

100-10001583

50376
1996
316

N° d'ordre 1844

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE LILLE**

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Mécanique



Présentée par

M. Abdessadek CHERHABILI

pour obtenir le grade de
DOCTEUR en Mécanique

**EXISTENCE ET STABILITE DES SOLUTIONS
D'EQUILIBRE NON-LINEAIRES DANS L'ECOULEMENT
DE COUETTE PLAN**

soutenue le 12 Novembre 1996 devant le jury composé de :

- Président:** **P.-A. Bois**, Professeur, Université de Lille I
- Rapporteurs:** **P. Manneville**, Directeur de Recherches CNRS, Ecole Polytechnique, Palaiseau
- J.-P. Zahn**, Astronome, Observatoire de Meudon
- Examineurs:** **F. Daviaud**, Ingénieur, C.E.A.-Saclay
- M. Stanislas**, Professeur, Ecole Centrale de Lille
- Directeur de Thèse:** **U. Ehrenstein**, Professeur, Université de Lille I

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur U. Ehrenstein, qui m'a initié à la recherche et qui m'a dirigé durant ces trois années de travail. Il a toujours su être disponible pour m'aider et m'encourager. Je voudrais qu'il trouve dans ces quelques lignes l'expression de ma plus grande reconnaissance.

Je remercie vivement Messieurs P. Manneville et J.-P. Zahn pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, je leur suis très reconnaissant d'avoir bien voulu en être les rapporteurs. J'exprime également ma gratitude à Monsieur P.-A. Bois pour avoir accepté d'assurer la présidence du Jury. Mes remerciements vont de même à Messieurs F. Daviaud et M. Stanislas qui ont accepté d'être membres de ce Jury.

Je remercie aussi tous les collègues du Laboratoire de Mécanique de Lille pour la bonne ambiance qu'ils ont fait régner. Je ne les cite pas mais ils se reconnaîtront.

Enfin, je me permets de dédier cette thèse à mes très chers parents qui m'ont soutenu durant toutes ces années d'études et les remercie du fond du cœur.

- SOMMAIRE -

Liste des symboles	V
I. INTRODUCTION GENERALE	1
I.1 Généralités	1
I.2 Stabilité hydrodynamique	3
I.3 Stabilité non-linéaire	5
I.4 Ecoulement de Poiseuille plan	11
I.4.1 Etudes expérimentales	11
I.4.2 Etudes théoriques et numériques	13
I.5 Ecoulement de Couette plan	16
I.5.1 Etudes expérimentales	16
I.5.2 Etudes théoriques et numériques	18
II. EQUILIBRES NON-LINEAIRES 2D	24
II.1 Introduction	24
II.2 Ecoulement de base	27
II.3 Formulation et équations de base	29
II.4 Méthode de résolution numérique	33

II.5 Résultats numériques	39
II.5.1 Ecoulement de Poiseuille pur	39
II.5.2 Ecoulement de Poiseuille-Couette	42
II.5.3 Ecoulement de Couette pur	48
II.6 Discussion	68
III. STABILITE SECONDAIRE	70
III.1 Introduction	70
III.2 Stabilité par rapport aux perturbations 2D	72
III.2.1 Formulation du problème	72
III.2.2 Résultats numériques	75
III.3 Stabilité par rapport aux perturbations 3D	86
III.3.1 Equations de Navier-Stokes 3D	97
III.3.2 Formulation du problème	92
III.3.3 Résultats numériques	93
III.4 Discussion	103
IV. SOLUTIONS D'EQUILIBRE 3D	104
IV.1 Introduction	104
IV.2 Formulation du problème	105
IV.3 Résolution numérique	106
IV.4 Résultats numériques	107
IV.5 Discussion	118
V. CONCLUSION GENERALE	119
V.1 Existence d'équilibres 2D dans Couette plan	119
V.2 Concernant la stabilité secondaire	123
V.3 Equilibres 3D	124

ANNEXE 1 - Polynômes de Chebyshev	127
ANNEXE 2 - Discrétisation de l'opérateur d'ordre 4	130
ANNEXE 3 - Méthode d'Arnoldi	133
BIBLIOGRAPHIE	136

LISTE DES SYMBOLES

c	vitesse de phase
$D_{nm} = d^2/dy^2$	
$\vec{F}(\vec{u}; \vec{\lambda})$	système d'équations non-linéaires algébriques
$\vec{G}(\vec{u}; \vec{\lambda})$	système d'équations non-linéaires algébriques étendu
h^*	demi-hauteur du canal
$J = \vec{F}(\vec{u}; \vec{\lambda})$	Jacobien de $\vec{F}(\vec{u}; \vec{\lambda})$
$K+1$	nombre de points de collocation
$k_{nm}^2 = (n\alpha)^2 + (m\beta)^2$	
$L_{ref} = h^*$	longueur de référence
M	nombre de modes de Fourier dans la direction z
m	$m^{ième}$ mode de Fourier dans la direction z
N	nombre de modes de Fourier dans la direction x
$N_{n,m}$	terme non-linéaire de convolution 2D
$N_{k,l,\mu,\nu}$	terme non-linéaire de convolution 3D
n	$n^{ième}$ mode de Fourier dans la direction longitudinale
dP/dx	gradient de pression longitudinal laminaire
$p = p^*/(\rho^* U_{ref}^{*2})$	pression
$Re = U_{ref}^* L_{ref}^* / \nu_{ref}^*$	nombre de Reynolds

s	paramètre pseudo-longueur d'arc
$T_k(y)=\cos(k\cos^{-1}y)$	$k^{\text{ième}}$ polynôme de Chebyshev
$t=t^*L_{\text{ref}}^*/U_{\text{ref}}^*$	temps
U_{ref}^*	vitesse de référence
$U(y)=(1-\eta)(1-y^2)+\eta y$	profil de vitesse laminaire
\vec{u}	vecteur solution 2D ou 3D
$\vec{v}=\vec{v}/U_{\text{ref}}^*=(u,v,w)$	vecteur vitesse
$\vec{x}=\vec{x}/L_{\text{ref}}^*=(x,y,z)$	vecteur position avec ses composantes
$y_j=\cos(j\pi/K)$	$j^{\text{ième}}$ point de collocation dans le canal
$\vec{z}=(\vec{u},\lambda)$	vecteur solution étendu

Symboles Grecs

α	nombre d'onde dans la direction x
β	nombre d'onde dans la direction z
ε	amplitude de la perturbation
η	paramètre de continuation, $\eta=0$: Poiseuille; $\eta=1$: Couette
$\lambda(\lambda, \vec{\mu})$	vecteur paramètre
$\lambda_x=2\pi/\alpha$	longueur d'onde dans la direction x
$\lambda_z=2\pi/\beta$	longueur d'onde dans la direction z
ν_{ref}^*	viscosité cinématique
ρ^*	densité (constante)
σ	taux d'amplification d'instabilité secondaire
$\Psi(y)$	fonction de courant de l'écoulement laminaire
$\vec{\psi}$	vecteur fonction de courant ($\vec{v}=\nabla \times \vec{\psi}$)

$\Omega(y)=-dU/dy$	vorticité de l'écoulement laminaire
$\vec{\omega}=\nabla\times\vec{v}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$	vecteur vorticité

Symboles mathématiques

Δ	opérateur Laplacien
δ_{mn}	fonction de Kronecker
$\vec{\nabla}$	gradient
\Re	partie réelle
\Im	partie imaginaire

Indices

$()_{lam}$	quantité laminaire
$()_m$	quantité de l'écoulement moyen
$()^{OS}$	terme d'Orr-Sommerfeld
$()^{SQ}$	terme de Squire
$()^*$	quantité avec dimension
$\vec{()}$	vecteur
$\tilde{()}$	quantité de perturbation
$\hat{()}$	amplitude de la quantité de perturbation
$()^*$	complexe conjugué

- CHAPITRE I -

I. INTRODUCTION GENERALE

I.1 Généralités

L'une des préoccupations majeures de la recherche en mécanique des fluides demeure la compréhension du phénomène de la turbulence dans les écoulements de fluides, et plus précisément la nature de la transition par laquelle le fluide visqueux passe de l'état laminaire à l'état turbulent.

Durant ces dernières années, l'attention a été focalisée sur les tentatives théoriques de traiter les équations non-linéaires de Navier-Stokes pour divers écoulements à géométrie simple. En particulier, les écoulements incompressibles de type couche limite (écoulements de Poiseuille et de Couette, couche limite de Blasius) se sont illustrés comme des cas intéressants par leur géométrie simple, d'autant plus qu'ils sont considérés comme des prototypes d'écoulements plus complexes. Ainsi, l'intérêt porté à cette classe d'écoulements est entièrement justifié et les résultats obtenus concernant par exemple l'écoulement de Poiseuille plan aussi bien sur le plan théorique qu'expérimental ont permis de

mieux cerner le problème de la transition dans les écoulements parallèles. L'expérience est capable de reproduire cet écoulement avec un grand rapport d'aspect et un faible taux de turbulence nécessaires à une bonne comparaison avec les modèles théoriques utilisant des surfaces parallèles infinies.

En ce qui concerne des écoulements de couche limite (par exemple sur une plaque plane), l'étude théorique de la transition est beaucoup moins aisée en raison des effets non-parallèles. Par contre, cette transition vers la turbulence dans des couches limites a été largement étudiée sur le plan expérimental.

Présenté comme le plus élémentaire des écoulements cisailés de par son profil linéaire simple, l'écoulement de Couette plan reste mal compris en ce qui concerne la transition vers la turbulence. En plus de la difficulté à réaliser expérimentalement cet écoulement, les études théoriques se trouvent limitées par le fait que ce dernier est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds. Ceci explique le peu de résultats expérimentaux disponibles par rapport aux nombreuses expériences de Couette circulaire ou de l'écoulement de Poiseuille, et les résultats théoriques ne sont guère plus nombreux.

Dans cette étude, nous nous intéressons particulièrement au cas de l'écoulement de Couette plan, longtemps éclipsé par les écoulements de Poiseuille et de Blasius plus simples à étudier (et tout aussi intéressants). Cependant, nous nous référerons souvent par la suite à l'écoulement de Poiseuille plan, étant donné que ces deux écoulements peuvent être considérés comme deux cas limites d'une famille d'écoulements (Poiseuille-Couette). D'autant plus que les nombreux résultats obtenus dans le cas de Poiseuille plan pourraient servir d'exemple à suivre dans l'étude de l'écoulement de Couette.

I.2 Stabilité hydrodynamique

La plupart des études théoriques entreprises à ce jour concernant la transition sont basées sur la théorie de la stabilité linéaire hydrodynamique, depuis les travaux pionniers de [Helmholtz, 1868], [Kelvin, 1871] et [Rayleigh, 1880]. Dans le cadre de la stabilité linéaire appliquée aux écoulements parallèles cisailés plans non visqueux, Rayleigh a proposé une théorie qui décrit correctement les instabilités dans des écoulements dont le profil possède un point d'inflexion. Cependant, la théorie basée sur l'équation d'Euler cesse d'être valable pour les autres écoulements parallèles tels que l'écoulement de Poiseuille plan ou la couche limite de Blasius, dans la mesure où il s'est avéré que la viscosité est en fait à l'origine de ces instabilités.

[Orr, 1907] et [Sommerfeld, 1908] ont étendu la théorie de Rayleigh au cas d'un fluide incompressible visqueux donnant lieu à l'équation d'Orr-Sommerfeld, en linéarisant autour d'un état de base parallèle. Depuis, plusieurs études ont été entreprises pour résoudre directement cette équation pour différentes classes d'écoulements. Même pour les écoulements les plus simples d'apparence, elle reste cependant très difficile à analyser pour des nombres de Reynolds transitionnels [Drazin et Reid, 1981].

Pour remédier à cette difficulté, [Tollmien, 1929] et [Schlichting, 1933] ont développé une technique asymptotique, qui a permis de prédire la structure des modes de l'équation d'Orr-Sommerfeld appelés depuis ondes de "Tollmien-Schlichting", bien avant qu'elles ne soient observées par l'expérience dans la couche limite de Blasius [Schubauer & Skramstad, 1949] et dans l'écoulement de Poiseuille [Nishioka et al., 1975]. Ces ondes sont extrêmement sensibles aux petites déviations par rapport aux conditions idéales du dispositif expérimental,

et peuvent être observées en perturbant l'écoulement par un ruban soumis à des vibrations. Notons enfin que de nos jours, l'avènement des calculateurs puissants permet de résoudre les problèmes de stabilité linéaire pour les écoulements parallèles avec une précision arbitrairement grande.

La stabilité linéaire classique se contente de décrire les instabilités primaires qui ne fournissent qu'une très légère similitude avec l'état turbulent final, sans doute parce qu'elle ne tient pas compte du comportement non-linéaire. Les solutions qui résultent de cette théorie dépendent très sensiblement de la nature spécifique de l'état de base. De ce fait, si nous voulons comprendre l'origine de la structure complexe tridimensionnelle, il faudrait linéariser non plus autour de l'écoulement de base mais plutôt autour d'un état d'équilibre non-linéaire ou d'un quasi-équilibre obtenu à partir de l'instabilité primaire.

Les instabilités secondaires calculées par la théorie de la stabilité linéaire (en linéarisant autour d'un nouvel état de base) reproduisent avec une certaine précision des nombres de Reynolds transitionnels pour les écoulements parallèles et de couche limite, en donnant en même temps la forme des structures tridimensionnelles observées dans l'expérience. La découverte relativement récente des instabilités des vortex elliptiques [Pierrehumbert, 1986; Bayly, 1986; Landman & Saffman, 1987] dans les écoulements bidimensionnels fournit un modèle mathématique simple pour les instabilités secondaires et prédit que ce genre d'instabilités tridimensionnelles peut être d'un grand apport dans la compréhension de la transition dans les écoulements cisailés.

I.3 Stabilité non-linéaire

La théorie de stabilité linéaire pour les écoulements cisailés parallèles plans donne une description satisfaisante de la croissance initiale des petites perturbations, sans toutefois faire toute la lumière sur la nature de la transition vers la turbulence entièrement développée. Par exemple, le nombre de Reynolds critique donné par cette théorie peut être supérieur au nombre de Reynolds transitionnel, notamment pour des écoulements de paroi tels que l'écoulement de Poiseuille plan. Cette contradiction entre la théorie et l'expérience semble due au fait que la théorie néglige les interactions non-linéaires de la perturbation, qui existent toujours pour des perturbations finies aussi petites soient-elles.

Les premières investigations concernant l'évolution non-linéaire des perturbations se sont focalisées uniquement sur l'aspect bidimensionnel de celles-ci. L'argument de cette approche est que les instabilités linéaires les plus significatives près de la courbe neutre sont bidimensionnelles, la partie bidimensionnelle de la perturbation croît en général plus vite dans le régime linéaire, et l'écoulement reste initialement bidimensionnel en même temps que les non-linéarités deviennent importantes. De plus, le fait que les problèmes de mécanique des fluides soient généralement plus abordables en deux dimensions qu'en trois est une raison qui justifie de prendre l'étude bidimensionnelle comme point de départ dans la théorie non-linéaire.

[Noether, 1921] a été le premier à calculer des solutions d'amplitude finie dans un écoulement cisailé. Il a noté qu'en présence d'une onde stationnaire, le profil moyen est différent du profil de l'écoulement non perturbé. Par conséquent, si l'amplitude de l'onde n'est pas trop grande, son évolution serait gouvernée par la linéarisation du profil moyen perturbé. L'approche, connue

sous le nom de "théorie du champ moyen", consiste alors à déterminer l'évolution de la perturbation en linéarisant autour du profil moyen perturbé. Ceci est obtenu en couplant l'équation d'Orr-Sommerfeld avec l'équation de la quantité de mouvement longitudinale moyennée. Malgré le manque d'une base rigoureuse, cette approche mène souvent à des résultats qualitativement satisfaisants.

[Meksyn & Stuart, 1951] ont réussi à trouver des approximations des équations de Noether pour l'écoulement de Poiseuille plan. Ces auteurs ont montré que sous l'hypothèse de la théorie du champ moyen, des ondes progressives d'amplitude finie peuvent exister à des nombres de Reynolds inférieurs au nombre de Reynolds prédit par la stabilité linéaire. Les solutions qu'ils ont calculées existent pour des nombres de Reynolds $Re > 2510$.

Plus tard, [Watson, 1960] puis [Stuart, 1960] ont développé les équations de Navier-Stokes en énergie de l'amplitude de la perturbation $A(t)$ en tronquant le système à un certain ordre fini N . Leur développement a permis, à partir de l'équation de [Landau, 1944], de distinguer deux comportements d'instabilité d'écoulements, qualifiés de sous-critique et supercritique. Le premier type d'instabilité suggère qu'il existe des solutions d'amplitude finie à des nombres de Reynolds inférieurs au nombre de Reynolds critique linéaire, contrairement au comportement supercritique où les solutions bifurquent vers des nombres de Reynolds plus grands (voir Figure I.1).

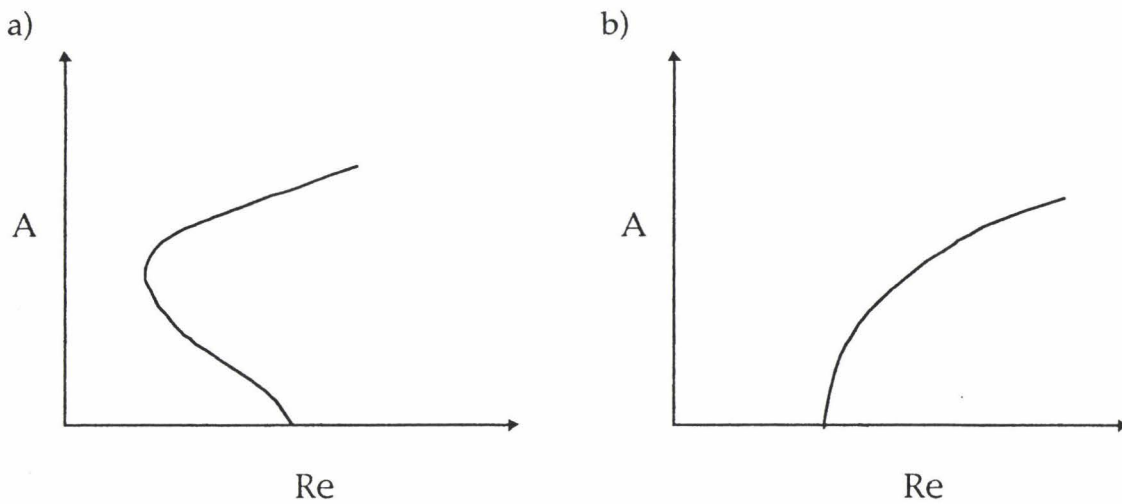


Figure I.1 - Comportement d'instabilité a) sous-critique, b) super-critique

En fait, la généralisation du développement de Stuart-Watson à partir de l'équation de Landau donne l'équation en amplitude $A(t)$ suivante

$$\frac{dA}{dt} = \sigma(\text{Re}, \alpha) A - \sum_{n=1}^N l_n(\text{Re}, \alpha) A^{2n+1} \quad (\text{I.1})$$

où $\sigma(\text{Re}, \alpha)$ est le taux d'amplification linéaire de l'onde (petit) à un nombre de Reynolds voisin de la valeur critique avec un nombre d'onde α . Les nombres $l_n(\text{Re}, \alpha)$ sont connus comme les coefficients de Landau car ce dernier a introduit ce type d'équations dans sa théorie qualitative de la turbulence.

Dans la théorie de stabilité non-linéaire, le développement (I.1) est en général tronqué au premier ordre $N=1$. Toutefois, si tous les termes de cette équation étaient retenus, on obtiendrait une solution bidimensionnelle périodique dans la direction longitudinale de période $2\pi/\alpha$. [Zahn et al, 1974] ont été les premiers à rechercher, par simulation numérique, de telles solutions dans un écoulement de Poiseuille plan en utilisant une approximation des équations de Navier-

Stokes. Ils représentèrent l'écoulement par un nombre fini de modes en Fourier dans la direction de l'écoulement avec un maillage en différences finies dans la direction normale aux parois. Cette résolution donne une bonne représentation de la couche visqueuse près des parois ainsi qu'au milieu du canal, avec seulement peu de modes en Fourier (un ou deux) mais avec un grand nombre d'éléments de discrétisation dans la direction normale. Pour une variété de conditions initiales, ils obtinrent soit un retour à l'état de base avec une décroissance de l'amplitude, soit des solutions d'amplitude finie périodiques, stationnaires dans un repère de référence se déplaçant à une vitesse de phase (qui fait partie de la solution). Cette approche directe capte aussi bien les équilibres stables qu'instables.

Dans la même voie, [Herbert, 1976, 1977] a utilisé une technique de méthodes spectrales qui a permis de calculer des solutions plus précises dans l'écoulement de Poiseuille, révélant un bon accord avec les caractéristiques des ondes progressives observées dans les expériences. Ce calcul montre qu'il existe une surface de solutions non-linéaires neutres (solutions d'équilibre) dans le plan (Re, α, E) , où E est l'énergie de la perturbation de l'onde et α le nombre d'onde. Une vue en perspective de cette surface est représentée sur la Figure I.2.

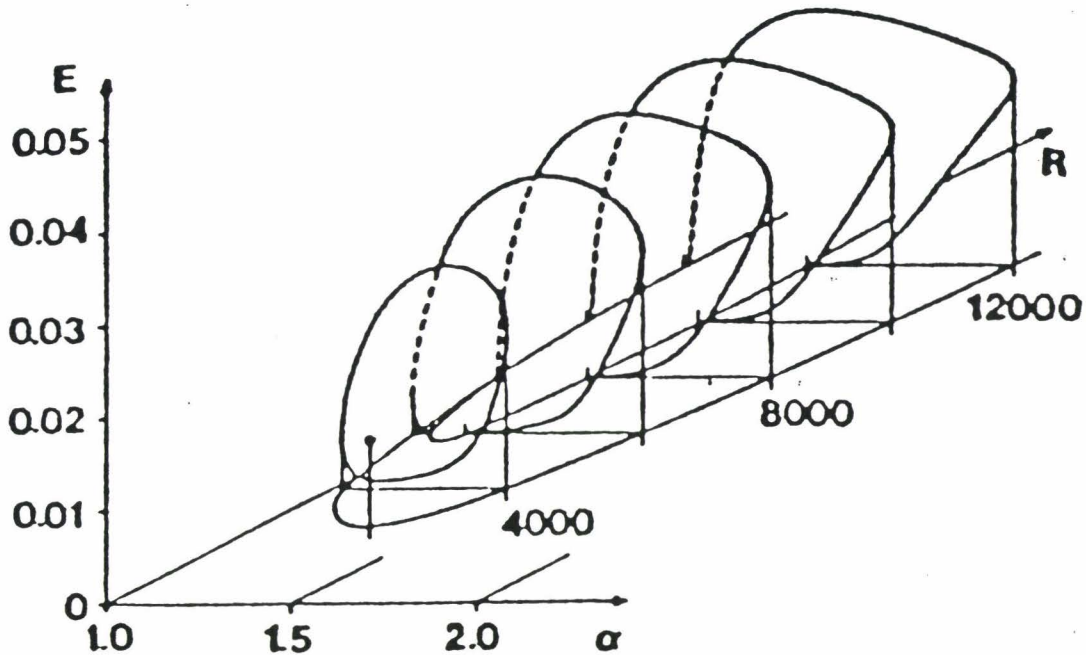


Figure I.2 - Surface non-linéaire neutre pour les ondes d'amplitude finie dans l'écoulement de Poiseuille plan. Le nez de la surface d'équilibre correspond à $\alpha=1.32$ et $Re=2935$. D'après l'étude de [Herbert, 1976].

La surface neutre entière consiste en deux parties, l'une se trouve dans le plan $E=0$, et l'autre sous forme de "ballons" dans la moitié de l'espace $E>0$. Les solutions pour $E>0$ ont leur origine sur la courbe neutre ($E=0$) et s'étendent à des nombres de Reynolds inférieurs au nombre de Reynolds critique linéaire (montrant à la même occasion le comportement sous-critique dans Poiseuille plan). Les solutions sur la branche supérieure sont stables par rapport à des perturbations stationnaires 2D, tandis que les équilibres se trouvant sur la branche inférieure sont instables. Le nombre de Reynolds critique correspondant

au nez de la solution est de $Re=2935$.

Ces résultats ont été confirmés plus tard par les calculs de [Orszag & Patera, 1983], [Kleiser & Schumann, 1984] et par plusieurs autres auteurs.

Ces dernières études marquent un grand pas dans la théorie de la stabilité non-linéaire, en étant l'un des rares cas où un large consensus s'est établi, notamment sur le comportement non-linéaire des ondes progressives d'amplitude finie, d'autant plus que celles-ci ont ouvert la voie à d'autres travaux plus approfondis qui s'imposaient. En effet, on ne peut guère se contenter des résultats obtenus à ce stade de l'étude, les valeurs seuil de transition données par ces solutions sont généralement plus élevées que celles observées expérimentalement. La suite naturelle est de mener une analyse de stabilité secondaire de ces solutions, établir le domaine d'existence des nouveaux équilibres qui en bifurquent et en déduire un seuil de transition proche de l'expérience.

Avant de passer à l'écoulement de Couette plan qui est au cœur de la présente étude, nous ferons un petit détour par l'écoulement de Poiseuille plan. En effet, ce dernier peut représenter dans notre cas une référence au niveau de la démarche à suivre. Nous commencerons par faire une revue de ce que nous estimons être les travaux théoriques et expérimentaux les plus importants concernant la transition dans cet écoulement.

I.4 Écoulement de Poiseuille plan

L'écoulement de Poiseuille plan s'est illustré comme un exemple simple d'écoulements cisailés parallèles. En effet, il s'agit là d'un écoulement visqueux incompressible entre deux surfaces parallèles fixes et infinies, en présence d'un gradient de pression longitudinal. L'écoulement laminaire présente un profil de vitesse parabolique entre les deux surfaces. Son étude s'est avérée extrêmement intéressante dans la mesure où il peut servir de modèle à des écoulements plus complexes, ce qui en fait un des écoulements les mieux étudiés à ce jour, aussi bien sur le plan expérimental que théorique.

I.4.1 Etudes expérimentales

Pendant plusieurs années, les expérimentateurs étaient incapables d'observer les perturbations périodiques dans l'écoulement de Poiseuille plan, à cause de la difficulté de reproduire l'écoulement laminaire pour un nombre de Reynolds proche de sa valeur critique. En effet, cette expérience physique nécessite d'avoir un très grand rapport d'aspect (longueur du canal par rapport à sa hauteur) et un domaine assez long pour que l'écoulement laminaire se développe entièrement, tout en évitant les éventuelles contaminations venant des parois. En plus de ces contraintes, il faut tenir compte des imperfections dues aux effets de paroi. Malgré toutes ces difficultés, plusieurs expériences ont été entreprises en essayant plus ou moins de réduire les contraintes citées. Une revue de [Herbert, 1983] a recensé de nombreuses études dont nous citons ci-dessous les plus importantes.

[Karnitz, Potter et Smith, 1974] ont préservé l'écoulement de base jusqu'à

$Re=5000$ et ont observé la fluctuation sinusoïdale de la vitesse avant que l'écoulement ne devienne complètement turbulent. Dans une autre expérience, [Nishioka, Iida et Ichikawa, 1975] ont obtenu un niveau de turbulence de 0.01%, ce qui a permis de maintenir un écoulement laminaire entièrement développé jusqu'à $Re=8000-9000$. Ils ont réussi à obtenir un écoulement perturbé entièrement bidimensionnel vers $Re=3500$. Au dessus de cette valeur, l'écoulement devient légèrement tridimensionnel, à cause du gauchissement dû à la paroi supérieur. Les distributions d'amplitude, les vitesses de phase et les taux d'amplification des perturbations trouvées sont d'un bon accord avec les prédictions théoriques de [Herbert, 1976, 1977].

En se focalisant sur le début de l'apparition des effets tridimensionnels, [Nishioka, Iida et Kanbayashi, 1978] ont observé une instabilité des perturbations 2D vers des effets tridimensionnels avec l'apparition de vortex longitudinaux périodiques. Dans la continuité de ces études, [Nishioka, Asai et Iida, 1981] ont mis en évidence l'apparition de la couche cisillée et la formation de "pointes" dans l'écoulement, montrant l'existence et la formation d'une sous-couche visqueuse et de vortex en "fer à cheval".

[Kozlov et Ramazanov, 1980] ont atteint un niveau de turbulence de 0.1% en maintenant l'écoulement laminaire jusqu'à $Re=7000$. Les mêmes auteurs [Kozlov & Ramazanov, 1983] ont recherché le développement 3D en contrôlant des perturbations 2D, trouvant ainsi des vortex sous forme de "lambda" similaires à ceux observés dans les expérience de couche limite de plaque plane. Leur espacement dans la direction transverse apparaît être indépendant du nombre de Reynolds ou de la fréquence de perturbation.

[Carlson, Widnall et Peeters, 1982] ont repéré la formation de spots turbulents vers $Re=1000$ mettant en évidence le début de la transition, ceci grâce à

la visualisation de l'écoulement après y avoir injecté des particules de "mica". En introduisant trois types de perturbations dans un écoulement laminaire, [Nishioka & Asai, 1985] ont conclu que la transition survenait à $Re \approx 1000$, avec une amplitude limite correspondant à l'amplitude de la perturbation dans l'écoulement turbulent développé. A peu près au même moment, [Alvyoon, Henningsson et Alfredsson, 1986] ont étudié la formation et l'évolution de spots turbulents pour $1000 < Re < 2200$, leur écoulement laminaire est maintenu pour $Re < 1100$.

Ces trois dernières expériences confirment les expériences plus anciennes de [Davies & White, 1928] et [Patel & Head, 1969], qui ont perturbé l'écoulement à l'aide d'un obstacle avec un angle droit, trouvant ainsi un nombre de Reynolds transitionnel de $Re \approx 1000$, ce qui est d'autant plus remarquable que les dispositifs expérimentaux à l'époque de Davies et White étaient certainement moins sophistiqués que ceux de nos jours.

I.4.2 Etudes théoriques et numériques

La solution uniforme de l'écoulement de Poiseuille (avec un profil de vitesse parabolique constant) est une solution exacte des équations de Navier-Stokes dans le cas incompressible visqueux, et il est intéressant de rechercher quels types de solutions non-uniformes peuvent exister en dehors de cet état de base. Deux approches sont généralement utilisées pour calculer des solutions (d'amplitude finie) numériques de Navier-Stokes dans l'écoulement de Poiseuille plan.

La première consiste à simuler en temps l'évolution de l'écoulement en partant de conditions initiales arbitraires (par exemple, un écoulement uniforme plus une perturbation bidimensionnelle ou tridimensionnelle). Cette méthode

utilise une haute résolution numérique qui permet de simuler numériquement des écoulements observables expérimentalement. Son inconvénient est qu'elle ne permet pas de calculer les solutions instables, en plus de la difficulté d'y introduire des paramètres de contrôle pour avoir des solutions d'une complexité spatiale et temporelle prédéfinie. Cette technique a été utilisée par [Orszag & Kells, 1980], [Orszag & Patera, 1980, 1981, 1983], [Kleiser, 1982] et par beaucoup d'autres auteurs.

Une autre approche consiste à chercher des solutions d'équilibre sous forme d'ondes progressives d'amplitude finie. Le premier pas était d'examiner la stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille plan. Avant l'avènement des puissances de calcul, [Lin, 1944] a pu déterminer un nombre de Reynolds critique à partir duquel l'écoulement devient instable, à $Re_{cr}=5300$ et $\alpha=1$ (α étant le nombre d'onde de la perturbation), en utilisant un développement asymptotique raffiné.

L'équation d'Orr-Sommerfeld, qui régit la stabilité linéaire a été résolue numériquement par [Thomas, 1953] qui a obtenu $Re_{cr}=5780$ et $\alpha=1.02$, malgré les difficultés du traitement numérique près des parois. [Orszag, 1971] a résolu ce problème en utilisant un développement en polynômes de Chebyshev et a obtenu des résultats très précis avec $Re_{cr}=5772.22$ et $\alpha=1.02056$. Ce nombre de Reynolds reste toutefois loin du nombre de Reynolds transitionnel observé dans l'expérience, ce qui fait de l'écoulement de Poiseuille un écoulement avec un comportement de transition sous-critique.

Dans le but de chercher des perturbations d'amplitude finie, [Meksyn & Stuart, 1951] ont utilisé des méthodes asymptotiques pour résoudre les équations formulées auparavant par [Noether, 1921]. Ils ont obtenu des solutions jusqu'à $Re_{cr}=2510$ et $\alpha=1.22$. [Zahn et al., 1974] ont résolu des équations non-linéaires,

après une discrétisation des équations de Navier-Stokes. En utilisant des méthodes spectrales, [Herbert, 1976, 1977] a obtenu des solutions d'équilibre 2D jusqu'à un nombre de Reynolds de $Re=2935$ (avec $\alpha=1.323$). Les caractéristiques de ces solutions sont en bon accord avec les expériences de Nishioka et les valeurs obtenues ont été confirmées par des calculs plus récents, notamment ceux de [Pugh & Saffman, 1987] et [Soibelman & Meiron, 1988].

En partant de ces solutions d'équilibre, [Ehrenstein & Koch, 1991] ont calculé, à partir d'une analyse de stabilité secondaire très poussée, des solutions tridimensionnelles dans l'écoulement de Poiseuille pour des nombres de Reynolds avoisinant les valeurs transitionnelles ($Re\approx 1000$).

Malgré le succès des approches citées ci-dessus dans l'étude de l'écoulement de Poiseuille plan, on peut citer d'autres méthodes semi-numériques pour calculer des ondes de forme permanente qui peuvent servir de modèle aux états de vorticité décrits par [Saffman, 1983]. [Stewartson & Stuart, 1971] ont établi une équation de type Ginzburg-Landau pour décrire l'évolution faiblement non-linéaire des perturbations 2D dans l'écoulement de Poiseuille plan près du nombre de Reynolds critique. [Landman, 1987] a étudié cette équation et a trouvé une variété de solutions, incluant non seulement les ondes progressives mentionnées auparavant, mais aussi des solutions spatialement périodiques et quasi-périodiques ainsi que différents types d'ondes solitaires. Bien que ces solutions ne soient applicables qu'aux bas régimes en amplitude, elles suggèrent l'existence d'autres classes de solutions des équations complètes de Navier-Stokes.

I.5 Écoulement de Couette plan

L'écoulement de Couette plan, à savoir l'écoulement provoqué par le mouvement relatif de deux parois planes infinies, est considéré comme un prototype d'écoulements avec un comportement de transition sous-critique.

Avec son expression analytique simple (un profil de vitesse linéaire et un champ de vorticité constant), il constitue à priori le plus élémentaire des écoulements parallèles. Mais derrière cette apparence, se cachent d'énormes difficultés rencontrées dans son étude (que l'on citera par la suite) et qui pourrait même être à l'origine de la mauvaise compréhension des mécanismes qui entrent en jeu dans la transition pour cet écoulement.

Peu de résultats aussi bien expérimentaux que théoriques sont disponibles actuellement concernant l'écoulement de Couette plan, en comparaison aux nombreux résultats obtenus sur l'écoulement de Poiseuille (voir §I.4) ou sur l'écoulement de Couette circulaire. Cependant, on peut citer quelques travaux dont les plus récents semblent très prometteurs.

I.5.1 Etudes expérimentales

La plupart des études expérimentales entreprises sur l'écoulement de Couette s'intéressaient à son comportement pleinement turbulent. Elles visaient principalement la détermination de grandeurs telles que le profil de vitesse turbulent moyen et le tenseur de contraintes de Reynolds. Ainsi, [Telbany et Reynolds, 1980] ont étudié l'écoulement pour des valeurs de Reynolds $Re > 10000$. Une étude à la fois expérimentale et numérique concernant l'écoulement de Couette-Poiseuille a été réalisée par [Corenflos et al., 1993] dans le cadre de la modélisation de la turbulence développée. Mis à part ces deux travaux, on se contentera ici de citer principalement les études ayant un rapport avec la

transition.

[Reichardt, 1956] a été le premier à réaliser un dispositif expérimental de Couette plan, il releva l'apparition de la turbulence pour $Re=750$ (le nombre de Reynolds étant formé avec la moitié de la vitesse relative entre les parois et la demi-hauteur du canal). Plus récemment, [Aydin & Leutheusser, 1991] ont travaillé à des nombres de Reynolds plus faibles et ont repéré l'existence de la turbulence à $Re>300$ en utilisant des parois rugueuses.

Les expériences récentes de [Tillmark & Alfredsson, 1992] puis [Daviaud et al., 1992] se sont distinguées par le fait qu'elles se sont intéressées principalement aux aspects transitionnels de l'écoulement. Pour la première fois, la perturbation de l'écoulement était contrôlée et la visualisation était rendue possible grâce à l'utilisation d'une courroie transparente. Ces deux expériences présentaient une grande similitude au niveau du dispositif expérimental mais se différenciaient par les techniques de mesure utilisées.

[Tillmark et Alfredsson, 1992] ont réalisé leurs mesures par vélocimétrie laser dans un écoulement où le fluide estensemencé par des paillettes. Les particules étaient orientées de façon à pouvoir réfléchir la lumière d'un projecteur, ce qui permettait de distinguer les zones laminaires des zones turbulentes. Les auteurs ont ainsi déterminé un nombre de Reynolds de $Re=360$ à partir duquel l'écoulement est perturbé.

Par contre, [Daviaud et al., 1992] se sont plutôt intéressés à la visualisation globale de l'écoulement et à l'observation des états asymptotiques de l'écoulement après leur perturbation, notamment celle du comportement des spots turbulents sur des périodes de temps très longues. Cet objectif a été favorisé par la présence dans le dispositif expérimental de deux parois mobiles, ce qui permettait l'absence d'advection moyenne au sein de l'écoulement. En

introduisant des perturbations d'amplitude finie dans l'écoulement laminaire par un jet transverse, ils ont localisé un nombre de Reynolds transitionnel autour de $Re=370$, confirmant ainsi les résultats de Tillmark et Alfredsson.

En perfectionnant le dispositif expérimental utilisé par Daviaud et al., [Dauchot & Daviaud, 1994] ont étudié la déstabilisation de l'écoulement par deux familles de perturbations localisées. La première, de type 'impulsionnel', était apportée par un jet transverse et la seconde, permanente, était obtenue par l'introduction d'un fil très mince dans le plan central.

Dans le cas où la perturbation est instantanée, ils ont mis en évidence une amplitude critique de la perturbation et sa dépendance en fonction du nombre de Reynolds, ainsi qu'une valeur seuil de Re sous laquelle l'écoulement n'est plus déstabilisé, localisée à $Re=325$. Le deuxième type de perturbation leur a permis de mettre en évidence l'apparition de vortex longitudinaux qu'ils ont caractérisés et dont ils ont proposé un mécanisme de formation.

I.5.2 Etudes théoriques et numériques

Les simulations numériques directes peuvent être d'un grand apport comme complément aux études expérimentales dans l'étude de l'écoulement de Couette plan, profitant de l'avènement des gros moyens de calcul.

[Orszag & Kells, 1980] ont été les premiers à étudier l'évolution des perturbations tridimensionnelles dans l'écoulement de Couette plan. Ils ont montré par une simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes (avec une haute résolution numérique) l'existence d'un écoulement perturbé jusqu'à des nombres de Reynolds autour de $Re=1000$.

Par une autre simulation, [Lundbladh & Johansson, 1991] ont mis en évidence le développement de spots turbulents au sein de l'écoulement de Couette. Ils ont fait varier le nombre de Reynolds de $Re=300$ à $Re=1500$ dans le but de déterminer

la plus petite valeur pour laquelle les régions turbulentes persistent encore. Le nombre de Reynolds critique a été ainsi localisé à $Re_c \approx 375$. Les spots turbulents observés ont une forme elliptique (voir Figure I.3) avec une élongation longitudinale qui s'accroît de plus en plus en augmentant le nombre de Reynolds. Ce résultat est en très bon accord avec les études expérimentales citées plus haut qui situent la transition autour du même nombre de Reynolds.

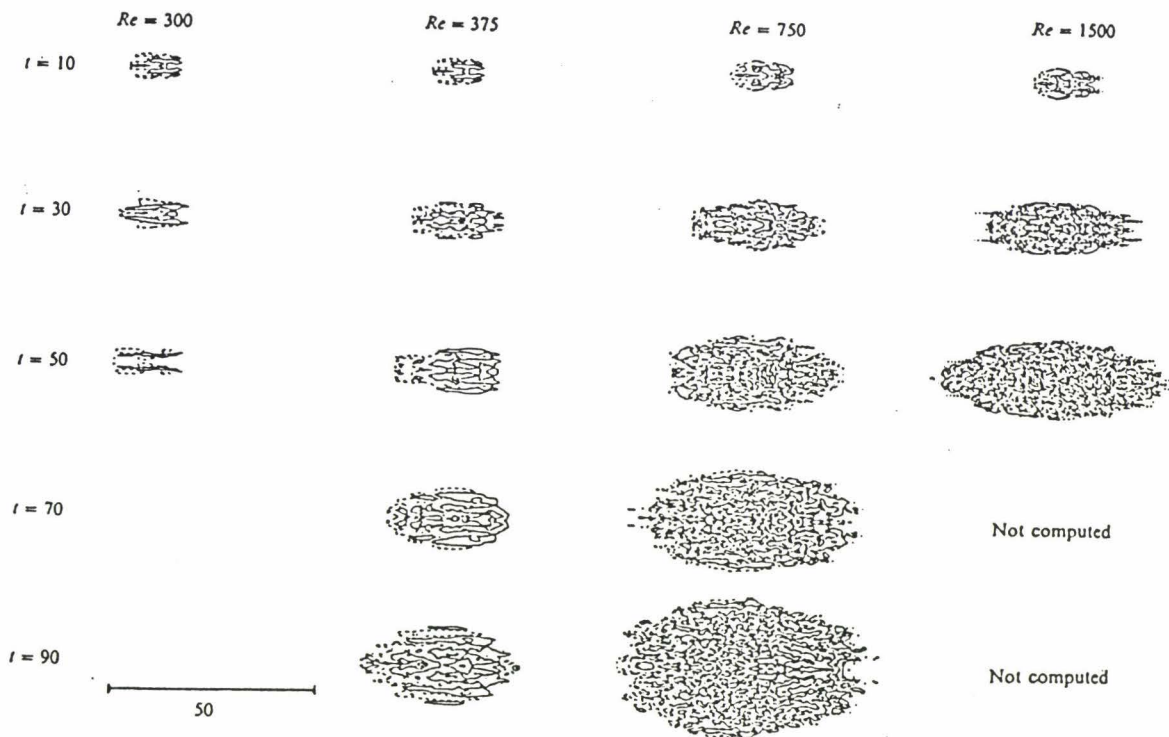


FIGURE 3. Spot development up to $t = 90$ for Reynolds numbers 300, 375 and 750, and up to $t = 50$ for $Re = 1500$. Contours of v at ± 0.02 for the (x, z) -plane at $y = 0$ are shown. Dashed contours represent negative values in this and following figures. A lengthscale is given in the figure for reference (same in both directions).

