

THESE

présentée à



L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Spécialité : Lasers, Molécules, Rayonnement Atmosphérique

par

Vincent LECOEUICHE

**STABILITE ET COMPORTEMENTS
DYNAMIQUES GENERIQUES
DES LASERS BRILLOUIN A FIBRE**

Soutenu le 05 Décembre 1996 devant la commission d'examen

B. MACKE	Président
J. BOTINEAU	Rapporteur
M. VAMPOUILLE	Rapporteur
M. DOUAY	Examineur
B. SEGARD	Co-directeur de thèse
J. ZEMMOURI	Co-directeur de thèse

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	7
CHAPITRE I: MODELISATION DE LA DIFFUSION BRILLOUIN STIMULEE	11
I.1 GENERALITES SUR LA DIFFUSION BRILLOUIN STIMULEE	1 4
I.2 EQUATION D'EVOLUTION DE L'ONDE ELECTROMAGNETIQUE	1 7
I.3 EQUATION D'EVOLUTION DE L'ONDE MATERIELLE	1 9
I.4 MODELE À TROIS ONDES HORS-RESONANCE	2 1
I.5 DIFFUSION BRILLOUIN STIMULEE EN CAVITE	2 5
I.5.1 Résonateur en anneau	
I.5.2 Résonateur en ligne	
I.6 DONNEES ESSENTIELLES DU PROBLEME, ORDRES DE GRANDEUR	3 0
CHAPITRE II: DYNAMIQUE DES LASERS BRILLOUIN DANS LES CAVITES EN ANNEAU	35
DYNAMICS OF STIMULATED BRILLOUIN SCATTERING WITH FEEDBACK Article de revue à paraître dans Quantum and Semiclassical Optics, Journal de la Société Européenne d'Optique	3 9
COMPLEMENTS	7 7
C.1 VERROUILLAGE DE MODES	7 7
C.2 STABILITE DE L'ETAT STATIONNAIRE EN PRESENCE D'UNE RETROACTION SUR L'ONDE DE POMPE	8 0

CHAPITRE III: DYNAMIQUE DES LASERS BRILLOUIN	
EN CAVITE PEROT-FABRY	85
III.1 STABILITE DE L'ETAT STATIONNAIRE	90
III.2 COMPORTEMENTS DYNAMIQUES TYPQUES OBSERVES POUR LA CAVITE "NATURELLE": SIMULATIONS NUMERIQUES	97
III.3 SIGNATURES DE LA DYNAMIQUE	105
III.3.a Dynamiques aux temps longs et analyse spectrale	
III.3.b Analyse de dimension	
III.3.c Sensibilité aux conditions initiales	
III.4 EXPERIENCES EN CAVITE "NATURELLE"	113
CHAPITRE IV: REALISATION D'UN LASER BRILLOUIN	
"TOUT-FIBRE" À RESEAUX DE BRAGG	121
IV.1 INSCRIPTION DES RESEAUX DE BRAGG	125
IV.2 DISPOSITIF EXPERIMENTAL, MISE EN OEUVRE	128
IV.3 LARGEUR SPECTRALE DU RAYONNEMENT GENERE	131
IV.4 PERSPECTIVES	134
CONCLUSION	139
ANNEXES	143
A-I: ETABLISSEMENT DE L'ETAT STATIONNAIRE DU LASER BRILLOUIN EN CAVITE PEROT-FABRY	145
A-II: PARAMETRES DES EXPERIENCES EN CAVITE "NATURELLE"	151
A-III: DIAGRAMMES DE STABILITE EN CAVITE PEROT- FABRY	152
A-IV: CALCUL DE LA DIMENSION DE CORRELATION	157
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	161

INTRODUCTION

La première mise en évidence d'un effet laser basé sur le mécanisme d'amplification par diffusion Brillouin stimulée a été effectuée par l'équipe de K.O. Hill en 1976 [Hill, 76]. Depuis, ce système a été l'objet de nombreuses études expérimentales et théoriques, révélatrices de comportements dynamiques très riches et diversifiés.

Le comportement le plus souvent rapporté dans la littérature est sans aucun doute une évolution périodique de l'intensité Stokes, à une fréquence égale à l'intervalle spectral libre de cavité [Kawasaki, 78 ; Bar-Joseph, 85]. Ces oscillations, de manière évidente, résultent du caractère multimodal de l'émission. Il fut montré que, dans certaines conditions, on assistait à un phénomène d'accrochage en fréquence de tous les modes situés sous la courbe de gain, donnant lieu à des régimes pulsés [Bar-Joseph, 86]. Dans des cavités Perot-Fabry de grandes longueurs et de très faibles finesses, des comportements quasipériodiques et chaotiques ont également été rapportés [Lu, 92 ; Harrison, 94]. Le phénomène commun à toutes ces expériences est que les oscillations, qui peuvent apparaître dès le seuil du laser, cessent toujours lorsque le taux de pompage est suffisamment élevé. Le régime d'émission monomode et stable que l'on atteint alors est communément appelé "miroir Brillouin". Dans des cavités de courtes longueurs et de grandes finesses, seul le régime de miroir Brillouin est rencontré [Stokes, 82 ; Bayvel, 89a], l'émission dans ces conditions est d'ailleurs particulièrement stable puisqu'une largeur spectrale intrinsèque de moins de 30 Hz a pu être mise en évidence [Smith, 91].

La modélisation de ces systèmes et l'analyse théorique ont toujours été réalisées au "cas par cas", en réponse à des observations expérimentales particulières. Néanmoins, le "modèle cohérent à trois ondes" s'est imposé comme le seul capable de reproduire les comportements dynamiques observés. Une analyse de stabilité de l'état stationnaire de ce système a permis de caractériser la bifurcation de Hopf qui délimite les comportements instables et le régime miroir Brillouin observé à fort niveau de pompage [Montes, 94a-b]. Ce modèle a permis de mieux comprendre les mécanismes qui gouvernent l'évolution d'impulsions de structure solitonique [Picholle, 91a-b ; Mahmoud, 96].

Par ailleurs, les comportements quasipériodiques et chaotiques ont jusqu'à présent été interprétés comme la résultante d'une action combinée du gain Brillouin et de l'effet Kerr en présence d'une faible rétroaction de cavité [Lu, 92 ; Yu, 95]. Les auteurs ont ainsi été amenés à introduire dans le modèle des termes de couplage des champs par effet Kerr, ce qui permet effectivement de retrouver des comportements de même nature.

En ce qui concerne la stabilité des lasers de courtes longueurs, on trouve dans quelques articles l'idée que l'émission d'un laser à élargissement homogène doit être monomode et stable, pourvu que l'intervalle spectral libre de la cavité soit du même ordre de grandeur que la largeur de la courbe de gain Brillouin spontané [Ponikvar, 81 ; Smith, 91], mais aucune étude quantitative n'a été réalisée. C'est dans ce contexte qu'ont débutés nos travaux sur la dynamique des lasers Brillouin, avec la mise en évidence par l'expérience de l'existence d'une valeur critique de la longueur de la cavité, en dessous de laquelle l'émission est toujours stable et monomode [Randoux, 95a]. Ce résultat est valide tant que l'onde Stokes est en résonance avec la cavité, mais nous avons également testé l'influence du désaccord sur la stabilité des lasers de courte longueur. Ces travaux soulignent l'importance de la nature modale de l'émission. Comme nous le verrons tout au long de ce mémoire, l'analyse modale s'applique à une grande majorité des comportements du laser Brillouin.

Dans le premier chapitre, nous présentons les modèles théoriques auxquels nous ferons appel par la suite. Les second et troisième chapitres sont respectivement consacrés à l'étude de la dynamique des lasers Brillouin dans des cavités en anneau ou en ligne. Dans les diverses conditions envisagées, nous présentons une analyse de la stabilité de l'état stationnaire, la dynamique proprement dite étant analysée au moyen de simulations numériques. Nous soulignons, à chaque fois que cela est possible, le bon accord de nos résultats avec des observations expérimentales antérieures, et présentons quelques expériences complémentaires. Le quatrième chapitre décrit la réalisation et les caractéristiques d'une configuration de cavité nouvelle pour les lasers Brillouin, puisqu'elle fait usage de miroirs de Bragg photo-inscrits au coeur de la fibre. Nous insistons sur les perspectives prometteuses que présente ce système pour des applications pratiques.

CHAPITRE I

<p>Modélisation de la diffusion Brillouin stimulée</p>

L'objet de ce chapitre est de présenter le modèle théorique décrivant la diffusion Brillouin stimulée générée dans des résonateurs à fibre en anneau ou en ligne. Ce modèle sera à la base de tous les développements théoriques décrits dans ce mémoire.

Pour ce faire, nous rappellerons tout d'abord quelques concepts indispensables à la compréhension de ce mécanisme de diffusion. Nous donnerons ensuite les étapes principales du calcul permettant l'établissement du modèle. Dans la mesure où ce dernier est relativement bien connu [Shen, 65], nous nous sommes surtout attachés à introduire, de manière naturelle, la formulation la mieux adaptée à la description d'une interaction non résonante. Avant de dégager les ingrédients indispensables à la description de la dynamique du laser Brillouin, nous préciserons les domaines de variation des paramètres du modèle, correspondants aux diverses conditions expérimentales étudiées à ce jour.

I.1 Généralités sur la diffusion Brillouin stimulée

Rappelons tout d'abord qu'au cours du processus de Diffusion Brillouin Stimulée (D.B.S.), une onde de pompe de pulsation ω_p se propageant dans un milieu matériel transparent (vecteur d'onde= \mathbf{k}_p) interagit avec une onde acoustique (ω_a, \mathbf{k}_a) et donne naissance à une onde diffusée (ω_d, \mathbf{k}_d). Par souci de simplicité, nous limiterons notre description au cas où le milieu matériel est constitué par une fibre optique monomode à maintien de polarisation. Dans cette structure guidante, seules les ondes rétro-diffusées contribuent de façon significative au processus. Ce dernier est amorcé par l'agitation thermique, qui induit des fluctuations de la densité du matériau. Sans entrer dans le détail de la description de ces processus aléatoires, on peut toutefois indiquer que les variations de densité peuvent être décomposées en tous points sur la base des modes acoustiques susceptibles de se propager le long de la fibre [Boyd, 90]. A chaque mode, défini par sa fréquence d'oscillation, on associe une certaine probabilité d'être excité. Cette probabilité se répartit alors en fonction de la fréquence suivant une distribution de Boltzmann, dont la largeur est de quelques téraHertz à température ambiante. Dans ces conditions, on peut considérer que le milieu constitue un réservoir d'ondes acoustiques capables de déclencher le processus de diffusion Brillouin.

Du point de vue de l'optique, la variation de la densité du matériau induite par l'onde acoustique est perçue comme une modulation de l'indice de réfraction qui introduit des réflexions de Fresnel pour l'onde de pompe. Ces multiples réflexions de Fresnel n'induisent un effet notable que si les champs réfléchis en tous points interfèrent de façon constructive. Un mécanisme tout à fait analogue se produit lors de la réflexion d'une onde optique sur un réseau d'indice périodique fixe gravé au coeur de la fibre. L'accord de phase nécessaire à la construction de l'onde réfléchie est alors réalisée lorsque la longueur d'onde effective du rayonnement incident est égale à deux fois le pas du réseau (condition de Bragg). Dans le cas de la diffusion Brillouin, l'accord de phase impose une relation entre les trois vecteurs d'onde du système ($\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_a$ et \mathbf{k}_d). Dans la mesure où l'onde acoustique est assimilable à un réseau se déplaçant à la vitesse du son dans le milieu, on observe un

changement de fréquence de l'onde diffusée, qui peut être attribué à l'effet Doppler se produisant lors de la réflexion sur le réseau mobile. Cet effet diminue la fréquence de l'onde diffusée si l'onde acoustique se propage dans le même sens que l'onde de pompe, on parle alors de diffusion Stokes. En revanche, lorsque l'onde de pompe vient à l'encontre de l'onde acoustique, la diffusion s'accompagne d'une augmentation de fréquence (diffusion anti-Stokes).

La diffusion Brillouin une fois amorcée, l'interférence des deux ondes optiques se traduit par une modulation périodique de l'intensité lumineuse de pulsation $|\omega_p - \omega_d|$ et dont la propagation est caractérisée par le nombre d'onde $(k_p + k_d)$. Le sens de propagation de cette modulation est celui de l'onde de pompe lorsque $\omega_p > \omega_d$ (sens inverse si $\omega_p < \omega_d$) et correspond donc toujours au sens de propagation de l'onde acoustique à l'origine de la diffusion. Par électrostriction, la matière tend à migrer des zones de faible intensité vers les zones de forte intensité, ce qui induit une modulation de la densité du milieu donnant naissance à une onde matérielle de mêmes caractéristiques que la modulation d'intensité. L'efficacité du mécanisme de DBS sera optimum lorsque l'onde matérielle induite par l'interférence lumineuse et l'onde acoustique initiale auront même fréquence et même nombre d'onde, ce qui s'exprime par les égalités suivantes:

$$\omega_a = |\omega_p - \omega_d|, \quad (\text{I-1-a})$$

$$k_a = k_p + k_d. \quad (\text{I-1-b})$$

Ces relations expriment en fait la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement propre à tout processus de diffusion élastique. Elles conditionnent entièrement le problème, et définissent de manière unique les fréquences des ondes acoustique et diffusée dans les cas d'une diffusion Stokes ou anti-Stokes.

Bien qu'elle ne soit pas nécessaire à la description de la diffusion Brillouin, une approche quantique permet de compléter la description qualitative précédente. Au cours d'une diffusion Stokes, un photon de pompe s'annihile pour donner naissance à un phonon acoustique et un photon Stokes. La population de phonons s'accroît et l'onde Stokes peut

ainsi atteindre des niveaux comparables à celui de la pompe. La diffusion anti-Stokes se fait par contre au détriment de la population de phonons acoustiques, qui s'épuise rapidement. L'onde anti-Stokes ne peut être générée efficacement que si un mécanisme supplémentaire vient alimenter la population de phonons. Ce dernier phénomène a été mis en évidence pour la première fois dans des cavités de type Perot-Fabry [Hill, 76b], mais est en fait observable à chaque fois que deux ondes de pompe de même fréquence se propagent en sens inverse dans le milieu [Botineau, 89]. La diffusion de type Stokes sur une des ondes de pompe génère une onde acoustique qui lui est copropagative, et qui peut donc à son tour diffuser l'autre onde de pompe par un processus anti-Stokes. Toutefois, cette interaction n'est pas résonante, du fait des fréquences légèrement différentes des ondes acoustiques mises en jeu dans les deux types de diffusion (la différence est de l'ordre de la centaine de kHz), et elle est donc bien moins efficace que la diffusion Stokes. Lorsque nous aborderons l'étude de la DBS en cavité Perot-Fabry, nous nous limiterons à des conditions pour lesquelles la diffusion anti-Stokes n'est pas observée expérimentalement.

Dans les deux paragraphes qui suivent, nous rappellerons dans ses grandes lignes la démarche qui conduit à l'établissement des équations usuelles décrivant l'évolution des ondes optiques et acoustiques intervenant dans le processus de diffusion Brillouin. Les différentes étapes et approximations de ce calcul sont largement détaillées dans le mémoire de thèse de Eric Picholle [91b].

I.2 Équation d'évolution de l'onde électromagnétique

Les phénomènes électromagnétiques apparaissant dans les milieux diélectriques sont régis par les équations de Maxwell. Dans le cas d'un milieu non magnétique et libre de toute charge tel qu'une fibre optique, ces équations peuvent être réduites à la simple équation d'évolution du champ électrique total \vec{E} , qui s'écrit:

$$\Delta \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{P}}}{\partial t^2}. \quad (\text{I-2})$$

Dans cette équation, nous avons d'ores et déjà supposé que les composantes du champ électrique (pompe et Stokes) ont des fréquences suffisamment proches pour que l'on puisse négliger toute dispersion. Le milieu peut alors être caractérisé par son indice de réfraction n (indice linéaire). c est la célérité de la lumière dans le vide. $\vec{\mathcal{P}}$ représente la partie non linéaire de la polarisation du milieu, principalement liée à l'effet Brillouin. Dans la mesure où l'effet Kerr est susceptible de contribuer à cette polarisation, il sera inclus dans le modèle. De façon usuelle, on développe $\vec{\mathcal{P}}$ sous la forme:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}_{\text{DBS}} + \vec{\mathcal{P}}_{\text{Kerr}} = \epsilon_0 \delta\chi \vec{E} + \epsilon_0 \chi_{\text{///}}^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E}, \quad (\text{I-3})$$

où $\delta\chi$ représente la variation de la susceptibilité linéaire induite par l'onde acoustique, et $\chi_{\text{///}}^{(3)}$ est le tenseur de susceptibilité non linéaire d'ordre 3.

La variation de densité $\delta\rho = (\rho - \rho_0)$ (où ρ_0 est la densité moyenne de la silice) associée à l'onde acoustique est supposée suffisamment faible pour que la variation de la susceptibilité lui reste proportionnelle, ce qui s'exprime comme suit:

$$\delta\chi = \frac{\partial\chi}{\partial\rho} \delta\rho = \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho} \delta\rho, \quad (\text{I-4})$$

où ϵ est la permittivité relative du milieu.

La variation résultante de l'indice de réfraction étant négligeable par rapport au saut d'indice coeur/gaine, on peut considérer que les caractéristiques du guidage dans la fibre sont inchangées. Par ailleurs, nous supposons les ondes optiques guidées assimilables à des ondes planes se propageant suivant l'axe z de la fibre. On notera enfin que la rétrodiffusion Brillouin conserve l'état de polarisation du champ. Dans une fibre à maintien de polarisation, les champs électriques créés auront la même polarisation rectiligne que le champ de pompe incident. L'équation d'évolution du champ électrique total s'écrit alors:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta \rho \mathbf{E}) + \epsilon_0 \mu_0 \chi^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \quad (\text{I-5})$$

I.3 Équation d'évolution de l'onde matérielle

La propagation d'une onde matérielle dans la fibre suppose des déplacements de matière de part et d'autre de leur position d'équilibre. Tant que ces déplacements sont suffisamment petits, la réponse de la silice aux contraintes imposées reste de type élastique, et s'assimile à celle d'un fluide visqueux et compressible. L'évolution des déplacements de matière est alors décrite par l'équation fondamentale de la dynamique des fluides [Landau, 71]:

$$\rho \vec{a} = \vec{F} - \text{Grad } P + \eta \nabla^2 \vec{U} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right) \text{Grad } \text{div } \vec{U}, \quad (\text{I-6})$$

où \vec{U} et \vec{a} représentent respectivement les vecteurs vitesse et d'accélération d'un élément infinitésimal de matière en déplacement. P est la pression locale. ξ et η sont respectivement les coefficients de viscosité et de cisaillement de Navier. Enfin, F est la force électrostrictive, due à la propagation des ondes optiques dans le milieu matériel.

Les déplacements de matière induisent des variations de la densité locale, qui peuvent être décrites à l'aide de l'équation de conservation de la matière (le flux de matière entrant dans un élément de volume est égal au flux de matière sortant de ce même volume):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div} (\rho \vec{U}) \approx - \rho_0 \text{div} (\vec{U}), \quad (\text{I-7})$$

La pression locale, développée autour de sa valeur moyenne P_0 au premier ordre par rapport aux variations de densité $\delta\rho$, peut s'écrire (voir, par exemple, le cours de Physique de Feynman [79]):

$$P = P_0 + \frac{\partial P}{\partial \rho} \delta\rho = P_0 + v^2 \delta\rho, \quad (\text{I-8})$$

où v est la célérité de l'onde acoustique.

A partir de considérations énergétiques, on montre [Lorrain, 79] que la force électrostrictive est proportionnelle au gradient de l'intensité du champ électrique, et peut s'écrire sous la forme:

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \text{Grad} (E^2). \quad (\text{I-9})$$

On négligera par ailleurs les variations transverses de la densité devant les variations suivant l'axe de propagation ($\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial z^2}$). L'équation de propagation de l'onde matérielle s'écrit alors:

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - \frac{3\xi + 4\eta}{3\rho_0} \frac{\partial^3 \delta \rho}{\partial t \partial z^2} - v^2 \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial z^2} = - \frac{\epsilon_0 \rho_0}{2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (E^2). \quad (\text{I-10})$$

I.4 Modèle à trois ondes hors-résonance

La brève description de la diffusion Brillouin stimulée faite au paragraphe I.1 s'applique en fait à des systèmes où la diffusion apparaît spontanément et sans rétroaction extérieure. Pour une onde de pompe de fréquence donnée, les relations (I-1), combinées aux relations de dispersion usuelles ($k_p = \frac{n \omega_p}{c}$, $k_s^{Res} = \frac{n \omega_s^{Res}}{c}$, $k_a^{Res} = \frac{\omega_a^{Res}}{v}$), permettent de déterminer les pulsations de l'onde acoustique (ω_a^{Res}) et de l'onde Stokes (ω_s^{Res}) pour lesquelles le gain Brillouin est maximum. Celles-ci correspondent à la condition de résonance de l'interaction.

Étant donné le temps de réponse fini du matériau au forçage acoustique, le gain Brillouin reste important sur quelque dizaines de MHz autour de la fréquence de résonance. En appliquant une condition extérieure ou tout mécanisme sélectif en fréquence à l'onde Stokes, sa fréquence peut différer de celle du maximum de gain. C'est le cas lorsque la diffusion Brillouin est utilisée pour amplifier une sonde Stokes [Chow, 93]. La fréquence de la sonde peut alors être imposée dans les limites de la courbe de gain. C'est également le cas général d'une diffusion Brillouin générée dans un résonateur optique [Lecoeuche, 96a]. Les modes de résonance de la cavité ne coïncidant pas nécessairement avec le maximum de gain, l'effet plus ou moins sélectif de la cavité pourra conduire à une émission Stokes centrée sur une valeur de la pulsation ω_L différente de ω_s^{Res} .

Dans ces conditions, il apparaît naturel de décrire le champ Stokes dans un référentiel tournant à sa propre pulsation ω_L et non pas à celle du maximum de gain comme c'est le cas dans la quasi-totalité des travaux publiés à ce jour. Nous écrivons donc le champ électrique total sous la forme:

$$E(z,t) = P(z,t) \exp(-i \omega_p (t - \frac{n}{c} z)) + C.C. \\ + S(z,t) \exp(-i \omega_L (t + \frac{n}{c} z)) + C.C. , \quad (I-11)$$

où P et S sont les enveloppes lentement variables respectives des ondes de pompe et Stokes.

Dans le développement de l'intensité E^2 du champ total apparaît le terme d'interférence $PS^* \exp -i((\omega_p - \omega_L) t - \frac{n}{c} (\omega_p + \omega_L) z) + C.C.$, qui est seul susceptible de générer, via l'électrostriction, une onde acoustique $\delta\rho(z,t) = \tilde{\rho}(z,t) \exp -i(\omega_a t - k_a z) + C.C.$, caractérisée par une pulsation $\omega_a = \omega_p - \omega_L$ et un nombre d'onde $k_a = (\omega_p + \omega_L) \frac{n}{c}$. En présence d'un éventuel désaccord en fréquence $\Delta\omega_1 = \omega_L - \omega_s^{Res}$, cette onde acoustique forcée ne satisfait pas la relation de dispersion acoustique ($\omega_a \approx k_a v - \Delta\omega_1 \neq k_a v$), elle se construit donc mal. Cet effet apparaît sous la forme d'un terme d'oscillation de phase à la fréquence $\Delta\omega_1$ dans l'équation réduite de l'onde matérielle. Dans le cadre de l'approximation des enveloppes lentement variables, les équations (I-5) et (I-10) se réduisent au système suivant:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{c}{n} \frac{\partial P}{\partial z} = i \frac{\omega_p \gamma^e}{2\rho_0 n^2} \tilde{\rho} S + i \frac{3\omega_p \chi^{(3)}}{2n^2} (|P|^2 + 2|S|^2) P - \frac{\alpha c}{2n} P, \quad (I-12-a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{c}{n} \frac{\partial S}{\partial z} = i \frac{\omega_p \gamma^e}{2\rho_0 n^2} \tilde{\rho}^* P + i \frac{3\omega_p \chi^{(3)}}{2n^2} (|S|^2 + 2|P|^2) S - \frac{\alpha c}{2n} S, \quad (I-12-b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\gamma_a + i\Delta\omega_1) \tilde{\rho} = i \frac{2\varepsilon_0 k_p^2 \gamma^c}{\omega_a} P S^* + f(z,t), \quad (I-12-c)$$

où $\gamma^e = \rho_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}$ est le coefficient de couplage électrostrictif [Kaiser, 72] et $\gamma_a = \frac{3\xi + 4\eta}{3\rho_0} \frac{\omega_a^2}{v}$ le taux d'amortissement de l'onde acoustique.

L'absorption, la diffusion et autres pertes du guidage ont été introduites de manière phénoménologique par le biais du coefficient d'atténuation en puissance α .

La célérité de l'onde acoustique étant négligeable devant celle de la lumière, on peut négliger le terme de propagation de l'onde

acoustique ($\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} = 0$) [Botineau, 94]. Ce sont alors essentiellement les variations longitudinales du terme d'interférence optique qui imposent la structure de l'onde acoustique. En revanche, la réponse du matériau au forçage électrostrictif n'étant pas instantanée, l'évolution temporelle du système reste conditionnée par la variable acoustique que l'on ne pourra pas éliminer adiabatiquement [Montes, 94a].

Le terme source $f(z,t)$ ajouté à l'équation d'évolution de l'onde acoustique rend compte des faibles fluctuations de la densité liées à l'agitation thermique [Boyd, 90]. Il joue un rôle primordial dans le démarrage du processus de diffusion Brillouin. Zel'dovich et al [85] ont montré que son action est essentiellement localisée à l'extrémité de la fibre, et l'évolution que connaît ensuite l'onde Stokes en se propageant résulte du seul processus de diffusion stimulée. Quoiqu'il en soit, la dynamique de la diffusion conserve toujours le caractère stochastique des fluctuations qui lui ont donné naissance si aucune contrainte extérieure n'est imposée, telle qu'une réflexion aux extrémités de la fibre.

Les variables décrivant l'espace et le temps peuvent être renormalisées comme suit: $\frac{\gamma_a n}{c} z \rightarrow z$, $\gamma_a t \rightarrow t$. Il convient alors de définir pour la suite la longueur normalisée de la fibre $L' = \frac{\gamma_a n}{c} L$ (où L est la longueur effective), ainsi que le désaccord en fréquence normalisé $\Delta_1 = \frac{\Delta \omega_1}{\gamma_a}$. La forme des équations peut se simplifier grandement en renormalisant les champs suivant les relations: $E_p = \frac{K}{\gamma_a} P$, $E_s = \frac{K}{\gamma_a} S$ et $E_a = -i \frac{K}{\gamma_a \sigma} \tilde{\rho}$, où $K = \omega_p \gamma^c \left(\frac{\epsilon_0}{2nvc\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ et $\sigma^2 = \frac{2\rho_0 n^3 \epsilon_0}{vc}$. Les équations (I-12) s'écrivent alors:

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z} = -E_s E_a + i u (|E_p|^2 + 2|E_s|^2) E_p - \frac{\beta}{2} E_p, \quad (\text{I-13-a})$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} - \frac{\partial E_s}{\partial z} = E_p E_a^* + i u (|E_s|^2 + 2|E_p|^2) E_s - \frac{\beta}{2} E_s, \quad (\text{I-13-b})$$

$$\frac{\partial E_a}{\partial t} + (1 + i\Delta_1) E_a = E_p E_s^* + f'(z,t) . \quad (\text{I-13-c})$$

$$\text{avec } \beta = \frac{\alpha c}{n\gamma_a} \text{ et } u = \frac{3 \omega_p \gamma_a \chi^{(3)}}{2n^2 K^2} .$$

Ce choix de normalisation met bien en relief les importances relatives du désaccord en fréquence, de l'effet Kerr, de l'atténuation et du gain Brillouin. Mais avant de chiffrer ces différentes contributions et d'aller plus loin dans la simplification du modèle, il est nécessaire de présenter de façon complète les systèmes que nous nous proposons d'étudier. Plus particulièrement, nous décrirons dans le prochain paragraphe les conditions aux bords qui sont imposées dans un résonateur optique.

I.5 Diffusion Brillouin stimulée en cavité

Quelque soit l'intensité de l'onde de pompe injectée dans une fibre, il est théoriquement toujours possible d'observer une onde Stokes rétrodiffusée. Lorsqu'elle est générée dans un résonateur optique, la diffusion Brillouin à faible niveau de pompage conserve les mêmes caractéristiques qu'en absence de contre-réaction, et sa dynamique est essentiellement liée aux fluctuations acoustiques d'origines thermique [Gaeta, 92 ; Harrison, 94]. Au delà d'un certain seuil, pour lequel le gain Brillouin compense exactement les pertes de la cavité, l'onde Stokes croît alors beaucoup plus rapidement et sa largeur spectrale s'affine [Gaeta, 92]. Dans ces conditions, le terme d'agitation thermique devient négligeable, et la dynamique est entièrement déterministe [Harrison, 94]. Bien que le mécanisme du gain ne comporte pas le cycle absorption/émission stimulée à l'origine de l'acronyme "L.A.S.E.R.", on parle alors communément de laser Brillouin du fait de ses nombreuses similitudes avec des lasers classiques. Il ne nous appartient pas de modifier une terminologie désormais consacrée par l'usage.

I.5.1 Résonateur en anneau

Dans la configuration en anneau représentée sur le schéma I-1, le système d'équation (I-13) doit être complété par deux conditions aux bords concernant les ondes optiques de pompe et Stokes:

$$E_p(z=0,t) = \mu + r_p \exp(-i \delta_p) E_p(z=L',t), \quad (\text{I-14-a})$$

$$E_s(z=L',t) = r_s \exp(-i \delta_s) E_s(z=0,t), \quad (\text{I-14-b})$$

Notons que dans ces équations les temps de transit associés aux trajets aériens des ondes ont été négligés dans la mesure où ces derniers sont très courts en comparaison de la longueur optique de la fibre. μ est l'amplitude normalisée de l'onde de pompe injectée dans la cavité. Si Π est la puissance couplée et A la section effective associée au mode fondamental de propagation dans la fibre, cette amplitude est donnée

par la relation $\mu^2 = \frac{K^2}{2n\epsilon_0 c \gamma_a^2} \frac{\Pi}{A} \cdot r_p$ et r_s définissent les parts des champs

de pompe et Stokes réinjectés dans la cavité. Ces deux coefficients sont supposés égaux dans une cavité classique, on peut toutefois annuler l'effet de cavité sur la pompe en plaçant un élément unidirecteur dans la cavité (dans ce cas $r_p = 0$).

