

50376
1996
280

N° d'ordre : 1813

THESE

présentée à

l'Université des Sciences et Technologies de LILLE

par
Elisée LEROY

pour obtenir le grade de
Docteur en MECANIQUE



SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT STATIQUE ET DYNAMIQUE DU DISPOSITIF DE COMPENSATION D'EFFORT AXIAL DANS LES TURBOMACHINES

Directeur de thèse: Pierre MICHEAU

Soutenue le 18 octobre 1996 devant la commission d'examen :

Président : M. G. CAIGNAERT, Professeur à l'E.N.S.A.M. - LILLE

Rapporteurs : M. B. DESMET, Professeur à l'E.N.S.I. de VALENCIENNES
M P. LEVEL, Professeur à l'Université de VALENCIENNES

Examineurs : M. C. DEBAILLEUX, Maître de Conférences à l'E.U.D.I.L.- LILLE
M. P. MICHEAU, Professeur à l'Université de LILLE

*A Irène,
A Pierre, Sébastien, Nicolas.*

Remerciements

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur P. MICHEAU, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de LILLE qui a suivi avec beaucoup d'attention et de disponibilité l'évolution de ce travail.

Je tiens particulièrement à remercier Monsieur C. DEBAILLEUX, Maître de Conférences à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de LILLE, qui , avec efficacité, m'a aidé à démarrer ce travail de recherche, ainsi qu'à Monsieur J.C. MARTY, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Technologies de LILLE pour ses conseils avisés.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Monsieur B. DESMET, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Valenciennes et Monsieur P. LEVEL, Professeur à l'Université de Valenciennes, de porter un jugement sur ce travail.

Il m'est très agréable que Monsieur G. CAIGNAERT, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers de LILLE ait accepté de présider ce jury.

Mes remerciements s'adressent également à tous les chercheurs du Laboratoire de Mécanique de LILLE avec qui j'ai eu des discussions fructueuses au sujet de ce travail.

1. TABLE DES MATIERES- NOTATIONS ET SYMBOLES

1.1 Table des Matières

1. TABLE DES MATIERES- NOTATIONS ET SYMBOLES	1
2. INTRODUCTION	7
3. SCHEMA DU DISPOSITIF	11
4. ETUDE ANALYTIQUE STATIQUE ET DYNAMIQUE EN ECOULEMENT LAMINAIRE AXISYMETRIQUE	13
4.1 INTRODUCTION.....	13
4.2 HYPOTHESES	13
4.3 DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES AGISSANT SUR LE DISPOSITIF	14
4.3.1 <i>Caractéristiques du laminage h_1</i>	14
4.3.2 <i>Caractéristiques du laminage h_2</i>	16
4.4 COMPORTEMENT STATIQUE	17
4.5 COMPORTEMENT DYNAMIQUE - CAS D'UNE EXCITATION HARMONIQUE	18
4.6 COEFFICIENTS DYNAMIQUES	21
4.7 CALCUL DES CARACTERISTIQUES DU DISPOSITIF	22
4.7.1 <i>CARACTERISTIQUES STATIQUES - EVOLUTION</i>	23
4.7.2 <i>CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES</i>	26
4.8 CONCLUSIONS	28
5. ETUDE STATIQUE ET DYNAMIQUE EN REGIME TURBULENT	30
5.1 POSITION DU PROBLEME DE LA TURBULENCE.....	30
5.2 LES ÉQUATIONS DE REYNOLDS EN RÉGIME TURBULENT.....	32
5.2.1 <i>Equations de Reynolds</i>	32
5.2.2 <i>Calcul du coefficient turbulent K_r</i>	33
5.3 APPLICATION AU MODELE ETUDIE	38
5.3.1 <i>Mise en équation du dispositif</i>	38
5.3.2 <i>Discrétisation de l'équation de Reynolds</i>	41
5.3.3 <i>Schéma de calcul</i>	42
5.3.4 <i>Influence des paramètres du problèmes</i>	52
5.4 ETUDE DE SENSIBILITE	57
5.4.1 <i>Influence de la géométrie des laminages</i>	57
5.4.2 <i>Influence de la valeur des coefficients de perte de charge singulière</i>	61
6. CALCUL EN 3D AXISYMETRIQUE	68
6.1 INTRODUCTION	68
6.2 FORMULATION A.L.E.....	69
6.2.1 <i>Les équations originelles</i>	69
6.2.2 <i>Equations de base</i>	70
6.2.3 <i>Discrétisation temporelle</i>	72
6.2.4 <i>Discrétisation spatiale</i>	74

6.2.5	Discretisation de l'équation de continuité.....	76
6.2.6	Discretisation de l'équation de quantité de mouvement.....	76
6.2.7	Conditions aux limites et critères de stabilité.....	77
6.2.8	Méthode de résolution.....	78
6.2.9	Stabilité.....	79
6.2.10	Modèle de turbulence.....	79
6.3	APPLICATION AU DISPOSITIF ÉTUDIÉ.....	81
6.3.1	Maillage du domaine.....	81
6.3.2	Caractéristiques du modèle.....	83
6.3.3	Présentation des résultats numériques.....	84
6.4	CALCUL DES COEFFICIENTS DE PERTE DE CHARGE SINGULIÈRE.....	96
6.4.1	Introduction.....	96
6.4.2	Résultats.....	97
6.4.3	CONCLUSIONS.....	101
7.	CONCLUSION.....	104
8.	BIBLIOGRAPHIE.....	106
9.	ANNEXES.....	109
9.1	ANNEXE1.....	109
9.1.1	Écoulement de Couette dû à la rotation de l'arbre.....	109
9.1.2	Écoulement de Poiseuille dû à la pression.....	109
9.1.3	Détermination des coefficients de viscosité:.....	110
9.2	ANNEXE 2.....	112
9.2.1	Schéma du maillage du dispositif.....	112
9.2.2	Discretisation des équations.....	113
9.2.3	Développement au 1° ordre des équations.....	115

1.2 NOTATIONS ET SYMBOLES

FLUIDE

l	Longueur de mélange
Q_r, Q_θ	Débits volume locaux
μ	Viscosité dynamique
ν_e, ν, ν_t	Viscosité cinématique effective, réelle, turbulente
ρ	Masse volumique du film lubrifiant
K_r, K_θ	Fonctions de Constantinescu
\Re	Nombre de Reynolds
\Re_c	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation de l'arbre
\Re_p	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne du fluide
G_r, G_θ	Fonctions introduites par Constantinescu
$G_{r2000}, G_{\theta2000}$	Fonctions de constantinescu calculées pour un nombre de Reynolds de 2000

LAMINAGE1 DE HAUTEUR h_1

\dot{h}_{gl1}	Vitesse de débattement dans la glace 1
p_1	Pression d'entrée
p_2	Pression de sortie
p_{h1}	Pression à l'intérieur du laminage
r_1	Rayon à l'entrée
r_2	Rayon à la sortie

LAMINAGE2 DE HAUTEUR h_3

\dot{h}_{gl2}	Vitesse de débattement dans la glace2
p_3	Pression à l'entrée
p_4	Pression à la sortie
p_{h_3}	Pression à l'intérieur du laminage
r_3	Rayon à l'entrée
r_4	Rayon à la sortie

LA CHAMBRE

\dot{h}_{ch}	Vitesse de débattement dans la chambre
p_m, p_{ch}	Pression moyenne $p_m = p_2 = p_3$
V_o, V_{ch}	Volume de la chambre: $\rho(r_2^2 - r_3^2)h_2$
χ	Coefficient de compressibilité du fluide

PARAMETRES D' ENSEMBLE

b	Amortissement
c_x, c_y	Coefficients géométriques
f	Fréquence d'excitation, en axial, du système
h_{io}	Position de référence de la hauteur de laminage
h_{1i}^*	Fluctuation de la hauteur autour de la position de référence
k	Raideur
k, A	Constantes de Von Karmann
l	Longueur de mélange
\vec{n}	Normale à la surface S_{ij}

p'	Fluctuation de la pression
p_e, u_e	Pression, vitesse à l'entrée du dispositif
p_i, u_i	Pression, vitesse au noeud i
p_s, u_s	Pression, vitesse à la sortie du dispositif
r	Coordonnée radiale
t	Temps
u	Vitesse radiale du fluide dans les laminages.
u_m	Vitesse radiale moyenne
u'	Fluctuation de la vitesse radiale
\bar{u}	Vitesse moyenne
\bar{u}_l, \bar{u}_n	Vitesses au noeud d'une maille
z	Coordonnée suivant l'épaisseur du film dans les laminages, distance à la paroi
z_i	Coefficient de perte de charge singulière
\bar{w}	Vitesse de grille du maillage
ω	Pulsation correspondant à la vitesse de rotation du piston
ω^*	Pulsation correspondant à l'excitation du dispositif
ϕ^*	Fréquence d'excitation du dispositif
\Rightarrow	
σ	Tenseur de contrainte
ξ, η	Coefficients de la transformation d'une maille
τ_s	Contrainte pariétale
ψ	Propriété générique d'un fluide
ω	Fonction générique
$\Sigma(i,j), \Sigma'(i,j)$	Aires des éléments de volume $V(i,j), V'(i,j)$
A_1, C_1	Coefficient de perte de charge
$\frac{D}{Dt}, \frac{d}{dt}, \frac{d^-}{dt}$	Dérivation en formalisme A.L.E.
F_1	Force dans le laminage 1
F_{1s}	Force statique dans le laminage 1
F_3	Force dans le laminage 2

F_{3s}	Force statique dans le laminage 2
F_a	Charge axiale appliquée sur l'arbre
F_{as}	Charge axiale statique appliquée sur l'arbre
F_{ch}	Charge dans une chambre
F_{chs}	Charge axiale statique dans la chambre
F_s	Force statique
F^*	Résultante totale de la variation des forces de pression
F_{CH}^*	Résultante de la variation des forces de pression dans la chambre
F_{gl1}^*	Résultante de la variation des forces de pression dans la glace 1
F_{gl2}^*	Résultante de la variation des forces de pression dans la glace 2
H, h	Hauteur de débattement
L, L'	Contour d'une maille
M	Masse d'une cellule
N	Vitesse de rotation du piston
$P_{(i)}^{k+1}, P_{(i)}^k$	Pression calculée par une méthode de surelaxation
$\hat{P}_{(i)}^{k+1}$	Pression calculée à partir de $P_{(i)}^k$
P_{io}, V_{io}	Pression, vitesse calculées au noeud i dans le cas stationnaire
P^*_{io}, V^*_{io}	Perturbation de la pression et de la vitesse autour de la valeur de référence au noeud i.
$P_r^*(i), V_r^*(i)$	Partie réelle de la fluctuation de pression ou de vitesse au noeud i
$P_i^*(i), V_i^*(i)$	Partie imaginaire de la fluctuation de pression ou de vitesse au noeud i
S_a, S_b	Aires d'entrée et de sortie pour un tuyau présentant un rétrécissement
S_e, S_s	Aires d'entrée et de sortie du dispositif
S_i, S_{ij}	Aires au noeud i, de la maille ij
S_i, S_n, S_{n+1}, S'	Aires dans la méthode A.L.E.
V_i, V_n, V_{n+1}	Volumes de la méthode A.L.E.
$V(i,j), V'(i,j)$	Éléments de volume discret

2. INTRODUCTION

Dans de nombreuses applications industrielles, il est fait appel aux turbomachines. Leurs roues sont soumises à des efforts dus à l'interaction avec les fluides qui les traversent.

Ces efforts sont repris par les pivoteries (paliers et butées) qui peuvent être:

- à éléments roulants.
- de type hydrostatique ou hydrodynamique.
- électromagnétiques.

Il arrive parfois, essentiellement sur des roues équipées de roulements que, pour reprendre les efforts axiaux importants, il soit nécessaire de mettre en place, parallèlement à la butée, un dispositif hydraulique. Ce dispositif, appelé piston d'équilibrage ou plus généralement « dispositif de compensation d'effort axial », peut être assimilé à un ensemble de butées hydrodynamiques et de chambres.

Il est alimenté à l'endroit où la pression est maximale (à la sortie de roue).

Cette étude a pour objet l'analyse du comportement et la détermination des caractéristiques statiques et dynamiques d'un tel système.

Historiquement, de nombreuses études ont porté sur le comportement d'un fluide en mouvement par rapport à un disque en rotation [1,2]. Le cas particulier de l'écoulement autour d'un disque constituant une des parois d'une chambre a fait l'objet de recherches aussi bien dans le domaine numérique qu'expérimental. Des résultats ont été obtenus pour différents régimes d'écoulement, en fonction du nombre de Reynolds [3], de la géométrie de la chambre [4], de l'évolution du mouvement du disque [5], de la rugosité des parois [6]. L'étude de ce type d'écoulement est subordonnée à la résolution des équations de Navier-Stokes. Actuellement, il est fait appel à des méthodes numériques pour déterminer une approximation de la solution de ces équations [7, 8].

Dans les laminages, le comportement de l'écoulement est du ressort de la mécanique de films minces visqueux. Cette théorie a pour origine les travaux de Reynolds (1886). Ils portaient sur l'étude d'écoulements laminaires et isothermes. Les forces d'inertie étaient négligées devant les forces de viscosité et de pression. L'utilisation de l'équation de Reynolds a permis d'explicitier le comportement des mécanismes lubrifiés et notamment des butées et paliers hydrostatiques ou hydrodynamiques. [9, 10]

La première partie de l'étude porte sur le régime d'écoulement laminaire. Nous effectuons une modélisation analytique de type monodimensionnelle. Nous sommes conduits à négliger tous les effets de bord en entrée et sortie des laminages. L'équation de Reynolds, dans les laminages, est intégrée. La pression dans la chambre est supposée uniforme. La charge résultante est déterminée dans le cas d'un comportement statique et dynamique (excitation harmonique) du dispositif. L'évolution des caractéristiques dynamiques (raideur et amortissement) est analysée.

Lorsque les vitesses de fonctionnement augmentent ou pour un fluide à faible viscosité cinématique (pour un nombre de Reynolds élevé), le comportement de l'écoulement change. Taylor a montré que, pour l'écoulement entre deux cylindres tournants (palier cylindrique), la transition entre le régime laminaire et le régime non laminaire se fait par un écoulement constitué d'une superposition de tores (régime tourbillonnaire) dont l'existence est due aux forces d'inertie dans le fluide [11]. Des phénomènes analogues se produisent dans les paliers hydrostatiques et hydrodynamiques. Afin de tenir compte de ce phénomène dans la deuxième partie de l'étude, toujours effectuée dans le cadre d'une modélisation monodimensionnelle, l'écoulement, dans les laminages, est déterminé en résolvant l'équation de Reynolds en régime turbulent. Le modèle de turbulence utilisé, développé par Constantinescu, est algébrique. La pression dans la chambre d'équilibrage est toujours supposée uniforme. Pour tenir compte des pertes de charge singulières en entrée et sortie de laminage, nous relierons les écoulements dans les laminages à l'écoulement dans les chambres par des équations de type Bernoulli. Les coefficients de perte de charge sont déterminés par estimation à partir des travaux de I.E. IDEL'CIK [12], en fonction de la géométrie du système. L'approche du résultat se fait numériquement par une méthode de différences finies. Une perturbation numérique au voisinage de la position d'équilibre statique permet de calculer les coefficients dynamiques. La validité de la méthode de résolution est testée par comparaison avec les résultats du modèle analytique.

Ce modèle, finalement plus général, est utilisé aussi bien en laminaire qu'en turbulent notamment pour déterminer une évolution des caractéristiques dynamiques du dispositif en fonction de sa géométrie. Une étude de sensibilité en fonction des coefficients de perte de charge est présentée.

Cette étude montre qu'il est essentiel, pour évaluer les performances prévisionnelles du mécanisme retenu, d'avoir une détermination objective des coefficients de perte de charge singulière. Dans ce but, il est développé, dans la dernière partie de ces travaux, une méthode numérique de détermination des coefficients de perte de charge singulière, en régime turbulent et laminaire, à l'aide d'un code de calcul 3-D axisymétrique. Ce code, développé au Laboratoire de Mécanique de Lille [13, 14], est basé sur la résolution des équations de Navier-Stokes dans les laminages et leurs jonctions avec les chambres, en régime incompressible, turbulent ou laminaire, par la méthode A.L.E. (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Le modèle de turbulence retenu est celui de longueur de mélange de Prandtl. Les valeurs trouvées sont ensuite réintroduites dans le modèle global.

3. SCHEMA DU DISPOSITIF

Piston d'équilibrage

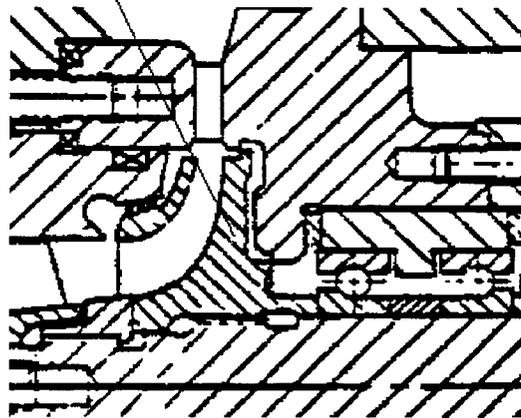


Figure 1: Schéma de rotor de turbopompe avec piston d'équilibrage

(d'après [NASA CR 159509, février 1979])

La figure n°1 représente un élément d'un corps de pompe, constitué d'un rotor muni d'un piston d'équilibrage. Une modélisation de cet élément de turbomachine est donné sur la figure n°2. Le dispositif étudié est constitué d'un disque solidaire de la roue de pompe. Il tourne dans une chambre divisée en trois parties par l'intermédiaire de deux laminages.

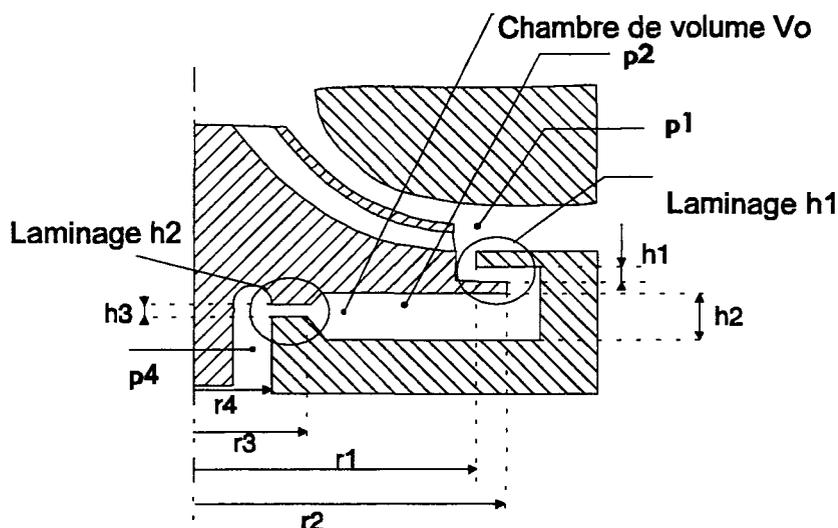


Figure 2: Schéma du dispositif

Une partie du fluide sortant de la roue de pompe à la pression p_1 entre dans le dispositif par le laminage de hauteur h_1 , passe dans la chambre où la pression est p_2 (p_2 inférieure à p_1), et ensuite dans le laminage de hauteur h_3 .

A partir d'une position nominale, un accroissement de charge F_a provoque une augmentation de la hauteur du laminage h_1 et une diminution de la hauteur du laminage h_3 , entraînant une augmentation de la pression dans la chambre, qui compense ainsi l'accroissement de charge. Voir figure n°3.

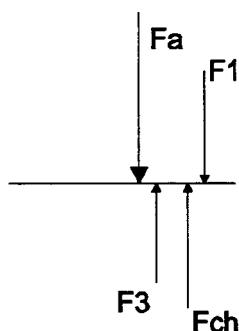


Figure 3: Charges appliquées sur le dispositif

4. ETUDE ANALYTIQUE STATIQUE ET DYNAMIQUE EN ECOULEMENT LAMINAIRE AXISYMETRIQUE

4.1 INTRODUCTION

Cette étude a pour but l'analyse du comportement et la détermination des caractéristiques statiques et dynamiques d'un tel système pour une charge d'excitation à une fréquence donnée [15].

Les caractéristiques déterminées pour une position du dispositif sont:

en statique

la charge

le débit

en dynamique

la raideur

l'amortissement

4.2 HYPOTHESES

Le fluide est supposé newtonien, isotherme. Dans les laminages, l'écoulement est permanent, incompressible et laminaire, avec prise en compte des forces d'inertie centrifuges dues à la rotation de la roue. Dans la chambre, il sera tenu compte de la compressibilité du fluide, et nous considérons que la pression est uniforme.

Les faces des laminages sont supposées parallèles.

L'épaisseur totale du film lubrifiant est constante et notée $H=h_1+h_3$.

Cette épaisseur correspond au débattement de la roue.

4.3 DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES AGISSANT SUR LE DISPOSITIF

CHAMP DE PRESSION

Dans la chambre, la pression est supposée uniforme.

Dans les laminages, le champ des pressions est obtenu par intégration de l'équation de Reynolds [16],[17], qui s'écrit, compte tenu des hypothèses formulées:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 12 \frac{\mu r}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} + 3\rho \frac{\omega^2 r}{5} \quad (4-1)$$

4.3.1 Caractéristiques du laminage h_1

Les conditions aux limites, en pression sont:

$$p = p_1 \quad \text{pour } r = r_1$$

$$p = p_2 \quad \text{pour } r = r_2$$

L'intégration de l'équation de Reynolds (1) conduit à l'expression:

$$p_{h1} = p_1 + \frac{a}{4} (r^2 - r_1^2) + \frac{p_1 - p_2}{\text{Log} \frac{r_1}{r_2}} \text{Log} \frac{r}{r_1} + \frac{a}{4} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\text{Log} \frac{r_1}{r_2}} \text{Log} \frac{r}{r_1} \quad (4-2)$$

$$\text{où } a = \frac{12\mu}{h_1^3} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{3\rho\omega^2}{5}$$

Par intégration du champ de pression, la charge est:

$$F_1 = \int_{r_1}^{r_2} p \, ds = \pi \left[(r_2^2 p_2 - r_1^2 p_1) + (p_1 - p_2) K \right] + a n \quad (4-3)$$

où

$$K = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2 \text{Log} \frac{r_1}{r_2}} \quad n = \frac{\pi}{8} \left[r_1^4 - r_2^4 + \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{\text{Log} \frac{r_2}{r_1}} \right]$$

Le débit:

$$q_{v1} = 2\pi r \int_0^{h_1} u \, dz$$

$$q_{v1} = h_1^3 \left[l(p_1 - p_2) + K_1 \right] - s \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (4-4)$$

avec

$$l = \frac{\pi}{6\mu \text{Log} \frac{r_2}{r_1}} \quad K_1 = -\frac{\pi\rho\omega^2}{40\mu} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\text{Log} \frac{r_1}{r_2}} \quad s = \frac{\pi}{2} \left[2r_2^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\text{Log} \frac{r_1}{r_2}} \right]$$

4.3.2 Caractéristiques du laminage h2

Les conditions aux limites:

$$p = p_3 \quad \text{pour } r = r_3$$

$$p = p_4 \quad \text{pour } r = r_4$$

conduisent à l'expression:

$$p_{h3} = p_3 + \frac{a^*}{4}(r^2 - r_3^2) + \frac{p_3 - p_4}{\text{Log} \frac{r_3}{r_4}} \text{Log} \frac{r}{r_3} + \frac{a^*}{4} \frac{r_4^2 - r_3^2}{\text{Log} \frac{r_3}{r_4}} \text{Log} \frac{r}{r_3} \quad (4-5)$$

$$\text{avec } a^* = \frac{12\mu}{h_3^3} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{3\rho\omega^2}{5}$$

Par intégration du champ de pression, nous obtenons la charge:

$$F_3 = \int_{r_3}^{r_4} p \, ds = \pi \left[(r_3^2 p_3 - r_4^2 p_4) + (p_3 - p_4) K^* \right] + a^* n^* \quad (4-6)$$

avec

$$K^* = \frac{r_4^2 - r_3^2}{2 \text{Log} \frac{r_3}{r_4}} \quad n^* = \frac{\pi}{8} \left[r_4^4 - r_3^4 + \frac{(r_3^2 - r_4^2)^2}{\text{Log} \frac{r_3}{r_4}} \right]$$

Le débit sortant est donné par :

$$q_{v3} = 2\pi r \int_0^{h_3} u dz$$

On obtient

$$q_{v3} = h_3^3 \left[-l^* (p_3 - p_4) + K_3 \right] - s^* \frac{\partial h_3}{\partial t} \quad (4-7)$$

avec

$$l^* = \frac{\pi}{6\mu \text{Log} \frac{r_3}{r_4}} \quad K_3 = -\frac{\pi\rho\omega^2}{40\mu} \frac{r_4^2 - r_3^2}{\text{Log} \frac{r_3}{r_4}} \quad s^* = \frac{\pi}{2} \left[2r_3^2 + \frac{r_4^2 - r_3^2}{\text{Log} \frac{r_3}{r_4}} \right]$$

Equation des Forces

Le bilan des charges appliquées sur le dispositif donne (voir Figure 3):

$$F_a + F_1 = F_{ch} + F_3 \quad (4-8)$$

4.4 COMPORTEMENT STATIQUE

L'état statique du système est déterminé en annulant les dérivées par rapport au temps dans les équations (4) à (7).

La pression moyenne "p_{ms}" régnant dans la chambre est obtenue en écrivant l'égalité des débits entrant et sortant.

Cette valeur de p_{ms} (p_{ms} = p₃ = p₂), s'écrit:

$$p_{ms} = \frac{h_1^3 (lp_1 + K_1) + h_3^3 (l^* p_4 + K_3)}{h_1^3 l + h_3^3 l^*} \quad (4-9)$$

La charge statique appliquée sur l'arbre est obtenue à partir de l'équation (8):

$$F_{as} = F_{chs} + F_{3s} - F_{1s} \quad (4-10)$$

où

$$F_{chs} = \pi(r_2^2 - r_3^2)p_m$$

$$F_{1s} = \pi[(r_2^2 p_m - r_1^2 p_1) + (p_1 - p_m)K] + \frac{3}{5}\rho\omega^2 n$$

$$F_{3s} = \pi[(r_3^2 p_m - r_4^2 p_4) + (p_m - p_4)K^*] + \frac{3}{5}\rho\omega^2 n^*$$

4.5 COMPORTEMENT DYNAMIQUE - CAS D'UNE EXCITATION HARMONIQUE

A la charge statique F_{as}, s'ajoute une excitation harmonique dont l'amplitude reste petite devant

F_{as}.

Avec cette hypothèse, l'amplitude du déplacement de la glace de hauteur h₁ au voisinage de la position d'équilibre statique reste petite.

Posons, de la même manière que [17]:

$$h_1 = h_{1s}(1 + \varepsilon_1 e^{i\omega^* t}) \quad \varepsilon_1 \ll 1 \quad (4-11)$$

$$h_3 = h_{3s}(1 + \varepsilon_3 e^{i\omega^* t}) \quad \varepsilon_3 \ll 1 \quad (4-12)$$

Cette variation de charge induit un état de pression instantanée dans la chambre qui s'ajoute à la pression moyenne correspondant à l'état statique.

Cette pression moyenne est supposée uniforme dans la chambre ($p_m = p_2 = p_3$)

La pression dans la chambre s'écrit:

$$p_m = p_{ms} (1 + \delta e^{i\omega^* t}) \quad (4-13)$$

EQUATION DE CONTINUITE

Le débit à l'entrée du laminage de hauteur h_3 , c'est à dire au rayon r_3 , est égal au débit du laminage h_1 corrigé de l'effet de la variation de volume de la chambre lié au déplacement du piston et de l'effet de la compressibilité du fluide dans la chambre. L'amplitude des mouvements, qui est considérée comme petite, ne modifie pas de manière significative la valeur du volume V_o .

