

50576
1936
192

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE (U.R.A. C.N.R.S. 1441)

N° d'ordre: 1747

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

par

AÏT HOCINE Nourredine

Pour l'obtention du titre de:

DOCTEUR DE L'U.S.T.L.

Spécialité: Mécanique.



**APPROCHE GLOBALE DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE
APPLIQUEE AUX ELASTOMERES:**

**Validation expérimentale et numérique d'une expression de l'intégrale J
sous une forme multiplicative d'une fonction de la densité d'énergie
de déformation et d'une fonction de géométrie.**

Soutenue le 28 mai 1996 devant la commission d'examen composée de:

R. PIQUES	Rapporteur et Président	Pr. Ecole Nat. Sup. des Mines de Paris
J. POUYET	Rapporteur	Pr. Université de Bordeaux
G. MESMACQUE	Examinateur	Pr. Université de Lille.
Y. REMOND	Examinateur	Pr. Ecole d'App. des Hauts Polymères.
M. NAIT ABDELAZIZ	Examinateur	Maître de Conf. I.U.T "A" de Lille.
B. GONDOUIN	Examinateur	Soc. Nat. des Poudres et Explosifs.
G. ORANGE	Examinateur	Soc. Rhône-Poulenc.

-REMERCIEMENTS-

Ce travail a été réalisé au laboratoire de mécanique des matériaux de l'I.U.T. "A" de l'Université des sciences et technologies de Lille, composante du Laboratoire de Mécanique de Lille (L.M.L URA CNRS 1441), sous la direction de Monsieur le Professeur **G. MESMACQUE** à qui j'exprime ma profonde gratitude pour m'avoir accepté au sein de son équipe.

J'exprime ma très grande reconnaissance à Monsieur **M. NAIT ABDELAZIZ**, Maître de conférences, qui a assuré le suivi de ce travail.

Je remercie Monsieur **J. POUYET**, Professeur à l'Université de Bordeaux, et Monsieur **R. PIQUES**, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, qui ont accepté d'examiner et de juger ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur **B. GONDOUIN**, Responsable de recherches à la Société Nationale des Poudres et Explosifs, à Monsieur **G. ORANGE**, Ingénieur de recherches à la Société Rhône-Poulenc, et à Monsieur **Y. REMOND**, Professeur à l'Ecole d'Applications des Hauts Polymères de Strasbourg, qui m'ont fait l'honneur de participer au jury d'examen.

Je réserve l'expression de ma sympathie à tous les membres du laboratoire de l'I.U.T "A" GMP de Lille I.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
------------------------------	----------

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE 1: RHEOLOGIE DES ELASTOMERES

1.1. Introduction	4
1.2. Rhéologie des élastomères	5
1.2.2. Etude des propriétés mécanique des élastomères	5
1.2.3. Caractères généraux de la haute élasticité	5
1.2.4. Considération générales des élastomères chargés	7
1.2.5. Hyperélasticité	7
1.2.5.1 Expressions des contraintes et des déformation pour un matériau hyperélastique	7
1.2.5.2. Lois de comportement des matériaux hyperélastiques	8
1.2.5.3. Comparaison des solutions numériques issues des différents formes de la densité d'énergie de déformation	10
1.3. Conclusion	13

CHAPITRE 2: MECANIQUE DE LA RUPTURE

2.1. Introduction	14
2.2. Les approches énergétiques de la mécanique de la rupture	16
2.2.1. Critères énergétiques locaux de la rupture	16
2.2.2. Approche énergétique globale	18
2.2.2.1. Bilan énergétique	19
2.2.2.2. L'Intégrale J	20
2.2.2.3. Paramètre énergétique J	24
A. Expression du paramètre énergétique J	24
B. Expression du paramètre énergétique J dans le cas des élastomères	25
B.1. Préliminaires	25
B.2. Expression de RIVLIN et THOMAS	25
B.3. Théorie Généralisée de la Mécanique de la Rupture	29
C. Evaluation du Paramètre Energétique J	34
C.1. Méthodes de détermination expérimentales de J	35
C.2. Méthodes de détermination numérique de J	39
2.3. CONCLUSION	48

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE 3: ETUDE EXPERIMENTALE

3.1. Introduction	50
3.2. Matériau-échantillon	51
3.3. Equipement et mode opératoire	52
3.4. Dispositif d'attache et de fixation des éprouvettes	53
3.5. Mesures des contraintes-déformations	54
3.5.1. Détermination des lois de comportement des matériaux étudiés	54
3.6. Détermination de la fonction de potentiel k et du facteur de calibration F par l'application de la méthode de séparation à l'énergie de déformation complémentaire U^*	57
3.7. Conclusion	70

TROISIEME PARTIE

Introduction	72
--------------	----

CHAPITRE 4: ETUDE NUMERIQUE

4.1. Modèle numérique	74
4.2. Approximation des solutions aux noeuds d'interpolation	76
4.3. Evaluation des différents termes de l'intégrale J	77
4.4. Calcul numérique de J par la méthode de différentiation d'énergie	80
4.5. Choix du maillage	81
4.6. Calcul de la densité d'énergie de déformation	84
4.7. Conclusion	84

CHAPITRE 5: RESULTATS-DISCUSSION

5.1. Vérification de la validité du modèle numérique utilisé	86
5.2. Evaluation de la densité d'énergie de déformation loin du défaut	91
5.3. Indépendance du contour d'intégration	95
5.4. Comparaison des valeurs numériques de J calculées selon trois approches	97
5.5. Comparaison entre l'intégrale J de RICE et le paramètre énergétique J expérimental	99
5.5.1. Résultat	99
5.5.2. Recherche des fonctions $k(W_0)$ et $F(a/w)$ à partir de l'intégrale J	101
5.6. Tableau synoptique sur l'application de la méthode de séparation directement à l'intégrale de contour J	113
5.7. Extension de l'étude numérique aux cas de petites longueurs de fissure	114
5.8. Comparaison entre l'intégrale J numérique et les solutions de RIVLIN et THOMAS	116
5.9. Valeurs critiques du paramètre énergétique J	128
5.10. Conclusion	131

CHAPITRE 6: PROCEDURE DE CALCUL DE J PROPOSEE

6.1. Introduction-----	133
6.2. Approche du paramètre énergétique J à l'aide de la distribution de la densité d'énergie de déformation -----	133
6.2.1. Mise en évidence de la dépendance de J_a vis à vis de la position du repère de référence -----	136
6.2.2. Evaluation du paramètre énergétique J_a -----	137
6.3. Nouvelle formulation de l'approche de J-----	141
6.3.1. Vérification de la validité de la nouvelle approche de J-----	142
6.4. Conclusion -----	149

CONCLUSION GENERALE -----	150
----------------------------------	------------

PERSPECTIVES -----	152
---------------------------	------------

ANNEXES

Annexe 1: Indépendance de l'intégrale J vis à vis du contour d'intégration-----	154
Annexe 2: Autres intégrales de contour-----	156
Annexe 3: Non linéarités géométriques - Hypothèses de grandes déformations-----	158
Annexe 4: Résultats de l'intégrale J suivant trois contours-----	160
Annexe 5: Paramètre de séparation S_{ij}-----	162
Annexe 6: Intégrale J à travers trois contours dans le cas des éprouvettes de cisaillement pur (éprouvettes C.P)-----	165
Annexe 7: Comparaison entre l'intégrale J et la solution de Rivlin et Thomas dans le cas des éprouvettes de cisaillement pur (éprouvettes C.P)-----	169

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES -----	171
--	------------

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Contrairement aux matériaux métalliques, les élastomères sont des produits d'utilisation récente avec des lois constitutives mécaniques spécifiques. L'intérêt croissant que l'on porte à ces matériaux quant à leurs diverses applications (machines pneumatiques, joints, couches photosensibles, etc.) fait qu'il est important de connaître leurs caractéristiques mécaniques qui permettent d'optimiser leur utilisation. L'aptitude à résister à la propagation d'un défaut préexistant est l'une de ces caractéristiques.

La rupture des matériaux caoutchoutiques peut être étudiée en utilisant les modèles de la mécanique de la rupture. Ces modèles sont basés sur une approche globale caractérisée par le paramètre énergétique J dont la valeur critique J_C régit l'amorçage d'une fissure préexistante. Un des principaux avantages de ce type d'approche est que le paramètre J peut être évalué expérimentalement indépendamment des singularités de contrainte en pointe de fissure, et calculé numériquement sans grande difficulté. C'est aux notions de cette approche ainsi qu'à leur utilisation pour la détermination de J que ce travail fait référence.

Le paramètre énergétique J représente la variation d'énergie potentielle par unité de longueur de fissure lorsque celle-ci se propage. Ce paramètre peut être mesuré expérimentalement en utilisant plusieurs échantillons (méthode de BEGLEY-LANDES). Des considérations d'ordre économique ont conduit les chercheurs à développer des méthodes permettant la mesure de J à partir d'un seul échantillon. Parmi ces travaux, on retrouve ceux de RIVLIN et THOMAS puis ceux d'ANDREWS qui, dans le cas des élastomères, ont proposé des formulations de ce paramètre pour différentes géométries.

Dans ce travail, nous présentons principalement une étude comparative du paramètre énergétique J obtenu:

-à partir des résultats expérimentaux en utilisant l'expression d'ANDREWS modifiée par NAIT ABDELAZIZ, GHFIRI et MESMACQUE.

-numériquement à partir de l'intégrale de contour de RICE.

Nous comparons les résultats obtenus à l'aide des approches précédentes avec ceux issus du modèle de RIVLIN et THOMAS. De même, nous développons une procédure rapide permettant un calcul approché de J .

Ce mémoire est composé de six chapitres:

- Les deux premiers, relatifs à l'étude bibliographique, sont consacrés à la rhéologie des élastomères (chapitre 1) et aux concepts de la mécanique de la rupture (chapitre 2).
- Le troisième chapitre présente l'étude expérimentale réalisée.
- Le quatrième chapitre s'intéresse aux éléments du modèle numérique adopté.
- Le cinquième chapitre traite de l'analyse et de la discussion des résultats.
- Le dernier chapitre présente une procédure de calcul de J que nous avons développée.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les concepts rhéologiques des élastomères. Nous présentons ensuite les formulations habituellement employées pour modéliser le comportement hyperélastique des matériaux caoutchoutiques. Nous terminons par un exemple d'analyse numérique extrait de la littérature et qui traite d'une étude comparative entre les résultats obtenus à l'aide des différentes lois hyperélastiques.

Le deuxième chapitre présente des rappels de la mécanique de la rupture qui constituent les outils théoriques sur lesquels se base notre étude. Nous décrivons les méthodes permettant la détermination du paramètre énergétique J (extension de l'intégrale de contour) en se limitant à celles pouvant s'appliquer aux matériaux caoutchoutiques tant expérimentalement que numériquement. Nous attachons une importance particulière aux modèles de RIVLIN et THOMAS, à celui d'ANDREWS et à l'intégrale de contour de RICE que nous utilisons pour déterminer le paramètre énergétique J des matériaux que nous avons étudiés.

Le troisième chapitre récapitule les résultats expérimentaux obtenus à partir des essais de rupture effectués sur des éprouvettes S.E.N.T (éprouvette à fissure latérale) et D.E.N.T (éprouvette à double fissure latérale). Deux types de matériaux caoutchoutiques sont testés: l'E.P.D.M. et le polybutadiène. Le paramètre énergétique J est déterminé à partir du modèle d'ANDREWS dans lequel NAIT ABDELAZIZ, GHFIRI et MESMACQUE ont introduit une fonction de correction géométrique et ont proposé une méthode originale, dite "méthode de séparation", pour l'identification des différents termes de ce paramètre. Les résultats ont confirmé l'influence des dimensions finies de l'éprouvette sur J , comme l'ont suggéré ces derniers auteurs.

Le quatrième chapitre indique les hypothèses introduites pour la simulation par la méthode des éléments finis des essais effectués. De même, il décrit les procédures numériques utilisées pour la détermination du paramètre énergétique J . Une analyse numérique pour choisir un maillage répondant convenablement au critère précision-temps de calcul est aussi présentée.

Le cinquième chapitre est consacré à l'analyse critique et à la discussion des résultats. La comparaison entre le paramètre énergétique J expérimental et l'intégrale de contour de RICE permet de valider la méthode de séparation d'énergie. De même, nous vérifions la validité des formulations de J , proposées par RIVLIN et THOMAS, lorsqu'elles sont utilisées pour les grandes longueurs de fissure. Les valeurs critiques expérimentales de J correspondant à l'amorçage de la fissure sont ensuite comparées à celles obtenues numériquement.

Dans le dernier chapitre, nous développons une procédure permettant un calcul approché du paramètre énergétique J à partir de la distribution de la densité d'énergie de déformation à travers les frontières de l'éprouvette. Cette procédure est rapide et part de l'équation de base de la théorie généralisée de la mécanique de la rupture, proposée par ANDREWS, que nous avons modifiée.

La conclusion présente la synthèse de notre travail et notre contribution à une meilleure appréhension de la rupture des élastomères. Nous avons particulièrement vérifié la validité de la forme multiplicative de J proposée par NAIT ABDELAZIZ et ses collaborateurs et celle de la méthode de séparation permettant l'identification des différents termes de ce paramètre. Nous avons aussi montré que la rupture des matériaux étudiés est bien régie par la valeur critique J_c de J , correspondant à la charge à l'amorçage de la fissure.

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE 1: RHEOLOGIE DES ELASTOMERES

CHAPITRE 2: MECANIQUE DE LA RUPTURE

CHAPITRE 1: RHEOLOGIE DES ELASTOMERES

1.1. INTRODUCTION:

Les premiers matériaux caoutchoutiques ont été découverts en Inde. Ils sont obtenus sous forme de latex qui provient d'un arbre appelé hévéa [1.1]. Le terme très expressif "caoutchouc", dérive d'un mot indien dont la signification est "larmes du bois", en référence à l'exsudation du latex à partir de l'écorce d'un arbre.

Le terme moderne "élastomère" est employé pour désigner les matériaux synthétiques ayant les propriétés mécaniques similaires à celles des matériaux caoutchoutiques. Ce terme résulte de la combinaison des mots "élastique" et "polymère".

Les élastomères sont essentiellement des hydrocarbures. Leur constitution fut établie par FARADAY(1826) et elle est donnée sous la forme $(C_5H_8)_n$.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons, particulièrement, au comportement mécanique fondamental vis à vis duquel les élastomères sont considérés identiques. Ce comportement mécanique est le haut degré de déformation constaté sous des contraintes relativement faibles.

1.2. RHEOLOGIE DES ELASTOMERES:

1.2.1. préliminaires:

La préparation d'un matériau caoutchoutique passe par plusieurs étapes. Au départ, le latex qui est un liquide formé par une dispersion aqueuse de fines particules d'élastomères est coagulé puis séché pour enfin devenir un caoutchouc cru. Celui-ci est une sorte de fluide assez élastique à l'état brut, mais rendu visqueux par le malaxage qu'il est nécessaire de lui faire subir pour lui ajouter des charges et ingrédients divers. Enfin, la vulcanisation transforme le caoutchouc cru en un solide possédant la propriété de haute élasticité.

Dans ce qui suit, on se limitera à l'examen des propriétés mécaniques du caoutchouc à l'état amorphe. De même, on précisera l'influence des charges que contiennent la plupart des caoutchoucs industriels.

1.2.2. Etude des propriétés mécaniques des élastomères:

L'étude des propriétés mécaniques du caoutchouc se résume à trois phénomènes de base susceptibles d'intervenir simultanément à des degrés variables selon la nature de ces matériaux, le taux de vulcanisation et les conditions de déformation:

- a- haute élasticité idéale (ou réversible);
- b- haute élasticité retardée;
- c- viscoélasticité.

On se limitera au cas de la haute élasticité (a) correspondant au comportement des matériaux que nous avons utilisés dans notre étude et qui seront présentés par la suite.

1.2.3. Caractères généraux de la haute élasticité:

La haute élasticité est un comportement mécanique où les relations contrainte-déformation peuvent être considérées comme étant indépendantes du temps. Les caractères généraux de cette élasticité peuvent être mis en évidence par une extension d'un caoutchouc à la température ambiante.

La figure 1.1 indique l'allure générale de la courbe de traction donnant les valeurs de l'allongement et de la force rapportée à la section initiale au repos. Par comparaison avec la courbe de traction d'un métal comme l'acier, on constate trois différences principales:

-La courbe de traction des caoutchoucs s'incurve rapidement aux grands allongements comme si la matière se raidissait avant de rompre, au lieu de céder en s'écoulant comme les métaux.

-Les tensions relativement faibles produisent pour le caoutchouc de très grands allongements, jusqu'à 7 fois la longueur de l'éprouvette au repos. Aussi, le module de Young qui caractérise le rapport de la tension sur l'allongement pour les faibles déformations, est alors de l'ordre de 1MPa au lieu de $2 \cdot 10^5$ MPa pour l'acier.

-Le comportement des caoutchoucs n'obéit à la loi de HOOKE qu'aux petits allongements, de l'ordre de quelques pour-cent.

L'explication qui révèle peut être le mieux la cause profonde de l'élasticité caoutchoutique est d'ordre thermodynamique. Cette théorie ne sera pas développée ici et les lecteurs intéressés peuvent consulter la référence[1.2].

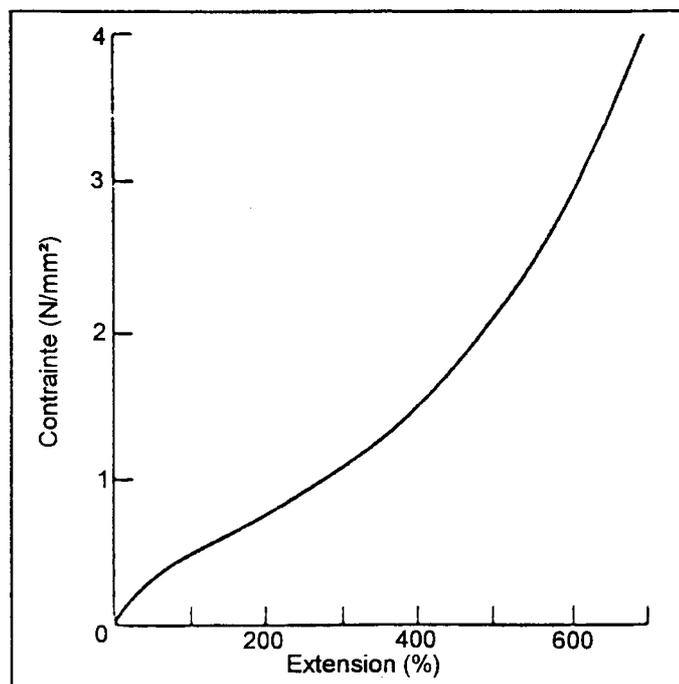


Figure 1.1: Evolution de la courbe charge en fonction de l'allongement pour un matériau caoutchoutique

1.2.4. Considérations générales des élastomères chargés:

L'objectif de l'incorporation de charges dans un liant élastomérique peut être le renforcement du produit ou la recherche de certaines propriétés bien spécifiques [1.3], comme la lutte contre les agents extérieurs. La nature, la géométrie des charges ainsi que les agents de couplage élastomères-charges sont particulièrement importants [1.4]. En fonction des besoins, de nombreux agents de couplage liant-charges ont été développés. Ils modifient sensiblement les propriétés mécaniques [1.4]. D'une manière générale, l'addition de charges dans un élastomère a tendance à augmenter la rigidité de ce matériau.

1.2.5. Hyperélasticité:

1.2.5.1 Expressions des contraintes et des déformations pour un matériau hyperélastique:

Les contraintes agissant sur un matériau hyperélastique dérivent d'une fonction de la densité d'énergie de déformation. Ceci peut être exprimé par:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial \Psi_{ij}} \quad (1.1)$$

où

σ_{ij} : Composantes du second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff

W : Densité d'énergie de déformation.

ε_{ij} : Composantes du tenseur de déformation lagrangien.

Ψ_{ij} : Composantes du tenseur de déformation de Cauchy-Green droit.

Le tenseur de déformation lagrangien peut être exprimé sous la forme suivante:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (\Psi_{ij} - \delta_{ij}) \quad (1.2)$$

avec

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Le tenseur de déformation Ψ_{ij} est défini par:

$$\Psi_{ij} = f_{ki} \cdot f_{kj} \quad (1.3)$$

où

$$f_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (1.4)$$

X_i et x_i sont les positions d'un point quelconque du système respectivement à l'état non déformé et à l'état déformé (annexe 3). Beaucoup d'élastomères possèdent la caractéristique d'hyperélasticité.

1.2.5.2. Lois de comportement des matériaux hyperélastiques:

La densité d'énergie de déformation W d'un matériau isotrope hyperélastique peut être représentée en fonction des trois invariants (I_1, I_2, I_3) du tenseur des élongations de Cauchy-Green droit (Ψ):

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (1.5)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{trace } \Psi \\ I_2 &= \frac{1}{2}[(\text{trace } \Psi)^2 - \text{trace } \Psi^2] \\ I_3 &= \det \Psi \left[\frac{V}{V_0} \right]^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Les différentes formes d'approximation de W sont obtenues à partir du développement en puissance des invariants:

$$W = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{rst} \cdot (I_1 - 3)^r \cdot (I_2 - 3)^s \cdot (I_3 - 1)^t; \quad C_{00} = 0 \quad (1.7)$$

En ne prenant en considération que les termes linéaires dans les invariants, on obtient l'approximation suivante:

$$W = C_{100} (I_1 - 3) + C_{010} (I_2 - 3) + C_{001} (I_3 - 1) \quad (1.8)$$

Sous l'hypothèse d'incompressibilité du matériau ($I_3 = 1$), l'expression (1.8) devient:

$$W = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} C_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s; \quad C_{00} = 0 \quad (1.9)$$

MOONEY[1.5] propose de ne retenir que les termes linéaires en I_1, I_2 dans l'expression (1.10):

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot (I_2 - 3) \quad (1.10)$$

où

$$C_1 = C_{10} \quad \text{et} \quad C_2 = C_{01}$$

Cette expression s'est avérée conforme dans un large taux de déformation de certains caoutchoucs naturels et vulcanisés. Cependant, pour les taux de déformation de l'ordre de 450% à 500%, elle a conduit à des résultats qui divergent par rapport à ceux obtenus expérimentalement.

Les coefficients élastiques C_i peuvent apparaître au niveau des potentiels sous forme de lois puissances. Citons par exemple le modèle d'OGDEN:

$$W = C_1(\lambda_1^{C_2} + \lambda_2^{C_2} + \lambda_3^{C_3} - 3) \quad (1.11)$$

En utilisant la théorie cinétique de GAUSS dans le cas des matériaux caoutchoutiques, TRELOAR [1.6] a abouti à la forme "néo-hookéene" suivante:

$$W = C (I_1 - 3) \quad (1.12)$$

Cette loi conduit, en général, à des résultats grossièrement cohérents avec les données expérimentales.

En se basant sur plusieurs résultats expérimentaux obtenus sur les matériaux caoutchoutiques, RIVLIN et SAUNDERS [1.7] [1.8] proposent une forme plus générale de la fonction de densité d'énergie de déformation:

$$W = C_1 (I_1 - 3) + \Phi(I_2 - 3) \quad (1.13)$$

où la forme $\Phi(I_2 - 3)$ varie suivant le type de matériau. Plusieurs approximations polynomiales de ce terme ont été proposées. Par exemple, KLOSNER et SEGAL [1.9] ont proposé une forme cubique en $(I_2 - 3)$:

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) + C_3 (I_2 - 3)^2 + C_4 (I_2 - 3)^3 \quad (1.14)$$

Pour sa part, BIDERMAN suggère d'introduire une forme cubique en $(I_1 - 3)$:

$$W = C_1 (I_1 - 3) + B_1 (I_1 - 3)^2 + B_2 (I_1 - 3)^3 + C_2 (I_2 - 3) \quad (1.15)$$

GENT et THOMAS [1.10] ont supposé que $\frac{\partial \Phi(I_2 - 3)}{\partial I_2} = \frac{\beta}{I_2}$, où β est une constante du matériau. HART-SMITH [1.11] a élaboré cette théorie pour proposer une loi exponentielle:

$$W = \beta \cdot \left(\int e^{\alpha_1 (I_1 - 3)^2} dI_1 + \alpha_2 \ln \frac{I_2}{3} \right) \quad (1.16)$$

De façon similaire, ALEXANDER [1.12] propose les forme suivante:

$$W = C_1 \cdot (I_1 - 3)^2 + C_2 (I_2 - 3) + C_3 \ln \frac{I_2 - 3 + \alpha_0}{\alpha_0} \quad (1.17)$$

Dans les expressions (1.12) à (1.17), les lettres $\{C, \alpha, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, C_1, C_2, C_3, C_4, B_1, B_2, \beta\}$ sont des constantes du matériau.

Nous allons présenter, dans ce qui suit, une étude comparative entre les solutions numériques obtenues en considérant un matériau caoutchoutique et en utilisant les différentes lois hyperélastiques citées ci-dessus. Cette étude est extraite de la référence [1.13].

1.2.5.3. Comparaison des solutions numériques issues des différentes formes de la densité d'énergie de déformation:

ODEN [1.13] a considéré le problème de traction simple d'une plaque fine en caoutchouc, initialement de forme carré et contenant un trou en son centre (figure 1.6). Le système de coordonnées (x_1, x_2) a son origine au centre de la plaque. Celle-ci est soumise à un chargement incrémental suivant la direction x_1 tandis que sa longueur, suivant la direction x_2 , est maintenue constante.

La figure 1.2 montre la discrétisation par éléments finis d'un quart de l'éprouvette, composée de 192 éléments. La simulation du chargement de l'éprouvette est réalisé en imposant des contraintes uniformes, par pas et suivant la direction x_1 , pour tous les noeuds situés sur un des bords latéraux de l'éprouvette.

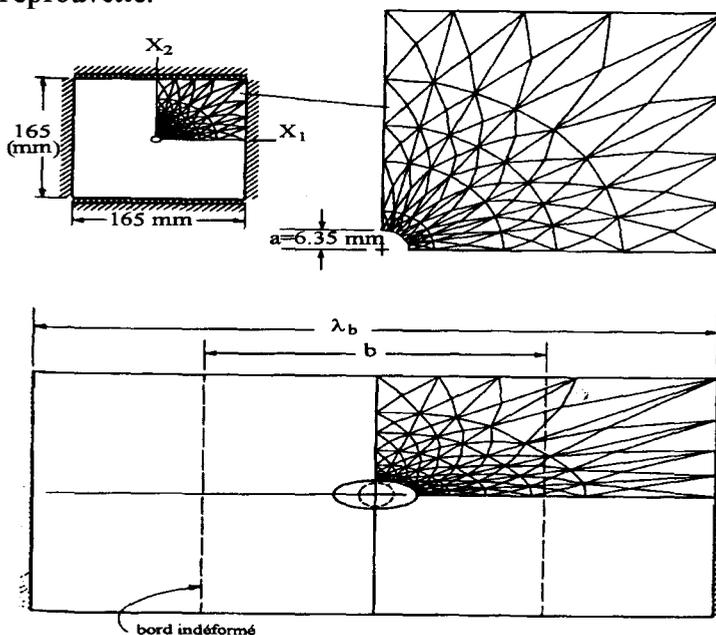


Figure 1.2: Discretisation d'une plaque fine carrée contenant un trou en son centre

Cet auteur a comparé les solutions numériques issues des différentes formes de la fonction de densité d'énergie de déformation.

Pour attribuer un sens à cette comparaison, les données expérimentales de TRELOAR [1.14] [1.15] obtenues sur un matériau caoutchoutique, ont été utilisées. Les constantes du matériau, intervenant dans les différentes fonctions de densité d'énergie de déformation, sont ainsi calculées. En voici les valeurs de quelques une de ces constantes, à titre indicatif:

KLOSNER et SEGAL:

$C = C_1 = 0.1863 \text{ MPa}$; $C_2 = 9.79 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$; $C_3 = -6.61 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$ et $C_4 = 0.422 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$;

BIDERMAN:

$B_1 = -1.86 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$ et $B_2 = 4.509 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}$;

HART-SMITH:

$\beta = 1.568 \cdot 10^{-1} \text{ Mpa}$; $\alpha_1 = 28 \cdot 10^{-5}$ et $\alpha_2 = 1.20$

Pour différentes formes de la fonction de densité d'énergie de déformation, l'évolution de la force appliquée à $x = a/2$ (suivant la direction x_1) est montrée sur la figure 1.3, en fonction du taux d'élongation λ calculé loin du défaut.

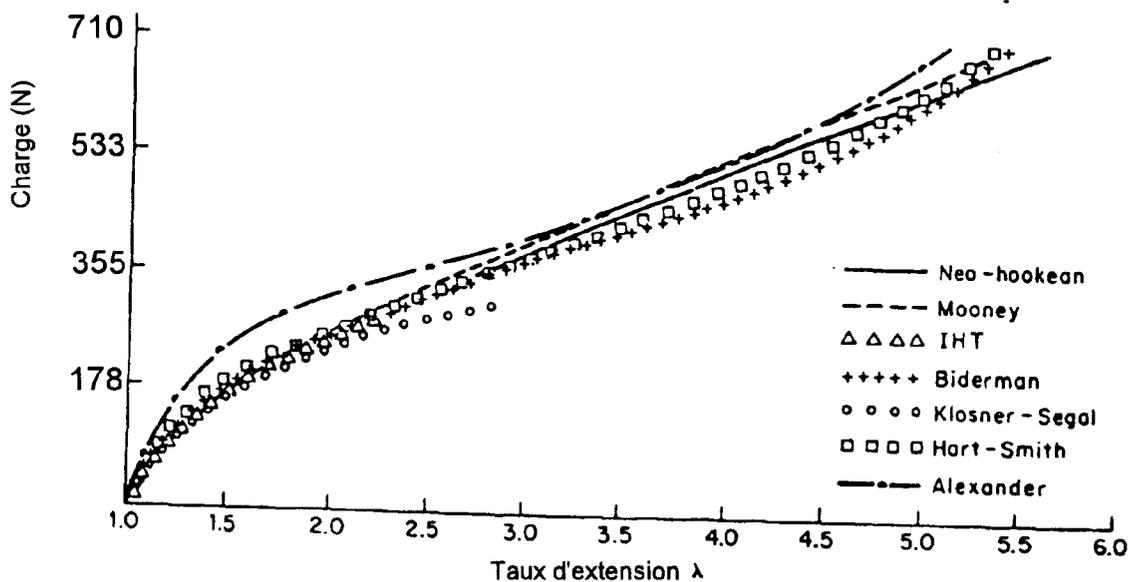


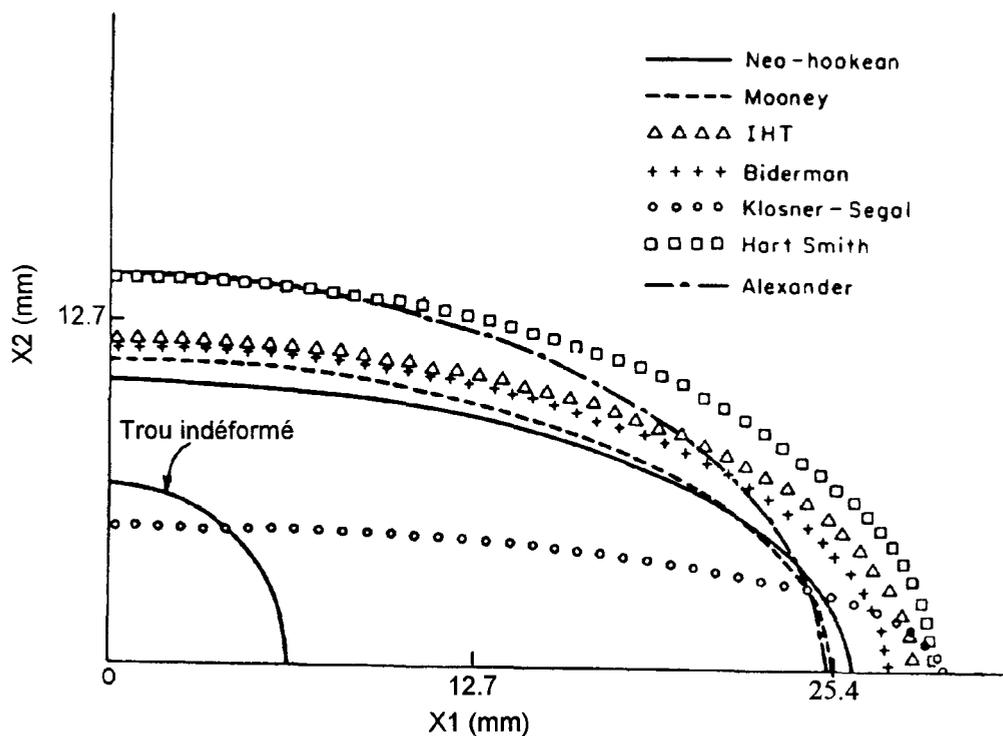
Figure 1.3: Courbes charge-taux d'extension λ pour différentes expressions de la densité d'énergie de déformation.

D'après ODEN, la divergence observée entre la réponse d'ALEXANDER et les autres réponses, pour $\lambda < 3$, est peut être due à l'insuffisance de données expérimentales. Celles-ci auraient rendu impossible la détermination précise des constantes du matériau. Toutefois, cette divergence est beaucoup moins prononcée pour les grandes valeurs du taux d'extension λ .

Par ailleurs, pour $3 \leq \lambda < 5.5$, les réponses néo-hookéenes et de MOONEY sont pratiquement linéaires; tandis que les formes exponentielles de HART-SMITH et ALEXANDER et la forme quadratique de BIDERMAN mettent en évidence la rigidité du matériau. Les réponses de KLOSNER-SEGAL et de I.H.T (Isihara - Hashitsume - Tatibana) ne sont pas calculées dans le domaine où $\lambda > 2.5$.

Les figures 1.4 et 1.5 montrent les profils déformés d'un quart du trou central de l'éprouvette, respectivement pour les forces appliquées de 284 N et 712 N. Les valeurs du taux d'extension λ correspondant à ces deux forces sont différentes. Pour $P = 284$ N, les géométries du trou déterminées par la forme néo-hookéene et celle de MOONEY sont similaires. Cependant, pour les grandes charges, des divergences significatives ont été observées concernant les déplacements transversaux. Inversement, les divergences entre les profils de HART-SMITH et BIDERMAN sont moins prononcées à $P = 712$ N qu'à $P = 284$ N. Pour les faibles charges, la forme d'ALEXANDER présente le matériau légèrement plus rigide comparativement à la réponse de HART-SMITH.

Les profils du trou, déterminés à l'aide de ces deux dernières formes, semblent être similaires pour les grandes valeurs du taux d'extension λ . Il en est de même quand on compare la réponse de BIDERMAN à celle de I.H.T à $P = 284$ N puis à celle de HART-SMITH à $P = 712$ N.



F

Figure 1.4: Configuration d'un quart du trou central déformé sous une force de 284 N

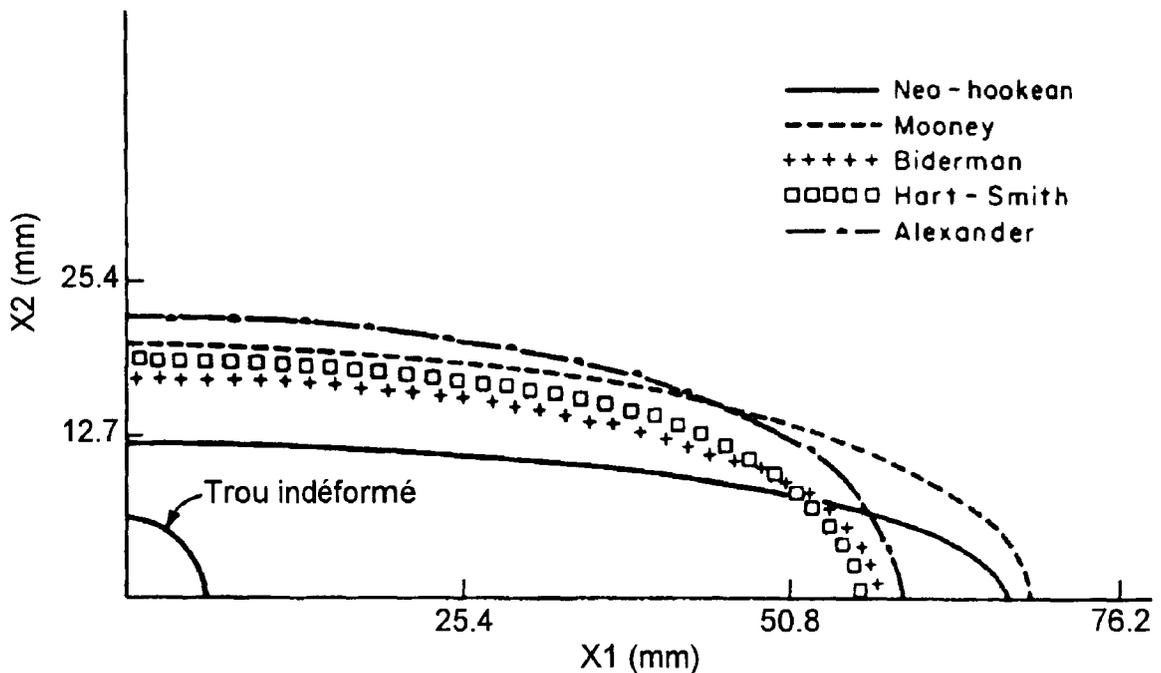


Figure 1.5: Configuration d'un quart du trou central déformé sous une force de 712 N

1.3. CONCLUSION:

Un des comportements mécaniques fondamentaux des élastomères est le haut degré de déformation constaté sous des contraintes relativement faibles. La haute élasticité réversible est appelée aussi "hyperélasticité". La modélisation de ce type de comportement s'effectue, généralement, à l'aide de la densité d'énergie de déformation W exprimée en fonction des trois invariants du tenseur d'élongation de CAUCHY- GREEN droit (I_1, I_2, I_3) :

$$W = W(I_1, I_2, I_3)$$

Différentes formes d'approximation de W ont été brièvement résumées dans ce chapitre. Leurs précisions ont été appréciées à juste titre à travers l'étude numérique comparative extraite de la littérature [1.13]. En effet, nous avons pu nous rendre compte des divergences non négligeables entre les différentes réponses. Par conséquent, l'utilisation d'une loi de comportement sous forme d'une fonction discrète (contrainte-déformation), permettrait de s'affranchir de ces erreurs d'approximation.

CHAPITRE 2: MECANIQUE DE LA RUPTURE

2.1. INTRODUCTION:

LEONARDO DA VINCI [2.1] a probablement été, dès le début du 15^{ème} Siècle, le premier à effectuer des essais méthodiques pour déterminer la charge critique à la rupture d'un matériau.

Durant les 19^{ème} et 20^{ème} siècles, des efforts significatifs ont été fournis pour l'analyse des contraintes dans des matériaux pré-fissurés. Sans être exhaustif, en voici quelques grandes étapes :

En 1890, LOVE [2.2] a abordé les problèmes de l'élasticité et a conclu, au terme de ses travaux, que la rupture était loin d'être appréhendée. Plus tard, en 1920, GRIFFITH [2.3] introduit la théorie de la balance énergétique. Cette théorie, basée sur l'hypothèse d'un comportement linéaire élastique, fait intervenir la notion de taux de restitution d'énergie, dont la valeur critique gouverne l'amorçage d'une fissure. Ce taux de restitution d'énergie, noté G , s'exprime de la manière suivante :

$$G = - \frac{dU}{dA} \quad (2.1)$$

où U est l'énergie potentielle et A la surface de la fissure créée après propagation.

Dans les années soixante, George IRWIN [2.4] [2.5] [2.6] a développé les bases analytiques de la théorie des champs de contraintes en fond de fissure qui sont le point de départ de la mécanique de la rupture moderne. Dans sa théorie, il définit un paramètre; le facteur d'intensité du champ de contraintes en fond de fissure, K , qui est la combinaison d'une charge appliquée P , de la configuration géométrique et de la longueur de fissure a :

$$K = P \cdot F(a, \text{géométrie}) \quad (2.2)$$

K est appelé paramètre de contrôle du champ de contraintes et de déformations en fond de fissure parce que les déplacements et les contraintes lui sont proportionnels. En général :

$$\sigma_{ij} = (K^2/r)^{1/2} \cdot f_{ij}(\theta) \quad (2.3)$$

$$u_i = K \cdot r^{1/2} \cdot g_i(\theta) \quad (2.4)$$

aux points du voisinage du fond de fissure. σ_{ij} et u_i sont respectivement les composantes du tenseur de contraintes et le vecteur déplacement, et (r, θ) sont les coordonnées polaires

usuelles avec une origine en fond de fissure [2.3] [2.7]. Initialement, avec cette approche, il a été supposé que la rupture se produit quand K atteint sa valeur critique K_C . Plus tard, des critères de rupture plus élaborés ont été introduits. IRWIN [2.4] [2.5] [2.6] a montré qu'il existe une relation unique entre K et G de GRIFFITH:

$$\text{- en contraintes planes:} \quad G = \frac{K^2}{E} \quad (2.5)$$

$$\text{- en déformations planes:} \quad G = (1 - \nu^2) \cdot \frac{K^2}{E} \quad (2.6)$$

A partir de ces définitions, une large variété de programmes d'essais a été conduite pour mesurer la valeur critique de K , pour différentes configurations (géométries d'éprouvette et longueurs de fissure). Les résultats montrent, par exemple, que dans le cas de déformations planes et d'une plasticité confinée, la valeur critique K_{IC} (en mode I) est indépendante de la configuration mais dépendante de la température, de la vitesse de déformation et du matériau.

Par la suite, plusieurs travaux ont été menés pour étendre la mécanique linéaire élastique de la rupture au régime élasto-plastique. Dans un premier temps, les corrections prenant en compte les déformations plastiques, lorsque celles-ci ne sont plus négligeables, ont été introduites [2.6] [2.8]. Cette correction s'est avérée insuffisante pour les problèmes présentant une plasticité importante dans le ligament.

En 1961, WELLS [2.9] propose de caractériser le comportement à la rupture par un paramètre rapporté à l'ouverture des surfaces de la fissure. Ce paramètre est appelé "The crack opening displacement" ou "C.O.D". Cet auteur a montré que dans le cas d'une plasticité confinée, le C.O.D peut être relié à G , et par conséquent les valeurs critiques de ce premier à K_{IC} . Cette méthode utilise le modèle de DUGDALE-BILBY-COTTRELL [2.10] [2.11] [2.12], pour relier le C.O.D à la charge appliquée et à la longueur de fissure. Une vaste campagne d'essais expérimentaux et de travaux analytiques ont été conduits pour déterminer les possibilités ainsi que les limites de cette méthode [2.13] [2.14] [2.15] [2.16].

En 1968, RICE [2.17] a introduit la méthode de l'intégrale J . En raison de l'intérêt manifeste que nous lui avons accordé dans notre étude, nous développerons plus en détail cette partie.

2.2. LES APPROCHES ENERGETIQUES DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE:

L'existence d'importants gradients de contraintes et de déformations, au voisinage du fond de fissure, entraîne que l'énergie n'est pas uniformément répartie. Il existe deux approches pour l'étude du problème de rupture; l'une locale, l'autre globale. L'approche locale suppose que, dans un élément de volume situé dans la zone de rupture, la densité d'énergie disponible atteint une valeur critique. L'approche globale fait le bilan de l'énergie fournie et de l'énergie récupérable afin de calculer l'énergie disponible pour faire croître un défaut.

2.2.1. Critères énergétiques locaux de la rupture:

L'objectif de ces approches est de prédire la rupture des matériaux connaissant la distribution du champ des contraintes et des déformations en pointe de fissure.

2.2.1.1. Cas d'un comportement linéaire élastique:

Dans le cas d'un solide fissuré ayant un comportement linéaire élastique, les contraintes et les déformations à la pointe de la fissure s'expriment à l'aide du facteur d'intensité de contraintes.

A. Facteur d'intensité de contraintes :

Avec l'hypothèse de l'élasticité linéaire en petites déformations, IRWIN [2.18] montre que le champ de contraintes, au voisinage de la pointe de la fissure, est décrit par un paramètre appelé "facteur d'intensité de contrainte", noté K . La rupture survient lorsque K atteint une valeur critique K_c caractéristique du matériau et appelée "ténacité". Le facteur d'intensité de contrainte s'exprime, dans le cas d'une fissure traversant une plaque infinie soumise à un chargement d'ouverture (mode I), sous la forme [2.18]:

$$K_I = \sigma_o \cdot (\pi \cdot a)^{1/2} \quad (2.7)$$

où a est la longueur initiale de la fissure et σ_o est la contrainte uniforme appliquée. Pour des éprouvettes de dimensions finies, le champ intrinsèque, à la pointe de la fissure, est modifié par l'interaction avec les bords libres. On prend en compte cette modification à l'aide d'un facteur de correction Y dépendant de la géométrie de l'échantillon étudié:

$$K_I = Y(a/w) \cdot \sigma_o \cdot (\pi \cdot a)^{1/2} \quad (2.8)$$

Les facteurs de correction Y , appelés aussi fonctions de calibration, peuvent être évalués par calcul analytique lorsque c'est possible mais souvent par calcul numérique.

2..2.1.2. Cas d'un matériau à comportement non-linéaire:

A. Critères de rupture de GUILLEMOT et de SIH:

D'une façon générale, il existe un gradient de densité d'énergie de déformation et sa répartition, en fonction des coordonnées x et y , est de la forme:

$$W(x,y) = W_0 \cdot f(x, y, W_0) \quad (2.9)$$

Dans cette relation, W_0 est la densité d'énergie de déformation uniforme calculée loin des perturbations du champ de contraintes et de déformations produites par la fissure.

L'idée de GUILLEMOT [2.19] ou SIH [2.20] est de considérer que le processus de rupture est associé à la valeur de densité d'énergie la plus significative. La présence d'un fort gradient de contraintes, associé à une singularité, rend difficile la localisation de l'endroit où la densité d'énergie de déformation prend une valeur critique.

GUILLEMOT [2.21] suggère que l'énergie totale de rupture (ductile) d'un corps fissuré est identique à l'énergie de rupture d'une petite éprouvette de traction, cylindrique et lisse dont les dimensions (longueur l_0 et rayon r_c) sont obtenues à partir des considérations énergétiques (figure 2.1). Au moment de la rupture, la densité d'énergie locale atteint la valeur critique W_c et est appelée densité d'énergie spécifique pour la rupture.

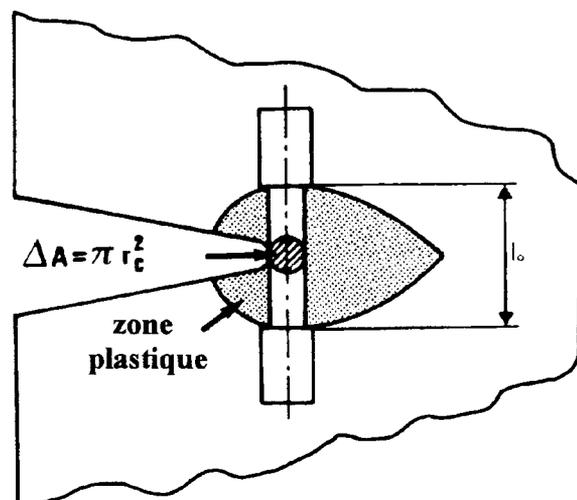


Figure 2.1: Modèle de la micro-éprouvette en fond de fissure utilisé dans le critère de GUILLEMOT

SIH [2.22] a proposé de relier le processus de rupture à une densité d'énergie ponctuelle évaluée à une distance r_c de la pointe de la fissure. Cette distance peut être considérée comme le rayon d'une zone "coeur" cylindrique dans laquelle le matériau ne peut être considéré comme un solide homogène (figure 2.2). Cet auteur définit alors un facteur de densité d'énergie de déformation S tel que:

$$dU/dV = S/r_c \quad (2.10)$$

où U est l'énergie de déformation et V le volume.

Au moment de la rupture, le facteur de densité d'énergie de déformation atteint la valeur critique S_c .

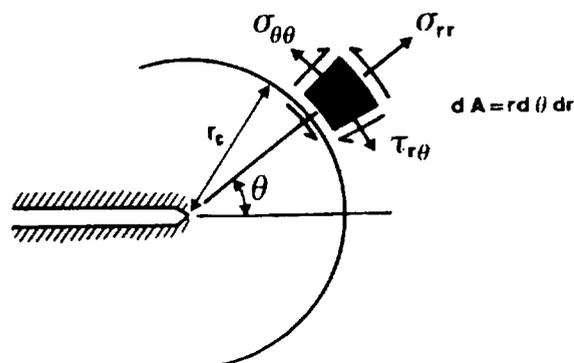


Figure 2.2: Etat de contraintes en fond de fissure à l'extérieur de la région coeur de rayon r_c

2.2.2. Approche énergétique globale:

L'approche énergétique globale, typique en mécanique linéaire élastique de la rupture, est l'utilisation du taux d'énergie disponible G . Celui-ci voit son application étendue au cas des matériaux possédant un comportement non linéaire:

- soit en introduisant une correction de plasticité du type IRWIN [2.5];
- soit comme le fait LIEBOWITZ [2.23] en considérant que le taux d'énergie disponible est représenté par la différence d'aire entre deux courbes charge-déplacement non linéaires.

A l'inverse des critères locaux, les critères globaux ne nécessitent pas la connaissance du champ de contraintes et de déformations à la pointe de la fissure. On peut donc traiter le cas des matériaux aux comportements complexes, pour lesquels justement ces données sont inaccessibles analytiquement. Ces critères puisent leur support théorique d'une analyse faisant un bilan qui permet la détermination de l'énergie utile pour propager la fissure. Bien que cette analyse soit connue, il est nécessaire de rappeler cette notion fondamentale pour mieux comprendre l'étude qui nous concernera par la suite.

2.2.2.1. Bilan énergétique:

La propagation stable (ou quasi statique) d'une fissure se décrit à partir du premier principe de la thermodynamique. Ce principe exprime la conservation de l'énergie totale d'un système isolé et donc, pour un solide fissuré, indique que l'énergie consommée dans la propagation est le résultat de la conversion, en énergie surfacique libre, du travail des forces extérieures $W_{F_{ext}}$ et de l'énergie élastique stockée U dans le système:

$$\frac{\partial(W_{F_{ext}} - U)}{\partial a} \geq \gamma \cdot \frac{\partial A}{\partial a} \quad (2.11)$$

relation dans laquelle A est la variation de la surface associée à la propagation de fissure de longueur " a ". L'hypothèse de réversibilité indique que U est une énergie potentielle. Dans le cas d'une plaque d'épaisseur B , nous avons $A = 2.B.a$. La relation (2.11) s'écrit alors sous la forme:

$$\frac{\partial(W_{F_{ext}} - U)}{B \cdot \partial a} \geq 2\gamma \quad (2.12)$$

Dans la pratique des mesures effectuées sur les polymères et sur les caoutchoucs montrent que l'énergie de rupture obtenue est beaucoup plus importante que 2γ . Ceci s'explique en partie par le fait que γ est l'énergie nécessaire pour rompre des liaisons de type Van Der Waals alors que dans le cas particulier de ces matériaux, d'autres types de liaisons covalentes sont présentes [2.24]. L'énergie requise pour la rupture de telles liaisons est appelée communément énergie de rupture intrinsèque et notée G_0 .

Par ailleurs, pour tous les matériaux, la forte concentration de contraintes régnant en pointe de fissure induit dans cette zone des phénomènes de dissipation d'énergie (plasticité, endommagement, viscoélasticité, ...) qui entrent pour une grande part dans l'énergie absorbée par la propagation.

En général, lorsque le comportement global est élastique réversible, on fait l'hypothèse que cette dissipation d'énergie se limite aux abords immédiats de la pointe de fissure et qu'elle se produit indépendamment de la géométrie de l'échantillon et des conditions de chargement. Le terme 2γ est remplacé par G_c , énergie nécessaire pour accroître la fissure d'une unité de longueur, qui englobe l'énergie dissipée par les processus cités ci-dessus. Le critère d'amorçage s'écrit alors:

$$G = \frac{\partial(W_{F_{ext}} - U)}{B \cdot \partial a} \geq G_c \quad (2.13)$$

G est un paramètre énergétique représentant l'énergie globalement mise en jeu pour amorcer la propagation de la fissure, et G_c est l'énergie surfacique de rupture, caractéristique du matériau considéré.

2.2.2.2. Intégrales de contour:

A. Intégrale J de RICE:

L'intégrale J , indépendante du contour d'intégration et développée par RICE [2.17] est une autre manière d'écrire le bilan énergétique.

Considérons un matériau homogène qui présente un comportement élastique linéaire ou non-linéaire avec une fissure ou une entaille parallèle à l'axe des X et soumis à un champ de déformations bidimensionnel, comme le montre la figure 2.3. RICE [2.17] a montré que :

$$\int_C \left(W \cdot dY - T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X} \cdot dS \right) = 0 \quad (2.14)$$

où W est la densité d'énergie de déformation, T_i les composantes du vecteur de traction, u_i les composantes du vecteur déplacement et C un contour fermé.

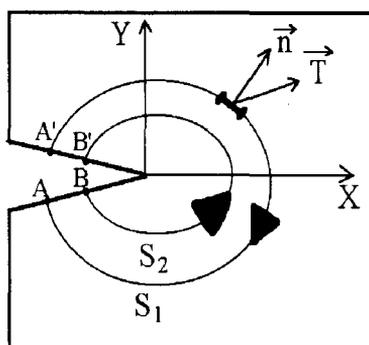


Figure 2.3: Exemple d'un contour fermé.
($C = S_1 + AB + S_2 + B'A'$)

En conséquence, si maintenant Γ représente un contour ouvert entourant le fond de la fissure, allant de la lèvres inférieure à la lèvres supérieure (figure 2.4), l'intégrale calculée le long de ce type de contour donne une valeur unique que RICE a appelée J .

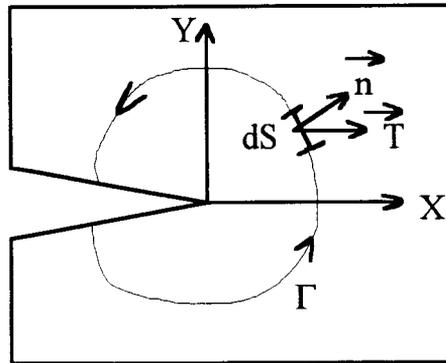


Figure 2.4: Contour de l'intégrale J de RICE.

L'intégrale J est indépendante du contour d'intégration (**annexe 1**) et est définie par:

$$J = \int_{\Gamma} \left(W \cdot dY - T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X} \cdot dS \right) \quad (2.15)$$

L'unicité du résultat implique que J est un paramètre caractérisant le champ de contraintes et de déformations au voisinage du fond de fissure. Cette intégrale représente le bilan des flux énergétiques à travers un contour quelconque autour du fond de fissure.

L'intégrale J se présente ainsi comme un moyen commode d'étendre les concepts de la mécanique linéaire élastique de la rupture à des matériaux pouvant présenter des déformations irréversibles en pointe de fissure.

A.1. Signification physique de l'intégrale J:

Considérons un contour quelconque C, autour du fond d'une fissure, qui se déplace lorsque cette fissure se propage (figure 2.5). Nous avons:

$$J \cdot da = \int_C W \cdot dY \cdot da - \int_C T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X} \cdot dS \cdot da \quad (2.16)$$

Le premier terme du second membre représente l'énergie de déformation gagnée par le système. Le second terme est le travail effectué par les efforts de traction sur le contour pendant le mouvement. Par conséquent "J.da" est l'énergie totale qui passe à travers le contour C (quelconque autour du fond de la fissure) pour une propagation da (par unité d'épaisseur), dans le cas d'un matériau élastique linéaire ou non linéaire.

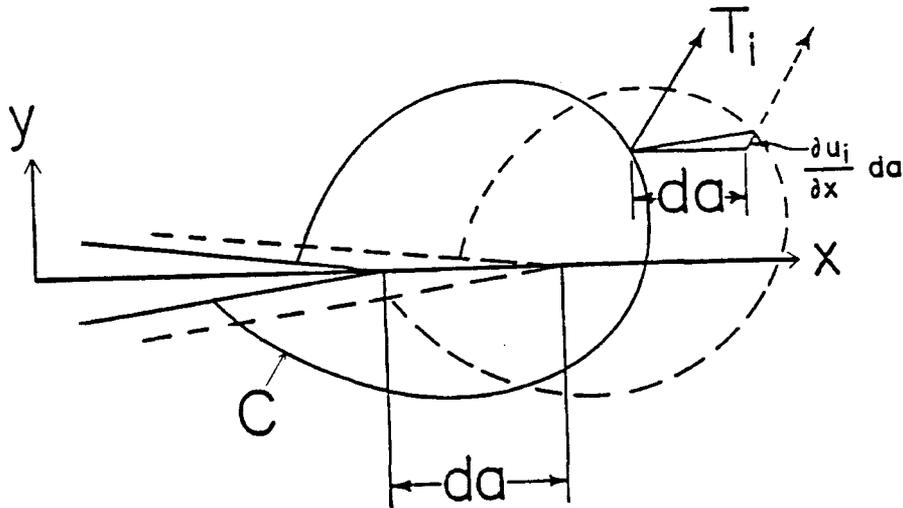


Figure 2.5: Schéma d'un contour se déplaçant lorsque la fissure se propage.

A.2. Relation entre l'intégrale J et la variation d'énergie potentielle :

RICE a montré [2.25] que J peut être interprétée comme étant le taux d'échange d'énergie potentielle par incrément "Δa" de propagation de la fissure :

$$J = - \frac{dU}{B \cdot da} \tag{2.17}$$

En effet, soit Γ un contour, comme celui défini sur la figure 2.4, délimitant l'aire totale "A" de l'éprouvette. L'énergie potentielle U(a) du système est donnée par l'expression suivante:

$$U(a) = B \cdot \int_A W(P) \cdot dA - \int_{\Gamma} T_i \cdot u_i \cdot dS \tag{2.18}$$

Si on rapporte la variation d'énergie potentielle à l'accroissement de la fissure sur une longueur "da", on obtient:

$$\frac{dU}{B \cdot da} = \int_A \frac{dW}{da} \cdot dA - \int_{\Gamma} T_i \cdot \frac{du_i}{da} \cdot dS \tag{2.19a}$$

or:

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} \cdot \frac{da}{da} + \frac{\partial}{\partial X} \cdot \frac{dX}{da} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial X} \quad (\text{car } dX = -da) \tag{2.19b}$$

Ainsi, l'équation (2.19a) prend la forme:

$$\frac{dU}{B \cdot da} = \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial W}{\partial X} \right) \cdot dA - \int_{\Gamma} T_i \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} - \frac{\partial u_i}{\partial X} \right) \cdot dS \tag{2.19c}$$

Par ailleurs, nous avons:
$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} \quad (2.20a)$$

En appliquant le théorème des travaux virtuels, on obtient:

$$\int_A \frac{\partial W}{\partial a} \cdot dA = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} \cdot dA = \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} \cdot dS \quad (2.20b)$$

Le théorème de STOCKES nous permet de transformer une intégrale de surface en une intégrale de contour:

$$\int_A \frac{\partial W}{\partial X} \cdot dA = \int_{\Gamma} W \cdot dY \quad (2.20c)$$

En introduisant les équations (2.20a) à (2.20c) dans la relation (2.19c), le paramètre énergétique J (relation 2.17) devient:

$$J = -\frac{dU}{B \cdot da} = \int_{\Gamma} \left(W dY - T_i \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial X} \right) \cdot dS \right) \quad (2.21a)$$

qui est bien l'expression de l'intégrale J proposée par RICE.

Ce résultat s'introduit en fait de façon beaucoup plus rigoureuse à l'aide du tenseur moment-énergie décrit par ESHELBY [2.26] qui conduit d'ailleurs à d'autres intégrales de contour utilisables dans le cas général, autre que le problème plan (annexe 2). Toutefois aucune approche n'a connu le succès de celle de RICE qui est la plus couramment utilisée par les analystes.

B. Intégrale I de BUI:

BUI [2.27] a proposé une formulation duale de l'intégrale de RICE à partir de l'énergie de déformation complémentaire. Cette intégrale, appelée I, s'exprime sous la forme :

$$I = \int_{\Gamma} \left(W^* \cdot n_1 - n_j \cdot \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X} \right) \cdot u_i \right) \cdot dS \quad (2.21b)$$

W^* est la densité d'énergie de déformation complémentaire, I est par extension égale à $\frac{\partial U^*}{B \cdot \partial a}$ où U^* est l'énergie de déformation complémentaire.

2.2.2.3. Paramètre énergétique J:

Comme nous venons de le voir, RICE a montré que l'intégrale J représente la variation d'énergie potentielle correspondant à une propagation de la fissure sur une unité de surface. Toutefois et réciproquement, toute variation d'énergie potentielle d'un corps fissuré ne saurait représenter la valeur de l'intégrale J, sauf si le champ des contraintes et des déformations à la pointe de la fissure est effectivement gouverné par cette intégrale.

Le paramètre énergétique J est défini comme étant une extension de l'intégrale de contour définie par RICE. Ce paramètre énergétique est équivalent au taux de restitution d'énergie G dans le cas de l'élasticité.

A. Expression du paramètre énergétique J :

L'intégrale J peut être reliée au taux d'énergie potentielle par la relation :

$$J = -\left(\frac{\partial U}{B \cdot \partial a}\right) \Big|_d \quad (2.22)$$

à déplacement "d" constant. Lorsque l'on travaille à charge "p" constante, l'intégrale J est reliée au taux de variation d'énergie de déformation complémentaire:

$$J = \left(\frac{\partial U^*}{B \cdot \partial a}\right) \Big|_p \quad (2.23)$$

B est l'épaisseur de l'éprouvette.

L'énergie de déformation complémentaire U^* et l'énergie potentielle U sont définies sur la figure 2.6.

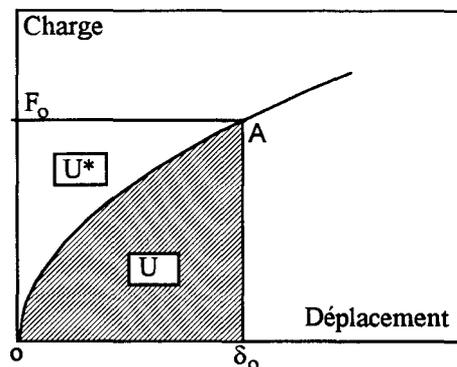


Figure 2.6: Définition de l'énergie dissipée U et de l'énergie complémentaire U^*

Pour deux éprouvettes identiques de longueurs de fissure légèrement différentes, l'aire entre leurs courbes charge-déplacement représente ΔU . La figure 2.7 montre ΔU à déplacement constant et à charge constante. L'aire du triangle supplémentaire est un terme du second ordre et peut donc être négligé. Par conséquent, la valeur de J est indépendante du terme pris constant (charge ou déplacement). Une autre définition de J pour des matériaux élastiques est alors:

$$J = -\frac{dU}{da} = -\int_0^{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_{\delta} \cdot d\delta = \int_0^P \left(\frac{\partial \delta}{\partial a}\right)_{P} \cdot dP \quad (2.24)$$

A partir de cette forme, plusieurs procédures d'évaluation de J ont été développées. Certaines de ces procédures sont décrites plus loin.

