

50376
1996
238

Numéro d'ordre 1767

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

UFR de Mathématiques Pures et Appliquées

Département de Mécanique

**OPTIMISATION D'UNE COMBINAISON
ÉQUATIONS INTÉGRALES-CHAMP NUL
APPLIQUÉE À LA DIFFUSION ACOUSTIQUE**

Thèse soutenue le jeudi 4 juillet 1996

pour obtenir le grade de

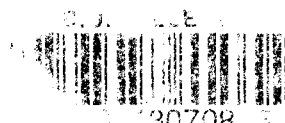
Docteur en Mécanique

par

Christian VANHILLE

devant la commission d'examen :

Président :	A. DYMENT
Rapporteurs :	J.-M. CONOIR J.-P. COYETTE
Membres :	J.-R. HARTMANN A. LAVIE
Directeur de Thèse :	J.-C. DEBUS



À mes Parents.

À Cleofé.



**Cette thèse a été préparée au Laboratoire d'Acoustique
de l'Institut Supérieur d'Électronique du Nord.**

Le code de calcul **EQI** est développé

pour le **CTSN/DLSM**

(Centre Technique des Systèmes Navals/Dissuasion Lutte Sous-Marine)
de la **DCN-Toulon** (Direction des Constructions Navales)

et la **DRET/STRDT**

(Direction de la Recherche Et de la Technologie/Service Technique des
Recherches et Développements Technologiques)
de la **DGA-Paris** (Direction Générale de l'Armement).

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur A. DYMENT, Professeur d'Université, pour avoir accepté la Présidence de ce jury et pour sa participation et son soutien à ma formation universitaire.

Je tiens à remercier Monsieur J.-M. CONOIR, Chargé de Recherche au C.N.R.S., d'avoir accepté le rôle de rapporteur et jugé ce travail dans une version provisoire.

J'assure à Monsieur J.-P. COYETTE, Professeur d'Université, mes remerciements pour avoir bien voulu être rapporteur et évaluer ce travail dans une version non définitive.

Je remercie Monsieur J.-R. HARTMANN, Ingénieur Cadre Technico-Commercial au CTSN/DLSM-Toulon, pour sa participation à ce jury.

Je tiens à exprimer tout particulièrement ma gratitude à Monsieur A. LAVIE, Enseignant-Chercheur au Laboratoire d'Acoustique de l'Institut Supérieur d'Électronique du Nord, qui a largement participé au travail présenté dans ce document et m'a formé aux méthodes qui y sont développées. Ses compétences, son travail et sa disponibilité journalière ont permis à cette thèse d'aboutir.

J'exprime à Monsieur J.-C. DEBUS, Professeur d'Université, mes remerciements pour m'avoir initié aux techniques numériques, avoir dirigé et suivi cette thèse et permis d'effectuer ce travail.

Je remercie l'Institut Supérieur d'Électronique du Nord pour les conditions de travail qui m'ont été proposées ainsi que les membres du Laboratoire d'Acoustique, et plus particulièrement Monsieur R. BOSSUT pour ses conseils informatiques.

Je désire également remercier ceux qui, de ma famille et mes amis, ont, de loin ou de près, contribué à me faciliter la tâche.

SOMMAIRE

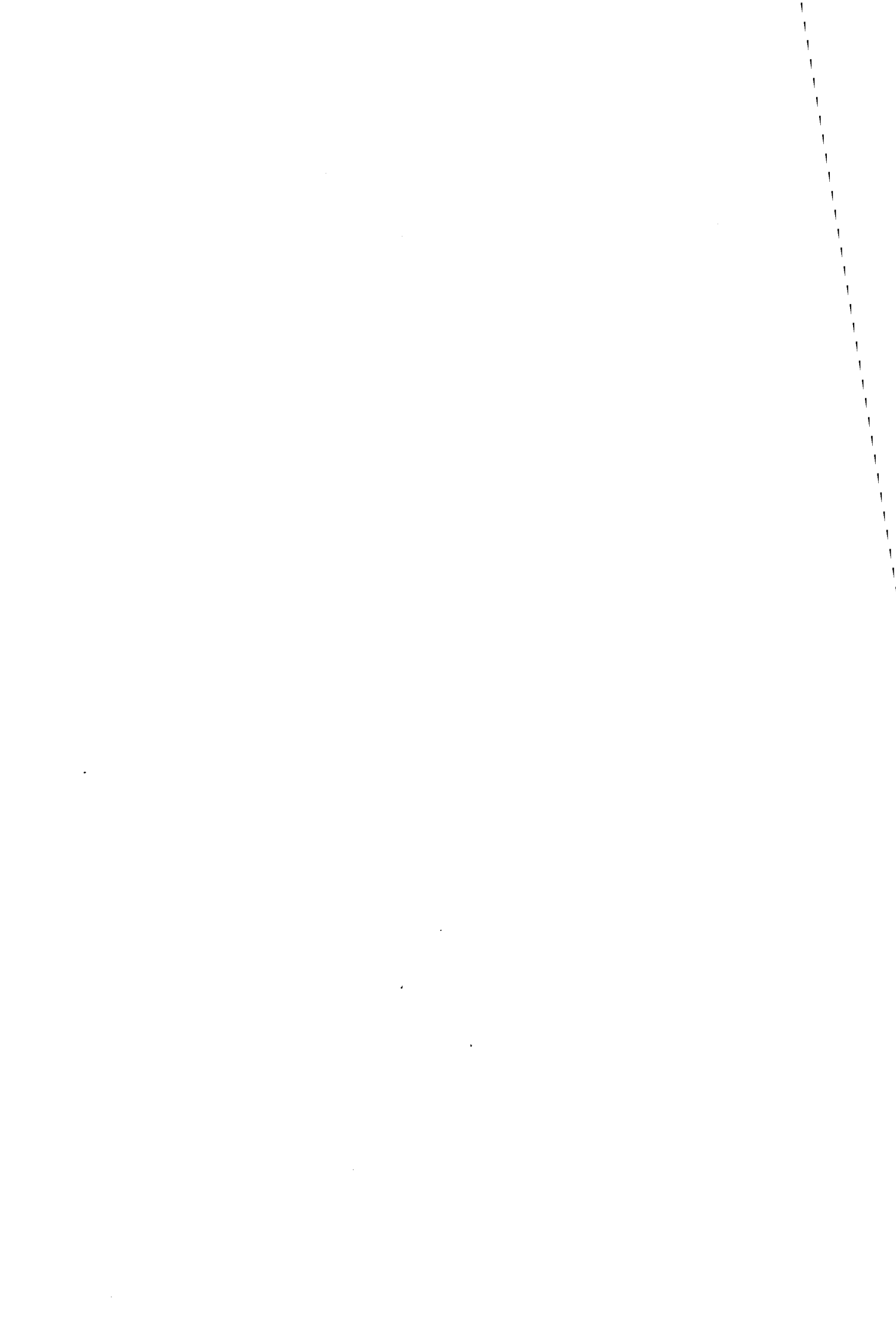
Sommaire	p. 11
Introduction générale	p. 17
Chapitre 1	
Analyse théorique des problèmes de rayonnement et de diffraction acoustique	p. 19
Introduction	p. 21
1.1 Description et mise en équations du problème acoustique.	p. 23
1.1.1 Problème acoustique	p. 23
1.1.2 Équation de Helmholtz	p. 24
1.1.3 Conditions aux limites	p. 24
1.2 Représentation intégrale de Helmholtz	p. 27
1.2.1 Théorie	p. 27
1.2.2 Représentation intégrale de Helmholtz extérieure	p. 29
1.2.2.1 Sur la surface	p. 29
1.2.2.2 En champ proche	p. 29
1.2.2.3 En champ lointain.	p. 30
1.2.3 Représentation intégrale de Helmholtz intérieure	p. 32
1.3 Autres formulations intégrales	p. 33
1.3.1 Représentation intégrale dans un demi-espace	p. 33
1.3.2 Représentation par potentiel de simple couche.	p. 34
1.3.2.1 Approche classique.	p. 34
1.3.2.2 Représentation modifiée.	p. 34
1.3.3 Représentation par potentiel de couche double	p. 34
1.3.3.1 Approche classique.	p. 34
1.3.3.2 Formulation variationnelle.	p. 35
1.3.4 Méthode du potentiel hybride	p. 35
1.3.5 Méthode de Burton et Miller	p. 36
1.3.6 Méthode de Foldy	p. 37
1.3.7 Méthode de superposition d'ondes	p. 37
1.4 Autres méthodes de résolution	p. 39
1.4.1 Méthode des éléments finis.	p. 39
1.4.2 Séparation des variables	p. 42
1.4.3 Décomposition de la pression en série	p. 43
1.4.4 Autres méthodes	p. 44
1.5 Fréquences irrégulières	p. 45
1.5.1 Théorie	p. 45
1.5.2 Représentation intégrale de Helmholtz extérieure	p. 46
1.5.2.1 Existence	p. 46
1.5.2.2 Évaluation.	p. 48
1.5.3 Représentation intégrale de Helmholtz intérieure	p. 50

1.6 Traitement du problème des fréquences irrégulières	p. 53
1.6.1 Formulation de Schenck	p. 53
1.6.2 Méthode de Jones	p. 54
1.7 Méthode de champ nul	p. 57
1.7.1 Formalisme de la méthode de champ nul	p. 57
1.7.1.1 Solutions naturelles de l'équation de Helmholtz	p. 57
1.7.1.2 Établissement des équations de champ nul	p. 58
1.7.2 Méthode de la matrice de transition	p. 60
Conclusions	p. 63
Chapitre 2	
Traitement numérique des équations.	p. 65
Introduction	p. 67
2.1 Outils de discrétisation des équations	p. 69
2.1.1 Principe des éléments finis de surface	p. 69
2.1.2 Éléments et fonctions d'interpolation	p. 69
2.1.2.1 Les différents types d'éléments	p. 69
2.1.2.2 Les éléments utilisés	p. 70
2.1.3 Représentation de la surface	p. 72
2.2 Traitement des équations de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure	p. 75
2.2.1 Équation intégrale de Helmholtz extérieure	p. 75
2.2.1.1 Discrétisation	p. 75
2.2.1.1.1 Écriture locale	p. 75
2.2.1.1.2 Écriture globale	p. 76
2.2.1.2 Calcul des intégrales	p. 76
2.2.1.2.1 Méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre	p. 77
2.2.1.2.2 Les singularités	p. 78
2.2.2 Calcul en champ proche	p. 79
2.2.2.1 Écriture locale	p. 80
2.2.2.2 Écriture globale	p. 80
2.2.3 Calcul en champ lointain	p. 81
2.2.3.1 Écriture locale	p. 81
2.2.3.2 Écriture globale	p. 81
2.3 Traitement des équations de champ nul	p. 83
2.3.1 Discrétisation	p. 83
2.3.2 Calcul des intégrales	p. 85
2.3.2.1 Paramétrisation de la surface	p. 85
2.3.2.2 Description des fonctions à intégrer	p. 86
2.4 Traitement de la combinaison équations intégrales-champ nul	p. 87
2.4.1 Démarche	p. 87
2.4.2 Coefficients du changement de représentation	p. 87
2.4.3 Résolution de système surdéterminé	p. 89

2.5	Prise en compte de la symétrie axiale	p. 91
2.5.1	Outils de discrétisation	p. 91
2.5.1.1	Éléments et fonctions d'interpolation utilisés	p. 91
2.5.1.2	Représentation de la surface	p. 92
2.5.2	Traitement des équations de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure	p. 93
2.5.2.1	Discrétisation	p. 93
2.5.2.1.1	Écriture locale	p. 93
2.5.2.1.2	Écriture globale	p. 94
2.5.2.2	Calcul des intégrales	p. 94
2.5.3	Calcul en champ proche	p. 95
2.5.3.1	Écriture locale	p. 95
2.5.3.2	Écriture globale	p. 96
2.5.4	Calcul en champ lointain	p. 96
2.5.4.1	Écriture locale	p. 96
2.5.4.2	Écriture globale	p. 97
2.5.5	Traitement des équations de champ nul	p. 98
2.5.5.1	Établissement des équations	p. 98
2.5.5.1.1	Solutions naturelles de l'équation de Helmholtz	p. 99
2.5.5.1.2	Obtention des équations	p. 99
2.5.5.1.3	Détermination des coefficients de la décomposition de la pression incidente	p. 101
2.5.5.2	Discrétisation des équations	p. 101
2.5.5.2.1	Traitement des équations de champ nul	p. 101
2.5.5.2.2	Traitement de la combinaison équations intégrales- champ nul	p. 104
2.6	Outils de validation du modèle numérique	p. 107
	Conclusions	p. 109
Chapitre 3		
	Interpolation fréquentielle des équations intégrales	p. 111
	Introduction	p. 113
3.1	Principe	p. 115
3.2	Application au cas purement tridimensionnel	p. 117
3.2.1	Théorie	p. 117
3.2.2	Validation	p. 121
3.3	Application au cas de la symétrie axiale	p. 143
3.3.1	Théorie	p. 143
3.3.1.1	Spécificité de la symétrie axiale	p. 143
3.3.1.2	Intégration en symétrie axiale	p. 143
3.3.1.2.1	Principe	p. 144
3.3.1.2.2	Tests de validation	p. 146
3.3.1.3	Application de l'interpolation	p. 152

3.3.2 Validation	p. 156
3.4 Remarques	p. 177
Conclusions	p. 179
Chapitre 4	
Optimisations du traitement des fréquences irrégulières	p. 181
Introduction	p. 183
4.1 Limitations des équations de champ nul	p. 185
4.2 Interpolation quadratique de la pression par champ nul	p. 187
4.2.1 Discrétisation des équations	p. 187
4.2.1.1 Cas purement tridimensionnel	p. 187
4.2.1.1.1 Traitement des équations de champ nul	p. 187
4.2.1.1.2 Traitement de la combinaison équations intégrales- champ nul	p. 188
4.2.1.2 Symétrie axiale	p. 189
4.2.1.2.1 Traitement des équations de champ nul	p. 189
4.2.1.2.2 Traitement de la combinaison équations intégrales- champ nul	p. 190
4.2.2 Convergence	p. 190
4.2.2.1 Cas purement tridimensionnel	p. 191
4.2.2.2 Symétrie axiale	p. 197
4.2.3 Comparaison des approximations de la pression	p. 206
4.2.3.1 Cas purement tridimensionnel	p. 206
4.2.3.2 Symétrie axiale	p. 213
4.3 Symétrisation des équations de champ nul	p. 219
4.3.1 Description de la technique	p. 219
4.3.1.1 Symétries de géométrie	p. 219
4.3.1.2 Symétries, antisymétries de chargement	p. 224
4.3.2 Exemples	p. 224
4.4 Problèmes d'excentricité des équations de champ nul	p. 231
4.4.1 Technique des origines multiples	p. 231
4.4.2 Technique des noeuds proches	p. 232
4.4.3 Exemples	p. 233
4.4.3.1 Cas purement tridimensionnel	p. 234
4.4.3.2 Symétrie axiale	p. 242
4.4.4 Application aux structures composées	p. 243
Conclusions	p. 249
Chapitre 5	
Applications	p. 251
Introduction	p. 253

5.1 Diffraction par des structures rigides	p. 255
5.2 Diffusion	p. 261
5.2.1 Théorie	p. 261
5.2.1.1 Couplage fluide-structure	p. 261
5.2.1.2 Utilisation des origines multiples de champ nul lors du couplage	p. 262
5.2.1.3 Algorithme de résolution	p. 263
5.2.2 Diffusion par une structure élastique	p. 264
Conclusions	p. 269
Conclusions générales	p. 271
Bibliographie	p. 273
Liste des symboles	p. 287
Légendes des figures et tableaux	p. 289
<u>Annexe A11</u> Systèmes de coordonnées	p. 291
<u>Annexe A12</u> Obtention de l'équation de Helmholtz	p. 293
<u>Annexe A13</u> Représentations intégrales de Helmholtz extérieure et intérieure	p. 297
<u>Annexe A14</u> Facteur de directivité	p. 307
<u>Annexe A15</u> Coefficients de décomposition de la pression incidente en champ nul	p. 309
<u>Annexe A16</u> Obtention des équations de champ nul	p. 311
<u>Annexe A21</u> Obtention des fonctions d'ondes sphériques divergentes et de leurs dérivées normales	p. 315
<u>Annexe A22</u> Emploi d'intégrales elliptiques dans le calcul des intégrales singulières en symétrie axiale	p. 321
<u>Annexe A23</u> Coefficients de décomposition de la pression incidente en ondes sphériques régulières à l'origine en champ nul en symétrie axiale	p. 323
<u>Annexe A31</u> Traitement informatique de l'interpolation fréquentielle appliquée aux problèmes à symétrie axiale	p. 325
Résumé et mots-clefs	p. 334



INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le domaine de l'Acoustique sous-marine, il est primordial de savoir modéliser le rayonnement ou la diffraction d'une onde acoustique par des structures immergées dans un fluide d'extension infinie. Le développement de sources sonores performantes (SONAR) est subordonné à la mise au point d'outils efficaces de simulation du rayonnement. Parallèlement, une bonne compréhension de la diffraction acoustique s'avère indispensable pour décrire correctement l'objet diffractant. Suivant le milieu de propagation et la gamme de fréquences utile, la simulation de la diffraction peut être classée selon quatre niveaux d'exigence croissante : la détection, la classification, l'identification et l'imagerie. À l'origine, des méthodes analytiques ou semi-analytiques limitées aux géométries simples ont permis une première approche. Ensuite, l'évolution rapide des moyens informatiques s'est accompagnée du développement de méthodes numériques capables de traiter des structures à géométrie complexe : la méthode des équations intégrales, la méthode de la matrice de transition ou de champ nul, la méthode des éléments finis, les méthodes utilisant des développements en séries, les méthodes asymptotiques, la théorie géométrique de la diffraction et, plus récemment, la méthode de superposition d'ondes.

Au laboratoire d'acoustique de l'ISEN, les premiers travaux concernaient la conception de transducteurs électroacoustiques par la méthode des éléments finis via le code ATILA. La prise en compte efficace du fluide environnant a nécessité le développement de la méthode des équations intégrales et du code EQI dans le but de modéliser le problème fluide-structure par couplage de ces deux codes. La méthode des équations intégrales présente deux avantages : elle contient implicitement dans sa formulation la condition de rayonnement de Sommerfeld; sa discrétisation conduit à un simple maillage de la surface mouillée de la structure. Ce modèle est particulièrement bien adapté à la gamme des basses et des moyennes fréquences.

La formulation intégrale développée dans le code EQI est la représentation de Helmholtz extérieure. Elle s'applique à une grande variété de problèmes et bénéficie d'une relative facilité d'emploi et de mise en oeuvre. Néanmoins, elle souffre de la présence de fréquences dites irrégulières pour lesquelles il existe une infinité de solutions. Pour pallier cet inconvénient sans changer de formulation intégrale, il existe essentiellement deux méthodes de surdétermination : la méthode de Schenck et la méthode de Jones. La première a fait école puisqu'elle est employée depuis près de trente ans. Par contre, celle de Jones n'est que très peu employée. Le bon fonctionnement de la méthode de Schenck dépend du choix de la position et du nombre de points spécifiques intérieurs à la structure étudiée, choix qui devient de plus en plus hasardeux quand la fréquence augmente. Par contre, la méthode de Jones basée sur l'emploi d'équations supplémentaires de champ nul fournit une condition suffisante pour assurer l'unicité de la solution et, en théorie, n'est pas limitée en fréquence. Dans le code EQI, cette dernière méthode est opérationnelle.

Les nombreuses applications effectuées jusqu'à maintenant ont mis en évidence certaines limites des modèles numériques utilisés dans EQI et ATILA. D'une part, l'étude du comportement acoustique d'une structure sur une large gamme de fréquences nécessite une forte consommation de temps de calcul, défaut d'autant plus pénalisant que l'objet est de grande taille. D'autre part, la difficulté de simuler des structures excentrées (éloignées d'une forme sphérique) peut parfois générer un mauvais conditionnement numérique. Ce défaut est la conséquence de l'emploi de fonctions d'ondes sphériques pour bâtir les équations de champ nul. De plus, le développement de la pression en série de Fourier par rapport aux angles sphériques dans ces dernières équations pose deux problèmes : le choix du niveau de troncature est difficile à évaluer; pour certaines géométries complexes, à une direction donnée peut correspondre plusieurs points de la surface. Le travail dé-

crit dans cette thèse est une optimisation de la combinaison équations intégrales-champ nul et doit élargir les possibilités du code EQI. Il est destiné à simplifier l'utilisation du code, à diminuer le temps de calcul, à élargir vers le haut la gamme des fréquences utiles et à traiter les structures sous-marines de grande taille.

La première optimisation majeure décrite dans ce document est la mise en oeuvre d'une technique d'interpolation fréquentielle des équations intégrales. Cette nouvelle possibilité est justifiée dans le cas d'une analyse multi-fréquence : par interpolation entre les matrices équations intégrales préalablement calculées pour deux fréquences bornes de la bande de fréquence d'étude, elle permet de remplacer la phase d'assemblage des matrices aux fréquences intermédiaires par une interpolation entre les deux bornes. Ceci doit contribuer à une diminution du temps de calcul. La seconde optimisation concerne le traitement des équations de champ nul et, plus précisément, le développement d'une technique adaptée aux structures excentrées et l'implantation d'une interpolation quadratique de la pression. Ces deux points doivent améliorer la précision et la simplicité d'emploi, étendre les capacités et diminuer le temps de calcul des simulations. Parallèlement, la prise en compte des éventuelles symétries ou antisymétries du problème dans les équations de champ nul, le développement d'une nouvelle méthode d'intégration des intégrales de Helmholtz et l'étude de la convergence du calcul des intégrales sont effectués.

Le premier chapitre présente le problème acoustique de Neumann extérieur et les différentes méthodes de résolution. La représentation intégrale de Helmholtz extérieure surdéterminée par des équations de champ nul est détaillée. Elle permet de supprimer l'indétermination inhérente à la présence des fréquences irrégulières. Dans le second chapitre, le traitement numérique basé sur la discrétisation est décrit. Le chapitre suivant contient la description et la validation de l'interpolation fréquentielle pour les problèmes tridimensionnels et à symétrie axiale. L'optimisation des équations de champ nul fait l'objet du quatrième chapitre. Le cinquième et dernier chapitre concerne l'application des nouvelles possibilités à des problèmes concrets. Les conclusions générales et les perspectives de ce travail terminent le Mémoire.

Chapitre 1

Analyse théorique des problèmes de rayonnement et de diffraction acoustique

INTRODUCTION

Le sujet de ce premier chapitre est l'analyse théorique des problèmes de rayonnement et de diffraction acoustique.

Après avoir défini le problème acoustique en question, l'écriture de celui-ci mène à différentes équations : l'équation de Helmholtz et les équations aux limites. La résolution analytique de ces équations se limite aux géométries simples [1-3]. On s'attache donc à leur résolution numérique afin de traiter des géométries complexes. Ainsi, différentes méthodes sont recensées en deux grands groupes, les formulations intégrales et les autres. Les principales formulations intégrales existantes sont explicitées, en particulier la représentation intégrale de Helmholtz. Puis, d'autres types de méthodes de résolution des équations sont rapidement citées.

Dans tout le document, on s'intéresse tout particulièrement à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure [4]. En effet, celle-ci permet la modélisation du rayonnement d'une structure vibrante immergée dans un milieu fluide d'extension infinie et de la diffraction d'une onde incidente à partir d'une structure immergée dans le même milieu mais supposée rigide. Cette représentation possède plusieurs inconvénients dont le principal est la présence de fréquences irrégulières qui créent des domaines fréquentiels de singularité. Ces problèmes sont traités par utilisation d'équations de champ nul supplémentaires [5-7].

La première section de ce chapitre décrit et met en équations le problème acoustique étudié : le rayonnement acoustique d'une structure vibrante ou la diffraction acoustique à partir d'une structure rigide immergée dans un milieu fluide d'extension infinie éclairée par une onde incidente plane (une source ponctuelle sphérique placée au loin). Il s'agit ici de décrire la propagation dans le fluide en tenant compte des conditions aux limites à l'infini et sur la surface du corps immergé : à savoir, après avoir défini la dépendance temporelle des variables, l'équation de Helmholtz obtenue par la théorie de la Mécanique des Fluides, la condition de rayonnement de Sommerfeld et la condition de rigidité de la structure lors de la diffraction ou la prise en compte des déplacements normaux lors de la modélisation du rayonnement. On est donc bien en présence, du point de vue de la propagation dans le fluide, d'un problème de Neumann extérieur.

La deuxième partie est consacrée à la méthode de résolution que l'on utilise. Dans le but de résoudre le problème de Neumann extérieur défini précédemment, on introduit ici le principe des équations intégrales, qui, par l'intermédiaire des fonctions de Green, permet de réduire le problème volumique à un problème surfacique [2,4,7-11]. La méthode intégrale utilisée ici est la représentation intégrale de Helmholtz extérieure [4], que l'on décrit, et qui permet le calcul de la pression sur la surface de la structure considérée, à partir de laquelle la pression en champ proche et en champ lointain peut être obtenue. Pour mémoire, on décrit également son équivalent pour le problème intérieur, la représentation intégrale de Helmholtz intérieure.

Le troisième paragraphe de ce chapitre est consacré aux autres formulations intégrales existantes. Elles sont expliquées succinctement et l'on en donne les principaux avantages et inconvénients. Les plus communément utilisées dans la littérature sont les représentations par potentiel de simple couche [8], de double couche [9], la méthode du potentiel hybride [12] et la méthode de Burton et Miller [13].

Dans la quatrième section, d'autres méthodes de résolution telles que la méthode des éléments finis [14-17], la méthode de séparation des variables [2], la décomposition de la pression en

série [2,18-21], les méthodes asymptotiques [22-24], la théorie géométrique de la diffraction [25-28] ou la méthode de superposition d'ondes [29,30] sont rapidement traitées.

Le cinquième paragraphe est intégralement consacré aux fréquences irrégulières des représentations intégrales de Helmholtz. Ce problème est un problème d'existence et d'unicité de solution qui est régi par l'alternative de Fredholm [4]. Pour la représentation intégrale de Helmholtz extérieure, l'équation intégrale admet une solution unique sauf en certaines valeurs de la fréquence, dites irrégulières, pour lesquelles elle en admet une infinité [4,9]. Ces fréquences irrégulières, pour le problème extérieur de Neumann, correspondent aux valeurs propres du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant. Ces fréquences n'ont aucune signification physique. Leur calcul analytique n'est possible que pour des structures dont les surfaces sont de coordonnée constante. Pour une structure quelconque, un théorème permet théoriquement de les évaluer [31]. D'autres méthodes, numériques d'évaluation existent. L'équation intégrale de la représentation intégrale de Helmholtz intérieure ne souffre pas de l'existence de telles singularités.

Le problème d'indétermination de l'équation intégrale de Helmholtz extérieure cité ci-dessus constitue le sujet de la sixième partie de ce chapitre. Certaines formulations intégrales permettent, au détriment de leur simplicité numérique, l'unicité de la solution à toute fréquence [10,32]. La densité de présence de ces irrégularités augmente avec la fréquence, il est donc impossible de ne pas en tenir compte. La levée de l'indétermination peut s'effectuer à la condition que la pression solution vérifie une ou plusieurs équations additionnelles assurant l'unicité de celle-ci [4]. Deux méthodes de ce type existent : celle de Schenck [4] et celle de Jones [5]. Schenck utilise les équations intérieures de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure. Ces équations assurent l'unicité de la solution pourvu que les points intérieurs ne se trouvent pas sur les surfaces nodales intérieures. Ces surfaces nodales ne sont généralement pas connues et aucun critère de position des points intérieurs n'existe. Jones propose de surdéterminer par des équations de champ nul selon un critère fixant le nombre de ces équations pour assurer l'unicité.

Consécutivement au paragraphe précédent, le septième a pour sujet les équations de champ nul [5,7]. Celles-ci sont obtenues à partir de l'équation intérieure de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure par décomposition de la fonction de Green en série d'ondes sphériques. Utilisée seule cette méthode permet le calcul de la pression sur la surface de la structure. Employée en surdétermination des équations intégrales, elle permet d'assurer l'unicité de la solution aux fréquences irrégulières. La méthode de la matrice de transition uniquement adaptée à la diffraction, proche de celle du champ nul, est ensuite évoquée [33,34].

Les conclusions de ce premier chapitre sont ensuite brièvement données.

1.1 DESCRIPTION ET MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME ACOUSTIQUE

Après avoir défini le problème acoustique à résoudre, on énonce l'équation des ondes qui le gouverne (équation de Helmholtz). Puis, les conditions aux limites du problème considéré sont données.

1.1.1 Problème acoustique

L'acoustique est une composante de la Physique qui contient l'étude de la dynamique des petites perturbations d'un fluide compressible. Cette étude doit permettre l'analyse de trois phénomènes physiques importants liés au milieu fluide : la propagation d'onde (l'équation des ondes) dans ce milieu; la diffusion due à la présence d'un corps dans ce fluide (conditions aux limites); l'absorption et la dispersion des ondes (thermodynamique).

Le problème en question ici est la modélisation du rayonnement et de la diffraction acoustique à partir d'une structure immergée dans un milieu fluide homogène et compressible d'extension infinie (cf. figure 1.1, où p_{inc} représente la pression incidente, Ω_{fl} le milieu fluide, Ω_s la structure et Γ sa frontière) [35-38].

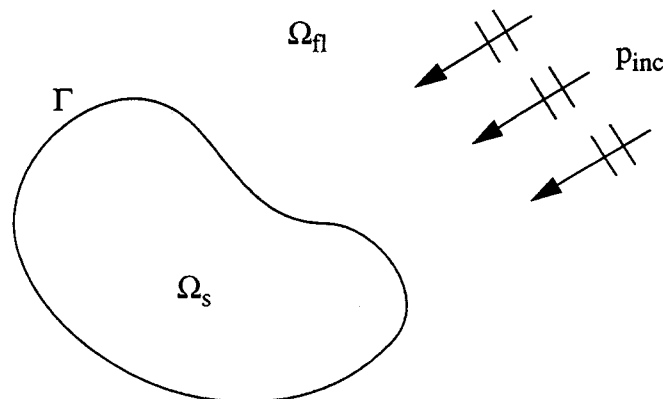


Figure 1.1. Présentation du problème considéré.

Cette modélisation est effectuée par la méthode des équations intégrales. La structure immergée est vibrante dans le cas du rayonnement acoustique. La géométrie est supposée rigide lorsque l'on traite la diffraction acoustique. Il s'agit donc ici de décrire la propagation d'une onde acoustique dans le milieu fluide en prenant en compte les conditions aux limites des domaines concernés, dans le cas du problème extérieur (le domaine fluide étant à l'extérieur de la structure) et quand le déplacement normal est connu sur la frontière Γ de la structure (conditions aux limites de type Neumann).

On considère une onde acoustique se propageant dans un milieu fluide homogène isotrope, de densité ρ et vitesse du son c . On ne considère pas d'amortissement. Le fluide est supposé idéal, barotrope, irrotationnel, de vitesse d'écoulement nulle. La dépendance temporelle des variables, dans tout le document et sauf précision contraire, est suivant $e^{-i\omega t}$ (onde acoustique harmonique) où ω désigne la pulsation du régime harmonique.

Les grandeurs physiques qui sont manipulées ici dépendent de la position du point \underline{r} dans le domaine fluide (cf. annexe A11) et de la variable temps t .

1.1.2 Équation de Helmholtz

Dans cette section, le cheminement menant à la mise en équations du problème défini précédemment est rapidement donné [39-41]. Les calculs sont effectués dans l'annexe A12. On obtient ainsi l'équation de Helmholtz, ou équation des ondes :

$$\Delta p(\underline{r}) + k^2 p(\underline{r}) = -\delta(\underline{r}, \underline{r}_0) \quad (1.1)$$

où p est la pression, δ la fonction de Dirac tridimensionnelle, \underline{r} le point d'application, \underline{r}_0 la position de la source et k le nombre d'onde tel que $k = \omega/c$. Le second membre rend compte de l'effet de l'onde incidente. Il est nul si $p_{\text{inc}} = 0$.

1.1.3 Conditions aux limites

On appelle Ω_{int} le volume intérieur de la structure, le volume extérieur Ω_{ext} étant identique au domaine fluide Ω_{fl} (voir figure 1.1). La surface Γ se trouvant dans le milieu fluide où se propage une onde acoustique harmonique, il faut préciser les conditions aux limites du problème [39-41].

Lorsque la pression acoustique est donnée sur la frontière, il s'agit du problème de Dirichlet :

$$p(\underline{r}) = f(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (1.2)$$

où f est une fonction connue et continue.

Le problème est de Neumann, comme c'est le cas ici, quand la dérivée normale de la pression est donnée sur la surface,

$$\frac{\partial}{\partial \underline{n}} p(\underline{r}) = h(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (1.3)$$

où h est une fonction connue et continue.

Il existe une relation directe entre la dérivée normale de la pression et la composante normale de la vitesse (celle-ci étant la dérivée par rapport au temps t du déplacement normal) au point \underline{r} de Γ :

$$\frac{\partial}{\partial \underline{n}} p(\underline{r}) = i\omega\rho v_n(\underline{r}) \quad (1.4)$$

Une condition de frontière de type mixte présente généralement un traitement plus réaliste des propriétés acoustiques de Γ . C'est une combinaison linéaire des conditions de Dirichlet et de Neumann, qui peut également être définie comme la condition d'impédance :

$$p(\underline{r}) = Z v_n(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (1.5)$$

c'est à dire que sur la frontière la vitesse normale est proportionnelle à la pression. Z est l'impédance acoustique au point \underline{r} de la frontière. Elle dépend de la fréquence f .

Une autre condition à imposer est la condition de rayonnement de Sommerfeld. Cette condition caractérise le comportement des solutions de l'équation de Helmholtz à l'infini. Elle implique qu'à l'infini, le flux d'énergie qui traverse une sphère de rayon infini est positif et fini (que l'onde doit se propager vers l'infini). Elle s'écrit :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \left(\frac{\partial}{\partial r} p(\underline{r}) - ikp(\underline{r}) \right) \right) = 0 \quad (1.6)$$

$$r \rightarrow \infty \quad rp(\underline{r}) \text{ est fini} \quad (1.7)$$

$$r \rightarrow \infty \quad p(\underline{r}) \sim \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.8)$$

uniformément dans toutes les directions.

Pour un problème de diffraction rigide, la pression totale dans Ω_{fl} se décompose en la somme de la pression incidente et de la pression diffractée rigide p_{dfr} : $p = p_{dfr} + p_{inc}$ [4].

1.2 REPRÉSENTATION INTÉGRALE DE HELMHOLTZ

Dans cette partie, on introduit le principe des équations intégrales. Les formulations des représentations intégrales de Helmholtz extérieure et intérieure sont données.

1.2.1 Théorie

Deux approches de la théorie des équations intégrales sont possibles : la formulation directe et la formulation indirecte [9,11]. La formulation directe est utilisée ici : elle mène en particulier aux représentations intégrales de Helmholtz extérieure et intérieure.

La méthode directe fait intervenir les fonctions de Green [9,11]. Ces fonctions permettent, par l'intermédiaire du second théorème de Green, de réduire le problème volumique à un problème surfacique.

Les fonctions de Green représentent l'influence d'un point \underline{r} sur un point \underline{r}' . Si une fonction de Green, que l'on note G , pouvait être obtenue pour chaque type de géométrie et condition sur la surface, alors la résolution se réduirait à une quadrature standard de fonctions connues. Ce type de fonction n'est cependant généralement pas connu.

La fonction de Green $G(\underline{r}, \underline{r}')$, ou fonction d'influence, qui symbolise donc le champ créé au point \underline{r} par une source ponctuelle située en \underline{r}' , a été introduite initialement en électrostatique, pour ensuite trouver application dans de nombreux domaines. Si en \underline{r}' , on est en présence de plusieurs sources suivant une distribution $\tau(\underline{r}')$, le champ au point \underline{r} est l'intégrale sur toutes ces sources : $\int \tau(\underline{r}') \cdot G(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}'$.

En supposant qu'en tout point de la surface Γ on ait une condition de Dirichlet ou de Neumann nulle partout sauf en un point \underline{r}' , où le champ est comparable à une fonction de Dirac, alors le champ au point d'observation \underline{r} est encore $G(\underline{r}, \underline{r}')$. Si on a une condition de Dirichlet ou de Neumann non homogène, alors le champ au point \underline{r} est l'intégration surfacique selon \underline{r}' du produit du second membre de la condition sur la surface par G . Dans ce cas, on assimile Γ à un ensemble de sources suivant une certaine distribution. La fonction de Green est donc une solution quand on a homogénéité partout sauf en un point. Elle est donc utile pour connaître l'effet qu'engendre une source ou une distribution de sources en un point.

En employant la théorie des fonctions de Green, il est possible d'obtenir une solution de l'équation homogène de Helmholtz avec des conditions aux limites inhomogènes, ou de l'équation de Helmholtz inhomogène avec des conditions aux limites homogènes. Par linéarité des équations, on peut aussi résoudre l'équation inhomogène avec des conditions aux limites inhomogènes en superposant les solutions précédentes.

$G(\underline{r}, \underline{r}')$, solution fondamentale, vérifie l'équation de Helmholtz inhomogène [2] :

$$\Delta G(\underline{r}, \underline{r}') + k^2 G(\underline{r}, \underline{r}') = -\delta(\underline{r}, \underline{r}') \quad (1.9)$$

la condition de Sommerfeld et la condition de symétrie :

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = G(\underline{r}', \underline{r}) \quad (1.10)$$

De plus, elle vérifie les conditions aux limites sur la frontière homogènes, de Dirichlet :

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma \quad \underline{r}' \in \Gamma \cup \Omega_{\text{fl}} \quad (1.11)$$

ou de Neumann ($\partial/\partial n$ désignant la dérivée normale au point \underline{r} orientée positivement vers l'extérieur) :

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\underline{r}, \underline{r}') = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma \quad \underline{r}' \in \Gamma \cup \Omega_{\text{fl}} \quad (1.12)$$

Ces fonctions ne sont connues que pour des géométries simples particulières (le plan infini ou une famille de plans infinis parallèles). Pour des géométries quelconques, la fonction de Green associée à l'espace libre infini g est utilisée. Son emploi complique la formulation intégrale et introduit le problème des fréquences irrégulières (cf. § 1.5). g est moins restrictive que G , car, indépendante de la surface Γ , elle n'est pas soumise aux conditions aux limites sur Γ (G est en fait composée d'une partie continue partout dépendante des conditions imposées sur Γ et d'une autre (g) continue partout sauf en $\underline{r} = \underline{r}'$).

La solution fondamentale g vérifie donc :

$$\Delta g(\underline{r}, \underline{r}') + k^2 g(\underline{r}, \underline{r}') = -\delta(\underline{r}, \underline{r}') \quad (1.13)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \left[\frac{\partial}{\partial r} g(\underline{r}, \underline{r}') - ik g(\underline{r}, \underline{r}') \right] \right) = 0 \quad (1.14)$$

$$r \rightarrow \infty \quad rg(\underline{r}, \underline{r}') \text{ est fini} \quad (1.15)$$

La solution de ces équations est connue. Dans l'espace tridimensionnel, la solution fondamentale est une onde sphérique divergente :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (1.16)$$

On présente maintenant les représentations intégrales de Helmholtz extérieure et intérieure. Les calculs permettant d'y aboutir sont détaillés dans l'annexe A13.

Quelques outils y sont nécessaires, comme dans la suite du document. La signification mathématique de la dérivée normale au point \underline{r} est :

$$\frac{\partial}{\partial n} u(\underline{r}) = \lim_{\underline{r}' \rightarrow \underline{r}} (\text{grad}(u(\underline{r}')) \cdot \underline{n}) \quad (1.17)$$

Le second théorème de Green, pour des fonctions u et v dans le domaine V borné de frontière ∂V suffisamment régulières, est particulièrement intéressant pour cette étude :

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u) d\mathbf{r} = \int_{\partial V} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (1.18)$$

1.2.2 Représentation intégrale de Helmholtz extérieure

De toutes les formulations intégrales, c'est la plus utilisée car son traitement numérique est relativement simple [11]. Elle découle de l'application du second théorème de Green aux fonctions pression p et de Green g , la structure étant considérée immergée dans le domaine fluide d'extension infinie (cf. figure 1.1 où le domaine intérieur Ω_{int} est de frontière Γ) et le problème gouverné par l'équation de Helmholtz (problème (de Helmholtz) extérieur). La représentation intégrale de Helmholtz extérieure est opérationnelle au laboratoire d'acoustique de l'ISEN dans le code EQI [42,7,43-64].

La représentation intégrale de Helmholtz extérieure, qui modélise le problème de Helmholtz extérieur, s'écrit dans sa forme générale [4,65-68] :

$$p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \begin{cases} p(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Omega_{\text{ext}} = \Omega_{\text{fl}} & (1.19) \\ \frac{\alpha(\mathbf{r})}{4\pi} p(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Gamma & (1.20) \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega_{\text{int}} & (1.21) \end{cases}$$

avec

$$\alpha(\mathbf{r}) = 4\pi + \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\mathbf{r}' \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.22)$$

\mathbf{r} est le point de calcul, \mathbf{r}' le point courant sur Γ et $\partial/\partial n'$ la dérivée normale au point \mathbf{r}' orientée positivement vers le fluide. L'expression (1.22) définit l'angle solide. Il est égal à 2π si \mathbf{r} est un point de continuité de la tangente à Γ .

L'équation (1.19) est le problème extérieur associé (le point de calcul se trouvant à l'extérieur) à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure, l'équation (1.20) son problème surfacique associé (également appelé l'équation intégrale) et l'équation (1.21) son problème intérieur associé. L'équation intégrale (1.20) est de seconde espèce.

1.2.2.1 Sur la surface

La résolution de (1.20) détermine les valeurs de l'inconnue sur la surface Γ (la pression pour une condition de Neumann sur la surface (comme c'est le cas pour les problèmes étudiés dans ce document), sa dérivée normale pour un problème de Dirichlet).

1.2.2.2 En champ proche

Les valeurs de l'inconnue sur la surface obtenues par l'équation (1.20) sont injectées dans l'équation (1.19) afin d'obtenir la valeur de la pression en un point du milieu fluide (cette opération est répétée autant de fois que l'on désire de valeurs de points fluide).

On remarque que la résolution de (1.21) fournit également la fonction pression sur la surface, pour un problème de Neumann, à partir de laquelle on peut calculer la pression dans le fluide par (1.19). Dans ce cas l'unicité de la solution est assurée si et seulement si \underline{r} n'appartient pas aux surfaces nodales des fonctions propres du problème de Dirichlet intérieur correspondant. Ces surfaces nodales ne sont souvent pas connues. Or, il faut écrire autant d'équations qu'il y a d'inconnues, et donc il faut choisir autant de points \underline{r} intérieurs (appartenant à Ω_{int}) que d'équations. La fiabilité et la précision du résultat dépendent donc du bon choix de la position des points. Pour cette raison, cette méthode de détermination de l'inconnue sur Γ est assez peu utilisée [67,69]. L'équation (1.21) est essentiellement employée dans le cadre de la méthode de Schenck décrite au paragraphe 1.6.1.

1.2.2.3 En champ lointain

En champ lointain, une solution $p(\underline{r})$ de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure a un développement de la forme [70] :

$$p(\underline{r}) - p_{\text{inc}}(\underline{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \varphi)}{r^n} \quad (1.23)$$

avec r, θ, φ les coordonnées sphériques (cf. annexe A11) de \underline{r} , qui converge absolument et uniformément.

Toute solution $p(\underline{r})$ de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure a un comportement asymptotique :

$$p(\underline{r}) - p_{\text{inc}}(\underline{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} F_0(\theta, \varphi) \quad (1.24)$$

La fonction F_0 est appelée facteur de directivité. Elle présente donc la propriété suivante :

$$r \rightarrow \infty \quad p(\underline{r}) - p_{\text{inc}}(\underline{r}) \sim F_0(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.25)$$

Ce facteur caractérise le comportement de la pression en champ lointain et correspond au premier terme du développement multipolaire de la pression. Les calculs donnés dans l'annexe A14 permettent de l'obtenir le facteur de directivité :

$$F_0(\theta, \varphi) = \frac{-ik}{4\pi} \iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}' \quad (1.26)$$

Le niveau sonore est le module de l'expression (1.25), il varie en $1/r$. On le ramène à 1 mètre ($r=1$), ainsi il est le module de (1.26), indépendant de r . On remarque que le niveau sonore à une distance quelconque (pourvu que l'on soit en champ lointain) peut être obtenu directement par une règle de trois (à 1 mètre, on n'est pas forcément en champ lointain, mais dans le calcul précédent, le champ lointain est ramené à 1 mètre, ce qui permet de quitter la dépendance en $1/r$). Le niveau sonore en décibel (dB) est obtenu par $TS = 20 \log_{10}(|p|/|p_{\text{référence}}|)$.

Pour résoudre les problèmes de propagation acoustique, la représentation intégrale de Helmholtz extérieure est une des plus employées dans la littérature. De nombreuses applications sur des géométries diverses existent pour des calculs de rayonnement à partir de structures vibrantes et de diffraction par des corps rigides [4,7,32,71-76].

Dans le cas du rayonnement, le terme $p_{inc}(\mathbf{r})$ disparaît des équations (1.19) à (1.21) :

$$\iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \begin{cases} p(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Omega_{ext} = \Omega_{fl} \\ \frac{\alpha(\mathbf{r})}{4\pi} p(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Gamma \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega_{int} \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \frac{\alpha(\mathbf{r})}{4\pi} p(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.28)$$

$$0 \quad \mathbf{r} \in \Omega_{int} \quad (1.29)$$

Pour la diffraction par un corps rigide, l'hypothèse de rigidité parfaite de la surface est précisée par (condition de Neumann) $\partial p(\mathbf{r})/\partial \mathbf{n} = 0$ pour $\mathbf{r} \in \Gamma$:

$$p_{inc}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \begin{cases} p(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Omega_{ext} = \Omega_{fl} \\ \frac{\alpha(\mathbf{r})}{4\pi} p(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Gamma \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega_{int} \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \frac{\alpha(\mathbf{r})}{4\pi} p(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.31)$$

$$0 \quad \mathbf{r} \in \Omega_{int} \quad (1.32)$$

Le principal défaut de la méthode de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure est que pour certaines valeurs du nombre d'onde k , appelées "k à problème" (fréquences irrégulières), l'équation (1.20) admet une infinité de solutions, et est donc insuffisante pour déterminer la solution unique du problème. Ce problème de non-unicité sera discuté en détail dans le paragraphe 1.5.2. D'une manière générale, la précision des résultats ne dépend pas de l'excentricité de la structure.

Une formulation intégrale générale est obtenue par Giroire en prolongeant le problème au domaine complémentaire à Ω_{fl} (sans considérer de source dans le fluide) [9]. Une condition de raccordement et l'application du second théorème de Green mène à la formulation. Suivant la condition de raccord imposée sur Γ , différentes représentations intégrales possibles sont définies (cf. 1.3) :

- la représentation intégrale de Helmholtz extérieure,
- la représentation intégrale de Helmholtz intérieure,
- la représentation par potentiel de simple couche,
- la représentation par potentiel de double couche,
- la méthode du potentiel hybride,
- la méthode de Burton et Miller.

Ces représentations apportent toutes l'avantage de modéliser complètement la propagation dans le volume fluide par une intégrale de surface où la condition de Sommerfeld est exactement prise en compte.

Ces équations intégrales sont donc particulièrement bien adaptées à la simulation numérique de la propagation acoustique dans le fluide pour deux raisons essentielles. Par la diminution de l'ordre de la dimension du problème, elles permettent l'utilisation d'un maillage (éléments finis de surface, cf. chapitre 2) de la seule surface et non pas du domaine fluide tridimensionnel. Elles prennent en compte implicitement la condition de rayonnement de Sommerfeld de façon exacte.

1.2.3 Représentation intégrale de Helmholtz intérieure

Le fluide est ici contenu à l'intérieur de la structure (voir figure 1.2).

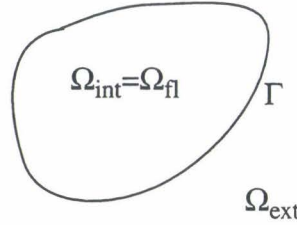


Figure 1.2. Représentation du domaine acoustique du problème intérieur.

La représentation intégrale de Helmholtz intérieure modélise le problème de Helmholtz intérieur correspondant :

$$s_{df}(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' = \begin{cases} -p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Omega_{int} = \Omega_{fl} & (1.33) \\ -\frac{\alpha_{int}(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Gamma & (1.34) \\ 0 & \underline{r} \in \Omega_{ext} & (1.35) \end{cases}$$

avec

$$\alpha(\underline{r}) + \alpha_{int}(\underline{r}) = 4\pi \quad (1.36)$$

s_{df} , défini par l'expression (A13.40), représente l'effet d'une source placée en \underline{r}_0 .

L'équation (1.34) permet de calculer l'inconnue sur la surface (la pression pour un problème de Neumann, sa dérivée normale pour un problème de Dirichlet) (problème surfacique associé). Injectée dans l'équation (1.33), elle permet d'obtenir la pression en tout point du fluide.

Cette représentation permet de résoudre les problèmes de propagation acoustique dans des cavités. De nombreuses applications existent [11,77-79].

La représentation intégrale de Helmholtz intérieure ne souffre pas de l'existence de fréquences irrégulières (cf. § 1.5.3).

Sans source dans le fluide, le terme s_{df} disparaît des équations précédentes. Avec source dans le fluide et parois rigides de la structure, le second terme ($-g(\underline{r}, \underline{r}')(\partial p(\underline{r}')/\partial n')$) de l'intégrale de surface s'annule.

1.3 AUTRES FORMULATIONS INTÉGRALES

Dans ce paragraphe sont présentées, en excluant les méthodes de champ nul et de matrice T -qui seront présentées au paragraphe 1.7-, les principales autres méthodes à base d'équations intégrales existant pour le problème extérieur ($\Omega_{fl} = \Omega_{ext}$) de Neumann [32,80,81]. Certaines d'entre elles présentent également des problèmes de détermination de la solution à certaines fréquences.

1.3.1 Représentation intégrale dans un demi-espace

Il s'agit ici de calculer la pression dans le demi-espace limité par un écran (cf. figure 1.3). Ce problème correspond au rayonnement de structures bafflées [7]. Comme par exemple le cas du piston circulaire inscrit dans un baffle infini rigide, correspondant à de nombreux cas concrets (Tonpiliz) [70]. La méthode des équations intégrales s'y prête parfaitement.

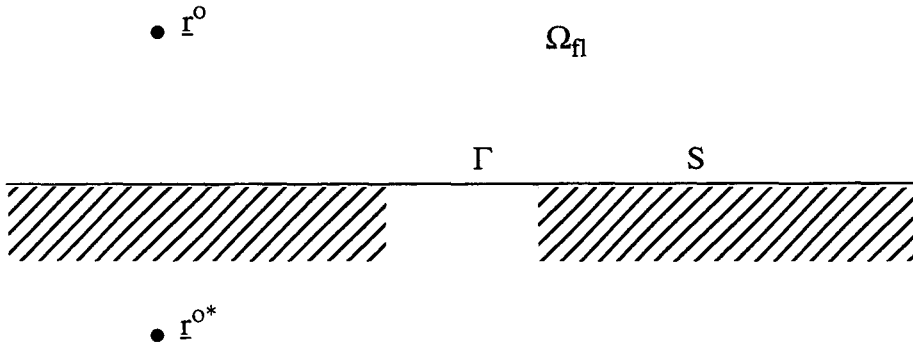


Figure 1.3. Structure bafflée.

Le problème est gouverné par l'équation de Helmholtz homogène avec une condition inhomogène sur la surface du piston. La fonction de Green G vérifie la condition de Neumann homogène, la représentation intégrale se simplifie. Il faut rechercher la fonction G par la méthode des images [2]. L'écran crée des réflexions qui s'ajoutent à l'onde issue d'une source en \underline{r}^0 . Une fonction F représente l'effet causé par la frontière telle que :

$$G(\underline{r}, \underline{r}^0) = g(\underline{r}, \underline{r}^0) + F(\underline{r}, \underline{r}^0) \quad (1.37)$$

F est le champ de source reçu en \underline{r}^{0*} , symétrique de \underline{r}^0 par rapport à l'écran.

La condition de Neumann homogène pour G sur S et Γ permet de déterminer F . On obtient $F(\underline{r}, \underline{r}^0) = g(\underline{r}, \underline{r}^{0*})$. Les sources \underline{r}' étant situées sur l'écran, on a $G(\underline{r}, \underline{r}') = 2g(\underline{r}, \underline{r}')$, et ainsi :

$$p(\underline{r}) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right] d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_{fl} \cup \Gamma \quad (1.38)$$

Connaissant la dérivée normale de la pression sur la surface Γ , une sommation sur Γ suffit au calcul de la pression. Cette méthode a une solution unique à toute fréquence.

1.3.2 Représentation par potentiel de simple couche

1.3.2.1 Approche classique

La représentation par potentiel de simple couche (monopôle) fait intervenir une distribution σ initialement inconnue telle que [8,9,12] :

$$p(\underline{r}) = p_{\text{inc}}(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} \sigma(\underline{r}') g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_{\text{fl}} \cup \Gamma \quad (1.39)$$

La dérivée normale de $p(\underline{r})$ est donnée par [12] :

$$\frac{\partial}{\partial n} p(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial n} p_{\text{inc}}(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} \sigma(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n} g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' - \frac{\sigma(\underline{r})}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (1.40)$$

Pour un problème de Neumann, la résolution de cette dernière équation détermine la valeur de σ sur Γ qui est ensuite injectée dans (1.39) pour calculer la pression Γ et dans Ω_{fl} [4,82]. Cette méthode souffre de l'existence des k à problème, identiques à ceux de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure.

1.3.2.2 Représentation modifiée

Dans la première partie de son article [5], Jones propose une classe d'équations intégrales qui s'applique au problème extérieur de Neumann. Il remplace, dans la représentation de simple couche, la fonction de Green par elle-même additionnée à une série χ de fonctions qui est aussi solution de l'équation de Helmholtz. Il obtient :

$$p(\underline{r}) = \iint_{\Gamma} \sigma(\underline{r}') (g(\underline{r}, \underline{r}') + \chi(\underline{r}, \underline{r}')) d\underline{r}' \quad (1.41)$$

Cette représentation mène à l'unicité de la solution sous certaines conditions [83,10].

1.3.3 Représentation par potentiel de double couche

1.3.3.1 Approche classique

La représentation par potentiel de couche double (dipôle) s'exprime habituellement sous la forme suivante, faisant intervenir la densité de surface μ [8,9] :

$$p(\underline{r}) = p_{\text{inc}}(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} \mu(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n} g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_{\text{fl}} \quad (1.42)$$

$$p(\underline{r}) = p_{\text{inc}}(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} \mu(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n} g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' + \frac{\mu(\underline{r})}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (1.43)$$

Une condition de Neumann est prise en compte par [12] :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} p(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \mu(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.44)$$

Cette dernière intégrale doit être prise en valeur principale selon la formule suivante :

$$\iint_{\Gamma} \mu(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n} \partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \lim_{\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}''} \iint_{\Gamma} \mu(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.45)$$

où $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'$ est suivant la normale à Γ .

La résolution de (1.44) fournit la valeur de μ sur Γ , qui, injectée dans (1.42) et (1.43) fournit la pression dans Ω_{fl} et sur Γ . L'évaluation de l'intégrale de (1.44) est délicate [71,84]. Cette méthode souffre également de la présence des k à problème.

1.3.3.2 Formulation variationnelle

Le problème est formulé par différentes représentations intégrales utilisant diverses densités de surface suivant le type de condition aux limites [85]. Ce travail a trouvé des prolongements dans la diffraction acoustique, représentée par le potentiel de couche double μ [86]. Une formulation variationnelle a été proposée, où μ est la solution de l'équation :

$$\delta \mathfrak{S}(\mu) = 0 \quad (1.46)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\mu) = \frac{1}{2} \iint_{\Gamma} \iint_{\Gamma} \{ k^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \mu(\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}') - (\mathbf{n} \wedge \nabla \mu(\mathbf{r})) \cdot (\mathbf{n}' \wedge \nabla' \mu(\mathbf{r}')) \} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \\ - \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (1.47)$$

où ∇ et ∇' sont les opérateurs gradient aux points \mathbf{r} et \mathbf{r}' .

Cette formulation permet d'éviter le calcul de la partie finie d'intégrales singulières et conduit, après discrétisation, à un système symétrique d'équations linéaires.

1.3.4 Méthode du potentiel hybride

C'est une combinaison des représentations de Helmholtz extérieure et de couche simple, obtenue après avoir imposé une condition de raccord mixte sur Γ [12]. Il vient :

$$p(\mathbf{r}) = p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}') \left(i\eta - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \mathbf{r} \in \Omega_{\text{fl}} \quad (1.48)$$

$$p(\mathbf{r}) = p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}') \left(i\eta - \frac{\partial}{\partial n'} \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \frac{\gamma(\mathbf{r})}{2} \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.49)$$

où η est un nombre complexe quelconque.

Pour une condition de Neumann :

$$\frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial n} p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \gamma(\mathbf{r}') \left(i\eta - \frac{\partial}{\partial n'} \right) \frac{\partial}{\partial n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' - i\eta \frac{\gamma(\mathbf{r})}{2} \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.50)$$

Étant donné la complexité du noyau de (1.50) et sa forte singularité $(\partial^2 / (\partial n' \partial n))(g(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$, sa mise en oeuvre n'est pas simple. Il apparaît une intégrale du type (1.45) prise en valeur principale. À condition que la partie réelle de η soit non nulle, la résolution admet une solution unique pour toute valeur de k .

Une formulation proche de la méthode du potentiel hybride, basée sur une combinaison linéaire des potentiels de simple et double couche, existe [10,32]. Elle s'écrit pour le problème de Neumann extérieur :

$$p(\mathbf{r}) = p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left\{ g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + i\eta \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \sigma(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \mathbf{r} \in \Omega_{\text{fl}} \quad (1.51)$$

où $\eta \neq 0$ est un nombre réel arbitraire tel que $\eta \Re(k) \geq 0$, σ la densité de surface. Elle mène à l'unicité de la solution sous certaines conditions. Cependant ses équations sont fortement singulières. Le paramètre η doit être choisi de façon appropriée pour améliorer le conditionnement de la matrice après discrétisation.

1.3.5 Méthode de Burton et Miller

Burton et Miller ont proposé une formulation intégrale qui repose sur la représentation intégrale de Helmholtz extérieure et la forme différenciée de son équation intégrale [13].

L'équation (1.20) est différenciée terme à terme au point \mathbf{r} :

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \right] = \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\alpha(\mathbf{r})}{4\pi} p(\mathbf{r}) \right] \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.52)$$

La formulation de Burton et Miller résulte de la somme membre à membre de l'équation (1.20) et de l'équation (1.52) après avoir multiplié cette dernière par un coefficient C . Il y a unicité de la solution pour toute valeur de k à condition que le coefficient de couplage C soit strictement complexe. Avec la connaissance des solutions de cette formulation de surface, la pression dans le fluide Ω_{fl} est obtenue par sommation de l'équation (1.19).

Les résultats sont sensibles au choix de la valeur de C et aucun choix précis ne semble donner entière satisfaction [74,87]. De plus, le traitement numérique des intégrales obtenues après diffé-

renciation est très délicat, un noyau fortement singulier du même type que celui de la méthode du potentiel hybride intervient.

Une méthode proche basée également sur l'équation intégrale de la représentation de Helmholtz extérieure et sa forme différenciée a été proposée par Angélini et Hutin [88]. Elle permet une solution pour toute fréquence. Les calculs présentés se limitent à la sphère.

1.3.6 Méthode de Foldy

Une autre représentation intégrale est obtenue par Foldy en supposant la fonction G connue pour une géométrie particulière, en appliquant le second théorème de Green aux fonctions $p - p_{inc}$ et G pour obtenir pour une condition de Neumann homogène sur G [89] :

$$\frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \mathbf{r}' \in \Gamma \quad (1.53)$$

$$p_{inc}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial n'} p_{inc}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) d\mathbf{r}' = p(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Gamma \cup \Omega_{fl} \quad (1.54)$$

Si le corps est parfaitement rigide, alors la pression solution p est la somme de la pression incidente p_{inc} qui serait présente en l'absence du corps et de la conséquence de la présence du corps qui caractérise la diffraction sur sa surface rigide. Si la surface n'est pas rigide alors l'intégrale représente l'effet induit par la vibration de Γ et le calcul dans $\Gamma \cup \Omega_{fl}$ se fait par simple sommation du premier membre de (1.54).

La fonction de Green G n'étant en général pas connue, cette formulation n'est employée que dans des cas bien particuliers. Cette méthode ne comporte pas de fréquences irrégulières.

1.3.7 Méthode de superposition d'ondes

Basée sur l'idée que le champ acoustique diffusé par une structure de géométrie quelconque peut être construit en superposant les champs engendrés par une antenne de sources simples située à l'intérieur du diffuseur, cette formulation est équivalente à celle de Helmholtz extérieure [29,30,90]. La pression s'écrit :

$$p(\mathbf{r}) = p_{inc}(\mathbf{r}) + i\omega\rho \iiint_{\Omega_{int}} q(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \mathbf{r} \in \Gamma \cup \Omega_{fl} \quad (1.55)$$

où q est la "force" de la distribution de sources simples.

Des avantages résultent de cette approche : discrétisation naturelle simplifiant les calculs, absence de singularité dans l'évaluation des intégrales car \mathbf{r}' est toujours situé dans Ω_{int} . Le choix de la distribution des sources conditionne la précision des résultats. Cette méthode souffre également de la présence de k à problème.

1.4 AUTRES MÉTHODES DE RÉOLUTION

Dans ce paragraphe, qui ne se veut pas exhaustif, on liste sommairement les principales méthodes de modélisation du rayonnement et de la diffraction acoustique autres que les représentations intégrales, le champ nul et la matrice T [91]. Leurs principe, domaine d'application, avantages et défauts sont rapidement donnés.

1.4.1 Méthode des éléments finis

Cette méthode variationnelle, très utilisée, permet, outre la résolution du problème fluide, de modéliser toute structure rayonnante, hétérogène et de forme complexe, par intégration simultanée des équations de l'élasticité [14-17]. Elle est notamment opérationnelle au laboratoire d'acoustique de l'ISEN sous la forme du code de calcul ATILA [92,70,93-98].

Bien que cette étude ne concerne que le problème fluide, c'est en prévision du chapitre 5 que l'on présente ici la modélisation élastique. La résolution du problème complet fluide-solide élastique par éléments finis est donc succinctement décrite [99].

Dans ce qui suit, on utilise les conventions d'Einstein. Lorsqu'il y a ambiguïté, on exprime les sommations par la notation \sum .

Le problème est donc celui de la figure 1.1. Ici, toutes les variables ont une dépendance temporelle suivant $e^{+i\omega t}$. La diffusion d'une onde acoustique incidente par le corps élastique implique la détermination du champ de pression totale p dans Ω_f et du champ de déplacement $\{u\}$ de composantes u_i dans Ω_s . La pression totale dans le fluide s'écrit :

$$p = p_{inc} + p_d = p_{inc} + p_{dfr} + p_r \quad (1.56)$$

où p_d , p_{dfr} et p_r désignent respectivement la pression diffusée par le corps élastique, la pression diffractée par le corps supposé rigide et la pression rayonnée par le corps vibrant.

En tout point du domaine fluide, l'équation de Helmholtz (1.1) est vérifiée. En plus de celle-ci, les équations du problème sont les suivantes :

- l'équation du mouvement dans Ω_s :

$$-\rho_s \omega^2 u_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = c_{ijkl} \frac{\partial S_{kl}}{\partial x_j} \quad (1.57)$$

où T_{ij} , S_{kl} , c_{ijkl} et ρ_s représentent respectivement les termes du tenseur des contraintes $[T]$, du tenseur des déformations $[S]$, du tenseur des rigidités élastiques $[c]$ et la masse volumique du solide, - en tout point de l'interface Γ , la condition de continuité dynamique :

$$T_{ij} n_j = -p n_i \quad (1.58)$$

- et la condition de continuité cinématique :

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \omega^2 n_i u_i \quad (1.59)$$

où n_i désigne les composantes du vecteur normal à Γ ,
- la condition de rayonnement de Sommerfeld :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r p_d) \text{ finie} \quad (1.60)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \left(i k p_d + \frac{\partial p_d}{\partial r} \right) \right) = 0 \quad (1.61)$$

Dans une modélisation du problème de diffusion acoustique par la méthode des éléments finis, l'extension infinie du domaine fluide Ω_{fl} pose problème. Ce domaine est limité par une surface Γ_∞ orientée positivement vers l'extérieur sur laquelle une condition aux limites judicieuse est posée. Pour que les conditions de Sommerfeld s'appliquent, on considère que Γ_∞ est une surface sphérique de rayon assez grand.

Les équations (1.1) et (1.57), (1.58) et (1.59) sur Γ , (1.60) et (1.61) sur Γ_∞ sont respectivement les équations d'Euler et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire L, appelée fonctionnelle, définie par [15] :

$$L = \iiint_{\Omega_s} \frac{1}{2} (S_{ij} c_{ijkl} S_{kl} - \rho_s \omega^2 u_i u_i) d\Omega_s + \frac{1}{\rho \omega^2} \iiint_{\Omega_{fl}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} - k^2 p^2 \right) d\Omega_{fl} \quad (1.62)$$

$$- \iint_{\Gamma} p u_i n_i d\Gamma - \frac{1}{\rho \omega^2} \iint_{\Gamma_\infty} p \psi d\Gamma_\infty$$

où ψ est la dérivée normale du champ de pression sur Γ_∞ définie par :

$$\psi = n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (1.63)$$

L'annulation de L au premier ordre implique la vérification des équations et conditions aux limites citées précédemment.

Le problème est discrétisé à l'aide d'éléments finis (cf. figure 1.4). Le déplacement $\{u\}$, la pression p et la dérivée normale du champ de pression ψ en un point situé à l'intérieur d'un élément sont reliés aux valeurs nodales du déplacement $\{u^e\}$, de la pression $\{p^e\}$ et de sa dérivée normale $\{\Psi^e\}$ à l'aide de fonctions d'interpolation [15] :

$$\{u\} = [N_u^e] \{u^e\} \quad (1.64)$$

$$p = [N_p^e] \{p^e\} \quad (1.65)$$

$$\psi = [N_\psi^e] \{\Psi^e\} \quad (1.66)$$

où $[N_u^e]$ et $[N_p^e]$ sont des matrices formées à partir des fonctions d'interpolation.

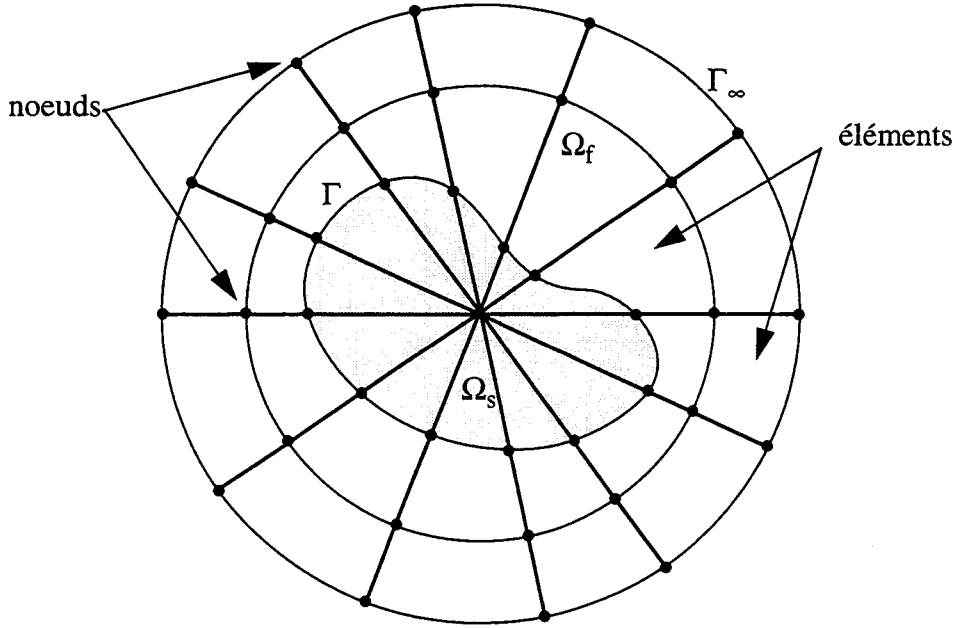


Figure 1.4. Maillage éléments finis du problème de diffusion acoustique.

Le tenseur condensé des déformations $\{S\}$ s'écrit :

$$\{S\} = [B_u^e]\{u^e\} \quad (1.67)$$

où $[B_u^e]$ est une matrice formée à partir des dérivées des fonctions d'interpolation.

Le report des équations (1.64) à (1.67) dans la fonctionnelle pour l'ensemble des éléments du maillage conduit à :

$$L = \sum_e \left(\frac{1}{2} \{u^e\}^t ([K^e] - \omega^2 [M^e]) \{u^e\} + \frac{1}{2\rho^2 c^2 \omega} \{p^e\}^t ([H^e] - \omega^2 [M_1^e]) \{p^e\} - \{u^e\}^t [L^e] \{p^e\} - \frac{1}{\rho \omega^2} \{p^e\}^t \{\Psi^e\} \right) \quad (1.68)$$

avec :

$$[K^e] = \iiint_{\Omega^e} [B_u^e]^T [c] [B_u^e] d\Omega^e \quad (1.69)$$

$$[M^e] = \iiint_{\Omega^e} \rho_s [N_u^e]^T [N_u^e] d\Omega^e \quad (1.70)$$

$$[H^e] = \iiint_{\Omega^e} \rho c^2 [B_p^e]^T [B_p^e] d\Omega^e \quad (1.71)$$

$$[M_1^e] = \iiint_{\Omega^e} \rho [N_p^e]^T [N_p^e] d\Omega^e \quad (1.72)$$

$$[L^e] = \iint_{\Gamma^e} [N_u^e]^T \{n\} [N_p^e] d\Gamma^e \quad (1.73)$$

La minimisation de l'expression (1.68) par rapport aux valeurs nodales de $\{u\}$ et de p conduit au système linéaire d'équations :

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -[L] \\ -[L]^T & \frac{[H]}{\rho^2 c^2 \omega^2} - \frac{[M_1]}{\rho^2 c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \frac{1}{\rho \omega^2} \{\Psi\} \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

où $[K]$, $[M]$, $[H]$, $[M_1]$ et $[L]$ sont appelées respectivement matrices de rigidité et de masse cohérente pour la structure, matrices de compressibilité et de masse cohérente pour le fluide et matrice de couplage fluide-structure.

Ces matrices et les vecteurs $\{u\}$, $\{p\}$ et $\{\Psi\}$ résultent de l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires décrits précédemment. Le point délicat est la détermination du vecteur $\{\Psi\}$, c'est à dire de la condition aux limites sur la surface Γ_∞ . Dans ce but, les méthodes utilisant des éléments rayonnants ou des éléments infinis sont les plus fréquemment employées [99].

Les résultats disponibles suite à une modélisation par éléments finis sont classiquement les champs de déplacement et de pression en tous les noeuds du maillage. Outre la capacité à décrire des géométries complexes, les méthodes à base d'éléments finis présentent l'avantage d'être robustes, bien documentées et numériquement performantes (matrices bandes et symétriques). Leur principale limite réside dans la nécessité de conserver une densité de maillage suffisante pour décrire les variations spatiales des champs étudiés. Le critère généralement retenu limite la taille d'un élément quadratique au quart de la longueur d'onde la plus petite. L'augmentation de la fréquence de travail entraîne l'utilisation d'un maillage plus dense et l'augmentation de la taille du système à résoudre. Cet effet est amplifié par l'éloignement de la zone de champ lointain (Γ_∞ plus éloignée) quand la fréquence augmente. Les méthodes à base d'éléments finis apparaissent donc comme des méthodes "faible ka".

1.4.2 Séparation des variables

C'est une méthode exacte qui consiste à décomposer la pression sous la forme d'une série de fonctions convergeant normalement [2] :

$$p(r) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \phi_j(r) \quad (1.75)$$

Lors d'un problème de diffraction, p est remplacé par p_d dans (1.75). Cette méthode n'est utilisable que sous certaines conditions qui limitent énormément son champ d'action :

- La surface Γ est composée de surfaces de coordonnée constante dans l'un des systèmes de coordonnées orthogonales,
- les fonctions ϕ_j sont solutions de l'équation des ondes dans ce système de coordonnées et vérifient la condition de Sommerfeld,
- les fonctions ϕ_j sont tabulées et d'un maniement le plus simple possible.

Après avoir déterminé les fonctions ϕ_j , les conditions aux limites fournissent les valeurs des coefficients a_j .

Des calculs pour des cas simples sont répertoriés, ainsi que pour des structures de géométrie plus complexe [2,18,19]. Le traitement complètement tridimensionnel par cette technique ne s'applique raisonnablement qu'à la sphère. Deux aspects numériques pénalisent la méthode : les séries sont tronquées et les fonctions ϕ_j sont calculées par approximations. Les fonctions ϕ_j sont difficilement calculables sauf pour des géométries simples comme le cylindre et la sphère. Malgré ceci, des algorithmes extrêmement précis et performants pour le calcul des fonctions spéciales permettent à cette méthode, dans le cas où son utilisation est justifiée, d'être performante.

1.4.3 Décomposition de la pression en série

Quand la géométrie étudiée n'est pas simple et ne permet donc pas un calcul analytique, on peut faire appel à cette technique qui consiste encore à développer la pression sous la forme d'une série de fonctions ϕ_j solutions de l'équation de Helmholtz et vérifiant la condition de Sommerfeld [2,18,19].

La condition sur la surface Γ nécessaire à l'utilisation de la méthode de séparation des variables (cf. § 1.4.2) ne l'est plus ici. Par contre la difficulté réside dans le calcul des coefficients a_j qui peuvent être obtenus directement par une méthode de collocation. Pour cela, on limite le développement de la pression à ses N premiers termes. On injecte ensuite cette pression approchée dans l'équation aux limites sur Γ . En écrivant cette équation en N points \mathbf{r}_i de la surface, on aboutit à la résolution d'un système de N équations à N inconnues qui, pour une condition de Neumann sur la surface, est :

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_i)}{\partial n} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \frac{\partial \phi_j(\mathbf{r}_i)}{\partial n} \quad i = 1, \dots, N \quad (1.76)$$

En général, les ϕ_j sont les fonctions sphériques divergentes. On sait qu'en dehors de la sphère circonscrite à Γ , la série des ondes sphériques divergentes converge uniformément. Par contre, dans le volume compris entre cette sphère et la surface Γ , celle-ci incluse, on ne connaît pas sa convergence.

Dans l'alternative où la série converge uniformément dans $\Gamma \cup \Omega_{f1}$, on dit que l'hypothèse de Rayleigh (le champ diffracté est développable partout en termes de fonctions d'ondes divergentes) est satisfaite [20,100,101]. Dans le cas contraire, Millar a montré qu'il existe des coefficients a_j dépendant de N qui sont tels que [21] :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \iint_{\Gamma} \left| \sum_{j=0}^{N-1} a'_j \phi_j(\mathbf{r}) - p(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{r} = 0 \quad (1.77)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} a'_j \phi_j(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Omega_{fl} \quad (1.78)$$

Pour une condition de Neumann, il en déduit le calcul des a'_j au sens des moindres carrés :

$$\frac{\partial}{\partial a'_i} \left[\iint_{\Gamma} \left| \sum_{j=0}^{N-1} a'_j \frac{\partial \phi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} \right|^2 d\mathbf{r} \right] = 0 \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (1.79)$$

On peut utiliser d'autres fonctions que les fonctions sphériques, à condition qu'elles forment une série de fonctions complètes. Dans le cas d'une condition de Neumann, les dérivées normales de ces fonctions doivent vérifier la même propriété. Un exemple important d'application est le cylindre fini traité par Butler [20]. Il faut remarquer que, dans la cas habituel de la décomposition en fonctions d'ondes sphériques divergentes, cette méthode est peu fiable pour des géométries éloignées de la sphère.

1.4.4 Autres méthodes

D'autres méthodes de résolution existent : les méthodes asymptotiques telles que masse ajoutée, hypothèse de Kirchhoff, double approximation asymptotique, approximation hautes fréquences ou théorie géométrique de la diffraction [6,22,24,27,28,69,102].

1.5 FRÉQUENCES IRRÉGULIÈRES

Dans ce paragraphe, on discute de l'existence et l'unicité des solutions des deux représentations intégrales de Helmholtz.

La solution au problème de Helmholtz extérieur est unique pour toute valeur du nombre d'onde k . Cependant, la formulation de ce problème via la représentation intégrale de Helmholtz extérieure entraîne que la solution quand \underline{r} est sur Γ est non unique pour un nombre infini de valeurs discrètes de k en relation avec le problème intérieur correspondant. Ces valeurs de k , "à problème", dépendent de la forme géométrique du corps étudié et du type de condition imposée sur la surface. Pour le cas particulier du problème de Neumann extérieur, ces valeurs sont les valeurs propres du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant. La non-unicité de la solution est un problème purement mathématique, qui n'a aucune réalité physique.

1.5.1 Théorie

Le problème d'existence et d'unicité de solution de ces représentations est régi par l'alternative de Fredholm [4,9].

Alternative de Fredholm.

On étudie la famille des équations de seconde espèce à laquelle appartiennent les équations (1.20) et (1.34). Elles s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$\phi(\underline{r}) - \lambda \iint_{\Gamma} K(\underline{r}, \underline{r}') \phi(\underline{r}') d\underline{r}' = f(\underline{r}) \quad (1.80)$$

où ϕ est l'inconnue, K le noyau et f est donnée.

L'équation homogène associée est :

$$\phi(\underline{r}) - \lambda \iint_{\Gamma} K(\underline{r}, \underline{r}') \phi(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad (1.81)$$

On définit l'équation homogène adjointe :

$$\psi(\underline{r}) - \bar{\lambda} \iint_{\Gamma} \overline{K(\underline{r}, \underline{r}')} \psi(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad (1.82)$$

où $\bar{\lambda}$ et \overline{K} sont les conjuguées de λ et K .

L'alternative de Fredholm s'énonce comme suit :

- (1) : ou bien (1.81) n'admet que la solution nulle (triviale) et (1.80) admet une solution unique,
 - (2) : ou bien (1.81) admet un nombre fini n de solutions ϕ_i linéairement indépendantes. Dans ce cas :

- (a) : si f et $\bar{\psi}$ sont orthogonales, où ψ est une solution quelconque de (1.82), c'est à dire la

condition de compatibilité (d'orthogonalité) vérifiée :

$$\iint_{\Gamma} f(\underline{r}) \overline{\psi(\underline{r})} d\underline{r} = 0 \quad (1.83)$$

alors (1.80) possède une infinité de solutions que l'on peut mettre sous la forme :

$$\phi(\underline{r}) = \phi_0(\underline{r}) + \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(\underline{r}) \quad (1.84)$$

où ϕ_0 est une solution particulière quelconque de (1.80) et les c_i sont des constantes arbitraires, - (b) : sinon (1.80) n'est pas soluble.

Dire que l'équation (1.81) a une solution autre que la solution triviale, cela signifie que λ est une valeur caractéristique de $K(\underline{r}, \underline{r}')$ et que $\phi_i(\underline{r})$ est une fonction caractéristique de $K(\underline{r}, \underline{r}')$ relevant de λ . De plus, si λ est une valeur caractéristique de $K(\underline{r}, \underline{r}')$ alors $\bar{\lambda}$ est valeur caractéristique de $\overline{K(\underline{r}, \underline{r}')}$. Dans le cas contraire, λ est valeur régulière de K .

La procédure se fait en deux étapes, la première qui concerne la représentation intégrale de Helmholtz extérieure, et la seconde se référant à la représentation intégrale de Helmholtz intérieure. Dans chaque étape, on tâchera de déterminer s'il y a existence ou non de k à problème, et le cas échéant de les caractériser.

1.5.2 Représentation intégrale de Helmholtz extérieure

1.5.2.1 Existence

* Dans l'hypothèse d'une condition de Neumann sur la surface Γ (pour simplifier, on ne considère pas de pression incidente).

L'inconnue de l'équation (1.20) est la pression. Sous la forme (1.80), cette équation s'écrit :

$$\phi(\underline{r}) - \lambda \iint_{\Gamma} K(\underline{r}, \underline{r}') \phi(\underline{r}') d\underline{r}' = f(\underline{r}) \quad (1.85)$$

où $\phi = p$,

$$K(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{4\pi}{\alpha(\underline{r})} \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') \quad (1.86)$$

$$f(\underline{r}) = -\frac{4\pi}{\alpha(\underline{r})} \iint_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') d\underline{r}' \quad (1.87)$$

et $\lambda = 1$.

L'équation homogène associée est :

$$\phi(\underline{r}) - \lambda \iint_{\Gamma} K(\underline{r}, \underline{r}') \phi(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad (1.88)$$

L'équation homogène adjointe est :

$$\psi(\underline{r}) - \bar{\lambda} \iint_{\Gamma} \overline{K(\underline{r}, \underline{r}')} \psi(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad (1.89)$$

Les équations intégrales que l'on considère font intervenir un noyau K qui est fonction du nombre d'onde k . Pour chaque k , il y a une série de valeurs caractéristiques λ de K . Chaque k qui inclut $\lambda = 1$ dans sa série de valeurs caractéristiques est appelé nombre d'onde caractéristique, que l'on note k' . k' est aussi appelé k à problème. Ces k à problème correspondent aux "fréquences irrégulières" (appelées également "fréquences caractéristiques" ou encore "fréquences propres fictives").

Par l'alternative (1), l'équation (1.20) a une solution unique sauf quand $k = k'$ (car $k = k'$ correspond à $\lambda = 1$ valeur caractéristique et $k \neq k'$ correspond à $\lambda = 1$ valeur régulière).

D'après l'alternative (2), quand $k = k'$, $\lambda = 1$ est valeur caractéristique, l'équation (1.20) n'a pas de solution sauf si :

$$\iint_{\Gamma} \left[\iint_{\Gamma} g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') d\underline{r}' \right] \overline{p_0(\underline{r}')} d\underline{r}' = 0 \quad (1.90)$$

pour toute solution $p_0(\underline{r}')$ de l'équation homogène adjointe (1.89).

Cette condition de compatibilité, dans laquelle k' est un nombre d'onde caractéristique du noyau $K(\underline{r}, \underline{r}')$, est satisfaite pour tout $\partial p(\underline{r}')/\partial n'$ [4,9]. De plus, ces k' , k à problème, correspondent aux valeurs propres (les nombres d'onde pour lesquels des solutions non-triviales existent) du problème intérieur de Dirichlet homogène (pression exigée nulle sur la surface Γ) correspondant [4,9]. L'équation (1.20) a une infinité de solutions pour $k = k'$, elle a au moins une solution pour tout k .

L'équation (1.20) n'est donc pas suffisante pour déterminer p de façon unique pour certains nombres d'onde caractéristiques (correspondants aux valeurs propres du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant), les k à problème.

Les représentations intégrales de Helmholtz extérieure et de couche simple avec condition de Neumann possèdent une équation homogène associée de même type et ont le même noyau. Elles ont les mêmes k à problème.

On résume ici les résultats importants : lorsque k n'est pas une valeur propre du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant, l'équation intégrale (1.20) avec condition de Neumann sur la surface Γ admet une solution unique, quelle que soit la valeur imposée de $\partial p(\underline{r}')/\partial n'$. Sinon, elle n'est pas suffisante pour déterminer la solution unique du problème.

Lorsqu'il s'agit de calculer ou d'approcher les valeurs des k à problème de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure pour le problème de Neumann extérieur, il faut résoudre le problème correspondant de Dirichlet homogène intérieur. Ce qui n'est pas immédiat.

L'équation (1.21) peut également permettre de calculer l'inconnue sur la surface (cf. § 1.2.2), mais rencontre les mêmes difficultés, et de plus, comme cela a été vu, son utilisation n'est pas aisée.

* Dans l'hypothèse d'une condition de Dirichlet sur la surface Γ .

L'inconnue de l'équation (1.20) est la dérivée normale de la pression.

Giroire a montré que les k à problème de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure (et de couche simple) sont également les valeurs propres du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant [9].

Les k à problème de la représentation par potentiel de double couche avec condition de Dirichlet sur la surface sont les valeurs propres du problème intérieur de Neumann homogène correspondant [9].

La prise en compte d'une pression incidente complique les démonstrations d'existence et n'apporte rien puisque le critère de compatibilité reste valable (éq. (1.90)).

1.5.2.2 Évaluation

L'évaluation des fréquences irrégulières de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure passe par le traitement du problème de Dirichlet homogène intérieur correspondant. Ce problème est défini par :

$$\begin{cases} \Delta\Phi(\mathfrak{r}) + k^2\Phi(\mathfrak{r}) = 0 & \mathfrak{r} \in \Omega_{\text{int}} & (1.91) \\ \Phi(\mathfrak{r}) = 0 & \mathfrak{r} \in \Gamma & (1.92) \\ \Phi(\mathfrak{r}) \neq 0 & \mathfrak{r} \in \Omega_{\text{int}} & (1.93) \end{cases}$$

Ce problème est analytique pour certaines géométries, dont les surfaces sont de coordonnée constante, dans les systèmes de coordonnées correspondants (cf. annexe A11).

La résolution analytique de (1.91) et la prise en compte de (1.92) fournissent les valeurs des k à problème [4]. Le caractère symétrique ou antisymétrique de la fonction propre du problème de Dirichlet homogène intérieur définit celui du champ de pression et de déplacement (chargement¹) à la fréquence irrégulière.

Pour le parallélépipède rectangle, la solution de (1.91) est :

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (A_{\lambda} \cos \lambda x + B_{\lambda} \sin \lambda x)(C_{\mu} \cos \mu y + D_{\mu} \sin \mu y) \\ (E_{\lambda\mu} \cos z \sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2} + F_{\lambda\mu} \sin z \sqrt{k^2 - \lambda^2 - \mu^2}) \quad (1.94.a)$$

1. Dans tout le document, on entend par chargement :
- l'onde incidente pour un problème de diffraction rigide ou de diffusion,
- les sources ou les déplacements surfaciques pour un problème de rayonnement.

et les k à problème sont :

$$k_{mnq} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2 + \left(\frac{q}{C}\right)^2} \quad m, n, q \in \mathbb{N}^* \quad (1.94.b)$$

où \mathbb{N}^* est l'ensemble des entiers naturels non nuls, $A_\lambda, B_\lambda, C_\mu, D_\mu, E_{\lambda\mu}$ et $F_{\lambda\mu}$ sont des constantes complexes, A, B et C sont respectivement les demi-côtés suivant X, Y et Z .

À k donné, les surfaces nodales sont les surfaces formées par les points \underline{r} quand la fonction Φ est solution de (1.91).

Pour le cylindre à section circulaire, la solution et les k à problème sont :

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} (C_\lambda \cos \lambda \varphi + D_\lambda \sin \lambda \varphi) (A_\mu \cos \mu z + B_\mu \sin \mu z) J_\lambda(\rho \sqrt{k^2 - \mu^2}) \quad (1.95.a)$$

$$k_{m\lambda n} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{2B}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_{\lambda n}}{A}\right)^2} \quad m, n \in \mathbb{N}^* \quad \lambda \in \mathbb{N} \quad (1.95.b)$$

où \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels, $C_\lambda, D_\lambda, A_\mu$ et B_μ sont des constantes complexes, A est le rayon du cylindre, B sa demi-hauteur et $\alpha_{\lambda n}$ la n -ième racine de la fonction de Bessel cylindrique de première espèce J_λ d'ordre λ .

Pour la sphère, la solution et les k à problème sont :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^n (A_{n\lambda} \cos \lambda \varphi + B_{n\lambda} \sin \lambda \varphi) P_n^\lambda(\cos \theta) j_n(kr) \quad (1.96.a)$$

$$k_{nq} = \frac{\alpha_{nq}}{a} \quad q \in \mathbb{N}^* \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.96.b)$$

où a est le rayon de la sphère, $A_{n\lambda}$ et $B_{n\lambda}$ sont des constantes complexes, P_n^λ est la fonction de Legendre associée de première espèce de degré n et d'ordre λ , et α_{nq} la q -ième racine de la fonction de Bessel sphérique de première espèce j_n d'ordre n .

Ces formules permettent numériquement d'obtenir les k à problème. La position des surfaces nodales correspondantes est également déterminée [4].

En général, la solution analytique n'est pas connue. Le théorème de Courant-Hilbert peut alors être utilisé [31]. Il est basé sur un encadrement de Ω_{int} par un volume Ω_{petit} contenu dans Ω_{int} et un volume Ω_{grand} contenant Ω_{int} :

$$\Omega_{\text{petit}} \subseteq \Omega_{\text{int}} \subseteq \Omega_{\text{grand}} \quad (1.97)$$

On pose $k_{n \text{ petit}}$ et $k_{n \text{ grand}}$ les n -ième valeurs propres rangées par ordre croissant du problème de Dirichlet intérieur correspondant respectivement à Ω_{petit} et Ω_{grand} . Pour la n -ième valeur propre k_n

du problème de Dirichlet intérieur correspondant à Ω_{int} , le théorème en question énonce que :

$$k_{n \text{ grand}} \leq k_n \leq k_{n \text{ petit}} \quad (1.98)$$

Ce théorème est exploitable quand Ω_{petit} et Ω_{grand} ont des surfaces de coordonnée constante. Plus le domaine compris entre Ω_{petit} et Ω_{grand} est petit, meilleure est la précision.

Le nombre n de fréquences irrégulières inférieures ou égales à un nombre d'onde k donné peut être fourni approximativement, V_{int} étant le volume intérieur du corps étudié, par :

$$n = \frac{V_{\text{int}} k^3}{6\pi^2} \quad (1.99)$$

La densité des fréquences irrégulières augmente avec la fréquence [4,31,69].

Des méthodes numériques basées sur les équations intégrales permettent l'évaluation des k à problème pour toute sorte de structure. Le déterminant du premier membre du système équations intégrales est nul aux fréquences irrégulières et permet d'évaluer les k à problème [103]. Par calcul des valeurs propres du problème intérieur correspondant, de nombreuses méthodes existent (la difficulté étant la présence du nombre d'onde dans les coefficients des matrices équations intégrales) qui permettent d'obtenir un système matriciel d'analyse aux valeurs propres [104-118]. Cependant, les matrices résultantes sont pleines et non-symétriques, ce qui rend l'analyse beaucoup plus compliquée et la mise en oeuvre difficile. Par contre, elles permettent, par l'intermédiaire des fonctions propres, de connaître l'emplacement des surfaces nodales en plaçant des points internes. La méthode proposée initialement par Barnejee et al. semble la plus adaptée et plus facile à développer [110]. Elle repose sur une méthode de construction de solution de l'équation différentielle en termes de fonction complémentaire et intégrale particulière et de l'utilisation de fonction de Green de l'équation de Laplace où k n'intervient pas. Elle n'est malheureusement pas adaptée au cas de Dirichlet intérieur qui permet de connaître les fréquences irrégulières du problème de Neumann extérieur. Peut-être serait-il possible dans le cas de Dirichlet intérieur de les calculer ainsi en exprimant les fonctions fictives en fonctions de $\{\partial p / \partial n\}$ et non pas de $\{p\}$, par l'intermédiaire d'une matrice contenant les dérivées normales de la fonction simple.

1.5.3 Représentation intégrale de helmholtz intérieure.

* Dans le cas d'une condition de Neumann (pour simplifier, on ne considère pas de source dans le domaine fluide $\Omega_{\text{fl}} = \Omega_{\text{int}}$).

L'équation (1.34) est de la forme (1.80) avec $\phi = p$,

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-4\pi}{\alpha(\mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1.100)$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\alpha(\mathbf{r})} \iint_{\Gamma} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.101)$$

et $\lambda = 1$. K est fonction de k .

L'équation équivalente à l'équation (1.81) entraîne toujours $p(\underline{r}) = 0$ [4]. La solution est toujours triviale. D'après l'alternative (1) il n'existe pas de k qui inclut $\lambda = 1$ dans sa série de valeurs caractéristiques. Il n'y a donc pas de k à problème (fréquence irrégulière). L'équation (1.34) possède de toujours une solution unique, quel que soit k .

** Dans le cas d'une condition de Dirichlet.*

L'équation (1.34) est de la forme (1.80) avec $\phi = \partial p / \partial n$, $K(\underline{r}, \underline{r}') = g(\underline{r}, \underline{r}')$,

$$f(\underline{r}) = - \iint \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') p(\underline{r}') (d\underline{r}') - \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}) \quad (1.102)$$

et $\lambda = 1$.

Dans ce cas, l'équation équivalente à l'équation (1.81) n'admet également pas de solution triviale. Ce qui signifie, par l'alternative (1), qu'il n'existe pas de fréquence irrégulière. La solution de (1.34) est toujours unique.

La prise en compte d'une source dans le fluide complique les démonstrations d'existence et n'apporte rien puisque les noyaux sont identiques.

Que ce soit dans le cas d'un problème intérieur de Neumann ou de Dirichlet, la représentation intégrale de Helmholtz intérieure, pour toute fréquence, admet une solution unique.

1.6 TRAITEMENT DU PROBLÈME DES FRÉQUENCES IRRÉGULIÈRES

Comme il a été vu aux paragraphes 1.2, 1.3 et 1.5, dans le cas du problème extérieur avec condition de Neumann sur la surface Γ du corps considéré, certaines représentations intégrales souffrent du problème de l'existence de fréquences irrégulières, pour lesquelles l'obtention d'une solution unique n'est pas possible. Parmi celles-ci se trouve la représentation intégrale de Helmholtz extérieure.

Ce problème pourrait être ignoré si le domaine où la solution est recherchée se trouvait entre deux fréquences irrégulières bien séparées. Cependant, pour une géométrie arbitraire, la validité de la solution ne serait pas garantie car les valeurs des fréquences critiques ne sont a priori pas connues. De plus, autour de chaque valeur critique, il existe une zone d'incertitude numérique. En outre, plus la fréquence s'élève, plus les fréquences irrégulières sont rapprochées¹ (plus leur densité de présence augmente), de telle sorte qu'à partir d'une certaine fréquence, les plages d'incertitude se chevauchent, et l'indétermination devient permanente.

De par les avantages qu'offre la représentation intégrale de Helmholtz extérieure, il faut développer un traitement du problème des fréquences irrégulières. Les méthodes de surdétermination le permettent. On ne présente pas les autres méthodes de traitement existantes (cf. § 1.3).

L'utilisation des méthodes de surdétermination reposent sur le fait que la levée de l'indétermination de l'équation (1.20) peut être réalisée à condition que p vérifie une ou plusieurs équations additionnelles assurant l'unicité de la solution [4-6,9]. En effet, lorsqu'on est sûr que le second membre de l'équation (sous la forme (1.80)) est compatible, ce qui est vrai dans le cas étudié ici (cf. § 1.5), on peut résoudre l'équation en rajoutant une condition assurant l'unicité. Il s'agit alors de résoudre simultanément deux équations intégrales sur Γ , choisies de manière à avoir toujours une solution unique.

Pour assurer l'unicité de la solution aux fréquences irrégulières de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure avec conditions de Neumann sur la surface sans changer le noyau de la formulation, deux méthodes de surdétermination s'imposent, celles de Schenck et de Jones [4,5]. La première de ces techniques est beaucoup plus employée, elle l'est en particulier dans le code CHIEF [119]. La seconde n'avait jamais été utilisée avant d'être adoptée et développée au laboratoire dans le code EQI [6,7]. Contrairement à la méthode de Schenck, celle de Jones présente l'avantage de fixer le nombre suffisant d'équations supplémentaires à fournir au système final d'équations (1.20) en fonction du k à problème. Si le problème intérieur est analytique, une condition nécessaire et suffisante dépendant de la position de l'origine de calcul par rapport aux surfaces nodales existe. Ces deux méthodes sont maintenant présentées en détails.

1.6.1 Formulation de Schenck

Lorsque f est une fréquence irrégulière de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure avec condition de Neumann sur la frontière, c'est à dire quand $k = (2\pi f)/c$ est valeur propre du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant, l'équation (1.20) admet une infinité de solutions de la forme $p(\mathbf{r}) + Au(\mathbf{r})$ où $u(\mathbf{r})$ est une solution non nulle de l'équation homogène associée à (1.20) et A une constante arbitraire.

1. Leur nombre augmente rapidement avec la fréquence [31].

Schenck a associé à l'équation (1.20) l'équation du problème intérieur associé à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure (1.21) afin d'obtenir une solution unique sur la surface [4]. Il a prouvé qu'une seule solution de (1.20) est également solution de (1.21), à condition que le point intérieur \underline{r} ne soit pas situé sur l'une des surfaces nodales de la fonction propre du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant associée à la fréquence irrégulière considérée, car sinon l'équation (1.21) est triviale.

Sous cette condition, le système équations intégrales surdéterminé par une ou plusieurs équations (1.21) assure l'unicité de la solution aux fréquences critiques. La solution du système surdéterminé est obtenue par une méthode de résolution de systèmes surdéterminés.

Mais cette technique de surdétermination présente de sérieux inconvénients. En effet, on ne connaît généralement pas la position des surfaces nodales sauf dans le cas particulier où la solution analytique du problème intérieur est connue. Pour la n -ième fréquence irrégulière, les surfaces nodales découpent le domaine intérieur en au plus n sous-domaines [31]. Par conséquent, il est nécessaire d'imposer plusieurs points intérieurs pour qu'au moins l'un d'entre eux ne se trouve pas sur une surface nodale ou en soit suffisamment éloigné [32]. Le nombre de ces points et leur position sont alors soumis au hasard (aucune règle systématique n'existe), et ce choix devient de plus en plus aléatoire quand augmente la fréquence car la densité des surfaces nodales croît avec la fréquence [31].

Pour les basses ou moyennes fréquences, cette technique fonctionne avec succès [4,32,74]. Depuis la première introduction de la méthode, de nombreux auteurs l'ont utilisée pour un grand nombre de structures [32].

