



50376
1996
298

N° d'ordre : 1814

THESE DE DOCTORAT

présentée à

**L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE LILLE**

en vue de l'obtention du titre de
DOCTEUR en MECANIQUE

par
Fabrice LOISEAU

SIMULATION NUMERIQUE D'ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE - CARACTERISATION DE LA COUCHE LIMITE DE FOND ENGENDREE PAR UN ECOULEMENT DE HOULE ET DE COURANT

Soutenue le 21 octobre 1996 devant la commission d'examen :

Président A. DYMENT, *Professeur*, Université des Sciences et Technologies de Lille

Rapporteurs M. BELORGEY, *Professeur*, Université du Havre
 A. TEMPERVILLE, *Professeur*, Université Joseph Fourier, Grenoble

Examineurs C. ESTOURNELLE, *CR CNRS*, Laboratoire d'Aérodynamique de Toulouse
 J.M. TANGUY, *Phd, Chef de division*, STCPMVN Compiègne
 P. MICHEAU, *Professeur Emérite*, Université des Sciences et Technologies de Lille

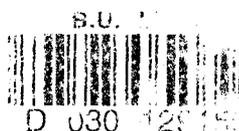




TABLE DES MATIERES.

REMERCIEMENTS.....	9
--------------------	---

CHAPITRE : 1

1 : UNE MOTIVATION : L'ETUDE DU TRANSIT SEDIMENTAIRE SUR LA COTE D'OPALE.....	11
1.1 : INTRODUCTION.....	12
1.2 : LES AGENTS DU TRANSIT SEDIMENTAIRE.....	12
1.2.1 : LES SEDIMENTS EN PRESENCE.....	13
1.2.2 : LA HOULE SUR LA MANCHE.....	14
1.3 : LES MODELES DE TRANSPORT SEDIMENTAIRE.....	17
1.3.1 : LES RELATIONS EMPIRIQUES.....	17
1.3.2 : LES FORMULATIONS SEMI-THEORIQUES.....	19
1.3.3 : LES CRITERES D'ARRACHAGE.....	20
1.4 : SYNTHESE.....	22

CHAPITRE : 2

2 : LE MODELE NUMERIQUE.....	25
2.1 : INTRODUCTION - SIMULATION NUMERIQUE D'ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE.....	26
2.1.1 : LES METHODES M.A.C.....	26
2.1.2 : LES METHODES V.O.F.....	27
2.1.3 : LES METHODES AVEC CHANGEMENT DE COORDONNEES.....	28
2.1.4 : LES METHODES A.L.E.....	29
2.1.5 : OBJECTIFS ET CHOIX.....	30
2.2 : FORMULATION DU PROBLEME - METHODE A.L.E.....	30
2.3 : LA DISCRETISATION.....	32
2.3.1 : LA DISCRETISATION TEMPORELLE.....	32
2.3.2 : LA DISCRETISATION SPATIALE.....	33
2.4 : LE SCHEMA NUMERIQUE.....	37
2.4.1 : CHOIX DE LA DISCRETISATION DES VARIABLES SUR CHAQUE ELEMENT.....	37
2.4.2 : PREMIERE PHASE DE RESOLUTION : L'ETAPE LAGRANGIENNE.....	38
2.4.3 : DEUXIEME PHASE DE RESOLUTION : L'ETAPE CONVECTIVE.....	42
REMARQUES.....	44
2.5 : LES CRITERES DE STABILITE.....	45
2.6 : LA VITESSE DE GRILLE.....	46
REMARQUES.....	50

2.7 : LES CONDITIONS AUX LIMITES.....	52
2.7.1 : CONDITIONS A L'INTERSECTION SURFACE LIBRE - PAROI.....	54
2.7.2 : CONDITION D'AMORTISSEMENT :	
LES EQUATIONS DU MILIEU POREUX ET SES CONDITIONS AUX LIMITES.....	60
2.7.3 : CONDITIONS DE CONTRAINTES A LA SURFACE LIBRE.....	67
2.8 : CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS A L'ENTREE	
AUX FRONTIERES FLUIDES.	69
2.9 : L'ALGORITHME.....	70
2.9.1 : ALGORITHME GENERAL.	71
2.9.2 : ALGHORITHME POUR L'ETAPE DE RESOLUTION LAGRANGIENNE.	72
2.9.3 : ALGHORITHME POUR L'ETAPE DE REDEFINITION	
DU NOUVEAU MAILLAGE.	73
2.9.4 : ALGHORITHME POUR L'ETAPE CONVECTIVE.....	74

CHAPITRE : 3

3 : PROPAGATION D'UNE ONDE SOLITAIRE DE GRAVITE.	75
3.1 : INTRODUCTION : LES RESULTATS ANALYTIQUES.....	76
3.1.1 : PROPAGATION D'UN SOLITON POUR UN FLUIDE PARFAIT.....	76
3.1.2 : COMPORTEMENT DU SOLITON EN MILIEU VISQUEUX.....	77
3.1.3 : REFLEXION D'UN SOLITON SUR UN MUR VERTICAL.....	78
3.1.3.1 : AMPLITUDE A LA REFLEXION.....	78
3.1.3.2 : DEPHASAGE.	80
3.2 : LES TESTS NUMERIQUES DU PROGRAMME.	81
3.2.1 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU PAS DE TEMPS.....	83
3.2.2 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU PAS SPATIAL.....	84
3.2.3 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DE LA TECHNIQUE	
D'INTERPOLATION POUR DEFINIR LA LOCALISATION DE LA SURFACE LIBRE.	
.....	84
3.2.4 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU SCHEMA CONVECTIF.....	85
3.2.5 : ETUDE DE SENSIBILITE : CHOIX DE LA METHODE DE TRAITEMENT	
DE L'INTERACTION SURFACE LIBRE-PAROI.....	87
3.2.6 : RESUME.....	88
3.3 : COMPARAISONS ENTRE LES RESULTATS FOURNIS PAR LE CODE DE CALCUL,	
LES RESULTATS ANALYTIQUES ET EXPERIMENTAUX.	88
3.3.1 : CELERITE DU SOLITON.....	88
3.3.2 : EVOLUTION DE L'AMPLITUDE A BAS NOMBRE DE REYNOLDS.....	91
3.3.3 : REFLEXION D'UN SOLITON SUR UNE PAROI VERTICALE.....	92
3.3.4 : RESUME.....	95

CHAPITRE : 4

4 : CARACTERISATION DE LA COUCHE LIMITE ENGENDREE PAR UN ECOULEMENT DE HOULE.....	101
4.1 : INTRODUCTION.....	102
4.2 : RESOLUTION CLASSIQUE DU PROBLEME.....	102
4.3 : LES OBJECTIFS.....	104
4.3.1 : DESCRIPTION DU DOMAINE D'ETUDE.....	105
4.3.2 : CONDITIONS AUX LIMITES.....	106
4.3.3 : CONDITIONS INITIALES.....	106
4.4 : COMPORTEMENT DE LA HOULE LE LONG DU CANAL.....	106
4.4.1 : COMPORTEMENT SPATIAL DE LA HOULE SIMULEE.....	107
4.4.2 : COMPORTEMENT TEMPOREL DE LA HOULE SIMULEE.....	110
4.5 : INFLUENCE DU MAILLAGE.....	116
4.6 : COMPARAISON.....	118
4.6.1 : COMPARAISON AVEC UN MODELE ANALYTIQUE.....	118
4.6.2 : COMPARAISON AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX.....	123

CHAPITRE : 5

5 : CARACTERISATION DE LA COUCHE LIMITE ENGENDREE PAR UN ECOULEMENT DE COURANT.....	127
5.1 : INTRODUCTION.....	128
5.2 : LES CONDITIONS DE CALCUL.....	128
5.3 : COMPORTEMENT DE L'ECOULEMENT LE LONG DU CANAL.....	129
5.4 : ETUDE PARAMETRIQUE.....	133
5.5 : COEFFICIENT DE CHEZY.....	136

CHAPITRE : 6

6 : ECOULEMENTS DE HOULE ET DE COURANT SUPERPOSES.....	139
A°/ ECOULEMENT COMBINE DE HOULE ET DE COURANT (42 MM/S).....	141
B°/ ECOULEMENT COMBINE DE HOULE ET DE COURANT (52 MM/S).....	142
C°/ ECOULEMENT COMBINE DE HOULE ET DE COURANT (67 MM/S).....	143

7 : CONCLUSION.....	147
---------------------	-----

8 : BIBLIOGRAPHIE.....	151
------------------------	-----



ANNEXES



ANNEXE A1. : EXEMPLES D'APPLICATIONS.....	159
AMORTISSEUR À HOULE.....	162
DIGUE DE FORME QUADRILATÉRALE.....	164
ANNEXE A2. : CONTRAINTES A LA SURFACE LIBRE.....	169
ANNEXE A3. : L'ONDE SOLITAIRE DE GRAVITE.....	175
A3.1 : INTRODUCTION.....	176
A3.2 : LES HYPOTHESES.....	176
A3.3 : LES EQUATIONS.....	177
A3.4 : LA RESOLUTION.....	177
ANNEXE A4. : LA HOULE DE STOKES.....	181
A4.1 : INTRODUCTION.....	182
A4.2 : LES HYPOTHESES.....	182
A4.3 : LES EQUATIONS ET LA RESOLUTION.....	182
ANNEXE A5. : LA COUCHE LIMITE SANS GRADIENT DE PRESSION.....	187
A5.1 : INTRODUCTION.....	188
A5.2 : REGION LAMINAIRE.....	188
A5.3 : REGION LOGARITHMIQUE.....	189
A5.4 : CALCUL DU COEFFICIENT DE PERTE DE CHARGE.....	190

REMERCIEMENTS.

Mes premières pensées vont à Mr. MICHEAU, *professeur émérite* à l'Université des Sciences et Technologies de Lille. J'ai pu grâce à lui réaliser cette thèse. Durant ces trois années de travail, il m'a fortement conseillé, orienté et aidé sur les différents thèmes qui ont été abordés et ce, malgré les nombreuses tâches qu'il devait assumer. Aussi, je le remercie vivement pour sa clairvoyance et sa disponibilité en espérant laisser auprès de lui une trace indéniable en tant qu'un de ces derniers doctorants.

Ma seconde pensée va à Mr. BELORGEY, *professeur* à l'université du Havre, je le remercie à la fois pour son accueil chaleureux au sein de son Laboratoire (Laboratoire de Mécanique des Fluides et Génie Civil du Havre), pour les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec sa personne, pour son soutien et ses conseils. Je le remercie également pour avoir accepté de juger ce travail.

De même, mes remerciements vont à Mr. TEMPERVILLE, *professeur* à l'Université Joseph Fourier de Grenoble de bien avoir voulu juger ce travail en tant que rapporteur. Je lui suis reconnaissant pour ce témoignage de l'intérêt qu'il a porté à cette étude.

Je remercie vivement Mde. ESTOURNELLE, Chargée de Recherche au Laboratoire d'Aérodynamique de Toulouse, et Mr. TANGUY, Phd, chef de division au STCPMVN de Compiègne, d'avoir bien voulu examiner ce travail.

Je pense également à toute l'équipe de Laboratoire de Mécanique des Fluides et Génie Civil du Havre. Je remercie plus particulièrement François MARIN et Denis TCHEUKAM-TOKO pour les nombreuses discussions qu'on a pu avoir ensemble. Je tiens à souligner une collaboration fructueuse entre ces mêmes personnes et moi même, elle s'est déjà traduite par plusieurs communications communes et j'espère qu'elle continuera aussi fortement par de futures publications.

Je n'oublie pas M. NAJI qui m'a fait confiance durant mon stage de DEA et qui m'a surtout donné goût à la recherche et m'a fait découvrir le domaine de la simulation numérique en mécanique des fluides.

Je pense également à M. LEROY, je le remercie pour son aide matériel.

Je ne peut oublier la Région Nord-Pas de Calais et le CNRS pour leur aide financière sans laquelle cette thèse n'aurait pu être réalisée. Je les remercie de m'avoir fait confiance en m'octroyant une Bourse de Docteur Ingénieur.

Je remercie également le centre de calcul, l'IDRIS pour sa disponibilité et pour l'aide qu'il a pu m'apporter.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude à l'ensemble des membres du Laboratoire de Mécanique de Lille.

1 : UNE MOTIVATION : L'ETUDE DU TRANSIT SEDIMENTAIRE SUR LA COTE D'OPALE

TABLE DES MATIERES :

1 : UNE MOTIVATION : L'ETUDE DU TRANSIT SEDIMENTAIRE SUR LA COTE D'OPALE.....	11
1.1 : INTRODUCTION.....	12
1.2 : LES AGENTS DU TRANSIT SEDIMENTAIRE.....	12
1.2.1 : LES SEDIMENTS EN PRESENCE.....	13
1.2.2 : LA HOULE SUR LA MANCHE.....	14
1.3 : LES MODELES DE TRANSPORT SEDIMENTAIRE.....	17
1.3.1 : LES RELATIONS EMPIRIQUES.....	17
1.3.2 : LES FORMULATIONS SEMI-THEORIQUES.....	19
1.3.3 : LES CRITERES D'ARRACHAGE.....	20
1.4 : SYNTHESE.....	22

1.1 : INTRODUCTION.

Sur la Manche, le transit sédimentaire apparaît comme un problème crucial, que ce soit pour l'aménagement du littoral ou pour la navigation maritime.

On constate que la Manche a une morphologie très hétérogène ; la profondeur maximale est voisine de 60 mètres et les hauts fonds sont très fréquents ; ceux-ci gênent de manière considérable la navigation au large et rendent difficile l'accès aux ports et estuaires.

Lorsqu'on s'intéresse au transport sédimentaire, les questions suivantes se posent :

- Quelle est la répartition sédimentaire ?
- Quelle est l'importance du transit sédimentaire ?
- Quels sont les facteurs hydrodynamiques entrant en jeu ?
- Quels sont les moyens d'étude et notamment les modèles disponibles ?

Une première analyse des facteurs hydrodynamiques montre l'action prépondérante de la marée. Au large des côtes, son influence est certaine, d'autant plus que le champ de vitesse résiduel est localement important. A proximité des côtes et sur l'estran, intervient un autre élément : la houle et le courant qu'elle peut générer.

De là découlent plusieurs problèmes : quelles sont les actions et les conséquences de la houle sur le fond marin, comment peut-on aborder le problème de l'interaction houle-courant et que peut-on faire d'un point de vue simulation numérique.

Ce chapitre présente rapidement les résultats de campagne de mesures "in situ" portant sur la répartition sédimentaire et sur la houle ; nous rappellerons également l'ampleur du transport sédimentaire au niveau de la Manche et plus particulièrement le long de la côte littorale du Nord-Pas de Calais ; nous évoquerons les tendances actuelles visant à évaluer le transit sédimentaire par modélisation et enfin nous concluons sur les perspectives envisageables compte tenu du contexte.

1.2 : LES AGENTS DU TRANSIT SEDIMENTAIRE.

Nous disposons pour la Côte d'Opale d'une information qualitative et quantitative importante. Cette côte a fait l'objet de plusieurs campagnes d'étude "in situ". Le Laboratoire National d'Hydraulique (LNH) a analysé et retranscrit les résultats des campagnes effectuées dans un ouvrage (voir CLIQUE, 1986). Avec le même esprit et plus récemment, le Laboratoire de Sédimentologie de Lille a entrepris une étude complète le long de la Côte d'Opale par le biais de trois thèses successives, soit chronologiquement celle de DEWEZ (1988), celle de CLABAUT (1988) et celle de VICAIRE (1991). Par la suite, un document synthétique a été édité, il reprend les lignes directrices de ces études (voir AUGRIS & al., 1990).

Une première analyse de ces différents documents montre qu'il faut séparer le littoral en deux parties :

- une première zone située au large,
- et une seconde dite côtière.

Cette différenciation est étroitement liée à l'action locale de l'écoulement.

Les facteurs hydrodynamiques présents sont les suivants :

- le courant qui a une origine due principalement à la marée,

- la houle qui est la résultante des conditions atmosphériques : vent et tempêtes,
- et enfin le vent qui suivant son intensité peut localement modifier la structure verticale de l'écoulement.

Il est établi que la houle a une action prépondérante sur les fonds marins situés à une profondeur maximale de 10 mètres.

La principale action sur le fond est de venir déstabiliser le lit marin, d'arracher les éléments du type sédiment (sable, galet, vase, etc.) et de les mettre en suspension.

La houle seule n'a cependant qu'un rôle d'arrachage. Le déplacement de particules solides cohésives ou non est très faible et le déplacement de particules solides sur les strates supérieures de l'écoulement est négligeable. Elle n'augmente que localement la turbidité.

Dans les zones où la houle et le courant de marée coexistent, le transit sédimentaire peut être fortement accru, le caractère périodique de la houle déstabilise les particules fluides et le courant les déplace.

Si on observe avec plus d'attention la morphologie des fonds marins, il apparaît que la zone littorale est caractérisée par de grandes étendues de faible profondeur. L'estran s'étend sur une largeur allant de 500 mètres à 1000 mètres et voir plus en certains endroits (au large de Dunkerque et dans la baie de la Somme). Les hauts fonds constituant le prolongement de l'estran ont des largeurs aussi importantes. La pente de ces fonds est très faible, de l'ordre de 0,1 à 0,5 %.

L'action de la marée y est importante. Le marnage atteint des cotes maximales allant jusqu'à 8 mètres (7,9 mètres à 5,2 mètres du Tréport à Dunkerque pour un coefficient de marée de 95). Le phénomène cyclique de basse et haute mer permet un recouvrement des grandes étendues des plages du Nord. Ces dernières sont principalement constituées de sable fin ; elles constituent un véritable réservoir sédimentaire.

Nous indiquons dans les deux sous-chapitres suivant la répartition sédimentaire et les conditions de houle qu'on peut rencontrer sur la Manche.

1.2.1 : LES SEDIMENTS EN PRESENCE.

Une cartographie sédimentaire du Détroit du Nord-Pas de Calais a été établie.

Elle montre une grande disparité et diversité sédimentaire :

- de la roche,
- de la vase,
- du sable fin,
- du sable grossier,
- et du cailloutis.

Ainsi pour la partie géographique la plus basse : la Haute Normandie, le sol est constitué en surface d'un sable grossier. Ces dimensions granulométriques sont comprises entre 0,5 mm et 1,5 mm de diamètre. Ce type de sédiment est en partie généré par l'érosion permanente des falaises de craie présente tout le long de la côte normande.

En remontant le long du littoral, de la baie de la Somme jusqu'à Boulogne-sur-Mer, le sable est légèrement plus grossier. Le diamètre moyen varie dans la plage 0,5 mm à 2,0 mm. Du large vers l'intérieur du littoral, le sable devient de plus en plus fin. Au niveau du talus littoral, les structures sédimentaires sont quasi inexistantes, la hauteur d'eau diminue lentement, on constate une plus grande homogénéité des sédiments. La gamme granulaire s'affine pour atteindre une taille inférieure à 0,5 mm ; elle continue à diminuer au niveau de l'estran, soit une taille de 0,05 à 0,2 mm.

Les estuaires sont constitués pour les zones de chenal, de sédiments grossiers ; l'hydraulique est plus importante (le courant plus intense transporte le sédiment fin et léger, laissant celui plus grossier et plus lourd) ; les zones vaseuses "traduisent" un site hydrauliquement calme.

Au niveau de Boulogne-sur-Mer et jusqu'à Audresselles, le fond marin est formé de sable fin et de galet grossier.

Le Cap Gris-Nez est quant'à lui constitué essentiellement de roche sous forme de bloc.

Du Cap Blanc-Nez et jusqu'à Calais, le littoral côtier est constitué en majorité d'un sable très fin de granulométrie de 150 à 250 μm .

Au large de Dunkerque, le sol est constitué au niveau des dunes d'un sédiment de taille granulaire variant dans une gamme de 0,5 mm à 2 mm, les sédiments les plus fins se trouvant sur les bancs de Mardyck et de Saint-Pol-sur-Mer. Plus à l'est, les structures de forme dune sont constituées d'un sable fin de diamètre moyen 0,2 à 0,4 mm.

Il apparaît ainsi que la gamme sédimentaire est très riche. Le transport sédimentaire est important (voir figure F 1.1).

1.2.2 : LA HOULE SUR LA MANCHE.

Des études statistiques ont été faites sur la houle sur les côtes de la région Nord-Pas de Calais (figure F 1.2).

Il apparaît que la houle a une période de l'ordre de 5 à 12 secondes avec une prépondérance pour la gamme de 6 à 8 secondes.

La longueur d'onde varie de 40 à 200 m.

Aussi, sachant que la Manche ne dépasse que rarement la profondeur de 60 mètres, on a une évolution des caractéristiques de la houle incidente (hauteur crête-creux et longueur d'onde) sur le littoral, avec notamment l'apparition de phénomènes de réfraction.

La hauteur de houle sur une période d'échantillonnage de un an peut atteindre une cote maximale de 4 mètres (généralement constatée par tempête), elle atteint sur la côte des valeurs :

- de 3,8 m à Penly,
- et de 4,3 m à Calais en hauteur crête-creux.

Il s'agit de valeurs maximales. Ces cotes ne sont atteintes que quelques fois dans l'année. Elles ne sont pas représentatives, mais les houles engendrées ont pour conséquence d'importants transferts sédimentaires.

Le vent est le facteur générant la houle ; lorsque celui-ci est tombé, il est possible d'observer une houle résiduelle ; ce phénomène peut se perpétuer sur plusieurs jours. Une comparaison en vue de similitudes s'impose avec la rose des vents. Des mesures de vent sur Boulogne-sur-Mer montrent deux axes principaux de propagation, un premier sud-ouest et un second ouest moins marqué avec de fortes intensités possibles : 50 à 60 noeuds de vents. Sur Dunkerque, les mêmes résultats sont enregistrés. Pour ces deux sites, les axes de propagation de la houle sont différents de ceux du vent, soit la direction ouest pour Boulogne-sur-Mer et les deux directions nord et nord-ouest pour Dunkerque. Il est à noter que les stations de mesures sont situées sur le talus littoral, la réfraction de la houle est un phénomène présent sur ces sites.

Par ailleurs, un paramètre hydraulique non négligeable est le courant de houle. Il s'agit d'un phénomène qu'on constate le long du littoral. Le courant de houle est principalement dû à une résultante de la réflexion et du déferlement. Lorsque la houle arrive de manière incidente sur le littoral, une composante résiduelle est générée. Aussi pour des conditions moyennes de 0,3 à 1,2 mètres de hauteur crête-creux de houle, le courant généré peut atteindre des valeurs allant de 0,3 m.s^{-1} à 0,5 m.s^{-1} avec pour des houles plus importantes des maxima de l'ordre 1 m.s^{-1} .

figure F 1.1 : transit sédimentaire sur le littoral du Nord-Pas de Calais, voir CLIQUE (1986).

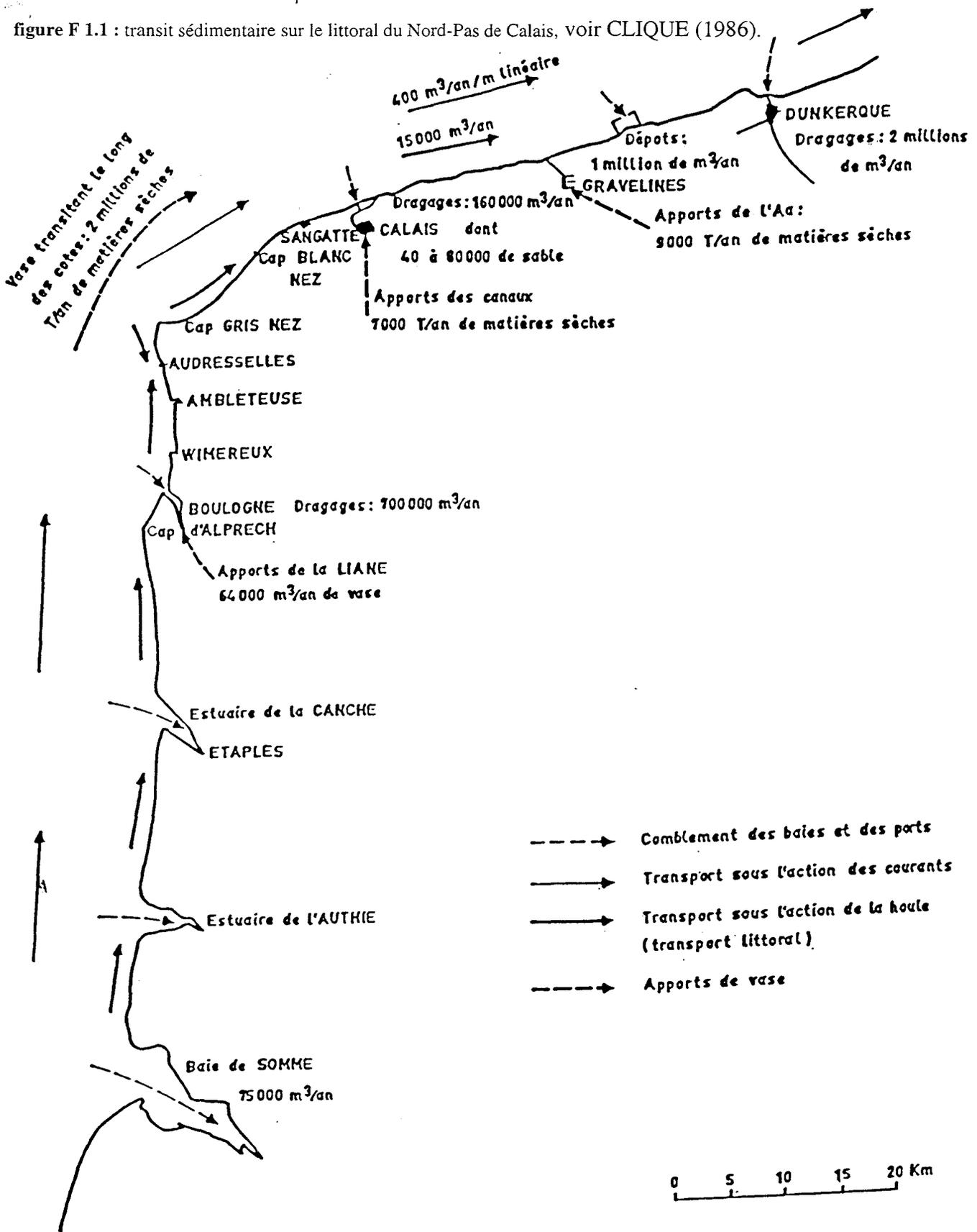
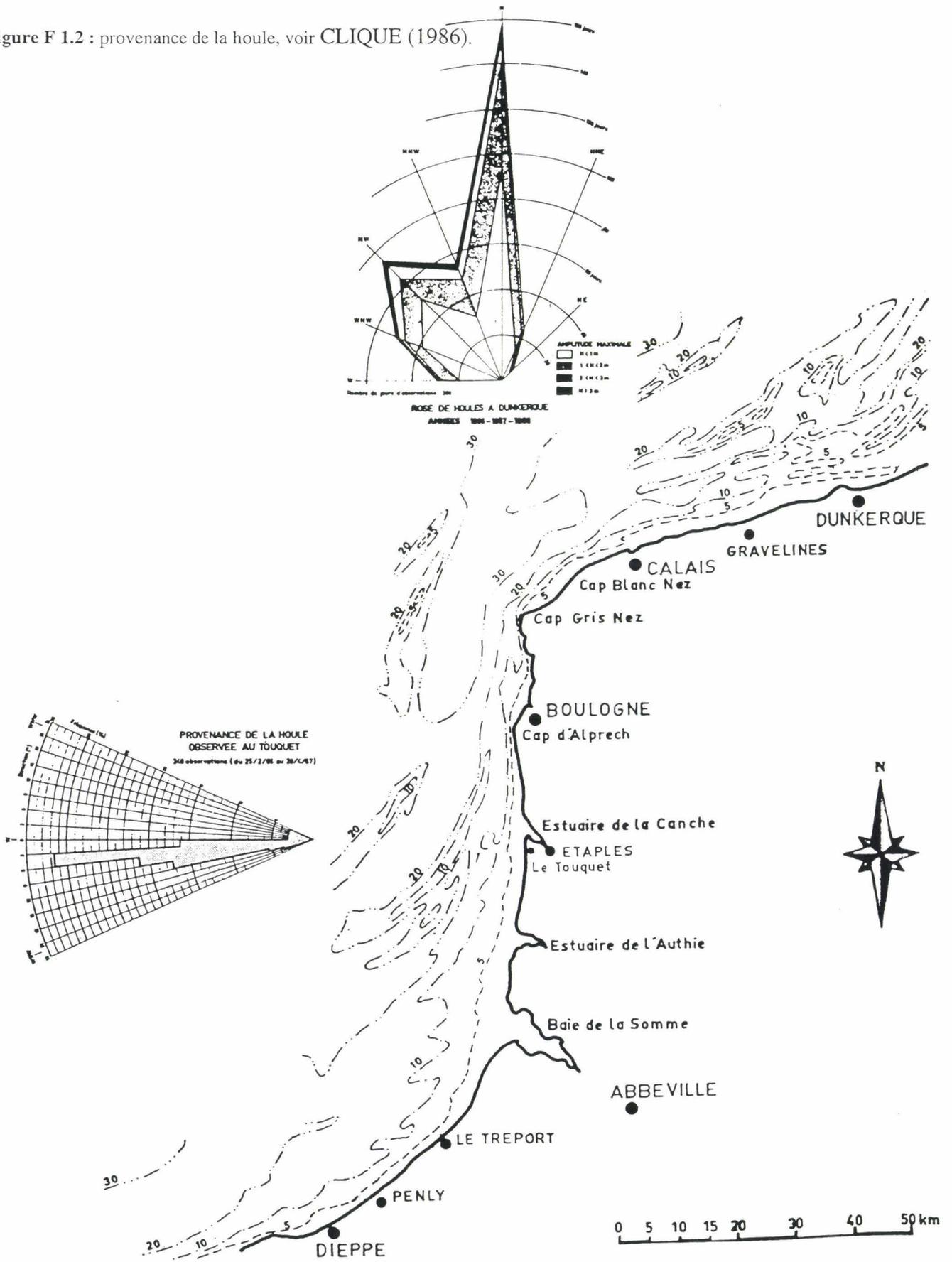


figure F 1.2 : provenance de la houle, voir CLIQUE (1986).



Provenance de la houle.

1.3 : LES MODELES DE TRANSPORT SEDIMENTAIRE.

Avant de traiter des problèmes de transit sédimentaire, des modèles hydrodynamiques sophistiqués portant sur la Manche ont été développés, voir LE PROVOST (1981 et 1984), LYNCH (1988), MAUVAIS (1991), NGUYEN & al. (1993), ... et ont notamment permis d'étudier des écoulements côtiers sur des domaines géographiques comme la Manche.

Ensuite, le phénomène physique de transport sédimentaire a été abordé, et ce sur des zones importantes.

Avant tout, il est nécessaire de rappeler les hypothèses usuellement utilisées pour décrire l'écoulement fluide.

La pression est supposée hydrostatique (la dynamique fluide est difficilement reproduite au voisinage de reliefs sous-marins accentués que ce soit pour une approche 2D ou 3D). Dans une approche bidimensionnelle, les équations valables pour des eaux peu profondes sont généralement utilisées. Le frottement sur le fond est pris en compte par l'introduction d'une contrainte utilisant le coefficient de Chézy (ce coefficient sert généralement de paramètre de calage pour obtenir des flux "corrects") ou le coefficient de Strickler.

Pour le transport sédimentaire, les critères sur l'arrachage et les lois du transit sont empiriques ou en partie liées à une équation de convection - diffusion.

Le but de ce chapitre est de fournir une vision globale sur les techniques utilisées et permettant de décrire le transit sédimentaire.

1.3.1 : LES RELATIONS EMPIRIQUES.

Elles résultent de la confrontation des résultats "in situ", expérimentaux et théoriques. Cette technique permet d'avoir une vision "simplifiée" du problème physique en faisant intervenir les principaux paramètres caractérisant le phénomène.

Nous présentons quelques travaux représentatifs sur le transport sédimentaire au niveau de la Manche et de la Mer du Nord.

En 1983, un des premiers travaux portant sur la Mer du Nord a été réalisé par SUNDERMAN & al. L'étude consistait à donner une retranscription des mouvements globaux de sédiment sur une échelle très importante, la zone étudiée couvrait la Manche et la Mer du Nord.

Les hypothèses suivantes ont été adoptées :

- l'hydrodynamique engendrée par les courants de marée est seule prise en compte,
- l'écoulement est supposé turbulent,
- les lois liant l'écoulement fluide au transit sédimentaire sont d'ordres empiriques,
- une seule gamme de grain est traitée à la fois,
- les traitements de l'érosion, du dépôt et du transport sédimentaire sont effectués distinctement.

L'écoulement est résolu suivant un plan horizontal X-Y à l'aide des équations de Navier-Stokes intégrées sur le plan vertical.

Le taux de transport sédimentaire Q est évalué pour chaque gamme de sédiment à partir de la vitesse de frottement pariétale U^* ; celle-ci est fonction de la vitesse moyenne sur la hauteur d'eau donnée :

$$U^* = \bar{U} \left[1 + 0,4 \tanh(3,09 \cdot 10^{-3} h^*) \right]^{-1} \quad [E 1.1]$$

avec : \bar{U} : vitesse moyenne sur la hauteur d'eau,
 h^* : paramètre défini par :

$$h^* = g^{1/3} \bar{U}^{-2/3} (h + \eta + h')^{1/3} \quad [E 1.2]$$

et : h : la hauteur d'eau au repos,
 η : la dénivellation de la surface libre par rapport au niveau de référence,
 h' : la rugosité locale.

Pour caractériser les conditions hydrauliques d'arrachage et de dépôt de sédiment, ils ont défini respectivement :

- une vitesse critique d'arrachage qui définit le seuil hydraulique du début d'arrachage des particules pour une gamme de sédiment donnée :

$$U_{\text{arrachage}} = 2,8\sqrt{(\Delta gh)} + 14,7vC/h \quad [E 1.3]$$

avec : $\Delta = \frac{\rho_{\text{solide}} - \rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{fluide}}}$ la densité, [E 1.4]

et C la concentration massique au voisinage du fond,

- une vitesse critique de dépôt qui est définie pour des conditions hydrauliques faibles, elle caractérise un régime hydraulique en dessous duquel on constate le dépôt de la particule sur le fond marin :

$$U_{\text{dé pot}} = 3,93 W \quad [E 1.5]$$

où W est la vitesse verticale de chute de la particule solide.

Les résultats obtenus à l'époque sont malheureusement peu significatifs, ils ne donnent que les ordres de grandeur du transit.

Un deuxième modèle a été utilisé sur une région côtière de dimension plus restreinte, la côte hollandaise de HELGOLAND.

Un code de calcul en 3D a été développé. Il résout les équations de Navier-Stokes moyennées pour prendre en compte la turbulence de l'écoulement, la pression est hydrostatique. A ces équations ont été couplées une équation de transport pour l'énergie turbulente K et une équation pour le taux de dissipation ϵ , ceci permettant l'utilisation d'un modèle de turbulence du type $K-\epsilon$.

Le modèle sédimentaire repose en partie sur les relations citées ci-dessus, une formulation différentielle permettant de traduire le taux d'érosion local a été utilisée :

$$\text{div}(Q) + \frac{\partial z_{\text{fond}}}{\partial t} = 0 \quad [E 1.6]$$

avec Q , le débit massique.

La démarche de résolution consiste à partir d'une cinématique fluide donnée à déterminer les différents débits de masse pour chaque gamme granulaire.

On notera que le transit évalué n'intervient pas dans le calcul de l'hydrodynamique locale.

Avec un esprit analogue, CHAPALAIN & al. (1992 et 1993) se sont intéressés à une zone géographique plus restreinte, la baie de Wissant au nord de la France. A partir de résultats numériques sur la

courantologie locale, plusieurs modèles de transport sédimentaire ont été utilisés. Trois modèles ont été mis en oeuvre : un premier empirique se basant sur les travaux de ACKERS & al. (1973), un second énergétique de ENGELUND (1965) s'inspirant des travaux de BAGNOLD (1966), et un dernier à caractère "heuristique" de VAN RIJN (1984). Ces trois modèles sont simples de mise en oeuvre et permettent d'obtenir une vision globale du transit.

1.3.2 : LES FORMULATIONS SEMI-THEORIQUES.

Le transport sédimentaire peut être vu de différentes manières, soit par une équation de transport d'une concentration sédimentaire en faisant l'hypothèse d'un sédiment suivant l'écoulement fluide à la diffusion près : $\epsilon_m \Delta C$, soit en abordant le problème en tant qu'écoulement diphasique avec une phase fluide et une deuxième solide ; il est alors nécessaire d'introduire pour chaque espèce des équations spécifiques de quantité de mouvement et de conservation de la masse.

Aussi, il apparaît nécessaire de connaître le comportement des sédiments étudiés et d'évaluer celui-ci vis à vis de l'écoulement fluide. Cependant, pour une approche diphasique, aucun travail n'a été réalisé à l'échelle de la Manche et de la Mer du Nord.

L'approche semi-théorique a été abordée et développée par OWEN avec l'introduction d'une équation de transport pour la concentration. BONNEFILLE (1976) a repris et présenté cette méthodologie :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div} \left[C (\vec{U} + \vec{W}) \right] = \epsilon_m \Delta C \quad [E 1.7]$$

avec :

- C : concentration massique en particule,
- \vec{U} : vitesse fluide,
- \vec{W} : la vitesse de chute particulaire,

et : • ϵ_m : le coefficient de diffusion particulaire.

Cette équation permet de traiter le transit particulaire par suspension. Elle est complétée par deux termes permettant de prendre en compte les conditions aux limites. Ceux-ci sont liés au caractère évolutif du fond marin érodable.

Par exemple, les termes source et puits suivants caractérisent l'arrachage (donc la mise en suspension) et réciproquement le dépôt sédimentaire pour des particules cohésives :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div} \left[\left(\vec{U} + \vec{W} \right) C \right] = \epsilon_m \Delta C + T_{\text{source}} + T_{\text{puits}} \quad [E 1.8]$$

Une formulation pour chacun de ces termes a été faite par PARTHENIADES (1965) et par KRONE (1962) traduisant la variation de masse sédimentaire arrachée ou déposée :

$$T_{\text{source}} = \frac{dM}{dt} \Big|_{\text{érosion}} = \beta \left[\frac{\tau}{\tau_e} - 1 \right] \geq 0 \quad \text{pour : } \tau \geq \tau_e \quad [E 1.9]$$

où τ_e est la contrainte du seuil d'érosion et β une constante,
et :

$$T_{\text{puits}} = \frac{dM}{dt} \Big|_{\text{dépôt}} = C_{\text{sed}} \left\| \vec{W} \right\| \left[1 - \frac{\tau}{\tau_d} \right] \leq 0 \quad \text{pour : } \tau \leq \tau_d \quad [\text{E 1.10}]$$

- où :
- τ_d est la contrainte seuil de dépôt,
 - C_{sed} est la concentration massique sédimentaire au voisinage du fond,
 - et \vec{W} la vitesse de chute de la particule.

D'autres expressions traduisant le dépôt ou l'érosion sédimentaire ont été développées, elles s'inspirent du critère d'arrachage de SHIELD (1936).

1.3.3 : LES CRITERES D'ARRACHAGE.

Le critère de SHIELD (1936) provient des conclusions émises suite à une campagne de mesure sur le déplacement de particules granulaires. Devenu une référence dans ce domaine, il permet de donner une indication sur l'état statique ou dynamique d'une particule solide (voir figure F 1.3) :

$$\theta(D) = \frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho_f) \left\| \vec{g} \right\| D} \quad [\text{E 1.11}]$$

avec :

- D : le diamètre de la particule solide,
- τ_0 : la contrainte fluide sur le fond,
- $(\rho_s - \rho_f)$: la différence de masse volumique entre la particule solide ρ_s et la particule fluide ρ_f ,
- \vec{g} : le vecteur accélération de la pesanteur.

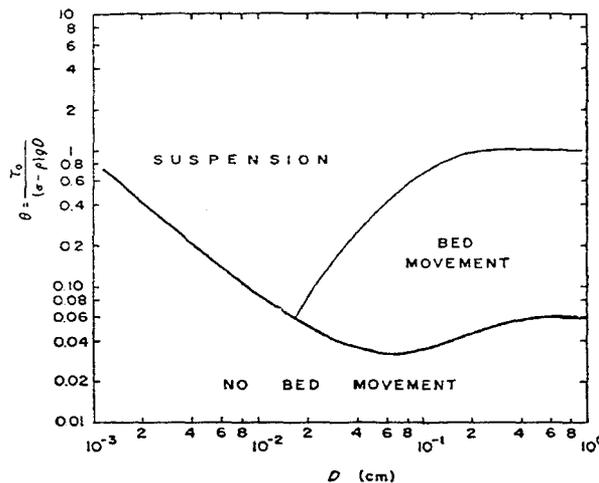


figure F 1.3 : représentation des zones de mobilité définies suivant le critère de SHIELD.

Ce critère correspond à un nombre adimensionnel caractéristique du rapport des forces hydrodynamiques sur la force de pesanteur.

En fonction de la taille de la particule, deux domaines ont été définis : un premier de mouvement et un second d'immobilité. Le premier domaine peut être décomposé en deux sous-parties, soit une zone

concernant des déplacements particuliers comme le charriage, et une autre correspondant à des déplacements du type saltation et suspension pour des conditions cinématiques plus conséquentes.

Plusieurs auteurs ont effectué des recherches afin d'évaluer le type de mouvement, BAGNOLD (1966), KOMAR (1973), COLEMAN, YANG & al. (1973), ALLEN (1973), etc.

Ces évaluations se font généralement à partir d'une particule isolée. Or lorsque la particule est en mouvement, elle intègre généralement un nuage de particules ; il est alors certain que pour de fortes concentrations, les phénomènes de collision ne sont pas négligeables ; ceux-ci influent considérablement l'évolution temporelle d'une particule.

De même la concentration dans le milieu fluide dépend directement de la concentration en particule du fond marin. Celle-ci varie suivant l'empilement granulaire dans une fourchette théorique de 0,25 à 0,7, elle est directement liée à l'hydraulique environnante. Plus l'écoulement est perturbé, moins la concentration particulaire sera importante, l'empilement se faisant d'une manière quelque peu anarchique. Ceci amène à prendre en compte un autre facteur non négligeable qui est l'angle de repos d'une particule. Il intervient au niveau des contraintes de frottement liant une particule solide aux autres environnantes. Cet angle est également lié à la concentration du milieu.

Par exemple YANG & al. (1973) ont développé un critère pour une particule isolée et reposant sur un fond plan tout en prenant en compte une physique hydraulique plus approfondie :

- évaluation de la rugosité hydrodynamique (SCHLICHTING (1979)),
- hypothèse d'un écoulement stratifié au niveau de la couche limite,
- et calcul des forces pouvant s'exercer sur une particule fluide.

Le critère d'arrachage est le suivant :

$$\frac{U_{crit.}}{W} = \left(\frac{5,75(\log(\frac{h}{D}) - 1)}{B} + 1 \right) \sqrt{\frac{C_f C_L f}{C_L + f}} \quad [E 1.12]$$

- où :
- D est le diamètre du grain de sable,
 - B est une fonction de rugosité dépendant du nombre de Reynolds pariétal :

$$Re_{y_{pariétal}} = \frac{U^* \delta}{\nu} \quad [E 1.13]$$

avec δ l'épaisseur de la couche limite,

- C_L, C_f, f sont des coefficients de levée, de frottement fluide et solide,
- et $U_{crit.}$: est la vitesse critique moyenne sur la hauteur d'eau h.

Les auteurs développent ainsi un état critique dépendant de la vitesse de chute particulaire vis à vis de l'écoulement moyen avec :

$$C_f \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \left(\frac{\rho}{2} W^2 \right) = \frac{\pi D^3}{6} (\rho_s - \rho_f) \left\| \vec{g} \right\| \quad [E 1.14]$$

On retrouve sous une autre forme le critère de SHIELD après substitution de la vitesse de chute W.

Plus proche de nos préoccupations, l'arrachage par la houle a été étudié par KOMAR (1973). Outre la prise en compte de l'angle de repos α et de la pente locale β du fond marin, il fournit une expression liant les caractéristiques physiques de l'écoulement à la période T de la houle :

$$\frac{\rho \cdot u_m^2}{(\rho_s - \rho_f)} = a'' \left(\frac{d_0}{D} \right)^{0.5} \quad [E 1.15]$$

avec :

- u_m : la vitesse orbitale à proximité de la paroi,
- a'' : un coefficient voisin de 0,3,
- d_0 : le diamètre orbital du mouvement oscillant :

$$d_0 = \frac{H}{\sinh(2\pi h/\lambda)} \quad [E 1.16]$$

- H étant la hauteur crête-creux de la houle.

Une autre formulation a également été proposée par ce même auteur :

$$\frac{\rho_f \cdot u_m^2}{(\rho_s - \rho_f)} = \frac{\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) + \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)} \cdot \frac{K}{c_f} \quad [E 1.17]$$

où :

- C_f : coefficient de frottement d'une particule en chute libre
- K : coefficient dépendant du diamètre et de la densité de la particule, et de la période de la houle.

On pourra également évoquer les travaux de LI (1954) :

$$\frac{D}{\delta} = \frac{D}{6,5(\nu T/2\pi)} \approx 0,07 \quad [E 1.18]$$

et ceux de SCHLICHTING (1979) :

$$\frac{D}{\delta} = \frac{D}{\sqrt{(\nu T/\pi)}} \approx 0,3 \quad [E 1.19]$$

où δ est l'épaisseur de la couche limite oscillante.

1.4 : SYNTHÈSE.

L'analyse effectuée met en avant plusieurs points :

-1. La houle est un phénomène hydraulique qui ne peut être négligé. Le courant couplé à la houle est un facteur primordial pour le transit ; la houle déstabilise les particules sédimentaires posées sur le fond marin, et le courant les transporte.

On peut par ailleurs constater la présence de houles de forte amplitude. L'action de celles-ci n'est pas négligeable même si sur une période d'échantillonnage d'une année, elles restent statistiquement minoritaires. Lors de tempêtes (peu fréquentes mais intenses), la houle entraîne une modification importante de la morphologie du fond (déplacement de plusieurs mètres de dunes).

Concernant la marée, le marnage peut, suivant les coefficients de marée, être important. La cinématique fluide est particulièrement hétérogène sur le domaine étudié ; elle est très intense au niveau du détroit du Nord-Pas de Calais ; ce dernier constitue un goulet d'étranglement.

-2. Le transport sédimentaire sur le domaine étudié est très complexe. Les espèces transportées sont très hétérogènes. Certaines peuvent avoir un comportement dit scalaire (vase, grain de sable fin, etc.), d'autres ont un comportement diphasique (galet, sable grossier, etc.). L'approche empirique sur un domaine aussi vaste apparaît comme la solution à la fois la plus "simple" et la plus facile à mettre en oeuvre mais aussi celle qui donne les résultats les plus significatifs et les plus intéressants.

-3. Différentes approches en simulation numérique ont été réalisées à des échelles géographiques importantes. Du fait du domaine étudié, la restitution du trait côtier et de la morphologie du sol marin est définie grossièrement. On filtre indirectement des informations primordiales à l'évaluation de la dynamique de l'écoulement côtier.

Les équations utilisées pour représenter l'hydrodynamique fluide sont simplifiées, des hypothèses sont adoptées.

Elles portent sur plusieurs aspects :

- La loi de pression est généralement supposée hydrostatique. Ceci ne permet pas de prendre en compte les recirculations derrière les obstacles.
- En 2D plan, les profils verticaux de vitesse sont supposés semblables ; il est nécessaire d'introduire une corrélation empirique (Equation de Chézy) pour évaluer le frottement sur le fond. L'expression de cette contrainte a été développée uniquement pour une cinématique de courant. Elle ne peut être utilisée en tant que telle pour étudier l'action de la houle sur un fond marin.

Ce bilan nous amène aux constatations suivantes :

Les problèmes liés à la couche limite (arrachage sédimentaire, etc.) sont importants pour la dynamique côtière.

Pour les traiter, on doit disposer d'un solveur complet des équations classiques de la mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes).

On se propose dans une première approche, de se limiter à des écoulements bidimensionnels verticaux et de mettre en oeuvre un code en formulation A.L.E. (Arbitrary Lagrangian Eulerian) particulièrement bien adapté aux problèmes à surface variable et nous permettant d'étudier à partir d'un domaine global (le domaine d'écoulement) des problèmes locaux (la couche limite de fond).

Notre étude se décomposera de la manière suivante :

Dans une première partie, on s'attachera à rappeler les différents algorithmes existant et permettant de traiter des écoulements à surface libre. A partir d'une première analyse, on justifiera le choix d'une technique du type A.L.E. ; ensuite on décrira le code de calcul développé en précisant les formulations choisies, le type des discrétisations retenues, l'algorithme de résolution ainsi que le traitement des conditions aux limites.

Une seconde partie portera sur une étude de comportement du code de calcul ; il s'agira de simuler l'évolution d'une onde solitaire de gravité suivant plusieurs configurations ; ceci permettra de mettre en avant la qualité des différents algorithmiques et choix techniques utilisés et de comparer les résultats numériques avec ceux d'autres auteurs.

Enfin nous simulerons quelques cas d'écoulement à surface libre ; on se limitera à l'étude d'écoulements du type houle et courant sur un fond hydrauliquement lisse en mettant en évidence le comportement de la cinématique au niveau de la couche limite.

Des premières comparaisons seront effectuées avec les résultats obtenus dans le canal à houle du Laboratoire de Mécanique des Fluides et Génie Civil du Havre.

2 : LE MODELE NUMERIQUE

TABLE DES MATIERES :

2 : LE MODELE NUMERIQUE.....	25
2.1 : INTRODUCTION - SIMULATION NUMERIQUE D'ECOULEMENTS	
A SURFACE LIBRE.....	26
2.1.1 : LES METHODES M.A.C.....	26
2.1.2 : LES METHODES V.O.F.....	27
2.1.3 : LES METHODES AVEC CHANGEMENT DE COORDONNEES.....	28
2.1.4 : LES METHODES A.L.E.....	29
2.1.5 : OBJECTIFS ET CHOIX.....	30
2.2 : FORMULATION DU PROBLEME - METHODE A.L.E.....	30
2.3 : LA DISCRETISATION.....	32
2.3.1 : LA DISCRETISATION TEMPORELLE.....	32
2.3.2 : LA DISCRETISATION SPATIALE.....	33
2.4 : LE SCHEMA NUMERIQUE.....	37
2.4.1 : CHOIX DE LA DISCRETISATION DES VARIABLES	
SUR CHAQUE ELEMENT.....	37
2.4.2 : PREMIERE PHASE DE RESOLUTION : L'ETAPE LAGRANGIENNE.....	38
2.4.3 : DEUXIEME PHASE DE RESOLUTION : L'ETAPE CONVECTIVE.....	42
REMARQUES.....	44
2.5 : LES CRITERES DE STABILITE.....	45
2.6 : LA VITESSE DE GRILLE.....	46
REMARQUES.....	50
2.7 : LES CONDITIONS AUX LIMITES.....	52
2.7.1 : CONDITIONS A L'INTERSECTION SURFACE LIBRE - PAROI.....	54
2.7.2 : CONDITION D'AMORTISSEMENT :	
LES EQUATIONS DU MILIEU POREUX ET SES CONDITIONS AUX LIMITES.....	60
2.7.3 : CONDITIONS DE CONTRAINTES A LA SURFACE LIBRE.....	67
2.8 : CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS A L'ENTREE	
AUX FRONTIERES FLUIDES.....	69
2.9 : L'ALGORITHME.....	70
2.9.1 : ALGORITHME GENERAL.....	71
2.9.2 : ALGORITHMME POUR L'ETAPE DE RESOLUTION LAGRANGIENNE.....	72
2.9.3 : ALGORITHMME POUR L'ETAPE DE REDEFINITION	
DU NOUVEAU MAILLAGE.....	73
2.9.4 : ALGORITHMME POUR L'ETAPE CONVECTIVE.....	74

2.1 : INTRODUCTION - SIMULATION NUMERIQUE D'ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE.

Pour les écoulements en milieu confiné, le domaine spatial est parfaitement défini. Les conditions aux limites sont relativement simples : conditions d'adhérence à la paroi et de contraintes ou de vitesses imposées aux frontières fluides. Le comportement de l'écoulement est entre autre dicté par les paramètres physiques du fluide, par la géométrie, etc.

Par contre, pour les écoulements à surface libre, on introduit un "degré de liberté" supplémentaire. Ainsi, un apport de quantité de mouvement se traduit directement par une perturbation de la surface libre. La difficulté du problème intervient tout de suite, comment gérer ce paramètre supplémentaire ?

Deux philosophies existent.

La première consiste à aborder le problème avec une vision lagrangienne, d'un instant t à un instant $t+\Delta t$, une particule fluide se déplace avec sa vitesse \vec{u} de la position \vec{x} , à sa nouvelle position, $\vec{x} + \vec{u} \Delta t$. Toutes les particules fluides de l'écoulement se déplacent ainsi, y compris la surface libre.

La seconde est eulerienne, elle consiste à se placer en un point et à regarder l'information qui y passe. La position de la surface libre est explicitement une inconnue du problème qui doit satisfaire l'équation cinématique de définition.

Nous allons rappeler par la suite les différents codes de calcul développés en passant des algorithmes du type MAC, à ceux du type VOF, à des formulations plus classiques avec changement de coordonnées pour aborder finalement les algorithmes du type ALE.

2.1.1 : LES METHODES M.A.C.

Parmi les techniques développées, une des approches les plus intéressantes est celle optée par les méthodes du type MAC (Marker And Cell), voir WELCH & al. (1968) et TOME & al. (1994). Ce type d'algorithme a été fortement développé vers la fin des années soixante et a été amélioré par la suite ; à titre d'exemple nous citons un échantillon représentatif des codes de calcul qui ont été mis au point (leur nombre est relativement important), ils traduisent le fort intérêt apporté à cette technique : SMAC, SM, IMPAC, TUMMAC, GESMAC, VELPC, etc.

La formulation des équations de la mécanique des fluides est eulérienne. Dans une première étape, une évaluation de la vitesse est faite à partir des termes de contraintes visqueuses, des termes de convection, de l'accélération de la gravité et des autres forces volumiques qu'on peut être amené à considérer (force de coriolis, tension superficielle, champs magnétique, ...) ; le gradient de pression n'est pas pris en compte dans un premier temps. L'ensemble de ces termes est exprimé sous une forme explicite. Ensuite on détermine la pression en écrivant que la somme de cette vitesse évaluée et de la vitesse induite par le gradient de pression satisfait l'équation de conservation de la masse ; cette procédure permet d'obtenir une équation de Poisson pour la pression ; cette dernière est généralement résolue à l'aide d'un algorithme itératif du type SOR (Successive Over Relaxation). La vitesse évaluée précédemment est ensuite corrigée en prenant en compte le gradient de pression.

Concernant la surface libre, celle-ci est définie par un ensemble de pointeurs localisés sur une grille cartésienne figée délimitant le domaine spatial discrétisé. Il est intéressant de noter que le domaine discrétisé n'est pas entièrement occupé par le fluide.

Les pointeurs sont déplacés d'une itération temporelle à une autre suivant une description lagrangienne (technique usuelle) ou à l'aide de la relation cinématique exprimée à la surface libre. Ces deux solutions

ont été comparées par TANG & al. (1990). Le comportement de la surface libre apparaît identique. Le dernier choix technique a cependant été retenu par ce même auteur. Le traitement de la surface libre y est effectué implicitement, l'avantage invoqué est de pouvoir durant le cycle de calcul définir une évaluation de la dénivellation de l'interface. Ce choix introduit malheureusement une inconnue supplémentaire : la dénivellation de la surface libre. La conséquence est de rendre le schéma itératif ; la convergence de la solution du problème porte alors sur la position de la surface libre, (voir également MIYATA & al., 1985).

On notera que le choix d'une gestion entièrement lagrangienne de la surface permet de traiter des déformations quelconques de la surface libre. A titre d'exemple, on citera les applications étudiées et traitées en lagrangien par MIYATA (1986), elles portent sur des cas de déferlement d'onde.

Aborder ce même problème avec une relation cinématique est plus délicat.

La discrétisation spatiale et temporelle des équations fait le plus souvent appel à des techniques du type différences finies. Suivant les schémas adoptés, on trouve une stratégie du type prédicteur-correcteur pour la définition temporelle de la surface libre, voir JOHNSON & al. (1993). Dans tous les cas, la vitesse utilisée pour déplacer le pointeur est interpolée à partir des vitesses des noeuds voisins du maillage (interpolation linéaire : MAC, SMAC, ou du deuxième ordre, voir TANG & Al. (1990), etc.). Aussi la définition de la surface libre dépend de la définition du maillage, du nombre de pointeurs utilisés et de la fonction d'interpolation utilisée.

Pour les contours solides, ceux-ci sont généralement décrits par une succession de rectangle donnant d'une frontière fluide-solide une représentation discrète dont la forme est un escalier. Pour améliorer la représentation géométrique d'une frontière, une généralisation pour un domaine spatial quelconque a été faite par TOME & al. (1994). Pour les frontières solides, les conditions aux limites (adhérence) sont respectées en adoptant des techniques d'interpolation du type polynômes de lagrange.

Dans le cas particulier d'une surface libre venant en contact avec une paroi solide, les mailles : maille vide, maille pleine, maille solide et maille de surface sont sujettes à un traitement particulièrement délicat. En effet les conditions concernant l'égalité des contraintes à l'interface et la conservation de la masse ne sont pas exprimées explicitement sur les pointeurs ; elles sont exprimées aux noeuds constituant le maillage et appartenant à la zone d'écoulement, mais aussi aux noeuds qui se trouvent géographiquement au-dessus de la surface libre (ces points sont nécessaires pour évaluer les termes de convection et le déplacement lagrangien des pointeurs). Cet aspect traduit la difficulté du traitement de l'interface.

On notera qu'on ne dispose pas de la cote exacte de la surface libre à la paroi mais celle d'un pointeur appartenant à la maille pariétale. Un traitement local affiné a été mis en oeuvre dans le code IMPAC développé par JOHNSON & al. (1993), permettant de mieux évaluer les conditions aux limites.

2.1.2 : LES METHODES V.O.F.

L'originalité des méthodes VOF (Volume Of Fluid) consiste à utiliser une formulation faible (volumes finis) des équations traitées. Pour ces formulations, voir NICHOLS & al. (1980) et HIRT & al. (1981), la technique de résolution des équations est analogue à celle adoptée pour les méthodes du type MAC, les variables primitives restent discrètes aux noeuds du maillage cartésien, et le calcul de la surface libre est fortement inspiré de celui adopté pour les méthodes du type MAC.

La localisation de cette dernière est déterminée par l'intermédiaire d'une variable discrète F . Elle indique la présence ou non du fluide. Pour une valeur de $F=1$, la maille est entièrement fluide, pour $F=0$, la maille est vide et pour une valeur comprise entre 0 et 1, la maille contient une partie de la surface libre. Cette technique a l'avantage de localiser et de définir en même temps le domaine de calcul. Par contre, on n'obtient pas une représentation exacte de la surface libre, celle-ci est discontinue et ne peut être

représentée sous forme discrète que par des segments discontinus. La gestion de la surface libre repose sur la résolution d'une équation d'advection dont l'inconnue est la variable F .

De nombreuses applications ont été faites, elles portent entre autre sur des écoulements où la tension superficielle ne peut pas être négligée, KHOTE (1992) a utilisé ce type de technique pour étudier les écoulements capillaires, les contraintes visqueuses sont négligées au niveau de la surface libre ; BRACKBILL (1992) a par la suite pris en compte un état de contrainte complet au niveau de cette même interface fluide.

Vis à vis des méthodes MAC, la généralisation de l'algorithme à des écoulements 3D est moins complexe, on évite une gestion lourde des pointeurs. L'aspect conservatif du problème est assuré, ce qui n'est pas explicitement le cas pour les méthodes MAC à cause des interpolations nécessaires pour définir le déplacement des pointeurs.

D'autres algorithmes ont vu le jour, ils constituent une évolution des méthodes VOF. On retrouve des techniques du type gestion lagrangienne de la surface libre. Le déplacement des pointeurs permet ainsi dans une première étape de définir une enveloppe discrète. Une seconde étape consiste à discrétiser cette même enveloppe à l'aide du maillage (grille cartésienne englobant tout le domaine). Cette opération a pour objet de redéfinir les pointeurs, ceux-ci sont localisés à l'intersection de l'enveloppe obtenue avec le maillage cartésien. Les pointeurs appartiennent ainsi au contour d'une maille.

Pour certains codes de calcul, une étude du type déferlement n'est pas envisageable, un critère spatial portant sur la pente de la surface libre conditionne le type d'écoulement. Ce critère lie directement les caractéristiques géométriques du maillage à la dénivellation locale de la surface libre. Il a été établi afin de simplifier la localisation des pointeurs, voir THOMAS (1995). Il en découle que pour une abscisse donnée, on ne peut avoir qu'une seule hauteur caractérisant le niveau de la surface libre (celle-ci est gérée en utilisant la relation cinématique à la surface libre). La surface libre est ainsi localisée par une cote caractérisant une dénivellation par rapport à une hauteur d'écoulement de référence.

2.1.3 : LES METHODES AVEC CHANGEMENT DE COORDONNEES.

Les méthodes décrites précédemment utilisent toutes plus ou moins un maillage cartésien dans lequel évolue l'écoulement fluide. Or le plus souvent, les problèmes abordés concernent le comportement d'une surface libre ayant une forme peu complexe.

Cet aspect a amené à développer des codes de calcul utilisant directement le maillage global comme étant le domaine d'évolution du fluide. Ce maillage dispose d'un degré de mobilité suivant l'axe vertical (voir l'axe horizontal). Les applications concernent essentiellement les écoulements océaniques, côtiers, et quelques problèmes industriels.

Pour résoudre le comportement de la surface libre, l'équation cinématique est utilisée, la dénivellation de la surface libre est une inconnue supplémentaire du problème.

La technique consiste à effectuer un changement de coordonnées suivant un ou deux axes afin de résoudre le problème sur un domaine de travail rectangulaire de hauteur unité, voir LIU (1994).

En écoulement océanique, on retrouve la transformation classiquement dénommée "plan sigma", technique généralement couplée avec une hypothèse consistant à négliger la dénivellation de la surface libre par rapport à la hauteur d'eau au repos, voir HADVOGEL (1991) ; c'est une technique qui a notamment été utilisée pour des simulations portant sur la Mer Méditerranéenne, le marnage y est effectivement faible, voir MARSALEIX (1993).

Lorsque cette hypothèse peut se justifier, les équations du problème sont avantageusement simplifiées.

La discrétisation spatiale du problème est fortement adaptée à des discrétisations du type différences finies. La relation cinématique est facilement résolue, la variation temporelle de la cote correspond à une différenciation spatiale du débit calculé par intégration sur la hauteur d'eau au repos ($h. U_{\text{moyen}}$).

En écoulement côtier ou estuarien, on est souvent amené à utiliser les équations de Saint Venant, équations caractéristiques de la théorie des eaux peu profondes. La profondeur de l'écoulement est posée comme faible vis à vis des longueurs d'onde des signaux véhiculés ; les accélérations verticales des particules fluides sont généralement faibles et une loi de pression hydrostatique est généralement utilisée, voir NGUYEN & al.(1993) et GUILLOU & al. (1995) ayant effectué des applications portant sur l'estuaire de la Gironde.

Pour des domaines ayant des géométries dites complexes, des techniques adaptées à l'évolution du domaine spatial ont été mises en oeuvre, elles reprennent les travaux de THOMPSON & al. (1974, 1977 et 1985) sur la génération adaptative de maillage. Des applications portant sur le sillage de carène ont été faites par MIYATA & al. (1987) en 3D. Vis à vis des précédentes techniques utilisées par ces mêmes auteurs (TUMMAC), voir MIYATA & al. (1985) et MIYATA (1986), ils ont opté pour une amélioration du contour géométrique du domaine discrétisé et indirectement d'une prise en compte complète de l'écoulement visqueux et ce principalement au voisinage de la surface libre. La technique MAC a ainsi été écartée.

2.1.4 : LES METHODES A.L.E.

Pour des formulations lagrangiennes ou mixtes (A.L.E.), le problème peut être abordé d'une manière différente, voir AMSDEN & al. (1973), HIRT & al. (1974), GRAUSENBAUGH & al. (1989), RAMASWAMY (1990), etc. La méthode consiste à résoudre dans un premier temps le problème entièrement en lagrangien. On associe le déplacement des noeuds du maillage à celui des particules fluides.

