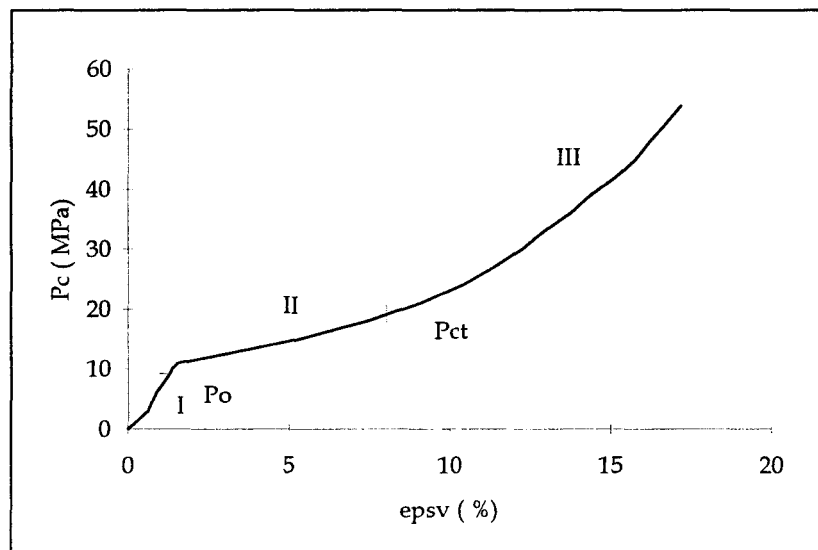


Fig 1.4 : Essai de compression isotrope sur une craie, courbe *pression isotrope-déformation volumique*.

On retrouve sur cette figure les deux phases (I, II) décrites par Dorémus (1978) et une troisième phase (III) apparaissant à de plus hautes pressions isotropes. D'après Shao (1987) le comportement de la craie dans ces différentes zones est le suivant:

- Pour $P_c < P_o$, le comportement est purement réversible, il n'y a pas de dégradation de la roche.
- Pour $P_o < P_c < P_{ct}$, on est en présence d'une phase de contraction plastique, il y a apparition de déformations permanentes. Les ponts entre grains se détruisent peu à peu.

-Pour $P > P_{ct}$, il s'agit d'une phase d'écrouissage croissant avec diminution du taux de contraction plastique, ce qui est une conséquence de l'augmentation de surface de contact entre les grains.

Il définit ainsi deux caractéristiques de la craie :

P_o : limite élastique en compression isotrope

P_{ct} : limite d'effondrement plastique.

D'après Charlez (1995), les mécanismes de déformation se produisant dans ces différentes phases se résument à trois faits principaux : rupture des liaisons entre grains, mouvement relatif de ces grains et enfin contraction de la structure (figures 1.5).

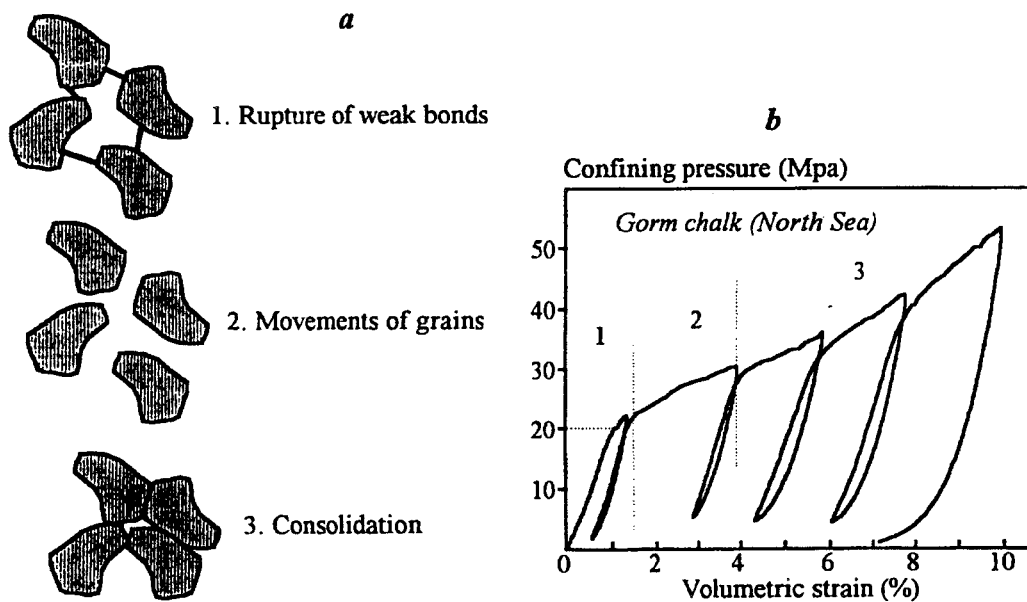


Fig 1.5 : a) Mécanisme de déformation de la craie. b) essai de compression isotrope.
(Charlez, 1995)

Le mécanisme de déformation se produisant dans la phase II de ce type d'essai est également appelé mécanisme d'effondrement de pore ou "pore collapse". Cette dénomination traduit une réduction importante de la porosité. Pour étudier plus précisément ce phénomène, Scott et al (1995) procèdent à des essais de compression isotrope avec enregistrement des vitesses de propagation des ondes acoustiques dans les directions normales et transversales d'échantillons de craies. Ces vitesses de propagations sont sensibles à l'évolution de la microstructure des roches. En effet, on observe une décroissance de ces vitesses lors de la création de micro-fissures ou à l'apparition de la dilatance précédant la rupture d'un échantillon. Dans un même temps des analyses au M.E.B. ont été effectuées. Un exemple des résultats obtenus dans un essai de compression isotrope est illustré par la figure 1.6.

Leurs analyses montrent une augmentation de la vitesse de propagation dans la première zone de l'essai. Dans cette zone, il se produit la fermeture de quelques pores et de quelques micro-fissures, il y a également consolidation de certaines liaisons grain-grain. Dans la deuxième phase, la décroissance de la vitesse de propagation traduit une décohésion du matériau, les grains glissent les uns par rapport aux autres et subissent des rotations. Enfin l'augmentation des vitesses

de propagation dans la troisième zone est due à l'augmentation du nombre de contacts entre grains.

Notons, d'après ces analyses, que les auteurs acceptent une légère évolution irréversible de la microstructure dans la première zone de l'essai qui généralement est considérée comme élastique linéaire. Dans la seconde zone, deux processus interviennent. Le premier est le glissement et la rotation des grains lors du chargement, ceux-ci comble peu à peu les vides provoquant une baisse de la porosité. Le second est la rupture des grains. **Benjamin et al** (1994) ont montré la prédominance du premier mécanisme sur le second. Ce dernier a surtout eu lieu dans le passé géologique des craies.

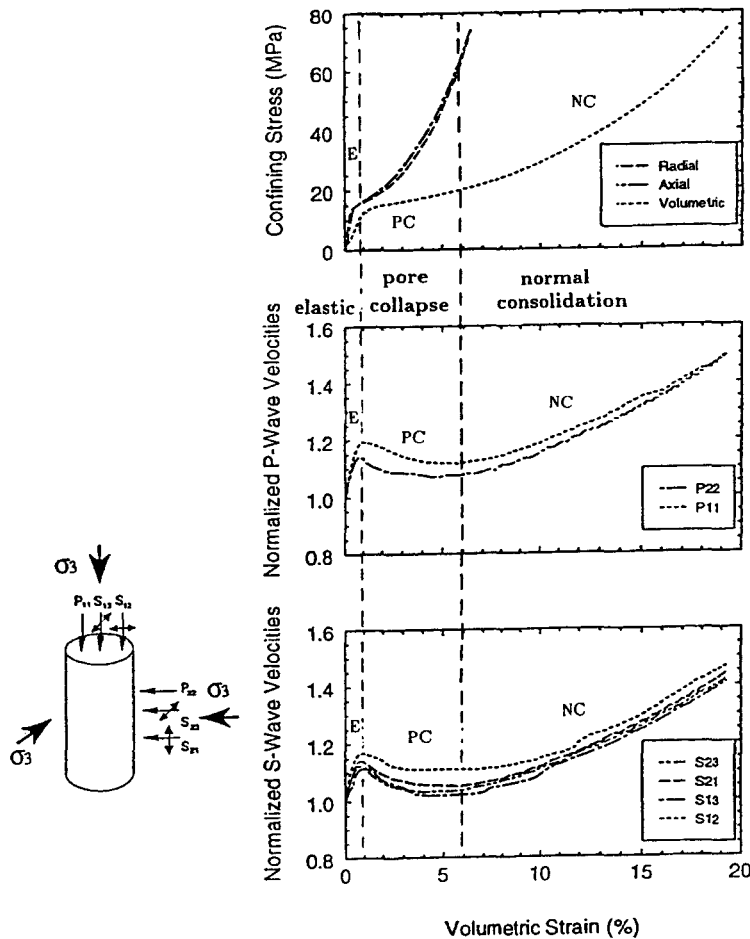


Fig 1.6 : Correspondance entre l'état de contrainte et la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans un essai de compression isotrope, craie d'Ekofisk (Scott et al, 1995).

I.2.3 - Comportement de craies sous contraintes déviatoriques

La quantité importante de résultats expérimentaux sur des craies, soumise à un tel état de contrainte, permet de dégager un comportement général.

Les auteurs mettent en évidence l'influence de la pression de confinement sur le comportement de la craie. En effet, à de faibles confinements la craie a un comportement élastique suivi d'une phase d'écrouissage peu importante jusqu'à l'apparition d'un pic de rupture. Le comportement post-rupture est radoucissant et la courbe contrainte-déformation de l'essai se termine par un palier. Au fur et à mesure que la pression isotrope augmente, ils observent que le

pic de rupture est de moins en moins prononcé et qu'il disparaît complètement pour des valeurs de pression élevées. Cette originalité de comportement est illustrée par la figure 1.7. Sur cette figure, nous présentons un essai de compression isotrope réalisé sur la craie de Liège (courbe pression en fonction des déformations volumiques) et des essais de compression déviatorique effectués à différentes pressions de confinement (courbe déviateur en fonction des déformations axiales).

Shao (1987) relie le passage du comportement fragile au comportement ductile à la limite élastique en compression isotrope (P_0). Les essais qu'il a effectués lui ont permis d'aboutir aux observations suivantes:

- Pour les essais réalisés à des pressions de confinement inférieures à la limite élastique, il y a une augmentation de la limite élastique en compression, du module d'Young et de la valeur de la contrainte de rupture.
- Pour les essais réalisés à des pressions de confinement supérieures à P_0 , la limite élastique devient négligeable, il n'y a plus de pic de rupture, l'écroutissage est toujours durcissant.

Ces observations peuvent être corrélées avec l'évolution de la microstructure sous contrainte isotrope. En effet, dans la zone I de l'essai de compression isotrope, la structure évolue dans le sens d'une rigidification globale du matériau. Ce qui explique une augmentation des caractéristiques mécaniques (limite élastique, limite de rupture, module d'Young) de la craie dans les essais déviatoriques réalisés dans cette zone. Pour des essais effectués à des pressions de confinement supérieures (zone II), Siwak (1994) observe une chute importante du module d'Young initial. Cette décroissance est sans doute due à la perte de cohésion de la craie au cours de cette phase.

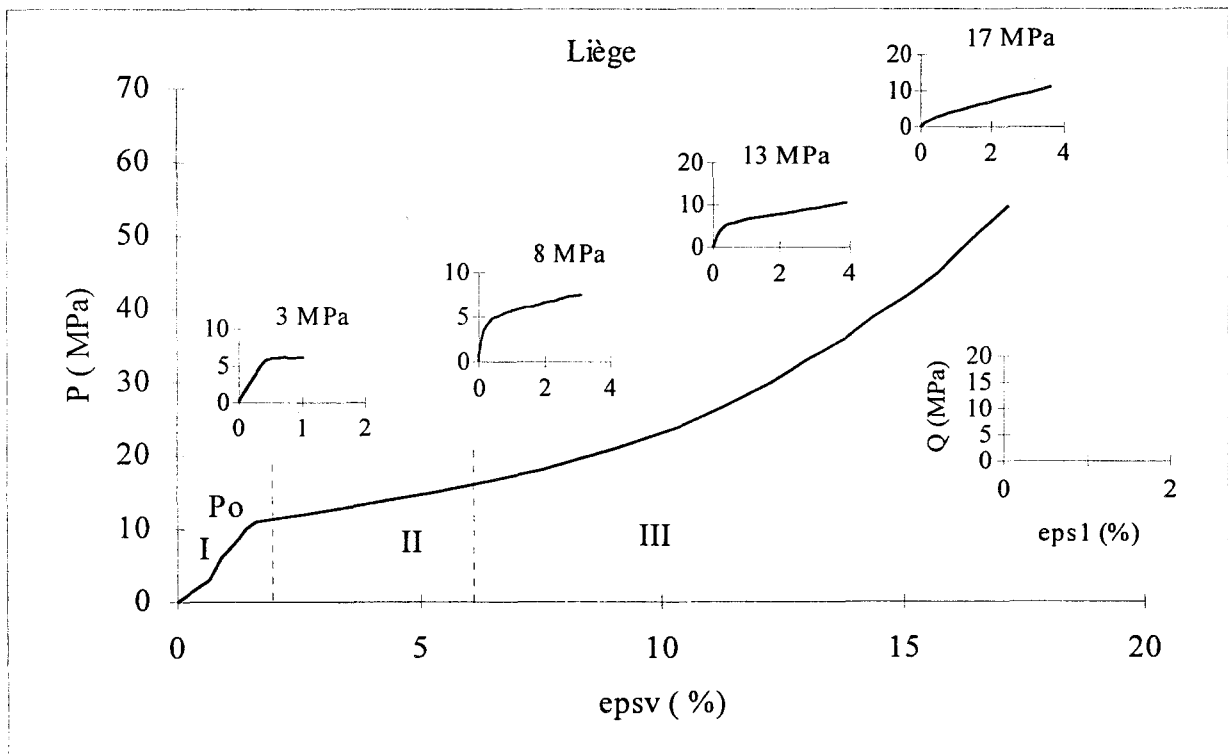


Fig 1.7 : Présentation des essais de compression isotrope et déviatorique réalisés sur la Craie de Liège.

Les résultats précédents montrent l'importance de l'effet de l'état de contrainte initial sur le comportement de la craie dans les essais de compression déviatorique. La craie se comporte à faibles confinements comme une roche fragile, et à des confinements plus importants comme un sol. Siwak (1994), remarque la similitude de comportement entre les argiles normalement ou faiblement consolidées et le comportement de craies à hauts confinements. Dans ce cas, l'influence de la cohésion initiale tend à disparaître.

Enfin, notons que Scott et Al (1995) montrent l'existence d'une phase de "Pore Collapse" dans des essais de compression déviatorique. Celle-ci se situe à des pressions immédiatement supérieures à la valeur de P_0 . Elle est ensuite suivie d'une phase de consolidation (figure 1.8).

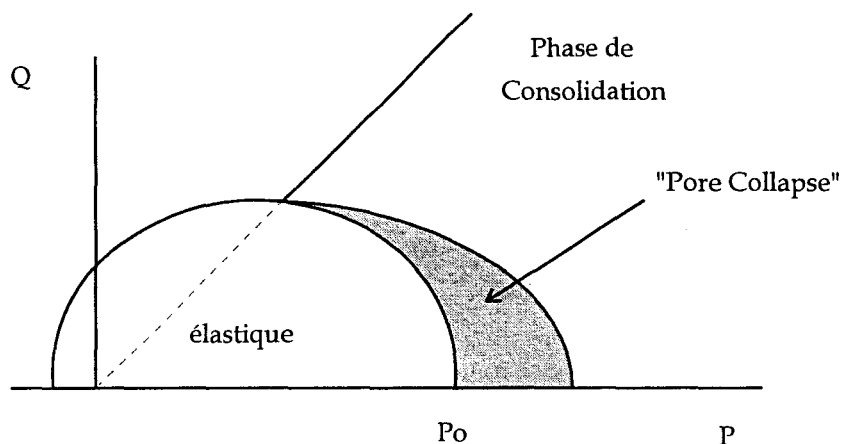


Fig 1.8 Situation de la phase de pore collapse dans le plan P-Q.
(Scott et Al, 1995)

En ce qui concerne le comportement volumique, on observe qu'à de très faibles confinements la craie présente un comportement contractant-dilatant. A des confinements plus importants le comportement est toujours contractant. Le comportement volumique des craies sera abordé plus en détail dans le second chapitre.

I.2.4 - Comportement de craies sous contraintes tridimensionnelles

Un état de contrainte réellement tridimensionnel ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$) peut être obtenu soit à partir d'essais sur des échantillons cubiques (cf I.2.1) soit à partir d'échantillons cylindriques creux. Dans le dernier cas, en plus d'un cisaillement dû à la sollicitation déviatorique, on peut appliquer à l'échantillon une contrainte de cisaillement par application d'un couple de torsion. Les tests de torsion réalisés sur la craie sont peu nombreux dans la littérature. Nous citerons Durand (1973), Prévost (1991) et plus récemment Pecqueur (1995). Les résultats de ce dernier seront exposés dans la seconde partie de ce travail. Les constatations faites par les deux premiers sont semblables. La craie utilisée par Durand est la craie de Sancerre décrite dans ses travaux comme une craie sénonienne, blanchâtre, assez grossière. L'auteur donne quelques caractéristiques de cette craie:

Densité sèche:	1,76
Porosité:	34%

Les caractéristiques de la craie utilisée par Prévost, également d'âge sénonien (craie de Lezennes), sont les suivantes :

Densité sèche : 1,65
Porosité : 40%

Leurs travaux démontrent l'influence de la pression hydrostatique sur le comportement de la craie en torsion. Le passage du domaine ductile au domaine fragile dépend de la pression de confinement. Ils indiquent également que les valeurs du couple à la rupture, des déformations angulaires et volumiques ainsi que la valeur du module de rigidité transversal sont fonction de cette pression.

I.2.5 - Anisotropie mécanique de la Craie

Dorémus (1978) indique que dans le cas des craies on se trouve le plus souvent en présence d'une orthotropie de révolution, elle est alors isotrope dans le plan de la stratification. Ceci est à relier à sa sédimentation et aux surcharges géologiques.

Dessenne (1970) a étudié l'anisotropie de la craie en effectuant des essais de compression simple dans différentes directions, cette direction étant repérée par rapport à la normale au plan de stratification. Il met ainsi en lumière une variation de la valeur à la rupture et du module d'Young. Les valeurs les plus élevées ont été trouvées dans la direction perpendiculaire à la stratification.

Deux remarques importantes sont faites par Dessenne (1970). D'une part, l'anisotropie de la craie est continue contrairement aux roches à texture orientée et d'autre part il précise que cette anisotropie mécanique est due non pas à une anisotropie structurale liée à une orientation préférentielle des particules, mais plutôt à une géométrie anisotrope des vides modifiant l'angle des réactions mécaniques entre particules (répartition horizontale).

Bien que cette anisotropie ne soit pas très marquée dans la majorité des cas, il convient tout de même de la signaler.

I.2.6 - Influence des liquides

De manière générale, la nature du fluide influe fortement sur les caractéristiques mécaniques de la craie.

Dans son état naturel, la craie est le plus souvent saturée en eau. Pour illustrer son influence le plus simplement possible on compare la résistance en compression simple du matériau sec R_{csec} et saturé R_{csat} .

En géotechnique, la valeur du rapport $R_p = R_{csec}/R_{csat}$ permet d'aboutir à la classification suivante.

$R_p < 3$	: très bonnes craies
$3 \leq R_p \leq 3,5$	: bonnes craies
$3,5 \leq R_p \leq 4$	: craies médiocres à mauvaises
$R_p \geq 4$	: craies très mauvaises

Cette classification est effectuée en vue de l'utilisation de craies comme matériau de remblais ou terrassement (Masson, 1971). Contrairement à certains calcaires où le rapport R_p est voisin de 1, on constate que l'eau influe fortement sur la résistance à la compression des craies. Cette différence de résistance s'explique par un processus d'altération chimique de la craie en présence d'une solution aqueuse. Il se produit en effet des phénomènes de dissolution et de recristallisation aux surfaces de contact entre grains ou juste à la périphérie; modifiant ainsi la structure de la craie et lui conférant une résistance moindre. La complexité de ce phénomène croît dans la mesure où le processus dépend à la fois de la quantité de gaz carbonique présent dans l'eau, de la pression de l'eau et de la température.

Schroeder (1995) a étudié l'influence de la nature du fluide sur le seuil de "pore collapse" d'une craie dans des essais de compression déviatorique. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 1.9. Les points de ce diagramme correspondent au début de la phase de déformation plastique de chaque essai. Il observe que le début de la phase de pore collapse dépend fortement de la nature du fluide, ce dernier modifiant les forces de tension superficielle. Les mécanismes d'interaction fluide-solide intervenant sur le comportement de la craie peuvent être d'ordre chimique (comme précédemment avec l'eau) ou physique (tensions de surfaces, forces capillaires). L'influence respective de ces deux phénomènes reste encore assez floue et une meilleure compréhension requiert des recherches plus approfondies.

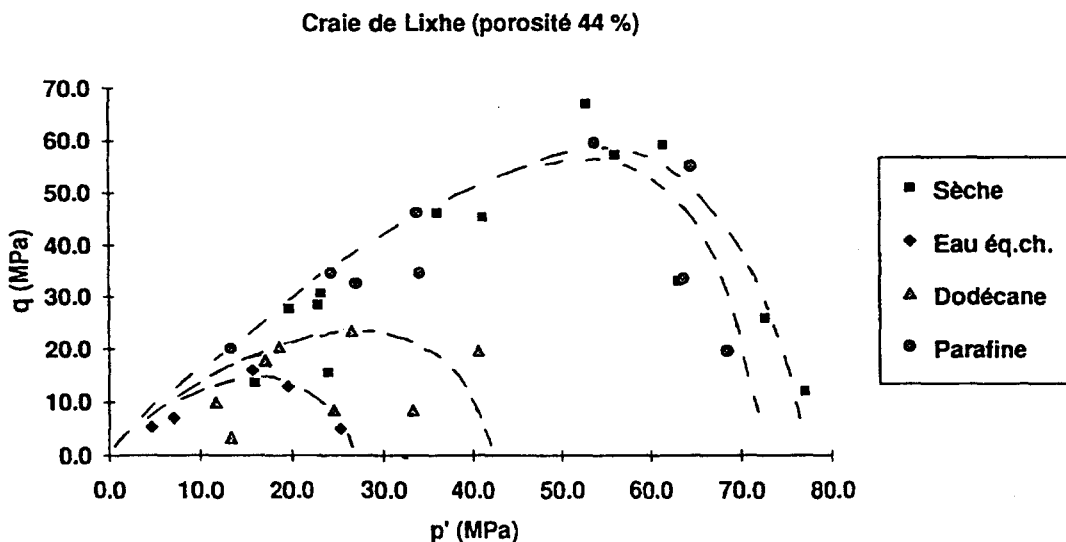


Fig 1.9 : Diagramme p' - q des contraintes "yield" de craies saturées en divers fluides (Schroeder, 1995).

I.2.7 - Perméabilité

La perméabilité d'une roche ou d'un sol définit sa capacité à laisser passer un fluide à travers sa structure. Il faut distinguer dans ce cas l'approche hydrogéologique qui étudie les infiltrations au niveau du massif et les essais de laboratoire effectués sur de petits échantillons. Dans le premier cas les paramètres importants sont la macro-fissuration et la présence plus ou moins importante de diaclases, tandis que dans le second cas la nature du fluide, la porosité et la forme des grains semblent être des éléments prépondérants. On se trouve dans le cas de la craie en présence d'un matériau à deux échelles de perméabilité.

Monjoie (1989) constate à partir d'essais effectués sur des craies d'âge campanien et Maastrichtien que la perméabilité est inversement proportionnelle à la viscosité du fluide. Il met également en évidence l'influence de la pression hydrostatique sur les valeurs de perméabilité; une augmentation de cette pression entraîne une diminution de la porosité provoquant une chute de perméabilité. Il précise que la porosité n'est pas le seul paramètre entrant en jeu, la forme des grains est également à prendre en compte. La perméabilité sera d'autant plus faible que les particules seront de forme sphérique et de répartition régulière.

De manière générale, la chute de perméabilité de la matrice est due à une évolution de la microstructure de la craie, détérioration des grains et des pores, causée par l'augmentation de la contrainte effective.

I.2.8 - Influence du temps

Pour apprécier l'influence du facteur temps sur le comportement de la craie, on peut procéder de deux manières différentes. La première consiste à utiliser des vitesses de chargement différentes : soit on fait varier la vitesse pendant l'essai, soit on effectue plusieurs essais à vitesses variables. La seconde est d'étudier le comportement du matériau sous charge constante et d'observer l'évolution de son comportement en fonction du temps.

Dans la seconde procédure, on applique très rapidement, voire instantanément, à un échantillon une charge P ; lors de l'application de cette charge il se produit des déformations (déformations instantanées) et après cette phase, on observe trois types de comportement : fluage primaire, secondaire et tertiaire. Dans ce type d'essais le comportement de la craie est fonction de la charge appliquée. **Dessenne** (1970) montre à partir d'essais de fluage uni-axiaux que pour des chargements inférieurs à 40% de la résistance à la compression simple R_c le comportement de la craie est indépendant du temps (fluage primaire). Sous des chargements compris entre 40 et 70% de R_c le fluage est asymptotique et ne conduit pas à la rupture (fluage secondaire). Pour des charges plus importantes, le fluage conduit à la rupture après un temps très long (fluage tertiaire).

Sur la figure 1.10, on présente deux essais de compression uniaxiale réalisés par **Monjoie** et **Schroeder** (1989) exécutés à 70 et 90% de la résistance à la compression simple (Craie du Campanien, 98% de CaCO_3). Cette figure illustre parfaitement l'influence de la charge initiale, plus elle est importante plus la rupture intervient rapidement.

Djebbi (1984) a étudié le fluage de la craie dans des tests de compression isotrope à faibles valeurs de pression de confinement (inférieures à la limite élastique). Pour des craies sèches, il observe une déformation instantanée qui est fonction de la pression isotrope. La valeur des déformations croît avec la pression isotrope. Cette phase est ensuite suivie d'un fluage primaire. Pour des craies saturées en eau, le fluage est secondaire. Il explique cette différence par les phénomènes de dissolution-recristallisation de la craie. Le fluage prend alors son origine dans des phénomènes chimiques.

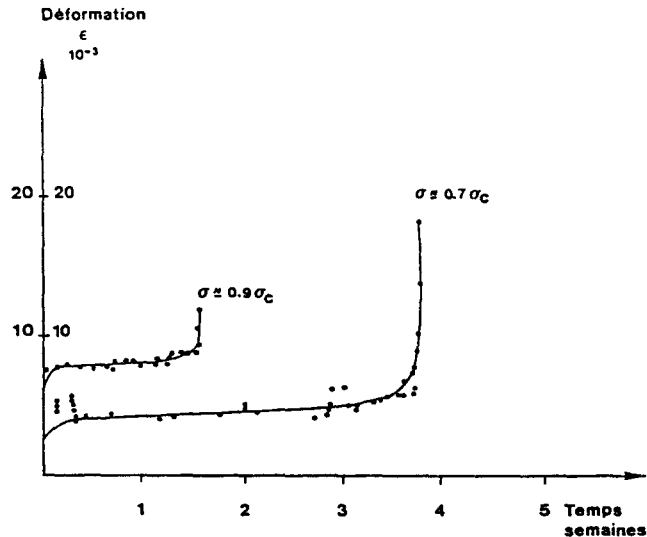


Fig 1.10 : Courbe *déformation-temps semaines* dans des essais de fluage uniaxial (Monjoie & Schroeder, 1989).

Les essais précédents ont le désavantage d'être longs. Pour palier à cet inconvénient on effectue des essais en utilisant deux vitesses de chargement différentes (Monjoie & al, 1990; Monjoie & Schroeder, 1991). La procédure utilisée permet alors de déterminer un paramètre qui caractérise la sensibilité du matériau au facteur temps. Les auteurs montrent que ce paramètre est fonction de la porosité des craies et de l'état de contrainte (élastique ou plastique).

I.2.9 - Conclusion

Le comportement mécanique de la craie dépend à la fois : des paramètres micro structuraux, du (ou des) fluide de saturation, de son état de contrainte initial et du temps. On a montré en particulier que son comportement est étroitement lié à l'évolution de sa microstructure. L'influence de la nature du fluide sur le comportement de la craie, et plus particulièrement sur la valeur du pore collapse, a clairement été démontrée. Cependant, interviennent des effets d'interactions physico-chimiques qui restent encore pour la plupart à préciser.

Le fluide ou l'état de contrainte initial, que nous qualifierons de "paramètres externes", n'agissent en fait que par une modification des phénomènes d'interaction et de la microstructure; induisant telle ou telle particularité de comportement. Cependant, il paraît actuellement très difficile d'introduire de tels paramètres dans un modèle (forme et taille des grains, nature chimique des constituants, forme et taille des pores, viscosité du fluide,...etc). Ce sont donc des paramètres d'ordre plus global, caractérisant cette influence, qui devront y être introduit.

Dans le paragraphe I.2.7 nous avons évoqué l'influence de la température sur le processus d'altération chimique de la craie. Le faible nombre de résultats disponibles dans la bibliographie ne nous a pas paru suffisant pour développer un paragraphe complet sur l'influence de ce paramètre sur le comportement mécanique des craies. Notons cependant que les résultats disponibles tendent à établir une dépendance très faible des caractéristiques élastiques (module d'Young, coefficient de Poisson) vis à vis d'une variation de la température (Halleux & al, 1985). Son influence se traduit plus sensiblement sur le comportement plastique des craies (seuil d'écoulement). En effet, une augmentation de la température provoque une réduction de son domaine d'élasticité (Monjoie, 1989; Charlez & Shao, 1992).

I.3 - Modélisation

On a montré précédemment, au travers de nombreux exemples, que la craie dans le cas le plus général peut être considérée comme homogène et isotrope. Dans ce contexte sa modélisation se base sur la théorie classique de la plasticité, considérant le milieu continu. Nous avons également souligné son originalité de comportement : à de faibles confinements elle se comporte comme un solide élasto-fragile et à des confinements plus élevés de manière ductile.

De nos jours, on dispose d'une "bibliothèque" de modèles relativement importante pour les géomatériaux. Une synthèse des modèles appliqués à la craie ou susceptibles de l'être a été récemment effectuée par Siwak (1994). En nous appuyant en partie sur ses travaux, nous nous proposons dans ce paragraphe de répondre aux questions suivantes :

- Quels sont les critères de rupture pouvant être utilisés pour la craie ?
- Parmi les modèles existants dans la littérature, lesquels sont les plus adaptés au cas des craies ?
- Quels sont les domaines de validité de ces lois ?

I.3.1 - Préliminaires théoriques

I.3.1.1 - Invariants des tenseurs des contraintes

L'écriture des critères de rupture ou des lois de comportement en mécanique des sols ou des roches fait intervenir des quantités que nous définissons ci-dessous.

L'équation d'une surface de rupture s'écrit en fonction des composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes σ .

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1.3)$$

Si l'on suppose que la fonction F est isotrope, alors le critère peut s'exprimer par :

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (1.4)$$

où F est une fonction symétrique des trois valeurs principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ du tenseur des contraintes.

Cette fonction peut également s'exprimer de manière équivalente comme une fonction des invariants I_1, I_2, I_3 ou I_I, I_{II}, I_{III} .

avec :

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \\ I_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3) \end{cases} \quad (1.5)$$

et

$$\begin{cases} I_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 & (\equiv I_1) \\ I_{II} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 & (\equiv I_1^2/2 - I_2) \\ I_{III} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 & (\equiv I_1^3/6 - I_1I_2 + I_3) \end{cases} \quad (1.6)$$

Le tenseur déviatorique des contraintes s (équation 1.2) a les mêmes directions principales que σ . Ses valeurs principales s_i sont liées aux valeurs principales σ_i de σ par :

$$s_i = \sigma_i - \frac{I_1}{3} \quad (1.7)$$

Ses invariants s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\ J_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \end{cases} \quad (1.8)$$

On a entre les différents invariants les relations suivantes :

$$\begin{cases} I_2 = J_2 + I_1^2/6 \\ I_3 = J_3 + 2I_1J_2/3 + I_1^3/27 \end{cases} \quad (1.9)$$

I.3.1.2 - Notion de contrainte effective - Postulat de Terzaghi

Dans le cadre des milieux poreux saturés, et sous l'hypothèse de continuité de la phase saturante, le postulat de Terzaghi définit le tenseur des contraintes par :

$$\sigma = \sigma' - u \cdot I \quad (I : \text{tenseur unité}) \quad (1.10)$$

σ' est le tenseur des contraintes effectives. Il représente les contraintes qui se développent effectivement entre les grains solides constituant la matrice du milieu poreux. u est la pression du fluide se trouvant dans les pores. Cette hypothèse revient à considérer l'incompressibilité de la matrice. D'une manière générale, ce postulat est vraie pour les matériaux à forte porosité.

I.3.2 - Critères de rupture

Présentons tout d'abord les critères qui sont classiquement utilisés en mécanique des sols. Nous verrons par la suite ceux qui sont effectivement appliqués à la craie.

a) Critère de Coulomb (1773)

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \Phi - 2 c \cos \Phi = 0 \quad (1.11)$$

σ_1 et σ_3 sont les contraintes principales extrêmes, c la cohésion et ϕ l'angle de frottement interne.

b) Critère de Tresca (1864)

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0 \quad (1.12)$$

k est un paramètre du critère (cohésion dans le cas d'un sol)

c) Critère de Mohr (1900)

$$f(\sigma) = \sigma_1 - \sigma_3 - q(\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (1.13)$$

q est une fonction à déterminer expérimentalement.

La faiblesse des trois critères précédents réside dans le fait qu'ils ne prennent pas en compte l'influence de la contrainte principale intermédiaire σ_2 . L'influence de cette variable est étudiée par l'intermédiaire du paramètre b s'écrivant sous la forme :

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3; \quad (1.14)$$

b variant entre 0 et 1. Dans des essais triaxiaux de révolution, un état de compression est caractérisé par $b=0$ et un état d'extension par $b=1$. En général, les angles de frottement en compression ϕ_c et en extension ϕ_e ne sont pas égaux. Il existe une dépendance de l'angle de frottement avec la valeur de b . C'est le cas notamment des sables et des argiles (Hicher, 1985; Zitouni, 1988). Pour tenir compte de l'influence de la contrainte intermédiaire, il est possible de faire dépendre l'expression des critères de rupture de l'angle de Lode θ . Cet angle s'exprime en fonction des invariants de contrainte par :

$$\sin(3\theta) = -\frac{3\sqrt{3} I_{III}}{2J_2^{3/2}} \quad (1.15)$$

On a entre b et θ la relation :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}b}{(2-b)}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\Pi}{3}\right] \quad (1.16)$$

Ces deux paramètres permettent une description de l'état de contrainte dans le plan π perpendiculaire à l'axe hydrostatique (figure 1.11).

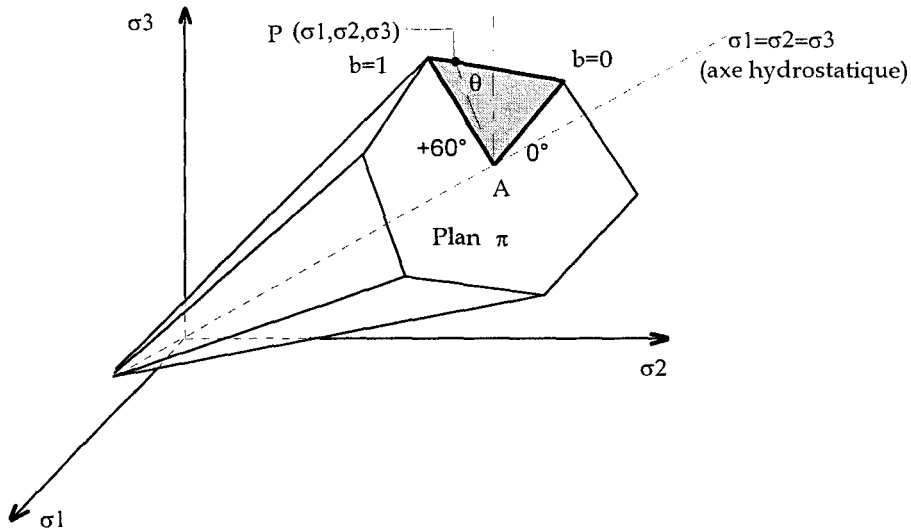


Fig 1.11 : Définition de l'angle de Lode dans l'espace des contraintes.

Au vue des développements précédents, il apparaît que les critères présentés au début de ce paragraphe ne semblent pas adaptés aux applications tridimensionnelles. D'autres critères surmontant cette difficulté peuvent alors être utilisés. Ci-dessous sont présentés certains critères tenant compte de la contrainte principale intermédiaire.

d) Critère de Von-Mises (1913)

$$f(\sigma) = J_2 - k^2 = 0 \quad (1.17)$$

k représente la contrainte maximale admissible en cisaillement simple.
 J_2 est le second invariant du tenseur déviatorique des contraintes.

e) Critère de Drücker et Prager (1952)

Ce critère est une généralisation du critère précédent aux matériaux pulvérulents.

$$f(\sigma) = J_2^{1/2} - k - \alpha I_1 = 0 \quad (1.18)$$

Son utilisation est limitée pour les matériaux ayant un angle de frottement en compression élevé. En effet, l'angle maximum accepté par ce critère est de $36,87^\circ$. α et k sont deux paramètres du critère. Si $\alpha = 0$ on retrouve le critère de Von-Mises. Pour certaines valeurs de ces deux paramètres, le critère de Drücker Prager est tangent (extérieur ou intérieur) au critère de Coulomb.

f) Critère parabolique

Ce type de critère traduit l'évolution non linéaire de la rupture avec la contrainte hydrostatique.

$$f(\sigma) = J_2 - \frac{R_c - R_t}{3} I_1 - \frac{R_c - R_t}{3} = 0 \quad (1.19)$$

R_c et R_t représentent respectivement la résistance à la compression simple et à la traction.

g) Critère de Matsuoka et Nakaï

Le critère de Matsuoka et Nakaï et une généralisation du critère de Coulomb à un état de contrainte tridimensionnelle. Pour l'établir les auteurs considèrent une facette particulière du matériau. (voir présentation de ce critère dans le chapitre IV). Il s'écrit :

$$f(\sigma) = \frac{I_I I_{II}}{I_{III}} - R_{MN} = 0 \quad (R_{MN} = C^{st}, \text{ déterminée à la rupture}) \quad (1.20)$$

Les critères précédents supposent l'égalité de l'angle de frottement en compression et extension. D'autres critères ont été proposés ne conduisant pas à cette égalité :

h) Critère de Lade

Lade exprime la dépendance de la rupture des matériaux pulvérulents avec la pression moyenne. Son critère s'exprime par :

$$f(\sigma) = \frac{I_I^3}{I_{III}} - R_L = 0, \quad (R_L = \eta_1 \text{ à la rupture}) \quad (1.21)$$

R_L varie de la valeur 27 correspondant à l'état de contrainte hydrostatique à la valeur η_1 .

Pour les argiles sur-consolidées, les roches et les bétons ce critère donne une bonne concordance avec les résultats expérimentaux à condition de l'écrire avec une dépendance vis à vis de la pression moyenne. Dans ce cas il prend la forme suivante :

$$f(\sigma) = \left(\frac{I_I^3}{I_{III}} - 27 \right) \left(\frac{I_I}{P_a} \right) - \eta_1 = 0 \quad (1.22)$$

P_a représente la pression atmosphérique.

i) Critère de Desai

$$f(\sigma) = \frac{I_{II}}{I_I I_{III}^{1/3}} - R_D = 0 \quad (R_D = C^{st}, \text{ déterminée à la rupture}) \quad (1.23)$$

Notons que les trois critères précédents sont reliés par la relation :

$$R_{MN} = (R_L)^{2/3} \cdot R_D \quad (1.24)$$

j) Critère de Goldscheider et Gudehus

Ce critère se représente dans le plan déviatoire par un hexagone du type Coulomb. Les constante C_1 et C_2 permettent un calage du critère sur les valeurs expérimentales.

$$f(\sigma) = \frac{I_{II}}{I_{III}} + C_1 \frac{I_{III}}{I_{II}^{3/2}} - C_2 = 0 \quad (1.25)$$

Une comparaison de certains critères dans le plan déviatoire est effectuée sur la figure 1.12.

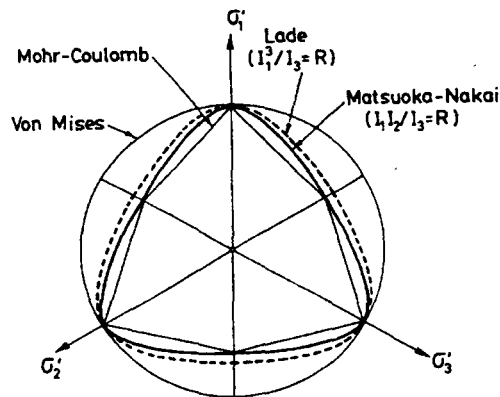


Fig 1.12 : Enveloppe de rupture dans le plan déviatoire.

I.3.3 - Modèles basés sur la plasticité

Comparé au nombre de modèles existants, ceux qui ont été effectivement appliqués à la craie sont peu nombreux. Parmi ces modèles, on distingue les modèles basés sur la théorie "classique" de la plasticité et ceux issus du concept d'état critique. Une présentation de ce concept ainsi que des modèles Cam-Clay est effectuée dans le chapitre III.

Le modèle de Lade (1975, 1988) initialement conçu pour modéliser le comportement des sables est un modèle élastoplastique à deux surfaces de charge. Celui-ci a été adapté et proposé par Shao (1987) dans l'optique de la modélisation du comportement d'une craie blanche très poreuse. Les modifications de l'auteur ont porté essentiellement sur les points suivants : prise en considération de la résistance en traction simple de la craie, prise en compte de la destruction progressive de la microstructure dans la description des règles d'écrouissage puis simplification du potentiel plastique et de la règle d'écrouissage déviatoire. Une présentation de ce modèle est située en annexe 1.

Les travaux de Shao (1987, 1989), Siwak (1994), Pecqueur (1995) proposent de nombreuses applications du modèle de Lade. Les résultats fournis par celui-ci sont en concordance avec les résultats expérimentaux. Outre les essais triaxiaux, des essais de compression proportionnelle, d'extension latérale et des essais sur cylindre creux avec ou sans rotation d'axes ont été simulés avec succès. Les raisons principales de l'efficacité de ce modèle proviennent d'une part de la prise en compte de l'influence de la contrainte intermédiaire ainsi que celle de la pression de

confinement sur le comportement de la craie et de l'existence de deux mécanismes de déformation. En contre partie ce modèle possède un nombre important de paramètres. Son utilisation requiert un travail amont assez conséquent. Cette remarque a d'ailleurs été formulée par l'auteur. De plus la formulation du modèle fait intervenir l'influence de la pression de confinement par l'intermédiaire de la plus petite contrainte principale. Dans un état de contrainte tridimensionnelle cette formulation ne présente plus de signification.

En 1991 **Shao & Henry** ont présenté une version simplifiée du modèle précédent. Le modèle obtenu s'exprime maintenant par :

Pour la partie contractante

$$\text{fonction de charge :} \quad F_c = \bar{I}_I - Y_c \quad (1.26 \text{ a})$$

$$\text{potentiel plastique :} \quad Q_c = F_c, \text{ la loi est associée.} \quad (1.26 \text{ b})$$

$$\text{fonction d'écrouissage :} \quad Y_c = 3P_0 + a \cdot P_a \xi_c^n \cdot \exp(c \cdot \xi_c) \quad (1.26 \text{ c})$$

$$\text{avec} \quad d\xi_c = (d\varepsilon_{ij}^c \cdot d\varepsilon_{ij}^c)^{1/2}$$

Y_{c0} est la valeur initiale de Y_c , n représente le taux de compaction plastique. Le paramètre a est également équivalent à un taux de compaction plastique. c désigne le taux de durcissement de la craie. Les paramètres c et a diminuent quand la porosité augmente.

Pour la partie déviatorique

$$\text{fonction de charge :} \quad F_d = \left(\frac{\bar{I}_I^3}{\bar{I}_{III}} - 27 \right) \left(\frac{\bar{I}_I}{P_a} \right)^m - Y_d = 0 \quad (1.27 \text{ a})$$

$$\text{potentiel plastique :} \quad Q_c = \bar{I}_I^3 - 27e^{t \cdot \xi_d} \cdot \bar{I}_{III} \quad (1.27 \text{ b})$$

$$\text{fonction d'écrouissage :} \quad Y_d = \frac{Y_d^r \cdot \xi_d}{b + \gamma \xi_d} \quad (1.27 \text{ c})$$

$$\text{avec} \quad d\xi_d = (d\varepsilon_{ij}^d \cdot d\varepsilon_{ij}^d)^{1/2}$$

Y_{d0} est une fonction qui définit la limite élastique de la craie dans les essais de compression déviatorique, celle-ci dépend de la contrainte hydrostatique initiale. Les paramètres m et Y_d^r sont relatifs la rupture du matériau. b régit l'écrouissage de la craie. ξ_c et ξ_d représentent les "longueurs" des chemins de déformation plastique parcourue par le matériau. En d'autres termes, ils représentent l'histoire de la déformation. Dans cette version le modèle possède 8 paramètres plastiques $a, n, c, m, Y_d^r, \gamma, b, t$ et 3 paramètres élastiques E, ν et P_0 . Ces paramètres sont déterminés à partir d'essais hydrostatiques et déviatoriques.

Ce modèle a été appliqué pour la simulation d'essais triaxiaux drainés ou non drainés. Pour les essais drainés, les auteurs ont étudié la validité du postulat de Terzaghi dans les domaines élastique et plastique. Dans ce cadre, le critère est écrit de la manière suivante :

$$f(\sigma + P.I, \alpha) \leq 0 \quad (1.28)$$

Cette hypothèse conduit à une ambiguïté sur la formulation du critère. En effet **Coussy** (1991) montre que de tels critères pour les milieux poreux saturés doivent s'écrire $f(\sigma, P, \alpha) \leq 0$. Malgré cette remarque, par ailleurs formulée par les auteurs, les résultats obtenus semblent être acceptables d'un point de vue numérique. La porosité de la craie utilisée est de 37%, la notion de contrainte effective semble donc être applicable aux craies à forte porosité. Signalons en dernier lieu, qu'une généralisation du modèle "Laderock" a été proposé pour retranscrire le comportement visqueux de la craie (**Shao & al**, 1993).

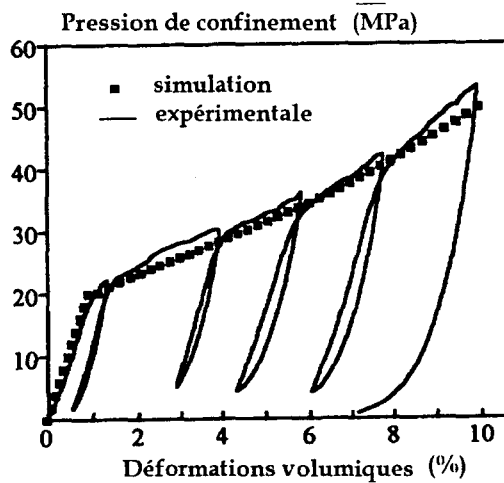


Fig 1.13 : Simulation du mécanisme de déformation contractant sur la craie de Gorm avec le modèle de Lade (**Charlez**, 1994a).

Charlez (1994a) a comparé la réponse du modèle Cam-Clay modifié à celui de Lade pour une marne et un sable peu consolidé. Pour le sable (matériaux présentant peu ou pas de cohésion) les résultats sont sensiblement équivalents (figure 1.14). Dans ce cas il donne la préférence au modèle de Cam-Clay qui ne possède que 4 paramètres.

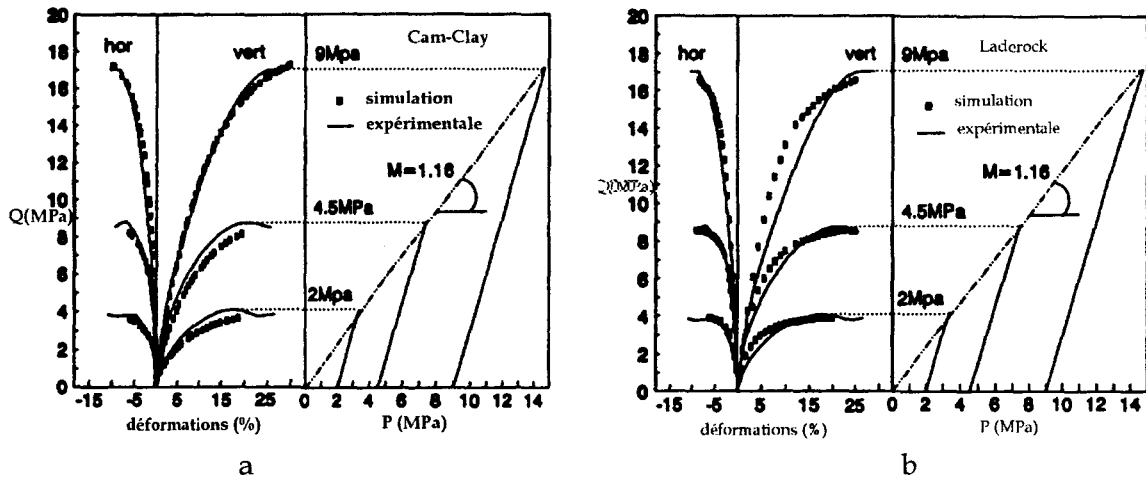


Fig 1.14 : Comparaison des modèles de Cam-Clay (a) et Lade (b) sur du sable consolidé (**Charlez**, 1994a).

Par contre pour des matériaux fortement consolidés, ou ayant une cohésion non négligeable, ce modèle apparaît moins adapté que le modèle de Lade. Cette constatation résulte de la non-linéarité de la courbe d'état critique pour ce type de matériau. La valeur de M (pente de la droite d'état critique) est déterminée à partir d'un seul essai triaxial. Lorsque cette valeur est utilisée dans la simulation d'essais effectués à d'autre pression de confinement, il en résulte une mauvaise estimation de la rupture ou de l'état critique. De plus, l'auteur constate que le modèle de Cam-Clay surestime les déformations volumiques plastiques, ceci conduit dans la simulation d'essais non drainés à une estimation de la pression interstitielle trop importante. Ce phénomène est dû au couplage des deux mécanismes de déformation (isotrope et déviatorique).

Siwak (1994) a étudié l'adaptabilité du modèle de Desai (1986, 1987) à quatre craies blanches. Les résultats obtenus, bien que satisfaisants, montrent une précision et une sensibilité plus pénalisantes que le modèle de Lade (Shao, 1987). Contrairement à ce dernier, le modèle de Desai utilisé ne possède qu'une seule fonction de charge. Celui-ci s'exprime de la manière suivante :

$$\text{fonction de charge :} \quad F = \bar{J}_2 - (-\alpha \bar{I}_1^n + \gamma \bar{I}_1^2)(1 - \beta S_r)^m \quad (1.29 \text{ a})$$

$$\text{potentiel plastique :} \quad Q = F, \text{ la loi est associée.} \quad (1.29 \text{ b})$$

$$\text{fonction d'écrouissage :} \quad \alpha = b_1 e^{-b_2 \xi^{(1-A)}} \quad (1.29 \text{ c})$$

$$\text{avec} \quad d\xi = (d\varepsilon_{ij}^p \cdot d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2}$$

$$\text{et} \quad A = \frac{\xi_d}{b_3 + b_4 \xi_d}$$

Lors d'un chargement hydrostatique la fonction d'écrouissage se réduit à :

$$\alpha = b_1 e^{-b_2 \xi_c}, \text{ avec } d\xi_c = (d\varepsilon_{ij}^c \cdot d\varepsilon_{ij}^c)^{1/2}$$

S_r correspond à un rapport de contrainte faisant intervenir l'angle de Lode, il est égal à :

$$S_r = \frac{J_3^{1/3}}{J_2^{1/2}} \quad (1.30)$$

β est un paramètre du modèle. Celui-ci peut être pris fonction de I_1 de manière à tenir compte du changement de forme de la surface de charge. γ et m contrôlent l'état ultime du matériau. Le paramètre n est relié au changement de phase (caractère contractant-dilatant). b_1 , b_2 , b_3 et b_4 régissent l'état d'écrouissage. b_1 et b_2 sont déterminés à partir d'un essai de compression isotrope, b_3 et b_4 à partir des essais déviatoriques.

On peut noter des similitudes entre le modèle de Desai (1986, 1987) et celui de Lade modifié par Shao et Henry (1991). L'écart entre les résultats obtenus par les deux modèles précédents par Siwak trouvent sans doute son origine dans le nombre de potentiel adopté par chacun des modèles.

Enfin, notons qu'une combinaison des critères est tout à fait envisageable. Plischke (1992) propose une combinaison du critère de Drucker Prager avec une surface elliptique pour définir un critère de rupture pour la craie (figure 1.15).

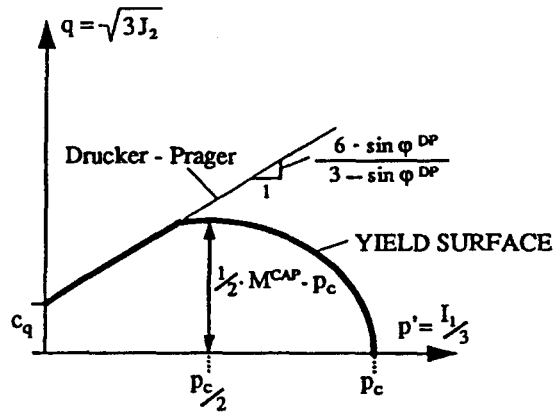


Fig 1.15 : Représentation du critère proposé par Plischke (1992) dans le plan P-Q.

I.3.4 - Domaines de validité des différentes lois

Les modèles élastoplastiques, considérant le milieu continu, sont-ils utilisables pour la modélisation de la craie après pic ? En effet, pour certains il y a apparition de discontinuités ce qui conduit à une non-homogénéité du champ de contrainte. La modélisation se fait alors à partir de modèle d'endommagement (Dragon, 1993; Costin, 1983,...). Pour d'autres, il y a destruction progressive de la structure de la craie, dans ce cas les modèles élastoplastiques avec écrouissage radoucissant sont parfaitement utilisables. Selon Charlez (1994b), seul le comportement volumique du matériau est capable de trancher entre ces deux voies. Pour lui l'apparition franche d'une dilatance à la rupture traduit la présence de bandes de cisaillement; au contraire si le comportement reste contractant au passage du pic, l'effondrement diffus de la structure reste possible.

Soulignons que les conditions expérimentales ont une importance sensible sur l'apparition ou non de discontinuités au sein de l'échantillon. En effet, des études montrent que l'élancement de l'échantillon ainsi que le frettage au sommet et à la base de celui-ci conditionnent directement l'apparition d'une bande de cisaillement (Dessenne, 1970; Karaghani, 1994). Plus l'élancement sera important et d'avantage il y aura de frottement, plus il y aura de probabilité de voir l'échantillon se rompre suivant des plans de cisaillement.

Signalons enfin que les lois présentées précédemment ne peuvent pas s'appliquer lorsque la craie n'est plus totalement saturée. En effet, dans ce cas le postulat de Terzaghi n'est plus valable....

I.4 - Conclusion

Le comportement de la craie dépend essentiellement des propriétés de sa microstructure (porosité, teneur en argile, teneur en silice) et de son évolution. Les corrélations entre ces caractéristiques géologiques et les caractéristiques mécaniques de la craie sont de nos jours bien établies. Citons par exemple les corrélations existantes entre la porosité et les résistances à la

compression ou à la traction, la teneur en argile et le gonflement, la forme et la taille des grains et/ou des vides et la perméabilité. Enfin, rappelons également qu'une augmentation de la teneur en silice influe dans le même sens qu'une diminution de la porosité.

L'influence de la pression isotrope sur le comportement de la craie est mise en évidence par de nombreux chercheurs. Dans des essais de compression déviatorique, la craie passe d'un comportement de type fragile à un comportement de type ductile au fur et à mesure que la pression de confinement augmente. Les mêmes observations sont faites à partir des essais de torsion. Le réarrangement progressif de la microstructure du matériau sous contrainte isotrope est responsable de cette évolution de comportement. La perte de cohésion de la craie à hautes pressions de confinement lui confère un comportement assimilable à celui d'un sol. A des pressions plus faibles l'influence de la cohésion initiale reste présente, dans ce cas la craie réagit comme une roche.

D'un point de vue théorique, les lois rhéologiques adoptées pour modéliser le comportement de la craie sont dans une large mesure empruntées à la mécanique des sols. L'hypothèse d'isotropie initiale avec écrouissage isotrope est retenue de façon quasi systématique, cette hypothèse est justifiée expérimentalement. Les expériences effectuées sur les craies montrent qu'un critère de rupture écrit avec une dépendance de la pression hydrostatique est nécessaire. L'influence de la contrainte intermédiaire doit également apparaître de façon explicite.

Dans les modèles, l'utilisation des déformations volumiques plastiques comme variable d'écrouissage permet de traduire la variation de la porosité et son influence sur le comportement de la craie. Pour retranscrire le comportement de la craie sous sollicitations déviatoriques, on introduit une seconde variable d'écrouissage. Cette dernière est soit reliée aux variations de volume (modèle de **Desai**) soit introduite de manière indépendante (modèle de **Lade**). Le modèle **Lade-rock** donne des résultats plus conformes que le modèle de **Desai**. L'avantage de ce modèle réside dans le fait qu'il intègre deux mécanismes de déformation. Dans cette partie, on a noté les limites des modèles issus du concept d'état critique pour les matériaux ayant une cohésion initiale non négligeable ou fortement consolidé. Ces modèles ne semblent donc pas pouvoir s'appliquer aux craies. Cependant, **Siwak** (1994) remarque une similitude du comportement de la craie à hauts confinements avec les argiles normalement consolidées. On peut donc émettre l'hypothèse que les modèles cités précédemment, établis à partir d'études sur de tels matériaux, sont capables de retranscrire le comportement de craies dans ces conditions. Ce point n'a pas fait l'objet d'investigation particulière de la part de l'auteur. Nous proposons donc dans la suite de notre travail de vérifier cette hypothèse.

INTRODUCTION DE LA 2^{ème} PARTIE

Cette partie est relative à la modélisation du comportement mécanique de quatre craies blanches à partir de deux modèles classiquement utilisés en mécanique des sols. Le premier est le modèle **Cam-Clay modifié**, ce modèle est issu des études développées à l'université de Cambridge sur les argiles. Le second est le modèle de **Nova**, ce dernier est une combinaison du critère de rupture de **Matsuoka & Nakai** et du modèle précédent. Cette partie est divisée en trois chapitres.

Dans le premier nous présentons en détail les essais de caractérisation chimiques, physiques et mécaniques des craies sur lesquelles on a travaillé. Ces caractérisations ont été effectuées dans le cadre de la thèse d'état de **J. M.Siwak** (1994) et de la thèse de doctorat de **G. Pecqueur** (1995). Nous effectuons dans la suite de ce chapitre une analyse plus personnelle du comportement de ces craies. Nous proposons également des lois simples d'évolution des paramètres élastiques de chaque craie. Enfin, on procède à la vérification de certains critères de rupture à partir d'essais avec et sans rotation des axes principaux de contraintes.

Dans le second chapitre, nous procédons à la détermination des paramètres du modèle **Cam-Clay Modifié** et aux simulations des essais qui nous ont permis de calculer ces paramètres. Nous effectuons ensuite une étude de sensibilité des paramètres ainsi qu'une première validation du modèle à partir d'essais de compression proportionnelle.

Dans le troisième chapitre, nous étudions le modèle de **Nova**. La procédure utilisée est rigoureusement la même que dans le chapitre précédent. Nous montrons qu'une amélioration sensible des résultats peut être obtenue par l'utilisation de ce modèle.

Chapitre II:

Présentation des craies étudiées

II.1 - Position géologique

Les craies étudiées dans ce rapport sont au nombre de quatre. Trois d'entre elles proviennent de carrière à ciel ouvert du nord de la France (Haubourdin, Dannes, Bois-Bernard), la quatrième provient de la région de Liège. Géologiquement, elles sont classées dans les âges suivants :

- Maestrichtien pour Liège
- Coniacien pour Haubourdin et Bois Bernard
- Cénomanién pour Dannes

La craie de Dannes est donc la plus ancienne, celle de Liège la plus récente, les craies d'Haubourdin et Bois-Bernard se situant dans un âge intermédiaire.

II.2 - Analyse de la microstructure

Une analyse par fluorescence X a été réalisée sur les quatre craies. Les résultats obtenus sont répertoriés dans les tableaux 2.1 et 2.2. Ceux-ci donnent respectivement la composition des craies en pourcentage d'oxyde et en pourcentage d'éléments simples.

- La craie de Dannes possède le pourcentage en CaCO_3 le plus faible, c'est a priori la craie la moins pure. Les autres craies ont un pourcentage évoluant autour de 98%
- La teneur en silice est la plus importante pour Dannes, 8%, ainsi que la teneur en argile (sous forme Al_2O_3 , illite).
- Le pourcentage en minéraux annexes est également le plus élevé pour Dannes.

On observe que la corrélation entre le pourcentage en argile et l'âge de la craie remarquée par Tallon (1976) est respecté ici (cf partie 1, II.5.1).

En complément de ces analyses, l'observation au microscope électronique à balayage a permis à Siwak (1994) de classer ces craies selon un indice de texture.

- | | |
|--|-------|
| - Liège : craie moyennement dure | IT=41 |
| - Haubourdin : craie dure | IT=61 |
| - Bois-Bernard : craie dure | IT=65 |
| - Dannes : craie dure à extrêmement dure | IT=71 |

IT : Indice de texture déterminé par l'auteur à partir de paramètres tels que la compaction, l'angularité, l'uniformité et la forme des grains, la nature et le nombre de contacts entre grains, la présence de dissolution et l'étude des nanofacies; selon la Méthodologie de Mortimore (1989).

Des essais d'identifications ont été également réalisés, les résultats sont classés dans le tableau 2.3.

	Dannes	Bois-Bernard	Liège	Haubourdin
CO ₂	44	44	44	44
CaO	47	54	53,5	54,5
SiO ₂	8	1,6	1,7	0,8
MgO	0,5	0,3	0,3	0,2
K ₂ O	0,4	Traces	Traces	Traces
Fe ₂ O ₃	0,5	Traces	0,1	0,1
Na ₂ O	Traces	---	Traces	---
P ₂ O ₅	Traces	---	0,2	0,15
SO ₃	Traces	Traces	Traces	Traces
TiO ₂	Traces	Traces	Traces	---
Al ₂ O ₃	2,4	0,4	0,2	0,15

CaCO ₃	91	98	97,5	98,5
-------------------	----	----	------	------

Tab 2.1 : Composition des craies en pourcentage d'oxydes (Siwak, 1994).

	Dannes	Bois-Bernard	Liège	Haubourdin
Ca	33,5	38,5	38,4	39
Si	3,5	0,8	0,8	0,4
Mg	0,3	0,2	0,2	0,15
K	0,3	Traces	Traces	Traces
Fe	0,3	Traces	0,1	0,1
Na	Traces	---	Traces	---
P	Traces	---	0,1	0,08
S	Traces	Traces	Traces	Traces
Ti	Traces	Traces	Traces	---
Al	1,3	0,2	0,15	0,1

Tab 2.2 : Composition des craies en pourcentage d'éléments simples (Siwak, 1994).

	Dannes	Haubourdin	Bois-Bernard	Liège
Densité absolue	2,69	2,67	2,71	2,72
Porosité	24,4	34,15	35,19	44
Dureté Brinel HB	12,2	4,2	5,9	2
E (MPa)	1140	980	890	615
Rc (Mpa)	10,8	6,85	7,38	3,8
Rt (MPa)	1,05	0,65	0,63	0,3
K (10 ⁻⁹ m/s)	6,05	11,9	12,2	18,2
VI (m/s)	2650	2534	2660	2300
Densité apparente (g/cm ³)	1,96	1,64	1,65	1,53
Indice d'activité des argiles	0,88	0,42	0,53	0,38

Tab 2.3 : Caractéristiques des craies (Siwak, 1994).

Les valeurs de densité absolue pour les craies de Dannes et Haubourdin traduisent la présence d'impuretés. Celles de Liège et Bois-Bernard sont caractéristiques de craie quasi-pure. On observe également que la porosité varie de façon significative d'une craie à une autre, de 24,4%

pour Dannes à 44% pour Liège. L'indice d'activité des argiles, déterminé par l'essai au bleu de méthylène, est le plus important pour Dannes.

Les observations faites dans la première partie de ce travail, concernant les corrélations entre la teneur en argile et la porosité ainsi qu'entre la porosité et les propriétés mécaniques des craies, peuvent être observées à partir du tableau 2.3. Nous reviendrons plus en détail sur ce point au fur et à mesure de la présentation des essais effectués sur ces craies.

II.3 - Propriétés mécaniques

Les essais présentés dans les paragraphes II.3.1 à II.3.4 ont été réalisés sur des échantillons cylindriques de diamètre 36 mm et d'élancement 2. Ceux-ci ont été préalablement saturés à l'alcool méthylique, les variations de volume mesurées correspondent au volume de fluide injecté dans l'échantillon ou éjecté par ce dernier durant les essais. La vitesse de sollicitation dans les essais de compression isotrope est de l'ordre de 0,2 MPa/mn. Dans les essais de compression déviatorique la vitesse de déformation axiale est de 5 $\mu\text{m}/\text{mn}$.

II.3.1 - Essais de compression simple

Les essais de compression simple réalisés sur les quatre craies montrent l'influence de la porosité sur la résistance mécanique des craies. Une croissance de cette porosité s'accompagne d'une diminution de la résistance à la compression.

On constate sur les figures 2.1 à 2.4 que pour les craies de Dannes et Bois-Bernard les courbes débutent immédiatement de façon linéaire, tandis que pour les craies de Liège et Haubourdin on observe la présence d'une petite phase non linéaire.

Pour les quatre craies on remarque un comportement contractant suivit d'une dilatance avant ou à la rupture. Rappelons que dans ce rapport les valeurs positives des déformations volumiques traduisent un comportement contractant du matériau.

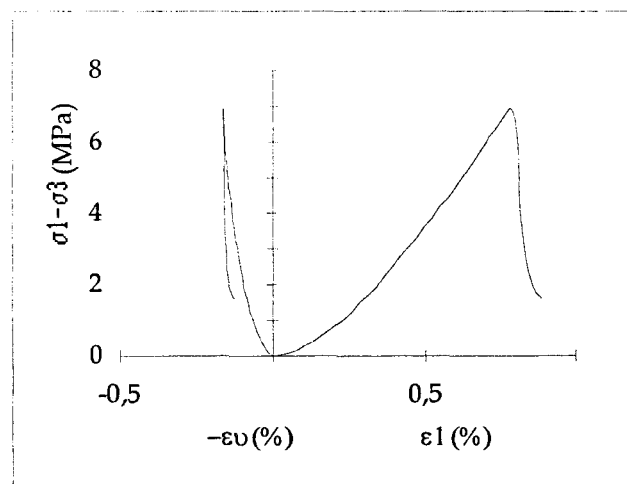


Fig 2.1 : Essai de compression simple, craie d'Haubourdin.

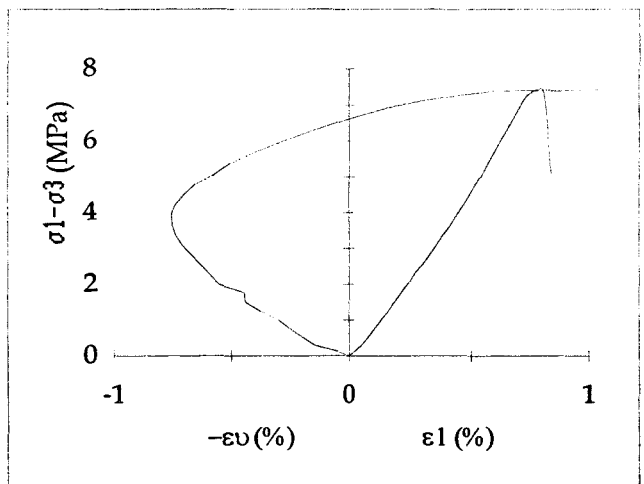


Fig 2.2 : Essai de compression simple, craie de Bois-Bernard.