1.6.2 Méthode de Jones

Jones discute, dans la deuxième partie de son article, «an alternative approach», de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure avec condition de Neumann sur la surface [5]. Il s'intéresse au problème de non-unicité de la solution lorsque le nombre d'onde k coïncide avec une valeur propre du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant (k^2 est alors appelé valeur irrégulière associée à la solution fondamentale $g(\underline{r}, \underline{r}')$). Il y propose une méthode garantissant l'unicité de la solution sur une certaine bande de fréquence et qui est utilisée dans le code EQI [6,7].

Cette méthode s'appuie sur le fait qu'il ait démontré que seule une des solutions que possède l'équation (1.20) pour une fréquence irrégulière vérifie les équations de champ nul (cf. § 1.7). Il s'agit donc de surdéterminer le système d'équations intégrales (1.20) par une ou plusieurs équations de champ nul afin d'assurer l'unicité de la solution. Plusieurs car si l'origine de calcul de champ nul appartient à une surface nodale de la fonction propre du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant associée à la fréquence irrégulière considérée, l'équation de champ nul est triviale et ne permet plus d'assurer l'unicité de la solution. Il a établi un critère fixant le nombre d'équations de champ nul à utiliser pour que la méthode soit efficace : si la pression p satisfait, pour un problème tridimensionnel, l'équation (1.20) et les $(M + 1)^2$ premières équations de champ nul, alors les $(M + 1)$ premières fréquences irrégulières sont supprimées.

Cette condition est suffisante mais non nécessaire, car les surfaces nodales de la M -ième fonction propre, associée à la M -ième fréquence irrégulière, divisent Ω_{int} en au plus M sous-domaines [31]. En pratique, le nombre de ces sous-domaines est nettement plus petit que M . Ce qui

signifie que le nombre d'équations de champ nul nécessaires peut être beaucoup plus petit que M .

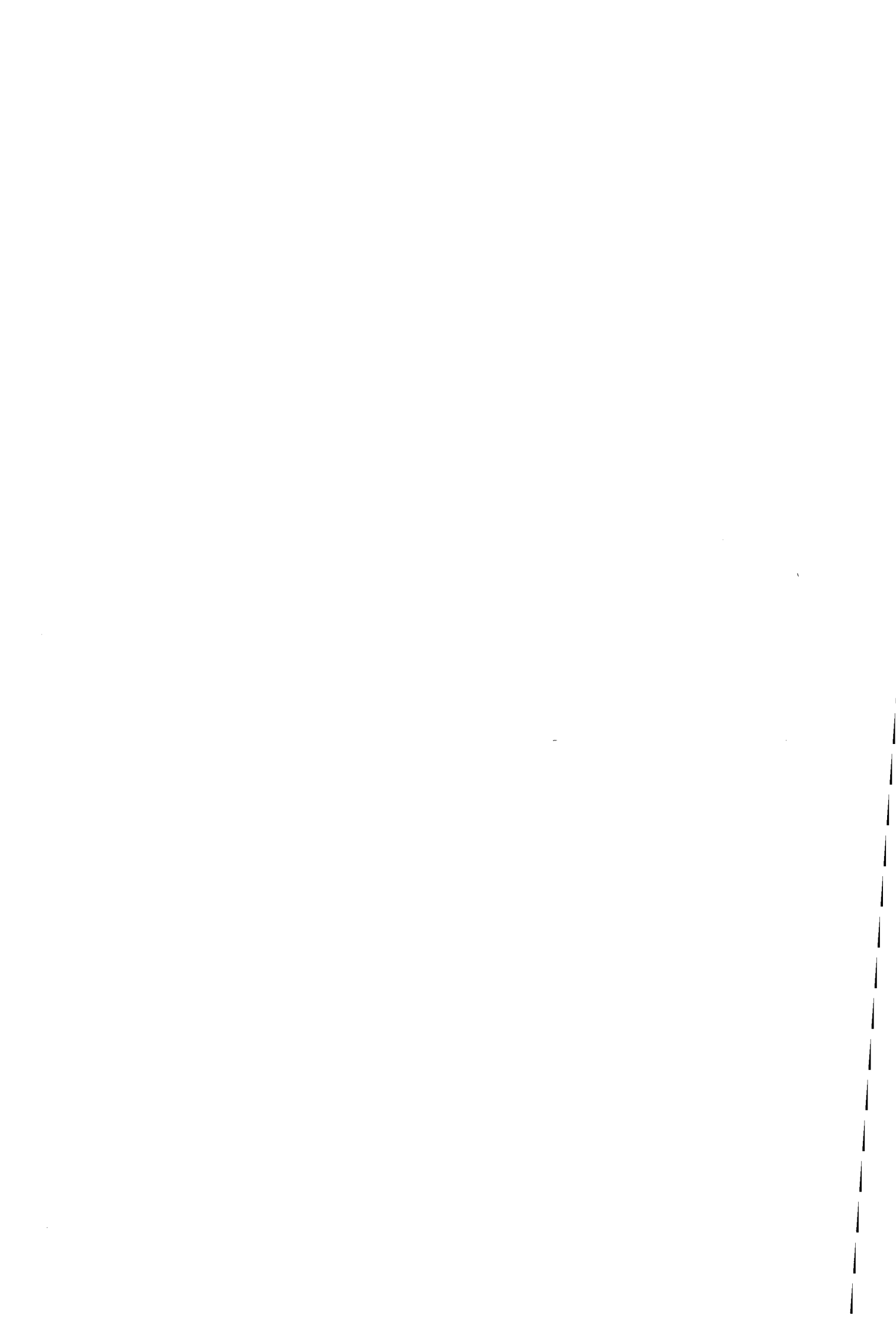
D'après la référence [6], si l'origine de calcul de champ nul (l'origine des coordonnées) appartient à n surfaces nodales différentes, alors la surdétermination du système équations intégrales par le système d'équations de champ nul de degré maximal $M = n(n + 1)^2$ équations de champ nul pour un problème tridimensionnel) suffit à assurer l'unicité de la solution. Le système surdéterminé est résolu par une méthode adaptée aux systèmes rectangulaires.

Par rapport à la méthode de Schenck, cette technique est théoriquement plus avantageuse car elle fournit une condition suffisante pour assurer l'unicité de la solution.

L'équation de champ nul de degré 0 est équivalente à l'équation du problème intérieur associé à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure (1.21) quand le point intérieur \underline{r} coïncide avec l'origine de calcul des équations de champ nul, à la différence près que $g(\underline{r}, \underline{r}')$ a été remplacé par $\Psi_0^0(\underline{r}')$, qui sont toutes deux solution particulière de l'équation de Helmholtz. Elles sont donc équivalentes. Dans ce cas ($M = 0$), les méthodes de Schenck et Jones le sont aussi.

La méthode de Jones peut être optimisée :

- par l'utilisation simultanée de plusieurs systèmes d'équations de champ nul pour différentes parties de la structure, pour réduire le degré maximal M ,
- par l'utilisation d'autres fonctions d'onde solutions de l'équation de Helmholtz dans un système de coordonnées mieux adapté à la forme de l'objet.



1.7 MÉTHODE DE CHAMP NUL

Dans ce paragraphe est présentée la méthode de champ nul (ou méthode "extended boundary condition") [5].

Les équations de champ nul sont de première espèce. Elles permettent de calculer la pression, ou sa dérivée normale (selon les conditions aux limites sur la surface), sur la surface. Ces équations possèdent une solution unique pour tout nombre d'onde k . De plus, cette méthode possède, tout comme les représentations intégrales présentées dans les paragraphes précédents, l'avantage de ne discrétiser que la surface du corps étudié, et non un volume, et donc de limiter de façon avantageuse le nombre d'inconnues. Son obtention repose sur une décomposition en série d'ondes sphériques de la pression incidente et de la fonction de Green.

Ensuite, la méthode de la matrice de transition, qui en est proche, est présentée de façon rapide [120,33].

1.7.1 Formalisme de la méthode de champ nul

1.7.1.1 Solutions naturelles de l'équation de Helmholtz

La mise en équations de cette méthode de champ nul requiert la connaissance des solutions naturelles de l'équation de Helmholtz. Ces solutions ne sont connues que lorsque la méthode de séparation des variables est applicable au problème extérieur. Pour ce faire, on est amené à travailler dans un système de coordonnées orthogonales adéquate. Comme la majorité des auteurs, et afin d'éviter les complications de calcul qui deviennent vite dissuasives pour des systèmes évolués, le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) est ici adopté (cf. annexe A11).

Soit l'équation de Helmholtz $\Delta\psi + k^2\psi = 0$. Une solution à variables séparées de cette équation est [2] :

$$\psi(r) = R(r)\Theta(\theta)\phi(\varphi) \quad (1.103)$$

avec :

$$\frac{d^2\phi}{d\varphi^2} + l^2\phi = 0 \quad (1.104)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(m(m+1) - \frac{l^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0 \quad (1.105)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{m(m+1)}{r^2} \right) R = 0 \quad (1.106)$$

Les solutions de (1.104) sont $\sin l\varphi$ et $\cos l\varphi$ ou :

$$e^{\pm il\varphi} \quad (1.107)$$

celles de (1.105) sont les fonctions de Legendre :

$$P_m^1(\cos\theta) \quad (1.108)$$

celles de (1.106) sont les fonctions de Bessel sphériques de 3ième espèce (appelées fonctions de Hankel) :

$$h_m(kr) = j_m(kr) + iy_m(kr) \quad (1.109)$$

où : j_m sont les fonctions de Bessel sphériques de première espèce et y_m sont les fonctions de Bessel sphériques de seconde espèce (appelées fonctions de Neumann).

Les harmoniques sphériques Y_m^1 sont

$$Y_m^1(\theta, \varphi) = (-1)^l \sqrt{v_{ml}} P_m^1(\cos\theta) e^{il\varphi} \quad (1.110)$$

où :

$$v_{ml} = \frac{2m+1(m-1)!}{4\pi(m+1)!} \quad (1.111)$$

1.7.1.2 Établissement des équations de champ nul

Le point de départ est la formulation du problème intérieur associé $\underline{r} \in \Omega_{int}$ à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure (1.21) :

$$p_{inc}(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' = 0 \quad \underline{r} \in \Omega_{int} \quad (1.112)$$

Dans une sphère S dont le centre est l'origine du repère¹ (c'est à dire que l'origine du repère est l'origine de calcul de champ nul), de rayon R et inscrite dans la frontière Γ (voir figure 1.5), on décompose la fonction de Green g sous la forme de la série convergente uniformément en \underline{r} et \underline{r}' :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{ik}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l| \leq m} \psi_m^1(\underline{r}') \tilde{\psi}_m^1(\underline{r}) \quad \underline{r}' \in \Gamma \quad \underline{r} \in S \quad (1.113)$$

avec les ondes sphériques divergentes :

$$\psi_m^1(\underline{r}') = h_m(kr') Y_m^1(\theta', \varphi') \quad (1.114)$$

1. L'origine de calcul des équations de champ nul doit donc se trouver dans le domaine intérieur Ω_{int} . Toutes les fonctions sont définies avec l'origine dans Ω_{int} .

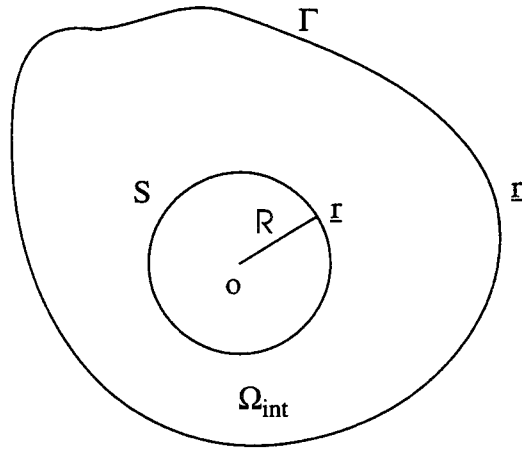


Figure 1.5. Domaine de décomposition des équations de champ nul.

et les ondes sphériques régulières à l'origine :

$$\tilde{\psi}_m^1(\underline{r}) = j_m(kr) \bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \quad (1.115)$$

où $\bar{Y}_m^1(\theta, \varphi)$ est le conjugué des harmoniques sphériques.

La pression incidente $p_{inc}(\underline{r})$ est également décomposée :

$$p_{inc}(\underline{r}) = ik \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|| \leq m} c_m^1 \tilde{\psi}_m^1(\underline{r}) \quad \underline{r} \in S \quad (1.116)$$

Les coefficients c_m^1 sont déterminés dans l'annexe A15.

Les calculs de l'annexe A16 permettent d'obtenir les équations de champ nul :

$$\iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\underline{r}') d\underline{r}' = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \psi_m^1(\underline{r}') d\underline{r}' - 4\pi c_m^1 \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ || \leq m \end{array} \quad (1.117)$$

À partir d'une condition sur Γ de type Neumann (respectivement Dirichlet), cette technique de résolution permet de calculer la pression (respectivement la dérivée normale de la pression) sur Γ pour un problème de rayonnement ou de diffraction. La solution existe et est unique pour tout nombre d'onde. On peut alors en déduire la pression en tout point du fluide $\Omega_{fl} = \Omega_{ext}$ par application de la représentation (1.19).

Dans le cas de la diffraction rigide, $\partial p(\underline{r}') / \partial n' = 0$, l'équation (1.117) s'écrit :

$$\iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\underline{r}') d\underline{r}' = -4\pi c_m^1 \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ || \leq m \end{array} \quad (1.118)$$

et dans celui du rayonnement :

$$\iint_{\Gamma} p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^l(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \psi_m^l(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{array} \quad (1.119)$$

Il est également possible d'obtenir les équations de champ nul par application dans $\Omega_{fl} = \Omega_{ext}$ du second théorème de Green pour les fonctions $\psi_m^l(\mathbf{r}')$ et $p(\mathbf{r}')$. Ce calcul est également présenté dans l'annexe A16.

La méthode de champ nul, contrairement à celle de la matrice de transition qui en est proche et qui est rapidement présentée dans le paragraphe suivant, n'est que très peu exploitée par les acousticiens. Elle a été appliquée dans le domaine de l'électromagnétisme par Bolomey et Wirgin [82]. D'une manière générale, il a été remarqué que l'application de la méthode de champ nul reste limitée, sous peine de mauvais résultats, à des structures pas trop excentrées.

1.7.2 Méthode de la matrice de transition

La méthode de la matrice de transition, appelée matrice T, qui présente de grande similitudes avec celle de champ nul, est uniquement adaptée à la diffraction acoustique : le champ diffracté est déduit directement du champ incident. Elle a été proposée par Waterman [33].

Il suffit d'adapter la démonstration donnée en 1.7.1.2 en y apportant les modifications suivantes :

- le point de départ est la formulation du problème extérieur associé ($\mathbf{r} \in \Omega_{ext} = \Omega_{fl}$) à la représentation intégrale de helmholtz extérieure (éq. (1.19)) en notant que $p(\mathbf{r}) = p_{inc}(\mathbf{r}) + p_{df}(\mathbf{r})$ où p_{df} est la pression diffractée :

$$\iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = p_{df}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Omega_{fl} \quad (1.120)$$

- on considère un volume S' constitué du domaine $\Omega_{fl} = \Omega_{ext}$ auquel on a ôté la sphère de centre l'origine du repère, de rayon R' et circonscrite à Γ (cf. figure 1.6),
- la fonction de Green est écrite sous forme d'une série :

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{ik}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l| \leq m} \tilde{\psi}_m^l(\mathbf{r}') \psi_m^l(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r}' \in \Gamma \quad \mathbf{r} \in S' \quad (1.121)$$

- la pression diffractée p_{df} est décomposée suivant les ondes sphériques divergentes :

$$p_{df}(\mathbf{r}) = ik \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|l| \leq m} d_m^l \psi_m^l(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in S' \quad (1.122)$$

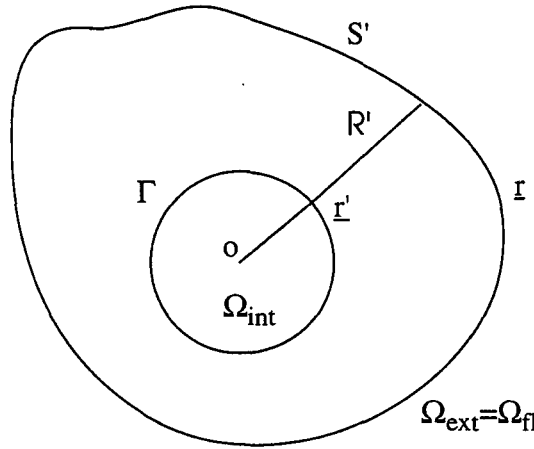


Figure 1.6. Domaine de décomposition de la matrice de transition.

Par analogie, il vient :

$$\iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}') d\underline{r}' = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}') d\underline{r}' - 4\pi d_m^1 \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{array} \quad (1.123)$$

Le principe de la méthode consiste à éliminer l'inconnue p sur Γ . Pour cela, Waterman a initialement exprimé la pression sur Γ sous la forme d'une série de fonctions Ψ_p^q formant un système complet :

$$p(\underline{r}') = \sum_p \sum_q a_p^q \Psi_p^q(\underline{r}') \quad \underline{r}' \in \Gamma \quad (1.124)$$

Le choix de ces fonctions conditionne l'efficacité numérique de la méthode.

En combinant les équations (1.117) et (1.123) après y avoir injecté (1.124), on élimine l'inconnue de surface a_p^q et on obtient la matrice de transition reliant les coefficients de la pression diffractée d_m^1 à ceux de la pression incidente c_m^1 .

Dans le cas de la diffraction rigide, la formulation s'écrit :

$$\iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}') d\underline{r}' = -4\pi d_m^1 \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{array} \quad (1.125)$$

Cette méthode sert à calculer la pression diffractée à l'infini lorsque l'onde incidente est plane et l'angle d'incidence quelconque pour des structures rigides de différentes géométries. Sa solution est unique pour tout nombre d'onde.

Comme pour la méthode de champ nul, ses applications sont limitées originellement à des calculs de diffraction sur des objets dont la forme n'est pas trop éloignée de la sphère. W. Tobocman a vérifié que cette méthode converge plus rapidement que la formulation intégrale de Helmholtz extérieure quand la structure est proche d'une sphère [122]. Il a ensuite constaté la dégradation rapide de la matrice quand l'excentricité augmente alors que la représentation intégrale

de Helmholtz extérieure n'est pas affectée de façon significative. Il a alors suggéré de remplacer les fonctions sphériques par des fonctions sphéroïdales que l'on caractérise en faisant apparaître les solutions séparées de l'équation de Helmholtz pour le problème extérieur dans le système de coordonnées sphéroïdales. De telles fonctions permettent de mieux décrire une surface présentant une forte excentricité [19,123]. Un article intéressant au sujet du traitement de plusieurs obstacle est référencé en [124].

La méthode de la matrice T peut permettre de prendre en compte le caractère élastique d'une structure à l'aide d'une formulation adaptée à l'intérieur [125].

Les difficultés numériques qui interviennent quand le degré des fonctions d'ondes augmente sont dues au comportement délicat de ces fonctions.

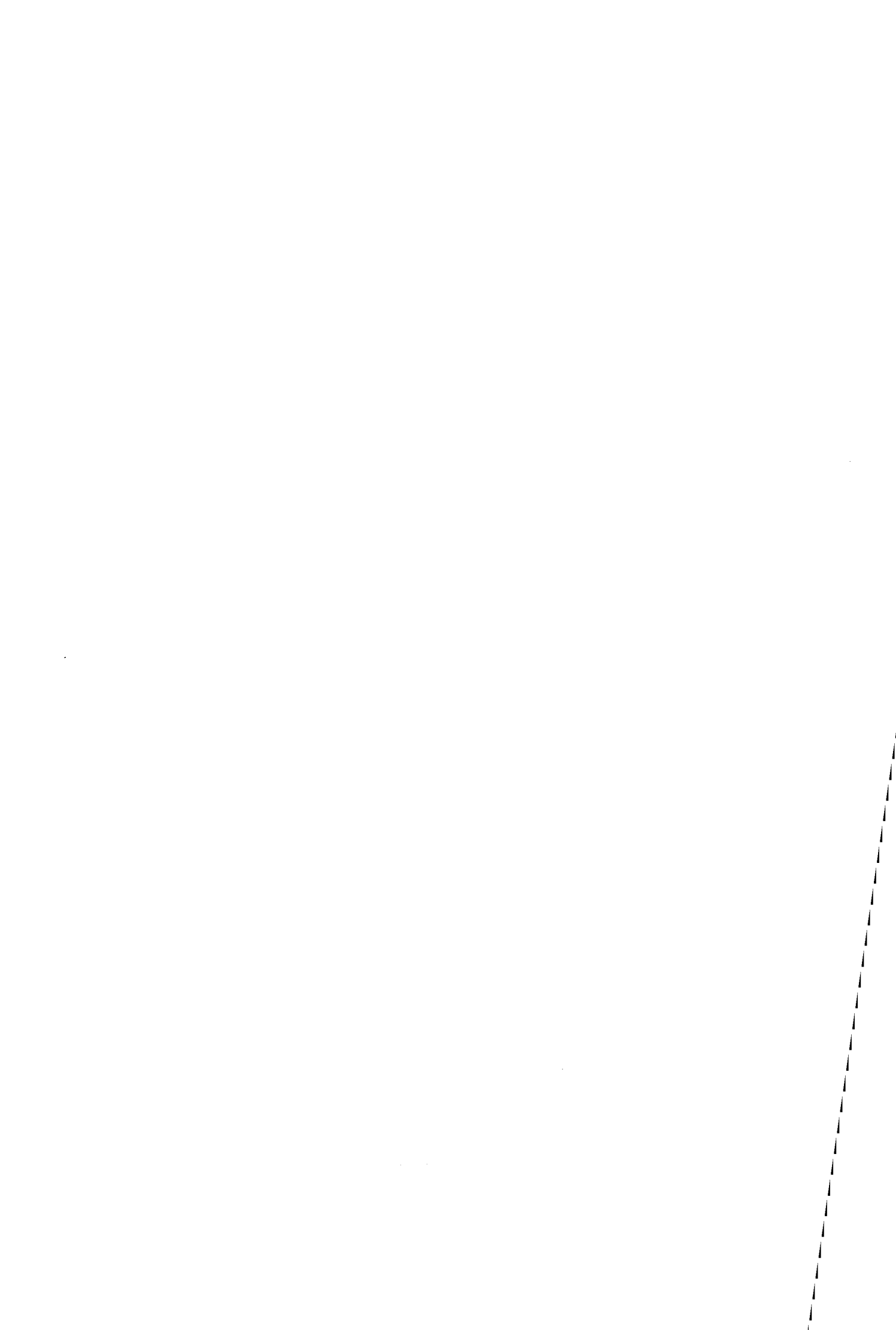
Plus utilisée que la méthode de champ nul, la matrice T a subi dans la littérature de nombreuses optimisations [34,123,126-135].

CONCLUSIONS

De la description du problème de Neumann de rayonnement ou de diffraction acoustique étudié ici et des équations le gouvernant, diverses méthodes de résolution applicables numériquement ont été citées dans ce premier chapitre. En particulier, on a insisté sur la représentation intégrale de Helmholtz extérieure, qui forme la base de l'outil sur lequel on travaille, le code de calcul EQI.

Cette représentation intégrale permet le calcul de la pression sur la surface du corps étudié, puis d'obtenir la pression en tout point du fluide en champ proche et lointain. Elle est particulièrement bien adaptée aux problèmes traités ici puisqu'elle diminue la taille tridimensionnelle à celle d'un problème bidimensionnel. Elle possède néanmoins un problème majeur : la présence de fréquences irrégulières pour lesquelles il y a indétermination de la solution.

Afin de supprimer cette indétermination, un choix est fait : la surdétermination des équations intégrales par des équations de champ nul. On détermine ces dernières. Un critère fixant le nombre de ces équations à utiliser en fonction de la fréquence irrégulière à traiter afin d'assurer l'unicité de la solution existe.



Chapitre 2

Traitement numérique des équations

INTRODUCTION

Ce chapitre concerne le traitement numérique des équations obtenues dans le premier chapitre. Pour ce faire, la discrétisation du problème est réalisée avec des éléments isoparamétriques à variation quadratique. Pour un problème de Neumann, les équations de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure permettant le calcul de la pression sur la surface, dans le fluide en champ proche et en champ lointain sont traitées. Il en est de même des équations de champ nul servant principalement à l'emploi de la méthode de Jones [5]. La prise en compte d'une possible symétrie axiale est également décrite. La discrétisation mène toujours à un système linéaire d'équations, dont la résolution permet l'obtention de la pression inconnue (problème de Neumann). La validation de la numérisation des équations est effectuée par le test classique de la source ponctuelle [15].

La première partie de ce chapitre introduit le concept de discrétisation [7,15]. Le découpage en éléments finis de surface y est présenté. Des éléments isoparamétriques à variation quadratique sont utilisés. Le "critère en $\lambda/4$ ", qui doit impérativement être respecté pour pouvoir utiliser les éléments de surface en question dans de bonnes conditions, est explicité. Les développements sont présentés dans le cas du problème complètement tridimensionnel (3D).

La deuxième section de ce chapitre concerne le traitement numérique des équations de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure. L'équation de surface est d'abord traitée. Le calcul des intégrales est effectué par l'intermédiaire de la quadrature de Gauss-Legendre [15]. Le traitement des singularités est rappelé. Ensuite, le passage au calcul de la pression dans le fluide, en champ proche ou en champ lointain, est décrit.

Dans la partie suivante, les équations de champ nul sont traitées à l'aide des outils développés auparavant et d'une décomposition de la pression sur la surface en série de fonctions formant un système complet [6]. Les intégrales sont également évaluées par la méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre.

La quatrième section traite de la surdétermination du système linéaire obtenu dans la deuxième partie par celui obtenu en troisième lors d'un calcul à une fréquence irrégulière. Le système obtenu est rectangulaire. Sa résolution est menée au sens des moindres carrés par la méthode de décomposition QR-Householder [136,137].

La section suivante évoque la prise en compte de la symétrie axiale dans la discrétisation [6,7,138]. Toutes les étapes précédemment décrites en tridimensionnel sont effectués en prenant en compte la symétrie axiale du problème, ce qui permet d'avantageuses simplifications.

L'outil classique de validation en équations intégrales est expliqué dans la dernière partie de ce chapitre. Il s'agit du test de la source ponctuelle, qui permet de mettre à l'épreuve le comportement numérique des développements effectués [4].

Une conclusion termine ce chapitre.

2.1 OUTILS DE DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS

2.1.1 Principe des éléments finis de surface

L'utilisation des éléments finis de surface [7,15] est classique pour mener à bien la résolution d'équations telles que (1.20) et (1.117). Le principe consiste à découper la surface Γ en domaines surfaciques élémentaires reliés entre eux par un nombre fini de points appelés noeuds. Un tel découpage forme un maillage (figure 2.1).

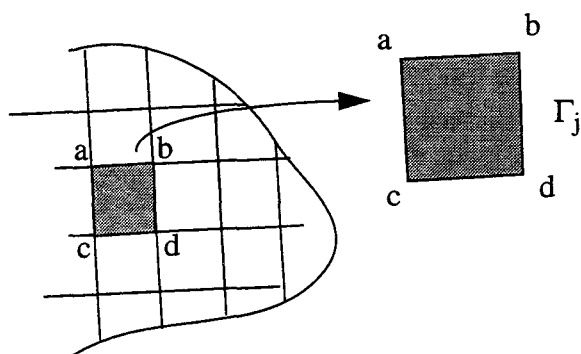


Figure 2.1. Éléments finis de surface formant un maillage.

Sur chaque élément Γ_j , les variables du problème, c'est à dire la pression et sa dérivée normale, dépendent uniquement des valeurs qu'elles prennent aux noeuds de l'élément. Leurs valeurs en tout point sont fournies par l'intermédiaire des fonctions de forme (ou d'interpolation) qui dépendent des coordonnées réduites.

Après discrétisation des équations, on aboutit alors à un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs nodales de la variable inconnue et dont la résolution est la dernière étape du problème. La géométrie des éléments, le nombre de noeuds par élément et la loi de variation des champs de variable à l'intérieur de l'élément sont intimement liés.

2.1.2 Éléments et fonctions d'interpolation

2.1.2.1 Les différents types d'éléments

D'après la référence [15], les fonctions de pondération prennent la valeur unité au point considéré et sont nulles partout ailleurs. Les éléments isoparamétriques sont les éléments finis de surface pour lesquels les fonctions de pondération définissant les variations de la géométrie sont les mêmes que celles définissant les variations des fonctions variables du problème. Différents types d'éléments existent : l'élément constant sur lequel les variables sont constantes; l'élément linéaire sur lequel les fonctions de pondération varient linéairement le long de chaque côté de l'élément; l'élément quadratique sur lequel les fonctions de forme varient de façon quadratique le long de chaque côté de l'élément; des éléments de degré supérieur existent également. L'élément quadratique permet une bonne précision dans les calculs.

2.1.2.2 Les éléments utilisés

La pression et sa dérivée normale sur un élément Γ_j comportant n noeuds sont approchées par les fonctions de forme N_i selon les relations :

$$p(\mathbf{r}(\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) p_{ji} \quad \mathbf{r} \in \Gamma_j \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}(\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \quad \mathbf{r} \in \Gamma_j \quad (2.2)$$

où ξ et η sont les coordonnées réduites de l'élément de surface. Les coefficients p_{ji} et $\partial p_{ji}/\partial n$ sont les valeurs de la pression et de sa dérivée normale au noeud i de l'élément Γ_j . Sur un élément, le nombre de fonctions de forme est égal au nombre de noeuds. Soit deux noeuds de coordonnées réduites (ξ_i, η_i) et (ξ_j, η_j) d'un même élément, on a alors :

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij} \quad (2.3)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Les interpolations utilisées ici sont quadratiques. Les fonctions de forme quadratiques permettent de décrire proprement toute géométrie complexe et avec une très bonne précision des calculs sous réserve de respecter le "critère en $\lambda/4$ " [15].

"Critère en $\lambda/4$ ".

Ce critère de convergence signifie que les dimensions latérales des éléments de surface doivent être inférieures ou égales au quart de la longueur d'onde de la fréquence de calcul (la longueur d'onde s'écrit $\lambda = c/f$). À maillage donné, ce critère fixe ainsi la fréquence maximale d'utilisation F .

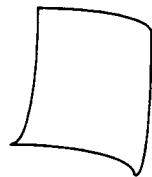
Il faut noter que ce type d'interpolation peut engendrer des discontinuités fictives de la surface en certains noeuds communs à plusieurs éléments, dues justement à la différence de courbure de ces éléments. Ces discontinuités fictives sont négligeables si le découpage est bien conditionné mais sont néanmoins intégrées dans le code de calcul EQI.

Deux types d'éléments de surface sont utilisés ici : les éléments quadrilatères à 8 noeuds (figure 2.2) et les éléments triangulaires à 6 noeuds (figure 2.3). Pour l'élément quadrilatère à 8 noeuds, les fonctions déduites de cette représentation sont :

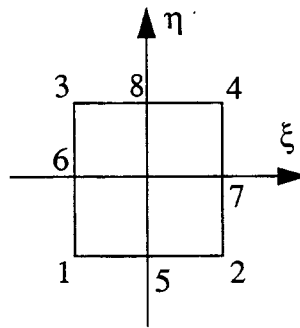
$$\left(\begin{array}{l}
 N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi - 1)(1 - \eta)(\xi + \eta + 1) \\
 N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1) \\
 N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(\eta - \xi - 1) \\
 N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1) \\
 N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
 N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi) \\
 N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi) \\
 N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)
 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Pour l'élément triangulaire à 6 noeuds, les fonctions de forme sont :

$$\left(\begin{array}{l}
 N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(2\xi + \eta + 1)(2\xi + \eta - 1) \\
 N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(2\xi - \eta + 1)(2\xi - \eta - 1) \\
 N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta(1 + \eta) \\
 N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(2\xi - \eta + 1)(1 - 2\xi - \eta) \\
 N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)(2\xi + 1 - \eta) \\
 N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 - 2\xi - \eta)
 \end{array} \right. \quad (2.5)$$



(a)



(b)

Figure 2.2. Élément quadrilatère, avec $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$,
 (a) global, (b) réduit.

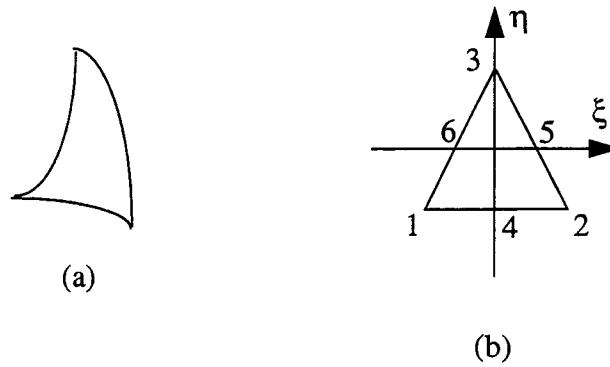


Figure 2.3. Élément triangulaire, avec $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$,
(a) global, (b) réduit.

2.1.3 Représentation de la surface

Les éléments étant isoparamétriques, la géométrie est interpolée par les fonctions de forme quadratiques N_i déjà définies.

On travaille dans le système de coordonnées cartésiennes (O, X, Y, Z) (cf. annexe A11). Il faut exprimer l'élément de surface sur lequel est effectuée l'intégration en fonction des coordonnées locales. L'interpolation est introduite par la relation suivante :

$$\underline{OM'} = \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi, \eta) \underline{OM}_{ji} \quad (2.6)$$

où $NNE = 6$ ou 8 est le nombre de noeuds par élément, $M'(x', y', z')$ est un point courant de l'élément Γ_j , $M_{ji}(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji})$ est le noeud i de l'élément Γ_j .

On projette alors ce vecteur sur les trois axes du repère :

$$x' = \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi, \eta) x_{ji} \quad (2.7)$$

$$y' = \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi, \eta) y_{ji} \quad (2.8)$$

$$z' = \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi, \eta) z_{ji} \quad (2.9)$$

Suivant une telle démarche, la normale à la surface au point $\underline{r}'(\xi, \eta)$ de coordonnées (x', y', z') dans le repère cartésien est donnée par [139] :

$$\underline{n}' = \frac{1}{\omega(\xi, \eta)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \underline{r}' \wedge \frac{\partial}{\partial \eta} \underline{r}' \right] \quad (2.10)$$

avec

$$\omega(\xi, \eta) = \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \underline{r}' \wedge \frac{\partial}{\partial \eta} \underline{r}' \right| \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \underline{r}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} x' \\ \frac{\partial}{\partial \xi} y' \\ \frac{\partial}{\partial \xi} z' \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \underline{r}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} x' \\ \frac{\partial}{\partial \eta} y' \\ \frac{\partial}{\partial \eta} z' \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La normale \underline{n}' est orientée vers le fluide de façon à ce que $(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{n}')$ forme un trièdre direct, où $\underline{\xi}$ et $\underline{\eta}$ sont les vecteurs directeurs des axes du repère réduit de Γ_j . L'élément de surface élémentaire est [139] :

$$d\underline{r}'(\xi, \eta) = \omega(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.14)$$

2.2 TRAITEMENT DES ÉQUATIONS DE LA REPRÉSENTATION INTÉGRALE DE HELMHOLTZ EXTÉRIEURE

2.2.1 Équation intégrale de Helmholtz extérieure

2.2.1.1 Discrétisation

On fixe quelques notations usuelles :

- NE : nombre d'éléments Γ_j composant la surface Γ de la structure,
 - NN : nombre total de noeuds du maillage,
 - NNE : nombre de noeuds par élément Γ_j .
- NNE = 6 ou 8 selon que Γ_j est un triangle ou un quadrangle.

Pour établir les équations discrétisées, on injecte les interpolations (2.1) et (2.2) dans l'équation (1.20) écrite au noeud de calcul r_m du maillage. Il vient donc :

$$\begin{aligned}
 p_{inc\ m} + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} p_{ji} \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) dr'(\xi, \eta) \\
 - \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \iint_{\Gamma_j} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) dr'(\xi, \eta) = \frac{\alpha_m}{4\pi} p_m
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$m = 1, \dots, NN$

où α_m est l'angle solide au noeud r_m vu de l'extérieur, $p_{inc\ m}$ est la pression incidente au noeud r_m , p_m est la pression totale au noeud r_m . Il faut remarquer que les grandeurs indicées par m correspondent à une numérotation globale alors que celles indicées par ji correspondent à une numérotation locale. Pour éviter toute ambiguïté de notation, on décide d'adopter une cohérence dans cette numérotation. À cet effet, on distingue les deux types de notation.

2.2.1.1.1 Écriture locale

En adoptant la numérotation locale aux éléments, on note :

$$A_{m\ ij} = \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) dr'(\xi, \eta) - \delta_{m\ ij} \frac{\alpha_m}{4\pi} \tag{2.16}$$

$$B_{m\ ij} = \iint_{\Gamma_j} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) dr'(\xi, \eta) \tag{2.17}$$

et :

$$\sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} A_{m\ ij} p_{ji} = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} B_{m\ ij} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} - p_{inc\ m} \quad m = 1, \dots, NN \tag{2.18}$$

2.2.1.1.2 Écriture globale

Avec la numérotation globale, on a :

$$A_{m \text{ oe}} = \sum_{s(\text{oe})} \int \int_{\Gamma_{s(\text{oe})}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \eta)) N_{p(s(\text{oe}))}(\xi, \eta) d\mathbf{r}'(\xi, \eta) - \delta_{m \text{ oe}} \frac{\alpha_m}{4\pi} \quad (2.19)$$

$$B_{m \text{ oe}} = \sum_{s(\text{oe})} \int \int_{\Gamma_{s(\text{oe})}} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \eta)) N_{p(s(\text{oe}))}(\xi, \eta) d\mathbf{r}'(\xi, \eta) \quad (2.20)$$

et :

$$\sum_{\text{oe}=1}^{NN} A_{m \text{ oe}} p_{\text{oe}} = \sum_{\text{oe}=1}^{NN} B_{m \text{ oe}} \frac{\partial p_{\text{oe}}}{\partial \mathbf{n}} - p_{\text{inc } m} \quad m = 1, \dots, NN \quad (2.21)$$

où $s(\text{oe})$ est la liste des éléments auxquels appartient le noeud oe , $p(s(\text{oe}))$ est la position de oe dans la topologie des éléments $\Gamma_{s(\text{oe})}$.

Avec l'une ou l'autre des notations précédentes, on aboutit finalement à la forme matricielle suivante :

$$[A]\{p\} = [B]\left\{\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}\right\} - \{p_{\text{inc}}\} \quad (2.22)$$

où les termes entre crochets sont les matrices contenant les coefficients d'influence entre tous les noeuds du maillage, et $\{p\}$, $\{\partial p / \partial \mathbf{n}\}$ et $\{p_{\text{inc}}\}$ sont les vecteurs respectifs de la pression, de sa dérivée normale et de la pression incidente aux noeuds du maillage. Le premier membre est composé d'une matrice de dimension $NN * NN$ et d'un vecteur d'ordre NN , le second de deux vecteurs d'ordre NN . C'est donc un système de NN équations à NN inconnues.

La résolution du système carré est effectuée par la méthode d'élimination de Gauss avec pivotement partiel [136]. Cette technique est opérationnelle en mémoire [137] et par algorithme de résolution par blocs sur disque quand la mémoire est insuffisante [52].

2.2.1.2 Calcul des intégrales

Les quantités \mathbf{r}' , $d\mathbf{r}'$, \mathbf{n}' et N_i ont été explicitées dans les paragraphes 2.1.2 et 2.1.3. Il reste à préciser les termes $g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}')$ et $\partial g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') / \partial \mathbf{n}'$. On note :

$$D_m = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2 + (z_m - z')^2} \quad (2.23)$$

La fonction de Green et sa dérivée normale sont (éqs. (1.16) et (1.17)) :

$$g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m^2} \left[ik - \frac{1}{D_m} \right] (\mathbf{r}'(\xi, \eta) - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' \quad (2.25)$$

2.2.1.2.1 Méthode d'intégration numérique de Gauss-Legendre

Les fonctions à intégrer étant complexes, il faut recourir à l'intégration numérique.

La quadrature de Gauss consiste à approcher une intégrale par un développement en série [15] :

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i) \quad (2.26)$$

Cette technique permet d'intégrer exactement un polynôme de degré $2n - 1$. Les positions et coefficients de pondération intervenant dans les formules de quadrature de Gauss-Legendre sont donnés par des tables et peuvent être calculés numériquement avec beaucoup de précision [15].

L'extension de la quadrature de Gauss-Legendre aux calculs d'intégrales doubles se fait par l'intermédiaire de la formule [15] :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(u, v) du dv = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m U_i V_j h(u_i, v_j) \quad (2.27)$$

$-1 \leq u_i, v_j \leq 1 \quad 0 \leq U_i, V_j \leq 2$

Les coefficients u_i et v_j sont les points de Gauss suivant les variables u et v , U_i et V_j leurs poids associés.

L'expression générale des intégrales à calculer est :

$$I = \iint_{\Gamma_j} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}'(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (2.28)$$

La fonction f est bien-sûr différente suivant que l'intégrale I contribue au calcul des coefficients de la matrice [A] ou [B].

Deux cas distincts sont à considérer :

- si $\mathbf{r} \notin \Gamma_j$: l'intégrale est dite non diagonale et est calculée directement par la formule de quadrature de Gauss-Legendre (éq. (2.27)),
- si $\mathbf{r} \in \Gamma_j$: L'intégrale est dite diagonale. La fonction à intégrer est singulier en un point. On emploie encore la même technique d'intégration mais avec un découpage adapté de l'élément Γ_j .

Le noeud de calcul \mathbf{r} n'appartenant pas à l'élément Γ_j , ces intégrales n'interviennent pas dans la diagonale des matrices [A] ou [B]. La technique d'intégration est transposable directement suivant les deux cas, quadrangle ou triangle.

Si Γ_j est un quadrangle, l'intégrale se présente, sans étape supplémentaire sous une forme immédiatement exploitable :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (2.29)$$

Si Γ_j est un triangle, en se reportant aux systèmes de coordonnées réduites du triangle (figure 2.3), on a :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{\frac{\eta-1}{2}}^{\frac{1-\eta}{2}} f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (2.30)$$

Il faut transformer cette intégrale pour que la variable ξ prenne ses valeurs entre -1 et 1. Un changement de variable s'impose donc : $u = 2\xi/(1 - \eta)$ et donc $d\xi = ((1 - \eta)/2)du$ et (2.30) devient :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)) \frac{1-\eta}{2} du d\eta \quad (2.31)$$

2.2.1.2.2 Les singularités

Le noeud de calcul \underline{r} appartient à l'élément de surface Γ_j . Les intégrales correspondantes sont dites diagonales. Cette dénomination peut paraître abusive car, en réalité, la seule intégrale qui influence la diagonale des matrices [A] et [B] est celle pour laquelle \underline{r} coïncide avec un des noeuds de la topologie de Γ_j . Toutefois, ces intégrales présentent toutes un point commun, à savoir que la distance D est petite et engendre de grandes variations de la fonction de Green et de sa dérivée normale (éqs. (2.24) et (2.25)). Leur calcul réclame donc une attention particulière dont le principe se résume ainsi : le domaine d'intégration Γ_j est découpé en éléments triangulaires, de telle sorte que le sommet commun à ces triangles soit le noeud \underline{r} . Sur chacun de ces triangles, la méthode d'intégration est la méthode de Gauss-Legendre. Pour ce faire et pour augmenter la densité des points de Gauss au voisinage de \underline{r} , on procède aux changements de variables adéquats. Cette démarche est inspirée de celles contenues dans les références [140-142].

Dans le cas d'un quadrangle, une alternative se présente suivant la position de \underline{r} :

- si le noeud de calcul \underline{r} est un sommet du quadrilatère, l'élément Γ_j est découpé en deux parties (figure 2.4.a),
- si le noeud de calcul \underline{r} est le milieu d'un côté du quadrilatère, l'élément Γ_j est découpé en trois parties (figure 2.4.b).

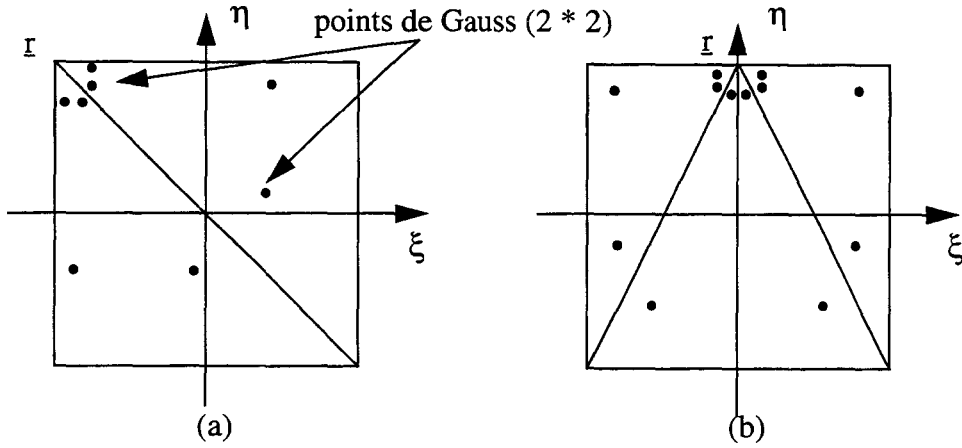


Figure 2.4. Découpage d'un quadrangle en deux (a) ou trois (b) parties.

Dans le cas d'un triangle, l'élément de surface Γ_j est toujours découpé en deux parties, comme l'indique la figure 2.5.

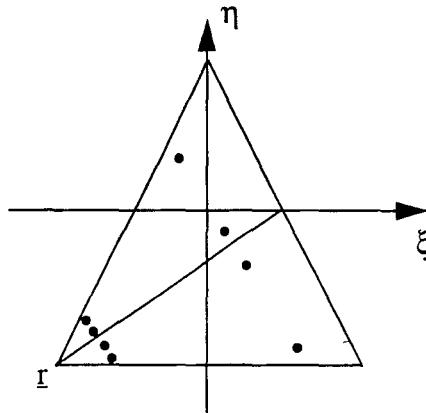


Figure 2.5. Découpage d'un triangle en deux parties.

Dans tous les cas, la décomposition des intégrales diagonales conduit à des intégrales de la forme :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 \mp v) f(u, v) du dv \quad (2.32)$$

où la singularité de la fonction à intégrer se situe au point $v = \pm 1$. Il faut remarquer que la partie singulière de $f(u, v)$ est contenue dans la fonction de Green ou sa dérivée normale. Le traitement des intégrales permet de diminuer la singularité de la fonction à intégrer d'un ordre un, par l'intermédiaire du Jacobien introduit dans le changement de variables.

2.2.2 Calcul en champ proche

À partir de la pression calculée sur Γ (par l'équation (1.20), cf. § 2.2.1), des valeurs de $\partial p / \partial n$

données sur Γ , et de la pression incidente, le calcul de la pression dans le fluide et en champ proche (à distance finie), est fait par l'équation (1.19).

Cette équation, après discrétisation, donne avec les mêmes notations qu'au paragraphe 2.2.1, au point r_m du fluide :

$$\begin{aligned}
 P_{inc\ m} + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} p_{ji} \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) d\Gamma'(\xi, \eta) \\
 - \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \iint_{\Gamma_j} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) d\Gamma'(\xi, \eta) = p_m
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

2.2.2.1 Écriture locale

En numérotation locale, on a :

$$P_m = P_{inc\ m} + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} a_{m\ ij} p_{ji} - \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} b_{m\ ij} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \tag{2.34}$$

où :

$$a_{m\ ij} = \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) d\Gamma'(\xi, \eta) \tag{2.35}$$

$$b_{m\ ij} = \iint_{\Gamma_j} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_i(\xi, \eta) d\Gamma'(\xi, \eta) \tag{2.36}$$

2.2.2.2 Écriture globale

Avec une numérotation globale, on obtient :

$$P_m = P_{inc\ m} + \sum_{oe=1}^{NN} a_{m\ oe} p_{oe} - \sum_{oe=1}^{NN} b_{m\ oe} \frac{\partial p_{oe}}{\partial n} \tag{2.37}$$

où :

$$a_{m\ oe} = \sum_{s(oe)} \iint_{\Gamma_{s(oe)}} \frac{\partial}{\partial n'} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_{p(s(oe))}(\xi, \eta) d\Gamma'(\xi, \eta) \tag{2.38}$$

$$b_{m\ oe} = \sum_{s(oe)} \iint_{\Gamma_{s(oe)}} g(r_m, r'(\xi, \eta)) N_{p(s(oe))}(\xi, \eta) d\Gamma'(\xi, \eta) \tag{2.39}$$

Les intégrales sont calculées de la même façon qu'au paragraphe (2.2.1.2), par la méthode de Gauss-Legendre, sans le problème des intégrales diagonales. La pression est ainsi obtenue au point r_m du fluide.

2.2.3 Calcul en champ lointain

Après discrétisation de la surface Γ , et avec les notations du paragraphe 2.2.1, l'équation (1.26) donne :

$$F_0(\theta, \varphi) = -\frac{ik}{4\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} p_{ji} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta) - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta) \quad (2.40)$$

pour le point d'observation \underline{r} .

2.2.3.1 Écriture locale

En numérotation locale, on a :

$$A_{2 \ ij} = \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta) \quad (2.41)$$

$$B_{2 \ ij} = \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta) \quad (2.42)$$

avec :

$$F_0(\theta, \varphi) = -\frac{ik}{4\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} p_{ji} A_{2 \ ij} - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} B_{2 \ ij} \quad (2.43)$$

2.2.3.2 Écriture globale

Les intégrales à calculer sont, en numérotation globale :

$$A_{2 \ oe} = \sum_{s(oe)} \iint_{\Gamma_{s(oe)}} N_{p(s(oe))}(\xi, \eta) \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta) \quad (2.44)$$

$$B_{2 \ oe} = \sum_{s(oe)} \iint_{\Gamma_{s(oe)}} N_{p(s(oe))}(\xi, \eta) e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\underline{r}'(\xi, \eta) \quad (2.45)$$

avec :

$$F_0(\theta, \varphi) = -\frac{ik}{4\pi} \sum_{oe=1}^{NN} p_{oe} A_{2 oe} - \frac{1}{4\pi} \sum_{oe=1}^{NN} \frac{\partial p_{oe}}{\partial n} B_{2 oe} \quad (2.46)$$

On évalue ces intégrales par la technique d'intégration de Gauss-Legendre. La fonction F_0 détermine le comportement de la pression en champ lointain. Le niveau sonore en champ lointain est ramené à 1 m (cf. § 1.2.2.3). En général, la pression de référence est 1 μPa ($TS = 20\log_{10}(|p|/1.10^{-06})$).

2.3 TRAITEMENT DES ÉQUATIONS DE CHAMP NUL

Dans le code de calcul EQI et dans le cadre des équations de champ nul, la pression est approchée par une décomposition en série tronquée de fonctions formant un système complet [6] :

$$p(\mathbf{r}') = \sum_{p=0}^P \sum_{q=-Q}^Q a_p^q \cos(p\theta') e^{-iq\varphi'} \quad \mathbf{r}' \in \Gamma \quad (2.47)$$

où (r', θ', φ') sont les coordonnées sphériques fixant la position du point de surface \mathbf{r}' , P et Q sont des coefficients laissés au choix de l'opérateur. Cette approximation de la pression sera également dénommée par la suite "approximation en série de Fourier". Le rayon polaire r' est une fonction de θ' et φ' .

À l'aide de la formule (2.47), l'équation (1.117) devient :

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=-Q}^Q a_p^q \iint_{\Gamma} \cos(p\theta') e^{-iq\varphi'} \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^l(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \psi_m^l(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - 4\pi c_m^l \quad (2.48)$$

$$m = 0, \dots, M$$

$$|l| \leq m$$

M étant le degré maximal des équations de champ nul.

2.3.1 Discrétisation

Afin de simplifier l'écriture, on pose :

$$L_{m p}^l = \iint_{\Gamma} \cos(p\theta') e^{-iq\varphi'} \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^l(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.49)$$

$$F_m^l = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \psi_m^l(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.50)$$

et l'équation (2.48) se met sous la forme :

$$\sum_{p=0}^P \sum_{q=-Q}^Q L_{m p}^l a_p^q = F_m^l - 4\pi c_m^l \quad m = 0, \dots, M$$

$$|l| \leq m \quad (2.51)$$

La discrétisation se fait en rappelant que l'approximation sur la dérivée normale de la pression est celle déjà définie dans le paragraphe 2.1. Au premier membre, on a :

$$L_{m p}^l = \sum_{j=1}^{NE} \iint_{\Gamma_j} \cos(p\theta') e^{-iq\varphi'} \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^l(\mathbf{r}'(\xi, \eta)) d\mathbf{r}'(\xi, \eta) \quad (2.52)$$

En posant :

$$L'_{m p j}{}^1 q = \iint_{\Gamma_j} \cos(p\theta') e^{-iq\varphi'} \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(r'(\xi, \eta)) dr'(\xi, \eta) \quad (2.53)$$

on obtient :

$$L'_{m p}{}^1 q = \sum_{j=1}^{NE} L'_{m p j}{}^1 q \quad (2.54)$$

Au second membre, on a :

$$F_m^1 = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) \psi_m^1(r'(\xi, \eta)) dr'(\xi, \eta) \quad (2.55)$$

où θ' et φ' sont maintenant des fonctions de ξ et η à définir sur chaque élément Γ_j .

En posant :

$$F_{m ji}^1 = \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) \psi_m^1(r'(\xi, \eta)) dr'(\xi, \eta) \quad (2.56)$$

on aboutit à :

$$F_m^1 = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} F_{m ji}^1 \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \quad (2.57)$$

Il en découle l'équation matricielle :

$$[L']\{a\} = [F] \left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} - 4\pi\{c\} \quad (2.58)$$

où $\{a\}$ est le vecteur des coefficients de la décomposition en série de la pression, $\{\partial p / \partial n\}$ est le vecteur des valeurs nodales de la dérivée normale de la pression, $\{c\}$ est le vecteur des coefficients de la décomposition de la pression incidente (éq. (A15.14)). $[L']$ est la matrice dont les termes sont définis par (2.52), de dimension $(M+1)^2 * (P+1)(2Q+1)$. $[F]$ est la matrice dont les termes sont définis par (2.56), $[F]\{\partial p / \partial n\}$ étant un vecteur d'ordre $(M+1)^2$. Le système final (2.58) est donc un système de $(M+1)^2$ équations à $(P+1)(2Q+1)$ inconnues a_p^q .

Une résolution par la méthode de champ nul nécessite que $(M+1)^2 \geq (P+1)(2Q+1)$. Si le nombre des équations est supérieur au nombre des inconnues, une méthode de résolution de système surdéterminé doit être utilisée pour obtenir un système carré d'ordre $(P+1)(2Q+1)$.

2.3.2 Calcul des intégrales

Les intégrales de champ nul sont calculées par la technique d'intégration de Gauss-Legendre, avec un même nombre de points d'intégration sur chaque élément Γ_j et indépendamment du degré des équations de champ nul.

Son principe est simple car, contrairement aux intégrales de Helmholtz, la fonction à intégrer n'est jamais singulière. Cependant, le comportement délicat de la fonction à intégrer oblige à mener le calcul avec quelques précautions et quelques développements supplémentaires. Théoriquement, le comportement numérique des équations de champ nul se dégrade lorsque m devient grand [6]. L'usage de degrés M élevés n'est donc pas recommandé.

2.3.2.1 Paramétrisation de la surface

Le calcul des intégrales de champ nul demande une bonne maîtrise des relations permettant de passer du système des coordonnées globales sphériques à celui des coordonnées réduites de l'élément d'intégration Γ_j . Or d'après les relations (2.7), (2.8) et (2.9), on voit qu'il suffit de savoir exprimer les coordonnées sphériques r , θ et φ en fonction des coordonnées cartésiennes X , Y et Z qui sont elles-mêmes fonctions des coordonnées réduites. Coordonnées réduites variant entre -1 et 1 sur chaque élément Γ_j , ce qui permet l'utilisation de la quadrature de Gauss-Legendre. Les coefficients c_m^1 (éq. (A15.14)) sont calculés par la même méthode, après avoir effectué un changement de variables permettant d'avoir -1 et 1 comme bornes des intégrales.

De la définition du repère sphérique (cf. annexe A11), on tire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{z'}{r'} & \sin \theta' &= \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{r'} \\ \cos \varphi' &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} & \sin \varphi' &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \end{aligned} \quad (2.59)$$

On en conclut immédiatement que :

$$\begin{aligned} \theta' &= \arccos \frac{z'}{r'} \\ \varphi' &= \begin{cases} \arccos \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} & \text{si } y' \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} & \text{si } y' < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.60)$$

où :

$$x' = x'(\xi, \eta) \quad y' = y'(\xi, \eta) \quad z' = z'(\xi, \eta) \quad (2.61)$$

et :

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (2.62)$$

sur chaque élément Γ_j .

2.3.2.2 Description des fonctions à intégrer

L'expression de l'élément de surface $d\mathbf{r}'$ a déjà été détaillée par la formule (2.14). Les quantités restant à définir sont les fonctions d'ondes sphériques divergentes et leurs dérivées normales.

Les calculs sont effectués dans l'annexe A21. Les résultats sont :

$$\psi_m^1(r') = (j_m(kr') + iy_m(kr'))(-1)^1 \sqrt{v_{m1}} P_m^1(\cos\theta') e^{il\varphi'} \quad (2.63)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \psi_m^1(r') = & (-1)^1 \sqrt{v_{m1}} e^{il\varphi'} \left\{ \left[\frac{m}{kr'} h_m(kr') - h_{m+1}(kr') \right] P_m^1(\cos\theta') k \begin{pmatrix} \sin\theta' \cos\varphi' \\ \sin\theta' \sin\varphi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{n}}' \right. \\ & + h_m(kr') [(m-1+1)P_{m+1}^1(\cos\theta') - (m+1)\cos\theta' P_m^1(\cos\theta')] \frac{1}{r' \sin\theta'} \begin{pmatrix} \cos\theta' \cos\varphi' \\ \cos\theta' \sin\varphi' \\ -\sin\theta' \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{n}}' \\ & \left. + il h_m(kr') P_m^1(\cos\theta') \frac{1}{r' \sin\theta'} \begin{pmatrix} -\sin\varphi' \\ \cos\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{n}}' \right\} \quad (2.64) \end{aligned}$$

2.4 TRAITEMENT DE LA COMBINAISON ÉQUATIONS INTÉGRALES-CHAMP NUL

Ce paragraphe concerne l'exploitation de la méthode de Jones, décrite au paragraphe 1.6.2. On décrit la démarche à suivre et les résultats importants qui permettent de mettre en place le système final d'équations linéaire à résoudre.

2.4.1 Démarche

Comme on l'a vu au paragraphe 1.6.2, il s'agit ici de surdéterminer le système d'équations intégrales de Helmholtz par un nombre NEQCN d'équations de champ nul.

Dans le cas d'une condition de Neumann, les inconnues sont les pressions nodales $\{p\}$ de la surface, qui apparaissent directement dans le système (2.22). Cependant, dans le système (2.58), la pression est décomposée en série de fonctions dont les coefficients sont les inconnues. En surdéterminant le système (2.22) par le système (2.58), on obtient le système surdéterminé suivant :

$$\begin{cases} [A]\{p\} = [B]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - \{p_{inc}\} \\ [L']\{a\} = [F]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - 4\pi\{c\} \end{cases} \quad (2.65)$$

On voit que pour pouvoir exploiter ce système, il faut exprimer les coefficients $\{a\}$ en fonction des pressions $\{p\}$, en inversant la formule (2.47), par l'intermédiaire d'une matrice de changement de représentation $[S]$:

$$\{a\} = [S]\{p\} \quad (2.66)$$

dont le calcul est fait dans le paragraphe suivant.

Après injection de (2.66) dans (2.65), le système final surdéterminé obtenu est un système de $(NN + NEQCN)$ équations à NN inconnues :

$$[P']\{p\} = [D]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - \{pc\} \quad (2.67)$$

que l'on résout par une méthode de résolution de systèmes surdéterminés.

2.4.2 Coefficients du changement de représentation

On a vu que le fait de décomposer la pression en série de fonctions formant un système complet dans les équations de champ nul engendre une difficulté supplémentaire : le calcul de la matrice de changement de représentation $[S]$. Cette difficulté supplémentaire n'existe pas pour d'autre approximation de la pression dans les équations de champ nul (cf. § 4.2), ce qui rend la surdéter-

mination plus simple.

Il faut donc définir la matrice [S] [6,7]. On veut inverser la formule (2.47) en définissant une matrice [S] telle que :

$$a_p^q = \sum_{k=1}^{NN} S_p^q P_k \quad \begin{array}{l} 0 \leq p \leq P \\ -Q \leq q \leq Q \end{array} \quad (2.68)$$

Dans ce but, on multiplie membre à membre (2.47) par $\cos(p\theta')$ et $e^{-iq\varphi'}$ et on intègre suivant θ' et φ' , en rappelant que :

$$\int_0^\pi \cos(p\theta') \cos(p'\theta') d\theta' = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } p = p' \neq 0 \\ \pi & \text{si } p = p' = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.69)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-iq\varphi'} e^{-iq'\varphi'} d\varphi' = \begin{cases} 2\pi & \text{si } q = -q' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.70)$$

Il vient :

$$a_p^q = \frac{1}{(1 + \delta_{0p})\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p(r'(\theta', \varphi')) \cos(p\theta') d\theta' \Big] e^{iq\varphi'} d\varphi' \quad (2.71)$$

où δ est l'indice de Kronecker.

En discrétisant la surface, en interpolant la pression sous forme quadratique et en développant θ' et φ' en fonction des coordonnées réduites ξ et η sur Γ_j , on a :

$$a_p^q = \frac{1}{(1 + \delta_{0p})\pi^2} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} p_{ji} \int_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) \cos(p\theta'(\xi, \eta)) e^{iq\varphi'(\xi, \eta)} |J| d\xi d\eta \quad (2.72)$$

où l'expression de θ' et φ' en fonction de x' , y' et z' , donc de ξ et η , est donnée par (2.60). Le jacobien est ($d\theta'd\varphi' = |J|d\xi d\eta$) :

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (2.73)$$

Après quelques dérivations, des relations (2.59), on a :

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \xi} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left[\frac{z'}{r'^2} \left(x' \frac{\partial}{\partial \xi} x' + y' \frac{\partial}{\partial \xi} y' + z' \frac{\partial}{\partial \xi} z' \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} z' \right] \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi' = \frac{1}{x'^2 + y'^2} \left[x' \frac{\partial}{\partial \xi} y' - y' \frac{\partial}{\partial \xi} x' \right] \quad (2.75)$$

Par analogie, ces relations permettent de définir $\partial \theta' / \partial \eta$ et $\partial \varphi' / \partial \eta$. Finalement, en adaptant la numérotation globale déjà définie dans le paragraphe 2.2.1, on a :

$$S_{p \text{ oe}}^q = \frac{1}{(1 + \delta_{0p}) \pi^2} \sum_{s(\text{oe})} \int_{\Gamma_{s(\text{oe})}} N_{p(s(\text{oe}))}(\xi, \eta) \cos(p\theta'(\xi, \eta)) e^{iq\varphi'(\xi, \eta)} |J| d\xi d\eta \quad (2.76)$$

Le calcul de l'intégrale peut être effectué par la méthode d'intégration de Gauss-Legendre, après avoir précisé les bornes d'intégration :

$$\begin{aligned} -1 \leq \xi, \eta \leq 1 & \quad \text{si } \Gamma_j \text{ est un quadrangle} \\ -1 \leq \eta \leq 1 & \quad \frac{\eta-1}{2} \leq \xi \leq \frac{1-\eta}{2} \quad \text{si } \Gamma_j \text{ est un triangle} \end{aligned}$$

2.4.3 Résolution de système surdéterminé

Le système d'équations intégrales surdéterminé par des équations de champ nul est rectangulaire, le nombre d'équations étant supérieur au nombre d'inconnues.

Différentes méthodes de résolution de ce genre de système linéaire existent : résolution au sens des moindres carrés, décomposition QR-Householder ou encore Gram-Schmidt modifiée normalisée [136].

Dans le code EQI, la méthode de résolution choisie est celle de la décomposition QR-Householder au sens des moindres carrés, par l'intermédiaire de routines de la bibliothèque LINPACK [137].

2.5 PRISE EN COMPTE DE LA SYMÉTRIE AXIALE

Dans ce paragraphe sont décrits les outils de discrétisation et le traitement de l'équation intégrale de Helmholtz extérieure et des équations de champ nul dans le cas particulier où une symétrie axiale peut être prise en compte [6,7,138,143].

Les mêmes hypothèses qu'en 3D sont faites. Par convention, l'axe de révolution est confondu avec l'axe OZ . Le plan XOZ est le plan de référence. La totalité de la surface est décrite par une rotation autour de l'axe OZ en faisant varier l'angle azimuthal φ , compté à partir de OX , de 0 à 2π .

La prise en compte de la symétrie axiale permet de limiter le maillage à la génératrice de la structure et donc d'atteindre des fréquences plus élevées qu'en 3D.

2.5.1 Outils de discrétisation

2.5.1.1 Éléments et fonctions d'interpolation utilisées

Les éléments utilisés pour former le maillage de la génératrice sont des éléments à 3 noeuds à variation quadratique (cf. figure 2.6).

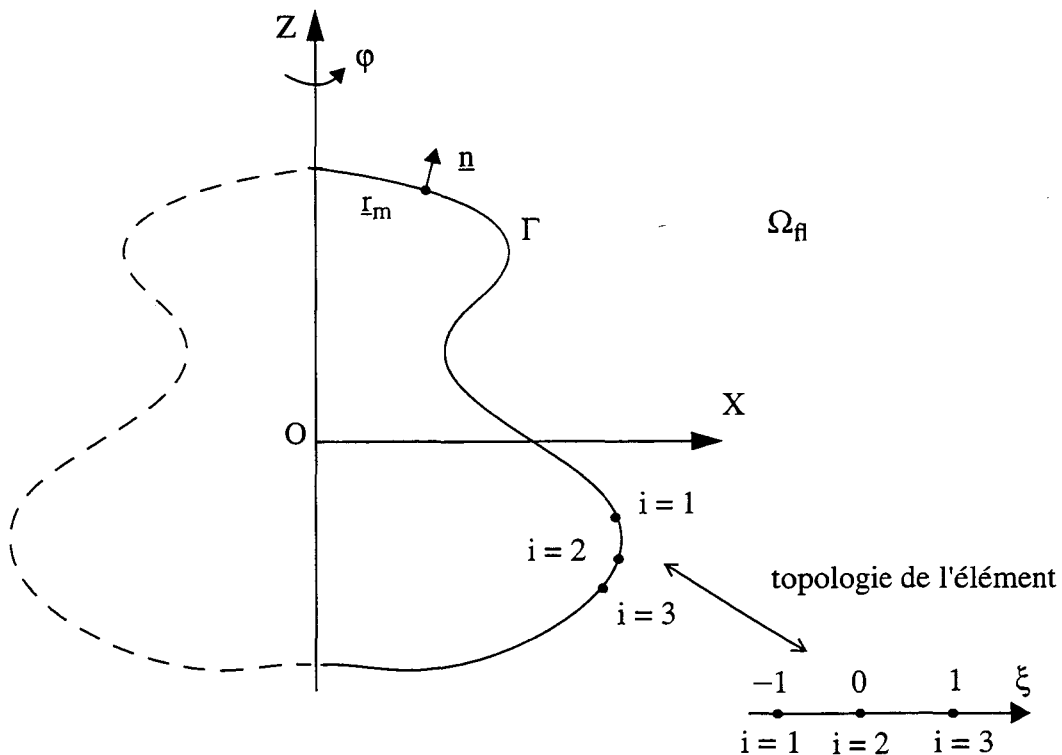


Figure 2.6. Visualisation d'un problème à symétrie axiale.

Les fonctions de forme, ne dépendant que d'une seule variable, ξ , la coordonnée réduite de l'élément de surface, sont données par :

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ N_2(\xi) = 1 - \xi^2 \\ N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{cases} \quad (2.77)$$

D'une façon similaire aux équations (2.1) et (2.2), la pression et sa dérivée normale sont déterminées sur chaque élément Γ_j de la génératrice par :

$$p(r(\xi)) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)p_{ji} \quad r \in \Gamma_j \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}p(r(\xi)) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)\frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \quad r \in \Gamma_j \quad (2.79)$$

Les éléments utilisés ici doivent également respecter le "critère en $\lambda/4$ " (cf. paragraphe 2.1.2.2).

2.5.1.2 Représentation de la surface

La géométrie est interpolée par les mêmes fonctions de forme quadratique (2.77). On travaille dans le système de coordonnées cartésiennes (O,X,Y,Z).

De la même façon qu'au chapitre 2.1.3, on projette le vecteur introduisant l'interpolation sur les trois axes du repère. Ce vecteur s'écrit :

$$\underline{OM'} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)\underline{OM}_{ji} \quad (2.80)$$

où $M'(x',y',z')$ est un point courant de l'élément Γ_j et $M_{ji}(x_{ji},0,z_{ji})$ est le noeud i de l'élément Γ_j .

On obtient donc :

$$x'(\xi, \varphi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)x_{ji} \cos \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2.81)$$

$$y'(\xi, \varphi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)x_{ji} \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2.82)$$

$$z'(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)z_{ji} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2.83)$$

La normale unitaire à la surface au point $r'(\xi, \varphi)$ de coordonnées (x',y',z') dans le repère cartésien est :

$$\underline{r}'(\xi, \varphi) = \frac{1}{R(\xi)} \begin{cases} \frac{d}{d\xi} z'(\xi) \cos \varphi \\ \frac{d}{d\xi} z'(\xi) \sin \varphi \\ \frac{d}{d\xi} x'(\xi, 0) \end{cases} \quad (2.84)$$

avec :

$$R(\xi) = \sqrt{\left(\frac{d}{d\xi} z'(\xi)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\xi} x'(\xi, 0)\right)^2} \quad (2.85)$$

L'élément de surface élémentaire est :

$$d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) = x'(\xi, 0) R(\xi) d\xi d\varphi \quad (2.86)$$

2.5.2 Traitement des équations de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure

2.5.2.1 Discrétisation

Les mêmes notations qu'au paragraphe 2.2 sont utilisées. Dans l'équation (1.20) écrite au noeud de calcul \mathbf{r}_m du maillage, on introduit les interpolations (2.78) et (2.79) pour obtenir :

$$\begin{aligned} p_{inc\ m} + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 p_{ji} \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \varphi)) N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \\ - \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \iint_{\Gamma_j} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \varphi)) N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) = \frac{\alpha_m}{4\pi} p_m \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$m = 1, \dots, NN$$

Tout comme au paragraphe 2.2.1, et en utilisant les mêmes notations, pour éviter toute ambiguïté de notation, on utilise une notation homogène.

2.5.2.1.1 Écriture locale

En notation locale, on a :

$$A_{m\ ij} = \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \varphi)) N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) - \delta_{m\ ij} \frac{\alpha_m}{4\pi} \quad (2.88)$$

$$B_{m\ ij} = \iint_{\Gamma_j} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \varphi)) N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (2.89)$$

avec :

Prise en compte de la symétrie axiale.

$$\sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 A_{m \ ij} p_{ji} = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 B_{m \ ij} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} - p_{inc \ m} \quad m = 1, \dots, NN \quad (2.90)$$

2.5.2.1.2 Écriture globale

En notation globale, on obtient :

$$A_{m \ oe} = \sum_{s(oe)} \int \int_{\Gamma_{s(oe)}} \frac{\partial}{\partial n} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \varphi)) N_{p(s(oe))}(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) - \delta_{m \ oe} \frac{\alpha_m}{4\pi} \quad (2.91)$$

$$B_{m \ oe} = \sum_{s(oe)} \int \int_{\Gamma_{s(oe)}} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \varphi)) N_{p(s(oe))}(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (2.92)$$

avec :

$$\sum_{oe=1}^{NN} A_{m \ oe} p_{oe} = \sum_{oe=1}^{NN} B_{m \ oe} \frac{\partial p_{oe}}{\partial n} - p_{inc \ m} \quad m = 1, \dots, NN \quad (2.93)$$

Par l'une ou l'autre de ces notations, on aboutit à la formulation matricielle de NN équations à NN inconnues, avec les mêmes notations qu'au paragraphe (2.2.1) :

$$[A]\{p\} = [B]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - \{p_{inc}\} \quad (2.94)$$

2.5.2.2 Calcul des intégrales

Tout comme dans le paragraphe 2.2.1.2, on a :

$$g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m} \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m^2} \left[ik - \frac{1}{D_m} \right] (\mathbf{r}'(\xi, \varphi) - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' \quad (2.96)$$

avec $D_m = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'|$ et donc, en écriture locale, on a :

$$A_{m \ ij} = \int \int_{\Gamma_j} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m^2} \left[ik - \frac{1}{D_m} \right] (\mathbf{r}'(\xi, \varphi) - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) - \delta_{m \ ij} \frac{\alpha_m}{4\pi} \quad (2.97)$$

$$B_{m \ ij} = \int \int_{\Gamma_j} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m} N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (2.98)$$

avec $D_m = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'|$. Toutes les variables sont fonctions de φ et ξ .

Selon φ , l'intégration se fait entre 0 et π avec un facteur 2, et selon ξ , entre -1 et 1. On aboutit donc à l'écriture suivante :

$$A_{m \ ij} = I_{m \ ij} - \delta_{m \ ij} \frac{\alpha_m}{4\pi} \quad (2.99)$$

avec

$$I_{m \ ij} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m^2} \left[ik - \frac{1}{D_m} \right] (\mathbf{r}'(\xi, \varphi) - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (2.100)$$

$$B_{m \ ij} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m} N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (2.101)$$

Ces intégrales sont singulières et nécessitent un traitement spécial. Ce traitement spécial est basé sur l'emploi d'intégrales elliptiques (cf. annexe A22).

2.5.3 Calcul en champ proche

Le calcul de la pression dans le fluide et en champ proche (à distance finie) se fait par l'équation (1.19), à partir de la pression calculée sur Γ (par l'équation (1.20), cf. § 2.5.2), des valeurs de $\partial p / \partial n$ données sur Γ , et de la pression incidente.

Au point \mathbf{r}_m du fluide, cette équation, après discrétisation, et avec les mêmes notations qu'au paragraphe 2.2.2, donne :

$$\begin{aligned} P_{inc \ m} + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 P_{ji} \int \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \varphi)) N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \\ - \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \int \int_{\Gamma_j} g(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'(\xi, \varphi)) N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) = P_m \end{aligned} \quad (2.102)$$

2.5.3.1 Écriture locale

En notation locale, on a :

$$P_m = P_{inc \ m} + \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 a_{m \ ij} P_{ji} - \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 b_{m \ ij} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \quad (2.103)$$

où, après avoir introduit les valeurs données aux paragraphes 2.5.1 et 2.5.2, sur chaque élément Γ_j , les intégrales sont :

Prise en compte de la symétrie axiale.

$$a_{m \text{ ij}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m^2} \left(ik - \frac{1}{D_m} \right) (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' d\varphi \right] d\xi \quad (2.104)$$

$$b_{m \text{ ij}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m} d\varphi \right] d\xi \quad (2.105)$$

2.5.3.2 Écriture globale

Avec une numérotation globale, on obtient :

$$P_m = P_{inc \text{ m}} + \sum_{oe=1}^{NN} \sum_{s(oe)} a_{m \text{ oe}} P_{oe} - \sum_{oe=1}^{NN} \sum_{s(oe)}^3 b_{m \text{ oe}} \frac{\partial p_{oe}}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.106)$$

où, après avoir introduit les valeurs données aux paragraphes 2.5.1 et 2.5.2, sur chaque élément $\Gamma_{s(oe)}$, les intégrales sont :

$$a_{m \text{ oe}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_{p(s(oe))}(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m^2} \left(ik - \frac{1}{D_m} \right) (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' d\varphi \right] d\xi \quad (2.107)$$

$$b_{m \text{ oe}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_{p(s(oe))}(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) \left[\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikD_m}}{D_m} d\varphi \right] d\xi \quad (2.108)$$

Après un changement de variables évident sur φ pour remplacer la variation entre -1 et 1, ces intégrales sont calculées par la quadrature de Gauss-Legendre. La pression est ainsi obtenue au point \mathbf{r}_m du fluide.

2.5.4 Calcul en champ lointain

Après discrétisation de la surface Γ , et avec les notations du paragraphe 2.2.3, l'équation (1.26) donne, pour le point d'observation \mathbf{r} :

$$F_0(\theta) = -\frac{ik}{4\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 p_{ji} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'}{r} e^{-ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}} d\mathbf{r}'(\xi, \eta) \quad (2.109)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial \mathbf{n}} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) e^{-ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}} d\mathbf{r}'(\xi, \eta)$$

2.5.4.1 Écriture locale

Avec la numérotation locale, après y avoir injecté les valeurs données aux paragraphes 2.5.1 et 2.5.2, on a :

$$A_{2 \text{ ij}} = \frac{-ik}{4\pi} \int_{-1}^1 N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) \left[\int_0^{2\pi} \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\varphi \right] d\xi \quad (2.110)$$

$$B_{2 \text{ ij}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) \left[\int_0^{2\pi} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\varphi \right] d\xi \quad (2.111)$$

avec :

$$F_0(\theta) = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 p_{ji} A_{2 \text{ ij}} - \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} B_{2 \text{ ij}} \quad (2.112)$$

En utilisant des propriétés sur les fonctions de Bessel de première espèce J_0 et J_1 et en divisant l'intervalle d'intégration sur φ par 2, on obtient [143] :

$$A_{2 \text{ ij}} = \frac{-ik}{2} \int_{-1}^1 N_i(\xi) x'(\xi, 0) A_{\infty} d\xi \quad (2.113)$$

$$B_{2 \text{ ij}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) B_{\infty} d\xi \quad (2.114)$$

Les intégrales A_{∞} et B_{∞} sont exprimées un peu plus loin.

2.5.4.2 Écriture globale

En numérotation globale, et de la même façon, on a :

$$A_{2 \text{ oe}} = \frac{-ik}{4\pi} \int_{-1}^1 N_{oe}(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) \left[\int_0^{2\pi} \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}'}{r} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\varphi \right] d\xi \quad (2.115)$$

$$B_{2 \text{ oe}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_{oe}(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) \left[\int_0^{2\pi} e^{-ik \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}} d\varphi \right] d\xi \quad (2.116)$$

avec :

$$F_0(\theta) = \sum_{oe=1}^{NN} \sum_{s(oe)} p_{oe} A_{2 \text{ oe}} - \sum_{oe=1}^{NN} \sum_{s(oe)} \frac{\partial p_{oe}}{\partial n} B_{2 \text{ oe}} \quad (2.117)$$

En utilisant des propriétés sur les fonctions de Bessel de première espèce J_0 et J_1 et en divisant l'intervalle d'intégration sur φ par 2, on obtient [143] :

$$A_{2\text{ oe}} = \frac{-ik}{2} \int_{-1}^1 N_{\text{oe}}(\xi) x'(\xi, 0) A_{\infty} d\xi \quad (2.118)$$

$$B_{2\text{ oe}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 N_{\text{oe}}(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) B_{\infty} d\xi \quad (2.119)$$

Les intégrales A_{∞} et B_{∞} sont exprimées de la façon suivante :

$$A_{\infty} = e^{-ik\aleph z'} \left[\aleph \frac{d}{d\xi} x'(\xi, 0) J_0(-k\aleph x'(\xi, 0)) - \aleph \frac{d}{d\xi} z' i J_1(-k\aleph x'(\xi, 0)) \right] \quad (2.120)$$

$$B_{\infty} = e^{-ik\aleph z'} J_0(-k\aleph x'(\xi, 0)) \quad (2.121)$$

avec $\aleph = \cos\theta$ et $\aleph = \sin\theta$.

Ces manipulations permettent de transformer les intégrales $A_{2\text{ oe}}$ et $B_{2\text{ oe}}$ en intégrales simples qui sont calculées par la quadrature de Gauss-Legendre.

2.5.5 Traitement des équations de champ nul

Dans cette section, le principe des équations de champ nul est appliqué aux problèmes à symétrie axiale [138].

2.5.5.1 Établissement des équations

Dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) (cf. annexe A11), dans le cas de la symétrie axiale (figure 2.7), les fonctions n'ont pas de dépendance en φ (il n'y a pas de variation du problème selon φ). En tenant compte de ce point important, qui permettra de nombreuses simplifications, l'obtention des équations de champ nul se fait en suivant le même cheminement que celui effectué au paragraphe 1.7, les mêmes notations étant utilisées.

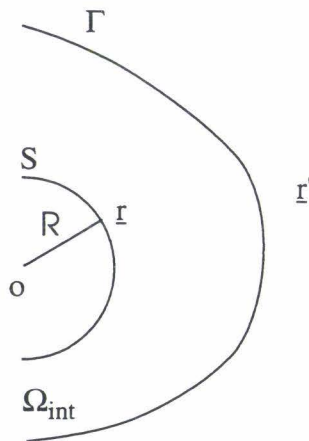


Figure 2.7. Domaine de décomposition des équations de champ nul en symétrie axiale.

2.5.5.1.1 Solutions naturelles de l'équation de Helmholtz

Une solution à variables séparées de l'équation de Helmholtz $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ est [2] :

$$\psi(\underline{r}) = R(r)\Theta(\theta) \quad (2.122)$$

avec :

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + m(m+1)\Theta = 0 \quad (2.123)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{m(m+1)}{r^2} \right) R = 0 \quad (2.124)$$

Les solutions de (2.123) sont $P_m^1(\cos\theta)$. Celles de (2.124) sont :

$$h_m(kr) = j_m(kr) + iy_m(kr) \quad (2.125)$$

Les harmoniques sphériques sont :

$$Y_m(\theta) = \sqrt{v_m} P_m(\cos\theta) \quad (2.126)$$

$$\text{où } v_m = \frac{2m+1}{4\pi}.$$

2.5.5.1.2 Obtention des équations

Le point de départ est la formulation du problème intérieur associé ($\underline{r} \in \Omega_{\text{int}}$) à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure (1.21).

Dans une sphère S dont le centre est l'origine du repère, de rayon R et inscrite dans la frontière Γ (voir figure 2.7), on décompose la fonction de Green g sous la forme d'une série convergente uniformément en \underline{r} et \underline{r}' , et la pression incidente $p_{\text{inc}}(\underline{r})$ [144,145] :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{ik}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(\underline{r}') \tilde{\Psi}_m(\underline{r}) \quad \underline{r}' \in \Gamma \quad \underline{r} \in S \quad (2.127)$$

où :

$$\Psi_m(\underline{r}') = h_m(kr') Y_m(\theta') \quad (2.128)$$

$$\tilde{\Psi}_m(\underline{r}) = j_m(kr) \bar{Y}_m(\theta) \quad (2.129)$$

$$p_{\text{inc}}(\underline{r}) = ik \sum_{m=0}^{\infty} c_m \tilde{\Psi}_m(\underline{r}) \quad \underline{r} \in S \quad (2.130)$$

Les coefficients c_m seront déterminés dans le paragraphe suivant.

La transformation de (1.21) par (2.127) et (2.130) donne :

$$\begin{aligned}
 4\pi c_m \tilde{\Psi}_m(\underline{r}) + \tilde{\Psi}_m(\underline{r}) \iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m(\underline{r}') d\underline{r}' \\
 - \tilde{\Psi}_m(\underline{r}) \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \Psi_m(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad \underline{r} \in S \quad (2.131) \\
 m = 0, \dots, \infty
 \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par $Y_p(\theta)$ et par $\sin\theta$, en intégrant \underline{r} sur la surface de S (sur laquelle $r=R$ est constant et seul θ varie), puis en tenant compte de (2.129) et enfin en prenant en compte les conditions d'orthonormalité des harmoniques sphériques Y_p :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_p(\theta) \bar{Y}_m(\theta) \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{mp} \quad (2.132)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 4\pi c_m j_m(kR) + j_m(kR) \iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m(\underline{r}') d\underline{r}' \\
 - j_m(kR) \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \Psi_m(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad \underline{r} \in S \quad (2.133) \\
 m = 0, \dots, \infty
 \end{aligned}$$

En choisissant S de telle façon que kR ne soit pas un zéro de j_m (sinon l'équation (2.133) est triviale), on a :

$$\iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m(\underline{r}') d\underline{r}' = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \Psi_m(\underline{r}') d\underline{r}' - 4\pi c_m \quad m = 0, \dots, \infty \quad (2.134)$$

À partir d'une condition sur Γ de Neumann (resp. Dirichlet), cette technique de résolution permet de calculer la pression (resp. la dérivée normale de la pression) sur Γ pour un problème de rayonnement ou de diffraction. La solution existe et est unique pour tout nombre d'onde. La pression en tout point du fluide $\Omega_{fl} = \Omega_{ext}$ est déduite par application de la représentation (1.19).

En diffraction rigide, on a $\partial p(\underline{r}') / \partial n' = 0$, de sorte que :

$$\iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m(\underline{r}') d\underline{r}' = -4\pi c_m \quad m = 0, \dots, \infty \quad (2.135)$$

En rayonnement, on a :

$$\iint_{\Gamma} P(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} P(\mathbf{r}') \Psi_m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad m = 0, \dots, \infty \quad (2.136)$$

2.5.5.1.3 Détermination des coefficients de la décomposition de la pression incidente

Dans le cas de la diffraction, il faut déterminer les coefficients c_m . On reprend donc l'expression (2.130). Les calculs sont effectués dans l'annexe A23 et aboutissent à l'expression :

$$c_m = \frac{-i^{m+1} (2m+1)!}{k(m!)^2 2^m} A 2\pi \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}} \int_0^\pi (\pm \cos \theta)^m P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (2.137)$$

$$m = 0, \dots, \infty$$

2.5.5.2 Discrétisation des équations

Pour l'obtention des équations de champ nul discrétisées en symétrie axiale, les outils de la discrétisation (éléments et fonctions d'interpolation, représentation de la surface) sont identiques à ceux utilisés au paragraphe 2.5.2.

Compte tenu de la prise en compte de la symétrie axiale, les variables ne sont pas dépendantes de l'angle φ du système de coordonnées sphériques (cf. annexe A11), ce qui permet d'avantageuses simplifications.

2.5.5.2.1 Traitement des équations de champ nul

La pression est approchée par une série de fonctions :

$$p(\mathbf{r}') = \sum_{p=0}^P a_p \cos(p\theta') \quad \mathbf{r}' \in \Gamma \quad (2.138)$$

la troncature étant déterminée par P .

Cette expression, injectée dans l'équation (2.134), donne :

$$\sum_{p=0}^P a_p \iint_{\Gamma} \cos(p\theta') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} P(\mathbf{r}') \Psi_m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - 4\pi c_m \quad (2.139)$$

$$m = 0, \dots, M$$

On pose :

$$L'_{mp} = \iint_{\Gamma} \cos(p\theta') \frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.140)$$

$$F_m = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} P(\mathbf{r}') \Psi_m(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.141)$$

de telle façon que l'équation (2.139) s'écrive :

$$\sum_{p=0}^P L'_{mp} a_p = F_m - 4\pi c_m \quad m = 0, \dots, M \quad (2.142)$$

La discrétisation de la surface Γ entraîne :

$$L'_{mp} = \sum_{j=1}^{NE} \iint_{\Gamma_j} \cos(p\theta') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m(\mathbf{r}'(\xi, \varphi)) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (2.143)$$

On pose :

$$L'_{mpj} = \iint_{\Gamma_j} \cos(p\theta') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m(\mathbf{r}'(\xi, \varphi)) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (2.144)$$

où θ' est une fonction de ξ à définir sur chaque élément Γ_j .

On obtient donc :

$$L'_{mp} = \sum_{j=1}^{NE} L'_{mpj} \quad (2.145)$$

De même, par l'équation (2.79), on a :

$$F_m = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi) \psi_m(\mathbf{r}'(\xi, \varphi)) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (2.146)$$

On pose :

$$F_{mji} = \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi) \psi_m(\mathbf{r}'(\xi, \varphi)) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (2.147)$$

ainsi :

$$F_m = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 F_{mji} \frac{\partial p_{ji}}{\partial n} \quad (2.148)$$

d'où on déduit de (2.142) l'expression matricielle suivante :

$$[L']\{a\} = [F] \left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} - 4\pi\{c\} \quad (2.149)$$

[L'] est la matrice de dimension (M + 1) * (P + 1) dont les termes sont donnés par (2.143), [F] de dimension (M + 1) * NN de termes (2.147), {c} le vecteur d'ordre (M + 1) de termes (2.137), {a} de dimension (P + 1) le vecteur des coefficients de la série, qui sont les inconnues pour le problème extérieur de Neumann de cette étude.

Avec les outils donnés au paragraphe 2.5.1, les termes (2.144) et (2.147) s'écrivent :

$$L'_{mp\ j} = \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m(\underline{r}'(\xi, \varphi)) \cos(p\theta') x'(\xi, 0) R(\xi) d\xi d\varphi \quad (2.150)$$

$$F_{m\ ji} = \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi) \Psi_m(\underline{r}'(\xi, \varphi)) x'(\xi, 0) R(\xi) d\xi d\varphi \quad (2.151)$$

$\Psi_m(\underline{r}')$ est donné par les expressions (2.128) et (2.126) :

$$\Psi_m(\underline{r}') = h_m(kr') \sqrt{v_m} P_m(\cos\theta') \quad (2.152)$$

Sa dérivée normale est donc :

$$\frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m(\underline{r}') = \sqrt{v_m} \left(\frac{\partial}{\partial n'} h_m(kr') P_m(\cos\theta') + h_m(kr') \frac{\partial}{\partial n'} P_m(\cos\theta') \right) \quad (2.153)$$

Sur un élément Γ_j , \underline{r}' n'est fonction que de ξ . θ' n'étant fonction que de ξ , l'intégration en φ se réduit à un facteur 2π . On a donc

$$L'_{mp\ j} = 2\pi \sqrt{v_m} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial}{\partial n'} h_m(kr') P_m(\cos\theta') + h_m(kr') \frac{\partial}{\partial n'} P_m(\cos\theta') \right) \cos(p\theta') x'(\xi, 0) R(\xi) d\xi \quad (2.154)$$

$$F_{m\ ji} = 2\pi \sqrt{v_m} \int_{-1}^1 h_m(kr') P_m(\cos\theta') N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) d\xi \quad (2.155)$$

$\frac{\partial}{\partial n'} h_m(kr')$ est donné par l'expression (A21.18) avec \underline{n}' donné en (2.84) et \underline{e}_r' donné par

$$\underline{e}_r' = \begin{pmatrix} \sin\theta' \\ \sin\theta' \\ \cos\theta' \end{pmatrix} \quad (2.156)$$

De la même façon qu'au paragraphe 2.3, on obtient [121] :

$$\frac{\partial}{\partial n'} (P_m(\cos\theta')) = [(m+1)P_{m+1}(\cos\theta') - (m+1)\cos\theta' P_m(\cos\theta')] \frac{1}{r' \sin\theta'} \underline{e}_{\theta'} \cdot \underline{n}' \quad (2.157)$$

Grâce à la symétrie axiale, on obtient des intégrales plus simples, qui sont calculées par la quadrature de Gauss-Legendre.

Les coefficients c_m (éq. (2.137)) sont également calculés par la quadrature de Gauss-Legendre

dre, après un changement de variable permettant de ramener les bornes d'intégration à -1 et 1.

2.5.5.2.2 Traitement de la combinaison équations intégrales-champ nul

Afin d'obtenir une solution unique lors d'un calcul à une fréquence irrégulière, on surdétermine le système équations intégrales d'Helmholtz (éq. (2.94)) par un nombre NEQCN = (M + 1) d'équations de champ nul (cf. § 1.6.2), en symétrie axiale (éq. (2.149)).

Dans le cas du problème de Neumann extérieur, les inconnues sont les pressions nodales {p}. Le système (2.94) surdéterminé par le système (2.149) donne :

$$\begin{cases} [A]\{p\} = [B]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - \{p_{inc}\} \\ [L']\{a\} = [F]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - 4\pi\{c\} \end{cases} \quad (2.158)$$

Afin de pouvoir exploiter ce système, il faut exprimer les coefficients {a} en fonction des pressions nodales {p}. Ceci est effectué en inversant la formule (2.138), par l'intermédiaire d'une matrice de changement de représentation [S] :

$$\{a\} = [S]\{p\} \quad (2.159)$$

Après injection de (2.159) dans (2.158), le système final surdéterminé obtenu est un système de (NN + NEQCN) équations à NN inconnues :

$$[P']\{p\} = [D]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - \{pc\} \quad (2.160)$$

que l'on résout par une méthode adaptée aux systèmes surdéterminés.

Afin de déterminer la matrice [S], on inverse la formule (2.138) :

$$a_p = \sum_{k=1}^{NN} S_{p \ k} p_k \quad 0 \leq p \leq P \quad (2.161)$$

Tout comme dans le paragraphe 2.4.2, on multiplie membre à membre (2.138) par cos(p'θ') et on intègre suivant θ', en rappelant l'expression (2.69). On obtient ainsi :

$$a_p = \frac{2 - \delta_{0p}}{\pi} \int_0^{\pi} p(r') \cos(p\theta') d\theta' \quad (2.162)$$

Après discrétisation de la surface et interpolation quadratique de la pression, θ' étant fonction de ξ, on obtient :

$$a_p = \frac{2 - \delta_{0p}}{\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 p_{ji} \int_{-1}^1 N_i(\xi) \cos(p\theta'(\xi)) \frac{d}{d\xi} \theta' d\xi \quad (2.163)$$

On pose :

$$S_{p_{ji}} = \int_{-1}^1 N_i(\xi) \cos(p\theta'(\xi)) \frac{d}{d\xi} \theta' d\xi \quad (2.164)$$

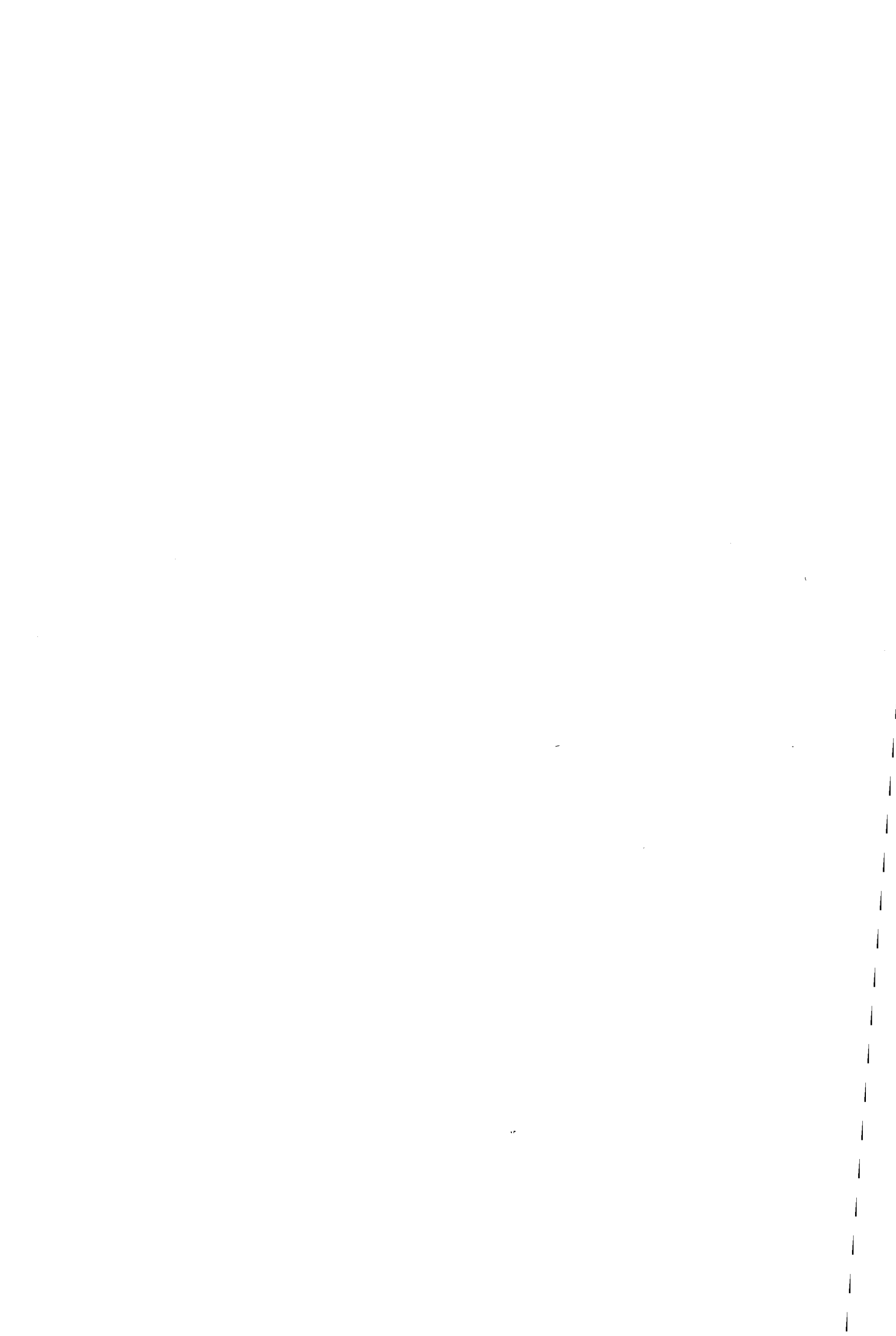
Cette intégrale est calculée par la quadrature de Gauss-Legendre. Ainsi, on a :

$$a_p = \frac{2 - \delta_{0p}}{\pi} \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 p_{ji} S_{p_{ji}} \quad (2.165)$$

Remarques concernant le code de calcul EQI.

Dans le cas tridimensionnel, l'option de décomposition du problème en problèmes élémentaires est effective en ce qui concerne les équations intégrales [58]. La taille du maillage s'en voit réduite et les temps de calcul diminués. Ces développements ne sont pas disponibles au niveau des équations de champ nul. Dans ce cas, il faudrait tout d'abord développer l'option de prise en compte de tout type de symétrie de champ nul.

Dans le cas à symétrie axiale, tous les angles d'incidence sont disponibles [146]. Une décomposition en deux problèmes élémentaires serait possible par la prise en compte d'une symétrie et d'une antisymétrie par rapport au plan XOY, qui diviserait la taille du maillage par deux et le temps d'assemblage des matrices par quatre.