Cette première étape à l'avantage de permettre une description directe de la surface libre en lagrangien, les conditions aux limites sont facilement prises en compte et la relation cinématique se trouve automatiquement vérifiée, l'aspect conservatif des équations est assuré. Il apparaît ainsi que les inconnues du problème sont uniquement la vitesse et la pression du fluide.

Suivant les applications traitées, on peut poursuivre le calcul uniquement en lagrangien. Cependant on est amené d'un point de vue pratique à éviter ce genre de procédure. On ne peut réaliser des simulations numériques que sur des temps d'écoulement relativement restreints. Le pas de temps pour la discrétisation temporelle apparaît comme petit, il dépend fortement de la géométrie des mailles. De plus, il faut éviter l'intersection des trajectoires de particules fluides (les noeuds du maillage se déplaçant avec les particules fluides), cet aspect se retrouve directement via les critères de stabilité. Aussi ce type de technique ne concerne que peu d'écoulements.

Pour éviter ce genre de problème, on est amené à réaliser une seconde étape dite "convective". Elle consiste suivant l'évolution de la surface libre à redéfinir entièrement le maillage pour l'étape temporelle suivante. On utilise pour cela une équation de convection avec un traitement particulier pour les flux advectés. Ces derniers sont en effet calculés par rapport à la vitesse de déplacement imposée des noeuds du maillage. Cette étape permet de redéfinir le domaine de calcul pour l'étape temporelle suivante et d'y définir la cinématique fluide correspondante. On élimine ainsi les inconvénients intrinsèquement liés au calcul lagrangien tout en conservant les avantages de ce dernier. Cet aspect nous donne une liberté relative sur la gestion du maillage.

Un des avantages importants de ce type de technique est le découplage des termes non-linéaires du schéma convectif. Outre le fait de pouvoir gérer la surface libre en lagrangien, la gestion du maillage peut être quasiment découplée du problème étudié.

2.1.5 : OBJECTIFS ET CHOIX.

Comme on l'a vu au premier chapitre, notre objectif est de disposer d'un code de calcul résolvant les équations de Navier-Stokes et permettant de :

- suivre l'évolution de la surface libre,
- de traiter des problèmes du type interaction houle-couche limite de fond,
- de pouvoir être étendu à des écoulements diphasiques.

Nous avons choisi dans une première étape de créer un code bidimensionnel vertical en utilisant un algorithme ALE pour la discrétisation temporelle, couplé avec une méthode VOF avec éléments finis pour la discrétisation spatiale.

Ce code de calcul doit pouvoir résoudre les problèmes classiquement rencontrés et constituer une base saine pour de futurs développements (soit la mise en oeuvre d'un algorithme multi-domaines, multi-grilles et multi-pas de temps et le développement du code développé vers une version 3D).

2.2 : FORMULATION DU PROBLEME - METHODE A.L.E.

Les hypothèses choisies pour traiter le problème sont les suivantes :

- l'écoulement est bidimensionnel suivant un plan vertical : x-z,
- l'écoulement est incompressible et visqueux,
- les forces extérieures autres que le poids, sont négligées :

$$\vec{f} = \rho \vec{g} \quad [E 2.1]$$

Compte tenu des hypothèses, les équations de la mécanique des fluides prennent sous une forme faible les expressions :

- pour l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{\vec{u}} \left[\int_s \rho \, ds \right] = 0 \quad [E 2.2]$$

- pour les équations de quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \bigg|_{\vec{u}} \left[\int_s \rho \vec{u} \, ds \right] = \oint_r \left((-P\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_s \rho \vec{g} \, ds \quad [E 2.3]$$

$$\text{avec : } \vec{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad [E 2.4]$$

$$\text{et : } \vec{\tau} = 2\mu \vec{D} \quad \text{où : } \vec{D} = \frac{1}{2} \left(\text{grad}(\vec{u}) + \text{grad}(\vec{u})^t \right) \quad [E 2.5]$$

S étant un élément de fluide de contour Γ dont la vitesse en tout point est \vec{u} .

Pour un élément de référence dont la vitesse en tout point est \vec{u}_g , si Φ est une grandeur attachée au fluide, on a l'écriture :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}_g} \int_S \Phi ds = \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \int_S \Phi ds + \oint_{\Gamma} \left(\Phi \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \quad [E 2.6]$$

Il en résulte que pour un tel élément, les équations de la mécanique des fluides s'écrivent sous la forme intégrale suivante :

- 1.- pour l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}_g} \left[\int_S \rho ds \right] + \oint_{\Gamma} \left(\left[\rho \left(\vec{u} - \vec{u}_g \right) \right] \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = 0 \quad [E 2.7]$$

- 2.- pour les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}_g} \left[\int_S \rho \vec{u} ds \right] + \oint_{\Gamma} \left(\left[\rho \vec{u} \left(\vec{u} - \vec{u}_g \right) \right] \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = \oint_{\Gamma} \left(\left(-P \cdot \vec{I} + \vec{\tau} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_S \rho \vec{g} ds \quad [E 2.8]$$

- 3.- et pour la gestion du maillage où \vec{u}_g est la vitesse de chaque point du contour Γ .

$$\frac{d \vec{x}}{dt} = \vec{u}_g \quad [E 2.9]$$

A un instant t donné, on se propose de résoudre ce système en deux étapes :

- une première lagrangienne où :

$$\vec{u}_g = \vec{u} \quad [E 2.10]$$

Elle prend en compte tous les termes de contraintes surfaciques et les forces volumiques agissant sur un volume fluide,

- et une deuxième dite convective qui est en fait une étape d'interpolation spatiale ; elle prend en compte les effets dus aux termes de convection.

Le schéma proposé repose donc sur la résolution successive des deux systèmes découlant des équations [E 2.7] et [E 2.8] :

- la première étape dite lagrangienne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \left[\int_S \rho ds \right] = 0 \\ \bullet \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \left[\int_S \left(\rho \vec{u} \right) ds \right] = \oint_{\Gamma} \left(\left(-P \cdot \vec{I} + \vec{\tau} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_S \rho \vec{g} ds \end{array} \right. \quad [E 2.11]$$

- et la seconde étape dite convective :

$$\begin{aligned} \bullet \left[\frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}_g} - \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \right] \left[\int_S \rho ds \right] &= \oint_r \left(\rho \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \\ \bullet \left[\frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}_g} - \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \right] \left[\int_S \left(\rho \vec{u} \right) ds \right] &= \oint_r \left(\rho \vec{u} \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad [E 2.12]$$

2.3 : LA DISCRETISATION.

La discrétisation temporelle en différences finies est classique ; cependant le choix d'une discrétisation spatiale du type éléments finis couplée avec une formulation faible des équations de la mécanique des fluides a été motivée par les possibilités offertes :

- avoir un domaine d'intégration quelconque,
- avoir une simplicité et une exactitude dans l'écriture des termes intégrés,
- et avoir une simplicité de mise en place des conditions limites.

2.3.1 : LA DISCRETISATION TEMPORELLE.

Chaque fonction $\Phi(x,t)$ continue en fonction du temps est discrétisée en un ensemble de fonction spatiale donnée $\Phi(x,t^n)$ et $\Phi(x,t^{n+1})$ à des instants t^n et t^{n+1} avec $t^{n+1} - t^n = \Delta t$.

Dans une première étape, on s'intéresse à la différenciation temporelle de la fonction $\Phi(x,t)$:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \left[\int_S \Phi ds \right] \quad [E 2.13]$$

Cette différentielle est approximée en adoptant une discretisation du type différences finies au premier ordre avec :

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \vec{u} \cdot \Delta t \quad [E 2.14]$$

où \vec{u}^n est la vitesse à t^n , soit pour l'équation [E 2.13] :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \left[\int_S \Phi ds \right] \cong \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S^{n+1}} \Phi ds - \int_{S^n} \Phi ds \right] \quad [E 2.15]$$

Le jacobien J de la transformation spatiale étant toujours du premier ordre :

$$J = 1 + \Delta t \cdot \text{div}(\vec{u}^n) \quad [E 2.16]$$

on peut développer l'intégrale surfacique sous la forme intégrale suivante :

$$\int_{S^{n+1}} \Phi ds = \int_{S^n} \Phi \left(1 + \Delta t \cdot \text{div} \left(\vec{u}^n \right) \right) ds \quad [E 2.17]$$

ce qui nous permet d'obtenir l'expression de la différentielle temporelle [E 2.15] :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{S^l} \Phi ds \right] \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{S^l} \Phi^l ds - \int_{S^n} \Phi^n ds + \int_{S^n} \Phi^l \operatorname{div} \left(\vec{u} \right) ds \right) \quad [\text{E 2.18}]$$

Aussi, compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement étudié, on obtient pour l'équation de conservation de la masse :

$$\int_{S^n} \operatorname{div}(\vec{u}) ds = 0 \quad [\text{E 2.19}]$$

ceci implique pour les variables autres que la masse spécifique l'écriture :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{S^l} \Phi ds \right] \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{S^l} \Phi^l ds - \int_{S^n} \Phi^n ds \right) \quad [\text{E 2.20}]$$

Le système constituant l'étape lagrangienne, relation [E 2.11], peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \oint_{\Gamma^n} \left(\vec{u} \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = 0 \\ \bullet \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S^n} \left(\rho \vec{u} \right) ds - \int_{S^n} \left(\rho \vec{u} \right) ds \right] = \oint_{\Gamma^n} \left(\left(-P^l \vec{I} + 2\mu \vec{D} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_{S^n} \rho \vec{g} ds \end{cases} \quad [\text{E 2.21}]$$

avec le choix d'exprimer les contraintes visqueuses de façon explicite et les termes de pression de façon implicite, et avec l'équation suivante :

$$\vec{x}^l = \vec{x}^n + \vec{u} \cdot \Delta t \quad [\text{E 2.22}]$$

De même pour l'étape convective [E 2.12], on a :

$$\begin{cases} \bullet \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S^{n+1}} \rho ds - \int_{S^l} \rho ds \right] = \oint_{\Gamma^{n+1}} \left(\rho \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \\ \bullet \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S^{n+1}} \left(\rho \vec{u} \right) ds - \int_{S^l} \left(\rho \vec{u} \right) ds \right] = \oint_{\Gamma^{n+1}} \left(\rho \vec{u} \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \end{cases} \quad [\text{E 2.23}]$$

avec :

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^l + \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \Delta t \quad [\text{E 2.24}]$$

2.3.2 : LA DISCRETISATION SPATIALE.

On se propose d'utiliser ici une discretisation du type éléments finis, voir ZIENKIEWICZ (1989 et 1991) et DHATT & al. (1984).

Le domaine spatial Ω est décomposé en n sous-domaines Ω_i .

Ces sous-domaines sont des éléments constituant le domaine et sont définis par des noeuds géométriques.

On peut définir l'approximation $\Phi(x)$ sur chaque élément n telle que :

$$\Phi(x) = \langle N_n(x) \rangle \{ \Phi_n \} \quad [\text{E 2.25}]$$

- où :
- Φ_n est la valeur de Φ aux noeuds x_n ,
 - et $N_n(x)$ est une fonction d'interpolation telle que :

$$\begin{cases} N_n(x) = 1 & x = x_n \\ N_n(x) = 0 & \text{pour : } x \neq x_n \end{cases} \quad [E 2.26]$$

Compte tenu de la complexité des géométries, il est commode de prendre un élément de référence dans une base de référence (ξ, η) permettant la transformation d'un élément réel par une simple transformation géométrique :

$$\vec{x}(\zeta, \eta) = \langle \bar{N}_n(\zeta, \eta) \rangle \{x_n\} \quad (\zeta, \eta) \in \Omega_{\text{ref.}} \text{ dans la base } (\xi, \eta) \quad [E 2.27]$$

Ceci permet d'exprimer les fonctions \bar{N}_n définies pour chaque élément à partir de fonctions définies de façon unique sur l'élément de référence.

Pour définir ces éléments, on adopte :

- un élément de référence carré (voir figure F 2.1 et tableau T 2.1),
- et des fonctions $\bar{N}_n(\xi, \eta)$ bilinéaires.

POINT K_n :	coordonnées	
	ζ	η
1	0	0
2	1	0
3	1	1
4	0	1

tableau T 2.1: coordonnées des noeuds de l'élément de référence

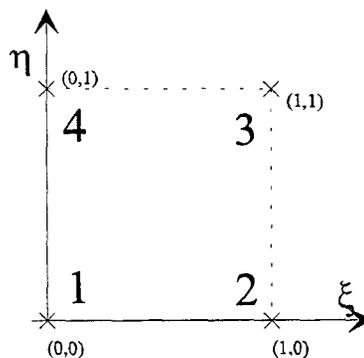


figure F 2.1: présentation de l'élément de référence

Les fonctions $\bar{N}_n(\xi, \eta)$ sont ainsi définies (voir figure F 2.2) :

$$\begin{cases} \bar{N}_1(\zeta, \eta) = (1-\zeta)(1-\eta) \\ \bar{N}_2(\zeta, \eta) = \zeta(1-\eta) \\ \bar{N}_3(\zeta, \eta) = \zeta\eta \\ \bar{N}_4(\zeta, \eta) = \eta(1-\zeta) \end{cases} \quad [\text{E 2.28}]$$

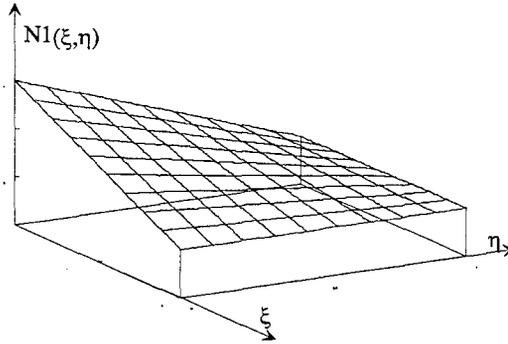


figure F 2.2: représentation de la fonction d'interpolation

$$\bar{N}_1(\zeta, \eta) = (1-\zeta)(1-\eta)$$

On a ainsi dans notre base de référence (ζ, η) :

$$\vec{x}(\zeta, \eta) = \langle \bar{N}_n(\zeta, \eta) \rangle \{x_n\} \quad [\text{E 2.29}]$$

En exprimant les différentielles spatiales suivantes après notre changement de base :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad [\text{E 2.30}]$$

$$\text{avec :} \quad \det(J) = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad [\text{E 2.31}]$$

on obtient donc :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad [\text{E 2.32}]$$

Le choix de coupler une formulation faible des équations [E 2.11] et [E 2.12] du type volumes finis avec une méthode de discrétisation spatiale du type éléments finis nous amène à choisir des domaines d'intégration spécifiques pour exprimer l'équation de conservation de la masse et les équations de quantité de mouvement.

Pour la conservation de la masse, les domaines choisis sont les éléments définis en figure F 2.3, ceux choisis pour exprimer la conservation de la quantité de mouvement sont des éléments décalés : figure F 2.5.

On peut alors calculer les expressions intégrales suivantes sur un domaine d'intégration, soit par exemple :

- pour le domaine d'intégration relatif à l'équation de conservation de la quantité de masse, $S_{m(i,j)}$ ($\vec{\Phi}$ étant un vecteur relatif aux noeuds : $\vec{\Phi} = (\Phi_x, \Phi_z)$), voir figures F 2.3 et F 2.4 :

$$\int_{S_{m(i,j)}} \text{div}(\vec{\Phi}) ds = \int_{S_{m(i,j)}} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) ds$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] d\zeta d\eta$$

[E 2.33]

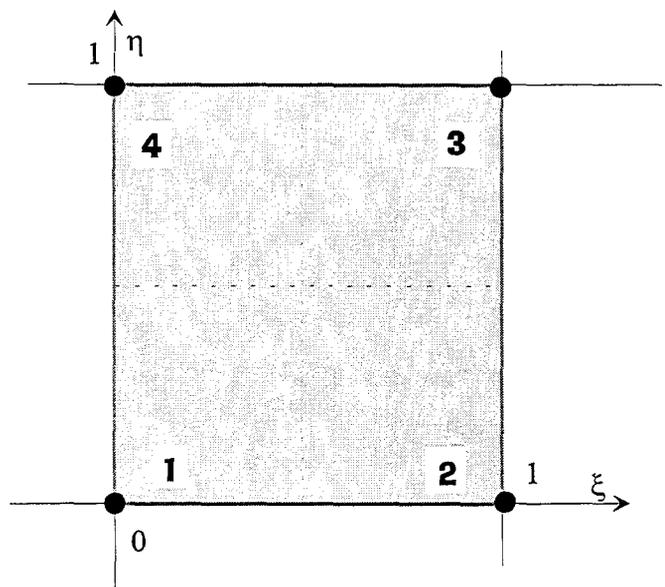
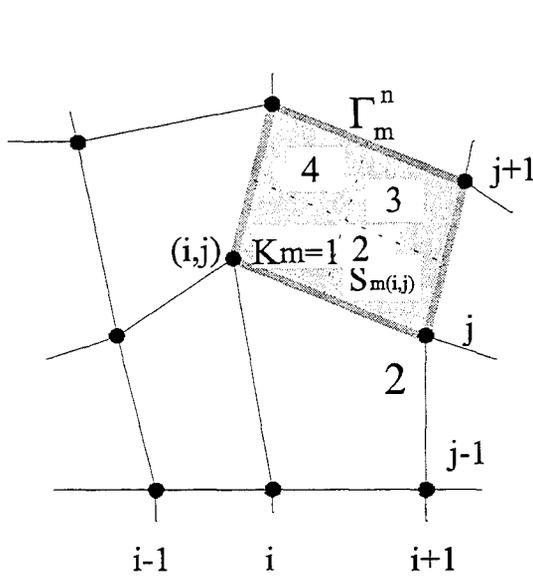


figure F 2.3 : domaine d'intégration pour l'équation de conservation de la masse.

figure F 2.4: domaine d'intégration pour l'équation de conservation de la masse dans le repère de référence.

- pour le domaine d'intégration relatif aux équations de conservation de la quantité de mouvement, $S_n(i,j)$ (Φ étant un scalaire relatif aux mailles), voir figures F 2.5 et F 2.6 :

$$\int_{S_n(i,j)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) ds = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) d\zeta d\eta$$

[E 2.34]

et de manière analogue :

$$\int_{S_n(i,j)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) ds = \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) d\zeta d\eta$$

[E 2.35]

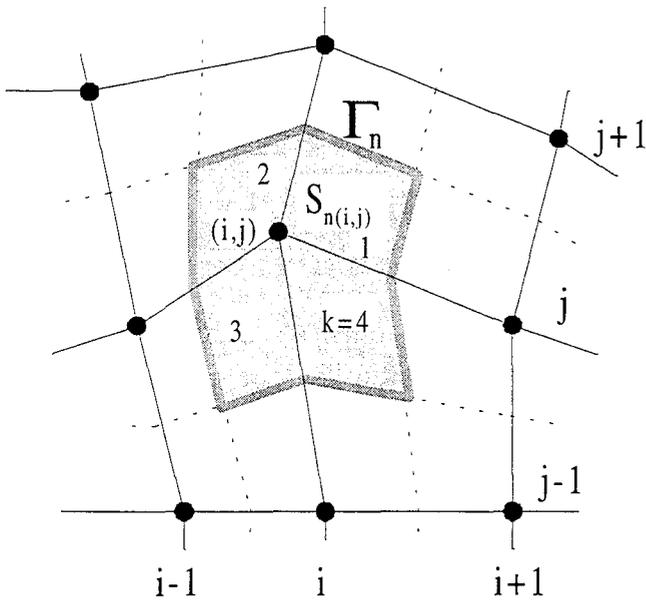


figure F 2.5: domaine d'intégration pour les équations de conservation de la quantité de mouvement.

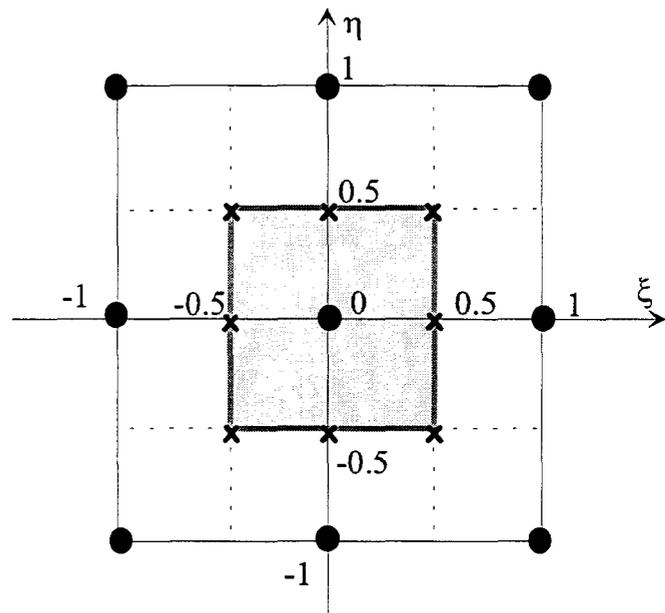


figure F 2.6 : domaine d'intégration pour les équations de conservation de la quantité de mouvement dans le repère de référence.

2.4 : LE SCHEMA NUMERIQUE.

Nous allons présenter dans les paragraphes suivants les différentes techniques numériques utilisées pour résoudre le problème.

La procédure de résolution sera clairement précisée et nous exposerons les différentes méthodes utilisées et testées. Un soin particulier sera apporté à la description du traitement des conditions aux limites dans la suite de ce chapitre.

2.4.1 : CHOIX DE LA DISCRETISATION DES VARIABLES SUR CHAQUE ELEMENT.

Les différentes variables sont approximées sur des éléments définis pour exprimer les équations de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement (voir figures F 2.3 et F 2.5) :

- Les vitesses sont supposées bilinéaires : Q_1 (éléments isoparamétriques).
- La masse volumique, la viscosité et les pressions sont supposées constantes : P_0 .

Les inconnues du problème sont ainsi les vitesses aux noeuds $\vec{u}(i, j)$ et la pression par élément $P(i, j)$ (voir figure F 2.7)

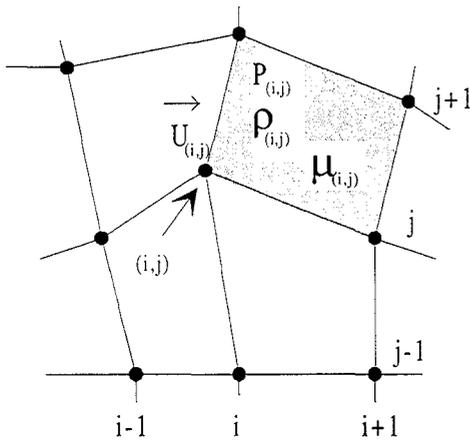


figure F 2.7: localisation des variables discrètes.

NOTA : la position η de la surface libre est située au noeud du maillage défini comme appartenant à l'interface air-eau. De part et d'autre de cette interface, la masse volumique ρ et la viscosité moléculaire μ sont spécifiques à chacun de ces deux milieux. Il apparaît ainsi que la surface libre est définie géographiquement par la frontière séparant les deux milieux ayant chacun des paramètres physiques différents.

2.4.2 : PREMIERE PHASE DE RESOLUTION : L'ETAPE LAGRANGIENNE.

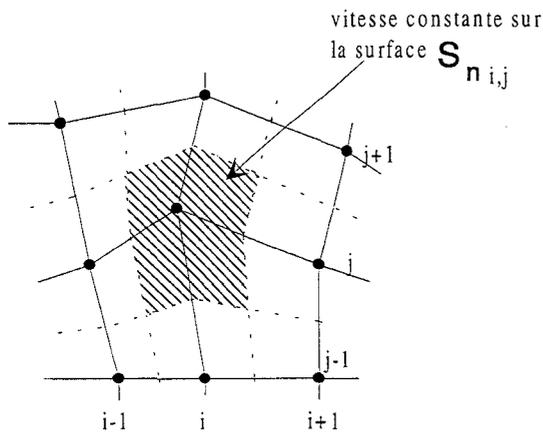


figure F 2.8 : hypothèse sur la vitesse.

Comme on l'a déjà dit, dans l'équation de quantité de mouvement les termes correspondant aux contraintes visqueuses et aux forces volumiques sont pris à l'instant t^n , les termes correspondant à la pression sont pris à l'instant t^{n+1} , ce qui correspond à :

- une formulation explicite pour les termes de contraintes visqueuses et de forces volumiques,
- et à une formulation implicite pour les termes de pression.

De t^n à t^{n+1} , les grandeurs (\vec{u}, P) sont liées à une maille fluide et évoluent de (\vec{u}^n, P^n) à (\vec{u}^1, P^1) où (\vec{u}^1, P^1) sont des grandeurs définies à l'instant t^{n+1} sur la maille qui s'est déplacée en suivant le fluide.

Les équations [E 2.21] se traduisent par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \oint_{\Gamma_m^n} (\vec{u}^1 \cdot \vec{n}) d\Gamma = 0 \\ \bullet \vec{u}^1 - \vec{u}^n = \frac{\Delta t}{M^n} \left[\oint_{\Gamma_m^n} \left((-P^1 \vec{I} + 2\mu \overline{\overline{D}}^n) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_{S_m^n} \rho \vec{g} ds \right] \end{array} \right. \quad [E 2.36]$$

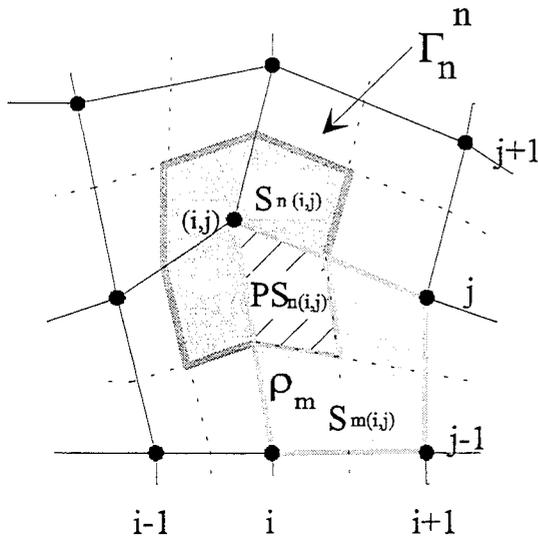


figure F 2.9 : localisation de la masse volumique ρ_m et de la surface PS_n .

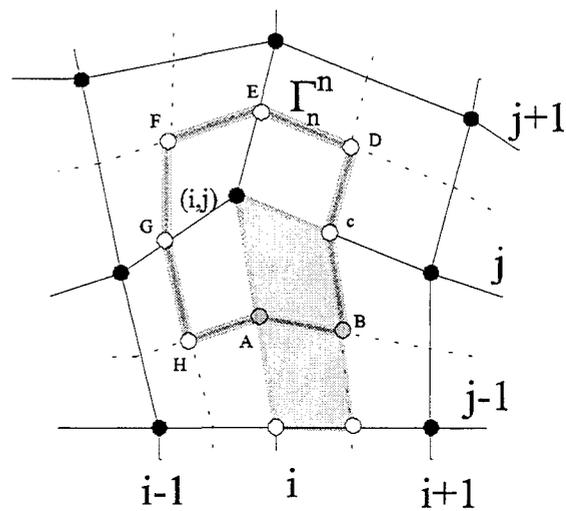


figure F 2.10 : définition du volume de contrôle pour calculer les termes du tenseur de déformation $\overline{\overline{D}}$ pour le contour Γ_{AB} .

où M^n est la masse liée au noeud n à l'instant t^n .

Elle est obtenue suivant l'intégrale :

$$M^n = \int_{S_n^n} \rho(\vec{x}) ds$$

soit :

$$M^n = \sum (PS_m^n \rho_m) \quad [E 2.37]$$

où PS_m^n correspond à la partie de la surface du noeud n lié à la maille m à l'instant t^n (figure F 2.9).

Ceci suppose que dans le système [E 2.36], les intégrales du type :

$$\int_{S^n} \rho \vec{u} ds \quad [E 2.38]$$

sont approximées par :

$$\vec{u} \int_{S^n} \rho ds \quad [E 2.39]$$

L'intégrale des contraintes visqueuses peut se calculer suivant le schéma :

$$\oint_{\Gamma_n^n} (2\mu \overline{\overline{D}} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \sum_{\Gamma_i^n} \oint (2\mu \overline{\overline{D}} \cdot \vec{n}) d\Gamma \quad [E 2.40]$$

où $\overline{\overline{D}}$ est le tenseur de déformation [E 2.5] à t^n et Γ_i un élément du contour Γ_n^n de la surface S_n^n .

L'intégrale [E 2.40] est effectuée sur les segments AB, BC, ... et HA (voir figure F 2.10).

Concernant la résolution du problème, la pression P^l est décomposée à partir de la pression initiale connue P^n suivant le schéma :

$$P^l = P^n + \Delta P \quad [E 2.41]$$

Ceci permet une réécriture de l'équation de conservation de quantité de mouvement du système [E 2.21] :

$$\vec{u}^l - \vec{u}^n = \frac{\Delta t}{M^n} \left[\oint_{\Gamma_m^n} \left((-P^n + \Delta P) \vec{I} + 2\mu \vec{D}^n \right) \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{S_m^n} \rho \vec{g} ds \right] \quad [E 2.42]$$

Connaissant la pression P^n sur le domaine de la maille (i,j), on est amené à introduire une variable intermédiaire \vec{u}^{*1} regroupant les contraintes et les forces volumiques exprimées explicitement :

$$\vec{u}^{*1} = \vec{u}^n + \frac{\Delta t}{M^n} \left[\oint_{\Gamma_m^n} \left((-P^n \vec{I} + 2\mu \vec{D}^n) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_{S_m^n} \rho \vec{g} ds \right] \quad [E 2.43]$$

Le système [E 2.36] s'écrit alors :

$$\begin{cases} \bullet \oint_{\Gamma_m^n} \left(\vec{u}^l \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = 0 \\ \bullet \vec{u}^l - \vec{u}^{*1} = \frac{\Delta t}{M^n} \oint_{\Gamma_m^n} \left((-\Delta P \vec{I}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \end{cases} \quad [E 2.44]$$

En remplaçant dans l'équation de conservation de la masse du système [E 2.44] \vec{u}^l par son expression en fonction de \vec{u}^{*1} et de ΔP , on obtient :

$$\begin{cases} \bullet \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma_m^n} \left(\vec{u}^{*1} \cdot \vec{n} \right) ds = \oint_{\Gamma_m^n} \left(\frac{1}{M^n} \oint_{\Gamma_m^n} \left((\Delta P \vec{I}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \right) d\Gamma \\ \bullet \vec{u}^l = \vec{u}^{*1} + \frac{\Delta t}{M^n} \oint_{\Gamma_m^n} \left((-\Delta P \vec{I}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \end{cases} \quad [E 2.45]$$

En utilisant les relations [E 2.33], [E 2.34] et [E 2.35], les termes de gauche et de droite de l'équation de conservation de la masse de [E 2.45] s'écrivent :

• pour le terme de gauche (voir figure F 2.11) :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma_m^n} \left(\vec{u}^{*1} \cdot \vec{n} \right) ds = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k_n=1}^4 \left(\vec{C}_{m k_n}^n \cdot \vec{u}_{k_n}^{*1} \right) \Big|_{S_m(i,j)} \quad [E 2.46]$$

avec :

- K_n indice relatif à la localisation des noeuds n ,

- et $\vec{C}_{m k_n}^n = \begin{cases} C_{m x k_n}^n \\ C_{m z k_n}^n \end{cases}$ qui sont des coefficients dimensionnels.

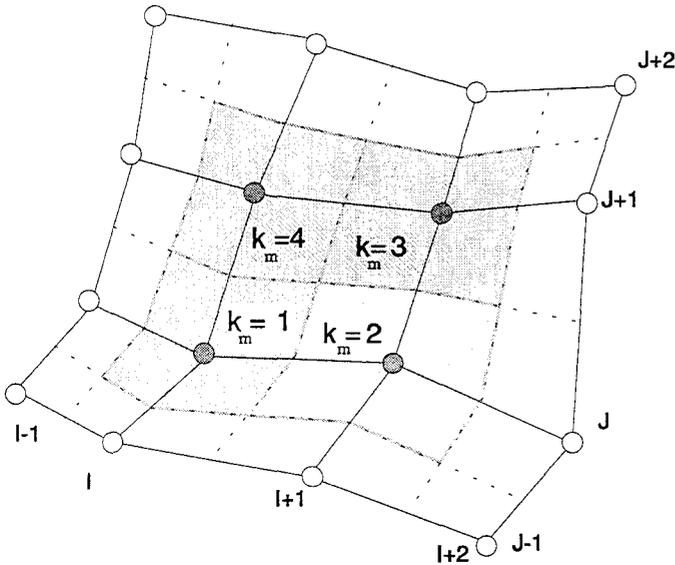


figure F 2.11 : localisation des noeuds pour le calcul de l'intégrale [E 2.46].

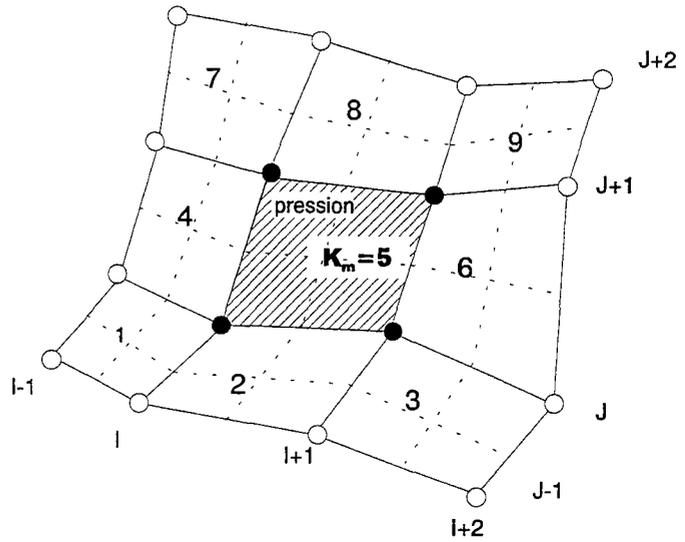


figure F 2.12: localisation des mailles pour le calcul de l'intégrale [E 2.47].

• et pour le terme de droite de la relation [E 2.45] (voir figure F 2.12) :

$$\int_{\Gamma_m^n} \left(\frac{1}{M^n} \oint_{\Gamma_m^n} \left((\Delta P \cdot \vec{I}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \right) \cdot \vec{n} d\Gamma = \sum_{k_m=1}^9 (C_{p_{k_m}}^n \cdot \Delta P_{k_m}) \quad [E 2.47]$$

où :

- K_m représente l'indice relatif à la localisation d'une maille m ,
- et $C_{p_{k_m}}^n$ sont des coefficients exprimés à l'instant t^n .

On est amené finalement à résoudre un système linéaire d'inconnue ΔP :

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{k_n=1}^4 \left(\vec{C}_{n_{k_n}}^n \cdot \vec{u}_{k_n}^{*1} \right) = \sum_{k_m=1}^9 (C_{p_{k_m}}^n \cdot \Delta P_{k_m}) \quad [E 2.48]$$

Celui-ci correspond au système linéaire inversé suivant :

$$\{ \Delta P_{k_m} \} = [C_{p_{k_m}}^n]^{-1} \{ G^{*1} \} \quad [E 2.49]$$

où $\{ G^{*1} \}$ représente les termes relatifs à la partie gauche de la relation [E 2.48].

Les applications testées par la suite utilisent des maillages ayant en général un nombre de noeuds inférieur à 40 000, ce qui nous permet d'utiliser une méthode d'inversion directe sans à avoir à se soucier de la convergence pour un solveur itératif. Au-dessus il apparaît nécessaire de mettre en oeuvre une méthode d'inversion itérative du type S.O.R. (Successive Over Relaxation) ou de mettre en oeuvre une structure du type multi-grilles, multi-domaines afin d'optimiser au mieux l'opération.

Concernant notre choix, il nous sera nécessaire de préparer le système à résoudre. On réalisera pour cela une "renumérotation" des points du maillage du type de bas en haut et de la gauche vers la droite. Cette étape va nous permettre de réorganiser les deux matrices $[C_{p_{k_m}}^n]$ et $\{ G^{*1} \}$, et de pouvoir utiliser une technique d'inversion du type L U (Lower and Upper).

La correction de pression ΔP connue, la vitesse \vec{u}^1 est calculée avec l'équation de quantité de mouvement du système [E 2.45] :

$$\vec{u}^1 = \vec{u}^* + \frac{\Delta t}{M^n} \oint_{\Gamma_n^n} \left((-\Delta P \cdot \vec{I}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \quad [E 2.50]$$

On obtient en fin de période lagrangienne les deux variables discrètes :

$$\begin{cases} \bullet \vec{u} \\ \bullet P^1 = P^n + \Delta P \end{cases} \quad [E 2.51]$$

définies sur les noeuds du maillage déplacés suivant la relation :

$$\vec{x}^1 = \vec{x}^n + \vec{u} \cdot \Delta t \quad [E 2.52]$$

2.4.3 : DEUXIEME ETAPE DE RESOLUTION : L'ETAPE CONVECTIVE.

D'une manière analogue au schéma de résolution précédent, la vitesse \vec{u} est supposée constante sur la surface de contrôle S_n pour les évaluations des intégrales du types $\int_{S_n} \rho \vec{u} ds$.

Aussi résoudre l'équation d'advection de [E 2.23] :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_n^{n+1}} \rho(\vec{x}) \vec{u}^{\rightarrow n+1} ds - \int_{S_n^n} \rho(\vec{x}) \vec{u}^{\rightarrow 1} ds \right] = \oint_{\Gamma_n^{n+1}} \left(\rho(\vec{x}) \vec{u}^{\rightarrow 1} \left(\vec{u}_g - \vec{u}^{\rightarrow 1} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \quad [E 2.53]$$

nous permet d'obtenir directement la vitesse $\vec{u}^{\rightarrow n+1}$:

$$\vec{u}^{\rightarrow n+1} = \frac{M^n}{M^{n+1}} \vec{u}^{\rightarrow 1} + \frac{\Delta t}{M^{n+1}} \oint_{\Gamma_n^n} \left(\rho(\vec{x}) \vec{u}^{\rightarrow 1} \left(\vec{u}_g - \vec{u}^{\rightarrow 1} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \quad [E 2.54]$$

avec les masses suivantes :

$$M^{n+1} = \int_{S_n^{n+1}} \rho(\vec{x}) ds \quad [E 2.55]$$

$$\text{et : } M^n = \int_{S_n^n} \rho(\vec{x}) ds \quad [E 2.56]$$

où $\rho(\vec{x}) = \rho(i, j)$ quand \vec{x} est dans la maille (i, j) .

On pourra utiliser au choix une méthode convective avec un schéma aux différences amonts ou centrées pour évaluer l'expression intégrale :

$$\oint_{\Gamma_n^n} \left(\rho(\vec{x}) \vec{u}^{\rightarrow 1} \left(\vec{u}_g - \vec{u}^{\rightarrow 1} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \quad [E 2.57]$$

et ce après avoir calculé le flux convectif traversant la surface S_n^{n+1} d'un noeud :

$$\text{Flux}|_{\Gamma_{u_i}^{n+1}} = \oint_{\Gamma_{u_i}^{n+1}} \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad [E 2.58]$$

Dans un premier temps, nous utilisons un schéma aux différences amonts.

La vitesse à convecter est choisie en fonction du signe du flux, afin de toujours avoir une vitesse convective amont ; aussi en décomposant le contour de la surface du noeud (i,j) en huit segments, on a par exemple pour le contour Γ_{AB} (voir figure F 2.13) :

$$\oint_{\Gamma_{AB}^n} \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma < 0 \rightarrow \alpha = -\alpha^0 \quad [E 2.59]$$

$$\oint_{\Gamma_{AB}^n} \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma \geq 0 \rightarrow \alpha = +\alpha^0 \quad [E 2.60]$$

avec : $\alpha^0 = 1$ [E 2.61]

et avec la vitesse à convecter définie comme suit sur le segment contour Γ_{AB} :

$$\rho(i, j) \vec{u} \Big|_{\Gamma_{AB}} \approx \rho(i, j) \frac{\vec{u}_{k_n=5}(1+\alpha) + \vec{u}_{k_n=6}(1-\alpha)}{2} \Big|_{\Gamma_{AB}} \quad [E 2.62]$$

où les vitesses $\vec{u}_{k_n=5}$ et $\vec{u}_{k_n=6}$ sont les vitesses aux points désignés par ● et proches des noeuds du maillage, soit 5 et 6.

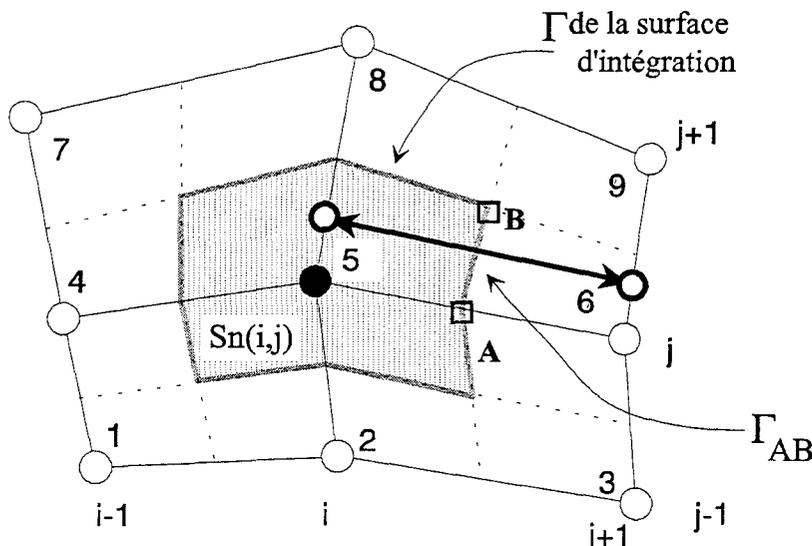


figure F 2.13: représentation graphique des points k utilisés pour le calcul de l'égalité [E 2.62] et désignés par ● le long du contour Γ_{AB} .

Le coefficient α^0 est une des caractéristiques des schémas de convection ; pour notre cas et avec un schéma du type "UPWIND", α^0 prend la valeur :

$$\alpha^0 = 1 \quad [E 2.63]$$

On notera que pour une valeur de $\alpha^o = 0$, on retrouve un schéma du type centré (voir figure F 2.14).

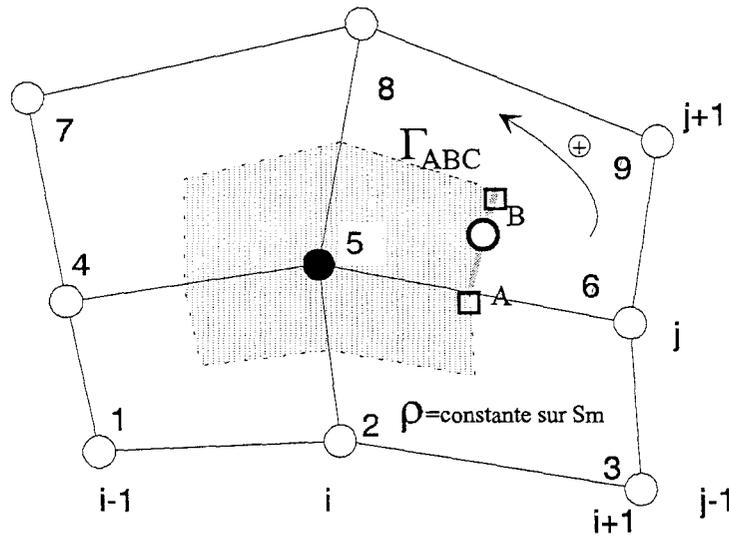


figure F 2.14: représentation graphique des points et du contour utilisés pour le calcul d'une partie de l'intégral [E 2.57].

On notera que la formulation convective décrite est globalement conservative.

⇒ par contre la divergence n'est pas strictement nulle en chaque maille à la fin de cette étape.

Le schéma en différences centrées est connu pour être instable (voir le critère de Von Neuman). La technique de différences amonts permet d'introduire implicitement un terme de diffusion numérique et de rester stable à condition que le critère de COURANT (C.F.L.) soit satisfait.

On dispose à la fin de cette étape des résultats suivants :

$$\begin{cases} \rightarrow^{n+1} \\ \bullet u \\ \bullet P^{n+1} = P^l \end{cases} \quad [E 2.64]$$

sur les noeuds déplacés :

$$\rightarrow^{n+1} x = \rightarrow^l x + \left(\rightarrow u_g - \rightarrow u \right) \cdot \Delta t \quad [E 2.65]$$

REMARQUES.

Dans un cadre général, on notera ces deux aspects :

- les développements réalisés précédemment sont à l'ordre un en temps ; dans la mesure où on s'intéresse à des problèmes instationnaires, on sera amené à utiliser des pas de temps faibles pour avoir une précision suffisante.
- Outre cet aspect, s'ajoute trois critères de stabilité liés essentiellement aux phases explicites : prise en compte des phénomènes de diffusion, de l'évolution du maillage dans la première étape de résolution et/ou des termes de convection dans la deuxième étape.

2.5 : LES CRITERES DE STABILITE.

Compte tenu du choix de discrétisation temporelle de nos variables discrètes lors de la première et seconde étapes de résolution, on est amené à définir des critères de stabilité spécifiques.

Concernant l'étape lagrangienne, le tenseur de déformation $\overline{\overline{D}}$ est pris explicitement dans l'équation de quantité de mouvement du système [E 2.36] :

$$\vec{u}^1 - \vec{u}^n = \frac{\Delta t}{M^n} \left[\oint_{\Gamma_n^1} \left(-P^1 \cdot \vec{I} + 2\mu \overline{\overline{D}}^n \right) \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{S_n^1} \rho \vec{g} ds \right] \quad [E 2.66]$$

On utilise alors l'expression monodimensionnelle d'un critère de stabilité de type Von-Neuman :

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad [E 2.67]$$

avec : $\mu \geq 0$

en définissant l'équivalent de Δx^2 pour une maille de géométrie quelconque.

Pour la seconde étape de résolution, le calcul des flux dans l'équation de convection du système [E 2.53] utilise explicitement les vitesses obtenues en fin d'étape lagrangienne :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_n^{n+1}} \rho(\vec{x}) \cdot \vec{u}^{\rightarrow n+1} ds - \int_{S_n^1} \rho(\vec{x}) \cdot \vec{u}^{\rightarrow 1} ds \right] = \oint_{\Gamma_n^{n+1}} \left(\rho(\vec{x}) \cdot \vec{u}^{\rightarrow 1} \left(\vec{u}_g - \vec{u}^{\rightarrow 1} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \quad [E 2.68]$$

Aussi, de façon analogue, le critère de CFL (Courant, Friedrich's & Lewy) est exprimé à partir des flux (expression [E 2.58]) :

$$\left| \frac{\left\| \vec{u} - \vec{u}_g \right\| \Delta t_c}{\left\| \vec{\Delta x} \right\|} \right| \leq 1 \quad [E 2.69]$$

Le troisième critère qui doit être ajouté, correspond au comportement asymptotique de la relation lagrangienne [E 2.52] correspondant à la discrétisation de :

$$\frac{d \vec{x}}{dt} = \vec{u} \quad [E 2.70]$$

De manière analogue au critère précédemment exposé, on a l'expression :

$$\left| \frac{\left\| \vec{u} \right\| \Delta t_l}{\left\| \vec{\Delta x} \right\|} \right| \leq 1 \quad [E 2.71]$$

Ces trois critères permettent de calculer trois pas de temps Δt_v , Δt_c et Δt_l ; aussi sur un cycle de résolution, le pas de temps utilisé est la valeur minimale de ceux-ci :

$$\Delta t = \text{Min} \left(\frac{\rho}{2\mu} \Delta x^2, \frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec{u} - \vec{u}_g\|}, \frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec{u}\|} \right) \quad [\text{E 2.72}]$$

Les trois critères précédemment énumérés fournissent une condition de stabilité en fonction de Δt limite et non pas un critère de précision.

Aussi pour se placer dans un premier temps en marge de la zone instable, on multiplie ce critère par un facteur d'atténuation α_{stable} :

$$\alpha = \alpha_{\text{stable}} = 0,8 \quad (\text{ou } 1) \quad [\text{E 2.73}]$$

Pour obtenir un critère fournissant une précision acceptable par un deuxième facteur (voir page 77 le chapitre : "3.2.1 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU PAS DE TEMPS Δt ") : $\alpha_{\text{précision}}$.

$$\alpha = \alpha_{\text{précision}} = 0,1 \quad [\text{E 2.74}]$$

on a ainsi le pas de temps Δt défini par la relation :

$$\Delta t = \alpha \cdot \text{Min} \left(\frac{\rho}{2\mu} \Delta x^2, \frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec{u} - \vec{u}_g\|}, \frac{\|\vec{\Delta x}\|}{\|\vec{u}\|} \right) \quad [\text{E 2.75}]$$

2.6 : LA VITESSE DE GRILLE.

La vitesse de grille est un élément du schéma de résolution, elle intervient au niveau du calcul des flux de la partie convective. Elle ne constitue cependant pas une des inconnues de notre problème.

Pour un écoulement instationnaire à surface libre, notre maillage est appelé à se modifier et à évoluer à chaque pas de temps.

L'évolution du maillage est entièrement conditionnée par le déplacement des noeuds \vec{x}_g constituant le maillage.

Cette évolution est gérée par la vitesse de grille \vec{u}_g :

$$\vec{x}_g^{n+1} = \vec{x}_g^n + \vec{u}_g \cdot \Delta t \quad [\text{E 2.76}]$$

Celle-ci peut être calculée à partir du moment où on dispose des coordonnées de tous les points constituant le nouveau maillage :

$$\vec{u}_g = \frac{\vec{x}_g^{n+1} - \vec{x}_g^n}{\Delta t} \quad [\text{E 2.77}]$$

Pour les études que nous réaliserons par la suite, nous nous plaçons délibérément dans le cas particulier d'une surface libre ayant une courbure régulière et continue.

Pour calculer notre vitesse de grille, nous allons dans un premier temps redéfinir l'enveloppe caractérisant l'interface qu'est la surface libre.

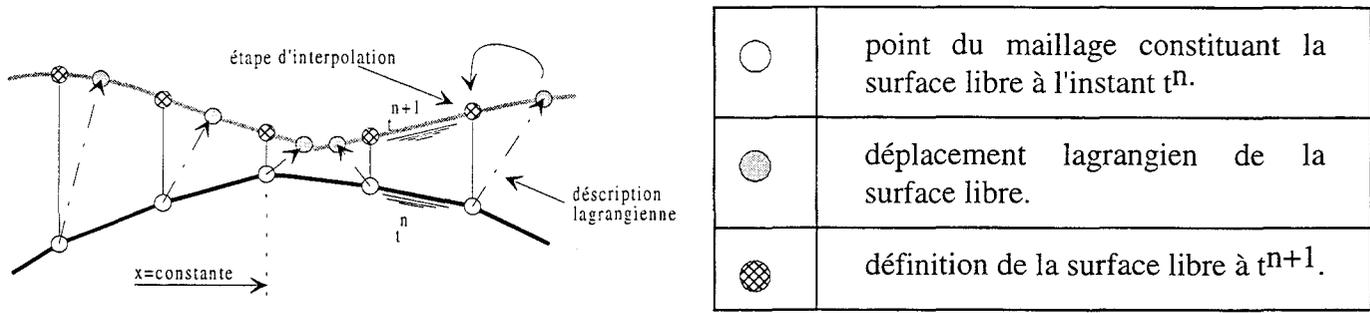


figure F 2.15 : traitement temporel de la surface libre.

Les particules fluides constituant la surface libre évoluent suivant la relation lagrangienne (voir figure F 2.15) :

$$\vec{x}_{\text{surface}}^{n+1} = \vec{x}_{\text{surface}}^n + \vec{u} \cdot \Delta t \quad [E 2.78]$$

Ceci nous permet d'obtenir une enveloppe caractérisant à un instant t^{n+1} le contour définissant la surface libre.

Or on souhaite imposer la condition supplémentaire suivante : ne pas effectuer de déplacement horizontal de la grille de calcul afin d'éviter une translation inutile et une gestion lourde de notre maillage.

Cet aspect implique une phase d'interpolation permettant de définir la position de la surface libre en une abscisse donnée, on utilise à ce moment des fonctions d'interpolation diverses (linéaire, développement de Taylor - figure F 2.18 à F 2.20, etc.) nous permettant de calculer pour une abscisse donnée la dénivellation correspondante (voir comparaison des techniques utilisées dans le chapitre " 3 : PROPAGATION D'UNE ONDE SOLITAIRE DE GRAVITE").

Nous détaillons ici la technique d'interpolation retenue, Taylor Mixte dite TM, proche de celle développée par NGUYEN (1993) :

♦ Dans une première étape, on cherche à encadrer l'abscisse x d'un point dont on veut l'ordonnée z et ce à partir de la localisation de la surface libre obtenue à l'aide de la formulation lagrangienne.

Lorsque l'abscisse du point est localisée, on effectue deux développements de Taylor, chacun étant effectué sur trois points encadrant le point étudié (figure F 2.16) :

$$z_1 = z_{(i-1,j)}^1 + \Delta x_1 \left. \frac{\partial z^1}{\partial x^1} \right|_{(i-1,j)} + \frac{\Delta x_1^2}{2} \left. \frac{\partial^2 z^1}{\partial x^{12}} \right|_{(i-1,j)} \quad [E 2.79]$$

$$z_2 = z_{(i,j)}^1 + \Delta x_2 \left. \frac{\partial z^1}{\partial x^1} \right|_{(i,j)} + \frac{\Delta x_2^2}{2} \left. \frac{\partial^2 z^1}{\partial x^{12}} \right|_{(i,j)} \quad [E 2.80]$$

avec :

$$\Delta x_1 = x - x_{(i-1,j)}^1 \quad [E 2.81]$$

$$\text{et : } \Delta x_2 = x - x_{(i,j)}^1 \quad [E 2.82]$$

et :

$$\left. \frac{\partial z^1}{\partial x^1} \right|_{(i,j)} = \frac{z^1_{(i+1,j)} - z^1_{(i-1,j)}}{x^1_{(i+1,j)} - x^1_{(i-1,j)}} \quad [E 2.83]$$

$$\left. \frac{\partial^2 z^1}{\partial x^{12}} \right|_{(i,j)} = \frac{\left(\frac{z^1_{(i+1,j)} - z^1_{(i,j)}}{x^1_{(i+1,j)} - x^1_{(i,j)}} \right) - \left(\frac{z^1_{(i,j)} - z^1_{(i-1,j)}}{x^1_{(i,j)} - x^1_{(i-1,j)}} \right)}{\left(x^1_{(i+1,j)} - x^1_{(i-1,j)} \right) / 2} \quad [E 2.84]$$

et respectivement pour :

$$\left. \frac{\partial z^1}{\partial x^1} \right|_{(i-1,j)} \quad [E 2.85]$$

$$\text{et : } \left. \frac{\partial^2 z^1}{\partial x^{12}} \right|_{(i-1,j)} \quad [E 2.86]$$

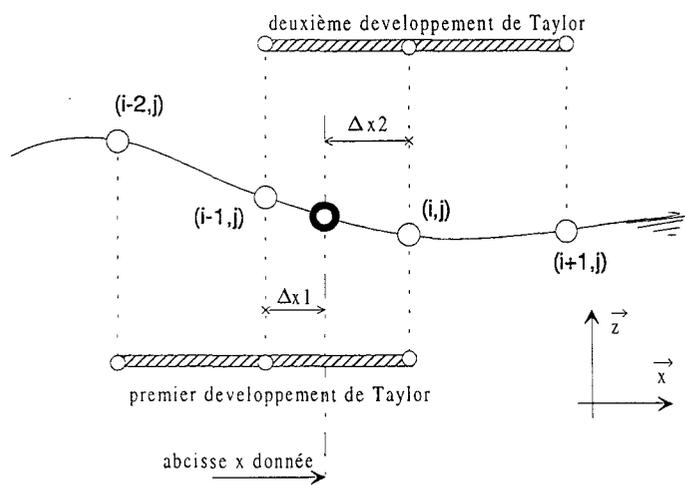


figure F 2.16 : première étape dans le calcul de la dénivellation de la surface libre par une méthode du type développement de Taylor.

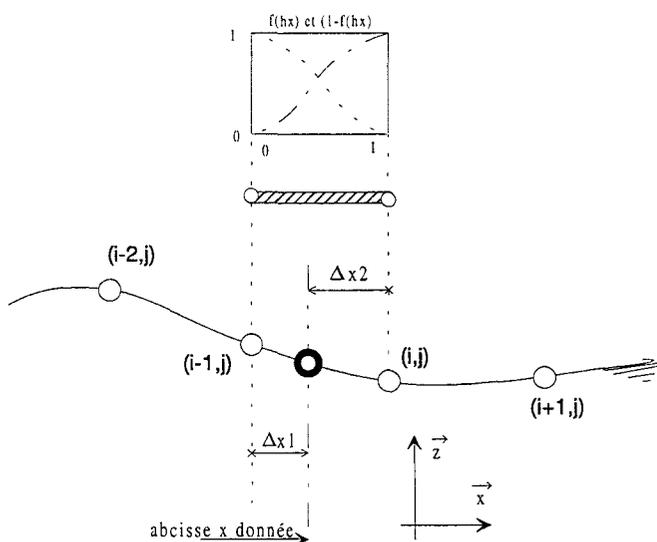


figure F 2.17: deuxième étape de la phase de localisation de la dénivellation de la surface libre par une méthode de type TM.

♦ Dans une deuxième étape, à partir des deux solutions obtenues z_1 et z_2 , on utilise une fonction de poids linéaire et unitaire définie par (figure F 2.17) :

$$z = z_1(1 - f(hx)) + z_2 f(hx) \quad [E 2.87]$$

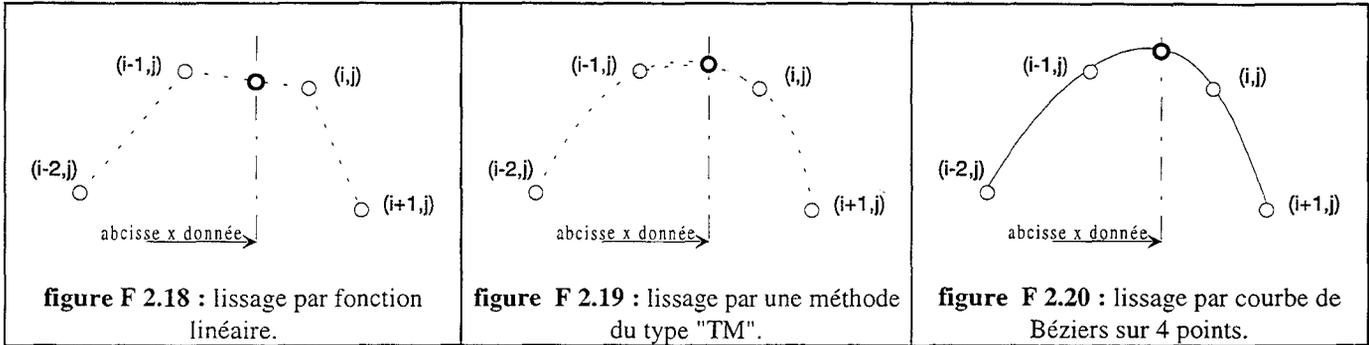
avec :

$$hx = \frac{\Delta x_1}{x^1_{(i,j)} - x^1_{(i-1,j)}} \quad [E 2.88]$$

et : $f(\Phi) = \Phi^2(3 - 2\Phi)$ [E 2.89]

Cette technique permet de prendre en compte le comportement de la surface libre sur quatre points sans à avoir à utiliser une technique d'ordre 3 ou plus.

Le risque d'utiliser ces dernières techniques est d'introduire un lissage conditionné par les conditions aux limites et ce plus particulièrement pour des variations importantes de la dénivellation sur 4 points ou plus (figures F 2.18 à F 2.20).



Une fois le déplacement vertical Δz calculé pour une abscisse x donnée, le reste du maillage subit alors une répartition verticale du déplacement à l'aide d'une fonction locale f dite de poids (répartition linéaire, géométrique ou suivant une autre méthode quelconque) :

$$\Delta z_{(i,j)} = f_{(i,j)} \cdot \Delta z_{\text{surface}} \quad [E 2.90]$$

La vitesse de grille découle directement de la formulation décrite précédemment [E 2.77] :

$$\begin{cases} \bullet u_g = 0 \\ \bullet v_g = \frac{z_g^{n+1} - z_g^n}{\Delta t} \end{cases} \quad [E 2.91]$$

ce qui nous amène directement aux deux formulations suivantes :

- vitesse de grille à la surface libre :

$$\begin{cases} \bullet u_g = 0 \\ \bullet v_g = \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases} \quad [E 2.92]$$

- vitesse de grille sur le domaine interne :

$$\begin{cases} \bullet u_{g(i,j)} = 0 \\ \bullet v_{g(i,j)} = f_{(i,j)} \cdot \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \Big|_{\text{surface}} \right) \end{cases} \quad [E 2.93]$$

On notera cependant que le choix de la fonction f doit être judicieux et répondre à certaines obligations :

- être une fonction régulière, continue et monotone,
- permettre une répartition homogène du déplacement sur la verticale tout en évitant des croisements de maille,
- avoir pour borne les valeurs suivantes :

- 0, au fond (notre fond ne subissant a priori aucune évolution),
- 1, en surface (soit le déplacement en surface libre adimensionné).

On choisira ici la fonction (figure F 2.21) :

$$f(\xi) = \xi^2(3 - 2\xi) \quad [E 2.94]$$

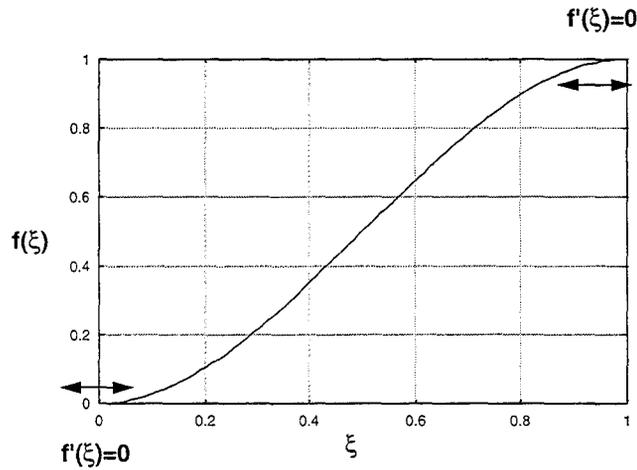


figure F 2.21: représentation de la fonction $f(\xi) = \xi^2(3 - 2\xi)$.

qui a pour propriété d'avoir une dérivée nulle aux bornes de notre intervalle $[0:1]$ et d'être nulle pour $\xi = 0$ et unitaire pour $\xi = 1$, ξ correspondant au rapport :

$$\xi = \frac{Z_{(i,j)} - Z_{\text{fond}}}{Z_{\text{surface}} - Z_{\text{fond}}} \quad [E 2.95]$$

REMARQUES.

La technique de maillage utilisée est ici particulièrement bien adaptée à nos besoins : fond sans courbure trop forte.

Le maillage développé permet d'étudier des problèmes plus vastes que ceux qui vont nous préoccuper par la suite, les applications sont diverses, comme par exemple le dimensionnement d'ouvrages en mer où les géométries étudiées sont relativement simples (voir annexe A1).

Pour des géométries plus complexes, il est possible d'utiliser des mailleurs automatiques ; ceux-ci s'avèrent particulièrement efficaces et adaptés à des formulations ALE, voir THOMPSON (1974, 1977 et 1985). Cependant ces techniques sont en général coûteuses et ce, plus particulièrement dans le cas d'écoulement instationnaire avec notamment des variations du contour du domaine.

Leur emploi doit donc être justifié.

Une des solutions consiste simplement dans le cas où la nécessité l'impose de l'utiliser localement :

- ♦ Une première solution consiste à développer localement un maillage en ayant au préalable défini le contour de domaine, la zone maillée n'est pas directement en contact avec la surface libre, il nous est possible alors de figer cette zone dans le temps en imposant comme nulle la vitesse des noeuds du maillage (figure F 2.22).