Figure I.3 - Développement de spots turbulents dans l'écoulement de Couette plan, d'après les simulations numériques de [Lundbladh & Johansson, 1991].

D'autres simulations numériques [Andersson et al., 1992] se sont intéressées aux

structures de la turbulence dans l'écoulement de Couette plan pour de plus grands nombres de Reynolds ($Re \approx 1300$) en montrant des structures de grande échelle, totalement absentes dans l'écoulement de Poiseuille et dans la couche limite. Une étude à la fois expérimentale et numérique concernant ces structures turbulentes a été récemment entreprise par [Bech`et al., 1994] se basant sur les résultats expérimentaux de [Tillmak & Alfredsson, 1992]

Ainsi, les études numériques et expérimentales ont mis en évidence que la transition initiée par les perturbations d'amplitude finie prévaut pour les faibles valeurs de nombre de Reynolds. Quoiqu'il en soit, le début des non-linéarités dans l'écoulement de Couette plan reste un problème encore mal compris. Contrairement au scénario de transition supercritique où les valeurs des paramètres critiques sont obtenues par une analyse de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld, l'analyse des bifurcations à partir des instabilités primaires vers des instabilités successives échoue dans l'écoulement de Couette plan. En effet, des études anciennes [Romanov, 1973] ont montré que cet écoulement est linéairement stable pour toute valeur du nombre de Reynolds, qui se traduit numériquement par le fait que les modes de l'équation d'Orr-Sommerfeld sont stables pour toute valeur de Re . De même, les études faiblement non-linéaires se sont avérées impuissantes, du fait de l'absence de courbe neutre autour de laquelle il serait possible de réaliser un développement en amplitude [Cowley & Smith, 1985]. Ceci marque une différence fondamentale avec l'écoulement de Poiseuille plan où existe un nombre de Reynolds critique linéaire $R_{cr} = 5772.22$ [Orszag, 1971] qui correspond à une bifurcation de Hopf dans la terminologie de la théorie de bifurcation, et qui a permis le calcul de solutions d'équilibres non-linéaires sous forme d'ondes progressives.

De l'impossibilité d'appliquer à l'écoulement de Couette plan (ou à

d'autres types d'écoulements) une analyse non-linéaire ou faiblement non-linéaire, un nouveau concept de transition dans les systèmes sous-critiques appelé "bypass mechanism" a vu le jour. [Reddy & Henningsson, 1993] ont introduit ce concept de transition qui mentionne la possibilité d'une croissance transitoire de l'énergie, du fait de la non-normalité de l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé. Cette croissance transitoire permettrait de faire intervenir les effets non-linéaires, formant ainsi la base d'une théorie de transition vers la turbulence dans les systèmes sous-critiques [Baggett et al. , 1995]. Ce mécanisme fait toutefois l'objet de plusieurs critiques concernant son rôle dans le déclenchement de la transition (cf. [Waleffe, 1995]).

Récemment, [Dauchot & Manneville, 1996] ont abordé le problème de la transition dans les écoulements à comportement sous-critique (en l'absence de modes linéairement stables) dans le cadre général de la théorie des systèmes dynamiques. Ils ont proposé un modèle non-linéaire simple qui exhibe des propriétés de non-normalité et de conservation de l'énergie par les termes non-linéaires, montrant que seuls ces derniers sont à l'origine de la transition. En effet, cette étude montre que c'est la position des conditions initiales dans l'espace des phases (par rapport à des séparatrices, ces dernières étant conditionnées par l'existence de points fixes non-triviaux) qui détermine l'ensemble de la dynamique. Ce modèle montre en définitive l'impossibilité d'un mécanisme de transition fondé uniquement sur une croissance transitoire d'origine linéaire, d'autant plus que plusieurs travaux récents viennent renforcer l'idée de l'importance des non-linéarités dans le déclenchement de la transition. La recherche de solutions d'amplitude finie (en tant que solution des équations de Navier-Stokes) s'inscrit dans ce débat sur la transition sous-critique. Ici apparaît une première difficulté, à savoir l'absence de points de bifurcation primaires.

Pour contourner ce problème, les études entreprises dans cet objectif se basent sur un point commun: l'idée de prendre comme point de départ un système dans lequel ces solutions existent et de le ramener par déformation continue à un écoulement de Couette plan.

Ainsi, [Lerner & Knobloch, 1988] ont analysé la stabilité linéaire d'un écoulement de Couette plan non visqueux avec un profil légèrement modifié. Cette approche a été étendue par la suite au cas visqueux par [Dubrulle & Zahn, 1991].

[Nagata, 1990] a calculé des solutions d'équilibre d'amplitude finie tridimensionnelles dans l'écoulement de Couette plan en étendant les solutions calculées pour un écoulement de Couette circulaire entre deux cylindres en faisant tendre les effets de courbure vers zéro. Les solutions ainsi obtenues existent jusqu'à des nombres de Reynolds proches de $Re=125$.

[Clever & Busse, 1992] ont étudié la convection de Rayleigh-Bénard en présence d'un mouvement uniforme des parois. Ils ont relevé l'existence de solutions tridimensionnelles en dessous de la valeur critique du début de la convection, leur analyse incluait notamment le cas où le nombre de Rayleigh Ra tend vers zéro, qui correspond au cas de l'écoulement de Couette plan classique. En procédant ainsi, ils ont retrouvé la même famille de solutions que Nagata.

Une approche intéressante a été proposée par [Milinazzo & Saffman, 1985], pour essayer de calculer des solutions 2D dans l'écoulement de Couette plan. Elle consiste à joindre paramétriquement les solutions existant dans l'écoulement de Poiseuille plan vers des états non-linéaires possibles dans Couette plan. En définissant un écoulement de Poiseuille-Couette, les auteurs ont tenté de relier paramétriquement les équilibres des deux écoulements limites à partir des solutions dans l'écoulement de Poiseuille, en augmentant continûment la vitesse des parois. Ils se sont aperçus finalement que ces équilibres disparaissent

dans l'espace des paramètres pour un écoulement de Poiseuille-Couette. La faible résolution numérique utilisée fait que cette étude préliminaire (les auteurs le soulignent eux-mêmes) ne donnait pas de réponse définitive quant à l'existence de solutions d'amplitude finie 2D dans l'écoulement de Couette, ce qui appelait d'autres études plus détaillées allant dans le même sens.

Le présent travail a pour but de répondre à cette question de façon définitive. L'idée générale est inspirée du travail de Milinazzo et Saffman, à cette différence près que la résolution numérique utilisée ici est suffisamment grande pour nous permettre de définir le mieux que possible le domaine d'existence des solutions calculées (dans l'écoulement de Poiseuille-Couette). Cette première étape fait l'objet du chapitre II et a par ailleurs fait l'objet de publications [Cherhabili & Ehrenstein, 1995, 1996c] et présentée dans des congrès dont [Cherhabili & Ehrenstein, 1996a]

Une fois ces solutions calculées pour l'écoulement de Couette plan, celles-ci constitueront un nouvel état de base pour une analyse de stabilité secondaire (par rapport à des perturbations 2D puis 3D), cette analyse étant l'objet du chapitre III. Quelques résultats de cette partie du travail peuvent être consultés dans [Cherhabili & Ehrenstein, 1996b]

Le chapitre IV sera consacré aux calculs d'états d'équilibres 3D obtenus à partir de points de bifurcations secondaires donnés par l'étude de stabilité secondaire.

Enfin, nous proposons dans le chapitre V une discussion générale de tous les résultats obtenus que nous essayerons de situer dans le contexte des autres travaux.

- CHAPITRE II -

**EQUILIBRES NON-LINEAIRES BIDIMENSIONNELS
DANS L'ECOULEMENT DE COUETTE PLAN**

II.1 Introduction

Notre travail est essentiellement basé sur l'hypothèse selon laquelle la transition sous-critique est une conséquence de l'existence d'équilibres non-linéaires, solutions des équations de Navier-Stokes. Il est donc naturel de rechercher tout d'abord des équilibres non-linéaires bidimensionnels. Ces états sont la première étape dans la description des non-linéarités, leur existence et leur stabilité peuvent être d'un grand apport dans la compréhension des mécanismes de transition, dans la mesure où elles sont un point de départ pour augmenter la complexité spatiale et/ou temporelle par des bifurcations successives [Saffman, 1983]. Ainsi, on peut espérer élucider et décrire les bifurcations sous-critiques afin de mieux comprendre des phénomènes de transition apparaissant à des nombres de Reynolds inférieurs aux valeurs

critiques (voire pour des écoulements linéairement stables comme dans le cas présent).

La plupart des études concernant le calcul de solutions d'équilibre d'amplitude finie se sont intéressées à l'écoulement de Poiseuille plan et à la couche limite de Blasius, omettant le cas de l'écoulement de Couette plan pour les raisons déjà citées précédemment (écoulement linéairement stable pour tout Re). L'existence même des états (bidimensionnels) dans l'écoulement de Couette plan a été mise en doute, ce qui fait que la question reste très ouverte. Les quelques études, relativement récentes, qui se sont penchées sur le problème n'ont pas réussi à en apporter une réponse définitive.

[Milinazzo & Saffman, 1985] ont été les premiers à tenter de calculer des ondes progressives bidimensionnelles dans l'écoulement de Couette plan par une continuation de la vitesse de la paroi à partir d'un écoulement de Poiseuille plan, mais ces auteurs n'ont pas abouti au résultat espéré. Toutefois, aucune conclusion ne pouvait être tirée de cette étude, car d'une part le domaine de solutions exploré était limité, et d'autre part la résolution utilisée était probablement insuffisante. Au même moment, [Cowley & Smith, 1985] ont étudié la stabilité linéaire et faiblement non-linéaire d'un écoulement de Poiseuille-Couette. Leur analyse linéaire montre l'existence d'une vitesse (de la paroi) limite u_w à partir de laquelle la courbe de stabilité neutre disparaissait. Quant à la stabilité faiblement linéaire, elle fait apparaître un comportement sous-critique des solutions existant jusqu'à la vitesse u_w . Au delà de cette limite, les solutions paraissent "bifurquer de l'infini".

En partant d'ondes tridimensionnelles calculées pour l'écoulement de Poiseuille plan, [Pugh, 1988] a essayé de calculer ce genre de solutions dans un écoulement de Poiseuille-Couette plan, de la même manière que Milinazzo et Saffman. Ces

solutions disparaissent encore très vite dans l'espace des paramètres pour $V=0.21$ (V étant la vitesse de la paroi telle que $V=0$ correspond à Poiseuille et $V=1$ à Couette).

Plus généralement, d'autres études que nous avons citées dans (§I.5.2) ont étudié l'existence d'équilibres non-linéaires dans l'écoulement de Couette plan, mais rares sont celles qui ont vraiment abouti. Finalement, l'étude de [Nagata, 1990] a été la première à montrer des solutions d'amplitude finie dans l'écoulement de Couette plan. Ces solutions sont par essence tridimensionnelles du fait qu'elles ont été obtenues à partir des équilibres dans un écoulement de Couette circulaire par continuation paramétrique. Toutefois, peu de renseignements sont donnés sur la structure de ces solutions. L'auteur atteint des nombres de Reynolds critiques pour l'existence de ces états de $Re \approx 125$, et il est à noter que ces valeurs sont largement en dessous des valeurs expérimentales (se situant autour de $Re=370$).

Dans notre étude, nous reprenons tout d'abord la question de l'existence de solutions non-linéaires bidimensionnelles. Plus particulièrement, nous cherchons à calculer des solutions sous forme d'ondes progressives dans un écoulement de Poiseuille-Couette. Ce dernier est caractérisé par l'introduction d'un paramètre η (que nous essayerons de varier de $\eta=0$ (Poiseuille) à $\eta=1$ (Couette)) qui vient s'ajouter aux paramètres de contrôle habituels, en l'occurrence le nombre de Reynolds Re et le nombre d'onde α de la solution. A la différence des autres études, nous explorons la surface d'équilibre (Re, α, η) d'une façon très précise, tout en insistant sur l'influence de la résolution numérique. Comme nous le verrons par la suite, ces deux facteurs se sont avérés décisifs pour répondre à la question de l'existence des solutions d'amplitude finie dans l'écoulement de Couette plan.

II.2 Ecoulement de base

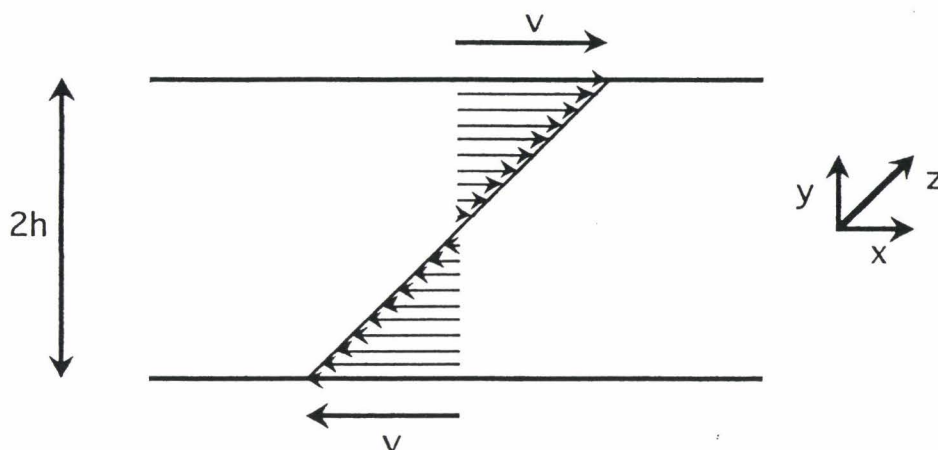


Fig II.1 - Profil de base linéaire dans l'écoulement de Couette plan.

On considère un écoulement de fluide visqueux incompressible, de densité constante ρ^* , entre deux parois planes parallèles, distancées d'une longueur $2h^*$, l'une se déplaçant à la vitesse V^* et l'autre à $-V^*$. Toutes les grandeurs sont adimensionnées par une vitesse de référence W^* (que l'on explicitera par la suite), la demi-hauteur h^* et par la viscosité cinématique ν^* . L'écoulement laminaire de base s'exprime par la composante longitudinale de la vitesse

$$U^*(y^*) = -\frac{1}{2\mu^*} P^* h^{*2} \left(1 - \frac{y^{*2}}{h^{*2}}\right) + \frac{V^*}{h^*} y^*, \quad (\text{II.1})$$

P^* étant le gradient de la pression et μ^* la viscosité dynamique.

Pour $V^*=0$ et $P^*\neq 0$, on obtient le profil parabolique de base de l'écoulement de Poiseuille plan, tandis que pour $P^*=0$ et $V^*\neq 0$ on retrouve le profil de base linéaire pour l'écoulement de Couette plan. Dans le but d'obtenir une famille d'écoulements incluant les deux écoulements limites, à savoir l'écoulement de

Poiseuille plan et l'écoulement de Couette plan, on introduit un paramètre sans dimension η ($0 \leq \eta \leq 1$) et une vitesse de référence W^* tels que

$$-\frac{1}{2\mu^*} P^* h^{*2} = W^* (1 - \eta)$$
$$V^* = \eta W^*. \quad (\text{II.2})$$

Toutes les quantités sont adimensionnées par la vitesse de référence W^* et par la demi-hauteur du canal h^* , définissant ainsi le profil de base pour l'écoulement de Poiseuille-Couette

$$U(y, \eta) = (1 - \eta) (1 - y^2) + \eta y \quad (\text{II.3})$$

avec un gradient de pression

$$P(\eta) = \frac{-2}{\text{Re}} (1 - \eta), \quad (\text{II.4})$$

$\text{Re} = \rho^* W^* h^* / \mu^*$ étant le nombre de Reynolds. Pour $\eta=0$, la vitesse de référence est reliée au gradient de pression, tandis que pour $\eta=1$ le nombre de Reynolds Re est défini avec la moitié de la vitesse relative des deux parois.

II.3 Formulation et équations de base

L'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent en formulation primitive sous la forme adimensionnée

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} = 0 \quad (\text{II.5})$$

(Δ étant le Laplacien et $\vec{\nabla}$ le gradient)

avec la condition de continuité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{II.6})$$

où $\vec{v} = (u, v, w) = \vec{v}^* / W^*$ et $p = p^* / \rho^* W^{*2}$ sont respectivement le vecteur vitesse et la pression adimensionnés, $\vec{x} = (x, y, z) = \vec{x}^* / h^*$ est le vecteur position contenant les coordonnées cartésiennes respectivement dans la direction longitudinale, normale et transversale. Le nombre de Reynolds Re est défini par $\text{Re} = W^* h^* / \nu^*$.

En prenant le rotationnel de (II.5), on obtient la formulation en vorticité suivante

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{\omega} = 0 \quad (\text{II.7})$$

où $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ représente le vecteur tourbillon. On peut aussi définir le vecteur fonction de courant $\vec{\psi}$ par $\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$ de sorte à avoir

$$\Delta \vec{\psi} + \vec{\omega} = 0. \quad (\text{II.8})$$

Cette formulation fonction de courant-vorticité est particulièrement adaptée pour un écoulement plan où $\vec{\psi} = \psi \vec{k}$ et $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$, ψ étant la fonction de courant scalaire et \vec{k} le vecteur unitaire dans la direction normale au plan (x, y) .

En combinant (II.7) et (II.8), on obtient une formulation en fonction de courant

pour un écoulement plan

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi - \frac{1}{\text{Re}} \Delta^2 \psi = 0 \quad (\text{II.9})$$

avec $u = \partial \psi / \partial y$ et $v = - \partial \psi / \partial x$.

Pour une meilleure comparaison avec les méthodes classiques de perturbations faiblement non-linéaires (voir [Herbert, 1983]), on introduit une amplitude ε caractérisant la perturbation et on écrit

$$\begin{aligned} \vec{v}(x,y,z,t) &= U(y,\eta) \vec{i} + \varepsilon \vec{v}(x,y,z,t) \\ p(x,y,z,t) &= p(x,\eta) + \varepsilon \tilde{p}(x,y,z,t) \\ \vec{\omega}(x,y,z,t) &= \Omega(y,\eta) \vec{k} + \varepsilon \vec{\omega}(x,y,z,t) \\ \vec{\psi}(x,y,z,t) &= \Psi(y,\eta) \vec{k} + \varepsilon \vec{\psi}(x,y,z,t), \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

(\vec{i} et \vec{k} étant respectivement les vecteurs unitaires dans la direction longitudinale x et dans la direction transversale z).

Les quantités de l'écoulement de base dans (II.11) peuvent s'écrire explicitement pour tout nombre de Reynolds par

$$\begin{aligned} U(y,\eta) &= (1 - \eta) (1 - y^2) + \eta y \\ P(\eta) &= \frac{-2}{\text{Re}} (1 - \eta) \\ \Psi(y,\eta) &= (1 - \eta) \left(y - \frac{y^3}{3} \right) + \eta \frac{y^2}{2} \\ \Omega(y,\eta) &= - \frac{\partial U}{\partial y} = (1 - \eta) 2y - \eta, \end{aligned}$$

$P(\eta)$ étant le gradient de pression.

Par la suite nous allons calculer les solutions sous forme d'ondes progressives qui se déplacent à la vitesse c dans la direction longitudinale x . Ces solutions seront donc stationnaires dans un repère qui se déplace à cette même vitesse c .

Si on injecte (II.11) dans (II.5), tout en plaçant dans un système de référence $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$ se déplaçant à la vitesse c dans la direction x ($\tilde{x}=x-ct, \tilde{y}=y, \tilde{z}=z, \tilde{t}=t$), on obtient la formulation en variables primitives pour l'écoulement perturbé (pour des raisons pratiques, on écrit les coordonnées sans les tildes par la suite)

$$\frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial t} + (U - c) \frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} \vec{i} + \nabla \tilde{p} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{\tilde{v}} + \varepsilon (\vec{\tilde{v}} \cdot \nabla) \vec{\tilde{v}} = 0 \quad (\text{II.12})$$

avec l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \vec{\tilde{v}} = 0 \quad (\text{II.13})$$

De la même façon, la formulation en vorticité des équations pour l'écoulement perturbé devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\tilde{\omega}}}{\partial t} + (U - c) \frac{\partial \vec{\tilde{\omega}}}{\partial x} - \Omega \frac{\partial \vec{\tilde{v}}}{\partial z} + \tilde{v} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \vec{k} + \Omega \tilde{\omega}_y \vec{i} \\ - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{\tilde{\omega}} + \varepsilon \left\{ (\vec{\tilde{v}} \cdot \nabla) \vec{\tilde{\omega}} - (\vec{\tilde{\omega}} \cdot \nabla) \vec{\tilde{v}} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Dans ce travail, nous choisissons de travailler avec la formulation en variables indépendantes $(\tilde{v}, \tilde{\omega}_y)$ qui représentent respectivement les composantes normales de la vitesse et de la vorticité. Une première équation est obtenue en prenant la composante suivant la normale \vec{j} de (II.14). La deuxième équation est obtenue en appliquant de nouveau l'opérateur rotationnel à (II.14) et en prenant ensuite la composante suivant \vec{j} (en écrivant $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\Delta \vec{v}$), ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{v} = (c - U) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \tilde{v} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^2 \tilde{v} + \\ - \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(\vec{\tilde{v}} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\omega}_z - (\vec{\tilde{\omega}} \cdot \nabla) \tilde{w}] - \frac{\partial}{\partial z} [(\vec{\tilde{v}} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\omega}_x - (\vec{\tilde{\omega}} \cdot \nabla) \tilde{u}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.15a})$$

Tandis que la composante suivant \vec{j} de (II.14) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\omega}_y = (c - U) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\omega}_y + \Omega \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\omega}_y - \varepsilon \left[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{\omega}_y - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{v} \right] \quad (II.15b)$$

avec les conditions aux bords

$$\tilde{v}(y=\pm 1) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}(y=\pm 1) = 0 \quad (II.15c)$$

$$\tilde{\omega}_y(y=\pm 1) = 0.$$

Dans le système (II.15), nous utilisons plus loin l'équation de continuité pour déterminer \tilde{u} et \tilde{w} en fonction de \tilde{v} et $\tilde{\omega}_y$ par

$$\Delta_1 \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y}$$

$$\Delta_1 \tilde{w} = -\frac{\partial \tilde{\omega}_y}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y \partial z}$$

avec $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, et ceci en inversant explicitement l'opérateur Δ_1 .

Dans la suite de cette étude, nous nous intéresserons dans un premier temps à un écoulement plan. Pour se mettre dans ce cas de figure, il suffirait alors de prendre $\omega_y=0$ dans (II.15) et l'équation pour la perturbation se réduirait à (II.15a).

De façon plus habituelle, on écrit l'équation de la fonction de courant (II.9) pour la perturbation $\tilde{\psi}$, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{\psi} = (c - U) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \tilde{\psi} + \frac{1}{Re} \Delta^2 \tilde{\psi} + \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \\ - \varepsilon \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} \Delta \tilde{\psi} . \end{aligned} \quad (II.16)$$

Dans l'étude bidimensionnelle, nous choisissons de travailler avec cette dernière formulation, avec les conditions aux bords correspondantes

$$\begin{aligned}\tilde{u}(y=\pm 1) &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}(y=\pm 1) = 0 \\ \tilde{v}(y=\pm 1) &= -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}(y=\pm 1) = 0.\end{aligned}\tag{II.17}$$

II.4 Méthode de résolution numérique

Il paraît naturel de chercher les solutions d'amplitude finie sous forme de solutions périodiques dans la direction homogène. Comme pour l'écoulement de Poiseuille plan, on s'intéresse particulièrement aux ondes progressives (ondes de Tollmien-Schlichting) évoluant dans la direction longitudinale x et de longueur d'onde $\lambda=2\pi/\alpha$, α étant le nombre d'onde. On développe la solution en série de Fourier

$$\tilde{\psi}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_n(y) e^{in\alpha x}.\tag{II.18}$$

où $\hat{\psi}_n(y)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ mode en Fourier de la solution ne dépendant que de la coordonnée normale y . En substituant (II.18) dans (II.16), on obtient les équations modales

$$\begin{aligned}\left\{ (c - U(y, \eta)) i n \alpha + \frac{1}{Re} D_n \right\} D_n \hat{\psi}_n \\ + i n \alpha \frac{\partial^2 U(y, \eta)}{\partial y^2} \hat{\psi}_n - \varepsilon \sum_{v=-\infty}^{+\infty} N_{n-v, v} = 0\end{aligned}\tag{II.19}$$

avec $D_n = \frac{d^2}{dy^2} - (n\alpha)^2$ et où le terme de convolution $N_{\mu, \nu}$:

$$N_{\mu, \nu} = i\alpha \left\{ \mu \frac{d\hat{\psi}_\nu}{dy} D_\mu \hat{\psi}_\mu - \nu \hat{\psi}_\nu D_\mu \frac{d\hat{\psi}_\mu}{dy} \right\},\tag{II.20}$$

caractérise les non-linéarités.

L'équation (II.19) est analogue à celle utilisée dans [Pugh & Saffman, 1988] et [Ehrenstein & Koch, 1991] pour l'écoulement de Poiseuille plan qui correspond à $\eta = 0$ dans (II.3).

Les solutions sont supposées réelles, ce qui nous impose d'avoir

$$\hat{\psi}_{-n} = \hat{\psi}_n^* \quad (\text{II.21})$$

où l'expression étoilée exprime la complexe conjuguée de la solution modale. Par conséquent, il suffit de considérer seulement les modes $n \geq 0$.

Les conditions aux limites (II.17) qui expriment l'adhérence du fluide aux bords, s'écrivent sous forme modale

$$\text{in}\alpha \hat{\psi}_n(\pm 1) = 0; \quad \frac{d\hat{\psi}_n}{dy}(\pm 1) = 0. \quad (\text{II.22})$$

Pour $n=0$, la première condition de (II.22) est identiquement satisfaite, ce qui nous amène à la remplacer par une condition de paramétrisation liée à notre problème physique, qui consiste soit à imposer un flux total constant à travers le canal, soit à considérer le gradient de pression moyen total constant égal à sa valeur laminaire. L'écoulement de Couette plan étant défini par un gradient de pression nul ($P=0$), il paraît donc naturel d'imposer la condition de gradient de pression moyen total constant [Millinazzo & Saffman, 1985].

Comme dans [Ehrenstein & Koch, 1991], on écrit au lieu de (II.19) pour $n=0$, l'équation de quantité de mouvement suivant x , tout en tenant compte de la paramétrisation physique choisie. En effet, au vu de l'équation (II.12) le terme $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$ est périodique en x , on peut donc écrire

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{p}_n(y) e^{in\alpha x}. \quad (\text{II.23a})$$

En intégrant, on obtient la perturbation pour la pression sous la forme

$$\tilde{p}(x,y) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{in\alpha} \hat{p}_n(y) e^{in\alpha x} + \hat{p}_0(y) x + \text{constante.} \quad (\text{II.23b})$$

De là, on déduit

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}(x,y) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{in\alpha} \frac{d\hat{p}_n}{dy}(y) e^{in\alpha x} + \frac{d\hat{p}_0}{dy}(y) x \quad (\text{II.23c})$$

Or $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}$ est aussi périodique (par la 2^{ème} composante de (II.12)), ce qui se traduit dans (II.23c) par $\frac{d\hat{p}_0}{dy}(y) = 0$ et par conséquent $\hat{p}_0(y) = C^{te} = \varphi_0$.

D'autre part, la condition de paramétrisation physique (gradient de pression moyen total constant, égal à la valeur laminaire) se traduit pour la perturbation par

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} dx dy = 0$$

ce qui permet aisément de trouver que $\varphi_0 = 0$.

Revenons à présent à l'équation de la quantité de mouvement pour $n=0$; celle-ci est obtenue en moyennant l'équation de la quantité de mouvement longitudinale sur une période en x , d'où

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \hat{u}_0}{dy^2} + \text{Termes non-linéaires} + \varphi_0 = 0.$$

Or $\varphi_0 = 0$, on obtient alors une équation pour $n=0$

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \hat{u}_0}{dy^2} + 2 \alpha \varepsilon \Im \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} v \hat{\psi}_v^* \frac{d^2 \hat{\psi}_v}{dy^2} \right\} = 0 \quad (\text{II.24})$$

avec la condition d'adhérence à la paroi

$$\hat{u}_0(\pm 1) = 0. \quad (\text{II.25})$$

Les équations modales à résoudre sont donc (II.19) pour $n > 0$ (en remplaçant $d\hat{\psi}_0/dy$ par \hat{u}_0 dans le terme de convolution de (II.19)) avec les conditions aux bords (II.22), et pour $n=0$ l'équation (II.24) et la condition (II.25).

Le développement modal (II.18) est tronqué à une valeur $n=N$ donnée, de façon à obtenir des solutions convergées. Nous utilisons une méthode de collocation de Chebyshev pour calculer les modes de Fourier $\hat{u}_0(y)$ et $\hat{\psi}_n(y)$, $0 \leq n \leq N$. Chaque composante de Fourier est alors évaluée aux $(K+1)$ points de collocation y_j tels que

$$y_j = \cos(j\pi/K), \quad j = 0, 1, \dots, K \quad (\text{II.26})$$

Les dérivées sont calculées par la méthode des matrices de collocation (cf. Annexe 1)

$$\frac{d^P \hat{q}_n}{dy^P}(y_j) = \sum_{k=0}^K D_{jk}^{(P)} \hat{q}_n(y_k) \quad (\text{II.27})$$

avec $\hat{q}_n \equiv \hat{\psi}_n$, $n > 0$ et $\hat{q}_0 \equiv \hat{u}_0$.

Les équations (II.19) et (II.24) sont ensuite écrites en chaque point de collocation y_j , $1 \leq j \leq K-1$. Pour éviter les modes instables, l'opérateur différentiel du quatrième ordre est exprimé comme un produit de deux opérateurs de second ordre en remplaçant implicitement la condition aux bords de Neumann (II.22) par deux conditions intégrales équivalentes pour $d^2\hat{\psi}_n/dy^2(y)$ (voir Annexe II).

Enfin, il reste à fixer l'amplitude ϵ et la vitesse de phase c . En effet, il subsiste une indétermination de phase dans le calcul de la solution $\hat{\psi}_n$, car si $\hat{\psi}_n$ est solution alors $\hat{\psi}_n e^{in\alpha\delta}$ est aussi solution (pour une valeur de δ arbitraire), ce qui

correspondrait à un décalage $-\delta$ de l'origine dans la direction longitudinale. Pour lever cette indétermination, nous imposons une condition de normalisation de la forme

$$\hat{\psi}_1(0) + \frac{d\hat{\psi}_1}{dy}(0) = 1. \quad (\text{II.28})$$

En résumé, les équations à résoudre sont (II.19) avec les conditions d'adhérence correspondantes (II.22) pour $n>0$, (II.24) avec (II.25) pour $n=0$ et enfin la condition de normalisation (II.28), ce qui conduit à un système algébrique non-linéaire de la forme

$$\vec{F}(\vec{u}; \vec{\lambda}) = 0 \quad (\text{II.29})$$

\vec{u} étant le vecteur solution, qui contient les quantités

$$\vec{u} = \{\hat{u}_{0j}; \Re(\hat{\psi}_{nj}), \Im(\hat{\psi}_{nj}); c, \varepsilon\}, \quad 1 \leq j \leq K-1, \quad 1 \leq n \leq N$$

et $\vec{\lambda} = (\text{Re}, \alpha, \eta)$ est le vecteur paramètre où l'un des paramètres varie, les deux autres étant fixés. Le système (II.29) est ensuite résolu par la méthode d'itération de Newton-Raphson avec une procédure de continuation classique pour le paramètre spécifique de continuation λ . Toutefois, cette méthode de continuation échoue aux points limites où la matrice Jacobienne $\partial \vec{F} / \partial \vec{u}$ devient singulière. Cette difficulté est levée en utilisant une méthode de continuation de Keller [Keller, 1977] qui fait intervenir une pseudo-longueur d'arc s et un paramètre θ , $0 < \theta < 1$, tels que

$$N(u, \lambda, s) = \theta \langle \dot{\vec{u}}(s_0), \vec{u}(s) - \vec{u}(s_0) \rangle + (1-\theta) \dot{\lambda}(s_0) [\lambda(s) - \lambda(s_0)] - (s - s_0) = 0 \quad (\text{II.30})$$

où λ désigne le paramètre de continuation, $\dot{\vec{u}}(s) = \partial \vec{u} / \partial s$ et $\dot{\lambda}(s) = \partial \lambda / \partial s$.

Cette condition définit un hyperplan qui coupe la courbe de continuation en une nouvelle solution $\vec{u}(s)$, elle a l'avantage d'être facilement implémentée numériquement. Une fois la solution connue en $s=s_0$, une estimation initiale $\vec{u}^{(0)}(s)$ est obtenue par l'approximation

$$\vec{u}^{(0)}(s) = \vec{u}(s_0) + (s - s_0) \left. \frac{d\vec{u}}{ds} \right|_{s_0}$$

D'autre part, $\dot{\vec{u}}(s) = \partial \vec{u} / \partial s$ est calculé à partir de

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{u}} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} = - \frac{\partial \vec{G}}{\partial s}$$

En effet, l'utilisation de la continuation de Keller (II.30) nous amène à résoudre au lieu de (II.29) le système étendu

$$\vec{G}(\vec{z}; s) = \begin{Bmatrix} \vec{F}(\vec{u}; \lambda) \\ N(\vec{u}, \lambda, s) \end{Bmatrix} = 0; \quad \vec{z} = \begin{Bmatrix} \vec{u} \\ \lambda \end{Bmatrix}$$

par la procédure de Newton-Raphson

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{z}}(\vec{z}^{(v)}(s); s) \cdot \Delta \vec{z}^{(v)} = - \vec{G}(\vec{z}^{(v)}(s); s)$$

$$\vec{z}^{(v+1)}(s) = \Delta \vec{z}^{(v)} + \vec{z}^{(v)}(s).$$

Dans le cas de notre continuation numérique, le point de départ sera choisi parmi les solutions bidimensionnelles existant dans l'écoulement de Poiseuille plan sous forme d'ondes progressives d'amplitude finie. Ces ondes ont été précédemment calculées par de nombreux auteurs parmi lesquels [Zahn et al., 1974], [Herbert, 1976] et [Pugh, 1988].

II.5 Résultats et discussion

II.5.1 Ecoulement de Poiseuille plan

Notre méthode de calcul présente l'avantage de calculer les ondes progressives d'amplitude finie pouvant exister plus généralement pour la famille d'écoulements de Poiseuille-Couette. Avant de commencer à explorer le domaine d'existence de ces solutions dans l'espace des paramètres, nous nous proposons de calculer (à partir du point de bifurcation primaire) ces ondes progressives dans l'écoulement de Poiseuille pur ($\eta=1$, dans (II.3)). Une fois comparés aux précédents calculs, ces états serviront de point de départ pour notre continuation vers d'éventuelles solutions dans l'écoulement de Couette plan. Ce test permet par la même occasion de valider notre méthode numérique.

La figure II.2 représente l'émergence de solutions d'amplitude finie à partir du point de bifurcation primaire localisé par [Orszag, 1971] à ($Re_{cr}=5772.22$, $\alpha_{cr}=1.02056$, $c_{cr}=0.26400174$) et qui correspond en fait à une bifurcation de Hopf. Cette représentation montre une coupe de la surface d'équilibre dans le plan (ϵ, Re) pour η fixé à $\eta=0$, chaque point sur la courbe représente la projection dans ce plan d'une onde progressive non-linéaire solution du système (II.29). Pour comparer nos résultats avec ceux de [Herbert, 1976] et de [Pugh, 1988], nous avons exploré la surface d'équilibre pour rechercher le nombre de Reynolds critique minimal pour l'existence de ces solutions. Pour la même valeur de nombre d'onde que Herbert et Pugh ($\alpha=1.3231$), nous avons représenté sur la Figure II.3 l'évolution du nombre de Reynolds Re en fonction de l'amplitude ϵ . Le nombre de Reynolds minimal trouvé correspond très bien à ceux calculés par Herbert et Pugh (voir tableau II.1).

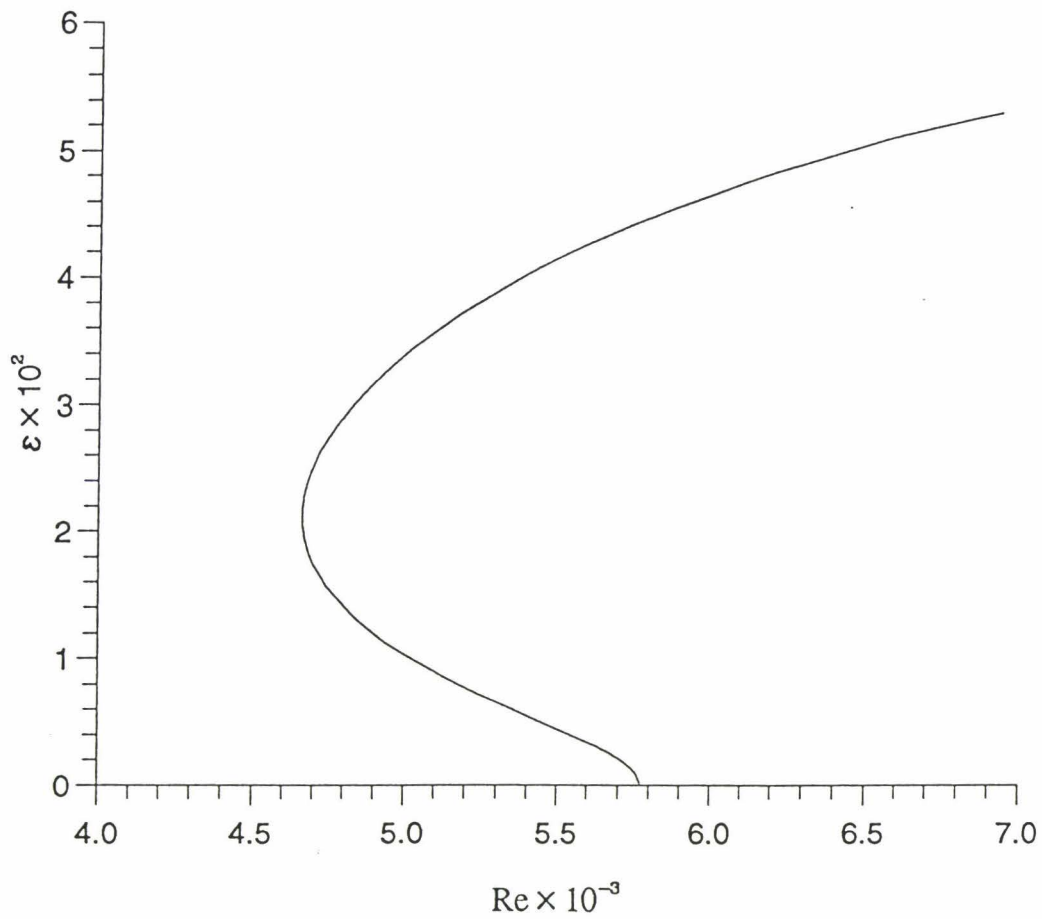


Figure II.2 - Solutions d'équilibre émergeant du point critique dans l'écoulement de Poiseuille plan dans le plan (ϵ, Re) .

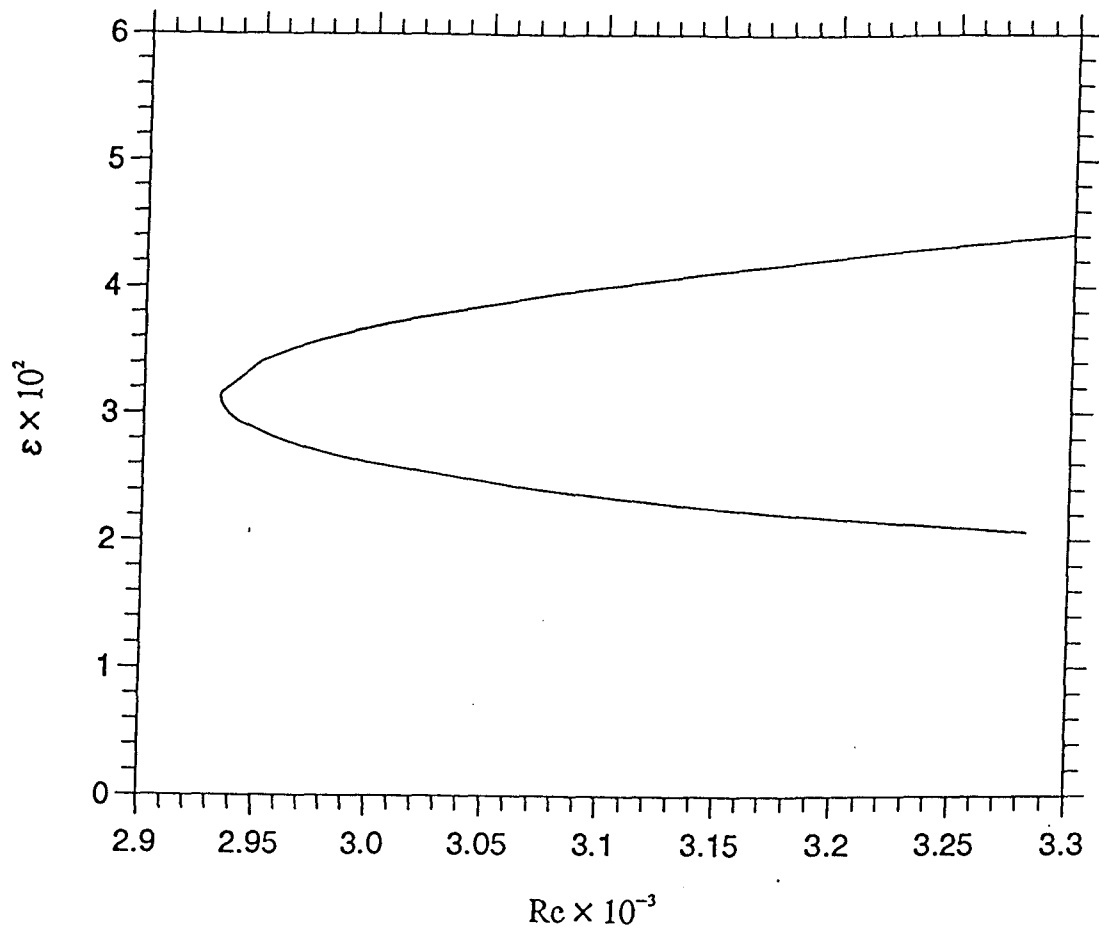


Figure II.3 - Solutions d'équilibre dans la plan (ϵ, Re) dans l'écoulement de Poiseuille plan. $\alpha=1.3231$ avec $N=4$, $K=44$. Le point limite de la surface d'équilibre correspond au nombre de Reynolds minimal pour l'existence de ces solutions.

paramètre	Herbert (1976) N=4	Pugh (1988) N=4	Présent calcul N=4
α	1.3231	1.3231	1.3231
Re	2934.80	2934.25	2934.33
c	0.3643	0.3643	0.3641

Tableau II.1 - Comparaison des paramètres à Re_{\min} pour le même α dans l'écoulement de Poiseuille plan.