L'équation de continuité s'écrit:

$$q_{v3} = q_{v1} - \pi(r_2^2 - r_3^2)\dot{h}_3 - V_o \chi \frac{dp_m}{dt} \quad (4-14)$$

expression dans laquelle q_{v1} est donné par l'équation (4), q_{v3} par l'équation (7) changée de signe(débit sortant), ce qui fournit:

$$h_1^3 [l(p_1 - p_m) + K_1] = h_3^3 [l^*(p_m - p_4) - K_3] + \alpha_1 \dot{h}_3 + V_o \chi \frac{dp_m}{dt} \quad (4-15)$$

où

$$\alpha_1 = s^* - s + \pi(r_2^2 - r_3^2)$$

Par dérivation des équations (11) et (12)

Un développement limité au premier ordre de l'équation (15) conduit à:

$$\dot{h}_1 = i\omega^* h_{1s} \varepsilon_1 e^{i\omega^* t}$$

$$\dot{h}_3 = i\omega^* h_{3s} \varepsilon_3 e^{i\omega^* t}$$

où $\varepsilon_1 h_{1s} = -\varepsilon_3 h_{3s}$

$$\delta p_{ms} = -\frac{3\varepsilon_3 h_{3s}^3 A}{h_{1s}^3 l + h_{3s}^3 l^*} \frac{1 + i\omega^* \tau_1}{1 + i\omega^* \tau_2} \quad (4-16)$$

où

$$\tau_1 = \frac{\alpha_1}{3Ah_{3s}^2}$$

$$\tau_2 = \frac{V_o \chi}{h_{1s}^3 l + h_{3s}^3 l^*}$$

$$A = l^* (p_{ms} - p_4) - K_3 + \left(\frac{h_{1s}}{h_{3s}} \right)^2 [l(p_1 - p_{ms}) + K_1]$$

EQUATION DE CHARGEMENT

Avec les hypothèses posées, nous avons:

$$F_a = F_{as} (1 + \zeta e^{i\omega^* t})$$

D'où, en remplaçant p_m par son expression (13) dans l'équation (8) nous obtenons:

$$\zeta F_{as} = -\pi \frac{3\varepsilon_3 h_{3s}^3 A}{h_{1s}^3 l + h_{3s}^3 l^*} \frac{1 + i\omega^* \tau_1}{(1 + i\omega^* \tau_2)} (K + K^*) + i\omega^* B h_{3s} \varepsilon_3 \quad (4-17)$$

qui s'écrit après séparation en partie réelle et imaginaire:

$$\zeta F_{as} = -C \frac{\varepsilon_3 (1 + \omega^{*2} \tau_1 \tau_2)}{1 + \omega^{*2} \tau_2^2} h_{3s} + i\omega^* \varepsilon_3 \left(\frac{C(\tau_2 - \tau_1) h_{3s}}{1 + \omega^{*2} \tau_2^2} + B h_{3s} \right) \quad (4-18)$$

avec

$$B = 12\mu \left(\frac{n^*}{h_{3s}^3} + \frac{n}{h_{1s}^3} \right)$$

$$C = \frac{3\pi h_{3s}^2 A (K + K^*)}{h_{1s}^3 l + h_{3s}^3 l^*}$$

4.6 COEFFICIENTS DYNAMIQUES

Avec l'hypothèse choisie de petits déplacements, les propriétés du film fluide sont schématisées par une raideur k et un coefficient d'amortissement b .

Par définition [17]:

$$k = -\frac{\partial F_a}{\partial h_3}$$

$$b = -\frac{\partial F_a}{\partial \dot{h}_3}$$

Nous obtenons par dérivation de l'équation (18):

$$k = \frac{C(1 + \omega^{*2} \tau_1 \tau_2)}{1 + \omega^{*2} \tau_2^2} \quad (4-19)$$

$$b = -B - \frac{C(\tau_2 - \tau_1)}{1 + \omega^{*2} \tau_2^2} \quad (4-20)$$

4.7 CALCUL DES CARACTERISTIQUES DU DISPOSITIF

Les paramètres sont:

Laminage h1:

$$r1 = 0,090 \text{ m}$$

$$r2 = 0,100 \text{ m}$$

Laminage h2:

$$r3 = 0,050 \text{ m}$$

$$r4 = 0,015 \text{ m}$$

$$\text{Hauteur totale des laminages} \quad H = 0,0002 \text{ m}$$

$$\text{Pression d'entrée} \quad p1 = 30 \text{ bar}$$

$$\text{Pression de sortie} \quad p4 = 5 \text{ bar}$$

$$\text{Vitesse de rotation} \quad N = 3000 \text{ tr/min}$$

$$\text{Masse volumique} \quad \rho = 900 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Viscosité dynamique} \quad \mu = 0,01 \text{ Pl}$$

$$\text{Coefficient de compressibilité} \quad \chi = 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$$

$$\text{Volume de la chambre} \quad V_0 = 19 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$\text{Nombre de Reynolds moyen} \quad R_{ep} = 81$$

4.7.1 CARACTERISTIQUES STATIQUES - EVOLUTION

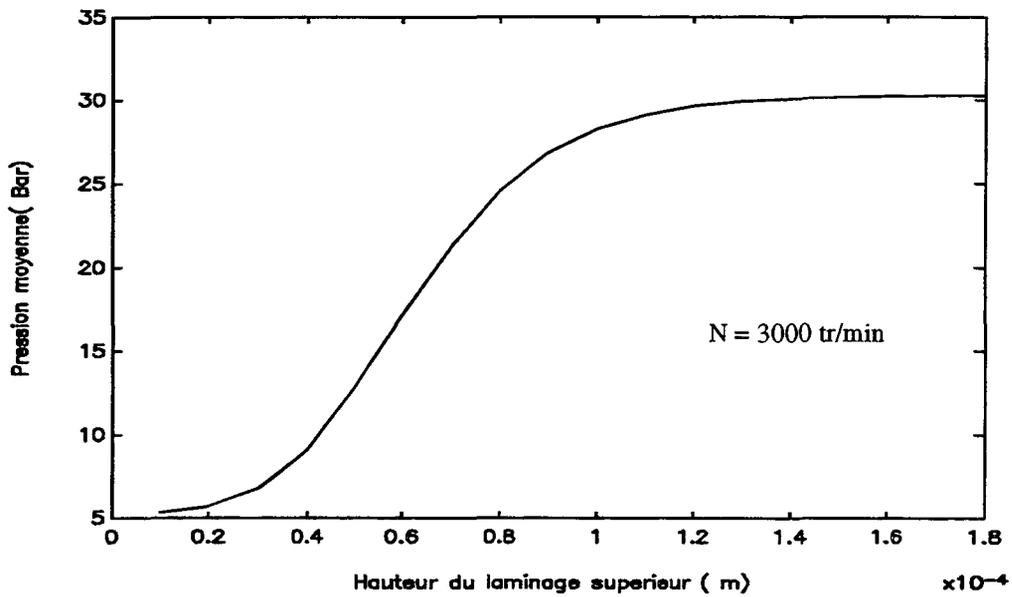


Figure 4: Pression moyenne en fonction de la hauteur du laminage h1

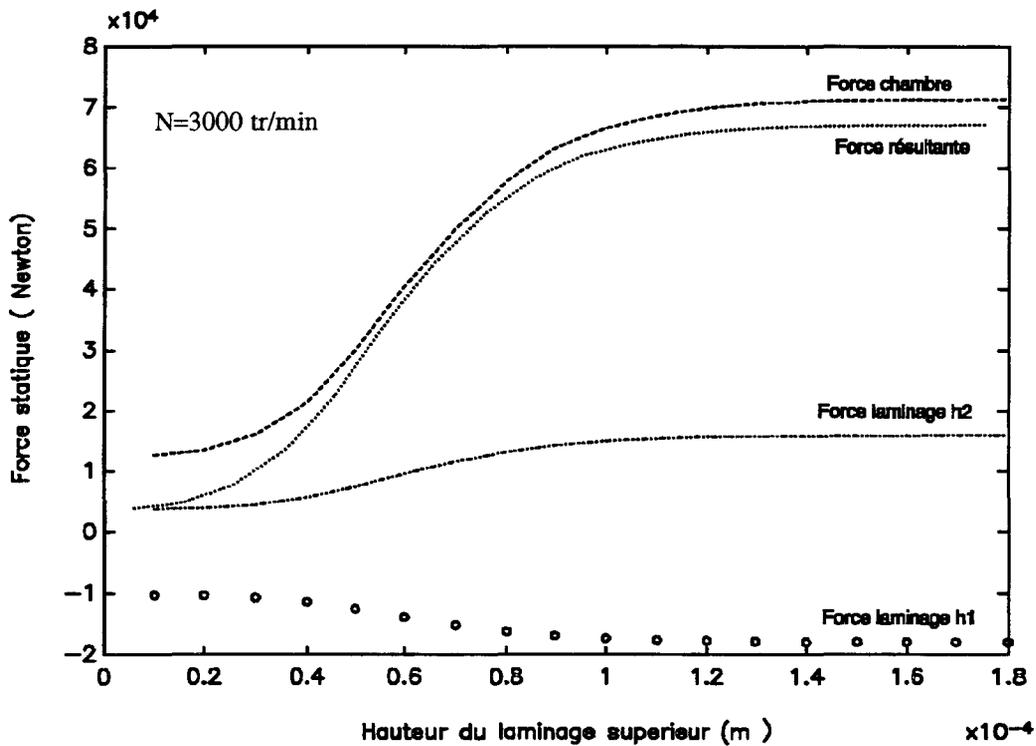


Figure 5: Charge en fonction de la hauteur du laminage h1

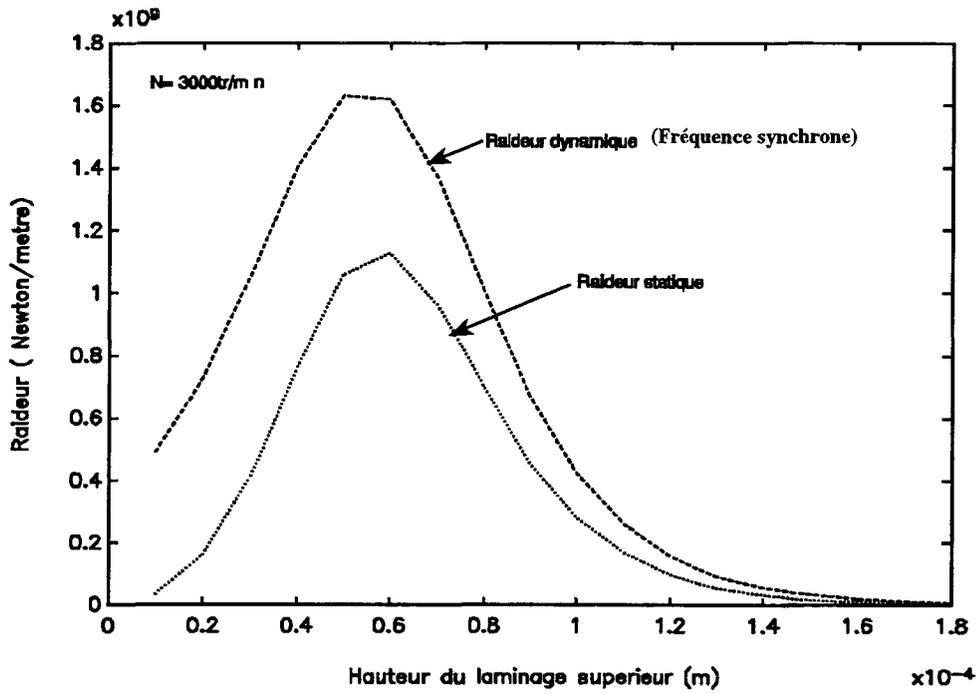


Figure 6: Raideur en fonction de l'ouverture du laminage h1

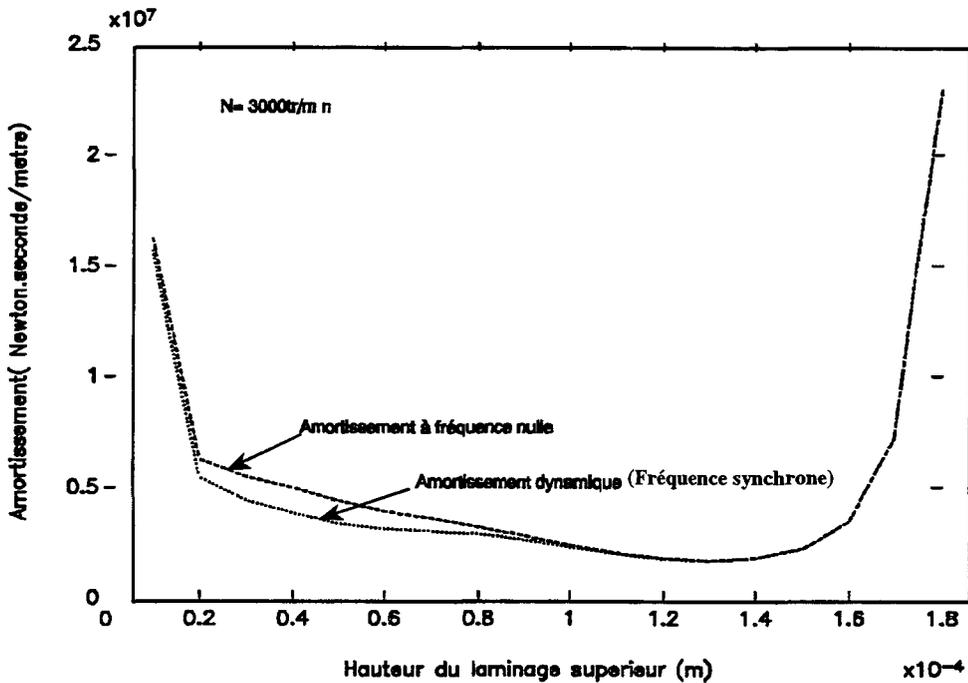


Figure 7: Amortissement en fonction de l'ouverture du laminage h1

Pour une hauteur imposée, nous obtenons:

Hauteur: h1 (mm)	Raideur (N/m)	Amortissement (N.s/m)
0,05	$10,5 \cdot 10^8$	$0,44 \cdot 10^7$
0,1	$2,8 \cdot 10^8$	$0,23 \cdot 10^7$
0,15	$0,16 \cdot 10^8$	$0,22 \cdot 10^7$

Tableau 1

Ces valeurs varient peu avec la vitesse de rotation.

La **pression moyenne** (Figure 4: Pression moyenne en fonction de la hauteur du laminage h1), proche de 0 à faible charge, de valeur maximale à forte charge, varie fortement pour la valeur de h1 comprise entre 0,04 et 0,1mm.

La valeur supérieure à la pression d'entrée, quand le système est fortement chargé, correspond aux forces d'inertie centrifuges. L'accroissement de pression est provoqué par le terme $\frac{3}{5} \rho \omega^2 r$ de l'équation de Reynolds (1) qui induit les termes K_1 et K_3 de la relation (4-9).

La **charge résultante** (Figure 5: Charge en fonction de la hauteur du laminage h1), admissible sur le dispositif, suit l'évolution de la pression moyenne .

C'est dans la plage de variation importante de la charge (et de la pression moyenne) que la **raideur maximale** est obtenue (voir Figure 6: Raideur en fonction de l'ouverture du laminage h1).

Ce dispositif ne possède pas de raideur à faible ou forte charge. Ceci s'explique par le fait que pour les positions extrêmes, les laminages ne jouent plus le rôle de restriction qui provoque la raideur des dispositifs hydrostatiques.

L'**amortissement** (Figure 7: Amortissement en fonction de l'ouverture du laminage h_1) varie peu sur la plage de hauteur, sauf si l'on s'écarte légèrement des valeurs maximales et minimales du déplacement pour lesquelles l'amortissement croît de façon importante.

Les coefficients de raideur et d'amortissement varient peu avec la vitesse de rotation .

Sur la figure 6 et la figure 7 l'évolution des raideurs et des amortissements statiques et dynamiques est tracée, compte tenu de la compressibilité du fluide dans la chambre à la fréquence synchrone. La raideur dynamique augmente par rapport à la raideur statique alors que l'amortissement dynamique diminue légèrement.

4.7.2 CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES

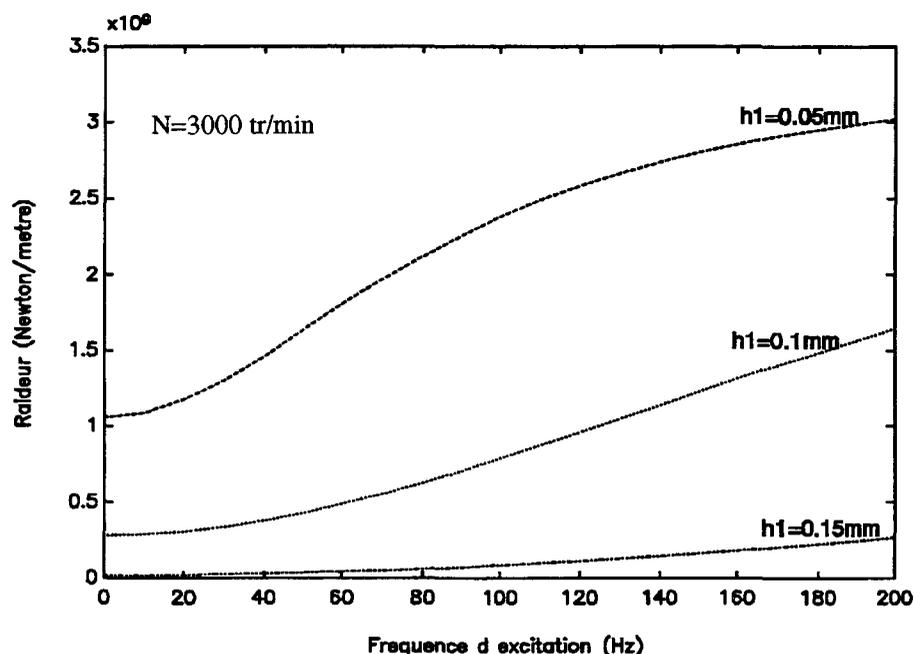


Figure 8: Raideur en fonction de la fréquence d'excitation

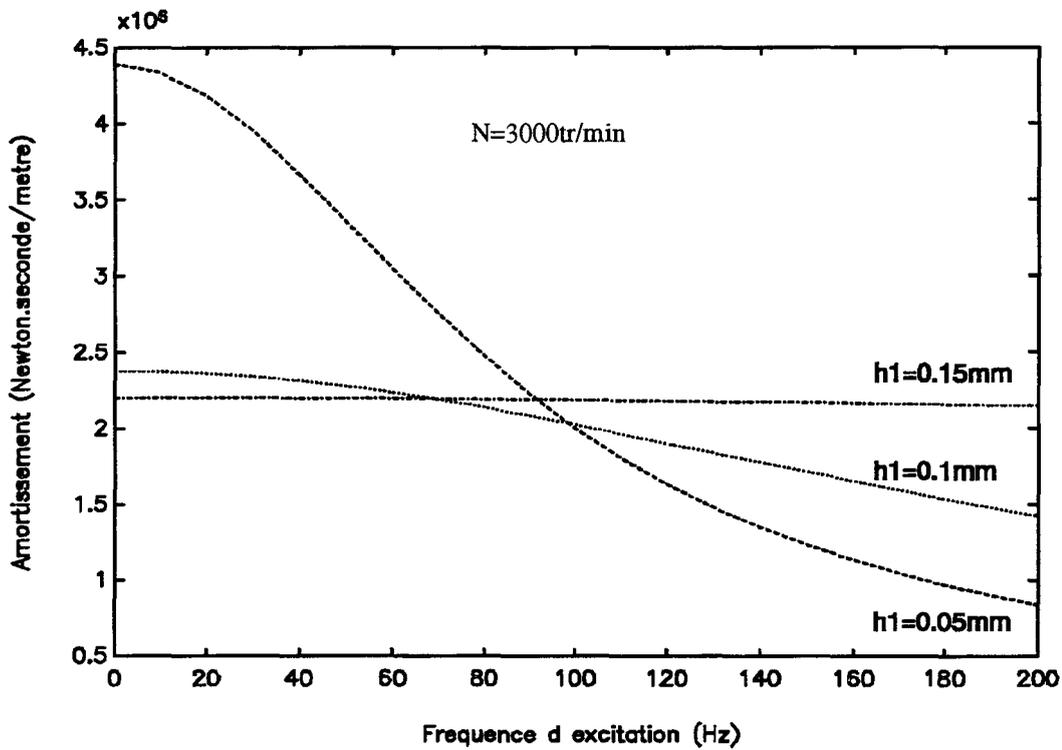


Figure 9: Amortissement en fonction de la fréquence d'excitation

Les caractéristiques dynamiques sont tracées (Figure 8: Raideur en fonction de la fréquence d'excitation et Figure 9: Amortissement en fonction de la fréquence d'excitation) pour 3 valeurs de position du jeu du laminage h1, en fonction de la fréquence d'excitation et pour une vitesse de 3000 tr/min.

C'est pour la valeur h1=0,05mm que la variation des coefficients de raideur et d'amortissement avec la fréquence d'excitation est la plus importante.

Cette évolution est liée au débit de compressibilité du fluide dans la chambre qui est:

$$q_{v,compressibilité} = V_0 \chi \frac{dp}{dt}$$

fonction de la variation de pression suivant la hauteur: $\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$

Nous retrouvons ici, en regard de l'évolution de la pression p_m avec la hauteur du laminage supérieur (voir Figure 4: Pression moyenne en fonction de la hauteur du laminage h_1), la variation la plus importante pour la plage 0,04 à 0,08mm.

4.8 CONCLUSIONS

Pour un dispositif d'équilibrage fonctionnant « en laminaire », il est effectué, à partir des équations de Reynolds caractérisant les écoulements dans les laminages, une détermination du champ des pressions prenant en compte :

- les forces centrifuges
- la compressibilité dans la chambre.

La charge appliquée est alors déterminée, ainsi que les coefficients de raideur et d'amortissement en fonction de la fréquence d'excitation.

Cette étude met en évidence l'aptitude de ce dispositif à reprendre une charge axiale. L'utilisation nécessite cependant des précautions en regard des modifications possibles (lors de l'exploitation) des caractéristiques dynamiques de raideur et d'amortissement, pouvant introduire des résonances du système.

Quand le système est faiblement ou fortement chargé, la raideur statique est nulle et l'amortissement important. Ce résultat est identique lorsque l'on considère l'influence de la compressibilité dans la chambre, pour une excitation synchrone correspondant à la vitesse de rotation.

Lorsque le système est chargé, pour une position correspondant au 1/3 de son ouverture ($h_1 \approx 0,06\text{mm}$), la raideur est maximale et l'amortissement proche de sa valeur minimale.

Pour une excitation quelconque, appliquée sur le système, la prise en compte de la compressibilité du fluide dans la chambre montre que:

La raideur:

- varie en fonction de la fréquence d'excitation dans le cas où la butée est faiblement ou moyennement chargée (par exemple, pour $h_1=0,05\text{mm}$, la raideur est presque doublée quand on passe de 60 à 200 hertz)

- est peu influencée quand le chargement est important (grande ouverture de h_1).

L'amortissement:

- varie en fonction de la fréquence d'excitation dans le cas où la butée est faiblement chargée(pour $h_1=0,05\text{mm}$, l'amortissement diminue dans un rapport 3 lorsque l'on passe de 60 à 200 hertz).

- est peu influencé par une charge moyenne ou forte.

5. ETUDE STATIQUE ET DYNAMIQUE EN REGIME TURBULENT

5.1 POSITION DU PROBLEME DE LA TURBULENCE

Pour des vitesses de rotation élevées du rotor de la machine ou des fluides peu visqueux, l'hypothèse d'écoulement laminaire ne peut plus être conservée. Il est alors nécessaire d'introduire dans l'équation de Reynolds des termes qui prennent en compte la turbulence.

La transition entre le régime laminaire et turbulent s'effectue lorsque le nombre de Reynolds lié à l'épaisseur du film visqueux atteint une valeur critique comprise entre 1000 et 2000[11].

Taylor [8] a montré que, dans le cas d'un palier cylindrique, il peut se produire un autre régime d'écoulement, le régime tourbillonnaire, à partir de l'écoulement laminaire. Le critère de transition est donné par le nombre de Taylor:

$$T = \Re_e \sqrt{\frac{h}{R}}$$

où \Re_e : nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne du fluide

h : jeu radial

R : rayon du palier

Les tourbillons de Taylor apparaissent dès que le nombre de Taylor atteint une valeur approximative de 41.

Plusieurs chercheurs (Wilcock[19]) ont observé un comportement identique dans les butées hydrodynamiques. Le régime tourbillonnaire correspond dans certains cas au passage du régime laminaire au régime turbulent [11].

Un écoulement turbulent peut être considéré comme un écoulement présentant un phénomène aléatoire pour lequel la vitesse, la pression, fluctuent dans le temps et l'espace autour d'une valeur moyenne (si l'écoulement est stationnaire).

Posons

$$\bar{u} = \bar{u}_m + u'$$

$$p = p_m + p'$$

où \bar{u}_m et p_m sont les valeurs moyennes et u' et p' les fluctuations.

Moyennant l'introduction de la viscosité turbulente, les équations de la mécanique des fluides, écrites pour les vitesses moyennes, s'écrivent "comme" en laminaire.

Différents modèles traduisent le comportement turbulent du fluide. L'hypothèse de longueur de mélange de Prandtl, liée à l'hypothèse de Boussinesq, est fréquemment utilisée pour exprimer les différentes composantes du tenseur de Reynolds en fonction d'une viscosité turbulente [7].

La viscosité turbulente est exprimée en fonction des gradients de vitesses moyennes.

$$v_t = l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \quad (6-1)$$

où l est la longueur de mélange qui est une fonction de la cote z , s'annulant près des parois

Constantinescu et après lui divers auteurs[11] ont montré que pour un écoulement turbulent de type Couette dominant, les effets de la turbulence pouvaient être pris en compte par l'introduction de d'un coefficient K_r .

5.2 LES ÉQUATIONS DE REYNOLDS EN RÉGIME TURBULENT

5.2.1 Equations de Reynolds

Constantinescu a montré que:

la vitesse moyenne radiale s'écrit:

$$u_m = -\frac{h^2}{\mu K_r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{3}{10} \frac{\rho \omega^2 r}{\mu K_r} h^2 \quad (6-2)$$

la vitesse moyenne tangentielle étant toujours:

$$v_m = \frac{r \omega}{2} \quad (6-3)$$

L'équation de Reynolds qui traduit la conservation de la masse s'écrit alors:

$$r K_r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + K_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial K_r}{\partial r} (C - r \frac{\partial p}{\partial r}) - B \frac{\partial h}{\partial t} - A = 0 \quad (6-4)$$

où:

$$A = \frac{3}{5} \rho \omega^2 r K_r$$

$$B = \frac{\mu r}{h^3} K_r^2$$

$$C = \frac{3}{10} \rho \omega^2 r^2$$

5.2.2 Calcul du coefficient turbulent K_r

Le coefficient turbulent K_r est une fonction du nombre de Reynolds. Actuellement, à partir des travaux de Constantinescu, Elrod, et Pan [11], l'étude de la turbulence est simplifiée en distinguant les deux types d'écoulement suivants et en donnant pour chacun d'eux des coefficients turbulents K_r différents.

5.2.2.1 Ecoulement de Couette prépondérant dû à la rotation de l'arbre.

Constantinescu fournit pour K_r l'expression suivante:

$$G_r = \frac{1}{K_r} = \frac{1}{12 + 0,0136 \Re_{ec}^{0.9}} \quad (6-5)$$

où \Re_{ec} représente le nombre de Reynolds moyen basé sur la vitesse de rotation de l'arbre:

$$\Re_{ec} = \frac{\rho r \omega h}{\mu} \quad (6-6)$$

avec

ρ = masse volumique du fluide

r = rayon local

ω = vitesse de rotation de l'arbre

μ = viscosité dynamique

h = diamètre hydraulique équivalent

Cette relation est valable pour des valeurs du nombre de Reynolds moyen comprises entre $2 \cdot 10^3$ et $3 \cdot 10^4$.

5.2.2.2 *Ecoulement de Poiseuille prépondérant dû à la pression.*

Constantinescu fournit pour K_r l'expression suivante:

$$G_r = \frac{1}{K_r} = \frac{6,8}{\Re_{ep}^{0.681}} \quad (6-7)$$

où \Re_{ep} représente le nombre de Reynolds moyen basé sur la vitesse moyenne du fluide:

$$\Re_{ep} = \frac{\rho w_m h}{\mu}$$

avec

$$w_m = \sqrt{u_m^2 + v_m^2} \quad \text{vitesse moyenne}$$

h = diamètre hydraulique équivalent

ρ = masse volumique

μ = viscosité dynamique

Cette relation est valable pour des valeurs du nombre de Reynolds moyen comprises entre $2 \cdot 10^3$ et 10^5 .