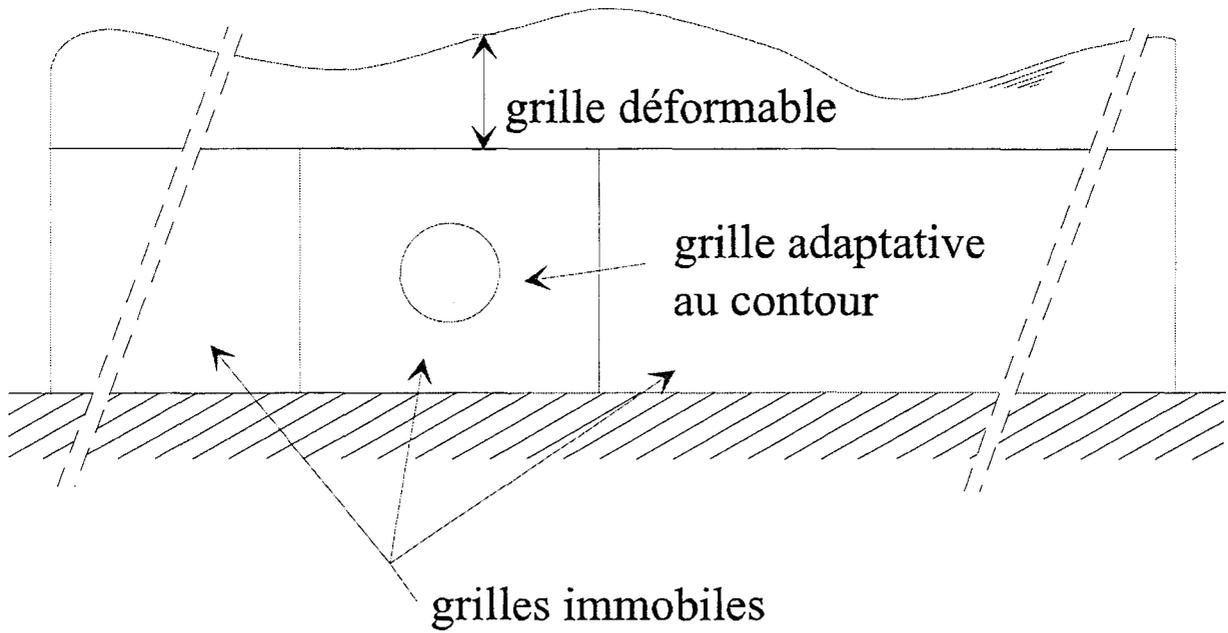


figure F 2.22 : exemple de gestion de maillage.

- ♦ La deuxième solution consiste à développer localement un maillage dont un des contours constitue une partie de la surface libre, ce contour est donc temporellement déformable ce qui amène à redéfinir pour chaque étape temporelle l'enveloppe du domaine à mailler (figure F 2.23).

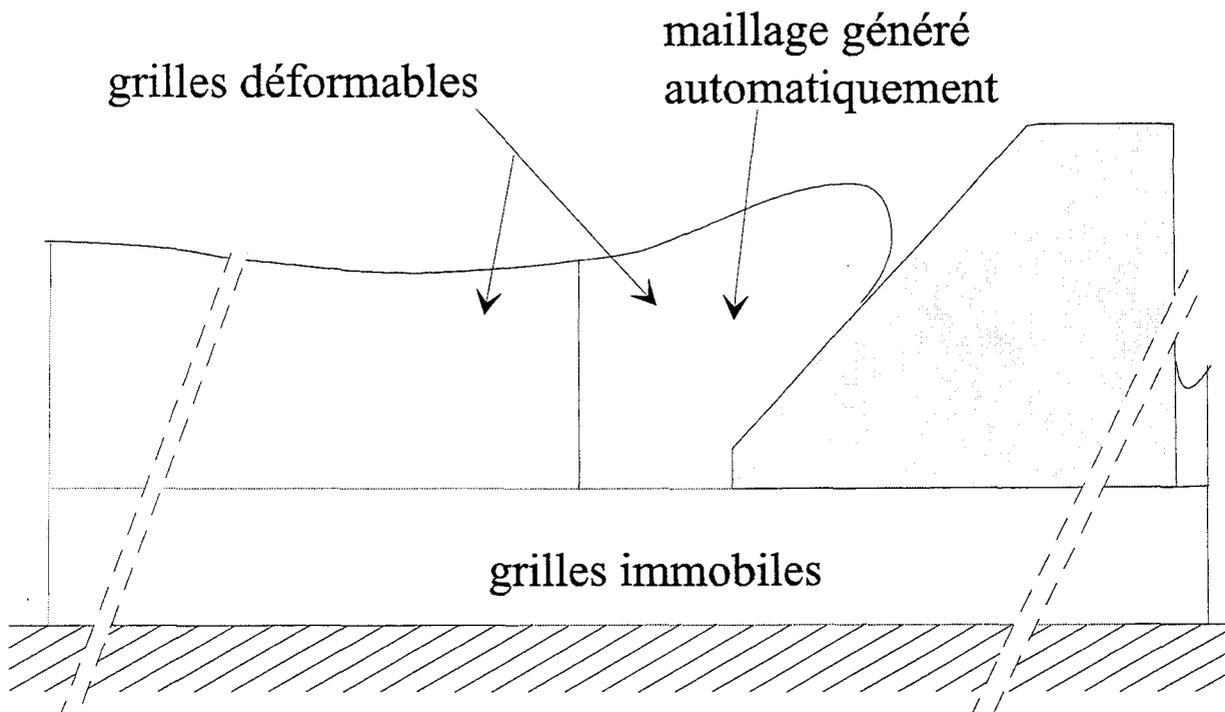


figure F 2.23: exemple de gestion de maillage.

De plus, il peut apparaître intéressant d'avoir à fixer certaines parties du maillage et ce pour des raisons différentes de celles cités précédemment.

En effet comme précisé, on effectue une répartition homogène du déplacement verticale sur toute la hauteur d'eau (positive comme négative). Cependant pour des déformations importantes de la surface libre, on peut avoir une diminution importante de la taille de certaines mailles (notamment pour celles voisines des zones pariétales où le maillage est affiné pour une étude de la couche limite).

Comme le pas de temps est géré entre autres par l'aspect dimensionnel de chaque maille, celui-ci peut devenir très faible et le nombre d'itérations temporelles nécessaires pour couvrir une période de temps donnée augmente en conséquence.

Figurer le maillage pour ces zones sensibles permet ainsi de "contrôler" le pas de temps et ce, surtout lorsqu'il est dépendant des caractéristiques cinématiques et géométriques de ces zones.

2.7 : LES CONDITIONS AUX LIMITES.

Les conditions aux limites appliquées aux frontières de notre domaine d'étude (figure F 2.24) sont les suivantes :

- au fond :
 - on a une condition d'adhérence,
 - le fond est immobile,
- à la surface :
 - on vérifie l'égalité des contraintes des deux côtés de l'interface,
 - dans le milieu atmosphérique, la pression est imposée et est égale à la pression atmosphérique,
- à l'amont :
 - la vitesse et la hauteur d'eau sont imposées,
- à l'aval :
 - une condition d'amortissement (milieu poreux) ou de réflexion totale est utilisée.

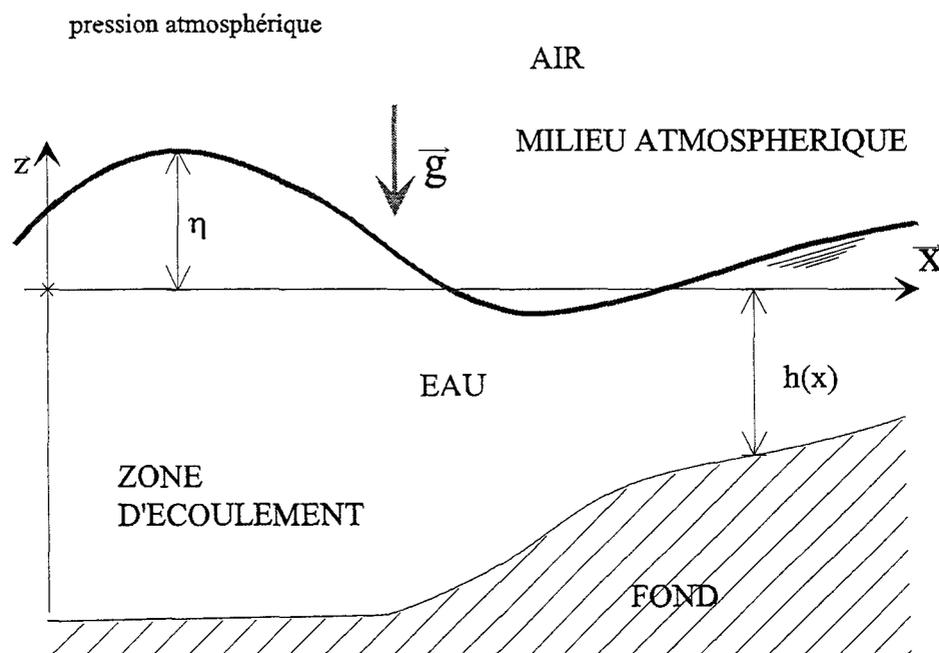


figure F 2.24 : configuration étudiée.

Nous allons dans les paragraphes suivants préciser certaines de ces conditions et indiquer les options techniques développées et choisies.

2.7.1 : CONDITIONS A L'INTERSECTION SURFACE LIBRE - PAROI.

Un des problèmes les plus délicats concerne le traitement des conditions d'écoulement au voisinage de l'interface surface libre-paroi.

Lorsque la surface libre est en contact avec un obstacle solide (côte, structure offshore, engin de surface, etc.), le noeud situé à la surface libre et sur la paroi pose un problème de singularité.

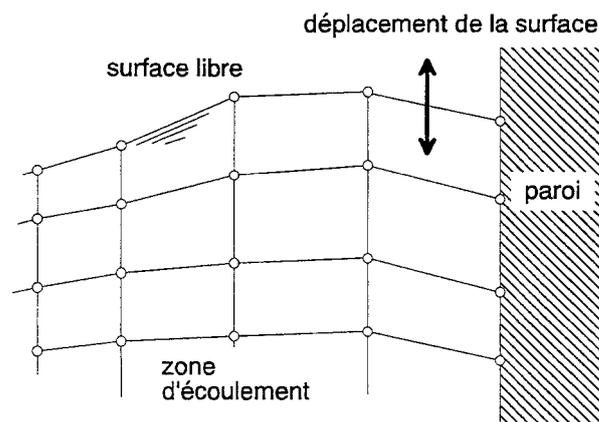


figure F 2.25 : traitement de la surface libre au point de contact surface libre - paroi solide.

Pour expliciter le problème, on se place délibérément dans une configuration simple.

On supposera ainsi que la surface libre évolue au voisinage d'une paroi verticale et immobile (voir figure F 2.25), soit :

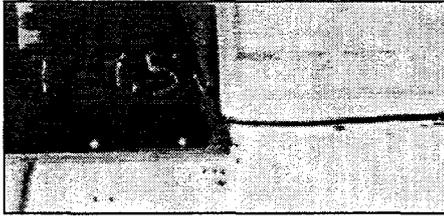
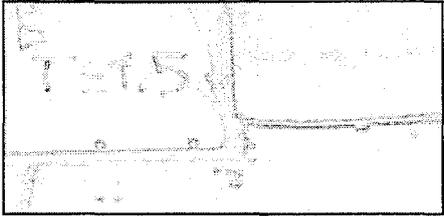
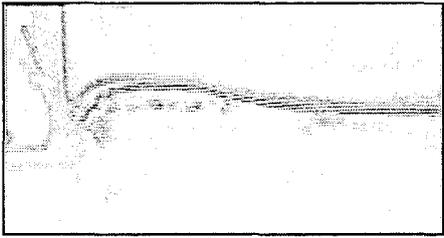
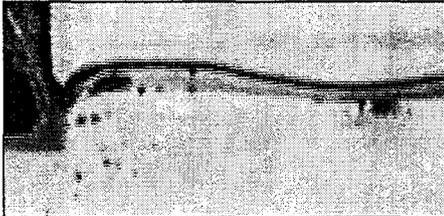
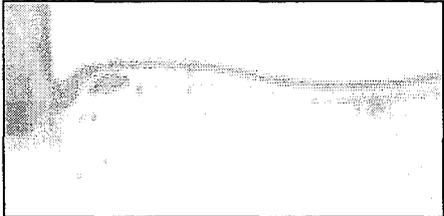
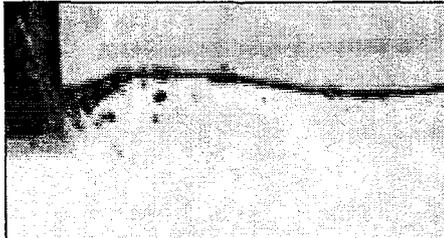
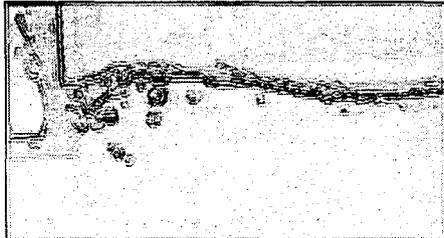
$$\vec{u}_{\text{paroi}} = \vec{0} \quad [\text{E 2.96}]$$

Cela implique en utilisant la relation [E 2.96] que la surface libre ne peut évoluer au contact de la paroi, elle conserve sa position initiale, ce qui est contraire à ce qu'on peut grossièrement "observer".

En fait, comme on va le voir dans l'exemple ci-dessous, le déplacement de la surface libre se fait par "déferlement" sur la paroi.

Des expériences portant sur le dimensionnement d'une digue soumise à la houle ont été effectuées au Laboratoire de Mécanique des Fluides et Génie Civil du Havre. Elles permettent aisément de décrire le phénomène.

On présente ici des visualisations montrant le comportement de la surface libre au voisinage de la paroi verticale lors de la phase ascendante du signal incident (voir visualisations V 2.1).

<u>Visualisations :</u> comportement de la surface libre à l'impact	<u>Contour surface libre - paroi</u> après filtrage des visualisations originelles :	Commentaires
		Le niveau de la surface libre correspond sensiblement à celui de l'état de repos. Par la suite on va analyser le comportement d'une houle venant percuter une digue.
		La surface libre est en phase ascendante. On constate que la cambrure de la surface libre est prononcée au voisinage de la paroi ; ceci traduit l'apport de masse fluide par rapport à l'état antérieur.
		La masse fluide incidente augmente ; elle tend à accélérer l'ascension verticale. La courbure de la surface devient plus prononcée et le phénomène de roulement de la surface libre sur la paroi est bien représenté.
		L'apport de masse fluide occasionne un déferlement, il s'agit soit d'une instabilité du fluide localisée à la paroi, soit d'un phénomène de "glissement" du fluide permettant une accélération de l'ascension du fluide le long de la paroi.
		Le déferlement s'achève ; le phénomène de cambrure n'apparaît plus aussi prohibitif que précédemment. L'ascension se poursuit progressivement

visualisations V 2.1 : évolution de la surface libre à proximité d'une paroi verticale immobile.

de la même manière, un exemple type regroupant ces différentes phases est le déplacement d'une goutte d'eau sur une paroi lisse inclinée (figure F 2.26) :



figure F 2.26 : comportement d'une goutte d'eau sur un plan incliné.

Une analyse du phénomène nous amène à la constatation suivante :

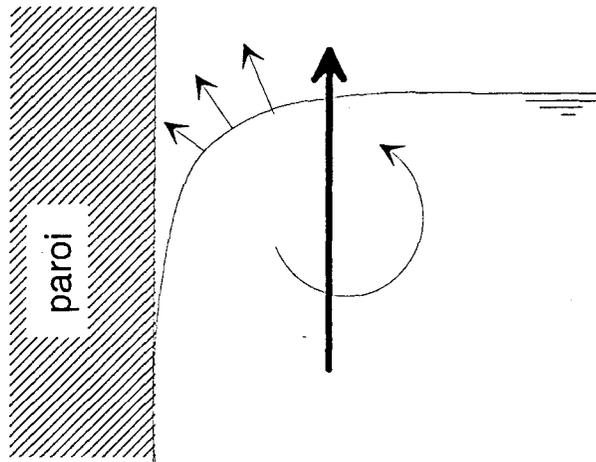


figure F 2.27 : comportement de la surface libre à la paroi pour une phase ascendante.

Lorsqu'au voisinage de la paroi on a un apport de masse fluide, la surface libre a tendance dans un premier temps à s'élever à proximité de la paroi ; par contre le point de contact entre les deux milieux reste immobile, à cause de la condition d'adhérence.

Au fur et à mesure que l'apport de masse devient important, la surface libre à proximité du point de contact continue à s'élever, elle vient progressivement tangenter la paroi. On peut alors assimiler ce mouvement comme le roulement de la surface libre sur la paroi (figure F 2.27). Pour un angle surface libre-paroi petit, on va avoir adhérence entre les deux milieux.

En effet, au phénomène précédemment décrit s'ajoute localement l'action de la tension superficielle.

Inversement, pour une vitesse tangentielle descendante, la surface libre s'abaisse et se déroule sur la paroi jusqu'au moment où il n'y a plus de contact. Il reste néanmoins sur la paroi une épaisseur d'eau, fine, qu'on assimile à une surface mouillée et qui ne subira plus la cinématique locale, du moins jusqu'au prochain impact (voir figure F 2.28).

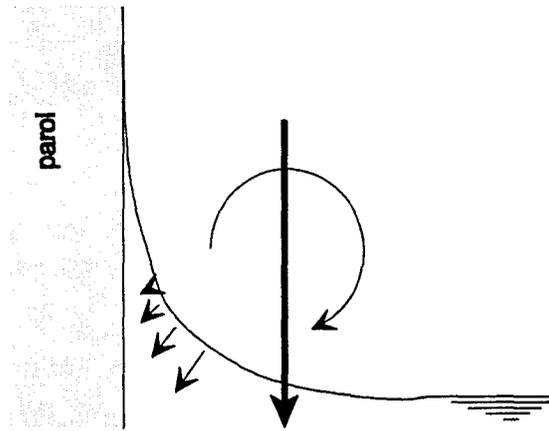


figure F 2.28 : comportement de la surface libre au voisinage de la paroi en phase descendante.

Dans la bibliographie, ce problème a été constaté et très souvent abordé.

Pour des formulations euleriennes, de nombreuses solutions ont été apportées.

Pour un écoulement en fluide parfait, la solution immédiate consiste à appliquer une condition de glissement au point de contact, condition qu'on retrouve par ailleurs sur toute la paroi commune à l'écoulement, le frottement visqueux étant évidemment inexistant.

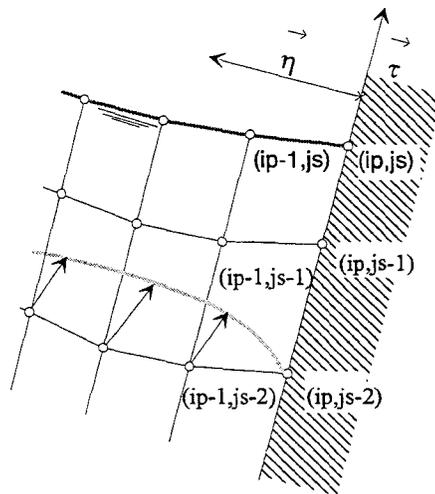


figure F 2.29 : condition d'adhérence ou de glissement au point de contact.

Par contre pour un fluide visqueux, une des solutions adoptées consiste à appliquer une condition de glissement uniquement au point de contact surface libre-paroi (voir figure F 2.29), le déplacement du point de contact de la surface libre (ip-1,js) sur la paroi se fait en imposant sa vitesse suivant les deux relations (ip étant l'indice localisant l'abscisse de la paroi solide et js l'indice localisant la cote de la surface libre) :

$$\begin{cases} \vec{u}_{(ip,js)} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{u}_{(ip,js)} \cdot \vec{\tau} = \vec{u}_{(ip-1,js)} \cdot \vec{\tau} \end{cases} \quad [E 2.97]$$

Cette hypothèse de travail peut se justifier si les forces appliquées au fluide (gravité, pression, etc.) sont supérieures aux forces de frottement du fluide (contraintes visqueuses), voir RAMASWAMY (1990).

D'autres propositions ont été faites, elles reprennent implicitement la technique précédemment décrite ; elles reposent essentiellement sur des méthodes d'extrapolation de données permettant de reconstituer localement l'information, voir GARAPON & al. (1995).

Ce problème est particulièrement aigu pour les méthodes utilisant la relation cinématique pour définir le comportement de la surface libre.

On rappelle que pour les méthodes du type MAC, on ne dispose pas de la cote de la surface libre à la paroi mais celle d'un pointeur appartenant à la maille contiguë à la paroi. Le respect local des conditions aux limites est particulièrement délicat ; un traitement local a été adopté pour le code de calcul IMPAC développé par JOHNSON & al. (1993) permettant de mieux prendre en compte les conditions aux limites.

Pour des méthodes VOF, la surface libre évolue le long de la paroi et lorsque la trajectoire lagrangienne d'un des pointeurs vient à traverser la paroi, l'intersection ainsi obtenue définit la nouvelle position de la surface, voir SATO (1994).

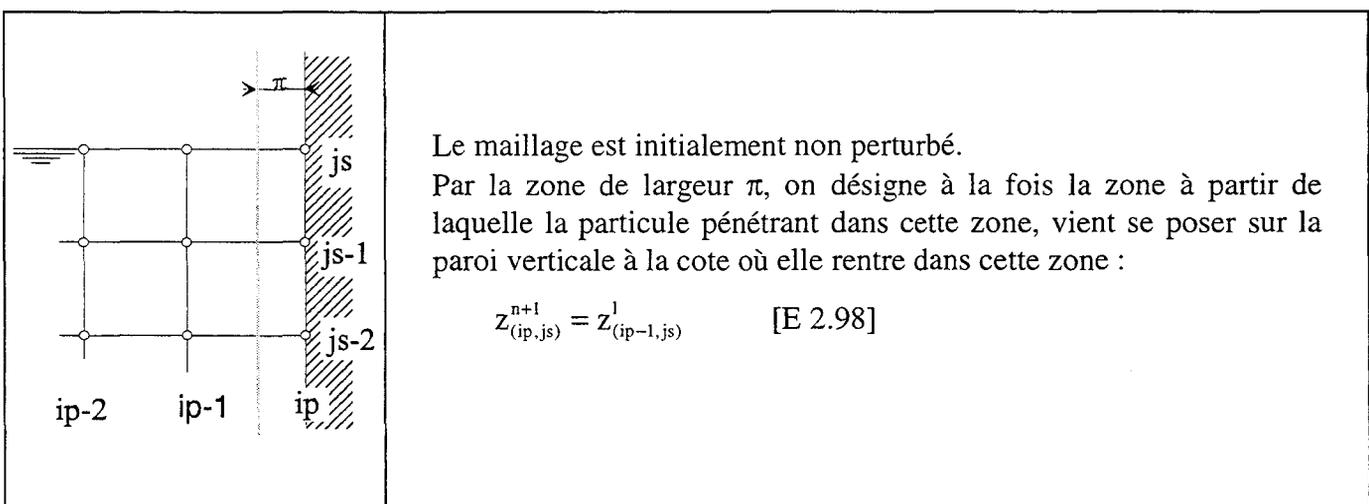
Pour notre part, on a défini une première méthode répondant à l'analyse physique du phénomène, proche de celle utilisée dans les méthodes MAC et VOF.

La formulation de notre système permet de suivre une particule fluide en lagrangien.

Aussi l'idée consiste à laisser évoluer librement le noeud le plus proche de la paroi et appartenant à la surface libre sans procéder pour ce noeud au remaillage défini au paragraphe 2.6. Son comportement va dicter l'évolution spatio-temporelle de la dénivellation de la surface libre sur la paroi (voir figures ci-dessous).

Par exemple, lorsqu'un signal arrive en direction de l'obstacle (apport local de masse fluide), la surface libre s'élève ; on constate alors que le noeud de contact vient au voisinage du mur et que sa vitesse d'approche diminue ; il devient ainsi de plus en plus difficile pour le noeud de venir se poser sur le mur.

On est donc amené à définir une zone de fine épaisseur π pour laquelle on considère géographiquement le noeud posé sur le mur, ce qui revient à prendre en compte de façon grossière les phénomènes de capillarité.



	<p>Le signal perturbateur est arrivé, les particules situées à la surface libre réagissent et s'élèvent (ou inversement) ; le noeud situé à la cote $(ip-1,js)$ se déplace en lagrangien sans toutefois pénétrer dans la zone π. On obtient ainsi une nouvelle dénivellation pour la cote temporelle t^{n+1}, elle va nous servir à redéfinir le maillage pour l'itération suivante. Les carrés blancs (\square) désignent le déplacement lagrangien des noeuds-particules et les carrés noirs (\blacksquare) désignent la position des points de la surface libre après interpolation.</p>
	<p>La nouvelle surface libre définie, on peut alors effectuer le déplacement de tous nos noeuds internes pour obtenir le maillage final à t^{n+1}. On notera simplement qu'on a pris soin de ne pas modifier les coordonnées du noeud $(ip-1,js)$ au cours de cette dernière étape tandis que la gestion des autres noeuds de la surface libre est classique.</p>
	<p>Pour une étape t^n, le noeud $(ip-1,js)$ pénètre dans la zone π. On effectue alors un déplacement forcé du noeud (ip,js) suivant la relation précédemment citée [E 2.98]. On décide alors de reconstituer le maillage pour la phase t^{n+1} d'une manière totalement analogue au cas précédemment explicité, si ce n'est qu'on impose l'abscisse du noeud $(ip-1,js)$, notre capteur, à son ancienne abscisse :</p> $x_{(ip-1,js)}^{n+1} = x_{(ip-1,js)}^n \quad [E 2.99]$
	<p>On obtient ainsi le nouveau maillage opérationnel pour l'itération temporelle suivante.</p>

Inversement lorsque le point $(ip-1,js)$ se déplace vers le point $(ip-2,js)$, il s'éloigne de la paroi. Aussi pour éviter qu'il vienne se chevaucher sur les noeuds avoisinants, on définit une deuxième zone π . Lorsque le point $(ip-2,js)$ y pénètre, on corrige à ce moment là son abscisse :

$$X_{(ip-1,js)}^{n+1} = X_{(ip-1,js)}^n \quad [E 2.100]$$

La cote z de ce point est gérée d'une manière analogue à celle utilisée auparavant.

La distance π utilisée doit prendre en compte plusieurs paramètres :

- le rapport de forme de la maille pariétale ($ip-1,js-1$) ne doit pas être important :

$$0,05 < \frac{h}{l} < 20 \quad [E 2.101]$$

ceci afin d'éviter une transmission d'erreur et ce notamment lors de la résolution du laplacien pour la pression, équation [E 2.49] (figure F 2.30).

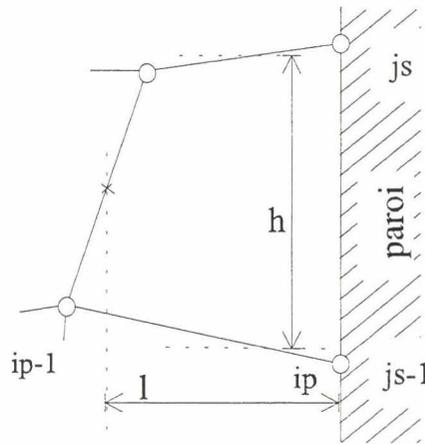


figure F 2.30: condition géométrique portant sur les mailles pariétales.

- le volume de la maille ne doit pas être faible (dépendance spatiale du pas de temps),
- cette longueur doit avoir une grandeur caractéristique vis à vis des échelles présentes :
 - la couche limite pariétale,
 - le ménisque,
 - etc.

Une deuxième technique a été mise en oeuvre ; elle consiste à évaluer la cote z du point (ip,js) par extrapolation des dénivellations des points voisins et appartenant à la surface libre.

On notera que pour des techniques utilisant un maillage automatique, la procédure est plus simple ; il suffit en effet de gérer uniquement le contour externe du domaine et donc de contrôler le déplacement des points appartenant à la surface libre (utilisation de B-spline par exemple pour la phase d'interpolation).

2.7.2 : CONDITION D'AMORTISSEMENT : LES EQUATIONS DU MILIEU POREUX ET SES CONDITIONS AUX LIMITES.

Pour les frontières ouvertes du domaine, on est amené :

- à imposer l'information hydrodynamique locale pour une frontière fluide dite "entrée",
- à définir des conditions permettant de laisser passer l'écoulement en introduisant le moins de bruit possible.

Pour le premier problème correspondant à l'entrée du signal, nous en discuterons au cours du chapitre suivant relatif aux conditions initiales.

Pour le deuxième problème, dans le cas de la propagation d'une onde, on utilise classiquement en écoulement géophysique la condition de radiation de SOMMERFELD, il s'agit de forcer la dénivellation η à une valeur η_k connue suivant la relation :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{(\eta - \eta_k)}{T_f} \quad [E 2.102]$$

où : C est la célérité de l'onde,

et : T_f une échelle de temps permettant pour les valeurs suivantes, soit :

$T_f \rightarrow 0$: d'avoir une réflexion totale,

$T_f \rightarrow \infty$: d'avoir une condition pure de radiation.

Pour les applications développées par la suite, nous avons choisi une orientation différente ; nous avons opté pour la mise en place d'un milieu poreux, celui-ci jouera le rôle d'un amortisseur statique. Il s'agit d'une approche calquée sur celle utilisée en laboratoire pour des canaux à houle afin de limiter au mieux le taux de réflexion ; on pourra ainsi amortir un signal incident quelconque.

Le milieu poreux est assimilé à un milieu diphasique où les deux phases présentes sont :

- une phase fluide,
- et une phase solide.

On supposera les hypothèses suivantes sur le milieu poreux traité :

- le milieu poreux est indéformable,
- il est supposé homogène ¹,
- et est éventuellement anisotrope.

La porosité est définie comme étant :

$$\theta = \frac{V_{\text{fluide}}}{V_{\text{total}}} = \frac{S_{\text{fluide}}}{S_{\text{totale}}} \quad [E 2.103]$$

avec :

$$V_{\text{total}} = V_{\text{fluide}} + V_{\text{solide}} \quad [E 2.104]$$

et :

$$S_{\text{totale}} = S_{\text{fluide}} + S_{\text{solide}} \quad [E 2.105]$$

où V_{fluide} est le volume de la phase fluide et V_{solide} le volume de la phase solide pour un volume total V_{total} . De même S_{fluide} est la surface de la phase fluide et S_{solide} la surface de la phase solide pour une surface totale S_{totale} .

Les équations utilisées sont alors les suivantes, exprimées pour la phase fluide (la phase solide étant immobile) :

¹à l'échelle de plusieurs pores.

$$\left\{ \begin{aligned} \bullet \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \left[\int_S (\rho \theta) ds \right] + \oint_{\Gamma} \left(\left[\rho \theta \vec{u} \right] \cdot \vec{n} \right) d\Gamma &= 0 \\ \bullet \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \left[\int_S (\rho \theta \vec{u}) ds \right] + \oint_{\Gamma} \left(\left[\left(\rho \theta \vec{u} \right) \cdot \vec{u} \right] \cdot \vec{n} \right) d\Gamma &= \oint_{\Gamma} \left(\theta \vec{\tau} \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_S \left(\vec{F}_{\text{Frottement}_{s-f}} + \rho \theta \vec{g} \right) ds \end{aligned} \right.$$

[E 2.106]

où \vec{u} est la vitesse fluide réelle moyenne, la vitesse de filtration étant égale à $\theta \vec{u}$ avec :

$$\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_f \quad [E 2.107]$$

$$\text{et : } S = S_s + S_f \quad [E 2.108]$$

Ces équations résultent d'une interprétation des équations de Navier-Stokes sur un volume comprenant plusieurs pores (voir figure F 2.31) avec les termes spécifiques suivants :

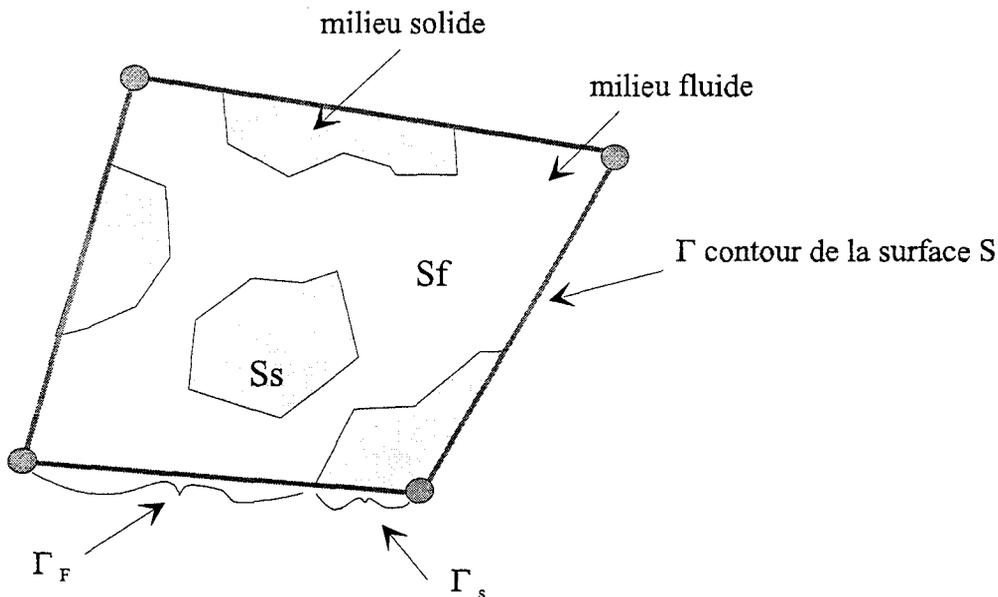


Figure F 2.31: Définition des contours relatifs à une maille de surface S et relatifs aux deux phases présentes.

- ♦ $\vec{\tau}$, qui est le tenseur de contraintes correspondant au gradient de pression et aux forces visqueuses exercées par le fluide sur lui même :

$$\vec{\tau} = -P \vec{I} + 2\mu \vec{D} \quad [E 2.109]$$

- ♦ $\vec{F}_{\text{frottement}_{s-f}}$ qui représente la force exercée par le milieu solide sur le fluide.

Le milieu solide étant indéformable, $\vec{F}_{\text{frottement}_{s-f}}$ se résume essentiellement aux forces de frottement solide-fluide :

$$\vec{F}_{\text{frottement}_{s-f}} = -\frac{\mu \theta^2}{K} \vec{u} \quad [E 2.110]$$

conformément à la loi de Darcy.

En stationnaire et pour les cas de faible vitesse de filtration, les termes suivants :

$$\int_S \left(\rho \theta \vec{u} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds \quad [E 2.111]$$

et :

$$\int_S \left(2\mu \overline{\overline{D}} \right) \cdot \vec{n} \, ds \quad [E 2.112]$$

sont négligeables devant le terme :

$$\int_S \vec{F}_{\text{frottement}_{s-f}} \, ds \quad [E 2.113]$$

On retrouve alors la loi classique de Darcy :

$$\theta \vec{u} = -\frac{\overline{\overline{K}}}{\mu} \text{grad}(P) \quad [E 2.114]$$

La structure des équations [E 2.106] est semblable à la structure des équations [E 2.7] et [E 2.8] sauf en ce qui concerne le terme de frottement $\int_S \vec{F}_{\text{frottement}_{s-f}} \, ds$.

Comme aux chapitres 2.2 et 2.4, ces relations peuvent être écrites pour un domaine fluide variable ; l'algorithme de résolution numérique pour résoudre ces équations sera tout à fait identique à celui développé auparavant.

Nous tenons tout de suite à faire remarquer que notre but n'est pas de simuler le comportement d'un milieu poreux mais d'obtenir des conditions aux limites "transparentes" et semblables à celles que l'on rencontre dans les canaux à houle.

Le modèle de milieu poreux utilisé n'est pas crucial ; les conditions aux limites à l'interface milieu fluide et milieu poreux sont uniquement vraisemblables.

Dans les relations utilisées, on a notamment négligé le terme de contrainte visqueuse $2\mu \overline{\overline{D}}$, mais par contre on a gardé les termes convectifs :

$$\int_S \left(\rho \theta \vec{u} \right) \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds \quad [E 2.115]$$

ce qui permet d'avoir un algorithme "continu" à la frontière fluide-milieu poreux.

Par ailleurs, on a introduit une perméabilité anisotrope ; la force de frottement entre les deux phases s'écrit alors :

$$\vec{F}_{\text{frottement}_{s-f}} = -\mu \theta^2 \overline{\overline{R}} \cdot \vec{u} \quad [E 2.116]$$

avec :

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_{xx} & \\ 0 & 1 \\ & K_{zz} \end{pmatrix} \quad [E 2.117]$$

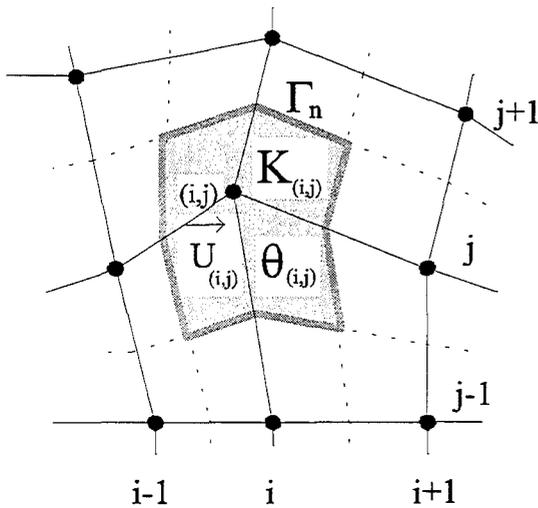
Après éclatement de l'opérateur temporel, on obtient les deux étapes de résolution :

- la première étape dite lagrangienne :

$$\begin{cases} \bullet \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \left[\int_S \rho \theta ds \right] = 0 \\ \bullet \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} \left[\int_S (\rho \theta \vec{u}) ds \right] = \oint_{\Gamma} \left((-\theta P \cdot \vec{I}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_s \left(-\mu \theta^2 \overline{\mathbf{R}} \vec{u} + \rho \theta \vec{g} \right) ds \end{cases} \quad [E 2.118]$$

- la deuxième étape dite convective :

$$\begin{cases} \bullet \left[\frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} - \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}_g} \right] \left[\int_S \rho \theta ds \right] = \oint_{\Gamma} \left(\rho \theta (\vec{u}_g - \vec{u}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \\ \bullet \left[\frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}} - \frac{d}{dt} \Big|_{\vec{u}_g} \right] \left[\int_S (\rho \theta \vec{u}) ds \right] = \oint_{\Gamma} \left(\rho \theta \vec{u} (\vec{u}_g - \vec{u}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \end{cases} \quad [E 2.119]$$



La localisation des variables propres au milieu poreux est choisie comme suit :

- la porosité θ et les coefficients de perméabilité K sont pris comme constants sur la surface liée à un noeud (voir figure f 2.32).

figure F 2.32: localisation des variables discrètes θ et K .

Les termes de frottement du type $-\mu \theta^2 \overline{\mathbf{R}} \vec{u}$, sont traités en implicite ce qui évite d'introduire un critère de stabilité qui conduirait à des pas de temps extrêmement petits.

Le pas de temps Δt est géré dans ce milieu poreux uniquement par les termes convectifs (CFL) ; la porosité θ intervient directement sur les flux et modifie implicitement le CFL par élément de volume.

En résumé, on a pour l'étape lagrangienne les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \oint_{\Gamma_n^n} \left(\theta \vec{u} \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = 0 \\ \bullet \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{S_n^n} \left(\rho \theta \vec{u}^{\rightarrow 1} \right) ds - \int_{S_n^n} \left(\rho \theta \vec{u}^{\rightarrow n} \right) ds \right) = \oint_{\Gamma_n^n} \left(\left(-\theta P^1 \cdot \vec{I} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_{S_n^n} \left(-\mu \theta^2 \vec{R} \cdot \vec{u} + \rho \theta \vec{g} \right) ds \end{array} \right. \quad [\text{E 2.120}]$$

La pression P^1 est également décomposée à partir de la pression initiale connue P^n :

$$P^1 = P^n + \Delta P \quad [\text{E 2.121}]$$

ceci permet l'introduction d'une variable intermédiaire $\vec{u}^{\rightarrow *1}$ définie comme regroupant tous les termes explicites de l'équation de conservation de quantité de mouvement :

$$\vec{u}^{\rightarrow *1} = \vec{u}^{\rightarrow n} + \frac{\Delta t}{M^n} \left[\oint_{\Gamma_n^n} \left(\left(-\theta P^n \cdot \vec{I} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma + \int_{S_n^n} \rho \theta \vec{g} ds \right] \quad [\text{E 2.122}]$$

avec :

$$M^n = \int_{S_n^n} \rho \left(\vec{x} \right) \theta ds \quad [\text{E 2.123}]$$

ce qui permet la réécriture du système d'équations [E 2.120] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \oint_{\Gamma_n^n} \left(\theta \vec{u} \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = 0 \\ \bullet \vec{u}^{\rightarrow 1} - \vec{u}^{\rightarrow *1} = \frac{\Delta t \Psi_n^{\rightarrow n}}{M^n} \left(\oint_{\Gamma_n^n} \left(\left(-\theta \Delta P \cdot \vec{I} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \right) \end{array} \right. \quad [\text{E 2.124}]$$

avec $\Psi_n^{\rightarrow n}$ défini par :

$$\left[\int_{S_n^n} \rho \theta ds + \int_{S_n^n} \mu \theta^2 \vec{R} ds \right] \vec{u}^{\rightarrow 1} = \left[\int_{S_n^n} \rho \theta ds \right] \vec{u}^{\rightarrow *1} + \Delta t \oint_{\Gamma_n^n} \left(\left(-\theta \Delta P \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma$$

$$\left[M^n + \int_{S_n^n} \mu \theta^2 \vec{R} ds \right] \vec{u}^{\rightarrow 1} = M^n \vec{u}^{\rightarrow *1} + \Delta t \oint_{\Gamma_n^n} \left(\left(-\theta \Delta P \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma$$

soit :

$$M^n \vec{u}^{\rightarrow 1} = \Psi_n^{\rightarrow n} \left[M^n \vec{u}^{\rightarrow *1} + \Delta t \oint_{\Gamma_n^n} \left(\left(-\theta \Delta P \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \right] \quad [\text{E 2.125}]$$

En exprimant la loi de conservation de la masse du système [E 2.124] à la loi de conservation de la quantité de mouvement [E 2.124], on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \oint_{\Gamma_m^n} \left((\overline{\Psi}_n^{\rightarrow*} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = \oint_{\Gamma_m^n} \left(\frac{\Delta t \overline{\Psi}_n^{\rightarrow*}}{M^n} \left(\oint_{\Gamma_m^n} \left((\theta \Delta P \cdot \vec{I}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma = 0 \\ \bullet \vec{u}^{\rightarrow 1} = \overline{\Psi}_n^{\rightarrow*} \left(\vec{u}^{\rightarrow*1} + \frac{\Delta t}{M^n} \left(\oint_{\Gamma_m^n} \left((-\theta \Delta P \cdot \vec{I}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \right) \right) \end{array} \right. \quad [E 2.126]$$

L'équation de conservation de la masse [E 2.126] est équivalente à un système linéaire d'inconnue ΔP :

$$\{ \Delta P_{k_m} \} = [C_{p_{k_m}}^n]^{-1} \{ G^{*1} \} \quad [E 2.127]$$

La technique d'inversion du système est identique à celle utilisée au préalable (voir chapitre 2.4.2).

Une fois le système linéaire inversé, on en déduit directement la vitesse lagrangienne :

$$\vec{u}^{\rightarrow 1} = \overline{\Psi}_n^{\rightarrow*} \left(\vec{u}^{\rightarrow*1} + \frac{\Delta t}{M^n} \left(\oint_{\Gamma_m^n} \left((-\theta \Delta P \cdot \vec{I}) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \right) \right) \quad [E 2.128]$$

pour obtenir à la fin du premier cycle, les deux variables discrètes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet P^1 = P^n + \Delta P \\ \bullet \vec{u}^{\rightarrow 1} \end{array} \right. \quad [E 2.129]$$

Concernant l'étape convective, on utilise la même procédure de résolution, qu'il s'agisse d'un schéma centré ou aux différences amonts.

L'équation résolue est la suivante :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_n^{n+1}} \left(\rho(\vec{x}) \theta \vec{u}^{\rightarrow n+1} \right) ds - \int_{S_n^n} \left(\rho(\vec{x}) \theta \vec{u}^{\rightarrow 1} \right) ds \right] = \oint_{\Gamma_m^{n+1}} \left(\rho(\vec{x}) \theta \vec{u}^{\rightarrow 1} \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \quad [E 2.130]$$

couplée avec l'équation permettant de gérer le maillage :

$$\vec{x}^{\rightarrow n+1} = \vec{x}^{\rightarrow n} + \vec{u}_g \cdot \Delta t \quad [E 2.131]$$

En fin de cycle, on obtient la vitesse eulérienne suivante :

$$\vec{u}^{\rightarrow n+1} = \frac{M^n}{M^{n+1}} \vec{u}^{\rightarrow 1} + \frac{\Delta t}{M^{n+1}} \oint_{\Gamma_m^n} \left(\rho(\vec{x}) \theta \vec{u}^{\rightarrow 1} \left(\vec{u}_g - \vec{u} \right) \cdot \vec{n} \right) d\Gamma \quad [E 2.132]$$

Remarques : On notera que le couplage milieu poreux et milieu fluide est particulièrement aisé ; la différence porte sur la valeur algébrique des deux termes suivants :

- $\overline{\Psi}_n^{\rightarrow*}$
- et : θ

Aussi, pour le milieu fluide, les valeurs sont :

$$\bullet \overline{\Psi}_n^{\rightarrow*} = \vec{I} \quad [E 2.133]$$

• $\theta = 1$ [E 2.134]

tout en prenant en compte les contraintes visqueuses : $2\mu\overline{\overline{D}}$.

Pour le milieu poreux, les valeurs sont calculées localement :

• $\overline{\overline{\psi}}_n$ [E 2.135]

• θ [E 2.136]

les contraintes visqueuses internes sont posées comme négligeables.

Aussi la résolution du problème complet, milieu fluide et milieu poreux se fera simultanément avec une identification locale portant sur la porosité.

Concernant les conditions aux limites (voir figure F 2.33), nous avons :

- ♦ au voisinage d'une paroi solide, la vitesse du fluide est parallèle au contour (c'est une vitesse moyenne sur un élément de volume de milieu poreux en contact avec la paroi solide) :

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ u \cdot n & = 0 \end{matrix} \quad [E 2.137]$$

- ♦ et à l'interface milieu poreux-milieu fluide, il y a conservation des vitesses moyennes normales :

$$\text{Flux}_{\text{normal}} = \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ u \cdot n \end{matrix} \quad [E 2.138]$$

de plus on impose la condition :

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ u \cdot \tau & = 0 \end{matrix} \quad [E 2.139]$$

Cette dernière condition est sûrement discutable, mais comme on l'a dit précédemment, notre but n'est pas de simuler exactement l'écoulement dans un milieu poreux.

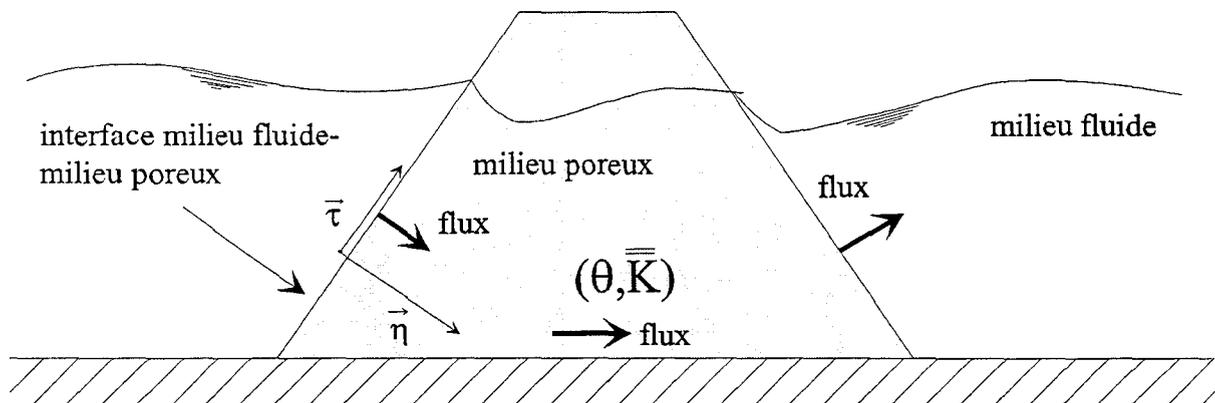


figure F 2.33 : localisation des conditions aux limites pour le milieu poreux.

2.7.3 : CONDITIONS DE CONTRAINTES A LA SURFACE LIBRE.

En dehors des contraintes de tension superficielle, on a le tenseur des contraintes suivant de part et d'autres de la surface libre :

$$\overline{\overline{\tau}} = -\overline{\overline{P}}\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}} \quad [E 2.140]$$

Dans notre cas, nous considérons que les contraintes de viscosité dues à l'écoulement atmosphérique sont faibles pour les raisons suivantes :

- la comparaison des viscosités moléculaires de chaque milieu indique la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mu_{\text{air}} &\ll \mu_{\text{eau}} && \text{[E 2.141]} \\ \approx 1.85 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1} &\ll \approx 10^{-3} \text{ kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1} \end{aligned}$$

- la cinématique atmosphérique est supposée faible (les applications développées concernent l'étude de l'écoulement aqueux et non de l'écoulement aérien).

L'écriture de l'égalité des contraintes de part et d'autre de la surface libre (voir figure F 2.34 et annexe A2) :

$$\begin{cases} \left(\vec{\tau}_{\text{eau}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{\tau}_x = \left(\vec{\tau}_{\text{air}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{\tau}_x \\ \left(\vec{\tau}_{\text{eau}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n} = \left(\vec{\tau}_{\text{air}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n} \end{cases} \quad \text{[E A2.142]}$$

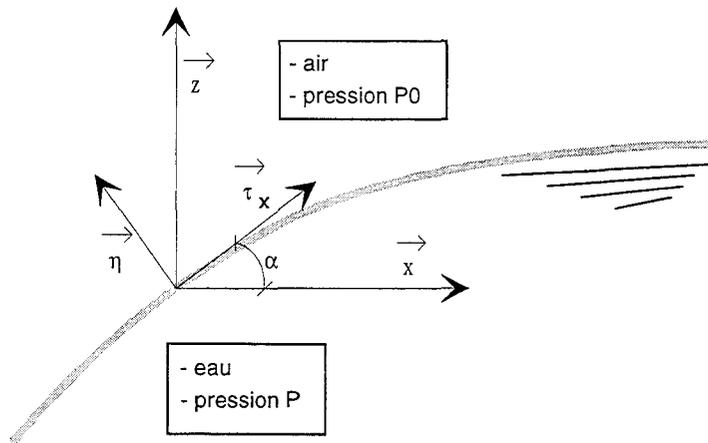


Figure F 2.34 : repère local définissant l'état de la surface libre.

fournit les deux relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{4 \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\left(1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{[E A2.143]}$$

$$\text{et : } (P - P_0) = \Delta P = \mu \left(2 - \frac{4}{\left(1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}} \quad \text{[E 2.144]}$$

où η est la dénivellation de la surface libre par rapport à un niveau moyen de référence.

Pour notre cas, on sera amené à négliger la tension superficielle, si bien que la variation de pression dépendra uniquement des contraintes visqueuses présentes dans l'eau.

De plus compte tenu de la discrétisation, les forces visqueuses dans l'eau seront automatiquement prises en compte (voir figure F 2.35).

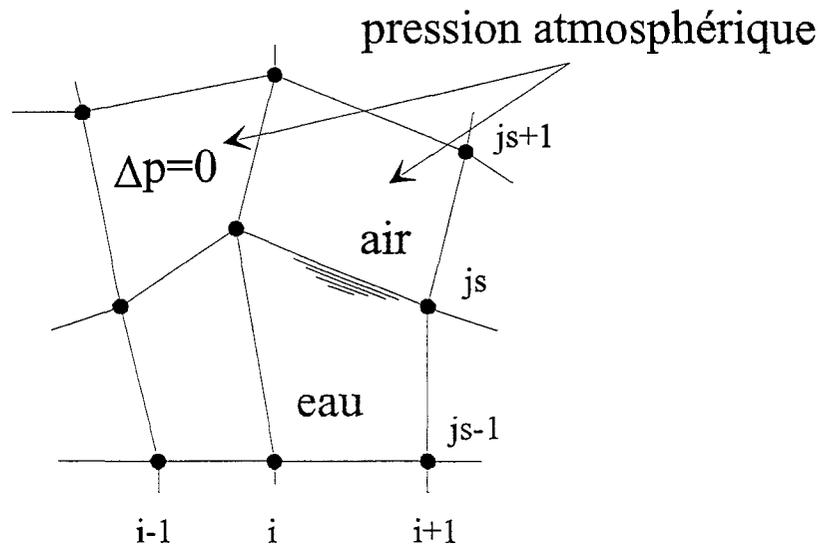


figure F 2.35: hypothèse sur la pression atmosphérique.

2.8 : CONDITIONS INITIALES ET CONDITIONS A L'ENTREE AUX FRONTIERES FLUIDES.

Pour étudier un écoulement donné, il est indispensable d'indiquer :

- en entrée fluide, les caractéristiques du signal et de continuer à les indiquer par la suite s'il s'agit d'un écoulement entretenu,
- à l'instant $t=0$, les caractéristiques du signal sur tout le domaine de calcul.

Nous pouvons imposer les données suivantes :

- la pression,
- la dénivellation,
- la vitesse.

Chacune de ces données doit être homogène avec les deux autres.

Aussi on fournit les informations suivantes :

- on peut imposer une pression correspondant au signal étudié. Pour notre cas, il peut par exemple s'agir d'une pression du type hydrostatique (onde solitaire et houle de Stokes au premier ordre d'approximation) :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \left\| \begin{matrix} \rightarrow \\ g \end{matrix} \right\| \quad [E 2.145]$$

Il apparaît cependant que cette pression doit être imposée en connaissance de cause ; ainsi celle-ci doit être imposée suffisamment loin des zones perturbées où la loi gérant la pression ne pourrait plus être valide. Dans le cas d'une loi de pression hydrostatique, cette condition explicite une seconde donnée qui est la dénivellation locale de la surface libre.

- ou une vitesse fluide, il faudra dans ce cas faire attention aux hypothèses adoptées pour décrire le signal. Pour le cas d'une onde solitaire dite de gravité, les modèles sont le plus généralement

développés pour des fluides parfaits. En écoulement visqueux, la solution fournie n'est pas homogène avec les hypothèses de l'écoulement, ceci a pour conséquence d'occasionner une in-homogénéité des solutions avec les équations résolues, il y a apparition d'effets parasites.

La divergence cinématique ne se trouve généralement pas vérifiée :

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \varepsilon \quad \text{avec :} \quad \varepsilon \ll 1 \quad [E 2.146]$$

Dans tous les cas, la dénivellation reste une donnée nécessaire à fournir, les deux autres en dépendent de manière implicite.

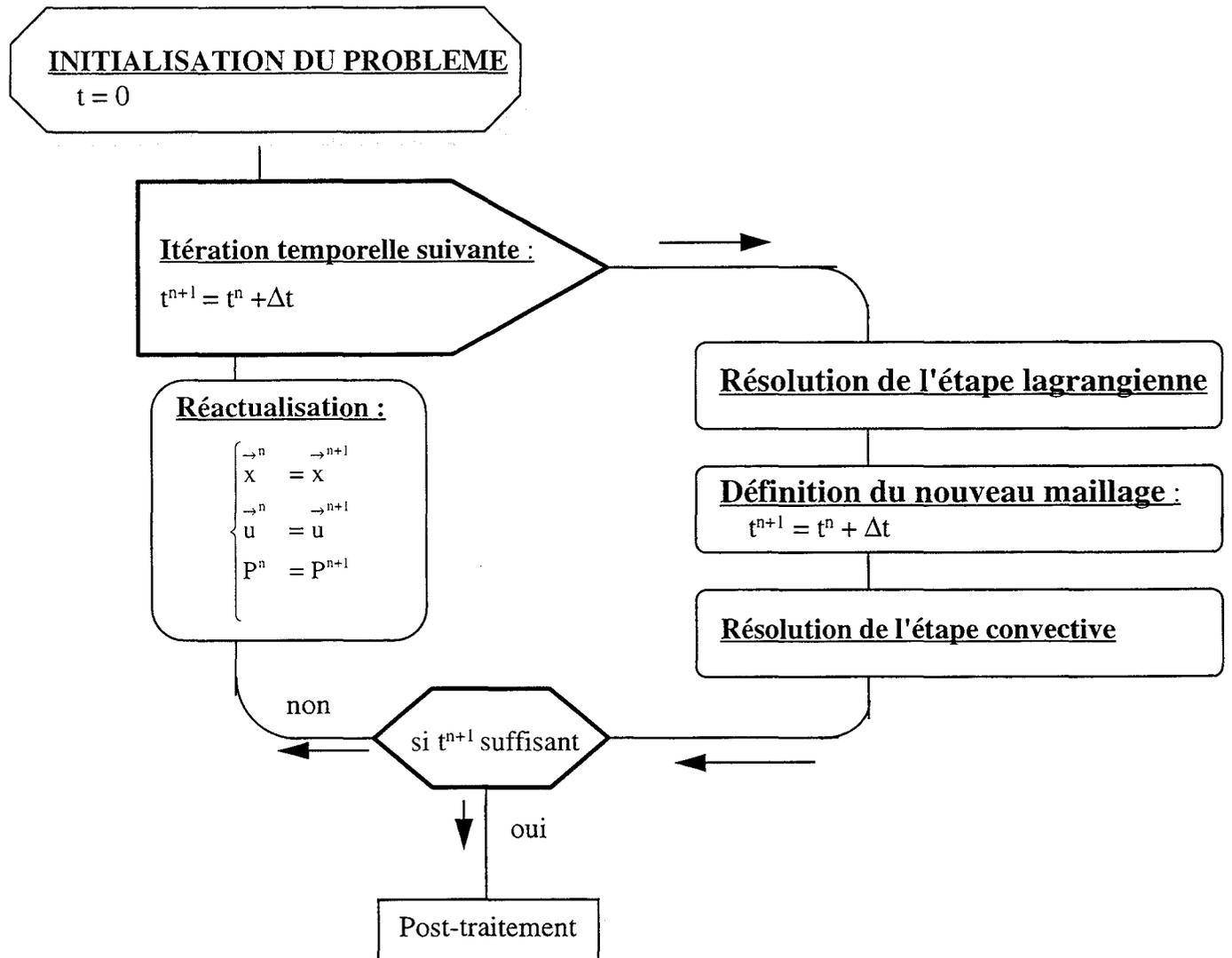
Pour les écoulements étudiés, nous choisirons de fournir le couple (η, \vec{u}) plus simple à manipuler.

Dans le cadre de l'évolution d'une onde solitaire de gravité, la pression se comporte principalement comme une donnée hydrostatique ; pour les deux jeux de données (η, \vec{u}) et (η, P) , l'information résultante est identique.

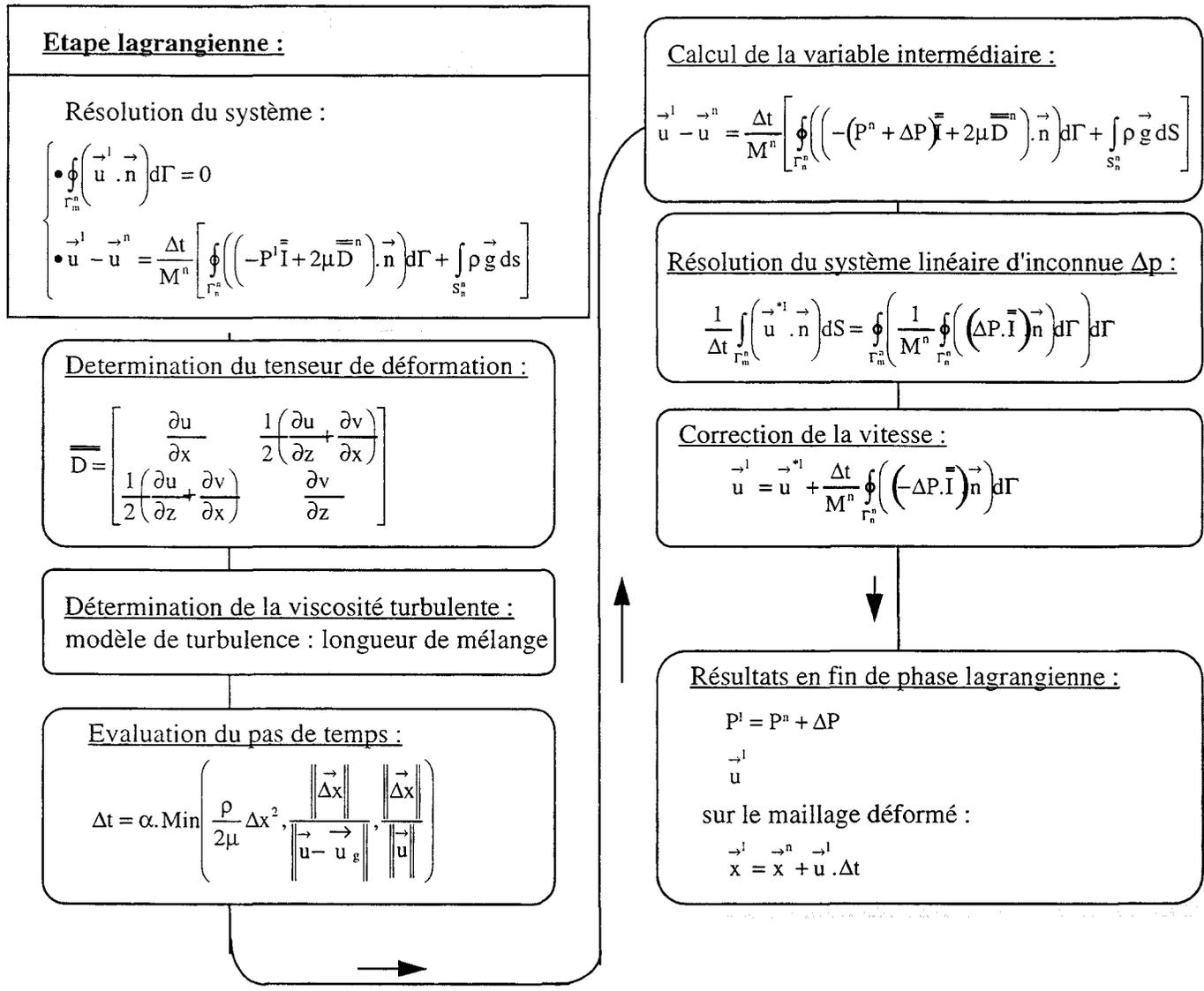
2.9 : L'ALGORITHME.