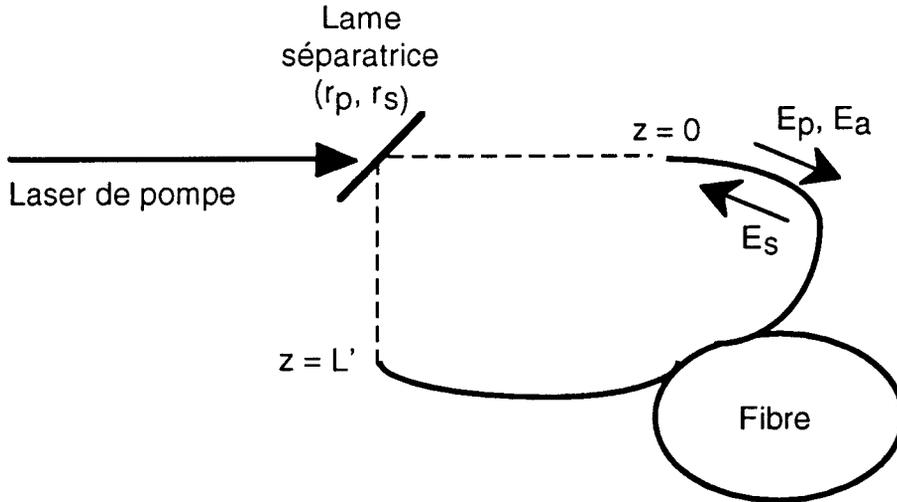


Fig. I-1: Schéma simplifié de la cavité en anneau

$\delta_p = \frac{nL}{c} (\Omega_p - \omega_p)$ et $\delta_s = \frac{nL}{c} (\Omega_s - \omega_s)$ représentent les déphasages subis par les ondes de pompe et Stokes aux cours d'un tour de cavité. Ces déphasages correspondent à un décalage en fréquence de ces ondes par rapport aux résonances de cavités de pulsations respectives Ω_p et Ω_s (Cf. Fig. I-2).

Lorsque la fréquence du mode de cavité porteur de l'oscillation Stokes ne coïncide pas avec celle du maximum de gain Brillouin, un compromis s'établit entre l'effet sélectif de la cavité et le gain Brillouin. La fréquence d'émission Stokes se situe alors quelque part entre ces deux fréquences. Le seul paramètre de contrôle directement accessible est le décalage en fréquence $\Delta\omega_0$ entre le maximum de gain et le mode de la cavité porteur de l'oscillation ($\Delta\omega_0 = \Omega_s - \omega_s^{Res}$). Sa valeur

normalisée sera notée Δ_0 ($\Delta_0 = \frac{\Delta\omega_0}{\gamma_a}$). La fréquence de l'émission laser, et donc l'écart en fréquence Δ_1 , demeure une inconnue du système.

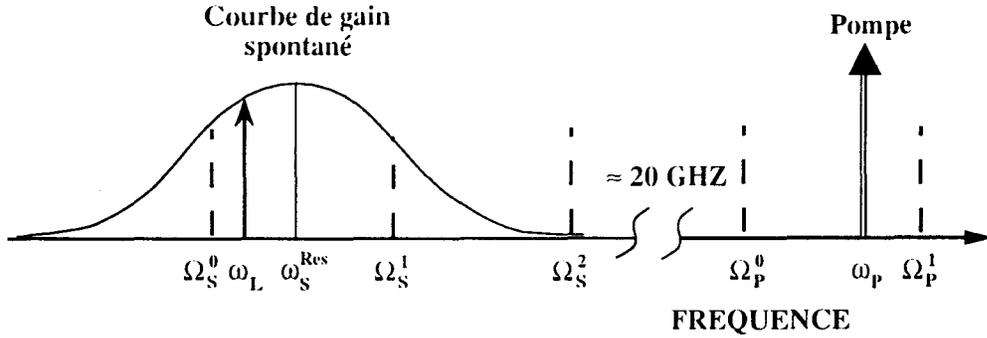


Fig. I-2: Disposition typique des fréquences de la pompe, du maximum de gain spontané, de l'émission Stokes et des modes de cavité passive.

I.5.2 Résonateur en ligne

Dans les cavités de type Perot-Fabry (figure I-3), les champs optiques étant réfléchis aux extrémités de la fibre, les équations (I-13) sont complétées par un second système similaire, décrivant les interactions entre ondes réfléchies ($\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial z}$). On notera d'une flèche orientée vers la droite (respectivement vers la gauche) les ondes se propageant dans le même sens que l'onde de pompe incidente (resp. en sens inverse). Le système d'équation complet s'écrit alors:

$$\frac{\partial E_p^{\rightarrow}}{\partial t} + \frac{\partial E_p^{\rightarrow}}{\partial z} = -E_s^{\leftarrow} E_a^{\rightarrow} + i u (|E_p^{\rightarrow}|^2 + 2|E_s^{\leftarrow}|^2 + 2|E_p^{\leftarrow}|^2 + 2|E_s^{\rightarrow}|^2) E_p^{\rightarrow} - \frac{\beta}{2} E_p^{\rightarrow},$$

$$\frac{\partial E_s^{\leftarrow}}{\partial t} - \frac{\partial E_s^{\leftarrow}}{\partial z} = E_p^{\rightarrow} E_a^{\rightarrow *} + i u (|E_s^{\leftarrow}|^2 + 2|E_p^{\rightarrow}|^2 + 2|E_s^{\rightarrow}|^2 + 2|E_p^{\leftarrow}|^2) E_s^{\leftarrow} - \frac{\beta}{2} E_s^{\leftarrow},$$

$$\frac{\partial E_a^{\rightarrow}}{\partial t} + (1 + i\Delta_1) E_a^{\rightarrow} = E_p^{\rightarrow} E_s^{\leftarrow *}, \quad (\text{I-15})$$

$$\frac{\partial E_p^{\leftarrow}}{\partial t} - \frac{\partial E_p^{\leftarrow}}{\partial z} = -E_s^{\rightarrow} E_a^{\leftarrow} + i u (|E_p^{\leftarrow}|^2 + 2|E_s^{\rightarrow}|^2 + 2|E_p^{\rightarrow}|^2 + 2|E_s^{\leftarrow}|^2) E_p^{\leftarrow} - \frac{\beta}{2} E_p^{\leftarrow},$$

$$\frac{\partial \vec{E}_s^{\rightarrow}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}_s^{\rightarrow}}{\partial z} = E_p^{\leftarrow} E_a^{\leftarrow *} + i u (|\vec{E}_s^{\rightarrow}|^2 + 2|E_p^{\leftarrow}|^2 + 2|E_s^{\leftarrow}|^2 + 2|E_p^{\rightarrow}|^2) \vec{E}_s^{\rightarrow} - \frac{\beta}{2} \vec{E}_s^{\rightarrow},$$

$$\frac{\partial E_a^{\leftarrow}}{\partial t} + (1 + i\Delta_1) E_a^{\leftarrow} = E_p^{\leftarrow} E_s^{\rightarrow *}.$$

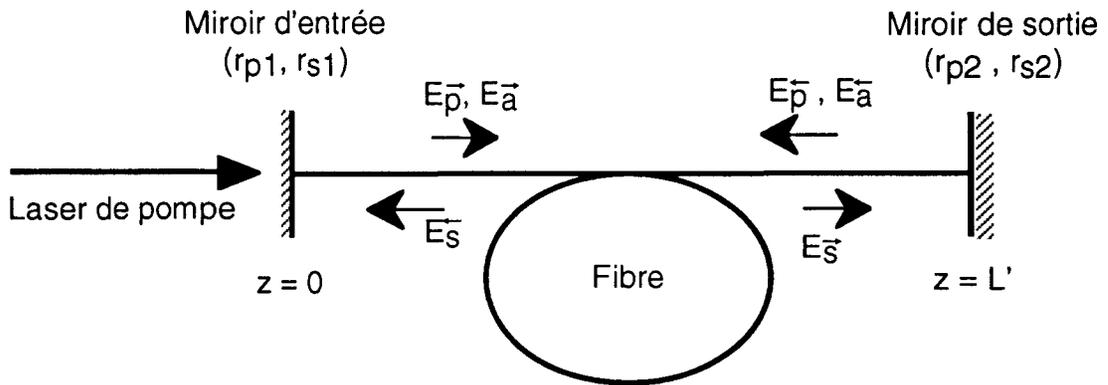


Fig. 1-3: Schéma simplifié de la cavité en ligne

On notera que les seuls couplages entre les deux systèmes sont dus à l'effet Kerr, et aux conditions de bords qui s'écrivent:

$$E_p^{\rightarrow}(z=0,t) = \mu + r_{p1} E_p^{\leftarrow}(z=0,t), \quad (\text{I-16-a})$$

$$E_s^{\rightarrow}(z=0,t) = r_{s1} E_s^{\leftarrow}(z=0,t), \quad (\text{I-16-b})$$

$$E_p^{\leftarrow}(z=L',t) = r_{p2} \exp(-i\delta_p) E_p^{\rightarrow}(z=L',t), \quad (\text{I-16-c})$$

$$E_s^{\leftarrow}(z=L',t) = r_{s2} \exp(-i\delta_s) E_s^{\rightarrow}(z=L',t), \quad (\text{I-16-d})$$

où les coefficients de réflexion affectés de l'indice 1 caractérisent le miroir d'entrée de la cavité, l'indice 2 s'appliquant au miroir de sortie. Les fréquences des ondes de pompe et Stokes n'étant séparées que de quelques dizaines de GHz, les coefficients de réflexions des miroirs classiques (ou des dioptrés) à ces deux fréquences sont pratiquement égaux. Ce n'est toutefois pas le cas dans les expériences où nous utilisons des réseaux de Bragg photoinscrits dans la fibre. Nous verrons dans le dernier chapitre de ce mémoire comment la haute sélectivité en

fréquence de ces miroirs peut être ajustée pour obtenir une réflectivité optimale à la fréquence Stokes, et bien moindre aux fréquences des ondes de pompe, anti-Stokes, ou Stokes d'ordre supérieur.

Le champ μ injecté dans la cavité, les déphasages (δ_p, δ_s) et les désaccords en fréquence ($\Delta\omega_0, \Delta\omega_1, \Delta_0, \Delta_1$) sont définis comme dans le cas d'une cavité en anneau, la seule différence réside dans l'expression des déphasages qui s'écrivent $\delta_p = \frac{2nL}{c}(\Omega_p - \omega_p)$ et $\delta_s = \frac{2nL}{c}(\Omega_s - \omega_L)$.

I.6 Données essentielles du problème, ordres de grandeur

De prime abord, les modèles présentés aux paragraphes précédents excluent tout traitement analytique. Face à de tels systèmes, l'intégration numérique apparaît comme le seul recours possible, mais, du fait des nombreux couplages à traiter (en particulier pour les cavités en ligne), on atteint alors les limites des capacités de nos ordinateurs. Les temps de calculs nécessaires à la caractérisation d'un régime dynamique observé dans des conditions particulières se comptent parfois en jours, rendant impossible l'analyse systématique de la dynamique du système.

La stratégie que nous avons adoptée s'imposait donc d'elle-même. Nous avons tout d'abord réduit les systèmes d'équations à leur expression la plus simple, se résumant aux seuls termes de couplage propres à la diffusion. Nous avons ensuite tiré de ces systèmes un maximum d'information par le calcul analytique, en cherchant à mettre en évidence les zones de paramètres présentant un intérêt du point de vue de la dynamique. A la lumière de ces premiers résultats, nous avons enfin abordé le calcul numérique, sur des systèmes plus complets si cela s'avérait nécessaire. Il convient toutefois de justifier cette méthode en mettant en évidence les termes qui peuvent être considérés comme perturbatifs face à la diffusion, ou tout au moins en montrant dans quelles conditions ils pourront l'être.

Outre une grande simplification de l'écriture du modèle, la normalisation des diverses variables que nous avons effectuée fait apparaître de manière explicite les éléments essentiels à la description de la dynamique du laser Brillouin. A commencer par la longueur normalisée de la fibre L' , qui est proportionnelle au nombre N des modes de cavité présents sous la courbe du gain spontané ($N = \frac{\Delta\nu_B}{ISL}$ où $\Delta\nu_B = \pi \gamma_a$ est la largeur à mi-hauteur de la courbe de gain spontané, et ISL est l'Intervalle Spectral Libre de la cavité passive). Tel qu'il vient d'être défini, N est égal à $\frac{L'}{\pi}$ pour les cavités en anneau et $\frac{2L'}{\pi}$ pour les cavités Perot-Fabry. De toute évidence, la dynamique du système doit

être d'autant plus riche que le nombre de modes susceptibles d'osciller est grand. Par la suite, les résultats seront donc de préférence présentés en fonction du nombre N qui apparaît comme un facteur primordial de la dynamique.

Le tableau I-1 donne des limites raisonnables pour les valeurs des paramètres physiques du laser Brillouin à fibre telles qu'elles apparaissent dans la littérature. Nous avons également reporté les limites de variations des valeurs normalisées de ces paramètres.

La fréquence de relaxation acoustique, inversement proportionnelle à la longueur d'onde, varie très peu d'une fibre à une autre [Azuma, 88 ; Agrawal, 89]. Sa valeur parfois élevée pourrait éventuellement justifier une élimination adiabatique de la variable dynamique associée à l'onde acoustique, conduisant à un système de deux équations plus connu sous le nom de "modèle d'intensités" [Bar-Joseph, 85]. Toutefois, cette approximation revient à considérer comme infini le nombre de modes sous la courbe de gain (or ici $0.1 < N < 400$) ; par suite, elle conduit à des aberrations dans le cas de régimes pulsés [Coste, 86].

Le désaccord de cavité est de l'ordre de grandeur de l'intervalle spectral libre de cavité. Etant normalisée à la fréquence de relaxation acoustique, la valeur du désaccord Δ_0 est donc de l'ordre de $\frac{1}{N}$. Il ne pourra donc être négligé que pour les plus fortes valeurs de N , du moins en première approximation.

Les pertes de la fibre étant linéaires en champ, le coefficient β ne permet pas une comparaison directe au coefficient 1 caractérisant les termes de diffusion. En revanche, pour qu'il y ait oscillation laser, le gain Brillouin par passage doit au moins égaler les pertes de la cavité. Si les pertes de la fibre restent faibles devant la perte au rebouclage de la cavité, elles pourront être négligées, ou simplement intégrées dans cette dernière comme une perte ponctuelle supplémentaire. Minimales au voisinage de $1.3 \mu\text{m}$ et $1.5 \mu\text{m}$, les pertes de la fibre augmentent fortement pour les faibles longueurs d'onde et peuvent ne pas être négligeables, notamment pour des cavités de grandes longueurs [Gaeta, 92].

	Valeur minimale	Valeur maximale
Longueur d'onde λ_p (μm)	0.5	1.5
Relaxation acoustique γ_a (10^6 rd/s)	100	500
Longueur de cavité (m)	1	500
Nombre de mode N	0.1	400
Désaccord en fréquence Δ_0	10^{-3}	10
Atténuation de la fibre α (m^{-1})	10^{-5}	$5 \cdot 10^{-3}$
Pertes de la fibre sur un passage (%)	10^{-3}	90
Pertes au rebouclage (%)	1	99
Indice Kerr n_2 (10^{-20} m^2/W)	2.56	3.27
Coeff. de couplage électrostrictif γ^c	1.26	
Coefficient Kerr normalisé u	0.008	0.011

Tableau I-1: Domaines de variation des paramètres physiques et normalisés du laser Brillouin.

L'ordre d'interaction en champ de la diffusion Brillouin étant le même que celui de l'effet Kerr (l'onde acoustique est d'ordre 2 par rapport aux champs optiques), le coefficient u donne directement la contribution relative de ce dernier. L'indice de réfraction non-linéaire n_2 qui figure dans le tableau I-1 est défini par $n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{4n^2\epsilon_0 c}$. Afin d'éviter toute confusion, nous avons repris ici la définition de n_2 telle qu'elle est

énoncée dans l'article de Kim et al [Kim, 94]. Ce travail décrit une méthode de mesure très précise du déphasage d'une onde optique par auto-modulation de phase liée à l'effet Kerr. Cette technique a été appliquée sur une grande variété de fibres. L'indice de la fibre, qui dépend de la densité de puissance de l'onde, s'écrit alors:

$$n' = n + n_2 \frac{\text{Puissance de l'onde couplée}}{\text{Surface Effective du mode guidé}}$$

La valeur moyenne mesurée pour une longueur d'onde de pompe de 1.319 μm est $n_2 = 2.62 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$. Les écarts par rapport à cette valeur pour les différentes fibres utilisées ne dépassent pas 2%. Il y est également rappelé que la valeur de n_2 serait de 11 à 25% plus grande pour une longueur d'onde de 514 nm, et 1 à 2% plus faibles à 1.5 μm . Le coefficient du couplage par effet Kerr dans sa forme normalisée peut

s'écrire $u = \frac{2 \omega_p \epsilon_0 c \gamma_a}{K^2} n_2$. La constante de couplage électrostrictif γ^e , qui apparaît dans l'expression de K , est indépendante de la longueur d'onde et du type de fibre considéré, comme le confirment de nombreuses mesures concordantes du gain Brillouin [Cotter, 83 ; Foley, 89 ; Thevenaz, 94]. Comme γ_a et K sont proportionnels à ω_p , le coefficient de proportionnalité liant u à n_2 est constant. Par conséquent, u ne varie pas de plus de 30% sur tout le domaine des conditions expérimentales exploitées à ce jour.

En résumé, on peut généralement affirmer que les termes de couplage de la diffusion sont dominants dans les systèmes que nous étudierons. Il est donc possible de négliger l'effet Kerr ($u \approx 10^{-2}$) et l'atténuation de la fibre afin de caractériser la dynamique des lasers Brillouin dans ses grandes lignes, quitte à ajouter par la suite l'un ou l'autre de ces effets dans certaines conditions pour en observer les conséquences. Si le terme de désaccord en fréquence Δ_0 joue un rôle capital dans la dynamique des lasers Brillouin de faible longueur, son influence sera faible pour les grandes longueurs. C'est pour cette raison que nous avons analysé la stabilité des lasers Brillouin dans le cas résonant, l'effet du désaccord de fréquence n'étant traité en détail que dans le cas des courtes longueurs.

CHAPITRE II

**Dynamique des lasers Brillouin
dans les cavités en anneau**

L'essentiel de ce chapitre est constitué de l'article de revue reproduit ci-après et accepté pour publication dans le périodique *Quantum and Semi-classical Optics*. Nous y faisons la synthèse des travaux de notre équipe aux cours des années 94 et 95, tout en replaçant nos résultats dans le contexte plus général des nombreuses études antérieures portant sur la dynamique des lasers Brillouin.

Nous rappelons dans un premier temps les équations régissant la dynamique du laser Brillouin en anneau. La forme simplifiée utilisée, prenant en compte l'éventuel désaccord de cavité, permet une description complète des états stationnaires du système (distribution longitudinale des champs, seuils d'émission, fréquence du rayonnement Stokes).

Nous abordons ensuite l'analyse de la stabilité de l'état stationnaire dans le cas résonant et lorsque l'onde de pompe n'est pas rebouclée dans la cavité. Cette analyse permet de décrire les mécanismes de gain à l'origine de la déstabilisation de l'état stationnaire, ainsi que de préciser les domaines des paramètres pour lesquels cette dernière est observée. Les cavités de faible coefficient de qualité se révélant les plus riches du point de vue de la dynamique, nous présentons quelques signaux temporels typiques obtenus dans ces conditions au moyen de simulations numériques. L'objectif est essentiellement de montrer dans quelle mesure les caractéristiques révélées par l'analyse de stabilité peuvent être retrouvées au sein de régimes dynamiques bien développés. On montre par ailleurs que la prise en compte des nonlinéarités de type Kerr ne modifie pas qualitativement les comportements observés. Enfin, une comparaison rapide entre cavités en anneau et en ligne nous a permis d'envisager pour ces dernières des comportements plus complexes correspondant à ceux observés expérimentalement.

Si la condition de résonance invoquée précédemment est à priori toujours réalisable expérimentalement, il n'en demeure pas moins qu'elle n'est généralement pas satisfaite. Par ailleurs, l'effet du désaccord prend toute son ampleur dans les cavités à faible nombre de modes sous la courbe de gain. C'est bien entendu dans ces conditions que nous nous sommes placés afin d'analyser cet effet. Nous commençons

par présenter et interpréter les résultats de nos simulations numériques effectuées avec les paramètres du modèle correspondant à notre système expérimental. Les résultats de l'expérience viennent ensuite valider l'étude théorique.

La dernière partie de l'article concerne la dynamique d'un laser Brillouin émettant deux composantes Stokes, phénomène observable lorsque la première onde Stokes devient suffisamment intense et génère à son tour une onde Stokes d'ordre deux. Nous proposons une modélisation de ces interactions, qui nous a permis de définir les caractéristiques de l'état stationnaire du système. La stabilité de cet état et les comportements dynamiques observés dans les conditions de l'expérience sont ensuite analysés au moyen de simulations numériques. Rappelons que ces résultats sont décrits de façon beaucoup plus détaillée dans la thèse de Stéphane Randoux [Randoux, 95c], l'étude y est également étendue aux systèmes émettant trois composantes Stokes.

Dans les compléments qui suivent, nous revenons sur l'analyse théorique de la dynamique des lasers émettant une seule composante Stokes. En particulier, un phénomène d'accrochage en fréquence non évoqué dans l'article est mis en évidence. Nous généralisons également la méthode d'analyse de stabilité aux cas où l'onde de pompe est reprise dans la cavité.

REVIEW ARTICLE

Dynamics of stimulated Brillouin scattering with feedback

V Lecoecueche, S Randoux, B Ségard and J Zemmouri

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655, Villeneuve d'Ascq cedex, France

Abstract. We analyse theoretically the stability of the Brillouin fibre ring laser. This study not only allows us to draw the portrait of the unstable domains for a large range of the system parameters, but it also gives valuable information on the dynamical regimes encountered in these domains. We then describe experiments and numerical simulations performed in the particular conditions of a short-length cavity. The effect of cavity detuning on the stability of the laser is investigated. We also report and characterize the dynamics of a Brillouin laser emitting two Stokes components.

1. Introduction

This review article is designed to survey and extend the author's work in stimulated Brillouin scattering and to place it in context of other research done in this area, without being a comprehensive review of all previous work done on this topic. Attention is focused on the stability of the Brillouin fibre ring laser in and out of resonance, and on the influence of the appearance of a second Stokes component on this stability. Before detailing the content of the present work, we shall first review the various results already reported on the subject.

In the early 1970s, the advent of low-loss optical fibres, allowing strong confinement of the light and long interaction lengths, induced a revitalization of the study of stimulated Brillouin scattering [1]. The first observation of a Brillouin laser was reported in 1976 [2], and the dynamics of Brillouin lasers has been the object of numerous studies since then.

The appearance of periodic intensity modulation at a frequency equal to the cavity free spectral range (FSR) is certainly the major dynamical feature of Brillouin lasers to be reported for both the ring and Fabry–Perot cavity configurations [3–6]. These oscillations are observed for sufficiently long fibres, and occur just above the lasing threshold and for higher values of the input pump intensity below a second threshold above which the laser intensity is constant, in the so-called Brillouin mirror regime. This stability has been described in the framework of a model for the intensity, in which it is assumed that the acoustical response of the medium is instantaneous. A linear stability analysis of its steady-state solution yielded a first picture of the unstable domain [5].

The oscillations of the laser intensity may, however, be suppressed by active stabilization of the cavity length [4], or by use of a short length and high finesse for the cavity [7]. In such conditions of stable output, emission with a very narrow linewidth (down to 30 Hz) has been reported [8–10].

The oscillations at the FSR frequency obviously result from the beatings between simultaneous emission on several cavity modes, and it was shown that these modes could lock together to create sharp pulses [3, 6]. Dämmig *et al* [11] showed that the frequency of the oscillations could vary by a few per cent depending on the input pump power and

superluminescent propagation of ‘Brillouin solitons’ inside the resonator was observed by Picholle *et al* [12]. The model for the intensity alone failed to reproduce these dynamical behaviours [13], and a coherent, three-wave model, which accounts for the finite damping rate of the material waves, has since been commonly adopted. A stability analysis performed on this model provided an understanding of the steady and pulsed regimes observed experimentally [13].

More complex behaviours have also been reported. In [9], oscillations with frequencies ranging from the FSR frequency to its sixth harmonic were observed in a long Fabry–Perot cavity, where the feedback is provided by Fresnel reflections on the fibre ends. In a quite similar experiment, but this time with a non-polarization preserving fibre, chaotic regimes were observed [14]. These regimes were attributed to the Kerr effect, and a route to chaos through quasiperiodicity found in numerical simulations [15, 16].

The Brillouin laser emission is stable for any pump power for cavity lengths less than a critical value [17]. However, in these conditions of relatively short cavities, the frequency detuning of the Stokes wave with respect to one of the cavity modes (Stokes detuning) plays an important role. When this detuning was included in the model [18–20], it revealed mode competition effects similar to those observed in classical lasers with a population inversion [21].

Among all these results, the global properties governing the dynamics of the Brillouin laser are not always obvious. We will endeavour to describe this system in a comprehensive manner, trying to sort out the influence of the various parameters, in particular the length of the fibre which has been overlooked in most other studies. In section 2, we present the three-wave model currently used to describe a Brillouin ring laser emitting one Stokes component, and review its steady-state solutions.

Section 3 is devoted to the study of the resonant case, i.e. when the frequency of a passive cavity mode coincides with the frequency of the peak-gain curve [22]. We then analyse the stability of the stationary solution associated with this particular mode. This allows us to find the domains of parameters for which the laser is unstable, and to determine the frequency of the oscillations which can arise in the dynamical regimes. The temporal modulations found by numerical integration of the three-wave model are in good agreement with the predictions of this analysis. In particular, periodicity and quasiperiodicity with up to three frequencies are shown, but more than three frequencies can be obtained by increasing the fibre length. This section concludes with a brief comparison between the results for the ring and Fabry–Perot cavities, which explains why more complex regimes have been observed in the latter.

For a cavity length shorter than a critical value, which only depends on the cavity finesse, the laser emission is always stable at the resonance. In section 4, we investigate the effect of the Stokes detuning on the dynamics of such lasers. Our analysis, both experimental and numerical, reveals unstable regimes and modal bistability around the antiresonance.

In the literature, much less attention has been paid to the dynamics of Brillouin lasers emitting more than one Stokes component. The Stokes emission can become sufficiently intense to generate second-order Stokes emission, and even further components can arise in the same way. First demonstrated in a Fabry–Perot configuration [23], this ‘Stokes cascade’ has also been found in a Brillouin ring laser [24]. The input pump thresholds corresponding to each Stokes component were derived for a high-finesse ring cavity [25, 26]. Driven stimulated Brillouin rescattering, obtained by using two pump fields, has also been studied theoretically [27–29]. This pumping scheme entails a reduction of the Brillouin reflection, but leads to optical turbulence when the interaction length is long enough.

Section 5 gives some insights into the dynamics of two coupled Stokes lines arising

from a single pump field. A model describing these dynamics is presented, and its stationary solution is analytically derived. As the dynamics of a Brillouin laser emitting one component can be very rich for long cavities, the study is then performed for cavity lengths shorter than the critical length [30]. In these conditions, the emission is still stable at the onset of the second Stokes component. A destabilization occurs when this field becomes sufficiently intense, yielding to periodic and quasiperiodic regimes. Results of experiments in this regime with the set-up described in section 4, and a greater pumping rate are reported here. We obtain good agreement between the numerical and experimental results.

2. Three-wave model

2.1. Description of the model

Let us first recall the basic assumptions for the resonant backward SBS interaction occurring in an optical fibre. A pump field (ω_p, k_p) is scattered by an acoustical wave $(\omega_a^{\text{Res}}, k_a^{\text{Res}})$, thus generating a counterpropagating Stokes field $(\omega_s^{\text{Res}}, k_s^{\text{Res}})$. For these three fields, the wavenumbers satisfy the usual dispersion relations $k_p = n\omega_p/c$, $k_s^{\text{Res}} = n\omega_s^{\text{Res}}/c$ and $k_a^{\text{Res}} = \omega_a^{\text{Res}}/v$ (where n is the refractive index of the medium, c the light velocity and v the sound-wave velocity). The interaction fulfils the conservation laws of the energy $\omega_a^{\text{Res}} = \omega_p - \omega_s^{\text{Res}}$ and momentum $k_a^{\text{Res}} = k_p + k_s^{\text{Res}}$. For a given value of the pump frequency ω_p , all the frequencies and momenta can then be deduced from these relations.

The previous analysis implicitly assumes that fields and their interactions are described in frames rotating, respectively, at the frequencies ω_p , ω_s^{Res} , and ω_a^{Res} , leading to the standard three-wave coherent model [31].