2.6 OUTILS DE VALIDATION DU MODÈLE NUMÉRIQUE

Le test de la source ponctuelle

D'une façon classique, le test de la source ponctuelle est utilisé pour valider le modèle numérique lors d'une utilisation des équations intégrales de Helmholtz, des équations de champ nul, ou d'une combinaison de celles-ci, dans le cas du rayonnement [4,32]. Il est bien-sûr capital lorsqu'on ne dispose pas de mesures ou de résultats analytiques ou numériques permettant une comparaison.

Il s'agit de résoudre le test de rayonnement analytique associé, obtenu avec le même maillage de surface et à la même fréquence, à partir d'une (ou plusieurs) source ponctuelle d'amplitude $\pm A$ située en \mathbf{r}^0 à l'intérieur de la géométrie et rayonnant une pression analytique de la forme :

$$p_a(\mathbf{r}) = \pm A \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}^0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^0|} = \pm A \frac{e^{ikD}}{D} \quad (2.166)$$

Pour un point \mathbf{r} de la surface Γ , on en déduit la valeur analytique de sa dérivée normale :

$$\frac{\partial}{\partial n} p_a(\mathbf{r}) = \pm A \frac{e^{ikD}}{D^2} \left[ik - \frac{1}{D} \right] (\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}' \quad (2.167)$$

On obtient donc $\partial p_a / \partial n$ pour chaque noeud de la surface.

Le vecteur de valeurs nodales de surface de ces dérivées normales est ensuite injecté dans (2.22), (2.58) ou (2.65) en 3D, et (2.94), (2.149) ou (2.158) respectivement en symétrie axiale, à la place de $\{\partial p / \partial n\}$ dans le fichier de données EQI. Puis le système d'équations intégrales est résolu numériquement afin d'obtenir les valeurs nodales de la pression calculée sur la surface, valeurs qui sont comparées à celles obtenues analytiquement par (2.166).

Ce test doit respecter les éventuelles symétries ou antisymétries du chargement, en plaçant plusieurs sources à l'intérieur de la même géométrie. Les effets de celles-ci étant additifs.

Les comparaisons se font par l'intermédiaire des erreurs relatives, ε_R sur la partie réelle Re de la pression aux noeuds \mathbf{r} de la surface, et ε_I sur la partie imaginaire Im de celle-ci, définies par :

$$\varepsilon_R(\mathbf{r}) = \left| \frac{\text{Re}(p_c(\mathbf{r})) - \text{Re}(p_a(\mathbf{r}))}{\max(\text{Re}(p_a))} \right| \quad (2.168)$$

$$\varepsilon_I(\mathbf{r}) = \left| \frac{\text{Im}(p_c(\mathbf{r})) - \text{Im}(p_a(\mathbf{r}))}{\max(\text{Im}(p_a))} \right| \quad (2.169)$$

où $p_c(\mathbf{r})$ est la pression solution des calculs issus du modèle numérique, $p_a(\mathbf{r})$ la pression analytique donnée par (2.166), $\max(\text{Re}(p_a))$ et $\max(\text{Im}(p_a))$ sont les valeurs absolues maximales des parties réelle et imaginaire de la pression analytique sur la surface.

À partir de (2.168) et (2.169), on définit le module des erreurs par :

$$\varepsilon(\Gamma) = \sqrt{(\varepsilon_R(\Gamma))^2 + (\varepsilon_I(\Gamma))^2} \quad (2.170)$$

Les erreurs maximales correspondantes sont :

$$\varepsilon_{R \max} = \max_{\Gamma \in \Gamma} \varepsilon_R(\Gamma) \quad (2.171)$$

$$\varepsilon_{I \max} = \max_{\Gamma \in \Gamma} \varepsilon_I(\Gamma) \quad (2.172)$$

$$\varepsilon_{\max} = \max_{\Gamma \in \Gamma} \varepsilon(\Gamma) \quad (2.173)$$

Un autre outil de comparaison très important, auquel on se référera souvent au cours de cette étude, est l'erreur quadratique moyenne EQM définie par :

$$EQM = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{NN} |p_c(r_m) - p_a(r_m)|^2}{\sum_{m=1}^{NN} |p_a(r_m)|^2}} \quad (2.174)$$

CONCLUSIONS

Ce chapitre présente le traitement numérique des équations du problème de rayonnement avec condition de Neumann ou du problème de diffraction rigide, présentées dans le chapitre 1. La numérisation de ces équations est effectuée dans le cas du problème tridimensionnel sans ou avec prise en compte d'une éventuelle symétrie axiale.

Dans chacun de ces cas, les outils de discrétisation donnés permettent l'obtention d'un système linéaire d'équations dont la résolution aboutit à la détermination des pressions nodales, puis de la pression dans le fluide en champ proche et en champ lointain. Les calculs sont menés à toute fréquence, irrégulière ou non.

Chapitre 3

Interpolation fréquentielle des équations intégrales

INTRODUCTION

Les coefficients des matrices issues de la discrétisation des équations intégrales dépendent de la fréquence de calcul. De ce fait, une analyse multi-fréquence nécessite d'itérer le calcul des matrices pour chaque fréquence de la bande considérée. Cette multiplication des calculs peut être très coûteuse en temps CPU (Central Processor Unit).

Une solution proposée initialement par G.W. Benthien en 1989 consiste à diminuer le temps de calcul par une interpolation linéaire fréquentielle des coefficients des matrices équations intégrales [147]. Cette technique a été reprise par différents auteurs [148,149]. Dans le même but, une technique d'interpolation sur la fonction de Green dans le domaine spatial par l'intermédiaire de fonctions de forme a été mise au point en 1993 [150]. Elle permet d'extraire des intégrales les noyaux dépendant de la fréquence, lesquelles ne sont évaluées qu'à une seule fréquence (seules les valeurs nodales de la fonction de Green sont réévaluées à chaque fréquence), mais elle est beaucoup plus consommatrice en temps de calcul que la méthode d'interpolation linéaire en fréquence. Cette dernière réduit le nombre de phases d'assemblage des matrices équations intégrales à deux, aux deux fréquences bornes entre lesquelles les coefficients des matrices sont calculés par interpolation linéaire. Cette technique n'est adaptée qu'aux problèmes tridimensionnels avec éléments de surface constants [147], et isoparamétriques à variation quadratique avec application unique aux structures sphériques [148,149]. Elle est ici développée pour être appliquée à tout type de géométrie 3D et est étendue au cas de la symétrie axiale.

Dans un premier temps, le principe d'utilisation de l'interpolation fréquentielle est présenté. Ensuite, la technique d'interpolation basée sur une neutralisation du caractère oscillatoire par une factorisation adaptée est décrite. Les différences entre utilisation d'éléments constants et à variation quadratique sont données.

Dans un deuxième temps, la technique de la référence [147] est adaptée, dans le cas tridimensionnel, aux éléments à variation quadratique. Le traitement de la duplicité des normales est décrit [7,151]. Les étapes de l'interpolation fréquentielle et la place disque nécessaire à son utilisation sont commentées. Après avoir validé cette méthode, son efficacité est discutée et un critère permettant d'automatiser le choix des fréquences bornes est mis en évidence.

La troisième partie de ce chapitre concerne l'application de la méthode d'interpolation au cas de la symétrie axiale [152]. Pour ce faire, une nouvelle technique d'intégration et un découpage automatique de chaque domaine circulaire d'intégration en sous-éléments sont proposés. Ces nouveaux développements sont validés sur de nombreux exemples. La réelle efficacité de l'interpolation fréquentielle dans le cas d'une analyse multi-fréquence d'un problème à symétrie axiale est démontrée.

La section suivante résume quelles sont les limites d'utilisation des techniques d'interpolation linéaire en fréquence dans le cas des problèmes 3D et à symétrie axiale.

Quelques remarques concernant l'application de l'interpolation fréquentielle à la recherche des fréquences irrégulières et à leur traitement sont ensuite formulées.

Enfin, les conclusions sont données.

3.1 PRINCIPE

Ce paragraphe expose le principe de l'interpolation fréquentielle linéaire appliquée aux équations intégrales.

La motivation du développement de l'interpolation fréquentielle est, lors d'une analyse multi-fréquence, d'obtenir une diminution du temps CPU (Central Processor Unit). Pour l'essentiel, le temps de calcul se décompose en deux parties : la phase d'assemblage des matrices et la phase de résolution du système. La méthode proposée dans ce chapitre est destinée à "économiser" la phase d'assemblage quand on change la fréquence de calcul. Basée sur celle proposée par G.W. Benthien [147], le nombre de phases d'assemblage est ramené à deux : le nombre de bornes fréquentielles entre lesquelles l'interpolation est conduite.

Sachant que la majeure partie du temps de calcul est dépensée lors de la phase de résolution (resp. d'assemblage) pour un problème 3D (resp. à symétrie axiale), l'interpolation fréquentielle est destinée, a priori, aux problèmes à symétrie axiale.

Cette technique diffère grandement selon le type de discrétisation utilisée. Sa première implantation était appliquée aux éléments constants [147]. Cette technique a ensuite été étendue aux éléments isoparamétriques à variation quadratique [148,149,151], dans le cas des problèmes tridimensionnels mais sans considérer le cas des symétries axiales.

Dans la référence [147], la surface de la structure est découpée en sous-divisions sur lesquelles la pression et sa dérivée normale sont supposées constantes. L'idée de base de la méthode est d'éliminer le caractère oscillatoire des coefficients des matrices équations intégrales afin de pouvoir utiliser une formule d'interpolation linéaire en fréquence. Ce caractère oscillatoire est dû aux fortes variations de kD_m et ne permet pas une interpolation fréquentielle linéaire directe. Ce terme fluctuant se trouve localisé dans l'exponentiel de la fonction de Green et de sa dérivée normale :

$$e^{ikD_m} \quad (3.1)$$

Afin de supprimer les variations sinusoïdales, un terme proche de la valeur de kD_m est extrait. D_{mn} est la distance entre les points de référence des sous-divisions m et n du coefficient. La quantité $\exp(ikD_{mn})$ est factorisée des fonctions à intégrer du coefficient matriciel correspondant. Ainsi, des nouveaux coefficients matriciels, variant théoriquement très lentement avec la fréquence sont obtenus, à deux fréquences bornes, sur lesquels une interpolation fréquentielle linéaire est possible. Les coefficients sont ainsi obtenus à une fréquence intermédiaire. Puis, des multiplications par les termes fluctuants extraits à la fréquence d'interpolation permettent le recouvrement des matrices réelles. Donc, après avoir mené les calculs pour deux fréquences bornes espacées raisonnablement, il est possible d'interpoler les matrices équations intégrales entre ces deux valeurs sans exécuter la phase d'assemblage classique.

Dans les articles de Wu et al. [148,149], la distance de factorisation est constante pour un élément (distance noeud de calcul-centre de l'élément). Cette simplification permet théoriquement moins de précision et l'application ne porte que sur une structure sphérique. Les travaux des références [147] et [148] ont bien été résumés dans la référence [11]. Par contre, dans le travail présenté dans ce chapitre, elle a été généralisée à toute forme géométrique, et le problème de duplicité des normales est pris en compte [7,151].

Principe.

En ce qui concerne les articles référencés [147], [153] et [154], les développements y sont effectués uniquement pour la modélisation de problèmes tridimensionnels. Dans ce document, deux cas sont successivement traités : celui tridimensionnel et celui des problèmes à symétrie axiale [152].

3.2 APPLICATION AU CAS PUREMENT TRIDIMENSIONNEL

Ce paragraphe traite de l'application de l'interpolation linéaire en fréquence aux problèmes tridimensionnels, dans le cas des éléments isoparamétriques à variation quadratique.

3.2.1 Théorie

Lors d'une discrétisation par éléments constants [147], chaque élément contient un noeud situé en son centre. La distance factorisée est donc la distance entre le noeud de calcul \underline{r}_m et l'unique noeud central de l'élément Γ_j . De par les distances factorisées et le problème de duplicité des normales, l'utilisation d'éléments isoparamétriques à variation quadratique complique l'application de la technique d'interpolation linéaire en fréquence [151].

Afin de supprimer le caractère oscillatoire des fonctions à intégrer des équations (2.16) et (2.17) complétées des expressions (2.24) et (2.25), la variation de kD_m (où D_m est la distance entre \underline{r}_m et $\underline{r}'(\xi, \eta)$) est minimisée en factorisant, dans les fonctions à intégrer, une quantité qui lui est proche.

La quantité choisie est la suivante (cf. figure 3.1) :

$$e^{ikD_{m\ ij}} \quad (3.2)$$

avec :

$$D_{m\ ij} = |\underline{r}_m - \underline{r}_{ij}| \quad (3.3)$$

c'est à dire la distance entre le noeud de calcul m et le noeud i de l'élément Γ_j , distance qui ne dépend pas de \underline{r}' . $D_{m\ ij}$ étant proche de D_m , la distance $D_m - D_{m\ ij}$ est voisine de zéro.

En insérant les valeurs de la fonction de Green et de sa dérivée normale (éqs. (2.24) et (2.25)) dans les équations (2.16) et (2.17), celles-ci s'écrivent (l'écriture locale est ici plus adaptée à la compréhension de la technique) :

$$A_{m\ ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{e^{ikD_m}}{D_m^2} \left[ik - \frac{1}{D_m} \right] (\underline{r}'(\xi, \eta) - \underline{r}_m) \cdot \underline{n}' N_i(\xi, \eta) d\underline{r}'(\xi, \eta) - \delta_{m\ ij} \frac{\alpha_m}{4\pi} \quad (3.4)$$

$$B_{m\ ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{e^{ikD_m}}{D_m} N_i(\xi, \eta) d\underline{r}'(\xi, \eta) \quad (3.5)$$

L'application de la technique d'interpolation linéaire en fréquence est effectuée en factorisant le terme $\exp(ikD_{m\ ij})$. Les coefficients matriciels s'expriment donc de cette façon :

$$A_{m \ ij} = \frac{1}{4\pi} e^{ikD_m \ ij} \iint_{\Gamma_j} \frac{e^{ik(D_m - D_m \ ij)}}{D_m^2} \left[ik - \frac{1}{D_m} \right] (\mathbf{r}'(\xi, \eta) - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' N_i(\xi, \eta) d\mathbf{r}'(\xi, \eta) \quad (3.6)$$

$$-\delta_{m \ ij} \frac{\alpha_m}{4\pi}$$

$$B_{m \ ij} = \frac{1}{4\pi} e^{ikD_m \ ij} \iint_{\Gamma_j} \frac{e^{ik(D_m - D_m \ ij)}}{D_m} N_i(\xi, \eta) d\mathbf{r}'(\xi, \eta) \quad (3.7)$$

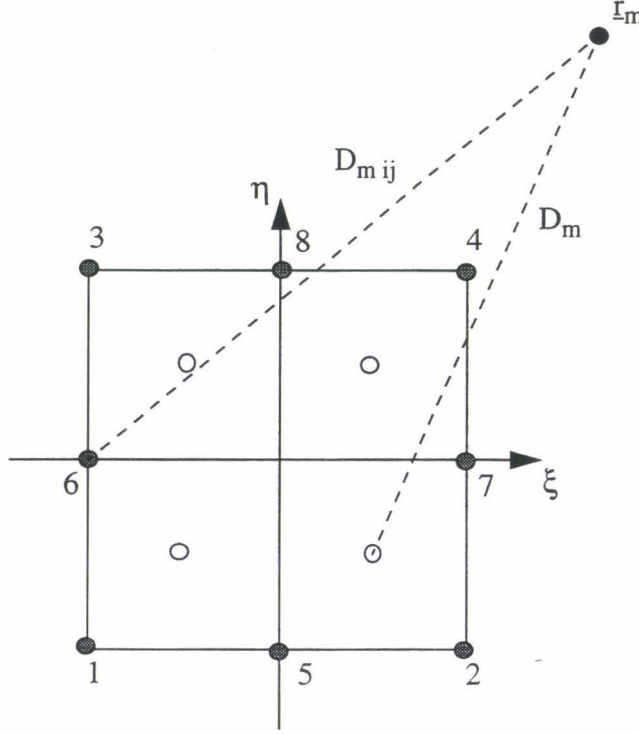


Figure 3.1. Visualisation de la quantité factorisée.

On pose

$$A_{m \ ij} = e^{ikD_m \ ij} \hat{A}_{m \ ij} - \delta_{m \ ij} \frac{\alpha_m}{4\pi} \quad (3.8)$$

$$B_{m \ ij} = e^{ikD_m \ ij} \hat{B}_{m \ ij} \quad (3.9)$$

où les coefficients des nouvelles matrices sont distingués par le symbole ^ et s'écrivent :

$$\hat{A}_{m \ ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_j} \frac{e^{ik(D_m - D_m \ ij)}}{D_m^2} \left[ik - \frac{1}{D_m} \right] (\mathbf{r}'(\xi, \eta) - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' N_i(\xi, \eta) d\mathbf{r}'(\xi, \eta) \quad (3.10)$$

$$\hat{B}_{m \ ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_j} \frac{e^{ik(D_m - D_m \ ij)}}{D_m} N_i(\xi, \eta) d\mathbf{r}'(\xi, \eta) \quad (3.11)$$

Les nouvelles matrices $[\hat{A}]$ et $[\hat{B}]$ sont calculées aux deux bornes f_1 et f_2 et stockées sur

disque, avec le vecteur des angles solides qui est indépendant de la fréquence.

Les fréquences f_1 et f_2 doivent encore vérifier le "critère en $\lambda/4$ " (cf. § 2.1.2). Étant donné le type des éléments utilisés dans la discrétisation, un noeud peut appartenir à plusieurs éléments et, de ce fait, la normale en ce noeud n'est pas forcément unique (cf. figure 3.2) [7].

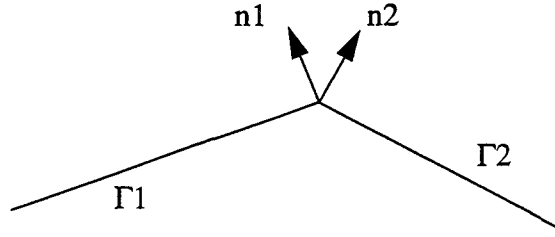


Figure 3.2. Problème de duplicité des normales à la surface.

La matrice $[B]$ étant multipliée par $\{\partial p / \partial n\}$, la duplicité des normales pose un problème de choix de la dérivée normale et ne permet pas une application directe de l'interpolation fréquentielle de cette matrice [151]. Pour corriger ce problème, on procède à la décomposition de la normale suivant les trois composantes X, Y et Z. Pour ce faire, on rappelle les relations suivantes [151] :

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} = \rho \omega^2 \{u_n\} \quad (3.12)$$

et :

$$u_n(\mathbf{r}') = u_x(\mathbf{r}') \cdot n_x(\mathbf{r}') + u_y(\mathbf{r}') \cdot n_y(\mathbf{r}') + u_z(\mathbf{r}') \cdot n_z(\mathbf{r}') \quad (3.13)$$

On a donc :

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} = \rho \omega^2 \{u_n\} = \rho \omega^2 \{u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z\} \quad (3.14)$$

On projette la matrice $[\hat{B}]$ sur chacune des trois composantes de la normale unitaire en chaque noeud du maillage :

$$[\hat{B}_x] = [\hat{B}] \{n_x\} \quad (3.15)$$

$$[\hat{B}_y] = [\hat{B}] \{n_y\} \quad (3.16)$$

$$[\hat{B}_z] = [\hat{B}] \{n_z\} \quad (3.17)$$

L'ordre des trois matrices ainsi obtenues est identique à celui de la matrice $[\hat{A}]$, c'est à dire au nombre total de noeuds du maillage. On a donc :

$$\begin{aligned} [\hat{B}] \left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} &= \rho \omega^2 [\hat{B}] \{u_n\} = \rho \omega^2 [\hat{B}] \{u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z\} \\ &= \rho \omega^2 ([\hat{B}_x] \{u_x\} + [\hat{B}_y] \{u_y\} + [\hat{B}_z] \{u_z\}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

La formule d'interpolation linéaire suivante, appliquée à une matrice $[\hat{M}]$, est utilisable avec les matrices $[\hat{A}]$, $[\hat{B}_x]$, $[\hat{B}_y]$ et $[\hat{B}_z]$:

$$\hat{M}_f = \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \hat{M}_{f_2} + \left(1 - \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \right) \hat{M}_{f_1} \quad (3.19)$$

où f est une fréquence comprise entre f_1 et f_2 .

Après interpolation, le recouvrement des matrices originales $[A]$, $[B_x]$, $[B_y]$ et $[B_z]$ à la fréquence f est obtenu après multiplication par les facteurs $\exp(ikD_{mij})$.

L'application de la relation (3.18) à la matrice $[B]$:

$$[B] \left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} = \rho \omega^2 ([B_x] \{u_x\} + [B_y] \{u_y\} + [B_z] \{u_z\}) \quad (3.20)$$

permet de construire le vecteur second membre après interpolation.

Ensuite, la résolution classique permet l'obtention de la pression sur la surface et dans le fluide en champ proche ou en champ lointain (cf. § 2.2).

Le schéma suivant (figure 3.3) présente le traitement informatique de la méthode présentée ici. Il se décompose en trois étapes : une première phase où les nouvelles matrices sont calculées et stockées à la fréquence borne inférieure f_1 ; une seconde phase identique mais à la fréquence borne supérieure f_2 ; une troisième phase d'interpolation à chaque fréquence de calcul f incluse dans la bande f_1 - f_2 .

Des matrices et un vecteur sont stockés simultanément sur disque. Leur nombre et leur taille donne la place disque maximale utilisée. Les éléments de matrice étant des complexes double précision codés sur 16 octets et ceux du vecteur des réels simple précision codés sur 4 octets, pour un maillage à NN noeuds, il faut prévoir une place disque libre de $192NN^2 + 4NN$ octets.

La technique d'interpolation fréquentielle est tout à fait compatible avec la décomposition en problèmes élémentaires des équations intégrales (cf. remarque concernant le code de calcul EQI en fin de paragraphe 2.5).

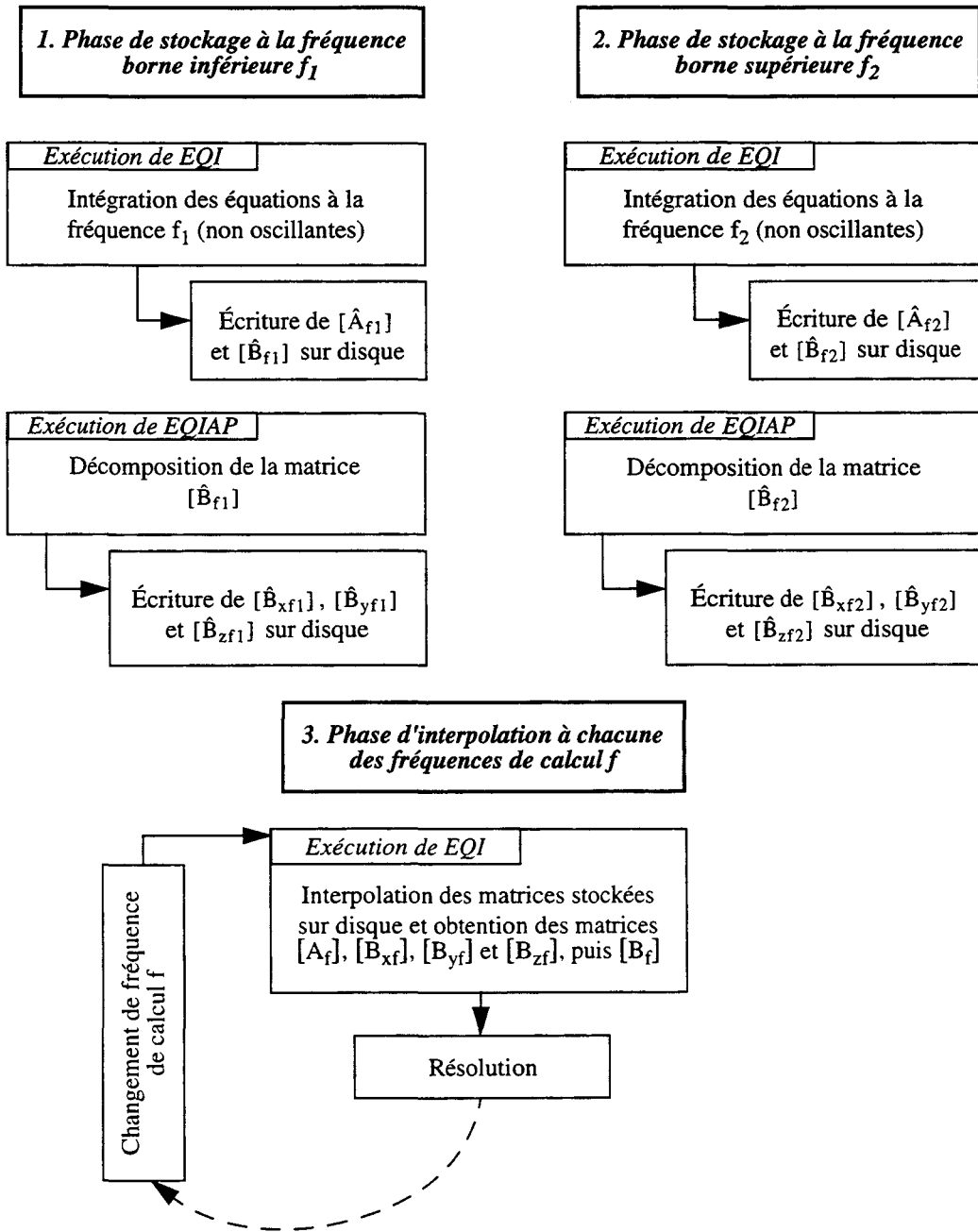


Figure 3.3. Procédure d'interpolation linéaire en fréquence appliquée aux équations intégrales dans le cas tridimensionnel.

3.2.2 Validation

Dans tout le document :

- les calculs sont effectués sur station de travail HP 9000 / 735,
- le milieu fluide est de densité $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ (eau) et la vitesse du son est $c = 1490 \text{ m/s}$ (sauf précision contraire (cf. § 5.2.2)).

Cette section concerne la validation de l'interpolation linéaire en fréquence des problèmes 3D. Dans un premier temps, elle est comparée au calcul classique sans interpolation. Puis, des tests

permettent de mettre en évidence l'intervalle d'interpolation optimal. Des exemples de calculs sans extraction de l'oscillation des coefficients sont ensuite montrés afin de prouver le caractère impératif des factorisations. Enfin, des calculs de validation dans le cas de la diffraction et l'application à une structure sous-marine réaliste sont effectués. Les calculs d'intégration des équations intégrales sur un élément sont menés avec 2 points de Gauss par variable d'intégration (ξ et η). Cette valeur assure la convergence des intégrales de Helmholtz à condition de respecter le "critère en $\lambda/4$ " [7]. Le nombre de points de Gauss est identique dans le cas de l'interpolation fréquentielle, les intégrales non oscillantes étant plus faciles à calculer [151].

Comparaison calcul classique et calcul interpolé.

La méthode d'interpolation linéaire en fréquence est testée dans le cas du rayonnement analytique par une source ponctuelle (cf. § 2.6) sur deux géométries : une sphère et un cylindre de section circulaire. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par un calcul classique sans interpolation.

La sphère est de rayon a , centrée en l'origine 0 du repère. Le maillage, figure 3.4, est composé de 96 éléments quadrilatères, soit 290 noeuds. Sa plus grande fréquence réduite ka donnée par le "critère en $\lambda/4$ " est 4,08 (correspondante à $F = 967,15$ Hz, avec $k = 2\pi f/c$). La source ponctuelle est placée en 0. La place disque nécessaire à l'exécution de calculs par interpolation est de 15,4 Mo.

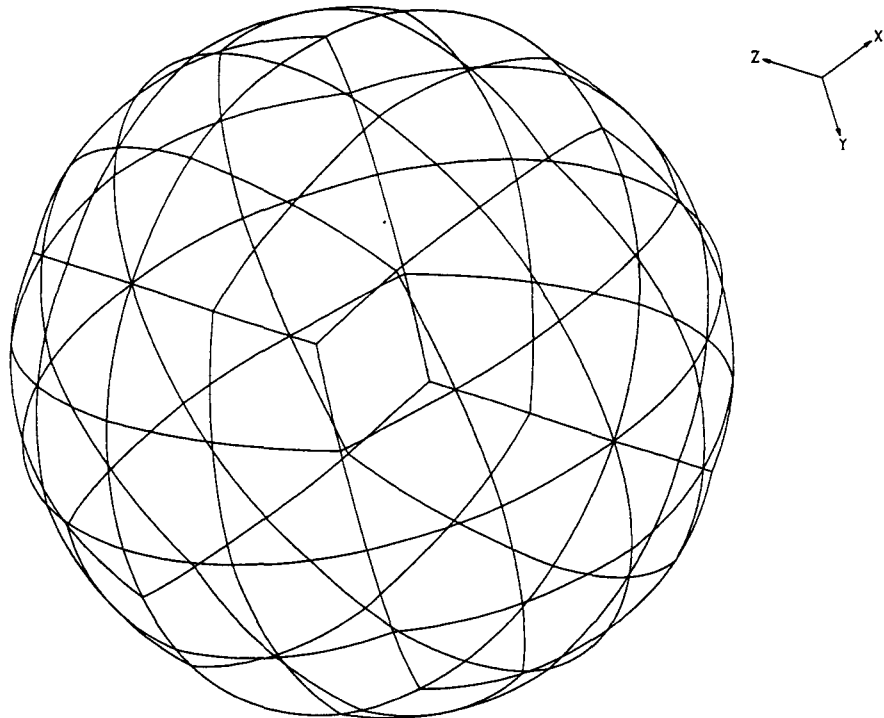


Figure 3.4. Maillage de la sphère.

Le cylindre de section circulaire est de rayon a et de hauteur $3a$, centrée en l'origine 0 du repère. Le maillage, figure 3.5, est composé de 384 éléments (336 quadrangles et 48 triangles), soit 1106 noeuds. Sa plus grande fréquence réduite ka donnée par le "critère en $\lambda/4$ " est 3,14 (correspondante à $F = 372,85$ Hz). La source ponctuelle est placée en 0. Par interpolation, il faut prévoir 223,99 Mo de place disque.

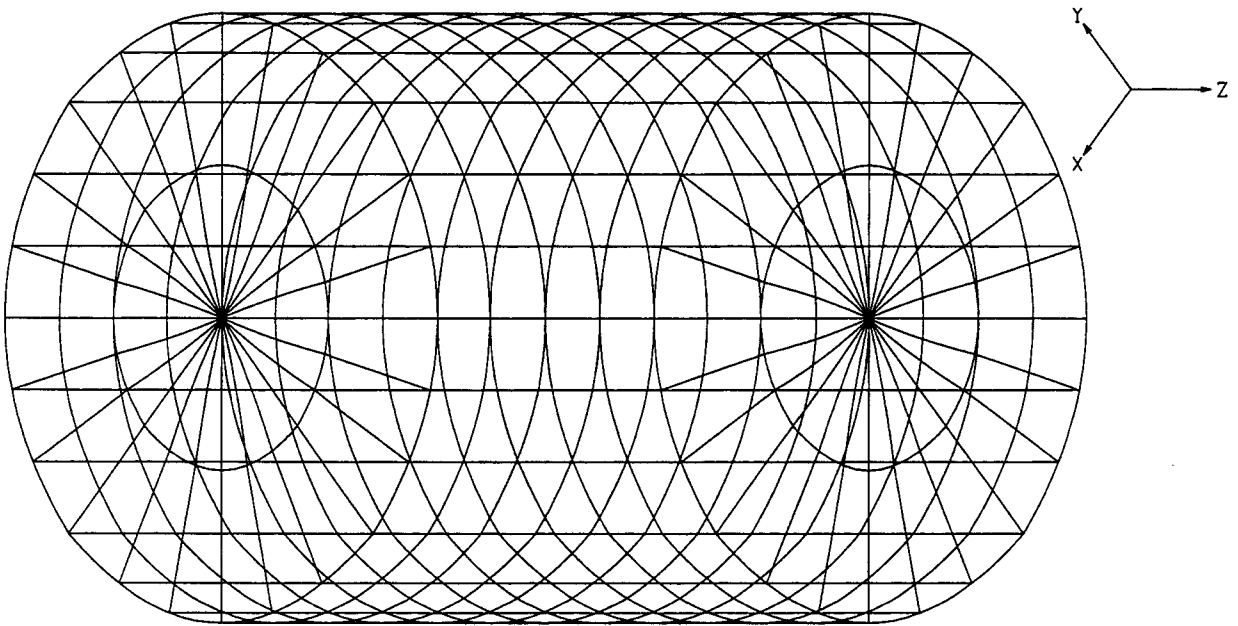


Figure 3.5. Maillage du cylindre.

Dans le cadre du calcul classique, les fréquences de calcul couvrent l'ensemble du domaine d'utilisation du maillage et débordent même bien au delà de F . Pour la sphère, les résultats (erreur quadratique moyenne (EQM) et temps CPU) sont regroupés dans le tableau 3.1. Pour le cylindre, ils sont dans le tableau 3.2.

On remarque que l'EQM reste inférieure ou au voisinage du pourcent lorsque la fréquence est inférieure et même légèrement supérieure à F . Par contre, pour les fréquences supérieures à celles correspondantes à $\lambda/3$, les résultats se dégradent peu à peu. Ce comportement a déjà été observé de nombreuses fois sur d'autres types de structures [7].

On remarque la présence de fréquences irrégulières (ombragées dans les tableaux) au voisinage de 750 Hz et de 1500 Hz pour la sphère et de 475 Hz pour le cylindre. La présence de ces fréquences est confirmée par le calcul via les relations (1.96.b) et (1.95.b) : $f_{01} = 744,98$ Hz et $f_{02} = 1489,97$ Hz pour la sphère; $f_{301} = 469,1$ Hz pour le cylindre.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
50	0,1	4,1
100	0,1	4
150	0,1	3,9
200	0,1	4
250	0,1	4
300	0,1	4
350	0,2	4,1

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
400	0,2	4
450	0,2	4,1
500	0,2	4,1
550	0,3	4
600	0,4	4,1
650	0,6	4
700	1,1	4
750	35,4	4
800	0,9	4,1
850	0,5	4,1
900	0,4	4,1
950	0,4	4,1
1000	0,4	4,1
1050	0,5	4
1100	0,6	4
1150	0,7	4,1
1200	0,9	4,2
1250	1,1	4,1
1300	1,3	4,1
1350	1,6	4,1
1400	2,1	4,1
1450	3,5	4
1500	37,6	4

limite du "critère en $\lambda/4$ "

Tableau 3.1. Test de la source ponctuelle sur la sphère en calcul classique.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
25	0,5	167,3
50	0,6	161,6
75	0,7	160
100	0,9	159,7

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
125	1	159,8
150	1,2	159,7
175	1,3	159,7
200	1,4	159,6
225	1,5	159,9
250	1,7	159,8
275	1,8	160,9
300	2,5	161,4
325	3,3	160
350	2,3	159,6
375	2,2	161
400	2,3	159,7
425	2,9	159,5
450	5,6	161,2
475	24,8	159,8
500	5,1	159,5
525	3,8	159,5
550	3,5	159,7
575	3,7	160,8
600	4,2	159,6
625	5,1	161,5
650	7,2	162,2

limite du "critère
en $\lambda/4$ "

Tableau 3.2. Test de la source ponctuelle sur le cylindre en calcul classique.

Dans le cadre de l'interpolation linéaire en fréquence présentée dans la section précédente, trois intervalles de fréquences de bornes inférieures à F ont été choisis et les calculs menés à des fréquences déjà traitées par le calcul classique.

Pour la sphère, les résultats pour les intervalles 200-500, 500-800 et 200-800 se trouvent respectivement dans les tableaux 3.3, 3.4 et 3.5.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
stockage à f_1		7,7
stockage à f_2		7,7
50	0,2	8,1
100	0,1	8,2
150	0,1	8,2
200	0,1	8,3
250	0,1	8,3
300	0,1	8,3
350	0,1	8,2
400	0,1	8,3
450	0,2	8,3
500	0,2	8,2
550	0,4	8,2
600	0,7	8,2
650	1,2	8,3
700	3,1	8,2
750	123,5	8,2
800	4,1	8,2
850	2,5	8,2
900	2,1	8,3
950	2,2	8,4
1000	2,6	8,3
1050	3,2	8,3
1100	4,1	8,3
1150	5,4	8,3
1200	7,1	8,3
1250	9,5	8,2
1300	13,1	8,2
1350	19	8,3

limite du "critère
en $\lambda/4$ "

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
1400	30,9	8,3
1450	67,3	8,2
1500	1237,6	8,2

Tableau 3.3. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation entre 200 et 500 Hz.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
stockage à f_1		7,7
stockage à f_2		7,7
50	0,6	8,3
100	0,4	8,3
150	0,4	8,2
200	0,3	8,2
250	0,3	8,4
300	0,3	8,6
350	0,3	8,3
400	0,3	8,3
450	0,2	8,3
500	0,2	8,3
550	0,3	8,3
600	0,3	8,3
650	0,4	8,2
700	0,8	8,3
750	29,8	8,4
800	0,9	8,4
850	0,6	8,3
900	0,6	8,2
950	0,7	8,2
1000	0,9	8,2
1050	1,2	8,2

limite du "critère en $\lambda/4$ "

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
1100	1,7	8,2
1150	2,4	8,2
1200	3,2	8,2
1250	4,5	8,2
1300	6,3	8,2
1350	9,3	8,2
1400	15,2	8,2
1450	33,2	8,2
1500	531,3	8,3

Tableau 3.4. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation entre 500 et 800 Hz.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
stockage à f_1		7,6
stockage à f_2		7,7
50	0,2	8,2
100	0,2	8,2
150	0,1	8,1
200	0,1	8,1
250	0,1	8,2
300	0,1	8,2
350	0,1	8,2
400	0,1	8,2
450	0,2	8,2
500	0,2	8,4
550	0,2	8,4
600	0,3	8,2
650	0,3	8,1
700	0,4	8,1
750	21,1	8,2

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
800	0,9	8,2
850	0,7	8,2
900	0,8	8,1
950	0,9	8,3
1000	1,2	8,5
1050	1,7	8,1
1100	2,3	8,2
1150	3,2	8,2
1200	4,3	8,3
1250	6	8,2
1300	8,4	8,2
1350	12,4	8,2
1400	20,4	8,3
1450	44,8	8,1
1500	757,2	8,2

limite du "critère en $\lambda/4$ "

Tableau 3.5. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation entre 200 et 800 Hz.

Pour le cylindre, les résultats pour les intervalles 100-200, 200-300 et 100-300 se trouvent respectivement dans les tableaux 3.6, 3.7 et 3.8.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
stockage à f_1		108,2
stockage à f_2		108,9
25	0,5	227
50	0,6	227,8
75	0,7	232
100	0,9	229
125	1	230,9
150	1,2	228,7
175	1,3	229,9

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
200	1,4	230,8
225	1,5	227,4
250	1,6	227,1
275	1,8	226,6
300	2,4	226,6
325	2,9	231,4
350	2,1	229,1
375	2	230,2
400	2,1	231,2
425	2,4	229
450	4,1	227,3
475	19	230,4
500	4,5	233,6
525	3,8	232,2
550	3,8	232,7
575	4,2	230,6
600	5	231,1
625	6,9	229
650	13,2	229,2

limite du "critère en $\lambda/4$ "

Tableau 3.6. Test de la source ponctuelle sur le cylindre par interpolation entre 100 et 200 Hz.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
stockage à f_1		107,9
stockage à f_2		108
25	0,5	228,5
50	0,5	228,1
75	0,7	230,1
100	0,8	231,6
125	1	233,3

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
150	1,2	236,7
175	1,3	237,5
200	1,4	237,6
225	1,5	232,6
250	1,7	231,8
275	1,8	233,9
300	2,5	242,2
325	3,3	232,5
350	2,2	228,5
375	2,1	228,9
400	2,2	228,9
425	2,6	227,4
450	4,9	229,7
475	21,7	228
500	4,6	227,4
525	3,6	225,4
550	3,5	228,2
575	3,9	225,1
600	4,5	226,4
625	5,7	227,1
650	9,5	225,6

limite du "critère en $\lambda/4$ "

Tableau 3.7. Test de la source ponctuelle sur le cylindre par interpolation entre 200 et 300 Hz.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
stockage à f_1		110,5
stockage à f_2		107,9
25	0,5	230,8
50	0,6	228
75	0,7	228,1

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
100	0,9	229,2
125	1	231,5
150	1,2	228,1
175	1,3	228,1
200	1,5	228,6
225	1,6	229,6
250	1,7	230,2
275	1,8	235,9
300	2,5	236,7
325	3,2	233,9
350	2,2	237,4
375	2,1	236,3
400	2,2	236,7
425	2,5	236,3
450	4,6	239,6
475	20,5	231,9
500	4,6	229,5
525	3,6	226,5
550	3,6	227,7
575	4	227,5
600	4,6	228,9
625	6,1	233,8
650	10,8	229,7

limite du "critère
en $\lambda/4$ "

Tableau 3.8. Test de la source ponctuelle sur le cylindre par interpolation entre 100 et 300 Hz.

Les bornes d'interpolation restant inférieures à F, la consultation des tableaux précédents permet de mettre en évidence les résultats suivants :

- lorsque la fréquence de calcul reste comprise entre les deux bornes d'interpolation, les résultats du calcul classique et ceux de la technique d'interpolation, en terme d'EQM, restent quasiment identiques,
- la technique d'interpolation linéaire en fréquence appliquée aux problèmes tridimensionnels ne permet pas d'obtenir le gain de temps CPU souhaité lors de son élaboration,
- lorsque la fréquence de calcul est en dehors des bornes mais reste inférieure à F, une faible dé-

gradation du résultat interpolé en EQM est observée,

- quand la fréquence de calcul est supérieure à F , les résultats par interpolation sont plus vite altérés que ceux issus d'un calcul classique.

Les deux derniers points sont d'autant plus vrais que la fréquence d'interpolation s'éloigne des bornes.

Finalement, l'interpolation linéaire en fréquence est parfaitement adaptée au cas 3D lorsque les bornes de l'intervalle vérifient le "critère en $\lambda/4$ " et quand la fréquence de calcul est incluse dans cet intervalle.

Choix de l'intervalle d'interpolation optimal.

Afin de définir l'intervalle d'interpolation optimal, une méthode dite de "dichotomie inverse" est appliquée à la sphère et au cylindre précédemment décrits avec les mêmes tests de source ponctuelle.

Le principe de la "dichotomie inverse" est le suivant. Sur la plage de fréquence 0-F, et pour une fréquence de calcul de $27F/32$ ($k_a = 3,44$ pour la sphère et $k_a = 2,65$ pour le cylindre), le calcul est mené successivement avec les bornes définies ci-après (voir figure 3.6) :

- $13F/16-7F/8$,
- $3F/4-7F/8$,
- $3F/4-F$,
- $F/2-F$,
- $0-F$.

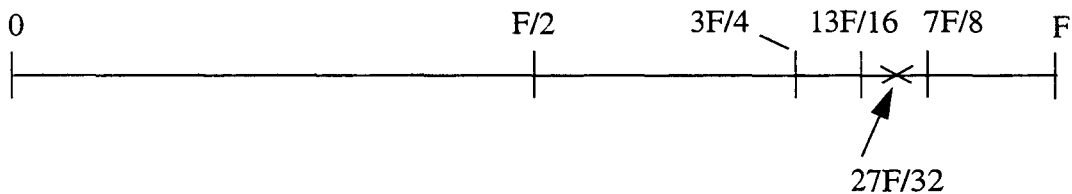


Figure 3.6. Schéma de principe de la dichotomie inverse.

En ce qui concerne la sphère, l'EQM et le temps CPU total (phases de stockage + phase d'interpolation) obtenue par dichotomie inverse sont donnés dans le tableau 3.9. À cette fréquence, un calcul classique donne EQM = 0,7 % pour un temps CPU de 3,9 s.

Pour le cylindre, c'est le tableau 3.10 qui donne les résultats de la dichotomie inverse. Un calcul classique à cette fréquence donne EQM = 11,9 % pour un temps CPU de 168,6 s. La fréquence de calcul est proche de la fréquence irrégulière 311 Hz correspondante à k_{101} de la relation (1.95.b).

intervalle d'interpolation	EQM (%)	temps CPU (s) total
13F/16-7F/8	0,7	23,5
3F/4-7F/8	0,7	23,5
3F/4-F	0,6	24,7
F/2-F	0,5	23,5
0-F	1	24,1

Tableau 3.9. Dichotomie inverse pour la sphère.

intervalle d'interpolation	EQM (%)	temps CPU (s) total
13F/16-7F/8	12	440,1
3F/4-7F/8	12	445,4
3F/4-F	12,2	449,7
F/2-F	12,9	447,6
0-F	14,2	449,4

Tableau 3.10. Dichotomie inverse pour le cylindre.

Pour chaque intervalle d'interpolation, les valeurs de EQM sont, pour un maillage donné, quasiment les mêmes. Ainsi, compte tenu des conclusions du paragraphe précédent, l'interpolation linéaire en fréquence est fiable pour tous ces intervalles de fréquences. Sachant qu'à chaque maillage est associée une fréquence maximale de calcul F, la consultation des deux tableaux ci-dessus permet l'interpolation sur toutes les fréquences comprises entre 0 et F. De plus, la valeur de F étant toujours identifiable, l'emploi systématique de l'intervalle 0-F permet une simplification et une automatisation de la procédure d'interpolation.

Afin de justifier le choix systématique des bornes 0 et F, un calcul d'interpolation entre ces bornes, pour la sphère et le cylindre, a été effectué.

Les résultats, inscrits dans le tableau 3.11 pour la sphère et dans le tableau 3.12 pour le cylindre, confirment ce choix.

On remarque également sur les tableaux 3.9 et 3.10 que les temps CPU sont identiques quels que soient les intervalles d'interpolation utilisés.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
stockage à $f_1=0$ Hz		8
stockage à $f_2=F$		7,8
50	0,1	8,4
100	0,1	8,2
150	0,1	8,3
200	0,2	8,3
250	0,2	8,6
300	0,3	8,4
350	0,4	8,2
400	0,5	8,3
450	0,6	8,2
500	0,7	8,2
550	0,8	8,2
600	1,1	8,2
650	1,4	8,3
700	2,4	8,2
750	69,9	8,2
800	1,4	8,2
850	0,5	8,2
900	0,3	8,3
950	0,3	8,2
1000	0,6	8,3
1050	1	8,1
1100	1,5	8,2
1150	2,2	8,3
1200	3,2	8,2
1250	4,6	8,3
1300	6,7	9,1

limite du "critère en $\lambda/4$ "

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
1350	10,2	8,2
1400	17,1	8,2
1450	38,3	8,3
1500	675,2	8,2

Tableau 3.11. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation entre 0 et F.

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
stockage à $f_1=0$ Hz		112,2
stockage à $f_2=F$		123,4
25	0,5	229
50	0,6	233,8
75	0,8	235,4
100	0,9	234,8
125	1,1	233,5
150	1,3	228,3
175	1,4	228,5
200	1,5	232,7
225	1,6	229,1
250	1,7	226,6
275	1,9	229,1
300	2,8	226,1
325	3,7	227,2
350	2,4	230,9
375	2,2	232,6
400	2,3	230,8
425	2,7	229,3
450	4,9	226,2
475	21,3	225,4

limite du "critère en $\lambda/4$ "

fréquence (Hz)	EQM (%)	temps CPU (s)
500	4,6	227,3
525	3,6	226,2
550	3,6	226,7
575	3,9	226,1
600	4,5	227,7
625	5,8	227
650	10,4	226

Tableau 3.12. Test de la source ponctuelle sur le cylindre par interpolation entre 0 et F.

La légère augmentation de l'EQM avec la fréquence est aussi observée lors du calcul classique quand la fréquence se rapproche de la limite F.

Lorsque la fréquence est nulle (c'est le cas pour f_1 lors du choix systématique des bornes d'interpolation), l'équation de Helmholtz donne l'équation de Laplace ($\Delta p = 0$) caractérisant le comportement d'un fluide incompressible (champ à potentiel statique).

Conservation de l'oscillation des coefficients.

Dans le but de prouver l'efficacité du principe de la méthode d'interpolation qui consiste à supprimer le caractère oscillatoire des intégrales servant à l'assemblage des matrices [A] et [B], une autre technique d'interpolation est testée. Il s'agit encore d'interpoler sur les intégrales de Helmholtz mais en considérant que $D_{m\ ij}$ reste nulle (cf. § 3.2.1). Le comportement oscillatoire de ces intégrales est donc conservé avant l'interpolation linéaire.

Pour la sphère et le cylindre décrits ci-dessus, les calculs sont menés à la fréquence $27F/32$ ($ka = 3,44$ pour la sphère et $ka = 2,65$ pour le cylindre) en faisant varier uniquement les bornes d'interpolation tel que cela a été effectué pour la dichotomie inverse. Les mêmes calculs sont à nouveau menés, les résultats étant donnés respectivement dans les tableaux 3.13 et 3.14.

intervalles d'interpolation	EQM (%)
0-F	57,1
F/2-F	24,3
3F/4-F	18,1
3F/4-7F/8	4,1
13F/16-7F/8	0,9

Tableau 3.13. Dichotomie inverse pour la sphère avec $D_{m\ ij} = 0$.

intervalles d'interpolation	EQM (%)
0-F	71,1
F/2-F	37,4
3F/4-F	27,5
3F/4-7F/8	22,9
13F/16-7F/8	16

Tableau 3.14. Dichotomie inverse pour le cylindre avec $D_{m ij} = 0$.

D'après ces tableaux et de nombreux autres exemples, l'interpolation fréquentielle sans caractère oscillatoire est utilisable pour des intervalles d'interpolation de longueur $F/16$.

On constate que cette technique d'interpolation avec $D_{m ij} = 0$ n'est pas globalement opérationnelle. Cette constatation confirme l'intérêt d'utiliser la méthode d'interpolation fréquentielle linéaire développée au paragraphe 3.2.1.

Cas de la diffraction rigide.

Ce paragraphe consiste à valider l'interpolation linéaire en fréquence dans le cadre de la diffraction rigide. Pour cela, la sphère décrite et utilisée précédemment est supposée rigide et soumise à une onde incidente plane se propageant dans le sens des Z croissants. Les résultats obtenus par interpolation (option 2) sont comparés à ceux du calcul analytique (option 1) [1]. Les fréquences réduites de travail sont $ka = 2$ ($f = 474,27$ Hz) et $ka = 4$ ($f = 948,54$ Hz). L'interpolation se fait sur l'intervalle 0-F.

Le module normalisé de la pression diffractée surfacique, analytique ou issue du calcul interpolé, dans le plan XOZ est représenté en fonction de l'angle θ sur la figure 3.7.

Une très bonne concordance est observée entre les résultats analytiques et les résultats issus de l'interpolation. Les éléments utilisés ne permettent pas une description exacte d'une sphère réelle. Cette petite différence sur les formes géométriques se traduit par une petite différence sur les courbes de pression car le calcul analytique suppose une sphère parfaite.

Lorsque la surface de la structure est supposée rigide, on note que le vecteur $\{\partial p / \partial n\}$ s'annule et l'interpolation ne porte que sur les coefficients de la matrice $[A]$.

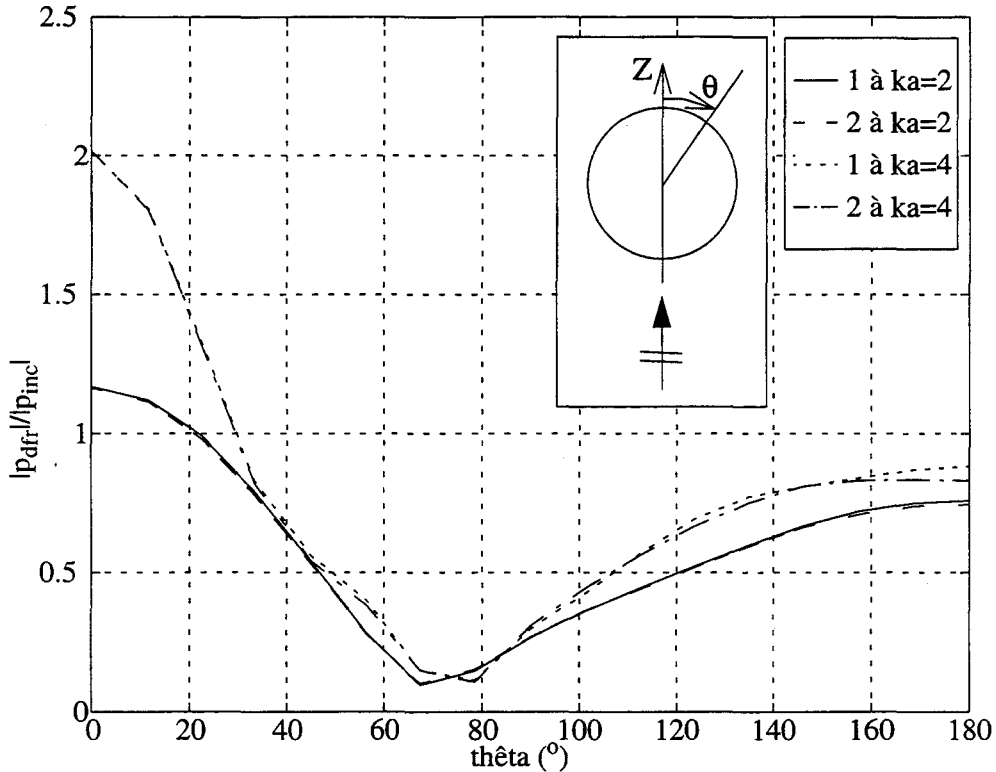


Figure 3.7. Pression surfacique analytique (1) et par interpolation fréquentielle (2) de la sphère rigide. Incidence suivant les Z croissants.

Application à une structure sous-marine réaliste.

La structure étudiée est la structure sous-marine représentée sur la figure 3.8. Elle est composée de 238 éléments (40 triangles et 198 quadrangles), soit 676 noeuds. Sa plus grande fréquence réduite kL donnée par le "critère en $\lambda/4$ " est 30 (correspondante à $F = 150$ Hz). La place disque nécessaire est de 83,68 Mo.

Le test de la source ponctuelle, défini au paragraphe 2.6, avec la source située au centre de la structure à la fréquence $F/2$ ($kL = 15$) montre (cf. tableau 3.15) le bon comportement du calcul par interpolation linéaire en fréquence entre 0 et F (option 2) par rapport au calcul classique (sans la technique d'interpolation) (option 1).

	EQM (%)
option 1	3
option 2	3.5

Tableau 3.15. Test de la source ponctuelle à $F/2$ ($kL = 15$) sur la structure sous-marine.

Le diagramme de directivité monostatique rigide en champ lointain dans le plan $\theta = 90^\circ$ est dessiné à la fréquence $F/2$ ($kL = 15$) sur la figure 3.9 où le calcul classique (option 1) est également comparé au calcul interpolé entre 0 et F (option 2).

La fréquence de calcul $F/2$ est la fréquence la plus défavorable, puisque c'est la plus éloignée de 0 et F . Néanmoins, la concordance entre les deux options est parfaite. Par contre, le coût en temps CPU n'est pas satisfaisant.

Ce dernier test prouve que la méthode d'interpolation fréquentielle linéaire n'est pas handicapée par la complexité géométrique d'une structure. Par contre, un maillage de grande taille nécessite une place disque importante pour stocker les matrices aux fréquences bornes et peut rendre prohibitive l'utilisation de cette méthode pour des problèmes tridimensionnels.

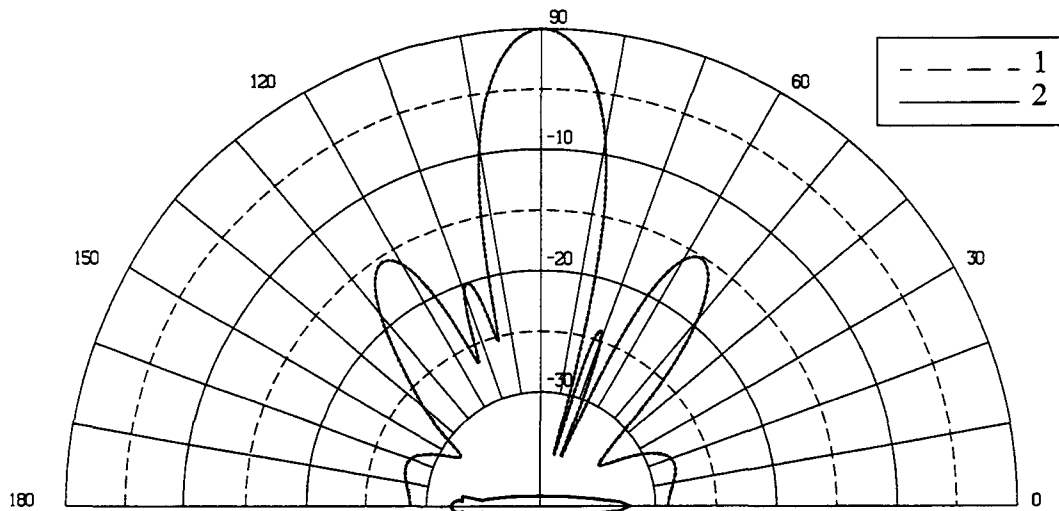


Figure 3.9. Diagramme de directivité monostatique rigide de la structure sous-marine à $F/2$ ($kL = 15$).

À une fréquence donnée, les matrices équations intégrales obtenues par le calcul classique ou par interpolation fréquentielle linéaire sont quasiment identiques si les conditions d'utilisation de cette dernière sont respectées. C'est pourquoi, si la fréquence de calcul coïncide avec une fréquence irrégulière, l'indétermination apparaît également lors de l'utilisation de la méthode d'interpolation. Des calculs menés sur un cube dont on connaît analytiquement les fréquences irrégulières ont permis de le vérifier.

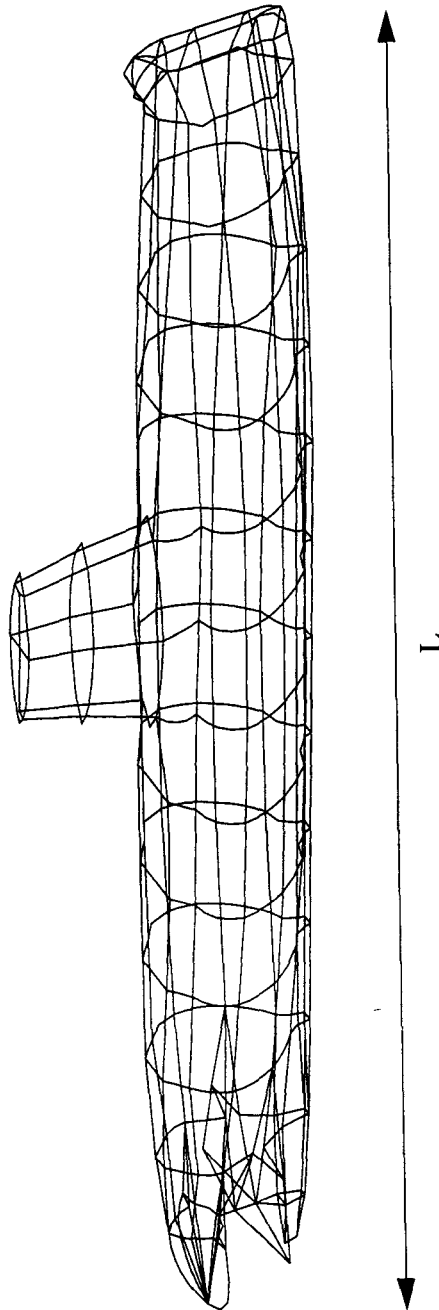


Figure 3.8. Maillage de la structure sous-marine.

3.3 APPLICATION AU CAS DE LA SYMÉTRIE AXIALE

Dans ce sous-chapitre, l'application de l'interpolation fréquentielle au cas du problème à symétrie axiale est présentée [152].

3.3.1 Théorie

Dans ce paragraphe est détaillé le développement de l'interpolation linéaire en fréquence aux équations intégrales dans le cas d'un problème à symétrie axiale avec utilisation d'éléments isoparamétriques à variation quadratique (cf. § 2.5). Ce développement nécessite la mise au point d'une méthode spécifique d'intégration numérique dans les deux directions (ξ et φ).

3.3.1.1 Spécificité de la symétrie axiale

Le principe de base de l'interpolation linéaire en fréquence consiste à soustraire une distance proche de D_m dans un terme exponentiel qui est en facteur de toute l'intégrale se trouvant dans les coefficients d'influence, ce qui permet de retirer l'oscillation qui se trouve dans l'intégrale (voir sous-chapitre précédent).

Le traitement spécial (cf. § 2.5.2.2) basé sur l'emploi d'intégrales elliptiques est utilisé. Il consiste à isoler les parties singulières (qui apparaissent lorsque le noeud de calcul r_m appartient à l'élément Γ_j des équations (2.16), (2.17), (2.24) et (2.25)) dans la fonction de Green et sa dérivée normale (cf. § 2.5.2.2) :

$$\frac{e^{ikD_m}}{D_m} = \frac{e^{ikD_m} - 1}{D_m} + \frac{1}{D_m} \quad (3.21)$$

$$\frac{e^{ikD_m}}{D_m^2} \left(ik - \frac{1}{D_m} \right) = \frac{e^{ikD_m}(ikD_m - 1) + 1}{D_m^3} - \frac{1}{D_m^3} \quad (3.22)$$

Les fonctions à intégrer ont été découpés en deux parties singulière et non singulière. Les intégrales non singulières sont calculées par la quadrature de Gauss-Legendre. Le traitement des intégrales singulières est basé sur l'utilisation d'intégrales elliptiques : l'intégration numérique en φ est supprimée et remplacée par un développement en séries de fonctions elliptiques; l'intégration numérique en ξ est faite par l'intégration numérique de Gauss-Legendre.

Dans (3.21) et (3.22), on constate que la quantité $\exp(ikD_m)$ ne peut être factorisée des deux termes de la décomposition, en particulier du premier terme non singulier qui dépend de la fréquence. On en conclut que l'interpolation fréquentielle est incompatible avec le traitement spécial des intégrales.

3.3.1.2 Intégration en symétrie axiale

Cette section traite de la méthode d'intégration choisie compatible avec la technique d'interpolation linéaire en fréquence en symétrie axiale.

3.3.1.2.1 Principe

La nouvelle méthode d'intégration choisie est une technique de quadrature de Gauss-Legendre sur les deux variables ξ et φ .

Les intégrales à calculer sont du type :

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 F(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi, \varphi)) d\xi d\varphi \quad (3.23)$$

Le changement de variable $\varphi \rightarrow \varphi/\pi - 1$ permet de placer la variation selon φ entre -1 et 1 afin de pouvoir utiliser la méthode de Gauss-Legendre. En tenant compte de la symétrie par rapport à $\varphi = 0$ (par rapport au plan XOZ)¹, il vient :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi, \varphi')) d\xi d\varphi' \quad (3.24)$$

Ces intégrales sont calculées directement par la quadrature de Gauss-Legendre avec NINT1 points de Gauss suivant ξ et NINT2 points de Gauss par longueur d'onde suivant φ .

Lorsque les intégrales sont diagonales, c'est-à-dire quand le noeud de calcul \underline{r}_m appartient à l'élément, il faut savoir mieux cerner la singularité par une augmentation du nombre de points de Gauss à son voisinage. D'après la référence [121], l'augmentation du nombre de points de Gauss se traduit par un accroissement de leur densité aux extrémités de l'intervalle d'intégration. Par conséquent, le calcul des intégrales diagonales est effectué avec $2 * \text{NINT1}$ points de Gauss d'intégration suivant ξ . Il faut considérer deux cas :

- quand le noeud de calcul coïncide avec l'un des noeuds extrêmes de l'élément (figure 3.10.a),
- quand le noeud de calcul coïncide avec le noeud milieu de l'élément (figure 3.10.b).

Dans le premier cas, le calcul avec $2 * \text{NINT1}$ points de Gauss entraîne une augmentation de leur densité au voisinage de \underline{r}_m et permet une meilleure description de la singularité. Par ailleurs, la densité des points de Gauss est également augmentée autour de l'autre extrémité. Cet effet est inutile mais pas vraiment préjudiciable sur le temps de calcul car le rapport entre le nombre d'intégrales diagonales et le nombre d'intégrales non diagonales est très faible.

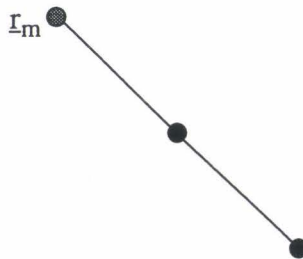


Figure 3.10.a. Le noeud de calcul \underline{r}_m coïncide avec un des noeuds extrêmes de l'élément.

1. Puisqu'il y a symétrie axiale, il y a obligatoirement symétrie par rapport au plan XOZ, que l'on prend en compte ici afin d'éviter des calculs inutiles.

Dans le second cas, on effectue un découpage du domaine d'intégration en deux parties suivant ξ de telle sorte que l'extrémité commune soit r_m (figure 3.10). Ce découpage permet une augmentation de la densité des points de Gauss au voisinage de r_m . Comme dans le premier cas, leur densité est également augmentée au voisinage des deux noeuds extrêmes de l'élément initial. C'est encore inutile mais pas vraiment préjudiciable pour la même raison.

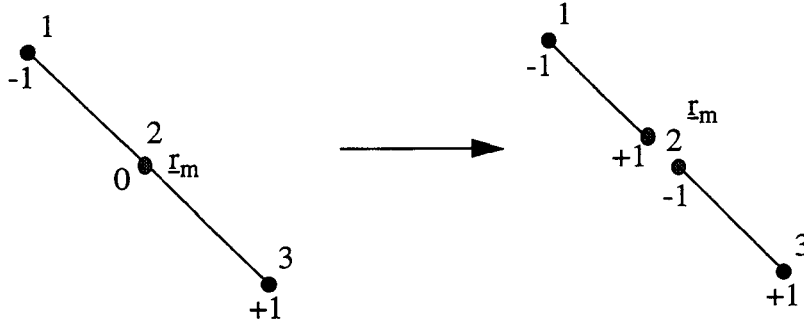


Figure 3.10.b. Le noeud de calcul r_m coïncide avec le noeud milieu de l'élément, le domaine d'intégration est découpé en 2.

L'intégrale I (éq. (3.24)) est donc décomposée en 2 intégrales $I = I_1 + I_2$ respectivement sur le domaine gauche d'intégration et sur le domaine droit d'intégration. On a ainsi :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^0 f(r_m, r'(\xi, \varphi')) d\xi \right) d\varphi' \quad (3.25)$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 f(r_m, r'(\xi, \varphi')) d\xi \right) d\varphi' \quad (3.26)$$

Afin de pouvoir appliquer la quadrature de Gauss-Legendre à ces deux domaines, il faut procéder à des changements de variables pour que les bornes des intégrales doubles soient -1 et +1. Concernant le domaine gauche d'intégration, le changement de variable se fait par l'intermédiaire de :

$$\xi = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\xi' \quad (3.27)$$

et I_1 devient :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(r_m, r'(\xi', \varphi')) d\xi' \right) d\varphi' \quad (3.28)$$

L'intégrale en ξ de l'équation (3.25) devient par la quadrature de Gauss-Legendre :

$$\int_{-1}^0 f(r_m, r'(\xi, \varphi')) d\xi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k w_i f(\xi_i(\xi'_i)) \quad (3.29)$$

Concernant le domaine droit d'intégration, le changement de variable se fait par l'intermédiaire de :

$$\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi' \quad (3.30)$$

et I_2 devient :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \left(\int_{-1}^1 f(r_m, r'(\xi', \varphi')) d\xi' \right) d\varphi' \quad (3.31)$$

L'intégrale en ξ de l'équation (3.26) devient donc par la quadrature de Gauss-Legendre :

$$\int_0^1 f(r_m, r'(\xi, \varphi')) d\xi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k w_i f(\xi_i(\xi'_i)) \quad (3.32)$$

Cette démarche est inspirée de celles contenues dans les références [7,140-142] (cf. § 2.2.1.2.2). Cette technique permet donc de déplacer la singularité vers l'extrémité de domaines d'intégration, ce qui rend son traitement par augmentation de la densité de points de Gauss possible.

3.3.1.2.2 Tests de validation

La méthode numérique décrite ci-dessus (option 2) est comparée à la méthode semi-analytique faite à l'aide d'une décomposition et d'un traitement spécial basé sur l'emploi d'intégrales elliptique (option 1) sur trois structures. L'option 1 emploie également NINT1 et NINT2 points de Gauss suivant ξ et φ et $2 * NINT1$ points de Gauss pour le calcul des intégrales diagonales à condition que le noeud de calcul coïncide avec le noeud milieu de l'élément. Les calculs portent tous sur le test de la source ponctuelle (cf. § 2.6).

La première structure utilisée ici est une sphère de rayon a dont la génératrice a été maillée par 8 éléments, soit 17 noeuds (figure 3.11). La fréquence maximale autorisée compatible avec le "critère en $\lambda/4$ " est $F = 952,29$ Hz, soit $ka = 4,02$. La source ponctuelle est placée en O, au centre de la structure. Les calculs sont effectués par équations intégrales à F. À F, la longueur d'onde ($\lambda = c/f$) est $\lambda = 1,565$ m. La plus grande circonférence étant $6,283a$ m, le nombre de points de Gauss selon φ à cette circonférence est $4,016a * NINT2$.

Pour chacune des deux options, on fait varier NINT1 de 1 à 80 et NINT2 de 1 à 15. Les résultats en EQM se trouvent sur la figure 3.12 pour l'option 1 et 3.13 pour l'option 2.

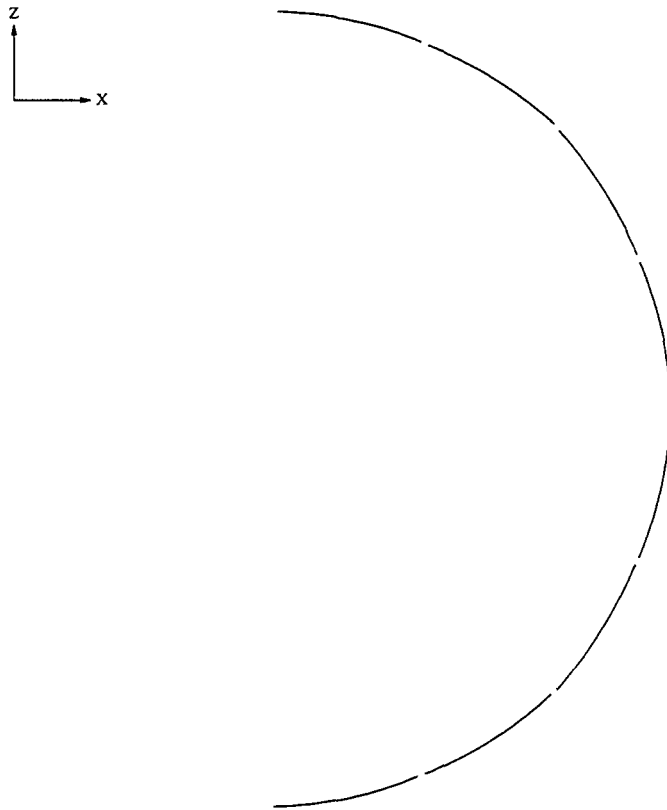


Figure 3.11. Maillage de la sphère en symétrie axiale.

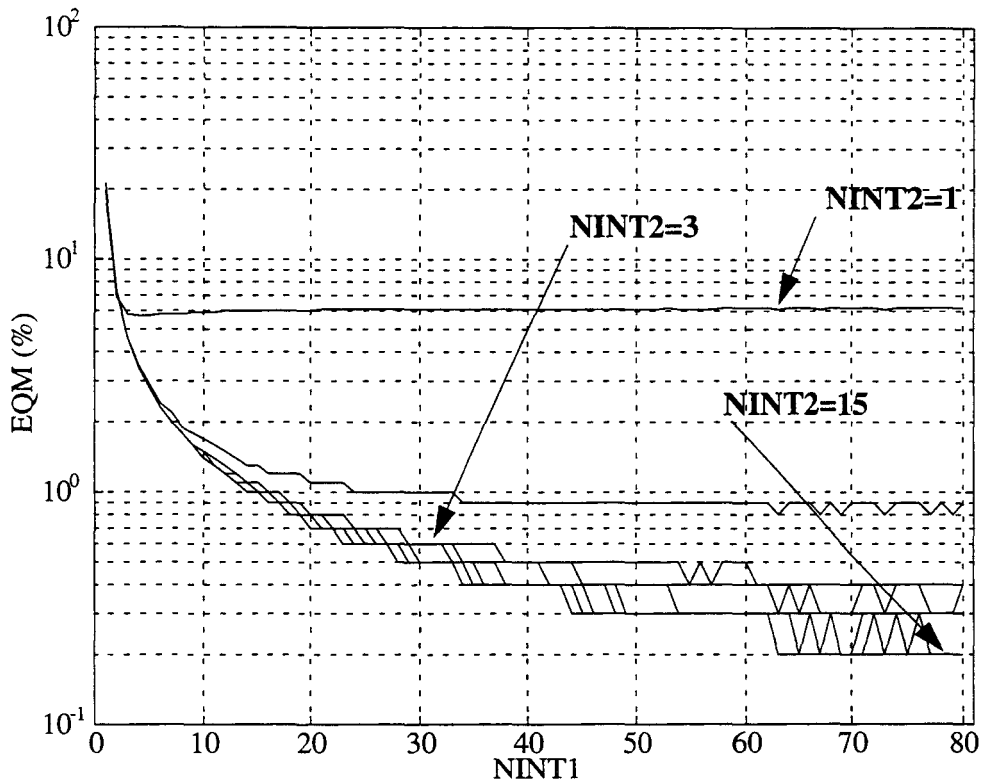


Figure 3.12. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas de la sphère. Intégration semi-analytique.

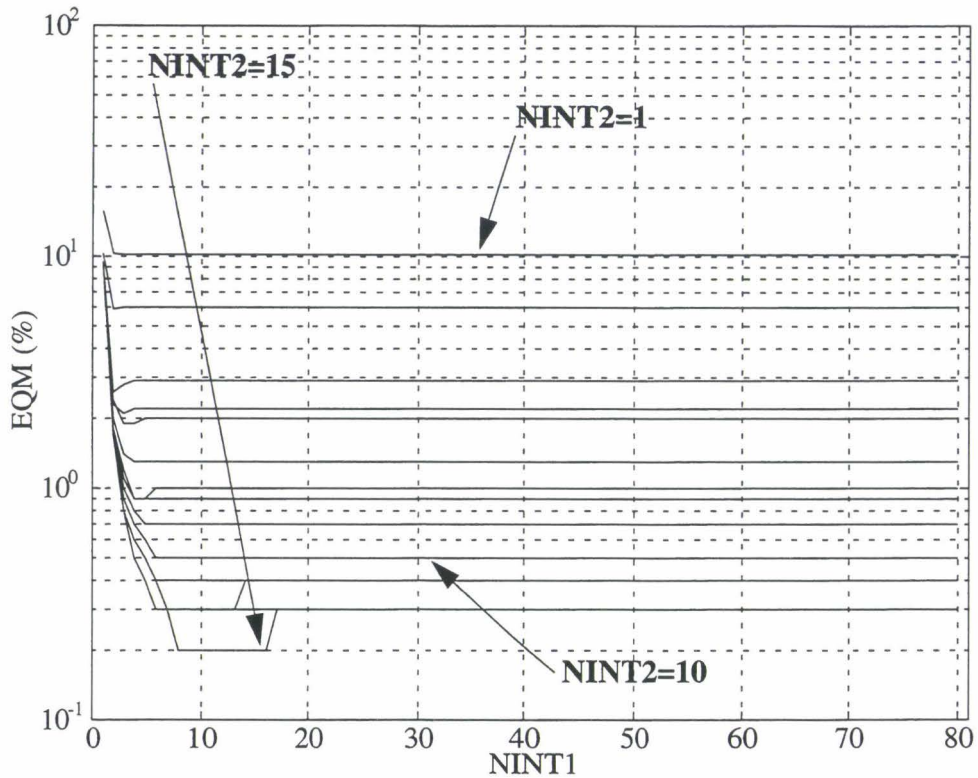


Figure 3.13. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas de la sphère. Intégration numérique.

La deuxième structure utilisée est un cylindre de section circulaire de rayon a et de hauteur $3a$ dont la génératrice a été maillée par 20 éléments, soit 41 noeuds (figure 3.14). La plus haute fréquence de la bande est $F = 744,98$ Hz, soit $ka = 6,28$. La source ponctuelle est placée en O , au centre de la structure. Les calculs sont effectués par équations intégrales à la fréquence F . Sur la plus grande circonférence, le nombre de points de Gauss selon φ est $3,142a * NINT2$.

Pour l'option 1, NINT1 varie de 1 à 50 et NINT2 de 1 à 6. Pour l'option 2, on fait varier NINT1 de 1 à 50 et NINT2 de 5 à 15. Les résultats en EQM se trouvent sur la figure 3.15 pour l'option 1 et 3.16 pour l'option 2.



Figure 3.14. Maillage du cylindre en symétrie axiale.

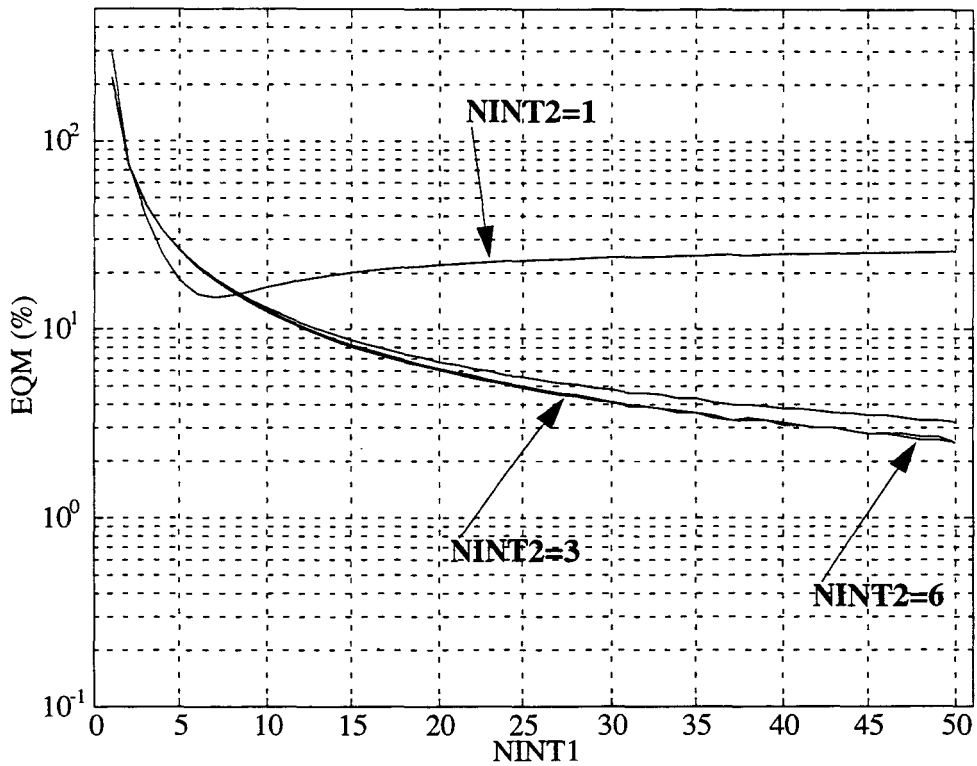


Figure 3.15. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas du cylindre. Intégration semi-analytique.

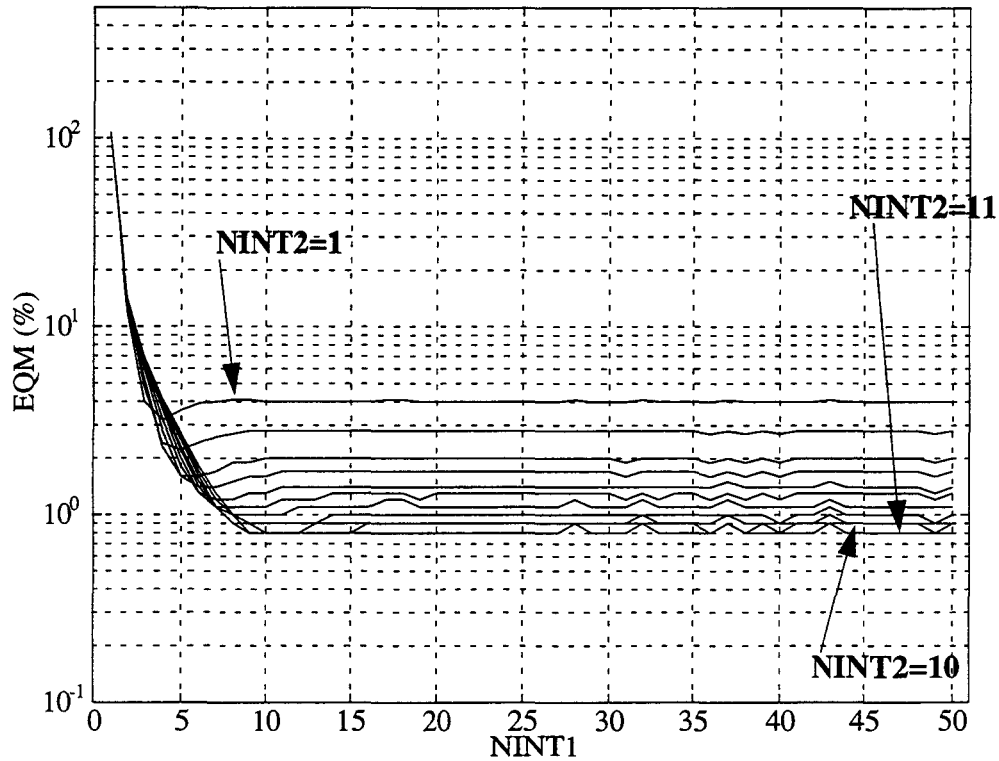


Figure 3.16. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas du cylindre. Intégration numérique.

La dernière structure étudiée ici est un cône de rayon maximum a et de hauteur $3a$ dont la génératrice a été maillée par 52 éléments, soit 105 noeuds (figure 3.17). La fréquence la plus élevée de la bande est $F = 4469,5$ Hz, soit $ka = 18,85$. La source ponctuelle est placée en O . Les calculs sont effectués par équations intégrales à une fréquence proche de F , 4444 Hz (F étant trop proche d'une fréquence irrégulière). Sur la plus grande circonférence, le nombre de points de Gauss selon φ est $18,74a * NINT2$.

Pour l'option 1, on fait varier NINT1 de 20 à 40 et NINT2 de 2 à 5, les résultats en EQM se trouvent sur la figure 3.18. Pour l'option 2, NINT1 varie de 2 à 15 et NINT2 de 5 à 15, les résultats en EQM se trouvent sur la figure 3.19.

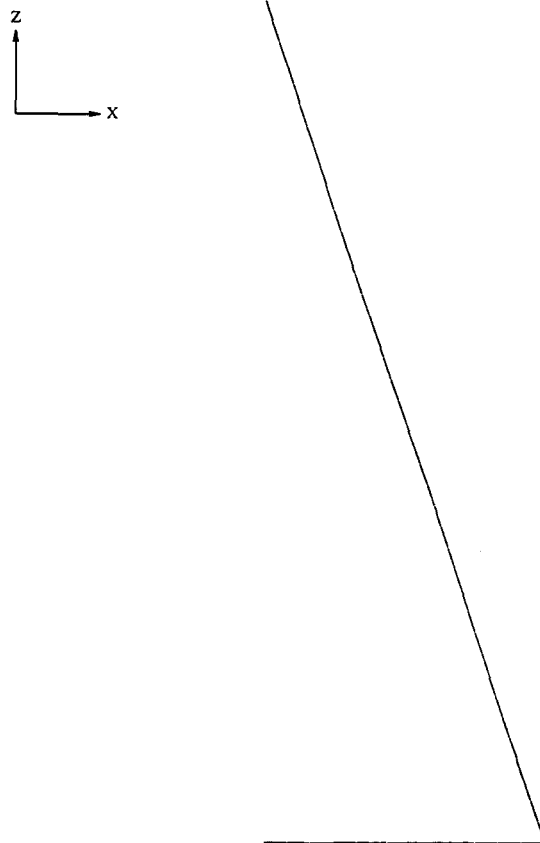


Figure 3.17. Maillage du cône en symétrie axiale.

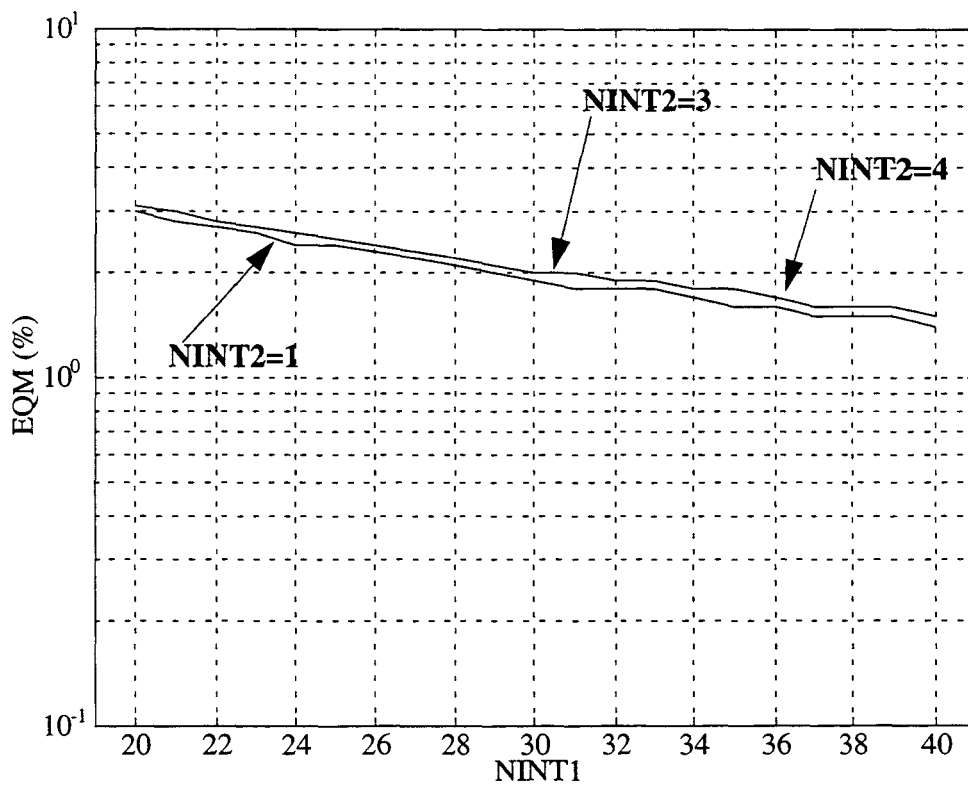


Figure 3.18. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas du cône. Intégration semi-analytique.

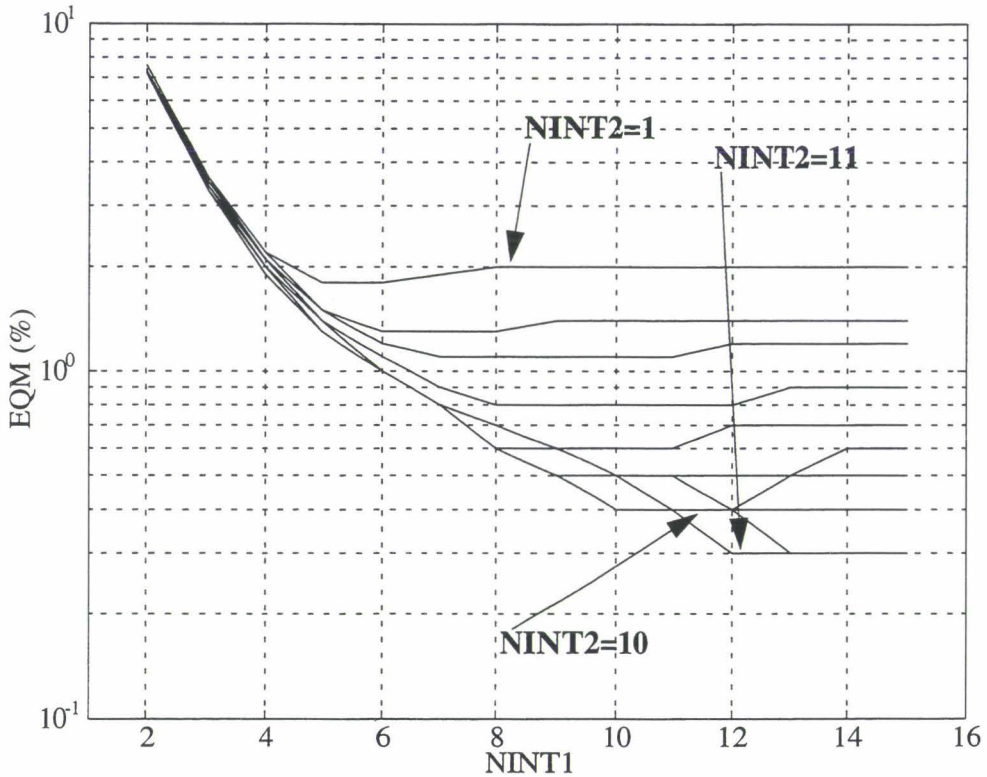


Figure 3.19. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas du cône. Intégration numérique.

Pour l'option 1, la convergence est obtenue pour un couple (NINT1,NINT2) égal à (30,3). En ce qui concerne l'option 2, la convergence est atteinte pour le couple (8,10).

Pour les trois structures utilisées ici, les temps CPU sont respectivement, dès convergence atteinte : 0,36 s, 2,03 s et 22,5 s pour l'option 1; 0,29 s, 1,95 s et 20,8 s pour l'option 2. À convergence équivalente, la méthode numérique est donc plus rapide que celle semi-analytique.

Cette méthode numérique est donc systématiquement employée dans la suite de ce document.

3.3.1.3 Application de l'interpolation

Tout comme dans le cas tridimensionnel (cf. sous-chapitre précédent), on décide d'employer la distance $D_{m ij}$, qui est la distance entre le point de calcul r_m et le point i de l'élément Γ_j , comme distance à soustraire à D_m afin de supprimer l'oscillation présente dans les intégrales en fonction de la fréquence. Or, dans de nombreux cas, les distances $D_m - D_{m ij}$ sont très différentes de 0 car les points de Gauss se trouvent placés sur la demi-circonférence et peuvent être éloignés de la génératrice (voir figure 3.20). Dans ces cas, la factorisation précédente ne permet pas de supprimer l'oscillation.

Pour pouvoir interpoler sur des grandeurs non oscillantes, il faut soustraire une distance proche de D_m mais indépendante des points de Gauss. On propose une décomposition de chaque élément circulaire en sous-éléments circulaires [152].

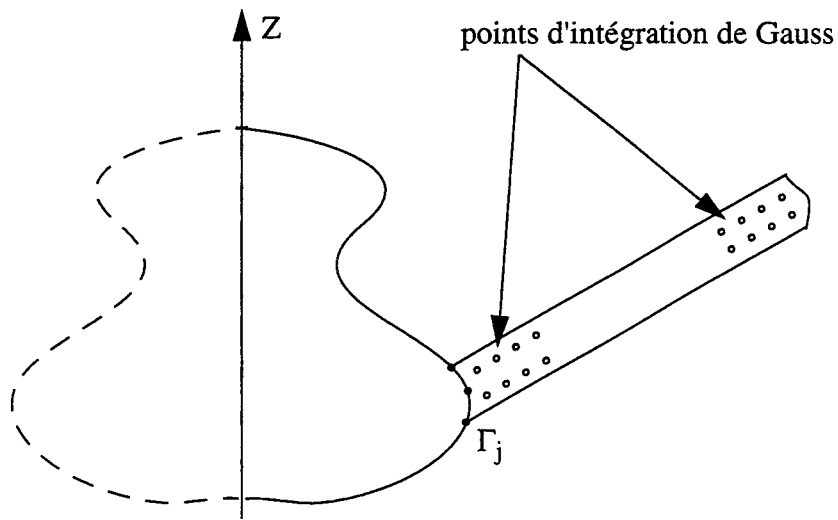


Figure 3.20. Visualisation, par aplatissement de la circonférence de l'élément sur une longueur d'onde, des points de Gauss par rapport au maillage.

Il faut donc placer des points fixes, que l'on nomme \mathbf{r}_λ , sur chaque bande de circonférence d'élément à intervalles réguliers et utiliser des distances qui soient fonctions de ces points fixes (figure 3.21). Puisque la symétrie selon le plan XOZ est déjà prise en compte (cf. § 3.3.1.2) dans les intégrations, il ne faut situer des points \mathbf{r}_λ que sur la demi-circonférence correspondante à φ variant de 0 à π . Il suffit ainsi de placer assez de points \mathbf{r}_λ pour que les distances $D_m - D_{m\lambda}$ ($D_{m\lambda}$ étant la distance séparant \mathbf{r}_m de \mathbf{r}_λ) soient suffisamment petites de telle façon que :

$$e^{ikD_m} = e^{ikD_{m\lambda}} e^{ik(D_m - D_{m\lambda})} \quad (3.33)$$

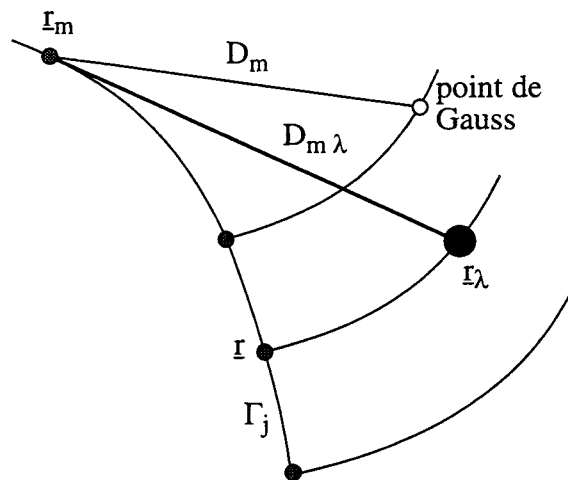


Figure 3.21. Notion de points \mathbf{r}_λ sur les circonférences.

Pour chaque point \mathbf{r}_λ , que l'on appelle point de décomposition, les calculs sont faits pour les points de Gauss les plus proches (pour que la distance $D_m - D_{m\lambda}$ soit la plus petite possible et que l'oscillation soit atténuée au maximum).

Définition de la circonférence et de la prise en compte des points de Gauss (d'intégration).

On se place à un noeud de calcul \underline{r}_m donné et en un point \underline{r} donné (appartenant à l'élément Γ_j) (figure 3.21). Les intégrales qui interviennent dans les équations intégrales, pour le calcul du coefficient en question, sont de la forme :

$$\int \int_{\Gamma_j} f(\underline{r}_m, \underline{r}') d\underline{r}' \quad (3.34)$$

Ce type d'intégrale est calculé par la quadrature de Gauss-Legendre et s'écrit ainsi :

$$\sum_{n=1}^{NTPG\Gamma_j} F(\underline{r}_m, \underline{r}') \quad (3.35)$$

$NTPG\Gamma_j$ étant le nombre total de points de Gauss de Γ_j . Dans cette expression, la sommation double est développée pour être remplacée par une sommation simple.

Avec les points \underline{r}_λ , l'intégration doit être faite par morceaux. Le nombre de morceaux est égal au nombre de points \underline{r}_λ placés sur la circonférence de \underline{r} . Chaque morceau contient les points de Gauss de la zone d'influence de \underline{r}_λ (c'est à dire les points de Gauss les plus proches de \underline{r}_λ) (figure 3.22).

$$\sum_{n=1}^{NTPG\Gamma_j} F(\underline{r}_m, \underline{r}') = \sum_{\lambda=1}^{N\lambda} \sum_{n=1}^{NTPG\lambda} F(\underline{r}_m, \underline{r}') \quad (3.36)$$

avec $N\lambda$ le nombre de points \underline{r}_λ placés sur la circonférence de \underline{r} , $NTPG\lambda$ le nombre total de points de Gauss de la zone d'influence de \underline{r}_λ .

Pour chacun des trois noeuds de l'élément considéré, on découpe la demi-circonférence en zones d'influences centrées sur \underline{r}_λ .

Remarque.

Dans un premier temps, pour chaque noeud de l'élément considéré, on s'était contenté de placer des points \underline{r}_λ sur la demi-circonférence issue du noeud milieu. Or, la phase de recouvrement des distances $D_{m\lambda}$ se fait sans considérer d'élément en particulier. Il est donc impossible de recouvrer la bonne distance lorsque le noeud considéré appartient à deux éléments.

Définition de l'intervalle.

Chaque élément d'intégration est une bande étalée sur une demi-circonférence et découpée en zones d'influence de hauteur maximale égale à $\lambda/4$. Par analogie avec le maillage 3D, la dimension longitudinale de chaque zone d'influence ne doit pas excéder $\lambda/4$: la distance entre deux points consécutifs \underline{r}_λ est donc inférieure ou égale à $\lambda/4$. De plus, pour que la décomposition soit identique pour les deux fréquences bornes et la fréquence d'interpolation, on choisit le découpage imposé par la fréquence borne supérieure.

La figure (3.22) résume le principe de la décomposition des éléments circulaires : chaque noeud d'un élément du maillage appartient à un périmètre et un élément circulaire selon φ . L'élément circulaire est découpé en zones d'influence de même longueur $\lambda_{\max}/4$. Une zone d'influence est représentée par un point de décomposition \mathbf{r}_λ du périmètre du noeud. Donc, pour chaque point de Gauss compris dans la zone d'influence de \mathbf{r}_λ , la quantité $D_m - D_{m\lambda}$ est voisine de 0 et le processus d'interpolation fréquentielle est alors mené zone d'influence par zone d'influence.

Pour éviter le problème de la duplicité des normales et conformément au traitement décrit dans le cas du problème 3D, on projette la matrice [B] sur les deux coordonnées X et Z.

Les matrices sont reconstruites pour l'ensemble des points de Gauss en sommant sur la totalité des points de Gauss de chaque demi-circonférence :

$$\begin{aligned}
 A_f(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') &= \sum_{\lambda=1}^{N\lambda} A_{\lambda f}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') \\
 B_{xf}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') &= \sum_{\lambda=1}^{N\lambda} B_{x\lambda f}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') \\
 B_{zf}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') &= \sum_{\lambda=1}^{N\lambda} B_{z\lambda f}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}')
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

où $N\lambda$ est le nombre de \mathbf{r}_λ au niveau de la circonférence considéré et l'indice λ de matrice indique la matrice correspondante à la zone d'influence λ .