Pour résumé la procédure de résolution, nous donnons sous la forme d'un organigramme l'algorithme complet du schéma de résolution :

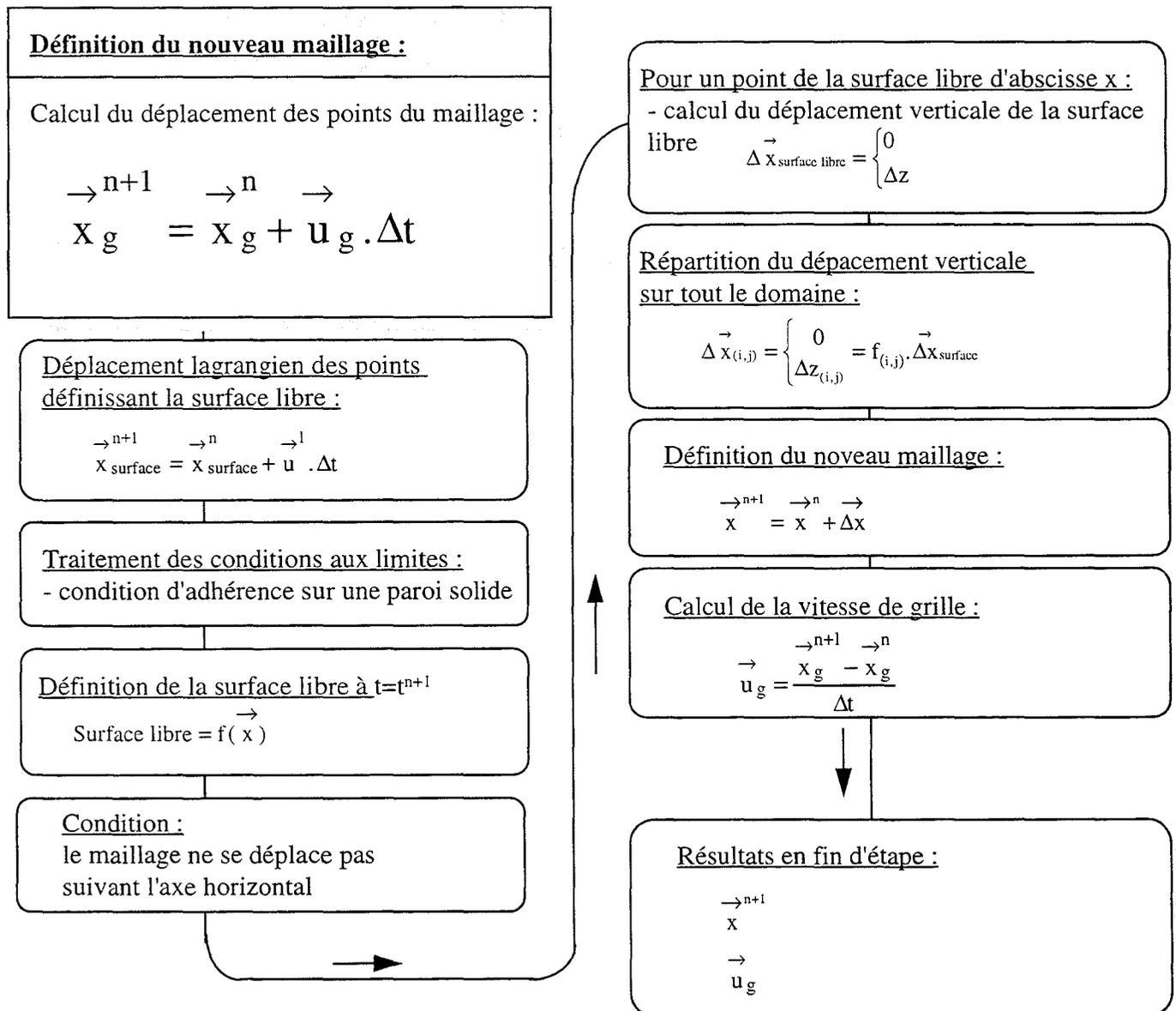
2.9.1 : ALGORITHME GENERAL.



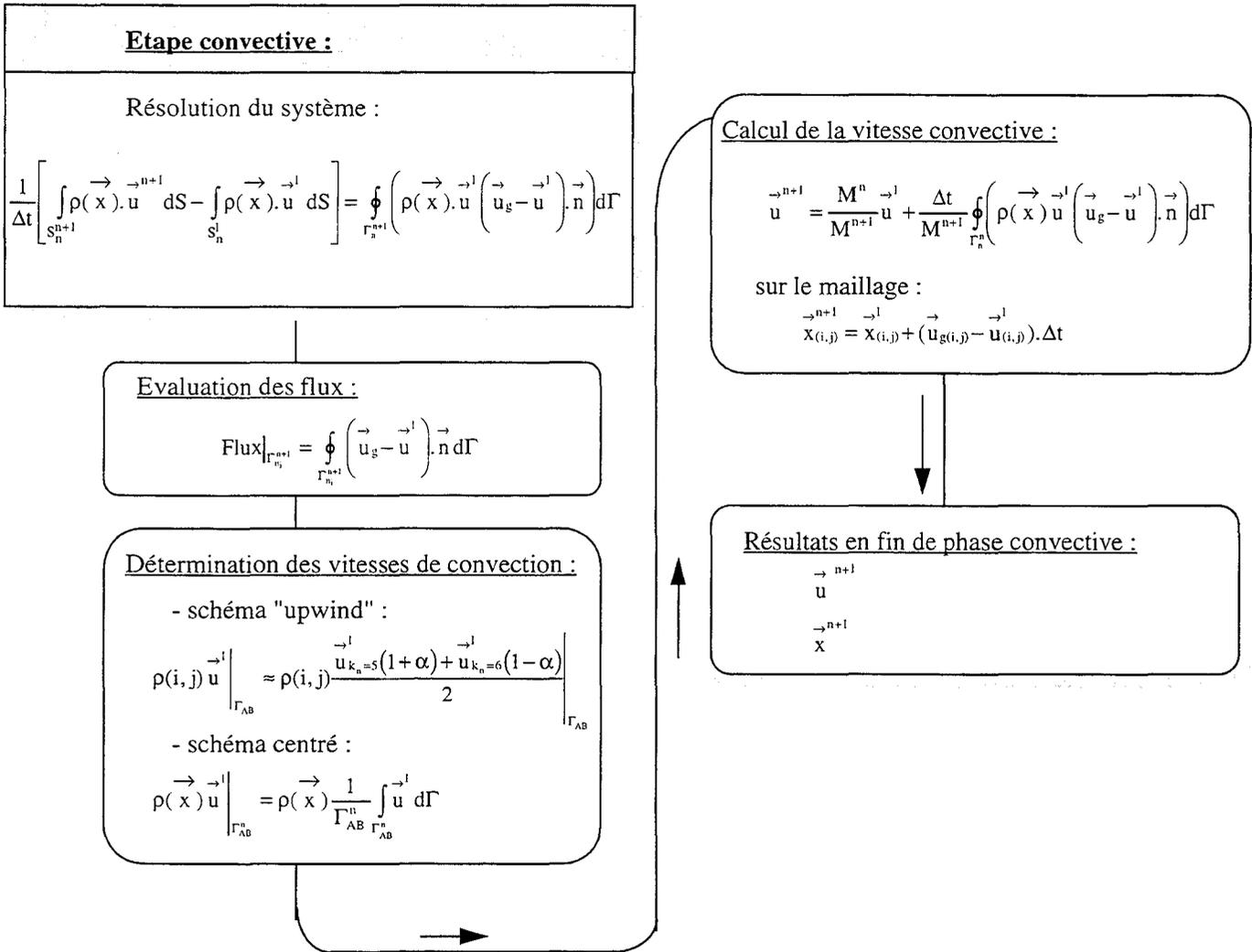
2.9.2 : ALGORITHME POUR L'ETAPE DE RESOLUTION LAGRANGIENNE.



2.9.3 : ALGORITHME POUR L'ETAPE DE REDEFINITION DU NOUVEAU MAILLAGE.



2.9.4 : ALGORITHME POUR L'ETAPE CONVECTIVE.



3 : PROPAGATION D'UNE ONDE SOLITAIRE DE GRAVITE

TABLE DES MATIERES :

3 : PROPAGATION D'UNE ONDE SOLITAIRE DE GRAVITE.....	75
3.1 : INTRODUCTION : LES RESULTATS ANALYTIQUES.....	76
3.1.1 : PROPAGATION D'UN SOLITON POUR UN FLUIDE PARFAIT.....	76
3.1.2 : COMPORTEMENT DU SOLITON EN MILIEU VISQUEUX.....	77
3.1.3 : REFLEXION D'UN SOLITON SUR UN MUR VERTICAL.....	78
3.1.3.1 : AMPLITUDE A LA REFLEXION.....	78
3.1.3.2 : DEPHASAGE.....	80
3.2 : LES TESTS NUMERIQUES DU PROGRAMME.....	81
3.2.1 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU PAS DE TEMPS.....	83
3.2.2 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU PAS SPATIAL.....	84
3.2.3 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DE LA TECHNIQUE D'INTERPOLATION POUR DEFINIR LA LOCALISATION DE LA SURFACE LIBRE.	84
3.2.4 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU SCHEMA CONVECTIF.....	85
3.2.5 : ETUDE DE SENSIBILITE : CHOIX DE LA METHODE DE TRAITEMENT DE L'INTERACTION SURFACE LIBRE-PAROI.....	87
3.2.6 : RESUME.....	88
3.3 : COMPARAISONS ENTRE LES RESULTATS FOURNIS PAR LE CODE DE CALCUL, LES RESULTATS ANALYTIQUES ET EXPERIMENTAUX.....	88
3.3.1 : CELERITE DU SOLITON.....	88
3.3.2 : EVOLUTION DE L'AMPLITUDE A BAS NOMBRE DE REYNOLDS.....	91
3.3.3 : REFLEXION D'UN SOLITON SUR UNE PAROI VERTICALE.....	92
3.3.4 : RESUME.....	95

3.1 : INTRODUCTION : LES RESULTATS ANALYTIQUES.

Pour étudier le comportement du code de calcul précédemment décrit, on se propose d'effectuer une comparaison dans le cadre de la propagation d'une onde solitaire de gravité.

Il s'agit d'un phénomène qui a été largement étudié, et pour lequel on dispose d'une banque de données abondante.

3.1.1 : PROPAGATION D'UN SOLITON POUR UN FLUIDE PARFAIT.

Ce type de signal a été étudié depuis longtemps : voir LAITONE (1960) annexe A3.

On rappellera ici les caractéristiques principales pour un écoulement en fluide parfait, obtenues par LAITONE à partir des développements en série de petits paramètres de FRIEDRICH'S (1948), caractéristiques identiques à celles obtenues par KORTEWEG & al (1885).

En définissant la phase ($\alpha \cdot \bar{x}$) par :

$$\alpha \cdot \bar{x} = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{A}{h} (x - c \cdot t) \quad [E 3.1]$$

où c est la célérité de l'onde :

$$c = \sqrt{g \cdot h} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{A}{h} \right) \quad [E 3.2]$$

on a les caractéristiques d'une onde solitaire définies sur le domaine spatial :

$$-h \leq z \leq \eta$$

- soit, la dénivellation :

$$\frac{\eta(x)}{h} = \left(\frac{A}{h} \right) \frac{1}{\cosh^2(\alpha \cdot \bar{x})} \quad [E 3.3]$$

- la cinématique (u, v) :

$$\frac{u(x, t)}{\sqrt{gh}} = \left(\frac{A}{h} \right) \frac{1}{\cosh^2(\alpha \cdot \bar{x})} \quad [E 3.4]$$

$$\frac{v(x, z, t)}{\sqrt{gh}} = -\sqrt{3} \left(\frac{A}{h} \right)^{3/2} \left(\frac{z+h}{h} \right) \frac{1}{\cosh^2(\alpha \cdot \bar{x})} \tanh(\alpha \cdot \bar{x}) \quad [E 3.5]$$

- la pression (P_0 , pression atmosphérique) :

$$\frac{\Delta P}{\rho \left\| \vec{g} \right\| h} = \frac{\eta - z}{h} \quad [E 3.6]$$

avec : $\Delta P = P - P_0$

- la longueur d'onde λ du signal (normalement infinie), donnée en prenant pour fin du signal une hauteur de dénivellation égale à 1% de la dénivellation maximale :

$$\frac{\eta}{h} = 0,01 \quad [\text{E 3.7}]$$

soit (figure F 3.1) :

$$\frac{\lambda}{h} = 6,9 \sqrt{\frac{h}{A}} \quad [\text{E 3.8}]$$

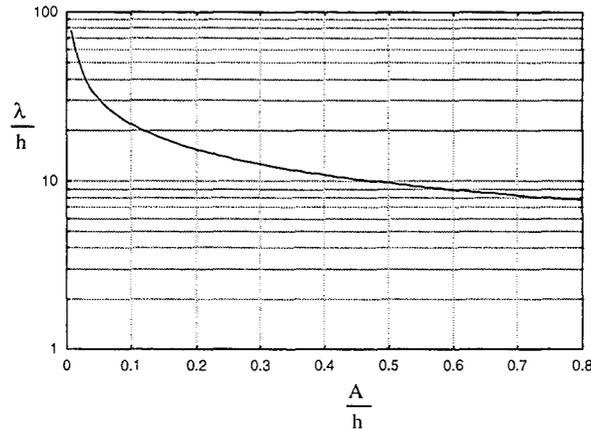


figure F 3.1 : évolution de la longueur d'onde λ en fonction du rapport de forme A/h .

La bibliographie fournit cependant des résultats plus conséquents avec notamment les développements rappelés par TEMPERVILLE (1985) à l'ordre deux et surtout par FENTON (1972 et 1982) à l'ordre n . Un historique complet récapitulant les travaux effectués sur l'onde solitaire est fourni dans l'article de NEWELL (1983) ainsi que dans l'ouvrage de WHITHAM (1973).

3.1.2 : COMPORTEMENT DU SOLITON EN MILIEU VISQUEUX.

Ce phénomène est décrit par MEI (1992) ; le fluide est incompressible, visqueux et il s'écoule sur un fond plat, l'écoulement est bidimensionnel et irrotationnel ; l'équation de conservation de la masse est intégrée sur la hauteur d'eau, ainsi que l'équation de quantité de mouvement (utilisation des équations de BOUSSINESQ) :

$$\eta_t + \nabla \cdot \left((h + \eta) \vec{u} \right) = 0 \quad [\text{E 3.9}]$$

$$\vec{u}_t + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = \frac{\tau_b}{h} \quad [\text{E 3.10}]$$

avec τ_b , la contrainte de frottement sur le fond.

Les paramètres de l'écoulement sont adimensionnalisés. Les variables, vitesse et dénivellation sont développées en série de puissances à partir du petit paramètre α :

$$\alpha = \frac{\delta}{h} \quad [\text{E 3.11}]$$

où δ a le même ordre de grandeur que l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta = \sqrt{\frac{v\lambda}{C}} \quad [\text{E 3.12}]$$

avec λ représentant la longueur d'onde du soliton :

$$\lambda = h \sqrt{\frac{A_0}{h}} \quad [E 3.13]$$

et C donné par la relation :

$$C = \sqrt{gh} \quad [E 3.14]$$

L'auteur arrive finalement à la loi d'évolution de l'amplitude dans le temps :

$$A^{-1/4} = (A_0)^{-1/4} + 0.08356 \sqrt{\frac{v}{\sqrt{g \cdot h \cdot h^{3/2}}}} \frac{\sqrt{gh \cdot t}}{h} \quad [E 3.15]$$

Cette loi apparaît plus pessimiste que celle fournie par KEULEGAN (1959) utilisant un nombre de Reynolds Re_c local défini comme suit :

$$A^{-1/4} = (A_0)^{-1/4} + \frac{0.08356 \cdot t}{\sqrt{Re_c}} \quad [E 3.16]$$

avec le nombre de Reynolds Re_c défini par la relation :

$$Re_c = \frac{c \cdot h}{v} \quad [E 3.17]$$

Une seconde définition sera plus couramment utilisée pour définir le nombre de Reynolds Re :

$$Re = \frac{U_{\max} \cdot h}{v} \quad [E 3.18]$$

3.1.3 : REFLEXION D'UN SOLITON SUR UN MUR VERTICAL.

3.1.3.1 : AMPLITUDE A LA REFLEXION.

Les travaux analytiques de référence cités par BYATT-SMITH (1971) fournissent une loi de comportement pour des fluides non visqueux :

- au premier ordre d'approximation :

$$\frac{A}{h} = 2 \left(\frac{A_0}{h} \right) \quad [E 3.19]$$

avec A_0 : amplitude initiale du signal,
 A : amplitude maximale du signal à l'impact,

- et au deuxième ordre :

$$\frac{A}{h} = 2 \left(\frac{A_0}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{h} \right)^2 \quad [E 3.20]$$

Plus récemment SU & al. (1980) ont donné une relation au troisième ordre :

$$\frac{A}{h} = 2 \left(\frac{A_0}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{h} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{A_0}{h} \right)^3 \quad [E 3.21]$$

Ces relations ont été obtenues en considérant un écoulement incompressible, non visqueux, irrotationnel et évoluant sur un fond plat.

Pour les relations fournies par BYATT-SMITH, les équations utilisées sont celles de BOUSSINESQ :

$$\eta_t + \nabla \left((h + \eta) \vec{u} \right) = 0 \quad [E 3.22]$$

$$\vec{u}_t + \vec{u} \nabla \vec{u} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad [E 3.23]$$

Les variables régissant le problème, la vitesse et la dénivellation sont adimensionnalisées et écrites sous forme de série de puissances à partir du petit paramètre a défini par :

$$a = \frac{A}{h} \quad [E 3.24]$$

L'impact d'une onde solitaire sur une paroi verticale est modélisé comme résultant de l'intersection de deux ondes solitaires d'amplitude N_1 et N_2 (égale respectivement à η^1/h et η^2/h) de mêmes caractéristiques mais ayant un sens de propagation opposé. La variable N caractérisant la dénivellation de la surface libre est alors écrite sous la forme :

$$N = a N_1(X + C_1.t) + a N_2(X - C_2.t) \quad [E 3.25]$$

A cette expression, un terme à l'ordre deux est ajouté permettant de prendre en compte les interactions entre les deux ondes N_1 et N_2 :

$$N = a N_1(X + C_1.t) + a N_2(X - C_2.t) + a^2 N_3(X - C_3.t) \quad [E 3.26]$$

Le développement à un ordre 2 permet d'obtenir la solution citée ci-dessus [E 3.20].

SU & al. ont abordé le problème d'une manière identique, confirmant les solutions citées ci-dessus et fournissant à une ordre de puissance supérieure la solution [E 3.21].

Des auteurs comme MAXWORTHY (1976), CHAMFIELD & al. (1969), RENOARD & al. (1985) et SEABRA SANTOS (1985 et 1989) ont effectué des expériences pour des rapports de forme situés dans la gamme de valeur 0,1 à 0,6. Différentes configurations ont été étudiées, notamment avec une hauteur d'écoulement variable. Le nombre de Reynolds Re varie de 5 000 à 35 000 pour MAXWORTHY (les hauteurs d'écoulement sont de l'ordre de 6 à 7 cm) et jusqu'à 230 000 pour RENOARD et SEABRA SANTOS (les hauteurs d'eau au repos utilisées vont jusqu'à 25 cm). Ces nombres de Reynolds sont élevés ; sous cette condition, la comparaison des résultats expérimentaux avec les solutions analytiques est envisageable.

On notera que pour les expériences réalisées, la génération d'ondes secondaires liées au mouvement du batteur a été inhibée par l'introduction d'une paroi solide dans la zone d'écoulement et ce juste après le passage du soliton permettant d'obtenir ainsi un signal a priori épuré.

On ne retiendra cependant de ces travaux que ceux concernant l'impact d'un soliton sur un mur vertical.

L'étude de l'impact du soliton a aussi fait l'objet de travaux numériques, l'objectif étant de voir le comportement des codes de calcul développés (comme nous le ferons également) et non de fournir une loi de comportement.

On citera pour cela plusieurs travaux avec CHAN & al. (1968), KAWAHARA & al. (1984), TANG & al. (1990), RAMASWAMY (1990). On soulignera avec intérêt que les rapports de forme utilisés restent en général faibles, allant de 0,05 à 0,5.

De plus il s'avère qu'une condition de glissement est généralement appliquée au point de contact surface libre-paroi.

3.1.3.2 : DEPHASAGE.

Après l'impact, les expérimentateurs ont mis en évidence un déphasage du signal, l'onde ne subit pas une réflexion du type miroir, mais est réfléchi en retard de phase (figure F 3.1) :

$$-\Delta x < 0 \quad [E 3.27]$$

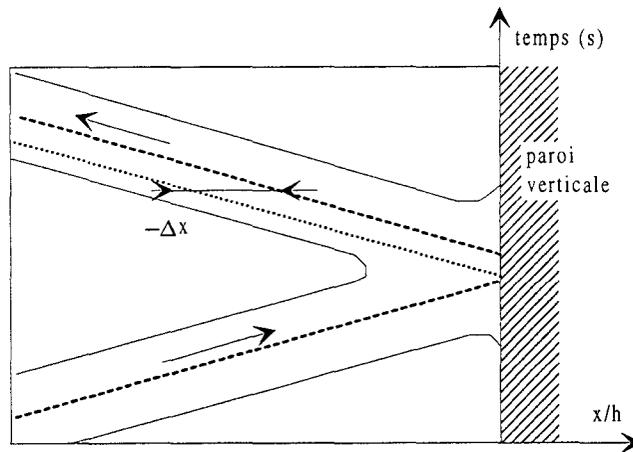


figure F 3.2 : déphasage du soliton lors d'un impact sur une paroi verticale.

Cet aspect a été souligné par MAXWORTHY (1976) et a été confirmé par la suite par RENOIRD & al. (1985), TEMPERVILLE (1985) et SEABRA SANTOS (1985 et 1989).

En plus de données expérimentales, nous disposons de la relation analytique rappelée par TEMPERVILLE (1985) :

$$\frac{\Delta x}{h} = \left(\frac{A}{3h} \right)^{1/2} \quad [E 3.28]$$

et de celle de SU & al. (1980) :

$$\frac{\Delta x}{h} = \left(\frac{A}{3h} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{7A}{8h} \right) \quad [E 3.29]$$

Cette dernière relation a été obtenue pour un écoulement potentiel, incompressible, non visqueux sur une hauteur h constante.

Les équations régissant le problème sont écrites à l'aide de la variable potentielle ϕ ($\vec{u} = \text{grad}(\phi)$) :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad [E 3.30]$$

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- au fond :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad [E 3.31]$$

- et à la surface libre, l'équation cinématique s'écrit sous la forme :

$$\eta_t + \nabla\phi \cdot \nabla h = \phi_z \quad [E 3.32]$$

couplée avec l'équation de Bernoulli appliquée à la surface libre :

$$\phi_t + gh + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) = C(t) \quad [E 3.33]$$

La variable potentielle est écrite sous la forme d'une série de Taylor, et les variables : vitesse, célérité, phase et dénivellation sont écrites sous la forme d'une série de puissances.

Expérimentalement, les résultats de MAXWORTHY (1976) apparaissent comme différents de ceux des autres auteurs (figure F 3.22) ; SEABRA SANTOS (1985) fournit une explication : les sondes de mesures sont situées dans une zone où le soliton après impact n'a pas encore retrouvé un état de stabilité cinématique. Un autre argument peut être fourni, les nombres de Reynolds ne sont pas comparables, les profondeurs d'eau des canaux utilisés ne sont pas du même ordre de grandeur. De plus, il s'avère très délicat de mesurer le déphasage, la difficulté est d'autant plus accrue que les hauteurs d'eau utilisées sont faibles.

Les résultats expérimentaux de SEABRA SANTOS fournissent un ordre de grandeur en accord avec les relations analytiques.

3.2 : LES TESTS NUMERIQUES DU PROGRAMME.

En simulation numérique, on est obligé de se limiter à un domaine fini.

La configuration spatiale retenue est définie comme suit :

- une hauteur d'eau h :

$$h = 1 \text{ m}$$

- une longueur de canal égale à 40 m de long où l'abscisse de chaque point est définie par la longueur adimensionnée x/h avec en début ($x/h = 0$) et en fin de canal ($x/h = 40$) une paroi verticale de hauteur infinie permettant d'effectuer une étude de réflexion totale.

Pour chaque cas, nous nous placerons dans les conditions initiales définies graphiquement comme suit (voir figure F 3.3) :

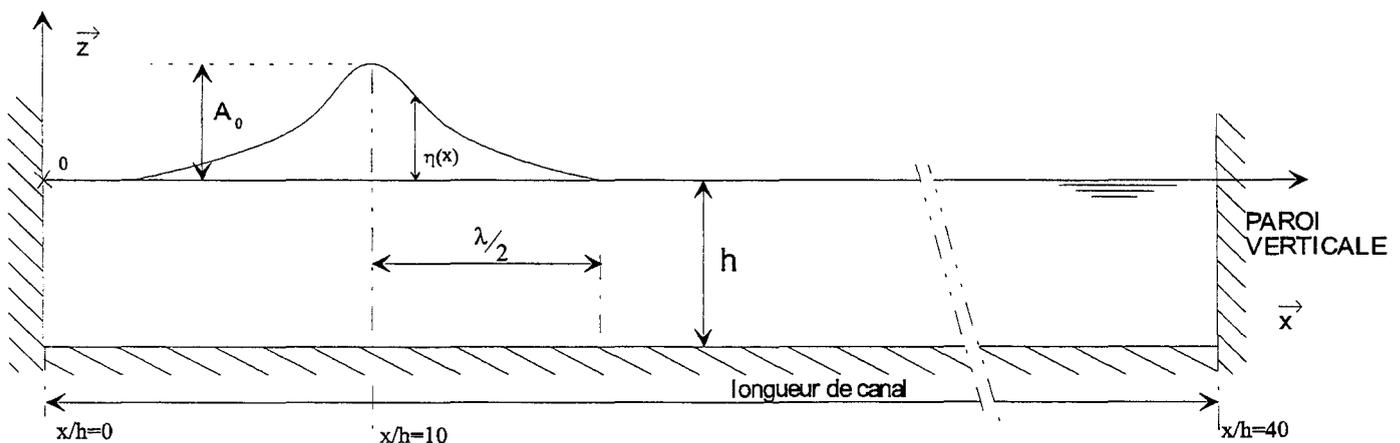


figure F 3.3: représentation géométrique du domaine de calcul.

Sur ce domaine, les différents paramètres : vitesse, pression et dénivellation seront initialisés à l'aide des relations citées.

Concernant le rapport de forme A/h , nous nous limiterons à la valeur maximale de 0,7, limite fournie en deuxième approximation par LAITONE (1960) :

$$\left(\frac{A}{h}\right)_{\max} = \frac{8}{11} \approx 0,7272 \quad [E 3.34]$$

Le programme réalisé résout les équations de NAVIER-STOKES. La comparaison entre les résultats analytiques obtenus pour un fluide parfait et les résultats numériques ne sera significative que si le nombre de Reynolds Re est suffisamment élevé, ce qui nécessite la mise en place d'un modèle de turbulence.

Le modèle utilisé est du type longueur de mélange : Van Driest, voir COUSTEIX (1989) :

$$\mu_t = \rho l^2 (2D_{xx}^2 + 2D_{zz}^2 + 4D_{xz}^2)^{\frac{1}{2}} \quad [E 3.35]$$

avec D_{xx} , D_{zz} et D_{xz} des éléments du tenseur de déformation \overline{D} .

Au voisinage de la paroi, la longueur de mélange l est définie comme :

$$l = 0,4d \left(1 - e^{-\frac{d^+}{26}}\right) \quad [E 3.36]$$

où la variable de paroi d^+ est définie par la relation :

$$d^+ = \frac{d \cdot U_\tau}{\nu} \quad [E 3.37]$$

avec U_τ , la vitesse de frottement :

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad [E 3.38]$$

(d distance à la paroi, τ_p module de la contrainte à la paroi).

Ailleurs, la longueur de mélange l est :

$$l = 0,09 * h \quad [E 3.39]$$

La viscosité efficace est alors :

$$\mu_e = \mu + \mu_t \quad [E 3.40]$$

La propagation du soliton est étudiée dans l'eau, les grandeurs physiques utilisées, la viscosité dynamique μ et la masse volumique ρ ont les valeurs :

$$\begin{aligned} \mu_{\text{eau}} &= 1 \cdot 10^{-3} \text{ Pl (sauf pour les différentes études de sensibilité effectuées ultérieurement)} \\ \rho_{\text{eau}} &= 1000 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Par ailleurs les résultats fournis par le programme dépendent d'une part des paramètres de la discrétisation, soit le pas de temps Δt et les pas d'espace horizontal Δx et vertical Δz , et d'autre part des formulations utilisées pour le lissage de la surface libre (interpolation du type linéaire ou du type Taylor Mixte), de l'évaluation des termes convectifs (différences amonts ou centrées) et du traitement de l'interaction surface libre paroi (suivi de particule ou technique d'extrapolation).

Aussi, avant de procéder à la comparaison des résultats fournis par le code avec ceux donnés par d'autres auteurs, on procède à une étude intrinsèque (étude de sensibilité) qui va nous permettre de fixer les conditions optimales de fonctionnement du code. Cette étude est effectuée en se basant sur l'évolution de l'amplitude maximale du soliton tout au long du canal. Le nombre de Reynolds Re choisi pour cette étude est de 100 (écoulement supposé laminaire) ; le rapport de forme A/h est choisi égal à 0,2 ; le maillage est constitué de 401×22 points soit un maillage ayant au repos des cellules de dimension $0,1 \times 0,05 \text{ m}^2$ (sauf pour l'étude de sensibilité portant sur l'influence du pas horizontal Δx). La masse volumique du fluide ρ est de 10^3 kg/m^3 , la viscosité correspondante est de $6,264 \text{ Pl}$.

3.2.1 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU PAS DE TEMPS Δt .

Concernant le pas de temps Δt , un balayage a été effectué sur l'intervalle temporel suivant : $[0,15 \text{ s} - 0,001 \text{ s}]$, la valeur maximale du pas de temps correspond au pas de temps critique fournie par le critère de stabilité convectif :

$$\left| \frac{\| \vec{u}_{\max} \| \Delta t}{\Delta x} \right| \leq \alpha \tag{E 3.41}$$

avec : $\| \vec{u}_{\max} \| = \sqrt{g h} \frac{A}{h} \approx 0,6264 \text{ m.s}^{-1}$ [E 3.42]

et : $\alpha = 1,0$ [E 3.43]

$$\Delta t_{\text{critique}} = 0,159 \text{ s} \tag{E 3.44}$$

Pour cette valeur de Δt , la condition de stabilité est garantie, cependant la convergence n'apparaît pas comme obtenue (voir figure F 3.4). Ainsi pour un pas de temps Δt supérieur à la valeur de 0,01 seconde, les résultats évoluent de manière conséquente, la précision est acquise pour un pas de temps inférieur au centième de seconde. Pour tenir compte de ce résultat de façon générale, on prendra par la suite le coefficient α égal à 0,1.

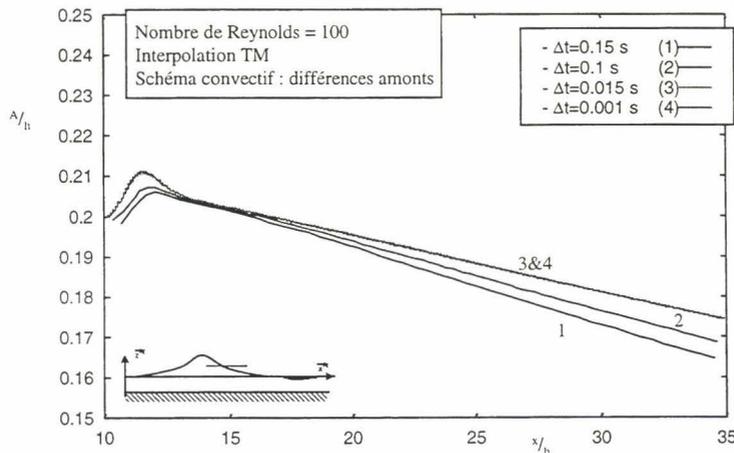


figure F 3.4 : sensibilité du code au pas de temps Δt (critère de stabilité vérifié strictement).

3.2.2 : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU PAS SPATIAL.

Le pas spatial vertical Δz a été fixé arbitrairement à la valeur $h/20$, sauf au voisinage du fond entre les cotes $-h$ et $-0,8*h$ où le nombre de points du maillage et la progression de Δz ont été fixés en utilisant l'expérience acquise (le nombre de points est d'autant plus élevé que le nombre de Reynolds est plus grand et la progression du pas spatial Δz est du type exponentiel), expérience confirmée lors de l'étude de la houle (voir chapitre IV).

Concernant le pas spatial horizontal Δx , on constate, voir figure F 3.5, qu'à partir de la valeur 0,2 mètre, d'une part l'évolution temporelle du soliton est "continue" et d'autre part la précision obtenue sur l'amplitude est de l'ordre de 2,5 %, la référence étant la valeur obtenue pour Δx égale à 0,05 m.

Aussi nous nous sommes fixés par la suite une taille maximale Δx :

$$\Delta x = \frac{\lambda}{75} \quad [E 3.45]$$

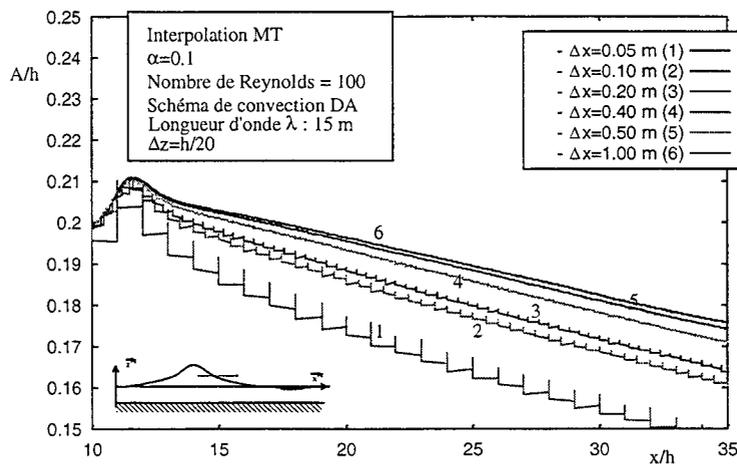


figure F 3.5 : influence sur la précision des résultats de l'aspect dimensionnel du pas spatial Δx et ce avec un pas de temps Δt géré de manière automatique (critère de stabilité assuré).

3.2. : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DE LA TECHNIQUE D'INTERPOLATION POUR DEFINIR LA LOCALISATION DE LA SURFACE LIBRE.

La figure F 3.6 montre la comparaison entre un écoulement simulé à l'aide d'une version entièrement lagrangienne, et de deux autres versions utilisant chacune une formulation ALE : la surface libre est dans le premier cas interpolée avec une technique linéaire et dans le second cas à l'aide d'un développement du type Taylor Mixte (TM). La comparaison avec les résultats obtenus avec la version lagrangienne montre la qualité de la méthode d'interpolation du type TM.

C'est cette technique qui a été retenue pour les calculs ultérieurs.

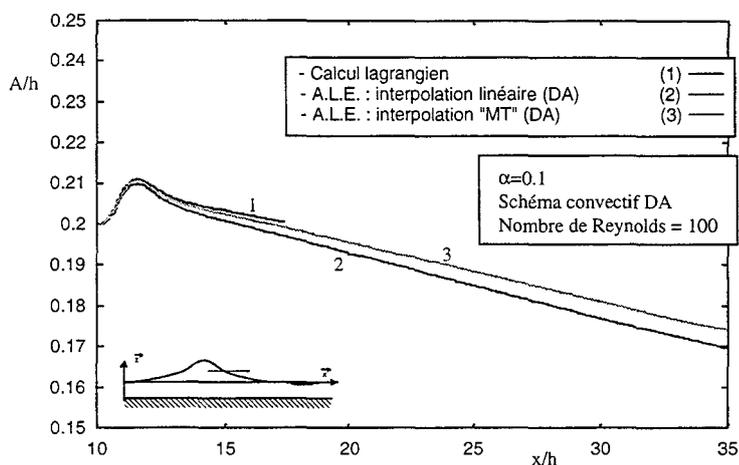


figure F 3.6 : influence de la fonction d'interpolation sur le comportement temporel de l'onde solitaire (DA : schéma convectif du type différences amonts).

On notera que la comparaison avec la simulation lagrangienne ne peut se faire que sur un temps relativement court. Pour cette simulation, la déformation des mailles pariétales entraîne une diminution conséquente de la surface de chacune des mailles et tend implicitement à faire chuter le pas de temps Δt vers une valeur nulle (voir figure F 3.7). Pour cette simulation précise, on rappellera que le pas de temps est principalement géré par le critère suivant :

$$\Delta t = \alpha \cdot \left(\frac{\rho}{2\mu} \Delta x^2 \right) \quad [E 3.46]$$

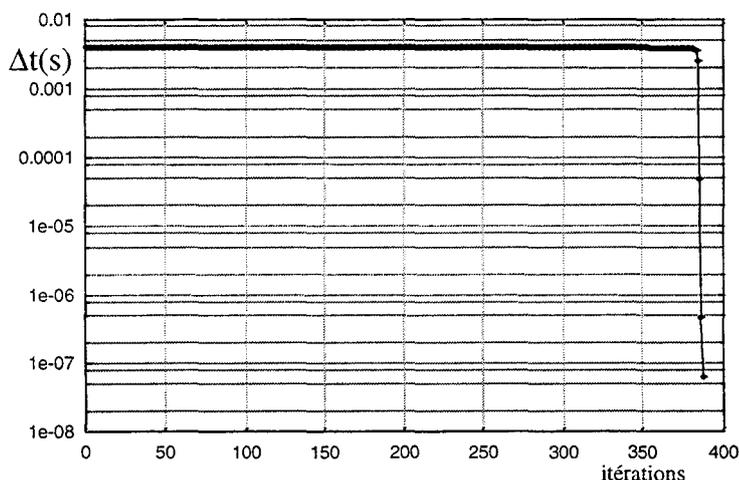


figure F 3.7 : évolution du pas de temps pour un calcul lagrangien et pour un nombre de Reynolds de 100.

3.2. : ETUDE DE SENSIBILITE : INFLUENCE DU SCHEMA CONVECTIF.

Nous avons comparé l'influence des schémas convectifs suivant le nombre de Reynolds en faisant varier la viscosité dynamique. Pour des nombres de Reynolds supérieurs ou égaux à 1000, on utilise le modèle de turbulence.

Pour un nombre de Reynolds de 100, on obtient les résultats indiqués sur la figure F 3.8.

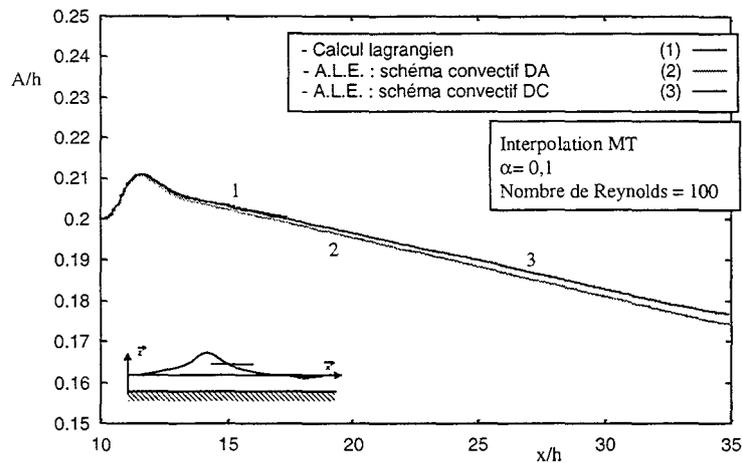


figure F 3.8 : influence du schéma convectif sur le comportement temporel de l'onde solitaire.

D'une façon générale, le schéma aux différences centrées restitue une évolution de la surface libre similaire à celle obtenue par un calcul lagrangien (lorsque d'une part la stabilité pour le schéma centré est assurée, et lorsque d'autre part la déformation de la grille de calcul permet l'évolution du calcul lagrangien). Pour un nombre de Reynolds élevé, le schéma centré s'avère instable. Le schéma aux différences amonts apparaît plus dissipatif. Néanmoins la différence entre les deux schémas reste négligeable (un maximum de 2.90 % de différence), voir figure F 3.9.

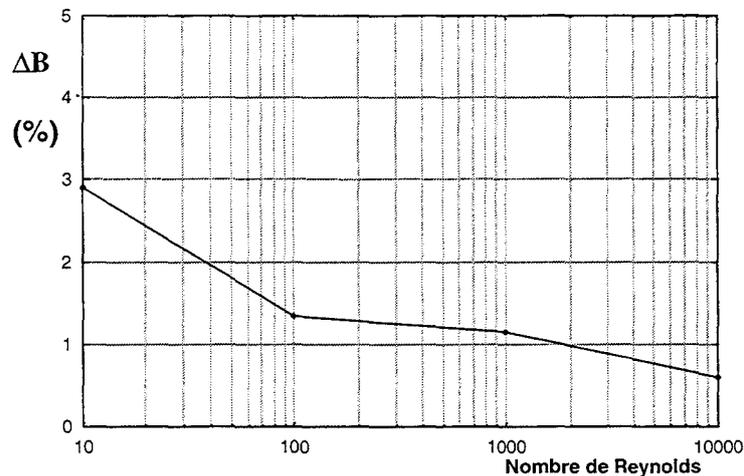


figure F 3.9 : différence de taux d'amortissement $\Delta A / \Delta X$ obtenue par les deux schémas convectifs.

On rappellera que la stabilité du schéma aux différences amonts est inconditionnellement garantie, le pas de temps étant géré automatiquement.

Aussi, compte tenu des remarques précédemment énumérées, on retiendra le schéma aux différences amonts pour la suite des simulations.

3.2.5 : ETUDE DE SENSIBILITE : CHOIX DE LA METHODE DE TRAITEMENT DE L'INTERACTION SURFACE LIBRE-PAROI.

Pour effectuer ce choix, il faut au préalable définir des grandeurs de référence.

Pour notre cas, ces grandeurs seront prises ainsi :

- l'amplitude du signal A_0 correspond à la hauteur du signal incident ; elle est prise à une demi-longueur d'onde de la paroi verticale (pour éviter au mieux l'aspect diffusif), voir figure F 3.10 :

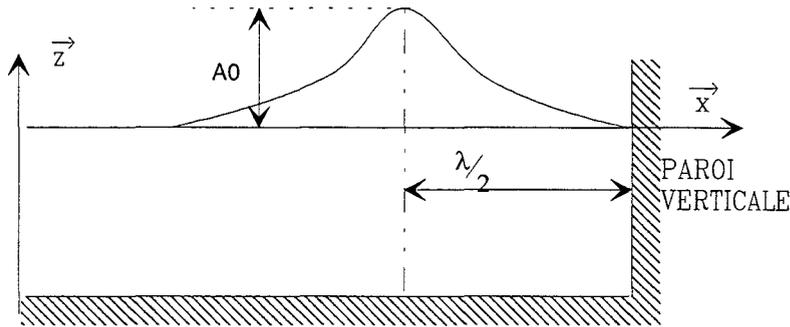


figure F 3.10: définition de la valeur A_0 en fonction de la position du soliton vis à vis de la paroi verticale.

- l'amplitude d'impact A est la cote maximale du soliton au voisinage de la paroi.

Pour ces calculs, on effectuera un affinement horizontal du maillage au voisinage de la paroi verticale droite afin de prendre en compte le comportement dynamique de l'impact (voir figures F 3.23 à F 3.26 en fin de chapitre).

Les deux techniques numériques mises au point (extrapolation et suivi de particule) donnent sensiblement des résultats identiques, on constate une différence pour un rapport de forme A/h élevé, celle-ci restant cependant infime (tableau T 3.1). Aussi choisit-on la méthode d'extrapolation qui est d'une mise en oeuvre plus simple.

rapport de forme A_0/h	suivi de particule A/h	méthode d'extrapolation A/h
0,104	0,2294	0,2094
0,206	0,4365	0,4378
0,3135	0,6824	0,6896
0,4270	0,979	0,986
0,556	1,4516	1,452
0,673	1,908	1,86

Tableau T 3.1 : comparaison de la hauteur d'impact pour deux techniques de déplacement de la surface libre.

3.2.6 : RESUME.

L'étude de sensibilité qui vient d'être effectuée nous conduit à adopter les règles suivantes :

- $\alpha = 1,0$
- $\Delta x \leq \frac{\lambda}{75}$
- localisation de la surface libre avec le schéma du type Taylor mixte (TM),
- évaluation des termes convectifs en utilisant le schéma aux différences amonts (DA),
- interaction de la surface libre et d'une paroi par une méthode d'extrapolation spatiale de la surface libre à chaque instant.

3.3 : COMPARAISONS ENTRE LES RESULTATS FOURNIS PAR LE CODE DE CALCUL, LES RESULTATS ANALYTIQUES ET EXPERIMENTAUX.

L'initialisation étant effectuée à l'aide des relations citées au préalable : [E 3.1] à [E 3.8], on constate qu'il y a d'abord une période transitoire où l'écoulement se réorganise, ce qui est normal compte tenu que l'ensemble des données n'est pas strictement cohérent avec les équations utilisées par le code de calcul. Aussi, toutes les comparaisons seront effectuées après cette période de transition.

3.3.1 : CELERITE DU SOLITON.

Outre l'expression déjà fournie, relation [E 3.2] :

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{A}{h}$$

valable au premier ordre d'approximation, LAITONE (1960) propose une expression au deuxième ordre :

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{A}{h} - \frac{3}{20} \left(\frac{A}{h} \right)^2 \quad [E 3.47]$$

Il rappelle également la relation fournie par WEINSTEIN (1926) à l'ordre trois :

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = \left(1 + \frac{A}{h} - \frac{1}{20} \left(\frac{A}{h} \right)^2 - \frac{3}{70} \left(\frac{A}{h} \right)^3 \right)^{1/2} \quad [E 3.48]$$

Des expériences ont été effectuées par WEIDMAN & al. (1978) dans un canal dont les dimensions sont les suivantes : 15,75 m de long pour une section de largeur 0,20 m et une profondeur de 0,06 à 0,07 m. Le nombre de Reynolds correspondant à l'écoulement étudié est de l'ordre de 20 000.

La relation analytique au deuxième ordre apparaît en accord avec les résultats expérimentaux de WEIDMAN & al. (1978) (voir figure F 3.11).

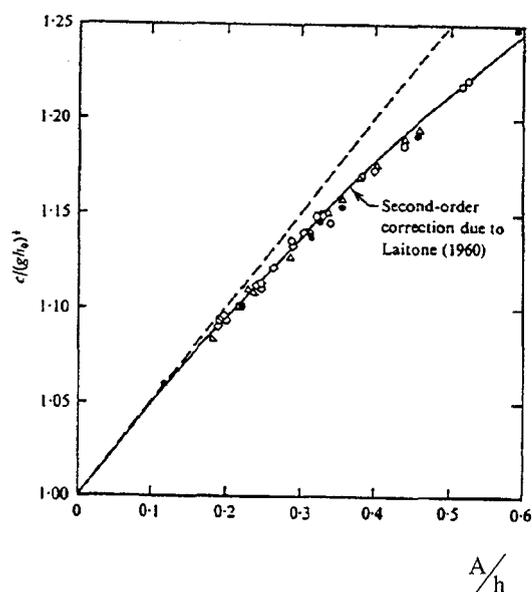


figure F 3.11 : résultats expérimentaux de WEIDMAN & al. (1978)

Pour calculer la célérité et la valeur de A/h correspondante, nous utiliserons les données de calcul comme suit (voir figure F 3.12):

- les temps de passage seront pris respectivement aux abscisses $x/h = 25$ et $x/h = 30$, nous permettant ainsi d'obtenir la célérité moyenne adimensionnée :

$$\frac{c}{\sqrt{gh}} = \frac{x_{30} - x_{25}}{t_{30} - t_{25}} \frac{1}{\sqrt{gh}} \quad [E 3.49]$$

- la valeur du rapport de forme A/h sera la valeur prise à la cote $x/h = 27,5$.

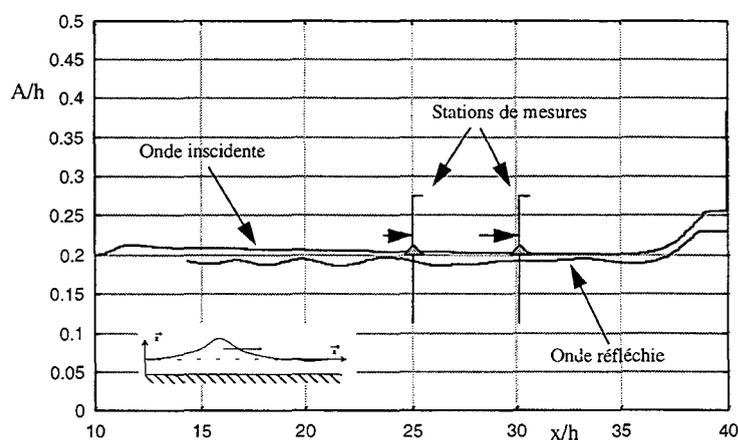


figure F 3.12 : position des points utilisés pour calculer la célérité moyenne et le taux d'amortissement de l'onde solitaire.

Les résultats sont fournis dans les tableaux T 3.2 et T 3.3 et les figures F 3.13 et F 3.14 :

Rapport de forme A/h	Célérité adimensionnée
0,101	1,047077601
0,203	1,092833865
0,300	1,137363272
0,395	1,1774
0,4852	1,2163363
0,567	1,251250104
0,6423	1,2842722257

tableau T 3.2 : célérité adimensionnée en fonction du rapport de forme (voir figure F 3.13).

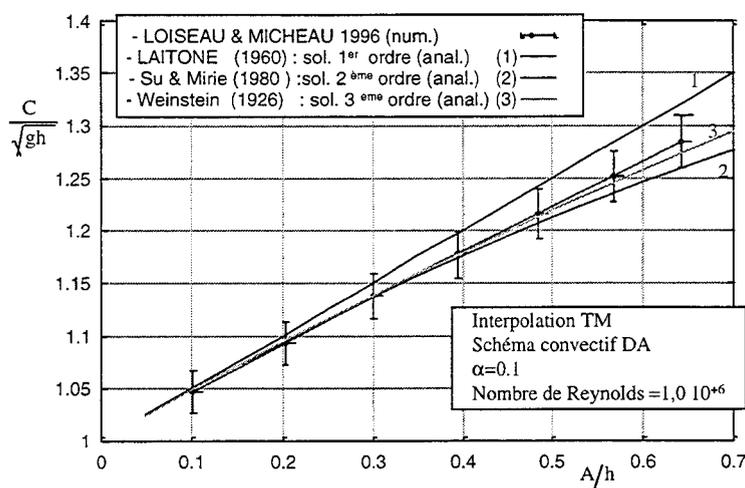


figure F 3.13 : évolution de la célérité moyenne en fonction du rapport de forme A/h.

différences relatives entre les solutions analytiques et les résultats numériques			
rapport de forme A/h	1 ^{er} ordre (%)	2 ^{ème} ordre (%)	3 ^{ème} ordre (%)
0,101	-0,3265118	-0,18039	-0,18564
0,203	-0,7867760	-0,226854	-0,2676603
0,300	-1,098840	-0,075958	-0,051246
0,395	-1,678496	0,281386	0,0001825
0,485	-2,113608	0,7495446	0,241464
0,567	-2,512652	1,2931607	0,498635
0,642	-2,791336	1,9856477	0,848806

Tableau T 3.3 : comparaison des résultats numériques avec les solutions analytiques (figure F 3.14).

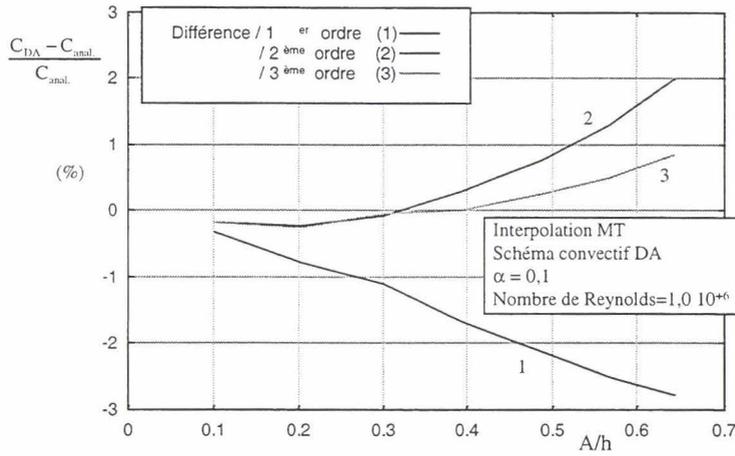


figure F 3.14 : Comparaison des solutions numériques avec les solutions analytiques.

Comme on peut le constater, il y a une très bonne corrélation entre :

- nos résultats de calcul,
- les relations analytiques au 3^{ème} ordre,
- et les résultats expérimentaux de WEIDMAN & al. jusqu'au rapport de forme $A/h = 0,4$.

3.3.2 : EVOLUTION DE L'AMPLITUDE A BAS NOMBRE DE REYNOLDS.

Concernant le comportement de la surface libre, les calculs nous fournissent les résultats suivants sur l'évolution de l'amplitude du signal pour un écoulement laminaire (tableau T 3.4 et figure F 3.15) :

Re - Re _c	μ (Pl)	ΔA = A _{x/h=30} - A _{x/h=25}
100 - 500	6,26	-7,08831 10 ⁻³
10 - 50	62,6	-2,11039 10 ⁻²

tableau T 3.4: diminution du rapport de forme du soliton sous l'action visqueuse.

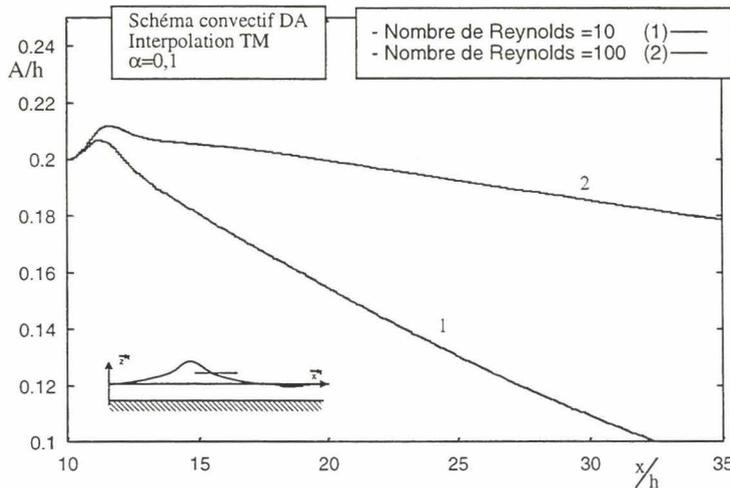


figure F 3.15 : résultats numériques sur l'évolution de l'onde solitaire.

Une comparaison en fonction du nombre de Reynolds Re_c avec les solutions analytiques au préalable citées (E 3.15 et E 3.16) montre un encadrement satisfaisant des résultats numériques (figures F 3.16 et F 3.17), et ce plus particulièrement pour le modèle de MEI.

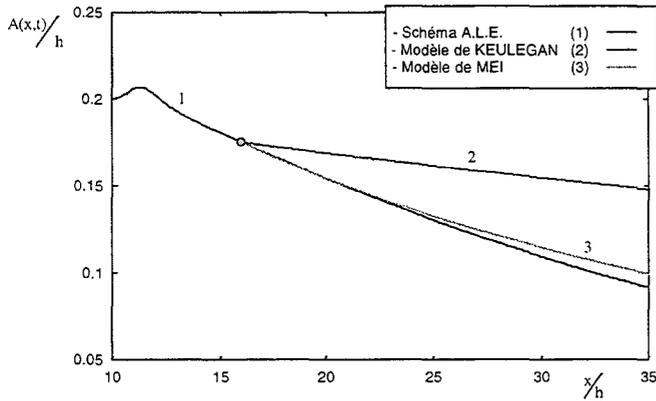


figure F 3.16 : comparaison du comportement de la surface libre avec des modèles analytiques et ce pour un Reynolds de 10 ($Re_c=50$).

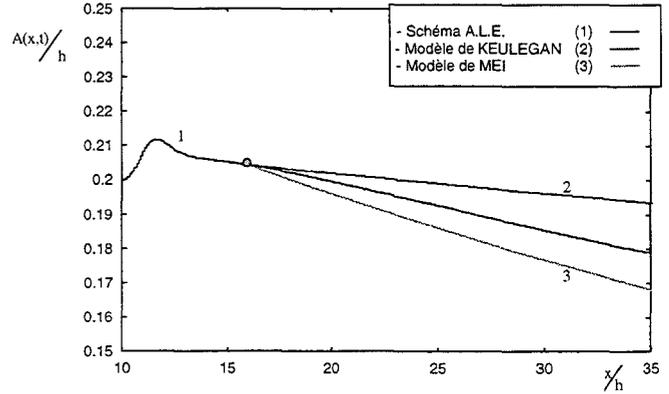


figure F 3.17 : comparaison du comportement de la surface libre avec des modèles analytiques et ce pour un Reynolds de 100 ($Re_c=500$).

Ces analyses sont tout à fait comparables avec celles données par TANG & al. (1990), voir figure F 3.18.

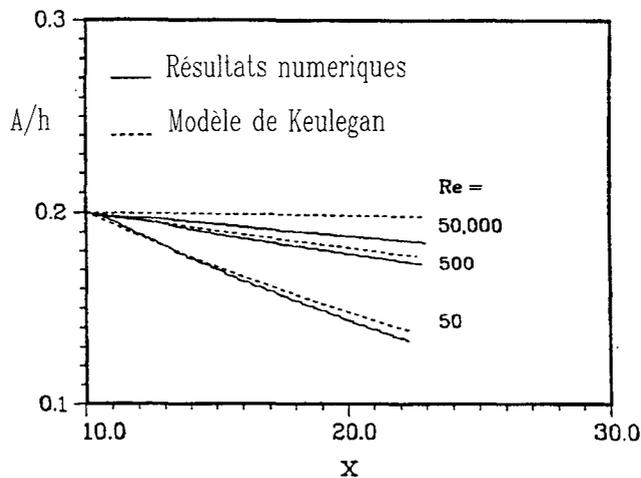


figure F 3.18 : Résultats numériques de TANG & al. (1990) pour différents nombres de Reynolds.

3.3.3 : REFLEXION D'UN SOLITON SUR UNE PAROI VERTICALE.

Les résultats analytiques comportent deux aspects : l'un est relatif au changement d'amplitude, l'autre au déphasage.

La variable de référence est toujours le rapport de forme initial A_0/h . Nous avons effectué différents calculs en faisant varier le rapport de forme initial dans l'intervalle 0,1 à 0,6. Le nombre de Reynolds correspondant varie dans la plage de $3 \cdot 10^5$ à $2 \cdot 10^6$.

L'aspect qualitatif des résultats est donné figure F 3.19 pour un rapport de forme initial égal à 0,2.

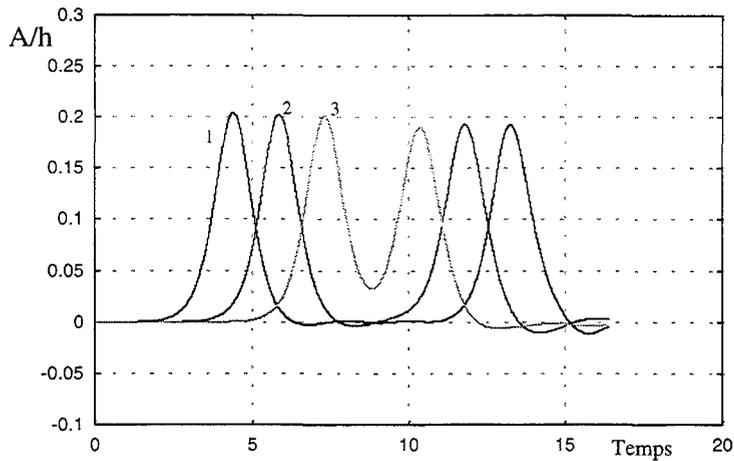


figure F 3.19 : historique d'une onde solitaire de rapport de forme initial 0,2 et pour un nombre de Reynolds de $6 \cdot 10^5$. Est représenté le comportement de l'onde solitaire dans le temps au passage de plusieurs stations placées respectivement aux abscisses $x/h=20$ (1), $x/h=30$ (2) et $x/h=35$ (3).

Les figures F 3.21 et F 3.22 résument l'ensemble des comparaisons.

Les valeurs numériques de A_0/h sont prises en x/h égale à $40 - \lambda/2$ et celle de A/h en x/h égale à 40. La définition du déphasage est plus délicate à acquérir, elle est calculée comme indiquée sur la figure F 3.20.

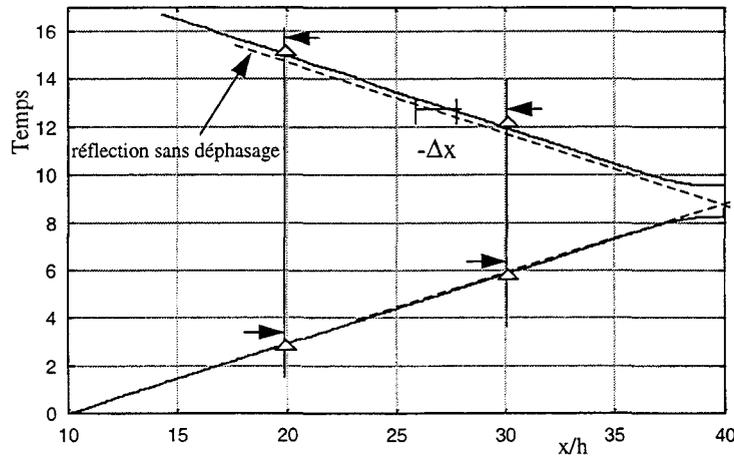


figure F 3.20 : position des points utilisés pour calculer le déphasage d'une onde après impact sur un mur immobile et vertical.

En ce qui concerne l'évolution de l'amplitude initiale A_0/h à l'impact, les résultats obtenus sont en très bon accord avec la relation analytique au troisième ordre de SU & al. (relation [E 3.21]) ainsi qu'avec les divers résultats expérimentaux dont on dispose, voir figure F 3.21.

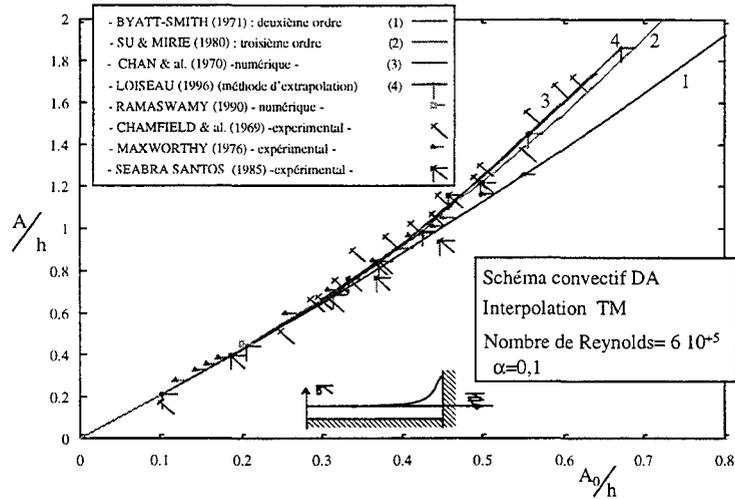


figure F 3.21 : impact d'une onde solitaire sur une paroi solide de hauteur infinie.

En ce qui concerne les valeurs de déphasage $\Delta x/h$, la comparaison indique un bon accord avec la solution analytique au deuxième ordre (relation [E 3.29]) pour des valeurs de A/h allant jusqu'à 0,4, voir tableau T 3.5 et figure F 3.22.

rapport de forme A/h	déphasage $\Delta x/h$
0,104	0,16
0,206	0,279220
0,300	0,4281149
0,380	0,4766
0,472	0,69238

tableau T 3.5 : valeurs numériques du déphasage

Au-dessus de ces rapports, on constate la formation d'ondes secondaires en amont du soliton et ce avant l'impact. Après réflexion de l'onde solitaire, ces perturbations viennent se superposer au signal réfléchi et modifient ainsi localement la célérité du soliton. Les cotes spatiales comme temporelles utilisées pour calculer le déphasage ne sont donc que difficilement exploitables.

Quant'à la comparaison avec les résultats expérimentaux, elle est peu significative compte tenu de la dispersion inévitable de ces derniers, seul l'ordre de grandeur est similaire avec les résultats de SEABRA SANTOS (1985).

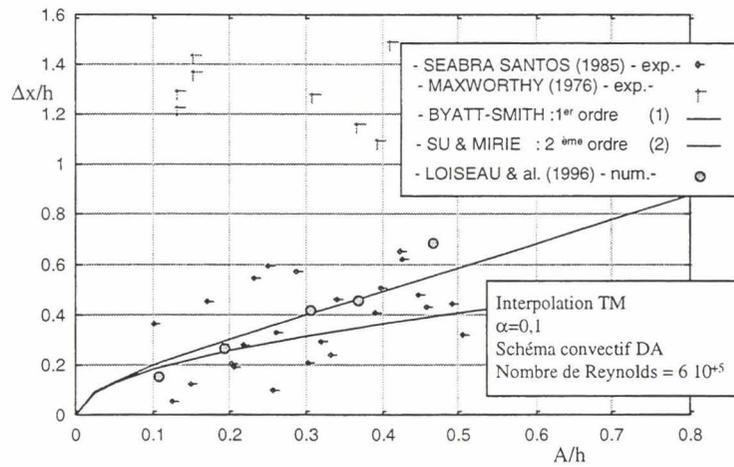


figure F 3.22 : déphasage d'une onde solitaire après impact sur une paroi verticale.

3.3.4 : RESUME.

L'étude de la propagation d'une onde solitaire a servi de cas test.

Les comparaisons des résultats obtenus avec ceux expérimentaux et analytiques d'autres auteurs sont satisfaisantes. Ces comparaisons ont porté sur la célérité, le taux d'amortissement ou encore la description de l'impact sur une paroi.

figure F 3.23 : évolution de l'onde solitaire incidente sur une paroi verticale de hauteur infinie et immobile, visualisation de la vitesse et du maillage.