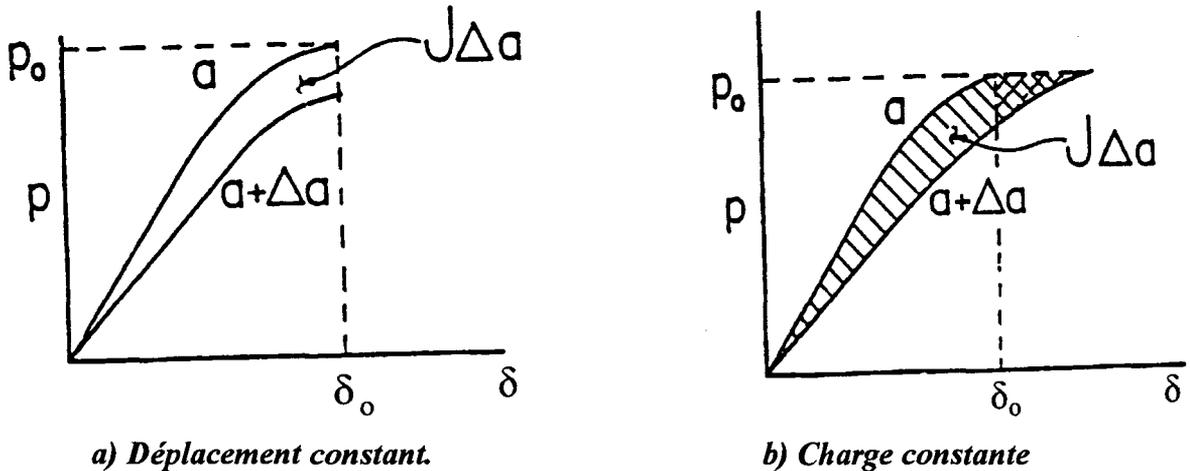


Figure 2.7: Mesures graphiques de J

B. Expression du paramètre énergétique J dans le cas des élastomères:

B.1. Préliminaires:

Les élastomères présentent généralement un comportement élastique non linéaire qui s'accompagne d'allongements très importants (plusieurs centaines de pour-cent). La rupture de tels matériaux ne peut donc s'étudier à partir de la mécanique linéaire élastique de la rupture (M.L.E.R) développée dans le cadre de petites déformations. Elle s'appréhende plutôt à partir de l'approche énergétique globale décrite précédemment.

B.2. Expression de RIVLIN et THOMAS:

L'extension de la mécanique de la rupture au cas des caoutchoucs est l'oeuvre de RIVLIN et THOMAS [2.28] qui, à partir des travaux de GRIFFITH [2.3], développèrent des solutions permettant la quantification du paramètre énergétique J pour différentes géométries

d'échantillons. La démarche de ces auteurs peut être illustrée dans le cas de l'éprouvette S.E.N.T. (éprouvette à fissure latérale) et de l'éprouvette C.P (éprouvette de cisaillement pur).

-Cas d'une éprouvette S.E.N.T:

Considérons une éprouvette S.E.N.T (Single edge notch in tension) qui est une plaque rectangulaire de longueur L , de largeur W et d'épaisseur B , dans laquelle est insérée une fissure latérale de longueur a (figure 2.8). L'éprouvette est sollicitée en traction à ses extrémités, perpendiculairement au plan de la fissure. A la même éprouvette sans fissure soumise au même taux d'élongation λ est associée une densité d'énergie de déformation W_0 uniforme. L'introduction d'une petite fissure s'accompagne d'un déchargement supposé local, se limitant à une zone proche de cette fissure, assimilée à un triangle comme le montre schématiquement la figure 2.8. La variation d'énergie élastique s'écrit alors:

$$-\Delta U = k(\lambda) \cdot a^2 \cdot B \cdot W_0 \quad (2.25)$$

Puisque la longueur totale de l'éprouvette ne varie pas, il s'ensuit alors:

$$J = \left(-\frac{\partial U}{B \cdot \partial a} \right) \Big|_d = 2 \cdot k(\lambda) \cdot a \cdot W_0 \quad (2.26)$$

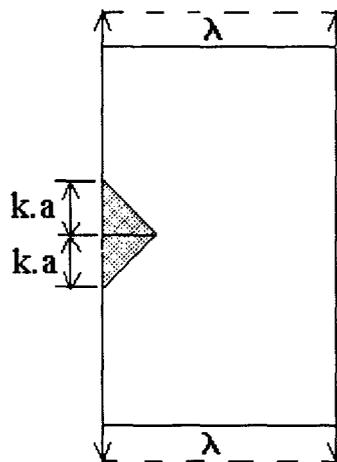


Figure 2.8: Eprouvette SENT

L'amorçage de la fissure se produit pour une valeur critique W_{0c} de la densité d'énergie de déformation uniforme et le critère de rupture s'exprime de la façon suivante:

$$J_c = T_c = 2 \cdot k(\lambda) \cdot a \cdot W_{0c} \quad (2.27)$$

où T_c est l'énergie de déchirement, B l'épaisseur de l'éprouvette, a la longueur de fissure et k un facteur de proportionnalité fonction du taux d'élongation λ .

Le facteur k a été déterminé par GREENSMITH [2.29] selon une méthode expérimentale originale pour un caoutchouc à différents taux de réticulation et calculé théoriquement par LAKE [2.30] qui propose la formulation suivante:

$$k(\lambda) = \pi/\lambda^{1/2} \quad (2.28)$$

La figure 2.9 montre que les valeurs de k issues de cette dernière expression sont en bon accord avec les résultats de GREENSMITH. Par ailleurs, ce facteur diminue d'une valeur d'environ 3 pour les petites élongations à une valeur proche de 2 pour $\lambda = 3$.

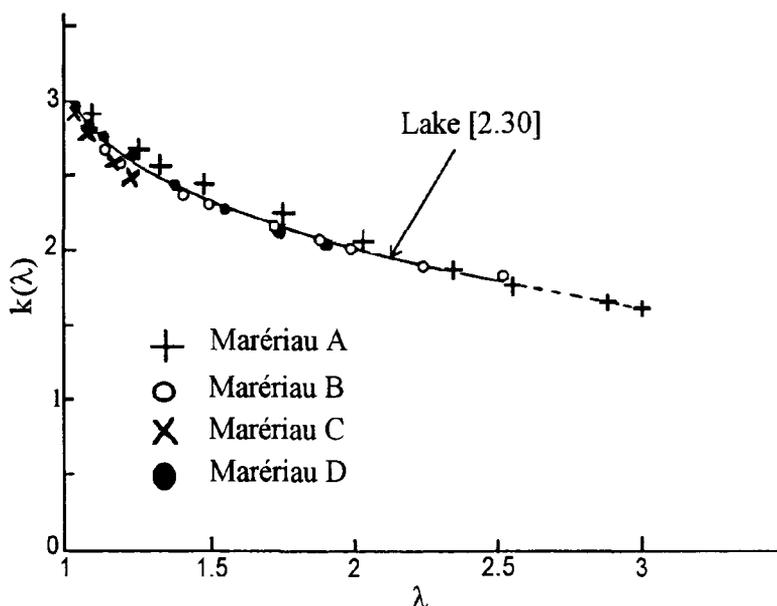


Figure 2.9: $k(\lambda)$ en fonction du taux d'élongation λ selon GREENSMITH [2.29].

-Cas d'une éprouvette en cisaillement pur (éprouvette C.P):

RIVLIN et THOMAS ont délimité trois zones (A, E et D) sur une éprouvette C.P (figure 2.10). Sous des sollicitations de traction suivant le sens (1), la région A de l'éprouvette reste pratiquement non déformée, la région D est dans un état de déformation complexe et la région E est dans un état de cisaillement pur. Le champ des contraintes et des déformations dans cette dernière zone n'est pas influencé par les perturbations induites par l'existence de la fissure. Par conséquent, pour un taux d'élongation donné, la densité d'énergie de déformation W_0 calculée dans cette région reste constante quelle que soit la longueur de fissure. Dans ce cas, on dit que la densité d'énergie de déformation est contrôlée par le déplacement. Par ailleurs, RIVLIN et THOMAS ont émis l'hypothèse que la propagation de la fissure sur une longueur " da ", à déplacement constant, n'altère pas l'état de déformation dans la région D, mais déplace

simplement cette région parallèlement à la direction de propagation de la fissure, entraînant ainsi un accroissement de la région A au dépens de la région E.

Ce processus transfère donc un volume $(h.B.da)$ du matériau, à partir d'un état de cisaillement pur à un état indéformé. L'échange d'énergie ΔU qui en découle est alors:

$$\Delta U = -W_o . h . B . da \tag{2.29}$$

d'où l'expression de l'énergie de déchirement T , équivalente à J :

$$T = J = - \left. \frac{dU}{B.da} \right|_d = W_o . h \tag{2.30}$$

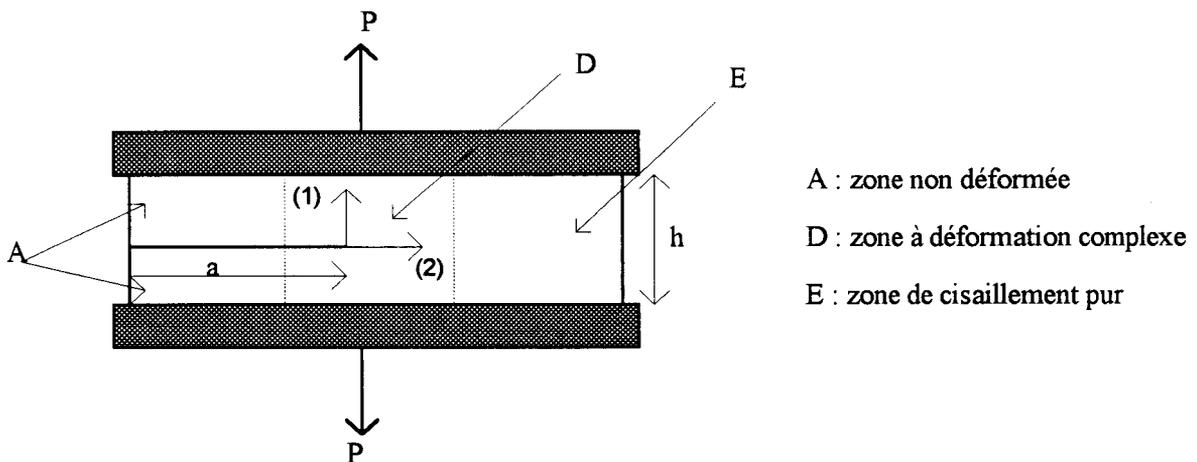


Figure 2.10: Eprouvette de cisaillement pur étudiée par RIVLIN et THOMAS [2.28].

Par ailleurs, RIVLIN et THOMAS [2.28] ont montré que le déchirement des caoutchoucs vulcanisés est gouverné par un critère de type GRIFFITH [2.3]. Autrement dit, dans ces matériaux, la fissure se propage quand la différentielle, par rapport à la longueur de cette fissure, de l'énergie élastique emmagasinée dans l'éprouvette atteint une valeur critique caractéristique du matériau considéré. Ce critère est exprimée par l'équation suivante:

$$T = - \left(\frac{\partial U}{B . \partial a} \right) \Big|_d \Big]_{\text{criti.}} \tag{2.31}$$

où U est l'énergie emmagasinée dans l'éprouvette. Le suffixe "d" indique que la différentiation est effectuée à déplacement constant.

Le tableau 2.1 donne les ordres de grandeur des valeurs de J_c (ou T_c) pour un certain nombre de matériaux.

MATERIAUX	T_c (kJ/m ²)
Caoutchouc	13
Polyéthylène	20
Polystyrène	0.4
P.M.M.A	0.5
Verre	0.007

Tableau 2.1: Valeurs de T_c (ou J_c) pour différents matériaux

L'expression (2.31) a été utilisée par plusieurs auteurs pour déterminer les effets de la forme de fissure et de la température sur l'énergie caractéristique de rupture [2.31] [2.32] et, récemment, dans l'étude des propriétés de fatigue des caoutchoucs [2.34] [2.35] [2.36].

B.3. Théorie Généralisée de la Mécanique de la Rupture:

En suivant une démarche théorique basée sur l'approche énergétique de GRIFFITH [2.3], ANDREWS [2.37] a développé une théorie généralisée pouvant caractériser la rupture des matériaux à comportement non linéaire élastique ou non élastique.

C'est en 1968 que furent introduits les premiers éléments de cette théorie, à partir des résultats expérimentaux obtenus dans le cas de la rupture des polymères. Dans ce qui suit, nous présenterons brièvement le développement de cette approche.

B.3.1. cas de dimensions infinies:

Considérons une plaque de dimensions infinies, contenant une fissure de longueur "a" et soumise à un champ de contraintes σ_0 à l'infini et perpendiculairement aux plans des surfaces de la fissure (figure 2.12). Le matériau considéré est supposé élastique.

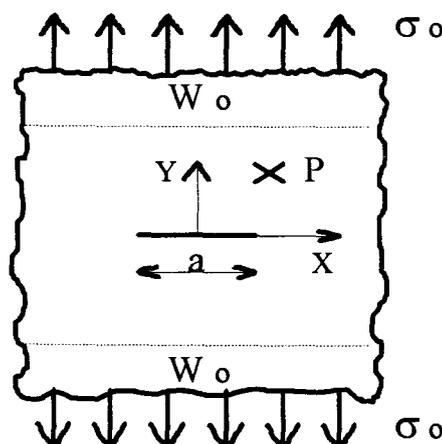


Figure 2.12: Plaque fissurée de dimensions infinies.

Puisque "a" est la seule dimension finie du système, ANDREWS propose d'exprimer, en tout point P de l'éprouvette, le tenseur de contraintes $\sigma_{ij}(P)$ et la densité d'énergie de déformation $W(P)$ respectivement sous les formes suivantes:

$$\sigma_{ij}(P) = \sigma_o f_{ij} \left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}, \varepsilon_o \right) \quad (2.32)$$

$$W(P) = W_o \cdot f \left(\frac{X}{a}, \frac{Y}{a}, \varepsilon_o \right) \quad (2.33)$$

où W_o est la densité d'énergie de déformation loin du défaut; ε_o est la déformation à l'infini; X et Y sont les coordonnées du point P par rapport au repère de référence dont l'origine marque le centre de l'éprouvette (figure 2.12).

En introduisant les coordonnées réduites $x = \frac{X}{a}$ et $y = \frac{Y}{a}$, la différenciation de $W(P)$ par rapport à la longueur de fissure, à W_o constant, conduit à:

$$\left. \frac{dW(P)}{da} \right|_{w_o} = -\frac{W_o}{a} \cdot \left[\left(x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left(y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \quad (2.34)$$

Soit

$$\left. \frac{dW(P)}{da} \right|_{w_o} = -\frac{W_o}{a} \cdot g(x, y, \varepsilon_o) \quad (2.35)$$

g étant une autre fonction.

La variation d'énergie totale U dans le système, due à la propagation de la fissure, est donnée par la relation:

$$\frac{dU}{da} = \int_V \frac{dW(P)}{da} \cdot dV \quad (2.36)$$

Dans le cas d'une éprouvette d'épaisseur B, nous avons:

$$dV = B \cdot dX \cdot dY = B \cdot a^2 \cdot dx \cdot dy \quad (2.37)$$

En introduisant les équations (2.35) et (2.37) dans la relation (2.36), nous obtenons:

$$\frac{dU}{da} = -B \cdot W_o \cdot a \cdot \iint_{x,y} g(x, y, \varepsilon_o) \cdot dx \cdot dy \quad (2.38)$$

En considérant l'échange d'énergie totale relatif à un accroissement de surface de la fissure dA ($A = a \cdot B$), la relation (2.38) s'écrit sous la forme:

$$\frac{dU}{dA} = -W_o \cdot a \cdot \iint_{x,y} g(x,y,\varepsilon_o) \cdot dx \cdot dy \quad (2.39)$$

et en posant:
$$k(W_o) = -\frac{1}{2} \cdot \iint_{x,y} g(x,y,\varepsilon_o) \cdot dx \cdot dy \quad (2.40)$$

nous obtenons la première équation proposée par ANDREWS:

$$J = -\frac{dU}{dA} = 2 \cdot k(W_o) \cdot W_o \cdot a \quad (2.41)$$

relation dans laquelle $-\frac{dU}{dA}$ représente la variation d'énergie nécessaire pour propager la fissure sur une unité de surface; $k(W_o)$ est une fonction explicite de W_o . Cette expression est celle du paramètre énergétique J . Elle est analogue à celle proposée par RIVLIN et THOMAS [2.28] dans le cas du déchirement des élastomères (relation 2.26). Elle représente aussi la généralisation du critère de GRIFFITH, exprimé dans le cas d'un matériau à comportement linéaire élastique par:

$$G = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sigma_o^2}{2 \cdot E} \cdot a \quad (2.42)$$

En effet, par identification, il vient:

$$k(W_o) = \pi \quad (2.43)$$

et

$$W_o = \frac{\sigma_o^2}{2E} \quad (2.44)$$

où E est le module de YOUNG.

Les figures (2.13a) et (2.13b) représentent l'évolution de $k(W_o)$, déterminé expérimentalement par ANDREWS, respectivement pour un alliage Cuivre-Berilium et pour trois types de polymères. Selon cet auteur, les évolutions de $k(W_o)$ traduisent les effets de non linéarité du comportement du matériau.

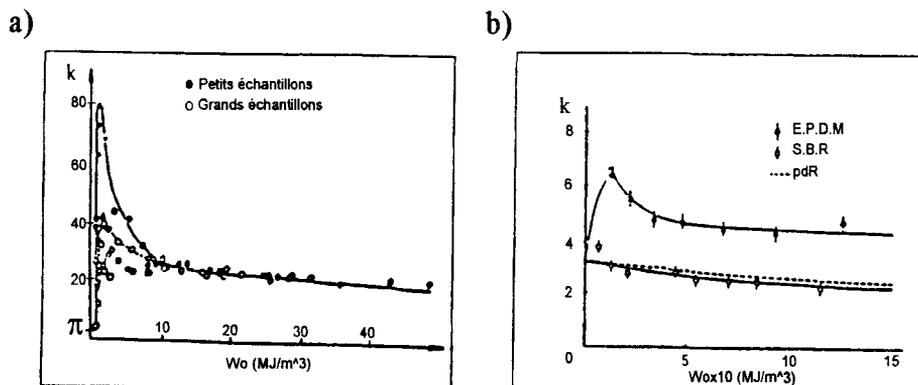


Figure 2.13: Evolution de $k(W_o)$ en fonction de W_o

On remarque que pour les faibles grandeurs de W_0 , la fonction $k(W_0)$ tend vers la valeur π obtenue pour les matériaux à comportement linéaire élastique. Cette fonction présente aussi un pic correspondant, selon ANDREWS [2.37] [2.38], à une plastification confinée en fond de fissure du matériau testé.

B.3.2. cas de dimensions finies:

Pour les éprouvettes de laboratoire, la relation (2.41) proposée par ANDREWS doit prendre en compte les dimensions finies autres que la longueur de fissure "a". L'expression du paramètre J s'écrit alors:

$$J = N(W_0, a/w, a/h, \dots) \cdot W_0 \cdot a \quad (2.45)$$

où N est un autre facteur de proportionnalité qui est fonction de W_0 et des dimensions de l'éprouvette (largeur w, hauteur h, ...)

Par analogie avec la mécanique linéaire élastique de la rupture, il vient tout de suite à l'esprit de séparer les effets géométriques de ceux du comportement en exprimant N sous une forme multiplicative [2.39]:

$$N = 2 \cdot k(W_0) \cdot F(a/w, a/h, \dots) \quad (2.46)$$

ce qui permet d'écrire J:

$$J = 2 \cdot k(W_0) \cdot W_0 \cdot a \cdot F(a/w, a/h, \dots) \quad (2.47)$$

ou, sous une forme équivalente:

$$J = H(W_0) \cdot G(a/w, a/h, \dots) \quad (2.48)$$

Dans l'expression (2.48), H est une fonction de la densité d'énergie de déformation W_0 , et G est une fonction tenant compte des dimensions finies de l'éprouvette considérée (longueur de fissure a, largeur w, hauteur h ...)

B.3.3. Application de la première équation d'ANDREWS à une éprouvette C.P:

L'expression du paramètre énergétique J ($J = W_0 \cdot h$), proposée par RIVLIN et THOMAS, a été retrouvée par ANDREWS par l'application de la première équation de sa théorie généralisée. Cet auteur [2.37] a considéré une éprouvette de hauteur h, de largeur infinie et contenant une fissure semi-infinie. Cette éprouvette correspond bien à celle étudiée par RIVLIN et

THOMAS. Les variables réduites sont déterminées par rapport à la hauteur h qui est la seule dimension finie:

$$x = \frac{X}{h} \quad ; \quad y = \frac{Y}{h}$$

où X et Y sont des coordonnées cartésiennes (figure 2.12).

Par ailleurs, le fond de la fissure qui est le seul point identifiable dans ce cas, est choisi comme origine du repère. Donc, cette origine se déplace lorsque la fissure se propage. Ainsi, à partir de l'équation (2.33) ($\mathbf{W}(\mathbf{P}) = \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{f}(x, y, \varepsilon_0)$), nous obtenons:

$$\left. \frac{d\mathbf{W}(\mathbf{P})}{da} \right|_{\mathbf{W}_0} = \mathbf{W}_0 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} \right) \right] \quad (2.49)$$

or

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \left(\frac{1}{h} \right) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right) = -\frac{1}{h} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \left(\frac{1}{h} \right) \cdot \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right) = 0 \quad (2.51)$$

d'où

$$\left. \frac{d\mathbf{W}(\mathbf{P})}{da} \right|_{\mathbf{W}_0} = - \left(\frac{\mathbf{W}_0}{h} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) \quad (2.52)$$

En faisant la sommation, il vient:

$$\sum_{\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{W}(\mathbf{P})}{da} = \frac{dU}{da} = - \frac{\mathbf{W}_0}{h} \cdot \sum \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} dv \quad (2.53)$$

ou de façon équivalente:

$$\frac{dU}{dA} = -\mathbf{W}_0 \cdot h \cdot \int_y dy \cdot \int_x \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} dx \quad (2.54)$$

avec:

$$A = B \cdot a \quad \text{et} \quad dv = B \cdot h^2 \cdot dx \cdot dy$$

En introduisant les conditions aux limites suivantes:

$$f = 1 \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

$$f = 0 \text{ quand } x \rightarrow -\infty$$

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq +\frac{1}{2}$$

l'équation (2.54) devient:

$$\frac{dU}{dA} = -W_o \cdot h \cdot \int_{-1/2}^{+1/2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx \quad (2.55)$$

soit donc:

$$J = -\frac{dU}{dA} = W_o \cdot h \quad (2.55)$$

qui est le résultat montré déjà par RIVLIN et THOMAS.

C. Evaluation du Paramètre Energétique J:

Depuis plusieurs années des efforts significatifs ont été fournis pour évaluer J comme une fonction de la charge appliquée P (ou du déplacement δ) et de la longueur de fissure a. Différentes méthodes ont été ainsi utilisées.

Parmi ces méthodes, on retrouve celle de BEGLEY et LANDES [2.40] introduite dans le cadre de l'étude sur les métaux mais pouvant s'appliquer sans aucune restriction au cas des matériaux caoutchoutiques.

Récemment, dans le cas d'une étude sur les élastomères, NAIT ABDELAZIZ et al [2.41] ont développé une technique permettant l'évaluation de J à partir de la relation (2.48) ($J=H(W_o).G(a/w)$).

Ces deux méthodes sont des procédures expérimentales et elles puisent leur support théorique de l'approche énergétique globale développée précédemment.

Par ailleurs, on retrouve un certain nombre de méthodes numériques pouvant s'appliquer à la détermination du paramètre énergétique J dans le cas des matériaux caoutchoutiques. Voici celles qui nous semblent intéressantes:

- Méthode de calcul directe de J qui consiste à estimer ce paramètre à partir de l'intégrale de contour;
- Méthode de différenciation d'énergie, proposée par WATWOOD [2.42];
- Méthode de fermeture de fissure [2.6].

Il existe aussi une méthode dite "méthode de déplacement des surfaces de la fissure" (crack-surface-displacement "c.s.d") développée par KEY [2.43]. Cette méthode est basée sur les principes de la mécanique linéaire élastique. Elle a été adaptée par LAKE [2.44] au cas d'un comportement non linéaire élastique. Elle peut être utilisée aussi bien expérimentalement que numériquement.

C.1. Méthodes de détermination expérimentale de J:

C.1.1. Méthode de BEGLEY-LANDES :

BEGLEY et LANDES [2.40] ont utilisé l'expression: $J = -\int_0^{\delta} \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_{\delta} \cdot d\delta = \int_0^P \left(\frac{\partial \delta}{\partial a}\right)_P \cdot dP$ pour évaluer expérimentalement J pour différents matériaux et différentes géométries. A partir des courbes charge-déplacement correspondant à un certain nombre de longueurs de fissure réalisées dans des éprouvettes identiques, on calcule les énergies de déformation pour différentes valeurs du déplacement δ (figure 2.14a). Puis, les valeurs de ces énergies sont reportées en fonction des longueurs de fissure a, avec comme paramètre δ_i (figure 2.14b), conduisant à des courbes dont les pentes représentent les valeurs de J ($J = -dU/B \cdot da$) (figure 2.14c). Cette méthode permet donc de calculer J comme une fonction de la longueur de fissure et du déplacement.

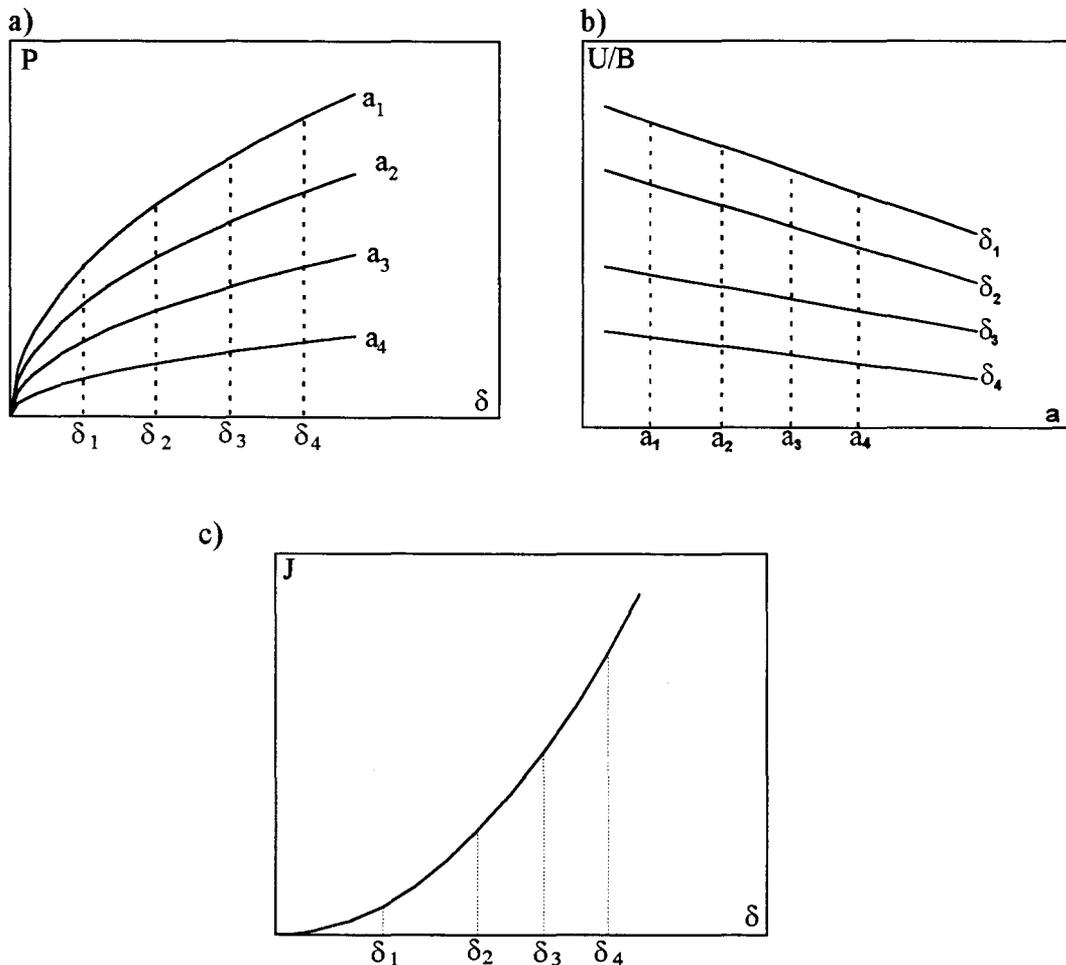


Figure 2.14: Représentation Schématisée de la Méthode de BEGLEY-LANDES
 a- Courbes charge-déplacement;
 b- Énergie potentielle en fonction de la longueur de fissure;
 c- Paramètre énergétique J en fonction du déplacement.

C.1.2. Méthode de séparation d'énergie:

Pour évaluer les différents termes de l'expression (2.47) ($J=2.k(W_o).W_o.a.F(a/w)$), NAIT ABDELAZIZ et GHFIRI [2.41] ont développé une approche originale basée sur la séparation des effets de la non linéarité du comportement de ceux liés à la géométrie. Leur première idée part des observations expérimentales obtenues sur l'E.P.D.M. (éthylène-propylène-diène) (figure 2.15). En effet, le rapport U^*/U est indépendant de la longueur de fissure, ce qui a conduit ces auteurs à supposer que l'énergie de déformation complémentaire U^* peut se mettre sous la forme:

$$U^* = H(W_o).G_1\left(\frac{a}{w}\right) \quad (2.57)$$

où H_1 dépend uniquement de W_o , et G_1 est une fonction liée à la géométrie de l'éprouvette.

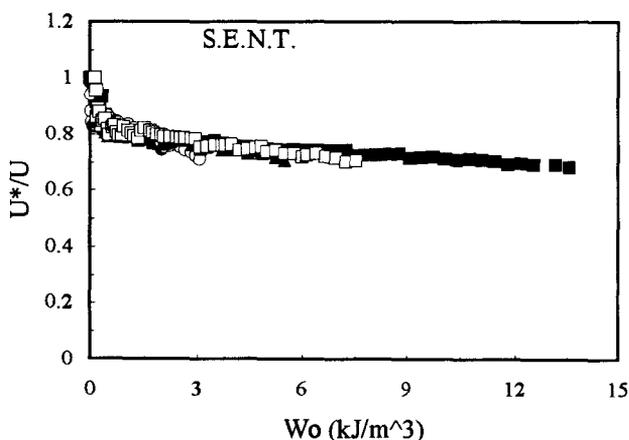


Figure 2.15: rapport U^*/U en fonction de W_o pour différentes longueurs de fissure
 U^* : énergie complémentaire.
 U : énergie potentielle

Par conséquent le paramètre énergétique J s'écrit comme suit:

$$J = \frac{dU^*}{dA} = H(W_o) \frac{dG_1\left(\frac{a}{w}\right)}{dA} \quad (2.58)$$

A partir de l'expression (2.57), on définit, pour une densité d'énergie de déformation W_o donnée et pour une longueur de fissure a_j (dite de référence), un rapport R_{ij} :

$$R_{ij} = \frac{U^*(W_o, \frac{a_i}{w}) \Big|_{W_o}}{U^*(W_o, \frac{a_j}{w}) \Big|_{W_o}} = \frac{H(W_o).G_1\left(\frac{a_i}{w}\right)}{H(W_o).G_1\left(\frac{a_j}{w}\right)} = \frac{G_1\left(\frac{a_i}{w}\right)}{G_1\left(\frac{a_j}{w}\right)} \quad (2.59)$$

Ce rapport est trouvé constant dans le cas des éprouvettes S. E. N. T (éprouvettes à fissure latérale) et C. C. T (éprouvette à fissure centrale) étudiées (figure 2.16). Ceci laisse à penser que la forme multiplicative de U^* (relation 2.57) est une hypothèse pertinente.

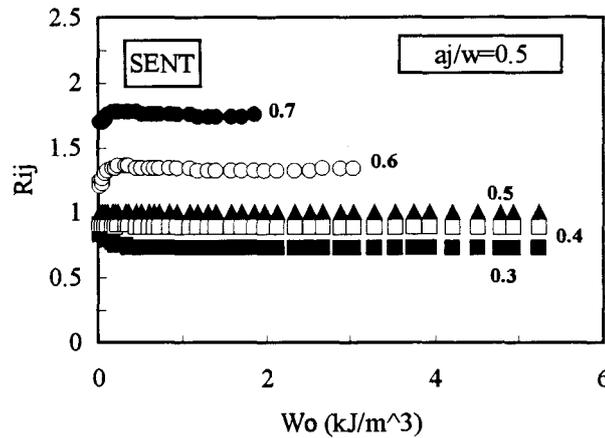


Figure 2.16: Exemple d'évolution du rapport R_{ij} en fonction de W_o .

Pour déterminer une expression du paramètre R_{ij} , les valeurs moyennes de celui-ci, obtenues pour toutes les valeurs $\frac{a_i}{w}$ données et pour chaque référence $\frac{a_j}{w}$, sont reportées en fonction de la longueur du ligament normalisé $\left(\frac{w - a_i}{w}\right)$ sur un graphe bilogarithmique (w étant la largeur de l'éprouvette).

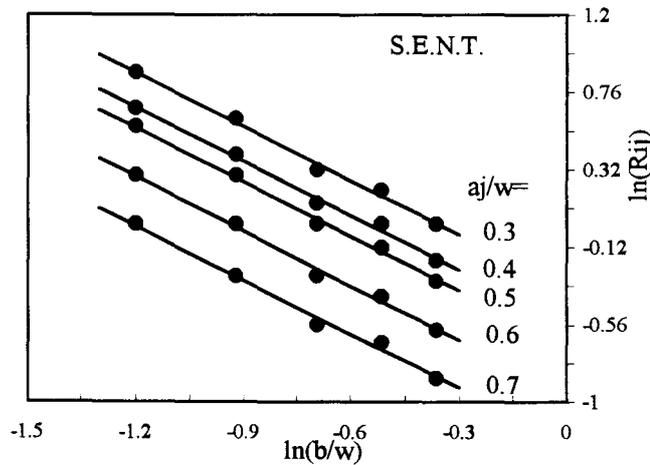


Figure 2.17: Paramètre de séparation R_{ij} en fonction de la longueur du ligament normalisé

Le résultat de cette opération, montré sur la figure 2.17, indique que R_{ij} peut se mettre sous la forme:

$$R_{ij} = n_j \left[\frac{w - a_i}{w} \right]^{m_j} \quad (2.60)$$

où n_j et m_j sont les constantes de la régression linéaire.

A partir de là, une expression de $G_1(\frac{a}{w})$ a été déduite:

$$G_1\left(\frac{a}{w}\right) = \left[\frac{w-a}{w} \right]^m \quad (2.61)$$

où m est la moyenne entre les différentes valeurs de m_j . Par suite, la fonction $H(W_0)$, introduite dans l'expression (2.57), est calculée:

$$H(W_0) = \frac{U^*(W_0, \frac{a}{w})}{\left(1 - \frac{a}{w}\right)^m} \quad (2.62)$$

Après évaluation de ces différentes fonctions, le paramètre énergétique J est déterminé à partir de la relation (2.58).

Afin de vérifier la validité de cette méthode de séparation d'énergie, NAIT ABDELAZIZ et GHFIRI ont comparé l'évolution du paramètre énergétique J obtenu selon cette technique avec les résultats issus de la méthode de BEGLEY-LANDES décrite précédemment. Il a été observé que les valeurs de J , calculées par la méthode de séparation, sont fortement surestimées pour les grandes valeurs de la taille du ligament, alors qu'un bon accord est obtenu pour les fissures profondes (figure 2.18).

L'explication de ces divergences est l'une de nos préoccupations. Ainsi, des éléments de réponses concernant l'origine de celles-ci sont apportés au terme de l'étude numérique que nous avons effectuée (chapitre 5).

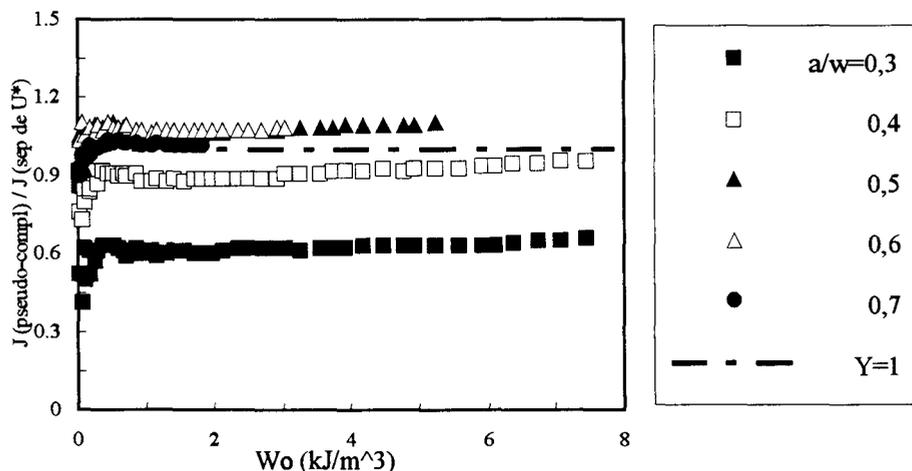


Figure 2.18: Evolution du rapport J (Begley-Landes) / J (séparation d'énergie)

C.2. Méthodes de détermination numérique de J:

C.2.1. Méthode d'évaluation directe de J:

Cette méthode consiste à estimer J à partir de sa définition de l'intégrale de contour proposée par RICE (relation 2.15), en déterminant par la procédure des éléments finis les différentes quantités formant cette intégrale.

NENG MING WANG [2.45] a montré que l'énergie de déchirement T_c des caoutchoucs ($T_c = -\left(\frac{\partial U}{B \cdot \partial a}\right)_d \Big|_{\text{criti}}$) définie par RIVLIN et THOMAS est équivalente à la valeur critique J_c

de l'intégrale de RICE. Cet auteur a utilisé ce nouveau critère pour déterminer la charge critique qui cause la propagation de la fissure dans le cas des matériaux caoutchoutiques. Trois matériaux, donnés dans la référence [2.28] et repérés par les lettres A, D et E, sont étudiés. Ces matériaux sont supposés incompressibles et leurs fonctions d'énergie W satisfait la forme de MOONEY:

$$W = C_1[(I_1 - 3) - \alpha(I_2 - 3)] \quad (2.63)$$

où C_1 et α sont des constantes liées au matériau. Pour les matériaux (A, D et E), les valeurs de ces constantes, déterminées expérimentalement par RIVLIN et THOMAS, sont reportées dans le tableau 2.2.

I_1 , I_2 sont respectivement le premier et le deuxième invariants de déformation de Cauchy-Green droit.

L'intégrale J de RICE a été évaluée en utilisant la procédure des éléments finis sous l'hypothèse des contraintes planes. L'éprouvette étudiée, d'épaisseur B , de largeur w et avec une longueur de fissure a , est représentée sur la figure 2.19. Le type de maillage utilisé est reporté dans cette même figure.

En utilisant l'énergie de déchirement T_c des matériaux A, D et E (donnée dans le tableau 2.2) et en l'identifiant à la valeur critique J_c de l'intégrale de RICE:

$$J_c = T_c \quad (2.64)$$

NENG MING WANG a calculé, à partir des valeurs numériques de J (figure 2.20), les charges critiques σ_c qui provoquent l'amorçage de la fissure. Ces charges critiques sont reportées en fonction de la longueur de fissure sur les figures 2.21a-c. Les valeurs obtenues expérimentalement par RIVLIN et THOMAS[2.28] sont représentées sur ces mêmes figures par des petits cercles. Les résultats numériques et expérimentaux affichent une même tendance.

MATERIAUX	C_1 (Kg/cm ²)	α	T_c (kJ/m ²)
A	1	0.9	5.2
D	1.42	0.74	6.9
E	1.85	0.54	2.3

Tableau 2.2: Propriétés mécaniques des matériaux (A, D et E) utilisés par NENG MING.

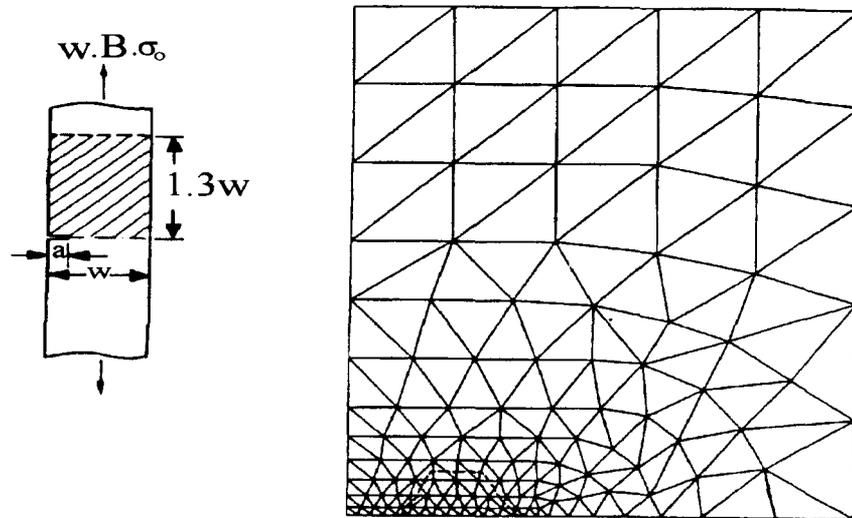


Figure 2.19: Type d'éprouvette utilisée dans les investigations de NENG MING WANG

-(La ligne discontinue est le contour à travers lequel l'intégrale de Rice a été calculée)-

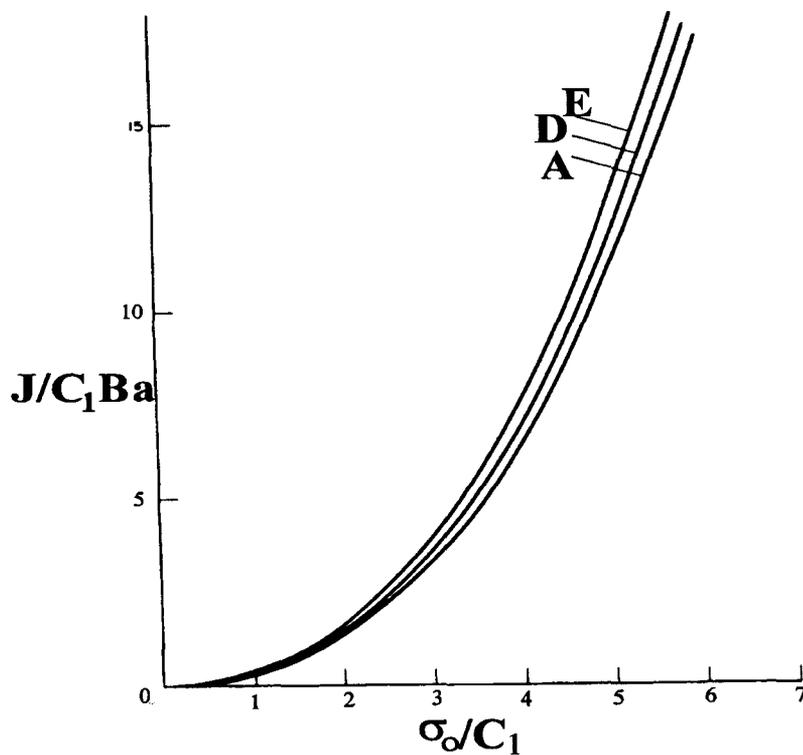
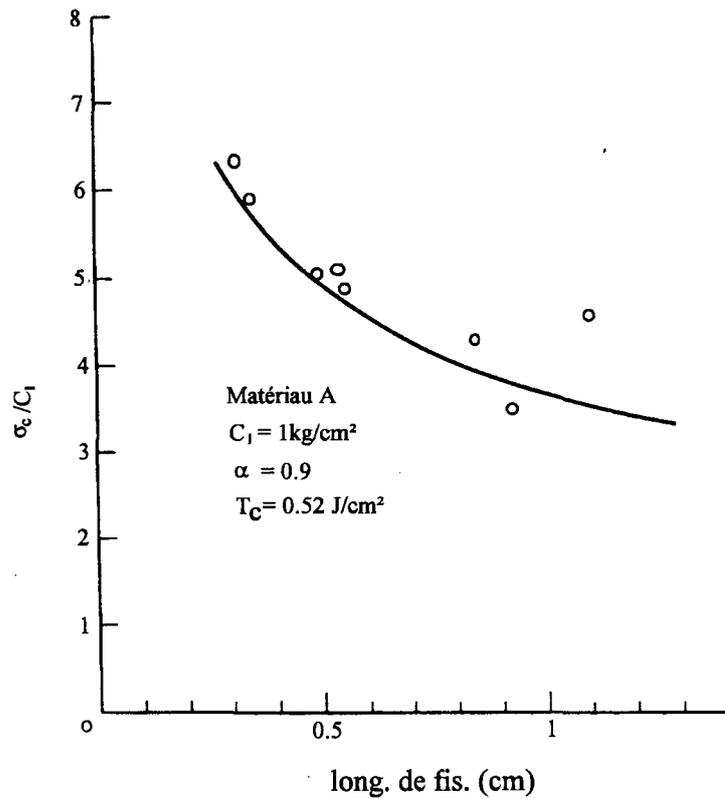
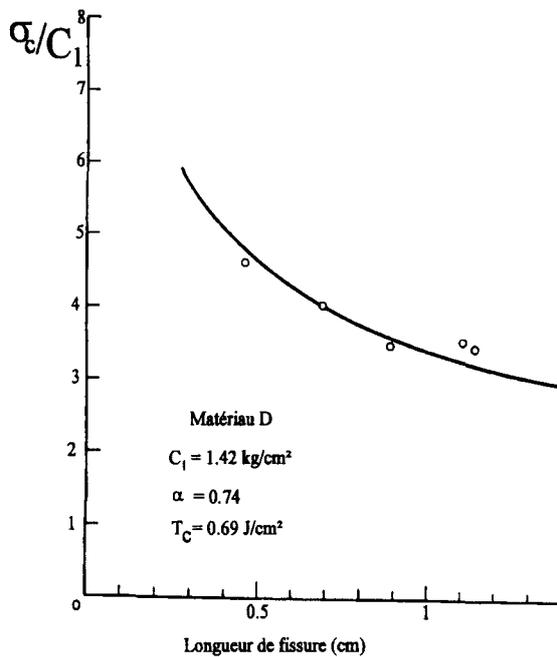


Figure 2.20: L'intégrale J de RICE calculée par WANG en fonction de la contrainte imposée σ_0 , pour $a/w = 0.1$ correspondant aux matériaux A, D et E.

a)



b)



c)

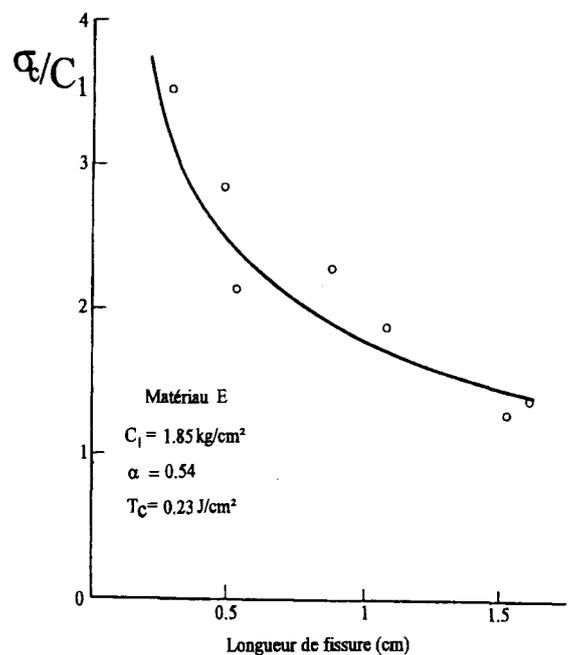


Figure 2.21: Comparaison entre la contrainte critique σ_c calculée par WANG et les résultats expérimentaux obtenus par RIVLIN et THOMAS

Récemment, PIDAPARTI et ses collaborateurs [2.46] ont calculé numériquement l'énergie de déchirement T pour les matériaux A, D et E cités précédemment, par l'application de la technique d'extension virtuelle de la fissure [2.47] [2.48] [2.49].

Les dimensions des éprouvettes sont identiques à celles choisies par NENG MING WANG.

Pour vérifier la validité de leurs résultats, ces auteurs ont donc comparé les valeurs numériques de l'énergie de déchirement T qu'ils ont calculée à celles de l'intégrale J obtenue par NENG MING WANG (figures 2.22 et 2.23). Les résultats obtenus sont en bon accord.

Les résultats présentés ici nous permettent de conclure que l'évaluation de J directement à partir de l'intégrale de contour semble rendre compte, de manière suffisamment précise, de l'évolution de ce paramètre.

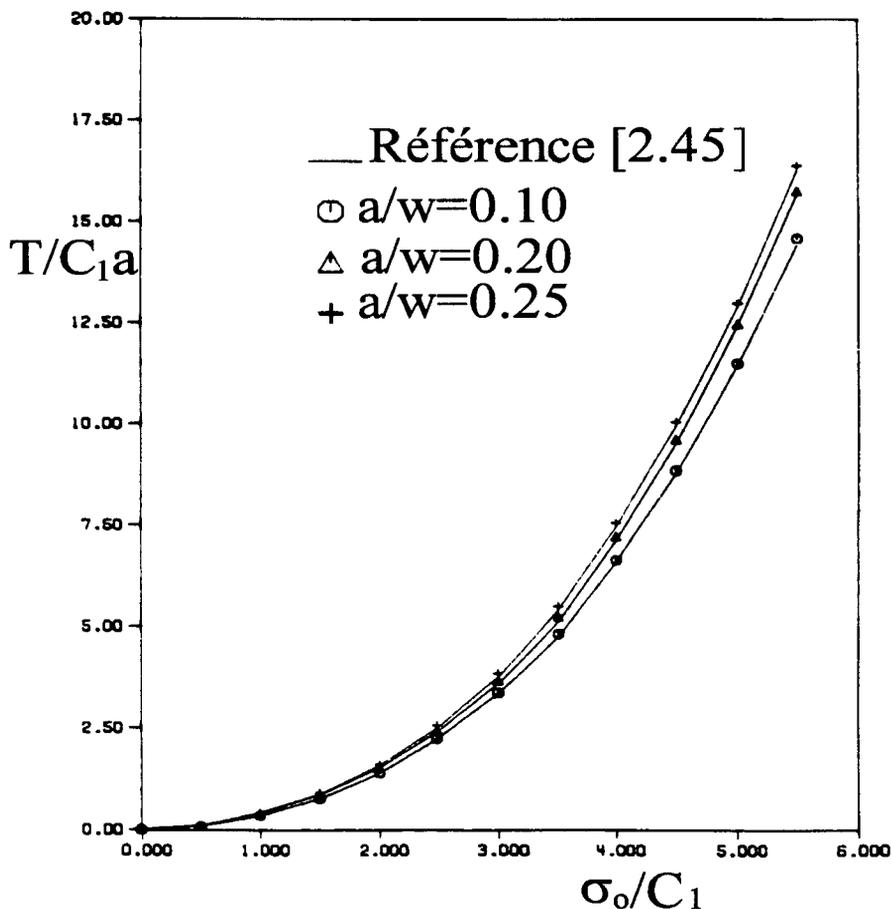


Figure 2.22: Comparaison entre l'énergie de déchirement calculée par PIDAPARTI et celle évaluée par WANG, pour trois longueurs de fissure correspondant au matériau A.

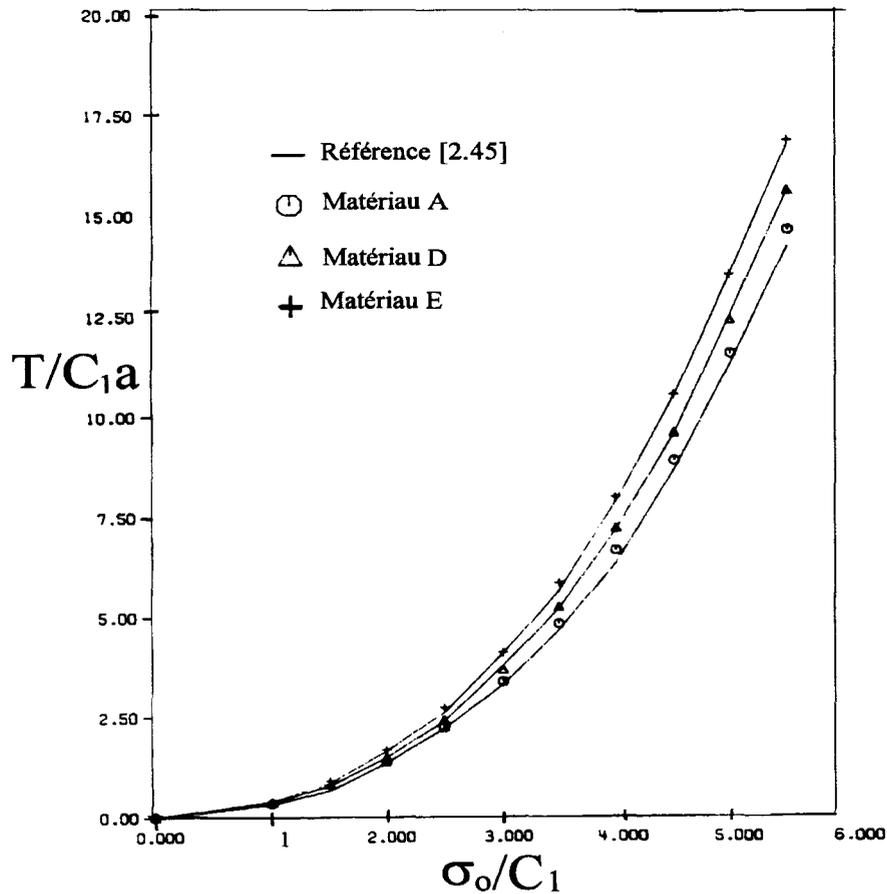


Figure 2.23: Comparaison entre l'énergie de déchirement calculée par PIDAPARTI et celle évaluée par WANG, pour une seule longueur de fissure ($a/w=0.1$) correspondant aux trois matériaux étudiés (A, D et E).

C.2.2. Méthode de différentiation d'énergie:

Le taux de restitution d'énergie peut être estimé en évaluant l'échange d'énergie de la structure entre deux valeurs très proches de la taille de la fissure. WATWOOD [2.42] a calculé l'énergie de déformation pour deux longueurs de fissure, légèrement différentes ($a + \Delta a/2$) et ($a - \Delta a/2$), en effectuant deux analyses complètes par éléments finis. Il a ainsi déterminé le taux d'énergie libérée:

$$\Delta U = U\left(a + \frac{\Delta a}{2}\right) - U\left(a - \frac{\Delta a}{2}\right) \quad (2.65)$$

puis, il a calculé J à partir de l'expression suivante:

$$J = -\frac{dU}{B \cdot da} = -\frac{\Delta U}{B \cdot \Delta a} \quad (2.66)$$

où B est l'épaisseur de l'éprouvette considérée.

Cette méthode est appelée "méthode de différentiation d'énergie". La valeur d'extension de la fissure " Δa " prise entre 0.5 et 2% donne souvent de bons résultats [2.50]. Tant que l'erreur de discrétisation tend à s'annuler quand la différence d'énergie " ΔU " est calculée, cette méthode est fiable, précise et reste le choix préféré des analystes.

PARKS [2.47] et HELLEN [2.48] [2.49] ont affiné cette approche. Ils ont montré que le taux d'échange d'énergie ΔU peut être calculé à partir d'une longueur de fissure finie, sans utiliser une vraie extension de la fissure. Ainsi, ils ont calculé ΔU à partir d'une seule analyse, en considérant uniquement les éléments immédiatement autour du fond de la fissure. Cette technique de calcul est appelée "méthode d'extension virtuelle de la fissure". Elle peut s'appliquer au cas des analyses à deux ou trois dimensions.

C.2.3. Méthode de fermeture de fissure:

La méthode de fermeture de fissure est développée par IRWIN [2.6] puis modifiée par RIBICKY et KANNINEN [2.51] pour son application par la méthode des éléments finis. Elle fut ensuite adaptée au calcul par l'utilisation d'éléments singuliers [2.52].

Le principe consiste à évaluer numériquement le travail ΔW nécessaire pour fermer la fissure d'un incrément Δa [2.51], puis de calculer J à partir de l'expression:

$$J = \frac{\Delta W}{B \cdot \Delta a} = \frac{\sum_{j=1}^n F_{yj} \cdot V_j}{B \cdot \Delta a} \quad (2.67)$$

Ceci dans le cas d'un problème à deux dimensions et lorsque les sollicitations sont en mode I.

Dans la relation (2.67), F_{yj} sont les forces nodales appliquées aux noeuds "j" situés en aval du fond de la fissure; V_j les déplacements des noeuds situés en amont du fond de la fissure; B est l'épaisseur de l'éprouvette.

En se référant à la figure 2.24a, l'équation (2.67) devient:

$$J = \frac{1}{BL} (F_{YI} V_L + F_{YJ} V_K) \quad (2.68)$$

où L est la taille de l'élément situé en fond de fissure.

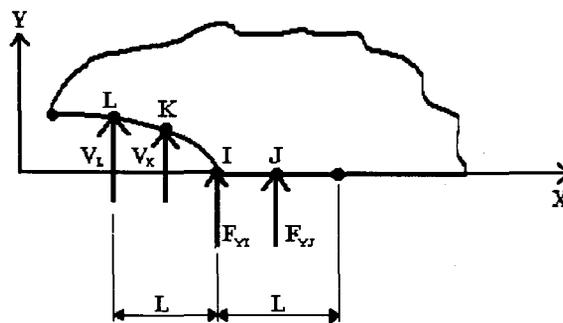
Cette expression permet de calculer J à partir d'une seule analyse. Cependant, une meilleure précision peut être obtenue en effectuant deux analyses correspondant respectivement aux longueurs de fissure a et $a+\Delta a$ (figure 2.24b). Dans ce cas l'équation (2.67) devient:

$$J = \frac{1}{B \cdot \Delta a} (F'_{YI} \cdot V'_L + F'_{YJ} \cdot V'_K) \quad (2.69)$$

où les forces F_{YI} et F_{YJ} sont issues de l'analyse correspondant à la longueur de fissure a ; les déplacements V'_L et V'_K sont issus de l'analyse correspondant à la longueur de fissure $a+\Delta a$

Pour utiliser correctement cette méthode, il faut que les éléments en amont du fond de fissure, aient la même configuration que ceux situés en aval de celui-ci.

a)



b)

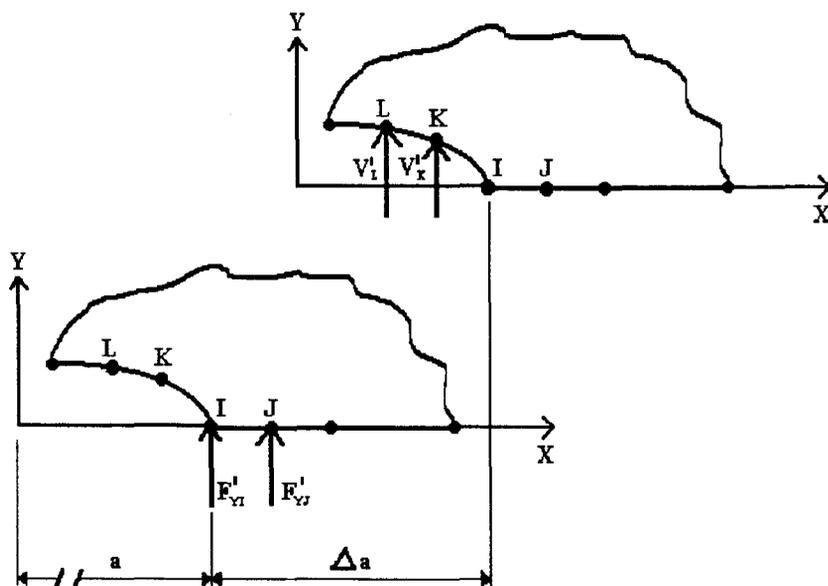


Figure 2.24: Calcul du taux d'énergie libérée par la méthode de fermeture de fissure à partir d'une seule analyse (a) ou de deux analyses (b)

C.2.4. Méthode de déplacement des surfaces de la fissure:(Crack-Surface-Displacement "C.S.D")

KEY [2.43] a obtenu une relation entre le taux de restitution d'énergie G et le déplacement des lèvres de la fissure dans le cas de l'extension d'une éprouvette cylindrique d'un matériau à comportement linéaire élastique. LAKE [2.44] a proposé une expression similaire pour les caoutchoucs, en faisant l'égalité entre l'énergie dissipée quand la fissure se propage d'un incrément Δa , avec celle nécessaire à la fermeture de cette fissure. Son approche est basée sur les dimensions d'un état indéformé.

En supposant une relation linéaire entre les contraintes et les déformations, LAKE [2.44] a abouti à une expression du paramètre énergétique J sous la forme:

$$J = -\frac{\partial U}{\partial A} = \frac{\partial \left(\int_0^a \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot B \cdot y \cdot dx \right)}{\partial \left(\int_0^a B \cdot dx \right)} \quad (2.70)$$

U : Energie potentielle du solide sous l'action des contraintes σ ;

A : (= $B \cdot da$) Surface du défaut;

B : Epaisseur de l'éprouvette;

σ : Contrainte appliquée loin du défaut dans la direction perpendiculaire au plan de la fissure;

y : Déplacement de la lèvre de la fissure sous l'action des contraintes σ ;

x : Abscisse des points appartenant à la lèvre de la fissure.

Pour évaluer J à partir de l'équation (2.70), il est nécessaire de connaître les variations de σ et de y en fonction de x .

LINDLEY [2.53] a calculé numériquement le facteur k de l'expression (2.26) ($J=2 \cdot k(\lambda) \cdot a \cdot W_0$) en appliquant la méthode "C.S.D" aux résultats expérimentaux et numériques issus de l'extension d'une éprouvette de type S.E.N.T (éprouvette à fissure latérale) (figure 2.25) en caoutchouc vulcanisé. Cet auteur a comparé les résultats qu'il a obtenus à ceux déterminés expérimentalement par GREENSMITH [2.29] et par la relation théorique proposée par LAKE [2.30] (figure 2.26).