Le traitement informatique est détaillé dans l'annexe A31.

La place disque nécessaire au stockage des matrices bornes est beaucoup moins pénalisante que dans le cas d'un problème 3D car les noeuds sont restreints à la génératrice. La place disque nécessaire maximale est celle correspondante à la phase d'interpolation. Pour un problème à NN noeuds sur la génératrice, et à $N\lambda_{\max}$ points de décomposition sur la plus grande circonférence de la structure, cette place disque en octets est majorée par la relation : $144NN^2N\lambda_{\max} + 8NN$.

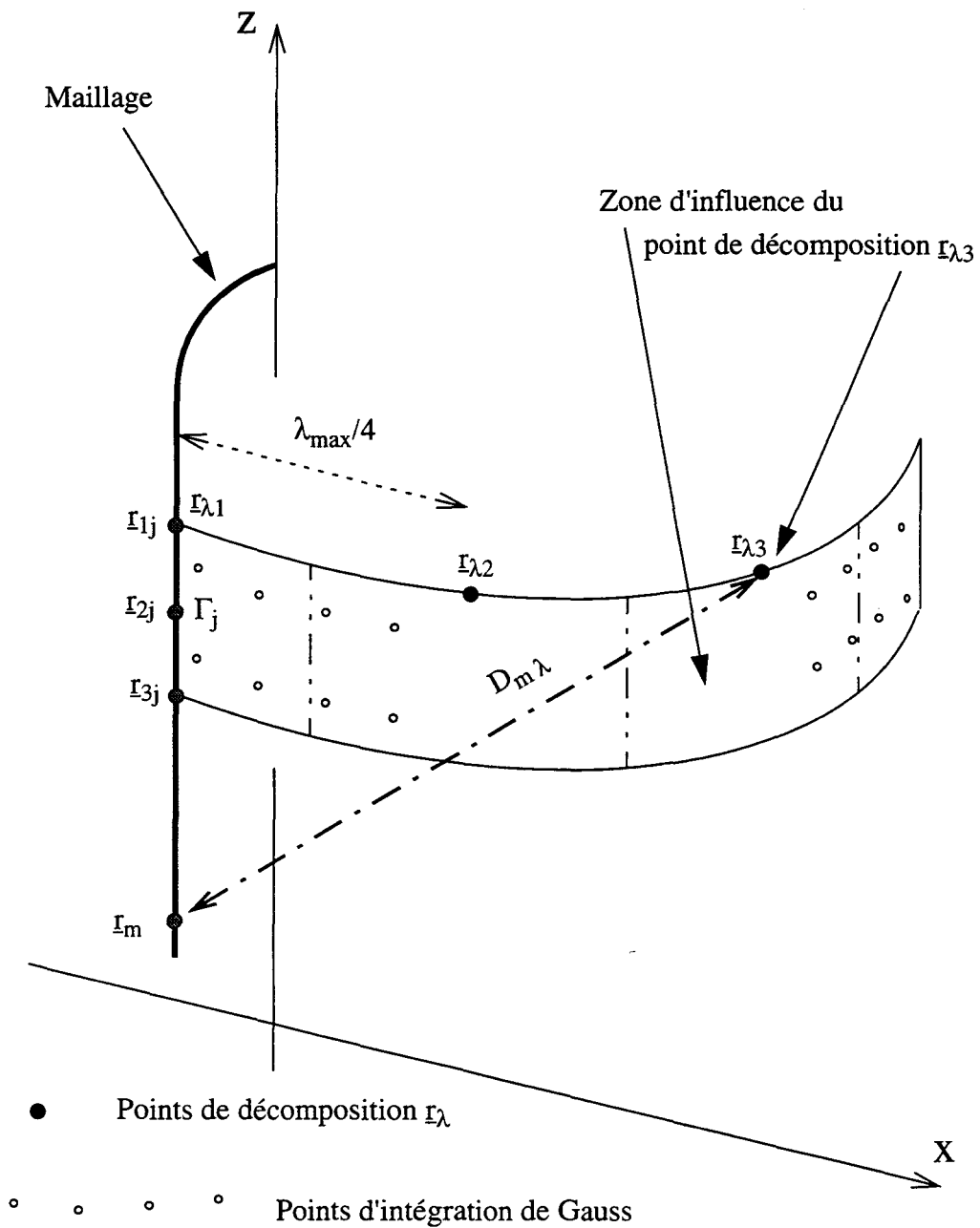


Figure 3.22. Points de décomposition et zones d'influence correspondants au noeud I_{1j} de l'élément Γ_j .

3.3.2 Validation

Dans cette section, la validation de la méthode d'interpolation linéaire en fréquence appliquée aux problèmes à symétrie axiale est effectuée. Différents tests permettent de mesurer la fiabilité de la technique développée et son utilité en gain de temps CPU lors d'une analyse multi-fréquence.

Durant tous les tests, la technique est comparée avec la méthode classique (sans interpolation) où l'intégration est successivement réalisée par la méthode semi-analytique et la méthode nu-

mérique (cf. § 3.3.1). Dans un premier temps, on discute le choix de l'intervalle entre les points de décomposition effectué au paragraphe 3.3.1. Ensuite, les comparaisons sont faites par le test de la source ponctuelle (cf. § 2.6). Enfin, des tests de diffraction rigide permettent de valider complètement la technique proposée.

Les calculs d'intégration des équations intégrales en symétrie axiale sont ici menés avec les nombres de points de Gauss définis en 3.3.1.2.2 assurant la convergence, à savoir un couple (NINT1,NINT2) de (30,3) pour l'intégration semi-analytique et de (8,10) pour l'intégration numérique. Conformément à l'étude des problèmes 3D, les fréquences bornes sont 0 Hz et F.

Convergence avec l'intervalle entre les points de décomposition.

On choisit la sphère décrite au § 3.3.1.2.2 pour montrer que le choix d'une distance $\lambda/4$ entre deux points de décomposition successifs est justifié.

Une source ponctuelle est placée au centre de la sphère. On fait varier l'intervalle entre les points de décomposition de λ_{\max} à $\lambda_{\max}/10$. L'EQM, la place disque nécessaire et les temps CPU (de stockage et d'interpolation) par le test de la source ponctuelle sont donnés dans le tableau 3.16 pour un calcul d'interpolation à 500 Hz ($k_a = 2,11$) entre 0 Hz et F ($F = 952,29$ Hz).

intervalle entre points de décomposition (m)	EQM (%)	place disque nécessaire (Mo)	temps CPU (s)
λ_{\max}	33	0,12	1,4
$\lambda_{\max}/2$	5,9	0,2	2,5
$\lambda_{\max}/3$	2,8	0,28	3,7
$\lambda_{\max}/4$	2,5	0,36	5,1
$\lambda_{\max}/5$	2	0,44	6,4
$\lambda_{\max}/6$	3	0,52	8,3
$\lambda_{\max}/7$	1,8	0,6	9,9
$\lambda_{\max}/8$	0,9	0,68	12
$\lambda_{\max}/9$	1,3	0,75	14,5
$\lambda_{\max}/10$	1,2	0,83	17,4

Tableau 3.16. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation en faisant varier l'intervalle entre les points de décomposition.

La consultation de ce tableau et la mise en oeuvre de nombreux autres exemples permettent de constater que le choix d'une distance de $\lambda_{\max}/4$ entre deux points consécutifs r_λ est indiqué et constitue un bon compromis entre l'EQM, la place disque et le temps CPU. C'est ce découpage qui est utilisé dans la suite.

Comparaisons en EQM et temps CPU.

Quatre types de calculs sont présentés :

- option a : option semi-analytique, issue d'un calcul classique (sans interpolation fréquentielle) avec le mode d'intégration semi-analytique,
- option b : option numérique, issue d'un calcul classique avec méthode d'intégration entièrement numérique,
- option c1 : option 1 intervalle, issue de la méthode d'interpolation linéaire en fréquence avec les fréquences bornes égales à 0 Hz et F,
- option c2 : option 2 intervalles, issue de la méthode d'interpolation linéaire en fréquence avec deux intervalles de fréquence : 0-F/2 et F/2-F. Dans ce cas, trois stockages sont exécutés, à 0 Hz, F/2 et F.

Plusieurs exemples sont donnés pour démontrer le bon comportement de la technique d'interpolation linéaire en fréquence des équations intégrales.

Les cinq premiers exemples concernent le test de la source ponctuelle. Des comparaisons sont faites entre toutes les options de calcul. La bande de fréquence complète est couverte Hz par Hz.

La première structure est la sphère décrite au § 3.3.1.2.2 ($F = 952,29$ Hz). La source ponctuelle est située au centre de la structure (figure 3.23). Le nombre maximum de points de décomposition par circonférence étant 9, la place disque nécessaire à l'interpolation est de 0,36 Mo. La figure 3.24 montre la variation logarithmique de l'EQM avec la fréquence.

Un bon accord entre toutes les options est observé. La fréquence irrégulière est mise en évidence par chaque option, mais avec un pic un peu plus large pour l'option c1. Néanmoins, cette relative imprécision est accentuée par l'échelle logarithmique utilisée, qui amplifie les faibles différences.

À une fréquence de calcul donnée, le temps CPU cumulé prend en compte le coût en temps CPU de toutes les fréquences de calcul antérieures de la bande. De plus, dans le cas de l'interpolation, le coût en temps CPU des étapes de stockage est pris en compte avant la première fréquence de calcul. Ce temps CPU cumulé est dessiné par rapport à la fréquence sur la figure 3.25.

Les options d'interpolation deviennent attractives à partir d'un nombre de fréquences de calcul supérieur à la moitié du nombre total de fréquences entre 0 et F. La différence en temps CPU entre les deux options d'interpolation est uniquement due au stockage additionnel à F/2 lors de l'utilisation de l'option c2.

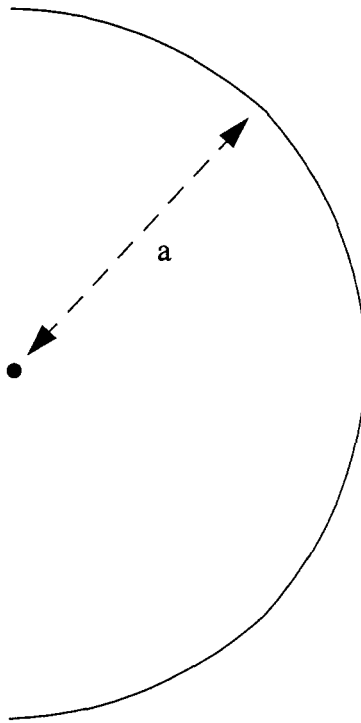


Figure 3.23. Situation du problème de la sphère.

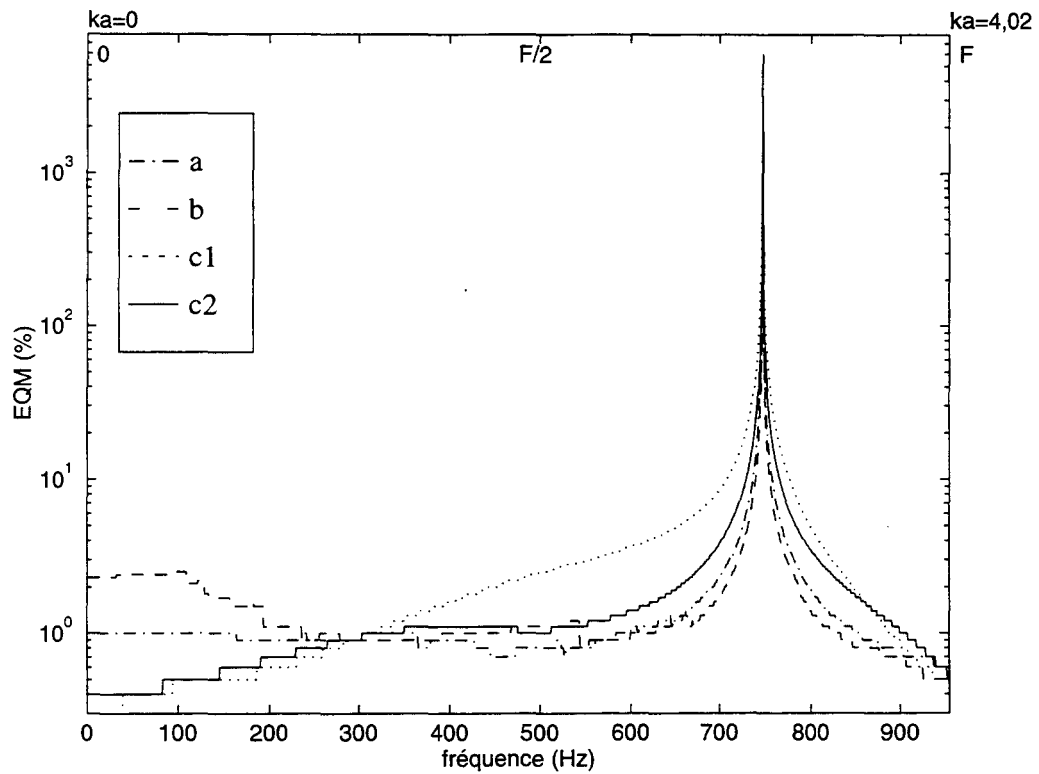


Figure 3.24. EQM en fonction de la fréquence dans le cas de la sphère avec une source ponctuelle en O.

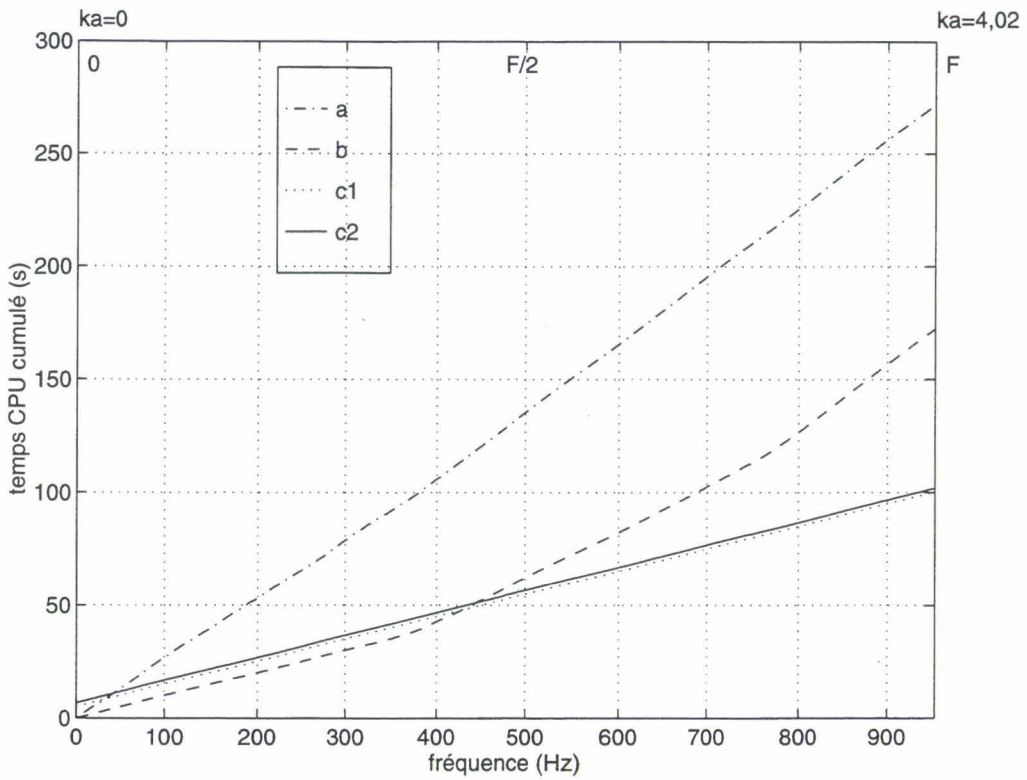


Figure 3.25. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas de la sphère avec une source ponctuelle en O.

Le second exemple est celui d'un petit cylindre de section circulaire de rayon a et de hauteur $3a$ dont la génératrice est maillée par 5 éléments, soit 11 noeuds (figure 3.26). La plus haute fréquence du spectre est $F = 186,25$ Hz, soit $ka = 1,57$. La source ponctuelle est placée au centre de la structure. La place disque utile à l'interpolation, pour le maximum de points de décomposition, est de $0,07$ Mo. L'EQM (figure 3.27) et le temps CPU cumulé (figure 3.28) en fonction de la fréquence sont encore fournis.

Malgré une bonne précision des résultats, le très petit nombre de noeuds de la structure rend la méthode d'interpolation fréquentielle non attractive.

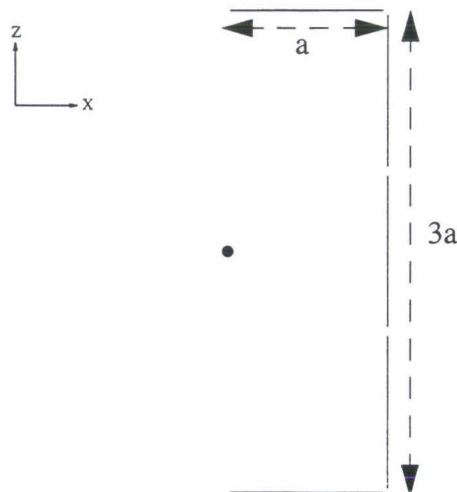


Figure 3.26. Situation du problème du petit cylindre.

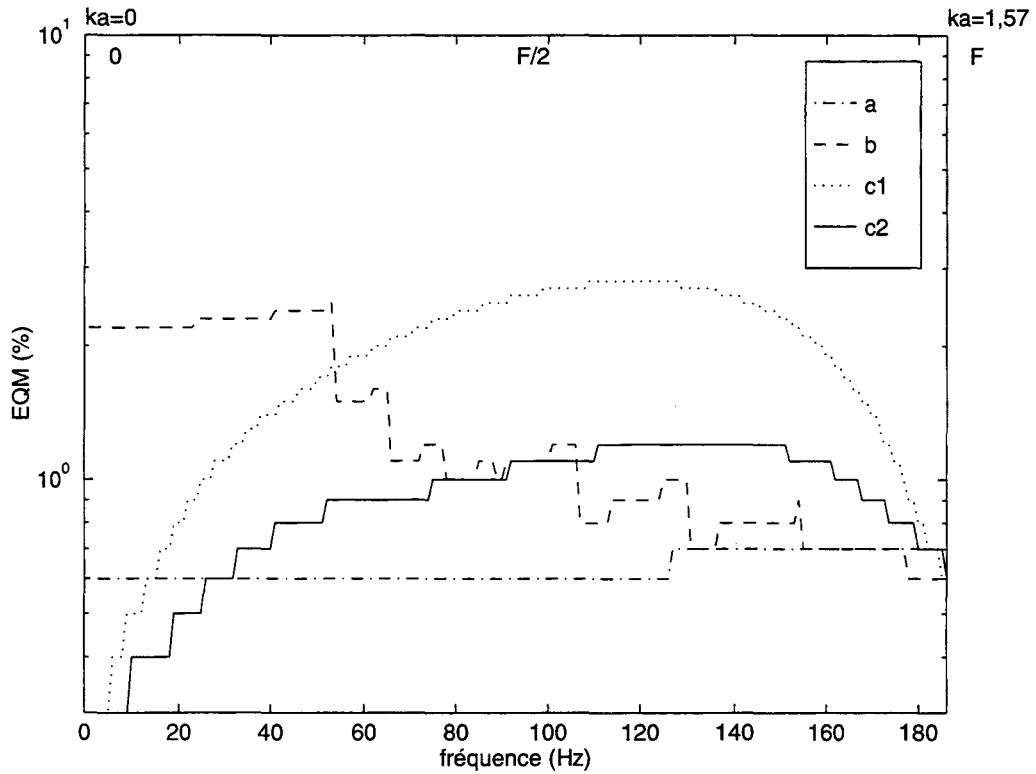


Figure 3.27. EQM en fonction de la fréquence dans le cas du petit cylindre avec une source ponctuelle en O.

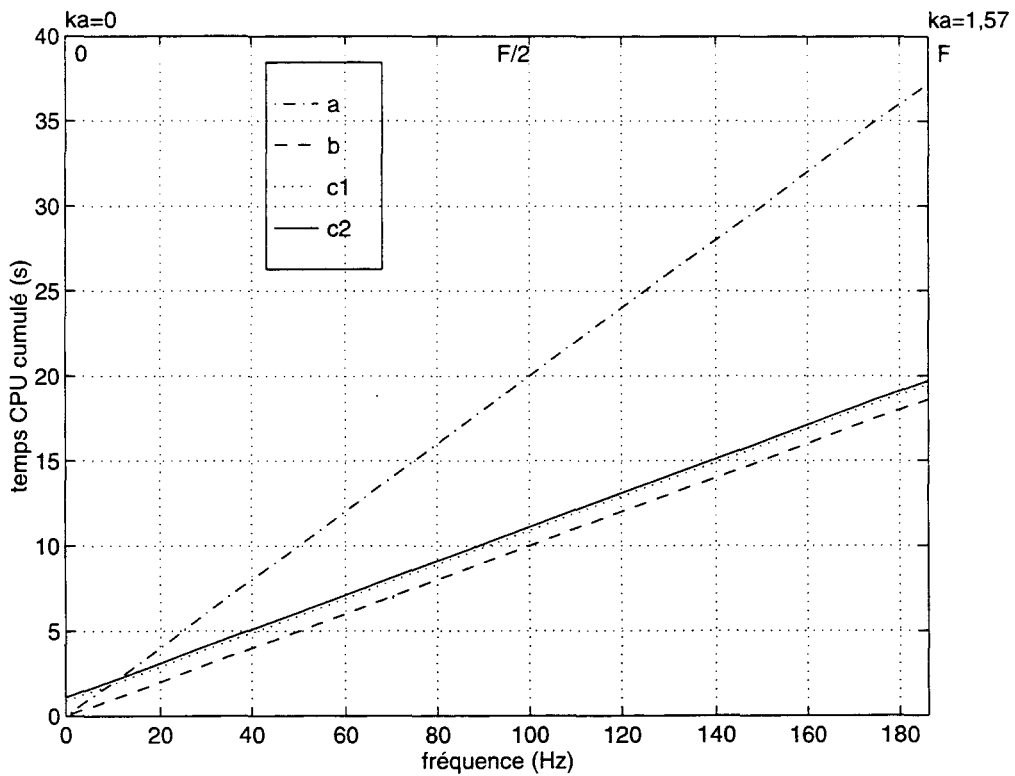


Figure 3.28. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas du petit cylindre avec une source ponctuelle en O.

Le troisième exemple est fait sur un cylindre de maillage plus dense, celui décrit au § 3.3.1.2.2 ($F = 744,98$ Hz). La source ponctuelle est au centre (figure 3.29). Un maximum de 13 points de décomposition est utilisé, donc la place disque nécessaire est de 3 Mo. Encore une fois l'EQM (figure 3.30) et le temps CPU cumulé (figure 3.31) en fonction de la fréquence sont donnés.

Les conclusions sont les mêmes que pour la sphère : bonne concordance entre toutes les options, élargissement des pics de fréquence irrégulière avec la technique d'interpolation sur un intervalle entre 0 Hz et F et un net gain de temps CPU des méthodes d'interpolation.

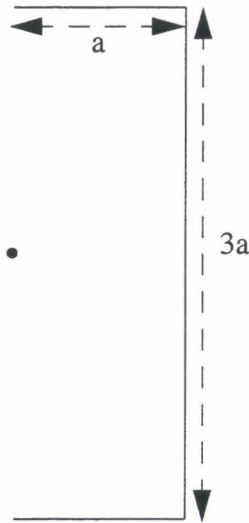


Figure 3.29. Situation du problème du cylindre.

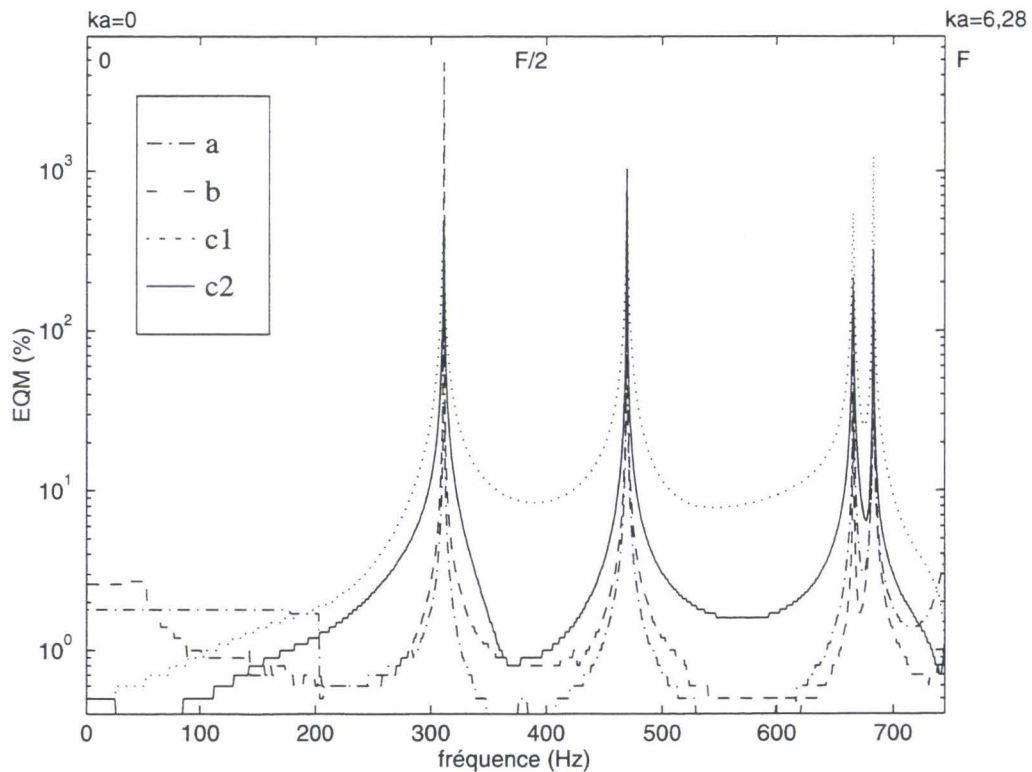


Figure 3.30. EQM en fonction de la fréquence dans le cas du cylindre avec une source ponctuelle en O.

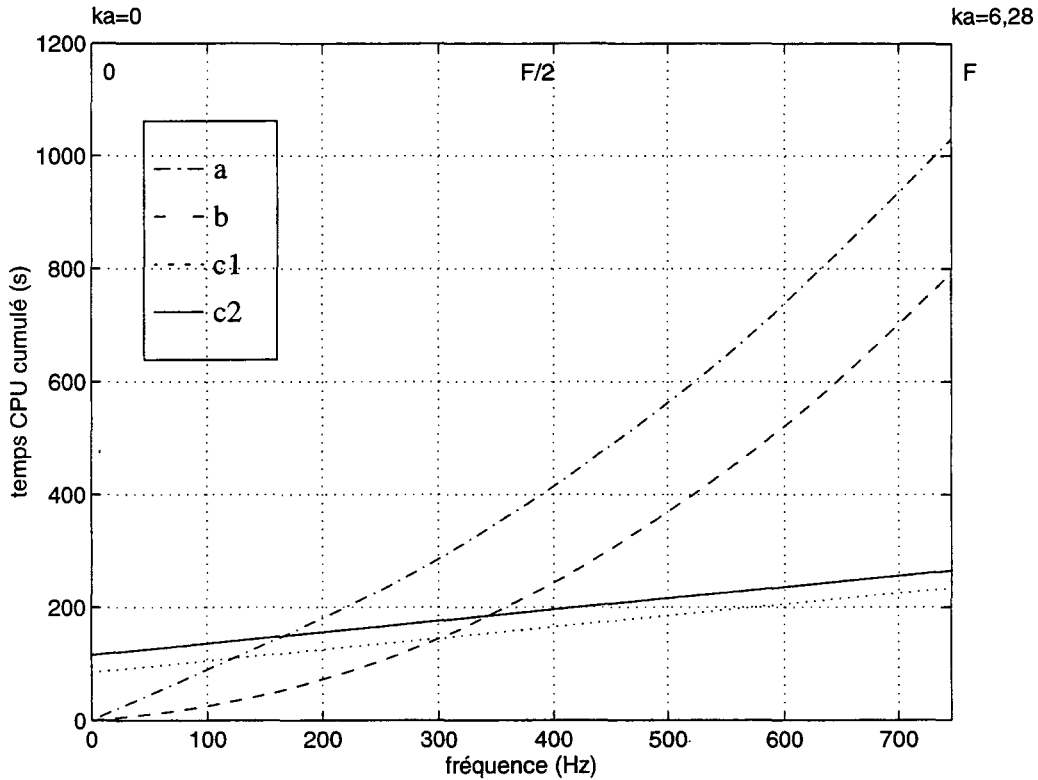


Figure 3.31. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas du cylindre avec une source ponctuelle en O.

Le quatrième exemple concerne le cône défini au § 3.3.1.2.2 ($F = 4469,5$ Hz). La source ponctuelle est placée en O (figure 3.32). La place disque nécessaire à l'interpolation est de 57,54 Mo, étant donné que le maximum de points de décomposition utilisé est 38. L'EQM (figure 3.33) et le temps CPU cumulé (figure 3.34) sont encore tracés en fonction de la fréquence.

Les mêmes conclusions sont ici à tirer, avec une accentuation du gain de temps CPU de l'interpolation fréquentielle.

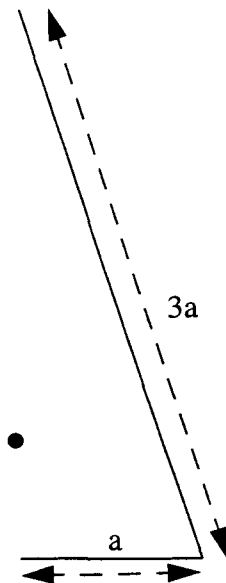


Figure 3.32. Situation du problème du cône.

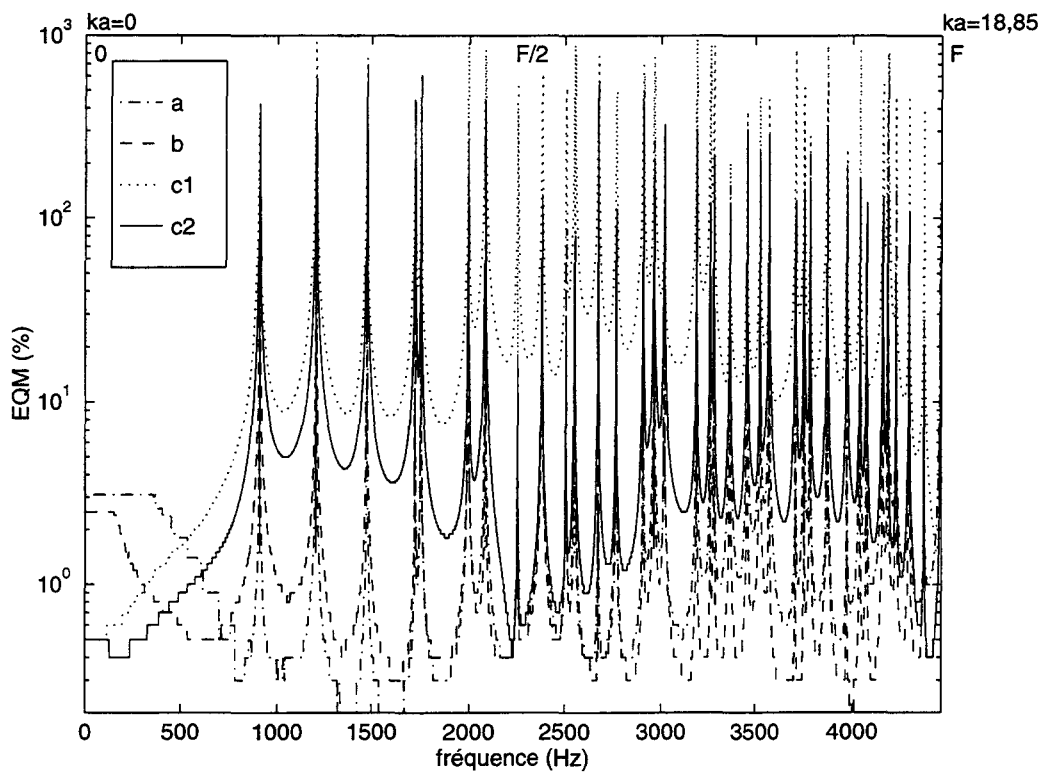


Figure 3.33. EQM en fonction de la fréquence dans le cas du cône avec une source ponctuelle en O.

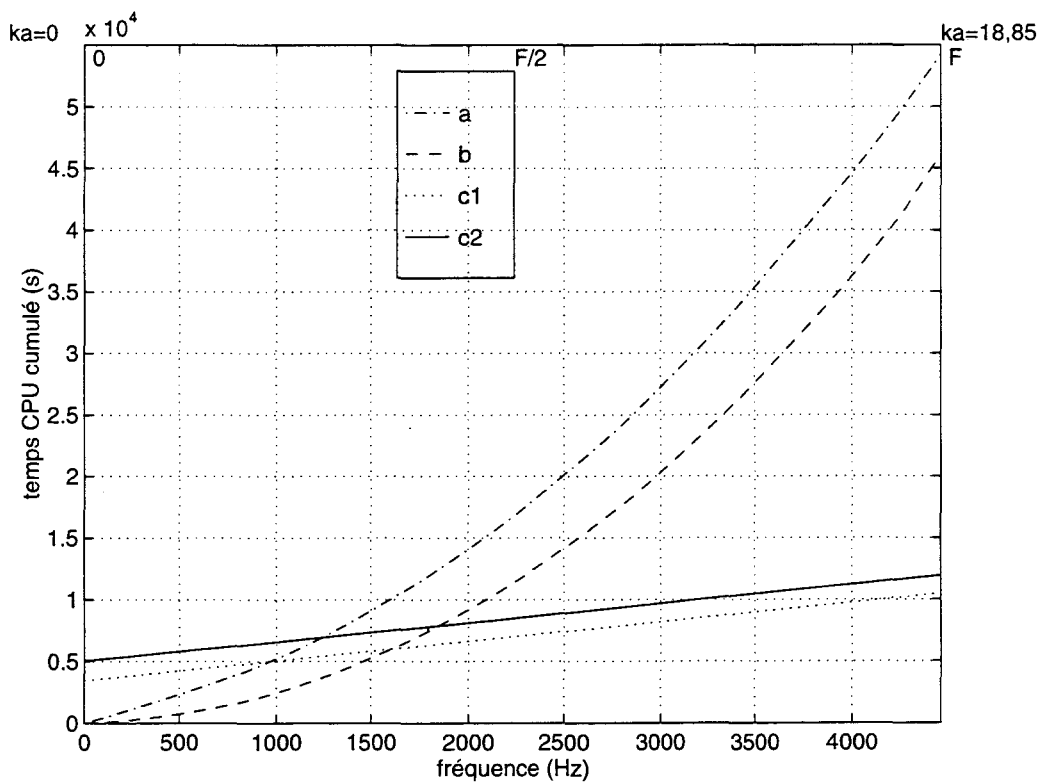


Figure 3.34. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas du cône avec une source ponctuelle en O.

Dans le cinquième exemple, la source ponctuelle est décalée par rapport au centre d'une structure de rayon a et de hauteur $4a$, appelée usuellement LINE (cf. figure 3.35). Le maillage comporte 30 éléments, soit 61 noeuds. $F = 1862,5$ Hz, soit $ka = 7,85$. La place disque utile au processus d'interpolation, avec les 16 points de décomposition au maximum utilisés, est de 8,18 Mo.

Le tracé de l'EQM (figure 3.36) et du temps CPU cumulé (Figure 3.37) en fonction de la fréquence confirme l'efficacité de la méthode d'interpolation linéaire. Dans ce cas-ci, le processus d'interpolation nécessite à peu près 5 fois moins de temps CPU pour calculer la bande complète de fréquence que les méthodes classiques.

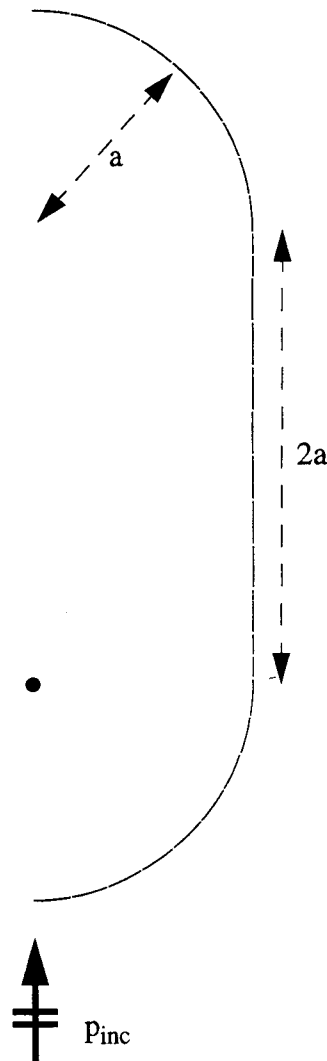


Figure 3.35. Situation du problème de la structure LINE.

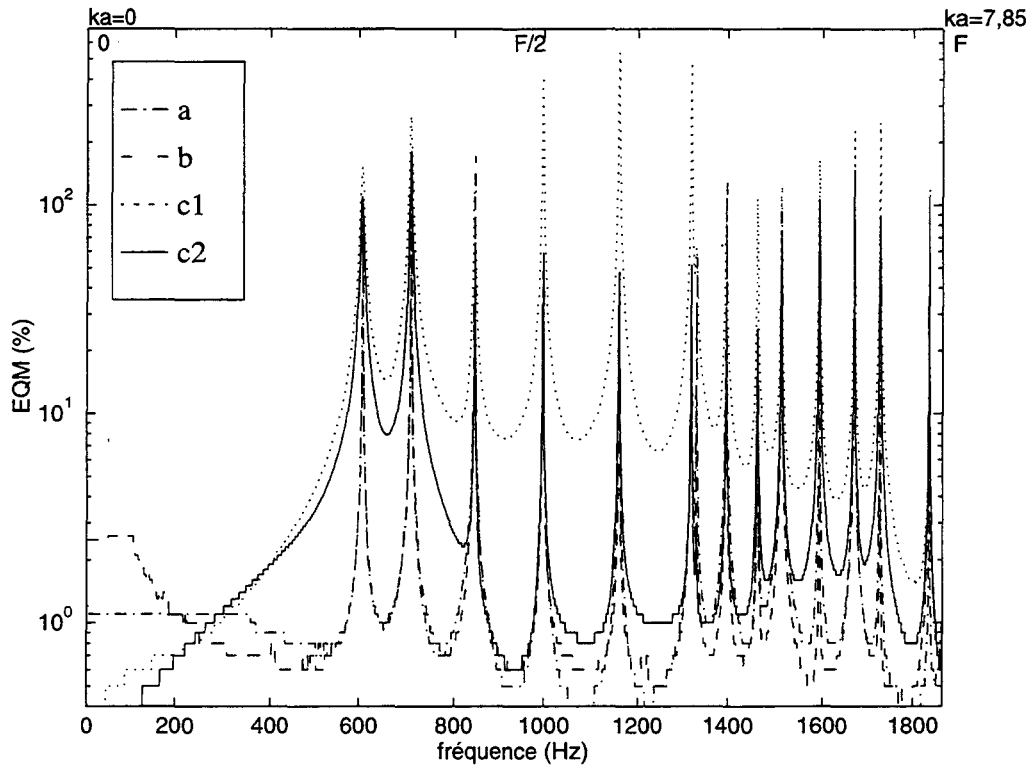


Figure 3.36. EQM en fonction de la fréquence dans le cas de la structure LINE avec une source ponctuelle décalée par rapport à O.

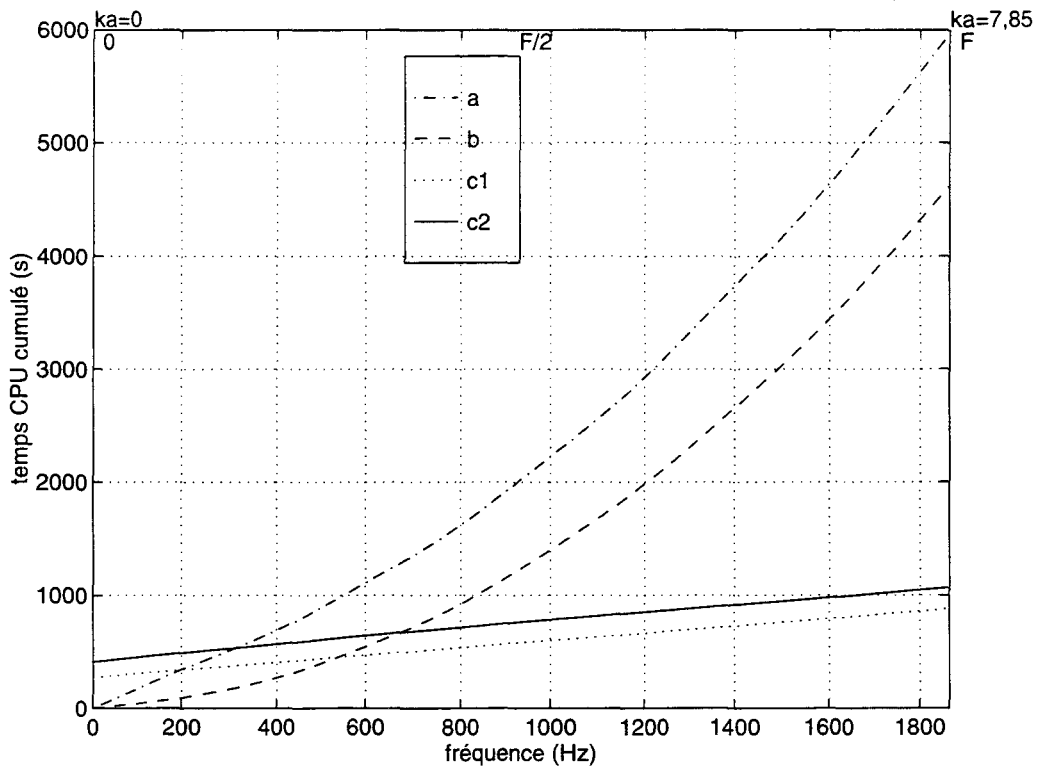


Figure 3.37. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas de la structure LINE avec une source ponctuelle décalée par rapport à O.

Le dernier exemple concerne cette fois la diffraction par la même cible LINE que précédemment, mais rigide et éclairée par une onde incidente plane se propageant le long de l'axe de symétrie de la géométrie (cf. figure 3.35) dans le sens des Z positifs.

Les figures 3.38, 3.39 et 3.40 donnent le spectre de rétrodiffraction rigide respectivement sur la surface, dans le fluide à $10a$ de l'origine et en champ lointain, les calculs étant effectués à chaque Hz. La bande de fréquence étudiée reste la même, la place disque nécessaire en interpolation est donc encore de 8,18 Mo. Le module de la pression diffractée est normalisé par le module de la pression incidente. Le symbole ☞ indique le point d'observation du tracé de courbe.

Sur la figure 3.38, où la pression est calculée sur la surface, l'accord entre toutes les options est parfait, les fréquences irrégulières sont parfaitement retrouvées. Dans le fluide et en champ lointain, les courbes des figures 3.39 et 3.40 montrent la parfaite efficacité de la procédure d'interpolation.

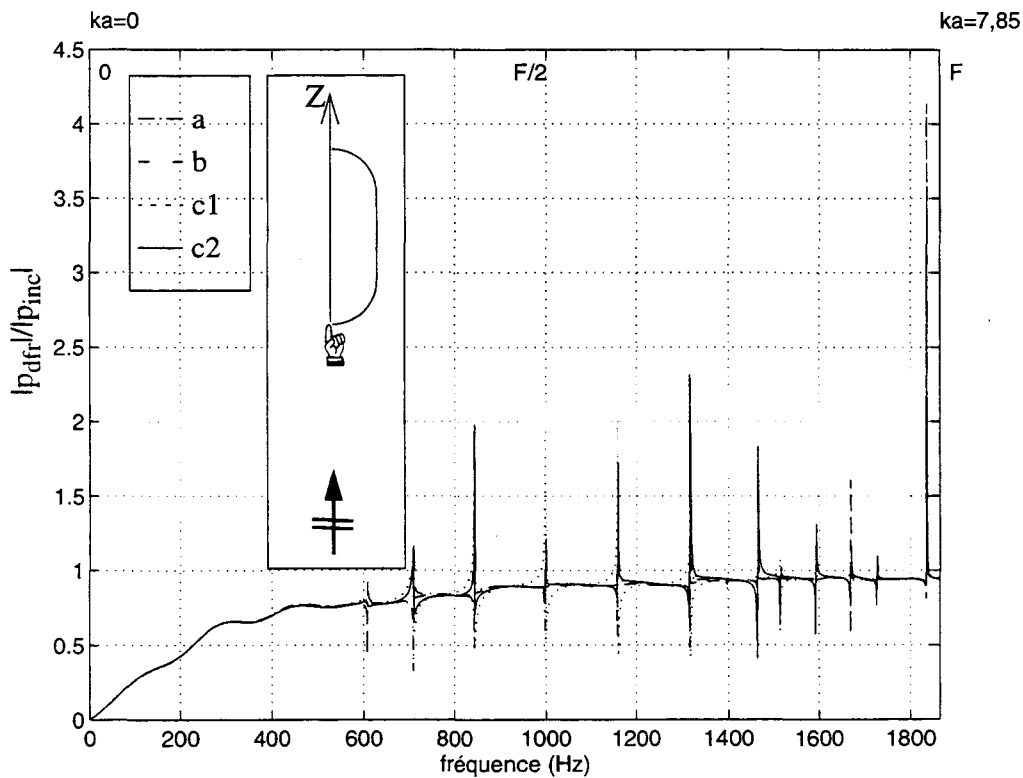


Figure 3.38. Pression surfacique. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.

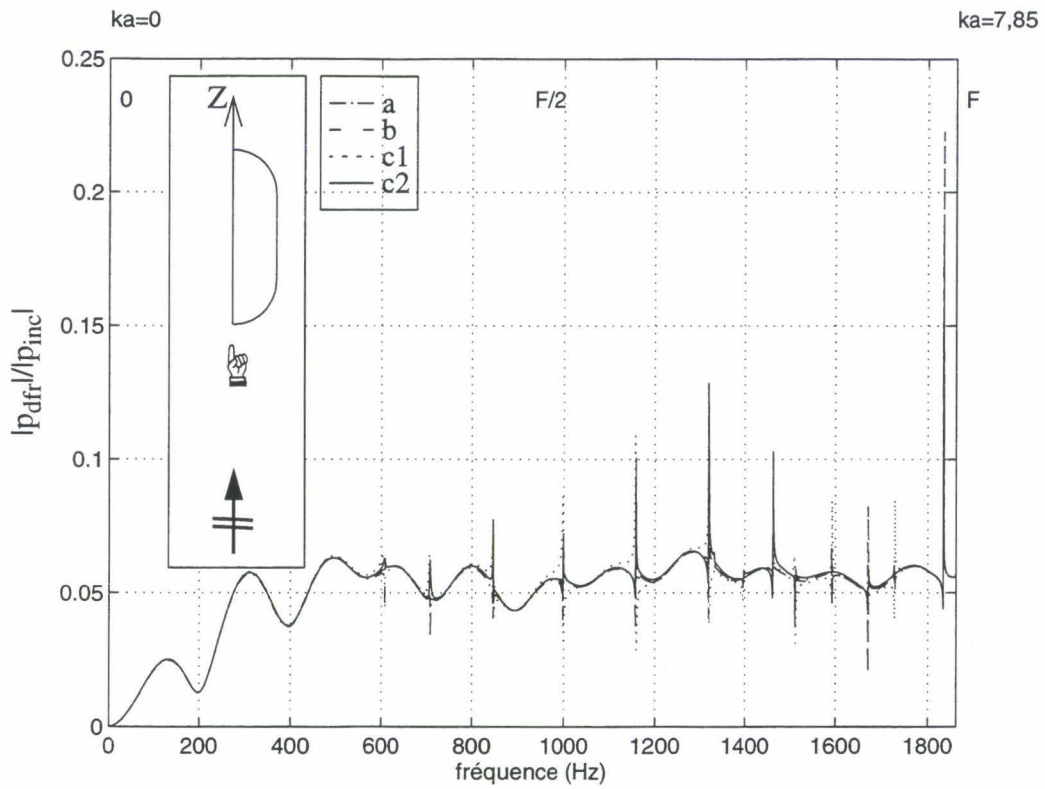


Figure 3.39. Pression dans le fluide à 10a. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.

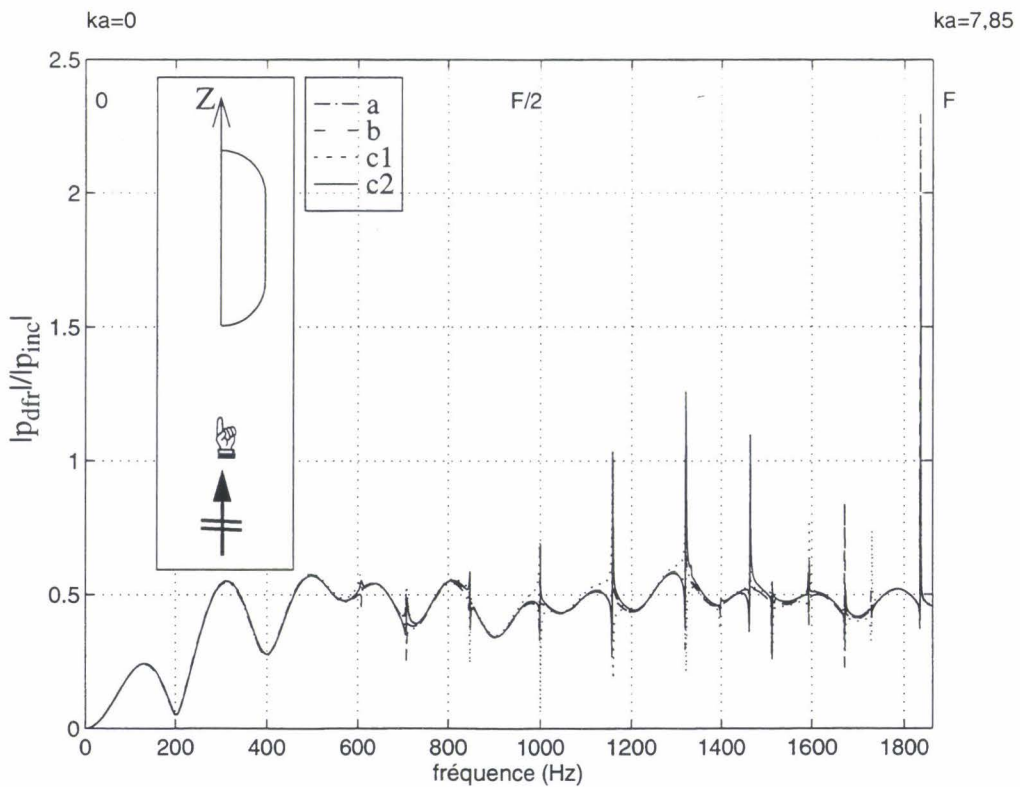


Figure 3.40. Pression en champ lointain. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.

Les figures 3.41 et 3.42 donnent le spectre de diffraction rigide en face arrière respectivement dans le fluide à $10a$ de l'origine et en champ lointain, les calculs étant effectués à chaque Hz. La bande de fréquence étudiée est la même que ci-dessus, la place disque nécessaire en interpolation est donc de $8,18$ Mo. Le module de la pression diffractée est normalisé par le module de la pression incidente.

Dans le fluide et en champ lointain, les courbes des figures 3.41 et 3.42 montrent la parfaite efficacité de la procédure d'interpolation.

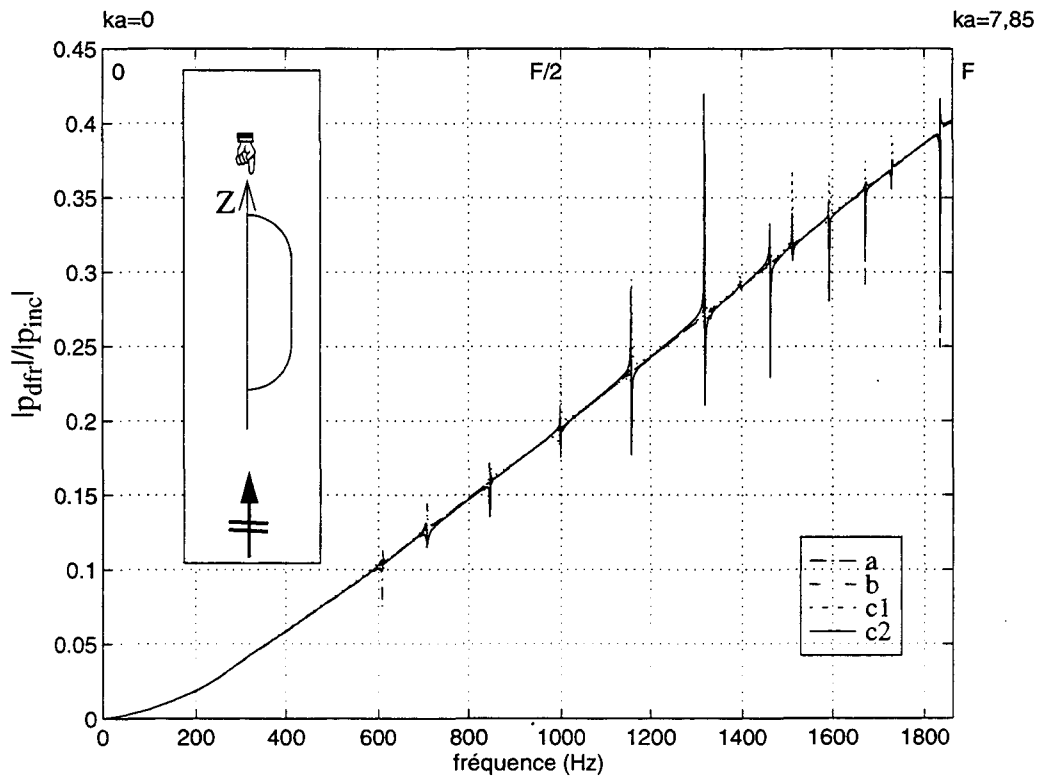


Figure 3.41. Pression en face arrière dans le fluide à $10a$. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.

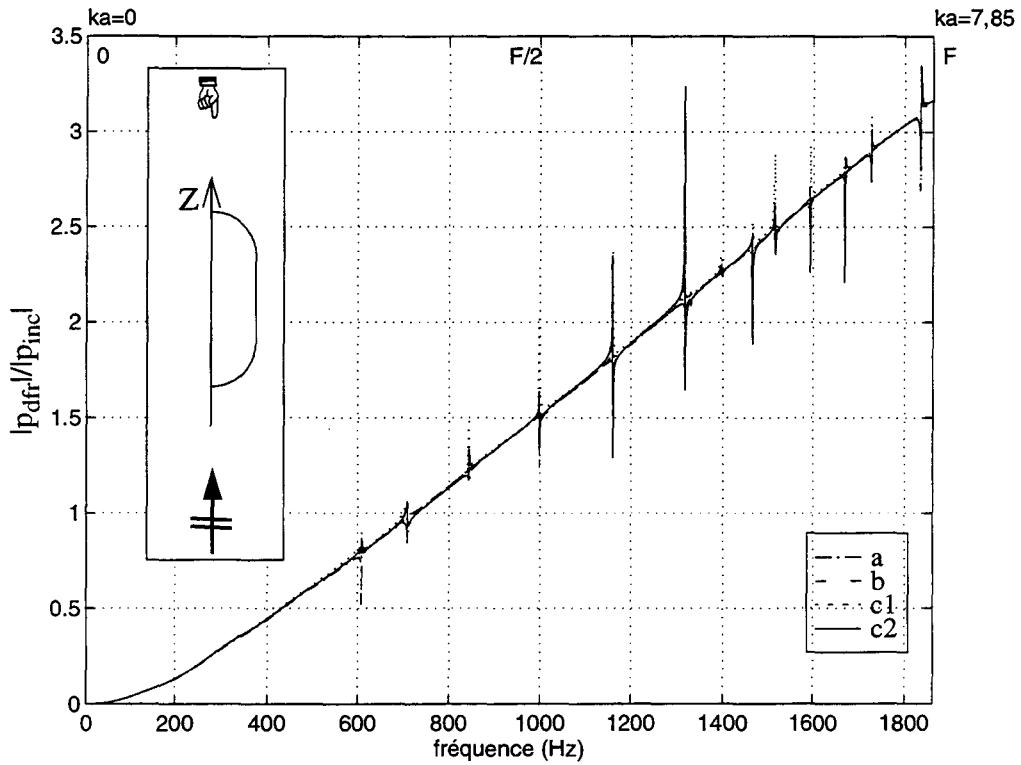


Figure 3.42. Pression en face arrière en champ lointain. Structure LINE.
Incidence suivant les Z croissants.

On représente maintenant sur la surface le long de la génératrice le module de la pression diffractée normalisé par celui de la pression incidente et la phase de la pression diffractée. Ceci est fait à trois fréquences différentes : $F/4$ ($ka = 1,97$), $F/2$ ($ka = 3,93$) et $3F/4$ ($ka = 6,05$) et tracé sur les figures 3.43, 3.44, 3.45, 3.46, 3.47 et 3.48.

Un excellent accord entre toutes les options utilisées est observé.

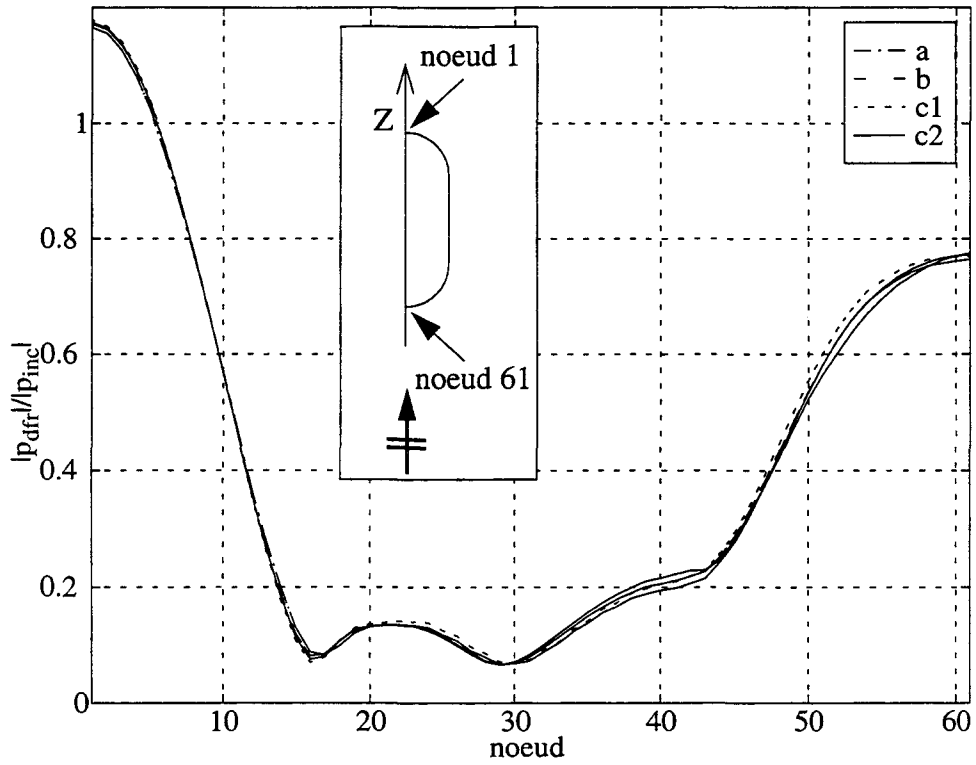


Figure 3.43. Pression surfacique. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/4$ ($ka = 1,97$).

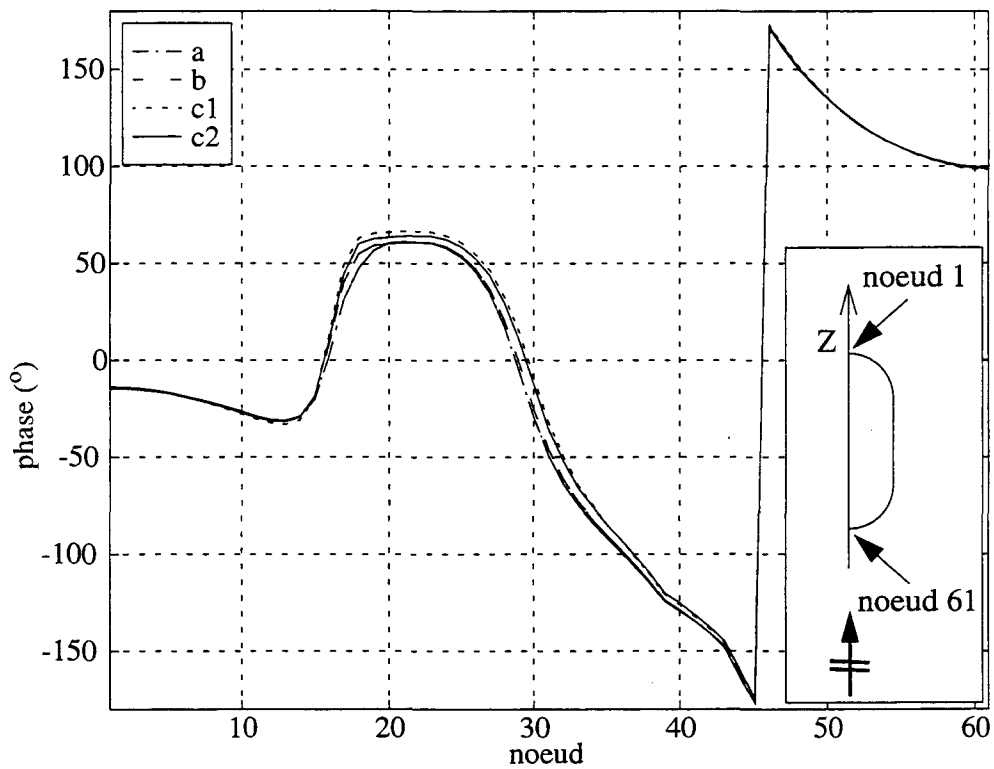


Figure 3.44. Phase sur la surface. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/4$ ($ka = 1,97$).

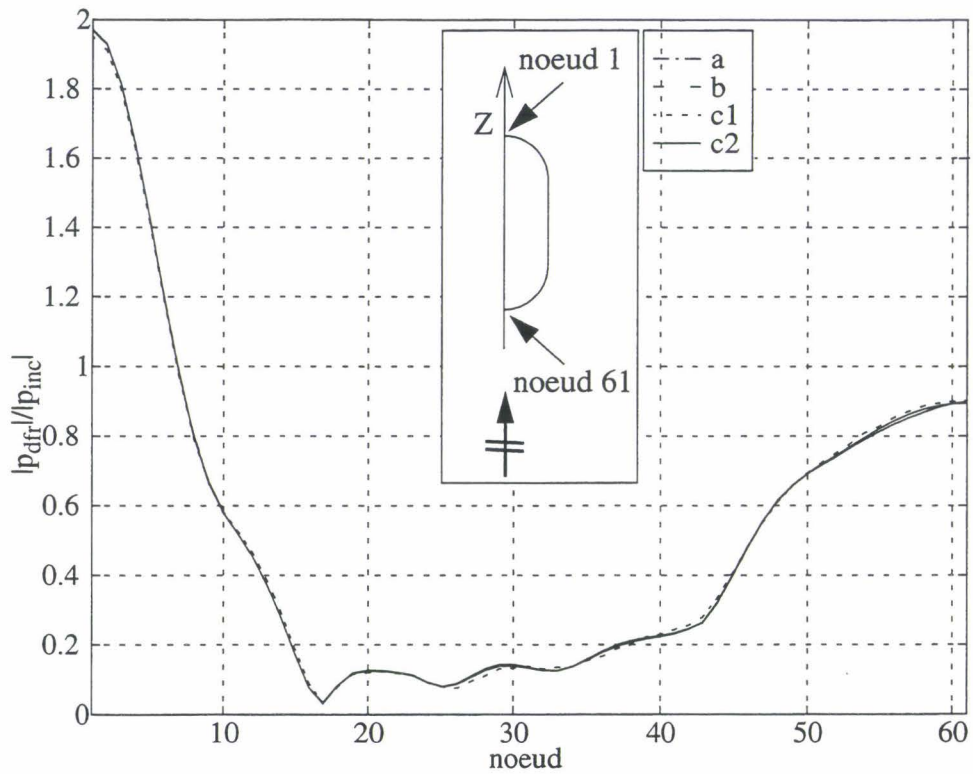


Figure 3.45. Pression surfacique. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/2$ ($ka = 3,93$).

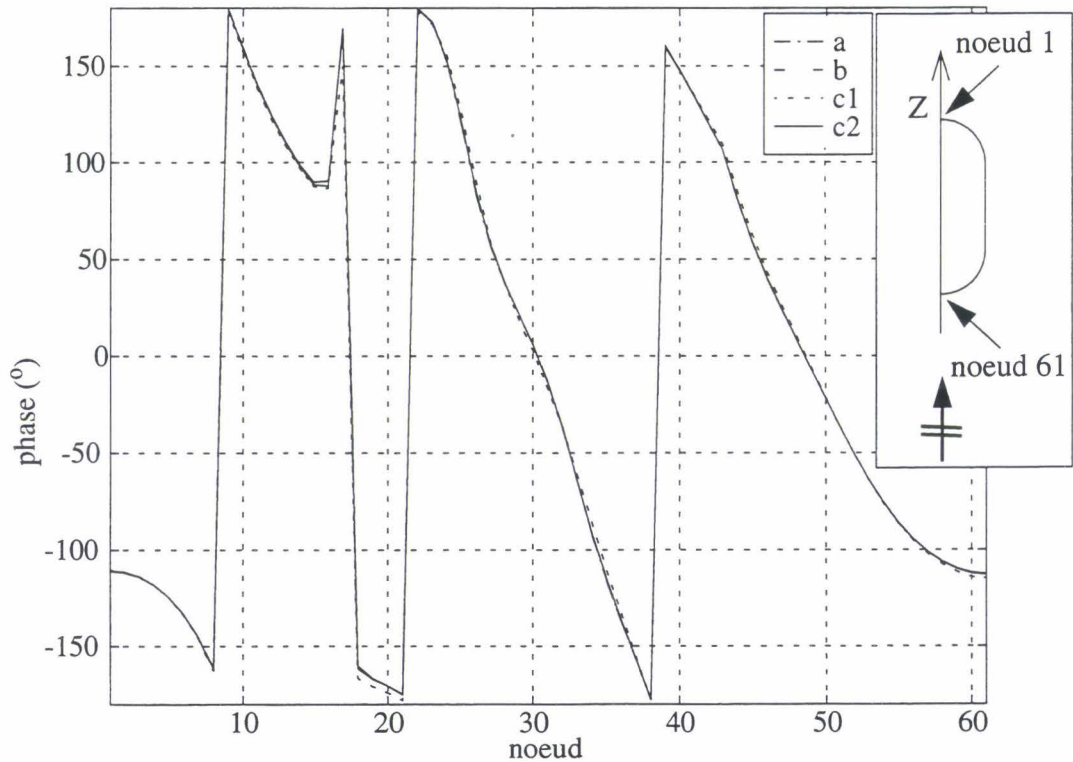


Figure 3.46. Phase sur la surface. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/2$ ($ka = 3,93$).

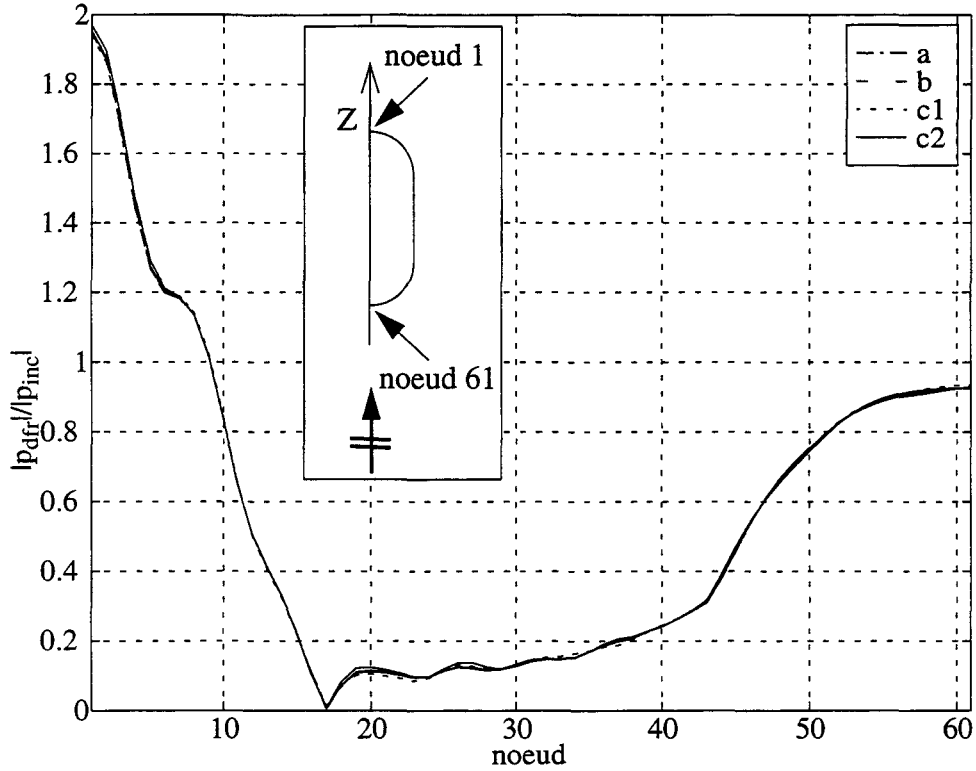


Figure 3.47. Pression surfacique. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $3F/4$ ($ka = 6,05$).

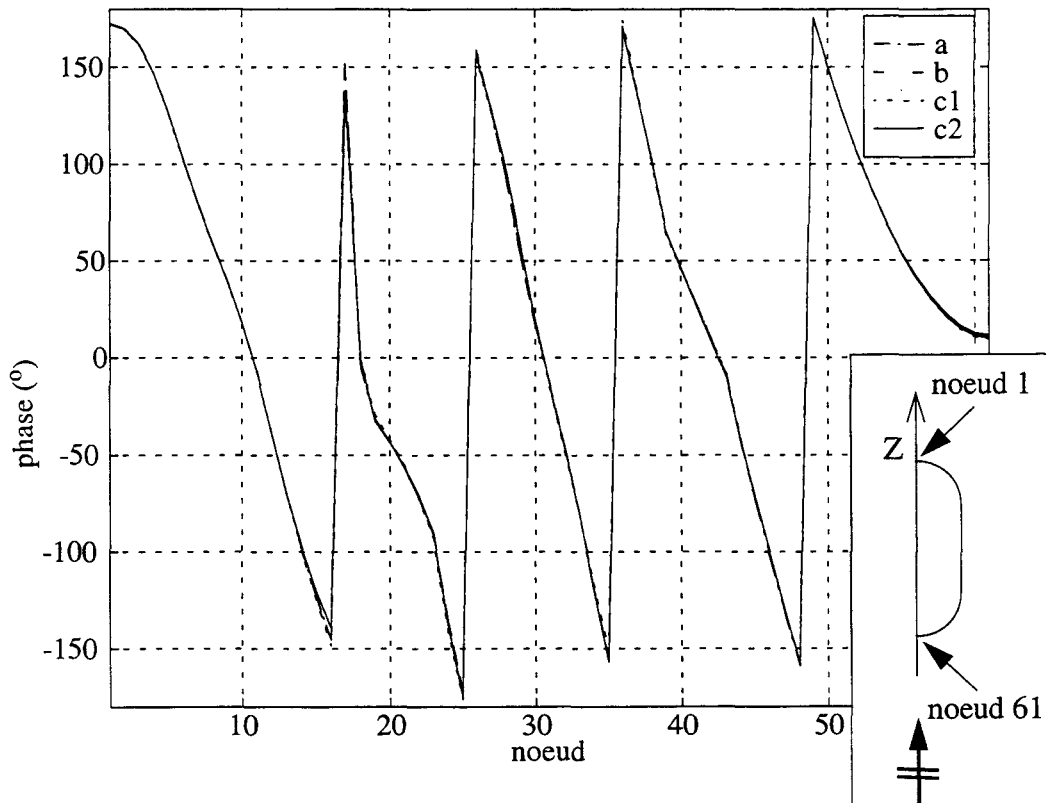


Figure 3.48. Phase sur la surface. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $3F/4$ ($ka = 6,05$).

Les figures 3.49, 3.50 et 3.51 montrent les diagrammes de directivité dans le fluide à $10a$ de l'origine pour trois fréquences différentes, respectivement $F/4$ ($ka = 1,97$) (le niveau sonore maximal $TS_{max} = -22,64$ dB à $\theta = 0^\circ$), $F/2$ ($ka = 3,93$) ($TS_{max} = -14,94$ dB à $\theta = 0^\circ$) et $3F/4$ ($ka = 6,05$) ($TS_{max} = -10,45$ dB à $\theta = 0^\circ$).

Les courbes sont toutes confondues quelle que soit la fréquence de travail, ce qui prouve le très bon comportement de la technique d'interpolation fréquentielle.

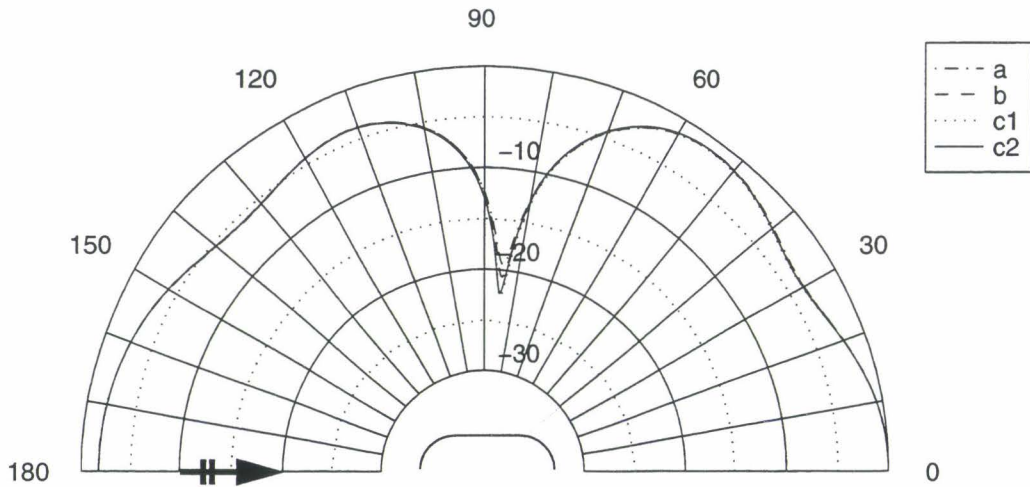


Figure 3.49. Diagramme angulaire de la pression diffractée dans le fluide à $10a$. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/4$ ($ka = 1,97$).

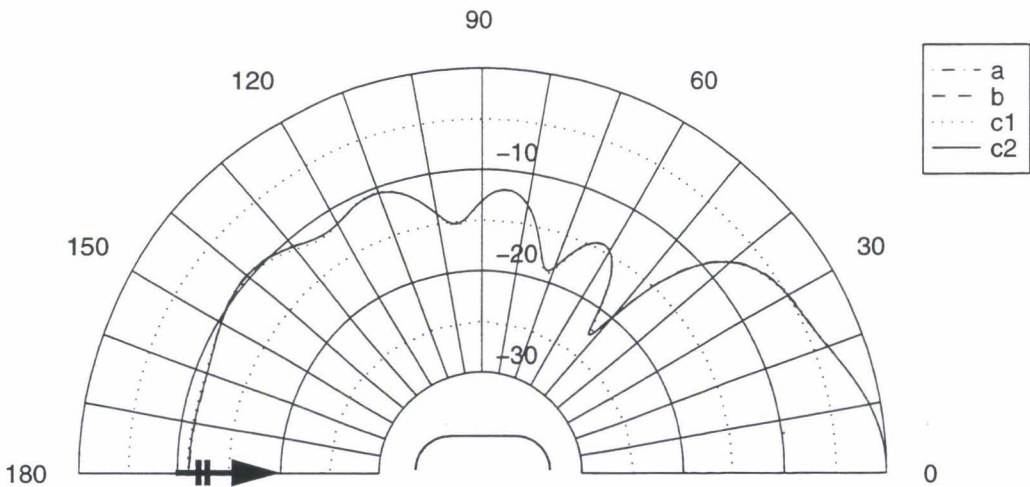


Figure 3.50. Diagramme angulaire de la pression diffractée dans le fluide à $10a$. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/2$ ($ka = 3,93$).

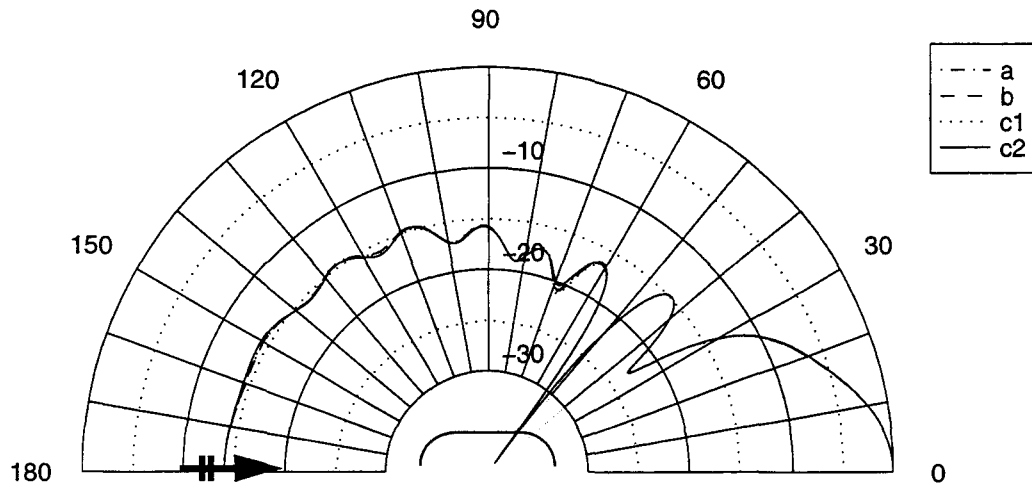


Figure 3.51. Diagramme angulaire de la pression diffractée dans le fluide à 10a. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $3F/4$ ($ka = 6,05$).

Sur les figures 3.52 ($TS_{max} = -3,18$ dB à $\theta = 55^\circ$), 3.53 ($TS_{max} = 2,87$ dB à $\theta = 0^\circ$) et 3.54 ($TS_{max} = 7,39$ dB à $\theta = 0^\circ$) sont tracés les diagrammes de directivité en champ lointain aux mêmes fréquences.

Les courbes sont identiques. Un excellent accord est encore observé entre chaque option.

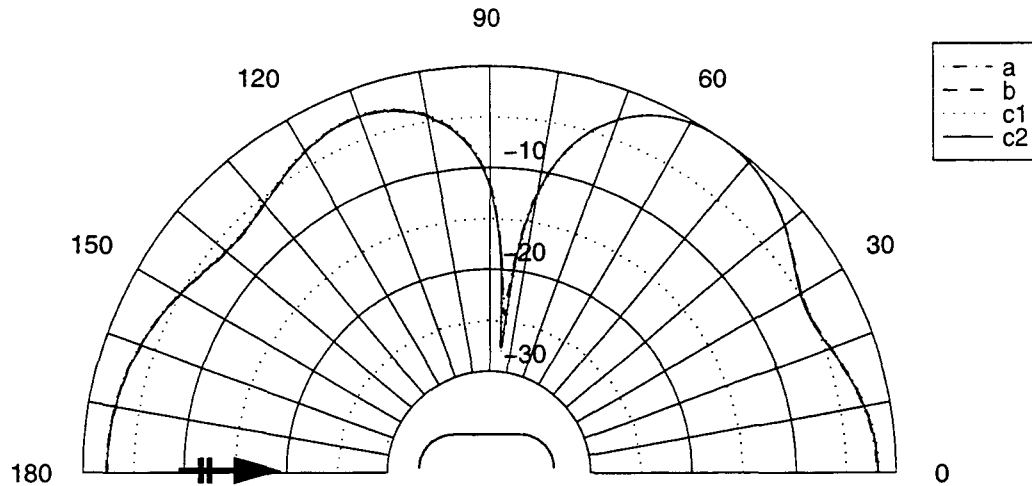


Figure 3.52. Diagramme de directivité de la pression diffractée. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/4$ ($ka = 1,97$).

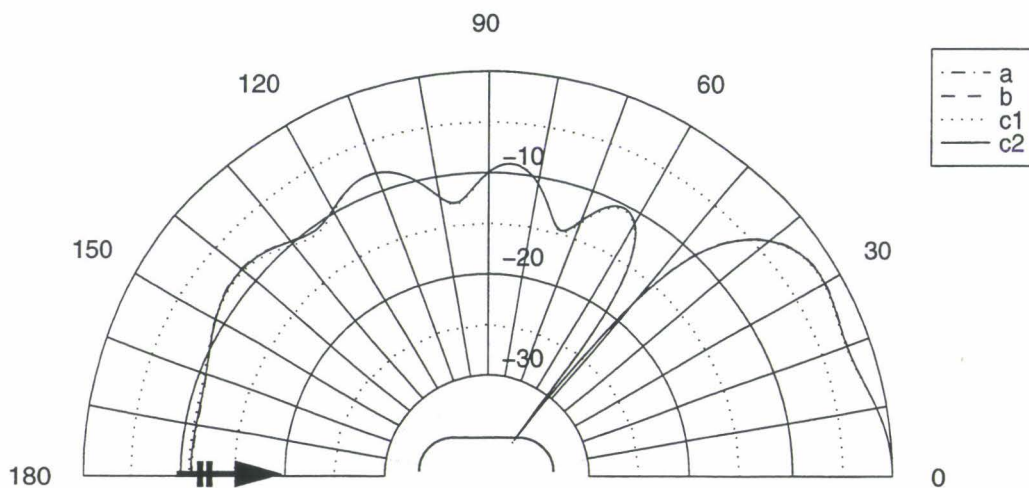


Figure 3.53. Diagramme de directivité de la pression diffractée. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/2$ ($ka = 3,93$).

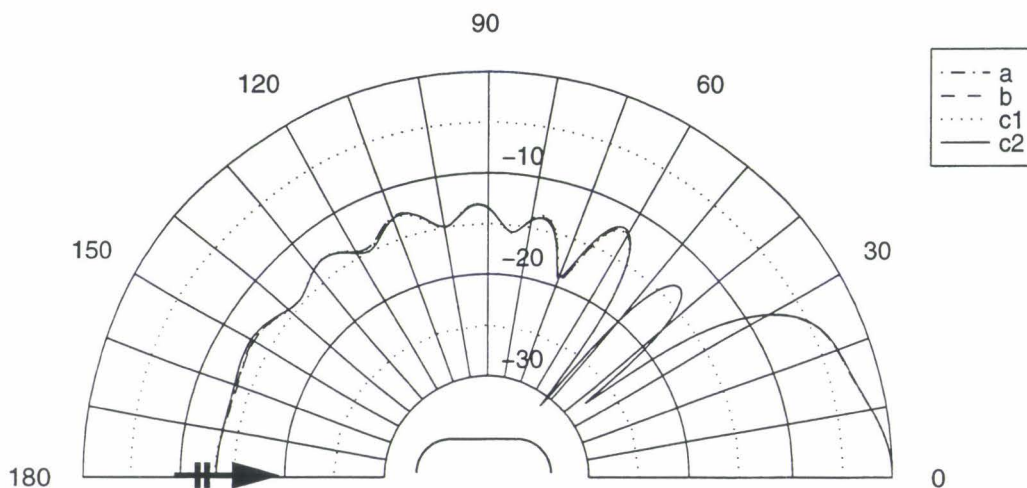


Figure 3.54. Diagramme de directivité de la pression diffractée. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $3F/4$ ($ka = 6,05$).

Pour l'option c2 : à la fréquence $F/4$, la procédure d'interpolation est faite entre 0 et $F/2$; à $F/2$, cette fréquence de calcul étant une fréquence borne, aucune interpolation n'est menée; à $3F/4$, la procédure d'interpolation est faite entre $F/2$ et F .

Par comparaison des diagrammes 3.49, 3.50 et 3.51 avec 3.52, 3.53 et 3.54, on remarque que dans le fluide à 10a, on est assez proche du champ lointain.

La caractéristique la plus marquante de la méthode d'interpolation linéaire en fréquence appliquée aux problèmes à symétrie axiale est certainement le gain de temps CPU obtenu dans le cadre d'une exécution multi-fréquence sans perte significative de précision. Quand la taille du maillage augmente, le coût en temps CPU durant la phase d'interpolation ne croît pas autant que pour la phase classique de construction de matrices. Pour cette raison, comme il a été observé sur les figures de temps CPU cumulé, cette technique devient de plus en plus attrayante quand la taille du maillage augmente.

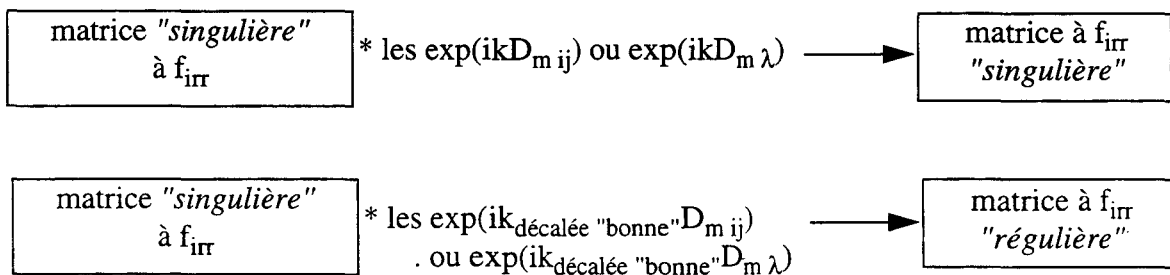
3.4 REMARQUES

La sphère a été maillée de manière équivalente en 3D et en symétrie axiale. En 3D, elle est présentée au paragraphe 3.2.2. Elle permet de "monter" jusqu'à $ka = 4,08$. En symétrie axiale, elle est présentée au paragraphe 3.3.1.2.2 et permet d'atteindre $ka = 4,02$. On effectue une comparaison de l'application de la méthode d'interpolation fréquentielle à ces deux cas. En 3D, elle consomme 15,4 Mo sur disque et ne permet pas de gain de temps CPU. Par contre, en symétrie axiale, la place disque nécessaire est égale à 0,36 Mo et son utilité en gain de temps CPU est très nette.

L'augmentation du nombre d'intervalles d'interpolation en symétrie axiale entraîne une plus grande précision de l'EQM pour une très faible augmentation des temps CPU.

L'utilisation de l'interpolation fréquentielle en symétrie axiale peut être utile pour localiser rapidement les fréquences irrégulières réelles du maillage (les domaines irréguliers) de la bande de fréquences 0-F.

Cette interpolation peut permettre par un artifice numérique de traiter certaines fréquences irrégulières aisément. L'idée est d'utiliser, lors du recouvrement des matrices, après interpolation à une fréquence irrégulière f_{irr} , une fréquence décalée non singulière ("bonne") :



Le maillage en symétrie axiale de la sphère du paragraphe 3.3.1.2.2 ne forme pas une génératrice sphérique parfaite, la première fréquence irrégulière réelle est $f_{01} = 747$ Hz ($ka = 3,15$), proche de f_{01} . À cette fréquence, par interpolation entre 0 Hz et F, le test de la source ponctuelle donne EQM = 750,2 % avec une source située en 0. Le recouvrement des matrices interpolées avec plusieurs fréquences décalées en dehors du domaine irrégulier est réalisé. Les résultats se trouvent dans le tableau 3.17. Les temps de calcul sont identiques.

fréquence de recouvrement décalée (Hz)	730	770	700	F	500	0
EQM (%)	5	27,6	10,4	15,2	24,6	83,9

Tableau 3.17. EQM à f_{01} pour la sphère en symétrie axiale à différentes fréquences de recouvrement décalées.

Cette utilisation n'est valable que si la fréquence de recouvrement décalée ne se trouve pas trop éloignée de la fréquence à traiter et pour des fréquences irrégulières bien espacées.

CONCLUSIONS

Une analyse de diffraction rigide ou rayonnement acoustique sur un large spectre fréquentiel par équations intégrales engendre une forte consommation de temps de calcul. Dans le but de minimiser celle-ci, une technique d'interpolation linéaire en fréquence est développée.

L'application de cette interpolation fréquentielle aux éléments isoparamétriques à variation quadratique réclame le traitement du problème de la duplicité des normales. Cette technique est adaptée à tout type de géométrie. Son automatisation est mise en évidence : les bornes d'interpolation sont 0 Hz et la fréquence maximale autorisée par le "critère en $\lambda/4$ ".

La prise en compte de la symétrie axiale des problèmes dans l'application de l'interpolation fréquentielle oblige à effectuer le développement d'une nouvelle forme d'intégration et le découpage des domaines circulaires d'intégration. L'automatisation de ce découpage entraîne une simplicité d'emploi de l'interpolation fréquentielle.

De nombreux exemples de rayonnement et de diffraction rigide font apparaître plusieurs résultats :

- la précision des résultats obtenus par l'interpolation en fréquence est grande;
- pour un problème 3D, l'interpolation fréquentielle ne permet aucun gain de temps de calcul par rapport au calcul classique. De plus, la place disque libre nécessaire à son utilisation est généralement dissuasive;
- pour un problème à symétrie axiale, des gains de temps de calcul très importants sont obtenus par l'interpolation fréquentielle. Cet avantage s'accroît quand la taille du maillage et le nombre de fréquences de calcul augmentent. De plus, la place disque libre nécessaire reste très raisonnable;
- associé au résultat précédent, la simplicité d'emploi de la technique rend l'interpolation fréquentielle très attractive.

Chapitre 4

Optimisations du traitement des fréquences irrégulières

INTRODUCTION

Après s'être intéressé au problème du temps de calcul lors d'analyse multi-fréquence par équations intégrales, on se penche dans ce chapitre sur l'autre inconvénient principal les concernant, à savoir, le problème des fréquences irrégulières.

La méthode de Jones est employée aux fréquences irrégulières afin d'obtenir une solution unique (cf. § 1.6.2). Il s'agit de surdéterminer le système équations intégrales par des équations de champ nul. Ces dernières équations sont d'un maniement délicat, leur utilisation entraîne certaines difficultés, notamment lorsque la pression sur la surface est approchée par une série de fonctions (cf. § 2.3 et 2.4). Ce chapitre a donc pour but la simplification des équations de champ nul lorsqu'elles sont utilisées dans le cadre de la méthode de Jones, afin permettre d'augmenter les fréquences de calcul.

Dans un premier temps, les limitations liées à l'emploi du champ nul sont indiquées. En particulier, on cite le problème des surfaces nodales, de la convergence et du niveau de troncature de la série de fonctions, de leurs temps de calcul important et de la non-unicité du point défini par cette série, d'excentricité du corps et de densité des fréquences irrégulières [6].

Dans le but de simplifier l'utilisation des équations de champ nul, dans le second paragraphe de ce chapitre, on développe une nouvelle forme d'approximation de la pression de champ nul : l'interpolation quadratique [58]. Elle est implantée dans les cas 3D et à symétrie axiale. Sa convergence est étudiée et comparée à l'approximation en série de fonctions. Le rayonnement et la diffraction rigide sont étudiés.

La partie suivante de ce chapitre est consacrée à la prise en compte des symétries du problème par les équations de champ nul avec interpolation quadratique de la pression afin de diminuer les temps de calcul. On décrit la technique lorsqu'il y a symétrie de géométrie du problème, puis symétrie ou antisymétrie de chargement. Des exemples numériques viennent alors illustrer ce procédé dans le cas du rayonnement et de la diffraction rigide.

Dans la dernière section, les développements effectués concernent les problèmes dus à l'excentricité de l'objet étudié. La théorie de champ nul indique que la pression est calculée correctement aux points proches d'une sphère inscrite dans la surface. Pour étendre son application à des géométries excentrées, deux nouvelles techniques développées dans le cadre de l'interpolation quadratique sont proposées : l'emploi des origines multiples et la technique des noeuds proches [138,143]. La première consiste à calculer les équations de champ nul à partir de plusieurs origines inscrites dans la structure et assurer ainsi un meilleur recouvrement de la surface par les sphères inscrites et centrées en ces origines. La seconde technique est une conséquence de la première : pour chaque noeud du maillage, on sélectionne l'origine de champ nul la plus proche. Ensuite, le calcul de la pression par champ nul n'est effectué que par rapport à cette origine. Des exemples numériques de ces développements sont alors donnés dans le cas du rayonnement et de la diffraction rigide. Une application originale de ces dernières techniques est ensuite menée, il s'agit du calcul aux fréquences irrégulières d'une antenne composée de plusieurs corps, dont on choisit ici de calculer les impédances mutuelles [54].

Les conclusions et résultats obtenus sont enfin précisés.

4.1 LIMITATIONS DES ÉQUATIONS DE CHAMP NUL

Dans ce paragraphe, on donne les limitations liées à l'emploi des équations de champ nul. Ces équations servent à résoudre le problème des fréquences irrégulières inhérentes à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure. Ces limitations ont, dans leur majorité, été citées auparavant dans la littérature. Dans la mesure du possible, ces difficultés et leur traitement seront illustrés par des exemples numériques.

Ce paragraphe contient les principales remarques qui sont à la base des optimisations proposées dans ce chapitre.

Décomposition de la pression en série.

Dans le cadre des équations de champ nul, et en particulier lorsqu'elles surdéterminent le système d'équations intégrales de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure, la pression est jusqu'à présent dans le code EQI décomposée en série de fonctions formant un système complet (p étant fonction périodique de θ et φ , la décomposition en série de Fourier avait été choisie pour sa simplicité) (cf. § 2.3 et 2.5.5). Ce choix entraîne des calculs supplémentaires qui consistent à exprimer les coefficients de la série en fonction des pressions nodales (cf. § 2.4).

Cette approximation de la pression présente les difficultés suivantes :

- le choix du niveau de troncature. En effet, aucun critère de troncature applicable simplement ne permet d'assurer la bonne précision de celle-ci avant l'exécution du calcul [6]. Le choix de P et Q (cf. éq. (2.47)) est plutôt dicté par l'expérience de l'utilisateur et dans de nombreux cas, il est nécessaire d'étudier la convergence de l'équation (2.47). La série de Fourier accroît fortement le temps CPU;
- l'élimination des équations triviales lorsque la structure est à symétrie géométrique axiale. Les équations $(m,1)$ pour lesquelles $q \neq 1$ sont triviales [6]. Ces équations triviales perturbent et faussent la résolution numérique, et il faut donc les éliminer;
- la correspondance entre la position d'un noeud et les angles sphériques θ et φ . Dans le cas de structures à géométries compliquées, plusieurs noeuds peuvent correspondre à une direction définie par θ et φ . La décomposition en série de la pression implique alors une pression invariante pour ces différents noeuds, ce qui est en général faux et ne peut que détériorer la précision des résultats.

L'objet du paragraphe 4.2 est de proposer une interpolation quadratique de la pression pour corriger ces défauts.

Problèmes d'excentricité.

Comme on l'a vu au paragraphe 1.7, l'obtention des équations de champ nul repose sur une décomposition en série de fonctions d'ondes sphériques. Par conséquent, le comportement numérique de ces équations se dégrade avec l'excentricité de l'objet. En pratique, ce défaut est atténué car les équations de champ nul sont toujours utilisées pour surdéterminer les équations intégrales.

Le paragraphe 4.3 contient les développements effectués pour minimiser le problème d'excentricité.

4.2 INTERPOLATION QUADRATIQUE DE LA PRESSION PAR CHAMP NUL

Conformément au paragraphe précédent, cette partie porte sur le développement d'une interpolation quadratique de la pression dans les équations de champ nul.

4.2.1 Discrétisation des équations

4.2.1.1 Cas purement tridimensionnel

4.2.1.1.1 Traitement des équations de champ nul

Avec les résultats du chapitre 2, on reprend l'interpolation quadratique de la pression déjà utilisée dans l'équation (2.1) afin de simplifier l'écriture de l'équation (1.117). On note :

$$L_m^1 = \iint_{\Gamma} p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (4.1)$$

L'équation (1.117) s'écrit :

$$L_m^1 = F_m^1 - 4\pi c_m^1 \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, M \\ |l| \leq m \end{array} \quad (4.2)$$

On introduit l'équation (2.1) dans (4.1) :

$$L_m^1 = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} p_{ji} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\mathbf{r}'(\xi, \eta)) d\mathbf{r}'(\xi, \eta) \quad (4.3)$$

On pose :

$$L_{m^1_{ji}} = \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} (\psi_m^1(\mathbf{r}'(\xi, \eta))) N_i(\xi, \eta) d\mathbf{r}'(\xi, \eta) \quad (4.4)$$

Ainsi :

$$L_m^1 = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^{NNE} L_{m^1_{ji}} p_{ji} \quad (4.5)$$

Le terme F_m^1 reste inchangé. On obtient le système matriciel suivant :

$$[L]\{p\} = [F] \left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} - 4\pi\{c\} \quad (4.6)$$

où $[L]$ est la matrice dont les termes sont issus de (4.4), de dimension $(M + 1)^2 * NN$ et $\{p\}$ le vecteur des valeurs nodales de la pression, de dimension NN . Ce système est un système de $(M + 1)^2$ équations à NN inconnues.

Une résolution par la méthode de champ nul nécessite donc que $(M + 1)^2 \geq NN$, condition difficilement respectée car elle implique l'emploi d'équations de champ nul de degré élevé qui ont alors un mauvais comportement numérique. C'est pourquoi, en général, les équations de champ nul servent à surdéterminer les équations intégrales et ne sont plus soumises au respect de cette inégalité.