II.5.2 Ecoulement de Poiseuille-Couette plan

Les solutions calculées dans (II.5.1) seront notre point de départ pour capter la famille de solutions dans Poiseuille-Couette. Dans un premier temps, nous continuons ces solutions avec une troncature en Fourier de $N=3$ et avec un nombre de points de collocation de $K=45$, ce qui donne des résultats assez précis et une bonne convergence des solutions dans l'écoulement de Poiseuille plan [Ehrenstein & Koch, 1989].

Un premier résultat représenté sur la figure II.4 dans le plan (α, ϵ) pour $Re=15993$ nous montre l'évolution des solutions au fur et à mesure que nous augmentons la valeur de η . Contrairement à l'écoulement de Poiseuille plan où les solutions existent pour des gammes de longueurs d'ondes de l'ordre de $\alpha=1$, ici elles ont tendance à aller vers des valeurs de α plus petites avec des courbes de solutions de plus en plus allongées. Notons aussi que les solutions se déplacent vers des valeurs de α plus petites en augmentant η . Ainsi, entre $\eta=0.43$ et $\eta=0.45$, la solution se décompose en deux courbes très petites et finit par disparaître brusquement dans l'espace des paramètres. Ce comportement a déjà été observé par [Millinazzo & Saffman, 1985] qui ont conclu que des ondes non-linéaires bidimensionnelles cessent d'exister quand on augmente la vitesse de la paroi au delà d'une certaine valeur.

Les Figures II.5a et II.5b montrent l'allure des lignes de courant pour deux points de la courbe correspondant à deux valeurs de η . Pour $\eta=0.35$ (Figure II.5a), les lignes de courant ne subissent pas un grand changement par rapport à celles que présente l'écoulement de Poiseuille plan, avec toujours la présence d'une symétrie

$$(x \rightarrow x + \lambda_x / 2; y \rightarrow -y)$$

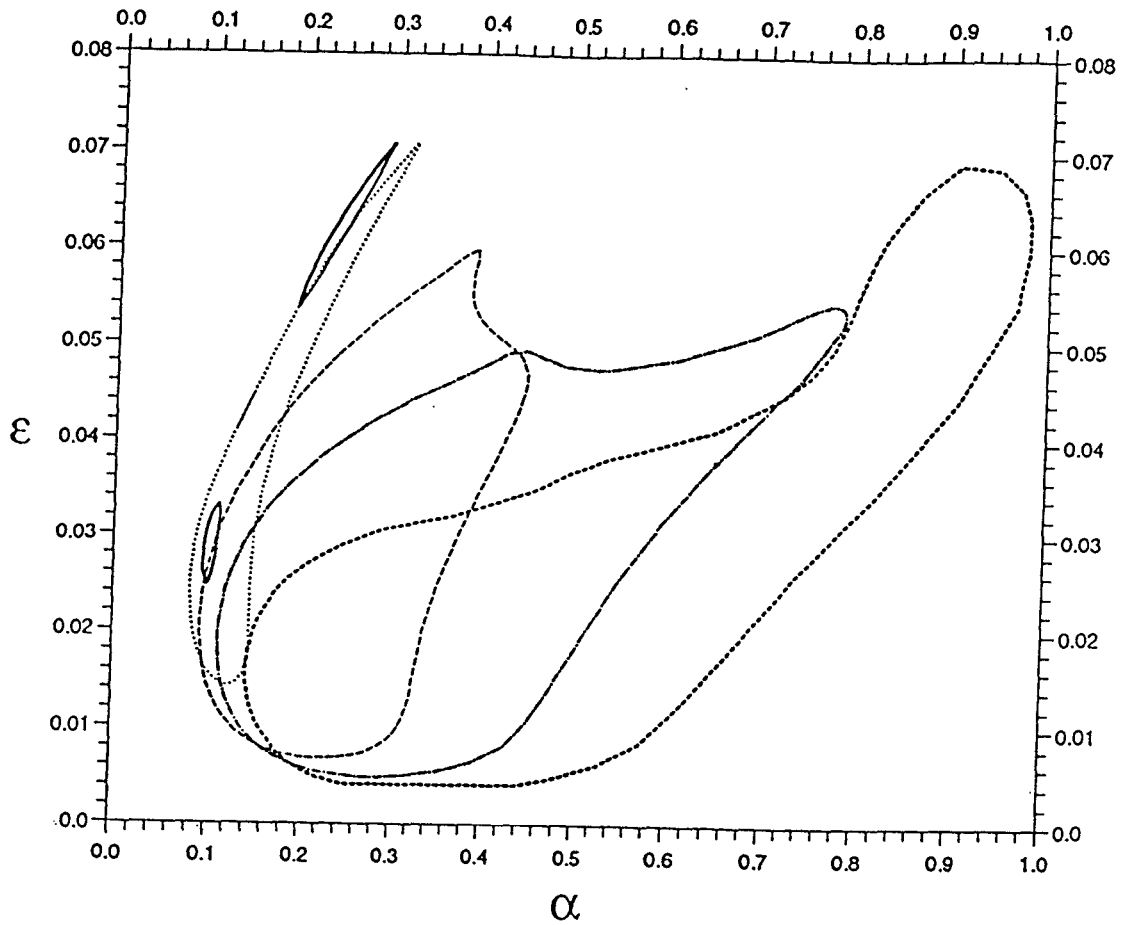


Figure II.4 - Coupe à travers la surface d'équilibre dans le plan (ϵ, α) pour $Re=15993$ avec $N=3$ et $K=44$ pour $\eta=0.24$; $\eta=0.30$; $\eta=0.35$; $\eta=0.43$; $\eta=0.45$

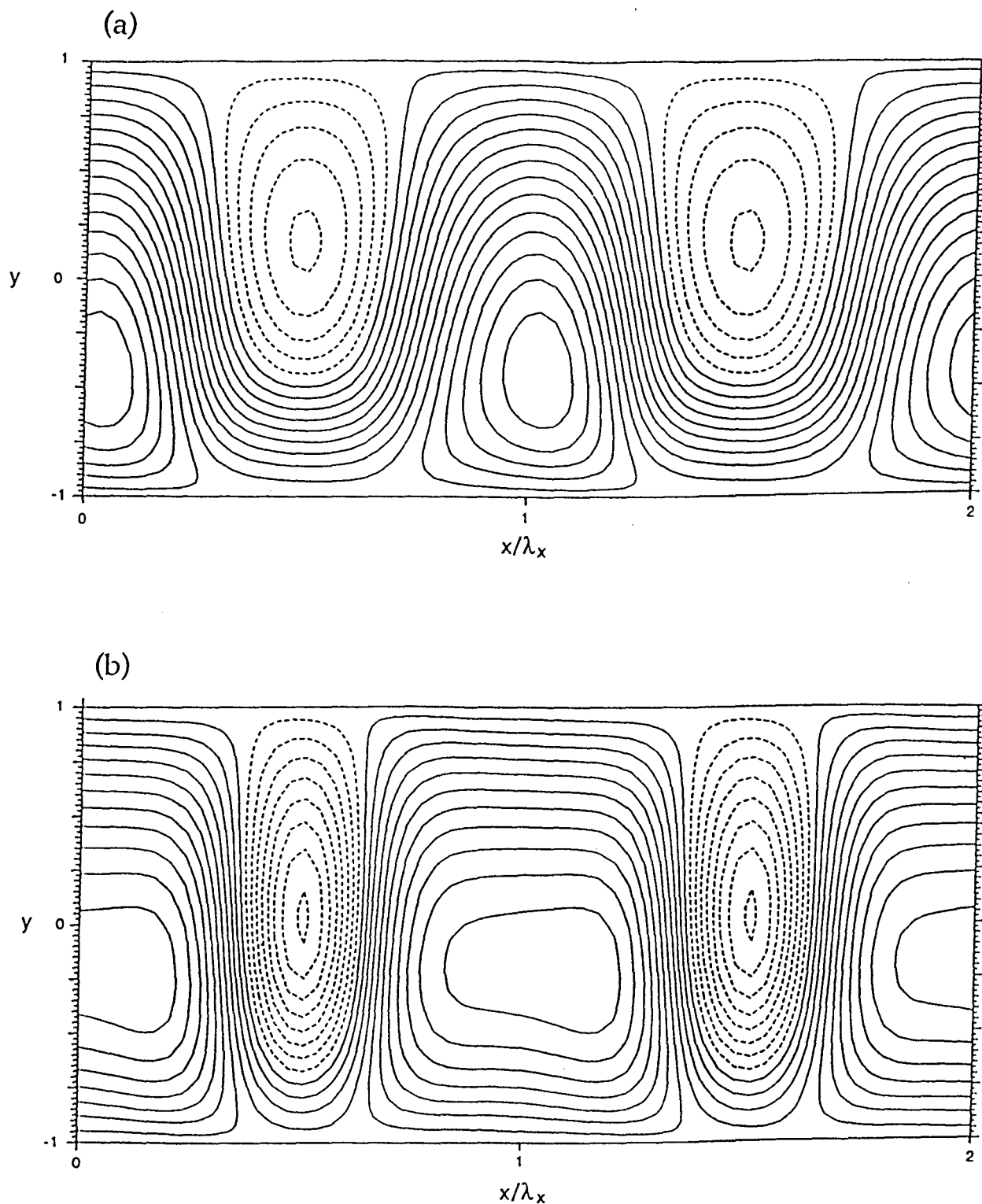


Figure II.5 - Lignes de courant de la perturbation pour $Re=15993$ avec $N=3$ et $K=44$ pour
 a) $\eta=0.35$, $\epsilon=0.03$, $\alpha=0.44$; b) $\eta=0.43$, $\epsilon=0.07$, $\alpha=0.316$.

déjà présente dans le cas Poiseuille plan [Ehrenstein & Koch, 1991], tandis que pour $\eta=0.45$ (voir Figure II.5.b) cette symétrie est complètement brisée.

La Figure II.6 montre l'amplitude de la perturbation en fonction de la vitesse de phase c pour des solutions 2D à $\eta=0.43$. Contrairement au cas de Poiseuille plan, on découvre l'existence de certaines solutions avec $c=0$, qui correspondent à des solutions stationnaires.

A cette étape de l'étude, on pourrait hâtivement conclure que ces ondes non-linéaires ne peuvent pas être étendues au régime Couette plan avec $\eta=1$. Toutefois, nous observons que la troncature en Fourier a une influence inattendue sur notre classe intermédiaire de solutions. Sur la figure II.7, nous avons représenté la même solution (correspondant à $\eta=0.43$ et $Re=15993$) pour deux troncatures en Fourier différentes. On remarque que l'allure des solutions est complètement différente en augmentant N . Alors que la courbe des solutions à $N=4$ tend à disparaître, ces mêmes solutions pour $N=5$ persistent encore dans le plan (ε, α) aussi bien en amplitude qu'en nombre d'onde. Ceci montre clairement que les solutions ne sont pas encore convergées et que si nous voulons atteindre Couette plan, il faudrait certainement augmenter la troncature en Fourier.

La démarche suivie a donc été la suivante; à une troncature donnée nous continuons par η jusqu'à sa plus grande valeur possible. Quand les solutions disparaissent dans l'espace des paramètres, nous passons à une troncature supérieure, et ainsi de suite. Au cours de cette investigation, l'évolution en fonction de η des solutions dans l'espace des paramètres $(\varepsilon, Re, \alpha)$ s'est avérée d'une extrême complexité. La progression du paramètre η se faisant à chaque fois avec des pas très petits.

Finalement, nous avons obtenu les premières solutions non-linéaires dans

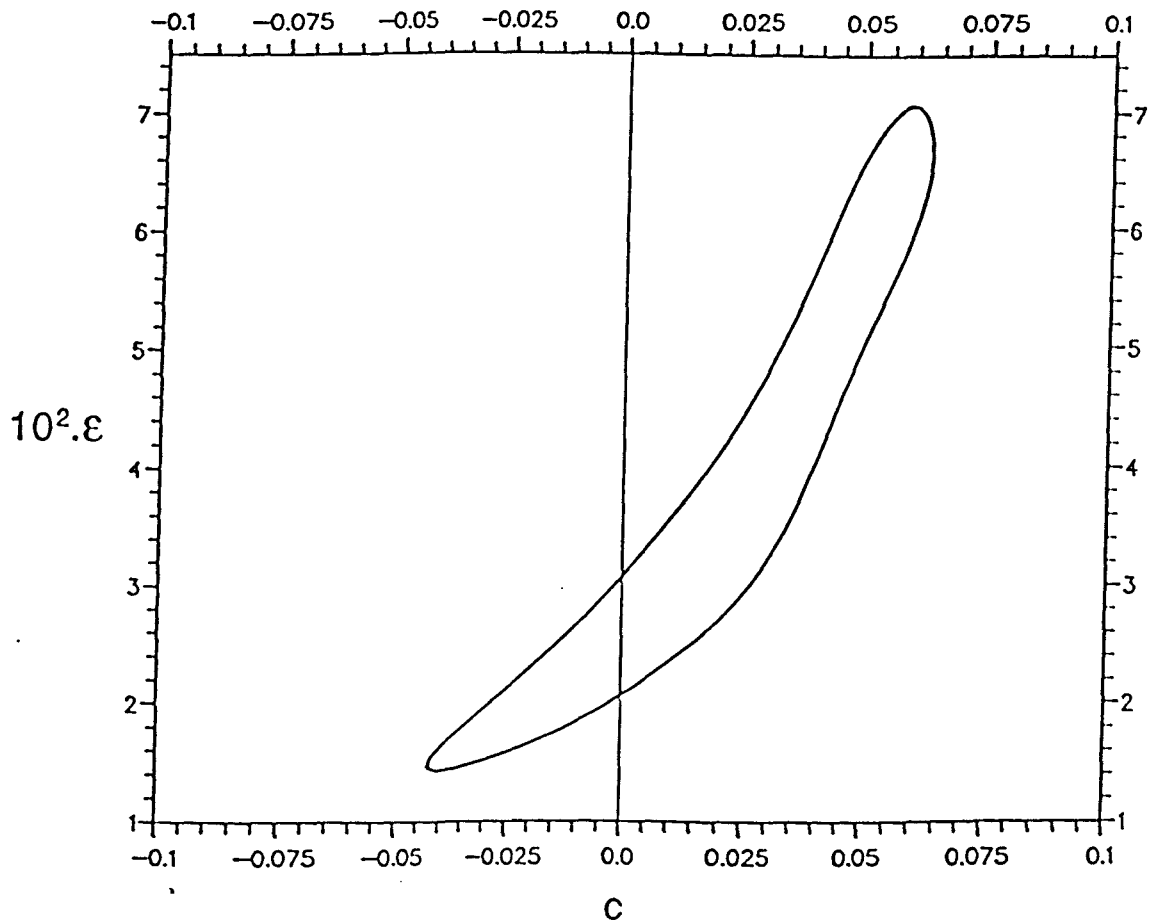


Figure II.6 - L'amplitude ϵ en fonction de la vitesse de phase c pour la solution d'équilibre 2D avec $Re=15993$, $\eta=0.43$, $N=3$, $K=44$. La solution correspondante dans le plan (ϵ, α) est représentée sur la figure II.4.

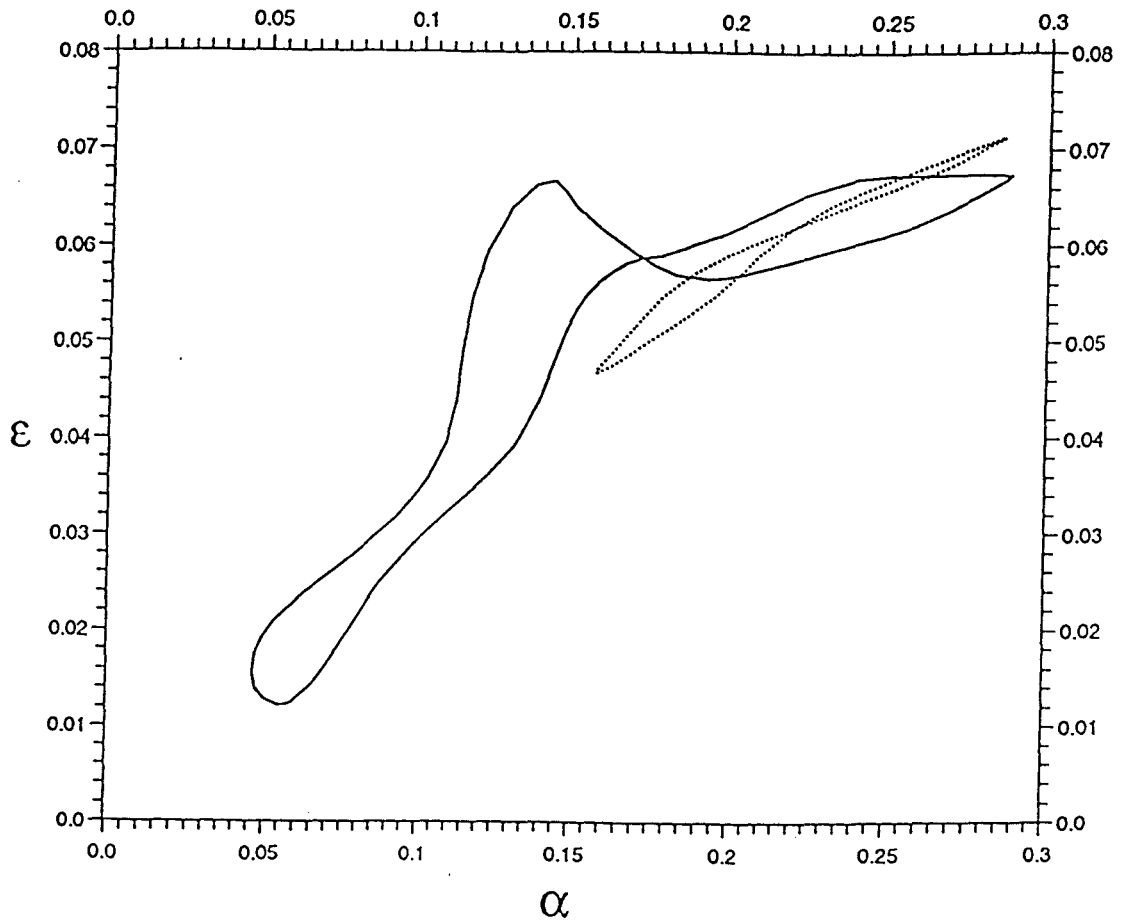


Figure II.7 - Surface d'équilibre dans le plan (ϵ, α) pour $Re=15993$ et $\eta=0.5$ avec $K=34$ et une troncature en Fourier $N=4$; — $N=5$.

Couette plan avec une troncature $N=10$. La figure II.8a représente ces solutions dans le plan (ϵ, α) pour $Re=7000$ (Dans ce calcul, nous avons utilisé la condition de normalisation (II.28) qui n'impose pas de contraintes de symétrie). Nous remarquons que la courbe est bien représentée pour les petites valeurs de α alors que nous avons des difficultés à capter les solutions pour les valeurs de α plus grandes. La vitesse de phase correspondante en fonction du nombre d'onde est représentée sur la figure II.8.b. Les vitesses de phase sont nulles pour une partie de longueurs d'ondes sauf à partir de $\alpha=0.17$ avec toutefois une très petite valeur de $c=\pm 0.002$. Cette région des vitesses de phase non nulles correspond à la partie de la courbe où le comportement semble irrégulier et où les solutions ont du mal à converger. Ceci semble indiquer que toutes les solutions de Couette plan sont stationnaires ($c=0$), ce qui a été aussi observé pour les solutions tridimensionnelles de [Nagata, 1990].

II.5.3 Ecoulement de Couette plan

Les solutions d'amplitude finie dans l'écoulement de Couette plan calculées avec $N=10$ ont été continuées vers des régions de nombres de Reynolds Re plus petits pour différentes valeurs de nombre d'onde α . Parmi les nombreux résultats obtenus, la figure II.9 montre dans le plan (ϵ, Re) l'évolution de la solution pour $\alpha=0.257$. Comme dans l'écoulement de Poiseuille, la courbe présente un point limite correspondant à un nombre de Reynolds minimal qui est d'environ $Re=2200$ pour $N=10$.

Dans le but d'avoir une idée sur la convergence de ces solutions, nous avons fixé le nombre de Reynolds à $Re=2200$, et nous avons calculé les solutions en augmentant la troncature en Fourier. Le résultat de cette investigation est

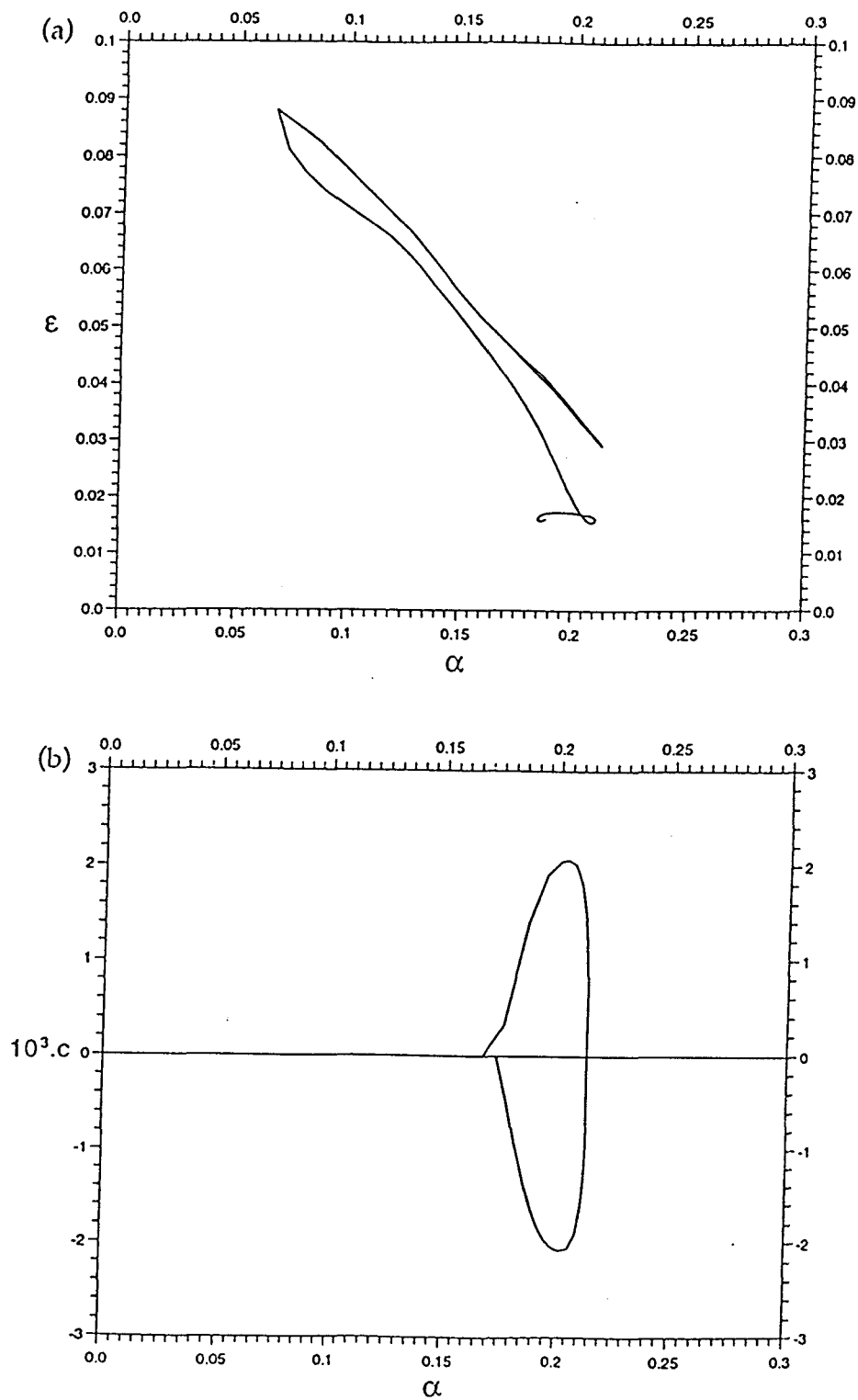


Figure II.8 - Coupe à travers la surface d'équilibre pour $Re=7000$ dans l'écoulement de Couette plan ($\eta=0$) avec $N=10$ et $K=28$ dans: a) le plan (ϵ, α) ; b) dans le plan (c, α)

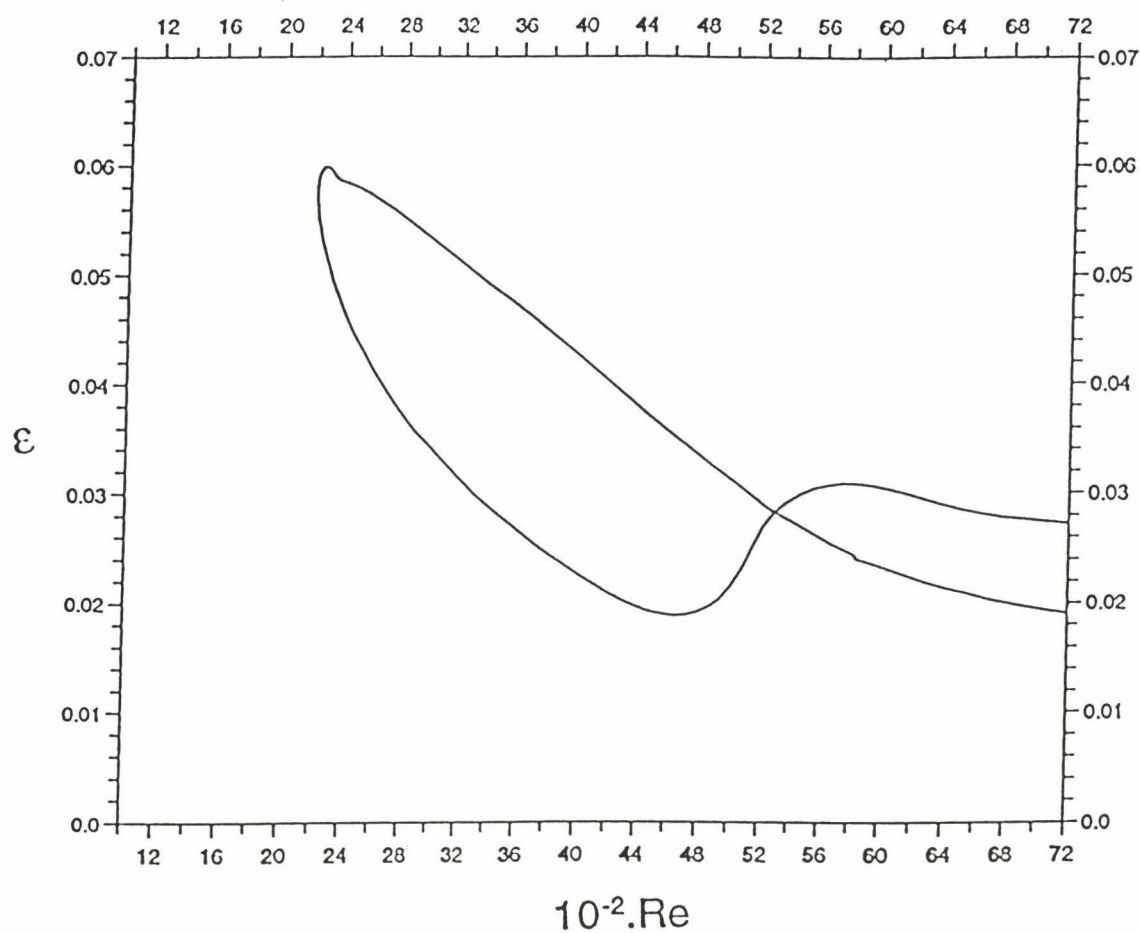


Figure II.9 -Coupe à travers la surface d'équilibre dans le plan (ϵ, Re) dans l'écoulement de Couette plan ($\eta=1$) pour $\alpha=0.257$ avec $N=10$ et $K=28$.

représenté dans le plan (ε, α) sur la Figure II.10. Il apparaît clairement que les solutions à $N=10$ ne sont guère convergées. Qui plus est, la convergence semble être un processus limite; la figure II.10 représente la courbe des solutions avec $\eta=1$ pour plusieurs troncatures de $N=10$ à $N=25$. On note qu'en augmentant la troncature, les courbes se décalent à de plus petites valeurs aussi bien en amplitude ε qu'en nombre d'onde α (notons que toutes les solutions qui sont représentées sur la figure II.10 sont stationnaires c.a.d. avec $c=0$). Par ailleurs, nous n'avons rencontré aucune difficulté à passer d'une solution avec une troncature N à une autre solution avec $N+1$ et ceci en utilisant une interpolation appropriée. Les symboles (x) de la figure II.10 représentent un seul point de la solution pour différentes troncatures de $N=16$ à $N=24$ avec $\alpha=0.11$, car calculer tous les points de la courbe aurait demandé un coût prohibitif en temps de calcul. Toutes ces solutions ont été calculées avec $K=28$ points de collocation dans (II.26), ce qui est suffisant pour bien représenter la discrétisation normale à la paroi de ces états non-linéaires, la taille du système (II.29) étant alors de 1380 équations réelles. Les calculs ont été effectués sur la machine IBM/SP2 du CNUSC (Centre National Universitaire Sud de Calcul), et une itération pour la continuation de Newton-Raphson nécessite approximativement 2 minutes en temps CPU avec un seul processeur. En général, la convergence est atteinte avec 4 itérations sauf aux points limites où 8 itérations en moyenne sont nécessaires. De plus, nous avons été contraints d'utiliser des petits pas dans la variation des paramètres au niveau de la continuation afin de converger (par exemple, la courbe avec $N=25$ contient environ 150 points).

La figure II.11 contient les solutions pour $N=14, 15$ et 25 extraites de la figure II.10. Les branches supérieures des courbes prennent l'allure de droites presque parallèles, translatées vers de petites valeurs de α et de ε en augmentant la

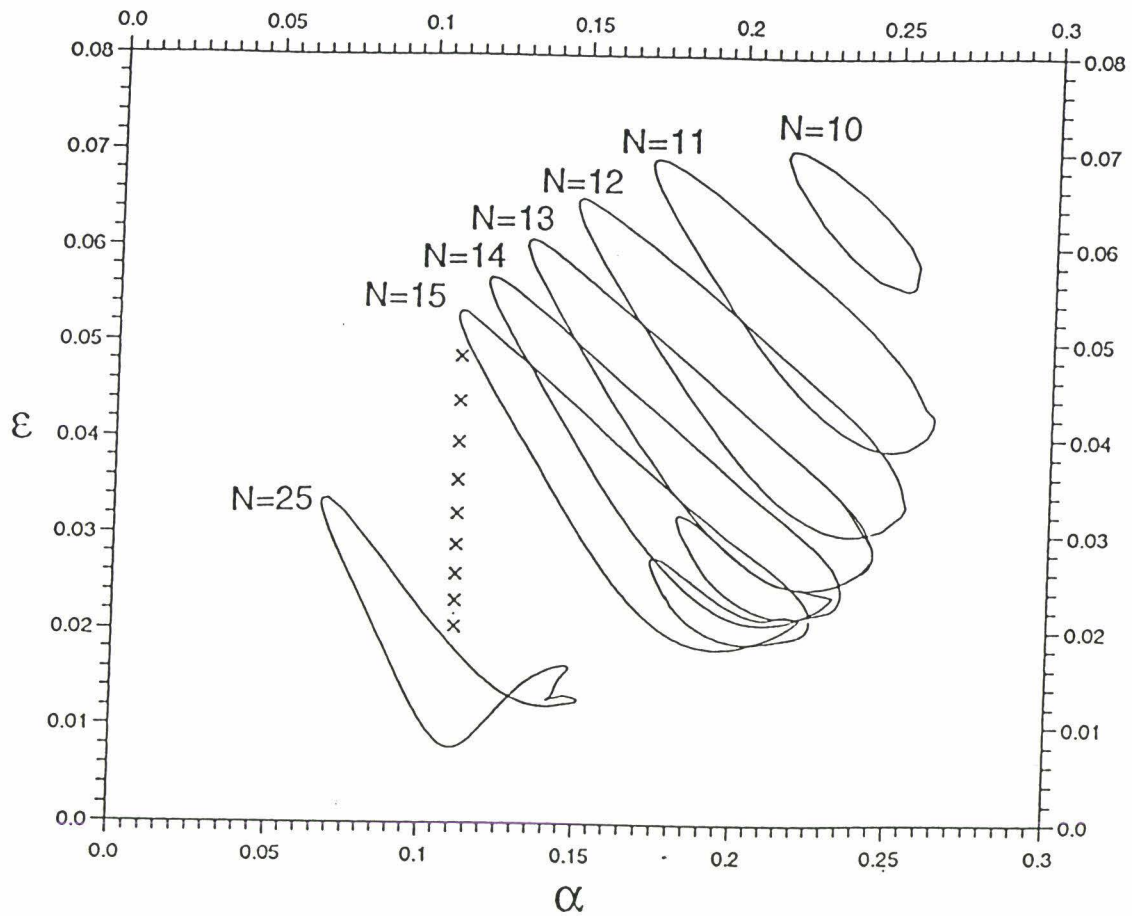


Figure II.10 - Coupe à travers la surface d'équilibre dans le plan (ϵ, α) dans l'écoulement de Couette plan ($\eta=1$) pour $Re=2200$ pour différentes troncatures en Fourier.

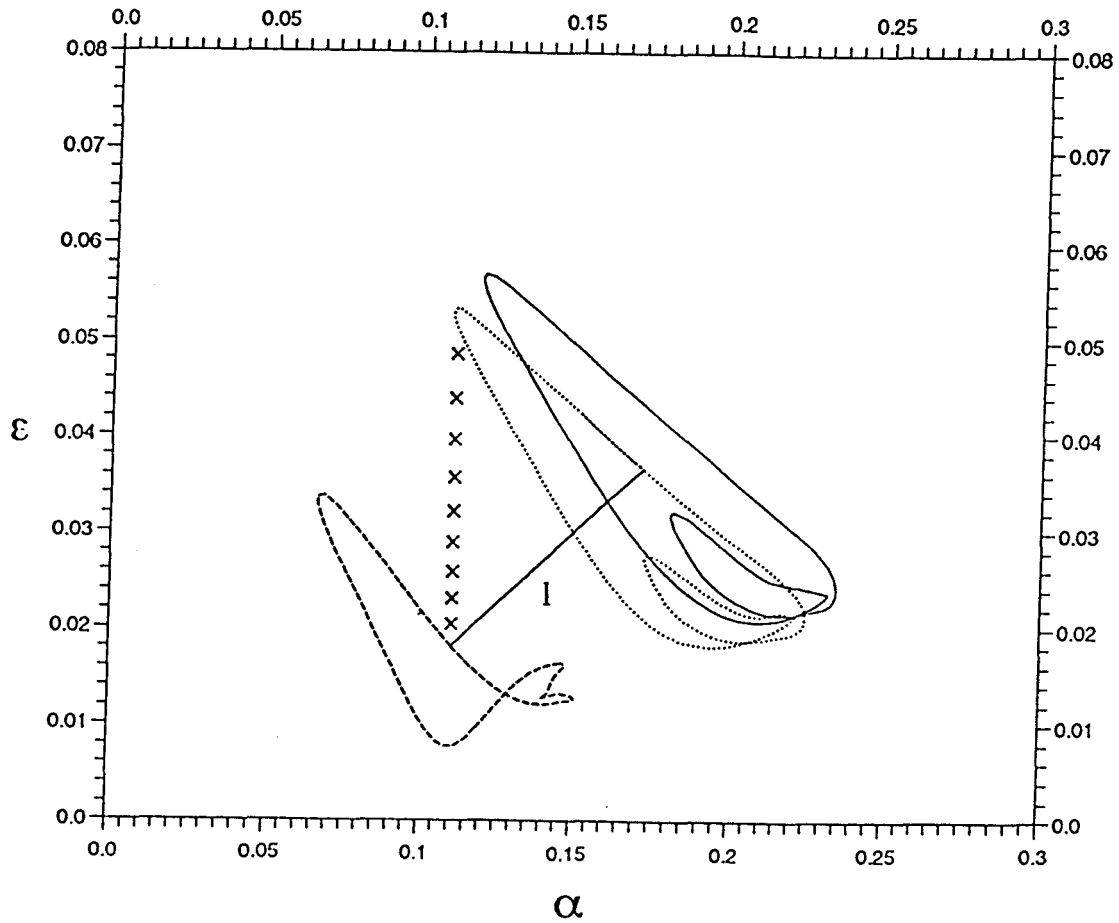


Figure II.11. Courbe à travers la surface d'équilibre à $Re=2200$ dans l'écoulement de Couette plan représentée dans le plan (ϵ, α) pour — $N=14, \dots, N=15$; ---- $N=25$; la ligne l est approximativement normale à la branche supérieure des courbes. les solutions avec $N=16, \dots, N=24$ sont représentés par des croix (\times).

troncature N. Nous avons tracé une ligne à peu près normale à ces droites et nous avons représenté les lignes de courant pour deux points de l'intersection correspondant respectivement à ($\alpha=0.17$ pour $N=15$) et ($\alpha=0.11$ pour $N=25$) sur deux longueurs d'onde dans la direction longitudinale. Le résultat est représenté sur la Figure II.12a,b, il y a un facteur d'environ 1.55 dans la longueur d'onde entre les deux solutions, et nous avons tenu compte de ce rapport sur la figure II.12 (la boîte à $N=25$ est 1.55 fois plus longue que celle à $N=15$). On remarque que pour les deux solutions, les lignes de courant montrent une structure spatialement isolée à l'intérieur d'une boîte périodique.

Ces structures localisées ont une forme et une taille similaires, bien que la boîte avec $N=25$ soit plus grande que celle avec $N=15$. Ce comportement peut être interprété comme suit: Les états convergés sont des équilibres non-linéaires spatialement isolés, indépendants de la condition de périodicité pour une boîte suffisamment grande. Ces solutions doivent être interprétées comme des états avec une structure finie dans la direction longitudinale, plutôt que des solutions périodiques. Pour avoir des informations sur leur convergence, il est plus approprié de considérer ces états non pas avec des modes de Fourier, mais plutôt avec une transformée de Fourier. Si on note par $\vec{\varphi}(\xi,y)$ la transformée de Fourier (en x) de la perturbation, on a la relation

$$\vec{\varphi}(\alpha n, y)/\varepsilon T = \vec{\hat{u}}_n$$

où $\vec{\hat{u}}_n$ sont les modes de Fourier (normalisés) de la solution et $T=2\pi/\alpha$, et ceci pour un nombre d'onde α suffisamment petit pour que l'essentiel de la structure reste dans l'intervalle $[0,T]$. La quantité εT est constante sur la ligne $\varepsilon/\alpha=\text{constante}$ dans le plan amplitude-nombre d'onde, et nous avons sélectionné une valeur particulière $\varepsilon T=1.3$ pour différentes valeurs de N avec un nombre d'onde α_N

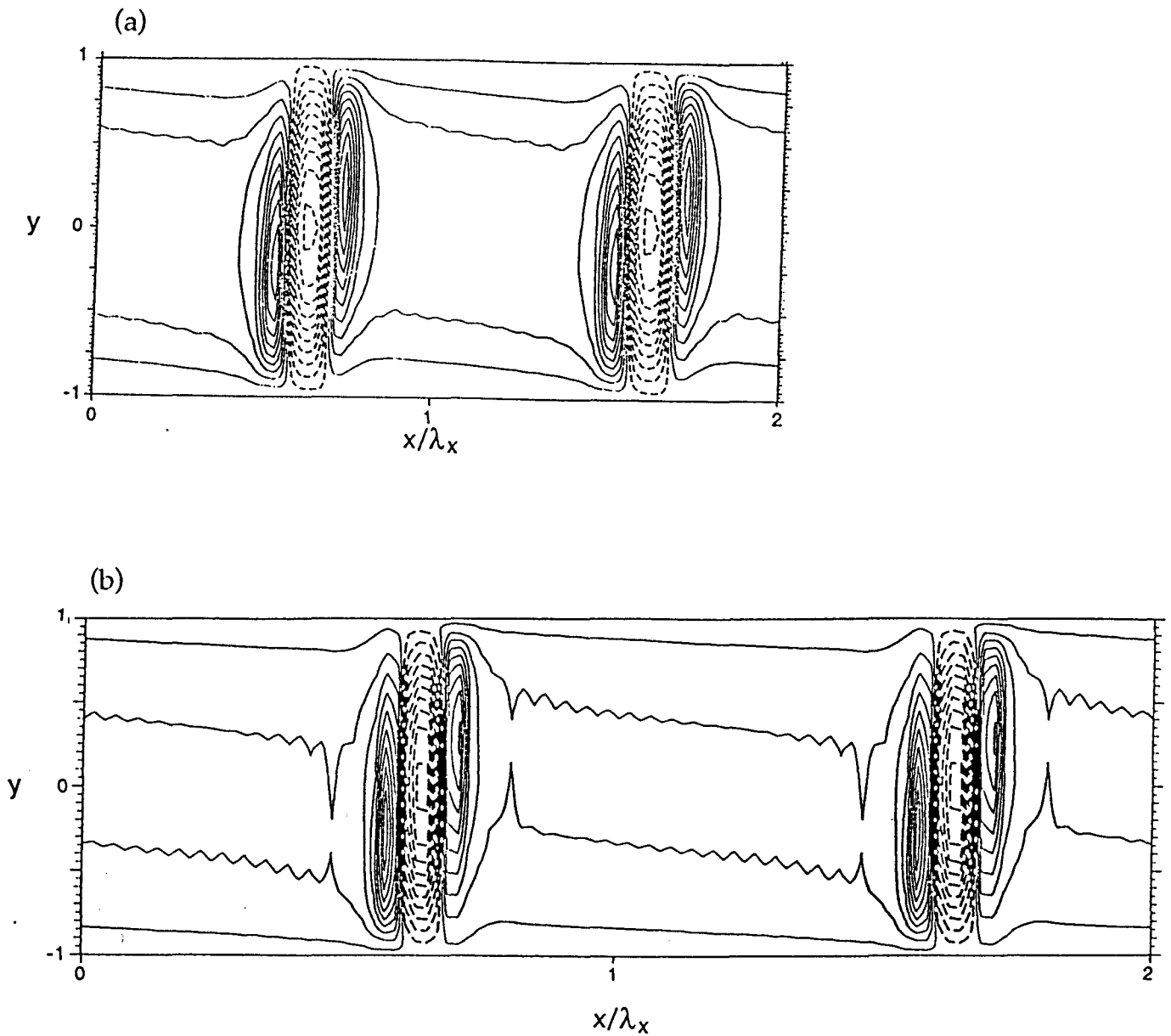


Figure II.12 - Lignes de courant de la perturbation pour les solutions d'équilibre dans l'écoulement de Couette plan pour $Re=2200$ avec a) $\alpha=0.17$, $\epsilon=0.036$, $N=15$, b) $\alpha=0.11$, $\epsilon=0.018$, $N=25$. Ces 2 points se trouvent sur l'intersection de la ligne 1 avec la partie supérieure respectivement des courbes avec $N=15$ et $N=25$ de la figure II.11.

correspondant (nous avons considéré trois points avec $N=15$ ($\alpha_{15}=0.172$, $\varepsilon=0.036$), $N=23$ ($\alpha_{23}=0.1103$, $\varepsilon=0.023$) et $N=25$ ($\alpha_{25}=0.10$, $\varepsilon=0.0218$), qui sont localisés sur la courbe de la figure II.11). La figure II.13 montre l'allure de la quantité intégrale

$$E_N = \frac{1}{(\varepsilon T)^2} \int_{-1}^1 \vec{\varphi} (n\alpha_N, y)^2 dy$$

associée à la transformée de Fourier, pour les différentes valeurs de N . En joignant les points discrets par des lignes droites, on obtient une forme similaire pour les trois solutions considérées. Ceci renforce l'idée que les solutions avec $N=15$ sont convergées dans le sens où elles représentent correctement la structure localisée des états non-linéaires. En effet, le fait d'augmenter N mène à de plus petites valeurs en nombre d'onde α et en amplitude ε (voir Figure II.10) permettant ainsi une plus grande résolution de la transformée de Fourier, déjà bien suffisante avec $N=15$ (voir Figure II.13). Ceci donne quelques explications concernant le comportement irrégulier des solutions pour les grands nombres d'onde, qui persiste même en augmentant N (cf. Figure II.11). En effet, les courbes dans le plan (ε, α) sont translatées le long des lignes de convergence $\varepsilon/\alpha = \text{constant}$ en augmentant N , avec toujours la présence de régions mal représentées pour les grandes valeurs de α .