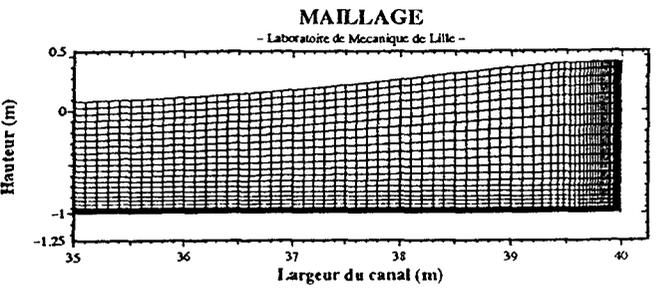
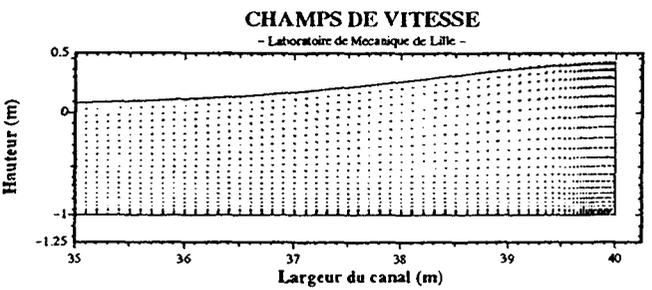
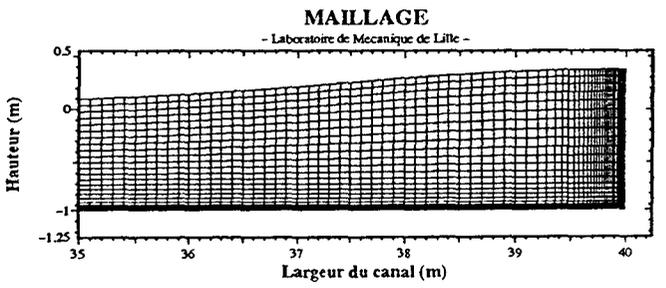
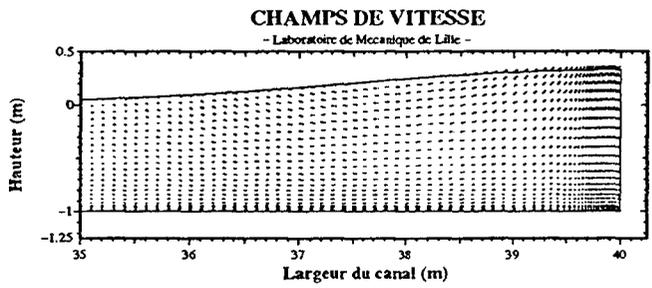
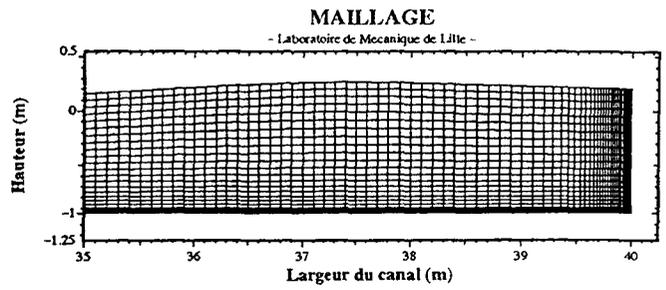
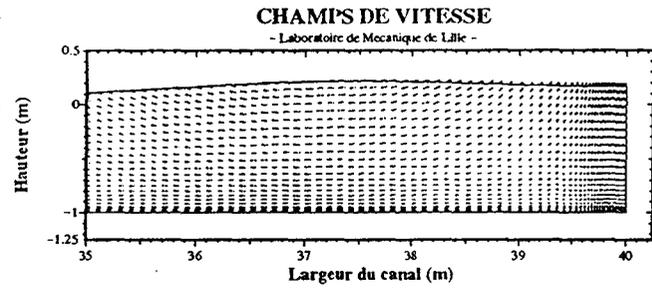


figure F 3.24 : évolution à l'impact de l'onde solitaire incidente sur une paroi verticale de hauteur infinie et immobile (zoom des figures F 3.23).

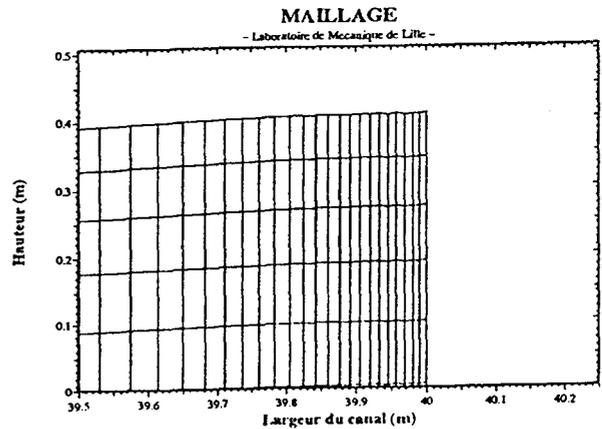
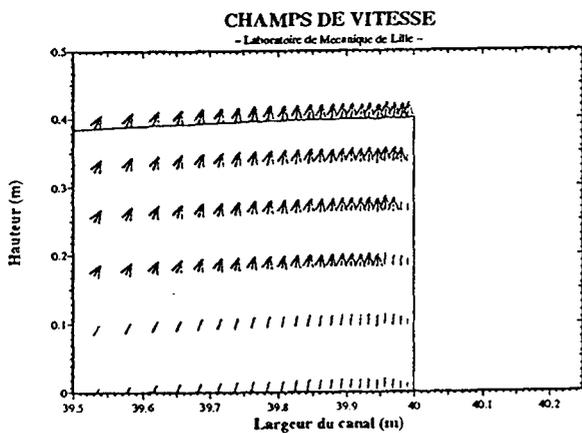
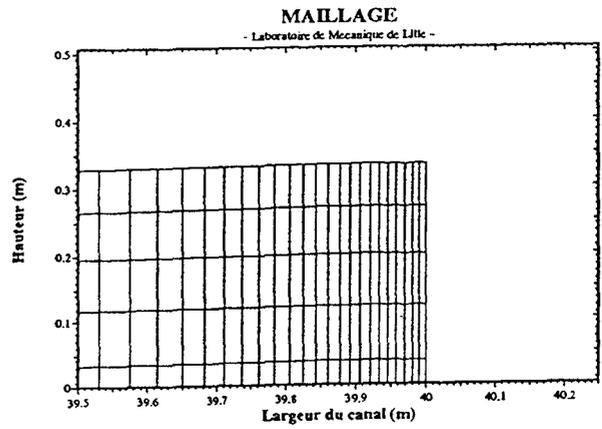
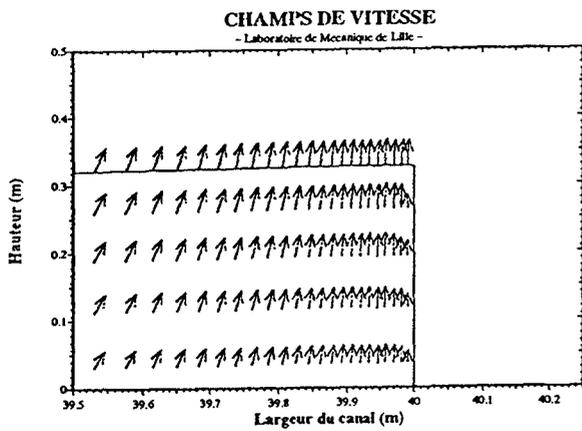
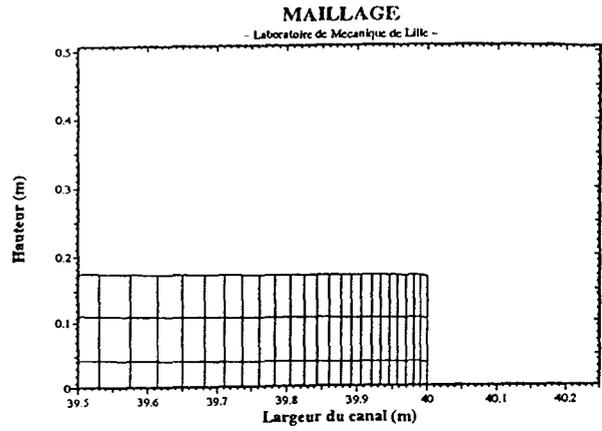
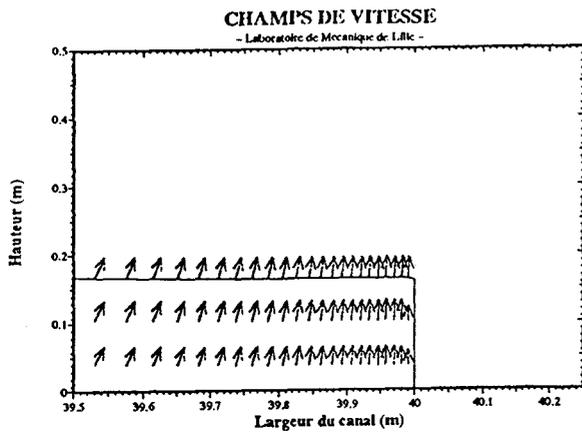


figure F 3.25 : évolution après impact de l'onde solitaire incidente sur une paroi verticale de hauteur infinie et immobile (visualisation de la vitesse et du maillage).

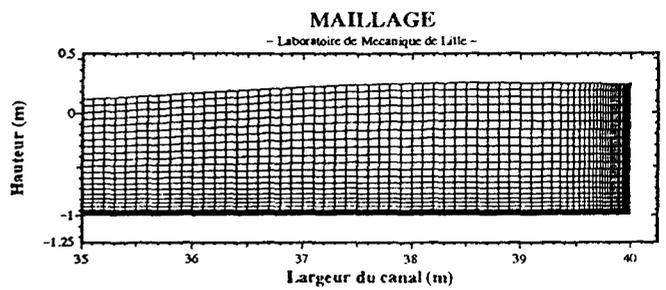
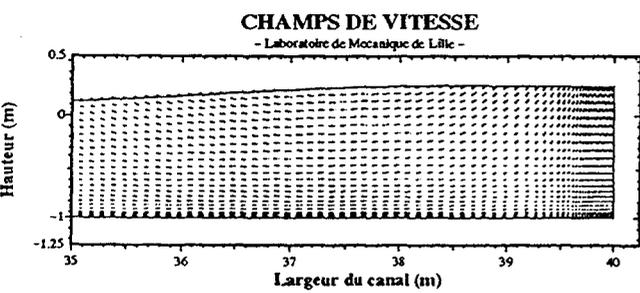
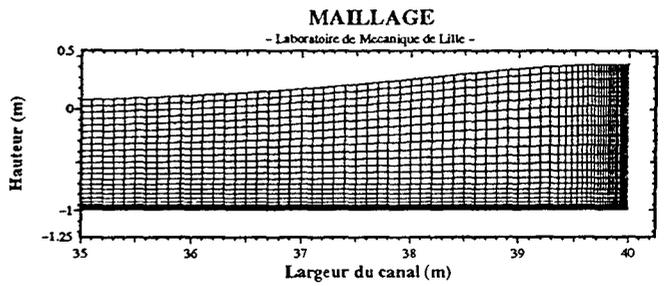
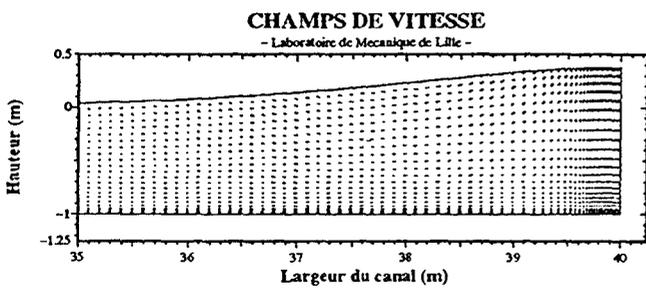
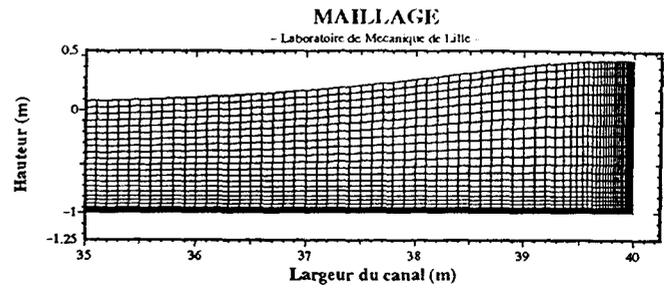
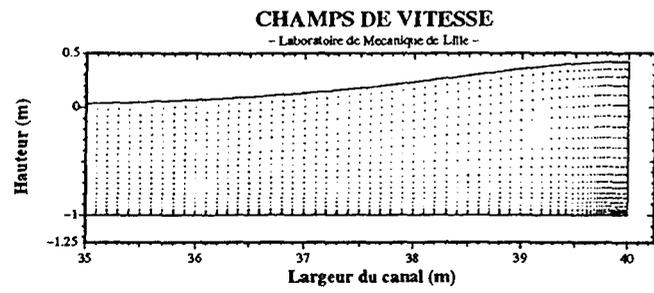
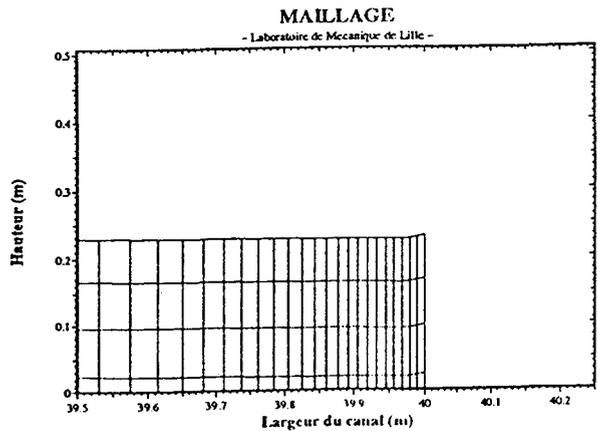
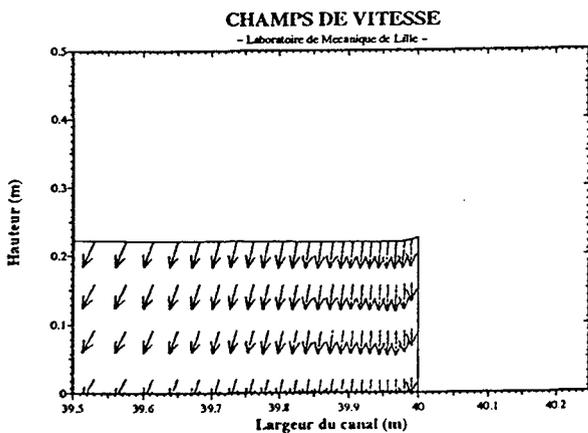
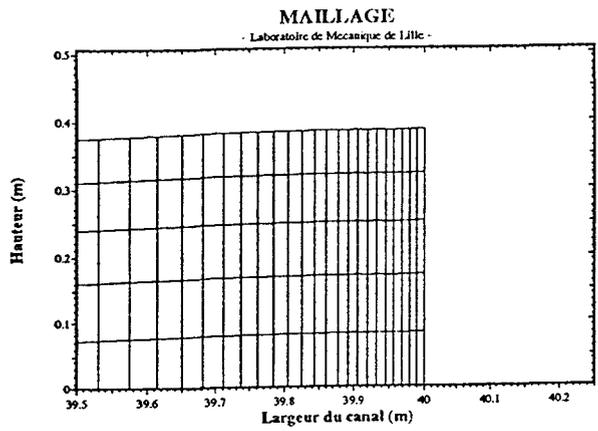
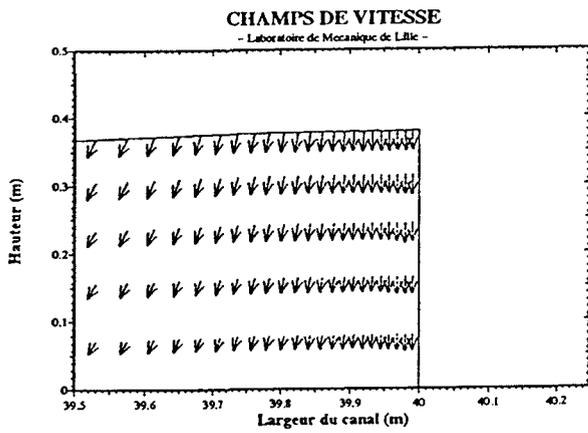
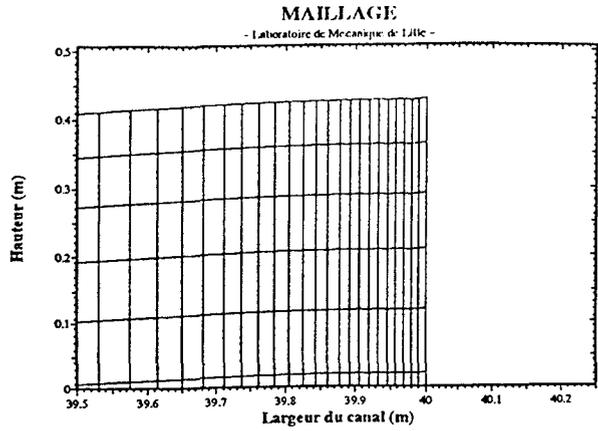
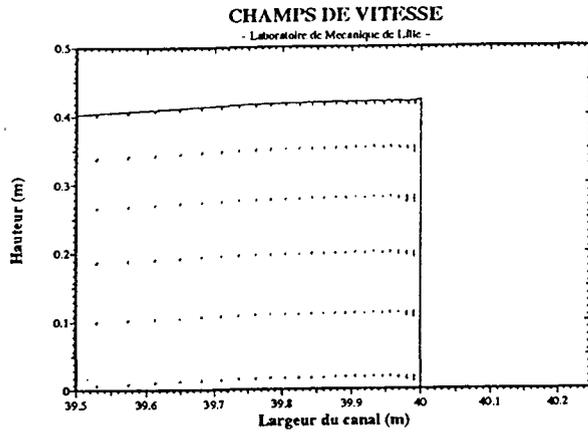


figure F 3.26 : évolution après impact de l'onde solitaire incidente sur une paroi verticale de hauteur infinie et immobile (zoom des figures F 3.25).





4 : CARACTERISATION DE LA COUCHE LIMITE ENGENDREE PAR UN ECOULEMENT DE HOULE

TABLE DES MATIERES :

4 : CARACTERISATION DE LA COUCHE LIMITE ENGENDREE PAR UN ECOULEMENT DE HOULE.....	101
4.1 : INTRODUCTION.....	102
4.2 : RESOLUTION CLASSIQUE DU PROBLEME.....	102
4.3 : LES OBJECTIFS.....	104
4.3.1 : DESCRIPTION DU DOMAINE D'ETUDE.....	105
4.3.2 : CONDITIONS AUX LIMITES.....	106
4.3.3 : CONDITIONS INITIALES.....	106
4.4 : COMPORTEMENT DE LA HOULE LE LONG DU CANAL.....	106
4.4.1 : COMPORTEMENT SPATIAL DE LA HOULE SIMULEE.....	107
4.4.2 : COMPORTEMENT TEMPOREL DE LA HOULE SIMULEE.....	110
4.5 : INFLUENCE DU MAILLAGE.....	116
4.6 : COMPARAISON.....	118
4.6.1 : COMPARAISON AVEC UN MODELE ANALYTIQUE.....	118
4.6.2 : COMPARAISON AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX.....	123

4.1 : INTRODUCTION.

Un des facteurs qui nous intéresse directement est l'influence de la houle sur le fond marin.

Il apparaît que la contrainte de frottement à la paroi est un facteur primordial dans le processus de l'arrachage sédimentaire. Moyennée sur une période, la vitesse moyenne fluide apparaît comme nulle. Aussi pour des échelles temporelles plus importantes, la contrainte de frottement moyenne apparaît comme inexistante alors que les contraintes de frottement instantanées ne sont pas négligeables.

Les codes de calcul permettant de simuler des écoulements côtiers utilisent des formulations empiriques (coefficient de Chézy) pour modéliser le frottement sur le fond. Ce type de loi de comportement peut ne pas être adapté pour des écoulements oscillants comme la houle.

Aussi notre objectif est d'évaluer la cinématique fluide au voisinage du fond et notamment sur la hauteur de la couche limite.

4.2 : RESOLUTION CLASSIQUE DU PROBLEME.

Il est utile de rappeler que le domaine global d'écoulement peut être décomposé en deux parties distinctes.

La première zone correspond à une partie du domaine fluide où le mouvement des masses fluides est essentiellement dicté par le gradient de pression engendré par le comportement spatial et temporel de la surface libre. Les effets visqueux sont généralement supposés négligeables et l'écoulement est souvent supposé irrotationnel.

La seconde correspond à une zone proche du fond où les contraintes visqueuses ne sont pas négligeables, elle englobe la couche limite engendrée par l'écoulement dit à l' "infini".

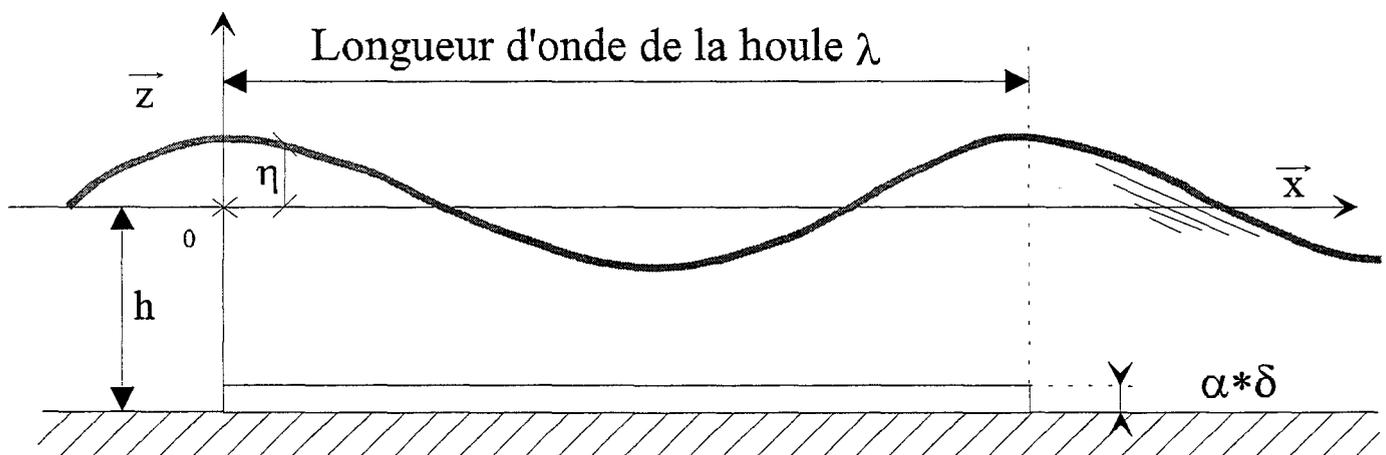


figure F 4.1 : localisation du domaine usuellement utilisé pour fournir un comportement de la couche limite.

La partie supérieure de l'écoulement a fait l'objet d'études analytiques diverses, de nombreuses solutions correspondant à des hypothèses données et à différents degrés d'approximation, ont été développées (voir annexe A4).

De même le problème de couche limite a fait l'objet de simulations numériques (voir SMITH & al. (1985), HUYNH-THANH (1990), BLONDEAUX & al. (1991), SOULSBY & al. (1993), TANAKA & al. (1993), TEMPERVILLE & al. (1995), SHUM (1995), etc.).

L'approche adoptée consiste à prendre un domaine englobant uniquement la couche limite (voir figure F 4.1). L'écoulement supérieur n'est donc pas étudié et le comportement de la surface libre n'est volontairement pas pris en compte. La liaison entre ces deux domaines s'effectue en imposant à la frontière commune des deux domaines la vitesse du fluide.

Concernant l'aspect géométrique du domaine, celui-ci est de forme rectangulaire. Sa hauteur est d'environ 3 à 5 fois la hauteur évaluée de la couche limite ; comme la houle est supposée périodique et parfaitement établie, la largeur du domaine correspond à la valeur d'une longueur d'onde λ (voir figure F 4.2).

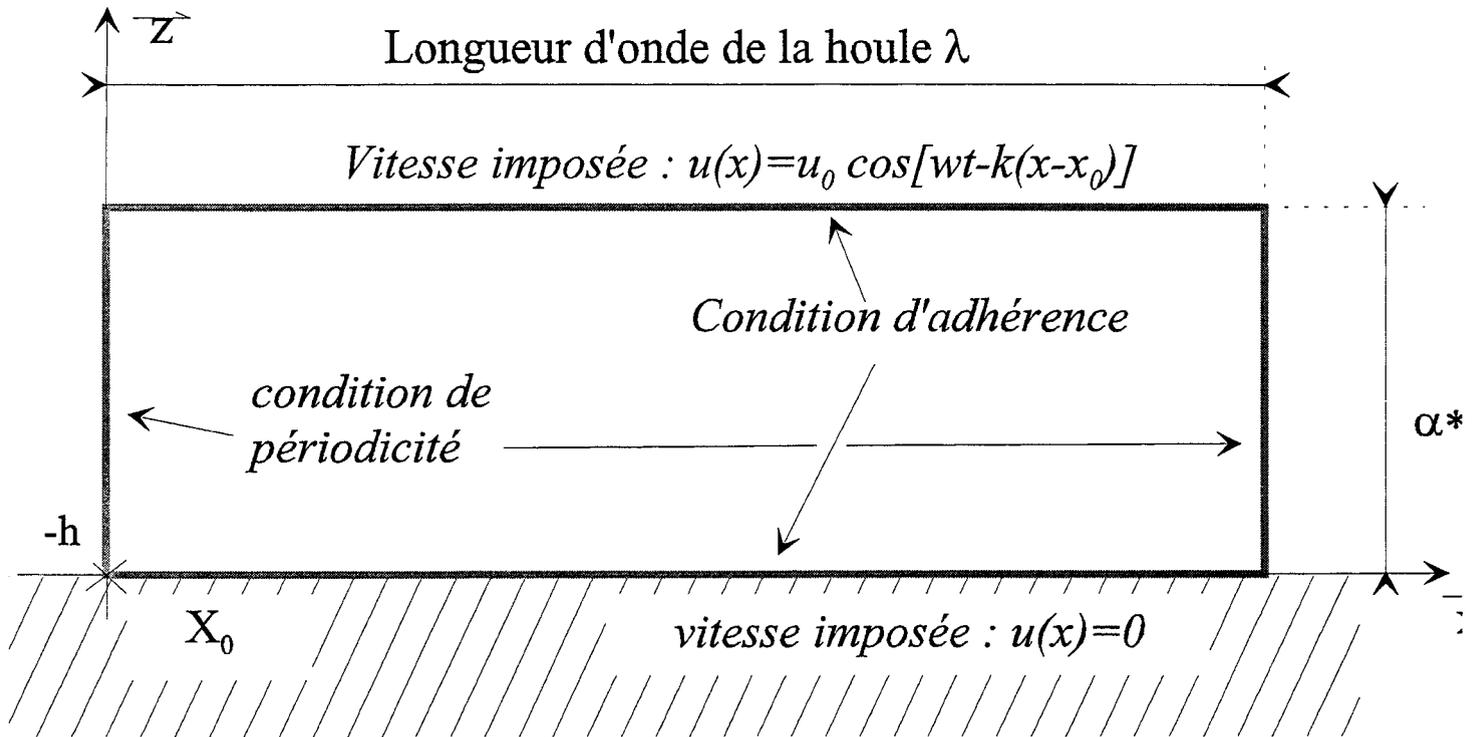


figure F 4.2 : définitions de la géométrie et des conditions aux limites adoptées pour le domaine de résolution.

Les conditions aux limites adoptées sont les suivantes :

- une condition d'adhérence est imposée à la paroi inférieure, celle-ci est située à la cote $z = -h$ et est immobile,
- sur la paroi supérieure, la vitesse du fluide est imposée, elle correspond à celle du signal et est donnée par un modèle analytique à la cote $z = -h + \alpha^* \delta$,
- sur les parois latérales, on applique une condition de périodicité.

Les équations correspondantes sont celles de la mécanique des fluides, à savoir les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement.

Le gradient de pression horizontal est généralement modélisé sous la forme :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial U_{\text{imposé}}}{\partial t} \Big|_{z = -h + \alpha^* \delta} \quad [\text{E 4.1}]$$

où la vitesse $U_{\text{imposée}}$ est la vitesse à l'infini et conditionnant le gradient de pression :

$$U_{\text{imposé}} \Big|_{z=-h+\alpha.\delta} = f(x, t) \quad [\text{E 4.2}]$$

Plusieurs remarques peuvent être faites :

- Le problème ainsi défini reproduit une configuration idéalisée, l'écoulement est supposé établi et temporellement reproductible.
- Le signal imposé correspond à un signal monochromatique, les harmoniques ne sont pas pris en compte.
- Une analogie directe peut être faite avec un écoulement de Couette pour lequel on a une première paroi immobile et une seconde coplanaire et animée d'un mouvement oscillatoire. Un autre écoulement analogue est celui d'un écoulement oscillant dans un cylindre. On notera que ce dernier écoulement a permis expérimentalement d'approcher la physique présente au niveau de la couche limite, on rappellera ainsi les travaux de HINO & al. (1976 et 1983), JENSEN & al. (1989), etc. Les écoulements étudiés sont généralement turbulents.
- Compte tenu du choix dimensionnel du domaine de calcul, il est impératif de garantir une indépendance de la solution vis à vis des caractéristiques géométriques du domaine et principalement vis à vis de la hauteur du domaine.
- Ce type de technique ne peut que difficilement décrire certains types d'écoulement et notamment un écoulement combiné de houle et de courant. La hauteur de couche limite du courant seul n'est pas du même ordre de grandeur que celle pour la houle.

Ce constat nous a amené à aborder le problème différemment. Le choix s'est porté sur une résolution complète de l'écoulement sur toute la hauteur d'eau en prenant en compte la surface libre. Le principal avantage est de pouvoir s'affranchir des hypothèses portant sur les conditions aux limites pour les frontières fluides.

Par contre, l'inconvénient est le volume de calcul à effectuer. Celui-ci dépend directement de l'importance du maillage utilisé.

4.3 : LES OBJECTIFS.

Le Laboratoire de Mécanique des Fluides et Génie Civil du Havre (LMFGC) a abordé le problème de l'interaction houle-fond depuis quelques années.

Aussi avons nous essayé de reproduire dans la mesure du possible les différentes expériences réalisées.

Le canal du LMFGC permet de générer un écoulement de houle à l'aide du mouvement oscillatoire d'un piston. Il a été récemment aménagé afin de pouvoir reproduire un écoulement combiné de houle et de courant (figure F 4.3).

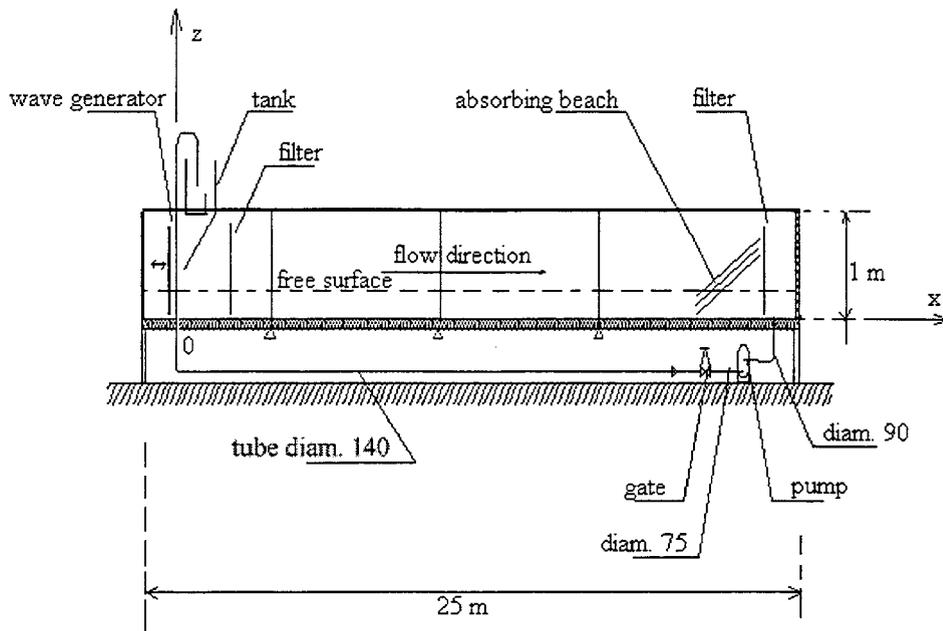


figure F 4.3 : représentation du canal à houle du Havre.

Le canal a les dimensions géométriques suivantes :

- une longueur d'écoulement de 25 m avec en bout de canal une plage d'amortissement,
- une largeur d'écoulement de 80 cm,
- et une hauteur d'eau utile pour les expériences décrites de 27 cm.

Une des hypothèses principales suppose que l'écoulement étudié est parfaitement 2D. Pour la comparaison des résultats, l'hypothèse d'un écoulement plan paraît satisfaisante si on effectue des simulations numériques d'écoulement de houle. En effet, dans ce cas précis, les épaisseurs de couche limite sont faibles, les comparaisons des résultats expérimentaux et numériques sont alors envisageables.

4.3.1 : DESCRIPTION DU DOMAINE D'ETUDE.

Le domaine de discrétisation spatiale est défini ci-dessous (figure F 4.4); la hauteur d'eau au repos est identique à celle utilisée pour le canal à houle du LMFGC (figure F 4.4), soit 0,27 m.

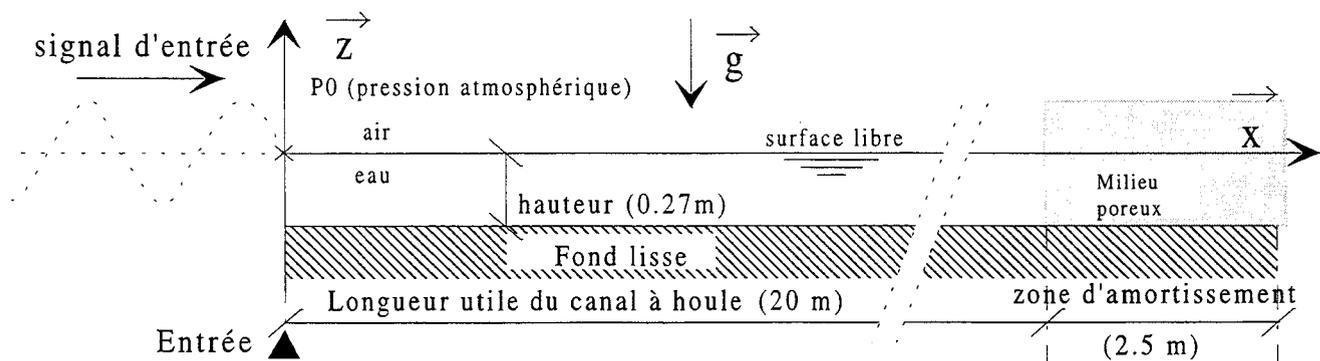


figure F 4.4 : représentation de la zone de discrétisation spatiale.

Le canal a une longueur utile de 20 m pour un écoulement de houle.

Les deux milieux fluides présents : air et eau, sont caractérisés par leurs grandeurs spécifiques, soit la viscosité moléculaire μ et la masse volumique ρ :

- viscosité cinématique :
 $\mu_{\text{eau}} = 0,001 \text{ Pl}$
 $\mu_{\text{air}} = 0,00001 \text{ Pl}$
- masse volumique :
 $\rho_{\text{eau}} = 1000,0 \text{ kg/m}^3$
 $\rho_{\text{air}} = 1,0 \text{ kg/m}^3$

Le milieu poreux utilisé pour simuler l'amortisseur en extrémité de canal permet d'avoir un taux de réflexion relativement faible de l'ordre de 5 % suivant le type de houle incidente ; les caractéristiques de ce milieu sont les suivantes :

- une porosité θ égale à 0,8,
- une perméabilité verticale variant exponentiellement du début du milieu poreux à la fin du canal d'une valeur de :

$$k_{zz} = 10^{-6} \text{ à } 10^{-12}$$

(en fin de canal, on empêche le déplacement vertical du fluide),

- et une perméabilité horizontale de :

$$k_{xx} = 10^{-6}$$

(en sortie, on laisse passer horizontalement l'écoulement fluide).

Un modèle de turbulence du type longueur de mélange couplé avec une fonction de coupure est utilisé.

4.3.2: CONDITIONS AUX LIMITES.

On rappelle les conditions aux limites appliquées aux frontières du domaine :

- au fond, paroi immobile,
- à la surface, égalité des contraintes de part et d'autre de la surface libre,
- à l'amont, vitesse et hauteur d'eau imposées ; aucun traitement particulier n'est effectué au niveau de la couche limite, le profil analytique de houle est utilisé sur toute la hauteur d'eau,
- à l'aval, condition d'amortissement (milieu poreux).

4.3.3 : CONDITIONS INITIALES.

A l'instant initial, le fluide est au repos sur tout le domaine discrétisé. La vitesse et la pression sont imposées comme nulles sur tout le domaine de calcul. A la première itération temporelle, la pression est entièrement corrigée ; on obtient directement une loi de pression hydrostatique.

4.4 : COMPORTEMENT DE LA HOULE LE LONG DU CANAL.

Les conditions à l'entrée du canal sont obtenues en utilisant un modèle de houle au premier ordre (voir annexe A4), les formulations analytiques pour la vitesse du fluide en entrée sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\pi H}{T} \frac{\operatorname{ch}\left(2\pi \frac{z+h}{\lambda}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \\ v = -\frac{\pi H}{T} \frac{\operatorname{sh}\left(2\pi \frac{z+h}{\lambda}\right)}{\operatorname{sh}\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)} \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \end{array} \right. \quad [\text{E 4.3}]$$

et pour la dénivellation :

$$\eta = \frac{H}{2} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad [\text{E 4.4}]$$

La longueur d'onde est calculée suivant la relation :

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right) \quad [\text{E 4.5}]$$

En entrée, un modèle au deuxième ordre a également été utilisé, les résultats obtenus sont similaires.

Ces relations sont des relations analytiques qui correspondent à un écoulement non visqueux avec une distance de propagation infinie. Il est certain que quelque soit la qualité de l'amortisseur utilisé à l'extrémité aval du canal, on aura de la réflexion et une couche limite va se développer sur le fond.

Il apparaît ainsi nécessaire avant toute comparaison avec des résultats analytiques (modèle de STOKES (1851) et de LAMB (1932)) et expérimentaux, de vérifier qu'à partir d'un certain temps l'écoulement est bien établi.

Cela impose de vérifier le comportement de la houle le long du canal et de voir à partir de quelle abscisse les caractéristiques : période, longueur d'onde et hauteur crête-creux, sont indépendantes de la position où on se trouve.

Il s'agit également de vérifier que pour une abscisse x donnée sur le canal, les caractéristiques de la houle n'évoluent plus dans le temps.

Pour ce faire, le signal imposé en entrée du canal a les caractéristiques suivantes :

- $T = 1,15$ s,
- Hauteur crête-creux $H = 3,8 \cdot 10^{-2}$ m ($H/h = 0,14$),
- la longueur d'onde est calculée à partir de la relation [E 4.5].

Les établissements spatial et temporel ne sont pas des phénomènes indépendants.

Aussi, quand on étudiera la stabilité spatiale, on se positionnera à une date t pour laquelle le phénomène apparaît visuellement établi, on moyennera alors les résultats sur trois périodes et quand on étudiera la stabilité temporelle, on se positionnera au delà de l'abscisse où l'écoulement aura été au préalable défini comme spatialement établi.

4.4.1 : COMPORTEMENT SPATIAL DE LA HOULE SIMULEE.

Nous avons opté pour les stations d'étude localisées aux abscisses x :

2, 4, 6, 8, 10 et 12 m.

Les résultats obtenus sont les suivants :

- Pour la dénivellation de la surface libre (voir figures F 4.5 à F 4.10) :

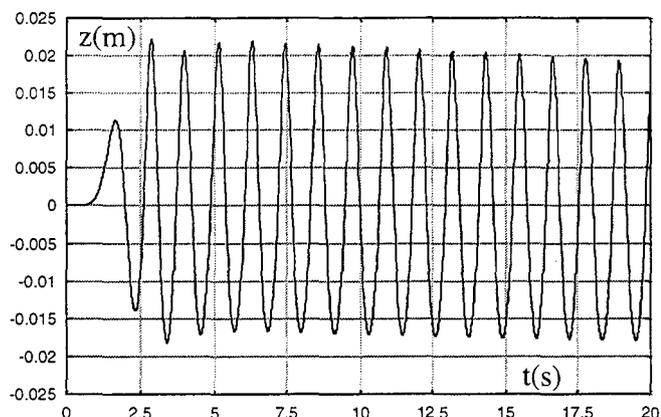


figure F 4.5 : station x = 2 m.

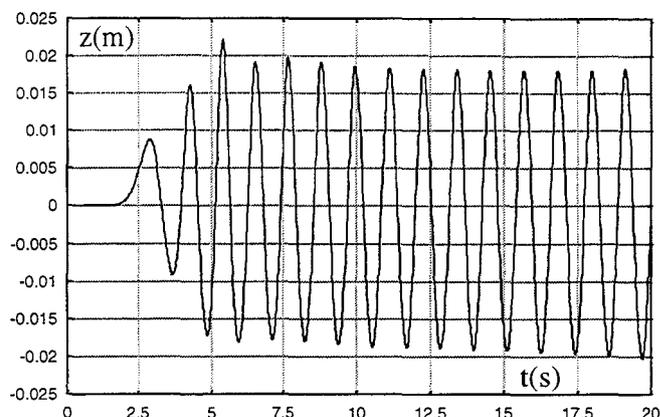


figure F 4.6 : station x = 4 m.

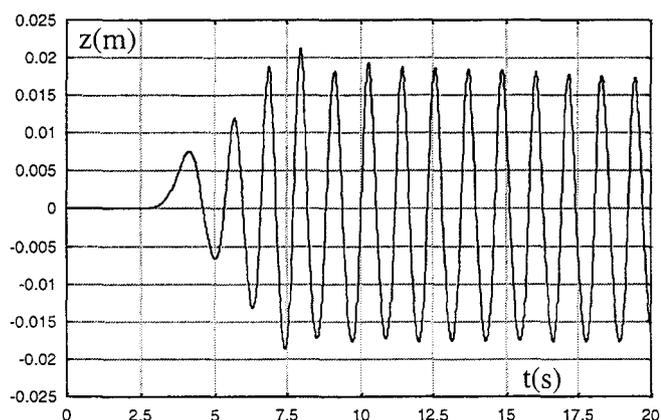


figure F 4.7 : station x = 6 m.

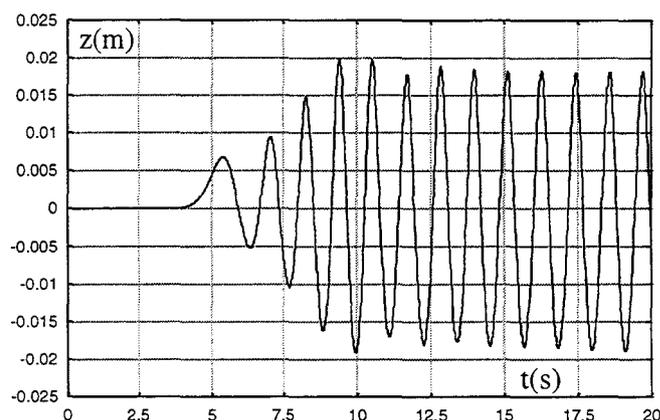


figure F 4.8 : station x = 8 m.

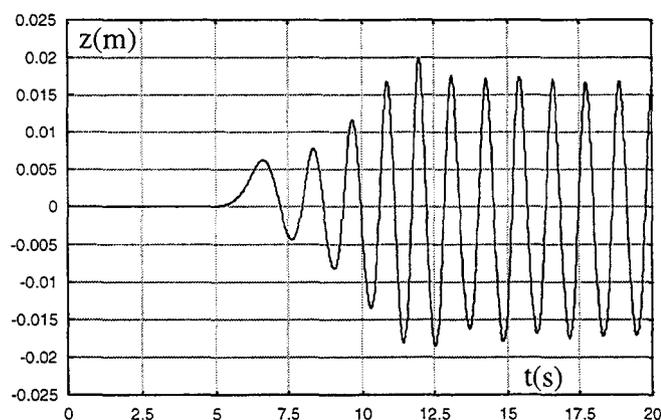


figure F 4.9 : station x = 10 m.

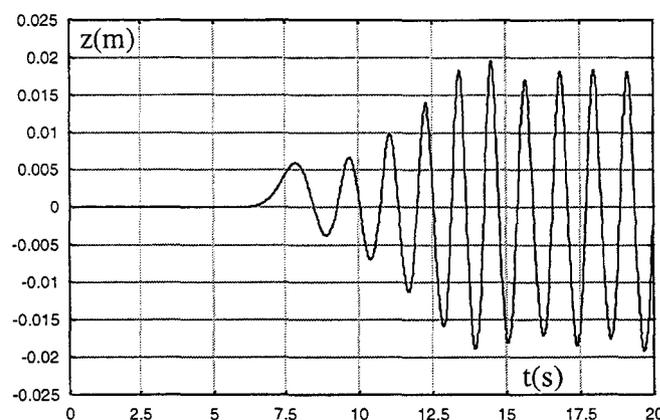


figure F 4.10 : station x = 12 m.

Après un temps d'écoulement suffisamment long pour lequel on peut estimer d'une part que la houle s'est propagée sur toute la zone d'écoulement et que d'autre part celle-ci est établie, on enregistre alors les informations suivantes : dénivellation, longueur d'onde, période et vitesse en chacune des stations :

- pour la hauteur crête-creux H (voir figure F 4.11) :

abscisse X (m)	2,0	4,0	6,0	8,0
$H_{\text{crête-creux}}$ (m)	0,0382955	0,0371165	0,0358434	0,365465E-01
Z_{max} (m)	0,0212134	0,0182116	0,0183500	0,0182541
Z_{min} (m)	-0,0170821	-0,0189050	-0,0174934	-0,0182924

abscisse (m)	10,0	12,0
$H_{\text{crête-creux}}$ (m)	0,036335	0,0363543
Z_{max} (m)	0,0181501	0,0182749
Z_{min} (m)	-0,018185E-01	-0,0180794

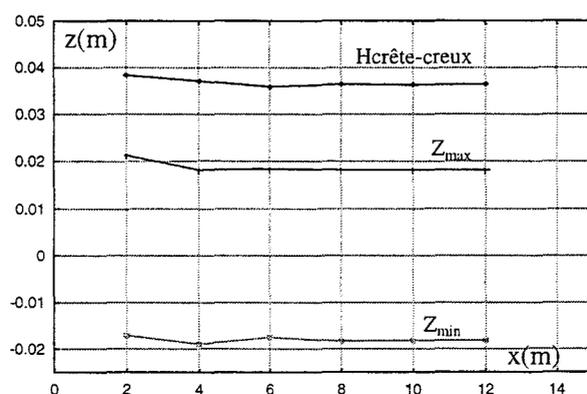


figure F 4.11 : évolution de la hauteur crête-creux et des cotes du creux et de la crête de la houle sur plusieurs stations le long du canal à houle.

- pour la longueur d'onde λ (voir figure F 4.12) :

abscisse (m)	2,0	4,0	6,0	8,0
λ (m)	1,615	1,605	1,596	1,595

abscisse (m)	10,0	12,0
λ (m)	1,595	1,595

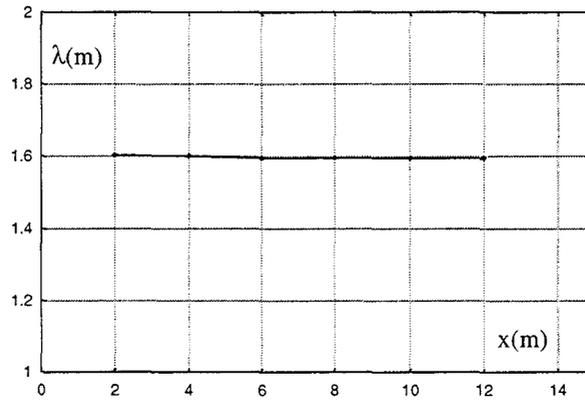


Figure F 4.12 : évolution de la longueur d'onde le long du canal.

- pour la période T (voir figure F 4.13) :

abscisse (m)	2,0	4,0	6,0	8,0
T (s)	1,15522881	1,14686325	1,1508266	1,14688716

abscisse (m)	10,0	12,0
T (s)	1,15204863	1,15227694

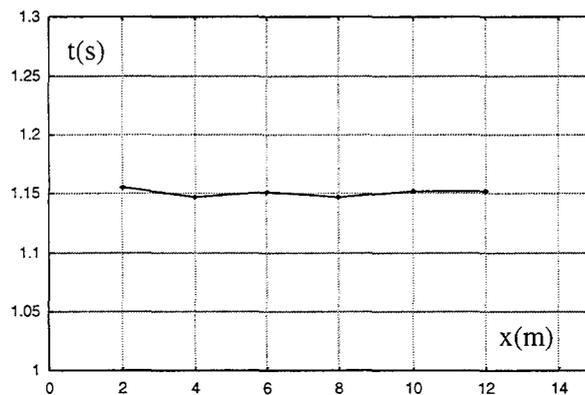


Figure F 4.13 : évolution de la période de l'onde le long du canal.

On remarquera que pour toutes les stations, la période du signal est sensiblement conservée.

Sur une première zone allant de l'entrée du canal à une abscisse x égale à 4 m, les caractéristiques de l'écoulement évoluent fortement. Il s'agit d'une phase de réorganisation de l'écoulement.

Plus loin le long du canal, ces caractéristiques n'évoluent plus. On peut estimer qu'à partir de l'abscisse 8 m, on a une "houle" établie.

4.4.2 : COMPORTEMENT TEMPOREL DE LA HOULE SIMULEE.

Pour pouvoir reproduire le comportement de l'écoulement au niveau de la couche limite, on est obligé d'utiliser des maillages ayant des dimensions importantes. Les temps de calcul (temps CPU) sont

importants compte tenu de la taille du maillage utilisé et du type de ordinateur utilisé (DIGITAL DEC 3000 ayant 64 Méga de RAM).

En conséquence, les temps de simulation pour un écoulement fluide sont restreints. Ainsi pour les différentes simulations de houle réalisées par la suite, le temps d'écoulement ne dépasse pas les 20 secondes.

Cet aspect nous impose de vérifier que localement l'écoulement est temporellement établi à partir d'une date d'acquisition donnée et pour une abscisse donnée.

Il est impératif de s'assurer de la reproductibilité des caractéristiques de l'écoulement sur plusieurs périodes successives.

Conformément à la conclusion du paragraphe précédent, la station choisie est à l'abscisse x égale à 8 m. Une première analyse visuelle du signal (figure F 4.14) montre qu'à partir de la date t égale à 12 s, l'écoulement est temporellement établi.

Ceci va être vérifié avec l'étude :

- de l'évolution de la surface libre,
- du profil de vitesse sur toute la hauteur d'eau,
- et du profil de vitesse dans la couche limite et de la contrainte de frottement.

La figure F 4.15 montre le caractère de reproductibilité du signal à partir de la date d'acquisition t égale 12 secondes.

L'erreur relative maximale constatée sur les deux grandeurs caractérisant la surface libre : cotes du creux Z_{\min} et de la crête Z_{\max} , est de 1,40 % (voir figures F 4.15 et F 4.16 et tableau T 4.1).

Les valeurs absolues de ces cotes sont sensiblement identiques, le signal est périodique.

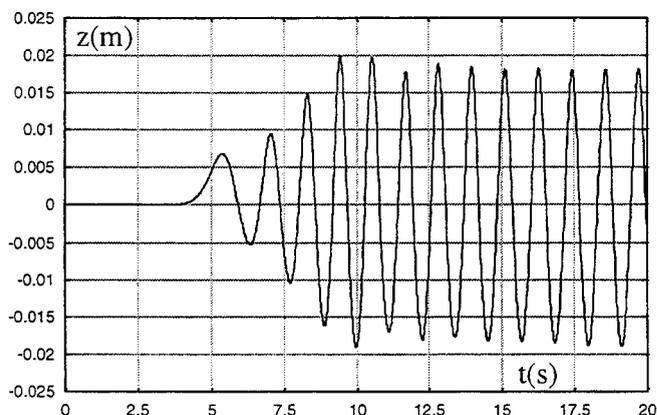


figure F 4.14 : acquisition du signal à la station $x = 8$ m sur une période de 20 secondes.

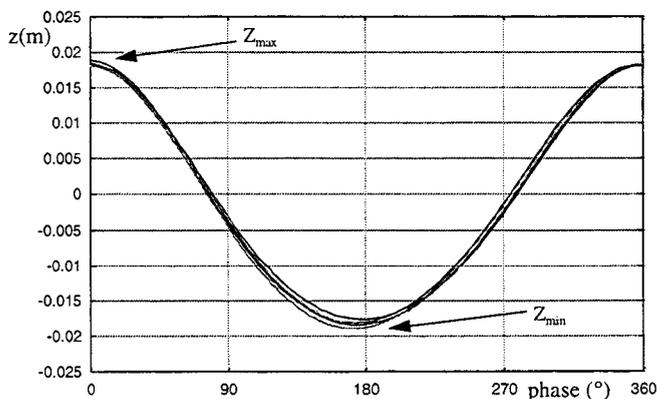


figure F 4.15 : évolution de la surface libre sur six périodes successives à partir de la date d'acquisition $t = 12$ s.

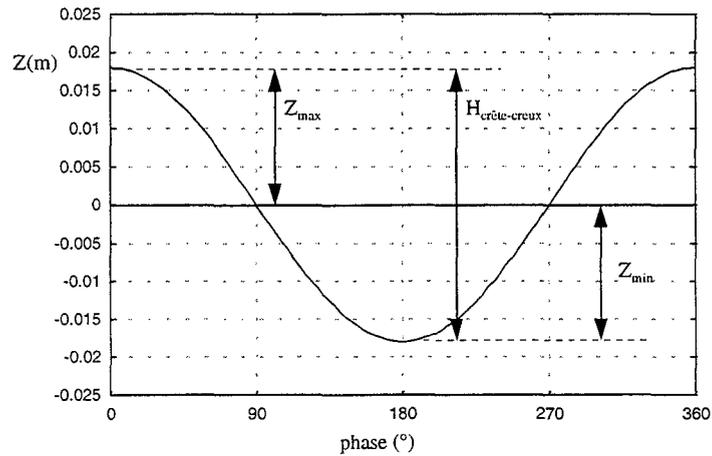


figure F 4.16 : localisation des variables utilisées pour définir les cotes de la surface libre.

\tilde{Z}_{\max}	0,01836704	\tilde{Z}_{\min}	-0,01827546	$\tilde{H}_{\text{Crête - creux}}$	0,0366425
sup. de Z_{\max}	+ 1,40 %	sup. de Z_{\min}	1,33 %		
min. de Z_{\max}	- 1,22 %	min. de Z_{\min}	- 1,12 %		

tableau T 4.1 : comparaisons des hauteurs de crête et de creux de la houle.

Outre cette description géométrique, il est intéressant de réaliser une étude fréquentielle du signal enregistré.

Le pas de temps Δt étant géré de manière automatique, il est nécessaire dans une première étape de reconstituer le signal pour une fréquence d'acquisition constante.

Le pas de temps numérique Δt varie dans la fourchette de 0,017 à 0,024 secondes. Aussi, le signal est reconstitué entre les deux dates : 12 secondes et 20 secondes à l'aide d'une période d'acquisition redéfinie et égale à 0,024 seconde (figure F 4.17).

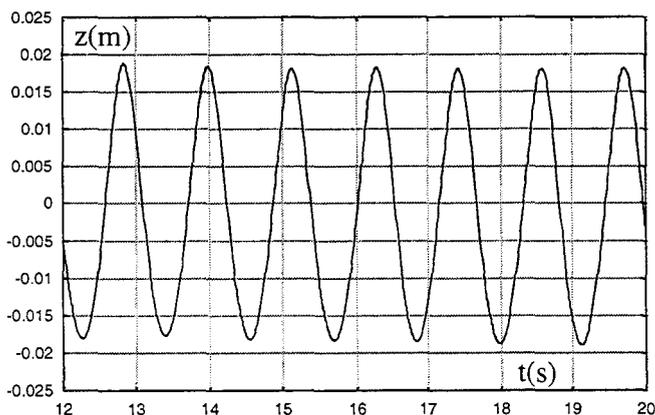


figure F 4.17 : superposition du signal numérique à l'abscisse $x = 8$ m à partir de la date $t = 12$ s avec le signal reconstitué et ayant une période d'échantillonnage de 0,024 s.

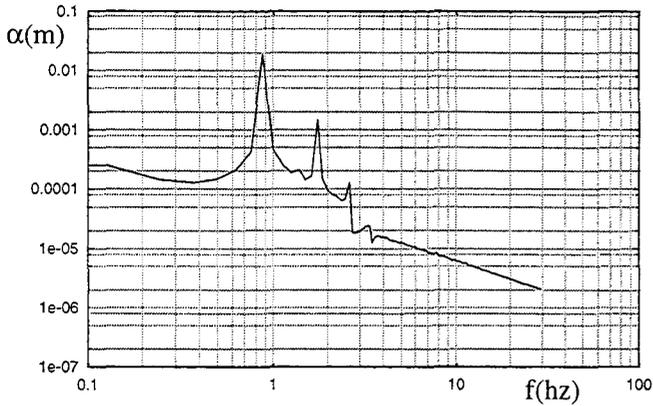


figure F 4.18 : diagramme fréquence-amplitude pour le signal étudié (0 à 20 Hz).

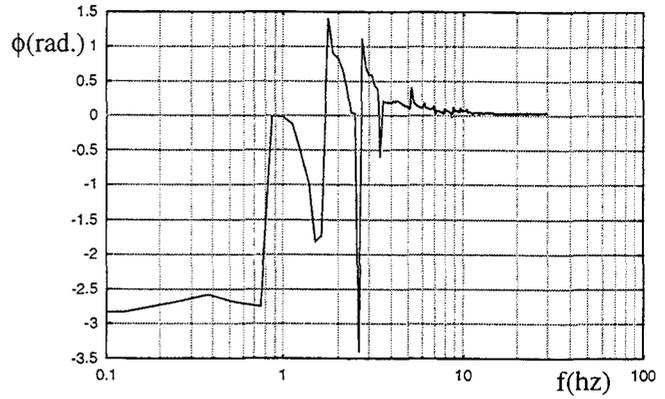


figure F 4.19 : diagramme fréquence-phase pour le signal étudié (0 à 20 Hz).

La transformée de Fourier rapide donne les résultats numériques suivants (figures F 4.18 et F 4.19 et tableau T 4.2) :

fréquence f_i (hz)	période T_i (s)	amplitude α_i (m)	phase $\Delta\phi_i$ (radian)
0	/	0,0014721890	3,141593
0,125	8,000	0,0002536368	-2,832904
0,250	4,000	0,0001464276	-2,673646
0,375	2,667	0,0001261236	-2,5863863
0,500	2,000	0,0001517795	-2,666482
0,625	1,600	0,0002088335	-2,728789
0,750	1,333	0,0004278903	-2,750339
0,875	1,143	0,0181238480	0
1,000	1,000	0,0004619074	-0,015935
1,125	0,889	0,0002579593	-0,126095
1,250	0,800	0,0001882755	-0,546691
1,375	0,727	0,0002105972	-0,9985101
1,500	0,667	0,0001461994	-1,8205554
1,625	0,615	0,0001665512	-1,7354943
1,750	0,571	0,0014665788	1,397719
1,875	0,533	0,0001509413	0,899582
2,000	0,500	0,0000947806	0,829762
2,125	0,471	0,0000807475	0,664217
2,250	0,444	0,0000762289	0,40604
2,375	0,421	0,0000639319	0,041551

fréquence f_i (hz)	période T_i (s)	amplitude α_i (m)	phase $\Delta\phi_i$ (radian)
2,500	0,400	0,0000658386	0,036126
2,625	0,381	0,0001299037	-3,397803
2,750	0,364	0,0000185897	1,102394
2,875	0,348	0,0000183777	0,687686
3,000	0,333	0,0000195045	0,589971
3,125	0,320	0,0000215609	0,587762
3,250	0,308	0,0000241648	0,432665
3,375	0,296	0,0000241959	0,376612
3,500	0,286	0,0000127287	-0,594722
3,625	0,276	0,0000152758	0,213606
3,750	0,267	0,0000159140	0,192813
3,875	0,258	0,0000155954	0,194118
4,000	0,250	0,0000150670	0,185237
4,125	0,242	0,0000150124	0,211177
4,250	0,235	0,0000152327	0,197408
4,375	0,229	0,0000140803	0,227262
4,500	0,222	0,0000134741	0,185101
4,625	0,216	0,0000133319	0,163954
4,750	0,211	0,0000129191	0,142887
4,875	0,205	0,0000126928	0,135653

tableau T 4.2 : résultats de la transformée de fourrier effectuée sur le signal représenté figure F 4.17.

On retrouve la fréquence fondamentale du signal imposée en entrée du canal, soit pour $T=1,15$ s :

$$f_{\text{entré e}} = \frac{1}{T_{\text{Houle}}} \approx 0,86956 \text{ hz} \quad [\text{E 4.6}]$$

Il y a apparition de plusieurs harmoniques, à savoir le premier, le deuxième et le troisième (figure F 4.18).

Le signal peut être recomposé à partir des fréquences précédemment calculées (voir tableaux T 4.2 et T 4.3 et figures F 4.20 à F 4.22) :

$$\eta(x, t)|_{x=8m} = \sum_{i=0}^5 \alpha_i \cos(2\pi f_i(t - t_0) + \phi_i) \quad [E 4.7]$$

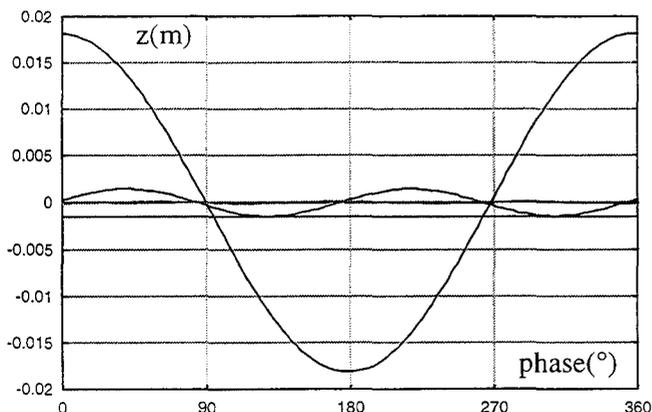


figure F 4.20 : représentation du signal décomposé à partir de sa fréquence fondamentale et de ces différents harmoniques sur une période de houle.

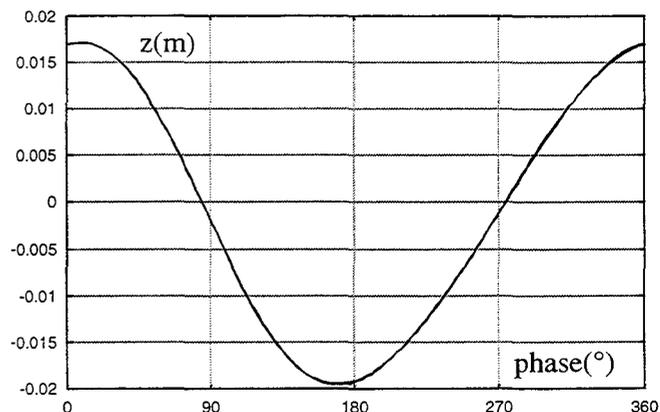


figure F 4.21 : superposition du signal reconstitué à partir d'une série de Fourier comprenant soit la fréquence fondamentale et le premier harmonique, soit toute la plage de fréquence balayée (FFT inverse) sur une période de houle.