Dans le cadre d'un problème de rayonnement, le système (4.6) s'écrit alors :

$$[L]\{p\} = [F]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} \quad (4.7)$$

et dans celui de la diffraction rigide :

$$[L]\{p\} = -4\pi\{c\} \quad (4.8)$$

4.2.1.1.2 Traitement de la combinaison équations intégrales-champ nul

Selon le paragraphe 1.6.2, on surdétermine le système équations intégrales de Helmholtz par un nombre $NEQCN = (M + 1)^2$ équations de champ nul pour permettre l'obtention d'une solution unique lors d'un calcul à une fréquence irrégulière. Le système surdéterminé s'écrit :

$$\begin{cases} [A]\{p\} = [B]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - \{p_{inc}\} \\ [L]\{p\} = [F]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - 4\pi\{c\} \end{cases} \quad (4.9)$$

En condensant les deux équations matricielles, on a :

$$[P]\{p\} = [D]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - \{pc\} \quad (4.10)$$

qui est un système de $(NN + NEQCN)$ équations à NN inconnues. On résout le système surdéterminé par une méthode de moindres carrés.

Dans le cas du rayonnement, le système (4.10) s'écrit :

$$[P]\{p\} = [D]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} \quad (4.11)$$

et dans celui d'un problème de diffraction par une surface rigide :

$$[P]\{p\} = -\{pc\} \quad (4.12)$$

4.2.1.2 Symétrie axiale

4.2.1.2.1 Traitement des équations de champ nul

Avec les résultats du chapitre 2, on reprend l'interpolation quadratique de la pression déjà utilisée dans l'équation (2.78) afin de simplifier l'écriture de l'équation (2.134). On note :

$$L_m = \iint_{\Gamma} p(r') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m(r') dr' \quad (4.13)$$

L'équation (2.134) s'écrit :

$$L_m = F_m - 4\pi c_m \quad m = 0, \dots, M \quad (4.14)$$

On introduit l'équation (2.78) dans (4.13) :

$$L_m = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 P_{ji} \iint_{\Gamma_j} N_i(\xi) \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m(r'(\xi, \varphi)) dr'(\xi, \varphi) \quad (4.15)$$

On pose :

$$L_{mji} = \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} (\psi_m(r'(\xi, \varphi))) N_i(\xi) dr'(\xi, \varphi) \quad (4.16)$$

Ainsi, on a :

$$L_m = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{i=1}^3 L_{mji} P_{ji} \quad (4.17)$$

Le terme F_m reste inchangé. On obtient le système matriciel suivant :

$$[L]\{p\} = [F] \left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} - 4\pi\{c\} \quad (4.18)$$

où $[L]$ est la matrice dont les termes sont issus de (4.16), de dimension $(M+1) * NN$ et $\{p\}$ le vecteur de dimension NN des pressions nodales. Ce système est un système de $(M+1)$ équations à NN inconnues.

Le terme L_{mji} s'écrit :

$$L_{mji} = \int \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} (\psi_m(r'(\xi, \varphi))) N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) d\xi d\varphi \quad (4.19)$$

L'intégration sur φ se réduit à un facteur 2π , et avec (2.153), on obtient :

$$L_{mji} = 2\pi \sqrt{v_m} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial}{\partial n'} h_m(kr') P_m(\cos \theta') + h_m(kr') \frac{\partial}{\partial n'} P_m(\cos \theta') \right) N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) d\xi \quad (4.20)$$

Les expressions intervenant dans les fonctions à intégrer sont donnés au paragraphe 2.5.5.2.1. Ce terme est également calculé par la quadrature de Gauss-Legendre.

Une résolution par la méthode de champ nul nécessite $M + 1 \geq P + 1$. Pour la même raison que dans le cas 3D, cette inégalité est difficilement respectée et plaide en faveur de l'utilisation des équations de champ nul pour surdéterminer les équations intégrales.

4.2.1.2.2 Traitement de la combinaison équations intégrales-champ nul

À une fréquence irrégulière, la surdétermination du système équations intégrales de Helmholtz se fait par un nombre NEQCN = $(M + 1)$ d'équations de champ nul. Le système surdéterminé s'écrit de la même façon qu'en (4.9) et (4.10), et on le résout par une méthode de moindres carrés.

Dans le cas du rayonnement, le système s'écrit comme en (4.11) et dans celui d'un problème de diffraction par une surface rigide comme en (4.12).

En symétrie axiale et à une fréquence irrégulière, le critère de surdétermination indiquant le nombre minimum d'équations de champ nul à employer diffère du cas purement tridimensionnel. Pour un nombre NSN1 de surfaces nodales passant par l'origine de calcul de champ nul, il faut utiliser $(NSN1 + 1)^2$ équations de champ nul en 3D et $(NSN1 + 1)$ équations de champ nul en symétrie axiale.

4.2.2 Convergence

Le calcul des intégrales apparaissant dans les équations de champ nul est une application directe de la méthode de Gauss-Legendre. La convergence est testée avec les deux approximations de la pression : l'approximation quadratique et la décomposition en séries de Fourier.

Dans le cas de la symétrie axiale, la convergence est étudiée pour les deux modélisations suivantes : la méthode de champ nul et la combinaison équations intégrales-champ nul. Dans le cas 3D, seul le dernier modèle est testé.

Le test de la source ponctuelle (cf. § 2.6) est le test de référence et l'EQM est la valeur de référence. Dans tous les cas, une source ponctuelle est placée au centre de la structure. Dans la plupart des cas, les calculs sont effectués à deux fréquences caractéristiques : la fréquence f_r qui est la plus grande fréquence irrégulière vérifiant le "critère en $\lambda/4$ "; la fréquence F qui est la fréquence maximale autorisée par le même critère. Quand la résolution du problème de Dirichlet intérieur associé n'est pas analytique (cf. § 1.5.2.2), la détermination de f_r est obtenue par un balayage de tou-

tes les fréquences entre 0 Hz et F au Hz près.

4.2.2.1 Cas purement tridimensionnel

Dans le cas 3D, le niveau de troncature de la double série de Fourier représentative de la pression est délicat car il dépend des deux paramètres P et Q. En pratique, plusieurs essais préliminaires sont nécessaires pour proposer un couple P et Q raisonnable. C'est pourquoi, l'étude de convergence présentée ne porte que sur les intégrales de champ nul avec interpolation quadratique de la pression.

La première structure est le cylindre de section circulaire du paragraphe 3.2.2. Les paramètres de calcul sont : $f_r = f_{101} = 311$ Hz ($ka = 2,62$) (éqs. 1.95), $F = 372,85$ Hz ($ka = 3,14$), $1 \leq NINT1 \leq 5$ et $1 \leq NINT2 \leq 5$. Les résultats se trouvent sur les figures 4.1 et 4.2.

La convergence est atteinte pour $NINT1 = NINT2 = 2$.

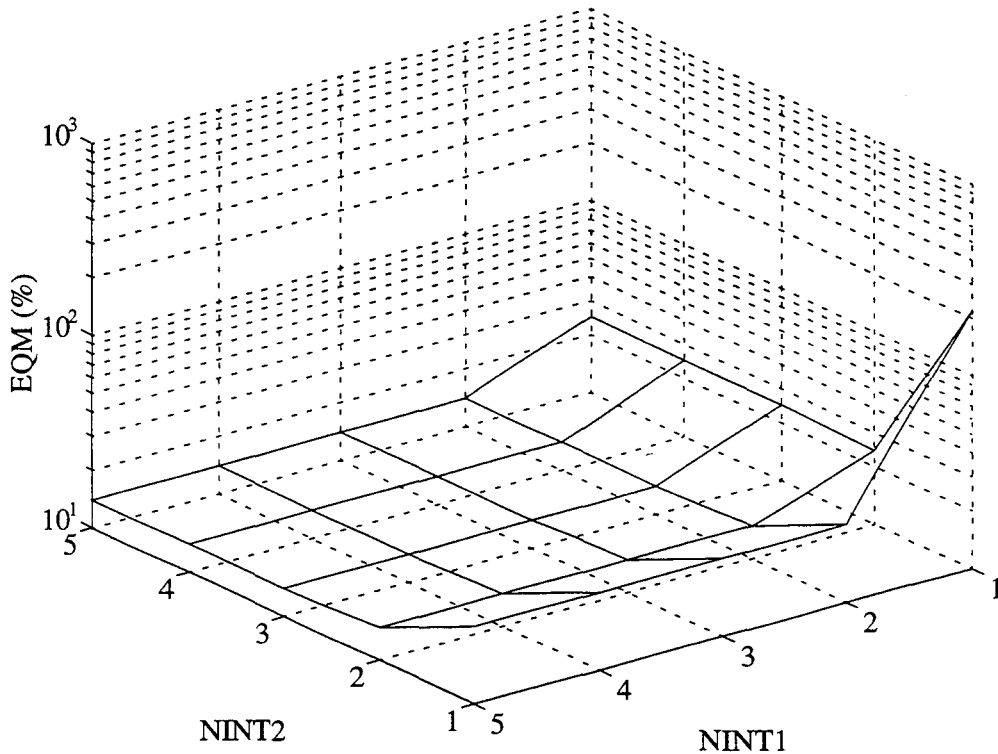


Figure 4.1. a. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . $M = 0$. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.

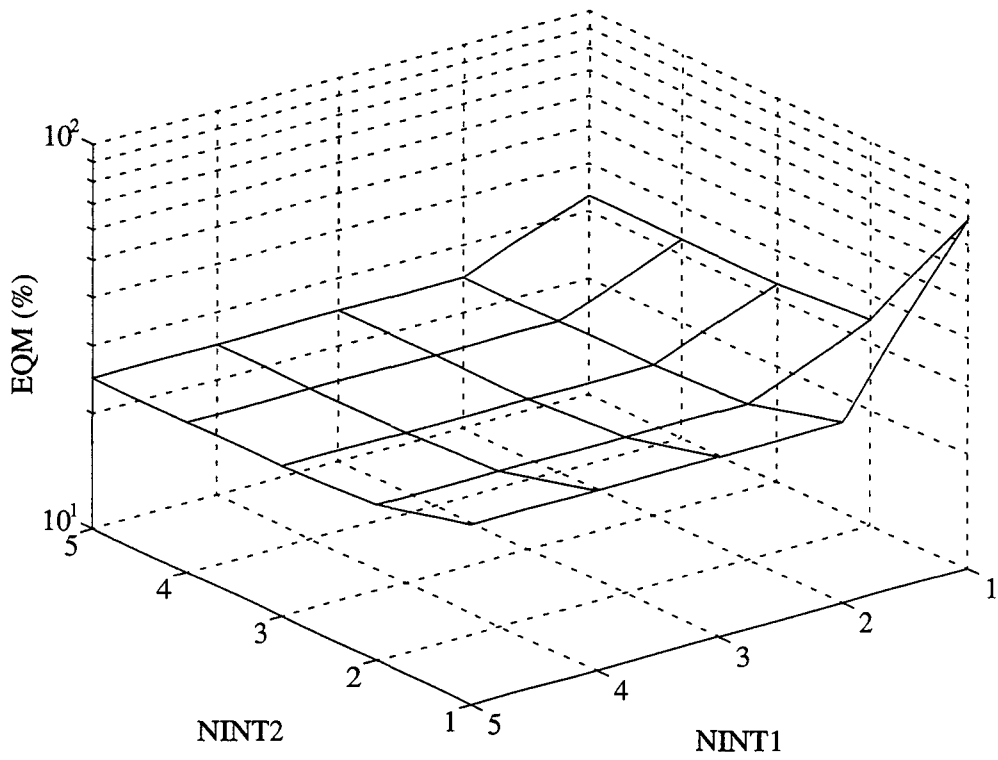


Figure 4.1.b. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . $M = 3$. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.

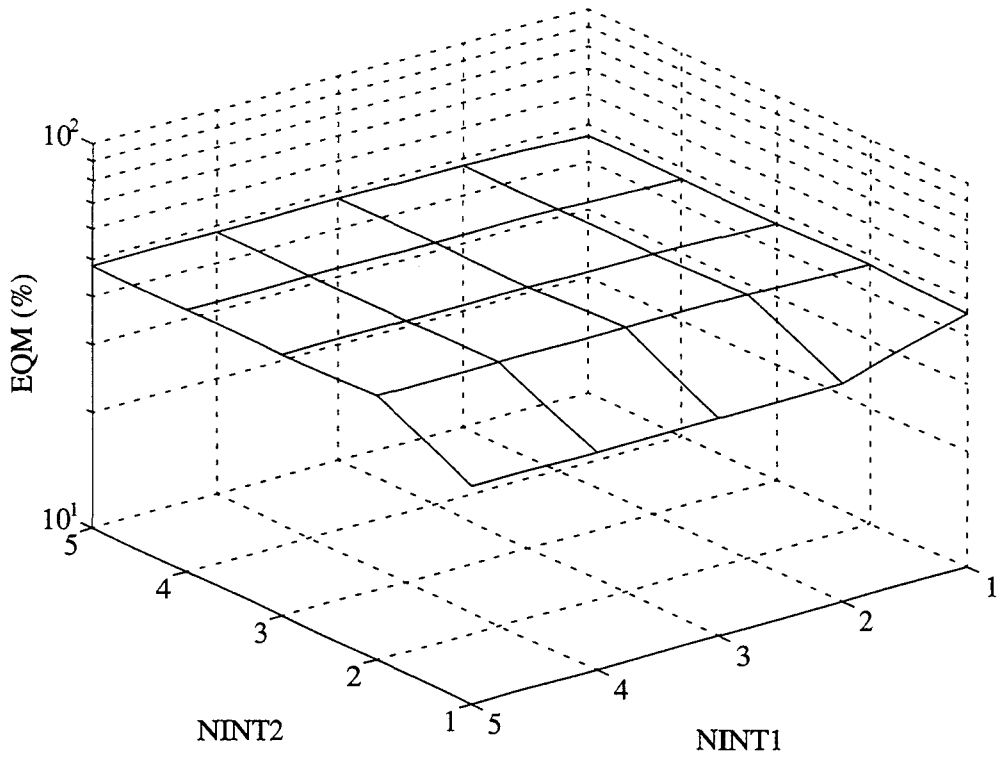


Figure 4.1.c. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . $M = 10$. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.

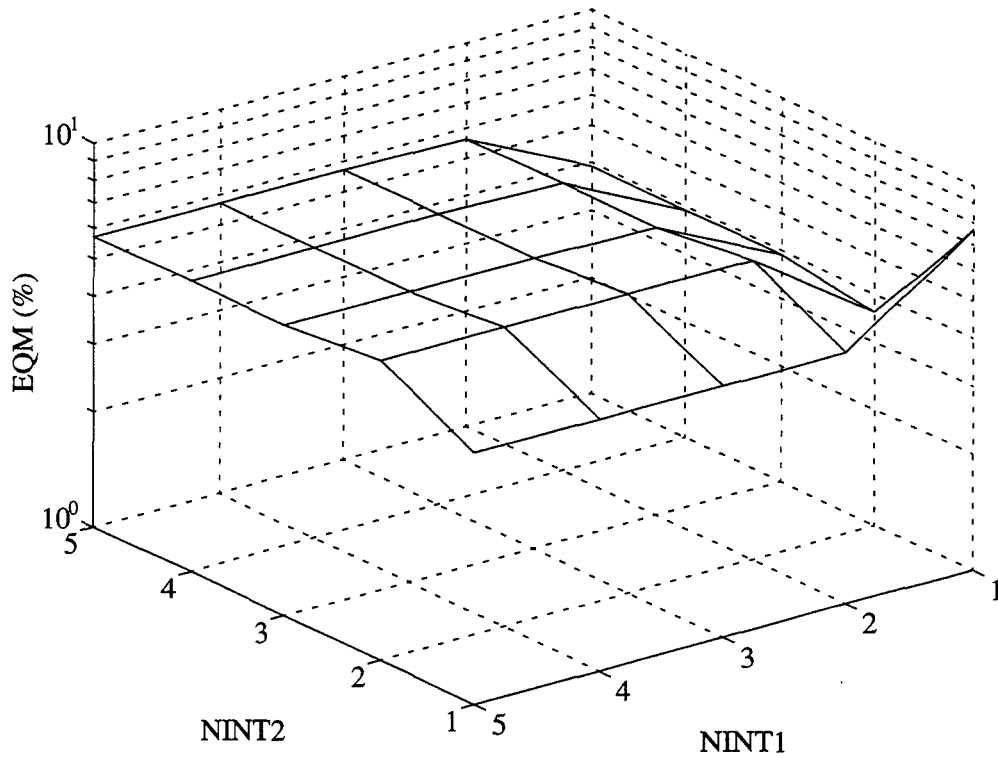


Figure 4.2.a. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à F. M = 0. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.

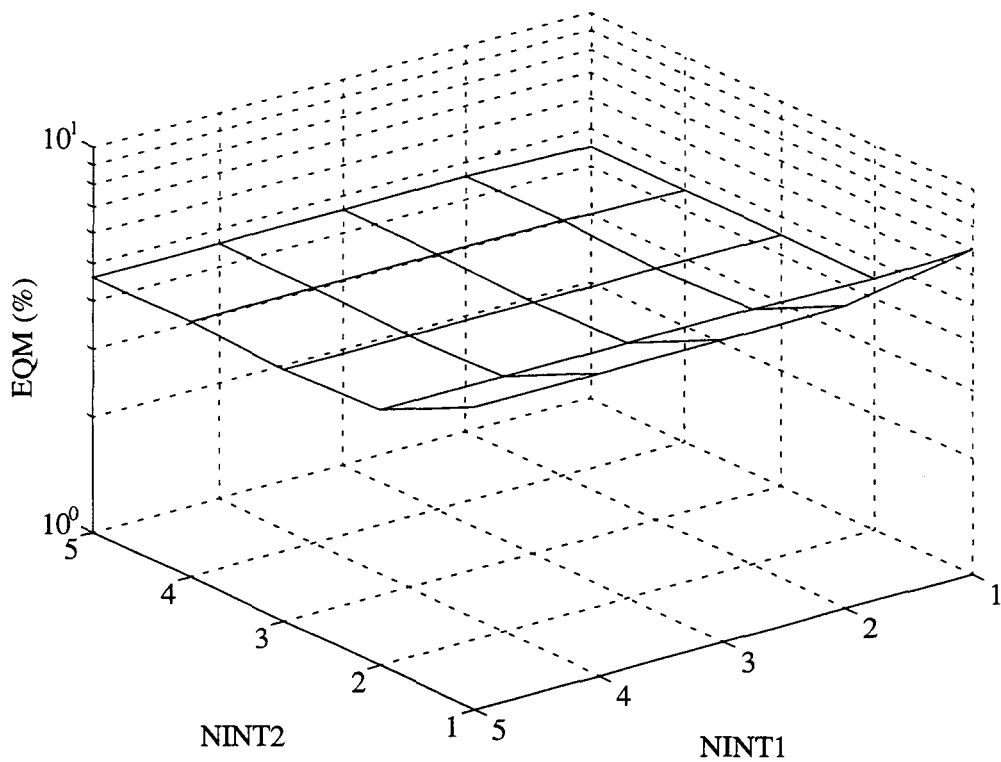


Figure 4.2.b. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à F. M = 10. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.

La deuxième structure tridimensionnelle étudiée ici est un parallélépipède rectangle de demi-côtés a selon X, $1,5a$ selon Y et $3a$ selon Z centré en l'origine du repère. Le maillage (cf. figure 4.3)

se compose de 288 éléments quadrilatères à 8 noeuds, soit 866 noeuds. Sa plus grande fréquence réduite admise par le "critère en $\lambda/4$ " est $ka = 3,14$ (correspondant à $F = 558,71$ Hz). Les mêmes calculs que précédemment sont effectués. La valeur de la plus haute fréquence irrégulière symétrique (cf. § 1.5.2.2) admise a été obtenue égale à $f_r = f_{123} = 543$ Hz, soit $ka = 3,05$ (éqs. 1.94). Les figures 4.4 et 4.5 donnent les résultats respectivement pour f_r et F .

La convergence est atteinte pour $NINT1 = NINT2 = 3$.

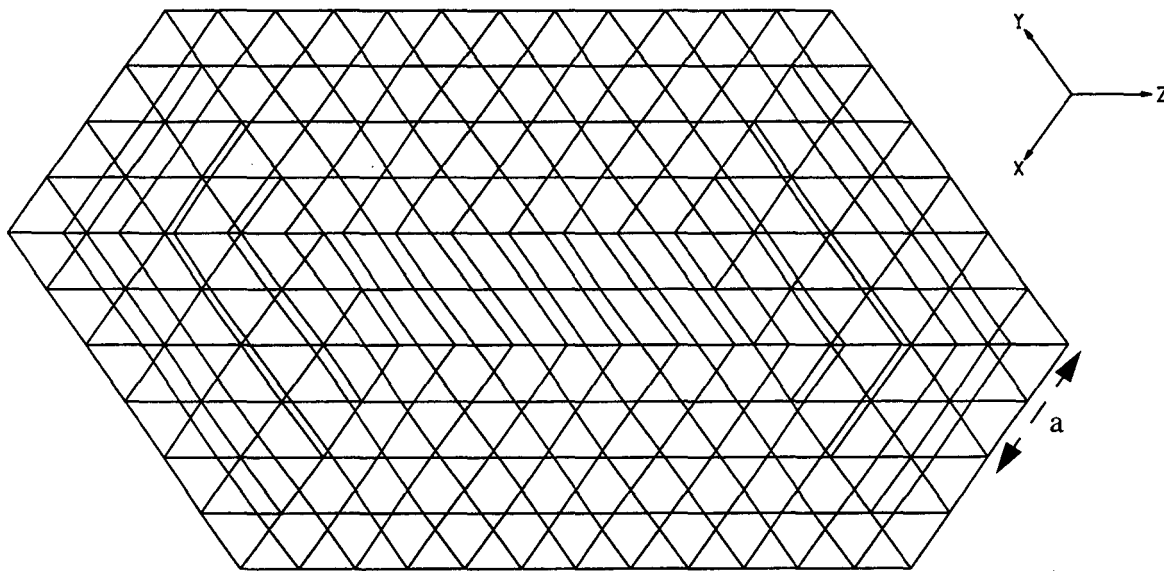


Figure 4.3. Maillage du parallélépipède.

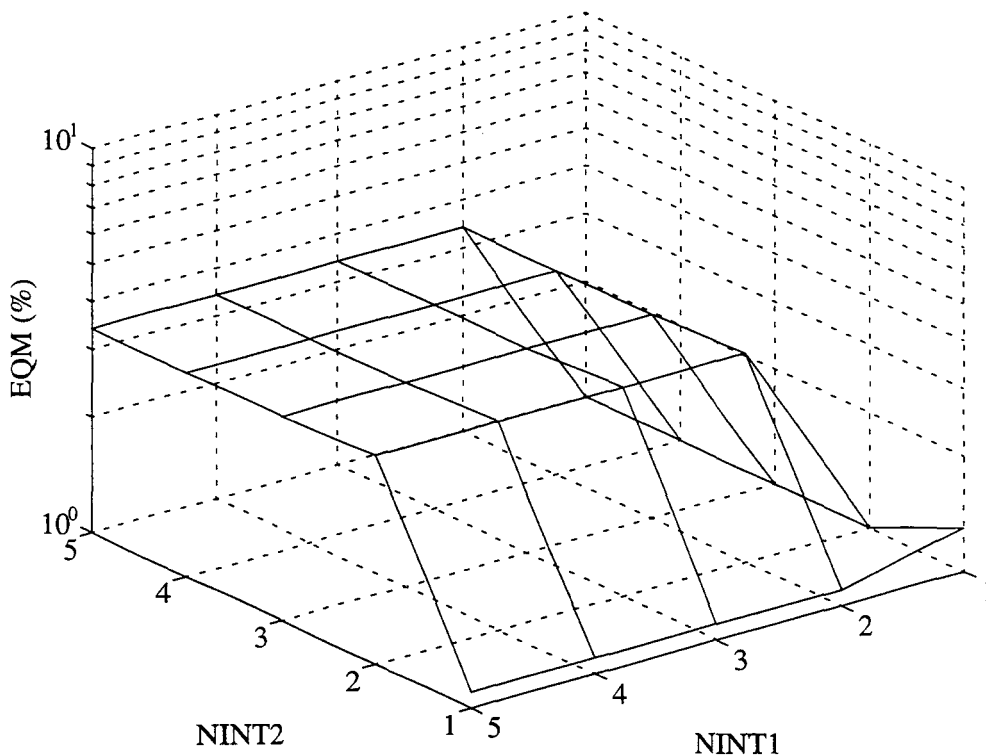


Figure 4.4.a. EQM en fonction de $NINT1$ et $NINT2$ à f_r . $M = 0$. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.

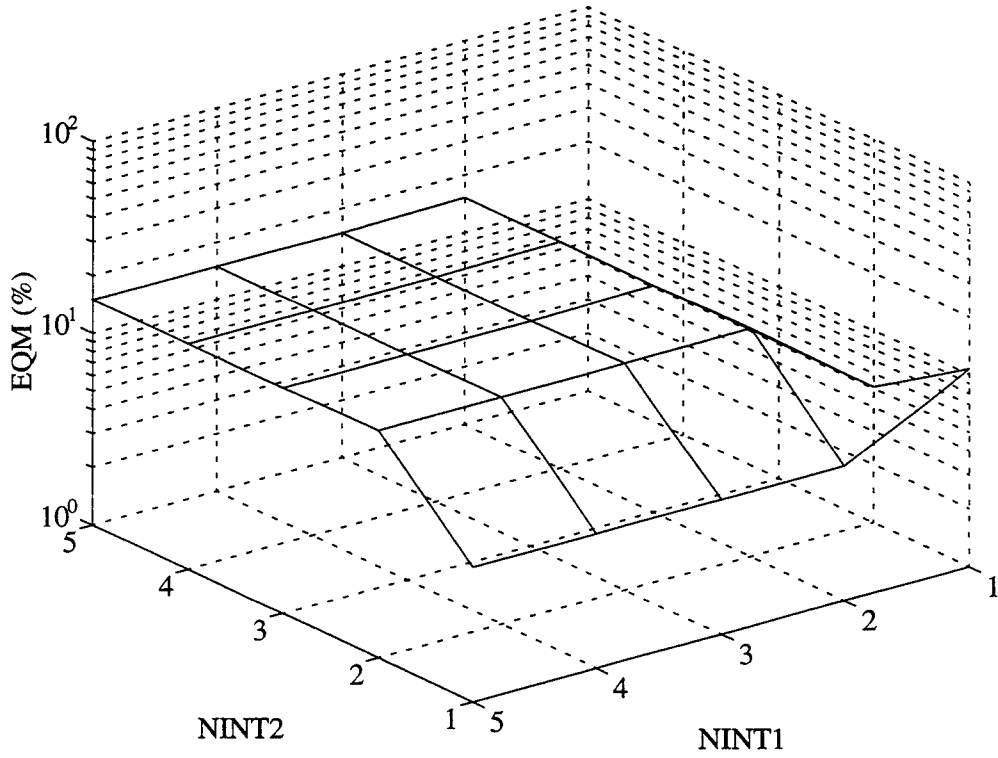


Figure 4.4.b. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . $M = 3$. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.

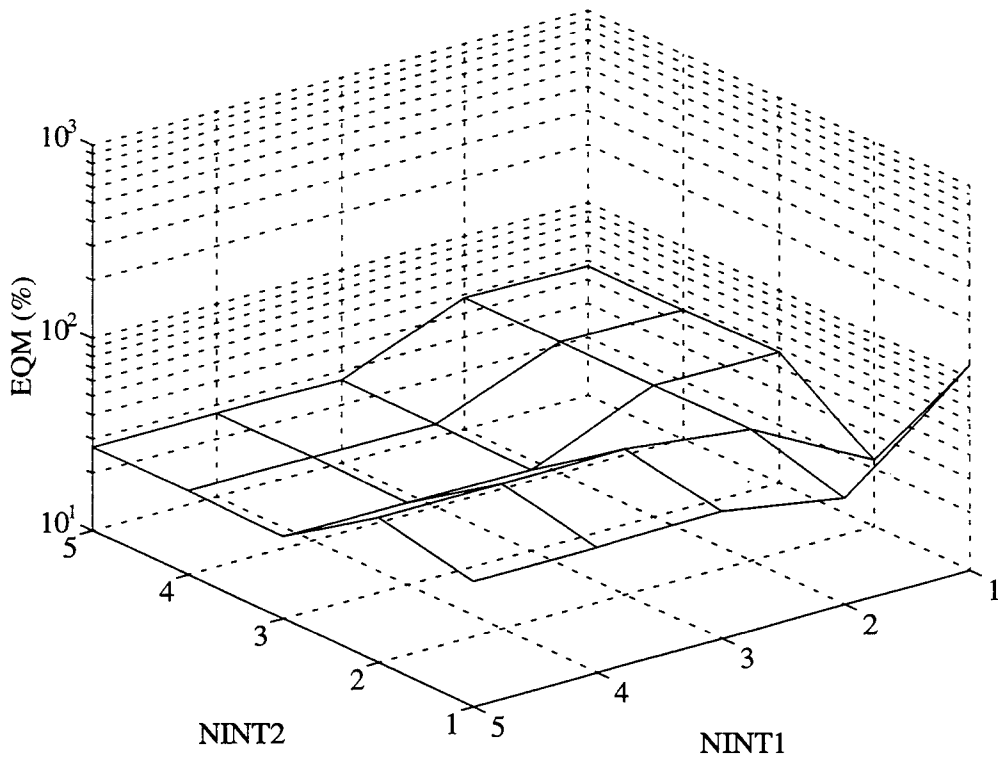


Figure 4.4.c. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . $M = 10$. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.

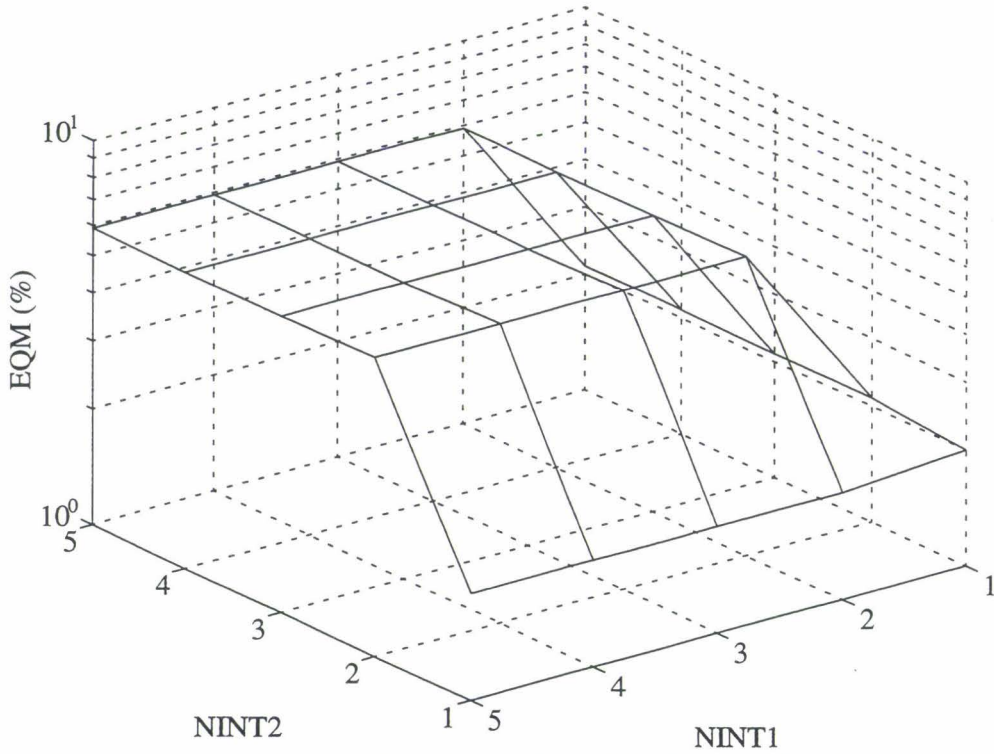


Figure 4.5.a. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à F. $M = 0$. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.

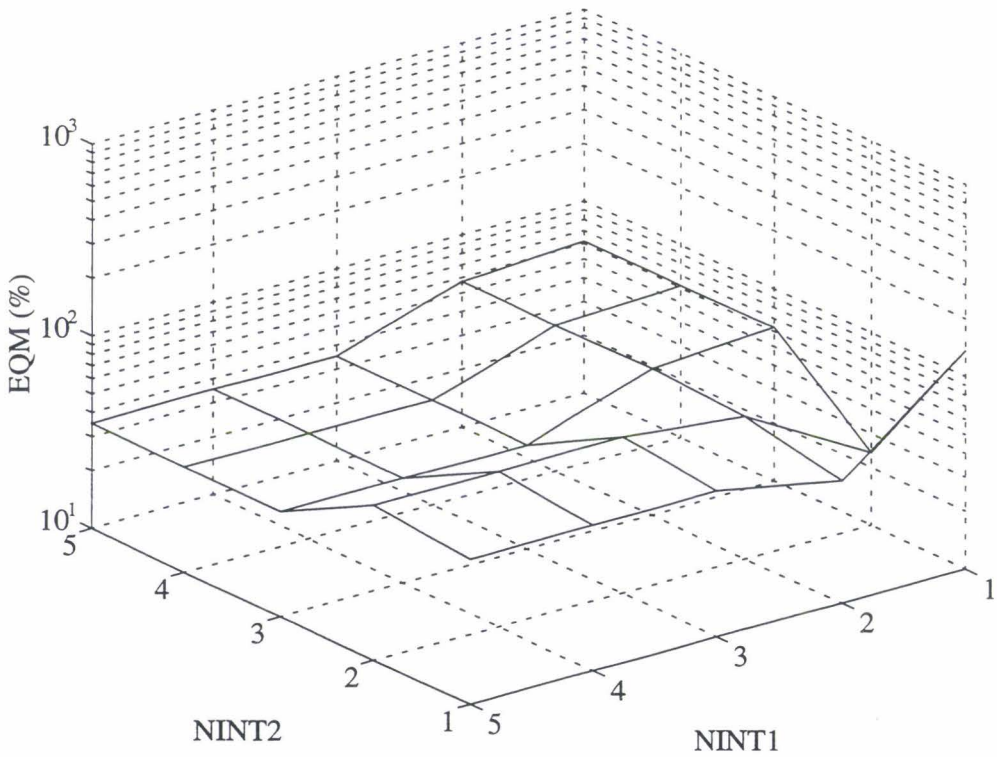


Figure 4.5.b. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à F. $M = 10$. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.

On constate que la convergence des intégrales de champ nul est atteinte pour de faibles valeurs de NINT1 et NINT2. Il semble que la convergence soit largement assurée à

$NINT1 = NINT2 = 4$ quand $0 \leq M \leq 10$. Par contre, la précision des résultats n'est pas suffisante. Cette dernière remarque semble hypothéquer l'emploi de l'approximation quadratique de la pression dans le cas 3D.

En réalité, c'est la configuration défavorable dans laquelle les calculs sont menés qui dégrade la précision des résultats : l'emploi du test de la source ponctuelle peut engendrer de fortes variations de la pression ou du déplacement sur la surface complètement irréalistes et met donc en défaut l'approximation quadratique de la pression.

Néanmoins et conformément au paragraphe suivant, cette technique reste compétitive par rapport à la décomposition de la pression en séries de Fourier dans des conditions plus réalistes.

Conformément au paragraphe 1.5, le chargement appliqué lors d'un calcul équations intégrales à une fréquence irrégulière doit respecter certaines particularités de symétries pour que cette fréquence en question puisse être considérée comme irrégulière. Ce critère est en fait moins strict. En effet, même si le chargement ne respecte pas totalement les symétries ou antisymétries de la fréquence irrégulière, numériquement l'indétermination existe toujours et cette fréquence peut être considérée comme irrégulière (en fait irrégulière "atténuée"). Le terme atténué est en réalité très adapté. En effet, tout problème peut être décomposé en différents problèmes élémentaires [58]. Chacun de ces problèmes possède des particularités de symétrie différentes et le chargement de la fréquence irrégulière vérifie toujours un de ces problèmes. Plus le problème est décomposable en problèmes élémentaires, plus la fréquence irrégulière est atténuée.

4.2.2.2 Symétrie axiale

La première partie de ce paragraphe porte sur la méthode de champ nul sans équations intégrales. Compte tenu de la remarque faite au paragraphe 4.2.1.2.1, on ne peut raisonnablement utiliser ce modèle avec approximation quadratique de la pression que pour des maillages réduits.

Dans un premier temps, on effectue le test de la source ponctuelle sur la sphère présentée au paragraphe 3.3.1.2.2. La fréquence de calcul est F ($F = 952,29$ Hz, $ka = 4,02$). Dans le cas de l'approximation quadratique, $M - 1$ doit être supérieur ou égal au nombre de noeuds NN , on choisit : $M - 1 = NN$ (cf. § 4.2.1.2.1) donc $M = 16$. Dans le cas de la décomposition en série de Fourier, il faut au moins autant d'équations de champ nul que de coefficients de Fourier, on choisit $M = P$ (cf. § 2.5.5.2.1). On fait varier $NINT1$ entre 3 et 50. $NINT1$ est le nombre de points de Gauss sur chaque élément suivant ξ . Dans le cas de la symétrie axiale, $Q = 0$ et $NINT2 = 0$ (l'intégration suivant φ est équivalente à 2π). L'EQM en fonction de $NINT1$ est tracée sur les figures 4.6 et 4.7.

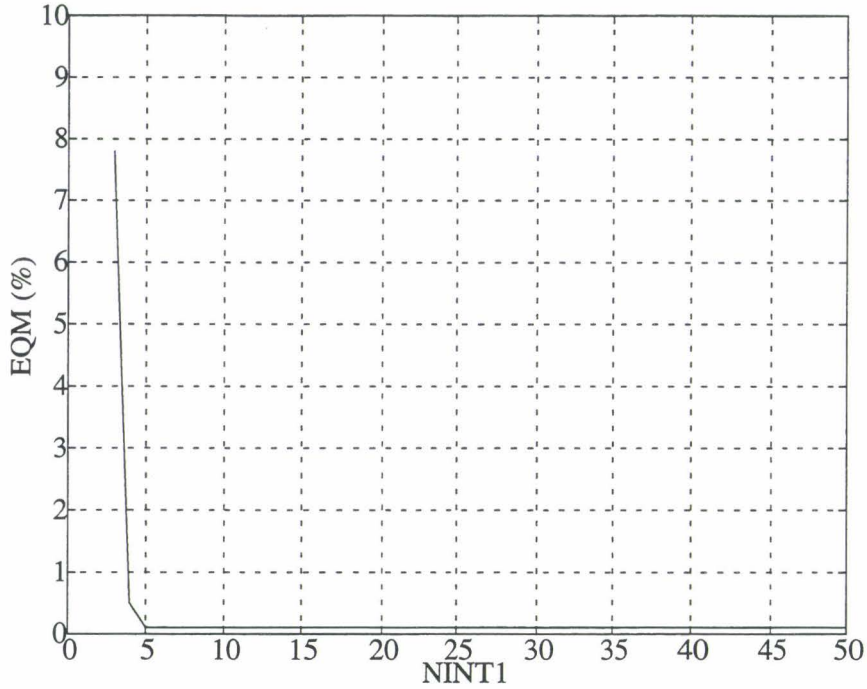


Figure 4.6. EQM en fonction de NINT1 de la sphère à F. Approximation quadratique de la pression.

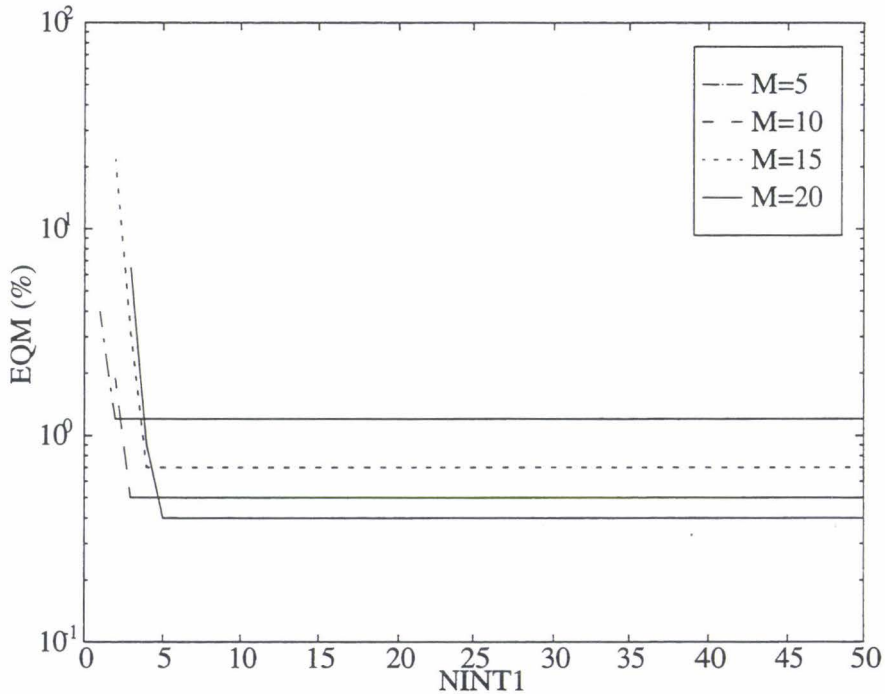


Figure 4.7. EQM en fonction de NINT1 de la sphère à F. Pression décomposée en série de Fourier.

Dans un deuxième temps, on effectue le même test sur le petit cylindre présenté au paragraphe 3.3.2. La fréquence de calcul est F ($F = 186,25$ Hz, $ka = 1,57$). Dans le cas de l'approximation quadratique, on choisit : $M = NN + 1 = 10$. Dans le cas de la décomposition en série de Fourier, on choisit : $M = P$. On fait varier NINT1 entre 5 et 50. L'EQM en fonction de NINT1 est tracée sur les figures 4.8 et 4.9.

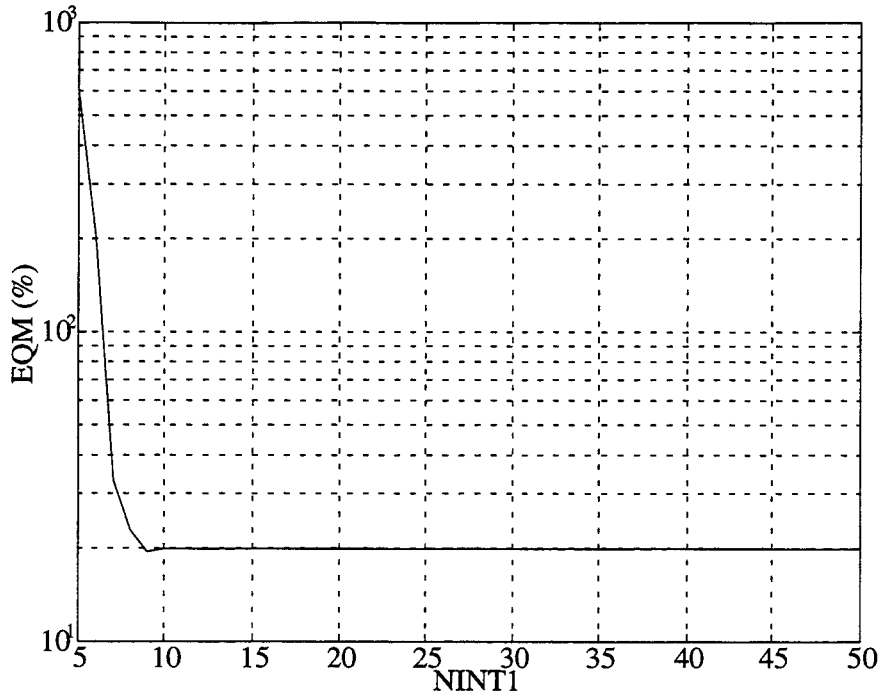


Figure 4.8. EQM en fonction de NINT1 du petit cylindre à F. Approximation quadratique de la pression.

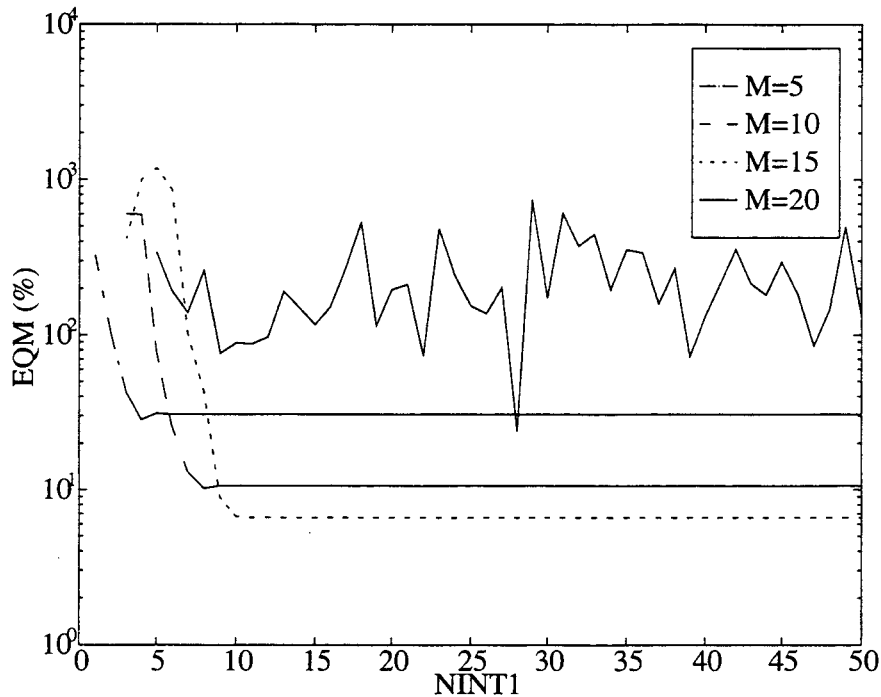


Figure 4.9. EQM en fonction de NINT1 du petit cylindre à F. Pression décomposée en série de Fourier.

D'après ces exemples, on constate que la méthode de champ nul fournit de bons résultats lors du calcul de la pression sur la surface. L'emploi de l'approximation quadratique de la pression ne permet pas le traitement de maillages de grande taille. Quand l'excentricité augmente, les résultats se dégradent. De plus, une forte instabilité numérique apparaît quand M devient grand.

La seconde partie de ce paragraphe concerne la combinaison équations intégrales-champ nul.

La première série de calculs est menée dans le cas où la pression est décomposée en série de Fourier. La deuxième série est conduite avec une approximation quadratique de la pression.

La première structure est le cylindre de section circulaire du paragraphe 3.3.1.2.2. Les paramètres de calcul sont : $P = 38$, $f_r = f_{501} = 683,17$ Hz ($ka = 5,76$) (éqs. 1.95), $F = 744,98$ Hz ($ka = 6,28$) et $1 \leq NINT1 \leq 10$. Les résultats se trouvent sur les figures 4.10 et 4.11.

La convergence des intégrales est atteinte pour $NINT1 = 4$.

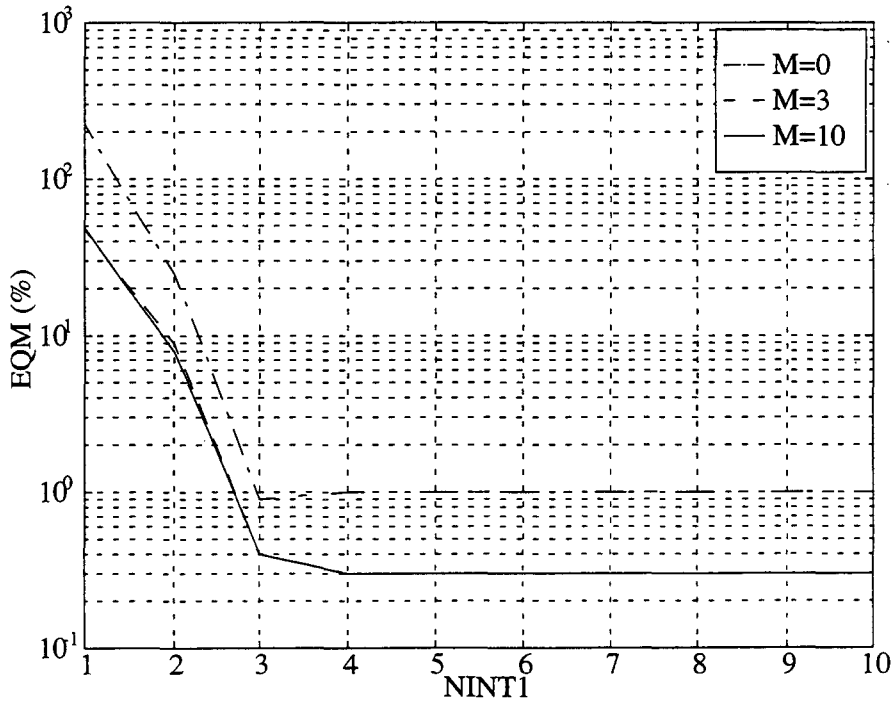


Figure 4.10. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Cylindre à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.

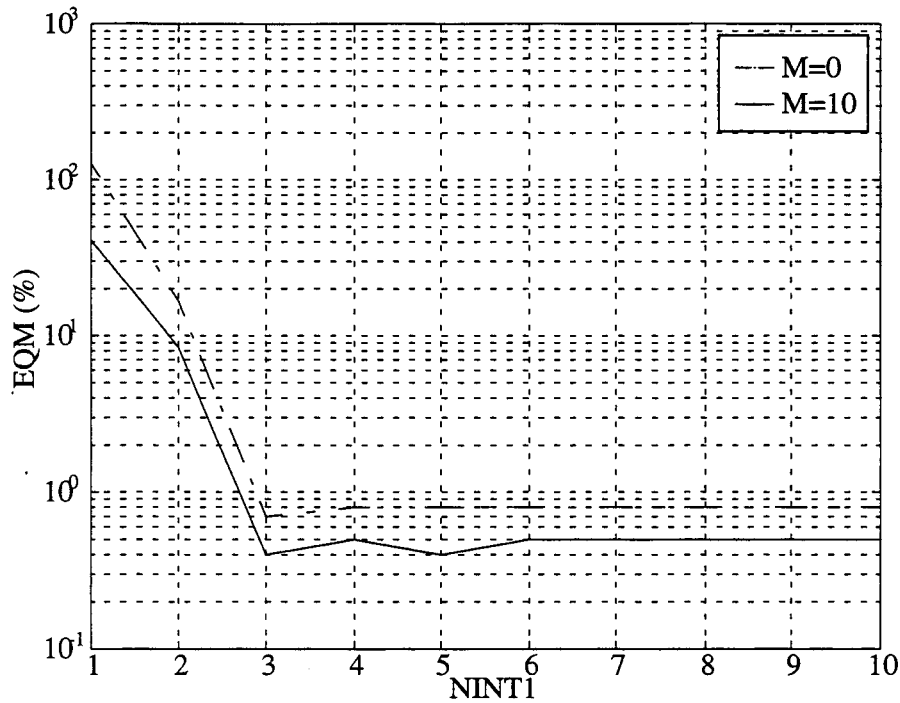


Figure 4.11. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Cylindre à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.

On travaille maintenant sur le cône présenté au paragraphe 3.3.1.2.2. Les paramètres de calcul sont : $P = 73$, $f_r = 4465$ Hz ($ka = 18,83$), $F = 4469,5$ Hz ($ka = 18,85$) et $1 \leq NINT1 \leq 10$. Les résultats se trouvent sur les figures 4.12 et 4.13.

La convergence des intégrales est atteinte pour $NINT1 = 3$.

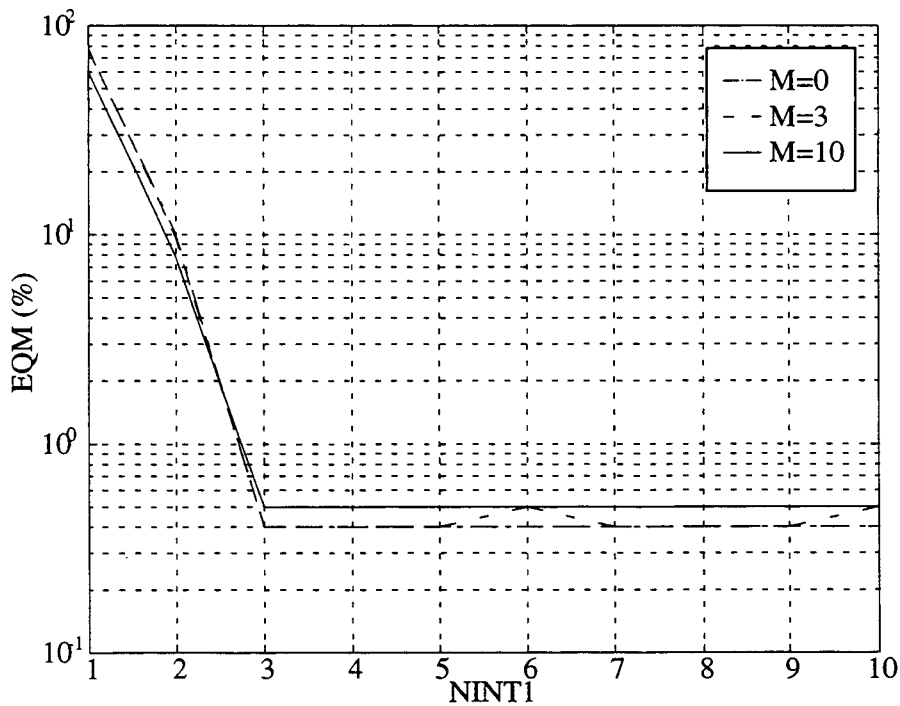


Figure 4.12. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Cône à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.

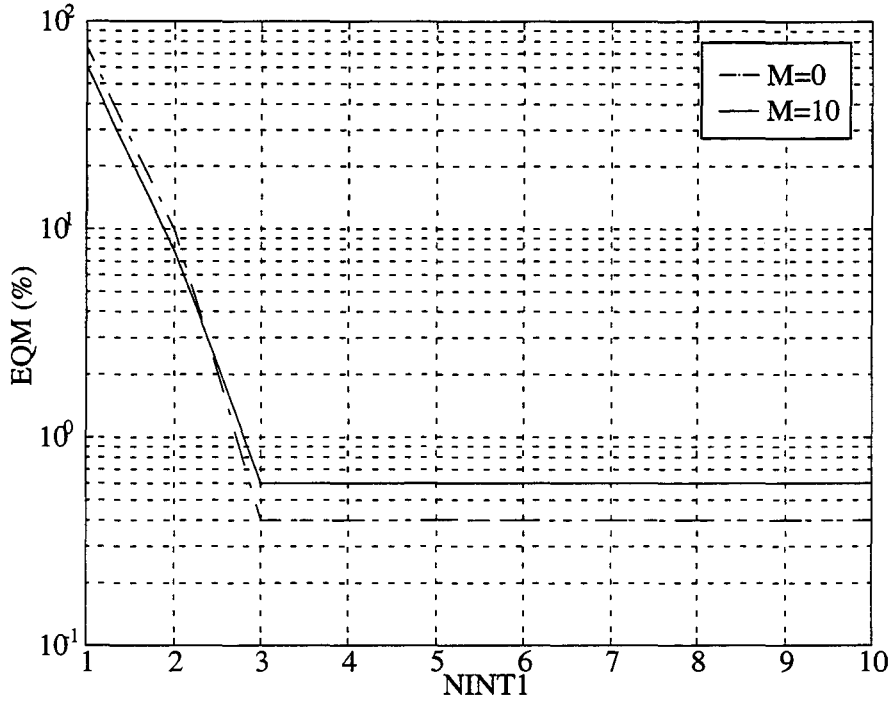


Figure 4.13. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Cône à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.

On travaille maintenant sur la sphère présentée au paragraphe 3.3.1.2.2. Les paramètres de calcul sont : $P = 4$, $f_r = f_{01} = 744,98$ Hz ($ka = 3,14$) (éqs. 1.96), $F = 952,29$ Hz ($ka = 4,02$) et $1 \leq NINT1 \leq 10$. Les résultats se trouvent sur les figures 4.14 et 4.15.

La convergence des intégrales est atteinte pour $NINT1 = 5$.

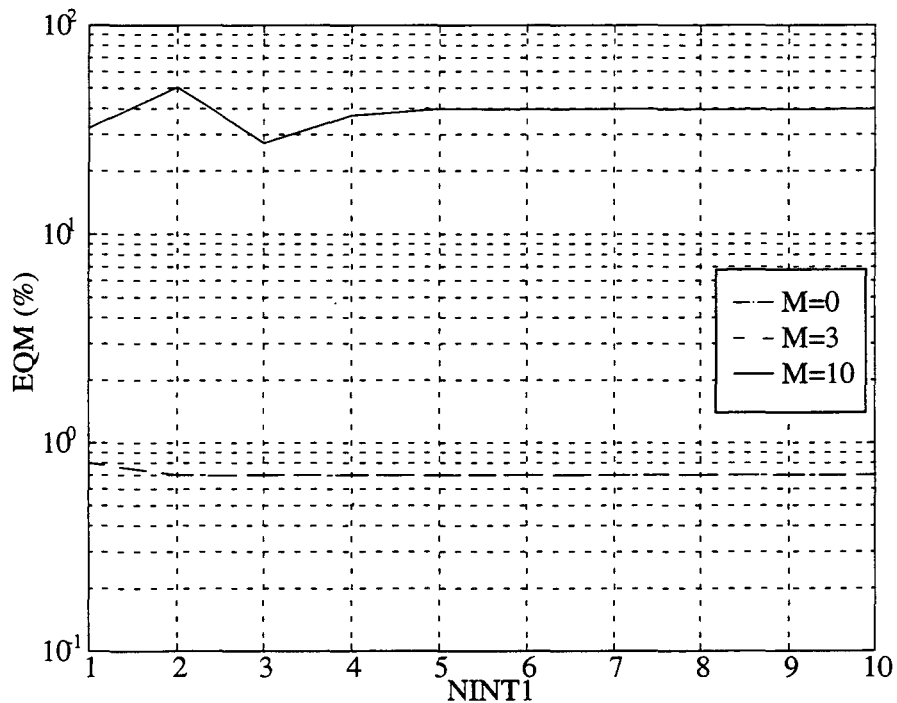


Figure 4.14. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Sphère à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.

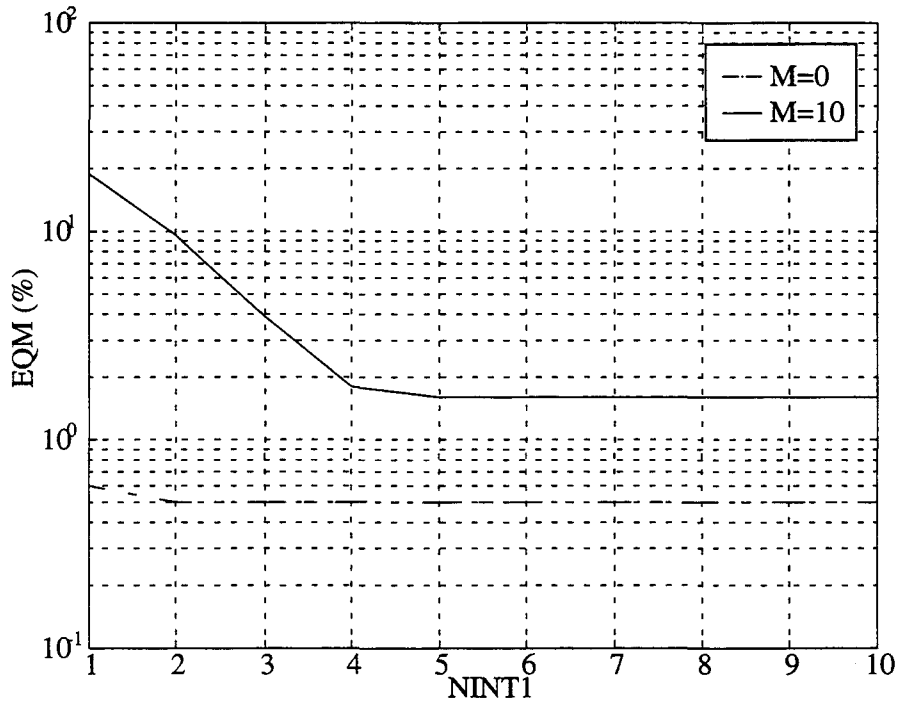


Figure 4.15. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Sphère à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.

Les mêmes calculs sont effectués avec une approximation quadratique de la pression.

Les figures 4.16 et 4.17 correspondent au cylindre. La convergence est atteinte pour NINT1 = 2.

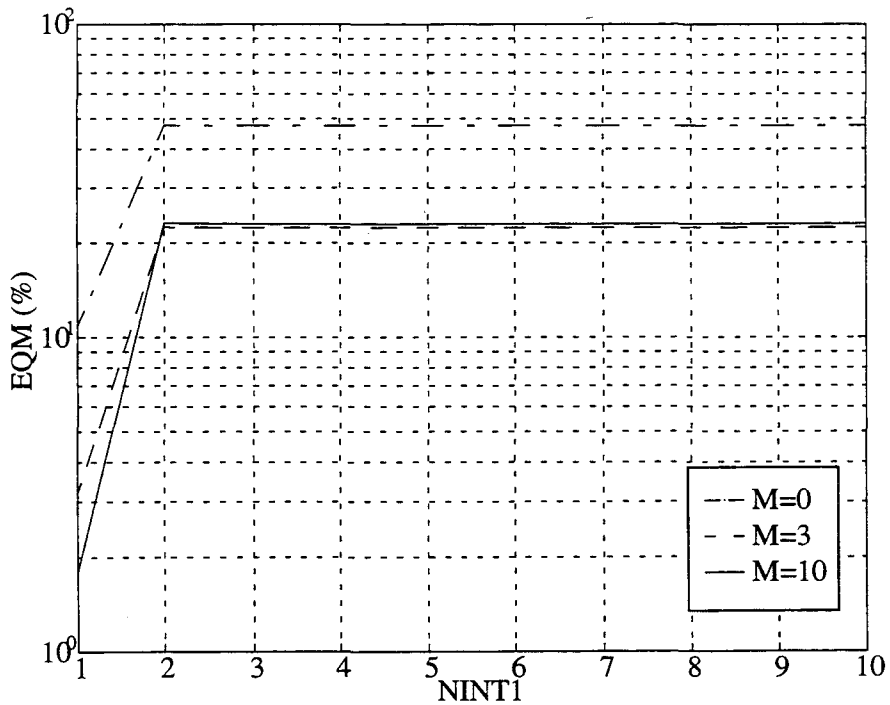


Figure 4.16. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Cylindre à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.

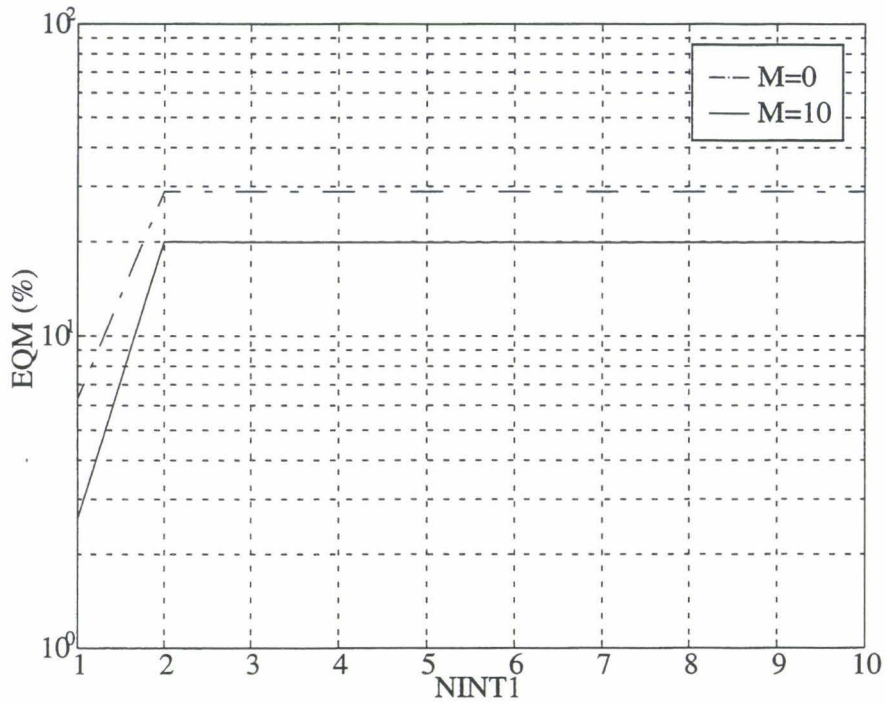


Figure 4.17. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Cylindre à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.

Les figures 4.18 et 4.19 correspondent au cône. La convergence est atteinte pour NINT1 = 2.

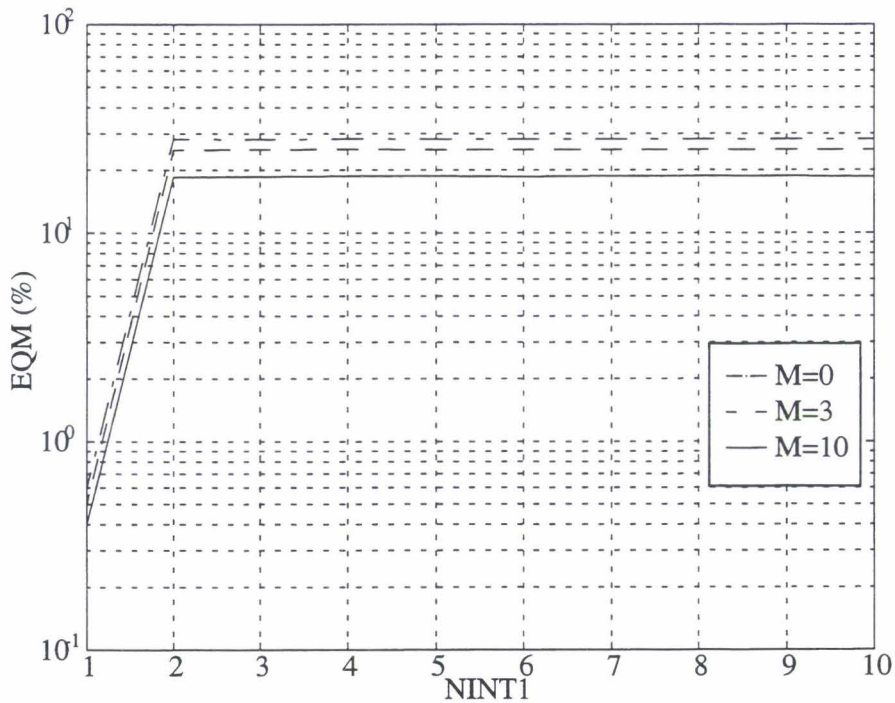


Figure 4.18. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Cône à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.

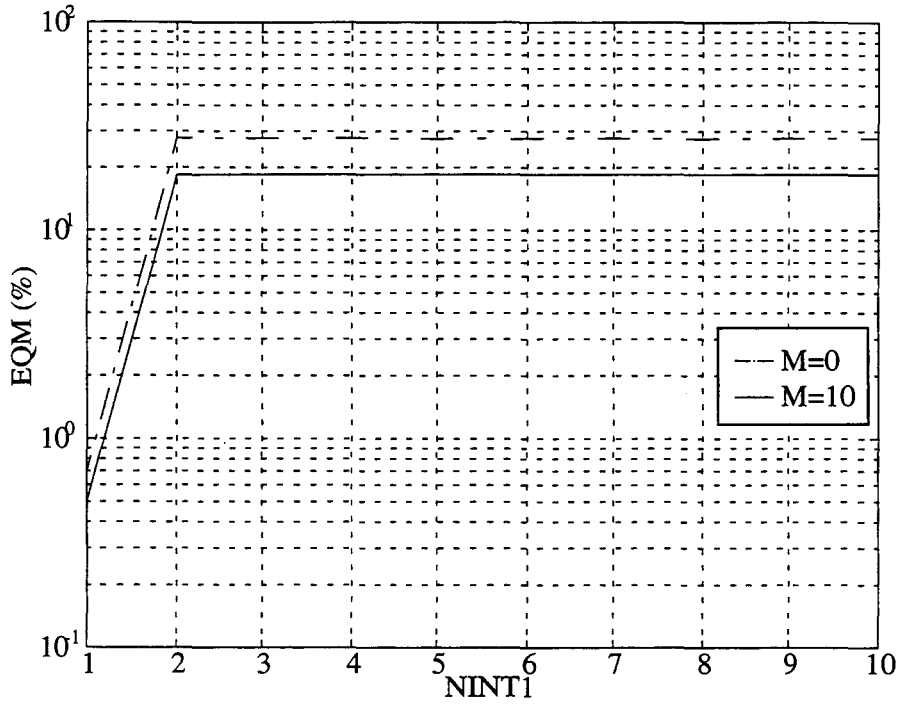


Figure 4.19. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Cône à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.

Les figures 4.20 et 4.21 correspondent à la sphère. La convergence est atteinte à NINT1 = 2.

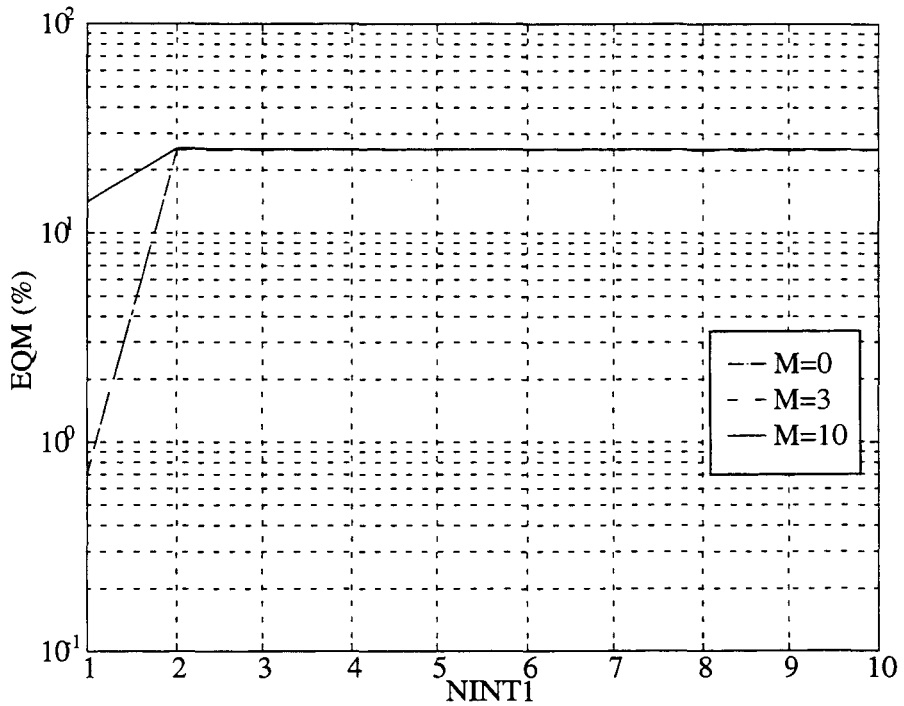


Figure 4.20. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Sphère à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.

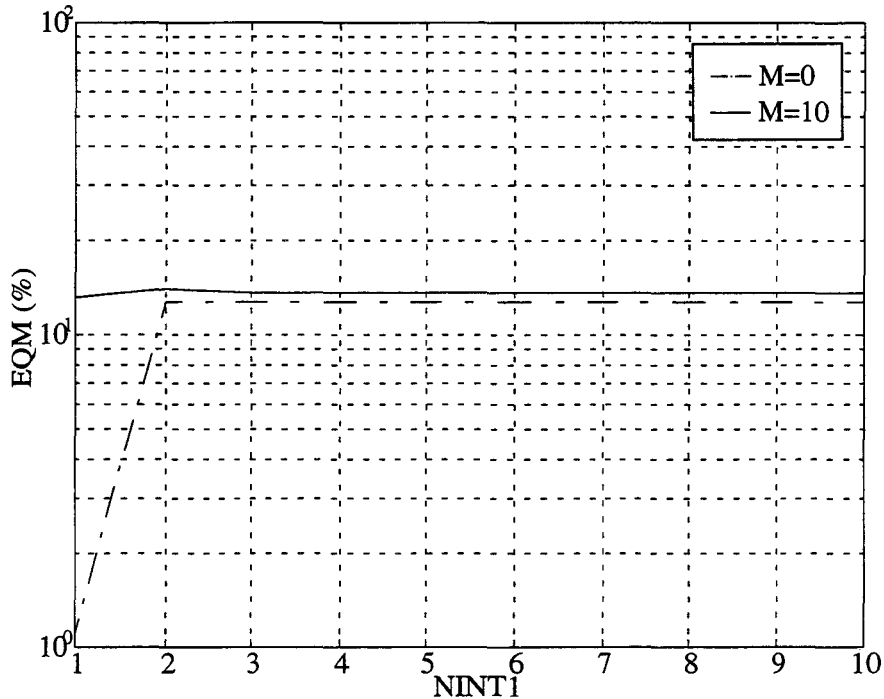


Figure 4.21. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Sphère à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.

D'après les tests précédents et de nombreux autres tests, la convergence des intégrales de champ nul est atteinte pour de faibles valeurs de NINT1. La convergence est plus rapide dans le cas de l'approximation quadratique de la pression mais la précision est meilleure (cf. § 4.2.2.1) quand la pression est décomposée en série de Fourier. Dans le premier cas, la convergence est largement assurée pour $0 \leq M \leq 10$ à NINT1 = 4. Dans le second cas, la définition de NINT1 semble plus aléatoire.

4.2.3 Comparaison des approximations de la pression

Dans ce paragraphe, on compare l'approximation quadratique (option 2) avec la décomposition en série de Fourier (option 1) de la pression. Le modèle est celui de la combinaison équations intégrales-champ nul. Les calculs sont conduits de telle sorte que la convergence des intégrales soit assurée. Avec la décomposition en série de Fourier, une étude préliminaire doit être effectuée pour chaque géométrie afin de fixer un niveau de troncature satisfaisant. Cette contrainte complique l'emploi de la décomposition en série de Fourier et augmente considérablement le temps CPU.

Deux types de calculs sont menés :

- le test de la source ponctuelle avec valeurs de l'EQM,
- la diffraction de la structure rigide.

4.2.3.1 Cas purement tridimensionnel

Le premier calcul concerne la sphère présentée au paragraphe 3.2.2. La fréquence irrégulière de calcul est $f_{01} = 748,58$ Hz ($ka = 3,16$). Elle est proche de la valeur analytique $f_{01} = 744,98$ Hz ($ka = 3,14$) (éqs. 1.96) mais légèrement décalée à cause de l'approximation introduite par le maillage. Elle est obtenue par évaluation du déterminant de la matrice $[A]$ ($\det[A] = 0$). À cette fréquence

ce, aucune surface nodale ne passe par O, $M = 0$ doit être suffisant. La source est placée en O.

L'étude préliminaire de l'option 1 fournit $NINT1 = NINT2 = 7$ pour $P = Q = 10$. Le modèle équations intégrales seules donne $EQM = 961,8 \%$ pour 3,8 s CPU. Le tableau ci-dessous contient les résultats.

M	option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	option 1 t CPU (s)	option 2 t CPU (s)
0	0,2	26,1	18,3	4,7
1	0,2	26,1	32,7	4,8
2	0,2	26,1	56,4	5
3	0,2	26,1	87,2	5,2
4	0,8	26,1	129	5,9
5	0,8	26,1	179,7	6,1
6	1,2	26,1	239,6	6,5
7	1,2	26,1	310,2	7,2
8	1,2	26,1	397	7,9
9	19,5	40,5	503,1	8,8
10	57,8	59,1	621,5	9,6

Tableau 4.1. EQM et temps CPU de la sphère à f_{01} .

On remarque que les deux options de surdétermination permettent de lever l'indétermination due à la fréquence irrégulière. Toutefois, l'option 1 permet une plus grande précision des résultats. Une dégradation s'observe lorsque M devient important. L'option 2 permet un important gain sur le temps CPU.

Le second calcul concerne le cylindre présenté au paragraphe 3.2.2. La fréquence de calcul est proche de la fréquence irrégulière analytique (éqs. 1.95) $f_{101} = 311$ Hz ($ka = 2,62$) : à savoir $f_{101} = 312,60$ Hz ($ka = 2,64$). Aucune surface nodale ne passe par O et $M = 0$ est suffisant. La source est placée en O.

L'étude préliminaire de l'option 1 fournit $NINT1 = NINT2 = 10$ pour $P = Q = 10$. Le modèle équations intégrales donne $EQM = 695 \%$ pour 161,6 s CPU. Le tableau suivant contient les résultats.

M	option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	option 1 t CPU (s)	option 2 t CPU (s)
0	11,1	13,8	316,1	208,9
1	11,1	13,8	434,2	210,5
2	6,4	24,6	632,1	212,8
3	6,4	24,6	860,7	215,6
4	6,2	24,7	1182,8	218
5	6,2	24,7	1601	222,5
6	6,6	22,2	2077,5	227,4
7	6,6	22,2	2732,5	238,3
8	11,4	21,7	3402,8	236,4
9	34,3	14,6	4118,7	244,9
10	48,7	50,8	5200	255,2

Tableau 4.2. EQM et temps CPU du cylindre à f_{101} .

Les conclusions du tableau précédent peuvent être répétées.

La troisième structure-test est le parallélépipède présentée au paragraphe 4.2.2.1. Les fréquences de calcul sont les sept fréquences irrégulières inférieures à F (éqs. 1.94) :

- $f_{111} = 348,43$ Hz ($ka = 1,96$). Aucune surface nodale ne passe par O ;
- $f_{112} = 383,96$ Hz ($ka = 2,16$). Une surface nodale confondue avec le plan XOY passe par O ;
- $f_{113} = 436,79$ Hz ($ka = 2,46$). Aucune surface nodale ne passe par O ;
- $f_{121} = 474,84$ Hz ($ka = 2,67$). Une surface nodale confondue avec le plan XOZ passe par O ;
- $f_{114} = 501,48$ Hz ($ka = 2,82$). Une surface nodale confondue avec le plan XOY passe par O ;
- $f_{122} = 501,48$ Hz ($ka = 2,82$). Deux surfaces nodales confondues avec les plans XOZ et XOY passent par O ;
- $f_{123} = 543$ Hz ($ka = 3,05$). Une surface nodale confondue avec le plan XOZ passe par O .

Le test de la source ponctuelle est effectué de telle façon que le champ de pression rayonné vérifie les plans de symétrie ou d'antisymétrie de la fréquence irrégulière. Pour ce faire, un plan de symétrie est généré par une source centré et un plan d'antisymétrie par deux sources d'amplitudes opposées placées symétriquement et à une distance de 0,5 m par rapport à O . Deux plans d'antisymétries sont générés par quatre sources.

L'étude préliminaire de l'option 1 entraîne $NINT1 = NINT2 = 5$ et $P = Q = 10$. Le tableau 4.3 contient les résultats pour le modèle équations intégrales (EI) et pour les deux options avec le nombre nécessaire et suffisant d'équations de champ nul.

fréquence (M en champ nul)	EI EQM (%)	option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	EI t CPU (s)	option 1 t CPU (s)	option 2 t CPU (s)
f_{111} (M=0)	1059,7	1,5	16,3	81,2	131,2	102,1
f_{112} (M=1)	166,6	6,3	21,5	80,3	163	101,1
f_{113} (M=0)	96,7	3,7	8,2	81,2	131,1	100,7
f_{121} (M=1)	231,5	5,9	24,5	79,4	163	101,9
f_{114} (M=1)	50,7	7,4	5,4	80,2	162,7	101
f_{122} (M=2)	62,2	6,5	22,5	84,4	221,6	104,7
f_{123} (M=1)	28,6	6,2	29,3	80,8	162,8	101,9

Tableau 4.3. EQM et temps CPU du parallélépipède.

Les mêmes conclusions s'imposent.

La dernière structure-test est un cube de demi-côté a centré à l'origine du repère et maillé (cf. figure 4.22) par 96 éléments quadrilatères à 8 noeuds, soit 290 noeuds. La plus haute fréquence du spectre est $F = 744,98$ Hz, soit $ka = 3,14$. La fréquence de calcul est la seule fréquence irrégulière de la gamme : $f_{111} = 645,18$ Hz ($ka = 2,72$), pour laquelle aucune surface nodale ne passe par O. La source est placée en O. L'étude préliminaire de l'option 1 fournit $NINT1 = NINT2 = 7$ pour $P = Q = 10$. Le calcul est fait avec $M = 0$ (suffisant théoriquement à cette fréquence). Les résultats sont dans le tableau 4.4. Avec le modèle équations intégrales, on obtient $EQM = 259,6$ % pour 4,1 s CPU.

option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	option 1 t CPU (s)	option 2 t CPU (s)
0,7	25,9	18,6	4,7

Tableau 4.4. EQM et temps CPU du cube à f_{111} .

En conclusion, le test de la source ponctuelle dans le cas 3D montre une meilleure précision de la décomposition en série de Fourier de la pression. Par contre, cet avantage est grandement amoindri car l'utilisation de la décomposition en série de Fourier réclame une étude préliminaire pénalisante et une forte consommation de temps CPU. Finalement, l'approximation quadratique propose un bon compromis précision/coût en temps CPU.

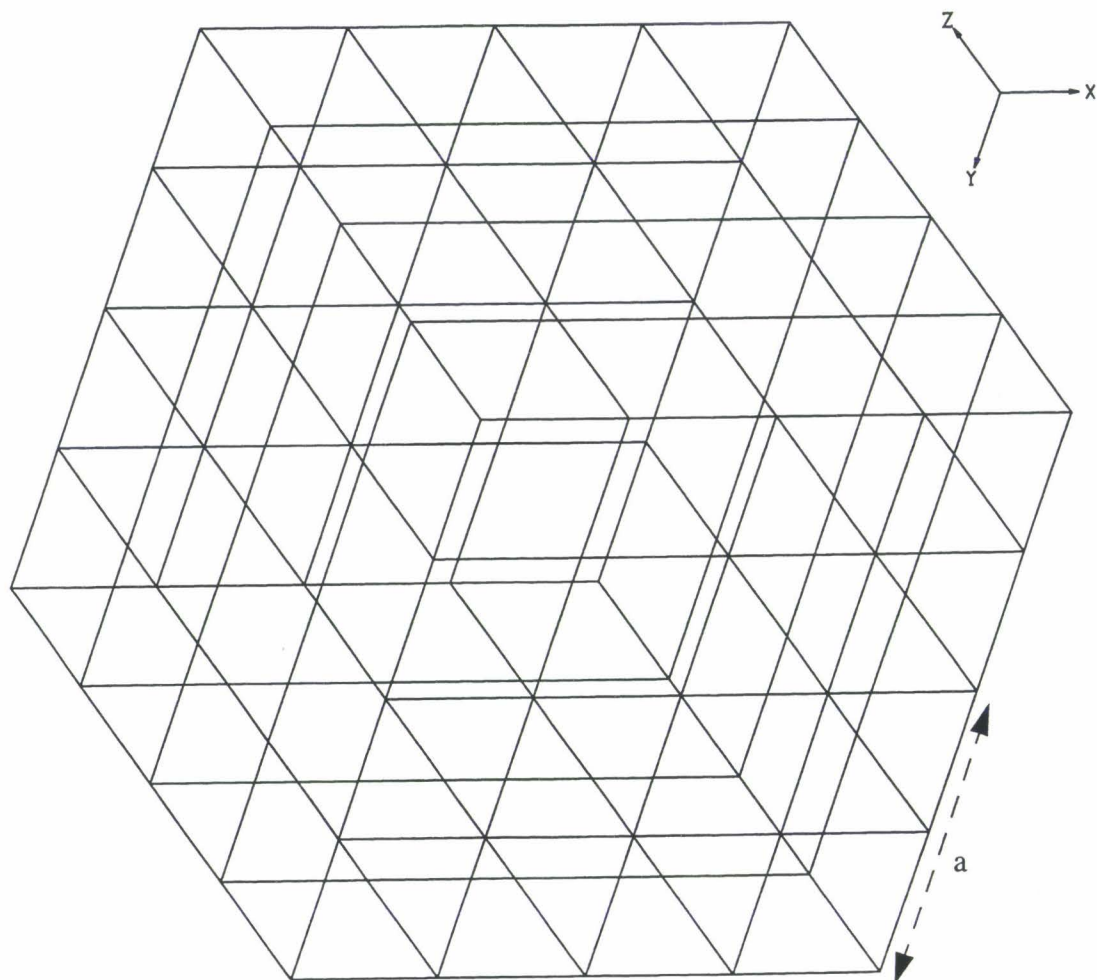


Figure 4.22. Maillage du cube.

La modélisation 3D est maintenant testée dans le cas de la diffraction rigide. Une solution analytique existe quand la cible est une sphère [1]. Le calcul est donc effectué à la première fréquence irrégulière de la sphère : $f_{01} = 748,58$ Hz ($ka = 3,16$) pour laquelle aucune surface nodale ne passe par O. Le maillage est décrit dans le paragraphe 3.2.2. Le calcul est fait avec quatre modèles différents :

- le calcul analytique (option CA),
- le modèle équations intégrales seules (option EI),
- la décomposition en série de Fourier de la pression dans la combinaison équations intégrales - champ nul avec les paramètres définis dans le test de la source ponctuelle (option 1),
- l'approximation quadratique de la pression dans la combinaison équations intégrales-champ nul (option 2).

Le module de la pression diffractée rigide normée à la pression incidente est calculé sur la génératrice de la surface (figure 4.23), à $10a$ de l'origine (figure 4.24) et en champ lointain (figure 4.25). L'angle 180° correspond à la direction de rétrodiffraction.

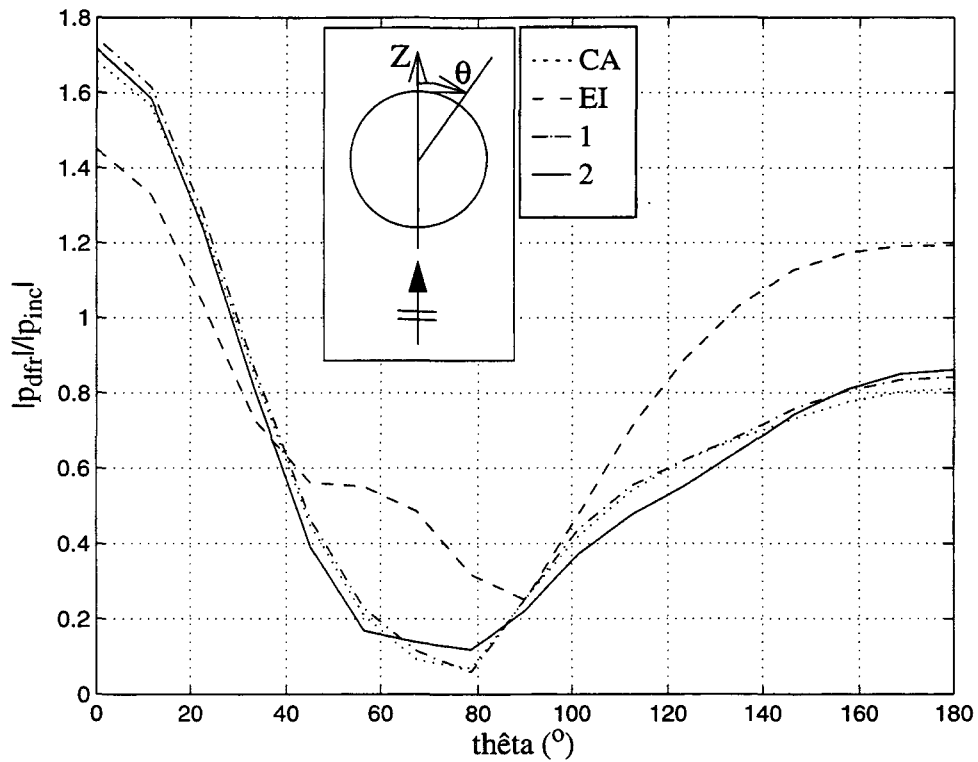


Figure 4.23. Pression sur la surface de la sphère rigide à f_{01} . Incidence suivant les Z croissants.

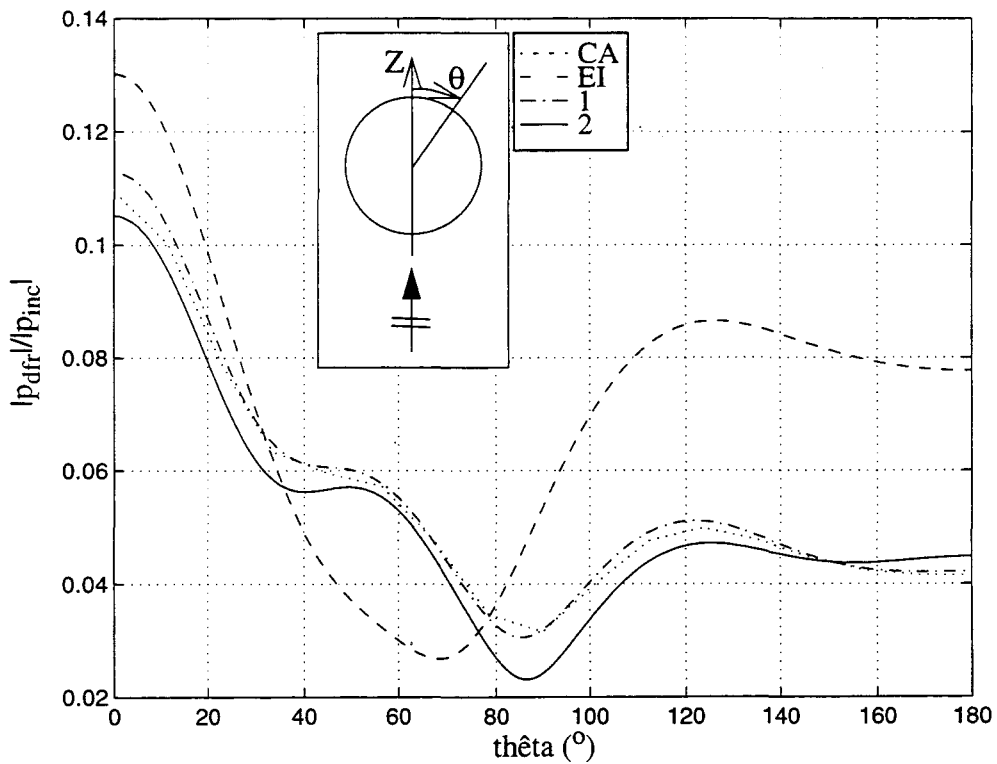


Figure 4.24. Pression à $10a$ de l'origine de la sphère rigide à f_{01} . Incidence suivant les Z croissants.

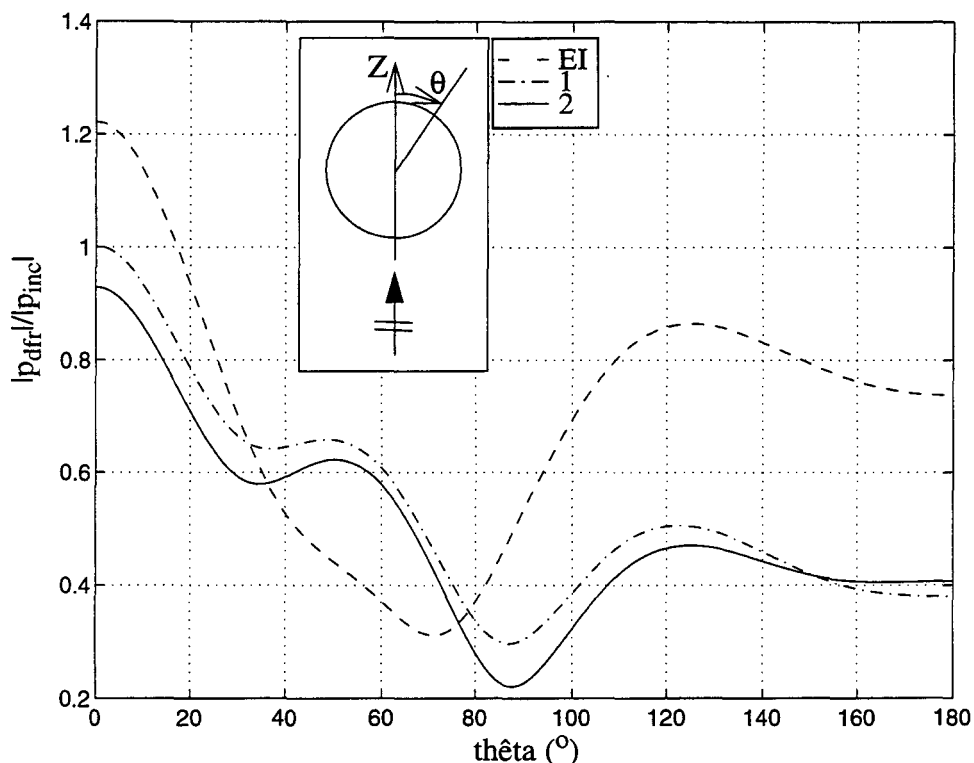


Figure 4.25. Pression en champ lointain de la sphère rigide à f_{01} . Incidence suivant les Z croissants.

On remarque une bonne concordance des options 1 et 2 avec le calcul analytique.

De plus, la pression diffractée en champ lointain obtenue avec le modèle équations intégrales et les options 1 et 2 est tracée sur la figure suivante. Le niveau sonore maximal TSmax est 121,74 dB à $\theta = 0^\circ$.

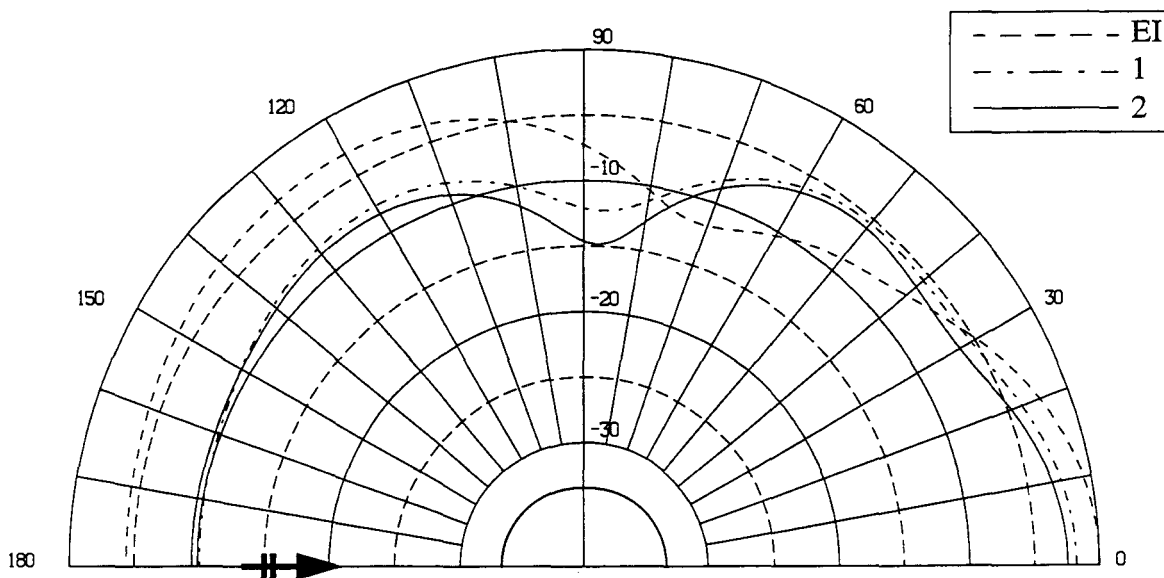


Figure 4.26. Diagramme de directivité de la sphère rigide à f_{01} . Incidence suivant les Z croissants.

Ce diagramme confirme le comportement similaire des options 1 et 2.

Du point de vue du temps de calcul, l'option 2 est plus avantageuse car elle nécessite 6,3 s au lieu de 20 s de temps CPU pour l'option 1.

Finalement, dans le cas de la diffraction rigide et pour des calculs dans le fluide à 10a de l'origine ou en champ lointain, l'approximation quadratique de la pression dans les équations de champ nul de la combinaison équations intégrales-champ nul est presque aussi efficace que la décomposition en série de Fourier de la pression. Par contre, l'approximation quadratique est nettement plus économique du point de vue du temps CPU. Globalement, l'approximation quadratique est un outil particulièrement performant de par sa simplicité d'utilisation et son bon compromis précision/temps de calcul.

On a remarqué que l'EQM obtenue par surdétermination des équations intégrales par des équations de champ nul avec approximation quadratique de la pression peut être abaissée par normalisation de ces dernières. Un coefficient de normalisation (x_{maxcn}) peut être défini pour chaque problème. Ce coefficient varie avec tous les paramètres (géométrie, fréquence, degré des équations de champ nul, etc). Aucun critère ne permet de le définir. La normalisation entraîne une variation du poids des équations de champ nul vis à vis des équations intégrales. On présente quelques résultats numériques dans les conditions de calcul précédemment décrites. À la fréquence irrégulière f_{111} du cube présenté au paragraphe 4.2.3.1, la normalisation avec $x_{maxcn} = 470$ permet par l'option 2 de passer d'une EQM de 25,9 % à 4,4 %. Pour le parallélépipède présenté au paragraphe 4.2.2.1 : à f_{111} , par $x_{maxcn} = 2200$ on passe de EQM = 16,3 % à EQM = 2,7 %; à f_{121} , par $x_{maxcn} = 600$ l'EQM = 24,5 % passe à EQM = 7,2 %. Pour le cylindre présenté au paragraphe 3.3.1.2.2, avec $x_{maxcn} = 430$ à f_{301} , on obtient EQM = 9,3 % au lieu de 33,5 %. Cette normalisation n'est pas employée dans ce document.

4.2.3.2 Symétrie axiale

La première structure-test est la sphère présentée au paragraphe 3.3.1.2.2. La fréquence irrégulière de calcul est $f_{01} = 747$ Hz ($ka = 3,15$). Cette valeur est légèrement différente de la valeur analytique de cette fréquence irrégulière qui est $f_{01} = 744,98$ Hz ($ka = 3,14$) (éqs. 1.96). Ce petit décalage est dû à l'approximation introduite par le maillage. La source ponctuelle est placée au centre de la structure. Avec le modèle équations intégrales sans équations de champ nul, EQM = 1948,7 % pour 0,3 s CPU. Pour la première fréquence irrégulière, la surface nodale se limite à la surface de la sphère. Une seule équation supplémentaire $M = 0$ est donc théoriquement suffisante. Une étude préliminaire de l'option 1 conduit à : $P = 4$ et $NINT1 = 5$. Les résultats sont contenus dans le tableau 4.5.