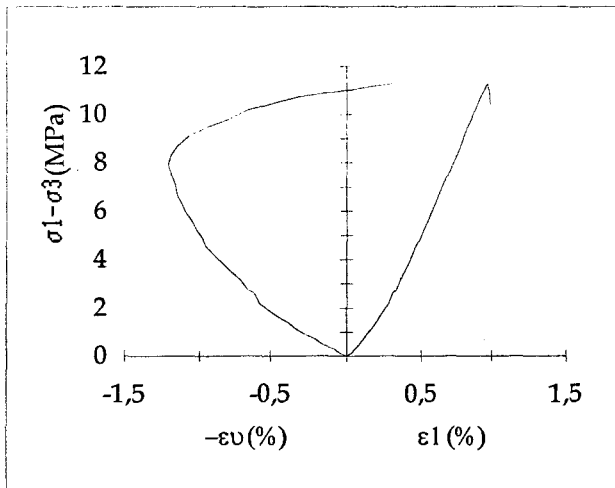


Fig 2.3 : Essai de compression simple, craie de Dannes.

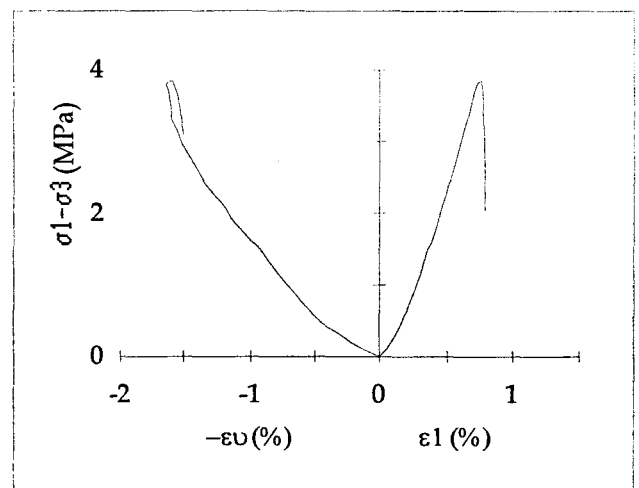


Fig 2.4 : Essai de compression simple, craie de Liège.

II.3.2 - Essais de compression isotrope

Les résultats de ces essais sont présentés sur la figure 2.5. On observe sur les courbes, les trois phases de comportement que nous avons discernées dans le premier chapitre. Cependant, pour les craies de Dannes et Bois-Bernard les capacités de la machine n'ont pas permis d'atteindre la troisième zone. Les phases initiales sont presque immédiatement linéaires, ce qui indique pour les quatre craies une fissuration initiale très faible voire nulle. L'auteur a déterminé à partir de ces expériences les valeurs de P_0 et P_{ct} (définis dans le chapitre I), les valeurs du module de compressibilité K et du module d'Young E . Ces caractéristiques sont répertoriées dans le tableau 2.4. Notons que les valeurs de P_{ct} déterminées par l'auteur ne représentent qu'une estimation de la fin de la phase d'effondrement de pores. En effet, aucun moyen de contrôle (émissions acoustiques) n'a été employé pour valider ces valeurs.

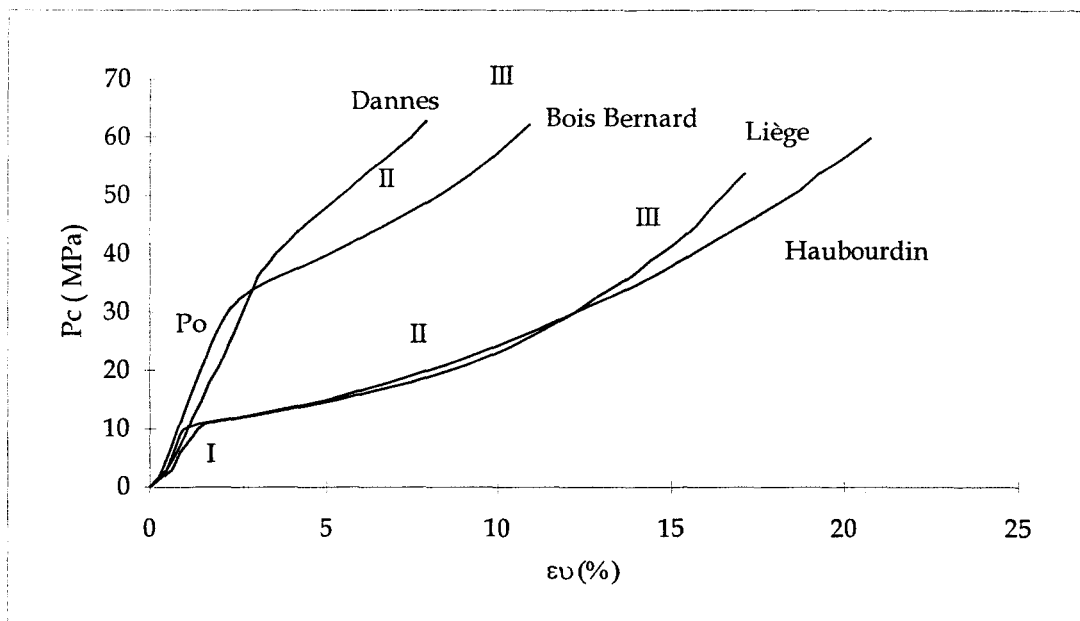


Fig 2.5 : Essais de compression isotrope sur les quatre craies (Siwak, 1994).

Craie	Po (MPa)	Pct (MPa)	K (MPa)	E (MPa)
Haubourdin	12	$\cong 20$	1046	1882
Bois-Bernard	30	$\cong 50$	1220	2200
Dannes	36	/	1330	2400
Liège	11	$\cong 18$	1118	2014

Tab 2.4 : Caractéristiques mécaniques des quatre craies déduites des essais de compression isotrope.

II.3.3 - Essais de compression déviatorique

Sur les figures 2.6 à 2.9 sont représentés les essais de compression déviatorique réalisés sur les quatre craies. Ces essais ont été effectués à différentes pressions de confinement. L'auteur a pu observer à de faibles confinements que les quatre craies présentent un comportement de type élasto-fragile et qu'à des confinements plus importants celles-ci se comportent comme un matériau à écrouissage durcissant. Le passage du comportement fragile au comportement ductile est relié à la limite élastique en compression isotrope.

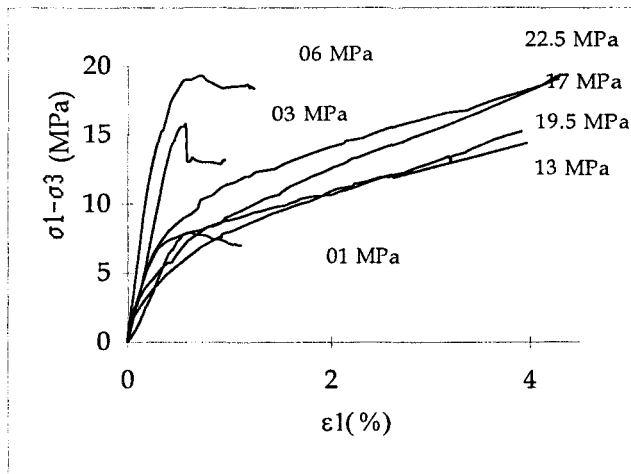


Fig 2.6 : Essais de compression déviatorique, craie d'Haubourdin.

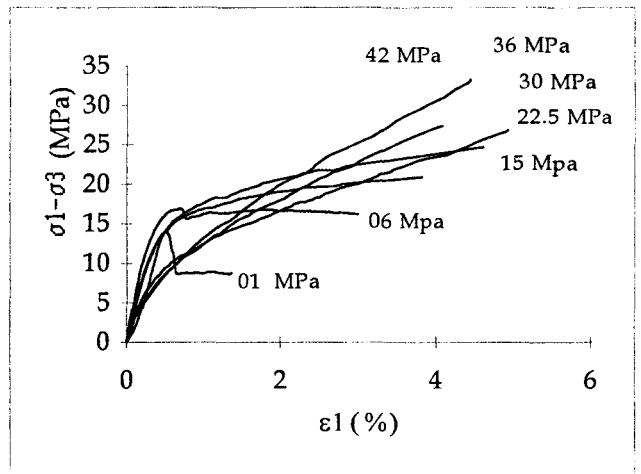


Fig 2.7 : Essais de compression déviatorique, craie de Bois Bernard.

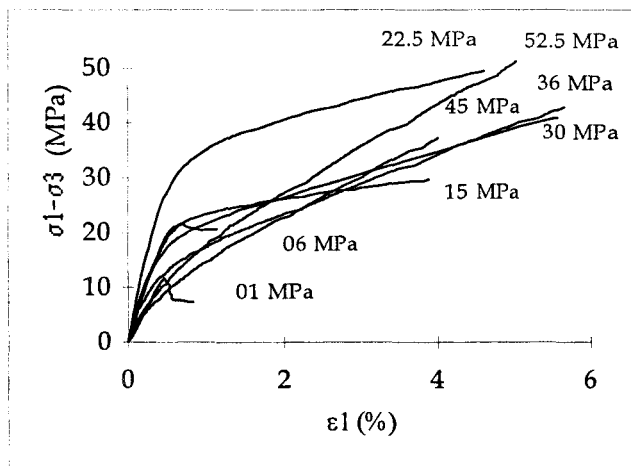


Fig 2.8 : Essais de compression déviatorique, craie de Dannes.

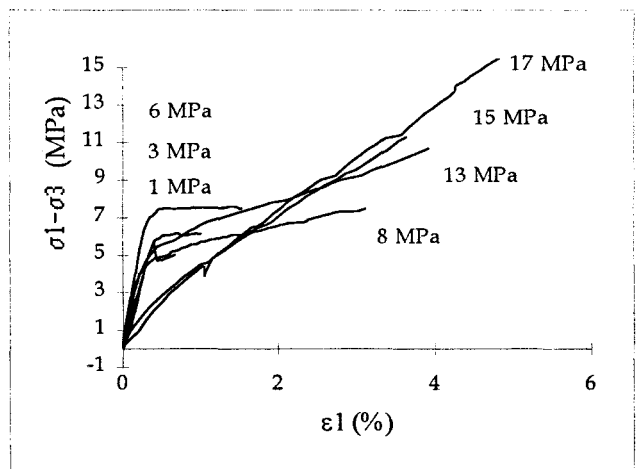


Fig 2.9 : Essais de compression déviatorique, craie de Liège.

Les observations faites à partir de ces essais sont les suivantes:

- Pour les essais avant P_0 , la limite élastique ainsi que la résistance à la rupture et le module d'Young croissent avec la pression de confinement. Les craies de Liège et Haubourdin présentent un comportement contractant dilatant à très basses pressions de confinement.
- Pour les essais après P_0 , la limite élastique décroît fortement pour devenir quasiment nulle à de très hauts confinements. Le module de Young tangent décroît également. Les quatre craies présentent un comportement en volume purement contractant.

Si l'on observe plus attentivement les courbes précédentes, on remarque que l'on peut également définir pour les essais effectués avant P_0 deux types de comportement. Un comportement de type fragile et un comportement de type ductile. Ceci apparaît clairement en considérant les essais à 15 et 22 Mpa de la craie de Bois-Bernard (figure 2.7) et les essais à 15, 22.5 et 30 MPa de la craie de Dannes (figure 2.8) où aucun pic de rupture n'est apparu. Pour les autres craies, la gamme de pression utilisée ne permet pas de conclure de manière aussi affirmative.

II.3.4 - Essais de compression proportionnelle

Des essais de compression proportionnelle ont également été effectués, le rapport des contraintes (σ_1/σ_3) étant égal à 2. Une similitude a été observée par l'auteur entre les essais de compression isotrope et les essais de compression proportionnelle (figure 2.10) En effet, il décompose les courbes obtenues également en trois phases:

- Une phase élastique linéaire jusqu'à une valeur $P1$: seuil d'écoulement plastique.
- Une phase de dégradation de la structure : rupture des liaisons intergranulaires.
- Une phase de compaction.

Il semble cependant difficile de discerner ces trois phases sur les courbes présentées ici.

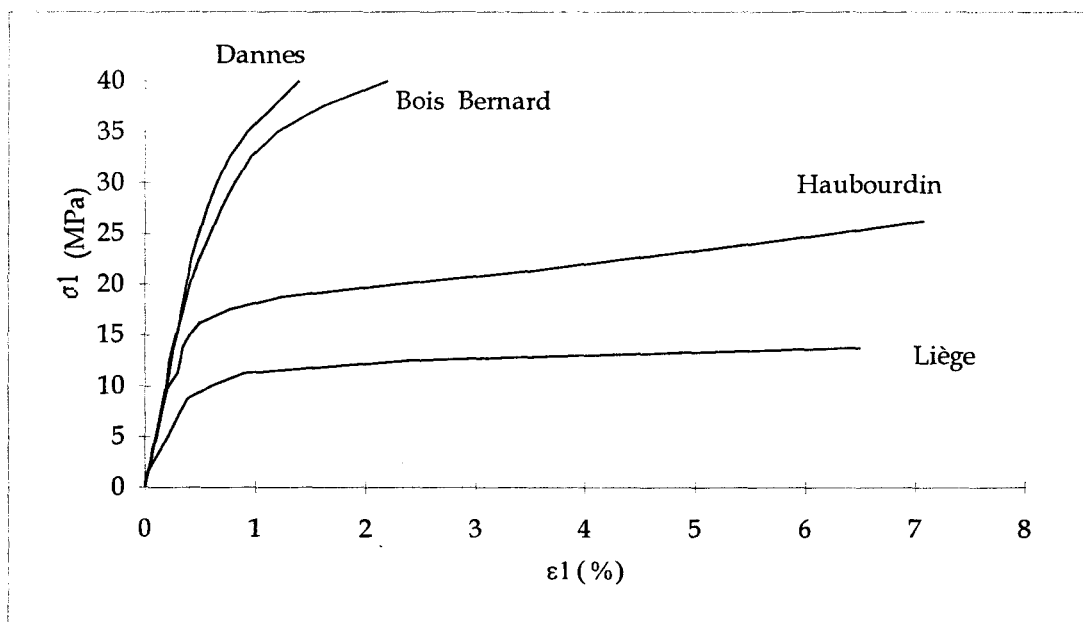


Fig 2.10 : Essais de compression proportionnelle sur les quatre craies ($\sigma_1/\sigma_3 = 2$).

II.4 - Essais de torsion sur la craie d'Haubourdin

Pecqueur (1995) a effectué des essais de torsion sur la craie d'Haubourdin. Ces essais sont précédés soit d'une phase de consolidation isotrope soit d'une phase de compression déviatoire. Avant de présenter les résultats obtenus par l'auteur, on s'intéresse au principe de cet essai.

II.4.1 - Principe de l'essai - Etat de contrainte de l'échantillon

L'essai de torsion sur cylindre creux permet d'étudier l'influence de la rotation des axes principaux de contrainte et/ou l'influence de la contrainte intermédiaire et également l'influence d'un cisaillement libre. En effet, suivant le chemin de contrainte choisi, ces effets peuvent être étudiés ensemble ou séparément. Dans ce type d'essai, l'échantillon est soumis à un effort axial F , une pression intérieure et extérieure, P_i et P_e , et à un couple C (figure 2.11).

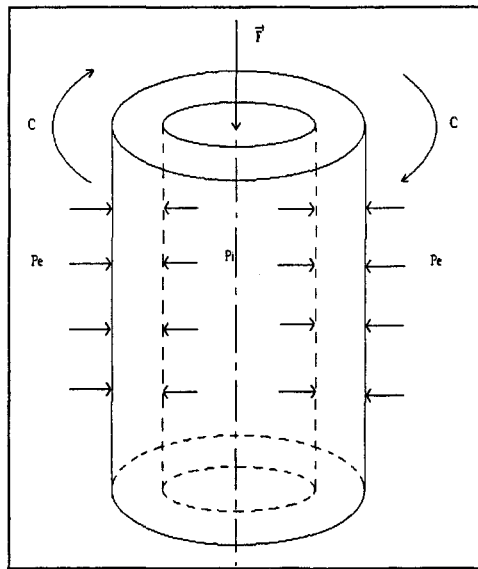


Fig 2.11 : Efforts appliqués à l'échantillon lors d'un essai de torsion.

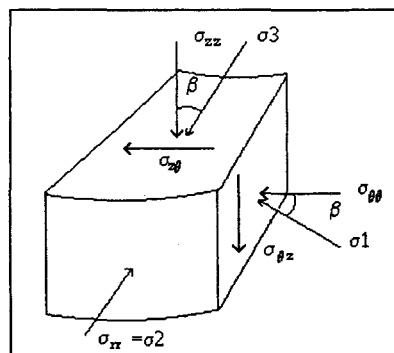


Fig 2.12 : Etat de contrainte d'un élément de la paroi du cylindre.

Deux paramètres importants dus à la géométrie de l'échantillon influent sur les résultats. Il s'agit d'une part de l'élancement de l'échantillon, et d'autre part du rapport des rayons interne R_i

et externe R_e du cylindre. Ces deux paramètres influent sur l'homogénéité du champ de contrainte. **Durand** (1973) préconise un élanement voisin de 2 à 2,5 pour éviter toute influence des encastresments sur les valeurs du couple à la rupture. Un rapport des rayons supérieur à 0,5 place l'échantillon dans des conditions de non-uniformité du champ de contrainte. Les interprétations expérimentales devront en tenir compte.

Envisageons les différents efforts auxquels peut être soumis l'échantillon.

a) $F, P_i \neq P_e$

L'échantillon n'est soumis qu'à des contraintes normales. Le tenseur de contrainte a donc la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans cette configuration, les directions de contrainte principale sont fixes, mais le fait d'avoir $P_i \neq P_e$ implique une distribution des contraintes à travers l'épaisseur du cylindre non uniforme.

Pour déterminer l'état de contrainte deux hypothèses peuvent être formulées :

- Répartition linéaire :

Cette hypothèse se formule lorsque les parois du cylindre sont minces, la contrainte radiale est alors donnée par :

$$\sigma_{rr}^m = \frac{P_i + P_e}{2} \quad (2.1)$$

σ_{rr}^m représente ici la valeur moyenne de la contrainte radiale σ_{rr}

- Répartition élastique :

Les valeurs de σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en tout point de l'éprouvette sont données par :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= A + \frac{B}{r^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec

$$A = \frac{P_e R_e^2 - P_i R_i^2}{(R_e^2 - R_i^2)}, \quad B = \frac{(P_i - P_e) R_i^2 R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2)} \quad (2.3)$$

Par une intégration on obtient une valeur moyenne de ces contraintes :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^m &= A - \frac{B}{R_e R_i} \\ \sigma_{\theta\theta}^m &= A + \frac{B}{R_e R_i}\end{aligned}\quad (2.4)$$

La valeur de la contrainte axiale est déterminée à partir des conditions d'équilibre :

$$\sigma_{zz}^m = \frac{F}{\pi(R_e^2 - R_i^2)} + \frac{P_e R_e^2 - P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad (2.5)$$

Dans cette configuration les trois contraintes sont principales.

b) F, C, P_i ≠ P_e

Dans ce qui va suivre, on s'intéresse à une configuration où l'on peut faire varier les trois valeurs principales indépendamment de l'angle β , β étant l'angle que fait la contrainte principale majeure avec l'axe vertical du cylindre (figure 2.12). Les valeurs moyennes de σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, et σ_{zz} sous l'hypothèse d'une répartition élastique sont identiques au cas précédent. La valeur de la contrainte tangentielle est donnée par :

$$\sigma_{\theta z}^m = \frac{4C(R_e^3 - R_i^3)}{3\pi(R_e^4 - R_i^4)(R_e^2 - R_i^2)} \quad (\text{méthode élastique}) \quad (2.6)$$

soit par :

$$\sigma_{\theta z} = \frac{3C}{2\pi(R_e^3 - R_i^3)} \quad (\text{méthode plastique, } \sigma_{\theta z} \text{ supposée constante}) \quad (2.7)$$

Les valeurs des contraintes principales sont :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} - \sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{\theta z}^2}}{2} \\ \sigma_2 &= \sigma_{rr} \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} + \sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{\theta z}^2}}{2}\end{aligned}\quad (2.8)$$

L'application du couple de torsion entraîne une rotation des axes principaux de contraintes. La valeur de l'angle d'inclinaison β est donnée par :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\sigma_{\theta z}}{(\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta})} \quad (2.9)$$

c) F, C, Pi=Pe

Dans ce cas, le tenseur de contrainte à la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

pour $r = Re$ ou Ri , on a $\sigma_{rr} = p$.

Si l'épaisseur du cylindre est assez mince, on peut estimer une contrainte tangentielle moyenne en supposant une répartition élastique ou plastique, et admettre que la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est égale à la pression de cellule, soit :

$$\sigma_{\theta z}^m = \frac{C}{S \cdot r_{\text{moy}}}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = P \quad (2.10)$$

Avec S la section transversale du cylindre. Le tenseur des contraintes prend la forme :

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & \tau_{\theta z}^m \\ 0 & \tau_{\theta z}^m & P + \sigma_{\approx} \end{bmatrix}$$

avec $\sigma_{\approx} = \frac{F}{S}$: excédent de contrainte axiale.

Les valeurs de contraintes principales sont :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= p + \frac{\sigma_{\theta z}}{\operatorname{tg} \beta} \\ \sigma_2 &= \sigma_{rr} = p \\ \sigma_3 &= p - \sigma_{\theta z} \cdot \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \quad (2.11)$$

En tenant compte des relations précédentes, le paramètre b s'écrit :

$$b = \sin^2 \beta \quad (2.12)$$

où

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\sigma_{\theta z}}{\sigma_{\approx}} \quad (2.13)$$

On remarque donc qu'il est impossible ici de dissocier l'effet de la contrainte intermédiaire et l'orientation des contraintes principales.

II.4.2 - Résultats expérimentaux

Les essais de torsion réalisés sur une craie d'Haubourdin ont été effectués avec des pressions extérieure et intérieure égales. Ils ont été réalisés en conditions drainées, le fluide de saturation étant de l'alcool méthylique. Les dimensions de l'échantillon sont les suivantes :

- Hauteur : 164 mm
- Rayon intérieur : 17.5 mm
- Rayon extérieur : 35 mm

Les dimensions sont choisies pour s'affranchir des effets de bords dus à l'encastrement des deux extrémités de l'éprouvette et pour avoir dans le tiers central de l'échantillon une zone non influencée par ces effets de bords. Les mesures effectuées lors de ces essais sont : la variation de volume (mesure globale du volume de fluide éjecté ou aspiré par l'échantillon), les déformations axiale et angulaire. Les vitesses de sollicitations sont de l'ordre de 0,06 MPa/mn en compression et de 2 mN/mn en torsion.

Les capacités des différents appareillages sont les suivantes :

- 64 MPa pour P_i et P_e
- 2800 mN pour C
- 300 kN en compression pour F

A/ Essais de torsion précédés d'une phase de compression isotrope

Sur la figure 2.13 sont représentés les essais de torsion précédés d'une phase de consolidation isotrope. On observe l'influence de la pression hydrostatique sur le comportement de la craie. Rappelons que celle-ci a une valeur de P_0 proche de 12 MPa. A de faibles pressions de confinement (0, 3, 8 MPa), la craie présente un comportement de type fragile. La phase précédant la rupture est linéaire. Les valeurs des déformations angulaires et des variations de volume restent faible. A des confinements plus importants (13, 17 MPa), la craie présente un comportement non linéaire, cette phase correspond à un écrouissage du matériau. Cette dernière est d'autant plus importante que la pression hydrostatique est élevée.

B/ Essais de torsion précédés d'une phase de compression déviatorique

L'influence du déviateur pour différentes pressions de confinement est illustrée sur les figures 2.14 à 2.17. Pour des pressions supérieures à P_0 , aucune influence n'a été constatée par l'auteur (figures 2.16 et 2.17). Pour des pressions inférieures, il distingue deux types de comportement. Un comportement du type fragile pour des faibles valeurs du déviateur et un comportement du type ductile pour des valeurs plus élevées. La phase d'écrouissage, présente dans ce dernier cas, augmente avec la valeur de la contrainte déviatorique. On observe nettement sur la figure 2.15 ces différences. Ces observations sont à rapprocher de celles que nous avons formulées dans le paragraphe II.3.3.

C/ Détermination de l'état de déformation de l'échantillon

Les mesures effectuées dans les essais précédents n'autorisent pas une détermination complète de l'état de déformation de l'échantillon. En effet, le tenseur de déformation induit par le chargement s'écrit.

$$\varepsilon_{r,\theta,z} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & \gamma/2 \\ 0 & \gamma/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

γ étant la distorsion.

La détermination du tenseur des déformations nécessite donc la connaissance de quatre paramètres : ε_r , ε_θ , ε_z et γ . Dans les essais présentés précédemment uniquement trois mesures ont été effectuées : ε_z , γ et ε_v . Pour la mesure de la déformation radiale, on se heurte à des difficultés techniques. On ne peut donc déduire des mesures précédentes que la valeur $\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = \varepsilon_v - \varepsilon_z$.

Le mode de rupture en torsion des échantillons est caractérisé par deux hélices diamétralement opposées. **Pecqueur** (1995) détermine l'angle de ces hélices par rapport au un plan perpendiculaire à l'axe de l'éprouvette pour les essais de torsion compression hydrostatique. Pour les essais effectués à des pressions supérieures au P_0 , l'état de dégradation de l'échantillon ne lui a pas permis de mesurer ces angles. Pour une meilleur interprétation de ces résultats, il est préférable de mesurer cet angle α par rapport à l'axe du cylindre. En effet, cela permet de le corréliser avec l'angle que fait la contrainte principale majeure avec ce même axe (angle β). Les valeurs ainsi déterminées sont répertoriées dans le tableau 2.5.

Pression hydrostatique (MPa)	0	3	8
Angle d'inclinaison α (°)	50	45	35

Tab 2.5 : Angle d'inclinaison des hélices de rupture en fonction du confinement.

L'angle théorique que fait la contrainte principale majeure dans ces essais est de 45° , ce sont donc les directions matérielles inclinées de cette valeur qui supportent les plus grands contraintes. On constate d'après les valeurs ci-dessus qu'il n'y a pas correspondance entre les directions matérielles les plus sollicitées et les directions matérielles où se produit la rupture.

D/ Influence de la contrainte intermédiaire et de l'orientation des contraintes

Dans les essais de torsion compression déviatorique, le paramètre b et l'angle que fait la contrainte principale majeure avec l'axe vertical du cylindre sont toujours reliés par la relation 2.12. On ne peut pas discerner dans ce cas leurs influences respectives. Cependant, l'auteur observe une augmentation de l'angle qu'il a défini avec l'augmentation de la contrainte déviatorique. Une augmentation de la contrainte déviatorique implique une diminution de l'angle β . On remarque donc que l'inclinaison des hélices de rupture varie dans le même sens que l'inclinaison de la contrainte principale majeure. On ne peut malheureusement pas étudier ce phénomène de manière quantitative du fait de la non possibilité de mesure de ces angles. En effet, pour des déviateurs importants, les ruptures observées par l'auteur sont beaucoup moins franches que celles obtenues précédemment.

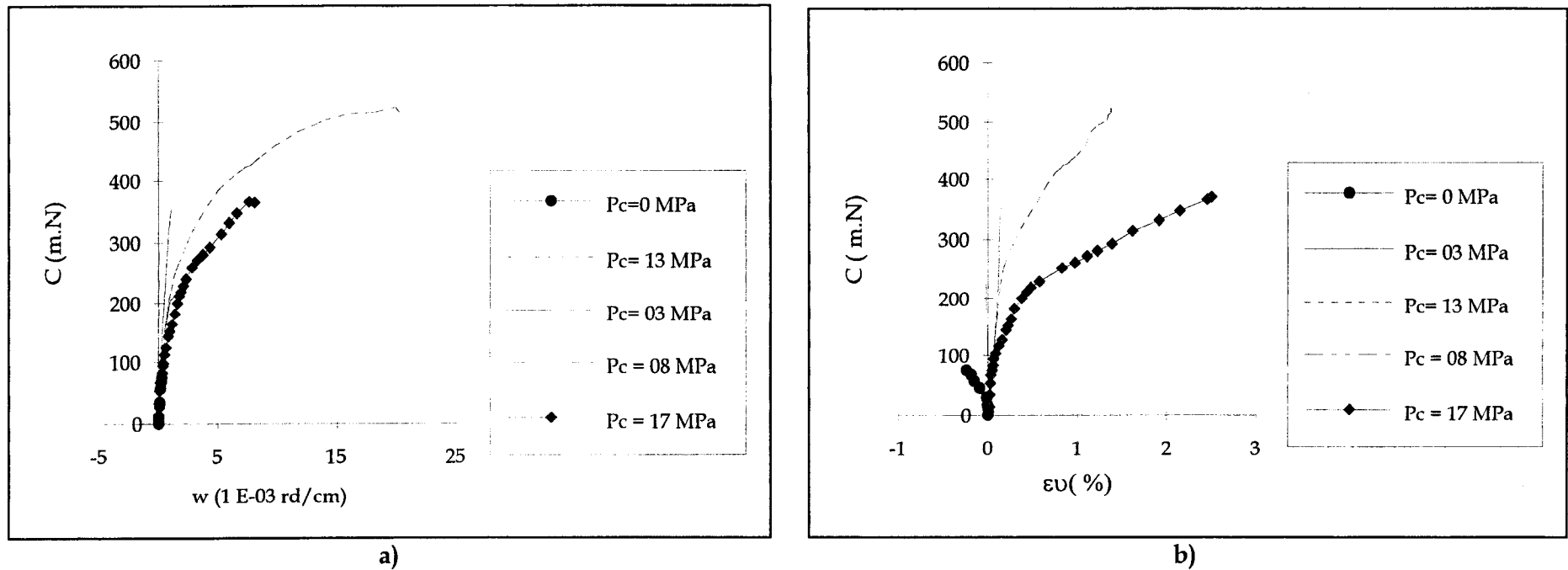


Fig 2.13 : Essais de torsion sous différentes pressions hydrostatiques.

a) courbes couple-déformation angulaire.

b) courbes couple-déformation volumique.

(Pecqueur, 1995)

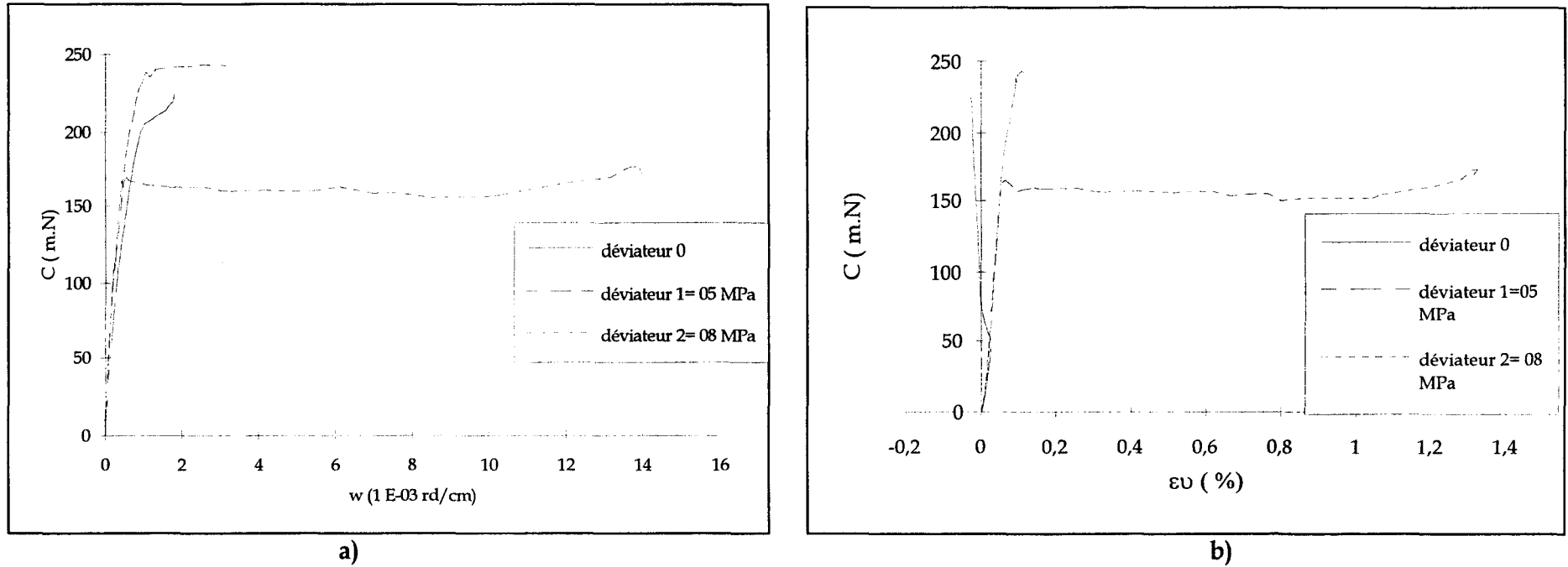


Fig 2.14 : Essais de torsion sous une pression hydrostatique de 3 MPa et sous différents déviateurs axiaux.

a) courbes couple-déformation angulaire.

b) courbes couple-déformation volumique.

(Pecqueur, 1995)

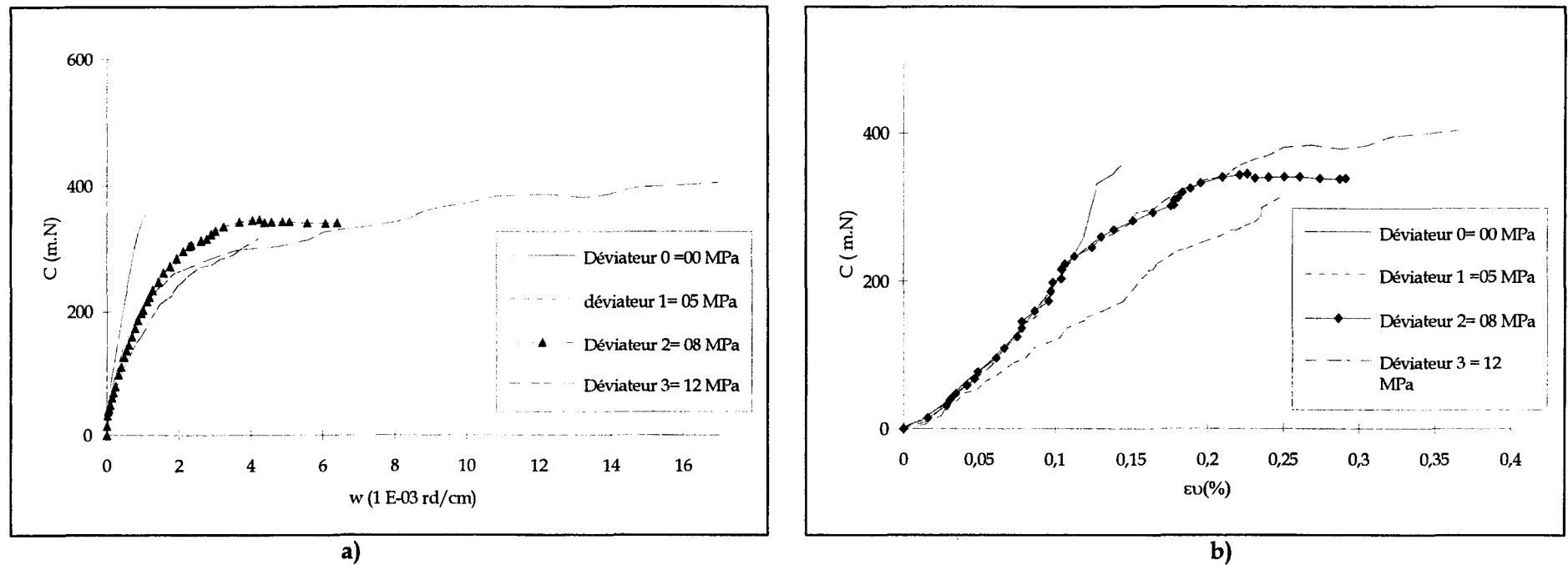


Fig 2.15 : Essais de torsion sous une pression hydrostatique de 8 MPa et sous différents déviateurs axiaux.
 a) courbes couple-déformation angulaire.
 b) courbes couple-déformation volumique.
 (Pecqueur, 1995)

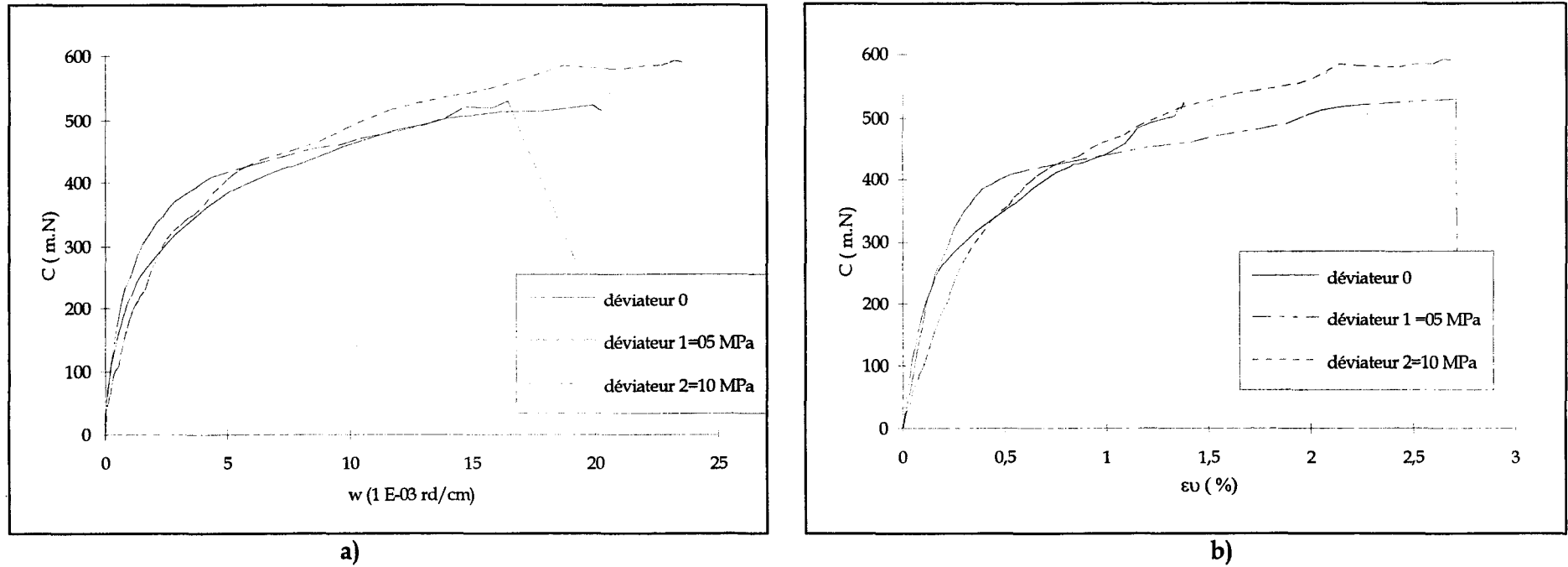


Fig 2.16 : Essais de torsion sous une pression hydrostatique de 13 MPa et sous différents déviateurs axiaux.

a) courbes couple-déformation angulaire.
b) courbes couple-déformation volumique.

(Pecqueur, 1995)

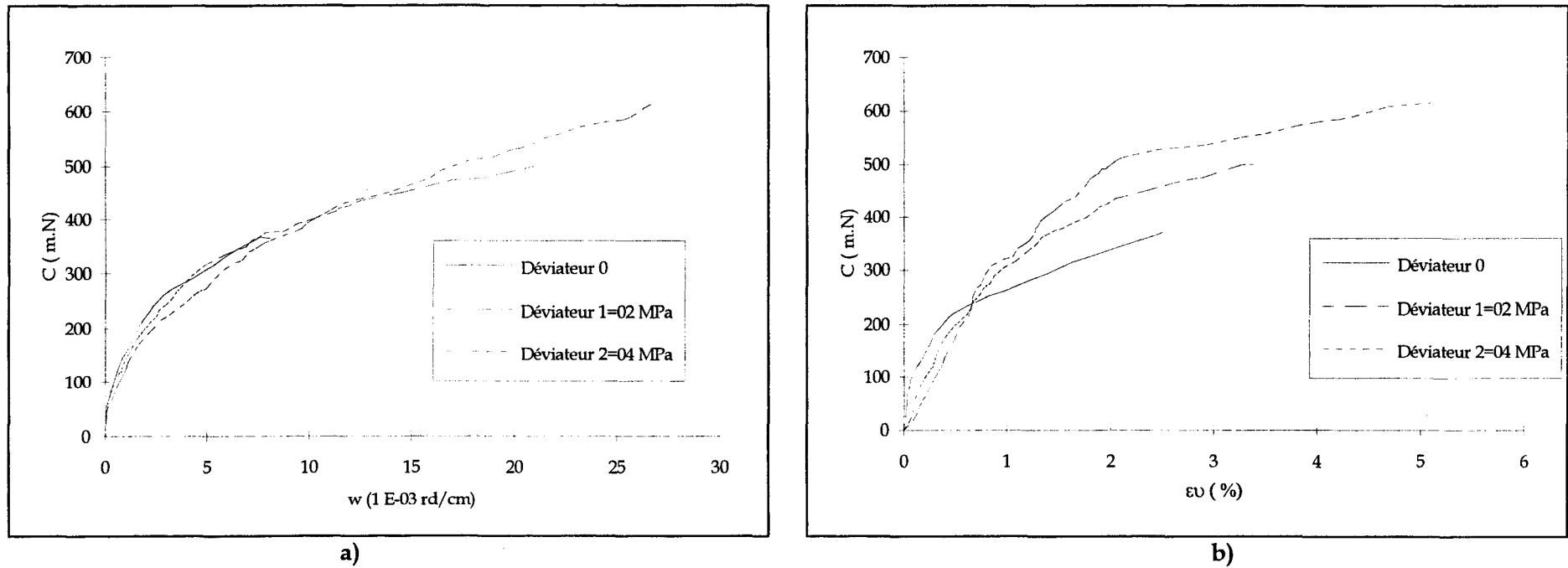


Fig 2.17 : Essais de torsion sous une pression hydrostatique de 17 MPa et sous différents déviateurs axiaux.

a) courbes couple-déformation angulaire.

b) courbes couple-déformation volumique.

(Pecqueur, 1995)

II.5 - Etude de la variation des paramètres élastiques

Dans ce paragraphe, nous établissons le plus simplement possible des lois d'évolution des différents paramètres élastiques.

II.5.1 - Variation des modules de compressibilité K_{dr}

Les essais de compression isotrope effectués avec des cycles de déchargement-rechargement sur les craies de Dannes et Bois-Bernard ne nous permettent pas de façon raisonnable d'établir une loi de variation du module de compressibilité K . En effet le nombre de cycles réalisés pour ces craies nous paraît insuffisant. Pour les craies d'Haubourdin et Liège les valeurs du module de rechargement K_{dr} sont répertoriées respectivement dans les tableaux 2.6 et 2.7

Pc (MPa)	12	18,3	22,8	27,6	33,6	45
K_{dr} (MPa)	1046	1156	1200	1533	1768	2200

Tab 2.6 : Evolution du module de compressibilité de la craie d'Haubourdin avec la pression de confinement.

Pc (MPa)	10	12,7	15	18	21	27	36,2	45,2
K_{dr} (MPa)	1118	1209	1304	1090	1235	1421	1645	1883

Tab 2.7 : Evolution du module de compressibilité de la craie de Liège avec la pression de confinement.

Les tableaux ci-dessus indiquent une augmentation du module de rechargement avec la pression de confinement. Cette évolution du module est reliée à la décroissance de la porosité et à l'augmentation du nombre de contact entre les grains. Pour quantifier l'évolution de K_{dr} en fonction de la pression de confinement, Shao (1987) et Siwak (1994) utilisent une loi sous la forme:

$$K_{dr} = C_c \cdot P_a \left(\frac{I_1}{3P_a} \right)^{N_c}, K_{dr} \geq K$$

avec

(loi 1, 2.14)

$$C_c = \frac{K}{P_a} \left(\frac{P_{c0}}{P_a} \right)^{-N_c}$$

Afin d'améliorer la prédiction de ce module pour les craies étudiées nous proposons une loi de la forme suivante:

$$K_{dr} = C \cdot P_a \exp \left(N \left(\frac{I_1}{3P_a} \right) \right) \quad (\text{loi 2, 2.15})$$

C et N sont deux constantes à déterminer. Sur les figures 2.18 et 2.19, on présente une comparaison des deux lois précédentes. On constate que la loi que nous proposons permet d'obtenir, pour les craies considérées, un meilleur coefficient de corrélation (tableau 2.8). Les coefficients de corrélation déterminés dans ce travail sont calculés par la méthode des moindres carrés.

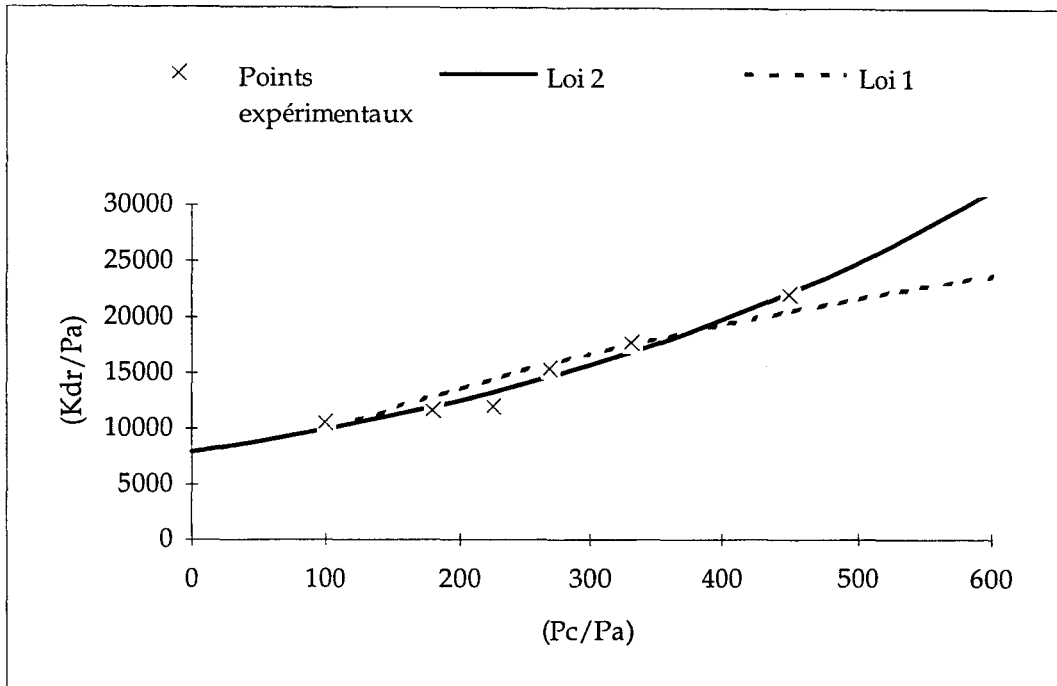


Fig 2.18 : Variation du module de compressibilité de rechargement en fonction de la pression de confinement, craie d'Haubourdin.

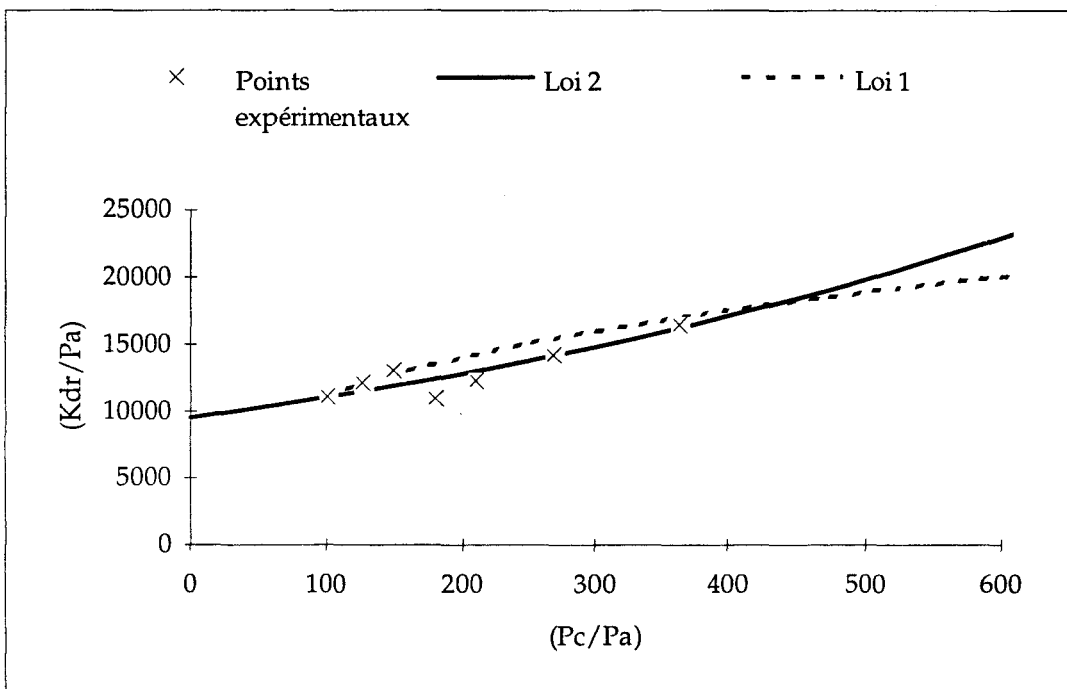


Fig 2.19 : Variation du module de compressibilité de rechargement en fonction de la pression de confinement, craie de Liège.

Paramètres	Loi 1			Loi 2		
	Cc	Nc	Corrélation	C	N	Corrélation
Haubourdin	910	0,51	0,88	7903	2,29e-3	0,96
Liège	2489	0,32	0,75	9569	1,45e-3	0,91

Tab 2.8 : Valeur des constantes des lois de variation du module de compressibilité.

II.5.2 - Variation des modules d'Young initiaux E_{init}

Dans les tableaux ci-dessous, nous avons répertorié les valeurs des différents modules initiaux E_{init} mesurés à partir des essais déviatoriques effectués à des pressions de confinement inférieures à la limite élastique en compression isotrope.

Pression de confinement (MPa)	0	1	3,5	6
E_{init} (MPa)	1096	1785	3571	5263

Tab 2.8 : Variation du module d'Young initial en fonction de la pression de confinement (Haubourdin).

Pression de confinement (MPa)	0	1	6	15	22,5
E_{init} (MPa)	1306	2777	4255	4310	6896

Tab 2.9 : Variation du module d'Young initial en fonction de la pression de confinement (Dannes).

Pression de confinement (MPa)	0	1	6	15	22,5
E_{init} (MPa)	1060	3750	5000	4000	4250

Tab 2.10 : Variation du module d'Young initial en fonction de la pression de confinement (Bois-Bernard).

Pression de confinement (MPa)	0	1	3,5	6	8
E_{init} (MPa)	633	1666	1500	2424	3076

Tab 2.11 : Variation du module d'Young initial en fonction de la pression de confinement (Liège).

La figure ci-dessous (figure 2.20) montre que l'on a pour les quatre craies une augmentation du module d'Young en fonction de la pression de confinement. E_0 représente le module de Young déterminé à partir des essais de compression simple.

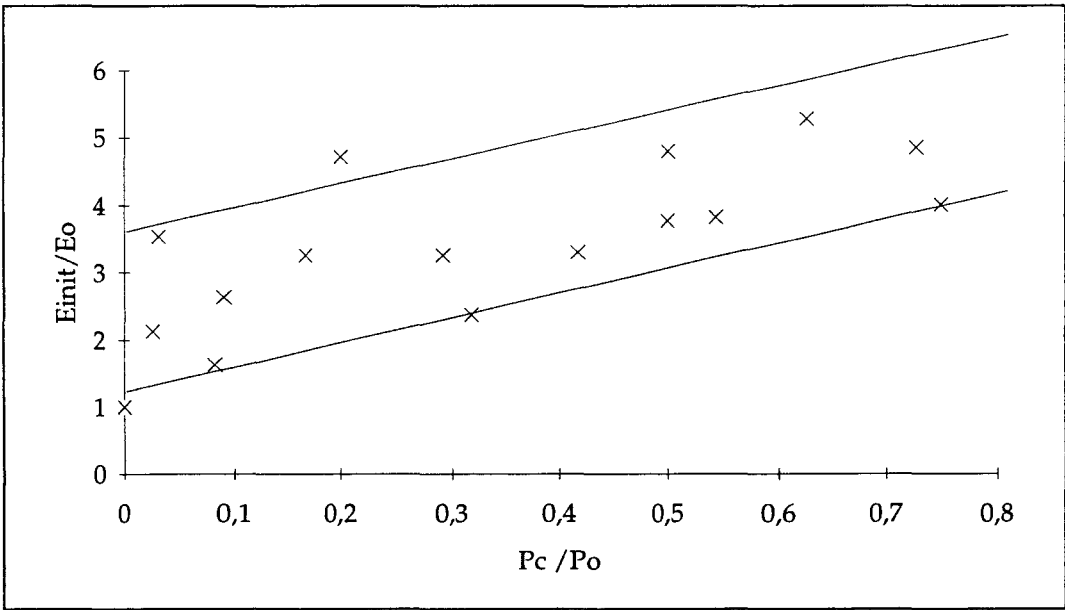


Fig 2.20 : Représentation en variables adimensionnées de la variation du module d'Young initial.

Pour modéliser cette variation, on choisit d'exprimer une relation linéaire entre le module d'Young et la pression de confinement.

$$\frac{E_{init}}{E_0} = a \left(\frac{P_c}{P_0} \right) + b \quad (2.16)$$

avec $a=4,28$ $b=1,82$

Le coefficient de corrélation obtenu est de 0,63. Cette valeur, bien que relativement faible, nous permettra, comme on le montre dans les chapitres III et IV, d'obtenir des valeurs de déformation élastiques acceptables dans la simulation des essais déviatoriques des quatre craies.

II.5.3 - Variation des modules d'Young de rechargement E_{dr}

A partir des essais de compression déviatoriques effectués à hautes pressions de confinement, nous avons représenté sur la figure 2.21 la variation des modules d'Young de rechargement en fonction du rapport Q/P . On observe sur cette figure une décroissance globale des modules pour les quatre craies.

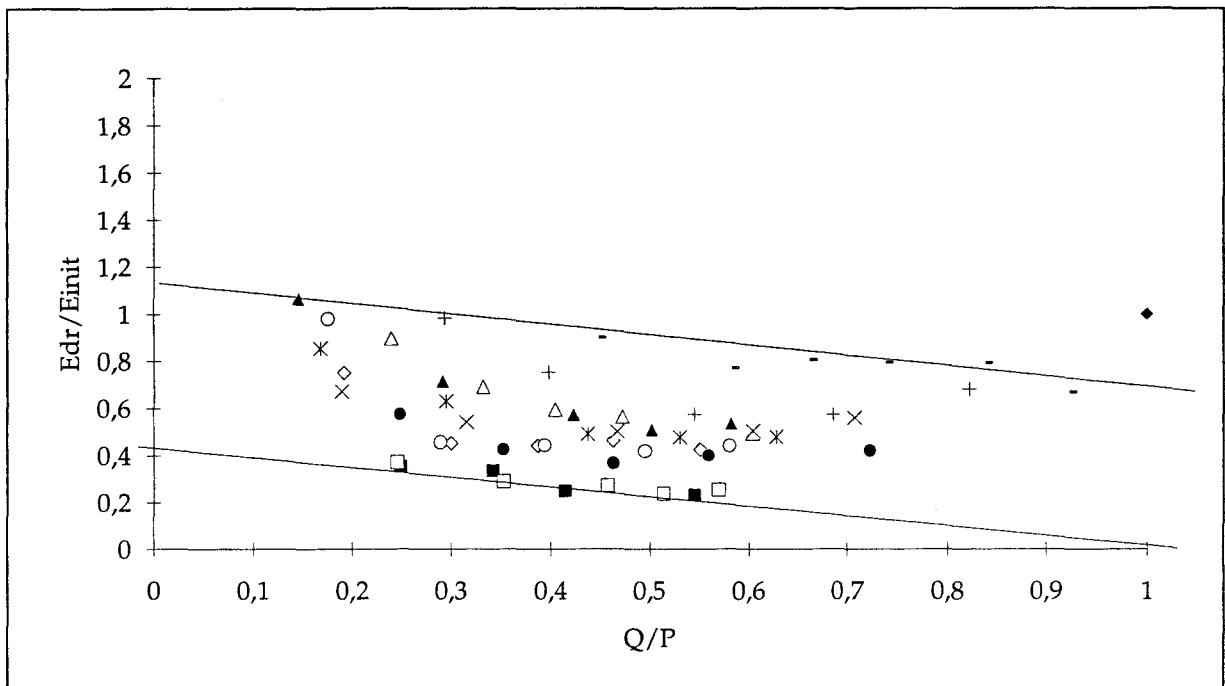


Fig 2.21 : Représentation en variables adimensionnées de la variation du module d'Young de rechargement.

Pour expliquer ce phénomène, nous proposons d'analyser ces résultats à l'aide de la figure 1.9 du chapitre I. Les essais à partir desquels ont été mesurés les modules suivent un chemin de contrainte du type I ou II (figure 2.22). Ces chemins passent à un moment donné par la phase de pore collapse. On rappelle que dans cette phase il y a modification de la structure de la craie due aux glissements et aux rotations des grains. Il y a également une diminution du nombre de contacts. Le passage par cette phase peut expliquer la chute des modules de rechargement.

De plus, si l'on considère la phase de consolidation qui suit la phase de pore collapse, on doit s'attendre à une augmentation des modules de rechargement dans cette zone. C'est ce que l'on observe expérimentalement sur la majorité des essais, certains d'entre eux sont présentés sur les figures 2.23 à 2.26.

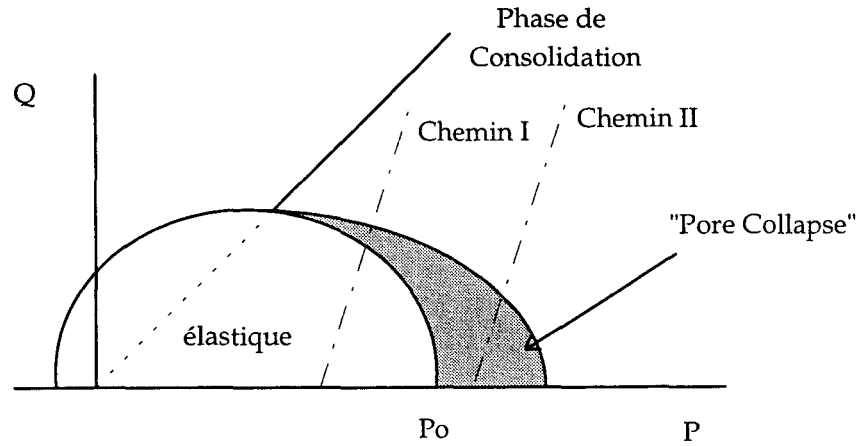


Fig 2.22 : Chemins de contraintes pendant un essai de compression déviatorique.

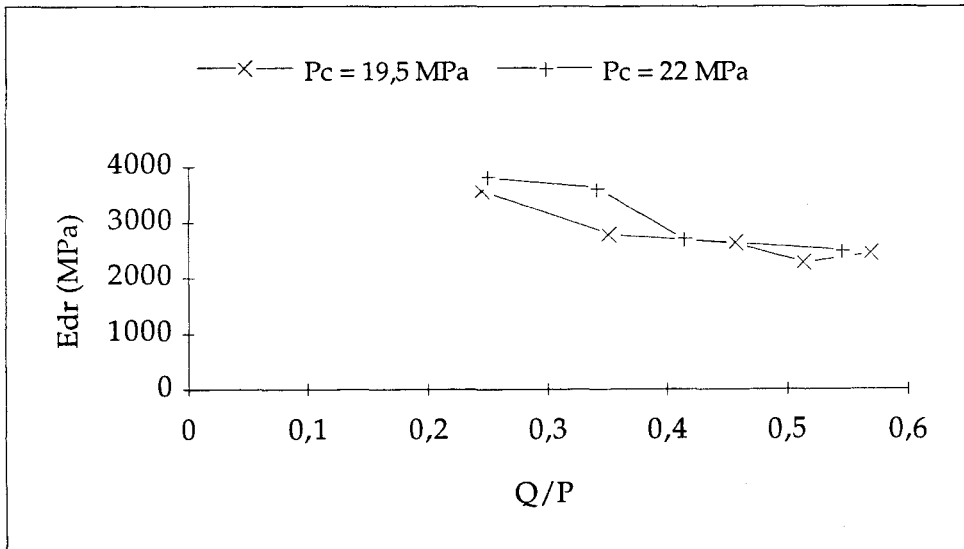


Fig 2.23 : Variation du module d'Young de rechargement, craie de Haubourdin.

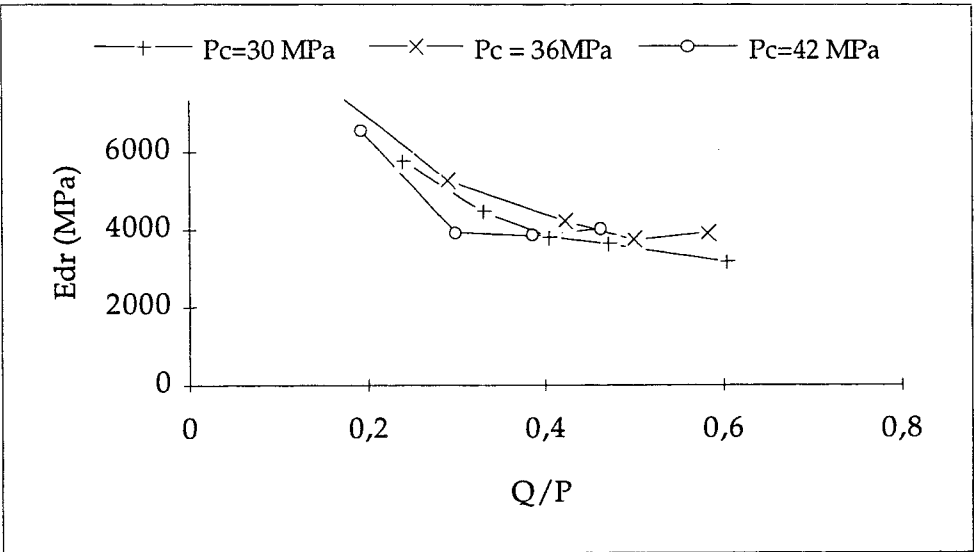


Fig 2.24 : Variation du module d'Young de rechargement, craie de Bois-Bernard.

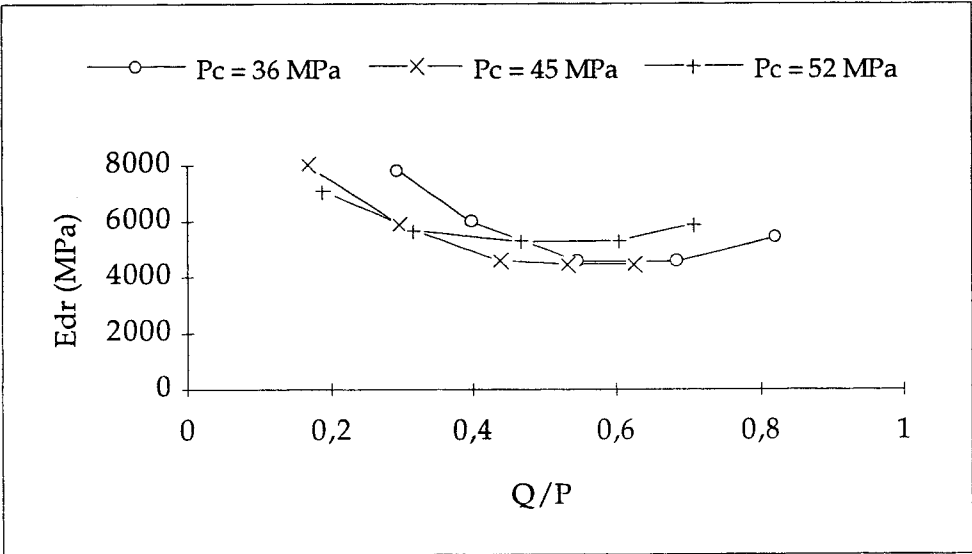


Fig 2.25 : Variation du module d'Young de rechargement, craie de Dannes.

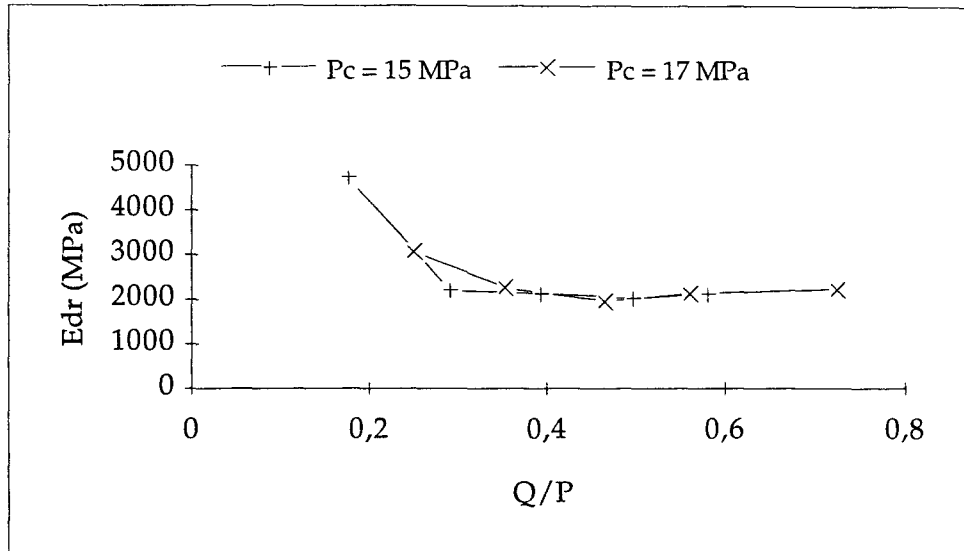


Fig 2.26 : Variation du module d'Young de rechargement, craie de Liège.

II.6 - Vérification de quelques critères à partir des essais triaxiaux

Nous proposons de vérifier certains des critères de rupture présentés dans le premier chapitre. Les essais utilisés pour cela sont les essais à bas confinement ($<P_0$), essais pour lesquels il y a apparition d'un pic de rupture. Les coefficients de corrélation sont donnés à titre indicatif compte tenu du faible nombre de points dont nous disposons pour chaque craie.

II.6.1 - Critère de Coulomb

On rappelle que ce critère se met sous la forme :

$$\sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \Phi - 2 c \cos \Phi = 0$$

Il exprime la résistance à la rupture au cisaillement en fonction de l'angle de frottement et la cohésion c . L'angle de frottement ϕ est directement lié à la nature des minéraux et à leur forme. La cohésion provient des liaisons physico-chimiques des éléments minéraux au contact, soit directement, soit par l'intermédiaire de la coquille d'eau adsorbée. De manière générale, pour les sols cette cohésion est faible voire nulle. Dans les essais de cisaillement la résistance due à la cohésion est mobilisée pour de faibles valeurs de déformations puis est ensuite détruite. Seule subsiste alors la résistance au cisaillement qui trouve son origine dans le frottement des particules entre elles. Pour les craies, la cohésion trouve son origine en partie dans la cimentation des grains, elle est plus importante que dans les sols classiques (sables, argiles). Ce qui implique que la part de résistance qui lui est due l'est également et est supérieure à celle due aux mécanismes de frottement (figure 2.27). La valeur de ϕ qui est déterminée avec les valeurs à la rupture est donc caractéristique des propriétés de la craie telles que le degré de cimentation, le nombre de contacts granulaires et leurs natures.

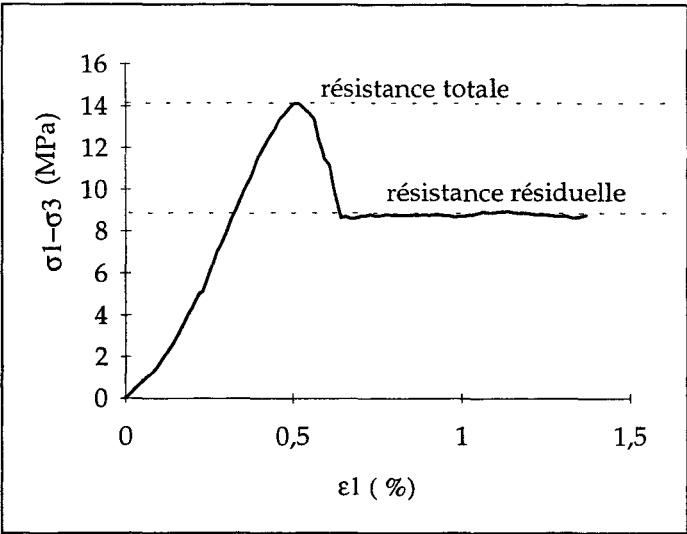


Fig 2.27 : Courbe de résistance au cisaillement lors de l'essai triaxial.