Pour mieux caractériser la structure de ces états non-linéaires, la figure II.14 montre les lignes de courant de la perturbation pour $N=15$ et $N=25$, extraites de la figure II.14. Ces solutions sont presque identiques, et il y a un facteur de 8 entre la hauteur du canal et l'étendu de la structure. Une comparaison supplémentaire entre les deux solutions est donnée sur la figure II.15 où est représenté le profil de vitesse moyenne pour $N=15$ et $N=25$. Dans les deux cas, le profil est antisymétrique par rapport au milieu du canal, avec la même allure mais avec

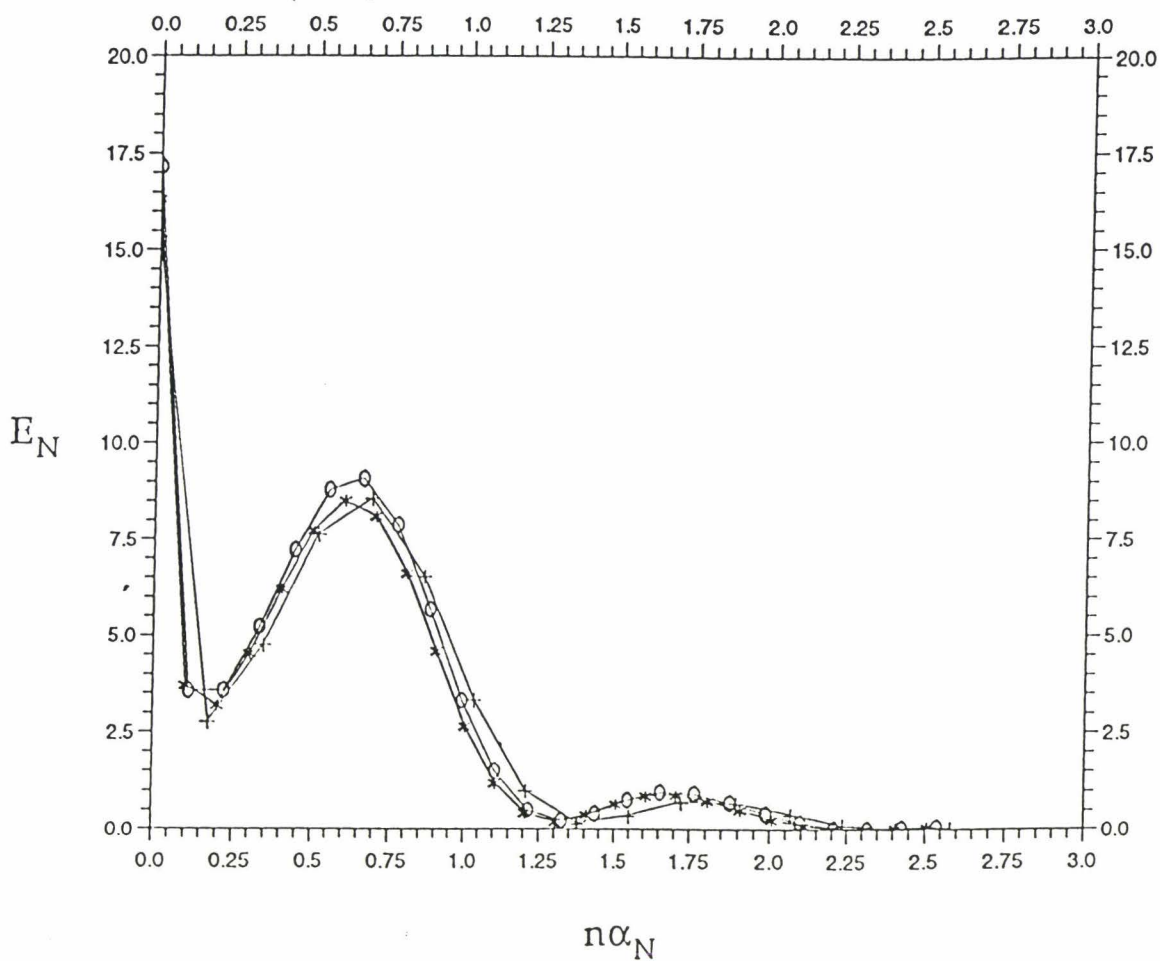


Figure II.13. E_N en fonction de $n\alpha_N$ pour des équilibres dans l'écoulement de Couette plan, pour $\epsilon/\alpha_N \approx \text{constant}$. + $N=15$, $\alpha_{15}=0.172$, $\epsilon=0.036$; o $N=23$, $\alpha_{23}=0.1103$, $\epsilon=0.023$; * $N=25$, $\alpha_{25}=0.1$, $\epsilon=0.0218$.

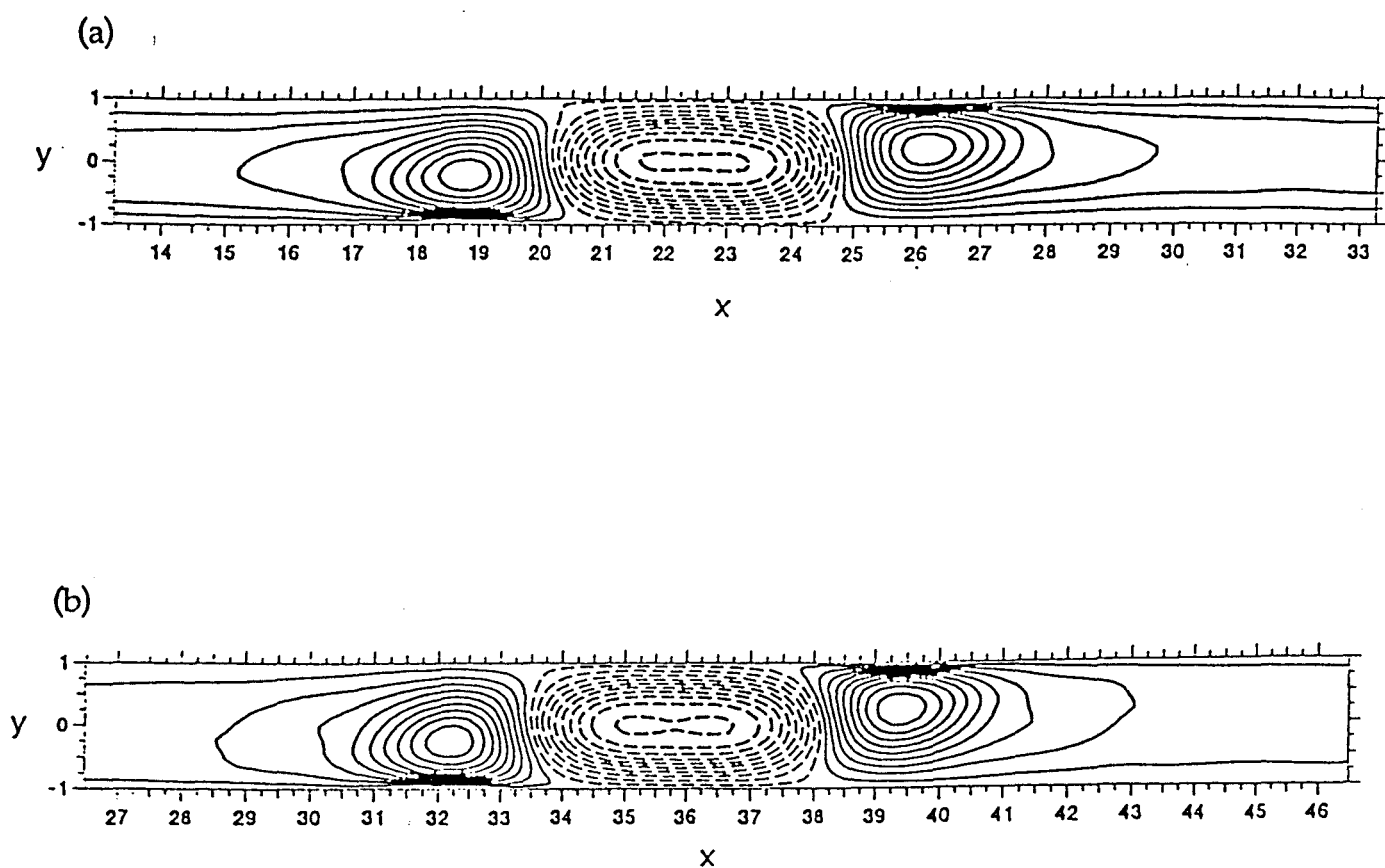


Figure II.14 - Lignes de courant des perturbations localisées dans l'écoulement de Couette plan, extraites de la Figure II.12 pour $Re=2200$; (a) $N=15$, (b) $N=25$.

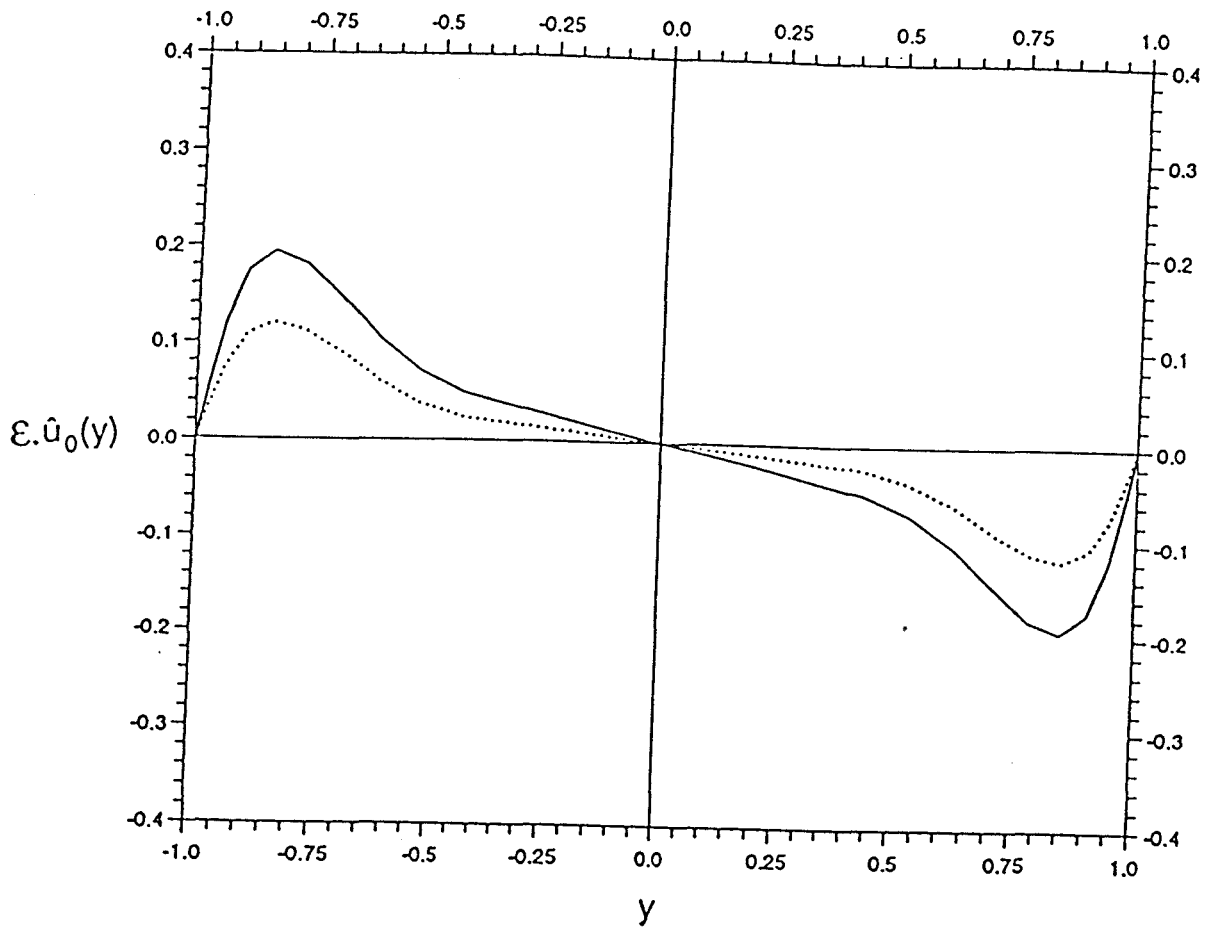


Figure II.15 - Profil de vitesse moyenne de la perturbation dans l'écoulement de Couette plan pour $Re=2200$; — $N=15, \alpha=0.17, \varepsilon=0.036$; $N=25, \alpha=0.11, \varepsilon=0.018$.

une différence au niveau de l'amplitude qui s'explique comme suit: \hat{u}_0 est obtenue en intégrant sur une longueur d'onde qui augmente avec α , or la structure non-nulle a la même étendue en x , indépendamment de α (cf. figure II.12). Le rapport des amplitudes est par conséquent lié au rapport des longueurs d'onde pour $N=15$ et $N=25$.

Enfin, la figure II.16 illustre les isolignes de la composante normale v pour $N=15$ ($\alpha=0.17$ et $\varepsilon=0.036$) sur deux longueurs d'onde, et on y aperçoit encore le caractère localisé de la structure.

Dans le but de décrire plus amplement les états d'équilibre calculés, la figure II.17a,b montre l'évolution sur deux longueurs d'onde de la composante longitudinale u de la perturbation de la vitesse respectivement au milieu du canal ($y=0$) et en $y=0.8$ (pour la même solution que sur Fig. II.14a). Au milieu du canal, la solution révèle une structure à deux pics de signes opposés, tandis que près de la paroi, on voit apparaître deux pics principaux, puis un troisième plus petit en amplitude. Une vue complète en perspective de la composante $u(x,y)$ de la perturbation sur une longueur d'onde pour $N=25$ est représentée sur la figure II.18, on y aperçoit trois pics près des parois qui évoluent en deux au milieu du canal. La structure de la composante u représentée est antisymétrique par rapport au centre de cette même structure.

Pour localiser le nombre de Reynolds minimal (critique) pour l'existence de ces états non-linéaires, nous avons exploré l'espace des paramètres en fixant le nombre d'onde et en continuant la courbe des solutions vers des valeurs de nombre de Reynolds les plus petites possibles. La Figure II.19 montre la courbe correspondante dans le plan (ε, Re) pour $\alpha=0.17$ avec $N=15$ où on aperçoit un point limite à $Re \approx 1550$. Nous avons également entrepris cette recherche pour

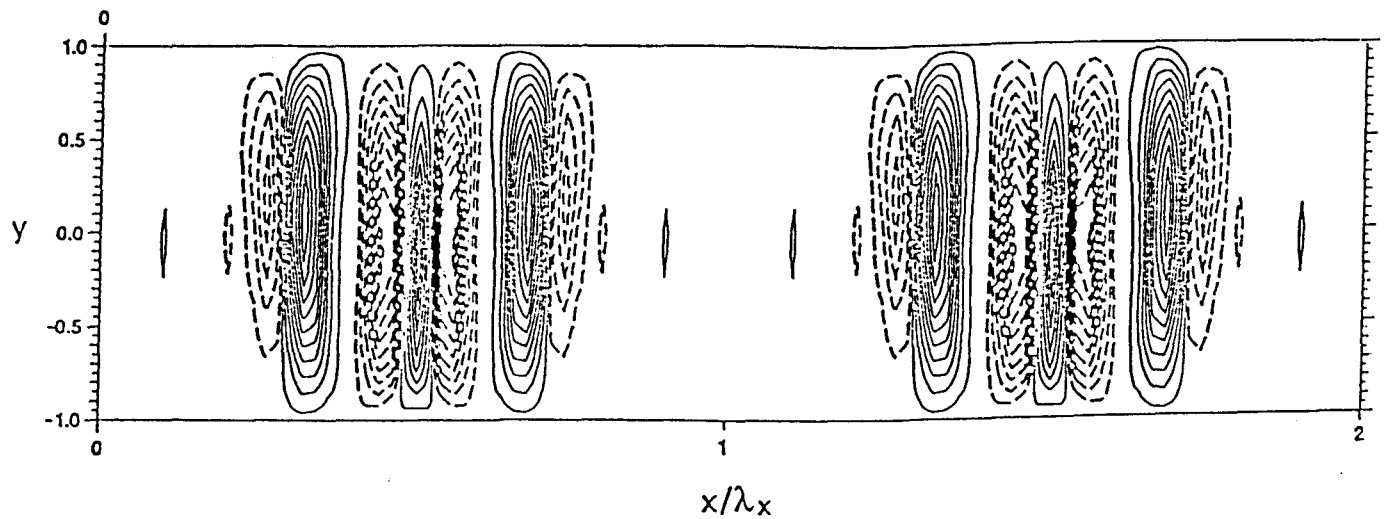


Figure II.16 - Isolignes de la composante normale v de la vitesse dans l'écoulement de Couette plan pour $Re=2200$, avec $N=15$, $\alpha=0.17$, $\epsilon=0.036$.

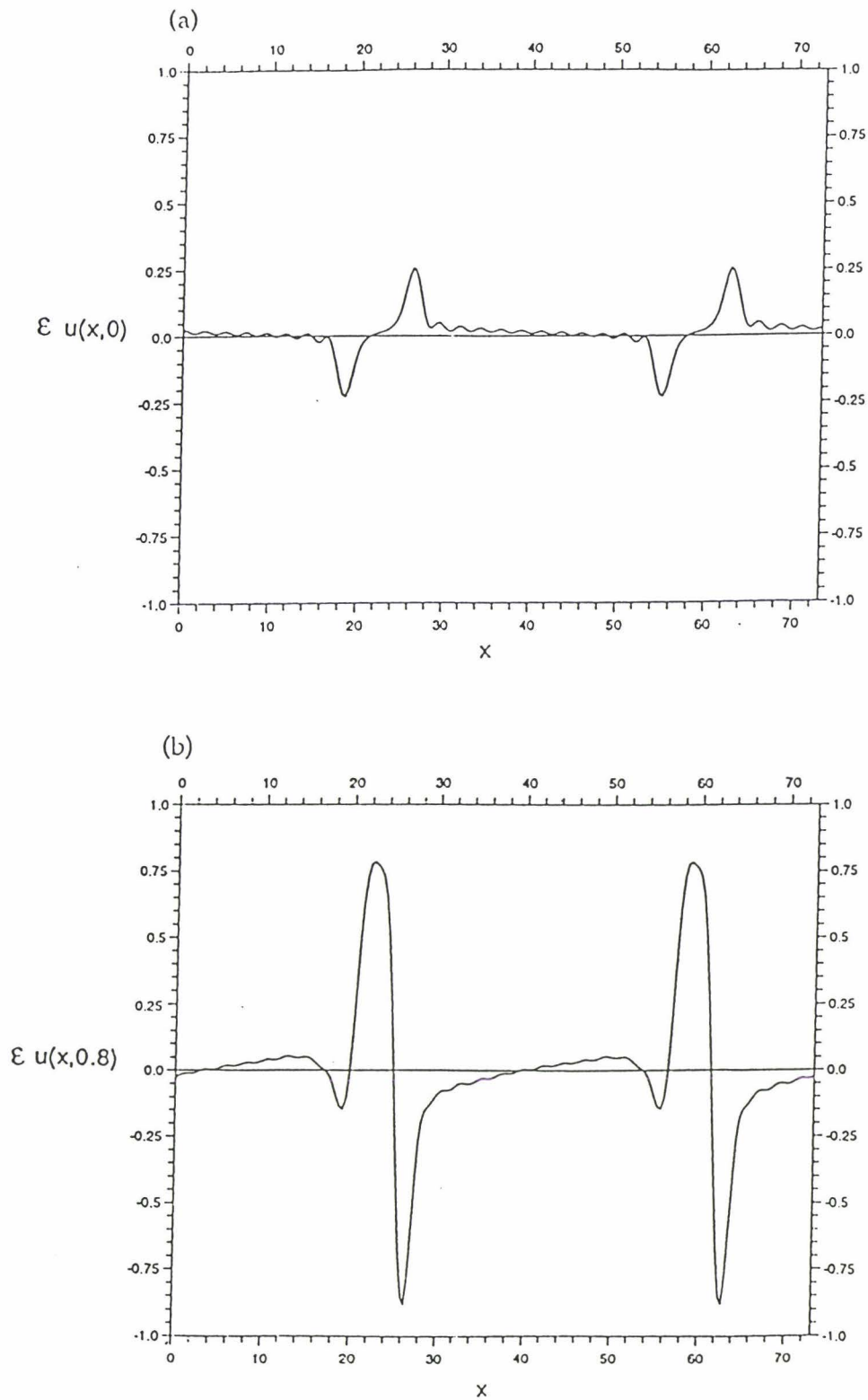


Figure II.17 - Evolution de la composante longitudinale εu de la vitesse sur deux longueurs d'onde à a) $y=0$; b) $y=0.08$, avec $Re=2200$ et $N=15$, $\alpha=0.17$, $\varepsilon=0.036$.

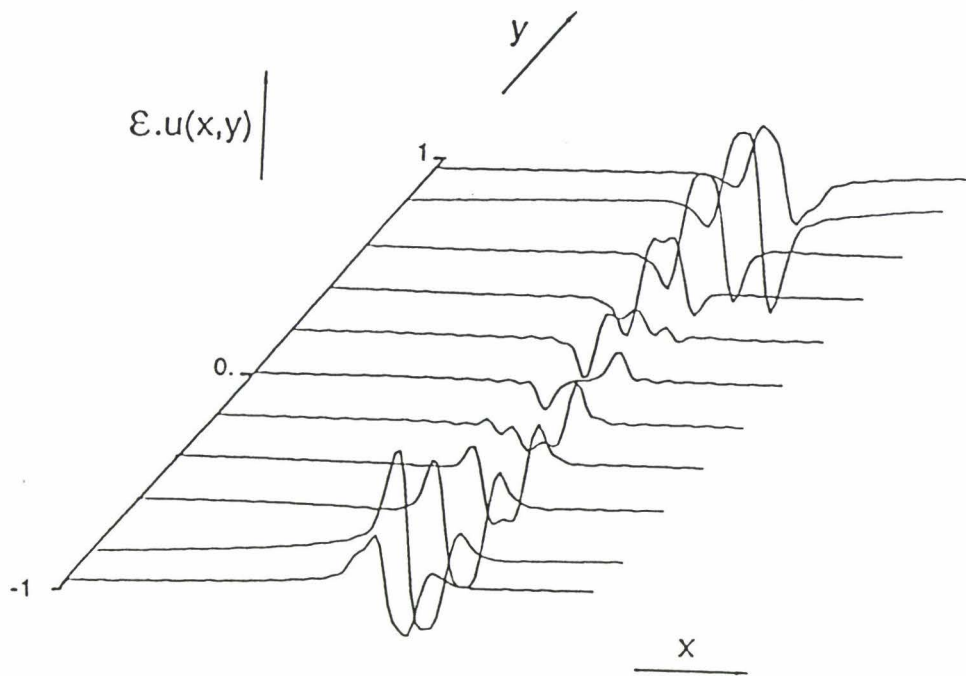


Figure II.18. Vue en perspective de l'évolution, sur une longueur d'onde en x à travers tout canal en y , de la composante longitudinale ϵu de la vitesse de la perturbation dans l'écoulement de Couette plan, à $Re=2200$, avec $N=25$, $\alpha=0.11$, $\epsilon=0.018$.

$N=25$ avec $\alpha=0.1$, le point limite étant cette fois-ci à $Re \approx 1500$. Le décalage en amplitude ε entre les deux courbes est lié à la différence entre les nombres d'onde comme nous l'avons indiqué plus haut. Pour deux troncatures très différentes, cette valeur ne varie pas beaucoup et nous donne par conséquent une estimation de l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds critique minimal que l'on situe à $Re=1500$. Nous rappelons que la valeur critique pour l'existence d'ondes progressives d'amplitude finie dans l'écoulement de Poiseuille plan est de $Re=2900$ [Pugh & Saffman, 1988].

Pour voir l'influence du nombre de Reynolds sur la structure de nos équilibres et plus précisément sur la taille de leur étendue, nous avons choisi de représenter le profil de vitesse moyenne de la perturbation au milieu du canal, pour trois points de la Figure II.19 avec $N=15$. Le résultat est représenté sur la Figure II.20, on y note une diminution en amplitude quand on augmente le nombre de Reynolds. A part un petit décalage en x , aucun changement significatif des profils aussi bien en forme ni en taille n'est visible.

Finalement, nous présentons sur la Figure II.21 le profil de vitesse moyenne pour la solution à $Re=2200$ avec $N=25$, qui rappelle le profil en "S" observé expérimentalement dans les écoulements transitionnels et turbulents de Couette plan, avec un maximum de déviation par rapport au profil laminaire près des parois.

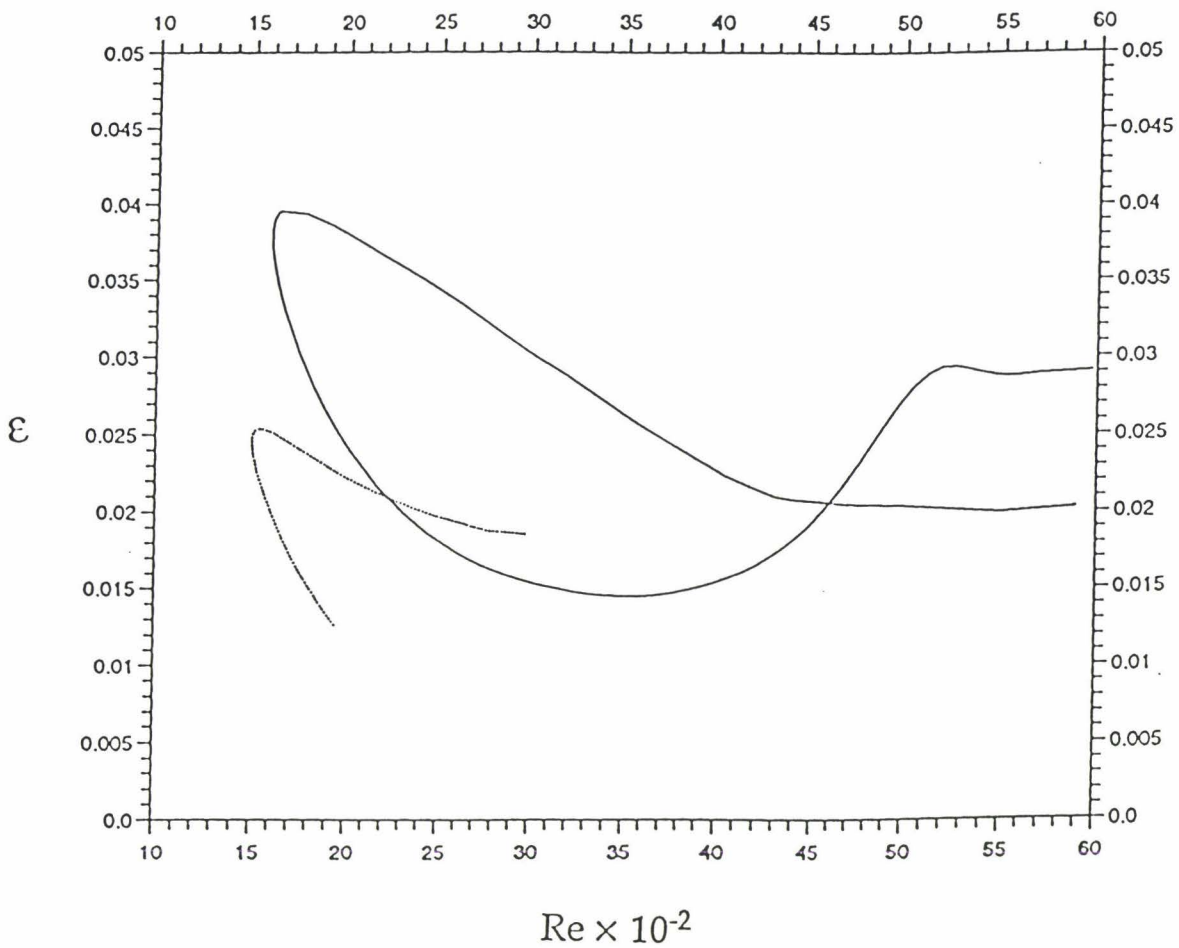


Figure II.19 - Coupe à travers la surface d'équilibre dans le plan (ϵ, Re) dans l'écoulement de Couette plan pour ----- $N=15, \alpha=0.17$; $N=25, \alpha=0.10$.

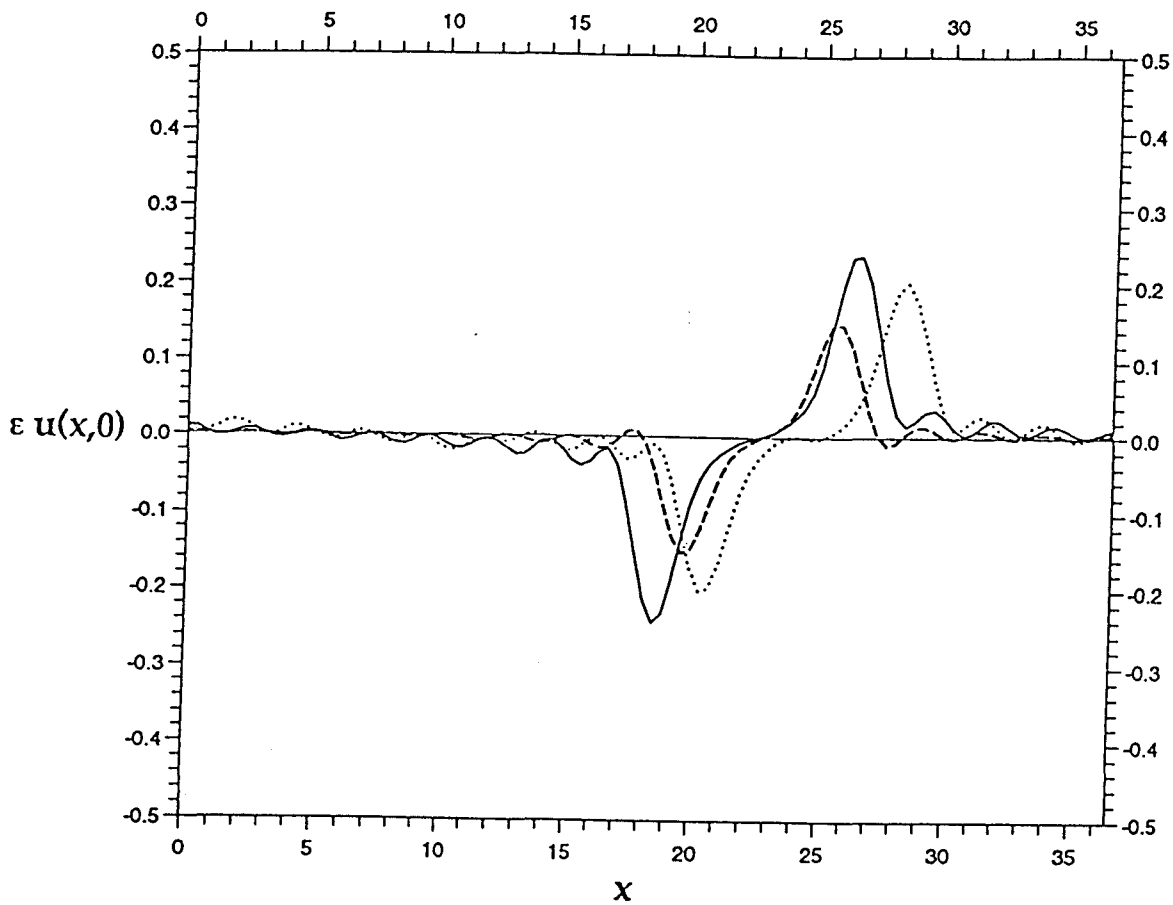


Figure II.20. Composante longitudinale de la perturbation de la vitesse pour l'écoulement de Couette au milieu du canal $\epsilon u(x,0)$ avec $N=15$, $\alpha=0.17$ pour différents nombres de Reynolds. — $Re=2200$, $\epsilon=0.036$; $Re=4035$, $\epsilon=0.022$; ---- $Re=6146$, $\epsilon=0.02$.

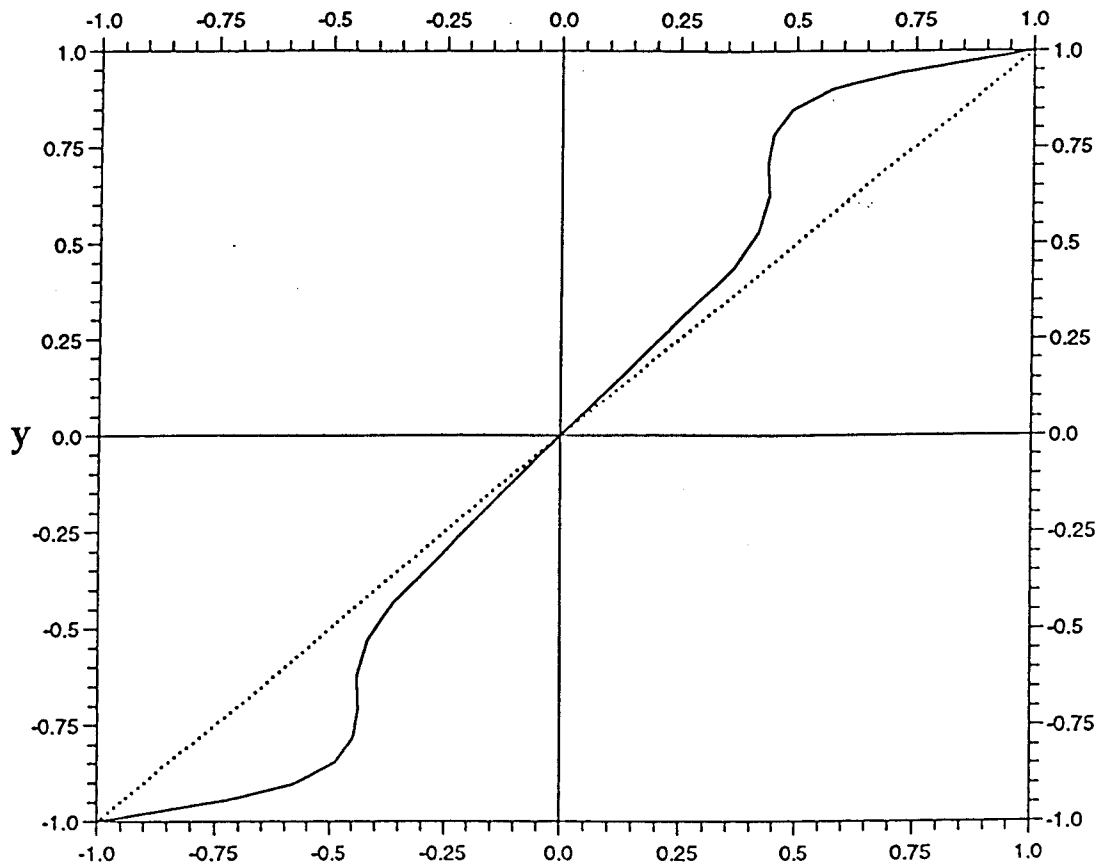


Figure II.21. Profil de vitesse moyenne $U(y) + A\epsilon \hat{u}_0(y)$ pour un état d'équilibre dans Couette plan pour $Re=2200$, $\alpha=0.11$, $\epsilon=0.018$ avec $N=25$. $A=3$ tient compte de la différence entre la longueur de la boîte et la taille de la structure. (Le profil laminaire $U(y)$ est représenté par des pointillés)

II.6 Discussion

Alors que des ondes progressives d'amplitude finie bidimensionnelles ont été calculées d'une façon détaillée par le passé dans l'écoulement de Poiseuille plan [Herbert, 1977]; [Pugh & Saffman, 1989] et dans la couche limite de Blasius [Koch, 1991], les études menées jusqu'à présent concernant l'écoulement de Couette plan indiquent seulement que celui-ci est instable vis-à-vis des perturbations tridimensionnelles d'amplitude finie. Alors que [Nagata, 1990] a calculé des états tridimensionnels d'amplitude finie en les connectant à l'écoulement de Taylor-Couette, le présent travail reconsidère la possibilité de calculer des états bidimensionnels à travers la famille d'écoulements de Poiseuille-Couette.

La résolution numérique nécessaire pour capter ces solutions et la complexité de la surface d'équilibre dans l'espace des paramètres sont peut-être les raisons pour lesquelles ces solutions ne furent jamais captées auparavant. D'autant plus que dans nos calculs, nous ne les retrouvons pas sous forme d'ondes progressives. En effet, les ondes de Tollmien-Schlichting présentes dans l'écoulement de Poiseuille évoluent vers des états stationnaires spatialement localisés quand on s'approche de l'écoulement de Couette. Ce résultat pourrait s'expliquer par le fait que les parois, mises progressivement en mouvement, contraignent la perturbation dans une région finie de l'espace. Le passage continu de l'écoulement de Poiseuille à l'écoulement de Couette peut être interprété, en tant que système dynamique en la variable d'espace x , comme une bifurcation homocline d'un cycle limite (voir par exemple l'article de [Chang, 1994], [Pumir et al., 1983] pour l'application de ce concept aux écoulements de films minces).

Le résultat obtenu ici est d'autant plus plausible que quelques études expérimentales récentes menées autour de l'écoulement de Couette révèlent l'existence de structures localisées dans cet écoulement [Tillmark & Alfredsson, 1992]; [Daviaud et al., 1992]; [Dauchot et Daviaud, 1994].

Dans un travail expérimental plus récent, [Dauchot & Daviaud, 1995] ont perturbé l'écoulement de Couette par un dispositif expérimental, constitué par un fil très mince de section circulaire, tendu dans la direction transverse. Ils observent la formation d'une structure localisée dans la direction longitudinale et périodique dans la direction transverse. Sans y voir de liens directs avec nos solutions, ces observations prouvent toutefois que l'existence de structures isolées spatialement est aussi observée expérimentalement.

L'intérêt principal des solutions bidimensionnelles d'amplitude finie, telles que nous les avons calculées (solutions des équations de Navier-Stokes) est qu'elles peuvent être considérées comme un nouvel état de base pour une étude de stabilité secondaire. Une telle démarche a d'ailleurs été utilisée pour l'écoulement de Poiseuille plan [Ehrenstein & Koch, 1991] ou dans la couche limite de Blasius [Koch, 1992]. Elle est basée sur l'hypothèse que la transition dans les écoulements parallèles est liée à une succession de bifurcations vers des états de plus en plus complexes.

- CHAPITRE III -

STABILITE SECONDAIRE

III.1 Introduction

L'identification et la caractérisation des solutions non-linéaires (autres que l'état laminaire) constituent la première étape dans la compréhension de la transition dans les écoulements cisailés. Cette phase donne en général l'accès à un premier seuil de transition qui reste toutefois encore trop grand, comparé aux observations expérimentales, comme c'est le cas dans l'écoulement de Poiseuille plan [Herbert, 1977]. On retrouve d'ailleurs cette situation dans le cas présent de l'écoulement de Couette, les solutions bidimensionnelles calculées dans le chapitre II existent jusqu'à un nombre de Reynolds $Re \approx 1500$, alors que l'expérience repère la transition vers $Re \approx 370$ [Dauchot & Daviaud, 1994].

A partir de là, l'étude de stabilité secondaire s'impose comme une analyse d'une importance capitale dans la compréhension de la transition. Elle permet en général le calcul d'autres solutions d'équilibre de caractéristiques proches des

observations expérimentales (par l'intermédiaire du nombre de Reynolds). Dans les écoulements à caractère de transition sous-critique, les instabilités secondaires jouent un grand rôle à une certaine étape de la transition. En effet, les observations expérimentales [Carlsson et al., 1981] et les simulations numériques [Orszag & Patera, 1983] indiquent que dans les écoulements cisailés, la transition a un caractère brusque en ce sens que l'écoulement passe directement de l'état laminaire à un état chaotique sans aucune intervention apparente de bifurcations vers un état stable. Dans ce genre de transition, les caractéristiques de stabilité de l'écoulement moyen déterminent les différents stades de la transition et peut-être même l'état turbulent final.

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité secondaire des solutions d'amplitude finie calculées dans le chapitre II. En un premier temps, nous nous intéresserons à la stabilité de ces états par rapport à des perturbations bidimensionnelles. L'étude est similaire à celle de [Soibelman, 1988] concernant l'écoulement de Poiseuille plan, dont nous retrouvons d'ailleurs quelques-uns des résultats.

La seconde partie sera consacrée aux perturbations tridimensionnelles. Nous nous inspirons cette fois-ci du travail de [Ehrenstein & Koch, 1991] dans la mesure où celui-ci a donné des résultats proches de l'expérience.

III.2 Stabilité par rapport aux perturbations bidimensionnelles

Bien que les instabilités tridimensionnelles soient les plus cruciales dans le processus de transition [Orszag & Patera, 1983], il est tout aussi intéressant d'étudier la stabilité secondaire par rapport aux perturbations bidimensionnelles. Cette étude pourrait aussi permettre de calculer des bifurcations vers d'autres états bidimensionnels existant à des petits nombres de Reynolds. Dans l'écoulement de Poiseuille plan, [Soibelman, 1989] a détecté plusieurs points de bifurcations de Hopf qui ont permis le calcul d'équilibres quasi-périodiques bidimensionnels, retrouvant ainsi quelques résultats de simulations numériques directes [Jimenez, 1987].