5.2.2.3 *Linéarisation*

Les viscosités apparentes sont calculées pour des nombres de Reynolds (de Couette et Poiseuille) supérieurs à 2000. De manière à éviter des discontinuités pour cette valeur, il est effectué une linéarisation pour un nombre de Reynolds compris entre 1000 et 2000 (Voir annexe1).

En conclusion :

Écoulement de Couette

- Pour $\Re_{ec} < 1000$

$$G_{rc} = \frac{1}{12} = \frac{1}{K_r}$$

- Pour $1000 < \Re_{ec} < 2000$

$$G_{rc} = G_{rc2000} + \left(\frac{1}{12} - G_{rc2000}\right)\left(2 - \frac{\Re_{ec}}{1000}\right) \quad (6-8)$$

où G_{rc2000} est la valeur calculée à l'aide de la formule (6-5) pour une valeur du nombre de Reynolds de 2000.

- Pour $\Re_{ec} > 2000$ G_r est calculé à l'aide de l'expression (6-5)

Écoulement de Poiseuille

- Pour $\Re_{ep} < 1000$

$$G_{rp} = \frac{1}{12} = \frac{1}{K_r}$$

- Pour $1000 < \Re_{ep} < 2000$

$$G_{rp} = G_{rp2000} + \left(\frac{1}{12} - G_{rp2000}\right)\left(2 - \frac{\Re_{ep}}{1000}\right) \quad (6-9)$$

où G_{p2000} est la valeur calculée à l'aide de la formule (6-7) pour une valeur du nombre de Reynolds de 2000.

- Pour $Re_c > 2000$ Gr est calculé à l'aide de l'expression (6-7)

5.2.2.4 Règle de calcul de K_r .

L'écoulement dominant est celui pour lequel les coefficients de viscosité prennent la valeur la plus petite.

Pratiquement, les valeurs retenues pour les coefficients turbulents sont:

$$Gr = \min(Gr_c, Gr_p)$$

Si l'écoulement présente une dominante (Couette ou Poiseuille), la valeur retenue pour le coefficient Gr est celui de la dominante.

5.2.2.5 Diagramme récapitulatif

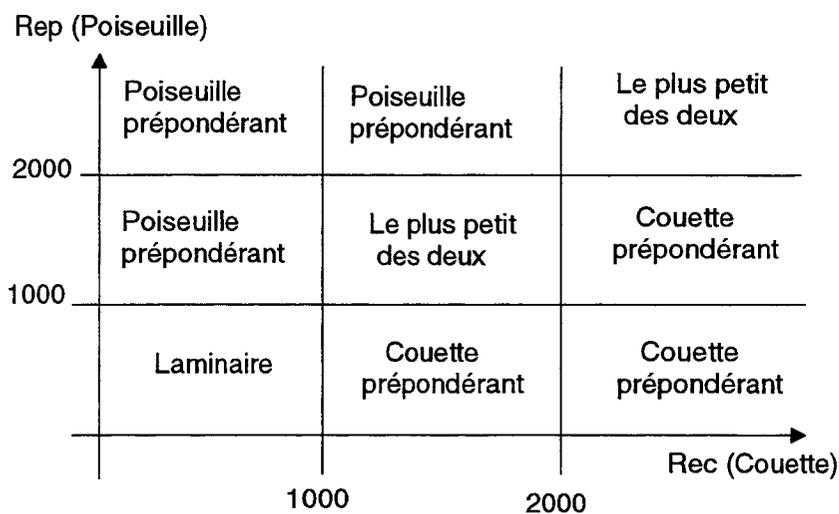


Tableau 2

5.3 APPLICATION AU MODELE ETUDIE

Le fluide est supposé Newtonien, isotherme. Dans les laminages, l'écoulement est quasi permanent, incompressible, laminaire ou turbulent, avec prise en compte des forces d'inertie centrifuges dues à la rotation de la roue. Dans la chambre, la compressibilité du fluide est prise en compte.

Les faces des laminages sont supposées parallèles.

Le comportement du dispositif est étudié à partir de la répartition des pressions et des vitesses à l'intérieur du domaine d'étude.

Dans les glaces supérieure et inférieure, l'écoulement est régi par l'équation de Reynolds qui est une équation elliptique nécessitant pour sa résolution la connaissance des conditions aux limites. Pour les fixer, on utilise des équations de raccordement de type Bernoulli en entrée et sortie de chaque glace.

5.3.1 Mise en équation du dispositif

La résolution numérique impose le choix d'un maillage établi comme suit:

Chaque glace est discrétisée en 10 noeuds régulièrement espacés le long d'un même rayon.

La chambre comporte deux noeuds afin de tenir compte de la chute de pression (due à la perte de charge singulière) en sortie de glace supérieure 1 et en entrée de glace inférieure 2.

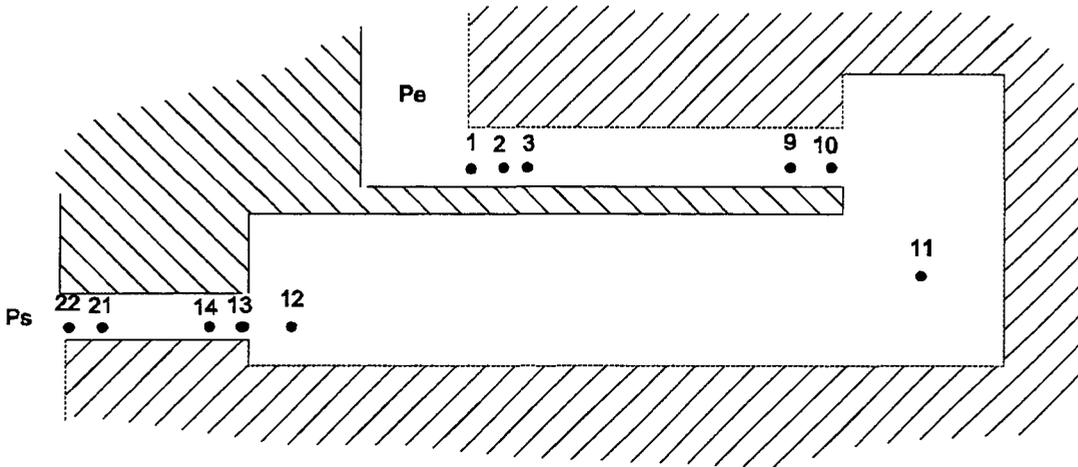


Figure 10: Discrétisation du dispositif

Nous pouvons donc écrire:

$$\text{Noeud 1: } p_e + \frac{1}{2} \rho u_e^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (1 + z_1) u_1^2 \quad (6-10)$$

Noeuds 2 à 10: Discrétisation de l'équation de Reynolds

$$\text{Noeud 11: } p_{10} + \frac{1}{2} \rho (1 - z_{10}) u_{10}^2 = p_{11} + \frac{1}{2} \rho u_{11}^2 \quad (6-11)$$

$$\text{Noeud 12: } p_{11} + \frac{1}{2} \rho (1 - z_{11}) u_{11}^2 = p_{12} + \frac{1}{2} \rho u_{12}^2 \quad (6-12)$$

$$\text{Noeud 13: } p_{12} + \frac{1}{2} \rho u_{12}^2 = p_{13} + \frac{1}{2} \rho (1 + z_3) u_{13}^2 \quad (6-13)$$

Noeuds 14 à 22 : Discrétisation de l'équation de Reynolds

$$\text{Noeud 22: } p_{22} + \frac{1}{2} \rho (1 - z_s) u_{22}^2 = p_s + \frac{1}{2} \rho u_s^2 \quad (6-14)$$

Les z_i représentent les différentes pertes singulières de charge au noeud i .

Les équations de Bernoulli, avec pertes de charge, font intervenir les pressions et les vitesses en chaque point du fluide. Il est donc nécessaire d'écrire les équations de conservation des débits aux différents points du maillage afin de connaître la répartition des vitesses dans tout le dispositif:

$$S_e u_e = S_1 u_1 \quad (6-15)$$

$$S_1 u_1 = S_{10} u_{10} + S_{gl1} \dot{h}_{gl1} \quad (6-16)$$

$$S_{10} u_{10} = S_{11} u_{11} \quad (6-17)$$

Dans la chambre, l'équation de continuité se traduit par:

Débit du laminage 1 = Débit du laminage 2 + Débit dû au mouvement du piston + Débit de compressibilité de la chambre

$$S_{11} u_{11} = S_{12} u_{12} + S_{ch} \dot{h}_{ch} + V_{ch} \chi \frac{dP_{ch}}{dt} \quad (6-18)$$

$$S_{12} u_{12} = S_{13} u_{13} \quad (6-19)$$

$$S_{13} u_{13} = S_{22} u_{22} + S_{gl2} \dot{h}_{gl2} \quad (6-20)$$

$$S_{22} u_{22} = S_s u_s \quad (6-21)$$

5.3.2 Discrétisation de l'équation de Reynolds

Nous pouvons utiliser une méthode de différences finies, consistant à remplacer l'équation aux dérivées partielles par un système d'équations linéaires écrites en chaque point du maillage de la glace.

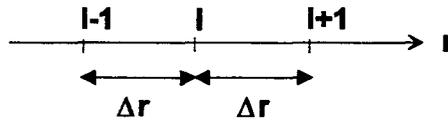


Figure 11: Discrétisation au noeud i

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2\Delta r} \quad (6-22)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}}{\Delta r^2} \quad (6-23)$$

en remplaçant dans l'équation de Reynolds (6-4) et en regroupant les termes de même indice, nous obtenons:

$$\text{Coefficient de } P_{i-1} = \frac{r Kr}{\Delta r^2} - \frac{Kr}{2\Delta r} + \frac{r}{2\Delta r} \frac{\partial Kr}{\partial r}$$

$$\text{Coefficient de } P_i = -2 \frac{r Kr}{\Delta r^2}$$

$$\text{Coefficient de } P_{i+1} = \frac{r Kr}{\Delta r^2} + \frac{Kr}{2\Delta r} - \frac{r}{2\Delta r} \frac{\partial Kr}{\partial r}$$

Second membre associé au noeud i :

$$sm(i) = -C \frac{\partial Kr}{\partial r} + B \left(\dot{h} + \frac{h}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + A$$

5.3.3 Schéma de calcul

La méthode de résolution retenue est celle des petites perturbations [20].

Les solutions des équations stationnaires fournissent la distribution de pression et de vitesse à l'intérieur du dispositif qui permettent de calculer les caractéristiques statiques (charge, débit), dans la phase 1 du calcul.

Les caractéristiques dynamiques (coefficient de raideur et d'amortissement) sont obtenues en imposant une excitation harmonique (phase 2 du calcul).

La loi sur la hauteur s'écrit alors:

$$h_i = h_{i0} + h_{1i}^* e^{i\omega^* t} \quad (6-24)$$

où h_{i0} est la position de référence de la glace, h_{1i}^* ($= \varepsilon h_{i0}$, où ε petit) est la perturbation développée autour de la position de référence h_{i0} , ω^* est la pulsation d'excitation.

Les valeurs h_{1i}^* , ω^* sont des valeurs réelles.

Ces perturbations induisent des perturbations sur les pressions et les vitesses

Posons :

$$p_i = p_{i0} + p_{1i}^* e^{i\omega^* t} \quad (6-25)$$

$$v_i = v_{i0} + v_{1i}^* e^{i\omega^* t} \quad (6-26)$$

où P_{i0} , V_{i0} représentent la valeur de la pression et de la vitesse au noeud i pour le mouvement stationnaire et P_{1i}^* et V_{1i}^* les perturbations autour de la valeur de référence au noeud i . D'une manière générale, les valeurs P_{1i}^* et V_{1i}^* sont des valeurs complexes.

Après remplacement dans les équations primitives et en ne retenant que les termes du premier ordre en p^* et v^* (solutions d'ordre 1), nous obtenons un nouveau système d'équations linéaires dont les solutions donnent les valeurs des fluctuations de pression et de vitesse.

5.3.3.1 Solutions d'ordre zéro

Les équations (6-10) à (6-21) forment le système à résoudre. La répartition de vitesse à l'intérieur du dispositif est donnée par les équations (6-15) à (6-21) dans lesquelles:

$$\dot{h}_{ch} = \dot{h}_{gl1} = \dot{h}_{gl2} = 0$$

$$\frac{dP_{ch}}{dt} = 0$$

Les pressions vérifient le système d'équations (6-10)à (6-14). Cet ensemble forme un système matriciel tridiagonal 22x22:

$P_{(i)}^k$: Pression au noeud i à la k ème itération.

$\hat{P}_{(i)}^{k+1}$: Pression au noeud i calculée à partir de $P_{(i)}^k$ à la $k+1$ itération.

ω : Facteur de surelaxation pris égal à 1,7.

Une difficulté doit être surmontée: Les coefficients de l'équation de Reynolds intervenant dans la matrice et le second membre dépendent des vitesses du fluide par l'intermédiaire de relations non linéaires dans lesquelles doit être calculé le nombre de Reynolds.

Le régime d'équilibre est recherché en opérant une itération sur la vitesse d'entrée u_e . Les autres vitesses sont calculées à l'aide des équations (6-15) à (6-21). Les pressions correspondantes sont déterminées à l'aide des équations (6-10) à (6-11) (entre l'entrée du mécanisme (p_e) et le noeud 11 (p_{11})) et des équations (6-12) à (6-14) (entre le noeud 11 (p_{11}) et la sortie du mécanisme (p_s)). Le régime recherché est atteint lorsque les deux valeurs de p_{11} sont comparables (erreur relative de l'ordre de 10^{-3}).

SCHEMA DE CALCUL:

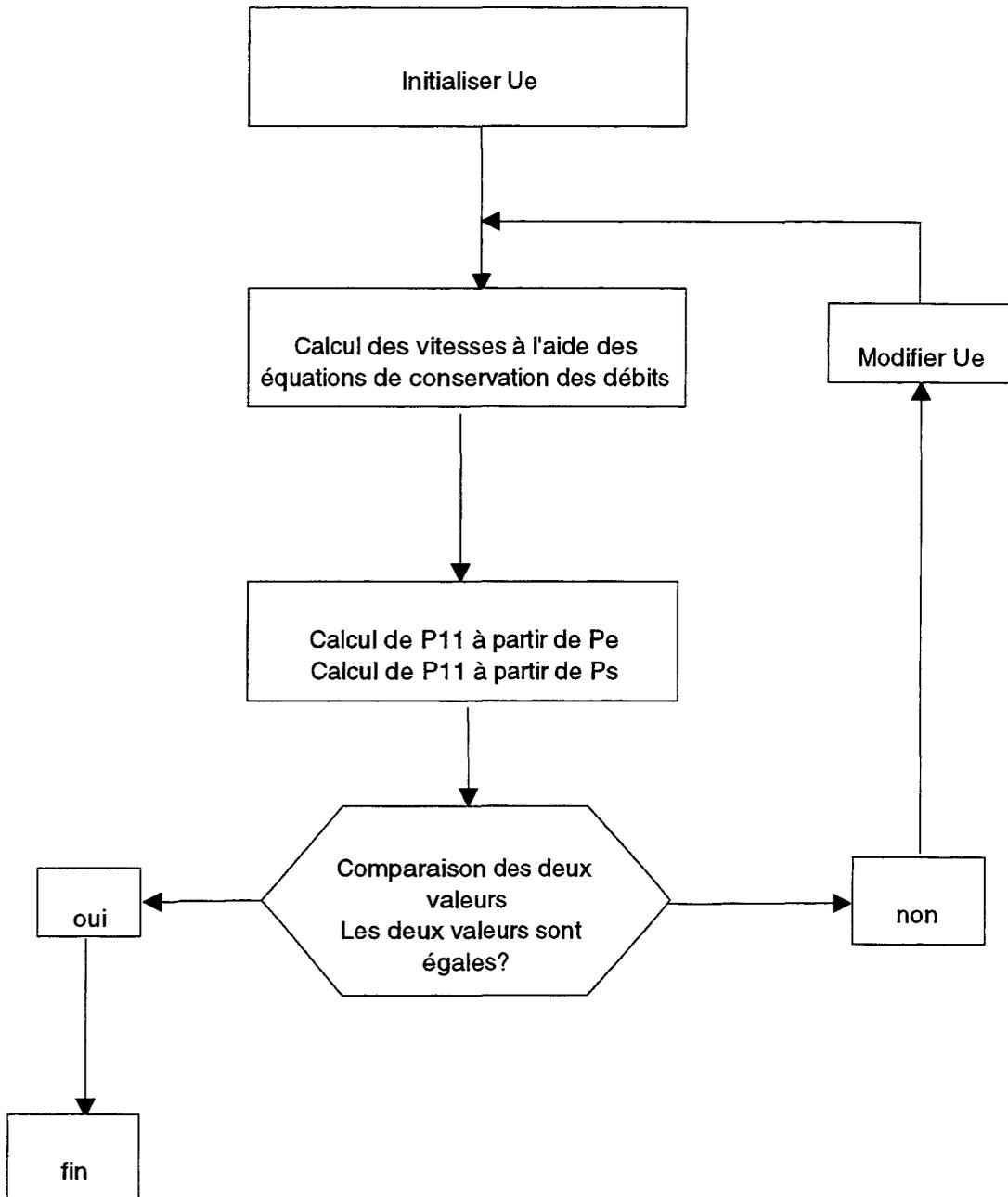


Figure 12: Diagramme de résolution des équations à l'ordre zéro

5.3.3.2 Solution d'ordre 1

Le but de cette linéarisation est de déterminer quelle est la variation de pression et de vitesse pour une perturbation donnée sur la hauteur. Les solutions du premier ordre proviennent des équations (6-10) à (6-21). Elles fournissent les valeurs des fluctuations de pression P_i^* et de vitesse V_i^* en chaque noeud i (en séparant partie réelle et imaginaire).

Posons:

$P_r^*(i)$ = Partie réelle de la fluctuation de pression au noeud i .

$P_i^*(i)$ = Partie imaginaire de la fluctuation de pression au noeud i .

$V_r^*(i)$ = Partie réelle de la fluctuation de vitesse au noeud i .

$V_i^*(i)$ = Partie imaginaire de la fluctuation de vitesse au noeud i .

Nous obtenons un système linéaire 60x60:

$$[ta(i, j)] \times [tx(i)] = [sm(i)] \quad (6-28)$$

où

$[tx(i)] = (u_r(e), u_i(e), \dots, p_r(1), p_i(1), \dots, p_r(22), p_i(22))$

$[sm(i)]$ = Second membre

$[ta(i, j)]$ = Matrice 60x60 des coefficients de $tx(i)$

Ce système peut être résolu directement, par inversion, en effectuant un conditionnement de la matrice $[ta(i, j)]$.

Les valeurs des fluctuations de pression étant obtenues en tout point du dispositif, nous pouvons calculer la résultante des forces de pression (partie réelle et imaginaire) par intégration des variations du champ de pression dans la glace1, dans la chambre, et dans la glace2.

Posons:

$$F^* = F_{ch}^* + F_{gl2}^* - F_{gl1}^* \quad (6-29)$$

où

$$F_{ch}^* = \int_{Sch} P_{ch}^* ds : \text{Force due à la fluctuation de pression dans la chambre.}$$

$$F_{gl2}^* = \int_{Sgl2} P_{gl2}^* ds : \text{Force due à la fluctuation de pression dans la glace2.}$$

$$F_{gl1}^* = \int_{Sgl1} P_{gl1}^* ds : \text{Force due à la fluctuation de pression dans la glace1.}$$

Nous pouvons calculer, après séparation en partie réelle et imaginaire:

La raideur:

$$k = \frac{\partial F}{\partial h_{gl1}} = \frac{\Re(F^*)}{h_{gl1}^*} \quad (6-30)$$

L'amortissement:

$$b = \frac{\partial F}{\partial \dot{h}_{gl1}} = \frac{\Im(F^*)}{\omega h_{gl1}^*} \quad (6-31)$$

où h_{gl1}^* est la fluctuation de hauteur de la glace 1.

5.3.3.3 Recalage des modèles: Ecoulement laminaire - Comparaison entre le modèle analytique et le modèle numérique. Choix d'un nouveau modèle et d'une nouvelle méthode de résolution.

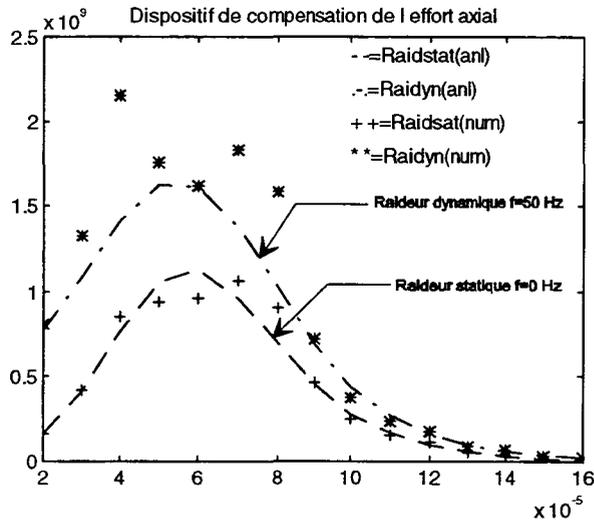


Figure 13: Comparaison de l'évolution de la raideur entre le modèle analytique et le modèle numérique

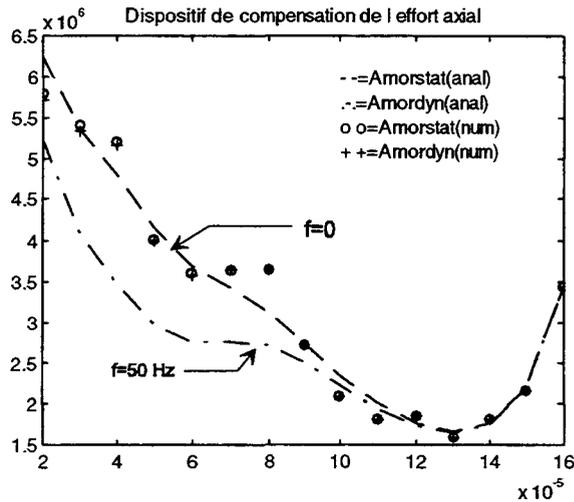


Figure 14: Comparaison de l'évolution de l'amortissement entre le modèle analytique et le modèle numérique

La Figure 13 et la Figure 14 donnent les résultats de la comparaison entre le modèle analytique et le modèle numérique pour les mêmes conditions de données (coefficients de perte de charge singulière nuls).

La Figure 13 montre un problème de perturbation numérique sur le calcul de la raideur dynamique (en régime d'excitation à 50 Hz). Par contre les autres corrélations concernant la raideur statique et l'amortissement sont acceptables. Ce problème provient, en partie, du choix de l'interpolation centrée servant à exprimer les valeurs de la dérivée première de la pression $\frac{\partial P}{\partial r}$ et de la dérivée seconde de la pression $\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$ dans l'équation de Reynolds. Pour lever cette difficulté, il est possible d'utiliser un maillage décalé , d'une demi cellule, pour le champ de vitesse.

Une autre méthode a été mise en oeuvre. Afin d'éviter le calcul de la dérivée seconde $\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$,

l'équation de Reynolds (6-4) a été remplacée par son équivalent, l'équation de conservation de débit, les vitesses étant directement exprimées par la relation (6-2):

$$u_m = -\frac{h^2}{\mu k_r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{3}{10} \frac{\rho \omega^2 r}{\mu k_r} h^2$$

Les solutions d'ordre zéro donnent directement la répartition de pression en chaque maille.

Posons

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta r}$$

L'équation (6-2) donne:

$$P_{(i+1)} = P_{(i)} + \Delta r \left[\frac{3}{10} \rho \omega^2 r(i) - \frac{\mu Kr(i)u(i)}{h^2} \right] \quad (6-32)$$

Le schéma de calcul est de même structure que le schéma originel. Les équations linéarisées au premier ordre (voir annexe2) donnent un système matriciel 92x92 de même structure que celui du (6-28):

$$[ta(i, j)] \times [tx(i)] = [sm(i)]$$

Les figures suivantes montrent la comparaison entre les résultats analytiques et les nouveaux résultats numériques.

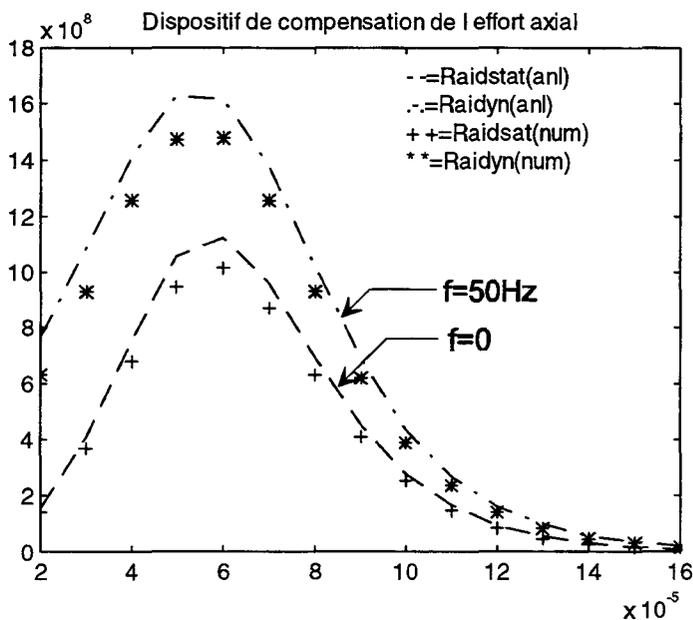


Figure 15: Nouvelles corrélations sur la raideur entre le modèle analytique et le modèle numérique

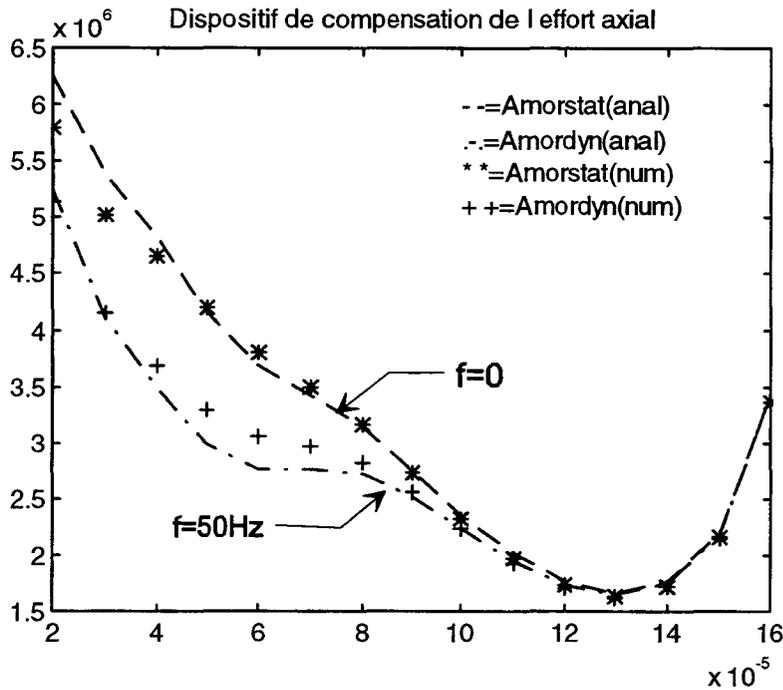


Figure 16: Nouvelles corrélations sur l'amortissement entre le modèle analytique et le modèle numérique

L'étude des figures précédentes montre une bonne corrélation entre les résultats analytiques et numériques (l'utilisation d'un maillage plus fin permettrait d'améliorer la superposition des solutions). Cette validation en laminaire, dans les conditions du modèle analytique, permet de justifier l'utilisation de ce code numérique en régime laminaire et turbulent.

5.3.4 Influence des paramètres du problèmes

En régime turbulent ou laminaire, la connaissance des coefficients de perte de charge singulière est indispensable pour le traitement du problème numérique.

Comme source de référence, l'ouvrage d'I.E. IDEL'CIK [12] a été utilisé.

5.3.4.1 Laminage supérieur

L'entrée du laminage supérieur est un rétrécissement brusque.