Sur les figures 2.28 sont représentés les points expérimentaux ($\square$) et la droite du critère déduit des valeurs expérimentales. Les paramètres sont répertoriés dans le tableau 2.12. On observe que les valeurs de la cohésion c peuvent être corrélées avec la porosité des craies. Par contre, on constate que la valeur de ϕ pour la craie de Liège est plus faible que pour les autres craies. Elle peut être corrélée à l'indice de texture de cette craie; également plus faible que pour les trois autres. Pour ces dernières, les valeurs déterminées n'amènent pas de remarques particulières.

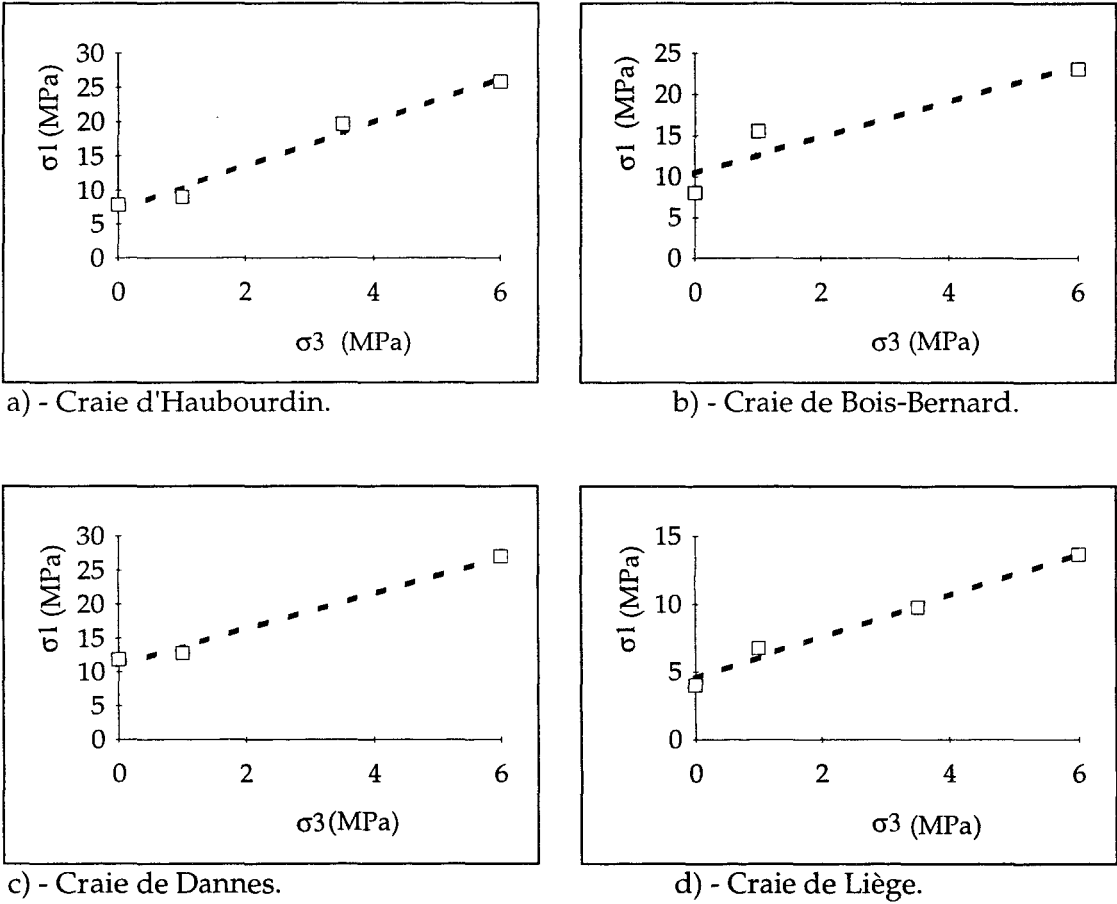


Fig 2.28 : Tracé du critère de Coulomb dans l'espace des contraintes principales.

Craies	ϕ (°)	c (MPa)	coefficient de corrélation
Haubourdin	32,1	1,90	0,99
Bois-Bernard	24,6	3,12	0,87
Dannes	27,2	3,30	0,99
Liège	12,9	1,76	0,91

Tab 2.12 : Valeur des paramètres du critère de Coulomb des quatre craies.

II.6.2 - Critère de Lade

Pour les matériaux ayant une résistance en traction simple, on fait un changement de repère correspondant à une translation de l'axe hydrostatique. Pour effectuer cette opération, on effectue le changement de variable suivant :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha Pt_0 \delta_{ij} \tag{2.16}$$

Pt_0 représente la résistance à la traction (déterminée ici à partir de l'essai brésilien), α est un paramètre que l'on relie à la cohésion de la craie (voir IV.4). L'équation 1.20 s'exprime donc maintenant sous la forme : $\bar{I}_{III} = (1/R_L) \bar{I}_I^3$, Les valeurs de la constante de ce critère sont indiquées dans le tableau 2.13, et les figures ci-dessous comparent la prédiction du critère avec les observations expérimentales; on y observe une bonne corrélation.

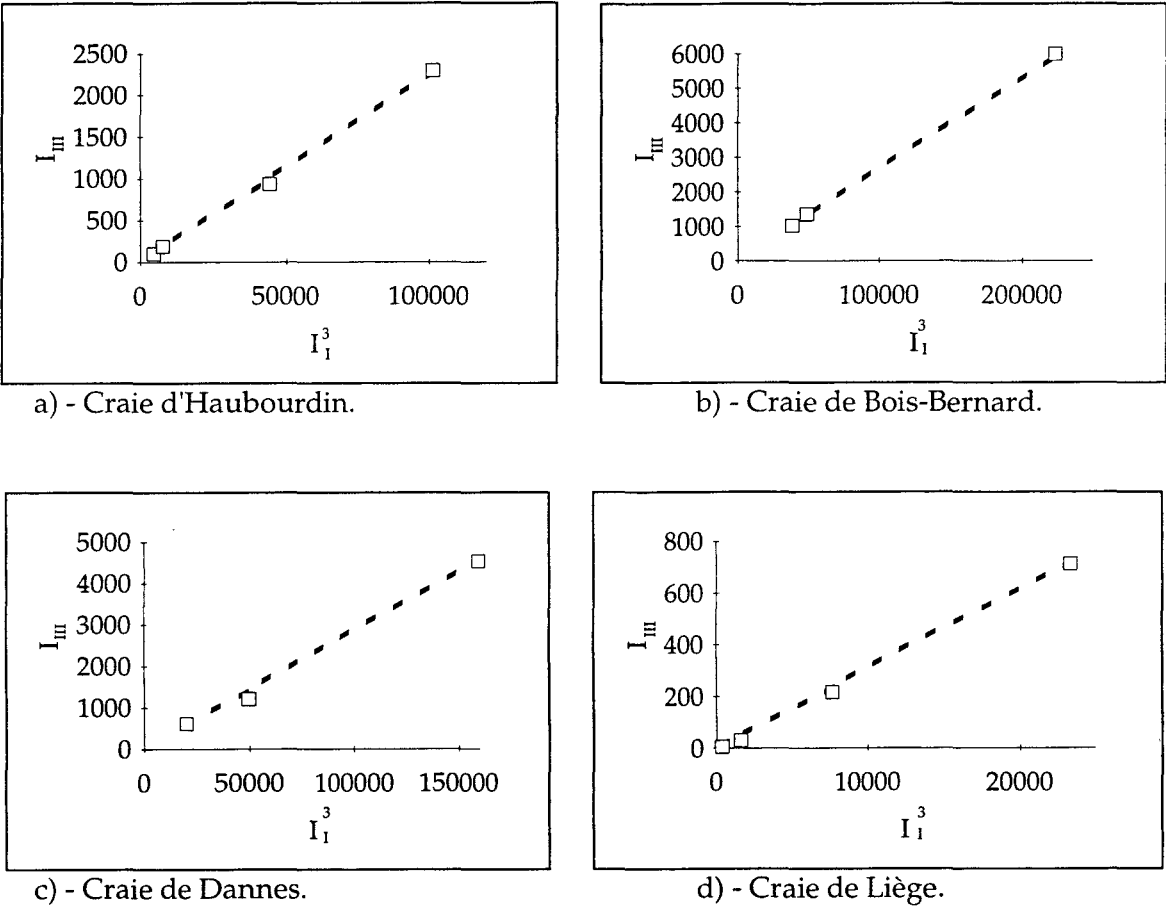


Fig 2.29 : Tracé du critère de Lade dans l'espace des invariants ($\bar{I}_I^3, \bar{I}_{III}$).

Craies	1/RL	coefficient de corrélation
Haubourdin	0,022	0,99
Bois-Bernard	0,026	0,99
Dannes	0,028	0,99
Liège	0,031	0,99

Tab 2.13 : Valeur des paramètres du critère de Lade des quatre craies.

II.6.3 - Critère de Matsuoka et Nakai

Pour les mêmes raisons que précédemment, l'équation 1.20 s'exprime sous la forme : $\bar{I}_{III} = (1/R_{MN}) \bar{I}_I \bar{I}_{II}$. Là encore les résultats sont tout à fait satisfaisants (figures 2.30).

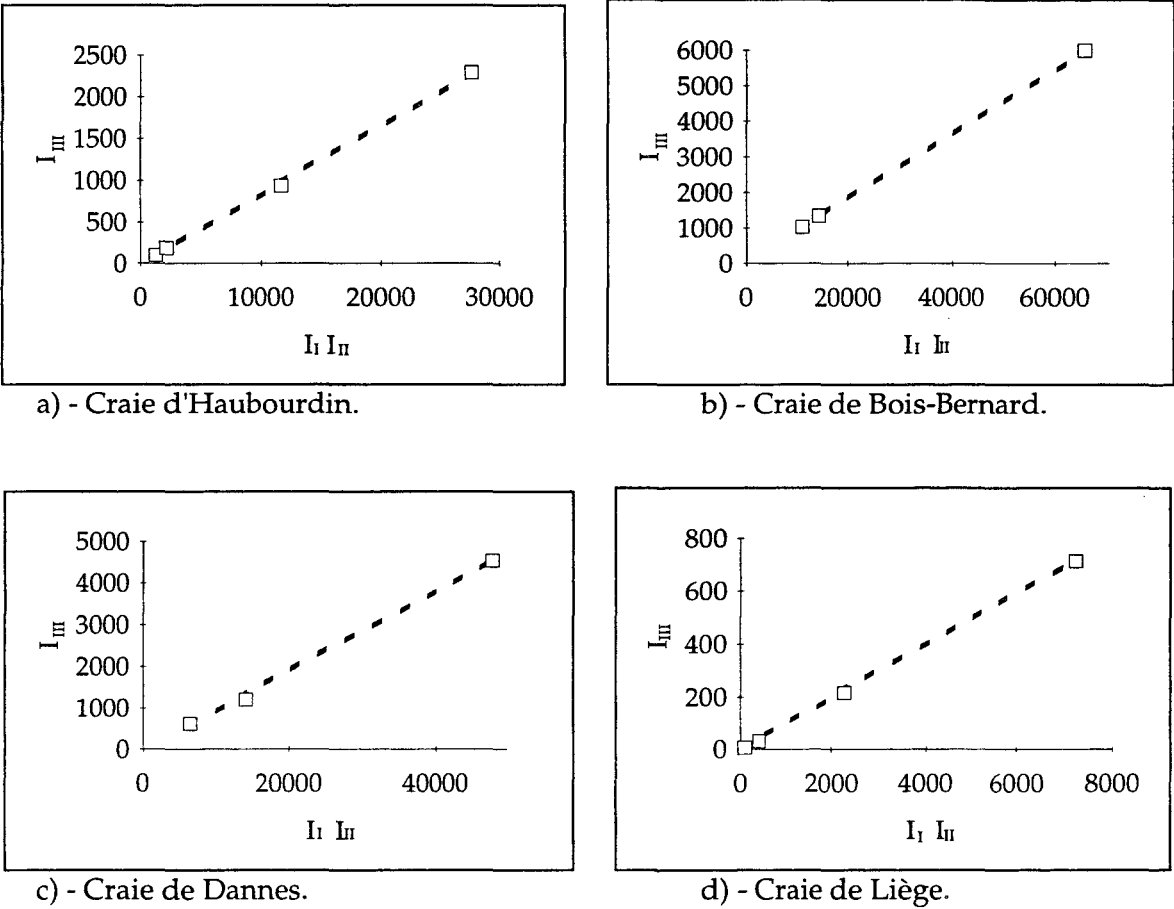


Fig 2.30 : Tracé du critère de Matsuoka et Nakai dans l'espace des invariants ($I_I I_{II}$, I_{III}).

Craies	1/RM	coefficient de corrélation
Haubourdin	0,082	0,99
Bois-Bernard	0,091	0,99
Dannes	0,095	0,99
Liège	0,099	0,99

Tab 2.14 : Valeur des paramètres du critère de Matsuoka et Nakai des quatre craies.

II.7 - Vérification des critères de Lade et de Matsuoka et Nakai. à partir d'essais avec rotation d'axes

Sur les figures suivantes, nous comparons les valeurs de rupture obtenues dans les essais de torsion avec les valeurs prédites respectivement par le modèle de Lade (figure 2.31) et le modèle de Matsuoka et Nakai (figure 2.32). On observe que le critère de Matsuoka et Nakai permet d'obtenir des résultats légèrement meilleurs que le modèle de Lade. On constate cependant que pour les deux critères il y a des points qui s'éloignent sensiblement de la courbe théorique. Ces points représentent la rupture estimée à partir des essais à hauts confinements (torsion compression hydrostatique à 13 et 17 MPa). Dans ce cas la rupture de l'échantillon n'est pas franche, elle est difficile à estimer. Il y a sans doute apparition de discontinuités dans l'éprouvette (Pecqueur, 1995). Cependant, on peut écrire que ces deux critères sont utilisables pour décrire la rupture dans les essais de torsion effectués sur la craie d'Haubourdin.

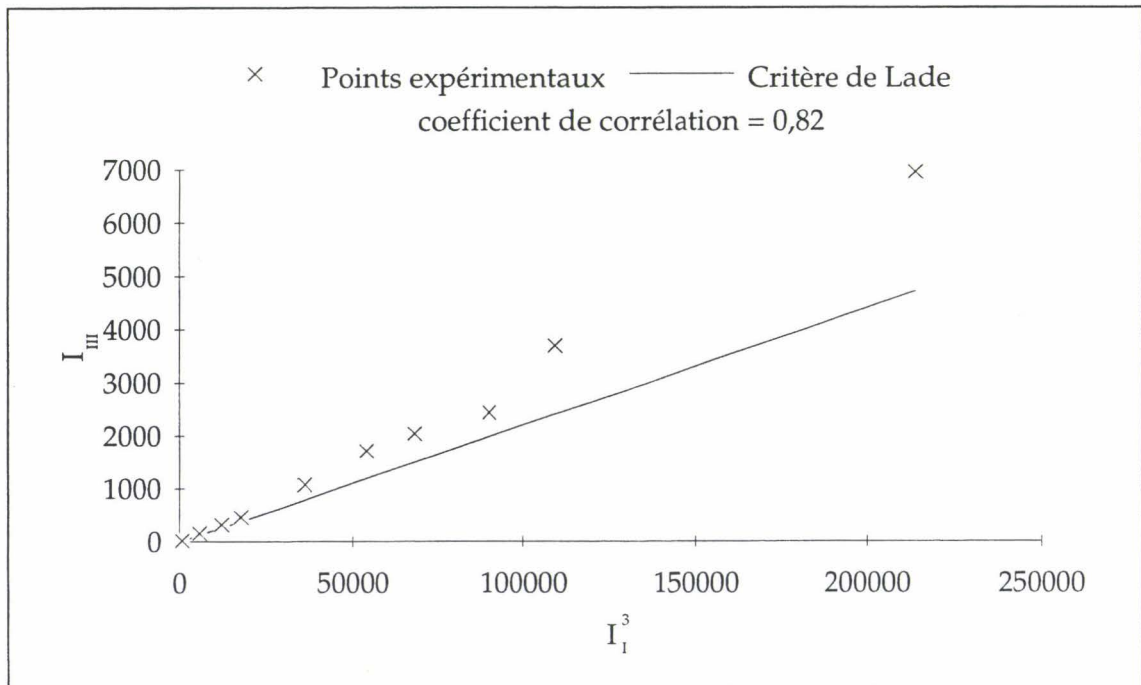


Fig 2.31 : Prédiction de la rupture à partir du critère de Lade pour les essais de torsion.

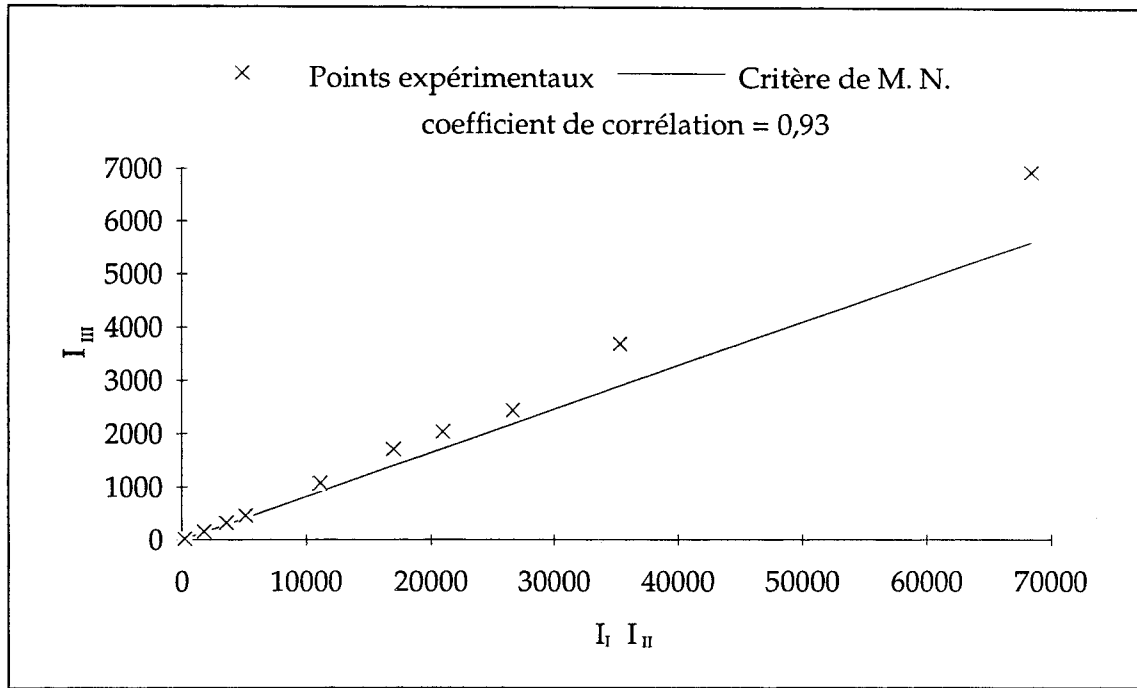


Fig 2.32 : Prédiction de la rupture à partir du critère de Matsuoka et Nakai pour les essais de torsion.

II.8 - Conclusion

Les quatre craies étudiées dans ce rapport sont quasi-pures. La plage de porosité s'étend de 24% pour Dannes à 40% pour Liège. La craie contenant le plus d'argile, Dannes, est également la craie ayant la plus faible porosité. Cette observation est conforme aux conclusions tirées de la littérature. Les essais de compression simple montrent l'influence de la porosité sur la résistance ultime des craies. Les essais de compression déviatorique ainsi que les essais de torsion montrent l'influence de la pression moyenne sur le comportement des craies. Ce dernier passe d'un comportement du type fragile à un comportement de type ductile au fur et à mesure de l'augmentation de cette pression. Nous avons pu à partir des essais établir des lois de variation des paramètres élastiques en fonction de la pression isotrope. La variation de ces paramètres élastiques est reliée physiquement à une évolution de la microstructure des craies.

Les bons coefficients de corrélation obtenus lors de la vérification des critères de Lade et Matsuoka et Nakai montrent qu'ils sont bien adaptés pour décrire la rupture des craies dans des essais de compression déviatorique. Cependant, le faible nombre de points dont on dispose nous engage à rester prudent sur l'interprétation des résultats. Les quatre craies semblent également obéir à la loi de Coulomb. Nous avons montré que l'on retrouve avec les critères de Lade et Matsuoka et Nakai les points de rupture observés expérimentalement dans les essais de torsion. Ces critères semblent donc utilisables pour décrire la rupture dans des essais avec rotation des axes principaux de contraintes.

Chapitre III:

Modèle Cam-Clay Modifié

Les modèles élastoplastiques développés à l'université de Cambridge sont à la base de nombreux travaux sur la modélisation des géomatériaux. Ceux ci ont été développés à partir des études sur les argiles normalement consolidées ou légèrement sur consolidées. Ils sont issus d'un certain nombre de concepts et d'idées développés durant ces 60 dernières années. Nous reprenons ici les bases de ces modèles, que nous replaçons dans le contexte de la modélisation de la craie.

III 1 - Le concept d'état critique

III.1 1 - Le concept d'état critique en mécanique des sols

Nous résumons ici les travaux effectués à l'Université de Cambridge par Roscoe, Schofield et Wroth (1965, 1968) sur le concept d'état critique.

Dépendant de l'indice des vides et de son état de contrainte, le volume d'un échantillon de sol soumis à un état de contrainte triaxial peut croître (dilatance) ou décroître (contractance). Entre ces deux mécanismes le concept d'état critique stipule l'existence d'un état pour lequel l'échantillon se déforme plastiquement à volume constant. L'indice des vides correspondant est appelé indice des vides critique. Dans cet état, le matériau s'écoule en suivant une loi de cisaillement de friction.

Le travail plastique W^P pendant un incrément de charge s'exprime sous la forme :

$$W^P = P d\epsilon_v^P + Q d\epsilon_d^P \quad (3.1)$$

à l'état critique, ce travail se dissipe uniquement sous la forme de frottement

$$W^P = Q d\epsilon_d^P = MP d\epsilon_d^P \quad (3.2)$$

où M est une constante de friction relative de l'état de contrainte à l'état critique (P_c, Q_c).

$$M = \pm \frac{Q_c}{P_c} \quad (3.3)$$

Le travail dissipé par l'incrément de déformation $(d\epsilon_v^P, d\epsilon_d^P)$ dans l'état de contrainte (P, Q) est égal à celui dissipé par l'incrément de déformation $(0, d\epsilon_d^P)$ à l'état critique $(P, Q=MP)$.

$$P d\epsilon_v^P + Q d\epsilon_d^P = MP d\epsilon_d^P \quad (3.4)$$

$$\frac{d\epsilon_d^P}{d\epsilon_v^P} = \frac{P}{(MP - Q)} \quad (3.5)$$

En adoptant la règle de normalité et en prenant une règle d'écoulement associée, on obtient pour le critère de rupture :

$$\frac{Q}{MP} + \ln\left(\frac{P}{P_{cro}}\right) = 1, \quad (\text{Cam-Clay Original, noté CC-O}) \quad (3.6)$$

P_{cro} est un paramètre du modèle, sa signification est donnée dans le paragraphe suivant.

Afin d'obtenir une meilleure corrélation pour les faibles rapports Q/P , **Burland** a modifié l'équation 3.4 en ces termes :

$$P d\epsilon_v^p + Q d\epsilon_d^p = P \left[\left(d\epsilon_v^p \right)^2 + \left(M d\epsilon_d^p \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

Avec les hypothèses précédentes, le critère s'exprime maintenant sous la forme :

$$Q^2 + M^2 P^2 - 2 M P P_{cr0} = 0 \quad , \text{ (Cam-Clay Modifié, noté CC-M)} \quad (3.8)$$

Les surfaces de charges obtenues à partir des équations 3.6 et 3.7 sont représentées sur la figure 3.1. On peut y observer la différence entre les deux formulations proposées.

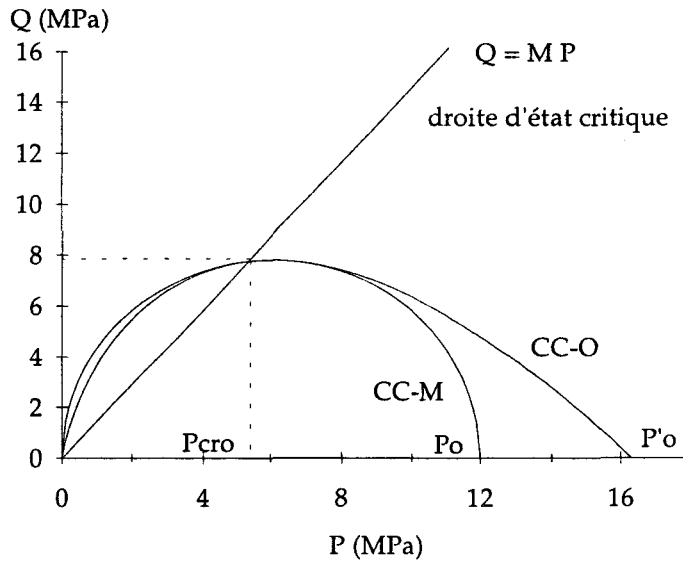


Fig 3.1 : Surfaces d'état limite et droite d'état critique.

III.2 - Présentation du modèle Cam-Clay modifié (CC-M)

Dans ce modèle les déformations se décomposent de façon classique en une partie élastique et une partie plastique.

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (3.9)$$

Les déformations élastiques, pour la craie, sont calculées à partir de la loi de Hooke. La surface de charge est définie par

$$f(P, Q, P_{cr}) = Q^2 + M^2 P^2 - 2 M^2 P P_{cr} \quad (3.10)$$

où M est une constante du modèle et P_{cr} est une force d'écroissage évoluant avec le chargement. Cette fonction définit, dans le plan (P, Q) un ensemble d'ellipses passant par l'origine et ayant un maximum à $P_{cr_i}=P_i/2$ (figure 3.2).

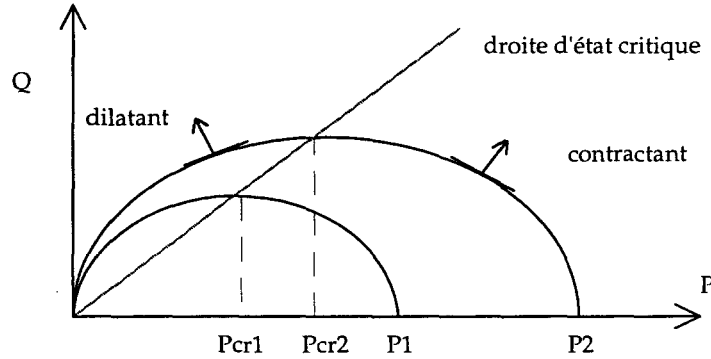


Fig 3.2 : Surface de charge du modèle de Cam-Clay.

La droite d'équation $Q=MP$ sépare l'espace P - Q en deux domaines, un domaine de déformations plastiques contractantes et un domaine de déformations plastiques dilatantes. Les points se trouvant sur cette droite se déforment à volume constant. Le paramètre d'écroissage P_{cr} est de la forme suivante :

$$P_{cr} = P_{cr_0} \exp \left[k (\epsilon_v^p - \epsilon_{v_0}^p) \right] \quad (3.11)$$

La déformation volumique plastique s'impose naturellement comme variable d'écroissage. En phase dilatante P_{cr} diminue, en phase contractante il augmente. P_{cr_0} correspond à la valeur de la pression critique associée à la déformation plastique initiale $\epsilon_{v_0}^p$. k représente la compressibilité plastique du matériau, c'est un paramètre à déterminer.

Le matériau étant supposé standard non généralisé, la règle d'écoulement plastique s'écrit :

$$d\epsilon_v^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial P} \quad d\epsilon_d^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial Q} \quad (3.12)$$

En remplaçant f par son expression dans les deux relations précédentes et en introduisant la variable $\eta = Q/P$, on obtient pour le calcul des déformations

$$\begin{cases} d\epsilon_v^p = \frac{1}{k} \left(\frac{dP}{P} + \frac{2\eta d\eta}{\eta^2 + M^2} \right) \\ d\epsilon_d^p = \frac{1}{k} \left(\frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \right) \left(\frac{dP}{P} + \frac{2\eta d\eta}{\eta^2 + M^2} \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

On constate que les deux mécanismes de déformation sont couplés. Une variation de la pression moyenne engendrera des déformations isotropes, tandis qu'une variation du déviateur provoquera des déformations volumiques et déviatoriques.

III.3 - Réponse du modèle sous sollicitations triaxiales

Pour illustrer de manière qualitative la réponse de ce modèle sous compression déviatorique, nous avons simulé des essais à différentes pressions de confinement (figures 3.3 et 3.4). Le jeu de paramètre utilisé est indiqué dans le tableau ci-dessous.

E (MPa)	ν	Pco (MPa)	M	k
2000	0.2	30	0.84	0.13

Tab 3.1 : Jeu de données pour l'étude qualitative de la réponse du modèle Cam-Clay Modifié

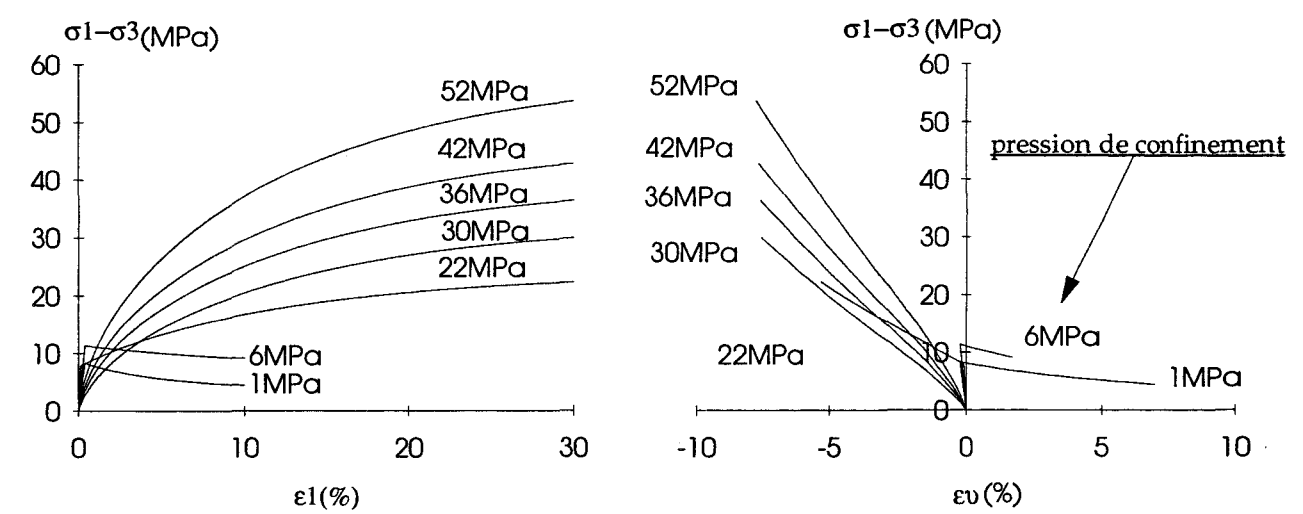


Fig 3.3 : Courbes contrainte-déformation axiale

Fig 3.4 : Courbes contrainte-déformation volumique

III.4- Principe de détermination des paramètres

III.4.1 - Détermination du paramètre k

le paramètre k est déterminé à partir d'un essai de compression isotrope. Si l'on considère un matériau soumis à une pression de consolidation initiale P_0 , son domaine élastique se situera à l'intérieur d'une ellipse de demi axe $P_0/2$. Cette valeur correspondra à P_{cro} . Sous chargement hydrostatique, tant que la contrainte moyenne est inférieure à P_0 le comportement du matériau sera purement élastique. Au-delà il sera élasto-plastique.

si $P < P_0$

$$\epsilon_v = \epsilon_v^e = \epsilon_{v0}^e + \frac{1}{K} P$$

si $P > P_0$

$$\epsilon_v = \epsilon_v^e + \epsilon_v^p = \epsilon_{v0}^e + \frac{1}{K} P + \epsilon_{v0}^p + \frac{1}{k} (\ln P - \ln P_0)$$

(3.14)

D'après 3.11, k représente la pente de la droite d'équation : $\ln(P_{cr}/P_{cr0}) = k(\epsilon_v^p - \epsilon_{v0}^p)$, cette valeur est déterminée comme indiqué sur la figure 3.5.

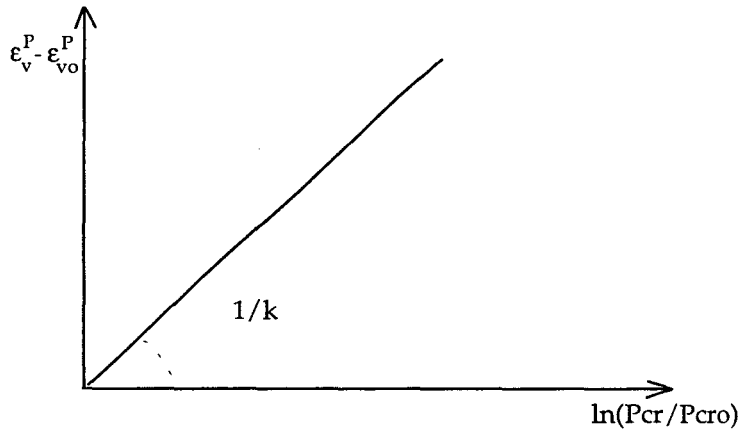


Fig 3.5 : Détermination du paramètre k .

III.4.1 - Détermination du paramètre M

Le paramètre M , définissant la résistance au cisaillement du matériau, est déterminé à partir d'un essai déviatorique. Comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, deux types de comportement peuvent être observés pour la craie (figures 3.6 et 3.7).

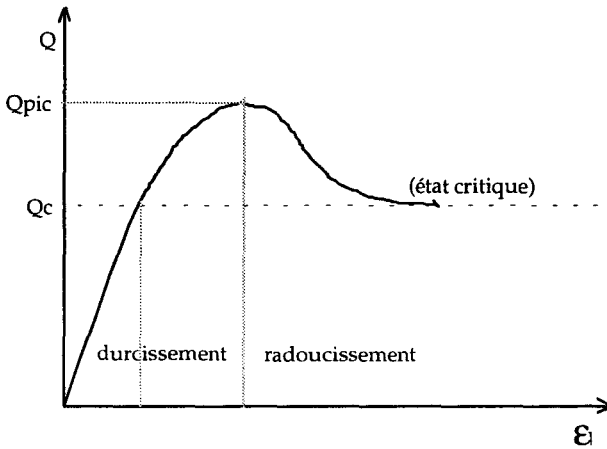


Fig 3.6 : Essai de compression déviatorique, comportement post-rupture radoucissant .

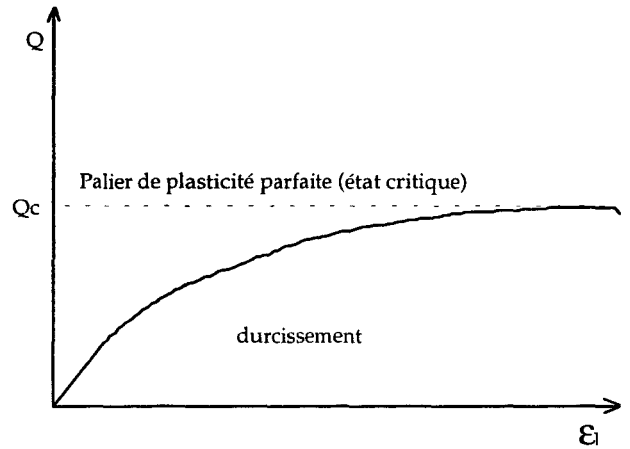


Fig 3.7 : Essai de compression déviatorique, comportement toujours durcissant.

En mécanique des sols, l'état critique est défini par une augmentation des déformations à volume constant. A partir des courbes précédentes, on détermine l'angle de frottement effectif ϕ . Celui-ci n'est pas déterminé à la rupture ou au pic, mais à l'état caractéristique ou à l'état critique. L'état caractéristique définit la séparation des domaines contractant et dilatant.

$$\sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad \text{en drainé} \quad (3.15a)$$

$$\sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad \text{en non drainé} \quad (3.15b)$$

Il existe entre M et ϕ la relation suivante :

$$M = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad (3.16)$$

III.5 - Détermination des paramètres des craies

III.5.1 - Paramètres élastiques

Dans le chapitre I de cette partie, nous avons déjà présenté en détail les caractéristiques mécaniques des craies dans leur domaine élastique. Nous ne ferons que rappeler ici les valeurs des différents paramètres élastiques. (tableau 3.2). On prend pour le coefficient de poisson ν une valeur moyenne pour les quatre craies identique et égale à 0,2 (Siwak, 1994).

Craies	Module d'Young E (MPa)	Module de compressibilité K (MPa)	Coefficient de Poisson ν
Haubourdin	1882	1046	0,2
Bois-Bernard	2200	1220	0,2
Dannes	2400	1330	0,2
Liège	2014	1118	0,2

Tab 3.2 : Valeurs des paramètres élastiques pour les quatre craies.

On rappelle également la valeur des variables délimitant les trois zones dans les essais hydrostatiques. On rappelle que P_0 définit le seuil d'écoulement plastique dans l'essai de compression isotrope. En mécanique des sols, ce seuil est représentatif de la plus grande contrainte que le matériau a subie. Pour la craie, cette valeur ne résulte pas uniquement d'une action mécanique, des phénomènes-physico chimiques interviennent également (cimentation). Cependant, d'un point de vue rhéologique, P_0 garde la même signification. De cette valeur on déduit le paramètre P_{cro} du modèle Cam-Clay modifié.

Craie	P_0 (MPa)	P_{ct} (MPa)	P_{cro} (MPa)
Haubourdin	12	20	6
Bois-Bernard	30	/	15
Dannes	36	/	18
Liège	11	18	5,5

Tab 3.3 : Paramètres délimitant les zones dans un essai de compression isotrope.

III.5.2 - détermination de M

Pour les roches, l'état critique est défini par la contrainte de cisaillement maximum que la roche peut subir. On ne la relie pas aux variations de volume. La valeur de M a donc été déterminée à partir des valeurs de l'angle de frottement calculés par le critère de Mohr-Coulomb. Pour la craie de liège, La valeur déterminée de cette manière conduit à très mauvaise estimation du domaine élastique. En effet, cette valeur (égale à 0,48) est beaucoup trop faible. Nous avons

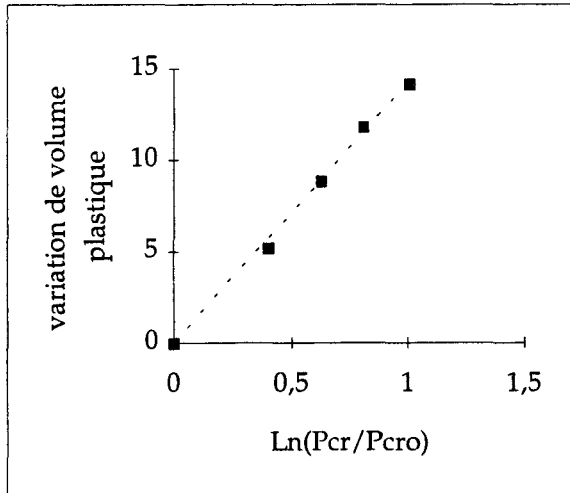
donc estimé cette grandeur par callage sur les points expérimentaux. Les valeurs sont répertoriées dans le tableau ci-après.

	ϕ (°)	M	coefficient de corrélation
Haubourdin	32,1	1,29	0,99
Bois-Bernard	24,6	0,97	0,87
Dannes	27,2	1,08	0,99
Liège	12,9	0,84	0,91

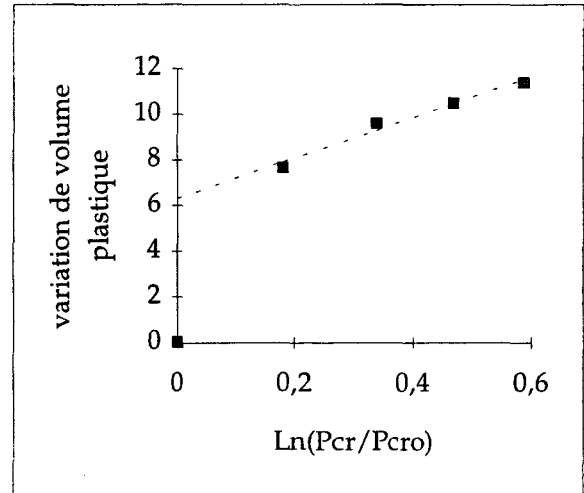
Tab 3.4 : Valeurs de ϕ et M pour les quatre craies.

III.5.3 - détermination du paramètre k

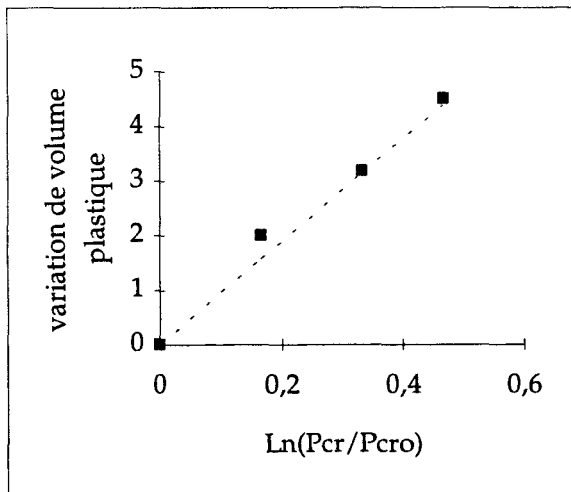
A partir des courbes suivantes (figures 3.8a, b,c,d), on détermine la valeur k . On constate sur la figure 3.8 b que la droite ne passe pas par l'origine. Ceci provient d'une particularité du comportement de la craie de Bois-Bernard lors de la première décharge. Mais ceci n'a que peut d'importance du fait que seule la pente de cette droite nous est nécessaire.



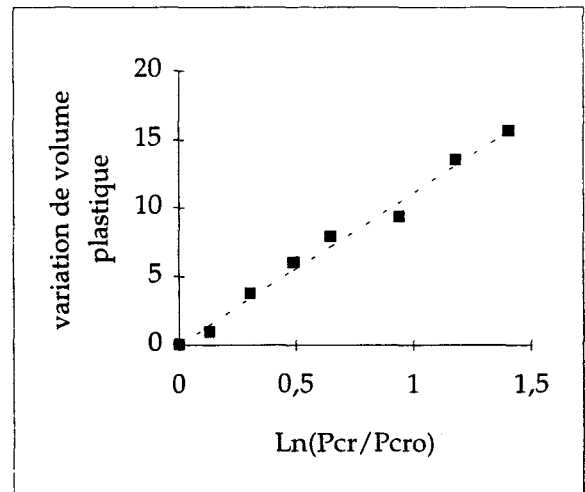
a) - Craie d'Haubourdin.



b) - Craie de Bois-Bernard.



c) - Craie de Dannes.



d) - Craie de Liège.

Fig 3.8 : Variation de volume plastique (%) en fonction de $\ln(P_{cr}/P_{cro})$ pour les quatre craies.

Dans le tableau ci-dessous, on a reporté la valeur des coefficients de corrélation sur la détermination du paramètre k . Les valeurs proches de 1 montrent une bonne approximation de ce paramètre.

	k	coefficient de corrélation
Haubourdin	0,07	0,99
Bois-Bernard	0,11	0,99
Dannes	0,105	0,96
Liège	0,09	0,99

Tab 3.5 : Valeurs des paramètres d'écrouissage pour les quatre craies.

III.5.4 - Domaine d'élasticité initial

Nous avons comparé l'allure du domaine élastique initial prédit par le modèle et celui issu des résultats expérimentaux. On observe sur les figures 3.10 à 3.12, et d'après le tableau 3.6, que le domaine d'élasticité initial de trois des craies peu être prédit d'une manière correcte par le modèle de Cam-Clay Modifié. En ce qui concerne la craie d'Haubourdin la forme elliptique du domaine élastique est respectée mais cette ellipse ne semble pas avoir son grand axe confondu avec l'axe des abscisses contrairement aux autres craies (figure 3.9). Ceci peut s'expliquer par une légère anisotropie induite de cette craie. Le tableau ci-dessous donne les coefficients de corrélation sur la prédiction du domaine élastique des quatre craies.

craie	coefficient de corrélation
Haubourdin	0,22
Bois-Bernard	0,85
Dannes	0,94
Liège	0,86

Tab 3.6 : Degré de précision sur la détermination du domaine d'élastique initial.

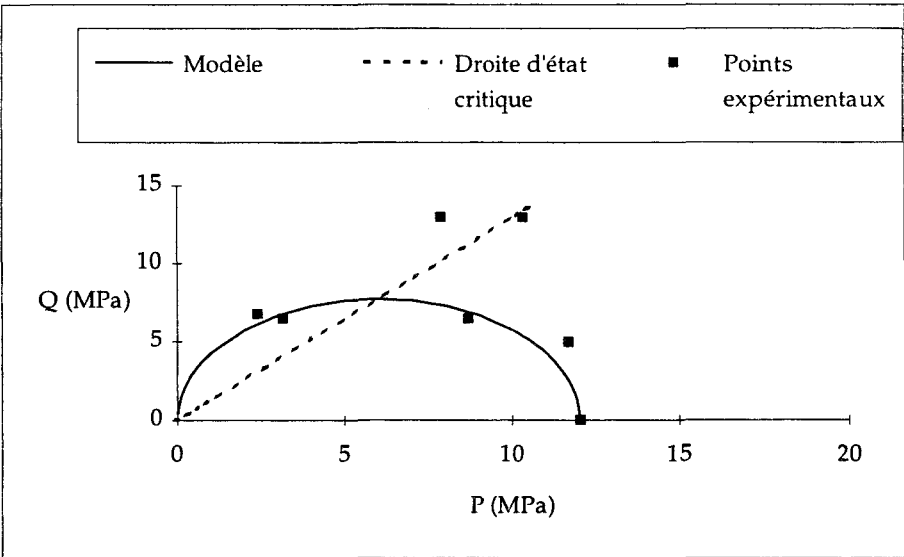


Fig 3.9 : Domaine élastique initial pour la craie d'Haubourdin.

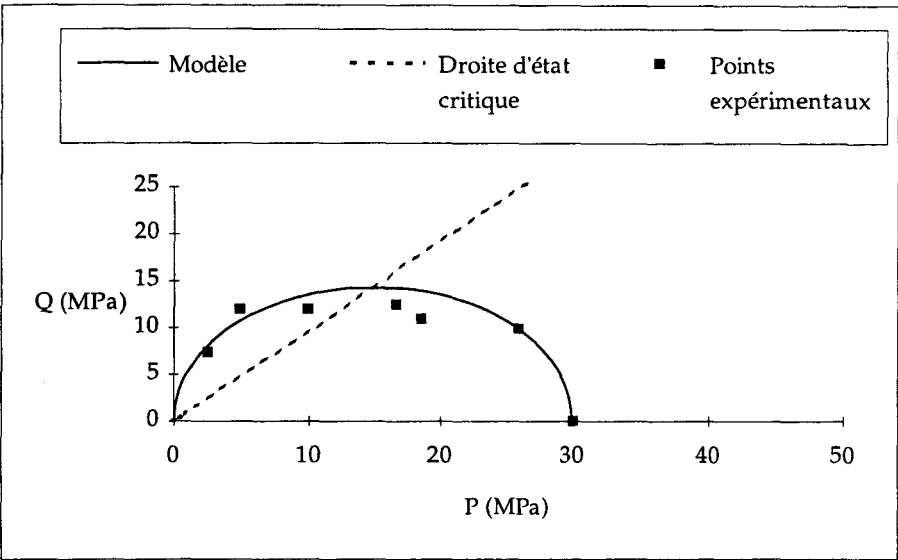


Fig 3.10 : Domaine élastique initial pour la craie de Bois-Bernard.

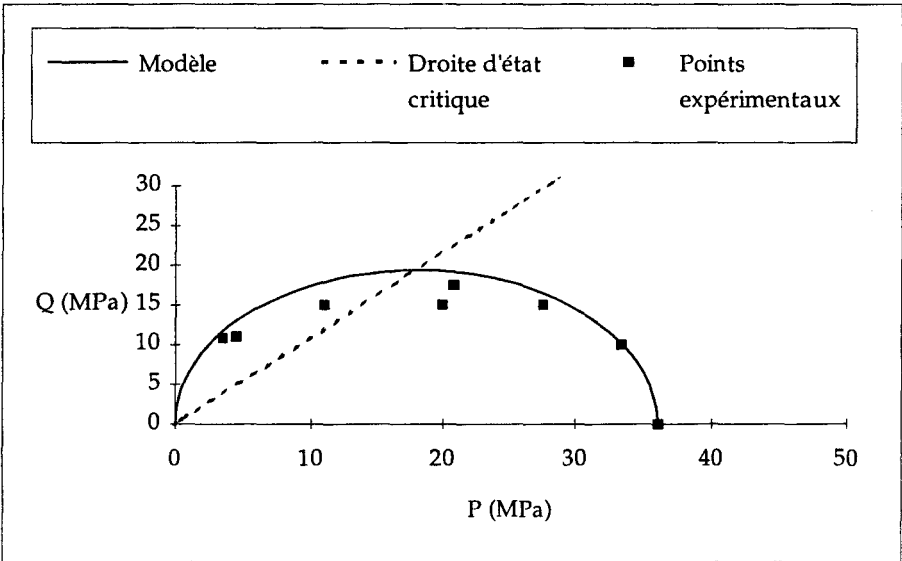


Fig 3.11 : Domaine élastique initial pour la craie de Dannes.

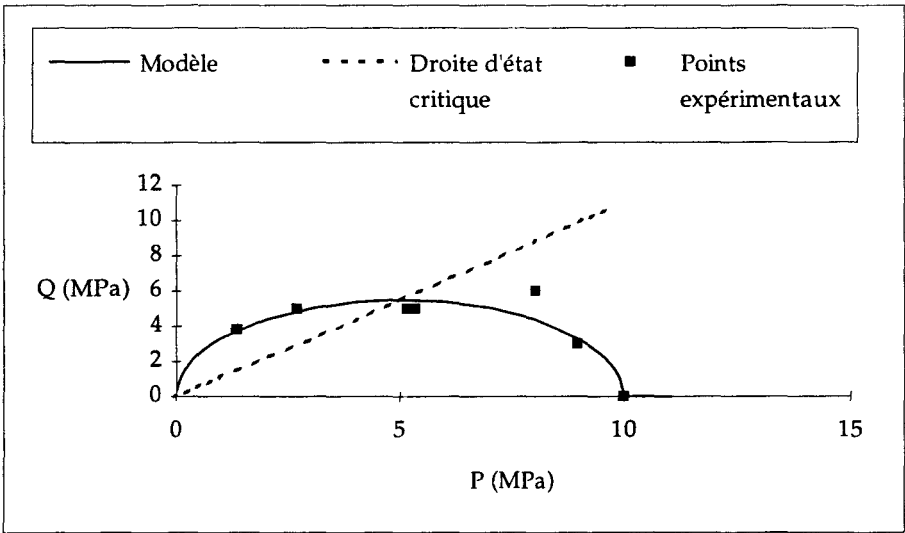


Fig 3.12 : Domaine élastique initial pour la craie de Liège.

III.6 - Simulations des essais triaxiaux

Les conventions utilisées dans toute cette partie sont :

□□□□ valeurs expérimentales _____ simulations

On présente en annexe 2 l'algorithme simplifié du programme de simulation ainsi qu'un rappel des équations de base.

III.6.1 - Simulation des essais de compression isotrope

Les résultats obtenus (figures 3.13) montrent une bonne concordance entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales. On observe cependant une différence sensible dans la troisième zone pour les craies d'Haubourdin et Liège. Précisons que ces simulations ont été réalisées sans tenir compte de la variation du module de compressibilité K . L'influence de ce paramètre est étudié dans le paragraphe III.7.1.

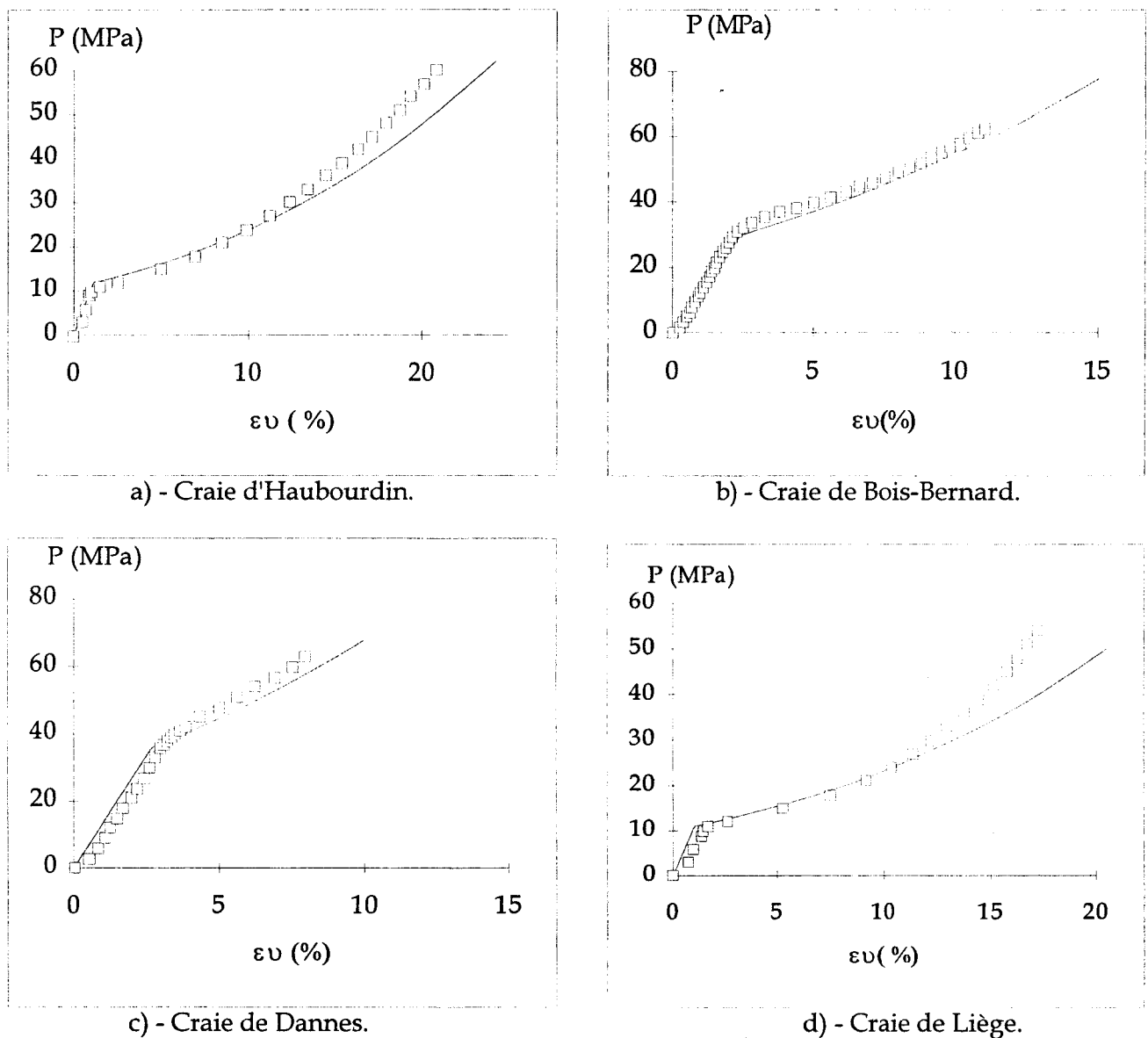


Fig 3.13 : Simulations des essais de compression isotrope.

III.6.2 - Simulations des essais de compression déviatorique

Les simulations de ces essais sont regroupées sur les figures 3.14 à 3.17 des pages suivantes. On rappelle que les déformations volumiques contractantes ϵ_v sont comptées positivement. Ci-dessous, nous détaillons les résultats obtenus pour chaque craie.

Craie d'Haubourdin

Le modèle permet de retranscrire le comportement contractant dilatant de cette craie à très faibles pressions de confinement (figures 3.14a et b). Dans ces essais, il y a une mauvaise estimation de la rupture. Pour les essais effectués à 13 et 17 MPa de pressions de confinement (figures 3.14c et d) on constate une surestimation des déformations volumiques et axiales. Les essais à confinements supérieurs (figures 3.14e et f) ont été simulés de façon satisfaisante; avec toutefois une légère surestimation des déformations volumiques.

Craie de Bois-Bernard

Pour les essais réalisés à des pressions inférieures à P_0 , la limite élastique est reproduite de manière fidèle (figures 3.15a à 3.15d). On constate encore une fois une sous-estimation de la rupture dans les essais à très bas confinements et le modèle fait apparaître un comportement contractant-dilatant qui n'a pas été observé expérimentalement (figures 3.15a et b). Les déformations volumiques et axiales des autres essais (figures 3.15e et f) sont trop importantes.

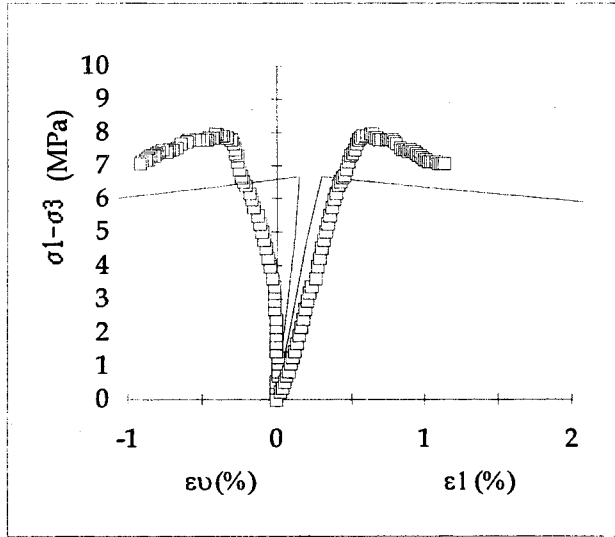
Craie de Dannes

Les remarques sur l'estimation de la limite élastique pour cette craie (figure 3.16a à 3.16 c) sont les mêmes que pour la craie de Bois-Bernard. Le caractère contractant-dilatant est mal estimé (figure 3.16a). On note une meilleure estimation des déformations volumiques pour les essais à hauts confinements (figures 3.16e et 3.16f). D'une manière générale, les déformations axiales prédites par le modèle restent trop élevées.

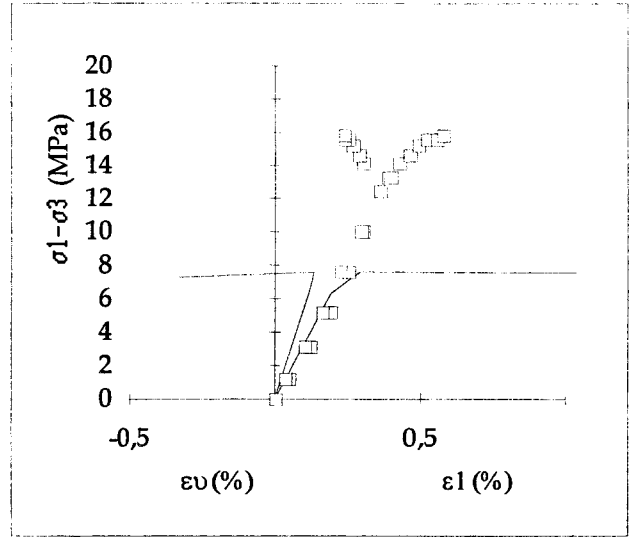
Craie de Liège

On remarque une bonne estimation de la rupture et une bonne reproduction de la limite élastique pour les essais à faibles pressions de confinement (figure 3.17a à 3.17c). Pour des pressions hydrostatiques plus importantes, Les déformations volumiques et axiales sont sur-évaluées (figures 3.17e et 3.17f) et plus particulièrement pour l'essai à 13 MPa (figures 3.17d).

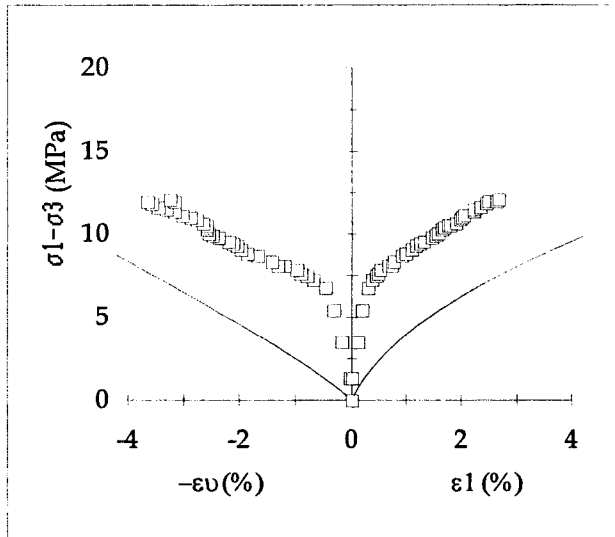
En résumé : Le modèle Cam-Clay modifié ne permet pas de retranscrire de manière fidèle le comportement contractant-dilatant des craies. De plus, celui-ci conduit le plus souvent à une mauvaise estimation de la limite à la rupture. Les valeurs de limite élastique sont quand à elles assez bien respectées. On constate également que le modèle a tendance à sur-estimer les déformations plastiques axiales et volumiques.



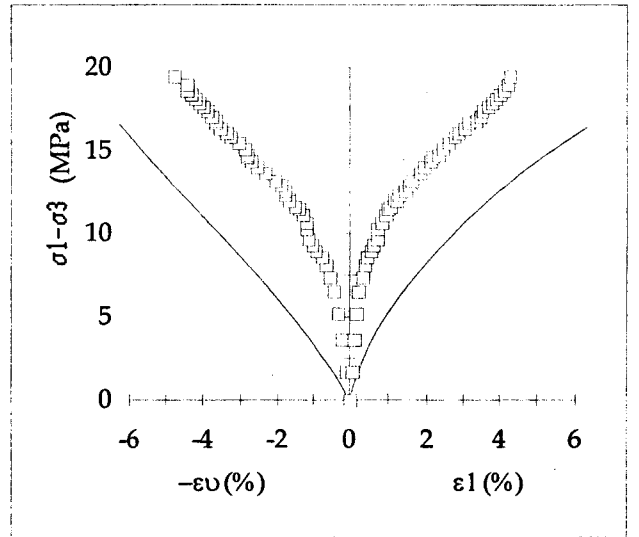
a) 1 MPa



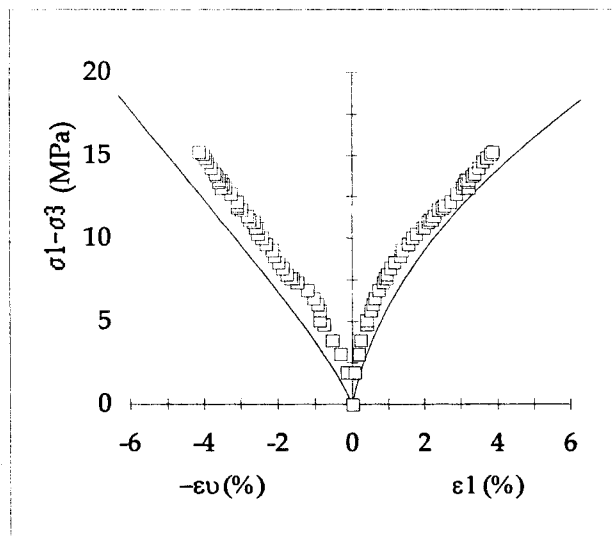
b) 3 MPa



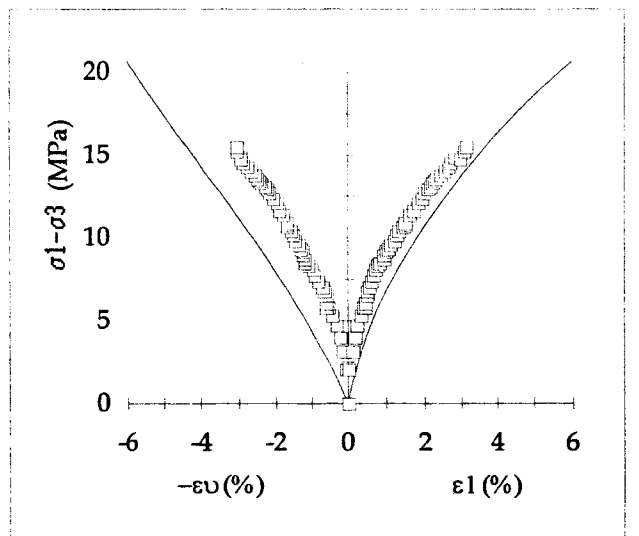
c) 13 MPa



d) 17 MPa



e) 19 MPa



f) 22 MPa

Fig 3.14 : Simulations des essais de compression déviatorique, craie d'Haubourdin.

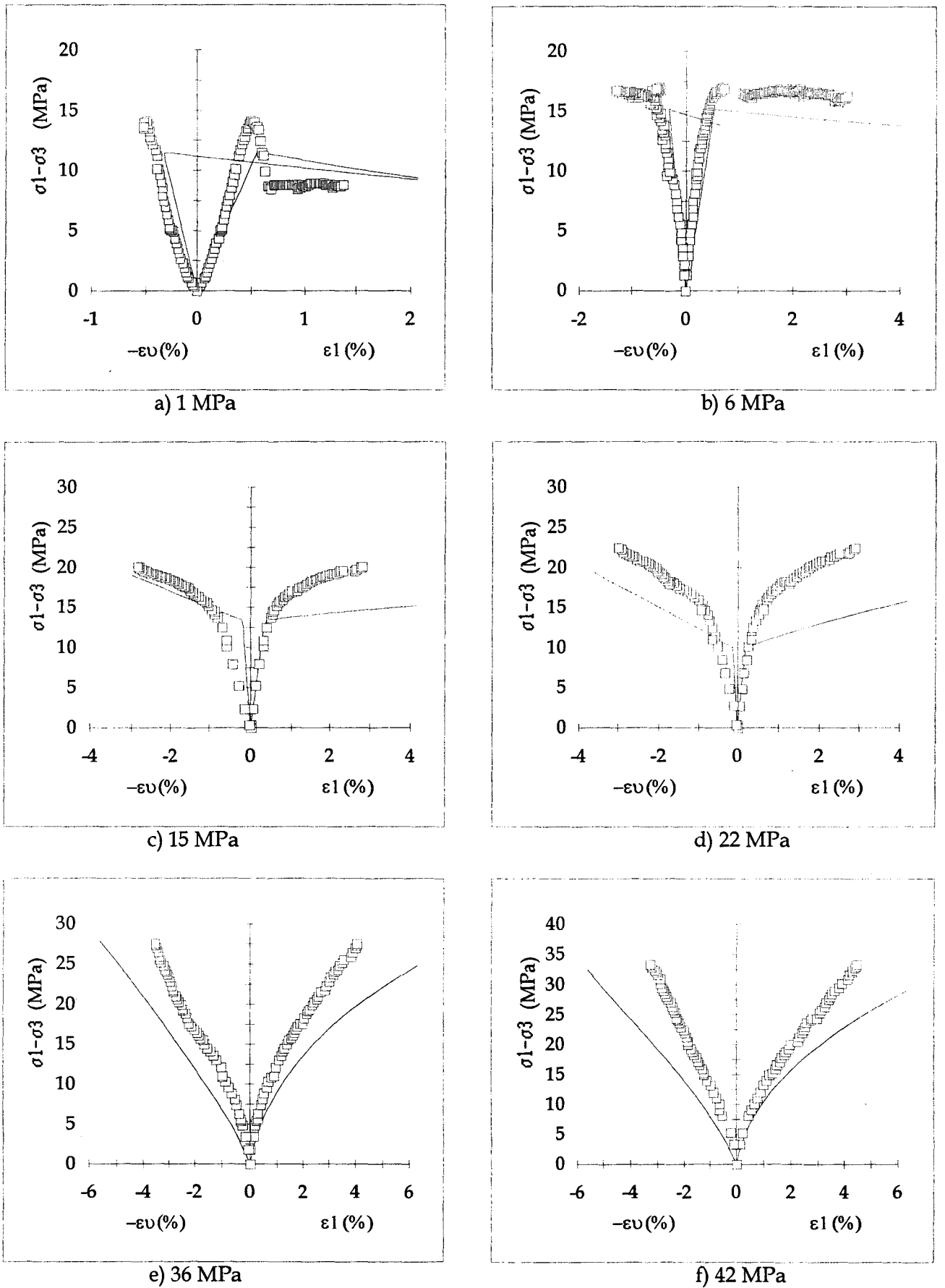


Fig 3.15 : Simulations des essais de compression déviatorique, craie de Bois-Bernard.