On constate que le calcul de LINDLEY est en bon accord avec les résultats de GREENSMITH et que l'approximation du modèle de LAKE est satisfaisante.

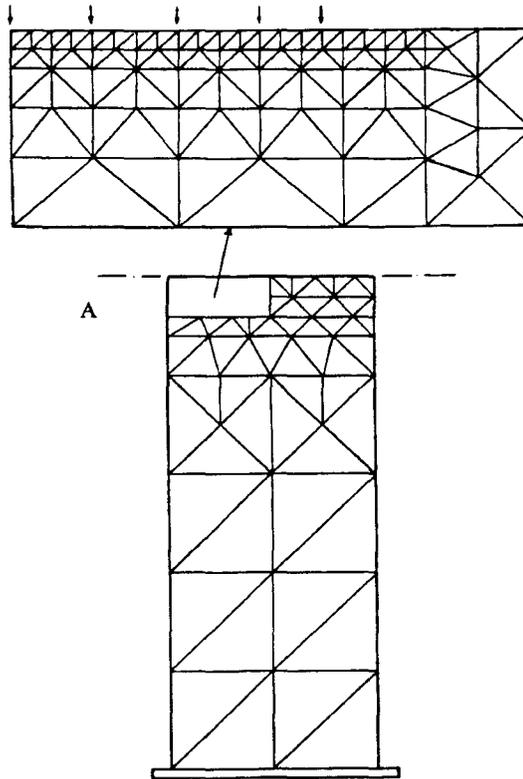


Figure 2.25: *Eprouvette S.E.N.T utilisée par LINDLEY*
(A) zoom dans la région de la fissure.

(Les petites flèches indiquent les différentes longueurs de fissures considérés)

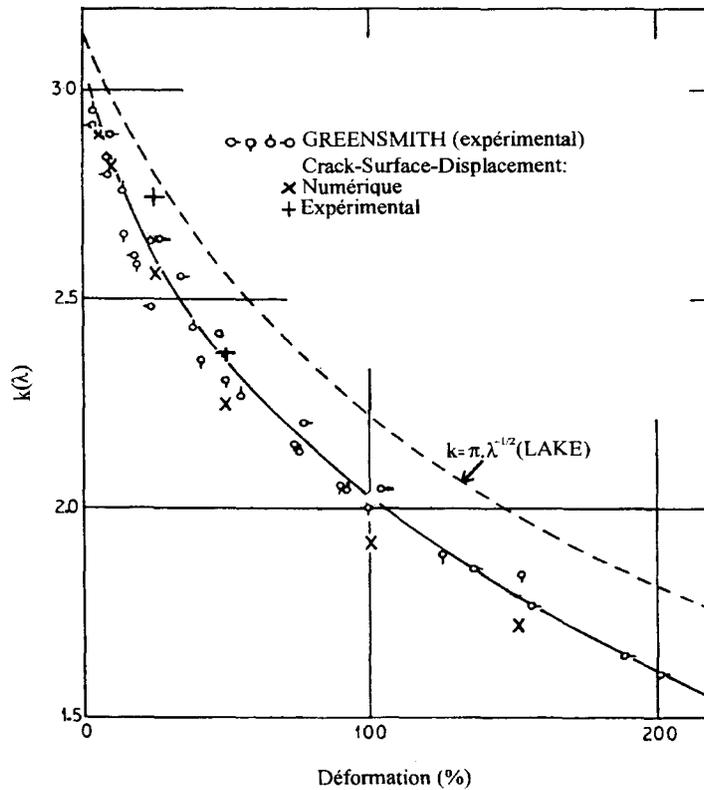


Figure 2.26: *Evolution du facteur $k(\lambda)$ en fonction de la déformation dans le cas d'une éprouvette S.E.N.T.*

2.3. CONCLUSION:

Les méthodes énergétiques globales permettent de s'affranchir de la connaissance du champ des contraintes et des déformations en pointe de fissure. Elles puisent leur support théorique dans le premier principe de la thermodynamique et sont basées sur la détermination expérimentale de la quantité $(\partial U/B.\partial a)$.

L'intégrale J introduite par RICE est équivalente à cette quantité. Elle représente une extension directe de la mécanique linéaire élastique de la rupture (M.L.E.R.). Nous avons examiné son intérêt, en montrant sa signification et ses applications. Elles peuvent être résumées comme suit:

- La valeur de l'intégrale J de RICE est calculée à travers un contour allant de la lèvres inférieure à la lèvres supérieure de la fissure;
- J peut être vue comme le taux d'énergie potentielle dissipée par unité de longueur de la fissure, lorsque celle-ci se propage;
- J peut être interprétée comme une différence de travail effectué dans la déformation d'un solide pour deux longueurs de fissures voisines a et $a+\Delta a$ (aire entre les deux courbes charge-déplacement);
- J peut être utilisée comme un critère d'amorçage de propagation d'une fissure (lorsque la valeur critique J_c de J est atteinte);
- J semble jouer un rôle dans la mécanique non linéaire de la rupture, similaire à celui du facteur d'intensité de contrainte dans la mécanique linéaire élastique;
- J peut être évaluée, sans grande difficulté, numériquement à partir de sa définition d'intégrale de contour ou expérimentalement en utilisant le diagramme charge-déplacement. Quelques unes des procédures de calcul de ce paramètre ont été décrites.

La méthode de BEGLEY-LANDES permet d'évaluer le paramètre énergétique J, pour différents matériaux et différentes géométries, comme une fonction de la longueur de fissure et du déplacement. Elle peut être utilisée pour les matériaux caoutchoutiques mais nécessite, dans tous les cas, plusieurs éprouvettes. C'est pourquoi beaucoup d'investigations ont été conduites, pour évaluer J à partir d'un seul échantillon. Parmi ces investigations, nous avons décrit de manière explicite celles de RIVLIN et THOMAS ainsi que celle d'ANDREWS. Ces derniers

ont proposé des solutions qui se présentent sous des formes simples et qui s'appliquent aux cas des élastomères.

Il faut souligner que beaucoup d'études expérimentales sur la rupture des élastomères, trouvées dans la littérature, sont abordées en utilisant le critère de déchirement de RIVLIN et THOMAS (relation 2.31).

Toujours, dans le cas des matériaux caoutchoutiques, nous avons décrit une méthode expérimentale originale de détermination de J , basée sur la séparation d'énergie et développée par NAIT ABDELAZIZ et GHFIRI. Les résultats obtenus par ces auteurs en appliquant cette méthode dans le cas de l'E.P.D.M (Ethylène-Propylène-Diène), sont en bon accord avec ceux issus de la méthode de BEGLEY-LANDES pour $a/w \geq 0.5$. En deçà de cette limite, une divergence significative est observée.

Par ailleurs, nous avons attaché un intérêt manifeste aux techniques numériques d'évaluation de J . L'adéquation de celles-ci pour les matériaux caoutchoutiques, a été mise en évidence de par la concordance observée entre les résultats numériques et expérimentaux obtenus par plusieurs auteurs. Particulièrement, la méthode d'évaluation de J directement à partir de l'intégrale de RICE semble être, relativement, la plus utilisée par les analystes.

Vu l'étude menée par LINDLEY [2.53], la technique d'ouverture des surfaces de la fissure (crack surface displacement ou "C.S.D") développée par LAKE [2.44], s'adapte aussi bien expérimentalement que numériquement.

Enfin, l'intégrale de contour J semble le paramètre le plus représentatif pour caractériser la rupture des élastomères, aussi notre étude a porté sur son application et son développement.

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE 3: ETUDE EXPERIMENTALE

3.1. INTRODUCTION:

Nous nous proposons dans cette partie expérimentale de valider l'expression du paramètre énergétique J telle que proposée par ANDREWS en introduisant une correction d'ordre géométrique comme suggéré par NAIT ABDELAZIZ et al [2.41]:

$$J = 2 \cdot k(W_0) \cdot W_0 \cdot a \cdot F(a/w) \quad (3.1)$$

Notre étude expérimentale consiste à déterminer ce paramètre énergétique en identifiant les termes $k(W_0)$ et $F(a/w)$ par l'application de la méthode de séparation d'énergie. Les géométries des éprouvettes utilisées répondent à des critères de simplicité d'élaboration et elles sont largement utilisées pour l'étude de la rupture des polymères et des élastomères.

Par ailleurs, nous évaluerons les lois de comportements des matériaux étudiés, indispensables à la modélisation numérique, par un essai de traction simple.

Souvent, les déformations de l'éprouvette sont calculées directement à partir des déplacements de la traverse. Quoique cette procédure est simple, elle peut induire d'importantes erreurs. Par exemple les glissements au niveau de la mâchoire peuvent altérer de manière significative la mesure de l'allongement. Le second type d'erreur peut provenir des restrictions imposées sur l'éprouvette par les mâchoires du dispositif d'attaches. En effet, durant l'essai, la section de l'éprouvette diminue, mais au voisinage des mâchoires, cette éprouvette est contrainte de garder sa largeur de départ. Ainsi, l'échantillon ne peut se déformer de façon uniforme. Pour nous affranchir de toutes ces erreurs, nous avons conçu un dispositif d'attaches approprié et nous avons mis en oeuvre une procédure de mesure de données expérimentales sur une longueur utile représentant environ 10% de la longueur totale de l'éprouvette.

3.2. MATERIAU-ECHANTILLON:

Nous avons effectué des essais de rupture en utilisant deux types de matériaux caoutchoutiques:

- un éthylène-propylène-diène (E.P.D.M) chargé au noir de carbone et réticulé au soufre; son comportement mécanique est non linéaire élastique et dissipatif (environ 25 %).
- un polybutadiène non chargé, hyperélastique et peu dissipatif.

Les propriétés de ces matériaux dépendent des proportions de leurs composants.

Deux types de géométrie d'éprouvettes, utilisées généralement pour caractériser la rupture des caoutchoucs, ont été retenues. Il s'agit:

- d'une éprouvette à fissure latérale (éprouvette S.E.N.T)
- d'une éprouvette à double fissure latérale (éprouvette D.E.N.T)

Les éprouvettes correspondant à chaque type de géométrie sont découpées dans une même plaque du matériau et leurs configurations sont représentées sur les figures 3.1 et 3.2. La fissure initiale est réalisée simplement à l'aide d'une lame de rasoir.

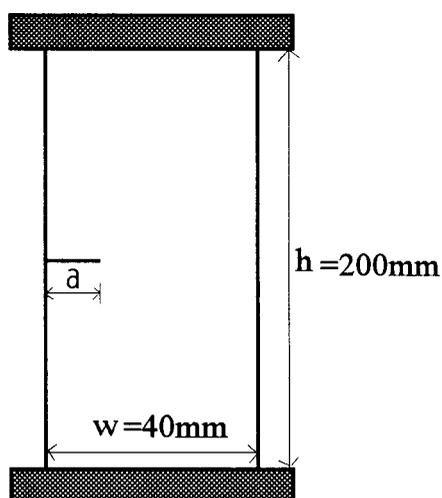


Figure 3.1: Eprouvette S.E.N.T

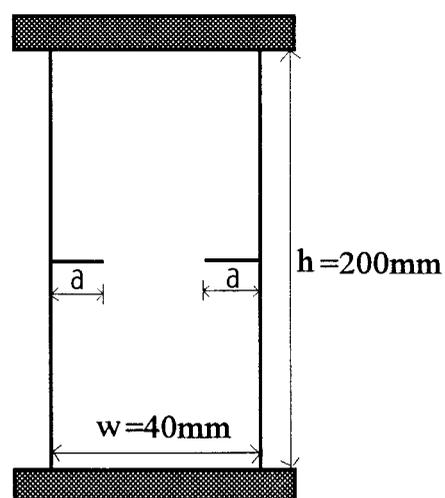


Figure 3.2: Eprouvette D.E.N.T

Les dimensions des éprouvettes utilisées dans le cas de chacun des deux matériaux, sont reportées dans le tableau 3.1

type de matériau	type d'éprouvette	hauteur h en mm	largeur w en mm	épaisseur B en mm	long. de fis./largeur (a/w)
E.P.D.M.	S.E.N.T	200	40	3.4	0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7
polybutadiène	S.E.N.T	200	40	4.5	0.3, 0.4, 0.5, 0.7
	D.E.N.T	200	80	4.5	0.4, 0.5, 0.6, 0.7

Tableau 3.1: Types et dimensions des éprouvettes utilisées

3.3. EQUIPEMENT ET MODE OPERATOIRE:

L'ensemble de nos essais de rupture qui sont exclusivement des essais de traction uniaxiale, a été effectué sur une machine conventionnelle de type INSTRON équipée d'une cellule de charge de faible capacité (1KN), à une vitesse de déplacement de la traverse de 10 mm/mn et une température ambiante (20 °C).

La machine présente une remarquable simplicité d'utilisation. Elle est connectée à un micro-ordinateur doté d'un programme permettant son pilotage et l'acquisition des mesures des charges et des déplacements (figure 3.3). Ce programme, développé au sein même de notre laboratoire, a été conçu pour répondre au souci permanent d'amélioration de la précision des données expérimentales.

Pour chaque essai, l'amorçage de la fissure est détecté visuellement, permettant ainsi de connaître la charge critique nécessaire pour évaluer la valeur critique J_c du paramètre énergétique J.

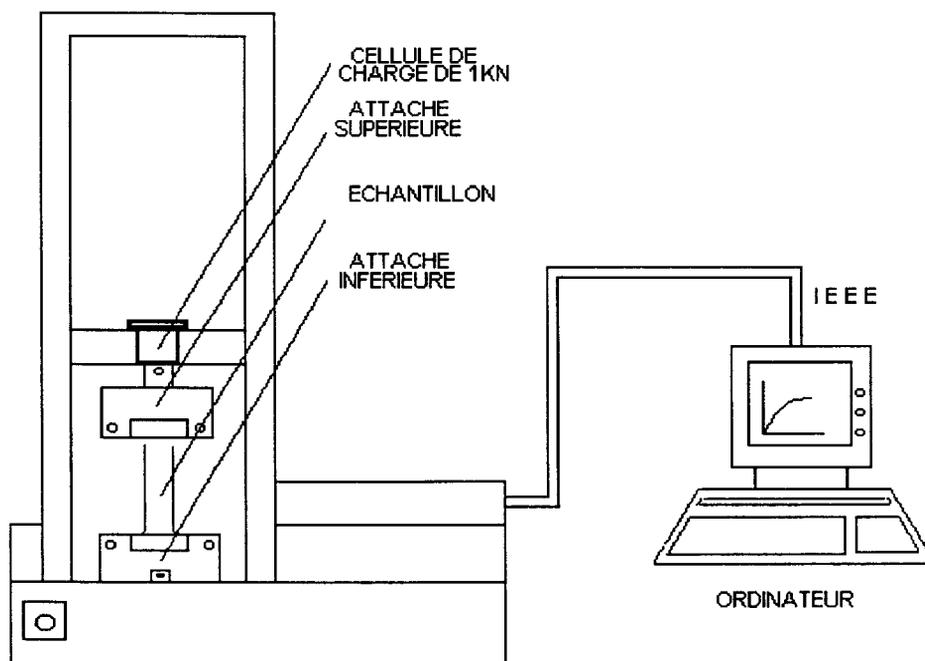


Figure 3.3: Dispositif expérimental.

3.4. DISPOSITIF DE FIXATION DES EPROUVETTES:

Comme tous les élastomères, les deux types de matériaux que nous avons étudiés sont hautement déformables. Leurs allongements s'accompagnent d'une importante diminution d'épaisseur en cours d'essai. La fixation des éprouvettes S.E.N.T. et D.E.N.T. de tels matériaux, ne peut donc être réalisée avec un simple dispositif classique qui ne permet qu'un serrage constant et qui peut présenter des risques de glissement.

Pour répondre aux exigences spécifiques de ces matériaux, nous avons conçu un système d'attaches à double cames, identique à celui représenté sur la figure 3.4. Celui-ci permet d'obtenir un auto-serrage constant et sans glissement quelle que soit la diminution d'épaisseur. Les surfaces des plans de ces cames sont finement striées, ce qui assure une bonne adhérence de l'éprouvette.

Ce dispositif d'attache est d'une conception mécanique simple et répond entièrement aux conditions d'essai en traction des matériaux hautement déformables puisqu'il assure la fixation des éprouvettes en cours d'essai. Cependant, il est réservé uniquement aux éprouvettes sous forme de plaque de largeur utile de 100 mm et d'épaisseur allant jusqu'à environ 12 mm.

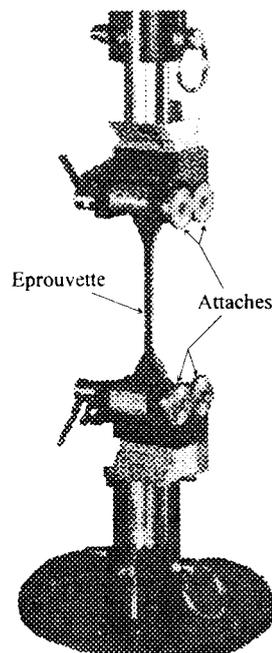


Figure 3.4: Dispositif d'attache

3.5. MESURES DES CONTRAINTES EN FONCTION DES DEFORMATIONS:

L'analyse numérique nécessite, entre autre, la détermination préalable de l'évolution des contraintes en fonction des déformations pour chacun des matériaux étudiés. Ces données peuvent s'obtenir expérimentalement à partir d'un essai mécanique où une éprouvette est soumise à une traction uniaxiale à une vitesse constante. L'essai est conduit jusqu'à la rupture.

Dans le cas de petites déformations, les résultats forces-déplacements sont exprimés en termes de contraintes-déformations en se basant sur la longueur et la section initiales de l'éprouvette. Cependant, dans le cas des élastomères où les déformations peuvent atteindre quelques centaines de pour-cent, il est nécessaire d'utiliser la contrainte vraie et la déformation vraie (ou logarithmique) définies respectivement par:

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \frac{l}{l_0} \quad (\text{pour un matériau incompressible}) \quad (3.2a)$$

et

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (3.2b)$$

où

l_0 : longueur utile mesurée sur l'éprouvette au repos (figure 3.5);

l : longueur utile à l'état déformé;

S_0 : section de l'éprouvette au repos;

F : charge appliquée.

3.5.1. Détermination des lois de comportement des matériaux étudiés:

Les contraintes en fonction des déformations sont déterminées, dans cette étude, à l'aide d'un essai de traction simple. Cet essai est effectué à une vitesse de traverse de 10 mm/mn et à température ambiante, comme dans le cas des tests de rupture décrits auparavant. Nous avons déterminé les déformations à partir de la variation de distance entre deux lignes parallèles que nous avons tracées en trait fin sur l'éprouvette d'essai (figure 3.5). Cette procédure permet d'améliorer la précision de nos mesures puisqu'elle s'affranchit des erreurs liées aux glissements éventuels au niveau de la prise et aux restrictions imposées sur l'éprouvette par les mâchoires du dispositif d'attaches.

Les variations de l_0 sont mesurées sur des photos prises à grande échelle, pendant l'essai et à différents chargements. Ces photos sont réalisées à l'aide d'une caméra connectée à une

imprimante thermique permettant l'impression d'image instantanément. Cette technique est similaire à celles utilisées par THOMAS [2.31], GENT [3.1] puis LINDLEY [2.53].

Pour vérifier la reproductibilité des résultats, nous avons testé trois éprouvettes dans le cas de chacun des deux matériaux étudiés. Les évolutions des contraintes vraies en fonction des déformations vraies sont montrées sur les figures 3.6a et 3.6b, respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène. Les valeurs des contraintes et des déformations équivalentes sont extraites d'une courbe moyenne représentée en trait fort sur ces mêmes figures.

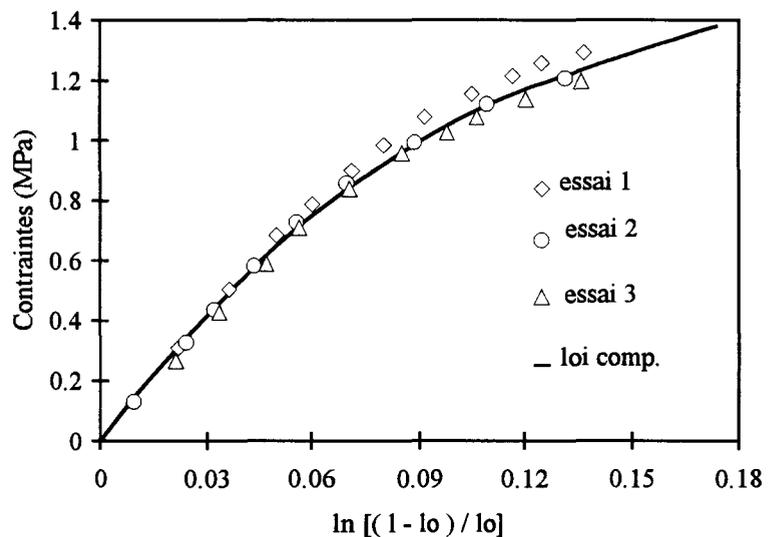
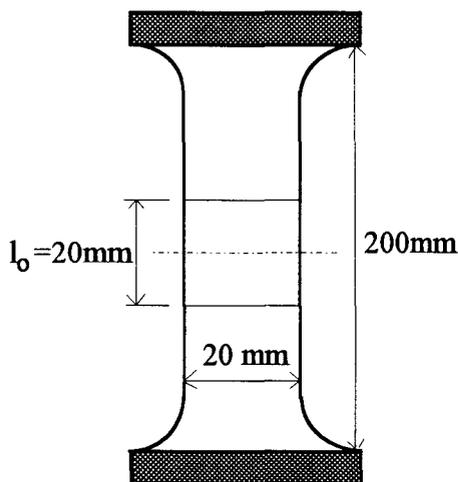


Fig 3.5: Eprouvette utilisée pour la détermination de la loi de comportement.

Figure 3.6a: Contraintes vraies en fonction des déformations vraies (cas de l'E.P.D.M).

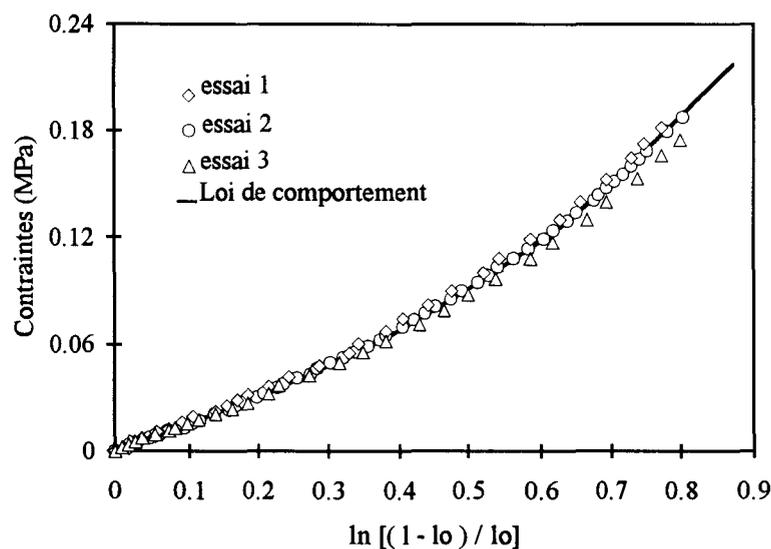


Figure 3.6b: Contraintes vraies en fonction des déformations vraies (cas du polybutadiène).

Or, les lois utilisées pour modéliser le comportement des élastomères sont généralement formulées à l'aide de la densité d'énergie de déformation W exprimée en fonction des trois invariants I_1 , I_2 et I_3 du tenseur de déformation de CAUCHY GREEN droit (§ 1.2.5.2 du chapitre 1).

Nous avons déterminé, pour le polybutadiène, les constantes C_1 et C_2 intervenant dans la relation de MOONEY ($W=C_1.I_1+C_2.I_2$), à partir de l'expression suivante:

$$\frac{F}{S_0} = 2 \cdot \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot \left(C_1 - \frac{C_2}{\lambda} \right) \quad (3.3)$$

où F est la force de traction appliquée, S_0 est la section de l'éprouvette au repos et $\lambda=l/l_0$ est le taux d'extension.

Les valeurs de ces constantes sont: $C_1 = 0.0156 \text{ MPa}$; $C_2 = 0.00967 \text{ MPa}$

Les contraintes ($\sigma=F/S_0$) calculées à partir de la relation (3.3) et celles obtenues expérimentalement sont reportées, en fonction du taux d'extension λ , sur la figure 3.6c. Nous pouvons observer que la formulation de MOONEY décrit bien le comportement du polybutadiène considéré.

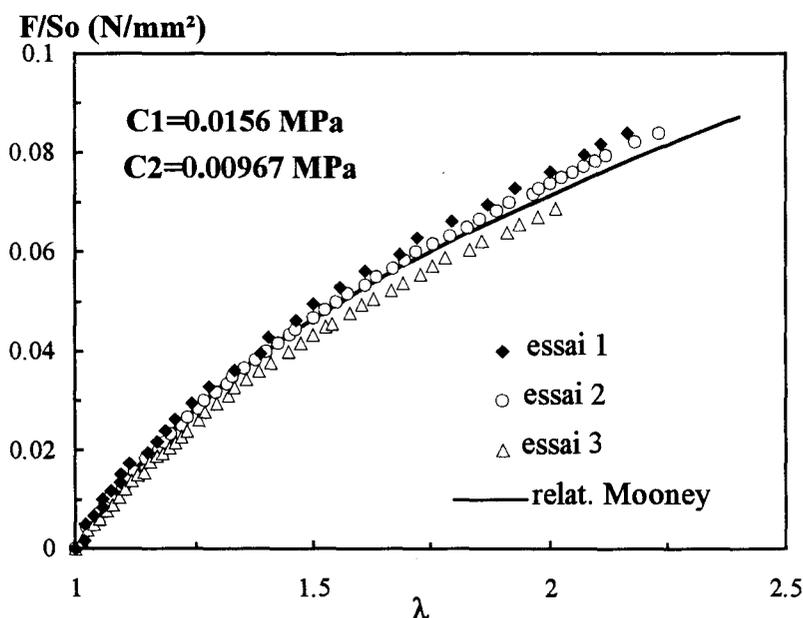


Figure 3.6c: Comparaison entre les contraintes expérimentale et celles données par la relation de MOONEY (cas du Polybutadiène)

3.6. DETERMINATION DE LA FONCTION DE POTENTIEL k ET DU FACTEUR DE CALIBRATION F PAR L'APPLICATION DE LA METHODE DE SEPARATION A L'ENERGIE DE DEFORMATION COMPLEMENTAIRE U*:

Cette procédure a déjà été appliquée au cas d'un matériau E.P.D.M. similaire à celui que nous avons choisi dans cette étude. Les résultats obtenus ainsi que de plus amples détails concernant la méthode de séparation d'énergie, peuvent être trouvés dans la référence [2.41]. Quoique nous ayons relaté le principe de cette méthode dans le paragraphe C.1.2 du chapitre 2, nous reprendrons dans ce qui suit les étapes significatives quant à son application à nos propres résultats expérimentaux.

Notons que dans le cas des géométries S.E.N.T et D.E.N.T, ANDREWS a supposé que la densité d'énergie de déformation uniforme W_o , calculée loin du défaut, est constante pour une charge donnée quelle que soit la longueur de fissure. On dit que cette densité d'énergie de déformation est contrôlée par la charge. Elle peut donc être calculée pour chaque valeur de la charge à partir d'une courbe charge-déplacement d'une éprouvette vierge (figure 3.7).

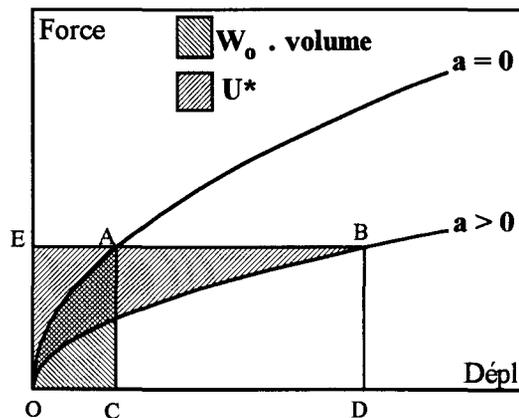


Figure 3.7: Calcul de la densité d'énergie de déformation uniforme W_o pour une charge donnée $\left(W_o = \frac{\text{aire } O\hat{A}C}{\text{Volume}} \right)$.

Ainsi, l'identification des fonctions k et F à charge constante en utilisant l'énergie de déformation complémentaire U^* , rend relativement commode l'application de cette méthode de séparation. En effet, si l'énergie U^* , calculée à partir des courbes charge-déplacement expérimentales (figures 3.8 à 3.10), peut se mettre sous la forme multiplicative suivante:

$$U^* \left(W_o, \frac{a}{w} \right) = H(W_o) \cdot G_1 \left(\frac{a}{w} \right) \quad (3.4)$$

alors, pour une longueur de fissure a_j (dite de référence) donnée et pour une valeur de densité d'énergie de déformation W_0 (calculée à charge constante), le rapport R_{ij} défini par:

$$R_{ij} = \frac{U^* \left(W_0, \frac{a_i}{w} \right) \Big|_{W_0}}{U^* \left(W_0, \frac{a_j}{w} \right) \Big|_{W_0}} = \frac{H(W_0) \cdot G_1 \left(\frac{a_i}{w} \right)}{H(W_0) \cdot G_1 \left(\frac{a_j}{w} \right)} = \frac{G_1 \left(\frac{a_i}{w} \right)}{G_1 \left(\frac{a_j}{w} \right)} \quad (3.5)$$

devrait être constant.

Les figures (3.11) et (3.12, 3.13) montrent l'évolution du paramètre de séparation R_{ij} respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène.

Nous constatons que R_{ij} est quasiment constant quelle que soit la référence a_j considérée, sauf pour les faibles valeurs de W_0 pour lesquelles l'acquisition des données expérimentales est difficilement contrôlée. Par conséquent la forme multiplicative de U^* (relation 3.4) semble être une hypothèse raisonnable.

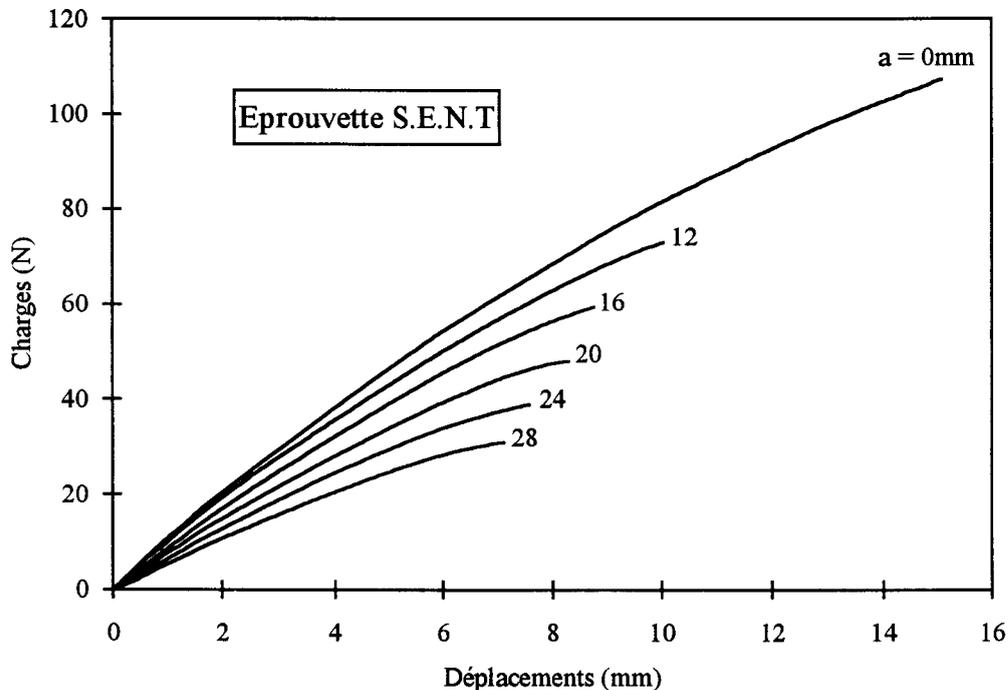


Figure 3.8: Courbes charge-déplacement expérimentales des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M.

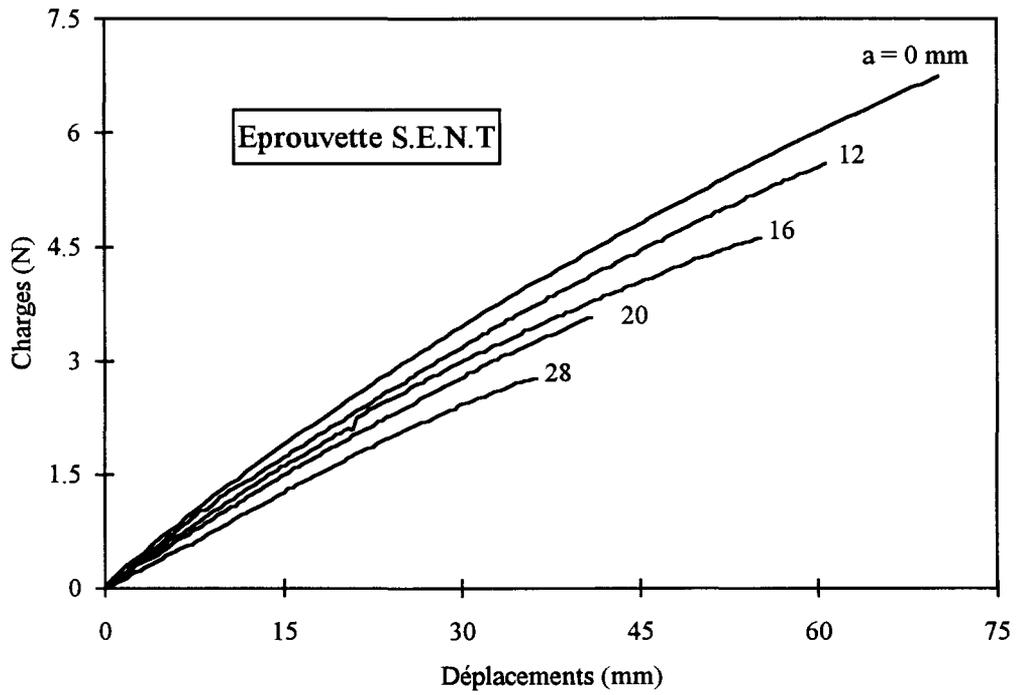


Figure 3.9: Courbes charge-déplacement expérimentales des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

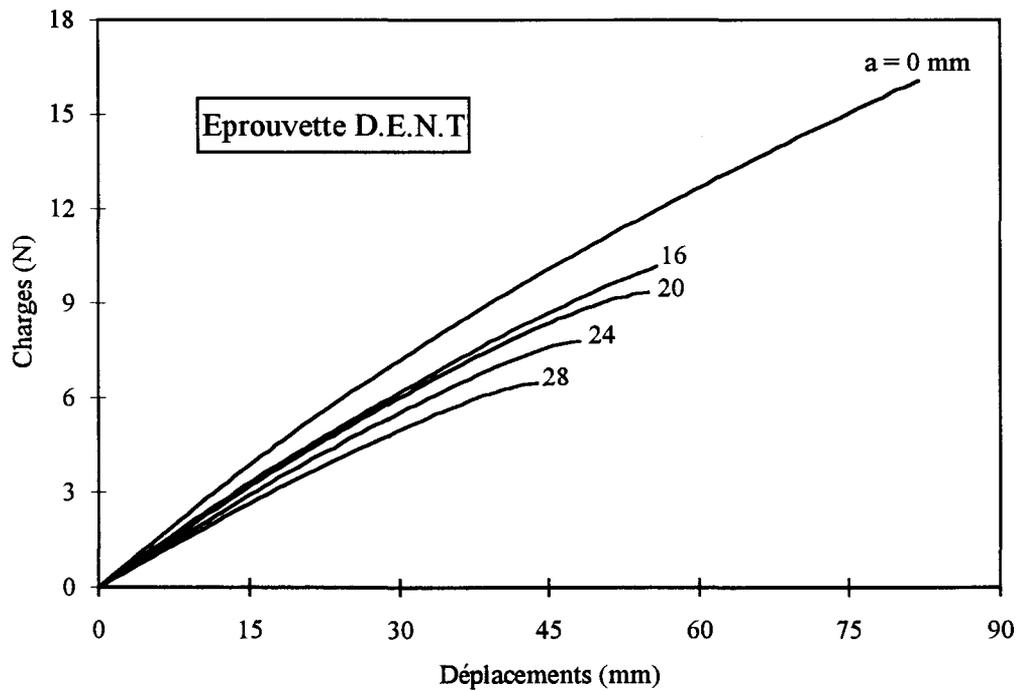


Figure 3.10: Courbes charge-déplacement expérimentales des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

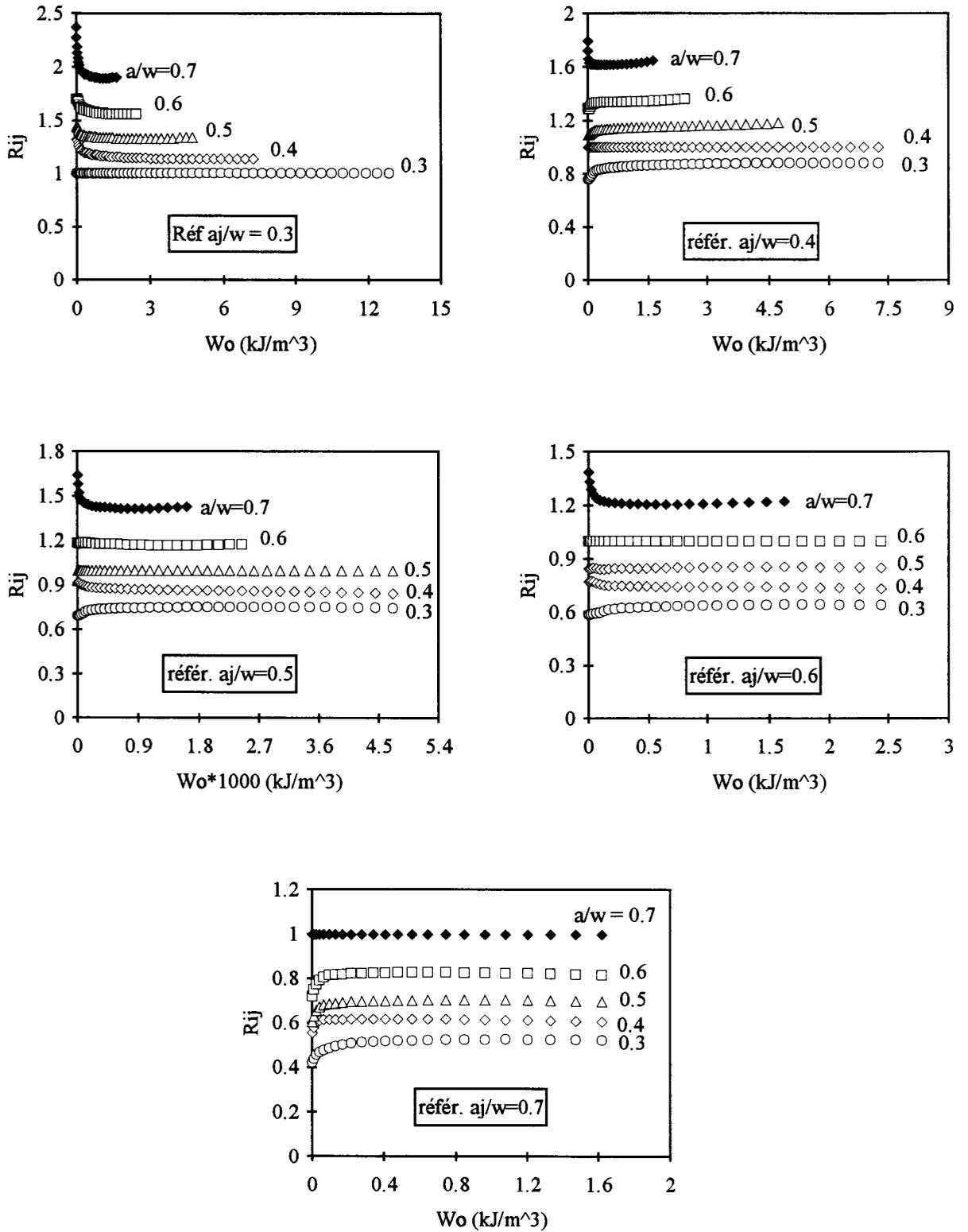


Figure 3.11: Paramètre de séparation R_{ij} obtenu dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de E.P.D.M

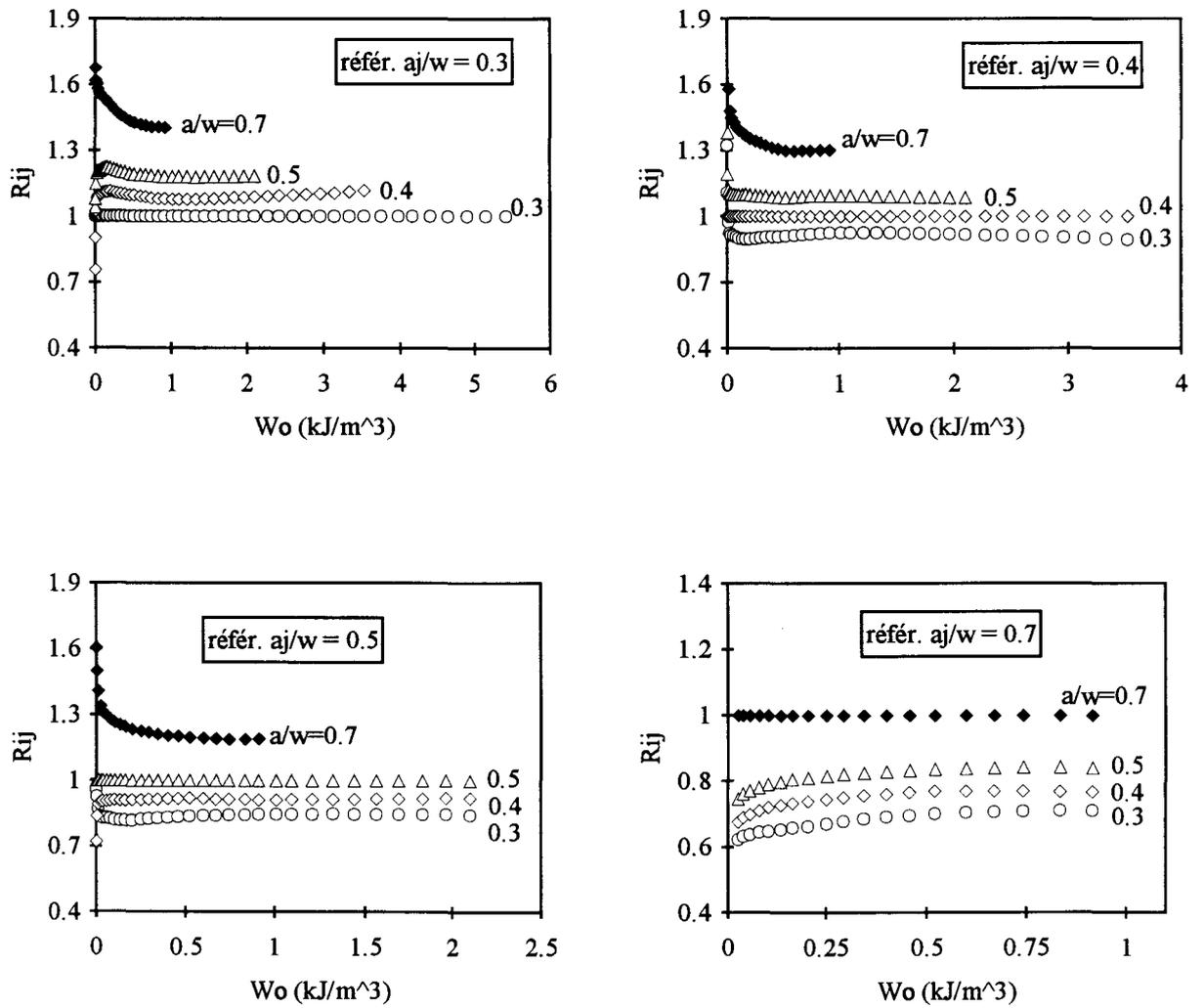


Figure 3.12: Paramètre de séparation R_{ij} obtenu dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène

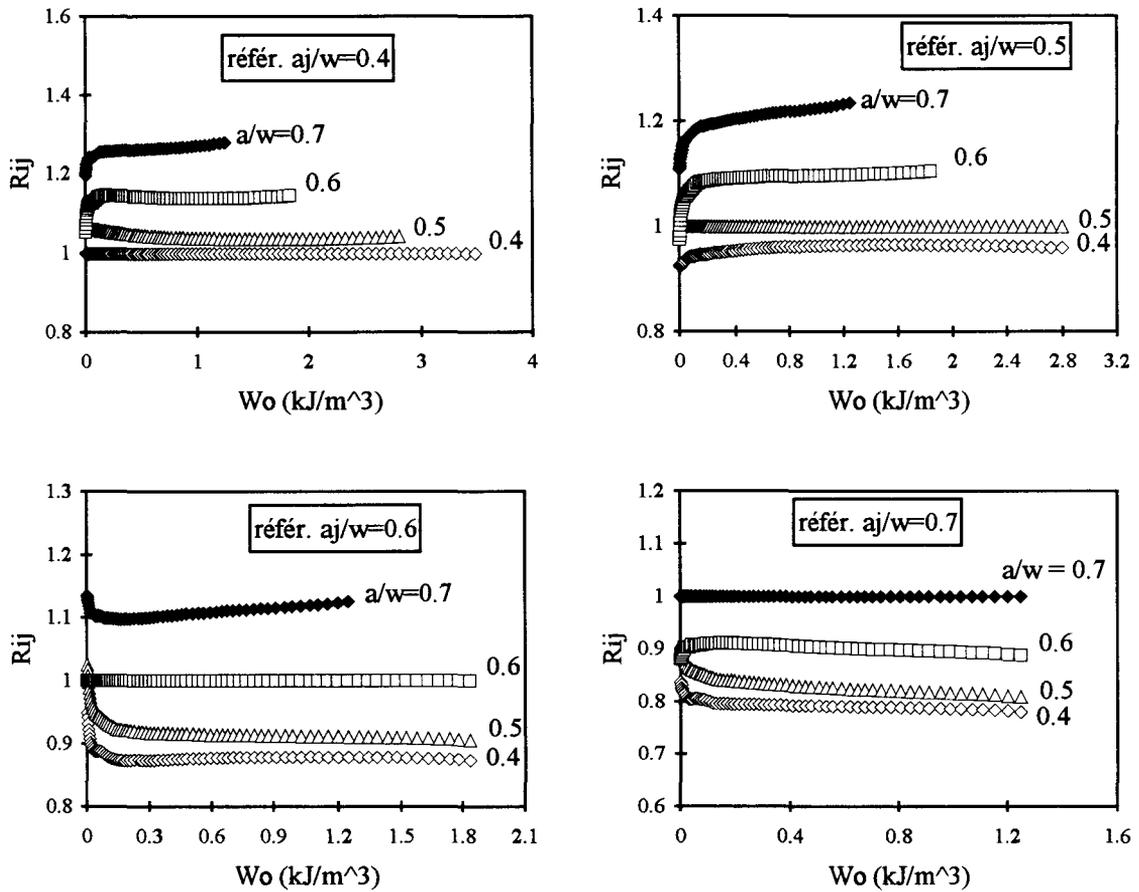


Figure 3.13: Paramètre de séparation R_{ij} obtenu dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène

Les valeurs moyennes de R_{ij} , obtenues pour toutes les longueurs de fissure a_i/w et pour chaque référence a_j/w , sont reportées sur un graphe bilogarithmique, en fonction de la longueur du ligament normalisé ($\frac{b_i}{w} = \frac{w - a_i}{w}$). Cette opération est illustrée sur les figures 3.14 à 3.16 qui indiquent que R_{ij} peut se mettre sous la forme:

$$R_{ij} = n_j \left[\frac{b_i}{W} \right]^{m_j} = n_j \left[1 - \frac{a_i}{W} \right]^{m_j} \tag{3.6}$$

où n_j et m_j sont les constantes de la régression linéaire.

Par combinaison des relations (3.5) et (3.6), nous obtenons une expression de G_1 en fonction de a/w , sous la forme:

$$G_1 \left(\frac{a_i}{w} \right) = n. \left[1 - \frac{a_i}{w} \right]^{m_j} \tag{3.7}$$

avec $n = n_j \cdot G\left(\frac{a_j}{w}\right)$ constante pour une référence a_j/w donnée.

En considérant les deux types de matériaux étudiés, m_j a été trouvé presque constant (tableau 3.2).

a_i/w		0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
m_j	S.E.N.T de l'E.P.D.M	-0.77	-0.76	-0.774	-0.782	-0.76
	S.E.N.T du polybuta.	-0.399	-0.433	-0.409	-----	-0.406
	D.E.N.T du polybuta.	-----	-0.361	-0.363	-0.368	-0.359

Tableau 3.2: Récapitulatif des valeurs de la constante de la régression linéaire m_j

A partir de là, nous avons déduit une expression de la fonction $G_1(a/w)$, à une constante n près, sous la forme:

$$G_1\left(\frac{a}{w}\right) = \left[\frac{b}{w}\right]^m = \left[1 - \frac{a}{w}\right]^m \tag{3.8}$$

où "m" est la moyenne des différentes estimations de m_j .

En introduisant cette expression dans l'équation (3.4), nous obtenons, pour chaque W_o , la valeur de la fonction $H(W_o)$:

$$H(W_o) = \frac{U^*\left(W_o, \frac{a}{w}\right)}{\left[1 - \frac{a}{w}\right]^m} \tag{3.9}$$

Le paramètre énergétique J est obtenu en dérivant (à charge constante) U^* , donné par la relation 3.4, par rapport à dA :

$$J = \left. \frac{dU^*}{dA} \right|_P = H(W_o) \cdot \frac{dG_1\left(\frac{a}{w}\right)}{B \cdot da} \tag{3.10}$$

où $dA (= B \cdot da)$ est la surface créée lorsque la fissure se propage sur une longueur "da"; B est l'épaisseur de l'éprouvette.

Les résultats du paramètre énergétique J , obtenus pour différentes longueurs de fissure, seront discutés dans le chapitre 5 où ils seront comparés à ceux obtenus numériquement à partir du calcul direct de l'intégrale de contour de RICE.

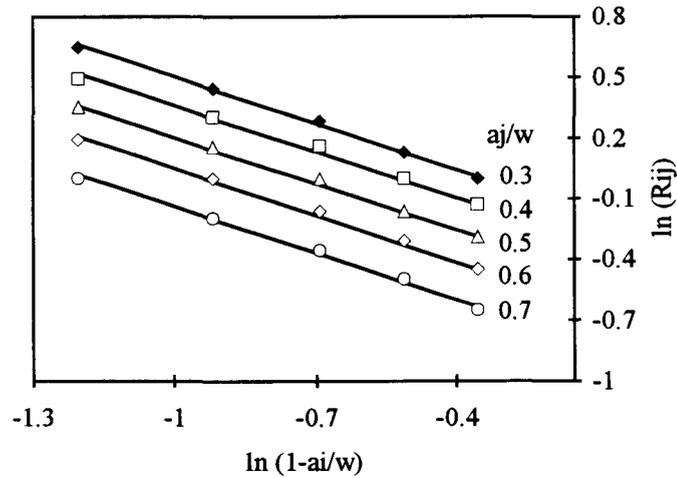


Figure 3.14: Paramètre de séparation R_{ij} en fonction du ligament non fissuré dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M.

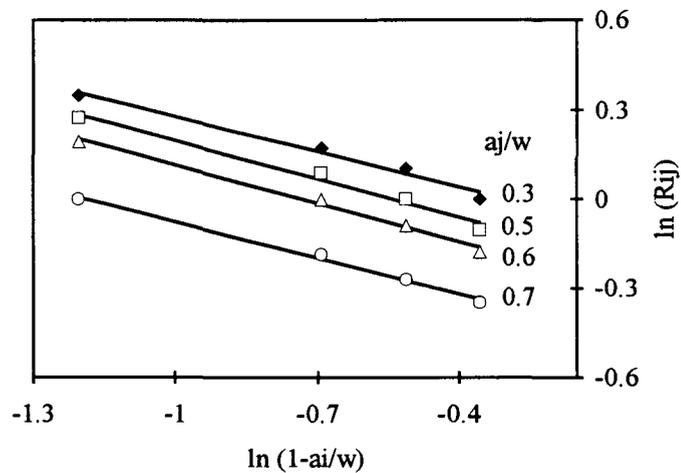


Figure 3.15: Paramètre de séparation R_{ij} en fonction du ligament non fissuré dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène

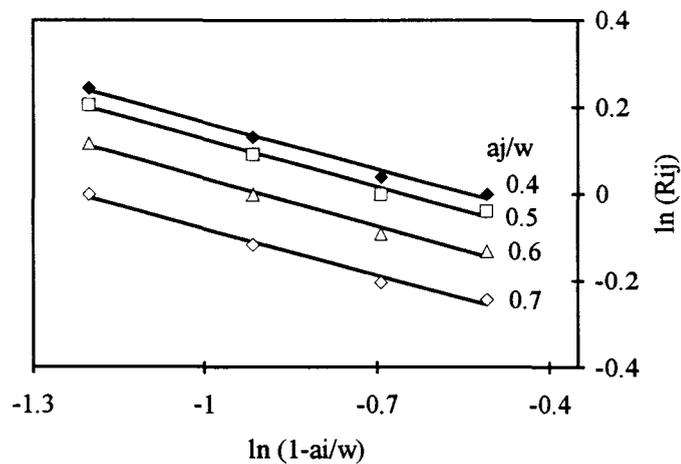


Figure 3.16: Paramètre de séparation R_{ij} en fonction du ligament non fissuré dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

3.6.1. Identification de la fonction de potentiel $k(W_0)$:

Connaissant la fonction $H(W_0)$ (relation 3.9), la fonction $k(W_0)$, normalisée à π , est déterminée à partir de l'expression suivante:

$$k(W_0) = \frac{H(W_0)}{W_0} \cdot \frac{\pi}{V} \quad (3.11)$$

où V est le volume total de l'éprouvette.

L'évolution de cette fonction est montrée sur les figures 3.17, 3.18 et 3.19 respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène. Nous pouvons constater que $k(W_0)$ est unique et ne dépend que de W_0 , ce qui permet de penser que l'hypothèse d'existence d'une telle fonction est raisonnable. Par ailleurs, l'allure de cette fonction, similaire à celles issues de la littérature [2.44] [2.37] [3.2], met en évidence l'influence de la non linéarité du comportement. Elle décroît d'une valeur de π quand $W_0 \rightarrow 0$, à une valeur approximative de 2.6 pour les grandes valeurs de W_0 .

3.6.2. Identification de la fonction de calibration $F(a/w)$:

La fonction $F(a/w)$ est donnée par l'expression:

$$F\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{1}{a} \frac{dG_1\left(\frac{a}{w}\right)}{2 \cdot B \cdot da} \cdot \frac{V}{\pi} \quad (3.12)$$

Les figures 3.20 et 3.21 montrent que dans tous les cas de figure étudiés, cette fonction croît avec la longueur de fissure comme son facteur de calibration équivalent (Y^2) utilisé en mécanique linéaire élastique et donné par les expressions suivantes:

-Cas d'une éprouvette S.E.N.T "avec flexion": [3.3]

$$Y = 1.12 - 0.231(a/w) + 10.55 \cdot (a/w)^2 - 21.72 (a/w)^3 + 30.39 (a/w)^4 \quad (3.13)$$

-Cas d'une éprouvette S.E.N.T "sans flexion": [3.4]

$$Y = 5 \cdot [20 - 13 (a/w) - 7 (a/w)^2]^{-1/2} \quad (3.14)$$

-Cas d'une éprouvette D.E.N.T: [3.5]

$$Y = \left(1 + 0.122 \cos^2\left(\frac{\pi \cdot a}{w}\right)\right) \cdot \sqrt{\frac{w}{\pi \cdot a} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot a}{w}\right)} \quad (3.15)$$

Pour les éprouvettes S.E.N.T, deux fonctions de calibration $F(a/w)$, correspondant chacune à un type de matériau étudié, sont mises en évidence (figures 3.20 et 3.21). Ce résultat laisse à penser que les effets de flexion induits par la dissymétrie de ce type de géométrie n'ont pas la même incidence sur les deux matériaux étudiés en raison peut être de la différence de leurs rigidités.

En outre, une nette divergence est observée entre ces fonctions et les facteurs de calibration linéaires Y^2 équivalents (figures 3.20 et 3.21). Toutefois, il faut noter que le facteur Y^2 correspond à un rapport h/w (hauteur sur largeur) égal à 1, pour l'expression avec flexion, et à l'infini pour l'expression sans flexion. De même, il faut prendre en ligne de compte que ce facteur est calculé dans le cas des petites déformations et pour les métaux dont le coefficient de Poisson est de 0.3, alors que les matériaux que nous avons étudiés sont hautement déformables et leur coefficient de Poisson est d'environ 0.5.

Concernant les éprouvettes D.E.N.T, considérées uniquement dans le cas du polybutadiène, la fonction $F(a/w)$ obtenue est proche du facteur de calibration linéaire Y^2 équivalent (figure 3.22). La déviation relevée entre ces deux facteurs atteint 7% pour $a/w=0.7$ et elle est inférieure à 4% pour les autres longueurs de fissure. Rappelons que pour ces géométries d'éprouvette, la flexion est inexistante.

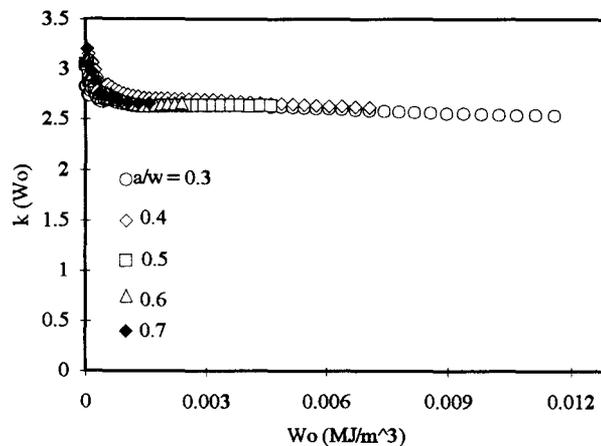


Figure 3.17: Fonction de potentiel k expérimentale dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M

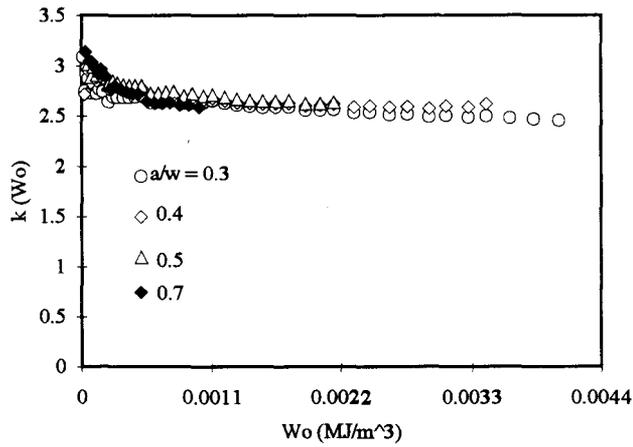


Figure 3.18: Fonction de potentiel k expérimentale dans le cas des éprouvettes *S.E.N.T* du polybutadiène.

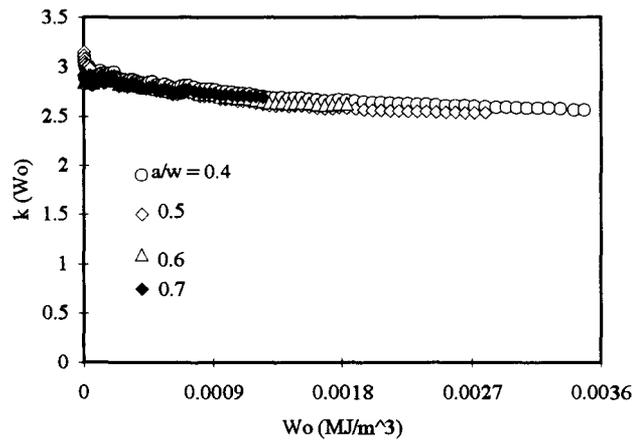


Figure 3.19: Fonction de potentiel k expérimentale dans le cas des éprouvettes *D.E.N.T* du polybutadiène.

