THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

MISSIÉ Pascal

# ESTIMATION DE CONTOURS D'UN PROCESSUS PONCTUEL PAR DES MÉTHODES À PAS ALÉATOIRE

Soutenue le 6 Décembre 1996 devant la Commission d'Examen :

Rapporteurs : **G. DUCHARME**, Université de Montpellier II

**B. MASSÉ**, Université du Littoral, Dunkerque

Membres : **P. JACOB**, Université de Montpellier II

**Ch. SUQUET**, Université de Lille I

**M.C. VIANO**, Université de Lille I

Aux deux personnes qui m'ont donné la vie.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à :

Madame le Professeur Marie-Claude VIANO directrice du laboratoire de Statistique et Probabilités de Lille qui, à une période chargée de l'année par de nombreuses obligations, a accepté la tâche supplémentaire de juger ce travail ;

Messieurs les Professeurs Bruno MASSÉ et Gilles DUCHARME, qui ont examiné ce travail avec rigueur, témoignent de l'intérêt qu'ils portent à ce travail, pour avoir accepté d'être les rapporteurs ;

Monsieur le Professeur Charles SUQUET, pour avoir accepté de faire partie du Jury de cette thèse, il a toujours fait preuve à mon égard d'une extrême amabilité et d'une grande disponibilité pour répondre à mes questions. Je l'en remercie très vivement ;

Monsieur le Professeur Pierre JACOB, directeur du laboratoire de Probabilités et Statistique de Montpellier, qui a inspiré et guidé cette initiation à la recherche. Il a fait preuve à mon égard d'une attentive patience et d'une très grande disponibilité, sous tendue par un esprit de comprehension loin de la complaisance, ses questions, ses critiques stimulantes, ses conseils éclairés et bienveillants sont à la base de la gestation de ce travail. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma très sincère et très profonde reconnaissance.

Je remercie les membres du laboratoire de Probabilités et Statistique et de nombreux collègues pour leur disponibilité, leur sympatie, notamment ceux qui se sont fréquemment enquis du déroulement de ma recherche et n'ont pas hésité de m'encourager.

Je remercie le personnel du secrétariat scientifique, Mesdames Arlette LENGAIGNE et Raymonde BÉRAT ainsi que Madame LLORET du service technique qui a participé à la réalisation materielle de ce travail avec soin, diligence et célérité.

Je remercie pour terminer, ma famille, mes amis, toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont soutenu, guidé et apporté leur aide et tous ceux qui en silence ont subi mes heures de travail.

# Table des matières

# Introduction

Le problème de l'estimation du support ou du contour du support d'une loi de probabilité ou plus généralement d'un processus ponctuel, étant donné un échantillon, a fait l'objet de multiples travaux sous divers aspects par de nombreux auteurs.

Dans le cas d'une loi de probabilité de support convexe, l'enveloppe convexe du nuage de points de l'échantillon est alors l'estimateur naturel du support. Associant ainsi le problème de l'estimation du support à l'étude de l'enveloppe convexe de cet échantillon : Geffroy[10](1958-1959) étudie le comportement asymptotique du polyèdre d'appui d'un échantillon bidimensionnel. Cette étude a été généralisée au cas d'un échantillon dans $\mathbb{R}^k$ dans Geffroy[11](1961). Renyi et Sulanke[26](1964), dans le cas où le support est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$, étudient l'espérance mathématique du périmètre et de la surface de l'enveloppe convexe. On retrouve un point de vue similaire dans Fisher[9](1965) qui considère le cas d'une loi produit de lois de probabilités sur $\mathbb{R}$, dans Efron[8](1965) qui étudie l'enveloppe convexe de l'échantillon de points tirés selon une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ à symétrie sphérique et dans un cadre plus général, au cas d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^k$ dans Raynaud [25](1965). Guilbart[14](1973) étudie la continuité de l'application qui à une probabilité de $\mathbb{R}^k$ associe l'enveloppe convexe fermée de son support .

Dans le cas d'un processus ponctuel sur $\mathbb{R}^2$ Rippley et Rasson[27] (1977) ont étudié l'estimation avec réduction du biais du support convexe par un dilaté de l'enveloppe convexe. Cette étude a été généralisée au cas de $\mathbb{R}^k$ par Moore[24](1984). Depuis les travaux de Guilbart[14], l'étude du problème de l'estimation d'un support convexe a connu un dévelopement considérable. On se rapportera à Delcroix[7](1992) et Massé[23](1993) pour une bibliographie plus large sur l'estimation d'un support convexe.

Le problème est trop complexe dans le cas où le support est non convexe pour être envisagé dans toute sa généralité. Cependant dans le cas où le support d'une loi de probabilité est délimité par le graphe d'une fonction suffisamment régulière, pour qu'une estimation

non paramétrique de cette fonction puisse être envisagée à partir d'un échantillon de cette loi, $\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \ : \ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Si $I$ est connu, le support est complètement déterminé par $f$ que nous appelerons contour du support. Ainsi le problème de l'estimation du support d'une loi de probabilité est équivalent au problème de l'estimation du contour du support d'une loi de probabilité étant donné un échantillon de cette loi.
Les premiers travaux relatifs à cette question semblent être ceux de Geffroy[12](1964) qui, dans le cas où $I = [a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue positive sur $[a,b]$, étudie un estimateur de $f$ de type histogramme à pas fixe. Bosq[4](1971) étudie quelques extensions des résultats de Geffroy[12], en considérant le cas où $I$ est un espace topologique compact, à base dénombrable, muni de sa tribu borelienne et d'une probabilité qui charge tout ouvert et $f$ est une fonction continue positive sur $I$. Il étudie également le cas où $I$ est un espace topologique localement compact, à base dénombrable, muni de sa tribu borélienne et d'une probabilité qui charge tout ouvert. Auquel cas il suppose d'abord que $f$ admette une limite strictement positive suivant le filtre des voisinages de l'infini et puis ensuite que $f$ puisse s'annuler ou changer de signe un nombre fini de fois sur $\mathbb{R}$. Chevalier[6](1976) considère le cas où $I = [a,b]$ et $f$ une fonction continûment différentiable.
Dans le cas d'un processus ponctuel :

Gensbitel[13] (1979) adapte les travaux de Geffroy[12], puis il étudie une généralisation au cas où $I = \mathbb{R}$ et $f$ une fonction positive uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Jacob[15](1981) considère le cas où $I = [a,b]$ et $f$ présente des discontinuités de première espèce. Jacob et Abbar[16](1989) considèrent le cas d'un processus ponctuel de Cox sur $\mathbb{R}^2$ dont le support est défini en coordonnées polaires par : $\{(\rho,\theta) \in \mathbf{R} \times [0,2\pi[ \ : \ 0 \leq \rho \leq \phi(\theta) \ ; \ \phi(0) = \phi(2\pi)\}$, où $\phi$ est une fonction continue positive. Tous ces auteurs ont étudié un estimateur de $f$ et de $\phi$ de type histogramme à pas fixe. Abbar[1](1990) étudie un estimateur spline cubique à pas fixe de $\phi$. Abbar et Suquet[2](1993), dans le cas où $I = [a,b]$ et $f$ une fonction mesurable de carré intégrable sur $[a,b]$, étudient un estimateur de $f$ par une méthode des fonctions orthogonales et, Jacob et Suquet[18](1993) en font une étude approffondie. L'estimation de contours par l'intermédiaire d'estimateurs de la régression a été envisagée par Jacob et Suquet[19] (1996). On se rapportera aussi à Mammen et Tsybakov[22](1992), Tsybakov[28](1992), Jacob[17] et, Korostelev, Simar et Tsybakov[21](1995) pour une bibliographie plus large sur l'estimation du support et du contour d'un support convexe et non convexe.

Contrairement aux méthodes susmentionnées, l'estimation du contour du support par la méthode de type histogramme à pas aléatoire n'a pas encore été étudiée.

Dans ce travail qui se situe sur la ligne des travaux de Geffroy[12], Gensbitel[13], Jacob[15], Jacob et Abbar[16] et Abbar[1]. Nous proposons diverses méthodes d'estimation de contours d'un processus ponctuel en utilisant la méthode à pas aléatoire, les références de base sur le pas aléatoire sont Abou-Jaoudé[3] et Van Ryzin[29], plus de détails peuvent être trouvés dans Bosq et Lecoutre[5] :

Au chapitre1, nous considérons un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^2$, de support défini en coordonnées polaires par :

$$\left\{(\rho, \theta) \in \mathbf{R} \times [0, 2\pi[ \, : \, 0 \leq \rho \leq \phi(\theta) \, ; \, \phi(0) = \phi(2\pi)\right\}$$

où $\phi$ est une fonction continue et positive. A partir d'un $n-$échantillon du processus ponctuel de Poisson et d'une partition de $[0\, , \, 2\pi[$ en blocs équilibrés donc d'une partition du support en secteurs angulaires aléatoires. Nous définissons un estimateur $\phi_n$ de $\phi$, de type histogramme à pas aléatoire, comme étant le rayon du point le plus éloigné de l'origine dans chaque secteur angulaire aléatoire. Nous établissons des conditions sufffisantes de convergence uniforme presque complète et des conditions nécessaires de convergence uniforme en probabilité de l'estimateur $\phi_n$ vers $\phi$. Nous établissons que la loi limite du maximum d'un nombre aléatoire de variables aléatoires est une loi de Gumbel dont le paramètre dépend de $\phi$ et nous en déduisons la loi limite de l'estimateur qui se trouve être la même que celle du maximum du nombre aléatoire de variables aléatoires.

Au chapitre2, nous généralisons l'étude du chapitre1 en considérant un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ de support défini par :

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq y < f(x) \, ; \, 0 \leq x < 1\right\}$$

où $f$ est une fonction continue positive. Étant donné un $n-$échantillon du processus ponctuel de Poisson. A partir d'une partition de $[0, 1[$ en blocs non nécessairement équilibrés, donc à partir d'une partition du support en domaines aléatoires. Nous définissons comme au chapitre1, un estimateur $f_n$ de $f$ de type histogramme à pas aléatoire comme étant la plus grande ordonnée des points dans chaque domaine aléatoire. Nous établissons des conditions nécessaires de convergence uniforme en probabilité et une condition suffisante de convergence uniforme presque complète. Pour étudier la loi limite, dans les deux cas chapitres 1 et 2, nous nous ramenons à un processus empirique en conditionnant par rapport au nombre total de points du $n-$échantillon du processus ponctuel de Poisson. Nous établissons que la loi limite de cet estimateur est une loi de Gumbel dont le paramètre dépend de $f$, généralisant ainsi les travaux de Geffroy[12], Gensbitel[13] et ceux Jacob et Missié[20].

Au chapitre3, nous étudions l'estimation de $\phi$ et $f$ par la méthode spline à pas aléatoire, en procédant à un lissage de l'estimateur $\phi_n$ par une fonction spline cubique périodique $\hat{\phi}_n$ dont les noeuds sont les milieux des blocs équilibrés et à un lissage de l'estimateur $f_n$ par une fonction spline cubique non périodique $\hat{f}_n$ dont les noeuds sont des extrémités de chaque bloc. Nous établissons que sous les mêmes conditions nécessaires et suffisantes de convergence uniforme de $\phi_n$ et $f_n$ vers $\phi$ et $f$ respectivement suivant certains modes stochastiques, les estimateurs $\hat{\phi}_n$ et $\hat{f}_n$ convergent uniformément vers $\phi$ et $f$ respectivement suivant les mêmes modes stochastiques.

Au chapitre4, nous considérons que le support d'un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ est de la forme :

$$\Big\{(x,y) \in [0,\,1] \times \mathbf{R} \;:\; \mathbf{0} \leq \mathbf{y} < \max\Big(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^-)\Big)\Big\}$$

où $f$ une fonction continue à droite ayant une limite à gauche en tout point de $[0,\,1]$ et $f(x^-)$ est la limite à gauche de $f$ au point $x$. Nous étudions l'estimation de $f$ par la méthode à pas aléatoire. Une condition suffisante de convergence presque complète en moyenne d'ordre $1 \leq p < +\infty$ est établie. Nous étudions ensuite l'estimation des sauts et de la hauteur des sauts de la fonction $f$. Et nous établissons une condition nécessaire puis une condition suffisante de convergence selon la distance de Skorokhod, généralisant ainsi les résultats de Jacob[15].

# Bibliographie


[1] **ABBAR H.**(1990) "Un estimateur spline du contour d'une répartition ponctuelle aléatoire." Statistique et analyse des données, Vol.15, No 3, p 1–19.

[2] **ABBAR H. et SUQUET Ch.**(1993) "Estimation $L^2$ du contour d'un processus de Poisson homogène sur le plan." Pub. IRMA Lille, Vol. 31, II.

[3] **ABOU-JAOUDÉ S.**(1977) : "La convergence $\mathbf{L_1}$ et $\mathbf{L_\infty}$ de certains estimateurs d' une densité de probabilité."
Thèse de l' université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[4] **BOSQ D.** (1971) "Contribution à la théorie de l' estimation fonctionnelle." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[5] **BOSQ D. et LECOUTRE J. P.**(1987) " Théorie de l'estimation fonctionnelle." Economica.

[6] **CHEVALIER J.**(1976) "Estimation du support et du contour d'une loi de probabilité." Ann. Inst. Henri Poincaré ,B, Vol. 12, 4, 339–364.

[7] **DELCROIX M.F.**(1992) "Problèmes de valeurs extrêmes pour des échantillons multidimensionnels." Thèse, Université des sciences et technologies de Lille.

[8] **EFRON B.**(1966) "The convex hull of random set of points."
Biometrica, 52, 331–343 .

[9] **FISHER L.** (1966) "The convex hull of a sample ." Bull. Ann. Math. Soc. 72, 555–558.

[10] **GEFFROY J.**(1958-1959) : "Contribution à la théorie des valeurs extrêmes."
Pub. ISUP XIII, 191–220.

[11] **GEFFROY J.**(1961) "Localisation asymptotique du polyèdre d' appui d'un échantillon laplacien à k-dimensions." Pub. ISUP, No 59, 213–228.

[12] **GEFFROY J.**(1964) " Sur un problème d'estimation géometrique ." Pub. ISUP XXII, fasc.1, 31–70 .

[13] **GENSBITEL M. H.**(1979) "Contribution à l' étude statistique des répartitions ponctuelles ." Thèse , Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[14] **GUILBART C.**(1973) "Etude de la continuité de l'application qui à toute mesure de probabilité définie sur $\mathbf{R}^n$, fait correspondre l'enveloppe convexe fermée du support de cette mesure ." C.R.A.S. de Paris, 277, série A, 990–1002.

[15] **JACOB P.**(1981) " Estimation du contour discontinu d'un processus ponctuel sur le plan ." Pub. ISUP 29, 3-4, p1–25.

[16] **JACOB P. and ABBAR H.**(1989) "Estimating the edge of a Cox process area ." Cahiers du Centre de Recherche Operationnelle, Vol.31, 3–4.

[17] **JACOB P.**(1993) "L' extrapolation statistique des confins d' une loi multidimensionnelle." Pub. IRMA Lille, Vol. 31, II.

[18] **JACOB P. and SUQUET Ch.**(1993) "Estimating the edge of a Poisson process by orthogonal series." J. Statist. Planning Inf. 46, 215-235.

[19] **JACOB P. and SUQUET Ch.**(1996) " Regression and edge estimation ." Statistics and Probability Letters 27, 11–15.

[20] **JACOB P. et MISSIÉ P.**(1995) : "Estimation à pas aléatoire du contour d'un processus ponctuel de Poisson." Pub. IRMA Lille, Vol.37, 12. A paraître dans les publications de L'ISUP.

[21] **KOROSTELEV A.P. , SIMAR L. et TSYBAKOV A.B.**(1995) "On estimation of monotone and convex boundaries." Pub. ISUP XXXIX, fasc.1, p.3–18.

[22] **MAMMEN E. and TSYBAKOV A.B.**(1992) " Asymptotical minimax results in image analysis for sets with smooth boundaries." Institue of Statistics discussion paper No 9205, Université catholique de Louvain.

[23] **MASSÉ B.**(1993) " Principe d' invariance pour la probabilité d' un dilaté de l' enveloppe convexe d' un échantillon."
Ann. Inst. Henry Poincaré, Vol. 29, No 1, p. 37–55.

[24] **MOORE M.**(1984) : "On the estimation of a convex set."
The Annals of Statistics, Vol. 12, 3, 1090–1099.

[25] **RAYNAUD H.**(1965) " Sur le comportement asymptotique de l' enveloppe convexe d'un nuage de points tirés au hasard dans $\mathbf{R}^n$." C.R.A.S.de, Paris, 262, A, 623–627.

[26] **RENYI A. and SULANKE R.**(1964 ) " Uber bie konvexe hülle vonze fälling gewählten punklen II." Z. wahr 3, p.138–148 .

[27] **RIPLEY B. D. and RASON J. P.**(1977) "Finding the edge of Poisson forest." Journal of a Applied Probability, 14, 483–491.

[28] **TSYBAKOV A.B.**(1992) " Multidimensionnal change-point problems and boundary estimation." Institue of Statistics discussion paper No 9211, Université catholique de Louvain.

[29] **VAN RYZIN J.**(1973) : "A histogram method of density estimation ."
Comm. Statist., 2, p. 493-502 .

# Chapitre 1

# Estimation à pas aléatoire du contour du support étoilé d'un processus ponctuel de Poisson

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons un processus ponctuel de Poisson de support défini en coordonnées polaires par :

$$\Big\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi[ :\ 0 \leq \rho < \phi(\theta)\,;\ \phi(0) = \phi(2\pi)\Big\}$$

où $\phi$ est une fonction continue positive et inconnue à estimer. A partir d'un échantillon de ce processus ponctuel de Poisson, nous nous proposons d'estimer $\phi$ par la méthode à pas aléatoire. Nous établissons des conditions nécessaires de convergence uniforme en probabilité et des conditions suffisantes de convergence uniforme presque complète, de l'estimateur construit par la méthode à pas aléatoire et nous établissons que la loi limite de cet estimateur est une loi de Gumbel dont le paramètre dépend de $\phi$. Nous établissons aussi une condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme presque complète, presque sûre ou en probabilité vers zéro de la longueur des blocs.

## 1.2 Préliminaires

### 1.2.1 Notations, définitions et hypothèses

Soit $K$ une fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, croissante, telle que $K(1) = 1, \quad K(\ell) < \ell$ pour $\ell > 1$. On définit une fonction $\nu$ sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N}^* \quad \nu(\ell) = \left[\frac{\ell}{K(\ell)}\right]$$

où [ ] désigne la fonction partie entière.
Soit un processus ponctuel de Poisson $N$ sur $\mathbb{R}^2$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de mesure moyenne $\mu = E(N)$ et de support défini en coordonnées polaires par

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[\, : \; 0 \leq \rho < \phi(\theta)\,;\, \phi(0) = \phi(2\pi)\right\}, \tag{1.1}$$

où $\phi$ est une fonction continue positive. On suppose que la mesure moyenne $\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, $\lambda$, et que la densité $\psi = \frac{d\mu}{d\lambda}$, vérifie :

$$A \leq \psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \leq B \quad \forall\, (\rho, \theta) \in S \tag{1.2}$$

où A et B sont deux constantes réelles strictement positives.
On considère $n$ processus ponctuels $N_1, \cdots, N_n$ indépendants définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de même loi de probabilité que $N$. On note $N^{(n)} = N_1 + \cdots + N_n$ leur superposition. On désigne par $L^{(n)}$ l' effectif aléatoire de $N^{(n)}$ sur $S$ c'est-à-dire :

$$L^{(n)} = N^{(n)}(S) = \sum_{i=1}^{n} N_i(S).$$

Dans la suite, on donne des résultats asymptotiques pour $n \longrightarrow +\infty$, sous des conditions concernant le comportement de $K(\ell)$ quand $\ell \longrightarrow +\infty$. Evidemment, $L^{(n)} \longrightarrow +\infty$ *p.s.* Une partie des difficultés proviendront de ce lien aléatoire entre $n$ et $\ell$, et des notations compliquées qui pourraient en résulter. $N^{(n)}$ est un processus ponctuel de Poisson de mesure moyenne $n\mu$. On peut toujours représenter $N^{(n)}$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{L^{(n)}} \delta_{(\rho_{i,n}\,;\,\theta_{i,n})}$$

où $\delta_{(\rho_{i,n}\,;\theta_{i,n})}$ est la mesure aléatoire de Dirac, où $L^{(n)}, (\rho_{1,n}\ ;\ \theta_{1,n}), \cdots, (\rho_{i,n}\ ;\ \theta_{i,n}), \cdots$ sont des variables aléatoires indépendantes, où $L^{(n)}$ est à valeurs entières et suit une loi de Poisson de paramètre $n\mu(S)$ et où les variables aléatoires $(\rho_{i,n}\ ;\ \theta_{i,n})$, $i = 1, \cdots$, sont à valeurs dans $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ et suivent une loi commune de densité

$$g(\rho, \theta) = \frac{\rho\psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\mu(S)} \mathbb{I}_{\{0\leq\theta<2\pi\}} \mathbb{I}_{\{0\leq\rho<\phi(\theta)\}} \tag{1.3}$$

Le fait remarquable est que cette loi ne dépend pas de $n$. Ainsi, conditionnellement à $\{L^{(n)} = \ell\}$, $N^{(n)}$ a la même loi que le processus empirique

$$\sum_{i=1}^{\ell} \delta_{(\rho_{i,n}\,;\,\theta_{i,n})}$$

### 1.2.2 Partitions en blocs équilibrés et en secteurs angulaires aléatoires

Supposons les variables aléatoires $\theta_{i,n}$ distinctes, ce qui est presque sûrement réalisé. Si l'événement $\{L^{(n)} = \ell\}$ est réalisé, on désigne par

$$\left(\rho_{1,n}^{(\ell)}\ ;\ \theta_{1,n}^{(\ell)}\right), \cdots, \left(\rho_{\ell,n}^{(\ell)}\ ;\ \theta_{\ell,n}^{(\ell)}\right)$$

les points de la réalisation du processus ponctuel de Poisson $N^{(n)}$, rangés selon les $\theta_{i,n}$ croissants :

$$\theta_{1,n}^{(\ell)} < \theta_{2,n}^{(\ell)} < \cdots < \theta_{\ell,n}^{(\ell)}$$

désignent les variables aléatoires $\theta_{1,n}$, $\theta_{2,n}, \cdots$, $\theta_{\ell,n}$ rangées par ordre croissant, et

$$si \quad \theta_{i,n} = \theta_{j,n}^{(\ell)} \quad \text{alors} \quad \rho_{j,n}^{(\ell)} = \rho_{i,n} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq \ell.$$

Par conséquent, conditionnellement à $\{L^{(n)} = \ell\}$ :

$\theta_{1,n}^{(\ell)}, \cdots, \theta_{\ell,n}^{(\ell)}$ est la statistique d'ordre d'un échantillon de taille $\ell$ d'une loi de probabilité absolument continue qui admet pour densité

$$g_1(\theta) = \int_0^{+\infty} g(\rho, \theta)\, d\rho = \frac{1}{\mu(S)} \left( \int_0^{\phi(\theta)} \rho\, \psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, d\rho \right) \mathbb{I}_{\{0\leq\theta<2\pi\}} \tag{1.4}$$

et $\rho_{1,n}^{(\ell)}, \cdots$, $\rho_{\ell,n}^{(\ell)}$ sont des concomitants des statistiques d'ordre, dont les détails peuvent être trouvés dans [10] et [11].

Suivant une terminologie usuelle, voir par exemple les articles Dia[10] et Geffroy[13] :

On appelle bloc de la suite $\theta_{1,n}^{(\ell)}, \cdots, \theta_{\ell,n}^{(\ell)}$ tout intervalle $(\theta_{i,n}^{(\ell)} \; ; \; \theta_{j,n}^{(\ell)})$. Les blocs de la forme $\left(\theta_{i,n}^{(\ell)} \; ; \; \theta_{i+1,n}^{(\ell)}\right)$ sont appelés mailles.
On peut partager l'intervalle $[0, 2\pi[$ en blocs de la forme :

$$\Delta_{\ell,n,r} = \left[\theta_{R(r-1),n}^{(\ell)} \, , \, \theta_{R(r),n}^{(\ell)}\right[ , \quad r = 1, \, 2, \cdots, \, K(\ell)$$

avec $\theta_{R(0),n}^{(\ell)} = \theta_{R(K(\ell)),n}^{(\ell)}$, de telle manière que chacun des blocs contienne $\nu_{\ell,r} = \nu_{(\ell)}$ ou $\nu_{(\ell)} + 1$ points de $\theta_{1,n}^{(\ell)}, \cdots, \theta_{\ell,n}^{(\ell)}$. On a :

$$\begin{aligned} R(0) &= 1 \\ R(1) &= \nu_{\ell,1} + 1, \\ R(2) &= \nu_{\ell,1} + 1 + \nu_{\ell,2}, \\ &\vdots \\ R(K(\ell)) &= \nu_{\ell,1} + 1 + \nu_{\ell,2} + \cdots + \nu_{\ell,K(\ell)} = \ell + 1. \end{aligned}$$

On dira que les $K(\ell)$ blocs sont équilibrés pour exprimer le fait qu'ils contiennent le même nombre de points de l'échantillon à une unité près.

Ainsi, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a une partition en blocs équilibrés $\Delta_{\ell,n,r}$ de $[0, 2\pi[$ :
$\Delta_{\ell,n,r}; r = 1, \cdots, K(\ell)$.
On pose, pour tout $r = 1, \, 2, \cdots, \, K(\ell)$ :

$$D_{\ell,n,r} = \{(\rho, \theta) \in S \, : \, \theta \in \Delta_{\ell,n,r}\}.$$

Ainsi, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a une partition en secteurs angulaires aléatoires $D_{\ell,n,r}$ de $S$ : $D_{\ell,n,r} \; ; \; 1 \leq r \leq K(\ell)$.

Afin d'obtenir des notations cohérentes. Nous devons malheureusement alourdir encore un peu notre système de notations, ce qui suit va permettre de simplifier un peu la présentation :

### 1.2.3 Choix d'un système de notations

On pose , pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et tout $r = 1, 2, \cdots, \, K(\ell)$ :

$$M_{\ell,n,r} = \sup\{\phi(\theta) \, : \, \theta \in \Delta_{\ell,n,r}\} ,$$

$$\begin{aligned}
m_{\ell,n,r} &= \inf\{\phi(\theta) \,:\, \theta \in \Delta_{\ell,n,r}\}\,, \\
U_{\ell,n,r} &= \max\left\{\rho^{(\ell)}_{i,n} \,:\, \theta^{(\ell)}_{R(r-1),n} < \theta^{(\ell)}_{i,n} < \theta^{(\ell)}_{R(r),n}\right\}, \\
V_{\ell,n,r} &= \theta^{(\ell)}_{R(r),n} - \theta^{(\ell)}_{R(r-1),n}\,, \\
\tilde{\theta}_{\ell,n,r} &= \left\{\theta^{(\ell)}_{R(r-1),n}\,, \theta^{(\ell)}_{R(r),n}\right\}.
\end{aligned}$$

On pose ensuite :

$$\begin{aligned}
V_{\ell,n} &= \max_{1\le r\le K(\ell)} V_{\ell,n,r}\,, \\
W_{\ell,n} &= \min_{1\le r\le K(\ell)} V_{\ell,n,r}\,, \\
\tilde{\theta}^{(\ell)}_{n} &= \left\{\theta^{(\ell)}_{R(r),n}\,;\, 1\le r\le K(\ell)\right\}, \\
M &= \sup\{\phi(\theta) \,:\, 0\le\theta<2\pi\}\,, \\
m &= \inf\{\phi(\theta) \,:\, 0\le\theta<2\pi\}\,.
\end{aligned}$$

Il est clair que $M_{\ell,n,r}$ , $m_{\ell,n,r}$ , $U_{\ell,n,r}$ sont des fonctions mesurables de $\Big((\rho_{1,n}\,;\theta_{1,n}),\cdots,(\rho_{\ell,n}\,;\theta_{\ell,n})\Big)$ sur l' ensemble $\left\{L^{(n)}=\ell\right\}$. En effet :

$\Delta_{\ell,n,r}$ peut être assimilé au couple de variables aléatoires $\left(\theta^{(\ell)}_{R(r-1),n}\,;\,\theta^{(\ell)}_{R(r),n}\right)$ qui est une fonction mesurable de $\Big((\rho_{1,n}\,;\theta_{1,n}),\cdots,(\rho_{\ell,n}\,;\theta_{\ell,n})\Big)$ et $\phi$ est continue, ce qui assure la mesurabilité de $M_{\ell,n,r}$ et $m_{\ell,n,r}$. Pour $U_{\ell,n,r}$ , c'est le maximum d'un nombre fini de variables aléatoires fonctions de $\Big((\rho_{1,n}\,;\theta_{1,n}),\cdots,(\rho_{\ell,n}\,;\theta_{\ell,n})\Big)$.

Il est bien connu qu'on obtient des variables aléatoires, si on les définit par "morceaux" mesurables.

On pose enfin :

$$\begin{aligned}
M_{L^{(n)},n,r} &= \sum_{\ell\in\mathbb{N}^*} M_{\ell,n,r}\,\mathbb{1}_{\{L^{(n)}=\ell\}} \\
m_{L^{(n)},n,r} &= \sum_{\ell\in\mathbb{N}^*} m_{\ell,n,r}\,\mathbb{1}_{\{L^{(n)}=\ell\}} \\
U_{L^{(n)},n,r} &= \sum_{\ell\in\mathbb{N}^*} U_{\ell,n,r}\,\mathbb{1}_{\{L^{(n)}=\ell\}} \\
\Delta_{L^{(n)},n,r} &= \Delta_{\ell,n,r} \quad \text{sur} \quad \{L^{(n)}=\ell\} \\
D_{L^{(n)},n,r} &= D_{\ell,n,r} \quad \text{sur} \quad \{L^{(n)}=\ell\}.
\end{aligned}$$

Bien entendu, les calculs que nous aurons à faire passeront en général par une étape de conditionnement par rapport à $\{L^{(n)} = \ell\}$. Il est clair que pour $n \neq n'$, les événements $\{L^{(n)} = \ell\}$ et $\{L^{(n')} = \ell\}$ sont presque sûrement différents, ainsi que les vecteurs aléatoires

$$\Big((\rho_{1,n}\,;\,\theta_{1,n}),\cdots,(\rho_{\ell,n}\,;\,\theta_{\ell,n})\Big) \quad \text{et} \quad \Big((\rho_{1,n'}\,;\,\theta_{1,n'}),\cdots,(\rho_{\ell,n'}\,;\,\theta_{\ell,n'})\Big).$$

On ne peut identifier en toute rigueur $D_{\ell,n,r}$ et $D_{\ell,n',r}$ , $M_{\ell,n,r}$ et $M_{\ell,n',r}$ , $U_{\ell,n,r}$ et $U_{\ell,n',r}$. Cependant ce sont des fonctions mesurables de

$$\Big((\rho_{1,n}\,;\,\theta_{1,n}),\cdots,(\rho_{\ell,n}\,;\,\theta_{\ell,n})\Big) \quad \text{et} \quad \Big((\rho_{1,n'}\,;\,\theta_{1,n'}),\cdots,(\rho_{\ell,n'}\,;\,\theta_{\ell,n'})\Big)$$

qui ont même loi, respectivement à $\{L^{(n)} = \ell\}$ et à $\{L^{(n')} = \ell\}$ respectivement. Comme les démonstrations faites sous un conditionnement tel que $\{L^{(n)} = \ell\}$ ne concerne que les propriétés de la loi de $(\rho_{1,n}\,;\,\theta_{1,n}),\cdots,(\rho_{\ell,n}\,;\,\theta_{\ell,n})$, il est commode d'introduire des variables aléatoires fictives $(\rho_1,\theta_1),\cdots,(\rho_\ell,\theta_\ell)$ indépendantes telles que : pour tout borélien $T$ de $\Big(\mathbb{R}_+ \times [0\,,\,2\pi[\Big)^\ell$

$$\begin{aligned}
P\Big\{\Big((\rho_{1,n}\,;\,\theta_{1,n}),\cdots,(\rho_{\ell,n}\,;\,\theta_{\ell,n})\Big) \in T/L^{(n)} = \ell\Big\}& \\
&= P\Big\{\Big((\rho_{1,n'}\,;\,\theta_{1,n'}),\cdots,(\rho_{\ell,n'}\,;\,\theta_{\ell,n'})\Big) \in T/L^{(n')} = \ell\Big\} \\
&= P\Big\{\Big((\rho_1,\theta_1),\cdots,(\rho_\ell,\theta_\ell)\Big) \in T/L^{(n)} = \ell\Big\}
\end{aligned}$$

tant que le calcul sera fait sous $\Big\{L^{(n)} = \ell\Big\}$, pour un entier $n$ quelconque. D'un point de vue notationnel, cela implique la disparition de $n$ dans les notations précisées au préalable : $\theta_i$ pour $\theta_{i,n}$ , $\theta_i^{(\ell)}$ pour $\theta_{i,n}^{(\ell)}$ , $\Delta_{\ell,r}$ pour $\Delta_{\ell,n,r}$ , $U_{\ell,r}$ pour $U_{\ell,n,r}$ , $M_{\ell,r}$ pour $M_{\ell,n,r}$ , $m_{\ell,r}$ pour $m_{\ell,n,r}$ , $V_{\ell,r}$ pour $V_{\ell,n,r}$ , $W_{\ell,r}$ pour $W_{\ell,n,r}$ , $V_\ell$ pour $V_{\ell,n}$ ,$W_\ell$ pour $W_{\ell,n}$ , $\cdots$
On notera $N_\ell$ le processus empirique

$$\sum_{i=1}^{\ell} \delta_{(\rho_i\,,\,\theta_i)}$$

qui, pour tout $n$, a la même loi que $N^{(n)}$ conditionnée par $\{L^{(n)} = \ell\}$.
Tous nos résultats sont de nature asymptotique, on négligera le cas où $L^{(n)} = 0$.

### 1.2.4 Définition de l'estimateur

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on définit par $S_\ell{}^\omega$ le support de la mesure discrète $N_\ell{}^\omega$ et on pose :

$$S^\omega_{\ell,r} = S_\ell{}^\omega \cap D_{\ell,r} \quad , r = 1, \cdots, K(\ell)$$

on a

$$U^\omega_{\ell,r} = \max\left\{\rho \,\Big|\, (\rho,\theta) \in S^\omega_{\ell,r}\right\} \quad , r = 1, \cdots, K(\ell).$$

Nous proposons comme estimateur $\phi_n$ de $\phi$, une sorte d'histogramme basé sur les extrêmes des valeurs radiales, dans chaque secteur angulaire :

$$\forall r \in \{1, 2, \cdots, K(L^{(n)})\}\,, \qquad \forall \theta \in \Delta_{L^{(n)},r} \quad \phi_n(\theta) = U_{L^{(n)},r}\,.$$

## 1.3 Convergence de l'estimateur

Nous nous intéressons au choix de $K$ en fonction de $\ell$ de façon à assurer la convergence uniforme de l'estimateur $\phi_n$ de $\phi$ suivant divers modes stochastiques. Pour cela posons :

$$d(\phi_n, \phi) = \sup\left\{\Big|\, \phi_n(\theta) - \phi(\theta) \,\Big| : \, 0 \leq \theta < 2\pi\right\}.$$

On dira que $(\phi_n)$ converge uniformément sur $[0,\, 2\pi[$ en probabilité vers $\phi$ lorsque $n$ tend vers l'infini si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} P\left\{d(\phi_n,\, \phi) > \varepsilon\right\} = 0,$$

de même, on dira que $(\phi_n)$ converge uniformément sur $[0,\, 2\pi[$ presque complètement vers $\phi$ lorsque $n$ tend vers l'infini si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} P\left\{d(\phi_n,\, \phi) > \varepsilon\right\} < +\infty.$$

### 1.3.1 Condition suffisante de convergence uniforme presque complète

Le résultat suivant est une propriété de la loi uniforme sur $[0, 1]$ (pour plus de détails voir Lecoutre[25] page 134, Abou-Jaoudé[2] page 95 et, Bosq et Lecoutre[7] page 124) :

**Lemme 1.1**
*Soit $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_\ell)$ un échantillon d'une loi de probabilité absolument continue de densité $g_1$ définie par (1.4) et de fonction de répartition $G_1$.*
*$\left(G_1\left(\theta_1^{(\ell)}\right), \cdots, G_1\left(\theta_\ell^{(\ell)}\right)\right)$ est un échantillon ordonné de la loi uniforme sur $[0,1]$.*
*On pose :*

$$\tau_{\ell,r} = G_1\left(\theta_{R(r)}^{(\ell)}\right) - G_1\left(\theta_{R(r-1)}^{(\ell)}\right), \quad 1 \leq r \leq K(\ell).$$

*Soient $K(\ell)$ variables aléatoires indépendantes notées $\left(T_{\ell,r}\right)_{1 \leq r \leq K(\ell)}$ où $T_{\ell,r}$ suit une loi gamma de paramètre $\nu_{\ell,r}$ et on pose $T_\ell = \sum_{r=1}^{K(\ell)} T_{\ell,r}$.*

*Alors la loi du vecteur aléatoire $(\tau_{\ell,r})_{1 \leq r \leq K(\ell)}$ est identique à celle du vecteur aléatoire $\left(\frac{T_{\ell,r}}{T_\ell}\right)_{1 \leq r \leq K(\ell)}$.*

Le lemme suivant donne des inégalités relatives à la loi bêta, dûes à Van Ryzin[31] :

**Lemme 1.2** ([31], lemme 4)
*Soit $Z_\ell$ une variable aléatoire de loi bêta de paramètres $(\nu(\ell), \ell - \nu(\ell) + 1)$, de densité*

$$f_\ell(z) = \frac{1}{B\left(\nu(\ell), \ell - \nu(\ell) + 1\right)} z^{\nu(\ell)-1}(1-z)^{\ell-\nu(\ell)} \mathbb{I}_{]0,1[}(z)$$

*avec*

$$B\left(\nu(\ell), \ell - \nu(\ell) + 1\right) = \frac{\Gamma(\nu(\ell))\,\Gamma(\ell - \nu(\ell) + 1)}{\Gamma(\ell + 1)} \text{ et où } \Gamma \text{ désigne la fonction gamma.}$$

*Si $\nu(\ell) \longrightarrow +\infty$ quand $\ell \longrightarrow +\infty$, alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe des constantes réelles positives $C_1$ et $C_2$ telles que :*

$$P\left\{Z_\ell \geq \frac{\nu(\ell)}{\ell(1-\varepsilon)}\right\} = O\left(e^{-C_1\nu(\ell)}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}\left\{Z_\ell \leq \frac{\nu(\ell)}{\ell(1+\varepsilon)}\right\} = O\left(e^{-C_2\nu(\ell)}\right).$$

Nous utiliserons ce lemme sous la forme :

**Corollaire 1.1**
*Sous les hypothèses et les notations du lemme1.2, on a :*

$$\forall\, \delta > 0 \quad P\left\{Z_\ell \geq \delta\right\} = O\left(e^{-C\nu(\ell)}\right)$$

*où $C$ est une constante positive qui dépend de $\delta$.*

**Démonstration :**
Ce résultat découle immédiatement du lemme1.2. ■

Pour éviter de reproduire plusieurs preuves voisines, nous établissons le lemme suivant qui sera utilisé de façon répétée :

**Lemme 1.3**
*Si*

$$(i)\ K(\ell) \longrightarrow +\infty \qquad \text{et} \qquad (\text{ii})\ \mathrm{K}(\ell) = \mathrm{o}\Big(\frac{\ell}{\log \ell}\Big).$$

*Alors , pour toute constante* $C > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} K(\ell) e^{-C\nu(\ell)} P\Big(L^{(n)} = \ell\Big) < +\infty.$$

**Démonstration :**
Pour simplifier l'écriture des formules, nous poserons $\mu(S) = 1$, ce qui n'entraîne aucune perte de généralité. D'autre part, comme $\nu(\ell) = \Big[\frac{\ell}{K(\ell)}\Big]$, il suffit de prouver que :

$$e^{-n} \sum_{\ell=1}^{+\infty} K(\ell) e^{-C\frac{\ell}{K(\ell)}} \frac{n^\ell}{\ell!} = \bigcirc\Big(n^{-2}\Big).$$

On majore la somme partielle :

$$\begin{aligned} e^{-n} \sum_{\ell=1}^{[\sqrt{n}]} K(\ell) e^{-C\frac{\ell}{K(\ell)}} \frac{n^\ell}{\ell!} &\leq e^{-n} \sum_{\ell=1}^{[\sqrt{n}]} \ell \frac{n^\ell}{\ell!} \\ &\leq e^{-n+1} \sqrt{n}\, n^{\sqrt{n}} \\ &= \bigcirc\Big(e^{-\frac{n}{2}}\Big). \end{aligned}$$

Ensuite on majore le reste :

$$e^{-n} \sum_{\ell=[\sqrt{n}]+1}^{+\infty} K(\ell)\, e^{-C\frac{\ell}{K(\ell)}} \frac{n^\ell}{\ell!}.$$

En posant $K(\ell) = \frac{\ell}{\log \ell} \varepsilon(\ell)$ avec $\varepsilon(\ell) \longrightarrow 0$ quand $\ell \longrightarrow +\infty$, on a :

$$K(\ell) e^{-C\frac{\ell}{K(\ell)}} = \ell \frac{\varepsilon(\ell)}{\log \ell} e^{-\frac{C}{\varepsilon(\ell)} \log \ell} = \frac{\varepsilon(\ell)}{\log \ell} \ell^{1-\frac{C}{\varepsilon(\ell)}} = \bigcirc\Big(\ell^{-4}\Big).$$

D'où

$$e^{-n}\sum_{\ell=[\sqrt{n}]+1}^{+\infty} K(\ell)\, e^{-C\frac{\ell}{K(\ell)}}\,\frac{n^{\ell}}{\ell!} = \bigcirc\Big(n^{-2}\Big).$$

■

**Théorème 1.1**
*Supposons que*

$$(i)\ K(\ell) \longrightarrow +\infty \qquad \text{et} \qquad (\text{ii})\ \mathrm{K}(\ell) = \mathrm{o}\Big(\frac{\ell}{\log \ell}\Big).$$

*Alors,* $\phi_n$ *converge vers* $\phi$ *presque complètement uniformément sur* $[0, 2\pi[$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$ .