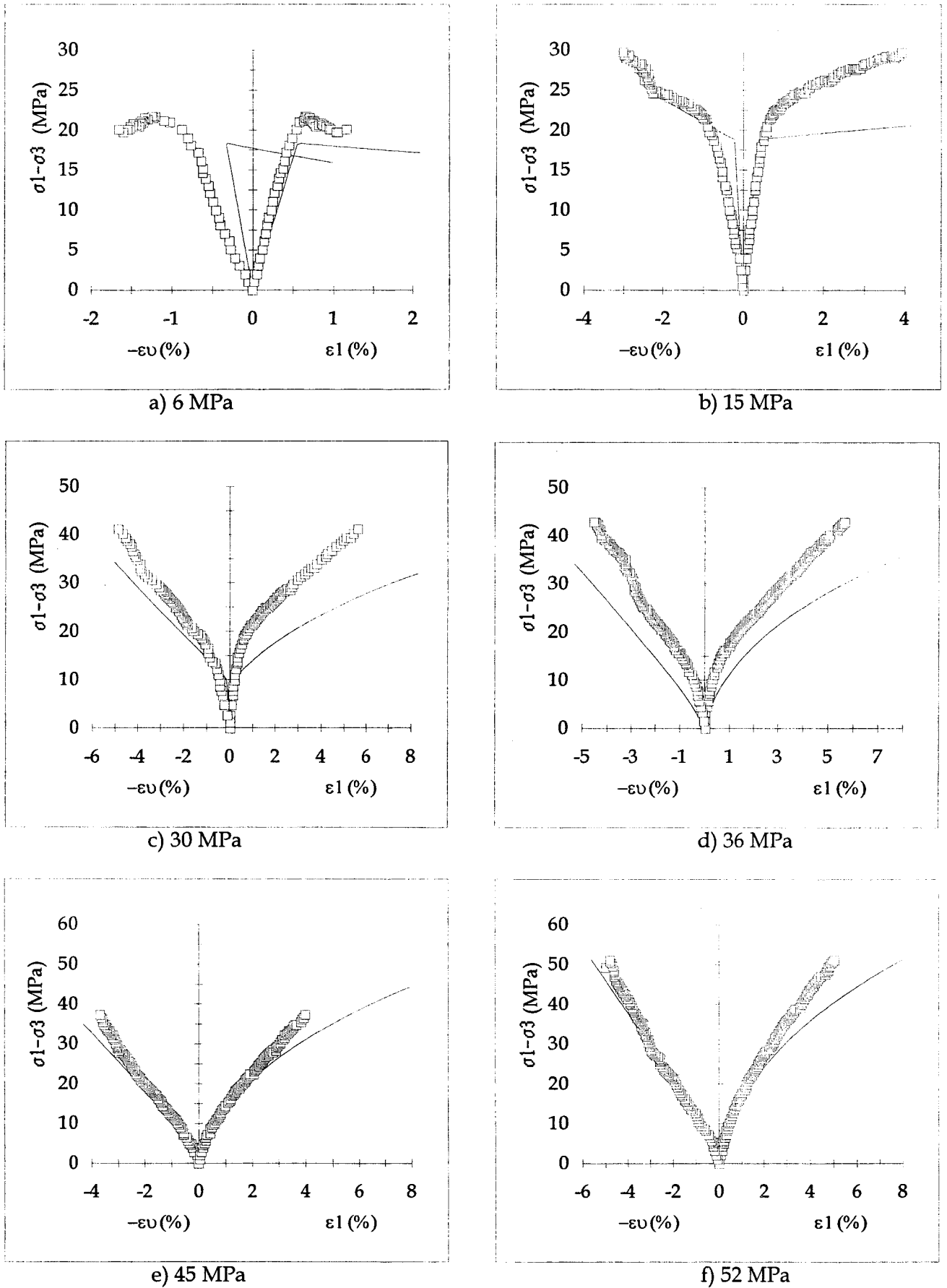


Fig 3.16 : Simulations des essais de compression déviatorique, craie de Dannes.

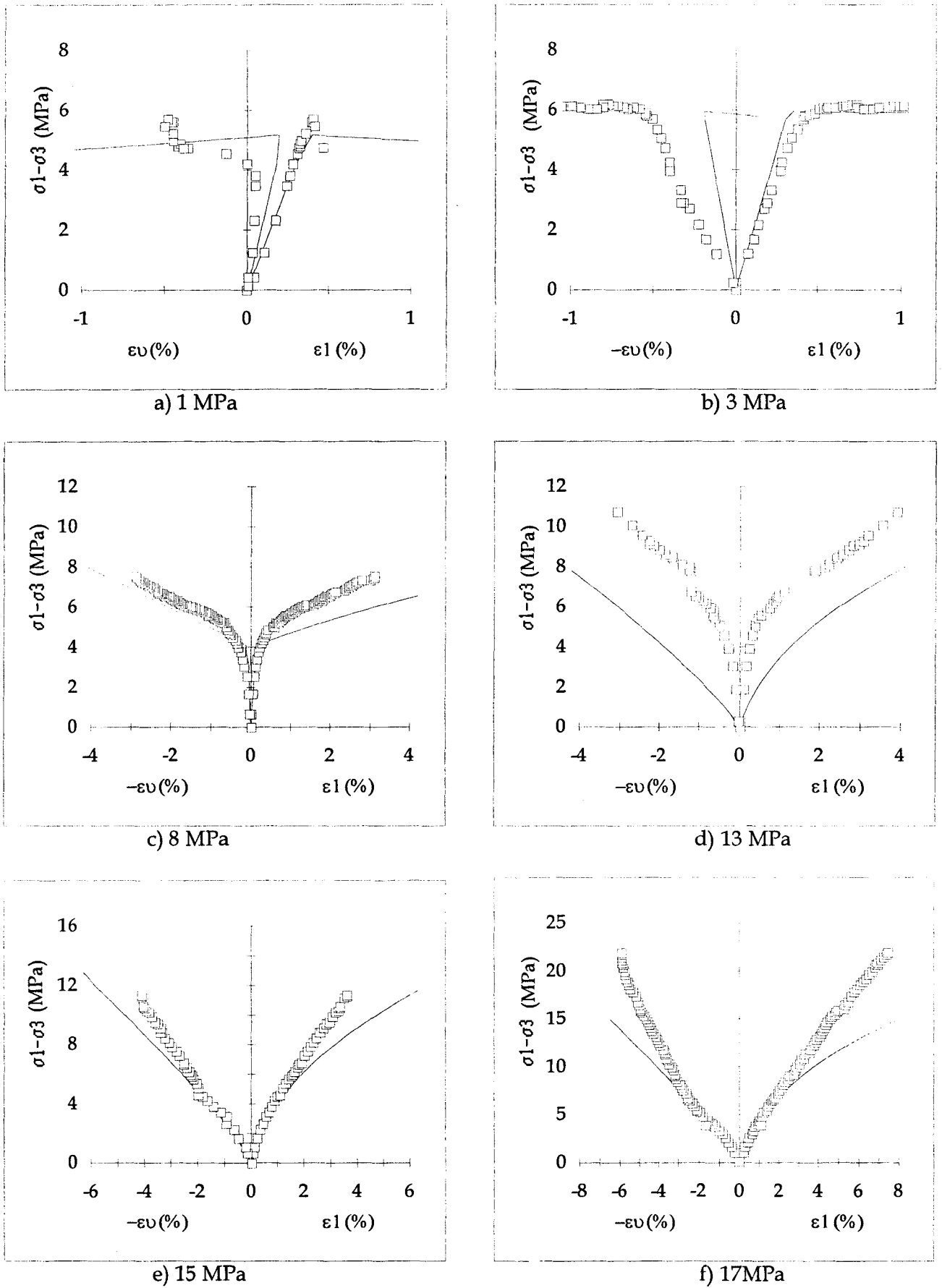


Fig 3.17 : Simulations des essais de compression déviatorique, craie de Liège.

III.7 - Etude paramétrique

III.7.1 - Influence du module de compressibilité K_{dr}

Dans ce paragraphe, on tient compte pour les craies d'Haubourdin et Liège de la variation du module de déchargement-rechargement K_{dr} défini par l'équation 2.15. On remarque d'après la figure 3.19 qu'une amélioration a été apportée dans la troisième zone de l'essai de compression isotrope de la craie d'Haubourdin. Pour la craie de Liège (figure 3.20) la modification est moins prononcée.

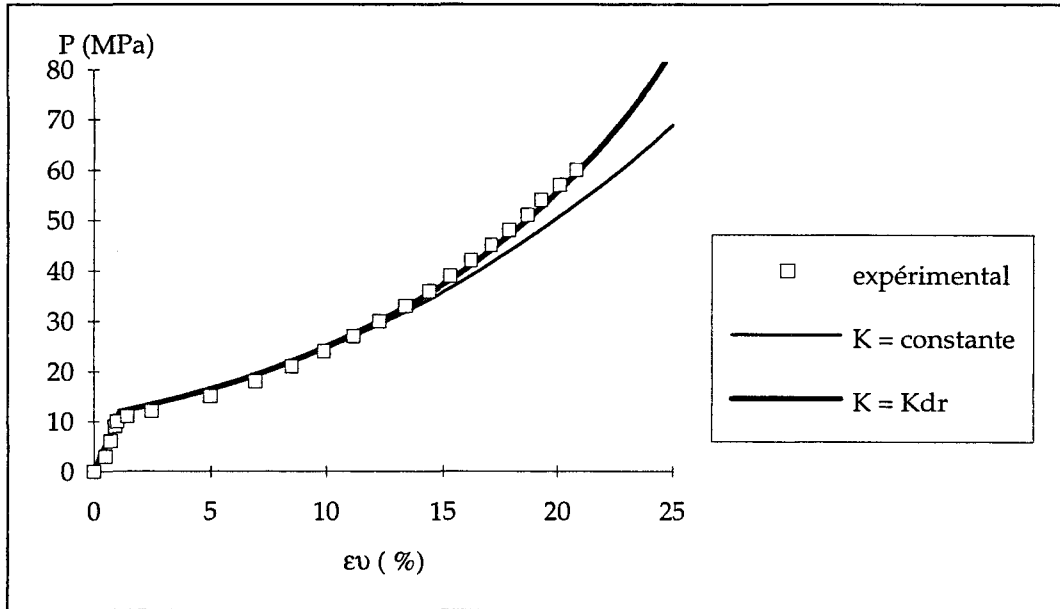


Fig 3.19 Influence du module de compressibilité de chargement-déchargement K_{dr} , craie d'Haubourdin.

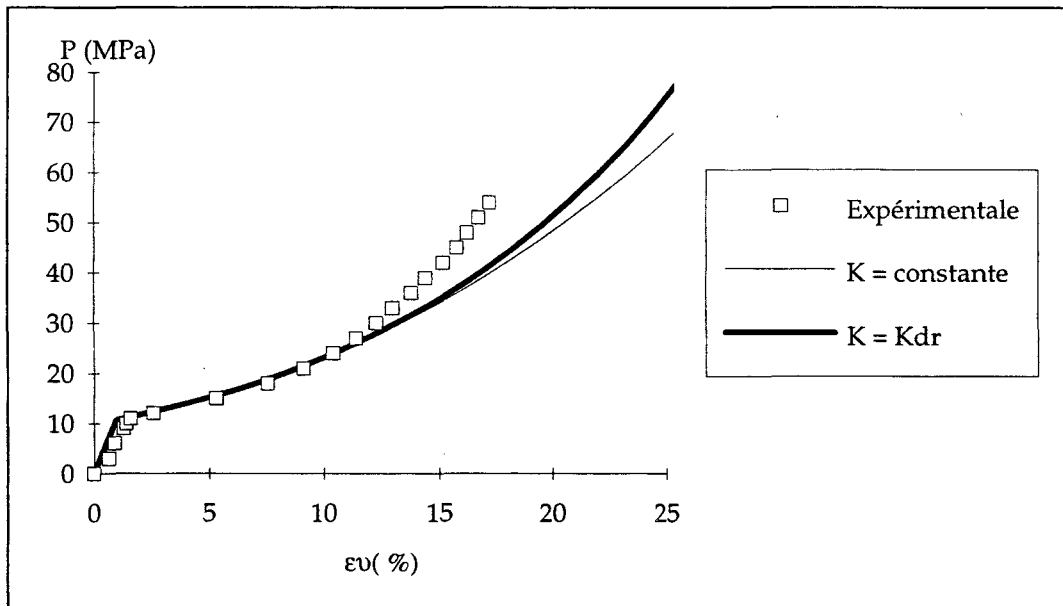


Fig 3.20 Influence du module de compressibilité de chargement-déchargement K_{dr} , craie de Liège.

III.7.2 - Influence du paramètre M

On constate d'après l'équation 3.13 que le paramètre M n'intervient pas dans le calcul des déformations dans l'essai de compression isotrope. La sensibilité de ce paramètre dans la simulation des essais de compression déviatorique est illustrée par les figures suivantes. On impose à ce paramètre une variation de $\pm 10\%$.

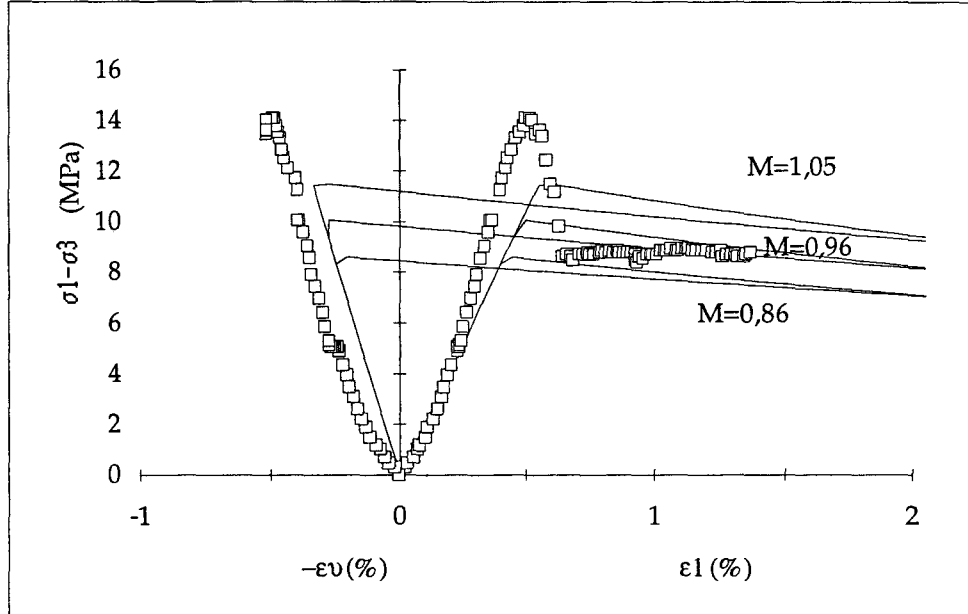


Fig 3.21 : Influence du paramètre M sur un essai déviatorique à faible pression de confinement, Bois-Bernard - 1MPa.

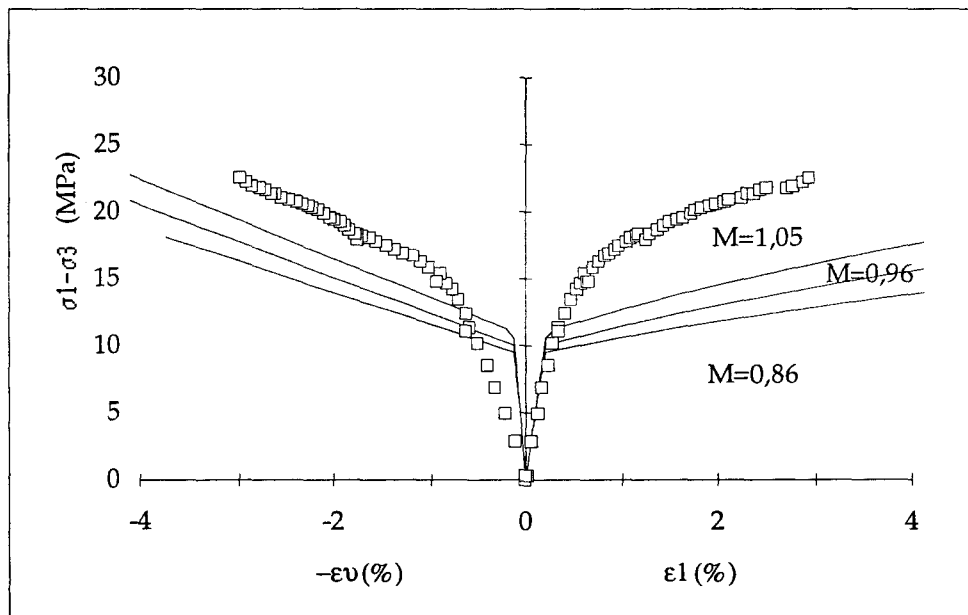


Fig 3.22 : Influence du paramètre M sur un essai déviatorique à moyenne pression de confinement, craie de Bois-Bernard - 22 MPa.

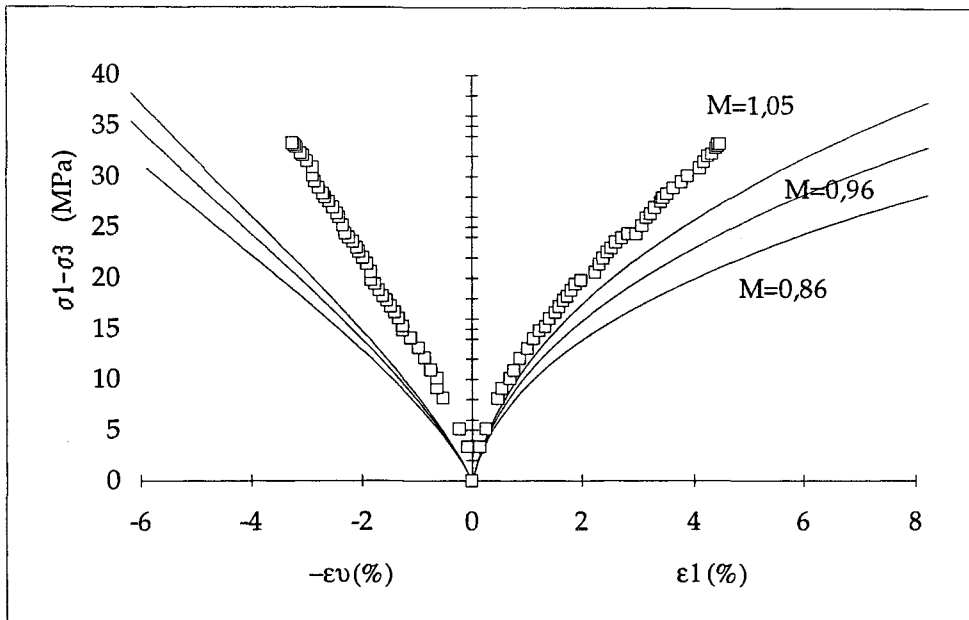


Fig 3.23 : Influence du paramètre M sur un essai déviatorique après P_0 , craie de Bois-Bernard - 42 MPa.

Nous avons étudié la sensibilité de M dans les différentes zones de comportement. On constate qu'une variation de 10 % de sa valeur a une influence sur le seuil d'écoulement plastique et la limite de rupture pour les essais effectués à de faibles pressions de confinement (figure 3.21). Pour des pressions plus importantes mais toujours inférieures à P_0 (figures 3.22), Ce paramètre régit la limite élastique ainsi que de manière sensible la valeur des déformations plastiques axiales et volumiques.

Pour les essais à des confinements supérieurs à P_0 (figure 3.23), seules les déformations plastiques sont affectées par une variation de ce paramètre avec toutefois une influence sur les déformations volumiques moindre.

Ce paramètre régit à lui seul les principales caractéristiques mécaniques de la craie dans ce type d'essai.

III.7.3 - Influence du paramètre k

On observe sur la figure 3.24 que l'influence de la valeur du paramètre d'écrouissage k , pour l'essai hydrostatique se manifeste surtout à partir de la troisième zone. Une variation de +/- 10% de cette valeur n'affecte pas de façon significative la valeur des déformations volumiques dans la seconde zone de l'essai.

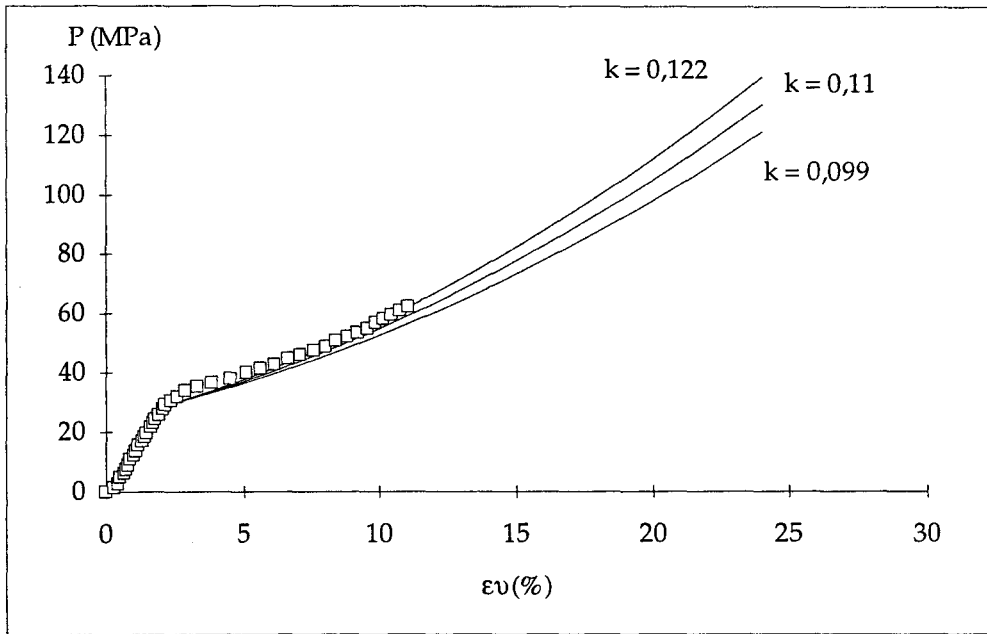


Fig 3.24 : Influence du paramètre d'écroûissage k sur l'essai de compression isotrope de la craie de Bois-Bernard.

L'influence de k (+/- 10 %) a été étudiée pour des essais déviatoriques effectués à différentes pressions de confinement. On observe sur la figure 3.25 que celui-ci n'affecte pas de façon notable la valeur des déformations volumiques et axiales pour les basses pressions de confinement.

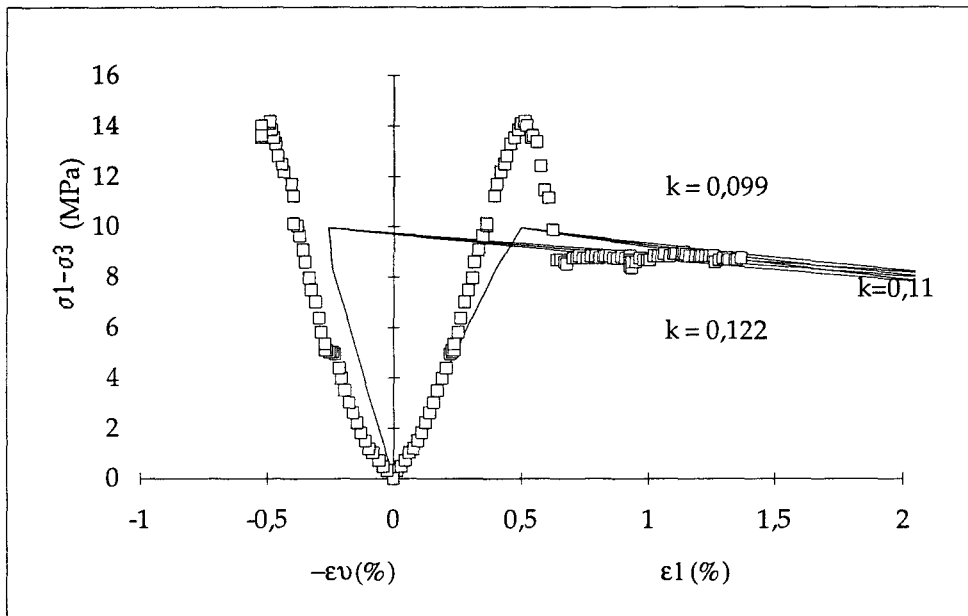


Fig 3.25 : Influence du paramètre k sur un essai déviatorique à faible pression de confinement, craie de Bois-Bernard - 1MPa.

Son influence se traduit de manière plus sensible pour les essais dans lesquels on a atteint des pourcentages de déformations volumiques plus importants (figure 3.26 et 3.27). Autrement dit, pour les essais où il n'y a pas apparition d'un pic de rupture et où la craie a un comportement toujours contractant.

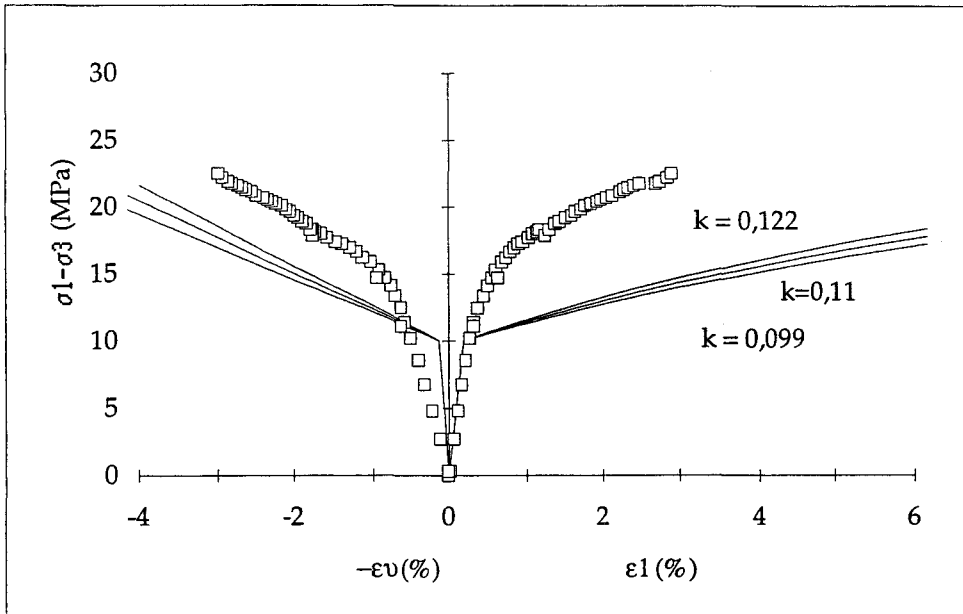


Fig 3.26 : Influence du paramètre k sur un essai déviatorique à moyenne pression de confinement, craie de Bois-Bernard - 22 MPa.

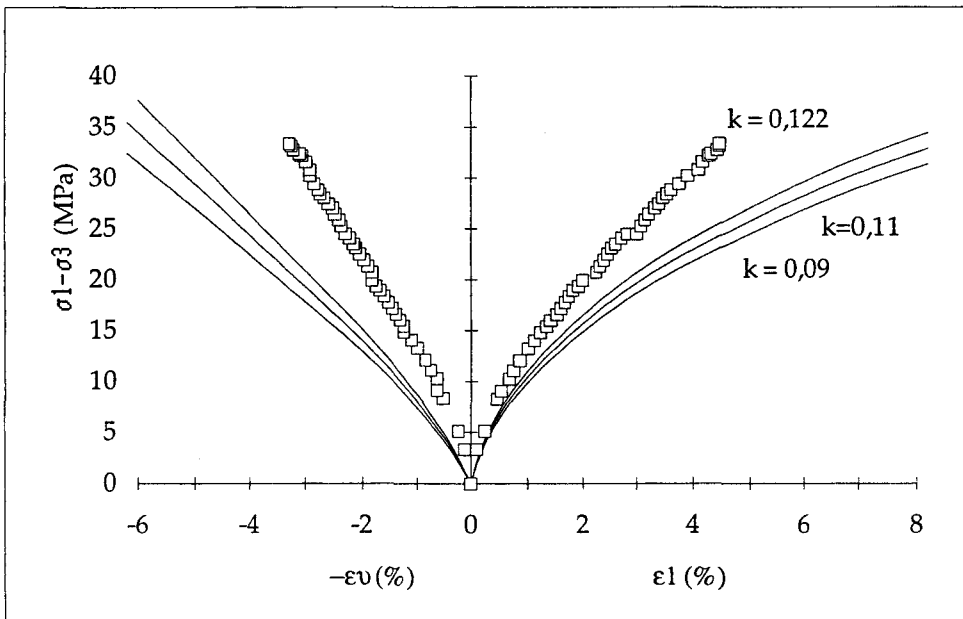
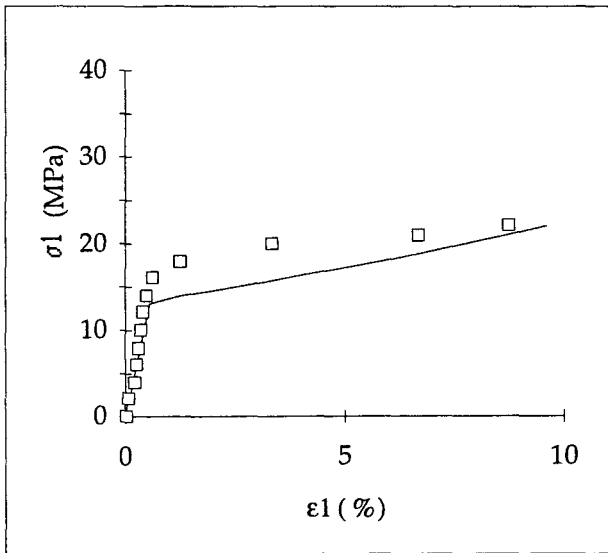


Fig 3.27 : Influence du paramètre k sur un essai déviatorique après P_o , craie de Bois-Bernard - 42 MPa.

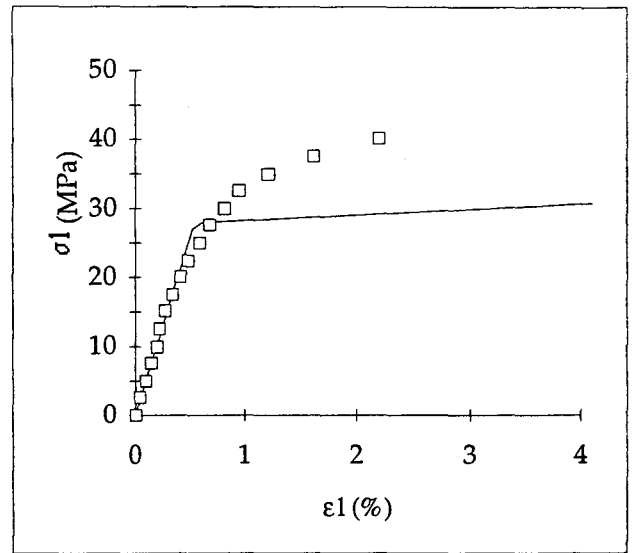
III.8 - Validation sous chemin proportionnel

Une première validation de ce modèle est faite à partir d'essais de compression proportionnelle. Les simulations obtenues pour les quatre craies sont présentées sur les figures 3.28. On constate que l'allure générale des courbes est respectée. Pour les quatre craies, la valeur du seuil d'écoulement prédit par le modèle est conforme à celle déterminée expérimentalement. Les valeurs des déformations axiales pour la craie de Liège sont en bonne concordance avec les valeurs expérimentales. Pour la craie d'Haubourdin, les valeurs numériques restent acceptables.

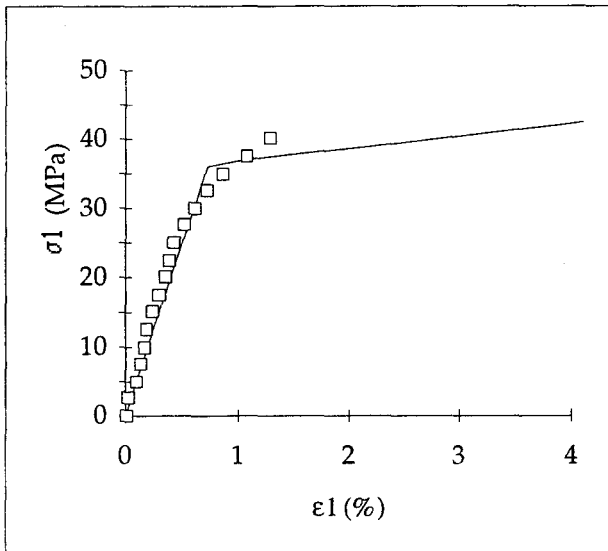
Pour les deux autres craies, la faiblesse des déformations atteintes expérimentalement nous empêche de conclure sur la précision des résultats.



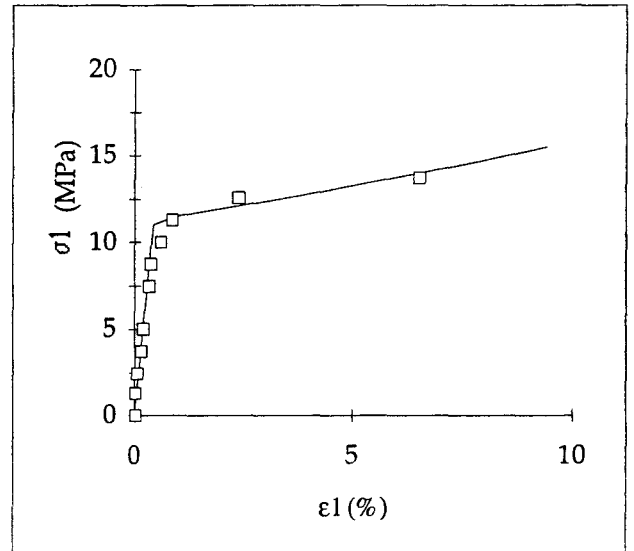
a) - Craie d'Haubourdin.



b) - Craie de Bois-Bernard.



c) - Craie de Dannes.



d) - Craie de Liège.

Fig 3.28 : Simulations des essais de compression proportionnelle.

III.9 - Conclusion

Le modèle Cam-Clay modifié permet d'obtenir une bonne reproduction du comportement volumique de la craie dans les essais de compression isotrope. Il permet également de retrouver l'allure globale des courbes des essais de compression déviatorique et proportionnelle. Toutefois, son utilisation conduit de manière générale à une sous-estimation de la rupture pour les essais déviatoriques réalisés à faibles confinements, et à une sur-estimation des déformations plastiques axiales et volumiques pour les autres essais. Ces observations sont à relier au couplage des deux mécanismes de déformation.

On a également montré par l'intermédiaire de ce modèle le comportement particulier de la craie d'Haubourdin. En effet, pour celle-ci les simulations s'éloignent fortement des résultats expérimentaux et plus particulièrement pour les essais à confinement inférieur à P_0 . Pour des confinements supérieurs les résultats obtenus sont meilleurs. Dans ces derniers cas, on peut émettre l'hypothèse d'une réduction de l'anisotropie de la craie due à la consolidation isotrope à laquelle elle est soumise avant l'application de la contrainte déviatorique.

On a observé que le caractère contractant dilatant des craies est relativement mal retranscrit. Cependant, on remarque que ce modèle permet une bonne description du passage du domaine fragile au domaine ductile. Le concept de courbe d'état critique séparant ces deux domaines semble donc, dans une certaine mesure, valide pour les quatre craies.

Intéressons nous maintenant à l'utilisation de ce modèle pour des états de contraintes tridimensionnelles. Une première généralisation de ce modèle aux problèmes tridimensionnels peut être effectuée en remplaçant Q par J_2 , second invariant du tenseur déviatorique des contraintes. Mais ceci revient à supposer que la forme de la fonction de charge et du potentiel plastique dans le plan déviatorique est un cercle. Or on sait que ce type d'enveloppe ne représente pas bien la rupture des géomatériaux. Pour palier à cette difficulté des auteurs ont proposé une variation de M en fonction de l'angle de Lode. Zienkiewicz et Naylor ont proposé la formulation suivante :

$$M(\theta) = \frac{3 \cdot \sin \phi}{\sqrt{3} \cdot \cos \theta - \sin \phi}$$

On retrouve dans ce cas un critère de type Mohr-Coulomb

Hicher (1985) montre l'influence de la contrainte intermédiaire sur la valeur de M pour Les argiles. Pour prendre en compte cette influence il propose pour M une fonction de la forme :

$$M(\theta) = a(\sqrt{3} \tan \theta - 1)^2 + b$$

Van Eckelen réécrit le modèle en ces termes :

$$F(Q, P, \theta) = \frac{Q}{P} - f(P)M(\theta)$$

avec $M(\theta) = \alpha(1 - \beta \sin 3\theta)^2$

a, b, α, β sont des constantes du matériau. Pour déterminer ces constantes, des essais à différentes valeurs de b sont nécessaires. Ne disposant pas de tels essais, nous avons donc recherché dans la littérature un modèle permettant de faire face aux limites citées précédemment tout en gardant les concepts donnant satisfaction. De part sa conception il apparaît que le modèle de Nova semble être une bonne alternative à l'utilisation du modèle de Cam-Clay. Ce point fait l'objet de la suite de notre étude que nous présentons dans le chapitre suivant.

En dernier lieu, rappelons que le modèle de Cam-Clay tel qu'il est écrit ne permet pas de prendre en compte la résistance initiale à la traction de la craie. En conclusion, si ce modèle peut être utilisé dans la simulation du mécanisme de compaction, d'autres modèles plus sophistiqués semblent être nécessaires lorsque d'autres mécanismes de déformation interviennent.

Chapitre IV:

Modèle de Nova

Nova propose un modèle pour les sols combinant deux modèles classiquement utilisés en mécanique des sols : le modèle Cam-Clay et le critère de rupture établi par Matsuoka et Nakai. Ce modèle a été bâti de manière à déduire les paramètres d'essais de laboratoire simples. Une extension aux roches tendre a été présentée par l'auteur (Nova, 1992). Ce modèle est basé sur la théorie classique de la plasticité avec écrouissage isotrope. Nous présentons ci-dessous les bases de ce modèle.

IV.1 - Présentation du modèle

IV.1.1 - Critère de Matsuoka - Nakai

Pour obtenir ce critère (équation 1.19, Chapitre I), les auteurs considèrent une facette particulière du matériau (plan PSM, figure 4.1) dont l'orientation $\bar{n}$ est définie dans les axes principaux par :

$$\bar{n} (k\sqrt{\sigma_1}, k\sqrt{\sigma_2}, k\sqrt{\sigma_3}), \quad (4.1)$$

avec

$$k = \sqrt{\frac{I_{III}}{I_{II}}} \quad (4.2)$$

Sur cette facette s'exerce le vecteur contrainte $\bar{T}$ défini par :

$$\bar{T} = \sigma \bar{n} + \bar{\tau} \quad (4.3)$$

La relation adoptée pour le critère est :

$$|\bar{\tau}| / \sigma = \text{cte} \quad (4.4)$$

Cette relation s'exprime en fonction des invariants de contrainte de la façon suivante :

$$|\bar{\tau}| / \sigma = \sqrt{(I_I I_{II} - 9 I_{III}) / 9 I_{III}} \quad (4.5)$$

La rupture du sol se produit lorsque le rapport $|\bar{\tau}| / \sigma$ atteint une valeur maximum. Le critère déduit de 4.5 a alors pour équation :

$$\frac{I_I I_{II}}{I_{III}} = \text{cte} \quad (1.19, \text{chapitre I})$$

(Voir figure 1.7 pour une représentation de ce critère dans le plan déviatorique)

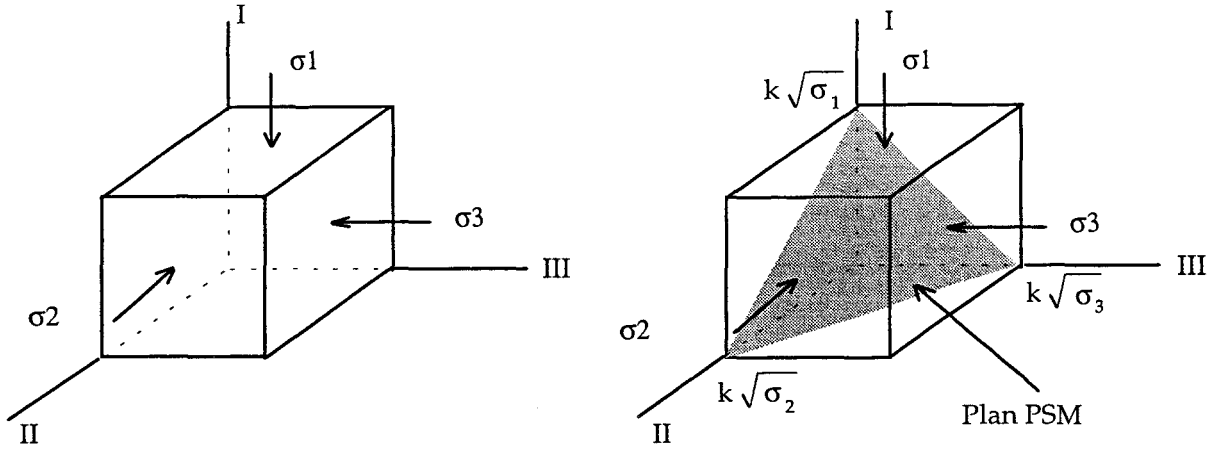


Fig 4.1 : représentation du Plan Spatial Mobilisé dans l'espace tridimensionnel.

IV.1.2 - Modèle de Nova

En écrivant l'équation 1.19 sous la forme $\frac{I_I I_{II}}{I_{III}} = 3\gamma$ et en utilisant les relations 1.6 et 1.9, Nova réécrit le critère de Matsuoka et Nakai sous la forme :

$$\frac{3}{2}(\gamma - 1)J_{2\eta} - \gamma J_{3\eta} - 3(\gamma - 3) = 0 \quad (4.6)$$

où $\eta_{ij} = \frac{S_{ij}}{P}$ $P = \frac{I_1}{3}$
 et $J_{2\eta} = \eta_{ij} \eta_{ij}$ $J_{3\eta} = \eta_{ij} \eta_{jk} \eta_{ki}$

Il propose ensuite un potentiel plastique g pour que le domaine où les incréments de déformation plastique volumique sont nuls coïncide avec le critère de Matsuoka et Nakai. Autrement dit, il suppose que le critère de Matsuoka et Nakai donne, non pas une bonne représentation de l'état ultime, mais des conditions associées à une dilatance nulle : l'état critique. Il justifie ce choix en indiquant que dans ce cas les angles de frottement en compression et extension sont égaux.

L'état critique est donné par :

$$d\varepsilon_v = 0 \quad (4.7)$$

ce qui implique pour le potentiel plastique de vérifier :

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} = 0 \quad (4.8)$$

Nova obtient donc pour g l'expression suivante

$$g = 9(\gamma - 3) \text{Ln} \left(\frac{P}{P_g} \right) - \gamma J_{3\eta} + \frac{9}{4}(\gamma - 1) J_{2\eta} \quad (4.9)$$

La forme de la fonction de charge est prise similaire au potentiel plastique, mais celle-ci diffère d'un paramètre β et d'une fonction P_c , fonction d'écrouissage.

$$f = 3\beta(\gamma - 3) \text{Ln} \left(\frac{P}{P_c} \right) - \gamma J_{3\eta} + \frac{9}{4}(\gamma - 1) J_{2\eta} \quad (4.10)$$

Si $\beta = 3$, la loi est associée.

Les déformations plastiques sont calculées à partir du principe du travail maximum de Hill:

$$d\epsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.11)$$

$$\text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk} \quad (4.12)$$

$$\text{et} \quad H = - \frac{\partial f}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial \epsilon_{rs}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}} \quad (4.13)$$

La fonction d'écrouissage est donnée par:

$$P_c = P_{co} \text{Exp} \left\{ \frac{\epsilon_v^p + \xi (J_{2e})^{1/2} + \psi (J_{3e})^{1/3}}{B_p} \right\} \quad (4.14)$$

où

$$J_{2e} = \int (d\epsilon_{rsd}^p d\epsilon_{rs}^p)^{1/2} \quad (4.15)$$

$$J_{2e} = e_{rs}^p e_{st}^p e_{tr}^p$$

$\beta, \gamma, \xi, \psi, B_p, P_{co}$, sont les paramètres qui caractérisent la réponse plastique du matériau. Le paramètre P_g est un paramètre muet, il disparaît dans la mesure ou seule la dérivée de g par rapport aux contraintes est utilisée.

Les paramètres β et γ contrôlent les formes du potentiel plastique et du domaine d'élasticité. P_{co} détermine la taille initiale du domaine élastique. Les paramètres B_p, ξ et ψ sont liés à la compressibilité du sol.

La prise en compte de la résistance initiale à la traction se fait en effectuant le changement de variable :

$$P^* = P + P_t \quad (4.16)$$

$$\eta_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{P^*}$$

Dans ce cas, le domaine d'élasticité initial est prolongé dans la zone des pressions négatives (figure 4.2).

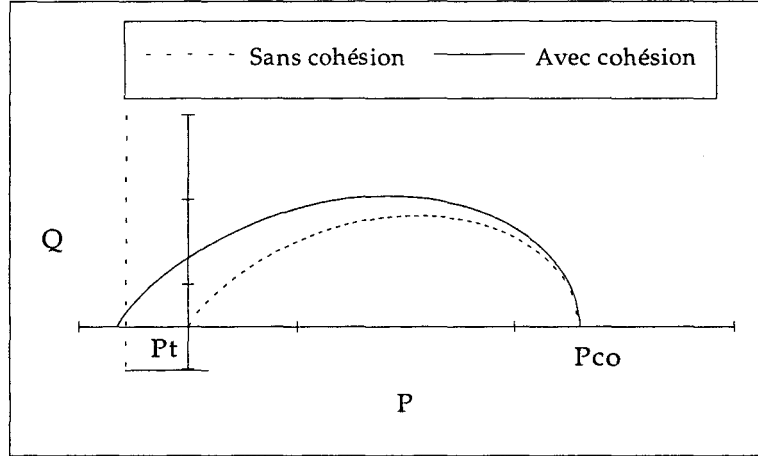


Fig 4.2 : Modification du domaine élastique pour les matériaux cohésifs.

Nova (1988, 1992) présente les applications de son modèle pour la simulation du comportement de deux sables et d'une argile normalement consolidée. Les paramètres du modèle ont été déterminés et calibrés sur des essais triaxiaux de révolution. Le modèle est ensuite utilisé pour simuler le comportement de ces matériaux dans des essais de torsion monotone sur cylindre creux et des essais sur véritable triaxial. L'auteur observe dans ces essais une bonne concordance entre les valeurs numériques et expérimentales. Ce modèle a également été utilisé pour simuler le comportement d'un calcaire oolithique dans des essais de compression déviatorique. Le modèle permet une bonne description du comportement de ce type de matériau.

IV.2 - Etude d'une version simplifiée du modèle de Nova

Afin de mieux étudier et valider la formulation du modèle de Nova pour les craies étudiées, on choisit dans un premier temps d'utiliser une expression simplifiée de ce dernier. La formulation retenue est la suivante :

$$g = 9 (\gamma - 3) \text{Ln} \left(\frac{P + \alpha P_{t0}}{P_g} \right) - \gamma J_{3\eta} + \frac{9}{4} (\gamma - 1) J_{2\eta} \quad (4.17)$$

$$f = 3\beta(\gamma - 3) \text{Ln} \left(\frac{P + \alpha P_{t0}}{P_c + \alpha P_{t0}} \right) - \gamma J_{3\eta} + \frac{9}{4} (\gamma - 1) J_{2\eta} \quad (4.18)$$

$$P_c = P_{co} \text{Exp} \left\{ \frac{\varepsilon_v^p}{B_p} \right\} \quad (4.19)$$

Les modifications alors apportées par rapport au modèle Cam-Clay modifié portent sur la forme de la surface de charge, du potentiel plastique et la prise en compte de la résistance initiale à

la traction de la craie. La fonction d'écrouissage reste inchangée. Dans cette version le modèle ne possède donc que six paramètres α , β , γ , B_p , P_{co} et P_{t0} . Ce dernier représente la résistance à la traction de la craie déterminée à l'aide de l'essai brésilien.

IV.2.1 - Détermination des paramètres

Détermination de α

Le paramètre α est relié à la cohésion c des craies, déterminée à l'aide de la relation 1.11. On montre sans difficulté que ces deux paramètres sont reliés par :

$$\alpha = \frac{c}{(P_{t0} \cdot \tan \phi)} \quad (4.20)$$

Pour les mêmes raisons que dans le chapitre III, nous ne pouvons utiliser directement cette relation pour la craie de liège. La détermination de α se fera donc de manière différente (cf détermination de β).

Détermination de γ

La détermination de γ se fait à la rupture. Le critère de rupture est

$$\frac{3}{2}(\gamma - 1)J_{2\eta} - \gamma J_{3\eta} - 3(\gamma - 3) = 0$$

Dans un essai triaxial les valeurs de $J_{2\eta}$ et $J_{3\eta}$ sont données par :

$$\begin{aligned} J_{2\eta} &= \frac{2}{3} \left(\frac{Q}{P^*} \right)^2 = \frac{2}{3} M^2 \\ J_{3\eta} &= \frac{2}{9} \left(\frac{Q}{P^*} \right)^3 = \frac{2}{9} M^3 \end{aligned} \quad (4.21)$$

M étant le paramètre du modèle de Cam-Clay. On déduit donc de 4.21 la valeur de γ par :

$$\gamma = \frac{9 - M^2}{\frac{2}{9}M^3 + 3 - M^2} \quad (4.22)$$

Détermination de β

La détermination du paramètre β se fait en utilisant la méthode des moindres carrés. Les valeurs des différentes variables sont déterminées à la limite élastique dans les essais de compression isotrope et déviatorique. On impose dans ce cas $f=0$ (équation 4.18). Pour la craie de Liège α et β ont été déterminés simultanément. Le tableau ci-après récapitule les valeurs des paramètres.

	α	β	γ	$1/B_p$	P_{co}	P_{to}
Haubourdin	4,66	2,35	4,04	0,09	12	0,65
Bois-Bernard	10,82	1,28	3,55	0,11	30	0,63
Dannes	6,11	1,21	3,70	0,105	36	1,05
Liège	3,27	2,20	3,73	0,09	10	0,3

Tab 4.1 : Valeurs des différents paramètres pour les quatre craies.

La valeur de β appelle une remarque. En effet, pour des roches telles que le granit, le marbre ou encore le grès, **Brown et Michelis (1978)** montrent que la direction des déformations est normale à la surface de charge. Si l'on interprète ce résultat à l'aide du modèle de Nova, ceci correspond à une valeur de β proche de 3. Or, on constate d'après le tableau 4.1 que les valeurs déterminées sont inférieures à 3. Les craies étudiées se différencient donc ici des roches "classiques". On remarque également, à l'exception de la valeur de α que les paramètres de ce modèle (β, γ, B_p) ne présentent pas de variation importante selon la craie considérée.

IV.2.2 - Domaine d'élasticité initial

On compare sur les figures ci-dessous, la taille du domaine élastique initial prédit par le modèle et celle observée expérimentalement. On observe de manière globale qu'une amélioration a été apportée dans l'estimation de la limite élastique pour les quatre craies. Ceci est particulièrement vérifié pour les craies de Dannes (figure 4.5) et Liège (figure 4.6). Les bons coefficients de corrélation (tableau 4.2) confirment cette observation. On note pour la craie de Bois-Bernard une valeur du coefficient de corrélation légèrement inférieur à celle obtenue dans le chapitre III (tableau 3.6). L'estimation reste toutefois acceptable. La prédiction du domaine élastique de la craie d'Haubourdin a elle aussi été améliorée mais elle demeure encore loin des observations expérimentales.

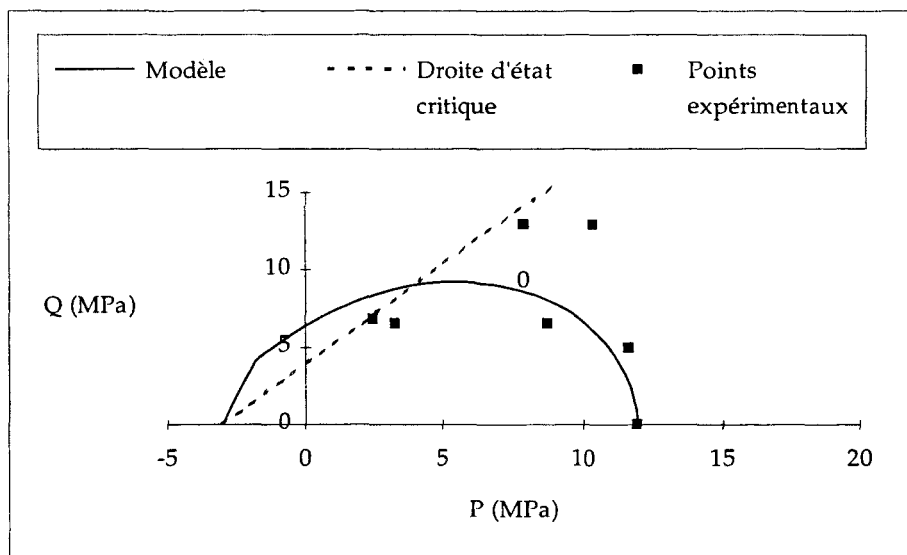


Fig 4.3 : Prédiction du domaine élastique pour la craie d'Haubourdin.

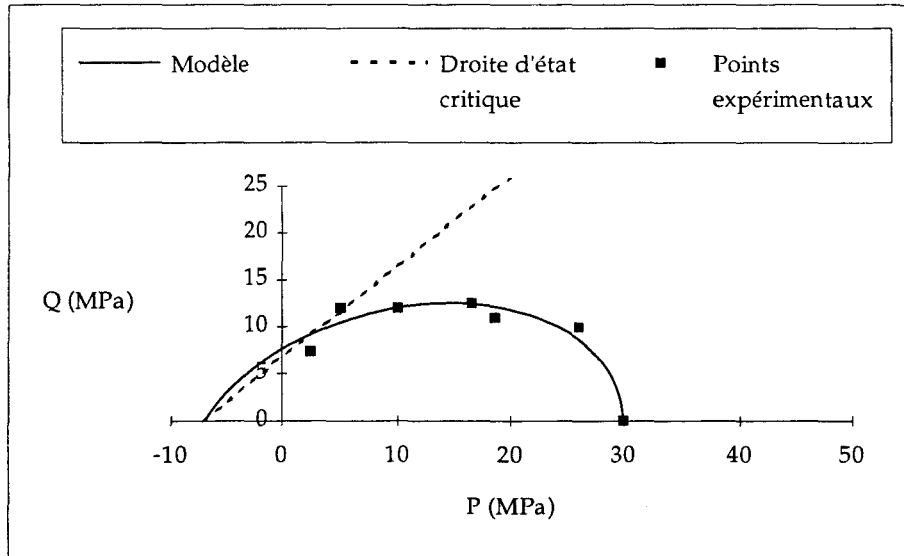


Fig 4.4 : Prédiction du domaine élastique pour la craie de Bois-Bernard.

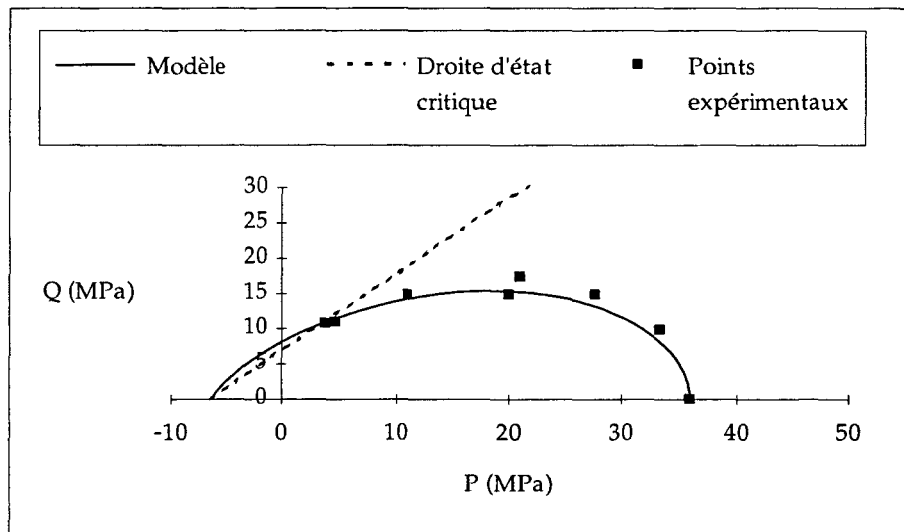


Fig 4.5 : Prédiction du domaine élastique pour la craie de Dannes.

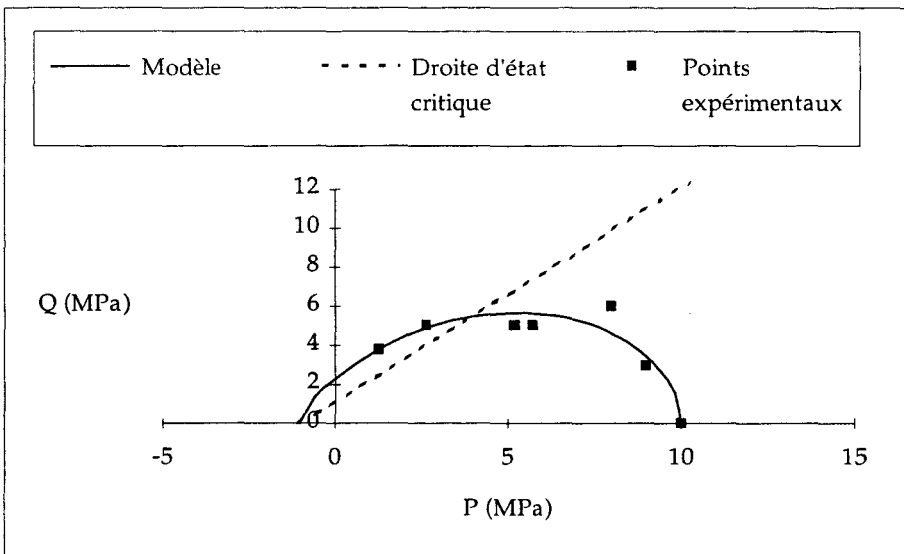


Fig 4.6 : Prédiction du domaine élastique pour la craie de Liège.

craie	coefficient de corrélation
Haubourdin	0,55
Bois-Bernard	0,80
Dannes	0,98
Liège	0,97

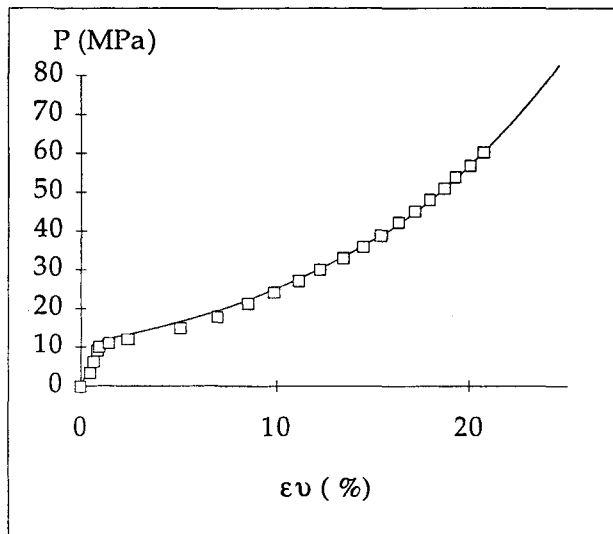
Tab 4.2 : Degré de précision sur la détermination du domaine élastique initial.

IV.2.3 - Simulations des essais triaxiaux

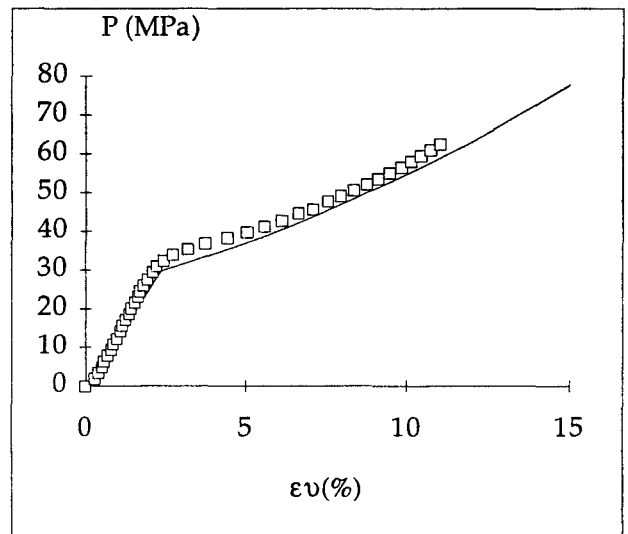
L'algorithme de calcul que nous avons utilisé pour la simulation des essais présentés ci-après est identique à celui du chapitre précédent (annexe 2).

IV.2.3.1 - Simulations des essais de compression isotrope

Les figures 4.7a à 4.7d représentent les simulations des essais de compression isotrope. Les résultats obtenus sont, de part la conception du modèle, bien entendu similaires à ceux du modèle de Cam-Clay. Les simulations d'Haubourdin et Liège ont été réalisées en tenant compte de la variation des modules de compressibilité K_{dr} .



a) - Craie d'Haubourdin.



b) - Craie de Bois-Bernard.

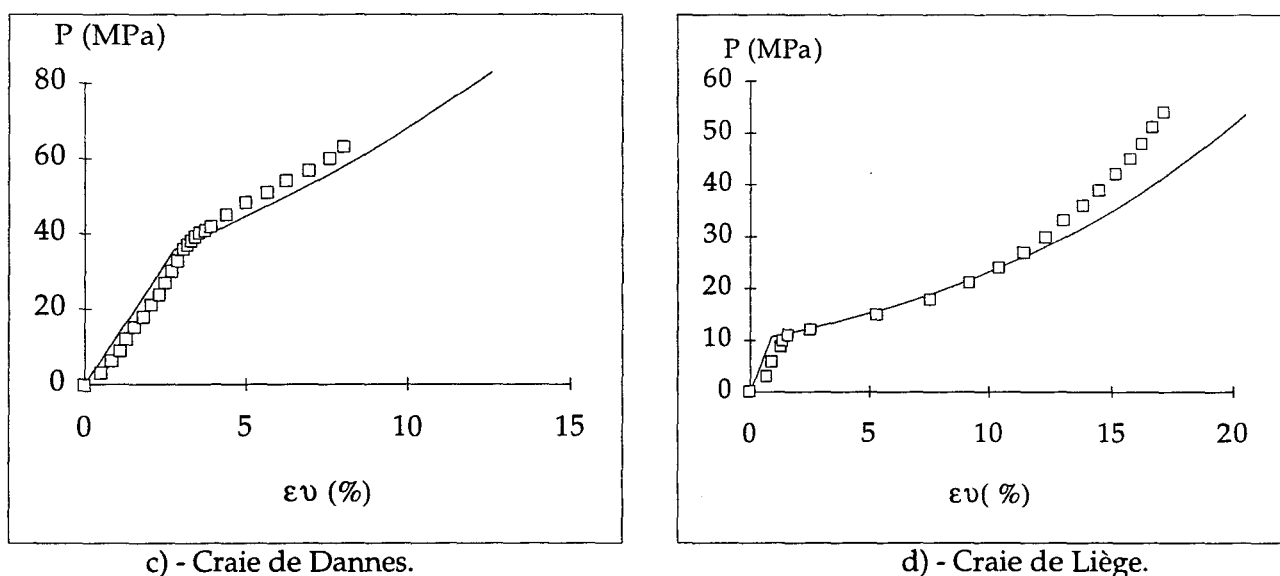


Fig 4.7 : Simulations des essais de compression isotrope.

IV.2.3.2 - Simulations des essais de compression déviatorique

On remarque sur les figures suivantes que la formulation utilisée a permis d'améliorer l'estimation du comportement volumique des craies à basses pressions de confinement. En effet, là où le modèle de Cam-Clay prédit un comportement contractant-dilatant (non observé expérimentalement), Le modèle de Nova permet de retrouver l'allure quantitative des courbes expérimentales. C'est le cas pour les essais à 1 et 3 MPa sur la craie de Bois-Bernard (figures 4.8.a, 4.8.b), pour les essais à 1 et 6 MPa sur la craie de Dannes (figures 4.9.a, 4.9.b) et pour l'essai à 3 MPa sur la craie de Liège (figure 4.10 b). Les essais pour lesquels le comportement contractant dilatant a effectivement été observé expérimentalement est retrouvé par le modèle figure (4.10 a). La forme du potentiel plastique défini par Nova semble donc adaptée aux craies étudiées ici.

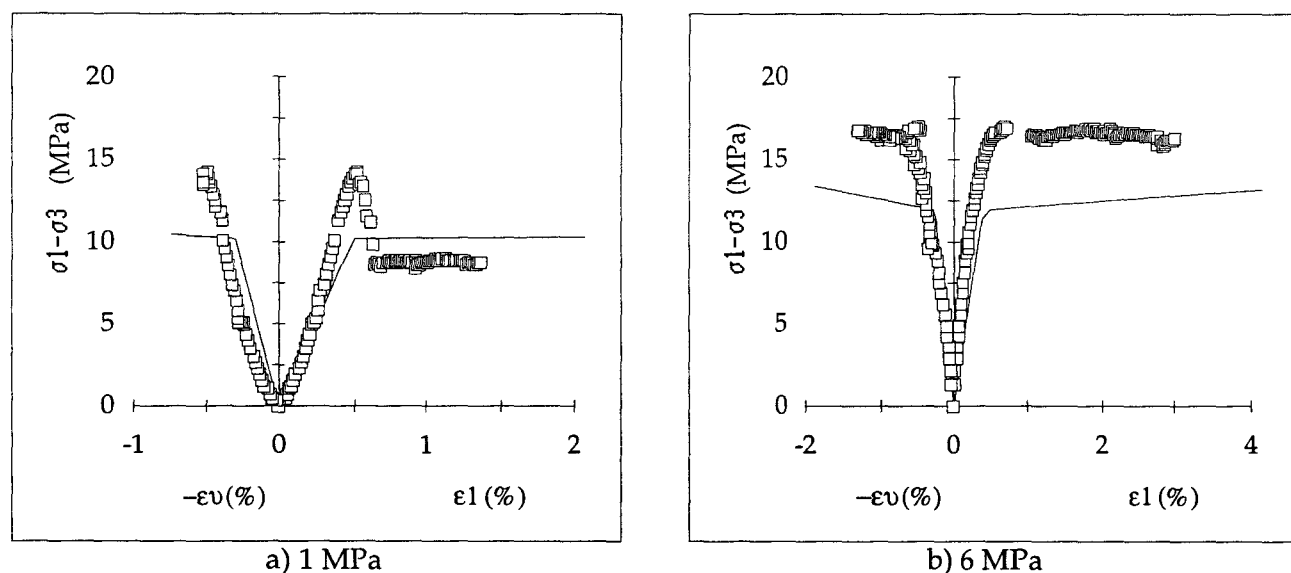
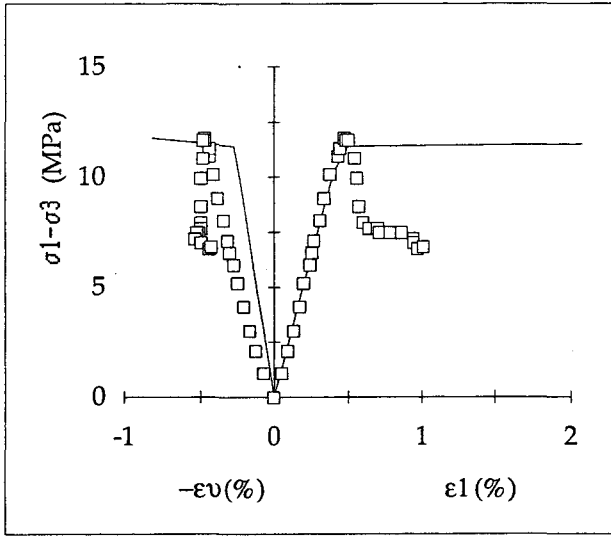
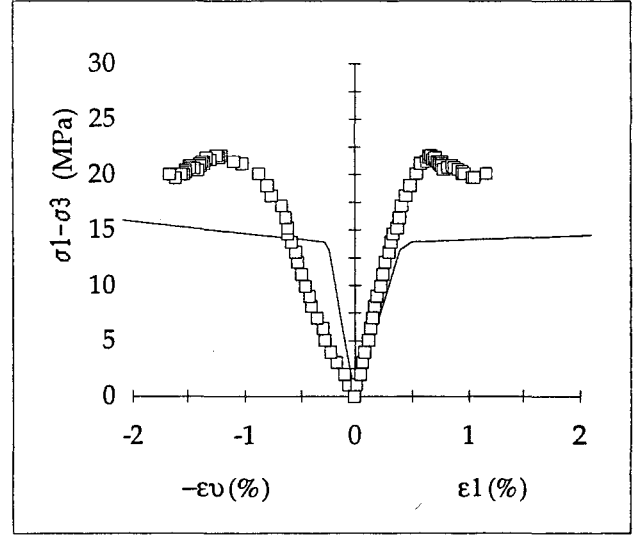


Fig 4.8 : Simulations des essais de compression déviatorique à bas confinements de la craie de Bois-Bernard.