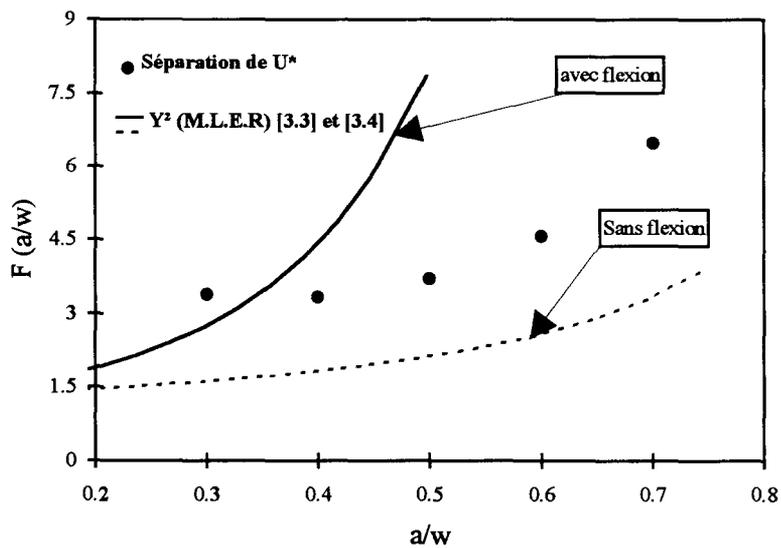


Figure 3.20: Facteur de calibration F expérimental dans le cas des éprouvettes *S.E.N.T* de l'*E.P.D.M.*

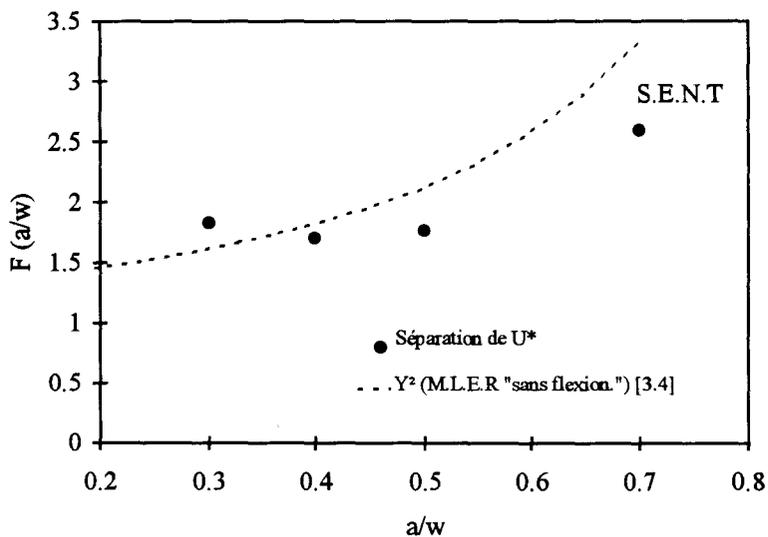


Figure 3.21: Facteur de calibration F expérimental dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

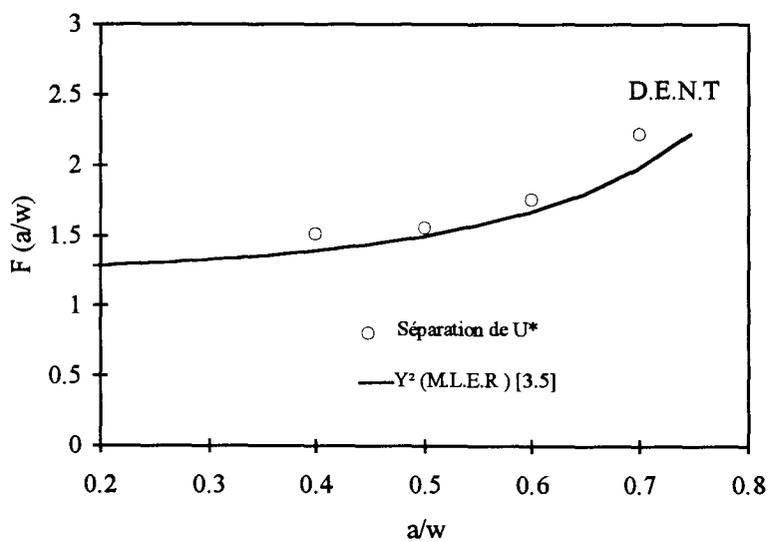


Figure 3.22: Facteur de calibration F expérimental dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

3.6.3. Tableau synoptique sur l'application de la méthode de séparation à l'énergie de déformation complémentaire U* expérimentale:

Objectif: Identification des différents termes de l'expression du paramètre énergétique J proposée par Andrews et dans laquelle est introduite une fonction de géométrie: $J=2.k(W_0).W_0.a.F(a/w)$

<p>Figure A: Courbes charge-déplacement</p>	<p>1) Hypothèse:</p> $U^* (W_0, \frac{a}{w}) = H(W_0) \cdot G_1(\frac{a}{w}) \quad (a)$ <p>où U* est l'énergie de déformation complémentaire, H(W₀) une fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W₀ et G₁(a/w) est une fonction liée à la géométrie de l'éprouvette.</p>
<p>Figure B: Paramètre Rij en fonction de W₀ pour une référence aj donnée.</p>	<p>2) Définition d'un paramètre de séparation Rij:</p> $R_{ij} = \frac{U^* (W_0, \frac{a_i}{w})}{U^* (W_0, \frac{a_j}{w})} = \frac{H(W_0) \cdot G_1(\frac{a_i}{w})}{H(W_0) \cdot G_1(\frac{a_j}{w})} = \frac{G_1(\frac{a_i}{w})}{G_1(\frac{a_j}{w})} \quad (b)$ <p>Résultat: R_{ij} est indépendant de W₀ (figure B)</p> <p>Conclusion: La forme multiplicative de U*(=H(W₀).G₁(a/w)) est une hypothèse pertinente.</p>
<p>Figure C: Paramètre de séparation Rij en fonction du ligament non fissuré</p>	<p>3) Fonctions d'approximations:</p> $R_{ij} = C_j \left[1 - \frac{a_i}{w} \right]^{m_j} \quad (c)$ <p>C_j et m_j sont des constantes de la régression linéaire.</p> $G_1(\frac{a}{w}) = \left[1 - \frac{a}{w} \right]^m \quad (d)$ <p>m est la moyenne des valeurs m_j.</p> $(a) \text{ et } (d) \rightarrow H(W_0) = \frac{U^*(W_0, \frac{a}{w})}{\left[1 - \frac{a}{w} \right]^m} \quad (e)$
<p>Figure D: Fonction de potentiel k expérimentale</p>	<p>4) Identification de la fonction de potentiel k(W₀):</p> $k(W_0) = \frac{H(W_0)}{W_0} \cdot \frac{\pi}{V} \quad (f)$ <p>où V est le volume de l'éprouvette.</p>
<p>Figure E: Facteur de calibration F expérimental</p>	<p>5) Identification de la fonction de géométrie F(a/w):</p> $F(\frac{a}{w}) = \frac{1}{a} \frac{dG_1(\frac{a}{w})}{2 \cdot B \cdot da} \cdot \frac{V}{\pi} \quad (g)$ <p>où B est l'épaisseur de l'éprouvette.</p>

3.6.4. Comparaison entre les valeurs de $k(W_0)$ des éprouvettes S.E.N.T et celles des éprouvettes D.E.N.T:

Nous avons effectué une moyenne sur les valeurs de $k(W_0)$ correspondant aux éprouvettes S.E.N.T et sur celles correspondant aux éprouvettes D.E.N.T, ceci dans le cas du polybutadiène. Les résultats obtenus sont reportés sur un graphe (figure 3.23), en fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 .

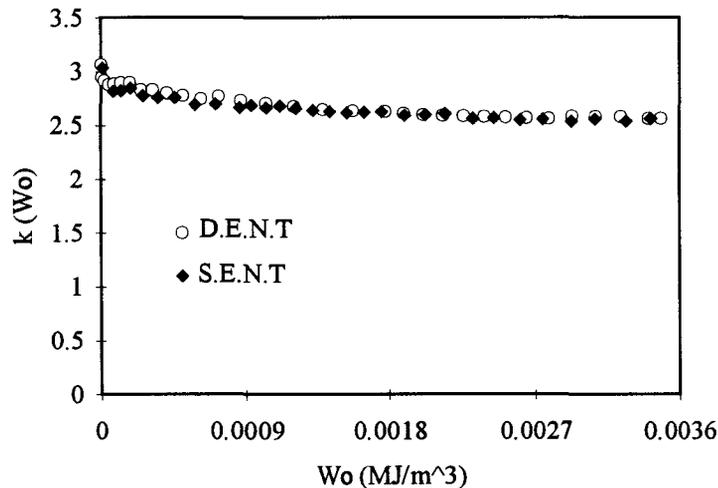


Figure 3.23: *Comparaison des valeurs de $k(W_0)$ des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T du polybutadiène*

Nous pouvons constater que l'évolution de la fonction $k(W_0)$ est identique pour les deux types de géométrie considérés. Autrement dit, cette fonction ne dépend que du matériau et semblerait donc liée au comportement mécanique.

3.7. CONCLUSION:

Le caractère de haute déformation des élastomères rend difficile la mesure des contraintes en fonction des déformations pour ces matériaux. Cependant, la procédure que nous avons mise en oeuvre à cette fin semble être fructueuse puisque les résultats obtenus sont reproductibles. Les valeurs des contraintes-déformations que nous avons évaluées décriraient donc correctement le comportement des matériaux considérés, ce qui est très important pour la précision des calculs numériques.

L'application de la méthode de séparation à l'énergie de déformation complémentaire U^* obtenue à partir des courbes charge-déplacement expérimentales, a permis d'identifier la fonction de potentiel $k(W_0)$ et le facteur de calibration $F(a/w)$. Cette opération repose sur

l'hypothèse de la formulation de U^* sous une forme multiplicative (relation 3.4) ($U^*=H(W_0).G_1(a/w)$).

La fonction $k(W_0)$ obtenue est unique et ne dépend que de la densité d'énergie de déformation W_0 . De plus, elle s'avère identique pour les deux types de géométries S.E.N.T et D.E.N.T considérées dans le cas du polybutadiène. Ces résultats permettent de conclure que l'hypothèse d'existence d'une telle fonction, liée uniquement au comportement mécanique, est pertinente.

La fonction de calibration $F(a/w)$ déterminée pour l'éprouvette D.E.N.T du polybutadiène est en bon accord avec la facteur de calibration linéaire Y^2 équivalent. Ceci indique qu'il n'y a pas d'influence de comportement du matériau sur cette fonction. Ce comportement non linéaire est rigoureusement pris en compte par $k(W_0)$.

Les divergences observées entre $F(a/w)$ des éprouvettes S.E.N.T et le facteur de calibration Y^2 seraient imputables aux effets de flexion induits par la dissymétrie de ce type de géométrie.

Les limites de la méthode utilisée (méthode de séparation) pour calculer $F(a/w)$ sont liées aux précisions des fonctions de lissage des points expérimentaux. Par conséquent, il serait intéressant de vérifier la validité de cette méthode, ce qui représente un des objectifs de notre étude numérique.

TROISIEME PARTIE

CHAPITRE 4: ETUDE NUMERIQUE

CHAPITRE 5: RESULTATS-DISCUSSION

**CHAPITRE 6: PROCEDURE DE CALCUL
DE J PROPOSEE**

INTRODUCTION:

La méthode des éléments finis est un moyen d'étude très utilisé actuellement. Elle consiste à calculer, après division d'un système en éléments, les variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Ces équations aux dérivées partielles peuvent modéliser, moyennant des hypothèses simplificatrices, les problèmes de la mécanique des solides [4.1] [4.2] [4.3].

La méthode des éléments finis est de loin la méthode numérique la plus employée dans le domaine de la mécanique de la rupture. Son succès s'explique par la facilité de sa mise en oeuvre pour la résolution d'une grande variété de problèmes (statiques ou dynamiques, linéaires ou non linéaires...)

Elle permet l'évaluation de certains paramètres caractérisant la rupture des matériaux à comportement linéaire élastique et plus récemment les matériaux à comportement non linéaire.

De nombreux programmes généraux de calcul par éléments finis sont disponibles. Citons par exemple ANSYS, ABAQUS, ADINA...etc.

Le but de cette étude numérique est de rechercher les possibilités d'évaluation de la valeur critique J_c du paramètre énergétique J régissant l'amorçage de la fissure, en utilisant un seul échantillon.

Nous avons donc simulé par la méthode des éléments finis les essais de rupture que nous avons effectués et nous avons calculé le paramètre énergétique J correspondant selon trois approches:

- intégrale de contour de RICE [2.25];
- intégrale de contour de BUI [2.27];
- différenciation d'énergie proposée par WATWOOD [2.42].

Les principes de ces méthodes de calcul ainsi que les éléments du modèle numérique adopté avec toutes les hypothèses introduites sont reportés dans le chapitre 4.

Le chapitre 5 est consacré à l'analyse et à la discussion des résultats:

-Les valeurs de J issues des trois approches numériques utilisées sont comparées entre elles, ce qui a permis de vérifier que ces valeurs rendent compte correctement de l'évolution de ce paramètre.

-Les valeurs de l'intégrale de contour de RICE sont ensuite comparées à celles que nous avons évaluées expérimentalement (pour $a/w \geq 0.3$) par l'application de la méthode de séparation d'énergie (§ 3.6 du chapitre 3). Ceci a pour but de vérifier la validité de cette méthode de séparation ainsi que celle de la forme multiplicative de J ($J=2.k(W_0).W_0.a.F(a/w)$).

-Les résultats encourageants obtenus nous ont conduit à étendre notre étude numérique pour identifier la fonction de géométrie $F(a/w)$ pour les faibles longueurs de fissure ($a/w < 0.3$). Nous avons ensuite comparé cette fonction au facteur de calibration Y^2 équivalent, défini en mécanique linéaire élastique.

-De même, nous avons vérifié la validité des modèles proposés par RIVLIN et THOMAS et ceci dans le cas des éprouvettes S.E.N.T, D.E.N.T et C.P (éprouvette de cisaillement pur).

-Enfin nous avons évalué, expérimentalement et numériquement, les valeurs critiques de J correspondant à l'amorçage de la fissure et nous avons comparé les résultats.

CHAPITRE 4: ETUDE NUMERIQUE

4.1. MODELE NUMERIQUE:

4.1.1. Hypothèses:

Le problème de rupture que nous avons étudié expérimentalement, a été simulé par la méthode des éléments finis à l'aide du code "ANSYS V 5.0". Nous avons utilisé des éléments triangulaires à six noeuds et quadrilatères à huit noeuds dont le nombre de points d'intégration est respectivement de 03 et 2x2. Chaque noeud possède deux degrés de liberté qui sont des déplacements dans le plan.

L'analyse est faite en contraintes planes, dans le cas d'un comportement non linéaire élastique et en grandes déformations. Le coefficient de Poisson est pris égal à 0.499, ceci correspondant à l'incompressibilité du matériau.

Rappelons que les lois utilisées pour simuler le comportement des élastomères sont généralement formulées à l'aide de la densité d'énergie de déformation exprimée en fonction des trois invariants de déformation de Cauchy-Green droit (§ 1.2.5.2 du chapitre 1). Cela ne sera pas le cas dans la présente étude en raison de la non disponibilité, dans le code de calcul utilisé, d'un élément en "contraintes planes" avec ce type de loi de comportement. *Nous avons donc opté pour une approche en plasticité avec une limite d'élasticité nulle. La non linéarité du comportement est prise en compte comme une linéarité par morceaux puisque la relation contrainte- déformation est introduite comme une fonction discrète.* Ces valeurs n'étant acquises que pour un certains taux de déformation, elles sont alors extrapolées suffisamment loin pour ne pas entraver le déroulement du calcul. Cette extrapolation n'induit des erreurs que sur les grandeurs calculées pour les éléments proches du fond de fissure où les déformations et les contraintes sont très importantes. Ces erreurs n'altèrent pas la précision du champ de contraintes et de déformations loin de cette région, comme nous le verrons à travers les résultats de l'intégrale J que nous avons obtenus (chapitre 5).

4.1.2. Types d'éprouvettes modélisées et conditions aux limites:

Dans un premier temps, nous avons modélisé les éprouvettes S.E.N.T (éprouvettes à fissures latérales) et D.E.N.T (éprouvettes à double fissures latérales) dont les dimensions sont celles utilisées dans l'étude expérimentale avec ($0.3 \leq a/w \leq 0.7$). Suite aux résultats satisfaisants obtenus pour ces valeurs de a/w , il nous a semblé intéressant d'étendre notre étude numérique aux faibles longueurs de fissure ($a/w < 0.3$) afin de déterminer la fonction de calibration dans ce domaine.

Nous avons ensuite modélisé les éprouvettes de cisaillement pur dans le but de vérifier la validité du modèle de RIVLIN et THOMAS ($J = W_0 \cdot h$) dans le cas des matériaux que nous avons étudiés. Rappelons que cette relation permet de déterminer la valeur critique du paramètre énergétique J à partir d'un seul échantillon utilisé pour relever la charge causant l'amorçage de la fissure.

Les dimensions des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T que nous avons considérées dans notre étude numérique, sont reportées dans le tableau 4.1.

type de matériau	type d'éprouvette	haut. "h" (mm)	larg. "w" (mm)	épais. "B" (mm)	longueur de fissure "a" (mm)
E.P.D.M.	S.E.N.T	200	40	3.4	1, 2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.
polybutadiène	S.E.N.T	200	40	4.5	1, 2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.
	D.E.N.T	200	80	4.5	1, 2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.

Tableau 4.1: Dimensions des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T étudiées numériquement

Etant donné les symétries pour ce type de géométrie, nous n'avons analysé que la moitié de l'éprouvette S.E.N.T et qu'un quart de l'éprouvette D.E.N.T. (figures 4.1 et 4.2). La fissure initiale est introduite en imposant un déplacement nul, suivant le sens des sollicitations, aux noeuds situés sur la partie correspondant au ligament de l'éprouvette. La simulation du chargement de l'éprouvette est réalisée en imposant un déplacement incrémental à tous les noeuds situés sur l'une des extrémités de cette éprouvette, par pas de 0.4 mm dans le cas de l'E.P.D.M et de 2 mm dans le cas du polybutadiène. Le fond de fissure est considéré comme étant aigu.

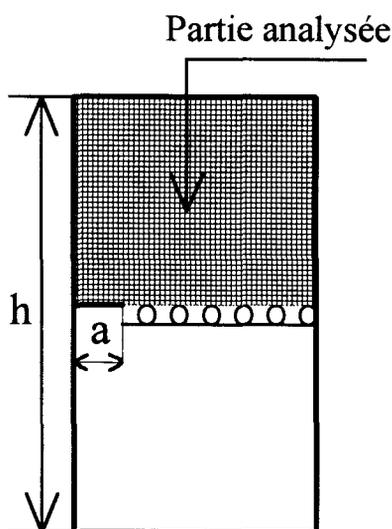


Figure 4.1: Partie de l'éprouvette S.E.N.T analysée.

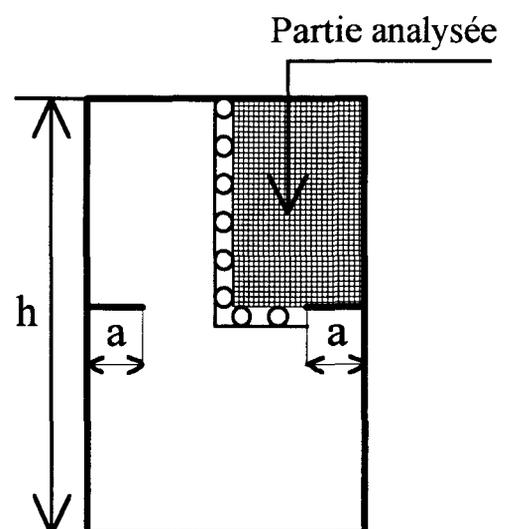


Figure 4.2: Partie de l'éprouvette D.E.N.T analysée.

4.2. APPROXIMATION DES SOLUTIONS AUX NOEUDS D'INTERPOLATIONS:

Les composantes du tenseur de contraintes (ou de déformations) sont évaluées aux noeuds communs à plusieurs éléments, en utilisant l'expression suivante:

$$\sigma_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{N_k} \sigma_{ijk}}{N_k} \quad (4.1)$$

σ_{ik} : valeur moyenne de la composante i du tenseur de contraintes (ou de déformations) au noeud K ,

σ_{ijk} : composante i du tenseur de contraintes (ou de déformations) calculée pour l'élément j au noeud K ,

N_k : nombre d'éléments connectés au noeud K .

En ces noeuds, le tenseur de contraintes (ou de déformations) principales peut être évalué:

- soit en utilisant les composantes moyennes calculées à partir de la relation (4.1):

$$\sigma_{ck} = f(\sigma_{ik}) \quad (4.2)$$

où f est une fonction permettant de calculer les contraintes ou déformations principales à partir des différentes composantes i .

- soit en faisant directement la moyenne:

$$\sigma_{ck} = \frac{\sum_{j=1}^k \sigma_{cjk}}{N_k} \quad (4.3)$$

où σ_{ck} : composante principale moyenne au noeud k

σ_{cjk} : composante principale de l'élément j au noeud k .

4.3. EVALUATION DES DIFFERENTS TERMES DE L'INTEGRALE J:

4.3.1. Définition d'un contour:

Nous avons la possibilité de définir un contour à l'aide d'un à neuf segments dont les extrémités sont représentées par les noeuds d'interpolation. Un exemple typique de segment entre un noeud N_1 et un noeud N_2 est montré sur la figure 4.3.

Sur chaque segment, 49 points équidistants sont localisés par leurs coordonnées. Les solutions de l'analyse numérique sont approximées en chacun de ces points par interpolation à l'aide des fonctions géométriques de l'élément auquel ils appartiennent. Ces solutions peuvent être combinées par différentes opérations de calcul (addition, multiplication, division, dérivation et intégration par rapport à une variable).

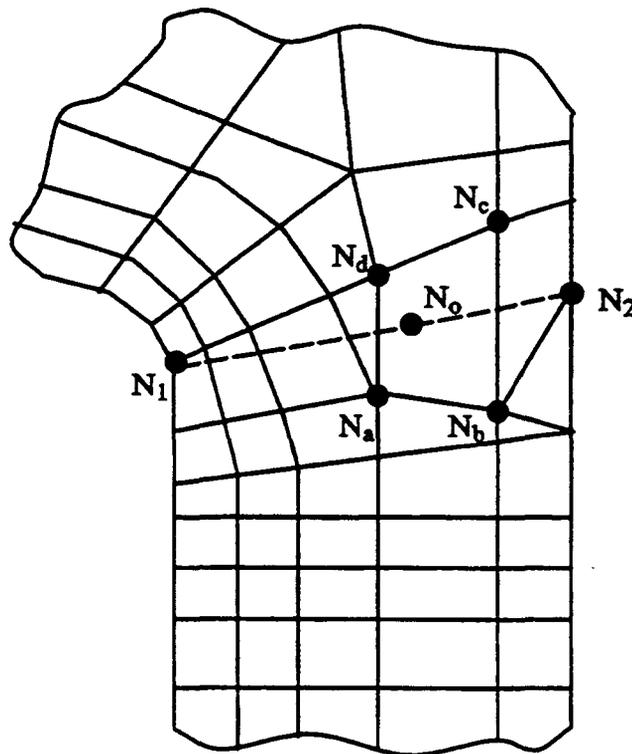


Figure 4.3: Exemple d'un segment défini entre deux noeuds N_1 et N_2 .

4.3.2. Définition de l'orientation des vecteurs sur un contour:

La figure 4.4 montre l'exemple d'un vecteur unitaire défini sur un contour par sa position (R), sa composante tangentielle (T) et sa composante normale (N).

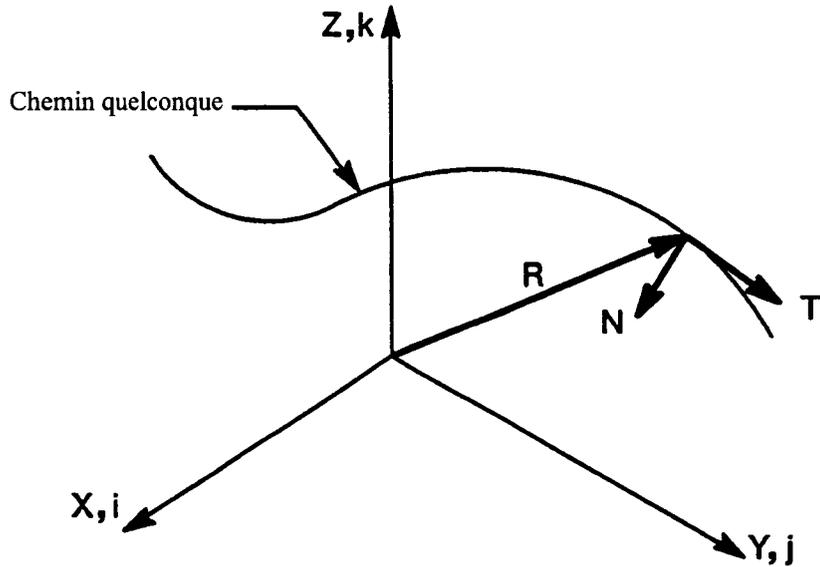


Figure 4.4: Vecteur unitaire défini sur un contour.

La position R du vecteur est définie par:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

où x_n est la coordonnée suivant l'axe x du point n appartenant au contour.

Le vecteur unitaire tangentiel T est défini par:

$$T_1 = C \cdot \begin{Bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{pour le premier point du contour}) \quad (4.5)$$

$$T_n = C \cdot \begin{Bmatrix} x_{n+1} - x_{n-1} \\ y_{n+1} - y_{n-1} \\ z_{n+1} - z_{n-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{pour un point intermédiaire } n \text{ sur le contour}) \quad (4.6)$$

$$T_L = C \cdot \begin{Bmatrix} x_L - x_{L-1} \\ y_L - y_{L-1} \\ z_L - z_{L-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{pour le dernier point du contour}) \quad (4.7)$$

où x, y, z : coordonnées des points du contour ($n = 2$ à $L-1$)

L : nombre de points définis sur le contour

C : facteur de normalisation tel que $\{T\}$ soit un vecteur unitaire.

Le vecteur unitaire normal N est défini par:

$$\{N\} = \frac{\{T\} \wedge \{K\}}{|\{T\} \wedge \{K\}|} \quad (4.8)$$

où

$$K = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

4.3.3. Calcul de l'Intégrale J:

L'analyse numérique donne les composantes des déplacements, des déformations et des contraintes. Nous effectuons par la suite les différentes opérations intervenant dans le calcul de l'intégrale J . Voici certaines précisions à propos de ces opérations:

Rappelons que l'intégrale de contour de RICE se présente sous la forme suivante:

$$J = \int_{\Gamma} W \cdot dy - \int_{\Gamma} (t_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + t_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x}) \cdot dS \quad (4.10)$$

où: $t_x (= \sigma_x \cdot n_x + \sigma_{xy} \cdot n_y)$ est le vecteur de traction le long de l'axe x , et
 $t_y (= \sigma_y \cdot n_y + \sigma_{xy} \cdot n_x)$ est le vecteur de traction le long de l'axe y .

L'intégrale de BUI a une forme équivalente à celle de RICE:

$$J = \int_{\Gamma} \left[W^* \cdot dy - n_j \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} \right) \cdot u_i \cdot dS \right] \quad (4.11)$$

Les parts des différentes quantités intervenant dans chacune des deux intégrales sont rapportées sur le contour défini au préalable. Sur ce contour, l'intégrale d'une quantité Q par rapport à une variable V , est remplacée par la somme des intégrales calculées chacune entre deux points consécutifs $P_{n-1}(V_{n-1}, Q_{n-1})$ et $P_n(V_n, Q_n)$. La méthode utilisée à cette fin est celle des trapèzes, exprimée par la formule suivante:

$$I_n = I_{n-1} + 1/2 (Q_n + Q_{n-1}) \cdot (V_n - V_{n-1}) \quad (n = 2, L) \quad (4.12)$$

où I_n est l'intégrale jusqu'au point $P_n(V_n, Q_n)$; L est la longueur totale du contour.

Les dérivées $\frac{\partial u_j}{\partial x}$ et $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x}$ sont approximées respectivement par les quantités $\frac{u_j^{(2)} - u_j^{(1)}}{\Delta x}$ et $\frac{\sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}}{\Delta x}$. Les exposants (1) et (2) correspondent aux positions relatives du contour déplacé d'une distance $\frac{\Delta x}{2} = \frac{L}{200}$ de part et d'autre de sa position définie au départ et suivant la direction de propagation de la fissure (supposé perpendiculaire à la direction de sollicitation) (figure 4.5). $\Delta x \equiv \Delta a$ est une très petite distance choisie arbitrairement.

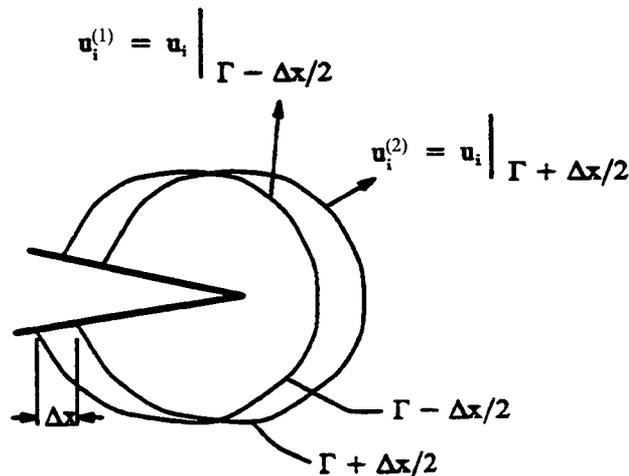


Figure 4.5: Illustration du calcul de la dérivée $\frac{\partial u_j}{\partial x}$ (ou $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x}$) sur le contour Γ .

4.4. CALCUL NUMERIQUE DE J PAR LA METHODE DE DIFFERENCIATION D'ENERGIE [2.42]:

On considère deux éprouvettes identiques, de longueurs de fissures "a" et "a+Δa" et soumises à une même extension. Le paramètre énergétique J peut être évalué à partir de l'expression:

$$J = -\frac{U(a + \Delta a) - U(a)}{B \cdot \Delta a} = \frac{\Delta U}{B \cdot \Delta a} \quad (4.13)$$

où U est l'énergie potentielle et B l'épaisseur de l'éprouvette.

Ce calcul nécessite deux analyses complètes, par éléments finis, associées respectivement aux deux longueurs de fissures "a" et "a+Δa".

Pour améliorer la précision des résultats, nous avons calculé J , correspondant à une longueur de fissure "a", à partir de la relation suivante:

$$J = \frac{U\left(a + \frac{\Delta a}{2}\right) - U\left(a - \frac{\Delta a}{2}\right)}{\Delta a} \quad (4.14)$$

La simulation de la propagation de la fissure est réalisée en déplaçant seulement les éléments immédiatement au voisinage du fond de cette fissure (situés dans un rayon d'environ $a/2$) d'une valeur " Δa " égale à 0.01mm. Cette procédure permet de garder un maillage identique pour les deux analyses, ce qui annule la part d'erreur de celui-ci dans le calcul de ΔU .

4.5. CHOIX DU MAILLAGE:

Il est important de savoir que la méthode des éléments finis ne fait que proposer une approximation de la solution exacte d'un problème posé. Les différences entre les solutions exactes et approchées diminuent quand les tailles des éléments du domaine étudié deviennent de plus en plus petites. L'évaluation de l'erreur à un niveau donné de division s'effectue par comparaison entre les solutions calculées et exactes.

Afin de quantifier la sensibilité des valeurs de l'intégrale J vis à vis de la discrétisation de l'éprouvette, nous avons examiné trois types de maillages (figure 4.6). La configuration de chacun de ces maillages est caractérisée par la densité des éléments au voisinage du fond de fissure et par leur nombre à travers toute l'éprouvette. La taille des éléments en pointe de fissure est de 2 mm, 1 mm et 0.5 mm respectivement pour les maillages N°1, N°2 et N°3.

L'objectif de cette étude est, d'une part, de rechercher un maillage qui approche de façon raisonnable la solution exacte et, d'autre part, de vérifier si la discrétisation n'induit pas de grandes erreurs. Cette étude a été effectuée en se basant sur l'exemple d'une éprouvette S.E.N.T de l'E.P.D.M avec la valeur de $a/w = 0.5$.

Nous avons calculé l'intégrale J de RICE à travers un contour suffisamment loin du défaut, en considérant séparément les trois maillages choisis. Les temps nécessaires à l'exécution des calculs sur un "P.C", sont de 1 heures, 6 heures et 12 heures respectivement pour les maillages N°1, N°2 et N°3. Les valeurs numériques de J obtenues sont représentées sur la figure 4.7, en fonction des déplacements imposés.

Les trois types de maillage ont conduit, pratiquement, aux mêmes solutions. En effet, la différence maximale entre les résultats issus des maillages N°1 et N°2 est de 0.91 %. Cette

différence devient plus faible (0.3%) quand on compare les résultats obtenus à partir des maillages N°2 et N°3.

En somme, cette étude a permis de nous rendre compte que la discrétisation n'influence pas considérablement la précision des valeurs numériques de J . Le maillage N°2 répond convenablement au critère de précision et correspond à un temps de calcul acceptable (6 heures). Nous avons donc choisi celui-ci pour la modélisation des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T de l'E.P.D.M. Dans le cas du polybutadiène, l'analyse numérique complète nécessite 20 heures. Cette différence entre les temps d'exécution des calculs relatifs aux deux matériaux est liée à la méthode de résolution (méthode de NEWTON-RAPHSON) dont le nombre d'itérations nécessaires pour converger dépend de la loi de comportement.

Nous avons donc été amené à rechercher un nouveau maillage pour le polybutadiène. Une étude comparative, similaire à la précédente, a permis de choisir un maillage (N°4) (figure 4.8) permettant l'exécution du calcul en 8 heures.

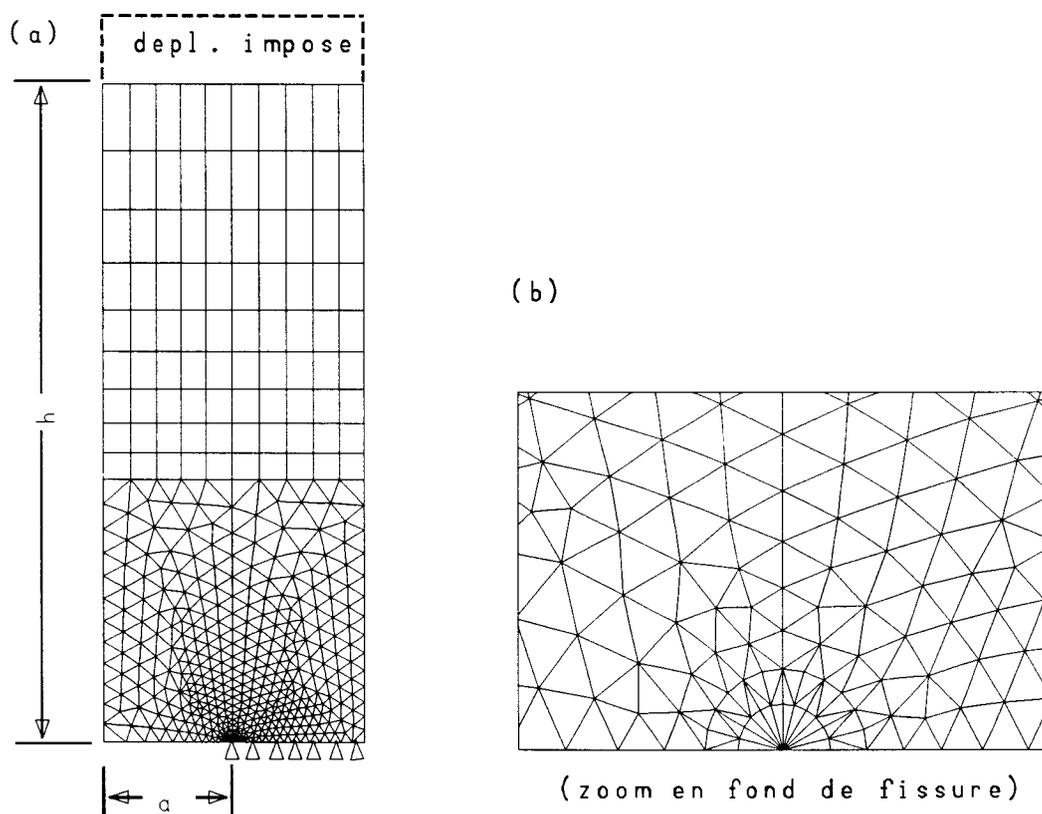


Figure 4.6: Maillage N°2 utilisé pour la discrétisation des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T de l'E.P.D.M ($\cong 800$ éléments).

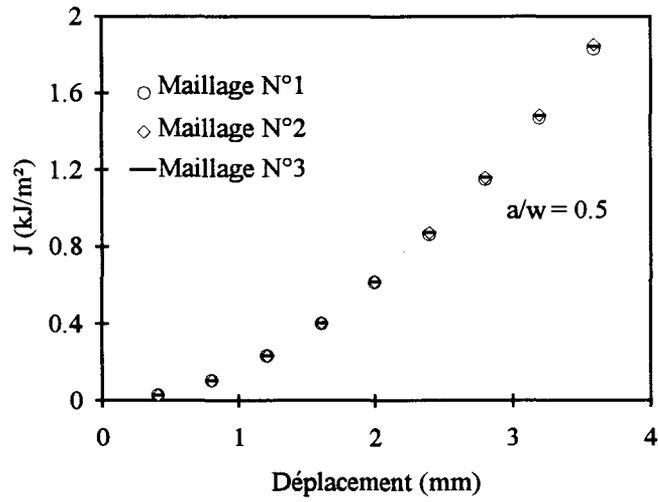


Figure 4.7: Valeurs de l'intégrale J obtenues en utilisant trois types de maillages

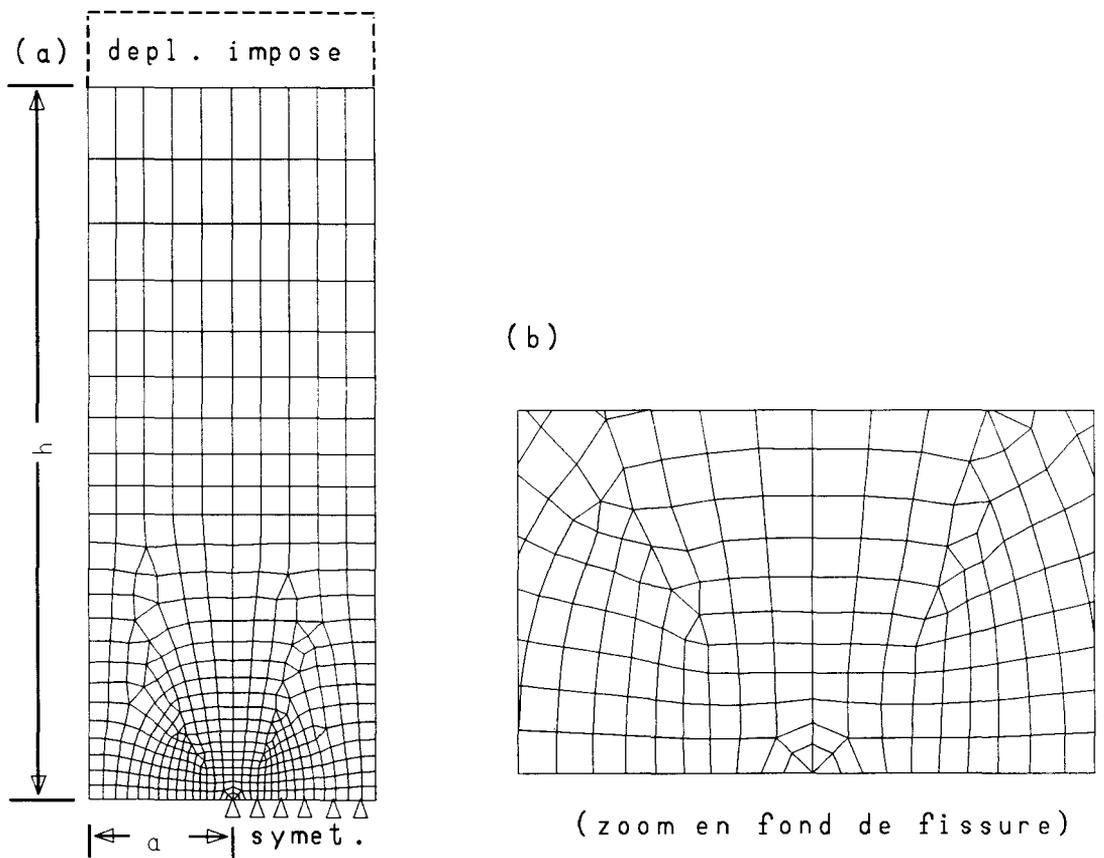


Figure 4.8: Maillage N°4 utilisé pour la discrétisation des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T du polybutadiène (≈ 500 éléments)

4.6. CALCUL DE LA DENSITE D'ENERGIE DE DEFORMATION:

La finesse du maillage en pointe de fissure est limitée de manière à obtenir pour ces éléments des solutions qui restent dans le domaine défini par la loi de comportement. Dans le cas contraire la convergence n'est pas assurée.

Le calcul numérique donne les positions déformées des points nodaux de tous les éléments, leurs contraintes et leurs déformations à travers toute l'éprouvette. Les composantes des déformations $\{\varepsilon_n\}$ sont utilisées pour évaluer la déformation équivalente " ε_{eq} " au sens de Van Mises:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{xy}^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{yz}^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

Pour chaque élément, la déformation équivalente " ε_{eq} " est utilisée avec les données de la courbe de la loi de comportement pour obtenir la valeur de la contrainte équivalente " σ_{eq} ".

L'énergie de déformation élastique peut s'écrire comme une somme d'une énergie de cisaillement et d'une énergie de déformation volumique. La part de cette dernière est nulle dans le cas des matériaux que nous avons étudiés puisque ceux-ci sont incompressibles. Par conséquent, la densité d'énergie de déformation, supposée constante dans chaque élément, est calculée, en la ramenant à un état unidimensionnel, à partir de la relation suivante:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{eq}} \sigma_{eq} \cdot d\varepsilon_{eq} \quad (4.16)$$

4.7. CONCLUSION:

La simulation par la méthode des éléments finis des essais de rupture sur les éprouvettes S.E.N.T (éprouvette à fissure latérale) et D.E.N.T (éprouvette à double fissures latérales) a été réalisée à l'aide du code "ANSYS V.50", moyennant certaines hypothèses simplificatrices.

L'utilisation des plaques de faible épaisseur permet de traiter le problème en contraintes planes. De même, l'élasticité réversible représentant le comportement des matériaux utilisés permet de s'affranchir de la complexité des phénomènes d'endommagement qui peuvent se produire en fond de fissure. Il faut toutefois souligner que si ces phénomènes sont confinés, ils ne devraient pas altérer nos résultats basés sur une approche globale.

La possibilité d'utiliser des éléments quadratiques (triangles à six noeuds et quadrilatères à huit noeuds) permettrait d'approximer de manière suffisamment précise le problème étudié.

Deux méthodes permettant le calcul du paramètre énergétique J ont été décrites de manière explicite. En voici certains points à retenir:

-Connaissant le champ de contraintes et de déformations, J peut être calculé aisément à partir de l'intégrale de contour.

-La procédure adoptée pour l'évaluation de J par la méthode de différenciation d'énergie permet d'annuler la part d'erreur liée au maillage.

Enfin, l'étude numérique, présentée en dernier lieu, rend compte du fait que l'intégrale J est peu sensible vis à vis de la discrétisation. Elle a conduit aussi au choix de deux types de maillages (800 éléments pour l'E.P.D.M et 500 éléments pour le polybutadiène) avec lesquels l'analyse complète a nécessité respectivement 6 heures et 8 heures.

CHAPITRE 5: RESULTATS-DISCUSSION

5.1. VERIFICATION DE LA VALIDITE DU MODELE NUMERIQUE UTILISE:

Les hypothèses simplificatrices que nous avons introduites dans le modèle numérique (§ 4.1.1) facilitent la formulation du problème étudié et réduisent le temps d'analyse. Cependant, elles peuvent conduire à des erreurs conséquentes quant à la précision des résultats du calcul.

Pour vérifier la validité du modèle de calcul que nous avons adopté, nous avons comparé pour différentes longueurs de fissure, les courbes charge-déplacement numériques avec celles obtenues expérimentalement lorsqu'elles existent (figures 5.1, 5.2 et 5.3). Les résultats présentent de légères dispersions pour les grands taux d'élongation correspondant à certaines longueurs de fissure. Ces dispersions atteignent particulièrement 9.8% pour les grands déplacements correspondant à $a/w=0.4$ des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène et 6% pour ceux correspondant à $a/w=0$ des éprouvettes D.E.N.T de ce même matériau. Elles sont inférieures à 4% pour tous les autres cas de figure considérés.

Le modèle numérique que nous avons adopté semble donc être conforme au problème de rupture que nous avons étudié. Cette validité est d'autant plus confirmée lorsque l'on compare les énergies de déformation numériques et expérimentales (figures 5.4, 5.5 et 5.6). Il faut noter que l'énergie de déformation expérimentale est déterminée, pour chaque éprouvette, à partir de l'aire sous la courbe charge-déplacement. Quant à celle calculée numériquement, elle représente la somme des énergies de tous les éléments formant le maillage, évaluées chacune à

partir de la relation (4.16) ($W = \int_0^{\epsilon_{eq}} \sigma_{eq} \cdot d\epsilon_{eq}$).

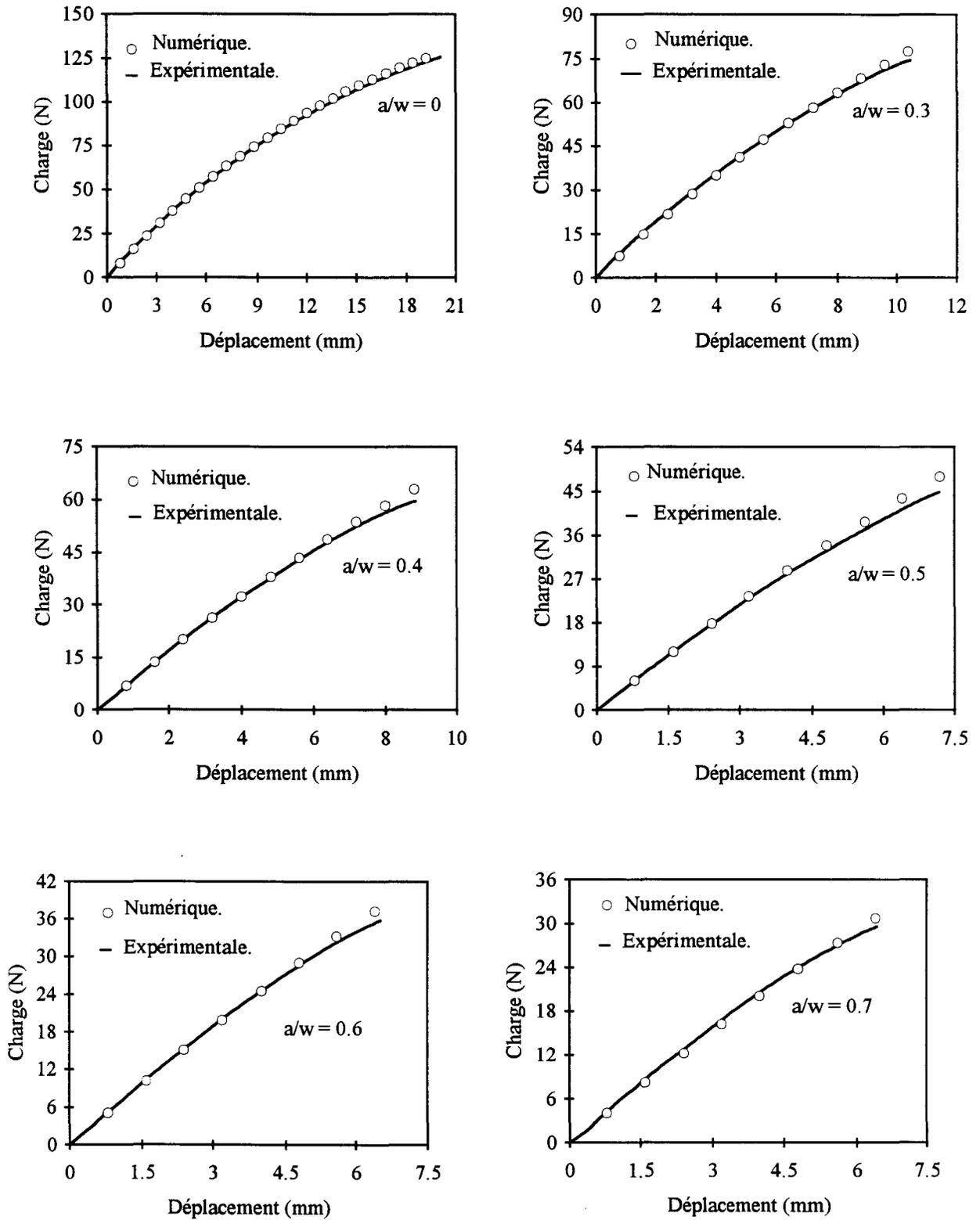


Figure 5.1: Courbes charge-déplacement expérimentales et numériques dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M. (Pour différentes longueurs de fissure)

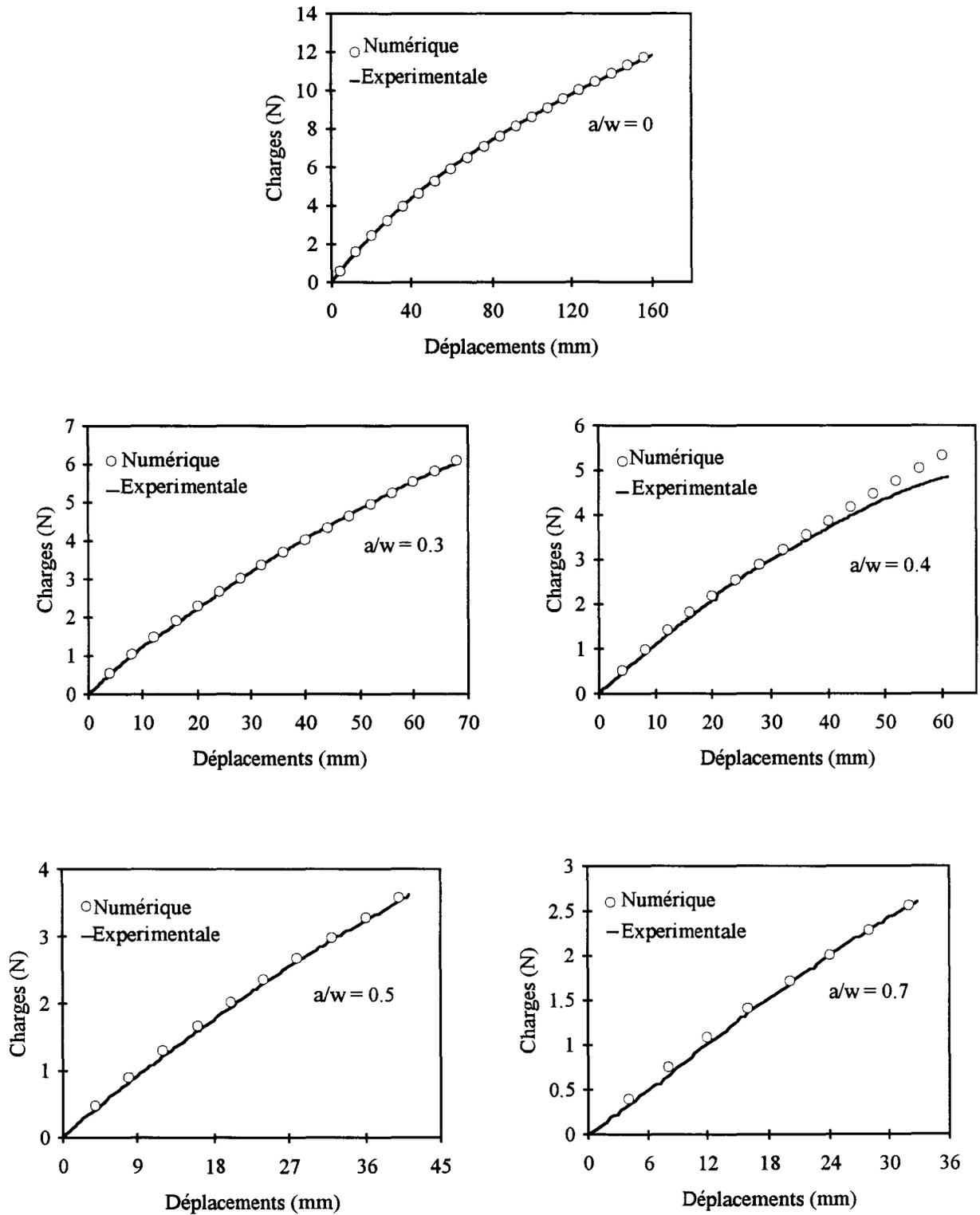


Figure 5.2: Courbes charge-déplacement expérimentales et numériques dans le cas des éprouvettes S.E.N.T. du polybutadiène (Pour différentes longueurs de fissure)

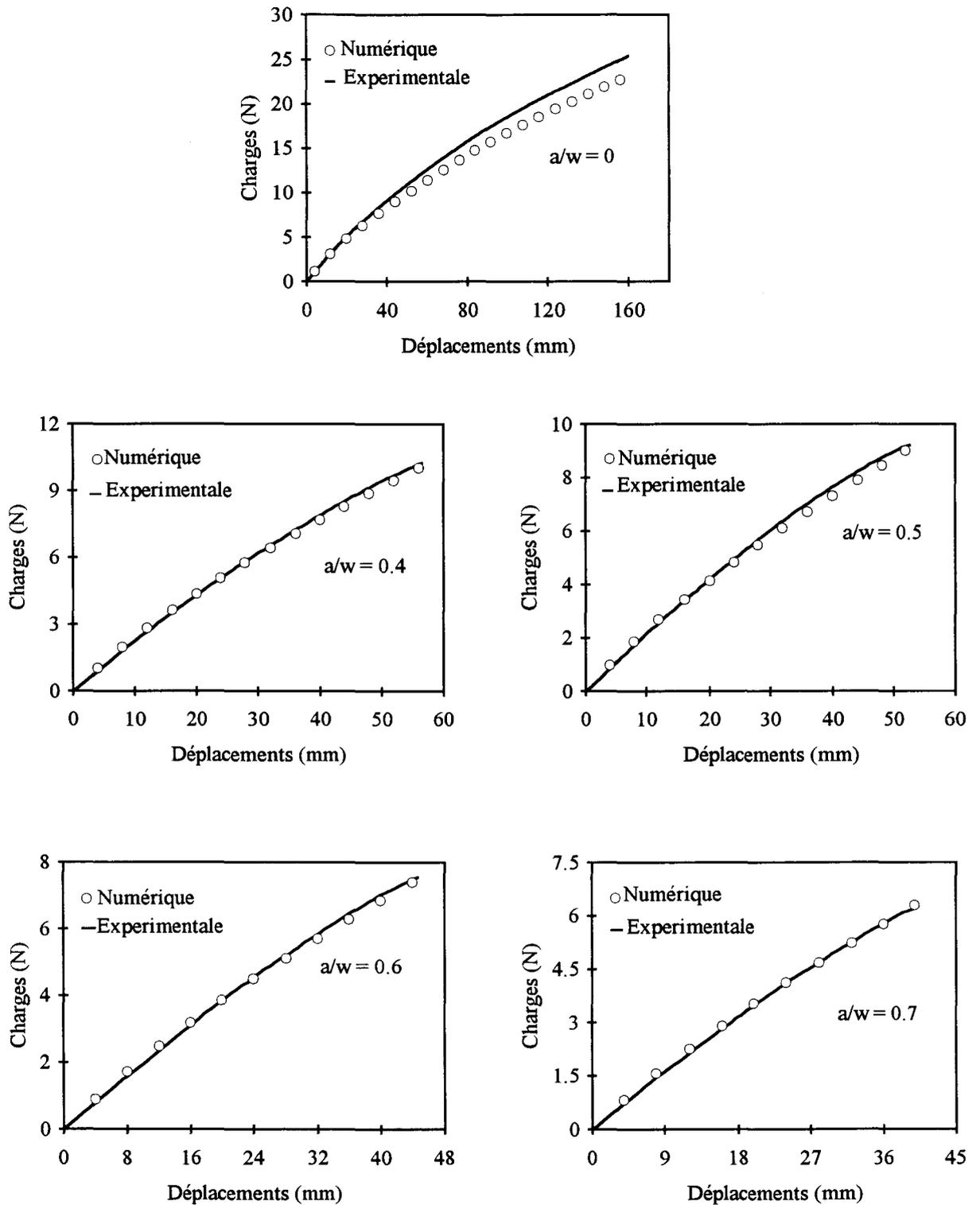


Figure 5.3: Courbes charge-déplacement expérimentales et numériques dans le cas des éprouvettes D.E.N.T. du polybutadiène (Pour différentes longueurs de fissure)

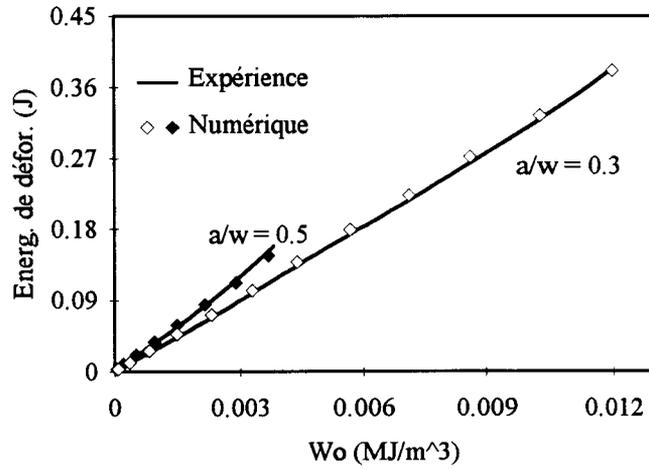


Figure 5.4: Energies de déformation numérique et expérimentale dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M

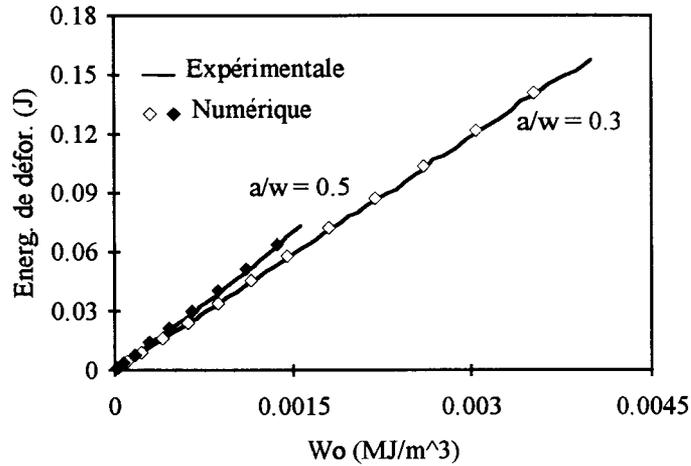


Figure 5.5: Energies de déformation numérique et expérimentale dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène

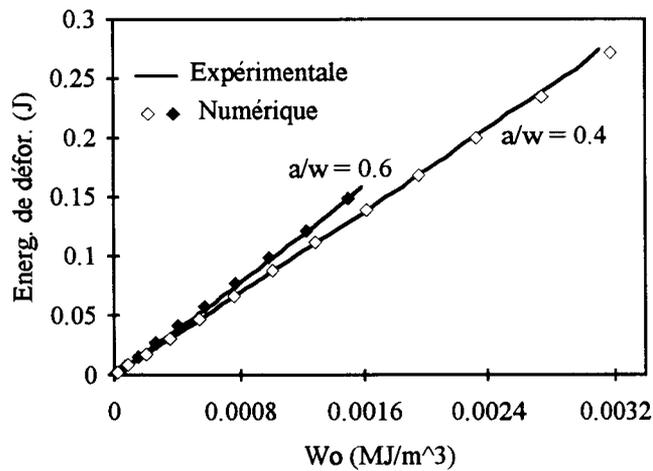


Figure 5.6: Energies de déformation numérique et expérimentale dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

5.2. EVALUATION DE LA DENSITE D'ENERGIE DE DEFORMATION LOIN DU DEFAUT:

Rappelons que l'expression du paramètre énergétique J proposée par ANDREWS [2.37] dans le cas d'une plaque fissurée de dimensions infinies, se présente sous la forme suivante:

$$J = 2 \cdot k(W_0) \cdot a \cdot W_0 \quad (5.1)$$

où W_0 est la densité d'énergie de déformation uniforme calculée loin du défaut.

Dans sa théorie, cet auteur a supposé que W_0 est constante pour une charge donnée, quelle que soit la longueur de la fissure. Dans ce cas, on dit que cette densité d'énergie de déformation est contrôlée par la charge.

Les dimensions des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T que nous avons étudiées sont bien évidemment finies. Il nous a donc semblé intéressant d'examiner les densités d'énergie de déformation calculées pour les éléments loin de la fissure, pour lesquels le déplacement est imposé (figure 5.7).

Les résultats obtenus sont représentés en fonction de l'abscisse "x" sur les figures 5.8 et 5.9 respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène, ceci pour différentes valeurs du taux d'élongation λ correspondant à la longueur de fissure $a/w=0.5$. Nous pouvons constater que dans le cas des éprouvettes D.E.N.T, la densité d'énergie de déformation est sensiblement uniforme dans la région considérée, tandis que dans le cas des éprouvettes S.E.N.T, celle-ci évolue avec la position (abscisse x) de l'élément auquel elle correspond. Ce phénomène est vraisemblablement dû aux effets de flexion liés à la dissymétrie de cette géométrie. Ces effets amplifient les perturbations induites par la fissure. Par ailleurs, la dispersion observée est beaucoup plus prononcée dans le cas de l'E.P.D.M que dans celui du polybutadiène. Ceci laisserait à penser que les effets de flexion sont, à priori, moins significatifs pour ce dernier matériau, sa rigidité étant cependant, il faut le souligner, plus faible que celle du premier.

Notons que, quoique les résultats ne soient illustrés que pour certaines valeurs du taux d'élongation λ relatif à une seule longueur de fissure, la même tendance a été observée quand on considère d'autres élongations et d'autres longueurs de fissure ($a/w = 0.3, 0.4, 0.6$ et 0.7).

Nous avons ensuite reporté le rapport de la moyenne de la densité d'énergie de déformation calculée loin du défaut sur la densité d'énergie de déformation correspondant à une éprouvette vierge, en fonction de la charge appliquée puis en fonction du déplacement imposé, sur les

figures 5.10.1 et 5.10.2 pour l'E.P.D.M et sur les figures 5.11.1 et 5.11.2 pour le polybutadiène.

Dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M, ce rapport augmente avec la longueur de fissure et il décroît à mesure que la charge appliquée est de plus en plus importante (figure 5.10.1). Pour les faibles valeurs de cette charge, il est de 1.3 à 2 fois plus grand que celui qui représente la référence, quand a/w varie de 0.3 à 0.7. Ce résultat est aussi certainement lié aux effets de flexion qui se manifestent pour ce type de géométrie.

Ces dispersions sont moins significatives (inférieures à 10%) dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène et des éprouvettes D.E.N.T des deux matériaux étudiés (figures 5.10.2, 5.11.1 et 5.11.2).

Dans tous les cas, le rapport considéré ici en fonction du déplacement imposé, diminue quand la longueur de fissure augmente (figures 5.10.1, 5.10.2, 5.11.1 et 5.11.2). Il décroît, par ailleurs, légèrement lorsque le déplacement devient de plus en plus grand dans le cas de l'E.P.D.M et reste presque constant pour le polybutadiène.

En somme, la densité d'énergie de déformation W_0 calculée loin du défaut n'est ni contrôlée par la charge ni contrôlée par le déplacement. Par conséquent, pour une charge donnée, les valeurs de W_0 que l'on utilisera pour les résultats de notre étude numérique, seront calculées à partir d'une éprouvette vierge afin d'être en bon accord avec la procédure expérimentale (figure 3.7 du § 3.6).