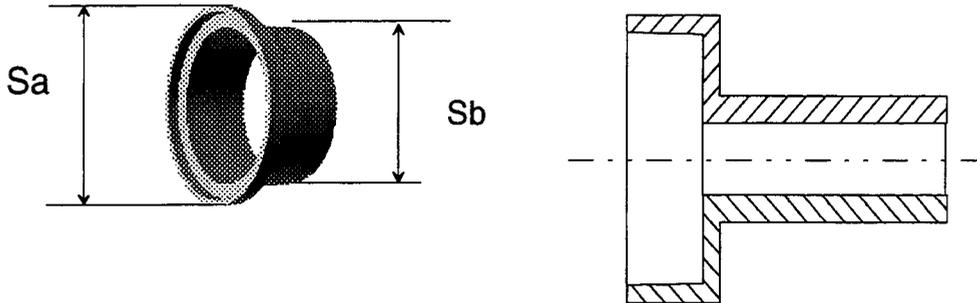


Figure 17: Rétrécissement brusque

Le coefficient de perte de charge s'écrit:

$$z = 0,5 \times \left(1 - \frac{Sb}{Sa}\right) \quad (6-33)$$

où Sa et Sb sont les surfaces d'entrée et de sortie. Dans notre cas, Sa est très grand devant Sb .

Nous obtenons une valeur de z égal à 0,5. Mais des réserves sont à formuler sur la valeur précédente. En effet la configuration réelle, voir figure n° 18 ,montre un changement de direction du fluide que l'on peut assimiler à un coude avec rétrécissement:

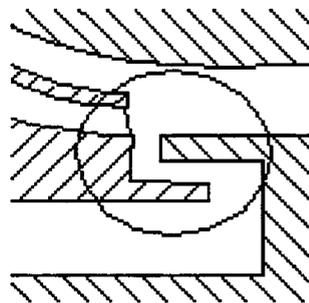


Figure 18: Schéma du laminage supérieur

Dans ce cas le coefficient de perte de charge peut s'écrire:

$$z = A_1 \cdot C_1 \cdot z'$$

où:

- $A_1=1$: coude à 90°
- $C_1=1$: $A_0/B_0 > 7$
- z' varie de 0,05 à 0,3 : S_1/S_0 varie de 0,3 à 0,04

La rotation du dispositif entraîne une perturbation sur les vitesses d'entrée de laminage. De plus les paramètres géométriques du mécanisme montrent que l'entrée de glace supérieure est plus assimilée à une fente étroite qu'à un coude avec rétrécissement. Aussi la valeur retenue manque de précision, étant en partie en dehors du domaine de validité des résultats présentés par I.E. IDEL'CIK.

La sortie du laminage supérieur peut être modélisée, en première approximation, par un élargissement brusque. Dans ce cas, le coefficient de perte de charge, ramené à la vitesse de sortie de glace, aura pour valeur approchée:

$$Z=1$$

Ceci pour de faibles valeurs de la hauteur du laminage.

Le fluide pénétrant dans la chambre subit l'influence de deux coudes à 90° pouvant être assimilés à un coude à 180° .

Pour un coude à 180° : Globalisons les différentes pertes de charge:

par élargissement brusque

le premier coude à 90°

la perte par rétrécissement

le second coude à 90°

Le coefficient de perte de charge peut s'écrire:

$$Z = C_1 * Z_m$$

où

Z_m dépend de $B_k/B_0=2$, nous prendrons $Z_m=1$

$$C_1 \text{ dépend de } \frac{A_0}{B_0} = \frac{2\pi r_1}{h_1} \rightarrow \frac{A_0}{B_0} \rangle 3 \rightarrow C_1 = 0,7$$

d'où

$$Z=0,7$$

Pour un coude à 90°: La formule retenue est: $Z=C_1 \times A \times Z_m$

Les valeurs des paramètres géométriques donnent:

$$C_1=0,7$$

$$Z_m=1$$

$$A=1,2$$

Il est à noter que les valeurs précédentes sont imprécises, car on doit extrapoler des courbes hors de leur domaine de définition

d'où

$$Z=0,84$$

En utilisant le même formule pour un coude à 180°, nous trouvons:

$$C_1=0,7$$

$$Z_m=3$$

$$A=1,2$$

donc

$$Z=2,52$$

5.3.4.2 Laminage inférieur

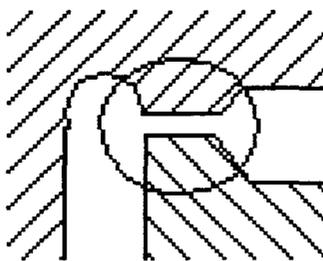


Figure 19: Schéma du laminage inférieur

L'entrée du laminage inférieur se fait par un brusque rétrécissement. Avec les réserves faites précédemment, nous pouvons envisager d'utiliser la formule (6-33):

$$z = 0,5 \times \left(1 - \frac{Sb}{Sa}\right)$$

où Sa et Sb sont les aires des sections d'entrée et de sortie. Cette valeur peut être déterminée à partir de la position du piston d'équilibrage.

La sortie du laminage inférieur se fait par un brusque élargissement. Dans le cas d'un écoulement axisymétrique, nous pouvons poser:

$$z = \left(1 - \frac{Sb}{Sa}\right)^2$$

où Sb et Sa sont les aires des sections d'entrée et de sortie de l'élargissement.

Si Sa est grand devant Sb , nous obtenons:

$$z=1$$

En conclusion, l'utilisation des résultats de l'ouvrage de référence d' I.E. IDEL'CIK pose des problèmes d'interprétation des valeurs à retenir pour les coefficients de perte de charge singulière concernant le mécanisme de la présente étude. Aussi une étude de sensibilité des coefficients dynamiques (raideur et amortissement) aux valeurs de différents coefficients de perte de charge singulière doit être envisagée parallèlement à l'étude de sensibilité en fonction de la géométrie des laminages.

5.4 ETUDE DE SENSIBILITE

5.4.1 Influence de la géométrie des laminages

Les paramètres de base pour l'étude de sensibilité à la géométrie des laminages sont:

Laminage h1:

r1= 0,090 m

r2= 0,095 m, 0,10 m, 0,11 m

Laminage h2:

r3= 0,030 m, 0,040 m, 0,05m

r4= 0,015 m

Hauteur totale des laminages H= 0,0002 m

Pression d'entrée p1= 30 bar

Pression de sortie p4= 10 bar

5: Régime turbulent

Vitesse de rotation	N=	3000	tr/min
Masse volumique	ρ =	1000	kg/m ³
Viscosité dynamique	μ =	0,001	Pa·s
Coefficient de compressibilité	χ =	10E-10	Pa ⁻¹
Volume de la chambre	V_0 =	19. 10 ⁻⁵	m ³
Fréquences d'excitation	ϕ^* =	0 et 500	Hz

Coefficients de perte de charge singulière:

Entrée de laminage supérieur:	$z1$ =	1,5
Sortie de laminage supérieur:	$z2$ =	0,5
Entrée de laminage inférieur:	$z3$ =	0,5
Sortie de laminage inférieur:	$z4$ =	1

5.4.1.1 Laminage supérieur

L'étude porte sur l'évolution des paramètres dynamiques (raideur et amortissement) en fonction de la variation de la largeur du laminage supérieur pour deux fréquences d'excitation:

Modèle statique: $\phi^* = 0$ Hz

Modèle dynamique: $\phi^* = 500$ Hz

5.4.1.1.1 Raideur

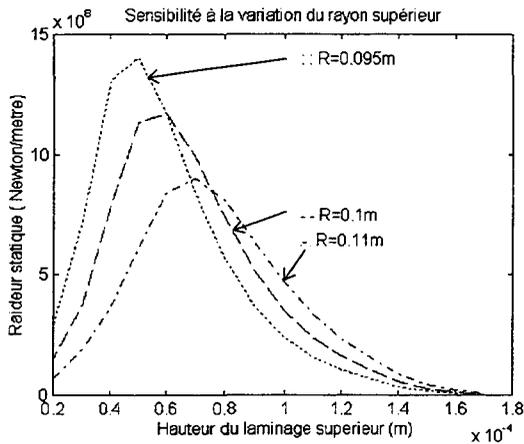


Figure 20: Raideur statique

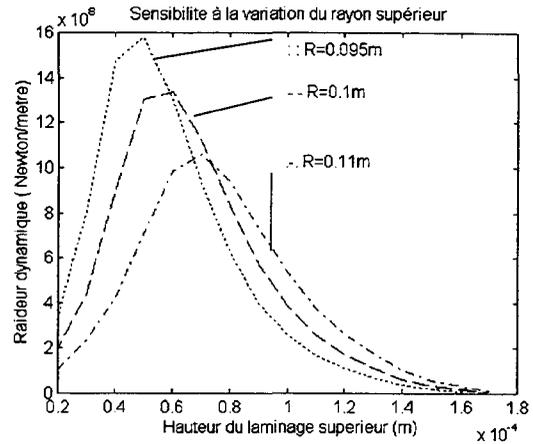


Figure 21: Raideur dynamique

5.4.1.1.2 Amortissement

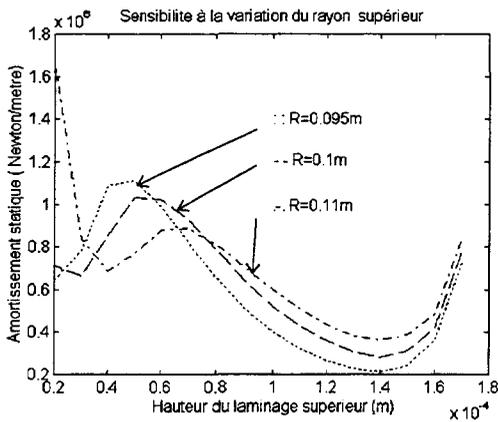


Figure 22: Evolution de l'amortissement à fréquence nulle

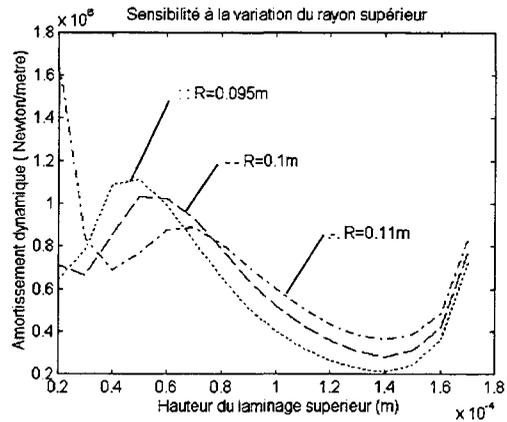


Figure 23: Evolution de l'amortissement dynamique

Les figures 20 et 21 montrent une augmentation de la raideur avec la fréquence d'excitation (phénomène déjà observé en régime d'écoulement laminaire).

Pour une fréquence d'excitation donnée, la raideur maximale augmente significativement lorsque la largeur du laminage supérieur diminue. Par contre, la position de la hauteur du laminage pour laquelle la raideur est maximale croît avec la largeur du laminage supérieur.

Les figures 22 et 23 montrent que la fréquence d'excitation a peu d'influence sur l'évolution de l'amortissement. On retrouve le même phénomène observé pour la raideur: l'amortissement

maximal, dans la plage de hauteur de fonctionnement du mécanisme, augmente lorsque la largeur du laminage supérieur diminue.

5.4.1.2 Laminage inférieur

5.4.1.2.1 Raideur

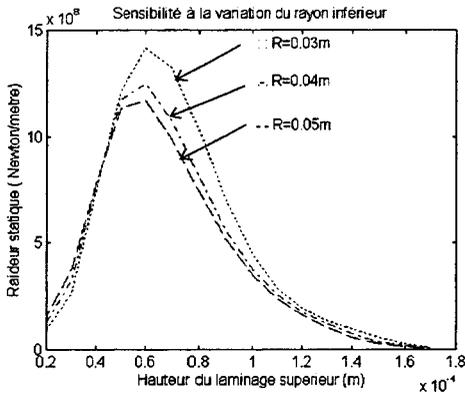


Figure 24: Evolution de la raideur statique

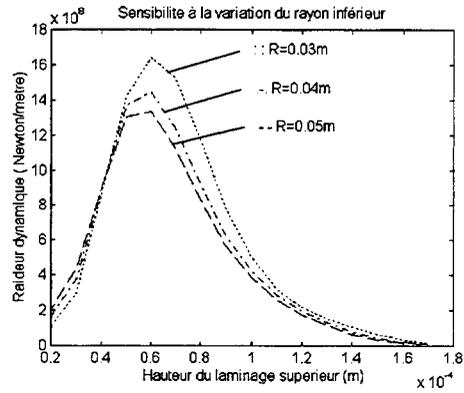


Figure 25: Evolution de la raideur dynamique

5.4.1.2.2 Amortissement

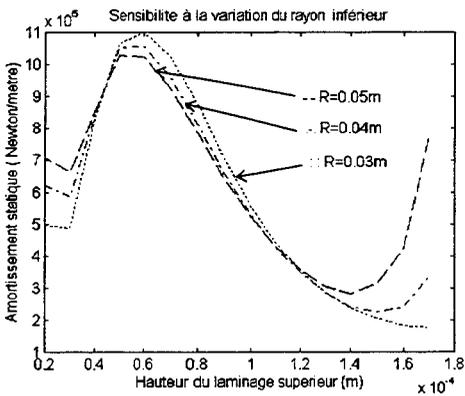


Figure 26: Evolution de l'amortissement à fréquence nulle

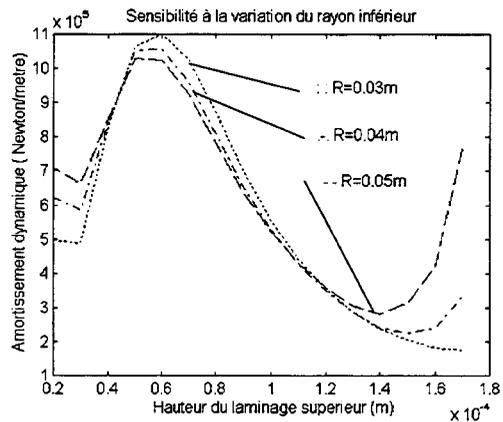


Figure 27: Evolution de l'amortissement dynamique

Les figures 24 et 25 montrent l'évolution de la raideur en fonction de la fréquence d'excitation et de la largeur du laminage inférieur.

Pour une fréquence d'excitation donnée, la raideur maximale augmente lorsque la largeur du laminage inférieur diminue. Par contre l'amortissement (à fréquence nulle ou à 500Hz) est peu sensible à la variation de largeur de glace.

5.4.2 Influence de la valeur des coefficients de perte de charge singulière

Les paramètres de base pour l'étude de sensibilité aux coefficient de perte de charge singulière sont:

Laminage h1:

$$r1= 0,090 \text{ m}$$

$$r2= 0,1 \text{ m}$$

Laminage h2:

$$r3= 0,050 \text{ m}$$

$$r4= 0,015 \text{ m}$$

Hauteur totale des laminages	H=	0,0002	m
Pression d'entrée	p1=	30	bar
Pression de sortie	p4=	10	bar
Vitesse de rotation	N=	3000	tr/min
Masse volumique	ρ =	1000	kg/m ³
Viscosité dynamique	ν =	0,001	Pl
Coefficient de compressibilité	χ =	10E-10	Pa-1
Volume de la chambre	V ₀ =	19. 10-5	m ³
Fréquences d'excitation	ϕ^* =	0 et 500	Hz

5.4.2.1 Variation d'un seul coefficient de perte de charge singulière.

Pour cette étude de sensibilité, tous les coefficients de perte de charge sont initialisés à zéro.

Les courbes de raideur et d'amortissement (en fonctionnement statique $\phi^*=0$ et en fonctionnement dynamique $\phi^*= 500$ Hz) sont tracées en fonction de la position de la hauteur du laminage supérieur pour 3 valeurs différentes du coefficient de perte de charge pris en compte:

$$z_{i1}= 0,1 \quad z_{i2}= 5 \quad z_{i3}= 10$$

5.4.2.1.1 Entrée de laminage supérieur: z_1

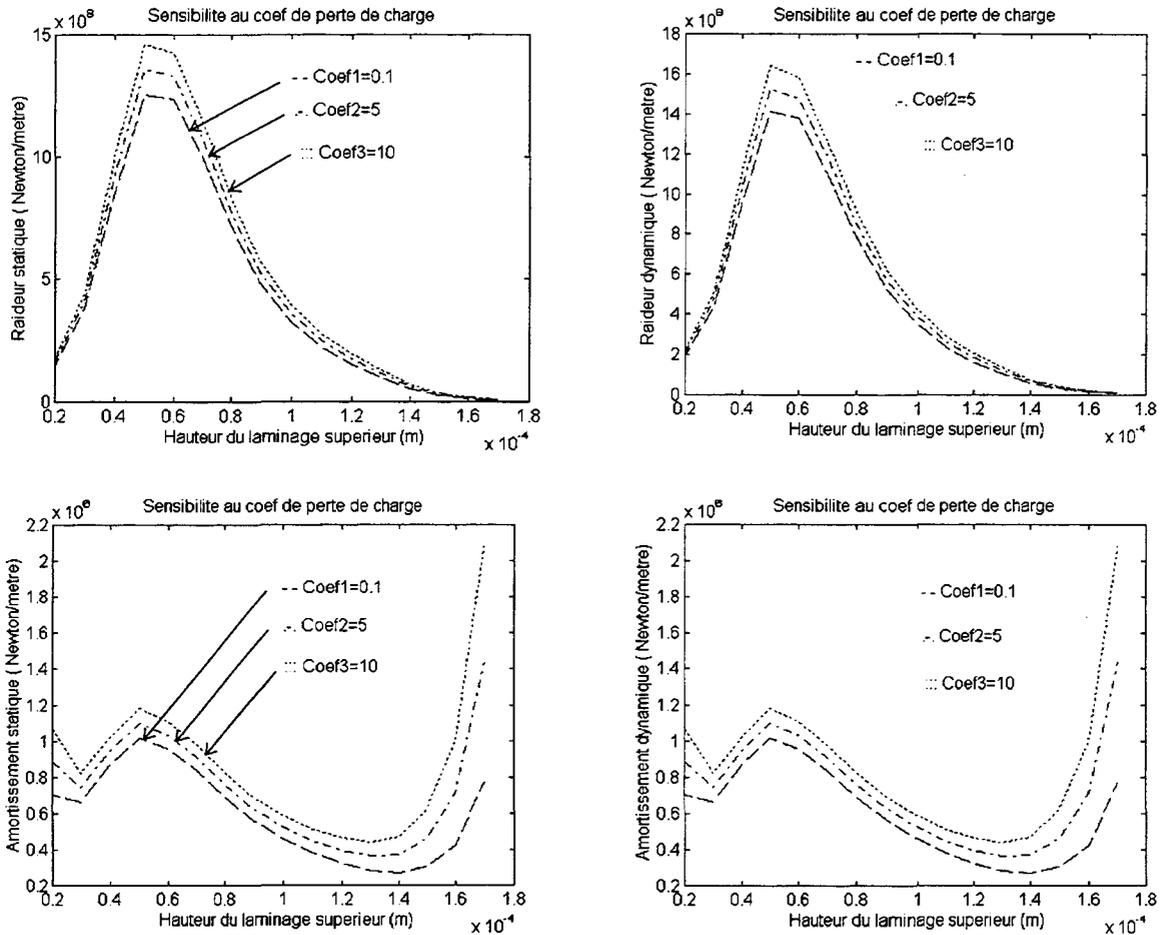


Planche 1: Evolution des coefficients dynamiques en fonction de la valeur du coefficient de perte de charge singulière en entrée de glace supérieure

5.4.2.1.2 Sortie de laminage supérieur: z10

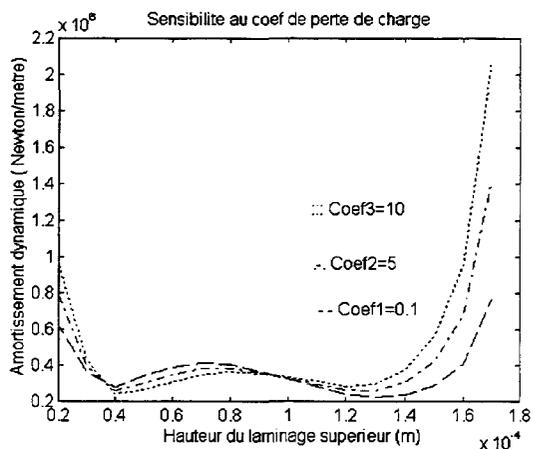
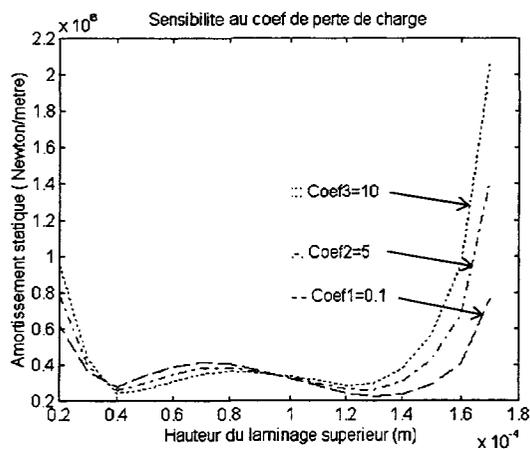
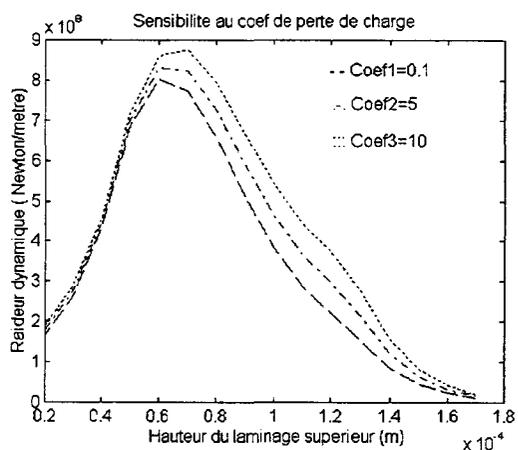
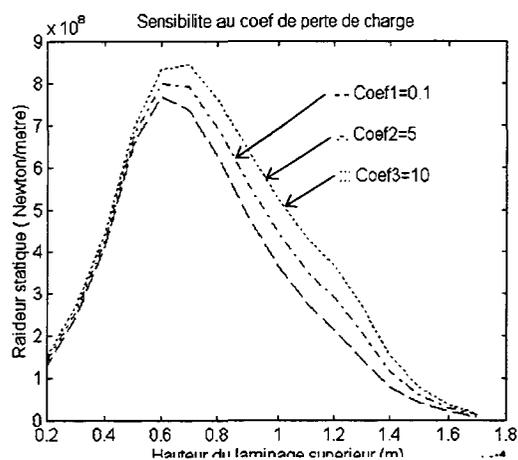


Planche 2: Evolution des coefficients dynamiques en fonction de la valeur du coefficient de perte de charge singulière en sortie de glace supérieure.

5.4.2.1.3 Entrée de laminage inférieur: z3

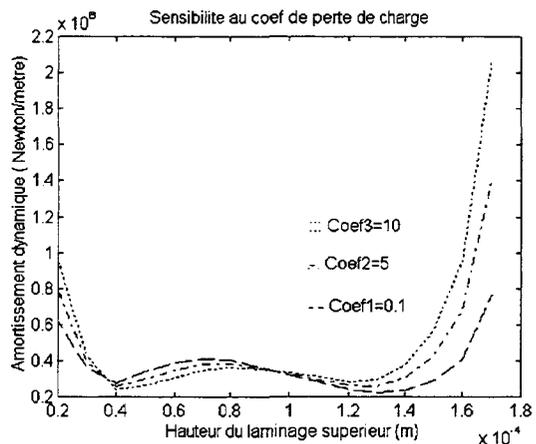
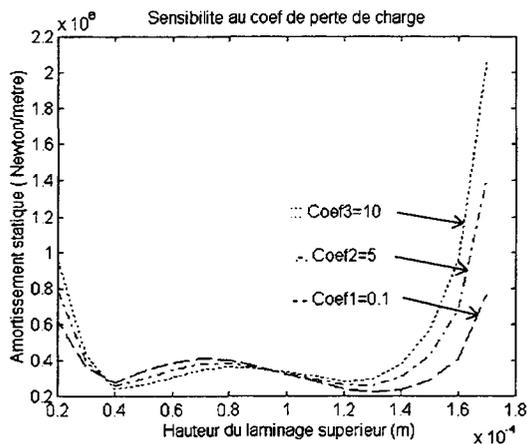
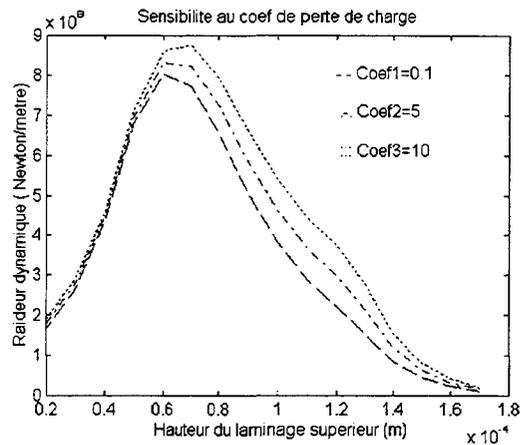
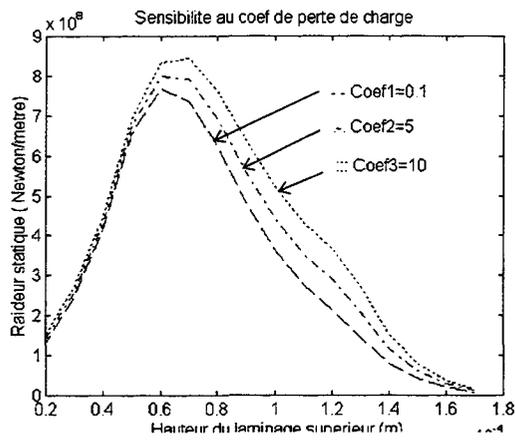


Planche 3: Evolution des coefficients dynamiques en fonction de la valeur du coefficient de perte de charge singulière en entrée de glace inférieure.

5.4.2.1.4 Sortie de laminage inférieur: zs

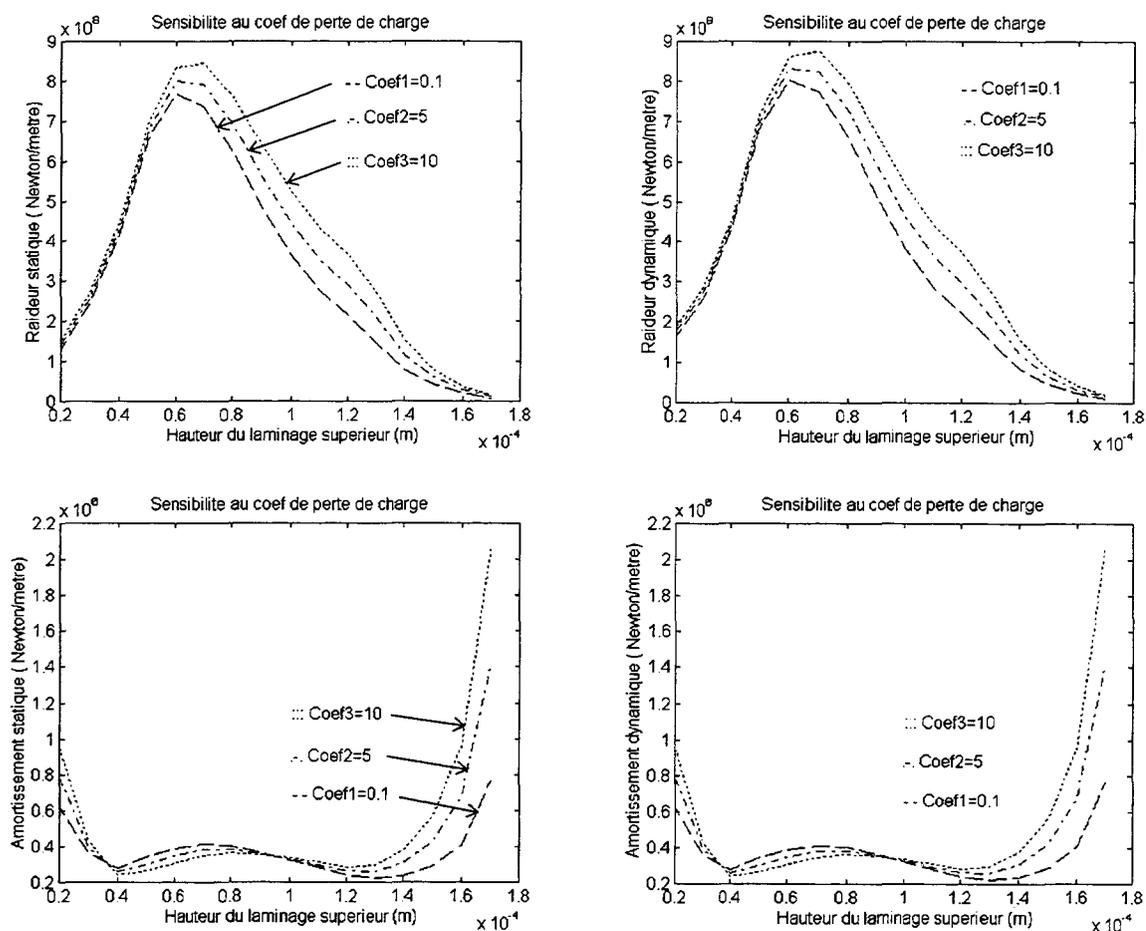


Planche 4: Evolution des coefficients dynamiques en fonction de la valeur du coefficient de perte de charge singulière en sortie de glace inférieure.