In a Brillouin laser, the frequency of the steady-state emission is set by an interplay between the gain and the cavity selectivity, and it can be different from ω_s^{Res} . This obviously occurs when the frequency Ω_S of the passive cavity mode carrying the laser oscillation (active mode) differs from that of the maximum gain by a quantity $\Delta\omega_0 = \Omega_S - \omega_s^{\text{Res}}$ (Stokes detuning). The stationary solution of the standard three-wave model necessarily involves a time dependence of the phase of the complex field envelopes [17]. The resulting phase oscillation brings the Stokes frequency to a value ω_L which depends on the medium gain profile and on the characteristics of the cavity. For the sake of simplicity, it is more convenient to describe the evolution of the fields in the frames rotating at their exact frequencies in the steady state. For a given active mode characterized by a Stokes detuning $\Delta\omega_0$, the frequency ω_L of the laser emission is pulled from the medium resonance by

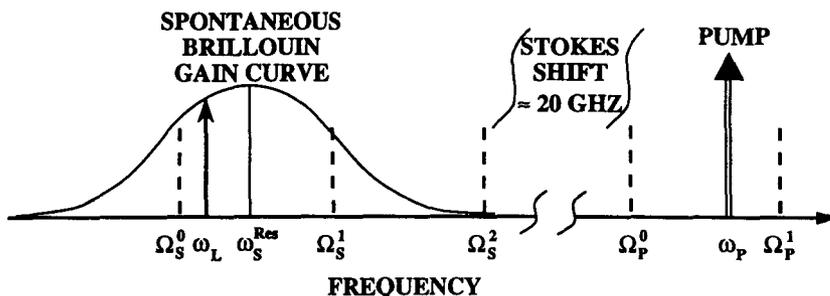


Figure 1. Typical disposition of the pump laser, the maximum spontaneous gain and the Stokes laser frequencies with respect to the passive cavity modes.

4 *Review article*

an unknown quantity $\Delta\omega_1 = \omega_L - \omega_s^{\text{Res}}$ (figure 1). The pump and laser fields are then respectively written as follows:

$$P(z, t) = P(z, t) \exp\left(-i\omega_p\left(t - \frac{n}{c}z\right)\right) + \text{CC} \quad (2.1a)$$

$$S(z, t) = S(z, t) \exp\left(-i\omega_L\left(t + \frac{n}{c}z\right)\right) + \text{CC}. \quad (2.1b)$$

Through the electrostrictive effect, the interference between these two fields drives an acoustical wave $M(z, t) = \rho(z, t) \exp -i(\omega_a t - k_a z) + \text{CC}$, characterized by a frequency $\omega_a = \omega_p - \omega_L$ and a wavenumber $k_a = (\omega_p + \omega_L)n/c$. Due to the Stokes detuning, this forced acoustical wave no longer respects the dispersion relation ($\omega_a \neq k_a v$). Its growth is then frustrated, leading to a decrease of the gain. This effect is described by a destructive phase oscillation term, at the frequency $\Delta\omega_1$, appearing in the reduced Navier–Stokes equation of the acoustic wave. The interaction of the three waves is then described by the following set of equations:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{c}{n} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\alpha c}{2n} P = i \frac{\omega_p \gamma^e}{2\rho_0 n^2} \rho S \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{c}{n} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\alpha c}{2n} S = i \frac{\omega_p \gamma^e}{2\rho_0 n^2} \rho^* P \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\gamma_a + i\Delta\omega_1)\rho = i \frac{2\varepsilon_0 k_p^2 \gamma^e}{\omega_a} P S^* + f(z, t). \quad (2.2c)$$

γ_e is the electrostrictive coupling coefficient [31], ρ_0 the mean density of the fibre core; γ_a the damping rate of the acoustical wave; and α the power absorption coefficient of the fibre. We have neglected the convective term of the acoustical wave ($\partial\rho/\partial z = 0$) [32]. The function $f(z, t)$ in (2.2c) describes the thermal fluctuations in the density of the medium [33], which initiates the diffusion process. While this effect is essential to a description of the stochasticity of a spontaneous diffusion process, it can be neglected once laser action occurs [9]. The position and time variables can be rescaled with $(\gamma_a n/c)z \rightarrow z$, $\gamma_a t \rightarrow t$, and by defining $L' = (\gamma_a n/c)L$, the normalized value of the cavity length L , and $\Delta_j = \Delta\omega_j/\gamma_a$ ($j = 0, 1$), the normalized frequency detuning. We then introduce the following transformations: $E_p = (K/\gamma_a)P$, $E_s = (K/\gamma_a)S$ and $E_a = -i(K/\gamma_a\sigma)\rho$, where $K = \omega_p \gamma^e (\varepsilon_0/2nvc\rho_0)^{\frac{1}{2}}$ and $\sigma^2 = 2\rho_0 n^3 \varepsilon_0/vc$. Equations (2.2) then become:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z} + \frac{\beta}{2} E_p &= -E_s E_a \\ \frac{\partial E_s}{\partial t} - \frac{\partial E_s}{\partial z} + \frac{\beta}{2} E_s &= E_p E_a^* \\ \frac{\partial E_a}{\partial t} + (1 + i\Delta_1) E_a &= E_p E_s^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

where $\beta = \alpha c/n\gamma_a$. This set of equations must be completed by the boundary conditions imposed on the pump and Stokes field which can be written for a ring cavity as:

$$E_p(0, t) = \mu + r_p \exp(-i\delta_p) E_p(L', t) \quad (2.4a)$$

$$E_s(L', t) = r_s \exp(-i\delta_s) E_s(0, t). \quad (2.4b)$$

μ is the normalized pump field injected in the cavity. r_p and r_s are the reinjection rates of the pump and Stokes fields, respectively; they are defined separately in order to account for an eventual unidirectional device inserted in the cavity to avoid pump feedback. $\delta_p = (nL/c)(\Omega_p - \omega_p)$ and $\delta_s = (nL/c)(\Omega_s - \omega_L)$ are the accumulated phase differences per round trip for the pump and Stokes fields, respectively. Ω_p is the frequency of the

passive cavity mode which is the closest to the pump frequency. To avoid any confusion in the following sections, the quantity $(\Omega_p - \omega_p)$ will be called the pump detuning. Owing to their small value compared to the losses introduced at the boundaries, the distributed losses of the fibre can be neglected ($\beta = 0$); they might, however, be included in the boundary losses as a slight modification of the reinjection rates r_s and r_p . This assumption remains valid as far as the fibre length is much shorter than the Beer's length. When this latter condition is not fulfilled, dramatic changes in the dynamics can appear, such as the persistence of stochastic behaviours observed by Ippen and Stolen [1]. The influence of the fibre losses on dynamics could also be responsible for discrepancies between experimental behaviours observed in quite similar devices [9, 11, 14]

2.2. Steady states

As the Stokes and pump fields E_s and E_p evolve in frames rotating at the lasing frequency ω_L and the pump frequency ω_p , respectively, the amplitudes and phases of the steady-state solutions must be time independent. We then transform the complex amplitudes to modulus-phase form by substituting the following expressions in equations (2.3):

$$E_j = A_j \exp(i\Phi_j) \quad \text{with } j = p, s \text{ or } a \quad (2.5)$$

By setting all the time derivatives to zero, we easily obtain the following equations for the steady state:

$$\frac{dA_p}{dz} = -\frac{A_p A_s^2}{1 + \Delta_1^2} \quad (2.6a)$$

$$\frac{dA_s}{dz} = -\frac{A_p^2 A_s}{1 + \Delta_1^2} \quad (2.6b)$$

$$\frac{d\Phi_p}{dz} = \frac{\Delta_1}{1 + \Delta_1^2} A_s^2 \quad (2.6c)$$

$$\frac{d\Phi_s}{dz} = -\frac{\Delta_1}{1 + \Delta_1^2} A_p^2 \quad (2.6d)$$

As might have been expected, the Stokes detuning leads to a gain reduction by a factor $1/(1 + \Delta_1^2)$, linked to the Lorentzian nature of the gain profile. Since the propagation of the acoustical wave is neglected, the field E_a is a slave variable of the pump and Stokes fields and is fully defined by:

$$A_a = \frac{A_p A_s \exp(-i\Phi)}{1 + i\Delta_1} \quad (2.6e)$$

where $\Phi = \Phi_a + \Phi_s - \Phi_p$ must fulfil the relation: $\tan \Phi = -\Delta_1$.

A loss-less energy exchange occurs ($A_p^2(z) - A_s^2(z)$ is constant), together with an effect of each field on the other's phase. The integration of equations (2.6a-d) leads to a longitudinal distribution of fields and phases similar to that previously given by Chow and Bers [34] and by Botineau *et al* [32] which can be written as:

$$A_p^2(z) = \frac{A_p^2(0)(1 - F)}{1 - F \exp(-2\eta(1 - F)A_p^2(0)z)} \quad (2.7a)$$

$$A_s^2(z) = \frac{A_p^2(0)(1 - F)F}{\exp(2\eta(1 - F)A_p^2(0)z) - F} \quad (2.7b)$$

6 *Review article*

$$\Phi_p(z) - \Phi_p(0) = -\frac{\Delta_1}{2} \ln \left(\frac{A_p^2(z)}{A_p^2(0)} \right) \quad (2.7c)$$

$$\Phi_s(z) - \Phi_s(0) = \frac{\Delta_1}{2} \ln \left(\frac{A_s^2(z)}{A_s^2(0)} \right) \quad (2.7d)$$

where $F = A_s^2(0)/A_p^2(0)$ and $\eta = 1/(1 + \Delta_1^2)$. All the fields are then fully described as functions of the pump and Stokes wave intensities at $z = 0$ and of the normalized frequency detuning Δ_1 .

The previous expressions of the field moduli are not defined when $F = 1$. We will show in section 5 that this condition is quite important, because it corresponds to the threshold of oscillation of the second-order Stokes component. The field amplitude profiles can then be written as:

$$A_p^2(z) = A_s^2(z) = \frac{1}{2\eta(z + (r_s^2/1 - r_s^2)L')}. \quad (2.8)$$

The boundary conditions on the modulus and phase of the Stokes field are then:

$$A_s(L') = r_s A_s(0) \quad (2.9a)$$

$$\Phi_s(L') - \Phi_s(0) = -\delta_s. \quad (2.9b)$$

Coupled with equations (2.7b) and (2.7d), expressed at the boundaries, these two relations fix the value of the unknown parameters F and Δ_1 which are given by:

$$(1 - F) = r_s^2(\exp(2\eta(1 - F)A_p^2(0)L') - F) \quad (2.10a)$$

$$\Delta_1 = \frac{\Delta_0}{1 + (\kappa/\gamma_a)} = \frac{\Delta_0}{1 + (\Delta\nu^{PC}/\Delta\nu^B)} \quad (2.10b)$$

where $\kappa = c|Ln r_s|/nL$ is the rate of damping of the Stokes field in the cavity, $\Delta\nu^{PC} = \kappa/\pi$ and $\Delta\nu^B = \gamma_a/\pi$ are the full widths at half maximum of a passive cavity mode and of the spontaneous Brillouin gain curve, respectively.

Equation (2.10b) is the classical mode pulling formula obtained for the lasers with a population inversion [21], and it was already known for its impact on a Brillouin laser at the lasing threshold [9]. In fact, this equation is valid whatever the pump power, and it gives the exact lasing frequency, which only depends on the Stokes detuning and the ratio of the cavity and medium damping rates. The implicit equation (2.10a) can be solved numerically. For a given Stokes detuning Δ_0 , the parameter F and then all the stationary fields only depend on the pump intensity in the plane $z = 0$ ($A_p^2(0)$). These results are valid whatever the choice of the boundary condition imposed on the pump field. For a given value of $A_p^2(0)$, the input pump intensity μ^2 is directly given by (2.4a). As μ^2 is a more accessible control parameter, $A_p^2(0)$ can be adjusted by an iterative method in order to obtain any particular value of μ^2 .

The intracavity pump field at the lasing threshold is obtained by setting F to zero in equation (2.10a). The required pump intensity, effectively launched into the fibre, deduced from equation (2.4a) is:

$$\mu_{ST1}^2 = \frac{\kappa}{\gamma_a} (1 + \Delta_1^2)(1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\delta_p)). \quad (2.11)$$

This relation gives the ring Brillouin laser threshold in the general case. κ/γ_a is the threshold in the absence of Stokes detuning and pump feedback [13]. The two factors $(1 + \Delta_1^2)$ and $(1 + r_p^2 - 2r_p \cos(\delta_p))$ stand, respectively, for the increase of the threshold with the detuning, directly linked to the gain reduction, and its decrease with the pump feedback efficiency.

3. Dynamics in the resonant case

3.1. Stability analysis

Let us first point out the most important parameters of the system previously defined. The normalization used for the model shows the conjugate roles of the fibre length and the material wave-damping rate (the latter being inversely proportional to the pump wavelength [35,36]), which both appear in the expression for the normalized fibre length L' . This quantity is indicative of the number of modes under the spontaneous gain curve $N = L'/\pi$, and is certainly the most representative parameter for our purpose. Basically, the more modes there are under the gain curve, the stronger is their competition, and more likely is the destabilization of the laser. The other relevant parameter is the reinjection rate. In a classical ring configuration, the values of r_p and r_s are equal and are fixed by the alignment and the optics used in the free space part of the cavity, or simply by the coupling ratio of the coupler in an all-fibre configuration. An increase of these reinjection rates leads to an increase of the emission strength, and a better selectivity of the cavity, which both favour stationary monomode emission [17].

A linear stability analysis of the system described in the previous section has already been performed [13] in the resonant case and without pump feedback. However, in that analysis, the cavity length did not appear explicitly as a relevant parameter. Our aim is to focus on the influence of this parameter, and report all the conditions for destabilization. Moreover, our analysis could account for the eventuality of pump feedback. For this purpose, we have adapted an approach proposed in a recent paper [37] in order to study the gain experienced by a probe in a Brillouin amplifier. Such an approach allows a better understanding of the role of the cavity modes in the destabilization of the laser.

For the sake of simplicity, we also investigate the case of a resonant cavity ($\Delta_{0,1} = 0$) without pump feedback ($r_p = 0$). We now consider the system in its steady state (equations (2.7)), for which the optical and material waves, labelled 0 in this section, are real quantities. For a given set of parameters, we wish to determine the domain of frequency for which periodic oscillations could undergo gain. In such domains, instabilities are expected to grow spontaneously from noise. For this purpose, we calculate the gain experienced by a probe field E_{s+} , launched at the end of the fibre ($z = L'$). This probe is slightly detuned from the frequency of the stationary Stokes field, by a quantity Q (normalized value). The coupling of the probe field with the stationary ones generates an idler wave E_{s-} , detuned by the quantity $-Q$. In the frame rotating at the frequency $\omega_L = \omega_s^{\text{Res}}$, the Stokes field then writes:

$$E_s(z, t) = E_{s_0}(z) + E_{s-}(z) \exp iQ(z + t) + E_{s+}(z) \exp -iQ(z + t). \quad (3.1a)$$

Obviously, similar perturbative terms appear in the expressions for the pump and acoustic fields, which may be written as:

$$E_p(z, t) = E_{p_0}(z) + E_{p-}(z) \exp iQ(z + t) + E_{p+}(z) \exp -iQ(z + t) \quad (3.1b)$$

$$E_a(z, t) = E_{a_0}(z) + E_{a-}(z) \exp iQ(z + t) + E_{a+}(z) \exp -iQ(z + t). \quad (3.1c)$$

Linearizing equations (2.3) in terms of small increments, we obtain:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{p-}}{\partial z} + 2iQE_{p-} &= -E_{s_0}E_{a-} - E_{s-}E_{a_0} \\
\frac{\partial E_{p+}}{\partial z} - 2iQE_{p+} &= -E_{s_0}E_{a+} - E_{s+}E_{a_0} \\
\frac{\partial E_{s-}}{\partial z} &= -E_{p_0}E_{a+}^* - E_{p-}E_{a_0} \\
\frac{\partial E_{s+}}{\partial z} &= -E_{p_0}E_{a-}^* - E_{p+}E_{a_0} \\
(1 + iQ)E_{a-} &= E_{p_0}E_{s+}^* + E_{p-}E_{s_0} \\
(1 - iQ)E_{a+} &= E_{p_0}E_{s-}^* + E_{p+}E_{s_0}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

where all the fields are z -dependent. The acoustic fields are then replaced by their expressions as functions of the optical one, yielding a set of four equations analogous to those obtained in [37]. The symmetry properties linked to the resonance condition lead to two particular solutions, for which $E_{j+} = E_{j-}^*$ or $E_{j+} = -E_{j-}^*$ ($j = p, s$). In fact, only the first solution leads to non-vanishing gain for the probe. The set of equations (3.2) then reduces to the following equations:

$$\frac{\partial E_{p+}}{\partial z} = \left[2iQ - \frac{E_{s_0}^2}{1 - iQ} \right] E_{p+} - \frac{2 - iQ}{1 - iQ} E_{s_0} E_{p_0} E_{s+} \tag{3.3a}$$

$$\frac{\partial E_{s+}}{\partial z} = -\frac{E_{p_0}^2}{1 - iQ} E_{s+} - \frac{2 - iQ}{1 - iQ} E_{s_0} E_{p_0} E_{p+}. \tag{3.3b}$$

These equations allow a numerical calculation of the gain and nonlinear phase shift of the probe field over one fibre length. These will have to be compared to the losses and mistuning of the passive cavity, which appears in the boundary conditions imposed on the probe field:

$$E_{s+}(L') = r_s \exp(-i\delta_{s+}) E_{s+}(0), \tag{3.4}$$

where $\delta_{s+} = 2\pi(j - (\gamma_a Q/2\pi\text{FSR}))$ is the accumulated phase difference per round trip related to the j th side mode of the passive cavity.

As the intensity of the pump field at $z = 0$ is imposed, pump perturbations must fulfil the condition $E_{p+}(0) = 0$. It is then more convenient to integrate equations (3.3) with initial conditions set at $z = 0$; the fields at any point are then functions of the probe field $E_{s+}(0)$, fixed at a value much smaller than the stationary field ones. The gain per round trip in the cavity is calculated with the relation $(|E_{s+}(0)|^2/|E_{s+}(L')|^2)r_s^2$.

Figure 2(a) gives an example of gain variations as a function of the frequency detuning Q of the probe, for three typical values of the input pump power. The corresponding evolution of the nonlinear phase shift over one passage in the fibre $\phi_{s+}(0) - \phi_{s+}(L')$ and of the phase mistuning of the passive cavity modes δ_{s+} are plotted in figure 2(b). The straight-line graphs of δ_{s+} are calculated with regard to the active mode and its first side modes ($j = 0, 1, 2, 3$). These curves are obtained for a feedback rate $r_s^2 = 1\%$, and a number of modes $N = 20$. These conditions are typical for the occurrence of oscillations at the FSR frequency.

The gain curves are close to those depicted in [37]. They are characterized by a dip in the vicinity of $Q = 0$, which becomes deeper and broader as the pump power increases and indicates the Brillouin gain saturation. Another common feature is the appearance of resonances occurring at frequencies roughly equal to $m/2T_i$ (here equal to $(m/2)$ FSR),

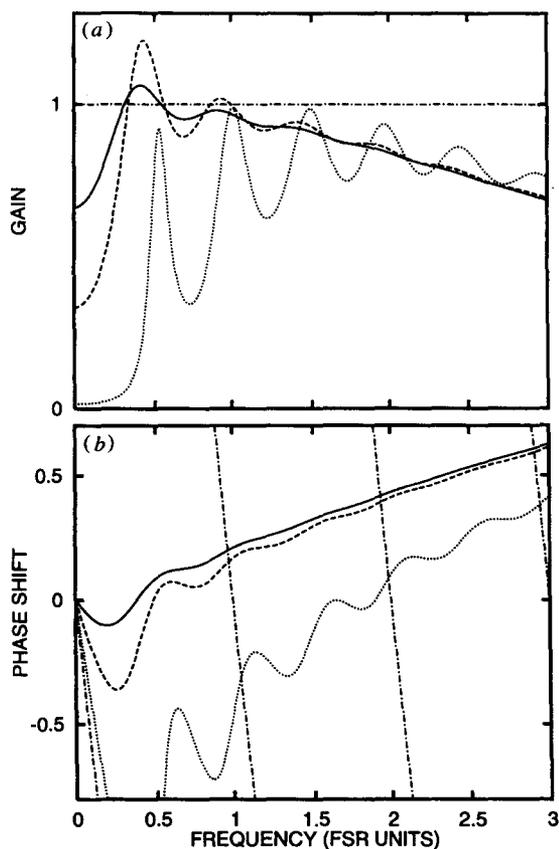


Figure 2. Gain (a) and phase shifts (b) experienced by a probe field along one passage in the fibre, as functions of the probe frequency shift, and for various values of the pump power: 1.05 (full curve), 2 (broken curve), 2.8 (dotted curve) times the threshold. Chain lines on the phase diagrams corresponds to the phase detuning of the probe field with respect to the passive cavity modes 0, 1, 2, 3. Fixed cavity parameters: 20 modes under the gain curve, $r_s^2 = 1\%$, $r_p = 0$.

where m is an integer and T_t is the transit time in the fibre. As indicated in [37], the resonance frequencies originate from the counterpropagation of the pump and Stokes fields. They are related to the relaxation oscillations at the frequency $1/2T_t$, which have been observed in the initiation of stimulated Brillouin scattering [38]. In their description of the relaxation oscillations, the authors analyse the time evolution of the pump and Stokes fields induced by a step pulse imposed on the pump. In the first period, of duration T_t , the step pulse propagates along the fibre without inducing a significant Stokes field, leading to a state 1 characterized by a high pump and low Stokes intensities. During the second period of length T_t , the Stokes field grows and strongly depletes the pump field all along its propagation in the fibre, reaching a state 2 of low pump and high Stokes intensities. During the following period, the low pump intensity prevents the generation of the Stokes field which then decreases until the pump has filled the fibre again (state 1). The process repeats periodically with decreasing modulation depth until the steady state is achieved. We can generalize this description in order to explain a resonance at the harmonic ' m ' of the frequency $1/2T_t$, observed on the probe gain curve. For this purpose, let us assume that the

fibre is divided into m identical sections, alternately in the states **1** and **2** in order to simulate the field modulation induced by the probe at a frequency $Q = m/2T_r$. At a time $t = 0$, the state of the system can be described by m states distributed along the fibre according to the sequence **121...12...**. At the time $t = T_r/m$, the propagation of the fields yields to an inversion of the sequence which is then: **212...21...**. For $m = 1$, we exactly meet with the situation previously described. For a greater value of m , any section k of the fibre which was in the state **1** (high pump intensity) at the time $t = 0$ amplifies the Stokes field coming from the section $k + 1$. Simultaneously, the section $k + 1$ is filled with the pump field coming from the section k , and is then prepared to amplify the next Stokes 'wave'. Such situations are then optimum to amplify the Stokes field and resonances of the gain are then observed. In our system, these resonances impose the frequencies of the oscillations which can arise at the start of the laser destabilization. This destabilization is expected when the following two conditions are fulfilled:

- The gain per round trip must be greater than one.
- The nonlinear phase shift must fulfil the condition: $\phi_{s+}(0) - \phi_{s+}(L) = \delta_{s+}$, in order to achieve the proper tuning of the cavity.

In the condition of figure 2, when the input power is just above the lasing threshold (full curves), the gain exceeds one when the probe frequency ranges around half the FSR away from the stationary Stokes emission. However, the probe field is then antiresonant with the passive cavity, and the Brillouin phase shift does not compensate this detuning, as can be seen in figure 2(b). Instabilities cannot grow and the steady state is stable. When the pump power is twice the lasing threshold (broken curves), the gain exceeds one for a range of frequencies slightly lower than one FSR away from the stationary Stokes emission. Within this domain, there is a frequency hereafter called the matching frequency for which the Brillouin phase shift exactly compensates the cavity detuning with respect to the first side mode. The side modes $j = \pm 1$ can then grow and, as time progresses, one expects a periodic modulation of the Stokes intensity at the beat frequency ($0.98 \cdot \text{FSR}$) between the mode carrying the Stokes emission and its first side modes. This dynamical behaviour, which involves more than one cavity mode, is fundamentally similar to the multimode instabilities encountered in homogeneously broadened conventional lasers [39] or bistable devices [40]. Obviously the details of the gain mechanism leading to instabilities can change from one device to the other. For a still higher pump power (dotted curves), the gain is always lower than one, the Brillouin mirror regime is reached.

The curves plotted in figure 3 are obtained with the same reinjection rate but with 50 modes under the gain curve. For a moderate pump power (full curve), the first side mode is destabilized as in the previous case. For larger pump power (broken curve), the proper tuning of the cavity is achieved with sufficient gain for two values of the probe detuning respectively equal to $1.04 \cdot \text{FSR}$ and $2.01 \cdot \text{FSR}$. Each of the first two side modes ($j = 1, 2$) may then grow. This can lead to quasiperiodic modulation, at least transiently, but the long-time dynamics is hardly predictable. At 2.5 times the threshold value (dotted curves), the gain is still greater than one around one FSR, but the tuning condition is not fulfilled in this domain. Only the second side mode can grow.

A careful analysis of figures 2 and 3 shows that the peak frequency of the gain and the matching frequencies increase as the pump power increases. Similarly the frequency of spontaneous modulation of the laser emission is expected to always increase with the pump power. This behaviour is linked to the Brillouin gain saturation which manifests itself by a broadening of the dip observed in the vicinity of $Q = 0$. More generally, the saturation shifts the band of gain toward the high probe detuning, so that the gain peaks located at low probe detuning become smaller than those located at higher frequency. Thus, the order

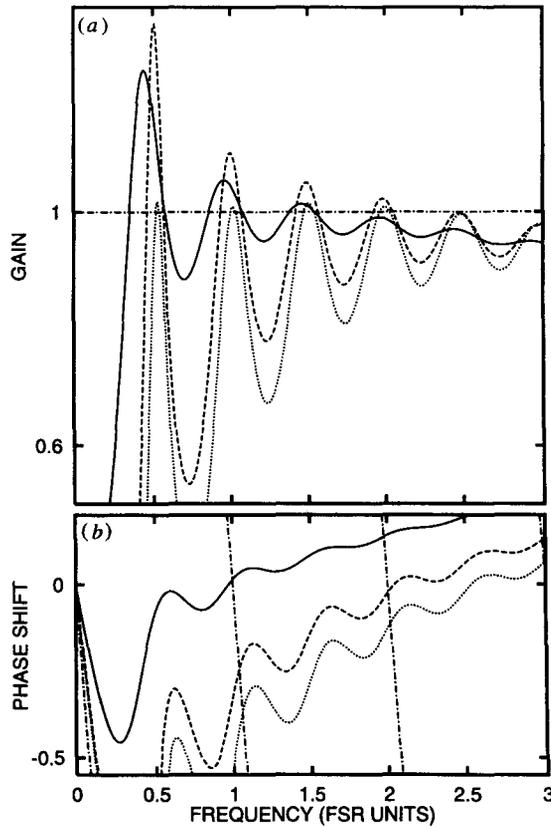


Figure 3. Same as figure 2. The pump power is: 1.2 (full curve), 2 (broken curve), 2.5 (dotted curve) times the threshold. The number of modes under the gain curve is 50.

of the side modes expected to become unstable increases with the input pump power.

The preceding analysis allows us to determine the boundaries of the unstable domain corresponding to the destabilization of each pair of side modes. These boundaries are reached whenever the probe experiences a gain equal to one while its frequency matches a cavity resonance. The results are identical to those given by a classical linear stability analysis which would yield the system of equations (3.3). For a given number of modes N and reinjection rate r_s^2 , these boundaries are calculated with an iterative method in which the probe frequency and the pump intensity are alternately adjusted. Figure 4(a) shows the unstable domain corresponding to the first side modes ($j = \pm 1$), in the plane defined by N and the input pump power. The values of the pump power are normalized by its value at the lasing threshold. Each curve has been calculated for a particular value of r_s^2 , and defines an area within which the steady state is unstable. Figure 4 shows that there is a critical number of modes N_c , under which the Brillouin emission is stable for any value of the pump power. N_c is about 10 for reinjection rates ranging from 1% to 10% and increases rapidly as r_s^2 is increased. The increase of the reinjection rate r_s^2 also reduces the upper boundary of the instability domain in good agreement with previous results [13]. As was shown in a previous paper [17], for a given value of γ_a one can associate to N_c a critical cavity length L_c . The experiments described in sections 4 and 5 are performed with

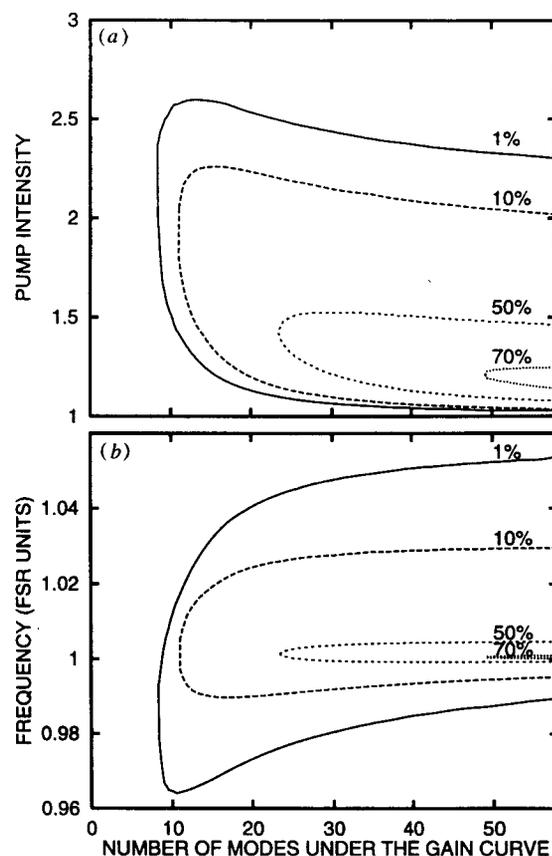


Figure 4. (a) Domains of instability of the first side mode for various values of the Stokes reinjection rate r_s^2 ($r_p = 0$). The frequencies of oscillations at the bifurcations are given in (b).

a cavity length shorter than L_c , and confirm the stability of the emission in such conditions. Figure 4(a) also shows that the laser is stable in the vicinity of the lasing threshold whatever the value of N .

The frequencies of the oscillations, rising at the bifurcation between the stable and unstable domains, are shown in figure 4(b). The lower and upper branches of these curves are respectively related to the lower and upper bifurcations depicted in figure 4(a). In accordance with our previous analysis, the frequencies of oscillation are lower (respectively higher) than the FSR frequency for the low (respectively high) pump power bifurcation. With small reinjection rates, the weak selectivity of the cavity allows strong frequency variations (up to 7%). Such significant variations and the existence of modulation frequencies higher than the FSR have already been observed experimentally [11, 12]. In [12], they are attributed to the superluminescent propagation of the light pulse, the leading edge of which is amplified whereas the trailing one interacts with an already depleted pump. Nevertheless, such a mechanism cannot describe the small amplitude oscillations at frequencies lower or larger than an FSR frequency predicted here.