M	option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	option 1 temps CPU (s)	option 2 temps CPU (s)
0	0,7	25	0,3	0,3
1	0,7	25	0,3	0,3
2	0,7	25	0,3	0,3
3	0,7	25	0,3	0,3

4	0,7	25	0,3	0,3
5	0,7	25	0,3	0,3
6	0,6	24,9	0,3	0,3
7	0,6	24,9	0,3	0,3
8	38,5	25	0,3	0,3
9	38,5	25	0,3	0,3
10	38,4	25,3	0,3	0,3
11	38,4	25,3	0,3	0,3
12	46,6	26,6	0,3	0,3
13	46,6	26,6	0,3	0,3
14	399,2	33,4	0,3	0,3

Tableau 4.5. EQM et temps CPU de la sphère à f_{01} .

Les constatations effectuées dans le cas 3D sont encore valables. Par contre, l'option 2 ne permet pas un gain sur le temps CPU aussi important.

Le cylindre présentée au paragraphe 3.3.1.2.2 est maintenant étudié. Les fréquences de calcul sont irrégulières et correspondent à une symétrie axiale et une symétrie par rapport au plan XOY : $f_{101} = 311$ Hz ($ka = 2,62$), $f_{301} = 469,10$ Hz ($ka = 3,96$), $f_{102} = 666,18$ Hz ($ka = 5,62$) et $f_{501} = 683,17$ Hz ($ka = 5,76$). Aucune surface nodale ne passe par O, $M = 0$ doit être suffisant. La source est placée en O. L'étude préliminaire de l'option 1 fournit $P = 4$ et $NINT1 = 5$. Les résultats sont regroupés à toutes ces fréquences dans les tableaux 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9 respectivement pour f_{101} , f_{301} , f_{102} et f_{501} . Pour chacune de ces fréquences, le modèle équations intégrales donne respectivement : 4838,8 % pour 0,8 s CPU, 1248,1 % pour 1,2 s CPU, 590,9 % pour 1,7 s CPU et 223,4 % pour 1,8 s CPU.

M	option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	option 1 temps CPU (s)	option 2 temps CPU (s)
0	0,6	15,4	0,9	0,9
1	0,6	15,4	0,9	0,9
2	0,6	22,4	0,9	0,9
3	0,6	22,4	0,9	0,9
4	0,6	21,3	0,9	0,9
5	0,6	21,3	0,9	0,9
6	0,6	20,6	0,9	0,9
7	0,6	20,6	1	0,9

8	0,5	20,6	1	0,9
9	0,5	20,6	1	1,2
10	0,5	20,7	1	0,9
11	0,5	20,7	1	0,9
12	0,5	21	1	0,9
13	0,5	21	1	0,9
14	0,5	21,2	1	0,9

Tableau 4.6. EQM et temps CPU du cylindre à f_{101} .

M	option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	option 1 temps CPU (s)	option 2 temps CPU (s)
0	0,7	33,5	1,3	1,2
1	0,7	33,5	1,3	1,3
2	0,6	21,5	1,3	1,3
3	0,6	21,5	1,3	1,3
4	0,6	22,6	1,4	1,3
5	0,6	22,6	1,3	1,3
6	0,6	21,8	1,3	1,3
7	0,6	21,8	1,4	1,3
8	0,5	20,2	1,4	1,3
9	0,5	20,2	1,4	1,3
10	0,5	18,8	1,4	1,3
11	0,5	18,8	1,4	1,4
12	0,5	17,8	1,4	1,3
13	0,5	17,8	1,9	1,3
14	0,5	18,4	1,4	1,3

Tableau 4.7. EQM et temps CPU du cylindre à f_{301} .

M	option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	option 1 temps CPU (s)	option 2 temps CPU (s)
0	1,1	20,6	2,1	1,7

1	1,1	20,6	1,8	1,7
2	0,4	21,2	1,8	1,8
3	0,4	21,2	1,8	2,1
4	0,4	23	1,9	1,8
5	0,4	23	1,8	1,8
6	0,4	20,7	1,9	1,8
7	0,4	20,7	1,9	1,8
8	0,4	21,2	1,9	1,8
9	0,4	21,2	1,9	1,8
10	0,4	21,9	1,9	1,8
11	0,4	21,9	1,9	1,8
12	0,4	21,7	1,9	1,8
13	0,4	21,7	1,9	1,8
14	0,4	22,2	1,9	2,2

Tableau 4.8. EQM et temps CPU du cylindre à f_{102} .

M	option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	option 1 temps CPU (s)	option 2 temps CPU (s)
0	1	53,8	1,9	1,9
1	1	53,8	1,9	1,8
2	0,3	20,4	1,9	1,8
3	0,3	20,4	1,9	1,8
4	0,3	24,2	1,9	1,9
5	0,3	24,2	1,9	1,9
6	0,3	21,1	1,9	1,9
7	0,3	21,1	2	1,9
8	0,3	21,7	1,9	1,8
9	0,3	21,7	1,9	1,9
10	0,3	22,5	2	1,8
11	0,3	22,5	1,9	1,9
12	0,3	22,3	2	1,8

13	0,3	22,3	1,9	1,8
14	0,3	22,8	2	1,8

Tableau 4.9. EQM et temps CPU du cylindre à f_{501} .

Les observations faites pour la sphère sont également valables ici.

La troisième structure-test est le cône présenté au paragraphe 3.3.1.2.2 à $f_r = 4185$ Hz ($ka = 17,65$). Le modèle équations intégrales donne EQM = 113,8 % pour 20 s CPU avec la source placée en O. L'étude préliminaire de l'option 1 fournit $P = 73$ et $NINT1 = 4$. Le tableau 4.10 contient les résultats.

M	option 1 EQM (%)	option 2 EQM (%)	option 1 temps CPU (s)	option 2 temps CPU (s)
0	1,4	43,6	19,8	19,3
1	1,4	41,5	20,2	19,3
2	1	46,2	20,3	19,5
3	1,1	39,2	20,1	20
4	1,1	38,4	19,6	19,3
5	0,9	35,9	20,6	19,4
6	0,9	32,7	19,7	19,4
7	0,9	33	19,6	19,3
8	0,9	32,8	20,6	19,3
9	0,9	32,8	19,9	19,8
10	0,9	34,6	20,3	19,3
11	0,9	34	19,8	19,4
12	0,8	32,7	20,5	19,5
13	0,8	27,4	20,4	19,3
14	0,7	25,1	20,4	20,1

Tableau 4.10. EQM et temps CPU du cône à f_r .

Les conclusions déjà données pour la sphère et le cylindre s'imposent à nouveau.

4.3 SYMÉTRISATION DES ÉQUATIONS DE CHAMP NUL

Ce paragraphe concerne la prise en compte des symétries planes du problème purement tri-dimensionnel dans les équations de champ nul. Le but principal est de diminuer les temps de calcul (d'assemblage et de résolution).

Les équations de champ nul sont traitées avec une approximation quadratique de la pression plutôt qu'une décomposition en série de Fourier pour quatre raisons :

- une symétrisation des équations de champ nul simplifiée et donc un traitement numérique également simplifié,
- un coût en temps CPU plus faible,
- une facilité d'emploi accrue pour l'utilisateur,
- une bonne précision des résultats, en particulier en champ lointain.

Deux types de symétrie sont possibles :

- les symétries de la géométrie : 1, 2 ou 3 plans orthogonaux de symétrie,
- les symétries ou antisymétries du chargement : 1, 2 ou 3 plans orthogonaux de symétrie ou d'antisymétrie.

Un plan de symétrie ou d'antisymétrie du chargement est aussi plan de symétrie de la géométrie. La réciproque est fautive.

Lors d'une surdétermination des équations intégrales, l'emploi de la symétrisation des équations de champ nul doit être accompagné de la même symétrisation des équations intégrales [54,58]. De plus, l'origine du repère global doit appartenir aux plans de symétrie.

4.3.1 Description de la technique

4.3.1.1 Symétries de géométrie

Les plans de symétrie de la géométrie du problème décomposent la structure maillée en plusieurs domaines, la partie génératrice et les parties associées. Pour 1 plan de symétrie, on a 1 partie génératrice et 1 partie associée (cf. figure 4.27). Pour 2 (resp. 3) plans de symétrie, on a 1 partie génératrice et 3 (resp. 7) parties associées. De ce fait, dans les équations de champ nul, l'intégration sur Γ est ramenée à une intégration sur la partie génératrice puis l'intégration sur la ou les parties associées en est déduite.

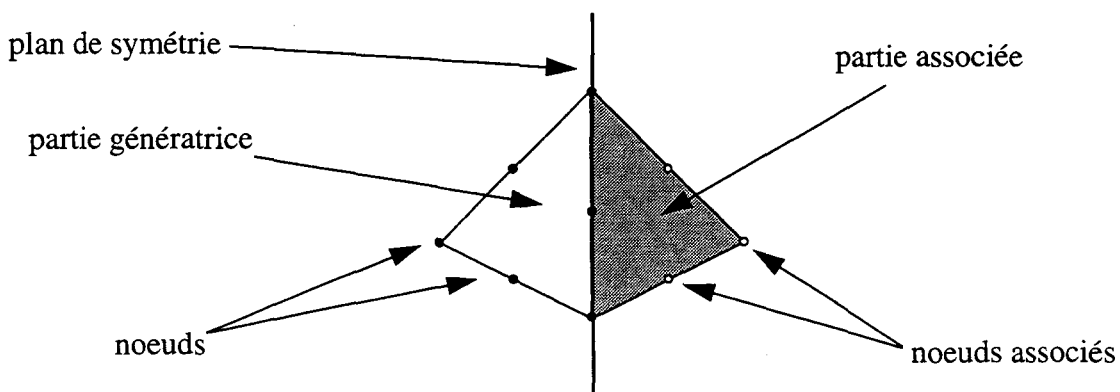


Figure 4.27. Partie génératrice et partie associée pour 1 plan de symétrie.

Trois plans de symétrie sont possibles et peuvent être décrits à partir des coordonnées sphériques d'un point courant $\underline{r}'(r',\theta',\varphi')$ par les transformations suivantes (cf. annexe A11) :

- symétrie par rapport au plan XOY :

$$\begin{aligned} r' &\rightarrow r' \\ \theta' &\rightarrow \pi - \theta' \\ \varphi' &\rightarrow \varphi' \end{aligned} \quad (4.21)$$

- symétrie par rapport au plan XOZ :

$$\begin{aligned} r' &\rightarrow r' \\ \theta' &\rightarrow \theta' \\ \varphi' &\rightarrow 2\pi - \varphi' \end{aligned} \quad (4.22)$$

- symétrie par rapport au plan YOZ :

$$\begin{aligned} r' &\rightarrow r' \\ \theta' &\rightarrow \theta' \\ \varphi' &\rightarrow \pi - \varphi' \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ces transformations s'appliquent aux fonctions d'ondes sphériques divergentes $\Psi_m^l(\underline{r}')$ et à leur dérivée normale $\partial\Psi_m^l(\underline{r}')/\partial n'$, après avoir rappelé que [2,121] :

- si m et l sont de même parité : $P_m^l(-v) = P_m^l(v)$,
- si m et l sont de parité différente : $P_m^l(-v) = -P_m^l(v)$.

□ Symétrisation de $\Psi_m^l(\underline{r}')$.

À partir des relations (A21.4), (4.21), (4.22), (4.23) et de la symétrisation des fonctions de Legendre, on a :

- symétrie s par rapport au plan XOY :

- * m et l de même parité : $\Psi_m^l(s(\underline{r}')) = \Psi_m^l(\underline{r}')$,
- * m et l de parité différente : $\Psi_m^l(s(\underline{r}')) = -\Psi_m^l(\underline{r}')$;

- symétrie s par rapport au plan XOZ :

$$\Psi_m^l(s(\underline{r}')) = (-1)^l \sqrt{v_{ml}} h_m(kr') P_m^l(\cos\theta') e^{-il\varphi'} \quad (4.24)$$

- symétrie s par rapport au plan YOZ :

* l pair :

$$\Psi_m^l(s(\underline{r}')) = \sqrt{v_{ml}} h_m(kr') P_m^l(\cos\theta') e^{-il\varphi'} \quad (4.25)$$

* l impair :

$$\Psi_m^1(s(\underline{r}')) = -\sqrt{v_{ml}} h_m(kr') P_m^1(\cos \theta') (-e^{-il\varphi'}) \quad (4.26)$$

□ Symétrisation de $\partial \Psi_m^1(\underline{r}') / \partial \underline{n}'$.

À partir des relations (A21.31), (4.21), (4.22), (4.23) et de la symétrisation des fonctions de Legendre, on a :

- symétrie s par rapport au plan XOY :

* m et l de même parité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} \Psi_m^1(s(\underline{r}')) &= (-1)^l \sqrt{v_{ml}} e^{il\varphi'} \left\{ \left[\frac{m}{kr'} h_m(kr') - h_{m+1}(kr') \right] P_m^1(\cos \theta') k \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ -\cos \theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x' \\ n_y' \\ -n_z' \end{pmatrix} + h_m(kr') [(m-1+1)(-P_{m+1}^1(\cos \theta')) \right. \\ &\quad \left. -(m+1)(-\cos \theta') P_m^1(\cos \theta')] \frac{1}{r' \sin \theta'} \begin{pmatrix} -\cos \theta' \cos \varphi' \\ -\cos \theta' \sin \varphi' \\ -\sin \theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x' \\ n_y' \\ -n_z' \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + il h_m(kr') P_m^1(\cos \theta') \frac{1}{r' \sin \theta'} \begin{pmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x' \\ n_y' \\ -n_z' \end{pmatrix} \right\} \quad (4.27) \end{aligned}$$

où $\underline{n}'(n_x', n_y', n_z')$ est la normale au point \underline{r}' avant symétrisation.

* m et l de parité différente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} \Psi_m^1(s(\underline{r}')) &= (-1)^l \sqrt{v_{ml}} e^{il\varphi'} \left\{ \left[\frac{m}{kr'} h_m(kr') - h_{m+1}(kr') \right] (-P_m^1(\cos \theta')) k \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ -\cos \theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x' \\ n_y' \\ -n_z' \end{pmatrix} + h_m(kr') [(m-1+1) P_{m+1}^1(\cos \theta') \right. \\ &\quad \left. -(m+1)(-\cos \theta') (-P_m^1(\cos \theta')) \right] \frac{1}{r' \sin \theta'} \begin{pmatrix} -\cos \theta' \cos \varphi' \\ -\cos \theta' \sin \varphi' \\ -\sin \theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x' \\ n_y' \\ -n_z' \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + il h_m(kr') (-P_m^1(\cos \theta')) \frac{1}{r' \sin \theta'} \begin{pmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x' \\ n_y' \\ -n_z' \end{pmatrix} \right\} \quad (4.28) \end{aligned}$$

- symétrie s par rapport au plan XOZ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \Psi_m^{-1}(s(\mathbf{r}')) &= (-1)^l \sqrt{v_{ml}} e^{-il\varphi'} \left\{ \left[\frac{m}{kr'} h_m(kr') - h_{m+1}(kr') \right] P_m^{-1}(\cos\theta') k \right. \\
 &\quad \left. \begin{pmatrix} \sin\theta' \cos\varphi' \\ -\sin\theta' \sin\varphi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x' \\ -n_y' \\ n_z' \end{pmatrix} + h_m(kr') [(m-1+1) P_{m+1}^{-1}(\cos\theta')] \right. \\
 &\quad \left. -(m+1) \cos\theta' P_m^{-1}(\cos\theta') \right] \frac{1}{r' \sin\theta'} \begin{pmatrix} \cos\theta' \cos\varphi' \\ -\cos\theta' \sin\varphi' \\ -\sin\theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x' \\ -n_y' \\ n_z' \end{pmatrix} \\
 &\quad \left. + i l h_m(kr') P_m^{-1}(\cos\theta') \frac{1}{r' \sin\theta'} \begin{pmatrix} \sin\varphi' \\ \cos\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x' \\ -n_y' \\ n_z' \end{pmatrix} \right\} \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

- symétrie s par rapport au plan YOZ :

* l pair :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \Psi_m^{-1}(s(\mathbf{r}')) &= \sqrt{v_{ml}} e^{-il\varphi'} \left\{ \left[\frac{m}{kr'} h_m(kr') - h_{m+1}(kr') \right] P_m^{-1}(\cos\theta') k \right. \\
 &\quad \left. \begin{pmatrix} -\sin\theta' \cos\varphi' \\ \sin\theta' \sin\varphi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_x' \\ n_y' \\ n_z' \end{pmatrix} + h_m(kr') [(m-1+1) P_{m+1}^{-1}(\cos\theta')] \right. \\
 &\quad \left. -(m+1) \cos\theta' P_m^{-1}(\cos\theta') \right] \frac{1}{r' \sin\theta'} \begin{pmatrix} -\cos\theta' \cos\varphi' \\ \cos\theta' \sin\varphi' \\ -\sin\theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_x' \\ n_y' \\ n_z' \end{pmatrix} \\
 &\quad \left. + i l h_m(kr') P_m^{-1}(\cos\theta') \frac{1}{r' \sin\theta'} \begin{pmatrix} -\sin\varphi' \\ -\cos\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_x' \\ n_y' \\ n_z' \end{pmatrix} \right\} \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

* l impair :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial n'} \Psi_m^1(s(\mathbf{r}')) &= -\sqrt{v_{m1}}(-e^{-i\varphi'}) \left\{ \left[\frac{m}{kr'} h_m(kr') - h_{m+1}(kr') \right] P_m^1(\cos\theta') k \right. \\
 &\quad \left. \begin{pmatrix} -\sin\theta' \cos\varphi' \\ \sin\theta' \sin\varphi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_x' \\ n_y' \\ n_z' \end{pmatrix} + h_m(kr') [(m-1+1)P_{m+1}^1(\cos\theta') \right. \\
 &\quad \left. -(m+1)\cos\theta' P_m^1(\cos\theta') \right] \frac{1}{r' \sin\theta'} \begin{pmatrix} -\cos\theta' \cos\varphi' \\ \cos\theta' \sin\varphi' \\ -\sin\theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_x' \\ n_y' \\ n_z' \end{pmatrix} \\
 &\quad \left. + i h_m(kr') P_m^1(\cos\theta') \frac{1}{r' \sin\theta'} \begin{pmatrix} -\sin\varphi' \\ -\cos\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_x' \\ n_y' \\ n_z' \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Les termes c_m^1 , coefficients de la décomposition de la pression incidente (A15.14), ne dépendent que de l'amplitude et de la direction de l'onde incidente. Ils sont donc indépendants de la géométrie et des symétries de la géométrie.

Une combinaison de plusieurs plans de symétrie de la géométrie est possible et peut être schématisée sur la figure 4.28. L'ordre des symétries est indifférent.

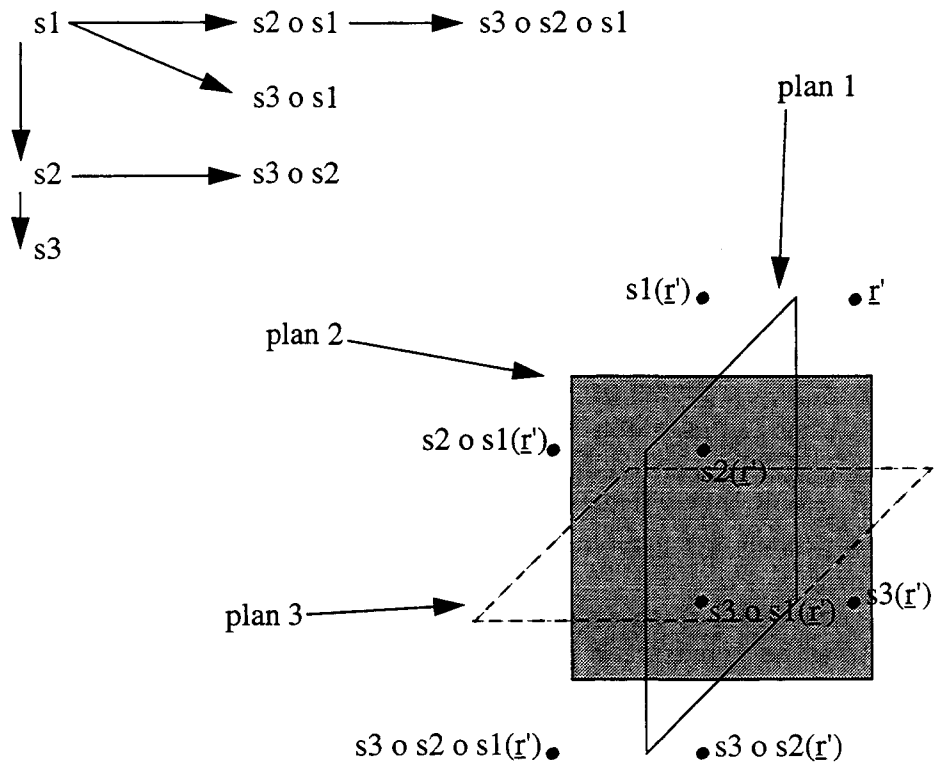


Figure 4.28. Prise en compte des symétries de géométrie.

4.3.1.2 Symétries, antisymétries de chargement

Lorsque le chargement appliqué au problème possède 1, 2 ou 3 plans de symétrie ou antisymétrie, le maillage est réduit à la moitié, au quart ou au huitième de la surface. Cette réduction diminue considérablement les temps d'assemblage et de résolution du système surdéterminé équations intégrales-champ nul [58].

Pour une symétrie s du chargement, on a :

$$\begin{aligned} p(s(\mathbf{r})) &= p(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial n} p(s(\mathbf{r})) &= \frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Pour une antisymétrie s du chargement, on a :

$$\begin{aligned} p(s(\mathbf{r})) &= - p(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial}{\partial n} p(s(\mathbf{r})) &= - \frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Le principe est simple : à un coefficient de matrice correspondant à un noeud du maillage, on lui ajoute (resp. soustrait) celui du maillage virtuel associé obtenu par reconstruction de la surface complète par rapport au plan de symétrie (resp. d'antisymétrie) considéré.

4.3.2 Exemples

Dans ce paragraphe, la symétrisation des équations de champ nul est illustrée dans le cas de la surdétermination des équations intégrales. La convergence des intégrales est assurée conformément au paragraphe 4.2.2.

Le premier exemple porte sur le parallélépipède rectangle du paragraphe 4.2.2.1 avec le test de la source ponctuelle. Les calculs sont menés pour deux fréquences irrégulières symétriques :

- $f_{111} = 348,43$ Hz ($ka = 1,96$),
- $f_{113} = 436,79$ Hz ($ka = 2,46$).

Le chargement utilisé est généré par une source ponctuelle centrée en O. Aucune surface nodale ne passant par O, une équation supplémentaire de champ nul avec $M = 0$ suffit. Deux modèles de calcul sont employés : la méthode des équations intégrales; la combinaison équations intégrales-champ nul. Les calculs sont effectués pour diverses combinaisons de plan de symétrie de la géométrie et du chargement. Les maillages utilisés sont dessinés sur les figures 4.3, 4.29, 4.30 et 4.31.

Pour f_{111} , le modèle équations intégrales conduit à EQM = 1059,7 % pour un temps CPU de 81,2 s (aucun plan de symétrie de la géométrie n'est pris en compte). Pour f_{113} , il conduit à EQM = 96,7 % pour le même temps CPU. Les résultats obtenus avec la combinaison équations intégrales-champ nul sont contenus dans les tableaux 4.11 et 4.12.

nombre de plans de symétrie de chargement	0	0	0	0	1
nombre de plans de symétrie de géométrie	0	1	2	3	1
EQM (%)	16,3	16,3	16,3	16,3	16,6
temps CPU (s)	102,1	99,2	100,9	102,3	19,2

nombre de plans de symétrie de chargement	1	1	2	2	3
nombre de plans de symétrie de géométrie	2	3	2	3	3
EQM (%)	16,6	16,6	17,8	17,8	16,8
temps CPU (s)	17	15,8	4,5	3,7	1,6

Tableau 4.11. EQM et temps CPU pour le parallélepède à f_{111} .

nombre de plans de symétrie de chargement	0	0	0	0	1
nombre de plans de symétrie de géométrie	0	1	2	3	1
EQM (%)	8,2	8,2	8,2	8,2	9,1
temps CPU (s)	100,7	99	98,1	99,9	19,2

nombre de plans de symétrie de chargement	1	1	2	2	3
nombre de plans de symétrie de géométrie	2	3	2	3	3
EQM (%)	9,1	9,1	12,2	12,2	11
temps CPU (s)	16,8	16,1	4,5	3,5	1,5

Tableau 4.12. EQM et temps CPU pour le parallélepède à f_{113} .

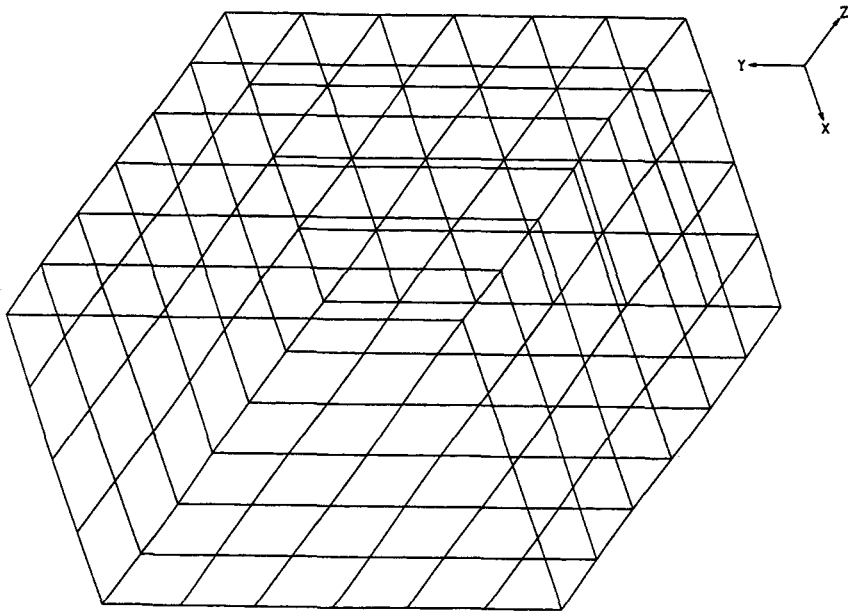


Figure 4.29. Maillage du demi-parallélépipède.

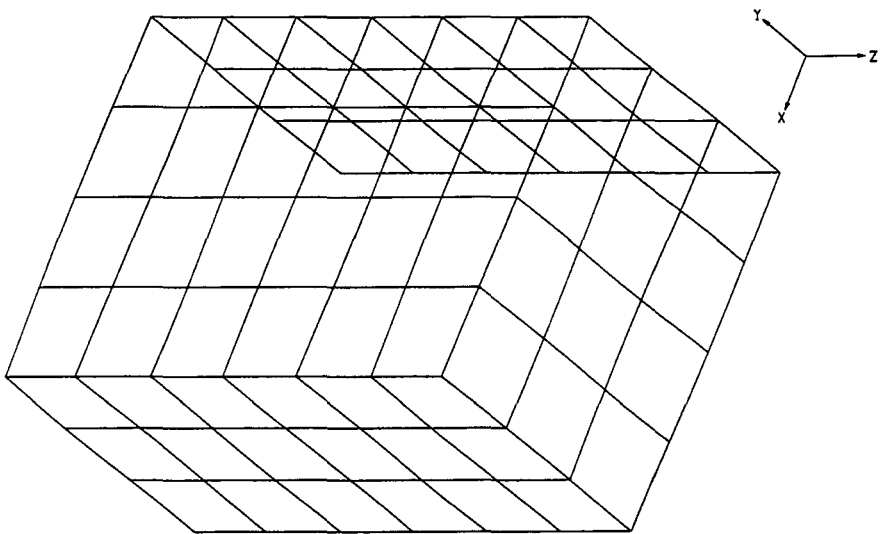


Figure 4.30. Maillage du quart de parallélépipède.

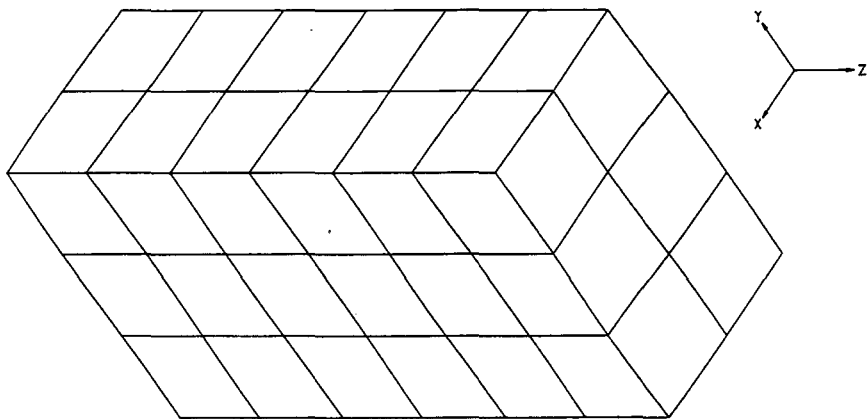


Figure 4.31. Maillage du huitième de parallélépipède.

Contrairement à la prise en compte des symétries du chargement, on constate que la prise en compte des symétries de la géométrie ne baisse pas le temps CPU. Une légère variation de l'EQM intervient avec l'augmentation du nombre de plans de symétrie du chargement.

Avec la même structure, une fréquence irrégulière antisymétrique par rapport au plan XOY est considérée : $f_{114} = 501,48$ Hz ($ka = 2,82$). O appartenant à une surface nodale, il faut imposer $M = 1$. Un chargement antisymétrique généré par deux sources ponctuelles sur l'axe OZ d'amplitudes opposées et situées symétriquement à 0,1 m de O est défini. Les calculs précédents sont repris. On obtient EQM = 50 % pour 80,5 s CPU avec la méthode des équations intégrales. Les résultats de la combinaison équations intégrales-champ nul sont donnés dans le tableau 4.13.

nombre de plans de symétrie de chargement	0	0	0	0	0
nombre de plans d'anti-symétrie de chargement	0	0	0	0	1
nombre de plans de symétrie de géométrie	0	1	2	3	1
EQM (%)	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6
temps CPU (s)	105,4	98,7	97,6	99,3	18,3

nombre de plans de symétrie de chargement	0	0	1	1	2
nombre de plans d'anti-symétrie de chargement	1	1	1	1	1
nombre de plans de symétrie de géométrie	2	3	2	3	3
EQM (%)	15,6	8,4	6,1	5,9	13,2
temps CPU (s)	16,8	16,2	5	4,1	2

Tableau 4.13. EQM et temps CPU pour le parallélépipède à f_{114} .

De nouveau, on observe une forte baisse du temps CPU lié à la réduction du maillage et une variation de l'EQM.

Le deuxième exemple est celui du problème de diffraction rigide pour la sphère du paragraphe 3.2.2. Il admet une solution analytique [1]. On suppose une onde incidente plane se propageant dans le sens des X croissants. La fréquence $f_{01} = 748,58$ Hz ($ka = 3,16$) est la fréquence de travail. C'est une fréquence irrégulière symétrique. Le chargement induit par l'onde incidente pouvant être décomposé en la somme d'un problème symétrique et d'un problème antisymétrique par rapport au plan YOZ, elle est également irrégulière pour ce problème de diffraction (cf. § 4.2.2.1). On trace, figure 4.32, le module normalisé de la pression diffractée rigide, dans le plan XOZ en fonction de θ , dans le fluide à une distance $10a$ de l'origine pour diverses configurations. Les temps de calcul sont donnés dans le tableau 4.14.

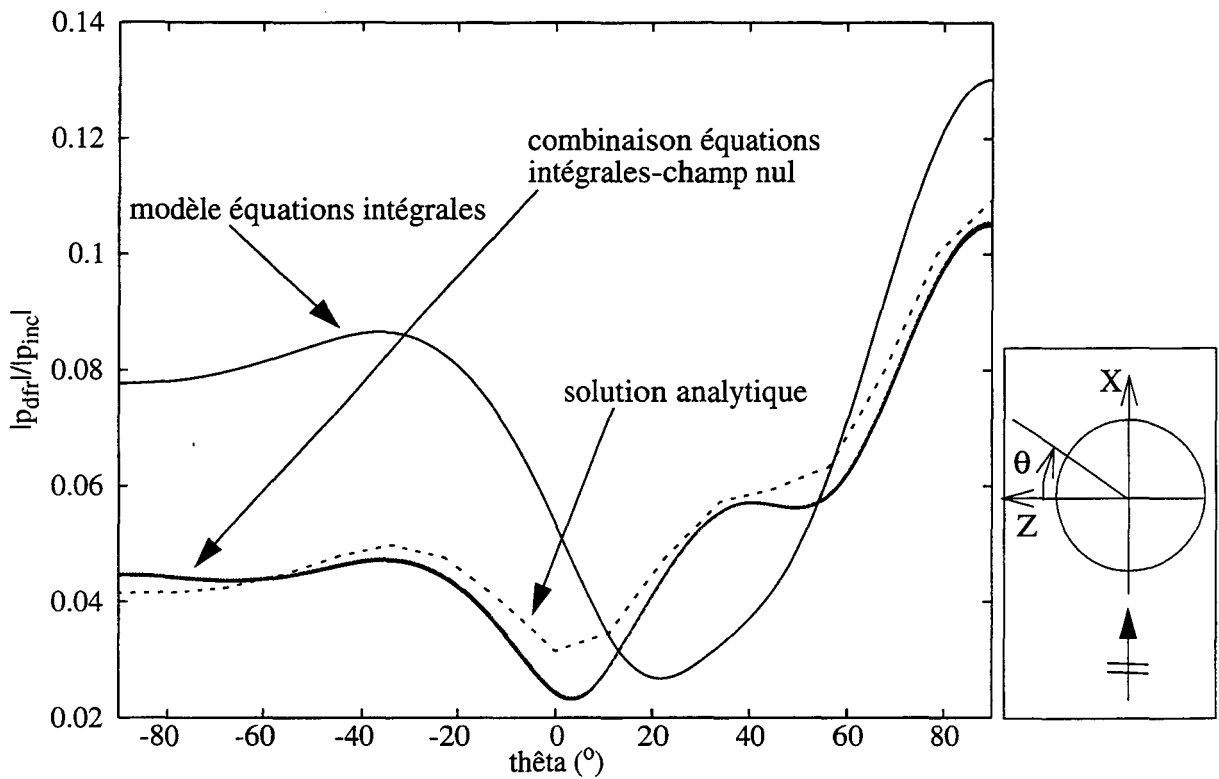


Figure 4.32. Pression à f_{01} de la sphère rigide à $10a$ dans le plan XOZ. Incidence suivant les X positifs.

La courbe obtenue par la combinaison équations intégrales-champ nul est constituée de plusieurs courbes identiques issues des configurations décrites ci-dessus.

nombre de plans de symétrie de chargement	0	0	0	0	1
nombre de plans de symétrie de géométrie	0	1	2	3	1
temps CPU (s)	5,3	5,5	5,5	5,6	1,7

nombre de plans de symétrie de chargement	1	1	2	2
nombre de plans de symétrie de géométrie	2	3	2	3
temps CPU (s)	1,5	1,4	0,7	0,7

Tableau 4.14. Temps CPU pour la sphère rigide à f_{01} .

On remarque une bonne concordance entre la solution analytique et le modèle équations intégrales-champ nul. De plus, contrairement au test de la source ponctuelle basé sur l'EQM, la pres-

sion diffractée rigide calculée dans le fluide est indépendante de la combinaison des symétries effectuée. Une forte baisse du temps CPU est observée de nouveau avec la réduction du maillage.

Comme on l'a déjà remarqué dans le paragraphe 4.2, ceci confirme que le test de la source ponctuelle est beaucoup trop exigeant pour valider un modèle : un calcul de rayonnement à partir d'un champ de déplacement réaliste ou un calcul de diffraction peut être modélisé avec une bonne précision même si les résultats du test de la source ponctuelle sont médiocres.

4.4 PROBLÈMES D'EXCENTRICITÉ DES ÉQUATIONS DE CHAMP NUL

D'après les paragraphes 1.7 et 4.1, quand la géométrie est excentrée, la validité de la méthode de champ nul est limitée aux points de la surface Γ proches de la sphère inscrite dans Γ et de centre l'origine de calcul. Ce défaut est fortement atténué quand les équations de champ nul sont utilisées dans la configuration classique : la combinaison équations intégrales-champ nul.

Dans la littérature, des travaux portant sur le problème d'excentricité et s'appliquant à la méthode de la matrice T existent [19,123,155] : la technique, dite des origines multiples, qui consiste à utiliser plusieurs origines de calcul et à réitérer le calcul en translatant l'origine pour que la réunion des sphères inscrites dans la surface et centrées en ces origines assure une meilleure couverture de Γ conformément à la figure 4.33; le développement de la fonction de Green qui emploie des fonctions d'ondes sphéroïdales au lieu d'ondes sphériques. Ces deux développements permettent une meilleure modélisation des structures allongées et ne sont pas, à notre connaissance, appliqués à la méthode de champ nul.

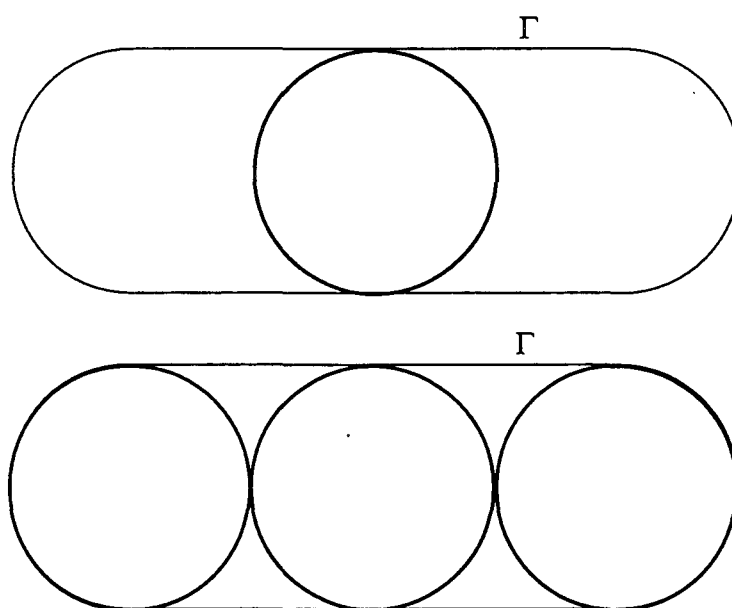


Figure 4.33. Illustration de la technique des origines multiples.

Dans cette partie, la technique des origines multiples est développée et validée sur de nombreuses géométries. En complément, une seconde technique dite technique des noeuds proches est proposée. Elle repose sur le principe suivant : pour chaque noeud du maillage, on ne conserve que l'influence de l'origine la plus proche. Contrairement à la technique de champ nul, qui ne permet de traiter que les structures en un seul volume, la technique des noeuds proches peut s'appliquer aux structures à plusieurs volumes (antennes).

4.4.1 Technique des origines multiples

En faisant intervenir une origine de calcul \underline{r}_0 différente de l'origine du repère global, les équations de champ nul s'écrivent :

$$\iint_{\Gamma} p(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_o) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \Psi_m^1(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_o) d\mathbf{r}' = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_o) \Psi_m^1(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_o) d\mathbf{r}' - 4\pi c_m^1 \Big|_{\mathbf{r}_o} \quad (4.34)$$

où $c_m^1 \Big|_{\mathbf{r}_o}$ correspond au coefficient c_m^1 après la prise en compte de la nouvelle origine de calcul.

Cette dernière introduit un déphasage dans la définition de la pression incidente :

$$p_{inc}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) e^{-i\omega t} = A e^{i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) - \omega t)} = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_o)} \quad (4.35)$$

où :

$$-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_o = \beta \quad (4.36)$$

et :

$$c_m^1 \Big|_{\mathbf{r}_o} = c_m^1 e^{i\beta} \quad (4.37)$$

Le traitement numérique de l'équation (4.34) et le calcul des coefficients $c_m^1 \Big|_{\mathbf{r}_o}$ sont analogues à ceux présentés dans le cas où l'origine de calcul et l'origine du repère coïncident. Trois remarques s'imposent [138] :

- si la pression est approchée par une série de Fourier, chaque décomposition n'est valable que pour une origine donnée. La technique des origines multiples multiplie les séries de Fourier et augmente donc fortement le nombre des coefficients qui sont les inconnues du problème. De plus, disposant de plusieurs séries pour décrire la même variable pression, le choix de la série optimale est difficile à faire. Ces deux contraintes limitent l'emploi de cette nouvelle possibilité au cas de l'approximation quadratique de la pression, pour laquelle l'inconnue est la pression, unique en chaque noeud de la surface, et dont le critère de convergence des intégrales est fixe, pour toute origine de calcul;
- l'origine de calcul des équations de champ nul doit vérifier toutes les symétries du problème si on veut les prendre en compte dans le modèle. En particulier, elle doit être située, selon la configuration géométrique, sur l'axe de symétrie axiale ou sur les plans de symétrie (lors de l'emploi de la symétrisation des équations de champ nul du paragraphe 4.3 et des multiples origines de calcul, celles-ci doivent appartenir aux plans de symétrie);
- dans la pratique, la multiplication des origines de calcul doit permettre de diminuer le degré des équations de champ nul et ainsi contribuer à un meilleur comportement numérique de celles-ci.

4.4.2 Technique des noeuds proches

Cette technique est destinée au traitement des structures excentrées. Comme illustré sur la figure 4.34, la surface peut être décomposée en sous-surfaces définies en fonction de leur proximité des différentes origines. L'obtention des équations de champ nul étant basée sur l'emploi des fonctions d'ondes sphériques, il est permis de penser que le comportement numérique de ces équations est plus efficace pour les noeuds de la zone la plus proche de la sphère inscrite et centrée à l'origine de calcul.

Le principe consiste à parcourir les noeuds du maillage et, pour chacun d'entre eux, repérer

l'origine de calcul la plus proche. Ensuite, pour chaque origine, le traitement des équations de champ nul est mené en annulant les termes relatifs aux noeuds de la surface appartenant aux zones d'influence des autres origines.

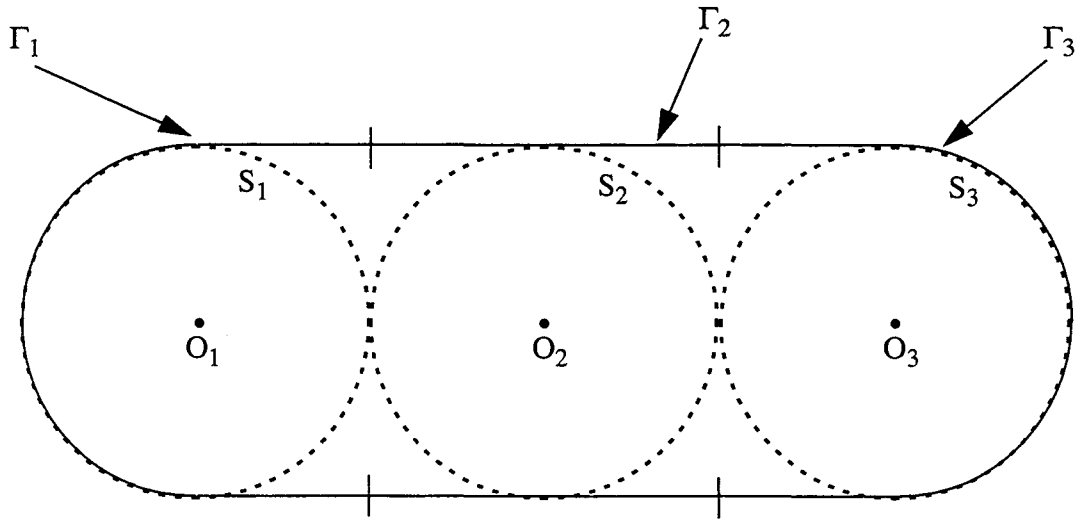


Figure 4.34. Illustration de la technique des noeuds proches.

Ce procédé néglige l'influence d'une partie de la surface sur une autre. Il n'est donc pas théoriquement justifiable. Cependant, les influences étant parfaitement modélisées dans les équations intégrales, ce défaut n'est pas irrémédiable lors d'une combinaison équations intégrales-champ nul.

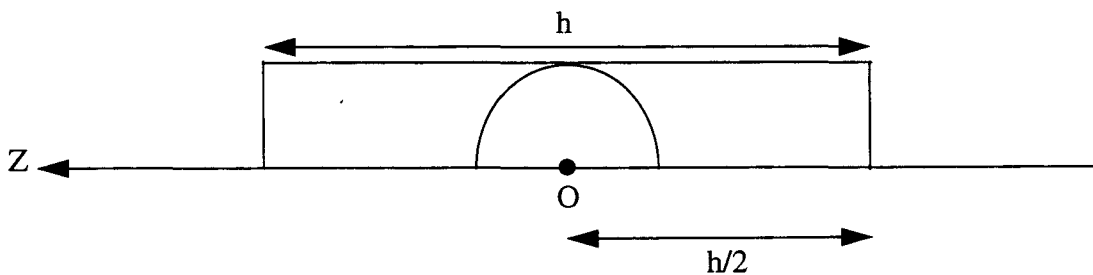
4.4.3 Exemples

Dans ce paragraphe, les techniques des origines multiples et de noeuds proches sont illustrées dans le cas de la surdétermination des équations intégrales par des équations de champ nul. L'approximation quadratique de la pression est systématiquement utilisée. La convergence des intégrales de champ nul est assurée conformément au paragraphe 4.2.2. Le test de la source ponctuelle est effectué.

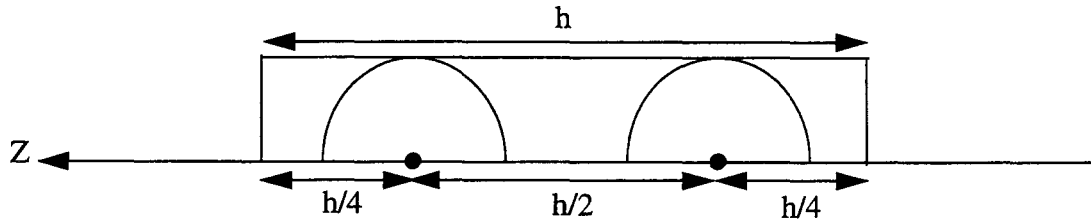
La technique de symétrisation des équations de champ nul du paragraphe 4.3 n'est pas mise en oeuvre mais est opérationnelle à condition que les origines de calcul appartiennent aux plans de symétrie.

On dispose les origines sur l'axe des Z de la façon suivante :

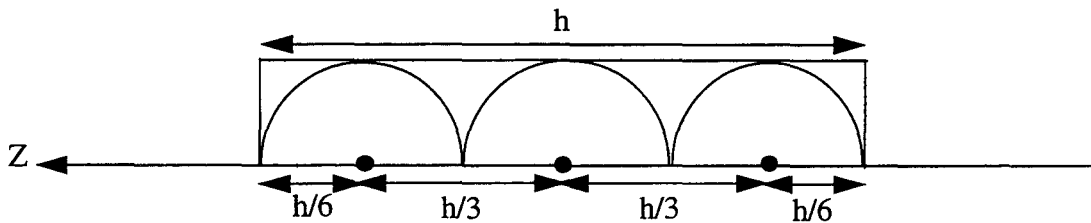
- 1 origine :



- 2 origines :



- 3 origines :



De façon analogue, on poursuit ce découpage pour augmenter le nombre des origines.

4.4.3.1 Cas purement tridimensionnel

L'étude menée concerne l'influence du nombre et de la position des origines par rapport aux surfaces nodales.

La première géométrie de référence est le parallélépipède rectangle présenté au paragraphe 4.2.2.1. Plusieurs fréquences irrégulières de la gamme sont traitées :

- $f_{113} = 436,79$ Hz ($ka = 2,46$), symétrique;
- $f_{121} = 474,84$ Hz ($ka = 2,67$), antisymétrique par rapport à XOZ;
- $f_{122} = 501,48$ Hz ($ka = 2,82$), antisymétrique par rapport à XOZ et XOY.

Les sources ponctuelles de même amplitude absolue sont placées de telle façon que les antisymétries de la fréquence soient respectées conformément à la configuration proposée dans le paragraphe 4.2.3.1 avec une distance source-origine O de 0,1 m.

La première fréquence de calcul est f_{113} . Avec une origine en O et $M = 0$, on obtient $EQM = 8,2$ % en 100,7 s CPU,

L'évolution de l'EQM et du temps CPU avec $M = 0$ en fonction du nombre d'origines de calcul est donnée sur les figures 4.35 et 4.36 avec les deux options suivantes :

- sans la technique des noeuds proches,
- avec la technique des noeuds proches.

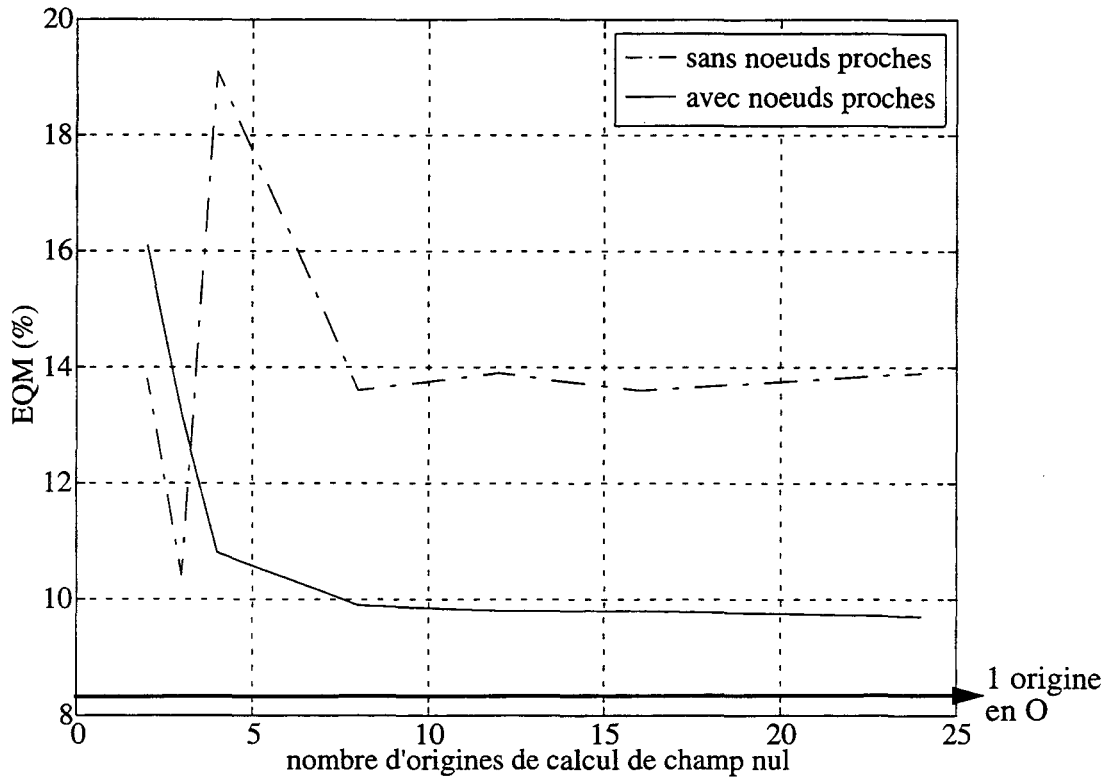


Figure 4.35. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{113} .

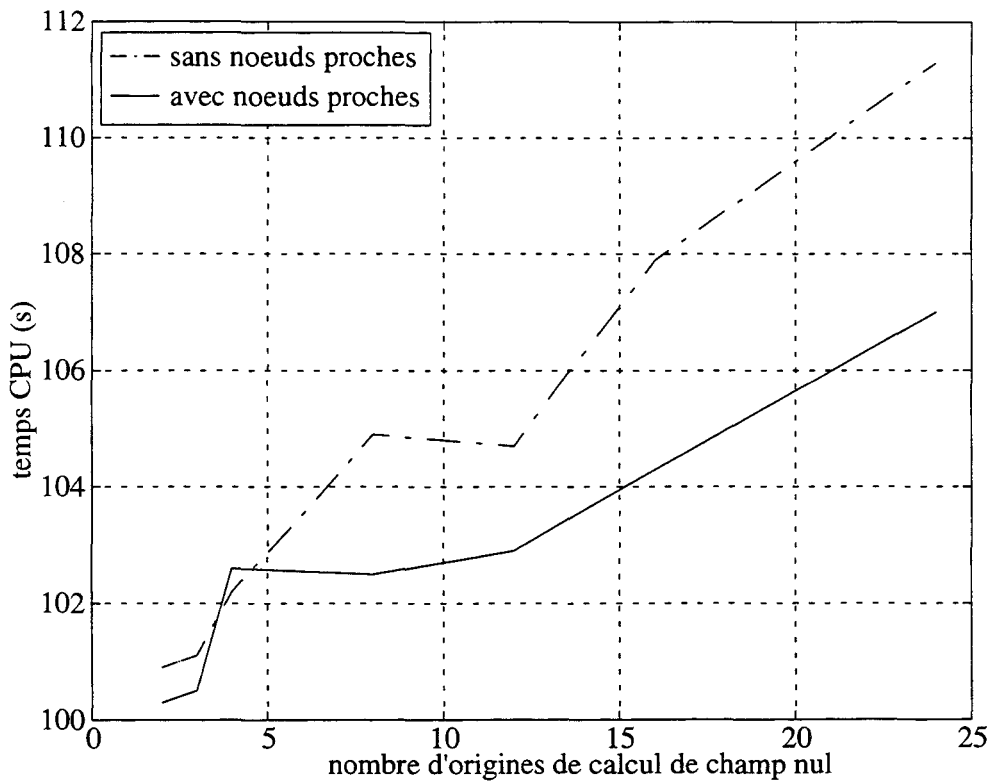


Figure 4.36. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{113} .

Sur ce test, la technique des noeuds proches devient efficace pour un petit nombre d'origines.

La mise à zéro des coefficients en dehors de la zone d'influence de l'origine considérée entraîne une diminution du temps CPU.

La seconde fréquence de calcul est f_{121} . Le test de la source ponctuelle est mené avec deux sources placées sur l'axe OY. Avec une origine en O et $M = 1$, on obtient $EQM = 24,5 \%$ en 101,9 s CPU.

O appartenant à une surface nodale, on utilise d'ordinaire $M = 1$ (cf. tableau 4.3). Le seul décalage d de l'origine de calcul de champ nul selon Y permet de placer l'origine de calcul en dehors d'une surface nodale et de ramener M à 0. La figure 4.37 présente l'EQM en fonction de d pour $M = 1$ et $M = 0$. Le temps CPU pour un calcul à $M = 0$ est de 100 s.

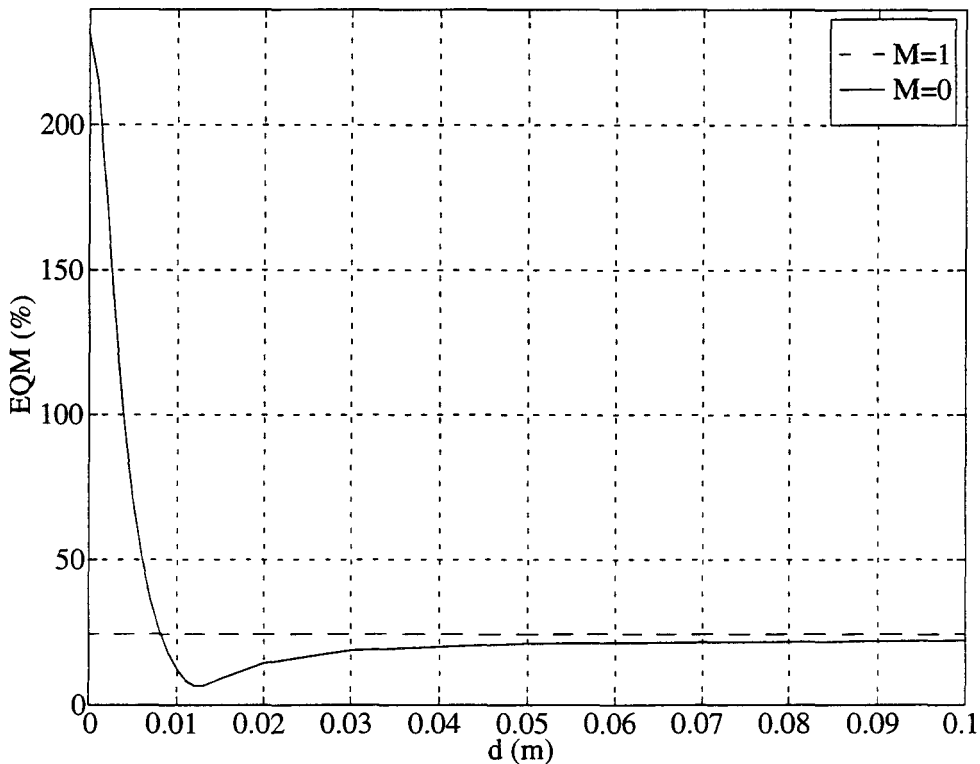


Figure 4.37. Influence de la position de l'origine de calcul par rapport aux surfaces nodales du parallélépipède à f_{121} .

On constate que l'éloignement relatif de l'origine de calcul de la surface nodale permet de diminuer le nombre d'équations de champ nul et contribue à la suppression de l'effet de la fréquence irrégulière.

Le décalage d'une seule origine de calcul avec une décomposition de la pression en série de Fourier est possible. En effet, le décalage ne multiplie pas le nombre des séries.

Le tableau 4.15 donne l'EQM et le temps CPU obtenus par calcul avec plusieurs origines de calcul et différents degrés M pour les deux options :

- sans la technique des noeuds proches,
- avec la technique des noeuds proches.

nombre d'origines	position des origines	M	option de calcul	EQM (%)	temps CPU (s)
1	0 0 0	0		231,5	101,2
1	0 0 0	1		24,5	101,2
2	0 0 2 0 0 -2	0	sans	231,5	101,4
2	0 0 2 0 0 -2	0	avec	231,5	102,2
2	0 0 2 0 0 -2	1	sans	27,3	103,5
2	0 0 2 0 0 -2	1	avec	13,7	102,5
2	0 0,1 2 0 0 -2	0	sans	25	103,2
2	0 0,1 2 0 0 -2	0	avec	226,5	101,4
2	0 0,1 2 0 0 -2	1	sans	27,3	103,3
2	0 0,1 2 0 0 -2	1	avec	17,9	104,2
2	0 0,1 2 0 0,1 -2	0	sans	25	100,2
2	0 0,1 2 0 0,1 -2	0	avec	19,5	100

Tableau 4.15. Influence de M et de la position des origines de calcul par rapport aux surfaces nodales du parallélépipède à f_{121} .

Pour lever l'indétermination due à une fréquence irrégulière, lorsque plusieurs origines de calcul de champ nul sont utilisées :

- avec la technique des noeuds proches, il suffit d'imposer M égal au nombre maximal de surfaces nodales passant par une d'entre toutes les origines de calcul de champ nul,
- sans la technique des noeuds proches, il suffit d'imposer M égal au nombre minimal de surfaces nodales passant par une d'entre toutes les origines de calcul de champ nul.

Afin de travailler avec $M = 0$, on déplace de 0,1 m toutes les origines selon +Y. Aucune n'appartient à une surface nodale. L'évolution de l'EQM et du temps CPU avec $M = 0$ en fonction du nombre d'origines de calcul est donnée sur les figures 4.38 et 4.39 avec les deux options.

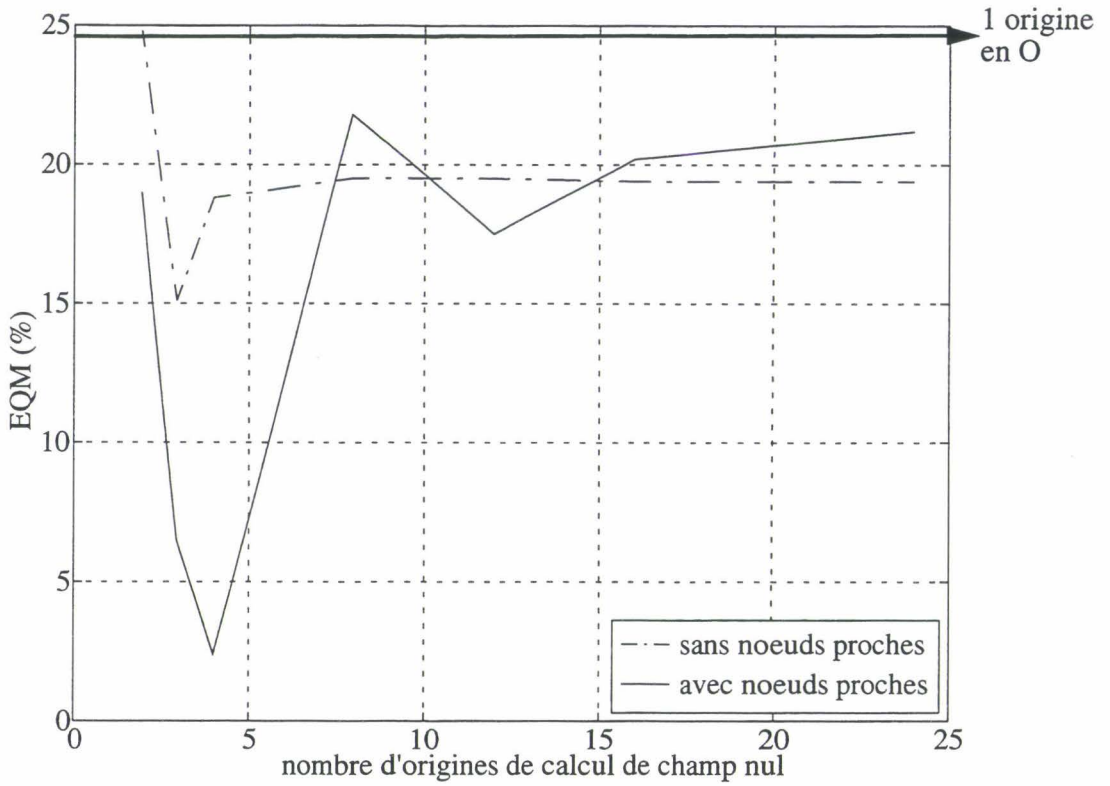


Figure 4.38. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{121} .

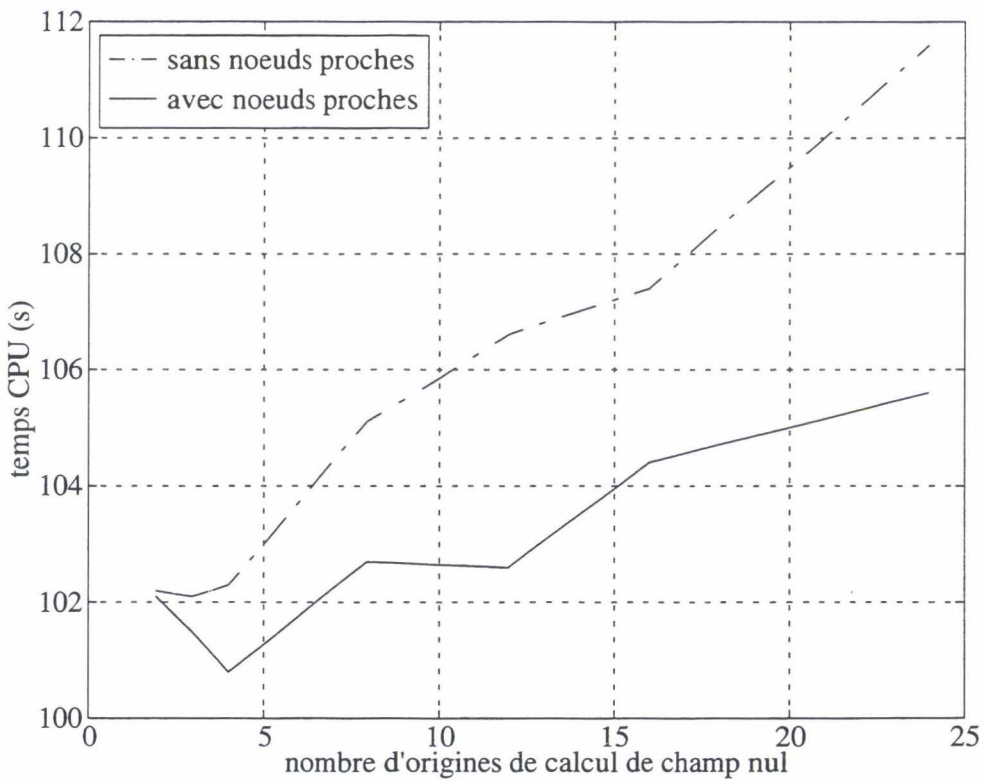


Figure 4.39. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{121} .

Les origines multiples permettent une baisse de l'EQM. Très vite, la technique des noeuds

proches devient efficace. Les conclusions sur le temps CPU sont les mêmes que précédemment.

On agit maintenant comme si on ne connaissait pas l'existence et les emplacements des surfaces nodales. On utilise $M = 2$. Avec une origine en O , on obtient $EQM = 24,5 \%$ pour 106,1 s CPU. Quatre origines de calcul de champ nul placées sur l'axe OZ permettent d'obtenir :

- sans la technique des noeuds proches : $EQM = 28,0 \%$ pour 110,1 s CPU;
- avec la technique des noeuds proches : $EQM = 16,3 \%$ pour 108,4 s CPU.

L'utilisation de la technique des noeuds proches permet sur ce test d'abaisser l'EQM et de modérer le temps CPU de la technique des origines multiples.

La troisième fréquence de calcul est f_{122} . Le test de la source ponctuelle est mené avec quatre sources placées dans le plan YOZ . Avec une origine en O et $M = 2$, on obtient $EQM = 22,5 \%$ en 104,7 s CPU.

On travaille à $M = 0$. On déplace de 0,1 m toutes les origines selon $+Y$. Quand une origine coïncide avec O , on la décale de 0,1 m selon $+Z$ également afin de ne pas poser de problème avec la technique des noeuds proches. Aucune n'appartient à une surface nodale.

L'évolution de l'EQM et du temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul est donnée sur les figures 4.40 et 4.41 avec les deux mêmes options.

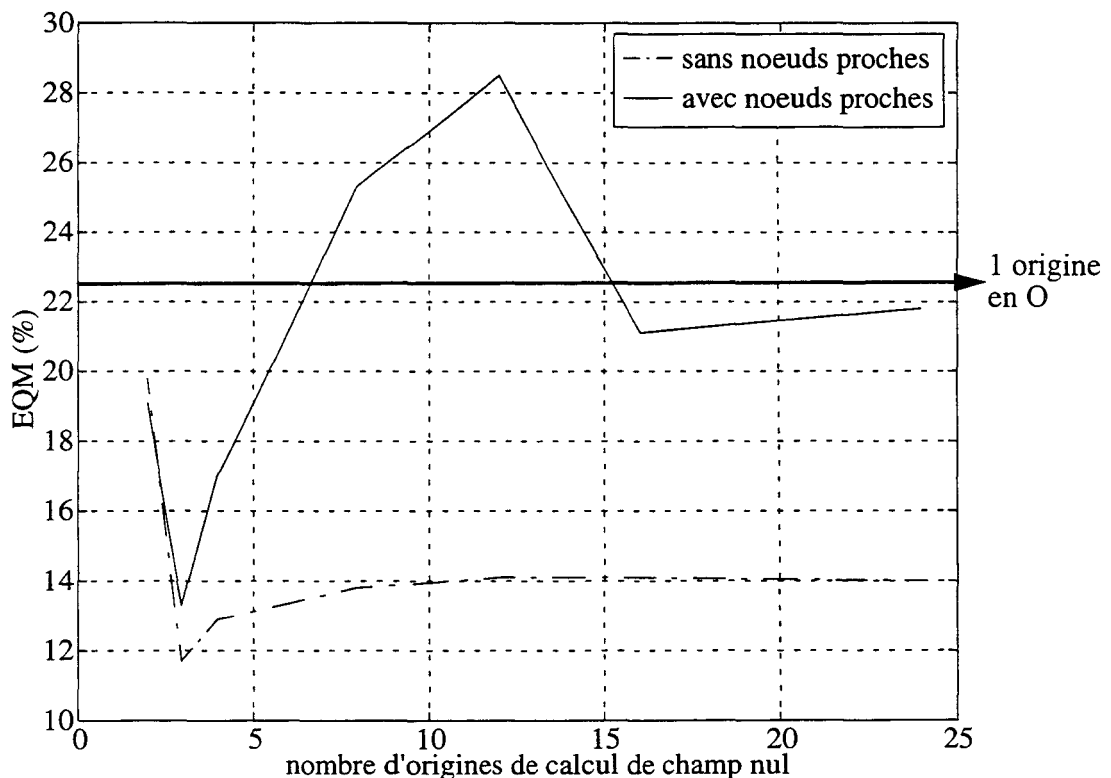


Figure 4.40. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{122} .

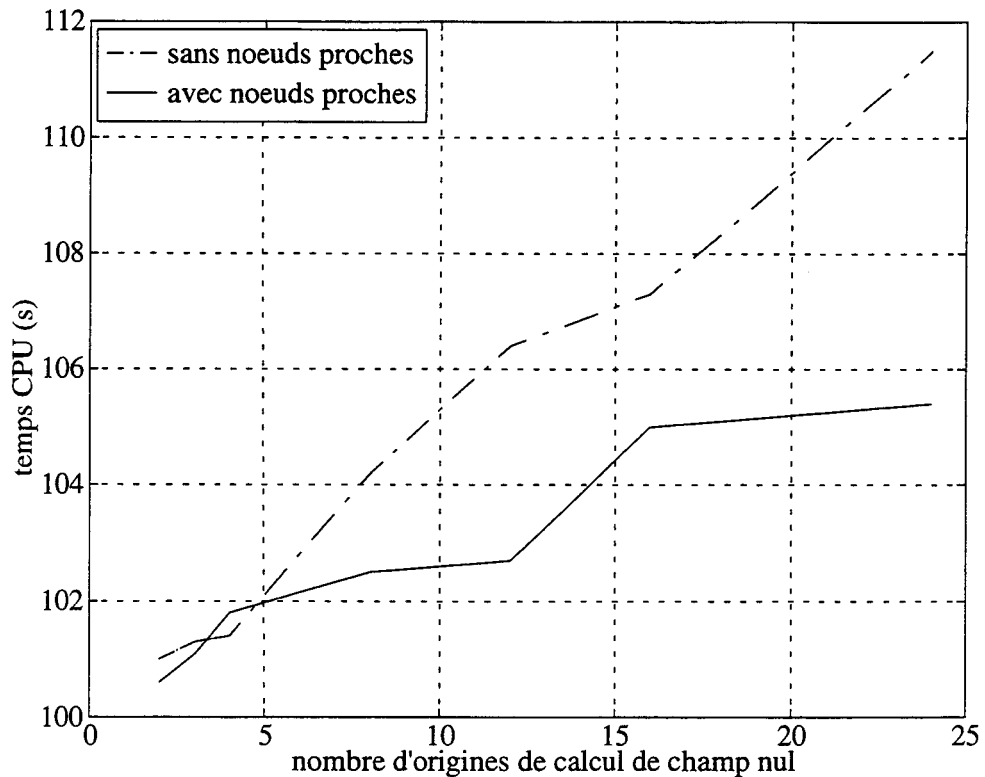


Figure 4.41. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{122} .

Sur ce test, la technique des origines multiples abaisse l'EQM. La technique des noeuds proches permet également une baisse de l'EQM dans la majorité des configurations. Pour les temps de calcul, les mêmes conclusions que précédemment sont à tirer.

Le cylindre défini au paragraphe 3.2.2 est utilisé pour le test de la source ponctuelle à la fréquence irrégulière symétrique $f_{101} = 312,60$ Hz ($ka = 2,64$). Une source ponctuelle est placée en O. $M = 0$ est suffisant. Les mêmes calculs que précédemment sont menés. Avec une origine en O, on obtient EQM = 13,8 % en 208,9 s CPU.

L'évolution de l'EQM et du temps CPU avec $M = 0$ en fonction du nombre d'origines de calcul est donnée sur les figures 4.42 et 4.43 avec les mêmes options :

- sans la technique des noeuds proches,
- avec la technique des noeuds proches.

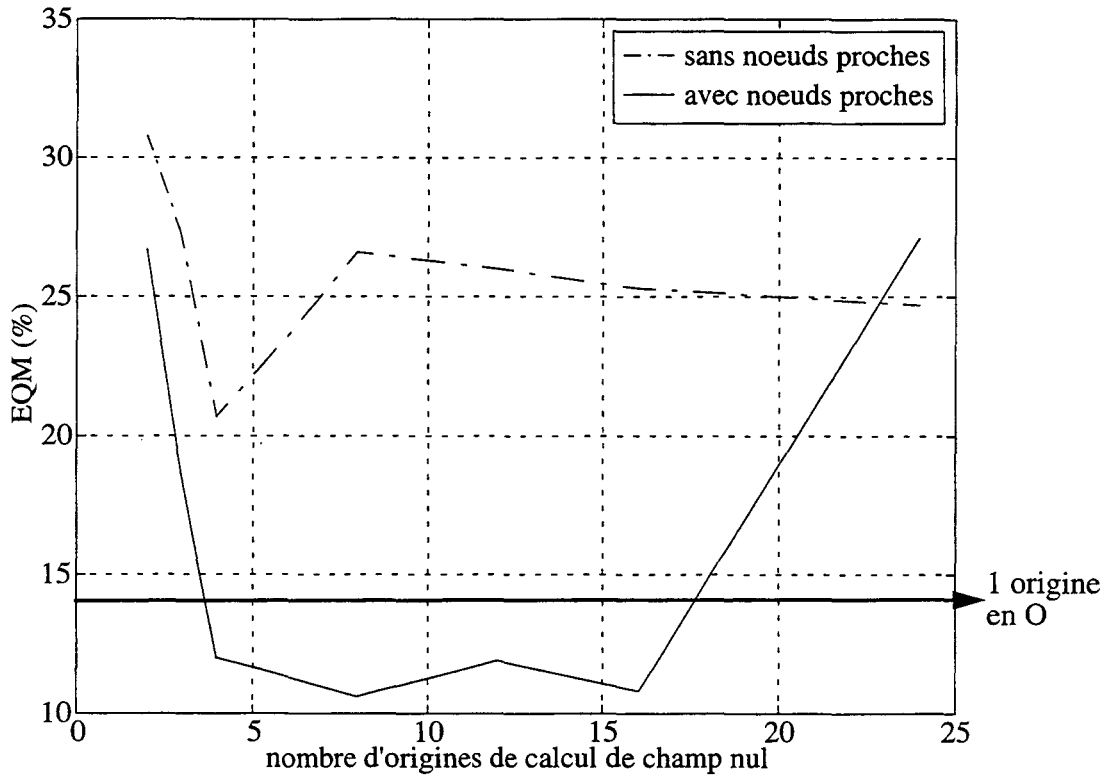


Figure 4.42. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le cylindre à f_{101} .

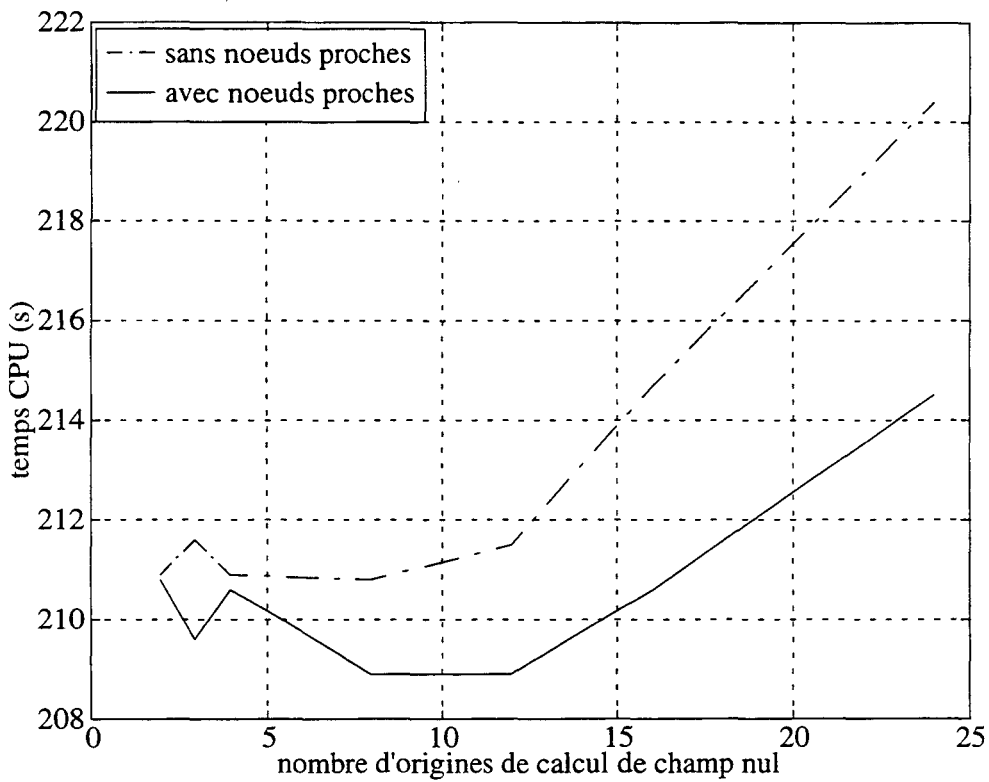


Figure 4.43. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le cylindre à f_{101} .

Ces derniers résultats confirment les précédents. De plus, sur ce test, un nombre d'origines

supérieur à 15 semble engendrer, par les proximités de celles-ci, des problèmes numériques.

4.4.3.2 Symétrie axiale

Le premier calcul porte sur le cylindre à symétrie axiale défini au paragraphe 3.3.1.2.2 pour la fréquence irrégulière symétrique $f_{301} = 469,10$ Hz ($ka = 3,96$). Une source ponctuelle est placée en O. Dans ce cas, une seule équation supplémentaire de champ nul $M = 0$ suffit. Avec une origine en O et $M = 0$, on obtient EQM = 33,5 % en 1,2 s CPU.

L'évolution de l'EQM et du temps CPU avec $M = 0$ en fonction du nombre d'origines de calcul est donnée sur les figures 4.44 et 4.45 avec les mêmes options qu'en 3D :

- sans la technique des noeuds proches,
- avec la technique des noeuds proches.

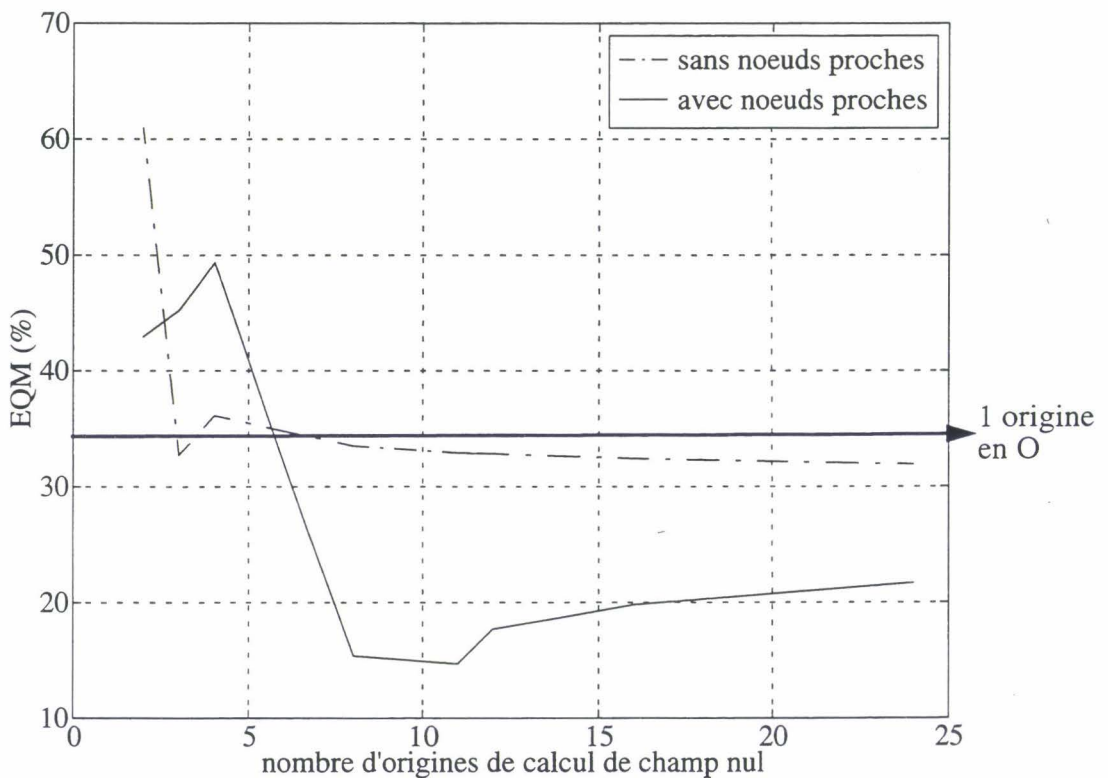


Figure 4.44. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le cylindre axisymétrique à f_{301} .

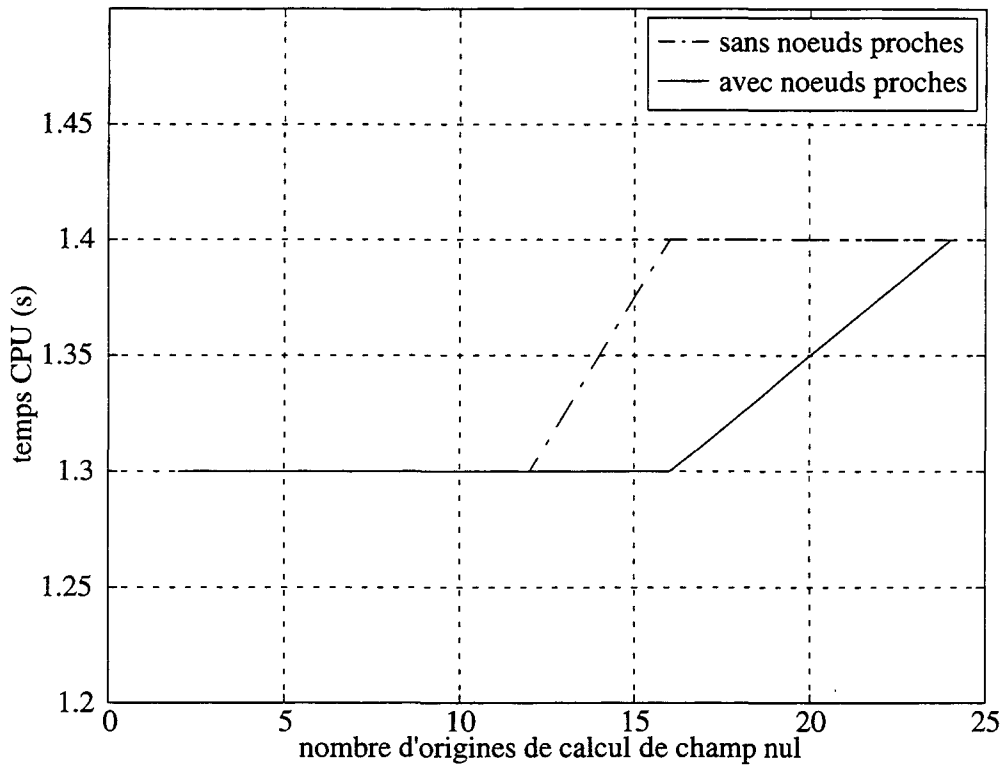


Figure 4.45. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le cylindre axisymétrique à f_{301} .

Sur ce test, la technique des noeuds proches devient très vite efficace quand le nombre d'origines augmente. De plus, elle entraîne une diminution du temps CPU.

De nombreux test en symétrie axiale ont permis de généraliser ces dernières conclusions.

4.4.4 Application aux structures composées

Contrairement à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure, la méthode de champ nul avec une origine de calcul ne peut être pas utilisée lorsque la structure étudiée se compose de plusieurs volumes (structure composée). En effet, selon la théorie des équations de champ nul (cf. § 1.7.1.2), une origine doit appartenir à une sphère comprise dans le volume intérieur à Γ . Il est donc impératif, lorsque la géométrie étudiée est une structure composée, de traiter les équations de champ nul avec autant d'origines (cf. § 4.4.1) qu'il y a de volumes. On rappelle que dans ce cas l'approximation quadratique de la pression est systématiquement utilisée.

Afin d'illustrer ceci, on imagine une structure à deux corps C_1 et C_2 et deux origines de calcul de champ nul O_1 et O_2 sur la figure 4.46. O_1 est comprise dans la sphère S_1 inscrite dans Γ_1 , elle est donc théoriquement adaptée au calcul sur C_1 . Par contre, n'étant pas comprise dans la sphère S_2 inscrite dans Γ_2 , elle ne peut théoriquement convenir au calcul sur C_2 . L'origine O_1 doit donc se limiter à permettre le calcul uniquement sur C_1 . Selon le même raisonnement, O_2 doit se limiter au calcul sur C_2 . La technique des noeuds proches (cf. § 4.4.2) permet de prendre en compte ces contraintes.

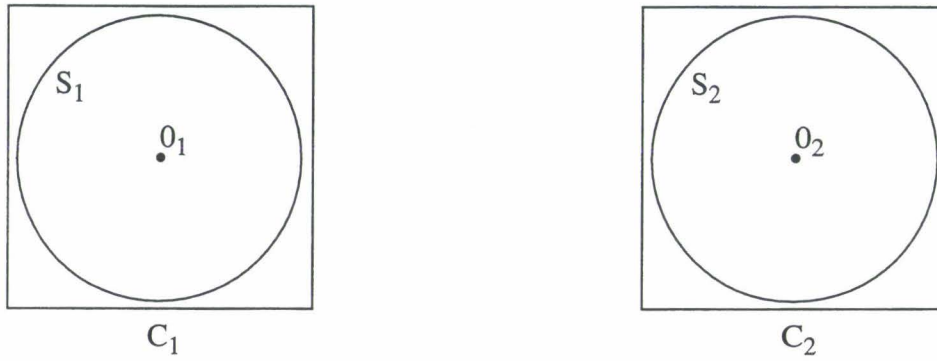


Figure 4.46. Structure composée.

Conformément à la remarque effectuée au paragraphe 4.4.2, ce procédé n'est pas justifiable en théorie car il se résume à négliger les phénomènes d'interaction entre les volumes de la structure. Néanmoins, ce défaut n'est pas irrémédiable car dans le système surdéterminé équations intégrales-champ nul, les interactions sont parfaitement modélisées dans les équations intégrales. C'est cette prise en compte partielle de ces phénomènes qui est l'objet de ce paragraphe.

Les fréquences irrégulières d'une structure composée de volumes identiques sont celles d'un de ces volumes. En effet, le domaine intérieur de l'ensemble des volumes est composé de l'ensemble des domaines intérieurs séparés de chaque volume. Il y a une multiplicité de problèmes homogènes de Dirichlet intérieur à résoudre. Tous ces problèmes ont une géométrie identique. Les fréquences irrégulières sont donc les mêmes et les surfaces nodales identiques mais par rapport à l'origine de chaque volume. Si les volumes composant l'ensemble sont de géométrie différente, une fréquence irrégulière associée à l'un de ces volumes reste irrégulière pour l'ensemble.

On illustre le cas de la structure composée par un ensemble de deux transducteurs sphériques formant une antenne.

Dans une antenne, le comportement acoustique d'un transducteur est influencé par le rayonnement des autres. Deux composantes de l'impédance de rayonnement permettent d'identifier correctement ces influences : l'impédance propre d'un transducteur de l'antenne et les impédances mutuelles. On s'attache ici à calculer les impédances mutuelles. Le code EQI permet le calcul de l'impédance de rayonnement après obtention des pressions surfaciques. Une technique de calcul des impédances propres et mutuelles a été développée [54]. Elle s'applique en particulier à l'antenne étudiée ici. D'autre part, une formule analytique, dite de Pritchard, permet le calcul des impédances mutuelles entre pistons montés dans le baffle [156]. Elle peut également s'appliquer à des antennes simples dans le domaine des basses fréquences [54]. Elle s'écrit :

$$Z_{mn} = R \left(\frac{\sin(kd_{mn})}{kd_{mn}} - j \frac{\cos(kd_{mn})}{kd_{mn}} \right) \quad (4.38)$$

avec :

$$R = \frac{4\pi\omega\rho k}{k^2 + 1} \quad (4.39)$$

où R est la résistance de rayonnement d'un transducteur isolé et d_{mn} la distance entre les centres acoustiques des deux transducteurs m et n . Le domaine de validité de cette formule est limité aux basses fréquences.

On compare le calcul numérique à la solution analytique proposée par Pritchard. L'impédance mutuelle se décompose en une partie réelle et imaginaire, respectivement appelée résistance mutuelle R_{mn} et réactance mutuelle X_{mn} :

$$Z_{mn} = R_{mn} + jX_{mn} \quad (4.40)$$

La réactance mutuelle s'exprime en fonction de la masse ajoutée mutuelle $X_{mn} = \omega M_{mn}$.

L'antenne composée de deux transducteurs sphériques de rayon a est modélisée à l'aide du maillage présenté figure 4.47. Il se compose de 192 éléments quadrilatères à huit noeuds, soit 580 noeuds. $F = 967,15$ Hz, soit $ka = 4,08$. Les deux sphères sont symétriques par rapport au plan YOZ et leurs centres séparés de 4 m. Il existe une fréquence irrégulière inférieure à F : $f_{01} = 748,58$ Hz ($ka = 3,16$). Cette fréquence est symétrique, aucune surface nodale ne passe par les centres des sphères. Un déplacement unitaire est imposé sur la surface des deux sphères.

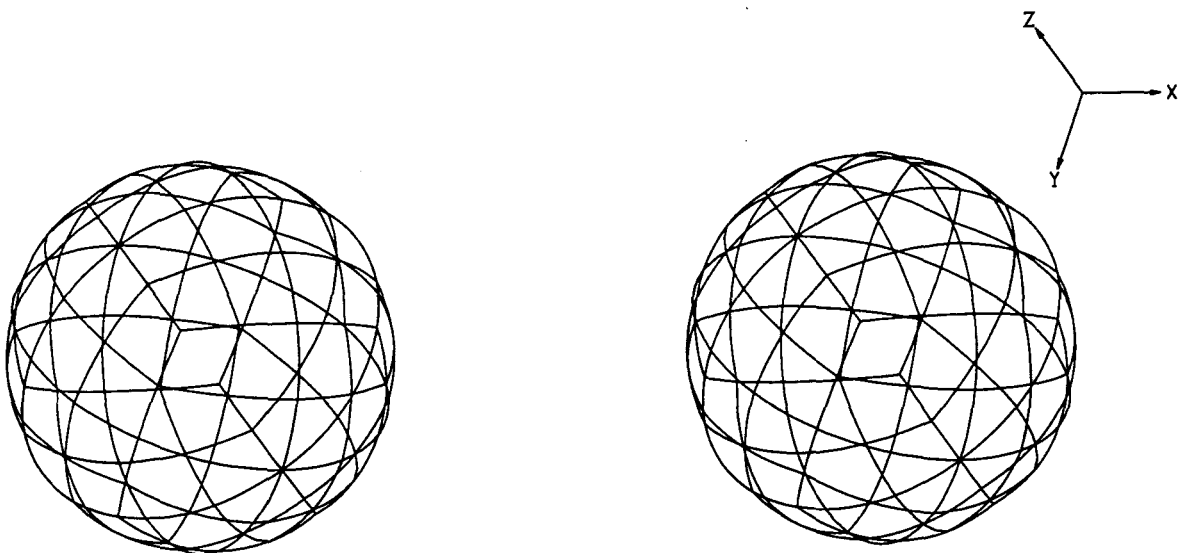


Figure 4.47. Maillage de l'antenne.

Deux modèles numériques sont utilisés : la méthode des équations intégrales (EI) et la combinaison équations intégrales-champ nul avec $M = 0$ et l'activation de la technique des noeuds proches (activation). Ils sont comparés au calcul analytique (CA). Les calculs sont menés à chaque Hz de 0 à F . On calcule la résistance mutuelle de ces deux sphères, que l'on représente figure 4.48. La réactance mutuelle est montrée figure 4.49 et la masse ajoutée mutuelle figure 4.50.

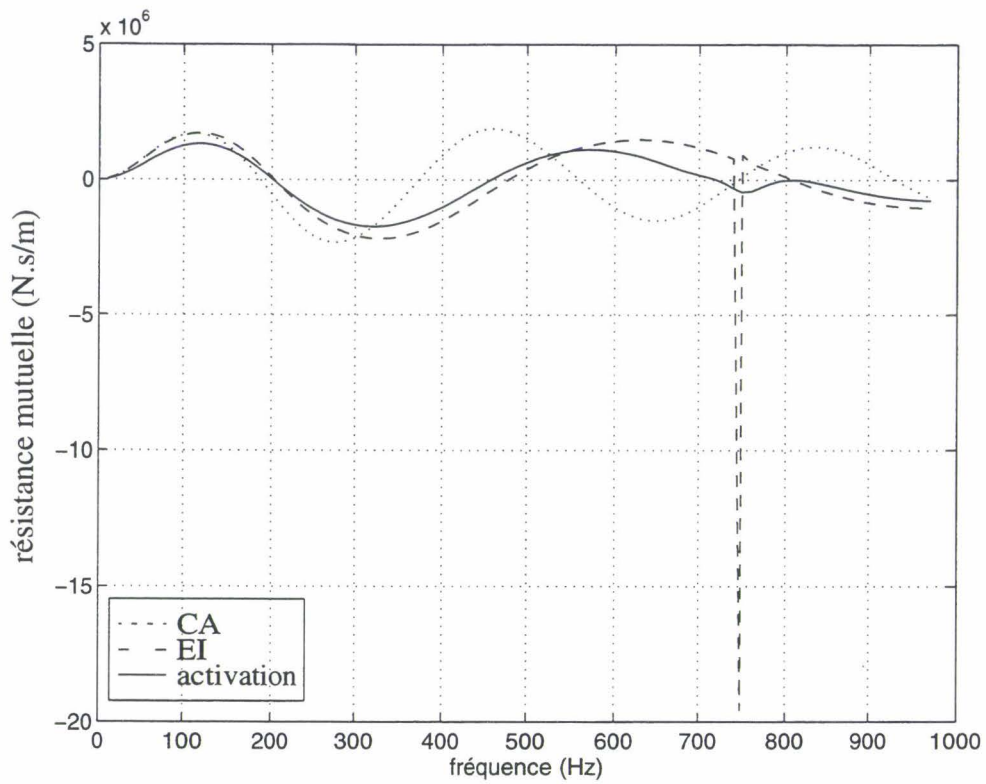


Figure 4.48. Résistance mutuelle des deux transducteurs sphériques.

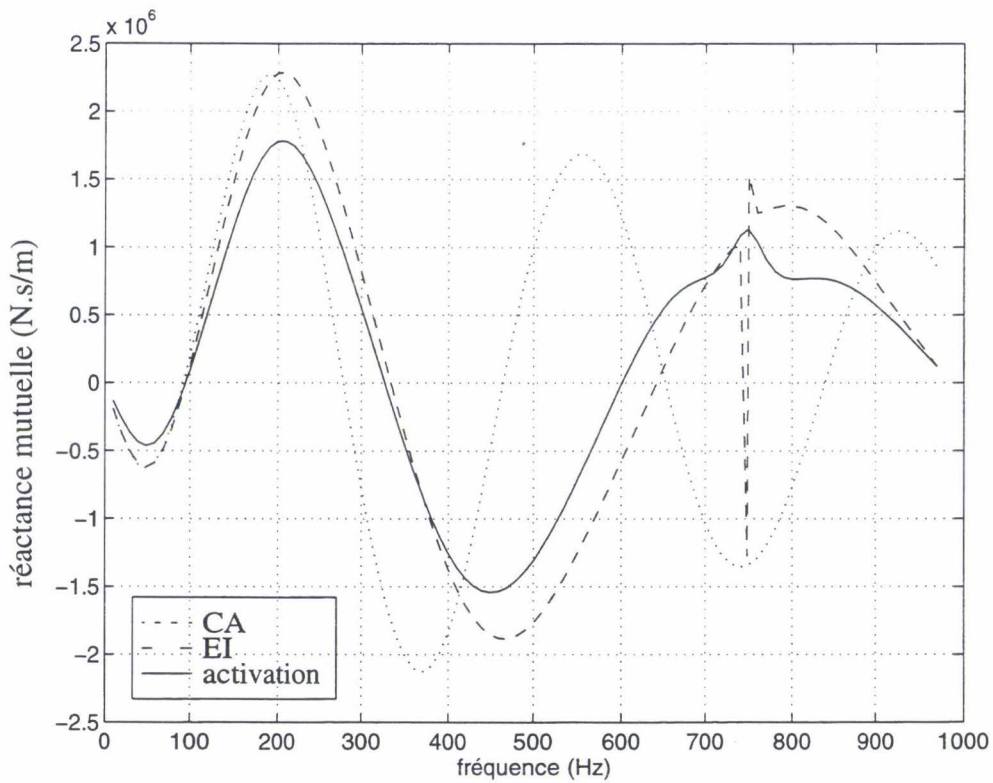


Figure 4.49. Réactance mutuelle des deux transducteurs sphériques.