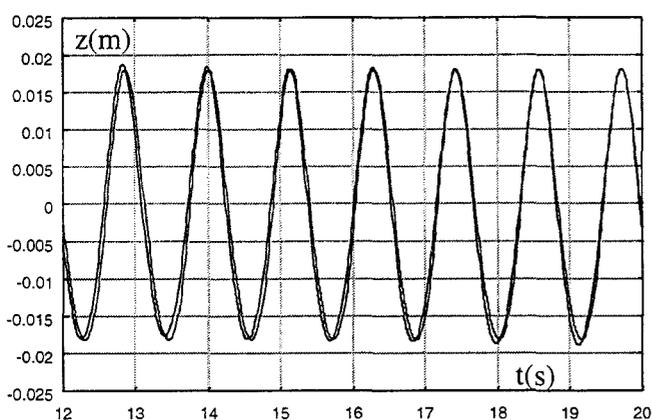


figure F 4.22 : superposition du signal originel avec le même signal reconstitué à partir d'une série de Fourier comprenant la fréquence fondamentale et le premier harmonique pour le temps d'écoulement compris entre 12 et 20 secondes.

fréquence f_i (hz)	amplitude (m)	rapport d'amplitude (%)
0,875	0,0181238480	100
1,750	0,0014665788	8,08
2,625	0,0001299037	0,71
3,375	0,0000241959	0,13
4,250	0,0000152327	0,084

tableau T 4.3 : poids des harmoniques vis à vis de l'intensité de la fréquence fondamentale.

Comme l'indiquent les deux figures F 4.20 et F 4.21 et le tableau T 4.3, le premier harmonique n'est pas négligeable : 8,08 % de l'amplitude de la fréquence fondamentale ; les harmoniques suivants représentent moins de 1 % de l'amplitude de la fréquence fondamentale.

Le bruit est faible sur la gamme de fréquence balayée, de 0 à 20 hz.

Concernant le profil de la vitesse, les résultats sont indiqués sur les figures F 4.23 à F 4.26.

L'allure générale pour les phases 0° et 180° est reproduite fidèlement sur toute la hauteur d'eau, période après période. Les différences constatées sont faibles. Elles viennent essentiellement de la difficulté à localiser dans le temps la position exacte des phases 0° et 180° . Une erreur absolue de $\pm 3^\circ$ peut être faite sur la localisation de celles-ci (voir figures F 4.23 et F 4.24).

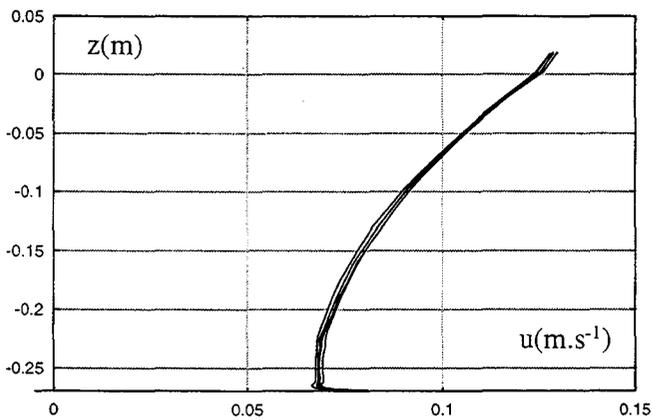


figure F 4.23 : évolution de la vitesse horizontale sur toute la hauteur d'eau pour la phase 0° et sur 6 périodes successives.

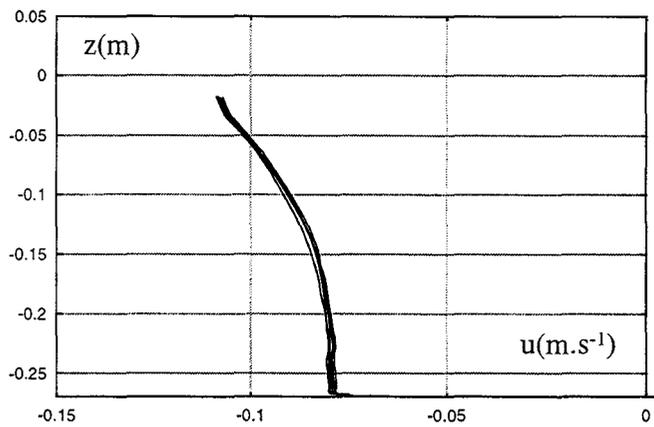


figure F 4.24 : évolution de la vitesse horizontale sur toute la hauteur d'eau pour la phase 180° et sur 6 périodes successives.

Au niveau de la couche limite, on constate une parfaite superposition des profils de vitesse sur plusieurs périodes. Le profil, la phase et l'intensité du signal sont parfaitement reproduits et calés (voir figures F 4.25 et F 4.26).

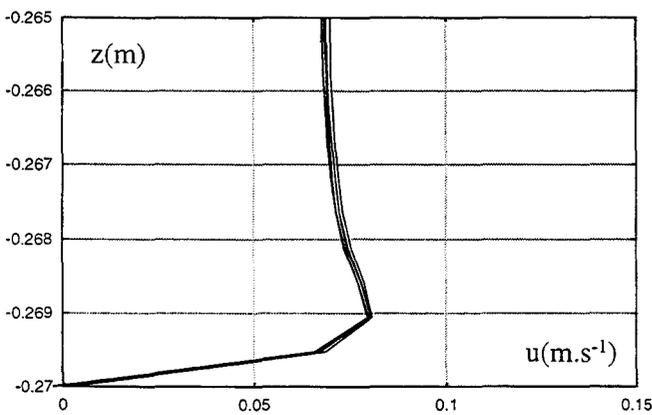


figure F 4.25 : évolution de la vitesse horizontale pour la phase à la crête et sur 6 périodes successives sur une hauteur de 5 mm au-dessus du fond.

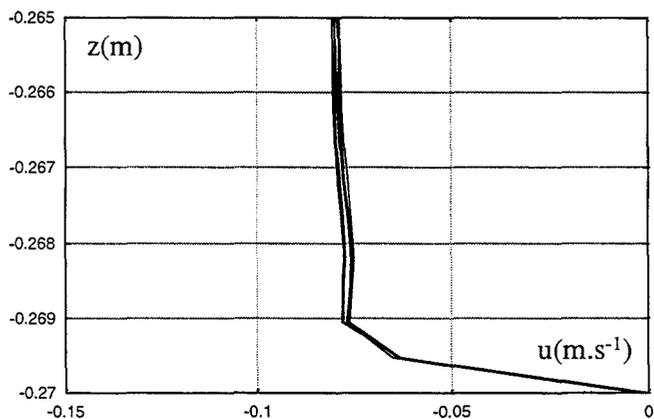


figure F 4.26 : évolution de la vitesse horizontale pour la phase 180° et sur 6 périodes successives sur une hauteur de 5 mm au-dessus du fond.

La contrainte pariétale est calculée (voir F 4.27) ; son comportement est sinusoïdal ; on note cependant une légère dissymétrie au niveau des valeurs de contrainte de frottement. L'erreur relative vis à vis des grandeurs $\tilde{\tau}_{\max}$ et $\tilde{\tau}_{\min}$ est faible, elle est de l'ordre de 1,5 % (voir tableau T 4.4).

On remarque un déphasage du signal (sur la hauteur de la couche limite) vis à vis de l'écoulement à l'infini. Ce déphasage est positif aussi bien par rapport à la phase caractérisant la crête (0°) que par rapport à celle pour le creux (180°).

Les mêmes remarques peuvent être évidemment faites pour la vitesse de frottement (figure F 4.28).

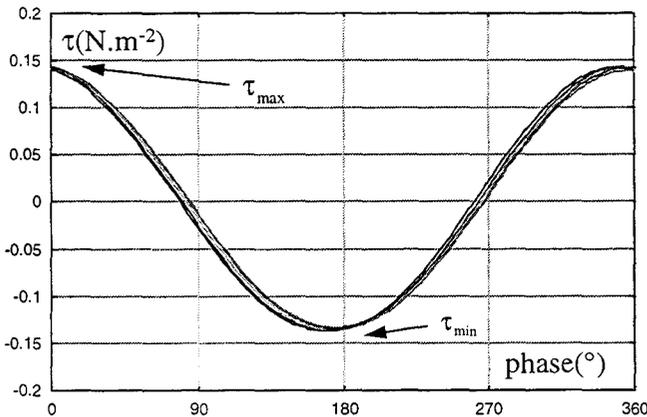


figure F 4.27 : évolution de la contrainte de frottement sur six périodes successives.

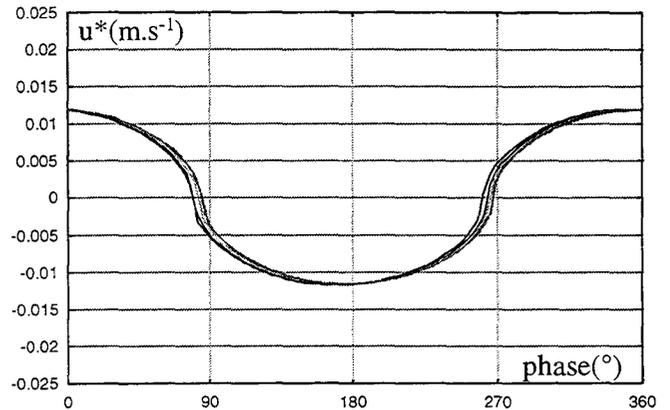


figure F 4.28 : évolution de la vitesse de frottement sur six périodes successives.

valeur moyenne $\tilde{\tau}_{\max}$	0,14222676	valeur moyenne $\tilde{\tau}_{\min}$	-0,135244
sup. de τ_{\max}	+ 1,51 %	sup. de τ_{\min}	+ 1,64 %
min. de τ_{\max}	-1,40 %	min. de τ_{\min}	- 1,28 %

tableau T 4.4 : comparaisons des hauteurs de crête et de creux pour le signal étudié sur six périodes successives.

En résumé, sur un échantillon de six périodes successives, les comparaisons période après période des différents paramètres : dénivellation, profil de vitesse et contraintes de frottement, montrent une régularité du signal sur toute la hauteur d'eau.

Aussi, le comportement et la reproductibilité obtenue apparaissent comme satisfaisants et nous permettent d'acquérir les différentes grandeurs à partir d'une date pour laquelle on peut juger l'écoulement établi.

4.5 : INFLUENCE DU MAILLAGE.

Comme il a été précisé précédemment, la taille des mailles utilisées pour caractériser la cinématique au niveau de la couche limite est fine. Malgré l'expérience acquise (chapitre 3.2.2), il nous a paru important de réétudier l'influence de pas Dz sur les caractéristiques de la couche limite de houle. Rappelons que, quelque soit les valeurs de Dx et Dz, le rapport de forme de chaque maille Dx/Dz doit être au maximum de l'ordre de 20.

Nous avons effectué un test portant sur la discrétisation spatiale du maillage au niveau de la hauteur δ afin de mettre en évidence la sensibilité des résultats.

Pour les calculs effectués, nous indiquons la taille verticale Δz des mailles utilisées au niveau de la couche limite, le calculateur utilisé et le temps de calcul CPU (tableau T 4.5).

test	ΔZ (mm)	nombre de points dans la couche limite	Nombre de mailles	calculateur	temps CPU
1	0,475	8	39 000	DIGITAL DEC 3000	18 h
2	0,27	14,07	72 000	DIGITAL DEC 3000	45 h
2 bis	0,27	14,07	72 000	CRAY C98	8,5 h

tableau T 4.5 : comparaisons des temps de calcul en fonction de la taille du maillage et du calculateur utilisé.

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures F 4.29 à F 4.32 ; la définition du maillage au repos est inchangée sur la hauteur d'eau englobant l'écoulement dit à l'infini, par contre la taille des mailles verticales varie sur la hauteur de la couche limite.

On peut ainsi noter que sur toute la hauteur d'eau, les différents profils, qu'il s'agisse de la phase 0° ou 180° , sont identiques (voir figures F 4.29 et F 4.30).

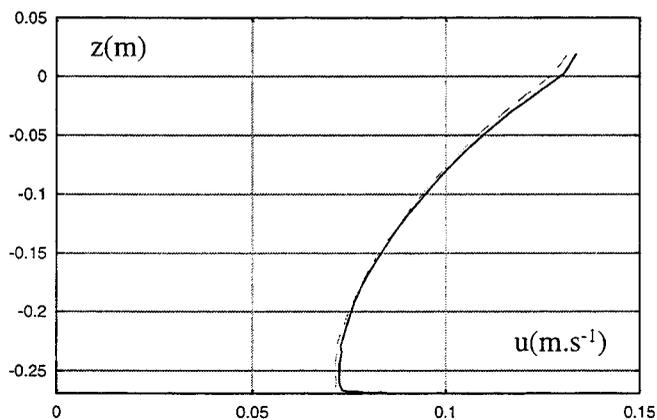


figure F 4.29 : évolution de la composante horizontale de la vitesse pour la phase 0° sur toute la hauteur d'eau et pour différents niveaux de discrétisation spatiale verticale sur la hauteur de la couche limite.

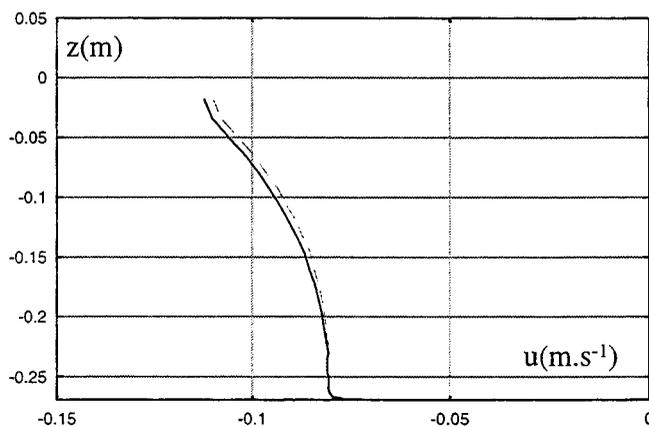


figure F 4.30 : évolution de la composante horizontale de la vitesse pour la phase 180° sur toute la hauteur d'eau et pour différents niveaux de discrétisation spatiale verticale sur la hauteur de la couche limite.

Au niveau de la couche limite, les ordres de grandeur sont identiques ; le profil ainsi que le comportement en phase sont analogues (voir figures F 4.31 et F 4.32).

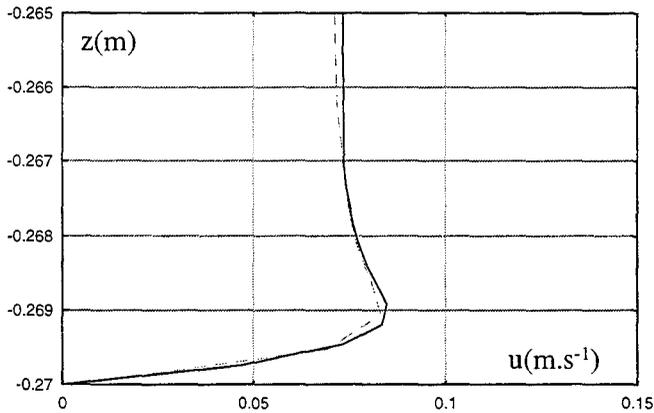


figure F 4.31 : évolution de la composante horizontale de la vitesse pour la phase 0° sur la hauteur de couche limite et pour différents niveaux de discrétisation spatiale verticale sur la hauteur de la couche limite.

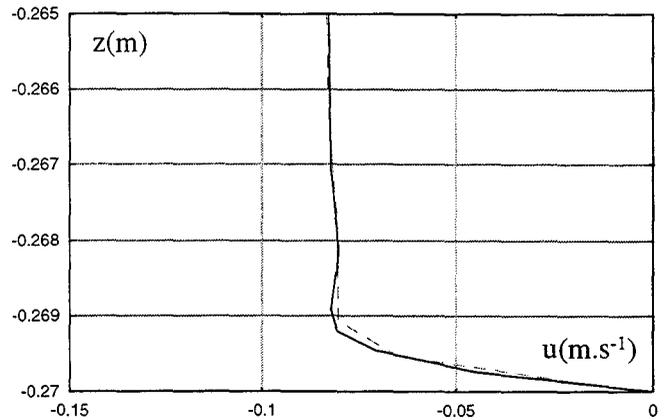


figure F 4.32 : évolution de la composante horizontale de la vitesse pour la phase 180° sur la hauteur de couche limite et pour différents niveaux de discrétisation spatiale verticale sur la hauteur de la couche limite.

Par contre avec l'affinement du maillage, la valeur de la contrainte de frottement et/ou de la vitesse de frottement augmentent, ceci est principalement dû à l'amélioration de la définition du profil de vitesse.

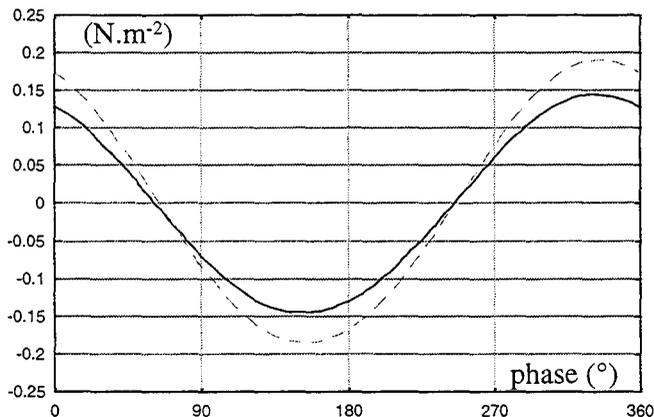


figure F 4.33 : comportement de la contrainte de frottement pour différents niveaux de discrétisation verticale, test 1 (—) et 2 (---).

test	τ_{\max}	erreur relative (%)	τ_{\min}	erreur relative (%)	déphasage $\phi(^{\circ})$
1	0,144295	0	-0,142258	0	27,5
2	0,189817	31,5	-0,184482	29,7	27,3

tableau T 4.6 : influence de la discrétisation verticale du maillage sur la hauteur de la couche limite.

4.6 : COMPARAISON.

4.6.1 : COMPARAISON AVEC UN MODELE ANALYTIQUE.

Pour un écoulement laminaire oscillant, nous disposons d'une solution analytique ; elle a été fournie par STOKES (1851) et par LAMB (1932).

Ces auteurs ont supposé que :

- l'écoulement est laminaire,
- les termes de convection des équations de conservation de quantité de mouvement sont négligeables,
- les mouvements verticaux sont inexistantes :

$$v \equiv 0 \quad [E 4.8]$$

- le gradient de pression horizontal est :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = F(x, t) \quad [E 4.9]$$

- et le gradient vertical est constant sur tout le domaine spatial :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = C_{st} \quad [E 4.10]$$

Compte tenu de ces hypothèses, le système d'équations résolu est le suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mathfrak{K} \quad [E 4.11]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad [E 4.12]$$

où : χ est une force oscillatoire gouvernant l'écoulement, ce terme correspond à un gradient de pression oscillant :

$$\chi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad [E 4.13]$$

A proximité de la paroi inférieure, $(z+h) \rightarrow 0$, les termes visqueux sont supposés prépondérants, tandis qu'à l'infini, $(z+h) \rightarrow \infty$, ceux-ci sont négligés.

Dans ce dernier cas, l'équation [E 4.11] peut se réduire alors à l'expression :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{K} \quad [E 4.14]$$

Aussi pour un gradient de pression \mathfrak{K} gouvernée par une loi sinusoïdale :

$$\mathfrak{K} = f \cos(\omega t - kx) \quad [E 4.15]$$

avec k : le nombre d'onde ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

et ω : la pulsation ($\omega = \frac{2\pi}{T}$)

la vitesse à l'infini se déduit directement :

$$U_{\infty}(x, t) = \frac{f}{\omega} \sin(\omega t - kx) \quad [E 4.16]$$

tout comme la pression :

$$P(x, t) = \frac{\rho f}{k} \sin(\omega t - kx) + P_{cst} \quad [E 4.17]$$

L'intensité de la vitesse à l'infini est donnée par la relation :

$$U_{\infty} = \frac{f}{\omega} \quad [E 4.18]$$

et pour la variation de pression, ΔP_{∞} :

$$\Delta P_{\infty} = \frac{\rho f}{k} \quad [E 4.19]$$

Le problème étudié suivant les hypothèses citées ci-dessus, a la solution suivante :

$$u = U_{\infty} \left(\sin(\omega t) - e^{-\beta(z+h)} \sin(\omega t - \beta(z+h)) \right) \quad [E 4.20]$$

avec β défini par :

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{vT}} \quad [E 4.21]$$

et δ une épaisseur de l'ordre de la hauteur de la couche limite :

$$\delta = \frac{2\pi}{\beta} \quad [E 4.22]$$

On notera que pour la grandeur : $\beta(z+h)$ tendant à l'infini, on retrouve l'expression [E 4.16].

Avant de pouvoir comparer les résultats numériques et analytiques, il est nécessaire d'évaluer le poids de certains termes dans l'équation de conservation de quantité de mouvement complète afin de vérifier que pour notre cas de houle simulée, on est bien dans le cadre des hypothèses de STOKES et de LAMB :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad [E 4.23]$$

Comme précisées précédemment, les grandeurs utilisées sont :

$$U \approx 0,08 \text{ m.s}^{-1}$$

$$V = 0 \text{ m.s}^{-1}$$

$$T = 1,15 \text{ s}$$

$$\lambda \approx 1,6 \text{ m}$$

$$\delta \approx 3,8 \text{ mm}$$

On obtient l'évaluation du poids de chacun des termes de l'équation [E 4.23] :

termes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad + v \frac{\partial u}{\partial z} \quad = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\begin{array}{cccccc} \text{poids :} & & & & & \\ \frac{U}{T} & \frac{U^2}{\lambda} & 0 & \frac{\nu U}{\delta^2} & \frac{\nu U}{\lambda^2} & \chi \end{array}$$

soit :

$$\frac{\lambda}{UT} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{Re_\delta} \frac{\lambda}{\delta} \quad \frac{1}{Re_\delta} \frac{\delta}{\lambda} \quad \frac{\lambda}{U^2} \chi$$

Etant donné que :

$$\frac{1}{Re_\delta} \frac{\delta}{\lambda} \ll \frac{1}{Re_\delta} \frac{\lambda}{\delta} \quad [E 4.24]$$

le terme $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est négligeable devant le terme $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Pour que les termes de convection puissent être négligés, il faut de plus que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$\frac{\lambda}{UT} \gg 1 \quad [E 4.25]$$

$$\text{et : } \frac{1}{Re_\delta} \frac{\lambda}{\delta} \gg 1 \quad [E 4.26]$$

Ceci correspond aux deux inégalités :

$$U \ll \frac{\lambda}{T} \approx 1,4 \quad [E 4.27]$$

$$U \ll \frac{\nu \lambda}{\delta^2} \approx 0,11 \quad [E 4.28]$$

Ces conditions sont vérifiées, la comparaison de nos résultats numériques avec la solution analytique de STOKES et de LAMB est donc envisageable.

Par ailleurs l'examen de la viscosité effective (viscosité laminaire + viscosité turbulente) dans la couche limite montre que la viscosité reste bien égale à la viscosité laminaire. Ce n'est qu'au dessus de la couche limite que la viscosité effective augmente et que l'écoulement devient turbulent.

La houle simulée est complexe, aussi la comparaison avec la solution analytique de STOKES et de LAMB sera effectuée sur la composante principale correspondant à la fréquence fondamentale. Les profils horizontaux de la vitesse sont adimensionnés par l'intensité de la composante principale de la vitesse horizontale à l'infini :

$$U_\infty = 0,07662 \text{ m.s}^{-1}$$

L'amplitude et le déphasage correspondant à la fréquence principale sont calculés sur la hauteur de la couche limite.

Pour la solution analytique de STOKES et de LAMB, ils sont donnés par :

- pour l'amplitude $U(z)$:

$$U(z) = U_{\infty} \sqrt{\left[1 - e^{-\beta(z+h)} \cos(\beta(z+h))\right]^2 + \left[e^{-\beta(z+h)} \sin(\beta(z+h))\right]^2} \quad [\text{E 4.29}]$$

- pour le déphasage :

$$\phi(z) = A \tan \left[\frac{e^{-\beta(z+h)} \sin(\beta(z+h))}{1 - e^{-\beta(z+h)} \cos(\beta(z+h))} \right] \quad [\text{E 4.30}]$$

La comparaison fait apparaître les remarques suivantes :

- On constate une très bonne adéquation des profils d'amplitude de la composante horizontale de la vitesse ; les résultats numériques indiquent que le ventre du profil de vitesse est légèrement plus bas que celui indiqué par la relation analytique (voir figure F 4.34) ; la hauteur de la couche limite estimée par la relation [E 4.22] constitue un ordre de grandeur, elle peut apparaître comme légèrement surestimée. En fait la hauteur de la couche limite obtenue numériquement est de 3,4 mm alors que celle de la couche limite analytique a été évaluée à 3,8 mm.

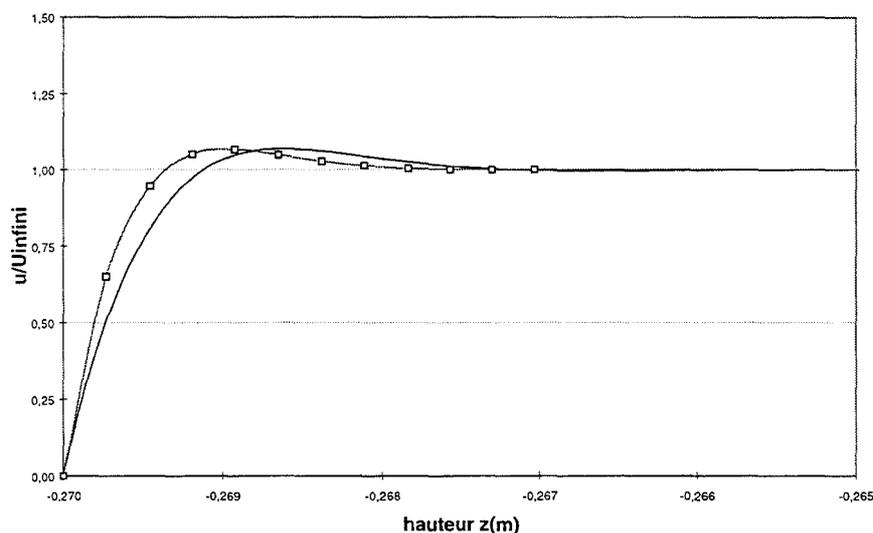


figure F 4.34 : comparaison de l'amplitude de la fréquence fondamentale du signal obtenue à partir des résultats numériques et du modèle analytique sur la hauteur de la couche limite ; résultats numériques (□) et analytiques (—).

- Le déphasage est représenté sur la figure F 4.35. Une remarque identique à celle effectuée précédemment peut être de nouveau faite, elle concerne l'estimation de la hauteur de la couche limite obtenue analytiquement. Compte tenu de cela, l'accord entre les résultats analytiques et numériques est tout à fait satisfaisant.

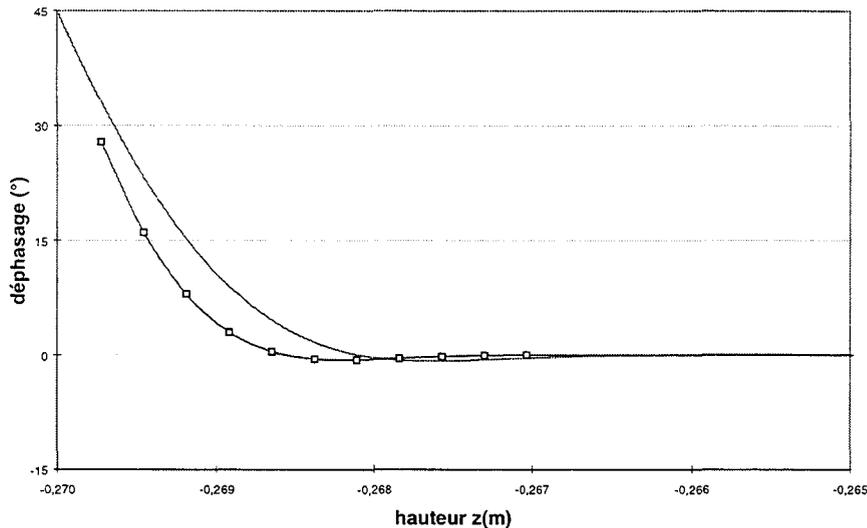


figure F 4.35 : comparaison du déphasage du signal obtenue à partir des résultats numériques et du modèle analytique sur la hauteur de la couche limite ; résultats numériques (□) et analytiques (—).

4.6.2 : COMPARAISON AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX.

Les paramètres de houle utilisés en entrée de canal pour la simulation numérique reproduisent dans la mesure du possible un écoulement étudié au Laboratoire de Mécanique des Fluides et Génie Civil du Havre.

La houle y est engendrée en entrée par un piston mu d'un mouvement oscillatoire horizontal, l'écoulement traverse un premier milieu poreux où la perte de charge est relativement importante. Pour éviter la réflexion de la houle à l'extrémité aval, le canal dispose d'une plage d'amortissement ; celle-ci est constituée d'un plan oblique ayant un angle de 12° par rapport au plan du fond ; le taux de réflexion est de l'ordre de 5% pour les houles étudiées.

Les mesures de vitesse sont effectuées à l'aide d'un LASER à deux composantes du type LDV (Laser Doppler Velocimeter), voir MERZKIRCH (1987).

Lorsque les mesures sont effectuées, la houle est supposée parfaitement établie. Les résultats sont enregistrés sur une durée d'une dizaine de période, pour chaque phase et chaque hauteur ; les composantes horizontale et verticale de la vitesse sont ensuite traitées et moyennées.

Les résultats sont obtenus pour un écoulement établi à une abscisse $x=8$ m du batteur (figures F 4.36 et F 4.37).

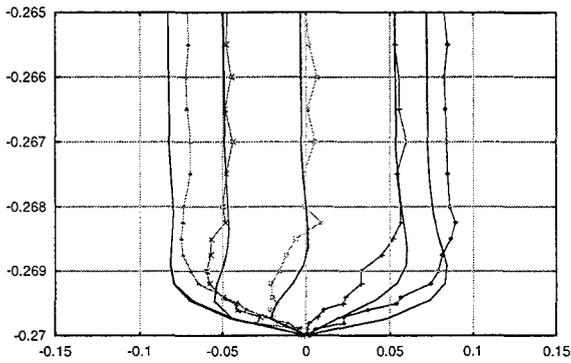


Figure F 4.36 : comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour les phases de décélération.

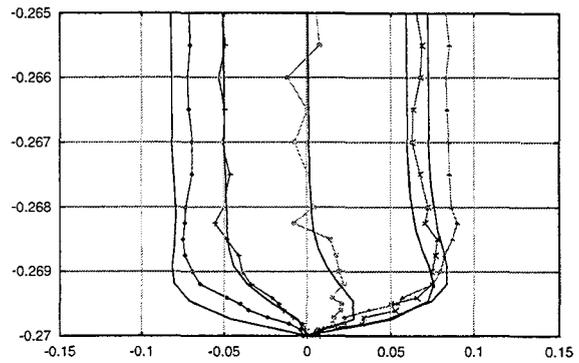


Figure F 4.37 : comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour les phases d'accélération.

Les allures des résultats expérimentaux et numériques sont semblables.

Ces résultats présentent chacun une dissymétrie à la crête et au creux des vagues, dissymétrie qui n'est du reste pas dans le même sens.

Plus étonnant, la contrainte à la paroi déterminée expérimentalement est plus faible que la contrainte déterminée numériquement et cela pour toutes les phases (figure F 4.38).

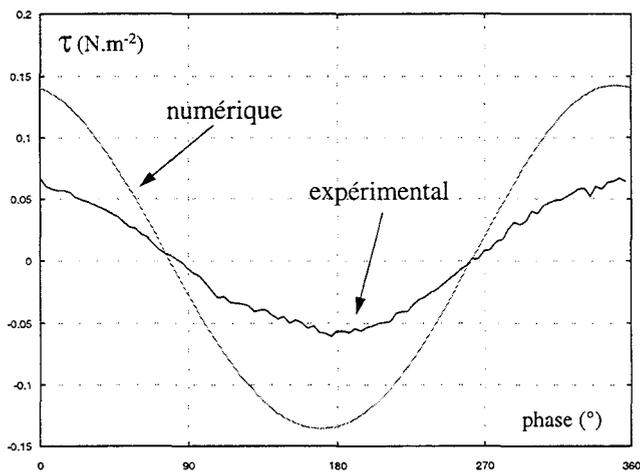


figure F 4.38 : évolution de la contrainte de frottement.

En fait la comparaison des deux signaux globaux n'est pas très significative, les proportions des harmoniques présents dans chacun des signaux sont dans les deux cas, bien que faibles, très différentes. Comme pour le signal numérique, on a effectué une Transformée de Fourier Rapide du signal expérimental sur la hauteur de la couche limite, ceci a permis la comparaison des deux composantes principales correspondant à la fréquence fondamentale (figures F 4.39 et F 4.40) avec la vitesse U_∞ pour les résultats expérimentaux égale à $0,0752 \text{ m.s}^{-1}$.

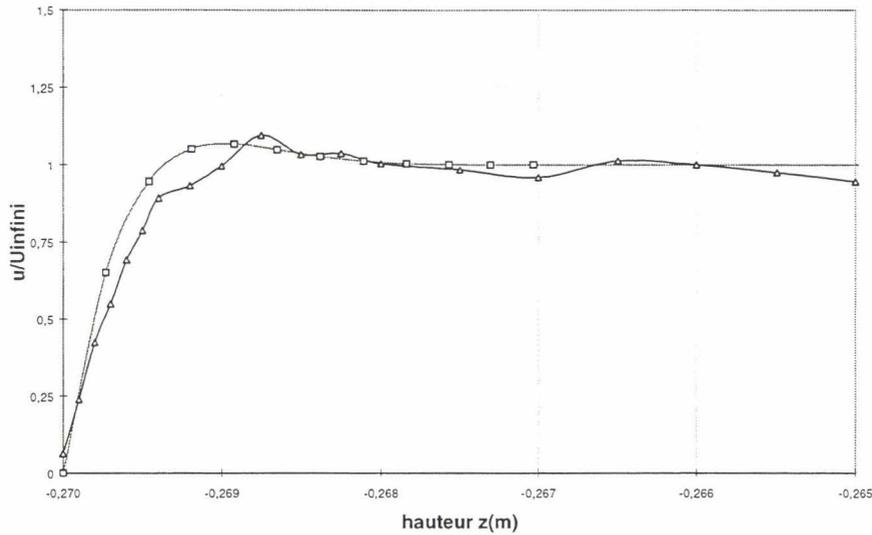


Figure F 4.39 : comparaison de l'amplitude de la fréquence fondamentale du signal obtenue à partir des résultats numériques et du modèle analytique sur la hauteur de la couche limite ; résultats expérimentaux (\triangle) et numériques (\square).

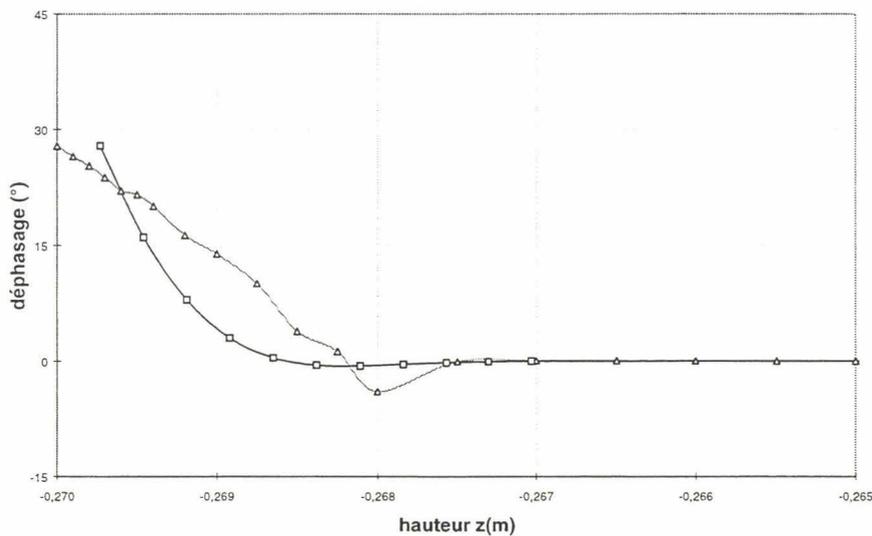


Figure F 4.40 : comparaison du déphasage du signal obtenue à partir des résultats numériques et du modèle analytique sur la hauteur de la couche limite ; résultats expérimentaux (\triangle) et numériques (\square).

On constate que pour les amplitudes des vitesses expérimentale et numérique, l'accord est satisfaisant. En ce qui concerne le déphasage, l'écart est plus important.

Compte tenu d'une part du bon accord entre les résultats numériques et la solution analytique de STOKES et de LAMB, et d'autre part que dans la couche limite, l'écoulement apparaît laminaire, a priori le modèle de turbulence n'est pas à mettre en cause.

Nous serions tentés de faire confiance aux résultats numériques.

5 : CARACTERISATION DE LA COUCHE LIMITE ENGENDREE PAR UN ECOULEMENT DE COURANT

TABLE DES MATIERES :

5 : CARACTERISATION DE LA COUCHE LIMITE ENGENDREE PAR UN ECOULEMENT DE COURANT.....	127
5.1 : INTRODUCTION.....	128
5.2 : LES CONDITIONS DE CALCUL.....	128
5.3 : COMPORTEMENT DE L'ECOULEMENT LE LONG DU CANAL.....	129
5.4 : ETUDE PARAMETRIQUE.....	133
5.5 : COEFFICIENT DE CHEZY.....	136

5.1 : INTRODUCTION.

Comme on l'a dit dans l'introduction générale, dans les simulations d'écoulement à des échelles comme la Manche, les écoulements côtiers étudiés sont essentiellement les courants de marée.

Les codes de calcul développés sont généralement bidimensionnels plan horizontal. La pression est hydrostatique : ceci suppose que les gradients de pression engendrés par les mouvements verticaux sont faibles devant la force de gravité. Les profils horizontaux de vitesse sont semblables en tout point du domaine. La vitesse fluide étudiée est une vitesse moyenne sur une hauteur d'eau d'écoulement.

Le frottement fluide sur le fond est alors modélisé par l'introduction dans les équations de quantité de mouvement d'une contrainte de frottement au fond. Cette contrainte fait intervenir le coefficient de Chézy. Celui-ci est généralement choisi dans une plage de valeur allant de 60 à 100 $m^{1/2}.s^{-1}$.

Notre approche consiste à fournir à partir d'une vitesse débitante le coefficient de Chézy.

Pour cela on se propose de simuler plusieurs régimes de courant, d'étudier la contrainte de frottement et le coefficient de frottement, de comparer ces grandeurs à celles fournies par les études existantes pour une couche limite engendrée par un écoulement sans gradient de pression (voir annexe A5), et enfin de fournir un ordre de grandeur pour le coefficient de Chézy.

5.2 : LES CONDITIONS DE CALCUL.

On se place volontairement dans les mêmes conditions que celles utilisées au préalable pour simuler un écoulement de houle (voir chapitre : "4 : CARACTERISATION DE LA COUCHE LIMITE GENEREE PAR UN ECOULEMENT DE HOULE. ").

Pour les conditions initiales, le domaine spatial est initialisé en vitesse et en pression :

- la composante horizontale de la vitesse est un profil droit ayant pour intensité la vitesse débitante ; à la paroi, la vitesse est nulle.

La composante verticale est nulle sur toute la hauteur d'eau (voir figure F 5.1).

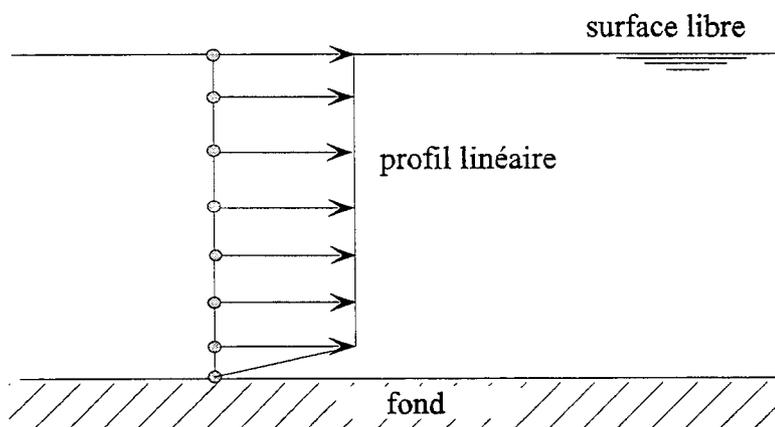


figure F 5.1 : profil de vitesse horizontal imposé en condition initiale.

Pour les itérations temporelles suivantes, ce profil est maintenu en entrée du canal.

- la pression est hydrostatique sur tout le domaine d'écoulement :

$$P = \rho g(z - \eta) \quad [E 5.1]$$

La pression atmosphérique est supposée nulle.

Pour des simulations d'écoulements turbulents, un modèle de longueur de mélange est utilisé (modèle de Van Driest).

A la différence de la couche limite engendrée par un écoulement de houle, la hauteur de couche limite est ici bien plus importante. Comme nous le verrons par la suite, le nombre de Reynolds ramené à la hauteur de la couche limite d est du même ordre que celui traduisant l'écoulement global.

La vitesse débitante minimale utilisée est de l'ordre de 19 mm.s^{-1} , on est dans ce cas au-dessus du nombre de Reynolds limite caractérisant un écoulement turbulent :

$$Re_y = \frac{\bar{U}.h}{\nu} \geq 5130 \quad [E 5.2]$$

Pour les simulations qu'on réalisera par la suite, nous disposons de résultats expérimentaux réalisés au Laboratoire de Mécanique des Fluides et Génie Civil du Havre. Les vitesses débitantes utilisées vont de 19 mm.s^{-1} à 88 mm.s^{-1} .

Cependant, la comparaison des résultats numériques avec ceux d'origine expérimentale est difficile. En effet les simulations numériques sont faites suivant une hypothèse d'écoulement parfaitement bidimensionnel. Or expérimentalement les épaisseurs des couches limites engendrées par le courant sur le fond du canal mais aussi sur ses parois latérales sont importantes, les épaisseurs de couches limites latérales influent de manière non négligeable sur l'écoulement moyen, ce qui numériquement ne peut être reproduit.

Pour notre part, nous irons jusqu'à des vitesses débitantes de 300 mm.s^{-1} correspondant à une vitesse maximale de 0,6 noeuds.

5.3 : COMPORTEMENT DE L'ECOULEMENT LE LONG DU CANAL.

Avant d'effectuer une étude paramétrique, nous indiquons pour un cas de courant le comportement de l'écoulement le long du canal.

Pour se faire, on utilise une vitesse débitante de 88 mm.s^{-1} . Le nombre de Reynolds est de 23800. L'écoulement est turbulent.

Dans un premier temps, on vérifie que le débit fluide est conservé tout au long du canal, les variations constatées par rapport au débit imposé en entrée sont faibles, celles-ci sont en effet inférieures à 0.1 % (voir figures F 5.2 et F 5.3).

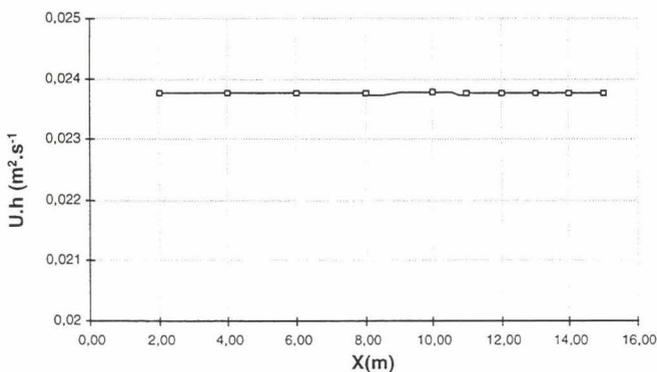


figure F 5.2 : comportement du débit le long du canal (débit en entrée : $\bar{U} h = 0,023760 \text{ m}^2 . \text{s}^{-1}$)

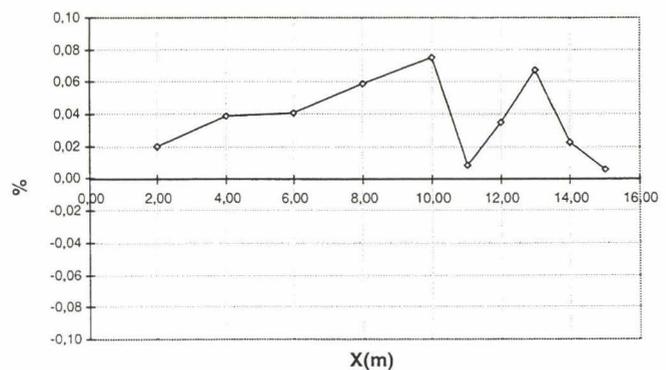


figure F 5.3 : variation du débit vis à vis du débit en entrée

L'établissement de la couche limite se fait rapidement. Le profil linéaire imposé en entrée impose une phase de réorganisation de l'écoulement de courant sur les premiers mètres du canal ; après, l'écoulement se stabilise.

Cet aspect est également souligné par le comportement de la contrainte de frottement (ou de la vitesse de frottement). Du fait du profil imposé en entrée, la contrainte de frottement est importante. Après, le long du canal, la couche limite s'établit. La contrainte de frottement diminue pour se stabiliser.

Pour une abscisse supérieure à 6,00 m, les conditions d'entrée (forme du profil de vitesse) n'influe plus sur le comportement de la vitesse (voir figures F 5.4 et F 5.5).

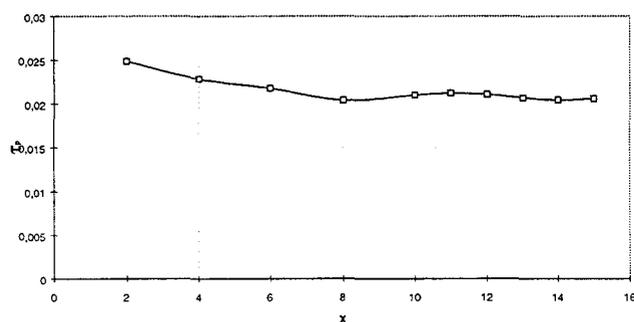


figure F 5.4 : comportement de la contrainte de frottement

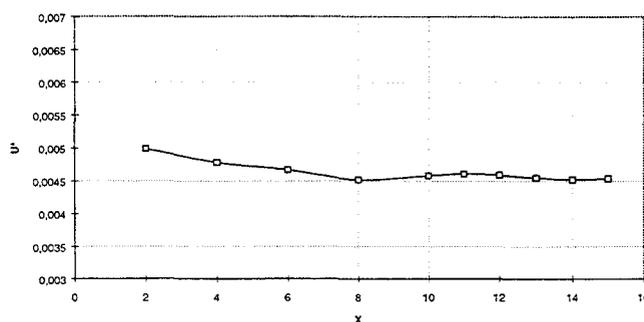


figure F 5.5 : comportement de la vitesse de frottement

On compare les profils de vitesse avec les lois de comportement décrivant la vitesse dans la couche limite (voir annexe A5.).

Les comparaisons indiquent une très bonne corrélation pour les différentes zones de l'écoulement (figures F 5.6 à F 5.15).

- Pour la couche laminaire, la hauteur obtenue numériquement est en accord avec la théorie :

$$0 \leq Y^+ \leq 5 \quad [E 5.3]$$

On dispose de trois points sur la hauteur de la couche laminaire, ce qui suffit pour vérifier la loi :

$$U^+ = Y^+ \quad [E 5.4]$$

d'autant plus que la formulation de la vitesse dans le code de calcul développé est bilinéaire.

- Pour la zone logarithmique, on retrouve les caractéristiques classiques :

- ✗ la valeur de la constante universelle B correspond à celle indiquée suivant la théorie :

$$B \approx 5 \quad [E 5.5]$$

La valeur de B correspond à celle d'un régime hydrauliquement lisse.

- ✗ la hauteur minimale d'établissement est respectée, soit :

$$Y^+ \geq 30 \quad [E 5.6]$$

L'épaisseur totale de la couche limite est importante, elle est quasiment établie sur toute la hauteur d'écoulement :

$$\delta = 18,0 \text{ cm} \quad [E 5.7]$$

La hauteur d'écoulement dite à l'infini est de 9 cm.

Les caractéristiques cinématiques sont résumées dans le tableau T 5.1 :

abscisse X (m)	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00
débit (m ² .s ⁻¹)	0,023764679	0,023769219	0,023769695	0,023773953	0,023777908
τ_p (N.m ⁻²)	0,024879599	0,022851959	0,021802990	0,020437614	0,021007059
u^* (m.s ⁻¹)	0,004987945	0,004780372	0,004669367	0,004520798	0,004583346
U_{max} (m.s ⁻¹)	0,094576396	0,095686073	0,095240433	0,094679890	0,096230168

abscisse X (m)	11,00	12,00	13,00	14,00	15,00
débit (m ² .s ⁻¹)	0,023761872	0,023768310	0,023775978	0,023765389	0,023761392
τ_p (N.m ⁻²)	0,021239493	0,021065705	0,020689140	0,020449992	0,020597701
u^* (m.s ⁻¹)	0,004608632	0,004589739	0,004548532	0,004522167	0,004538469
U_{max} (m.s ⁻¹)	0,096149060	0,096520411	0,097133730	0,097135657	0,096872500

T 5.1 : grandeurs caractéristiques de l'écoulement de courant le long du canal.

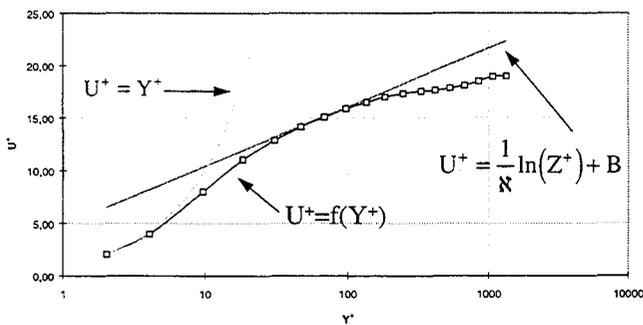


figure F 5.6 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse x = 2 m.

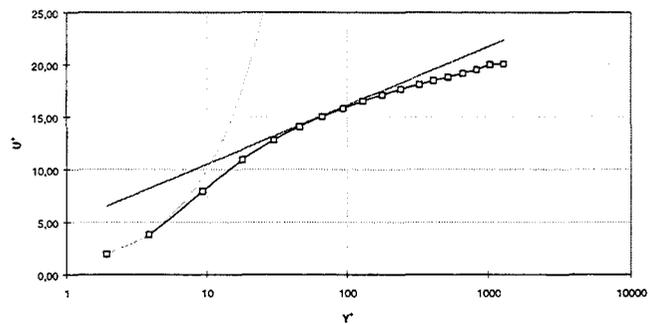


figure F 5.7 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse x = 4 m.

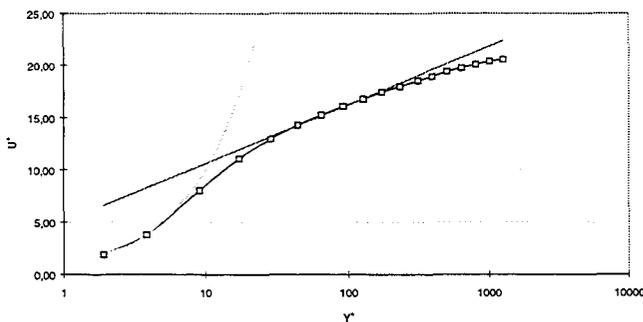


figure F 5.8 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse x = 6 m.

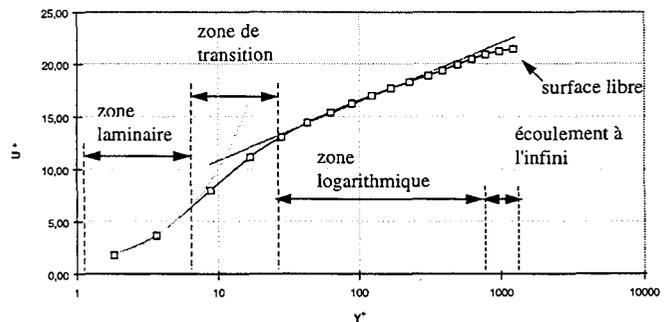


figure F 5.9 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse x = 8 m.

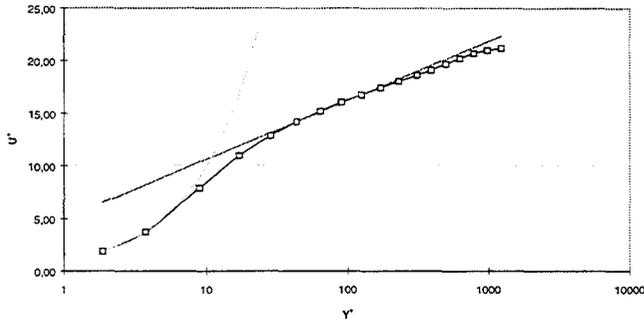


figure F 5.10 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse $x = 10$ m.

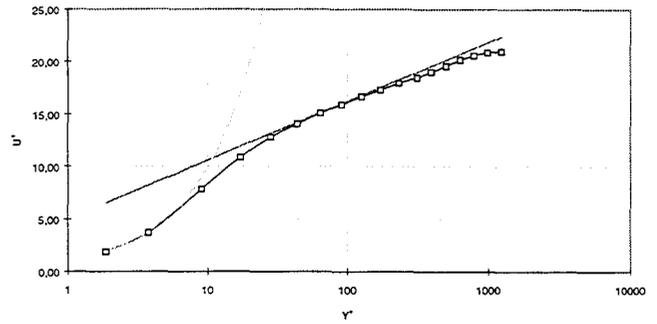


figure F 5.11 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse $x = 11$ m.

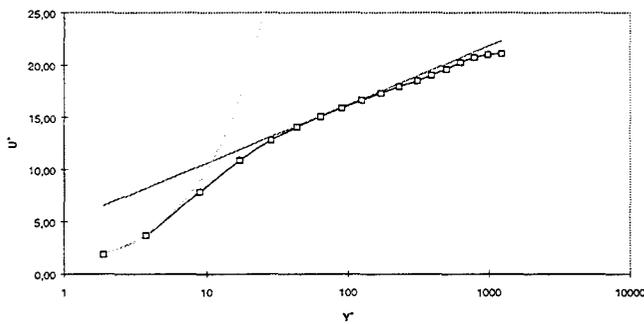


figure F 5.12 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse $x = 12$ m.

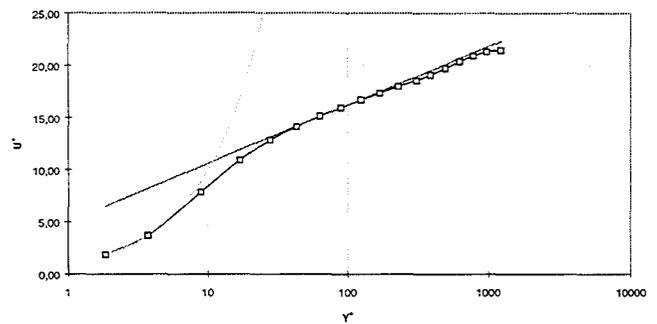


figure F 5.13 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse $x = 13$ m.

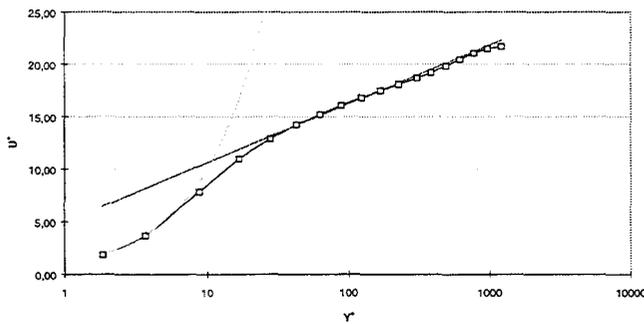


figure F 5.14 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse $x = 14$ m.

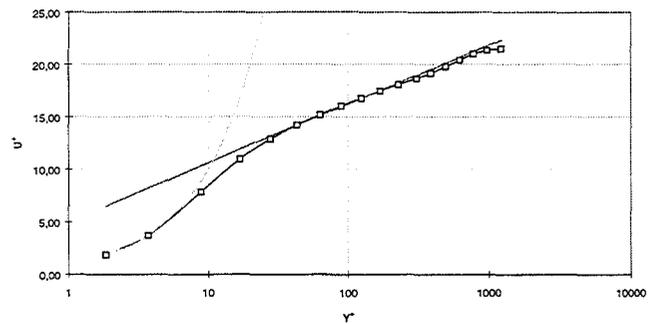


figure F 5.15 : comparaison du profil vertical de la vitesse pour l'abscisse $x = 15$ m.

Le profil de viscosité turbulente est donné figure F 5.16. Il est sensiblement identique sur la zone où l'écoulement est établi. Les fluctuations turbulentes calculées par le modèle de longueur de mélange sont importantes dans la zone logarithmique ; de part et d'autre de cette zone les fluctuations turbulentes sont faibles.

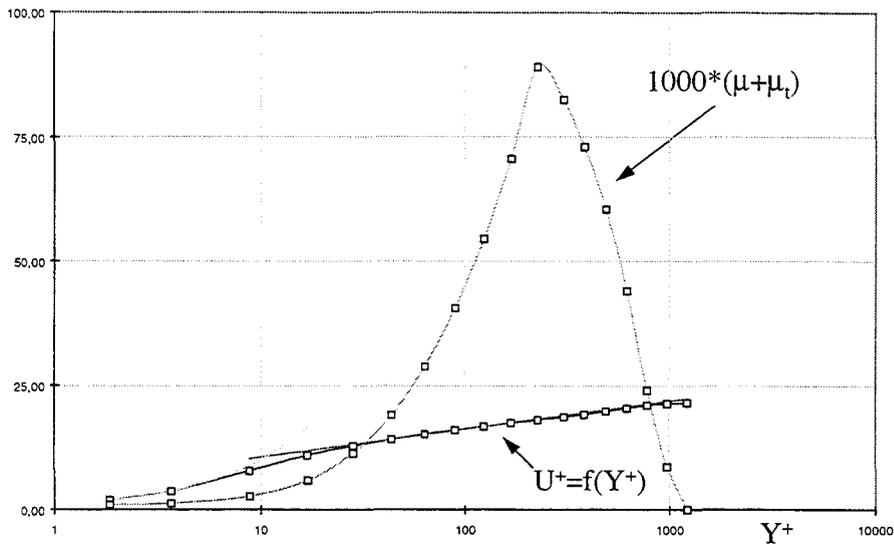


figure F 5.16 : profil de viscosité sur la hauteur d'eau d'écoulement représenté avec le profil vertical de la vitesse avec les lois de comportement.

Sur toute la longueur d'écoulement, la loi de pression apparaît comme hydrostatique sur la hauteur d'eau (voir figure F 5.17) :

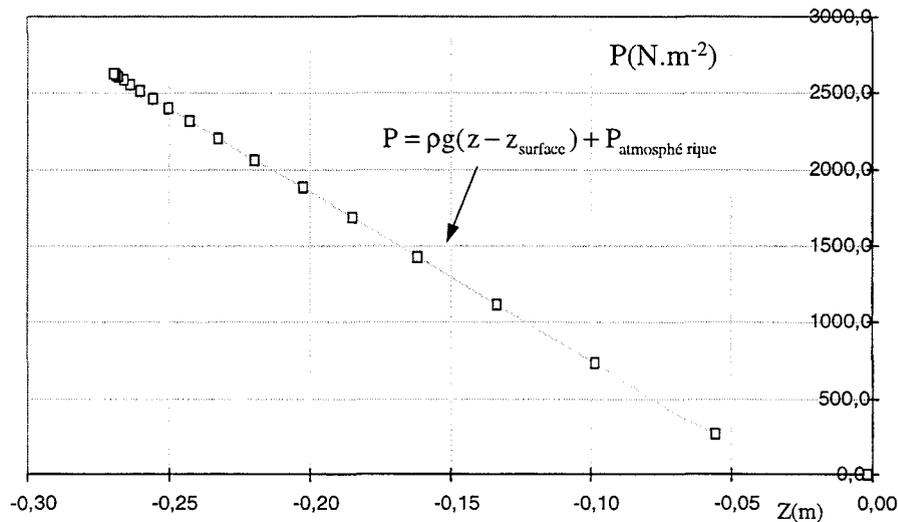


figure F 5.17 : comportement de la pression sur la hauteur d'eau d'écoulement.

En résumé, la couche limite de courant apparaît établie pour une abscisse x supérieure à 6,0 mètres. Au dessus de cette abscisse, les résultats numériques sont en accord avec les lois de comportement caractérisant la couche limite sans gradient de pression. La pression est gouvernée par une loi hydrostatique. Pour l'étude paramétrique qui va suivre, l'acquisition des profils de vitesse se fera à la station d'abscisse x égale 15 mètres.

5.4 : ETUDE PARAMETRIQUE.

Pour une gamme de vitesses débitantes, on effectue une étude de comportement des caractéristiques de la couche limite engendrée.

On calculera pour chaque cas :

- la contrainte de frottement :

$$\tau_p = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=-h} \quad [E 5.8]$$

- la vitesse de frottement :

$$U^* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad [E 5.9]$$

- le coefficient de frottement (U_∞ étant la vitesse à l'infini) :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad [E 5.10]$$

- le coefficient de perte de charge :

$$\lambda = 8 \left(\frac{U^*}{\bar{U}} \right)^2 \quad [E 5.11]$$

- l'épaisseur de déplacement :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dz \quad [E 5.12]$$

- l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty} \right) \frac{u}{U_\infty} dz \quad [E 5.13]$$

- et le rapport de forme H :

$$H = \frac{\delta_1}{\theta} \quad [E 5.14]$$

Les résultats obtenus sont les suivants :

\bar{U} (m.s ⁻¹)	0.019	0.042	0.052	0.062	0.074
Reynolds	5130	11340	14040	16740	19980
débit (m².s⁻¹)	0,005119006	0,011281630	0,014025860	0,016791265	0,019995790
δ_1 (m)	0,013411472	0,017484726	0,019821271	0,021727129	0,022292734
θ (m)	0,007828602	0,012266366	0,014362603	0,016026463	0,016633852
H	1,713137576	1,425420152	1,380061251	1,355703314	1,340202706
τ_p (N.m⁻²)	0,001748681	0,005966719	0,008356514	0,011264066	0,015277655
u^* (m.s⁻¹)	0,001322377	0,002442687	0,002890763	0,003356198	0,003908664
cf	0,008685965	0,005925805	0,005258708	0,004866725	0,004625783

λ	0,038751932	0,0270599	0,0247234	0,02344238	0,02231943
B	4,40	4,90	5,00	5,00	5,00
U_{\max} (m.s ⁻¹)	0,020066022	0,044875482	0,056375190	0,068036845	0,081273827

\bar{U} (m.s ⁻¹)	0.088	0.100	0.150	0.200	0.300
Reynolds	23 760	27000	40 500	54 000	81000
débit (m ² .s ⁻¹)	0,023761392	0,026978090	0,040470114	0,054027785	0,081044178
δ_1 (m)	0,023159238	0,022126287	0,019843959	0,018947921	0,017917867
θ (m)	0,017513637	0,016932481	0,015470471	0,014787794	0,014152208
H	1,322354603	1,306736238	1,282699035	1,281321648	1,266082821
τ_p (N.m ⁻²)	0,020597701	0,026239385	0,054084567	0,091976390	0,190768139
u^* (m.s ⁻¹)	0,004538469	0,005122439	0,007354221	0,009590432	0,013811884
cf	0,004389830	0,004356811	0,004074607	0,003979047	0,003743946
λ	0,0212786	0,020991505	0,01923006	0,018395277	0,016957168
B	5,00	5,00	5,00	4,95	4,80
U_{\max} (m.s ⁻¹)	0,096872500	0,109750744	0,162932909	0,215012473	0,319229570

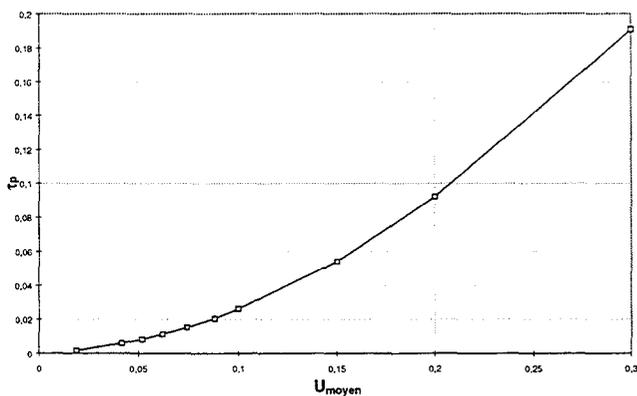


figure F 5.18 : comportement de la contrainte de frottement pour différentes vitesses débitantes (h=0,27m).