**Démonstration :**

1) soit $\xi$ le module de continuité de $\phi$ :

$$\xi(t) = \sup_{|\theta-\theta'|<t} \Big|\, \phi(\theta) - \phi(\theta') \,\Big|$$

Pour tout $r = 1, \cdots, K(L^{(n)})$ et tout $0 < \varepsilon < m$ :

$$\Big\{U_{L^{(n)},r} > m_{L^{(n)},r} - \varepsilon\, ;\, \xi(V_{L^{(n)},r}) < \varepsilon\Big\} \subset \Big\{\sup_{\theta\in\Delta_{L^{(n)},r}} \Big|\, U_{L^{(n)},r} - \phi(\theta) \,\Big| < 2\varepsilon\Big\}$$

donc

$$\Big\{d(\phi_n,\phi) > 2\varepsilon\Big\} \subset \Bigg(\bigcup_{r=1}^{K(L^{(n)})} \Big\{U_{L^{(n)},r} < m_{L^{(n)},r} - \varepsilon\Big\}\Bigg)\bigcup\Big\{V_{L^{(n)}} > \xi^{-1}(\varepsilon)\Big\}.$$

Compte tenu de la monotonie de $\xi$, on a :

$$\bigcup_{r=1}^{K(L^{(n)})} \Big\{\xi(V_{L^{(n)},r}) > \varepsilon\Big\} = \Big\{\xi(V_{L^{(n)}}) > \varepsilon\Big\} = \Big\{V_{L^{(n)}} > \xi^{-1}(\varepsilon)\Big\}.$$

D'autre part, en posant, pour tout $1 \leq r \leq K(L^{(n)})$ et tout $0 < \varepsilon < m$ :

$$A_{L^{(n)},r} = \Big\{(\rho,\theta) \in D_{L^{(n)},r} \,:\, m_{L^{(n)},r} > \rho \geq m_{L^{(n)},r} - \varepsilon\Big\},$$

on obtient finalement

$$\Big\{d(\phi_n,\phi) > 2\varepsilon\Big\} \subset \Bigg(\bigcup_{r=1}^{K(L^{(n)})}\Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},r}) = 0\Big\}\Bigg)\bigcup\Big\{V_{L^{(n)}} > \xi^{-1}(\varepsilon)\Big\}.$$

La convergence presque complète de $d(\phi_n,\phi)$ vers 0 résulte de la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 et de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Bigg(\bigcup_{r=1}^{K(L^{(n)})}\Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},r}) = 0\Big\}\Bigg).$$

2) On examine d'abord la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 :
Soit $g_1$ la densité des variables aléatoires $\theta_i$ étant donné $\Big\{L^{(n)} = \ell\Big\}$ . D' après (1.2) et (1.4), $g_1$ est strictement positive sur $[0,2\pi[$. Sa fonction de répartition $G_1$ est donc continue monotone, ainsi que la fonction inverse $G_1^{-1}$. Notons $\zeta$ le module de continuité de $G_1^{-1}$. En posant $\tau_{\ell,r} = G_1\Big(\theta^{(\ell)}_{R(r)}\Big) - G_1\Big(\theta^{(\ell)}_{R(r-1)}\Big)$, $\quad 1 \le r \le K(\ell)$, pour tout $0<\delta<1$, on a :

$$\begin{aligned} P\Big\{V_{L^{(n)}} > \zeta(\delta)\Big\} &\le \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{r=1}^{K(\ell)} P\Big\{V_{\ell,r} > \zeta(\delta)\Big\}\, P\Big\{L^{(n)} = \ell\Big\} \\ &\le \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{r=1}^{K(\ell)} P\Big\{\tau_{\ell,r} > \delta\Big\}\, P\Big\{L^{(n)} = \ell\Big\}. \end{aligned}$$

Pour établir la convergence presque complète vers 0 de $V_{L^{(n)}}$, il suffit d'après le lemme1.3, de montrer qu'il existe une constante positive $C = C(\delta)$ telle que :

$$\sum_{r=1}^{K(\ell)} P\Big\{\tau_{\ell,r} > \delta\Big\} = \bigcirc\Big(K(\ell)e^{-C\nu(\ell)}\Big).$$

Or, $\nu_{\ell,r} = \nu(\ell)$ ou $\nu(\ell)+1$ et d'après le lemme1.1 la variable aléatoire $\tau_{\ell,r}$ suit une loi bêta de paramètres $\Big(\nu_{\ell,r}\,;\,\ell-\nu_{\ell,r}+1\Big)$, donc avec les notations du lemme1.2 et le corollaire1.1,

$$\sum_{r=1}^{K(\ell)} P\Big\{\tau_{\ell,r} > \delta\Big\} \le K(\ell)\, P\Big\{Z_\ell > \delta\Big\} = \bigcirc\Big(K(\ell)e^{-C\nu(\ell)}\Big).$$

3) On montre maintenant la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\bigcup_{r=1}^{K(L^{(n)})}\Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},r})=0\Big\}\Big).$$

On a :

$$P\Big(\bigcup_{r=1}^{K(L^{(n)})}\Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},r})=0\Big\}\Big)\leq \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{r=1}^{K(\ell)} P\Big\{N_\ell(A_{\ell,r})=0\Big\}P\Big(L^{(n)}=\ell\Big).$$

Pour tout $r=1,\cdots,K(\ell)$, il y a $\nu_{\ell,r}-1$ points ordonnés entre $\left(\rho^{(\ell)}_{R(r-1)},\ \theta^{(\ell)}_{R(r-1)}\right)$ et $\left(\rho^{(\ell)}_{R(r)},\ \theta^{(\ell)}_{R(\ell)}\right)$, à savoir :

$$\left(\rho^{(\ell)}_{R(r-1)+1},\ \theta^{(\ell)}_{R(r-1)+1}\right),\cdots,\left(\rho^{(\ell)}_{R(r)-1},\ \theta^{(\ell)}_{R(r)-1}\right).$$

La loi de probabilité conjointe de ces points, conditionnée par $\theta^{(\ell)}_{R(r-1)}=t_{R(r-1)}$ et $\theta^{(\ell)}_{R(r)}=t_{R(\ell)}$ est étudié en appendice1, elle est celle d'un échantillon ordonné de taille $\nu_{\ell,r}-1$ de la loi qui admet pour densité :

$$h_r(\rho,\theta)=\begin{cases}\frac{g(\rho,\theta)}{G_1(t_{R(r)})-G_1(t_{R(r-1)})} & \text{si } (\rho,\ \theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\big]t_{R(r-1)}\ ,\ t_{R(r)}\big[\\ 0 & \text{si non.}\end{cases}\tag{1.5}$$

D'autre part, les vecteurs aléatoires

$$\left(\left(\rho^{(\ell)}_{R(r-1)+1},\theta^{(\ell)}_{R(r-1)+1}\right),\cdots,\left(\rho^{(\ell)}_{R(r)-1},\theta^{(\ell)}_{R(r)-1}\right)\right)_{1\leq r\leq K(\ell)}$$

sont indépendants conditionnellement à

$$\left(\theta^{(\ell)}_1=t_1\ ,\theta^{(\ell)}_{R(1)}=t_{R(1)},\cdots,\theta^{(\ell)}_{R(K(\ell))-1}\ =\ t_{R(K(\ell))-1}\right).$$

Et, conditionnellement à $\tilde{\theta}_{\ell,r}$, les variables aléatoires

$$N_\ell(A_{\ell,r})\,;\ r=1,\cdots,K(\ell)$$

sont indépendantes et de lois binomiales $B(\nu_{\ell,r} - 1\,,\, p_{\ell,r}), 1 \le r \le K(\ell)$ où

$$p_{\ell,r} \;=\; \int_{A_{\ell,r}} h_r(\rho,\theta)\, d\rho d\theta\,,\; r \;=\; 1,\cdots,K(\ell)\,.$$

On a donc

$$P\Big\{N_\ell(A_{\ell,r}) \;=\; 0\Big\} \;=\; E\Big(P\Big\{N_\ell(A_{\ell,r}) = 0\Big\}\,/\tilde\theta_{\ell,r}\Big) \;=\; E\Big\{\Big(1 - p_{\ell,r}\Big)^{\nu_{\ell,r}-1}\Big\}$$

et

$$\text{(1.6)}\qquad P\Big(\bigcup_{r=1}^{K(L^{(n)})}\Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},r}) = 0\Big\}\Big) \le \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{r=1}^{K(\ell)} E\Big\{\Big(1 - p_{\ell,r}\Big)^{\nu_{\ell,r}-1}\Big\} P\Big(L^{(n)} = \ell\Big).$$

Etudions maintenant le paramètre $p_{\ell,r}$ ; $1 \le r \le K(\ell)$ :

D'après les formules $(1.3),(1.4)$ et $(1.5)$, on a : pour $r = 1,\cdots,K(\ell)$

$$p_{\ell,r} \quad = \frac{\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r)}}\Big(\int_{m_{\ell,r}-\varepsilon}^{m_{\ell,r}} \rho\psi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,d\rho\Big)\,d\theta}{\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r)}}\Big(\int_0^{\phi(\theta)} \rho\psi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,d\rho\Big)\,d\theta}.$$

Donc, d'après les inégalités (1.2), on obtient :

$$p_{\ell,r} \le \frac{B}{A}\,\frac{m_{\ell,r}^2 - (m_{\ell,r} - \varepsilon)^2}{m_{\ell,r}^2} \le \frac{2B}{Am}\varepsilon$$

et

$$p_{\ell,r} \ge \frac{A}{B}\,\frac{m_{\ell,r}^2 - (m_{\ell,r} - \varepsilon)^2}{m_{\ell,r}^2} \quad \ge \quad \frac{A}{B}\frac{m}{M^2}\,\varepsilon.$$

La dernière inégalité ci-dessus étant dûe au fait que $\varepsilon < m$, donc $-\varepsilon^2 > -m_{\ell,r}\,\varepsilon$. Ainsi : pour tout $r \;=\; 1,\cdots,K(\ell)$

$$\text{(1.7)}\qquad \frac{A}{B}\frac{m}{M^2}\,\varepsilon \le p_{\ell,r} \le \frac{2B}{Am}\varepsilon.$$

D'après le lemme1.3 et l'inégalité (1.6), en posant toujours $\mu(S) = 1$, pour établir la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left( \bigcup_{r=1}^{K(L^{(n)})} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},r}) = 0 \right\} \right)$$

il suffit de montrer qu'il existe une constante positive $C = C(\varepsilon)$ telle que

$$\sum_{r=1}^{K(\ell)} E\left\{ \left(1 - p_{\ell,r}\right)^{\nu_{\ell,r}-1} \right\} = \bigcirc\left( K(\ell) e^{-C\nu(\ell)} \right).$$

Or, d'après les inégalités (1.7),

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{K(\ell)} E\left\{ \left(1 - p_{\ell,r}\right)^{\nu_{\ell,r}-1} \right\} &\leq \sum_{r=1}^{K(\ell)} E\left\{ \exp\left( -p_{\ell,r}(\nu_{\ell,r} - 1) \right) \right\} \\ &\leq K(\ell) \exp\left( -\varepsilon \frac{Am}{BM^2} \left( \nu(\ell) - 1 \right) \right) \\ &= \bigcirc\left( K(\ell) e^{-C\nu(\ell)} \right) \qquad \textit{avec} \ \ C = \frac{Am}{BM^2}\varepsilon. \end{aligned}$$

■

Avant d'aborder l'étude des conditions nécessaires de convergence uniforme en probabilité nous étudions quelques propriétés des blocs équilibrés des variables statistiques associées à une superposition de processus ponctuels de Poisson.

### 1.3.2 Étude des blocs équilibrés

Il apparaît dans la deuxième partie de la démonstration du théorème1.1 que l'hypothèse $(ii)$ est une condition suffisante de convergence uniforme presque complète vers zéro de la longueur des blocs. Nous allons établir que la condition $(i)$ du théorème1.1 est aussi une condition suffisante de convergence uniforme presque complète vers zéro de la longueur des blocs et que cette condition est nécessaire pour la convergence uniforme en probabilité vers zéro de la longueur des blocs.

Les résultats suivants sont des inégalités relatives à la loi gamma dûes à Abou-Jaoudé[2] :

**Lemme 1.4** ([2], lemme0 p. 95)
*Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, $T_\ell$ une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètre $\ell$. Nous avons alors les inégalités :*
*Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\frac{e^{-\frac{1}{12\ell}}}{\sqrt{12\ell}} e^{-\ell\varepsilon} \leq P\Big\{T_\ell \geq \ell(1+\varepsilon)\Big\} \leq \sqrt{\frac{\ell}{2\pi}}(1+\varepsilon)^{\ell-1} e^{-\ell\varepsilon}$$

*et, pour tout $0 < \varepsilon < 1$,*

$$\frac{e^{-\frac{1}{12\ell}}}{\sqrt{2\pi\ell}}\Big(1-\varepsilon^2\Big)^\ell \leq P\Big\{T_\ell \leq \ell(1-\varepsilon)\Big\} \leq e\sqrt{\frac{\ell}{2\pi}}\Big(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\Big)^{\ell-1}.$$

**Corollaire 1.2** ([2], corollaire p. 97)
*Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\ell_0 \in \mathbb{N}^*$, $\alpha(\varepsilon)$ et $\beta(\varepsilon) \in ]0,1[$, tels que :*

$$\forall\, \ell \geq \ell_0 \quad (\alpha(\varepsilon))^\ell \leq P\Big\{T_\ell \geq \ell(1+\varepsilon)\Big\} \leq (\beta(\varepsilon))^\ell.$$

*Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, il existe $\ell_0 \in \mathbb{N}^*$, $\gamma(\varepsilon)$ et $\delta(\varepsilon) \in ]0,1[$, tels que :*

$$\forall\, \ell \geq \ell_0 \quad (\gamma(\varepsilon))^\ell \leq P\Big\{T_\ell \leq \ell(1-\varepsilon)\Big\} \leq (\delta(\varepsilon))^\ell$$

*$T_\ell$ étant toujours une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètre $\ell$.*

**Lemme 1.5**
*Si*

$$K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \textit{quand} \quad \ell \longrightarrow +\infty.$$

*Alors, $V_{L^{(n)}}$ converge presque complètement vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$.*

**Démonstration :**

D'après la deuxième partie de la démonstration du théorème1.1, avec les mêmes notations, on a : pour tout $0 < \varepsilon < 1$

$$P\Big\{V_{L^{(n)}} > \zeta(\varepsilon)\Big\} \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{r=1}^{K(\ell)} P\{\tau_{\ell,r} > \varepsilon\} P\Big\{L^{(n)} = \ell\Big\}$$

où $\zeta$ désigne le module de continuité de $G_1^{-1}$.

D'après le lemme1.1, pour $0 < \varepsilon' < 1$, nous obtenons : pour tout $1 \leq r \leq K(\ell)$

$$\begin{aligned}
P\Big\{\tau_{\ell,r} > \varepsilon\Big\} &= P\Big\{\frac{T_{\ell,r}}{T_\ell} > \varepsilon\Big\} \\
&= P\Big\{T_{\ell,r} > \varepsilon T_\ell \,,\, T_\ell < \ell(1-\varepsilon')\Big\} \\
&\qquad\qquad + P\Big\{T_{\ell,r} > \varepsilon T_\ell \,,\, T_\ell \geq \ell(1-\varepsilon')\Big\} \\
&\leq P\Big\{T_{\ell,r} > \varepsilon(1-\varepsilon')\ell\Big\} + P\Big\{T_\ell < (1-\varepsilon')\ell\Big\}.
\end{aligned}$$

D'après le corollaire1.2, puis que $T_\ell$ suit une loi gamma de paramètre $\ell$, il existe $\ell_1 \in \mathbb{N}^*$ et $\delta(\varepsilon') \in ]0,1[$ tels que pour tout $\ell \geq \ell_1$ :

$$P\Big\{T_\ell < (1-\varepsilon')\ell\Big\} \leq \Big(\delta(\varepsilon')\Big)^\ell.$$

Posons $\eta = \varepsilon(1-\varepsilon')$. comme $\nu(\ell) = \left[\frac{\ell}{K(\ell)}\right]$ et $K(\ell) \longrightarrow +\infty$, il existe $\ell_2 \geq \ell_1$ tel que pour tout $\ell \geq \ell_2$ et tout $r = 1, \cdots, K(\ell)$

$$\frac{\nu_{\ell,r}}{\ell} < \frac{\eta}{2} \quad \text{ou} \quad \ell\eta > \nu_{\ell,r}\Big(1 + \frac{\ell\eta}{2\nu_{\ell,r}}\Big).$$

Ainsi, d'après le lemme1.4 :

$$\begin{aligned}
P\Big\{T_{\ell,r} > \eta\ell\Big\} &\leq P\Big\{T_{\ell,r} > \nu_{\ell,r}\Big(1 + \frac{\ell\eta}{2\nu_{\ell,r}}\Big)\Big\} \\
&\leq \sqrt{\frac{\nu_{\ell,r}}{2\pi}}\Big(1 + \frac{\ell\eta}{2\nu_{\ell,r}}\Big)^{\nu_{\ell,r}-1} e^{-\frac{\ell\eta}{2}} \\
&\leq \sqrt{\nu_{\ell,r}}\bigg(\Big(1 + \frac{\ell\eta}{2\nu_{\ell,r}}\Big)^{\frac{\nu_{\ell,r}}{\ell}} e^{-\frac{\eta}{2}}\bigg)^\ell.
\end{aligned}$$

Soit $a \in ]\max(e^{-\frac{\eta}{2}}; \delta(\varepsilon')), 1[$ : comme la fonction

$$x \longmapsto \Big(1 + \frac{\eta}{2x}\Big)^x$$

est croissante et tend vers 1 lorsque $x \longrightarrow 0$, il existe $\ell_3 \geq \ell_2$ tel que pour tout $\ell \geq \ell_3$

$$\Big(1 + \frac{\ell\eta}{2\nu_{\ell,r}}\Big)^{\frac{\nu_{\ell,r}}{\ell}} e^{-\frac{\eta}{2}} < a.$$

Finalement pour $\ell \geq \ell_3$ et $r = 1, \cdots, K(\ell)$

$$P\{T_{\ell,r} > \eta\ell\} \leq \sqrt{\nu_{\ell,r}}\, a^\ell$$

et

$$\begin{aligned} P\{\tau_{\ell,r} > \varepsilon\} &\leq (\delta(\varepsilon'))^\ell + \sqrt{\nu_{\ell,r}}\, a^\ell \\ &\leq \nu(\ell)\, a^\ell. \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant obtenue dès que $\nu(\ell) \geq 3$, ce qu'on peut supposer être vrai pour $\ell \geq \ell_3$.
Ainsi

$$\sum_{r=1}^{K(\ell)} P\{\tau_{\ell,r} > \varepsilon\} \leq K(\ell)\nu(\ell)a^\ell \leq \ell a^\ell.$$

En convenant de poser $\mu(S) = 1$, il suffit, comme dans le lemme1.3, de prouver que

$$e^{-n} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell a^\ell \frac{n^\ell}{\ell!} = \bigcirc(n^{-2}).$$

La majoration de la somme partielle des $[\sqrt{n}]$ premiers termes est similaire à celle du lemme1.3 :

$$e^{-n} \sum_{\ell=1}^{[\sqrt{n}]} \ell\, a^\ell \frac{n^\ell}{\ell!} \leq e^{-n} \sum_{\ell=1}^{[\sqrt{n}]} \ell\, \frac{n^\ell}{\ell!} = \bigcirc\left(e^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Ensuite, il est clair que $\ell a^\ell = \bigcirc(\ell^{-4})$, d'où

$$e^{-n} \sum_{\ell=[\sqrt{n}]+1}^{+\infty} \ell\, a^\ell \frac{n^\ell}{\ell!} = \bigcirc(n^{-2}).$$

■

**Lemme 1.6**
*Pour que $V_{L(n)}$ converge en probabilité vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$, il faut que*

$$K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \textit{quand} \quad \ell \longrightarrow +\infty.$$

**Démonstration :**
$V_{L^{(n)}} \longrightarrow 0$ en probabilité quand $n \longrightarrow +\infty$ entraîne :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{\ell > [\sqrt{n}]} P\Big\{ \max_{1 \le r \le K(\ell)} V_{\ell,r} > \varepsilon \Big\} P\Big\{ L^{(n)} = \ell \Big\} = 0$$

a fortiori :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \inf_{\ell > [\sqrt{n}]} P\Big\{ \max_{1 \le r \le K(\ell)} V_{\ell,r} > \varepsilon \Big\} P\Big\{ L^{(n)} > [\sqrt{n}] \Big\} = 0.$$

Or, en convenant de poser $\mu(S) = 1$, $N^{(n)}$ suit une loi de Poisson de paramètre $n$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} P\Big\{ L^{(n)} > [\sqrt{n}] \Big\} = 1.$$

Finalement, si $V_{L^{(n)}}$ converge vers zéro en probabilité :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \inf_{\ell > [\sqrt{n}]} P\Big\{ \max_{1 \le r \le K(\ell)} V_{\ell,r} > \varepsilon \Big\} = 0.$$

Ce qui entraîne l'existence d'une sous-suite $\big(\ell_p\big)_{p \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\lim_{p \to +\infty} P\Big\{ \max_{1 \le r \le K(\ell_p)} V_{\ell_p,r} > \varepsilon \Big\} = 0.$$

En utilisant les notations de la démonstration du théorème1.1, d'après les inégalités (1.2) et le théorème des accroissements finis : pour tout $r = 1, \cdots, K(\ell_p)$

$$\frac{Am^2}{2\mu(S)} V_{\ell_p,r} \le \tau_{\ell_p,r} \le \frac{BM^2}{2\mu(S)} V_{\ell_p,r}.$$

Posons :

$$m' = \frac{Am^2}{2\mu(S)} \quad \text{et} \quad M' = \frac{BM^2}{2\mu(S)}.$$

Donc, $V_{L^{(n)}} \longrightarrow 0$ en probabilité quand $n \longrightarrow +\infty$ entraîne :

$$\text{(1.8)} \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \qquad \lim_{p \to +\infty} P\Big\{ \max_{1 \le r \le K(\ell_p)} \tau_{\ell_p,r} > \varepsilon M' \Big\} = 0.$$

Or, pour $r = 1, \cdots, K(\ell_p)$, la variable aléatoire $\tau_{\ell_p,r}$ suit une loi bêta de paramètres $\left(\nu_{\ell_p,r}, \ell_p - \nu_{\ell_p,r} + 1\right)$, d'après les propriétés de la loi bêta, on a :

$$E(\tau_{\ell_p,r}) = \frac{\nu_{\ell_p,r}}{\ell_p + 1}$$

et comme les variables aléatoires $\tau_{\ell_p,r}$ sont bornées par 1, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} E(\tau_{\ell_p,r}) &= \int_{\{\max_{1\leq r\leq K(\ell_p)} \tau_{\ell_p,r} > \varepsilon M'\}} \tau_{\ell_p,r} dP + \int_{\{\max_{1\leq r\leq K(\ell_p)} \tau_{\ell_p,r} \leq \varepsilon M'\}} \tau_{\ell_p,r} dP \\ &\leq P\Big\{\max_{1\leq r\leq K(\ell_p)} \tau_{\ell_p,r} > \varepsilon M'\Big\} + \varepsilon M'. \end{aligned}$$

Il en résulte de (1.8) que :

$$\lim_{p\to+\infty} \max_{1\leq r\leq K(\ell_p)} E(\tau_{\ell_p,r}) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{\ell_p + 1} \times \max_{1\leq r\leq K(\ell_p)} \nu_{\ell_p,r} = 0.$$

Comme $\nu_{\ell_p,r} = \nu(\ell_p)$ ou $\nu(\ell_p) + 1$, on a :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\nu(\ell_p)}{\ell_p} = 0.$$

Or

$$\nu(\ell_p) = \left[\frac{\ell_p}{K(\ell_p)}\right].$$

Donc

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{K(\ell_p)} = 0 \quad \Longleftrightarrow K(\ell_p) \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad p \to +\infty.$$

Comme $K(\ell)$ est croissante, $K(\ell) \longrightarrow +\infty$ quand $\ell \longrightarrow +\infty$. ∎

De l'étude qui précède, il en résulte que :
lorsque $V_{L(n)}$ converge en probabilité vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$, alors $V_{L(n)}$ converge presque complètement donc presque sûrement.

On en déduit le

**Théorème 1.2**
*Pour que $V_{L(n)}$ converge en probabilité, presque sûrement ou presque complètement vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$, il est nécessaire et suffisant que l'on ait :*

$$K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \textit{quand} \quad \ell \longrightarrow +\infty$$

*à cette condition les convergences en probabilité, presque sûre et presque complète de $V_{L(n)}$ vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$ sont équivalentes.*

Nous établissons maintenant des conditions nécessaires pour la convergence uniforme en probabilité de $\phi_n$ vers $\phi$.

### 1.3.3 Condition nécessaire de convergence uniforme en probabilité

**Théorème 1.3**
*Pour que $\phi_n$ converge uniformément sur $[0, 2\pi[$ en probabilité vers $\phi$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, il faut que*

$$(i) \quad K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad (ii) \quad \inf_{\ell > 1} \frac{K(\ell) \log \ell}{\ell} = 0.$$

**Démonstration**

1) Supposons que $(i)$ ne soit pas pas vérifiée : comme $K(\ell)$ est une suite croissante, il existe un entier $K_0$ tel que $K(\ell) \leq K_0$ pour tout $\ell$. Supposons d'autre part que : quelle que soit $\phi$ vérifiant les hypothèses $\phi$ n'est constante sur aucun intervalle et que $d(\phi_n, \phi)$ converge vers 0 en probabilité. Alors une sous-suite $d(\phi_q, \phi)$ converge presque sûrement vers 0, et pour un $\omega \in \Omega$, $d(\phi_q(\omega), \phi)$ converge vers 0. C'est une contradiction, puisque $\phi_q(\omega)$ est une fonction en escalier qui est constante sur au plus $K_0$ intervalles.

2) Présentons ensuite la nécessité de la condition $(ii)$ :
Supposons que $(ii)$ ne soit pas vérifiée : il existe un nombre positif $\alpha$ telle que

$$(1.9) \qquad \forall \ell > 1 \qquad K(\ell) > \frac{\ell}{\alpha \log \ell},$$

et compte tenu de $\nu(\ell) = [\frac{\ell}{K(\ell)}]$,

$$(1.10) \qquad \forall \ell > 1 \qquad \nu(\ell) < \alpha \log \ell.$$

On pose

$$Z_{L^{(n)}} = \max_{1\le r\le K(L^{(n)})}\Big(M_{L^{(n)},r} - U_{L^{(n)},r}\Big).$$

Comme $Z_{L^{(n)}} \le d(\phi_n,\phi)$, la convergence en probabilité vers zéro de $d(\phi_n,\phi)$ entraîne celle de $Z_{L^{(n)}}$ : pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{Z_{L^{(n)}} > \varepsilon\Big\} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{1.11}$$

Cependant, avec les mêmes notations introduites dans la preuve du théorème1.1 :

$$\begin{aligned} P\Big\{Z_{L^{(n)}} > \varepsilon\Big\} &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} P\Big(\bigcup_{r=1}^{K(\ell)}\Big\{N_\ell(A_{\ell,r}) = 0\Big\}\Big)\, P\Big\{L^{(n)} = \ell\Big\} \\ &\ge \inf_{\ell\ge 1} P\Big(\bigcup_{r=1}^{K(\ell)}\Big\{N_\ell(A_{\ell,r}) = 0\Big\}\Big). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que, pour $\varepsilon$ assez petit, cet infimum est strictement positif sous les inégalités (1.9) et (1.10), ce qui contredit (1.11).
Conditionnellement à $\tilde{\theta}^{(\ell)}$, les variables aléatoires $N_\ell(A_{\ell,r})$, $r = 1,\cdots, K(\ell)$, sont indépendantes de lois binomiales $B\Big(\nu_{\ell,r} - 1\,,\, p_{\ell,r}\Big)$, $1 \le r \le K(\ell)$, où, d'aprés les inégalités (1.7), pour tout $1 \le r \le K(\ell)$ :

$$p_{\ell,r} \le \frac{2B}{Am}\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{r=1}^{K(\ell)}\Big\{N_\ell(A_{\ell,r}) = 0\Big\}\Big) &= 1 - P\Big(\bigcap_{r=1}^{K(\ell)}\Big\{N_\ell(A_{\ell,r}) > 0\Big\}\Big) \\ &= 1 - E\Big(P\Big(\bigcap_{r=1}^{K(\ell)}\Big\{N_\ell(A_{\ell,r}) > 0\Big\}/\tilde{\theta}^{(\ell)}\Big)\Big) \\ &= 1 - E\Big(\prod_{r=1}^{K(\ell)}\Big[1 - \Big(1 - p_{\ell,r}\Big)^{\nu_{\ell,r}-1}\Big]\Big). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que :

$$0 < \frac{4B}{Am}\varepsilon < 1. \tag{1.12}$$

Comme $\nu_{\ell,r} = \nu(\ell)$ ou $\nu(\ell)+1$, et d'après les inégalités (1.7), on obtient

$$E\left(\prod_{r=1}^{K(\ell)}\left[1-\left(1-p_{\ell,r}\right)^{\nu_{\ell,r}-1}\right]\right) \leq \left[1-\left(1-\frac{2B}{Am}\varepsilon\right)^{\nu(\ell)}\right]^{K(\ell)}.$$

D'après l'inégalité classique : $e^{-x} \leq 1-\frac{x}{2}$ pour $0<x<1$, et (1.12), on obtient :

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{r=1}^{K(\ell)}\left[1-\left(1-p_{\ell,r}\right)^{\nu_{\ell,r}-1}\right]\right) &\leq \left[1-\exp\left(-\nu(\ell)\frac{4B}{Am}\varepsilon\right)\right]^{K(\ell)} \\ &\leq \exp\left(-K(\ell)\,e^{-\frac{4B\varepsilon}{Am}\nu(\ell)}\right). \end{aligned}$$

D'après (1.9) et (1.10),

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{r=1}^{K(\ell)}\left[1-\left(1-p_{\ell,r}\right)^{\nu_{\ell,r}-1}\right]\right) &\leq \exp\left(-\frac{\ell}{\alpha\log\ell}e^{-\frac{4\alpha B\varepsilon}{Am}\log\ell}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\ell^{1-\frac{4\alpha B\varepsilon}{Am}}}{\alpha\log\ell}\right). \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon$ assez petit pour que $\frac{4\alpha B\varepsilon}{Am} < \frac{1}{2}$ et $\ell \geq 2$ :

$$E\left(\prod_{r=1}^{K(\ell)}\left[1-\left(1-p_{\ell,r}\right)^{\nu_{\ell,r}-1}\right]\right) \leq \exp\left(-\frac{\ell^{\frac{1}{2}}}{\alpha\log\ell}\right) \leq e^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Pour $\varepsilon$ assez petit, et $\ell \geq 2$, on obtient donc :

$$P\left(\bigcup_{r=1}^{K(\ell)}\left\{N_\ell(A_{\ell,r})=0\right\}\right) > 1-e^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

■

## 1.4 Loi limite

### 1.4.1 Position du Problème

Dans ce paragraphe nous abordons la question de la recherche de la loi limite de $d(\phi_n, \phi)$. Nous déterminons d'abord la loi limite de

$$Z_{L^{(n)}} = \max_{1 \leq r \leq K(L^{(n)})} \Big( M_{L^{(n)},r} - U_{L^{(n)},r} \Big) \tag{1.13}$$

et nous en déduirons celle de $d(\phi_n, \phi)$.

On se propose de définir deux suites de variables aléatoires positives $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ de façon que $\frac{Z_{L^{(n)}} - \beta(n)}{\alpha(n)}$ converge vers une loi non dégénérée sur $\mathbb{R}_+$. Evidemment il est souhaitable que $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ dépendent de $N^{(n)}$ en quelque sorte le "moins possible ".

Nous établissons une propriété pour laquelle $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ dépendent du nombre $L^{(n)}$ de points observés. Pour $\alpha(n)$, qui est le paramètre d'échelle, cela suffira. Par contre pour $\beta(n)$, qui est le paramètre de position, le découpage du plan en secteurs angulaires choisi aura son importance. $\beta(n)$ dépendra de $L^{(n)}$ et du vecteur aléatoire

$$\tilde{\theta}^{(L^{(n)})} = \Big( \theta_{R(r)}^{(L^{(n)})} \,;\, 1 \leq r \leq K(L^{(n)}) \Big).$$

Nous remplaçons donc dans ce cas $\alpha(n)$ par $\alpha_{L^{(n)}}$ et $\beta(n)$ par $\beta_{\tilde{\theta}(L^{(n)})}$.

Le lemme suivant nous permet de travailler comme s'il s'agissait d'une suite de processus empiriques après un conditionnement par $\{L^{(n)} = \ell\}$ :

**Lemme 1.7**
*Soient $(Y_\ell)$ et $(Z_\ell)$ deux suites de v.a.r. et $L^{(n)}$ une suite de variables aléatoires de Poisson de paramètre $n\mu(S)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$,*

$$P\Big( Z_{L^{(n)}} < t / \, L^{(n)} = \ell \Big) = P\Big( Y_\ell < t \Big).$$

*Alors, si $(Y_\ell)$ converge en loi quand $\ell \longrightarrow +\infty$, $\Big(Z_{L^{(n)}}\Big)$ converge vers la même loi quand $n \longrightarrow +\infty$.*

**Démonstration :**
Soit $\alpha(t)$ la fonction de répartition de la loi limite de $(Y_\ell)$. Soit $s$ un point de continuité

fixé de $\alpha(t)$ : on pose $\alpha(s) = \alpha$ et $P\Big(Y_\ell < s\Big) = \alpha_\ell$.

$$P\Big(Z_{L^{(n)}} < s\Big) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} P\Big(Z_{L^{(n)}} < s / \, L^{(n)} = \ell\Big) P\Big(L^{(n)} = \ell\Big) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_\ell P\Big(L^{(n)} = \ell\Big).$$

$\varepsilon > 0$ étant fixé, soit $\ell_0$ tel que pour tout $\ell \geq \ell_0$, $|\alpha_\ell - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} |P\Big(Z_{L^{(n)}} < s\Big) - \alpha| &\leq \sum_{\ell=0}^{\ell_0} |\alpha_\ell - \alpha| P\Big(L^{(n)} = \ell\Big) + \sum_{\ell=\ell_0+1}^{+\infty} |\alpha_\ell - \alpha| P\Big(L^{(n)} = \ell\Big) \\ &\leq (\ell_0 + 1) \max_{0 \leq \ell \leq \ell_0} |\alpha_\ell - \alpha| \times \max_{0 \leq \ell \leq \ell_0} \frac{e^{-n\mu(S)}(n\mu(S))^\ell}{\ell!} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, le premier terme de cette somme soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi pour tout $n \geq n_0$

$$\Big| \, P\Big(Z_{L^{(n)}} < s\Big) - \alpha(s) \, \Big| < \varepsilon.$$

■

Ainsi l'étude en loi de

$$\frac{Z_{L^{(n)}} - \beta_{\tilde{\theta}(L^{(n)})}}{\alpha_{L^{(n)}}}$$

se ramène à celle de

$$\frac{Z_\ell - \beta_{\tilde{\theta}(\ell)}}{\alpha_\ell}$$

Dans ce qui suit, $z$ étant un nombre positif fixé, nous posons

$$z_{\tilde{\theta}(\ell)} = \alpha_\ell z + \beta_{\tilde{\theta}(\ell)}$$

où $\alpha_\ell$ est déterministe et où $\beta_{\tilde{\theta}(\ell)}$ dépend de $N_\ell$ uniquement au travers du découpage du plan en secteurs angulaires aléatoires définis par $\tilde{\theta}^{(\ell)}$. En fait, cette notation est lourde à traîner dans les calculs, nous écrirons abusivement

$$z_\ell = \alpha_\ell z + \beta_\ell,$$

mais il faudra bien se souvenir à tout instant que $z_\ell$ et $\beta_\ell$ sont $\sigma(\tilde{\theta}^{(\ell)})-$ mesurables.
On définit, pour $r = 1, \cdots, K(\ell)$,

$$D_{\ell,r}(z_\ell) = \Big\{(\rho, \theta) \in D_{\ell,r} \ \mid \ \rho > M_{\ell,r} - z_\ell\Big\},$$

où il faut remarquer que $D_{\ell,r}(z_\ell)$ dépend de $\tilde{\theta}^{(\ell)}$ car à la fois $D_{\ell,r}$ et $z_\ell$ en dépendent. On notera $\mathring{D}_{\ell,r}(z_\ell)$ l'interieur de $D_{\ell,r}(z_\ell)$. Pour tout $1 \leq r \leq K(\ell)$, il y a
$\nu_{\ell,r} - 1$ points ordonnés entre $\left(\rho^{(\ell)}_{R(r-1)}, \theta^{(\ell)}_{R(r-1)}\right)$ et $\left(\rho^{(\ell)}_{R(r)}, \theta^{(\ell)}_{R(r)}\right)$, à savoir :

$$\left(\rho^{(\ell)}_{R(r-1)+1}, \theta^{(\ell)}_{R(r-1)+1}\right), \cdots, \left(\rho^{(\ell)}_{R(r)-1}, \theta^{(\ell)}_{R(r)-1}\right).$$

La loi de probabilité conjointe de ces points, conditionnée par

$$\left(\theta^{(\ell)}_1 = t_1,\, \theta^{(\ell)}_{R(1)} = t_{R(1)}, \cdots, \theta^{(\ell)}_{R(K(\ell)-1)} = t_{R(K(\ell)-1)}\right),$$

est étudié en appendice1, elle est celle d'une statistique d'ordre d'un $(\nu_{\ell,r} - 1)$–échantillon d'une loi de probabilité absolument continue qui admet pour densité la fonction $h_r$ définie par (1.5).
D'autre part, les vecteurs aléatoires

$$\left(\left(\rho^{(\ell)}_{R(r-1)+1}, \theta^{(\ell)}_{R(r-1)+1}\right), \cdots, \left(\rho^{(\ell)}_{R(r)-1}, \theta^{(\ell)}_{R(r)-1}\right)\right)_{1 \leq r \leq K(\ell)}$$

sont indépendants conditionnellement à

$$\left(\theta^{(\ell)}_1 = t_1\,, \theta^{(\ell)}_{R(1)} = t_{R(1)} \cdots, \theta^{(\ell)}_{R(K(\ell))-1} = t_{R(K(\ell))-1}\right).$$

Et, conditionnellement à $\tilde{\theta}^{(\ell)}$, les variables aléatoires

$$N_\ell\left(\mathring{D}_{\ell,r}(z_\ell)\right) ; r = 1, \cdots, K(\ell),$$

sont indépendantes et de lois binomiales $B(\nu_{\ell,r} - 1\,,\, q_{\ell,r}(z_\ell))$, $1 \leq r \leq K(\ell)$ où

$$q_{\ell,r}(z_\ell) = \int_{D_{\ell,r}(z_\ell)} h_r(\rho,\theta)\, d\rho d\theta\ ,\ r = 1, \cdots, K(\ell)\,. \tag{1.14}$$

On a donc

$$\begin{aligned} F_\ell(z_\ell) = P\left(Z_\ell < z_\ell\right) &= P\left(\bigcap_{r=1}^{K(\ell)} \left\{N_\ell(\mathring{D}_{\ell,r}(z_\ell)) > 0\right\}\right) \\ &= E\left(P\left(\bigcap_{r=1}^{K(\ell)} \left\{N_\ell(\mathring{D}_{\ell,r}(z_\ell)) > 0\right\} / \tilde{\theta}^{(\ell)}\right)\right) \\ &= E\left(\prod_{r=1}^{K(\ell)} \left[1 - \left(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\right)^{\nu_{\ell,r}-1}\right]\right) \qquad (1.15) \end{aligned}$$

où l'on garde en mémoire que $q_{\ell,r}(z_\ell)$ est une variable aléatoire $\sigma(\tilde{\theta}^{(\ell)})$–mesurable. D'après le théorème de convergence dominée, pour que $F_\ell(z_\ell)$ converge, il suffit que

$$\prod_{r=1}^{K(\ell)} \left[1 - \left(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\right)^{\nu_{\ell,r}-1}\right] \tag{1.16}$$

converge presque sûrement.