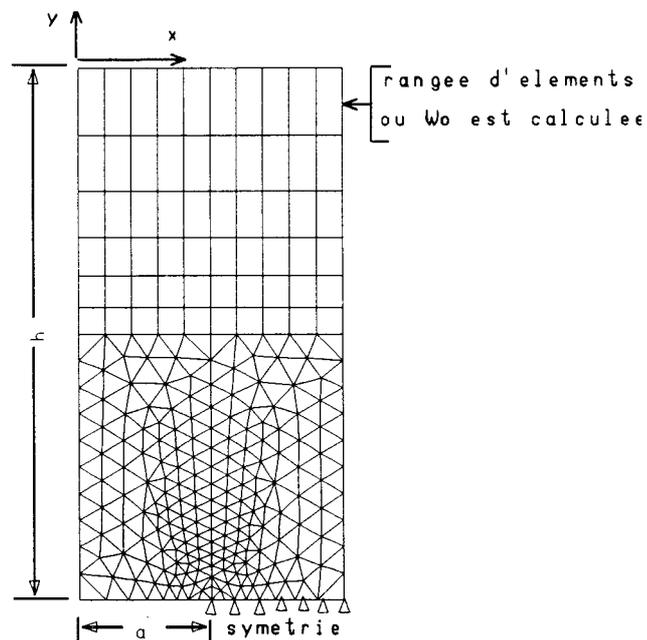


Figure 5.7: Eléments où la densité d'énergie de déformation est calculée

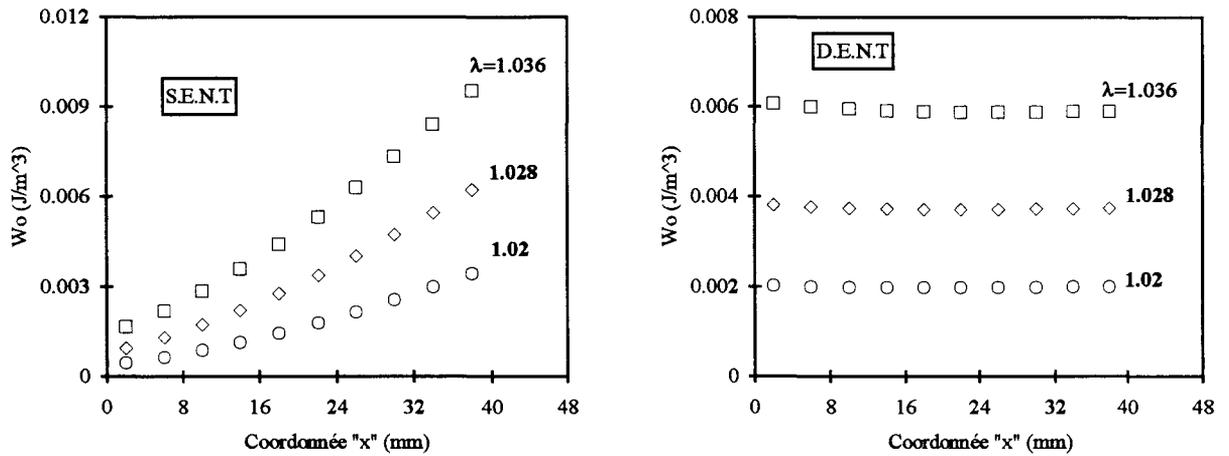


Figure 5.8: Evolution de la densité d'énergie de déformation W_0 calculée loin du défaut en fonction de x (pour le matériau E.P.D.M.).

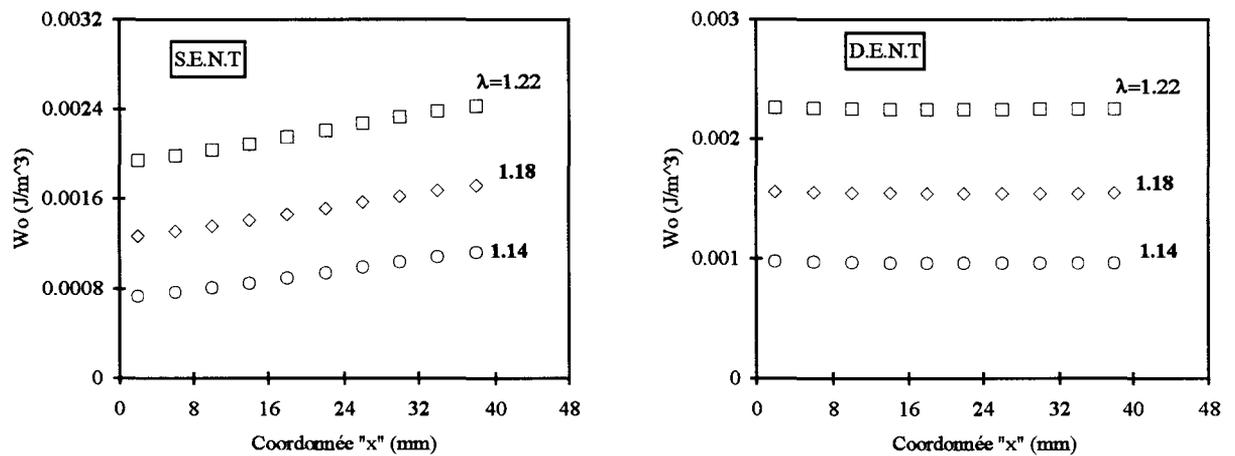


Figure 5.9: Evolution de la densité d'énergie de déformation W_0 calculée loin du défaut en fonction de x (pour le polybutadiène).

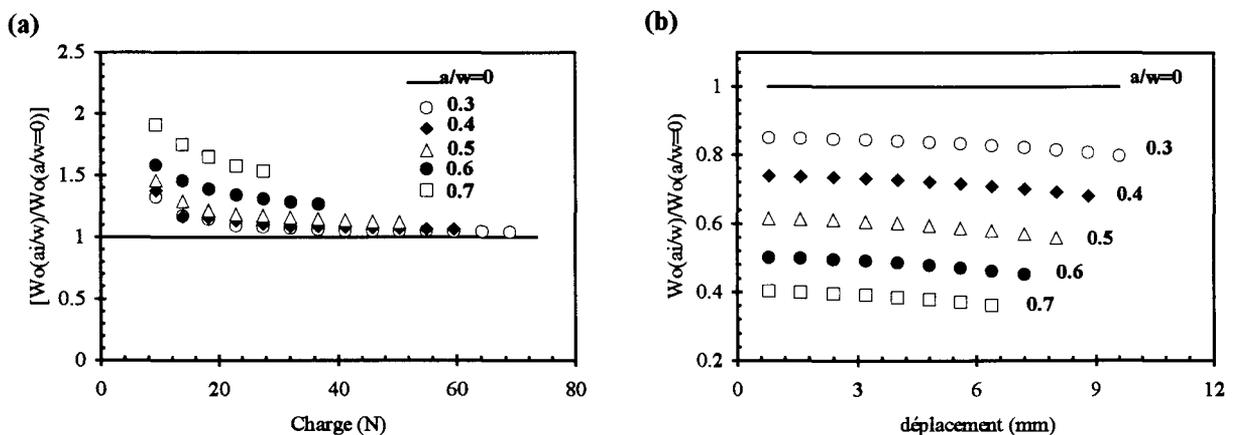


Figure 5.10.1: Evolution du rapport (moyenne de la densité d'énergie de déformation W_0 calculée loin du défaut / densité d'énergie de déformation d'une éprouvette vierge) dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M - (a)- en fonction de la charge - (b)- en fonction du déplacement.

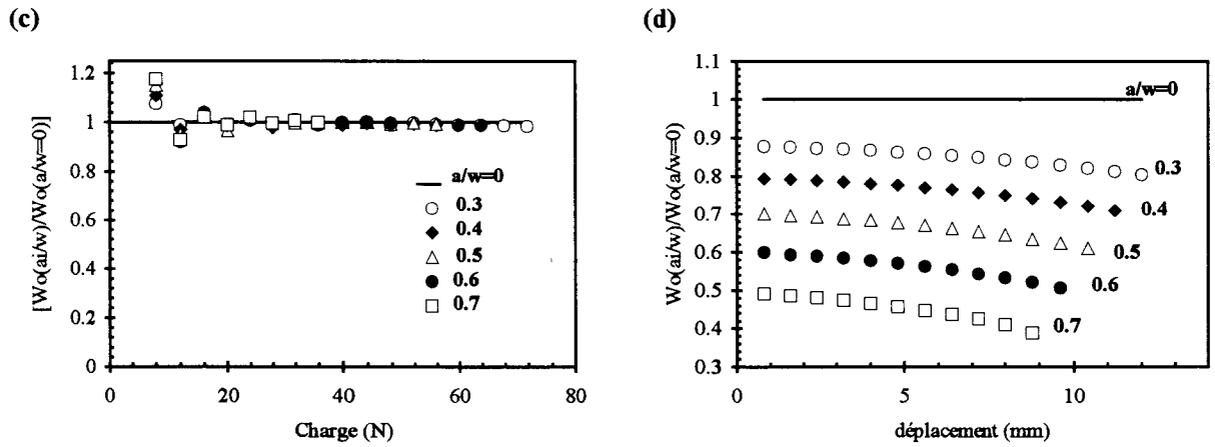


Figure 5.10.2: Evolution du rapport (moyenne de la densité d'énergie de déformation W_0 calculée loin du défaut / densité d'énergie de déformation d'une éprouvette vierge) dans le cas des éprouvettes D.E.N.T de l'E.P.D.M - (c)- en fonction de la charge - (d)- en fonction du déplacement.

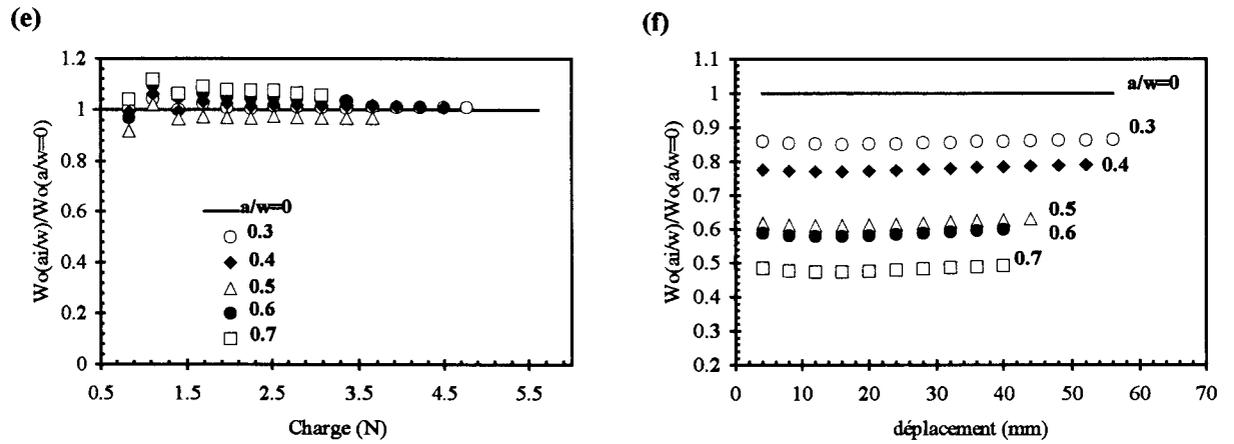


Figure 5.11.1: Evolution du rapport (moyenne de la densité d'énergie de déformation W_0 calculée loin du défaut / densité d'énergie de déformation d'une éprouvette vierge) dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène - (e)- en fonction de la charge - (f)- en fonction du déplacement.

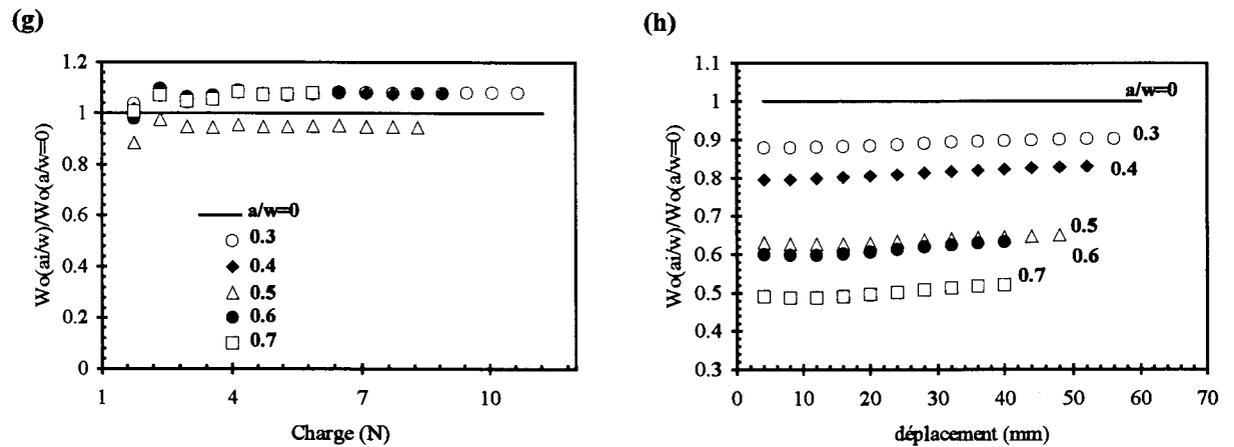


Figure 5.11.2: Evolution du rapport (moyenne de la densité d'énergie de déformation W_0 calculée loin du défaut / densité d'énergie de déformation d'une éprouvette vierge) dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène - (g)- en fonction de la charge (h)- en fonction du déplacement.

5.3. INDEPENDANCE DU CONTOUR D'INTEGRATION:

L'indépendance du contour d'intégration est l'une des propriétés essentielles sur laquelle repose l'utilisation de l'intégrale J de RICE. Cette propriété a été largement démontrée par les calculs aux éléments finis. Cependant, certains calculs utilisant des contours d'intégration très près de la fissure, laissent parfois apparaître que cette propriété ne soit pas vérifiée, ceci à cause des phénomènes d'endommagement.

Nous avons calculé l'intégrale J à travers quatre contours. Un de ces contours est situé sur la deuxième rangée d'éléments qui entourent le fond de fissure, les autres sont choisis loin des perturbations induites par cette fissure et suffisamment espacés entre eux (figure 5.12). Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 5.13 et 5.14, en fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 , pour l'exemple du rapport $a/w=0.5$.

Nous pouvons observer que l'indépendance de J vis à vis du contour d'intégration est entièrement satisfaite quand on s'éloigne suffisamment de la zone fortement déformée. Cependant, les valeurs de cette intégrale qui correspondent au contour situé près du fond de fissure présentent une déviation par rapport à celles issues des autres contours (figures 5.13 et 5.14). Cette déviation atteint environ 4% pour les deux géométries de l'E.P.D.M puis 12 et 7% respectivement pour les éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T du polybutadiène.

Ce résultat nous permet de conclure que l'intégrale J décrit correctement le champ des contraintes et des déformations en dehors de la zone affectée par les perturbations qu'induit la fissure et pourrait donc représenter un critère de rupture. Il confirme, par ailleurs, une fois de plus l'adéquation du modèle numérique choisi ainsi que celle du maillage adopté.

Les résultats illustrant l'indépendance du contour d'intégration pour les autres longueurs de fissure sont reportés en annexe 4.

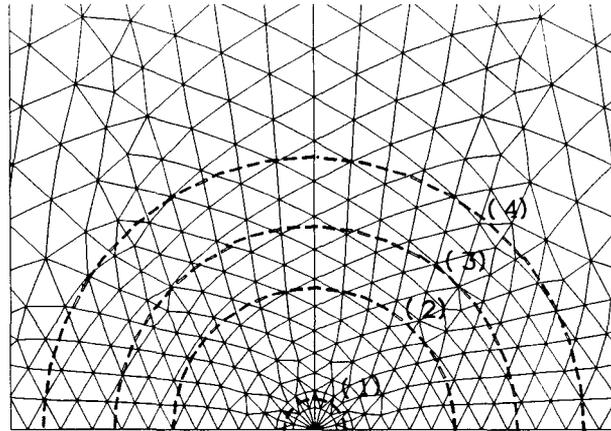


Figure 5.12: Exemple de contours à travers lesquels l'intégrale J est calculée

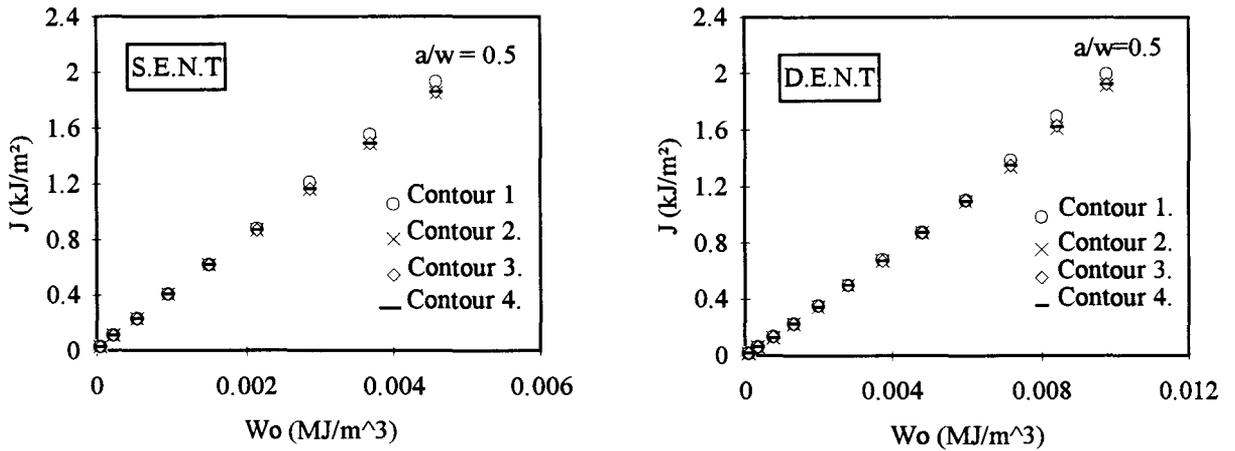


Figure 5.13: Intégrale J en fonction de la densité d'énergie de déformation W_o dans le cas de l'E.P.D.M

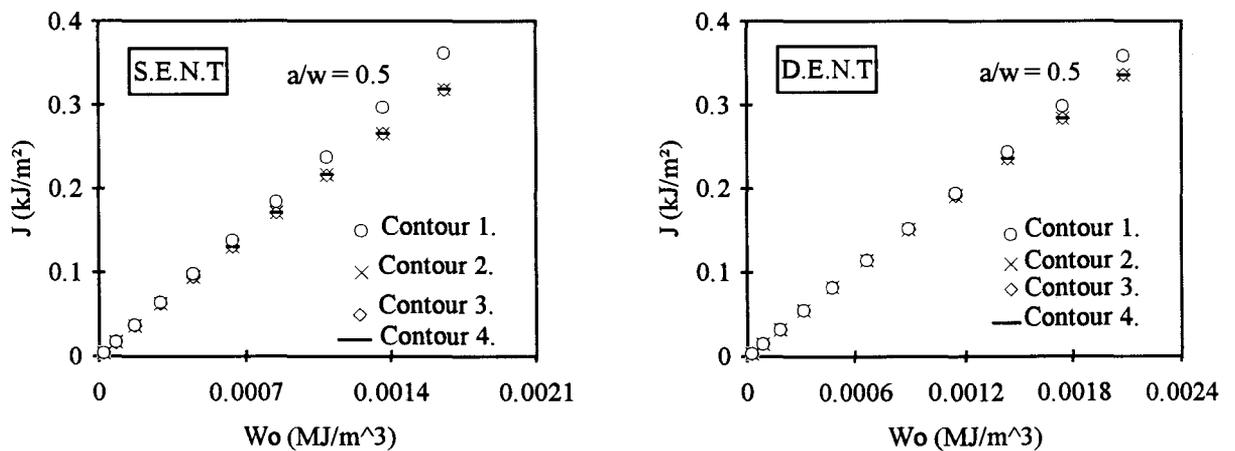


Figure 5.14: Intégrale J en fonction de la densité d'énergie de déformation W_o dans le cas du polybutadiène.

5.4. COMPARAISON DES VALEURS NUMERIQUES DE J CALCULEES SELON TROIS APPROCHES:

Les approches numériques que nous avons utilisées pour calculer J, par la méthode des éléments finis, sont:

- l'intégrale J de RICE dont le paramètre énergétique J est une extension;
- l'intégrale de BUI qui est une forme duale de l'intégrale de RICE;
- le calcul par différenciation d'énergie proposé par WATWOOD.

Pour chacun des deux matériaux étudiés, un seul type de maillage a été utilisé pour ce calcul.

Les figures 5.15 et 5.16 montrent que, dans le cas de l'E.P.D.M, les résultats de J qui découlent de ces trois approches sont en bon accord (divergences < 3% par rapport à l'intégrale de RICE). Cependant, pour le polybutadiène, les valeurs de J déterminées directement à partir de l'intégrale de RICE semblent être encadrées par celles issues des deux autres approches (figures 5.17 et 5.18). Les divergences relevées par rapport à cette intégrale atteignent au plus 8 % pour les éprouvettes S.E.N.T et 5% pour les éprouvettes D.E.N.T. Ce résultat laisse à penser qu'on devrait obtenir une concordance satisfaisante entre les valeurs numériques et expérimentales de J puisque le calcul proposé par WATWOOD est une interprétation énergétique de ce paramètre ($J = -\frac{\Delta U}{\Delta a}$)

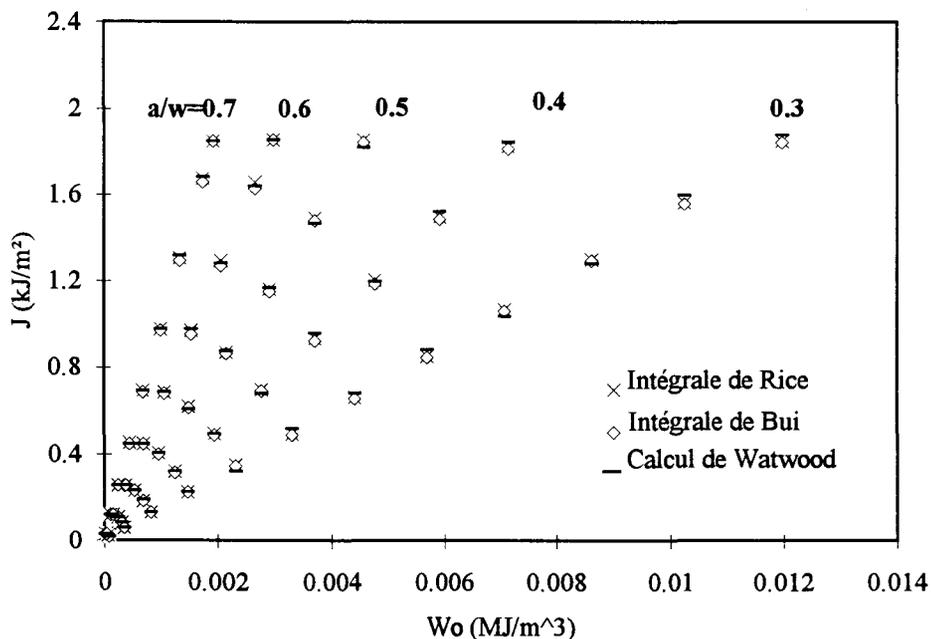


Figure 5.15: *J* obtenu numériquement selon trois approches dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M.

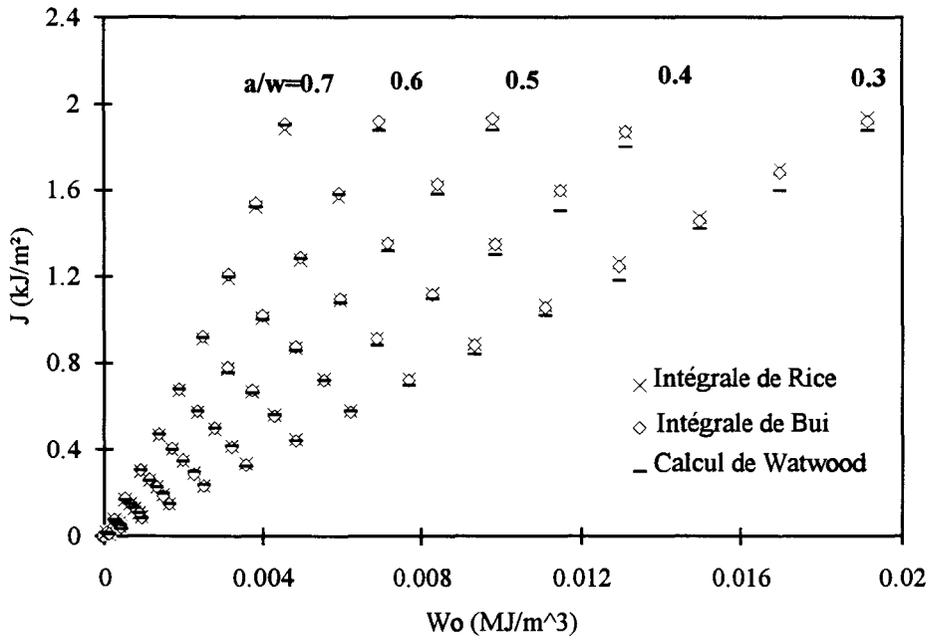


Figure 5.16: J obtenu numériquement selon trois approches dans le cas des éprouvettes D.E.N.T de l'E.P.D.M

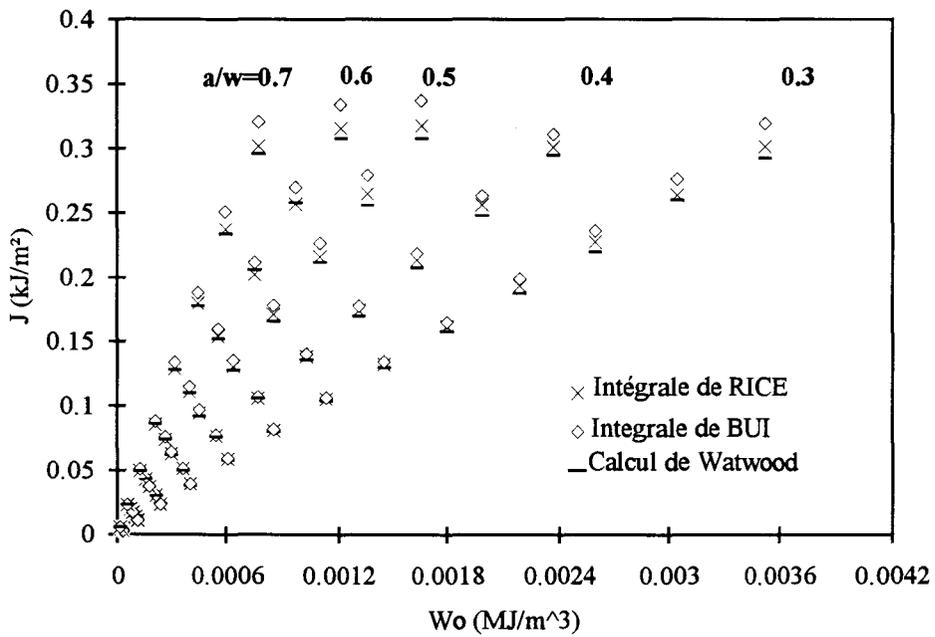


Figure 5.17: J obtenu numériquement selon trois approches dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

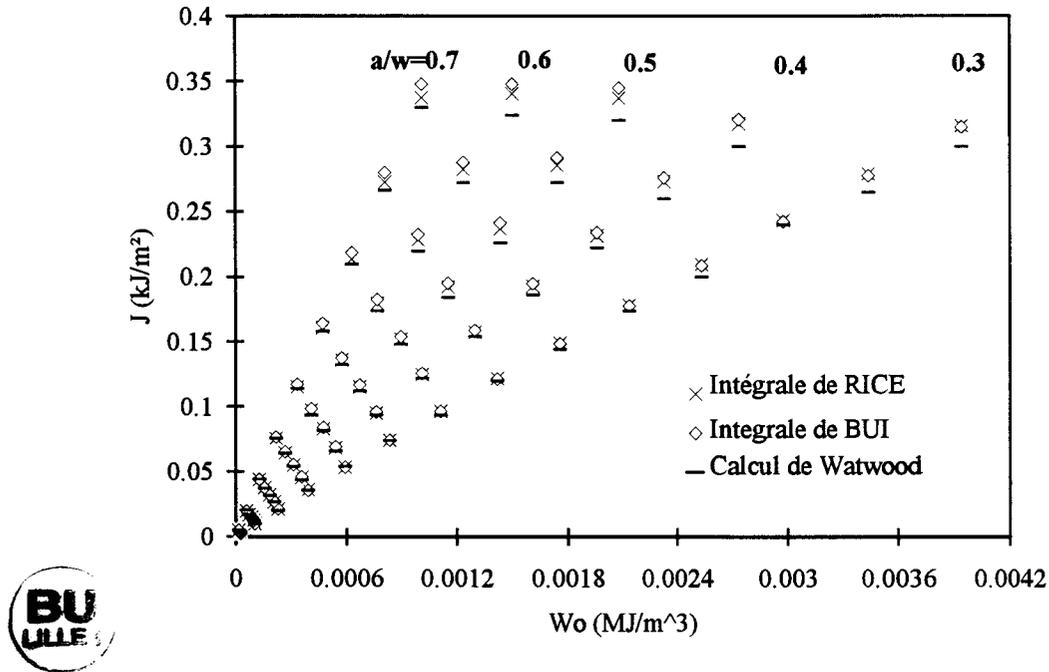


Figure 5.18: *J* obtenu numériquement selon trois approches dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

5.5. COMPARAISON ENTRE L'INTEGRALE J DE RICE ET LE PARAMETRE ENERGETIQUE J EXPERIMENTAL:

5.5.1. Résultat:

Le paramètre énergétique J a été évalué expérimentalement, pour différentes longueurs de fissure, en utilisant la relation 3.1 ($J=2.k(W_0).W_0.a.F(a/w)$).

Le rapport [$J(\text{intégrale})/J(\text{expérimental})$] est représenté en fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 , sur les figures 5.19, 5.20 et 5.21 respectivement pour les éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M et les éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T du polybutadiène.

Un bon accord est obtenu entre les résultats numériques et expérimentaux pour les fissures profondes ($a/w \geq 0.5$). En effet, les divergences relevées pour ces longueurs de fissure sont inférieures à 4%, sauf dans le cas où $a/w=0.6$ des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M. Pour celui-ci, ces divergences sont en effet d'environ 8% pour les faibles valeurs de W_0 mais diminuent au fur et à mesure que cette densité d'énergie de déformation augmente.

Les figures 5.19 à 5.21 montrent clairement que les valeurs expérimentales sont plus grandes que les valeurs numériques pour $a/w < 0.5$. Les divergences observées atteignent 30 % dans le

cas de l'E.P.D.M et 10% (pour $a/w=0.4$) puis 20% (pour $a/w=0.3$) dans le cas du polybutadiène. Ces divergences pourraient être attribuées à un manque de précision de la méthode de séparation dans ce domaine. Ce manque de précision serait lié aux fonctions de lissage ($G_1(a_i/w)=[1-a_i/w]^m$) qui, compte tenu des dispersions expérimentales, ne seraient pas suffisamment fines dans le domaine correspondant aux faibles longueurs de fissure.

Partons de l'hypothèse que l'intégrale de contour est la référence, hypothèse envisageable puisque le paramètre énergétique J est évalué expérimentalement après identification de la fonction de potentiel $k(W_0)$ et du facteur de géométrie $F(a/w)$. Il s'agit alors d'identifier plus précisément l'origine des divergences évoquées ci-dessus. Pour cela, nous avons effectué une analyse complémentaire à nos résultats numériques. En effet, en supposant que la paramètre énergétique J peut se mettre sous la forme multiplicative donnée par la relation 3.1 ($J=2.k(W_0).W_0.a.F(a/w)$), ce qui peut le plus facilement conduire à des informations complémentaires, est d'appliquer la technique de séparation directement aux valeurs numériques de J puis de comparer les fonctions $k(W_0)$ et $F(a/w)$ qui en découlent à celles issues de l'analyse expérimentale. Le cheminement de cette procédure est présenté dans ce qui suit.

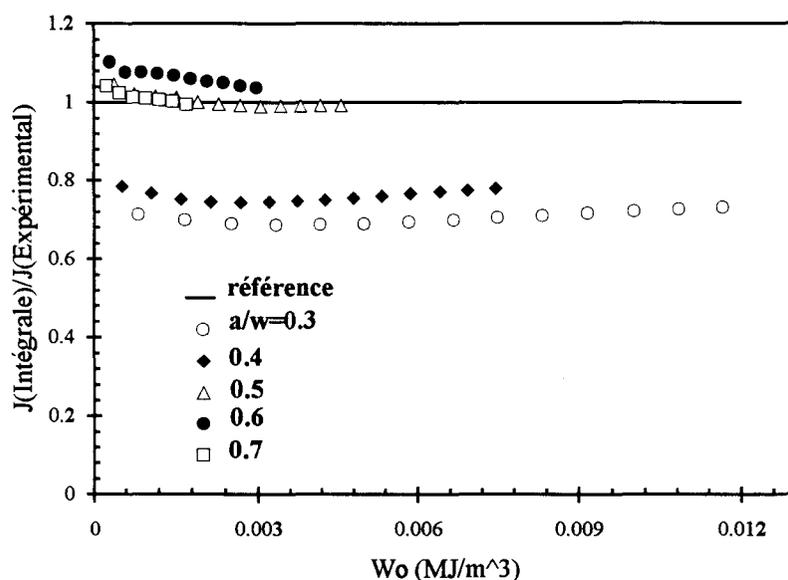


Figure 5.19: Rapport $[J(\text{numérique})/J(\text{expérimental})]$ en fonction de la densité d'énergie de déformation W_0 dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M

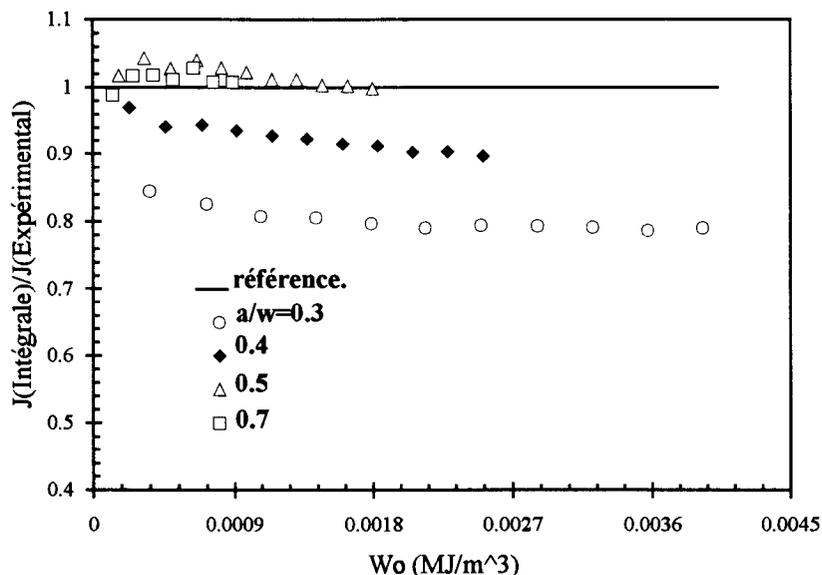


Figure 5.20: Rapport $[J(\text{numérique})/J(\text{expérimental})]$ en fonction de la densité d'énergie de déformation W_o dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène

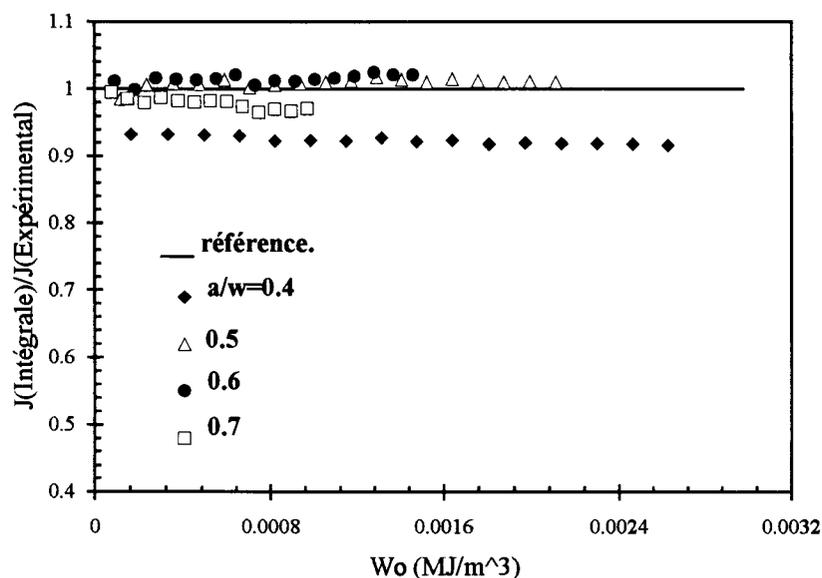


Figure 5.21: Rapport $[J(\text{numérique})/J(\text{expérimental})]$ en fonction de la densité d'énergie de déformation W_o dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène

5.5.2. Recherche des fonctions $k(W_o)$ et $F(a/w)$ à partir de l'intégrale J:

5.5.2.1 Application de la technique de séparation aux valeurs de l'intégrale J:

La technique de séparation est décrite dans la partie bibliographique (§ C.1.2 du chapitre 2) et nous l'avons reprise de nouveau quand nous avons interprété les résultats expérimentaux

(§ 3.6 du chapitre 3). Le principe d'application de cette méthode aux valeurs numériques de J reste le même. Ici, on part de l'hypothèse que si J se met sous la forme multiplicative donnée par la relation 3.1 ($J=2.k(W_o).W_o.a.F(a/w)$), le rapport S_{ij} , analogue à R_{ij} (relation 3.6) et défini par:

$$S_{ij} = \frac{J\left(W_o, \frac{a_i}{w}\right) \Big|_{W_o}}{J\left(W_o, \frac{a_j}{w}\right) \Big|_{W_o}} = \frac{H(W_o).G\left(\frac{a_i}{w}\right)}{H(W_o).G\left(\frac{a_j}{w}\right)} = \frac{G\left(\frac{a_i}{w}\right)}{G\left(\frac{a_j}{w}\right)} \quad (5.2)$$

devrait être constant pour une référence a_j/w donnée.

Un exemple d'évolution de S_{ij} en fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_o est représenté, pour une longueur de référence $a_j/w=0.5$, sur les figures 5.22, 5.23 et 5.24 respectivement pour les éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M. et les éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T du polybutadiène.

Nous pouvons constater que le paramètre de séparation S_{ij} est quasiment constant. La même tendance est observée lorsque nous prenons d'autres longueurs de référence (annexe 5). Ceci indique que l'expression de J sous une forme multiplicative est une hypothèse tout à fait pertinente.

Pour évaluer la fonction de géométrie $G(a/w)$, on suit la même démarche que celle décrite précédemment lorsque nous avons traité les résultats expérimentaux. L'avantage ici, est qu'il est possible de déterminer cette fonction de façon discrète sans qu'il soit nécessaire de l'approximer par une expression mathématique. Ceci rend l'application de la méthode de séparation relativement simple et permet de s'affranchir des erreurs éventuelles pouvant provenir des fonctions de lissage.

Ainsi, nous avons reporté sur les figures 5.25, 5.26 et 5.27 les valeurs du paramètre de séparation S_{ij} en fonction du rapport a/w (longueur de fissure/largeur) pour différentes références a_j/w et pour toutes les longueurs de fissure a_i/w . L'allure des courbes obtenues met en relief l'influence des effets des dimensions finies sur $G(a/w)$. Par ailleurs, nous avons remarqué que les valeurs du paramètre S_{ij} correspondant aux différentes références a_j/w , sont séparées par un facteur multiplicatif constant:

$$S_{i1}(a_i, a_1) = C_{i2} \cdot S_{i2}(a_i, a_2) = C_{i3} \cdot S_{i3}(a_i, a_3) = C_{i4} \cdot S_{i4}(a_i, a_4) = C_{i5} \cdot S_{i5}(a_i, a_5) \quad (5.4)$$

où C_{i2} , C_{i3} , C_{i4} , C_{i5} sont des constantes (tableaux 5.1, 5.2 et 5.3)

Ce résultat simplifie le problème puisque cela nous permet de déterminer les valeurs discrètes $G(a_i/w)$ à partir de celles de S_{ij} correspondant à une seule référence a_j/w quelconque:

$$G(a_i/w) = A_j \cdot S_{ij}(a_i, a_j) \tag{5.5}$$

avec $A_j = \left[G\left(\frac{a_j}{w}\right) \right]^{-1}$ (constante pour une longueur de fissure a_j fixée).

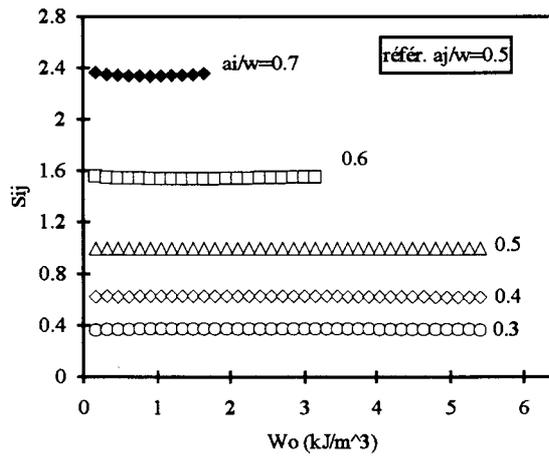


Figure 5.22: Paramètre de séparation S_{ij} obtenu dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M.

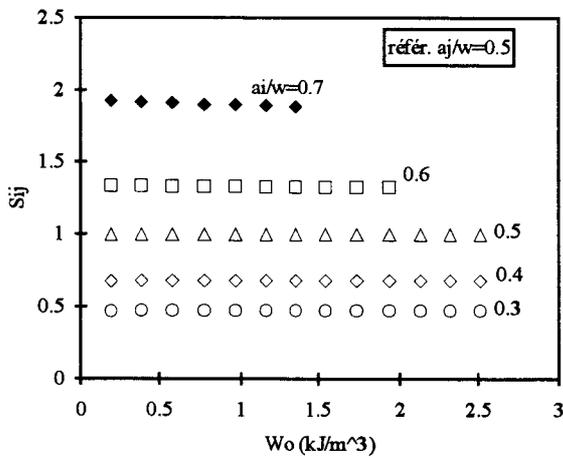


Figure 5.23: Paramètre S_{ij} obtenu dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

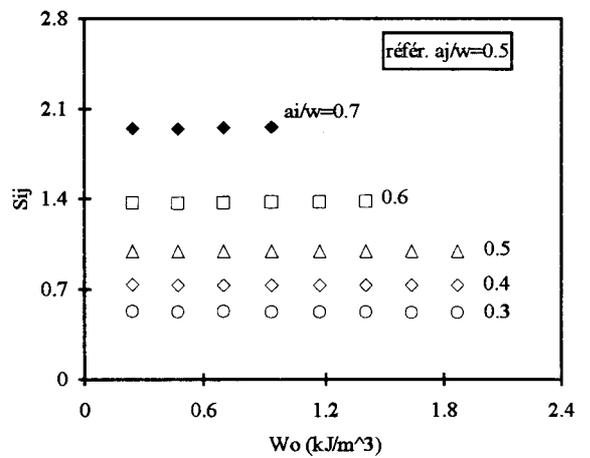


Figure 5.24: Paramètre S_{ij} obtenu dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

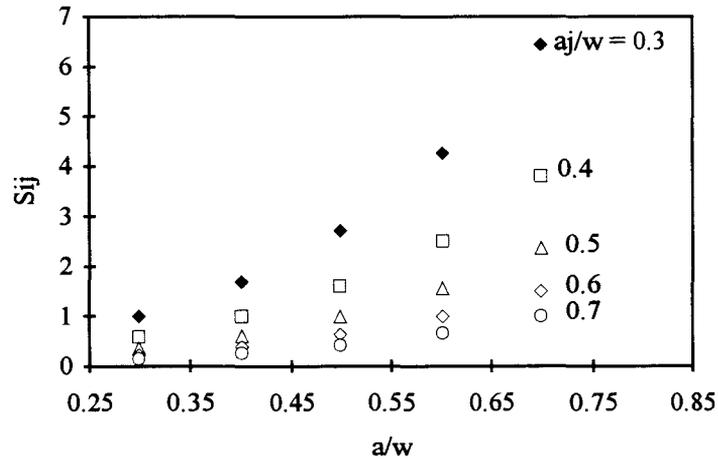


Figure 5.25: Paramètre de séparation S_{ij} en fonction du rapport (long. fis / larg.) dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M.

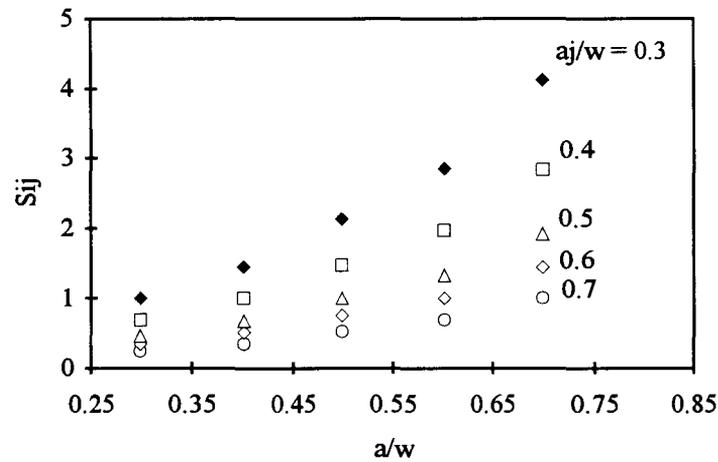


Figure 5.26: Paramètre de séparation S_{ij} en fonction du rapport (long. fis / larg.) dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

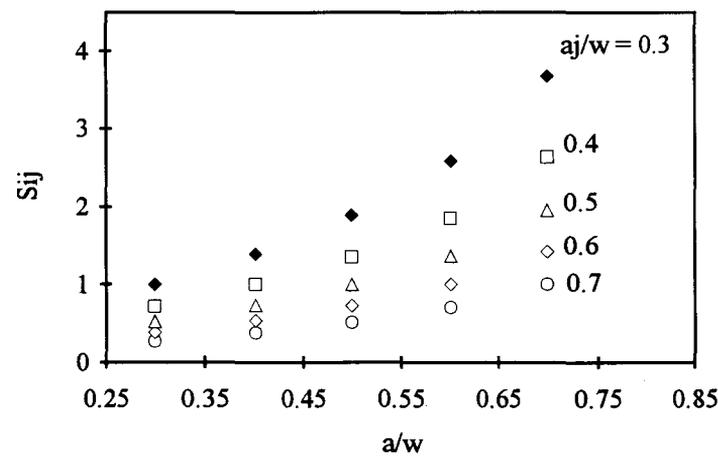


Figure 5.27: Paramètre de séparation S_{ij} en fonction du rapport (long. fis / larg.) dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

a_i/w	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}
0.3	1.695	2.720	4.264	6.450
0.4	1.695	2.726	4.264	6.450
0.5	1.691	2.720	4.254	6.435
0.6	1.695	2.726	4.264	6.450
0.7	1.695	2.726	4.264	6.450

Tableau 5.1: Valeurs des constantes C_{ij} dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M

a_i/w	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}
0.3	1.453	2.139	2.856	4.124
0.4	1.453	2.139	2.856	4.124
0.5	1.453	2.139	2.856	4.124
0.6	1.453	2.139	2.856	4.124
0.7	1.453	2.139	2.856	4.124

Tableau 5.2: Valeurs des constantes C_{ij} dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène

a_i/w	C_{i2}	C_{i3}	C_{i4}	C_{i5}
0.3	1.394	1.886	2.581	3.679
0.4	1.394	1.886	2.581	3.679
0.5	1.394	1.886	2.581	3.679
0.6	1.394	1.886	2.581	3.679
0.7	1.394	1.886	2.581	3.679

Tableau 5.3: Valeurs des constantes C_{ij} dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène

5.5.2.2. Identification de $k(W_o)$ et $F(a/w)$:

La fonction de géométrie $G(a/w)$ étant déterminée, nous avons calculé les fonctions $H(W_o)$, $k(W_o)$ et $F(a/w)$ à partir des expressions suivantes:

$$H(W_o) = \frac{J(W_o, \frac{a}{w})}{G(\frac{a}{w})} \quad (5.6)$$

$$k(W_o) = \frac{H(W_o)}{W_o} \cdot \frac{\pi}{H_o} \quad (5.7)$$

$$F(\frac{a}{w}) = \frac{G(\frac{a}{w})}{2 \cdot a} \cdot \frac{H_o}{\pi} \quad (5.8)$$

où $H_o (= \frac{H(W_o)}{W_o})$ quand $W_o \rightarrow 0$) est une constante permettant de normaliser la fonction de potentiel $k(W_o)$ à π quand W_o tend vers zéro.

5.5.2.3. Comparaison des fonctions $k(W_o)$ et $F(a/w)$ numériques et expérimentales:

Comme dans le cas de l'analyse expérimentale, la fonction $k(W_o)$ numérique ne dépend que de W_o (figures 5.28 à 5.30). Ceci confirme de nouveau que l'hypothèse d'existence d'une telle fonction est raisonnable.

L'évolution du rapport [$k(W_o)$ numérique]/[$k(W_o)$ expérimental] est reporté en fonction de la densité d'énergie de déformation W_o sur les figures 5.31 à 5.33. Celles-ci montrent que les divergences entre les résultats numériques et expérimentaux sont inférieures à 3% dans un large domaine de W_o , ceci pour tous les cas de figure considérés.

Concernant le facteur de calibration $F(a/w)$, l'étude numérique conduit à des résultats cohérents avec ceux obtenus expérimentalement pour les grandes longueurs de fissure (figures 5.34, 5.35 et 5.36). On constate, cependant, une divergence notable pour les petites longueurs de fissure. En effet, pour le rapport $a/w = 0.3$, les valeurs de $F(a/w)$ expérimentales (disponibles uniquement pour les éprouvettes S.E.N.T) sont supérieures à celles calculées numériquement.

Ces divergences nous permettent de conclure que les dispersions relevées entre les paramètres J numériques et expérimentaux (figure 5.19, 5.20 et 5.21) proviennent de cette fonction de géométrie et non de $k(W_o)$.

Dans l'analyse expérimentale, la détermination de $F(a/w)$ passe inévitablement par la dérivation de l'expression (3.8) ($G_1 = [1-a/w]^m$), alors qu'il est possible de l'évaluer directement point par point (fonction discrète) quand on analyse les résultats numériques (relation 5.8). Ceci n'est pas le cas dans ce qui a déjà été présenté dans les références [5.1] et [5.2]. Ainsi, on peut penser que les fonctions mathématiques ($G_1(a/w) = [1-a/w]^m$) choisies arbitrairement pour le lissage du paramètre de séparation R_{ij} (figures 3.14 à 3.16 du chapitre 3) ne décrivent pas de manière suffisamment fine l'évolution de celui-ci pour les faibles longueurs de fissure.

En effet, elles ont conduit, après dérivation (dG_1/da), à une fonction $F(a/w)$ ($= -\frac{m}{a.w} \cdot [1 - \frac{a}{w}]^{m-1}$) qui tend vers l'infini quand a/w tend vers zéro et possède un minimum pour $a/w=0.36$ et $a/w=0.42$ respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène. Par conséquent, par analogie à la mécanique linéaire élastique de la rupture, cette dernière expression n'est valable que dans la partie du domaine où $F(a/w)$ est strictement croissante, comme le facteur de calibration linéaire équivalent Y^2 .

Il s'agit maintenant de vérifier si la formulation du paramètre J , sous la forme multiplicative donnée par la relation 3.1 ($J=2.k(W_o).W_o.a.F(a/w)$), rend bien compte de l'évolution de celui-ci. Pour cela, nous avons comparé l'intégrale J avec le paramètre énergétique évalué à partir des valeurs de $k(W_o)$ et $F(a/w)$ numériques (figures 5.37 à 5.39). Les écarts observés sont très faibles, ils atteignent au plus 0.4 %. Cet excellent accord confirme la validité de la forme multiplicative de J et permet de conclure que la méthode de séparation n'induit pas d'erreurs lorsqu'elle est appliquée pour l'évaluation des fonctions numériques $k(W_o)$ et $F(a/w)$ à partir des valeurs de l'intégrale J .

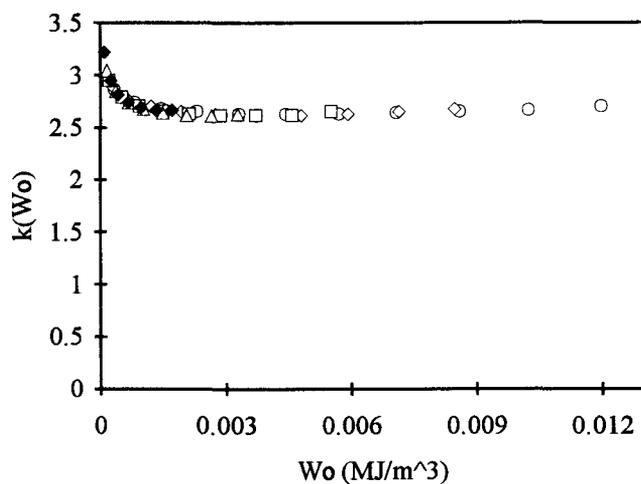


Figure 5.28: *Fonction de potentiel k numérique dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M.*

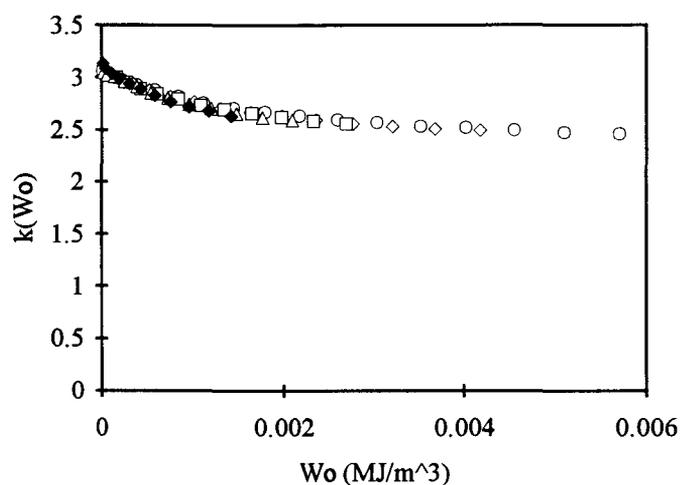


Figure 5.29: *Fonction de potentiel k numérique dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.*

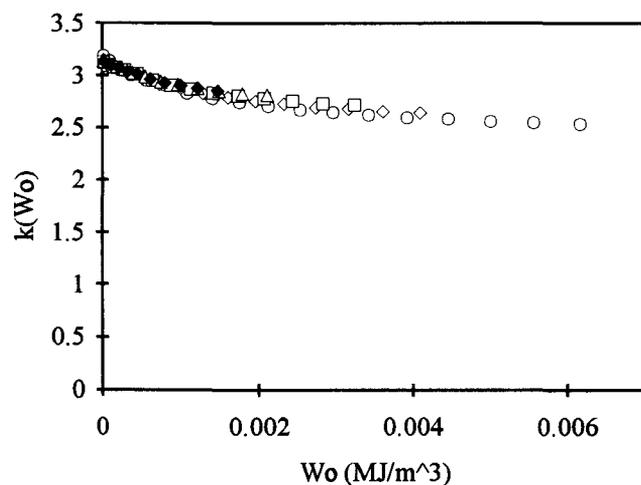


Figure 5.30: *Fonction de potentiel k numérique dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.*

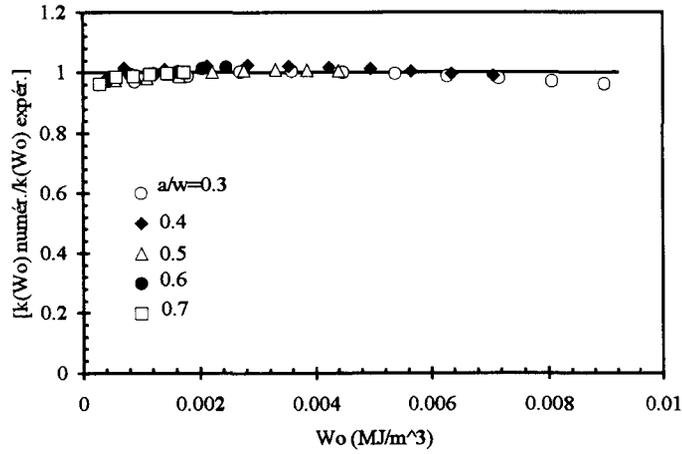


Figure 5.31: Rapport $[k(W_o) \text{ numérique}/k(W_o) \text{ expérimentale}]$ dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M.

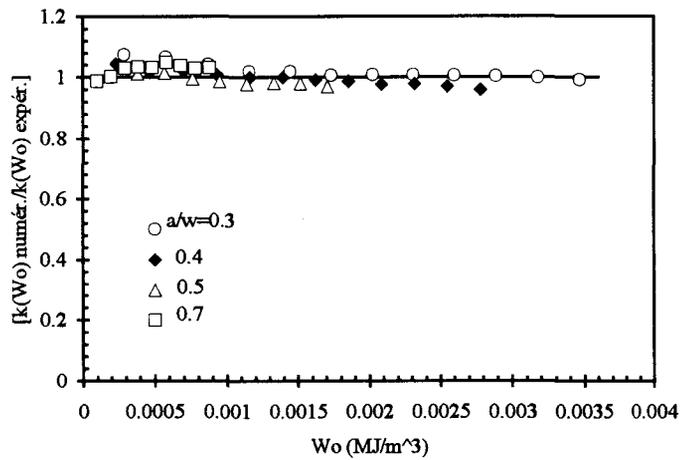


Figure 5.32: Rapport $[k(W_o) \text{ numérique}/k(W_o) \text{ expérimentale}]$ dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

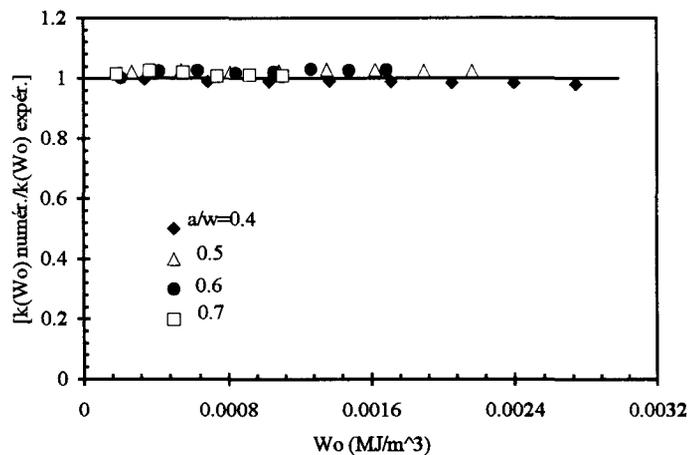


Figure 5.33: Rapport $[k(W_o) \text{ numérique}/k(W_o) \text{ expérimentale}]$ dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

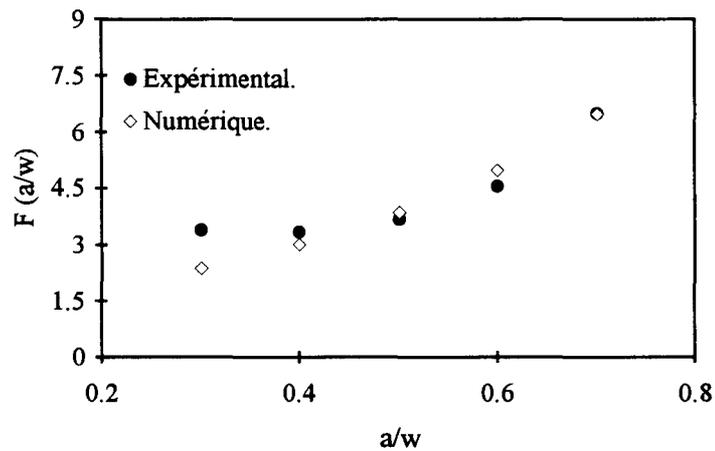


Figure 5.34: Facteurs de calibration expérimental et numérique dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M.