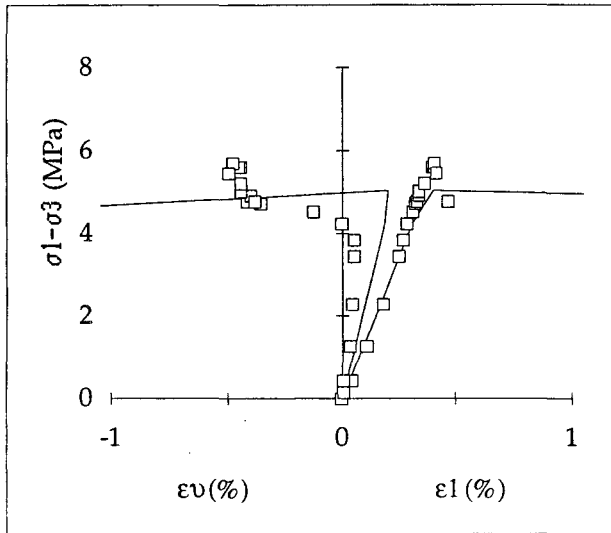


a) 1 MPa

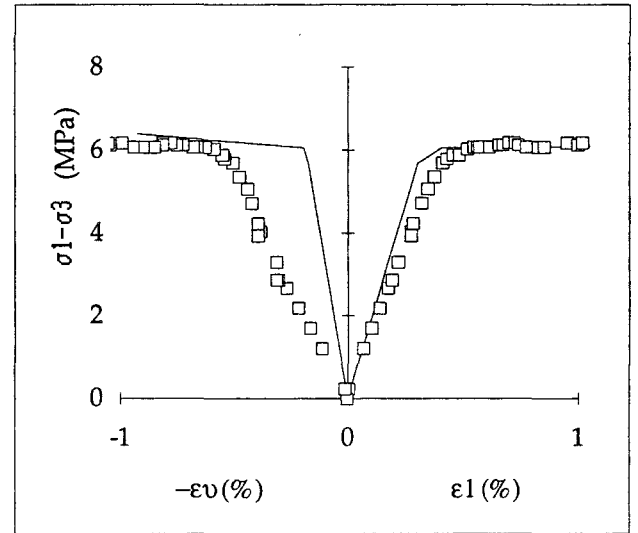


b) 6 MPa

Fig 4.9 : Simulations des essais de compression déviatorique à bas confinements de la craie de Dannes.



a) 1 MPa



b) 6 MPa

Fig 4.10 : Simulations des essais de compression déviatorique à bas confinements de la craie de Liège.

Pour des pressions hydrostatiques plus importantes, les résultats obtenus sont semblables à ceux issus du modèle Cam-Clay Modifié. En effet, on observe toujours une surestimation des déformations volumiques et axiales. On démontre une fois de plus que l'utilisation des déformations volumiques plastiques comme seule variable d'écrouissage n'est pas suffisante pour retranscrire le comportement de craies dans ces essais. Quelques résultats sont illustrés sur les figures 4.11.

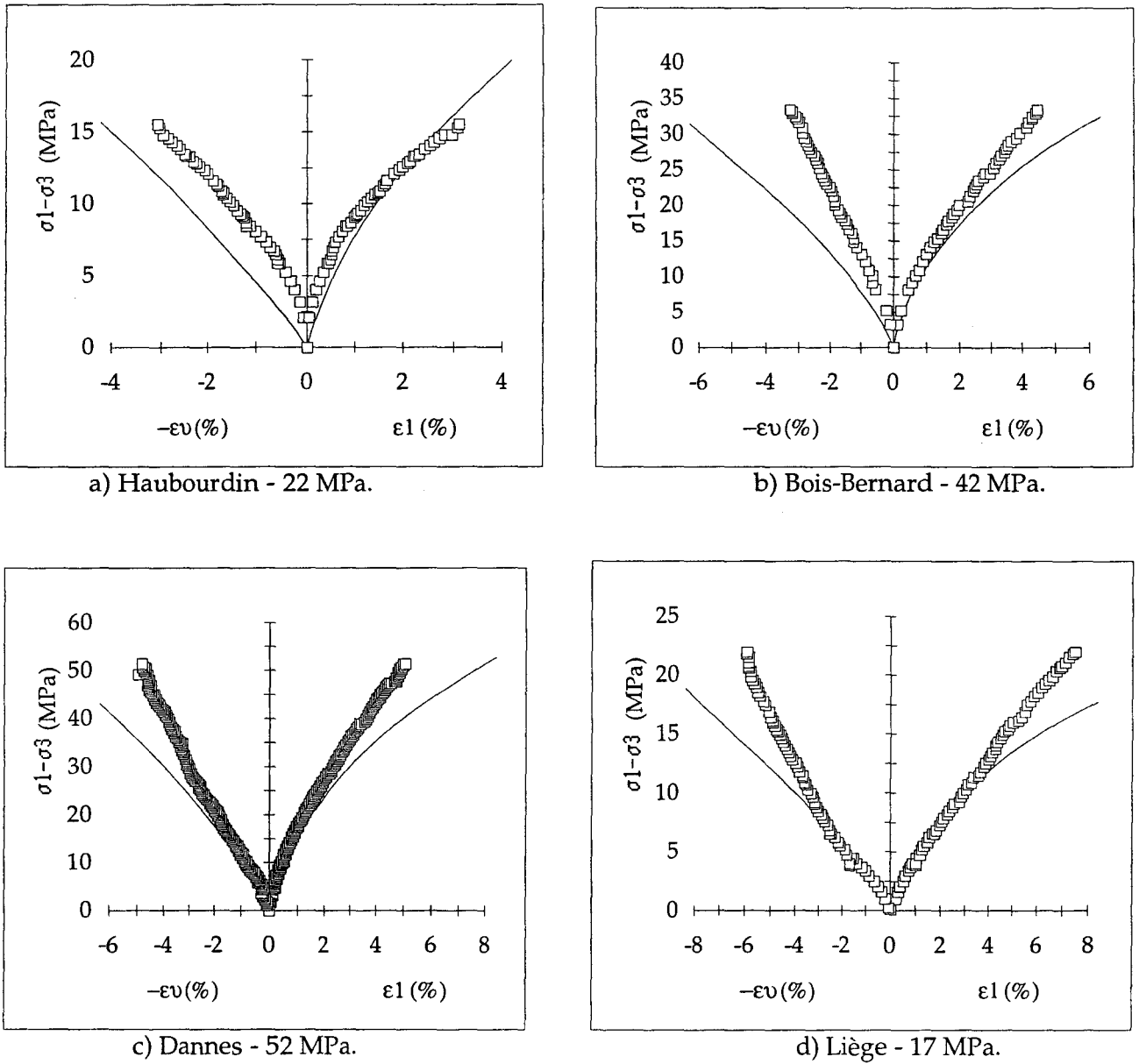


Fig 4.11 : Simulations de certains essais de compression déviatorique à hauts confinements.

IV.3 - Introduction d'une seconde variable d'érouissage

Afin d'améliorer la simulation des essais de compression déviatorique à hauts confinements, on introduit dans la fonction P_c une seconde variable d'érouissage. Cette démarche s'inscrit dans celle qu'a proposée initialement Nova. La nouvelle fonction d'érouissage s'exprime sous la forme:

$$P_c = P_{co} \text{Exp} \left\{ \frac{1}{B_p} \epsilon_v^p + \xi \epsilon_d^p \right\} \quad (4.23)$$

$$\text{avec } \epsilon_d^p = \sqrt{3J_{2e}} \quad (4.24)$$

$$\text{et} \quad J_{2e} = \frac{1}{2} \text{tr}(e_{ij}^p e_{ij}^p), \quad e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{hl} \delta_{hk} \frac{\delta_{ij}}{3}$$

Dans le modèle initial de Nova, le paramètre ξ est relié à la dilataance à la rupture. Ceci se vérifie simplement en considérant qu'à la rupture on a $P_c = 0$, dès lors

$$\dot{\varepsilon}_v^p = -\xi \dot{\varepsilon}_d^p \quad (4.25)$$

Dans les essais à hauts confinements la rupture du matériau n'est pas atteinte. Dans ce cas celle ci se définit en fixant un pourcentage de déformation (une déformation d'environ 10% est généralement acceptée). Cependant, en suivant cette démarche la relation 4.25 n'est pas respectée, en effet, dans ce cas $P_c \neq 0$. On ne peut donc pas relier la valeur de ξ aux variations volumiques par l'intermédiaire de la relation 4.25. Nous avons donc procédé à une détermination numérique de ce paramètre par approximation successives. L'ordre de grandeur de la valeur de départ est celle de $(1/b_p)$. Un calage est ensuite effectué sur une des courbes expérimentales.

Les valeurs de ce paramètre sont répertoriées dans le tableau 4.3. Les essais utilisés pour cette détermination sont les essais : à 22 MPa pour la craie d'Haubourdin, 42 MPa pour la craie de Bois-Bernard, 52 MPa pour la craie de Dannes et 17 MPa pour la craie de Liège.

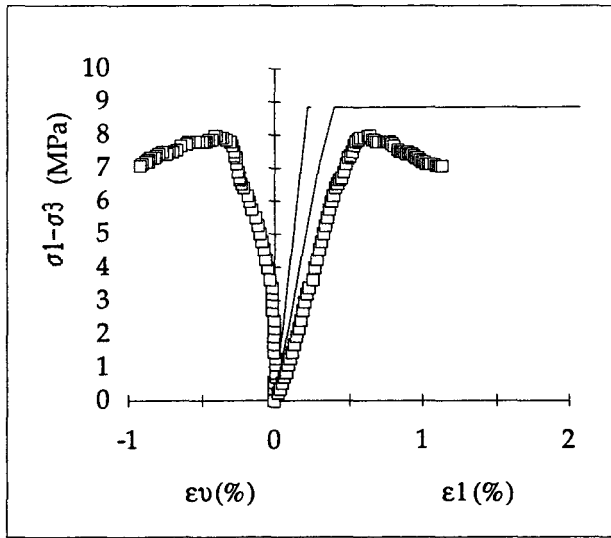
craie	ξ
Haubourdin	0,025
Bois-Bernard	0,075
Dannes	0,06
Liège	0,057

Tab 4.3 : Valeurs du paramètre ξ pour les quatre craies.

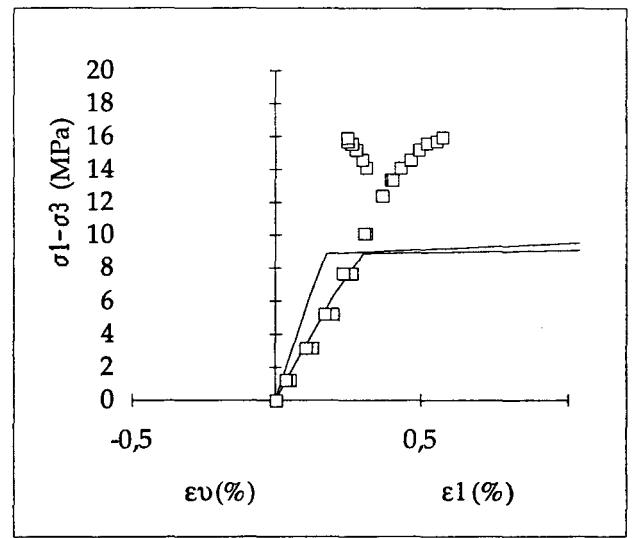
Ces valeurs sont utilisées dans la simulation des essais à hauts et moyens confinements. Pour les essais à faibles pressions de confinement, les simulations sont effectuées avec $\xi=0$. Toutes autres valeurs positives de ce paramètre ne permet pas en effet de retrouver les pics de rupture ou les paliers de plastification parfaite.

IV.3.1 - Simulations des essais de compression déviatorique.

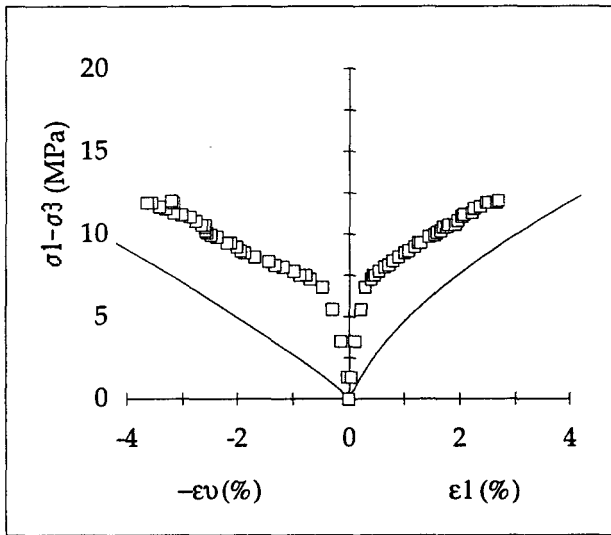
Les simulations des essais de compression déviatoriques sont regroupées sur les figures des pages suivantes. Comme nous l'avons déjà évoqué, le modèle de Nova permet de retrouver un comportement volumique en concordance avec les observations expérimentales à faibles pressions de confinement. Cette observation se vérifie pour la craie de Bois-Bernard (figure 4.13a et 4.13b), la craie de Dannes (figures 4.14a et 4.14b) et celle de Liège (figures 4.15a et 4.15b). Pour la craie d'Haubourdin (figure 4.12a et 4.12b), on constate que les résultats obtenus à de telles pressions sont assez loin des valeurs expérimentales. Une fois de plus, la particularité de cette craie est mise en évidence. L'introduction d'une seconde variable d'écrouissage permet d'obtenir des résultats tout à fait satisfaisants dans les simulations des essais déviatoriques à des pressions hydrostatiques plus importantes. On observe en particulier que les résultats obtenus pour la craie de Liège sont extrêmement précis (figures 4.15e et 4.15f). Pour les autres craies, si les déformations plastiques axiales sont retranscrites d'une manière fidèle, on note encore une légère surestimation des déformations volumiques. Mais les résultats sont tout à fait acceptables.



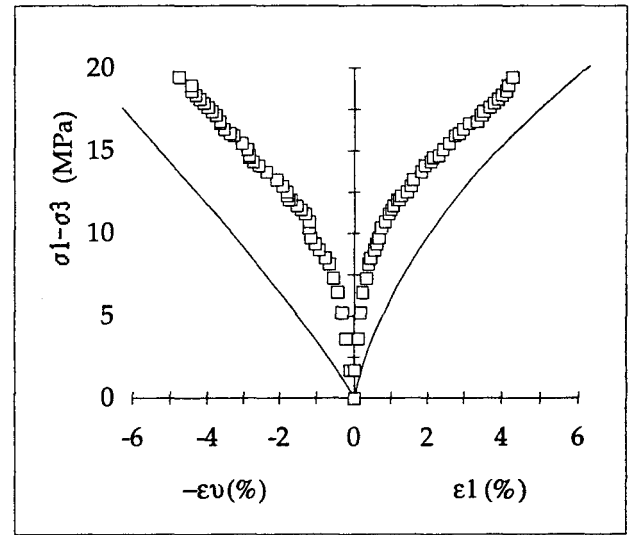
a) 1 MPa



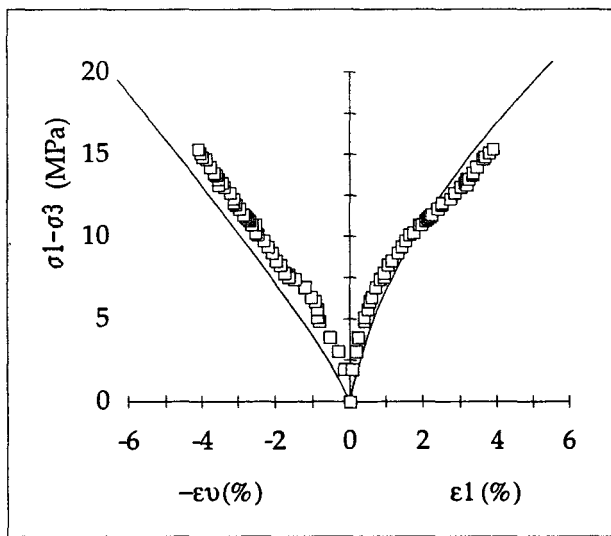
b) 3 MPa



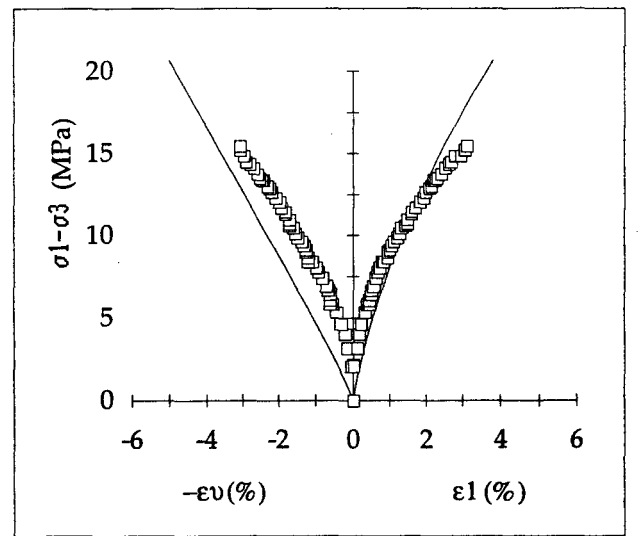
c) 13 MPa



d) 17 MPa

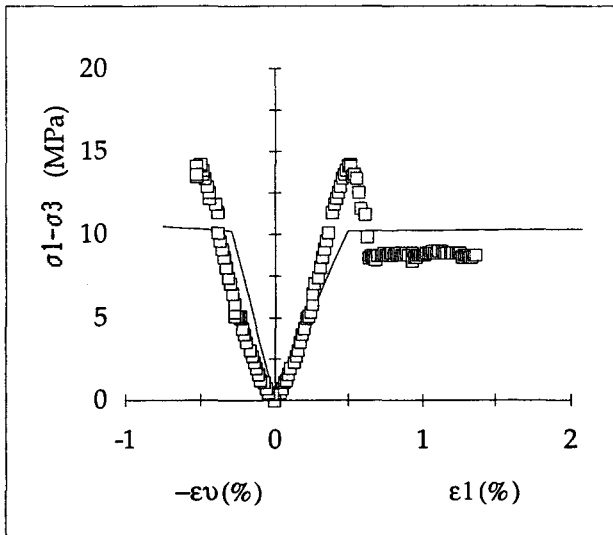


e) 19 MPa

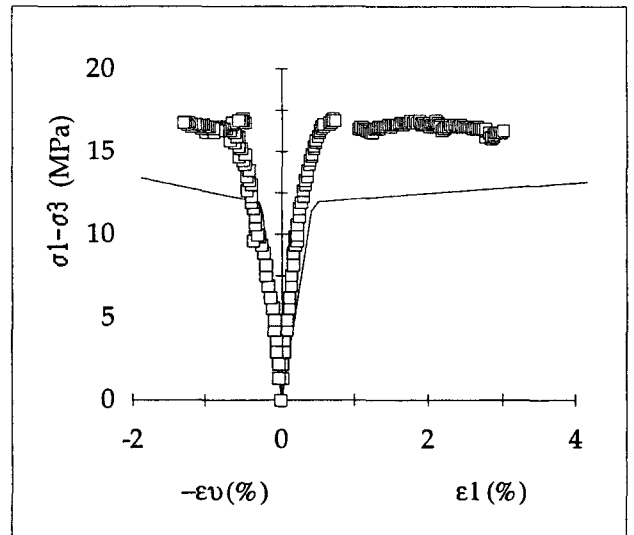


f) 22 MPa

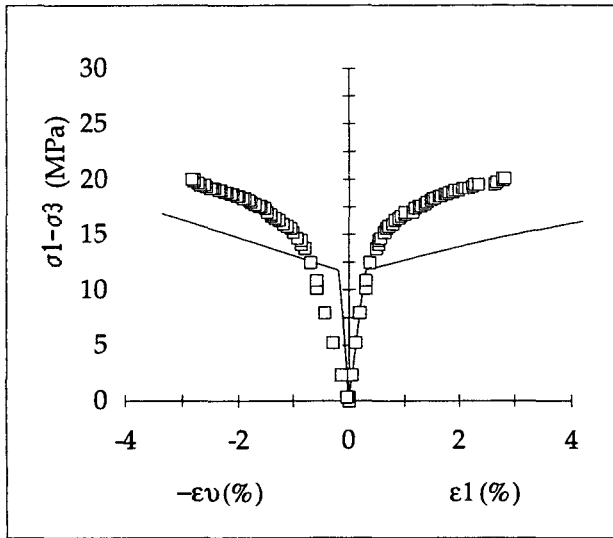
Fig 4.12 : Simulations des essais de compression déviatorique, craie d'Haubourdin.



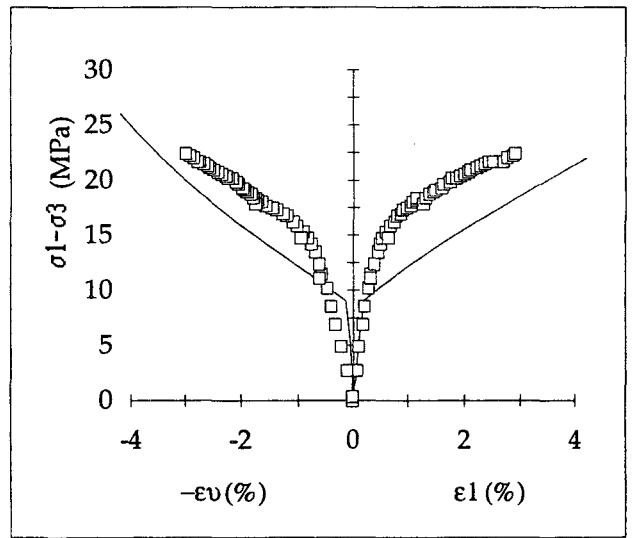
a) 1 MPa



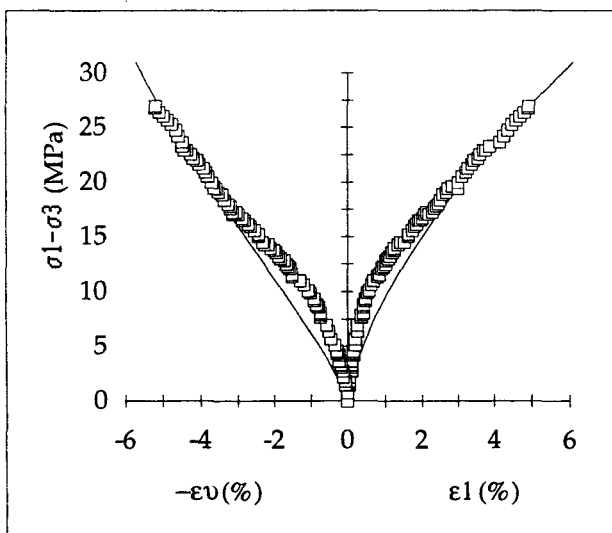
b) 6 MPa



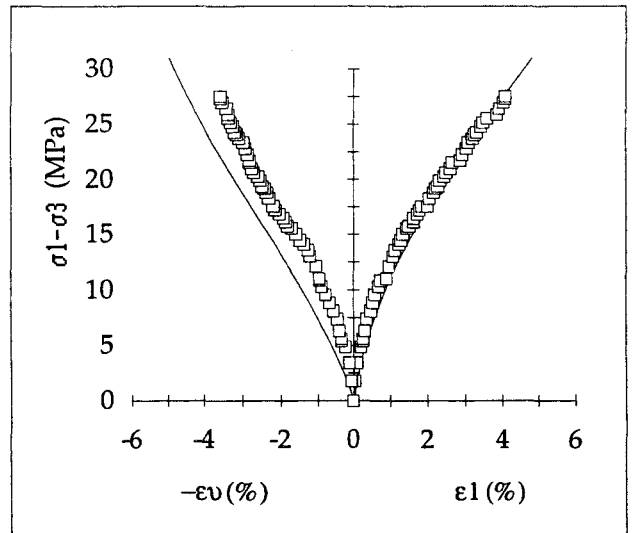
c) 15 MPa



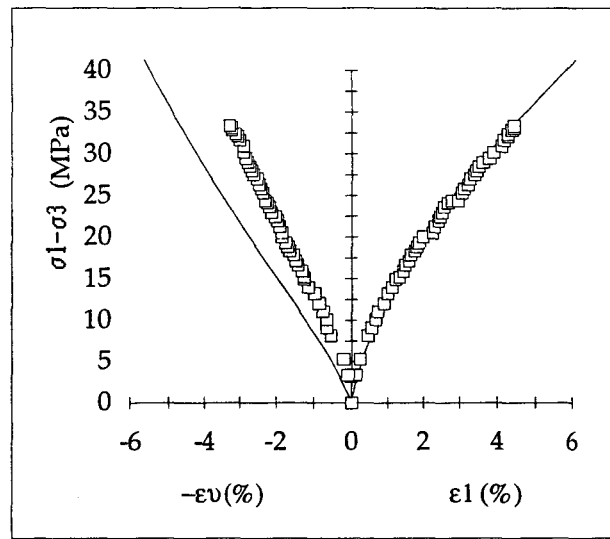
d) 22 MPa



e) 30 MPa

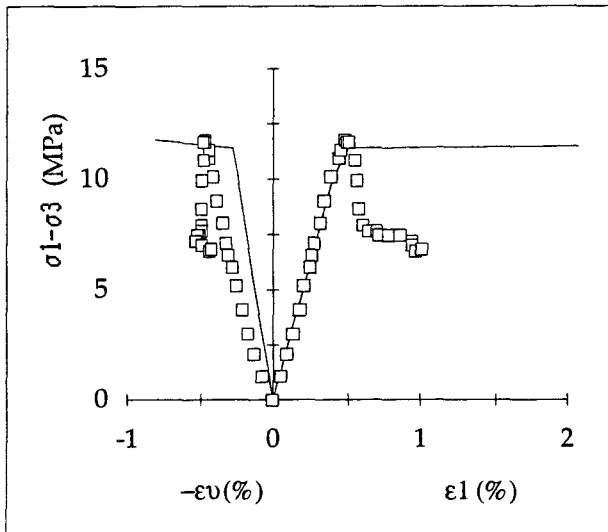


f) 36 MPa

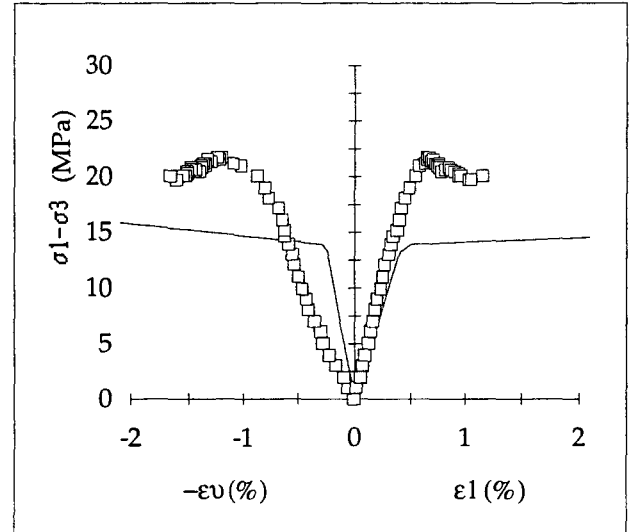


g) 42 MPa

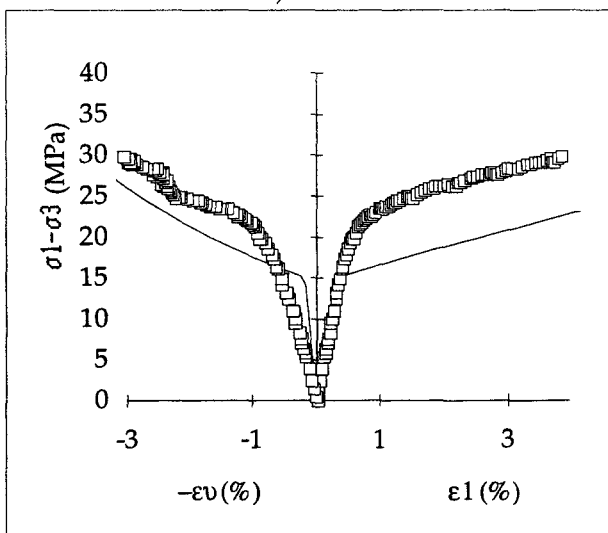
Fig 4.13 : Simulations des essais de compression déviatorique, craie de Bois Bernard.



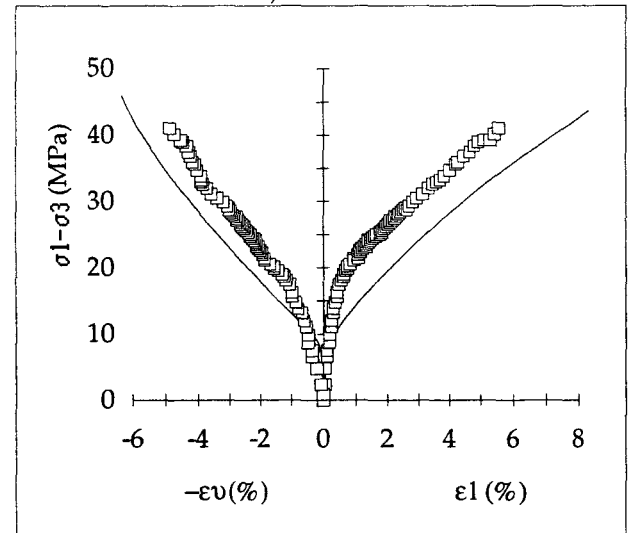
a) 1 MPa



b) 6 MPa



c) 15 MPa



d) 30 MPa

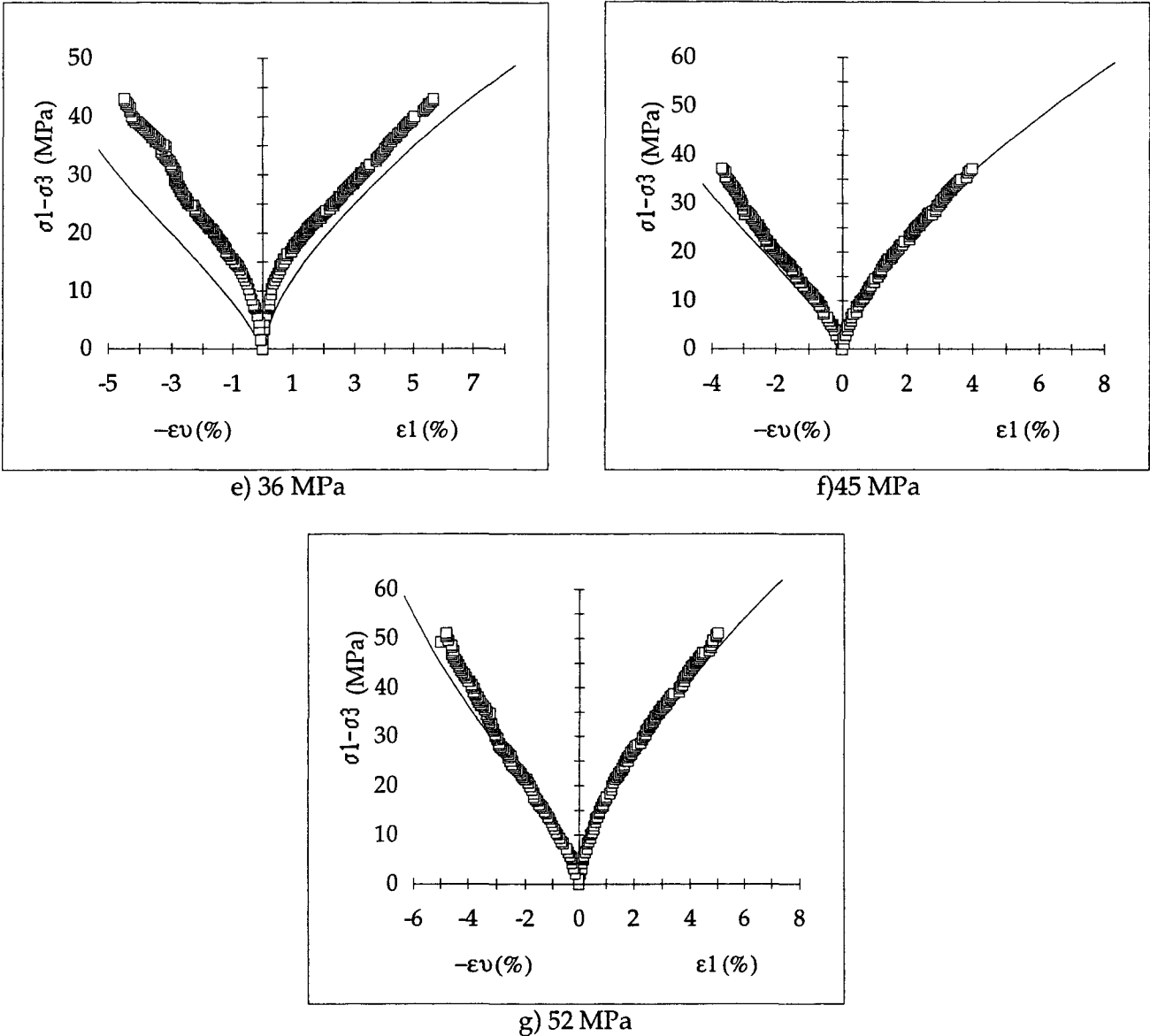
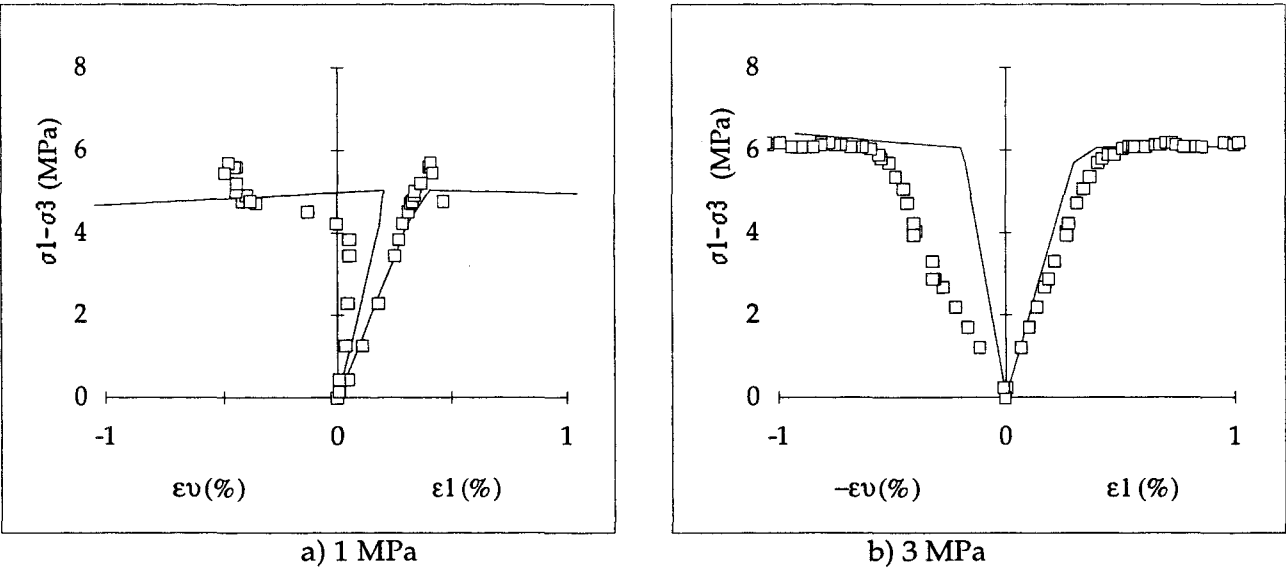
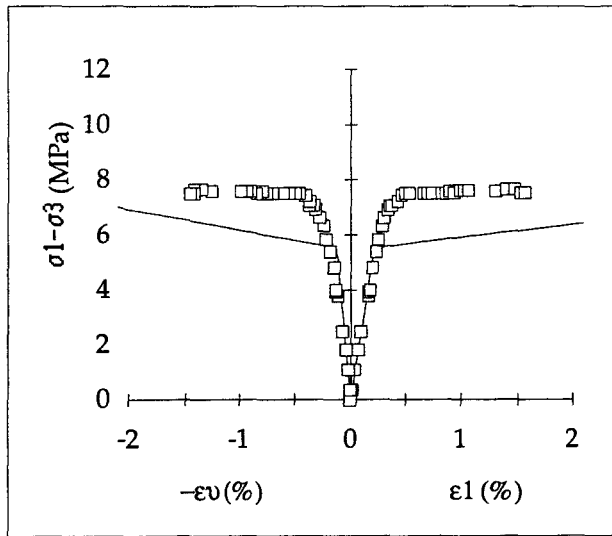
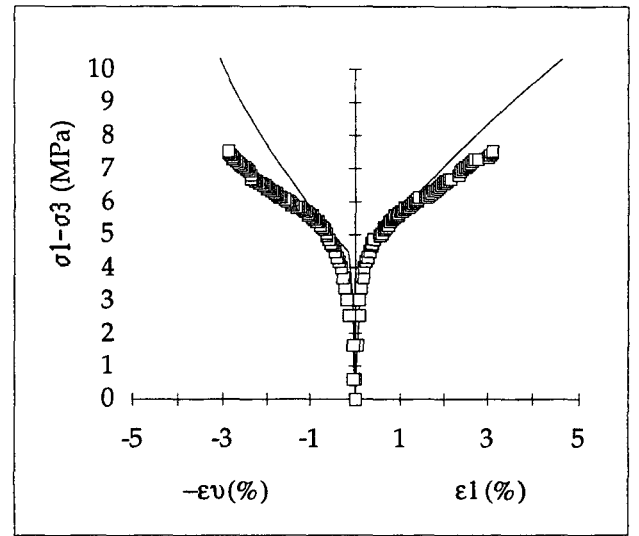


Fig 4.14 : Simulations des essais de compression déviatorique, craie de Dannes.

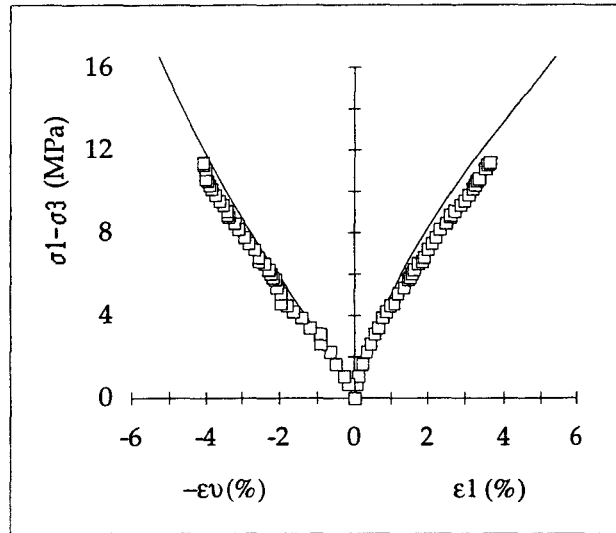




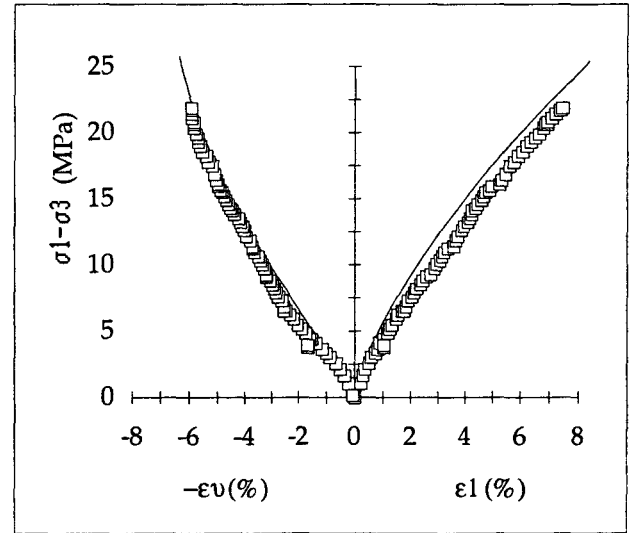
c) 6 MPa



d) 8 MPa



e) 15 MPa



f) 17 MPa

Fig 4.15 : Simulations des essais de compression déviatorique, craie de Liège.

IV.4 - Etude paramétrique

IV.4.1 - Influence des paramètres α et β

Les paramètres α et β régissent la taille et la forme du domaine élastique initial. Une variation de ces paramètres induit une modification de ce domaine. Ceci est illustré pour α sur les figures 4.16 et pour β sur les figures 4.17. Pour étudier la sensibilité de ces paramètres, on leur impose une variation de $\pm 10\%$. On constate que l'influence de ces paramètres diminue au fur et à mesure que la pression de confinement augmente. Contrairement à α , β influe sur la valeur des déformations plastiques à hauts confinements. Un rajustement du domaine élastique initial doit donc être effectué de préférence avec le paramètre α .

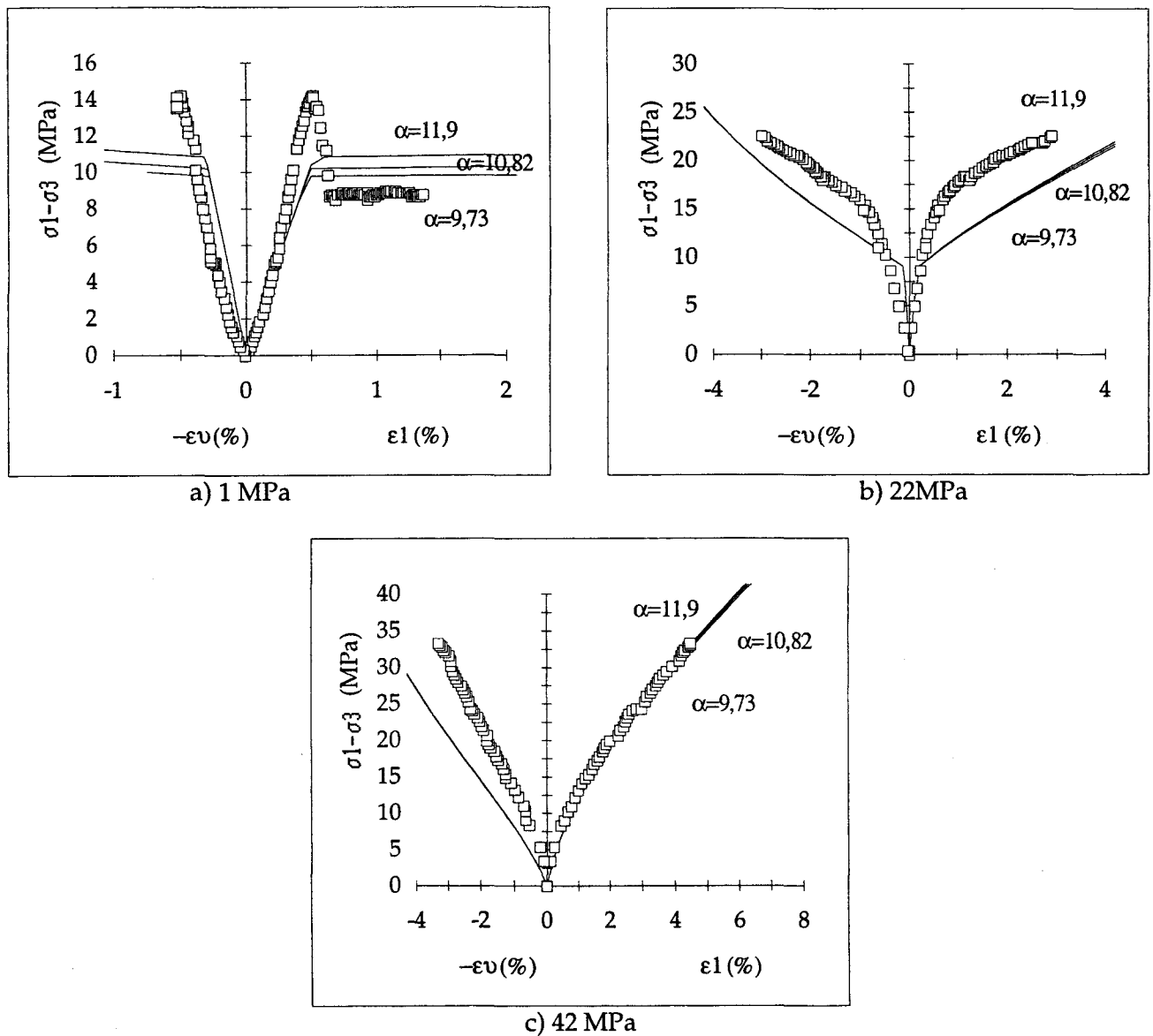


Fig 4.16 Sensibilité du paramètre α sur la simulation des essais de compression déviatorique de la craie de Bois-Bernard.

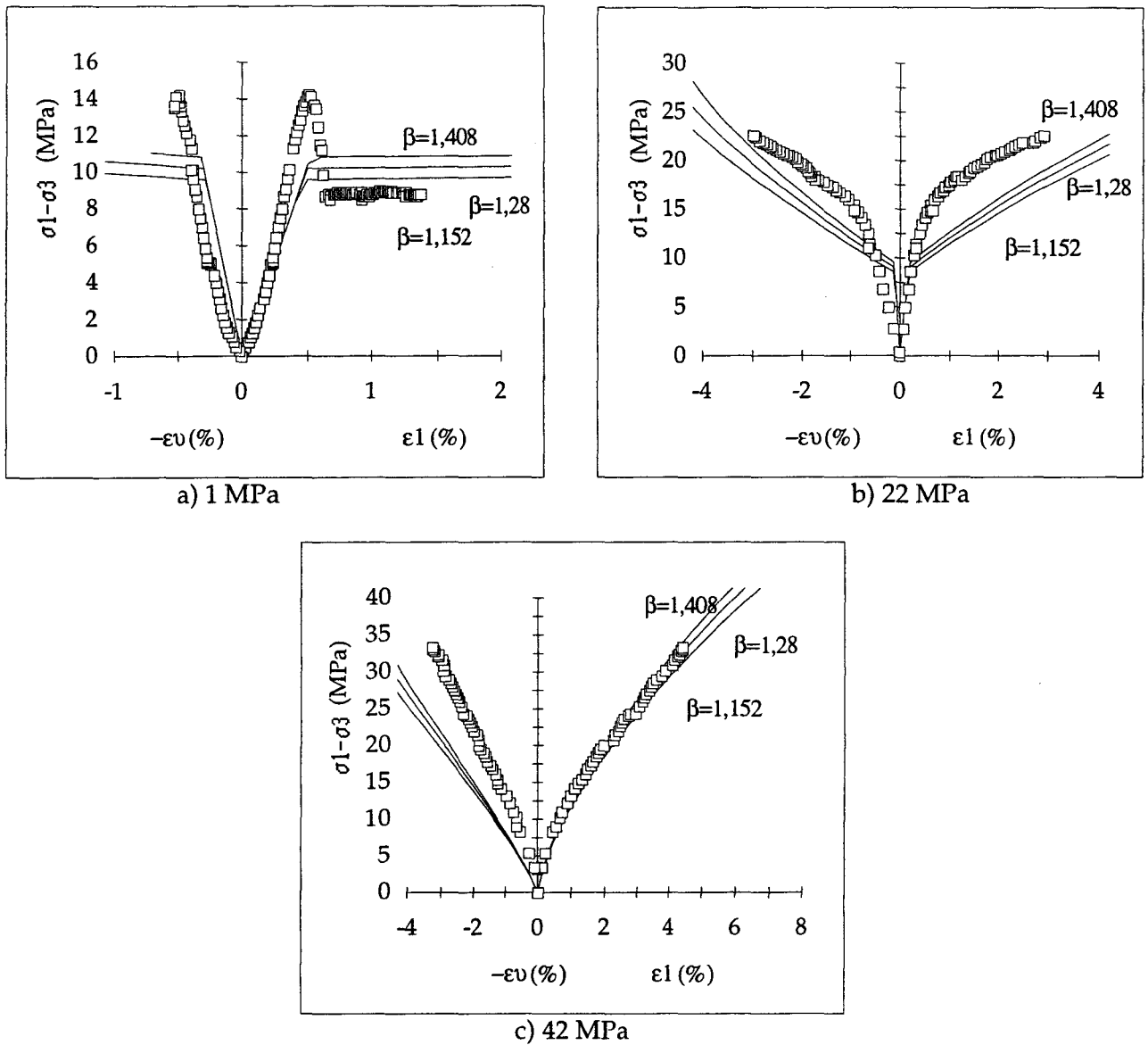


Fig 4.17 Sensibilité du paramètre β sur la simulation des essais de compression déviatorique de la craie de Bois-Bernard.

IV.4.2 - Influence du paramètre γ

Le paramètre γ est calculé à partir de M en utilisant la relation 4.23. Une variation de $\pm 10\%$ de la valeur de M entraîne pour γ une variation de $\pm 3\%$. On observe sur les figures 4.18 que ce paramètre a une très grande sensibilité. Il agit de manière sensible sur le seuil d'écoulement dans les essais à confinements inférieurs au P_0 (figures 4.18 a et b) et sur la valeur des déformations axiales. Son influence sur les déformations volumiques à hauts confinements est moindre (figure 4.18 b).

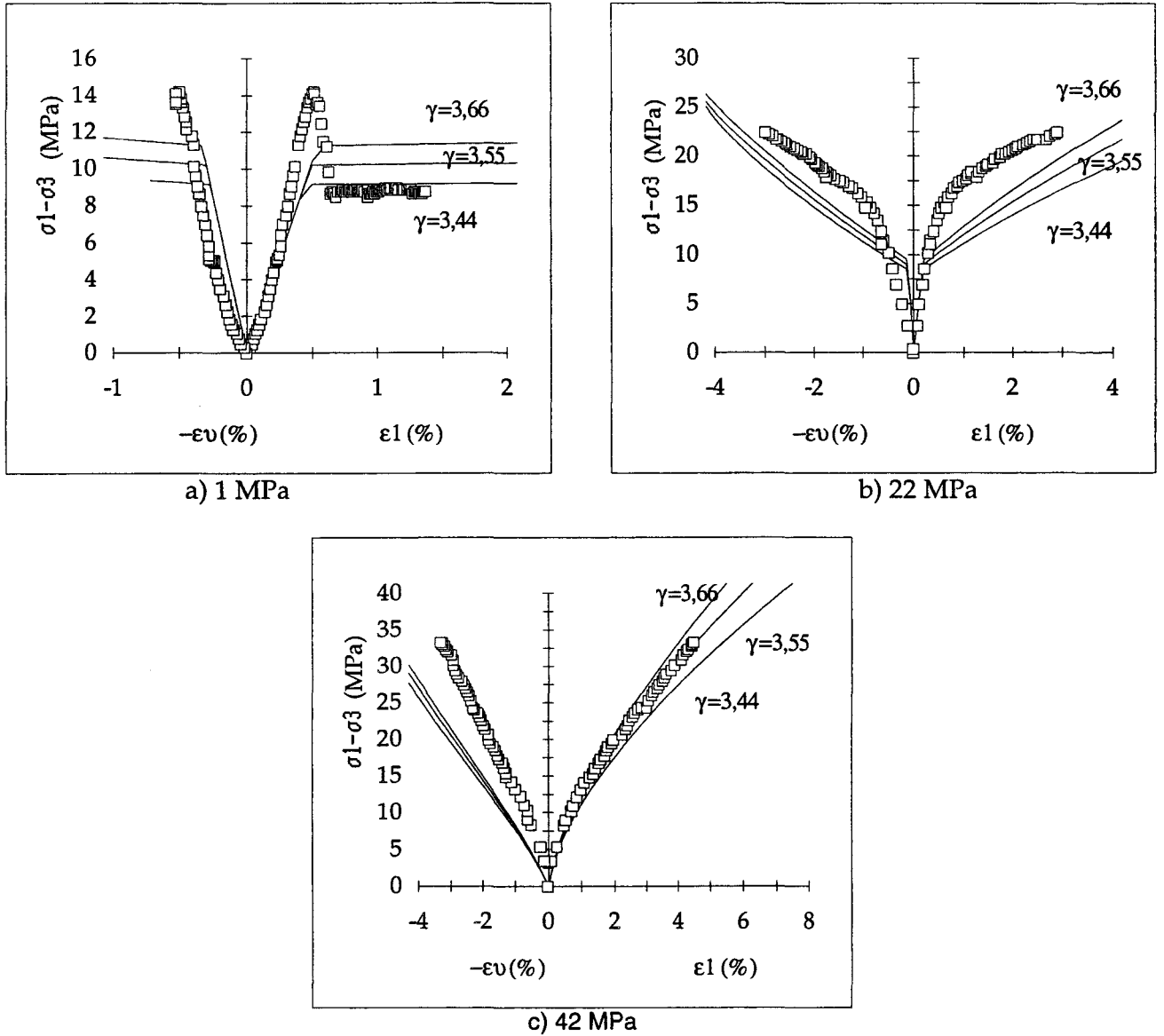


Fig 4.18 Sensibilité du paramètre γ sur la simulation des essais de compression déviatorique de la craie de Bois-Bernard.

IV.4.3 - Influence du paramètre ξ

Les figures 4.19 montrent qu'une variation de la valeur de ξ de $\pm 10\%$ n'affecte que de manière pondérée la valeur des déformations axiales et volumiques.

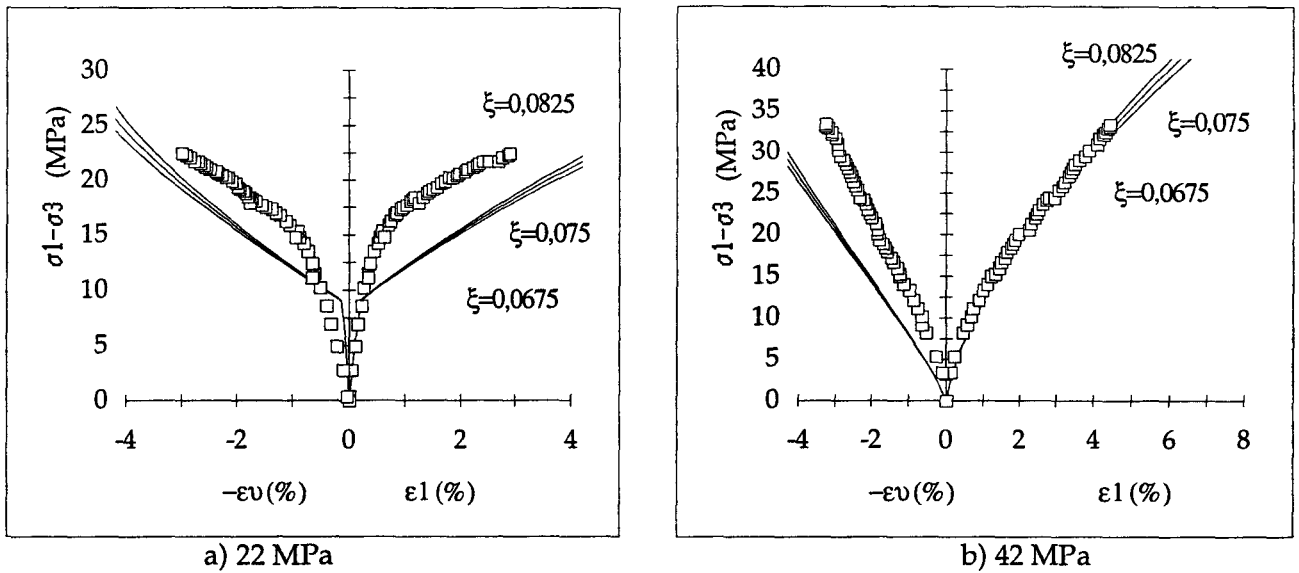
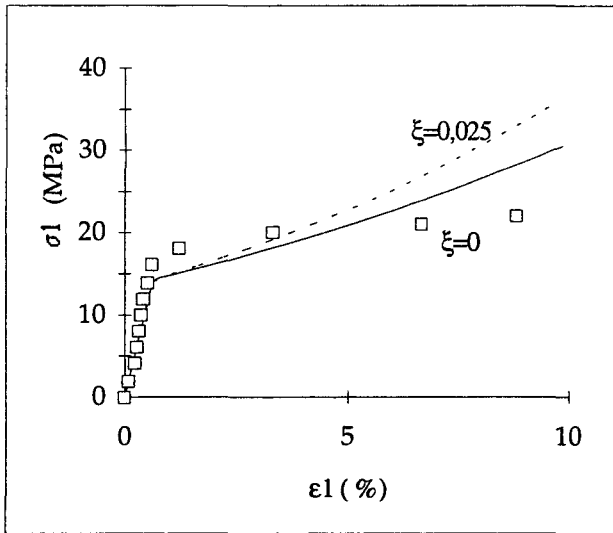


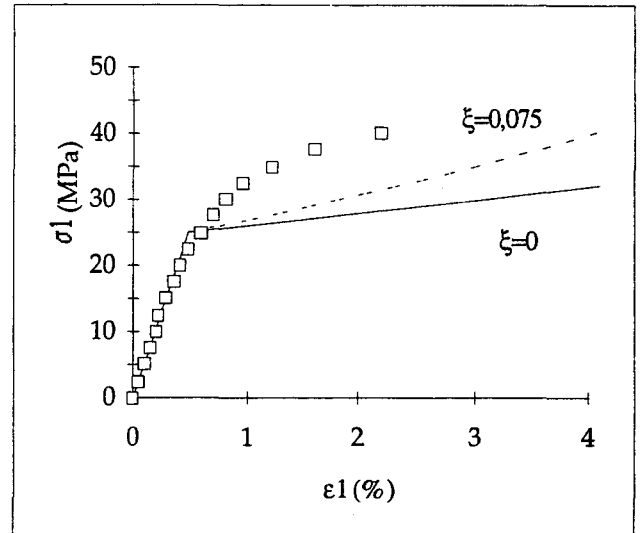
Fig 4.19 Sensibilité du paramètre ξ sur la simulation des essais de compression déviatorique de la craie de Bois-Bernard.

IV.5-Validation sous chemin proportionnel

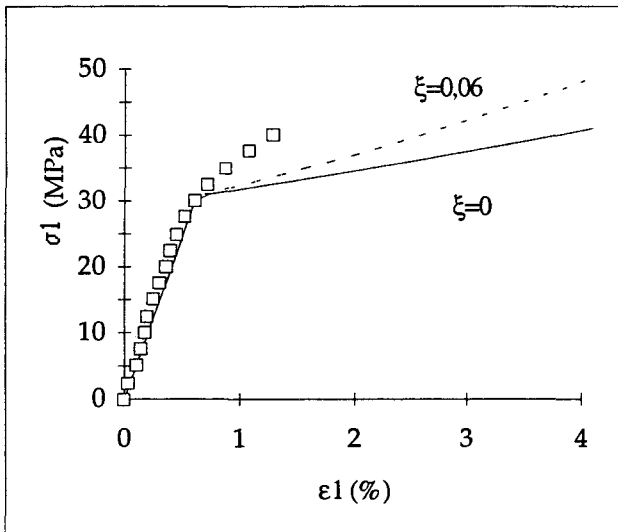
Sur les figures 4.20a à 4.20d sont représentées les simulations des essais de compression proportionnelle réalisés sur les quatre craies. On constate, tout comme pour le modèle Cam-clay modifié, que l'allure générale des courbes est respectée. Pour les quatre craies, la valeur du seuil d'écoulement est correctement prédite par le modèle. Les valeurs de déformations axiales pour la craie de Liège sont en bonne concordance avec les valeurs expérimentales. Pour la craie d'Haubourdin, les valeurs numériques restent acceptables. On observe également sur ces courbes l'influence de la valeur du paramètre ξ . Ce paramètre a une influence beaucoup plus prononcée dans ces essais que dans les essais de compression déviatorique (figures 4.19a et 4.19b). On met en évidence, par l'intermédiaire de ce paramètre, l'importance de la valeur de la pression de confinement sur le comportement des craies. En effet, dans les essais de compression proportionnelle la pression de cellule évolue de manière simultanée avec la contrainte déviatorique; il en est donc de même de la compressibilité de la craie. Comme le paramètre ξ est relié à cette compressibilité, il est fort probable que sa valeur évolue en fonction de la pression de confinement.



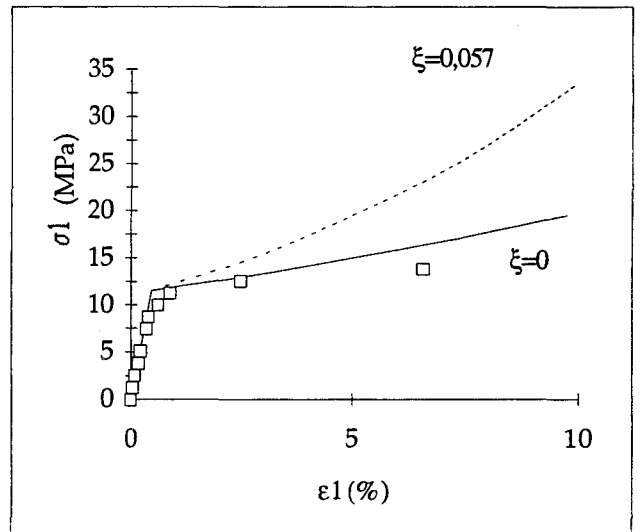
a) - Craie d' Haubourdin



b) - Craie de Bois-Bernard



c) - Craie de Dannes



d) - Craie de Liège

Fig 4.20 : Simulations des essais de compression proportionnelle.

IV.6-Conclusion

On a montré dans ce chapitre que l' utilisation du modèle de Nova permet de faire face aux limites du modèle de Cam-Clay pour les craies étudiées. Les paramètres de ce modèle sont liés à des constantes classiques de la mécanique des sols, ce qui facilite leur détermination. Seul le paramètre ξ nécessite une détermination numérique. Les simulations présentées montrent une bonne aptitude de ce modèle à retranscrire tant sur le plan quantitatif que sur le plan qualitatif le comportement des craies dans des essais de compression isotrope et déviatorique. Il permet de retranscrire correctement le passage du domaine fragile au domaine ductile. De plus, on retrouve de manière fidèle le caractère contractant dilatant des craies à basses pressions de confinement. L'estimation des déformations axiales et volumiques dans les essais à hautes pressions de confinement est tout à fait acceptables.

CONCLUSION DE LA 2^{ème} PARTIE

Le comportement des quatre craies présentées dans la chapitre II est bien en concordance avec les diverses observations tirées de la littérature. Leur comportement dépend à la fois de la microstructure et de la pression de confinement dans les essais de compression déviatorique et les essais de torsion. Dans le chapitre III, On a montré les limites du modèle Cam-Clay modifié. Celui-ci retranscrit de manière correcte le comportement sous contrainte isotrope, mais conduit à une surestimation des déformations plastiques axiales et volumiques dans les essais de compression déviatorique. L'utilisation d'une seule variable d'écrouissage et le couplage des deux mécanismes de déformation représente un obstacle à la simulation de ces essais. De plus il fait apparaître pour certains confinements inférieurs à la limite élastique en compression isotrope une dilatance qui n'est pas observée expérimentalement. La forme de la surface de charge, donc du potentiel plastique, ne semble pas adaptée au cas des craies, et plus précisément pour les valeurs de pression inférieur à $P_0/2$. Une amélioration sensible de la description du comportement des craies a été apportée par l'utilisation du modèle de Nova. Les points essentiels qui ont été modifiés sont la prise en compte de la résistance initiale à la traction de la craie, la forme du potentiel plastique et l'introduction d'une seconde variable d'écrouissage. Ces différents aspects nous ont permis d'améliorer la prédiction du comportement volumique des essais à bas confinements et l'estimation des déformations axiales et volumiques dans les essais à hauts confinements. Les paramètres de ce modèle ont l'avantage d'être reliés à des caractéristiques classiques de la mécanique des sols (cohésion, angle de frottement). Cependant, nous ne pouvons pas relier le paramètre ξ à la déformation volumique comme le fait Nova. Ce point devrait donc faire l'objet d'investigations supplémentaires. Il semble que le choix de la seconde variable est judicieux, mais que son introduction doit être effectuée indépendamment des variations de volume. Un autre point abordé lors de cette partie concerne l'hypothèse de normalité de l'incrément de déformation par rapport à la surface de charge. Les valeurs de β déterminées pour les quatre craies laissent penser que cette hypothèse n'est pas valable pour les craies étudiées.

INTRODUCTION DE LA 3^{ème} PARTIE

Nous avons montré dans la deuxième partie de ce travail que le modèle de Nova permet de retranscrire le comportement de la craie soumise à des sollicitations simples (compression isotrope déviatorique ou proportionnelle). Dans la réalité un massif de sol peut être soumis à des contraintes d'origines diverses (tectonique, marine, etc...). Dans la majeure partie de ces cas les directions des contraintes principales subissent une réorientation (cyclique ou monotone), on peut également être en présence de grandes déformations ou rotations. Le problème qui se pose alors est de déterminer dans quelles mesures les modèles, établis suivant la démarche présentée dans l'introduction de ce travail, sont utilisables sous des sollicitations plus complexes. Pour pouvoir répondre à cette question, il est nécessaire d'établir des codes de validation permettant de pouvoir conduire les calculs jusqu'à des déformations importantes, pouvant inclure de grandes rotations. Nous proposons dans cette partie d'établir les bases d'un tel code de calcul. La finalité étant de pouvoir par la suite comparer la réponse des modèles dans des situations aussi complexes que celles rencontrées dans le domaine du Génie-Civil et Génie pétrolier. Ce code est ensuite utilisé pour d'étudier la pertinence du modèle de Nova à reproduire le comportement d'une Craie (Craie d'Hauboudin) soumise à des sollicitations monotones de torsion-compression (isotrope et déviatorique). Dans ce type d'essai, il se produit une rotation continue des axes principaux de contrainte ainsi que des rotations matérielles. Les essais réalisés sur cette craie ont été présentés dans le chapitre II.

D'une manière générale, la validité (ou la non-validité) d'une loi de comportement ne peut être établie que si la démarche adoptée respecte les principes physiques et numériques fondamentaux. En d'autres termes, on doit définir une loi de comportement respectant le principe de l'indifférence matérielle et utiliser des schémas de calcul qui assurent d'une part la consistance avec cette loi et d'autre part l'objectivité incrémentale et la stabilité numérique de la solution. Nous présentons par la suite les solutions qui ont été adoptées pour essayer de respecter ces différents critères.

Cette partie est divisée en deux chapitres :

- Dans le Premier chapitre, on effectue quelques rappels de cinématique du solide et plus particulièrement sur la cinématique des transformations élastoplastiques. On présente par la suite la formulation variationnelle adoptée ainsi que l'introduction de la loi de comportement dans celle-ci. On détaille à ce sujet les divers choix possibles pour le maintien de l'objectivité de la loi de comportement et donc de la formulation variationnelle. Pour finir, on indique les différentes méthodes numériques retenues pour la résolution des équations d'équilibre et l'intégration de la loi de comportement. Le maintien de l'objectivité incrémentale est également abordé dans ce chapitre.

- Dans le second chapitre nous analysons les résultats obtenus à partir du code de calcul. On effectue en premier lieu une comparaison entre les résultats issus de l'utilisation de différentes dérivées objectives (Jaumann, Jaumann modifié, Oldroyd, Truesdell). Nous présentons ensuite les simulations des essais de torsion compression isotrope et déviatorique sur la craie d'Hauboudin, simulations effectuées à partir du modèle de Nova.