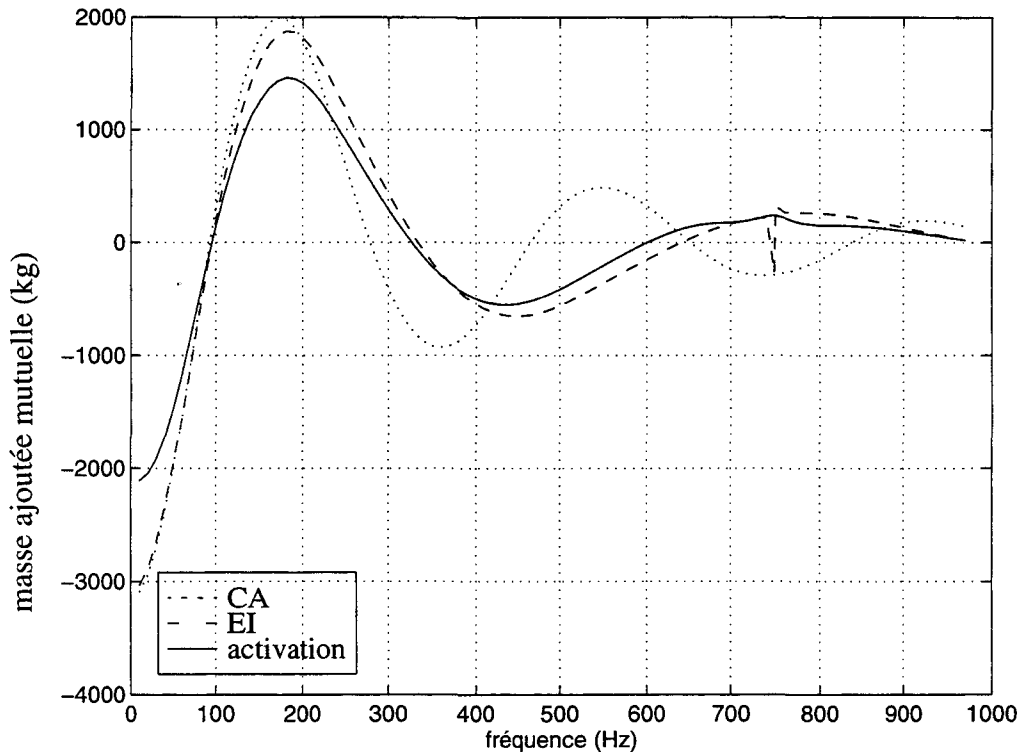


Figure 4.50. Masse ajoutée mutuelle des deux transducteurs sphériques.

La méthode analytique de Pritchard est théoriquement valable pour des ka faibles devant 1. Sur l'exemple présenté, sa validité est restreinte aux fréquences inférieures à 200 Hz ($ka < 0,84$). Jusqu'à cette limite, les méthodes analytique et numériques sont toutes très cohérentes. Ces méthodes numériques sont donc validées jusqu'à la limite du calcul analytique. Au dessus de cette limite, les modèles numériques restent efficaces car les courbes obtenues ont un comportement tout à fait classique [54], avec un décrochage important du modèle équations intégrales au voisinage de la fréquence irrégulière.

L'option activation ne nécessite que 20 % de temps CPU supplémentaire sur l'option EI.

L'emploi de la combinaison équations intégrales-champ nul avec activation de la technique des noeuds proches offre la possibilité d'étudier d'autres types d'antennes plus complexes.

CONCLUSIONS

Les développements présentés et validés dans ce chapitre portent sur l'optimisation des équations de champ nul pour traiter les fréquences irrégulières des équations intégrales.

La première optimisation concerne l'implantation d'une approximation quadratique de la pression dans les équations de champ nul. Par rapport à la décomposition de la pression en série de Fourier, cette possibilité présente essentiellement deux avantages : une simplicité d'emploi et une diminution du temps de calcul. Dans certains cas, elle ne satisfait que moyennement au test de la source ponctuelle. Cette imprécision peut être relativisée car ce test est beaucoup plus exigeant que nécessaire. La bonne qualité des résultats obtenus dans le cas de problème de diffraction confirme cette dernière remarque.

La seconde optimisation est la prise en compte des plans de symétrie de la géométrie et des plans de symétrie ou d'antisymétrie du chargement. Dans le second cas, elle apporte une diminution importante de la taille des problèmes et par conséquent des temps de calcul.

Ensuite, deux nouveaux développements sont proposés : la technique des origines multiples et celle des noeuds proches. Ces outils sont destinés à mieux traiter les structures à géométrie excentrée. De plus, la technique des noeuds proches s'applique directement à la simulation numérique du rayonnement acoustique d'antenne.

Ces nouvelles possibilités permettent d'augmenter les fréquences de calcul et de traiter des géométries de plus en plus complexes.

Chapitre 5

Applications

INTRODUCTION

Ce chapitre porte sur l'application des techniques développées dans les chapitres précédents à quelques géométries plus réalistes.

Dans un premier temps, on traite deux problèmes de diffraction d'onde plane par des structures rigides. Dans le premier cas, tridimensionnel, les optimisations du chapitre 4 portant sur les équations de champ nul sont testées à une fréquence irrégulière d'une structure sous-marine. La prise en compte simultanée de ces optimisations et de l'interpolation fréquentielle développée au chapitre 3 est ensuite effectuée. Elle a pour but de baisser les temps de calcul tout en traitant les fréquences irrégulières. Elle est appliquée dans le cas à symétrie axiale à une structure LINE.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée aux problèmes de diffusion par un corps élastique. Numériquement, ce type de problème - couplage fluide-structure - est modélisé à l'aide du couplage d'un code éléments finis et d'un code équations intégrales : ATILA et EQI [138,143,146,157-164]. Ceci s'effectue par l'intermédiaire des matrices d'impédance. Les techniques des origines multiples de calcul de champ nul et des noeuds proches sont intégrées à ce couplage. Les résultats sont présentés sous la forme d'un spectre de rétrodiffusion d'une structure LINE qui est comparé à des mesures effectuées par le LAUE du Havre [163-165].

5.1 DIFFRACTION PAR DES STRUCTURES RIGIDES

Structure sous-marine.

La structure sous-marine définie au paragraphe 3.2.2 est étudiée. Le test de la source ponctuelle avec une source en O mené avec le modèle équations intégrales montre qu'aucune fréquence irrégulière n'est présente dans l'intervalle 0-F. Le "critère en $\lambda/4$ " impose $F = 150$ Hz. On décide de poursuivre le balayage jusqu'au repérage de la première fréquence irrégulière. Celle-ci se situe à $f_{ip} = 228$ Hz, soit $kL = 46,15$ pour $EQM = 115,6$ %.

Étant donné que l'on se trouve hors de l'intervalle 0-F, on augmente le nombre de points d'intégration : on passe de $2 * 2$ à $4 * 4$ points par élément en équations intégrales et de $4 * 4$ à $7 * 7$ en champ nul avec approximation quadratique de la pression.

On calcule le diagramme de directivité monostatique en champ lointain dans le plan équatorial $\theta = 90^\circ$ pour la structure rigide à 228 Hz avec différentes options de calcul :

- par équations intégrales seules (option EI);
- par surdétermination avec décomposition en série de Fourier de la pression de champ nul et une origine de calcul en O et $P = Q = 10$, le nombre de points d'intégration par éléments étant $10 * 10$ (option CNF);
- par surdétermination avec approximation quadratique de la pression de champ nul et une origine de calcul en O;
- par surdétermination avec approximation quadratique de la pression de champ nul et trois origines de calcul placées sur l'axe OX en $X = 0, 12$ et -12 sans (option désactivation) et avec (option activation) activation de la technique des noeuds proches.

Cette fréquence de calcul étant la première fréquence irrégulière, la seule surface nodale est confondue avec la surface du corps et elle ne passe donc pas par O. On effectue tous les calculs avec un degré maximal des équations de champ nul $M = 0$.

Les résultats obtenus par surdétermination sont tous identiques. On ne représente figure 5.1 5.2 et 5.3 que les diagrammes obtenus par les options EI, CNF, désactivation et activation.

Sur cette application, les différences entre options se situent sur les temps de calcul. En effet, le calcul nécessite 185,4 s CPU avec l'option CNF, 68 s avec l'option activation et 68,5 s avec l'option désactivation. Ces 2 dernières options trouvent dans ce cas une utilité.

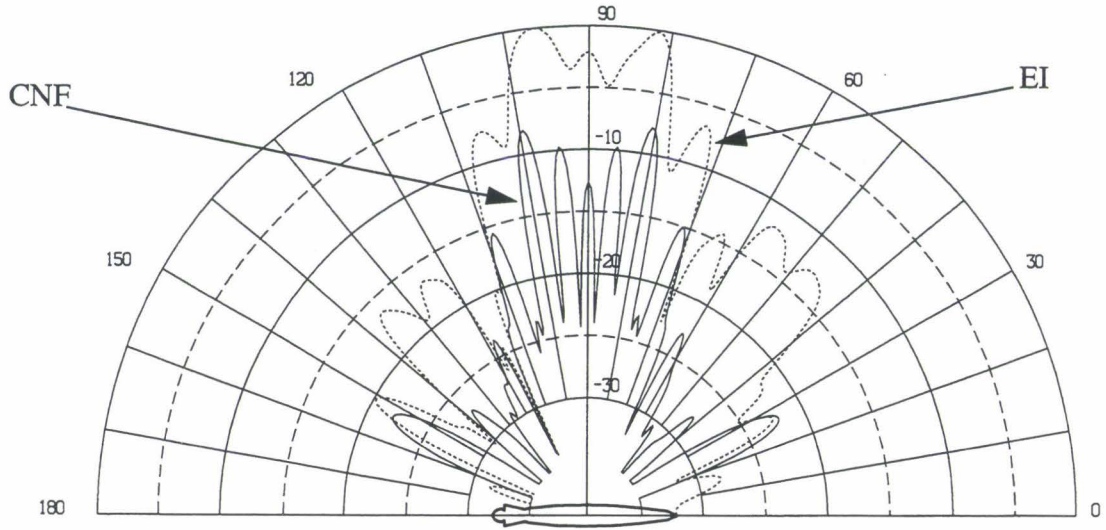


Figure 5.1. Directivité monostatique à f_{ip} . Structure sous-marine.

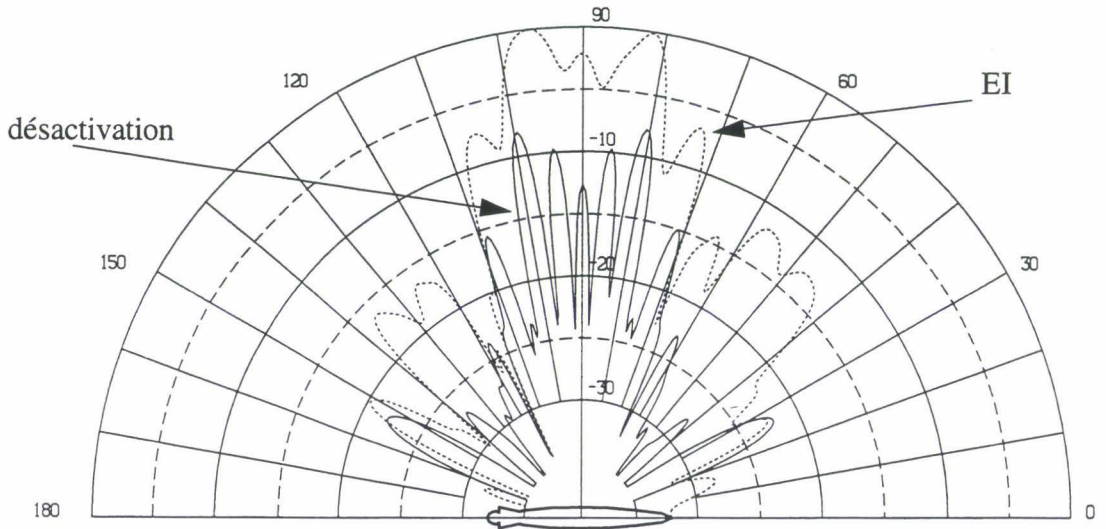


Figure 5.2. Directivité monostatique à f_{ip} . Structure sous-marine.

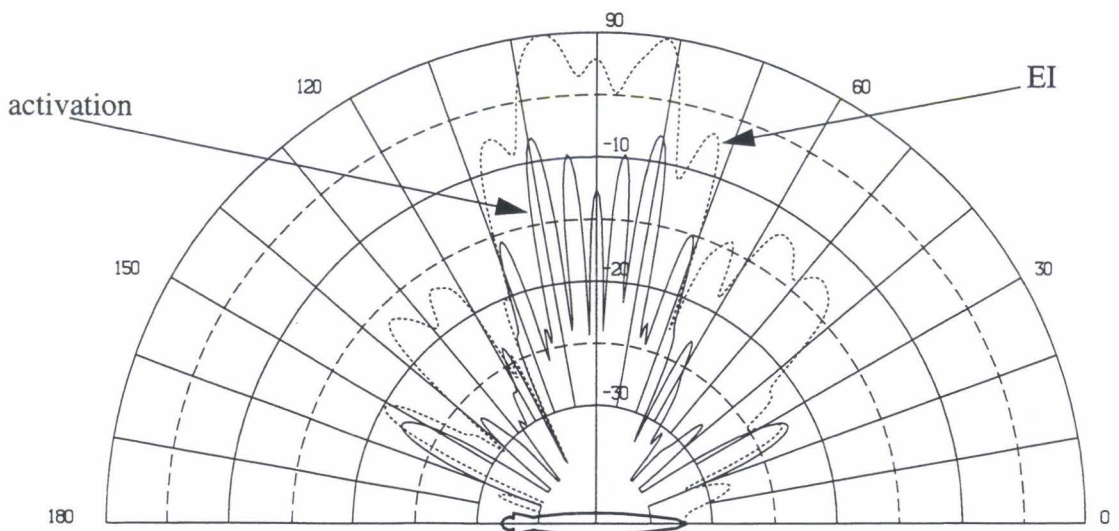


Figure 5.3. Directivité monostatique à f_{ip} . Structure sous-marine.

Structure LINE.

Les développements contenus dans les chapitres 3 et 4 sont pris en compte de la façon suivante :

- stockage des matrices équations intégrales aux 2 fréquences bornes : 0 Hz et F;
- pour chaque fréquence intermédiaire : interpolation fréquentielle des matrices équations intégrales; calcul des équations de champ nul avec interpolation quadratique de la pression; assemblage du système surdéterminé par positionnement des équations de champ nul en dessous des équations intégrales; résolution du système linéaire par moindres carrés.

Le procédé est appliqué à la structure LINE à symétrie axiale présentée au paragraphe 3.3.2. On calcule Hz après Hz toute la gamme de fréquence de 0 Hz à F.

On disperse les origines de calcul de champ nul : 8 sont utilisées, placées sur l'axe OZ selon le procédé décrit au paragraphe 4.3.3. La technique des noeuds proches peut être activée (option activation) ou non (option désactivation). Le champ nul est utilisé à toutes les fréquences avec $M = 1$. La méthode de surdétermination est comparée à l'option c1 du paragraphe 3.3.2 : interpolation fréquentielle sans équation supplémentaire de champ nul entre 0 Hz et F.

Une source ponctuelle est placée en $Z = -1$. On effectue le test de la source ponctuelle. L'EQM est représentée figure 5.4.

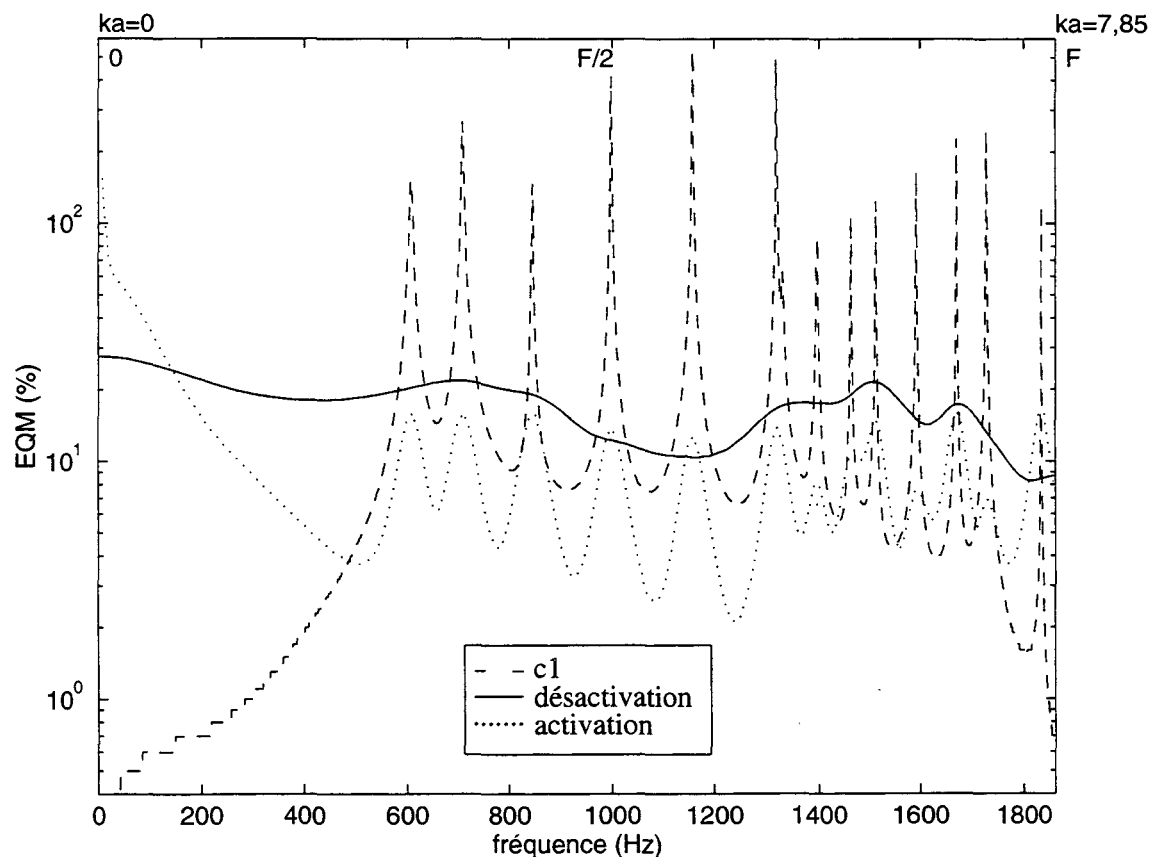


Figure 5.4. EQM de la structure LINE. Source ponctuelle décalée par rapport à O.

Les techniques utilisées permettent un bon traitement des fréquences irrégulières. L'EQM est toujours inférieure à 20 %. L'activation des noeuds proches offre une meilleure précision. Cependant, des petits pics aux abords des fréquences irrégulières prouvent que l'apport des équations de champ nul avec cette option est quelque peu dégradé. Ceci est dû aux influences manquantes (cf. § 4.4.2). De plus, un problème en très basse fréquence apparaît lors de l'activation des noeuds proches mais n'est pas spécialement pénalisant car les équations de champ nul ne sont pas conseillées en très basse fréquence.

L'utilisation d'équations de champ nul n'augmente que de 20 % le temps CPU par rapport à l'option c1.

La structure est maintenant supposée rigide et soumise à une onde incidente identique à celle du paragraphe 3.3.2, se propageant le long de l'axe OZ suivant les Z croissants (cf. figure 3.35). On trace l'évolution du diagramme de directivité dans le plan XOZ autour de la fréquence irrégulière inférieure à F la plus élevée : 1835 Hz ($ka = 7,74$). Deux options de calcul sont utilisées :

- option c1 décrite précédemment (figure 5.5),
- option désactivation : formulation équations intégrales surdéterminée par des équations de champ nul telles que $M = 1,8$ origines placées comme précédemment et désactivation de la technique des noeuds proches (figure 5.6).

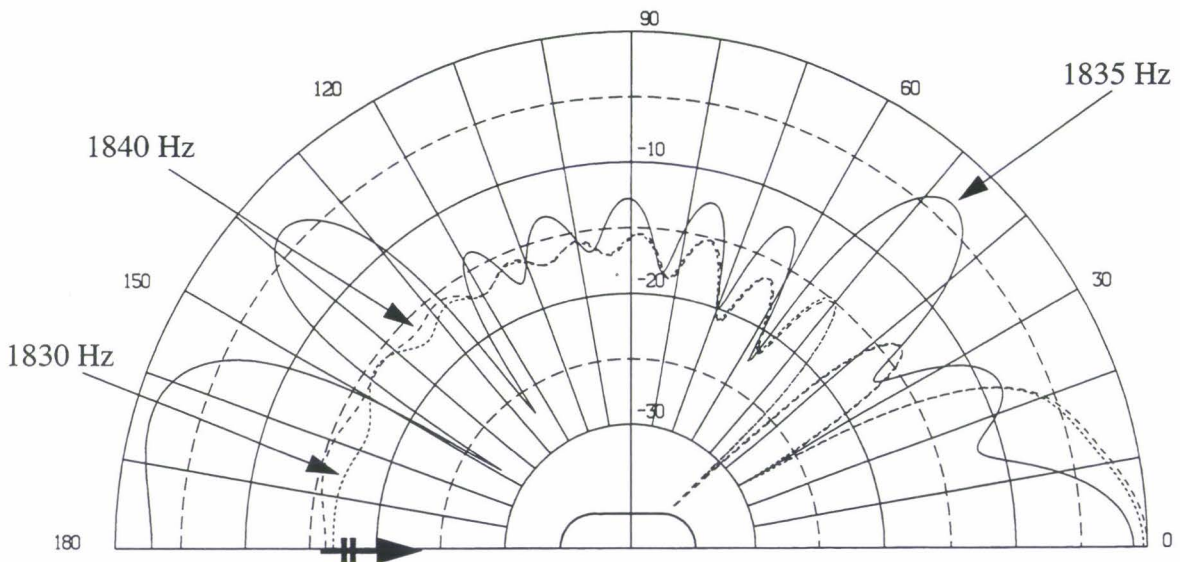


Figure 5.5. Évolution du diagramme de directivité dans le plan XOZ.
Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants. Option c1.
 $TS_{max} = 10$ dB pour $\theta = 0^\circ$.

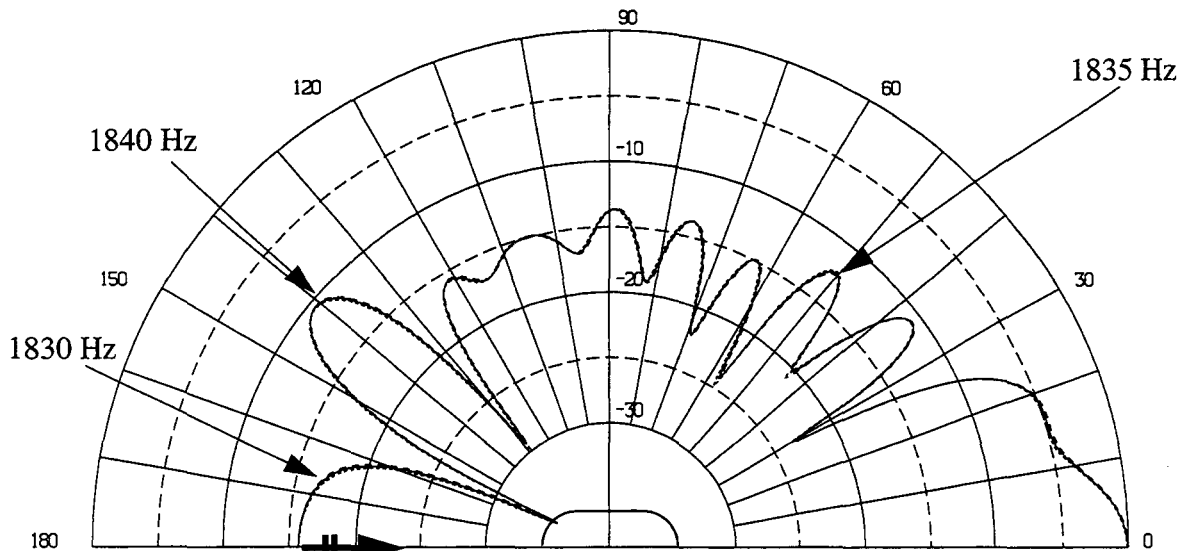


Figure 5.6. Évolution du diagramme de directivité dans le plan XOZ.
Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants. Option désactivation.
 $TS_{max} = 7,62 \text{ dB}$ pour $\theta = 0^\circ$.

Un évolution brutale du diagramme calculé avec l'option c1 a lieu autour de la fréquence irrégulière. L'utilisation de l'option désactivation permet de corriger cette singularité en rétablissant la stabilité du comportement acoustique.

5.2 DIFFUSION

Cette section porte sur la modélisation du couplage fluide-structure à l'aide des développements effectués dans le chapitre 4, particulièrement l'interpolation quadratique, les origines multiples et la technique des noeuds proches. On effectue le couplage fluide-structure par l'utilisation combinée des codes de calcul EQI et ATILA [160,162]. Les résultats sont ensuite comparés à des mesures expérimentales [163-165].

Outre le couplage utilisé ici et la méthode des éléments finis (cf. § 1.4.1), la méthode des équations intégrales permet également la modélisation du corps élastique mais n'est que rarement utilisée [166,167].

5.2.1 Théorie

5.2.1.1 Couplage fluide-structure

Le problème de diffusion acoustique, prenant en compte le comportement vibratoire de la structure élastique et des ondes acoustiques dans le milieu fluide, est traité par couplage d'équations intégrales pour le fluide environnant (code EQI) et d'éléments finis pour la structure élastique (code ATILA) [160,168,169]. Ce couplage repose sur les matrices d'impédance de surface qui relient la pression au déplacement [160,162]. Les noeuds du maillage équations intégrales doivent coïncider avec des noeuds du maillage éléments finis (sur l'interface). Ce couplage permet, par utilisation des équations intégrales, de ne pas mailler le domaine fluide. La dépendance temporelle des variables est suivant $e^{+i\omega t}$.

Dans la modélisation éléments finis, l'équation se réduit donc à la première ligne de l'équation (1.74) :

$$([K] - \omega^2[M])\{u\} = -[L]\{p\} \quad (5.1)$$

avec un changement de signe de $[L]$ afin d'adapter l'orientation des normales à celle des équations intégrales. L'équation intégrale discrétisée (2.22) est réécrite en fonction des valeurs nodales du déplacement :

$$[A]\{p\} = \rho\omega^2[B]\{u_n\} - \{p_{inc}\} \quad (5.2)$$

Le couplage des équations (5.1) et (5.2) est effectué par la méthode des variables solides, qui consiste à éliminer la variable $\{p\}$ du système couplé par transformation de l'équation (5.2) [160] :

$$\{p\} = \rho\omega^2[A]^{-1}[B]\{u_n\} - [A]^{-1}\{p_{inc}\} \quad (5.3)$$

Tout comme dans le paragraphe (3.2.1), la duplicité des normales en un noeud commun à plusieurs éléments ne permet pas de connaître, a priori, l'ordre du vecteur $\{u_n\}$. Le déplacement normal u_n en tout point de Γ peut également s'écrire :

$$u_n = u_i n_i \quad (5.4)$$

où n_i désigne les composantes du vecteur normal unitaire à Γ au point considéré. La matrice $[B]$ est projetée sur chacune des composantes de la normale unitaire en chaque noeud du maillage :

$$[B_i] = [B]n_i \quad (5.5)$$

Les matrices projetées sont regroupées dans une seule matrice $[B_p]$. On obtient en combinant les équations (5.4) et (5.5) :

$$[B]\{u_n\} = [B_p]\{u_{(\Gamma)}\} \quad (5.6)$$

où $\{u_{(\Gamma)}\}$ désigne le vecteur des valeurs nodales du déplacement sur Γ . Ce résultat permet la réécriture de l'expression (5.2) :

$$[A]\{p\} = \rho\omega^2[B_p]\{u_{(\Gamma)}\} - \{p_{inc}\} \quad (5.7)$$

Le report des équations (5.3) et (5.6) dans l'expression (5.1) et le rangement de $\{u_{(\Gamma)}\}$ dans $\{u\}$ donne finalement côté éléments finis le système d'équations :

$$([K] - \omega^2[M] + \rho\omega^2[L][A]^{-1}[B_p])\{u\} = [L][A]^{-1}\{p_{inc}\} \quad (5.8)$$

Après résolution de ce système, le vecteur $\{u_{(\Gamma)}\}$ est extrait de la solution et reporté dans l'équation (5.3) après y avoir injecté l'expression (5.6) pour donner la pression sur la surface. La pression dans le fluide est ensuite obtenue par la représentation intégrale de Helmholtz extérieure classique (cf. § 1.2.2).

5.2.1.2 Utilisation des origines multiples de champ nul lors du couplage

À une fréquence irrégulière, le déterminant de $[A]$ est théoriquement nul, ce qui entraîne l'inversion de cette matrice impossible dans le processus de couplage avec les éléments finis présenté ci-dessus. Cependant, les imprécisions numériques font que le déterminant en question n'est pas parfaitement nul et qu'ainsi le couplage est applicable mais donne une solution erronée. Il faut appliquer la méthode de Jones (cf. § 1.6.2) à la procédure de couplage fluide-structure.

Afin de pouvoir utiliser la méthode présentée au paragraphe 5.2.1.1, la matrice premier membre du système surdéterminé n'étant pas directement inversible, on la décompose au sens de la décomposition QR [143]. On écrit ($[P]$ s'écrit $[P']$ quand la pression est approchée par une série de Fourier) : $[P] = [Q][R]$, où $[Q]$ est une matrice orthogonale d'ordre $(NN + NEQCN) * NN$ et $[R]$ une matrice triangulaire supérieure d'ordre NN^2 . L'inversion au sens de la décomposition QR conduit, par l'équation matricielle de surdétermination et après avoir introduit :

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\} = \rho\omega^2 \{u_n\} \quad (5.9)$$

à :

$$\{p\} = \rho\omega^2([Q][R])^{-1}[D]\{u_n\} - ([Q][R])^{-1}\{p_{inc}\} \quad (5.10)$$

La propriété d'orthogonalité de $[Q]$ permet d'écrire :

$$([Q][R])^{-1} = [R]^{-1}[\bar{Q}]^t \quad (5.11)$$

où $[\bar{Q}]^t$ est l'expression conjuguée transposée de la matrice $[Q]$. La quantité $[R]^{-1}[\bar{Q}]^t$ est une matrice d'ordre $NN * (NEQCN + NN)$. Cette matrice est calculée colonne par colonne en résolvant $NEQCN$ fois le système :

$$[Q][R]\{y\} = \{i_{NEQCN+NN}\} \quad (5.12)$$

où le vecteur du second membre est la i -ième colonne de la matrice identité d'ordre $(NEQCN + NN)^2$ et le vecteur $\{y\}$ est la i -ième colonne de la matrice définie par l'expression (5.11). Ensuite, le procédé décrit dans le paragraphe 5.2.1.1 est à nouveau appliqué en prenant compte des équations ci-dessus pour obtenir :

$$\{p\} = \rho\omega^2([Q][R])^{-1}[D_p]\{u\} - ([Q][R])^{-1}\{p_{inc}\} \quad (5.13)$$

et

$$([K] - \omega^2[M] + \rho\omega^2[L]([Q][R])^{-1}[D_p])\{u\} = [L]([Q][R])^{-1}\{p_{inc}\} \quad (5.14)$$

À partir des pressions nodales incidentes, et après résolution de cette dernière équation, on extrait $\{u_{(\Gamma)}\}$ de $\{u\}$. La résolution du code EQI fournit la pression sur la surface, dans le fluide ou en champ lointain.

L'utilisation de plusieurs origines de calcul de champ nul, avec ou sans technique des noeuds proches, n'influe pas le processus du couplage fluide-structure décrit ci-dessus [138].

5.2.1.3 Algorithme de résolution

À une fréquence irrégulière, la résolution complète du problème fluide-structure se décompose en quatre étapes.

Exécution du code EQI.

1. Calcul de $[P]$ et des données nécessaires à l'assemblage de $[D]$.
2. Calcul de la décomposition, donc de $[Q][R]$.
3. Calcul de $([Q][R])^{-1}$.
4. Calcul de $\{p_{inc}\}$.

Exécution du code EQIATI assurant l'interface entre EQI et ATILA.

5. Calcul de $[D_x]$, $[D_y]$ et $[D_z]$, de $[D_p]$.
6. Calcul de $([Q][R])^{-1}[D_p]$.
7. Calcul de $([Q][R])^{-1}\{p_{inc}\}$.

Exécution du code ATILA.

8. Calcul de $\{u\}$.

9. Calcul de $\{u_{(T)}\}$ à partir de $\{u\}$.

Exécution du code EQI.

10. Calcul de $\{p\}$.

11. Calcul des pressions dans le fluide (champ proche ou lointain).

5.2.2 Diffusion par une structure élastique

Ce paragraphe concerne la comparaison de calculs numériques avec des résultats expérimentaux obtenus par le LAUE du Havre [163,164]. Dans ce cas, la vitesse dans l'eau est : $c = 1470$ m/s.

La structure étudiée est une structure LINE de rayon a et de hauteur $4a$. La coque est telle que $b/a = 0,97$. Elle est en acier : le module de Young est $0,197 \cdot 10^{+12}$ Pa, la constante de Poisson est $0,299$ et la densité est $0,79 \cdot 10^{+04}$ kg/m³. Le maillage équations intégrales à symétrie axiale est composé de 94 éléments, soit 189 noeuds (cf. figure 5.7). $F = 6270,8$ Hz, soit $ka = 26,8$. La structure est éclairée par une onde incidente plane se propageant selon l'axe OZ dans le sens des Z positifs. Ce problème est, par la prise en compte du comportement vibratoire de la structure, un problème de diffusion.

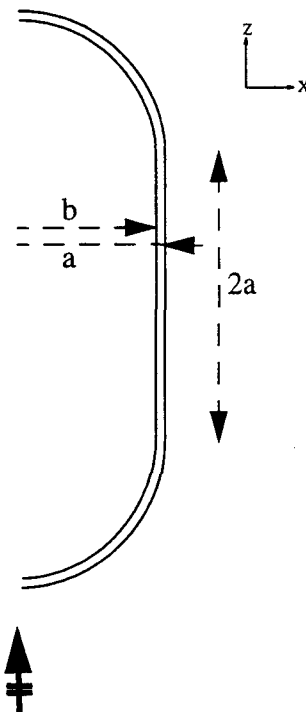


Figure 5.7. Situation du problème de diffusion de LINE en symétrie axiale.

Une première série de calculs est effectuée par équations intégrales seules afin de déterminer les fréquences irrégulières de la gamme. Le test de la source ponctuelle (cf. § 2.6) est mené avec deux sources situées sur l'axe OZ en $Z = 0,5a$ et $Z = -0,5a$:

- lorsqu'elles sont de même amplitude, il permet de déterminer les fréquences irrégulières symétriques par rapport au plan XOY,
- lorsqu'elles sont d'amplitudes opposées, il permet de déterminer les fréquences irrégulières anti-symétriques par rapport à XOY.

Ce problème se décomposant en un problème symétrique et un autre antisymétrique par rapport à XOY (cf. figure 5.8), ces 2 tests permettent de repérer toutes les fréquences irrégulières de la gamme. La figure 5.9 représente l'EQM sur toute la gamme à chaque Hz. De nombreux pics apparaissent mais beaucoup d'entre eux ne semblent pas être associés à une fréquence irrégulière car ils sont relativement faibles.

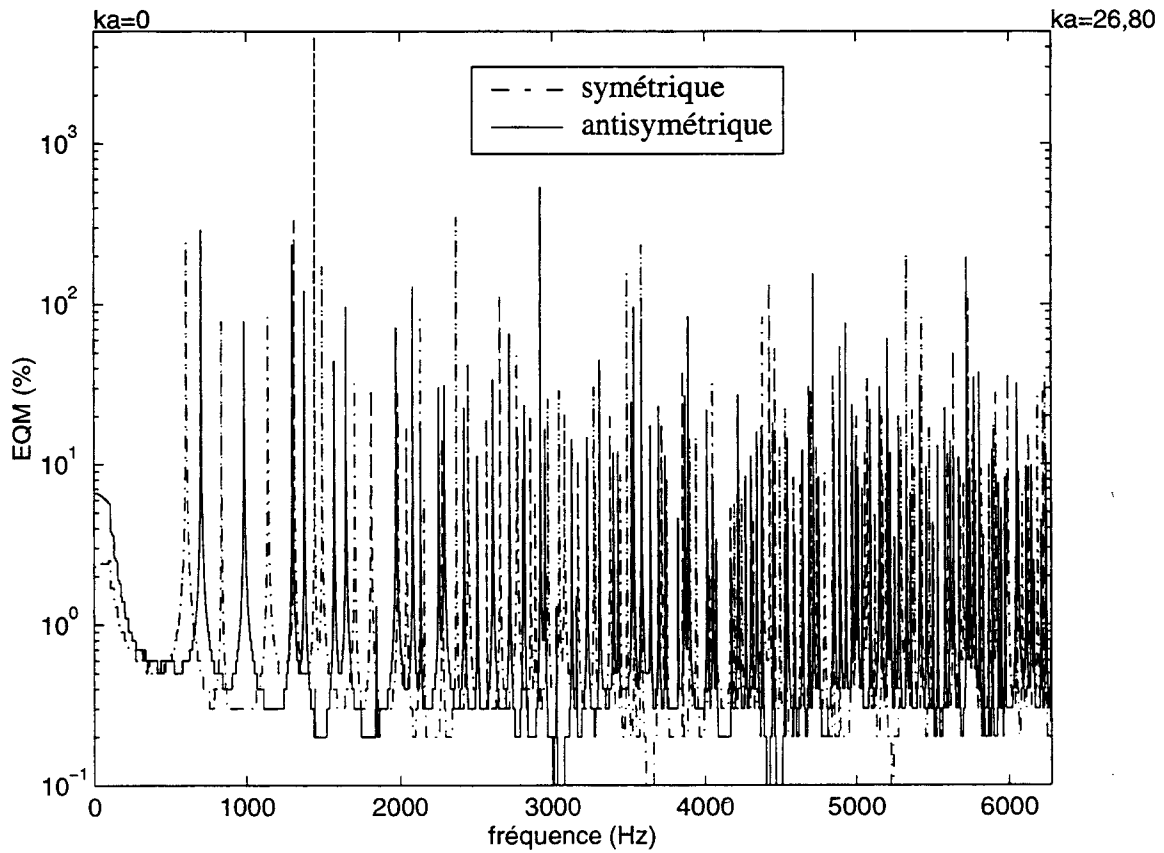


Figure 5.9. EQM par chargement symétrique et antisymétrique. Structure LINE.

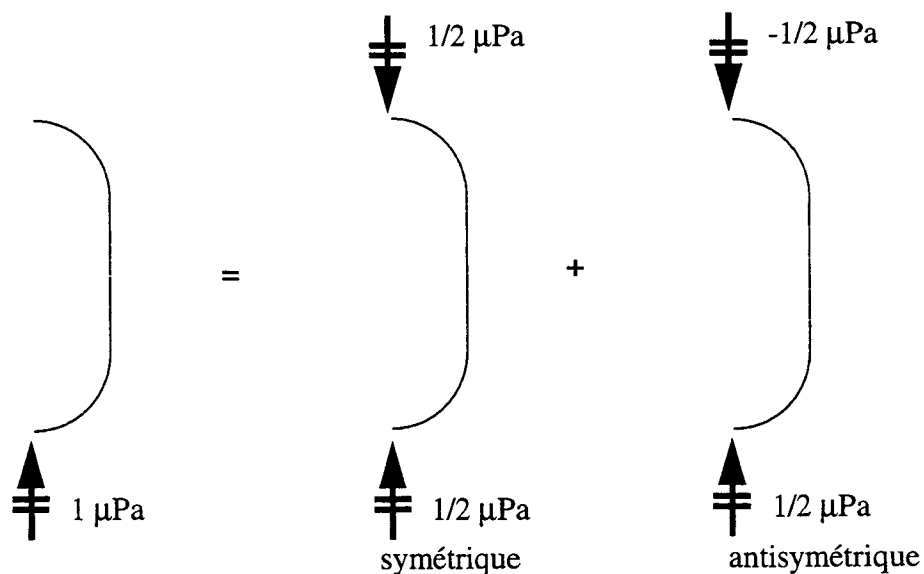


Figure 5.8. Décomposition du problème pour une incidence d'amplitude $1 \mu\text{Pa}$.

On calcule le module de la pression rétrodiffusée normalisé par celui de la pression incidente tous les 5 Hz. L'option de modélisation choisie est la surdétermination des équations intégrales par des équations de champ nul avec approximation quadratique de la pression et $M = 3, 8$ origines étant placées sur l'axe OZ conformément au procédé du paragraphe 4.4.3. On choisit ici de ne pas activer la technique des noeuds proches (option numérique). On compare les valeurs obtenues à celles issues de mesures en bassin disponibles entre 2250 Hz ($ka = 9,62$) et 5250 Hz ($ka = 22,44$). Le niveau mesuré est relatif, il est corrigé pour prendre en compte la bande passante du transducteur utilisé en monostatique (émetteur-récepteur). La figure 5.10 présente cette comparaison.

D'autres calculs avec M inférieur à 3 ont été effectués mais n'apportent pas une précision suffisante.

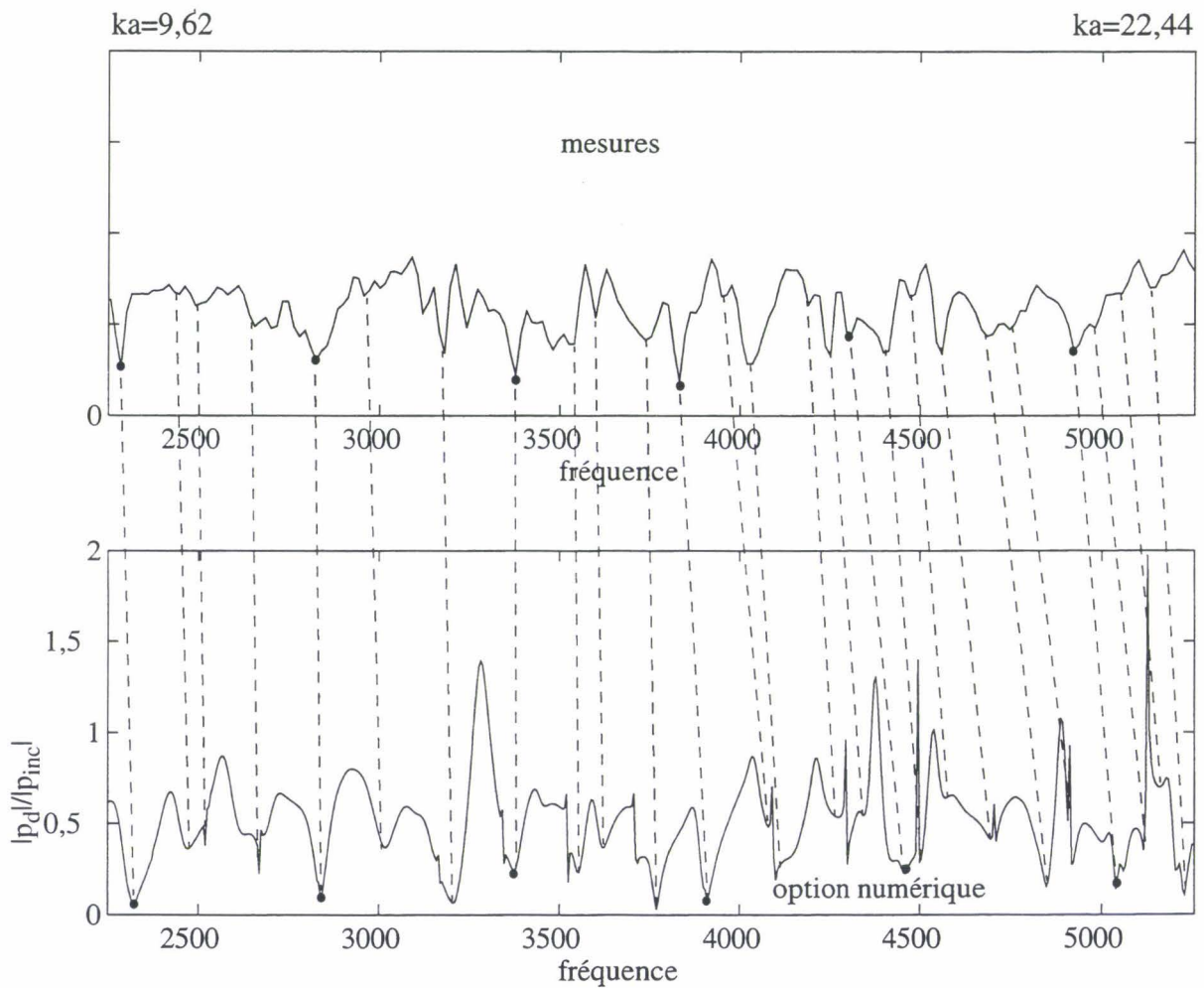


Figure 5.10. Comparaison de la pression rétrodiffusée. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.

La correspondance entre mesures et calculs numériques est satisfaisante. Les accidents sont bien reproduits avec un décalage en fréquence et des différences sur les variations d'amplitude.

On trace figure 5.11 le diagramme de directivité de la pression diffusée en champ lointain dans le plan XOZ à une fréquence irrégulière inférieure à F dont l'EQM par équations intégrales est élevée. On choisit 2920 Hz ($ka = 12,48$) (EQM = 537,7 %). L'option de calcul employée est la

même que précédemment. Cette fréquence correspond à 2890 Hz ($ka = 12,35$) sur la courbe de mesure. Le niveau sonore maximale est $TS_{max} = 17,45$ dB pour $\theta = 0^\circ$.

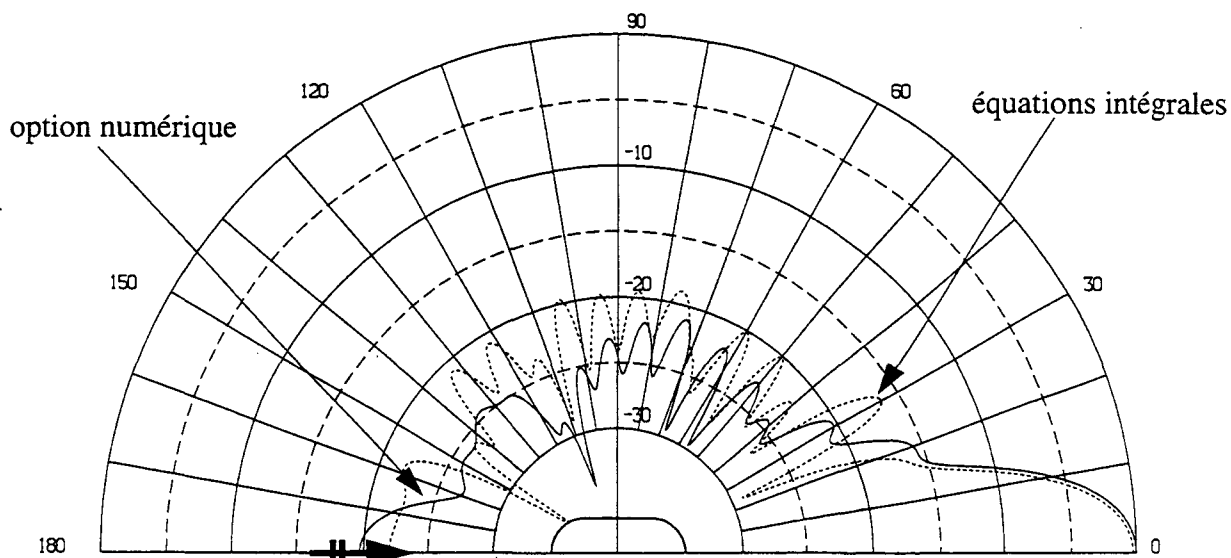


Figure 5.11. Diagramme de directivité dans le plan XOZ. Structure LINE.
Incidence suivant les Z croissants.
Fréquence de l'option numérique : $ka = 12,48$.

Le traitement utilisé à la fréquence irrégulière est opérationnel.

Sur la figure 5.12, une comparaison entre l'option numérique et les mesures est effectuée par l'intermédiaire du diagramme angulaire dans le plan XOZ en champ lointain du module normalisé de la pression diffusée. On ne possède pas de mesure à une fréquence irrégulière. Le diagramme angulaire mesuré est disponible à la fréquence expérimentale de 4679 Hz, soit $ka = 20,00$. D'après la figure 5.10, la fréquence de la courbe obtenue par l'option numérique qui lui correspond est 4690 Hz, soit $ka = 20,05$. Les valeurs sont représentées en échelle linéaire.

On remarque le bon comportement de l'option numérique employée vis à vis des mesures réelles.

Les résultats des figures 5.11 et 5.12 permettent de généraliser la validité, notamment aux fréquences irrégulières, de l'emploi des origines multiples de calcul de champ nul pour ce problème.

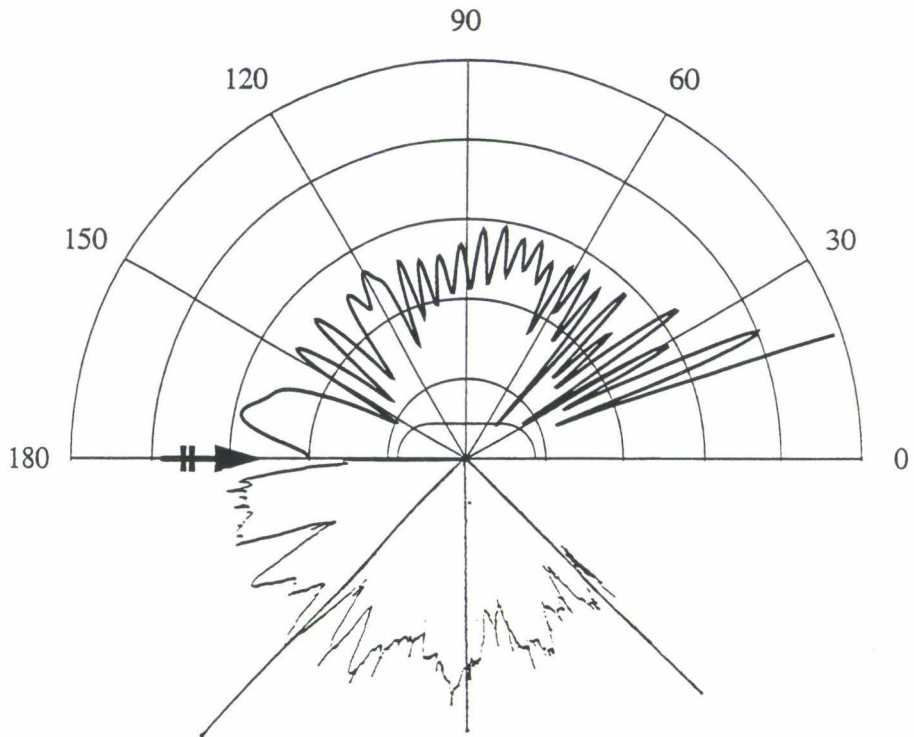


Figure 5.12. Diagramme angulaire en champ lointain dans le plan XOZ.
Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.
Fréquence de l'étude expérimentale : $ka = 20,00$.
Fréquence de l'option numérique : $ka = 20,05$.

CONCLUSIONS

Les applications présentées dans ce chapitre illustrent les développements des chapitres 3 et 4.

Les deux premières applications concernent la diffraction d'une onde plane par une structure rigide. Les développements du chapitre 4, portant sur les équations de champ nul, sont appliqués avec succès au traitement d'une fréquence irrégulière d'une structure sous-marine. L'application simultanée de ces développements et de l'interpolation fréquentielle du chapitre 3 à une structure LINE à symétrie axiale permet l'obtention d'une baisse conséquente du temps de calcul d'un spectre complet.

La dernière application est consacrée aux problèmes de diffusion. Les techniques du chapitre 4 sont prises en compte lors du couplage des codes éléments finis ATILA et équations intégrales EQI. Le champ lointain obtenu ainsi est similaire à celui issu d'une étude expérimentale dans le cas de la diffusion d'une onde plane par une structure LINE élastique. L'emploi des techniques développées au chapitre 4 permet de traiter avec précision les fréquences irrégulières avec un degré d'équation de champ nul faible, pour une consommation de temps de calcul très raisonnable.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Le travail présenté dans ce document est une optimisation du code équations intégrales EQI. Ce code a été conçu et développé pour modéliser le rayonnement ou la diffraction acoustique de structures immergées dans un fluide d'extension infinie. Le traitement des fréquences irrégulières repose sur la méthode de Jones qui consiste à surdéterminer la représentation intégrale de Helmholtz extérieure par des équations supplémentaires de champ nul. Dans le cas de la résolution d'un problème fluide-structure, le couplage entre le code EQI et le code éléments finis ATILA est disponible.

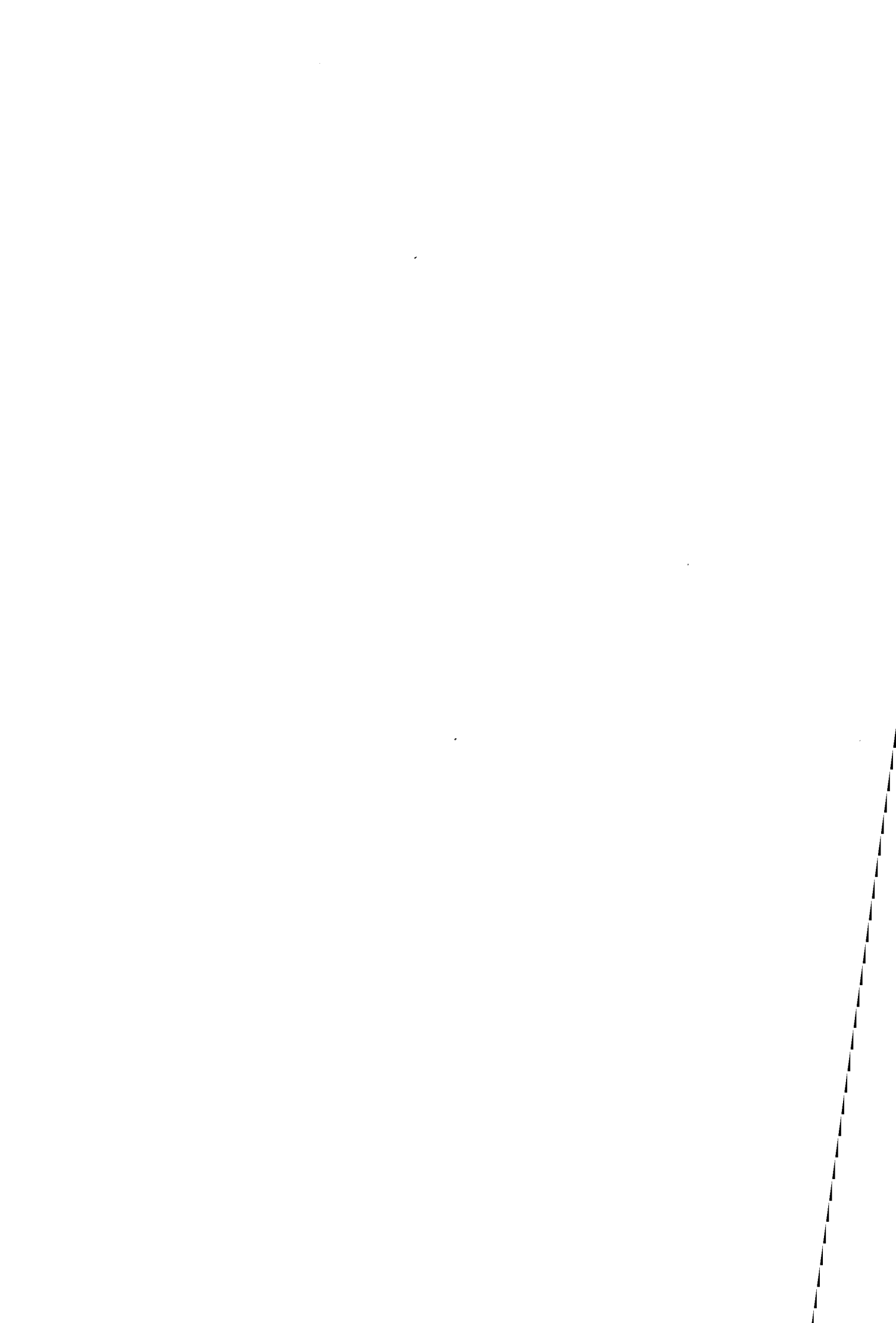
La première optimisation concerne le traitement des équations intégrales. Dans le but de minimiser le temps de calcul nécessaire à l'étude d'un problème acoustique dans une large bande de fréquence, une interpolation fréquentielle est développée. Les matrices équations intégrales sont calculées et stockées pour 2 fréquences bornes. Ensuite, la phase de construction de ces matrices peut être remplacée par une interpolation linéaire aux fréquences intermédiaires après avoir extrait le comportement oscillatoire des coefficients. Cette technique est développée pour les problèmes tridimensionnels et à symétrie axiale. Dans ce dernier cas, la mise au point d'une méthode d'intégration basée sur la quadrature de Gauss-Legendre avec un traitement spécial des termes diagonaux est effectué. De même, un découpage original de chaque domaine circulaire d'intégration est développé. Les résultats montrent que l'interpolation fréquentielle permet de conserver une bonne précision des résultats. Elle fournit une importante réduction du temps de calcul lors d'analyses multi-fréquences de problèmes à symétrie axiale. Un critère de sélection automatique des fréquences bornes est mis en évidence. Il est directement lié à la discrétisation par des éléments à variation quadratique : pour un maillage donné, l'interpolation fréquentielle est fiable et performante entre 0 et F (F est la fréquence maximale fixée par le "critère en $\lambda/4$ "). La surdétermination par des équations de champ nul du système équations intégrales issu de l'interpolation est opérationnelle.

La seconde optimisation concerne le traitement des équations supplémentaires de champ nul. Elle porte sur deux points : une interpolation quadratique de la pression; une technique utilisant plusieurs origines de calcul. Le premier point permet de remplacer avantageusement l'approximation en série de Fourier de la pression grâce à une simplification d'emploi et un gain en temps de calcul. Avec cette nouvelle interpolation, la prise en compte des symétries ou antisymétries du problème dans les équations de champ nul est également implantée. Le second point est développé pour permettre une meilleure simulation des structures excentrées. Il s'agit de la technique des origines multiples et des noeuds proches qui permet un meilleur recouvrement de la surface par la réunion des sphères inscrites et centrées en ces origines. La multiplicité des origines autorise l'emploi d'équations de champ nul de degré plus faible. Cette technique permet également le traitement de structures à plusieurs volumes.

En conclusion, cette thèse aboutit à une nouvelle version du code EQI capable de modéliser des structures de plus en plus complexes, pour des fréquences de plus en plus élevées.

Plusieurs prolongements de ce travail sont prévus :

- la prise en compte de l'interpolation fréquentielle lors du couplage des codes EQI et ATILA,
- l'application de l'interpolation fréquentielle à l'inverse de la matrice équations intégrales [A],
- le développement de la décomposition en problèmes élémentaires des équations de champ nul,
- le développement des équations de champ nul à partir des fonctions d'ondes sphéroïdales,
- la détermination des fréquences irrégulières pour tout type de structure par résolution numérique du problème intérieur de Dirichlet homogène associé.



BIBLIOGRAPHIE

1. **P.M. MORSE,**
"Vibration and Sound", McGraw-Hill, New-York, 2nd ed. (1948).
2. **P.M. MORSE, H. FESHBACH,**
"Methods of Theoretical Physics", Mc Graw-Hill, Vol. 1-2 (1953).
3. **D.H. STENZEL, O. BROSZE,**
"Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen", Springer-Verlag (1958).
4. **H.A. SCHENCK,**
"Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems", J. Acoust. Soc. Am., 44, 41-58 (1968).
5. **D.S. JONES,**
"Integral Equation for the Exterior Acoustic Problem", Q. J. Mech. Appl. Math., XXVII, 129-142 (1974).
6. **B. STUPFEL, A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY,**
"Combined Integral Equation Formulation and Null-Field Method for the Exterior Acoustic Problem", J. Acoust. Soc. Am., 83, 927-941 (1988).
7. **A. LAVIE,**
"Modélisation du Rayonnement ou de la Diffraction Acoustique par une Méthode Mixte Équations Intégrales - Champ Nul", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois (1989).
8. **G. CHERTOCK,**
"Integral equation methods in sound radiation and scattering from arbitrary surfaces", Nav. Ship. and Res. Dev. Center, Washindton DC, Report n° 3538 (1971).
9. **J. GIROIRE,**
"Méthodes d'équations intégrales pour les problèmes extérieurs relatifs à l'équation de Helmholtz", Comptes rendus de la journée d'étude S.E.E. sur les calculs de propagation et de diffraction par la méthode des éléments finis (1979).
10. **D. COLTON, R. KRESS,**
"Integral Equation Methods In Scattering Theory", Chap. 3, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience (1983).
11. "Boundary Element Methods in 'Acoustics", Computational Mechanics Publications, R.D. CISKOWSKI and C.A. BREBBIA ed., Southampton Boston (1991).
12. **O.D. KELLOG,**
"Foundations of potential theory", Springer-Verlag (1967).

13. **A.J. BURTON, G.F. MILLER,**
"The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems", Proc. R. London Ser. A 323, 201-210 (1971).
14. **D.V. DEAN,**
"Finite element study of acoustic wave", Thesis, US Naval Postgraduate School, Monterey (1970).
15. **O.C. ZIENKIEWICZ,**
"The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, Maidenhead (1971).
16. **J.T. HUNT, M.R. KNITTEL, C.S. NICHOLS, D. BARACH,**
"Finite element approach to acoustic scattering from elastic structures", J. Acoust. Soc. Am., 57, 287-299 (1975).
17. **M.R. KNITTEL, C.S. NICHOLS, D. BARACH,**
J. Acoust. Soc. Am., 58, 983-995 (1975).
18. **C. YEH,**
"Scattering of acoustic waves by a penetrable prolate spheroid. I. Liquid prolate spheroid", J. Acoust. Soc. Am., 42, 518-521 (1967).
19. **J.E. BURKE,**
"Scattering by penetrable spheroids", J. Acoust. Soc. Am., 43, 871-875 (1967).
20. **J.L. BUTLER,**
"Solution of acoustical-radiation problems by boundary collocation", J. Acoust. Soc. Am., 48, 325-336 (1970).
21. **R.F. MILLAR,**
"The Rayleigh hypothesis and a related least-squares solution to scattering problems for periodic surfaces and other scatterers", Radio Science, 8, 785-796 (1973).
22. **T.L. GEERS,**
"Doubly Asymptotic Approximations for transient motions of submerged structures", J. Acoust. Soc. Am., 65, 1500-1508 (1978).
23. **T.L. GEERS, C.A. FELIPPA,**
"Doubly Asymptotic Approximations for vibration analysis of submerged structures", J. Acoust. Soc. Am., 73, 1152-1159 (1983).
24. **H. HUANG, Y.F. WANG,**
"Asymptotic fluid structure interaction theories for acoustic radiation prediction", Int. Engng. Mech. Div. ASME AMD 64, PVP 78 (1984).
25. **J.B. KELLER,**
"Diffraction by a convex cylinder", IRE Trans. Ant. Prop., Vol. AP-4, 312-321 (1956).
26. **J.B. KELLER,**
"Diffraction by an aperture", J. Appl. Phys., Vol. 28, 426-444 (1957).

27. **J.B. KELLER**,
"A geometrical theory of diffraction", Proc. of Symposia in Applied Mathematics, McGraw-Hill, Vol. 8, 27-52 (1958).
28. **D. BOUCHE, F. MOLINET**,
"Méthodes asymptotiques en électromagnétisme", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1994).
29. **A. BOAG, Y. LEVIATAN, A. BOAG**,
"Analysis of acoustic scattering from fluid bodies using a multipoint source model", IEEE Trans. Ultrason., 36, 119-128 (1989).
30. **G.H. KOOPMAN, L. SONG, J.B. FAHNLIN**,
"A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition", J. Acoust. Soc. Am., 86, 2433-2438 (1989).
31. **R. COURANT, D. HILBERT**,
"Methods of Mathematical Physics", Interscience, Vol. 1 (1953).
32. **A.F. SEYBERT, T.K. RENGARAJAN**,
"The use of CHIEF to obtain unique solutions for acoustic radiation using boundary integral equations", J. Acoust. Soc. Am., 81, 1299-1306 (1987).
33. **P.C. WATERMAN**,
"New Formulation of Acoustic Scattering", J. Acoust. Soc. Am., 45, 1417-1429 (1969).
34. **P.C. WATERMAN**,
"Symmetry, unitarity, and geometry in electromagnetic scattering", Phys. Rev. D, 3, 825-839 (1971).
35. **R.J. URICK**,
"Principles of Underwater Sound", McGraw-Hill (1975).
36. "Special issue on SONAR", IEE Proc. -F, Vol. 131, N° 3 (1984).
37. Undersea Defense Technology, Conf. Proc., Ed. Microwave exhibitions and publishers Ltd, Tunbridge Wells, England (1988).
38. **N. GESPA**,
"La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple-Théories et expériences", Cedocar, Paris (1987).
39. **A. DYMENT**,
"Introduction à la Mécanique des Fluides", Cours, U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Université des Sciences et Techniques de Lille (1976-77).
40. **M. BRUNEAU**,
"Introduction aux Théories de l'Acoustique", publication de l'Université du Maine (1983).

Bibliographie.

41. **P.M. MORSE, K.U. INGARD,**
"Theoretical Acoustics", McGraw-Hill, New York (1986).
42. EQI, "EQuations Intégrales".
43. **A. LAVIE, D. MOREL, B. STUPFEL, J.N. DECARPIGNY,**
"Analyse, à l'aide d'une méthode d'équations intégrales, de la diffraction d'une onde acoustique plane par une structure rigide tridimensionnelle", Convention C.86.48.826.334 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, commande 006, rapport d'avancement (1987).
44. **A. LAVIE, K. ANIFRANI, J.N. DECARPIGNY,**
"Etude du rayonnement acoustique du flexensionnel monoface par une formulation intégrale", Convention C.86.48.826.334 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, commande 016, rapport d'avancement (1988).
45. **J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, A. LAVIE, B. HAMONIC, R. BOSSUT, J.M. CAPRON, G. GROSSO,**
"Etude d'un nouveau concept de système d'émission pour la surveillance activée", Convention C.89.48.603.005 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, commande 001 (1989).
46. **A. LAVIE,**
"Notice d'utilisation du code EQI", version 1.01 (1989).
47. **A. LAVIE, R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY,**
"Analyse, à l'aide d'une méthode d'équations intégrales, de la diffraction d'une onde acoustique plane par une structure rigide tridimensionnelle", Convention C.86.48.826.334 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, commande 006, rapport final (1989).
48. **C. GRANGER, A. LAVIE, K. ANIFRANI, P. BIGOTTE, J.N. DECARPIGNY,**
"Calcul complet de la sensibilité d'un hydrophone à directivité cardioïde intrinsèque", Convention C.87.48.813.505 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, rapport final (1989).
49. **B. HAMONIC, A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY,**
"Conception d'une antenne de transducteur Turbot : modélisation du rayonnement par équations intégrales à l'aide du code EQI", Convention C.86.48.826.334 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, commande 023 (1990).
50. **J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, R. BOSSUT, B. HAMONIC, A. LAVIE,**
"Modélisation de l'interaction acoustique entre transducteurs de classe IV assemblés dans une antenne", Convention C.89.34.093.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, rapport d'avancement (1990).
51. **C. GRANGER, G. HAW, A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY,**
"Analyse de la diffraction d'une onde acoustique par une structure rigide tridimensionnelle", Convention C.88.48.603.018 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, rapport d'avancement (1990).

52. **A. LAVIE, R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY,**
"Analyse de la diffraction d'une onde acoustique plane par une structure rigide tridimensionnelle", Convention C.88.48.603.018 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, commande 006, rapport final (1990).
53. **J.C. DEBUS, J.N. DECARPIGNY, B. HAMONIC, A. LAVIE,**
"Modélisation de l'interaction acoustique entre transducteurs de classe IV assemblés dans une antenne", Convention C.89.34.093.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, rapport d'avancement (1990).
54. **A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, B. HAMONIC,**
"Modélisation de l'interaction acoustique entre transducteurs flexensionnels de classe IV assemblés dans une antenne", Convention de recherche n. 89.34.093.00.470.75.01 pour la DRET-Paris, second rapport d'avancement (1991).
55. **J.C. DEBUS, B. HAMONIC, A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY,**
"Modélisation de l'interaction acoustique entre transducteurs de classe IV assemblés dans une antenne", Convention C.89.34.093.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, rapport final (1991).
56. **R. BOSSUT, A. LAVIE, B. HAMONIC,**
"Analyse de la diffraction d'une onde acoustique plane par une structure rigide tridimensionnelle : application à des structures réelles de sous-marins", Convention C.86.48.826.334 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, commande 025, rapport final (1991).
57. **C. GRANGER, A. LAVIE, G. HAW, J.N. DECARPIGNY, B. HAMONIC,**
"Mesures en bassin du champ acoustique diffracté par une maquette de sous-marin", Convention C.89.48.603.005 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, commande 002, rapport final (1991).
58. **A. LAVIE, C. VANHILLE, B. HAMONIC,**
"Optimisation du code EQI en vue d'une extension à plus hautes fréquences des calculs de diffraction acoustique par des structures de sous-marins supposées rigides", Convention de recherche n. C.89.48.603.005 passée par la DCN-Toulon pour le GERDSM, commande 013, rapport d'avancement (1992).
59. **A. LAVIE,**
"Notice d'utilisation du code EQI", version 3.02 (1993).
60. **A. LAVIE,**
"Notice d'utilisation du code EQI", version 5.01 (1996).
61. **A. LAVIE, R. BOSSUT, J.C. DEBUS,**
"Optimisation de la version 3.02 du code EQI", Convention C.92.50.049.003 passée par la DCN-Toulon pour le CTSN/DLSM, rapport final (1996).
62. **A. LAVIE, B. HAMONIC, J.N. DECARPIGNY, D. BOUCHER,**
"Modélisation du rayonnement ou de la diffraction acoustique de transducteurs basse fréquence à l'aide de la méthode des équations intégrales", Premier Congrès Français d'Acoustique, Supplément au Journal de Physique, Fasc. 2, Colloque n° 2, 341-344 (1990).

63. **B. HAMONIC, J.C. DEBUS, A. LAVIE,**
"Analysis of the interaction between transducers in a low frequency, high power array : physics and numerical modelling", Undersea Defence Technology, Conference Proceedings, Microwave Exhibitions and Publishers Ltd ed., 197-203 (1991).
64. **C. GRANGER, A. LAVIE, J.N. DECARPIGNY, M. RICHARD,**
"Numerical modeling of a cardioid hydrophone", Third International Workshop on Transducers for Sonics and Ultrasonics, Technomic publication (1992).
65. **R.P. BANAUGH, W. GOLDSMITH,**
"Diffraction of Steady Acoustic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape", J. Acoust. Soc. Am., 35, 1590-1601 (1963).
66. **G. CHERTOCK,**
"Sound Radiation from Vibrating Surfaces", J. Acoust. Soc. Am., 36, 1305-1313 (1964).
67. **L.G. COPLEY,**
"Integral equation method for radiation vibrating bodies", J. Acoust. Soc. Am., 41, 807-815 (1967).
68. **L.G. COPLEY,**
"Fundamental results concerning integral representations in acoustic radiation", J. Acous. Soc. Am., 44, 22-32 (1968).
69. **C. AUDOLY,**
"Méthodes Numériques pour le Calcul de la Diffraction Acoustique", n. 53621, GERDSM.
70. **J.N. DECARPIGNY**
"Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques", Thèse de Doctorat d'État, Université des Sciences et Techniques de Lille (1984).
71. **T. TERAJ,**
"On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods", J. Sound and Vibr., 69, 71-100 (1980).
72. **W. TOBOCMAN,**
"Calculation of acoustic wave scattering by means of the Helmholtz integral equation I", J. Acoust. Soc. Am., 76, 599-607 (1984).
73. **A.F. SEYBERT, B. SOENARKO, F.J. RIZZO, D.J. SHIPPY,**
"An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions", J. Acoust. Soc. Am., 77, 362-368 (1985).
74. **W. TOBOCMAN,**
"Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths", J. Acoust. Soc. Am., 80, 1828-1837 (1986).

75. **A.F. SEYBERT, B. SOENARKO, F.J. RIZZO, D.J. SHIPPY,**
"A special integral equation formulation for acoustic radiation and scattering for axisymmetric bodies and boundary conditions", *J. Acoust. Soc. Am.*, 80, 1241-1247 (1986).
76. **W. TOBOCMAN,**
"Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths II", *J. Acoust. Soc. Am.*, 82, 704-706 (1987).
77. **A.F. SEYBERT, C.Y.R. CHENG,**
"Application of the Boundary Element Method to Acoustic Cavity Response and Muffer Analysis", *ASME J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* (1986).
78. **G.P. SUCCI,**
"The interior acoustic field of an automobile cabin", *J. Acoust. Soc. Am.*, 81, 1688-1694 (1987).
79. **D. OUELLET, J.L. GUYADER, J. NICOLAS,**
"Sound field in a rectangular cavity in the presence of a thin, flexible obstacle by the integral equation method", *J. Acoust. Soc. Am.*, 89, 2131-2139 (1991).
80. **R.E. KLEINMAN, G.F. ROACH, L.S. SCHUETZ, J. SHIRRON,**
"An iterative solution to acoustic scattering by rigid objects", *J. Acoust. Soc. Am.*, 84, 385-391 (1988).
81. **K.R. FYFE, F. ISMAIL, P. SAS,**
"Failure of a reported exterior overdetermination technique to resolve acoustic boundary element method (BEM) critical frequencies", *J. Acoust. Soc. Am.*, 89, 444-445 (1991).
82. **J.C. BOLOMEY, A. WIRGIN,**
"Numerical comparison of the Green's function and the Waterman and Rayleigh theories of scattering from a cylinder with arbitrary cross-section", *Proc. IEEE*, 121, 794-804 (1974).
83. **F. URSELL,**
"On the exterior problems of acoustics: II", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 84, 545 (1978).
84. **P.J.T. FILIPPI,**
"Theoretical Acoustics and Numerical Techniques", Springer-Verlag (1983).
85. **M.A. HAMDI,**
"Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains", Thèse de Doctorat d'État, Université de Technologie de Compiègne (1982).
86. **P. MALBEQUI, S.M. CANDEL, E. RIGNOT,**
"Boundary integral calculations of scattered fields : application to a spacecraft launcher", *J. Acoust. Soc. Am.*, 82, 1771-1781 (1987).
87. **I.C. MATHEWS,**
"Numerical techniques for three-dimensional steady-state fluid-structure interaction", *J. Acoust. Soc. Am.*, 79, 1317-1325 (1986).

88. **J.J. ANGÉLINI, P.M. HUTIN,**
"Problème Extérieur de Neumann pour l'Équation d'Helmholtz. La Difficulté des Fréquences Irrégulières", *La Recherche Aérospatiale*, 3, 187-196 (1983).
89. **L.L. FOLDY,**
"Theory of passive linear electroacoustic transducers with fixed velocity distribution", *J. Acoust. Soc. Am.*, 21, 595-604 (1949).
90. **R.D. MILLER, E.T. MOYER Jr., H.HUANG, H. ÜBERALL,**
"A comparison between the boundary element method and the wave superposition approach for the analysis of the scattered fields from rigid bodies and elastic shells", *J. Acoust. Soc. Am.*, 89, 2185-2196 (1991).
91. **B. STUPFEL, J.N. DECARPIGNY,**
"Analyse bibliographique des méthodes de calcul de champ de pression diffracté par un corps élastique ou non", Contrat de recherche n° 83/1085 avec la DRET (1984).
92. **ATILA,** "Analyse de Transducteurs par Intégration des équations de Laplace".
93. **J.N. DECARPIGNY, J.C. DEBUS, B. TOCQUET, D. BOUCHER,**
"In-air analysis of piezoelectric Tonpilz transducers in a wide frequency band using a mixed finite element-plane wave method", *J. Acoust. Soc. Am.*, 78, 1499-1507 (1985).
94. **R. BOSSUT, J.N. DECARPIGNY,**
"Finite element modeling of radiating structures using dipolar damping elements", *J. Acoust. Soc. Am.*, 86, 1234-1244 (1989).
95. **R. BOSSUT,**
"Modélisation de transducteurs piézoélectriques annulaires immergés par la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat-Ingénieur, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (1985).
96. **P.TIERCE,**
"Modélisation du transducteur Isabelle par la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat-Ingénieur, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (1985).
97. **B. HAMONIC,**
"Contribution à l'étude du rayonnement de transducteurs utilisant des vibrations de coques minces", Thèse de Doctorat en Mécanique, Université des Sciences et Techniques de Lille (1987).
98. **J. ASSAAD,**
"Modélisation des transducteurs piézoélectriques haute fréquence à l'aide de la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat en Électronique, Université des Sciences et Technologies de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis (1992).
99. **A. LAVIE, B. DUBUS,**
"Méthodes Numériques en Diffusion Acoustique", 3ème École d'Hiver sur la Diffusion Acoustique, Cauteerets (1996).

100. **G. ELIAS, P. MALBEQUI,**
"Scattering by an open sphere: Exact solution and comparison with a boundary integral method", *J. Acoust. Soc. Am.*, 93, 609-616 (1993).
101. **L. KAZANDJIAN,**
"Comparison of the Rayleigh and T-matrix theories of scattering of sound from elastic shell", *J. Acoust. Soc. Am.*, 93, 3139-3148 (1993).
102. **G. CHERTOCK,**
J. Acoust. Soc. Am., 47, 387-388 (1970).
103. **G. DE MEY,**
"Calculation of eigenvalues of the Helmholtz equation by an integral equation", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 10, 59-66 (1976).
104. **G.R.C. TAI, R.P. SHAW,**
"Helmholtz-equation eigenvalues and eigenmodes for arbitrary domains", *J. Acous. Soc. Am.*, 56, 796-804 (1974).
105. **D. NARDINI, C.A. BREBBIA,**
"A new approach to free vibration analysis using boundary elements", *Proc. 4th Int. Conf. on BEM*, Brebbia ed., Springer Verlag, Berlin (1982).
106. **J.R. KUTTLER, V.G. SIGILLITO,**
"Eigenvalues of the Laplacian in two dimensions", *SIAM Review*, 26, 163-193 (1984).
107. **S. AHMAD, P.K. BANERJEE,**
"Free vibration analysis by BEM using particular integrals", *J. Eng. Mech. ASCE*, 112, 682-695 (1986).
108. **R. WOBST,**
"The Generalized Eigenvalue Problem and Acoustic Surface Wave Computations", *Computing*, 39, 57-69 (1987).
109. **G.P. SUCCI,**
"The interior acoustic field of an automobile cabin", *J. Acous. Soc. Am.*, 81, 1688-1694 (1987).
110. **P.K. BANERJEE, S. AHMAD, H.C. WANG,**
"A new BEM formulation for the acoustic eigenfrequency analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, 1299-1309 (1988).
111. **J.P. COYETTE, K.R. FYFE,**
"An improved formulation for acoustic eigenmode extraction from boundary element models", *J. Vibration and Acoustics*, 112, 392-398 (1990).
112. **A. ALI, C. RAJAKUMAR, S.M. YUNUS,**
"On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 31, 1271-1282 (1991).

113. **C. RAJAKUMAR, C.R. ROGERS,**
"The Lanczos algorithm applied to unsymmetric generalized eigenvalue problem", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 32, 1009-1026 (1991).
114. **Y.Y. LU, S. YAU,**
"Eigenvalues of the Laplacian through boundary integral equations", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 12, 597-609 (1991).
115. **C. RAJAKUMAR, A. ALI, S.M. YUNUS,**
"Lanczos algorithm for acoustic boundary element eigenvalue problems", *J. Acous. Soc. Am.*, 91, 939-948 (1992).
116. **S.T. RAVEENDRA, P.K. BANERJEE,**
"Polynomial particular solutions based boundary element analysis of acoustic eigen frequency problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 35, 1787-1802 (1992).
117. **M.R. BAI,**
"Study of acoustic resonance in enclosures using eigenanalysis based on boundary element methods", *J. Acous. Soc. Am.*, 91, 2529-2538 (1992).
118. **S.M. KIRKUP, S. AMINI,**
"Solution of the Helmholtz eigenvalue problem via the boundary element method", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36, 321-330 (1993).
119. CHIEF, "Combined Helmholtz Integral Equation Formulation".
120. **K. DAVEY, M.F. WERBY, G.J. TANGO, G.C. GAUNAURD,**
"Null field integral techniques in scattering problems", *Mathl Comput. Modelling*, 10, 117-136 (1988).
121. **M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN,**
"Handbook of Mathematical Functions", Dover Publications, New York, 10th ed. (1972).
122. **W. TOBOCMAN,**
"Comparison of the T-matrix and Helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations", *J. Acoust. Soc. Am.*, 77, 369-374 (1985).
123. **V.K. VARADAN, V.V. VARADAN, L.R. DRAGONETTE, L. FLAX,**
"Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using the T-matrix approach", *J. Acoust. Soc. Am.*, 71, 22-25 (1982).
124. **R. LIM, R.H. HACKMAN,**
"A formulation of multiple scattering by many bounded obstacles using a multicentered, T supermatrix", *J. Acoust. Soc. Am.*, 91, 613-638 (1992).
125. **G.C. BISHOP, J. SMITH,**
"A T matrix for scattering from a doubly infinite fluid-solid interface with doubly periodic surface roughness", *J. Acoust. Soc. Am.*, 94, 1560-1583 (1993).

126. **R.L. WEAVER, YIH-HSING-PAO,**
"Application of the transition matrix to a ribbon-shaped scattered", J. Acoust. Soc. Am., 66, 1199-1206 (1979).
127. **V.K. VARADAN, V.V. VARADAN, J.H. SU, T.A.K. PILLAI,**
"Comparison of sound scattering by rigid and elastic obstacles in water", J. Acoust. Soc. Am., 71, 1377-1383 (1982).
128. **T.A.K. PILLAI, V.V. VARADAN, V.K. VARADAN,**
"Sound scattering by rigid and elastic infinite elliptical cylinders in water", J. Acoust. Soc. Am., 72, 1032-1037 (1982).
129. **G. KRISTENSSON, P.C. WATERMAN,**
"The T-matrix for acoustic and electromagnetic scattering by circular disks", J. Acoust. Soc. Am., 72, 1612-1625 (1982).
130. **V.K. VARADAN, V.V. VARADAN, S.J. TSAO, W.G. NEUBAUER,**
"Scattering of acoustic waves by rigid cylindrical objects with sharp corners", J. Acoust. Soc. Am., 72, 1957-1964 (1982).
131. **R.H. HACKMAN,**
"The transition matrix for acoustic and elastic wave scattering in prolate spheroidal coordinates", J. Acoust. Soc. Am., 75, 35-45 (1984).
132. **R.H. HACKMAN, D.G. TODOROFF,**
"An application of the spheroidal-coordinate-based transition matrix: The acoustic scattering from high aspect ratio solids", J. Acoust. Soc. Am., 78, 1058-1071 (1985).
133. **A. BOSTRÖM,**
"The null-field approach in series form-The direct and inverse problems", J. Acoust. Soc. Am., 79, 1223-1229 (1986).
134. **G.C. GAUNAURD, M.F. WERBY,**
"Interpretation of the three-dimensional sound fields scattered by submerged elastic shells and rigid spheroidal bodies", J. Acoust. Soc. Am., 84, 673-680 (1988).
135. **V.V. VARADAN, A. LAKHTAKIA, V.K. VARADAN,**
"Comments on recent criticism of the T-matrix method", J. Acoust. Soc. Am., 84, 2280-2284 (1988).
136. **G. DAHLQUIST, A. BJORK,**
"Numerical methods", Prentice Hall (1974).
137. **LINPACK,**
Subroutines, Double precision version complex algebra, University of New Mexico, Argonne National Lab. (1978).

138. **A. LAVIE, B. DUBUS, C. VANHILLE,**
"Diffusion acoustique par des cibles élastiques immergées de forme géométrique simple ou complexe (LINE 2, 2' et 3)", Convention C.93.34.085.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, rapport final (1995).
139. **V. SMIRNOV,**
"Cours de Mathématiques Supérieures", Ed. Mir Moscou, Vol. 2-4 (1975).
140. **J.C. LACHAT, J.O. WATSON,**
"Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations : a Formulation for Three-dimensional Elastostatics", Int. J. Num. Meth. Engng., 10, 991-1005 (1976).
141. **G.W. BENTHIEN, DON BARACH,**
CHIEF, Users Manual, Naval Ocean Systems Center, San Diego (1986).
142. **D. LANGE, A. CHAUDOUET,**
"Application de la Méthode des Équations Intégrales à la Mécanique", Cours Dpt. Mécanique du Solide, CETIM, Senlis.
143. **A. LAVIE, B. DUBUS, M. DUQUENOY, C. VANHILLE,**
"Diffusion acoustique par des cibles élastiques immergées de forme géométrique simple ou complexe (LINE 2, 2' et 3)", Convention C.93.34.085.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, premier rapport d'avancement (1994).
144. **I.S. GRADSHTEYN, I.M. RYZHIK,**
"Table of Integrals Series and Products", Academic Press ed. (1965).
145. **A. MESSIAH,**
"Mécanique Quantique", Dunod, Vol. 1-2 (1964).
146. **A. LAVIE, B. DUBUS,**
"Diffusion acoustique par des cibles élastiques immergées à symétrie axiale en incidence oblique", Convention C.94.34.440.00.470.75.01 passée par la DRET/SDR/G.06.03, rapport final, partie 1 (1995).
147. **G.W. BENTHIEN,**
"Application of Frequency Interpolation to Acoustic-Structure Interaction Problems", Technical Report 1323, Naval Ocean Systems Center, San Diego (1989).
148. **T.W. WU, A.F. SEYBERT, G.C. WAN, R.D. CISKOWSKI,**
"Vectorization and Parallelization of the Acoustic Boundary Element Code BEMAP on the IBM ES/3090 VF", Proceedings, International Congress on Recent Developments in Air- and Structure-Borne Sound and Vibration, March 6-8 1990, Auburn University, Alabama, U.S.A., 489-498 (1990).
149. **T.W. WU, R.D. CISKOWSKI, A.F. SEYBERT,**
"Vectorization and parallelization of the acoustic boundary element code BEMAP on the IBM ES/3090 VF", Eng. Anal. Boundary Elements, 10, 17-26 (1992).

150. **T.W. WU, W.L. LI, A.F. SEYBERT,**
"An efficient boundary element algorithm for multi-frequency acoustical analysis", *J. Acous. Soc. Am.*, 94, 447-452 (1993).
151. **C. VANHILLE,**
"Interpolation linéaire en fréquence appliquée à la méthode des équations intégrales", Diplôme d'Études Approfondies, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois (1991).
152. **C. VANHILLE, A. LAVIE,**
"An efficient tool for multi-frequency analysis in acoustic scattering or radiation by boundary element method", soumis à *Acta Acustica* (1996).
153. **G.W. BENTHIEN, H.A. SCHENCK,**
"Structural-Acoustic Coupling", Technical Report, Naval Ocean Systems Center, San Diego.
154. **H.A. SCHENCK, G.W. BENTHIEN**
"The Application of a Coupled Finite-Element Boundary-Element Technique to Large-Scale Structural Acoustic Problems", Technical Report, Naval Ocean Systems Center.
155. **R. LIM, R.H. HACKMAN,**
"A formulation of multiple scattering by many bounded obstacles using a multicentered, T supermatrix", *J. Acoust. Soc. Am.*, 91, 613-638 (1992).
156. **R.L. PRITCHARD,**
"Mutual acoustic impedance between radiators in an infinite rigid plane", *J. Acoust. Soc. Am.*, 32, 730-737 (1960).
157. **A. LAVIE, B. DUBUS,**
"Modélisation de la diffusion acoustique par une cible élastique de forme géométrique complexe", Convention C.91.34.067.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, rapport d'avancement (1992).
158. **B. DUBUS, A. LAVIE,**
"Modélisation de la diffusion acoustique par une cible élastique de forme géométrique complexe", Convention C.91.34.067.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, second rapport d'avancement (1992).
159. **B. DUBUS, A. LAVIE,**
"Modélisation de la diffusion acoustique par une cible élastique de forme géométrique complexe", Convention C.91.34.067.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, troisième rapport d'avancement (1992).
160. **A. LAVIE, B. DUBUS,**
"Modélisation de la diffusion acoustique par une cible élastique de forme géométrique complexe", Convention C.91.34.067.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, rapport final (1993).

161. **B. DUBUS, A. LAVIE,**
"Diffusion acoustique par des cibles élastiques immergées de forme géométrique simple ou complexe (LINE 2, 2' et 3)", Convention C.93.34.085.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, second rapport d'avancement (1994).
162. **A. LAVIE, B. DUBUS,**
"Modélisation de la diffraction acoustique d'une onde incidente plane par une structure élastique à l'aide d'une méthode mixte éléments finis-équations intégrales", Deuxième Congrès Français d'Acoustique, Supplément au Journal de Physique III, n° 4, Colloque n° 1, 957-960 (1992).
163. **D. DÉCULTOT, F. LECROCQ, G. MAZE, J. RIPOCHE, B. DUBUS, A. LAVIE,**
"Resonance interpretation with surface waves propagating on cylindrical shells bounded by hemispherical endcaps", Ultrasonics International 93 Conference Proceedings, Butterworth, 479-482 (1993).
164. **B. DUBUS, A. LAVIE, D. DÉCULTOT, G. MAZE,**
"Coupled finite element/boundary element method for the analysis of the acoustic scattering from elastic structures", ASME 15th biennial conference on vibration and noise, Acoustics of submerged structures and transduction for systems, Vol. 3 Part B, 25-32 (1995).
165. **B. DUBUS, A. LAVIE, C. VANHILLE,**
"Diffusion acoustique par les structures LINE 2 et LINE 2' : ellipses de polarisation et effets d'arêtes", Compte rendu de la réunion contractuelle sur la diffusion acoustique par des cibles élastiques immergées non canoniques (LINE & dièdre), 77-86, Le Havre (1995).
166. **A.F. SEYBERT, T.W. WU, X.F. WU,**
"Radiation and scattering of acoustic waves from elastic solids and shells using the boundary element method", J. Acoust. Soc. Am., 84, 1906-1912 (1988).
167. **P.J. SCHAFBUCH, F.J. RIZZO, R.B. THOMPSON,**
"Boundary element method solutions for elastic wave scattering in 3D", Int. J. Numer. Methods Eng., 36, 437-455 (1993).
168. **O.C. ZIENKIEWICZ, D. KELLY, P. BETTES,**
"The coupling of finite element and boundary solutions procedures", Int. J. Num. Methods Eng., 11, 355-375 (1977).
169. **J.P. COYETTE, O. BJORND AHL,**
"A mixed variational FEM/BEM model for submerged elastic structures with thin appendages", Second European Conference on Underwater Acoustics, Proceedings, L. Bjorno ed., 357-362 (1994).

LISTE DES SYMBOLES

Les symboles employés tout au long de ce document sont définis. Les écarts à cette règle sont chaque fois précisés dans le texte.

3D	tridimensionnel	f_r	la fréquence irrégulière inférieure à F la plus élevée
a, b	coefficients de champ proche	F_0	facteur de directivité
a_j	coefficients de la séparation des variables	[F]	matrice second membre de champ nul
a_p^q	coefficients de Fourier	g	fonction de Green associée à l'espace libre infini
a'_j	coefficients de la décomposition de la pression en série	G	fonction de Green
A_2, B_2	coefficients de directivité	h_m	fonction de Hankel
A_∞, B_∞	intégrales de directivité en symétrie axiale	H_i, U_i, V_i	ponds de Gauss
[A]	matrice premier membre équations intégrales	[H]	matrice de compressibilité
B_u	dérivées des fonctions de forme éléments finis	i	imaginaire pur
[B]	matrice second membre équations intégrales	j_m	fonction de Bessel sphérique de première espèce d'ordre m
[B_p], [D_p]	matrices second membre du couplage EQI-ATILA regroupées	J_λ	fonction de Bessel cylindrique de première espèce d'ordre λ
c	vitesse du son dans le fluide	J	jacobien
c_m^1	coefficients de décomposition de la pression incidente en champ nul	k	nombre d'onde
d_m^1	coefficients de décomposition de la pression diffractée de la matrice de transition	k_{mnq}	fréquences irrégulières du parallélépipède
[c]	tenseur des rigidités élastiques	k_{nq}	fréquences irrégulières de la sphère
$dr'(\xi, \eta)$	élément de surface élémentaire	$k_{m\lambda q}$	fréquences irrégulières du cylindre
$dr'(\xi, \varphi)$	élément de surface élémentaire en symétrie axiale	K	noyau
D_m	distance $r_m - r'$	[K]	matrice de rigidité
$D_{m ij}$	distance $r_m - r_{ij}$ factorisée en interpolation fréquentielle 3D	L	fonctionnelle éléments finis
$D_{m \lambda}$	distance $r_m - r_\lambda$ factorisée en interpolation fréquentielle en symétrie axiale	[L]	matrice premier membre de champ nul en approximation quadratique
[D]	matrice second membre du système surdéterminé	[L']	matrice premier membre de champ nul par série de Fourier
EQM	erreur quadratique moyenne	M	degré maximal des équations de champ nul
f	fréquence d'excitation	M_{mn}	masse ajoutée mutuelle
f_1, f_2	bornes inférieure et supérieure d'interpolation fréquentielle	[M]	matrice de masse cohérente pour la structure
f_{indice}	fréquence irrégulière	[M_1]	matrice de masse cohérente pour le fluide
$\underline{f}_{\text{indice}}$	fréquence irrégulière réelle du maillage	\underline{n}	normale orientée positivement vers le fluide
		\underline{n}'	normale en r'
		NE	nombre d'éléments

Symboles.

NEQCN	nombre d'équations de champ nul	r_λ	points de décomposition de l'interpolation fréquentielle en symétrie axiale
N_i	fonctions de forme	R	résistance de rayonnement d'un transducteur isolé
N_u et N_p	fonctions de forme éléments finis	R_{mn}	résistance mutuelle
NINT1	nombre de points de Gauss suivant la première direction	[R]	matrice triangulaire supérieure
NINT2	nombre de points de Gauss suivant la seconde direction	s_{df}	effet d'une source placée dans le fluide interne
NN	nombre de noeuds	s(oe)	éléments auxquels appartient le noeud oe
NNE	nombre de noeuds par éléments	S	sphère inscrite dans Γ
NTPG Γ_j	nombre total de points de Gauss de Γ_j	t	la variable temps
NTPG λ	nombre total de points de Gauss sur la zone d'influence de r_λ	t CPU	temps CPU (Central Processor Unit time)
$N\lambda$	nombre de r_λ sur une circonférence	[T]	tenseur des contraintes
$N\lambda_{max}$	nombre de r_λ sur la plus grande circonférence	TS	niveau sonore
O	origine du repère	[S]	matrice de changement de représentation
O, X, Y, Z	repère cartésien orthonormé	u	déplacement
p	pression	u_n	composante normale du déplacement
p_a	pression analytique	$\{u_{(\Gamma)}\}$	vecteur des valeurs nodales du déplacement en couplage EQI-ATI-LA
p_c	pression calculée	v_n	composante normale de la vitesse
p_d	pression diffusée	x, y, z	coordonnées cartésiennes
p_{df}	pression diffractée	X_{mn}	réactance mutuelle
p_{dfr}	pression diffractée rigide	y_m	fonction de Neumann
p_{inc}	pression incidente	Y_m^l	harmoniques sphériques
p_{ji}	pression nodale au noeud i de l'élément Γ_j .	Z	impédance acoustique
P_m^l	fonction de Legendre de première espèce de degré m et d'ordre l	Z_{mn}	impédance mutuelle
p(s(oe))	position de oe dans le topologie de $\Gamma_{s(oe)}$	α	angle solide
p_r	pression rayonnée	α_{int}	angle solide intérieur
P, Q	coefficients de troncature de la série de Fourier	α_{nq}	q-ième racine de j_n
[P]	matrice premier membre du système surdéterminé en approximation quadratique	$\alpha_{\lambda n}$	n-ième racine de J_λ
[P']	matrice premier membre du système surdéterminé en série de Fourier	β	déphasage introduit par les origines multiples de champ nul
{pc}	vecteur de la pression incidente du système surdéterminé	γ	potentiel hybride
[Q]	matrice orthogonale rectangulaire	Γ	surface frontière
r	point de calcul	Γ^e	éléments finis surfaciques (éléments finis)
r_m	noeud de calcul	Γ_j	élément surfacique
r'	point courant sur Γ	Γ_∞	surface lointaine éléments finis
$r'(\xi, \eta)$	point de Gauss	δ^∞	fonction de Dirac
$r'(\xi, \varphi)$	point de Gauss en symétrie axiale	Δ	opérateur laplacien
r, θ , φ	coordonnées sphériques	ε	erreur relative

λ	longueur d'onde	Ω_{fl}	milieu fluide
λ_{max}	longueur d'onde de la plus haute fréquence utilisée en interpolation fréquentielle en symétrie axiale	Ω_{int}	volume intérieur
μ	potentiel de double couche	Ω_s	structure
v_m^l	coefficients des harmoniques sphériques	$\hat{\cdot}$	matrices d'interpolation fréquentielle
ξ, η	coordonnées réduites	\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
ξ, φ	coordonnées réduites en symétrie axiale	\mathbb{N}^*	ensemble des entiers naturels non nuls
ρ	densité du fluide	R	rayon de S
ρ_s	masse volumique du solide	$\partial / \partial n$	dérivée normale
ρ, φ, z	coordonnées cylindriques	∇	opérateur gradient
σ	potentiel de simple couche	[]	matrice
τ	distribution de sources	{ }	vecteur
ϕ_j	fonctions solutions de l'équation des ondes	indice e	valeur nodale éléments finis
Φ	solution du problème intérieur de Dirichlet homogène	surligne	conjugué
ψ_m^l	ondes sphériques divergentes	indice t	transposée
$\tilde{\psi}_m^l$	ondes sphériques régulières à l'origine		
ω	pulsation		
Ω^e	éléments finis volumiques		
Ω_{ext}	volume extérieur		

En symétrie axiale, les fonction m^l et p^q passe en m et p .

Les symboles spécifiques aux annexes sont précisés lors de leurs emplois.