### 1.4.2 Étude de la loi limite

Avant d'aborder notre problème de loi limite qui se ramène à l'étude des limites (1.15) et (1.16), nous revenons d'abord sur les variables aléatoires $\tau_{\ell,r}$ définies dans le cours de la démonstration du théorème1.1 :
Posons

$$\tau_\ell^* = \max\{\tau_{\ell,r} \,:\, 1 \leq r \leq K(\ell)\} \text{ et } \tau_{*_\ell} = \min\{\tau_{\ell,r} \,:\, 1 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{K}(\ell)\}.$$

**Lemme 1.8**
*Si*

$$(i) \quad K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad (\mathrm{ii}) \quad \mathrm{K}(\ell) = \mathrm{o}\Big(\frac{\ell}{\log \ell}\Big).$$

*Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C = C(\varepsilon)$ positive telle que :*

$$P\Big\{\frac{\tau_\ell^*}{\tau_{*_\ell}} > 1 + \varepsilon\Big\} = \bigcirc\Big(K(\ell)\, e^{-C\nu(\ell)}\Big).$$

**Démonstration :**
D'après le lemme1.2, comme $\nu(\ell) = \left[\frac{\ell}{K(\ell)}\right]$, quelque soit $0 < \varepsilon < 1$, on a :

$$P\Big\{Z_\ell K(\ell) < \frac{1}{1+\varepsilon}\Big\} = \bigcirc\Big(e^{-C_2\nu(\ell)}\Big)$$

et

$$P\Big\{Z_\ell K(\ell) > \frac{1}{1-\varepsilon}\Big\} = \bigcirc\Big(e^{-C_1\nu(\ell)}\Big)$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes positives qui dépendent de $\varepsilon$, donc

$$P\Big(\Big\{Z_\ell K(\ell) < \frac{1}{1+\varepsilon}\Big\} \cup \Big\{Z_\ell K(\ell) > \frac{1}{1-\varepsilon}\Big\}\Big) = \bigcirc\Big(e^{-C\nu(\ell)}\Big)$$

où $C$ est une constante positive qui dépend de $\varepsilon$. On pose :

$$a = \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad b = \frac{1}{1-\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = 1+\varepsilon' \quad \text{où} \quad \varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Comme, pour tout $r = 1, \cdots, K(\ell)$, d'après le lemme1.1 la variable aléatoire $\tau_{\ell,r}$ suit une loi bêta de paramètres $(\nu_{\ell,r}\,, \ell - \nu_{\ell,r} + 1)$ et $\nu_{\ell,r} = \nu(\ell)$ ou $\nu(\ell)+1$, on en déduit :

$$P\Big(\bigcup_{r=1}^{K(\ell)} \Big(\Big\{K(\ell)\,\tau_{\ell,r} < a\Big\} \cup \Big\{K(\ell)\,\tau_{\ell,r} > b\Big\}\Big)\Big) = \bigcirc\Big(K(\ell)\,e^{-C\nu(\ell)}\Big).$$

Il est clair que

$$\begin{aligned}\bigcap_{r=1}^{K(\ell)} \Big(\Big\{K(\ell)\,\tau_{\ell,r} \geq a\Big\} \cap \Big\{K(\ell)\,\tau_{\ell,r} \leq b\Big\}\Big) \quad &\subset \quad \Big\{K(\ell)\tau_{*_\ell} \geq a\Big\} \cap \Big\{K(\ell)\tau_\ell^* \leq b\Big\} \\ &\subset \quad \Big\{\frac{\tau_\ell^*}{\tau_{*_\ell}} \leq \frac{b}{a}\Big\}.\end{aligned}$$

D'où

$$P\Big\{\frac{\tau_\ell *}{\tau_{*_\ell}} > 1+\varepsilon'\Big\} = \bigcirc\Big(K(\ell)e^{-C\nu(\ell)}\Big).$$

■

**Corollaire 1.3**
*Si*

$$(i) \quad K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad (\mathrm{ii}) \quad \mathrm{K}(\ell) = \mathrm{o}\Big(\frac{\ell}{\log \ell}\Big).$$

*Alors*

*(1) pour tout* $C_1 > 2\pi\,\frac{A}{B}\,\frac{M^2}{m^2}$*, il existe* $C_2 > 0$ *tel que :*

$$P\{K(\ell)V_\ell > C_1\} \leq P\Big\{\frac{V_\ell}{W_\ell} > \frac{C_1}{2\pi}\Big\} = \bigcirc\Big(K(\ell)e^{-C_2\nu(\ell)}\Big).$$

*(2) Les suites* $K(\ell)V_\ell$ *et* $\frac{V_\ell}{W_\ell}$ *sont presque sûrement bornées.*

**Démonstration :**

(1) provient directement du lemme1.8, et des inégalités facilement vérifiables :

$$K(\ell)W_\ell \leq 2\pi \quad \text{et} \quad \frac{\tau_\ell *}{\tau_{*\ell}} \geq \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{M}^2} \frac{\mathrm{V}_\ell}{\mathrm{W}_\ell}.$$

(2) est une application du lemme de Borel-Cantelli, avec $\nu(\ell) = \left[\frac{\ell}{K(\ell)}\right]$.

■

Dans le lemme suivant, nous considérons une réalisation $\tilde{t_\ell}$ du vecteur aléatoire $\tilde{\theta}^{(\ell)}$ : $\tilde{t_\ell} = \{t_{R(r)}\,;\, 1 \leq r \leq K(\ell)\}$. La démonstration est une adaptation de Geffroy[14].Nous en décrivons les grandes lignes.

**Lemme 1.9**
*Soit $h$ une fonction positive continue sur $[0, 2\pi]$. On définit la suite $\beta = (\beta_\ell)$ de nombres positifs dépendants de $\tilde{t_\ell}$, par l'équation intégrale :*

$$\sum_{r=1}^{K(\ell)} \frac{1}{t_{R(r)} - t_{R(r-1)}} \int_{[t_{R(r-1)},\, t_{R(r)}[} e^{-\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell h(\theta)}\, d\theta = 1. \tag{1.17}$$

*Si*

$$(i)\ K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad (\mathrm{ii})\ \mathrm{K}(\ell) = \mathrm{o}\Big(\frac{\ell}{\log \ell}\Big).$$

*Alors, quelque soit $z > 0$,*

$$\lim_{\ell \to +\infty} \sum_{r=1}^{K(\ell)} \frac{1}{t_{R(r)} - t_{R(r-1)}} \int_{[t_{R(r-1)},\, t_{R(r)}[} e^{-\left(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)h(\theta)}\, d\theta = e^{-az}$$

*où $a = \inf\{h(\theta)\ :\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.*

**Démonstration :**
Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, l'intégrale (1.17) décroît continûment de $K(\ell)$ à 0 lorsque $\beta_\ell$ croît de 0 à $+\infty$. Ainsi l'équation (1.17) a une solution unique pour $K(\ell) > 1$. La suite $\beta = (\beta_\ell)$ vérifie les inégalités

$$\frac{\log K(\ell)}{d} \leq \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell \leq \frac{\log K(\ell)}{a} \tag{1.18}$$

avec $d = \sup\{h(\theta) \ : \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.
Posons : pour $r = 1, \cdots, K(\ell)$ et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
g_{\ell,r}(\theta) &= \frac{1}{t_{R(r)} - t_{R(r-1)}} e^{-\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell h(\theta)} \quad , \ \theta \in [t_{R(r-1)}, t_{R(r)}[, \\
E_{r,\varepsilon} &= \Big\{\theta \ : \ t_{R(r-1)} \leq \theta < t_{R(r)} \ ; \ a \leq h(\theta) < a + \varepsilon\Big\}, \\
E_\varepsilon &= \Big\{\theta \ : \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ ; \ a \leq h(\theta) < a + \varepsilon\Big\}, \\
I_1(\varepsilon) &= \sum_{r=1}^{K(\ell)} \int_{E_{r,\varepsilon}} g_{\ell,r}(\theta)\, d\theta, \\
I_2(\varepsilon) &= \sum_{r=1}^{K(\ell)} \int_{[t_{R(r-1)}, t_{R(r)}[ - E_{r,2\varepsilon}} g_{\ell,r}(\theta)\, d\theta.
\end{aligned}$$

On obtient, d'après le corollaire1.3.(2) : $\frac{I_2(\varepsilon)}{I_1(\varepsilon)} = \bigcirc\Big(e^{-\varepsilon\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell}\Big)$. Ainsi, d'après l' hypothèse $(i)$ et les inégalités (1.18) : $\lim_{\ell\to+\infty} \frac{I_2(\varepsilon)}{I_1(\varepsilon)} = 0$. Comme d'après (1.17), on a l'inégalité $I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) < 1$, on obtient alors : $\lim_{\ell\to+\infty} I_2(\varepsilon) = 0$ et $\lim_{\ell\to+\infty} I_1(\varepsilon) = 1$.
Posons :

$$J_\ell(z) = \sum_{r=1}^{K(\ell)} \frac{1}{t_{R(r)} - t_{R(r-1)}} \int_{[t_{R(r-1)}, t_{R(r)}[} e^{-\left(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)h(\theta)}\, d\theta\,.$$

On a alors :

$$J_\ell(z) = \sum_{r=1}^{K(\ell)} \int_{E_{\ell,r}} e^{-zh(\theta)}\, g_{\ell,r}(\theta)\, d\theta \ + \ o(1)$$

et

$$I_1(\varepsilon)\, e^{-(a+\varepsilon)z} + o(1) \leq J_\ell(z) \leq I_1(\varepsilon)\, e^{-az} + o(1)\,.$$

Donc

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad e^{-(a+\varepsilon)z} \leq \liminf_{\ell\to+\infty} J_\ell(z) \leq \limsup_{\ell\to+\infty} J_\ell(z) \leq e^{-az}$$

et

$$\forall\, z > 0 \quad \lim_{\ell\to+\infty} J_\ell(z) = e^{-az}.$$

■

Nous revenons maintenant au problème de loi limite qui, d'après le lemme1.7, se ramène à l'étude des limites (1.15) et (1.16). Nous commençons par l'étude du cas d'un processus ponctuel de Poisson homogène.

### 1.4.3 Étude du cas d'un processus ponctuel de Poisson homogène

**Théorème 1.4**
*On suppose que $N$ est un processus ponctuel de Poisson homogène sur $\mathbb{R}^2$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont le support est défini en coordonnées polaires par :*

$$S = \Big\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[ \, : \; 0 \leq \rho < \phi(\theta) \, ; \, \phi(0) = \phi(2\pi)\Big\}$$

*où $\phi$ est une fonction positive et différentiable. On suppose que $N$ a une mesure moyenne $\mu = C\lambda$, où $C$ est une constante positive connue et $\lambda$ la restriction à $S$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\beta = (\beta_{\tilde{i}_\ell})$ une suite de nombres reéls positifs dépendants de $\tilde{i}_\ell$, définie par l'équation intégrale :*

$$\sum_{r=1}^{K(\ell)} \frac{1}{t_{R(r)} - t_{R(r-1)}} \int_{[t_{R(r-1)}, \, t_{R(r)}[} e^{-\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_{\tilde{i}_\ell} \frac{1}{\phi(\theta)}} \, d\theta = 1. \tag{1.19}$$

*Si*

$$(i) \; K(\ell) \longrightarrow +\infty, \quad (ii) \; K(\ell) = \mathrm{o}\left(\frac{\ell}{(\log \ell)^2}\right) \quad \text{et} \quad (iii) \quad \ell = \mathrm{o}\Big(K(\ell)^2\Big).$$

*Alors, la variable aléatoire*

$$\frac{2L^{(n)}}{K(L^{(n)})}\left(Z_{L^{(n)}} - \frac{1}{2}\beta_{\tilde{\theta}(L^{(n)})}\right)$$

*admet une loi limite qui est la loi de Gumbel ayant pour fonction de répartition* $\exp(-e^{-az})$ *où $a = \inf\{\frac{1}{\phi(\theta)} \; : \; 0 \leq \theta < 2\pi\}$.*

Ce théorème est une extension des résultats de Geffroy[14] au cas des secteurs aléatoires.

**Démonstration :**
Comme le problème de la recherche de la loi limite se ramène à l'étude des limites (1.15)

et (1.16), nous commençons d'abord par l'étude du paramètre $q_{\ell,r}(z_\ell)$, $\quad r = 1, \cdots, K(\ell)$, avec $z_\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{K(\ell)}{\ell} z + \beta_\ell\right)$. En utilisant les formules (1.3), (1.4), (1.5) et (1.14), on obtient :

$$q_{\ell,r}(z_\ell) = \frac{\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r)}} \left( \int_{M_{\ell,r}-z_\ell}^{\phi(\theta)} 2\rho \, d\rho \right) d\theta}{\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r)}} \phi^2(\theta) \, d\theta}.$$

Donc

$$q_{\ell,r}(z_\ell) \geq \frac{m_{\ell,r}^2 - (M_{\ell,r} - z_\ell)^2}{M_{\ell,r}^2} \quad \text{et} \quad q_{\ell,r}(z_\ell) \leq \frac{M_{\ell,r}^2 - (M_{\ell,r} - z_\ell)^2}{m_{\ell,r}^2}.$$

D'où les inégalités

$$(1.20) \left[1 - \left(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\right)^2\right] - \frac{M_{\ell,r}^2 - m_{\ell,r}^2}{M_{\ell,r}^2} \leq q_{\ell,r}(z_\ell) \leq \left[1 - \left(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\right)^2\right] + \frac{M_{\ell,r}^2 - m_{\ell,r}^2}{m_{\ell,r}^2}.$$

Puisque $\phi$ est différentiable

$$(1.21) \qquad \frac{M_{\ell,r}^2 - m_{\ell,r}^2}{M_{\ell,r}^2} \leq \frac{M_{\ell,r}^2 - m_{\ell,r}^2}{m_{\ell,r}^2} \leq 2\,\frac{M}{m^2} \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\phi'(\theta)|\, V_\ell .$$

D'après le corollaire1.3.(1), il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$P\left\{ V_\ell > \frac{C_2}{K(\ell)} \right\} = \bigcirc\left( K(\ell)\, e^{-C_1 \nu(\ell)} \right).$$

Ce qui entraîne : pour tout $C_3 > C_2\, \frac{2M}{m^2} \sup\{|\phi'(\theta)| \;:\; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$(1.22) \qquad P\left\{ \max_{1 \leq r \leq K(\ell)} \frac{M_{\ell,r}^2 - m_{\ell,r}^2}{m_{\ell,r}^2} > \frac{C_3}{K(\ell)} \right\} = \bigcirc\left( K(\ell)\, e^{-C_1 \nu(\ell)} \right).$$

D'où

$$P\left\{ \max_{1 \leq r \leq K(\ell)} K(\ell) \left| \left(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\right) - \left(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\right)^2 \right| > C_3 \right\} = \bigcirc\left( K(\ell)\, e^{-C_1 \nu(\ell)} \right)$$

et sous l'hypothèse $(ii)$

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P\left\{ \max_{1 \leq r \leq K(\ell)} K(\ell) \left| \left(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\right) - \left(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\right)^2 \right| > C_3 \right\} < +\infty .$$

En utilisant maintenant $(iii)$, il existe une suite $\varepsilon(\ell)$ de variables aléatoires, fonctions mesurables de $\tilde{\theta}^{(\ell)}$, telle que $\varepsilon(\ell) \longrightarrow 0$ presque sûrement lorsque $\ell \longrightarrow +\infty$ et pour tout $1 \leq r \leq K(\ell)$

$$q_{\ell,r}(z_\ell) = 1 - \Big(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\Big)^2 + \frac{K(\ell)}{\ell}\,\varepsilon(\ell). \tag{1.23}$$

D'après les inégalités (1.18) et les hypothèses $(i)$, $(ii)$ *et* $(iii)$, on a : pour tout $r = 1, \cdots, K(\ell)$,

$$\log\Big(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\Big)^{\nu_{\ell,r}-1} = -\Big(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\,\beta_\ell\Big)\,\frac{1}{M_{\ell,r}} + \varepsilon'(\ell)$$

où $\varepsilon'(\ell)$ est une suite de variables aléatoires, fonctions mesurables de $\tilde{\theta}^{(\ell)}$ telles que $\varepsilon'(\ell)$ converge vers 0 presque sûrement lorsque $\ell$ tend vers l'infini.
Pour $r = 1, \cdots, K(\ell)$, soit $\theta_{\ell,r} \in [t_{R(r-1)}, t_{R(r)}[$ tel que :

$$e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})}} = \frac{1}{t_{R(r)} - t_{R(r-1)}} \int_{[t_{R(r-1)}, t_{R(r)}[} e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta)}}\, d\theta\,. \tag{1.24}$$

Puisque $\phi$ est différentiable,

$$\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})} - \frac{1}{M_{\ell,r}} \leq \frac{1}{m^2} \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\phi'(\theta)|\, V_\ell\,.$$

Donc, d'après le corollaire1.3.(2), pour tout $r = 1, \cdots, K(\ell)$

$$\frac{1}{M_{\ell,r}} = \frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})} + \bigcirc\Big(\frac{1}{K(\ell)}\Big) \quad p.s. \tag{1.25}$$

On en déduit

$$\log\Big(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\Big)^{\nu_{\ell,r}-1} = -\Big(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\Big)\,\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})} + \bigcirc\Bigg(\frac{z + \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell}{K(\ell)}\Bigg) + \varepsilon'(\ell)\,.$$

D'après les inégalités (1.18) : $\frac{\ell}{K(\ell)^2}\,\beta_\ell < \frac{\log K(\ell)}{a\,K(\ell)}$ et sous l'hypothèse $(i)$ , $\frac{1}{K(\ell)}\Big(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\,\beta_\ell\Big) \to 0$ presque sûrement quand $\ell \longrightarrow +\infty$, il existe donc une suite $\varepsilon''(\ell)$ de variables aléatoires, fonctions mesurables de $\tilde{\theta}^{(\ell)}$ telles que $\varepsilon''(\ell) \longrightarrow 0$ presque sûrement quand $\ell \longrightarrow +\infty$ et pour tout $1 \leq r \leq K(\ell)$

$$\log\Big(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\Big)^{\nu_{\ell,r}-1} = -\Big(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\,\beta_\ell\Big)\,\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})} + \varepsilon''(\ell)\,.$$

Ainsi

$$\prod_{r=1}^{K(\ell)} \left[1 - \left(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\right)^{\nu_{\ell,r}-1}\right] = \prod_{r=1}^{K(\ell)} \left[1 - e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})}+\varepsilon''(\ell)}\right]$$

qui d'après Jacob et Abbar[20](lemme4.1), a la même limite $\tau$, si elle existe, que

$$\prod_{r=1}^{K(\ell)} \left[1 - e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})}}\right].$$

D'après Schwartz[29](Th.2, p.208) et l'égalité (1.24), cela revient à étudier la limite de

$$(1.26)\quad \sum_{r=1}^{K(\ell)} e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})}} = \sum_{r=1}^{K(\ell)} \frac{1}{t_{R(r)} - t_{R(r-1)}} \int_{[t_{R(r-1)},\, t_{R(r)}[} e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta)}}\, d\theta\,.$$

Finalement d'après le lemme1.9, la limite de (1.26) est :

$$-\log\tau = e^{-az} \quad \text{et} \quad \tau = \exp\left(-e^{-az}\right).$$

Donc

$$\prod_{r=1}^{K(\ell)} \left[1 - \left(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\right)^{\nu_{\ell,r}-1}\right] \to \exp\left(-e^{-az}\right) \quad p.s \quad \text{quand} \quad \ell \to +\infty$$

et

$$F_\ell(z_\ell) \longrightarrow \exp\left(-e^{-az}\right) \quad \text{quand} \quad \ell \longrightarrow +\infty.$$

■

Pour en déduire la loi limite de $d(\phi_n, \phi)$, nous avons besoin du résultat suivant :

**Lemme 1.10**
*Soient $X_n$ une suite de variables aléatoires réelles ayant une loi limite et $Y_n$ une suite de variables aléatoires réelles telles que*

$$|X_n - Y_n| \longrightarrow 0 \quad \textit{en probabilité quand } n \longrightarrow +\infty\,.$$

*Alors, la suite de variables aléatoires réelles $Y_n$ admet la même loi limite que $X_n$.*

**Démonstration :**
Voir par exemple Galambos[13] (Lemme 2.2.1, page 60). Pour un résultat avec des hypothèses plus générales voir Billingsley[5] (Théorèmes 4.1 et 4.2, page 25). ■

**Théorème 1.5**
*Sous les hypothèses du théorème1.4, la variable aléatoire*

$$\frac{2L^{(n)}}{K(L^{(n)})}\left(d(\phi_n,\phi)-\frac{1}{2}\beta_{\tilde{\theta}(L^{(n)})}\right)$$

*admet une loi limite qui est la loi de Gumbel ayant pour fonction de répartition* $\exp\left(-e^{-az}\right)$ *où* $a=\inf\{\frac{1}{\phi(\theta)}\ :\ 0\leq\theta<2\pi\}$.

**Démonstration :**
D'après le lemme1.10, ce résultat découle du théorème1.4 et du fait que

$$P\Big\{d(\phi_n,\phi)\ =\ Z_{L^{(n)}}\Big\}\longrightarrow 1\quad \text{quand}\quad \mathrm{n}\rightarrow+\infty\,.$$

En effet pour que $d(\phi_n,\phi)$ soit différent de $Z_{L^{(n)}}$, il est nécessaire que l'un des secteurs angulaires $D_{L^{(n)},r}$, $r=1,\cdots,K(L^{(n)})$, soit d'effectif positif pour au moins un des processus ponctuels de l'échantillon. En remarquant que

$$\forall\,\ell\in\mathbb{N}^*\quad M_{\ell,r}-m_{\ell,r}\leq V_\ell\sup_{0\leq\theta\leq 2\pi}|\phi'(\theta)|$$

et, d'après le corollaire1.3.(2),

$$M_{\ell,r}-m_{\ell,r}\leq\frac{C_4}{K(\ell)}\quad p.s.$$

où $C_4$ est une constante positive. On peut écrire :

$$\begin{aligned}P\{d(\phi_n,\phi)\ \neq\ Z_{L^{(n)}}\}\ &<\ \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left[1-P\Big\{Z_\ell>\frac{C_4}{K(\ell)}\Big\}\right]P\Big\{L^{(n)}\ =\ \ell\Big\}\\ &=\ \sum_{\ell=1}^{+\infty}F_\ell\Big(\frac{C_4}{K(\ell)}\Big)\,P\Big\{L^{(n)}\ =\ \ell\Big\}.\end{aligned}$$

Mais l'hypothèse $\ell=\mathrm{o}\Big(K(\ell)^2\Big)$ entraîne :

$$\frac{C_4}{K(\ell)}\ =\ \mathrm{o}\Big(\frac{K(\ell)}{\ell}z\ +\ \beta_\ell\Big)\ ,\ \forall\,z\,.$$

D'où

$$F_\ell\Big(\frac{C_4}{K(\ell)}\Big) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \ell \longrightarrow +\infty.$$

Donc, en raisonnant comme dans le lemme1.7,

$$P\Big\{\ d(\phi_n, \phi)\ \neq\ Z_{L^{(n)}}\Big\} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \mathrm{n} \rightarrow +\infty.$$

■

Nous abordons maintenant l'étude de la loi limite dans le cas d'un processus ponctuel de Poisson non homogène.

### 1.4.4 Étude du cas d'un processus ponctuel de Poisson non homogène

**Théorème 1.6**
*On suppose que $N$ est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de mesure moyenne $\mu$ et de support défini en coordonnées polaires par :*

$$S = \Big\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[\ :\ 0 \le \rho < \phi(\theta); \phi(0) = \phi(2\pi)\Big\},$$

*où $\phi$ est une fonction positive et différentiable. On suppose que $\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, $\lambda$, et dont la densité $\psi = \frac{d\mu}{d\lambda}$ vérifie les inégalités* (1.2). *On suppose également que la densité $g$ définie par* (1.3) *est lipschitzienne de rapport $\alpha$. On définit la suite de réels positifs $\beta = (\beta_{\tilde{i}_\ell})$ dépendants de $\tilde{i}_\ell$ par l'équation intégrale*

$$\sum_{r=1}^{K(\ell)} \frac{1}{t_{R(r)} - t_{R(r-1)}} \int_{[t_{R(r-1)}, t_{R(r)}[} e^{-\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_{i_\ell}\frac{1}{\phi(\theta)}}\, d\theta \ =\ 1.$$

*Si*

$$(i)\ \ K(\ell) \longrightarrow +\infty, \quad (ii)\ \ K(\ell) = \mathrm{o}\Big(\frac{\ell}{(\log \ell)^2}\Big) \quad \text{et} \quad (\mathrm{iii})\ \ \ell = \mathrm{o}\Big(\mathrm{K}(\ell)^2\Big).$$

*Alors, la variable aléatoire*

$$\frac{2L^{(n)}}{K(L^{(n)})}\Big(Z_{L^{(n)}} - \frac{1}{2}\beta_{\hat{\theta}(L^{(n)})}\Big)$$

*admet une loi limite qui est la loi de Gumbel ayant pour fonction de répartition* $\exp\left(-e^{-az}\right)$ *où $a = \inf\{\frac{1}{\phi(\theta)}\ :\ 0 \le \theta < 2\pi\}$.*

**Démonstration :**

D'après le lemme1.7 l'étude de la convergence en loi de la variable aléatoire

$$\frac{2L^{(n)}}{K(L^{(n)})}\left(Z_{L^{(n)}} - \frac{1}{2}\beta_{\tilde{\theta}_{L^{(n)}}}\right)$$

se ramène à l'étude des limites de (1.15) et (1.16). Pour cela nous commençons par l'étude du paramètre

$$q_{\ell,r}(z_\ell) = \frac{\int_{D_{\ell,r}(z_\ell)} g(\rho,\theta)\,d\rho d\theta}{G_1(t_{R(r)}) - G_1(t_{R(r-1)})}\ ;\ r = 1,\cdots,K(\ell) \tag{1.27}$$

avec $z_\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{K(\ell)}{\ell}\,z + \beta_\ell\right)$. Comme $g$ est continue, on peut choisir un point $(\eta_r,\xi_r)$ de $\overset{\circ}{D}_{\ell,r}\,(z_\ell)$ tel que

$$\int_{D_{\ell,r}(z_\ell)} g(\rho,\theta)\,d\rho d\theta \;=\; g(\eta_r,\xi_r)\,\lambda(D_{\ell,r}(z_\ell))$$

et comme

$$G_1(t_{R(r)}) \;-\; G_1(t_{R(r-1)}) \;=\; \int_{D_{\ell,r}} g(\rho,\theta)\,d\rho d\theta,$$

on choisit un point $(\eta_r',\xi_r')$ de $D_{\ell,r}$ tel que

$$G_1(t_{R(r)}) - G_1(t_{R(r-1)}) = g(\eta_r',\xi_r')\,\lambda(D_{\ell,r}).$$

On obtient alors : pour $r = 1,\cdots,K(\ell)$

$$q_{\ell,r}(z_\ell) \;=\; \frac{g(\eta_r,\xi_r)}{g(\eta_r',\xi_r')}\,\frac{\lambda(D_{\ell,r}(z_\ell))}{\lambda(D_{\ell,r})}. \tag{1.28}$$

D'autre part

$$\frac{\lambda(D_{\ell,r}(z_\ell))}{\lambda(D_{\ell,r})} \geq \frac{m_{\ell,r}^2 \;-\; (M_{\ell,r} \;-\; z_\ell)^2}{M_{\ell,r}^2} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda(\mathrm{D}_{\ell,r}(z_\ell))}{\lambda(D_{\ell,r})} \leq \frac{M_{\ell,r}^2 \;-\; (M_{\ell,r} \;-\; z_\ell)^2}{m_{\ell,r}^2}.$$

D'où les inégalités

$$\left[1 - \left(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\right)^2\right] - \frac{M_{\ell,r}^2 \;-\; m_{\ell,r}^2}{M_{\ell,r}^2} \leq \frac{\lambda(D_{\ell,r}(z_\ell))}{\lambda(D_{\ell,r})} \leq \left[1 - \left(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\right)^2\right] + \frac{M_{\ell,r}^2 \;-\; m_{\ell,r}^2}{m_{\ell,r}^2}.$$

Puisque $\phi$ est différentiable, d'après (1.21), (1.22) et l'hypothèse $(ii)$ il existe une constante positive $C$ telle que :

$$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P\left\{\max_{1\leq r\leq K(\ell)} K(\ell) \left| \left(1 - \frac{\lambda\Big(D_{\ell,r}(z_\ell)\Big)}{\lambda(D_{\ell,r})}\right) - \left(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\right)^2 \right| > C\right\} < +\infty.$$

En utilisant l'hypothèse $(iii)$, il existe donc une suite $\varepsilon(\ell)$ de variables aléatoires, fonctions mesurables de $\tilde{\theta}^{(\ell)}$, telles que $\varepsilon(\ell)$ converge vers 0 presque sûrement quand $\ell$ tend vers l'infini et pour tout $1 \leq r \leq K(\ell)$

$$\frac{\lambda(D_{\ell,r}(z_\ell))}{\lambda(D_{\ell,r})} = 1 - \left(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\right)^2 + \frac{K(\ell)}{\ell}\varepsilon(\ell). \tag{1.29}$$

La fonction $g$ étant lipschitzienne de rapport $\alpha$. En remarquant que, pour $\ell$ assez grand, $z_\ell < \beta_\ell$, et donc le domaine $\overset{\circ}{D}_{\ell,r}\ (z_\ell)$ est contenu dans le domaine $D_{\ell,r}(\beta_\ell)$. D'après les inégalités (1.18) et le corollaire1.3.(2), on a : pour tout $r = 1, \cdots, K(\ell)$

$$g(\eta_r, \xi_r) = g(\eta_r', \xi_r') + \bigcirc\left[\frac{1}{K(\ell)} + \frac{K(\ell)\ \log K(\ell)}{\ell}\right]\ p.s. \tag{1.30}$$

En combinant les formules (1.28), (1.29) et (1.30), g est bornée, on obtient : pour tout $r = 1, \cdots, K(\ell)$

$$q_{\ell,r}(z_\ell) = \left(1 + \bigcirc\left[\frac{1}{K(\ell)} + \frac{K(\ell)\log K(\ell)}{\ell}\right]\right)\left(1 - \left(1 - \frac{z_\ell}{M_{\ell,r}}\right)^2 + \frac{K(\ell)}{\ell}\varepsilon(\ell)\right). \tag{1.31}$$

Sous les hypothèses $(i)$, $(ii)$ *et* $(iii)$, on a : pour tout $r = 1, \cdots, K(\ell)$

$$\frac{\ell}{K(\ell)} q_{\ell,r}(z_\ell) = \left(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{M_{\ell,r}} + \varepsilon'(\ell)$$

où $\varepsilon'(\ell)$ est une suite de variables aléatoires, fonctions mesurables de $\tilde{\theta}^{(\ell)}$, telle que $\varepsilon'(\ell)$ converge vers 0 presque sûrement quand $\ell$ tend vers l'infini. On en déduit de (1.18), (1.25) et l'hypothèse $(i)$ :

$$\frac{\ell}{K(\ell)} q_{\ell,r}(z_\ell) = \left(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})} + \varepsilon''(\ell)$$

où $\varepsilon''(\ell)$ est une suite de variables aléatoires, fonctions mesurables de $\tilde{\theta}^{(\ell)}$, telles que $\varepsilon''(\ell)$ converge vers 0 presque sûrement quand $\ell$ tend vers l'infini.
Comme $\nu_{\ell,r} = \frac{\ell}{K(\ell)}(1 + o(1))$, d'après (1.31), sous les hypothèses $(i)$ *et* $(ii)$ :

$$q_{\ell,r}(z_\ell) \to 0\, p.s \quad \text{et} \quad \frac{\ell}{\mathrm{K}(\ell)}\Big(\mathrm{q}_{\ell,r}(\mathrm{z}_\ell)\Big)^2 \to 0\,\mathrm{p.s} \quad \text{quand} \quad \ell \to +\infty.$$

On a alors : pour tout $r = 1, \cdots, K(\ell)$

$$\log\Big(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\Big)^{\nu_{\ell,r}-1} = -\Big(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\Big)\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})} + \varepsilon'''(\ell)$$

où $\varepsilon'''(\ell)$ est une suite de variables aléatoires, fonctions mesurables de $\tilde{\theta}^{(\ell)}$, telles que $\varepsilon'''(\ell) \to 0$ presque sûrement quand $\ell \to +\infty$.
On en déduit :

$$\prod_{r=1}^{K(\ell)}\left[1 - \Big(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\Big)^{\nu_{\ell,r}-1}\right] = \prod_{r=1}^{K(\ell)}\left[1 - e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})} + \varepsilon'''(\ell)}\right]$$

qui d'après Jacob et Abbar[20](lemme4.1), a la même limite $\tau$, si elle existe, que

$$\prod_{r=1}^{K(\ell)}\left[1 - e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})}}\right].$$

D'après Schwartz[29](Th.2, p.208) et l'égalité (1.24) cela revient à étudier la limite de

$$(1.32)\quad \sum_{r=1}^{K(\ell)} e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta_{\ell,r})}} = \sum_{r=1}^{K(\ell)}\frac{1}{t_{R(r)} - t_{R(r-1)}}\int_{[t_{R(r-1)},\, t_{R(r)}[} e^{-\left(z+\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)\frac{1}{\phi(\theta)}}\, d\theta\,.$$

Finalement, d'après le lemme1.9, la limite de (1.32) est :

$$-\log\tau = e^{-az} \quad \text{et} \quad \tau = \exp\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{az}}\right).$$

Donc

$$\prod_{r=1}^{K(\ell)}\left[1 - \Big(1 - q_{\ell,r}(z_\ell)\Big)^{\nu_{\ell,r}-1}\right] \to \exp\left(-e^{-az}\right) p.s \quad \text{quand} \quad \ell \to +\infty$$

et

$$F_\ell(z_\ell) \longrightarrow \exp\left(-\,e^{-\,a\,z}\right) \quad \text{quand} \quad \ell \longrightarrow +\infty.$$

■

**Théorème 1.7**
*Sous les hypothèses du théorème1.6, la variable aléatoire*

$$\frac{2L^{(n)}}{K(L^{(n)})}\left(d(\phi_n,\phi)-\frac{1}{2}\beta_{\tilde{\theta}}(L^{(n)})\right)$$

*admet une loi limite qui est la loi de Gumbel ayant pour fonction de répartition* $\exp(-e^{-az})$ *où* $a=\inf\{\frac{1}{\phi(\theta)} \ : \ 0\leq\theta<2\pi\}$.

**Démonstration :**
Elle s'effectue de la même manière que celle du théorème1.5. ■

# Bibliographie


[1] **ABBAR H.**(1990) : "Un estimateur spline du contour d'une répartition ponctuelle aléatoire." Statistique et analyse des données, Vol. 15, No 3, p 1–19.

[2] **ABOU-JAOUDÉ S.**(1977) : "La convergence $\mathbf{L_1}$ et $\mathbf{L_\infty}$ de certains estimateurs d' une densité de probabilité." Thèse de l' université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[3] **BARNDORFF-NIELSEN O.**(1964) : "On the limit distribution of the maximum of a random number of independent random variables." Acta Math. Acad. Hungar 15, 399-403.

[4] **BERMAN S.M**(1962) : "Limiting distribution of the maximum term sequences of dependent random variables." Ann. Math. Statist. 23, 894-908.

[5] **BILLINGSLEY P.**(1968) :"Convergence of probability measures".Wiley.

[6] **BOSQ D.** (1971) : "Contribution à la théorie de l' estimation fonctionnelle." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[7] **BOSQ D. et LECOUTRE J. P.**(1987) " Théorie de l'estimation fonctionnelle." Economica.

[8] **CHEVALIER J.**(1976) : "Estimation du support et du contour d' une loi de probabilité." Ann. Inst. Henri Poincaré , B, Vol 12 ,4 ,339-364 .

[9] **CRETOIS E.**(1994) : "Utilisation de la méthode des pas aléatoires en estimation dans les processus ponctuels." Thèse, Université de Rouen.

[10] **DAVID H. A. and GALAMBOS J.** (1974) : " The asymptotic theory of concomitants of order Statistics." J. Appl. Prob. 11, 762–770.

[11] **DAVID H. A., O'CONNELL M. J. and YANG S. S.** (1977) : " Distribution and expected valued of the rank of a concomitant of an order statistics." The annals of statistics, Vol. 5, No 1, 216–223.

[12] **DIA G.**(1987) : " Blocs équlibrés d'une série aléatoire de variables statistiques." Pub. ISUP XXXII, fasc.1-2, 19-44.

[13] **GALAMBOS J.**(1978) : "The asymptotic theory of extreme order statistics." Wiley, New-York.

[14] **GEFFROY J.**(1964) : " Sur un problème d' estimation géométrique ." Pub. ISUP XXII, fasc.1, 31-70.

[15] **GEFFROY J.**(1981) : " Sur la convergence uniforme en probabilité vers 0 d'une famille de blocs équilibrés" Pub. ISUP XXII, fasc.1, 31-70.

[16] **GENSBITEL M. H.**(1979) : "Contribution à l' étude statistique des répartitions ponctuelles ." Thèse , Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[17] **GNEDENKO B.V**(1943) : "Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire." Ann. Math. 44, 423-453.

[18] **GESSMAN M.**(1970) : "A constent non parametric multivariate density estimator based on statistically equivalent blocks." Ann. Math. Statist. 41, 1344-1346.

[19] **JACOB P.**(1981) : " Estimation du contour discontinu d'un processus ponctuel sur le plan ." Pub. ISUP 29, 3-4, p1-25.

[20] **JACOB P. and ABBAR H.**(1989) : "Estimating the edge of a Cox process area ." Cahiers du Centre de Recherche Operationnelle, Vol.31, 3-4.

[21] **JACOB P. et MISSIÉ P.**(1995) : "Estimation à pas aléatoire du contour d'un processus ponctuel de Poisson." Pub. IRMA Lille, Vol.37, 12. À paraître dans les publications de L'ISUP.

[22] **KALLENBERG O.**(1983) : "Random measures". Academic press.

[23] **KARR A.F.**(1986) : "Point process and their statistical inference." Dekker.

[24] **MOORE M.**(1984) : "On the estimation of a convex set." The Annals of Statistics, Vol. 12, 3, 1090-1099.

[25] **LECOUTRE J.P.**(1975) : " Convergence et Optimisation de certains estimateurs de la densité ." Thèse , Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[26] **PYKE R.**(1965) : "Spacings". J. Roy. Statist. Soc. Série B, 27, No 3, p.395-449.

[27] **RENYI A. and SULANKE R.**(1964 ) : " Uber bie konvexe hülle vonze fälling gewählten punklen II." Z. wahr 3, p.138-148.

[28] **RIPLEY B. D. and RASON J. P.**(1977) : "Finding the edge of a Poisson forest." Journal of a Applied Probability, 14, 483-491.

[29] **SCHWARTZ L.**(1980) : "Analyse : Topologie générale et analyse fonctionnelle". Herman-2ème édition.

[30] **TUKEY J.**(1941) : "Non Parametric II. Statistically equivalent blocks and tolerance regions the continous case ." Ann.Math. Statist., 18 , 529-539.

[31] **VAN RYZIN J.**(1973) : "A histogram method of density estimation ." Comm. Statist., 2, p. 493-502 .

# Chapitre 2

# Estimation à pas aléatoire du contour d'un processus ponctuel de Poisson sur le plan

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ de support défini par :

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq f(x) \ ; \ 0 \leq x < 1\right\}$$

où $f$ est une fonction continue positive et inconnue à estimer. Nous nous proposons d'estimer $f$ par la méthode à pas aléatoire, étant donné un $n-$échantillon de ce processus ponctuel de Poisson.

Il est clair que ce cas diffère très peu de celui que nous avons envisagé dans le premier chapitre. Cependant la généralité est ici un peu plus grande, puisque nous allons utiliser des estimateurs qui ne reposent pas nécessairement sur des blocs équilibrés. D'autre part, ce chapitre a une suite naturelle qui est le quatrième chapitre, où nous considérons des supports délimités par des fonctions $f$ éventuellement discontinues. Une telle généralisation aurait eu moins de sens dans le cas du support étoilé du premier chapitre. Nous avons donc jugé utile de reprendre dans ce nouveau contexte l'étude du chapitre, en évitant autant que possible de nous répéter. Enfin, dans le troisième chapitre, le lissage spline présentera de légères différences d'un cas à l'autre, splines périodique ou non.

Nous établissons des conditions nécessaires de convergence uniforme en probabilité et une condition suffisante de convergence uniforme presque complète, de l'estimateur construit par la méthode à pas aléatoire et nous établissons que la loi limite de cet estimateur est une loi de Gumbel dont le paramètre dépend de $f$, généralisant ainsi les résultats obtenus au premier chapitre, ainsi que ceux de Geffroy[12], de Gensbitel[14] et de Jacob et Missié[19].

## 2.2 Préliminaires

### 2.2.1 Notations, définitions et hypothèses

Nous considérons un processus ponctuel de Poisson $N$ sur le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un système d'axes rectangulaires $(Ox,\ Oy)$, défini sur un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$.

Nous supposons que le support du processus ponctuel de Poisson $N$ est défini par :

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \leq y < f(x)\,;\ 0 \leq x < 1) \right\}, \tag{2.1}$$

où $f$ est une fonction continue positive telle que

$$0 < m = \inf_{0 \leq x < 1} f(x) \leq M = \sup_{0 \leq x < 1} f(x) < +\infty.$$

Nous supposons que la mesure moyenne $\mu = E(N)$ de $N$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, $\lambda$, et que la densité $\psi = \frac{d\mu}{d\lambda}$, vérifie :

$$A \leq \psi(x,y) \leq B, \quad \forall\,(x,y) \in S \tag{2.2}$$

où A et B sont deux constantes réelles strictement positives.