Chapitre V

Modélisation Numérique

V.1 - Rappels de cinématique

V.1.1 - Gradient de déformation

Les matériaux élastoplastiques sont caractérisés par l'apparition de déformations irréversibles au-delà d'un certain seuil de chargement. Ces déformations sont mises en évidence par les déformations résiduelles après relâchement des contraintes. Considérons la transformation d'un solide sous l'action de forces extérieures entre les instants t et $t + \Delta t$ (figure 5.1). On note par $C(t)$ la configuration du solide à l'instant t et par $C(t + \Delta t)$ sa configuration à l'instant $t + \Delta t$.

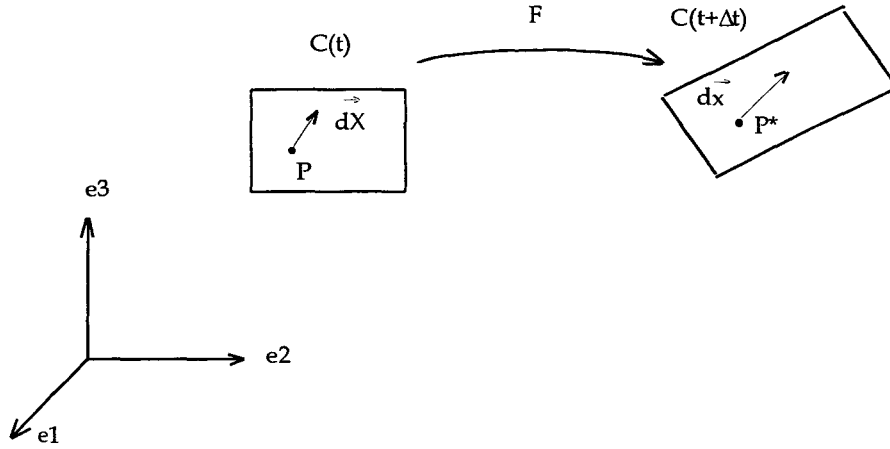


Fig 5.1 : Configurations du solide entre les instants t et $t + \Delta t$.

Dans $C(t)$ un point P est repéré par le vecteur $\vec{X}$ et dans $C(t + \Delta t)$ par le vecteur $\vec{x}$.

$$\vec{X} = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

Ces vecteurs sont reliés par le vecteur déplacement $\vec{u}(\vec{X}, t)$ de la façon suivante :

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) \quad (5.1)$$

La transformation d'un vecteur matériel $d\vec{X}$ en $d\vec{x}$ est caractérisée par une application linéaire appelée gradient de la déformation :

$$d\vec{x} = F(\vec{X}, t) d\vec{X} \quad (5.2)$$

En utilisant une notation indicielle , l'équation 5.2 s'écrit :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (5.3a)$$

soit, en introduisant l'équation 5.1

$$F_{ij} = I + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (I \text{ représente le tenseur unité}) \quad (5.3b)$$

F décrit localement les modifications géométriques du solide comprenant les déformations pures (variation de longueur et d'angle entre deux directions distinctes) et les rotations. Les éléments de volume dV_t et de surface dS_t se transforment respectivement dans $C(t + \Delta t)$ par :

$$dV_{t+\Delta t} = J dV_t \quad (5.4a)$$

$$dS_{t+\Delta t} = J F^{-T} dS_t \quad (5.4b)$$

$$\text{où } J = \det(F) \quad (5.5)$$

Le gradient de vitesse de déformation est défini par :

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_J} \frac{\partial X_J}{\partial x_i} = \dot{F}_{ij} F_{ji} \quad (5.6a)$$

v représente la vitesse de la particule matérielle P .

L'équation 5.6a s'exprime encore sous la forme :

$$L = \dot{F} F^{-1} \quad (5.6b)$$

Ce tenseur se décompose en une partie symétrique D et une partie antisymétrique W . Ces derniers sont appelés respectivement tenseur des taux de déformation et des taux de rotation. Ils s'expriment par :

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) \quad (5.7a)$$

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T) \quad (5.7b)$$

du fait des propriétés de ces tenseurs on peut écrire :

$$D = D^T \quad W = -W^T \quad (5.8)$$

Pour caractériser les déformations et les rotations, on introduit également la décomposition polaire de F . Celle ci s'écrit :

$$F = RU = VR \quad (5.9)$$

avec R : " tenseur de rotation " orthogonal
 U : " tenseur de déformation pure droit ", tenseur Lagrangien
 V : " tenseur de déformation pure gauche ", tenseur Eulérien

où U et V sont symétriques définis positifs. Pour un mouvement de corps rigide on a : $U = V = I$.

V.1.2 - Décomposition du tenseur taux de déformation

La difficulté, pour étendre les lois élastoplastiques définies sous l'hypothèse des petites déformations aux grandes transformations, réside dans la définition de manière additive de la vitesse de déformation en une partie élastique D^e et plastique D^p . Cette décomposition est possible en introduisant une configuration relâchée $C(\tau)$ (Sidoroff, 1982). Celle-ci est obtenue après déchargement élastique du solide (figure 5.2). Dans cette configuration les déformations élastiques ont disparu, seules subsistent les déformations plastiques. Le relâchement des contraintes n'a de sens que localement. En effet, si l'on considère l'ensemble du solide, la plasticité induit la présence de contraintes résiduelles.

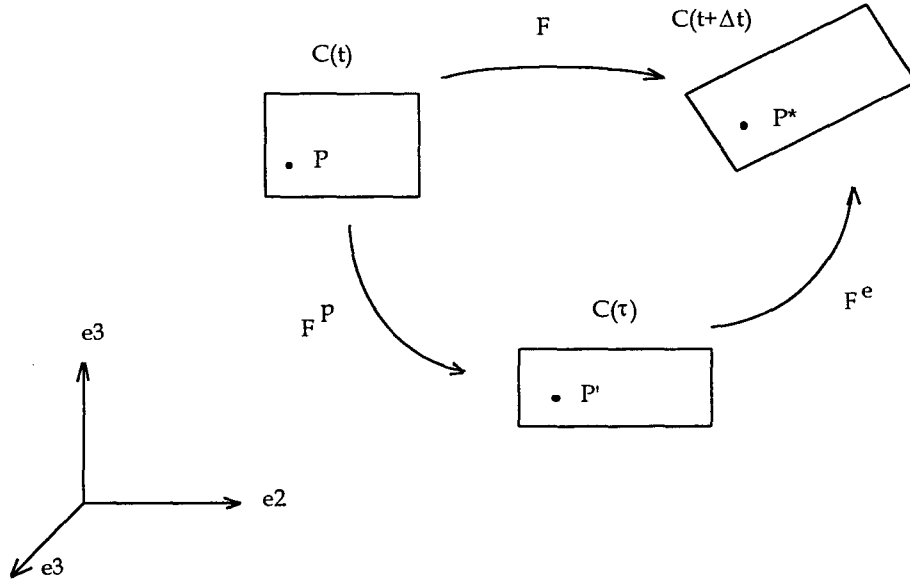


Fig 5.2 : Décomposition du gradient en une partie élastique et une partie plastique.

La position du point P dans $C(\tau)$ est repérée par le vecteur $\bar{\chi}$, avec :

$$\bar{\chi} = \chi_1 \bar{e}_1 + \chi_2 \bar{e}_2 + \chi_3 \bar{e}_3$$

La transformation $C(t) \Rightarrow C(\tau) \Rightarrow C(t + \Delta t)$ se décompose de la façon suivante :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \chi_k} \frac{\partial \chi_k}{\partial X_j} = F_{ik} F_{kj} \quad (5.10a)$$

ou encore, avec les notations de la figure 5.2 :

$$F = F^e F^p \quad (5.10b)$$

Le gradient vitesse de déformation vaut :

$$\begin{aligned} L &= (\dot{F}^e F^p + F^e \dot{F}^p) F^{p-1} F^{e-1} \\ L &= \dot{F}^e F^{e-1} + F^e \dot{F}^p F^{p-1} F^{e-1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Il se décompose comme en petites déformations en une partie élastique $L^e = \dot{F}^e F^{e-1}$ et une partie plastique $L^p = F^e \bar{L}^p F^{e-1}$, avec :

$$\bar{L}^P = \dot{F}^P F^{P^{-1}} \quad (5.12)$$

qui représente le gradient de déformation dans la configuration relâchée.

Si l'on suppose que toute la rotation se mobilise dans la partie élastique, on a :

$$F^e = R^e U^e \quad (5.13a)$$

et

$$F^P = R^P U^P = U^P \quad (5.13b)$$

Alors $\bar{L}^P$ est symétrique puisque U^P l'est et le tenseur L^P apparaît comme le transporté de $\bar{L}^P$ dans la configuration finale. Il résulte de cette observation que le tenseur $\bar{L}^P$ est une mesure objective de la vitesse de déformation plastique.

Si l'on considère maintenant l'hypothèse des petites déformations élastiques ($F^e = R^e U^e = R^e$), on peut alors écrire (Sidoroff, 1982) :

$$D^P = \text{sym}(R^e \bar{L}^P R^{eT}) = R^e \bar{L}^P R^{eT} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (5.14a)$$

et

$$W^P = 0 \text{ (taux de rotation plastique)} \quad (5.14b)$$

où g représente le potentiel plastique.

Sous l'hypothèse des petites déformations élastiques on retrouve donc le schéma classique des petites déformations élasto-plastiques, on a en particulier :

$$D = D^e + D^P \quad (5.15)$$

V.2 - Formulation variationnelle

V.2.1 - Le Principe des Puissances Virtuelles

Considérons un solide en équilibre, à un instant donné, soumis à des sollicitations extérieures. Sous l'action de ces forces, l'équilibre du solide s'exprime en considérant que pour toute perturbation virtuelle des coordonnées dans la configuration déformée, la puissance virtuelle des forces extérieures $\delta \bar{W}_{ext}$ est égale à la puissance virtuelle des efforts intérieurs $\delta \bar{W}_{int}$.

$$\delta \bar{W}_{ext} = \int_V f_v^T \delta v \, dV + \int_S f_s^T \delta v \, dS \quad (5.16)$$

Avec V et S qui sont respectivement le volume et la surface du solide déformé et δv champ de vitesses virtuelles. Ce dernier, pour être cinématiquement admissible, doit respecter les conditions de déplacement imposées sur le contour et la continuité du solide. f_s représente les forces par unité de surface déformée appliquées au solide et $f_v = \rho f_m$ les sollicitations de volume (f_m représente une force par unité de masse, ρ représente la masse volumique du solide (figure 5.3)).

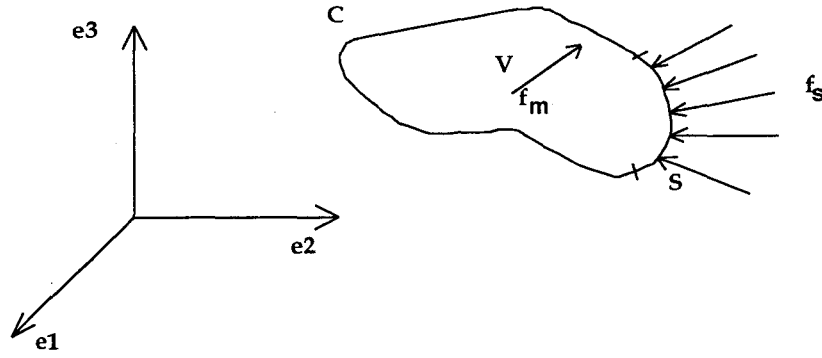


Fig 5.3 : Conditions aux frontières du solide.

Dans le repère (e_1, e_2, e_3) les équations d'équilibre local du solide s'écrivent :

$$f_s = n_i \sigma_{ij} e_j \quad (\text{en surface}) \quad (5.17a)$$

$$f_{vj} + \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} = 0 \quad (\text{en volume}) \quad (5.17b)$$

en introduisant ces équations dans 5.16, on obtient :

$$\delta \bar{W}_{\text{ext}} = - \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta v_j dV + \int_S n_i \sigma_{ij} \delta v_j dS$$

On transforme ensuite l'intégrale de surface en une intégrale de volume (théorème de Gauss).

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_{\text{ext}} &= \int_V \left[- \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta v_j + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} \delta v_j) \right] dV \\ &= \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} dV \end{aligned}$$

Du fait de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy, nous pouvons écrire :

$$\delta \bar{W}_{\text{int}} = \int_V \sigma_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \delta v_i \right) \right] dV = \int_V \sigma_{ij} D_{ij}(\delta v) dV$$

finalement, on obtient :

$$\int_V \sigma_{ij} \delta D_{ij} dV = \int_V f_v^T \delta v dV + \int_S f_s^T \delta v dS \quad (5.18)$$

$$\text{avec : } \delta D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \delta v_i \right) \quad (5.19)$$

ou encore

$$\int_V \sigma : \delta D dV = \int_V f_v^T \delta v dV + \int_S f_s^T \delta v dS \quad (5.20)$$

Cette équation constitue le principe des puissances virtuelles. Pour établir cette équation nous avons choisi d'utiliser le tenseur des contraintes de Cauchy. Celui est en effet défini dans la configuration déformée du solide et offre l'avantage d'être facilement interprétable. Cette représentation des contraintes est également la plus adaptée à la résolution des problèmes élasto-plastiques. Cependant, pour établir le principe des puissances virtuelles, on aurait pu utiliser d'autres représentations du tenseur des contraintes. Il convient dans ce cas d'utiliser une bonne représentation de la déformation virtuelle. Cescotto (1982) donne un récapitulatif de ces différentes grandeurs. Remarquons également que le principe des puissances virtuelles, tel qu'il est écrit, ne fait aucune hypothèse sur l'amplitude des déformations ou rotations, ainsi que sur la nature du matériau.

La formulation développée (équation 5.20) est de type Eulérienne. En effet, toutes les quantités sont définies dans la configuration déformée. En général le volume V du solide est inconnu, il est alors nécessaire pour les calculs de transformer le domaine d'intégration. En effet, en présence de grandes transformations, les configurations successives du solide ne peuvent plus être confondues comme cela se fait sous l'hypothèse des petites déformations. Soit l'intégration se fait sur le volume initial du solide (avant déformation) soit il se fait au cours d'une résolution incrémentale sur le dernier volume déterminé. C'est cette dernière solution que nous avons adoptée.

Si nous reprenons la transformation définie par la figure 5.1, l'équation 5.20 écrite au niveau de la configuration déformée $C(t + \Delta t)$ s'exprime par :

$$\int_{V_{t+\Delta t}} \sigma^{t+\Delta t} : \delta D^{t+\Delta t} dV_{t+\Delta t} = \int_{V_{t+\Delta t}} f_v^{t+\Delta t T} \delta v dV_{t+\Delta t} + \int_{S_{t+\Delta t}} f_s^{t+\Delta t T} \delta v dS_{t+\Delta t}$$

Si l'on reporte l'intégration sur la dernière configuration connue $C(t)$, on obtient alors :

$$\int_{V_t} \int_t^{t+\Delta t} \sigma^{t+\Delta t} : \delta D^{t+\Delta t} dV_t = \int_{V_t} f_v^{t+\Delta t T} \delta v dV_t + \int_{S_t} f_s^{t+\Delta t T} \delta v dS_t \quad (5.21)$$

avec $f_v^{t+\Delta t}$ et $f_s^{t+\Delta t}$ qui représentent respectivement les forces de volume et de surface s'exerçant dans la configuration $C(t+\Delta t)$ exprimées par unité de volume et de surface de la configuration $C(t)$.

L'équation 5.21 peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} \overline{W}_t^{t+\Delta t} &= \int_{V_t} f_v^{t+\Delta t T} \delta v dV_t + \int_{S_t} f_s^{t+\Delta t T} \delta v dS_t - \int_{V_t} \int_t^{t+\Delta t} \sigma^{t+\Delta t} : \delta D^{t+\Delta t} dV_t = 0 \\ &= \overline{W}_{ext_t}^{t+\Delta t} - \overline{W}_{int_t}^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (5.22)$$

où $\bar{W}_{ext_t}^{t+\Delta t}$ et $\bar{W}_{int_t}^{t+\Delta t}$ représentent respectivement la contribution des efforts externes et internes au solide.

Nous développons ainsi une "formulation Lagrangienne actualisée". Notons que cette appellation diffère de celle habituellement rencontrée dans la littérature dans la mesure où l'on utilise des mesures Eulériennes de la contrainte et de la déformation.

V.2.2 - Forme Taux du Principe des Puissances Virtuelles

Les lois de comportement élastoplastique s'expriment sous forme de vitesse ou sous forme incrémentale. Celles ci ne peuvent donc être introduite dans le principe des puissances virtuelles que sous cette forme. Considérons la forme taux de la partie interne de ce dernier, celle-ci est obtenue par dérivation du principe de base (équation 5.22). Cette forme servira à établir la matrice de rigidité tangente de la méthode de résolution des équations d'équilibre que nous présentons dans le paragraphe V.3.1.

$$\dot{\bar{W}}_{int} = \int_{V_t} (\mathbf{J}_t^{t+\Delta t} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{t+\Delta t} : \delta \mathbf{D}^{t+\Delta t} + \mathbf{J}_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} : \delta \dot{\mathbf{D}}^{t+\Delta t} + \dot{\mathbf{J}}_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} : \delta \mathbf{D}^{t+\Delta t}) dV_t \quad (5.23)$$

Par soucis de clarté, il est préférable d'abandonner quelques instants la notation précédente, nous réécrivons donc l'équation 5.23 sous la forme :

$$\dot{\bar{W}}_{int} = \int_V (\mathbf{J} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \mathbf{D}) + \mathbf{J} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\mathbf{D}}) + \dot{\mathbf{J}} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D})) dV$$

$$\text{où} \quad \delta \dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\delta \dot{\mathbf{L}} + \delta \dot{\mathbf{L}}^T) \quad (5.24)$$

Calculons $\delta \dot{\mathbf{L}}$

$$\delta \mathbf{L} = \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{L}} &= \delta \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \delta \mathbf{F} \dot{\mathbf{F}}^{-1} = \delta \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \\ &= -\delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = -\delta \mathbf{L} \mathbf{L} \end{aligned}$$

Cette équation se démontre facilement en remarquant que $\delta \dot{\mathbf{v}} = 0$ (par définition) et alors $\delta \dot{\mathbf{F}} = 0$.

On obtient donc pour $\delta \dot{\mathbf{D}}$

$$\delta \dot{\mathbf{D}} = -\frac{1}{2}(\delta \mathbf{L} \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \delta \mathbf{L}^T) \quad (5.25)$$

ou encore en introduisant les quantités définies par 5.7a et 5.7b :

$$\delta \dot{\mathbf{D}} = -\frac{1}{2}(2\delta \mathbf{D} \mathbf{D} + 2\mathbf{W} \delta \mathbf{W} + \delta \mathbf{D} \mathbf{W} + \delta \mathbf{W} \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \delta \mathbf{W}^T + \mathbf{W}^T \delta \mathbf{D}^T) \quad (5.26)$$

de plus nous avons :

$$\dot{J} = J \text{tr}(D) \quad (5.27)$$

Compte tenu des propriétés de symétrie de D et d'antisymétrie de W , on montre que :

$$\text{tr}(\sigma \delta D W) = \text{tr}(\sigma \delta W D) = \text{tr}(\sigma D^T \delta W^T) = \text{tr}(\sigma W^T \delta D^T) = 0 \quad (5.28)$$

L'équation 5.23 se met donc finalement sous la forme :

$$\dot{\bar{W}}_{\text{int}} = \int_V (J \text{tr}(\dot{\sigma} \delta D) - J \text{tr}(\delta D \sigma D) - J \text{tr}(\delta W \sigma W) + J \text{tr}(D) \text{tr}(\sigma \delta D)) dV \quad (5.29)$$

Le dernier terme de cette expression fait apparaître une contribution due à la variation de volume $\text{tr}(D)$. Ce terme rend la matrice de rigidité non-symétrique dans la mesure où on utilise une loi de comportement associée. Dans un tel cas, ce terme est parfois négligé pour rendre à cette matrice la propriété de symétrie et par la même, d'alléger les calculs en utilisant des algorithmes spécifiques de résolution de système symétrique.

En reprenant les notations du début de paragraphe l'équation 5.29 s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{W}}_{\text{int}} = \int_{V_t} & (J_t^{t+\Delta t} \text{tr}(\dot{\sigma}^{t+\Delta t} \delta D^{t+\Delta t}) - J_t^{t+\Delta t} \text{tr}(\delta D^{t+\Delta t} \sigma^{t+\Delta t} D^{t+\Delta t}) - \\ & J_t^{t+\Delta t} \text{tr}(\delta W^{t+\Delta t} \sigma^{t+\Delta t} W^{t+\Delta t}) + J_t^{t+\Delta t} \text{tr}(D^{t+\Delta t}) \text{tr}(\sigma^{t+\Delta t} \delta D^{t+\Delta t})) dV_t \end{aligned} \quad (5.30)$$

avec une loi de comportement reliant $\dot{\sigma}$ et D .

V.2.3 - Introduction de la loi de comportement dans le P.P.V.

Afin de respecter le principe d'objectivité de la loi de comportement et donc de la formulation variationnelle, il est nécessaire de choisir une dérivée objective des contraintes de Cauchy. Il existe dans la littérature différentes dérivées que nous proposons d'analyser

Dérivée de Jaumann des contraintes de Cauchy : σ^J

La construction de cette dérivée est basée sur l'approche "référentiel co-rotationnel". Le repère co-rotationnel est un repère particulier dans lequel le taux de rotation de la particule considérée est nul. Cette dérivée est définie par la relation :

$$\sigma^J = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma^{ij*} - \sigma^{ij}}{\Delta t} \quad (5.31)$$

σ^{ij*} et σ^{ij} représentent respectivement les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans les repères cartésiens orthonormés e_i^* et e_i . Le repère e_i^* suit la rotation de la particule matérielle tandis que e_i reste fixe. Ces deux repères coïncident à l'instant $t=0$. La dérivée de Jaumann est reliée à la dérivée matérielle $\dot{\sigma}$ par la relation :

$$\sigma^J = \dot{\sigma} - W\sigma + \sigma W \quad (5.32)$$

Cette dérivée est la plus utilisée dans la littérature. Elle est bien adaptée à la résolution des problèmes en petites perturbations (Molenkamp, 1986; Dienes, 1979). Lorsque l'on considère de grandes transformations élastoplastiques à écrouissage cinématique en cisaillement simple, cette dérivée conduit à une oscillation des contraintes (Nagtegaal, 1982; Cescotto & al, 1982), comportement physiquement inacceptable. Dans le cadre d'un matériau isotrope à écrouissage isotrope cette incompatibilité disparaît (Detraux, 1985).

A partir de cette dérivée d'autres dérivées ont été construites (dérivée de Truesdell, Oldroyd, Cotter-Rilvin, Jaumann modifié). Ces dérivées sont regroupées dans le tableau 5.1. Elles ne diffèrent de la dérivée de Jaumann que par l'adjonction de termes fonction de D (taux de vitesse de déformation). Ces dérivées sont objectives dans la mesure où ces termes disparaissent en cas de rotation pure ($D=0$).

Nom	Expression
Dérivée de Truesdell	$\sigma^{Tr} = \dot{\sigma} - L\sigma - \sigma L^T + \sigma \text{tr}(D)$
Dérivée d'Oldroyd	$\sigma^o = \dot{\sigma} - L\sigma - \sigma L^T$
Dérivée de Cotter-Rilvin	$\sigma^{CR} = \dot{\sigma} + L^T\sigma + \sigma L$
Dérivée de Jaumann modifiée	$\sigma^{Jm} = \dot{\sigma} - W\sigma + \sigma W + \sigma \text{tr}(D)$

Tab 5.1 : Tableau des dérivées objectives.

Observons les relations reliant ces différentes dérivées. On considère tout d'abord la dérivée de Truesdell :

$$\sigma^{Tr} = \dot{\sigma} - L\sigma - \sigma L^T + \sigma \text{tr}(D) \quad (5.33)$$

Supposons à présent que le taux de déformation est faible devant le taux de rotation:

$$L=D+W \approx W$$

on obtient dès lors la dérivée de Jaumann modifiée :

$$\sigma^{Jm} = \dot{\sigma} - W\sigma + \sigma W + \sigma \text{tr}(D) \quad (5.34)$$

Si l'on néglige maintenant l'effet de variation de volume, on retrouve la dérivée de Jaumann :

$$\sigma^J = \dot{\sigma} - W\sigma + \sigma W \quad (5.35)$$

La dérivée d'Oldroyd n'est autre que la dérivée de Truesdell dans laquelle n'apparaît plus le terme tenant compte des variations de volume. On observe alors que le passage d'une dérivée à une autre se fait par approximations successives sur l'amplitude des déformations et rotations. Sous certaines conditions ces dérivées conduisent à des résultats équivalents. L'utilisation particulière d'une de ces dérivées nous amène donc à travailler sous certaines hypothèses qu'il convient de rappeler dans l'exploitation des résultats.

Dérivée de Green-Naghdi (ou dérivée en rotation propre)

Cette dérivée est établie à partir de la décomposition polaire du gradient de la transformation (équation 5.9).

La dérivée de Green-Naghdi s'exprime sous la forme :

$$\dot{\sigma}^{\text{GN}} = \dot{\sigma} - \Omega \sigma + \sigma \Omega \quad (5.36)$$

$$\text{avec } \Omega = \dot{R}R^T = W - \frac{1}{2}R[\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U}]R^T \quad (5.37)$$

Dérivée de Lee (ou dérivée en rotation matérielle)

Lee propose une vitesse des contraintes en choisissant une orientation privilégiée des lignes matérielles pour la définition de la vitesse de rotation Ω^* . Un choix possible est l'orientation des lignes matérielles suivant la direction des contraintes principales du tenseur de Cauchy. Cette dérivée s'écrit :

$$\dot{\sigma}^L = \dot{\sigma} - \Omega^* \sigma + \sigma \Omega^* \quad (5.38)$$

Dans le cas du cisaillement plan, le tenseur rotation se met sous la forme :

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} 0 & \omega^* \\ \omega^* & 0 \end{bmatrix}$$

avec ω composante du vecteur rotation associé.

Choix de la dérivée objective

Cescotto et al (1982) donnent préférence à la dérivée de Truesdell des contraintes de Cauchy pour trois raisons :

- égalité des formes incrémentales du PPV qu'ils développent en l'absence de forces appliquées
- symétrie de la matrice de rigidité (avec l'utilisation d'un tenseur constitutif symétrique)
- absence d'oscillations de contraintes dans le cas de grandes déformations de cisaillement simple.

Pour des matériaux peu sensibles au changement de volume, comme cela est le cas pour les métaux, on utilise généralement la dérivée de Jaumann (Wack, 1982-89; Hart 1982).

Dienes (1979) a étudié la dérivée introduite par Green et Naghdi. Il montre que l'utilisation de cette dérivée est plus adaptée à l'étude des grandes déformations contrairement à la dérivée de Jaumann. En général W et Ω sont différents, mais Molemkamp (1986) démontre en

étudiant les déformations d'un assemblage de disques circulaires que ces deux quantités sont égales lorsqu'il n'y a pas perte de contact entre les disques (petites déformations). La différence entre les vitesses de rotation W et $\mathcal{Q}$ est appelée rotation corotationnelle. En étudiant l'influence de cette rotation sur les contraintes de Cauchy, **Molemkamp** montre que pour des matériaux granulaires cette influence devient significative pour des déformations déviatoriques supérieures à 10%.

D'une manière générale, pour les matériaux élastoplastiques isotrope à écrouissage isotrope on peut alors définir une loi de comportement sous la forme :

$$\overset{\nabla}{\sigma} = H^{\text{ep}} D \quad (5.39)$$

où $\overset{\nabla}{\sigma}$ dénote une dérivée objective des contraintes de Cauchy

V.3 - Méthodes de Résolution

Le calcul numérique de la solution d'un problème élastoplastique nécessite d'une part la résolution des équations d'équilibre et d'autre part l'intégration de la loi de comportement. Ci-dessous nous présentons les schémas numériques retenus pour la résolution de ce type de problème.

V.3.1 - Résolution des équations d'équilibre.

La méthode que nous avons choisie est basée sur la résolution par la méthode de Newton Raphson de l'équation :

$$\dot{\bar{W}}_{\text{int}}^{(n)} = \bar{W}_{\text{ext}}^{t+\Delta t} - \bar{W}_{\text{int}}^{t+\Delta t (n-1)} \quad (5.40)$$

On montre dans le paragraphe V.4.2 que cette équation se met sous forme matricielle :

$$\{\delta u\}^T [K_T(u_t^{t+\Delta t})]^{(n)} \{\Delta u_t^{t+\Delta t}\}^{(n)} = \{\tilde{R}_t^{t+\Delta t}\}^{(n-1)}$$

avec :

$$\{\tilde{R}_t^{t+\Delta t}\}^{(n-1)} = \{\tilde{F}_t^{t+\Delta t}\} - \int_{V_t} (J_t^{t+\Delta t})^{(n-1)} [B_{GD}]^T (n-1) \{\sigma_t^{t+\Delta t}\}^{(n-1)} dV_t$$

Les quantités ci-dessus sont définies dans le paragraphe V.4.2 Le problème non linéaire est donc résolu par découpage en suite de problèmes linéaires. On définit ainsi un processus itératif entre t et $t + \Delta t$ Le calcul est poursuivi jusqu'à ce que R tende vers 0 ou de préférence lorsque le critère de convergence est vérifié (paragraphe V.3.3)

V.3.2 - Intégration des lois de comportement élastoplastique

Lors de l'intégration des lois de comportement, il est impératif de respecter trois critères fondamentaux :

- objectivité incrémentale,
- stabilité numérique,
- consistance avec la loi de comportement.

V.3.2.1 - Configuration intermédiaire d'intégration

Pour respecter le concept d'objectivité incrémentale, il faut que lorsque le solide subit une rotation de corps rigide R pendant un pas de temps Δt , l'état de contrainte dans la configuration finale $\sigma^{t+\Delta t}$ se déduit de l'état de contrainte dans la configuration initiale σ^t par simple rotation. Autrement dit, on doit avoir :

$$\sigma^{t+\Delta t} = R \sigma^t R^T \quad (5.41)$$

Différents d'algorithmes permettant le maintien de l'objectivité pendant un pas de temps ont été proposés. Ils diffèrent par les hypothèses adoptées sur la cinématique de la transformation. Parmi ceux-ci, nous pouvons citer les méthodes du gradient de vitesse constant, de la rotation instantanée finale, de la moyenne et enfin la méthode de la configuration finale (Detraux, 1985, Charlier, 1987; Hamlili 1990). Ces différentes méthodes ne représentent que des approximations de la solution réelle. Le choix de telle ou telle méthode reste un problème complexe. Notre choix c'est porté sur la méthode de la configuration finale en raison de sa cohérence avec l'évolution géométrique du solide. C'est cette dernière nous proposons de détailler ci après.

Les états de contrainte de deux configurations successives ne peuvent être comparés puisqu'ils sont définis dans deux configurations distinctes. On reporte donc les contraintes à une même configuration.

Si l'on suppose que les coordonnées varient linéairement pendant l'intervalle de temps Δt , on peut alors écrire pour la configuration intermédiaire :

$$x_{t+\theta\Delta t} = \theta x_{t+\Delta t} + (1-\theta)x_t \quad 0 < \theta < 1 \quad (5.42)$$

On note $F_t^{t+\Delta t}$ le gradient de la transformation entre les instants t et $t + \Delta t$ D'après 5.10a on peut écrire :

$$F_t^{t+\Delta t} = F_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t} F_t^{t+\theta\Delta t} \quad (5.43)$$

Entre les instants t et $t+\Delta t$ on peut écrire :

$$S^{t+\Delta t} - S^t = \dot{S}^\theta \Delta t \quad (5.44)$$

où S est la contrainte de Piola-Kirchoff de seconde espèce, S représente la contrainte s'exerçant dans la configuration déformée par unité de surface initiale et où $\dot{S}^\theta$ représente une valeur moyenne de la vitesse de la contrainte prise à l'instant θ . Cette relation est vraie car toutes les grandeurs sont définies sur la même configuration.

La contrainte S est reliée au tenseur des contraintes de Cauchy par la relation :

$$J\sigma = F S T^T \quad (5.45)$$

Dans la formulation que nous avons adoptée, la dernière configuration déterminée $C(t)$ est prise comme configuration de référence pour l'instant suivant $t + \Delta t$. On a donc :

$$\sigma^t = S^t \quad \text{et} \quad \det(F_t^{t+\Delta t}) \sigma^{t+\Delta t} = F_t^{t+\Delta t} S^{t+\Delta t} F_t^{t+\Delta t T}$$

La relation 5.44 peut donc s'exprimer par :

$$\det(F_t^{t+\Delta t}) F_t^{t+\Delta t -1} \sigma^{t+\Delta t} F_t^{t+\Delta t -T} - \sigma^t = \det(F_t^{t+\theta \Delta t}) F_t^{t+\theta \Delta t -1} \overset{tr}{\sigma}^t F_t^{t+\theta \Delta t -T} \Delta t$$

où $\overset{tr}{\sigma}$ dénote la dérivée de Truesdell des contraintes de Cauchy. En utilisant les propriétés de F , cette relation s'écrit :

$$\sigma^{t+\Delta t} - \det^{-1}(F_t^{t+\Delta t}) F_t^{t+\Delta t} \sigma^t F_t^{t+\Delta t T} = \det^{-1}(F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t}) F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t} \overset{tr}{\sigma}^t F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t T} \Delta t \quad (5.46a)$$

ou encore :

$$\sigma^{t+\Delta t} - \det^{-1}(F_t^{t+\Delta t}) F_t^{t+\Delta t} \sigma^t F_t^{t+\Delta t T} = \det^{-1}(F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t}) F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t} (H^{ep} D)^{t+\theta \Delta t} F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t T} \Delta t \quad (5.46b)$$

L'état de contrainte au temps $t + \Delta t$ est donc défini à l'aide des grandeurs relatives au pas étudié. Si l'on décompose la déformation élastoplastique en deux processus distincts. Le premier est purement élastique et comprend l'ensemble de la déformation du solide et particulièrement ses rotations. On obtient l'état de contrainte élastique dans la configuration finale. Si cet état de contrainte viole le critère de plasticité, les contraintes doivent se relaxer. Ce dernier processus se passe à vitesse de déformation totale nulle, en particulier aucune rotation n'intervient.

L'état de contrainte dans la configuration $t + \Delta t$ n'est défini que moyennant la connaissance de $F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t}$, de $D^{t+\theta \Delta t}$ et de H^{ep} dans le cas d'un chargement élastoplastique.

La dérivation de l'équation 5.42 par rapport à la variable $x^{t+\theta \Delta t}$ nous donne :

$$I - (1 - \theta) F_{t+\theta \Delta t}^t = \theta F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t}$$

ce qui s'écrit encore avec l'aide de 5.43 :

$$F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t} = ((1 - \theta) F_{t+\Delta t}^t + \theta I)^{-1} \quad (5.47)$$

Le gradient de vitesse sur la configuration intermédiaire s'écrit :

$$\begin{aligned} L^{t+\theta \Delta t} \Delta t &= \frac{\partial (x^{t+\Delta t} - x^t)}{\partial x^{t+\theta \Delta t}} \\ &= F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t} - F_{t+\theta \Delta t}^t \end{aligned}$$

ou encore en combinant cette dernière équation avec 5.43 et 5.47

$$L^{t+\theta \Delta t} \Delta t = (I - F_{t+\Delta t}^t) F_{t+\theta \Delta t}^{t+\Delta t} = (I - F_{t+\Delta t}^t) ((1 - \theta) F_{t+\Delta t}^t + \theta I)^{-1} \quad (5.48)$$

Les valeurs du taux de déformation et du taux de rotation sur la configuration intermédiaire sont donc données par :

$$D^{t+\theta\Delta t}\Delta t = \text{sym}\left[(I - F_{t+\Delta t}^t)((1-\theta)F_{t+\Delta t}^t + \theta I)^{-1}\right] \quad (5.49)$$

$$W^{t+\theta\Delta t}\Delta t = \text{Asym}\left[(I - F_{t+\Delta t}^t)((1-\theta)F_{t+\Delta t}^t + \theta I)^{-1}\right] \quad (5.50)$$

Les quantités $F_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t}$, $D^{t+\theta\Delta t}$ et $W^{t+\theta\Delta t}$ se déterminent donc aisément à partir du déplacement u .

V.3.2.2 - Objectivité et consistance du schéma d'intégration

Le schéma d'intégration défini précédemment est incrémentalement objectif si lorsque le mouvement du solide se résume à une rotation pure R , on a alors : $\sigma^{t+\Delta t} = R\sigma^t R^T$.

Soit la transformation définie par :

$$x^{t+\Delta t} = Rx^t$$

Le gradient de la transformation F est donc :

$$F = R \text{ et de plus } \det(F) = 1$$

L'équation 5.46b se met sous la forme :

$$\sigma^{t+\Delta t} - R_{t+\Delta t}^t \sigma^t R_{t+\Delta t}^{tT} = R_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t} (H^{\text{ep}} D)^{t+\theta\Delta t} R_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta tT} \Delta t$$

On a alors

$$\sigma^{t+\Delta t} = R\sigma^t R^T \quad (5.51)$$

$$\text{si } R_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t} (H^{\text{ep}} D)^{t+\theta\Delta t} R_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta tT} \Delta t = 0 \quad (5.52)$$

La condition ci dessous est vérifiée si et seulement si $\theta = 1/2$ (annexe 3). Le schéma d'intégration est donc incrémentalement objectif si et seulement si $\theta = 1/2$.

La consistance du schéma se démontre en remarquant que si Δt tend vers 0, alors le gradient de la transformation tend vers la matrice identité et son déterminant vers 1. L'équation 5.46a coïncide strictement avec la définition de la vitesse matérielle du tenseur de Cauchy.

V.3.2.3 - Evaluation de la contrainte à l'instant $t+\theta\Delta t$

Dans une première phase de prédiction élastique, la contrainte sur la configuration intermédiaire est évaluée de la manière suivante :

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta) \det^{-1}(F_t^{t+\theta\Delta t}) F_t^{t+\theta\Delta t} \sigma^t F_t^{t+\theta\Delta t T} + \theta \det^{-1}(F_{t+\Delta t}^{t+\theta\Delta t}) F_{t+\Delta t}^{t+\theta\Delta t} (\sigma^{t+\Delta t})^e F_{t+\Delta t}^{t+\theta\Delta t T} \quad (5.53)$$

où $(\sigma^{t+\Delta t})^e$ représente la contrainte élastique s'exerçant dans la configuration $C(t+\Delta t)$. La relation 5.46b est ensuite appliquée pour calculer la contrainte dans la configuration finale. En d'autres termes, on définit un algorithme implicite itératif sous la forme suivante :

$$(\sigma^{t+\Delta t})^j = \det^{-1}(F_t^{t+\Delta t}) F_t^{t+\Delta t} \sigma^t F_t^{t+\Delta t T} + \det^{-1}(F_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t}) F_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t} (H^{ep} D^{t+\theta\Delta t})^{j-1} F_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t T} \Delta t \quad (5.54)$$

où $(H^{ep})^{j-1}$ est évalué en utilisant $(\sigma^{t+\theta\Delta t})^{j-1}$. Ce processus est une généralisation du schéma du point milieu utilisé habituellement en petites déformations élastoplastiques.

V.3.2.4 - Découpage en sous-intervalles

La précision du schéma d'intégration est améliorée en découpant l'intervalle d'intégration entre t et $t+\Delta t$ en m sous intervalles. Si x^t et $x^{t+\Delta t}$ sont les coordonnées en début et en fin de pas, on pose :

$$x^{(i)} = x^{(i-1)} + \frac{(x^{t+\Delta t} - x^t)}{m} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \text{avec :} \quad & x^{(0)} = x^t \\ & x^{(m)} = x^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

Une procédure itérative est appliquée pour le calcul de la contrainte :

$$\sigma^{(i)} = \det^{-1}(F^i) F^i \sigma^{(i-1)} F^{iT} + \det^{-1}(F^{i/2}) F^{i/2} (H^{ep} D^\theta)^{(i)} F^{iT/2} \Delta t \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad & \sigma^{(0)} = \sigma^t \\ & \sigma^{(m)} = \sigma^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad & F^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i-1}} \\ & F^{i/2} = \left[(1-\theta) F^{i-1} + \theta I \right]^{-1} \end{aligned}$$

et où H^{ep} est évalué à l'aide de $\sigma^{\theta(i)}$ suivant la procédure décrite dans le paragraphe précédent

V.3.2.5 - Autres formes pour l'intégration des lois constitutives

Aux diverses définitions des dérivées objectives du tenseur des contraintes de Cauchy, l'algorithme d'intégration prendra l'une des formes suivantes :

En utilisant la dérivée de Oldroyd (ou dérivée convective contravariante) on utilise le transport convectif contravariant. Le schéma d'intégration défini par 5.46a prend la forme :

$$\sigma^{t+\Delta t} - F_t^{t+\Delta t} \sigma^t F_t^{t+\Delta t T} = F_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t} \sigma_{t+\theta\Delta t}^0 F_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t T} \Delta t \quad (5.57)$$

Si l'on utilise la dérivée de Jaumann, l'équation 5.46a se met sous la forme :

$$\sigma^{t+\Delta t} - Q_t^{t+\Delta t} \sigma^t Q_t^{t+\Delta t T} = Q_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t} \sigma_{t+\theta\Delta t}^j Q_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t T} \Delta t \quad (5.58)$$

avec Q issu de l'intégration temporelle de W ($W = \dot{Q}Q^T$)

Lorsque l'on considère la dérivée de Jaumann modifiée il est plus cohérent d'écrire :

$$\sigma^{t+\Delta t} - \det^{-1}(F_t^{t+\Delta t}) Q_t^{t+\Delta t} \sigma^t Q_t^{t+\Delta t T} = \det^{-1}(F_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t}) Q_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t} \sigma_{t+\theta\Delta t}^{jm} Q_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t T} \Delta t \quad (5.59)$$

En cas de rotation de corps rigide on a $Q=R$ (paragraphe A4.2, annexe 4) et les schémas précédents correspondent.

V.3.2.6 - Limites des schémas d'intégration

Pendant la phase d'intégration l'objectivité de la loi de comportement n'est respectée qu'au sens infinitésimale. En effet, si la transformation est une rotation pure, la transformation entre t et $t + \theta \Delta t$ n'en est pas une, et de plus dans le cas d'une transformation isovolume, l'hypothèse d'incompressibilité n'est pas respectée.

Considérons tout d'abord le cas bidimensionnel, pour une rotation le gradient de la transformation vaut :

$$F_t^{t+\Delta t} = R = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Avec 5.43 et 5.47, on obtient le gradient de la transformation entre les instants t et $t + \theta\Delta t$ (avec $\theta=1/2$) :

$$F_t^{t+\theta\Delta t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & 1 + \cos\beta \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

son déterminant est égal à :

$$\det(F_t^{t+\theta\Delta t}) = \frac{1}{2}(1 + \cos\beta) \quad (5.62)$$

La transformation entre t et $t + \theta\Delta t$ ne peut donc être considérée isovolume que pour de faibles valeurs de β , autrement dit pour de faibles rotations.

Si l'on considère l'état de contrainte à l'instant t tel que σ prend la forme :

$$\sigma^t = \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

l'estimation de la contrainte sur la configuration intermédiaire par la relation 5.53 donne :

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \frac{2}{(1+\cos\beta)} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & 1+\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & 1+\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \begin{bmatrix} \frac{(1+\cos\beta)}{2} \sigma^0 & \frac{\sin\beta}{2} \sigma^0 \\ \frac{\sin\beta}{2} \sigma^0 & \frac{\sin^2\beta}{2(1+\cos\beta)} \sigma^0 \end{bmatrix}$$

qui après transformation s'exprime par :

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sigma^0 & \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sigma^0 \\ \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sigma^0 & \sin^2 \frac{\beta}{2} \sigma^0 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Cette expression coïncide avec une rotation de $\beta/2$ du tenseur des contraintes à l'instant t . Le principe d'objectivité tel qu'il a été défini dans le paragraphe V.3.2.1 est donc respecté.

Si l'on utilise maintenant le schéma défini par la relation 5.57, on constate que le principe d'objectivité ne peut être respecté qu'au sens infinitésimal du point de vue des rotations. En effet l'estimation de la contrainte intermédiaire donne :

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & 1+\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & 1+\cos\beta \end{bmatrix}$$

qui après calcul se met sous la forme :

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \frac{(1+\cos\beta)}{2} \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sigma^0 & \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sigma^0 \\ \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sigma^0 & \sin^2 \frac{\beta}{2} \sigma^0 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Le principe d'objectivité n'est donc respecté que lorsque $\frac{(1+\cos\beta)}{2}$ tende vers 1, en d'autres termes lorsque l'angle de rotation reste faible.

Examinons maintenant le cas tridimensionnel, on choisit un système d'axes tel que la rotation se fasse autour de l'axe e_3 . Le tenseur rotation se met sous la forme :

$$R = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

On a alors :

$$F_t^{t+\theta\Delta t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & 1+\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

et

$$\det(F_t^{t+\theta\Delta t}) = \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \quad (5.67)$$

L'hypothèse d'incompressibilité n'est donc pas respectée au sens stricte.

Si l'on considère l'état de contrainte à l'instant t tel que σ prend la forme :

$$\sigma^t = \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Avec le schéma d'intégration défini par 5.46a, on a pour la contrainte intermédiaire :

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \frac{2}{(1+\cos\beta)} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+\cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & 1+\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & 1+\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

qui après calcul se met sous la forme :

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \frac{1}{2(1+\cos\beta)} \begin{bmatrix} (1+\cos\beta)^2 \sigma^0 & \sin\beta(1+\cos\beta) \sigma^0 & 0 \\ \sin\beta(1+\cos\beta) \sigma^0 & \sin^2\beta \sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\beta}{2} \sigma^0 & \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sigma^0 & 0 \\ \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sigma^0 & \sin^2\frac{\beta}{2} \sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

On constate que l'objectivité est maintenue dans l'estimation de la contrainte intermédiaire.

Si l'on utilise maintenant le schéma défini par la relation 5.57, on a

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+\cos\beta)^2 \sigma^0 & \sin\beta(1+\cos\beta) \sigma^0 & 0 \\ \sin\beta(1+\cos\beta) \sigma^0 & \sin^2\beta \sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = \frac{(1+\cos\beta)}{2} \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} \sigma^0 & \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sigma^0 & 0 \\ \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sigma^0 & \sin^2 \frac{\beta}{2} \sigma^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Dans ce cas l'objectivité ne peut être respectée que pour de petites rotations. Dans tout les cas de figure, l'erreur commise sur l'hypothèse d'incompressibilité ou dans certains cas sur le principe d'objectivité est de l'ordre de $\frac{1}{2}(1+\cos\beta)$. Pour une rotation de $2,5^\circ$, cette erreur est de l'ordre de 0,047%, ce qui reste tout à fait raisonnable.

V.3.3 - Critères de convergence

La définition du critère de convergence est une étape importante de l'élaboration d'un code de calcul. Une mauvaise définition conduit le plus souvent à des résultats erronés. Plusieurs types de critères peuvent être définis. Les premiers sont du type efforts résiduels.

$$\frac{\|F^{n+1} - F_\sigma^{n+1(i)}\|}{\|F^n - F_\sigma^{n+1(i)}\|} < \varepsilon_{F_1} \quad (\text{Gelin, 1985}) \quad (5.70)$$

$$\frac{\|F^{He}\|}{\|\bar{F}\| + \|R\|} < \varepsilon_{F_2} \quad (\text{Charlier, 1987}) \quad (5.71)$$

où $\|F^{n+1} - F_\sigma^{n+1(i)}\| \approx \|F^{He}\|$ représente la norme du résidu, $\|\bar{F}\|$ et $\|R\|$ sont respectivement les normes des forces imposées et des réactions d'appuis. Ces critères sont préconisés lorsqu'il y a une évolution rapide du vecteur chargement équivalent F_σ . Au contraire, lors d'une évolution peu sensible on utilise un critère du type énergétique :

$$\frac{\Delta u^{(i)T} (F^{n+1} - F_\sigma^{n+1(i-1)})}{\Delta u^{(i)T} (F^{n+1} - F_\sigma^n)} < \varepsilon_E \quad (\text{Gelin, 1985}) \quad (5.72)$$

($\Delta u^{(i)}$ est l'incrément de déplacement déterminé à l'itération i)

Le dernier critère est du type déplacement. Il se met sous la forme :

$$\frac{\|\Delta u^{(i)}\|}{\left\| \sum_{k=1}^i \Delta u^{(k)} \right\|} < \varepsilon_u \quad (5.73)$$

où $u = \sum_{k=1}^i \Delta u^{(k)}$ représente le cumul des déplacements depuis le début du pas.

$\varepsilon_{F1}, \varepsilon_{F2}, \varepsilon_E, \varepsilon_u$ sont des paramètres de précision qu'il convient de déterminer, tout comme m , par expérimentation numérique. Notre choix s'est porté sur le critère défini par la relation 5.73.

V.4 - Discrétisation

V.4.1 - Discrétisation Spatiale

Nous explicitons dans ce paragraphe les différentes quantités définies précédemment en vue de leur utilisation numérique. Les notations adoptées par la suite sont : $\{ \}$ → pour un vecteur et $[\]$ → pour une matrice.

Déplacements

Les déplacements sont définis à partir des fonctions d'interpolation N par :

$$\{u\} = \{N\}^T \{u_N\} \quad \{v\} = \{N\}^T \{v_N\} \quad \{w\} = \{N\}^T \{w_N\} \quad (5.74)$$

Gradient de transformation

Sous forme vectorielle le tenseur gradient de déformation s'écrit :

$$\{F\}^T = \{F_{11} \ F_{12} \ F_{13} \ F_{21} \ F_{22} \ F_{23} \ F_{31} \ F_{32} \ F_{33}\}$$

La relation 5.3b se transforme en :

$$\{F\} = \{I\} + [N] \{U_n\} \quad (5.75)$$

avec :

$$\{I\}^T = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}$$

et

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{,x} & 0 & 0 \\ N_{,y} & 0 & 0 \\ N_{,z} & 0 & 0 \\ 0 & N_{,x} & 0 \\ 0 & N_{,y} & 0 \\ 0 & N_{,z} & 0 \\ 0 & 0 & N_{,x} \\ 0 & 0 & N_{,y} \\ 0 & 0 & N_{,z} \end{bmatrix}, \quad \{U_N\} = \begin{bmatrix} u_N \\ v_N \\ w_N \end{bmatrix}$$

On aura de la même manière :

$$\{F(\Delta u)\} = [N]\{\Delta U_n\} \quad (5.76)$$

$$\{F(\delta u)\} = [N]\{\delta U_n\} \quad (5.77)$$

Déformations

Sous forme vectorielle D s'exprime par :

$$\{D\}^T = \{D_{11} \ D_{22} \ D_{33} \ 2D_{12} \ 2D_{23} \ 2D_{13}\}$$

D'après 5.7a on peut écrire :

$$\{D(\delta u)\} = \begin{Bmatrix} \delta D_{11} \\ \delta D_{22} \\ \delta D_{33} \\ 2\delta D_{12} \\ 2\delta D_{23} \\ 2\delta D_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta L_{11} \\ \delta L_{22} \\ \delta L_{33} \\ \delta L_{12} + \delta L_{21} \\ \delta L_{23} + \delta L_{32} \\ \delta L_{13} + \delta L_{31} \end{Bmatrix}$$

On pose $f = F^{-1}$, $\{D(\delta u)\}$ se met alors sous la forme :

$$\{D(\delta u)\} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{12} & f_{22} & f_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & f_{11} & f_{21} & f_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{13} & f_{23} & f_{31} & f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & 0 & 0 & 0 & f_{11} & f_{21} & f_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta F_{11} \\ \delta F_{12} \\ \delta F_{13} \\ \delta F_{21} \\ \delta F_{22} \\ \delta F_{23} \\ \delta F_{31} \\ \delta F_{32} \\ \delta F_{33} \end{Bmatrix}$$

$$\{D(\delta u)\} = [M]\{F(\delta u)\} = [M][N]\{\delta U_N\} \quad (5.78)$$

De la même manière, on a :

$$\{D(\Delta u)\} = [M]\{F(\Delta u)\} = [M][N]\{\Delta U_N\} \quad (5.79)$$

Rotations

$$\{W(\delta u)\} = \begin{Bmatrix} 2\delta W_{12} \\ 2\delta W_{23} \\ 2\delta W_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta L_{12} - \delta L_{21} \\ \delta L_{23} - \delta L_{32} \\ \delta L_{13} - \delta L_{31} \end{Bmatrix}$$

$$\{W(\delta u)\} = \begin{bmatrix} f_{12} & f_{22} & f_{32} & -f_{11} & -f_{21} & -f_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{13} & f_{23} & f_{33} & -f_{12} & -f_{22} & -f_{32} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & 0 & 0 & 0 & -f_{11} & -f_{21} & -f_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta F_{11} \\ \delta F_{12} \\ \delta F_{13} \\ \delta F_{21} \\ \delta F_{22} \\ \delta F_{23} \\ \delta F_{31} \\ \delta F_{32} \\ \delta F_{33} \end{Bmatrix}$$

$$\{W(\delta u)\} = [M_w]\{F(\delta u)\} = [M_w][N]\{\delta U_N\} \quad (5.80)$$

$$\{W(\Delta u)\} = [M_w]\{F(\Delta u)\} = [M_w][N]\{\Delta U_N\} \quad (5.81)$$

V.4.2 - Discrétisation des équations

Si on choisit la dérivée objective de Truesdell pour définir la loi de comportement objective, l'équation 5.39 s'exprime alors par :

$$\dot{\sigma} = H^{ep}D + L\sigma + \sigma L^T - \sigma \text{tr}(D) \quad (5.82)$$

En introduisant cette loi dans le principe des puissances virtuelles, le premier terme de l'équation 5.30 s'écrit alors :

$$\int_V \text{tr}(\dot{\sigma} \delta D) dV = \int_V \left(\text{tr}(H^{ep}D\delta D) + \text{tr}(L\sigma\delta D) + \text{tr}(\sigma L^T\delta D) - \text{tr}(\sigma \text{tr}(D)\delta D) \right) dV$$

compte tenu des propriétés des traces et des propriétés des différents tenseurs (relations 5.28), on montre que cette relation peut se mettre sous la forme :

$$\int_V \text{tr}(\dot{\sigma} \delta D) dV = \int_V \left(\text{tr}(\delta D H^{ep} D) + \text{tr}(\delta D \sigma D) + \text{tr}(\delta D \sigma D) - \text{tr}(D) \text{tr}(\sigma \delta D) \right) dV$$

l'équation 5.30 s'écrit donc finalement :

$$\dot{\bar{W}}_{int} = \int_V \left(\text{tr}(\delta D H^{ep} D) + \text{tr}(\delta D \sigma D) - \text{tr}(\delta W \sigma W) \right) dV \quad (5.83)$$

On observe que la contribution des termes de rotation de la dérivée objective de Truesdell n'apparaît pas dans l'expression de la forme taux du principe des puissances virtuelles. On remarque également que la contribution de la variation de volume disparaît de cette expression. Quel que soit la dérivée objective adoptée, les termes dus à la rotation n'apparaîtront pas dans l'expression de la matrice de rigidité. Si l'on utilise la dérivée de Jaumann ou de Oldroyd, le terme dû à la variation de volume sera dans l'expression de K_t .

D'une manière générale, l'expression de $\dot{W}_{int}$ fait intervenir quatre termes qui sont :

$$\int_V \text{tr}(\delta D H^{ep} D) dV, \quad \int_V \text{tr}(\delta D \sigma D) dV, \quad \int_V \text{tr}(\delta W \sigma W) dV, \quad \int_V \text{tr}(D) \text{tr}(\sigma \delta D) dV$$

sous forme incrémentale ces termes se mettent sous la forme (Detraux, 1985)

$$\text{tr}(\delta D H^{ep} D) = \{D(\delta u)\}^T [\tilde{H}^{ep}] \{D(\Delta u)\}$$

à l'aide de 5.78 et 6.79 on a,

$$\text{tr}(\delta D H^{ep} D) = \{\delta u\}^T [N]^T [M]^T [\tilde{H}^{ep}] [M] [N] \{\Delta u\}$$

ou encore :

$$\text{tr}(\delta D H^{\text{ep}} D) = \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{B}_{\text{GD}}]^T [\tilde{\mathbf{H}}^{\text{ep}}] [\mathbf{B}_{\text{GD}}] \{\Delta \mathbf{u}\}$$

$$\text{où } [\mathbf{B}_{\text{GD}}] = [\mathbf{M}] [\mathbf{N}]$$

De la même manière on obtient pour le second terme:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\delta D : \sigma : D) &= \{D(\delta \mathbf{u})\}^T [\mathbf{S}^*] \{D(\Delta \mathbf{u})\} \\ &= \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{B}_{\text{GD}}]^T [\mathbf{S}^*] [\mathbf{B}_{\text{GD}}] \{\Delta \mathbf{u}\} \end{aligned}$$

Compte tenu de l'antisymétrie de $\mathbf{W}$, pour le troisième terme on a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\delta \mathbf{W} \sigma : \mathbf{W}) &= -\{\mathbf{W}(\delta \mathbf{u})\}^T [\mathbf{Q}^*] \{\mathbf{W}(\Delta \mathbf{u})\} \\ &= \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{B}_{\text{W}}]^T [\mathbf{Q}^*] [\mathbf{B}_{\text{W}}] \{\Delta \mathbf{u}\} \end{aligned}$$

$$\text{avec } [\mathbf{B}_{\text{W}}] = [\mathbf{M}_{\text{W}}] [\mathbf{N}]$$

et enfin le dernier terme s'exprime par :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{D}) \text{tr}(\sigma : \delta \mathbf{D}) &= \{D(\delta \mathbf{u})\}^T [\mathbf{T}^*] \{D(\Delta \mathbf{u})\} \\ &= \{\delta \mathbf{u}\}^T [\mathbf{B}_{\text{GD}}]^T [\mathbf{T}^*] [\mathbf{B}_{\text{GD}}] \{\Delta \mathbf{u}\} \end{aligned}$$

avec pour $\mathbf{S}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{T}$ les expressions suivantes :

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 & \sigma_{12}/2 & 0 & \sigma_{13}/2 \\ & \sigma_{22} & 0 & \sigma_{12}/2 & \sigma_{23}/2 & 0 \\ & & \sigma_{33} & 0 & \sigma_{23}/2 & \sigma_{13}/2 \\ & & & (\sigma_{11} + \sigma_{22})/4 & \sigma_{13}/4 & \sigma_{23}/4 \\ \text{sym} & & & & (\sigma_{22} + \sigma_{33})/4 & \sigma_{12}/4 \\ & & & & & (\sigma_{11} + \sigma_{33})/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^* = \begin{bmatrix} (\sigma_{11} + \sigma_{22})/4 & -\sigma_{13}/4 & \sigma_{23}/4 \\ & (\sigma_{22} + \sigma_{33})/4 & \sigma_{12}/4 \\ \text{sym} & & (\sigma_{11} + \sigma_{33})/4 \end{bmatrix}$$

$$T^* = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 & (\sigma_{11} + \sigma_{33})/2 & \sigma_{12}/2 & \sigma_{23}/2 & \sigma_{13}/2 \\ & \sigma_{22} & (\sigma_{22} + \sigma_{33})/2 & \sigma_{12}/2 & \sigma_{23}/2 & \sigma_{13}/2 \\ & & \sigma_{33} & \sigma_{12}/2 & \sigma_{23}/2 & \sigma_{13}/2 \\ & \text{sym} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Sous forme incrémentale $\dot{W}$ s'exprime donc par :

$$\Delta \bar{W}_{\text{int}} = \{\delta u_N\}^T [K_T(u_N)] \{\Delta u_N\}$$

La matrice à une expression dépendante de la dérivée choisie. On a par exemple :

avec la dérivée de Truesdell :

$$[K_T(u_N)] = \int_V ([B_{GD}]^T [\tilde{H}^{ep}] [B_{GD}] + [B_{GD}]^T [S^*] [B_{GD}] + [B_W]^T [Q^*] [B_W]) dV \quad (5.84)$$

dérivée de Jaumann :

$$[K_T(u_N)] = \int_V ([B_{GD}]^T [\tilde{H}^{ep}] [B_{GD}] - [B_{GD}]^T [S^*] [B_{GD}] + [B_W]^T [Q^*] [B_W] + [B_{GD}]^T [T^*] [B_{GD}]) dV \quad (5.85)$$

dérivée de Jaumann modifié :

$$[K_T(u_N)] = \int_V ([B_{GD}]^T [\tilde{H}^{ep}] [B_{GD}] - [B_{GD}]^T [S^*] [B_{GD}] + [B_W]^T [Q^*] [B_W]) dV \quad (5.86)$$

dérivée de Oldroyd :

$$[K_T(u_N)] = \int_V ([B_{GD}]^T [\tilde{H}^{ep}] [B_{GD}] + [B_{GD}]^T [S^*] [B_{GD}] + [B_W]^T [Q^*] [B_W] + [B_{GD}]^T [T^*] [B_{GD}]) dV \quad (5.87)$$

On observe que les matrices de rigidité définies précédemment ne diffèrent que par le terme dû à la variation de volume ou et par le signe des différentes quantités.

L'expression analogue à 5.40 s'écrit donc :

$$\{\delta u\}^T [K_T(u_t^{t+\Delta t})]^{(n)} \{\Delta u_t^{t+\Delta t}\}^{(n)} = \{\tilde{R}_t^{t+\Delta t}\}^{(n-1)} \quad (5.88)$$

où

$$\{\tilde{R}_t^{t+\Delta t}\}^{(n-1)} = \{\tilde{F}_t^{t+\Delta t}\} - \int_{V_t} (J_t^{t+\Delta t})^{(n-1)} [B_{GD}]^{T(n-1)} \{\sigma_t^{t+\Delta t}\}^{(n-1)} dV_t \quad (5.89)$$

avec $\{\tilde{F}_i^{t+\Delta t}\}$ vecteur des forces imposées.

V.5 - Conclusion

La formulation que nous avons retenue est du type Formulation Lagrangienne actualisée avec l'utilisation d'une mesure Eulérienne des contraintes. Cette formulation permet de prendre en compte les changements de forme du solide. Le tenseur des contraintes de Cauchy a été choisi de manière à interpréter les résultats de façon plus réaliste. L'hypothèse des petites déformations élastiques, qui se vérifie dans le cas des roches et des sols, permet une décomposition additive des vitesses de déformation élastique et plastique. Le fait de se placer sous cette hypothèse permet également d'intégrer la loi de comportement de manière analogue aux petites déformations élastoplastiques. Le problème du choix de la dérivée objective reste ouvert, dans la majorité des cas ce choix se fait en comparaison avec l'expérience. Dans le cas d'un matériau isotrope à écrouissage isotrope toutes les dérivées introduites précédemment semblent être utilisables.

Les diverses solutions retenues dans le cadre de ce chapitre ne sont évidemment pas figées. En effet, celles-ci seront amenées sans doute à être modifiées suivant les résultats obtenus et suivant le type de problème considéré. La liste ci-dessous résume les choix effectués pour l'élaboration du code et indique les possibilités du programme à ce jour. Un algorithme simplifié du programme est présenté en annexe 3.

- choix de la méthode de résolution :
 - Newton-Raphson
 - Newton-Raphson modifié
- résolution des équations d'équilibre par matrice bande,
- intégration de la loi de comportement par la méthode du point milieu
 - avec ou sans sous incrémentation
- choix d'une des dérivées objectives suivantes :
 - Jaumann
 - Jaumann modifié
 - Oldroyd
 - Truesdell
- choix dans le critère de convergence
- réactualisation des coordonnées à chaque incrément

Chapitre VI

Simulations des Essais de Torsion sur une Craie d'Haubourdin

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, les craies présentées dans ce travail ont déjà fait l'objet d'études. En particulier, l'étude de la validité du modèle de **Lade** à partir des essais de torsion effectués sur la craie d'Haubourdin est présentée par **Siwak** (1994) et **Pecqueur** (1995). Cependant, les résultats obtenus semblent parfois faire apparaître un manque de stabilité de la solution numérique, ce point n'a pu être approfondi par les auteurs. De plus, La cinématique particulière de ce type d'essai n'a été prise en compte que de manière sommaire, une seule dérivée matérielle a été utilisée dans les simulations : la dérivée de Jaumann. Face à ces incertitudes, nous nous devons d'étudier de manière plus approfondie l'obtention de la solution numérique, c'est aussi l'une des raisons pour laquelle a été élaboré le code précédent. Dans ce chapitre nous présentons donc les résultats des simulations effectuées sur la craie d'Haubourdin avec le modèle de Nova introduit dans le code développé précédemment.

VI.1. - Généralités

VI.1.1 - Discrétisation de l'échantillon

Le cylindre est discrétisé en 40 éléments isoparamétriques courbes à 20 noeuds (figure 6.1), 5 sur la hauteur et 8 sur la section (figure 6.2). la formulation de l'élément est basée sur les approximations suivantes :

Géométrie

$$x = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \quad z = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i$$

Déplacements

$$u = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \quad v = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \quad w = \sum_{i=1}^{20} N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i$$

Les fonctions d'interpolation N_i sont données par les relations suivantes :

noeuds des sommets

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2)$$

noeuds milieux des cotés parallèles à l'axe ξ

$$\eta_i = \pm 1, \quad \zeta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)$$

noeuds milieux des cotés parallèles à l'axe ζ

$$\eta_i = \pm 1, \quad \xi_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 - \zeta^2)$$

noeuds milieux des cotés parallèles à l'axe η

$$\eta_i = \pm 1, \quad \zeta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1-\eta^2)(1+\zeta_0)$$

avec: $\xi_0 = \xi \xi_i, \quad \eta_0 = \eta \eta_i, \quad \zeta_0 = \zeta \zeta_i$

ξ, η, ζ sont les coordonnées normées de l'élément.

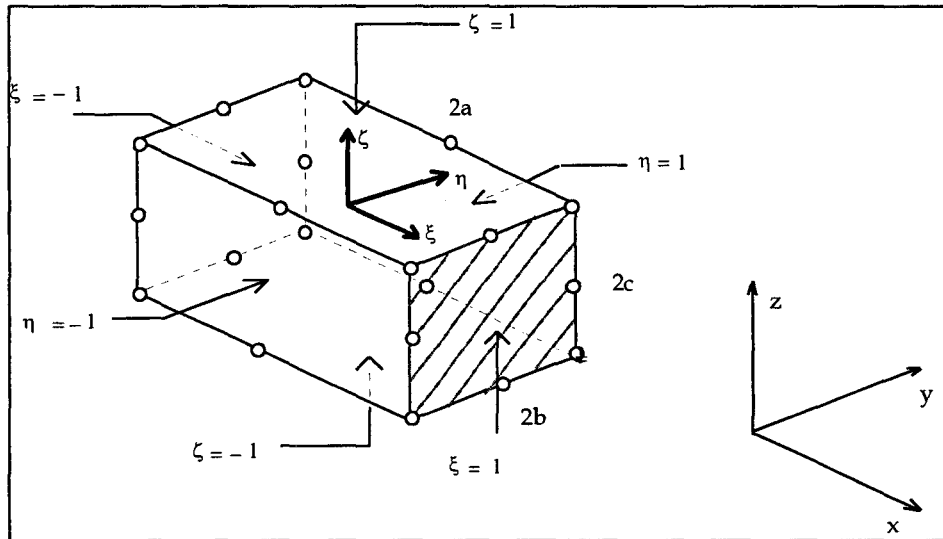


Fig 6.1 : Représentation de l'élément isoparamétrique à 20 noeuds.

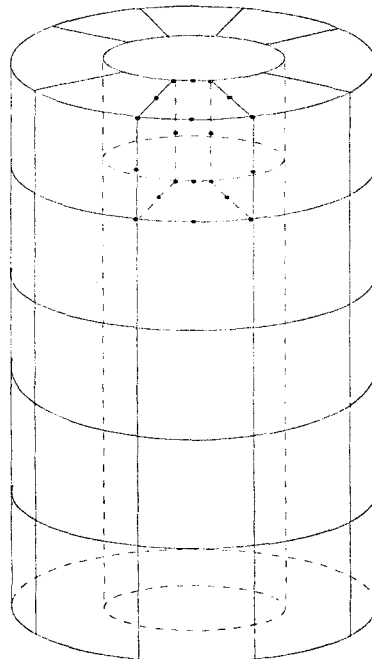


Fig 6.2 : Maillage du cylindre.

VI.1.2 - Intégration sur le volume

Les intégrations sur le volume de l'élément V sont effectuées de manière classique en reportant l'opération sur le volume de référence V_r et en utilisant la méthode de Gauss. Celle-ci est définie par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dV &= \int_{V_r} f(\xi, \eta, \zeta) \det(J_{(\xi, \eta, \zeta)}) dV_r = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \det(J_{(\xi, \eta, \zeta)}) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \det(J_{(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}) \end{aligned}$$

où w_i, w_j, w_k sont les coefficients de Gauss,
et ξ_i, η_j, ζ_k sont les coordonnées des points d'intégration.