Les planches 1 à 4 montrent que la raideur et l'amortissement (en fonctionnement statique ou dynamique) sont peu sensibles à la variation de la valeur d'un seul coefficient de perte de charge singulière, dans la plage de variation de la hauteur du laminage (correspondant au fonctionnement de la machine).

5.4.2.2 Variation simultanée de tous les coefficients de perte de charge singulière.

Pour cette étude de sensibilité, tous les coefficients de perte de charge évoluent simultanément.

Les courbes de raideur et d'amortissement (en fonctionnement statique $\phi^*=0$ et en fonctionnement dynamique $\phi^*= 500$ Hz) sont tracées en fonction de la position de la hauteur du laminage supérieur pour 3 valeurs différentes des coefficients de perte de charge pris en compte:

$$z_{i1}= 0,1 \quad z_{i2}= 1 \quad z_{i3}= 2$$

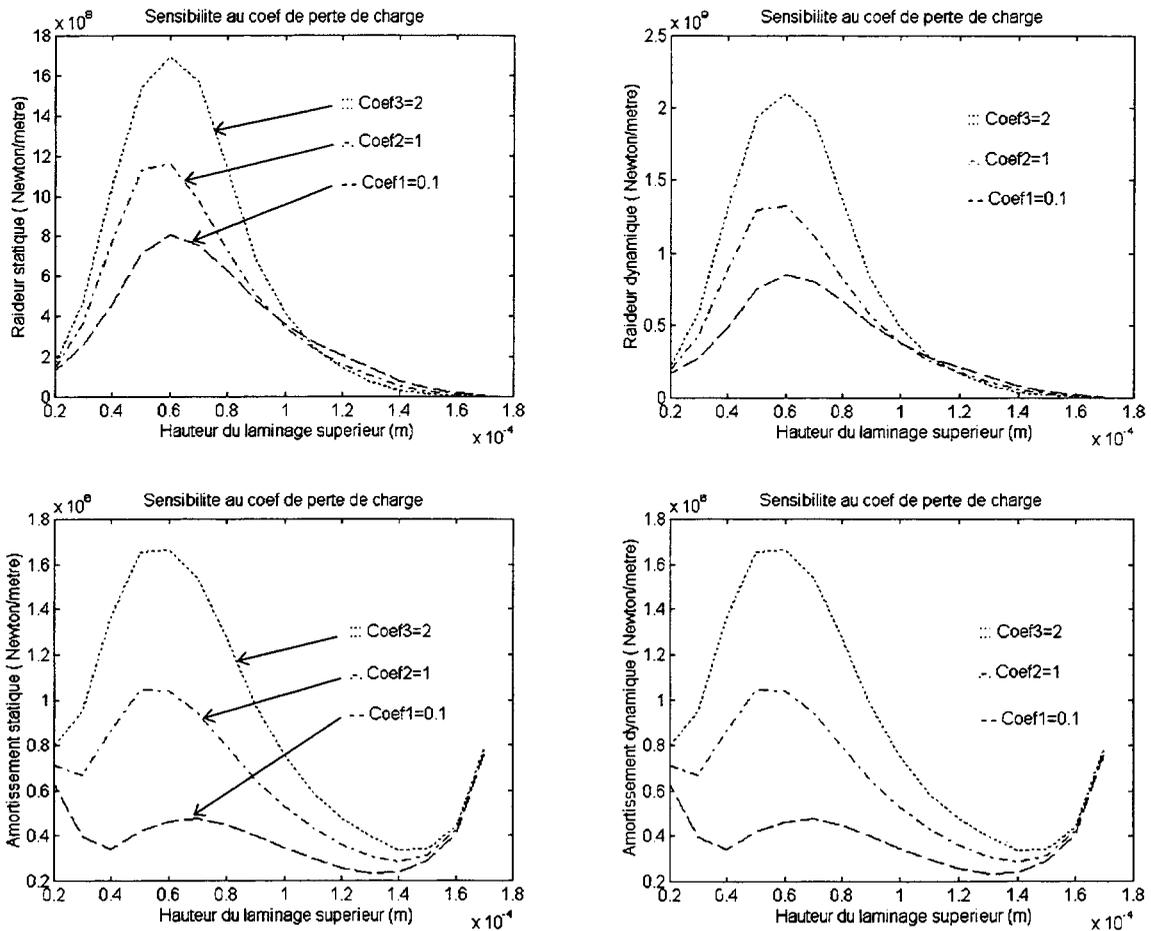


Planche 5: Evolution des coefficients dynamiques en fonction de la variation des coefficients de perte de charge singulière.

La planche 5 montre une évolution importante de la raideur et de l'amortissement pour des petites variations (en regard de la variation des valeurs de l'étude précédente) de l'ensemble des coefficients de perte de charge singulière.

Il sera donc nécessaire d'affiner le calcul de ces différents coefficients de perte de charge si nous voulons pouvoir prédire, avec une bonne précision, l'évolution des caractéristiques dynamiques de ce type de mécanisme.

D'autre part, la précision d'usinage des entrées et sorties de glace aura des répercussions sur la stabilité, au cours du temps de fonctionnement, de la pompe. Il sera indispensable de tenir compte de l'évolution de la géométrie de ces entrées et sorties de glace (problème d'instabilité dynamique) pour déterminer les dimensions de la machine.

Afin d'obtenir une valeur objective des ces coefficients de perte de charge singulière, nous avons développé, dans la dernière partie de l'étude, une méthode numérique donnant le champ de vitesse et de pression en tout point du maillage caractérisant la géométrie du mécanisme étudié.

6. CALCUL EN 3D AXISYMETRIQUE

6.1 INTRODUCTION

Précédemment, nous avons montré que la variation des valeurs des coefficients de perte de charge singulière en entrée et sortie de laminage entraîne une évolution des caractéristiques dynamiques du mécanisme étudié.

La détermination d'une valeur objective de ces coefficients de perte de charge demande la connaissance du champ de pression et du champ des vitesses en tout point du fluide à l'intérieur du mécanisme.

Pour ce faire, il est fait appel à une méthode de résolution numérique des équations de la mécanique des fluides (Navier-Stokes).

Cette méthode, développée au Laboratoire de Mécanique de Lille, utilise la formulation A.L.E. (Arbitrary Lagrangian Eulerian) [21]. Celle-ci a été mise en forme par le « Los Alamos National Laboratory » vers les années 1970.

Les hypothèses retenues sont :

Fluide continu, homogène, isotrope, incompressible, isotherme.

La discrétisation spatiale est de type volumes finis. La discrétisation temporelle est de type différences finies.

L'algorithme est une méthode à pas fractionnaires.

Les conditions aux limites peuvent être de deux types :

- Pression imposée.
- Vitesse imposée.

Pour tenir compte de l'évolution de la nature de l'écoulement, il a été associé au code, dans le cas présent, un modèle de turbulence basé sur le type de longueur de mélange.

6.2 FORMULATION A.L.E.

6.2.1 Les équations originelles.

Les équations originelles sont (pour un domaine matériel fixe quelconque) :

- Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (6-1)$$

- Equation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{u} dV + \int_S \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div } \vec{\sigma} dV \quad (6-2)$$

avec $\text{div } \vec{\sigma} = -\vec{\nabla} p + \text{div } \vec{\tau}$

Soit R_e un référentiel « fixe » ou Eulérien. Si $V(t)$ est un domaine mobile se déplaçant avec une vitesse $w(t)$ et si $\psi(z,t)$ est une propriété du fluide, alors sa dérivée en suivant le domaine dans son déplacement est :

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\psi(z,t)}{Dt} \right)_w &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\psi(z + wdt, t + dt) - \psi(z, t)}{dt} \right] \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + w \cdot \vec{\nabla} \psi(z, t) \end{aligned}$$

Pour une intégrale de volume de la quantité $\psi(z,t)$, la dérivée en suivant le domaine dans son déplacement est :

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_w \int_V \psi(z,t) dv \equiv \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\int_{V'} \psi(z,t) dv' - \int_V \psi(z,t) dv}{dt}$$

où V est le volume initial, V' le volume à l'instant $t+dt$.

En utilisant le jacobien de la transformation et en première approximation, nous obtenons :

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_w \int_V \psi(z,t) dv \equiv \int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{w}\psi)\right) dv$$

6.2.2 Equations de base

Il en résulte que les équations de continuité (6-1) et de quantité de mouvement (6-2), dans le cas où le volume de contrôle V est délimité par une surface S dont la vitesse en chaque point est \vec{w} , s'écrivent:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_w \int_V \rho dv - \int_S \rho(\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (6-3)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_w \int_V \rho \vec{u} dv - \int_S \rho \vec{u}(\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div} \vec{\sigma} dv \quad (6-4)$$

où \vec{w} est la vitesse de grille du maillage.

Le fluide étant incompressible, les équations précédentes deviennent :

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_w \int_V dv - \int_S (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (6-5)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_w \int_V \vec{u} dv - \int_S \vec{u}(\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\rho} \int_V \text{div} \vec{\sigma} dv \quad (6-6)$$

La méthode A.L.E. consiste à décomposer l'opérateur $\left(\frac{D}{Dt}\right)_{\vec{w}}$ suivant deux opérateurs:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_u \text{ et } \left[\left(\frac{D}{Dt}\right)_w - \left(\frac{D}{Dt}\right)_u\right]$$

1°)

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_{\vec{u}} \int_V dv = 0 \quad (6-7)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_{\vec{u}} \int_V \vec{u} dv = \frac{1}{\rho} \int_V \text{div} \vec{\sigma} dv \quad (6-8)$$

2°)

$$\left(\left(\frac{D}{Dt}\right)_{\vec{w}} - \left(\frac{D}{Dt}\right)_{\vec{u}}\right) \int_V dv - \int_S (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (6-9)$$

$$\left(\left(\frac{D}{Dt}\right)_{\vec{w}} - \left(\frac{D}{Dt}\right)_{\vec{u}}\right) \int_V \vec{u} dv - \int_S \vec{u} (\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (6-10)$$

A partir d'un instant t et pendant un intervalle de temps Δt , la première étape correspond au suivi des volumes fluides dans leur mouvement. C'est une étape purement Lagrangienne ($w=0$). Les termes de convection n'apparaissent pas dans cette étape, le fluide étant suivi avec sa vitesse u .

La deuxième étape correspond à une étape où les volumes fluides, à l'instant $t+\Delta t$ sont déplacés de $(\vec{w} - \vec{u})\Delta t$. Les termes de convection sont ainsi pris en compte.

Dans la suite de l'étude, les domaines des éléments de volume sont fixes (les frontières sont immobiles : $w=0$).

Avec les notations suivantes pour les dérivées temporelles:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_{\bar{u}} = \frac{d}{dt}$$

$$\left(\left(\frac{D}{Dt}\right)_{\bar{w}} - \left(\frac{D}{Dt}\right)_{\bar{u}}\right) = \frac{d^-}{dt}$$

La décomposition précédente devient :

1°)

$$\frac{d}{dt} \int_V dv = 0 \quad (6-11)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \bar{u} dv = \frac{1}{\rho} \int_V \text{div} \vec{\sigma} dv \quad (6-12)$$

2°)

$$\frac{d^-}{dt} \int_V dv + \int_S \bar{u} \cdot \bar{n} dS = 0 \quad (6-13)$$

$$\frac{d^-}{dt} \int_V \bar{u} dv + \int_S \bar{u} (\bar{u} \cdot \bar{n}) dS = 0 \quad (6-14)$$

6.2.3 Discrétisation temporelle

Les discrétisations temporelles sont de type différences finies. Elles sont approximées au premier ordre, pour une fonction $\varpi(t)$, par :

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\varpi(t + \Delta t) - \varpi(t)}{\Delta t}$$

On notera ϖ_n la valeur de la fonction ϖ au n-ième cycle du calcul correspondant à l'instant t et ϖ_{n+1} sa valeur au cycle suivant du calcul correspondant à l'instant $t + \Delta t$.

Le calcul est divisé en deux phases correspondant aux deux demi-pas de la décomposition. Pour ce faire, nous introduisons un état intermédiaire indicé 1.

1° phase semi-implicite. Les équations de base (6-11) et (6-12) s'écrivent entre les instants $n\Delta t$ et $(n+1)\Delta t$:

A tout point du volume V_n correspond un point du volume V_l défini par la relation $\vec{x}_l = \vec{x}_n + \vec{u}_l \Delta t$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_l} dV_l - \int_{V_n} dV_n \right) = 0 \quad (6-15)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_l} \vec{u}_l dV_l - \int_{V_n} \vec{u}_n dV_n \right) = \frac{1}{\rho} \int_{V_l} -\vec{\nabla} p_l dV_l + \frac{1}{\rho} \int_{V_n} \text{div} \vec{\tau}_n dV_n \quad (6-16)$$

2° phase explicite à l'instant $(n+1)\Delta t$ avec prise en compte des termes convectifs. Les équations (6-13) et (6-14) s'écrivent :

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_{n+1}} dV_{n+1} - \int_{V_l} dV_l \right) + \int_{S_l} \vec{u}_l \cdot \vec{n} dS_l = 0 \quad (6-17)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_{n+1}} \vec{u}_{n+1} dV_{n+1} - \int_{V_l} \vec{u}_l dV_l \right) + \int_{S_l} \vec{u}_l (\vec{u}_l \cdot \vec{n}) dS_l = 0 \quad (6-18)$$

où les points du volume V_{n+1} sont liés aux points du volume V_l par la relation :

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_l - \vec{u}_l \Delta t = \vec{x}_n.$$

Les volumes étant fixes, nous avons : $V_{n+1} = V_n$ et $S_{n+1} = S_n$.

La première équation (6-15) peut s'écrire, au premier ordre en Δt : $\int_{V_n} \text{div } \vec{u}_l dV_n = 0$.

L'équation (6-17) est automatiquement satisfaite.

Le système à résoudre devient alors:

$$\int_{V_n} \text{div } \vec{u}_l dV_n = 0 \quad (6-19)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_n} \vec{u}_l dV_n - \int_{V_n} \vec{u}_n dV_n \right) = \frac{1}{\rho} \int_{V_n} -\vec{\nabla} p_l dV_n + \frac{1}{\rho} \int_{V_n} \text{div } \vec{\tau}_n dV_n \quad (6-20)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V_n} \vec{u}_{n+1} dV_n - \int_{V_n} \vec{u}_l dV_n \right) + \int_{S_n} \vec{u}_l (\vec{u}_l \cdot \vec{n}) dS_n = 0 \quad (6-21)$$

6.2.4 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est de type éléments finis. Le système étudié est à symétrie de révolution. Dans le plan (r,z) , le domaine de calcul est formé par un recouvrement de mailles (quadrilatères) référencés par les indices de noeuds (i,j) . La surface d'un tel élément est noté $S(i,j)$. (Voir figure n° 28)

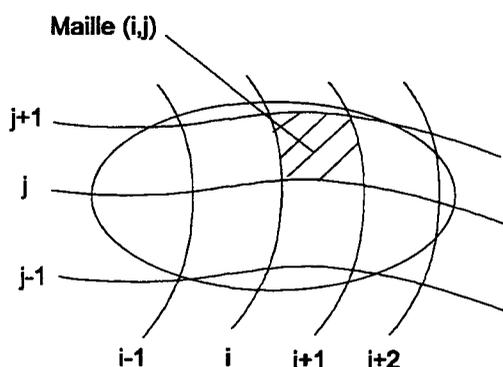


Figure 28 Discrétisation spatiale

Chaque maille (i, j) est la transformée du carré de côté unité par la transformation :

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\zeta + (\vec{x}_4 - \vec{x}_1)\eta + (\vec{x}_3 + \vec{x}_1 - \vec{x}_2 - \vec{x}_4)\eta\zeta$$

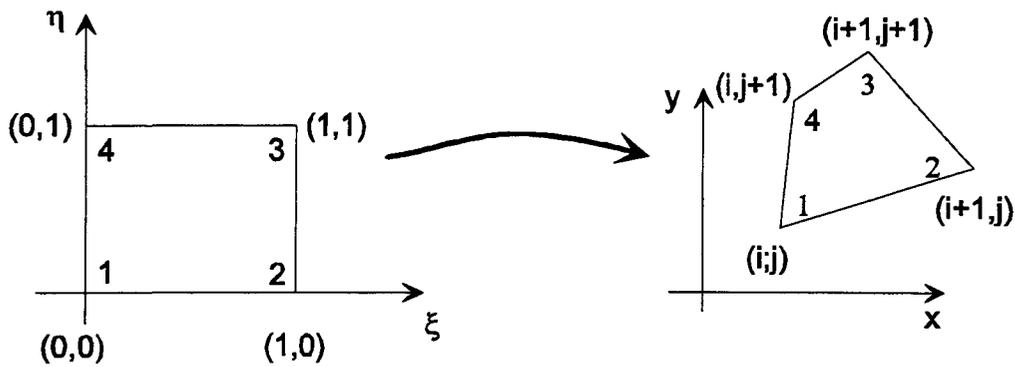


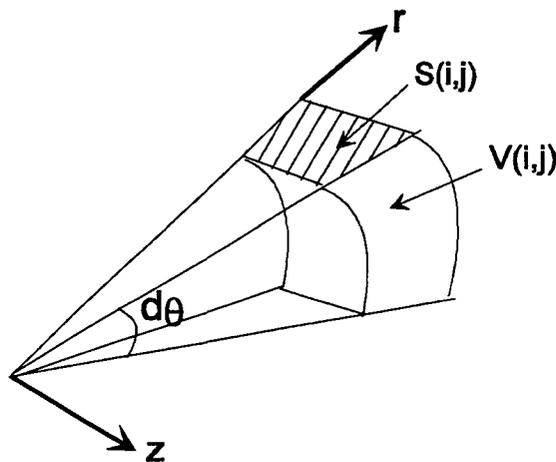
Figure 29 Paramétrage d'une maille (i,j)

L'approximation du champ des vitesses, sur la surface de maille $S(i,j)$, est donnée en fonction des vitesses $\vec{u}(i, j)$ aux noeuds (i, j) par la relation :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)\zeta + (\vec{u}_4 - \vec{u}_1)\eta + (\vec{u}_3 + \vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_4)\eta\zeta$$

Les autres champs (pression, tenseur des contraintes) sont considérés comme constants sur chaque maille.

Pour les équations traduisant la conservation de la masse (6-15), les intégrations sont effectuées sur des éléments de volume $V(i,j)$, $\Sigma(i,j)$ engendrés par la rotation d'angle $d\theta$ de la maille de surface $S(i,j)$ et de contour $L(i,j)$ (figure n°30).

Figure 30 Élément de volume $V(i,j)$

Pour les équations traduisant la conservation de la quantité de mouvement (6-16 et 7-18), les intégrations sont effectuées sur des éléments de volume $V'(i,j)$, $\Sigma'(i,j)$ engendrés par la rotation d'éléments de surface $S'(i,j)$, de contour $L'(i,j)$ décalés par rapport aux mailles $S(i,j)$ (figure n°31). Ce choix est cohérent avec la discrétisation des variables. La consistance des problèmes continus et discrets est finalement assurée.

Par ailleurs, pour calculer les termes du type $\int_{S'_{ij}} \bar{u} dv$, on suppose \bar{u} constant sur $S'(i,j)$.

6.2.5 Discrétisation de l'équation de continuité.

Etant dans le cas d'un écoulement axisymétrique, l'équation (6-19) s'écrit sur chaque élément $V(i,j)$:

$$\int_{L(i,j)} \bar{u}_l \cdot \bar{n} dl \quad (6-22)$$

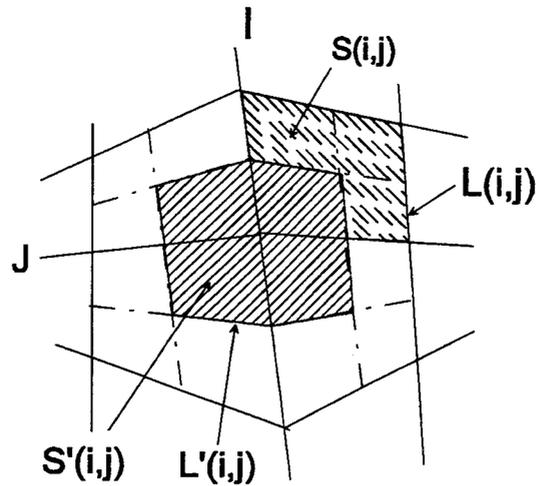
Après discrétisation sur chaque maille nous obtenons des relations linéaires faisant intervenir des coefficients $cx(i,j,k)$, $cy(i,j,k)$ correspondant aux quatre noeuds de la maille ($k=1...4$):

$$gij(cx, cy, \bar{u}_1) = 0 \quad (6-23)$$

6.2.6 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

L'équation (6-20) s'exprime par:

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{S'(i,j)} \bar{u}_l dS - \int_{S'(i,j)} \bar{u}_n dS \right) = \frac{1}{\rho} \int_{S'(i,j)} -\bar{\nabla} p_l dS + \frac{1}{\rho} \int_{S'(i,j)} div \bar{\tau}_n dS \quad (6-24)$$

Figure 31 Elément de volume $V'(i,j)$

Nous obtenons un système de la forme:

$$\bar{u}_l(i, j) = K_{i,j}(cx, cy, p_l, \bar{\tau}_n, \bar{u}_n, \Delta t, M) \quad (6-25)$$

où M est la masse d'un élément correspondant à $S'(i,j)$.

L'équation (6-21) s'écrit pour un élément de volume $V'(i,j)$ et de surface $\Sigma'(i,j)$:

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{V'(i,j)} \bar{u}_{n+1} dV - \int_{V'(i,j)} \bar{u}_l dV \right) + \int_{\Sigma'(i,j)} \bar{u}_l (\bar{u}_l \cdot \bar{n}) dS = 0$$

Nous obtenons une relation donnant la vitesse au pas $n+1$:

$$\bar{u}_{n+1} = \Lambda_{ij}(cx, cy, \bar{u}_l, \Delta t, M) \quad (6-26)$$

6.2.7 Conditions aux limites et critères de stabilité.

Les conditions aux limites, sur les frontières fluides, peuvent être, dans ce type de problème, de deux types:

- Conditions sur la vitesse aux frontières du domaine.
- Conditions sur la contrainte en entrée et sortie. En fait

on impose la pression et on fait sur les vitesses le minimum d'hypothèses permettant de

calculer la contrainte visqueuse (débit constant à travers deux surfaces parallèles voisines, composantes tangentielle de la vitesse nulle).

Dans tous les cas, sur les frontières solides, une condition de non glissement est imposée.

Dans l'étude du modèle du piston d'équilibrage, les conditions aux limites retenues portent sur les pressions, conditions que l'on retrouve fréquemment dans les problèmes de type industriels.

La prise en compte de ces conditions aux limites nécessite, dans les équations discrétisées, un repérage des mailles et des noeuds spécifiques par des pointeurs.

6.2.8 Méthode de résolution.

Les systèmes (6-23) et (6-25), obtenus à chaque pas de temps, sont couplés par l'intermédiaire des variables \vec{u}_l .

En éliminant cette variable entre ces deux systèmes, nous obtenons un système d'équations en fonction de la variable p_l :

$$[CP].[p_l] = [SM]$$

où [CP] représente la matrice des différents coefficients géométriques c_x , c_y entourant une maille (i,j) et où [SM] est la matrice des seconds membres faisant intervenir le tenseur des contraintes et les vitesses du cycle précédent n. Ce système linéaire est résolu par une méthode directe.

Connaissant p_l , nous pouvons calculer les vitesses lagrangiennes \vec{u}_l

Le système (6-26) fournit la variable \vec{u}_{n+1} .

6.2.9 Stabilité.

Dans les équations (6-25) et (6-26) deux pas de temps sont calculés concernant les termes convectifs dtc et diffusifs dtv . Afin de garantir la stabilité de propagation des erreurs de calcul, un critère de stabilité de type Von Neuman est utilisé[13]. Le pas de temps utilisé est calculé par:

$$dt = \alpha * \min(dtv, dtc)$$

où α est fixé arbitrairement ($0 < \alpha < 1$) et où dtc et dtv sont les pas de temps liés à la prise en compte des termes de convection et des termes diffusifs.

6.2.10 Modèle de turbulence

Le caractère turbulent d'un écoulement peut être vu comme un comportement irrégulier des grandeurs (vitesses, pression) caractérisant le fluide (voir chapitre 6). Dans notre problème, le but recherché est de modéliser l'influence des petites perturbations sur les valeurs moyennes caractérisant le fluide.

Dans la modélisation de la turbulence proposée par Boussinesq en 1877, la viscosité effective est définie comme la somme de la viscosité réelle et de la viscosité turbulente:

$$V_e = \nu + \nu_t$$

Le choix retenu, sur le dispositif étudié, est celui proposé par Prandtl (1925), pour un écoulement parallèle à une paroi:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \quad (6-28)$$

où l est la longueur de mélange, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ est le gradient normal de vitesse.

La longueur de mélange est définie comme étant proportionnelle à la distance à la paroi. La formule utilisée est celle de Van-Driest (1956) tenant compte de la sous-couche visqueuse près de la paroi:

$$l = k z \left(1 - e^{-\frac{z^+}{A}}\right), \quad z^+ = z \frac{\sqrt{\tau_s \rho}}{\mu} \quad (6-29)$$

où z est la distance à la paroi la plus proche, τ_s la contrainte pariétale

Les constantes k et A sont telles que:

$$k=0,41$$

$$A=26,0$$

Le calcul de l doit tenir compte de la turbulence hors de la couche limite de paroi, l'utilisation d'une fonction de coupure permet la prise en compte de ce phénomène.

Si e est l'épaisseur globale du film fluide, la fonction de coupure est définie par:

$$h_0 = 0,09 e$$

- Si $l \leq h_0$, l est calculée à partir de la formule (6-29)
- Si $l > h_0$, $l = h_0$

Le modèle de longueur de mélange est un modèle algébrique simple à utiliser, sans équation différentielle à résoudre, donnant des résultats corrects dans de nombreux cas d'écoulements.

La viscosité turbulente est calculée pour chaque maille et à chaque pas de temps.

Dans le calcul de la viscosité turbulente, pour un écoulement quelconque, l'expression

de $\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$ est classiquement généralisée par $\|\vec{\epsilon}\|$

$$\nu_t = l^2 \|\vec{\epsilon}\|$$

où

$$\|\vec{\epsilon}\| = \sqrt{2\epsilon_{zz}^2 + 2\epsilon_{rr}^2 + 2\epsilon_{\theta\theta}^2 + 4\epsilon_{r\theta}^2 + 4\epsilon_{rz}^2 + 4\epsilon_{z\theta}^2}$$

6.3 APPLICATION AU DISPOSITIF ETUDIE.

6.3.1 Maillage du domaine.

Pour des raisons liées aux moyens de calculs, le domaine a été scindé en deux parties: le domaine 1 concerne la butée supérieure, le domaine 2 concerne la butée inférieure. Le maillage est de type orthogonal. Il est localisé dans un plan de symétrie en raison de l'hypothèse choisie d'axisymétrie. La technique employée pour numéroter les mailles impose l'utilisation d'une première colonne de mailles d'épaisseur nulle. L'axe de symétrie correspond à la seconde colonne.