The domain of instability of the second side mode ($j = \pm 2$) and oscillation frequencies at the bifurcations are plotted in figure 5. This boundary also corresponds to a critical number of modes under which the second side mode is stable ($N \approx 30$ for $r_s^2 = 1\%$). The

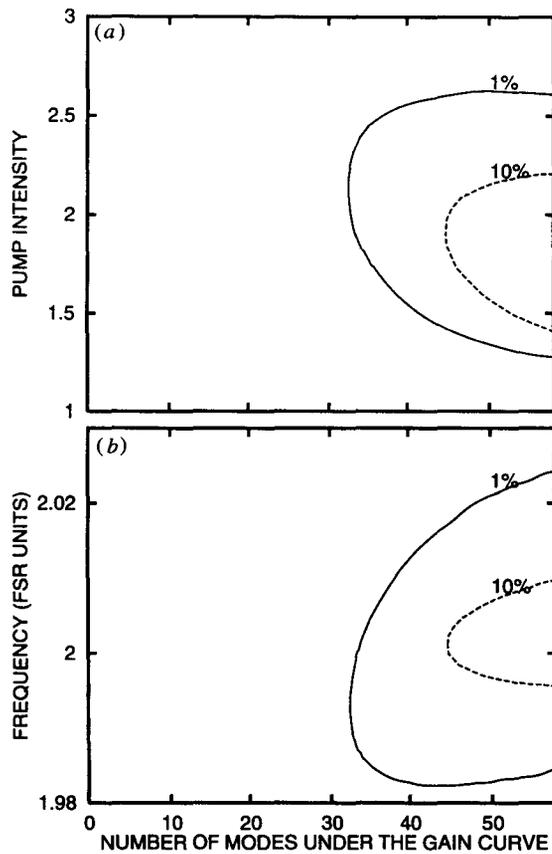


Figure 5. (a) Domains of instability of the second side mode for various values of the Stokes reinjection rate r_s^2 ($r_p = 0$). The frequencies of oscillations at the bifurcations are given in (b).

evolution of these domains with the reinjection rate is globally the same as for the first side mode. Here again, the frequency of the oscillations is lower than $2 \cdot \text{FSR}$ at the lower bifurcation, and becomes greater than $2 \cdot \text{FSR}$ in the vicinity of the Brillouin mirror regime. However, the variations of the frequency are smaller than for the first side mode ($< 3\%$).

A domain of instability for the third side-mode instability appears for larger values of N . The domains of instability of the first three side modes, obtained for a reinjection rate of 1%, are superimposed in figure 6. It is clear that there are domains where the second or third side modes can oscillate while the others remain stable. For values of N ranging between 30 and 90, the second side mode is responsible for the destabilization of the Brillouin mirror regime, as was already reported in previous work for which $N = 60$ ($L = 80$ m, $\gamma_a = 5 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$) [41]. For $N > 90$, the third side mode entails the upper bifurcation, and we can expect that the next side mode replaces it for larger N and so on. Such behaviour is in good agreement with the results obtained in the framework of the so-called intensity model [13]. In this model, the relaxation time of the acoustic wave is neglected with respect to the cavity round-trip times and the number of mode N is assumed to be infinite. The linear stability analysis then shows that, on departing from the Brillouin mirror regime by decreasing the pump power, the highest frequency mode becomes unstable, successively followed by lower frequency modes.

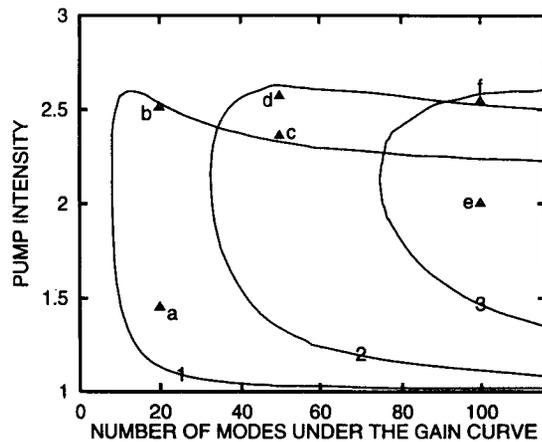


Figure 6. Domain of instability of the first, second and third side modes ($r_s^2 = 1\%$ and $r_p = 0$).

3.2. Dynamical behaviour

The previous analysis provides a rapid determination of the unstable domains of the Brillouin ring laser. It also provides information on the initiation of the instabilities. But the analysis of the long-time dynamics requires the integration of the full set of equations (2.3) with the boundary conditions (2.4). As we wish to study the process of destabilization of the laser, we depart our numerical integrations from the steady-state solution. A small 'kick' is added to this solution in order to stir up the instabilities. The equations are then integrated over a large number of round trips (up to 5000) to reach a stationary regime.

In the following, we investigate the case of a small reinjection rate ($r_s^2 = 1\%$), for which the domains of instability of the different side modes are relatively large (see figure 6), and characterized by a large range of variation of the oscillation frequencies.

The numerical simulations support the predictions of the stability analysis. Outside the domains of instability graphed in figure 6, the fields always return to their steady-state values, whereas inside these domains the simulations find modulated solutions. The observed dynamical behaviours are summarized in figure 7, where each of the curves (a)–(e) is related to the corresponding point (a–e) labelled in figure 6.

For a moderate number of modes under the gain curve ($N = 20$), the destabilization of the steady state leads to stable periodic regimes at a frequency close to the FSR. This frequency increases with the pump power, but always ranges between the two limiting values given by the stability analysis. As expected, sinusoidal oscillations are observed near the upper (figure 7(b)) and lower bifurcation boundaries. Far from these bifurcations, instability develops into a pulsed regime which has already been described as mode-locked emission [3, 6]. In the particular case shown in figure 7(a), the repetition rate of the pulses is lower than one FSR.

Due to the appearance of a second side-mode instability domain, the dynamics for higher pump power becomes richer when $N = 50$. Near the upper bifurcation (figure 6, point d), transients first appear as a sinusoidal modulation at nearly twice the FSR frequency which indicates a second side-mode emission ($j = \pm 2$). This emission then induces the destabilization of the first side mode ($j = \pm 1$) which, in our linear analysis, experiences a gain close to one (see figure 3). These two pairs of side modes oscillate at frequencies nearly equal to that of the corresponding peaks of the probe gain. Their beat with the mode

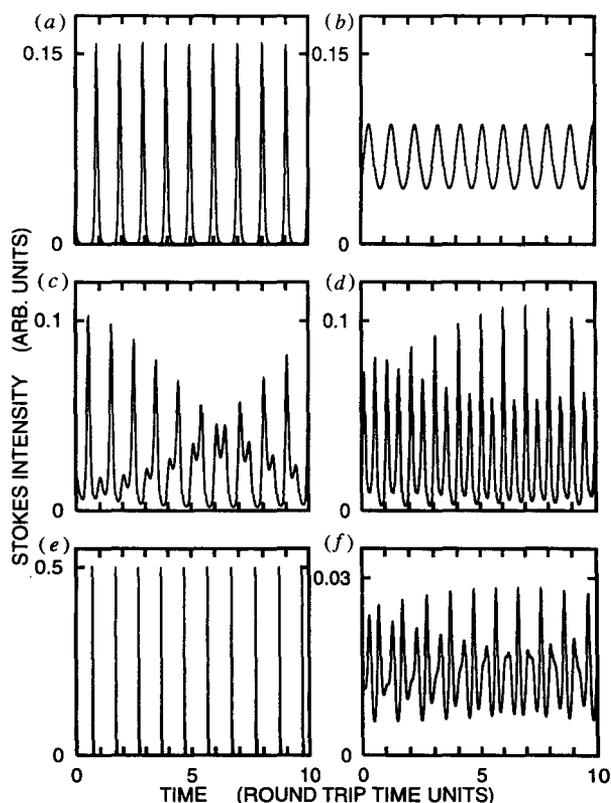


Figure 7. Temporal evolution of the Stokes intensity calculated for cavity parameters corresponding to the points (a–e) shown in figure 6. The frequencies appearing in the signals (measured on Fourier transforms) are: (a) $f_1 = 0.981$, (b) $f_1 = 1.035$, (c) $f_1 = 1.051$, $f_2 = 2.014$, (d) $f_1 = 1.055$, $f_2 = 2.022$, (e) $f_1 = 1.00$, (f) $f_1 = 1.058$, $f_2 = 2.04$, $f_3 = 3.019$ (FSR units).

carrying the Stokes emission and harmonic components introduced by the nonlinearities of the system lead to the quasiperiodic regime shown in figure 7(d). This behaviour persists so long as the pump power is higher than the upper boundary of the first side-mode domain of instability (figure 7(c)). Inside this domain, the first side mode, which experiences a higher gain, prevails in the nascent dynamics. The laser dynamics then follows the same scenario as in the previous case ($N = 20$). Here again, all the frequencies which characterize the temporal evolution of the laser increase slightly with increasing pump power.

For a still larger number of modes under the gain curve ($N = 100$), only periodic regimes at about the FSR frequency occur for pumping levels under the upper boundary of the first side-mode domain of instability. Figure 7(e) shows the pulsed regimes observed at twice the lasing threshold. It is in this condition that the sharpest pulses are obtained and their repetition rate is exactly one FSR. This result is roughly independent of N and seems to be generic for the Brillouin laser. Quasiperiodicity with three frequencies appears just below the upper bifurcation. Spectrum analysis and long-time observation is often required to characterize these regimes, but in figure 7(f) the three frequencies are well developed and easily distinguishable. In such conditions, the transients become very long and complex. For example, in figure 6, point f, the third side mode drives the destabilization, after that a

first side mode is excited as well, quasiperiodic oscillations with two frequencies then grow exponentially, and suddenly are interrupted as a second transient leads to the stationary regime of figure 7(f). The whole transient takes about 5000 round-trip times of integration.

Regimes with more than three frequencies are expected when the number of modes under the gain curve is increased further, and it would be interesting to determine whether chaos is encountered. Unfortunately, the transients are very long, and the number of points necessary for the discretization also becomes very large, requiring numerical calculations too long to be practical. As will be discussed in the next section, this calculation should be easier for a Fabry–Perot cavity configuration.

We have reproduced all of the results of the previous simulations with a model including the Kerr effect, the equations for which can be written as:

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z} = -E_s E_a + iu(|E_p|^2 + 2|E_s|^2)E_p \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} - \frac{\partial E_s}{\partial z} = E_p E_a^* + iu(|E_s|^2 + 2|E_p|^2)E_s \quad (3.5b)$$

where $u = (2\omega_p \epsilon_0 c \gamma_a / K^2) n_2$, and the nonlinear index $n_2 = 2.62 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \text{ W}^{-1}$ [42]. More or less, u is constant for any Brillouin laser in polarization preserving fibre. Taking a pump wavelength of 800 nm in the simulations, and, correspondingly, a damping rate $\gamma_a = 190 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ and a gain constant $K = 83 \text{ m s}^{-1} \text{ V}^{-1}$, we obtain $u = 9 \times 10^{-3}$. It appears that this perturbation does not qualitatively affect the observed dynamics, and only periodic and quasiperiodic regimes, similar to those previously described, are obtained.

3.3. About Fabry–Perot cavities with weak feedback

In a Fabry–Perot cavity with weak feedback, the forward pump field is much greater than the backward one. The gain on the Stokes field resulting from the interaction with this backward pump field can be neglected as a first approximation. The cavity can then be modelled by an equivalent ring cavity including the fibre and a freespace arm of the same optical length as the fibre. With this assumption, we can then apply the results of the stability analysis described in section 3.1. In this equivalent cavity, the steady-state distribution in the fibre is identical to that previously obtained in the ring cavity, and the periodicity of the probe gain is then also the same. However, the cavity FSR is now equal to $1/2T_f$, so that a cavity mode now coincides with each maximum of the gain. Considering, for example, the gain profile of figure 3, up to four side modes could grow from the steady state, whereas only two are observed in the ring configuration. Many side modes can grow with moderate fibre length in a Fabry–Perot cavity configuration. It is then not astonishing that periodic regimes at the sixth harmonics of the FSR can be obtained in such cavities [9]. As the number of optical fields involved in the dynamics becomes large the appearance of chaos is not excluded and it has been experimentally demonstrated [14].

On the whole, the mechanisms ruling the dynamics of a Fabry–Perot Brillouin laser with weak reflectivity mirrors are the same as for ring configurations, and similar behaviours are observed in both types of lasers. For a more rigorous description of the dynamics, the set of equations (2.3) must be completed by a similar one ($\partial/\partial z \rightarrow -\partial/\partial z$) for the reflected waves; the system dynamics are then described by two independent sets of three equations. We have investigated a system for which the backward and forward propagating optical fields are coupled by boundary conditions corresponding to Fresnel reflections (feedback of 4% at both ends). Numerical simulations show that the Fabry–Perot laser exhibits globally the same dynamics as the ring lasers [17]. The critical number of modes is then roughly

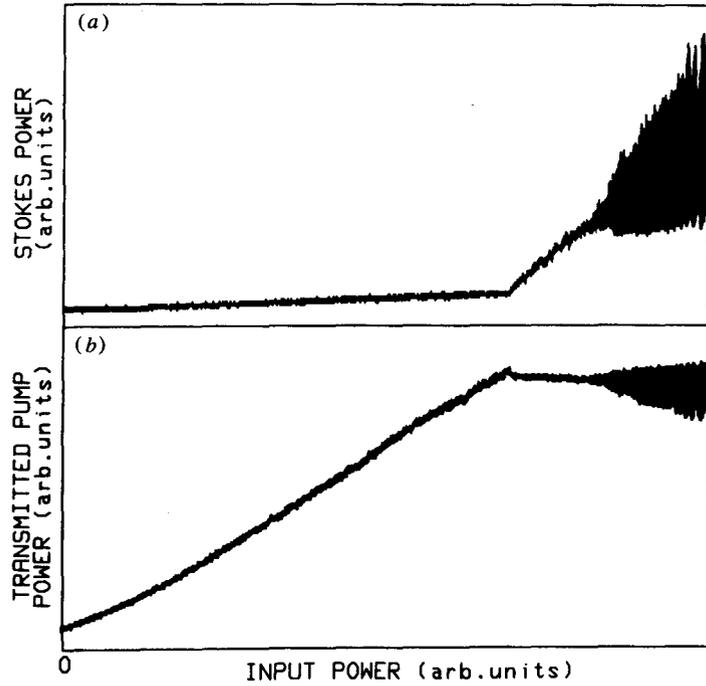


Figure 8. Experimental signals recorded while slowly sweeping the pump power injected into a 12 m fibre, (a) Stokes power, (b) transmitted pump power.

equal to 6. In order to validate experimentally this theoretical result, we have simply coupled a pump field ($\lambda_p = 800$ nm) into a 12 m long fibre. In this condition, the number of modes under the gain curve ($N = 7$) is just greater than the critical one. Figure 8 shows a typical result obtained by slowly increasing the input pump power. Stable SBS emission occurs just beyond the lasing threshold, and periodic instabilities appear, via a Hopf bifurcation, for higher input power. The frequency of the instabilities is roughly equal to the Fabry–Perot FSR (8.6 MHz).

4. Off-resonant case

4.1. Stability of the steady state

For short enough cavity lengths, we have previously shown that the Brillouin laser emission is stable when the cavity is tuned to resonance. The emission is carried by the mode which coincides with the gain peak. In the presence of a Stokes detuning, since the Brillouin gain bandwidth is usually larger than the cavity FSR, more than one mode may be able to carry the laser oscillation and intermode competition is not excluded, especially around the antiresonance condition.

First, let us emphasize that the variation of the Stokes detuning can be monitored not only by sweeping the cavity length, but also by sweeping the pump frequency, with the Stokes shift ($\omega_p - \omega_s^{\text{Res}}$) held constant. In both cases, the Stokes and pump detuning are simultaneously swept and their contributions to the laser dynamics are hardly distinguishable. With no pump feedback, this problem is avoided and we first consider this simpler case.

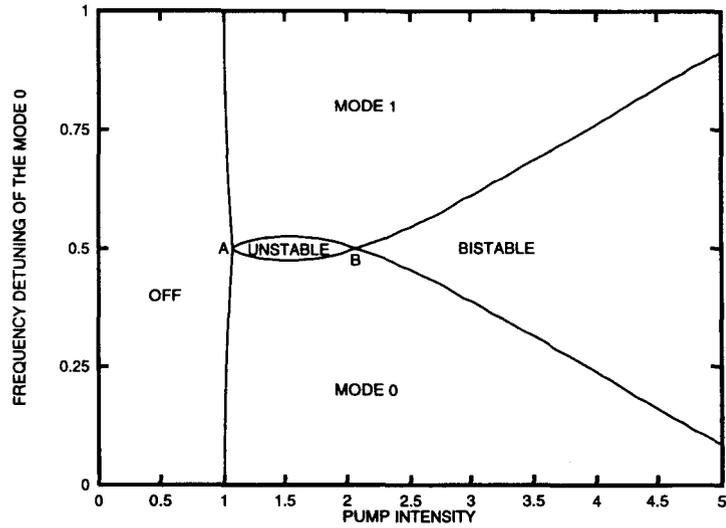


Figure 9. Domains of stability of the two adjacent modes ‘0’ and ‘1’ in the plane pump intensity μ^2 (normalized to its threshold value at the resonance μ_{ST1}^2), Stokes frequency detuning (FSR units). Parameters are the following: $r_s^2 = 13\%$, $r_p = 0$, $K = 83 \text{ m s}^{-1} \text{ V}^{-1}$, $L = 12 \text{ m}$ ($N = 7$) and $\Delta\nu^B = 60 \text{ MHz}$.

We have analysed the stability of the steady states corresponding to two adjacent cavity modes, respectively labelled ‘0’ and ‘1’ (see figure 1), as a function of the pump intensity and the Stokes detuning of the mode ‘0’. For each value of the intensity and detuning, the set of equations (2.3), completed by equation (2.10b) and by the boundary conditions (2.4), is numerically integrated for each cavity mode. As previously, the initial conditions are obtained by adding a small perturbation to the stationary solution. The evolution of this perturbation is observed over a large number of cavity round trips. At the stability boundaries of a particular active mode (figure 9), two behaviours are observed:

(i) An unstable regime, characterized by a periodic oscillation of the Stokes intensity at a frequency close to the FSR.

(ii) A change of active mode, evidenced by constant intensity with a rotation of the phase of the Stokes field at about the FSR frequency; the rotating frame used is no longer adapted to the chosen side-mode emission.

Figure 9 depicts the stability domains obtained with parameters characterizing the experiment described in the next section, which corresponds to a cavity with four modes under the gain curve, and a reinjection rate $r_s^2 = 13\%$ ($r_p = 0$). This map shows that the steady states are stable over a wide range of intensity and detuning, with the laser emission being monomode. Nevertheless, instabilities are observed in a small domain located around the antiresonance (A–B domain). In this region, the peak Brillouin gain is halfway between the two modes which thereby experience nearly the same gain. Since input pump power is low, so is the laser emission. Thus pump depletion and its phase rotation (see equation (2.7c)) over one round trip induced by one oscillating mode are too small to prevent emission on the other mode. The two modes can oscillate simultaneously, leading to a periodic modulation of the intensity at the beat frequency. Note that in the vicinity of the point A, the frequency of this beating is exactly the quantity $\text{FSR}/[1 + (\Delta\nu^{PC}/\Delta\nu^B)]$ (see (2.10b)). This points out that the two modes oscillate independently and their characteristics

are those of a linear combination of the steady state previously obtained. In particular, they both undergo the frequency pulling given by equation (2.10b). From A to B, the frequency increases by a few per cent; as was already observed in section 3, an increase of the pump power always causes an increase of the modulation frequencies. To the right of point B, the stability domains of the two modes overlap around the antiresonance. The Brillouin gain is then quite high and the oscillating mode strongly depletes the pump. In this interaction, the phase rotation of the pump field over one round trip is no longer negligible and, in addition, the signs of the phase rotation induced by each of the two adjacent modes are opposite (see (2.7c)). The coexistence of the two modes is then impossible, and, moreover, an active mode can prevent the other from being active, even if the suppressed mode is closer to the gain peak. The resulting domain of bistability becomes larger and larger as the pump intensity increases, even leading to multistability with side modes at much higher pump powers (not shown on this plot).

In order to illustrate these results, let us consider a quasi-static sweeping of the Stokes detuning, while the input pump intensity is held constant. Figure 10(a) shows the evolution of the stationary solutions for the pump and Stokes intensities at $z = L'$ and $z = 0$ respectively, during a sweeping of the mode '0' detuning over two FSR. Departing from the resonant condition, the intensity of the laser, emitting on mode '0', decreases. Around

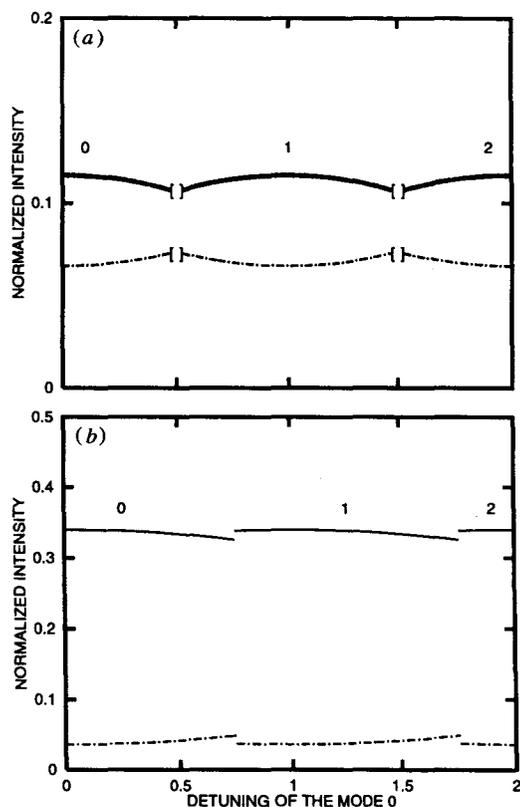


Figure 10. Stokes (full curve) and transmitted pump (chain curve) steady-state intensities while sweeping the Stokes detuning over two passive cavity FSR. (a) $\mu^2/\mu_{ST1}^2 = 1.8$ (the brackets delimit the unstable regions), (b) $\mu^2/\mu_{ST1}^2 = 3.6$. Other parameters are those of figure 9.

the antiresonance, the laser is unstable (see figure 9), and a multimode oscillation regime emerges. Beyond this unstable region, the emission restabilizes on mode '1' and the process recurs with the next side mode. For a higher pump power (figure 10(b)), mode '0' destabilizes well after the cavity has been tuned beyond antiresonance. In this case, the two adjacent modes cannot coexist and the emission abruptly changes from mode '0' to mode '1'. At this point, mode '1' has a higher gain than mode '0', and the field intensities undergo a discontinuous jump. Back and forth sweeping around the antiresonance creates a 'butterfly' shaped hysteresis cycle, symmetric with respect to the antiresonance. The width of this cycle increases with the emission strength.

We now investigate the effect of the pump feedback. In this configuration, the sweeping of the pump detuning induces strong variations of the intracavity pump intensity, and thus of the Stokes emission. As previously shown, the emission strength is the determining factor for the mode hop positions, so that the relative position of the pump and Stokes resonances will influence the system dynamics. However, this last parameter is fixed by the pump frequency, the Stokes shift and the exact cavity length, and may then have any value. We chose a value of this parameter which was as representative as possible for giving all the encountered behaviours. The steady-state solutions plotted in figure 11 are

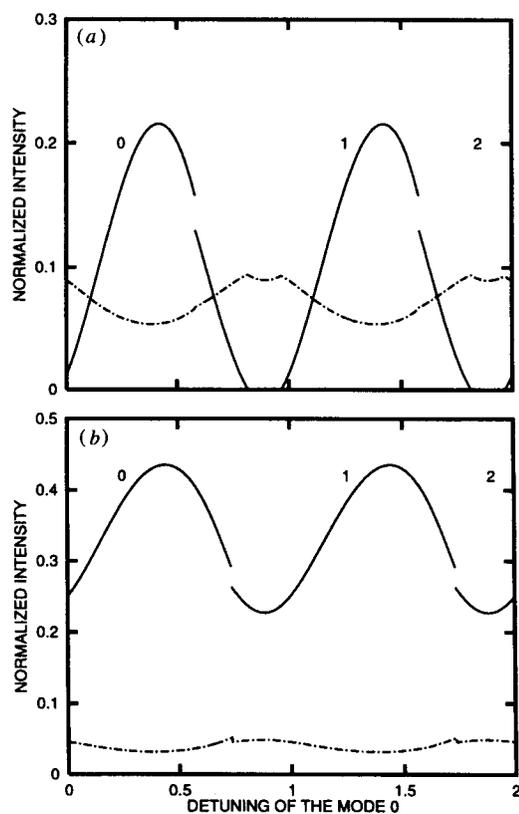


Figure 11. Stokes (full curve) and transmitted pump (chain curve) steady-state intensities while simultaneously sweeping the pump and Stokes detuning over two passive cavity FSR. (a) $\mu^2/\mu_{STI}^2 = 4.4$, (b) $\mu^2/\mu_{STI}^2 = 8.8$. Other parameters: $r_s^2 = r_p^2 = 13\%$, $K = 83 \text{ m s}^{-1} \text{ V}^{-1}$, $L = 12 \text{ m}$ ($N = 7$) and $\Delta\nu^B = 60 \text{ MHz}$.

calculated in conditions such that the pump frequency is resonant with a cavity mode when the Stokes detuning is equal to $0.4 \cdot \text{FSR}$. The strong intensity modulation, evident on these curves, is then obviously linked to the pump intracavity intensity changes with the pump detuning. At the origin of the sweeping in figure 11(a) the intracavity pump field is just high enough to initiate laser oscillation. As the frequency is increased the intracavity pump field increases, and so does the intensity of the laser emitting on the mode '0', which reaches its maximum when the pump frequency coincides with a cavity mode. As in the previous case, the mode hop, indicated by the discontinuous jump in intensity, does not occur at the exact antiresonance of the Stokes wave, but at a bit higher frequency. After the mode hop, mode '1' oscillates alone, its intensity decreases with the pump intracavity field down to the threshold, and reappears as the pump frequency approaches the next cavity resonance, then the process recurs. For a higher pumping level (figure 11(b)), the intracavity field is above the threshold for any frequency. The mode hop is displaced further again from the antiresonance point. Note that in this configuration, due to the frequency difference between pump and Stokes resonances, a back and forth frequency sweeping evidences an asymmetric cycle of hysteresis. But on the whole, the main effect of the pump feedback on the laser is the strong variations of the intracavity fields with the detuning, which do not reveal new dynamical features.

The plot in figure 9, calculated in particular conditions, is representative of the general behaviour of most Brillouin lasers. The reinjection rate r_s mainly acts on the width AB of the domain of instability, so that AB vanishes when r_s approaches 1. As the cavity length increases, the FSR decreases and the simultaneous emission of two adjacent modes is favoured, leading to an expansion of the unstable domain toward the resonances. For cavity lengths longer than L_c , the laser may, within a finite range of pump power, be unstable for any Stokes detuning [17]. Note that the fluctuations of the cavity length can induce erratic passages from stable to unstable domains, leading to a bursting phenomenon [11]. As the pump power increases and approaches the value corresponding to point B, the stable domains enlarge and the spacing of the bursts is expected to increase, whereas their duration should decrease [15]. Above B, only mode hops can be observed.

4.2. Experiments

The experimental set-up is presented in figure 12. The CW emission of a Ti-sapphire laser, operating at 800 nm, is used as a pump source. This laser has a 500 kHz linewidth and its frequency can be linearly swept over a range adjustable from 10 MHz to 30 GHz. The Brillouin ring laser is a 12 m long piece of polarization-preserving optical fibre. The fibre core diameter is $2.75 \mu\text{m}$ and the cut-off wavelength for monomode propagation is 630 nm. The cavity is closed by a beam splitter, and the power reinjection rate (r_s^2) is about 13%. A Faraday isolator can be inserted in the cavity to avoid pump feedback. A second beam splitter extracts the two counterpropagating beams out of the cavity for detection. With this set-up, pump frequency sweeping is easier to perform than cavity length sweeping, and the former is thus used to drive the Stokes detuning. The recordings of the pump and Stokes signals, obtained while sweeping the input pump frequency over two FSR, are presented in figures 13 and 14 (respectively, with and without the intracavity isolator). The sweeping rate is sufficiently slow ($< 100 \text{ Hz}$) to avoid dynamical hysteresis effects on the location of the bifurcation points. The agreement with the theoretical results of figures 10 and 11 is evident. In this experiment, the exact positions of the passive cavity resonances were unknown because of the shift of the cavity length. The origin of the frequency scale on each recording was suggested by the field variations and does not correspond to any

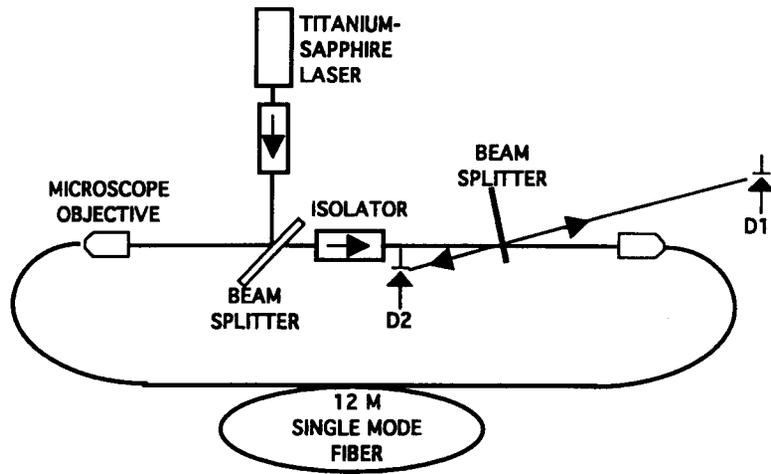


Figure 12. Schematic set-up of the experimental arrangement.