Le jacobien J est égal à :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

il est calculé en utilisant les fonctions d'interpolation géométrique soit par exemple :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) x_i \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) y_i \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\xi, \eta, \zeta) z_i$$

VI.1.3 - Calcul des variations volumiques

Dans le programme nous utilisons 27 points de Gauss. Les variations de volume de l'échantillon au cours de l'essai sont calculées par la méthode précédente. Le volume d'un élément V_e est donné par :

$$\begin{aligned} V_e &= \int_{V_e} dV_e = \int_{V_r} \det(J_{(\xi, \eta, \zeta)}) dV_r = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det(J_{(\xi, \eta, \zeta)}) d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} w_i w_j w_k \det(J_{(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}) \end{aligned}$$

Le volume total de l'échantillon V est égal à :

$$V = \sum_{i=1}^N V_{e_i} \quad N : \text{nombre d'éléments.}$$

La variation de volume ΔV est déterminée par :

$$\Delta V = \left(\frac{V}{V_{\text{init}}} - 1 \right)$$

VI.2. - Etude Paramétrique

Dans ce paragraphe, on se propose de déterminer, pour un incrément de charge donné (20 mN pour le couple de torsion), le nombre minimum de sous incréments m pour l'intégration de la loi de comportement et la valeur du paramètre de convergence ε_u (équation 5.73).

VI.2.1 - Détermination du nombre de sous incréments

Trois valeurs de m ont été testées, on observe sur les figures 6.3 et 6.4 et plus particulièrement sur la figure 6.4 qu'une valeur supérieure à 50 de ce paramètre n'apporte plus de précisions supplémentaires significatives. C'est cette dernière valeur que nous utiliserons. On observe également que la différence se traduit essentiellement dans la partie fortement non linéaire de la courbe de la figure 6.4.

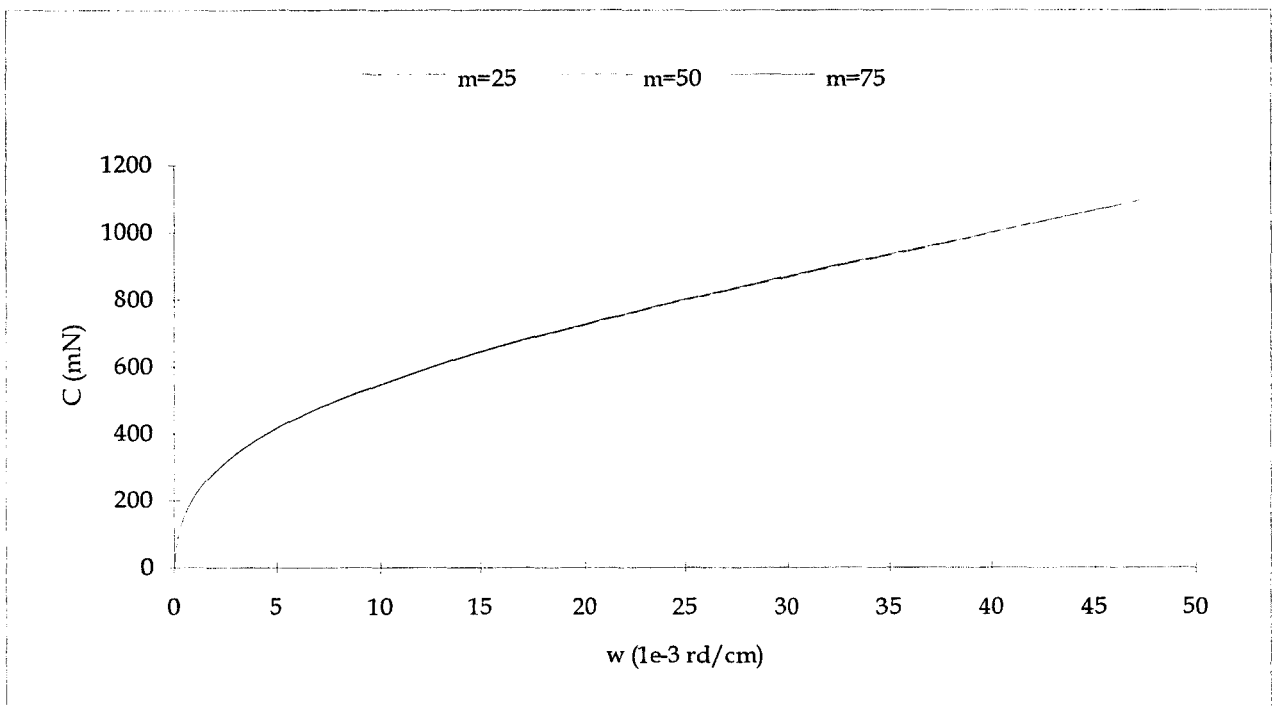


Fig 6.3 : Influence du nombre de sous incréments, courbe couple-déformation angulaire.

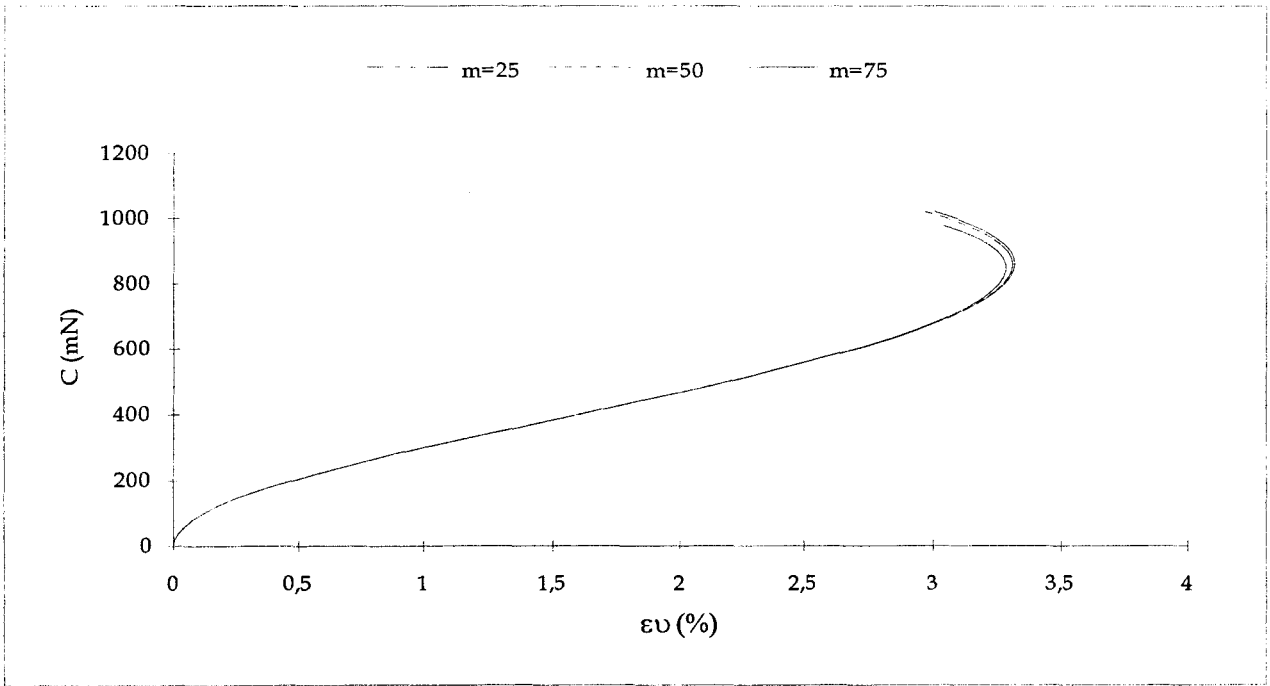


Fig 6.4 : Influence du nombre de sous incréments, courbe couple-déformation volumique.

VI.2.2 - Détermination de la valeur du critère de convergence

Egalement trois valeurs du critère de convergence ε_u ont été testées (0,05 0,01 0,005). On constate sur la figure 6.5 que la valeur 0,005 est suffisante pour assurer une bonne convergence de la solution numérique pour la taille de l'incrément adopté. C'est cette dernière valeur que nous avons choisie d'utiliser.

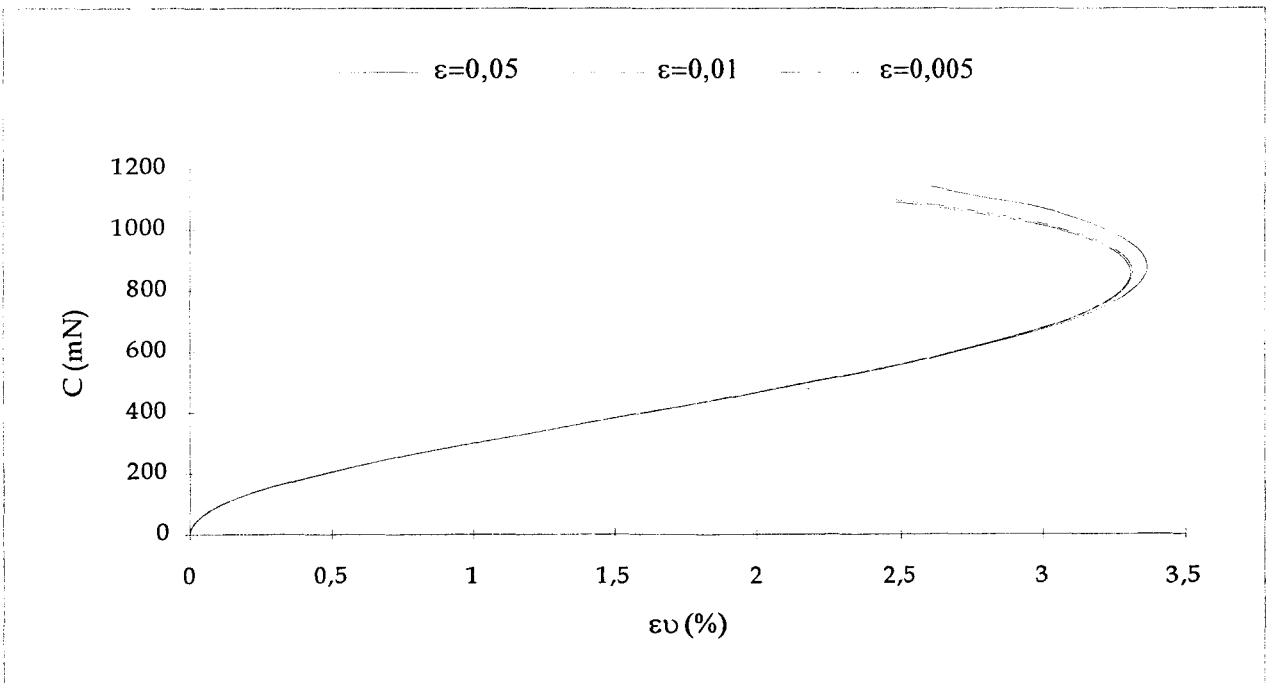


Fig 6.5 : Influence de la valeur du critère de Convergence, courbe couple-déformation volumique.

VI.2.3 - Validation du code

Pecqueur (1995), a observé que la réponse de la craie à une sollicitation de compression isotrope effectuée sur des échantillons cylindriques creux et celle sur triaxial classique était quasi-identique. Pour étudier la validité des résultats numériques, nous avons donc, dans un premier temps, simulé un essai de compression isotrope sur cylindre creux. Le résultat de cette simulation est reporté sur la figure 6.6. On y observe une très bonne corrélation entre les valeurs numériques et expérimentales. On valide donc par ce biais la méthode d'intégration de la loi de comportement.

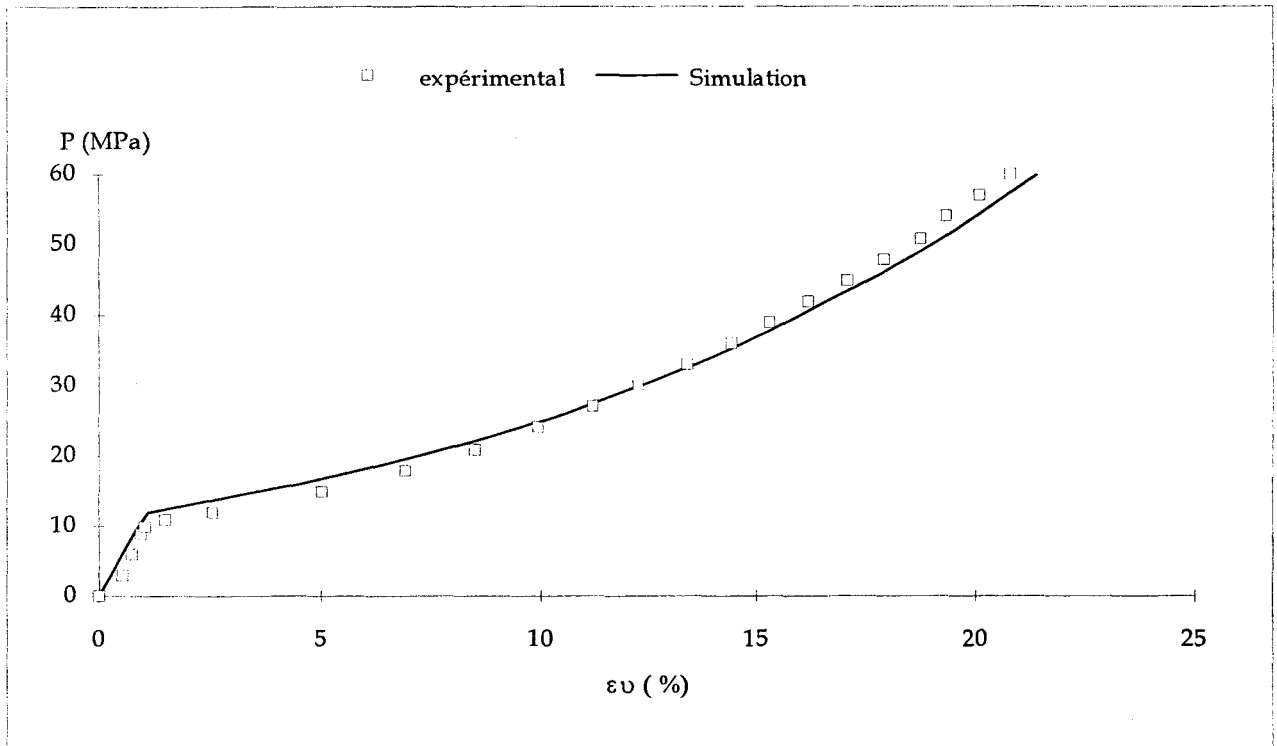


Fig 6.6 : Simulation de l'essai de compression isotrope sur cylindre creux.

La géométrie et les dimensions de l'échantillon impliquent une répartition non homogène de la contrainte tangentielle à travers la paroi du cylindre. Sur la figure 6.7 on compare, à partir d'une analyse élastique, les valeurs théoriques et les valeurs issues du calcul numérique. On remarque une bonne correspondance entre elles. Le léger écart qui subsiste est dû à la densité de maillage. Afin de mettre en évidence l'influence de cette répartition hétérogène de la contrainte tangentielle, on effectue la simulation d'un essai de torsion à partir du code que l'on compare aux résultats obtenus grâce à une intégration de la loi de comportement en trois points de gauss, situés respectivement au rayon extérieur, moyen et intérieur. Les résultats sont reportés sur les figures 6.8 et 6.9. On constate que la réponse du code est assez proche de la simulation effectuée au rayon extérieur. Cependant les écarts restent significatifs. On remarque une différence plus prononcée sur les courbes couple-déformations volumiques (figure 6.9) et notamment sur les valeurs des déformations volumiques à la rupture. Cette analyse montre l'influence de l'hétérogénéité du champ de contrainte sur l'estimation du comportement de la craie dans les essais de torsion.

L'influence des conditions aux limites est illustrée sur la figure 6.10. Sur cette dernière, on compare les variations de volume global de l'échantillon aux variations de volume d'un élément

situé dans le tiers central. On remarque que les valeurs des déformations volumiques et du couple à la rupture sont relativement proches. Par cette étude, on valide le dimensionnement de l'éprouvette (Prévost 1991; Siwak 1994; Pecqueur 1995) qui a été choisi de manière à minimiser l'influence des conditions aux limites sur les différentes mesures lors de l'essai.

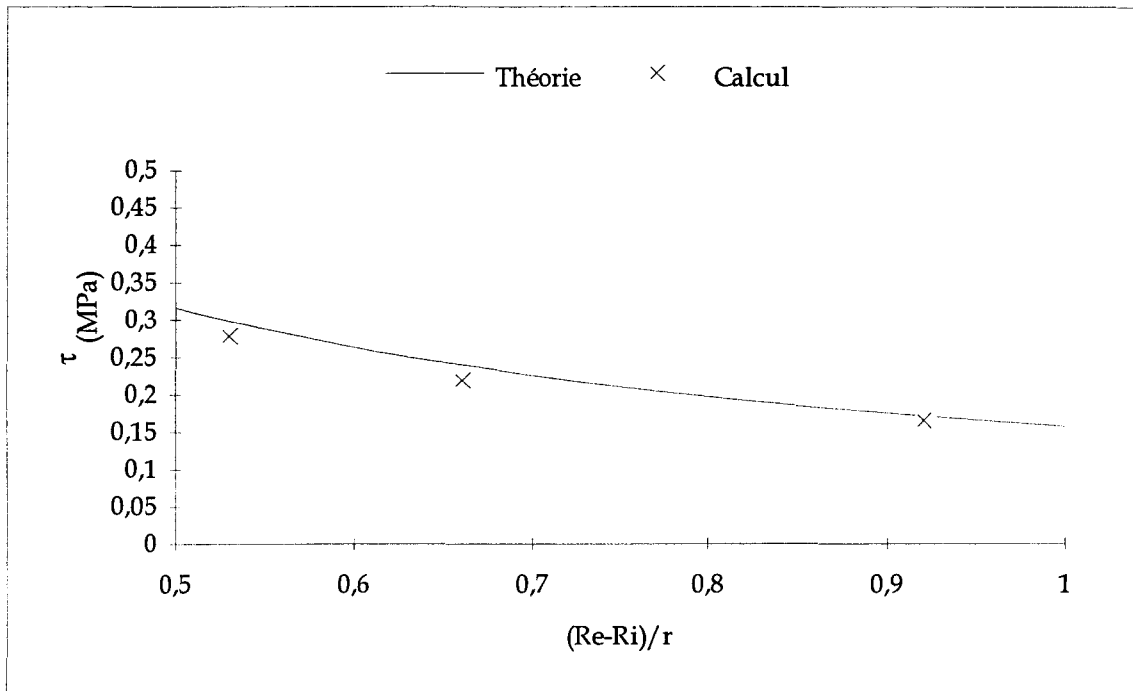


Fig 6.7 : Répartition de la contrainte tangentielle à travers la paroi du cylindre dans une analyse élastique.

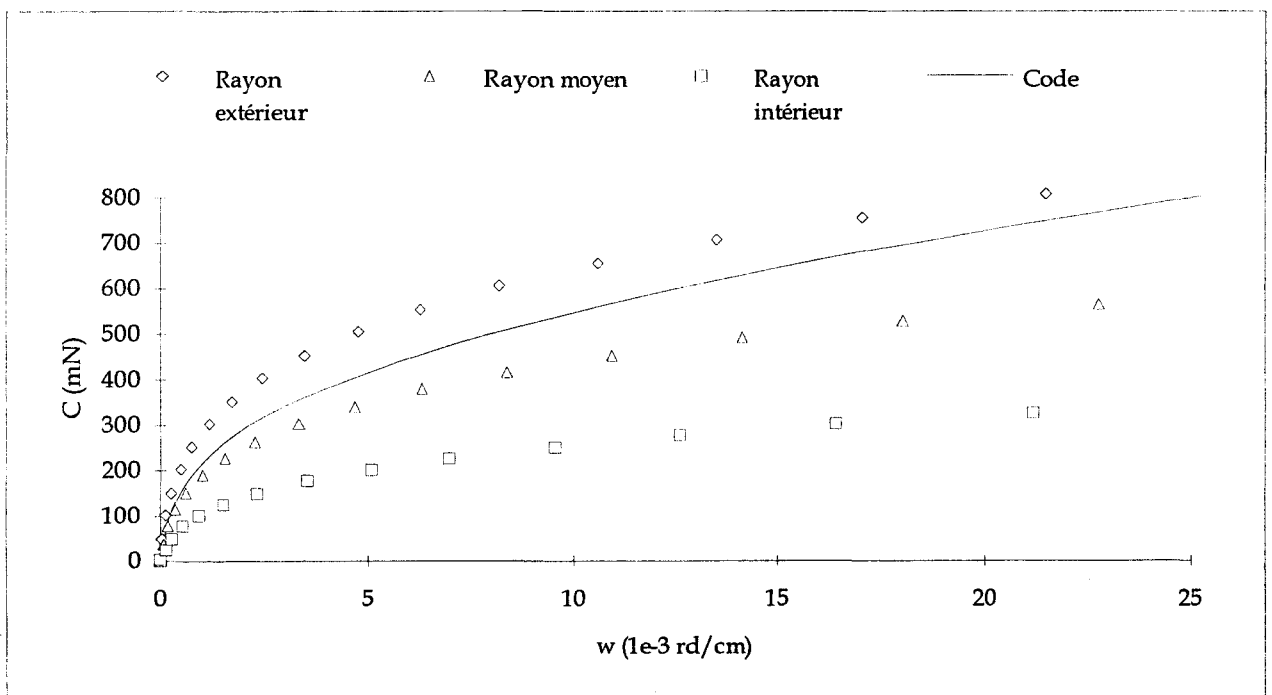


Fig 6.8 : Comparaisons des résultats du code de calcul avec une intégration en un point de Gauss, courbe couple-déformation angulaire.

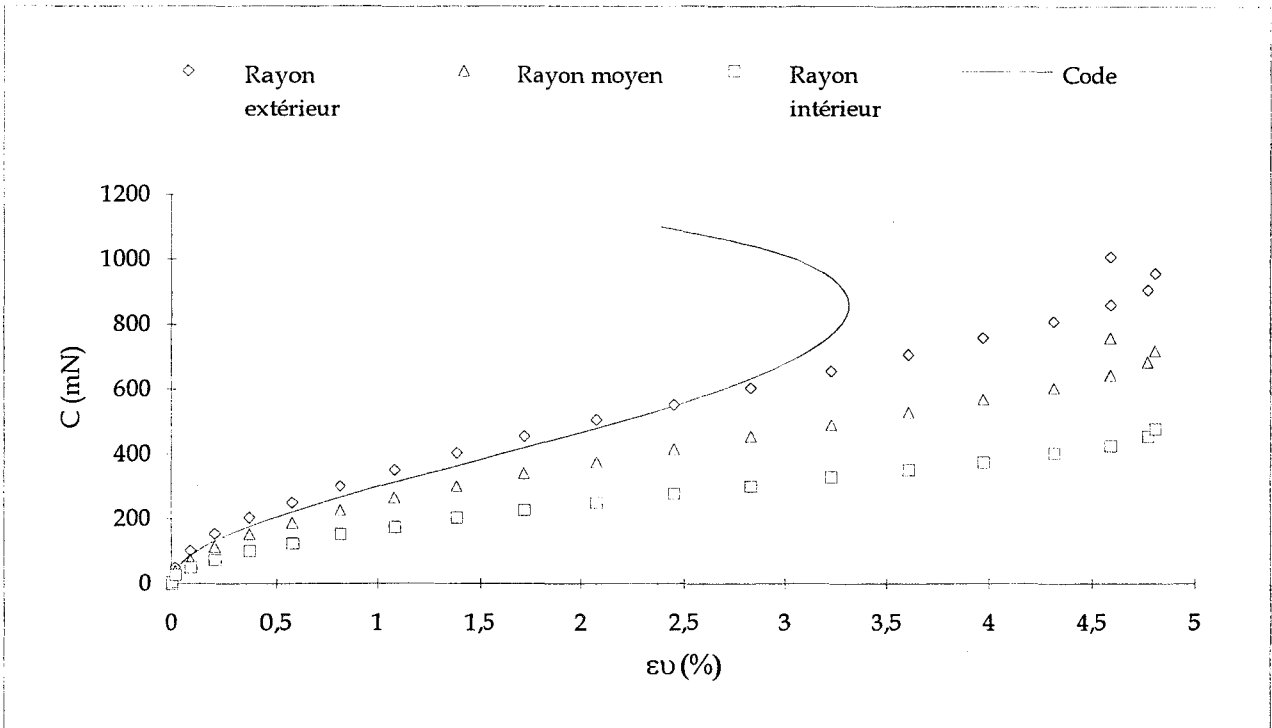


Fig 6.9 : Comparaisons des résultats du code de calcul avec une intégration en un point de Gauss, courbe couple-déformation volumique.

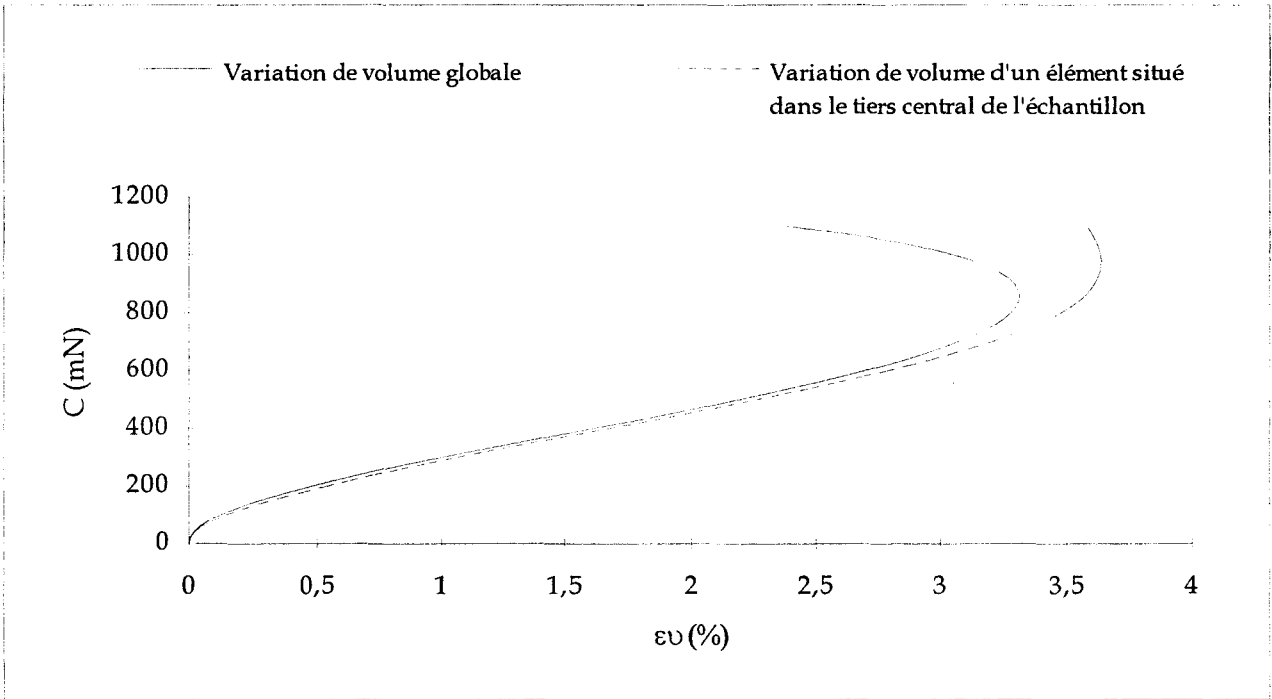


Fig 6.10 : Influence des conditions aux limites sur la valeurs des déformations volumiques.

VI.2.5 - Influence de la dérivée objective

L'influence de la dérivée objective est étudiée à partir des simulations de l'essai de torsion compression isotrope à 13 MPa. Les résultats sont reportés sur les figures 6.11 et 6.12. On observe une influence peu sensible de la dérivée sur les valeurs des déformations angulaires (figure 6.11).

L'écart entre les résultats numériques est plus visible sur les courbes couple-déformations volumiques (figure 6.12). Cependant, Les résultats sont proches et il semble difficile d'après ces derniers de privilégier une dérivée particulière. L'amplitude des déformations n'est certainement pas assez importante pour faire apparaître de manière significative l'influence de la dérivée objective sur les résultats numériques.

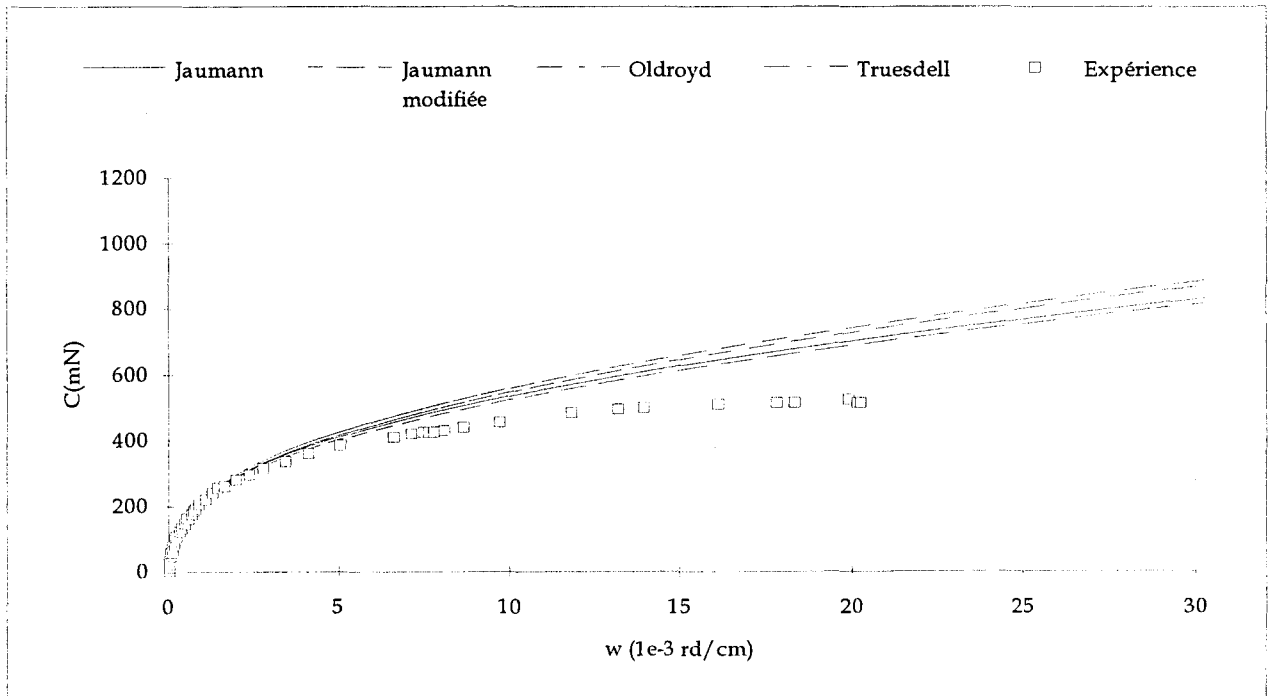


Fig 6.11 : Influence de la dérivée objective, courbe couple-déformation angulaire. Essai de torsion compression hydrostatique à 13 MPa de pression de confinement.

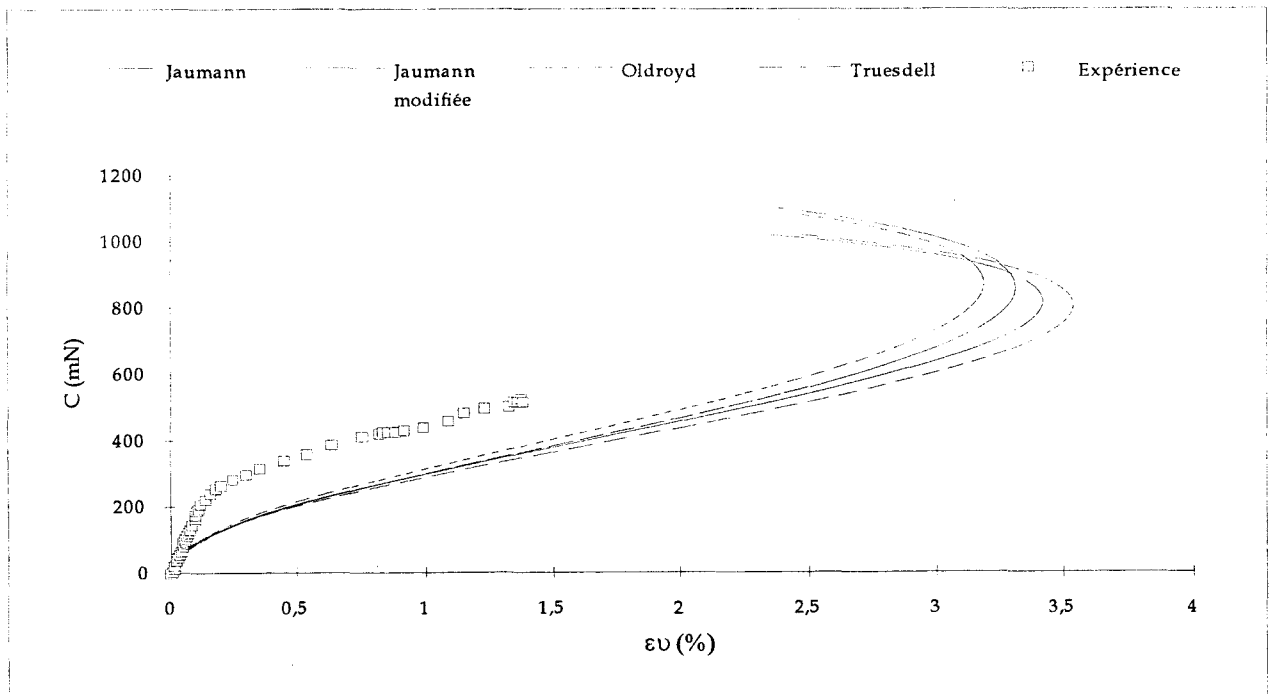


Fig 6.12 : Influence de la dérivée objective, courbe couple-déformation volumique. Essai de torsion compression hydrostatique à 13 MPa de pression de confinement.

VI.3. - Simulations des essais de torsion de la craie d'Haubourdin

Avant d'analyser les résultats fournis par le code, il convient de rappeler que la rupture du matériau est définie, par le modèle, par une variation de volume nulle. Ceci correspond sur les courbes numériques à un "rebroussement" de la courbe, tel qu'on a pu observer sur les figures précédentes. Pour chaque essai la valeur du module d'Young initial est calculée à partir de la loi 2.16 présentée dans le chapitre II. Nous n'utilisons pas de loi de variation des paramètres élastiques en cours d'essai.

VI.3.1 - Simulations des essais de torsion compression isotrope

Les figures suivantes représentent les simulations des essais de torsion compression isotrope effectués à des pressions de 3, 8, 13 et 17 MPa. En observant les courbes *Couple-déformation angulaire* (figures 6.13 à 6.16), on constate les choses suivantes. L'allure globale des courbes expérimentales est bien retranscrite. On observe en particulier une bonne correspondance des pentes dans les parties supposées élastiques linéaires (figures 6.13 et 6.14). Cependant, des cycles de déchargement rechargement effectués dans ces zones linéaires font apparaître des déformations irréversibles (Pecqueur, 1995). Paradoxalement, l'élasticité linéaire permet donc de retrouver de manière précise les valeurs mesurées tout en ne reproduisant pas exactement la réalité des observations expérimentales. Une étude plus approfondie des mécanismes de déformation ou de l'influence du dispositif expérimental dans ces zones serait nécessaire pour une meilleure compréhension de ce phénomène. Toutefois, on constate que les ordres de grandeur des déformations angulaires sont retrouvés de manière satisfaisante pour les quatre essais. On remarque cependant une sous-estimation des déformations angulaires pour l'essai à 17 MPa de pression de confinement (figure 6.16).

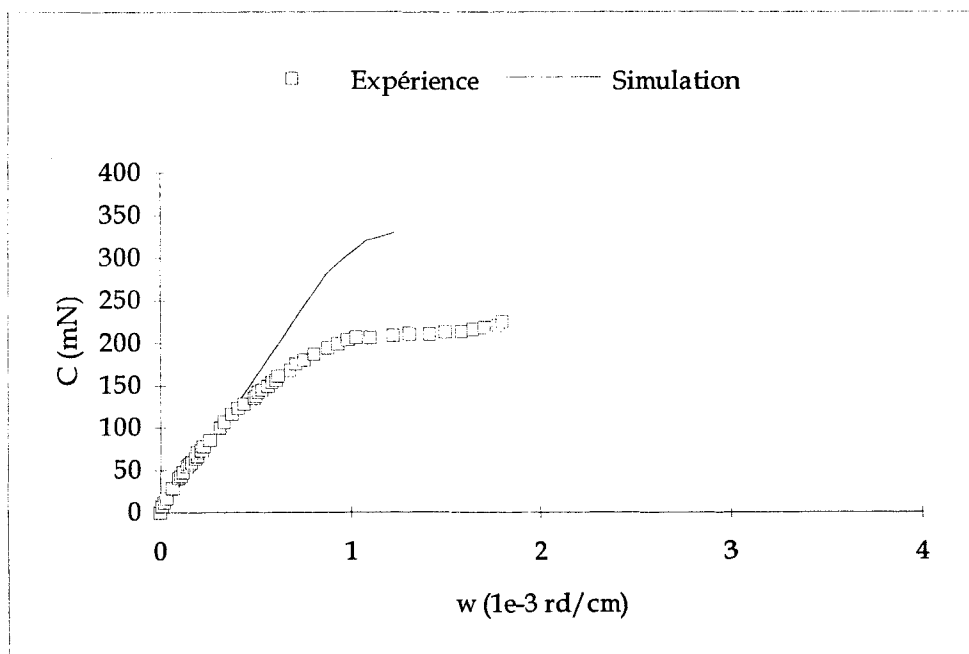


Fig 6.13 : Simulation de l'essai de torsion sous une pression hydrostatique de 3 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

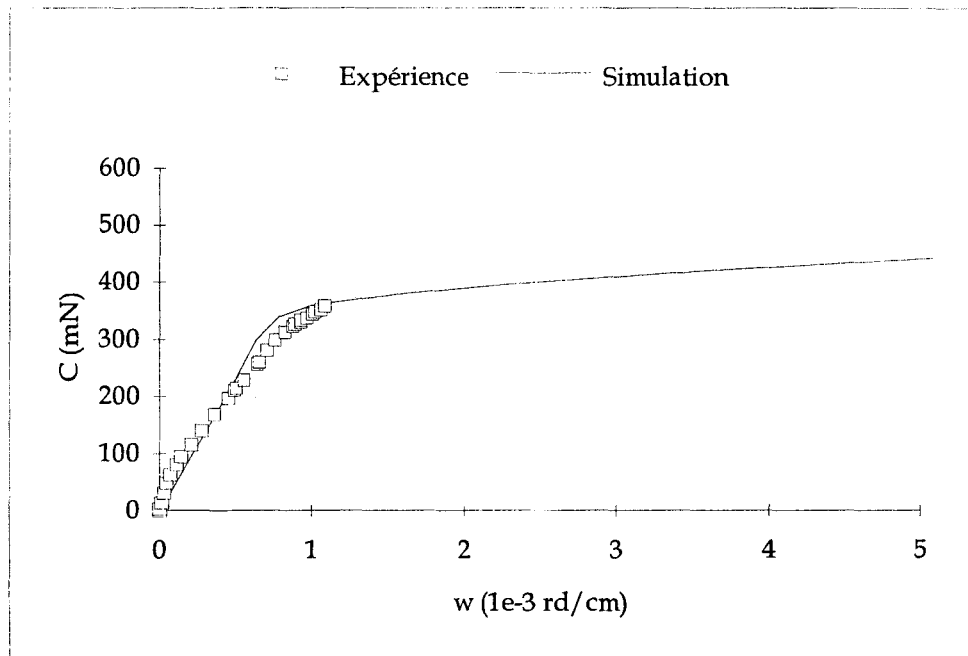


Fig 6.14 : Simulation de l'essai de torsion sous une pression hydrostatique de 8 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

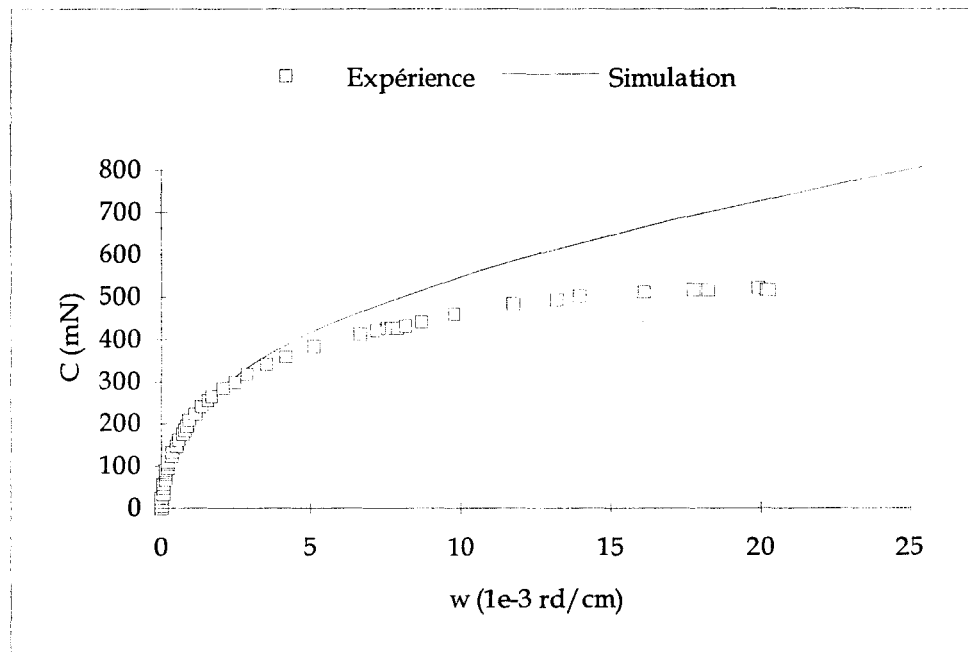


Fig 6.15 : Simulation de l'essai de torsion sous une pression hydrostatique de 13 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

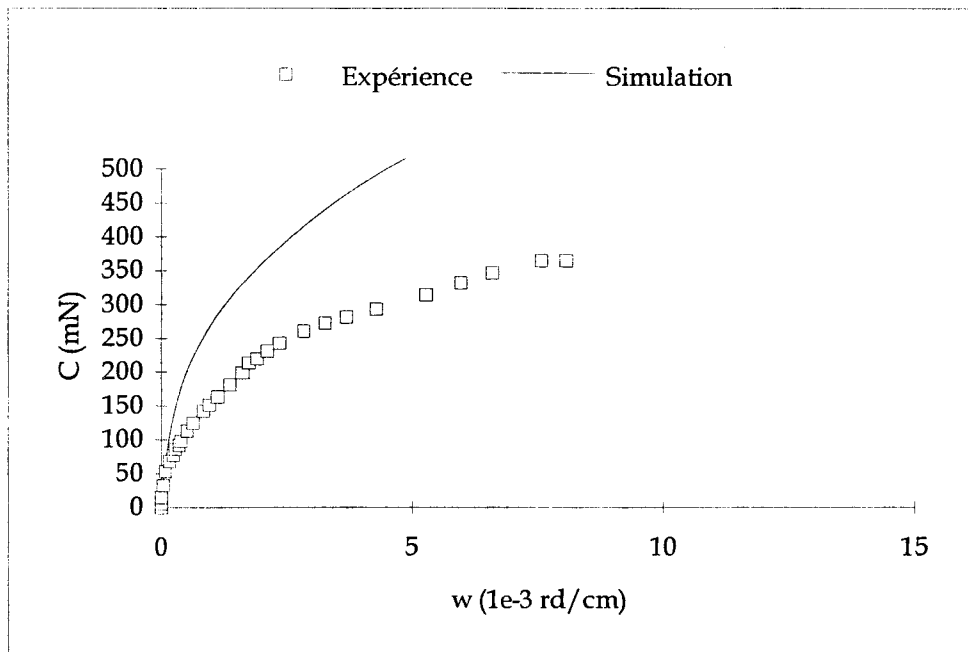


Fig 6.16 : Simulation de l'essai de torsion sous une pression hydrostatique de 17 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

les courbes *Couple-déformation volumique* sont représentées sur les figures 6.17 à 6.20. Pour les essais à 3 et 8 MPa de confinement, le modèle prédit, conformément à la théorie, une phase élastique avec variation de volume nulle suivie d'une plastification importante du matériau conduisant à la rupture. Pour ces deux essais, les variations de volume mesurées expérimentalement restent très faibles. Il subsiste encore à l'heure actuelle un doute sur leur signification réelle. En effet, un certain nombre de paramètres influent sur les mesures au début de la phase d'application du couple. La faiblesse des valeurs des déformations volumiques nous engage à rester prudent sur l'interprétation des résultats. Pour les essais à plus hauts confinements, on constate que les ordres de grandeur des déformations volumiques sont respectés. On note de manière générale une surestimation du couple à la rupture et plus particulièrement pour l'essai à 17 MPa de pression de confinement. Ce résultat est conforme aux prévisions du modèle. En effet ce dernier prévoit en théorie une augmentation du couple à la rupture en fonction de la pression de confinement. Or expérimentalement, on observe une chute des caractéristiques mécaniques pour ce dernier essai. Nous proposons dans la conclusion de ce chapitre une explication possible de ce phénomène.

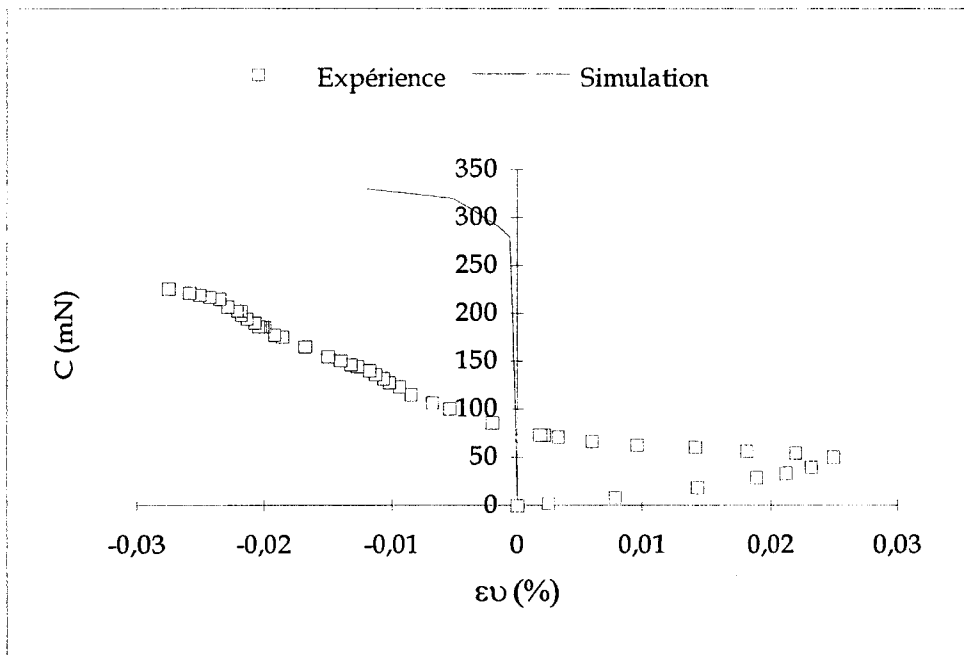


Fig 6.17 : Simulation de l'essai de torsion sous une pression hydrostatique de 3 MPa, courbe couple-déformation volumique.

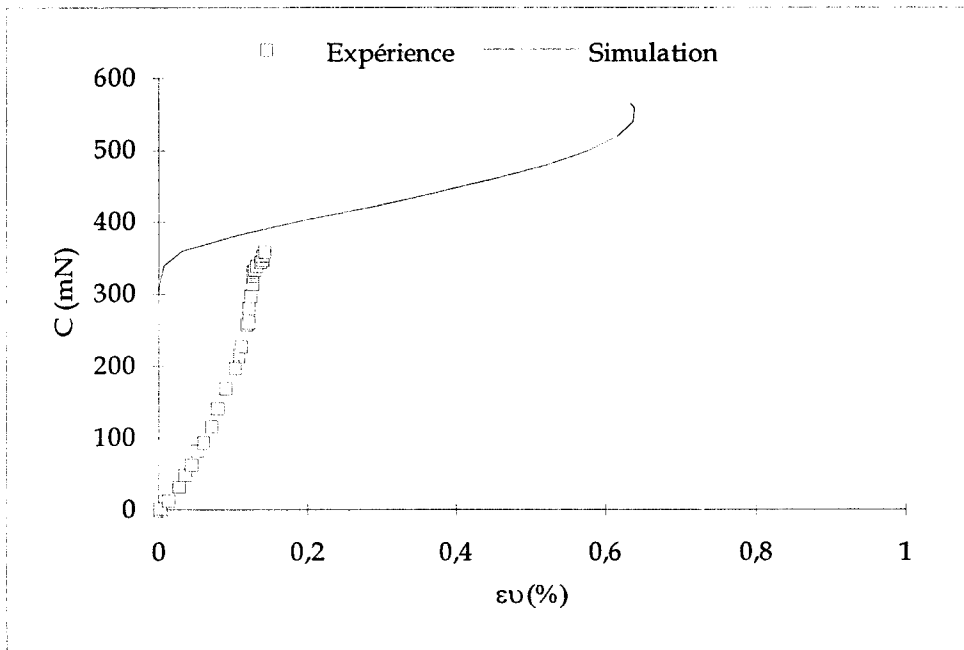


Fig 6.18 : Simulation de l'essai de torsion sous une pression hydrostatique de 8 MPa, courbe couple-déformation volumique.

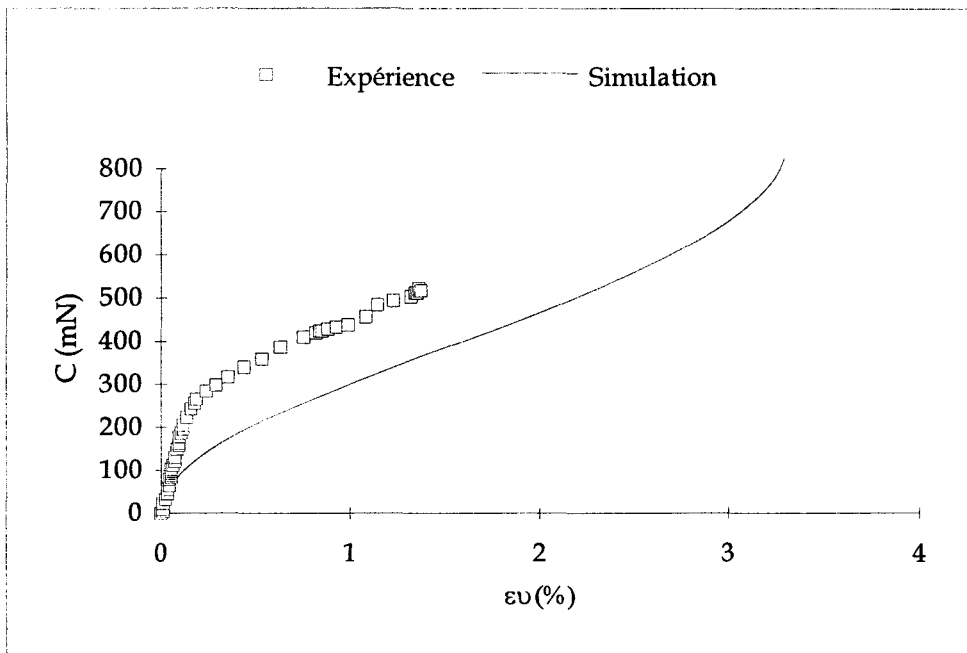


Fig 6.19 : Simulation de l'essai de torsion sous une pression hydrostatique de 13 MPa, courbe couple-déformation volumique.

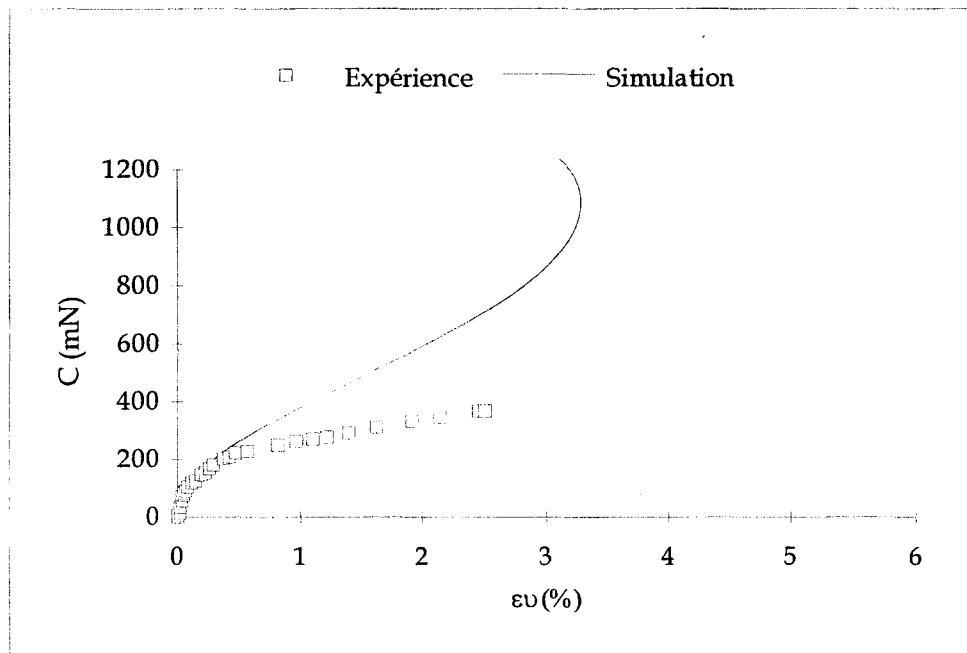


Fig 6.20 : Simulation de l'essai de torsion sous une pression hydrostatique de 17 MPa, courbe couple-déformation volumique.

VI.3.2 - Simulations des essais de torsion compression déviatorique

Essais de torsion déviatorique sous une pression hydrostatique de 3 MPa

Pour ces essais, on note comme précédemment une bonne estimation des déformations angulaires dans la phase linéaire (figures 6.21 et 6.22). Pour les raisons évoquées précédemment, il est difficile de tirer des conclusions précises de l'interprétation des courbes couple-déformations volumiques (figures 6.23 et 6.24). On remarque cependant que l'allure de la courbe pour l'essai

effectué sous un déviateur axial de 8 MPa (figure 6.24), où les déformations volumiques deviennent plus importantes, est respectée. La valeur du couple à la rupture est toutefois surestimée.

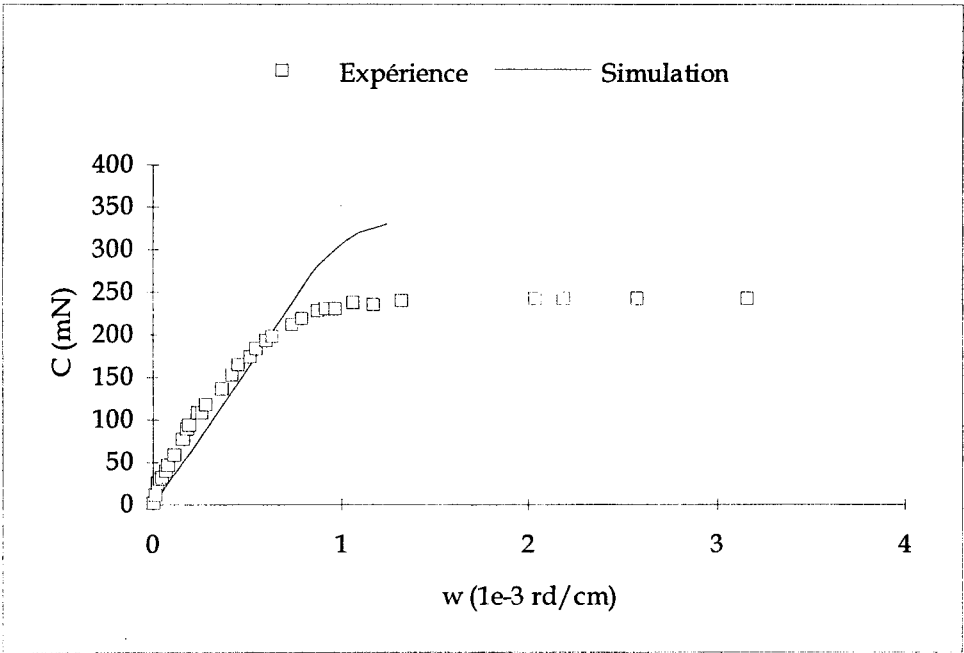


Fig 6.21 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 3 MPa et sous un déviateur de 5 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

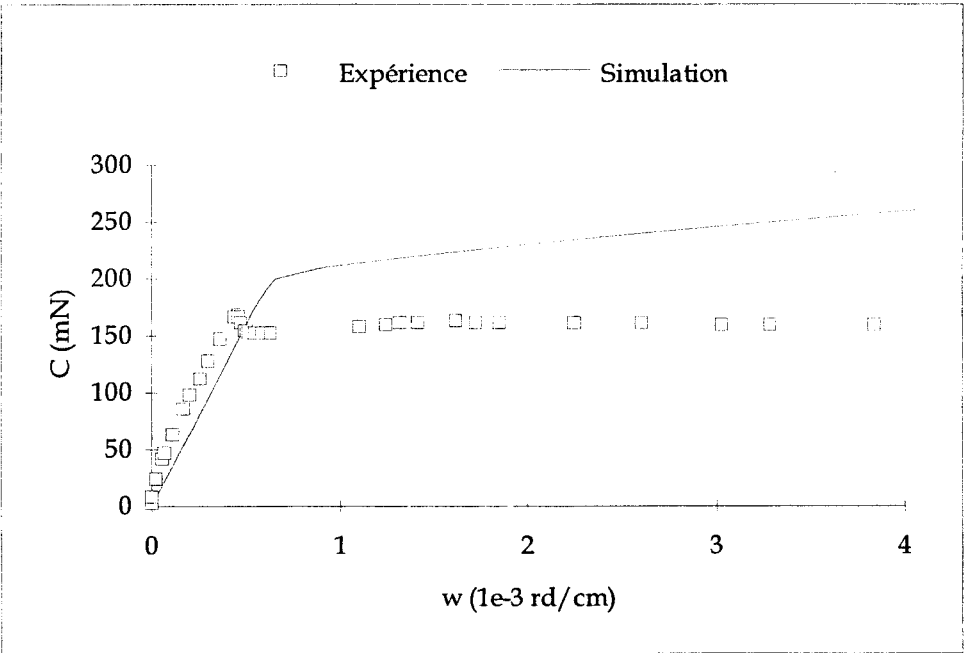


Fig 6.22 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 3 MPa et sous un déviateur de 8 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

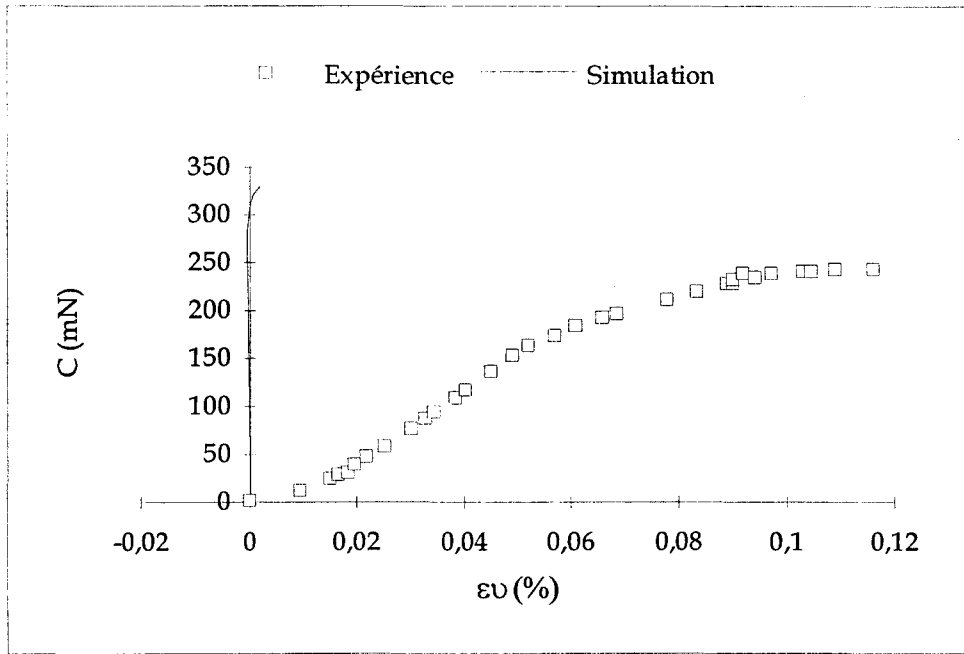


Fig 6.23 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 3 MPa et sous un déviateur de 5 MPa, courbe *couple-déformation volumique*.

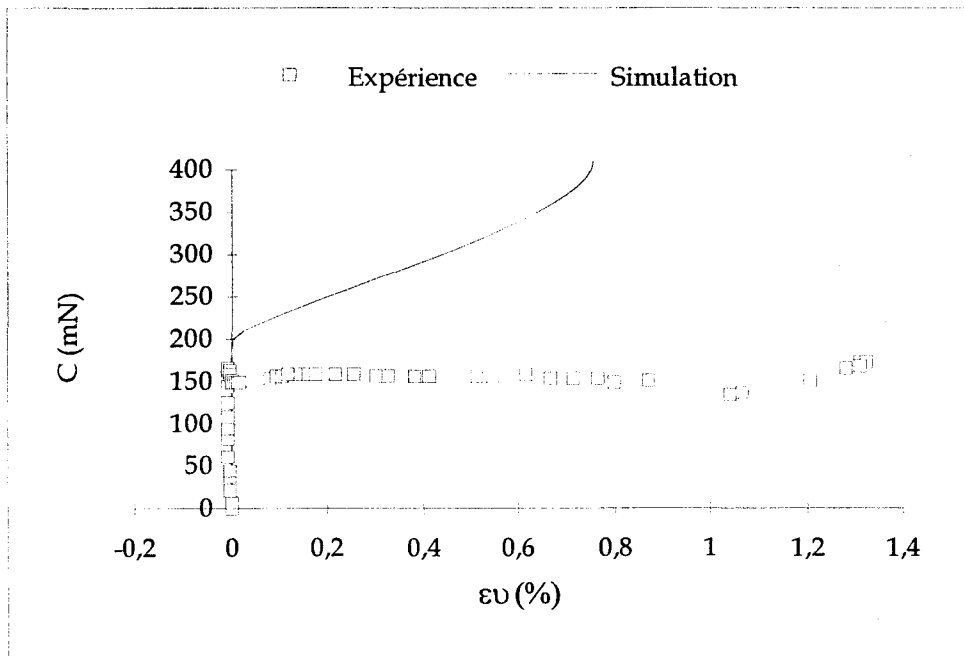


Fig 6.24 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 3 MPa et sous un déviateur de 8 MPa, courbe *couple-déformation volumique*.

Essais de torsion déviatorique sous une pression hydrostatique de 8 MPa

Si l'on observe les figures 6.25 à 6.27, on remarque une bonne concordance en début de courbe entre les valeurs expérimentales et numériques, l'écart entre l'expérience et la simulation s'accroît ensuite. Dans ces essais le comportement volumique de la craie reste correct, du moins

jusqu'à la rupture expérimentale de l'échantillon (figures 6.28 à 6.30). La rupture prédite par le modèle est trop importante.

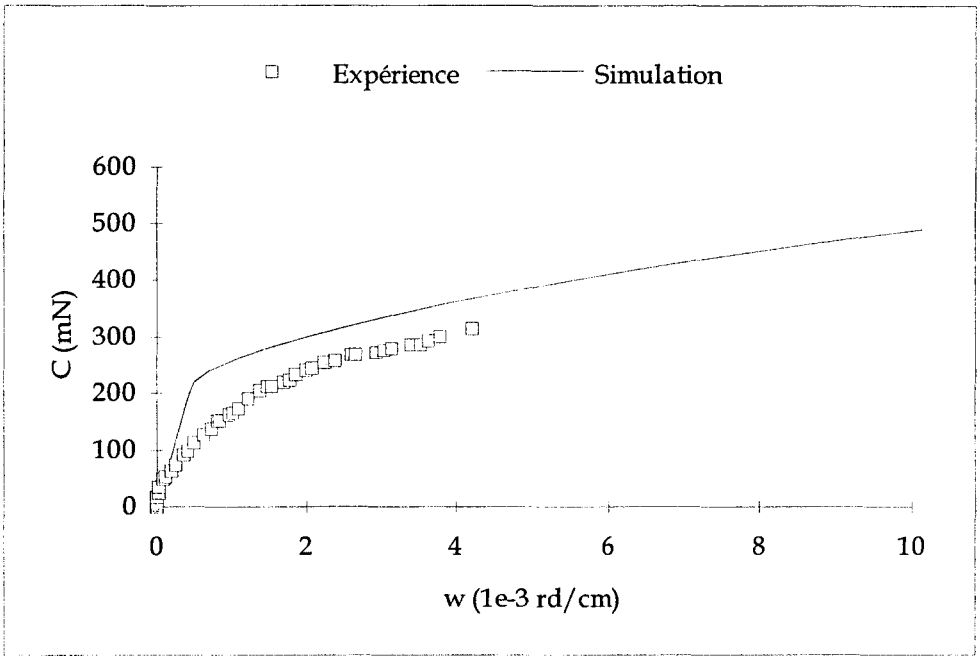


Fig 6.25 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 8 MPa et sous un déviateur de 5 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

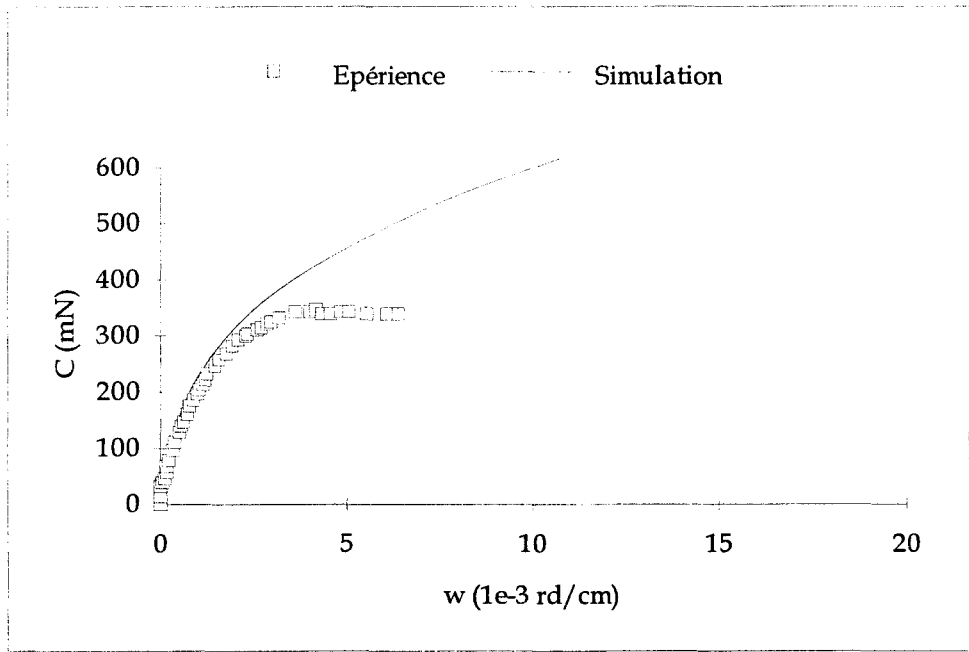


Fig 6.26 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 8 MPa et sous un déviateur de 8 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

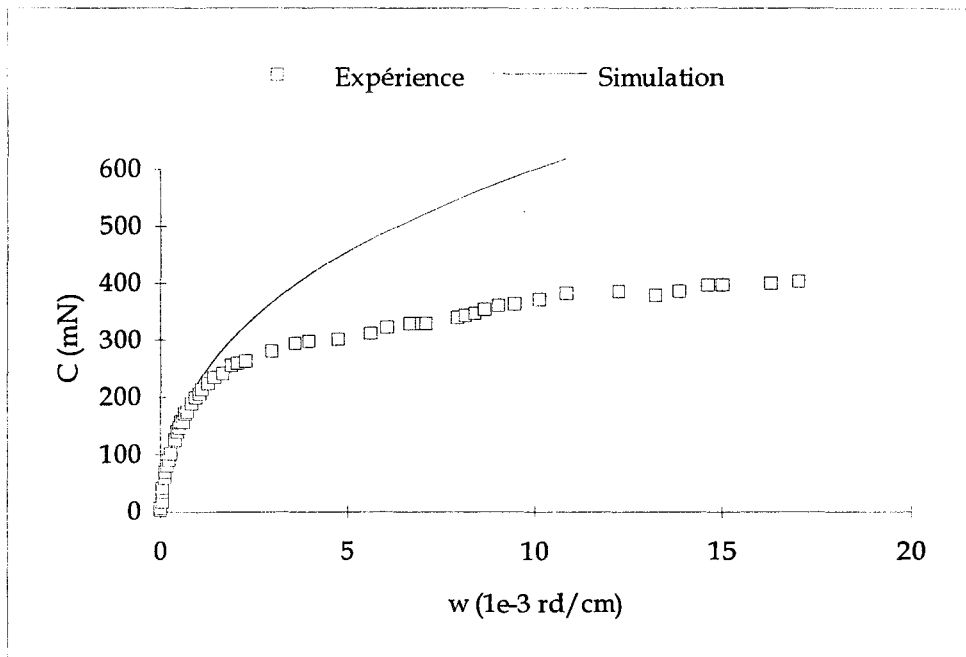


Fig 6.27 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 8 MPa et sous un déviateur de 12 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

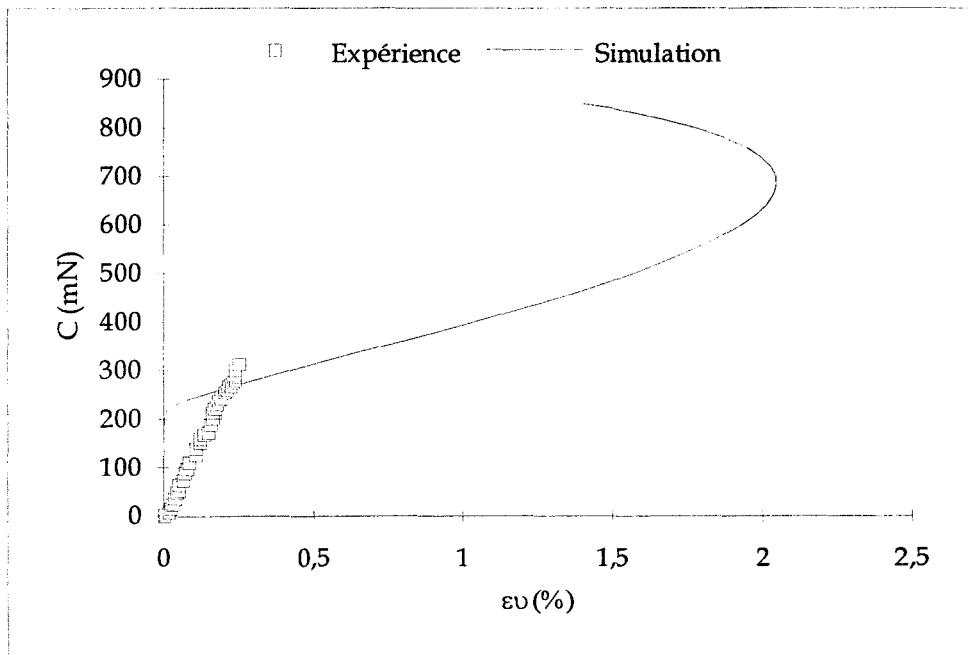


Fig 6.28 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 8 MPa et sous un déviateur de 5 MPa, courbe couple-déformation volumique.