III.2.1 Formulation du problème

La formulation adimensionnée des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles pour la perturbation, dans un système de référence se déplaçant à la vitesse c dans la direction longitudinale, s'exprime par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{\psi} = & \left\{ (c - U) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \right\} \Delta \tilde{\psi} + \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \\ & - \varepsilon \left\{ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} \Delta \tilde{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}(y=\pm 1) = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}(y=\pm 1) = 0 \quad (\text{III.2})$$

En incorporant implicitement les conditions aux bords le système (III.1) avec (III.2) peut être écrit plus généralement comme un système dynamique de la forme

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} = \mathcal{L}(U, Re) \vec{\varphi} + \mathcal{NL}(\vec{\varphi}) \quad (\text{III.3})$$

où $\vec{\varphi}$ est le vecteur solution, qui contient dans le cas bidimensionnel la fonction de courant, on note ici par $\mathcal{L}(U, Re)$ l'opérateur linéaire dépendant du profil laminaire $U(y)$ et du nombre de Reynolds Re , $\mathcal{NL}(\vec{\varphi})$ étant le terme non-linéaire de convection qui ne dépend que du vecteur solution. (Nous supposons ici que l'opérateur qui apparaît dans le terme de gauche dans (III.1) a été implicitement inversé).

On souhaite étudier la stabilité secondaire des solutions d'équilibre bidimensionnelles. On va alors perturber ce nouvel état de base par une perturbation de la forme $\tau e^{\sigma t} \vec{\psi}(x, y)$ de telle façon que les solutions recherchées s'écrivent comme suit

$$\vec{\varphi}(x, y, t) = \vec{\varphi}_{2D}(x, y) + \tau e^{\sigma t} \vec{\psi}(x, y) \quad (\text{III.4})$$

où $\vec{\varphi}_{2D}$ décrit la solution d'équilibre bidimensionnelle calculée précédemment, σ étant la valeur propre complexe ($\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$).

On sait que la solution d'équilibre bidimensionnelle $\vec{\varphi}_{2D}$ satisfait à l'équation

$$\mathcal{L}(U, Re) \vec{\varphi}_{2D} + \mathcal{NL}(\vec{\varphi}_{2D}, Re) = 0 \quad (\text{III.5})$$

Dès lors, $\vec{\varphi}_{2D}(x, y) + \tau e^{\sigma t} \vec{\psi}(x, y)$ satisfait, en linéarisant autour de $\tau = 0$ et en tenant compte de (III.5) à

$$\mathcal{J}(U, Re, \vec{\varphi}_{2D}) \vec{\psi}(x, y) = \sigma \vec{\psi}(x, y) \quad (\text{III.6})$$

\mathcal{J} étant la matrice Jacobienne associée à la fonction \mathcal{F} avec

$$\mathcal{J}(U, Re, \vec{\varphi}_{2D}) \vec{\psi} = \mathcal{L}(U, Re) \vec{\psi} + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{NL}(\vec{\varphi}_{2D} + \tau \vec{\psi}) \Big|_{\tau=0} \quad (\text{III.7})$$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la solution d'équilibre bidimensionnelle est donnée par le développement de Fourier

$$\vec{\varphi}_{2D} = \sum_{n=-N}^N \hat{\vec{\varphi}}_n(y) e^{in\alpha x} \quad (\text{III.8})$$

où $\hat{\varphi}_n(y)$ est discrétisée par la méthode collocation-Chebyshev (cf. chap. II). Ici, l'étude de la stabilité est faite au sens de Floquet (cf. [Herbert, 1988]); la fonction propre secondaire (bidimensionnelle) est développée de la même façon que la solution d'équilibre bidimensionnelle avec la même longueur d'onde (on ne considère que des perturbations superharmoniques), soit

$$\vec{\psi} \equiv \left\{ \psi \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_n(y) e^{in\alpha x} \quad (\text{III.9})$$

où α est le nombre d'onde dans la direction longitudinale de la solution d'équilibre 2D. Le système (III.6) obtenu équivaut à un problème aux valeurs propres généralisé de la forme

$$A \vec{\psi} = \sigma B \vec{\psi} \quad (\text{III.10})$$

qui, après discrétisation des modes par Chebyshev-collocation, est résolu par des méthodes classiques de résolution de problèmes aux valeurs propres. Après discrétisation, l'opérateur $\mathcal{J}(U, Re, \vec{\varphi}_{2D})$ dans (III.6) correspond à la matrice Jacobienne du système non-linéaire (II.29) appliqué au solutions d'équilibre bidimensionnelles. Ainsi dans (III.10) nous avons $A = \partial \vec{F} / \partial \vec{\psi}$ et $B = \Delta$. Le problème est ensuite ramené à un problème aux valeurs propres simple en inversant B.

III.2.2 Résultats numériques

Nous abordons ici l'étude de stabilité secondaire par rapport à des perturbations bidimensionnelles dans l'écoulement de Couette plan. Toutefois, nous commencerons comme dans le chapitre précédent par retrouver quelques résultats concernant l'écoulement de Poiseuille plan. A ce sujet, plusieurs résultats sont disponibles, notamment les travaux de [Pugh & Saffman, 1987] et [Soibelman & Meiron, 1988].

La figure III.2a montre l'évolution en fonction du nombre de Reynolds du maximum du taux d'amplification (valeur propre la plus amplifiée) de la perturbation pour $\alpha=1.1$. La courbe d'équilibre dans le plan (ε, Re) qui correspond à cette analyse est représentée sur la figure III.1 avec une surface d'équilibre présentant deux branches, une branche inférieure et une branche supérieure. Confronté au résultat de [Soibelman, 1988] représenté sur la figure III.2.b, la comparaison montre que nos calculs donnent les mêmes valeurs du taux d'amplification. Notons que nous éliminons systématiquement la valeur propre nulle qui correspond à la solution triviale due au déphasage. La figure III.3 montre plus en détail le comportement de stabilité près du nez de la surface d'équilibre. Au nez, par l'échange de stabilité une valeur propre réelle (représentée par le cercle o) devient instable. Ensuite, cette valeur propre fusionne avec une autre valeur propre instable (représentée par les croix x), il en résulte l'apparition d'une valeur propre complexe (identifiée par \otimes), qui traverse la ligne de stabilité neutre sur la branche supérieure près du nez, ce qui correspond à une bifurcation de Hopf. Ce comportement a été aussi mis en évidence par [Soibelman, 1988], d'autres points de bifurcation de Hopf ont été par

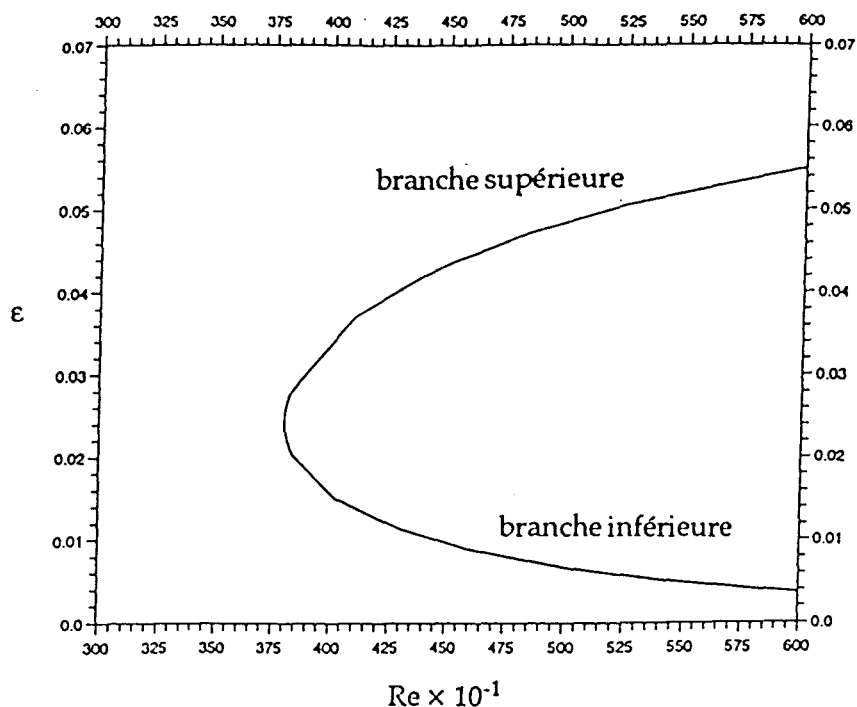


Figure III.1. Coupe à travers la surface d'équilibre dans le plan (ϵ, Re) dans l'écoulement de Poiseuille plan pour $\alpha=1.1$ avec $N=4$, $K=44$.

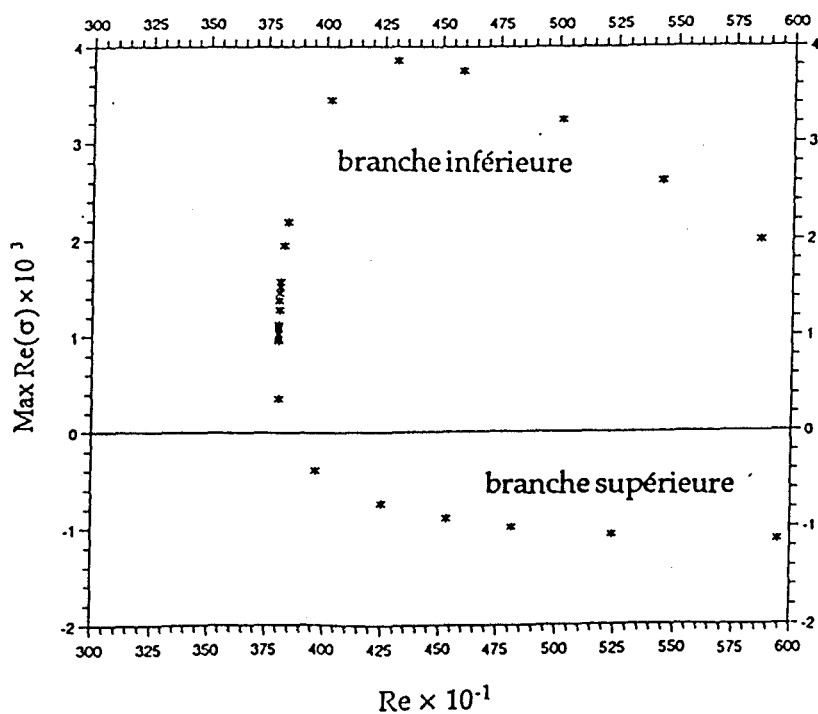


Figure III.2.a. Taux d'amplification maximale $Max Re(\sigma)$ en fonction du nombre de Reynolds Re dans l'écoulement de Poiseuille plan pour $\alpha=1.1$ avec $N=4$ et $K=44$.

ailleurs détectés par ce dernier pour des nombres de Reynolds plus grands.

Revenons à présent à l'écoulement de Couette plan. Les solutions bidimensionnelles choisies pour l'étude de cette stabilité secondaire sont prises à $N=15$, cette valeur étant supposée donner des résultats assez convergés (voir chapitre II) pour permettre une étude de stabilité secondaire fiable. Toutefois, avant d'entamer l'étude nous avons pris le soin de vérifier que la troncature à $N=15$ était suffisante. Pour cela, nous avons comparé les résultats de stabilité obtenus avec une solution à $N=15$ à ceux d'une autre obtenue avec la troncature maximale utilisée c'est-à-dire $N=25$. Les deux points choisis pour cette comparaison sont pris sur la figure II.11 (points de $\varepsilon/\alpha = \text{cte}$). La figure III.4 représente une partie du spectre des valeurs propres dans le plan complexe pour chacune des troncatures. Le système (III.10) a été formulé comme un système réel, ce qui fait apparaître des complexes conjugués. Pour les deux troncatures, on remarque que les deux spectres ont une allure à peu près similaire. De plus, les valeurs propres les plus significatives, en l'occurrence les plus amplifiées, sont très voisines. Tous les calculs de stabilité secondaire bidimensionnelle qui suivent seront par conséquent effectués avec $N=15$, ce qui donne après discrétisation un système de 840 équations réelles.

Les points limites (en nombre de Reynolds) de la surface d'équilibre sont des points d'échange de stabilité où une valeur propre réelle traverse la ligne de stabilité neutre. La figure III.5 représente (pour un nombre d'onde fixe $\alpha=0.11$) la partie réelle de la valeur propre la plus amplifiée que l'on suit jusqu'au point limite qui correspond ici à $Re \approx 2150$. On remarque que la valeur propre réelle la plus amplifiée (symbolisée par \times) venant de la branche supérieure, se confond au point limite avec une autre valeur propre réelle (symbolisée par o) qui avait traversé la ligne de stabilité neutre, pour donner sur la branche inférieure une

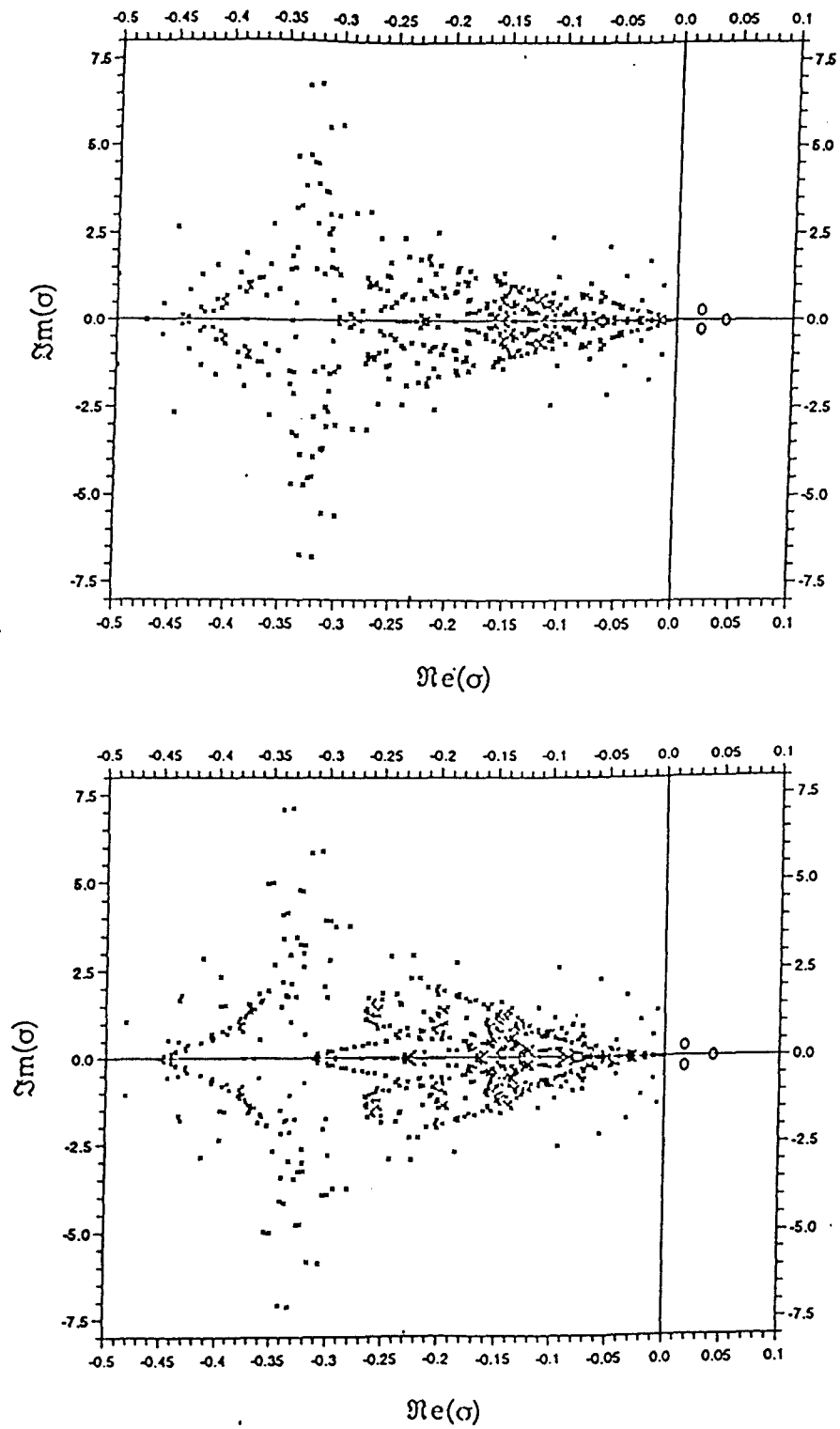


Figure III.4. Spectre des valeurs propres secondaires 2D pour une solution sur la surface d'équilibre dans l'écoulement de Couette plan à $Re=2200$. o : partie instable du spectre.

(a) $N=15$, $\alpha=0.172$; (b) $N=25$, $\alpha=0.11$; ($K=28$)

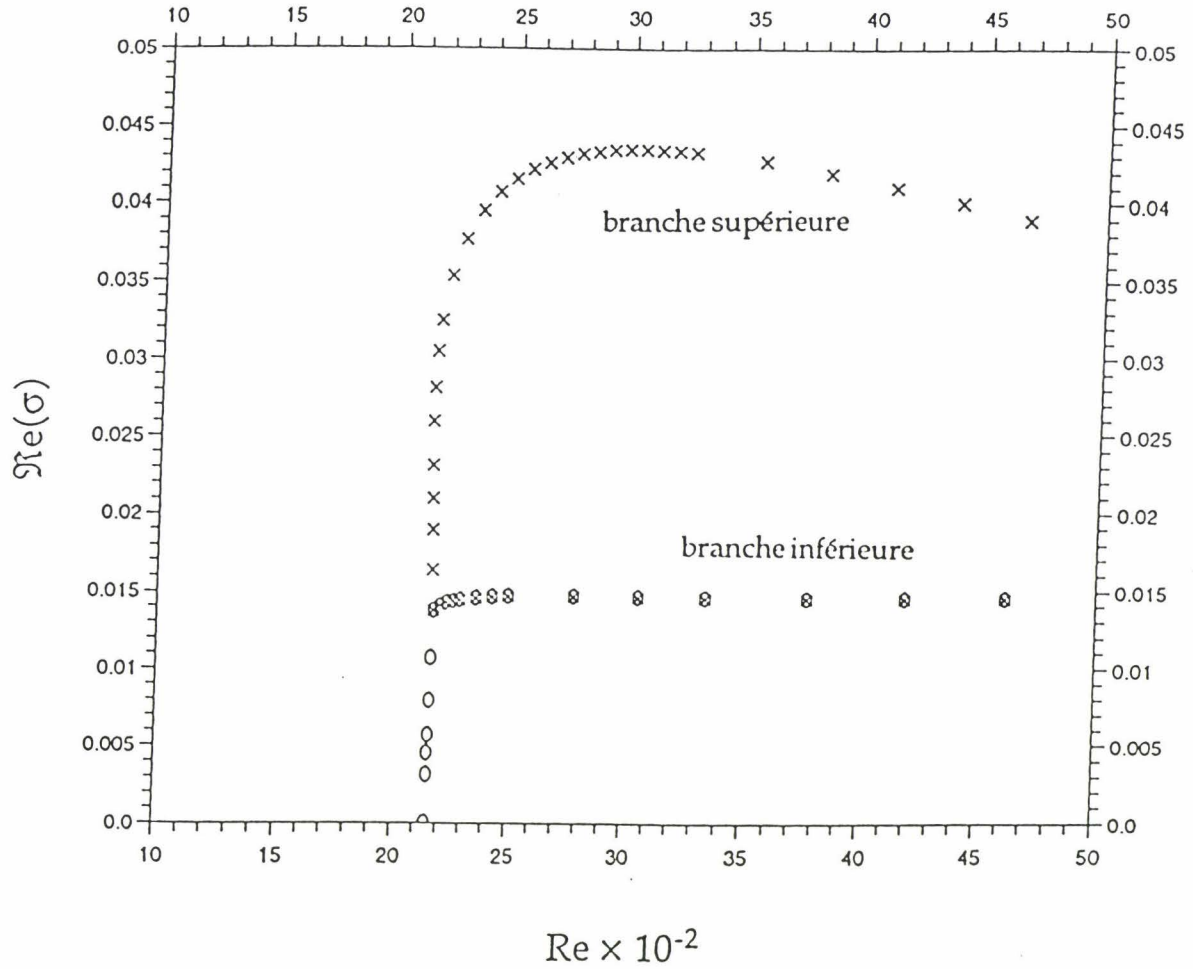


Figure III.5. Taux d'amplification maximale secondaire bidimensionnelle $\Re(\sigma)$ en fonction du nombre de Reynolds Re dans l'écoulement de Couette plan, à $\alpha=0.111$, $N=15$ ($K=28$).

\times : $\Im(\sigma) = 0$; o : $\Im(\sigma) = 0$, \otimes : $\Im(\sigma) \neq 0$.

valeur propre complexe (représentée par \otimes) avec une partie imaginaire de petite valeur qui augmente légèrement en allant vers des nombres de Reynolds plus grands sur la branche inférieure de la surface d'équilibre.

Alors que la valeur propre complexe correspondant à $\alpha=0.111$ apparaît dans la région instable $\Re(\sigma)>0$, on observe que pour $\alpha=0.175$ la coïncidence entre les valeurs propres réelles a lieu au point neutre $\Re(\sigma)=0$, comme on peut le voir sur la figure III.6. Ici, le point limite se trouve à $Re=1580$ qui représente aussi le plus petit nombre de Reynolds pour l'existence d'états d'équilibre non-linéaires 2D pour la troncature $N=15$. Le point d'apparition de ces valeurs propres conjuguées complexes est un point limite double paramétrisé par le nombre de Reynolds et par le nombre d'onde α . Comme nous l'avons noté, de telles bifurcations ont d'ailleurs été observées sur la surface d'équilibre dans l'écoulement de Poiseuille plan [Pugh & Saffman, 1988 ; Soibelman & Meiron, 1991] mais ainsi pour des perturbations secondaires 3D dans la couche limite de Blasius [Ehrenstein & Koch, 1995].

En introduisant, en plus du nombre de Reynolds, un second paramètre qui permet de passer continûment d'une paramétrisation de Poiseuille plan avec une formulation à flux constant, à la formulation à gradient de pression constant, [Barkley, 1990] interprète l'apparition de ces valeurs propres complexes comme conséquence d'une résonance conduisant à une bifurcation de Hopf dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques.

Dans le cas de notre écoulement de Couette plan, cette bifurcation a lieu au point limite double (en Re et en α) situé à $Re=1580$ et $\alpha=0.175$. D'une manière générale dans les points limites en Reynolds (pour un α donné) on est en présence d'une bifurcation nœud-col et on peut écrire l'équation locale suivante

$$a \delta Re + b \tau^2 = 0, \text{ avec } \delta Re = Re - Re_C$$

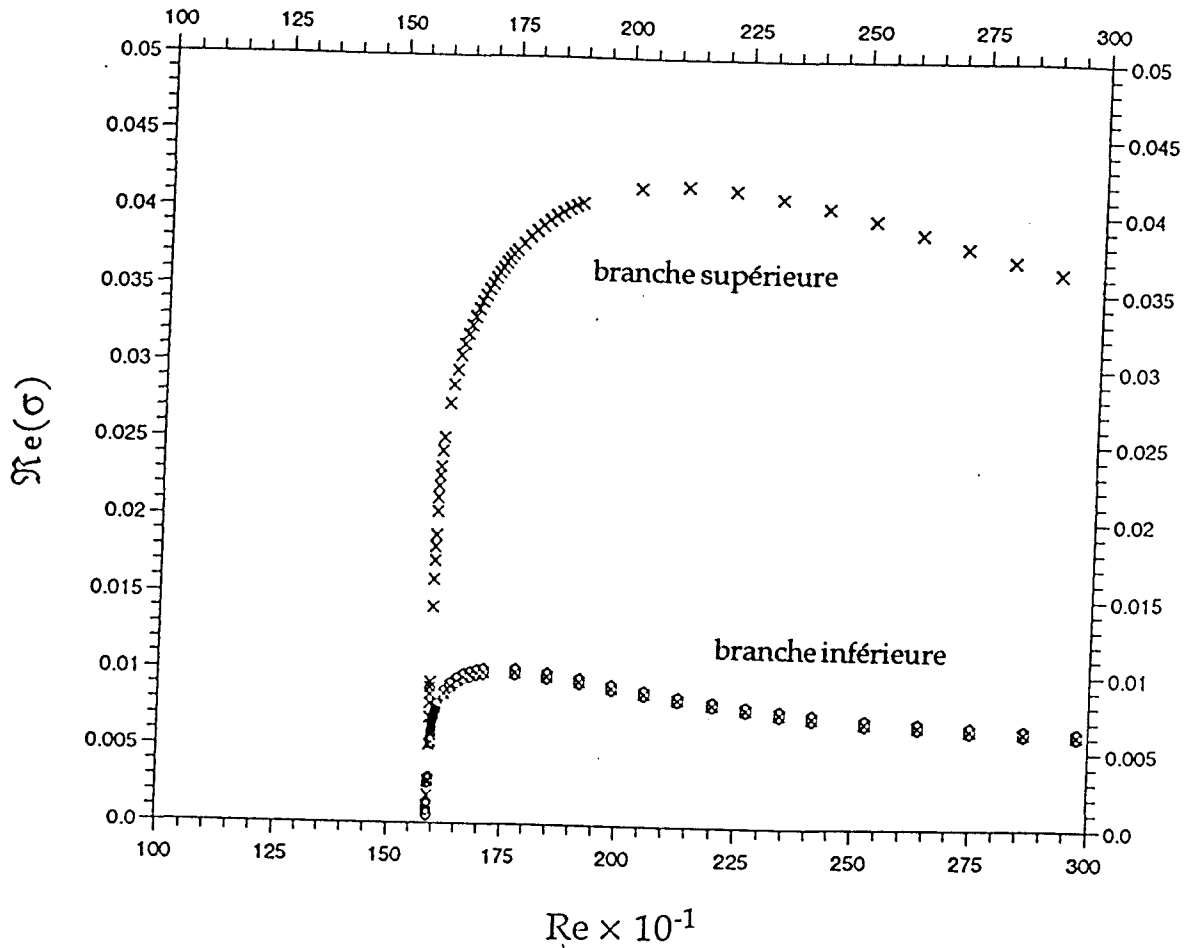
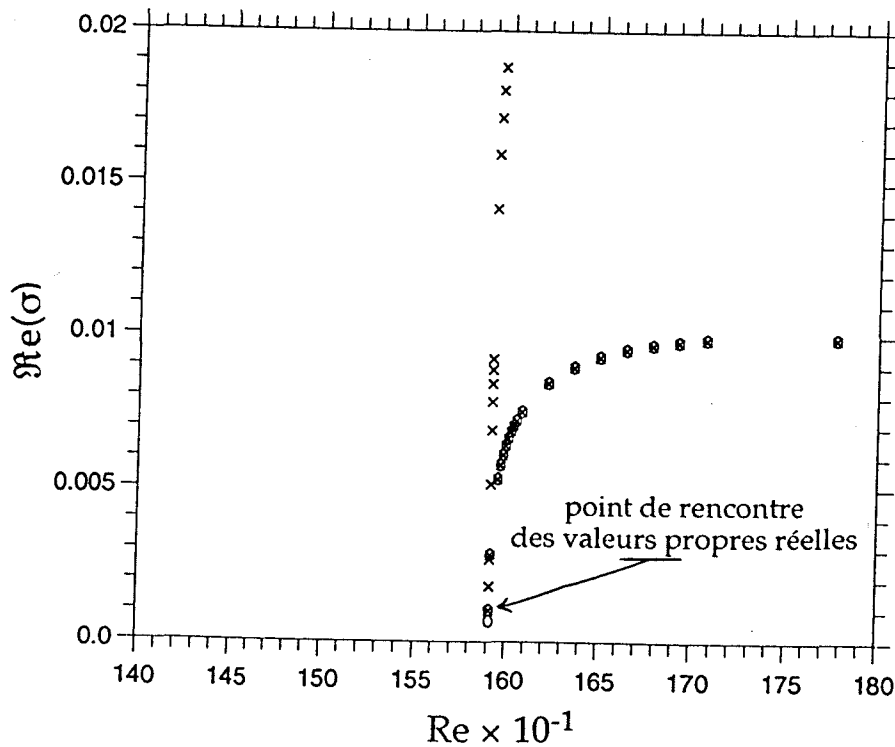


Figure III.6. Taux d'amplification maximale secondaire bidimensionnelle $\Re e(\sigma)$ en fonction du nombre de Reynolds Re dans l'écoulement de Couette plan, à $\alpha=0.175$, $N=15$ ($K=28$).

\times : $\Im m(\sigma) = 0$; o : $\Im m(\sigma) \neq 0$, \otimes : $\Im m(\sigma) \neq 0$.



Zoom de la courbe III.6 près de la ligne de stabilité neutre.

τ étant l'amplitude de la fonction propre (associée à la valeur propre zéro) au point limite. Considérons à présent les solutions dans le plan (ε, α) . Comme on peut le voir par exemple sur la figure (II.11), dans cette représentation il y a également des points limites en α pour l'existence des solutions pour la troncature N fixée. En ces points limites en α , on a de nouveau une bifurcation nœud-col et une équation locale de la forme

$$c \delta\alpha + d \tau^2 = 0 \text{ où } \delta\alpha = \alpha - \alpha_c.$$

Or, si on se place maintenant au point limite le plus petit en nombre de Reynolds pour l'existence des solutions, la représentation de ces dernières dans le plan (ε, α) se réduit à un seul point (ne permettant en particulier plus de variation en α). De ce fait on aura $c=0$ dans l'équation locale, ce qui nous amène à retenir le terme en $\delta\alpha^2$. L'équation locale ci-dessus doit par conséquent être remplacée par une équation de la forme

$$e \delta\alpha^2 + f \tau^2 = 0,$$

où $ef > 0$ pour que la seule solution soit la solution triviale $(0,0)$ (le point).

Ainsi, au point limite double (solution réduite à un seul point dans le plan (ε, α) et en même temps point limite dans le plan (ε, Re)), on aura une valeur propre zéro double avec un noyau de dimension 1.

Sans vouloir analyser explicitement la dynamique locale en faisant appel à des techniques de réduction locales issues de la théorie des systèmes dynamiques, nous discutons néanmoins brièvement du lien entre nos calculs de stabilité et un modèle simplifié comme dans [Barkley, 199] pour l'écoulement de Poiseuille. Un tel modèle local peut être obtenu par ce qui est appelé une réduction sur la variété centrale (cf. [Guckenheimer & Holmes, 1983]). En notant par y_1 l'amplitude du noyau de la matrice Jacobienne J (i.e. y_1 est l'amplitude de $\vec{\varphi}_1$ tel que $J\vec{\varphi}_1 = 0$) et par y_2 l'amplitude de la fonction propre généralisée $\vec{\varphi}_2$ telle que

$J\vec{\varphi}_2 = \vec{\varphi}_1$, on obtiendrait ainsi 2 équations non-linéaires reliant y_1 et y_2 entre elles et à δRe et $\delta\alpha^2$. La théorie de la forme normale (cf. [Guckenheimer & Holmes, 1983]) permet après un changement de variable polynomial adéquat d'écrire pour les nouvelles variables deux équations aux amplitudes couplées qui s'expriment dans le cas du présent travail par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\mu_1 + x_1^2 + \mu_2 x_2 + bx_1 x_2 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

μ_1 et μ_2 étant proportionnels respectivement à δRe et à $\delta\alpha$. Les systèmes locaux tels que (III.11) peuvent être dérivés suivant une analyse de forme normale avec des coefficients appropriés (cf. [Barkley, 1990] et pour plus de détails sur les bifurcations doubles [Guckenheimer & Holmes, 1983]).

Dans cette étude, nous discutons brièvement la relation entre nos calculs de stabilité et les équations modèles locales (III.11). Le point limite double (nez de la surface d'équilibre) correspond à $\mu_1=0$, $\mu_2=0$ et $x_1=0$ (donc $x_2=0$). Les points fixes

$$(x_1, x_2) = (\pm \sqrt{\mu_1}, 0)$$

dans (III.11) correspondent au point limite en nombre de Reynolds. En linéarisant (III.11) autour des points fixes, la stabilité est déterminée par les valeurs propres $\lambda_{1/2}$ d'une matrice carrée 2×2 avec

$$2\lambda_{1/2} = \mu_2 + bx_{\pm} \pm \sqrt{(\mu_2 + bx_{\pm})^2 + 8x_{\pm}} \quad (\text{III.12})$$

où $x_{\pm} = \pm \sqrt{\mu_1}$.

Pour $\mu_2 = 0$ (donc $\delta\alpha = 0$) et $x_{+} > 0$ les valeurs propres sont réelles, dont une est positive qui correspond au calcul de stabilité du système global sur la branche

supérieure illustré sur la figure III.6. La branche inférieure quant à elle est caractérisée par $x_1 < 0$. Les résultats de l'équation modèle sont en accord avec ceux de la stabilité de la figure III.6 pour $b < 0$, les valeurs propres (III.12) étant alors complexes conjuguées pour $|x_1| \ll 1$ avec une partie réelle positive $\text{Re}(x_1) > 0$. L'analyse faite est identique jusque là à celle appliquée par [Barkley, 1990] au cas de l'écoulement de Poiseuille plan. Cependant dans Poiseuille plan la bifurcation multiple apparaît aux points limites en Reynolds (et non pas seulement au point limite le plus petit) ce qui est dû à la présence du deuxième paramètre reliant les deux formulations (gradient de pression constant, flux constant). La différence étant alors que le second paramètre apparaît linéairement dans la forme normale (III.11). L'apparition du carré de $\delta\alpha$ dans notre forme normale est en accord qualitatif avec notre analyse de stabilité. Nos calculs montrent en effet que pour $\delta\alpha \neq 0$ ($\mu_2 \neq 0$) les valeurs propres réelles se confondent (en une valeur complexe) dans la partie instable indépendamment du signe de $\delta\alpha$, comme le montrent les figures III.5-III.7 (la figure III.5 étant obtenue pour $\delta\alpha < 0$ et la figure III.7 pour $\delta\alpha > 0$). Par conséquent, la bifurcation (coalescence des deux valeurs propres réelles) au nez de la surface d'équilibre peut être interprétée comme une bifurcation dégénérée. Le paramètre nombre d'onde α détermine seulement la longueur de la boîte plus au moins petite (cf. chapitre III) et par conséquent, il n'est pas surprenant que la dynamique locale soit indépendante de la variation en α .

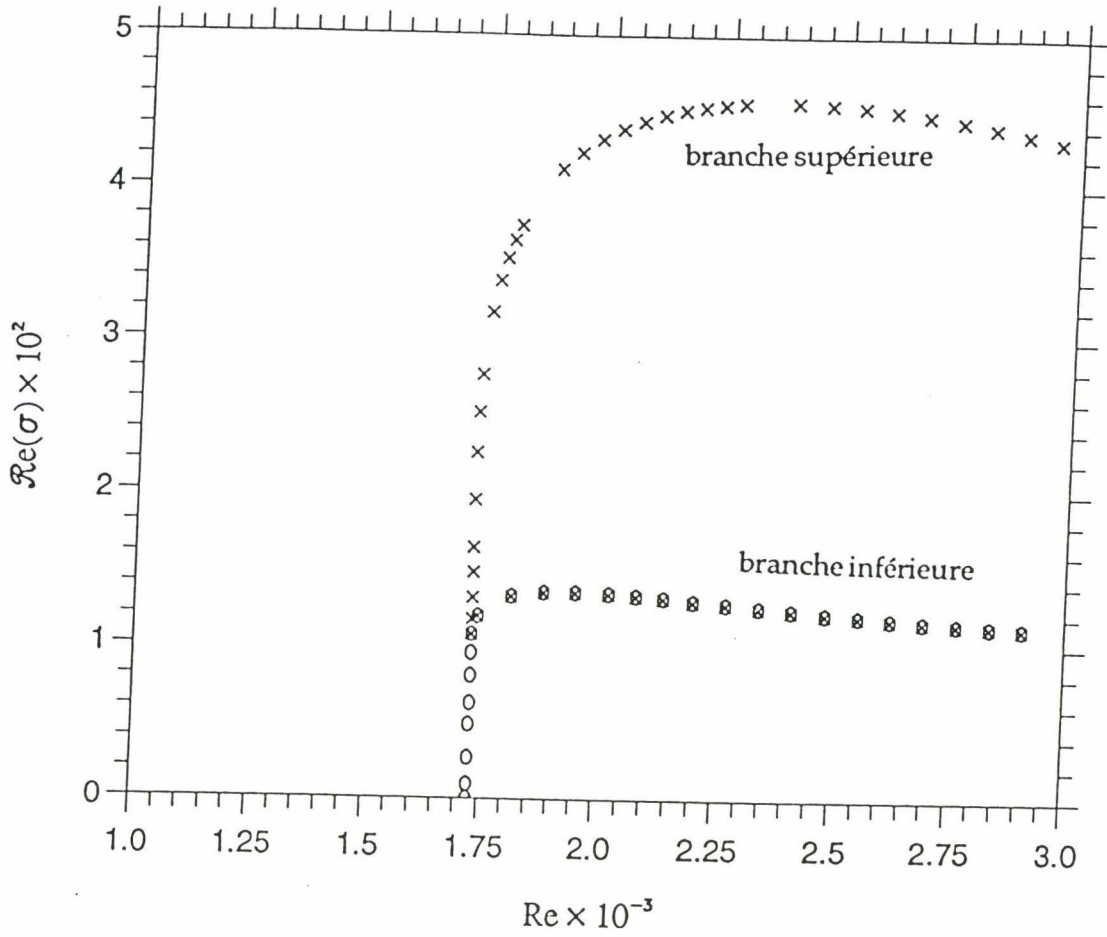


Figure III.7. Taux d'amplification maximale secondaire bidimensionnelle $Re(\sigma)$ en fonction du nombre de Reynolds Re dans l'écoulement de Couette plan, à $\alpha=0.181$, $N=15$ ($K=28$).

\times : $\Im m(\sigma) = 0$; o : $\Im m(\sigma) = 0$, \otimes : $\Im m(\sigma) \neq 0$.

III.3 Stabilité par rapport aux perturbations tridimensionnelles

Dans les écoulements cisailés parallèles, la dynamique qui régit le processus de la transition est largement dominée par les instabilités secondaires tridimensionnelles (cf. [Herbert, 1988]) dont les facteurs d'amplification sont en général d'un ordre de grandeur supérieurs aux instabilités bidimensionnelles [Orszag & Patera, 1983]. De plus, ces instabilités permettent d'établir un lien avec des scénarios de transition observés dans des expériences.

La stabilité secondaire 3D a été largement étudiée pour l'écoulement de Poiseuille plan. [Herbert, 1981,1984] a donné des résultats concernant la branche inférieure des équilibres bidimensionnels, montrant un bon accord avec les résultats expérimentaux. [Orszag & Patera, 1983] se sont focalisés sur la branche inférieure de ces équilibres montrant l'importance particulière des instabilités tridimensionnelles. Dans les travaux de [Pugh, 1987] puis [Ehrenstein & Koch, 1988], à la fois la branche supérieure et la branche inférieure de la surface d'équilibre sont étudiées. En particulier, cette dernière étude a confirmé l'importance de la stabilité tridimensionnelle.

Dans cette partie, nous considérons des perturbations tridimensionnelles de même longueur d'onde (longitudinale) que l'écoulement 2D. Un nouveau paramètre apparaît (nombre d'onde transverse β) par rapport au cas bidimensionnel. Avant d'aborder la formulation de l'étude de stabilité 3D, nous passons rapidement en revue les équations tridimensionnelles sous-jacentes qui interviendront dans l'analyse de stabilité.

III.3.1 Equations de Navier-Stokes en formulation 3D

Nous cherchons des solutions sous forme d'ondes progressives, périodiques dans les directions longitudinale et transverse,

$$\begin{Bmatrix} \vec{\tilde{v}}(x,y,z,t) \\ \vec{\tilde{\omega}}(x,y,z,t) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=M}^M \begin{Bmatrix} \hat{v}_{nm}(y,t) \\ \hat{\omega}_{nm}(y,t) \end{Bmatrix} e^{i(n\alpha x + m\beta z)} \quad (\text{III.13})$$

où α et β sont les nombres d'onde respectivement dans la direction longitudinale et transverse, le mode en Fourier de la solution ne dépend que de la composante normale y . Nous rappelons que \vec{v} et $\vec{\omega}$ sont respectivement le vecteur-vitesse et le vecteur-vorticité avec $\vec{u}=(u,v,w)$ et $\vec{\omega}=(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.

En utilisant l'équation de continuité (II.13) tout en tenant compte de la définition du vecteur vorticité, on obtient les relations suivantes

$$\begin{aligned} \hat{u}_{nm} &= i(n\alpha \frac{d\hat{v}_{nm}}{dy} - m\beta (\hat{\omega}_y)_{nm}) / k_{nm}^2 \\ \hat{w}_{nm} &= i(m\beta \frac{d\hat{v}_{nm}}{dy} + n\alpha (\hat{\omega}_y)_{nm}) / k_{nm}^2 \\ (\hat{\omega}_z)_{nm} &= i(n\alpha \frac{d(\hat{\omega}_y)_{nm}}{dy} + m\beta \frac{d^2\hat{v}_{nm}}{dy^2}) / k_{nm}^2 - im\beta \hat{v}_{nm} \\ (\hat{\omega}_x)_{nm} &= i(m\beta \frac{d(\hat{\omega}_y)_{nm}}{dy} - n\alpha \frac{d^2\hat{v}_{nm}}{dy^2}) / k_{nm}^2 + in\alpha \hat{v}_{nm} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

qui donnent les autres composantes modales du vecteur vitesse et du vecteur vorticité en fonction de $(\hat{v})_{nm}$ et $(\hat{\omega}_y)_{nm}$. Ainsi, nous pouvons utiliser la formulation en variables indépendantes \tilde{v} et $\tilde{\omega}_y$ en reprenant les équations (II.15ab) introduites au chapitre II.

En substituant (III.13) dans les équations de base (II.15ab), tout en tenant compte des relations (III.14), on obtient les équations modales pour la (n,m) -ème composante de Fourier

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (D_{n,m} \hat{v}_{nm}) = & \left\{ \frac{1}{Re} D_{n,m}^2 - in\alpha (U(y,\eta)-c) D_{n,m} + in\alpha \frac{\partial^2 U(y,\eta)}{\partial y^2} \right\} \hat{v}_{nm} \\ & - \varepsilon \sum_{v=-N}^N \sum_{\mu=-M}^M N_{(n-v),(m-\mu),v,\mu}^{OS} = 0 \end{aligned} \quad (III.15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\omega}_y)_{nm} = & \left\{ \frac{1}{Re} D_{n,m} - in\alpha (U(y,\eta)-c) \right\} (\hat{\omega}_y)_{nm} - im\beta \frac{\partial U(y,\eta)}{\partial y} \hat{v}_{nm} \\ & - \varepsilon \sum_{v=-N}^N \sum_{\mu=-M}^M N_{(n-v),(m-\mu),v,\mu}^{SQ} = 0. \end{aligned} \quad (III.15b)$$

où $D_{n,m} = \frac{d^2}{dy^2} - k_{nm}^2$; $k_{nm}^2 = n^2\alpha^2 + m^2\beta^2$.