6.3.1.1 Domaine 1: Butée supérieure.

Le domaine est maillé avec 193 mailles suivant la direction radiale et 24 mailles suivant la direction de l'axe de révolution. Un raffinement du maillage a été effectué dans les zones proches des parois de manière à obtenir une valeur aussi précise que possible de la contrainte

pariétale. Compte tenu de la géométrie, la finesse du maillage près de la paroi, en entrée et sortie du laminage, correspond à $1/8$ de l'épaisseur du film du fluide dans la glace.

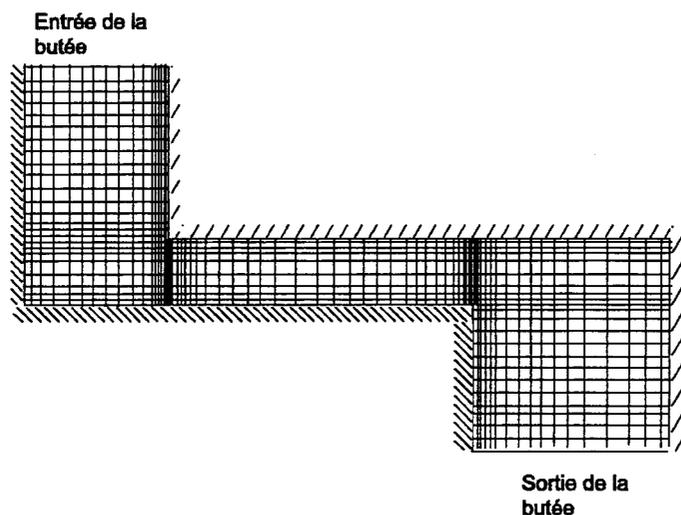


Figure 32 Maillage de la butée supérieure

6.3.1.2 Domaine 2: Butée inférieure.

Le domaine est maillé avec 188 mailles suivant la direction radiale et 24 mailles suivant la direction de l'axe de révolution. Un raffinement du maillage, identique au cas précédent, a été mis en place.

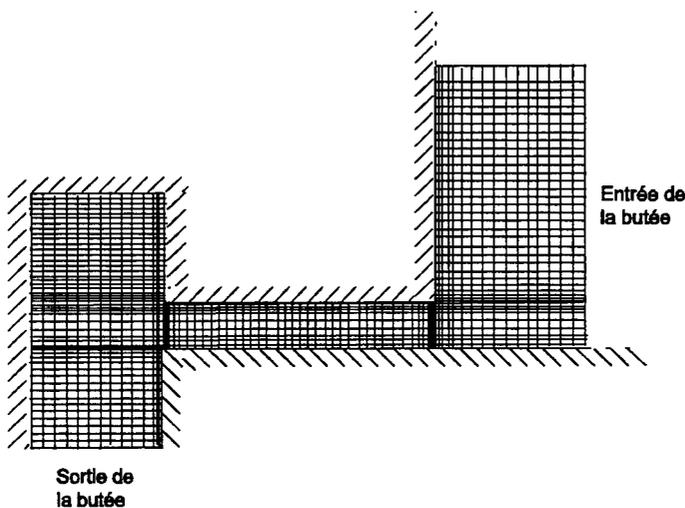


Figure 33 Maillage de la butée inférieure

6.3.2 Caractéristiques du modèle

Les paramètres sont:

Butée supérieure:

Rayon d'entrée du rotor(r_e):	0,0889m
Rayon d'entrée du laminage(r_1):	0,09m
Rayon de sortie du laminage(r_2):	0,1m
Rayon de sortie du stator(r_m):	0,103m

Butée inférieure:

Rayon d'entrée du laminage(r_3):	0,05m
Rayon de sortie du laminage(r_4):	0,015m
Rayon de sortie du rotor (r_s):	0,01m

Masse volumique	$\rho =$	900 kg/m ³	en laminaire (huile)
	$\rho =$	1000 kg/m ³	en turbulent (eau)
Viscosité dynamique	$\mu =$	0,01 Pl	en laminaire (huile)
	$\mu =$	0,001 Pl	en turbulent (eau)

Pour chaque butée, les simulations ont été faites pour:

3 vitesses de rotation: 0, 1500, 3000 tr/min

3 hauteurs de film fluide: 0,00005, 0,0001, 0,00015m

3 différences de pression (entre entrée et sortie): 5,10,15 bar

6.3.3 Présentation des résultats numériques.

6.3.3.1 Butée supérieure.

6.3.3.1.1 Ecoulement laminaire.

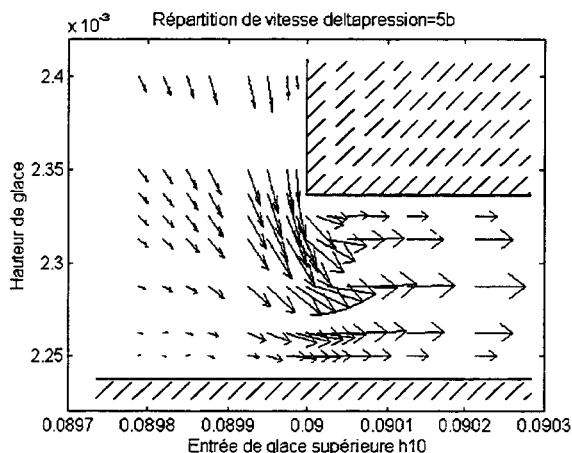


Figure 34 Visualisation de la vitesse en entrée de glace supérieure.

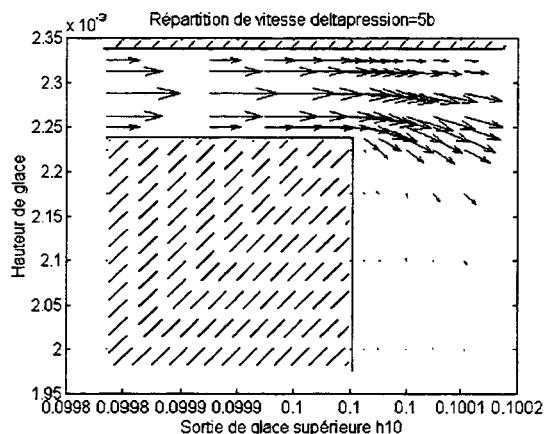


Figure 35 Visualisation de la vitesse en sortie de glace supérieure

Les figures 34 et 35 montrent la structure du champ des vitesses radiales en entrée et sortie de la butée supérieure pour une hauteur de glace de 0,0001m et une différence de pression de 5 bar. La figure 34 présente, en entrée de glace, un rétrécissement des filets fluides conforme à ce qui est habituellement observé.

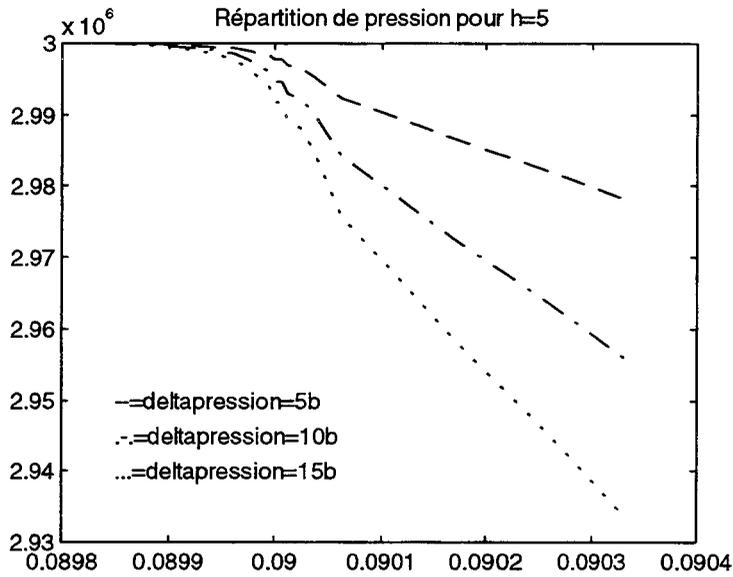


Figure 36 Répartition de la pression en entrée de glace supérieure pour une hauteur de laminage de 0,00005 m

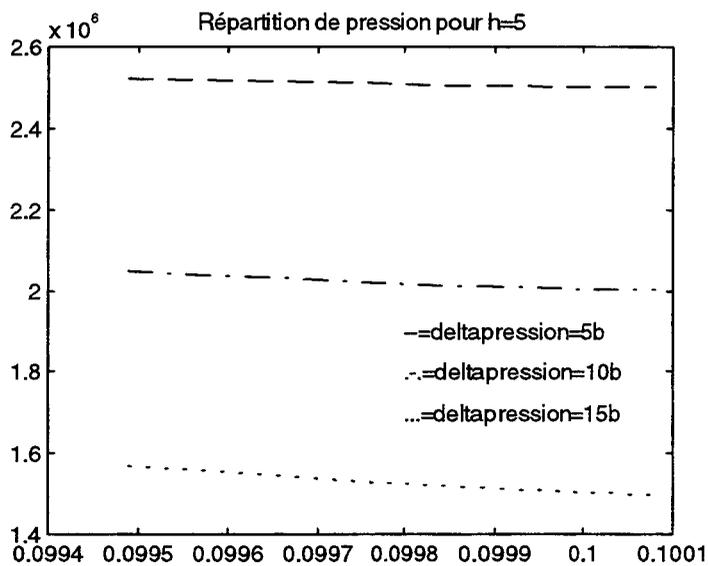


Figure 37 Répartition de la pression en sortie de glace supérieure pour une hauteur de laminage de 0,00005 m

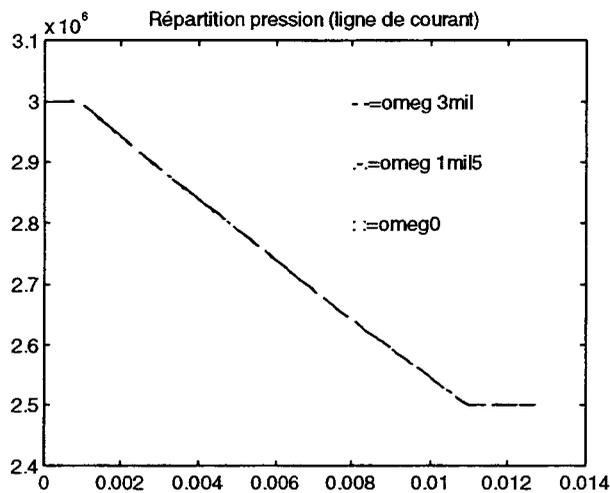


Figure 38 Répartition de pression dans la glace supérieure le long d'une « ligne de courant »

Les figures 36 et 37 représentent la répartition de pression moyenne en entrée et sortie pour une hauteur de laminage de 5/100 mm dans le cas statique. Ces pressions moyennes ont été obtenues par intégration de la pression sur la hauteur du film fluide.

La figure 38 montre la répartition de pression pour une hauteur de laminage de 5/100 de mm et pour un différentiel de pression de 5 bar. Le calcul de la pente de la droite représentant la pression en fonction de l'abscisse dans la laminage permet de vérifier l'équation de Reynolds:

$$K_r = -\frac{h^2}{\mu u_m} \frac{\partial p}{\partial r}$$

Le calcul donne une valeur de K_r de 12,06. La valeur de K_r en laminaire est de 12.

Ce résultat confirme la fonctionnalité du code et que, du moins en laminaire, la finesse du maillage est suffisante.

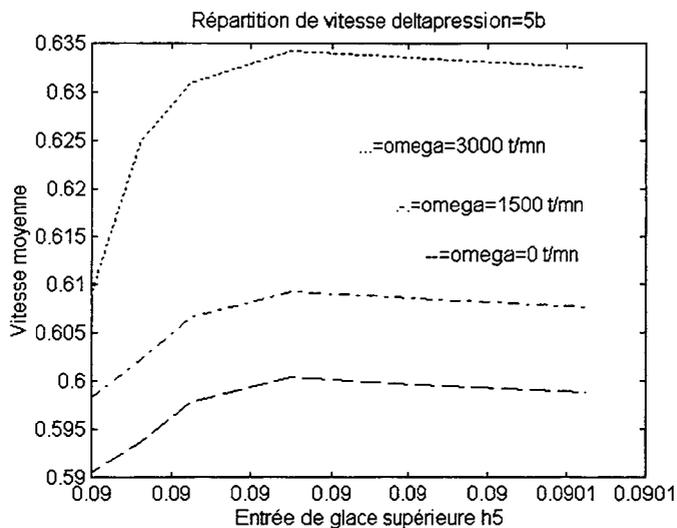


Figure 39 Répartition de vitesse moyenne en entrée de glace supérieure

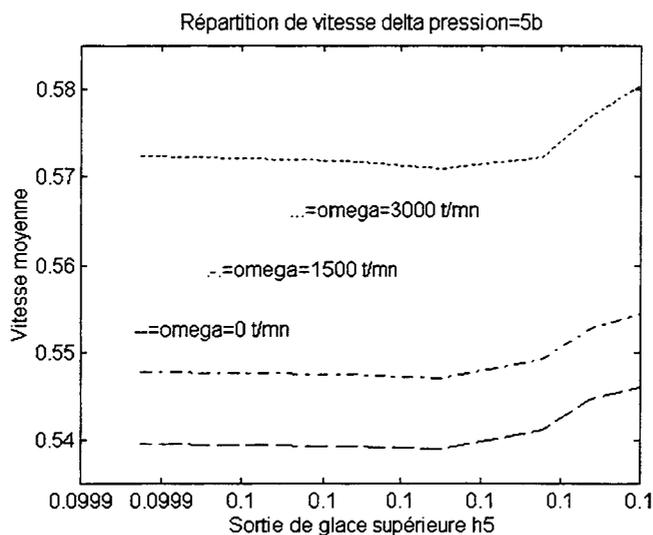
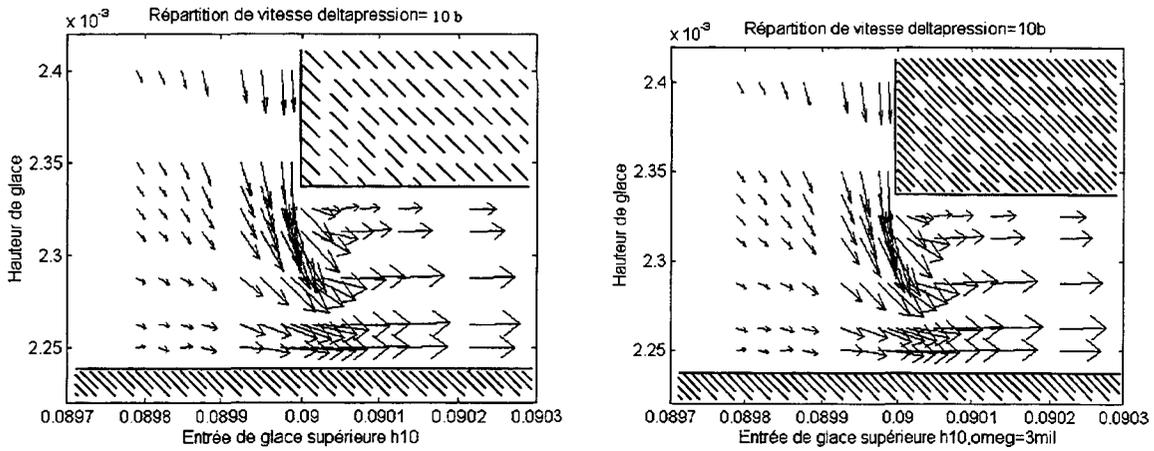


Figure 40 Répartition de vitesse moyenne en sortie de glace supérieure.

Sur les figures 39 et 40, les valeurs de la vitesse moyenne en entrée et sortie de glace sont représentées, pour une hauteur de film fluide de 5/100 mm, pour un différentiel de pression de 5 bar, en fonction de la vitesse de rotation de la roue de la turbine. Les variations de la vitesse sont en fait faibles en fonction de la vitesse de rotation (de l'ordre de 6%). Les profils de vitesse de la figure 39 présentent un maximum correspondant au rétrécissement des filets fluides de la figure 34. Ces vitesses moyennes sont calculées par intégration sur la hauteur du laminage.

6.3.3.1.2 Ecoulement turbulent



Figures 41 et 42 Visualisation du champ des vitesses en entrée de glace supérieure
(régime turbulent)

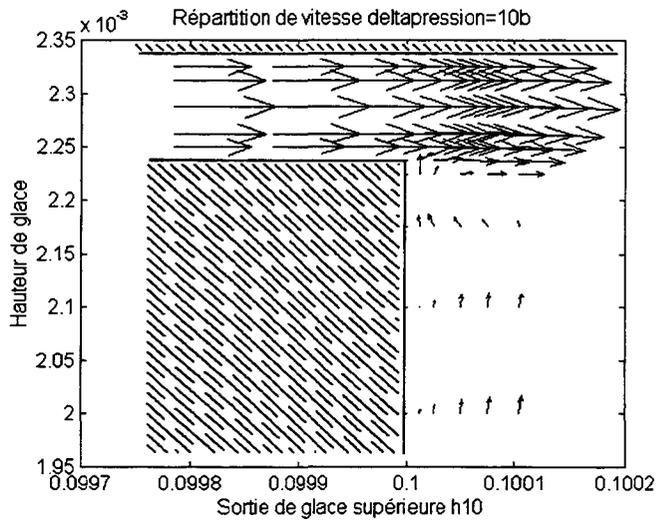


Figure 43 Visualisation du champ des vitesses en sortie de glace supérieure
(régime turbulent).

Les figures 41 à 43 montrent la répartition du champ des vitesses radiales en entrée et sortie de glace pour un différentiel de pression de 10 bars, une hauteur de film fluide de 10/100 mm, et pour deux vitesses de rotation (0 et 3000 tr/mn). Le rétrécissement des filets fluides en entrée est moins prononcé qu'en écoulement laminaire. La nature du champ des vitesses est peu influencé par la vitesse de rotation de la roue de turbine. Une recirculation du fluide en sortie est à noter sur la figure 43.

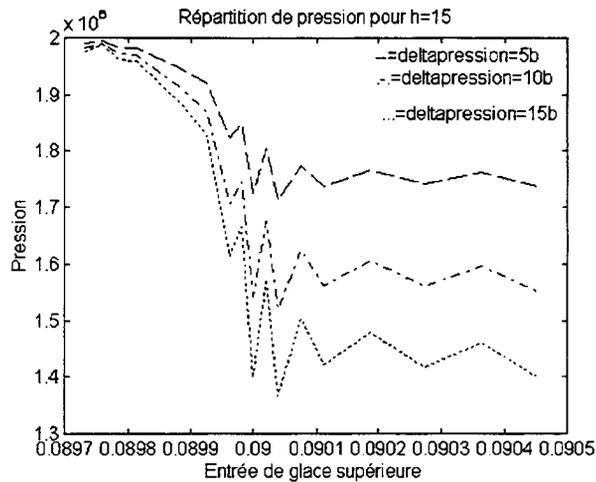


Figure 44 Répartition de pression en entrée de glace supérieure.

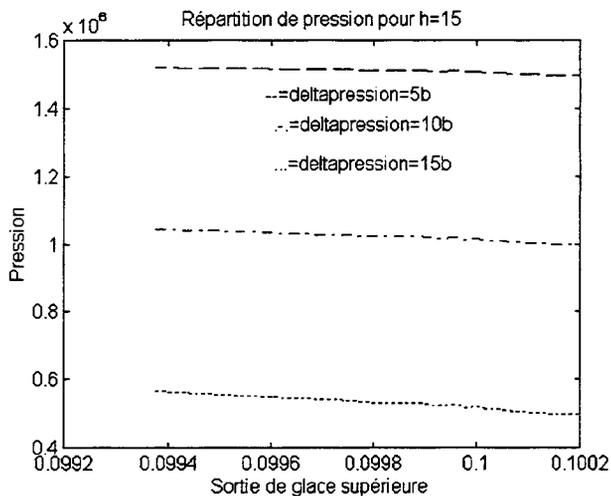


Figure 45 Répartition de pression en sortie de glace supérieure.

Les figures 44 et 45, représentant le champ de pression moyenne en entrée et sortie de laminage, présentent des analogies avec celui obtenu pour un écoulement laminaire. Nous pouvons noter la présence de petites perturbations sur le profil de pression en entrée. Un essai avec un maillage plus fin sur un domaine borné à l'entrée de la glace permet de lisser le profil de pression. En contre partie, les temps de calcul sont multipliés par un facteur important irréaliste avec les moyens de calcul actuel. Aussi, dans ce qui suit, on se limitera à l'utilisation d'un maillage grossier pour déterminer les « pertes de charge » en entrée et sortie de glace.

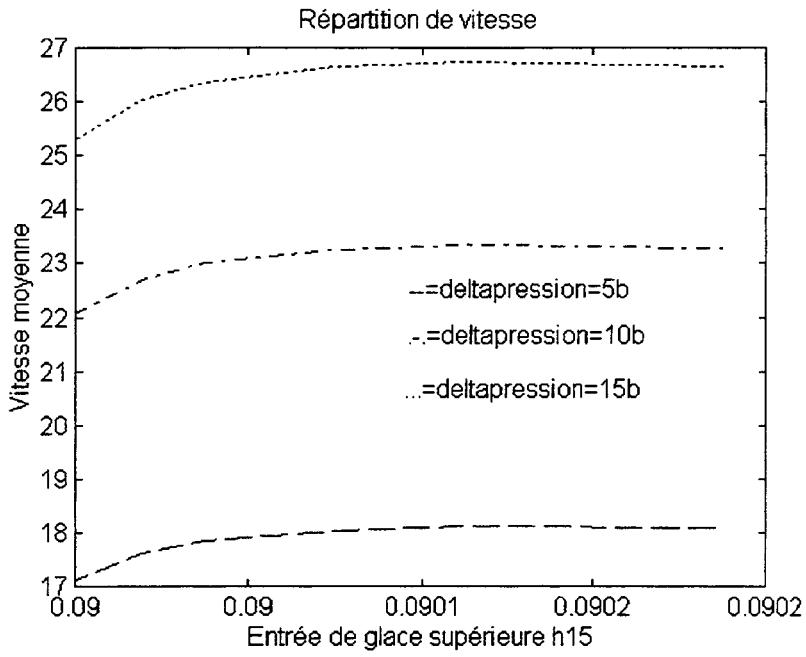


Figure 46 Répartition de vitesse en entrée de glace supérieure

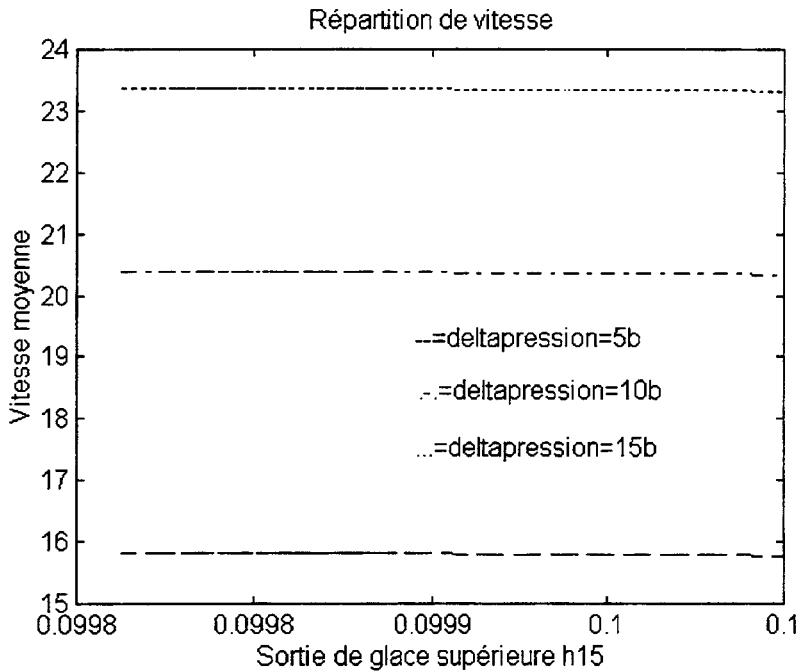


Figure 47 Répartition de vitesse en sortie de glace supérieure

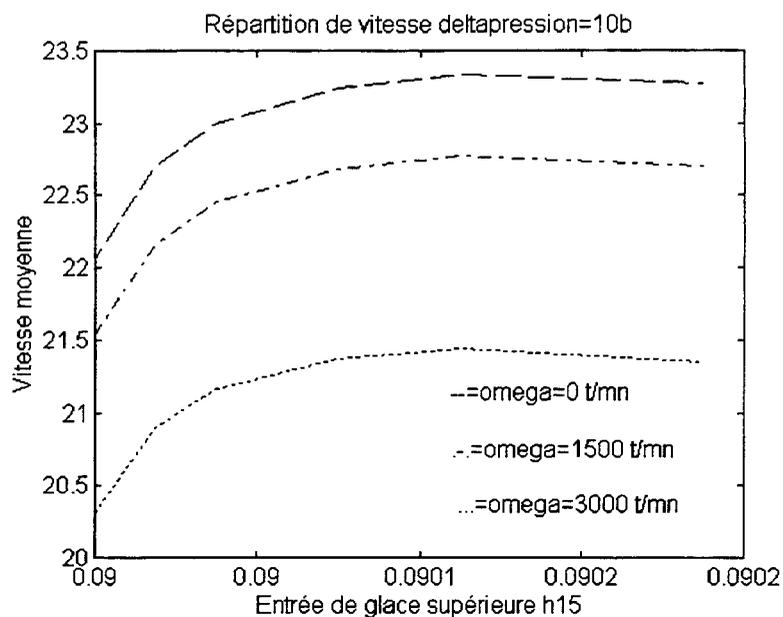


Figure 48 Répartition de vitesse moyenne en entrée de glace supérieure

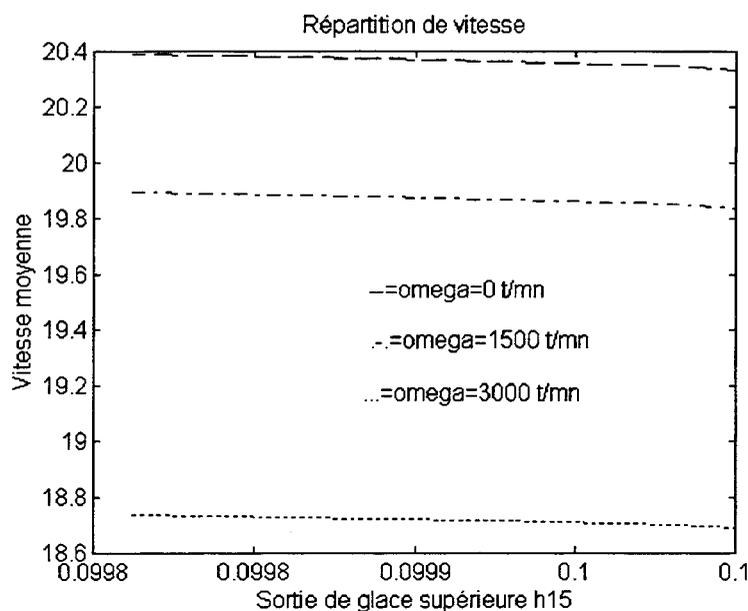
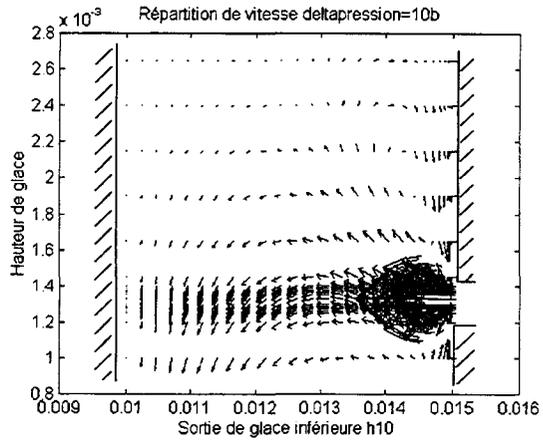
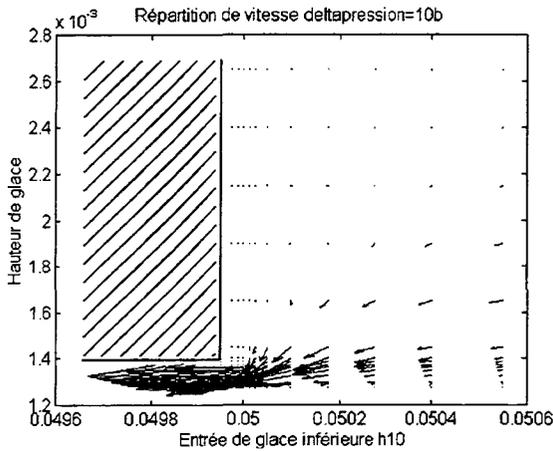


Figure 49 Répartition de vitesse moyenne en sortie de glace supérieure.