Soit $N_1, \cdots, N_n$ $n$ copies indépendantes de $N$. Nous nous proposons d'estimer $f$ par une fonction $f_n$ dont nous préciserons plus loin la construction.

Soit $N^{(n)} = N_1 + \cdots + N_n$ la superposition de ces $n$ processus ponctuels de Poisson indépendants, c'est donc un processus ponctuel de Poisson de mesure moyenne $n\mu$. Nous désignons par $L^{(n)}$ l' effectif aléatoire de $N^{(n)}$ sur $S$ :

$$L^{(n)} = N^{(n)}(S) = \sum_{i=1}^{n} N_i(S).$$

Soient $\ell \in \mathbb{N}$, un entier $K(\ell)$ et des entiers $\nu_j(\ell) > 0$ pour $j = 1, \cdots,\ K(\ell)$ tels que

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} \nu_j(\ell) = \ell + 1.$$

Il est nécessaire que $K(\ell) \leq \ell + 1$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Nous définissons une suite d'entiers par :

$$\begin{aligned} R_0(\ell) &= 0 \\ R_j(\ell) &= R_{j-1}(\ell) + \nu_j(\ell),\ 1 \leq j \leq K(\ell). \end{aligned}$$

Dans la suite, on donne des résultats asymptotiques pour $n \longrightarrow +\infty$, sous des conditions concernant le comportement de $\nu_j(\ell)$, donc de $K(\ell)$, quand $\ell \longrightarrow +\infty$. $N^{(n)}$ est un processus ponctuel de Poisson de mesure moyenne $n\mu$, on peut toujours le représenter sous la forme

$$N^{(n)} = \sum_{i=1}^{L^{(n)}} \delta_{(X_{i,n}\,;\,Y_{i,n})}$$

où $\delta_{(X_{i,n}\,;\,Y_{i,n})}$ est la mesure aléatoire de Dirac, où $L^{(n)}, (X_{1,n}\ ;\ Y_{1,n}), \cdots, (X_{i,n}\ ;\ Y_{i,n}), \cdots$ sont des variables aléatoires indépendantes, où $L^{(n)}$ est à valeurs entières et suit une loi de Poisson de paramètre $n\mu(S)$ et où les variables aléatoires $(X_{i,n}\ ;\ Y_{i,n})$, $i = 1, \cdots$, sont à valeurs dans $[0,\ 1] \times \mathbb{R}_+$ et suivent une loi commune de densité

$$g(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{\mu(S)} \mathbb{1}_{\{0 \leq y < f(x)\}} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}}. \tag{2.3}$$

Il faut noter que cette loi ne dépend pas de $n$. Les calculs que nous aurons à faire passeront toujours par une étape de conditionnement par rapport à $\{L^{(n)} = \ell\}$. Pour $n \neq n'$, les événements $\{L^{(n)} = \ell\}$ et $\{L^{(n')} = \ell\}$ sont presque sûrement différents, ainsi que les vecteurs aléatoires $\Big((X_{1,n}\,;\,Y_{1,n}), \cdots, (X_{\ell,n}\,;\,Y_{\ell,n})\Big)$ et $\Big((X_{1,n'}\,;\ Y_{1,n'}), \cdots, (X_{\ell,n'}\,;\ Y_{\ell,n'})\Big)$. Cependant comme les démonstrations faites sous un conditionnement tel que $\{L^{(n)} = \ell\}$ ne concerneront que les propriétés de la loi de $\Big((X_{1,n}\,;\,Y_{1,n}), \cdots, (X_{\ell,n}\,;\,Y_{\ell,n})\Big)$, il est commode d'introduire des variables aléatoires fictives $(X_1\,;\,Y_1), \cdots, (X_\ell\,;\,Y_\ell)$ indépendantes de même loi de probabilité absolument continue et qui admet pour densité la fonction $g$ défini par (2.3).
On notera $N_\ell$ le processus empirique

$$\sum_{i=1}^{\ell} \delta_{(X_i\,,\,Y_i)}$$

qui, pour tout $n$, a la même loi que la loi de $N^{(n)}$ conditionnée par $\{L^{(n)} = \ell\}$.

### 2.2.2 Partitions en blocs et en domaines aléatoires

En négligeant les cas de probabilité nulle puisque la loi commune aux variables aléatoires $X_i$, $i \in \mathbb{N}^*$, est absolument continue, pour tout $(i,\, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $i \neq j$, les variables aléatoires $X_i$ et $Y_j$ sont presque sûrement distinctes.

Si l'événement $\{L^{(n)} = \ell\}$ est réalisé, on désigne par

$$\left(X_1^{(\ell)}\ ;\ Y_1^{(\ell)}\right), \cdots, \left(X_\ell^{(\ell)}\ ;\ Y_\ell^{(\ell)}\right)$$

les points de la réalisation du processus ponctuel de Poisson $N^{(n)}$, rangés selon les $X_i$ croissants :

$$X_1^{(\ell)}, \cdots, X_\ell^{(\ell)}$$

désignent les variables aléatoires $X_1, \cdots,\ X_\ell$ ordonnées en croissant, c'est-à- dire :

$$X_1^{(\ell)} < \cdots < X_\ell^{(\ell)}.$$

$Y_1^{(\ell)}, \cdots,\ Y_\ell^{(\ell)}$ sont définies par :

$$\text{si} \quad X_i = X_j^{(\ell)} \quad \text{alors} \quad Y_j^{(\ell)} = Y_i \quad , \quad 1 \leq i, j \leq \ell.$$

Conditionnellement à $\{L^{(n)} = \ell\}$ :

$X_1^{(\ell)}, \cdots, X_\ell^{(\ell)}$ est une statistique d'ordre d'un échantillon de taille $\ell$ d'une loi de probabilité absolument continue qui admet pour densité

$$g_1(x) = \int_0^{+\infty} g(x,y)\, dy = \frac{1}{\mu(S)} \left( \int_0^{f(x)} \psi(x,y)\, dy \right) \mathbb{1}_{\{0 \leq x < 1\}} \tag{2.4}$$

et $Y_1^{(\ell)}, \cdots, Y_\ell^{(\ell)}$ sont des concomitants des statistiques d'ordre.

On partitionne l'intervalle $[0,\, 1[$ en $K(\ell)$ blocs de la forme :

$$\Delta_{\ell,j} = \left[ X_{R_{j-1}(\ell)}^{(\ell)}\ ,\ X_{R_j(\ell)}^{(\ell)} \right[ , \quad j = 1,\ 2, \cdots,\ K(\ell)$$

avec

$$X_{R_0(\ell)}^{(\ell)} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{X}_{\mathrm{R}_{K(\ell)}(\ell)}^{(\ell)} = 1.$$

Donc chacun des blocs contient $\nu'_j(\ell)$ points de $X_1^{(\ell)}, \cdots, X_\ell^{(\ell)}$ où

$$\nu'_j(\ell) = \begin{cases} \nu_1(\ell) - 1, & j = 1 \\ \\ \nu_j(\ell), & j = 2, \cdots, K(\ell). \end{cases}$$

On pose, pour tout $j = 1, 2, \cdots, K(\ell)$ :

$$D_{\ell,j} = \{(x,y) \in S \;:\; x \in \Delta_{\ell,j}\}.$$

Ainsi pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a une partition de $S$ en domaines aléatoires $D_{\ell,j}$ ; $1 \leq j \leq K(\ell)$.

On pose , pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et tout $j = 1, 2, \cdots, K(\ell)$ :

$$\begin{aligned} M_{\ell,j} &= \sup\{f(x) \;:\; x \in \Delta_{\ell,j}\}\,, \\ m_{\ell,j} &= \inf\{f(x) \;:\; x \in \Delta_{\ell,j}\}\,, \\ V_{\ell,j} &= X^{(\ell)}_{R_j(\ell)} - X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)}\,, \\ \tilde{X}_{\ell,j} &= \left\{X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)}, X^{(\ell)}_{R_j(\ell)}\right\}. \end{aligned}$$

On pose ensuite :

$$\begin{aligned} V_\ell &= \max_{1\leq j\leq K(\ell)} V_{\ell,j}\,, \\ W_\ell &= \min_{1\leq j\leq K(\ell)} V_{\ell,j}\,, \\ \tilde{X}^{(\ell)} &= \left\{X^{(\ell)}_{R_j(\ell)}; 1 \leq j \leq K(\ell)\right\}, \end{aligned}$$

### 2.2.3 Définition de l'estimateur

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on définit par $S_\ell{}^\omega$ le support de la mesure discrète $N_\ell{}^\omega$ et on pose :

$$S^\omega_{\ell,j} = S_\ell{}^\omega \cap D_{\ell,j}\,,\; j = 1, \cdots, K(\ell)$$

et

$$U^\omega_{\ell,j} = \max\left\{y \;\middle|\; (x,y) \in S^\omega_{\ell,j}\right\}\,,\; j = 1, \cdots, K(\ell).$$

Nous proposons comme estimateur $f_n$ de $f$, un estimateur de la même nature que l'histogramme de la partition aléatoire, basé sur les extrêmes des ordonnées des points dans chaque domaine aléatoire, défini par :

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, K(L^{(n)})\}\,, \quad \forall x \in \Delta_{L^{(n)},j} \quad f_n(x) = U_{L^{(n)},j}\,.$$

## 2.3 Convergence de l'estimateur

Avant d'aborder l'étude de la convergence, nous établissons le

**Lemme 2.1**
*Si*

$$\lim_{\ell\to+\infty}\frac{1}{\log\ell}\times\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)=+\infty.$$

*Alors , pour toute constante* $C>0$ *:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{+\infty}K(\ell)\exp\Big(-C\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\Big)P\Big(L^{(n)}=\ell\Big)<+\infty.$$

**Démonstration :**
Ce lemme est une variante du lemme1.3 du chapitre1. La différence la plus notable concerne la majoration de

$$e^{-n}\sum_{\ell=[\sqrt{n}]+1}^{+\infty}K(\ell)\exp\Big(-C\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\Big)\frac{n^\ell}{\ell!}.$$

On majore $K(\ell)$ par $\ell+1$, et on pose

$$\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)=\varepsilon_\ell\log\ell,\quad\text{où }\varepsilon_\ell\longrightarrow+\infty\quad\text{quand }\ell\longrightarrow+\infty.$$

Donc

$$K(\ell)\exp\Big(-C\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\Big)\le(\ell+1)\,\ell^{-C\varepsilon_\ell}=\bigcirc\Big(\ell^{-4}\Big)$$

et le reste suit comme dans le lemme1.3 du chapitre1. ∎

### 2.3.1 Condition suffisante de convergence uniforme presque complète

Nous posons :

$$d(f_n,f)=\sup_{0\le x<1}|f_n(x)-f(x)|$$

**Théorème 2.1**
*Si*

$$\lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty.$$

*Alors, la variable aléatoire $d(f_n, f)$ converge vers 0 presque complètement quand $n$ tend vers l'infini.*

**Démonstration :**
Comme dans la démonstration du théorème1.1 du premier chapitre, la convergence presque complète de $d(f_n, f)$ vers 0 résulte de la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 et de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big( \bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \Big\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}) = 0 \Big\} \Big),$$

où pour tout $1 \leq j \leq K(L^{(n)})$ et tout $0 < \varepsilon < m$

$$A_{L^{(n)},j} = \Big\{ (x, y) \in D_{L^{(n)},j} \ : \ m_{L^{(n)},j} > y \geq m_{L^{(n)},j} - \varepsilon \Big\}.$$

1) On examine d'abord la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 :
Soit $g_1$ la densité de probabilité des variables aléatoires $X_i$ étant donné $\{L^{(n)} = \ell\}$, et $G_1$ la fonction de répartition de $g_1$. En posant $\tau_{\ell,j} = G_1\Big(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)}\Big) - G_1\Big(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)}\Big)$, $1 \leq j \leq K(\ell)$, pour tout $0 < \delta < 1$, on a, comme dans le premier chapitre :

$$P\Big\{ V_{L^{(n)}} > \zeta(\delta) \Big\} \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{K(\ell)} P\{\tau_{\ell,j} > \delta\} \, P\Big\{ L^{(n)} = \ell \Big\}$$

où $\zeta$ est le module de continuité de $G_1^{-1}$.

D'après le corollaire1.1(chap 1, §1.3.1)

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} P\{\tau_{\ell,j} > \delta\} \leq \bigcirc\Big( K(\ell) \exp\Big( -C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \Big) \Big).$$

Il reste à utiliser le lemme2.1 pour obtenir le résultat.

2) La démonstration suit les grandes lignes de celles du theorème1.1, avec quelques modifications de calcul, si bien que nous préférons la donner in extenso.

On montre maintenant la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}) = 0\Big\}\Big).$$

On a :

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}) = 0\Big\}\Big) \leq \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{K(\ell)} P\Big\{N_\ell(A_{\ell,j}) = 0\Big\} P\Big(L^{(n)} = \ell\Big).$$

Pour tout $j = 1, \cdots, K(\ell)$, il y a $\nu_j(\ell) - 1$ points ordonnés entre $\Big(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)},\ Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)}\Big)$ et $\Big(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)},\ Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)}\Big)$, à savoir :

$$\Big(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1},\ Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\Big), \cdots, \Big(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1},\ Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\Big).$$

La loi de probabilité conjointe de ces points, conditionnée par $X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)} = x_{R_{j-1}(\ell)}$ et $X^{(\ell)}_{R_j(\ell)} = x_{R_j(\ell)}$ est étudiée en appendice 2, elle est celle d'un échantillon ordonné de taille $\nu_j(\ell) - 1$ d'une loi de probabilité absolument continue qui admet pour densité :

$$(2.5) \qquad h_j(x,y) = \begin{cases} \frac{g(x,y)}{G_1(x_{R_j(\ell)}) - G_1(x_{R_{j-1}(\ell)})} & \text{si } (x,y) \in ]x_{R_{j-1}(\ell)}\ ,\ x_{R_j(\ell)}[\times \mathbb{R}^*_+ \\ 0 & \text{si non .} \end{cases}$$

D'autre part, les vecteurs aléatoires

$$\Bigg(\Big(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1},\ Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\Big), \cdots, \Big(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1},\ Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\Big)\Bigg)_{1 \leq j \leq K(\ell)}$$

sont indépendants conditionnellement à

$$\Big(X^{(\ell)}_{R_1(\ell)} = x_{R_1(\ell)}, \cdots, X^{(\ell)}_{R_{K(\ell)-1}(\ell)} = x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\Big).$$

Et, conditionnellement à $\tilde{X}_{\ell,j}$, les variables aléatoires

$$N_\ell(A_{\ell,j})\ ;\ j = 1, \cdots, K(\ell)$$

sont indépendantes et de lois binomiales $B(\nu_j(\ell)-1\,,\,p_{\ell,j}), 1 \le j \le K(\ell)$ où

$$p_{\ell,j} = \int_{A_{\ell,j}} h_j(x,y)\,dxdy \quad , j = 1,\cdots,K(\ell).$$

On a donc

$$P\Big\{N_\ell(A_{\ell,j}) = 0\Big\} = E\Big(P\Big\{N_\ell(A_{\ell,j}) = 0\Big\}/\tilde{X}_{\ell,j}\Big) = E\Big\{\Big(1-p_{\ell,j}\Big)^{\nu_j(\ell)-1}\Big\}$$

et

$$(2.6) \qquad P\Big(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})}\Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}) = 0\Big\}\Big) \le \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{K(\ell)} E\Big\{\Big(1-p_{\ell,j}\Big)^{\nu_j(\ell)-1}\Big\}P\Big(L^{(n)} = \ell\Big).$$

Etudions maintenant le paramètre $p_{\ell,j}$ ; $1 \le j \le K(\ell)$ :

D'après les formules (2.3),(2.4) et (2.5), on a : pour $j = 1,\cdots,K(\ell)$

$$p_{\ell,j} = \frac{\int_{x_{R_{j-1}(\ell)}}^{x_{R_j(\ell)}}\Big(\int_{m_{\ell,j}-\varepsilon}^{m_{\ell,j}} \psi(x,y)\,dy\Big)\,dx}{\int_{x_{R_{j-1}(\ell)}}^{x_{R_j(\ell)}}\Big(\int_0^{f(x)} \psi(x,y)\,dy\Big)\,dx}.$$

Donc, d'après les inégalités (2.2), on obtient :

$$p_{\ell,j} \le \frac{B}{A\,m_{\ell,j}} \le \frac{B}{Am}\varepsilon \quad \text{et} \quad \mathrm{p}_{\ell\mathrm{j}} \ge \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}\,\mathrm{M}_{\ell\mathrm{j}}} \ge \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{BM}}\varepsilon.$$

Ainsi : pour tout $j = 1,\cdots, K(\ell)$

$$(2.7) \qquad \frac{A}{BM}\varepsilon \le p_{\ell,j} \le \frac{B}{Am}\varepsilon.$$

D'après le lemme2.1 et l'inégalité (2.6), en posant toujours $\mu(S) = 1$, pour établir la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})}\Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}) = 0\Big\}\Big)$$

il suffit de montrer qu'il existe une constante positive $C = C(\varepsilon)$ telle que

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} E\Big\{\Big(1-p_{\ell,j}\Big)^{\nu_j(\ell)-1}\Big\} = \bigcirc\Big(K(\ell)\exp\Big(-C\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\Big)\Big).$$

Or, d'après les inégalités (2.7),

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{K(\ell)} E\Big\{\Big(1-p_{\ell,j}\Big)^{\nu_j(\ell)-1}\Big\} &\le \sum_{j=1}^{K(\ell)} E\Big\{\exp\Big(-p_{\ell,j}(\nu_j(\ell)-1)\Big)\Big\} \\ &= \bigcirc\Big(K(\ell)\ \exp\Big(-C\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\Big)\Big) \text{ avec } C = \frac{A}{BM}\varepsilon.\end{aligned}$$

■

### 2.3.2 Condition nécessaire de convergence uniforme en probabilité

**Lemme 2.2**
*Pour que $d(f_n, f)$ converge vers 0 en probabilité lorsque $n \longrightarrow +\infty$, il est nécessaire que $V_{L(n)}$ converge vers 0 en probabilité lorsque $n \longrightarrow +\infty$.*

**Démonstration :**
Supposons que $V_{L(n)}$ ne converge pas vers 0 en probabilité. Alors il existe deux réels positifs $\varepsilon$ et $\eta$, et une sous-suite $V_{L(q)}$ telle que, pour tout $q$ :

$$P\Big\{V_{L(q)} > \varepsilon\Big\} > \eta.$$

On peut à présent choisir une fonction $f$ qui nous permette d'arriver à une contradiction : posons par exemple $f(x) = x + 1$. Alors l'oscillation de $f$ sur un intervalle de longueur donnée est égale à la longueur de cet intervalle. Il est facile de voir que, dans ces conditions, pour tout $n$ :

$$d(f_n, f) > \frac{1}{2}V_{L(n)}$$

d'où, pour tout $q$ :

$$P\Big\{d(f_q, f) > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} > \eta$$

ce qui prouve que $d(f_n, f)$ ne converge pas en probabilité vers 0.

**Théorème 2.2**
*Une condition nécessaire pour que $d(f_n, f)$ converge en probabilité vers 0 quand $n$ tend vers l'infini est que*

$$(i) \quad \inf_{\ell \geq 1} \frac{1}{\ell+1} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = 0$$
$$(ii) \quad \sup_{\ell \geq 1} \frac{1}{\log(\ell+1)} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty.$$

**Démonstration :**

1) Présentons d'abord la nécessité $(i)$ :
Soit $\alpha > 0$ tel que
$$\forall \ell \in \mathbb{N}^* \qquad \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \geq \alpha(\ell+1).$$
Pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\begin{aligned} P\Big\{V_{L^{(n)}} > \varepsilon\Big\} &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} P\Big\{\max_{1 \leq j \leq K(\ell)} V_{\ell,j} > \varepsilon\Big\} P\{L^{(n)} = \ell\} \\ &\geq \inf_{\ell \geq 1} P\Big\{\max_{1 \leq j \leq K(\ell)} V_{\ell,j} > \varepsilon\Big\}. \end{aligned}$$
D'après les inégalités (2.2) et le théorème des accroissements finis, il existe deux contantes positives $A'$ et $B'$ telles que pour tout $j = 1, \cdots, K(\ell)$ :
$$A' V_{\ell,j} \leq \tau_{\ell,j} \leq B' V_{\ell,j}$$
donc
$$P\Big\{V_{L^{(n)}} > \varepsilon\Big\} \geq \inf_{\ell \geq 1} P\Big\{\max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \tau_{\ell,j} > \varepsilon B'\Big\}.$$
Cependant comme pour tout $j = 1, \cdots, K(\ell)$, $0 \leq \tau_{\ell,j} \leq 1$, on a :
$$\begin{aligned} E(\tau_{\ell,j}) &= \int_{\{\max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \tau_{\ell,j} > \varepsilon B'\}} \tau_{\ell,j} \, dP + \int_{\{\max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \tau_{\ell,j} \leq \varepsilon B'\}} \tau_{\ell,j} \, dP \\ &\leq P\Big\{\max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \tau_{\ell,j} > \varepsilon B'\Big\} + \varepsilon B'. \end{aligned}$$
Donc
$$P\Big\{V_{L^{(n)}} > \varepsilon\Big\} \geq \inf_{\ell \geq 1} \Big(\max_{1 \leq j \leq K(\ell)} E(\tau_{\ell,j}) - \varepsilon B'\Big).$$

Comme d'après le lemme1.1(chap 1,§1.3.1) la variable aléatoire $\tau_{\ell,j}$ suit une loi bêta de paramètres $\Big(\nu_j(\ell)\ ;\ \ell - \nu_j(\ell)+1\Big)$, on a :

$$E(\tau_{\ell,j}) = \frac{\nu_j(\ell)}{\ell+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P\Big\{V_{L(n)} > \varepsilon\Big\} &\geq \inf_{\ell\geq 1}\Big(\frac{1}{\ell+1}\times \max_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell) - \varepsilon\, B'\Big) \\ &\geq \alpha - \varepsilon\, B' \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

pour $\varepsilon$ assez petit.
Par conséquent, une condition nécessaire pour que $V_{L(n)}$ converge vers zéro en probabilité est $(i)$. Cette condition est également nécessaire pour que $d(f_n,\, f)$ converge vers zero en probabilité d'après le lemme2.2.

2)Présentons ensuite la nécessité de $(ii)$ :
Comme dans la démonstration du théorème1.3 du premier chapitre, avec des notations similaires, on en vient à devoir trouver une minoration uniforme de

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{K(\ell)}\Big\{N_\ell(A_{\ell,j})=0\Big\}\Big) = 1 - E\Big(\prod_{j=1}^{K(\ell)}\Big[1-\Big(1-p_{\ell,j}\Big)^{\nu_j(\ell)-1}\Big]\Big)$$

pour tout $\ell$ entier non nul tel que

$$\frac{1}{\log(\ell+1)}\times \max_{1\leq j\leq K\ell)} \nu_j(\ell) \leq \alpha < +\infty$$

alors que dans le premier chapitre on disposait d'une condition plus maniable du type

$$K(\ell) > \frac{\ell}{\alpha\,\log\ell}.$$

Prenant $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\frac{2B\varepsilon}{Am} < 1$, on obtient :

$$1-\Big(1-p_{\ell,j}\Big)^{\nu_j(\ell)-1} \leq 1 - \exp\Big(-\frac{2B\varepsilon}{Am}\Big(\nu_j(\ell)-1\Big)\Big).$$

Pour tout $1 \leq j \leq K(\ell)$

$$\nu_j(\ell) - 1 \leq \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \leq \alpha \log(\ell + 1).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{K(\ell)} \left[1 - \left(1 - p_{\ell,j}\right)^{\nu_j(\ell)-1}\right] &\leq \left[1 - \exp\left(-\frac{2\,B\varepsilon\alpha}{Am} \log(\ell+1)\right)\right]^{K(\ell)} \\
&= \left(1 - \left(\ell + 1\right)^{-\frac{2\,B\varepsilon\alpha}{Am}}\right)^{K(\ell)} \\
&\leq \exp\left(-K(\ell)\left(\ell+1\right)^{-\frac{2\,B\varepsilon\alpha}{Am}}\right).
\end{aligned}$$

Cependant, on a évidemment :

$$K(\ell) \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \geq \ell + 1.$$

Donc

$$\alpha\, K(\ell) \log(\ell + 1) \geq \ell + 1.$$

Si bien que

$$\prod_{j=1}^{K(\ell)} \left[1 - \left(1 - p_{\ell,j}\right)^{\nu_j(\ell)-1}\right] \leq \exp\left[-\frac{\left(\ell+1\right)^{1-\frac{2B\varepsilon\alpha}{Am}}}{\alpha \log(\ell+1)}\right].$$

Prenant $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\frac{2B\varepsilon\alpha}{Am} < \frac{1}{2}$, on obtient

$$\prod_{j=1}^{K(\ell)} \left[1 - \left(1 - p_{\ell,j}\right)^{\nu_j(\ell)-1}\right] \leq \exp\left[-\frac{\left(\ell+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\alpha \log(\ell+1)}\right] \leq e^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

D'où, finalement, pour tout $\ell$ entier tel que

$$\frac{1}{\log(\ell+1)} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \leq \alpha.$$

On obtient

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{K(\ell)} \left\{N_\ell(A_{\ell,j}) = 0\right\}\right) > 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

∎

## 2.4 Loi limite

### 2.4.1 Position du Problème

Dans ce paragraphe nous abordons la question de la recherche de la loi limite de $d(f_n, f)$. Nous déterminons d'abord la loi limite de

$$(2.8) \qquad Z_{L^{(n)}} = \max_{1 \leq j \leq K(L^{(n)})} \left( M_{L^{(n)},j} - U_{L^{(n)},j} \right)$$

et nous en déduirons celle de $d(f_n, f)$.

On se propose de définir deux suites de variables aléatoires positives $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ de façon que $\frac{Z_{L^{(n)}} - \beta(n)}{\alpha(n)}$ converge vers une loi non dégénérée sur $\mathbb{R}_+$.

Nous établissons une propriété pour laquelle $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ dépendent du nombre $L^{(n)}$ de points observés. Pour $\alpha(n)$, qui est le paramètre d'échelle, cela suffira. Par contre pour $\beta(n)$, qui est le paramètre de position, le découpage du plan en secteurs angulaires choisi aura son importance. $\beta(n)$ dépendra de $L^{(n)}$ et du vecteur aléatoire

$$\tilde{X}^{(L^{(n)})} = \left( X^{(L^{(n)})}_{R_j(\ell)} ; 1 \leq j \leq K(L^{(n)}) \right).$$

Nous remplaçons donc dans ce cas $\alpha(n)$ par $\alpha_{L^{(n)}}$ et $\beta(n)$ par $\beta_{\tilde{X}(L^{(n)})}$.

D'après le lemme1.7(chap. 1, §1.4.1) l'étude en loi de

$$\frac{Z_{L^{(n)}} - \beta_{\tilde{X}(L^{(n)})}}{\alpha_{L^{(n)}}}$$

se ramène à celle de

$$\frac{Z_\ell - \beta_{\tilde{X}(\ell)}}{\alpha_\ell}.$$

Dans ce qui suit, $z$ étant un nombre positif fixé, nous posons

$$z_{\tilde{X}(\ell)} = \alpha_\ell z + \beta_{\tilde{X}(\ell)}$$

où $\alpha_\ell$ est déterministe et où $\beta_{\tilde{X}(\ell)}$ dépend de $\tilde{X}^{(\ell)}$. En fait, cette notation est lourde à traîner dans les calculs, on voudra bien nous pardonner l'abus consistant à écrire

$$z_\ell = \alpha_\ell z + \beta_\ell.$$

On définit, pour $j = 1, \cdots, K(\ell)$,

$$D_{\ell,j}(z_\ell) = \Big\{(x, y) \in D_{\ell,j} \mid y > M_{\ell,j} - z_\ell\Big\}$$

et on notera $\overset{\circ}{D}_{\ell,j}(z_\ell)$ l'interieur de $D_{\ell,j}(z_\ell)$. Pour tout $1 \leq j \leq K(\ell)$, il y a $\nu_j(\ell) - 1$ points ordonnés entre $\Big(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)}, Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)}\Big)$ et $\Big(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)}, Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)}\Big)$, à savoir :

$$\Big(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}, Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\Big), \cdots, \Big(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}, Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\Big).$$

La loi de probabilité conjointe de ces points, conditionnée par

$$\Big(X^{(\ell)}_{R_1(\ell)} = x_{R_1(\ell)}, \cdots, X^{(\ell)}_{R_{K(\ell)-1}(\ell)} = x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\Big)$$

est étudiée en appendice 2, elle est celle d'une statistique d'ordre d'un $(\nu_j(\ell) - 1)$–échantillon d'une loi de probabilité absolument continue et qui admet pour densité la fonction $h_j$ définie par (2.5).

D'autre part, les vecteurs aléatoires

$$\bigg(\Big(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}, Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\Big), \cdots, \Big(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}, Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\Big)\bigg)_{1 \leq j \leq K(\ell)}$$

sont indépendants conditionnellement à

$$\Big(X^{(\ell)}_{R_1(\ell)} = x_{R_1(\ell)} \cdots, X^{(\ell)}_{R_{K(\ell)-1}(\ell)} = x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\Big).$$

Et, conditionnellement à $\tilde{X}^{(\ell)}$, les variables aléatoires

$$N_\ell\Big(\overset{\circ}{D}_{\ell,j}(z_\ell)\Big) \,;\, j = 1, \cdots, K(\ell),$$

sont indépendantes et de lois binomiales $B(\nu_j(\ell) - 1 \,,\, q_{\ell,j}(z_\ell))$, $1 \leq j \leq K(\ell)$ où

$$q_{\ell,j}(z_\ell) = \int_{D_{\ell,j}(z_\ell)} h_j(x, y)\, dxdy \;,\; j = 1, \cdots, K(\ell). \tag{2.9}$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
F_\ell(z_\ell) = P\Big(Z_\ell < z_\ell\Big) &= P\Big(\bigcap_{j=1}^{K(\ell)}\Big\{N_\ell(\mathring{D}_{\ell,j}\,(z_\ell)) > 0\Big\}\Big) \\
&= E\Big(P\Big(\bigcap_{j=1}^{K(\ell)}\Big\{N_\ell(\mathring{D}_{\ell,j}\,(z_\ell)) > 0\Big\}/\tilde{X}^{(\ell)}\Big)\Big) \\
&= E\Big(\prod_{j=1}^{K(\ell)}\Big[1 - \Big(1 - q_{\ell,j}(z_\ell)\Big)^{\nu_j(\ell)-1}\Big]\Big) \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

où $q_{\ell,r}(z_\ell)$ est une variable aléatoire $\sigma(\tilde{X}^{(\ell)})-$mesurable. D'après le théorème de convergence dominée, pour que $F_\ell(z_\ell)$ converge, il suffit que

$$
\prod_{j=1}^{K(\ell)}\Big[1 - \Big(1 - q_{\ell,j}(z_\ell)\Big)^{\nu_j(\ell)-1}\Big] \qquad (2.11)
$$

converge presque sûrement.

### 2.4.2 Étude de la loi limite

**Lemme 2.3**
*Si*

$$
(i) \quad \lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1\le j\le K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty \quad \text{et} \quad (\text{ii}) \quad \lim_{\ell\to+\infty} \frac{\max_{1\le j\le K(\ell)} \nu_j(\ell)}{\min_{1\le j\le K(\ell)} \nu_j(\ell)} \in \mathbb{R}.
$$

*Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C = C(\varepsilon)$ positive et, il existe un nombre $D > 0$ et entier non nul $\ell_0$ indépendants de $\varepsilon$ tels que :*

$$
\forall\, \ell \ge \ell_0 \qquad P\Big\{\frac{\tau_\ell^*}{\tau_{*_\ell}} > D\,(1+\varepsilon)\Big\} = \bigcirc\Big(K(\ell)\exp\Big(-C \min_{1\le j\le K(\ell)} \nu_j(\ell)\Big)\Big)
$$

*où*

$$
\tau_\ell^* = \max\{\tau_{\ell,j} \,:\, 1 \le j \le K(\ell)\}\,, \quad \tau_{*_\ell} = \min\{\tau_{\ell,j} \,:\, 1 \le j \le K(\ell)\} \ \text{et}
$$

$$
\tau_{\ell,j} = G_1\Big(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)}\Big) - G_1\Big(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)}\Big)\,,\ 1 \le j \le K(\ell).
$$

**Démonstration :**
Comme, d'après le lemme1.1(chap.1, §1.3.1 la variable aléatoire $\tau_{\ell,j}$ suit une loi bêta de paramètres $\Big(\nu_j(\ell),\ \ell-\nu_j(\ell)+1\Big)$. Donc, d'après le lemme1.2(chap.1, §1.3.1), quelque soit $0<\varepsilon<1$, on a :

$$P\left\{\tau_{\ell,j}<\frac{\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)}{\ell(1+\varepsilon)}\right\}=\bigcirc\left(\exp\left(-C_1\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\right)\right)$$

et

$$P\left\{\tau_{\ell,j}>\frac{\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)}{\ell(1-\varepsilon)}\right\}=\bigcirc\left(\exp\left(-C_2\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\right)\right)$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes positives qui dépendent de $\varepsilon$, donc

$$P\left(\left\{\tau_{\ell,j}<\frac{\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)}{\ell(1+\varepsilon)}\right\}\bigcup\left\{\tau_{\ell,j}>\frac{\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)}{\ell(1-\varepsilon)}\right\}\right)$$
$$=\bigcirc\left(\exp\left(-C\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\right)\right)$$

où $C$ est une constante positive qui dépend de $\varepsilon$. L'hypothèse $(ii)$ entraîne l'existence d'un nombre positif $D$ et d'un entier naturel non nul $\ell_0$ tels que :

$$\forall\,\ell\ge\ell_0\qquad\frac{\max_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)}{\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)}\le D.$$

On pose :

$$a=\frac{1}{1+\varepsilon},\quad b=\frac{1}{1-\varepsilon}\quad\text{et}\quad\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}=1+\varepsilon'\quad\text{où}\quad\varepsilon'=\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

On en déduit :

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{K(\ell)}\left[\left\{\tau_{\ell,j}<\frac{a}{\ell}\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\right\}\bigcup\left\{\tau_{\ell,j}>\frac{b}{\ell}\max_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\right\}\right]\right)$$
$$=\bigcirc\left(K(\ell)\exp\left(-C\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\right)\right).$$

Ainsi pour tout $\ell\ge\ell_0$

$$\bigcap_{j=1}^{K(\ell)}\left[\left\{\tau_{\ell,j}\ge\frac{a}{\ell}\min_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\right\}\bigcap\left\{\tau_{\ell,j}\le\frac{b}{\ell}\max_{1\le j\le K(\ell)}\nu_j(\ell)\right\}\right]$$

$$\subset \left\{ \tau_{*_\ell} \geq \frac{a}{\ell} \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \right\} \bigcap \left\{ \tau_\ell^* \leq \frac{b}{\ell} \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \right\}$$
$$\subset \left\{ \frac{\tau_\ell^*}{\tau_{*_\ell}} \leq \frac{b}{a} \frac{\max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)}{\min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)} \right\}$$
$$\subset \left\{ \frac{\tau_\ell^*}{\tau_{*_\ell}} \leq \frac{b}{a} D \right\}.$$

D'où

$$\forall \ell \geq \ell_0 \qquad P\left\{ \frac{\tau_{*_\ell}}{\tau_\ell^*} > D(1+\varepsilon') \right\} = \bigcirc\left( K(\ell) \exp\left( -C \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \right) \right).$$

■

**Corollaire 2.1**
*Si*

$$(i) \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty \quad \text{et} \quad \text{(ii)} \lim_{\ell \to +\infty} \frac{\max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)}{\min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell)} \in \mathbb{R}.$$

*Alors, il existe un nombre $D > 0$ et un entier naturel non nul $\ell_0$ tels que*

*(1) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_1 = C_1(\varepsilon) > 0$ tel que :*

$$\forall \ell \geq \ell_0 \quad P\left\{ K(\ell)\, \tau_\ell^* > D(1+\varepsilon) \right\} = \bigcirc\left( K(\ell) \exp\left( -C_1 \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \right) \right).$$

*(2) Pour tout $C_2 > D \frac{\mu(S)}{Am}$, il existe $C_3 > 0$ tel que :*

$$\forall \ell \geq \ell_0 \quad P\{K(\ell)\, V_\ell > C_2\} = \bigcirc\left( K(\ell) \exp\left( -C_3 \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \right) \right).$$

*(3) Pour tout $C_4 > D \frac{BM}{Am}$, il existe $C_5 > 0$ tel que :*

$$\forall \ell \geq \ell_0 \quad P\left\{ \frac{V_\ell}{W_\ell} > C_4 \right\} = \bigcirc\left( K(\ell) \exp\left( -C_5 \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \right) \right).$$

*(4) Les suites $K(\ell)\, V_\ell$ et $\frac{V_\ell}{W_\ell}$ sont presque sûrement bornées.*

**Démonstration :**

(1) provient directement du lemme2.3, et de l'inégalité $K(\ell)\,\tau_{*_\ell} \leq 1$.

(2) provient de (1) et l'inégalité

$$\frac{Am}{\mu(S)} V_\ell \leq \tau_\ell^*$$

obtenue en utilisant le théorème des accroissements finis et les inégalités (2.2).

(3) provient directement du lemme2.3 et de l'inégalité

$$\frac{Am}{BM} \frac{V_\ell}{W_\ell} \leq \frac{\tau_\ell^*}{\tau_{*_\ell}}$$

obtenue en utilisant à nouveau le théorème des accroissemnts finis et les inégalités (2.2).

(4) provient du lemme2.1, de (2), de (3) et d'une application du lemme de Borel-Cantelli.