Notons que si l'on cherche des équilibres non-linéaires, ces dernières étant stationnaires dans le repère se déplaçant à la vitesse c , on posera $\partial/\partial t=0$. D'autre part, dans le cas de Couette plan $c=0$ (cf. chapitre II) et $U(y,\eta)=y$ car $\eta=1$.

Les termes non-linéaires de convolution dans (III.15a) et (III.15b) s'expriment sous la forme

$$\begin{aligned} N_{k,l,v,\mu}^{OS} = & \frac{K_1}{k_{kl}^2 k_{v\mu}^2} (\hat{\omega}_y)_{kl} \left(2K_1 \frac{d(\hat{\omega}_y)_{v\mu}}{dy} + (k_{v\mu}^2 + 2K_2) D_{v,\mu} \hat{v}_{v\mu} \right) \\ & - \frac{1}{k_{kl}^2 k_{v\mu}^2} \frac{d\hat{v}_{kl}}{dy} \left(2K_1 K_2 \frac{d(\hat{\omega}_y)_{v\mu}}{dy} + [K_2 (k_{v\mu}^2 + K_2) - K_1^2] D_{v,\mu} \hat{v}_{v\mu} \right) \\ & + \frac{1}{k_{\mu v}^2} \hat{v}_{kl} \left\{ (k_{v\mu}^2 + K_2) \frac{d}{dy} (D_{v,\mu} \hat{v}_{v\mu}) + K_1 \left[\frac{d^2(\hat{\omega}_y)_{v\mu}}{dy^2} + k_{v\mu}^2 (\hat{\omega}_y)_{v\mu} \right] \right\} \end{aligned} \quad (III.16a)$$

$$\begin{aligned} N_{k,l,v,\mu}^{SQ} = & -\frac{1}{k_{kl}^2} \left\{ K_2 \frac{d\hat{v}_{kl}}{dy} - K_1 \hat{\eta}_{kl} \right\} (\hat{\omega}_y)_{v\mu} \\ & + \frac{1}{k_{kl}^2} \left\{ K_1 (D_{k,l} \hat{v}_{kl}) + K_2 \frac{d(\hat{\omega}_y)_{kl}}{dy} \right\} \hat{v}_{v\mu} + \hat{v}_{kl} \frac{d(\hat{\omega}_y)_{v\mu}}{dy} - (\hat{\omega}_y)_{kl} \frac{d\hat{v}_{v\mu}}{dy} \end{aligned} \quad (III.16b)$$

où $K_1 = (vl - \mu k) \alpha \beta$ et $K_2 = (vk\alpha^2 + \mu l\beta^2)$

Les solutions que l'on cherche sont supposées réelles, donc

$$\vec{v}_{-n,-m} = \vec{v}_{n,m}^* ; \quad \vec{\omega}_{-n,-m} = \vec{\omega}_{n,m}^* \quad (\text{III.17})$$

on se limitera par conséquent à calculer uniquement les modes $n \geq 0$. D'autre part, si l'on impose une condition de symétrie de réflexion par rapport à $z \rightarrow -z$, propriété justifiée par les observations expérimentales de vortex longitudinaux contrarotatifs dans la direction transverse (par exemple [Nishioka et al., 1978] concernant l'écoulement de Poiseuille et [Dauchot, 1995] pour l'écoulement de Couette), ce qui permet d'écrire

$$\{\tilde{u}(-z), \tilde{v}(-z), \tilde{w}(-z)\} = \{\tilde{u}(+z), \tilde{v}(+z), -\tilde{w}(+z)\}, \quad (\text{III.18})$$

qui se traduit sous forme modale par

$$\begin{aligned} \{\tilde{u}_{n,-m}, \tilde{v}_{n,-m}, \tilde{w}_{n,-m}\} &= \{\tilde{u}_{n,m}, \tilde{v}_{n,m}, -\tilde{w}_{n,m}\} \\ \{(\tilde{\omega}_x)_{n,-m}, (\tilde{\omega}_y)_{n,-m}, (\tilde{\omega}_z)_{n,-m}\} &= \{-(\tilde{\omega}_x)_{n,m}, -(\tilde{\omega}_y)_{n,m}, (\tilde{\omega}_z)_{n,m}\}. \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Les conditions (III.18) et (III.19) nous permettent de résoudre seulement les modes $n \geq 0, m \geq 0$. Ces conditions impliquent par ailleurs que pour $n > 0$ et $m = 0$, $(\hat{\omega}_y)_{n,0} = 0$, et pour $n = 0$ et $m > 0$, $\hat{v}_{0,m}$ (ainsi que $\hat{u}_{0,m}$ et $(\hat{\omega}_z)_{0,m}$) est réel pur, tandis que $(\hat{\omega}_y)_{0,m}$ (ainsi que $\hat{w}_{0,m}$ et $(\hat{\omega}_x)_{0,m}$) est imaginaire pur. Pour $n > 0$ et $m = 0$ l'équation (III.15b) est identiquement satisfaite, tandis que pour $n = 0$ et $m > 0$, l'équation (III.15a) est réelle pure et (III.15b) est imaginaire pure.

Pour $(n,m) = (0,0)$, les deux équations (III.15a) et (III.15b) sont identiquement satisfaites. Pour remplacer ces équations, on reprend la formulation en variable primitive (II.12) où l'on utilise la condition de gradient de pression moyen constant qui nous donne l'équation de quantité de mouvement suivant x

suivante (de la même manière que nous avons trouvé l'équation (II.22))

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \hat{u}_{00}}{dy^2} + 2 \varepsilon \Im \left\{ \sum_{v=0}^N \sum_{\mu=0}^M \frac{(2 - \delta_{v0} - \delta_{\mu 0})}{k_{v\mu}^2} \left[v\alpha \frac{d^2 \hat{v}_{v\mu}}{dy^2} \hat{v}_{v\mu}^* - \mu\beta \frac{d}{dy} ((\hat{\omega}_y)_{v,\mu} \cdot \hat{v}_{v\mu}^*) \right] \right\} = 0. \quad (\text{III.20})$$

Les conditions d'adhérence aux bords sous forme modale sont

$$\begin{aligned} (n,m) \neq (0,0) : \hat{v}_{nm}(y=\pm 1) = \frac{d\hat{v}_{nm}}{dy}(y=\pm 1) = (\hat{\omega}_y)_{nm}(y=\pm 1) = 0 \\ (n,m) = (0,0) : \hat{u}_{00}(y=\pm 1) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Le traitement spécial du terme $(n,m)=(0,0)$ nécessite la séparation des termes de convolution contenant \hat{u}_{00} ; on procède de la façon suivante en écrivant

$$\sum_{v=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} N_{n-v,m-\mu,v,\mu} = N_{n,m,0,0} + N_{0,0,n,m} + \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} N_{n-v,m-\mu,v,\mu}$$

où l'on note par \sum'' la somme ne contenant pas les termes $(0,0)$ et on a alors

$$\begin{aligned} N_{n,m,0,0}^{\text{OS}} + N_{0,0,n,m}^{\text{OS}} = -i n\alpha \left\{ \hat{v}_{nm} \frac{d^2 \hat{u}_{00}}{dy^2} \right. \\ \left. + n\alpha \hat{u}_{00} \frac{1}{k_{nm}^2} \left[m\beta \frac{d(\hat{\omega}_y)_{nm}}{dy} - n\alpha D_{nm} \hat{v}_{nm} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

$$N_{n,m,0,0}^{\text{SQ}} + N_{0,0,n,m}^{\text{SQ}} = i \left\{ n\alpha \hat{u}_{00} (\hat{\omega}_y)_{nm} + m\beta \frac{d\hat{u}_{00}}{dy} \hat{v}_{nm} \right\} \quad (\text{III.23})$$

III.3.2 Formulation du problème

Comme pour la stabilité par rapport aux perturbations bidimensionnelles, le système de Navier-Stokes en formulation tridimensionnelle (III.15) mène, en superposant une perturbation de la forme

$$\vec{\varphi}(x,y,z,t) = \vec{\varphi}_{2D}(x,y) + \tau e^{\sigma t} \vec{\psi}(x,y,z)$$

et en linéarisant, à un système de la forme

$$\mathcal{J}_{3D}(U, Re, \vec{\varphi}_{2D}) \vec{\psi}(x,y,z) = \sigma \vec{\psi}(x,y,z) \quad (\text{III.24})$$

où $\vec{\psi}$ est une fonction propre secondaire (tridimensionnelle) de la forme

$$\vec{\psi} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \omega \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-N}^N \hat{v}_{n1}(y) e^{in\alpha x} \\ \sum_{n=-N}^N \hat{\omega}_{n1}(y) e^{in\alpha x} \end{array} \right\} e^{i\beta z} . \quad (\text{III.25})$$

β étant la longueur d'onde dans la direction transverse.

Dans le système (III.24), $\mathcal{J}_{3D}(U, Re, \vec{\varphi}_{2D})$ correspond à la matrice Jacobienne du système composé des équations (III.15ab) et (III.20) et des conditions d'adhérence (III.24), σ étant la valeur propre complexe ($\sigma = \sigma_i + i\sigma_r$) à déterminer.

Par la suite, le problème aux valeurs propres sera résolu avec $N=13$, et $K=28$, donnant lieu à des matrices de taille 2200×2200 , ce qui rend difficile la résolution numérique par des méthodes classiques telles que la méthode QR. Une autre méthode dite d'Arnoldi permet de déterminer la partie principale du spectre, en projetant le système global sur un système plus petit. Nous décrivons la méthode dans l'Annexe III, elle nous permettra dans cette étude de déterminer en particulier les valeurs propres les plus amplifiées.

III.3.3 Résultats numériques

L'analyse de stabilité secondaire par rapport aux perturbations tridimensionnelles est obtenue en linéarisant autour d'un équilibre bidimensionnel. En considérant les perturbations tridimensionnelles (III.25), un nouveau paramètre apparaît: le nombre d'onde transverse β qui caractérise les instabilités tridimensionnelles. L'étude consiste à varier ce dernier et à calculer à chaque fois les valeurs propres d'amplification maximale.

Commençons tout d'abord par une application de notre méthode à l'écoulement de Poiseuille plan. Un test intéressant figure dans le travail de [Ehrenstein & Koch, 1988] représenté sur la figure III.8a. Le taux d'amplification maximal est calculé en fonction de la longueur d'onde β pour une solution d'équilibre 2D sur la branche inférieure de la courbe d'équilibre 2D. La ligne continue représente la valeur propre la plus amplifiée réelle pure ($\Im m(\sigma)=0$) en phase avec la solution bidimensionnelle. L'autre valeur propre complexe ($\Im m(\sigma)\neq 0$) correspond à une solution quasi-périodique, elle est représentée sur la figure par des lignes en pointillés. Pour certaines valeurs de longueurs d'onde, on voit apparaître des points de bifurcation correspondant à $\Re e(\sigma)=0$. Pour les mêmes conditions ($Re=5000$, $\alpha=1.12$ avec $N=2$ et $K=40$), notre calcul donne exactement la même évolution des deux valeurs propres, comme le montre la figure III.8b qui représente nos calculs.

La même étude a été entreprise ici concernant l'écoulement de Couette. Pour une solution à $Re=2200$ se situant sur la branche inférieure de la surface d'équilibre, le taux d'amplification maximal (valeur propre réelle pure) est calculé en fonction de la longueur d'onde β . Le résultat est illustré sur la figure III.9, les symboles (o) correspondent aux valeurs propres calculées avec $N=13$ qui

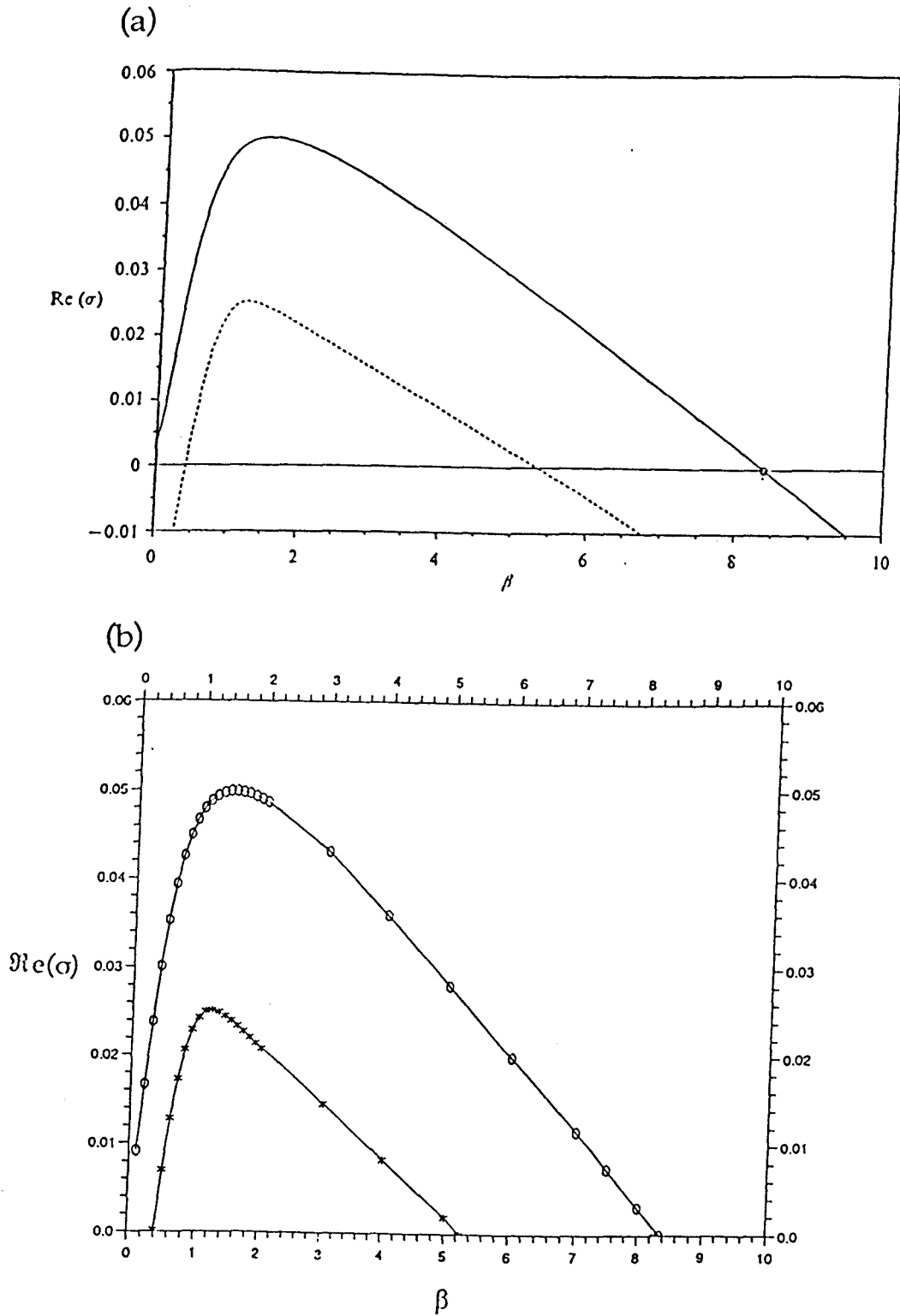


Figure III.8 - Taux d'amplification maximale secondaire tridimensionnelle $\text{MaxRe}(\sigma)$ en fonction du nombre d'onde transverse β , pour $\text{Re}=5000$ et $\alpha=1.12$ sur la branche inférieure des équilibres 2D dans l'écoulement de Poiseuille plan, avec $N=2$ et $K=20$.

(a) Résultat de [Ehrenstein & Koch, 1988]. — valeur propre la plus amplifiée(réelle pure) ; valeur propre complexe ($\Im m(\sigma) \neq 0$).

(b) Présente étude. o valeur propre la plus amplifiée(réelle pure) ; * valeur propre complexe ($\Im m(\sigma) \neq 0$).

correspond à la troncature minimale que nous pouvions encore utiliser pour avoir des solutions raisonnablement convergées (voir chapitre II) . Quelques calculs de stabilité ont été effectués avec $N=15$ (points représentés par (*)) pour avoir des éléments concernant la convergence des résultats. A part un léger décalage au niveau du taux d'amplification, le résultat montre que la troncature $N=13$ devrait être suffisante pour fournir les caractéristiques de stabilité les plus significatives. Il est à noter que la valeur propre représentée sur la figure III.9 est réelle pure. Le taux d'amplification atteint son maximum à $\beta \approx 5$ puis diminue quand on augmente β avant de traverser la ligne de stabilité neutre ($\Re(\sigma)=0$) à $\beta_c \approx 23$. La longueur d'onde correspondante $\lambda_z = 2\pi/\beta_c$ est telle que toutes les perturbations tridimensionnelles avec une plus petite longueur d'onde sont amorties. En particulier β_c correspond à un point de bifurcation pour l'émergence d'états d'équilibres non-linéaires tridimensionnels (qui constitueront le sujet du chapitre suivant). Sur les figures III.10ab, nous avons représenté la partie principale du spectre pour les perturbations tridimensionnelles pour deux valeurs du paramètre β . Pour une petite valeur de ce dernier ($\beta=3.5$), on remarque l'existence de plusieurs valeurs propres amplifiées, alors que pour $\beta=20$ toutes ces valeurs se retrouvent dans la partie stable du spectre, à l'exception de la plus amplifiée (réelle pure).

Nous avons effectué les mêmes calculs pour d'autres valeurs du nombre de Reynolds (autres points de la surface d'équilibre 2D). Tout d'abord à $Re=4000$ sur la figure III.11 où on aperçoit le même comportement que précédemment, le nombre d'onde critique d'instabilité est cette fois-ci repéré à $\beta_c \approx 33$. Pour une solution à $Re=1830$ (figure III.12) nous obtenons à nouveau une courbe similaire avec maintenant un nombre d'onde critique $\beta_c \approx 23.6$.

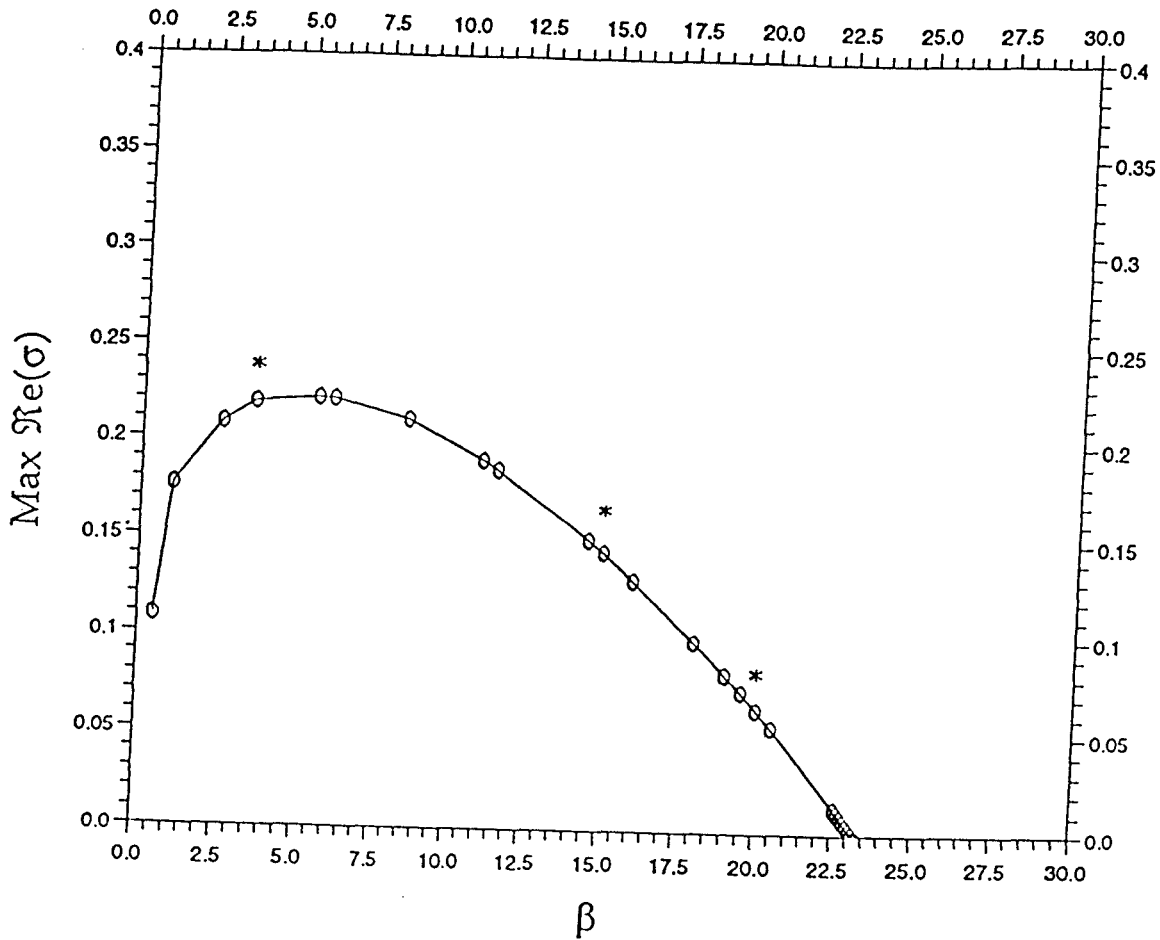


Figure III.9 Taux d'amplification maximale secondaire tridimensionnelle $\text{Max Re}(\sigma)$ en fonction de la longueur d'onde transverse β dans l'écoulement de Couette plan, à $\text{Re}=2200$.
 o : Mode avec $\Im m(\sigma) = 0$, $N = 13$, $\alpha=0.132$; * : Mode avec $\Im m(\sigma) = 0$, $N=15$, $\alpha=0.111$; (K=28).

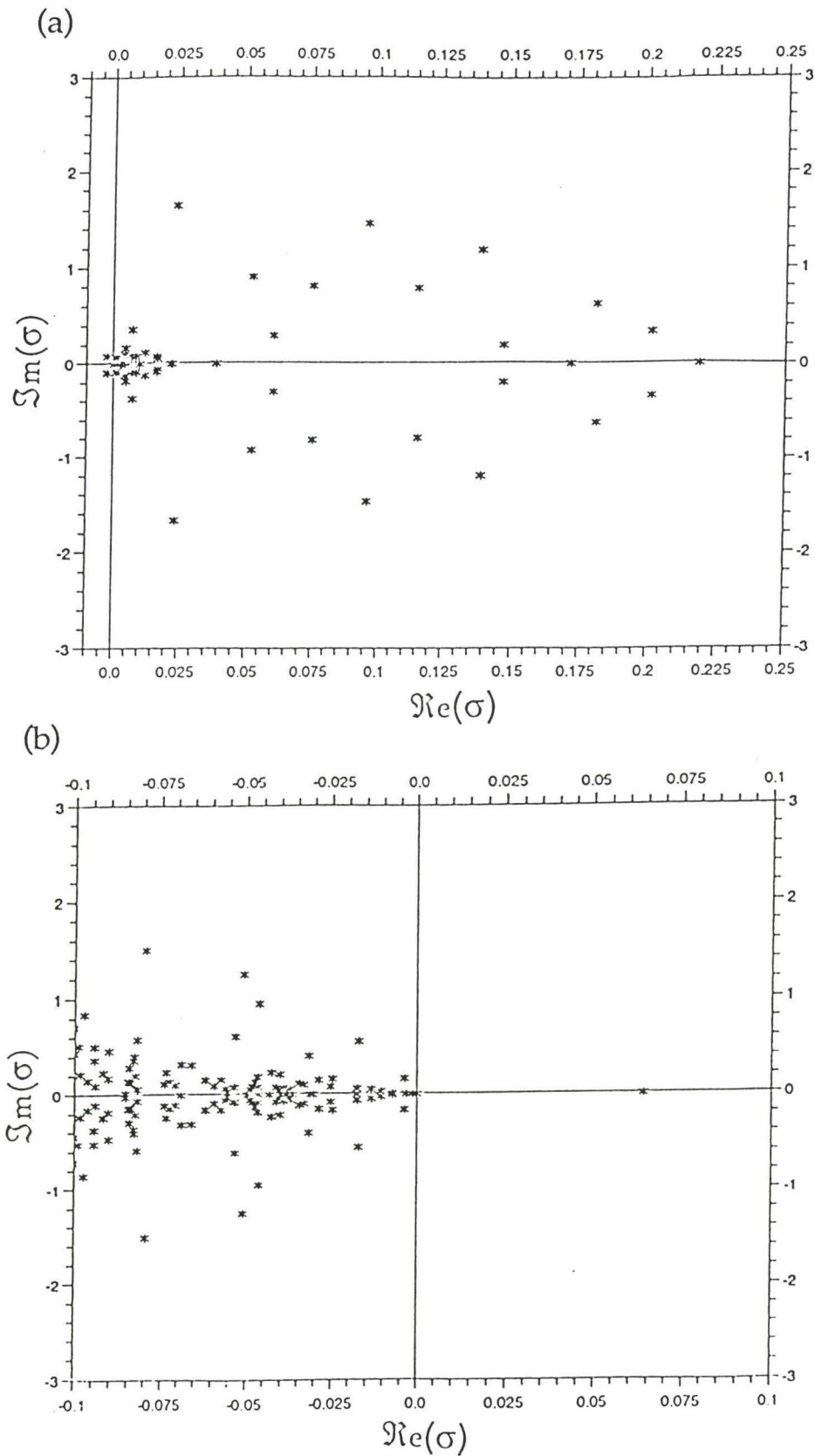


Figure III.10. Partie du spectre des valeurs propres secondaires tridimensionnelles pour une solution sur la surface d'équilibre tridimensionnelle à $Re=2200$, avec $\alpha=0.132$, $N=13$ ($K=28$).
 (a) $\beta=3.5$; (b) $\beta=20$.

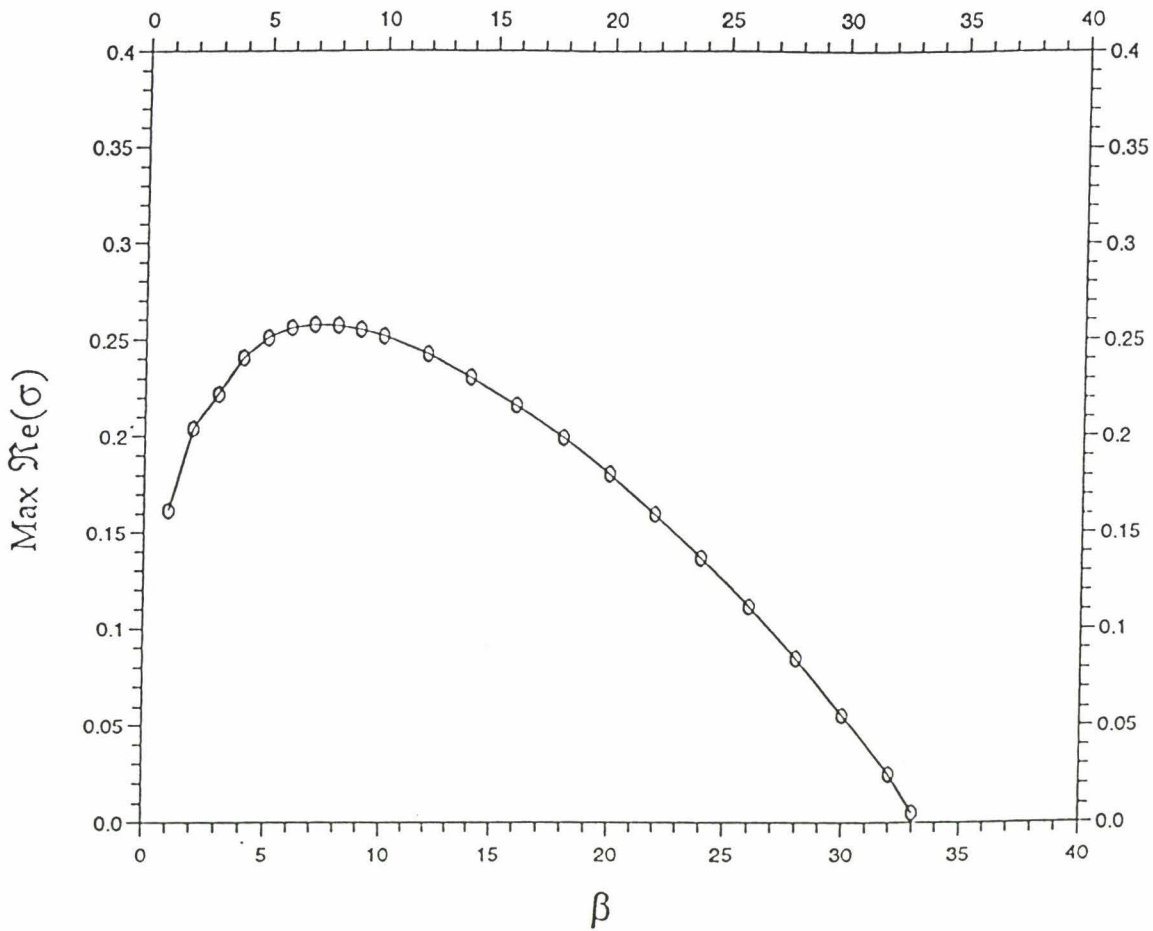


Figure III.11. Taux d'amplification maximale secondaire tridimensionnelle $\text{Max Re}(\sigma)$ en fonction de la longueur d'onde transverse β dans l'écoulement de Couette plan, à $\text{Re}=4000$, $\alpha=0.132$, $N=13$ ($K=28$). Mode avec $\text{Im}(\sigma) = 0$.

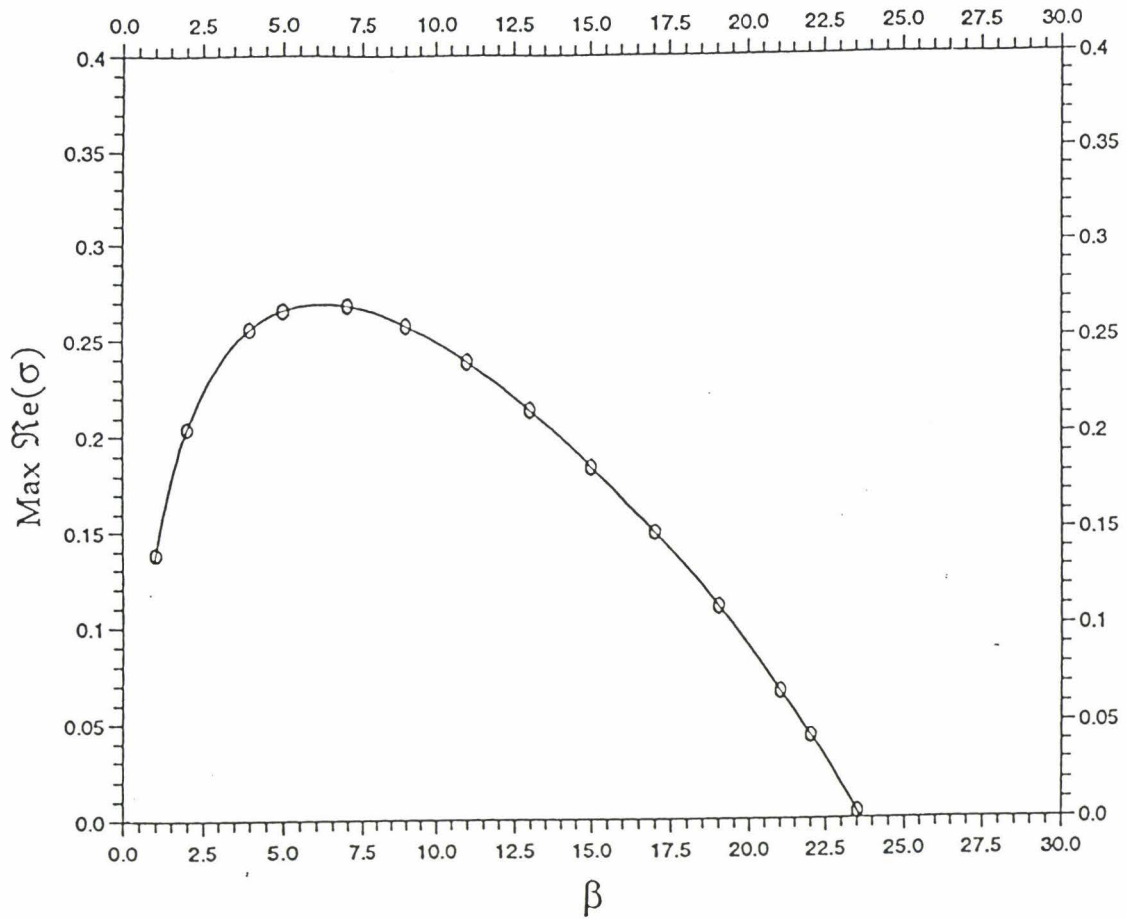


Figure III.12. Taux d'amplification maximale secondaire tridimensionnelle $\text{Max Re}(\sigma)$ en fonction de la longueur d'onde transverse β dans l'écoulement de Couette plan, à $\text{Re}=1830$, $\alpha=0.163$, $N=13$ ($K=28$). Mode avec $\text{Im}(\sigma) = 0$.

En confrontant les figures III.10-III.12 aux figures III.5-II.8 (résultats de stabilité 2D), on s'aperçoit que les taux d'amplification des perturbations secondaires tridimensionnelles sont d'un ordre de grandeur plus grands que ceux des perturbations bidimensionnelles. Les résultats de stabilité représentés sur les figures III.10-III.12 ont été obtenus pour des solutions sur la branche inférieure de la courbe d'équilibre bidimensionnelle (voir figure II.19). Contrairement à l'écoulement de Poiseuille plan où des instabilités oscillatoires dominent pour des grandes valeurs de β [Ehrenstein & Koch, 1991], ces instabilités disparaissent complètement dans notre cas de Couette plan à partir du nombre d'onde β_c . Ce point localisé en β_c correspond alors à un point de bifurcation (stationnaire) de solutions d'états d'équilibre tridimensionnels. Notons toutefois l'existence de faibles instabilités oscillatoires bidimensionnelles sur la branche inférieure (cf. fig. III.6). Dans l'écoulement de Poiseuille [Soibelman & Meiron, 1991] ou dans la couche limite de Blasius [Ehrenstein & Koch, 1995], ces instabilités oscillatoires apparaissent plutôt sur la branche supérieure que sur la branche inférieure des surfaces d'équilibre (elles y sont beaucoup plus nombreuses). Cette différence avec l'écoulement de Couette pourrait s'expliquer comme suit. La notion de branche inférieure et supérieure est relativement différente dans notre cas. Au vu de la figure II.19, on pourrait supposer qu'en fait la branche supérieure qui arrive de l'infini devient inférieure pour les nombres de Reynolds relativement petits, les deux branches se croisant dans le plan (ϵ, Re) au point $Re \approx 4600$ pour changer de rôle.

Finalement, pour avoir des renseignements supplémentaires concernant cette analyse de stabilité 3D, nous avons représenté sur la figure III.13 la fonction propre correspondant au taux d'amplification maximal de la figure III.9, pour quelques valeurs de β . Celle-ci présente également une structure spatialement

isolée dont la forme se stabilise à partir de la valeur de β correspondant au taux maximal (ici $\beta=3.5$).

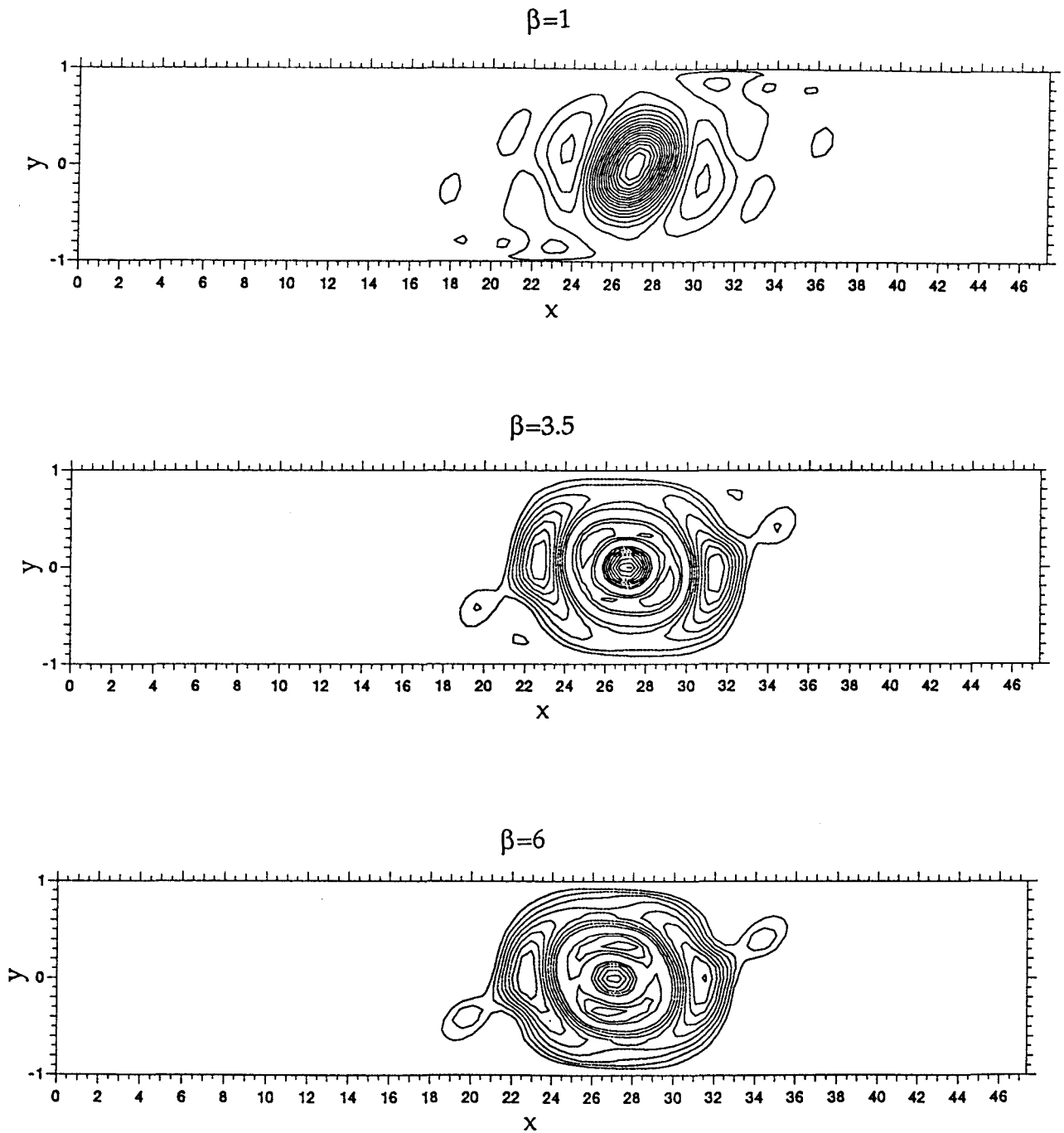


Figure III.13. Fonctions propres secondaires 3D correspondant aux taux d'amplification $\text{MaxRe}(\sigma)$ de la figure III.9 ($\alpha=0.132$, $\text{Re}=2200$, $N=13$). Isolignes de la composante normale de la vorticité pour différentes valeurs de β en $z=1$.

III.4 Discussion

La stabilité secondaire des états d'équilibre non-linéaires 2D a été étudiée aussi bien pour les perturbations 2D que 3D.

En considérant d'abord les perturbations bidimensionnelles, nous avons mis en évidence l'existence d'une bifurcation de Hopf dégénérée similaire à celle détectée dans l'écoulement de Poiseuille plan sur la branche supérieure de la courbe d'équilibre. La différence avec Couette plan est que cette bifurcation a lieu ici au point limite en nombre de Reynolds de la courbe d'équilibre. Un modèle simple de dynamique en ce point a été proposé pour expliquer la différence avec le cas Poiseuille plan.

Ensuite, nous avons entrepris l'étude de la stabilité par rapport aux perturbations 3D. Comme dans les autres écoulements cisailés, les instabilités secondaires tridimensionnelles dominent la dynamique au voisinage des états d'équilibre, dans le sens où les taux d'amplification tridimensionnels trouvés sont d'un ordre de grandeur plus élevés que les facteurs d'amplification bidimensionnels. Les points de stabilité neutre ($\Re(\sigma)=0$) trouvés devraient nous permettre de calculer des solutions d'équilibre tridimensionnels qui en bifurquent, d'autant plus que les fonctions propres trouvées ont également une structure localisée spatialement. Le but étant toujours de calculer des états existant pour de plus petits nombres de Reynolds. Cette dernière étape de l'étude fait le sujet du chapitre suivant.

- CHAPITRE IV -

EQUILIBRES NON-LINEAIRES TRIDIMENSIONNELS

IV.1 Introduction

Le calcul de solutions bidimensionnelles d'amplitude finie dans l'écoulement de Couette plan montre l'existence de ces états jusqu'à des nombres de Reynolds autour de $Re=1500$. Dans le but de se rapprocher le plus possible du seuil de transition expérimentale ($Re\approx 370$), il s'avère nécessaire de chercher des solutions tridimensionnelles qui pourraient exister à des plus petits nombres de Reynolds. De plus, le caractère intrinsèquement tridimensionnel de la transition laisse penser que ces états 3D sont les plus prompts à reproduire certaines caractéristiques de l'écoulement transitionnel. L'exemple de l'écoulement de Poiseuille plan vient renforcer cette idée, dans la mesure où les solutions 2D existant jusque $Re\approx 2900$ ont été ramenées dans les cas 3D à $Re\approx 1000$ [Ehrenstein & Koch, 1991] qui coïncide avec la valeur transitionnelle, reproduisant par la même occasion certaines caractéristiques de l'écoulement réel (par exemple le coefficient de frottement).

Les points de bifurcation secondaire 3D (calculés dans le chapitre III) sont des lieux d'émergence de solutions tridimensionnelles. Comme nous le verrons par la suite, la procédure qui permet de capter ces branches est assez délicate au voisinage du point neutre. Une fois la branche captée, elle est suivie numériquement dans l'espace paramétré en résolvant les équations 3D de Navier-Stokes avec la méthode d'itération de Newton-Raphson et la méthode de Keller.

IV.2 Formulation du problème

La formulation tridimensionnelle utilisée dans le chapitre III (voir §III.3.1) a l'avantage de traiter la stabilité secondaire par rapport aux perturbations tridimensionnelles d'une façon relativement simple, à travers le calcul de la matrice Jacobienne du système discrétisé. D'autre part, elle constitue la formulation des équations de Navier-Stokes 3D qui nous permettra ici de calculer des équilibres tridimensionnels .

Dans cette partie, on cherche des solutions périodiques dans les directions longitudinale et transverse, que l'on développe en série de Fourier sous la forme

$$\begin{Bmatrix} \vec{v}(x,y,z) \\ \vec{\omega}(x,y,z) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=M}^M \begin{Bmatrix} \vec{v}_{nm}(y) \\ \vec{\omega}_{nm}(y) \end{Bmatrix} e^{i(n\alpha x + m\beta z)} \quad (\text{IV.1})$$

Les équations de Navier-Stokes sous forme modale à résoudre sont celles vues au chapitre précédent, c'est-à-dire le système (III.15) pour $(n,m) \neq (0,0)$ et (III.20) pour $(n,m) = (0,0)$, avec les conditions aux bords correspondantes (III.21).