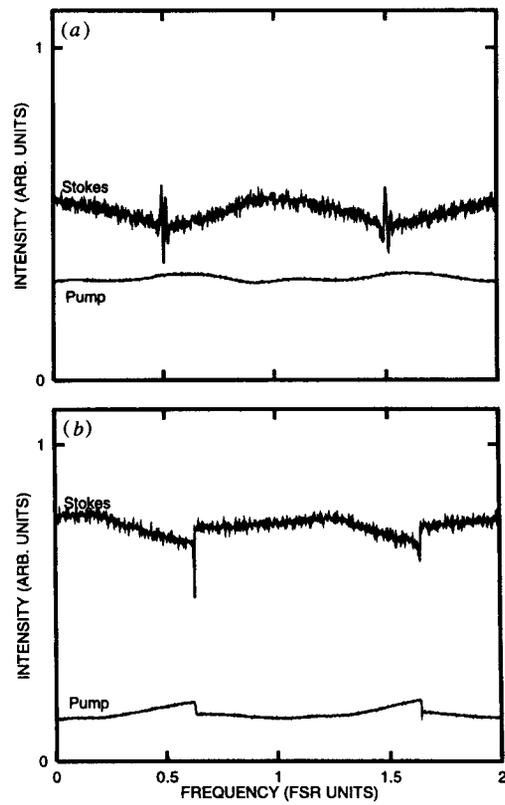


Figure 13. Experimental records of the backscattered Stokes and the transmitted intensity obtained while sweeping the pump-laser frequency in the presence of an intracavity isolator. The power of the injected pump is: (a) $P_{in} = 70$ mW and (b) $P_{in} = 140$ mW.

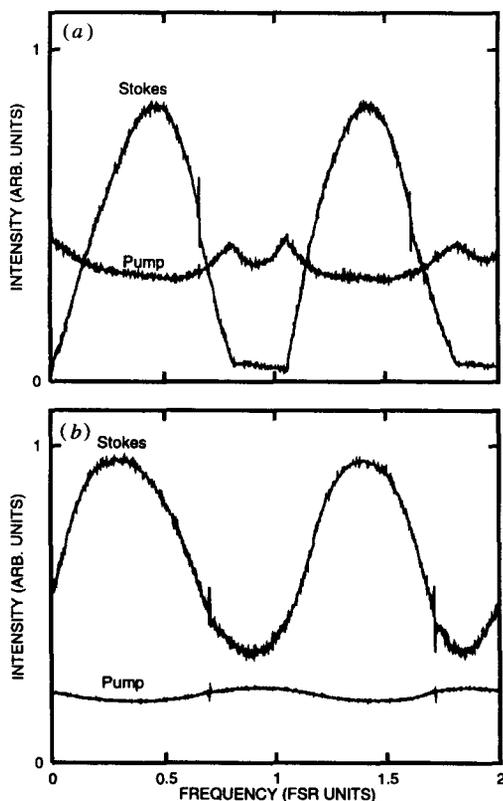


Figure 14. Same as figure 13, with a pump feedback. (a) $P_{in} = 70$ mW, (b) $P_{in} = 140$ mW.

measurement. The record shown in figure 13(a), obtained for an input power just above the lasing threshold, shows a domain of instability around the Stokes antiresonance frequency. These instabilities are periodic oscillations at a frequency close to the FSR and must result from a two-mode oscillation. Note that the weak modulation of the intensities at twice the FSR frequency is due to the step-index reflections at both ends of the fibre. At a higher input power (figure 13(b)), the discontinuous jump of the Stokes intensity reveals the presence of bistability between two modes close to the antiresonances. Of course the laser cannot switch abruptly from one mode to the next, and a small transient regime can still be observed at each mode hop. In the presence of pump feedback (figure 14), the strong variations of the field intensities with detuning do not change the global dynamics of the laser. In particular, discontinuous jumps are observed which point out the existence of a bistability between two adjacent modes in good agreement with theoretical results.

5. Dynamics in the presence of two Stokes components

At high enough pump power levels, the first Stokes component, downshifted by ω_a (the acoustic pulsation) from the pump frequency, may generate a second Stokes component downshifted by $2\omega_a$ from the pump frequency. This process can easily recur so that the second Stokes component may induce a third-order Stokes line and so on. The description of this effect requires a generalization of the three-wave SBS model which only deals with

two optical waves.

This section is devoted to: (i) the development of a theoretical model which takes into account the appearance of the second-order Stokes wave; (ii) the characterization of the steady states of this model, in particular a threshold condition for the growth of the second-order Stokes wave is derived; (iii) a numerical investigation of the stability of the steady state and (iv) the comparison of experimental results with the theoretical predictions.

5.1. Theoretical description

5.1.1. The five-wave model. Our aim is to generalize the usual three-wave SBS model to include a possible decay of the first-order Stokes into a second component through a second acoustic wave. The model then involves two acoustic waves and three optical waves. The new fields must fulfil boundary conditions similar to those given in section 2.1. As mentioned in section 4.1, for a given pump detuning the first Stokes detuning, and thus also the detuning of the second Stokes, is not predictable. The adjustment of these three detunings in order to reproduce experiments is a practically intractable problem. So, for the sake of simplicity, we will assume in the following that all the interactions are resonant, which means that each optical wave is in exact resonance with one passive cavity mode. This assumption might seem very rough but it is supported by the good qualitative agreement between theoretical and experimental results. To avoid any confusion, the fields and constants related to the first Stokes component will be marked with the index 1. Frequencies and momentum of the first Stokes field, and of the corresponding material wave already defined, satisfy the conservation laws given in section 2.1. The first Stokes wave $S_1(\omega_{s1}, k_{s1})$ gives rise to a backward-propagating acoustic wave $M_2(\omega_{a2}, k_{a2})$ and a forward-propagating second-order Stokes component $S_2(\omega_{s2}, k_{s2})$, the frequency and momentum of which are given by: $\omega_{s2} = \omega_{s1} - \omega_{a2}$ and $k_{a2} = k_{s1} + k_{s2}$. The acoustical momentum k_{aj} ($j=1,2$) then fulfils the dispersion relation $k_{aj} = \omega_{aj}/v$. The Stokes and acoustical waves are written, respectively, as:

$$S_j = S_j(z, t) \exp -i\omega_{sj} \left\{ t - (-1)^j \frac{nz}{c} \right\} + \text{CC} \quad (5.1)$$

$$M_j = \rho_j(z, t) \exp -i\omega_{aj} \left\{ t + (-1)^j \frac{z}{v} \right\} + \text{CC} \quad (j = 1, 2).$$

Taking into account the second Stokes and acoustical waves, the set of equations (2.3) becomes:

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z} + \frac{\beta}{2} E_p = -E_{a1} E_{s1} \quad (5.2a)$$

$$\frac{\partial E_{s1}}{\partial t} - \frac{\partial E_{s1}}{\partial z} + \frac{\beta}{2} E_{s1} = E_{a1}^* E_p - E_{a2} E_{s2} \quad (5.2b)$$

$$\frac{\partial E_{s2}}{\partial t} + \frac{\partial E_{s2}}{\partial z} + \frac{\beta}{2} E_{s2} = E_{a2}^* E_{s1} \quad (5.2c)$$

$$\frac{\partial E_{a1}}{\partial t} + E_{a1} = E_p E_{s1}^* \quad (5.2d)$$

$$\frac{\partial E_{a2}}{\partial t} + E_{a2} = E_{s1} E_{s2}^* \quad (5.2e)$$

where $E_p = (K/\gamma_a)P$; $E_{s1} = (K/\gamma_a)S_1$; $E_{s2} = (K/\gamma_a)S_2$; $E_{a1} = -i(K/\gamma_a\sigma)\rho_1$ and $E_{a2} = -i(K/\gamma_a\sigma)\rho_2$.

Let us recall that the length and time have been rescaled with $(\gamma_a n/c)z \rightarrow z$, $\gamma_a t \rightarrow t$. In order to describe Brillouin fibre ring lasers, these propagation equations have to be

completed by the boundary conditions:

$$\begin{aligned} E_p(z = 0, t) &= \mu + r E_p(z = L', t) \\ E_{s1}(z = L', t) &= r E_{s1}(z = 0, t) \\ E_{s2}(z = 0, t) &= r E_{s2}(z = L', t). \end{aligned} \quad (5.3)$$

The reinjection rate r is real and assumed to be identical for the three optical waves.

5.1.2. The laser steady state. As in the previous sections, the optical attenuation of the fibre can be neglected ($\beta = 0$). The steady-state solution is then obtained by transforming the field complex amplitudes to their modulus-phase form and by dropping the time derivatives. All the field phases are then independent of z . The equations for the moduli can be written:

$$\frac{dA_p}{dz} = -A_p A_{s1}^2 \quad (5.4a)$$

$$\frac{dA_{s1}}{dz} = -A_{s1} A_p^2 + A_{s1} A_{s2}^2 \quad (5.4b)$$

$$\frac{dA_{s2}}{dz} = A_{s2} A_{s1}^2 \quad (5.4c)$$

$$|E_{a1}| = A_p A_{s1} \quad (5.4d)$$

$$|E_{a2}| = A_{s1} A_{s2} \quad (5.4e)$$

where $A_p = |E_p|$, $A_{s1} = |E_{s1}|$ and $A_{s2} = |E_{s2}|$ fulfil the boundary conditions:

$$A_p(z = 0) = \mu + r A_p(z = L') \quad (5.5a)$$

$$A_{s1}(z = L') = r A_{s1}(z = 0) \quad (5.5b)$$

$$A_{s2}(z = 0) = r A_{s2}(z = L'). \quad (5.5c)$$

Below the first-order Stokes lasing threshold, the amplitudes of the two Stokes waves are equal to zero and the pump-field amplitude then linearly increases with the input pump field μ ($A_p(z) = A_p(0) = \frac{\mu}{1-r}$) as shown in figure 15. In this figure, and in the following one, the parameter μ is compared to a value $\mu_{\max} = 0.744$, which corresponds to the maximum input pump power injected in the fibre in our experiments. This allows an easier comparison between experimental and theoretical curves.

Between the first- and second-order Stokes lasing thresholds $A_{s2}(z) = 0$, equations (5.4) then reduce to the set of equations (2.6) with Δ_1 and $\phi = 0$. Taking into account these assumptions, the longitudinal profiles of the optical field can be calculated as in section 2.2. Figure 16(a) gives an example of these profiles obtained with a reinjection rate $r^2 = 0.13$. The laser threshold then is given by:

$$\mu_{ST1}^2 = \frac{\kappa}{\gamma_a} (1-r)^2$$

where κ is the passive damping rate for the fields in the cavity.

The evolution of the stationary optical fields versus the input pump field is shown in figure 15. It appears that the growth of the first-order Stokes field amplitude does not have the same effect on the pump field at $z = 0$ (figure 15(a)) and at $z = L'$ (figure 15(b)). Pump depletion is manifested through a reduction of the slope of the pump intensity at $z = 0$ whereas this slope changes sign at $z = L'$.

Above the second-order Stokes lasing threshold μ_{ST2} , the steady-state equations (5.4) have two invariants:

$$\theta = A_p^2(z) - A_{s1}^2(z) + A_{s2}^2(z) \quad (5.6a)$$

$$\Gamma = A_p^2(z) A_{s2}^2(z) \quad (5.6b)$$

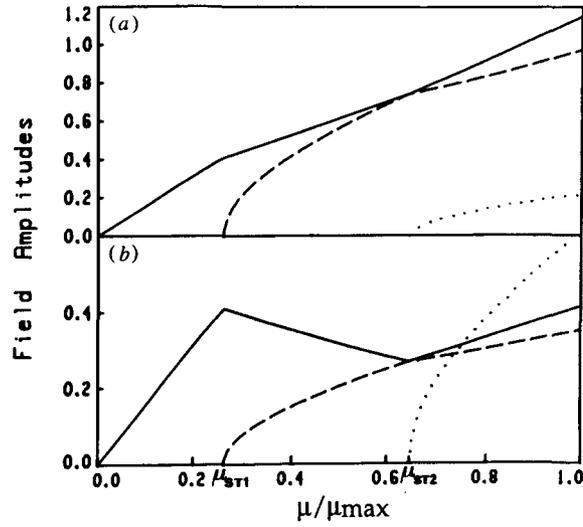


Figure 15. Steady-state characteristics of the pump (full curve), first-order Stokes (broken curve) and second-order Stokes (dotted curve) fields for $r^2 = 13\%$ and $L = 12$ m. (a) at $z = 0$, (b) at $z = L'$. The numerical values of μ_{ST1} and μ_{ST2} are respectively 0.263 and $0.648\mu_{\max}$.

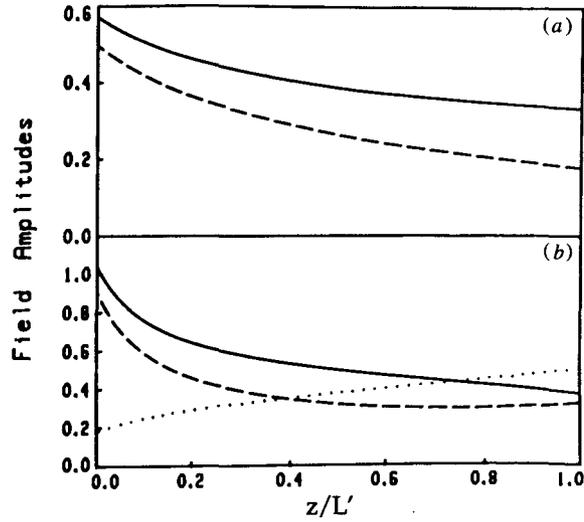


Figure 16. Steady-state longitudinal profiles of the pump (full curve), first-order Stokes (broken curve) and second-order Stokes (dotted curve) fields for $r^2 = 13\%$, $L = 12$ m, and (a) $\mu = 0.45\mu_{\max}$, (b) $\mu = 0.90\mu_{\max}$.

By combining (5.5a) and (5.5c) with (5.6b), we obtain:

$$A_p(0) = \frac{\mu}{1 - r^2} \quad (5.7a)$$

$$A_p(L') = \frac{\mu r}{1 - r^2}. \quad (5.7b)$$

This surprising result means that, for $\mu > \mu_{ST2}$, the evolution of the intracavity pump field versus μ does not depend on the medium but is only determined by the reinjection rate

r . The corresponding curve, called pump-field characteristic, is then a straight line and its slope is obviously lower than that obtained in the passive regime, for $\mu < \mu_{ST1}$ (figure 15). Appropriate combinations of equations (5.5a), (5.5c), (5.6a) and (5.7a) allow us to express the constants θ and Γ as functions of μ and $A_{s2}^2(0)$:

$$\theta = \frac{1+r^2}{r^2} A_{s2}^2(0) \quad (5.8a)$$

$$\Gamma = \frac{A_{s2}^2(0)\mu^2}{(1-r^2)^2}. \quad (5.8b)$$

Using equations (5.6), the steady-state equation (5.4c) leads to

$$\frac{dA_{s2}^2}{dz} = 2(A_{s2}^4 - \theta A_{s2}^2 + \Gamma) \quad (5.9)$$

Depending on the sign of the parameter $D = \Gamma - (\theta^2/4)$, three solutions are possible [43]. It is therefore necessary to determine this sign for each value of μ ($\mu > \mu_{ST2}$) and r . Using equations (5.5) (5.7) and (5.8), one obtains

$$D = \left(A_p(L')^2 - \frac{(1+r^2)^2}{4} A_{s2}(L')^2 \right) A_{s2}(L')^2. \quad (5.10)$$

Since $\frac{1}{4}(1+r^2)^2 < 1$ is always verified, D is positive if $A_{s2}(L') \leq A_p(L')$. So we have to analyse the case where $A_{s2}(L') > A_p(L')$, for this purpose, let us analyse the longitudinal evolution of the pump and second-order Stokes fields. Departing from $z = 0$, where A_{s2} is lower than A_p , A_{s2} and A_p respectively increase and decrease monotonically with z . These two fields become equal at $z = z_m$ (see figure 16(b)). At this point, equations (5.6) lead to: $\sqrt{\Gamma} - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} A_{s1}(z_m)^2 > 0$. As θ is a positive constant (see equation (5.8a)), $D = (\sqrt{\Gamma} - \frac{\theta}{2})(\sqrt{\Gamma} + \frac{\theta}{2})$ is always positive. Using the boundary condition (5.5c), (5.4) then yield:

$$A_{s2}^2(z) = \frac{\theta}{2} + \sqrt{D} \tan \left(2\sqrt{D}(z - L') + \arctan \left(\frac{(A_{s2}^2(0)/r^2) - (\theta/2)}{\sqrt{D}} \right) \right). \quad (5.11)$$

The stationary longitudinal profiles $A_{s1}^2(z)$ and $A_p^2(z)$ are then easily deduced from equations (5.6) (see figure 16(b)). The steady characteristics of the two Stokes fields are obtained numerically: for a given value of $A_{s2}^2(0)$, μ is computed by solving (5.11) written at $z = 0$. Figure 15(a) shows that the appearance of the second-order Stokes wave leads to a reduction of the slope of the first-order Stokes field characteristic at $z = 0$. At the second Stokes threshold μ_{ST2} ($A_{s2}(z) = 0$), equations (5.6a) and (5.8a) lead to $A_p^2(z) = A_{s1}^2(z)$. This result is illustrated in figure 15 which shows that the intersection of the pump and of the first-order Stokes field characteristics occurs at the second-order Stokes lasing threshold. At this point, the longitudinal field profiles are given by (2.8) with $\eta = 1$. Furthermore, these equations yield the analytical expression for μ_{ST2} :

$$\mu_{ST2}^2 = \frac{\kappa(1-r^2)^3}{2\gamma_a r^2 |\ln r|}. \quad (5.12)$$

The ratio of the first and second Stokes thresholds then can be written as:

$$\frac{\mu_{ST2}}{\mu_{ST1}} = \sqrt{\frac{(1-r^2)^3}{2r^2(1-r)^2 |\ln r|}}. \quad (5.13)$$

In the limit of large values of r ($r \approx 1$), this ratio is: $\mu_{ST2}/\mu_{ST1} = \sqrt{(1+r)^3/2r^2}$, and tends to two [25, 26]. As the laser steady states are now well characterized, their stability

can be theoretically studied by linearizing equations (5.2) around the stationary solution. This procedure is quite tedious, so we will then restrict ourselves to the numerical study presented in the next section.

5.2. Five-wave dynamics: numerical study

As in section 4, the parameters used in the numerical simulations are those describing our experiments. The ring-laser dynamics can be summarized in the bifurcation diagram presented in figure 17. It is obtained by numerically solving equations (5.4) and (5.5) for a given μ and for long enough time to ensure that the system evolution is well after the transient process. Then, we plot the maximum values reached by $A_{s1}(z = 0, t)$ inside a final time domain which is much longer than the longest characteristic time of the system (namely the cavity round-trip time T_r). Finally, starting from initial conditions characterizing the state of the system at the end of the integration, the process is repeated for a greater value of μ . The broken curve in figure 17 represents the analytically calculated stationary state for $\beta = 0$. Above the first-order Stokes lasing threshold, the computed points of the bifurcation diagram nearly coincide with the analytical solution, the difference coming from the optical attenuation introduced in simulations. The stability of the system, already discussed in section 3, is then related to the monomode character of the first-order Stokes laser emission in short enough cavities. As shown in figure 17, this stability persists up to and well above the second-order Stokes lasing threshold. However, when μ becomes greater than μ_c , the system abruptly loses stability and periodic regimes are then reached. Further increases in the value of μ lead to the emergence of quasiperiodic regimes. The destabilization scenario described for $A_{s1}(z = 0, t)$ is the same as for the dynamical variables $A_p(z = 0, t)$ and $A_{s2}(z = 0, t)$. As illustrated in figure 18(a) and (b), the frequency of the periodic instabilities is equal to the cavity FSR. Quasiperiodicity is manifested through the appearance of a low-frequency envelope which modulates the

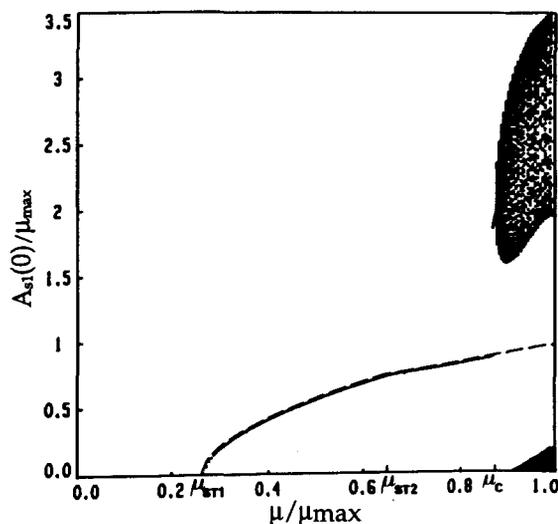


Figure 17. Numerically computed bifurcation diagram of the Brillouin fibre ring laser. The broken curve represents the analytically calculated system steady state. The bifurcation occurs at $\mu_c = 0.870\mu_{max}$.

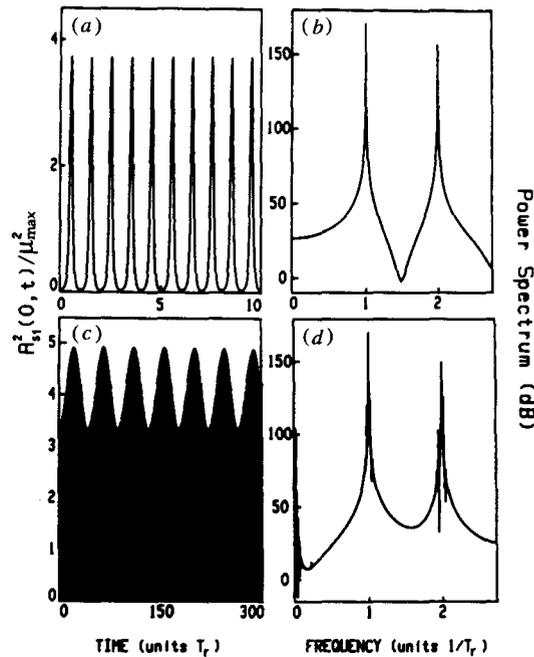


Figure 18. Temporal evolution of the first-order Stokes wave intensity and associated power spectrum for: (a), (b) periodic state ($\mu = 0.875\mu_{\max}$); (c), (d) quasiperiodic state ($\mu = 0.882\mu_{\max}$).

oscillations at the FSR frequency (figure 18(c)). The spectral analysis reveals a multipeak structure which superimposes itself on the spectrum of the periodic signal (figure 18(d)).

Let us now describe more precisely the nature of the bifurcation occurring between the stationary and the periodic state at $\mu = \mu_c$. As already mentioned, the loss of stability is abrupt; this suggests sweeping μ back and forth around μ_c . This sweeping has been performed with the method used to compute the bifurcation diagram of figure 17 and the result is presented in figure 19. By increasing μ , the stationary solution becomes unstable for $\mu > \mu_c$ and the system precipitates towards another attractor that is a limit cycle. The backward sweep shows that the switching from the limit cycle to the steady state occurs for $\mu = \mu_s$ with $\mu_s < \mu_c$, giving evidence of a generalized bistability between a limit cycle and the stationary solution. The bifurcation associated with the coexistence of these two attractors is then a subcritical Hopf bifurcation [44]. Note that the width of the hysteresis is small and the generalized bistability could be difficult to find experimentally. Another way to characterize the nature of the bifurcation comes from continuously sweeping the control parameter at a very slow rate. As shown in figure 20, the discontinuous jump from the steady state to the limit cycle then is expressed through an explosive growth of the oscillation amplitude. Even if it generates dynamical effects on the position of the bifurcation points, this form of sweeping provides a global description of the laser dynamics. Moreover, as it is easy to implement experimentally, we will use it in section 5.3.

When the system is evolving on the limit cycle, information concerning the energy exchanges between the optical waves can be obtained by considering the field longitudinal profiles inside the fibre at different times. As shown in figure 21, the unstable regimes are characterized by the interactions of Stokes pulses which propagate along the optical fibre.

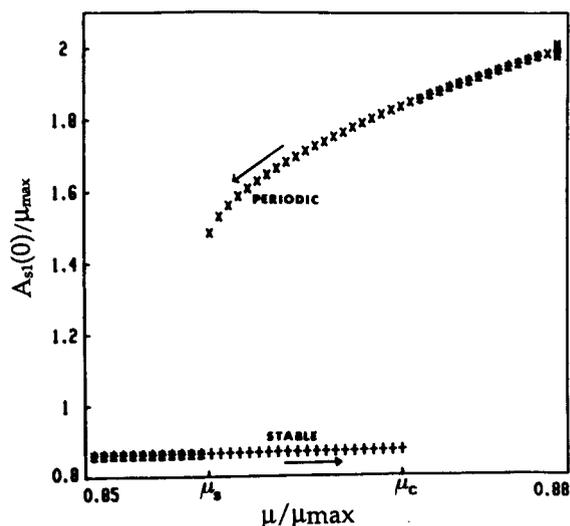


Figure 19. Numerical bifurcation diagram illustrating the coexistence of the stationary solution and a limit cycle. The '+' indicate the system state as the control parameter increases. The 'x' correspond to the system state as μ decreases. The numerical value of μ_s is $0.857\mu_{max}$.

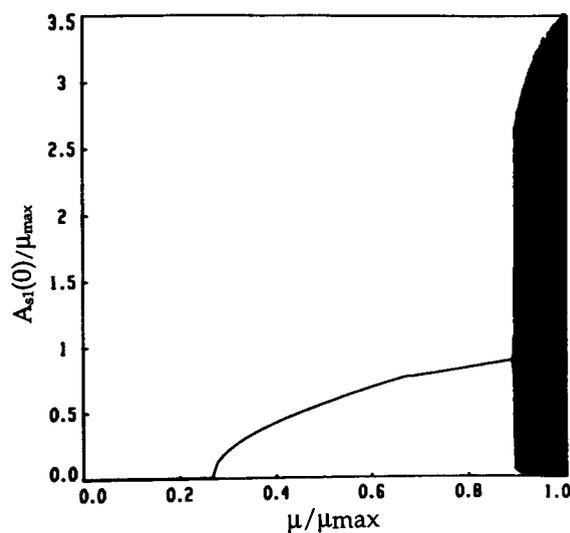


Figure 20. Evolution of the amplitude of the first-order Stokes field as the control parameter μ is slowly increased.

In order to understand the nature of these interactions, let us consider initial conditions such that a first-order Stokes pulse (broken curve) is localized near $z = L'$ (figure 21(a)). This backward-propagating pulse encounters a forward-propagating second-order Stokes pulse (dotted curve) and is depleted (figure 21(b)). The forward-propagating pulse then exhibits noticeable gain and pursues its propagation towards the output end of the fibre. During this time, the first-order Stokes pulse encounters a fresh pump envelope which is then strongly depleted while the pulse amplitude grows (figure 21(c) and (d)). Finally, because of the

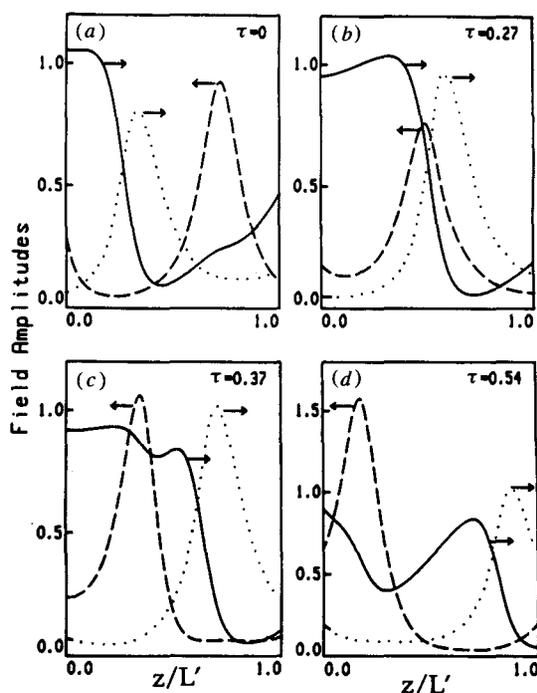


Figure 21. Longitudinal profiles of the fields along the fibre axis at different times: $\tau = t/T_r$; (full curve) pump, (broken curve) first-order Stokes and (dotted curve) second-order Stokes. The system evolves on the limit cycle ($\mu = 0.876\mu_{\max}$).

cavity, the amplitudes of the two Stokes pulses are multiplied by r and the process starts again. However, the periodic motion thus described rapidly disappears when μ increases (figure 17). During the interaction between the two Stokes pulses, the first-order Stokes pulse is depleted and the trailing edge of the second-order Stokes pulse is then less amplified than its leading edge (figure 21(a) and (b)). For high enough pumping rates, the depletion can be so important that the ‘centre of mass’ of the second-order Stokes pulse is slightly shifted in the forward direction. A similar process occurs during the interaction between the pump and the first-order Stokes pulse; its leading edge is more amplified than its trailing edge which interacts with an already depleted pump (figure 21(d)). The ‘centre of mass’ of the first-order Stokes pulse is then shifted in the backward direction. So, from one cavity round trip to the other, the two Stokes pulses collide at different positions inside the optical fibre and then experience a slightly different gain. This effect is thus responsible for the emergence of the quasiperiodic regimes.