Les courbes de vitesses sur les figures 46 à 49 sont semblables à celles décrites en écoulement laminaire. Là encore, les variations de la vitesse avec la vitesse de rotation sont faibles. La figure 48 ne présente pas un pic de vitesse aussi prononcé que sur la figure 39, ce qui est en accord avec l'évolution du profil du champ des vitesses constaté sur les figures 41 et 42.

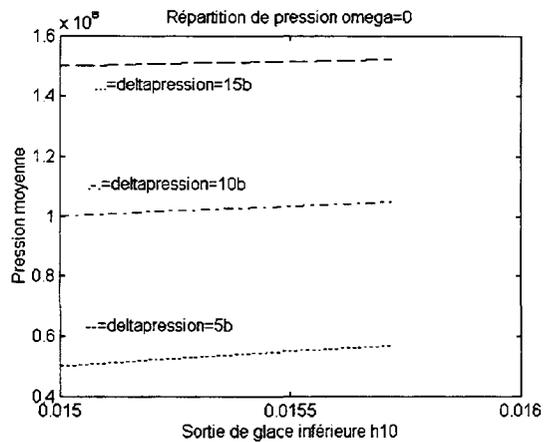
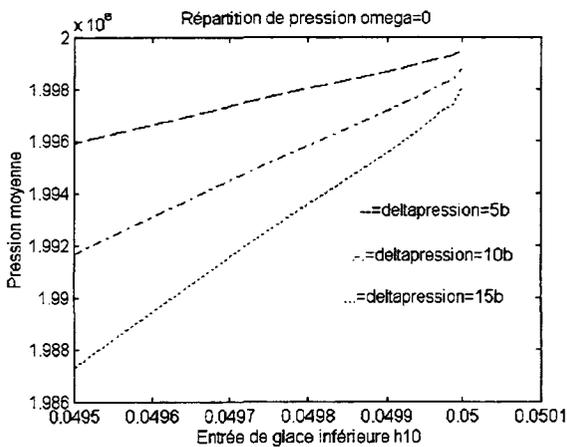
6.3.3.2 Butée inférieure

6.3.3.2.1 Ecoulement laminaire



Figures 50 et 51 Visualisation du champ des vitesses en entrée et sortie de glace inférieure.

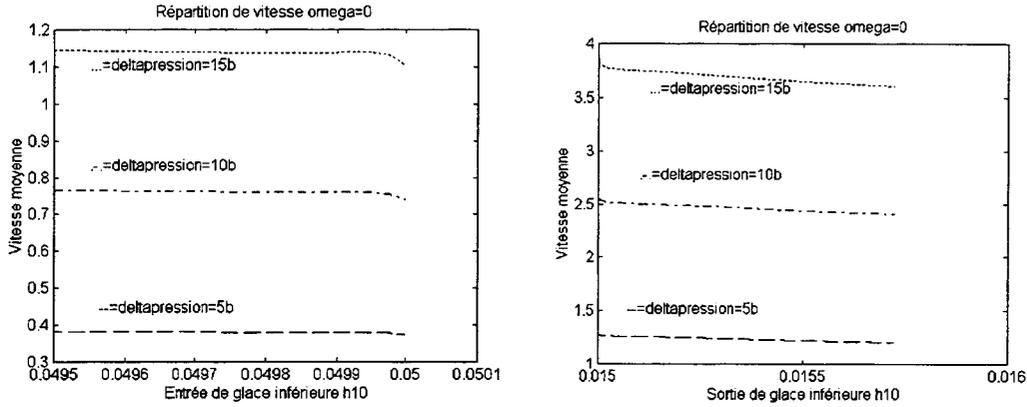
Les figures 50 et 51 montrent la répartition du champ des vitesses à l'entrée et à la sortie du laminage inférieur pour un différentiel de pression de 10 bars, une hauteur du film fluide de 10/100 mm et une vitesse de rotation nulle. Sur la figure 51, nous pouvons distinguer deux zones de recirculation du fluide dans la chambre de sortie du laminage inférieur. Elles sont de sens opposés, de part et d'autre de la zone de sortie de la glace.



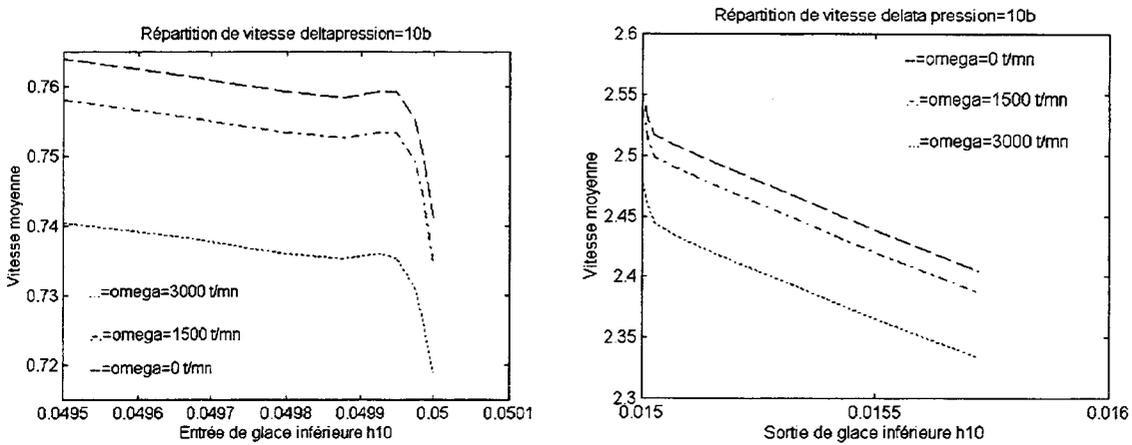
Figures 52 et 53 Répartition du champ de pression en entrée et sortie de glace inférieure.

Les figures 52 et 53 représentent les répartitions de pression moyenne suivant la direction radiale, en entrée et sortie du laminage. Nous retrouvons les mêmes types de profils que ceux

obtenus sur la butée supérieure. La perte de pression est plus importante en entrée de glace qu'en sortie de glace, le fluide ayant perdu à l'entrée, la plus grande partie de son énergie totale.



Figures 54 et 55 Répartition de vitesse moyenne en fonction d'une différence de pression en entrée et sortie de glace inférieure



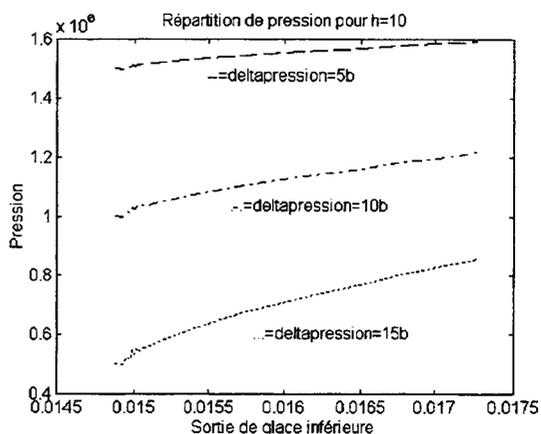
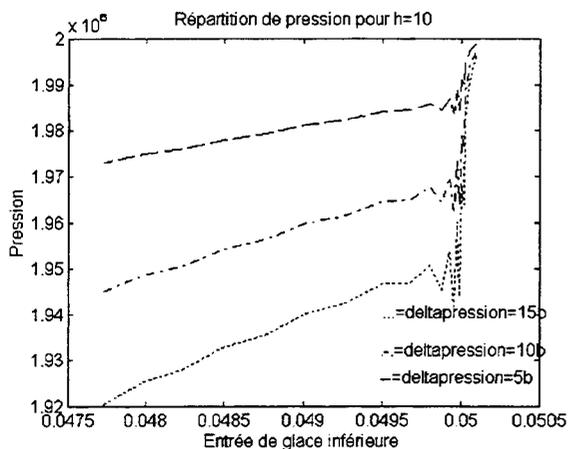
Figures 56 et 57 Répartition de vitesses moyennes en fonction de la vitesse de rotation de la roue de turbine

Les figures 54 et 55 montrent les répartitions de vitesse moyenne en entrée et sortie de laminage pour une vitesse de rotation nulle, en fonction d'une différence de pression imposée.

Les figures 56 et 57 présentent les répartitions de vitesses moyennes pour une différence de pression de 10 bar en fonction de la vitesse de rotation de la roue de la turbine. Sur la figure 56, nous pouvons noter un pic sur le profil des vitesses à l'entrée du laminage. Ce pic correspond à la mise en vitesse du fluide en accord avec la perte de pression qu'il subit (figure 52)

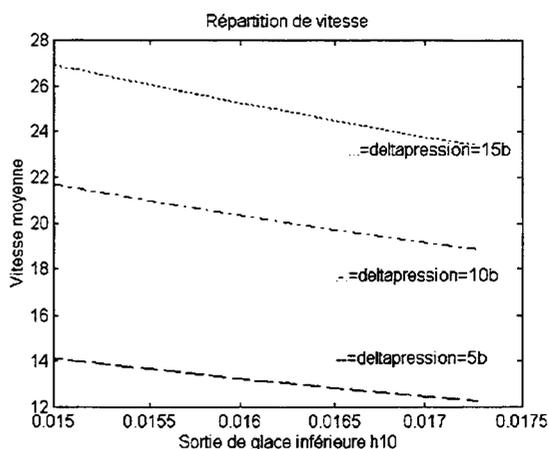
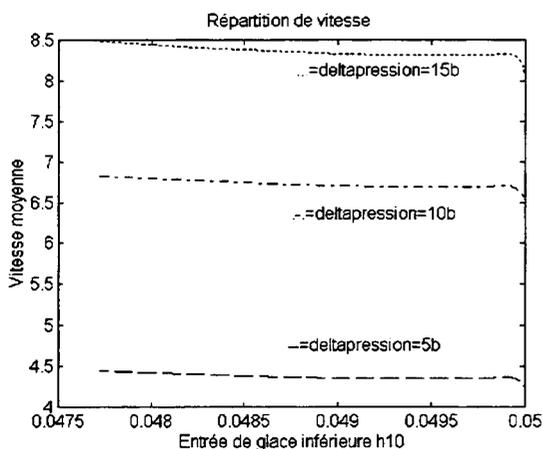
52)

6.3.3.2.2 Ecoulement turbulent

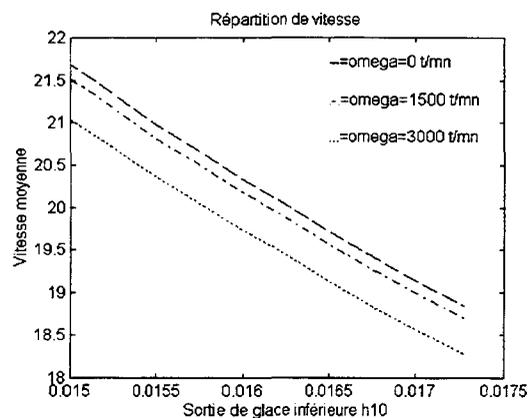
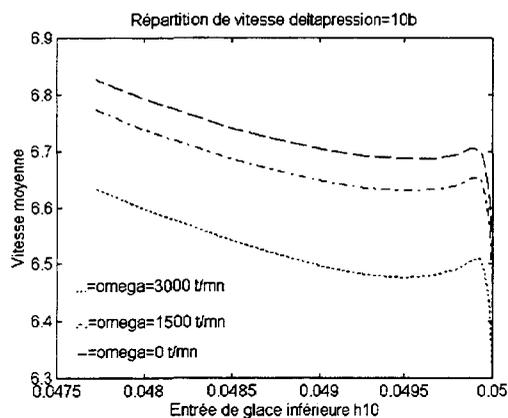


Figures 58 et 59 Répartition de pression pour une hauteur de glace donnée en entrée et sortie de laminage.

Les figures 58 et 59 donnent la répartition de pression moyenne en entrée et sortie de laminage pour une hauteur de 10/100 mm et une vitesse de rotation nulle en fonction d'un différentiel de pression. La chute de pression est très importante en entrée comparée à celle enregistrée pour le laminage supérieur. Ceci s'explique par la géométrie différente des deux laminages (La glace inférieure a un rayon d'entrée inférieur à celui de la glace supérieure et une largeur de glace supérieure).



Figures 60 et 61 Répartition de vitesse moyenne en entrée et sortie de glace inférieure



Figures 62 et 63 Répartition de vitesse moyenne en fonction de la vitesse de rotation de la roue de turbine

Les figures 60 à 63 donnent les répartitions de vitesse pour des différentiels de pression et des vitesses de rotations différents. Ces courbes ont des profils équivalents à ceux observés pour un écoulement laminaire, les valeurs des vitesses étant supérieures à celles obtenues en écoulement laminaire. Le régime turbulent favorise l'augmentation du débit, la viscosité étant diminuée d'un facteur 5 par rapport au régime laminaire.

6.3.3.3 Remarques

Les autres courbes correspondant à des hauteurs différentes de laminage, à des vitesses de rotation de 1500 et 3000 tr/min, à des différentiels de pression de 5 et 15 bar, dans les cas laminaire et turbulent, présentent les mêmes types de caractéristiques que les courbes présentées ci dessus.

6.4 Calcul des coefficients de perte de charge singulière.

6.4.1 Introduction.

Afin de correspondre aux choix développés dans la méthode globale du chapitre précédent, le calcul du coefficient de perte de charge singulière z_i (en entrée et en sortie de laminage) est effectué à partir de la formule de Bernoulli généralisée.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \frac{1}{2}z_2 \rho u_2^2$$

où les indices 1 et 2 correspondent aux valeurs (pression et vitesse) de part et d'autre de l'obstacle.

Le choix de la pression moyenne et de la vitesse moyenne relatif à l'indice (1 ou 2) correspondant au laminage est effectué sur la position d'une maille distante, par rapport à l'entrée ou la sortie, de la valeur de la hauteur de la glace.

L'autre valeur de la pression retenue est la valeur de la pression d'entrée (ou de sortie) de la butée.

La vitesse moyenne d'entrée ou de sortie est calculée à partir de la formule de conservation des débits en conformité avec le modèle global (formules (6-18) à (6-24)).

D'où

$$z_i = \frac{\Delta p + \frac{1}{2}\rho \Delta(u^2)}{\frac{1}{2}\rho u^2}$$

6.4.2 Résultats

Différentes configurations sont testées pour la butée supérieure et inférieure, en régime d'écoulement laminaire et turbulent, pour 3 hauteurs du film fluide (5,10,15/100 mm), 3 vitesses de rotation (0,1500,3000 tr/min) et 3 différentiels de pression (5,10,15 bar). Les résultats sont compilés sur un même graphique en coordonnées Log-Log, pour un type

d'écoulement donné, en fonction du nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{ep} = \frac{\rho w_m h}{\mu}$.

6.4.2.1 Butée supérieure

6.4.2.1.1 Ecoulement laminaire

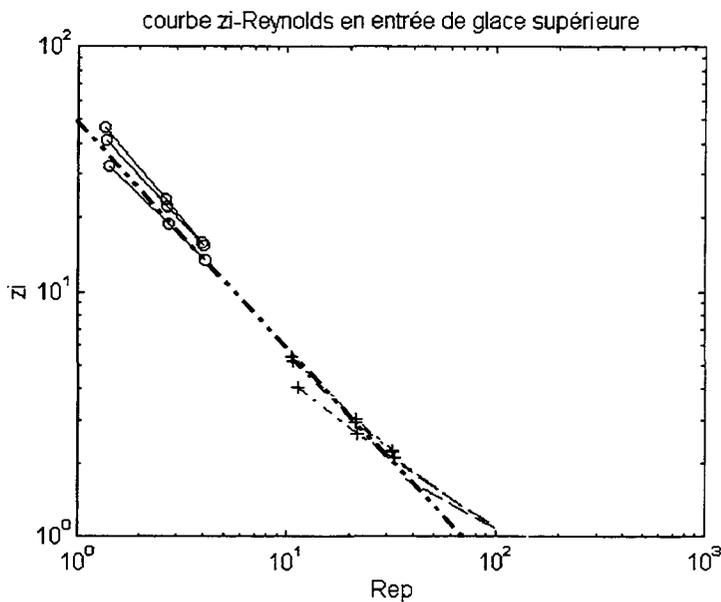


Figure 64 Courbe z_i -Reynolds en entrée de glace supérieure (Ecoulement laminaire)

L'ensemble des valeurs des calculs se répartissant sur une droite. L'influence de la vitesse de rotation est faible. Nous pouvons exprimer la loi donnant le coefficient de perte de charge singulière en fonction du nombre de Reynolds par:

$$z_i = 50 \mathcal{R}_{ep}^{-0,91} \quad (6-30)$$

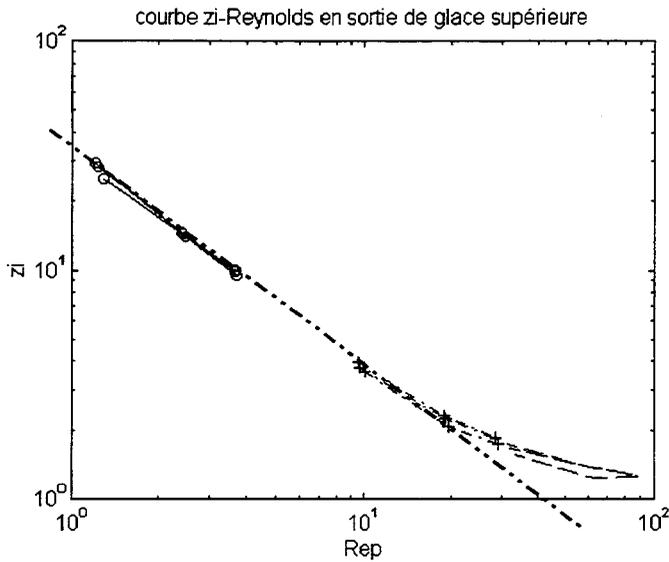


Figure 65 Courbe zi-Reynolds en sortie de glace supérieure (Ecoulement laminaire).

De façon similaire, la figure 65 montre une répartition linéaire des valeurs, l'expression du coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds est alors donné par:

$$z_i = 25 \mathcal{R}_{ep}^{-0.97} \quad (6-31)$$

6.4.2.1.2 Ecoulement turbulent

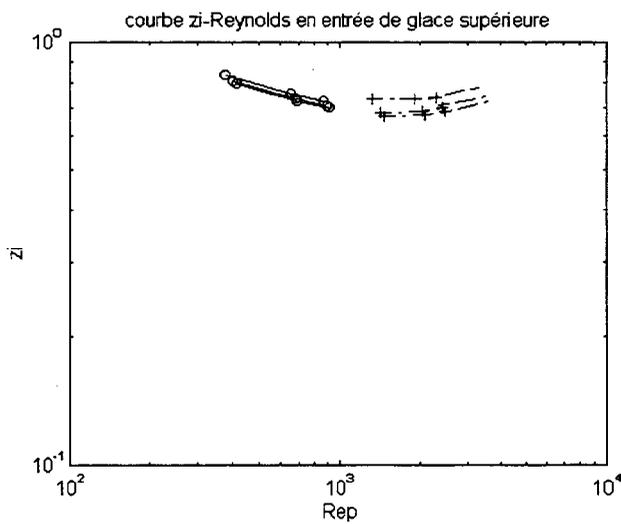


Figure 66 Courbe zi-Reynolds en entrée de glace supérieure (Ecoulement turbulent)

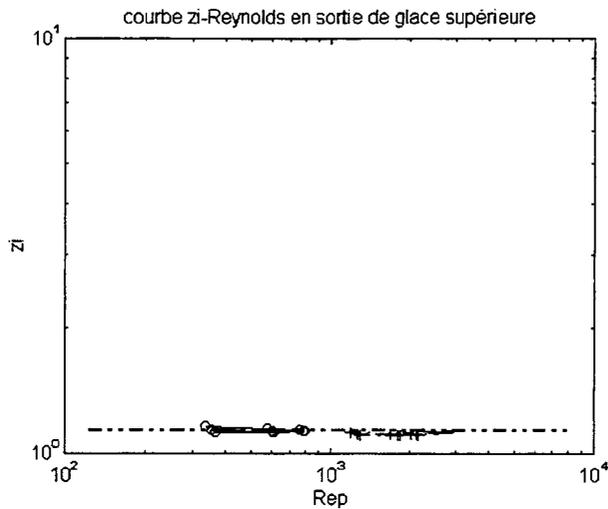


Figure 67 Courbe z_i -Reynolds en sortie de glace supérieure (Ecoulement turbulent)

Pour un écoulement turbulent, le coefficient de perte de charge singulière, en entrée ou en sortie de laminage est quasi indépendant du nombre de Reynolds et de la vitesse de rotation.

Nous prendrons pour valeur:

$$\text{Entrée de laminage:} \quad z_i = 0,75 \quad (6-32)$$

$$\text{Sortie de laminage:} \quad z_i = 1,1 \quad (6-33)$$

6.4.2.2 Butée inférieure

6.4.2.2.1 Ecoulement laminaire

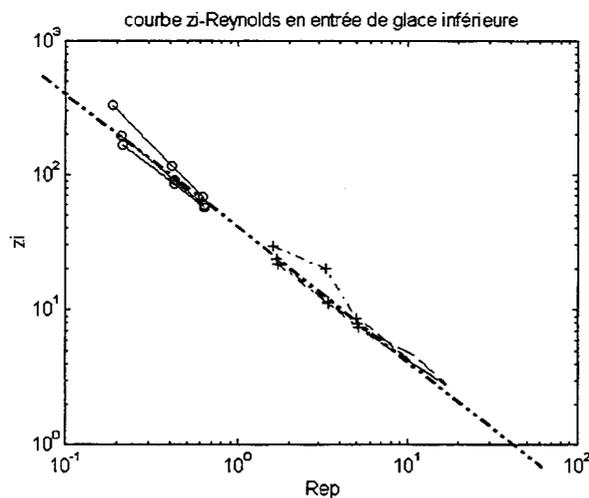


Figure 68 Courbe z_i -Reynolds en entrée de glace inférieure (Ecoulement laminaire)

Nous retrouvons une situation semblable à celle observée pour la butée supérieure. L'approximation linéaire fournit une relation entre le coefficient de perte de charge et le nombre de Reynolds:

$$z_i = 40 \mathcal{R}_{ep}^{-1} \quad (6-34)$$

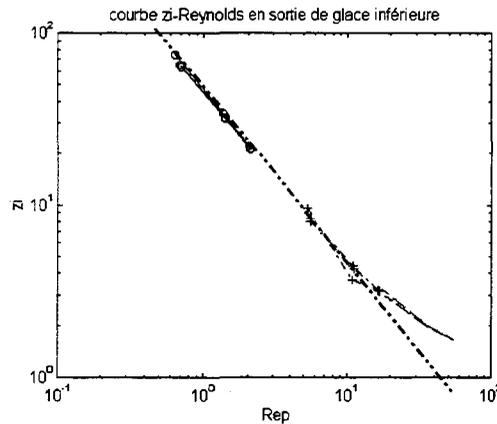


Figure 69 Courbe zi-Reynolds en sortie de glace inférieure (Ecoulement laminaire)

La figure 69 montre une corrélation linéaire entre le coefficient de perte de charge singulière et le nombre de Reynolds.

La loi est donnée par:

$$z_i = 46.4 \mathcal{R}_{ep}^{-1.005} \quad (6-35)$$

6.4.2.2.2 Ecoulement turbulent.

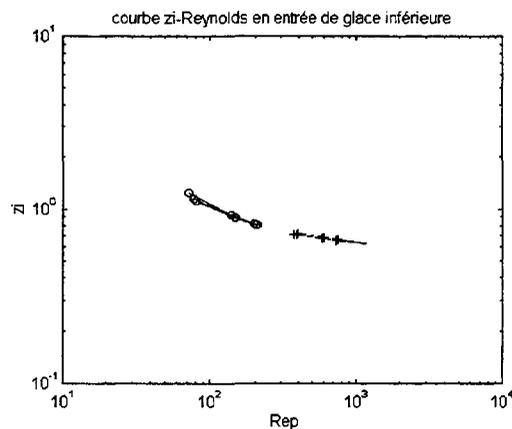


Figure 70 Courbe zi-Reynolds en entrée de glace inférieure (Ecoulement turbulent)

Une approximation de la loi est donnée par:

$$z_i = 4,05 \Re_{ep}^{-0,287} \quad (6-36)$$

dont la valeur moyenne, dans la plage d'utilisation de la butée, est $z_i = 0,85$

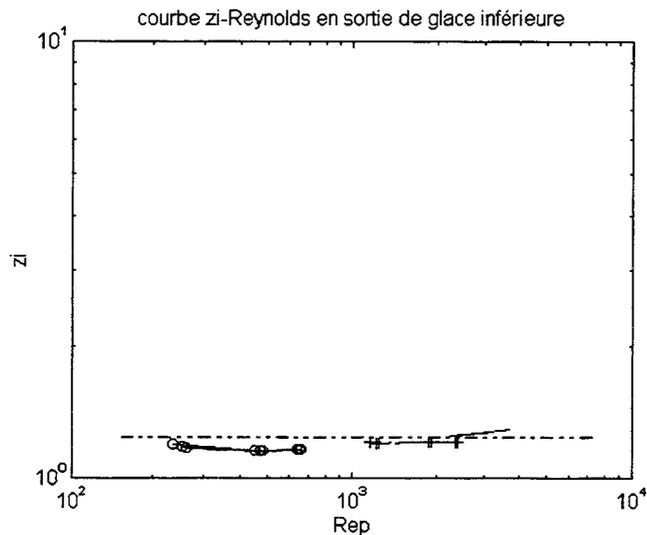


Figure 71 Courbe zi-Reynolds en sortie de glace inférieure (Ecoulement turbulent)

Le coefficient de perte de charge singulière, en sortie de laminage, est indépendant du nombre de Reynolds et de la vitesse de rotation.

Sa valeur est:

$$z_i = 1,2 \quad (6-37)$$

6.4.3 Conclusions

La méthode de résolution numérique, utilisant la formulation A.L.E., permet d'obtenir une valeur objective des coefficients de perte de charge singulière.

Pour un écoulement laminaire, la valeur de ces coefficients est très sensible à l'évolution du nombre de Reynolds de l'écoulement dans le laminage.

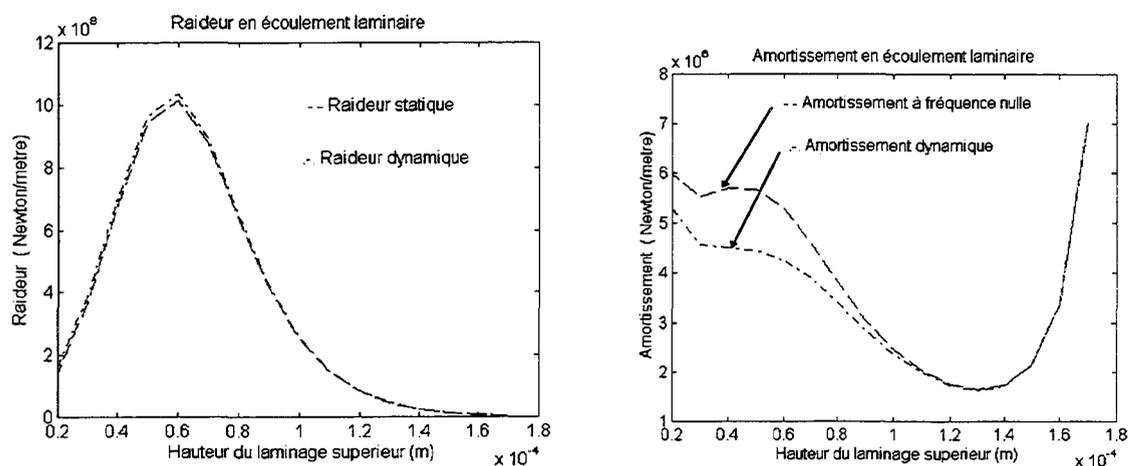
Par contre, pour un écoulement turbulent, leurs valeurs sont quasi indépendantes du nombre de Reynolds.