Pour fixer la phase et l'amplitude de la solution, on impose comme dans (II.26)

une condition de normalisation liée à notre formulation, que l'on traduit par

$$\hat{v}_{10}(0) + \frac{d\hat{v}_{10}}{dy}(0) = 1 \quad (\text{IV.2})$$

IV.3 Résolution numérique

Le développement modal (IV.1) est tronqué à $n=N$ et $m=M$ et chaque composante de Fourier est développée en série de Chebyshev aux $(K+1)$ points de collocation dans la direction normale. En écrivant $\hat{u}_{00j}=\hat{u}_{00}(y_j)$, $\hat{v}_{nmj}=\hat{v}_{nm}(y_j)$, $(\hat{\omega}_y)_{nmj}=(\hat{\omega}_y)_{nm}(y_j)$ aux $(K+1)$ points de collocation $y_j=\cos(j\pi/(K))$ $0 \leq j \leq K$, et en tenant compte de la condition de normalisation (IV.2), les équations modales se réduisent à un grand système non-linéaire algébrique de la forme

$$\vec{F}(\vec{u}, \vec{\lambda}) = 0 \quad (\text{IV.3})$$

où le vecteur solution est

$$\vec{u} = \{ \hat{u}_{00j}; \Re(\hat{v}_{nmj}), \Im(\hat{v}_{nmj}), \Re((\hat{\omega}_y)_{nmj}), \Im((\hat{\omega}_y)_{nmj}); c, \varepsilon \}$$

où $1 \leq j \leq K-1$; $0 \leq n \leq N$; $0 \leq m \leq M$ mais avec $(n,m) \neq (0,0)$,

et $\vec{\lambda} = (\alpha, \beta, Re)$ est le vecteur paramètre. Le système non-linéaire (IV.3) est encore résolu par la méthode d'itération de Newton-Raphson, combinée à la méthode de continuation de Keller décrite dans (II.28)

IV.4 Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous cherchons à calculer des solutions 3D du système non-linéaire (IV.3) qui bifurquent de solutions d'équilibre bidimensionnelles. Le point de stabilité neutre doit être calculé avec une très grande précision, dans la mesure où le reste du spectre n'est que faiblement amorti (voir Figure III.10). De plus, les valeurs propres 2D qui sont aussi contenues dans le spectre de stabilité complet sont d'un taux d'amplification très petit (voir Figure III.6), ce qui rend très difficile la distinction du mode secondaire tridimensionnel $\vec{\phi}_0$ (correspondant au point neutre) des autres modes faiblement amortis.

En fait, $\vec{\phi}_0$ est un élément du noyau de la matrice Jacobienne, qu'il est possible de déterminer numériquement avec une précision prescrite à l'aide d'une décomposition LU [Wilkinson, 1965]. Une fois la fonction propre $\vec{\phi}_0$ isolée, la branche 3D est obtenue au voisinage du point neutre en prescrivant à la solution 2D une faible perturbation de la forme $\tau \vec{\phi}_0(x,y,z)$, l'amplitude τ étant choisie petite. Une fois un point obtenu, le calcul des branches d'équilibres 3D s'opère par notre méthode de continuation.

Ainsi, pour un état d'équilibre bidimensionnel à $Re=2200$ (avec $N=13$ et $\alpha=0.132$), nous avons localisé le nombre d'onde critique à $\beta_c=23.7456$ (voir figure III.9). Les solutions d'équilibre 3D qui bifurquent de cet état sont représentées sur la Figure IV.1 par une ligne continue dans le plan (ϵ, Re) , la ligne en pointillés désigne les solutions bidimensionnelles qui constituent les points de départ. On y remarque que la branche 3D et la surface d'équilibre 2D se rejoignent en deux points de bifurcation, l'un sur la branche supérieure et l'autre sur la branche inférieure. Toutefois, la branche 3D ne traverse pas transversalement la surface d'équilibre

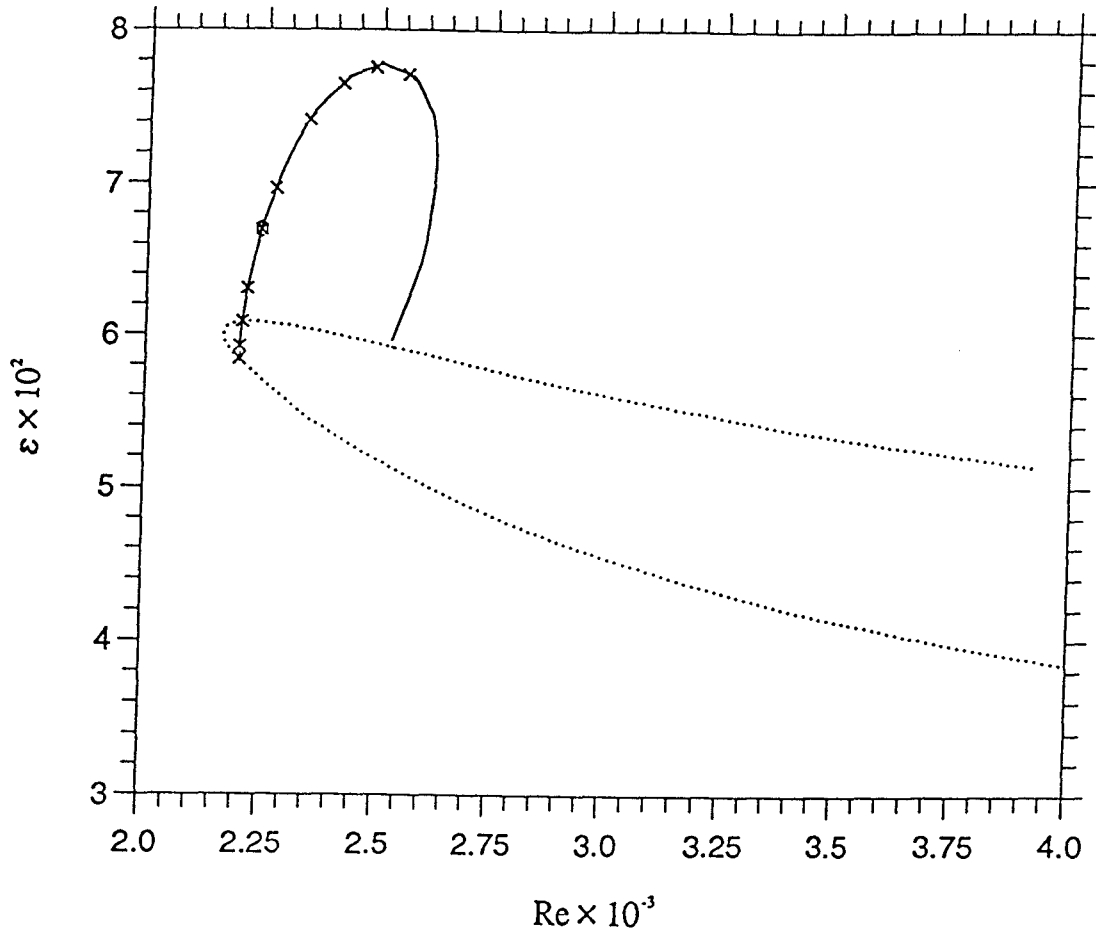


Figure IV.1 - Coupe à travers la surface d'équilibre dans le plan (ϵ, Re) dans l'écoulement de Couette plan..

.... : Etats d'équilibre bidimensionnels pour $N=13$, $\alpha=0.132$ ($K=28$)

— : Branche tridimensionnelle obtenue à partir du point de bifurcation pour $\beta=23.2406$ avec $M=1$ ($\alpha=0.132$, $N=13$).

x : Solutions tridimensionnelles pour $\beta=23.2406$ avec $M=2$ ($\alpha=0.132$, $N=13$).

2D aux points de bifurcation car nous sommes en présence d'une bifurcation en fourche. En effet, si on devait écrire une équation locale reliant l'amplitude de la perturbation τ à la variation en Reynolds δRe , elle serait de la forme

$$a \tau^3 + b \tau \delta Re = 0, \quad (IV.4)$$

L'équation (IV.4) peut être obtenue formellement en procédant à une réduction locale de type Lyapunov-Schmidt (pour plus de détails, consulter [Golubitsky & Schaeffer, 1985]). Le fait que le terme quadratique en τ soit nul est une conséquence des symétries de la solution calculée. En effet la solution est invariante par rapport à $z \rightarrow -z$, par conséquent des translations transversales possibles, seule la translation par la moitié de la longueur d'onde transverse persiste (i.e. $z \rightarrow z + \lambda_z/2$). En appliquant cet opérateur à la fonction propre $\vec{\phi}_0$, celle-ci est multipliée par -1, autrement dit la même solution est aussi bien obtenue avec une amplitude τ qu'avec $-\tau$. De ce fait, le signe de δRe doit rester localement constant sur la branche 3D (i.e. pour $\tau \neq 0$ dans (IV.4)).

Revenons à présent au résultat obtenu sur la figure IV.1, les solutions tridimensionnelles (ligne continue) ont été calculées avec une troncature transverse en Fourier $M=1$ dans (IV.1). Par ailleurs, nous avons aussi calculé quelques points avec $M=2$ (symbolisés par des croix sur la figure IV.1). Le résultat pour les deux troncatures semble bien coïncider, ce qui montre la convergence des solutions, tout au moins pour cette faible longueur d'onde transverse $\lambda_z=2\pi/\beta c$. Le système non-linéaire avec $N=13$ et $M=2$ contient près de 3650 équations réelles, ce qui constitue la limite possible de nos moyens de calcul. (Les calculs ont été effectués sur une machine IBM/SP2 du CNUSC, ainsi que sur une station de travail Digital AlphaStation 200 4/166 avec 128 Mbytes de mémoire centrale. Sur la station, une itération dans la procédure de Newton-Raphson

nécessite environ 70 minutes CPU, 5 itérations en moyenne sont nécessaires pour la convergence de la procédure, excepté près du point limite où il en faut 8 en moyenne).

Pour une solution sur la surface tridimensionnelle (symbolisé par un petit cercle sur la figure IV.1), nous avons représenté la structure spatiale sur les figures IV.2 et IV.3. Sur la figure IV.2, nous montrons l'allure de la vorticité longitudinale, les isolignes ($\omega_x = \text{constante}$) dans le plan (x,y) (pour $z=1$) sont illustrés sur la figure IV.2a, tandis que la figure IV.2b représente les isolignes dans le plan (y,z) . Dans cette dernière figure, la coupe a été effectuée pour $x \approx 14.5$, qui correspond à peu près au centre de la structure de la vorticité (voir figure IV.2a), là où sa valeur est maximale. Alors que la structure demeure isolée dans la direction longitudinale, elle révèle dans le plan (x,z) l'existence de paires de structures contrarotatives. Une fois de plus, nous insistons sur le fait que les structures longitudinales ont été calculées dans une boîte suffisamment large en x avec des conditions limites périodiques.

La composante normale de la vorticité est représenté sur les figures IV.3, la structure spatialement isolée (en $z=1$) est illustrée sur la figure IV.3a, alors que la figure IV.3b montre les isolignes $\omega_y = \text{constante}$ à travers la coupe $y=0$. Une fois encore, on y observe des structures contrarotatives dans la direction transverse.

Les solutions tridimensionnelles de la figure IV.1 ont été calculées pour un nombre d'onde transverse fixé. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, ces solutions 3D ne descendent pas en dessous du nombre de Reynolds minimal de la courbe d'équilibre bidimensionnelle. Dans l'écoulement de Poiseuille plan [Ehrenstein & Koch, 1991] ou dans la couche limite de Blasius [Ehrenstein & Koch, 1995], les états d'équilibre tridimensionnels contenant seulement les modes en Fourier (transverses) pairs semblaient être particulièrement

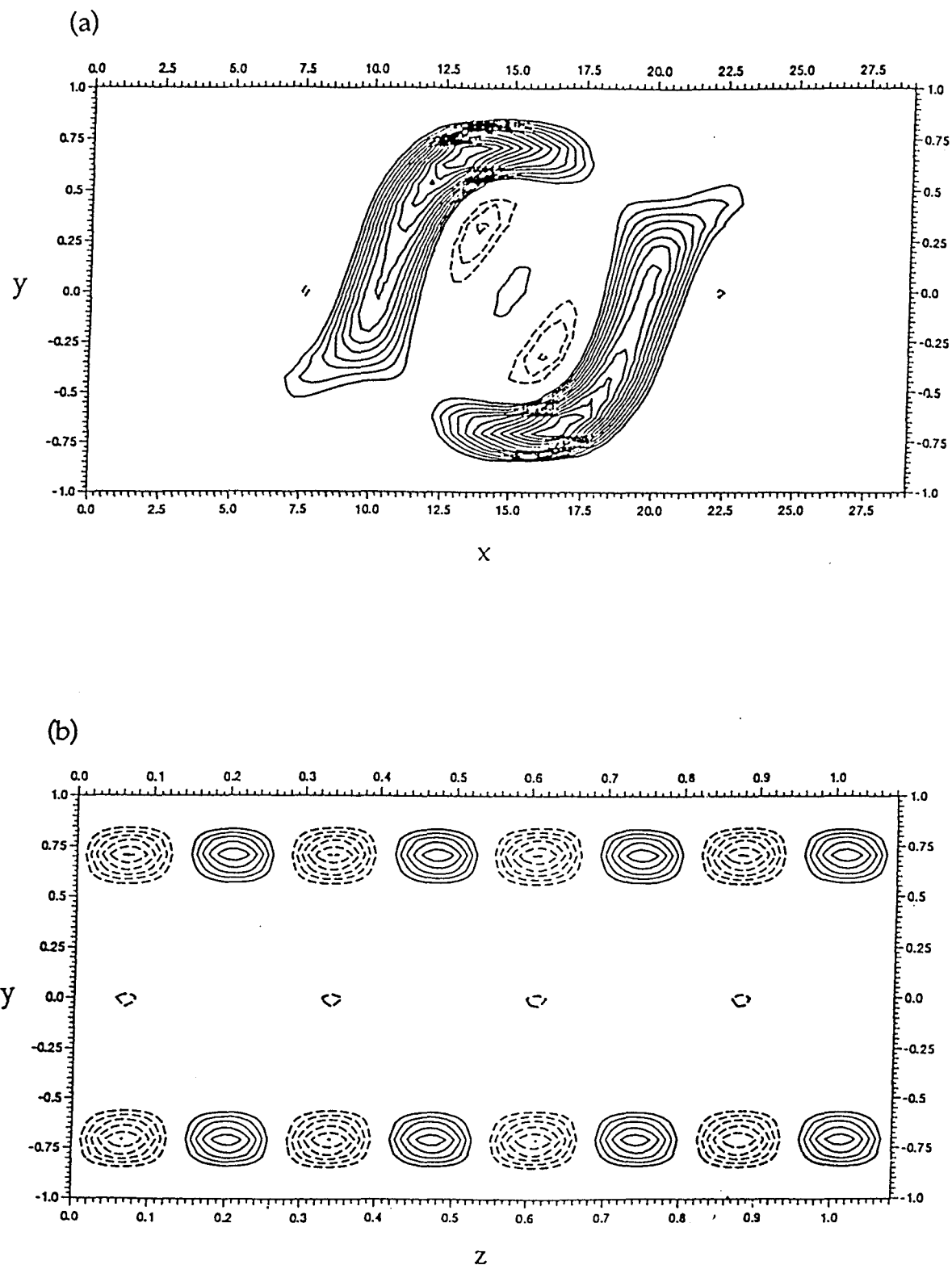


Figure IV.2 - Lignes de vorticité longitudinale constante pour l'état d'équilibre tridimensionnel symbolisé par \otimes sur la figure 11, à $Re=2243$ ($\alpha=0.132$, $\beta=23.2406$).

(a) lignes dans le plan $z = 1$; (b) Lignes dans le plan $x=14.5$, sur 4 longueurs d'onde en z .

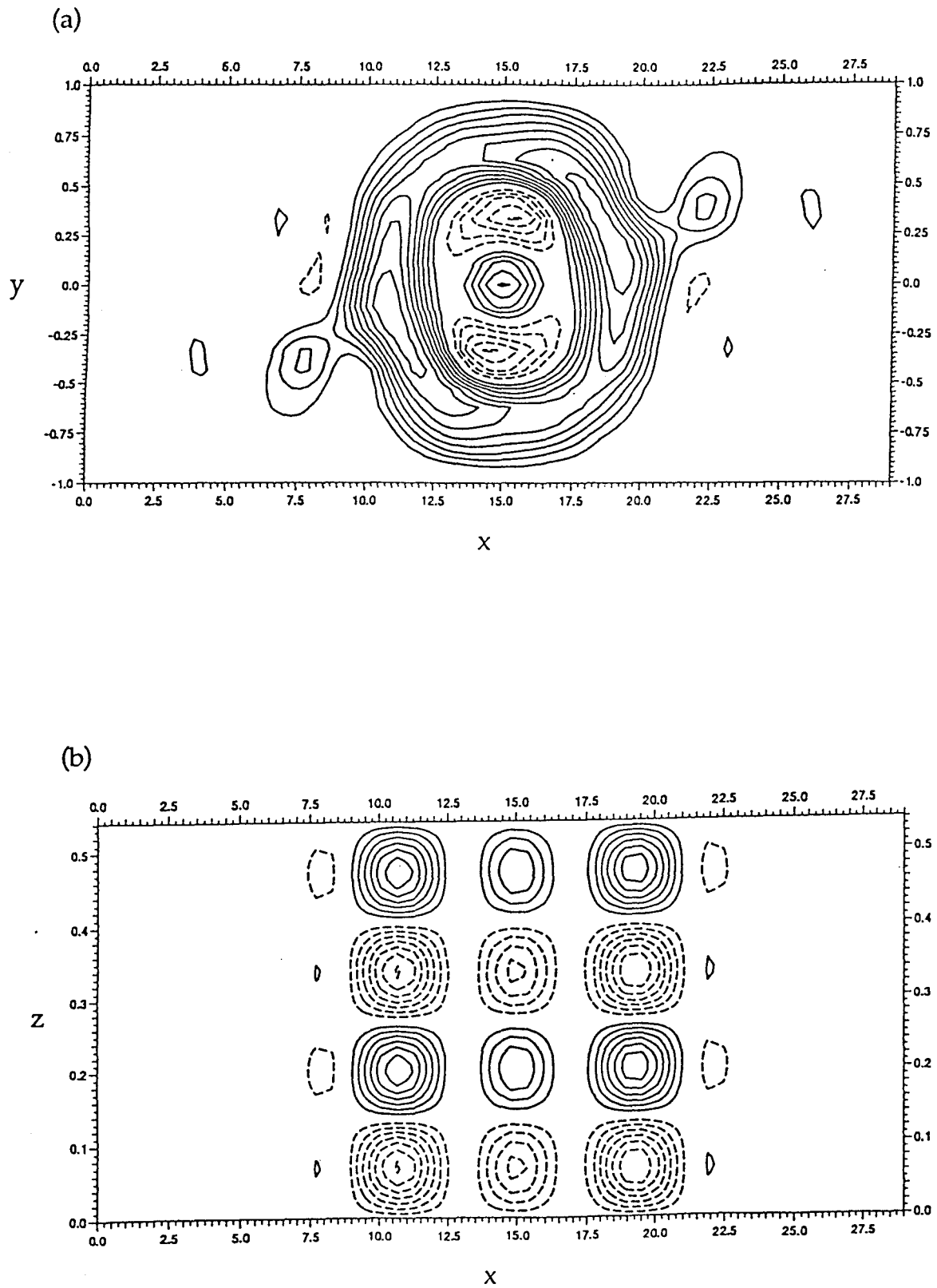


Figure IV.3 - Lignes de vorticité normale constante, pour la même solution sur la Figure IV.2.
 (a) Lignes dans le plan $z=1$; (b) Lignes dans le plan $y=0$, sur 2 longueurs d'onde en z .

importants pour les analyses de bifurcation sous-critique. Nous avons donc effectué l'analyse de stabilité avec une troncature $M=2$, le premier harmonique ($m=2$) est neutre à $\beta_c/2$, où β_c est le nombre d'onde transverse critique pour le mode fondamental $m=1$. A partir des résultats de stabilité de la figure III.9, la branche super-harmonique (contenant seulement les modes de Fourier pairs) bifurque à $\beta_c/2 \approx 11.5$. Ainsi, nous partons du point (marqué par symbole "." sur fig. IV.4) qui correspond au point de bifurcation sur la surface d'équilibre 2D, et nous diminuons le nombre d'onde transverse β dans l'espoir de calculer des états 3D pour des régions à plus petits nombres de Reynolds. Il aurait été très difficile, étant donnée la taille du système à résoudre, de faire une étude exhaustive de toute la solution d'équilibre pour ces solutions 3D. Sur la figure IV.4, nous avons représenté quelques résultats dans le plan (ϵ, Re) de cette continuation; les différents symboles représentent les solutions 3D superharmoniques. En diminuant le nombre de Reynolds, nous sommes amenés à diminuer aussi le nombre d'onde transverse β . Les calculs numériques se sont avérés très coûteux dans le sens où il fallait procéder avec une très petite variation des paramètres dans la procédure de continuation. Le dernier point obtenu (correspondant au plus petit nombre de Reynolds) a été localisé à $Re \approx 1100$. Dans cette région de nombres de Reynolds proche de 1000, 8 itérations étaient nécessaires pour la convergence de la procédure. Ainsi, la solution à $Re \approx 1100$ correspond au point limite en nombre de Reynolds, pour des solutions avec un nombre d'onde longitudinal fixé $\alpha = 0.132$ avec $N=13$ ($M=2$). Bien que nous n'ayons certainement pas atteint la limite inférieure de la surface d'équilibre tridimensionnelle, les nombres de Reynolds obtenus sont en dessous des points limite de la surface d'équilibre 2D. Nous rappelons encore que vu la taille du système à résoudre pour chaque solution, il aurait été très difficile (voire impossible) d'utiliser une

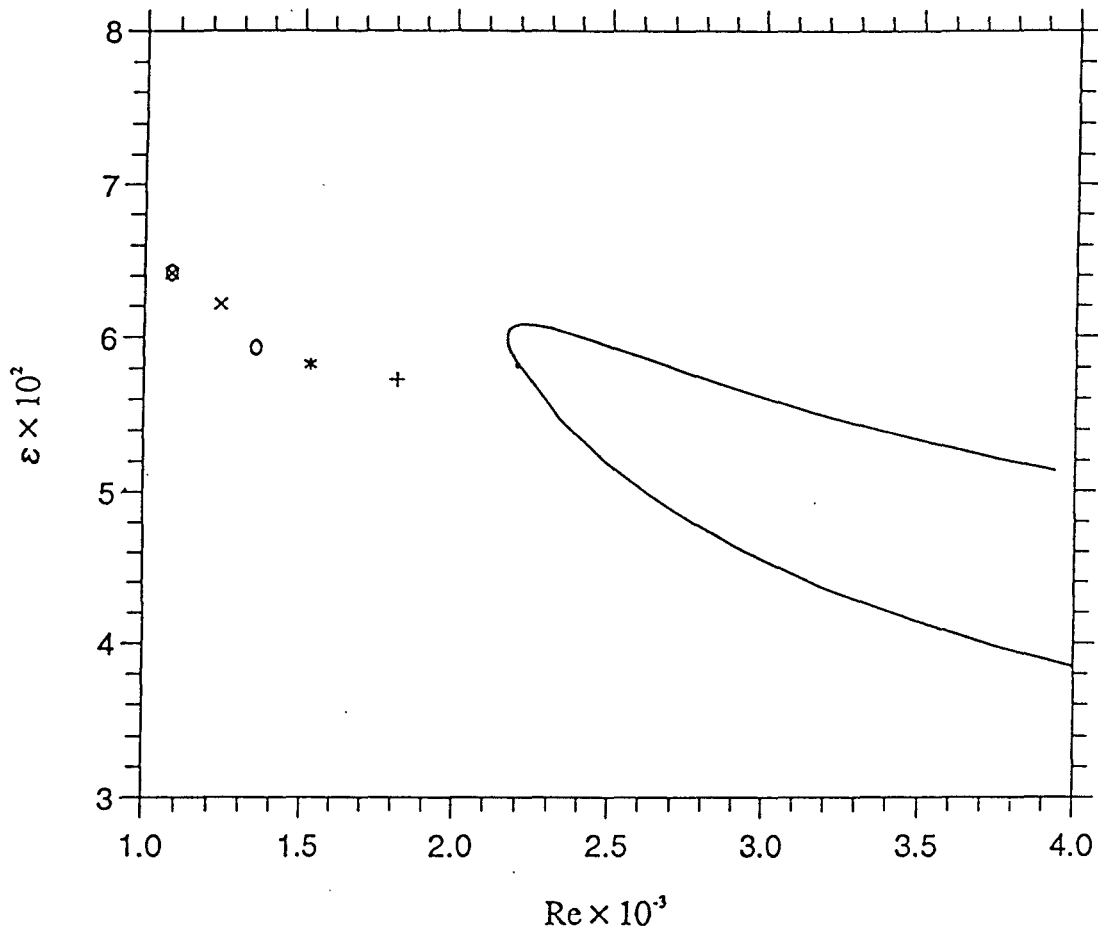


Figure IV-4. Coupe à travers la surface d'équilibre dans le plan (ε, Re)

— : Etats d'équilibre bidimensionnels pour $N=13, \alpha=0.132$ ($K=28$).

Les points discrétisés correspondent à des états d'équilibre tridimensionnels avec seulement des modes de Fourier transverses pairs, avec $M=2$.

· : $\beta=11.62$; + : $\beta=10.25$; * : $\beta=9.75$; o : $\beta=8.85$; x $\beta=8.4$; ⊗ : $\beta=7.6$.

troncature longitudinale au delà de $N=13$, qui reste toutefois la limite inférieure pour des solutions raisonnablement convergées.

Sur la figure IV.5, est représenté le profil de la composante longitudinale de la vitesse totale (laminaire + composante non-linéaire), moyennée dans la direction longitudinale. Il correspond à la solution d'équilibre tridimensionnelle à $Re \approx 1100$ de la figure IV.4. Le profil au centre de la structure à $x=15$ révèle une structure avec une forme en "S" qui ressemble aux profils spatialement filtrés qui existent dans l'écoulement de Couette transitionnel et turbulent [Lundbladh & Johansson, 1991]. Loin du centre, le profil évolue en un profil presque linéaire de Couette laminaire, ce qui confirme une fois encore, la présence d'un état perturbé spatialement isolé. Nous observons que ces profils sont symétriques par rapport au centre de la structure localisée à $x=15$ et $y=0$. L'évolution de la structure de cette même solution superharmonique dans la direction transverse est illustrée sur la figure IV.6 où nous avons représenté les isolignes de la composante normale ω_y de la vorticité dans le plan (x,z) au milieu du canal $y=0$.

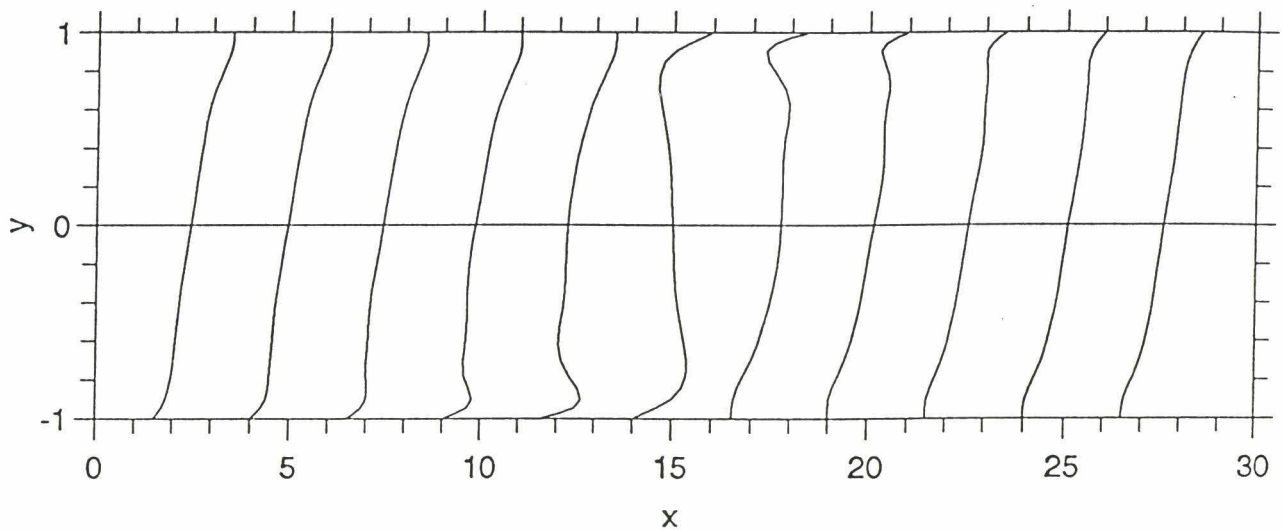


Figure IV.5 - Profils de vitesse moyenne longitudinale dans l'écoulement de Couette plan pour une solution à $Re=1100$, avec $\beta=7.6$, $\alpha=0.132$, $N=13$, $M=2$ ($K=28$), à l'intérieur de la région perturbée en x . l'intersection des profils avec l'abscisse correspond à la position en x du profil, avec $\Delta u = \Delta x$. la solution est symbolisée par \otimes sur la figure IV.4.

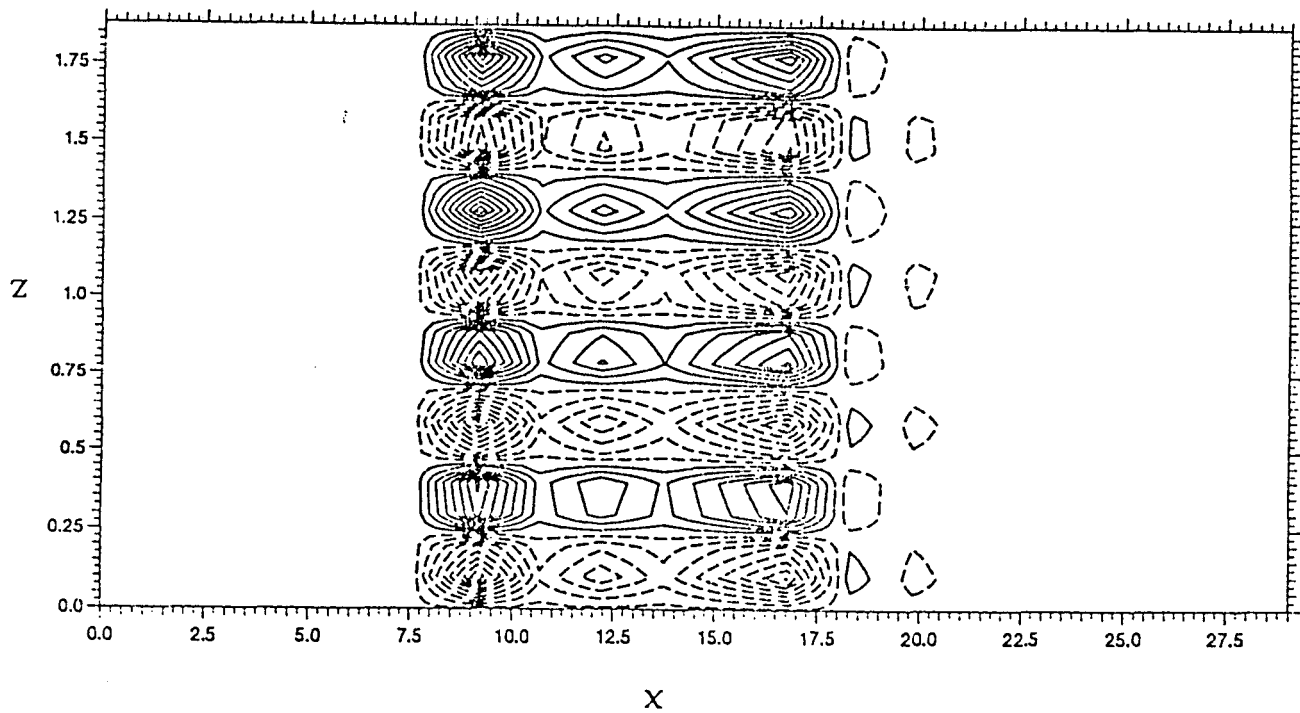


Figure IV.6 - Lignes de vorticité normale constante dans le plan $y=0$, sur 2 longueurs d'ondes en z . Solution avec $Re=1100$, avec $\beta=7.6$, $\alpha=0.132$, $N=13$, $M=2$, ($K=28$), avec seulement les modes en Fourier pairs.

IV.5 Discussion

En résolvant les équations de Navier-Stokes dans le cas incompressible visqueux, nous avons calculé des équilibres tridimensionnels qui bifurquent de la courbe d'équilibre 2D. Ces états sont stationnaires et révèlent une structure tridimensionnelle, spatialement isolée dans la direction longitudinale avec des structures contrarotatives périodiques dans la direction transverse. Ce type de structures a été récemment identifié par des observations expérimentales concernant l'écoulement de Couette plan ([Dauchot & Daviaud, 1994]; [Bottin et al., 1996]).

Le nombre de Reynolds minimal atteint dans nos calcul pour l'existence de ces équilibres non-linéaire 3D est proche de 1000. Nous n'avons pas réussi à calculer des états non-linéaires pour des nombres de Reynolds transitionnels ($Re \approx 370$). Toutefois, les résultats obtenus sont qualitativement en accord avec les études expérimentales. Il faut signaler que la résolution numérique utilisée s'est avérée laborieuse (très petite variation des paramètres) et très coûteuse en temps de calcul (3650 équations pour $N=13$, $M=2$ avec $K+1=29$ points de collocation), limitant ainsi l'exploration de toute la surface d'équilibre 3D, qui aurait probablement nécessité notamment une augmentation de la troncature en Fourier.

- Chapitre V -

CONCLUSION GENERALE

V.1 Existence d'états d'équilibre 2D dans Couette plan

L'écoulement de Couette plan revêt un double intérêt parmi les écoulements cisailés de type couche limite. D'une part, il représente un prototype intéressant d'écoulements parallèles avec un comportement de transition sous-critique. D'autre part, les études le concernant aussi bien expérimentalement que théoriquement (voir chapitre I) sont assez rares, relativement aux nombreuses études sur l'écoulement de Poiseuille plan ou la couche limite de Blasius.

En entreprenant le présent travail, notre but initial était de voir si des états d'équilibre non-linéaires bidimensionnels pouvaient exister dans l'écoulement de Couette plan. Des études antérieures, et non les moindres ([Millinazzo & Saffman, 1985], [Pugh, 1987]) avaient été entreprises dans le même sens et même parfois avec des procédures similaires à la nôtre, sans toutefois réussir à répondre

à cette question d'existence. Il faut signaler que toutes ces études avaient plutôt un caractère préliminaire et n'avaient, dans la plupart des cas, exploré qu'une partie de la solution intermédiaire qui menait à l'écoulement de Couette. De ce fait, elles ne donnaient pas de réponse définitive sur cette existence, ce qui laissait le champ ouvert à des études plus poussées.

La procédure numérique mise en place pour capter ces équilibres, consiste à joindre paramétriquement des ondes progressives existant dans l'écoulement de Poiseuille plan vers des états dans l'écoulement de Couette plan, par l'introduction d'un paramètre de continuation η qui permet de définir une famille d'écoulements de Poiseuille-Couette. Le principe est d'ailleurs similaire dans son idée à celui utilisé par Millinazzo et Saffman. A l'aide d'une résolution numérique similaire qui permet de varier les paramètres, nous avons exploré la surface d'équilibre pour définir le domaine d'existence de ces solutions, que nous avons cherchées sous forme d'ondes progressives d'amplitude finie. La présence dans la formulation de trois paramètres de l'écoulement (à savoir le nombre d'onde α , le nombre de Reynolds Re et le paramètre η) a rendu difficile l'accès aux solutions dans Couette plan. Finalement, nous avons réussi, tant bien que mal, à calculer ces dernières. Il s'est avéré que d'une part la résolution nécessaire à cela (15 modes en Fourier dans la direction longitudinale) et la complexité de la surface d'équilibre (changement de la forme de la solution par rapport à celle dans Poiseuille) d'autre part ont été des facteurs déterminants pour atteindre ce but.

Les solutions d'équilibres non-linéaires obtenues se révèlent être stationnaires, et montrent l'existence dans l'écoulement d'une structure spatialement localisée dans l'espace. La condition de périodicité initiale (ondes progressives) a nécessité l'interprétation de la convergence des solutions en considérant celles-ci comme

étant du type ondes solitaires. Le fait d'avoir les solutions sous une telle forme n'est pas en soi une surprise. Dans un article antérieur à sa tentative de calculer ces solutions, [Saffman, 1983] avait fait allusion à la possible existence de solutions de type onde solitaire dans l'écoulement de Poiseuille-Couette, mais aucune étude n'avait été entreprise dans ce sens.

Les études expérimentales concernant la transition sous-critique dans l'écoulement de Couette plan ([Daviaud et al, 1992] puis [Dauchot & Daviaud, 1994]) sont venues appuyer qualitativement nos résultats. En perturbant d'une façon instantanée l'écoulement par un jet transverse (comme l'indique la figure V.1),

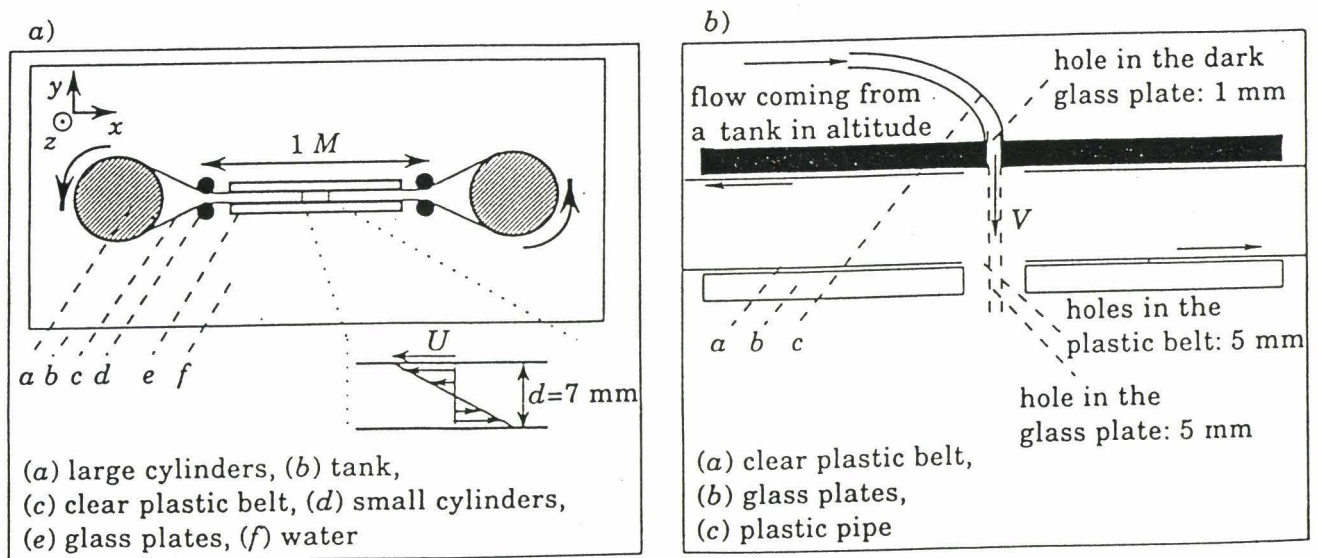


Figure V.1- Vue de a) l'appareillage de l'écoulement et b) le dispositif de perturbation.

D'après [Daviaud et al, 1992]

ils ont montré l'existence au sein de l'écoulement de spots "turbulents" localisés qui persistent au sein de l'écoulement pendant un certain temps (tout en restant stationnaires) (voir figure V.2). En suivant l'évolution du spot pour différents nombres de Reynolds, ils ont déterminé une limite de Re au delà duquel un régime turbulent est observé. Ce nombre de Reynolds se situe proche de $Re \approx 370$, en accord avec le résultats de [Tillmark et Alfredsson, 1990].

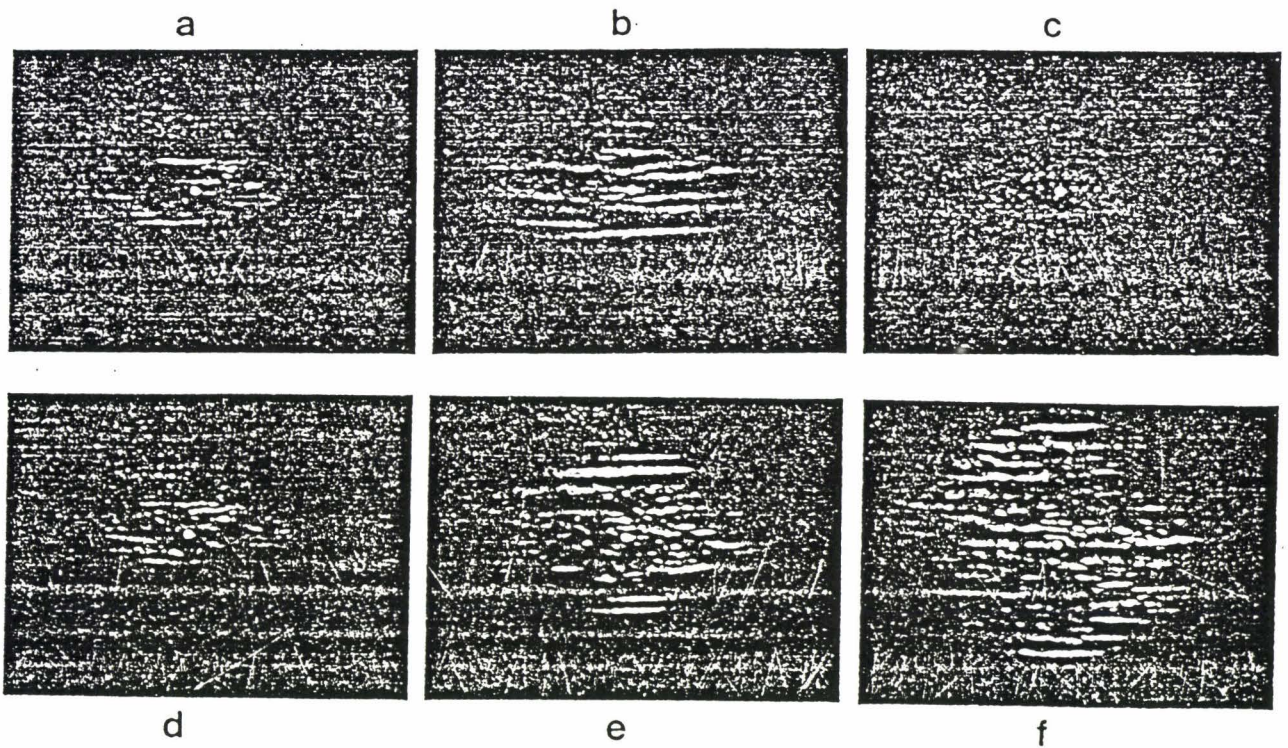


Figure V.2 Evolution du spot dans l'écoulement de Couette plan après perturbation, l'intervalle entre les photographies est de 5 sec. (a,b,c) $Re=350$; (d,e,f) $Re=380$.