■

Dans le lemme suivant, nous considérons une réalisation $\tilde{x}_\ell$ du vecteur aléatoire $\tilde{X}^{(\ell)}$ : $\tilde{x}_\ell = \{x_{R_j(\ell)}\,;\, 1 \leq j \leq K(\ell)\}$.
Soit $h$ une fonction positive continue sur $[0,\,1]$. On posera : $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
a &= \inf_{0\leq x\leq 1} h(x)\,, \\
d &= \sup_{0\leq x\leq 1} h(x)\,, \\
I_{\ell,j} &= [x_{R_{j-1}(\ell)}\,,\; x_{R_j(\ell)}[\,,\; 1 \leq j \leq K(\ell)\,, \\
\lambda(I_{\ell,j}) &= x_{R_j(\ell)} - x_{R_{j-1}(\ell)}\,,\; 1 \leq j \leq K(\ell)\,, \\
E_{\ell,j,\varepsilon} &= \{x \in I_{\ell,j}\;:\; a \leq h(x) < a+\varepsilon\}\,,\; 1 \leq j \leq K(\ell)\,, \\
E_\varepsilon &= \{x\;:\; 0 \leq x \leq 1\,;\; a \leq h(x) \leq a+\varepsilon\}.
\end{aligned}$$

**Lemme 2.4**
*Soit $h$ une fonction positive continue sur $[0,\,1]$. On définit la suite $\beta = (\beta_\ell)$ de nombres positifs dépendants de $\tilde{x}_\ell$, par l'équation intégrale :*

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} \frac{1}{\lambda(I_{\ell,j})} \int_{I_{\ell,j}} e^{-\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell h(x)}\, dx = 1. \qquad (2.12)$$

*Si*

$$(i) \quad \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{\ell+1} \times \max_{1 \le j \le K(\ell)} \nu_j(\ell) = 0,$$

$$(ii) \quad \lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1 \le j \le K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty,$$

$$(iii) \quad \lim_{\ell \to +\infty} \frac{\max_{1 \le j \le K(\ell)} \nu_j(\ell)}{\min_{1 \le j \le K(\ell)} \nu_j(\ell)} \in \mathbb{R}.$$

*Alors,*

$$\forall z > 0 \qquad \lim_{\ell \to +\infty} \sum_{j=1}^{K(\ell)} \frac{1}{\lambda(I_{\ell,j})} \int_{I_{\ell,j}} e^{-\left(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right) h(x)}\, dx = e^{-az}.$$

**Démonstration :**
Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, l'intégrale (2.12) décroît continûment de $K(\ell)$ à 0 lorsque $\beta_\ell$ croît de 0 à $+\infty$. Ainsi l'équation (2.12) a une solution unique pour $K(\ell) > 1$. La suite $\beta = (\beta_\ell)$ vérifie les inégalités

$$\frac{\log K(\ell)}{d} \le \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell \le \frac{\log K(\ell)}{a}. \tag{2.13}$$

Posons : pour $j = 1, \cdots, K(\ell)$ et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} g_{\ell,j}(x) &= \frac{1}{\lambda(I_{\ell,j})} e^{-\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell h(x)} \quad , \ x \in I_{\ell,j}, \\ I_1(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{K(\ell)} \int_{E_{\ell,j,\varepsilon}} g_{\ell,j}(x)\, dx\,, \\ I_2(\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{K(\ell)} \int_{I_{\ell,j} - E_{\ell,j,2\varepsilon}} g_{\ell,j}(x)\, dx. \end{aligned}$$

On a

$$I_1(\varepsilon) \ge \frac{\lambda(E_\varepsilon)}{V_\ell} e^{-(a+\varepsilon)\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_2(\varepsilon) \le \frac{1 - \lambda(\mathrm{E}_{2\varepsilon})}{\mathrm{W}_\ell} \mathrm{e}^{-(\mathrm{a}+\varepsilon)\frac{\ell}{\mathrm{K}(\ell)}\beta_\ell}.$$

Sous les hypothèses $(ii)$ et $(iii)$, d'après le corollaire2.1.(4), on obtient :

$$\frac{I_2(\varepsilon)}{I_1(\varepsilon)} = \bigcirc\left(e^{-\varepsilon\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell}\right).$$

Comme $\sum_{j=1}^{K(\ell)} \nu_j(\ell) = \ell + 1$ et $\nu_j(\ell) \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{K(\ell)} \leq \frac{1}{\ell+1} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell).$$

L'hypothèse $(i)$ entraîne $K(\ell) \longrightarrow +\infty$ quand $\ell \longrightarrow +\infty$. Ainsi, en utilisant les inégalités (2.13), on obtient : $\lim_{\ell \to +\infty} \frac{I_2(\varepsilon)}{I_1(\varepsilon)} = 0$. Comme d'après l'équation intégrale (2.12), on a l'inégalité $I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) < 1$. On obtient alors :

$$\lim_{\ell \to +\infty} I_2(\varepsilon) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\ell \to +\infty} \mathrm{I}_1(\varepsilon) = 1.$$

Posons ensuite :

$$J_\ell(z) = \sum_{j=1}^{K(\ell)} \frac{1}{\lambda(I_{\ell,j})} \int_{I_{\ell,j}} e^{-\left(z + \frac{\ell}{K(\ell)}\beta_\ell\right)h(x)} \, dx.$$

On a alors :

$$J_\ell(z) = \sum_{j=1}^{K(\ell)} \int_{E_{\ell,j,\varepsilon}} e^{-zh(x)} \, g_{\ell,j}(x) \, dx \; + \; \mathrm{o}(1)$$

et

$$I_1(\varepsilon) \, e^{-(a+\varepsilon)z} + \mathrm{o}(1) \leq J_\ell(z) \leq I_1(\varepsilon) \, e^{-az} + \mathrm{o}(1).$$

Donc

$$\forall \, \varepsilon > 0 \qquad e^{-(a+\varepsilon)z} \leq \liminf_{\ell \to +\infty} J_\ell(z) \leq \limsup_{\ell \to +\infty} J_\ell(z) \leq e^{-az}$$

et

$$\forall \, z > 0 \qquad \lim_{\ell \to +\infty} J_\ell(z) = e^{-az}.$$

■

Dans la suite on utilisera les notations ci-dessus avec

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} \, , \; \forall x \in [0, \, 1[.$$

Revenons au problème de la loi limite. L'étude de la loi limite est analogue en tout point à celle faite au premier chapitre, il nous semble donc inutile de reproduire mot pour mot les preuves. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats :

### 2.4.3 Étude du cas d'un processus ponctuel de Poisson homogène

**Théorème 2.3**
*On suppose que $N$ est un processus ponctuel de Poisson homogène sur $\mathbb{R}^2$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de mesure moyenne $\mu$ et de support défini par :*

$$S = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq y < f(x)\;;\; 0 \leq x < 1\Big\}$$

*où $f$ est une fonction positive lipschitzienne d'ordre $\gamma$. On suppose que $\mu = C\lambda$, où $C$ est une constante positive connue et $\lambda$ la réstriction à $S$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\beta = (\beta_{\tilde{x}_\ell})$ une suite de nombres réels positifs dépendants de $\tilde{x}_\ell$, définie par l'équation intégrale :*

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} \frac{1}{\lambda(I_{\ell,j})} \int_{I_{\ell,j}} e^{-\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_{\tilde{x}_\ell}\frac{1}{f(x)}}\,dx = 1. \tag{2.14}$$

*Si*

$$(i)\quad \lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{\ell+1} \times \max_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = 0, \qquad (ii)\quad \lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{\Big(\log \ell\Big)^2} \times \min_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty,$$

$$(iii)\quad \lim_{\ell\to+\infty} \frac{\ell}{\Big(K(\ell)\Big)^{\gamma+1}} = 0, \qquad (iv)\quad \lim_{\ell\to+\infty} \frac{\max_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell)}{\min_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell)} = 1.$$

*Alors, la variable aléatoire*

$$\frac{L^{(n)}}{K(L^{(n)})}\Big(Z_{L^{(n)}} - \beta_{\tilde{X}(L^{(n)})}\Big)$$

*admet une loi limite qui est la loi de Gumbel ayant pour fonction de répartition* $\exp(-e^{-az})$.

**Démontration :**
Elle s'effectue de la même manière que celle du théorème1.4 (chap.1, §1.4.3). ■

**Théorème 2.4**
*Sous les hypothèses du théorème2.3, la variable aléatoire*

$$\frac{L^{(n)}}{K(L^{(n)})}\Big(d(f_n, f) - \beta_{\tilde{X}(L^{(n)})}\Big)$$

*admet une loi limite qui est la loi de Gumbel ayant pour fonction de répartition* $\exp(-e^{-az})$.

**Démontration :**
Elle est analogue à celle du théorème1.5 (chap.1, §1.4.3). ■

### 2.4.4 Étude du cas d'un processus ponctuel de Poisson non homogène

**Théorème 2.5**
*On suppose que $N$ est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^2$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de mesure moyenne $\mu$ et de support défini par :*

$$S = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y < f(x)\,;\, 0 \leq x < 1\Big\}$$

*où $f$ est une fonction positive lipschitzienne d'ordre $\gamma$. On suppose que $\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, $\lambda$. Et on suppose également que la densité $\psi = \frac{d\mu}{d\lambda}$ de $\mu$ est lipschitzienne d'ordre $\alpha$ et vérifie les inégalités (2.2). On définit une suite de réels positifs $\beta = (\beta_{\tilde{x}_\ell})$ dépendants de $\tilde{x}_\ell$, définie par l'équation intégrale :*

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} \frac{1}{\lambda(I_{\ell,j})} \int_{I_{\ell,j}} e^{-\frac{\ell}{K(\ell)}\beta_{\tilde{x}_\ell}\frac{1}{f(x)}}\, dx = 1. \tag{2.15}$$

*Si*

$$(i) \ \lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{\ell+1} \times \max_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = 0, \quad (ii) \ \lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{\Big(\log \ell\Big)^{1+\frac{1}{\alpha}}} \times \min_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty,$$

$$(iii) \ \lim_{\ell\to+\infty} \frac{\ell}{\Big(K(\ell)\Big)^{\gamma+1}} = 0, \qquad (iv) \ \lim_{\ell\to+\infty} \frac{\max_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell)}{\min_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell)} = 1.$$

*Alors, la variable aléatoire*

$$\frac{L^{(n)}}{K(L^{(n)})}\Big(Z_{L^{(n)}} - \beta_{\tilde{X}(L^{(n)})}\Big)$$

*admet une loi limite qui est la loi de Gumbel ayant pour fonction de répartition* $\exp(-e^{-az})$.

**Démontration :**
Elle s'effectue de la même manière que celle du théorème1.6 (chap.1, §1.4.4). ∎

**Théorème 2.6**
*Sous les hypothèses du théorème2.5, la variable aléatoire*

$$\frac{L^{(n)}}{K(L^{(n)})}\Big(d(f_n, f) - \beta_{\tilde{X}(L^{(n)})}\Big)$$

*admet une loi limite qui est la loi de Gumbel ayant pour fonction de répartition* $\exp(-e^{-az})$.

**Démonstration :**
Elle est analogue à celle du théorème1.7 (chap.1, §1.4.4). ■

### 2.4.5 Cas où le contour du support est constant

Dans les deux cas étudiés ci-dessus, lorsque le contour du support est constant :

$$\forall x \in [0, 1[ \quad f(x) = \frac{1}{a}, \ a > 0.$$

D'après l'équation intégrale (2.14) théorème2.3 et l'équation intégrale (2.15) théorème2.5, on obtient :

$$\beta_{\tilde{x}_\ell} = \frac{K(\ell) \log K(\ell)}{a \, \ell}.$$

Dans ce cas particilier $\beta_{\tilde{x}_\ell}$ est déterministe et ne dépend pas de la partition en blocs et $d(f_n, f) = Z_{L^{(n)}}$.

Donc, d'une part sous les hypothèses du théorème2.3 et d'autre part sous les hypothèses du théorème2.5, la variable aléatoire

$$\frac{L^{(n)}}{K(L^{(n)})} \left( d(f_n, f) - \frac{K(L^{(n)}) \log K(L^{(n)})}{a \, L^{(n)}} \right)$$

admet une loi limite qui est la loi de Gumbel ayant pour fonction de répartition $\exp(-e^{-az})$.

## 2.5 Conclusion

Les estimateurs étudiés dans ces deux premiers chapitres sont des fonctions continues par morceaux. Nous nous proposons au chapitre suivant de les "lisser" et d'en déduire deux autres estimateurs continus. Ce lissage sera éffectué au moyen de splines cubiques.

# Bibliographie


[1] **ABBAR H.**(1990) : "Un estimateur spline du contour d'une répartition ponctuelle aléatoire." Statistique et analyse des données, Vol. 15, N 3, p 1–19.

[2] **ABOU-JAOUDÉ S.**(1977) : "La convergence $\mathbf{L_1}$ et $\mathbf{L_\infty}$ de certains estimateurs d' une densité de probabilité." Thèse de l' université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[3] **BARNDORFF-NIELSEN O.**(1964) : "On the limit distribution of the maximum of a random number of independent random variables."
Acta Math. Acad. Hungar 15, 399-403.

[4] **BERMAN S.M**(1962) : "Limiting distribution of the maximum term sequences of dependent random variables." Ann. Math. Statist. 23, 894-908.

[5] **BILLINGSLEY P.**(1968) :"Convergence of probability measures".Wiley.

[6] **BOSQ D.** (1971) : "Contribution à la théorie de l' estimation fonctionnelle." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[7] **BOSQ D. et LECOUTRE J. P.**(1987) " Théorie de l'estimation fonctionnelle." Economica.

[8] **CHEVALIER J.**(1976) : "Estimation du support et du contour d' une loi de probabilité." Ann. Inst. Henri Poincaré , B, Vol 12, 4, 339-364 .

[9] **CRETOIS E.**(1994) : "Utilisation de la méthode des pas aléatoires en estimation dans les processus ponctuels." Thèse, Université de Rouen.

[10] **DIA G.**(1987) : " Blocs équlibrés d'une série aléatoire de variables statistiques." Pub. ISUP XXXII, fasc.1-2, 19-44.

[11] **GALAMBOS J.**(1978) : "The asymptotic theory of extreme order statistics." Wiley, New-York.

[12] **GEFFROY J.**(1964) : " Sur un problème d' estimation géométrique ." Pub. ISUP XXII, fasc.1, 31-70 .

[13] **GEFFROY J.**(1981) : " Sur la convergence uniforme en probabilité vers 0 d'une famille de blocs équilibrés" Pub. ISUP XXII, fasc.1, 31-70.

[14] **GENSBITEL M. H.**(1979) : "Contribution à l' étude statistique des répartitions ponctuelles ." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[15] **GNEDENKO B.V**(1943) : "Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire." Ann. Math. 44, 423-453.

[16] **GESSMAN M.**(1970) : "A constent non parametric multivariate density estimator based on statistically equivalent blocks." Ann. Math. Statist. 41, 1344-1346.

[17] **JACOB P.**(1981) : " Estimation du contour discontinu d'un processus ponctuel sur le plan ." Pub. ISUP 29, 3-4, p1-25.

[18] **JACOB P. and ABBAR H.**(1989) : "Estimating the edge of a Cox process area ." Cahiers du Centre de Recherche Operationnelle, Vol.31, 3-4.

[19] **JACOB P. et MISSIÉ P.**(1995) : "Estimation à pas aléatoire du contour d'un processus ponctuel de Poisson." Pub. IRMA Lille, Vol.37, 12. Á paraître dans les publications de L'ISUP.

[20] **KALLENBERG O.**(1983) : "Random measures". Academic press.

[21] **KARR A.F.**(1986) : "Point process and their statistical inference." Dekker.

[22] **MOORE M.**(1984) : "On the estimation of a convex set." The Annals of Statistics, Vol. 12, 3, 1090-1099.

[23] **LECOUTRE J.P.**(1975) : " Convergence et optimisation de certains estimateurs de la densité ." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[24] **PYKE R.**(1965) : "Spacings". J. Roy. Statist. Soc. Série B, 27, No 3, p.395-449.

[25] **RENYI A. and SULANKE R.**(1964 ) : " Uber bie konvexe hülle vonze fälling gewählten punklen II." Z. wahr 3, p.138-148.

[26] **RIPLEY B. D. and RASON J. P.**(1977) : "Finding the edge of a Poisson forest." Journal of a Applied Probability, 14, 483-491.

[27] **SCHWARTZ L.**(1980) :"Analyse : Topologie générale et analyse fonctionnelle". Herman-2ème édition.

[28] **TUKEY J.**(1941) : "Non Parametric II. Statistically equivalent blocks and tolerance regions the continous case ." Ann.Math. Statist., 18, 529-539 .

[29] **VAN RYZIN J.**(1973) : "A histogram method of density estimation ." Comm. Statist., 2, p. 493-502 .

# Chapitre 3

# Estimation spline à pas aléatoire du contour d'un processus ponctuel de Poisson

## 3.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre, l'estimation du contour d'un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^2$, par la méthode spline cubique à pas aléatoire. cette méthode a été utilisée pour estimer une densité de probabilité par Swingedouw[23] et pour estimer une densité moyenne d'un processus ponctuel de Poisson par Cretois[8]. Nous nous inspirons des techniques utilisées par Berlinet[4] pour estimer une densité de probabilité, puis celles utilisées par Abbar[1] pour estimer le contour d'un processus ponctuel de Cox par la méthode spline cubique à pas fixe.
Nous étudions le cas de l'estimation spline cubique périodique, puis celui de l'estimation spline cubique non périodique. Dans chacun des deux cas pour étudier la convergence de l'estimateur spline cubique à pas aléatoire du contour du support, nous établissons d'abord une majoration de l'écart entre le contour du support et la fonction spline cubique qui interpole le contour du support au noeuds, ensuite nous établissons une majoration de l'écart entre l'estimateur spline cubique à pas aléatoire du contour du support et la fonction spline cubique qui interpole le contour du support au noeuds, nous ramenant à l'estimateur à pas aléatoire du contour du support.

## 3.2 Estimateur spline cubique périodique à pas aléatoire

On considère un processus ponctuel de Poisson, $N$, sur $\mathbb{R}^2$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de mesure moyenne $\mu = E(N)$ et de support

$$S = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times [0\,,\,2\pi[\,:\; 0 \leq \rho < \phi(\theta)\,;\, \phi(0) = \phi(2\pi)\right\} \tag{3.1}$$

où $\phi$ est une fonction continue positive.
On désigne par $\psi$ la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ de la mesure moyenne $\mu$ de $N$, telle que :

$$A \leq \psi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \leq B \qquad \forall\,(\rho, \theta) \in S \tag{3.2}$$

où $A$ et $B$ sont des constantes positives.
On considère $n$ processus ponctuels $N_i$, $i = 1, \cdots, n$, indépendants définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de même loi que $N$. On note $N^{(n)}$ leur superposition. On désigne par $L^{(n)}$ l'effectif aléatoire de $N^{(n)}$ sur $S$.

Nous abordons dans ce paragraphe, l'étude de l'estimateur spline cubique périodique à pas aléatoire. Les notations utilisées dans la suite sont celles du chapitre1(§1.2).

Nous avons défini au chapitre1(§1.2.4), l'estimateur à pas aléatoire associé à un $n-$ échantillon de $N$ et à la partition de $[0\,,\,2\pi[$ en blocs équilibrés,
$\left\{\Delta_{L^{(n)},r}\;:\; r = 1, \cdots, K(L^{(n)})\right\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\forall\, r \in \left\{1, \cdots, K(L^{(n)})\right\}, \quad \forall\, \theta \in \Delta_{L^{(n)},r} \quad \phi_n(\theta) = U_{L^{(n)},r}.$$

### 3.2.1 Fonctions splines cubiques périodiques

Posons :

$$\begin{aligned}
&x_0 = x_{K(L^{(n)})} - 2\pi\,,\\
&x_r = \theta^{(L^{(n)})}_{R(r-1)} + \frac{V_{L^{(n)},r}}{2}\,(\text{milieu de } \Delta_{L^{(n)},r})\,,\; r = 1, \cdots, K(L^{(n)})\,,\\
&x_{K(L^{(n)})+1} = x_1 + 2\pi\,,\\
&h_r = x_{r+1} - x_r = \frac{V_{L^{(n)},r+1} + V_{L^{(n)},r}}{2},\; r = 1, \cdots, K(L^{(n)}) - 1\,.
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$
\begin{aligned}
h_0 &= h_{K(L^{(n)})} = x_1 + 2\pi - x_{K(L^{(n)})},\\
V_{L^{(n)}} &= \max_{1\leq r\leq K(L^{(n)})} h_r,\\
W_{L^{(n)}} &= \min_{1\leq r\leq K(L^{(n)})} h_r.
\end{aligned}
$$

Une fonction spline cubique périodique relativement à $x_r$ ; $r = 0,\cdots,K(L^{(n)})+1$, est une fonction $\varphi_1$ de classe $C^2$ sur $[0\,,2\pi]$ dont la restriction à $[x_r\,,x_{r+1}]$, pour $r = 0,\cdots,K(L^{(n)})+1$, est un polynôme de degré trois au plus.
Posons :

$$M_r = \varphi_1''(x_r), \quad \text{pour} \quad r = 0,1,\cdots,K(L^{(n)})+1$$

Une telle fonction spline $\varphi_1$ est entièrement déterminée par la connaissance de

$$\varphi_1(x_r) = \tau_r, \quad \text{pour} \quad r = 0,1,\cdots,K(L^{(n)})+1$$

et par les conditions d'interpolation

$$\tau_0 = \tau_{K(L^{(n)})}, \quad M_0 = M_{K(L^{(n)})} \tag{3.3}$$

et

$$\tau_1 = \tau_{K(L^{(n)})+1}, \quad M_1 = M_{K(L^{(n)})+1}. \tag{3.4}$$

D'après [3] nous pouvons écrire : $\forall r \in \left\{1,\cdots,K(L^{(n)})\right\}, \quad \forall\,\theta \in [x_r\,,x_{r+1}]$

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(\theta) &= M_r\,\frac{(x_{r+1}-\theta)^3}{6h_r} + M_{r+1}\,\frac{(\theta-x_r)^3}{6h_r} + M_r\,\frac{h_r(\theta-x_{r+1})}{6}\\
&\quad -M_{r+1}\,\frac{h_r(\theta-x_r)}{6} + \frac{\tau_{r+1}(\theta-x_r)+\tau_r(\theta-x_{r+1})}{h_r}.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Les $(M_r)$, $r = 1,\cdots,K(L^{(n)})$, sont déterminés de la façon suivante :
Posons : pour tout $r = 1,\cdots,K(L^{(n)})$

$$
\begin{aligned}
\lambda_r &= \frac{h_r}{h_r+h_{r-1}},\\
\mu_r &= 1-\lambda_r = \frac{h_{r-1}}{h_r+h_{r-1}},\\
d_r &= \frac{6}{h_r+h_{r-1}}\left(\frac{\tau_{r+1}-\tau_r}{h_r} - \frac{\tau_r-\tau_{r-1}}{h_{r-1}}\right).
\end{aligned}
$$

Nous avons alors

(3.6)
$$\Lambda\,\Gamma = D$$

où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{K(L^{(n)})-1} & 2 & \lambda_{K(L^{(n)})-1} \\ \lambda_{K(L^{(n)})} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{K(L^{(n)}} & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{K(L^{(n)})-1} \\ M_{K(L^{(n)})} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{K(L^{(n)})-1} \\ d_{K(L^{(n)})} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

(3.7)
$$\begin{cases} 2M_1 + \lambda_1 M_2 + \mu_1 M_{K(L^{(n)}} = d_1 \\ \\ \lambda_r M_{r-1} + 2M_r + \lambda_r M_{r+1} = d_r, \qquad r = 2, \cdots, K(L^{(n)}) - 1 \\ \\ \lambda_{K(L^{(n)})} M_1 + \mu_{K(L^{(n)})} M_{K(L^{(n)})-1} + 2M_{K(L^{(n)})} = d_{K(L^{(n)})}. \end{cases}$$

Avec les conditions d'interpolation (3.3) et (3.4), le dernier système ci-dessus se réduit au système

(3.8)
$$\mu_r M_{r-1} + 2M_r + \lambda_r M_{r+1} = d_r, \quad r = 1, \cdots, K(L^{(n)}).$$

Le lemme qui suit est une propriété des matrices à diagonale dominante dû à [3] (pages 20–21) :

**Lemme 3.1**
*Si l'on munit $\mathbb{R}^{K(L^{(n)})}$ de la norme du suprimum, la matrice $\Lambda$ est inversible et la norme de $\Lambda^{-1}$ est majorée par 1. On a donc :*

$$\sup_{1 \le r \le K(L^{(n)})} |M_r| \le \sup_{1 \le r \le K(L^{(n)})} |d_r|.$$

### 3.2.2 Construction de l'estimateur spline cubique périodique

Nous définissons l'estimateur spline cubique périodique à pas aléatoire $\hat{\phi}_n$ de $\phi$, comme la fonction spline cubique périodique qui interpole l'estimateur à pas aléatoire $\phi_n$, en les $\{x_r\ ;\ r = 0, \cdots, K(L^{(n)}) + 1\}$, nous avons donc :

$$\hat{\phi}_n(x_r) = U_r, \text{ pour } \quad r = 0, \cdots, K(L^{(n)}) + 1$$

avec

$$U_0 = U_{K(L^{(n)})}, \quad U_1 = U_{K(L^{(n)})+1}$$

et

$$M_r = \left(\hat{\phi}_n\right)''(x_r), \quad \text{pour } r = 0, \cdots, K(L^{(n)}) + 1$$

avec

$$M_0 = M_{K(L^{(n)})}, \quad M_1 = M_{K(L^{(n)})+1}.$$

D'après (3.5), nous avons : $\forall \in \theta \in [x_r\ ,\ x_{r+1}]$

$$(3.9) \qquad \hat{\phi}_n(\theta) = M_r \frac{(x_{r+1} - \theta)^3}{6h_r} + M_{r+1} \frac{(\theta - x_r)^3}{6h_r} + M_r \frac{h_r(\theta - x_{r+1})}{6} - M_{r+1} \frac{h_r(\theta - x_r)}{6} + \frac{U_{r+1}(\theta - x_r) - U_r(\theta - x_{r+1})}{h_r}$$

où les $(M_r)$ sont les solutions du système défini par (3.6) avec

$$(3.10) \qquad d_r = \frac{6}{h_r + h_{r-1}} \left( \frac{U_{r+1} - U_r}{h_r} - \frac{U_r - U_{r-1}}{h_{r-1}} \right),\ r = 1, \cdots, K(L^{(n)}).$$

### 3.2.3 Convergence de l'estimateur spline cubique périodique

Soit $\varphi_1$ la fonction spline cubique périodique qui interpole la fonction $\phi$ en les $\{x_r\ ;\ r = 0, \cdots, K(L^{(n)}) + 1\}$, nous avons donc :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_r) &= \phi(x_r), \quad \text{pour} \quad r = 0, \cdots, K(L^{(n)}) + 1, \\ M'_r &= \varphi''_1(x_r), \quad \text{pour} \quad r = 0, \cdots, K(L^{(n)}) + 1, \end{aligned}$$

avec les données

$$\varphi_1(x_0) = \phi(x_{K(L^{(n)})}), \qquad M'_0 = M'_{K(L^{(n)})}$$

et

$$\varphi(x_1) = \phi(x_{K(L^{(n)})+1}), \qquad M'_1 = M'_{K(L^{(n)})+1}.$$

D'après (3.5), nous avons : $\forall \in \theta \in [x_r\, , \, x_{r+1}]$

$$(3.11) \qquad \varphi_1(\theta) = M'_r \frac{(x_{r+1}-\theta)^3}{6h_r} + M'_{r+1}\frac{(\theta - x_r)^3}{6h_r} + M'_r \frac{h_r(\theta - x_{r+1})}{6} - M'_{r+1}\frac{h_r(\theta - x_r)}{6} + \frac{\phi(x_{r+1})(\theta - x_r) - \phi(x_r)(\theta - x_{r+1})}{h_r}$$

où les $(M'_r)$ sont les solutions du système

$$\mu_r\, M'_{r-1} + 2M'_r + \lambda_r M'_{r+1} = d'_r, \quad r = 1, \cdots, K(L^{(n)})$$

avec

$$(3.12) \qquad d'_r = \frac{6}{h_r + h_{r-1}}\left(\frac{\phi(x_{r+1}) - \phi(x_r)}{h_r} - \frac{\phi(x_r) - \phi(x_{r-1})}{h_{r-1}}\right), \ 1 \leq r \leq K(L^{(n)}).$$

Avant d'étudier la convergence, nous établissons deux propositions donnant une majoration de l'écart entre $\varphi_1$ et $\phi$ d'une part et une majoration de l'écart entre l'estimateur $\hat{\phi}_n$ et $\varphi_1$ d'autre part :

**Proposition 3.1**

$$\sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|\, \varphi_1(\theta) - \phi(\theta) \,\right| \leq 2\left(4 \times \frac{V^2_{L^{(n)}}}{W^2_{L^{(n)}}} + 1\right) \times \sup_{|\theta-\theta'|\leq V_{L^{(n)}}} \left|\, \phi(\theta) - \phi(\theta') \,\right|$$

**Démonstration :**

Pour tout $\theta \in [x_r\, , \, x_{r+1}]$, nous avons :

$$\begin{aligned} |\varphi_1(\theta) - \phi(\theta)| &= \Big|\, M'_r \frac{(x_{r+1}-\theta)^3}{6h_r} + M'_{r+1}\frac{(\theta - x_r)^3}{6h_r} \\ &\quad + M'_r \frac{h_r(\theta - x_{r+1})}{6} - M'_{r+1}\frac{h_r(\theta - x_r)}{6} \\ &\quad + \frac{\phi(x_{r+1})(\theta - x_r) - \phi(x_r)(\theta - x_{r+1})}{h_r} - \phi(\theta) \,\Big| \\ &\leq \frac{h_r^2}{3}|M'_r| + \frac{h_r^2}{3}|M'_{r+1}| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \left| \frac{\phi(x_{r+1})(\theta - x_r) - \phi(x_r)(\theta - x_{r+1}) - h_r\phi(\theta)}{h_r} \right| \\
\leq\ & \frac{2}{3}\, h_r^2 \times \max_{1 \leq r \leq K(L^{(n)})} |M_r'| \\
& + \left| \frac{(\theta - x_r)\Big(\phi(x_{r+1}) - \phi(\theta)\Big) + (\theta - x_{r+1})\Big(\phi(\theta) - \phi(x_r)\Big)}{h_r} \right| \\
\leq\ & \frac{2}{3}\, h_r^2 \times \max_{1 \leq r \leq K(L^{(n)})} |M_r'| + |\phi(x_{r+1}) - \phi(\theta)| + |\phi(\theta) - \phi(x_r)| \\
\leq\ & \frac{2}{3}\, h_r^2 \times \max_{1 \leq r \leq K(L^{(n)})} |M_r'| + 2 \times \sup_{|\theta - \theta'| \leq V_{L^{(n)}}} |\phi(\theta) - \phi(\theta')| \,.
\end{aligned}
$$

D'après le lemme3.1, nous obtenons :

$$
\max_{1 \leq r \leq K(L^{(n)})} |M_r'| \leq \max_{1 \leq r \leq K(L^{(n)})} |d_r'| \,.
$$

D'après (3.12), nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
& \max_{1 \leq r \leq K(L^{(n)})} |d_r'| \\
& \quad = 6 \times \max_{1 \leq r \leq K(L^{(n)})} \left| \frac{\Big(\phi(x_{r+1}) - \phi(x_r)\Big) h_{r-1} - \Big(\phi(x_r) - \phi(x_{r-1})\Big) h_r}{h_r\, h_{r-1}(h_r + h_{r-1})} \right| \\
& \quad \leq \frac{12}{W_{L^{(n)}}^2} \times \sup_{|\theta - \theta'| \leq V_{L^{(n)}}} |\phi(\theta) - \phi(\theta')|.
\end{aligned}
$$

Nous avons donc

$$
\frac{2}{3}\, h_r^2 \times \max_{1 \leq r \leq K(L^{(n)})} |M_r'| \leq 8 \times \frac{V_{L^{(n)}}^2}{W_{L^{(n)}}^2} \times \sup_{|\theta - \theta'| \leq V_{L^{(n)}}} |\phi(\theta) - \phi(\theta')| \,.
$$

D'où la proposition. ■

**Proposition 3.2**

$$
\sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \hat{\phi}_n(\theta) - \varphi_1(\theta) \right| \leq 2\left( 8 \times \frac{V_{L^{(n)}}^2}{W_{L^{(n)}}^2} + 1 \right) \times \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |\phi_n(\theta) - \phi(\theta)| \,.
$$

**Démonstration :**
Pour tout $\theta \in [x_r\,,\, x_{r+1}]$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|\hat{\phi}_n(\theta) - \varphi_1(\theta)\right| &= \Bigg| \left(\frac{(x_{r+1}-\theta)^3}{6h_r} + \frac{h_r(\theta - x_{r+1})}{6}\right)(M_r - M'_r) \\
&\quad + \left(\frac{(\theta - x_r)^3}{6h_r} - \frac{h_r(\theta - x_{r+1})}{6}\right)(M_{r+1} - M'_{r+1}) \\
&\quad + \frac{\theta - x_r}{h_r}\Big(U_{r+1} - \phi(x_{r+1})\Big) - \frac{\theta - x_{r+1}}{h_r}\Big(U_r - \phi(x_r)\Big) \Bigg| \\
&\leq \frac{h_r^2}{3}\,|M_r - M'_r| + \frac{h_r^2}{3}\,\left|M_{r+1} - M'_{r+1}\right| + |U_{r+1} - \phi(x_{r+1})| \\
&\qquad + |U_r - \phi(x_r)| \\
&\leq \frac{2}{3}\,h_r^2 \times \max_{1\leq r\leq K(L^{(n)})} |M_r - M'_r| + 2 \times \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\phi_n(\theta) - \phi(\theta)|\,.
\end{aligned}$$

D' après le lemme3.1, nous obtenons :

$$\max_{1\leq r\leq K(L^{(n)})} |M_r - M'_r| \leq \max_{1\leq r\leq K(L^{(n)})} |d_r - d'_r|\,.$$

D'après (3.10) et (3.12), nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq r\leq K(L^{(n)})} |d_r - d'_r| \\
&= 6 \times \max_{1\leq r\leq K(L^{(n)})} \Bigg| \frac{h_{r-1}\Big((U_{r+1} - \phi(x_{r+1})) - (U_r - \phi(x_r))\Big)}{h_r\,h_{r-1}(h_r + h_{r-1})} \\
&\qquad - \frac{h_r\Big((U_r - \phi(x_r)) - (U_{r-1} - \phi(x_{r-1}))\Big)}{h_r\,h_{r-1}(h_r + h_{r-1})} \Bigg| \\
&\leq \frac{24}{W^2_{L^{(n)}}} \times \sup_{0\leq\theta<2\pi} |\phi_n(\theta) - \phi(\theta)|\,.
\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\frac{2}{3}\,h_r^2 \times \max_{1\leq r\leq K(L^{(n)})} |M_r - M'_r| \leq 16 \times \frac{V^2_{L^{(n)}}}{W^2_{L^{(n)}}} \times \sup_{0\leq\theta<2\pi} |\phi_n(\theta) - \phi(\theta)|\,.$$

D'où la proposition. ∎

**Théorème 3.1**
*Pour que $\hat{\phi}_n$ converge uniformément presque complètement vers $\phi$ lorsque $n$ tend vers l'infini, il suffit que :*

$$(i)\ K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad (ii)\ K(\ell) = o\Big(\frac{\ell}{\log \ell}\Big).$$

**Démonstration :**
En utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons :

$$\sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \Big|\hat{\phi}_n(\theta) - \phi(\theta)\Big| \leq \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \Big|\hat{\phi}_n(\theta) - \varphi_1(\theta)\Big| + \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\varphi_1(\theta) - \phi(\theta)|\,.$$

D'après les propositions 3.1 et 3.2, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \Big|\hat{\phi}_n(\theta) - \phi(\theta)\Big| \;&\leq\; 2\left(4 \times \frac{V^2_{L(n)}}{W^2_{L(n)}} + 1\right) \times \sup_{|\theta-\theta'|\leq V_{L(n)}} |\phi(\theta) - \phi(\theta')| \\ &\quad + 2\left(8 \times \frac{V^2_{L(n)}}{W^2_{L(n)}} + 1\right) \times \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\phi_n(\theta) - \phi(\theta)|\,.\end{aligned}$$

Sous les hypothèses $(i)$ et $(ii)$, d'après le théorème1.1(chap.1,§1.3.1) :

$$\sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\phi_n(\theta) - \phi(\theta)| \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Sous l'hypothèse $(ii)$, d'après la deuxième partie de la démonstration du théorème1.1(chap.1,§1.3.1) :

$$V_{L(n)} \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Comme le module de continuité de $\phi$ est monotone, nous avons alors :

$$\sup_{|\theta-\theta'|\leq V_{L(n)}} |\phi(\theta) - \phi(\theta')| \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Considérons les événements : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} E_n &= \left\{ \frac{V_{L(n)}}{W_{L(n)}} \leq C \right\}, \quad \text{où C est une constante positive qui sera précisée,} \\ F_n &= \left\{ \sup_{|\theta-\theta'|\leq V_{L(n)}} |\phi(\theta) - \phi(\theta')| \leq \frac{\varepsilon}{4(4C^2+1)} \right\}, \\ G_n &= \left\{ \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\phi_n(\theta) - \phi(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{4(8C^2+1)} \right\}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$E_n \cap F_n \cap G_n \subset \left\{ \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \hat{\phi}_n(\theta) - \phi(\theta) \right| \leq \varepsilon \right\}$$

puis

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad P\left\{ \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \hat{\phi}_n(\theta) - \phi(\theta) \right| > \varepsilon \right\} \leq P(\bar{E}_n) + P(\bar{F}_n) + P(\bar{G}_n).$$

Comme

$$\sup_{|\theta-\theta'| \leq V_{L^{(n)}}} |\phi(\theta) - \phi(\theta')| \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\phi_n(\theta) - \phi(\theta)| \longrightarrow 0$$

presque complètement quand $n \longrightarrow +\infty$. Pour conclure, il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\bar{E}_n) < +\infty.$$

D'après le corollaire1.3.(1) (chap.1, §1.4.1) :
pour tout $C_1 > 2\pi \frac{B}{A} \frac{M^2}{m^2}$, il existe $C_2 > 0$ tel que :

$$P\left\{ \frac{V_\ell}{W_\ell} > \frac{C_1}{2\pi} \right\} = \bigcirc\left( K(\ell)\, e^{-C_2 \nu(\ell)} \right).$$

En prenant $C = \frac{C_1}{2\pi}$, sous les hypothèses $(i)$ et $(ii)$, d'après le lemme1.3 (chap.1, §1.3.1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\bar{E}_n) \leq C_3 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} K(\ell)\, e^{-C_2 \nu(\ell)} P\left( L^{(n)} = \ell \right) < +\infty$$

où $C_3$ est une constante positive. ∎

**Théorème 3.2**
*Pour que $\hat{\phi}_n$ converge uniformément en probabilité vers $\phi$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, il faut que :*

$$K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \inf_{\ell > 1} \frac{K(\ell) \log \ell}{\ell} = 0.$$

**Démonstration :**

Supposons que l'estimateur $\hat{\phi}_n$ converge uniformément en probabilité vers $\phi$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Par construction des estimateurs $\phi_n$ et $\hat{\phi}_n$, nous avons :

$$\forall\, r \in \left\{1, \cdots, K(L^{(n)})\right\} \quad \forall\, \theta \in \Delta_{L^{(n)},r} \quad \phi_n(\theta) = \hat{\phi}_n(x_r).$$

Il en résulte que l'estimateur $\phi_n$ converge uniformément en probabilité vers $\phi$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Donc d'après le théorème1.3(chap.1, §1.3.3) :

$$K(\ell) \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \inf_{\ell > 1} \frac{K(\ell) \log \ell}{\ell} = 0.$$

■

## 3.3 Estimateur spline cubique non périodique à pas aléatoire

Dans ce paragraphe, nous considérons un processus ponctuel de Poisson $N$ sur $\mathbb{R}^2$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de mesure moyenne $\mu = E(N)$ et de support

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y < f(x) \,;\, 0 \leq x < 1\right\} \tag{3.13}$$

où $f$ est une fonction continue positive vérifiant

$$0 < m = \inf_{0 \leq x < 1} f(x) \leq M = \sup_{0 \leq x < 1} f(x) < +\infty.$$

On suppose que $\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, $\lambda$, de densité $\psi = \frac{d\mu}{d\lambda}$ telle que :

$$0 < A \leq \psi(x, y) \leq B < +\infty\,, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On considère $n$ processus ponctuels $N_1, \cdots, N_n$ indépendants définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de même loi que $N$. On note $N^{(n)}$ leur superposition. On désigne par $L^{(n)}$ l'effectif aléatoire de $N^{(n)}$ sur $S$.

Nous abordons dans ce paragraphe, l'étude de l'estimateur spline cubique non périodique à pas aléatoire. Les notations utilisées dans la suite sont celles du chapitre2 (§2.2.1).

Nous avons défini au chapitre2 (§2.2.3), l'estimateur à pas aléatoire $f_n$ de $f$, à partir d'un $n$-échantillon de $N$ et de la suite de partitions en blocs $\left\{\Delta_{L^{(n)},j} \,;\, j = 1, \cdots, K(L^{(n)})\right\}$, de l'intervalle $[0,\ 1[$, par :

$$\forall\, j \in \left\{1, \cdots, K(L^{(n)})\right\}, \quad \forall\, x \in \Delta_{L^{(n)},j} \quad f_n(x) = U_{L^{(n)},j}. \tag{3.14}$$

### 3.3.1 Fonctions splines cubiques non périodiques

Posons, pour alléger la rédaction :

$$\begin{aligned} O_0 &= 0, \\ O_j &= X^{(L^{(n)})}_{R_j(L^{(n)})}, \quad \text{pour} \quad j = 1, \cdots, K(L^{(n)}) - 1, \\ O_{K(L^{(n)})} &= 1. \end{aligned}$$

Une fonction spline cubique non périodique sur $[0, 1[$ associée à la partition $\{\Delta_{L^{(n)},j} \; ; \; j = 1, \cdots, K(L^{(n)})\}$, est une fonction $\varphi_2$ de classe $C^2$ sur $[0, 1[$ dont la restriction à $[O_j \, , \, O_{j+1}]$ , $j = 0, \cdots, K(L^{(n)})$, est un polynôme de degré trois au plus.