LÉGENDES DES FIGURES ET TABLEAUX

Figure 1.1. Présentation du problème considéré.	p. 23
Figure 1.2. Représentation du domaine acoustique du problème intérieur.	p. 32
Figure 1.3. Structure bafflée.	p. 33
Figure 1.4. Maillage éléments finis du problème de diffusion acoustique.	p. 41
Figure 1.5. Domaine de décomposition des équations de champ nul.	p. 59
Figure 1.6. Domaine de décomposition de la matrice de transition.	p. 61
Figure 2.1. Éléments finis de surface formant un maillage.	p. 69
Figure 2.2. Éléments quadrilatères.	p. 71
Figure 2.3. Éléments triangulaires.	p. 72
Figure 2.4. Découpage d'un quadrangle en deux ou trois parties.	p. 79
Figure 2.5. Découpage d'un triangle en deux parties.	p. 79
Figure 2.6. Visualisation d'un problème à symétrie axiale.	p. 91
Figure 2.7. Domaine de décomposition des équations de champ nul en symétrie axiale.	p. 98
Figure 3.1. Visualisation de la quantité factorisée.	p. 118
Figure 3.2. Problème de duplicité des normales à la surface.	p. 119
Figure 3.3. Procédure d'interpolation linéaire en fréquence appliquée aux équations intégrales dans le cas tridimensionnel.	p. 121
Figure 3.4. Maillage de la sphère.	p. 122
Figure 3.5. Maillage du cylindre.	p. 123
Figure 3.6. Schéma de principe de la dichotomie inverse.	p. 133
Figure 3.7. Pression surfacique analytique et par interpolation fréquentielle de la sphère rigide. Incidence suivant les Z croissants.	p. 139
Figure 3.8. Maillage de la structure sous-marine.	p. 141
Figure 3.9. Diagramme de directivité monostatique rigide de la structure sous-marine.	p. 140
Figure 3.10.a. Le noeud de calcul r_m coïncide avec un des noeuds extrêmes de l'élément.	p. 144
Figure 3.10.b. Le noeud de calcul r_m coïncide avec le noeud milieu de l'élément, le domaine d'intégration est découpé en 2.	p. 145
Figure 3.11. Maillage de la sphère en symétrie axiale.	p. 147
Figure 3.12. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas de la sphère. Intégration semi-analytique.	p. 147
Figure 3.13. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas de la sphère. Intégration numérique.	p. 148
Figure 3.14. Maillage du cylindre en symétrie axiale.	p. 149
Figure 3.15. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas du cylindre. Intégration semi-analytique.	p. 149
Figure 3.16. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas du cylindre. Intégration numérique.	p. 150
Figure 3.17. Maillage du cône en symétrie axiale.	p. 151
Figure 3.18. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas du cône. Intégration semi-analytique.	p. 151
Figure 3.19. EQM en fonction de NINT1 pour différents NINT2 dans le cas du cône. Intégration numérique.	p. 152

Figure 3.20. Visualisation, par aplatissement de la circonférence de l'élément sur une longueur d'onde, des points de Gauss par rapport au maillage.....	p. 153
Figure 3.21. Notion de points r_λ sur les circonférences.	p. 153
Figure 3.22. Points de décomposition et zones d'influence correspondants au noeud r_{1j} de l'élément Γ_j	p. 156
Figure 3.23. Situation du problème de la sphère.	p. 159
Figure 3.24. EQM en fonction de la fréquence dans le cas de la sphère avec une source ponctuelle en O.....	p. 159
Figure 3.25. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas de la sphère avec une source ponctuelle en O.	p. 160
Figure 3.26. Situation du problème du petit cylindre.....	p. 160
Figure 3.27. EQM en fonction de la fréquence dans le cas du petit cylindre avec une source ponctuelle en O.....	p. 161
Figure 3.28. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas du petit cylindre avec une source ponctuelle en O.....	p. 161
Figure 3.29. Situation du problème du cylindre.....	p. 162
Figure 3.30. EQM en fonction de la fréquence dans le cas du cylindre avec une source ponctuelle en O.....	p. 162
Figure 3.31. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas du cylindre avec une source ponctuelle en O.....	p. 163
Figure 3.32. Situation du problème du cône.....	p. 163
Figure 3.33. EQM en fonction de la fréquence dans le cas du cône avec une source ponctuelle en O.....	p. 164
Figure 3.34. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas du cône avec une source ponctuelle en O.....	p. 164
Figure 3.35. Situation du problème de la structure LINE.....	p. 165
Figure 3.36. EQM en fonction de la fréquence dans le cas de la structure LINE avec une source ponctuelle décalée par rapport à O.	p. 166
Figure 3.37. Temps CPU cumulé en fonction de la fréquence dans le cas de la structure LINE avec une source ponctuelle décalée par rapport à O.....	p. 166
Figure 3.38. Pression surfacique. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.	p. 167
Figure 3.39. Pression dans le fluide à 10a. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.....	p. 168
Figure 3.40. Pression en champ lointain. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.....	p. 168
Figure 3.41. Pression en face arrière dans le fluide à 10a. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.	p. 169
Figure 3.42. Pression en face arrière en champ lointain. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.	p. 170
Figure 3.43. Pression surfacique. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à F/4 ($ka = 1,97$).	p. 171
Figure 3.44. Phase sur la surface. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à F/4 ($ka = 1,97$).	p. 171
Figure 3.45. Pression surfacique. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à F/2 ($ka = 3,93$).	p. 172
Figure 3.46. Phase sur la surface. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à F/2 ($ka = 3,93$).	p. 172
Figure 3.47. Pression surfacique. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à 3F/4 ($ka = 6,05$).	p. 173

Figure 3.48. Phase sur la surface. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $3F/4$ ($ka = 6,05$).	p. 173
Figure 3.49. Diagramme angulaire de la pression diffractée dans le fluide à $10a$. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/4$ ($ka = 1,97$).	p. 174
Figure 3.50. Diagramme angulaire de la pression diffractée dans le fluide à $10a$. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/2$ ($ka = 3,93$).	p. 174
Figure 3.51. Diagramme angulaire de la pression diffractée dans le fluide à $10a$. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $3F/4$ ($ka = 6,05$).	p. 175
Figure 3.52. Diagramme de directivité de la pression diffractée. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/4$ ($ka = 1,97$).	p. 175
Figure 3.53. Diagramme de directivité de la pression diffractée. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $F/2$ ($ka = 3,93$).	p. 176
Figure 3.54. Diagramme de directivité de la pression diffractée. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants à $3F/4$ ($ka = 6,05$).	p. 176
Figure 4.1.a. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . M = 0. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.	p. 191
Figure 4.1.b. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . M = 3. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.	p. 192
Figure 4.1.c. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . M = 10. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.	p. 192
Figure 4.2.a. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à F. M = 0. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.	p. 193
Figure 4.2.b. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à F. M = 10. Cylindre 3D. Approximation quadratique de la pression.	p. 193
Figure 4.3. Maillage du parallélépipède.	p. 194
Figure 4.4.a. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . M = 0. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.	p. 194
Figure 4.4.b. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . M = 3. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.	p. 195
Figure 4.4.c. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à f_r . M = 10. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.	p. 195
Figure 4.5.a. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à F. M = 0. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.	p. 196
Figure 4.5.b. EQM en fonction de NINT1 et NINT2 à F. M = 10. Parallélépipède. Approximation quadratique de la pression.	p. 196
Figure 4.6. EQM en fonction de NINT1 de la sphère à F. Approximation quadratique de la pression.	p. 198
Figure 4.7. EQM en fonction de NINT1 de la sphère à F. Pression décomposée en série de Fourier.	p. 198
Figure 4.8. EQM en fonction de NINT1 du petit cylindre à F. Approximation quadratique de la pression.	p. 199
Figure 4.9. EQM en fonction de NINT1 du petit cylindre à F. Pression décomposée en série de Fourier.	p. 199
Figure 4.10. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Cylindre à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.	p. 200
Figure 4.11. EQM en fonction de NINT1 et M à F_r . Cylindre à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.	p. 201
Figure 4.12. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Cône à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.	p. 201

Figure 4.13. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Cône à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.	p. 202
Figure 4.14. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Sphère à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.	p. 202
Figure 4.15. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Sphère à symétrie axiale. Pression décomposée en série de Fourier.	p. 203
Figure 4.16. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Cylindre à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.	p. 203
Figure 4.17. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Cylindre à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.	p. 204
Figure 4.18. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Cône à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.	p. 204
Figure 4.19. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Cône à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.	p. 205
Figure 4.20. EQM en fonction de NINT1 et M à f_r . Sphère à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.	p. 205
Figure 4.21. EQM en fonction de NINT1 et M à F. Sphère à symétrie axiale. Approximation quadratique de la pression.	p. 206
Figure 4.22. Maillage du cube.	p. 210
Figure 4.23. Pression sur la surface de la sphère rigide à f_{01} . Incidence suivant les Z croissants.	p. 211
Figure 4.24. Pression à 10a de l'origine de la sphère rigide à f_{01} . Incidence suivant les Z croissants.	p. 211
Figure 4.25. Pression en champ lointain de la sphère rigide à f_{01} . Incidence suivant les Z croissants.	p. 212
Figure 4.26. Diagramme de directivité de la sphère rigide à f_{01} . Incidence suivant les Z croissants.	p. 212
Figure 4.27. Partie génératrice et partie associée pour 1 plan de symétrie.	p. 219
Figure 4.28. Prise en compte des symétries de géométrie.	p. 223
Figure 4.29. Maillage du demi-parallélépipède.	p. 226
Figure 4.30. Maillage du quart de parallélépipède.	p. 226
Figure 4.31. Maillage du huitième de parallélépipède.	p. 226
Figure 4.32. Pression à f_{01} de la sphère rigide à 10a dans le plan XOZ. Incidence suivant les X positifs.	p. 228
Figure 4.33. Illustration de la technique des origines multiples.	p. 231
Figure 4.34. Illustration de la technique des noeuds proches.	p. 233
Figure 4.35. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{113}	p. 235
Figure 4.36. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{113}	p. 235
Figure 4.37. Influence de la position de l'origines de calcul par rapport aux surfaces nodales du parallélépipède à f_{121}	p. 236
Figure 4.38. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{121}	p. 238
Figure 4.39. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{121}	p. 238
Figure 4.40. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{122}	p. 239
Figure 4.41. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le parallélépipède à f_{122}	p. 240

Figure 4.42. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le cylindre à f_{101} .	p. 241
Figure 4.43. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le cylindre à f_{101} .	p. 241
Figure 4.44. EQM en fonction du nombre d'origines de calcul pour le cylindre axisymétrique à f_{301} .	p. 242
Figure 4.45. Temps CPU en fonction du nombre d'origines de calcul pour le cylindre axisymétrique à f_{301} .	p. 243
Figure 4.46. Structure composée.	p. 244
Figure 4.47. Maillage de l'antenne.	p. 245
Figure 4.48. Résistance mutuelle des deux transducteurs sphériques.	p. 246
Figure 4.49. Réactance mutuelle des deux transducteurs sphériques.	p. 246
Figure 4.50. Masse ajoutée mutuelle des deux transducteurs sphériques.	p. 247
Figure 5.1. Directivité monostatique à f_{ip} . Structure sous-marine.	p. 256
Figure 5.2. Directivité monostatique à f_{ip} . Structure sous-marine.	p. 256
Figure 5.3. Directivité monostatique à f_{ip} . Structure sous-marine.	p. 256
Figure 5.4. EQM de la structure LINE. Source ponctuelle décalée par rapport à O.	p. 257
Figure 5.5. Évolution du diagramme de directivité dans le plan XOZ. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants. Option c1. TSmax = 10 dB pour $\theta = 0^\circ$.	p. 258
Figure 5.6. Évolution du diagramme de directivité dans le plan XOZ. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants. Option désactivation. TSmax = 7,62 dB pour $\theta = 0^\circ$.	p. 259
Figure 5.7. Situation du problème de diffusion à symétrie axiale de la structure LINE	p. 264
Figure 5.8. Décomposition du problème pour une incidence d'amplitude 1 μ Pa.	p. 265
Figure 5.9. EQM par chargement symétrique et antisymétrique. Structure LINE.	p. 265
Figure 5.10. Comparaison de la pression rétrodiffusée. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants.	p. 266
Figure 5.11. Diagramme de directivité dans le plan XOZ. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants. fréquence de l'option numérique : $ka = 12,48$.	p. 267
Figure 5.12. Diagramme angulaire en champ lointain dans le plan XOZ. Structure LINE. Incidence suivant les Z croissants. Fréquence de l'étude expérimentale : $ka = 20,00$. Fréquence de l'option numérique : $ka = 20,05$.	p. 268
Figure A11.1. Repère cartésien orthonormé.	p. 297
Figure A11.2. Repère cylindrique.	p. 298
Figure A11.3. Repère sphérique.	p. 298
Figure A13.1. Domaine extérieur V.	p. 304
Figure A13.2. Problème surfacique associé.	p. 307
Figure A13.3. Domaine intérieur V.	p. 309
Figure A16.1. Domaine d'application des équations de champ nul.	p. 318
Figure A23.1. Direction de l'onde incidente en symétrie axiale.	p. 330
Figure A31.1. Nouvelle dimension apparaissant dans les matrices.	p. 331

Tableau 3.1. Test de la source ponctuelle sur la sphère en calcul classique.....	p. 124
Tableau 3.2. Test de la source ponctuelle sur le cylindre en calcul classique.	p. 125
Tableau 3.3. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation entre 200 et 500 Hz.....	p. 127
Tableau 3.4. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation entre 500 et 800 Hz.....	p. 128
Tableau 3.5. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation entre 200 et 800 Hz.....	p. 129
Tableau 3.6. Test de la source ponctuelle sur le cylindre par interpolation entre 100 et 200 Hz.....	p. 130
Tableau 3.7. Test de la source ponctuelle sur le cylindre par interpolation entre 200 et 300 Hz.....	p. 131
Tableau 3.8. Test de la source ponctuelle sur le cylindre par interpolation entre 100 et 300 Hz.....	p. 132
Tableau 3.9. Dichotomie inverse pour la sphère.....	p. 134
Tableau 3.10. Dichotomie inverse pour le cylindre.	p. 134
Tableau 3.11. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation entre 0 et F.	p. 136
Tableau 3.12. Test de la source ponctuelle sur le cylindre par interpolation entre 0 et F.	p. 137
Tableau 3.13. Dichotomie inverse pour la sphère avec $D_{m\ ij} = 0$	p. 137
Tableau 3.14. Dichotomie inverse pour le cylindre avec $D_{m\ ij} = 0$	p. 138
Tableau 3.15. Test de la source ponctuelle à $F/2$ ($kL = 15$) sur la structure sous-marine.....	p. 139
Tableau 3.16. Test de la source ponctuelle sur la sphère par interpolation en faisant varier l'intervalle entre les points de décomposition.....	p. 157
Tableau 3.17. EQM à f_{01} pour la sphère en symétrie axiale à différentes fréquences de recouvrement décalées.....	p. 177
Tableau 4.1. EQM et temps CPU de la sphère à f_{01}	p. 207
Tableau 4.2. EQM et temps CPU du cylindre à f_{101}	p. 208
Tableau 4.3. EQM et temps CPU du parallélépipède.....	p. 209
Tableau 4.4. EQM et temps CPU du cube à f_{111}	p. 209
Tableau 4.5. EQM et temps CPU de la sphère à f_{01}	p. 214
Tableau 4.6. EQM et temps CPU du cylindre à f_{101}	p. 215
Tableau 4.7. EQM et temps CPU du cylindre à f_{301}	p. 215
Tableau 4.8. EQM et temps CPU du cylindre à f_{102}	p. 216
Tableau 4.9. EQM et temps CPU du cylindre à f_{501}	p. 217
Tableau 4.10. EQM et temps CPU du cône à f_r	p. 217
Tableau 4.11. EQM et temps CPU pour le parallélépipède à f_{111}	p. 225
Tableau 4.12. EQM et temps CPU pour le parallélépipède à f_{113}	p. 225
Tableau 4.13. EQM et temps CPU pour le parallélépipède à f_{114}	p. 227
Tableau 4.14. Temps CPU pour la sphère à f_{01}	p. 228
Tableau 4.15. Influence de M et de la position des origines de calcul par rapport aux surfaces nodales du parallélépipède à f_{121}	p. 237

Annexe A11 Systèmes de coordonnées

Dans cette annexe, les différents systèmes de coordonnées utilisés dans ce document servant à décrire l'espace tridimensionnel sont énoncés [2].

Repère cartésien orthonormé.

Les coordonnées par rapport à son origine sont déterminées par les axes OX, OY et OZ (cf. figure A11.1). Un point M est repéré par ses coordonnées (x,y,z).

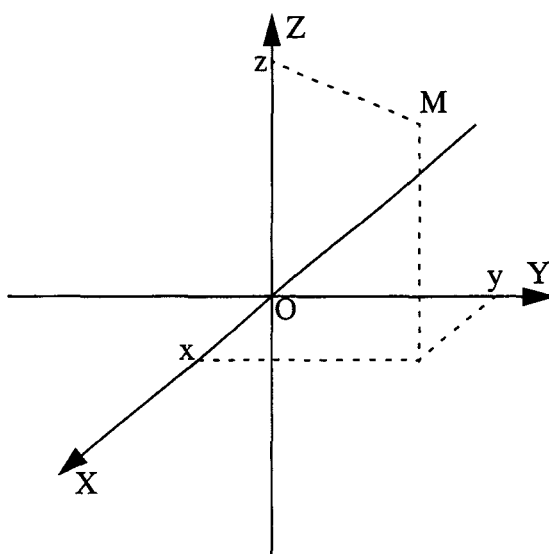


Figure A11.1. Repère cartésien orthonormé.

Repère cylindrique.

Le point M est positionné par ses coordonnées cylindriques (ρ, φ, z), ρ étant la distance à l'axe OZ dans le plan parallèle à XOY et φ l'angle azimuthal à partir de l'axe OX (cf. figure A11.2). Des relations existent avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (\text{A11.1})$$

Repère sphérique.

Le point M est déterminé par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ), r étant la distance radiale à l'origine O du repère, θ l'angle d'inclinaison à partir de l'axe OZ et φ l'angle azimuthal à partir de l'axe OX (cf. figure A11.3). Des relations permettent le passage au coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A11.2})$$

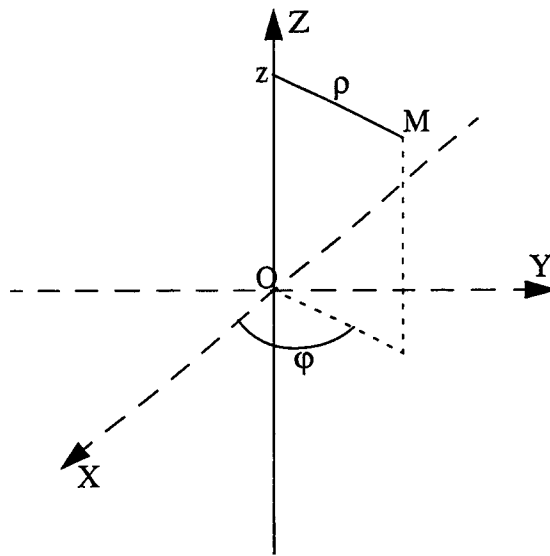


Figure A11.2. Repère cylindrique ($0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$).

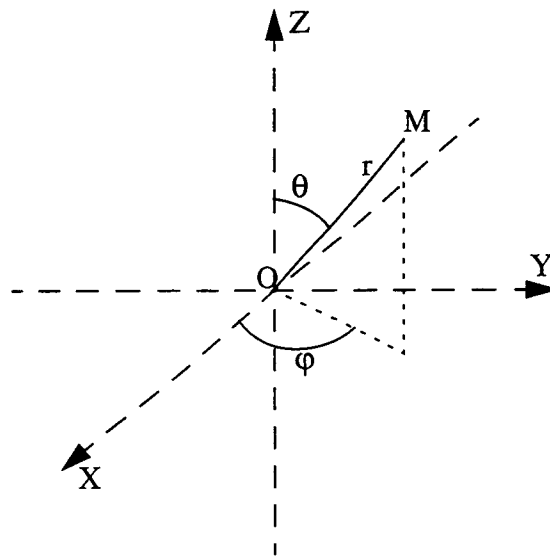


Figure A11.3. Repère sphérique ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$).

Annexe A12 Obtention de l'équation de Helmholtz

Les calculs menant à l'équation de Helmholtz sont ici brièvement donnés, à partir de la théorie de la Mécanique des Fluides [39-41].

Toutes les grandeurs physiques sont fonctions de la position du point \underline{r} et du temps t . L'équation des ondes s'obtient à partir des équations de conservation, d'état du fluide et de la linéarisation au premier ordre de toutes les variables du problème.

On suppose un milieu fluide Ω_{fl} de frontière Γ , idéal (non visqueux), barotrope, irrotationnel, de vitesse d'écoulement nulle et de dépendance temporelle harmonique des variables en $e^{-i\omega t}$. Les grandeurs indicées par 0 correspondent à l'état de repos.

Conservation de la masse.

À un instant donné, la masse du domaine fluide est :

$$\iiint_{\Omega_{fl}} \rho dV \quad (A12.1)$$

où dV est l'élément de volume et ρ la masse volumique du fluide.

Avec q , exprimé par unité de temps, caractérisant une source de débit contenue dans le fluide, le principe de conservation de la masse s'exprime par :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_{fl}} \rho dV = \iiint_{\Omega_{fl}} \rho q dV \quad (A12.2)$$

Le premier membre de l'équation ci-dessus s'exprime par la dérivée matérielle d'une intégrale de volume, pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega_{fl}} \rho dV + \iint_{\Gamma} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\Omega_{fl}} \rho q dV \quad (A12.3)$$

\underline{n} étant la normale à Γ orientée positivement vers le fluide et \underline{v} le champ des vitesses.

Par le premier théorème de Green, Ω_{fl} étant quelconque, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = \rho q \quad \text{dans } \Omega_{fl} \quad (A12.4)$$

Conservation de la quantité de mouvement.

La quantité de mouvement s'écrit :



$$\iiint_{\Omega_f} \underline{v} \rho dV \quad (\text{A12.5})$$

\underline{F} est le champ des forces volumiques et \underline{T} celui des forces de contact sur Γ .

La conservation de la quantité de mouvement signifie qu'à chaque instant le torseur dérivée matérielle de la quantité de mouvement d'un domaine est équivalent au torseur des forces extérieures qui s'appliquent à ce domaine :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_f} \underline{v} \rho dV = \iiint_{\Omega_f} \underline{F} \rho dV + \iint_{\Gamma} \underline{T} dS \quad (\text{A12.6})$$

p est la pression.

Le fluide est idéal ($\underline{T} = -p\underline{n}$). En écrivant :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_f} \underline{v} \rho dV = \iiint_{\Omega_f} \frac{d}{dt}(\underline{v}) \rho dV \quad (\text{A12.7})$$

et

$$\iint_{\Gamma} p \underline{n} dS = \iiint_{\Omega_f} \text{grad}(p) dV \quad (\text{A12.8})$$

on obtient l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{d}{dt}(\underline{v}) + \text{grad}(p) = \rho \underline{F} \quad (\text{A12.9})$$

Par l'expression de Helmholtz :

$$\frac{d}{dt}(\underline{v}) = \frac{\partial}{\partial t}(\underline{v}) + \text{rot}(\underline{v}) \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v}^2) \quad (\text{A12.10})$$

on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t}(\underline{v}) + \text{rot}(\underline{v}) \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v}^2) \right) + \text{grad}(p) = \rho \underline{F} \quad (\text{A12.11})$$

Le fluide étant irrotationnel, cette dernière se simplifie :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t}(\underline{v}) + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v}^2) \right) + \text{grad}(p) = \rho \underline{F} \quad (\text{A12.12})$$

Équation d'état.

Le fluide étant barotrope, l'équation d'état s'écrit (relation pression-masse volumique) :

$$p = p_0 + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 (\rho - \rho_0) \quad (\text{A12.13})$$

La vitesse du son est définie par :

$$c_0 = \left(\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\right)_0 \quad (\text{A12.14})$$

L'équation d'état s'écrit donc :

$$p = p_0 + c_0^2 (\rho - \rho_0) \quad (\text{A12.15})$$

Linéarisation.

Les grandeurs surmontées d'un prime correspondent aux variations du premier ordre. La vitesse d'écoulement étant nulle, la linéarisation des grandeurs physiques du problème jusqu'au premier ordre s'écrit :

$$\begin{cases} p = p_0 + \varepsilon p' \\ \rho = \rho_0 + \varepsilon \rho' \\ \underline{v} = \varepsilon \underline{v}' \\ \underline{F} = \underline{F}_0 + \varepsilon \underline{F}' \\ q = q_0 + \varepsilon q' \end{cases} \quad (\text{A12.16})$$

On linéarise ainsi les équations (A12.4), (A12.12) et (A12.15) et on ne conserve que les termes de premier ordre. En considérant l'influence de $\underline{F}_0 \rho'$ et $q_0 \rho'$ négligeable, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho' + \rho_0 \text{div}(\underline{v}') = \rho_0 q' \quad (\text{A12.17})$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{v}' + \text{grad}(p') = \rho_0 \underline{F}' \quad (\text{A12.18})$$

$$p' = c_0^2 \rho' \quad (\text{A12.19})$$

On dérive (A12.17) par rapport au temps et on y injecte (A12.19). On applique l'opérateur divergence à (A12.18). La comparaison des deux expressions résultantes, en rappelant que la divergence du gradient est le laplacien (noté Δ), on obtient l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p' - \Delta p' = \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} q' - \text{div} \underline{F}' \right) \quad (\text{A12.20})$$

On note dans toute la suite du document la variation p' par p , que l'on désigne comme la pression par abus de langage et par souci de simplification de l'écriture. On note également c_0 par c et ρ_0 par ρ .

On définit le nombre d'onde, f étant la fréquence d'excitation et ω la vitesse angulaire :

$$k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} \quad (\text{A12.21})$$

Le champ des forces volumiques \underline{F} étant considéré nul, et en prenant en compte la dépendance temporelle des variables, on obtient l'équation de Helmholtz inhomogène, pour p dans le fluide :

$$\Delta p(\underline{r}) + k^2 p(\underline{r}) = i\omega\rho q(\underline{r}) \quad (\text{A12.22})$$

Dans le cas où la source de débit considérée dans le fluide est un apport du fluide de type source ponctuelle unitaire placée en \underline{r}_0 , on a [40] :

$$\Delta p(\underline{r}) + k^2 p(\underline{r}) = -\delta(\underline{r}, \underline{r}_0) \quad (\text{A12.23})$$

Annexe A13 Représentations intégrales de Helmholtz extérieure et intérieure

Dans cet appendice, la démarche qui conduit aux équations intégrales de Helmholtz est détaillée [11]. Il permet d'obtenir les différentes représentations intégrales de Helmholtz. Les calculs sont menés pour les problèmes de Helmholtz extérieur et intérieur.

Dans le premier cas, il s'agit d'appliquer le second théorème de Green aux fonctions p et de Green de l'espace libre dans le volume extérieur V de surface S en identifiant la fonction p et la fonction nulle dans Ω_{int} pour réduire la dimension du problème volumique à celle d'un problème surfacique.

Dans le second, le volume V de surface S n'est plus le même, c'est le volume intérieur, et la pression est identifiée nulle dans Ω_{ext} .

On raisonne dans le cas le plus général. C'est à dire que des sources peuvent être présentes dans le fluide. L'effet de la fonction source n'apparaît pas dans les conditions aux limites, il est donc exprimé dans le second membre de l'équation de Helmholtz. Pour le problème extérieur, ne précisant pas sa nature, on suppose que la source est suffisamment éloignée pour que l'onde incidente soit plane, ce qui signifie que l'espace est soumis à un champ p_{inc} généré par cette source et que l'introduction de la structure dans le milieu ne perturbe en rien les caractéristiques de cette source.

Représentation intégrale de Helmholtz extérieure.

Le domaine extérieur V de frontière S est défini tel que $V = \Omega_R \cup S_R \subset (\Omega_e \cup \Omega_{\text{int}})$ (cf. figure A13.1).

On écrit l'équation de Helmholtz inhomogène en un point \underline{r}' de V , Δ' étant le laplacien en ce point :

$$\Delta' p(\underline{r}') + k^2 p(\underline{r}') = -\delta(\underline{r}', \underline{r}_0) \quad \underline{r}' \in V \quad (\text{A13.1})$$

p satisfaisant également la condition de Sommerfeld :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \left(\frac{\partial}{\partial r} p(\underline{r}') - ikp(\underline{r}') \right) \right) = 0 \quad \text{et} \quad r \rightarrow \infty \quad p(\underline{r}) \sim \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{A13.2})$$

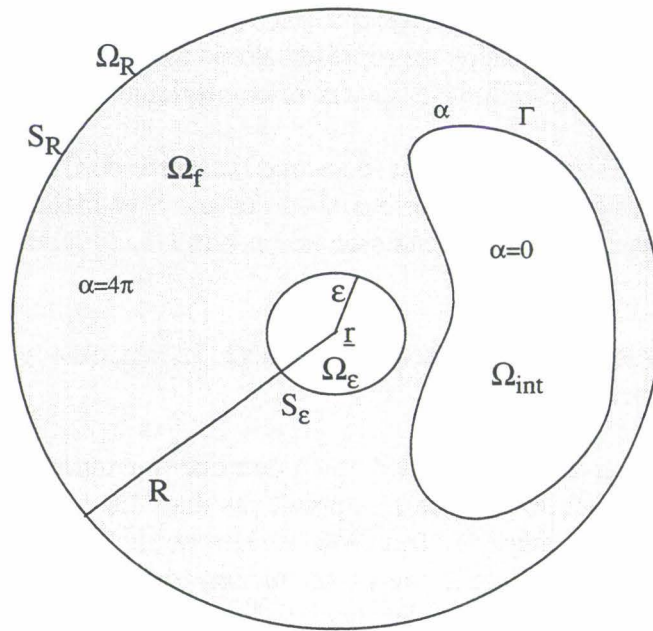


Figure A13.1. Domaine extérieur V.

L'équation associée, pour g, est :

$$\Delta'g(\underline{r}, \underline{r}') + k^2g(\underline{r}, \underline{r}') = -\delta(\underline{r}, \underline{r}') \quad \underline{r}' \in V \quad \underline{r} \in \Omega_\epsilon \quad (\text{A13.3})$$

On applique le second théorème de Green à $p(\underline{r}')$ et $g(\underline{r}, \underline{r}')$ sur le domaine V :

$$\iiint_V [p(\underline{r}')\Delta'g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}')\Delta'p(\underline{r}')]d\underline{r}' = \iint_S [p(\underline{r}')\frac{\partial}{\partial \underline{n}'}g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}')\frac{\partial}{\partial \underline{n}'}p(\underline{r}')]d\underline{r}' \quad (\text{A13.4})$$

L'intégrale de volume, avec les équations (A13.1) et (A13.3), se ramène à :

$$\iint_S [p(\underline{r}')\frac{\partial}{\partial \underline{n}'}g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}')\frac{\partial}{\partial \underline{n}'}p(\underline{r}')]d\underline{r}' = \iiint_V [\delta(\underline{r}', \underline{r}_0)g(\underline{r}, \underline{r}') - \delta(\underline{r}, \underline{r}')p(\underline{r}')]d\underline{r}' \quad (\text{A13.5})$$

La normale à la surface S est dirigée vers l'extérieur du volume V.

On calcule maintenant l'intégrale de volume. $\underline{r} \in \Omega_\epsilon$ donc $\underline{r} \notin V$ et ainsi :

$$\iiint_V \delta(\underline{r}, \underline{r}')p(\underline{r}')d\underline{r}' = 0 \quad (\text{A13.6})$$

L'autre partie de l'intégrale de volume s'écrit donc :

$$\iiint_V \delta(\underline{r}', \underline{r}_0)g(\underline{r}, \underline{r}')d\underline{r}' \quad (\text{A13.7})$$

La fonction de Dirac présente est nulle partout dans V sauf en \underline{r}_0 où elle est égale à l'unité. Ainsi, l'intégrale (A13.7) se réduit à la fonction de Green $g(\underline{r}, \underline{r}_0)$ qui s'écrit (éq. (1.16)) :

$$\iiint_V \delta(\underline{r}', \underline{r}_0) g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' = g(\underline{r}, \underline{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}_0|}}{|\underline{r}-\underline{r}_0|} \quad (\text{A13.8})$$

\underline{r}_0 étant placé loin de \underline{r} , l'expression (A13.8) a l'effet d'une onde plane de source \underline{r}_0 . L'intégrale (A13.7) représente donc l'effet d'une onde incidente plane et l'on note :

$$\iiint_V \delta(\underline{r}', \underline{r}_0) g(\underline{r}, \underline{r}') d\underline{r}' = p_{\text{inc}}(\underline{r}) \quad (\text{A13.9})$$

On obtient ainsi :

$$\iint_S \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' = p_{\text{inc}}(\underline{r}) \quad (\text{A13.10})$$

Or $S = S_R + S_\varepsilon + \Gamma$. Ainsi :

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' \\ &= \iint_{S_R} \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' \\ &+ \iint_{S_\varepsilon} \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' \\ &+ \iint_\Gamma \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (\text{A13.11})$$

En respectant le sens des normales, on obtient :

$$I_1 - I_2 - I_3 = p_{\text{inc}}(\underline{r}) \quad (\text{A13.12})$$

On sait que :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (\text{A13.13})$$

et que pour une sphère de centre \underline{r} :

$$\frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(ik - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \quad (\text{A13.14})$$

- Calcul de I_1 ($\mathbf{r}' \in S_R$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = R$, avec $R \rightarrow \infty$).

On a :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_R} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) p(\mathbf{r}') - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (\text{A13.15})$$

donc :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_R} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \left(ikp(\mathbf{r}') - \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right) - \frac{e^{ikR}}{R^2} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (\text{A13.16})$$

Or $R \rightarrow \infty$, avec la condition de Sommerfeld (A13.2), la dérivée normale sur la sphère S_R étant équivalente à la dérivée selon r , on a :

$$\frac{e^{ikR}}{R} \frac{1}{R} \left(ikp(\mathbf{r}') - \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right) \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty \quad (\text{A13.17})$$

$$\frac{e^{ikR}}{R^2} p(\mathbf{r}') \rightarrow \frac{e^{ikR}}{R^2} \frac{e^{ikR}}{R} \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty \quad (\text{A13.18})$$

Donc $I_1 = 0$.

- Calcul de I_2 ($\mathbf{r}' \in S_\varepsilon$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \varepsilon$, avec $\varepsilon \rightarrow 0$).

On a :

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_\varepsilon} \left[\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) p(\mathbf{r}') - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (\text{A13.19})$$

Ici, 3 cas se présentent, qui vont permettre de distinguer les 3 problèmes associés à la représentation intégrale de Helmholtz extérieure.

- Problème extérieur associé.

On a $\mathbf{r} \in \Omega_{\text{fl}} \rightarrow S_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^2$ et donc

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} \varepsilon \rightarrow 0 \\ (\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) \end{matrix} & I_2 \sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}) \right\} S_\varepsilon \\
& \sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}) \right\} 4\pi\varepsilon^2
\end{aligned} \tag{A13.20}$$

Or,

$$\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \rightarrow 1 \quad \varepsilon \rightarrow 0 \tag{A13.21}$$

ainsi :

$$I_2 \rightarrow -p(\mathbf{r}) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \tag{A13.22}$$

et on obtient :

$$p(\mathbf{r}) - \iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) \tag{A13.23}$$

- Problème surfacique associé.

On a $\mathbf{r} \in \Gamma \rightarrow S_\varepsilon = 2\pi\varepsilon^2$ lorsque Γ est droite (cf. figure A13.2).

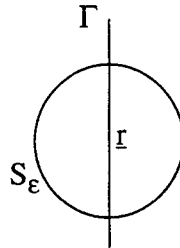


Figure A13.2. Problème surfacique associé.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} \varepsilon \rightarrow 0 \\ (\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) \end{matrix} & I_2 \sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}) \right\} S_\varepsilon \\
& \sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}) \right\} 2\pi\varepsilon^2
\end{aligned} \tag{A13.24}$$

Or,

$$\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \varepsilon^2 \rightarrow 0 \text{ et } \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \rightarrow 1 \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{A13.25})$$

donc :

$$I_2 \rightarrow -\frac{1}{2}p(\underline{r}) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{A13.26})$$

et on obtient :

$$\frac{1}{2}p(\underline{r}) - \iint_{\Gamma} \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' = p_{\text{inc}}(\underline{r}) \quad (\text{A13.27})$$

- Problème intérieur associé.

$p(\underline{r}) = 0$ dans Ω_{int} donc on obtient directement :

$$- \iint_{\Gamma} \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' = p_{\text{inc}}(\underline{r}) \quad (\text{A13.28})$$

Dans un esprit de simplification, on peut synthétiser la représentation intégrale de Helmholtz extérieure en une équation, en notant $\alpha(\underline{r})$ l'angle solide au point \underline{r} :

$$p_{\text{inc}}(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} \left[p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') - g(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') \right] d\underline{r}' = \begin{cases} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Omega_{\text{ext}} = \Omega_{\text{fl}} & (\text{A13.29}) \\ \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Gamma & (\text{A13.30}) \\ 0 & \underline{r} \in \Omega_{\text{int}} & (\text{A13.31}) \end{cases}$$

Si le point \underline{r} est un point de continuité de la tangente à la surface Γ (s'il existe une tangente plane unique en \underline{r}), alors $\alpha(\underline{r}) = 2\pi$, sinon, une formule permet le calcul de $\alpha(\underline{r})$ pour n'importe quel type de surface Γ [26] :

$$\alpha(\underline{r}) = 4\pi + \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right] d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{A13.32})$$

Dans le cas du rayonnement, $p_{\text{inc}}(\underline{r}') = 0$. Dans celui de la diffraction rigide, $\frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}') = 0$.

Représentation intégrale de Helmholtz intérieure.

Le domaine intérieur V de frontière S est défini tel que $V = \Omega_R \cup S_R \subset (\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{\text{ext}} + S_R)$ (cf. figure A13.3).

On écrit l'équation de Helmholtz inhomogène en un point \underline{r}' de V :

$$\Delta' p(\mathbf{r}') + k^2 p(\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \quad \mathbf{r}' \in V \quad (\text{A13.33})$$

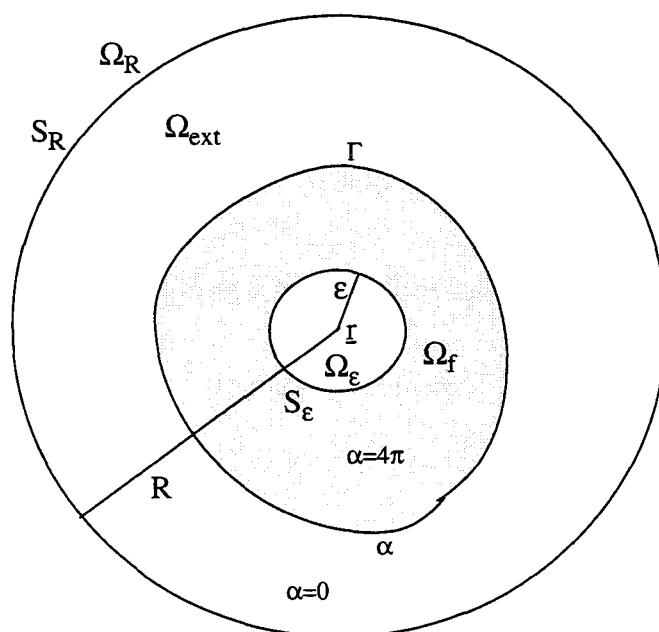


Figure A13.3. Domaine intérieur V.

L'équation associée pour g est :

$$\Delta' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad \mathbf{r}' \in V \quad \mathbf{r} \in \Omega_\epsilon \quad (\text{A13.34})$$

On applique donc le second théorème de Green à $p(\mathbf{r}')$ et $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sur le domaine V :

$$\iiint_V [p(\mathbf{r}') \Delta' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' p(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' = \iint_S \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (\text{A13.35})$$

L'intégrale de volume, avec les équations (A13.33) et (A13.34), se ramène à :

$$\iint_S \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \iiint_V [\delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') p(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \quad (\text{A13.36})$$

La normale à la surface S est dirigée vers l'extérieur du volume V.

On calcule maintenant l'intégrale de volume. $\mathbf{r} \in \Omega_\epsilon$ donc $\mathbf{r} \notin V$ et ainsi :

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0 \quad (\text{A13.37})$$

L'autre partie de l'intégrale de volume s'écrit donc :

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A13.38})$$

La fonction de Dirac présente est nulle partout dans V sauf en \mathbf{r}_0 où elle est égale à l'unité. Ainsi, l'intégrale (A13.38) se réduit à la fonction de Green $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ qui s'écrit (éq. (1.16)) :

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (\text{A13.39})$$

L'intégrale (A13.38) représente donc l'effet d'une source placée en \mathbf{r}_0 et l'on note :

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = s_{df}(\mathbf{r}) \quad (\text{A13.40})$$

On obtient ainsi :

$$\iint_S \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = s_{df}(\mathbf{r}) \quad (\text{A13.41})$$

Or $S = S_\varepsilon + \Gamma$ et donc :

$$\begin{aligned} \iint_S \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \\ = \iint_{S_\varepsilon} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \\ + \iint_\Gamma \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \\ = J_1 + J_2 \end{aligned} \quad (\text{A13.42})$$

En respectant le sens des normales, on obtient :

$$-J_1 + J_2 = s_{df}(\mathbf{r}) \quad (\text{A13.43})$$

Les équations (A13.13) et (A13.14) donnent la fonction de Green et sa dérivée normale.

- Calcul de J_1 ($\mathbf{r}' \in S_\varepsilon$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \varepsilon$, avec $\varepsilon \rightarrow 0$).

On a :

$$J_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} \left[\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) p(\mathbf{r}') - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (\text{A13.44})$$

Ici, 3 cas se présentent, qui vont permettre de distinguer les 3 problèmes associés à la représentation intégrale de Helmholtz intérieure.

- Problème intérieur associé.

On a $\mathbf{r} \in \Omega_{\text{fl}} \rightarrow S_{\varepsilon} = 4\pi\varepsilon^2$ et donc

$$\begin{aligned} \varepsilon \rightarrow 0 \\ (\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) \quad J_1 \sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} p(\mathbf{r}) \right\} S_{\varepsilon} \\ \sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} p(\mathbf{r}) \right\} 4\pi\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (\text{A13.45})$$

Or,

$$\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \rightarrow 1 \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{A13.46})$$

ainsi :

$$J_1 \rightarrow -p(\mathbf{r}) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{A13.47})$$

et on obtient :

$$p(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = s_{\text{df}}(\mathbf{r}) \quad (\text{A13.48})$$

- Problème surfacique associé.

On a $\mathbf{r} \in \Gamma \rightarrow S_{\varepsilon} = 2\pi\varepsilon^2$ lorsque Γ est droite. De la même façon que pour le problème extérieure, et dans le même esprit que ci-dessus, les calculs mènent à :

$$J_1 \rightarrow -\frac{1}{2}p(\mathbf{r}) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{A13.49})$$

et on obtient :

$$\frac{1}{2}p(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = s_{\text{df}}(\mathbf{r}) \quad (\text{A13.50})$$

- Problème extérieur associé.

$p(\mathbf{r}) = 0$ dans Ω_{ext} donc on obtient directement :

$$\iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = s_{df}(\mathbf{r}) \quad (\text{A13.51})$$

On synthétise la représentation intégrale de Helmholtz intérieure en une équation, en notant $\alpha_{int}(\mathbf{r})$ l'angle solide au point \mathbf{r} :

$$-s_{df}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \begin{cases} -p(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Omega_{int} = \Omega_{fl} & (\text{A13.52}) \\ -\frac{\alpha_{int}(\mathbf{r})}{4\pi} p(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Gamma & (\text{A13.53}) \\ 0 & \mathbf{r} \in \Omega_{ext} & (\text{A13.54}) \end{cases}$$

Si Γ est droite $\alpha_{int}(\mathbf{r}) = 2\pi$, sinon il est le complémentaire de l'équation (A13.32).

Dans les calculs de la représentation intégrale de Helmholtz intérieure, la condition de radiation de Sommerfeld n'a évidemment pas été utilisée.

Annexe A14 Facteur de directivité

Dans cette annexe, on obtient le facteur de directivité [70].

Les coefficients F_n dans le développement (1.23) sont récursivement déterminés en termes de facteur de champ lointain F_0 par la formule

$$2iknF_n = n(n-1)F_{n-1} + BF_{n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A14.1})$$

où B est l'opérateur de Beltrami sphérique :

$$B = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \quad (\text{A14.2})$$

La mise en évidence du facteur en champ lointain est obtenue à partir de (1.19) après un passage à la limite et une identification avec (1.25). Les deux intégrales de (1.19) sont :

$$A_1 = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A14.3})$$

$$B_1 = \iint_{\Gamma} p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (\text{A14.4})$$

On définit $\underline{\delta} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. On note r, r' et δ les rayon-vecteurs associés à \mathbf{r}, \mathbf{r}' et $\underline{\delta}$. Ils sont reliés par :

$$\delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \quad (\text{A14.5})$$

En champ lointain, $r \rightarrow \infty$, donc $r \gg r'$ et :

$$r \rightarrow \infty \quad \delta = \sqrt{r^2 \left(1 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)} \quad (\text{A14.6})$$

Le développement limité au premier ordre de $(1 - x)^{1/2}$ quand $x \rightarrow 0$ permet d'écrire :

$$r \rightarrow \infty \quad \delta = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \quad (\text{A14.7})$$

- calcul de A_1 .

$$A_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \frac{e^{ik\delta}}{\delta} d\mathbf{r}' \quad (\text{A14.8})$$

En plus de (A14.7), on a :

$$r \rightarrow \infty \quad \frac{1}{\delta} = \frac{1}{r} \quad (\text{A14.9})$$

Avec ces deux équations, on transforme A_1 :

$$r \rightarrow \infty \quad A_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') e^{-ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}} d\mathbf{r}' \quad (\text{A14.10})$$

- calcul de B_1 .

$$B_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{e^{ik\delta}}{\delta} \right) d\mathbf{r}' \quad (\text{A14.11})$$

On développe la dérivée normale :

$$\frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{e^{ik\delta}}{\delta} \right) = -\frac{e^{ik\delta}}{\delta} \left(ik - \frac{1}{\delta} \right) \frac{\delta \cdot \mathbf{n}'}{\delta} \quad (\text{A14.12})$$

À l'infini, on a les résultats suivants :

$$r \rightarrow \infty \quad \begin{cases} ik - \frac{1}{\delta} = ik \\ \delta \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}' \end{cases} \quad (\text{A14.13})$$

La prise en compte des relations (A14.7), (A14.9) et (A14.13) donne :

$$r \rightarrow \infty \quad B_1 = \frac{-ike^{ikr}}{4\pi} \frac{1}{r} \iint_{\Gamma} p(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}'}{r} e^{-ik \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}} d\mathbf{r}' \quad (\text{A14.14})$$

Les équations (A14.10) et (A14.14) donnent, à partir de (1.25), l'équation (1.26).

Annexe A15 Coefficients de décomposition de la pression incidente en champ nul

Au vu de l'équation (1.116) du paragraphe 1.7, on constate que dans le cas de la diffraction, il faut déterminer les coefficients c_m^1 servant à la décomposition de la pression incidente en ondes sphériques régulières à l'origine.

Afin de déterminer ces coefficients c_m^1 , on reprend l'équation (1.116). On compose chaque membre de cette équation par $Y_p^q(\theta, \varphi)$ et par $\sin\theta$ et on intègre \underline{r} sur la surface de S (cf. figure 1.5), en sachant que de l'équation (1.115) :

$$\tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}) = j_m(kR)\bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \quad \underline{r} \in S \quad (\text{A15.1})$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p_{\text{inc}}(\underline{r}) Y_p^q(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= ik \sum_{m=0}^{\infty} j_m(kR) \sum_{|| \leq m} c_m^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_p^q(\theta, \varphi) \bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad \underline{r} \in S \end{aligned} \quad (\text{A15.2})$$

Compte tenu des propriétés d'orthonormalité des harmoniques sphériques Y_p^q :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_p^q(\theta, \varphi) \bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{mp} \delta_{lq} \quad (\text{A15.3})$$

on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi p_{\text{inc}}(\underline{r}) Y_p^q(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = ik \sum_{m=0}^{\infty} j_m(kR) \sum_{|| \leq m} c_m^1 \delta_{mp} \delta_{lq} \quad \underline{r} \in S \quad (\text{A15.4})$$

et donc :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|| \leq m} c_m^1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|| \leq m} \frac{-i}{kj_m(kR)\delta_{mp}\delta_{lq}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p_{\text{inc}}(\underline{r}) Y_p^q(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad \underline{r} \in S \quad (\text{A15.5})$$

$\delta_{mp}\delta_{lq}$ permettant de remplacer Y_p^q par Y_m^1 , on obtient :

$$c_m^1 = \frac{-i}{kj_m(kR)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi p_{\text{inc}}(\underline{r}) Y_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad \underline{r} \in S \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ || \leq m \end{array} \quad (\text{A15.6})$$

Une telle relation sous-entend que la position de S soit fixée. Néanmoins, les quelques manipulations mathématiques suivantes suppriment totalement ce défaut.

Classiquement, la pression incidente p_{inc} est portée par une onde plane d'amplitude A dans une direction quelconque définie par les angles Θ_{inc} et Φ_{inc} :

$$p_{inc}(\underline{r})e^{-i\omega t} = Ae^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \quad (A15.7)$$

Sur la sphère S , $\underline{k} \cdot \underline{r}$ s'écrit de façon simplifiée :

$$\underline{k} \cdot \underline{r} = kRK(\theta, \varphi) \quad \underline{r} \in S \quad (A15.8)$$

où

$$K(\theta, \varphi) = \sin\theta \cos\varphi \sin\Theta_{inc} \cos\Phi_{inc} + \sin\theta \sin\varphi \sin\Theta_{inc} \sin\Phi_{inc} + \cos\theta \cos\Theta_{inc} \quad (A15.9)$$

donc

$$p_{inc}(\underline{r}) = Ae^{ikRK(\theta, \varphi)} \quad \underline{r} \in S \quad (A15.10)$$

On développe $e^{ikRK(\theta, \varphi)}$ en série de Taylor :

$$e^{ikRK(\theta, \varphi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikK(\theta, \varphi))^n}{n!} R^n \quad (A15.11)$$

ainsi

$$p_{inc}(\underline{r}) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikK(\theta, \varphi))^n}{n!} R^n \quad \underline{r} \in S \quad (A15.12)$$

De plus, on connaît une forme équivalente à $j_m(kR)$ quand R est petit [1] :

$$R \rightarrow 0 \quad j_m(kR) \sim \frac{k^m m! 2^m}{(2m+1)!} R^m \quad (A15.13)$$

Donc de l'équation (A15.6), en identifiant suivant les puissances de R on obtient maintenant :

$$c_m^{-1} = \frac{-i^{m+1} (2m+1)!}{k(m!)^2 2^m} A \int_0^{2\pi} \int_0^\pi K^m(\theta, \varphi) Y_m^{-1}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \quad \begin{matrix} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{matrix} \quad (A15.14)$$

Annexe A16 Obtention des équations de champ nul

Dans cette annexe, les calculs permettant l'obtention des équations de champ nul sont établis.

À partir du paragraphe 1.7, la transformation de (1.112) à l'aide de (1.113) et (1.116) donne :

$$4\pi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|| \leq m} c_m^1 \tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|| \leq m} \tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}) \iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} \Psi_m^1(\underline{r}') d\underline{r}'$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|| \leq m} \tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}) \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} p(\underline{r}') \Psi_m^1(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad \underline{r} \in S$$
(A16.1)

ainsi :

$$4\pi c_m^1 \tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}) + \tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}) \iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} \Psi_m^1(\underline{r}') d\underline{r}'$$

$$- \tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}) \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} p(\underline{r}') \Psi_m^1(\underline{r}') d\underline{r}' = 0 \quad \underline{r} \in S \quad \begin{matrix} m = 0, \dots, \infty \\ || \leq m \end{matrix}$$
(A16.2)

On compose cette dernière par $Y_p^q(\theta, \varphi)$ et par $\sin\theta$ et on intègre \underline{r} sur la surface de S (sur S : $r = R$ est constant, seuls θ et φ varient). Or, de l'équation (1.115), on a :

$$\tilde{\Psi}_m^1(\underline{r}) = j_m(kR) \bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \quad \underline{r} \in S$$
(A16.3)

et on obtient :

$$4\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_p^q(\theta, \varphi) \bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta c_m^1 d\theta d\varphi j_m(kR)$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_p^q(\theta, \varphi) \bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi j_m(kR) \iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} \Psi_m^1(\underline{r}') d\underline{r}'$$

$$- \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_p^q(\theta, \varphi) \bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi j_m(kR) \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \underline{n}'} p(\underline{r}') \Psi_m^1(\underline{r}') d\underline{r}' = 0$$

$$\underline{r} \in S \quad \begin{matrix} m = 0, \dots, \infty \\ || \leq m \end{matrix}$$
(A16.4)

Or d'après les conditions d'orthonormalité des harmoniques sphériques \bar{Y}_p^q :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_p^q(\theta, \varphi) \bar{Y}_m^1(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{mp} \delta_{lq}$$
(A16.5)

On obtient donc (cette méthode présente l'avantage de se débarrasser des fonctions qui s'anulent à l'intérieur (ondes sphériques convergentes)) :

$$\begin{aligned}
 &4\pi c_m^{-1} j_m(kR) + j_m(kR) \iint_{\Gamma} p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^{-1}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\
 &- j_m(kR) \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \psi_m^{-1}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0 \quad \mathbf{r}' \in S \quad \begin{matrix} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{A16.6}$$

En choisissant S telle que kR ne soit pas un zéro de j_m (sinon l'équation (A16.6) est triviale), on a :

$$4\pi c_m^{-1} + \iint_{\Gamma} p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^{-1}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \psi_m^{-1}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 0 \quad \begin{matrix} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{matrix} \tag{A16.7}$$

D'où l'obtention de l'équation (1.117).

Maintenant, on présente une autre méthode de calcul des équations de champ nul. Celle-ci repose sur l'application du second théorème de Green (éq. 1.20) dans $\Omega_{fl} = \Omega_{ext}$ aux fonctions d'ondes sphériques divergentes (éq. 1.114) $\psi_m^{-1}(\mathbf{r}')$ et $p(\mathbf{r}')$. Le domaine extérieur V de frontière S est défini tel que $V = \Omega_R \cup S_R \not\subset (\Omega_\epsilon \cup \Omega_{int})$ (cf. figure A16.1).

On écrit l'équation de Helmholtz inhomogène en un point \mathbf{r}' de V :

$$\Delta' p(\mathbf{r}') + k^2 p(\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \quad \mathbf{r}' \in V \tag{A16.8}$$

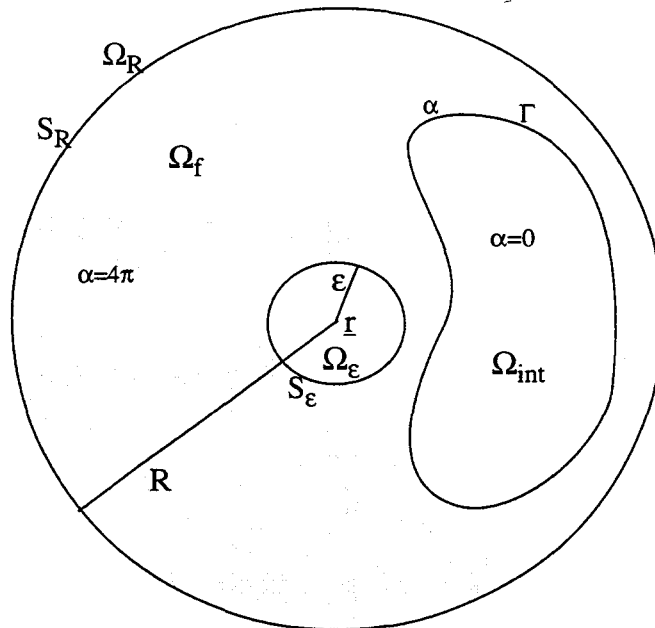


Figure A16.1. Domaine d'application des équations de champ nul.

L'équation de Helmholtz en $\psi_m^{-1}(\mathbf{r}')$ est :

$$\Delta' \psi_m^1(\mathbf{r}') + k^2 \psi_m^1(\mathbf{r}') = 0 \quad \mathbf{r}' \in V \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{array} \quad (\text{A16.9})$$

On applique le second théorème de Green à $p(\mathbf{r}')$ et $\psi_m^1(\mathbf{r}')$ sur le domaine V :

$$\iiint_V [p(\mathbf{r}') \Delta' \psi_m^1(\mathbf{r}') - \psi_m^1(\mathbf{r}') \Delta' p(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' = \iint_S \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\mathbf{r}') - \psi_m^1(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (\text{A16.10})$$

L'intégrale de volume, avec les équations (A15.8) et (A15.9), se ramène à :

$$\iint_S \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\mathbf{r}') - \psi_m^1(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = \iiint_V [\psi_m^1(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0)] d\mathbf{r}' \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{array} \quad (\text{A16.11})$$

La normale à la surface S est dirigée vers l'extérieur du volume V . Or $S = S_R + S_E + \Gamma$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\mathbf{r}') - \psi_m^1(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \\ &= \iint_{S_R} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\mathbf{r}') - \psi_m^1(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \\ &+ \iint_{S_E} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\mathbf{r}') - \psi_m^1(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \\ &+ \iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\mathbf{r}') - \psi_m^1(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \quad (\text{A16.12})$$

Or, en respectant le sens des normales, on obtient

$$I_1 - I_2 - I_3 = \iiint_V [\psi_m^1(\mathbf{r}') \nu(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{array} \quad (\text{A16.13})$$

On sait que

$$\begin{aligned} \psi_m^1(\mathbf{r}') &= h_m(kr') Y_m^1(\theta', \varphi') \\ &= [j_m(kr') + iy_m(kr')] (-1)^l \sqrt{\nu_{ml}} P_m^l(\cos \theta) e^{il\varphi} \end{aligned} \quad (\text{A16.14})$$

et que pour une sphère de centre \mathbf{r} sa dérivée normale a aussi pour facteur les fonctions de Hankel, fonctions qui tendent vers 0 lorsque leur argument tend vers l'infini [121].

- Calcul de I_1 ($\mathbf{r}' \in S_R$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R$, avec $R \rightarrow \infty$, donc $r' \rightarrow \infty$).

Tout comme dans l'annexe A13, avec l'aide de la condition de rayonnement de Sommerfeld, on obtient $I_1 = 0$.

- Calcul de I_2 ($\mathbf{r}' \in S_\varepsilon$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \varepsilon$, avec $\varepsilon \rightarrow 0$).

On choisit $\mathbf{r} \in \Omega_{\text{int}}$, ce qui est correct lorsque l'on parle de champ nul. $\mathbf{r} \in \Omega_{\text{int}} \rightarrow (S_\varepsilon = 0)$, et donc $I_2 = 0$.

Ainsi, on obtient :

$$\iint_{\Gamma} \left[p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \psi_m^1(\mathbf{r}') - \psi_m^1(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' = - \iiint_V [\psi_m^1(\mathbf{r}') v(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{array} \quad (\text{A16.15})$$

L'intégrale de volume représente l'effet dû à la pression incidente (l'équivalence aux coefficients c_m^1 de l'équation (1.117)). Pour un problème de rayonnement (c_m^1 nuls) on a :

$$\iint_{\Gamma} p(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \psi_m^1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \iint_{\Gamma} \psi_m^1(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, \infty \\ |l| \leq m \end{array} \quad (\text{A16.16})$$

On obtient donc bien l'équation (1.119).

Annexe A21 Obtention des fonctions d'ondes sphériques divergentes et de leurs dérivées normales

Dans cette annexe sont détaillés les calculs menant à l'obtention des fonctions d'ondes sphériques divergentes et de leurs dérivées normales qui servent à la description des fonctions à intégrer dans les équations de champ nul.

On rappelle les fonctions d'ondes sphériques divergentes (1.114) :

$$\psi_m^1(\underline{r}') = h_m(kr') Y_m^1(\theta', \varphi') \quad (\text{A21.1})$$

où r' , θ' et φ' sont les coordonnées sphériques de \underline{r}' , les fonctions de Hankel (1.109) :

$$h_m(kr') = j_m(kr') + iy_m(kr') \quad (\text{A21.2})$$

les harmoniques sphériques (1.110) :

$$Y_m^1(\theta', \varphi') = (-1)^l \sqrt{v_{ml}} P_m^1(\cos \theta') e^{il\varphi'} \quad (\text{A21.3})$$

Donc :

$$\psi_m^1(\underline{r}') = h_m(kr') (-1)^l \sqrt{v_{ml}} P_m^1(\cos \theta') e^{il\varphi'} \quad (\text{A21.4})$$

et :

$$\psi_m^1(\underline{r}') = (j_m(kr') + iy_m(kr')) (-1)^l \sqrt{v_{ml}} P_m^1(\cos \theta') e^{il\varphi'} \quad (\text{A21.5})$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\underline{r}') = (-1)^l \sqrt{v_{ml}} \frac{\partial}{\partial n'} (h_m(kr') P_m^1(\cos \theta') e^{il\varphi'}) \quad (\text{A21.6})$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial n'} \psi_m^1(\underline{r}') = (-1)^l \sqrt{v_{ml}} \left[\frac{\partial}{\partial n'} (h_m(kr')) P_m^1(\cos \theta') e^{il\varphi'} \right] \quad (\text{A21.7})$$

$$h_m(kr') \frac{\partial}{\partial n'} (P_m^1(\cos \theta')) e^{il\varphi'} + h_m(kr') P_m^1(\cos \theta') \frac{\partial}{\partial n'} (e^{il\varphi'}) \quad (\text{A21.8})$$

Le calcul de la dérivée normale de $\psi_m^1(\underline{r}')$ est fastidieux et nécessite le rappel des résultats suivants, concernant la dérivation des fonctions spéciales [121] :

$$\frac{d}{dz} (h_m(z)) = \frac{m}{z} h_m(z) - h_{m+1}(z) \quad (\text{A21.9})$$

$$\frac{d}{dz}(P_m^1(z)) = \frac{1}{1-z^2}[(m+1)zP_m^1(z) - (m-1+1)P_{m+1}^1(z)] \quad (\text{A21.10})$$

et la définition du gradient en coordonnées sphériques, appliqué à une fonction Υ :

$$\text{grad}\Upsilon = \frac{\partial\Upsilon}{\partial r}\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Upsilon}{\partial\theta}\underline{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Upsilon}{\partial\varphi}\underline{e}_\varphi \quad (\text{A21.11})$$

où \underline{e}_r , \underline{e}_θ et \underline{e}_φ sont les vecteurs orthogonaux de la base locale, obtenus en dérivant les coordonnées sphériques par, respectivement, r , θ et φ . En reprenant la formule (1.17), on a :

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}'}f(\mathbf{r}') = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'}(\text{grad}(f(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{n}') \quad (\text{A21.12})$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}'}(h_m(kr')) &= \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'}(\text{grad}(h_m(kr)) \cdot \mathbf{n}') \\ &= \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'}\left[\frac{\partial}{\partial r}h_m(kr)\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}h_m(kr)\underline{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}h_m(kr)\underline{e}_\varphi\right] \cdot \mathbf{n}' \\ &= \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'}\frac{\partial}{\partial r}h_m(kr)\underline{e}_r \cdot \mathbf{n}' \end{aligned} \quad (\text{A21.13})$$

On sait (éq. (A21.9)) que :

$$\frac{\partial}{\partial(kr)}(h_m(kr)) = \frac{m}{kr}h_m(kr) - h_{m+1}(kr) \quad (\text{A21.14})$$

or :

$$\frac{\partial}{\partial(kr)}(h_m(kr)) = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}(h_m(kr)) \quad (\text{A21.15})$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial r}(h_m(kr)) = k\frac{\partial}{\partial(kr)}(h_m(kr)) = k\left(\frac{m}{kr}h_m(kr) - h_{m+1}(kr)\right) \quad (\text{A21.16})$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}'}(h_m(kr')) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'}\left(\frac{m}{kr}h_m(kr) - h_{m+1}(kr)\right)k\underline{e}_r \cdot \mathbf{n}' \quad (\text{A21.17})$$

Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'}(h_m(kr')) = \left[\frac{m}{kr'} h_m(kr') - h_{m+1}(kr') \right] k \mathbf{e}_{r'} \cdot \mathbf{n}' \quad (\text{A21.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'}(P_m^1(\cos \theta')) &= \lim_{r \rightarrow r'} (\text{grad}(P_m^1(\cos \theta)) \cdot \mathbf{n}') \\ &= \lim_{r \rightarrow r'} \left[\frac{\partial}{\partial r} P_m^1(\cos \theta) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_m^1(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} P_m^1(\cos \theta) \mathbf{e}_\phi \right] \cdot \mathbf{n}' \\ &= \lim_{r \rightarrow r'} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} P_m^1(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{n}' \right) \end{aligned} \quad (\text{A21.19})$$

On sait (  q. (A21.10)) que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \cos \theta} P_m^1(\cos \theta) &= \\ &= \frac{1}{1 - \cos^2 \theta} [(m+1) \cos \theta P_m^1(\cos \theta) - (m-1+1) P_{m+1}^1(\cos \theta)] \end{aligned} \quad (\text{A21.20})$$

or comme $\frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta = -\sin \theta$ alors :

$$\frac{\partial}{\partial \cos \theta} P_m^1(\cos \theta) = \frac{1}{-\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} P_m^1(\cos \theta) \quad (\text{A21.21})$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_m^1(\cos \theta) = (-\sin \theta) \frac{\partial}{\partial \cos \theta} P_m^1(\cos \theta) \quad (\text{A21.22})$$

et comme $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ alors :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_m^1(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta} [(m-1+1) P_{m+1}^1(\cos \theta) - (m+1) \cos \theta P_m^1(\cos \theta)] \quad (\text{A21.23})$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'}(P_m^1(\cos \theta')) &= \lim_{r \rightarrow r'} [(m-1+1) P_{m+1}^1(\cos \theta) \\ &\quad - (m+1) \cos \theta P_m^1(\cos \theta)] \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{n}' \end{aligned} \quad (\text{A21.24})$$

Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'}(P_m^1(\cos \theta')) = [(m-1+1) P_{m+1}^1(\cos \theta') - (m+1) \cos \theta' P_m^1(\cos \theta')] \frac{1}{r' \sin \theta'} \mathbf{e}_{\theta'} \cdot \mathbf{n}' \quad (\text{A21.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'}(e^{il\varphi'}) &= \lim_{r \rightarrow r'} (\text{grad}(e^{il\varphi'}) \cdot \mathbf{n}') = \lim_{r \rightarrow r'} \left[\frac{\partial e^{il\varphi'}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial e^{il\varphi'}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial e^{il\varphi'}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \right] \cdot \mathbf{n}' \\ &= \lim_{r \rightarrow r'} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial e^{il\varphi'}}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{n}' \right) = \lim_{r \rightarrow r'} \left(\frac{il}{r \sin \theta} e^{il\varphi'} \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{n}' \right) \end{aligned} \quad (\text{A21.26})$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'}(e^{il\varphi'}) = \frac{il}{r' \sin \theta'} e^{il\varphi'} \mathbf{e}_{\varphi'} \cdot \mathbf{n}' \quad (\text{A21.27})$$

De l'annexe A11, on déduit les valeurs de \mathbf{e}_r' , \mathbf{e}_θ' et \mathbf{e}_φ' :

$$\begin{aligned} x' &= r' \sin \theta' \cos \varphi' & 0 \leq \theta' \leq \pi \\ y' &= r' \sin \theta' \sin \varphi' & 0 \leq \varphi' \leq 2\pi \\ z' &= r' \cos \theta' \end{aligned} \quad (\text{A21.28})$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r'} &\rightarrow \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta' \end{pmatrix} \rightarrow \|\ \ \| = 1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta'} &\rightarrow \begin{pmatrix} r' \cos \theta' \cos \varphi' \\ r' \cos \theta' \sin \varphi' \\ -r' \sin \theta' \end{pmatrix} \rightarrow \|\ \ \| = r' \\ \frac{\partial}{\partial \varphi'} &\rightarrow \begin{pmatrix} -r' \sin \theta' \sin \varphi' \\ r' \sin \theta' \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \|\ \ \| = r' \sin \theta' \end{aligned} \quad (\text{A21.29})$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r' &= \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta' \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_\theta' &= \begin{pmatrix} \cos \theta' \cos \varphi' \\ \cos \theta' \sin \varphi' \\ -\sin \theta' \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_\varphi' &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A21.30})$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \underline{n}'} \Psi_m^1(\underline{r}') &= (-1)^l \sqrt{\nu_{ml}} e^{il\varphi'} \left\{ \left[\frac{m}{kr'} h_m(kr') - h_{m+1}(kr') \right] \right. \\
&\quad \left. P_m^1(\cos \theta') k \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta' \end{pmatrix} \cdot \underline{n}' \right. \\
&+ h_m(kr') [(m-1+1)P_{m+1}^1(\cos \theta') - (m+1)\cos \theta' P_m^1(\cos \theta')] \\
&\quad \left. \frac{1}{r' \sin \theta'} \begin{pmatrix} \cos \theta' \cos \varphi' \\ \cos \theta' \sin \varphi' \\ -\sin \theta' \end{pmatrix} \cdot \underline{n}' \right. \\
&\quad \left. + il h_m(kr') P_m^1(\cos \theta') \frac{1}{r' \sin \theta'} \begin{pmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{n}' \right\}
\end{aligned} \tag{A21.31}$$

Annexe A22 Emploi d'intégrales elliptiques dans le calcul des intégrales singulières en symétrie axiale

Le calcul des intégrales singulières apparaissant lors du traitement de l'équation intégrale (1.20) en symétrie axiale utilise des intégrales elliptiques.

Les deux intégrales en question sont les équations (2.100) et (2.101) qui peuvent s'écrire :

$$I_{m \ ij} = I_{m \ ij}^1 + I_{m \ ij}^2 \quad (\text{A22.1})$$

$$B_{m \ ij} = J_{m \ ij}^1 + J_{m \ ij}^2 \quad (\text{A22.2})$$

avec :

$$I_{m \ ij}^1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{ikD_m} (ikD_m - 1) + 1}{D_m^3} (\mathbf{r}'(\xi, \varphi) - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (\text{A22.3})$$

$$I_{m \ ij}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{-1}{D_m^3} (\mathbf{r}'(\xi, \varphi) - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}' N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (\text{A22.4})$$

$$J_{m \ ij}^1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{ikD_m} - 1}{D_m} N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (\text{A22.5})$$

$$J_{m \ ij}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{D_m} N_i(\xi) d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) \quad (\text{A22.6})$$

Les intégrales $I_{m \ ij}^1$ et $J_{m \ ij}^1$ sont calculées par la quadrature de Gauss-Legendre (cf. § 2.2.1.2.1) après avoir effectué un changement de variables évident sur φ pour replacer la variation entre -1 et 1.

Les quantités apparaissant dans les intégrales $I_{m \ ij}^2$ et $J_{m \ ij}^2$ sont singulières et nécessitent un traitement spécial basé sur l'emploi d'intégrales elliptiques [75,121,144]. On peut modifier l'écriture de ces deux intégrales en divisant l'intervalle d'intégration suivant φ par 2, et on obtient, après y avoir injecté (2.86) :

$$I_{m \ ij}^2 = \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) Id\xi \quad (\text{A22.7})$$

$$J_{m \ ij}^2 = \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 N_i(\xi) x'(\xi, 0) R(\xi) Jd\xi \quad (\text{A22.8})$$

Les intégrales I et J peuvent être exprimées de la façon suivante :

$$I = \frac{2}{\sqrt{a-b}} \left[\frac{\lambda}{a-b} E\left(\frac{\pi}{2}, s\right) + \frac{a\mu}{b(a-b)} E\left(\frac{\pi}{2}, s\right) + \frac{\mu}{b} F\left(\frac{\pi}{2}, s\right) \right] \quad (\text{A22.9})$$

$$J = \frac{2}{\sqrt{a-b}} F\left(\frac{\pi}{2}, s\right) \quad (\text{A22.10})$$

où F et E sont les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce qui sont calculées par leur développement en série avec :

$$a = x^2 + x'^2(\xi, 0) + (z - z'(\xi))^2 \quad b = 2xx'(\xi, 0) \quad s = \sqrt{\frac{2b}{a+b}}$$

$$\lambda = \frac{1}{R(\xi)} \left[(z'(\xi) - z) \frac{d}{d\xi} x'(\xi, 0) - x'(\xi, 0) \frac{d}{d\xi} z'(\xi) \right] \quad \mu = \frac{1}{R(\xi)} x \frac{d}{d\xi} z'(\xi)$$

Ces manipulations permettent de transformer les intégrales $I_{m\ ij}^2$ et $J_{m\ ij}^2$ en intégrales simples qui sont calculées par la quadrature de Gauss-Legendre. Ce traitement a permis la suppression de l'intégration numérique en φ .

Annexe A23 Coefficients de décomposition de la pression incidente en ondes sphériques régulières à l'origine en champ nul en symétrie axiale

On reprend l'équation (2.130) afin de déterminer les coefficients. On compose chacun de ses membres par $Y_p(\theta)$ et par $\sin\theta$, puis on intègre \underline{r} sur la surface de S , en sachant que, d'après l'équation (2.129) :

$$\tilde{\Psi}_m(\underline{r}) = j_m(kR)\bar{Y}_m(\theta) \quad \underline{r} \in S \quad (\text{A23.1})$$

et enfin on tient compte des conditions d'orthonormalité des harmoniques sphériques Y_p (éq. (2.132)) pour obtenir :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi p_{\text{inc}}(\underline{r}) Y_p(\theta) \sin\theta d\theta d\varphi = ik \sum_{m=0}^{\infty} j_m(kR) c_m \delta_{mp} \quad \underline{r} \in S \quad (\text{A23.2})$$

Donc :

$$c_m = \frac{-i2\pi}{kj_m(kR)\delta_{mp_0}} \int_0^\pi p_{\text{inc}}(\underline{r}) Y_p(\theta) \sin\theta d\theta \quad \underline{r} \in S \quad (\text{A23.3})$$

$m = 0, \dots, \infty$

δ_{mp} permet de remplacer Y_p par Y_m et il vient :

$$c_m = \frac{-i2\pi}{kj_m(kR)} \int_0^\pi p_{\text{inc}}(\underline{r}) Y_m(\theta) \sin\theta d\theta \quad \underline{r} \in S \quad (\text{A23.4})$$

$m = 0, \dots, \infty$

Cette relation sous-entend que la position de S soit fixée. Les manipulations suivantes suppriment ce défaut.

En symétrie axiale, p_{inc} est portée par une onde plane d'amplitude A dans une direction définie par l'angle Θ_{inc} égale à + ou - 90° (cf. figure A23.1) :

$$p_{\text{inc}}(\underline{r}) e^{-i\omega t} = A e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \quad (\text{A23.5})$$

Sur la sphère S , $\underline{k} \cdot \underline{r}$ s'écrit de façon simplifiée :

$$\underline{k} \cdot \underline{r} = kR K(\theta) \quad \underline{r} \in S \quad (\text{A23.6})$$

où :

$$K(\theta) = \cos\theta \cos\Theta_{\text{inc}} \quad (\text{A23.7})$$

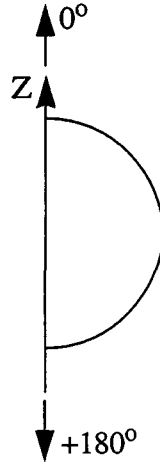


Figure A23.1. Direction de l'onde incidente en symétrie axiale.

On a donc :

$$P_{inc}(\underline{r}) = A e^{ikRK(\theta)} \quad \underline{r} \in S \quad (A23.8)$$

On développe $e^{ikRK(\theta)}$ en série de Taylor :

$$e^{ikRK(\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikK(\theta))^n}{n!} R^n \quad (A23.9)$$

donc :

$$P_{inc}(\underline{r}) = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikK(\theta))^n}{n!} R^n \quad \underline{r} \in S \quad (A23.10)$$

$j_m(kR)$, quand R est petit, est équivalent à l'expression (A15.13).

De l'équation (A23.4), en identifiant suivant les puissances de R , on obtient :

$$c_m = \frac{-i^{m+1} (2m+1)!}{k(m!)^2 2^m} A 2\pi \int_0^{\pi} K^m(\theta) Y_m(\theta) \sin\theta d\theta \quad (A23.11)$$

$$m = 0, \dots, \infty$$

Or $\Theta_i = +$ ou -90° , donc $\cos\Theta_i = +$ ou -1 et donc $K(\theta) = +$ ou $-\cos\theta$. On a ainsi, en introduisant les équations (2.126) :

$$c_m = \frac{-i^{m+1} (2m+1)!}{k(m!)^2 2^m} A 2\pi \sqrt{\frac{2m+1}{4\pi}} \int_0^{\pi} (\pm \cos\theta)^m P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (A23.12)$$

$$m = 0, \dots, \infty$$

Annexe A31 Traitement informatique de l'interpolation fréquentielle appliquée aux problèmes à symétrie axiale

La technique d'interpolation linéaire en fréquence est composée de trois phases :

- la première, de stockage à la fréquence borne inférieure f_1 ,
- la seconde, de stockage à la fréquence borne supérieure f_2 ,
- la troisième, d'interpolation à chaque fréquence de calcul f .

La particularité en symétrie axiale vient du fait de l'existence des points de décomposition r_λ (cf. § 3.3), qui entraînent de multiples étapes dans chacune de ces phases et un mode de stockage sur disque adapté : la troisième dimension de stockage dans les matrices (figure A31.1).

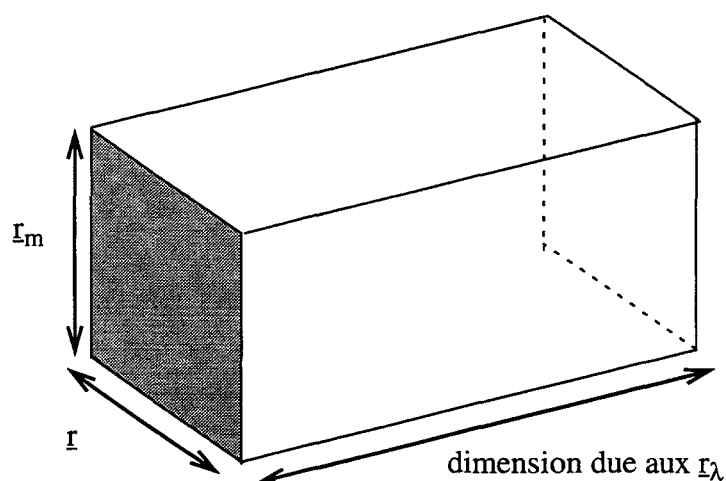


Figure A31.1. Nouvelle dimension apparaissant dans les matrices.

Cette nouvelle dimension ajoute au traitement informatique une grande quantité de boucles et de tests. Elle oblige à décomposer chaque phase en différentes sous-phases de la façon indiquée ci-dessous :

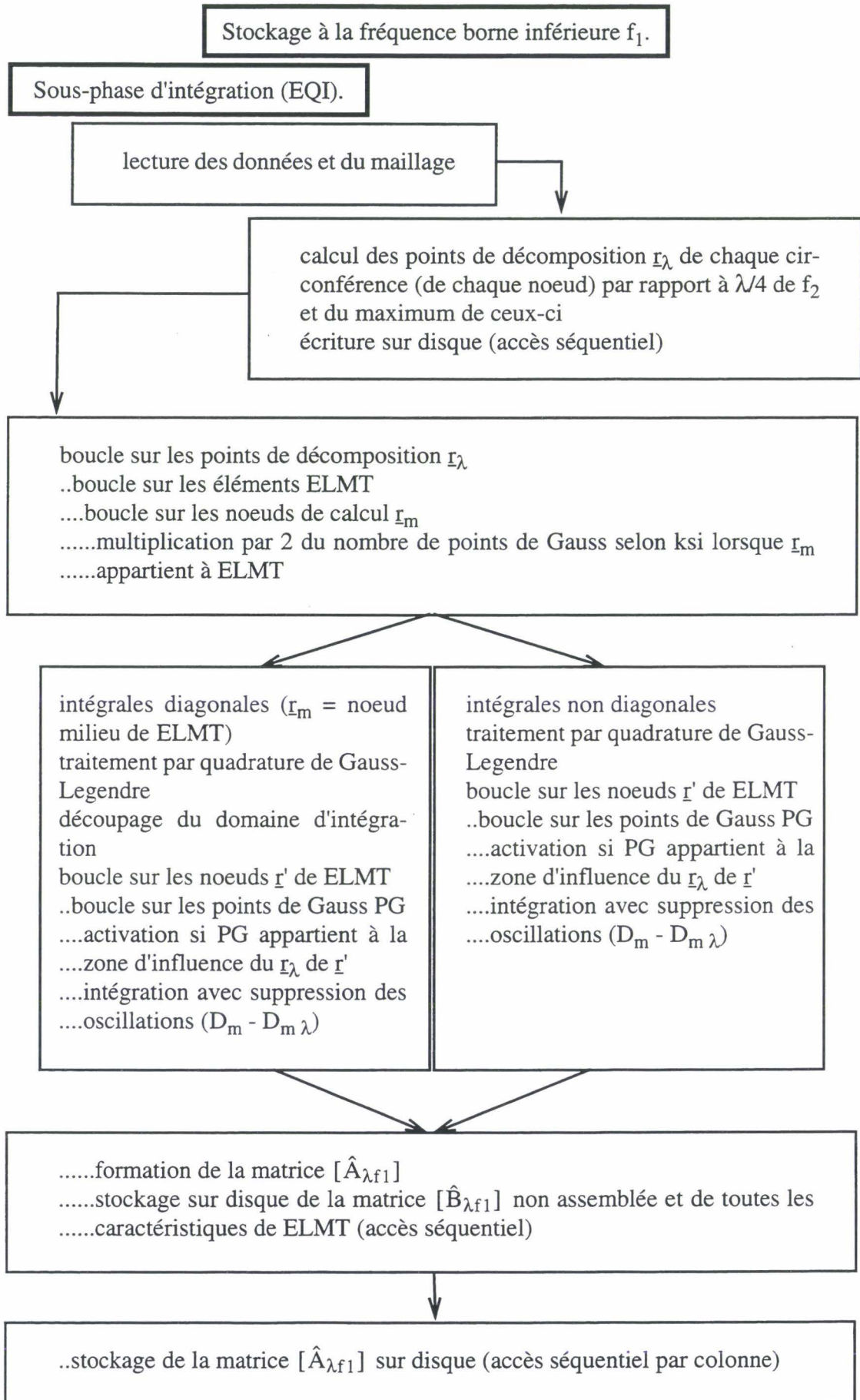
- les deux premières phases se décomposent suivant une sous-phase d'intégration (effectuée par une exécution du code EQI) et une sous-phase de décomposition de la matrice du second membre (effectuée par une exécution du code EQIAP),
- la troisième phase (exécutée par le code EQI un nombre de fois identique au nombre Nbf de fréquences de calcul f) est décomposée en une sous-phase d'interpolation et une autre de regroupement.

À la dernière fréquence de calcul f , en troisième phase, les espaces disques occupés sont libérés.

La globalité des calculs nécessite $(Nbf + 2)$ exécutions de EQI et 2 exécutions de EQIAP.

Les circonférences ne sont pas toutes identiques. Le nombre de points de décomposition sur chacune des demi-circonférences n'est donc pas toujours le même. Certains coefficients, selon la nouvelle dimension des matrices, peuvent donc être nuls.

Le traitement informatique détaillé de la technique présentée est donné à la suite (les angles solides, indépendants de la fréquence) ne sont pas décomposés à l'aide des r_λ :



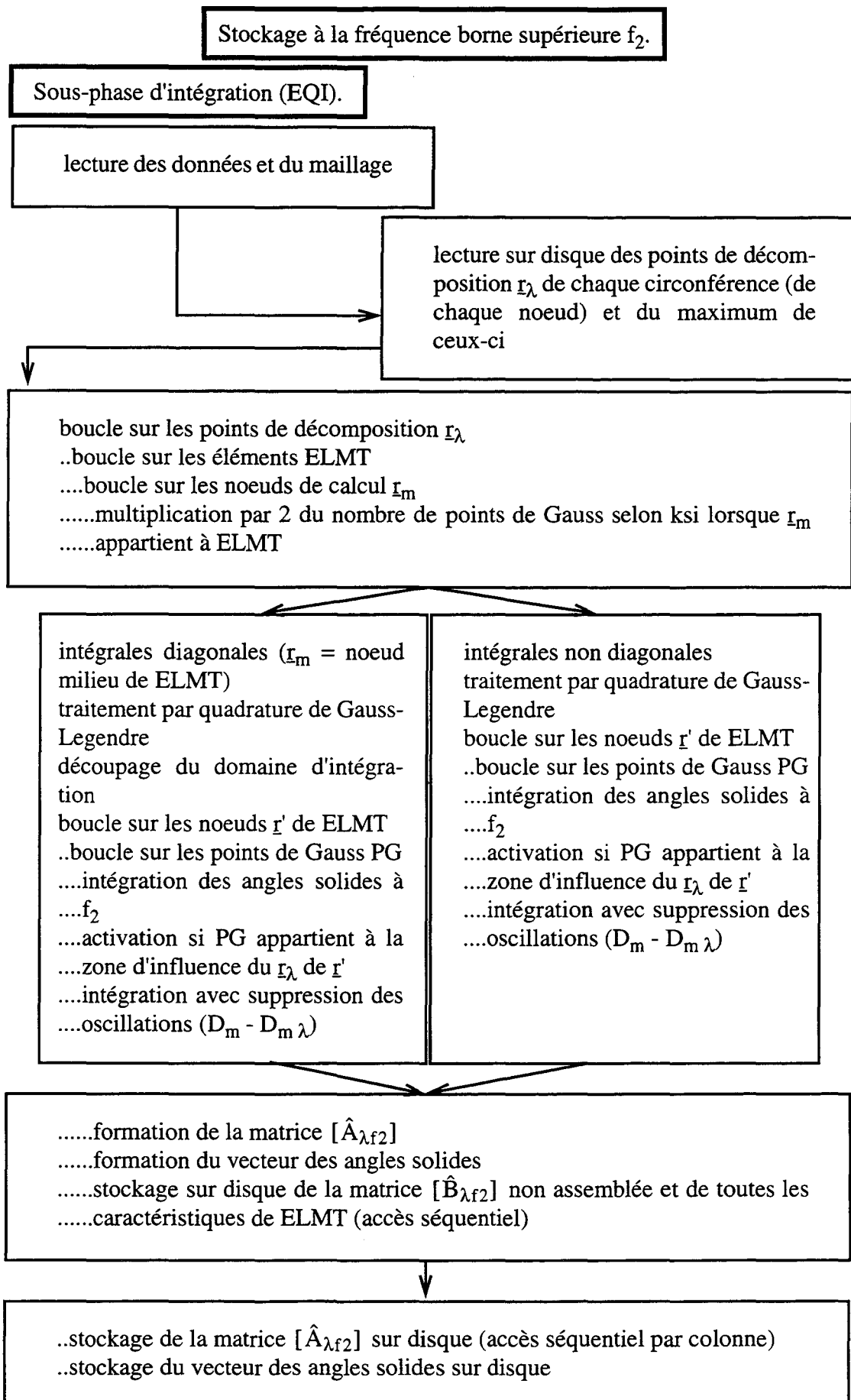
Sous-phase de décomposition (EQIAP).

lecture sur disque des points de décomposition r_λ de chaque circonférence (de chaque noeud) et du maximum de ceux-ci

boucle sur les points de décomposition r_λ
 ..boucle sur les éléments ELMT
lecture sur disque des caractéristiques de ELMT
boucle sur les noeuds de calcul r_m
lecture sur disque des coefficients de la matrice $[\hat{B}_{\lambda f1}]$ non assemblée
projection sur l'axe x et assemblage en mémoire de $[\hat{B}_{x\lambda f1}]$
 ..stockage de $[\hat{B}_{x\lambda f1}]$ sur disque (accès direct)

boucle sur les points de décomposition r_λ
 ..boucle sur les éléments ELMT
lecture sur disque des caractéristiques de ELMT
boucle sur les noeuds de calcul r_m
lecture sur disque des coefficients de la matrice $[\hat{B}_{\lambda f1}]$ non assemblée
projection sur l'axe Z et assemblage en mémoire de $[\hat{B}_{z\lambda f1}]$
 ..stockage de $[\hat{B}_{z\lambda f1}]$ sur disque (accès direct)

destruction de tous les fichiers $[\hat{B}_{\lambda f1}]$ sur disque



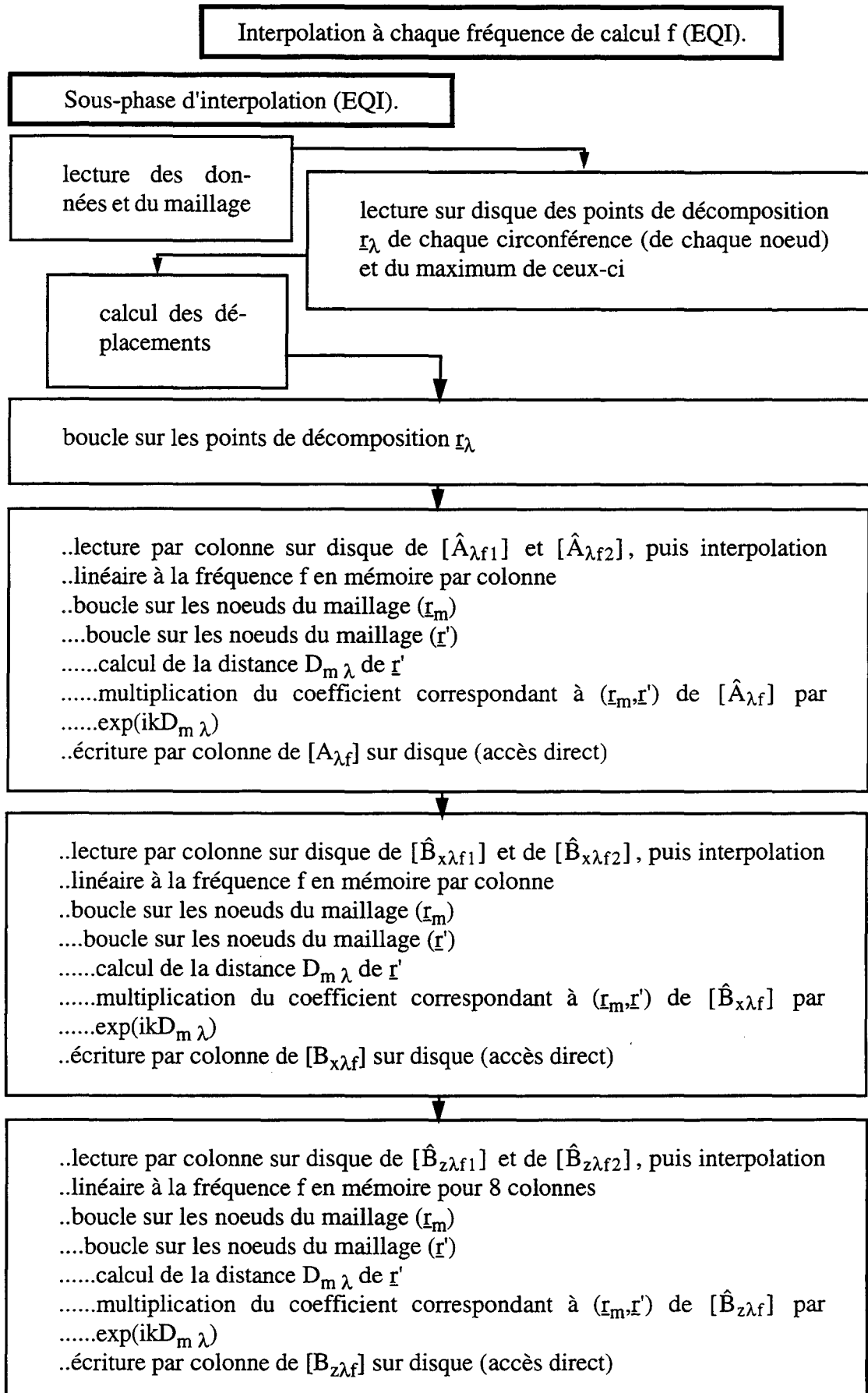
Sous-phase de décomposition (EQIAP).

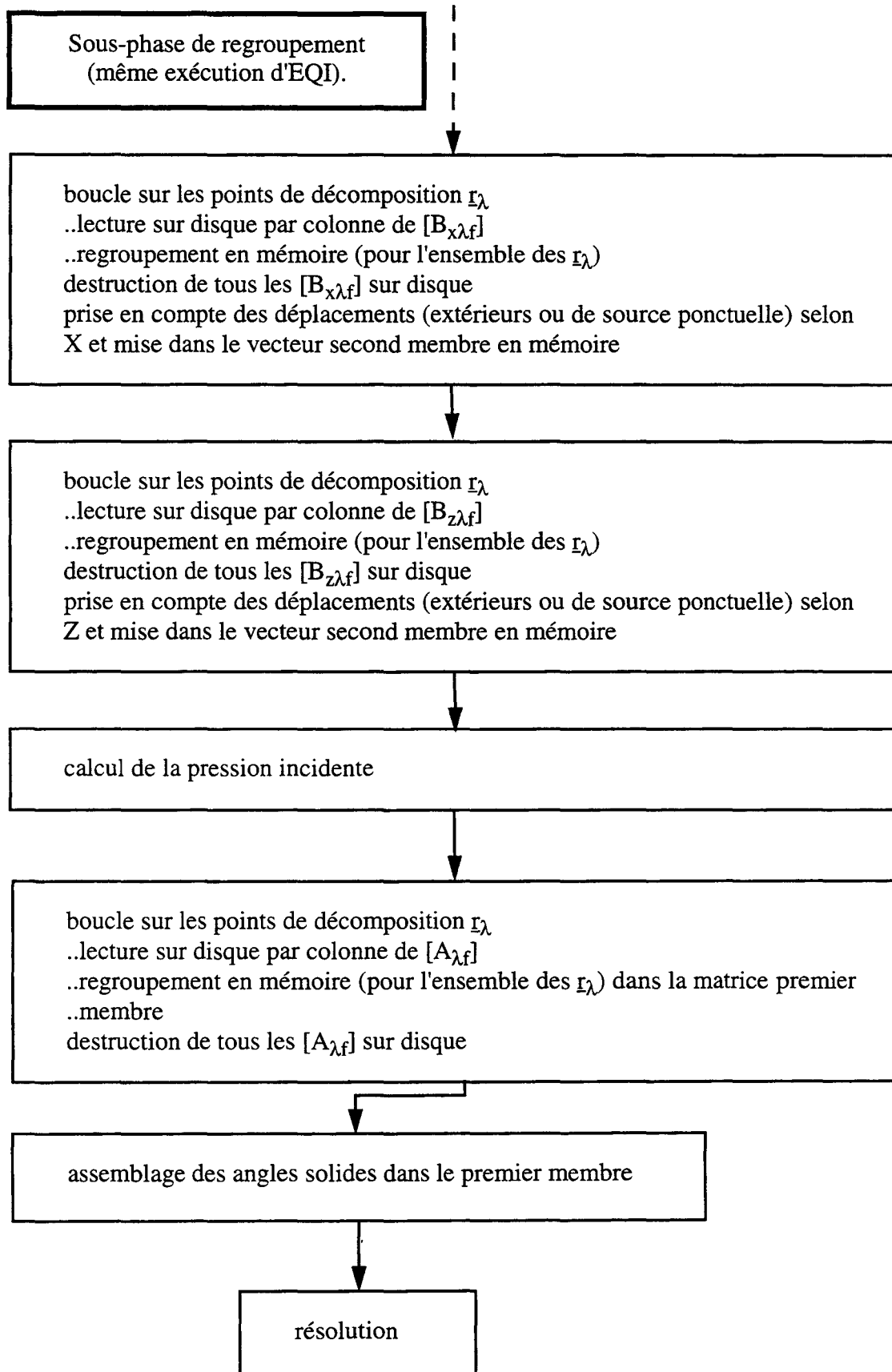
lecture sur disque des points de décomposition r_λ de chaque circonférence (de chaque noeud) et du maximum de ceux-ci

boucle sur les points de décomposition r_λ
 ..boucle sur les éléments ELMT
lecture sur disque des caractéristiques de ELMT
boucle sur les noeuds de calcul r_m
lecture sur disque des coefficients de la matrice $[\hat{B}_{\lambda f2}]$ non assemblée
projection sur l'axe X et assemblage en mémoire de $[\hat{B}_{x\lambda f2}]$
 ..stockage de $[\hat{B}_{x\lambda f2}]$ sur disque (accès direct)

boucle sur les points de décomposition r_λ
 ..boucle sur les éléments ELMT
lecture sur disque des caractéristiques de ELMT
boucle sur les noeuds de calcul r_m
lecture sur disque des coefficients de la matrice $[\hat{B}_{\lambda f2}]$ non assemblée
projection sur l'axe z et assemblage en mémoire de $[\hat{B}_{z\lambda f2}]$
 ..stockage de $[\hat{B}_{z\lambda f2}]$ sur disque (accès direct)

destruction de tous les fichiers $[\hat{B}_{\lambda f2}]$ sur disque





Résumé de thèse

Dans le domaine de l'Acoustique sous-marine, la méthode des équations intégrales est couramment utilisée pour modéliser le rayonnement ou la diffraction d'une onde acoustique par une structure immergée. Les champs de pression dans le fluide environnant sont évalués à partir du simple maillage de la surface du corps. La solution n'est pas unique pour certaines fréquences dites irrégulières. Le code EQI utilise la représentation intégrale de Helmholtz extérieure et traite le problème d'unicité par emploi de la méthode de Jones : le système équations intégrales est surdéterminé par des équations de champ nul.

Lors d'une analyse acoustique sur une large gamme de fréquences, la construction des matrices équations intégrales est très coûteuse en temps de calcul. Un nouvel algorithme équations intégrales basé sur une interpolation fréquentielle est proposé. Son automatisation permet un gain de temps de calcul important qui augmente avec la taille du problème sans perte de précision. L'emploi de fonctions d'ondes sphériques dans les équations de champ nul génère des difficultés de simulation des structures excentrées. Une nouvelle interpolation de la pression simplifie l'utilisation du modèle. De plus, une technique adaptée aux géométries excentrées est développée. L'utilisation du champ nul est ainsi grandement simplifiée et la dépense en temps de calcul diminuée. Le calcul aux fréquences irrégulières de structures composées de plusieurs volumes est désormais possible. De nombreux exemples illustrent les travaux présentés. Une application au couplage fluide-structure est effectuée par combinaison entre le code EQI et le code éléments finis ATILA. Cette thèse aboutit à une nouvelle version du code EQI capable de modéliser des structures de plus en plus complexes, pour des fréquences de plus en plus élevées.

Mots-clefs

Diffusion / diffraction acoustique
Acoustic scattering

Modélisation numérique
Numerical modeling

Interpolation fréquentielle
Frequency interpolation

Équations de champ nul
Null-field equations

Rayonnement acoustique
Acoustic radiation

Méthode des équations intégrales
Boundary element method

Fréquences irrégulières
Irregular frequencies

Origines multiples de champ nul
Multicentered null-field equations