Résultat de [Daviaud et al, 1992].

Bien entendu, nous ne retiendrons de ces expériences que le lien qualitatif (existence de structures localisées spatialement dans l'écoulement de Couette plan), les premiers équilibres 2D que nous avons calculés existent pour des nombres de Reynolds ($Re \approx 1500$) encore bien supérieurs à la valeur transitionnelle ($Re \approx 370$), car elles ne constituent encore que le premier état dans un possible scénario de transition qui appelle d'autres équilibres de complexité spatio-temporelle de plus en plus grande [Saffman, 1983].

V.2 Concernant la stabilité secondaire

Dans ce cheminement théorique vers une compréhension des mécanismes de la transition, nous avons entrepris une étude de stabilité secondaire par rapport à des perturbations bidimensionnelles puis tridimensionnelles. En effet, les états d'équilibre calculés dans l'écoulement de Couette plan constituent un nouvel état de base pour cette analyse. La stabilité secondaire a donné des résultats intéressants pour l'écoulement de Poiseuille plan et la couche limite de Blasius, elle pourrait faire le lien entre les solutions d'équilibre qu'elle traite avec d'autres équilibres ou quasi-équilibres proches de l'écoulement réel.

En un premier temps, nous avons étudié la stabilité des nos solutions par rapport à des perturbations bidimensionnelles. Nous avons ainsi mis en évidence l'existence d'une bifurcation de Hopf dégénérée, similaire à celles existant dans l'écoulement de Poiseuille plan. Elle a été détectée au point limite en nombre de Reynolds de la surface d'équilibre. Cette analyse nous a aussi permis d'évaluer l'ordre de grandeur des taux d'amplification de ces perturbations.

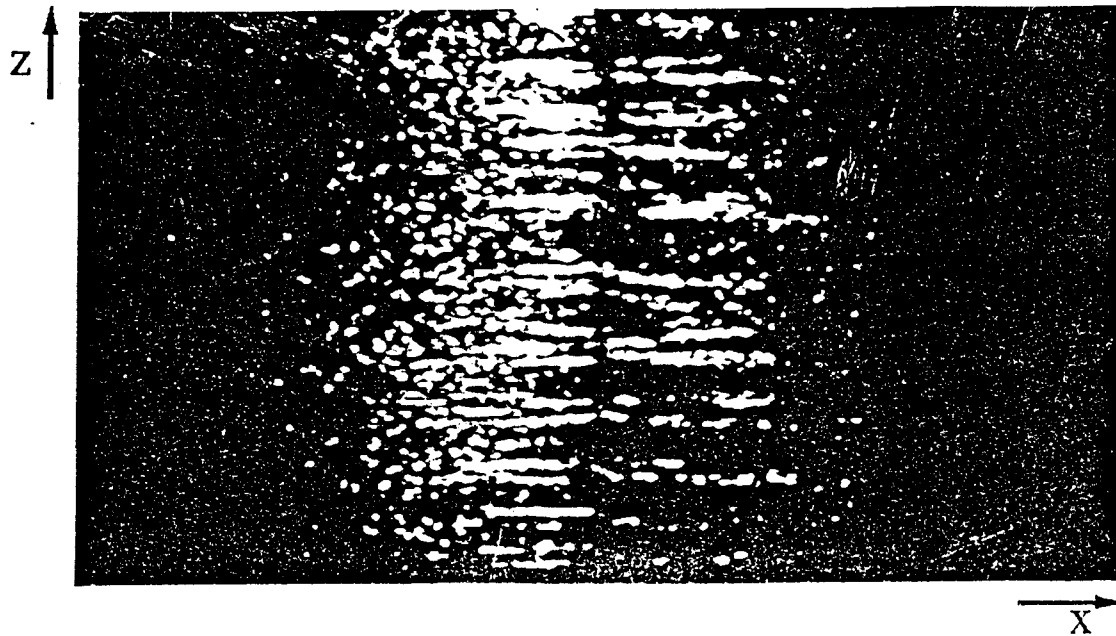
Nous nous sommes ensuite intéressés à cette étude de stabilité secondaire cette fois-ci par rapport aux perturbations tridimensionnelles. La procédure numérique a nécessité un effort numérique important, nous limitant à n'étudier que quelques points de la surface d'équilibre. Cependant, les résultats obtenus se sont révélés très intéressants, notamment l'existence de points de bifurcation secondaire (points de stabilité neutre; $\Re(\sigma=0)$), qui peuvent représenter des lieux d'émergence de solutions d'équilibre tridimensionnelles. En comparant les taux d'amplification 2D et 3D, nous avons confirmé dans le cas de Couette plan le rôle dominant des instabilités 3D dans la transition sous-critique.

V.3 Equilibres tridimensionnels

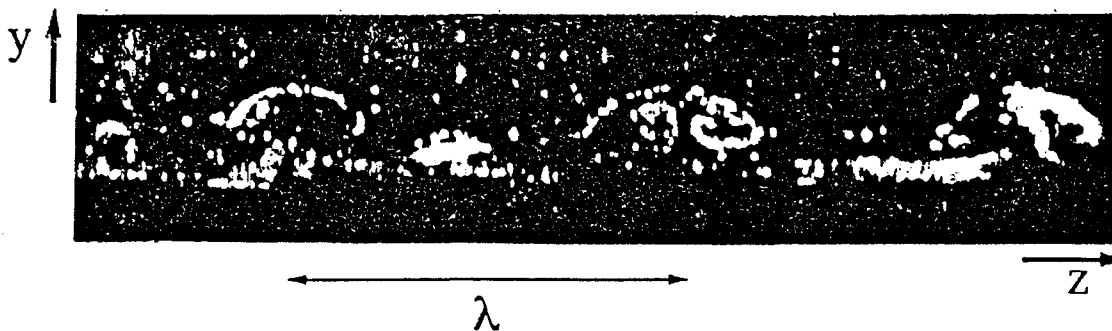
La dernière partie de ce travail a été consacrée aux calculs d'équilibres 3D émergeant des points de bifurcation secondaires 3D. Après avoir contourné les nombreuses difficultés liées à cette étape (voir Chapitre IV), nous avons calculé des états tridimensionnels, solutions des équations de Navier-Stokes, existant jusqu'à des nombres de Reynolds proches de $Re=1000$. Encore confrontés aux problèmes liés à la grande résolution numérique nécessaire, nous n'avons pas réussi à atteindre les valeurs de Reynolds transitionnelles.

Une fois encore, la solution tridimensionnelle obtenue présente une structure spatialement localisée, isolée au milieu du canal. De plus, elle est périodique dans la direction transverse avec la présence de structures contra-rotatives longitudinales. Ce résultat est d'autant plus intéressant que les études expérimentales font qualitativement les mêmes constats. [Dauchot & Daviaud, 1995] et [Bottin et al., 1996] ont identifié ce type de comportement en perturbant d'une façon permanente l'écoulement par un fil très mince dans la direction

transverse . Ils ont montré que la perturbation localisée autour du fil dans le plan de l'écoulement évolue de façon périodique dans la direction transverse, avec la formation de vortex longitudinaux contra-rotatifs (voir Figure IV.3).



Visualisation de l'écoulement de Couette plan dans le plan (x,z) pour $160 < Re < 340$
 Résultat de [Dauchot, 1995]



Vortex longitudinaux visualisés dans le plan (y,z) avec $Re=250$
 Résultat de [Dauchot, 1995]

Comme nous l'avons discuté dans les chapitres précédents, l'aspect quantitatif de l'étude (notamment la difficulté d'atteindre des nombres de Reynolds plus

faibles) a été fortement limité par la résolution numérique et par la complexité de la surface d'équilibre de ces états. Ces deux aspects sont sans doute les conséquences du passage continu d'ondes progressives à des solutions de type ondes solitaires (Poiseuille → Couette).

Sur le plan qualitatif, cette étude a apporté une réponse positive à une question jusque là très ouverte (existence d'équilibres 2D). L'étude de la stabilité secondaire (en plus des résultats intéressants qu'elle a donnés) nous a permis de calculer des solutions d'équilibres 3D. Toutes ses solutions reproduisent des propriétés qui sont en accord qualitatif avec l'expérience.

En définitive, les résultats du présent travail renforcent l'hypothèse que la transition sous-critique dans les écoulements de type couche limite est fortement liée à l'existence d'équilibres non-linéaires qui, en tant que solutions des équations de Navier-Stokes, sont des points fixes (en général instables) d'un système dynamique de très grande complexité (dimension infinie).

- Annexe I -

POLYNOMES DE CHEBYSHEV

Définition

Soit la fonction poids $\chi = (1 - y^2)^{-1/2}$ et considérons la norme suivante

$$\|v\|_{\chi}^2 = \int_{-1}^1 |v(y)|^2 \chi(y) dy. \quad (\text{A1.1})$$

Les polynômes de Chebyshev définie par

$$T_k(y) = \cos(k \cos^{-1} y), \quad k \geq 0, \quad (\text{A1.2})$$

forment un un système orthogonal sur l'intervalle $[-1,1]$ pour le produit scalaire associé à la norme ci-dessus

$$(T_k, T_m)_{\chi} = \int_{-1}^1 T_k(y) T_m(y) \chi(y) dy = \frac{\pi}{2} c_k \delta_{k,m} \quad (\text{A1.3})$$

avec $c_0=2, c_k=1$ si $k > 0$.

Considérons les points d'interpolation dans l'intervalle $[-1,1]$ qui sont les extrémas

$$y_j = \cos\left(\frac{\pi j}{K}\right), \quad 0 \leq j \leq K \quad (\text{A1.4})$$

du K -ième polynôme de Chebyshev $T_K(y)$.

Pour toute variable $f(y)$ donnée sur $[-1,1]$, on note par $f_K(y)$ le polynôme d'interpolation de degré K . On introduit la notation

$$f_j = f_K(y_j), \quad 0 \leq j \leq K. \quad (\text{A1.5})$$

On a alors

$$f_K(y) = \sum_{k=0}^K a_k T_k(y), \quad (\text{A1.6})$$

Les coefficients a_k de (A1.6) sont données par

$$a_k = \frac{2}{K} \frac{1}{c_k} \sum_{j=0}^K \frac{f(y_j)}{c_j} T_k(y_j), \quad 0 \leq k \leq K \quad (\text{A1.7})$$

avec $c_0 = c_K = 2$, $c_j = 1$, $1 \leq j \leq K-1$.

Quelques propriétés

Nous nous contentons ici de donner quelques propriétés, utilisées dans cette étude (pour plus de détails concernant les polynômes de Chebyshev consulter [Canuto et al., 1987]).

La dérivée p ième du polynôme f_K est donnée par

$$\frac{d^p}{dy^p} (f_K(y_k)) = \sum_{j=0}^K f(y_j) D_K^{(p)}(k,j), \quad 0 \leq k \leq K \quad (\text{A1.8})$$

avec

$$D_K^{(p)}(k,j) = \frac{d^p g_j}{dy^p} (y_k) \quad 0 \leq j, k \leq K \quad (\text{A1.9})$$

où

$$g_i(y) = \frac{(1-y^2) T_K(y) (-1)^{i+1}}{c_j K^2 (y-y_j)} \quad 0 \leq j \leq K. \quad (A1.10)$$

Donnons par exemple les valeurs de $D_K^{(p)}(k,j)$ pour $p=1, 2$:

$$D_K^{(1)}(k,j) = \frac{c_k}{c_j} \frac{(-1)^{k+j}}{(y_k - y_j)} \quad 0 \leq k, j \leq K, k \neq 0$$

$$D_K^{(1)}(k,j) = -\frac{y_k}{2(1-y_k^2)} \quad 1 \leq k \leq K-1 \quad (A1.11)$$

$$D_K^{(1)}(0,0) = -D_K^{(1)}(K,K) = \frac{2K^2+1}{6}.$$

Si $p=2$, on a les expressions suivantes

$$D_K^{(2)}(k,j) = \frac{(-1)^{k+j+1}}{c_j} \left[\frac{2 - y_k y_j - y_k^2}{(1 - y_k^2)(y_k - y_j)^2} \right] \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad k \neq j$$

$$D_K^{(2)}(k,k) = \frac{-1}{1 - y_k^2} \left[\frac{y_k^2}{1 - y_k^2} \frac{K^2+1}{3} + \frac{4}{(1 - y_j)^2} \right] \quad 1 \leq k \leq K-1$$

$$D_K^{(2)}(0,j) = \frac{(-1)^j}{c_j} \left[\frac{4K^2 + 2}{3(1 - y_j)} - \frac{4}{(1 - y_j)^2} \right] \quad 1 \leq j \leq N \quad (A1.12)$$

$$D_N^{(2)}(K,j) = \frac{(-1)^{j+K}}{c_j} \left[\frac{4K^2 + 1}{3(1 + y_j)} - \frac{4}{(1 + y_j)^2} \right] \quad 0 \leq j \leq N-1$$

$$D_K^{(2)}(0,0) = D_K^{(2)}(K,K) = \frac{K^4 - 1}{15}.$$

De la même façon que les dérivées, l'intégrale du polynôme peut être exprimée par

$$\int_{-1}^1 f_K(y) dy = \sum_{j=0}^K \alpha_j f_j, \quad (A1.13)$$

où

$$\alpha_j = \frac{2}{Kc_j} \sum_{k=0, k=0(\text{mod}2)}^K \frac{-2}{(k^2-1)c_k} T_k(y_j), \quad 0 \leq j \leq K. \quad (A1.14)$$

- Annexe II -

DISCRETISATION DE L'OPERATEUR D'ORDRE 4

Dans cet annexe, nous décrivons une procédure numérique qui permet d'éliminer les modes instables qui peuvent apparaître lorsque l'on applique directement la méthode de collocation de Chebyshev à l'opérateur d'ordre 4 dans les équations telles que (II.3). Cette procédure a été proposée par [Ehrenstein, 1988] qui l'a utilisée dans une étude de stabilité concernant la couche limite.

Considérons la quantité $\frac{d^4\psi}{dy^4}$ qui apparaît dans l'équation (II.19) avec les conditions limites

$$\psi(\pm 1) = 0 \quad ; \quad \frac{d^2\psi}{dy^2}(\pm 1) = 0. \quad (\text{A2.1})$$

On introduit ω tel que $\omega = \frac{d^2\psi}{dy^2}$ et note $D^2 = \frac{d^2}{dy^2}$.

On montre aisément que les conditions de Neumann de (A2.1) sont équivalentes (pour ψ tel que $\psi(\pm 1) = 0$) aux conditions intégrales

$$\int_{-1}^1 \omega \, dy = \int_{-1}^1 \frac{d^2\psi}{dy^2} \, dy = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 y \, \omega(y) \, dy = \int_{-1}^1 y \frac{d^2\psi}{dy^2}(y) \, dy = 0 . \quad (\text{A2.2})$$

On note par $\psi_K(y)$ et $\omega_K(y)$ les polynômes d'interpolation de Chebyshev de degré K associés respectivement à $\psi(y)$ et $\omega(y)$ (voir Annexe I), avec la notation

$$\psi_j = \psi_K(y_j) , \quad \omega_j = \omega_K(y_j) , \quad 0 \leq j \leq K. \quad (\text{A2.3})$$

Les conditions intégrales (A2.2) pour ω peuvent être écrites en utilisant les propriétés vues dans l'annexe I, par

$$\sum_{j=0}^K \alpha_j \omega_j = 0 , \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^K \beta_j \omega_j = 0 \quad (\text{A2.4})$$

Or $\alpha_0\beta_N - \alpha_N\beta_0 \neq 0$, donc on peut résoudre (A2.4) pour ω_0 et ω_K

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{K-1} a_j \omega_j , \quad \omega_K = \sum_{j=1}^{K-1} b_j \omega_j , \quad (\text{A2.5})$$

où, pour $1 \leq j \leq K-1$

$$a_j = \frac{\alpha_K \beta_j - \beta_K \alpha_j}{\alpha_0 \beta_K - \beta_0 \alpha_K} , \quad b_j = \frac{\beta_0 \alpha_j - \alpha_0 \beta_j}{\alpha_0 \beta_K - \beta_0 \alpha_K} . \quad (\text{A2.6})$$

Posons maintenant

$$D^2 \omega_K(y_i) = \sum_{j=0}^K D^{(2)}(i,j) \omega_j , \quad 0 \leq i \leq K \quad (\text{A2.7})$$

Les coefficients $D^{(2)}(i,j)$ sont donnés dans l'annexe II . En substituant (A2.5) dans (A2.7), on obtient

$$D^2 \omega_K(y_i) = \sum_{j=1}^{K-1} D_1^{(2)}(i,j) \omega_j , \quad 1 \leq i \leq K-1, \quad (\text{A2.8})$$

où

$$D_l^{(2)}(i,j) = D^{(2)}(i,j) + a_j D^{(2)}(i,0) + b_j D^{(2)}(i,K), \quad 1 \leq i,j \leq K-1. \quad (A2.9)$$

Les conditions aux bords $\psi(\pm 1) = 0$ nous permettent d'écrire

$$D^2 \psi_K(y_i) = \sum_{j=1}^{K-1} D_d^{(2)}(i,j) \psi_j, \quad 1 \leq i \leq K-1, \quad (A2.10)$$

où $D_d^{(2)}(i,j) = D^{(2)}(i,j)$, $1 \leq i,j \leq K-1$.

En utilisant les expressions discrétisées (A2.8) et (A2.10), on peut écrire

$$D^4 \bar{\psi} = D_l^{(2)} \cdot D_d^{(2)} \bar{\psi} \quad \text{où} \quad \bar{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_{K-1}). \quad (A2.11)$$

Cette même procédure est appliquée de la même façon à l'opérateur d'ordre 3 qui apparaît dans le terme de convolution de l'équation (II.3), on aboutit alors à

$$D^3 \bar{\psi} = D_l^{(1)} \cdot D_d^{(2)} \bar{\psi} \quad \text{où} \quad \bar{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_{K-1}). \quad (A2.12)$$

- Annexe III -

METHODE D'ARNOLDI

Algorithme d'Arnoldi

Dans cette étude, nous sommes amenés à résoudre un problème aux valeurs propre simple de la forme

$$A \vec{x} = \sigma \vec{x} \quad (\text{A3.1})$$

où A est une matrice réelle carrée et \vec{x} la fonction propre associé à la valeur propre σ .

Dans notre cas, la méthode QR donnerait lieu à des temps de calculs prohibitifs, étant donné la taille du système. En effet le système (III.24) consiste en 2200 équations réelles dont il serait très difficile de calculer systématiquement les valeurs et vecteurs propres par une méthode globale. Or nous ne sommes intéressés que par la partie du spectre donnant l'amplification temporelle maximale, celle-ci étant donnée par la partie réelle de σ . Nous utilisons à cette fin

la méthode dite d'Arnoldi (cf. [Nayar & Ortega, 1993]) dont nous présentons brièvement les grandes lignes.

Si l'on cherche le spectre de (A3.1) localisé proche d'une valeur σ_0 donnée, on considère le problème "inverse-décalé" suivant

$$(A - \sigma_0 I) \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (\text{A3.2})$$

et les valeurs propres μ de la matrice $C = (A - \sigma_0 I)^{-1}$ sont liés aux valeurs propres σ de (A3.1) par

$$\sigma = \sigma_0 + 1/\mu \quad (\text{A3.3})$$

Or la méthode d'Arnoldi permet de déterminer la partie du spectre de plus grand module d'une matrice C par l'algorithme suivant:

On choisit un vecteur \vec{q}_1 avec $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_1 \rangle = 1$ ($\langle \dots \rangle$ désignant le produit scalaire canonique), et on détermine une suite de vecteurs orthonormée $\vec{q}_2 \dots \vec{q}_m$ par

$$\begin{aligned} \vec{q}_{j+1} &= C \vec{q}_j - \sum_{i=1}^j h_{ij} \vec{q}_i \\ h_{j+1,j} &= \langle \vec{q}_{j+1}, \vec{q}_{j+1} \rangle^{1/2} \\ \vec{q}_{j+1} &= \vec{q}_{j+1} / h_{j+1,j} \end{aligned} \quad (\text{A3.4})$$

pour $j=1, \dots, m-1$, avec $h_{ij} = \langle \vec{q}_i, C \vec{q}_j \rangle$. Notons que $\vec{w}_{j+1} = C \vec{q}_j$ est calculé en résolvant $(A - \sigma_0 B) \vec{w}_{j+1} = \vec{q}_j$ après l'utilisation d'une décomposition LU. Les h_{ij} définissent une matrice $m \times m$ de Hessenberg H dont les valeurs propres approximent celles de A , en particulier celles de plus grand module. En effet les matrices $H_m = (h_{ij})$ et $Q_m = (\vec{q}_1 \dots \vec{q}_m)$ vérifient par construction

$$A Q_m = Q_m H_m + R_m \quad (\text{A3.5})$$

Pour une valeur de m assez grand, on montre (cf. [Nayar & Ortega, 1993]) que si (λ, \vec{y}) est le couple valeurs-vecteurs propres de H_m alors une estimée de ce couple pour A sera égal à $(\sigma_0 + 1/\lambda, Q_m \vec{y})$

Une fois les valeurs propres calculées, nous éliminons celles dont l'erreur $\text{err} = R_m \vec{y}$ est supérieure à une précision prec_1 choisie (Dans notre cas, $\text{prec}_1 = 10^{-8}$).

Un exemple de l'efficacité de cette méthode, appliquée à notre étude de stabilité secondaire, est illustrée sur la figure A3.1 où ses performances sont comparées à une méthode QR classique.

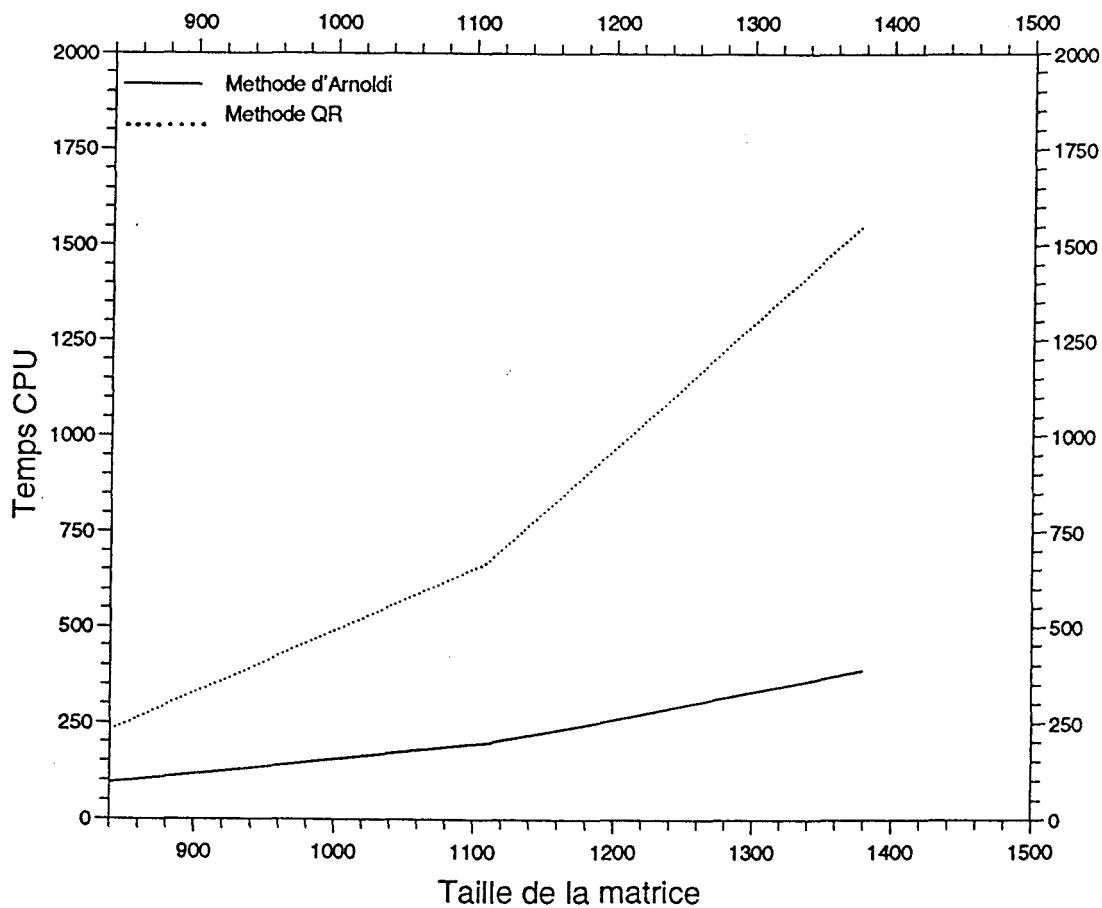


Figure A.III.1- Comparaison des temps de calcul

BIBLIOGRAPHIE

- ALAVYOON F., HENNINGSON D.S., ALFREDSSON P.H., 1986
Turbulent spots in plane Poiseuille flow- flow visualisation, *Phys. Fluids* 29 (4), 1328-1331.
- ANDERSSON H.I., BECH K.H., KRISTOFFERSEN R., 1992
On diffusion of turbulent energy in plane Couette flow, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 438, 477-484.
- AYDIN E.M., LEUTHEUSSER H.J., 1991
Plane-Couette flow between smooth and rough walls, *Exp. in Fluids*, 11, 302-312.
- BAGGETT J.S, DRISCOLL T.A., TREFETHEN L.N, 1995
A mostly linear model of transition to turbulence, *Phys. Fluids*, 7, 833-838.
- BARKLEY D., 1990
Theory and predictions for infinite-amplitude waves in two-dimensional plane Poiseuille flow, *Phys. Fluids*, 6, 955-969.
- BAYLY B.J., 1986
Three-dimensional instability of elliptical flow, *Phys. Rev. Letters*, vol. 57, 17, 2160-2163.
- BAYLY B.J., ORSZAG S.A., 1988
Instability mechanisms in shear-flow transition, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 20, 359-391.
- BECH K.H., TILLMARK N., ALFREDSSON P.H., ANDERSSON H.I., 1995
An investigation of turbulent plane Couette flow at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 286, 291-325.
- BOTTIN S., DAUCHOT O., DAVIAUD F., 1996
Transition in turbulence in plane Couette flow: The streamwise vortices role, soumis à *J. Fluid Mech.*
-

- CANUTO C., HUSSAINI A., QUARTERONI A., ZANG T.A., 1987
Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer Series in Computational Physics, New-York.
- CARLSON D.R., WIDNALL S.E., PEETERS M.F., 1982
 A flow-visualisation study of transition in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* 121, 487-505.
- CHANG H.-C., 1994
 Wave evolution on a falling film, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26, 103-136.
- CHERHABILI A., EHRENSTEIN U., 1995
 Spatially localized two-dimensional finite-amplitude states in plane Couette flow, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 14, 677-696.
- CHERHABILI A., EHRENSTEIN U., 1996a
 Spatially localized (solitary-like) nonlinear equilibrium states in plane Couette flow, in *Dynamics of Localized Disturbances in Engineering Flows*, EUROMECH colloquium 353, Karlsruhe.
- CHERHABILI A., EHRENSTEIN U., 1996b
 Existence and stability of finite-amplitude states in plane Couette flow, in "*Advances in Turbulence VI*", Proceeding of Sixth European Turbulence Conference (S. Gavrilakis, L. Machiels, P.A. Monkewitz eds.), Kluwer Academic Publ.
- CHERHABILI A., EHRENSTEIN U., 1996c
 Finite-amplitude equilibrium states in plane Couette flow, soumis à *J. Fluid Mech.*
- CLEVER R.M., BUSSE F.H., 1992
 Three-dimensional convection in a horizontal fluid layer subjected to a constant shear, *J. Fluid Mech.*, 234, 511-527.
- CORENFLOS K., RIDA S., MONNIER J.C., DUPONT P., DANG TRAN K., STANISLAS M., 1993
 Experimental and numerical study of a plane Poiseuille flow as a test case for turbulence modeling, in *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2*, (W. Rodi and F. Martelli eds.) Elsevier Science Publ.
- COWLEY S.J., SMITH F.T., 1985
 On the stability of Poiseuille-Couette flow: A bifurcation from infinity, *J. Fluid Mech.*, 156, 83-100.
- DAUCHOT O., 1995
 Transition sous-critique vers la turbulence. Cas de l'écoulement de Couette plan, Thèse de Doctorat Paris VI.

- DAUCHOT O., DAVIAUD F., 1994
 Finite-amplitude perturbation in plane Couette flow, *Europhys. Lett.*, **28**, 225-230.
- DAUCHOT O., DAVIAUD F., 1995
 Finite-amplitude perturbation and spot growth mechanism in plane Couette flow, *Phy. Fluids*, **7**, 901-903.
- DAUCHOT O., DAVIAUD F., 1995
 Streamwise vortices in plane Couette flow, *Phys. Fluids*, **7**, 901-903.
- DAUCHOT O., MANNEVILLE P., 1996
 Local versus global concepts in hydrodynamics stability theory, soumis à *Journal de Physique II (section Mechanics and Hydrodynamics)*.
- DAVIAUD F., HEGSETH J., BERGE P., 1992
 Subcritical transition to turbulence in plane Couette flow, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 2511-2514.
- DAVIES S.J., WHITE C.M., 1928
 An experimental study of the flow of water pipes of rectangular section, *Proc. R. Soc. Lond. A* **406**, 13.
- DRAZIN P.G., REID W.H., 1981
Hydrodynamic Stability. Oxford University Press.
- DUBRULLE B., ZAHN J.P., 1991
 Nonlinear instability of viscous plane Couette flow Part I. Analytical approach to a necessary condition, *J. Fluid Mech.*, **231**, 561-573.
- EHRENSTEIN U., 1988
 Lösung der linearen, inkompressiblen, Stördifferentialgleichungen mittels Chebyshev Kollokation, interner Bericht IB 221-88 A 09, DFVLR-AVA, Göttingen.
- EHRENSTEIN U., KOCH W., 1989
 Nonlinear bifurcation study in plane Poiseuille flow, *DLR Rep. FB 89-42*.
- EHRENSTEIN U., KOCH W., 1991
 Three-dimensional wavelike equilibrium states in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **228**, 111- 148.
- EHRENSTEIN U., KOCH W., 1995
 Homoclinic bifurcation in Blasius boundary-layer flow, *Phys. Fluids*, **7**, 1282-1291.
- GUCKENHEIMER, HOLMES, 1983
Nonlinear Oscillations Dynamical systems and Bifucations of vector fields. Springer, New York

- HELMOLTZ H. VON, 1968
 Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, Monats. Königl. Preuss Akad. Wiss. Berlin **23**, 21-28.
- HERBERT T., 1976
 Periodic secondary motions in plane channel, Springer Lecture Notes in Physics, **59**, 235.
- HERBERT T., 1977
 Die Neutralfläche der ebenen Poiseuilleströmung. Habilitationsschrift. Universität Stuttgart.
- HERBERT T., 1983
 Stability of plane Poiseuille flow - Theory and experiment, Fluid Dynamics Transaction, **11**, 77-126.
- JIMENEZ J., 1987
 Bifurcations and bursting in two dimensional Poiseuille flow, Phys. Fluids **30** (12), 3644-3646.
- KARNITZ M.A., POTTER M.C., SMITH M.C., 1974
 An experimental investigation of transition of a plane Poiseuille flow, J. Fluids Engng. **96**, 348-388.
- KELLER H.B., 1977
 Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, in *Application of Bifurcation Theory* (ed. P.H. Rabinowitz), pp. 359-384. Academic Press.
- KELVIN LORD, 1871
 Hydrokinetic solutions and observations. Phil. Mag. (4), **42**, 362-77
- KLEISER L., 1982
 Spectral simulations of laminar-turbulent transition in Plane Poiseuille flow and comparison with experiments, in Proc. 8th Int. Conf. on *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Aachen (ed. E. Krause), Springer Lecture notes in Physics **170**, 280.
- KLEISER L. , SCHUMANN U., 1884
 Spectral simulation of the laminar turbulent transition process in plane Poiseuille flow, in *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, (R.G. Voight, D. Gottlieb, M.Y. Hussaini eds.), pp. 141-63. Philadelphia SIAM-CBMS.
- KOCH W., 1992
 On a degeneracy of temporal secondary instability modes in Blasius boundary-layer flow, J. Fluid Mech., **243**, 319-351.

- KOZLOV V.V., RAMASANOV M.P., 1980
 Experimental investigation of the growth process of disturbances in Poiseuille flow, Preprint 21, Inst. Theor. Appl. Mech., AN SSSR SO, Novosibirisk.
- KOZLOV V.V., RAMASANOV M.P., 1984
 Development of finite amplitude disturbances in Poiseuille flow, J. Fluid Mech. **147**, 149-157.
- KREISS G., LUNDBLADH A., HENNINGSON D.S., 1994
 Bounds for threshold amplitudes in subcritical shear flows, J. Fluid Mech., **270**, 175-198.
- LANDAU L.D., 1944
 On the problem of turbulence. C.R. Acad. Sci. URSS **44**, 311-14.
- LANDMAN M.J., 1987
 New solutions of an amplitude equation describing transition in a laminar shear flow, Ph.D. thesis, Caltech.
- LANDMAN M.J., SAFFMAN P.G., 1987
 The three-dimensional instability of strained vortices in a viscous fluid, Phys. Fluids, **30** (8), 2339-2342.
- LERNER J., KNOBLOCH E., 1988
 The long-wave instability of a defect in a uniform parallel shear, J. Fluid Mech., **189**, 117-134.
- LIN C.C., 1944
 On the stability of two-dimensional parallel flows, Proc. Nat. Acad. Sc., Wash., **30**, 316-323.
- LUNDBLADH A., JOHANSSON A.V., 1991
 Direct simulation of turbulent spots in plane Couette flow, J. Fluid Mech., **229**, 499-516.
- MEKSYN D., STUART J.T., 1951
 Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances. proc. Roy. Soc. A **208**, 517-26.
- MILINAZZO F.A., SAFFMAN P.G., 1985
 Finite amplitude steady waves in plane viscous shear flows, J. Fluid Mech., **160**, 281-295.
- NAGATA M., 1990
 Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity, J. Fluid Mech., **217**, 519-527.
-

- NAYAR N., ORTEGA J.M., 1993
 Computation of selected eigenvalues of generalized eigenvalue problems, *J. Comp. Phys.*, **108**, 8-14.
- NISHIOKA M., ASAI M., 1985
 Some observations of the subcritical transition in Plane Poiseuille flow, *J. Fluid. Mech* **150**, 441-450.
- NISHIOKA M., ASAI M., IIDA S., 1981
 An experimental investigation of secondary instability, in *Laminar-Turbulent Transition* (eds R. Eppler and H. Fasel), Springer-Verlag, 37-46.
- NISHIOKA M., IIDA S., ICHIKAWA Y., 1975
 An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* **72**, 731-51.
- NISHIOKA M., IIDA S., KANBAYASHI, 1978
 An experimental investigation of the subcritical instability in plane Poiseuille flow, *Proc. 10th Turbulence Symposium, Inst. Space Aeron. Sci., Tokyo Univ.*, 55-62.
- NOETHER F., 1921
 Das Turbulenzproblem, *Z. Angew. Math. Mech.*, **1**, 125-38 et 218-19.
- ORR W. M. F., 1907
 The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and a viscous liquid, *Proc. R. Ir. Acad. A* **27**; 9-27, 69-139.
- ORSZAG S.A., 1971
 Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *J. Fluid Mech.*, **50**, 689-703.
- ORSZAG S.A., KELLS L.C., 1980
 Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, **96**, 159-205.
- ORSZAG S.A., PATERA A.T., 1981
 Subcritical transition to turbulence in plane shear flows, in *Transition and turbulence* (R.E. Meyer eds.), pp. 127-46, New York academic.
- ORSZAG S.A., PATERA A.T., 1983
 Secondary instability of wall bounded shear flows, *J. Fluid Mech.*, **128**, 347-385.
- PATEL V.C., HEAD M.R., 1969
 Some observations in skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows, *J. Fluid Mech.* **38**, 181-201.
- PUGH J.D., 1988
 Finite amplitude waves in plane Poiseuille flow, Ph.D. Thesis, Caltech.

PUGH J.D., SAFFMAN P.G., 1988

Two-dimensional superharmonic stability of finite amplitude waves in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **194**, 295-307.

PIERREHUMBERT R.T., 1986

Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid, *Phys. Rev. Letters*, vol. 57, **17**, 2157-2159.

PUMIR A., MANNEVILLE P., POMEAU Y., 1983

On solitary waves running down an inclined plane, *J. Fluid Mech.*, **252**, 209-238.

RAYLEIGH LORD, 1880

On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.* **11**, 57-70

REDDY S.C., HENNINGSON D.S., 1993

Energy growth in viscous channel flows, *J. Fluid Mech.*, **252**, 209-238.

REICHARDT H., 1956

Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen turbulenten Couetteströmung, *Z. angew. Math. Mech.*, **36**, Sonderheft, 26-29.

ROMANOV V.A., 1973

Stability of plane-parallel Couette flow, *Funct. Anal. Applics*, **7**, 137-146.

SAFFMAN P.G., 1983

Vortices, stability and turbulence, *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, **404**, 12-24.

SCHLICHTING H., 1933

Zur Entstehung der Tubulenz bei der Plattenströmung, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, pp 181-208.

SCHUBAUER G.B., SKAMSTAD H.K., 1947

Laminar boundary-layer oscillations and transition on a flat plat, *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **38**, 251-92.

SOIBELMAN I., 1989

A study of finite amplitude bifurcations in plane Poiseuille flow, Ph.D. Thesis, Caltech.

SOIBELMAN I., MEIRON D.I., 1991

Finite amplitude bifurcations in plane Poiseuille flow: two dimensional Hopf bifurcations, *J. Fluid Mech.*, **229**, 389-416.

SOMMERFELD A., 1908

Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung, *Proceedings 4th Int. Congr. Math., Rome*, pp. 116-24.

STEWARTSON K., STUART J.T., 1971

A nonlinear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow, J. Fluid Mech. **48**, 529-545.

STUART J.T., 1960.

On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow, J. Fluid Mech. **9**, 353-70.

THOMAS L.H., 1953

The stability of Plane Poiseuille flow, Phys. Rev. **91**, 780-783.

TILLMARK N., ALFREDSSON P.H., 1992

Experiments on transition in plane Couette flow, J. Fluid Mech., **235**, 89-102.

TOLLMIEN W., 1929

Über die Entstehung der Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl. 1929, 21-44.

WALEFFE F., 1995

Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity, Phys. Fluids, **7** (12), 3060-3066.

WATSON J., 1960

On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille flow and plane Couette flow. J. Fluid Mech. **9**, 371-89.

WILKINSON J.H., 1965

The algebraic eigenvalue problem, Clarendon press, Oxford.

ZAHN J.P., TOOMRE J., SPIEGEL E.A., GOUGH D.O., 1974

Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow, J. Fluid Mech., **64**, 319-345.



EXISTENCE ET STABILITE DES SOLUTIONS D'EQUILIBRES NON-LINEAIRES DANS L'ECOULEMENT DE COUETTE PLAN

L'écoulement de Couette plan peut être considéré comme le prototype d'une couche cisailée avec un comportement de transition sous-critique, étant donné qu'il est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds. La transition dans cet écoulement doit par conséquent être déclenchée par des perturbations d'amplitude finie, et ce travail a précisément pour objet la description de tels états non-linéaires.

En un premier temps, nous abordons la question de l'existence d'équilibres non-linéaires bidimensionnels. Pour cela, nous avons suivi numériquement des ondes progressives non-linéaires présentes dans l'écoulement de Poiseuille, jusqu'à obtenir des équilibres non-linéaires 2D pour Couette plan. Le principal résultat est que des équilibres dans Poiseuille plan, qui sont alors des ondes progressives, évoluent, lorsqu'on atteint la limite de Couette, vers des états non-linéaires stationnaires, avec une structure spatiale isolée. Les solutions calculées ainsi existent jusqu'à des nombres de Reynolds autour de 1500.

Ces états non-linéaires constituent un nouvel état de base pour une étude de stabilité secondaire, par rapport à des perturbations secondaires bi- et tridimensionnelles. Comme dans l'écoulement de Poiseuille plan ou la couche limite de Blasius, les perturbations 3D dominent clairement la dynamique au voisinage de ces états, étant donné que les facteurs d'amplification temporelle des modes 3D sont d'un ordre de grandeur plus élevé que ceux des perturbations 2D. Qui plus est, les modes secondaires présentent également une structure isolée dans la direction longitudinale, tandis que les longueurs d'ondes transverses sont du même ordre de grandeur que celles observées dans Poiseuille plan. Enfin, nous présentons des calculs d'ondes non-linéaires 3D issues de points de bifurcation secondaire, qui ont permis d'atteindre des solutions existant jusqu'à $Re \approx 1000$. Ces solutions possèdent une structure spatialement isolée dans la direction longitudinale et périodique dans la direction transverse, qui est en accord qualitatif avec des études expérimentales.

MOTS-CLES

Couette plan - Transition sous-critique - Stabilité non-linéaire - Navier-Stokes - Etude numérique de bifurcation.

EXISTENCE AND STABILITY OF NONLINEAR EQUILIBRIUM STATES IN PLANE COUETTE FLOW

Plane Couette flow (PCF) can be considered as a prototype for shear flows with a subcritical stability behaviour, due to the absence of a linear critical Reynolds number. Therefore transition for PCF must be driven by finite-amplitude disturbances and a related question is the existence of nonlinear states, solution of the Navier Stokes equations.

In this study, we are looking for 2D travelling waves in PCF. The starting points for our computations are 2D finite-amplitude waves in plane Poiseuille flow (PPF), solution of the Navier-Stokes equations. We show, that for a sufficiently high Fourier truncation the nonlinear travelling waves present in PPF evolve into spatially localized stationary waves in PCF. We describe the structure of these solitary-like solutions and we show numerically that the critical Reynolds number (Re) for the existence of these states is close to 1500.

Linearizing the time-dependent Navier-Stokes equations at the 2D equilibrium solutions the secondary stability (2D and 3D) characteristics are found by solving large eigenvalue problems. The computations show that the maximal amplification rates of 3D secondary modes are an order of magnitude higher than those of the 2D disturbances.

The points of neutral stability for the 3D secondary stability modes are starting points for the computation of 3D nonlinear stationary equilibrium states bifurcating from the 2D nonlinear equilibrium surface. These states exist for $Re \approx 1000$ with a structure localized in the streamwise direction and periodic in the spanwise direction, which is in qualitative agreement with some experimental findings.

KEYWORDS

Plane Couette flow - Subcritical transition - Nonlinear stability - Navier-Stokes equations - Numerical bifurcation study.