Up to now, we have limited our study to a fibre length of 12 m, but the interaction length obviously plays an important role in the system dynamics. This is illustrated in the bifurcation diagrams shown in figure 22(a) and (b), respectively computed for $L = 6$ m and 36 m, and a reinjection rate of 13%. These lengths are chosen shorter than the critical length $L_c (= 48$ m) so that the emission is stable up to second-order Stokes threshold. The first surprising feature is the stability of the emission on a large domain beyond μ_{ST2} whatever the length of the laser. In the unstable domains, the two lasers show quite different behaviours. The shorter one shows a rich dynamical variety. As μ increases, we successively observe periodic regime (T), quasiperiodic regime, and chaos, followed by $2T$ and T regimes. For

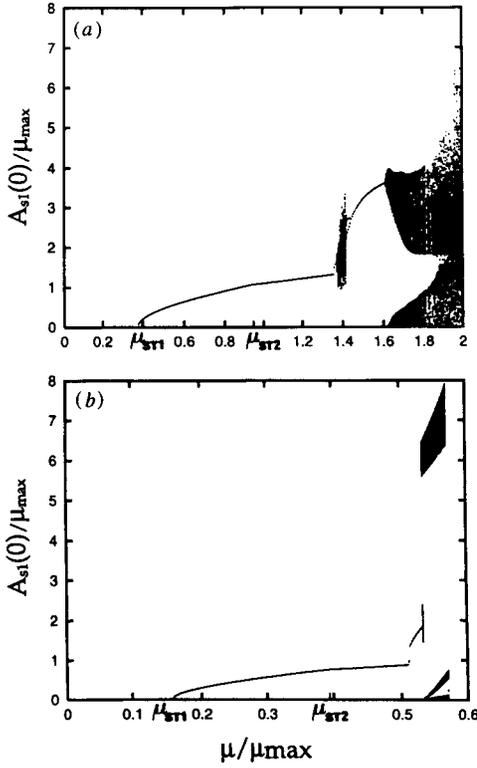


Figure 22. Numerically computed bifurcation diagram of Brillouin fibre ring lasers, $r^2 = 13\%$, (a) $L = 6$ m, (b) $L = 36$ m.

higher values of μ , quasiperiodicity and chaos are retrieved. In contrast, for the 36 m laser, the periodic regime abruptly leads to chaos. Note that numerical simulations also exhibit chaos in 12 m long fibre, but it arises for input power larger than the threshold of the third-order Stokes component, for which the five-wave model fails.

Another crucial parameter is the reinjection rate r and an exhaustive investigation of the influence of the fibre length and reinjection rate on the laser dynamics remains an open subject.

We have also investigated the influence of a Kerr effect on the laser dynamics. The equations for the optical can then be written:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z} + \frac{\beta}{2} E_p &= -E_{a1} E_{s1} + iu(|E_p|^2 + 2|E_{s1}|^2 + 2|E_{s2}|^2) E_p \\
 \frac{\partial E_{s1}}{\partial t} - \frac{\partial E_{s1}}{\partial z} + \frac{\beta}{2} E_{s1} &= E_{a1}^* E_p - E_{a2} E_{s2} + iu(2|E_p|^2 + |E_{s1}|^2 + 2|E_{s2}|^2) E_{s1} \\
 \frac{\partial E_{s2}}{\partial t} + \frac{\partial E_{s2}}{\partial z} + \frac{\beta}{2} E_{s2} &= E_{a2}^* E_{s1} + iu(2|E_p|^2 + 2|E_{s1}|^2 + |E_{s2}|^2) E_{s2}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

where $u = 9 \times 10^{-3}$ is defined in section 3.2. Partially degenerate four-wave mixing processes induced by the Kerr effect have been neglected here, because they involve terms which do not fulfil the phase-matching condition. A comparison between figures 17 and 23, plotted with the same parameters, shows that the Kerr effect does not change significantly the position of the threshold and of the bifurcation point. However, in the unstable domain, the pulse shape is slightly modified. This result shows that the Kerr effect remains negligible, at least inside the pump power domain investigated here (up to $\mu = 3.8\mu_{ST1}$).

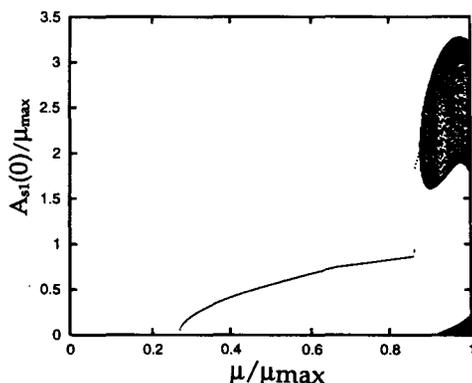


Figure 23. Numerically computed bifurcation diagram of the Brillouin fibre ring with $r^2 = 13\%$, $L = 12$ m and in the presence of the Kerr effect.

5.3. Experiments

The experimental set-up used for the observation of multiple SBS in a ring cavity is the same as shown in figure 12, with the intracavity optical isolator removed. In this ring configuration, each optical wave propagates in a single direction and the counterpropagating beams are spatially separated by the low-reflectivity beam splitter inserted in the cavity. The forward-propagating (pump + even Stokes components) and backward-propagating (odd Stokes components) beam are then respectively detected by the silicium photodiodes D_1 and D_2 . An external Fabry–Perot interferometer (not displayed in figure 12) was used to monitor the emergence of the different Stokes components.

In the theoretical model, all the optical fields are assumed to be in exact resonance with the cavity. This assumption is certainly not fulfilled in the experiments and any quantitative experimental verification of the theoretical results (e.g. the threshold values) is then delicate. Nevertheless, a qualitative comparison between the theoretical and experimental results shows that our model incorporates all the essential ingredients for characterizing the laser dynamics.

An overview of the system dynamics can be obtained by slowly sweeping the input pump power with the aid of an acousto-optic modulator. The signal recorded by the photodiode D_1 during this sweeping is presented in figure 24(a). Since the frequency shift between the pump and the second-order Stokes waves is several tens of GHz [36], this signal is directly proportional to the sum of the two field intensities, that is $A_p^2(z = L') + A_{s2}^2(z = L')$. The signal recorded at the same time by photodiode D_2 is shown in figure 24(b). It is proportional to the first-order Stokes intensity ($A_{s1}^2(z = 0)$). A direct comparison between figures 20 and 24(b) reveals a good qualitative agreement between the experimental and the numerically predicted behaviours. In particular, the explosive growth of the instability amplitude observed experimentally confirms the existence of a subcritical Hopf bifurcation between the stationary and the time-dependent states. For input pump powers lower than the second-order Stokes lasing threshold, the signal presented in figure 24(a) can be directly compared to the pump-field variation in figure 15(b). Above this threshold, the two forward-propagating waves are detected simultaneously and the observed instabilities are then linked to the oscillation of the two associated dynamical variables.

Temporal analysis of the instabilities observed on the first-order Stokes emission (photodiode D_2) has been performed at constant input pump powers. Some examples of periodic and quasiperiodic signals and of their associated power spectra are depicted in figure 25. As shown in figure 25(a) and (b), the periodic instabilities are characterized by

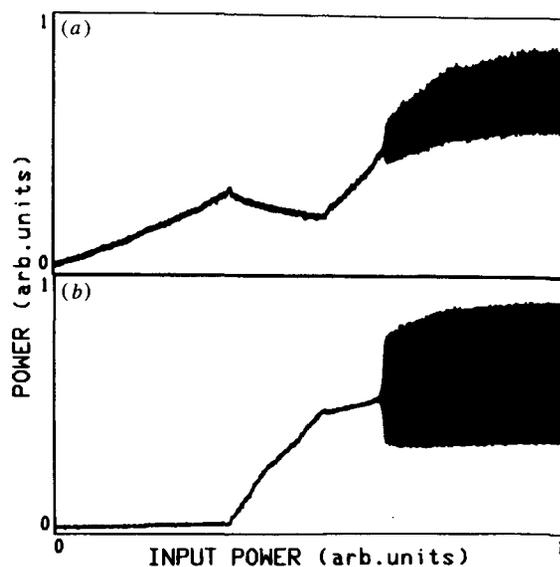


Figure 24. Power detected (a) in the forward direction (photodiode D_1), (b) in the backward direction (photodiode D_2) while slowly sweeping the input pump power.

a frequency equal to the cavity FSR (16.9 MHz). By increasing the input pump power, quasiperiodic instability regimes of figure 25(c) are observed. As shown in figure 25(d), the corresponding power spectra become richer with a low frequency of about 600 kHz. In other experimental conditions with a higher coupled power and a lower feedback efficiency, this low frequency changes to about 3.3 MHz (figure 25(e) and (f)). This result, not mentioned in section 5.2, is, however, well confirmed by numerical computations performed with other sets of parameters. Finally, let us emphasize that, whatever the conditions, no chaotic regimes have been seen in our experiments.

6. Conclusion

In this paper, we have first investigated the model which is now commonly used to describe a Brillouin fibre ring laser emitting one Stokes component. Assuming a resonant interaction between the pump and Stokes fields, we have performed a stability analysis of the steady state of the laser. This allowed us to draw the portrait of the unstable domains for a large range of the system parameters. The number N of cavity modes under the spontaneous Brillouin gain curve appears to be the most important parameter governing the dynamics. As was expected from the stability analysis, the dynamics of the Stokes field, when numerically computed, exhibits increasingly rich regimes with increasing values of N . Periodic and quasiperiodic regimes with two and three frequencies are reported here, but more frequencies could be observed for greater values of N . This study also emphasizes that the coherent three-wave model can describe most of the dynamical regimes reported experimentally in previous work, the effect of the Kerr nonlinearity remaining negligible.

For a small value of N , for which the laser emission is stable at resonance, we have underlined the importance of the detuning parameter on the system dynamics. We have observed and analysed a bistability of the system, between emission of one of two cavity modes lying closest to the maximum of the spontaneous gain.

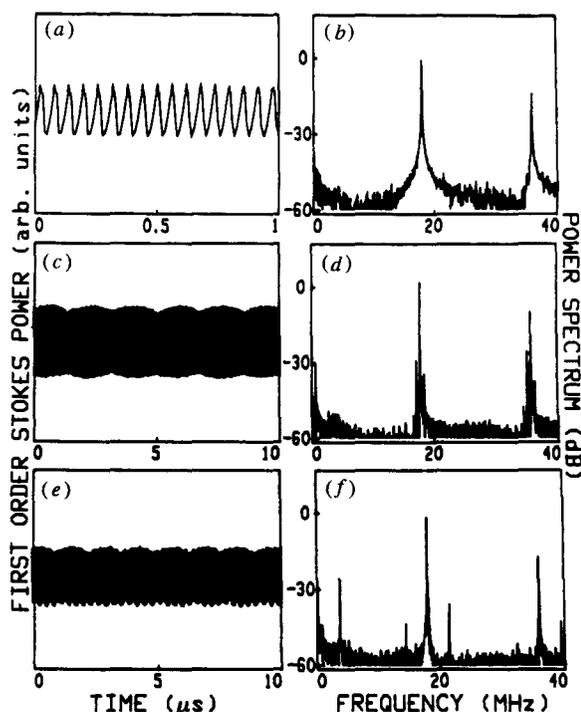


Figure 25. Temporal evolution of the first-order Stokes power and associated power spectrum. (a), (b) Periodic instabilities at the FSR frequency. (c), (d) and (e), (f) Quasiperiodic instabilities.

Returning to the assumption of resonant interactions, we have studied theoretically the dynamics of a Brillouin laser emitting two Stokes components. It was demonstrated that the system destabilizes, via a subcritical Hopf bifurcation, towards periodic and quasiperiodic modulation regimes. These results are in good qualitative agreement with our experiments. We recall, however, that this scenario was obtained for particular conditions of cavity length and finesse. Through numerically computed bifurcation diagrams, we have shown that changes of the cavity length could drastically change the dynamics of the system, leading to a period doubling cascade and chaotic regimes.

These results give an overview of the dynamical behaviours observable in Brillouin ring lasers with polarization preserving fibres. Some insights on the behavior of Fabry–Perot lasers are also given, a more detailed analysis is in progress, which shows that the occurrence of chaos is possible [14], even without Kerr nonlinearity. Owing to their stability, Brillouin lasers with short fibres and high cavity finesse could provide high-power emission with very narrow bandwidth. However, care should be taken to avoid the Stokes cascade; for this purpose, we are now investigating the use of highly selective Bragg reflectors photoinduced in the fibre core.

Acknowledgments

The authors wish to thank N B Abraham for a careful reading of the manuscript. The Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne is Unité de Recherche Associée au CNRS. The

Centre d'Etude et de Recherches Lasers et Applications (CERLA) is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord/Pas de Calais and the Fonds Européen de Développement Economique des Régions.

References

- [1] Ippen E P and Stolen R H 1972 Stimulated Brillouin scattering in optical fibres *Appl. Phys. Lett.* **21** 539
- [2] Hill K O, Kawasaki B S and Johnson D C 1976 CW Brillouin laser *Appl. Phys. Lett.* **28** 608
- [3] Kawasaki B S, Johnson D C, Fuji Y and Hill K O 1978 Bandwidth-limited operation of a mode-locked Brillouin parametric oscillator *Appl. Phys. Lett.* **32** 429
- [4] Ponikvar D R and Ezekiel S 1981 Stabilized single-frequency stimulated Brillouin fibre ring laser *Opt. Lett.* **6** 398
- [5] Bar-Joseph I, Friesem A A, Lichtman E and Waarts R G 1985 Steady and relaxation oscillations of stimulated Brillouin scattering in single-mode optical fibres *J. Opt. Soc. Am. B* **2** 1606
- [6] Bar-Joseph I, Dienes A, Friesem A A, Lichtman E, Waarts R G and Yaffe H H 1986 Spontaneous mode locking of single and multi mode pumped SBS fibre lasers *Opt. Commun.* **59** 296
- [7] Stokes L F, Chodorow M and Shaw H J 1982 All-fibre stimulated Brillouin laser with submilliwatt pump threshold *Opt. Lett.* **7** 509
- [8] Smith S P, Zarinetchi F and Ezekiel S 1991 Narrow-linewidth stimulated Brillouin fibre laser and applications *Opt. Lett.* **16** 393
- [9] Gaeta A L and Boyd R W 1992 Stimulated Brillouin scattering in the presence of external feedback *Int. J. Nonlinear Opt. Phys.* **1** 581
- [10] Douay M, Bernage P and Niay P 1990 Estimation of the mean coherence time of stimulated Brillouin scattering in an optical fibre using unbalanced heterodyne interferometry *Opt. Commun.* **81** 231
- [11] Dämmig M, Zinner G, Mitschke F and Weilling H 1993 Stimulated Brillouin scattering in fibres with and without external feedback *Phys. Rev. A* **48** 3301
- [12] Picholle E, Montes C, Leycuras C, Legrand O and Botineau J 1991 Observation of dissipative superluminescent solitons in a Brillouin fibre ring laser *Phys. Rev. Lett.* **66** 1454
- [13] Montes C, Mahmoud A and Picholle E 1994 Bifurcation in a cw-pumped Brillouin fibre ring laser: coherent soliton morphogenesis *Phys. Rev. A* **49** 1344
- [14] Harrison R G, Ripley P M and Lu W 1994 Observation and characterization of deterministic chaos in stimulated Brillouin scattering with weak feedback *Phys. Rev. A* **49** R24
- [15] Lu W, Johnstone A and Harrison R G 1992 Deterministic dynamics of stimulated scattering phenomena with external feedback *Phys. Rev. A* **46** 4114
- [16] Yu D, Lu W and Harrison R G 1995 Physical origin of dynamical stimulated Brillouin scattering in optical fibres with feedback *Phys. Rev. A* **51** 669
- [17] Randoux S, Lecoeuche V, Ségard B and Zemmouri J 1995 Dynamical analysis of Brillouin fibre lasers: an experimental approach *Phys. Rev. A* **51** R4345
- [18] Nicati P A, Toyama K, Huang S and Shaw H J 1993 Temperature effects in a Brillouin fibre ring laser *J. Opt. Soc. Am.* **18** 2123
- [19] Nicati P A, Toyama K and Shaw H J 1995 Frequency stability of a Brillouin fibre ring laser *J. Light Technol.* **13** 1445
- [20] Lecoeuche V, Randoux S, Ségard B and Zemmouri J 1996 Dynamics of Brillouin fibre ring lasers: off-resonant case *Phys. Rev. A* **53** 2822
- [21] Narducci L M, Tredicce J R, Lugiato L A, Abraham N B and Bandy D K 1986 Mode-mode competition and unstable behaviour in a homogeneously broadened ring laser *Phys. Rev. A* **33** 1842
- [22] Lecoeuche V, Ségard B and Zemmouri J Modes of destabilization of the Brillouin fibre ring lasers *Opt. Commun.* to be published
- [23] Hill K O, Johnson D C and Kawasaki B S 1976 CW generation of multiple Stokes and anti-Stokes Brillouin-shifted frequencies *Appl. Phys. Lett.* **29** 185
- [24] Botineau J, Leycuras C, Montes C and Picholle E 1989 Diffusion Brillouin stimulée dans un laser en anneau à fibre optique *Ann. Télécommun.* **44** 173
- [25] Garus D and Hereth R 1992 Cascaded stimulated Brillouin scattering in high finesse all-fibre ring resonators *Nonlinear Dynamics in Optical Systems (June 22–26, Alpbach, Austria)* (Technical Digest Series 16) p TuB2-1/129
- [26] Toyama K, Huang S, Nicati P A, Kim B Y and Shaw H J 1993 Generation of multiple Stokes waves in a Brillouin fibre ring laser *Optical Fibre Sensor Conf. (Firenze, Italy)* p Tu1.3/11.

- [27] Montes C 1983 Efficient way to prevent reflection from stimulated Brillouin backscattering *Phys. Rev. Lett.* **50** 1129
- [28] Montes C 1985 Reflection limitation by driven stimulated Brillouin rescattering and finite-bandwidth spectral interaction *Phys. Rev. A* **31** 2366
- [29] Montes C and Coste J 1987 Optical turbulence in multiple stimulated Brillouin backscattering *Laser Part. Beams* **5** 405–11
- [30] Randoux S, Lecoche V, Ségard B and Zemmouri J 1995 Dynamical behaviour of a Brillouin fibre ring laser emitting two Stokes components *Phys. Rev. A* **52** 221
- [31] Kaiser W and Maier M 1972 *Laser Handbook* ed F T Arrechi and E O Schulz-Dubois (Amsterdam: North-Holland) p 1077
- [32] Botineau J, Leycuras C, Montes C and Picholle E 1994 A coherent approach to stationary stimulated Brillouin fibre amplifiers *Ann. Télécommun.* **49** 479
- [33] Boyd R W, Rzazewski K and Narum P 1990 Noise initiation of stimulated Brillouin scattering *Phys. Rev. A* **42** 5514
- [34] Chow C C and Bers A 1993 Chaotic stimulated Brillouin scattering in a finite-length medium *Phys. Rev. A* **47** 5144
- [35] Azuma Y, Shibata N, Horiguchi T and Tateda M 1988 Wavelength dependence of Brillouin-gain spectra for single-mode optical fibres *Electron. Lett.* **24** 250
- [36] Agrawal G P 1989 *Nonlinear Fiber Optics* (New York: Academic)
- [37] Takushima Y and Kikuchi K 1995 Spectral gain hole burning and modulation instability in a Brillouin fibre amplifier *Opt. Lett.* **20** 34
- [38] Johnson R V and Marburger J H 1971 Relaxation oscillations in stimulated Raman and Brillouin scattering *Phys. Rev. A* **4** 1175
- [39] Lugiato L A, Narducci L M, Eschenazi E V, Bandy D K and Abraham N B 1985 Multimode instabilities in a homogeneously broadened ring laser *Phys. Rev. A* **32** 1563
- [40] Ségard B, Macke B, Lugiato L A, Prati F and Brambilla M 1989 Multimode instability in optical bistability *Phys. Rev. A* **39** 703
- [41] Montes C, Mahmoud A, Botineau J and Picholle E 1994 Three-wave soliton morphogenesis in a CW-pumped Brillouin fibre ring laser *Fluctuation Phenomena: Disorder and Nonlinearity (September 26–30, Madrid)* ed A R Bishop, S Jimenez and L Vazquez (Singapore: World Scientific) p 397
- [42] Kim K S and Stolen R H 1994 Measurement of the nonlinear index of silica-core and dispersion-shifted fibres *Opt. Lett.* **19** 257
- [43] Gröbner W and Hopfmeister N 1949 *Integraltafel* (Berlin: Springer)
- [44] Thompson J M T, Stewart H B and Ueda Y 1994 Explosive and dangerous bifurcations in dissipative dynamical systems *Phys. Rev. E* **49** 1019

COMPLEMENTS

C.1 Verrouillage de modes

Nous avons présenté sur la figure 7 de l'article une série de signaux temporels montrant l'éventail des comportements dynamiques d'un laser Brillouin en anneau à faible coefficient de recouplage. Dans le contexte de l'article, il s'agissait avant tout d'illustrer les résultats de l'analyse de stabilité, en mettant en évidence les zones de paramètres pour lesquels les premières, secondes ou troisièmes paires de modes latéraux sont les agents moteurs de la dynamique. Nous apporterons ici quelques précisions au sujet des régimes quasi-périodiques à trois fréquences.

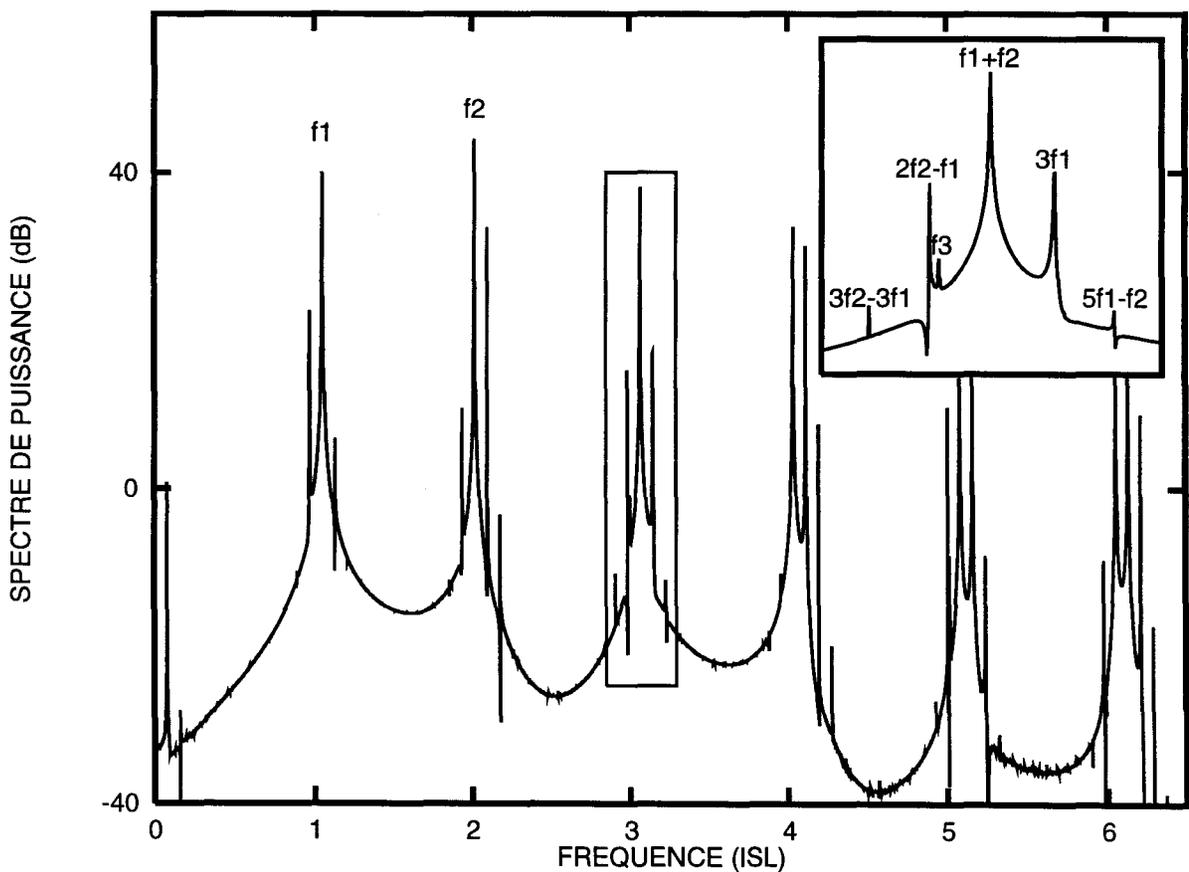


Fig. C-1: Spectre de puissance d'un signal quasipériodique à trois fréquences, obtenu pour les paramètres: $\mu^2 = 2.3 * \mu_{Seuil}^2$, $N=100$, $r_s^2 = 1\%$, $r_p^2 = 0$.

La figure C-1 donne le spectre en puissance d'un tel régime, observable pour des paramètres de cavité correspondant aux points e) et f) de la figure 6 de l'article, mais avec une puissance de pompe intermédiaire égale à 2.3 fois le seuil. Deux composantes principales de fréquences f_1 et f_2 s'y distinguent clairement, associées aux deux premières paires de modes latéraux. Les fréquences de la plupart des autres composantes du spectre sont des combinaisons linéaires de f_1 et f_2 . Toutefois, l'analyse du spectre au voisinage de 3 ISL (insert) met en évidence une composante dont la fréquence f_3 , voisine de $2f_2 - f_1$, est distincte de toutes combinaisons linéaires de f_1 et f_2 .

La figure C-2-a représente le spectre du signal obtenu pour une puissance de pompe légèrement plus grande (2.5 fois le seuil). On observe une diminution de l'amplitude des composantes de fréquences voisines de 1 ISL, qui toutefois demeurent plus importantes que les composantes apparaissant au voisinage de 3 ISL. Dans ce dernier groupe de composantes on observe une augmentation du gain au voisinage immédiat des fréquences $2f_2 - f_1$ et f_3 qui deviennent indiscernables. La nature de cet accrochage en fréquence est tout à fait comparable au verrouillage de modes à l'origine du régime pulsé observé au point e) (figure 6 de l'article). Même si l'analyse de stabilité montre qu'en ce point, les trois premiers modes latéraux sont susceptibles d'osciller indépendamment les uns des autres, le premier mode, qui a le plus fort gain, impose sa dynamique propre à l'ensemble du système (Fig. 6(e)), et finalement $f_2 = 2 f_1$, $f_3 = 3 f_1$, etc. Dans le cas présent, les couplages des trois modes privilégiés par le gain engendrent une dynamique à deux fréquences. Dans ces conditions, il est difficile de déterminer lequel des couples de fréquences (f_1 , f_2) ou (f_2 , f_3) caractérise le mieux la dynamique du système.

Lorsqu'on augmente le taux de pompage, les variations du gain mises en évidence précédemment s'accroissent. Au point f (2.56 fois le seuil), le spectre (fig. C-2-b) montre une nette prédominance des composantes fréquentielles f_2 et f_3 . L'accrochage en fréquence persiste ainsi jusqu'à la restabilisation du laser.

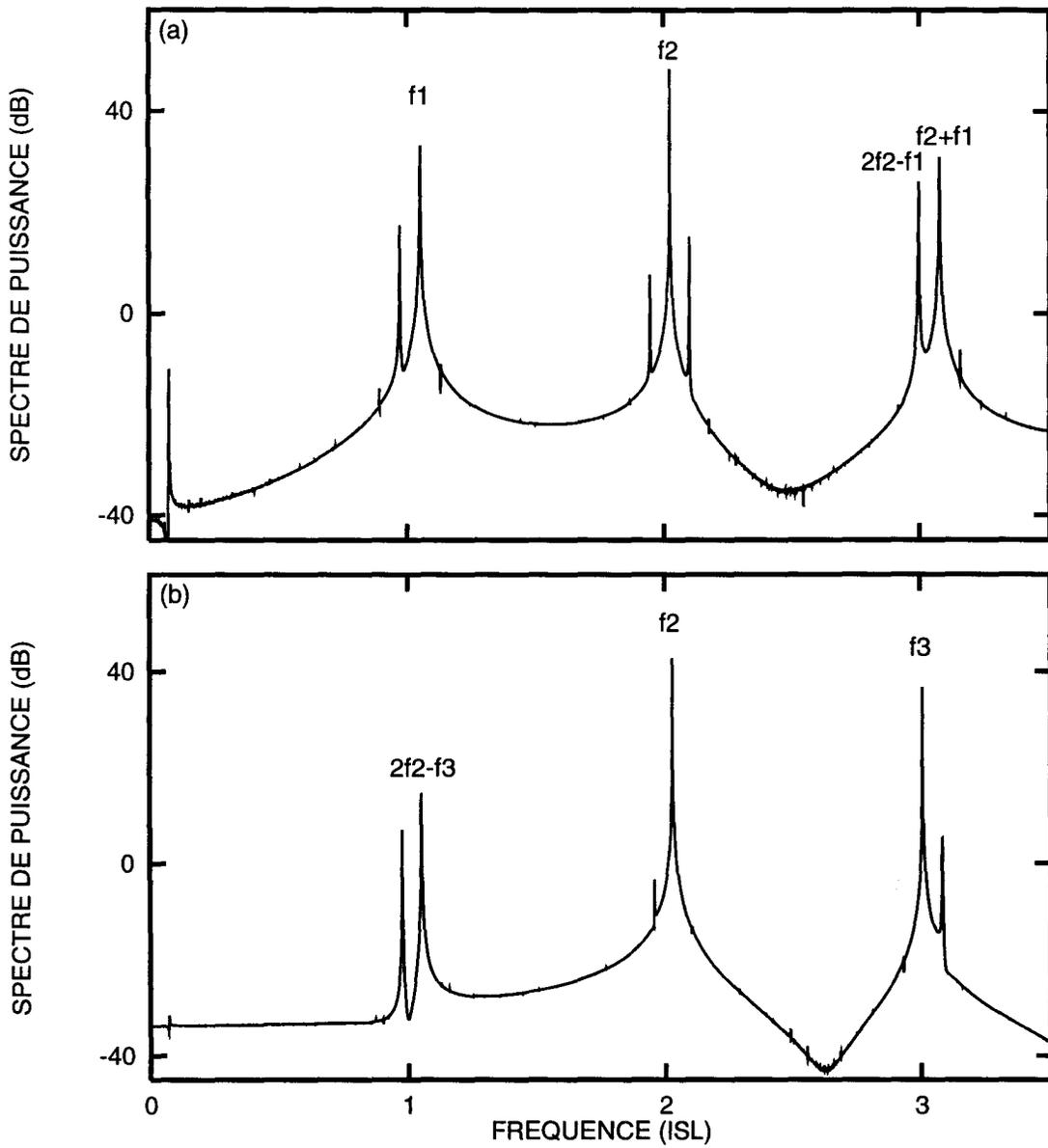


Fig. C-2: Spectres de puissance de signaux quasipériodiques
à deux fréquences, obtenus pour les paramètres:
a) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.5$. b) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.56$, $N=100$, $r_s^2 = 1\%$, $r_p^2 = 0$.