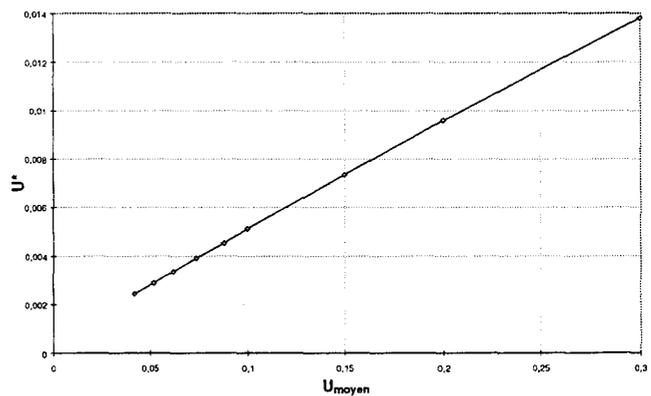


figure F 5.19 : comportement de la vitesse de frottement pour différentes vitesses débitantes (h=0,27m).

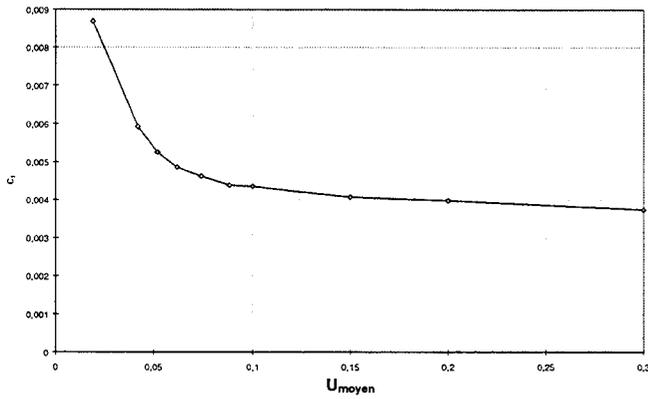


figure F 5.20 : comportement du coefficient de frottement pour différentes vitesses débitantes ($h=0,27m$).

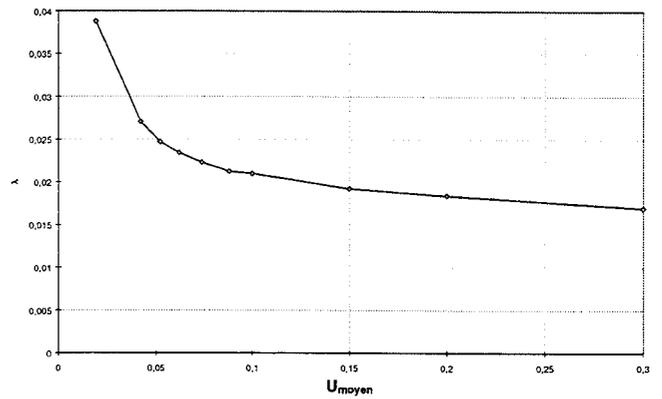


figure F 5.21 : comportement du coefficient de perte de charge pour différentes vitesses débitantes ($h=0,27m$).

Les différents résultats (tableaux ci-dessus et figures F 5.18 à F 5.21) obtenus ci-dessus sont en accord avec les résultats qu'on est amené à rencontrer dans la bibliographie concernée, voir SCHLICHTING (1979) et COUSTEIX (1984).

Le coefficient de perte de charge est comparé avec des solutions analytiques fournies par BLASIUS et NIKURADSE (voir annexe A5.).

Pour une rugosité nulle à la paroi, les résultats numériques sont en accord avec la loi de BLASIUS (établie pour un écoulement dans un tube à paroi lisse) et avec celle de NIKURADSE avec comme rugosité (la vitesse débitante utilisée varie de $0,01$ à $0,3 \text{ m.s}^{-1}$) :

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0 \quad [E 5.15]$$

L'ordre de grandeur est respecté et la sensibilité en fonction du nombre de Reynolds est reproduite.

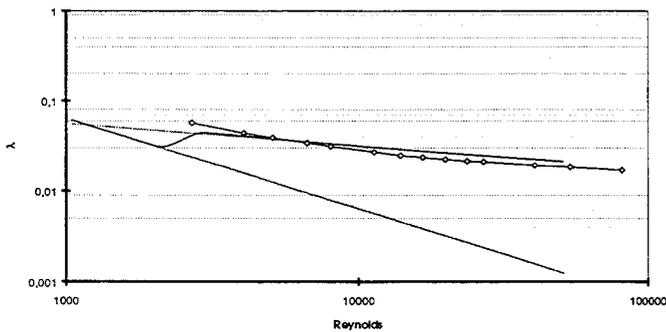


figure F 5.22 : comparaison du coefficient de perte de charge avec la loi de NIKURADSE :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0,86 \ln \left(\frac{2,51}{R_{ey} \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon}{3,7D} \right)$$

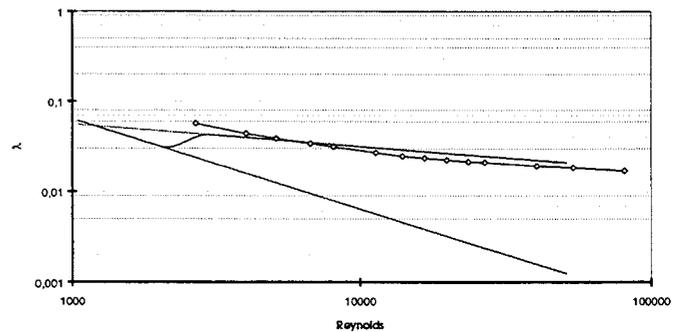


figure F 5.23 : comparaison du coefficient de perte de charge avec la loi de BLASIUS :

$$\lambda = \frac{0,316}{R_{ey}^{1/4}}$$

5.5 : COEFFICIENT DE CHEZY.

Le coefficient de Chézy Ch permet de modéliser le frottement de l'écoulement fluide sur le fond.

La contrainte de frottement est modélisée sous la forme suivante :

$$\tau_p = \frac{\rho g}{Ch^2} \bar{U} \sqrt{\bar{U}^2} \quad [E 5.16]$$

avec, \bar{U} la composante horizontale moyenne sur la hauteur d'eau de la vitesse $u(z)$:

$$\bar{U} = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u(z) dz \quad [E 5.17]$$

Connaissant la vitesse moyenne \bar{U} et la valeur de la contrainte de frottement, le coefficient de Chézy peut être déterminé :

$$Ch = \sqrt{\frac{\rho g \bar{U}^2}{\tau_p}} \quad [E 5.18]$$

A partir de la relation [E 5.18], le coefficient de Chézy Ch est calculé pour les simulations de courant effectués ci-dessus (la vitesse débitante varie de 0,01 à 0,3 m.s⁻¹) :

\bar{U} (m.s ⁻¹)	0,019	0,042	0,052	0,062	0,074
Ch	45,0021	53,853	56,34109	57,8600	59,2977

\bar{U} (m.s ⁻¹)	0,088	0,100	0,150	0,200	0,300
Ch	60,7306	61,1445	63,88	65,317	68,030

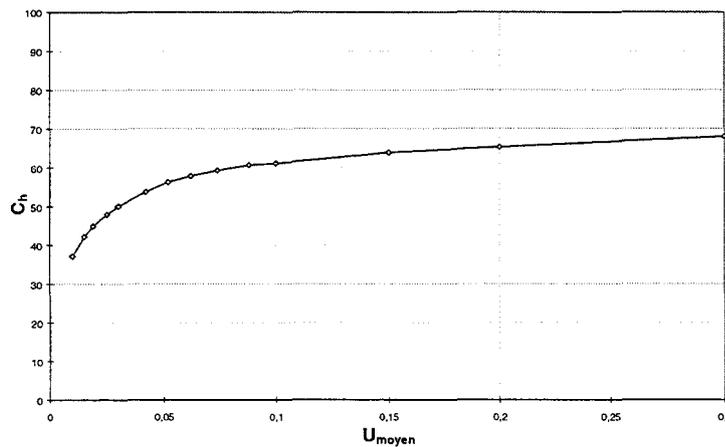


figure F 5.24 : comportement du coefficient de Chézy pour différentes vitesses débitantes.

Pour une vitesse moyenne débitante allant de 0,010 à 0,100 m.s⁻¹, le coefficient de Chézy croit fortement (voir figure F 5.24), de 37 à 60 m^{1/2}.s⁻¹.

Au-dessus de la valeur de vitesse débitante 0,100 m.s⁻¹, le coefficient de Chézy évolue faiblement vers une valeur asymptotique. Sur la plage de débit utilisée : 0,100 à 0,300 m.s⁻¹, la valeur du coefficient Ch varie dans la gamme 60 à 70 m^{1/2}.s⁻¹.

6 : ECOULEMENTS DE HOULE ET DE COURANT SUPERPOSES

TABLE DES MATIERES :

6 : ECOULEMENTS DE HOULE ET DE COURANT SUPERPOSES.....	139
A°/ ECOULEMENT COMBINE DE HOULE ET DE COURANT (42 MM/S).	141
B°/ ECOULEMENT COMBINE DE HOULE ET DE COURANT (52 MM/S).....	142
C°/ ECOULEMENT COMBINE DE HOULE ET DE COURANT (67 MM/S).....	143

Il apparaît en effet intéressant de constater l'influence de la houle sur les caractéristiques principales d'un écoulement de courant, dont notamment la contrainte de frottement τ_p .

Plus appliqué, il est également intéressant d'évaluer le coefficient de Chézy pour un écoulement combiné et de comparer la valeur de celui-ci avec celle correspondant à un courant seul.

Si on résume les résultats des simulations précédentes portant sur la houle et le courant, on a pu constater dans un premier temps que les simulations numériques portant sur la propagation d'une houle de caractéristiques :

- hauteur crête-creux : $H=38$ mm
- période : $T=1,15$ s

montrent que les profils horizontaux numériques et expérimentaux de vitesse sont similaires. Néanmoins, la contrainte de frottement apparaît plus importante pour les résultats numériques.

Des simulations numériques ont également été faites avec le courant seul.

Les vitesses débitantes utilisées vont de 19 à 300 $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$. Les résultats numériques obtenus montrent une bonne adéquation avec les différentes références existantes sur la couche limite générée par un écoulement sans gradient de pression.

Aussi pour évaluer l'influence de la houle sur le courant, on choisit trois régimes de vitesse débitante pour le courant : 42, 52 et 67 $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$

correspondant respectivement :

- pour la vitesse débitante la plus faible ($\bar{U} = 42 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$) à un écoulement de houle dominant,
- pour la vitesse débitante la plus importante ($\bar{U} = 67 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$) à un écoulement de courant dominant,
- et entre les deux, à un écoulement mixte où la houle et le courant ne prédominent ni sur l'un ni sur l'autre.

Le maillage utilisé pour simuler ces écoulements combinés a une définition verticale $\Delta z = 0,475$ mm pour les mailles contiguës au fond. Cette taille relativement grossière, a été choisie compte tenu des deux aspects suivant :

- les temps de calcul CPU sont importants,
- et la taille des maillages utilisés est de l'ordre de 39 000 points.

Les figures F 6.1, F 6.3 et F 6.5 montrent les résultats pour des écoulements de houle et de courant.

Pour un régime de houle dominante (figure F 6.1), on constate une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et numériques. Par contre pour un cas d'écoulement où le courant apparaît dominant : des différences apparaissent, notamment sur l'amplitude de la vitesse (voir figure F 6.5).

A°/ ECOULEMENT COMBINE DE HOULE ET DE COURANT ($\bar{U} = 42 \text{ MM.S}^{-1}$) :

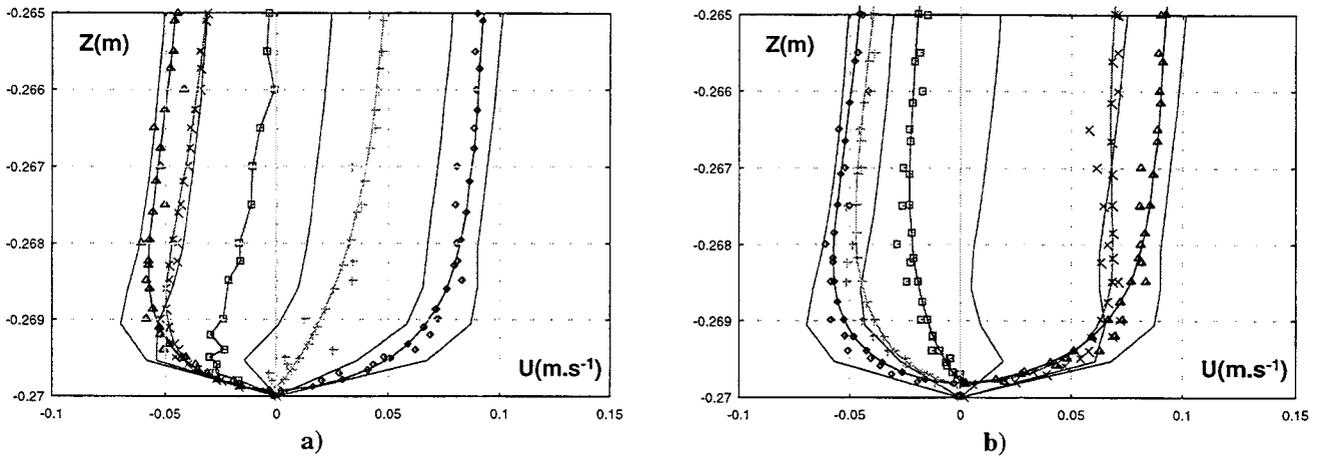


figure F 6.1 : comparaison des profils horizontaux de la vitesse entre les résultats expérimentaux (◻) et les résultats numériques (-) en houle plus courant ($\bar{U} = 42 \text{ mm.s}^{-1}$) pour différentes phases de l'écoulement, a) phases de décélération, b) phases d'accélération.

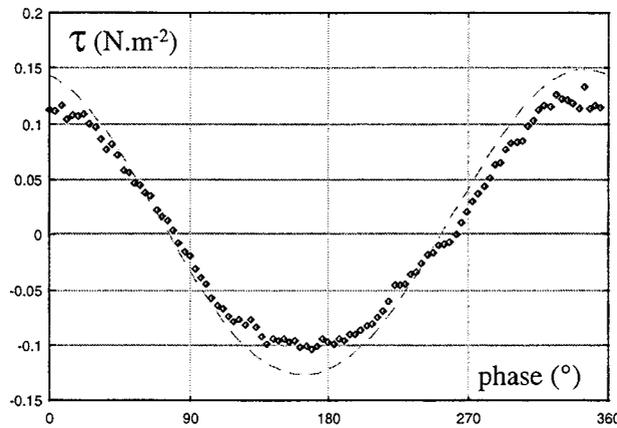


figure F 6.2 : évolution de la contrainte de frottement déterminée à partir des résultats expérimentaux sur une période T pour un écoulement combiné de houle et de courant ($\bar{U} = 42 \text{ mm.s}^{-1}$)

vitesse de frottement à la paroi	m.s^{-1}	contrainte de frottement à la paroi	N.m^{-2}	phase (°)
u^*_{max}	0,121926E-01	τ_{pmax}	0,148659	344,018
u^*_{min}	-0,112695E-01	τ_{pmin}	-0,127001	162,638
u^*_{moy}	0,00286696	τ_{pmoy}	0,00821947	/

Tableau T 6.1 : valeurs caractéristiques pour un écoulement combiné de houle et de courant ($\bar{U} = 42 \text{ mm.s}^{-1}$)

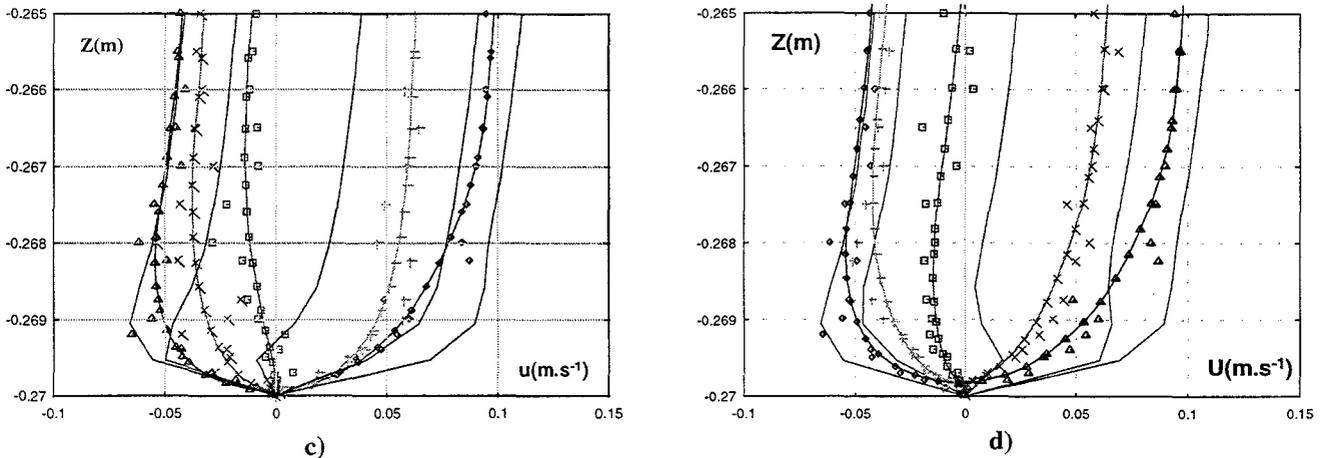
B°/ ECOULEMENT COMBINE DE HOULE ET DE COURANT ($\bar{U} = 52 \text{ MM.S}^{-1}$) :

figure F 6.3 : comparaison des profils horizontaux de la vitesse entre les résultats expérimentaux (∇) et les résultats numériques (-) en écoulement houle plus courant ($\bar{U}_{\infty} = 52 \text{ mm.s}^{-1}$) pour différentes phases de l'écoulement, a) phase de décélération, b) phase d'accélération

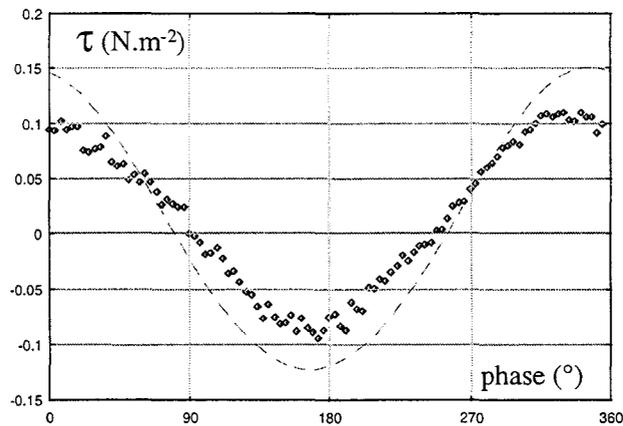


figure F 6.4 : évolution de la contrainte de frottement déterminée à partir des résultats expérimentaux sur une période T pour un écoulement combiné de houle et de courant ($\bar{U} = 52 \text{ mm.s}^{-1}$)

vitesse de frottement à la paroi	m.s^{-1}	contrainte de frottement à la paroi	N.m^{-2}	phase (°)
u^*_{max}	0,122744E-01	$\tau_{p\text{max}}$	0,150660	347,376
u^*_{min}	-0,110711E-01	$\tau_{p\text{min}}$	-0,122570	166,407
u^*_{moy}	0,003258	$\tau_{p\text{moy}}$	0,01061814	/

Tableau T 6.2 : valeurs caractéristiques pour un écoulement combiné de houle et de courant ($\bar{U} = 52 \text{ mm.s}^{-1}$)

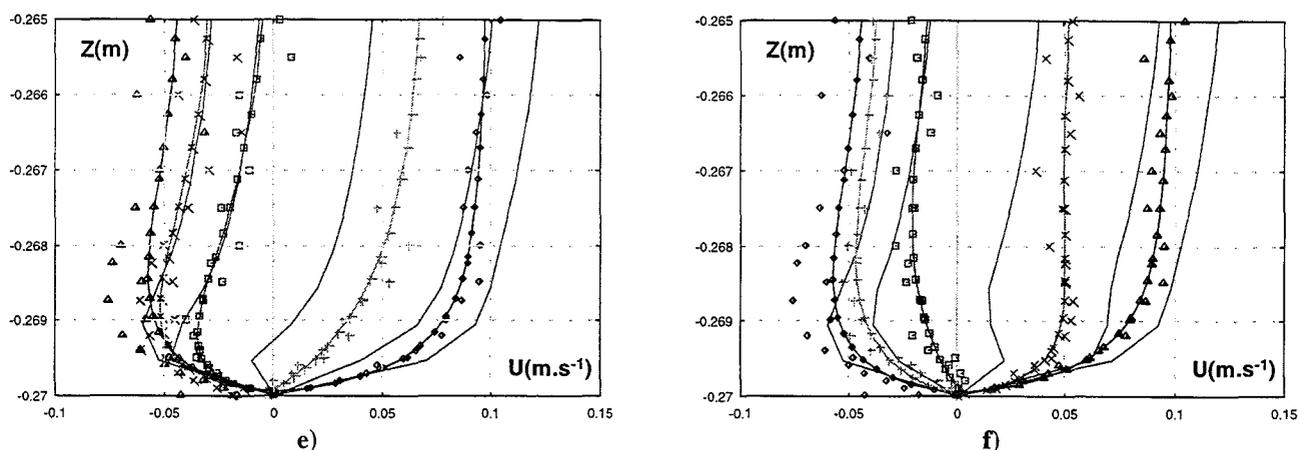
C°/ ECOULEMENT COMBINE DE HOULE ET DE COURANT ($\bar{U} = 67 \text{ MM.S}^{-1}$) :

figure F 6.5 : comparaison des profils horizontaux de la vitesse entre les résultats expérimentaux (∇) et les résultats numériques (-) en écoulement houle plus courant ($\bar{U}_{\infty} = 67 \text{ mm.s}^{-1}$) pour différentes phases , a) phases de décélération, b) phases d'accélération.

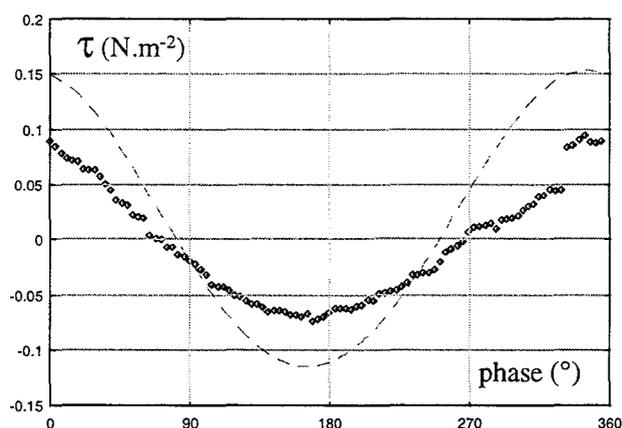


figure F 6.6 : évolution de la contrainte de frottement déterminée à partir des résultats expérimentaux sur une période T pour un écoulement combiné de houle et de courant ($\bar{U} = 67 \text{ mm.s}^{-1}$)

vitesse de frottement à la paroi	m.s^{-1}	contrainte de frottement à la paroi	N.m^{-2}	phase ($^{\circ}$)
u^*_{max}	0,123689E-01	$\tau_{p_{\text{max}}}$	0,152990	347,722
u^*_{min}	-0,107324E-01	$\tau_{p_{\text{min}}}$	-0,115183	164,248
u^*_{moy}	0,00409949	$\tau_{p_{\text{moy}}}$	0,01667971	/

Tableau T 6.3 : valeurs caractéristiques pour un écoulement combiné de houle et de courant ($\bar{U} = 67 \text{ mm.s}^{-1}$)

Concernant le comportement de la contrainte de frottement, il apparaît que pour les résultats numériques, les valeurs extrêmes $\tau_{p_{max}}$ et $\tau_{p_{min}}$ ne sont pas symétriques, cette dissymétrie s'accroît avec l'augmentation de la vitesse débitante (voir tableaux T 6.1, T 6.2 et T 6.4 et figures F 6.2, F 6.4, F 6.6 et F 6.7). La comparaison des résultats numériques et expérimentaux indique une évolution différente de la contrainte de frottement suivant la vitesse débitante du courant. En effet, excepté le premier cas où la houle est dominante, l'atténuation de la houle sous l'effet du courant ne semble pas être reproduite numériquement.

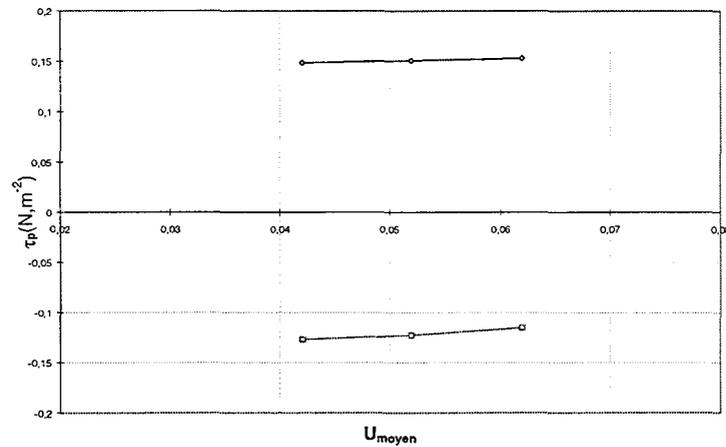


figure F 6.7 : évolution des contraintes extrêmes $\tau_{p_{max}}$ et $\tau_{p_{min}}$ pour les écoulements combinés de houle et de courant

le déphasage du signal au niveau de la couche limite est de l'ordre de 15° et semble être indépendant de l'intensité de la vitesse débitante.

A partir de la contrainte de frottement moyenne calculée sur une période de houle, on calcule le coefficient de Chézy pour chacune des vitesses débitantes (tableau T 6.4) :

\bar{U} ($m.s^{-1}$)	0,042	0,052	0,067
Ch pour écoulement combiné	45,88	49,81	51,382

Tableau T 6.4 : coefficient de Chézy pour un écoulement combiné de houle et de courant.

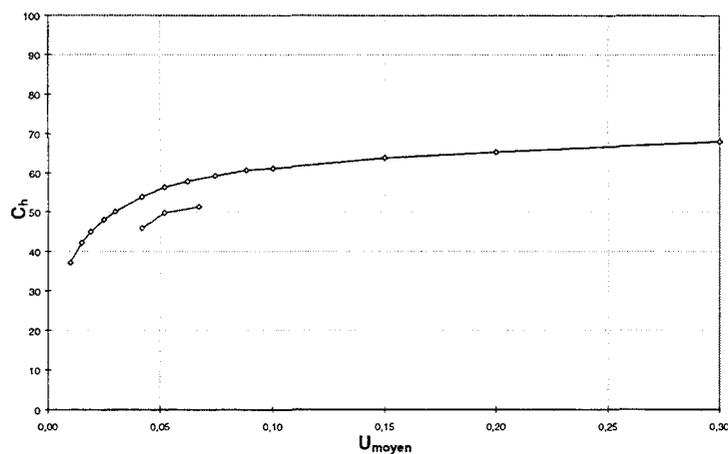


figure F 6.8 : comparaison du coefficient de Chézy obtenu pour un écoulement combiné houle et courant et pour un écoulement de courant seul.

Moyennée sur une période, la houle en écoulement combiné a pour conséquence d'augmenter la contrainte moyenne de frottement à la paroi.

Le coefficient de Chézy pour un écoulement combiné est donc différent de celui pour un écoulement de courant seul, il est légèrement inférieur (voir figure F 6.8).

7 : CONCLUSION

TABLE DES MATIERES :

7 : CONCLUSION.....	147
---------------------	-----

Un premier bilan concernant le transport sédimentaire au niveau de la Manche a permis de mettre en évidence l'importance du facteur hydrodynamique, la houle et le courant apparaissent comme des agents primordiaux du transport sédimentaire.

A partir de ce constat, nous avons choisi de développer un programme de résolution des équations de la mécanique des fluides en présence d'une surface libre. Pour ce faire, une formulation ALE a été utilisée, complée avec une discrétisation spatiale du type éléments finis.

Une étude numérique intrinsèque de sensibilité a permis d'une part, de fixer les paramètres de discrétisation et d'autre part de choisir la technique d'interpolation pour la définition de la surface libre, le schéma convectif, et le schéma d'évolution de la surface libre au voisinage d'une paroi.

Ensuite, l'étude de la propagation d'une onde solitaire a servi de cas test. Les comparaisons des résultats obtenus avec ceux expérimentaux et analytiques d'autres auteurs sont satisfaisantes. Ces comparaisons ont porté sur la célérité, le taux d'amortissement ou encore la description de l'impact sur une paroi.

A partir de là nous avons traité trois problèmes importants pour la dynamique sédimentaire, l'objectif principal étant de simuler la couche limite engendrée par un écoulement de houle et/ou de courant. Pour ce faire nous avons reproduit une configuration expérimentale, celle du canal à houle du Laboratoire de Mécanique des Fluides et Génie Civil du Havre (LMFGC) qui travaille sur ce problème depuis quelques années.

La première étude a porté sur un écoulement de houle.

La comparaison avec le modèle analytique de STOKES et de LAMB indique un très bon accord, que ce soit pour l'amplitude de la composante horizontale de la vitesse où le déphasage sur la hauteur de la couche limite.

Les résultats numériques pris en compte sont ceux correspondant à la composante fondamentale du signal. La comparaison avec les résultats expérimentaux apparaissait moins évidente, parce qu'il est difficile de reproduire numériquement les conditions d'écoulement dans un canal, ce problème a pu être résolu là encore en comparant uniquement les composantes correspondant à la fréquence fondamentale.

La seconde étude a porté sur la simulation d'un courant seul. Les résultats numériques sont également en bon accord avec les relations fournies par la bibliographie existante.

Cette étude a permis notamment de fournir le comportement du coefficient de Chézy, coefficient utilisé pour modéliser le frottement sur le fond marin. Elle a mis en évidence les deux aspects suivants :

- pour un débit faible (de 0,01 à 0,1 m.s⁻¹), le coefficient évolue fortement (de 37 à 60 m.s),
- par contre pour des débits élevés, la valeur de celui-ci devient constante (de l'ordre de 60 à 70 m.s).

Enfin, les premières simulations d'écoulements combinés de houle et de courant ont été faites. La comparaison avec les résultats expérimentaux apparaît satisfaisante pour un écoulement de houle

dominant. Le coefficient de Chézy calculé à partir de vitesse moyennée sur une période est légèrement plus faible que celui obtenu pour un écoulement de courant de même débit.

En résumé, le code de calcul développé dispose d'un potentiel intéressant, outre les problèmes de dynamique d'écoulements côtiers, il a été utilisé pour traiter divers problèmes de génie maritime (voir annexe A.1).

Par contre, on a été confronté à certains problèmes limitant notre étude. Lorsqu'il est nécessaire d'accroître localement l'information au niveau de la couche limite, on aboutit à un maillage volumineux et amenant à un coût de calcul important.

Une solution technique intéressante serait de mettre en oeuvre un algorithme du type multi-grilles, multi-domaines et multi-pas de temps. Ce type de technique permet d'effectuer localement des raffinements du maillage tout en captant à différents niveaux de grille les grandes échelles comme les plus petites.

8 : BIBLIOGRAPHIE

TABLE DES MATIERES :

8 : BIBLIOGRAPHIE.....	151
------------------------	-----

- P. ACKERS & W.R. WHITE, «SEDIMENT TRANSPORT : NEW APPROACH AND ANALYSIS », J. HYDRAUL. DIV., AM. SOC. CIV. ENGRS, VOL 99, P 2041-2060 (1973)
- J.R.L. ALLEN, «PHYSICAL PROCESSES OF SEDIMENTATION. AN INTRODUCTION», G. ALLEN & UNWIN, EARTH SCIENCE, SERIES 1 (1973)
- A.A. AMSDEN & C.W. HIRT, «YAQUI : AN ARBITRARY LAGRANGIAN-EULERIAN COMPUTER PROGRAM FOR FLUID FLOWS AT ALL SPEEDS», LOS ALAMOS SCIENTIFIC LABORATORY REPORT, LA-5100 (1973)
- C. AUGRIS, P. CLABAUT, O. VICAIRE, «LE DOMAINE MARIN DU NORD-PAS DE CALAIS - NATURE, MORPHOLOGIE ET MOBILITE DES FONDS», IFREMER - REGION NORD-PAS DE CALAIS (1990)
- R.A. BAGNOLD, «AN APPROACH TO THE SEDIMENT TRANSPORT PROBLEM FROM GENERAL PHYSICS», PHYSIOGRAPHIC AND HYDRAULIC STUDIES OF RIVERS, GEOLOGICAL SURVEY PROFESSIONAL PAPER, PP 422-I (1966)
- P. BLONDEAUX AND G. VITTORI, «VORTICITY DYNAMICS IN AN OSCILLATORY FLOW OVER A RIPPLED BED», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 226, PP 257-289 (1991)
- R. BONNEFILLE, «COURS D'HYDRAULIQUE MARITIMES», ENSTA, EDITION MASSON (1976)
- J.G.B. BYATT-SMITH, «AN INTEGRAL EQUATION FOR UNSTEADY WAVES AND A COMMENT ON THE BOUSSINESQ EQUATION», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 49, PART 4, PP 625-633 (1971)
- J.U. BRACKBILL, D.B. KOTHE & C. ZEMACH, «A CONTINUUM METHOD FOR MODELLING SURFACE TENSION», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 100, N°2, PP 335-354 (1992)
- Y. CAO & R.F. BECK, «NUMERICAL COMPUTATIONS OF TWO-DIMENSIONAL SOLITARY WAVES GENERATED BY MOVING DISTURBANCES», INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS, VOL. 17, P 905-920 (1993)
- CHAN, STREET & STRELKOFF, T. DEPT. CIVIL ENG. STANFORD UNIV. TECH. REPT N° 104 (1969)
- R.K. CHAN & R.L. STREET, «A COMPUTER STUDY OF FINITE-AMPLITUDE WATER WAVES», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 6, P 68-94 (1970)
- G. CHAPALAIN & H. SMAOUI, «MODELISATION DU TRANSPORT SEDIMENTAIRE DANS LE SECTEUR DES DEUX CAPS (DETROIT DU PAS DE CALAIS)», SYMPOSIUM MANCHE - FLUX ET PROCESSUS A L'ECHELLE D'UNE MER MACROTIDALE , IFREMER CENTRE DE BREST (1992)
- G. CHAPALAIN, H. SMAOUI, A. LEPRETRE, K.D. NGUYEN, A. OUAHSINE & B. TESSIER, «MODELLING OF TIDALLY-INDUCED HYDRO-SEDIMENTARY PROCESSES IN THE COASTAL ZONE OF THE SOUTHERN PART OF THE DOVER STRAIT», OCEANOLOGICA ACTA, VOL. 16, N° 5-6, P 517-529 (1993)
- P. CLABAUT, «DYNAMIQUE SEDIMENTAIRE DANS LE DETROIT DU PAS DE CALAIS (LARGE DES COTES FRANCAISES)», THESE DE 3EME CYCLE, N° 88LIL10083, UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES-ARTOIS (1988)
- P.M. CLIQUE, COLLECTION DE LA DIRECTION DES ETUDES ET RECHERCHES D'ELECTRICITE DE FRANCE, LNH-LCHF, EDITION EYROLLES, VOL 61, «CATALOGUE SEDIMENTOLOGIQUE DES COTES FRANÇAISES - COTES DE LA MER DU NORD ET DE LA MANCHE. A. DE LA FRONTIERE BELGE A LA BAIE DE SOMME» (1986)
- COLEBROOK, «TURBULENT FLOW IN PIPES, WITH PARTICULAR REFERENCE TO THE TRANSITION REGION BETWEEN THE SMOOTH AND ROUGH PIPE LAWS», J. INST. CIV. ENG. LOND., VOL. 11, PP 133-156 (1938)
- N.L. COLEMAN, «A THEORITICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF DRAG AND LIFT FORCES ACTING ON A SPHERE RESTING ON A HYPOTHETICAL STREAMBED», INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR HYDRAULIC RESEARCH, VOL 185, C22.1-C22.8, PP 185-192

- J. COUSTEIX, «TURBULENCE ET COUCHE LIMITE», COLLECTION LA CHEVECHE, CEPADUES-EDITIONS, FRANCE (1989)
- S. DEWEZ, «SEDIMENTATION ET DYNAMIQUE EN MANCHE ORIENTALE (DE LA BAIE D'AUTHIE AU CAP D'ALPRECH)», THESE DE 3EME CYCLE, N° 88LIL10011, UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES-ARTOIS (1988)
- G. DHATT & G. TOUZOT, «UNE REPRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS», MALOINE S.A. EDITEUR PARIS, COLLECTION UNIVERSITE DE COMPIEGNE, 2IEME EDITION (1984)
- F. ENGELUND, «A CRITERION FOR THE OCCURENCE OF SUSPENDED LOAD», LA HOUILLE BLANCHE, VOL. 8, PP 7
- J.D. FENTON, «A NINTH-ORDER SOLUTION FOR THE SOLITARY WAVE», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL 4, PP 257-271 (1972)
- J.D. FENTON & M.M. RIENECKER, «A FOURRIER METHOD FOR SOLVING NON LINEAR WATER-WAVES PROBLEMS : APPLICATION TO SOLITARY WAVE INTERACTIONS», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 118, PP 411-443 (1982)
- K.O. FREIDRICH, «ON THE DEVIATION OF THE SHALLOW WATER THEORY», APPENDIX TO THE FORMATION OF BREAKERS AND BORES BY J.J. STOKER, COMMUN. PURE APPL. MATH., VOL. 1, PP 81-5 (1948)
- A. GARAPON, J. PIQUET & M.VISONNEAU, «CALCUL DE L'ECOULEMENT VISQUEUX TURBULENT AUTOUR D'UNE CARENE DE SERIES 60 EN PRESENCE D'UNE SURFACE LIBRE», PP 443-457, 5IEME JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE, 22-24 MARS 1995, ROUEN, FRANCE (1995)
- M.A. GROSENBAUGH & R.W. YEUNG, «NONLINEAR FREE SURFACE FLOW AT A TWO DIMENSIONAL BOW», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL 209, PP 55-75 (1989)
- S. GUILLOU & K.D. NGUYEN, «MODELISATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS COTIERS PAR UNE TECHNIQUE DE VOLUMES FINIS EN COORDONNEES GENERALISEES», 12EME CONGRES FRANCAIS DE MECANIQUE, STRASBOURG, P 285 (1995)
- D.B. HAIDVOGEL, J.L. WILKIN & R. YOUNG, «A SEMI SPECTRAL PRIMITIV EQUATION OCEAN CIRCULATION MODEL USING VERTICAL SIGMA AND ORTHOGONAL CURVILINEAR HORIZONTAL COORDINATES», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 94, PP 151-185 (1991)
- M. HINO, M. SAWAMOTO & S. TAKASU, «EXPERIMENTS ON TRANSITION TO TURBULENCE IN AN OSCILLATORY PIPE FLOW», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 75, PP 193-207 (1976)
- M. HINO, M. KASHIWAYANAGI & S. TAKASU, «EXPERIMENTS ON THE TURBULENCE STATISTICS AND THE STRUCTURE OF A RECIPROCATING OSCILLATORY FLOW», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 151, PP 363-400 (1983)
- C.W. HIRT, A.A. AMSDEN & J.L. COOK, «AN ARBITRARY LAGRANGIAN-EULERIAN COMPUTING METHOD FOR ALL FLOW SPEEDS», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 14, PP 227-253 (1974)
- C.W. HIRT & B.D. NICHOLS, «VOLUME OF FLUID (VOF) METHOD FOR THE DYNAMICS OF FREE BOUNDARIES», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 39, PP 201-225 (1981)
- HUYNH-THANH S., «ETUDE NUMERIQUE DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE OSCILLATOIRE GENEREE PAR L'INTERACTION HOULE-COURANT EN ZONE COTIERE», THESE DE DOCTORAT, N° 90INPG0101, I.N.P. DE GRENOBLE (1990)
- B.L. JENSEN, B.M. SUMER & J. FREDSOE, «TURBULENT OSCILLATORY BOUNDARY LAYERS AT HIGH REYNOLDS NUMBERS», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 206, PP 265-297 (1989)
- D.B. JOHNSON, P.E. RAAD & S.CHEN, «SIMULATION OF IMPACTS OF FLUID FREE SURFACES WITH SOLID BOUNDARIES», INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS, VOL. 19, PP 153-176 (1993)

- M. KAWAHARA & T. MIWA, «FINITE ELEMENT ANALYSIS OF WAVE MOTION», INT. J. NUMER. METH. ENG., VOL. 20, N°7, PP 1193-1210 (1984)
- G.H. KEULEGAN, «ENERGY DISSIPATION IN STANDING WAVES IN RECTANGULAR BASINS», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 6. PP 33-50 (1959)
- P.D. KOMAR & M.C. MILLER, «THE THRESHOLD OF SEDIMENT MOVEMENT UNDER OSCILLATORY WATER WAVES», JOURNAL OF SEDIMENTARY PETROLOGY, VOL 43, N° 4, PP 1101-1110 (1973)
- D.J. KORTEWEG & G. DE VRIES, «ON THE CHANGE OF FORM OF LONG WAVE ADVANCING IN A RECTANGULAR CANAL AND ON A NEW TYPE OF LONG SOLITARY WAVES», PHIL. MAG., SER. 5, VOL 39, P 422-443 (1895)
- D.B. KOTHE & R.C. MJOLSNESS, «RIPPLE : A NEW MODEL FOR INCOMPRESSIBLE FLOWS WITH FREE SURFACES», AIAA JOURNAL, VOL. 30, PP 2696-2700 (1992)
- D.B. KOTHE, R.C. JOLSNESS & M.T. TORREY, «RIPPLE : A COMPUTER PROGRAM FOR INCOMPRESSIBLE FLOWS WITH FREE SURFACES», LANL REPORT LA-12007-MS (1994)
- R.B. KRONE, «FLUME STUDIES OF THE TRANSPORT OF SEDIMENT IN ESTUARIAL SHOALING PROCESSES», UNIVERSITY OF CALIFORNIA HYDRAULIC ENGINEERING LABORATORY AND SANITATION RESEARCH LABORATORY, BERKELEY, CALIF.
- B. LAFAURIE, C. NARDONE, R. SCARDOVELLI, S. ZALESKI & G. ZANETTI, «MODELLING MERGING AND FRAGMENTATION IN MULTIPHASE FLOWS WITH SURFERS», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 114, PP 134-147 (1994)
- E. V. LAITONE, «THE SECOND APPROXIMATION TO CNOIDAL AND SOLITARY WAVES», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 9, PP 430-444 (1960)
- H. LAMB, «HYDRODYNAMICS», CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS, 6TH EDITION (1932)
- C. LE PROVOST, «A MODEL FOR PREDICTION OF TIDAL ELEVATIONS OVER THE ENGLISH CHANNEL», OCEANOLOGICA ACTA, VOL 4, N°3, PP 279-288 (1981)
- C. LE PROVOST & M. FORNERINO, « LES COURANTS RESIDUELS DANS UN MODELE BIDIMENTIONEL DE MAREES LITTORALES », SOCIETE HYDROTECHNIQUE DE FRANCE, «L'HYDRAULIQUE ET LA MAITRISE DU LITTORAL», XVIIIEME JOURNEES DE L'HYDRAULIQUE, MARSEILLE, 11-13 SEPTEMBRE 1984
- H. LI, «STABILITY OF OSCILLATORY LAMINAR FLOW ALONG A WALL», U.S. ARMY CORPS OF ENGINEERS, BEACH EROSION BOARD, TECH. MEMO., N°47, PP48 (1954)
- H. LIU & M. IKEHATA, «COMPUTATION OF FREE SURFACE WAVES AROUND AN ARBITRAY BODY BY A NAVIER-STOKES SOLVER USING THE PSEUDOCOMPRESSIBILITY TECHNIQUE», INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS, VOL. 19, PP 395-413 (1994)
- LOISEAU F. & MICHEAU P., «VALIDATION OF A NUMERICAL PROGRAM ON TWO DIMENSIONAL FREE SURFACE FLOWS : SIMULATION OF A SOLITARY WAVE EVOLUTION», ECCOMAS 96, THIRD ECCOMAS COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS CONFERENCE, PARIS - FRANCE, 9-13 SEPTEMBRE 1996, P1000-1006.
- D.R. LYNCH & F.E. WERNER, «LONG-TERM SIMULATION AND HARMONIC ANALYSIS OF NORTH SEA/ENGLISH CHANNEL TIDES», VII INT'L CONFERENCE ON COMPUTATIONAL METHODS IN WATER RESOURCES, MIT (1988)
- P. MARSALEIX, «MODELISATION TRIDIMENTIONNELLE DE LA CIRCULATION OCEANIQUE DANS LE GOLF DU LION», THESE DE 3EME CYCLE, N° 93TOU30072, TOULOUSE 3 (1993)
- J.L. MAUVAIS, «THE ROLE OF HYDRODYNAMICS IN ENVIRONNEMENTAL STUDIES. THE CASE OF TIDAL SEAS», OCEANOLOGICA ACTA, VOL. SP. 11, PP29-46 (1991)
- T. MAXWORTHY, «EXPERIMENTS ON COLLISIONS BETWEEN SOLITARY WAVES», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 76, PP 177-185 (1976)

- C.C. MEI, 'THE APPLIED DYNAMIC OF OCEAN SURFACE WAVES', ADVANCED SERIES ON OCEAN ENGINEERING - VOL. 1, WORLD SCIENTIFIC EDITION, 2ND EDITION (1992)
- W. MERZKIRCH, «FLOW VISUALISATION», ACADEMIC PRESS, LONDON (1987)
- H. MIYATA, S. NISHIMURA & A. MASUKO, «FINITE DIFFERENCE SIMULATION OF NONLINEAR WAVES GENERATED BY SHIPS OF ARBITRARY THREE-DIMENSIONAL CONFIGURATION», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 60, N°3, PP 391-436 (1985)
- H. MIYATA, «FINITE-DIFFERENCE SIMULATION OF BREAKING WAVES», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 65, N°1, PP 179-214 (1986)
- H. MIYATA, T. SATO & N. BABA, «DIFFERENCE SOLUTION OF A VISCOUS FLOW WITH FREE-SURFACE WAVE ABOUT AN ADVANCING SHIP», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 72, N°2, PP 393-421 (1987)
- C. NEWELL, «THE HISTORY OF THE SOLITON», JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, TRANSACTION OF ASME, VOL 50, PP 1127-1138 (1983)
- K.D. NGUYEN, «MODELISATION NUMERIQUE D'ECOULEMENTS COTIERS & TECHNIQUES DE RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIERS-STOKES EN COORDONNEES GENERALISEES», DOCUMENT DE SYNTHESE PRESENTE POUR L'OBTENTION DE L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES, UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE (1993)
- B.D. NICHOLS, C.W. HIRT & R.S. HOTCHKISS, «SOLA SURF : A SOLUTION ALGORITHM FOR TRANSIENT FLUID FLOW WITH MULTIPLE FREE BOUNDARIES», LOS ALAMOS SCIENTIFIC REPORT, LA-8355 (1980)
- J. NIKURADSE, «GESETZMASSIGKEITEN DER TURBULENTEN STROMUNG IN GLATTEN ROHREN», VER. DTSCH. ING. FORSCHUNGSH, VOL. 356 (1932)
- J. NIKURADSE, «LAWS OF FLOW IN ROUGH PIPES», NAT. ADVISORY COMM. AERONAUTICS TECH MEMO 1292 (TRANSLATION TO GERMAN, 1950) (1933)
- M. W. OWEN, «PROBLEMS IN THE MODELLING OF TRANSPORT, EROSION, AND DEPOSITION OF COHESIVE SEDIMENTS», MARINE TRANSPORT, CH 12, PP515-537
- E. PARTHENIADES, «EROSION AND DEPOSITION OF COHESIVE SOILS», PROC. AM. SOC. CIV. ENG., VOL 91, HY1, PP 105-139 (1965)
- B. RAMASWAMY, «NUMERICAL SIMULATION OF UNSTEADY VISCOUS FREE SURFACE FLOW», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 90, N° 2, PP 396-430 (1990)
- D.P. RENOARD, F.J. SEABRA SANTOS & TEMPERVILLE, «EXPERIMENTAL STUDY OF THE GENERATION, DAMPING, AN REFLEXION OF A SOLITARY WAVE », DYNAMICS OF ATMOSPHERES AND OCEANS, VOL. 9, PP341-358 (1985)
- T. SATO & S.M. RICHARDSON, «NUMERICAL SIMULATION METHOD FOR VISCOELASTIC FLOWS WITH FREE SURFACES - FRINGE ELEMENT GENERATION METHOD», INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS, VOL. 19, PP 555-574 (1994)
- F.J. SEABRA SANTOS, «CONTRIBUTION A L'ETUDE DES ONDES DE GRAVITE BIDIMENSIONNELLES PEU PROFONDES», THESE DE DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES, UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE ET L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE (1985)
- F.J. SEABRA SANTOS, A. TEMPERVILLE & D. RENOARD, «ON THE WEAK INTERACTION OF TWO SOLITARY WAVES », EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS, B/FLUIDS, N°2, VOL. 8, PP103-115 (1989)
- H. SCHLICHTING, «BOUNDARY LAYER THEORY», MAC GRAW HILL, SEVENTH EDITION (1979)
- A. SHIELD, «ANWENDUNG DER AENLICHKEITSMCHANIK UND DER TURBULENZFORSCHUNG AUF DIE GESCHIEBEBEWEGUNG», VERSUCHSANSTALT FUR WASSER, ERD UND SCHIFFBAU, N° 26, BERLIN PRESS, BERLIN, GERMANY, TRANSLATED BY W.P. OTT & J.C. VAN UCHELEN AS «

- APPLICATION OF SIMILARITY PRINCIPLES AND TURBULENCE RESEARCH TO BED-LOAD MOVEMENT», CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, PASADENA, CALIF.
- K.T. SHUM, «A NUMERICAL STUDY OF THE WAVE-INDUCED SOLUTE TRANSPORT ABOVE A RIPPLED BED», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL 299, PP 289-331 (1995)
 - P.A. SMITH & P.K. STANSBY, «WAVE-INDUCED BED FLOWS BY A LAGRANGIAN VORTEX SCHEME», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 60, PP 489-516 (1985)
 - R.L. SOULSBY, L. HAMM, G. KLOPMAN, D. MYRHAUG, R.R. SIMONS & G.P. THOMAS, « WAVE-CURRENT INTERACTION WITHIN AND OUTSIDE THE BOTTOM BOUNDARY LAYER», COASTAL ENGINEERING, VOL 21, PP 41-69 (1993)
 - G.G. STOKES, «ON THE EFFECTS OF THE INTERNAL FRICTION OF FLUIDS ON THE MOTION OF PENDULUMS», TRANS. CAMB. PHIL. SOC., VOL. 9, PP 20-21 (1851)
 - C.H. SU & RIDA M. MIRIE, «ON HEAD-ON COLLISIONS BETWEEN TWO SOLITARY WAVES», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL 98, PP 509-525 (1980)
 - SUNDERMANN & W. LENZ, «SEDIMENT TRANSPORT MODELLING WITH APPLICATIONS TO THE NORTH SEA», IN «NORTH SEA DYNAMICS», SPRINGER-VERLAG, SUNDERMANN & KLOCKER, PP 453-471 (1983)
 - H. TANAKA & A. SANA, «NUMERICAL STUDY ON TRANSITION TO TURBULENCE IN A WAVE BOUNDARY LAYER», EUROMECH 310, «SEDIMENT TRANSPORT MECHANISMS IN COASTAL ENVIRONMENTS AND RIVERS, 13-17 SEPTEMBRE 1993, LE HAVRE, FRANCE, WORLD SCIENTIFIC PUBLISHING, PP 14-25 (1993)
 - C.J. TANG, V.C. PATEL & L. LANDWEBER, «VISCIOUS EFFECTS ON PROPAGATION AND REFLECTION OF SOLITARY WAVES IN SHALLOW CHANNELS», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 88, PP 86-113 (1990)
 - A. TEMPERVILLE, «CONTRIBUTION A LA THOERIE DES ONDES DE GRAVITE EN EAU PEU PROFONDE», THESE DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES MATHEMATIQUES, UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE ET L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE (1985)
 - A. TEMPERVILLE & TRAN THU T., «COUCHE LIMITE OSCILLATOIRE SUR UN FOND MARIN EN PRESENCE DES RIDES POINTUES», SEME JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE, 22-27 MARS 1995, ROUEN, FRANCE, PP 145-157 (1995)
 - T.G. THOMAS, D.C. LESLIE & J.J.R. WILLIAMS, «FREE SURFACE SIMULATIONS USING A CONSERVATIVE 3D CODE», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 116, N°1, PP 52-68 (1995)
 - J.F. THOMPSON, F.C. THAMES & C.W. MASTIN, «AUTOMATIC NUMERICAL GENERATION OF BODY-FITTED CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM FOR FIELDS CONTAINING ANY NUMBER OF ARBITRARY TWO-DIMENSIONAL BODIES», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 15, PP 299-302 (1974)
 - J.F. THOMPSON, F.C. THAMES & C.W. MASTIN, «TOMCAT- A CODE FOR NUMERICAL GENERATION OF BOUNDARY-FITTED CURVILINEAR COORDINATES SYSTEMS ON FIELDS CONTAINING ANY NUMBER OF ARBITRARY TWO DIMENSIONAL BODIES», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 24, PP 274-302 (1977)
 - J.F. THOMPSON, Z.U.A. WARSI & C.W. MASTIN, «NUMERICAL GRID GENERATION : FOUNDATIONS AND APPLICATIONS», ELSIVER EDITION, NEW-YORK (1985)
 - M.F. TOME & S. MCKEE, «GENSMAC : A COMPUTATIONAL MARKER AND CELL METHOD FOR FREE SURFACE FLOWS IN GENERAL DOMAINS», JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, VOL. 110, N°1, PP 171-186 (1994)
 - L.C. VAN RIJN, «SEDIMENT TRANSPORT», PART 1, «BEDLOAD TRANSPORT», J. HYDRAUL. DIV., AM. SOC. CIV. ENGRS., VOL 110, N° 10, PP 1431-1456 (1984)

- L.C. VAN RIJN, «SEDIMENT TRANSPORT», PART 2, «SUSPENDED LOAD TRANSPORT», J. HYDRAUL. DIV., AM. SOC. CIV. ENGRS., VOL 110, N° 11, PP 1494-1502 (1984)
- O. VICAIRE, «DYNAMIQUE HYDRO-SEDIMENTAIRE EN MER DU NORD MERIDIONALE (DU CAP BLANC-NEZ A LA FRONTIERE BELGE)», THESE DE 3EME CYCLE, N° D'ORDRE : 91LIL10168, UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES-ARTOIS (1991)
- P.D. WEIDMAN & T. MAXWORTHY, «EXPERIMENTS ON STRONG INTERACTIONS BETWEEN SOLITARY WAVES», JOURNAL OF FLUID MECHANICS, VOL. 85, PP 417-431 (1978)
- J.E. WELCH, F.H. HARLOW, J.P. SHANNON & B.J. DALY, «THE MAC METHOD - A COMPUTING TECHNIQUE FOR SOLVING VISCOUS, INCOMPRESSIBLE, TRANSIENT FLUID-FLOW PROBLEMS INVOLVING FREE SURFACES», LOS ALAMOS SCIENTIFIC LABORATORY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LA - 3425 (1968)
- WEINSTEIN, «SUR LA VITESSE DE PROPAGATION DE L'ONDE SOLITAIRE», PROC. 2ND INT. CONGR. APPL. MECH., ZURICH, PP 448-453 (1926)
- G.B. WHITHAM, «LINEAR AND NONLINEAR WAVES», PURE AND APPLIED MATHEMATICS, A WILEY-INTERSCIENCE SERIES OF TEXTS, MONOGRAPHS AND TRACTS (1973)
- C.T. YANG & A.M. ASCE, «INCIPIENT MOTION AND SEDIMENT TRANSPORT», JOURNAL OF HYDRAULICS DIVISION, HY10, P1679-1704 (1973)
- O.C. ZIENKIEWICZ, «THE FINITE ELEMENT METHOD», VOL. 1, «BASIC FORMULATION AND LINEAR PROBLEMS», MAC GRAW HILL, 4TH EDITION (1989)
- O.C. ZIENKIEWICZ, «THE FINITE ELEMENT METHOD», VOL. 2, «SOLID AND FLUID MECHANICS DYNAMICS AND NON-LINEARITY», MAC GRAW HILL, 4TH EDITION (1991)

ANNEXE A1. : EXEMPLES D'APPLICATIONS

TABLE DES MATIERES :

ANNEXE A1. : EXEMPLES D'APPLICATIONS.....	159
AMORTISSEUR À HOULE.....	162
DIGUE DE FORME QUADRILATÉRALE.....	164

Outre les applications qui sont traitées dans ce document, nous montrons certains exemples pratiques que le code de calcul développé peut facilement traiter.

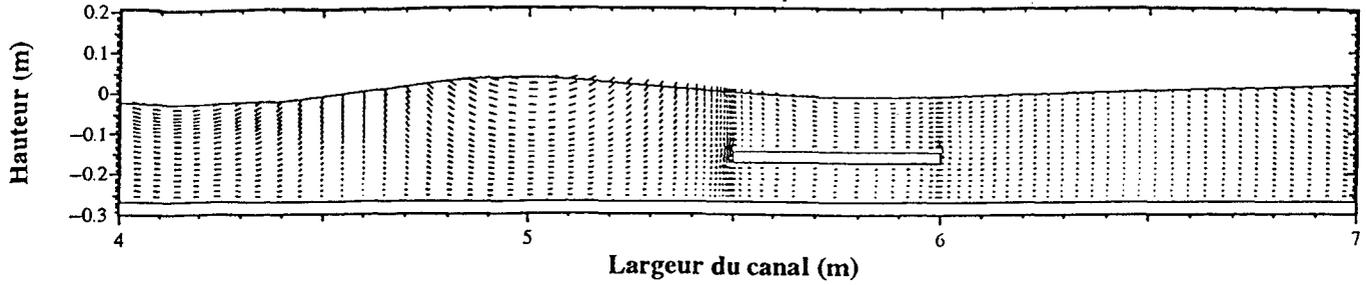
Ces exemples sont principalement liés aux problèmes d'interaction fluide-structure qu'on rencontre dans le domaine du génie côtier et du génie civil :

- AP 1.1 a&b : amortisseur à houle.
- AP 1.2 a&d : digue de forme quadrilatérale.

AP 2.1.a : amortisseur à houle, visualisations globales.

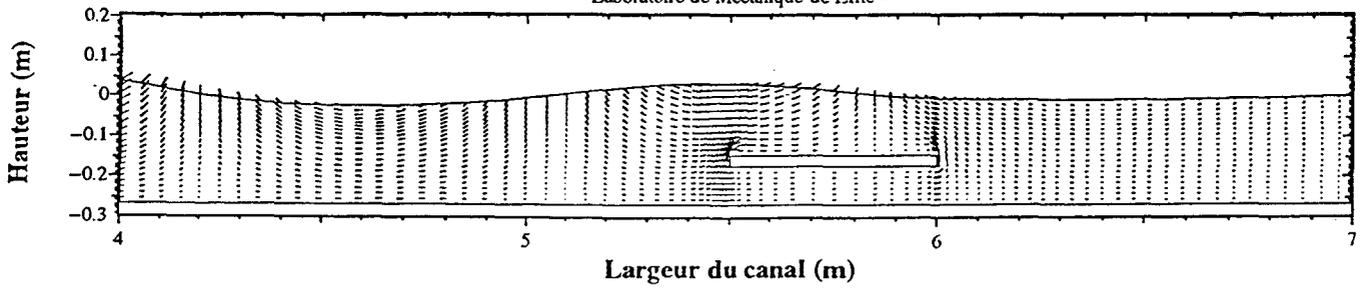
CHAMPS DE VITESSE

- Laboratoire de Mécanique de Lille -



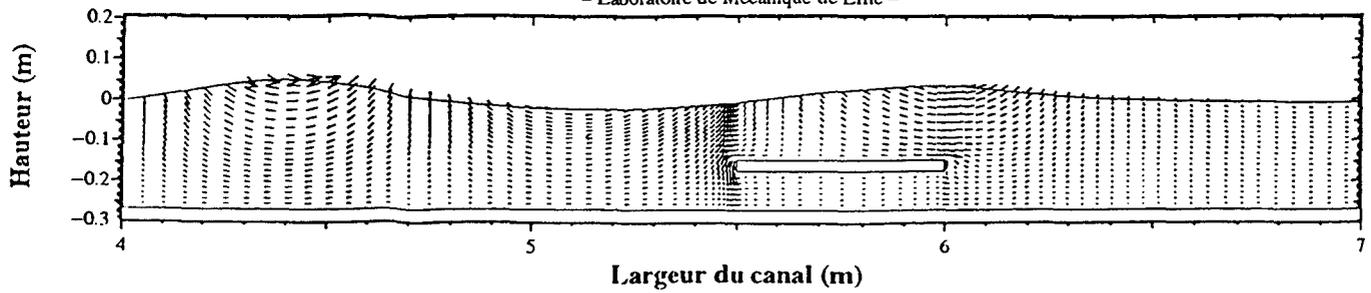
CHAMPS DE VITESSE

- Laboratoire de Mécanique de Lille -

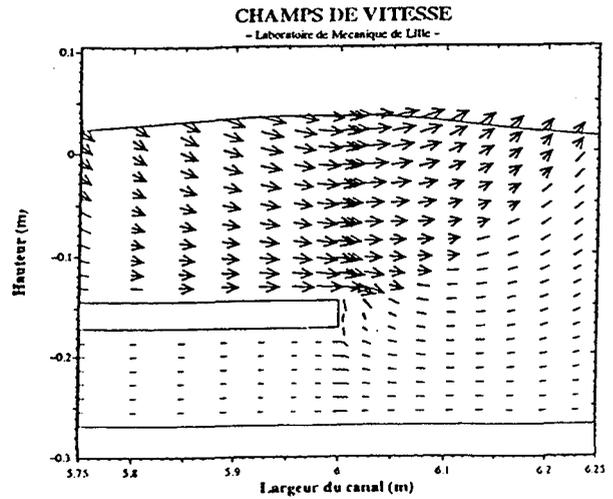
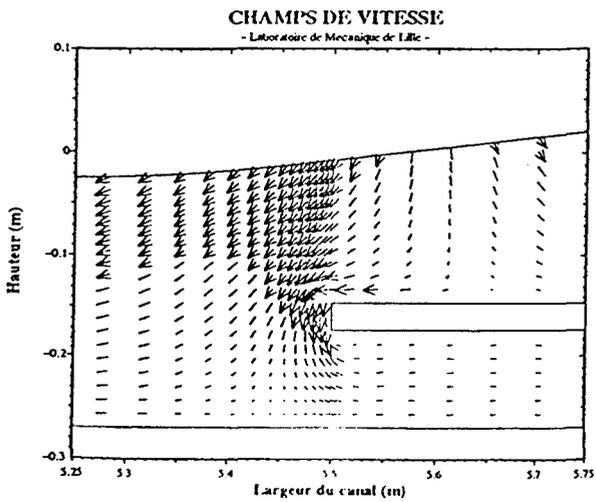
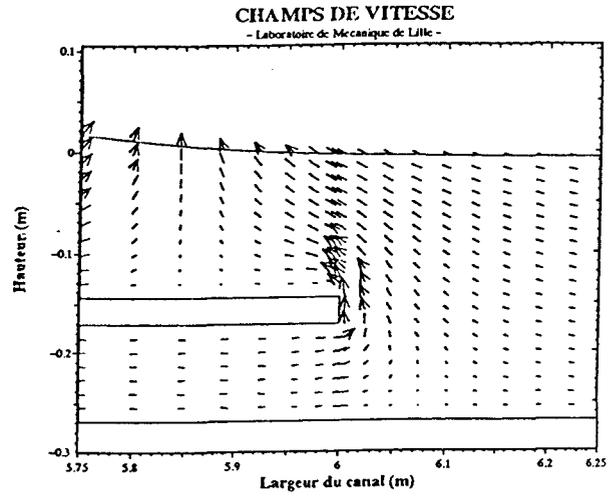
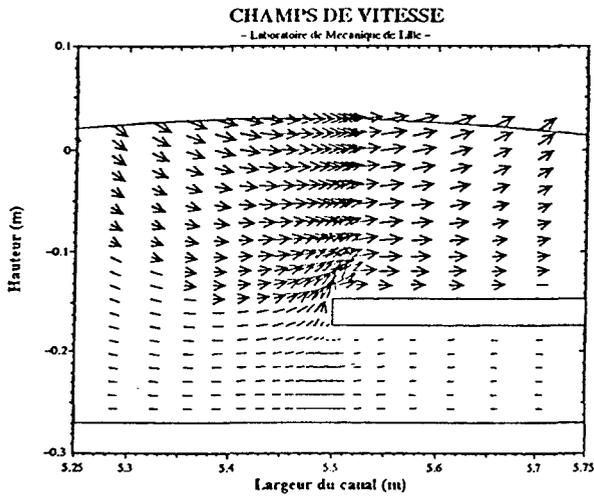
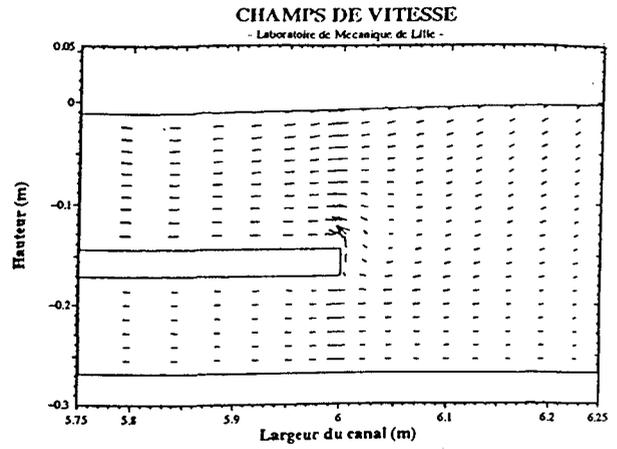
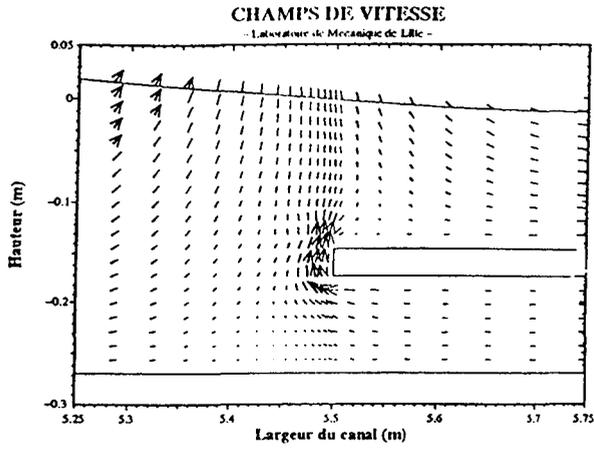


CHAMPS DE VITESSE

- Laboratoire de Mécanique de Lille -



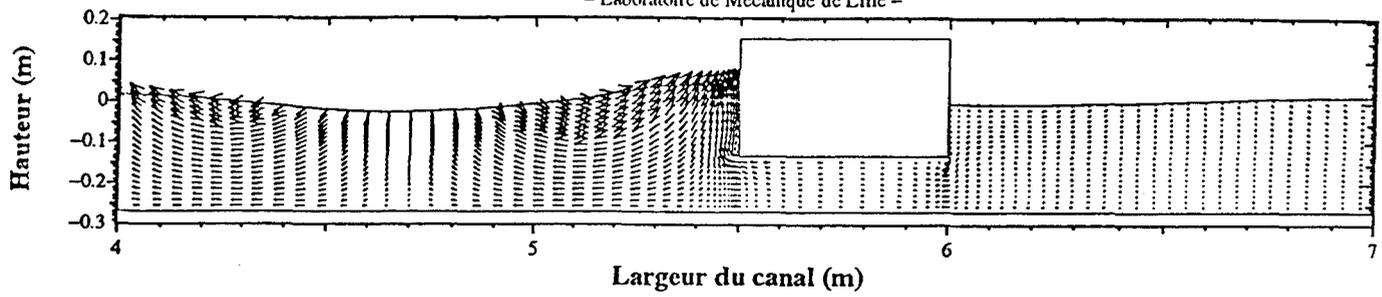
AP 2.1.b : amortisseur à houle, visualisations locales de AP 2.1.a.