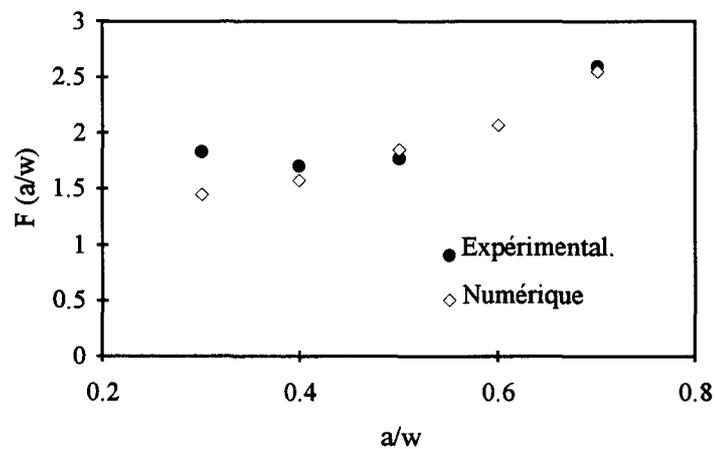


Figure 5.35: Facteurs de calibration expérimental et numérique dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

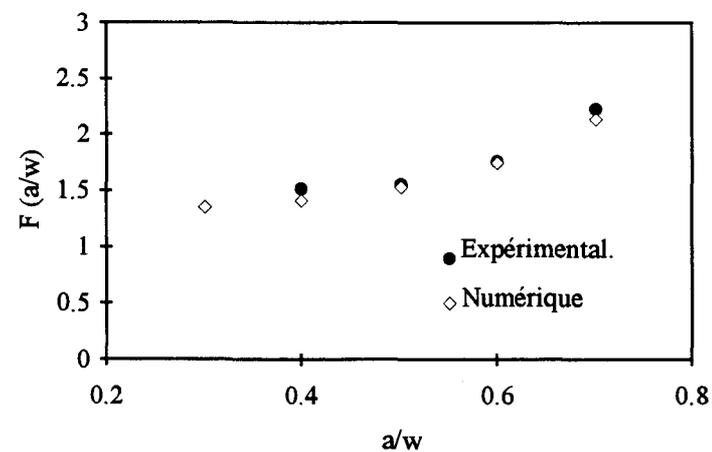


Figure 5.36: Facteurs de calibration expérimental et numérique dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

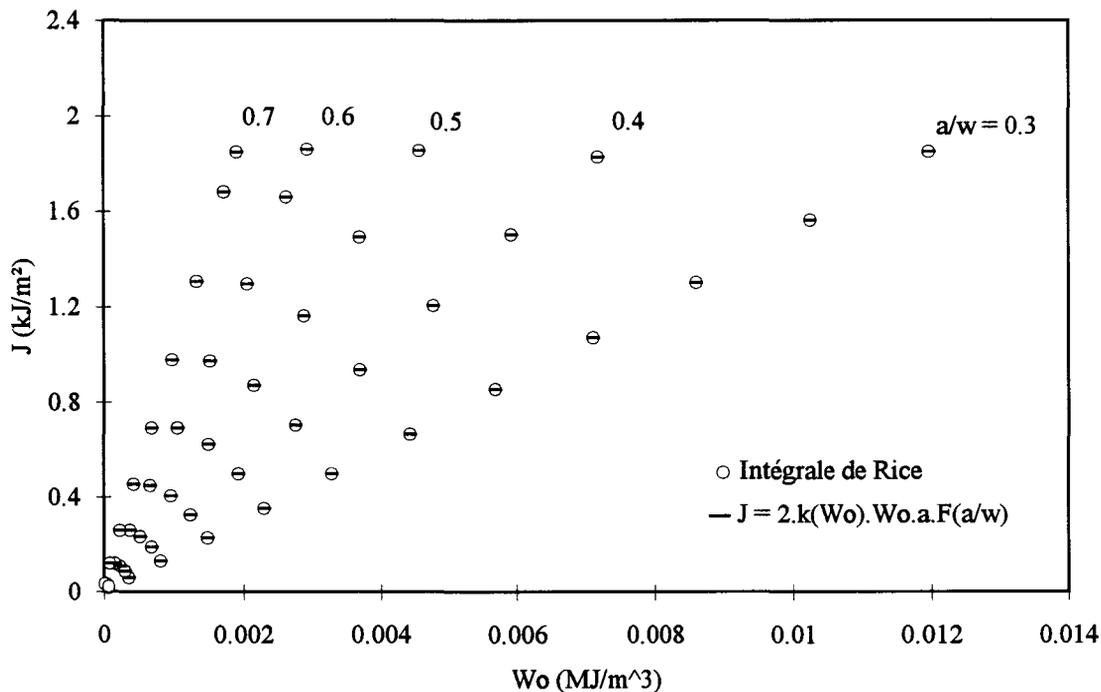


Figure 5.37: Intégrale J et le paramètre énergétique évalué en utilisant les fonctions numériques $k(W_o)$ et $F(a/w)$ (cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M)

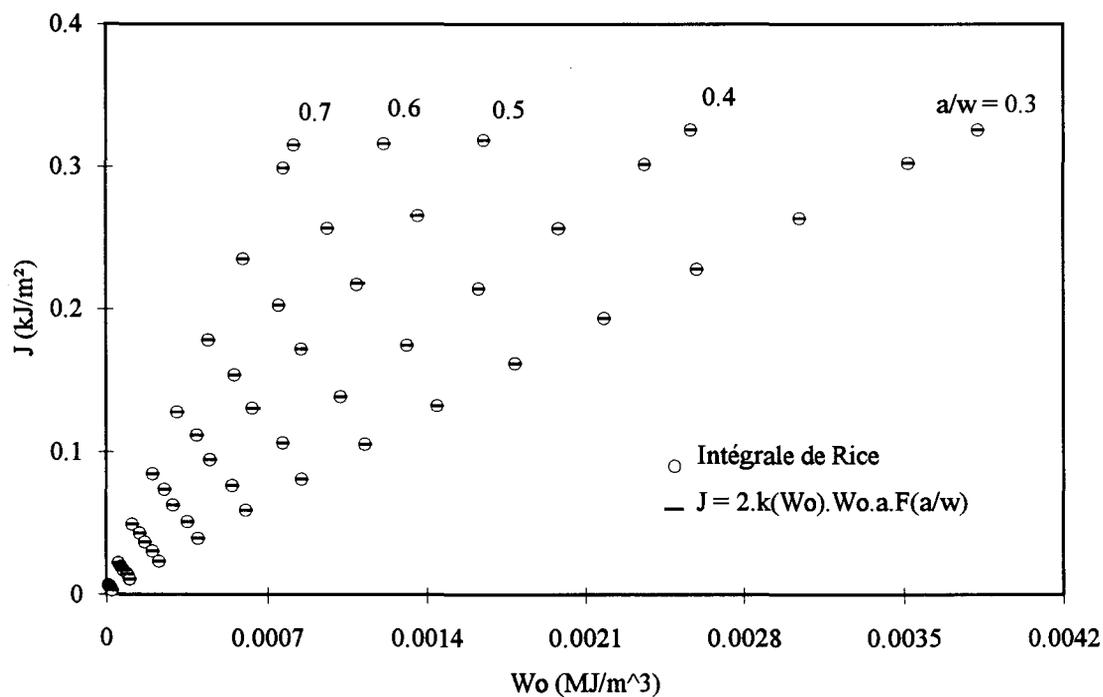


Figure 5.38: Intégrale J et le paramètre énergétique évalué en utilisant les fonctions numériques $k(W_o)$ et $F(a/w)$ (cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène)

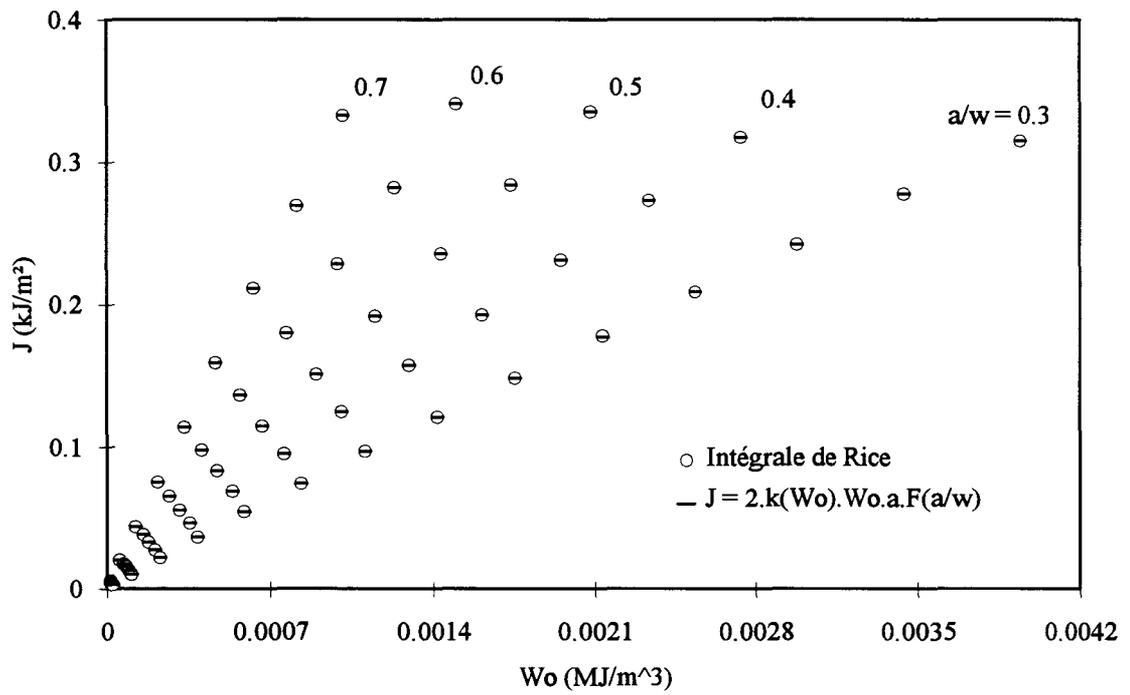


Figure 5.39: Intégrale J et le paramètre énergétique évalué en utilisant les fonctions numériques $k(W_o)$ et $F(a/w)$ (cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène)

5.6. Tableau synoptique sur l'application de la méthode de séparation directement à l'intégrale de contour J:

<p>Objectif: Identification des différents termes de l'expression du paramètre énergétique J proposée par Andrews et dans laquelle est introduite une fonction de géométrie: $J = 2.k(W_o).W_o.a.F(a/w)$</p>	
<p><i>Figure A: Intégrale J en fonction de W_o</i></p>	<p>1) Hypothèse:</p> $J(W_o, \frac{a}{w}) = H(W_o) \cdot G(\frac{a}{w}) \quad (a)$ <p>où H(W_o) une fonction uniquement de la densité d'énergie de déformation uniforme W_o et G(a/w) est une fonction liée à la géométrie de l'éprouvette.</p>
<p><i>Figure B: Paramètre de séparation S_{ij} en fonction de W_o</i></p>	<p>2) Définition d'un paramètre de séparation R_{ij}:</p> $S_{ij} = \frac{J\left(W_o, \frac{a_i}{w}\right) \Big _{W_o}}{J\left(W_o, \frac{a_j}{w}\right) \Big _{W_o}} = \frac{H(W_o) \cdot G\left(\frac{a_i}{w}\right)}{H(W_o) \cdot G\left(\frac{a_j}{w}\right)} = \frac{G\left(\frac{a_i}{w}\right)}{G\left(\frac{a_j}{w}\right)} \quad (b)$ <p>Résultat: S_{ij} est indépendant de W_o (figure B)</p> <p>Conclusion: La forme multiplicative de J (=H(W_o).G(a/w)) est une hypothèse pertinente.</p>
<p><i>Figure C: Moyenne du rapport S_{ij} en fonction de a/w</i></p>	<p>3) Fonctions d'approximations:</p> <p>→ G(a/w) est définie comme une fonction discrète. Il n'est donc pas besoin de passer par des fonctions de lissage.</p> $H(W_o) = \frac{J(W_o, \frac{a}{w})}{G(a/w)} \quad (c)$
<p><i>Figure D: Fonction de potentiel k numérique.</i></p>	<p>4) Identification de la fonction de potentiel k(W_o):</p> $k(W_o) = \frac{H(W_o)}{W_o} \cdot \frac{\pi}{H_o} \quad (d)$ <p>où H_o=H(W_o)/W_o quand W_o tend vers 0</p>
<p><i>Figure E: Fonctions de calibration expér. et num.</i></p>	<p>5) Identification de la fonction de géométrie F(a/w):</p> $F\left(\frac{a}{w}\right) = \frac{G\left(\frac{a}{w}\right)}{2 \cdot a} \cdot \frac{H_o}{\pi} \quad (e)$

5.7. EXTENSION DE L'ETUDE NUMERIQUE AUX CAS DE PETITES LONGUEURS DE FISSURE:

Il a été observé que le modèle numérique utilisé s'adapte bien à la simulation des essais expérimentaux que nous avons effectués. A partir de là, il nous a semblé judicieux d'étendre l'étude numérique afin d'évaluer la fonction de calibration $F(a/w)$ pour les faibles longueurs de fissure. Il faut souligner que, comme nous l'avons observé précédemment (§ 3.6 et 5.5.2), la détermination de cette fonction par l'application de la méthode de séparation aux résultats expérimentaux passe inévitablement par des fonctions de lissage (§ 3.6) ($G_1(a/w)=[1-a/w]^m$) susceptibles d'induire des erreurs, alors qu'il est possible de l'évaluer numériquement (§ 5.5.2) point par point (fonction discrète).

Nous avons donc calculé les valeurs de l'intégrale J pour $a/w=\{0.025, 0.05, 0.1, 0.2\}$ et nous leur avons appliqué la méthode de séparation de la même manière que nous l'avons fait au paragraphe 5.5.2.1.

Les valeurs de $F(a/w)$ qui découlent de ce calcul ainsi que celles évaluées auparavant pour les grandes longueurs de fissure, sont représentés sur le graphe (figure 5.40a), en fonction de a/w . Les facteurs de calibration linéaires Y^2 [3.3], [3.4] et [3.5] sont aussi reportés sur ce même graphe

Pour mieux mettre en évidence les dispersions obtenues entre les fonctions $F(a/w)$ et Y^2 , nous avons reporté sur la figure 5.40b les rapports suivants:

$$\frac{F(a/w) \text{ (S.E.N.T de l'E.P.D.M.)}}{Y^2 \text{ (S.E.N.T avec flexion)}} , \frac{F(a/w) \text{ (S.E.N.T du polybut.)}}{Y^2 \text{ (S.E.N.T sans flexion)}} , \frac{F(a/w) \text{ (D.E.N.T de l'E.P.D.M.)}}{Y^2 \text{ (D.E.N.T)}} , \frac{F(a/w) \text{ (D.E.N.T du polybut.)}}{Y^2 \text{ (D.E.N.T)}}$$

en fonction de a/w .

Cette figure indique que pour les éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène, les valeurs de $F(a/w)$ obtenues sont en bon accord avec celles du facteur de calibration linéaire Y^2 équivalent. En effet, la divergence entre ces deux fonctions est de 7% pour $a/w=0.7$ et elle est inférieure à 5% pour $a/w \leq 0.6$.

Pour tous les autres cas de figure considérés, les dispersions observées sont importantes. Elles atteignent 20% dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène et des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M; puis 80% dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de ce dernier matériau.

Ces divergences seraient imputables:

-aux effets de flexions induits par la dissymétrie de la géométrie S.E.N.T et dont l'incidence dépend de la rigidité du matériau.

-à la valeur du rapport hauteur/largeur des éprouvettes utilisées. Ce rapport est de 1 et ∞ respectivement pour Y^2 avec flexion et sans flexion, alors qu'il est de 5 dans le cas de notre étude.

Par ailleurs, indiquons que le coefficient de Poisson est de 0.5 pour les matériaux que nous avons étudiés, alors qu'il est de 0.3 pour les matériaux (métaux) auxquels correspond le facteur de calibration Y^2 .

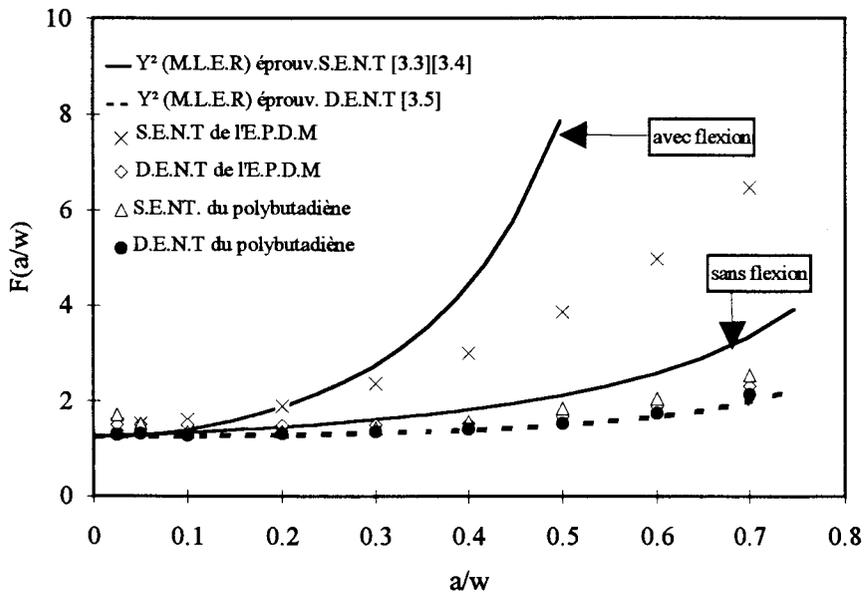


Figure 5.40a: Facteur de calibration $F(a/w)$ pour les petites longueurs de fissure.

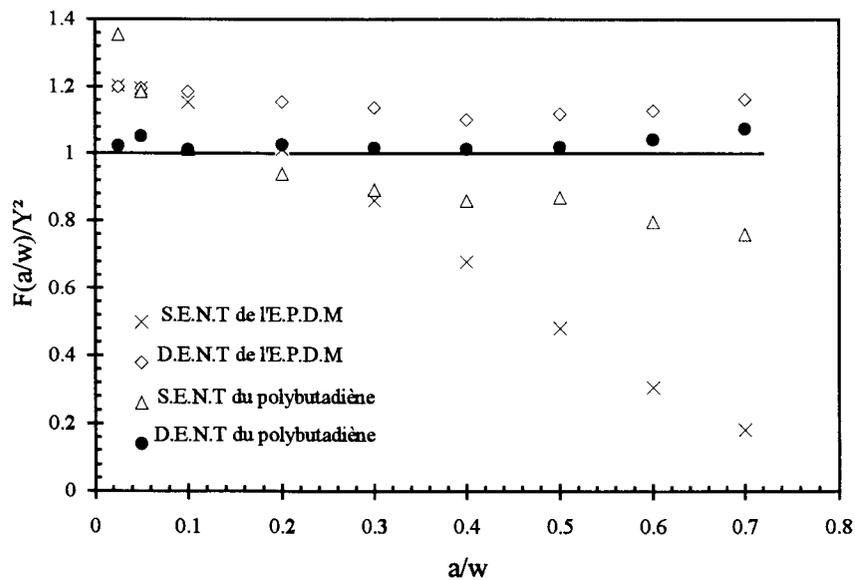


Figure 5.40b: Rapport $F(a/w)/Y^2$ en fonction de la longueur de fissure (a/w)

5.8. COMPARAISON ENTRE L'INTEGRALE J ET LES SOLUTIONS DE RIVLIN ET THOMAS:

5.8.1. Cas des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T:

Rappelons que RIVLIN et THOMAS [2.28] ont proposé un certain nombre de formulations de J pour des configurations géométriques particulières. Dans le cas des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T, ces auteurs ont suggéré de mettre ce paramètre sous la forme suivante:

$$J = 2 \cdot k(\lambda) \cdot W_{od} \cdot a \quad (5.9)$$

où W_{od} est la densité d'énergie de déformation uniforme contrôlée par le déplacement et correspondant à une éprouvette vierge soumise à une extension λ .

Il nous a paru intéressant de comparer le paramètre énergétique J issu de cette formulation à celui calculé à partir de l'intégrale de contour. Nous avons donc exprimé $k(\lambda)$ en utilisant la relation proposée par LAKE [2.30] ($k(\lambda)=\pi/\lambda^{1/2}$) et la densité d'énergie de déformation W_{od} a été déterminée à partir de la simulation par éléments finis d'une éprouvette non fissurée.

La figure 5.41 indique que pour les éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M., les solutions de RIVLIN et THOMAS sont beaucoup plus faibles que celles de l'intégrale J . Les divergences observées atteignent 40%. Celles-ci deviennent moins importantes (environ 10%) pour la même géométrie du polybutadiène (figure 5.43). Ce résultat peut être lié au fait que le polybutadiène est moins rigide que l'E.P.D.M et présente des déformations à rupture 4 fois plus grandes (80%) que celles de ce dernier (20%).

En ce qui concerne les éprouvettes D.E.N.T des deux matériaux étudiés, les valeurs de J issues de l'expression de RIVLIN et THOMAS présentent des déviations par rapport à l'intégrale de contour qui atteignent environ 10% pour les faibles valeurs de la densité d'énergie de déformation W_{od} (figures 5.42 et 5.44). Cependant, ces dispersions diminuent avec l'augmentation de W_{od} et deviennent inférieures à 4%, à l'exception du cas où $a/w = 0.3$ de l'E.P.D.M. Pour celui-ci, les dispersions restent toujours de 10%. Ces résultats nous permettent de conclure que la valeur critique J_c de J , correspondant aux matériaux étudiés, peut être déterminée à partir du modèle de RIVLIN et THOMAS appliqué aux éprouvettes D.E.N.T.

Pour tenter d'apporter quelques éclaircissements quant aux divergences citées ci-dessus, nous avons reporté sur un graphe (figures 5.45 et 5.46), en fonction du taux d'élongation λ , les

valeurs du facteur $k(\lambda)$ proposé par LAKE [2.30] ($k(\lambda)=\pi/\lambda^{1/2}$) et celles évaluées à partir de l'expression suivante:

$$k(\lambda) = \frac{J}{2 \cdot W_{od} \cdot a} \quad (5.10)$$

où J est W_{od} représentent respectivement l'intégrale de RICE et la densité d'énergie de déformation uniforme calculée numériquement.

Contrairement aux résultats de LINDLEY [2.53] et de GREENSMITH [2.29] que nous avons reportés dans la bibliographie sur la figure 2.26 (chapitre 2), le facteur $k(\lambda)$ que nous avons obtenu est presque constant. Ceci est tout simplement lié au fait que les valeurs du taux d'extension " λ " considérées ici soient faibles comparativement à celles qui correspondent aux matériaux étudiés par ces deux auteurs.

Par ailleurs, une nette influence de la géométrie est mise en évidence dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M. Cette dispersion devient faible pour la même géométrie du polybutadiène pour laquelle les effets de flexion sont moins prononcés et pour les éprouvettes D.E.N.T pour lesquelles ceux-ci sont quasiment inexistantes.

Ce résultat permet de conclure que les divergences précédemment observées entre l'intégrale J et la solution de RIVLIN et THOMAS sont liées aux effets de géométrie, amplifiés, à priori, par la flexion induite dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M. Notons que ce dernier phénomène a déjà été constaté sur la fonction de calibration $F(a/w)$ (figures 5.40a et 5.40b).

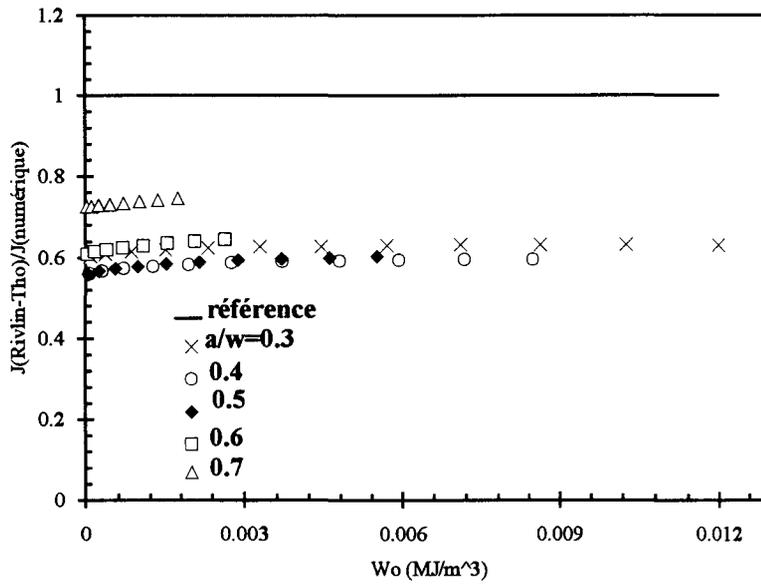


Figure 5.41: Rapport J (solution de Rivlin-Thomas)/ J (intégrale de Rice) dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M

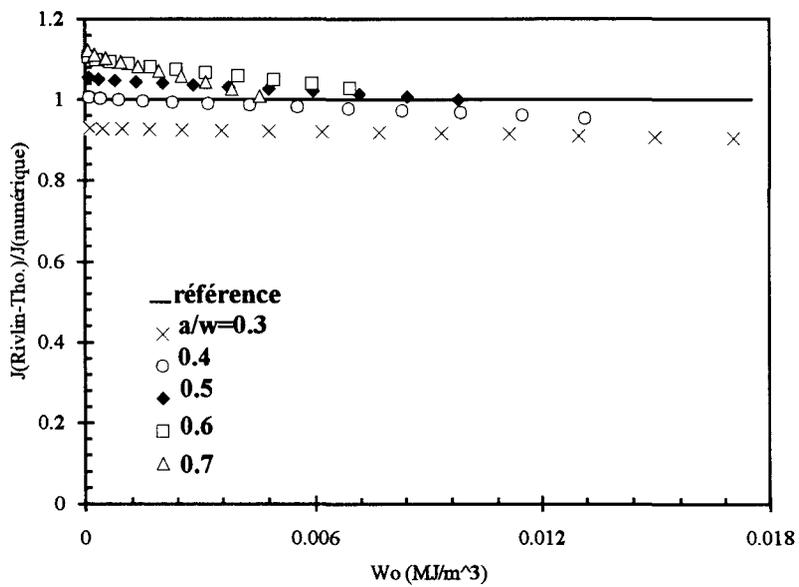


Figure 5.42: Rapport J (solution de Rivlin-Thomas)/ J (intégrale de Rice) dans le cas des éprouvettes D.E.N.T de l'E.P.D.M

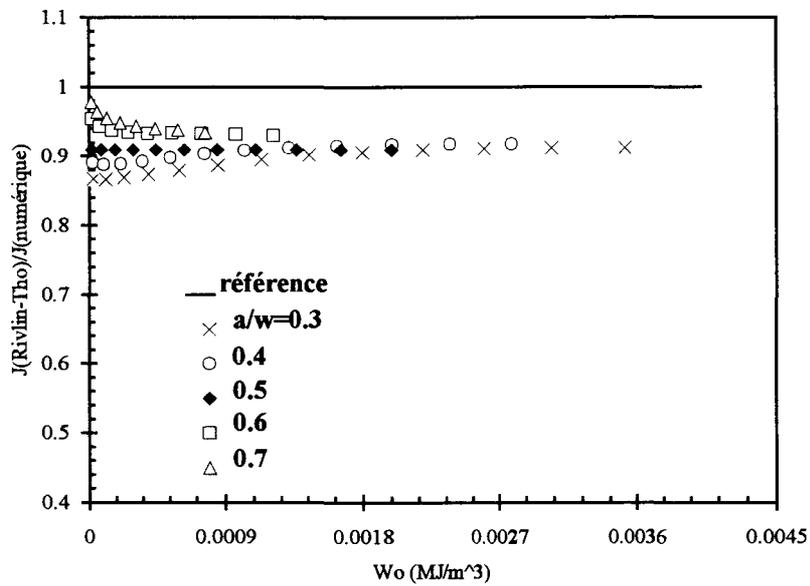


Figure 5.43: Rapport $J(\text{solution de Rivlin-Thomas})/J(\text{intégrale de Rice})$ dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

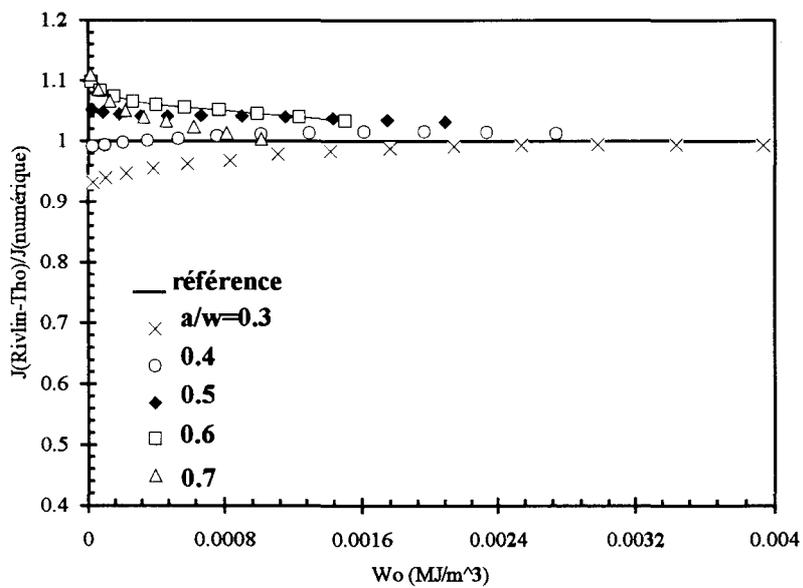


Figure 5.44: Rapport $J(\text{solution de Rivlin-Thomas})/J(\text{intégrale de Rice})$ dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

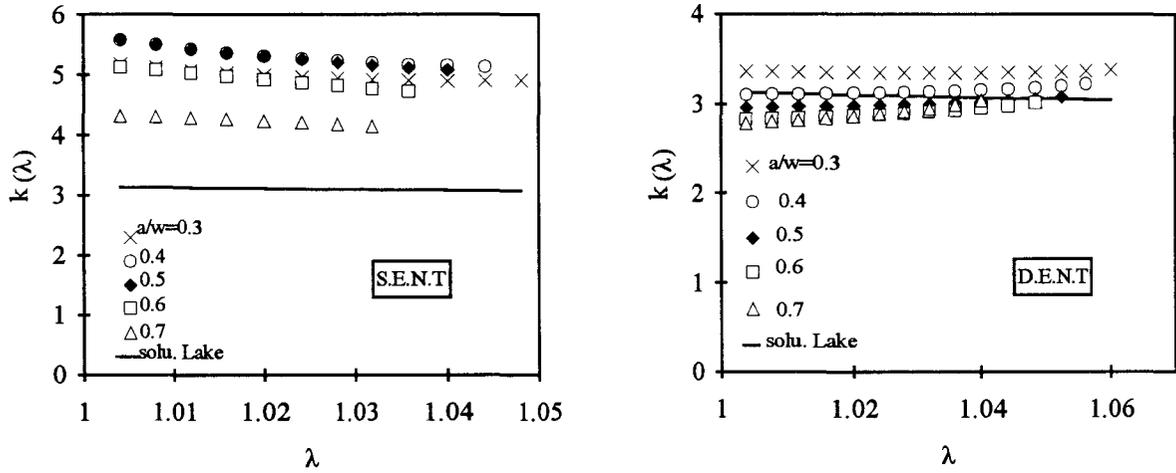


Figure 5.45: Facteur k en fonction du taux d'extension λ dans le cas de l'E.P.D.M.

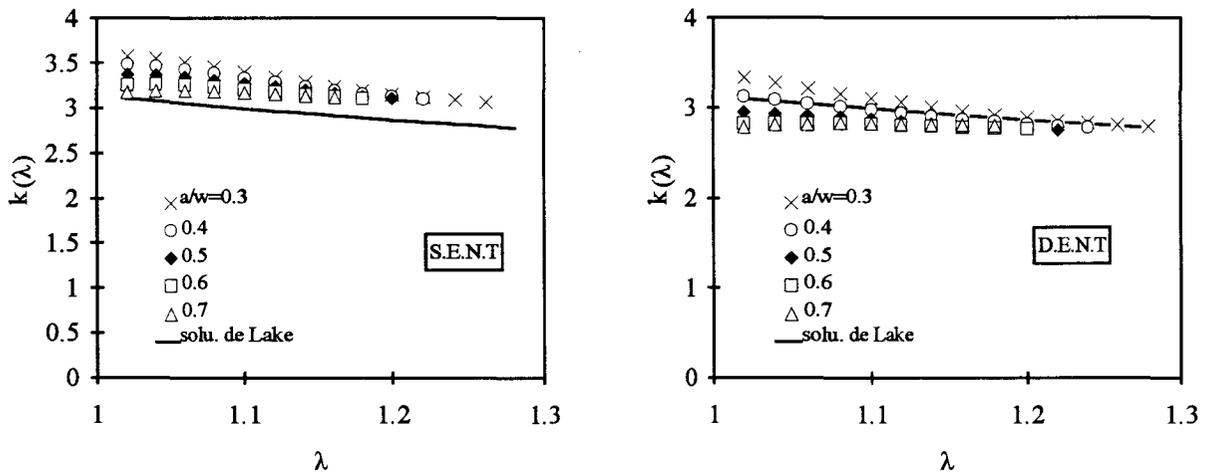


Figure 5.46: Facteur k en fonction du taux d'extension λ dans le cas du polybutadiène.

5.8.2. Cas des éprouvettes de cisaillement pur (éprouvettes C.P):

5.8.2.1. Géométrie d'une éprouvette C.P:

La figure 5.47 montre l'exemple de géométrie d'une éprouvette C.P (éprouvette de cisaillement pur). Il s'agit d'une plaque rectangulaire de faible épaisseur (B), de largeur (w) suffisamment grande comparativement à la hauteur (h) et contenant une fissure de longueur a . Cette éprouvette est sollicitée en traction dans le sens (1) du repère. La hauteur doit être suffisamment petite devant la largeur de sorte que l'élongation de l'éprouvette suivant le sens (2) soit négligeable.

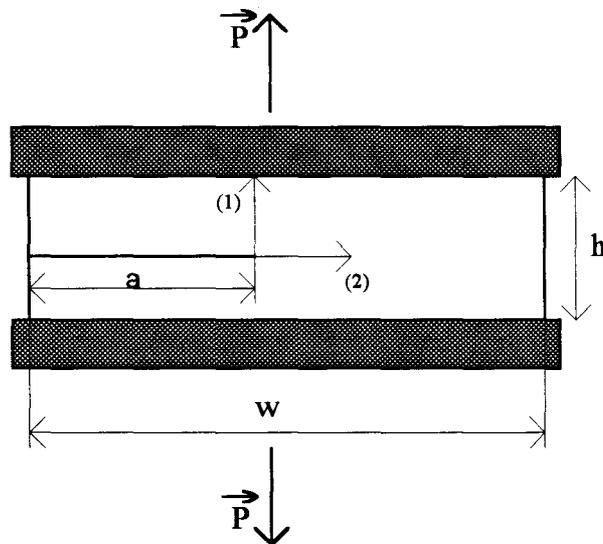


Figure 5.47: Géométrie d'une éprouvette C.P

5.8.2.2. Expression du paramètre énergétique J:

RIVLIN et THOMAS [2.28] ont adapté l'approche de GRIFFITH [2.3] pour exprimer, dans le cas des éprouvettes C.P, le paramètre énergétique J proportionnellement à la hauteur h de l'échantillon et à la densité d'énergie de déformation uniforme W_{od} contrôlée par le déplacement:

$$J = W_{od} \cdot h \quad (5.11)$$

Cette expression est extrêmement simple et nécessite la seule connaissance de la densité d'énergie de déformation W_{od} pour déterminer les valeurs du paramètre J. Elle a été, par ailleurs, retrouvée par ANDREWS [2.37] lorsqu'il a appliqué la première équation de sa théorie généralisée de la mécanique de la rupture. De même, elle peut être démontrée théoriquement en considérant l'intégrale de RICE [2.17] à travers un contour choisi suffisamment loin du défaut.

5.8.2.3. Analyse numérique effectuée:

Pour les deux types de matériaux étudiés, nous avons effectué des calculs par éléments finis en considérant des éprouvettes de hauteur $h = 30$ mm, de largeur $w = 140$ mm et de longueurs de fissure $a/w = \{0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$. Un exemple d'une éprouvette C.P discrétisée est montré sur la figure 5.48. En raison de la symétrie, seule la moitié de l'éprouvette est analysée. Le maillage utilisé comporte 500 éléments dont la taille minimale est de 1 mm en pointe de fissure. Comme dans le cas des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T, la finesse du maillage dans cette zone est limitée de manière à obtenir pour ces éléments des

solutions qui restent dans le domaine défini par la loi de comportement. La simulation du chargement est réalisée de la même façon que pour des éprouvettes S.E.N.T, c'est à dire en imposant des déplacements par pas aux noeuds situés sur l'un des deux bords de l'éprouvette perpendiculaires à la direction de traction.

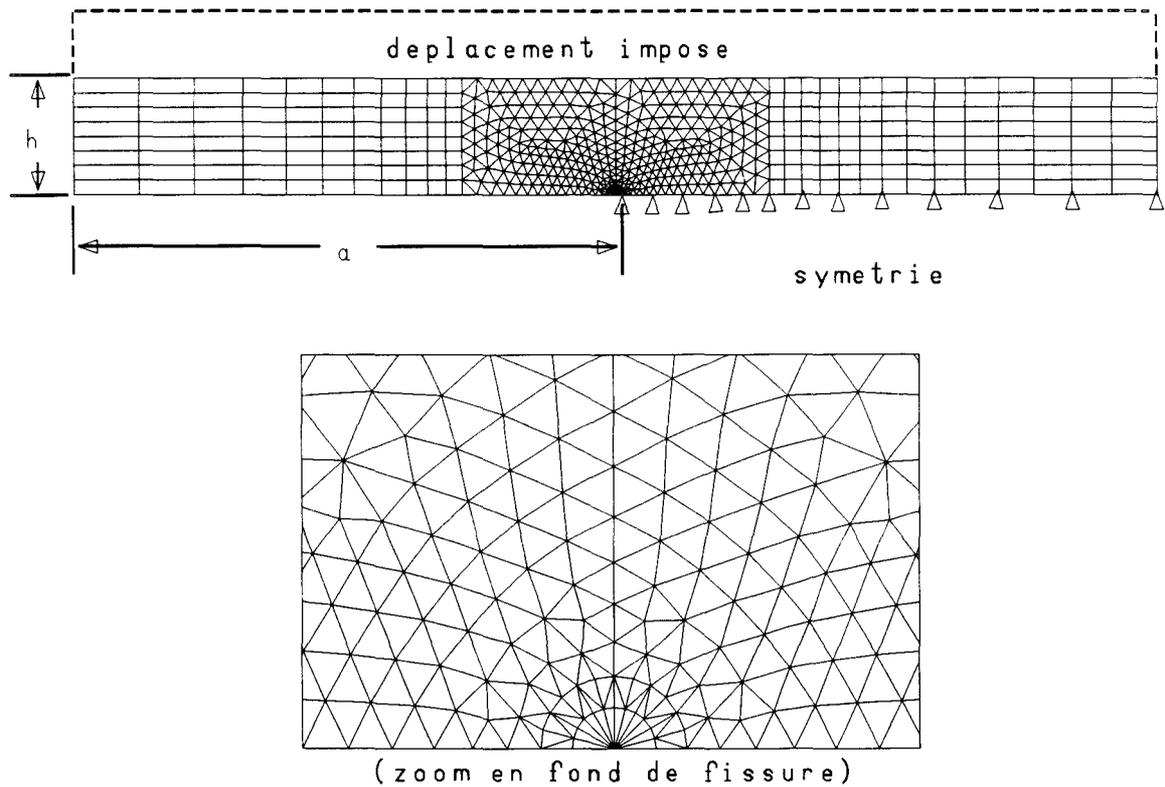


Figure 5.48: Exemple d'une éprouvette C.P discrétisée

5.8.2.4. Densité d'énergie de déformation calculée loin du défaut:

Lors de notre étude, nous avons examiné les valeurs de la densité d'énergie de déformation pour la rangée d'éléments situés loin du défaut (figure 5.49), à différents déplacements 'd' imposés et pour toutes les longueurs de fissure. Cette densité d'énergie de déformation est uniforme dans cette région comme l'illustrent, dans le cas d'une longueur de fissure ($a/w=0.5$), les tableaux 5.4 et 5.5 respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène.

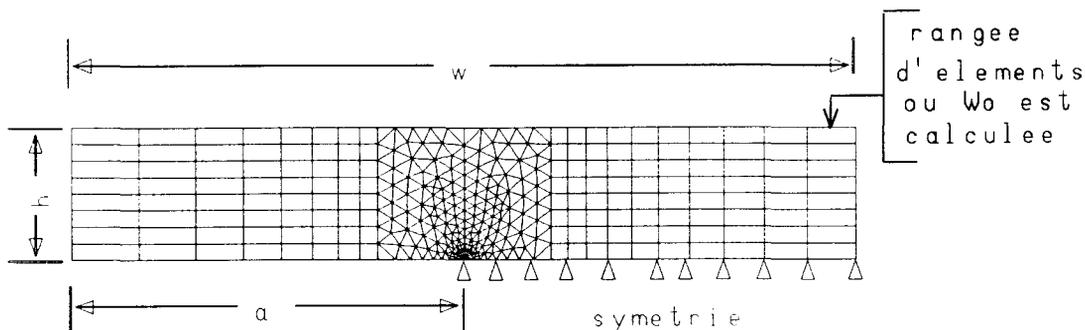


Figure 5.49: Eléments où la densité d'énergie de déformation est calculée.

a/w = 0.5	Densités d'énergie de déformation W_o (MJ/m ³)				
Coord. "y" (mm)	d = 0.8	d = 1.6	d = 2.4	d = 3.2	d = 4
1.5	0.00504	0.018498	0.038196	0.062321	0.089374
4.5	0.00504	0.018498	0.038195	0.062318	0.089363
7.5	0.00504	0.018498	0.038194	0.062312	0.089345
10.5	0.00504	0.018498	0.038192	0.062307	0.089327
13.5	0.00504	0.018498	0.038192	0.062303	0.089317

Tableau 5.4: Valeurs des densités d'énergie de déformation calculées loin du défaut dans le cas des éprouvettes C.P de l'E.P.D.M. (exemple d'une longueur de fissure: a/w = 0.5)

a/w = 0.5	Densité d'énergie de déformation W_o (MJ/m ³)				
Coord. "y" (mm)	d = 2	d = 6	d = 10	d = 12	d = 14
1.07	0.00033751	0.002561	0.0064046	0.0088543	0.011623
3.21	0.00033751	0.0025611	0.006405	0.0088553	0.011625
5.35	0.00033751	0.0025611	0.0064057	0.0088567	0.011627
7.49	0.00033752	0.0025612	0.0064064	0.0088582	0.01163
9.63	0.00033752	0.0025613	0.006407	0.0088595	0.011632
11.77	0.00033752	0.0025614	0.0064075	0.0088606	0.011634
13.91	0.00033752	0.0025614	0.0064078	0.0088611	0.011635

Tableau 5.5: Valeurs des densités d'énergie de déformation calculées loin du défaut dans le cas des éprouvettes C.P du polybutadiène (exemple d'une longueur de fissure: a/w = 0.5)

Nous avons, par ailleurs, effectué la moyenne sur les valeurs des densités d'énergie de déformation correspondant aux éléments cités ci-dessus. Les résultats obtenus sont ensuite reportés, à titre d'exemple pour trois longueurs de fissure et à différents déplacements, sur les tableaux 5.6 et 5.7 respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène.

Déplac. "d" (mm)	Densités d'énergie de déformation moyennes W_0 (MJ/m ³)				
	a/w = 0	a/w = 0.1	a/w = 0.3	a/w = 0.5	a/w = 0.7
0.4	0.0013155	0.00131549	0.00131549	0.00132	0.00131548
0.8	0.00504	0.00504	0.00504	0.00504	0.00504
1.2	0.010863	0.01086225	0.01086228	0.0109	0.0108623
1.6	0.018499	0.01849795	0.01849795	0.0185	0.01849807
2	0.027688	0.02768745	0.0276875	0.0276874	0.02768777
2.4	0.038194	0.03819375	0.03819375	0.0381938	0.03819467
2.8	0.049802	0.04980095	0.049801	0.049801	0.04980267
3.2	0.062313	0.062312	0.062312	0.062312	0.062316
3.6	0.075549	0.075548	0.07554775	0.0755478	0.07555567
4	0.089346	0.0893455	0.08934525	0.0893452	0.08936033

Tableau 5.6: Densités d'énergie de déformation moyennes W_0 loin du défaut dans le cas des éprouvettes C.P de l'E.P.D.M.

Déplac. "d" (mm)	Densités d'énergie de déformation moyennes W_0 (MJ/m ³)				
	a/w = 0	a/w = 0.1	a/w = 0.3	a/w = 0.5	a/w = 0.7
2	0.00033752	0.00033752	0.00033752	0.00033752	0.00033751
4	0.0012249	0.00122491	0.00122491	0.00122491	0.0012249
6	0.0025618	0.00256119	0.00256118	0.00256119	0.00256115
8	0.0042992	0.00429856	0.00429855	0.00429855	0.00429847
10	0.0064068	0.00640605	0.00640605	0.00640604	0.0064059
12	0.0088583	0.00885745	0.00885743	0.00885744	0.00885723
14	0.01163	0.01162865	0.01162863	0.01162864	0.01162837

Tableau 5.7: Densités d'énergie de déformation moyennes W_0 loin du défaut dans le cas des éprouvettes C.P du polybutadiène

Nous observons que, pour un déplacement donné, la densité d'énergie de déformation calculée, est sensiblement la même quelle que soit la longueur de fissure. Il faut noter que ces résultats restent identiques lorsque l'on considère les autres longueurs de fissure.

Ainsi, nous pouvons conclure que les éprouvettes C.P. étudiées, correspondent bien à celles préconisées par RIVLIN et THOMAS:

- la densité d'énergie de déformation évaluée loin du défaut est contrôlée par le déplacement;
- les éprouvettes étudiées répondent bien aux conditions de cisaillement pur.

5.8.2.4. Intégrale J de RICE et solution théorique de RIVLIN et THOMAS:

Comme pour les éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T, nous avons évalué numériquement l'intégrale J de RICE dans le cas des éprouvettes C.P à travers quatre contours. Le premier contour est situé sur la deuxième rangée d'éléments entourant le fond de fissure et les trois autres sont choisis loin du défaut et suffisamment espacés entre eux (figure 5.50). Etant donné que nous ne disposons pas de solutions expérimentales pour ce type de géométrie, nous nous sommes contenté d'examiner simplement la propriété d'indépendance du contour d'intégration afin de vérifier l'adéquation du maillage utilisé et la validité de l'intégrale J. Cette propriété est amplement satisfaite quand on s'éloigne des perturbations induites par la fissure. Cependant, les valeurs de J issues du premier contour présentent une déviation, par rapport à celles issues des trois autres contours, qui atteint environ 4 % dans le cas de l'E.P.D.M. et 6 % dans le cas du polybutadiène. Les figures 5.51 et 5.52 illustrent ces résultats pour un exemple de longueur de fissure $a/w=0.4$ de l'E.P.D.M et $a/w = 0.5$ du polybutadiène. Les résultats correspondant aux autres longueurs de fissure sont reportés en **annexe 6**.

Nous avons ensuite représenté les valeurs numériques de J sur les figures 5.53 et 5.54, en fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_{od} contrôlée par le déplacement, respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène. La solution théorique de RIVLIN et THOMAS, calculée en utilisant la densité d'énergie de déformation W_{od} déterminée à partir de la simulation par éléments finis d'une éprouvette non fissurée, est aussi reportée sur ces mêmes figures. Les résultats ne sont illustrés ici que pour les rapports $a/w=\{0.05, 0.4, 0.8\}$. Quant à ceux correspondant aux longueurs de fissure intermédiaires, ils sont reportés en **annexe 7**.

Les courbes numériques s'ajustent sur celles correspondant aux résultats théoriques à moins de 2% près pour l'E.P.D.M et à moins de 4% près pour le polybutadiène. Cependant, les dispersions atteignent, pour les grandes déformations, environ 10% dans le cas de la configuration du polybutadiène où $a/w=0.05$. Etonnamment, ce phénomène ne se manifeste pas dans le cas de l'E.P.D.M. Ce résultat permet simplement de conclure que l'hypothèse de

distribution de densité d'énergie sur laquelle repose la théorie de RIVLIN et THOMAS (§ B.2 du chapitre 2) ne serait pas vérifiée pour $a/w=0.05$ du polybutadiène. Il faut noter que le taux de déformation à rupture de ce matériau est de (80 %) alors que celui de l'E.P.D.M n'est que de (20 %).

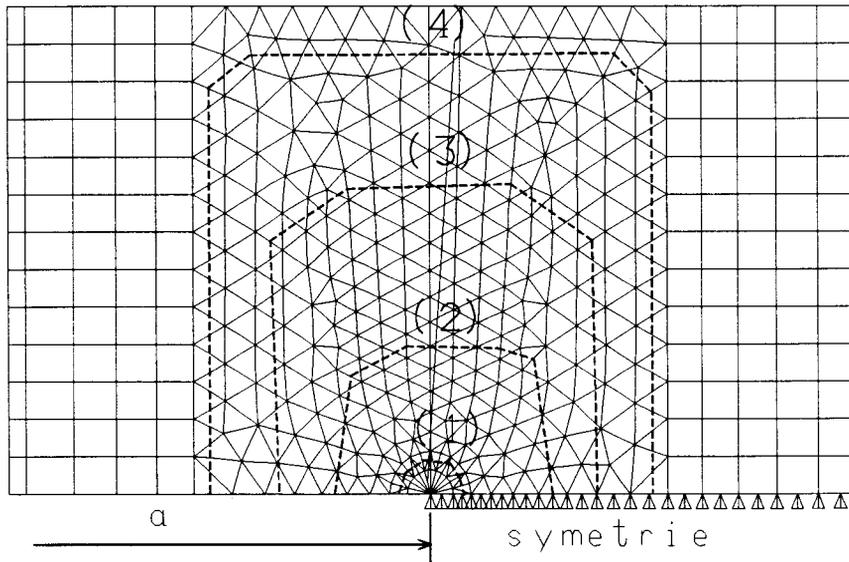


Figure 5.50: Exemple de contours à travers lesquels l'intégrale J est calculée dans le cas des éprouvettes C.P

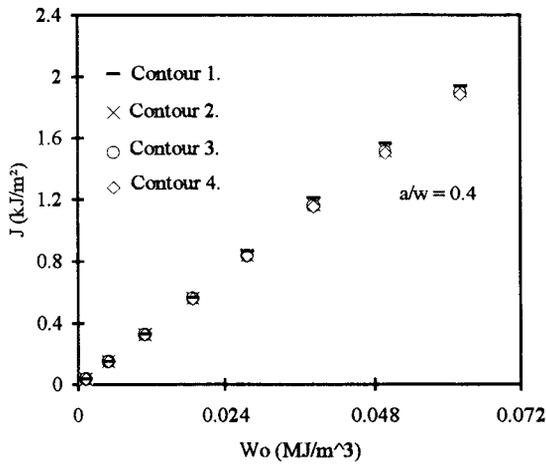


Figure 5.51: Intégrale J en fonction de W_{od} dans le cas des éprouvettes C.P de l'E.P.D.M.

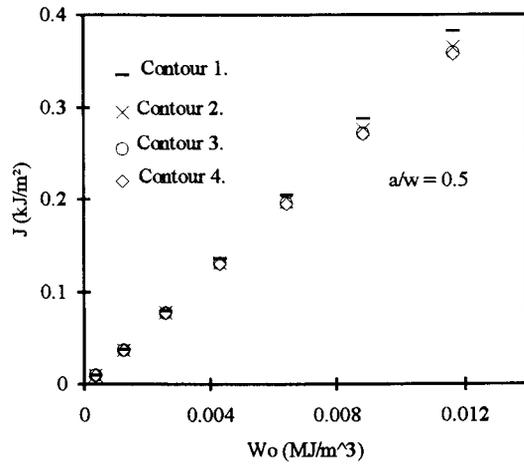


Figure 5.52: Intégrale J en fonction de W_{od} dans le cas des éprouvettes C.P du polybut.

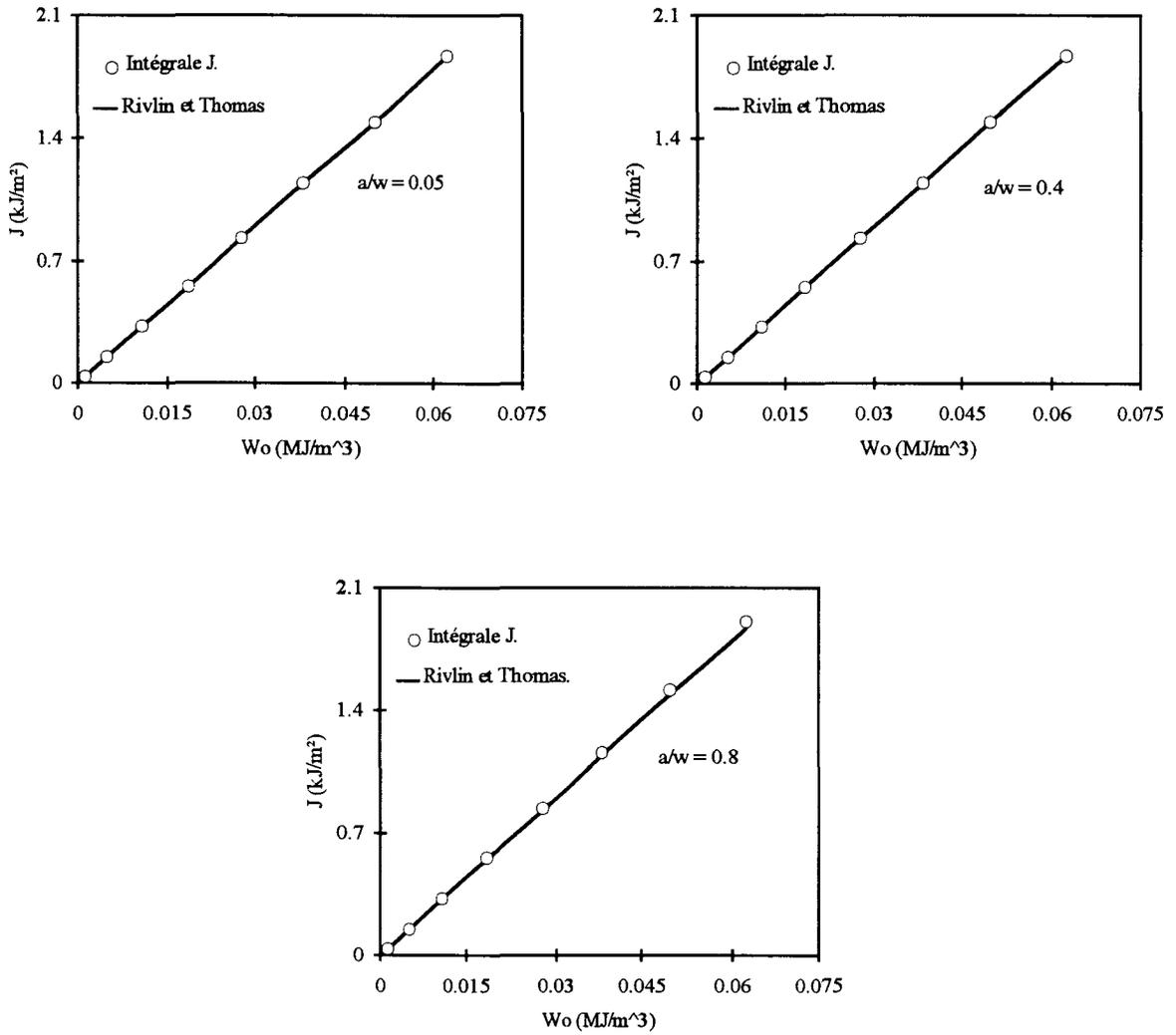


Figure 5.53: Comparaison de l'intégrale J avec la solution de RIVLIN et THOMAS dans le cas des éprouvettes C.P de l'E.P.D.M

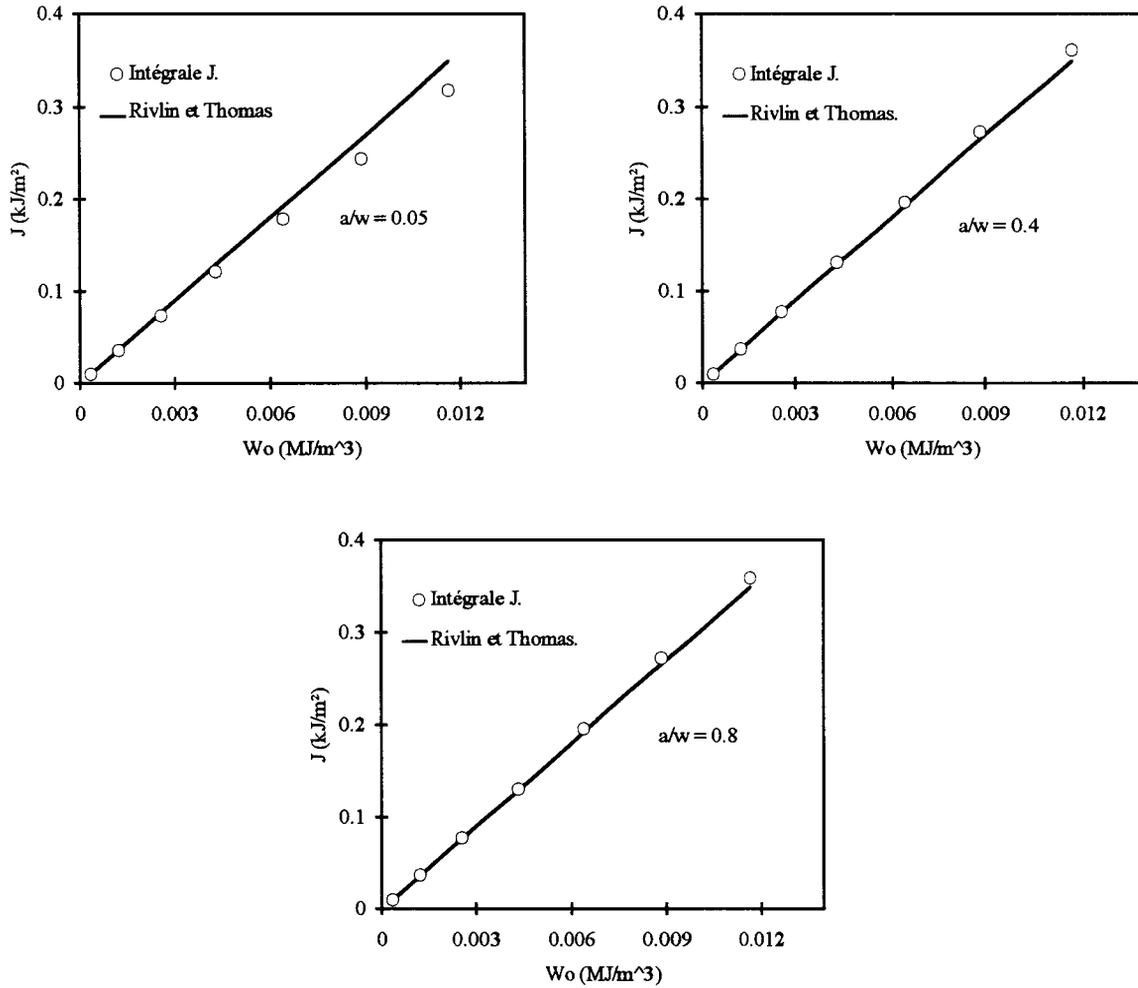


Figure 5.54: Comparaison de l'intégrale J avec la solution de RIVLIN et THOMAS dans le cas des éprouvettes C.P du polybutadiène

5.9. VALEURS CRITIQUES DU PARAMETRE ENERGETIQUE J :

Pour chaque longueur de fissure, nous avons déterminé la valeur du paramètre énergétique J qui correspond à la charge à l'amorçage de la fissure. Cette valeur, notée J_c , représente la valeur critique de ce paramètre et nous l'avons évaluée selon deux procédures:

-d'une part, en utilisant les résultats qui découlent de l'application de la méthode de séparation à l'énergie de déformation complémentaire expérimentale U^* . Cette méthode nécessite plusieurs éprouvettes.

-d'autre part, en utilisant directement les résultats de l'intégrale de contour. Cette procédure nécessite un seul essai permettant le relevé de la charge critique.

Les figures 5.55 et 5.56 montrent les valeurs de J_c , en fonction du rapport a/w , respectivement pour les éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M. et celles du polybutadiène.

Nous pouvons observer que la valeur critique de l'intégrale J calculée pour différentes longueurs de fissure est quasiment constante. Elle est d'environ $1,86 \text{ kJ/m}^2$ pour l'E.P.D.M. est de $0,322 \text{ kJ/m}^2$ pour le polybutadiène. La déviation des valeurs numériques de J_c , par rapport à cette moyenne, atteint un maximum de 2.3% et 2.2% respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène. Cependant, les valeurs critiques du paramètre énergétique J expérimental surestiment largement cette moyenne quand on considère les petites longueurs de fissure ($a/w < 0.5$). En deçà de cette limite, un bon accord est obtenu (tableau 5.8).

Divergences en % par rapport à la moyenne numérique de J_c.		
a/w	E.P.D.M	Polybutadiène
0.3	48.98 %	28.23 %
0.4	24.53	12.83
0.5	0.91	0.22
0.6	2.13	-----
0.7	0.41	3.42

Tableau 5.8: Divergences de J_c expérimental par rapport à la moyenne numérique de J_c (en pour-cent)

Ce résultat confirme une fois de plus que la divergence observée précédemment entre la paramètre énergétique J expérimental et l'intégrale numérique est plutôt liée à la méthode de traitement des résultats expérimentaux (méthode de séparation). Ceci a déjà été indiqué auparavant lorsque nous avons comparé les fonctions $F(a/w)$ numériques et expérimentales (§5.5.2.3).

La valeur critique J_c de J , constante pour les matériaux que nous avons étudiés, montre que l'amorçage de la fissure est bien régi par ce critère pour ces types de matériaux.

Par conséquent, ce paramètre pouvant être évalué numériquement, un seul essai de rupture permettant le relevé de la charge critique serait nécessaire pour déterminer cette caractéristique.

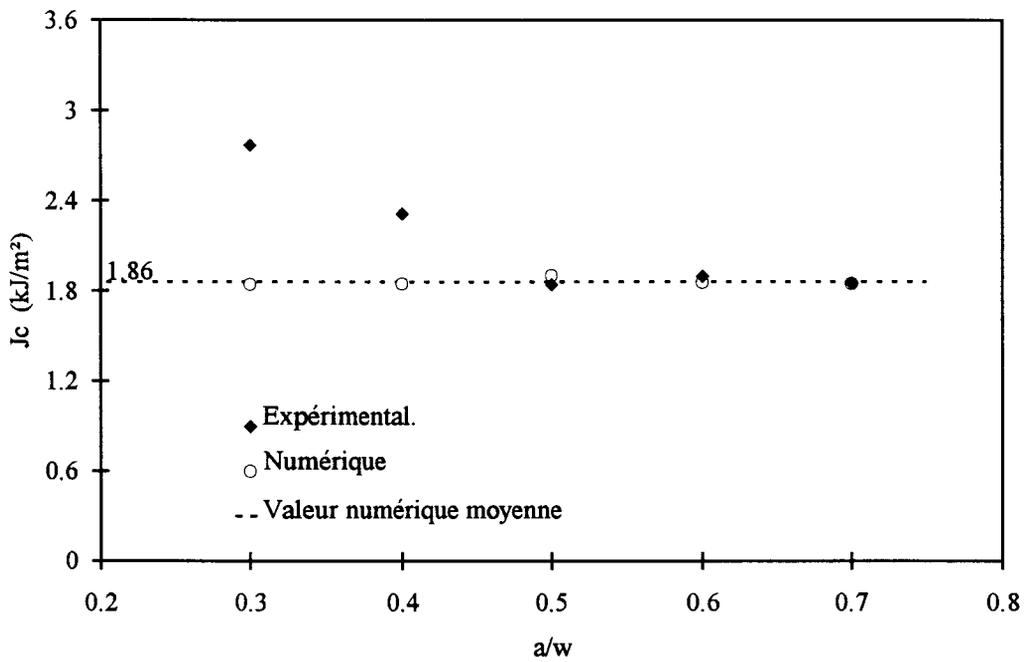


Figure 5.55: Valeurs critiques de l'intégrale numérique et du paramètre J expérimental dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M

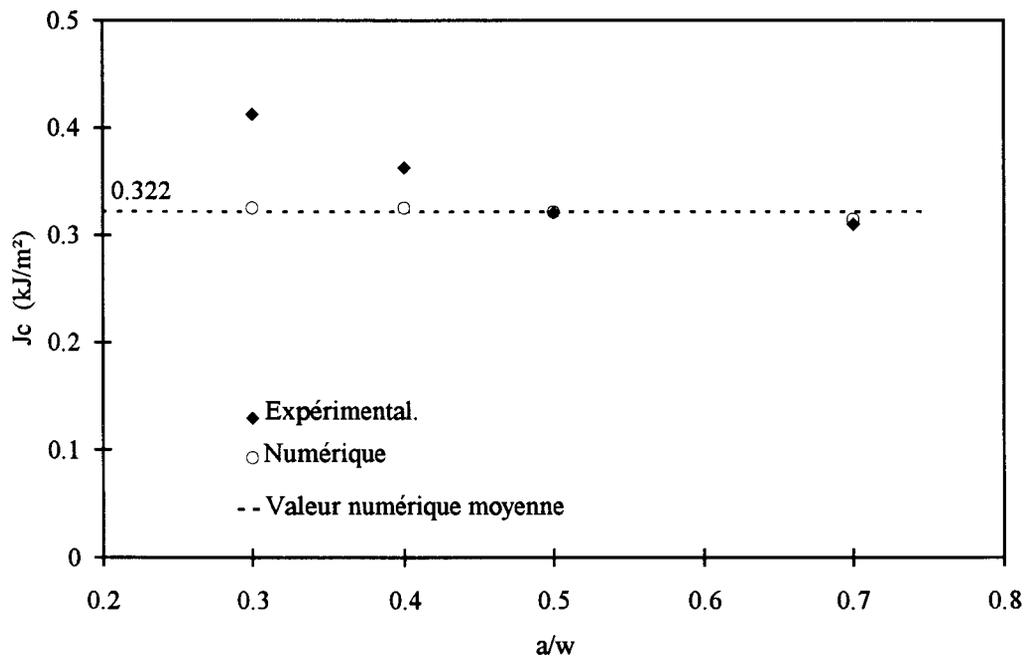


Figure 5.56: Valeurs critiques de l'intégrale numérique et du paramètre J expérimental dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène

5.10. CONCLUSION:

Le modèle numérique adopté semble être conforme à la résolution du problème de rupture que nous avons étudié puisque les courbes charge-déplacement et les énergies de déformation obtenues expérimentalement sont en bon accord avec celles issues de l'analyse numérique. En effet, les dispersions observées sont inférieures à 4 %, hormis dans le cas où $a/w=0.4$ des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène et dans celui où $a/w=0$ des éprouvettes D.E.N.T de ce même matériau. Pour ceux-ci les divergences atteignent respectivement 9.8 % et 6 % quand on considère les courbes charge-déplacement.