C.2 Stabilité de l'état stationnaire en présence d'une rétroaction sur l'onde de pompe

Dans l'analyse de stabilité présentée au chapitre III de l'article, nous nous sommes limité à des situations pour lesquelles on interdit toute rétroaction du champ de pompe dans la cavité. La méthode est pourtant tout à fait applicable en présence d'une telle rétroaction, moyennant une légère adaptation de la procédure d'intégration permettant le calcul du gain vu par la sonde Stokes. L'effet de la réinjection du champ de pompe dans la cavité est double. D'une part elle modifie la distribution des champs stationnaires dans la cavité comme il est montré au chapitre 2.2 de l'article. D'autre part elle impose une condition aux limites à la perturbation du champ de pompe, qui s'écrit:

$$E_{p+}(0) = r_p \exp(-i\delta_{p+}) E_{p+}(L'), \quad (C-1)$$

où $\delta_{p+} = -2\pi \left(j - \frac{\gamma_a Q}{2\pi \text{FSR}} \right) = -\delta_{s+}$ est le déphasage linéaire du champ perturbatif de pompe par rapport aux modes de cavité passive ($j=0$ correspond ici au mode de cavité dont la fréquence est supposée coïncider avec celle du champ de pompe non perturbé).

La valeur de la perturbation de pompe dans le plan $z=0$ ($E_{p+}(0)$) n'est plus nulle, mais imposée à la fois par l'amplitude de la sonde injectée et par les caractéristiques de la cavité qui conditionnent l'évolution de E_{p+} au cours de sa propagation. La détermination de $E_{p+}(0)$, permettant le calcul du gain de la sonde sur un tour de cavité, nécessite alors l'utilisation d'une méthode itérative. En partant des conditions initiales: $E_{p+}(0) = 0$ et $E_{s+}(0)$ quelconque, nous intégrons les équations (3.3) sur un passage dans la fibre. Le champ $E_{p+}(L')$ obtenu est ensuite réinjecté en $z = 0$ au moyen de la condition de bouclage (C-1), alors que la perturbation Stokes en ce point ($E_{s+}(0)$) est maintenue à sa valeur initiale, et l'on intègre à nouveau les équations sur un passage. On procède ainsi jusqu'à l'obtention d'une valeur constante pour $E_{p+}(0)$. Le gain et le déphasage de la sonde Stokes au cours d'un passage dans la fibre peuvent alors être calculés et comparés respectivement à la perte et au déphasage linéaire introduit par le désaccord de la cavité.

La courbe en trait plein de la figure C-3 donne une évolution typique du gain sur la sonde en fonction de son écart en fréquence par rapport au champ Stokes stationnaire. A titre indicatif, nous avons répété ce même calcul (tracé discontinu) sans tenir compte du rebouclage de la perturbation de pompe (Eq. (C-1)). Bien que ne correspondant pas à une situation réaliste (l'onde de pompe stationnaire est reprise dans la cavité alors que la perturbation ne l'est pas), ce dernier tracé montre que l'effet de cavité sur la perturbation de pompe est déterminant. Cet effet est d'autant plus marqué que la rétroaction est grande, c'est pourquoi nous l'avons illustré en choisissant un coefficient de réinjection $r_p^2 = 50\%$.

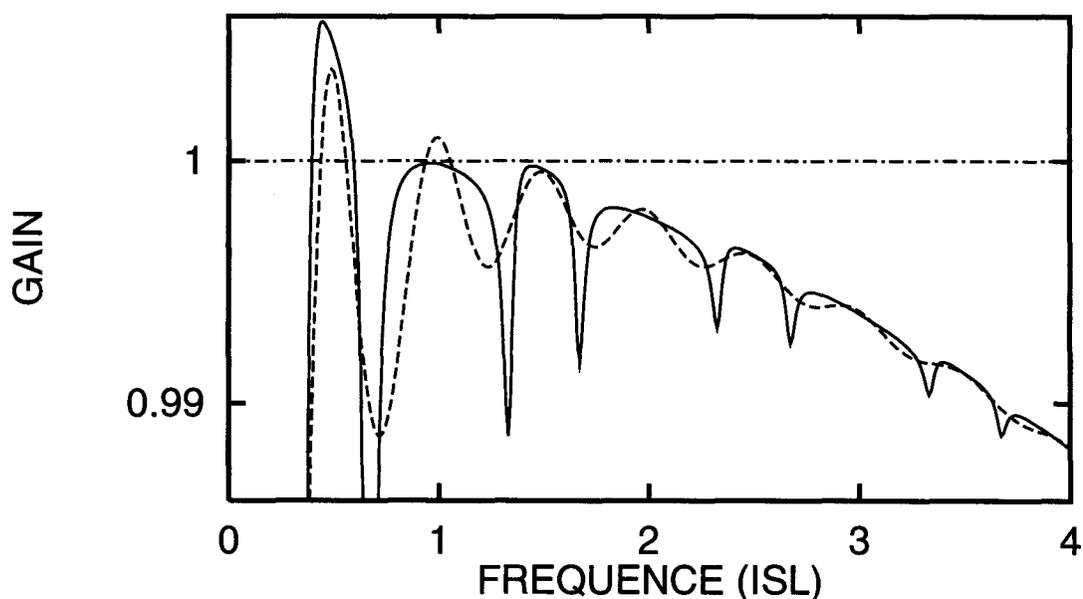


Fig. C-3: Gain sur la sonde Stokes en fonction du désaccord de fréquence Q , avec (trait plein) ou sans (pointillés) réroaction sur la perturbation de la pompe.

$$\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.29, N=60, r_s^2 = r_p^2 = 50\%.$$

La forme globale de la courbe de gain est fortement modifiée, on observe un aplatissement des maxima du gain tandis que les minima deviennent très aigus. De plus, ces maxima diminuent systématiquement lorsque le décalage en fréquence de la sonde est égal à un multiple entier de l'intervalle spectral libre de la cavité, alors qu'ils ont tendance à augmenter pour les multiples semi-entiers.

La rétroaction sur l'onde de pompe réduisant les maxima du gain de sonde aux fréquences voisines des résonances de la cavité, la déstabilisation du laser devient plus difficile à observer. Cet effet apparaît sur les diagrammes de stabilité du premier mode latéral présentés sur la figure C-4, lorsqu'on les compare à ceux de la figure 4 de l'article. Comme on peut s'y attendre, la différence est mineure pour les faibles valeurs du coefficient de réinjection. En revanche, lorsque ce dernier augmente, on observe une croissance beaucoup plus rapide du nombre critique de modes N_c . Parallèlement, on peut remarquer que les domaines d'instabilité sont déportés vers les hautes intensités de pompage. Nous allons montrer que cet effet est lié au mode de présentation des résultats, et, plus précisément, à la normalisation de la puissance injectée par rapport à sa valeur au seuil. Pour cela, nous ferons abstraction de la rétroaction sur la perturbation de pompe, qui a pour effet de réduire l'extension des domaines d'instabilité. Dans ce cas, le gain de la sonde Stokes est entièrement défini par l'état stationnaire du système, qui lui même ne dépend que de l'intensité de pompe $A_p^2(0)$ et du coefficient de réinjection r_p (voir équation 2.10.a). A puissance injectée (μ^2) donnée, l'introduction d'une rétroaction sur le champ de pompe induit une augmentation de l'intensité $A_p^2(0)$ d'un facteur $1/(1 - r_p)^2$ pour un taux de pompage inférieur ou égal au seuil. Ce facteur est moindre au delà du seuil du fait de la déplétion de pompe, on peut l'écrire sous la forme $1/(1 - \varepsilon r_p)^2$, où $0 < \varepsilon < 1$. On montre alors aisément que, pour obtenir une même valeur de $A_p^2(0)$ Avec et Sans Cavité sur la Pompe, les intensités normalisées de l'onde de pompe incidente (notées respectivement ACP et SCP) doivent satisfaire la relation:

$$\left(\frac{\mu^2}{\mu_{\text{Seuil}}^2} \right)_{\text{ACP}} = \left(\frac{\mu^2}{\mu_{\text{Seuil}}^2} \right)_{\text{SCP}} \frac{(1 - \varepsilon r_p)^2}{(1 - r_p)^2} \quad (\text{C-2})$$

Le facteur multiplicatif apparaissant au second membre de l'équation étant supérieur à 1, l'obtention d'une valeur fixée de $A_p^2(0)$ requiert donc une intensité de pompe normalisée au seuil plus forte lorsque la pompe est reprise dans la cavité. Ceci entraîne une remontée globale des domaines instables d'autant plus importante que r_p est grand. Si le taux de pompage était représenté par la variable $A_p^2(0)$, on observerait uniquement la réduction des domaines d'instabilité liée à la baisse de gain induite par le rebouclage de la perturbation de pompe.

En ce qui concerne la dynamique de l'émission dans les domaines instables, les simulations numériques que nous avons effectuées pour une faible rétroaction de pompe ($r_p^2 = r_s^2 = 1\%$) n'ont pas révélé de modification significative du comportement. Nous n'avons pas testé la dynamique pour les fortes valeurs de la rétroaction de pompe dans la mesure où les régimes dépendant du temps apparaissent alors pour de grandes valeurs de N , et que leur analyse requiert des temps de calcul très grand. Par analogie avec les phénomènes décrits au paragraphe 5.2 de l'article (Cf. figure 21), il n'est pas exclu qu'au cours de leur propagation à l'intérieur de la cavité, l'interaction entre une impulsion Stokes et les fortes modulations de pompe qu'elle induit puisse compliquer la dynamique du système.

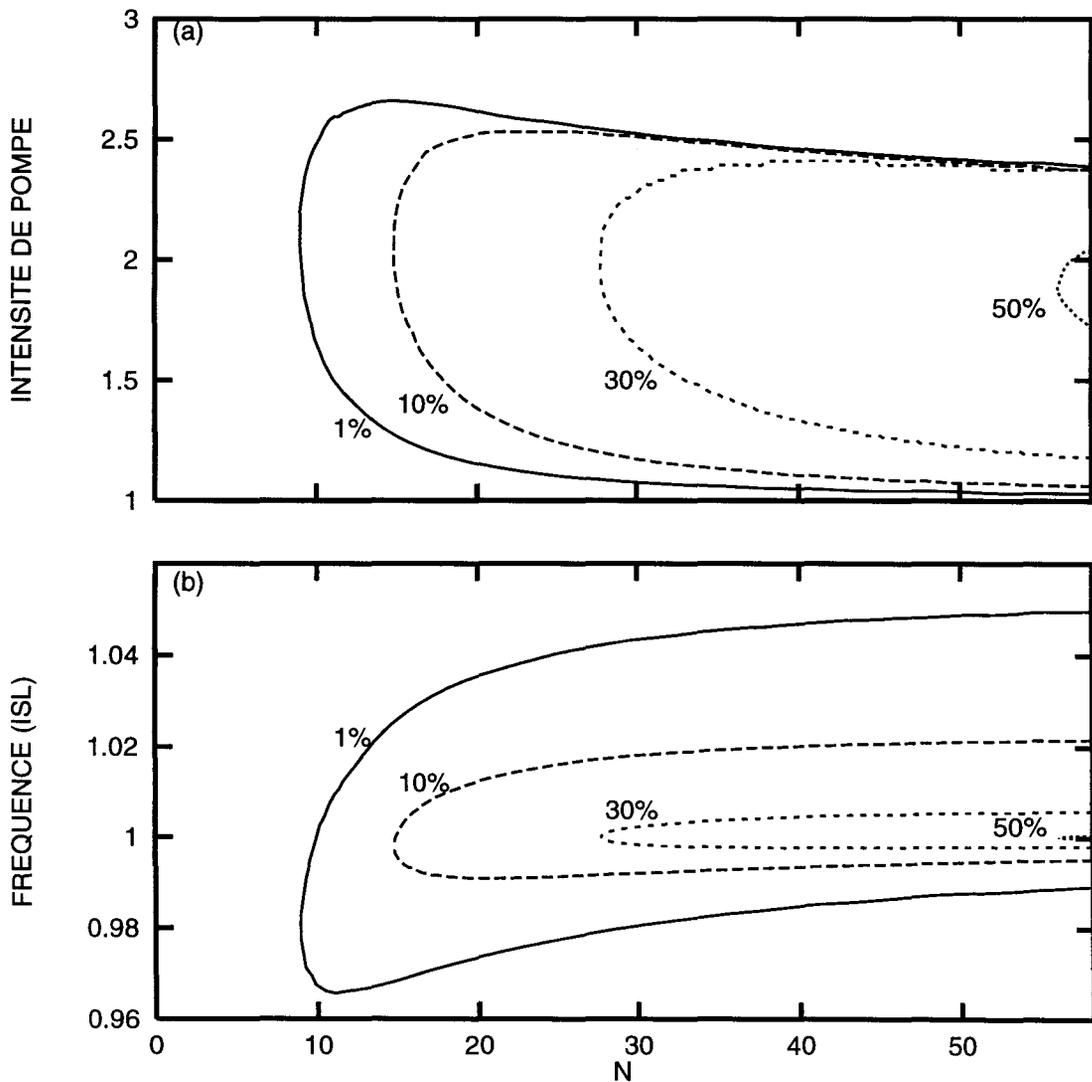


Fig. C-4: a) Domaines d'instabilité des premiers modes latéraux ($j=1$) pour différentes valeurs des coefficients de réinjection ($r_s^2 = r_p^2$).

b) Fréquences d'oscillation aux points de bifurcation.

CHAPITRE III

<p>Dynamique des lasers Brillouin en cavité Perot-Fabry</p>
--

Au chapitre précédent, nous avons mis en évidence une succession de régimes d'émission stable, périodique, quasipériodique à deux puis à trois fréquences, apparaissant pour des valeurs croissantes du nombre N de modes sous la courbe de gain. Ces comportements semblent correspondre aux premières étapes d'une route vers le chaos de type Ruelle-Takens [Ruelle, 71]. Néanmoins, nous n'avons pas observé de comportements chaotiques pour les cavités en anneau considérées, du moins pour des valeurs "raisonnables" de N (<100). Par des constatations qualitatives, nous évoquons au paragraphe 3-3 de l'article la possibilité de mettre en évidence des comportements dynamiques plus complexes dans les cavités Perot-Fabry. Dans le présent chapitre, nous développons cette idée en présentant une étude théorique détaillée de la dynamique des lasers Brillouin pour ce type de cavités. Ce travail est en outre motivé par les travaux d'une équipe Ecossaise portant sur la dynamique des lasers Brillouin en cavité "naturelle" (l'effet de cavité est alors lié aux réflexions de Fresnel aux deux extrémités de la fibre). Des régimes périodiques, quasipériodiques et chaotiques ont en effet été observés expérimentalement par cette équipe [Lu, 92 ; Harrison, 94].

Conservant la démarche que nous avons adoptée au chapitre précédent, nous débuterons cette étude par l'analyse de stabilité de l'état stationnaire du système. Pour permettre des développements analytiques sur le modèle théorique défini au chapitre I, nous avons négligé l'atténuation propre à la fibre ainsi que les couplages par effet Kerr ($\beta=0$, $u=0$). La solution stationnaire étant obtenue de la même manière que pour une cavité en anneau, les calculs ont été reportés en annexe I. Ils aboutissent aux expressions analytiques du seuil d'émission, du tirage en fréquence, et des distributions des champs stationnaires. Bien que toute l'analyse pourrait être conduite dans le cas général d'une interaction non-résonante, nous négligerons également les désaccords de fréquence afin de limiter le nombre des paramètres.

Les équations qui permettent de décrire la dynamique du système s'écrivent alors:

$$\frac{\partial E_p^{\rightarrow}}{\partial t} + \frac{\partial E_p^{\rightarrow}}{\partial z} = - E_s^{\leftarrow} E_a^{\rightarrow} , \quad (\text{III-1-a})$$

$$\frac{\partial E_s^{\leftarrow}}{\partial t} - \frac{\partial E_s^{\leftarrow}}{\partial z} = E_p^{\rightarrow} E_a^{\rightarrow *} , \quad (\text{III-1-b})$$

$$\frac{\partial E_a^{\rightarrow}}{\partial t} + E_a^{\rightarrow} = E_p^{\rightarrow} E_s^{\leftarrow *} , \quad (\text{III-1-c})$$

$$\frac{\partial E_p^{\leftarrow}}{\partial t} - \frac{\partial E_p^{\leftarrow}}{\partial z} = - E_s^{\rightarrow} E_a^{\leftarrow} , \quad (\text{III-1-d})$$

$$\frac{\partial E_s^{\rightarrow}}{\partial t} + \frac{\partial E_s^{\rightarrow}}{\partial z} = E_p^{\leftarrow} E_a^{\leftarrow *} , \quad (\text{III-1-e})$$

$$\frac{\partial E_a^{\leftarrow}}{\partial t} + E_a^{\leftarrow} = E_p^{\leftarrow} E_s^{\rightarrow *} . \quad (\text{III-1-f})$$

Elles sont complétées par les conditions de bouclages suivantes:

$$E_p^{\rightarrow}(z=0,t) = \mu + r_{p1} E_p^{\leftarrow}(z=0,t), \quad (\text{III-2-a})$$

$$E_s^{\rightarrow}(z=0,t) = r_{s1} E_s^{\leftarrow}(z=0,t), \quad (\text{III-2-b})$$

$$E_p^{\leftarrow}(z=L',t) = r_{p2} E_p^{\rightarrow}(z=L',t), \quad (\text{III-2-c})$$

$$E_s^{\leftarrow}(z=L',t) = r_{s2} E_s^{\rightarrow}(z=L',t). \quad (\text{III-2-d})$$

Les champs qui caractérisent l'état stationnaire de ce système sont des quantités réelles, qu'on affectera d'un indice 0, pour rappeler que l'émission est portée par le mode résonant ($j=0$), dont la fréquence coïncide avec celle du maximum de gain. Les modes latéraux sont numérotés par rapport à cette origine ($j= \pm 1, \pm 2, \dots$). L'analyse de stabilité de l'état stationnaire nous permet de définir les domaines des paramètres pour lesquels ces modes latéraux peuvent se déstabiliser. A la lumière de ces résultats, nous abordons ensuite l'analyse de la

dynamique proprement dite, au moyen de simulations numériques. Nous décrivons tout d'abord l'ensemble des résultats que nous avons observé dans le cas des cavités "naturelles". Nous soulignons ensuite les caractéristiques communes à chaque classe de régimes qui permettent une identification rapide, et présentons les outils numériques dont nous disposons pour caractériser d'une manière plus formelle la dynamique. Enfin, nous discutons de l'influence des paramètres négligés dans notre étude, en faisant l'analyse de quelques expériences présentées dans la littérature, ainsi que de nos propres résultats expérimentaux. Les caractéristiques principales des expériences auxquelles nous faisons référence dans ce chapitre sont rassemblées dans le tableau A-1 de l'annexe II.

III.1 Stabilité de l'état stationnaire

Comme pour les cavités en anneau, les régimes dynamiques observés expérimentalement dans les cavités en ligne résultent du caractère multimodal de l'émission du laser [Bar-Joseph, 85 ; Dämmig, 93 ; Harrison, 94]. On peut donc supposer que la déstabilisation de l'état stationnaire correspond à l'émergence d'une oscillation portée par l'un des modes latéraux. On ne peut savoir à priori ni de quel mode il s'agit, ni même la fréquence exacte de l'oscillation, du fait des tirages en fréquence. Comme au chapitre précédent, nous analysons le gain du système en injectant dans la fibre un champ de sonde $E_{s\pm}^{\leftarrow}(z)$, dont la pulsation (normalisée) diffère de celle du mode actif ($j=0$) d'une quantité $+Q$ qui pourra être balayée continûment. Les interactions de $E_{s\pm}^{\leftarrow}$ et de l'onde de sonde réfléchie $E_{s\pm}^{\rightarrow}$ avec le milieu génèrent des ondes images $E_{s\pm}^{\leftarrow}$ et $E_{s\pm}^{\rightarrow}$, décalées de $-Q$ par rapport au mode actif. Parallèlement, des termes de perturbation similaires apparaissent sur les champs de pompe et sur les deux ondes acoustiques. Les champs peuvent alors s'écrire:

$$E_j(z,t) = E_{j0}(z) + E_{j-}(z) \exp iQ(t+z) + E_{j+}(z) \exp -iQ(t+z),$$

$$\text{où } j = \vec{p}, \overleftarrow{p}, \vec{s}, \overleftarrow{s}, \vec{a}, \overleftarrow{a} \quad (\text{III-3})$$

Les équations (III-1) sont développées au premier ordre par rapport aux perturbations, et on identifie les différents termes oscillants. On obtient deux systèmes indépendants de quatre équations liant respectivement $E_{p\vec{+}}$, $E_{s\vec{+}}$, $E_{p\vec{-}}$ et $E_{s\vec{-}}$ et les ondes réfléchies correspondantes. Notons que les perturbations des ondes acoustiques s'expriment directement en fonction des perturbations optiques. Du fait des symétries du système par rapport aux fréquences des champs stationnaires, deux solutions particulières apparaissent pour lesquelles $E_{j+} = E_{j-}^*$ ou $E_{j+} = -E_{j-}^*$ (avec $j = \vec{p}, \overleftarrow{p}, \vec{s}, \overleftarrow{s}, \vec{a}, \overleftarrow{a}$). Seule la première solution correspond à une modulation de l'intensité de l'onde Stokes caractéristique des régimes dynamiques observés expérimentalement. Le nombre d'équations peut alors être réduit de moitié. On notera cependant que, dans des conditions d'une émission stationnaire non

résonante ($\Delta_0, \Delta_1 \neq 0$), la symétrie est rompue et il convient d'intégrer le système d'équation complet.

On aboutit aux deux systèmes indépendants d'équations différentielles:

$$\frac{\partial E_{p+}^{\rightarrow}}{\partial z} = \left[2iQ - \frac{E_{s0}^{\leftarrow 2}}{1 - iQ} \right] E_{p+}^{\rightarrow} - \frac{2 - iQ}{1 - iQ} E_{s0}^{\leftarrow} E_{p0}^{\rightarrow} E_{s+}^{\leftarrow}, \quad (\text{III-4-a})$$

$$\frac{\partial E_{s+}^{\leftarrow}}{\partial z} = - \frac{E_{p0}^{\rightarrow 2}}{1 - iQ} E_{s+}^{\leftarrow} - \frac{2 - iQ}{1 - iQ} E_{s0}^{\leftarrow} E_{p0}^{\rightarrow} E_{p+}^{\rightarrow}, \quad (\text{III-4-b})$$

$$\frac{\partial E_{p+}^{\leftarrow}}{\partial z} = \left[-2iQ + \frac{E_{s0}^{\rightarrow 2}}{1 - iQ} \right] E_{p+}^{\leftarrow} + \frac{2 - iQ}{1 - iQ} E_{s0}^{\rightarrow} E_{p0}^{\leftarrow} E_{s+}^{\rightarrow}, \quad (\text{III-4-c})$$

$$\frac{\partial E_{s+}^{\rightarrow}}{\partial z} = \frac{E_{p0}^{\leftarrow 2}}{1 - iQ} E_{s+}^{\rightarrow} + \frac{2 - iQ}{1 - iQ} E_{s0}^{\rightarrow} E_{p0}^{\leftarrow} E_{p+}^{\leftarrow}, \quad (\text{III-4-d})$$

Compte tenu des expressions des champs perturbés (III-3), les relations de bouclage (III-2) conduisent à des conditions de bord couplant les champs perturbatifs contrapropagatifs, ces dernières s'écrivent:

$$E_{p+}^{\rightarrow}(z=0) = r_{p1} E_{p+}^{\leftarrow}(z=0), \quad (\text{III-5-a})$$

$$E_{p+}^{\leftarrow}(z=L') = r_{p2} \exp(i\delta) E_{p+}^{\rightarrow}(z=L'), \quad (\text{III-5-b})$$

$$E_{s+}^{\rightarrow}(z=0) = r_{s1} E_{s+}^{\leftarrow}(z=0), \quad (\text{III-5-c})$$

$$E_{s+}^{\leftarrow}(z=L') = r_{s2} \exp(-i\delta) E_{s+}^{\rightarrow}(z=L'), \quad (\text{III-5-d})$$

où $\delta = 2\pi \left(j - \frac{\gamma_a Q}{2\pi ISL} \right)$ est le déphasage du champ perturbatif E_{s+}^{\rightarrow} introduit par un aller-retour dans la cavité passive. Ecrit sous cette forme, δ correspond au décalage en fréquence de l'onde de sonde par rapport au $j^{\text{ème}}$ mode latéral.

La procédure d'intégration de ce système d'équations est analogue à celle utilisée pour les cavités en anneau dans le cas où la pompe est réinjectée dans la cavité (voir les compléments du chapitre II). Dans cette procédure, $E_{s+}^{\leftarrow}(z=0)$ est fixé à une valeur quelconque qui est maintenue tout au long de l'itération. En partant de la condition initiale $E_{p+}^{\rightarrow}(z=0)=0$, on intègre les équations (III-4-a, b) depuis $z=0$ jusque $z=L'$. Les amplitudes des ondes "réfléchies" $E_{p+}^{\leftarrow}(L')$ et $E_{s+}^{\rightarrow}(L')$ sont obtenues au moyen des conditions de bouclages (III-5-b, d). On intègre ensuite les équations (III-4-c, d) depuis $z=L'$ jusque $z=0$, la condition de bouclage (III-5-a) donne une nouvelle valeur de $E_{p+}^{\rightarrow}(z=0)$, qui est utilisée pour répéter le calcul, que l'on poursuit jusqu'à ce que ce champ prenne une valeur constante.

Le gain et le déphasage vus par la sonde au cours d'un tour de cavité sont alors respectivement définis par les quantités $\frac{E_{s+}^{\leftarrow}(0)^2}{E_{s+}^{\rightarrow}(0)^2} r_{s1}^2$ et $[\Phi_{s+}^{\leftarrow}(0) - \Phi_{s+}^{\rightarrow}(0)]$. Notons que ce dernier terme, contrairement au déphasage introduit pour les cavités en anneau, inclut non seulement le déphasage non-linéaire lié aux interactions non résonantes dans le milieu mais aussi le déphasage linéaire du champ de sonde par rapport au mode de cavité passive. Une oscillation à la fréquence Q peut spontanément démarrer lorsque le gain est supérieur à 1 et le déphasage nul.

La figure III-1-a donne un exemple typique des variations du gain en fonction de la fréquence Q , observables pour des cavités de très faibles finesses et d'assez grandes longueurs. L'allure générale de la courbe de gain dans ces conditions est très voisine de celle obtenue pour des cavités en anneau. Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 3-3 de l'article, les résonances du gain sont observables pour des décalages de fréquence de sonde (Q) voisins de multiples entiers de l'intervalle spectral libre. Ce résultat confirme bien que, pour les faibles valeurs du coefficient de réflexion, l'interaction entre les ondes réfléchies E_s^{\rightarrow} et E_p^{\leftarrow} est négligeable, et que la cavité Perot-Fabry est assimilable à une cavité en anneau possédant un bras aérien de longueur égale à la longueur optique de la fibre. Rappelons que, dans ces conditions, la fréquence des oscillations de relaxation $\frac{1}{2T_t}$ [Johnson, 71] qui caractérise les fréquences

de résonance est égale à l'intervalle spectral libre de la cavité (T_t est le temps de transit de la lumière dans la fibre).

Lorsque la réflectivité des miroirs augmente, l'amplitude de la pompe réfléchie devient du même ordre de grandeur que celle de la pompe incidente, et le gain Stokes se répartit sur toute la cavité. La longueur d'interaction étant doublée, la fréquence des oscillations de relaxation est égale $\frac{1}{4T_t}$. Cet effet est illustré par la courbe de gain présentée en figure III-1-b, où l'on retrouve les résonances aux fréquences multiples de $\frac{ISL}{2}$, déjà observées pour des cavités en anneau.

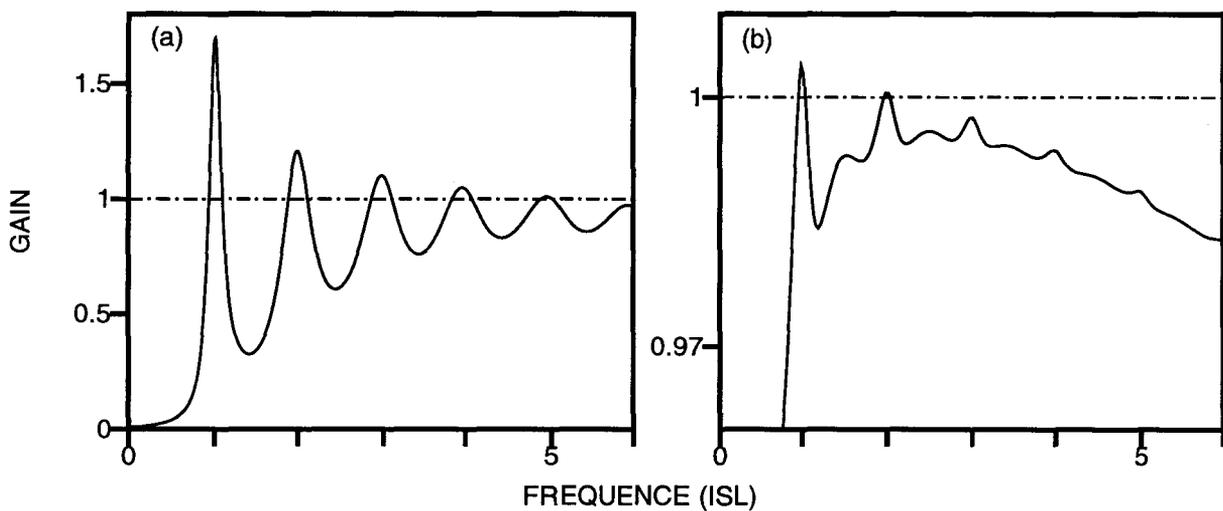


Fig. III-1: Courbes de gain de la sonde Stokes en fonction de sa fréquence

a) $r^2 = 3.3\%$, $N = 100$, $\mu^2 / \mu_{Seuil}^2 = 2.2$, b) $r^2 = 50\%$, $N = 100$, $\mu^2 / \mu_{Seuil}^2 = 2$.

r^2 = coefficient de réflexion des deux miroirs, commun à la sonde et à la pompe.