Une telle fonction spline est entièrement déterminée, par la connaissance de

$$z_j = \varphi_2(O_j) \quad \text{pour} \quad j = 0, \cdots, K(L^{(n)})$$

et par les données

$$z'_0 = \varphi'_2(0) \quad \text{et} \quad z'_{K(L^{(n)})} = \varphi'_2(1).$$

D'après [3], nous pouvons écrire : $\forall\, j \in \left\{1, \cdots, K(L^{(n)})\right\}$ et $\forall\, x \in [O_{j-1} \, , \, O_j]$

$$(3.15) \qquad \begin{aligned} \varphi_2(x) = {} & M_{j-1} \frac{(O_j - x)^3}{6h_j} - M_j \frac{(x - O_{j-1})^3}{6h_j} + M_{j-1} \frac{h_j(x - O_j)}{6} \\ & - M_j \frac{h_j(x - O_{j-1})}{6} + \frac{z_j(x - O_{j-1}) - z_{j-1}(x - O_j)}{h_j} \end{aligned}$$

où

$$h_j = O_j - O_{j-1} = V_{L^{(n)},j} \; ; \; j = 1, \cdots, K(L^{(n)})$$

et où les $M_j$ , $j = 0, \cdots, K(L^{(n)})$, sont déterminés de la façon suivante :

Posons : pour $j = 1, \cdots, K(L^{(n)}) - 1$

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}, \quad \mu_j = 1 - \lambda_j \, , \\ d_j &= \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left( \frac{z_{j+1} - z_j}{h_{j+1}} - \frac{z_j - z_{j-1}}{h_j} \right) \end{aligned}$$

pour $j = 0$ et $j = K(L^{(n)})$

$$\lambda_0 = \mu_{K(L^{(n)})} = 1$$

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{6}{h_1}\left(\frac{z_1 - z_0}{h_1} - z'_0\right)\\
d_{K(L^{(n)})} &= \frac{6}{h_{K(L^{(n)})}}\left(z'_{K(L^{(n)})} - \frac{z_{K(L^{(n)})} - z_{K(L^{(n)})-1}}{h_{K(L^{(n)})}}\right).
\end{aligned}
$$

Nous avons alors :

(3.16)
$$\Lambda' \, \Gamma' = D'$$

où

$$
\Lambda' = \begin{pmatrix}
2 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \lambda_{K(L^{(n)}-2} & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{K(L^{(n)})-1} & 2 & \lambda_{K(L^{(n)})-1}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{K(L^{(n)}} & 2
\end{pmatrix},
$$

$$
\Gamma' = \begin{pmatrix}
M_0\\ M_1\\ M_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ M_{K(L^{(n)})-2}\\ M_{K(L^{(n)})-1}\\ M_{K(L^{(n)})}
\end{pmatrix}
\quad \text{et} \quad
D' = \begin{pmatrix}
d_0\\ d_1\\ d_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ d_{K(L^{(n)})-2}\\ d_{K(L^{(n)})-1}\\ d_{K(L^{(n)})}
\end{pmatrix}
$$

qui s'écrit :

$$
\begin{cases}
2M_0 + \lambda_0 M_1 & = d_0\\[2ex]
\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} & = d_j, \quad j = 1, \cdots, K(L^{(n)}) - 1\\[2ex]
\mu_{K(L^{(n)})} M_{K(L^{(n)})-1} + 2M_{K(L^{(n)})} = d_{K(L^{(n)})}.
\end{cases}
$$

### 3.3.2 Construction de l'estimateur spline cubique non périodique

On définit le spline cubique non périodique à pas aléatoire de $f_n$, comme la fonction spline cubique non périodique $S_n$ qui interpole l'estimateur à pas aléatoire $f_n$ en les $\left\{O_j \; ; \; j = 0, \cdots, K(L^{(n)})\right\}$, nous avons donc :

$$S_n(O_j) = U_j, \text{ pour} j = 0, \cdots, K(L^{(n)})$$

avec les données

$$S_n'(0) = f_n(0) \quad \text{et} \quad S_n'(1) = f_n(1).$$

Nous définissons l'estimateur spline cubique non périodique à pas aléatoire $\hat{f}_n$ de $f$ par :

$$\forall\, x \in [0, 1[ \quad \hat{f}_n(x) = S_n(x).$$

D'après (3.15), on a : $\forall\, j \in \left\{1, \cdots, K(L^{(n)})\right\}$ et $\forall\, x \in \Delta_{L^{(n)},j}$

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(x) &= M_{j-1}\,\frac{(O_j - x)^3}{6h_j} - M_j\,\frac{(x - O_{j-1})^3}{6h_j} + M_{j-1}\,\frac{h_j(x - O_j)}{6} \\ &\quad - M_j\,\frac{h_j(x - O_{j-1})}{6} + \frac{U_j(x - O_{j-1}) - U_{j-1}(x - O_j)}{h_j} \end{aligned} \tag{3.17}$$

où les $(M_j)$ sont solutions du système défini par (3.16) avec

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{U_1 - U_0}{h_1} - f_n(0)\right) \\[2ex] d_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{U_{j+1} - U_j}{h_{j+1}} - \frac{U_j - U_{j-1}}{h_j}\right), \; j = 1, \cdots, K(L^{(n)}) - 1 \\[2ex] d_{K(L^{(n)})} = \frac{6}{h_{K(L^{(n)})}}\left(f_n(1) - \frac{U_{K(L^{(n)})} - U_{K(L^{(n)})-1}}{h_{K(L^{(n)})}}\right). \end{array} \right. \tag{3.18}$$

### 3.3.3 Convergence de l'estimateur spline cubique non périodique

Comme dans l'étude de la convergence de l'estimateur $\hat{\phi}_n$, pour étudier la convergence de l'estimateur $\hat{f}_n$, nous établissons d'abord deux propositions. Pour cela posons :

$$d(\hat{f}_n, f) = \sup_{0 \le x < 1} |\hat{f}_n(x) - f(x)|.$$

Soit $\varphi_2$ la fonction spline cubique qui interpole la fonction $f$ aux noeuds $\left\{O_j\ ;\ j=0,\cdots,K(L^{(n)})\right\}$. Nous avons donc :

$$\varphi_2(O_j)=f(O_j)\quad \text{pour}\quad j=0,\cdots,K(L^{(n)})$$

et les données

$$\varphi_2'(0)=f(0)\quad \text{et}\quad \varphi_2'(1)=f(1).$$

D'après (3.15), on a : $\forall\, j\in\left\{1,\cdots,K(L^{(n)})\right\}$ et $\forall\, x\in\Delta_{L^{(n)},j}$,

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= M'_{j-1}\frac{(O_j-x)^3}{6h_j}-M'_j\frac{(x-O_{j-1})^3}{6h_j}+M'_{j-1}\frac{h_j(x-O_j)}{6}\\ &\quad -M'_j\frac{h_j(x-O_{j-1})}{6}+\frac{f(O_j)(x-O_{j-1})-f(O_{j-1})(x-O_j)}{h_j}\end{aligned}$$

où les $(M'_j)$ sont solutions du système

$$\begin{cases} 2M'_0+\lambda_0M'_1 = d'_0 \\ \mu_jM'_{j-1}+2M_j+\lambda_jM'_{j+1} = d'_j, \quad j=1,\cdots,K(L^{(n)})-1 \\ \mu_{K(L^{(n)})}M'_{K(L^{(n)})-1}+2M'_{K(L^{(n)})}=d'_{K(L^{(n)})}\end{cases}$$

avec

$$(3.19)\quad \begin{cases} d'_0=\frac{6}{h_1}\left(\frac{f(O_1)-f(0)}{h_1}-f(0)\right) \\ d'_j=\frac{6}{h_j+h_{j+1}}\left(\frac{f(O_{j+1})-f(O_j)}{h_{j+1}}-\frac{f(O_j)-f(O_{j-1})}{h_j}\right),\ j=1,\cdots,K(L^{(n)})-1 \\ d'_{K(L^{(n)})}=\frac{6}{h_{K(L^{(n)})}}\left(f(1)-\frac{f(1)-f(O_{K(L^{(n)})-1})}{h_{K(L^{(n)})}}\right).\end{cases}$$

Pour alléger la rédaction posons :

$$\omega(f,\delta)=\sup_{|x-y|\le\delta}|f(x)-f(y)|\ ,\ \delta>0.$$

**Proposition 3.3**

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq x<1} |\varphi_2(x) - f(x)| \\
&\quad \leq 2 \times \omega(f, V_{L^{(n)}}) \\
&\quad\quad +4 \times \frac{V^2_{L^{(n)}}}{W^2_{L^{(n)}}}\Big(2 \times \omega(f, V_{L^{(n)}}) + W_{L^{(n)}} \times \max\big(f(0)\,,\, f(1)\big)\Big).
\end{aligned}$$

**Démonstration :**

Nous avons : Pour tout $x \in \Delta_{L^{(n)},j}$

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(x) - f(x)| &= \Big| M'_{j-1}\frac{(O_j - x)^3}{6h_j} + M'_j\frac{(x - O_{j-1})^3}{6h_j} \\
&\quad + M'_{j-1}\frac{h_j(x - O_{j-1})}{6} - M'_j\frac{h_j(x - O_j)}{6} \\
&\quad + \frac{f(O_j)(x - O_{j-1}) - f(O_{j-1})(x - O_j)}{h_j} - f(x)\Big| \\
&\leq \frac{h_j^2}{3}|M'_{j-1}| + \frac{h_j^2}{3}|M'_j| \\
&\quad + \Big|\frac{f(O_j)(x - O_{j-1}) - f(O_{j-1})(x - O_j) - f(x)(O_j - O_{j-1})}{h_j}\Big| \\
&\leq \frac{2}{3}h_j^2 \times \max_{1\leq j\leq K(L^{(n)})}|M'_j| \\
&\quad + \Big|\frac{(x - O_{j-1})\big(f(O_j) - f(x)\big) + (x - O_j)\big(f(x) - f(O_{j-1})\big)}{h_j}\Big| \\
&\leq \frac{2}{3}h_j^2 \times \max_{0\leq j\leq K(L^{(n)})}|M'_j| + 2 \times \omega(f, V_{L^{(n)}}).
\end{aligned}$$

D'après le lemme3.1, que nous utilisons ici lorsque $\mathbb{R}^{K(L^{(n)})+1}$ est muni de la norme du suprimum, nous obtenons :

$$\max_{0\leq j\leq K(L^{(n)})}\left|M'_j\right| < \max_{0\leq j\leq K(L^{(n)})}\left|d'_j\right|.$$

D'autre part, d'après (3.19) :

$$\begin{aligned}\max_{1\leq j\leq K(L^{(n)})-1}\left|d'_j\right| &= 6\times\max_{1\leq j\leq K(L^{(n)})-1}\left|\frac{\Big(f(O_{j+1})-f(O_j)\Big)h_j-\Big(f(O_j)-f(O_{j-1})\Big)h_{j+1}}{h_jh_{j+1}(h_j+h_{j+1})}\right|\\ &\leq \frac{12}{W^2_{L^{(n)}}}\times\omega(f,V_{L^{(n)}})\end{aligned}$$

puis

$$|d'_0|\leq\frac{6}{W^2_{L^{(n)}}}\times\omega(f,V_{L^{(n)}})+\frac{6\,f(0)}{W_{L^{(n)}}}$$

et puis

$$\left|d'_{K(L^{(n)})}\right|\leq\frac{6}{W^2_{L^{(n)}}}\times\omega(f,V_{L^{(n)}})+\frac{6\,f(1)}{W_{L^{(n)}}}.$$

Nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned}&\frac{2}{3}\,h_j^2\times\max_{0\leq j\leq K(L^{(n)})}\left|M'_j\right|\\ &\leq 4\times\frac{V^2_{L^{(n)}}}{W^2_{L^{(n)}}}\Big(2\times\omega(f,V_{L^{(n)}})+W_{L^{(n)}}\times\max\Big(f(0)\,,\,f(1)\Big)\Big).\end{aligned}$$

D'où la proposition. ∎

**Proposition 3.4**

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq x<1}\left|\hat{f}_n(x)-\varphi_2(x)\right| &\leq 2\times\sup_{0\leq x<1}|f_n(x)-f(x)|\\ &\quad+4\times\frac{V^2_{L^{(n)}}}{W^2_{L^{(n)}}}\Big(4+W_{L^{(n)}}\Big)\times\sup_{0\leq x<1}|f_n(x)-f(x)|\,.\end{aligned}$$

**Démonstration :**
On a : Pour tout $x\in\Delta_{L^{(n)},j}$

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{f}_n(x) - \varphi_2(x)\right| &= \Bigg| \left(\frac{(O_j - x)^3}{6h_j} + \frac{h_j(x - O_j)}{6}\right)(M_{j-1} - M'_{j-1}) \\
&\quad + \left(\frac{(x - O_{j-1})^3}{6h_j} - \frac{h_j(x - O_{j-1})}{6}\right)(M_j - M'_j) \\
&\quad + \frac{x - O_{j-1}}{h_j}\Big(U_j - f(O_j)\Big) - \frac{x - O_j}{h_j}\Big(U_{j-1} - f(O_{j-1})\Big) \Bigg| \\
&\leq \frac{h_j^2}{3}\left|M_{j-1} - M'_{j-1}\right| + \frac{h_j^2}{3}\left|M_j - M'_j\right| + \left|U_j - f(O_j)\right| \\
&\qquad + \left|U_{j-1} - f(O_{j-1})\right| \\
&\leq \frac{2}{3} h_j^2 \times \max_{0 \leq j \leq K(L^{(n)})} \left|M_j - M'_j\right| + 2 \times \sup_{0 \leq x < 1} |f_n(x) - f(x)| .
\end{aligned}
$$

D'après le lemme3.1, lorsque $\mathbb{R}^{K(L^{(n)})+1}$ est muni de la norme du suprimum, on obtient :

$$
\max_{0 \leq j \leq K(L^{(n)})} \left|M_j - M'_j\right| \leq \max_{0 \leq j \leq K(L^{(n)})} \left|d_j - d'_j\right| .
$$

D'autre part, d'après (3.18) et (3.19), nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\max_{1 \leq j \leq K(L^{(n)})-1} \left|d_j - d'_j\right| \\
&= 6 \times \max_{1 \leq j \leq K(L^{(n)})-1} \Bigg| \frac{h_j\Big((U_{j+1} - f(O_{j+1})) - (U_j - f(O_j))\Big)}{h_j\, h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} \\
&\qquad - \frac{h_{j+1}\Big((U_j - f(O_j)) - (U_{j-1} - f(O_{j-1}))\Big)}{h_j\, h_{j+1}(h_j + h_{j+1})} \Bigg| \\
&\leq \frac{24}{W_{L^{(n)}}^2} \times \sup_{0 \leq x < 1} |f_n(x) - f(x)|
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
|d_0 - d'_0| &= 6 \times \left| \frac{(U_1 - f(O_1)) - (U_0 - f(O_0))}{h_1^2} - \frac{U_0 - f(O_0)}{h_1} \right| \\
&\leq \frac{12}{W_{L^{(n)}}^2} \times \sup_{0 \leq x < 1} |f_n(x) - f(x)| + \frac{6}{W_{L^{(n)}}} \times \sup_{0 \leq x < 1} |f_n(x) - f(x)|
\end{aligned}
$$

et puis

$$
\begin{aligned}
&\left|d_{K(L^{(n)})} - d'_{K(L^{(n)})}\right| \\
&\quad = 6\times \left| \frac{\Big(U_{K(L^{(n)})-1} - f(O_{K(L^{(n)})-1})\Big) - \Big(U_{K(L^{(n)})} - f(O_{K(L^{(n)})})\Big)}{h^2_{K(L^{(n)})}} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{U_{K(L^{(n)})} - f(O_{K(L^{(n)})})}{h_{K(L^{(n)})}} \right| \\
&\quad \le \frac{12}{W^2_{K(L^{(n)})}} \times \sup_{0\le x<1} |f_n(x) - f(x)| + \frac{6}{W_{L^{(n)}}} \times \sup_{0\le x<1} |f_n(x) - f(x)|\,.
\end{aligned}
$$

On en déduit :

$$
\frac{2}{3}\,h_j^2 \times \max_{0\le j\le K(L^{(n)})} |M_j - M'_j| \le 4 \times \frac{V^2_{L^{(n)}}}{W^2_{L^{(n)}}}\Big(4 + W_{L^{(n)}}\Big) \times \sup_{0\le x<1} \left|\hat{f}_n(x) - f(x)\right|
$$

puis, la proposition. ■

**Théorème 3.3**
*Pour que $\hat{f}_n$ converge uniformément presque complètement vers $f$ sur $[0, 1[$ lorsque $n$ tend vers l'infini, il suffit que*

$$
(i)\ \lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1\le j\le K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty \quad \text{et} \quad (ii)\ \lim_{\ell\to+\infty} \frac{\max_{1\le j\le K(\ell)} \nu_j(\ell)}{\min_{1\le j\le K(\ell)} \nu_j(\ell)} \in \mathbb{R}.
$$

**Démonstration :**
D'après l'inégalité triangulaire, les propositions 3.3 et 3.4, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\le x<1} \left|\hat{f}_n(x) - f(x)\right| &\le \sup_{0\le x<1} \left|\hat{f}_n(x) - \varphi_2(x)\right| + \sup_{0\le x<1} |\varphi_2(x) - f(x)| \\
&\le 2 \times \sup_{0\le x<1} |f_n(x) - f(x)| + 2 \times \omega(f, V_{L^{(n)}}) \\
&\qquad + 4 \times \frac{V^2_{L^{(n)}}}{W^2_{L^{(n)}}}\Big(2 \times \omega(f, V_{L^{(n)}}) + M\, W_{L^{(n)}}\Big) \\
&\qquad + 4 \times \frac{V^2_{L^{(n)}}}{W^2_{L^{(n)}}}\Big(4 + W_{L^{(n)}}\Big) \times \sup_{0\le x<1} |f_n(x) - f(x)|\,.
\end{aligned}
$$

Sous l'hypothèse $(i)$, d'après le théorème2.1(chap.2, §2.3.1) :

$$\sup_{0\leq x<1} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty.$$

D'après la première partie de la démonstration du théorème2.1(chap.2, §2.3.1) :

$$V_{L(n)} \longrightarrow 0 \text{ presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty$$

donc

$$W_{L(n)} \longrightarrow 0 \text{ presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Comme le module de continuité de $f$ est monotone, on a :

$$\omega(f, V_{L(n)}) \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Considérons les événements : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
E_n &= \left\{\frac{V_{L(n)}}{W_{L(n)}} \leq C\right\}, \ C \text{ est une constante positive qui sera précisée,} \\
F_n &= \left\{\omega(f, V_{L(n)}) \leq \frac{\varepsilon}{64C^2}\right\}, \\
G_n &= \left\{W_{L(n)} \leq \frac{\varepsilon}{32MC^2}\right\}, \\
H_n &= \left\{\sup_{0\leq x<1} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{16C^2\left(4 + \frac{\varepsilon}{32MC^2}\right)}\right\}.
\end{aligned}$$

D'après le corollaire2.1.(3) (chap.2, §2.4.2), il existe un nombre $C_0 \geq 1$ et un entier naturel $\ell_0$ tels que :

Pour tout $C_1 > C_0 \frac{BM}{Am}$, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\forall\, \ell \geq \ell_0 \quad P\left\{\frac{V_\ell}{W_\ell} > C_1\right\} = \bigcirc\left(K(\ell) \exp -\left(C_2 \min_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell)\right)\right).$$

En prenant $C = C_1$, d'après le lemme2.1(chap.2, §2.3)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\bar{E}_n) < +\infty.$$

Pour ce choix de $C$, on a $C > 1$.
Nous en déduisons :

$$E_n \cap F_n \cap G_n \cap H_n \subset \left\{ \sup_{0 \leq x < 1} \left| \hat{f}_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon \right\}$$

puis

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad P\left\{ \sup_{0 \leq x < 1} \left| \hat{f}_n(x) - f(x) \right| > \varepsilon \right\} \leq P(\bar{E}_n) + P(\bar{F}_n) + P(\bar{G}_n) + P(\bar{H}_n).$$

Le fait que

$$W_{L(n)} \longrightarrow 0, \quad \omega(f, V_{L(n)}) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sup_{0 \leq x < 1} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

presque complètement quand $n \longrightarrow +\infty$ permet de conclure. ∎

**Théorème 3.4**
*Une condition nécessaire de convergence uniforme sur $[0,\, 1[$ en probabilité de l'estimateur $\hat{f}_n$ vers $f$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ est que :*

$$(i) \quad \inf_{\ell \geq 1} \frac{1}{\ell + 1} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = 0$$

$$(ii) \quad \sup_{\ell \geq 1} \frac{1}{\log(\ell + 1)} \times \max_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty.$$

**Démonstration :**
Elle s'effectue de la même manière que celle du théorème3.2. ∎

## 3.4 Conclusion

Dans les trois premiers chapitres nous avons étudié la convergence uniforme suivant divers modes stochastiques. Lorsque le contour n'est pas continu, contrairement aux études pécédentes, nous ne pouvons espérer obtenir une convergence uniforme stochastique. Dans ce cas, on aborde certaines propriétés de l'estimateur en dehors "du cadre $L_\infty$", vis-à-vis de contours qui possèdent des discontinuités. C'est l'objet du chapitre suivant.

# Bibliographie


[1] **ABBAR H.**(1990) : "Un estimateur spline du contour d'une répartition ponctuelle aléatoire." Statistique et analyse des données, Vol. 15, No 3, p 1–19.

[2] **ABOU-JAOUDÉ S.**(1977) : "La convergence $\mathbf{L_1}$ et $\mathbf{L_\infty}$ de certains estimateurs d' une densité de probabilité." Thèse de l' université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[3] **AHLBERT J.H. , NILSON E.N. and WALSH J.L.**(1977) : " The theory splines and their applications. " Academic Press.

[4] **BERLINET A.**(1981) : "Convergence des estimateurs splines de la densité." Pub. ISUP, XXXVI, fasc.1.2, p.1-16.

[5] **BOSQ D.** (1971) : "Contribution à la théorie de l' estimation fonctionnelle." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[6] **BOSQ D. et LECOUTRE J. P.**(1987) " Théorie de l'estimation fonctionnelle." Economica.

[7] **CHEVALIER J.**(1976) : "Estimation du support et du contour d' une loi de probabilité." Ann. Inst. Henri Poincaré, B, Vol. 12, 4, 339-364.

[8] **CRETOIS E.**(1994) : "Utilisation de la méthode des pas aléatoires en estimation dans les processus ponctuels." Thèse, Université de Rouen.

[9] **GEFFROY J.**(1958-1959) : " Contribution à la théorie des valeurs extrêmes." Pub. ISUP, XIII, 191-220.

[10] **GEFFROY J.**(1964) : " Sur un problème d' estimation géométrique ." Pub. ISUP XXII, fasc.1, 31-70.

[11] **GENSBITEL M. H.**(1979) : "Contribution à l' étude statistique des répartitions ponctuelles ." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[12] **GESSMAN M.**(1970) : "A constent non parametric multivariate density estimator based on statistically equivalent blocks." Ann. Math. Statist. 41, 1344-1346.

[13] **JACOB P.**(1981) : " Estimation du contour discontinu d'un processus ponctuel sur le plan ." Pub. ISUP 29, 3-4, p1-25.

[14] **JACOB P. and ABBAR H.**(1989) : "Estimating the edge of a Cox process area ." Cahiers du Centre de Recherche Operationnelle, Vol.31, 3-4.

[15] **JACOB P. et MISSIÉ P.**(1995) : "Estimation à pas aléatoire du contour d'un processus ponctuel de Poisson." Pub. IRMA Lille, Vol.37, 12. Á paraître dans les publications de L'ISUP.

[16] **KALLENBERG O.**(1983) : "Random measures". Academic press.

[17] **KARR A.F.**(1986) : "Point process and their statistical inference." Dekker.

[18] **MOORE M.**(1984) : "On the estimation of a convex set."
The Annals of Statistics, Vol. 12, 3, 1090-1099.

[19] **LECOUTRE J.P.**(1975) : " Convergence et Optimisation de certains estimateurs de la densité ." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[20] **PYKE R.**(1965) : "Spacings".
J. Roy. Statist. Soc. Série B, 27, No 3, p.395-449.

[21] **RENYI A. and SULANKE R.**(1964 ) : " Uber bie konvexe hülle vonze fälling gewählten punklen I et II." Z. wahr 2p. 75-83 et 3p.138-148 .

[22] **RIPLEY B. D. and RASON J. P.**(1977) : "Finding the edge of a Poisson forest." Journal of a Applied Probability, 14, 483-491.

[23] **SWINGEDOUW J.M.**(1980) : "Estimation d'une densité de probabilité par la méthode des splines à pas aléatoires." Thése, Université de Rouen.

[24] **TUKEY J.**(1941) : "Non parametric II. Statistically equivalent blocks and tolerance regions the continous case ." Ann. Math. Statist., 18, 529-539.

[25] **VAN RYZIN J.**(1973) : "A histogram method of density estimation."
Comm. Statist., 2, p. 493-502 .

# Chapitre 4

# Estimation à pas aléatoire du contour discontinu d'un processus ponctuel de Poisson

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'estimation à pas aléatoire du contour discontinu d'un processus ponctuel de Poisson. En s'inspirant d'un article de Jacob[9], sur l'estimation du contour discontinu d'un processus ponctuel par la méthode de type histogramme à pas fixe, Cretois[6] a estimé la densité moyenne discontinue d'un processus ponctuel de Poisson par la méthode de l'histogramme à pas aléatoire. L'article susmentionné de P. Jacob est à l'origine de ce chapitre, les techniques utilisées sont une adaptation des siennes.

Dans un premier temps nous étudions la convergence en moyenne d'ordre $1 \leq p < +\infty$. Puis ensuite nous étudions l'estimation des sauts et de la hauteur des sauts. Et puis nous étudions la convergence selon la distance de Skorokhod.

## 4.2 Définition, notations et hypothèses

Nous considérons un processus ponctuel de Poisson $N$, sur le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un système d'axes rectangulaires $(Ox\,, Oy)$, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Nous supposons que le support de $N$ est défini par :

$$(4.1) \qquad S = \left\{ (x,y) \in [0\,,\,1] \times \mathbb{R} \;:\; 0 \leq y < \max\Big(f(x)\,,\, f(x^-)\Big) \right\}$$

où $f$ est une fonction continue à droite ayant une limite à gauche en tout point de $[0\,,\,1]$, vérifiant

$$0 < m = \inf_{0 \leq x \leq 1} f(x) \leq M = \sup_{0 \leq x \leq 1} f(x) < +\infty$$

et $f(x^-)$ désigne la limite à gauche de $f$ au point $x$.
Nous supposons également que $N$ possède une mesure moyenne, $\mu = E(N)$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, $\lambda$, et que sa densité $\psi = \frac{d\mu}{d\lambda}$ vérifie :

$$(4.2) \qquad 0 < A \leq \psi(x,y) \leq B < +\infty\,, \qquad \forall\,(x,y) \in S.$$

Soient $N_1, \cdots, N_n$ $n$ copies indépendantes du processus ponctuel de Poisson $N$. Pour toute valeur $\ell \in \mathbb{N}^*$ de la variable aléatoire

$$L^{(n)} = N^{(n)}(S) = \sum_{i=1}^{n} N_i(S).$$

Nous considérons un entier $K(\ell)$ et des entiers $\nu_j(\ell) \geq 1$ pour $j = 1, \cdots, K(\ell)$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{K(\ell)} \nu_j(\ell) = \ell + 1$$

et nous définissons une suite d'entiers par :

$$\begin{aligned} R_0(\ell) &= 0 \\ R_j(\ell) &= R_{j-1}(\ell) + \nu_j(\ell)\,,\; 1 \leq j \leq K(\ell). \end{aligned}$$

Nous construisons comme dans le cas d'un contour continu (chapitre 2, §2.2.2) :

— une suite de partitions de $[0\,,\,1]$ en blocs

$$\left\{ \Delta_{L^{(n)},j}\;;\; j = 1, \cdots, K(L^{(n)}) \right\},\; n \in \mathbb{N}^*$$

— et une suite de partitions de $S$ en domaines aléatoires

$$\left\{ D_{L^{(n)},j}\;;\; j = 1, \cdots, K(L^{(n)}) \right\},\; n \in \mathbb{N}^*$$

Les notations utilisées dans la suite sont celles du chapitre2.

L'estimateur à pas aléatoire $f_n$ de $f$ est défini (voir chapitre 2, §2.2.3) par :

$$\forall\, j \in \left\{ 1, \cdots, K(L^{(n)}) \right\}, \quad \forall\, x \in \Delta_{L^{(n)},j} \qquad f_n(x) = U_{L^{(n)},j}.$$

## 4.3 Étude de la convergence dans $(D,\, L_p)$ : Convergence en moyenne d'ordre $1 \leq p < +\infty$

On dira que $(f_n)$ converge en probabilité vers $f$ dans $(D\,,\,L_p)$ si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} P\Big\{L_p(f_n, f) > \varepsilon\Big\} = 0,$$

de même, on dira que $(f_n)$ converge presque complètement vers $f$ dans $(D\,,\,L_p)$ si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} P\Big\{L_p(f_n, f) > \varepsilon\Big\} < +\infty.$$

Où $L_p$ désigne la distance associée à la norme de la convergence en moyenne d'ordre $1 \leq p < +\infty$ et $D = D([0,1[)$ l'ensemble des fonctions continues à droite admettant une limite à gauche en tout point de $[0,1[$, dont les propriétés essentielles peuvent être trouvées dans Billingsley[2].

Soit $0 < z < m$ fixé . Nous construisons une partition de $[0,1[$ telle que :

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{K_0} = 1$$

et

$$\sup\Big\{|f(x) - f(y)| \;:\; \alpha_{i-1} \leq x < y < \alpha_i\Big\} < \frac{z}{8}\,.$$

Nous posons :

$$\begin{aligned}
J_{L^{(n)}} &= \Big\{1, \cdots, K(L^{(n)})\Big\}, \\
I_{L^{(n)}} &= \Big\{j \in J_{L^{(n)}} \mid \Delta_{L^{(n)},j} \quad \text{contient un point} \quad \alpha_i\Big\} \\
\Omega_{L^{(n)}} &= J_{L^{(n)}} - I_{L^{(n)}}.
\end{aligned}$$

Nous rappelons que : pour $j \in J_{L^{(n)}}$

$$\begin{aligned}
M_{L^{(n)},j} &= \sup\Big\{f(x) \;:\; x \in \Delta_{L^{(n)},j}\Big\}, \\
m_{L^{(n)},j} &= \inf\Big\{f(x) \;:\; x \in \Delta_{L^{(n)},j}\Big\}.
\end{aligned}$$

**Théorème 4.1**
*Si*

$$\lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty.$$

*Alors, $f_n$ converge vers $f$ presque complètement dans $(D\,,\, L_p)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.*

**Démonstration :**
En utilisant les notations ci-dessus, nous obtenons l'inégalité

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx$$
$$\leq \sum_{j \in \Omega_{L(n)}} V_{L(n),j} \max\left[\left(M_{L(n),j} - U_{L(n),j}\right)^p ; \left(M_{L(n),j} - m_{L(n),j}\right)^p\right]$$
$$+ \sum_{j \in I_{L(n)}} V_{L(n),j}\, M^p_{L(n),j}\,.$$

Et en posant

$$B_n = \left\{ \sum_{j \in I_{L(n)}} V_{L(n),j}\, M^p_{L(n),j} < \frac{z^p}{4} \right\},$$

il s'ensuit :

$$\left( \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p > \frac{z^p}{2} \right) \subseteq$$
$$\left( \sum_{j \in \Omega_{L(n)}} V_{L(n),j} \max\left[\left(M_{L(n),j} - U_{L(n),j}\right)^p ; \left(M_{L(n),j} - m_{L(n),j}\right)^p\right] > \frac{z^p}{4} \right) \cup \bar{B}_n \subseteq$$
$$\left( \max_{j \in \Omega_{L(n)}} \left( \max\left[\left(M_{L(n),j} - U_{L(n),j}\right)^p ; \left(M_{L(n),j} - m_{L(n),j}\right)^p\right]\right) \sum_{j \in \Omega_{L(n)}} V_{L(n),j} > \frac{z^p}{4} \right) \cup \bar{B}_n\,.$$

D'autre part, l'oscillation de $f$ sur les blocs $\Delta_{L(n),j}$ , $j \in \Omega_{L(n)}$, est inférieure à $\frac{z}{8}$ et $\sum_{j \in \Omega_{L(n)}} V_{L(n),j} \leq 1$.
Nous en déduisons :

$$\left( \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx > \frac{z^p}{2} \right) \subseteq \left( \bigcup_{j \in \Omega_{L(n)}} \left\{ \left(M_{L(n),j} - U_{L(n),j}\right)^p > \frac{z^p}{4} \right\} \right) \cup \bar{B}_n\,.$$

Puisque, pour tout $j \in \Omega_{L(n)}$

$$A_{L(n),j}(z) = \Delta_{L(n),j} \times \left[M_{L(n),j} - \frac{z}{4}\,;\, M_{L(n),j} - \frac{z}{8}\right]$$

est contenu dans le support $S$ et que

$$\sum_{j \in J_{L(n)}} V_{L(n),j}\, M^p_{L(n),j} \leq K_0\, M^p V_{L(n)}\ ,$$

nous obtenons finalement

$$\left(\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p dx > \frac{z^p}{2}\right)$$
$$\subseteq \left(\bigcup_{j \in \Omega_{L(n)}} \left\{N^{(n)}(A_{L(n),j}(z)) = 0\right\}\right) \bigcup \left(V_{L(n)} \geq \frac{z^p}{4K_0 M^p}\right).$$

La convergence presque complète de $L_p(f_n, f)$ vers 0 résulte de la convergence presque complète de $V_{L(n)}$ vers 0 et de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\bigcup_{j \in \Omega_{L(n)}} \left\{N^{(n)}(A_{L(n),j}(z)) = 0\right\}\right). \tag{4.3}$$

L'étude de la convergence presque complète de $V_{L(n)}$ vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini et de la convergence de la série (4.3) est analogue en tout point à celle présentée dans la première partie et la deuxième partie de la démonstration du théorème2.1 (chap.2, §2.3.1). Il suffit donc de reprendre les calculs. Nous obtenons donc :

$$V_{L(n)} \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left(\bigcup_{j \in \Omega_{L(n)}} \left\{N^{(n)}(A_{L(n),j}(z)) = 0\right\}\right) < +\infty.$$

■

## 4.4 Estimation des sauts et de la hauteur des sauts du contour

Nous traitons le cas d'une discontinuité, la géneralisation à un nombre fini de discontinuités est justiciable d'un traitement similaire à celui que nous proposons ci-dessous, avec des complications d'écriture que nous préférons éviter pour alléger la rédaction. Nous supposerons que $f$ est uniformément continue sur $[0\,,\,s_0[$ et $[s_0\,,\,1]$ et présente un saut de hauteur $c_0$ en $s_0$. Pour tout $j = 1, \cdots, K(L^{(n)}) - 1$, nous posons :

$$\begin{aligned}
H_j &= \left| f_n\Big(X^{(L^{(n)})}_{R_j(L^{(n)})}\Big) - f_n\Big(\big(X^{(L^{(n)})}_{R_j(L^{(n)})}\big)^-\Big)\right|, \\
S_n &= X^{(L^{(n)})}_{R_s(L^{(n)})}, \text{ de telle sorte que} : \forall\, j = 1, \cdots, K(L^{(n)}) - 1 \ : \ H_s \geq H_j, \\
c_n &= H_{s-1} + H_s + H_{s+1} = H_n^{-1} + H_n^0 + H_n^1.
\end{aligned}$$

Si $S_n$ n'est pas déterminé de façon unique, on fera un choix arbitraire parmi les abscisses possibles.

**Théorème 4.2**
*Si*

$$\lim_{\ell \to +\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1 \leq j \leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty.$$

*Alors, $S_n$ converge vers $s_0$ presque complètement et $c_n$ converge vers $c_0$ presque complètement lorsque $n$ tend vers l'infini.*

**Démonstration :**

1) Examinons d'abord la convergence presque complète de $S_n$ vers $s_0$.
Pour tout $n$, notons $j_0$ l'entier tel que $s_0 \in \Delta_{L^{(n)},j_0}$.

Posons : pour $0 < z < \frac{c_0}{9}$ et pour $j = 1, \cdots, K(L^{(n)})$ :

$$\begin{aligned}
D_{L^{(n)},j}(z) &= \Big\{(x,y) \in D_{L^{(n)},j} \ : \ y \geq M_{L^{(n)},j} - z\Big\}, \\
E_{L^{(n)},j}(z) &= \Big\{N^{(n)}\Big(D_{L^{(n)},j}(z)\Big) = 0\Big\}.
\end{aligned}$$

Soit $\eta$ une fonction de $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall\, z > 0 \text{ si } |x - y| < \eta(z) \text{ alors } |f(x) - f(y)| < z.$$

Considérons les événements

$$A_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{l'oscillation de } f \text{ est inférieure à } \frac{z}{2} \text{ sur } \Delta_{L^{(n)},j} \ ,j \neq j_0, \\ \\ \text{sur } \left[X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}\, ,\, s_0\right[ \text{ et sur } \left[s_0\, ,\, X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}\right[ \end{array} \right\}$$

et

$$B_n = \left\{V_{L^{(n)}} < \eta(\frac{z}{2})\right\}.$$

Si l'événement $\left(\bigcap_{j\neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}\right) \cap A_n$ est réalisé : pour tout couple $(j, j+1)$ tel que $j \neq j_0$ et $j+1 \neq j_0$, nous avons $\forall\, x \in \Delta_{L^{(n)},j}\ ,\quad \forall\, y \in \Delta_{L^{(n)},j+1}$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - M_{L^{(n)},j}| + |M_{L^{(n)},j} - M_{L^{(n)},j+1}| + |M_{L^{(n)},j+1} - f_n(y)| \\ &\leq z + |M_{L^{(n)},j} - M_{L^{(n)},j+1}| + z \\ &\leq z + |M_{L^{(n)},j} - f\left(X^{(L^{(n)})}_{R_j(L^{(n)})}\right)| + |f\left(X^{(L^{(n)})}_{R_j(L^{(n)})}\right) - M_{L^{(n)},j+1}| + z \\ &\leq z + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + z \\ &= 3z \\ &< \frac{c_0}{3}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le bloc $\Delta_{L^{(n)},j_0}$, sans sacrifier la généralité, supposons que $f(s_0) < f(s_0^-)$ et posons :

$$m'_{L^{(n)},j_0,z} = \inf\left\{f(x)\ :\ X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})} \leq x < s_0\right\}$$

et

$$M'_{L^{(n)},j_0,z} = \sup\left\{f(x)\ :\ s_0 \leq x < X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}\right\}.$$

Si l'événement $A_n$ est réalisé, nous avons :

$$\begin{aligned} m'_{L^{(n)},j_0,z} - M'_{L^{(n)},j_0,z} &= \left(m'_{L^{(n)},j_0,z} - f(s_0^-)\right) + \left(f(s_0^-) - f(s_0)\right) \\ &\quad + \left(f(s_0) - M'_{L^{(n)},j_0,z}\right) \\ &\geq -\frac{z}{2} + c_0 - \frac{z}{2} \\ &> -\frac{c_0}{18} + c_0 - \frac{c_0}{18} = \frac{8}{9}\, c_0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$
\begin{aligned}
&M_{L^{(n)},j_0-1} - M_{L^{(n)},j_0+1} \\
&\quad = (M_{L^{(n)},j_0-1} - m'_{L^{(n)},j_0,z}) + (m'_{L^{(n)},j_0,z} - M'_{L^{(n)},j_0,z}) \\
&\qquad\qquad + (M'_{L^{(n)},j_0,z} - M_{L^{(n)},j_0+1}) \\
&\quad \geq \left(m_{L^{(n)},j_0-1} - f\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}\right)\right) + (m'_{L^{(n)},j_0,z} - M'_{L^{(n)},j_0,z}) \\
&\qquad\qquad + \left(f\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}\right) - M_{L^{(n)},j_0+1}\right) \\
&\quad \geq -\frac{z}{2} + \frac{8c_0}{9} - \frac{z}{2} \\
&\quad > -\frac{c_0}{18} + \frac{8c_0}{9} - \frac{c_0}{18} = \frac{7}{9}\,c_0.
\end{aligned}
$$

Puis, si l'événement $\left(\bigcap_{j\neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n$ est réalisé, pour tout $x \in \Delta_{L^{(n)},j_0-1}$ et $y \in \Delta_{L^{(n)},j_0+1}$ :

$$
\begin{aligned}
f_n(x) - f_n(y) > f_n(x) - M_{L^{(n)},j_0+1} \quad &> \quad M_{L^{(n)},j_0-1} - z - M_{L^{(n)},j_0+1} \\
&> \quad \frac{7c_0}{9} - \frac{c_0}{9} \\
&= \quad \frac{2}{3}\,c_0
\end{aligned}
$$

et puis, pour tout $u \in \Delta_{L^{(n)},j_0}$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$
\begin{aligned}
\max\Big\{|f_n(x) - f_n(u)|\,;\,|f_n(u) - f_n(y)|\Big\} \quad &\geq \quad \frac{1}{2}\Big(|f_n(x) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(y)|\Big) \\
&\geq \quad \frac{1}{2}\Big(f_n(x) - f_n(y)\Big) \\
&> \quad \frac{c_0}{3}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\Big(\bigcap_{j\neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\Big) \cap A_n \quad &\subseteq \quad \left\{S_n = X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}\right\} \cup \left\{S_n = X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}\right\} \\
&= \quad \Big\{|S_n - s_0| < V_{L^{(n)},j_0}\Big\}
\end{aligned}
$$

et l'inclusion :

$$\Big(\bigcap_{j\neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\Big) \cap A_n \cap B_n \subseteq \Big\{|S_n - s_0| < \eta(\frac{z}{2})\Big\}.$$

L'événement $A_n$ étant réalisé, l'oscillation de $f$ est inférieure à $\frac{z}{2}$ sur $\Delta_{L^{(n)},j}$ , $j \neq j_0$ : On constate que pour tout $j = 1, \cdots, K(L^{(n)})$ et $j \neq j_0$

$$A_{L^{(n)},j}(z) = \Delta_{L^{(n)},j} \times \Big[M_{L^{(n)},j} - z\ ,\ M_{L^{(n)},j} - \frac{z}{2}\Big]$$

est contenu dans le support $S$. Nous obtenons alors les inclusions :

$$\begin{aligned}\Big\{|S_n - s_0| \geq \eta(\frac{z}{2})\Big\} &\subseteq \Big(\bigcup_{j\neq j_0} E_{L^{(n)},j}(z)\Big) \cup \bar{A}_n \cup \bar{B}_n \\ &\subseteq \Big(\bigcup_{j\neq j_0} \Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0\Big\}\Big) \cup \bar{A}_n \cup \bar{B}_n.\end{aligned}$$

D'autre part, en considérant les événements

$$\begin{aligned} D_n &= \Big\{\text{l'oscillation de } f \text{ sur } \Delta_{L^{(n)},j}\ ,\ j \neq j_0 \text{ est supérieure à } \frac{z}{2}\Big\}, \\ F_n &= \Big\{\text{l'oscillation de } f \text{ sur } [X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}\ ,\ s_0[ \ \text{ est supérieure à } \frac{z}{2}\Big\}, \\ G_n &= \Big\{\text{l'oscillation de } f \text{ sur } [s_0\ ,\ X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}[ \text{ est supérieure à } \frac{z}{2}\Big\}. \end{aligned}$$