L'intégrale J calculée loin de la zone fortement déformée en fond de fissure, vérifie la propriété d'indépendance vis à vis du contour d'intégration démontrée théoriquement par RICE [2.17]. Cette propriété est la première condition à satisfaire pour que cette intégrale représente un critère énergétique de rupture.

Par ailleurs, les trois méthodes de détermination "J" conduisent aux mêmes résultats à de petites dispersions près. Celles-ci sont inférieures à 3% dans le cas de l'E.P.D.M et atteignent au plus 8% dans le cas du polybutadiène. Cependant, la comparaison entre ces résultats et ceux obtenus expérimentalement par l'application de la méthode de séparation (chapitre 3), montre une bonne cohérence pour $a/w \geq 0.5$ tandis qu'une nette divergence est mise en évidence en deçà de cette limite.

Cette divergence est attribuée aux erreurs d'approximation induites par les fonctions mathématiques choisies arbitrairement pour le lissage des points expérimentaux (relation 3.8) ($G_1(a_i/w)=[1-a_i/w]^m$). En effet, ces fonctions ont conduit, après dérivation (dG_1/da), à une fonction de calibration $F(a/w)$ ($= -\frac{m}{a \cdot w} \cdot [1 - \frac{a}{w}]^{m-1}$) qui tend vers l'infini quand a/w tend vers zéro et possède un minimum pour $a/w=0.36$ et $a/w=0.42$ respectivement dans le cas de l'E.P.D.M et du polybutadiène. Par conséquent, par analogie à la mécanique linéaire élastique de la rupture, cette dernière expression n'est valable que dans une partie du domaine où $F(a/w)$ est strictement croissante, comme le facteur de calibration linéaire équivalent Y^2 .

Les fonction de calibration $F(a/w)$ numérique est en bon accord avec celle issue des résultats expérimentaux pour $a/w \geq 0.5$ mais inférieure à celle-ci pour $a/w < 0.5$. Ce résultat confirme que les divergences observées entre les valeurs du paramètre énergétique J numériques et expérimentales sont, effectivement, liées au manque de précision du facteur de calibration expérimental.

La fonction potentiel $k(W_0)$, obtenue par l'application de la méthode de séparation directement aux valeurs de l'intégrale de contour, est en bonne cohérence avec celle obtenue expérimentalement.

La forme multiplicative du paramètre énergétique J ($J=2.k(W_0).W_0.a.F(a/w)$) a été validée puisque un excellent accord est obtenu entre l'intégrale J et les valeurs de ce paramètre calculées à partir des fonctions numériques $k(W_0)$ et $F(a/w)$.

La valeur critique J_c , calculée à partir de l'intégrale J , est trouvée presque constante. Ceci permet de conclure que l'amorçage de la fissure, pour les matériaux que nous avons étudiés, est bien régi par ce critère énergétique.

Cette valeur critique J_c pourrait être évaluée à partir des formulations théoriques de J proposées par RIVLIN et THOMAS dans le cas des éprouvettes D.E.N.T (éprouvette à double fissure latérale) ou C.P (éprouvette de cisaillement pur). En effet, ces formulations semblent bien s'adapter pour ces cas de géométrie même en considérant les grandes longueurs de fissure.

**CHAPITRE 6: PROCEDURE DE CALCUL
DE J PROPOSEE**

6.1. INTRODUCTION:

Selon ANDREWS [2.37], dans le cas d'une plaque fissurée de dimensions infinies et soumise à un champ de contraintes uniforme, le paramètre énergétique J s'exprime par:

$$J = 2 \cdot k(W_0) \cdot W_0 \cdot a \quad (6.1)$$

Dans le cas des dimensions finies, il a été montré [2.39] qu'il est nécessaire d'introduire un facteur géométrique $F(a/w)$ de telle sorte que:

$$J = 2 \cdot k(W_0) \cdot W_0 \cdot a \cdot F(a/w) \quad (6.2)$$

Il nous a paru intéressant d'approfondir l'analyse en étudiant de plus près le raisonnement d'ANDREWS. En effet, rappelons que la formulation de J proposée par cet auteur provient de l'étude de la distribution spatiale de la densité d'énergie de déformation et plus précisément des variations de celle-ci lorsque la fissure se propage (§ B.3 du chapitre 2). Nous avons accédé à cette distribution de densité d'énergie de déformation à partir de l'analyse par éléments finis et nous avons calculé par ce biais le paramètre J.

6.2. APPROCHE DU PARAMETRE ENERGETIQUE J A L'AIDE DE LA DISTRIBUTION DE LA DENSITE D'ENERGIE DE DEFORMATION:

Considérons que la distribution de la densité d'énergie de déformation est représentée par l'équation 2.33 du chapitre 2 ($W(P)=W_0 \cdot f(x, y, \epsilon_0)$) proposée par ANDREWS. L'accroissement de la longueur de fissure va provoquer une modification de cette densité d'énergie, ce qui s'exprime de la manière suivante:

$$\left. \frac{dW(P)}{da} \right|_{W_0} = \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{dx}{da} \right) + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{dy}{da} \right) \right] \quad (6.3)$$

Dans cette expression, nous avons repris l'hypothèse d'ANDREWS selon laquelle la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 , calculée loin du défaut, est supposée constante lorsque la fissure se propage sur une longueur "da" infiniment petite.

En introduisant les coordonnées cartésiennes (X, Y) dans la relation 6.3, on obtient:

$$\left. \frac{dW(P)}{da} \right|_{W_0} = \left[\frac{\partial W}{\partial (X/a)} \cdot \frac{d[X(a)/a]}{da} + \frac{\partial W}{\partial (Y/a)} \cdot \frac{d[Y(a)/a]}{da} \right] \quad (6.4)$$

soit donc:

$$\left. \frac{dW(P)}{da} \right|_{W_0} = a \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial X} \cdot \frac{d[X(a)/a]}{da} + \frac{\partial W}{\partial Y} \cdot \frac{d[Y(a)/a]}{da} \right] \quad (6.5)$$

La variation d'énergie de déformation totale dans le système est:

$$\frac{dU}{da} = \sum_P \frac{dW(P)}{da} \cdot dv \quad (6.6)$$

où $dv = B \cdot dX \cdot dY$ est l'élément de volume en tout point P de coordonnées (X, Y) et B l'épaisseur de l'éprouvette.

Sachant que la densité d'énergie de déformation $W(P)$ est accessible en chaque point P à partir de l'analyse par éléments finis, nous pouvons donc évaluer le paramètre énergétique, qu'on notera J_a pour le distinguer de celui donné par la relation (6.1), à partir de l'expression suivante:

$$J_a = - \frac{dU}{B \cdot da} = - \iint_{XY} a \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial X} \cdot \frac{d(X/a)}{da} + \frac{\partial W}{\partial Y} \cdot \frac{d(Y/a)}{da} \right] \cdot dX \cdot dY \quad (6.7)$$

Dans cette expression, nous supposons que la propagation de la fissure s'effectue à "déplacement constant", ce qui annule le travail des forces extérieures.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que les valeurs du paramètre J_a (relation (6.7)) sont liées à la position du repère de référence. J_a n'est donc pas équivalent à l'intégrale J. Ceci nous conduira à analyser l'équation de base de distribution de la densité d'énergie de déformation ($W(P) = W_0 \cdot f(X/a, Y/a, \epsilon_0)$) et à proposer une nouvelle approche du paramètre énergétique J.

Pour bien cerner le problème, on se donne deux repères orthonormés (O_0, X_0, Y_0) et (O, X, Y) dans lesquels un point P quelconque de l'éprouvette est repéré respectivement par les coordonnées cartésiennes (X_0, Y_0) et (X, Y) (figure 6.1). Le point O_0 est fixe et le choix de sa position est arbitraire. Quant au point O, il est confondu avec le fond de fissure et donc se déplace lorsque celle-ci se propage.

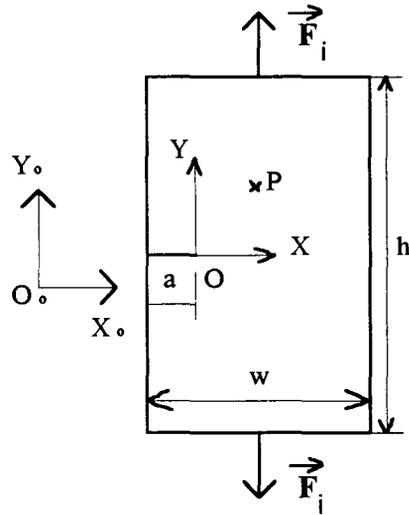


Figure 6.1: Exemple de deux repères.

Selon que l'on se réfère au repère (O_0, X_0, Y_0) ou au repère (O, X, Y) , l'expression 6.7 se simplifie des deux manières suivantes:

- Repère (O_0, X_0, Y_0) : (repère fixe)

Ce repère n'étant pas lié à la pointe de la fissure, les coordonnées (X_0, Y_0) d'un point P quelconque de l'éprouvette restent inchangées lorsque cette fissure se propage. Les dérivées $(\frac{d(X_0/a)}{da})$ et $(\frac{d(Y_0/a)}{da})$ sont égales respectivement à $(-\frac{X_0}{a^2})$ et $(-\frac{Y_0}{a^2})$. Le paramètre énergétique J_a donné par la relation (6.7) s'écrit donc:

$$J_a = \frac{1}{a} \cdot \iint_{X_0, Y_0} \left(\frac{\partial W}{\partial X_0} \cdot X_0 + \frac{\partial W}{\partial Y_0} \cdot Y_0 \right) \cdot dX_0 \cdot dY_0 \tag{6.8}$$

- Repère (O, X, Y) : (repère mobile)

Ce repère est entraîné par la propagation de la fissure. Par conséquent, en faisant l'hypothèse que cette dernière se propage suivant la direction perpendiculaire à celle des sollicitations, l'abscisse X d'un point P quelconque de l'éprouvette varie d'un incrément de longueur $dX(=-da)$ et son ordonnée reste inchangée. Ainsi, nous pouvons écrire:

$$\frac{d(X/a)}{da} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dX}{da} - \frac{X}{a^2} = -\frac{1}{a} - \frac{X}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{d(Y/a)}{da} = -\frac{Y}{a^2};$$

L'équation 6.7 exprimant le paramètre énergétique J_a devient alors:

$$J_a = -\frac{dU}{B \cdot da} = \iint_{XY} \left[\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \cdot X + \frac{\partial W}{\partial Y} \cdot Y \right) \right] \cdot dX \cdot dY \tag{6.9}$$

6.2.1. Mise en évidence de la dépendance de J_a vis à vis de la position du repère de référence:

La dépendance de J_a (relation 6.8) vis à vis de la position du repère de référence peut être démontrée théoriquement. En effet, considérons deux repères fixes (O_o, X_o, Y_o) et (O'_o, X'_o, Y'_o) tel que $X'_o = X_o + C$ (C étant une constante) et $Y'_o = Y_o$.

Pour un point donné de l'éprouvette, nous avons:

$$dX'_o = d(X_o + C) = dX_o \quad (6.10)$$

$$dY'_o = dY_o \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial W(P)}{\partial X'_o} = \frac{\partial W(P)}{\partial (X_o + C)} = \frac{\partial W(P)}{\partial X_o} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial W(P)}{\partial Y'_o} = \frac{\partial W(P)}{\partial Y_o} \quad (6.13)$$

En tenant compte des équations (6.10) à (6.13), le paramètre énergétique J_a (relation 6.8) défini par rapport au repère (O'_o, X'_o, Y'_o) peut se mettre en fonction des coordonnées (X_o, Y_o), sous la forme suivante:

$$J_a = -\frac{dU}{B \cdot da} = \frac{1}{a} \iint_{X_o, Y_o} \left[\frac{\partial W}{\partial X_o} \cdot (X_o + C) + \frac{\partial W}{\partial Y_o} \cdot Y_o \right] \cdot dX_o \cdot dY_o \quad (6.14)$$

ou bien:

$$J_a = -\frac{dU}{B \cdot da} = \frac{1}{a} \iint_{X_o, Y_o} \left[\frac{\partial W}{\partial X_o} \cdot X_o + \frac{\partial W}{\partial X_o} \cdot C + \frac{\partial W}{\partial Y_o} \cdot Y_o \right] \cdot dX_o \cdot dY_o \quad (6.15)$$

L'expression (6.15) montre clairement que les valeurs de J_a sont directement liées à la constante "C". Ces valeurs dépendent, effectivement, de la position du repère de référence.

Le paramètre J_a donné par la relation 6.8 (ou 6.9) ne rend donc pas correctement compte de l'évolution du paramètre énergétique J . Voyons comment évolue J_a , calculé à partir de ces relations, pour différentes positions du repère de référence.

6.2.2. Evaluation du paramètre énergétique J_a :

L'évaluation du paramètre énergétique J_a à partir de la relation (6.8) (ou 6.9) suppose une description aussi exacte que possible du champ de contraintes et de déformations à travers toute l'éprouvette.

Afin d'accéder à ces données, nous avons effectué une analyse par éléments finis en discrétisant l'éprouvette par des quadrilatères à huit noeuds (figure 6.2). Les hypothèses du modèle numérique sont les mêmes que celles décrites auparavant dans le chapitre 4. Les calculs sont réalisés pour les éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T des deux matériaux étudiés (E.P.D.M et polybutadiène).

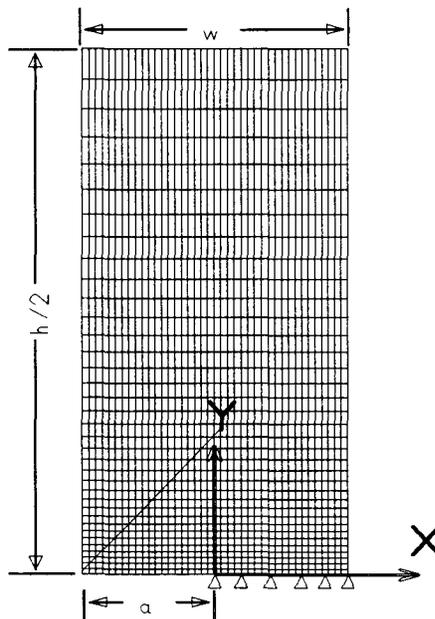


Figure 6.2: Type de maillage utilisé pour le calcul de J_a

La double intégrale intervenant dans l'expression 6.9 de J_a , peut être développée de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
 J_a &= \frac{1}{a} \left[\left(\iint_{XY} X \cdot \frac{\partial W}{\partial X} \cdot dX \cdot dY \right) + \left(\iint_{XY} Y \cdot \frac{\partial W}{\partial Y} \cdot dY \cdot dX \right) \right] + \iint_{XY} \frac{\partial W}{\partial X} \cdot dX \cdot dY \\
 &= \frac{1}{a} \left[\int_Y R_{1X} \cdot dY + \int_X R_Y \cdot dX \right] + \int_Y R_{2X} \cdot dY
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

où

$$R_{1X} = \int_X \frac{\partial W}{\partial X} \cdot dX; \quad R_Y = \int_Y \frac{\partial W}{\partial Y} \cdot dY; \quad R_{2X} = \int_X \frac{\partial W}{\partial X} \cdot dX$$

Pour évaluer R_{1X} , la densité d'énergie W est reportée sur un graphe (figure 6.3) en fonction de X , pour différentes valeurs de Y . Cette densité d'énergie est obtenue à partir des déformations et des contraintes issues de l'analyse par éléments finis. Elle est supposée constante à l'intérieur des éléments et localisée en leurs centres. Un seul repère de référence, dont l'origine marque le fond de fissure, est choisi pour illustrer les différentes étapes de calcul de J_a . Dans tous les cas, X et Y sont les coordonnées à l'état indéformé.

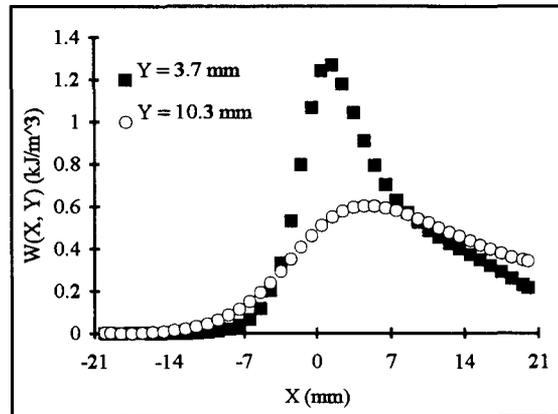


Figure 6.3: Densité d'énergie de déformation $W(P)$ en fonction de X (pour différentes valeurs de Y)

R_{1X} est par la suite calculé par une intégration graphique de X par rapport à W en utilisant la méthode des trapèzes. R_Y est évalué de façon similaire pour différentes valeurs de X . La densité d'énergie de déformation $W(P)$ prend la forme, montrée sur la figure 6.4, quand elle est tracée en fonction de Y .

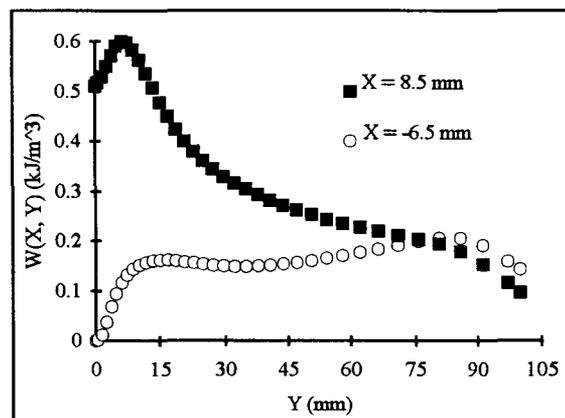


Figure 6.4: Densité d'énergie de déformation $W(P)$ en fonction de Y (pour différentes valeurs de X)

L'expression du terme R_{2X} est simple. Celui-ci n'existe que si J_a est défini par rapport au repère dont l'origine marque le fond de fissure. Il peut être évalué analytiquement pour chaque valeur de Y à partir de relation suivante:

$$R_{2X} = W(w-a, Y) - W(-a, Y) \quad (6.17)$$

Les calculs de R_{1X} , R_Y et R_{2X} ne sont illustrés que pour $a/w=0.5$ correspondant à la géométrie S.E.N.T du polybutadiène. Cependant, il faut souligner que les différentes courbes obtenues pour tous les autres cas considérés ($a/w = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7\}$ des éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T de l'E.P.D.M et du polybutadiène) ont des allures similaires à celles montrées ici.

Les intégrales $\int_Y R_{1X} \cdot dY$, $\int_X R_Y \cdot dX$ et $\int_Y R_{2X} \cdot dY$ sont finalement calculées graphiquement (méthode des trapèzes) en considérant respectivement les courbes R_{1X} en fonction de Y (figure 6.5), R_Y en fonction de X (figure 6.6) et R_{2X} en fonction de Y (figure 6.7).

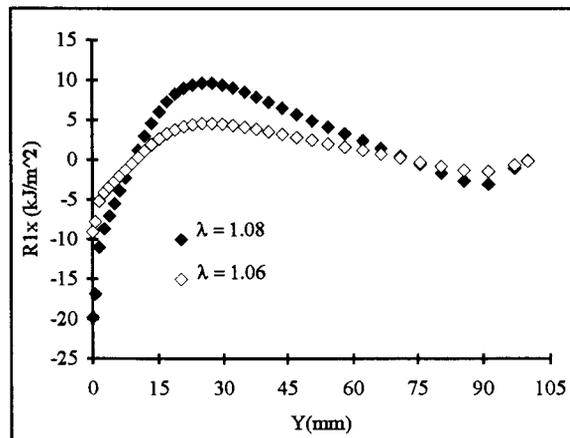


Figure 6.5: R_{1X} en fonction de Y pour deux valeurs du taux d'élongation λ .

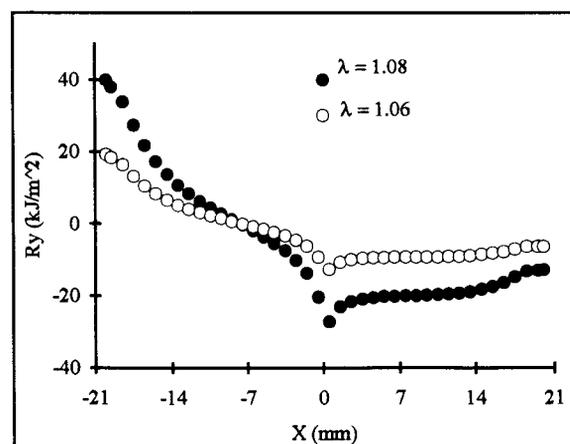


Figure 6.6: R_Y en fonction de X pour deux valeurs du taux d'élongation λ .

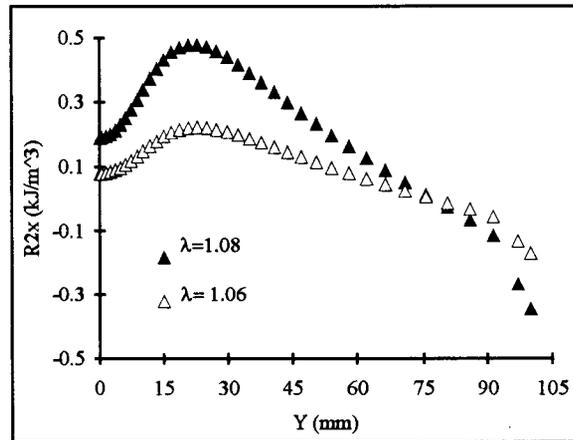


Figure 6.7: R_{2x} en fonction de Y pour deux valeurs du taux d'élongation λ .

Le paramètre énergétique J_a a été déterminé à partir du calcul décrit ci-dessus, par rapport au repère mobile et par rapport à plusieurs autres repères fixes qui diffèrent simplement par la position de leurs origines. Dans tous les cas, les évolutions des courbes obtenues sont similaires à celles montrées ci-dessus. Cependant, comme nous l'avons montré théoriquement auparavant, il s'avère que les valeurs de J_a calculées sont liées à la position du repère de référence (figures 6.8 et 6.9). De plus, elles sont négatives dans le cas du polybutadiène (figure 6.9). Par conséquent, le paramètre J_a (relation (6.7)) ne représente pas l'intégrale J .

Ces résultats nous ont conduit à revoir et à analyser l'équation de base de la distribution de la densité d'énergie de déformation donnée par la relation 2.33 du chapitre 2 ($W(P)=W_o \cdot f(x,y,\epsilon_o)$) et proposée par ANDREWS.

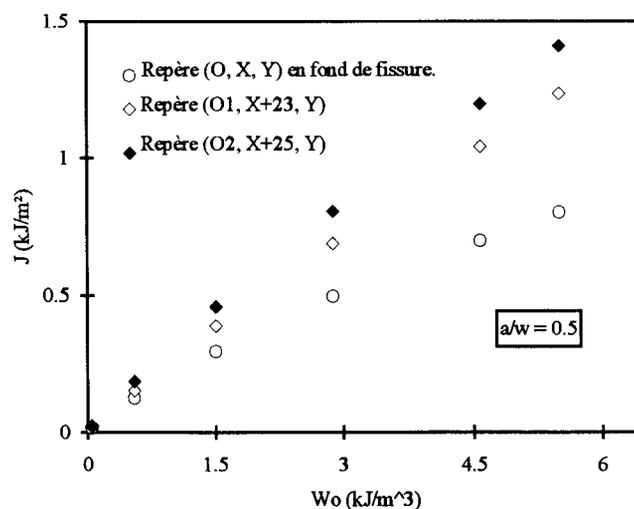


Figure 6.8: Paramètre énergétique J_a en fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_o (S.E.N.T de l'E.P.D.M.)

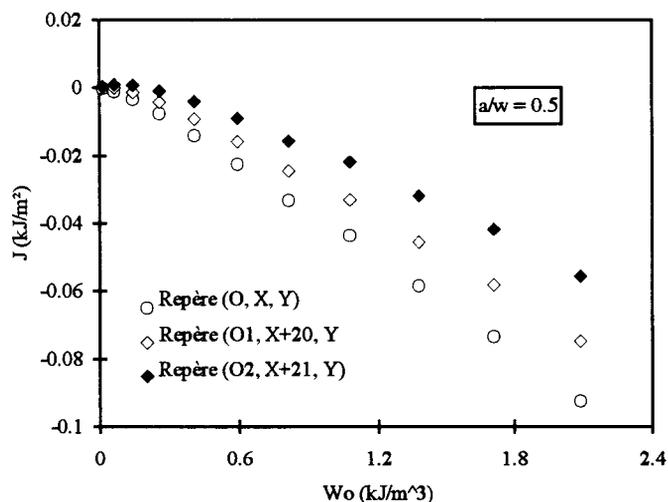


Figure 6.9: Paramètre énergétique J_a en fonction de la densité d'énergie de déformation uniforme W_o (S.E.N.T du polybutadiène)

6.3. NOUVELLE FORMULATION DE L'APPROCHE DE J:

L'expression 2.33 du chapitre 2 ($W(P)=W_o \cdot f(X/a, Y/a, \epsilon_o)$) de la densité d'énergie de déformation a été proposée en supposant une éprouvette fissurée de dimensions infinies [2.37]. Dans ce cas, l'unique point géométrique identifiable est le fond de fissure. Donc, raisonnablement, il existe un seul repère dont l'origine marque ce fond de fissure et qui sert de référence à l'évaluation de J_a par les calculs décrits précédemment. A partir de là, la (ou la non) dépendance du paramètre J_a vis à vis de la position du repère de référence ne peut pas être vérifiée. Par conséquent, l'expression 2.33 (chapitre 2) de la densité d'énergie de déformation $W(P)$ serait peut être valable sous l'hypothèse de dimensions infinies émise par ANDREWS. En revanche, pour les éprouvettes de laboratoire, la prise en compte des dimensions finies fait qu'il est nécessaire de réexaminer cette expression.

Nous avons donc repris l'idée de cet auteur, à savoir que la densité d'énergie de déformation $W(P)$ en tout point $P(X, Y)$ de l'éprouvette s'exprime comme un produit de la densité d'énergie de déformation uniforme W_o et d'une fonction tenant compte de la position du point P . Cependant, nous avons suggéré d'introduire les coordonnées (X, Y) du point P et la longueur de fissure " a " comme des variables indépendantes l'une de l'autre pour mettre $W(P)$ sous la forme:

$$W(P) = W_o \cdot f(X, Y, a, W_o) \quad (6.18)$$

La différenciation, à W_o constant, de cette densité d'énergie de déformation $W(P)$ par rapport à la longueur de fissure " a " est alors:

$$\left. \frac{dW(P)}{da} \right|_{W_0} = \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)_a \cdot \frac{dX}{da} + \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right)_a \cdot \frac{dY}{da} + \frac{\partial W(P)}{\partial a} \cdot \frac{da}{da} \quad (6.19)$$

La quantité $\left(- \sum_P \frac{dW(P)}{B \cdot da} \right)_{W_0} \cdot dv$, qu'on notera J_1 , s'exprime dans ce cas par l'équation suivante:

$$J_1 = - \iint_{XY} \left(\frac{\partial W(P)}{\partial X} \cdot \frac{dX}{da} + \frac{\partial W(P)}{\partial Y} \cdot \frac{dY}{da} + \frac{\partial W(P)}{\partial a} \right) \cdot dX \cdot dY \quad (6.20)$$

J_1 représente le taux de variation d'énergie totale du système considéré, due à l'accroissement de la fissure d'une petite longueur "da". Il est analogue au paramètre J_a donné par l'expression 6.7.

6.3.1. Vérification de la validité de la nouvelle approche de J:

Dans un premier temps, nous avons tenté de montrer théoriquement, par un simple raisonnement, que le paramètre J_1 donné par l'expression 6.20 est indépendant du repère de référence.

Considérons les deux repères (O_0, X_0, Y_0) et (O, X, Y) précédemment définis et représentés de nouveau sur la figure 6.10. Imaginons, par ailleurs, que pour une ordonnée Y (ou Y_0) fixe, la distribution de la densité d'énergie W dans l'éprouvette en extension, en fonction de l'abscisse X (ou X_0), possède l'allure de la courbe indiquée sur cette même figure.

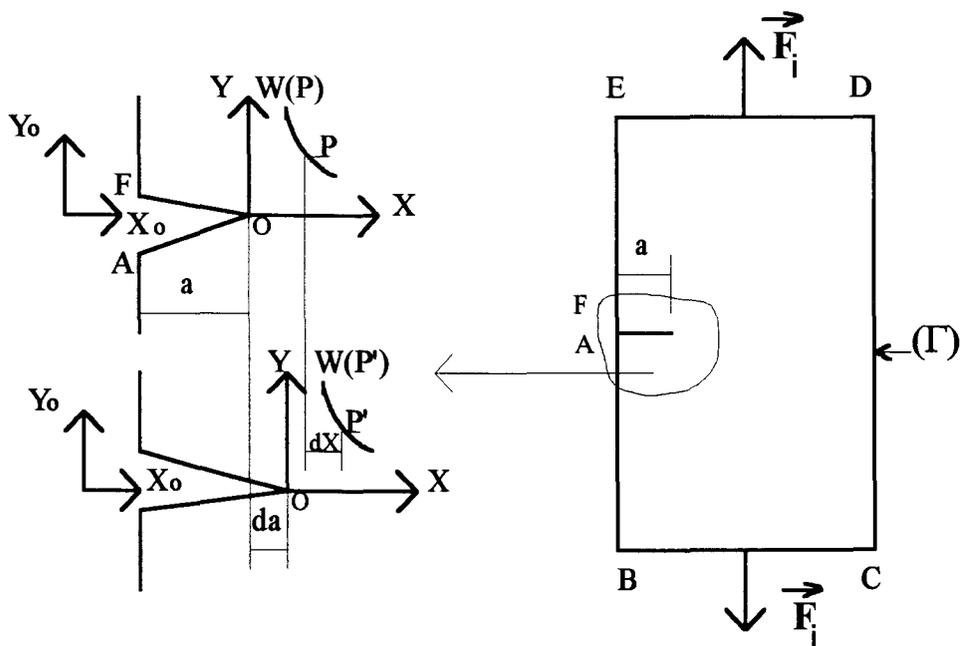


Figure 6.10: Illustration de la propagation de la fissure.

En procédant de la même manière qu'auparavant, nous pouvons trouver facilement deux formes simplifiées de l'expression du paramètre J_1 , selon que l'on se réfère au repère (O_o, X_o, Y_o) ou au repère (O, X, Y) :

- Repère (O_o, X_o, Y_o) : (repère fixe)

Par rapport à ce repère, les coordonnées (X_o, Y_o) sont indépendantes de la longueur de fissure "a". Par conséquent, les quantités $\frac{dX_o}{da}$ et $\frac{dY_o}{da}$ sont nulles et l'expression de J_1 (relation 6.20)

devient alors:

$$J_1 = - \iint_{XY} \left. \frac{dW}{da} \right|_{w_o} dX \cdot dY \quad (6.21)$$

qui est simplement l'interprétation énergétique de l'intégrale J telle qu'elle a été définie par RICE [2.17]. La double intégrale intervenant dans la relation 6.21 ne peut être calculée puisque le terme $\frac{dW}{da}$ est inaccessible à partir d'un seul calcul. Dans ce cas, l'évaluation du paramètre J_1 passe inévitablement par l'utilisation de l'énergie de déformation totale. Ceci peut être réalisé expérimentalement à l'aide des méthodes à échantillons multiples (méthode de BEGLEY-LANDES [2.40], méthode de séparation d'énergie [2.41], ...) et numériquement en utilisant par exemple, comme nous l'avons fait précédemment (§ 4.4), la méthode de WATWOOD (ou méthode de différenciation d'énergie) nécessitant deux analyses complètes.

- Repère (O, X, Y) : (repère mobile)

En supposant que la fissure se propage suivant la direction OX, nous pouvons écrire:

$$\frac{\partial W}{\partial X} \cdot \frac{dX}{da} = - \frac{dW}{dX} \quad \text{puisque } dX = -da.$$

et

$$\frac{dY}{da} = 0 \quad \text{puisque les ordonnées Y restent inchangées.}$$

Soit P et P' deux points de mêmes coordonnées (X, Y) définis dans l'éprouvette respectivement avant et après propagation de la fissure (figure 6.10).

Si l'incrément "da" est infiniment petit, les densités d'énergie de déformation sont identiques en ces deux points (i.e $W(P)=W(P')$). Le terme $\frac{\partial W(P)}{\partial a}$ tend alors vers zéro. Cette approximation peut être aussi introduite par l'application du théorème des travaux virtuels lorsque les contraintes dérivent d'un potentiel d'énergie ($\sigma_{ij} = \frac{\partial W(P)}{\partial \epsilon_{ij}}$):

$$\iint_{XY} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} \cdot dX \cdot dY = \iint_{XY} \frac{\partial W}{\partial a} \cdot dX \cdot dY = \int_{(BC+DE)} T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial a} \cdot dS \quad (6.22)$$

où BC et DE représentent les frontières où les forces de traction extérieures T_i sont appliquées (figure 6.10); u_i est le déplacement sur ces frontières; σ_{ij} et ε_{ij} sont les tenseurs respectivement de contraintes et de déformations à travers l'éprouvette.

On peut penser que le déplacement u_i ne varie pas lorsque la fissure se propage sur une longueur "da" infiniment petite, puisque les frontières BC et DE sont situées loin du défaut. Ainsi, le membre à droite de l'équation (6.22) s'annule, ce qui nous permet d'écrire:

$$\iint_{XY} \frac{\partial W}{\partial a} \cdot dX \cdot dY = 0.$$

En prenant en compte toutes les considérations ci-dessus, l'expression du paramètre J_1 (relation 6.20) se réduit à la forme suivante:

$$J_1 = \iint_{XY} \left(\frac{\partial W(P)}{\partial X} \right) \cdot dX \cdot dY \quad (6.23)$$

Soit Γ (\equiv ABCDEF) le contour qui délimite l'aire totale de l'éprouvette et qui va de la lèvre inférieure à la lèvre supérieure de la fissure (figure 6.10).

D'après le théorème de STOCKES:

$$\iint_{XY} \left(\frac{\partial W(P)}{\partial X} \right) \cdot dX \cdot dY = \int_{\Gamma} n_x \cdot W \cdot dS = \int_{\Gamma} W \cdot dY \quad (6.24)$$

soit donc:

$$\boxed{J_1 = \int_{\Gamma} W \cdot dY} \quad (6.25)$$

où n_x est la composante suivant OX du vecteur unitaire normal à un élément dS du contour Γ .

La relation (6.25) montre que J_1 est le premier terme de l'intégrale J de RICE. Ce terme représenterait donc une approche du paramètre énergétique J si et seulement si le second terme ($J_2 = \int_{\Gamma} T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X} \cdot dS$) de cette intégrale de RICE est négligeable.

Pour vérifier la validité de J_1 , nous avons évalué dans un premier temps, pour l'exemple d'une éprouvette S.E.N.T ($a/w=0.5$) du polybutadiène, le terme J_2 à travers quatre contours (figure 6.11):

- un contour (N°1) choisi au voisinage du fond de fissure;
- un contour parcourant la frontière de l'éprouvette (N°4 $\equiv \Gamma$);
- deux autres contours intermédiaires (N°2 et N°3).

Le type de maillage utilisé est le même que celui choisi précédemment pour le calcul de l'intégrale J de RICE (chapitre 4).

Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 6.1 pour différentes valeurs du taux d'extension λ de l'éprouvette.

Nous pouvons constater que les valeurs de J_2 diminuent à mesure que l'on s'éloigne du fond de fissure. En effet, ces valeurs représentent 65 % à 70 % de l'intégrale J de RICE quand elles sont évaluées à travers le contour N°1 et tendent vers des valeurs négligeables (0.03% à 1.5%) lorsque l'on considère le contour N°4.

Nous avons ensuite évalué le terme J_1 pour les éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T des deux matériaux étudiés avec les valeurs de $a/w=\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7\}$.

Pour toutes les éprouvettes S.E.N.T considérées, les résultats obtenus sont très proches de l'intégrale de RICE. Les dispersions relevées sont inférieures à 4 % (figures 6.12 et 6.14).

Pour les éprouvettes D.E.N.T, les divergences observées croissent avec la valeur de la longueur de fissure et diminuent lorsque la densité d'énergie de déformation uniforme W_0 augmente (figures 6.13 et 6.15). Dans le cas de l'E.P.D.M, ces divergences sont inférieures à 2% pour les petites longueurs de fissure ($a/w \leq 0.4$) et atteignent environ 12 % puis 7 % respectivement pour les faibles et grandes valeurs de W_0 correspondant à $a/w = 0.7$ (figure 6.13). Dans le cas du polybutadiène, les dispersions relevées pour les petites valeurs de W_0 passent de 4 à 10% quand a/w varie de 0.3 à 0.6 et deviennent inférieures à 2 % lorsque l'on approche la valeur de W_0 correspondant à la valeur critique J_c du paramètre énergétique J (figure 6.15).

Tous ces résultats nous permettent de conclure que l'expression 6.25 que nous proposons approche d'une manière satisfaisante l'intégrale J de RICE.

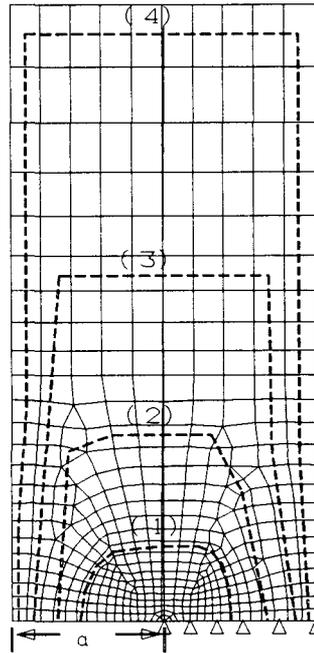


Figure 6.11: Contours à travers lesquels sont évaluées

les valeurs du terme $J_2 (= \int_{\Gamma} T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X} \cdot dS)$

	Contour 1	Contour 2	Contour 3	Contour 4
taux d'extension λ	$(J_2/J)\%$	$(J_2/J)\%$	$(J_2/J)\%$	$(J_2/J)\%$
1.02	70.63	41.87	18.66	0.60
1.04	69.85	40.80	18.25	0.34
1.06	69.11	39.79	17.87	0.16
1.08	68.42	38.79	17.44	0.11
1.10	67.82	37.96	17.15	0.03
1.12	67.29	37.22	16.92	0.19
1.14	66.82	36.64	16.83	0.47
1.16	66.40	36.16	16.82	0.78
1.18	65.99	35.74	16.88	1.16
1.20	65.61	35.30	16.87	1.46

Tableau 6.1: valeurs relatives (en %) du terme $(J_2 = \int_{\Gamma} T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial X} \cdot dS)$ par rapport à l'intégrale J suivant des contours (N°1 à N°4) de plus en plus loin du fond de fissure.

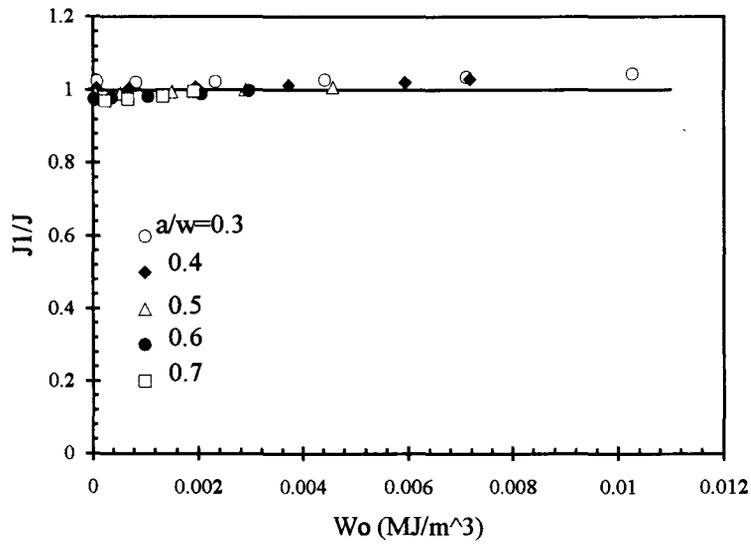


Figure 6.12: Rapport $[J/J(\text{intégrale})]$ dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M

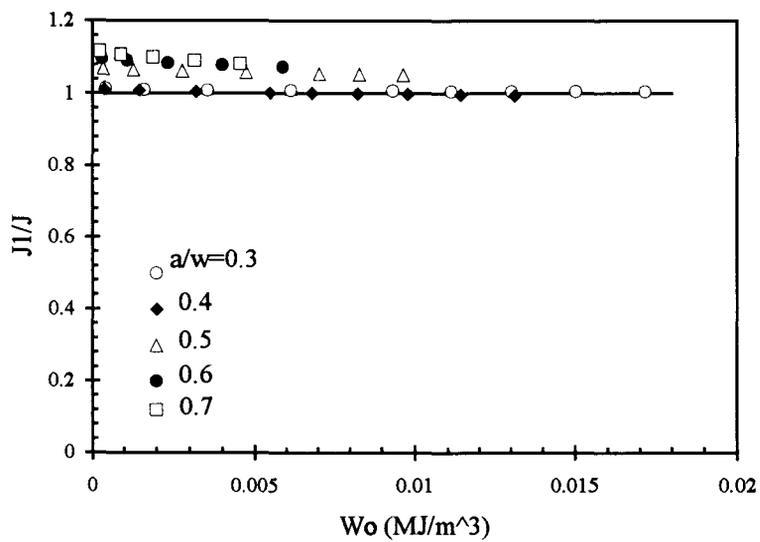


Figure 6.13: Rapport $[J/J(\text{intégrale})]$ dans le cas des éprouvettes D.E.N.T de l'E.P.D.M

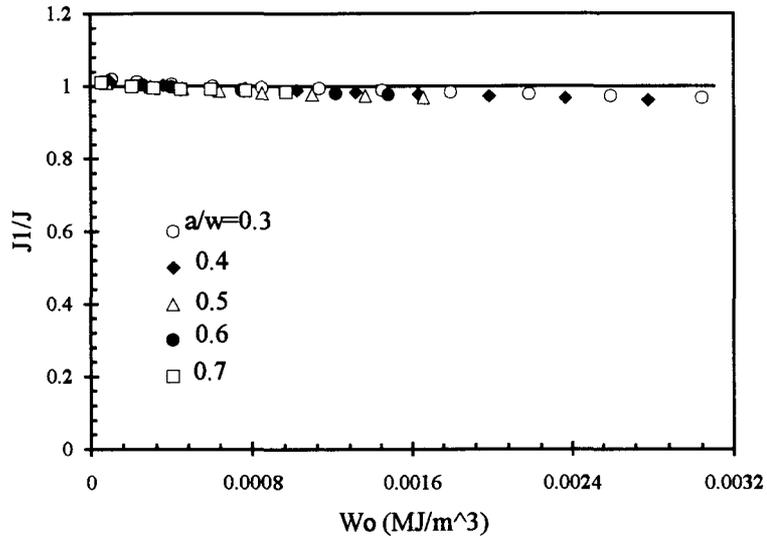


Figure 6.14: Rapport $[J_1/J(\text{intégrale})]$ dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

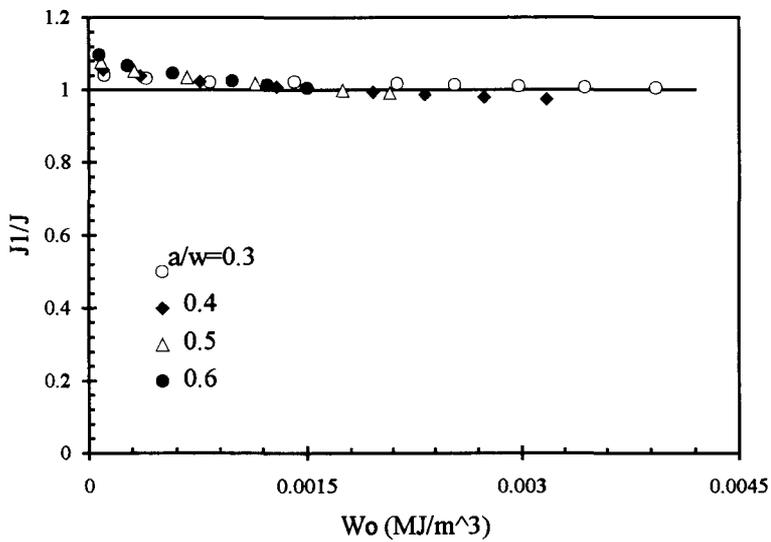


Figure 6.15: Rapport $[J_1/J(\text{intégrale})]$ dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

6.4. Conclusion:

L'approche du paramètre énergétique J provenant de l'équation de base de la distribution spatiale de la densité d'énergie de déformation, proposée par ANDREWS ($W(\mathbf{P})=W_0.f(X/a, Y/a, \epsilon_0)$), donne des valeurs liées à la position du repère de référence. Ces valeurs n'ont donc pas de sens physique.

La nouvelle formulation de la densité d'énergie de déformation que nous avons proposée ($W(\mathbf{P}) = W_0 \cdot f(X, Y, a, W_0)$) a conduit, moyennant certaines hypothèses simplificatrices, à une approche du paramètre énergétique J sous la forme d'une intégrale à travers le contour (Γ) parcourant les frontières de l'éprouvette:

$$\mathbf{J}_1 = \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot d\mathbf{Y}$$

Cette expression représente le premier terme de l'intégrale de RICE.

Nous avons vérifié que le terme J_1 décrit de manière satisfaisante l'intégrale J de RICE. Dans le cas des éprouvettes S.E.N.T, les divergences observées sont inférieures à 4 %. Dans le cas des éprouvettes D.E.N.T, ces divergences croissent avec l'augmentation de la longueur de fissure et atteignent un maximum de 12 %.

Dans le cas des élastomères, l'évaluation du paramètre J_1 nécessiterait uniquement la connaissance des déformations au niveau des frontières de l'éprouvette. Ces déformations seraient utilisées pour déterminer la densité d'énergie de déformation W à partir d'une loi hyperélastique ($W=W(I_1, I_2, I_3)$).

**CONCLUSION GENERALE
ET
PERSPECTIVES**

CONCLUSION GENERALE

Les critères énergétiques caractérisés par le paramètre énergétique J et sur lesquels se base l'étude présentée ici sont d'une utilisation facile et courante. Quoiqu'ils fassent appel à des méthodes globales, leur validité est incontestable comme le confirment les résultats bibliographiques et ceux obtenus dans ce travail.

Le paramètre énergétique J est déterminé expérimentalement pour deux types de matériaux caoutchoutiques (E.P.D.M et polybutadiène), à partir de la relation proposée par ANDREWS (1^{ère} équation de sa théorie généralisée) et dans laquelle est introduite une fonction de géométrie $F(a/w)$ par analogie à la mécanique linéaire élastique:

$$J = 2 \cdot k(W_0) \cdot W_0 \cdot a \cdot F(a/w)$$

La méthode de séparation, développée antérieurement dans notre laboratoire et appliquée pour l'identification des différents termes de cette expression, a conduit à des résultats satisfaisants.

En effet, la fonction de potentiel $k(W_0)$ est trouvée indépendante de la longueur de fissure et elle est identique pour les deux géométries d'éprouvettes S.E.N.T et D.E.N.T étudiées. Ceci permet de conclure que l'hypothèse d'existence d'une telle fonction, liée uniquement au comportement mécanique, est cohérente.

La fonction de correction géométrique $F(a/w)$, obtenue pour les éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène, diverge au maximum de 7% par rapport au facteur de calibration linéaire Y^2 équivalent. Ce résultat indique que, compte tenu des dispersions expérimentales, il n'y a pas d'influence de comportement du matériau sur cette fonction. Celui-ci est intégralement pris en compte par la fonction $k(W_0)$.

Les divergences significatives observées entre le facteur de calibration Y^2 linéaire et $F(a/w)$ correspondant aux éprouvettes S.E.N.T sont attribuées aux effets de flexions induits par la dissymétrie de ce type de géométrie. L'incidence de cette flexion semble dépendre de la rigidité du matériau considéré

L'utilisation d'une loi de comportement sous forme d'une fonction discrète, au lieu d'une forme de type MOONEY ($W(I_1, I_2, I_3)$) habituellement utilisée dans le cas des élastomères, semble être adaptable à la simulation par la méthode des éléments finis du problème de rupture étudié.

L'intégrale J évaluée numériquement est en bon accord avec le paramètre énergétique J expérimental (divergences inférieures à 5%), lorsque la taille du ligament est suffisamment faible ($a/w \geq 0.5$). Pour les essais correspondant à des valeurs de $a/w < 0.5$, des divergences, d'autant plus importantes que a/w est petit, sont mises en évidence.

Ces divergences sont imputables aux erreurs d'approximation induites par les fonctions de lissage des points expérimentaux. Ces fonctions ne seraient plus représentatives pour les faibles valeurs de a/w . Elles sont, toutefois, nécessaires pour identifier, par l'application de la méthode de séparation, les différents termes de l'expression du paramètre énergétique J donnée ci-dessus.

En effet, la fonction $k(W_0)$ calculée numériquement est identique à celle issue de l'expérience. Cependant, le facteur de calibration $F(a/w)$ expérimental est supérieur à celui obtenu à partir des résultats numériques.

La forme multiplicative de J semble rendre compte correctement de l'évolution de ce paramètre énergétique puisque les valeurs de celui-ci, obtenues à partir des fonctions numériques $k(W_0)$ et $F(a/w)$, sont en excellent accord (dispersion $< 0.4\%$) avec l'intégrale de contour J . Ce résultat confirme, par là même, la validité de la méthode de séparation utilisée pour déterminer ces fonctions.

L'amorçage de la fissure pour les matériaux que nous avons étudiés est, à priori, régi par la valeur critique J_c de J . Cette valeur calculée numériquement, en considérant une entaille fine, est de $1.86 \text{ (kJ/m}^2\text{)}$ et $0.322 \text{ (kJ/m}^2\text{)}$ respectivement pour l'E.P.D.M et le polybutadiène.

Tous ces résultats montrent qu'à partir d'un seul essai, le simple relevé de la charge correspondant à l'amorçage de la fissure permet de déterminer J_c :

- soit à partir de l'intégrale numérique
- soit en utilisant la forme multiplicative de J moyennant dans ce cas la connaissance des fonctions $k(W_0)$ et $F(a/w)$.

Les formulations de J proposées par RIVLIN et THOMAS s'adaptent bien pour le cas des éprouvettes D.E.N.T (éprouvette à double fissure latérale) et C.P (éprouvette de cisaillement pur). Ces modèles peuvent alors être utilisés pour la détermination de la valeur de J_c à l'aide d'un seul échantillon.

La procédure de calcul du paramètre énergétique J que nous avons proposée, donne des résultats qui approchent de manière satisfaisante l'intégrale J de RICE. De plus, dans le cas des

élastomères, elle nécessiterait uniquement la connaissance des déformations sur les frontières de l'éprouvette permettant la détermination de la densité d'énergie de déformation W à partir d'une loi hyperélastique ($W(P)=W(I_1, I_2, I_3)$).

Ce travail constitue une étude intéressante sur la détermination numérique et expérimentale du paramètre énergétique J dans le cas des matériaux caoutchoutiques. Nos résultats viennent en complément des données bibliographiques citées au chapitre 2.

PERSPECTIVES

Les calculs numériques effectués dans cette étude ont apporté des réponses à un certain nombre de questions soulevées lors de l'analyse expérimentale sur l'E.P.D.M et le polybutadiène, notamment en ce qui concerne:

- la validité de la méthode de séparation d'énergie;
- la validité de la forme multiplicative de $J (=k(W_0).W_0.a.F(a/w))$;
- la validité du paramètre énergétique J à caractériser la rupture des élastomères.

Il serait donc intéressant d'étendre ces calculs à des élastomères ayant des lois de comportement différentes.

Nous avons mis en évidence des effets de flexion induits par la dissymétrie des éprouvettes S.E.N.T. Ceux-ci sont, à priori, responsables des divergences observées entre la fonction de géométrie $F(a/w)$ et le facteur de calibration linéaire Y^2 équivalent. Nous envisageons de faire varier les géométries des éprouvettes et leur mode de fixation afin de pouvoir séparer et/ou contrôler l'effet de flexion et de l'introduire sous forme d'un facteur correctif dans la fonction de calibration $F(a/w)$.

Les critères de rupture globaux auxquels nous avons eu recours, n'ont pas permis de modéliser rigoureusement les effets de géométrie puisque la fonction $F(a/w)$ est trouvée différente pour deux géométries d'éprouvettes S.E.N.T correspondant aux deux matériaux considérés. L'utilisation des critères locaux pourrait venir en complément des approches globales actuelles. Les résultats numériques, obtenus dans cette étude, permettraient de développer certains outils pour l'établissement d'un critère local de rupture puisque nous disposons de la distribution des contraintes et des déformations à travers toute l'éprouvette.

Bien que la valeur critique J_c de J , calculée numériquement, soit considérée comme un paramètre de rupture intrinsèque du matériau, il sera, toutefois, nécessaire de vérifier si celui-ci est bien indépendant du type de géométrie de l'éprouvette.

Les résultats présentés ici supposent l'élasticité réversible du matériau. En réalité, des phénomènes d'endommagement locaux peuvent apparaître en fond de fissure lorsque les déformations sont très importantes. On peut envisager de développer une étude aux matériaux à caractère dissipatif. On se préoccupera alors du mécanisme de rupture à l'échelle microscopique. Il s'agit d'introduire un critère d'endommagement local qui, combiné avec le champ de contraintes et de déformations, permettra de suivre la dégradation du matériau jusqu'à rupture et de définir un critère local de ruine qui devra être comparé aux approches globales faites jusqu'ici.

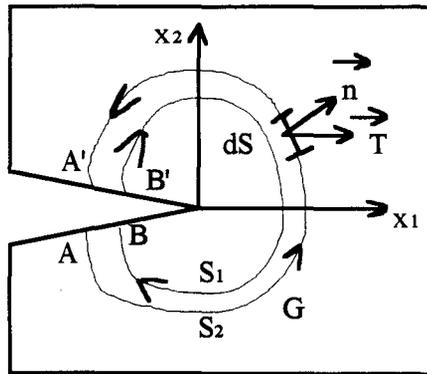
ANNEXES

ANNEXE 1

INDEPENDANCE DE L'INTEGRALE J VIS A VIS DU CONTOUR D'INTEGRATION

La démonstration de cette propriété se fait en calculant l'intégrale de RICE sur deux contours et en montrant que la différence entre les intégrales J_1 et J_2 associées à ces deux contours est nulle [A.1].

Considérons un contour C constitué de deux autres contours S_1 et S_2 et de deux portions de fissure AB et $A'B'$ (figure A.1.1).



*Figure A.1.1: Contour C fermé autour du fond de fissure
($C = S_1 + S_2 + BA + A'B'$)*

Soit A l'aire délimitée par le contour C . D'après le théorème de STOCKES:

$$\int_C n_i f(x_1, x_2) dS = \iint_A \partial f(x_1, x_2) / \partial x_i dA \quad (\text{A.1.1})$$

f est une fonction de x_1 et x_2 .

En transposant le théorème de STOCKES à l'intégrale J , il vient:

$$\int_C [W dx_2 - n_i \sigma_{ij} (\partial u_j / \partial x_1)] dS = \iint_A [(\partial W / \partial x_1) - (\partial / \partial x_i) (\sigma_{ij} \partial u_j / \partial x_1)] dA \quad (\text{A.1.2})$$

Les coordonnées x_i sont associées aux nombres n_i :

$$\int_C [W n_1 - n_i \sigma_{ij} (\partial u_j / \partial x_1)] dS = \iint_A [\sigma_{ij} (\partial \varepsilon_{ij} / \partial x_1) - (\partial \sigma_{ij} / \partial x_i) (\partial u_j / \partial x_1) - \sigma_{ij} (\partial / \partial x_i \cdot \partial u_j / \partial x_1)] dA \quad (\text{A.1.3})$$

L'intégrale de surface est constituée de trois termes :

- considérons le 1^{er} terme :

$$\sigma_{ij} \cdot \partial \varepsilon_{ij} / \partial x_1 = \sigma_{ij} (\partial / \partial x_1) (\partial u_j / \partial x_j) \quad (\text{A.1.4})$$

car par définition :

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 [\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i] \quad (\text{A.1.5})$$

Cette symétrie en i et j entraîne par commutativité de l'opérateur de différenciation :

$$\sigma_{ij} \cdot (\partial / \partial x_1) (\partial u_j / \partial x_i) = \sigma_{ij} (\partial / \partial x_j) (\partial u_j / \partial x_1) \quad (\text{A.1.6})$$

Le 1^{er} terme est donc égal au 3^{ème} terme.

Considérons le 2^{ème} terme, il représente l'équation d'équilibre et est donc nul. L'intégrale associée au contour défini précédemment est, par conséquent, nulle.

$$\int_C [W \cdot n_1 - n_i \sigma_{ij} (\partial u_j / \partial x_1)] dS = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

En conclusion, pour un matériau élastique linéaire ou non, l'intégrale J définie par RICE est indépendante du contour.

ANNEXE 2

AUTRES INTEGRALES DE CONTOUR [A.1]

L'intégrale J de RICE a été établie dans le cas bidimensionnel pour un matériau dont la loi de comportement est élastique linéaire ou non linéaire. Elle a été, par la suite, étendue au cas de la plasticité. Pour des problèmes tridimensionnels et des lois de comportement plus complexes, d'autres intégrales ont été proposées. BLACKBURN [A.2], en 1972, a proposé une généralisation de l'intégrale de RICE pour un matériau élastique dans le cas tridimensionnel. Cette généralisation appelée intégrale J^* est de la forme :

$$J^* = \lim_{s \rightarrow 0} \int_S [W dx_2 - T_i \cdot u_{i,1} \cdot dS] \quad (A.2.1)$$

où x_1 , x_2 et x_3 sont les directions dans le cas d'une fissure non plane de la normale principale, de la normale secondaire et de la tangente au point de la fissure où l'intégrale J^* est calculée.

MIYAMOTO [A.3] a défini dans le cas de sollicitations bidimensionnelles l'intégrale J_{ext} :

$$J_{\text{ext}} = \int_S (W dy - T_i \beta_i \cdot dS) \quad (A.2.2)$$

β_i est le tenseur des distorsions élastiques distribuées dans le corps fissuré.

NILLSON [A.4] a considéré le problème de chargement dynamique d'une fissure dans le cas d'un corps dont le comportement est viscoélastique en déformations planes. Pour cela, il introduit l'intégrale \underline{I} :

$$\underline{I} = \int_S \left[\underline{W} - 0.5 \rho^* \cdot \underline{u}_i \cdot \underline{u}_i - \underline{T}_i \left(\frac{\partial \underline{u}_i}{\partial x} \right) \right] \cdot dS \quad (A.2.3)$$

ρ^* est la densité du corps, les quantités \underline{W} , \underline{u}_i , \underline{T}_i ont été obtenues après transformation selon LAPLACE de la loi de comportement, des déformations, des équations de compatibilité et des conditions aux limites.

KISHIMOTO et SAKATA [A.5] ont étendu l'intégrale J dans le cas où existent des tractions surfaciques sur les lèvres de la fissure mais aussi des effets d'inertie et des forces volumiques. Pour cela, ils définissent l'intégrale :

$$J_K = \iint_A \left\{ (\rho^* \cdot u_i - F_i^v) \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_K} \right) + \sigma_{ij} \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_K} \right) \right\} dA - \int_{S+S^0} T_i \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_K} \right) dS \quad (A.2.4)$$

F_i^v sont les forces volumiques . KISHIMOTO et SAKATA ont montré qu'en l'absence de forces volumiques d'inertie et de traction surfacique sur des lèvres de la fissure, cette intégrale se ramène à l'intégrale de RICE. Ils ont aussi montré qu'elle est indépendante du contour d'intégration.

ANNEXE 3

NON LINEARITES GEOMETRIQUES - HYPOTHESES DE GRANDES DEFORMATIONS

Lorsque les déformations dans un matériau dépassent quelques pour-cent, le changement de géométrie qui en résulte ne peut être négligé. La théorie des grandes déformations peut être mise en relief en considérant un solide qui est dans une configuration initiale C_0 et qui, suite à l'application de différents efforts, se trouve dans une configuration déformée (ou actuelle) $C(t)$ (figure A.3.1).

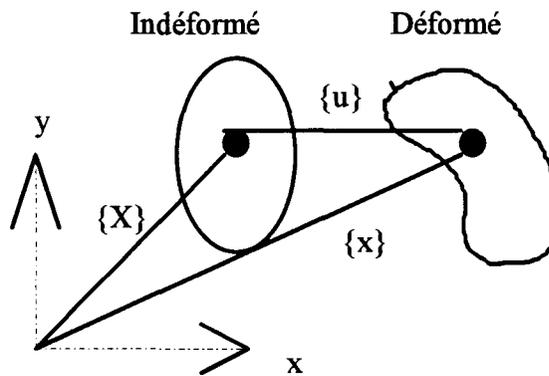


Figure A.3.1: vecteur position et vecteur déplacement d'un solide déformé.