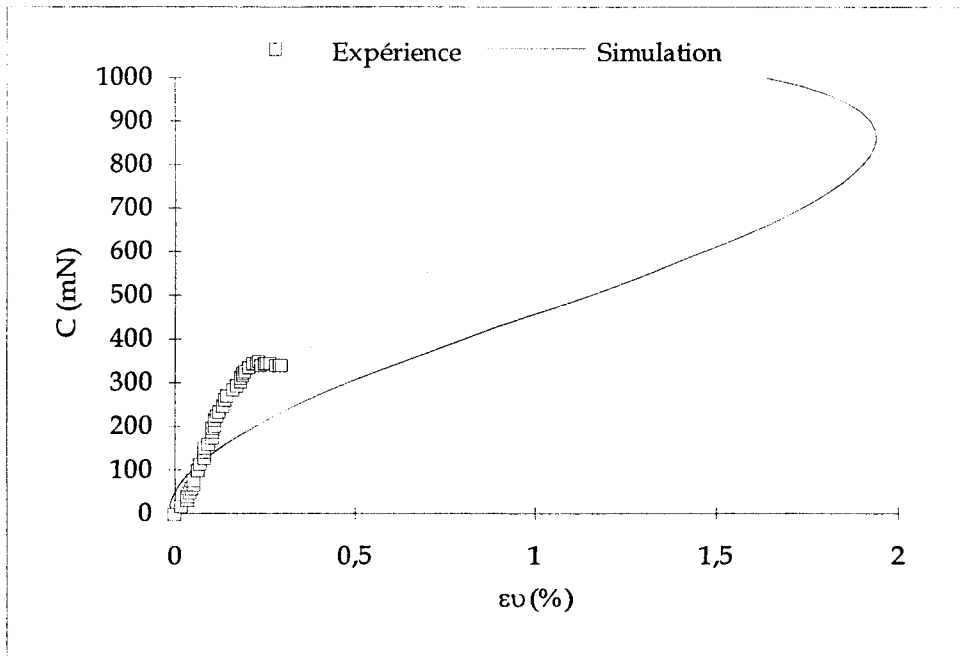


Fig 6.29 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 8 MPa et sous un déviateur de 8 MPa, courbe couple-déformation volumique.

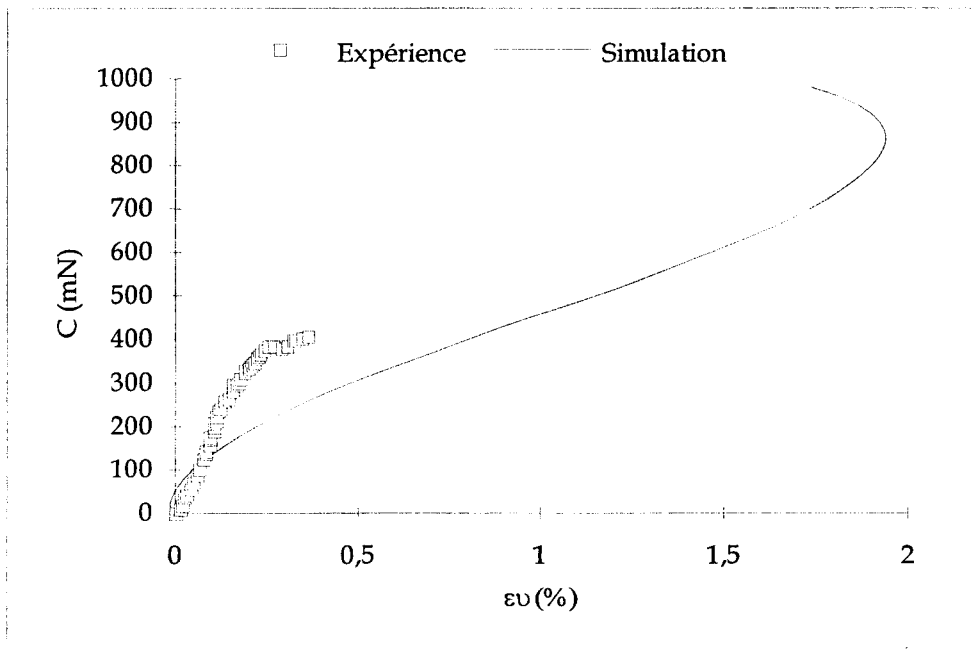


Fig 6.30 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 8 MPa et sous un déviateur de 12 MPa, courbe couple-déformation volumique.

Essais de torsion déviatorique sous une pression hydrostatique de 13 MPa

On observe sur les figures 6.31 et 6.32 que l'allure des courbes couple-déformation angulaire est respectée d'une manière tout à fait satisfaisante. Comme précédemment, on constate une bonne correspondance des courbes en début d'essai (figure 6.31). Le modèle fait apparaître l'influence du déviateur de façon plus marquée qu'elle ne l'a été observée expérimentalement (figure 6.32). Ce qui explique l'écart entre les résultats numériques et expérimentaux. Cependant pour ces deux

essais on remarque une très bonne estimation des déformations volumiques (figures 6.33 et 6.34). Les valeurs du couple à la rupture sont là encore surestimées.

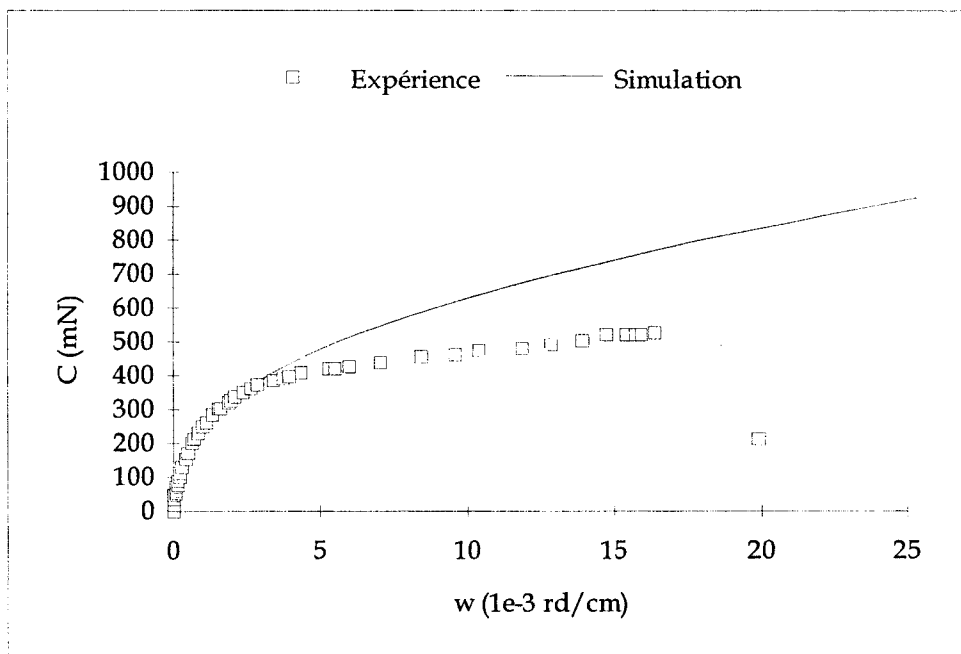


Fig 6.31 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 13 MPa et sous un déviateur de 5 MPa, courbe *couple-déformation angulaire*.

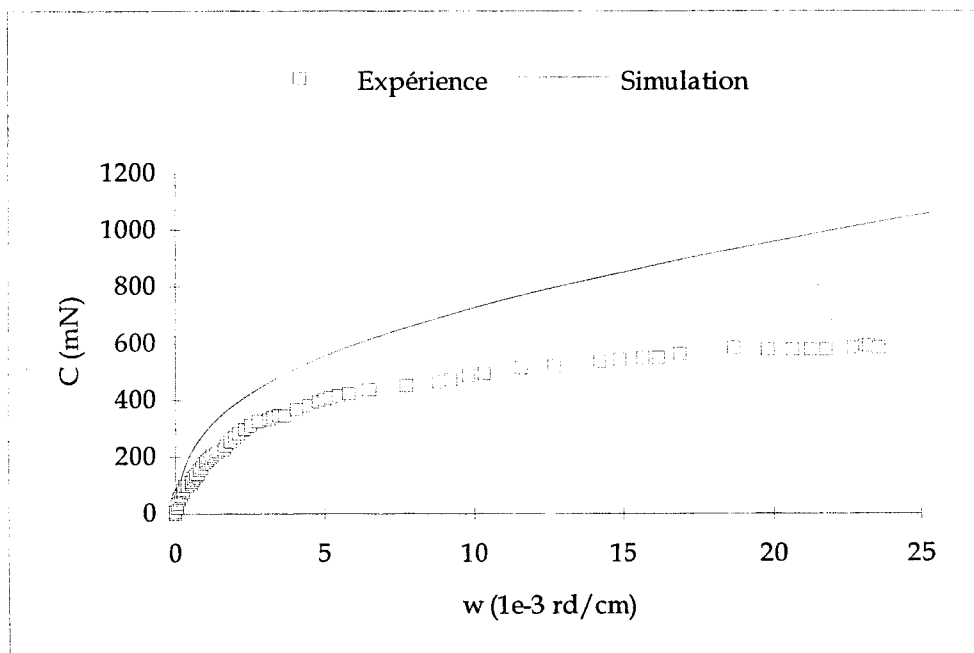


Fig 6.32 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 13 MPa et sous un déviateur de 10 MPa, courbe *couple-déformation angulaire*.

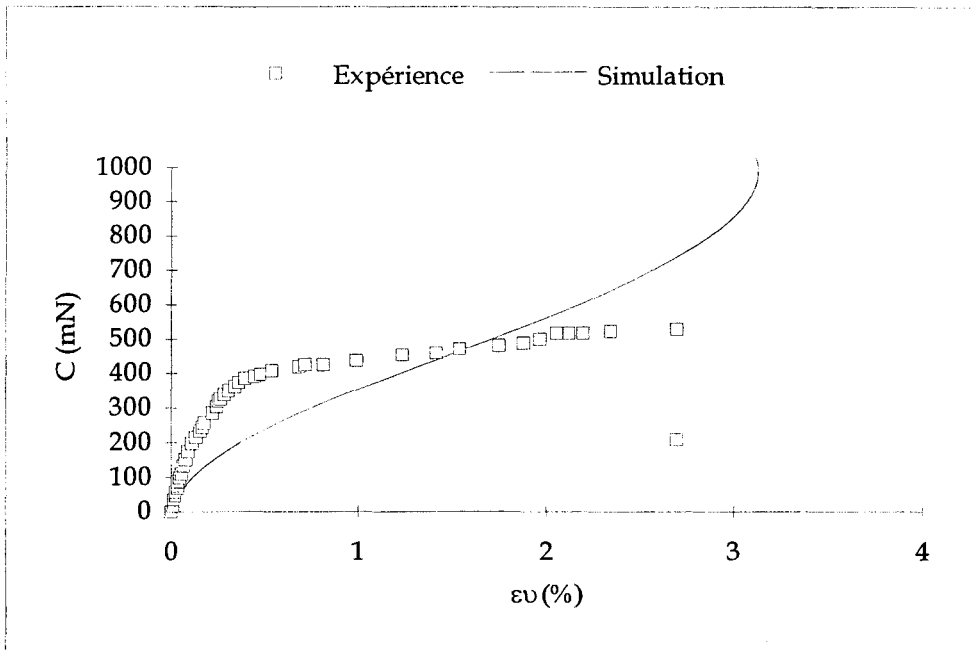


Fig 6.33 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 13 MPa et sous un déviateur de 5 MPa, courbe couple-déformation volumique.

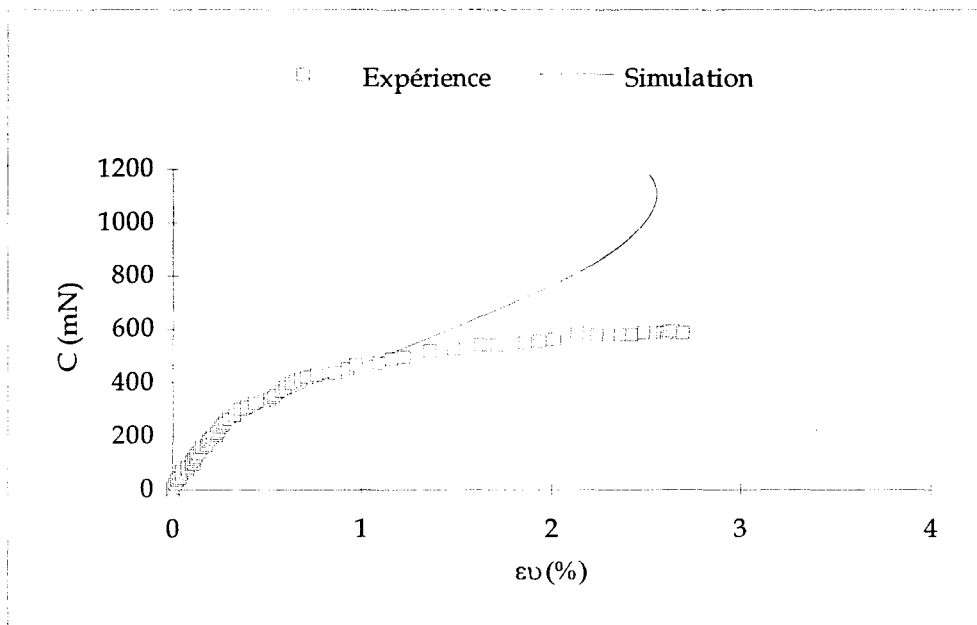


Fig 6.34 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 13 MPa et sous un déviateur de 10 MPa, courbe couple-déformation volumique.

Essais de torsion déviatorique sous une pression hydrostatique de 17 MPa

Les simulations de l'essai de torsion compression déviatorique réalisé à une pression de confinement de 17 MPa et sous un déviateur de 4 MPa sont représentées sur les figures 6.35 et 6.36. Pour les raisons évoquées dans le paragraphe VI.3.1, on observe sur la courbe couple-déformation angulaire un écart important entre la simulation et l'expérimentale. On note toutefois

une bonne estimation des déformations volumiques. La particularité de cet essai rend l'interprétation des résultats assez délicate.

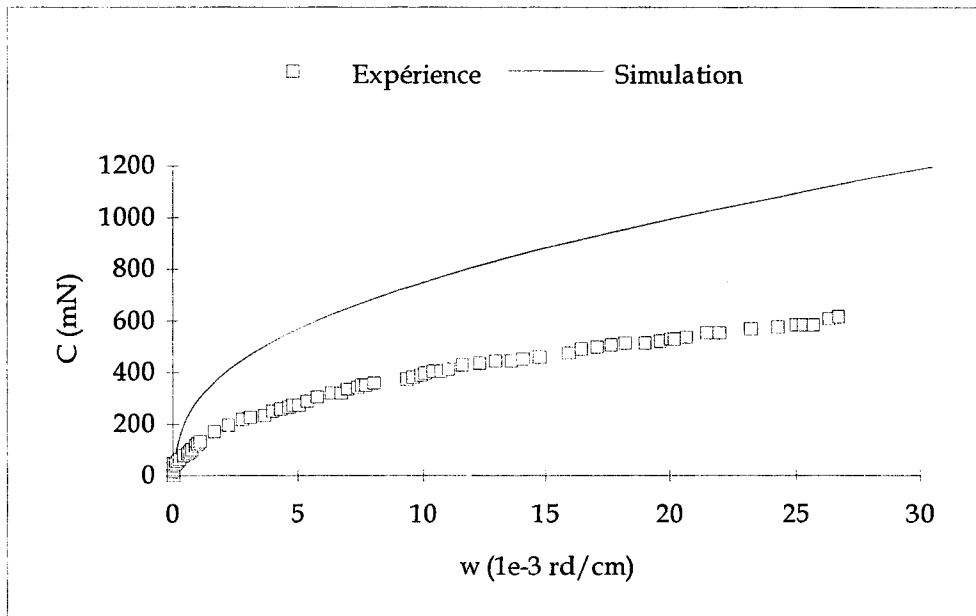


Fig 6.35 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 17 MPa et sous un déviateur de 4 MPa, courbe couple-déformation angulaire.

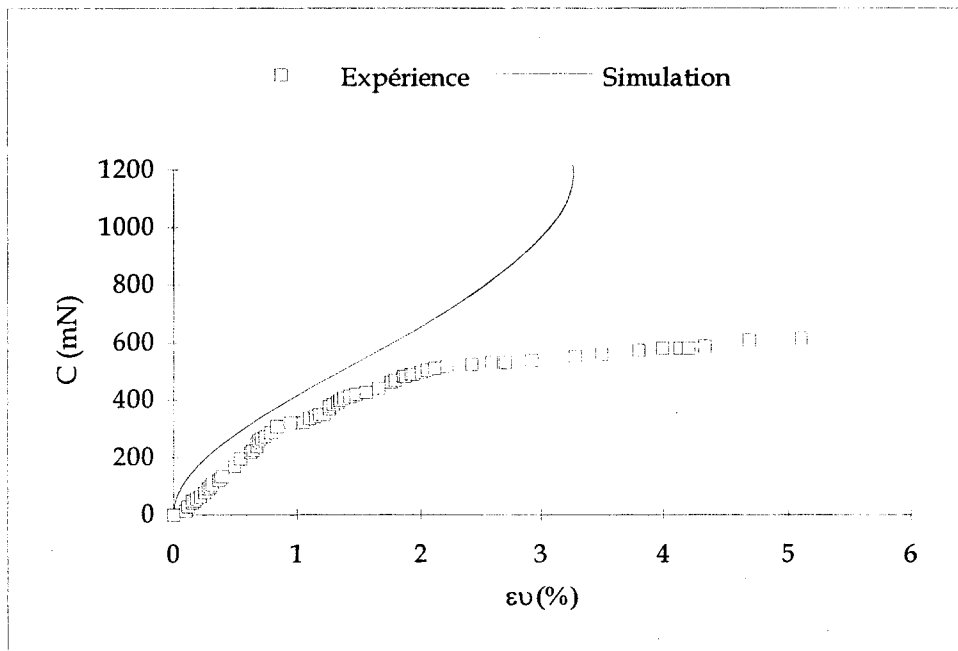


Fig 6.36 : Essai de torsion sous une pression hydrostatique de 17 MPa et sous un déviateur de 4 MPa, courbe couple-déformation volumique.

VI.4 - Conclusion

De manière générale, on peut écrire que le modèle de Nova permet une bonne retranscription du comportement de la craie dans les essais de torsion compression isotrope et déviatorique. Cependant, vu la complexité du comportement de la craie et de la nature des essais,

on montre qu'il est difficile d'obtenir des résultats conformes en tout point aux observations expérimentales. La bonne corrélation entre les valeurs numériques et expérimentales (couple-déformations angulaires) en début d'essai montre que l'échantillon reste continu. Par la suite, comme le suggère Pecqueur (1995), il y a sans doute apparition de discontinuités (bandes de cisaillement) conduisant à la rupture. Le modèle de Nova, basé sur l'hypothèse de continuité, conduit alors à une surestimation de la rupture et ceci pour la totalité des essais. Cependant on note bonne estimation des déformations volumiques et plus particulièrement pour les essais réalisés sous une pression de confinement de 13 MPa. La particularité de l'essai à 17 MPa de pression isotrope rend difficile l'interprétation des résultats. Le modèle, conformément aux prévisions, prédit un couple à la rupture croissant avec la pression isotrope, il ne peut rendre compte de la chute des caractéristiques mécaniques de la craie observée expérimentalement. Pour expliquer ce phénomène, on peut émettre l'hypothèse que des phénomènes de viscosité sont, en partie, à l'origine du comportement de la craie lors des essais de torsion effectués à 17 MPa de pression isotrope. En effet, cette pression est située dans la phase présumée de pore collapse de la craie, phase dans laquelle les phénomènes de viscosité peuvent prendre une importance considérable.

CONCLUSION DE LA 3^{ème} PARTIE

Dans cette partie, l'objectif était d'établir les bases d'un code de calcul en vue de la validation de modèles rhéologiques sols ou roches. Cette validation doit s'effectuer conjointement sur des essais de laboratoires et sur ouvrages. Pour cela nous avons défini une formulation variationnelle en vitesse, l'objectivité de cette formulation ainsi que celle de la loi de comportement est assurée par l'utilisation de dérivées objectives. L'intégration de la loi de comportement se fait moyennant la définition d'une configuration intermédiaire à l'instant $t+\theta\Delta t$. L'objectivité incrémentale est alors vérifiée pour $\theta=1/2$. La loi de comportement est intégrée en adoptant le schéma du point milieu, ce schéma est stable et permet d'obtenir une précision maximum. La valeur du critère de convergence et le nombre de sous incréments ont été déterminés de façon à minimiser les erreurs sur la résolution des équations d'équilibre et sur l'intégration de la loi de comportement. Par la suite, différents tests ont été menés afin de s'assurer de la validité des résultats numériques. Le code de calcul a ensuite été utilisé pour simuler des essais de torsion compression isotrope et déviatorique sur une craie blanche. Le modèle étudié plus particulièrement est le modèle de Nova, les paramètres de ce modèle sont ceux déterminés dans le chapitre IV à partir d'essais triaxiaux de révolution (compression isotrope et déviatorique). On montre tout d'abord que la solution numérique, dans notre cas, est peu dépendante du choix de la dérivée objective, on confirme par ce biais que l'on reste sous l'hypothèse des petites déformations élastoplastiques. On observe par la suite que le modèle de Nova permet de retrouver de manière globalement satisfaisante le comportement d'une craie (craie d'Haubourdin) dans les essais de torsion. On note cependant une tendance du modèle à surestimer la valeur du couple à la rupture. Cette surestimation est en partie due à ce que le modèle est basé sur l'hypothèse de continuité, ce qui n'est pas conforme à la réalité de l'essai. En effet, lors de l'essai, il y a apparition de discontinuité au sein de l'échantillon conduisant à sa ruine. Toutefois, on a pu remarquer que le modèle de Nova permettait de retrouver les ordres de grandeur des déformations volumiques et plus particulièrement pour les essais à confinements supérieures à la pression seuil de la phase de pore "collapse". En définitive, compte tenu du faible nombre de paramètres du modèle, Les résultats obtenus sont tout à fait encourageants. La comparaison de ces résultats avec ceux obtenus avec le modèle de Lade par Pecqueur (1995) et Siwak (1994) n'a malheureusement pas pu être abordée dans ce travail. En effet, les solutions numériques retenues et la méthode de dépouillement des résultats numériques sont trop différentes pour envisager une comparaison rigoureuse. Une reprogrammation du modèle de Lade dans le code que nous avons développé sera nécessaire pour traiter ce point.

CONCLUSION GENERALE

Cette étude s'inscrit pleinement dans la démarche de validation des modèles rhéologiques pour le Génie-Civil et le Génie pétrolier. Le matériau que nous avons étudié est la craie. A partir d'essais de compression triaxiale de révolution, on a étudié la pertinence de deux modèles élastoplastiques à retranscrire le comportement mécanique de quatre craies. Ces deux modèles sont issus de la mécanique des sols. Le modèle jugé le plus en adéquation avec les observations expérimentales à ensuite fait l'objet d'une étude de sa validité à partir d'un essai avec rotation des directions principales de contraintes. Conjointement, et en vue d'une validation des modèles à partir de problèmes aux limites, nous avons développé les bases d'un code de calcul aux éléments finis permettant la prise en compte de plus grandes déformations et plus grandes rotations.

Plus précisément, Le premier modèle utilisé a été le modèle Cam-Clay modifié. Nous avons tout d'abord procédé à une phase de détermination des paramètres de chacune des craies, ces paramètres sont déduit des essais triaxiaux de révolution. On montre à partir des simulations de ces essais que le modèle Cam-Clay modifié ne permet pas de retranscrire de façon correcte le comportement mécanique des craies. Il conduit de manière générale à une sous estimation de la rupture dans les essais effectués à basses pressions de confinement, et à une surestimation des déformations plastiques axiales et volumiques à des pressions plus importantes. De plus, il fait apparaître un comportement contractant-dilatant pas toujours observé expérimentalement. Nous relierons ces observations à la forme du potentiel plastique du modèle et au fait de la description de l'état de déformation plastique du matériau par la seule variable d'écrouissage qu'est la déformation volumique plastique. Cependant, nous avons pu observer que le modèle Cam-Clay modifié permet une bonne description du passage du domaine fragile au domaine ductile. Nous concluons sur ce point en remarquant donc que le concept de droite d'état critique, développé pour les sols et que nous appliquons aux craies, sépare l'espace en un domaine fragile et un domaine ductile. Pour palier aux inconvénients du modèle précédent, nous proposons l'utilisation du modèle de Nova. Nous montrons dans un premier temps que la modification du potentiel plastique et de la surface de charge, tout en gardant la fonction d'écrouissage du modèle Cam-Clay modifié, permet de décrire de manière plus correcte le comportement des craies. On montre que le caractère contractant-dilatant des craies est estimé de manière plus fidèle et que la forme de la surface de charge permet d'obtenir une meilleure estimation de la limite élastique des craies dans les essais de compressions déviatoriques. Cependant, nous remarquons qu'il subsiste toujours une surestimation des déformations plastiques axiales et volumiques dans ces essais. Pour améliorer ce point, nous tenons compte, dans la fonction d'écrouissage, d'une seconde variable : la déformation déviatorique plastique. On montre alors que cette formulation permet de retranscrire de manière plus conforme le comportement plastique des craies. Cependant, la détermination du paramètre introduit doit s'effectuer de manière numérique, ce point doit donc faire l'objet d'investigations supplémentaires. On remarque également que ce paramètre semble dépendre de la pression de confinement, en particulier, il doit être pris égale zéro pour de faibles valeurs de cette pression. Toutefois, l'utilisation d'une valeur constante de ce paramètre dans les essais de compression déviatorique à hautes pressions de confinement permet d'obtenir des valeurs de déformations plastiques axiales et volumiques tout à fait satisfaisantes. On suppose donc que l'évolution de ce paramètre dans la gamme des hautes pressions est modérée. Les résultats obtenus par l'utilisation de ce modèle nous ont alors engagé à la retenir et à envisager sa validation pour des problèmes aux limites.

Pour étudier la validité du modèle de Nova, et d'une manière générale, la validité des modèles de comportement des sols et des roches, nous avons développé les bases d'un code de calcul aux éléments finis. Ce code a été élaboré de manière à pouvoir conduire les calculs dans le domaine des grandes déformations et rotations. Nous espérons de cette manière étudier une gamme complexe de situations telles que l'on peut rencontrer dans le domaine du Génie-Civil ou le Génie Pétrolier. Les solutions numériques retenues dans ce code sont un prélude à des développements futurs. En effet, dans ce type de calcul les schémas numériques utilisés sont souvent fonction du problème à résoudre. Un choix doit donc être proposé à l'utilisateur en vue de ses problèmes spécifiques.

Le modèle de Nova en ensuite était introduit dans ce code, l'attention particulière que nous avons portée à l'obtention de la solution numérique nous permet d'obtenir une solution numérique stable et consistante avec la loi de comportement. Nous procédons ensuite aux simulations des essais de torsion compression isotrope et déviatorique sur une craie d'Haubourdin. Les résultats expérimentaux de cette craie ont montré une dépendance de son comportement avec la pression hydrostatique et la contrainte déviatorique. A partir des résultats numériques issus de la simulation de ces essais, nous montrons une bonne aptitude du modèle de Nova à retranscrire le comportement de la craie sous ce type de sollicitations. Les valeurs des déformations volumiques sont d'autant plus en accord avec les valeurs expérimentales que la pression de confinement et le déviateur sont élevés. Pour la quasi-totalité des essais, les courbes couples-déformations angulaires sont reproduites de manière satisfaisante avec une très bonne précision en début d'essai. Par la suite, il se produit une localisation et le développement de bande de cisaillement. La loi de comportement et alors moins adaptée, elle conduit à une sous-estimation des déformations angulaires et à une surestimation de la valeur du couple à la rupture. Par ce biais, on met en évidence la nécessité d'effectuer des études expérimentales plus approfondies des mécanismes de déformation dans ce type d'essai. D'un point de vue théorique, une des solutions envisageables serait d'introduire un critère de localisation définissant les limites de la modélisation basée sur la plasticité et d'ajouter alors aux déformations une contribution due à l'endommagement du matériau. Il semblerait également qu'il faille tenir compte dans certains cas du caractère visqueux de la craie, même pour des durées d'essai relativement courtes. Il existe dans nos laboratoires un manque important de données expérimentales à ce sujet.

En définitive, nous montrons dans ce travail que l'utilisation du modèle de Nova, dans les limites fixées précédemment, pour modéliser le comportement de la craie reste tout à fait envisageable. Le modèle utilisé présente l'avantage de contenir peu de paramètre qui, malgré les remarques sur le second paramètre d'écrouissage, sont facilement identifiables. Nous préconisons à cet effet une étude plus approfondie sur la signification physique et sur la détermination de ce paramètre. Des essais effectués à un nombre suffisants de pressions de confinement doivent être réalisés. Ces essais doivent également être réalisés avec un nombre important de cycle de chargement et déchargement pour permettre une bonne détermination de ce paramètre, ceci implique des essais poursuivis à des valeurs de déformations axiales plus importantes. Nous concluons ce travail en remarquant que, compte tenu du type de problème traité dans ce travail et le manque de données expérimentales, l'application des développements théoriques effectués dans le cadre des grandes déformations n'a pu être que partiellement abordée. Nous espérons toutefois avoir établi des bases solides dans ce domaine, encore peu développé en mécanique des sols ou des roches.

Références Bibliographiques

- BAZANT Z. P. & AL** (1981) " *Large triaxial torsionnal machine with hygrothermal control* ". Matériaux et constructions. Vol.19, N°112.
- BAZANT Z. P., HESS J. D., NEIRI S.** (1981) " *High temperature triaxial-torsional testing machine for concrete and rock* ". Geophysical Research Letters. Vol.8, N°7.
- BENJAMIN N. POWELL, GARY L. LOVELL** (1994) " *Mechanisms of Chalk compaction* ". Eurock 94, SPE/ISRM. Rocks Mechanics in Petroleum Engineering. Delft, 29-31 August 1994. pp. 811-818.
- BIGNAUT M. P.** (1973) " *Géologie de la craie dans le bassin Parisien* ". Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées. spécial V, pp. 11 à 22.
- BONVALET J.** (1978) " *Critères de stabilité des exploitations souterraines à faible profondeur; application au cas des carrières souterraines du Nord* ". Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Nancy.
- BROWN E. T., MICHELIS P. N.** (1978) " *A critical state yield criterion for strain softenig rock* ". 19th U.; S. Symp. on Rock Mechanics. Lake Tahoe, Nevada, pp. 515-519.
- CAULIER P.** (1974) " *Etude des facies de la craie et de leurs caractéristiques hydroliques dans la région du Nord de la France* ". Thèse de Doctorat. Université des sciences et techniques de Lille I.
- CESSOTTO S., GODINAS A., PALGEN L.** (1982) " *Simulation numérique du laminage en cannelures* ". Rapport semestriel No 1, Université de Liège.
- CHARLEZ Ph. A., HEUGAS O., SHAO J. F.** (1992) " *Effect of temperature on mechanical properties of chalk* ". Fourth North Sea Chalk Symposium. September 21-23, Deauville - France, 1992.
- CHARLEZ Ph. A.** (1995) " *Pore Collapse : A major mechanism in soft porous rocks* ". I.S.R.M. News Journal, Vol. 3, No 1, pp. 11-13.
- CHARLEZ Ph. A.** (1994, a) " *The Impact of constitute laws on wellbore stability : A general review* ". SPE/ISRM. Rocks Mechanics in Petroleum Engineering. Delft, 29-31 August 1994, pp. 239-249.
- CHARLEZ Ph. A.** (1994, b) " *Exemple de modèle poroplastique* ". Ecole d'été, Aussois.
- CHARLEZ Ph. A., SHAO J. F.** (1993) " *Mechanical behaviour of soft deep rocks* ". Geotechnical Engineering of Hard Soils and Soft Rocks. Athènes, Grèce : 20-23 septembre 1993, pp. 425-431.
- CHARLIER R.** (1987) " *Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis* ". Thèse de doctorat ,Université de Liège.
- CHEHADE R.** (1989) " *Contribution à l'étude du comportement des geomatériaux pulvérulents sous des sollicitations rotationnelles - Réalisation d'un appareillage de torsion* ". Thèse de doctorat, Université de Lille I.

- CHEHADE W.** (1991) " *Méthodologie pour la validation des modèles des géomateriaux - Application aux modèles élastoplastiques des sols* ". Thèse de doctorat , Université de Lille I.
- COSTIN L. S.** (1983) " *A microcrack model for the deformation and failure of brittle rock* ". J. of Geophysical research, Vol. 88, No. B11, pp. 9485-9492.
- DESAI C. S., SOMASUNDARAM S., FRANTZISKONIS G.** (1986) " *A hierarchical approach for constitutive modelling of géologic materials* ". Int. J. for numerical and analytical methods in géoméchanics. Vol. 10, pp. 225-257.
- DESAI C. S., SALAMI M. R.** (1987) " *A constitutive model and associated testing for soft rock* ". Int. J. Rock Mech. Vol. 24, No 5, pp. 299-307.
- DESSENNE J. L., DUFFAUT P.** (1970) " *Les propriétés rhéologique de la Craie et Leur influence sur le percement de galeries* ". La Houille Blanche, No 5, pp. 477-488
- DESSENNE J. L.** (1971) " *Etude rhéologique et géotechnique de la craie* ". Thèse de doctorat, Université de Grenoble I.
- DETRAUX J. M.** (1985) " *Formulations et applications en grandes déformations des solides* ". Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- DIENES J. K.** (1979) " *On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies* ". Acta Mechanica 32, pp. 217-232.
- DI PRISCO C., MATIOTTI R., NOVA R.** (1992) " *A mathematical model of grouted sand allowing for strenght degradation* ". Numerical models in geomechanics , Pande & Pietruszczak (eds) . 1992 Balkema , Rotterdam . ISBN 90 5410 088 5
- DJEBBI M.** (1984) " *Phénomène de dissolution-cristallisation; étude bibliographique et application au fluage de craie* ". Thèse de troisième cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille I.
- DOREMUS C.** (1978) " *Les craies du nord de la france. Corrélation entre Listhostratigraphie, la microstructure et les propriétés mécaniques* ". Thèse de 3ème cycle, Université de Lille I.
- DRAGON A., CHARLEZ PH. A., PHAM D., SHAO J. F.** (1993) " *A model of anisotropic damage by (micro) crack growth* ". Assessment and prevention of failure phenomena in rock engineering, Pasamehmetoglu.(eds). 1993 Balkema, Rotterdam, ISBN 90 5410 3094
- DURAND E.** (1973) " *Comportement des roches à la torsion , application à l'étude de la stabilité des excavations souterraines* ". Thèse de doctorat , Université de Nancy 1.
- FARUQUE M. O., DESAI C. S.** (1985) " *Implemention of a general constitutive model for geological materials* ". Int. J. for nimerical and analytical methods in geomechanics, Vol. 9, pp. 415-436.
- FRAEJIS DE VEUBEKE B. M.** (1972) " *A new variationnal principle for finite elastic displacements* ". Int. J. Engng. Sci. , Vol. 10 , pp. 745-763.

- GENS A., NOVA R.** (1993) " *Conceptual bases for a constitutive model for bonded soils and weak rocks* ". Geotechnical Engineering of Hard Soils and Soft Rocks. Athènes, Grèce : 20-23 septembre 1993. pp 485-494.
- GELIN J. C.** (1985) " *Modèles Numériques et Expérimentaux en Grandes Déformations Plastiques et Endommagement de Rupture Ductile* ". Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie.
- GEROGIANNOPOULOS N. G., BROWN E. T.** (1978) " *The critical state concept applied to rock*". Int. J. Rock MIN. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 15, pp. 1-10. Pergamon Press.
- GHOUREYCHI M.** (1983) " *Stabilité d'exploitations partielles avec piliers en état post-rupture; application au cas des carrières souterraines de craie* ". Thèse de troisième cycle, Institut Polytechnique de Lorraine.
- GOLCHEH Y.** (1986) " *Etude de sollicitations rotationnelles sur une Kaolinite -Réalisation d'un appareillage de torsion* ". Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris.
- GUTIERREZ M. et AL** (1994) " *Modelling of the compaction of fractured chalk* ". Eurock 94, SPE/ISRM. Rocks Mechanics in Petroleum Engineering. Delft, 29-31 August 1994. pp. 803-810.
- HALLEUX & AI** (1985) " *Mechanical Behaviour of Chalks* ". 2nd North Sea Chalk Symposium, Stavanger, May 1985.
- HAMLILI H.** (1990) " *Simulation de Problèmes de la Mécanique Non Linéaire du Solide par Eléments Finis sur Micro-ordinateur*". Thèse de troisième cycle, Institut Polytechnique de Lorraine.
- HANDIN J., HIGGS D., O'BRIEN J.** (1960) " *Torsion of yule marble under confining pressure*". Publication N°132. Shell development company, Texas.
- HART EDWARD W.** (1982) " *The effects of material rotations in tension-torsion testing* ".Int. J. Solids Structures, Vol.18 , No. 11, pp. 1031-1042.
- HART EDWARD W., CHANG YOUNG-WON** " *Material rotation effects in tension-torsion testing : Experimental results* ".
- HENRY J. P.** (1989) " *La Craie: Comportement mécanique, originalité et conséquence* ". Journées Craies, Lille le 21 avril 1989.
- HICHER P. Y.** (1985) " *Comportement mécanique des argiles saturées sur divers chemins de sollicitations monotones et cycliques. Application à une modélisation élastoplastique et viscoplastique*". Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6.
- HIBBIT H. D., MARCAL P. V., RICE J. R.** (1970) " *A finite formulation for problems of large strain and large displacement* ". INT. J. Solids Structures , 1970 , Vol. 6 , pp. 1069-1086.
- ISHIHARA K., MOMENZADEH M.** (1986) " *Influence of rotation of principal stress directions on the cyclic behaviour of sand* ". 2nd international symposium on numerical models in geomechanics : Ghent / 1986 .

ISHIHARA K., TOWHATA I., YAMAZAKI A. " Sand liquefaction under rotation of principal stress axes " .

KHERBOUCHE R., SKOCZYLAS, HENRY J. P. (1993) " Etude Expérimentale du Comportement Poroélastoplastique de la Craie ". Actes du 11^{ème} Congrès Français de Mécanique. LILLE 1993. Vol. 4, pp. 485-488.

LADE P. V., DUNCAN J. M. (1975) " Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil ". Journal of the Geotechnical Engineering Division pp. 1037-1053.

LADE P. V. (1988) " Double hardening constitutive model for soils , parameter determination and predictions for two sands " . Constitutive equations for granular non-cohesive soils, Saada & Bianchini (eds) 1988 Balkema , Rotterdam . ISBN 90 6191 7891 .

LAGIOIA R., NOVA R. (1993) " A constitutive model for soft rock ". Geotechnical Engineering of Hard Soils and Soft Rocks. Athènes, Grèce : 20-23 septembre 1993. pp. 625-632.

LUBARDA V. A. (1988) " Simple shear of strain-hardening elastoplastic hollow circular cylinder ". International journal of plasticity , Vol.4, pp. 61-75.

MASSON (1971) " Colloque sur la craie ". C.E.T.E de Rouen, 3 et 4 novembre 1971.

MAYNE P W. , HOLTZ R. D. " Effect of Principal Stress Rotation on Clay Strength " .

MONJOIE A., SCHROEDER C. (1989) " Caractéristiques de Craies du Crétacé Supérieur " . 2nd North Sea Chalk Symposium, Stavanger, May 1985.

MONJOIE A. & Al. (1990) " Establishment of Constitutive Laws of Chalk and Long Term Tests " . 3rd North Sea Chalk Symposium, Copenhagen, June 1990.

MONJOIE A., SCHROEDER C. (1989) " Testing Procedure for Time-Dependent Behaviour of Chalk " . 7th Int. Congress on Rock Mechanics. Aachen/Deutschland.

MIKOLAJCZAK A., PECQUEUR P., SIWAK J. M. (1995) " Etude comparative de quatre modèles applicables a des craies branches " . Colloque Craies et Schistes, Bruxelles 1995, pp. 1.2.80 - 1.2.89.

MOLENKAMP F. (1986) " Limits to the Jaumann stress rate. Int. J. for numerical and analytical methods in geomechanics " . Vol. 10 , pp. 151-176.

MORTIMORE, FIELDING (1989) " The relationship between texture density and strength of chalk " . Int. Chalk Symposium. Brighton

MORTON E., GURTIN, SPEAR K. (1983) " On the relation between the logarithmic strain rate and the stretching tensor " . Int. J. Solids structures Vol. 19 , No.5 , pp. 437-444.

MOULD J. C., STURE S. , KO H. Y. (1985) " Sand deformation tests with rotating principal stress directions " . Fifth int. conference on numerical methods in geomechanics : Nagoya / 1-5 April 1985

- NAGTEGAAL J. C., DE JONG J. E.** (1981) " *Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis* ". Int. J. for numerical methods in engineering, Vol. 17, pp. 15-41.
- NAYAK G. C., ZIENKIEWICZ O. C.** (1972) " *Elasto-plastic stress analysis . A generalization for various constitutive relations including strain softening* ". Int. J. for numerical methods in engineering, Vol. 5, pp. 113-135.
- NEALE K. W., TOHT L. S., JONAS J. J.** (1990) " *Large strain shear and torsion of rate-sensitive FCC Polycrystals* ". Int. J. of plasticity, Vol. 6, pp. 45-61.
- NOVA R.** (1988) " *Sinfonietta classica : An exercise on classical soil modelling* ". Constitutive equations for granular non-cohesive soils, Saada & Bianchini (eds) 1988 Balkema , Rotterdam . ISBN 90 6191 7891 .
- NOVA R.** (1992) " *Mathematical modelling of natural and engineered geomaterials* ". Eur. J. Mech., A/Solids , 11 , Special issue , pp. 135-154.
- NYSSSEN C.** (1981) " *An Efficient and Accurate Iterative Method, Allowing Large Incremental Steps, to Solve Elasto-Plastic Problems* ". Comp. Struct., Vol 13, pp 63-71.
- PECQUEUR G.** (1995) " *Etude Expérimentale et Modélisation d'une Craie et d'un Grès en Torsion* ". Thèse de Doctorat, Université de LILLE I.
- PIETRASZKIEWICZ W., BADUR J.** (1983) " *Finite rotation in description of continuum deformation* ". Int. J. Engng. Vol. 21, No.9, pp. 1097-1115.
- PINSKY P., ORTIZ M., PISTER KARL S.** (1983) " *Numerical integration of rate constitutive equation in finite deformation analysis* ". Computer methods in applied mechanics and engineering 40 (1983) 137-158 North-Holland .
- PLISCHKE B., PISARSKI L.** (1992) " *Numerical simulation of the stress field close to a producing well* ". Fourth North Sea Chalk Symposium, septemder 21-23, 1992 - Deauville, France.
- PREVOST J.** (1991) " *Développement d'un appareillage de torsion-compression sur cylindre creux de roche* ". Thèse de doctorat , Université de Lille I.
- PRICE A. M., FARMER I. W.** (1981) " *The Hvorslev surface in rock deformation* ". Int. J. Rock MIN. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 18, pp. 229-234.
- RUBINSTEIN R., ALTURI S. N.** (1983) " *Objectivity of incremental constitutive relations over finite time steps in computational finite deformation analyses* ". Computer methods in applied mechanics and engineering 36 (1983) 277-290 North-Holland .
- SACHS A., CELIKKOL B., FREED A.** (1989) " *Body tensor formalism in finite deformation elasticity . Part 1 : Description and constitutive equation* ". Acta Mechanica 78, pp. 33-37.
- SACHS A., CELIKKOL B., FREED A.** (1989) " *Body tensor formalism in finite deformation elasticity . Part 2 : Application to the torsion of a circular cylinder* ". Acta Mechanica 78, pp. 57-71.

- SATO Y., NAGAI F.** (1974) " *Influence of hydrostatic pressure and stress distribution on rupture of marble cylinder in torsion* ". Bulletin of the J. S ME. Vol 17 N°107.
- SCHROEDER C.** (1995) " *Le Pore collapse : aspect particulier de l'interaction fluide squelette dans les craies ?* ". Colloque Craies et schistes, Bruxelles, 20-22 mars 1995, pp 1.1.53 - 1.1.60
- SCOTT T. E., AZEEMUNDDIN Jr. M., ZAMAN M., ROEGIERS J. C.** (1995) " *Change in acoustic velocity during pore collapse of rocks..* I.S.R.M. News Journal, Vol. 3, No 1, pp. 14-17.
- SHAO J. F.** (1987) " *Etude du comportement d'une craie blanche très poreuse et modélisation* ". Thèse de doctorat. Université de Lille I.
- SHAO J. F., BEDERIAT M., SCHROEDER CH.** (1993) " *A viscoplastic theory for soft rock behaviour and application* ". Geotechnical Engineering of Hard Soils and Soft Rocks. Athènes, Grèce : 20-23 septembre 1993, pp. 795-802.
- SHAO J. F., HENRY J. P.** (1993) " *Application of a poroplastic model to analysis of wellbore stability and reservoir compaction* ". Geotechnical Engineering of Hard Soils and Soft Rocks. Athènes, Grèce : 20-23 septembre 1993, pp. 1649-1655.
- SHAO J. F., SIBAI M., HENRY J. P.** (1989) " *Sur la modélisation de la craie en conditions drainée et non drainée* ". Journée Craie, Lille le 21 avril 1989, pp. 20-38.
- SHIELD R. T.** (1973) " *The rotation associated with large strains* ". SIAM J. APPL. Math. Vol 25 N°3.
- SIWAK J. M.** (1994) " *Comportement de la craie* ". Thèse d'état. Université de Lille I.
- SIWAK J M., PECQUEUR G., MIKOLAJCZAK A.** (1994) " *Behaviour of chalks* ".Eurock 94, SPE/ISRM. Rocks Mechanics in Petroleum Engineering. Delft, 29-31 August 1994, pp. 861-867.
- SIWAK J M., PECQUEUR G., MIKOLAJCZAK A.** (1993) " *Comportement de la craie* ". Geotechnical engineering of hard soils and soft rocks. Anagnostopoulos and Al (eds). Balkema. 1993
- SIWAK J. M., PECQUEUR G., MIKOLAJCZAK A.** (1994) " *Modélisation du Comportement de la craie* ". 7 th congress of international association of engineering geology. Lisboa, Portugal. 1994, Vol. 7, pp. 4781-4790.
- TALLON J. P.** (1976) " *Influence de la texture sur certaines propriétés géotechniques des craies franches* ". Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- THOMAS J. R., HUGHES, WINGET J.** (1980) " *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis* ".
- TOTH L. S., JONAS J. J., GILORMINI P., BACROIX B.** (1990) " *Length changes during free end torsion : A rate sensitive analysis* ". Int. J. of plasticity , Vol 6 , pp. 83-108.

TOWHATA I., ISHIHARA K. (1985) " *Undrained strenght of sand undergoing cyclic rotation of principal stress axes* ". Soils and fondations Vol. 25 , No 2 , pp. 135-147.

WACK B. (1982) " *Orientation of the mechanical tensors in torsion kinematics - the case of a hereditary type constitutive equation with discrete memory* ". Mechanics research communications Vol . 9 (4) , pp. 257-263.

WACK B. (1989) " *The torsion of a tube (or a rod) : General cylindrical kinematics and some axial deformation and ratchet measurements* ". Acta Mechanica 80 , pp. 39-59.

WACK B., TERRIEZ J. M., GUELIN P. (1982) " *Torsion cyclique et effet du second ordre dans une description à structure héréditaire du continu anélastique* ". Journal de mécanique théorique et appliquée . Numéro spécial, 1982, pp. 61 à 72.

YURITZINN T. (1981) " *Comportement des roches après la rupture; Application a la stabilité des ouvrages souterrains par la méthode des éléments finis* ". Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6 et Ecole Nationale des Pont et Chaussées 1981.

ZHONG-HENG G., DUBEY R. N. (1984) " *Spins in a deforming continuum* ". SM Achirves 9 pp. 53-61.

ZITOUNI Zein-El-Abidine (1988) " *Comportement tridimensionnel des sables* ". Thèse de Doctorat soutenue le 3 novembre 1988. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

OUVRAGES GENERAUX

CHARLEZ Ph. A. *Rock Mechanics*. Vol. 1. Théoretical fundamentals. Edition Technip, Paris 1991.

COUSSY O. *Mécanique des milieux poreux*. Editions Technip-Paris, 1991.

CRISFIELD M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 1 : Essentials. John Wiley & Sons Ltd, 1991.

DHAT G., THOUZOT G.. *Une présentation de la Méthode des Elements Finis*. Maloine S. A. Editeur Paris, 1984 (deuxième édition)

GERMAIN P. *Cours de mécanique des Milieux Continus*. Masson et Cie Editeurs, 1973.

IMBERT J. F. *Analyse des structures par éléments finis*. CEPADUES édition, 1984 (deuxième édition).

SALENCON J. *Mécanique des milieux continus*. Tome I, II, III. Ecole Polytechnique, Département Mécanique.

SIDOROFF F. *Cours sur les Grandes Déformations*. Rapport GRECO N° 51/1982.

TRUESDELL C. *Introduction à la Mécanique Rationnelle des Milieux Continus*. Masson et Cie Editeur, 1974.

ZIENKIEWICZ *La methode des éléments finis*. Ediscience, Paris, 1973.

Annexes

Le modèle utilisé par Shao (1987) s'exprime :

Pour la partie contractante

$$\text{fonction de charge :} \quad F_c = \bar{I}_I^2 + 2\bar{I}_{II} - Y_c \quad (\text{A1.1})$$

$$\text{potentiel plastique :} \quad Q_c = \bar{I}_I^2 + 2\bar{I}_{II} \quad (\text{A1.2})$$

$$\text{fonction d'écrouissage :} \quad Y_c = Y_c^0 + C \cdot P_a^2 \cdot (W_c/P_a)^\rho \quad (\text{A1.3})$$

Pour la partie déviatorique

$$\text{fonction de charge :} \quad F_d = \left(\frac{\bar{I}_I^3}{\bar{I}_{III}} - 27 \right) \left(\frac{\bar{I}_I}{P_a} \right)^m - Y_d = 0 \quad (\text{A1.4})$$

$$\text{potentiel plastique :} \quad Q_c = \bar{I}_I^3 - 27\bar{I}_{III} \quad (\text{A1.5})$$

$$\text{fonction d'écrouissage :} \quad Y_d = Y_d^0 + (Y_d^r - Y_d^0) \cdot (W_d/W_{dr})^q \quad (\text{A1.6})$$

Les paramètres de ce modèles se déduisent d'essais de compression isotrope et déviatorique. Les invariants $\bar{I}_I$, $\bar{I}_{II}$ et $\bar{I}_{III}$ sont exprimés dans un nouveau repère de manière à prendre en compte la résistance à la traction de la craie. Ce changement de repère est défini par :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + C_0 \cdot P_a \delta_{ij} \quad (\text{A1.7})$$

Y_c et Y_d sont deux fonctions représentant l'état d'écrouissage du matériau. Y_c^0 représente la limite élastique de la craie dans un essai de compression isotrope (noté P_0). Y_d^0 est relié à la limite élastique dans les essais de compression déviatorique. Y_d^r est la valeur ultime (rupture) de la fonction d'écrouissage Y_d . W_c et W_d sont respectivement l'énergie de déformation contractante et déviatorique, elles sont déterminées à l'aide des essais avec chargement déchargement. C et ρ sont deux paramètres sans dimension du matériau et q est le taux d'écrouissage. Shao remarque une dépendance de q , W_{dr} et Y_d^0 avec la pression de confinement. Il propose donc pour ces paramètres des expressions en fonction de σ_3 tel que :

$$Y_d^0 = \lambda \left(\frac{\sigma_3 - P_0}{P_a} \right), \quad Y_d^0 \geq 0 \quad (\text{A1.8})$$

$$W_{dr} = P_1 \cdot P_a \left[\left(\frac{\sigma_3 + P_a}{P_a} \right) \right]^1 \quad (\text{A1.9})$$

$$q = \alpha \left[\left(\frac{\sigma_3 + P_a}{P_a} \right) \right]^\beta \quad (\text{A1.10})$$

La valeur de q pour un confinement donné est déterminée par :

$$q = \text{Log}\left[\left(Y_d^r - Y_d^0\right) / \left(Y_d^{60} - Y_d^0\right)\right] / \text{Log}\left(W_d^r / W_d^{60}\right) \quad (\text{A1.11})$$

où

$$Y_d^{60} = Y_d^0 + 0.6\left(Y_d^r - Y_d^0\right) \quad (\text{A1.12})$$

Le critère de rupture utilisé s'écrit :

$$\left(\frac{\bar{I}_I^3}{\bar{I}_{III}} - 27\right)\left(\frac{\bar{I}_I}{P_a}\right)^m - Y_d^r = 0 \quad (\text{A1.13})$$

Les paramètres m et Y_d^r régissent donc la rupture du matériau.

A2.1 - Rappel des équations de base

Dans les modèles élastoplastiques, les déformations se décomposent en une partie élastique et une partie plastique.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (\text{A2.1})$$

Dans ces modèles, on définit une surface $f = f(\sigma, k)$, appelée surface de charge, et un potentiel plastique $g = g(\sigma, k)$. Ces deux fonctions sont dépendantes de l'état de contrainte et de l'état de déformation plastique du matériau. La fonction k , appelée fonction d'écrouissage, représente l'état de déformation plastique.

si $f(\sigma, k) < 0$ le comportement est élastique
si $f(\sigma, k) > 0$ il y a apparition de déformation permanente

Les déformations plastiques sont alors calculées par la relation :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (\text{A2.2})$$

$\dot{\lambda}$ est appelé multiplicateur plastique.

La relation reliant les vitesses des contraintes aux vitesses des déformations se met sous la forme :

$$\dot{\sigma} = H^{ep} \dot{\varepsilon} \quad (\text{A2.3})$$

Si le comportement est élastique on a :

$$\dot{\sigma} = H^e \dot{\varepsilon} \quad (\text{A2.4})$$

en tenant compte de A2.1 :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= H^e (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \\ \dot{\sigma} &= \dot{\sigma}^e - H^e \dot{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

$\dot{\sigma}^e$ représente la contrainte dans l'hypothèse d'une réponse purement élastique.

L'intégration de la loi de comportement doit permettre de maintenir un état plastiquement admissible. Autrement dit on doit à chaque instant vérifier la condition de cohérence qui s'écrit :

$$df(\sigma, k) = 0 \quad (\text{A2.6})$$

Ce qui s'écrit sous forme vectorielle :

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial k} \dot{k} = 0 \quad (\text{A2.7})$$

ou encore, en tenant compte de A2.5

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T (H^e \dot{\varepsilon} - H^e \dot{\varepsilon}^P) + \frac{\partial f}{\partial k} \left[\frac{\partial k}{\partial \varepsilon^P} \right]^T \dot{\varepsilon}^P = 0 \quad (A2.8)$$

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T H^e \dot{\varepsilon} - \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T H^e \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial k} \left[\frac{\partial k}{\partial \varepsilon^P} \right]^T \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} = 0 \quad (A2.9)$$

ceci nous permet d'écrire :

$$\dot{\lambda} = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T H^e \dot{\varepsilon}}{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T H^e \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right] + A} \quad (A2.10)$$

$$\text{avec : } A = - \frac{\partial f}{\partial k} \left[\frac{\partial k}{\partial \varepsilon^P} \right]^T \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right] \quad (A2.11)$$

L'équation A2.3 s'exprime finalement sous la forme :

$$\dot{\sigma} = H^{ep} \dot{\varepsilon} \quad (A2.12)$$

$$\text{avec : } H^{ep} = \left(H^e - \frac{H^e \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T H^e}{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right]^T H^e \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right] + A} \right) \quad (A2.13)$$

ou sous forme incrémentale :

$$\Delta \sigma = H^{ep} \Delta \varepsilon \quad (A2.14)$$

A2.2 - Algorithme de calcul

On présente ci-dessous l'algorithme simplifié du programme de simulation des essais triaxiaux des chapitres III et IV.

1) - on impose un incrément de déformation $\Delta \varepsilon$

2) - on calcul l'incrément de contrainte élastique correspondant $\Delta \sigma = H^e \Delta \varepsilon$

3) - on teste la valeur de la fonction f de charge

- si $f < 0$, on passe à l'étape 4

- si $f > 0$, on calcul le tenseur élastoplastique défini par A2.13 et
on calcul les déformations plastiques
et la valeur de la fonction d'écrouissage

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= H^{ep} \Delta \varepsilon \\ \varepsilon^P &= \varepsilon^P + \Delta \varepsilon^P \\ k &= k + \Delta k \end{aligned}$$

4) - on effectue la sommation sur les contraintes $\sigma = \sigma + \Delta\sigma$ et retour à l'étape 1.

A3.1 Objectivité du schéma d'intégration

l'égalité

$$D^{t+\theta\Delta t}\Delta t = \text{sym}\left[(I - F_{t+\Delta t}^t)((1-\theta)F_{t+\Delta t}^t + \theta I)^{-1}\right]$$

avec $F_t^{t+\Delta t} = R$ ($RR^T = I$) (A3.1)

et en posant $1 - \theta = \beta$ (A3.2)

se met sous la forme :

$$2D^{t+\theta\Delta t}\Delta t = (I - R^{-1})(\beta R^{-1} + \theta I)^{-1} + (\beta R^{-1} + \theta I)^{-T}(I - R^{-1})^T$$

$$2D^{t+\theta\Delta t}\Delta t = (\beta R^{-1} + \theta I)^{-1} - R^{-1}(\beta R^{-1} + \theta I)^{-1} + (\beta R^{-1} + \theta I)^{-T} - (\beta R^{-1} + \theta I)^{-T}R^{-T} \quad (A3.3)$$

En utilisant le résultat d'algèbre linéaire suivant :

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A \quad (A3.4)$$

avec A et B matrices carrées non singulières

on montre que

$$(\beta R^{-1} + \theta I)^{-1} = \frac{1}{\theta\beta} \left(\frac{1}{\beta}R + \frac{1}{\theta}I \right)^{-1} R^{-T} \quad (A3.5)$$

$$(\beta R^{-1} + \theta I)^{-T} = \frac{1}{\theta\beta} R^{-1} \left(\frac{1}{\beta}R + \frac{1}{\theta}I \right)^{-T} \quad (A3.6)$$

L'équation A3.3 se met alors sous la forme :

$$2D^{t+\theta\Delta t}\Delta t = \left[\frac{1}{\theta\beta} \left(\frac{1}{\beta}R + \frac{1}{\theta}I \right)^{-1} - (\beta R^{-1} + \theta I)^{-T} \right] R^{-T} + R^{-1} \left[\frac{1}{\theta\beta} \left(\frac{1}{\beta}R + \frac{1}{\theta}I \right)^{-T} - (\beta R^{-1} + \theta I)^{-1} \right] \quad (A3.7)$$

La condition $D^{t+\theta\Delta t}\Delta t = 0$ se réduit à :

$$(\theta R + \beta I)^{-1} - (\beta R^{-1} + \theta I)^{-T} = 0$$

$$(\theta R + \beta I) = (\beta R^{-1} + \theta I)^T$$

$$(\theta - \beta)R = (\theta - \beta)I \quad (A3.8)$$

la seule condition pour que l'équation ci-dessous soit satisfaite est que : $\theta = \beta = 1/2$.

A4.1 Calcul de Q

On a :

$$W = \dot{Q}Q^T \text{ ou encore } \dot{Q} = WQ \quad (A4.1)$$

ce qui s'écrit encore :

$$Q^{t+\Delta t} - Q^t = \Delta t \left(\frac{dQ}{dt} \right)^{t+\theta\Delta t} = W^{t+\theta\Delta t} Q^{t+\theta\Delta t} \Delta t \quad (A4.2)$$

L'évolution de Q est prise telle que :

$$Q^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta)Q^t + \theta Q^{t+\Delta t} \quad (A4.3)$$

A4.2 et A4.3 donnent :

$$Q^{t+\Delta t} - Q^t = W^{t+\theta\Delta t} \Delta t [(1-\theta)Q^t + \theta Q^{t+\Delta t}] \quad (A4.4)$$

Si l'on choisit La configuration à l'instant t comme configuration de référence, on a alors :

$$Q^t = I \text{ et } Q^{t+\Delta t} = Q_t^{t+\Delta t} \quad (A4.5)$$

et l'équation A4.4 se transforme en :

$$\begin{aligned} Q_t^{t+\Delta t} - I &= W^{t+\theta\Delta t} \Delta t [(1-\theta)I + \theta Q_t^{t+\Delta t}] \\ [I - \theta W^{t+\theta\Delta t} \Delta t] Q_t^{t+\Delta t} &= [(1-\theta)W^{t+\theta\Delta t} \Delta t + I] \end{aligned}$$

soit :

$$Q_t^{t+\Delta t} = [I - \theta W^{t+\theta\Delta t} \Delta t]^{-1} [(1-\theta)W^{t+\theta\Delta t} \Delta t + I] \quad (A4.6)$$

De A4.3 on extrait $Q_t^{t+\theta\Delta t}$

$$Q_t^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta)I + \theta Q_t^{t+\Delta t} \quad (A4.7)$$

A4.2 démonstration de $Q=R$ en cas de rotation de corps rigide

Compte tenu du fait que $D^{t+\theta\Delta t} \Delta t = 0$ lorsque $F=R$, on a d'après l'équation 5.50 :

$$W^{t+\theta\Delta t} \Delta t = [2(I - R^{-1})(R^{-1} + I)^{-1}] \quad (A4.8)$$

$$W^{t+\theta\Delta t} \Delta t (R^{-1} + I) = 2(I - R^{-1})$$

d'où on tire

$$R = \left(I - \frac{W^{t+\theta\Delta t}}{2} \Delta t \right)^{-1} \left(I + \frac{W^{t+\theta\Delta t}}{2} \Delta t \right) \quad (A4.9)$$

en comparant cette expression avec A4.6 pour $\theta = 1/2$ on constate immédiatement que $Q=R$.

Ci dessous, on présente l'algorithme simplifié du code de calcul.

Pour chaque incrément de chargement :

étape 1

Calcul de la matrice de rigidité tangente $\left[K_T(u_t^{t+\Delta t}) \right]^{(n)}$

étape 2

Calcul du vecteur résidu

$$\left\{ R_t^{t+\Delta t} \right\}^{(n-1)} = \left\{ \tilde{F}_t^{t+\Delta t} \right\} - \int_{V_t} (J_t^{t+\Delta t})^{(n-1)} [B_{GD}]^{T(n-1)} \left\{ \sigma^{t+\Delta t} \right\}^{(n-1)}$$

étape 4

Résolution du système linéaire :

$$\left[K_T(u_t^{t+\Delta t}) \right]^{(n)} \left\{ \Delta u_t^{t+\Delta t} \right\}^{(n)} = \left\{ R_t^{t+\Delta t} \right\}^{(n-1)}$$

Cumul des déplacements :

$$u_t^{t+\Delta t(n)} = u_t^{t+\Delta t(n-1)} + \Delta u_t^{t+\Delta t(n)}$$

étape 4

Calcul du gradient de la transformation $F_t^{t+\Delta t}$

étape 5

Calcul des déformations sur la configuration intermédiaire

$$D^{t+\theta\Delta t} \Delta t = \text{sym} \left[(I - F_{t+\Delta t}^t) ((1-\theta) F_{t+\Delta t}^t + \theta I)^{-1} \right]$$

étape 6

Première estimation de la contrainte sur la configuration intermédiaire

$$\sigma^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta) \det^{-1}(F_t^{t+\theta\Delta t}) F_t^{t+\theta\Delta t} \sigma^t F_t^{t+\theta\Delta t T} + \theta \det^{-1}(F_{t+\Delta t}^{t+\theta\Delta t}) F_{t+\Delta t}^{t+\theta\Delta t} (\sigma^{t+\Delta t})^e F_{t+\Delta t}^{t+\theta\Delta t T} \Delta t$$

et intégration de la loi de comportement suivant le schéma du paragraphe V.3.2.3 et

V.3.2.4.

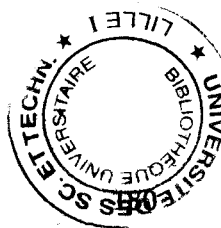
étape 7

détermination de l'état de contrainte sur la configuration finale

$$\sigma^{t+\Delta t} - \det^{-1}(F_t^{t+\Delta t}) F_t^{t+\Delta t} \sigma^t F_t^{t+\Delta t T} = \det^{-1}(F_{t+\Delta t}^{t+\Delta t}) F_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} (H^{ep} D^{t+\theta\Delta t}) F_{t+\Delta t}^{t+\Delta t T} \Delta t$$

étape 8

test de convergence



$$\frac{\|\Delta u_t^{t+\Delta t^{(n)}}\|}{\|u_t^{t+\Delta t^{(n)}}\|} < \varepsilon_u$$

si convergence retour à l'étape 1 avec $t \rightarrow t + \Delta t$

si non retour à l'étape 2 avec $n \rightarrow n + 1$