Nous avons alors l'inclusion :

$$\bar{A}_n \subseteq D_n \cup F_n \cup G_n.$$

De plus, comme $f$ est uniformément continue sur $\Delta_{L^{(n)},j}$ , $j \neq j_0$ sur $\Big[X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}\ ,\ s_0\Big[$ et sur $\Big[s_0\ ,\ X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}\Big[$, $0 < z < \frac{c_0}{9}$ est arbitrairement choisi : nous avons les inclusions

$$\Big\{V_{L^{(n)}} < \eta(\frac{z}{2})\Big\} \subset \bar{D}_n,\ \Big\{s_0 - X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})} < \eta(\frac{z}{2})\Big\} \subset \bar{F}_n \text{ et } \Big\{X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})} - s_0 < \eta(\frac{z}{2})\Big\} \subset \bar{G}_n.$$

Nous en déduisons :

$$\bar{A}_n \subset D_n \cup F_n \cup G_n \subset \bar{B}_n \tag{4.4}$$

puis

$$\Big\{|S_n - s_0| \geq \eta(\frac{z}{2})\Big\} \subseteq \Big(\bigcup_{j\neq j_0} \Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0\Big\}\Big) \cup \Big\{V_{L^{(n)}} \geq \eta(\frac{z}{2})\Big\}.$$

Ainsi la convergence presque complète de $S_n$ vers $s_0$ résulte de la convergence presque complète vers 0 de $V_{L^{(n)}}$ et de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\bigcup_{j\neq j_0}\Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z))=0\Big\}\Big). \tag{4.5}$$

L'étude de la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini et de la convergence de la série (4.5) est analogue en tout point à celle présentée dans la première partie et la deuxième partie de la démonstration du théorème2.1 (chapitre2, §2.3.1). Il suffit donc de reprendre les calculs. Nous obtenons donc :

$$V_{L^{(n)}} \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big(\bigcup_{j\neq j_0}\Big\{N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z))=0\Big\}\Big) < +\infty.$$

2) Examinons ensuite la convergence presque complète de $c_n$ vers $c_0$ .
Remarquons que si, l'événement $\Big\{|S_n - s_0| < V_{L^{(n)},j_0}\Big\}$ , est réalisé alors

$$S_n = X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})} \quad \text{ou} \quad S_n = X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}.$$

Nous considérons, sans sacrifier la généralité, que $S_n = X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}$.
Si l'événement $\Big(\bigcap_{j\neq j_0}\bar{E}_{L^{(n)},j}\Big)\cap A_n$ est réalisé, nous avons alors :
$\forall\, x \in \Delta_{L^{(n)},j_0-2}$ , $\forall\, y \in \Delta_{L^{(n)},j_0-1}$

$$\begin{aligned}
H_n^{-1} &= |f_n(x) - f_n(y)| \\
&\leq |f_n(x) - M_{L^{(n)},j_0-2}| + |M_{L^{(n)},j_0-2} - M_{L^{(n)},j_0-1}| + |M_{L^{(n)},j_0-1} - f_n(y)| \\
&\leq z + |M_{L^{(n)},j_0-2} - M_{L^{(n)},j_0-1}| + z \\
&\leq z + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + z \\
&= 3z.
\end{aligned}$$

Posons :

$$D'_{L^{(n)},j_0}(z) = \Big\{(x,y)\in D_{L^{(n)},j_0} \ : \ y \geq M'_{L^{(n)},j_0,z} - z\Big\}$$

et

$$E'_{L^{(n)},j_0}(z) = \Big\{ N^{(n)}\Big(D'_{L^{(n)},j_0}(z)\Big) = 0 \Big\}.$$

Si l'événement $\Big(\bigcap_{j\neq j_0} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\Big) \cap \bar{E}'_{L^{(n)},j_0}(z) \cap A_n$ est réalisé, nous obtenons alors : $\forall\, v \in \Delta_{L^{(n)},j_0-1}$ , $\forall\, u \in \Delta_{L^{(n)},j_0}$ , $\forall\, w \in \Delta_{L^{(n)},j_0+1}$

$$\begin{aligned}
H_n^0 + H_n^1 &= |f_n(v) - f_n(u)| + |f_n(u) - f_n(w)| \\
&= |(f_n(v) - M_{L^{(n)},j_0-1}) + \Big(M_{L^{(n)},j_0-1} - f\Big(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}\Big)\Big) \\
&\qquad + \Big(f\Big(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}\Big) - f(s_0^-)\Big) + \Big(f(s_0^-) - f_n(u)\Big)| \\
&\quad + |(f_n(u) - f(s_0)) + \Big(f(s_0) - f\Big(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}\Big)\Big) \\
&\qquad + \Big(f\Big(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}\Big) - M_{L^{(n)},j_0+1}\Big) + (M_{L^{(n)},j_0+1} - f_n(w))| \\
&\leq z + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + |f(s_0^-) - f_n(u)| + |f_n(u) - f(s_0)| + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} + z \\
&= 4z + |f(s_0^-) - f_n(u)| + |f_n(u) - f(s_0)|.
\end{aligned}$$

L'événement $A_n$ étant réalisé, d'après la première partie, on a :

$$m'_{L^{(n)},j_0,z} - M'_{L^{(n)},j_0,z} > \frac{8}{9}\, c_0 > 0$$

ce qui entraîne :

$$f(s_0^-) \geq m'_{L^{(n)},j_0,z} > M'_{L^{(n)},j_0,z}.$$

Et en outre l'événement $\bar{E}'_{L^{(n)},j_0,z}(z)$ étant réalisé, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|f(s_0^-) - f_n(u)| + |f_n(u) - f(s_0)| &\leq |f(s_0^-) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| + |M'_{L^{(n)},j_0,z} - f_n(u)| \\
&\quad + |f_n(u) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| + |M'_{L^{(n)},j_0,z} - f(s_0)| \\
&= \Big(f(s_0^-) - M'_{L^{(n)},j_0,z}\Big) \; + \; 2\,|f_n(u) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| \\
&\qquad + \Big(M'_{L^{(n)},j_0,z} - f(s_0)\Big) \\
&= \Big(f(s_0^-) - f(s_0)\Big) + \; 2\,|f_n(u) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| \\
&= c_0 + 2\,|f_n(u) - M'_{L^{(n)},j_0,z}| \\
&\leq c_0 + 2\,z\,.
\end{aligned}$$

Donc si l'événement $\left(\bigcap_{j\neq j_0}\bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right)\cap\bar{E}'_{L^{(n)},j_0}(z)\cap A_n$ est réalisé, nous avons :

$$H_n^0+H_n^1\leq 6z+c_0.$$

Ainsi, si l'événement $\left(\bigcap_{j\neq j_0}\bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right)\cap\bar{E}'_{L^{(n)},j_0}(z)\cap A_n$ est réalisé,

$$c_n=H_n^{-1}+H_n^0+H_n^1\leq 9z+c_0.$$

D'autre part, si l'événement $\left(\bigcap_{j\neq j_0}\bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right)\cap A_n$ est réalisé :
$\forall\, x\in\Delta_{L^{(n)},j_0-2}$ , $\forall\, v\in\Delta_{L^{(n)},j_0-1}$ , $\forall\, u\in\Delta_{L^{(n)},j_0}$ , $\forall\, y\in\Delta_{L^{(n)},j_0+1}$

$$\begin{aligned}
c_0 &= f(s_0^-)-f(s_0)\\
&= |(f_n(x)-f_n(v))+(f_n(v)-f_n(u))\\
&\qquad +(f_n(u)-f_n(y))+(f_n(y)-f(s_0))+(f(s_0^-)-f_n(x))|\\
&\leq H_n^{-1}+H_n^0+H_n^1+|f_n(y)-f(s_0)|+|f(s_0^-)-f_n(x)|\\
&\leq c_n+|f_n(y)-M_{L^{(n)},j_0+1}|+|M_{L^{(n)},j_0+1}-f\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}\right)|\\
&\qquad +|f\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0}(L^{(n)})}\right)-f(s_0)|+|f(s_0^-)-f_n(u)|\\
&\leq c_n+z+\frac{z}{2}+\frac{z}{2}+|f(s_0^-)-f_n(x)|\\
&\leq c_n+2z+|f(s_0^-)-f\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}\right)|\\
&\qquad +|f\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{j_0-1}(L^{(n)})}\right)-M_{L^{(n)},j_0-2}|+|M_{L^{(n)},j_0-2}-f_n(x)|\\
&\leq c_n+2z+\frac{z}{2}+\frac{z}{2}+z\\
&= c_n+4z.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons : pour tout $0<z<\frac{c_0}{9}$

$$\left(\bigcap_{j\neq j_0}\bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right)\cap\bar{E}'_{L^{(n)},j_0}(z)\cap A_n\subset\left\{|c_n-c_0|<9z\right\}.$$

Comme l'événement $A_n$ est réalisé, nous avons

$$A_{L^{(n)},j_0}(z)=\Delta_{L^{(n)},j_0}\times\left[M'_{L^{(n)},j_0,z}-z\,,\,M'_{L^{(n)},j_0,z}-\frac{z}{2}\right]$$

qui est contenu dans le support $S$, de plus en utilisant l'inclusion ( 4.4).
Nous obtenons finalement

$$\Big\{|c_n - c_0| \geq 9z\Big\} \subset \Bigg( \bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \Big\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \Big\} \Bigg) \cup \Big\{ V_{L^{(n)}} \geq \eta(\frac{z}{2}) \Big\}.$$

Donc la convergence presque complète de $c_n$ vers $c_0$, résulte de la convergence presque complète vers 0 de $V_{L^{(n)}}$ et de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Bigg( \bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \Big\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \Big\} \Bigg). \tag{4.6}$$

L'étude de la convergence presque complète de $V_{L^{(n)}}$ vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini et de la convergence de la série (4.6) est analogue en tout point à celle présentée dans la première partie et la deuxième partie de la démonstration du théorème2.1 (chap.2, §2.3.1). Il suffit donc de reprendre les calculs. Nous obtenons donc :

$$V_{L^{(n)}} \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Bigg( \bigcup_{j=1}^{K(L^{(n)})} \Big\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},j}(z)) = 0 \Big\} \Bigg) < +\infty.$$

■

## 4.5 Étude de la convergence au sens de Skorokhod : Convergence dans $(D,\, d_S)$

$d_S$ désigne la distance de Skorokhod sur $D$ définie à l'aide de la classe $\Xi$ des fonctions continues, strictement croissantes de $[0\,,\,1]$ sur $[0\,,\,1]$ et pour tous $\Phi$ et$\Psi$ éléments de $\Xi$, on pose :

$$d_S(\Phi, \Psi) = \inf\Big\{ \varepsilon > 0 /\ \exists \varphi \in \Xi\ /\ |\varphi(x) - x| \leq \varepsilon \text{ et } |\Phi(x) - \Psi(\varphi(x))| \leq \varepsilon\,,\ \forall\, x \in [0\,,\,1] \Big\}.$$

### 4.5.1 Construction de l'estimateur

$z_0$ étant un nombre positif fixé, nous construisons un estimateur $f_n^{z_0}$ de $f$ de la façon suivante :

$$\text{sur } \Delta_{L^{(n)},1} \quad , \quad f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},1} \, ,$$

$$\text{sur } \Delta_{L^{(n)},2} \quad , \quad f_n^{z_0}(x) = \begin{cases} U_{L^{(n)},2} & si \quad |U_{L^{(n)},1} - U_{L^{(n)},2}| < \frac{z_0}{4} \\ U_{L^{(n)},1} & si \quad |U_{L^{(n)},1} - U_{L^{(n)},2}| \geq \frac{z_0}{4} \, , \end{cases}$$

pour $j = 3, \cdots, K(L^{(n)})$, sur $\Delta_{L^{(n)},j}$ :

$$f_n^{z_0}(x) = \begin{cases} U_{L^{(n)},j} & \text{si } |U_{L^{(n)},j-1} - U_{L^{(n)},j}| < \frac{z_0}{4} \\ & \text{ou si } f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},j-2} \text{ sur } \Delta_{L^{(n)},j-1} \\ U_{L^{(n)},j-1} & \text{si } |U_{L^{(n)},j-1} - U_{L^{(n)},j}| \geq \frac{z_0}{4} \\ & \text{et si } f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},j-1} \text{ sur } \Delta_{L^{(n)},j-1} \, . \end{cases}$$

### 4.5.2 Notations

Posons :

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_0}{12} \, , \\ J_{L^{(n)}} &= \Big\{1, \cdots, K(L^{(n)})\Big\}, \\ I_{L^{(n)}} &= \Big\{j \in J_{L^{(n)}} / \text{ il existe } \alpha_i \, ; i = 1, \cdots, K_0 - 1 \text{ telque } \alpha_i \in \Delta_{L^{(n)},j}\Big\} \, , \\ \Omega_{L^{(n)}} &= J_{L^{(n)}} - I_{L^{(n)}}, \\ D_{L^{(n)},j}(z) &= \Big\{(x,y) \in D_{L^{(n)},j} \, : \, y \geq M_{L^{(n)},j} - z\Big\} \, , \; j \in J_{L^{(n)}}. \end{aligned}$$

Considérons les événements :

$$\begin{aligned} A_n &= \Big\{\text{les points } \alpha_i \text{ sont séparés par au moins trois blocs } \Delta_{L^{(n)},j} \, , \, j \in J_{L^{(n)}}\Big\} \, , \\ B_n &= \Big\{V_{L^{(n)}} \leq \frac{z_0}{2}\Big\} \, , \\ C_n &= \Big\{Card(I_{L^{(n)}}) = K_0 - 1\Big\} \, , \\ E_{L^{(n)},j}(z) &= \Big\{N^{(n)}(D_{L^{(n)},j}(z)) = 0\Big\} \, , \; j \in J_{L^{(n)}}. \end{aligned}$$

Afin d'aérer la rédaction de l'étude de la convergence de l'estimateur. Nous faisons une remarque et nous donnons la construction d'un élément $\varphi$ de $\Xi$ qui nous permettra de montrer la convergence de l'estimateur.

### 4.5.3 Remarque

Fixons une partition de $[0\,,\,1]$ :

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{K_0} = 1$$

telle que l'oscillation de $f$ sur chaque intervalle $[\alpha_{i-1}\,,\,\alpha_i[$ soit inférieure à $\frac{z}{2}$.

Si l'événement $A_n \cap C_n$ est réalisé, alors :

• Soit deux blocs consécutifs $\Delta_{L(n),j}$ et $\Delta_{L(n),j+1}$ ne contiennent aucun point $\alpha_i$ ; $i = 1, \cdots, K_0 - 1$

• Soit l'un des deux blocs consécutifs $\Delta_{L(n),j}$ ou $\Delta_{L(n),j+1}$ contient un point $\alpha_i$ ; $i = 1, \cdots, K_0 - 1$ .

Et si en outre l'événement $\bigcap_{j \in J_{L(n)}} \bar{E}_{L(n),j}$ est réalisé et si nous considérons deux blocs $\Delta_{L(n),j}$ et $\Delta_{L(n),j+1}$ ne contenant pas de point $\alpha_i$ ; $i = 1, \cdots, K_0 - 1$ :

$$\begin{aligned} |U_{L(n),j} - U_{L(n),j+1}| &\leq \left(M_{L(n),j} - U_{L(n),j}\right) + \sup_{(x,y)\in\Delta_{L(n),j}\times\Delta_{L(n),j+1}} |f(x) - f(y)| \\ &\qquad + \left(M_{L(n),j+1} - U_{L(n),j+1}\right) \\ &\leq z + \sup_{(x,y)\in\Delta_{L(n),j}\times\Delta_{L(n),j+1}} |f(x) - f(y)| + z\,. \end{aligned}$$

Comme $\Delta_{L(n),j} \cup \Delta_{L(n),j+1}$ est contenu dans un intervalle $[\alpha_{i-1}\,,\,\alpha_i[$ ; $i = 1, \cdots, K_0$ et pour tout $i = 1, \cdots, K_0$ l'oscillation de $f$ sur $[\alpha_{i-1}\,,\,\alpha_i[$ est inférieure à $\frac{z}{2}$,
on a :

$$|U_{L(n),j} - U_{L(n),j+1}| \leq z + \frac{z}{2} + z < 3\,z = \frac{z_0}{4}.$$

Ainsi par construction de l'estimateur $f_n^{z_0}$ :

$$\forall\, x \in \Delta_{L(n),j+1} \quad f_n^{z_0}(x) = U_{L(n),j+1}.$$

On constate donc que : les blocs $\Delta_{L(n),j}$ , $j \in J_{L(n)}$ sur lesquels $f_n^{z_0} \neq U_{L(n),j}$ sont parmi les blocs $\Delta_{L(n),j}$ ou $\Delta_{L(n),j+1}$ , avec $j \in I_{L(n)}$ .

### 4.5.4 Définition d'un élément $\varphi$ de $\Xi$

Nous avons fixé une partition de $[0\,,\,1]$ :

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{K_0} = 1$$

telle que l'oscillation de $f$ sur chaque intervalle $[\alpha_{i-1}\,,\,\alpha_i[$ soit inférieure à $\frac{z}{2}$.

Définissons l'élément $\varphi$ de la façon suivante :

Si $\Delta_{L^{(n)},s} = \left[X^{(L^{(n)})}_{R_{s-1}(L^{(n)})}\,,\,X^{(L^{(n)})}_{R_s(L^{(n)})}\right[$ est un bloc sur lequel $f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},s-1}$, contenant un point $\alpha_s \in \left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{K_0-1}\right\}$, on pose :

$$\begin{cases} \varphi\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{s-1}(L^{(n)})}\right) = X^{(L^{(n)})}_{R_{s-1}(L^{(n)})} \\ \varphi\left(X^{(L^{(n)})}_{R_s(L^{(n)})}\right) = \alpha_s \\ \varphi\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{s+1}(L^{(n)})}\right) = X^{(L^{(n)})}_{R_{s+1}(L^{(n)})} \end{cases}$$

et on définit $\varphi$ par interpolation linéaire sur $\Delta_{L^{(n)},s}$ et $\Delta_{L^{(n)},s+1}$.

Si $\Delta_{L^{(n)},t+1} = \left[X^{(L^{(n)})}_{R_t(L^{(n)})}\,,\,X^{(L^{(n)})}_{R_{t+1}(L^{(n)})}\right[$ est un bloc sur lequel $f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},t}$ tel que $\Delta_{L^{(n)},t}$ contienne un point $\alpha_t \in \left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{K_0-1}\right\}$, on pose :

$$\begin{cases} \varphi\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{t-1}(L^{(n)})}\right) = X^{(L^{(n)})}_{R_{t-1}(L^{(n)})} \\ \varphi\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{t+1}(L^{(n)})}\right) = \alpha_t \\ \varphi\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{t+2}(L^{(n)})}\right) = X^{(L^{(n)})}_{R_{t+2}(L^{(n)})} \end{cases}$$

$\varphi$ est ensuite définie par interpolation linéaire sur $\Delta_{L^{(n)},t}$ , $\Delta_{L^{(n)},t+1}$ et $\Delta_{L^{(n)},t+2}$.
Sur les blocs où $\varphi$ n'est pas encore définie, on pose $\varphi(t) = t$.

### 4.5.5 Convergence de l'estimateur

Notons $B(z_0)$ la boule de centre $f$ de rayon $z_0$ dans l'espace métrique $(D\,,\,d_s)$.

On dira que $(f_n^{z_0})$ converge en probabilité vers $B(z_0)$ si :

$$\lim_{n\to+\infty} P\Big\{f_n^{z_0} \notin B(z_0)\Big\} = 0.$$

On dira que $(f_n^{z_0})$ converge presque complètement vers $B(z_0)$ si :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\Big\{f_n^{z_0} \notin B(z_0)\Big\} < +\infty.$$

### 4.5.6 Condition suffisante de convergence presque complète

**Théorème 4.3**

*Pour que l'estimateur $(f_n^{z_0})$ converge presque complètement vers $B(z_0)$ dans $(D\,,d_S)$ lorsque $n$ tend vers l'infini, il suffit que :*

$$\lim_{\ell\to+\infty} \frac{1}{\log \ell} \times \min_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty.$$

**Démonstration :**

1) Nous allons montrer l'inclusion

$$\Big(\bigcap_{j\in\Omega_{L(n)}} \bar{E}_{L(n),j}(z)\Big) \cap A_n \cap B_n \cap C_n \subseteq \Big\{d_S(f_n^{z_0}, f) \leq z_0\Big\}.$$

Pour cela, il suffit de montrer que si l'événement

$$\Big(\bigcap_{j\in\Omega_{L(n)}} \bar{E}_{L(n),j}(z)\Big) \cap A_n \cap B_n \cap C_n$$

est réalisé, la fonction $\varphi$ définie au paragraphe4.5.4 est telle que :

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |\varphi(x) - x| \leq z_0 \tag{4.7}$$

et

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \leq z_0\,. \tag{4.8}$$

Supposons que l'événement $\left(\bigcap_{j\in\Omega_{L(n)}} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n \cap B_n \cap C_n$ soit réalisé. D'après la définition de $\varphi$, nous obtenons :

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |\varphi(x) - x| \leq 2\, V_{L^{(n)}}.$$

L'événement $B_n$ étant réalisé, nous en déduisons :

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |\varphi(x) - x| \leq z_0.$$

Montrons ensuite que la seconde condition (4.8) est vérifiée :
**PREMIER CAS :**

Si $\Delta_{L^{(n)},s} = \left[X^{(L^{(n)})}_{R_{s-1}(L^{(n)})}, X^{(L^{(n)})}_{R_s(L^{(n)})}\right[$ est un bloc sur lequel $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)},s-1}$ et contenant un point $\alpha_s \in \left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{K_0-1}\right\}$, nous avons défini la fonction $\varphi$ par :

$$\begin{cases} \varphi\Big(X^{(L^{(n)})}_{R_{s-1}(L^{(n)})}\Big) = X^{(L^{(n)})}_{R_{s-1}(L^{(n)})} \\[2ex] \varphi\Big(X^{(L^{(n)})}_{R_s(L^{(n)})}\Big) = \alpha_s \\[2ex] \varphi\Big(X^{(L^{(n)})}_{R_{s+1}(L^{(n)})}\Big) = X^{(L^{(n)})}_{R_{s+1}(L^{(n)})}, \end{cases}$$

$\varphi$ est ensuite définie par interpolation linéaire sur $\Delta_{L^{(n)},s}$ et $\Delta_{L^{(n)},s+1}$.

Soit $x$ un point de $\Delta_{L^{(n)},s}$. Nous avons $\varphi(x) \in \left[X^{(L^{(n)})}_{R_{s-1}(L^{(n)})}, \alpha_s\right[$,

$$\begin{aligned} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq |U_{L^{(n)},s-1} - M_{L^{(n)},s-1}| + |M_{L^{(n)},s-1} - f(\varphi(x))| \\ &\leq \Big(M_{L^{(n)},s-1} - U_{L^{(n)},s-1}\Big) + \sup_{y\in\Delta_{L(n),s-1}} |f(y) - f(\varphi(x))|. \end{aligned}$$

Comme l'événement $\bar{E}_{L^{(n)},s-1}(z)$ est réalisé et l'oscillation de $f$ sur l'intervalle $[\alpha_{s-1}, \alpha_s[$ est inférieure à $\frac{z}{2}$, nous obtenons :

$$\sup_{x\in\Delta_{L(n),s}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \leq z + \frac{z}{2} = \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{z_0}{8}.$$

Soit maintenant $x$ un point de $\Delta_{L^{(n)},s+1}$. Nous avons :
$\varphi(x) \in \left[\alpha_s\,,\, X^{(L^{(n)})}_{R_{s+1}(L^{(n)})}\right[$ et comme $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)},s-1}$ sur $\Delta_{L^{(n)},s}$ , par construction de l'estimateur $f_n^{z_0}$ : $f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},s+1}$ ,

$$\begin{aligned} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq |U_{L^{(n)},s+1} - M_{L^{(n)},s+1}| + |M_{L^{(n)},s+1} - f(\varphi(x))| \\ &\leq \left(M_{L^{(n)},s+1} - U_{L^{(n)},s+1}\right) + \sup_{y \in \Delta_{L^{(n)},s+1}} |f(y) - f(\varphi(x))| . \end{aligned}$$

Nous savons que l'événement $\bar{E}_{L^{(n)},s+1}(z)$ est réalisé et que l'oscillation de $f$ sur l'intervalle $[\alpha_s\,,\,\alpha_{s+1}[$ est inférieure à $\frac{z}{2}$, nous obtenons :

$$\sup_{y \in \Delta_{L^{(n)},s+1}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \leq z + \frac{z}{2} = \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{z_0}{8} .$$

## DEUXIÈME CAS :

Si $\Delta_{L^{(n)},t+1} = \left[X^{(L^{(n)})}_{R_t(L^{(n)})}\,,\, X^{(L^{(n)})}_{R_{t+1}(L^{(n)})}\right[$ est un bloc sur lequel $f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},t}$ tel que $\Delta_{L^{(n)},t}$ contienne un point $\alpha_t$. Nous avons défini $\varphi$ par :

$$\begin{cases} \varphi\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{t-1}(L^{(n)})}\right) = X^{(L^{(n)})}_{R_{t-1}(L^{(n)})} \\ \varphi\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{t+1}(L^{(n)})}\right) = \alpha_t \\ \varphi\left(X^{(L^{(n)})}_{R_{t+2}(L^{(n)})}\right) = X^{(L^{(n)})}_{R_{t+2}(L^{(n)})} , \end{cases}$$

$\varphi$ est définie par interpolation linéaire sur $\Delta_{L^{(n)},t}$ , $\Delta_{L^{(n)},t+1}$ et $\Delta_{L^{(n)},t+2}$.

Soit $x$ un point de $\Delta_{L^{(n)},t} \cup \Delta_{L^{(n)},t+1}$.

Nous avons : $\varphi(x) \in \left[X^{(L^{(n)})}_{R_{t-1}(L^{(n)})}\,,\,\alpha_t\right[$

$$\begin{aligned} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq |U_{L^{(n)},t} - U_{L^{(n)},t-1}| + |U_{L^{(n)},t-1} - M_{L^{(n)},t-1}| \\ &\qquad + |M_{L^{(n)},t-1} - f((\varphi(x))| \\ &\leq |U_{L^{(n)},t} - U_{L^{(n)},t-1}| + \left(M_{L^{(n)},t-1} - U_{L^{(n)},t-1}\right) \\ &\qquad + \sup_{y \in \Delta_{L^{(n)},t-1}} |f(y) - f((\varphi(x))| . \end{aligned}$$

Comme $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)},t}$ sur $\Delta_{L^{(n)},t+1}$, par construction de l'estimateur $f_n^{z_0}$, nous avons : $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)},t}$.
D'autre part, par construction de l'estimateur $f_n^{z_0}$ : sur $\Delta_{L^{(n)},t}$

$$f_n^{z_0} = U_{L^{(n)},t} \quad \text{si } |U_{L^{(n)},t} - U_{L^{(n)},t-1}| < 3\,z = \frac{z_0}{4} \text{ ou si } f_n^{z_0} = U_{L^{(n)},t-2} \text{ sur } \Delta_{L^{(n)},t-1}.$$

Or $\Delta_{L^{(n)},t-2}$ et $\Delta_{L^{(n)},t-1}$ sont deux blocs consécutifs qui ne contiennent aucun point $\alpha_i$ ; $i = 1, \cdots, K_0 - 1$. Donc d'après la remarque paragraphe 4.5.3 :

$$|U_{L^{(n)},t-2} - U_{L^{(n)},t-1}| < \frac{z_0}{4}.$$

Par conséquent

$$f_n^{z_0} = U_{L^{(n)},t-1} \quad \text{sur} \quad \Delta_{L^{(n)},t-1}$$

et donc

$$|U_{L^{(n)},t} - U_{L^{(n)},t-1}| < 3\,z\,.$$

Puisque l'événement $\bar{E}_{L^{(n)},t-1}(z)$ est réalisé et l'oscillation de $f$ sur $[\alpha_{t-1}\,,\,\alpha_t[$ est inférieure à $\frac{z}{2}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\Delta_{L^{(n)},t}\cup\Delta_{L^{(n)},t+1}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\le 3\,z + z + \frac{z}{2} \\ &= \frac{z_0}{4} + \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{3}{8}\,z_0\,.\end{aligned}$$

Soit maintenant $x$ un point de $\Delta_{L^{(n)},t+2}$. Nous avons :
$\varphi(x) \in \left[\alpha_t\ ,\ X^{(L^{(n)})}_{R_{t+2}(L^{(n)})}\right[$ et, comme $f_n^{z_0} = U_{L^{(n)},t}$ sur $\Delta_{L^{(n)},t+1}$, par construction de l'estimateur $f_n^{z_0}$ nous avons : $f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},t+2}$

$$\begin{aligned}|f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\le |U_{L^{(n)},t+2} - M_{L^{(n)},t+2}| + |M_{L^{(n)},t+1} - f(\varphi(x))| \\ &\le \left(M_{L^{(n)},t+2} - U_{L^{(n)},t+2}\right) + \sup_{y\in\Delta_{L^{(n)},t+2}} |f(y) - f(\varphi(x))|\,.\end{aligned}$$

Puisque l'événement $\bar{E}_{L^{(n)},t+2}(z)$ est réalisé et l'oscillation de $f$ sur $[\alpha_t\,,\,\alpha_{t+1}[$ est inférieure à $\frac{z}{2}$. Nous obtenons :

$$\sup_{x\in\Delta_{L^{(n)},t+2}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \le z + \frac{z}{2} = \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{z_0}{8}\,.$$

**TROISIÈME CAS :**
Sur les intervalles où $\varphi$ n'est pas encore définie, nous avons posé $\varphi(x) = x$.
Soit $x$ appartenant à l'un de ces intervalles $\Delta_{L^{(n)},j}$. Nous avons :

$$f_n^{z_0}(x) = U_{L^{(n)},j} \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) \in \Delta_{L^{(n)},j}.$$

Donc

$$\begin{aligned} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| &\leq |U_{L^{(n)},j} - M_{L^{(n)},j}| + |M_{L^{(n)},j} - f(x)| \\ &\leq \left(M_{L^{(n)},j} - U_{L^{(n)},j}\right) + \sup_{y \in \Delta_{L^{(n)},j}} |f(y) - f(x)|. \end{aligned}$$

L'événement $\bar{E}_{L^{(n)},j}(z)$ étant réalisé puisque ces intervalles $\Delta_{L^{(n)},j}$ ne contiennent aucun point $\alpha_i$, $i = 1, \cdots, K_0 - 1$ et l'oscillation de $f$ sur ces intervalles $\Delta_{L^{(n)},j}$ est inférieure à $\frac{z}{2}$. Nous obtenons :

$$\sup_{y \in \Delta_{L^{(n)},j}} |f_n^{z_0}(x) - f(\varphi(x))| \leq z + \frac{z}{2} = \frac{z_0}{12} + \frac{z_0}{24} = \frac{z_0}{8}.$$

Donc, si l'événement $\left(\bigcap_{j\in\Omega_{L^{(n)}}} \bar{E}_{L^{(n)},j}(z)\right) \cap A_n \cap B_n \cap C_n$ est réalisé, alors l'événement $\left\{d_S(f_n^{z_0}, f) \leq z_0\right\}$ est réalisé.

2) Nous en déduisons de ce qui précède l'inclusion

$$\left\{d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0\right\} \subseteq \Big(\bigcup_{j\in\Omega_{L^{(n)}}} E_{L^{(n)},j}(z)\Big) \cup \bar{A}_n \cup \bar{B}_n \cup \bar{C}_n\,.$$

Posons $\varepsilon = \min\left\{(\alpha_i - \alpha_{i-1}) \;:\; 1 \leq i \leq K_0\right\}$. Nous obtenons alors les inclusions :

$$A_n \supset \left\{V_{L^{(n)}} < \frac{\varepsilon}{3}\right\} \quad \text{et} \quad C_n \supset \Big(\bigcap_{j=1}^{K(L^{(n)})} \left\{V_{L^{(n)},j} < \varepsilon\right\}\Big) = \left\{V_{L^{(n)}} < \varepsilon\right\}.$$

D'autre part : pour tout $j \in \Omega_{L^{(n)}}$, l'oscillation de $f$ sur $\Delta_{L^{(n)},j}$ est inférieure à $\frac{z}{2}$. On constate que : pour tout $j \in \Omega_{L^{(n)}}$

$$A_{L^{(n)},j}(z) = \Delta_{L^{(n)},j} \times \left[M_{L^{(n)},j} - z\,,\; M_{L^{(n)},j} - \frac{z}{2}\right]$$

est contenu dans le support $S$. Nous obtenons finalement

$$\left\{d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0\right\} \subseteq \left( \bigcup_{j\in\Omega_{L(n)}} \left\{N^{(n)}(A_{L(n),j}(z)) = 0\right\}\right) \cup \left\{V_{L(n)} > \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{z_0}{2}\right)\right\}.$$

Donc la convergence presque complète de $f_n^{z_0}$ vers $B(z_0)$ résulte de la convergence presque complète de $V_{L(n)}$ vers 0 et de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left( \bigcup_{j\in\Omega_{L(n)}} \left\{N^{(n)}(A_{L(n),j}(z)) = 0\right\}\right). \tag{4.9}$$

L'étude de la convergence presque complète de $V_{L(n)}$ vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini et de la convergence de la série (4.9) est analogue en tout point à celle présentée dans la première partie et la deuxième partie de la démonstration du théorème2.1 (chap.2, §2.3.1). Il suffit donc de reprendre les calculs. Nous obtenons donc :

$$V_{L(n)} \longrightarrow 0 \quad \text{presque complètement quand } n \longrightarrow +\infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left( \bigcup_{j\in\Omega_{L(n)}} \left\{N^{(n)}(A_{L(n),j}(z)) = 0\right\}\right) < +\infty.$$

■

### 4.5.7 Condition nécessaire de convergence en probabilité

Cette étude nous a semblé très complexe dans le cas où $f$ est quelconque, ainsi nous supposons dans ce paragraphe que $f$ est une fonction constante :

$$\forall\, x \in [0\,,\,1] \quad f(x) = a\,,\; a > 0.$$

Dans ce cas particulier, nous établissons une condition nécessaire qui est analogue à celle obtenue pour la convergence uniforme en probabilité de l'estimateur $f_n$ vers $f$ au chapitre2. Cela n'a rien de surprenant si on se rappelle que la convergence au sens de Skorokhod d'une suite de fonctions $(F_n)$ vers une fonction continue $F$ équivaut à la convergence uniforme, et si on considère que $f_n^{z_0}$ est peu différent de $f_n$.

**Théorème 4.4**
*Une condition nécessaire pour que $f_n^{z_0}$ converge vers $f$ en probabilité dans $(D\,,\,d_S)$ est que :*

$$\sup_{\ell \geq 1} \frac{1}{\log(\ell+1)} \times \max_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell) = +\infty.$$

**Démonstration :**
Soit $0 < z_0 < a$ fixé, supposons que :

- $d_S(f_n^{z_0}, f)$ converge en probabilité vers 0 avec $\frac{1}{n}$
- il existe un nombre $0 < \alpha < +\infty$ tel que :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{\log(\ell+1)} \times \max_{1\leq j\leq K(\ell)} \nu_j(\ell) \leq \alpha < +\infty.$$

Nous allons montrer que nous arrivons à une contradiction.
Supposons que sur deux blocs consécutifs $\Delta_{L^{(n)},j-1}$ et $\Delta_{L^{(n)},j}$ se réalisent les événements :

$$\left\{a - U_{L^{(n)},j-1} > z_0\right\} \quad \text{et} \quad \left\{a - U_{L^{(n)},j} > z_0\right\}$$

Comme $f_n^{z_0}$ est égale à $U_{L^{(n)},j}$ ou $U_{L^{(n)},j-1}$ sur $\Delta_{L^{(n)},j}$, nous avons dans tous les cas :

$$a - f_n^{z_0} > z_0 \quad \text{sur} \quad \Delta_{L^{(n)},j}$$

et comme

$$\forall\, \varphi \in \Xi, \quad \forall\, x \in [0\,,\,1] \quad f(x) = f(\varphi(x)) = a.$$

Nous en déduisons :

$$\bigcup_{j=2}^{K(L^{(n)})} \left\{N^{(n)}(D_{L^{(n)},j-1}(z_0)) = 0\,,\; N^{(n)}(D_{L^{(n)},j}(z_0)) = 0\right\} \subset \left\{d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0\right\}.$$

Puis, pour simplifier l'écriture, en supposant $K(L^{(n)})$ pair pour tout $n$ :

$$\bigcup_{j=1}^{\frac{K(L^{(n)})}{2}} \left\{N^{(n)}(D_{L^{(n)},2j-1}(z_0)) = 0\,,\; N^{(n)}(D_{L^{(n)},2j}(z_0)) = 0\right\} \subset \left\{d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0\right\}.$$

Posons : pour tout $j = 1, \cdots, \frac{K(L^{(n)})}{2}$

$$A_{L^{(n)},2j}(z_0) = \left(\Delta_{L^{(n)},2j-1} \cup \Delta_{L^{(n)},2j}\right) \times [a - z_0\,,\,a].$$

Les $A_{L^{(n)},2j}(z_0)$ ; $j = 1, \cdots, \frac{K(L^{(n)})}{2}$ sont deux à deux disjoints et contenus dans $S$. Nous en déduisons :

$$\bigcup_{j=1}^{\frac{K(L^{(n)})}{2}} \left\{ N^{(n)}(A_{L^{(n)},2j}(z_0)) = 0 \right\} \subset \left\{ d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0 \right\}.$$

L'hypothèse

$$d_S(f_n^{z_0}, f) \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilité quand } n \longrightarrow +\infty,$$

entraîne

(4.10)
$$\lim_{n \to +\infty} P\left\{ d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0 \right\} = 0.$$

Cependant,

$$\begin{aligned} P\left\{ d_S(f_n^{z_0}, f) > z_0 \right\} &\geq \sum_{\ell=1}^{+\infty} P\left( \bigcup_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left\{ N_\ell(A_{\ell,2j}(z_0)) = 0 \right\} \right) P\left( L^{(n)} = \ell \right) \\ &\geq \inf_{\ell \geq 1} P\left( \bigcup_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left\{ N_\ell(A_{\ell,2j}(z_0)) = 0 \right\} \right). \end{aligned}$$

On montre, en procédant comme dans la deuxième partie de la démonstration du théorème2.2 (chap.2, §2.3.2), que si l'hypothèse du théorème n'est pas vérfiée alors :

$$\inf_{\ell \geq 1} P\left( \bigcup_{j=1}^{\frac{K(\ell)}{2}} \left\{ N_\ell(A_{\ell,2j}(z_0)) = 0 \right\} \right) > 1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Ce qui contredit (4.10), donc l'hypothèse

$$d_S(f_n^{z_0}, f) \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilité quand } n \longrightarrow +\infty.$$

■

# Bibliographie


[1] **ABOU-JAOUDÉ S.**(1977) : "La convergence $\mathbf{L_1}$ et $\mathbf{L_\infty}$ de certains estimateurs d' une densité de probabilité." Thèse de l' université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[2] **BILLINGSLEY P.**(1968) :"Convergence of probability measures".Wiley.

[3] **BOSQ D.** (1971) : "Contribution à la théorie de l' estimation fonctionnelle." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[4] **BOSQ D. et LECOUTRE J. P.**(1987) " Théorie de l'estimation fonctionnelle." Economica.

[5] **CHEVALIER J.**(1976) : "Estimation du support et du contour d' une loi de probabilité." Ann. Inst. Henri Poincaré, B, Vol 12, 4, 339-364.

[6] **CRETOIS E.**(1994) : "Utilisation de la méthode des pas aléatoires en estimation dans les processus ponctuels." Thèse, Université de Rouen.

[7] **GEFFROY J.**(1964) : " Sur un problème d' estimation géométrique ." Pub. ISUP XXII, fasc.1, 31-70.

[8] **GENSBITEL M. H.**(1979) : "Contribution à l' étude statistique des répartitions ponctuelles ." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[9] **JACOB P.**(1981) : " Estimation du contour discontinu d'un processus ponctuel sur le plan ." Pub. ISUP 29, 3-4, p1-25.

[10] **JACOB P. and ABBAR H.**(1989) : "Estimating the edge of a Cox process area ." Cahiers du Centre de Recherche Operationnelle, Vol.31, 3-4.

[11] **JACOB P. et MISSIÉ P.**(1995) : "Estimation à pas aléatoire du contour d'un processus ponctuel de Poisson." Pub. IRMA Lille, Vol.37, 12. À paraître dans les publications de L'ISUP.

[12] **KALLENBERG O.**(1983) : "Random measures". Academic press.

[13] **KARR A.F.**(1986) : "Point process and their statistical inference." Dekker.

[14] **MOORE M.**(1984) : "On the estimation of a convex set."
The Annals of Statistics, Vol. 12, 3, 1090-1099.

[15] **LECOUTRE J.P.**(1975) : " Convergence et Optimisation de certains estimateurs de la densité ." Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI).

[16] **PYKE R.**(1965) : "Spacings" .
J. Roy. Statist. Soc. Série B, 27, No 3, p.395-449.

[17] **RENYI A. and SULANKE R.**(1964 ) : " Uber bie konvexe hülle vonze fälling gewählten punklen II." Z. wahr 3, p.138-148.

[18] **RIPLEY B. D. and RASON J. P.**(1977) : "Finding the edge of a Poisson forest." Journal of a Applied Probability, 14, 483-491.

[19] **VAN RYZIN J.**(1973) : "A histogram method of density estimation ."
Comm. Statist., 2, p. 493-502 .