AP 2.2.a : digue de forme quadrilatérale, visualisations globales des résultats pour certaines phases.

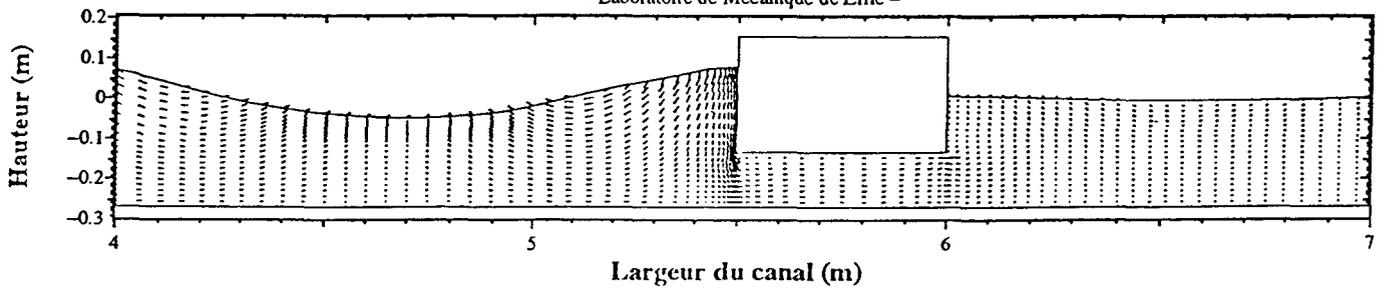
CHAMPS DE VITESSE

- Laboratoire de Mécanique de Lille -



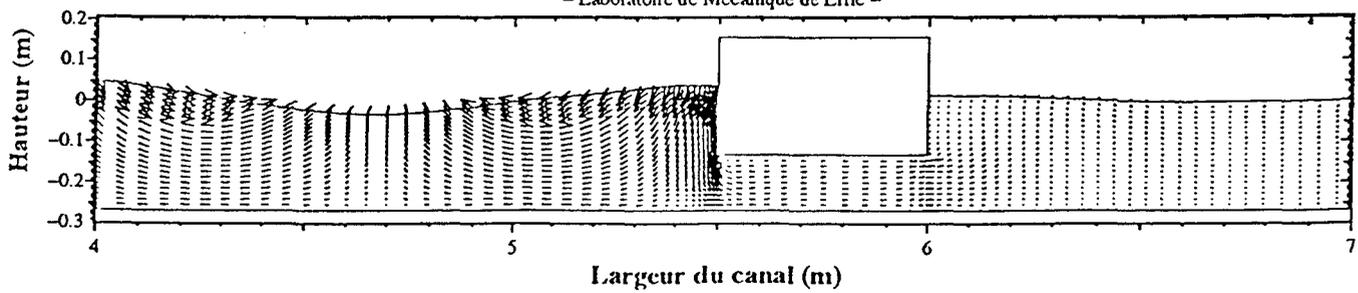
CHAMPS DE VITESSE

- Laboratoire de Mécanique de Lille -

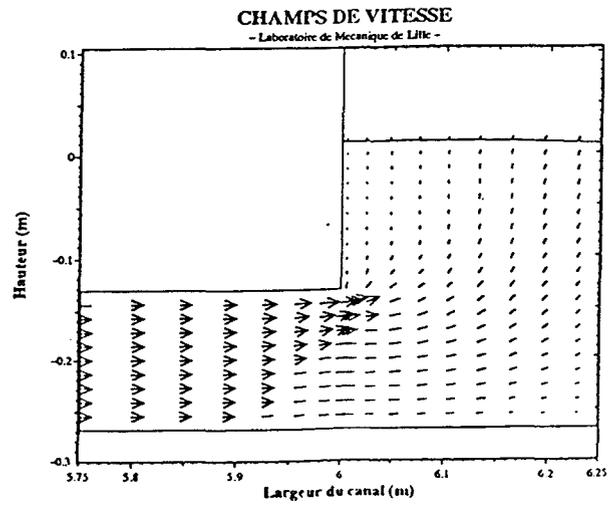
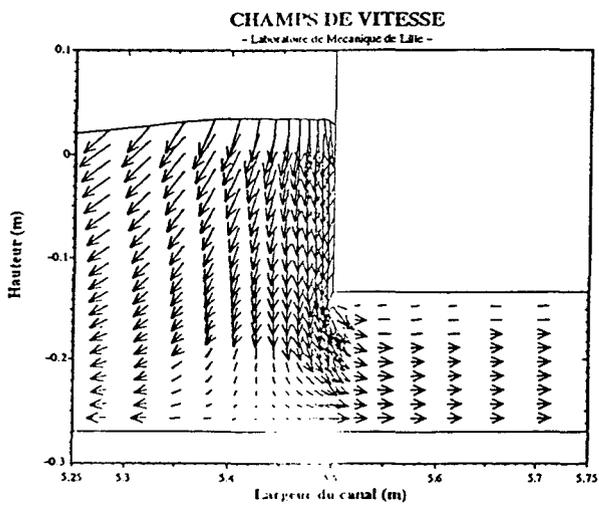
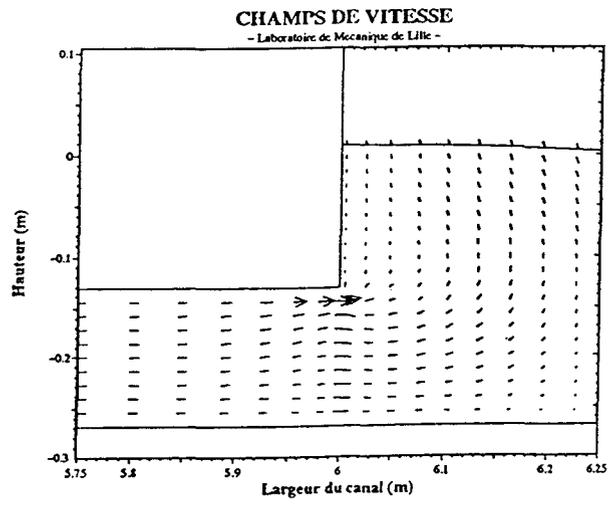
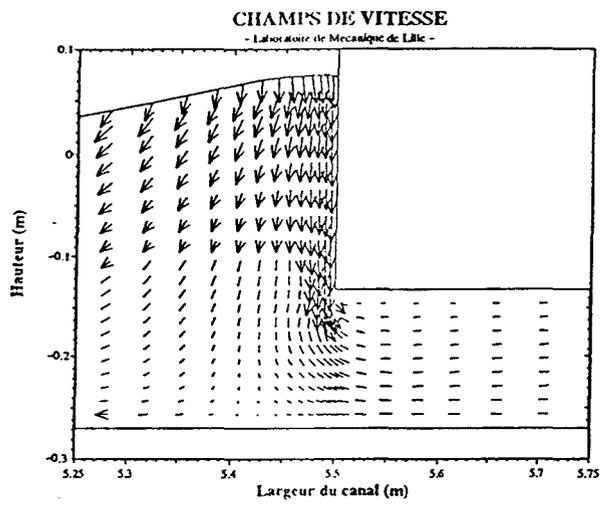
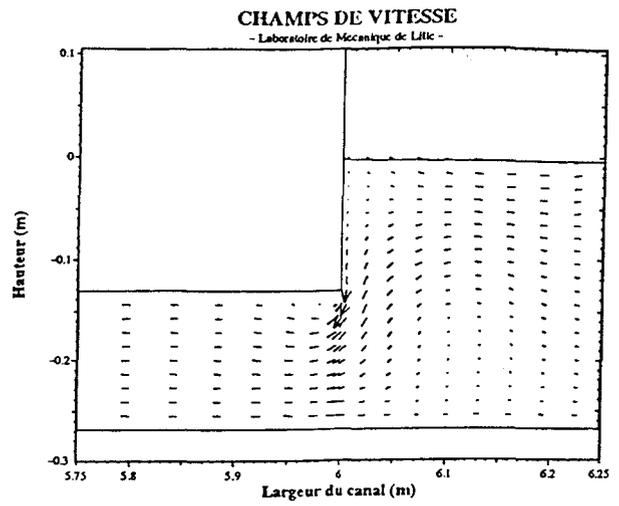
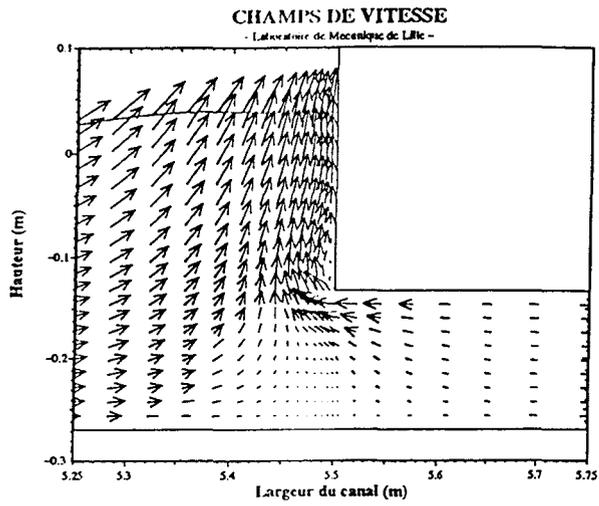


CHAMPS DE VITESSE

- Laboratoire de Mécanique de Lille -



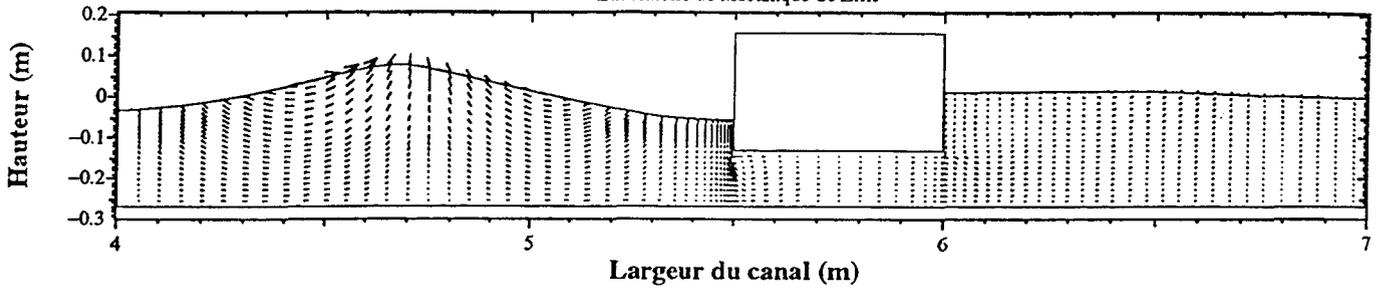
AP 2.2.b : digue de forme quadrilatérale, visualisations locales de AP 2.2.a.



AP 2.2.c : digue de forme quadrilatérale, visualisations globales des résultats pour certaines phases.

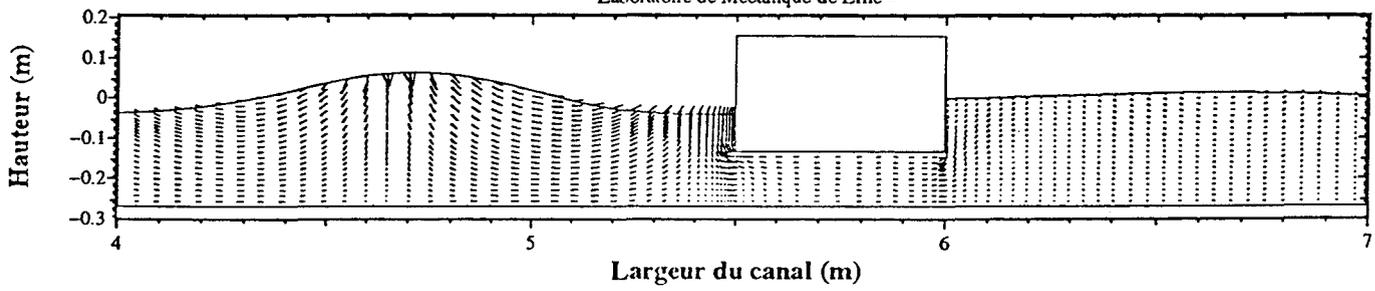
CHAMPS DE VITESSE

- Laboratoire de Mécanique de Lille -



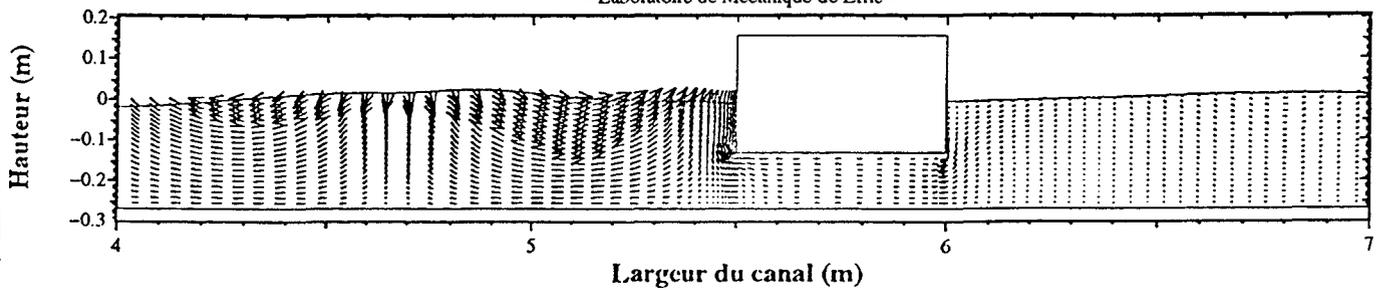
CHAMPS DE VITESSE

- Laboratoire de Mécanique de Lille -

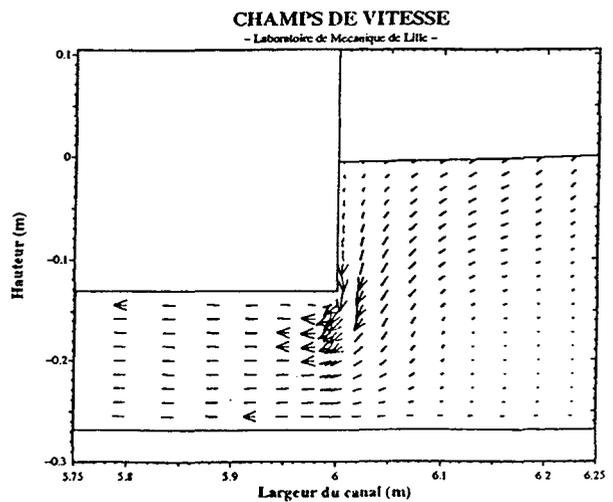
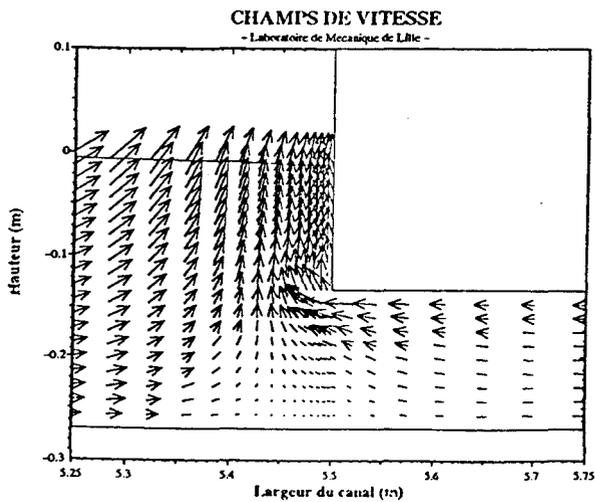
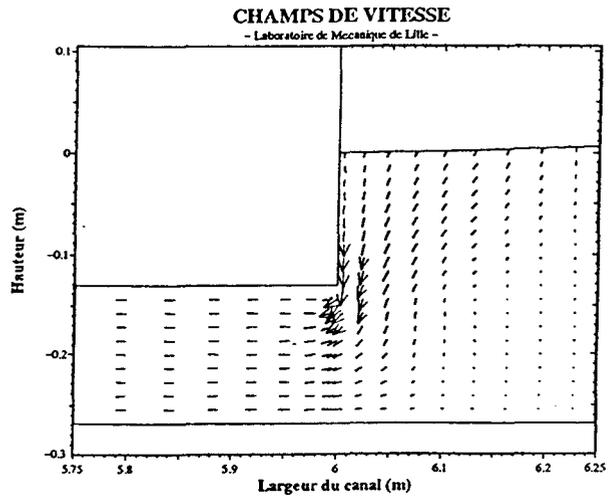
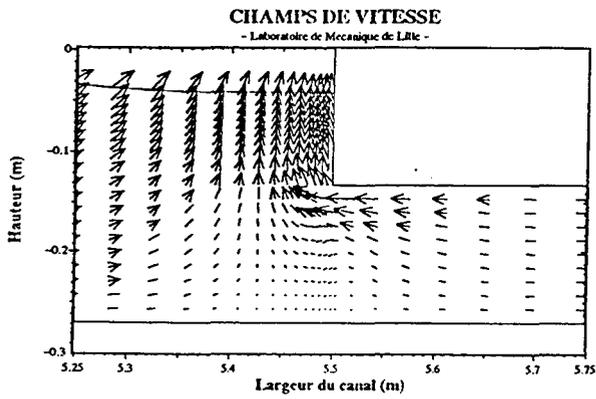
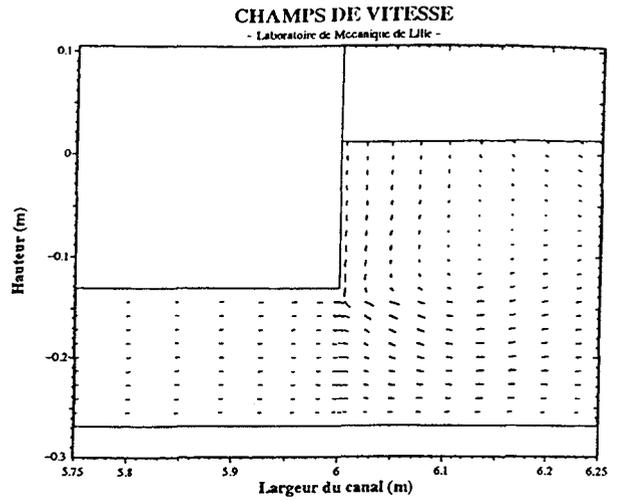
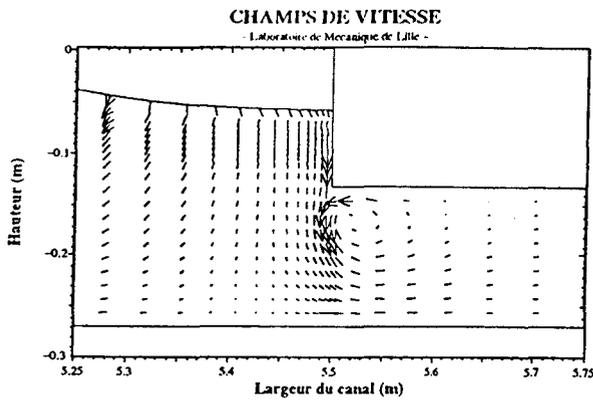


CHAMPS DE VITESSE

- Laboratoire de Mécanique de Lille -



AP 2.2.d : digue de forme quadrilatérale, visualisations locales de AP 2.2.c.



ANNEXE A2. : CONTRAINTES A LA SURFACE LIBRE

TABLE DES MATIERES :

ANNEXE A2. : CONTRAINTES A LA SURFACE LIBRE	169
---	-----

A la surface libre, on a l'égalité des contraintes présentes.

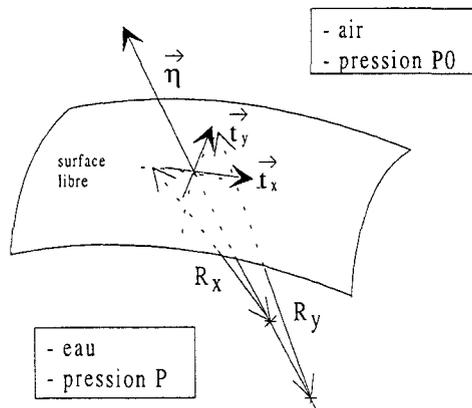


Figure F 2.1 : repère local définissant l'état de la surface libre.

Suite aux hypothèses adoptées dans le chapitre 2.7.3, la seule contrainte qu'on est amené à prendre en compte dans le milieu atmosphérique est la pression atmosphérique P_0 .

On prend en considération la tension superficielle agissant sur l'interface air-eau (figure F A2.1) :

$$\tau_{\text{superficielle}} = \gamma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) \quad [\text{E A2.1}]$$

où R_x et R_y représentent les rayons de courbure suivant les vecteurs τ_x et τ_y tangents à la surface définie par le vecteur normal \vec{n} :

$$\tau_{\text{superficielle}} = \gamma \sum C_{\text{courbure}} = \gamma (\nabla \cdot \vec{n}) \quad [\text{E A2.2}]$$

$$\Rightarrow \tau_{\text{superficielle}} = \gamma \frac{-1}{(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)^{3/2}} \left[(1 + \eta_x^2) \eta_{yy} + (1 + \eta_y^2) \eta_{xx} - 2\eta_x \eta_y \eta_{xy} \right] \quad [\text{E A2.3}]$$

Dans notre cas d'étude, on a un écoulement plan X-Z :

$$R_y \rightarrow +\infty \quad [\text{E A2.4}]$$

$$\text{soit : } \frac{1}{R_y} = 0 \quad [\text{E A2.5}]$$

et :

$$\begin{cases} \eta_y = 0 \\ \eta_{yy} = 0 \\ \eta_{xy} = 0 \end{cases} \quad [\text{E A2.6}]$$

ce qui implique :

$$\tau_{\text{superficielle}} = \gamma \frac{-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad [\text{E A2.7}]$$

En définissant deux vecteurs unitaires \vec{n} et \vec{t} représentant respectivement le vecteur normal et le vecteur tangent à la surface libre dans le plan X-Z, on peut exprimer les contraintes à la surface libre dans le milieu aqueux (figure F A2.2) :

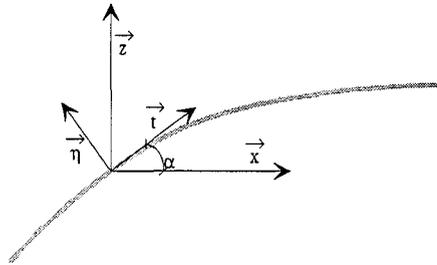


Figure F A2.2 : localisation des vecteurs normal et tangent à la surface libre.

$$\left(\tau_{ij}|_{\text{eau}} \cdot \vec{n} \right) \quad [\text{E A2.8}]$$

et dans l'air :

$$\left(\tau_{ij}|_{\text{air}} \cdot \vec{n} \right) \quad [\text{E A2.9}]$$

En écrivant l'égalité des contraintes tangentielles et normales entre les deux milieux au niveau de la surface libre, on aboutit aux deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \left(\tau_{ij}|_{\text{eau}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{t} = \left(\tau_{ij}|_{\text{air}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{t} \\ \left(\tau_{ij}|_{\text{eau}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n} = \left(\tau_{ij}|_{\text{air}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n} \end{cases} \quad [\text{E A2.10}]$$

Les deux vecteurs \vec{n} et \vec{t} ont pour expressions (avec $\text{tg}(\alpha) = \frac{\partial \eta}{\partial x}$) :

$$\vec{n} = \begin{cases} \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \end{cases} \quad [\text{E A2.11}]$$

$$\text{et : } \vec{t} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \\ \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \end{cases} \quad [\text{E A2.12}]$$

où η est la dénivellation de la surface libre par rapport à un niveau de référence.

Ceci nous amène à reformuler les égalités de contraintes précédemment établies [E A2.10] :

$$\begin{cases} \left(\tau_{ij} \Big|_{\text{eau}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{t} = 0 \\ \left(\tau_{ij} \Big|_{\text{eau}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{n} = -P_0 - \gamma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}} \end{cases} \quad [\text{E A2.13}]$$

Les contraintes à la surface libre ont pour expression :

$$\left(\tau_{ij} \Big|_{\text{eau}} \cdot \vec{n} \right) = \begin{pmatrix} \left(-P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(-P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2}} \quad [\text{E A2.14}]$$

Les deux égalités [E A2.13] prennent finalement la forme :

$$2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad [\text{E A2.15}]$$

et :

$$-P + \frac{2\mu}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -P_0 - \gamma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}} \quad [\text{E A2.16}]$$

ces deux dernières équations couplées avec l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad [\text{E A2.17}]$$

donnent :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{4 \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\left(1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)} \frac{\partial u}{\partial x} \quad [\text{E A2.18}]$$

$$-P + \frac{2\mu}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 - 1\right) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -P_0 - \gamma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad [\text{E A2.19}]$$

En intégrant la relation [E A2.18] dans l'équation [E A2.19], on obtient :

$$-P + \mu \left(2 - \frac{4}{1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} = -P_0 - \gamma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad [\text{E A2.20}]$$

$$\text{soit : } (P - P_0) = \Delta P = \mu \left(2 - \frac{4}{1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad [\text{E A2.21}]$$

ANNEXE A3. : L'ONDE SOLITAIRE DE GRAVITE

TABLE DES MATIERES :

ANNEXE A3. : L'ONDE SOLITAIRE DE GRAVITE.....	175
A3.1 : INTRODUCTION.....	176
A3.2 : LES HYPOTHESES.....	176
A3.3 : LES EQUATIONS.....	177
A3.4 : LA RESOLUTION.....	177

A3.1 : INTRODUCTION.

Nous rappelons ici les principaux travaux de LAITONE (1960) portant sur l'écoulement d'une onde solitaire de gravité. Il s'agit de rappeler les hypothèses utilisées pour décrire le problème, de préciser les équations ainsi obtenues et de décrire la démarche adoptée pour résoudre et apporter une solution approchée au problème.

A3.2 : LES HYPOTHESES.

Les hypothèses adoptées pour décrire les caractéristiques cinématiques et géométriques de ce type d'écoulement sont les suivantes :

- l'écoulement est 2D plan vertical,
- l'accélération de la gravité est prise en compte,
- l'onde est supposée évoluer suivant une vitesse de propagation constante C . Cette hypothèse permet une simplification appréciable dans l'écriture des équations gérant le problème,
- dans un repère mobile $\vec{\chi}$ se déplaçant à la vitesse C , le problème est stationnaire,

$$\vec{x} = \vec{\chi} - \vec{c} \cdot t \quad [E A3.1]$$

- le fluide est non visqueux,
- l'écoulement est irrotationnel,
- et la profondeur d'eau h au repos est constante (figure F 3.1).

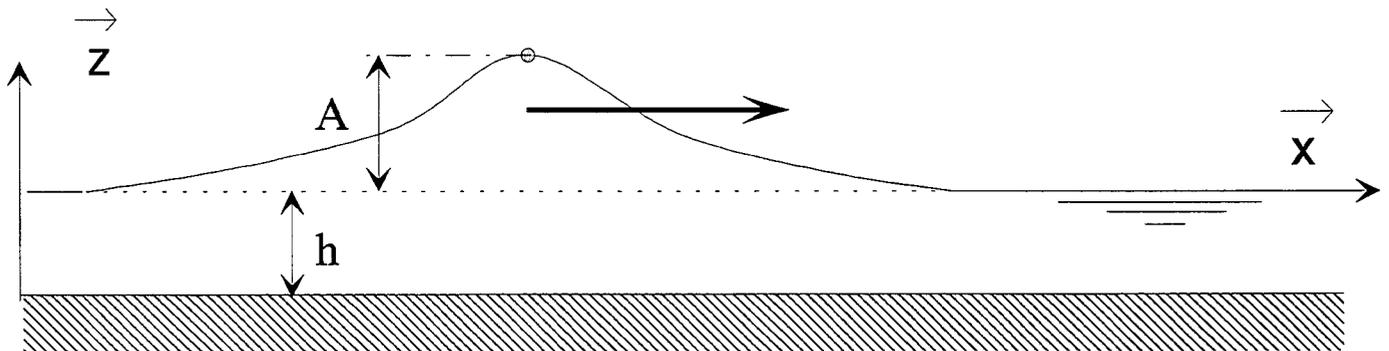


figure F A3.1 : représentation d'une onde solitaire se déplaçant sur un fond plat.

On introduit le paramètre σ correspondant à un rapport d'échelle dimensionnelle, à savoir :

$$\sigma = \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \quad [E A3.2]$$

où :

- h , est la longueur de référence transversale, soit la profondeur d'écoulement,
- λ , est la longueur de référence longitudinale, soit la longueur d'onde du signal.

Compte tenu du type de signal étudié, on supposera que le rapport σ est petit devant 1 :

$$\sigma \ll 1 \quad [\text{E A3.3}]$$

De même, le rapport de forme A/h de l'onde est supposé également inférieur à 1 :

$$\frac{A}{h} \ll 1 \quad [\text{E A3.4}]$$

A étant la dénivellation maximale de la surface libre par rapport au niveau moyen de l'écoulement.

A3.3 : LES EQUATIONS.

Dans le repère mobile, les équations de la mécanique des fluides peuvent être écrites en tenant compte des différentes hypothèses adoptées ci-dessus :

- pour l'équation de conservation de la masse :

$$u_x + v_z = 0 \quad [\text{E A3.5}]$$

- pour les équations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \bullet uu_x + vu_z = -\frac{1}{\rho} P_x \\ \bullet uv_x + vv_z = -\frac{1}{\rho} P_z - g \end{cases} \quad [\text{E A3.6}]$$

- l'écoulement étant supposé irrotationnel, on a également la relation :

$$v_x = u_z \quad [\text{E A3.7}]$$

Les conditions aux limites pour ce type de problème sont les suivantes :

- à la surface libre,

le fluide étant non visqueux, on a l'égalité des pressions en posant la pression atmosphérique constante sur le domaine :

$$P_{\text{surface}} - P_{\text{atmosphérique}} = 0 \quad [\text{E A3.8}]$$

l'équation cinématique est exprimée à la surface libre :

$$v(x, \eta) = u(x, \eta) \eta_x$$

- au fond, une condition de glissement est utilisée :

$$\begin{cases} \bullet u(x, -h) \neq 0 \\ \bullet v(x, -h) = 0 \end{cases} \quad [\text{E A3.9}]$$

A3.4 : LA RESOLUTION.

Une première étape consiste à effectuer une adimensionnalisation des différentes variables traitées :

- les variables spatiales x et z :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet X = \frac{x}{\lambda} \\ \bullet Z = \frac{z}{h} \end{array} \right. \quad [\text{E A3.10}]$$

- les paramètres géométriques :

⇒ la dénivellation de la surface libre par rapport au niveau moyen :

$$N = \frac{\eta}{h} \quad [\text{E A3.11}]$$

⇒ et le fond ($h=\text{constante}$) :

$$H=1 \quad [\text{E A3.12}]$$

- et enfin la vitesse et la pression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet U = \frac{u}{\sqrt{gh}} \\ \bullet V = \frac{v}{\sqrt{gh}} \frac{h}{\lambda} \end{array} \right. \quad [\text{E A3.13}]$$

$$P = \frac{\Delta p}{\rho gh} \quad [\text{E A3.14}]$$

Les variables, à savoir la vitesse (U,V), la pression P et la variable géométrique N sont dans un premier temps normalisées, elles sont ensuite réécrites sous la forme d'un développement en série de puissance à partir du petit paramètre σ :

$$F(X,Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_n(X,Z) \quad [\text{E A3.15}]$$

$$\text{sur le domaine : } -H \leq Z \leq N(X) \quad [\text{E A3.16}]$$

L'introduction sous la forme de série de puissance des différentes variables (U,V), P et N dans les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement ainsi que dans les équations décrivant les conditions aux limites, permet d'obtenir un système d'équation qui va nous fournir une approximation de la solution du problème.

On obtient ainsi une première approximation en écrivant l'égalité des termes jusqu'à d'ordre 3 :

$$\frac{u(x)}{\sqrt{gh}} = 1 + \left(\frac{2k^2 - 1}{2k^2} \right) \frac{A}{h} - \frac{\eta(x)}{h} + O\left(\frac{A}{h}\right)^2 \quad [\text{E A3.17}]$$

$$\frac{v(x,z)}{\sqrt{gh}} = \left(1 + \frac{z}{h} \right) \frac{d\eta(x)}{dx} + O\left(\frac{A}{h}\right)^2 \quad [\text{E A3.18}]$$

$$\frac{\Delta P(x,z)}{\sqrt{gh}} = \left(\frac{\eta(x) - z}{h} \right) + O\left(\frac{A}{h}\right)^2 \quad [\text{E A3.19}]$$

et :

$$\frac{\eta(x)}{h} = \frac{A}{h} \operatorname{cn}^2(\alpha x, k) + O\left(\frac{A}{h}\right)^2 \quad [\text{E A3.20}]$$

On remarquera que la loi de pression traduit un comportement hydrostatique, la vitesse horizontale U est constante sur toute la hauteur d'eau et est non nulle au fond, tandis que la composante verticale s'annule à la cote $z=-h$.

De plus la solution recherchée dépend du paramètre k .

L'onde solitaire est un signal non périodique, sa longueur d'onde est infinie, elle correspond à la valeur du paramètre k :

$$k=1. \quad [\text{E A3.21}]$$

Pour le cas de l'onde solitaire, on a les expressions en négligeant les termes d'erreur à l'ordre 2 dans les expressions [E A3.17] et [E A3.20] :

$$\bullet \quad \frac{\eta(x)}{h} = \frac{A}{h} \frac{1}{\cosh^2(\alpha x)} \quad [\text{E A3.22}]$$

$$\bullet \quad \frac{U(X)}{\sqrt{gh}} = 1 + \frac{A}{h} - \frac{\eta(x)}{h} \quad [\text{E A3.23}]$$

cette composante cinématique est exprimée dans le repère mobile χ ; en faisant tendre l'abscisse x vers l'infini, on obtient dans le repère de travail la vitesse à l'infini, elle correspond à la célérité C de l'onde solitaire :

$$x \rightarrow \infty \text{ soit : } \quad U(X)=C \quad [\text{E A3.24}]$$

ce qui nous amène à l'écriture dans le repère de référence :

$$\frac{U(x')}{\sqrt{gh}} = \frac{\eta(x)}{h} \quad [\text{E A3.25}]$$

$$\bullet \quad \frac{V(X)}{\sqrt{gh}} = \left(1 + \frac{Z}{h}\right) \frac{d\eta(x)}{dx} \quad [\text{E A3.26}]$$

$$\bullet \quad \text{et : } \frac{\Delta P(x, z)}{\sqrt{gh}} = \left(\frac{\eta(x) - z}{h}\right) \quad [\text{E A3.27}]$$

Les solutions obtenues en première approximation sont identiques à celles obtenues au même degré d'approximation avec les systèmes d'équations de BOUSSINESQ et de KORTWEG & DE VRIES.

En effectuant un développement sous forme de puissance à l'ordre 4, on arrive à degré supérieur dans l'approximation du phénomène.

Il apparaît notamment que la pression n'a plus un comportement hydrostatique.

La relation obtenue pour la composante cinématique horizontale indique une variation de la vitesse suivant les deux axes, horizontal et vertical.

Pour des rapports de forme élevés, la relation obtenue pour la composante verticale tend à indiquer une inversion du signe de la vitesse sur une même hauteur d'eau, ce que n'indique pas la solution obtenue avec

la première approximation. Ce dernier point fournit un rapport de forme A/h maximal quant'à l'évolution du signal :

$$\frac{A}{h} \leq \frac{8}{11}$$

[E A3.28]

ANNEXE A4. : LA HOULE DE STOKES

TABLE DES MATIERES :

ANNEXE A4. : LA HOULE DE STOKES.	181
A4.1 : INTRODUCTION.	182
A4.2 : LES HYPOTHESES.	182
A4.3 : LES EQUATIONS ET LA RESOLUTION.....	182

A4.1 : INTRODUCTION.

Nous rappelons ici les principaux travaux de BONNEFILE (1960) portant sur la description des caractéristiques d'une houle dite du premier ordre.

Il s'agit de rappeler les hypothèses utilisées pour décrire le problème, de préciser les équations ainsi obtenues et de décrire la démarche adoptée pour résoudre et apporter une solution approchée au problème.

A4.2 : LES HYPOTHESES.

Les hypothèses adoptées pour décrire les caractéristiques cinématiques et géométriques de ce type d'écoulement sont les suivantes :

- l'écoulement est 2D plan vertical,
- l'accélération de la gravité est prise en compte,
- le fluide est non visqueux et incompressible,
- et la profondeur d'eau h au repos est constante.

A4.3 : LES EQUATIONS ET LA RESOLUTION.

Les équations de la mécanique des fluides sont écrites sous la forme de variables de Lagrange, elles prennent en compte les différentes hypothèses adoptées ci-dessus :

- pour l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial x}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial x_0} = 1 \quad [\text{E A4.1}]$$

- pour les équations de conservation de quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \bullet \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial x_0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_0} - g \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \bullet \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial z_0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{cases} \quad [\text{E A4.2}]$$

- les conditions aux limites sont identiques à celles de l'onde solitaire de gravité, voir annexe A1.

où x , z et P/ρ sont des termes qui sont par la suite développés sous la forme de série de puissance suivant le paramètre H correspondant à la hauteur crête-creux :

$$x = x_0 + H\phi_1 + H^2\phi_2 + \dots \quad [\text{E A4.3}]$$

$$z = z_0 + H\psi_1 + H^2\psi_2 + \dots \quad [\text{E A4.4}]$$

et :

$$\frac{P}{\rho} = -g \cdot z_0 + H\chi_1 + H^2\chi_2 + \dots \quad [\text{E A4.5}]$$

où ϕ_i , ψ_i et χ_i sont des fonctions de x_0 , de z_0 et de t .

Ces développements en série sont introduits dans les équations précédentes [E A4.1] et [E A4.2].

Au premier ordre en H, on obtient :

$$\begin{cases} \bullet \frac{\partial \chi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} \\ \bullet \frac{\partial \chi_1}{\partial z_0} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \psi_1}{\partial z_0} \end{cases} \quad [\text{E A4.6}]$$

et :

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_0} = 0 \quad [\text{E A4.7}]$$

Après dérivation des équations de quantité de mouvement [E A4.6] suivant x_0 et z_0 et après soustraction des deux équations obtenues, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0 \quad [\text{E A4.8}]$$

En dérivant l'équation de conservation de la masse [E A4.7] deux fois par rapport à la variable t, on obtient également :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0 \quad [\text{E A4.9}]$$

Compte tenu des relations [E A4.8] et [E A4.9], les dérivées du second ordre suivant ϕ et ψ sont des fonctions harmoniques et conjuguées de x_0 et z_0 .

On peut alors exprimer la solution sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \quad [\text{E A4.10}]$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \quad [\text{E A4.11}]$$

où G est solution de l'équation :

$$\Delta \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0 \quad [\text{E A4.12}]$$

Après intégration temporelle des équations [E A4.10] et [E A4.11], on obtient respectivement :

$$\phi_1 = \frac{\partial G}{\partial x_0} + A_\phi t + B_\phi \quad [\text{E A4.13}]$$

$$\psi_1 = \frac{\partial G}{\partial z_0} + A_\psi t + B_\psi \quad [\text{E A4.14}]$$

Ceci nous permet d'obtenir au premier ordre les expressions pour les variables spatiales x et z :

$$x = x_0 + H \frac{\partial G}{\partial x_0} + H A_\phi t + H B_\phi \quad [\text{E A4.15}]$$

$$z = z_0 + H \frac{\partial G}{\partial z_0} - HA_\psi t - HB_\psi \quad [\text{E A4.16}]$$

Les fonctions A_i et B_i correspondent :

- pour A_i , à une composante de courant, compte tenu de l'application traitée, la composante de courant est nulle,
- pour B_i à une fonction locale de x_0 et z_0 , celle-ci peut être annuler après un choix judicieux du couple (x_0, z_0)

Ces approches permettent l'écriture des variables spatiales sous la forme :

$$x = x_0 + H \frac{\partial G}{\partial x_0} \quad [\text{E A4.17}]$$

$$z = z_0 + H \frac{\partial G}{\partial z_0} \quad [\text{E A4.18}]$$

ce qui implique les expressions suivantes compte tenu des relations [E A4.3] et [E A4.4] :

$$\phi_1 = \frac{\partial G}{\partial x_0} \quad [\text{E A4.19}]$$

$$\psi_1 = \frac{\partial G}{\partial z_0} \quad [\text{E A4.20}]$$

en intégrant ces expression [E A4.19] et [E A4.20] dans les équations de quantité de mouvement [E A4.6], on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{\partial}{\partial x_0} (\chi_1 + g\psi_1) = -\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\ \bullet \frac{\partial}{\partial z_0} (\chi_1 + g\psi_1) = -\frac{\partial}{\partial z_0} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad [\text{E A4.21}]$$

Après intégration spatiale, le système [E A4.21] est équivalent à :

$$\chi_1 + g\psi_1 + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + f_1(t) = 0 \quad [\text{E A4.22}]$$

où f_1 est une fonction arbitraire qui est fonction uniquement de t .

G est cherché comme étant une fonction périodique, sa dérivée seconde suivant t peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} G \quad [\text{E A4.23}]$$

Il en résulte de [E A4.12] que :

$$\Delta G = 0 \quad [\text{E A4.24}]$$

Une solution du problème est la fonction G définie par :

$$G(x_0, z_0, t) = \frac{\text{ch}\left(2\pi \frac{z_0 + h}{\lambda}\right)}{\frac{4\pi}{\lambda} \text{sh}\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)} \cos\left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right)\right) \quad [\text{E A4.25}]$$

A partir de cette solution on obtient les coordonnées des variables spatiales x et z au premier ordre en H :

$$x_1 = x_0 + H \frac{\partial G}{\partial x_0} \quad [\text{E A4.26}]$$

$$z_1 = z_0 + H \frac{\partial G}{\partial z_0} \quad [\text{E A4.27}]$$

La vitesse est alors connue :

$$u_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} \quad [\text{E A4.28}]$$

$$v_1 = \frac{\partial z_1}{\partial t} \quad [\text{E A4.29}]$$

la dénivellation de la surface libre est déterminée à l'abscisse :

$$z_0 = 0 \quad [\text{E A4.30}]$$

ce qui nous amène à :

$$\eta_1 = \frac{H}{2} \cos\left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right)\right) \quad [\text{E A4.31}]$$

Avec un développement au premier ordre en H , la pression exprimée sous la forme :

$$\frac{P}{\rho} + gz_0 - H\chi_1 = 0 \quad [\text{E A4.32}]$$

devient :

$$\frac{P}{\rho} + g\left(z_0 + \frac{H}{2} \cos\left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right)\right)\right)z - \frac{\pi\lambda H}{T^2} \frac{\text{ch}\left(2\pi \frac{z_0 + h}{\lambda}\right)}{\text{sh}\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)} \cos\left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda}\right)\right) + H f_1(t) = 0 \quad [\text{E A4.33}]$$

Or en $z_0=0$, la pression est atmosphérique :

$$p = 0 \quad [\text{E A4.34}]$$

La fonction f_1 qui n'est fonction que du temps est posée nulle, on arrive ainsi à la relation suivante explicitant directement la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \text{th}\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right) \quad [\text{E A4.35}]$$

La longueur d'onde déterminée, on peut alors évaluer la célérité de l'onde :

$$C = \frac{\lambda}{T} = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th} \left(2\pi \frac{h}{\lambda} \right)$$

[E A4.36]

ANNEXE A5. : LA COUCHE LIMITE SANS GRADIENT DE PRESSION

TABLE DES MATIERES :

ANNEXE A5. : LA COUCHE LIMITE SANS GRADIENT DE PRESSION.....	187
A5.1 : INTRODUCTION.....	188
A5.2 : REGION LAMINAIRE.....	188
A5.3 : REGION LOGARITHMIQUE.....	189
A5.4 : CALCUL DU COEFFICIENT DE PERTE DE CHARGE.....	190

A5.1 : INTRODUCTION.

Nous allons rappeler dans cette annexe les lois décrivant la cinématique dans la couche limite générée par un écoulement sans gradient de pression parallèlement à une plaque plane (figure F A5.1).

A partir des relations obtenues, nous rappellerons succinctement le calcul du coefficient de frottement.

La contrainte parallèle à la paroi est définie comme étant :

$$\tau = -\rho \overline{u'v'} + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad [E A5.1]$$

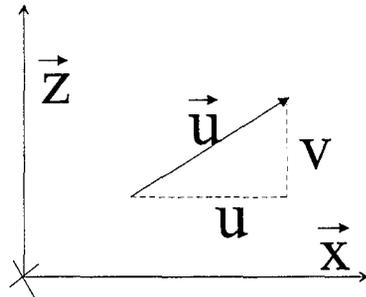


figure F A5.1: représentation des variables du domaine.

La région interne (englobant la couche limite) peut être décomposée en trois zones :

- une première proche de la paroi dite région laminaire,
- une seconde qui est la région dite tampon,
- et enfin une dernière dite zone logarithmique.

Au-dessus, on retrouve l'écoulement dit classiquement à l'infini. Le raccordement entre la zone interne (zone logarithmique) et l'écoulement externe se fait par l'intermédiaire d'une loi de vitesses déficitaires.

L'équation de quantité de mouvement suivant \vec{x} se traduit sur la hauteur de la couche limite par la relation :

$$\tau = \text{Constante} \quad [E A5.2]$$

A5.2 : REGION LAMINAIRE.

Au voisinage de la paroi, la contrainte turbulente est supposée négligeable, la contrainte s'exprime sous la forme simplifiée :

$$\tau \approx \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad [E A5.3]$$

En intégrant directement cette expression suivant z , on trouve l'expression de la vitesse :

$$u = \tau_p \frac{z}{\mu} \quad [E A5.4]$$

τ_p étant la contrainte de frottement à la paroi.

On définit la vitesse de frottement en fonction de la contrainte de frottement :

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad [\text{E A5.5}]$$

Si on introduit les groupements adimensionnels suivants :

$$U^+ = \frac{U(z)}{U_*} \quad [\text{E A5.6}]$$

$$Y^+ = Y \frac{U_*}{\nu} \quad [\text{E A5.7}]$$

appelés variables de paroi, on obtient l'expression analogue à la relation [E A5.4] :

$$U^+ = Y^+ \quad [\text{E A5.8}]$$

Cette loi apparaît valable dans la mesure où l'hypothèse, contrainte turbulente négligeable est vérifiée, la cote maximale de validité est :

$$Y^+ = 5 \quad [\text{E A5.9}]$$

A5.3 : REGION LOGARITHMIQUE.

Au-dessus de cette zone, l'hypothèse précédente n'est plus vérifiée, la contrainte turbulente devient en effet prédominante, la contrainte visqueuse est négligée :

$$\tau \approx -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad [\text{E A5.10}]$$

Suivant les hypothèses de BOUSSINESQ et de PRANDTL, on a :

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \quad [\text{E A5.11}]$$

avec :

$$l = \chi z \quad [\text{E A5.12}]$$

soit :

$$l = \frac{du}{dz} \chi z \frac{\sqrt{\tau_p}}{\sqrt{\rho}} \quad [\text{E A5.13}]$$

On aboutit avec la définition des variables de paroi à la relation :

$$\frac{dU^+}{dZ^+} Z^+ = \frac{1}{\chi} \quad [\text{E A5.14}]$$

En intégrant l'équation [E A5.14], on obtient :

$$U^+ = \frac{1}{\chi} \ln(Z^+) + B \quad [\text{E A5.15}]$$

avec χ le coefficient de Von Karman déterminé expérimentalement :

$$\chi = 0,41 \quad [\text{E A5.16}]$$

et B une constante universelle de l'ordre de 5 pour un tube hydrauliquement lisse.

A5.4 : CALCUL DU COEFFICIENT DE PERTE DE CHARGE.

Pour caractériser le coefficient de perte de charge d'un écoulement fluide uniforme et incompressible, les premières approches ont consisté à introduire des formulations élaborées à partir de résultats analytiques ou d'expériences réalisées dans des conduites cylindriques ($\lambda = \frac{\Delta P}{\Delta l} \frac{2R_0}{\rho U^2/2}$).

On a ainsi obtenu les relations suivantes :

- pour un écoulement laminaire, le coefficient de perte de charge λ est donné par :

$$\lambda = \frac{64}{R_{ey}} \quad [\text{E A5.17}]$$

relation valable jusqu'à un nombre de Reynolds critique de l'ordre de 2000.

- Pour un nombre de Reynolds supérieur à 3000, BLASIUS a fourni une relation empirique valide pour un écoulement turbulent dans un tube à parois lisses :

$$\lambda = \frac{0.316}{R_{ey}^{1/4}} \quad [\text{E A5.18}]$$

D'autres relations sont également fournies, elles portent sur des écoulements turbulents lisses ou rugueux :

- On rappellera ainsi la formulation obtenue par NIKURADSE (1932 et 1933), voir figure F A5.2 :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0.8 + 0.86 \ln(R_{ey} \sqrt{\lambda}) \quad [\text{E A5.19}]$$

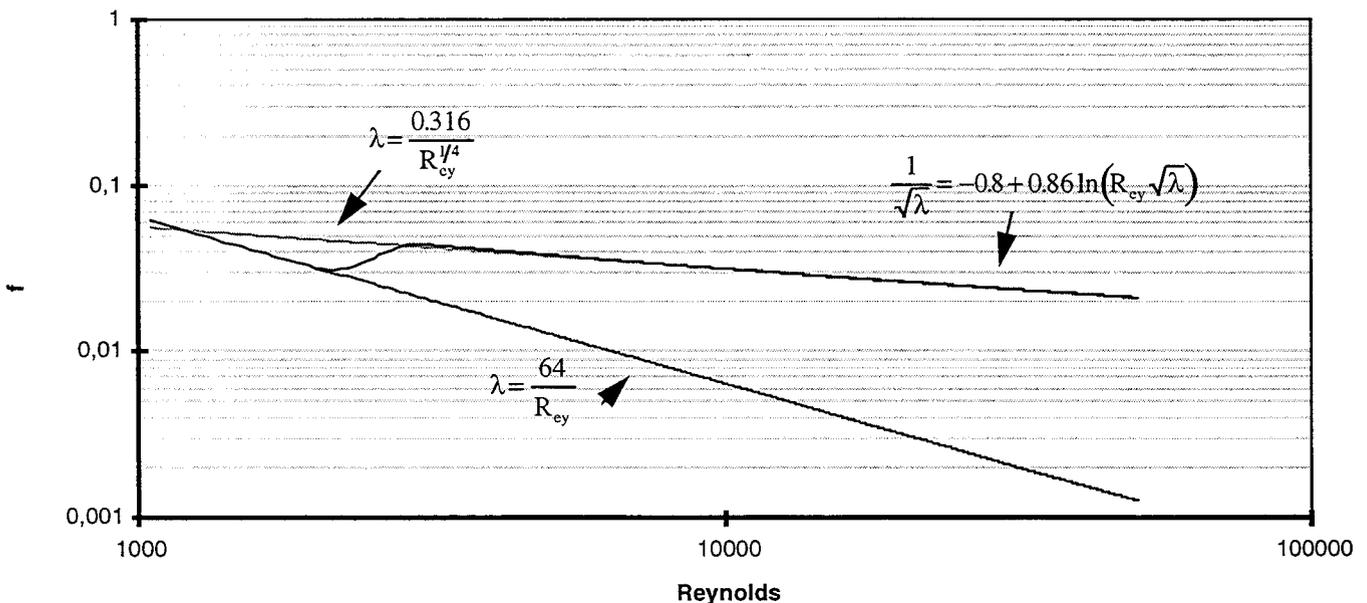


figure F A5.2: représentation du coefficient de frottement selon la relation de NIKURADSE (1932) [E A5.19].

- NIKURADSE (1932) a indiqué la relation suivante, voir figure F A5.3 :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.14 - 0.86 \ln\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)$$

[E A5.20]

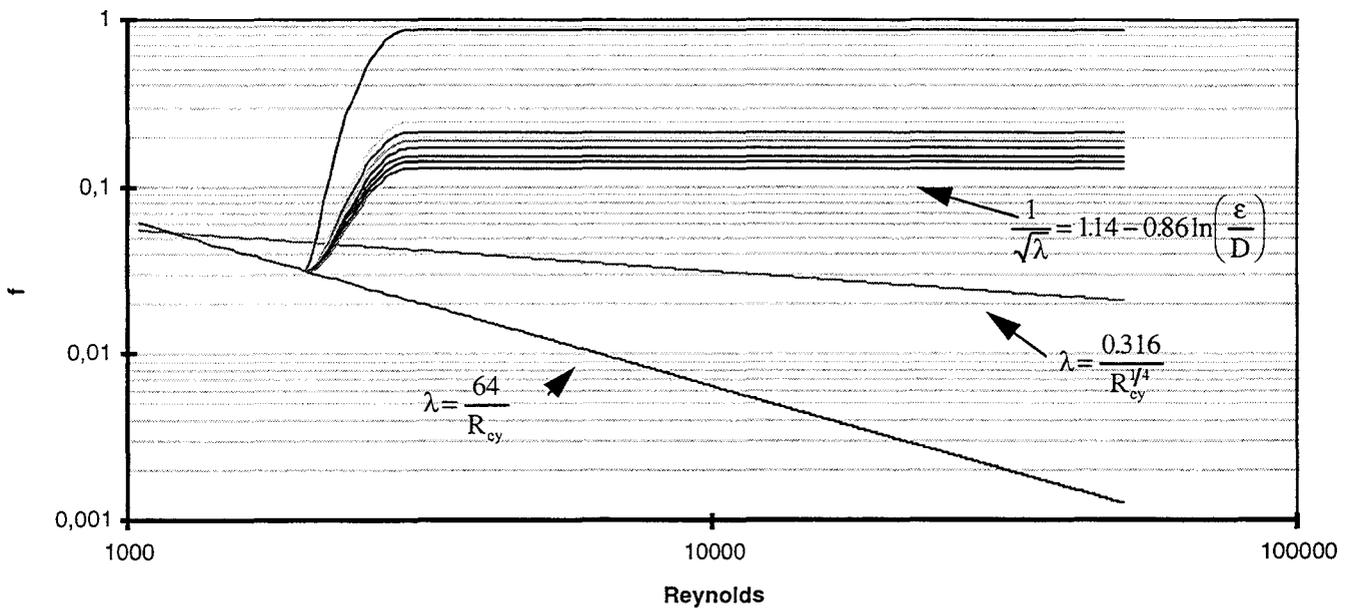


figure F A5.3: représentation du coefficient de frottement selon la relation [E A5.20].

- COLEBROOK (1938) propose une formulation prenant en compte l'échelle de rugosité et le nombre de Reynolds moyen, voir figure F A5.4 :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0.86 \ln\left(\frac{2.51}{Re_y \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.7D}\right)$$

[E A5.21]

ainsi pour :

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0$$

[E A5.22]

L'échelle de rugosité est nulle et seul le nombre de Reynolds influe, on retrouve alors la formulation [E A5.19].

Inversement, pour un nombre de Reynolds infini, on a le rapport :

$$\frac{1}{Re_y} = 0$$

[E A5.23]

on retrouve la seconde expression [E A5.20].

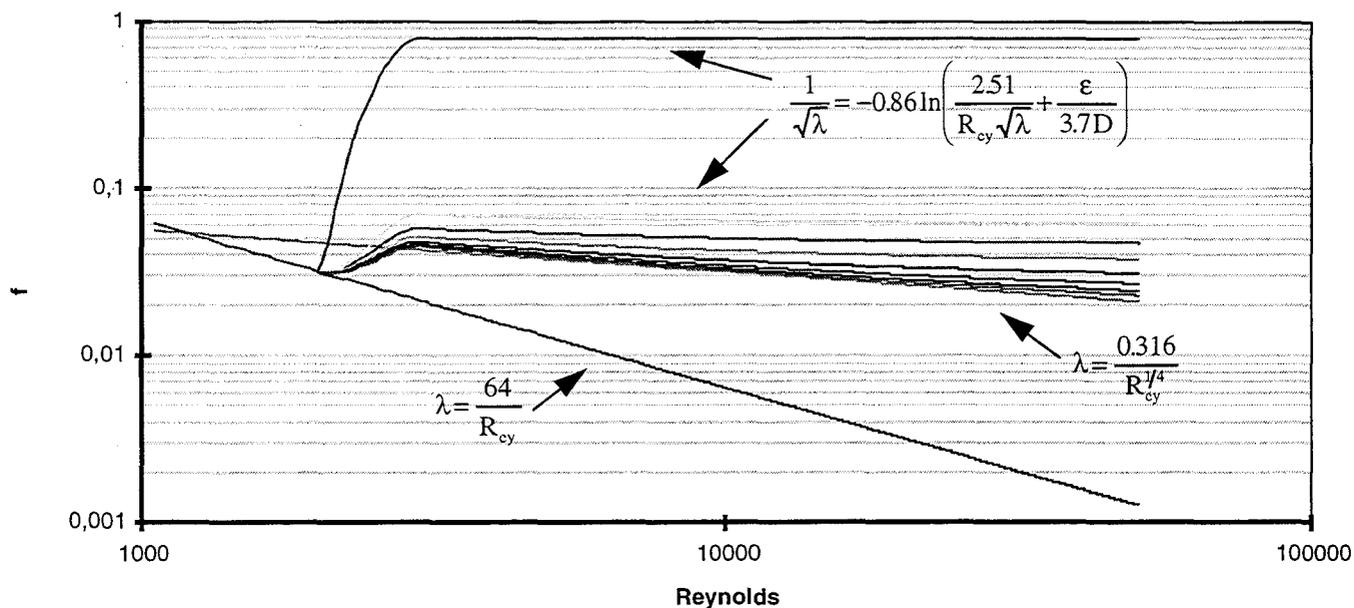


figure F A5.4: représentation du coefficient de frottement selon la relation [E A5.21].

- D'autres formulations existent, on rappellera celle de SCHLICHTING pour une plaque plane rugueuse, voir figure F A5.5 :

$$\lambda = (2.87 + 1.58 \ln_{10}(k_s))^{-2.5} \quad [E A5.24]$$

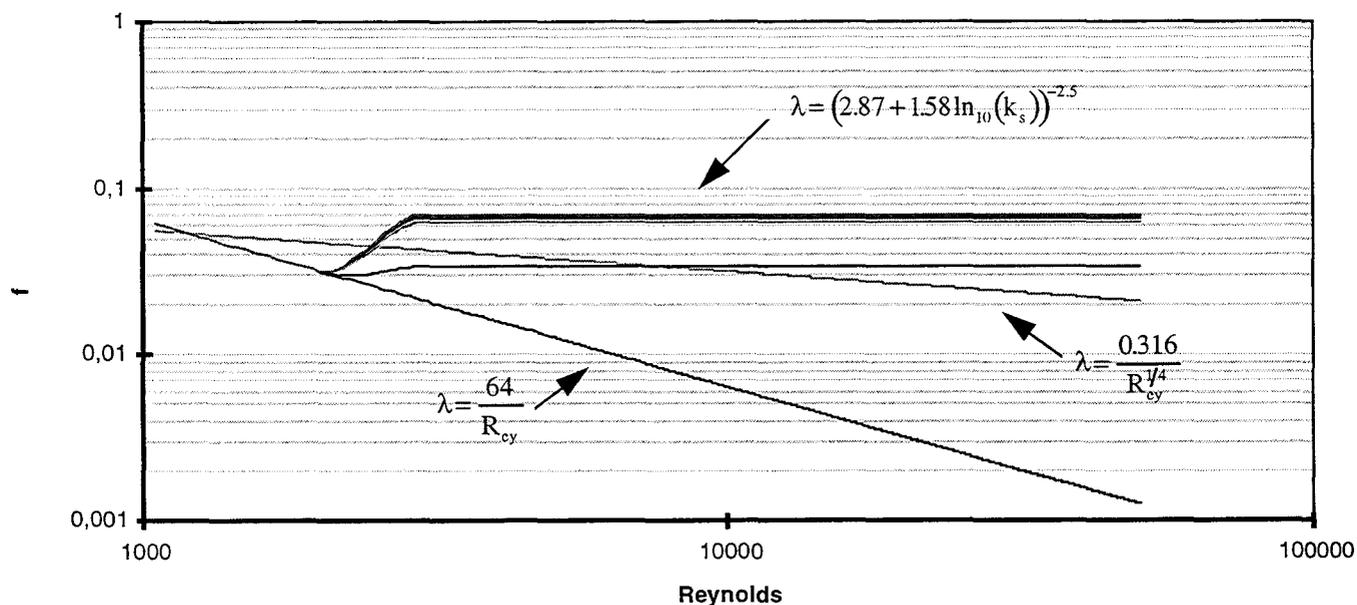


figure F A5.5 : représentation du coefficient de frottement selon la relation [E A5.24].