Dans les deux cas, la sensibilité à la vitesse de rotation est très faible.

Par ailleurs, alors qu'en laminaire, la majorité de la chute de pression a lieu dans la laminage (à titre indicatif, pour une hauteur de laminage de 10/100 mm et une différence de pression de 10 bar, la chute en entrée est 0,3 bar), en turbulent une perte non négligeable de la chute de pression a lieu en entrée (à titre indicatif, pour les mêmes conditions que précédemment, la chute de pression est de 2,5 bar)

L'utilisation d'une loi faisant intervenir le nombre de Reynolds permet d'automatiser le calcul dans le modèle global.

Les figures suivantes présentent les nouvelles évolutions, en régime laminaire, de la raideur et de l'amortissement, en utilisant les lois de détermination des coefficients de perte de charge singulière.

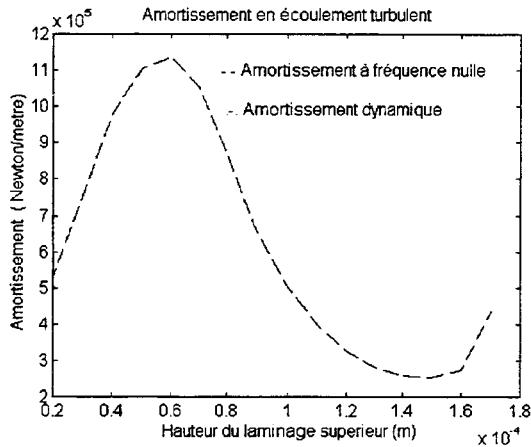
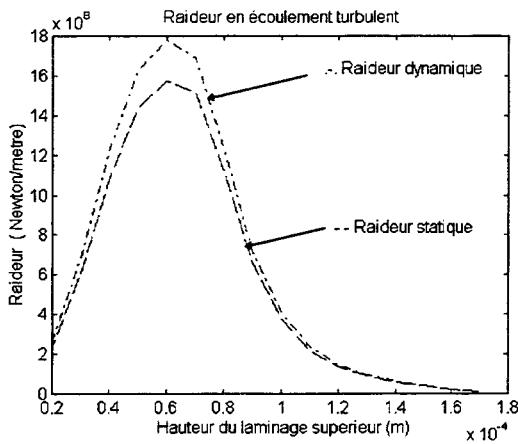


Figures 72 et 73 Nouvelles raideurs (amortissements) en régime laminaire.

Les caractéristiques dynamiques de la butée sont tracées sur les figures 72 et 73. Nous constatons une similitude entre ces courbes et celles obtenues, dans les mêmes conditions, par le calcul analytique (figures 15 et 16). Nous pouvons noter une diminution de la raideur maximale pour une fréquence d'excitation nulle et pour une fréquence d'excitation de 50 Hz. La perte de charge totale en entrée et sortie de laminage est importante (présence d'un coefficient de perte de charge singulière ayant une valeur supérieure à 100). Elle provoque une

diminution de la force portante. Le terme $V_0 \chi \frac{dp_m}{dt}$, dû à la compressibilité du fluide dans la chambre, a une influence minimale sur le comportement de la raideur dynamique. Par contre les valeurs de l'amortissement sont sensiblement les mêmes qu'en mode analytique.

Dans ce domaine d'utilisation du dispositif étudié, la détermination objective de la valeur des coefficients de perte de charge singulière en entrée et sortie de laminage est fondamentale pour prédire le comportement de la butée. Ceci montre l'importance du choix, au niveau industriel, de la géométrie de la butée servant à l'élaboration des laminages. Le comportement de la butée changera donc de manière significative.



Figures 74 et 75 Nouvelles raideurs (amortissements) en régime turbulent.

Les figures 74 et 75 présentent les résultats de l'évolution de la raideur et de l'amortissement en régime turbulent. Ces résultats sont comparables à ceux que nous venons d'obtenir en régime laminaire et à ceux obtenus en régime turbulent dans le chapitre précédent. Dans tous les cas, la prise en compte des pertes de charge singulière est un facteur de stabilité des performances.

7. CONCLUSION

Les butées hydrodynamiques sont parfois utilisées pour reprendre les efforts axiaux exercés sur des arbres de turbomachines. Lorsque les efforts sont importants, la butée peut être remplacée par un dispositif appelé piston d'équilibrage. Celui-ci est souvent constitué d'un ensemble de deux butées couplées à une chambre.

L'étude présentée permet de modéliser le comportement de ce type de mécanisme et notamment d'en déterminer les caractéristiques statiques et dynamiques.

En première partie une méthode analytique, de type monodimensionnel est mise en oeuvre. Le régime d'écoulement est laminaire. Les pertes de charge en entrée et sortie de laminage sont négligées. L'équation de Reynolds prend en compte les termes d'inertie de type centrifuge. La pression dans la chambre est supposée uniforme. Ce modèle a permis d'analyser l'évolution des caractéristiques dynamiques pour des fréquences d'excitation variables de l'arbre. Les résultats ont montré l'existence d'une position de la hauteur des laminages permettant d'obtenir une raideur maximale. Par contre l'amortissement varie peu sur la plage de fonctionnement du dispositif.

Pour des fluides à faible viscosité ou des vitesses de roues élevées, l'écoulement devient turbulent. De nouveau, un modèle monodimensionnel a été mis en place. Ce modèle prend en compte les pertes de charge en entrée et sortie de glace et l'équation de Reynolds en régime

turbulent. Le modèle de turbulence retenu est celui développé par Constantinescu. Les équations ne pouvant plus être résolues analytiquement, sont résolues numériquement. La comparaison des résultats avec ceux du modèle analytique en régime laminaire a permis de valider l'utilisation du code créé.

D'une part, une étude de sensibilité a été conduite afin d'évaluer l'influence des coefficients de perte de charge singulière sur le comportement du dispositif; d'autre part, nous avons montré l'importance que revêt le choix du type de géométrie.

Afin d'obtenir une valeur objective des coefficients de perte de charge, une méthode numérique basée sur la formulation A.L.E. a été mise en oeuvre à partir des travaux effectués au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille. Ceci a permis, en régime laminaire et turbulent, d'avoir une cartographie précise du champ des vitesses et de pression. En régime laminaire, les valeurs des coefficients de perte de charge singulière sont fonctions du nombre de Reynolds de l'écoulement débitant. En régime turbulent, ces coefficients sont quasi constants. Ces lois 'simples' ont été reprises dans le modèle global de calcul des caractéristiques dynamiques.

Des travaux complémentaires peuvent être envisagés:

- L'utilisation du modèle global pour examiner l'évolution de la valeur des paramètres dynamiques en fonction du volume de la chambre intermédiaire. Ceci serait intéressant, compte tenu des résultats obtenus sur des butées hydrodynamiques.

- Un calcul sur le modèle global avec le code A.L.E. permettant de vérifier l'hypothèse de l'uniformité de la pression dans la chambre.

- Des essais expérimentaux sur une maquette. A notre connaissance, aucun résultat expérimental n'a été publié sur le sujet.

8. BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. von KARMAN « Über laminare und turbulente Reibung » Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol1,1921.
- [2] E.G.COCHRAN « The Flow Due to a Rotating Disk » Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol20, 1933-1934
- [3] J.W.DAILY, R.E.NECE « Chamber Dimension Effect on Induced Flow and Frictional Resistance of Enclosed Rotating Disks » , Journal of Basic Engineering », mars 1960, p 217-232.
- [4] J. KUROKAWA, T. TOYOKURA « Study on Axial Thrust of Radial Flow Turbomachinery » The Second International JSME Symposium- Fluid Machinery and Fluidics, Sept1972, p31-40.
- [5] Y. SENOO, H. HAYAMI « An Analysis on the Flow in a casing Induced by a Rotating Disk Using a Four-Layer Flow Model » Journal of Fluids Engineering, juin 1976, p192-198.
- [6] J. KUROKAWA, T. TOYOKURA, M. SHINJO, K. MATSUO « Roughness Effects on the Flow along an Enclosed Rotating Disk » Bulletin of the JSME vol 21, n°162, 1978, p 1725-1732.
- [7] M. HIMDI « Contribution à la simulation numérique des écoulements de fluides compressibles et peu compressibles par le code de calcul KIVA-II » Thèse n°1150, Laboratoire de Mécanique de Lille, 1994.

- [8] A.RECHIA « Résolution numérique de équations de Navier-Stokes en bidimensionnel incompressible: Méthode d'Euler-Lagrange avec pénalité et maillage non structuré » Thèse, Laboratoire de Mécanique de Lille,1992.
- [9] Ch DEBAILLEUX : « Etude du comportement d'un palier hydrostatique »Thèse de Docteur de 3e cycle présentée à l'Université des Sciences et Techniques de Lille,1977.
- [10]Ch DEBAILLEUX , J. Cl. MARTI : "Résolution numérique de l'équation de Reynolds appliquée à des paliers cylindriques de type hydrodynamique et hydrostatique" - Note interne, E.U.D.I.L. Construction Mécanique Université de Lille 1, décembre 1981.
- [11]J. FRENE « Régime d'écoulement non laminaire en film mince - Application aux paliers lisses » Thèse de Docteur ès Sciences physiques, 1974.
- [12] I.E. IDEL'CIK « Mémento des pertes de charge » Eyrolles
- [13]A.FEIDT « Quelques résultats sur une méthode numérique de résolution de type Euler-Lagrange, pour les équations de Navier-Stokes » Thèse de Doctorat, Laboratoire de Mécanique de Lille, 1990.
- [14]R. DEBUCHY « Ecoulement turbulent avec aspiration radiale entre un disque fixe et un disque en rotation » Thèse n°1032, Laboratoire de Mécanique de Lille, 1993
- [15]E.LEROY-Ch.DEBAILLEUX-P.MICHEAU « Equilibrage de charge axiale. Etude statique et dynamique en écoulement laminaire » Revue du GAMI , vol48-N°3, Sept 1995, p162-165
- [16]J.FRENE - D.NICOLAS - B.DEGUEURCE - D.BERTHE - M.GODET "La lubrification hydrodynamique. Paliers et butées" Collection Direction des études et recherches d'Electricité de France N° 72 Eyrolles 1990.
- [17] Ch.DEBAILLEUX - D.NICOLAS " Détermination analytique des coefficients dynamiques d'une butée hydrostatique circulaire" Revue du GAMI N°415- Mars avril 1986, page 65-70.

- [18] G.I. TAYLOR « Statical theory of turbulence » Proc. Roy. Soc. A151.
- [19] D.F. WILCOCK « The hydrodynamic pocket bearing » trans; A.S.M.E., vol. 77, N°2, p311-319, 1955.
- [20] D.W. CHILDS, J.K. SCHARRER « An Iwatsubo Based Solution for Labyrinth Seals: Comparison to Experimental Results »; Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol108, Avril86, p325-331.
- [21] C.W. HIRT, A.A. AMSEN, J.L. COOK « An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds », Journal of Computational Physics, vol 14, 1974, p227-253.

9. ANNEXES

9.1 ANNEXE1

9.1.1 Ecoulement de Couette dû à la rotation de l'arbre.

$$G_r = \frac{1}{Kr} = \frac{1}{12 + 0.0136 \Re_{ec}^{0.9}} \quad (\text{A1-1})$$

où \Re_{ec} représente le nombre de Reynolds moyen basé sur la vitesse de rotation de l'arbre:

$$\Re_{ec} = \frac{\rho r \omega h}{\mu} \quad (\text{A1-2})$$

pour $2000 < \Re_{ec} < 3.10^4$
avec:

ρ = masse volumique du fluide
 r = rayon local
 ω = vitesse de rotation de l'arbre
 μ = viscosité dynamique
 h = diamètre hydraulique équivalent

9.1.2 Ecoulement de Poiseuille dû à la pression

Posons:

$$G_r = \frac{1}{Kr} = \frac{6.8}{\Re_{ep}^{0.681}} \quad (\text{A1-3})$$

où \Re_{ep} représente le nombre de Reynolds moyen basé sur la vitesse moyenne du fluide:

$$\Re_{ep} = \frac{\rho w_m h}{\mu}$$

pour $2000 < \Re_{ep} < 10^5$

avec

$$w_m = \sqrt{u_m^2 + v_m^2} \quad \text{vitesse moyenne}$$

h = diamètre hydraulique équivalent

ρ = masse volumique

μ = viscosité dynamique

L'écoulement dominant est celui pour lequel les coefficients de viscosité prennent la valeur la plus petite.

9.1.3 Détermination des coefficients de viscosité:

Pour un nombre de Reynolds inférieur à 1000, nous admettons que l'écoulement est laminaire. La valeur des coefficients, dans ce cas est:

$$G_{rc} = G_{rp} = 1/12$$

Le régime turbulent apparaît pour un nombre de Reynolds supérieur à 2000. Le calcul des coefficients de viscosité se fait à l'aide des formules (A1-1) ou (A1-3) suivant la nature de l'écoulement. Les figures 1 et 2 montrent l'évolution du coefficient de viscosité turbulente pour un nombre de Reynolds compris entre 500 et 4000.

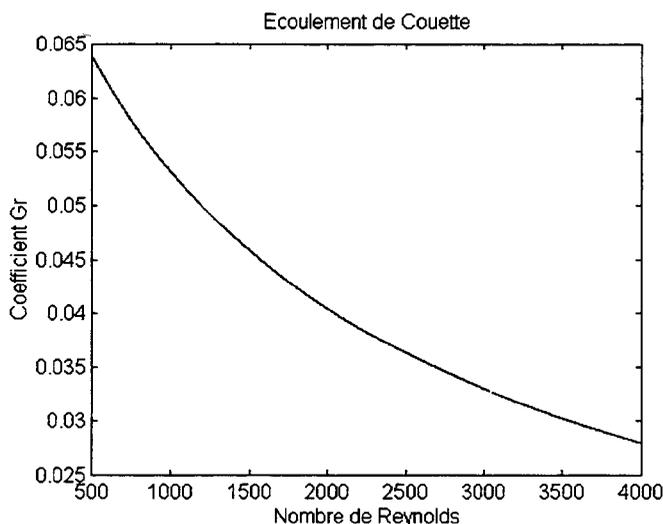


Figure 1: Evolution du coefficient de viscosité turbulente pour un écoulement de Couette

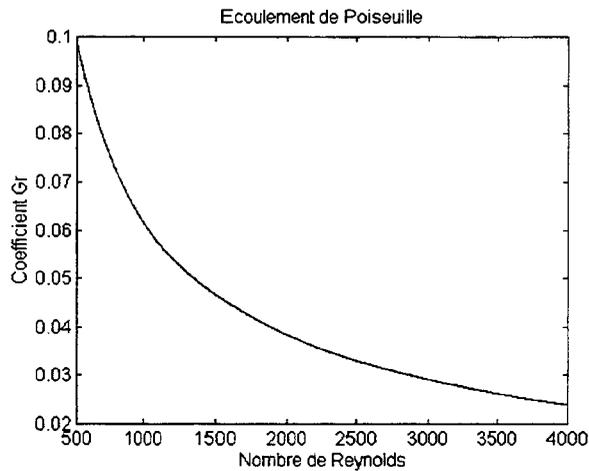


Figure 2: Evolution du coefficient de viscosité turbulente pour un écoulement de Poiseuille

Pour éviter des discontinuités des valeurs de Gr, il est effectué une linéarisation pour $1000 < \Re < 2000$ Voir figures 3 et 4.

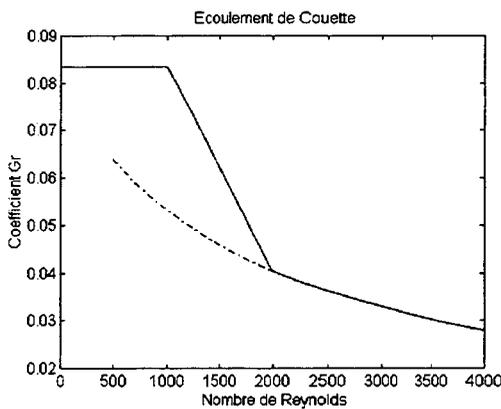


Figure 4 Linéarisation du coefficient Gr pour un écoulement de Couette

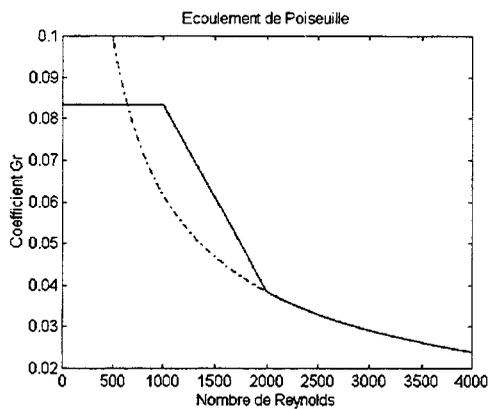


Figure 3 Linéarisation du coefficient Gr pour un écoulement de Poiseuille

Écoulement de Couette

- Pour $\Re_{ec} < 1000$

$$G_{rc} = \frac{1}{12} = \frac{1}{Kr}$$

- Pour $1000 < \Re_{ec} < 2000$

$$G_{rc} = G_{rc2000} + \left(\frac{1}{12} - G_{rc2000} \right) \left(2 - \frac{\Re_{ec}}{1000} \right) \quad (A1-4)$$

où G_{rc2000} est la valeur calculée à l'aide de la formule (A1-1) pour une valeur du nombre de Reynolds de 2000.

- Pour $\Re_{ec} > 2000$ Gr est calculé à l'aide de l'expression (A1-1)

Écoulement de Poiseuille

- Pour $Re_p < 1000$

$$G_{rp} = \frac{1}{12} = \frac{1}{Kr}$$

- Pour $1000 < Re_c < 2000$

$$G_{rp} = G_{rp2000} + \left(\frac{1}{12} - G_{rp2000}\right)\left(2 - \frac{Re_p}{1000}\right) \quad (A1-5)$$

où G_{rp2000} est la valeur calculée à l'aide de la formule ((A1-3)) pour une valeur du nombre de Reynolds de 2000.

- Pour $Re_c > 2000$ G_r est calculé à l'aide de l'expression (A1-3)

9.2 Annexe 2

9.2.1 Schéma du maillage du dispositif

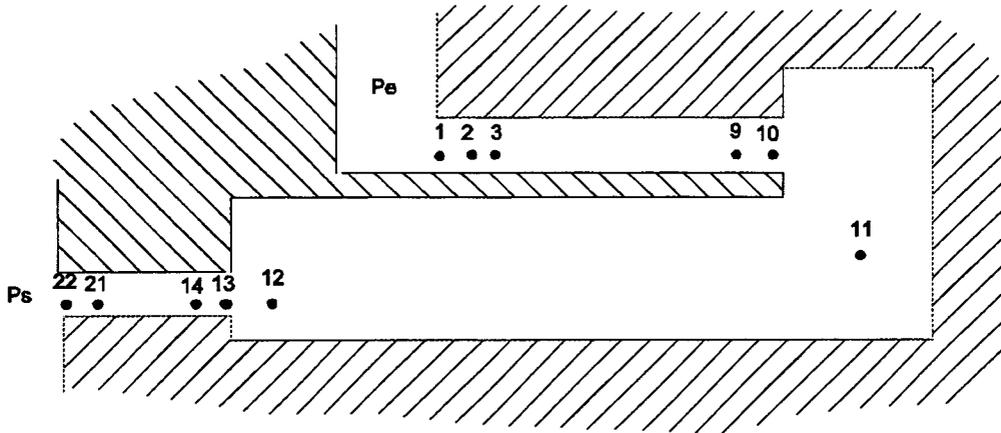


Figure 5 Maillage du dispositif

Le mécanisme est scindé en 22 mailles, 10 mailles pour chaque glace, 2 mailles dans la chambre pour tenir compte des pertes de charge singulières.

9.2.2 Discrétisation des équations

Les équations utilisées dans le développement au 1° ordre sont:

$$\text{Noeud1: } p_e + \frac{1}{2} \rho u_e^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (1 + z_1) u_1^2 \quad (\text{A2-1})$$

$$\text{Noeuds 2 à 10: Discrétisation de l'équation } u_m = -\frac{h^2}{\mu K_r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{3}{10} \frac{\rho \omega^2 r}{\mu K_r} h^2 \quad (\text{A2-2})$$

$$\text{Noeud 11: } p_{10} + \frac{1}{2} \rho (1 - z_{10}) u_{10}^2 = p_{11} + \frac{1}{2} \rho u_{11}^2 \quad (\text{A2-3})$$

$$\text{Noeud 12 } p_{11} + \frac{1}{2} \rho (1 - z_{11}) u_{11}^2 = p_{12} + \frac{1}{2} \rho u_{12}^2 \quad (\text{A2-4})$$

$$\text{Noeud 13: } p_{12} + \frac{1}{2} \rho u_{12}^2 = p_{13} + \frac{1}{2} \rho (1 + z_3) u_{13}^2 \quad (\text{A2-5})$$

$$\text{Noeuds 14 à 22 : Discrétisation de l'équation } u_m = -\frac{h^2}{\mu K_r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{3}{10} \frac{\rho \omega^2 r}{\mu K_r} h^2 \quad (\text{A2-6})$$

$$\text{Noeud 22: } p_{22} + \frac{1}{2} \rho (1 - z_s) u_{22}^2 = p_s + \frac{1}{2} \rho u_s^2 \quad (\text{A2-7})$$

Les z_i représentent les différentes pertes singulières de charge au noeud i .

Pour les vitesses:

$$S_e u_e = S_1 u_1 \quad (\text{A2-8})$$

En tout point du laminage 1

$$S_i u_i = S_{i+1} u_{i+1} + S_{gl1} \dot{h}_{gl1} \quad (\text{A2-9})$$

$$S_{10} u_{10} = S_{11} u_{11} \quad (\text{A2-10})$$

$$S_{11} u_{11} = S_{12} u_{12} + S_{ch} \dot{h}_{ch} + V_{ch} \chi \frac{dP_{ch}}{dt} \quad (\text{A2-11})$$

$$S_{12} u_{12} = S_{13} u_{13} \quad (\text{A2-12})$$

En tout point du laminage 2

$$S_i u_i = S_{i+1} u_{i+1} + S_{gl2} \dot{h}_{gl2} \quad (\text{A2-13})$$

$$S_{22} u_{22} = S_s u_s \quad (\text{A2-14})$$

La loi de variation sur la hauteur s'écrit :

$$h_i = h_{i0} + h_{1i}^* e^{i\omega^* t} \quad (\text{A2-15})$$

Où h_{i0} est la position de référence de la glace, h_{1i}^* ($= \varepsilon h_{i0}$, où ε petit) est la perturbation développée autour de la position de référence h_{i0} , ω^* est la pulsation d'excitation. Les valeurs h_{1i}^* , ω^* sont des valeurs réelles.

Ces perturbations induisent des perturbations sur les pressions et les vitesses.

$$p_i = p_{i0} + p_{1i}^* e^{i\omega^* t} \quad v_i = v_{i0} + v_{1i}^* e^{i\omega^* t}$$

Où P_{i0} , V_{i0} représentent la valeur de la pression et de la vitesse au noeud i pour le mouvement stationnaire et P_{1i}^* et V_{1i}^* les perturbations autour de la valeur de référence au noeud i . D'une manière générale, les valeurs P_{1i}^* et V_{1i}^* sont des valeurs complexes.

Posons

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta r}$$

La discrétisation de l'équation (A2-6) donne:

$$P_{(i+1)} = P_{(i)} + \Delta r \left[\frac{3}{10} \rho \omega^2 r(i) - \frac{\mu Kr(i) u(i)}{h^2} \right] \quad (\text{A2-16})$$

9.2.3 Développement au 1^o ordre des équations.

Équations de continuité:

$$\text{Noeud 1:} \quad S_e u_{1e}^* - 2\pi r_1 h_{gl10} u_{11}^* = 2\pi r_1 h_{1gl1}^* u_{10} \quad (\text{A2-17})$$

En tout point (A2-10) du laminage 1:

$$r_{i-1} h_{gl10} u_{i-1}^* - r_i h_{gl10} u_{1i}^* = i \frac{S_{gli}}{2\pi} \omega^* h_{1gl1}^* \quad (\text{A2-18})$$

$$\text{Noeud 11} \quad r_{10} h_{gl10} u_{110}^* - r_{\max} h_{ch0} u_{111}^* = r_{\max} h_{1ch}^* u_{110} - r_{10} h_{1gl1}^* u_{100} \quad (\text{A2-19})$$

$$\text{Noeud 12} \quad r_{\max} h_{ch0} u_{111}^* - r_{13} h_{ch0} u_{112}^* + \frac{\omega^*}{2\pi} V_{ch} \chi p_{1ch}^* = r_{13} h_{1ch}^* u_{120} - r_{\max} h_{1ch}^* u_{110} \quad (\text{A2-20})$$

$$\text{Noeud 13} \quad r_{13} h_{ch0} u_{112}^* - r_{13} h_{gl20} u_{113}^* = r_{13} h_{1gl2}^* u_{130} - r_{13} h_{1ch}^* u_{130} \quad (\text{A2-21})$$

En tout point (A2-13) du laminage 2:

$$r_{i-1} h_{gl20} u_{i-1}^* - r_i h_{gl20} u_{1i}^* = i \frac{S_{gli}}{2\pi} \omega^* h_{1gl2}^* \quad (\text{A2-22})$$

$$\text{Noeud 22} \quad S_s u_{1s}^* - 2\pi r_{22} h_{gl20} u_{122}^* = 2\pi r_{22} h_{1gl2}^* u_{220} \quad (\text{A2-23})$$

Équations sur les pressions:

$$\text{Maille1:} \quad p_{11}^* + \rho u_{11}^* u_{10} + \rho z_1 u_{11}^* u_{10} - \rho u_{1e}^* u_{e0} \quad (\text{A2-24})$$

Pour toute maille du laminage 1

$$p_{1i}^*(i) - p_{i-1}^* + \Delta r_{gl1} \frac{\mu Kr(i)}{h_{0gl1}^2} u_{i-1}^* = 2 \frac{\Delta r_{gl1} \mu Kr(i)}{h_{0gl1}^3} u_{0i-1} h_{1gl1}^* \quad (\text{A2-25})$$

$$\text{Maille11:} \quad p_{110}^* + \rho u_{010} u_{110}^* - p_{111}^* - \rho u_{011} u_{111}^* - \rho z_1 u_{010} u_{110}^* = 0 \quad (\text{A2-26})$$

$$\text{Maille12:} \quad p_{111}^* + \rho u_{011} u_{111}^* - p_{112}^* - \rho u_{012} u_{112}^* - \rho z_1 u_{011} u_{111}^* = 0 \quad (\text{A2-27})$$

$$\text{Maille13:} \quad p_{112}^* + \rho u_{012} u_{112}^* - p_{113}^* - \rho u_{013} u_{113}^* - \rho z_3 u_{013} u_{113}^* = 0 \quad (\text{A2-28})$$

Pour toute maille du laminage 2:

$$p_{1i}^*(i) - p_{1i+1}^* - \Delta r_{gl2} \frac{\mu Kr(i)}{h_{0gl2}^2} u_{1i}^* = -2 \frac{\Delta r_{gl2} \mu Kr(i)}{h_{0gl2}^3} u_{0i} h_{1g21}^* \quad (A2-29)$$

Maille22:
$$p_{122}^* + \rho u_{022} u_{122}^* - \rho u_{0s} u_{1s}^* - \rho z_s u_{022} u_{122}^* = 0 \quad (A2-30)$$

Les équations (A2-17) à (A2-30) forment un système de 46 équations à valeurs complexes à 46 inconnues complexes. Celui-ci fournit le système de 92 équations à valeurs réelles de type:

$$[ta(i, j)]x[tx(i)] = [sm(i)]$$

où

- $[tx(i)]$ est le vecteur colonne formé des 92 inconnues réelles de variation de vitesses et de pression en tout point du maillage.
- $[sm(i)]$ est le second membre du système d'équations.
- $[ta(i, j)]$ est la matrice 92x92 des coefficients de $[tx(i)]$.

Ce système est résolu directement par une méthode de Gauss, après avoir effectué un conditionnement de la matrice $[ta(i, j)]$.