# Appendice :

# LOIS DE PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

# Appendice 1 : Lois de probabilités conditionnelles en coordonnées polaires

D'après le chapitre1(§1.2.3), pour tout $n$, la loi du vecteur aléatoire

$$\Big(\big(\rho_{1,n}\ ;\ \theta_{1,n}\big),\cdots,\big(\rho_{L^{(n)},n}\ ;\ \theta_{L^{(n)},n}\big)\Big)$$

conditionnée par $\left\{L^{(n)}=\ell\right\}$, est identique à celle d'un vecteur aléatoire $\big((\rho_1\,,\,\theta_1),\cdots,(\rho_\ell\,,\,\theta_\ell)\big)$ de $\ell$ variables aléatoires indépendantes de même loi de densité $g$ définie par (1.3) (chapitre1, §1.2.1).
Cette partie traite de la loi conditionnelle, étant donné $\left\{L^{(n)}=\ell\right\}$, d'éléments aléatoires qui sont fonctions de $\big(\rho_{1,n}\ ;\ \theta_{1,n}\big),\cdots,\big(\rho_{L^{(n)},n}\ ;\ \theta_{L^{(n)},n}\big)$. Il est plus pratique de faire les calculs et de donner les résultats pour les variables aléatoires $(\rho_1\,,\,\theta_1),\cdots,(\rho_\ell\,,\,\theta_\ell)$. Les notations utilisées dans la suite sont celles du chapitre1(§1.2).

1) $\forall \ell\in\mathbb{N}^*$, la loi du vecteur aléatoire $\Big((\rho_1^{(\ell)},\theta_1^{(\ell)}),\cdots,(\rho_\ell^{(\ell)},\theta_\ell^{(\ell)})\Big)$ est absolument continue et admet pour densité une fonction $g_2$ définie sur $\Big(\mathbb{R}_+^*\times]0,2\pi[\Big)^\ell$ par :

$$g_2\Big((s_1,t_1),\ldots,(s_\ell,t_\ell)\Big)\ =\ \ell!\,g(s_1,t_1)\cdots g(s_\ell t_\ell)\,\mathbb{1}_{\{0<t_1<\cdots<t_\ell\}}. \tag{5.1}$$

2) $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, la loi du vecteur aléatoire

$$\Big((\rho_1^{(\ell)}\,,\ \theta_1^{(\ell)}), (\rho_{R(1)}^{(\ell)}\,,\ \theta_{R(1)}^{(\ell)}), \cdots, (\rho_{R(K(\ell)-1)}^{(\ell)}\,,\ \theta_{R(K(\ell)-1)}^{(\ell)})\Big)$$

est absolument continue et admet pour densité une fonction $g_3$ définie sur $\Big(\mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[\Big)^{K(\ell)}$ par :

$$g_3\Big((s_1,t_1), (s_{R(1)}, t_{R(1)}), \cdots, (s_{R(K(\ell)-1)}, t_{R(K(\ell)-1)})\Big)$$

$$= \int_{\left(\mathbb{R}_+^* \times ]0,2\pi[\right)^{\ell-K(\ell)}} g_2\Big((s_1,t_1), \cdots, (s_\ell,t_\ell)\Big) \begin{array}{l} ds_2\cdots ds_{R(1)-1} ds_{R(1)+1}\cdots ds_\ell \\ dt_2\cdots dt_{R(1)-1} dt_{R(1)+1}\cdots dt_\ell \end{array}$$

$$= \ell!\, g(s_1,t_1)\, g(s_{R(1)}, t_{R(1)}) \cdots g(s_{R(K(\ell)-1)}, t_{R(K(\ell)-1)})\, \mathbb{1}_{\{0<t_1<t_{R(1)}<\cdots<t_{R(K(\ell)-1)}<2\pi\}} \times$$
$$\int g(s_2,t_2)\cdots g(s_{R(1)-1}, t_{R(1)-1})\, \mathbb{1}_{\{t_1<t_2<\cdots<t_{R(1)}\}} \begin{array}{l} ds_2\cdots ds_{R(1)-1} \\ dt_2\cdots dt_{R(1)-1} \end{array} \times$$
$$\int g(s_{R(1)+1}, t_{R(1)+1})\cdots g(s_{R(2)-1}, t_{R(2)-1})\, \mathbb{1}_{\{t_{R(1)}<\cdots<t_{R(2)}\}} \begin{array}{l} ds_{R(1)+1}\cdots ds_{R(2)-1} \\ dt_{R(1)+1}\cdots dt_{R(2)-1} \end{array} \times$$
$$\vdots$$
$$\int g(s_{R(K(\ell)-1)+1}, t_{R(K(\ell)-1)+1})\cdots g(s_\ell,t_\ell)\, \mathbb{1}_{\{t_{R(K(\ell)-1}<\cdots<t_\ell\}} \begin{array}{l} ds_{R(K(\ell)-1)+1}\cdots ds_\ell \\ dt_{R(K(\ell)-1)+1}\cdots dt_\ell \end{array}$$
$$= \ell!\, g(s_1,t_1)\, g(s_{R(1)}, t_{R(1)}) \cdots g(s_{R(K(\ell)-1)}, t_{R(K(\ell)-1)})\, H(\tilde{t}^{(\ell)}) \mathbb{1}_{\{0<t_1<t_{R(1)}<\cdots<t_{R(K(\ell)-1)}<2\pi\}}$$

où $\tilde{t}^{(\ell)} = \Big(t_1,\, t_{R(1)}, \cdots,\, t_{R(K(\ell)-1)}\Big)$ et où $H$ est une fonction de $(]0\,,\,2\pi[)^{K(\ell)}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$(5.2) \qquad H(\tilde{t}^{(\ell)}) = \int_{\{t_1<t_2<\cdots<t_{R(1)}\}} g_1(t_2)\cdots g_1(t_{R(1)-1})\, dt_2\cdots dt_{R(1)-1} \times$$
$$\int_{\{t_{R(1)}<\cdots<t_{R(2)}\}} g_1(t_{R(1)+1})\cdots g_1(t_{R(2)-1})\, dt_{R(1)+1}\cdots dt_{R(2)-1} \times$$
$$\vdots$$
$$\int_{\{t_{R(K(\ell)-1}<\cdots<t_\ell\}} g_1(t_{R(K(\ell)-1)+1})\cdots g_1(t_\ell)\, dt_{R(K(\ell)-1)+1}\cdots dt_\ell .$$

3) Posons : $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\Sigma_\ell = \left\{ \begin{array}{c} \left(\rho_1^{(\ell)}, \theta_1^{(\ell)}\right) = (s_1, t_1),\ \left(\rho_{R(1)}^{(\ell)}, \theta_{R(1)}^{(\ell)}\right) = (s_{R(1)}, t_{R(1)}), \cdots, \\ \left(\rho_{R(K(\ell)-1)}^{(\ell)}, \theta_{R(K(\ell)-1)}^{(\ell)}\right) = (s_{R(K(\ell)-)}, t_{R(K(\ell)-1)}) \end{array} \right\},$$

$$\Theta_\ell = \Big((s_1, t_1), (s_{R(1)}, t_{R(1)}), \cdots, (s_{R(K(\ell)-1)}, t_{R(K(\ell)-1)})\Big)$$

et $\Lambda_\ell$ égal au vecteur aléatoire

$$\Big(\left(\rho_2^{(\ell)}, \theta_2^{(\ell)}\right), \cdots, \left(\rho_{R(1)-1}^{(\ell)}, \theta_{R(1)-1}^{(\ell)}\right), \left(\rho_{R(1)+1}^{(\ell)}, \theta_{R(1)+1}^{(\ell)}\right), \cdots, \left(\rho_{R(2)-1}^{(\ell)}, \theta_{R(1)-2}^{(\ell)}\right),$$

$$\cdots, \left(\rho_{R(r-1)+1}^{(\ell)}, \theta_{R(r-1)+1}^{(\ell)}\right), \cdots, \left(\rho_{R(r)-1}^{(\ell)}, \theta_{R(r)-1}^{(\ell)}\right), \cdots,$$

$$\left(\rho_{R(K(\ell)-1)+1}^{(\ell)}, \theta_{R(K(\ell)-1)+1}^{(\ell)}\right), \cdots, \left(\rho_\ell^{(\ell)}, \theta_\ell^{(\ell)}\right)\Big).$$

La loi du vecteur aléatoire $\Lambda_\ell$, conditionnée par $\Sigma_\ell$ est absolument continue et admet pour densité une fonction $g_4$ définie par :

$$g_4\Big((s_2, t_2), \cdots, (s_\ell, t_\ell)/\Theta_\ell\Big) = \frac{g_2\Big((s_1, t_1), \cdots, (s_\ell, t_\ell)\Big)}{g_3(\Theta_\ell)} \tag{5.3}$$

$$= \prod_{i \neq 1, R(1), \cdots, R(K(\ell)-1)} g(s_i, t_i) \frac{1}{H(\tilde{t}^{(\ell)})} \mathbb{I}_{\{0 < t_1 < t_{R(1)} < \cdots < t_{R(K(\ell)-1)} < 2\pi\}}$$

avec $t_1, t_{R(1)}, \cdots, t_{R(K(\ell)-1)}$ fixés.

4) $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, la loi du vecteur aléatoire

$$\Big(\left(\rho_{R(r-1)+1}^{(\ell)}, \theta_{R(r-)+1}^{(\ell)}\right), \cdots, \left(\rho_{R(r)-1)}^{(\ell)}, \theta_{R(r)-1}^{(\ell)}\right)\Big)$$

avec $r$ fixé dans $\{1, \cdots, K(\ell)\}$, conditionnée par $\Sigma_\ell$ est absolument continue et admet pour densité une fonction $g_5$ définie par :

$$g_5\Big((s_{R(r-1)+1}, t_{R(r-1)+1}), \cdots, (s_{R(r)-1}, t_{R(r)-1})/\Theta_\ell\Big) \tag{5.4}$$

$$= \int g_4\Big((s_2,t_2),\cdots,(s_\ell,\,t_\ell)/\Theta_\ell\Big)\ \begin{matrix} ds_2\cdots ds_{R(r-1)-1}d_{R(r-1)+1}\cdots ds_\ell \\ dt_2\cdots dt_{R(r-1)-1}dt_{R(r-1)+1}\cdots dt_\ell \end{matrix}$$

$$= \prod_{R(r-1)<i<R(r)} g(s_i,t_i)\,\frac{1}{H_1\Big(t_{R(r-1)},\ t_{R(r)}\Big)}\ \mathbb{I}_{\{t_{R(r-1)}<\cdots<t_{R(r)}\}}$$

où $H_1$ est une fonction strictement positive définie par :

$$H_1\Big(t_{R(r-1)},\ t_{R(r)}\Big) = \int_{\{t_{R(r-1)}<\cdots<t_{R(r)}\}} g_1(t_{R(r-1)+1})\cdots g_1(t_{R(r)})\,dt_{R(r-1)+1}\cdots dt_{R(r)}.$$

(5.5)

On désigne par $G_1$ la fonction de répartition commune aux variables aléatoires $\theta_1,\cdots,\ \theta_\ell$, de densité $g_1$. On a : pour $r=1,\cdots,\ K(\ell)$

$$H_1\Big(t_{R(r-1)},\ t_{R(r)}\Big)$$

$$= \int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r)}}\cdots\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r-1)+3}} g_1(t_{R(r)-1})\,g_1(t_{R(r)-2})\cdots g_1(t_{R(r-1)+2})\ \times$$

$$\left(\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r-1)+2}} g_1(t_{R(r-1)+1})dt_{R(r-1)+1}\right)dt_{R(r)-1}dt_{R(r)-2}\cdots dt_{R(r-1)+2}$$

$$= \int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r)}}\cdots\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r-1)+4}} g_1(t_{R(r)-1})\,g_1(t_{R(r)-2})\cdots g_1(t_{R(r-1)+3})\times$$

$$\left(\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r-1)+3}}\Big[G_1(t_{R(r-1)+2})-G_1(t_{R(r-1)})\Big]g_1(t_{R(r-1)+2})dt_{R(r-1)+2}\right)dt_{R(r)-1}dt_{R(r)-2}\cdots dt_{R(r-1)+3}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r)}}\cdots\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r-1)+5}} g_1(t_{R(r)-1})\,g_1(t_{R(r)-2})\cdots g_1(t_{R(r-1)+4})\times$$

$$\left(\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r-1)+4}}\Big[G_1(t_{R(r-1)+3})-G_1(t_{R(r-1)})\Big]^2 g_1(t_{R(r-1)+3})dt_{R(r-1)+3}\right)dt_{R(r)-1}dt_{R(r)-2}\cdots dt_{R(r-1)+4}$$

$$= \frac{1}{2\times 3}\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r)}}\cdots\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r-1)+6}} g_1(t_{R(r)-1})\,g_1(t_{R(r)-2})\cdots g_1(t_{R(r-1)+5})\times$$

$$\left(\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r-1)+5}}\Big[G_1(t_{R(r-1)+4})-G_1(t_{R(r-1)})\Big]^3 g_1(t_{R(r-1)+4})dt_{R(r-1)+4}\right)dt_{R(r)-1}dt_{R(r)-2}\cdots dt_{R(r-1)+5}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
&= \frac{1}{2\times 3\times\cdots\times(\nu_{\ell,r}-2)}\int_{t_{R(r-1)}}^{t_{R(r)}}\Big[G_1(t_{R(r)-1})-G_1(t_{R(r-1)})\Big]^{(\nu_{\ell,r}-2)} g_1(t_{R(r)-1})dt_{R(r)-1}\\
&= \frac{\Big[G_1(t_{R(r)})-G_1(t_{R(r-1)})\Big]^{(\nu_{\ell,r}-1)}}{(\nu_{\ell,r}-1)!}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, la formule (5.4) devient :

$$
\begin{aligned}
(5.6)\qquad & g_5\Big((s_{R(r-1)+1}, t_{R(r-1)+1}),\cdots,(s_{R(r)-1},, t_{R(r)-1})/\Theta_\ell\Big)\\
&= (\nu_{\ell,r}-1)! \prod_{R(r-1)<i<R(r)}\left[\frac{g(s_i,t_i)}{G_1\big(t_{R(r)}\big)-G_1\big(t_{R(r-1)}\big)}\right]\mathbb{I}_{\{t_{R(r-1)}<\cdots<t_{R(r)}\}}.
\end{aligned}
$$

5) $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, conditionnellement à

$$\Big(\theta_1^{(\ell)}=t_1,\, \theta_{R(1)}^{(\ell)}=t_{R(1)},\cdots,\, \theta_{R(r-1)+1}^{(\ell)}=t_{R(r-1)+1}\Big)$$

les $(\nu_{\ell,r}-1)$ variables aléatoires $\Big(\rho_{R(r-1)+1}^{(\ell)}\ ,\ \theta_{R(r-1)+1}^{(\ell}\Big),\cdots,\Big(\rho_{R(r)-1}^{(\ell)}\ ,\ \theta_{R(r)-1}^{(\ell}\Big)$ dans $D_{\ell,r}$, $1\le r\le K(\ell)$, sont une statistique d'ordre d'un échantillon d'une variable aléatoire dont la loi de probabilité est absolument continue et admet pour densité, pour :

$$
(5.7)\qquad \forall(\rho,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times]t_{R(r-1)}\,,\,t_{R(r)}[\qquad g_{6,r}(\rho,\theta)=\frac{g(\rho,\theta)}{G_1(t_{R(r)})-G_1(t_{R(r-1)})}.
$$

Ainsi, $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, sous la condition

$$\Big(\theta_1^{(\ell)}=t_1,\, \theta_{R(1)}^{(\ell)}=t_{R(1)},\cdots,\, \theta_{R(r-1)+1}^{(\ell)}=t_{R(r-1)+1}\Big)$$

les $(\nu_{\ell,r}-1)$ variables aléatoires $(\rho'_1,\ \theta'_1),\cdots,(\rho'_{\nu_{\ell,r}-1}\,,\,\theta'_{\nu_{\ell,r}-1})$ qui appartiennent à $D_{\ell,r}$ sont indépendantes de même loi de densité $g_{6,r}$ , $1\le r\le K(\ell)$, définie par (5.7).

6) La formule (5.6) exprime que la densité conditionnelle ne dépend que de $(s_{R(r-1)}\ ,\ t_{R(r-1)})$ et de $(s_{R(r)}\ ,\ t_{R(r)})$ et est indépendante des $(s_i,t_i)$,

$i \in \{1, \cdots, K(\ell)-1\} - \{R(r-1),\ R(r)\}$. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, si on désigne par $g_7$ la densité conditionnelle du vecteur aléatoire

$$\left(\left(\rho^{(\ell)}_{R(r-1)+1}\ ,\ \theta^{(\ell)}_{R(r-1)+1}\right), \cdots, \left(\rho^{(\ell)}_{R(r)-1)}\ ,\ \theta^{(\ell)}_{R(r)-1}\right)\right)$$

étant donné

$$\left(\rho^{(\ell)}_{R(r-1)}\ ,\ \theta^{(\ell)}_{R(r-1)}\right) = (s_{R(r-1)}\ ,\ t_{R(r-1)}) \text{ et } \left(\rho^{(\ell)}_{\mathrm{R(r)}}\ ,\ \theta^{(\ell)}_{\mathrm{R(r)}}\right) = (\mathrm{s}_{\mathrm{R(r)}}\ ,\ \mathrm{t}_{\mathrm{R(r)}}).$$

On a alors

$$g_5\left((s_{R(r-1)+1}, t_{R(r-1)+1}), \cdots, (s_{R(r)-1},\ t_{R(r)-1})/\Theta_\ell\right) \tag{5.8}$$

$$= g_7\left((s_{R(r-1)+1}, t_{R(r-1)+1}), \cdots, (s_{R(r)-1}, t_{R(r)-1})/(s_{R(r-1)}, t_{R(r-1)}),\ (s_{R(r)}\ ,\ t_{R(r)})\right).$$

Donc pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, sous la condition

$$\left(\theta^{(\ell)}_{R(r-1)} = t_{R(r-1)}\ ,\ \theta^{(\ell)}_{R(r)} = t_{R(r)}\right)$$

les $(\nu_{\ell,r} - 1)$ variables aléatoires

$$\left(\rho^{(\ell)}_{R(r-1)+1}\ ,\ \theta^{(\ell)}_{R(r-1)+1}\right), \cdots, \left(\rho^{(\ell)}_{R(r)-1}\ ,\ \theta^{(\ell)}_{R(r)-1}\right)$$

dans $D_{\ell,r}$, est une statistique d'ordre d'un $(\nu_{\ell,r} - 1)$-échantillon d'une variable aléatoire de loi de probabilité absolument continue qui admet pour densité la fonction $g_6, r$ définie par (6.7), et que les $(\nu_{\ell,r} - 1)$ variables aléatoires $(\rho'_1, \theta'_1), \cdots, (\rho'_{\nu_{\ell,r}-1}\ ,\ \theta'_{\nu_{\ell,r}-1})$ qui appartiennent à $D_{\ell,r}$, $1 \leq r \leq K(\ell)$, sont indépendantes de même loi de densité $g_{6,r}$ définie par (6.7).

7) En associant les formules (6.3), (6.4), (6.5) et (6.6). Nous obtenons la formule

$$g_4\left((s_2, t_2), \cdots, (s_\ell\ ,\ t_\ell)/\Theta_\ell\right)$$
$$= \prod_{r=1}^{K(\ell)} \left[g_5\left((s_{R(r-1)+1}, t_{R(r-1)+1}), \cdots, (s_{R(r)-1}, , t_{R(r)-1})/\Theta_\ell\right)\right].$$

Donc les vecteurs aléatoires

$$\left(\left(\rho_2^{(\ell)}\,,\,\theta_2^{(\ell)}\right),\cdots,\left(\rho_{R(1)-1}^{(\ell)}\,,\,\theta_{R(1)-1}^{(\ell)}\right)\right),\ \left(\left(\rho_{R(1)+1}^{(\ell)}\,,\,\theta_{R(1)+1}^{(\ell)}\right),\cdots,\left(\rho_{R(2)-1}^{(\ell)}\,,\,\theta_{R(1)-2}^{(\ell)}\right)\right),$$

$$\cdots,\left(\left(\rho_{R(r-1)+1}^{(\ell)}\,,\,\theta_{R(r-1)+1}^{(\ell)}\right),\cdots,\left(\rho_{R(r)-1}^{(\ell)}\,,\,\theta_{R(r)-1}^{(\ell)}\right)\right),\cdots,$$

$$\left(\left(\rho_{R(K(\ell)-1)+1}^{(\ell)}\,,\,\theta_{R(K(\ell)-1)+1}^{(\ell)}\right),\cdots,\left(\rho_\ell^{(\ell)}\,,\,\theta_\ell^{(\ell)}\right)\right)$$

sont indépendants conditionnellement à $\left\{L^{(n)}=\ell\right\}$ et à $\Sigma_\ell$.

Ainsi les vecteurs aléatoires

$$\left((\rho_1',\theta_1'),\cdots,(\rho_{\nu_{\ell,r}-1}'\,,\,\theta_{\nu_{\ell,r}-1}')\right)_{1\leq r\leq K(\ell)}$$

sont indépendants conditionnellement à

$$\left\{L^{(n)}=\ell\right\} \text{ et à } \left(\theta_1^{(\ell)}=t_1,\ \theta_{R(1)}^{(\ell)}=t_{R(1)},\cdots,\ \theta_{R(K(\ell)-1)}^{(\ell)}=t_{R(K(\ell)-1)}\right).$$

# Appendice 2 : Lois de probabilités conditionnelles en coordonnées rectangulaires

D'après le chapitre2(§2.2), pour tout $n$, la loi du vecteur aléatoire

$$\left(\left(X_{1,n}\ ;\ Y_{1,n}\right),\cdots,\left(X_{L^{(n)},n}\ ;\ Y_{L^{(n)},n}\right)\right)$$

conditionnée par $\left\{L^{(n)}=\ell\right\}$, est identique à celle d'un vecteur aléatoire $\left((X_1\,,\,Y_1),\cdots,X_\ell\,,\,Y_\ell)\right)$ de $\ell$ variables aléatoires indépendantes de même loi de densité $g$ définie par (2.3) (chapitre2, §2.2).
Cette partie traite de la loi conditionnelle étant donné $\left\{L^{(n)}=\ell\right\}$ d'éléments aléatoires qui sont fonctions de $\left(X_{1,n}\ ;\ Y_{1,n}\right),\cdots,\left(X_{L^{(n)},n}\ ;\ Y_{L^{(n)},n}\right)$.
Comme indiqué en appendice1, pour traiter les lois conditionnelles, étant donné $\left\{L^{(n)}=\ell\right\}$, d'éléments aléatoires qui sont fonctions de

$$\left(\left(X_{1,n}\ ;\ Y_{1,n}\right),\cdots,\left(X_{L^{(n)},n}\ ;\ Y_{L^{(n)},n}\right)\right),$$

il est plus pratique de faire les calculs et de donner les résultats pour les variables aléatoires $(X_1\,,\,Y_1),\cdots,(X_\ell\,,\,Y_\ell)$. L'étude des lois conditionnelles suit les grandes lignes de celles de l'appendice1, avec quelques modifications de calculs. Les notations utilisées dans la suite sont celles du chapitre2(§2.2).

1) $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, la loi du vecteur aléatoire $\Big((X_1^{(\ell)}, Y_1^{(\ell)}), \cdots, (X_\ell^{(\ell)}, Y_\ell^{(\ell)})\Big)$ est absolument continue et admet pour densité une fonction $\hat{g}_2$ définie sur $\Big(]0\,,\,1[\times\mathbb{R}_+^*\Big)^\ell$ par :

$$\hat{g}_2\Big((x_1,y_1),\ldots,(x_\ell,y_\ell)\Big) = \ell!\, g(x_1,y_1)\cdots g(x_\ell y_\ell)\, \mathbb{1}_{\{0<x_1<\cdots<x_\ell<1\}}. \tag{6.1}$$

2) $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, la loi du vecteur aléatoire

$$\Big((X_{R_1(\ell)}^{(\ell)}\,,\,Y_{R_1(\ell)}^{(\ell)}), \cdots, (X_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}^{(\ell)}\,,\,Y_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}^{(\ell)})\Big)$$

est absolument continue et admet pour densité une fonction $\hat{g}_3$ définie sur $\Big(]0\,,\,1[\times\mathbb{R}_+^*\Big)^{K(\ell)-1}$ par :

$$\begin{aligned}
&\hat{g}_3\Big((x_{R_1(\ell)}\,,\,y_{R_1(\ell)})\cdots,(x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\,,\,y_{R_{K(\ell)-1}(\ell)})\Big)\\
&= \int_{\left(]0,1[\times\mathbb{R}_+^*\right)^{\ell-K(\ell)+1}} \hat{g}_2\Big((x_1,y_1),\cdots,(x_\ell,y_\ell)\Big)\ \begin{matrix} dx_1\cdots dx_{R_1(\ell)-1}dx_{R_1(\ell)+1}\cdots dx_\ell \\ dy_1\cdots dy_{R_1(\ell)-1}dy_{R_1(\ell)+1}\cdots dy_\ell\end{matrix}\\
&= \ell!\, g(x_{R_1(\ell)}\,,\,y_{R_1(\ell)})\cdots g(x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\,,\,y_{R_{K(\ell)-1}(\ell)})\, \mathbb{1}_{\{<x_{R_1(\ell)}<\cdots<x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\}} \times\\
&\int g(x_1,y_1)\cdots g(x_{R_1(\ell)-1}\,,\,y_{R_1(\ell)-1})\, \mathbb{1}_{\{0<x_1<\cdots<x_{R_1(\ell)}\}}\ \begin{matrix} dx_1\cdots dx_{R_1(\ell)-1}\\ dy_1\cdots dy_{R_1(\ell)-1}\end{matrix} \times\\
&\int g(x_{R_1(\ell)+1}\,,\,y_{R_1(\ell)+1})\cdots g(x_{R_2(\ell)-1}\,,\,y_{R_2(\ell)-1})\, \mathbb{1}_{\{x_{R_1(\ell)}<\cdots<x_{R_2(\ell)}\}}\ \begin{matrix} dx_{R_1(\ell)+1}\cdots dx_{R_2(\ell)-1}\\ dy_{R_1(\ell)+1}\cdots dy_{R_2(\ell)-1}\end{matrix} \times\\
&\vdots\\
&\int g(x_{R_{K(\ell)-1)}(\ell)+1}, y_{R_{K(\ell)-1}(\ell)+1})\cdots g(x_\ell,y_\ell)\, \mathbb{1}_{\{x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}<\cdots<x_\ell<1\}}\ \begin{matrix} dx_{R_{K(\ell)-1}(\ell)+1}\cdots dx_\ell\\ dy_{R_{K(\ell)-1}(\ell)+1}\cdots dy_\ell\end{matrix}\\
&= \ell!\, g(x_{R_1(\ell)}\,,\,y_{R_1(\ell)})\cdots g(x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\,,\,y_{R_{K(\ell)-1}(\ell)})\, \hat{H}(\tilde{x}^{(\ell)})\mathbb{1}_{\{x_{R_1(\ell)}<\cdots<y_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\}}
\end{aligned}$$

où $\tilde{x}^{(\ell)} = \left(x_{R_1(\ell)}, \cdots, x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\right)$ et où $\hat{H}$ est une fonction de $(]0\,,1[)^{K(\ell)-1}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$
\begin{aligned}
\hat{H}(\tilde{x}^{(\ell)}) \;=\; & \int_{\{x_1<x_2<\cdots<x_{R_1(\ell)}\}} g_1(x_2)\cdots g_1(x_{R_1(\ell)-1})\,dx_1\cdots dx_{R_1(\ell)-1} \times \\
& \int_{\{x_{R_1(\ell)}<\cdots<x_{R_2(\ell)}\}} g_1(x_{R_1(\ell)+1})\cdots g_1(x_{R_2(\ell)-1})\,dx_{R_1(\ell)+1}\cdots dx_{R_2(\ell)-1} \times \\
(6.2)\qquad & \vdots \\
& \int_{\{x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}<\cdots<x_\ell\}} g_1(x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)+1})\cdots g_1(x_\ell)\,dx_{R_{K(\ell)-1}(\ell)+1}\cdots dx_\ell .
\end{aligned}
$$

3) Posons : $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$,

$$
\Sigma'_\ell = \left\{ \begin{array}{c} \left(X^{(\ell)}_{R_1(\ell)}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_1(\ell)}\right) = (x_{R_1(\ell)}\,,\, y_{R_1(\ell)}), \cdots, \\ (X^{(\ell)}_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\Big) = (x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\,,\, y_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}) \end{array} \right\},
$$

$$
\Theta'_\ell = \left( (x_{R_1(\ell)}, y_{R_1(\ell)}), \cdots, (x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\,,\, y_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}) \right)
$$

et $\Lambda'_\ell$ égal au vecteur aléatoire

$$
\begin{aligned}
\Bigg( & \left(X^{(\ell)}_1\,,\, Y^{(\ell)}_1\right), \cdots, \left(X^{(\ell)}_{R_1(\ell)-1}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_1(\ell)-1}\right), \left(X^{(\ell)}_{R_1(\ell)+1}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_1(\ell)+1}\right), \cdots, \left(X^{(\ell)}_{R_2(\ell)-1}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_1(\ell)-1}\right), \\
& \cdots, \left(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\right), \cdots, \left(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\right), \cdots, \\
& \left(X^{(\ell)}_{R_{K(\ell)-1}(\ell)+1}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_{K(\ell)-1}(\ell)+1}\right), \cdots, \left(X^{(\ell)}_\ell\,,\, Y^{(\ell)}_\ell\right) \Bigg).
\end{aligned}
$$

La loi conditionnelle du vecteur aléatoire $\Lambda'_\ell$, étant donné $\Sigma'_\ell$ est absolument continue et admet pour densité une fonction $\hat{g}_4$ qui d'après la définition d'une densité conditionnelle est définie par :

$$
\begin{aligned}
(6.3)\qquad & \hat{g}_4\Big( (x_1, y_1), \cdots, (x_\ell, y_\ell)/\Theta'_\ell \Big) \\
& \qquad = \prod_{i\neq 1, R(1), \cdots, R_{K(\ell)-1}(\ell)} g(x_i, y_i)\, \frac{1}{\hat{H}(\tilde{x}^{(\ell)})} \mathbb{I}_{\{0<x_1<\cdots<x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}<1\}}
\end{aligned}
$$

avec $x_{R_1(\ell)}, \cdots, x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}$ fixés.

4) $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle du vecteur aléatoire

$$\left(\left(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\right), \cdots, \left(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\,,\, Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\right)\right)$$

avec $j$ fixé dans $\{1, \cdots, K(\ell)\}$, étant donné $\Sigma'_\ell$ est absolument continue et admet pour densité une fonction $\hat{g}_5$ définie par :

$$\begin{aligned}
(6.4)\qquad & \hat{g}_5\Big((x_{R_{j-1}(\ell)+1}, y_{R_{j-1}(\ell)+1}), \cdots, (x_{R_j(\ell)-1}, y_{R_j(\ell)-1})/\Theta'_\ell\Big) \\
&= \int \hat{g}_4\Big((x_1, y_1), \cdots, (x_\ell, , y_\ell)/\Theta'_\ell\Big) \begin{array}{l} dx_1 \cdots dx_{R_{j-1}(\ell)-1} d_{R_{j-1}(\ell)+1} \cdots dx_\ell \\ dy_1 \cdots dy_{R_{j-1}(\ell)-1} dy_{R_{j-1}(\ell)+1} \cdots dy_\ell \end{array} \\
&= \prod_{R_{j-1}(\ell)<i<R_j(\ell)} g(x_i, y_i) \frac{1}{\hat{H}_1\Big(x_{R_{j-1}(\ell)},\, y_{R_j(\ell)}\Big)} \mathbb{1}_{\{x_{R_{j-1}(\ell)}<\cdots<x_{R_j(\ell)}\}}
\end{aligned}$$

où $\hat{H}_1$ est une fonction strictement positive définie par :

$$\begin{aligned}
(6.5)\qquad & \hat{H}_1\Big(x_{R_{j-1}(\ell)},\, x_{R_j(\ell)}\Big) \\
&= \int_{\{x_{R_{j-1}(\ell)}<\cdots<x_{R_j(\ell)-1}\}} g_1(x_{R_{j-1}(\ell)+1}) \cdots g_1(x_{R_j(\ell)})\, dx_{R_{j-1}(\ell)+1} \cdots dx_{R_j(\ell)-1}.
\end{aligned}$$

On désigne par $G_1$ la fonction de répartition de $g_1$. On a : pour $j = 1, \cdots, K(\ell)$

$$\begin{aligned}
& \hat{H}_1\Big(x_{R_{j-1}(\ell)},\, x_{R_j(\ell)}\Big) \\
&= \int_{x_{R_{j-1}(\ell)}}^{x_{R_j(\ell)}} \cdots \int_{x_{R_{j-1}(\ell)}}^{x_{R_{-1}(\ell)+3}} g_1(x_{R_j(\ell)-1})\, g_1(x_{R_j(\ell)-2}) \cdots g_1(x_{R_{j-1}(\ell)+2}) \times \\
&\quad \left(\int_{x_{R_{j-1}(\ell)}}^{x_{R_{j-1}(\ell)+2}} g_1(x_{R_{j-1}(\ell)+1}) dx_{R_{j-1}(\ell)+1}\right) dx_{R_j(\ell)-1} dx_{R_j(\ell)-2} \cdots dx_{R_{j-1}(\ell)+2}.
\end{aligned}$$

On obtient, en procédant comme en appendice1 :

$$\hat{H}_1\Big(x_{R_{j-1}(\ell)},\, x_{R_j(\ell)}\Big) = \frac{\Big[G_1(x_{R_j(\ell)}) - G_1(x_{R_{j-1}(\ell)})\Big]^{(\nu_j(\ell)-1)}}{(\nu_j(\ell)-1)!}.$$

Ainsi, $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, la formule (6.4) devient :

$$(6.6) \qquad \hat{g}_5\Big( (x_{R_{j-1}(\ell)+1}\ ,\ y_{R_{j-1}(\ell)+1}), \cdots, (x_{R_j(\ell)-1}\ ,\ x_{R_j(\ell)-1}) / \Theta'_\ell \Big)$$

$$= (\nu_j(\ell)-1)! \prod_{R_{j-1}(\ell)<i<R_j(\ell)} \left[ \frac{g(x_i, y_i)}{G_1\big(x_{R_j(\ell)}\big) - G_1\Big(x_{R_{j-1}(\ell)}\Big)} \right] \mathbb{I}_{\{x_{R_{j-1}(\ell)}<\cdots<x_{R_j(\ell)}\}}.$$

5) $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, conditionnellement à

$$\Big( X^{(\ell)}_{R_1(\ell)} = x_{R(1)}, \cdots, X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1} = x_{R_{j-1}(\ell)+1} \Big)$$

les $(\nu_j(\ell)-1)$ variables aléatoires $\Big( X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\ ,\ Y^{(\ell}_{R_{j-1}(\ell)+1} \Big), \cdots, \Big( X^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\ ,\ Y^{(\ell}_{R_j(\ell)-1} \Big)$ dans $D_{\ell,j}$, $1 \le j \le K(\ell)$, est un échantillon ordonné de taille $\nu_j(\ell)-1$ de la loi de probabilité qui admet pour densité :

$$(6.7) \qquad \forall (x,y) \in ]x_{R_{j-1}(\ell)}\ ,\ x_{R_j(\ell)}[ \times \mathbb{R}^*_+ \qquad \hat{g}_{6,j}(x,y) = \frac{g(x,y)}{G_1(x_{R_j(\ell)}) - G_1(x_{R_{j-1}(\ell)})}.$$

Ainsi, $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, sous la condition

$$\Big( X^{(\ell)}_{R_1(\ell)} = x_{R_1(\ell)}, \cdots, X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1} = x_{R_{j-1}(\ell)+1} \Big)$$

les $(\nu_j(\ell)-1)$ variables aléatoires $(X'_1,\ Y'_1), \cdots, (X'_{\nu_j(\ell)-1}\ ,\ Y'_{\nu_j(\ell)-1})$ qui appartiennent à $D_{\ell,j}$ sont indépendantes de même loi de densité $\hat{g}_{6,j}$ , $1 \le j \le K(\ell)$, définie par (6.7).

6) La formule (6.6) exprime que la densité conditionnelle ne dépend que de $(x_{R_{j-1}(\ell)}\ ,\ y_{R_{j-1}(\ell)})$ et de $(x_{R_j(\ell)}\ ,\ y_{R_j(\ell)})$, et est indépendante des $(x_i, y_i)$, $i \in \{1, \cdots, K(\ell)-1\} - \{R_{j-1}(\ell), R_j(\ell)\}$. Pour tout $\ell$ dans $\mathbb{N}^*$, si on désigne par $\hat{g}_7$ la densité conditionnelle du vecteur aléatoire

$$\Big( \Big( X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\ ,\ Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1} \Big), \cdots, \Big( X^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\ ,\ Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1} \Big) \Big)$$

étant donné

$$\left(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)}\,,\ Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)}\right) = (x_{R_{j-1}(\ell)}\,,\ y_{R_{j-1}(\ell)}) \text{ et } \left(\mathrm{X}^{(\ell)}_{\mathrm{R_j}(\ell)}\,,\ \mathrm{Y}^{(\ell)}_{\mathrm{R_j}(\ell)}\right) = (\mathrm{x}_{\mathrm{R_j}(\ell)}\,,\ \mathrm{y}_{\mathrm{R_j}(\ell)}).$$

On a alors

(6.8) $$\hat{g}_5\Big((x_{R_{j-1}(\ell)+1}, y_{R_{j-1}(\ell)+1}), \cdots, (x_{R_j(\ell)-1},\ y_{R_j(\ell)-1})/\Theta'_\ell\Big)$$

$$= \hat{g}_7\Big((x_{R_{j-1}(\ell)+1}, y_{R_{j-1}(\ell)+1}), \cdots, (x_{R_j(\ell)-1},\ y_{R_j(\ell)-1})/(x_{R_{j-1}(\ell)}, y_{R_{j-1}(\ell)}),\ (x_{R_j(\ell)}\,,\ y_{R_j(\ell)})\Big).$$

Donc pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, sous la condition

$$\left(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)} = x_{R_{j-1}(\ell)}\,,\ X^{(\ell)}_{R_j(\ell)} = x_{R_j(\ell)}\right)$$

les $(\nu_j(\ell) - 1)$ variables aléatoires

$$\left(X^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\,,\ Y^{(\ell)}_{R_{j-1}(\ell)+1}\right), \cdots, \left(X^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\,,\ Y^{(\ell)}_{R_j(\ell)-1}\right)$$

dans $D_{\ell,j}$, est un échantillon ordonné de taille $(\nu_j(\ell) - 1)$ de la loi de probabilité qui admet pour densité la fonction $\hat{g}_{6,j}$ définie par (6.7), et que les $(\nu_j(\ell) - 1)$ variables aléatoires $(X'_1, Y'_1), \cdots, (X'_{\nu_j(\ell)-1}\,,\ Y'_{(\nu_j(\ell)-1})$ qui appartiennent à $D_{\ell,j}$, $1 \leq j \leq K(\ell)$, sont indépendantes de même loi de densité $\hat{g}_{6,j}$ définie par (6.7).

7) En associant les formules (6.2),(6.3), (6.4) et (6.5). Nous obtenons la formule :

$$\hat{g}_4\Big((x_2, y_2), \cdots, (x_\ell, , y_\ell)/\Theta'_\ell\Big)$$
$$= \prod_{j=1}^{K(\ell)}\left[\hat{g}_5\Big((x_{R_{j-1}(\ell)+1}\,,\ y_{R_{j-1}(\ell)+1}), \cdots, (x_{R_j(\ell)-1}\,,\ y_{R_j(\ell)-1})/\Theta'_\ell\Big)\right].$$

Donc les vecteurs aléatoires

$$\left(\left(X_1^{(\ell)}, Y_1^{(\ell)}\right), \cdots, \left(X_{R_1(\ell)-1}^{(\ell)}, Y_{R_1(\ell)-1}^{(\ell)}\right)\right), \left(\left(X_{R_1(\ell)+1}^{(\ell)}, Y_{R_1(\ell)+1}^{(\ell)}\right), \cdots, \left(X_{R_2(\ell)-1}^{(\ell)}, Y_{R_1(\ell)-1}^{(\ell)}\right)\right),$$

$$\cdots, \left(\left(X_{R_{j-1}(\ell)+1}^{(\ell)}, Y_{R_{j-1}(\ell)+1}^{(\ell)}\right), \cdots, \left(X_{R_j(\ell)-1}^{(\ell)}, Y_{R_j(\ell)-1}^{(\ell)}\right)\right), \cdots,$$

$$\left(\left(X_{R_{K(\ell)-1}(\ell)+1}^{(\ell)}, Y_{R_{K(\ell)-1}(\ell)+1}^{(\ell)}\right), \cdots, \left(X_\ell^{(\ell)}, Y_\ell^{(\ell)}\right)\right)$$

sont indépendants conditionnellement à $\left\{L^{(n)} = \ell\right\}$ et à $\Sigma'_\ell$.

Ainsi les vecteurs aléatoires

$$\left((X'_1, Y'_1), \cdots, (X'_{\nu_j(\ell)-1}, Y'_{\nu_j(\ell)-1})\right)_{1 \leq j \leq K(\ell)}$$

sont indépendants conditionnellement à

$$\left\{L^{(n)} = \ell\right\} \text{ et à } \left(X_{R_1(\ell)}^{(\ell)} = x_{R_1(\ell)}, \cdots, X_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}^{(\ell)} = x_{R_{K(\ell)-1}(\ell)}\right).$$