Les vecteurs positions du solide dans l'état indéformé et l'état déformé sont représentés respectivement par $\{X\}$ et $\{x\}$. Le vecteur déplacement $\{u\}$ est, par conséquent, calculé à partir de l'équation:

$$\{u\} = \{x\} - \{X\} \quad (\text{A.3.1})$$

La transformation F (tenseur gradient de déformation) permettant le passage de C_0 à $C(t)$ est définie par:

$$F = \frac{\partial \{x\}}{\partial \{X\}} \quad (\text{A.3.2})$$

qui peut être écrite en terme de déplacement d'un point par:

$$F = [I] + \frac{\partial \{u\}}{\partial \{X\}} \quad (\text{A3.3})$$

où $[I]$ est la matrice identité.

A partir de F , on peut définir la variation de volume ($\frac{V_t}{V_0}$), la rotation et le changement de géométrie du solide déformé.

La variation de volume en un point du solide est définie par:

$$\frac{dV}{dV_0} = \det F \quad (\text{A.3.4})$$

où V_0 : volume à l'état initial;

V_t : volume à l'état déformé.

Le gradient de déformation peut être décomposé en un tenseur de rotation pur R et en un tenseur d'élongation pur droit, U , ou gauche, V (figure A.3.2) par l'application du théorème de décomposition polaire [A.6]:

$$F = R \cdot U = V \cdot R$$

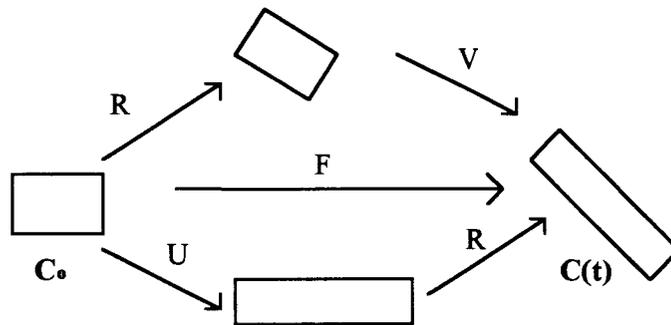


Figure A.3.2: décomposition polaire de F

Les tenseur R , U et V sont symétriques et définis positifs.

U est défini par rapport à la configuration de référence C_0 et V par rapport à la configuration déformée $C(t)$. Le tenseur U est obtenu en diagonalisant (repère principal) le tenseur des élongations de CAUCHY GREEN droit $C = F^T F$ (symétrique, défini positif sur C_0) et en prenant comme composantes les racines carrés des trois valeurs propres de C notées C_1 , C_2 et C_3 :

$C = F^T F$ dans le repère principal

$$C = \begin{vmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.3.5})$$

$$U = \begin{vmatrix} \sqrt{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_3} \end{vmatrix} \quad (\text{A.3.6})$$

Le tenseur de rotation pur R est défini par: $R = F \cdot U^{-1}$

ANNEXE 4

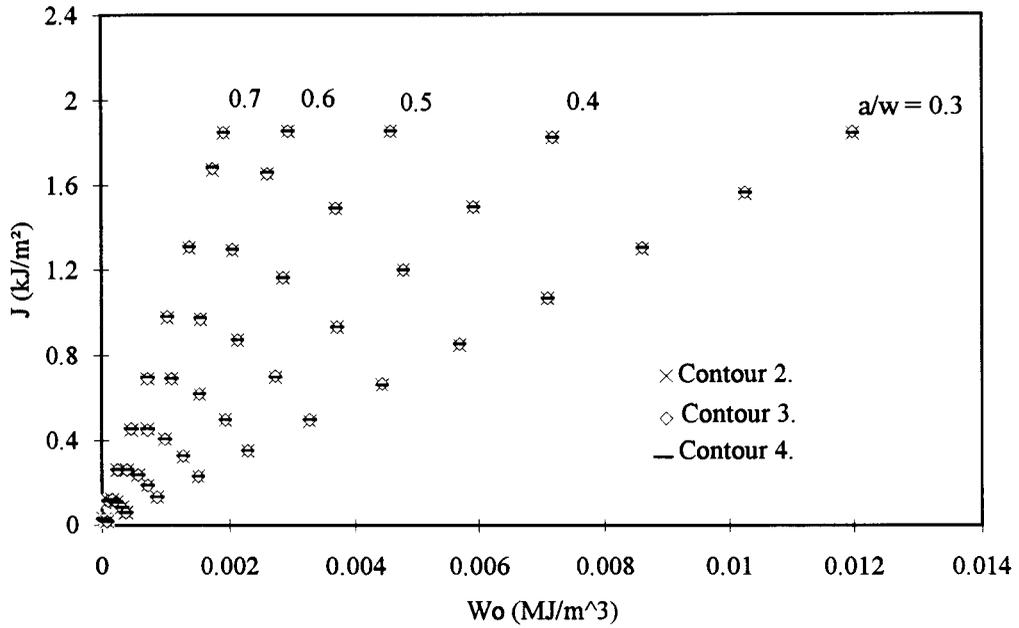


Figure A.4.1: Intégrale J suivant trois contours dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M

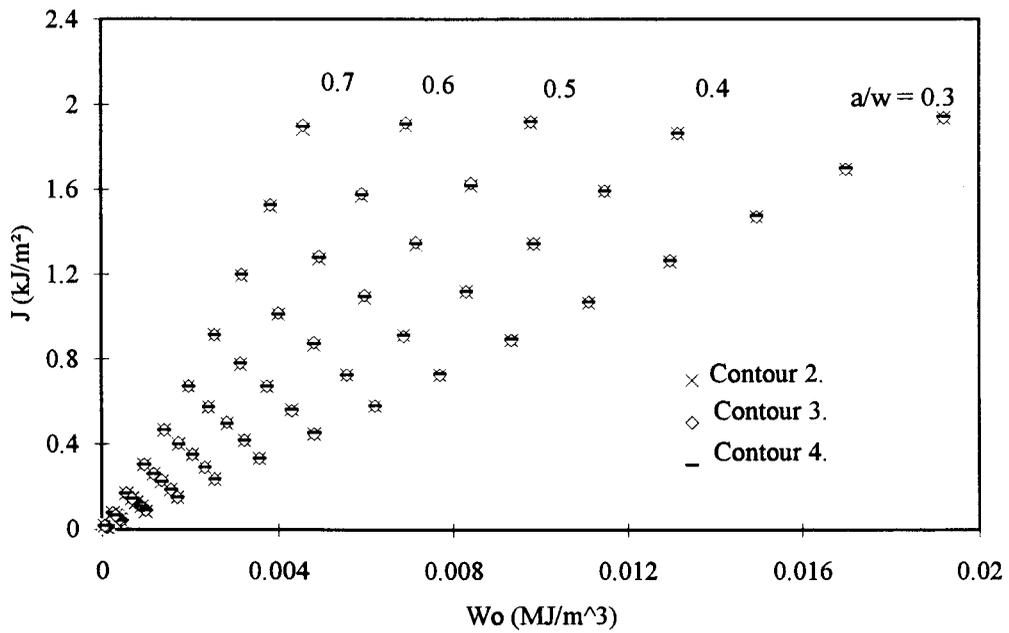


Figure A.4.2: Intégrale J suivant trois contours dans le cas des éprouvettes D.E.N.T de l'E.P.D.M

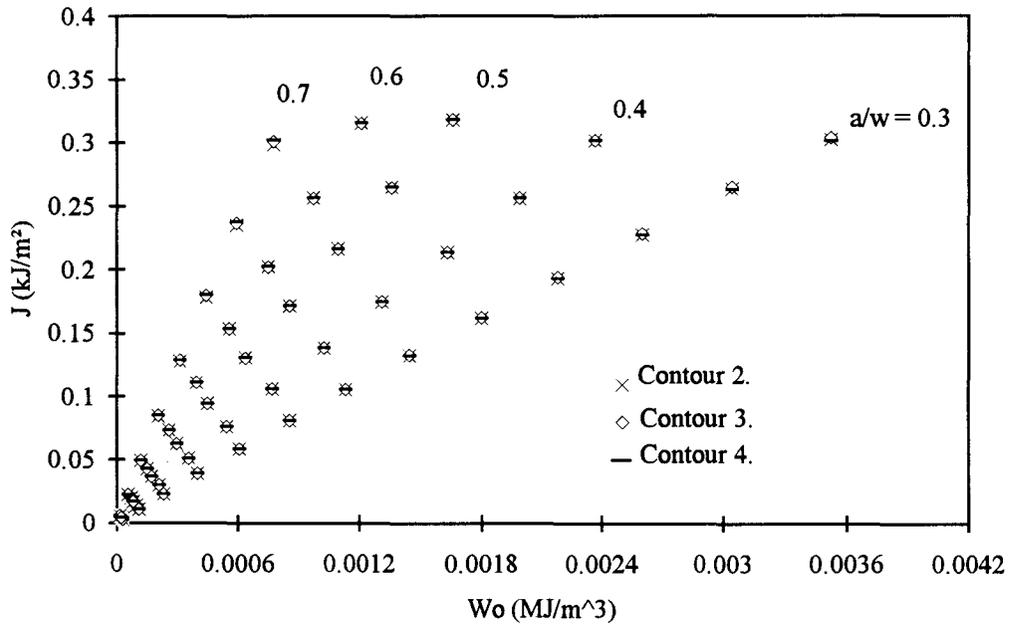


Figure A.4.3: Intégrale J suivant trois contours dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène.

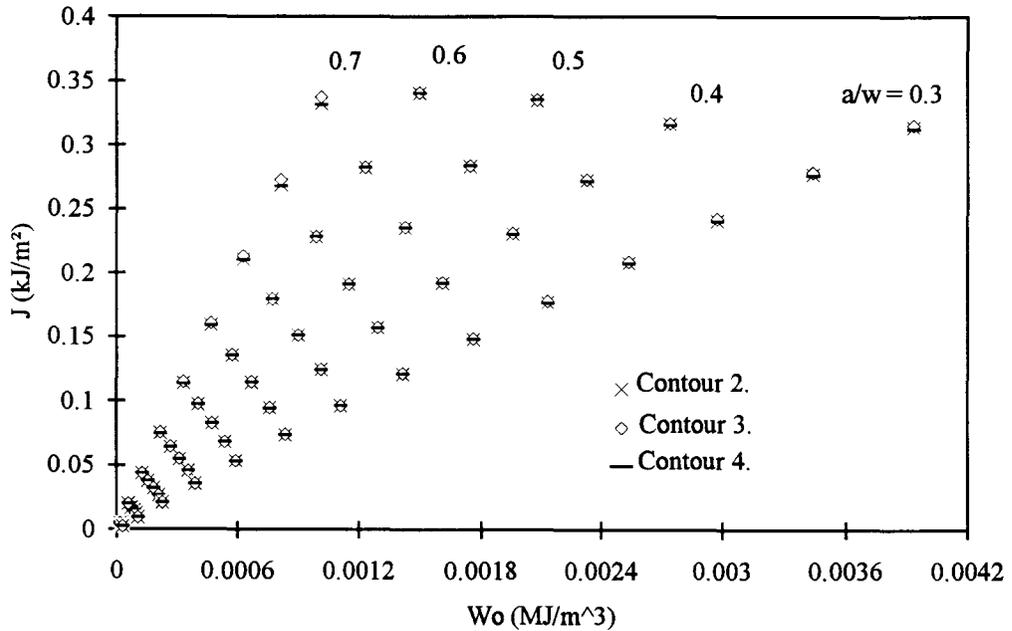


Figure A.4.4: Intégrale J suivant trois contours dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène.

ANNEXE 5

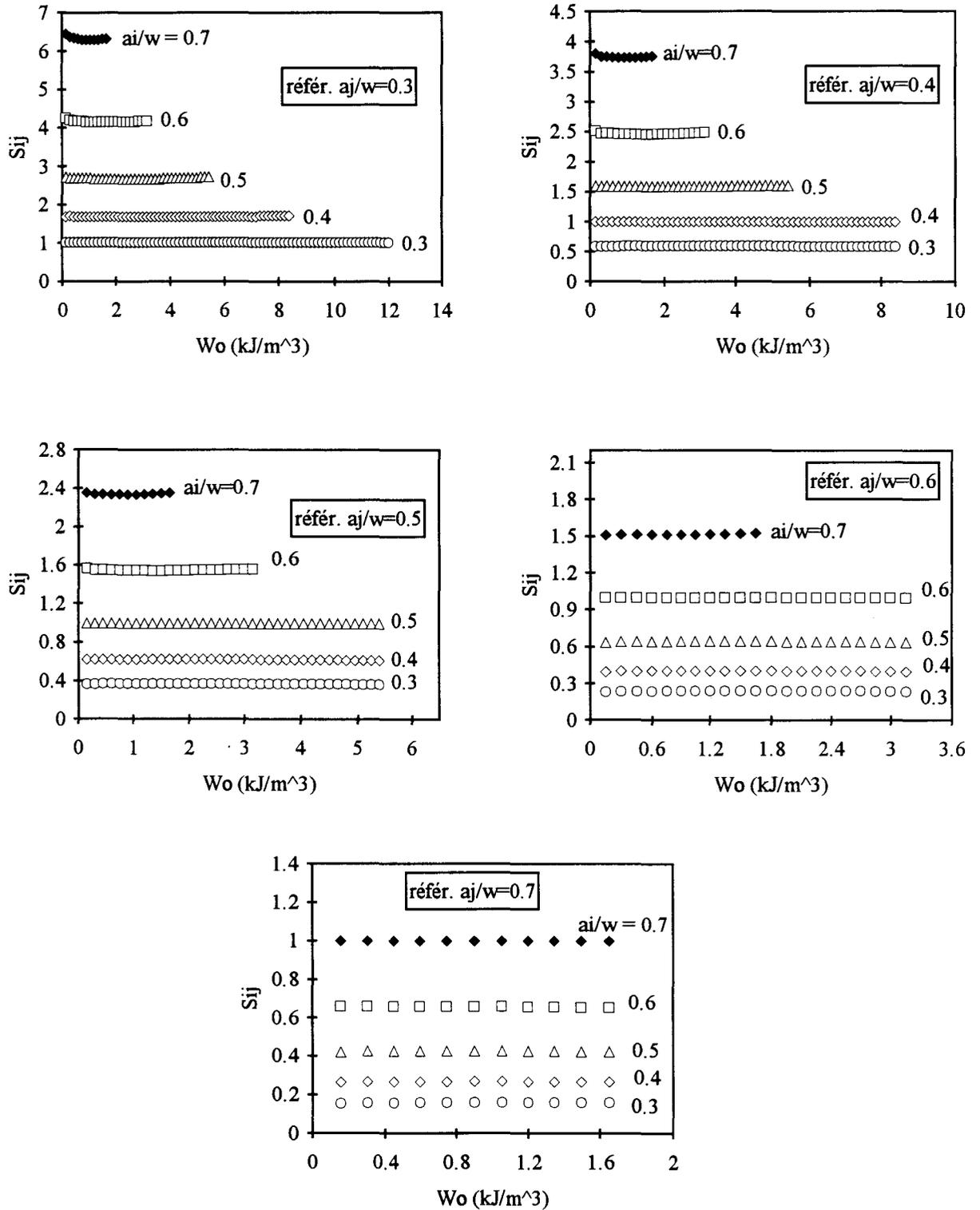


Figure A.5.1: Paramètre de séparation S_{ij} obtenu dans le cas des éprouvettes S.E.N.T de l'E.P.D.M.

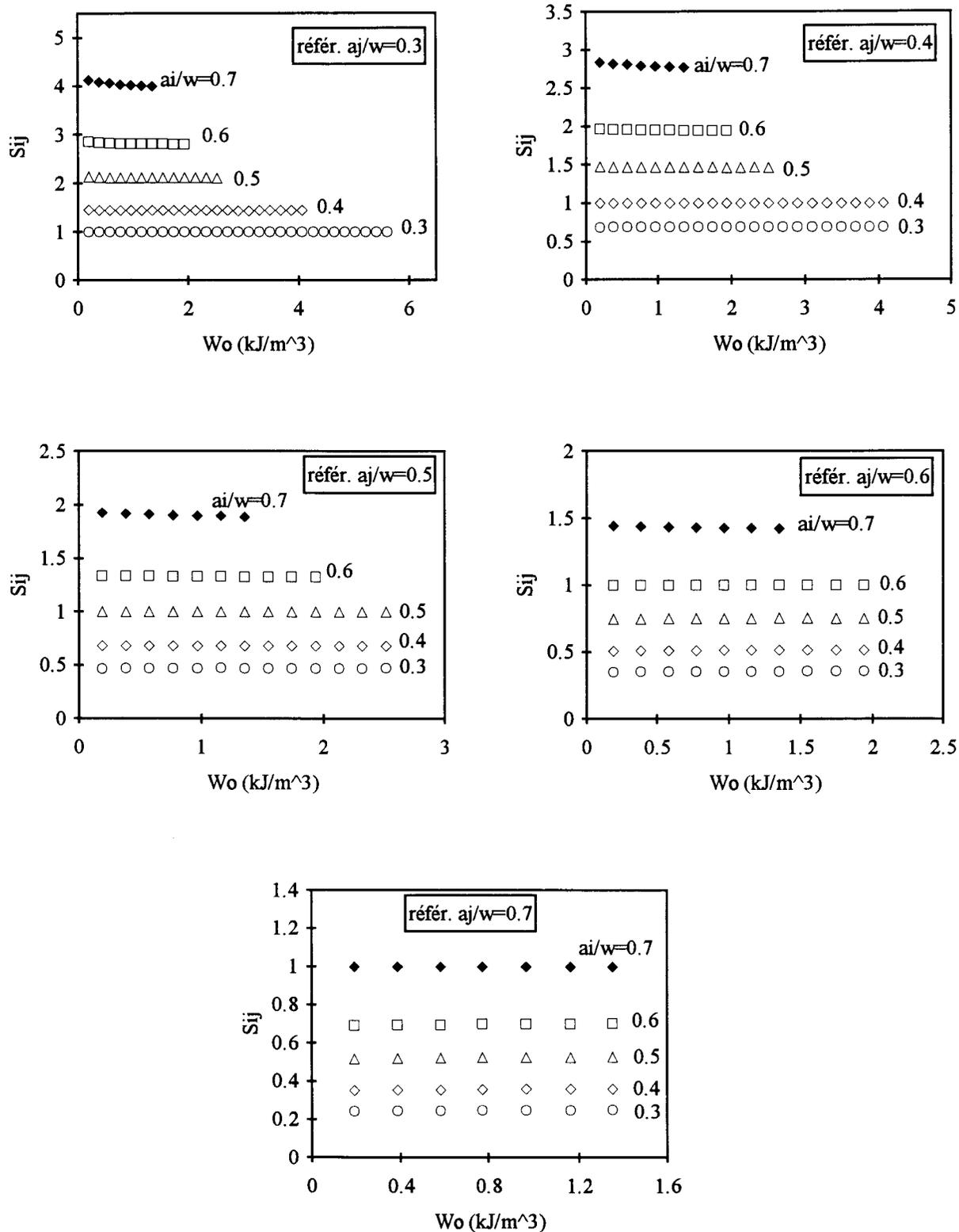


Figure A.5.2: Paramètre de séparation S_{ij} obtenu dans le cas des éprouvettes S.E.N.T du polybutadiène

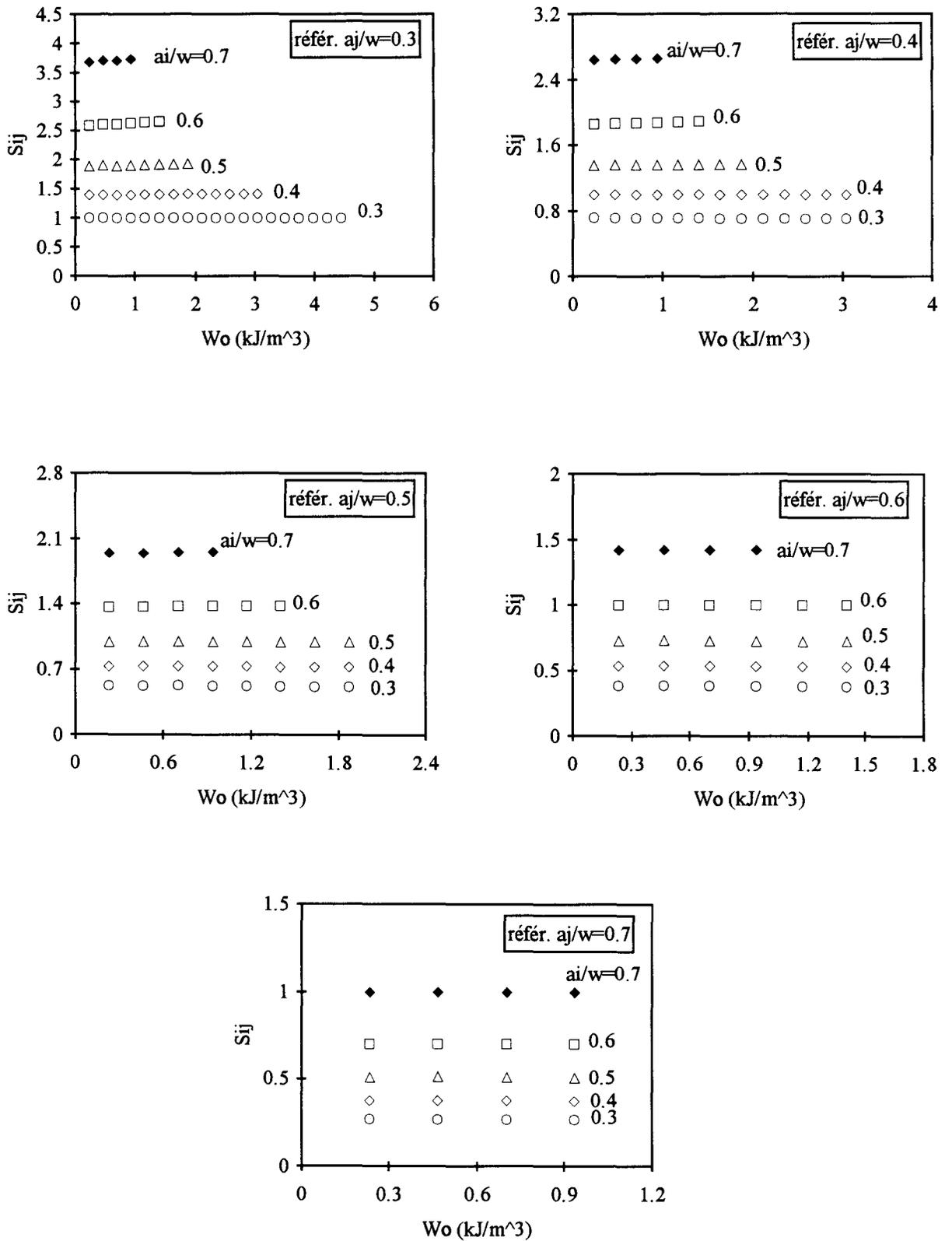
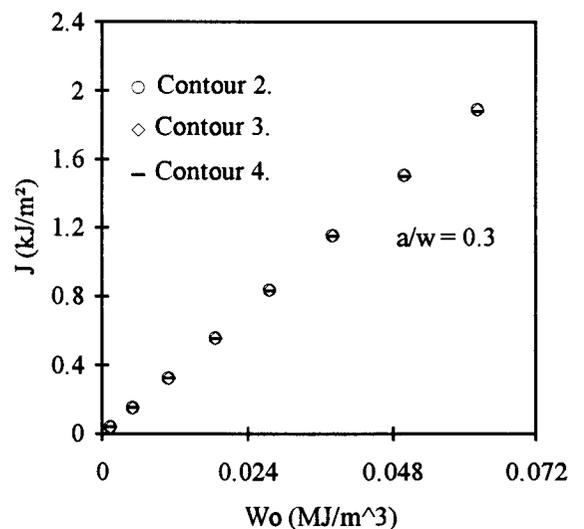
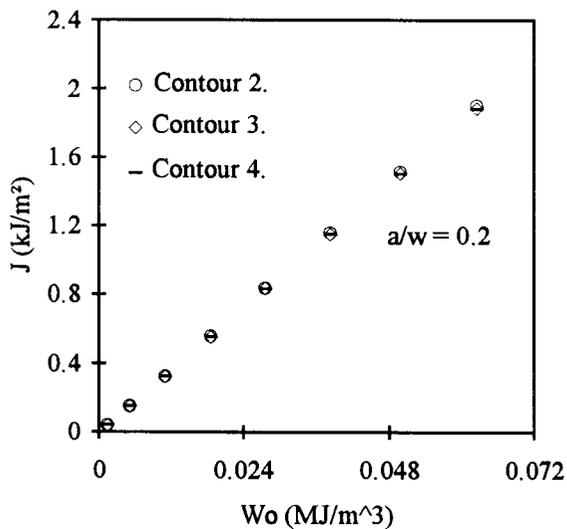
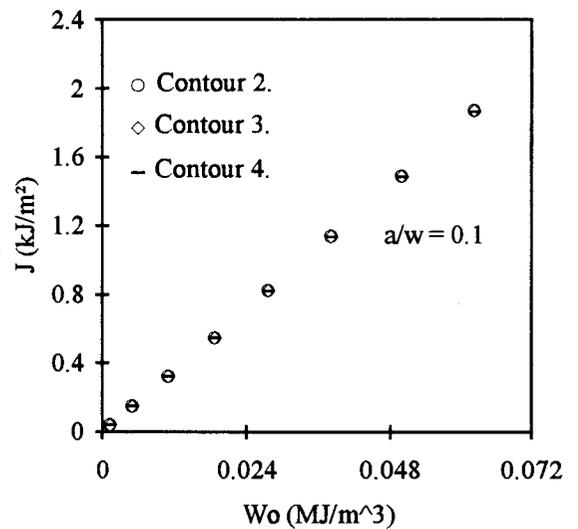
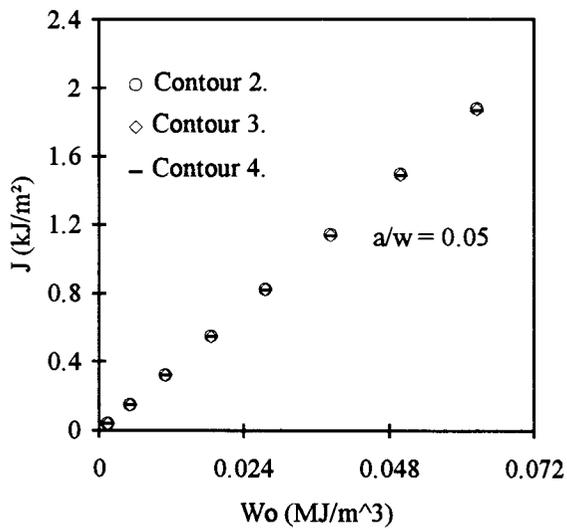
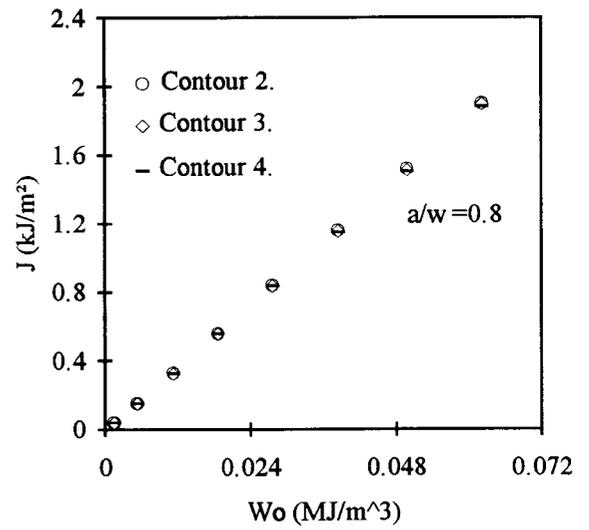
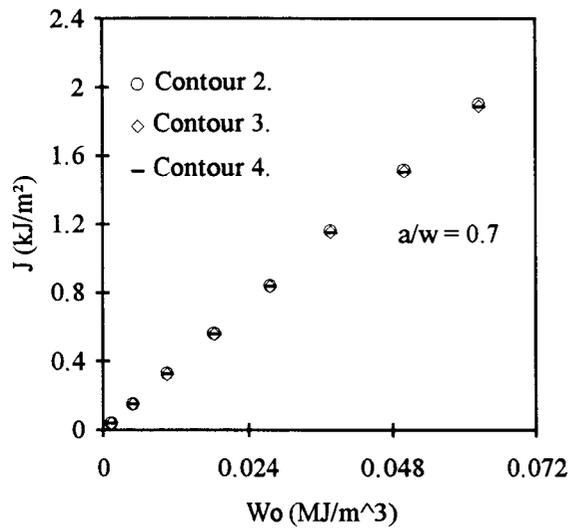
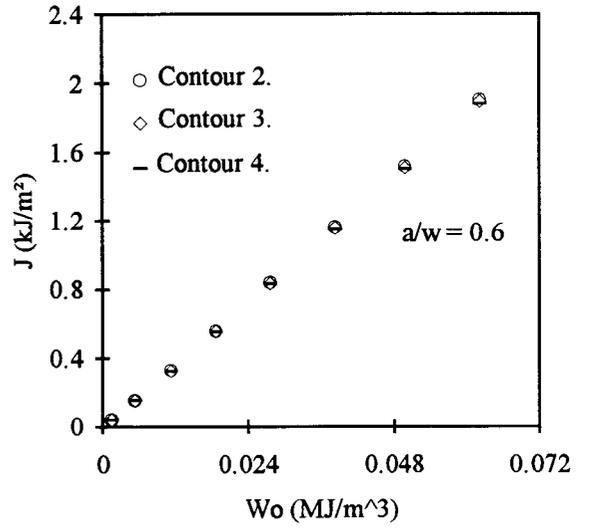
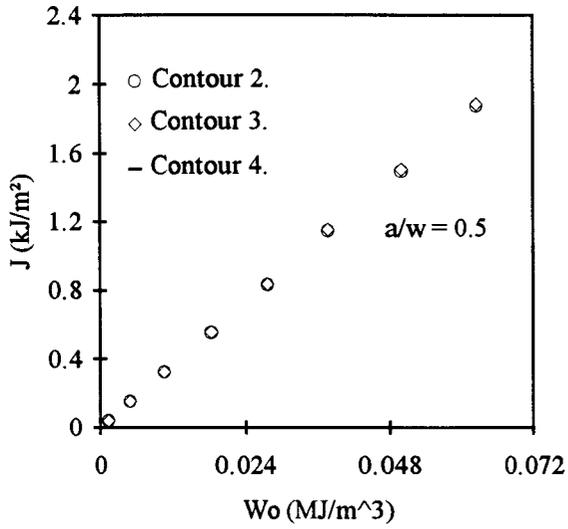


Figure A.5.3: Paramètre de séparation S_{ij} obtenu dans le cas des éprouvettes D.E.N.T du polybutadiène

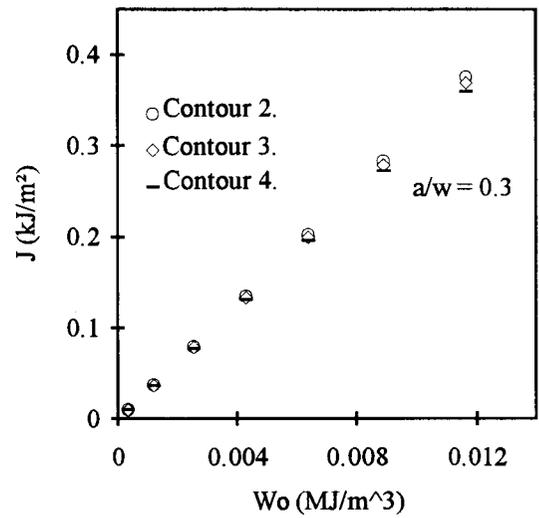
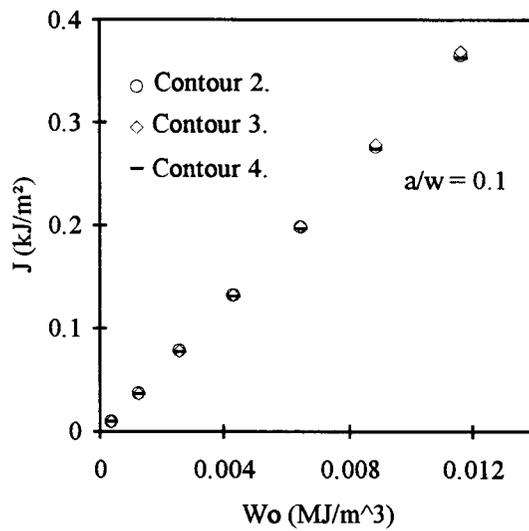
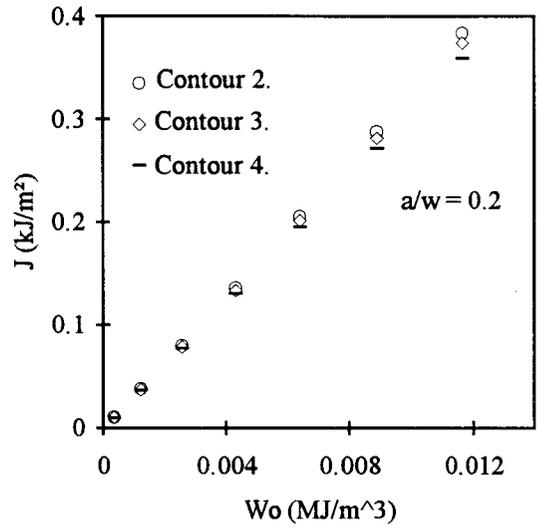
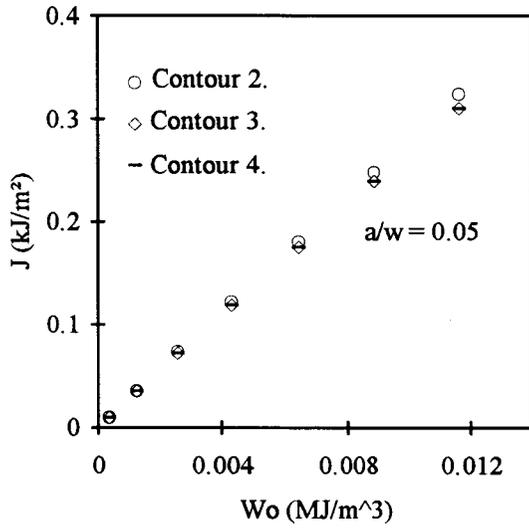
ANNEXE 6

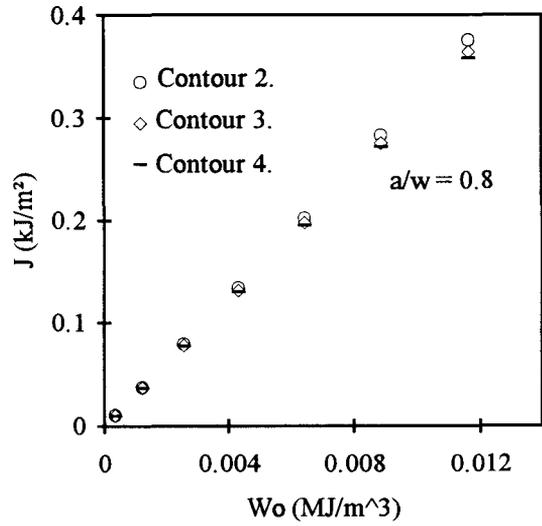
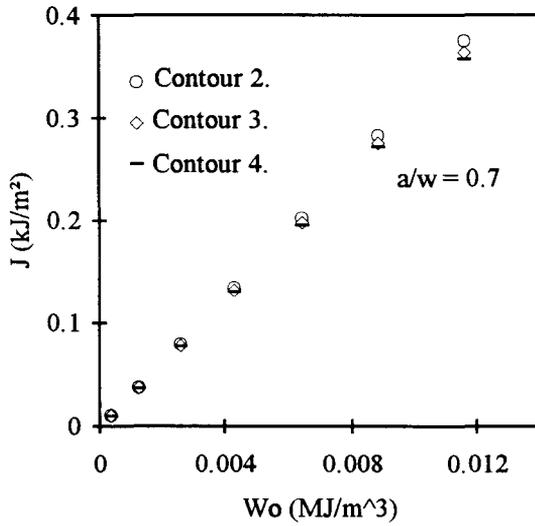
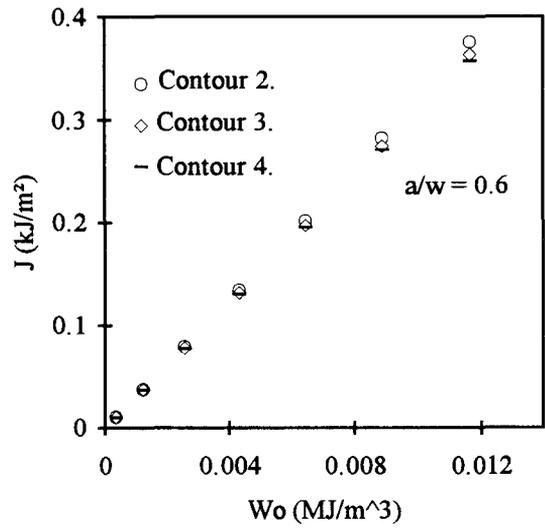
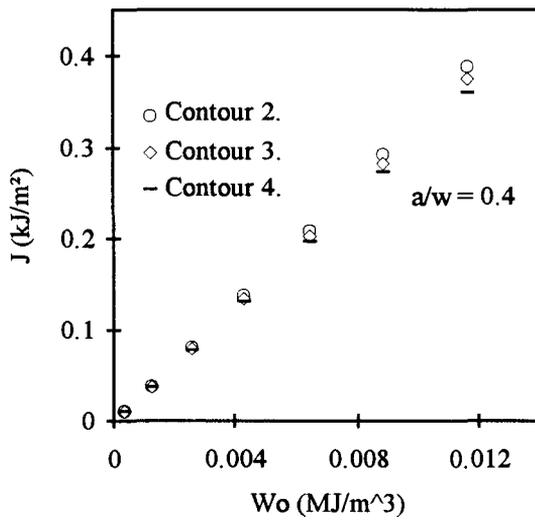
A.6.1. INTEGRALE J A TRAVERS TROIS CONTOURS DANS LE CAS DES EPROUVETTES EN CISAILLEMENT PUR DE L'E.P.D.M.





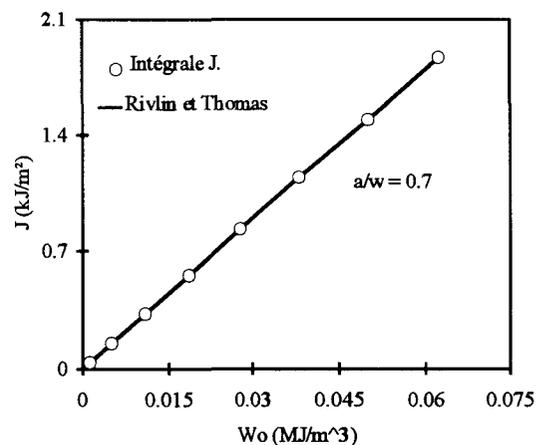
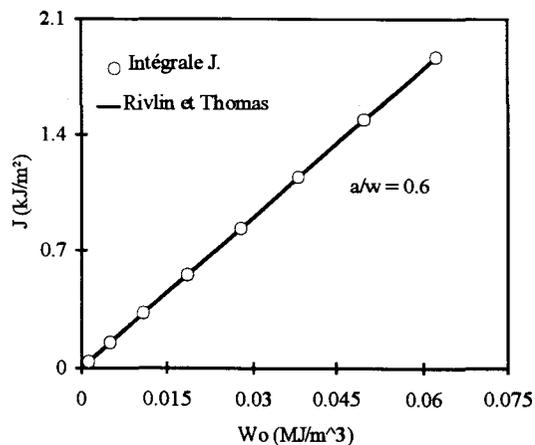
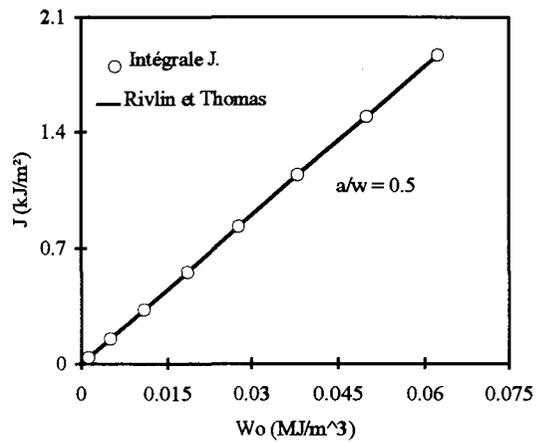
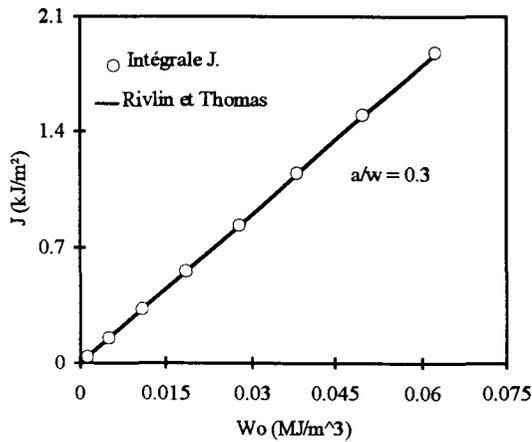
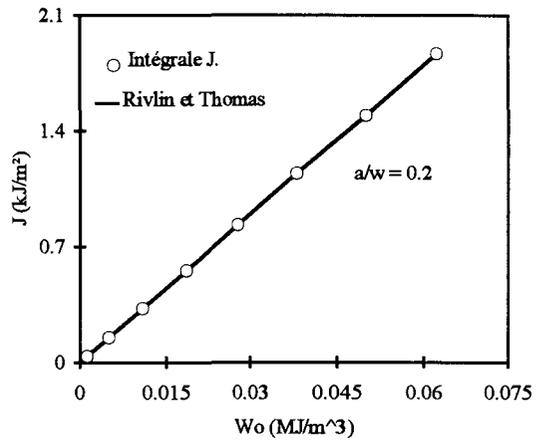
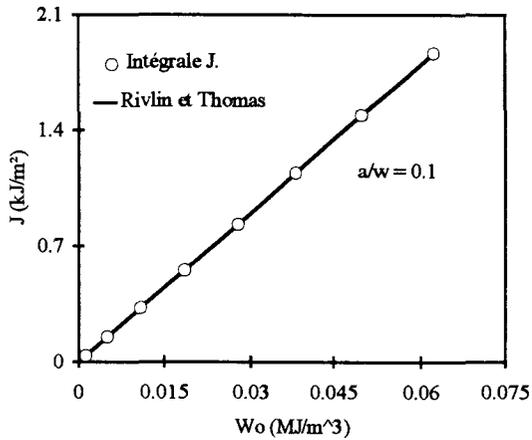
A.6.2. INTEGRALE J A TRAVERS TROIS CONTOURS DANS LE CAS DES EPROUVETTES EN CISAILLEMENT PUR DU POLYBUTADIENE



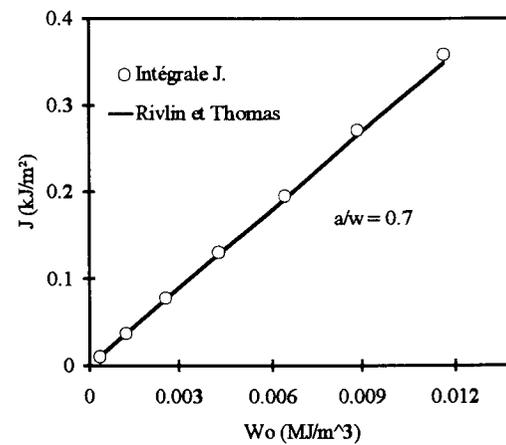
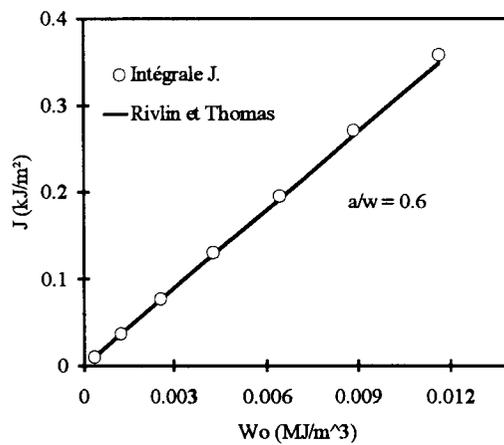
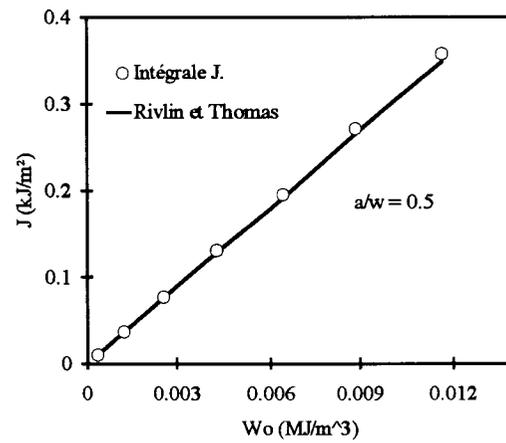
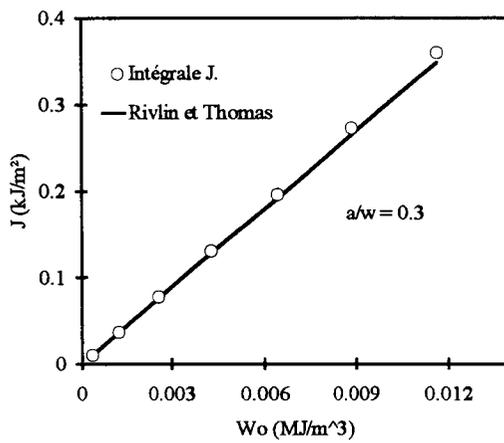
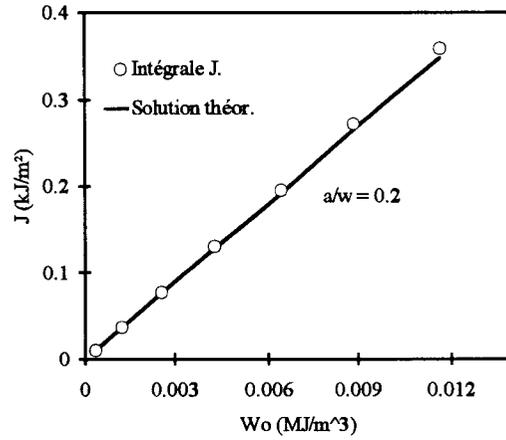
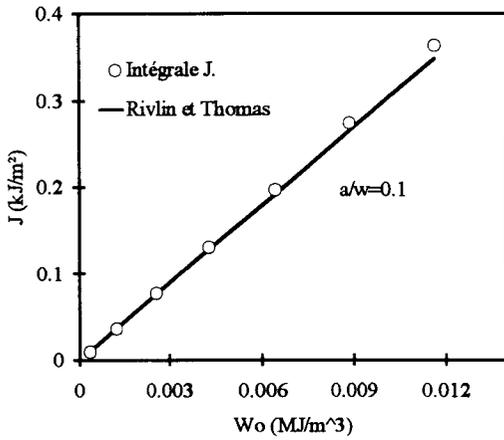


ANNEXE 7

A.7.1. COMPARAISON ENTRE L'INTEGRALE J ET LA SOLUTION DE RIVLIN ET THOMAS DANS LE CAS DES EPROUVETTES DU CISAILLEMENT PUR DE L'E.P.D.M



A.7.2. COMPARAISON ENTRE L'INTEGRALE J ET LA SOLUTION DE RIVLIN ET THOMAS DANS LE CAS DES EPROUVETTES DU CISAILLEMENT PUR DU POLYBUTADIENE



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1.1] **F. W. BILLMEYER**, "polymer science" Inter science, (1962).
- [1.2] **P. J. FLORY**, "Principles of Polymers Chemistry ", Cornell University Press, ITHACA NEW YORK, pp 432-493, (1967).
- [1.3] **Gerard KRAUS**, "Reinforcement of Elastomers", Interscience Publishers, a division of John Wiley and Sons, New York, pp 529-561, (1965).
- [1.4] **G. EVRARD et J.P. NOTTIN**, "Renforcement des Elastomeres par des Particules Spheriques" Colloq. Int. CNRS, N° 231. PP 271- 275, Paris, 24-26 Septembre (1973).
- [1.5] **M. MOONEY**, "A Theory of Large Elastic Deformation", J. Appl. phys, pp. 582-592, Vol.11. (1940).
- [1.6] **L.R.G. TRELOAR**, "the physics of rubber elasticity" Clarendon press oxford, (1975).
- [1.7] **R. S. RIVLIN**, "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials", IV. Phil. trans. Roy. Soc., Vol. 241, pp. 379-397, (1948).
- [1.8] **R.S. RIVLIN and D.W. SAUNDERS**, "Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VII. Experiments on the Deformation of Rubber", Phil. Tran. Roy. Soc., Vol. A243, pp 251-288, (1951).
- [1.9] **J.M. KLOSNER and A. SEGAL**, "Mechanical Characterization of a Natural Rubber", PIBAL Rep. 6942, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, (1969).
- [1.10] **GENT and THOMAS**, "Forms of the Stored (strain) Energy Function For Vulcanized Rubber", J. Polymer Sci., Vol. 28, pp. 625-628, (1958).
- [1.11] **L.J. HART-SMITH**, "Elasticity Parameters for Finit Deformations of Rubber-like Materials", Z. Angrew. Math. Phys., Vol. 17, pp. 608-625, (1966).
- [1.12] **H. ALEXANDER**, " A Constitutive Relation for Rubber like Materials", Inter. J. Eng. Sci., Vol. 6, N°9, pp. 549-563, (1968).
- [1.13] **J.T. ODEN**, "Finite Elements of Nonlinear continua", Mc Graw Hill Company, pp. 298-343, (1972).
- [1.14] **L. R. G. TRELOAR**, "Stress Strain Data for Vulcanized Rubber Under Various Types of Deformation", Trans. Furaday Soc. Vol. 40, p.59, (1944).

- [1.15] **L.R.G. TRELOAR**, "The Physics of Rubber Elasticity" 2nd ed., OXFORD University Press, LONDON, (1958).
- [2.1] **W.B. PARSONS**, "Engineers and Engineering in the renaissance", Williams and Wilkens, Baltimore, (1939).
- [2.2] **A.E.H. LOVE**, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications, New York, (1944).
- [2.3] **A.A. GRIFFITH**, "the Phenomena of Rupture and Flow in Solids", Transactions Royal Society London, Vol. 221, (1920).
- [2.4] **G.R. IRWIN**, "Fracture Handbuck Physic", 6, 551, (1958).
- [2.5] **G.R. IRWIN**, "Analysis of Stress and Strain Near the End of the Crack Traversing a Plate", Transactions, American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, (1957).
- [2.6] **G.R. IRWIN**, "Fracture Mechanics", Structural Mechnics, Pergamon Press, New York, NY, (1960).
- [2.7] **H.M. WESTERGAARD**, "Bearing Pressures and Cracks", Transactions, American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics, (1939).
- [2.8] **P.C. PARIS**, "The Mechanics of Fracture Propagation and Solutions to Fracture Arrestor Problems", Boeing document D2-2195, (1957).
- [2.9] **A.A. WELLS**, "Unstable Crack Propagation in Metals, Cleavage and Fast Fracture", Cranfield Crack Propagation Symposium 1, sept. (1961).
- [2.10] **D.S. DUGDALE**, "Yielding of Steel Sheets Slits", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 8, p. 100, (1960).
- [2.11] **B.A. BILBY, A.H. COTTREL and K.H. SWINDEN**, "The Spread of Plasticity from a Notch", Proceedings Royal Society Series A 272, p 304, London, (1963).
- [2.12] **B.A. BILBY, A.H. COTTREL, E. SMITH and K.H. SWINDEN**, "Plastic Yielding from Sharp Notches", Proceedings Royal Society Series A 279, London, (1964).
- [2.13] **J.D. HARRISSON, M.G. DAWES, G.L. ARCHER, M.S. KAMATH**, "The C.O.D Approach and Applications to Welded Structures", Presented at the ASTM Sumposium on Elastic-Plastic Fracture, Atlanta, Nov. (1977).
- [2.14] **A.A. WELLS**, Engineering Fracture mechanics, Vol. 1, p.399, (1969).

- [2.15] **J.D.G. SUMPTER**, "Elastic Plastic Fracture Analysis and Design using the Finite Element Method", Ph. D. Thesis, University of London, (1974).
- [2.16] "Methods for Crack Opening Displacement (C.O.D) Testing", Draft for Development, N° 3, British Standards Institution, (1971).
- [2.17] **J.R. RICE**, "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", Jour. of Applied Mechanics, 35, pp.379-386, (1968).
- [2.18] **G.R. IRWIN**, Appl. Mats. Res. 3, pp 65, (1964).
- [2.19] **L.F. GUILLEMOT**, "Brittle Fracture on Welded Materials", Second Commonwealth Welding Conference London C.7, p.353-382, (1965).
- [2.20] **G.C. SIH**, "Strain Energy Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems", International Journal of Fracture, Vol. 10, N° 3, (1974).
- [2.21] **L.F. GUILLEMOT** and **G. SINAY**, Academy of Sci. Hungary XXII, p. 149-173, (1958).
- [2.22] **G.C. SIH**, "Application of the Strain Energy Theory to Fundamental Fracture Problems", Proc., of 10th SES Annual Meeting Boston, p 221-234, (1975).
- [2.23] **H. LIEBOWITZ** and **EFTIS**, "On non Linear Effects Mechanics", Engineering Fracture Mechanics Vol. 3, p 267-281, (1971).
- [2.24] **A.J. KINLOCH** and **R.J. YOUNG**, "Fracture Behavior of Polymers", Elsevier Science Publishers, London and New York, pp 44-50, (1990).
- [2.25] **J.R. RICE**, "Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture", in Fracture vol. II, H. Liebowitz, Ed, Academic Press, PP. 1991-311, (1968).
- [2.26] **J.D ESHELBY** and **C. ATKINSON**, Int. Journal of Fracture, N° 4, p 3, (1968).
- [2.27] **H.D. BUI**, "Dual Path Independant Integral in the Boundary Value Problems of Cracks", Engineering Fract. Mech. 6, p 287-296, (1977).
- [2.28] **R. S. RIVLIN** and **A. G. THOMAS**, Rupture of rubber . I. Characteristic energy for tearing. J. Polymer sci. 10, N° 3, pp 291-318, (1953).
- [2.29] **H. W. GREENSMITH**, Rupture of rubber. X. The change in stored energy on making a small cut in a test piece held in simple extension. J. appl. polymer sci. 1, 993, (1963).
- [2.30] **G.J. LAKE**, "Application of Fracture Mechanics to Failure of Rubber Articles", Conf. Yield, Deformation and Fracture of Polymers, London, 5.3, (1970).

- [2.31] **A. G. THOMAS**, "Rupture of Rubber. II. The strain concentration at an incision", J. Polymer sci. 18, 177, (1955).
- [2.32] **A. G. THOMAS**, "Rupture of Rubber. V. Cut growth in naturel rubber vulganizates" J. Polymer Sci. 31, 467, (1958).
- [2.34] **A. N. GENT, P. B. LINDLEY and A. G. THOMAS**, "Cut Growth and Fatigue of rubbers. I- The relationship between cut growth and fatigue". J. appl. polymer sci. 8, 455, (1964).
- [2.35] **G.J. LAKE and P. B. LINDLEY**, Cut growth and fatigue limit of rubbers. II. Experiments on a noncrystallizing rubber. J. appl. polymer sci. 8, 707, (1964).
- [2.36] **G.J. LAKE and P.B LINDLEY**, The mechanical fatigue limit for rubber. J. appl. Polymer Sci. 1, 1233, (1965).
- [2.37] **E.H ANDREWS**, "A generalised theory of fracture mechanics", J. Mater. Sci., 9, 887-894, (1974).
- [2.38] **E.H ANDREWS**, "Prediction of fracture energies in highly extensible solids", J. Mater. Sci., 12, 1307-1319, (1977).
- [2.39] **H. GHFIRI, M. NAIT ABDELAZIZ & G. MESMACQUE**, "Experimental determination of J on rubbery materials: influence of finite dimensions", Engng fracture Mech. 44, 681- 689, (1993).
- [2.40] **J.A. BEGLEY and J.D. LANDES**, "The J Integral as a Fracture Criterion", in Fracture Toughness, ASTM STP 514, pp. 1-23, (1972).
- [2.41] **M. NAIT ABDELAZIZ, H. GHFIRI, G. MESMACQUE & R. NEVIERE**, "The J integral as fracture criterion of non linear behaviour materials: a comparative study between the compliance method and an energy separation method", Frac. Mec. 25th V, ASTM 1220, F. Erdogan and Ronald J. Hartranft, Eds., American Society for testing and materials, Philadelphia, (1994).
- [2.42] **V.B. WATWOOD**, "The finite Element Method for Prediction of Crack Behaviour", Nucl. Engng Des., 11, 323-332, (1969).
- [2.43] **P.L.KEY**, "A Relation Between Crack Surface Displacements and the Strain Energy Release Rate", International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 5, nbr.4, December (1969).
- [2.44] **LAKE. G.J.**, "Application of fracture mechanics to failure in rubber articles, with particular reference to groove cracking in tyres", Conference Yield Deformation and Fracture of Polymers, Physics Institute, London, (1970).
- [2.45] **NENG MING WANG**, "Finite Element Analysis of Cut Growth in Sheets of Highly Elastic Materials", Int. J. of Structures, Vol. 9, pp 1211-1223, Pergamon Press, (1973).

- [2.46] **R.M.V PIDAPARTI, T.Y YANG and WERNER SOEDEL**, "A Plane Stress Finite Element Method for Prediction of Rubber Fracture", *Int. J. of Fracture* 39, pp 255-268, (1989).
- [2.47] **D.M. PARKS**, "A Stiffness Derivative Finite Element Technique for Determination of Crack tip Stress Intensity Factors", *Int. Journal. Fract.* 10,487-502, (1974).
- [2.48] **T.K. HELLEN**, "On the Method of the Virtual Crack Extensions", *Int. J. Num. Methods Eng.*, 9,187-207, (1975).
- [2.49] **T.K HELLEN**, " Virtual Crack Extension Methods for non-linear materials", *Int. J. Num. Methods eng.*, 28,929-942, (1989).
- [2.50] Code d'éléments Finis "ANSYS 44.A", Swanson Analysis Systems, Inc. P.O. Box 65, Johnson Road, Houston.
- [2.51] **E.R. RYBICKI and M. KANNINEN**, 'A Finite Element Calculation of Stress Intensity Factors by a Modified Crack Closure Integral', *Engng. Fracture Mech.* 9, 931-938, (1977).
- [2.52] **T.S. RAMAMURTY and al.**, "Modified Crack Closure Integral Method With Quarter Point Elements", *Mech. Res. Commun.* 13 (4), 79-186, (1984).
- [2.53] **P.B. LINDLEY**, "Energy for Crack Growth in Model Rubber Components", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 7, N° 2, (1972).
- [3.1] **GENT, A.N.**, "Load-deflection relations and surface strain distributions for flat pads", *Proc. Conf. Rubb. Engng*, 25, (1956).
- [3.2] **M. NAIT ABDELAZIZ, H. GHFIRI, N. AIT HOCINE & G. MESMACQUE**, "Détermination Expérimentale du Paramètre Energétique J dans le cas des Matériaux Caoutchoutiques", 11^{ème} Congrès Français de Mécanique, Lille - Villeneuve d'Ascq, pp 289-292, (1993).
- [3.3] **W.F. BROWN, Jr and J.E. SRAWLEY**, "Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials", *ASTM STP 410*, p 12, (1966).
- [3.4] **D.P. ROOKE and D.J. CARTWRIGHT**, "Compodium of Stress Intensity Factors", Hillington Press, (1976).
- [3.5] **J.P. BENTHEM and W.T. KOITER**, "Asymptotic Approximations to Crack problems - Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems", *Mechanics of Fracture 1* (Edited by G.C. Sih), Noordhoff Int. Pub., p 157, (1972).
- [4.1] **J.T. ODEN**, "Finite Elements of Nonlinear continua", Mc Graw Hill Company, (1972).

- [4.2] **G. DHATT, G. TOUZOT**, "Une présentation de la méthode des éléments finis", deuxième édition, Université de Compiegne, Edit. Maloine S.A, (1984).
- [4.3] **O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR**, "La méthode des Eléments Finis - Formulation de Base et Problèmes Linéaires", Edit. AFNOR, (1991).
- [5.1] **N. AIT HOCINE, M. NAIT ABDELAZIZ, H. GHFIRI & G. MESMACQUE**, "Détermination de l'Intégrale J dans le cas des Caoutchoucs: Comparaison des résultats numériques et expérimentaux", 2^{ème} Congrès de Mécanique, Casablanca-Maroc, Tome 2, pp 1-6, Avril (1995).
- [5.2] **N. AIT HOCINE, M. NAIT ABDELAZIZ, H. GHFIRI & G. MESMACQUE**, "Application de la Mécanique de la Rupture aux Matériaux Caoutchoutiques: Comparaison des résultats numériques et expérimentaux", 12^{ème} Congrès Français de Mécanique, Strasbourg, Volume 1, pp 285-288, Septembre (1995).
- [A.1] **G. PLUVINAGE**, "Mécanique Elastoplastique de la Rupture - Critères d'Amorçage", CEPADUES - Editions, (1989).
- [A.2] **W.S. BLACKBURN**, "Path independant Integral to Predict Onset of Crack Instability in an Elastic Plastic Material", Int. J. of Fract. 8, p 343-346, (1973).
- [A.3] **K. HAGEYAMA and H. MIAYAMOTO**, "Extension of J Integral to the General Elastic-plastic Problem and Suggestion of a New Method for it Evaluation", Numerical Method in Fracture Mechanics I, p 479-486, (1978).
- [A.4] **F. NILSON**, "A Note on the Stress Singularity at a Non-uniformly Moving Crack Tip", J. of Elasticity 4, p 73-75, (1975).
- [A.5] **K. KISHIMOTO, S. AOKI and M. SAKATA**, "On the Path Independant Integral J", Engineering Fract. Mech., V. 13, p 841-850, (1980).
- [A.6] **F. SIDOROFF**, "les grandes déformations ", Rapport GRECO N° 51, Ecole d'été Sofia Antipolis, 8 - 10 Septembre (1982).