Les différences entre les deux types de cavité que nous venons de mettre en évidence ne modifient en rien la méthode de détermination des domaines instables de l'émission. Pour chaque valeur de N et des coefficients de réflexion fixés, on ajuste par itérations successives les valeurs de l'intensité de pompe incidente et de la fréquence de la sonde de manière à déterminer les limites des domaines instables. Ces limites sont atteintes lorsque le gain et le déphasage subits par la sonde au cours d'un aller-retour dans la cavité valent respectivement 1 et 0.

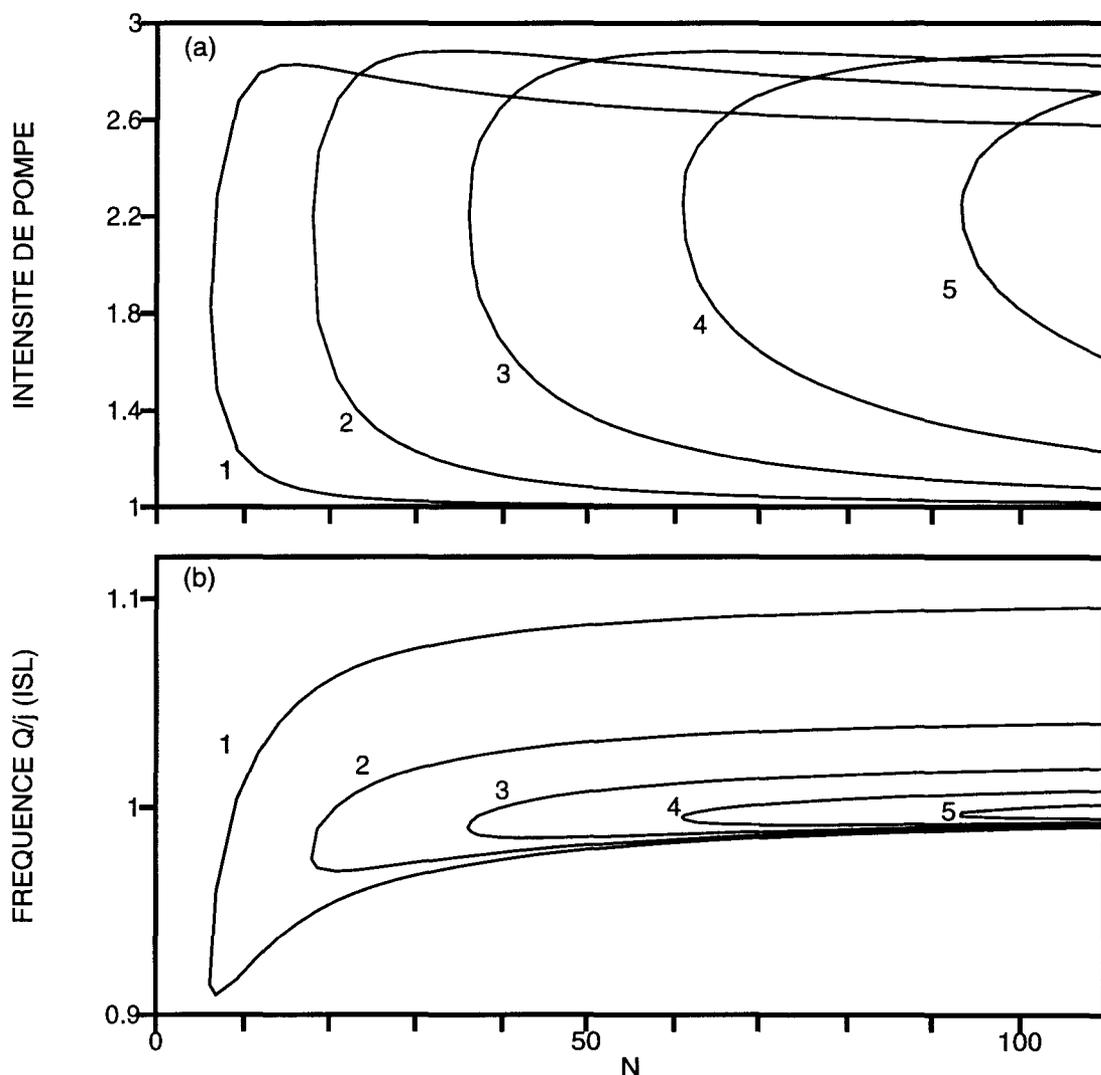


Fig. III-2: a) Domaines d'instabilités des cinq premiers modes
 b) Fréquences des oscillations aux points de bifurcation. $r^2 = 3.3\%$.

Nous représentons sur la figure III-2-a les domaines d'instabilité des 5 premiers modes latéraux de la cavité, pour des coefficients de réflexion r^2 tous égaux à 3.3%, valeur correspondant à une réflexion de Fresnel en bout de fibre. Dans l'ensemble, on observe les mêmes tendances que pour les cavités en anneau. Le nombre de modes critique, au delà duquel les instabilités engendrées par les premiers modes latéraux apparaissent, est voisin de 7. On notera l'écart important entre les fréquences d'oscillation aux bifurcations basses et hautes (Fig. III-2-b), de près de 10% pour ces premiers modes latéraux. Les modes suivants se déstabilisent successivement lorsqu'on augmente N.

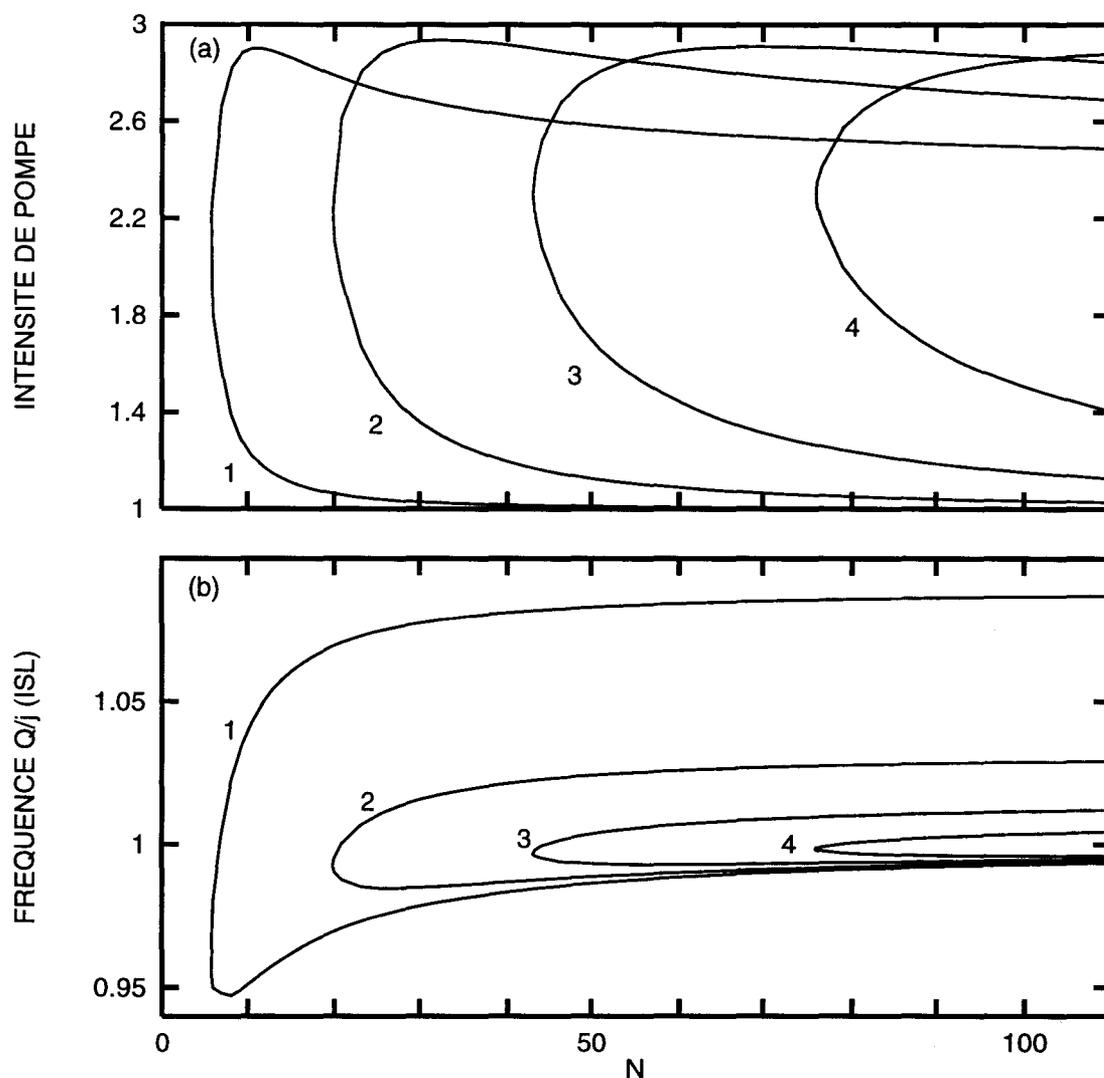


Fig. III-3: a) Domaines d'instabilités des quatre premiers modes
 b) Fréquences des oscillations aux points de bifurcation. $r^2 = 10\%$.

Pour des valeurs de N proches de 100, qui correspondent à l'expérience de Harrison et al [94] (Cf. tableau A-1 en annexe II), cinq modes latéraux peuvent être instables simultanément.

Pour effectuer une comparaison directe avec les résultats obtenus au chapitre II, nous avons déterminé les domaines d'instabilité pour un coefficient de réflexion r^2 de 10%, ce qui correspond à un taux de réinjection de 1% pour une cavité en anneau équivalente. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure III-3. Les valeurs critiques de N , correspondant aux limites de stabilité des différents modes, décroissent lorsqu'on passe de la configuration en anneau à la configuration en ligne.

Typiquement, les nombres critiques de modes décroissent d'un facteur grossièrement égal à 1.5, si bien que, dans la cavité en ligne, on observe l'apparition d'un quatrième mode instable pour $N=76$. A nombre de mode N donné, la cavité en ligne favorise donc l'apparition de modes instables d'ordre élevé, et donc la complexité des régimes dynamiques.

Si l'on compare les figure III-2 et III-3, on peut remarquer que l'augmentation des coefficients de réflexion a tendance à déplacer les zones d'instabilités vers les grandes valeurs de N . Par contre les variations de fréquences d'oscillation à l'intérieur des zones instables sont assez peu affectées par l'évolution de r^2 .

Pour de plus grandes valeurs de r^2 , le déplacement des zones d'instabilités s'accroît tandis que les domaines de variation des fréquences d'oscillation s'amenuisent. Pour les grandes valeurs des coefficients de réflexion, l'intensité des ondes de pompe contrapropagatives sont du même ordre de grandeur, et il n'est pas exclu qu'une onde anti-Stokes soit générée (voir le paragraphe I-1), ce qui mettrait en défaut notre analyse. On pourra cependant l'éviter si la perte de cavité à la fréquence anti-Stokes est suffisamment importante. Cette situation, inconcevable si l'on utilise des miroirs classiques, peut être réalisée au moyen de réseaux de Bragg photoinscrits au coeur de la fibre (voir chapitre IV). Les miroirs de Bragg permettent en outre d'accéder à une grande variété de combinaisons des coefficients de réflexion r_{p1} , r_{p2} , r_{s1} , r_{s2} . Loin d'en faire le tour, nous présentons en annexe III quelques diagrammes de stabilité obtenus dans des conditions typiques.

III.2 Comportements dynamiques typiques observés pour la cavité "naturelle": simulations numériques

Si l'on s'en tient aux résultats de l'analyse de stabilité linéaire, les lasers Brillouin, quelque soit le type de cavité et sa finesse, présentent tous des comportements voisins. Il paraît en effet toujours possible d'augmenter le nombre de modes sous la courbe de gain et voir se déstabiliser successivement des modes latéraux d'ordre plus élevés, menant à des instabilités de plus en plus complexes.

C'est pourtant toujours dans les cavités de plus faible finesse qu'ont été observées les dynamiques les plus complexes. On peut trouver à cela plusieurs raisons, d'une part, les expériences se sont toujours limitées à des nombres de modes sous la courbe de gain inférieurs à 100. D'autre part, pour les cavités de bonne finesse, les variations de la fréquence des oscillations associées aux différents modes sont faibles, ce qui favorise les accrochages en fréquence, et restreint la variété des régimes observables. Parmi les cavités Perot-Fabry, la cavité naturellement produite par les réflexions de Fresnel aux extrémités de la fibre est celle qui a suscité le plus d'intérêt, voir même de vives polémiques [Gaeta, 92 ; Lu, 92 ; Dämmig, 93 ; Harrison, 94 ; Randoux, 95a].

A la lumière des résultats fournis par notre analyse de stabilité, nous avons étudié systématiquement le comportement dynamique de ce type de cavité. Nous avons en particulier testé l'influence de l'apparition des domaines d'instabilité des différents modes latéraux de la cavité. De plus, nous avons concentré l'analyse sur les zones de recouvrement partiel de ces domaines, observées à fort taux de pompage, et qui s'étaient révélées particulièrement riches lors de l'étude des lasers en anneaux.

L'évolution temporelle du système est obtenue en intégrant numériquement les équations III-1, compte tenu des relations de bouclage III-2 pour lesquelles les coefficients de réflexion sont fixés à 3.3%. Nous présentons dans ce paragraphe un éventail des régimes

observés, les méthodes de caractérisation de ces régimes seront détaillées dans le paragraphe suivant.

Nous avons tout d'abord pu vérifier que l'émission est stable en dehors des domaines définis par l'analyse de stabilité, et en particulier pour $N < N_{c1}$. N_{cj} désigne le nombre critique de mode associé à la déstabilisation du $j^{\text{ème}}$ mode latéral. Pour un nombre de modes égal à 10 ($N_{c1} < N < N_{c2}$), seuls des régimes périodiques de fréquences proches d'un ISL sont observés. La fréquence d'oscillation augmente avec la puissance de pompe, mais reste comprise entre les deux valeurs limites correspondant aux bifurcations basse et haute données par la Figure III-2-b.

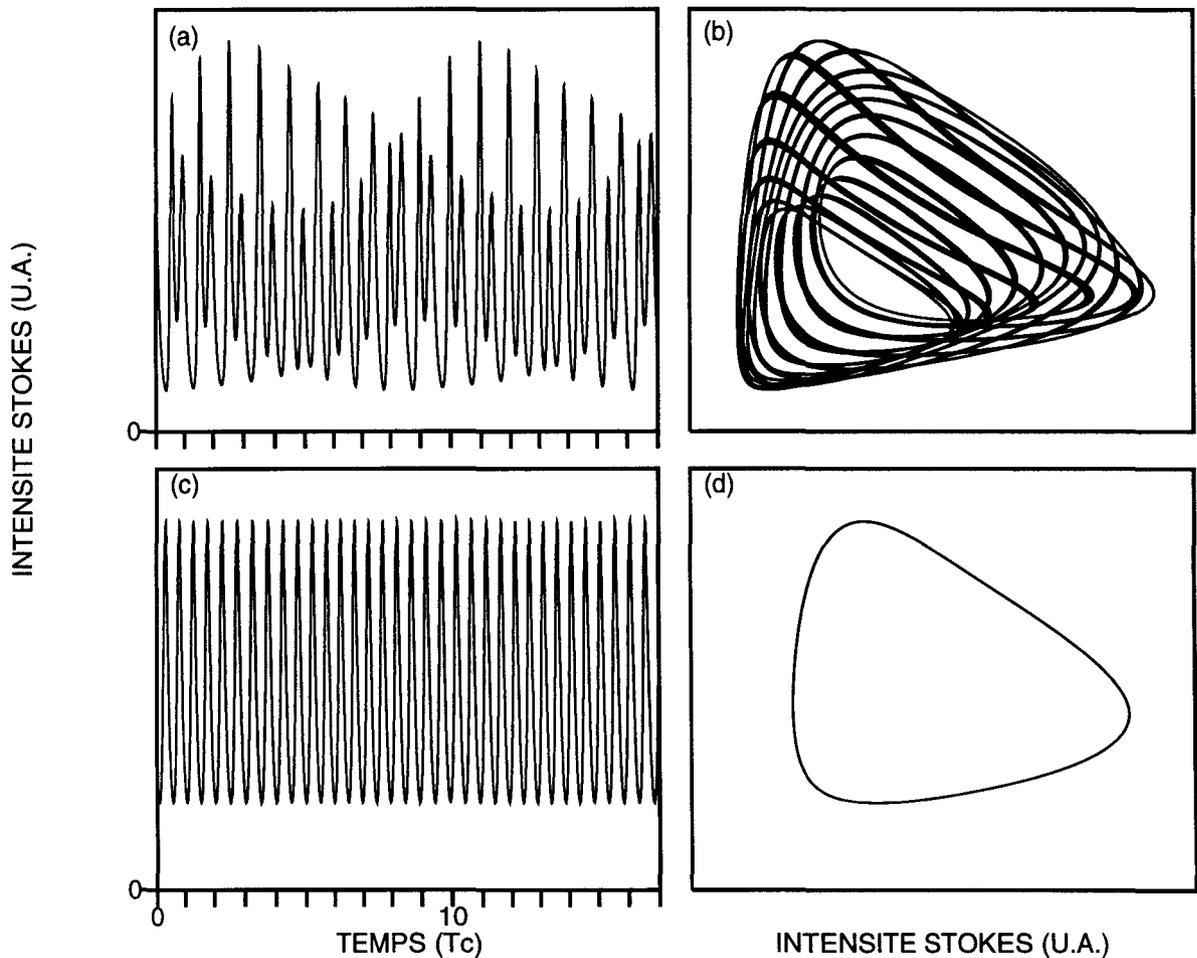


Fig. III-4: Evolution temporelle de l'intensité de l'onde Stokes et portrait de phase reconstruit. $N = 30$,

a) et b) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.6$, c) et d) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.8$.

Pour $N=30$ ($N_{c2} < N < N_{c3}$), on retrouve le même comportement que précédemment tant que l'intensité de pompe reste inférieure à 2.3 fois le seuil. Au delà, on observe tout d'abord des régimes quasipériodiques à deux fréquences, nous avons tracé sur la figure III-4-a l'évolution de l'intensité Stokes $I(t)$ pour un tel régime. Les temps sont comptés en unités T_c , qui correspond au temps de transit dans la cavité ($T_c = 1/ISL$). Les fréquences dominantes du signal sont associées aux deux premières paires de modes latéraux. A partir de ce signal, nous avons reconstruit le portrait de phase III-4-b par la méthode des temps retardés, qui consiste à reporter les points de coordonnées $(I(t); I(t+\tau))$ pour tout instant t . Par convention le délai τ est fixé au quart de la plus petite période caractéristique du signal (soit $\tau = T_c/8$), et la durée d'observation du signal est égale à $50 T_c$. La courbe de la figure III-4-b ne se rebouclant jamais sur elle-même, les deux fréquences sont bien incommensurables. Pour une intensité de pompe de 2.8 fois le seuil, nous avons observé le régime périodique de fréquence voisine de $2 ISL$ présenté sur les figures III-4-c et d. On notera que ce type de régime a été également mis en évidence pour les cavités en anneau dans la thèse de A. Mamhoud [Mamhoud, 96].

Pour un nombre de modes $N=50$ ($N_{c3} < N < N_{c4}$), les régimes périodiques se maintiennent pour des intensités de pompage inférieures à 2.2 fois le seuil, cédant ensuite la place à des régimes quasipériodiques à deux fréquences associés à une oscillation sur les deux premiers modes latéraux. Le régime de la figure III-5-a a été obtenu pour une intensité relative de 2.6. La structure complexe du portrait de phase correspondant (III-5-b) laisse présager que le régime est plus complexe qu'un quasipériodique à deux fréquences. Il s'agit en fait d'un régime quasipériodique à trois fréquences. On peut noter la similitude très nette des portraits de phase avec ceux mis en évidence par Wang et Nicolis [87] dans le cadre d'une étude de la dynamique d'un système de deux Brusselateurs couplés. Pour de plus forts pompages (Fig. III-5-c et d), on retrouve des régimes quasipériodiques à deux fréquences, pour lesquels les modes dominants sont les seconds et troisièmes modes latéraux. On notera que, dans des conditions expérimentales similaires (voir le tableau A-1 de l'annexe II), Lu et al [92] ont observé des régimes périodiques et quasipériodiques. Les auteurs ne donnent pas plus de précision sur la nature de ces derniers régimes, mais les seuils d'apparition et l'allure générale des différents régimes correspondent relativement bien à nos résultats théoriques.

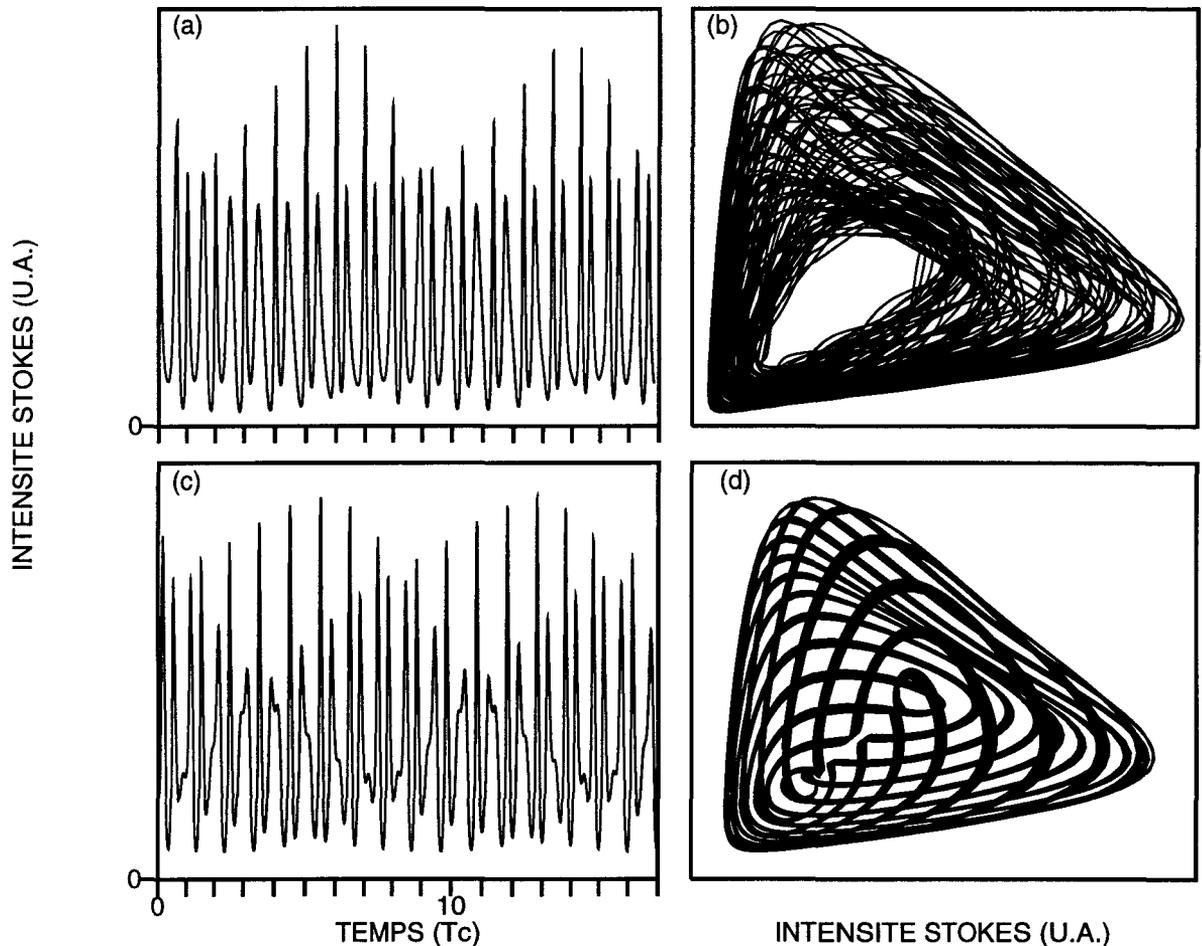


Fig. III-5: Evolution temporelle de l'intensité de l'onde Stokes

et portrait de phase reconstruit. $N = 50$,

a) et b) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.6$, c) et d) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.7$.

Un scénario similaire se produit pour $N=75$ ($N_{c4} < N < N_{c5}$), lorsqu'on augmente le taux de pompage, on observe successivement des régimes périodiques, quasipériodiques à deux fréquences (Fig. III-6-a et b), puis à trois fréquences (Fig. III-6-c et d) et de nouveau à deux fréquences avant la stabilisation de l'émission. Nous n'avons pas observé de régimes plus complexes auxquels on pourrait s'attendre dans cette zone de paramètres pour laquelle les quatre premiers modes latéraux sont susceptibles d'osciller indépendamment d'après l'analyse de stabilité. Il semble que des accrochages de fréquences analogues à ceux décrits au chapitre II limitent ici à trois le nombre des fréquences libres du système.

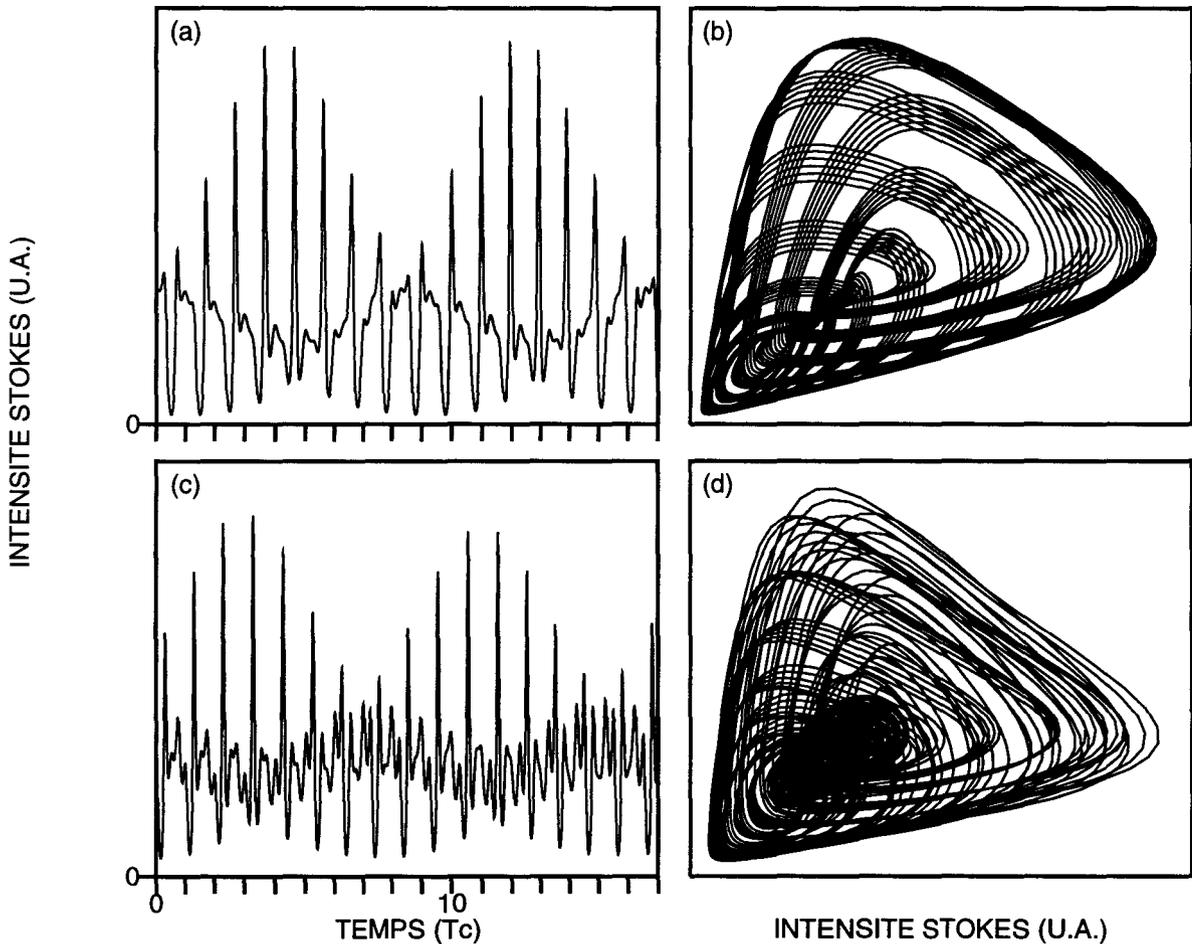


Fig. III-6: Evolution temporelle de l'intensité de l'onde Stokes

et portrait de phase reconstruit. $N = 75$,

a) et b) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.5$, c) et d) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.7$.

Ce type d'accrochage disparaît pour de plus grandes valeurs de N comme le montrent les résultats obtenus pour $N=100$ (légèrement supérieur à N_{c5}). Pour des intensités de pompe comprises entre 2.5 et 2.6 fois le seuil, l'émission Stokes évolue de manière chaotique. La figure III-7-a montre une séquence d'un tel signal, pour laquelle les fréquences associées aux premiers et quatrièmes modes latéraux sont dominantes. Ce signal ressemble fortement au signal chaotique présenté sur la figure 3-c de l'article de Harrison et al [94], pour laquelle le nombre N est égal à 95 (Cf. tableau A-1, annexe II). En fait, au cours de l'évolution temporelle, les fréquences dominantes changent mais restent associées à l'un des quatre premiers modes latéraux. La durée des régimes associés à chaque groupe de fréquences dominantes est de l'ordre de 100 à 1000 T_c .

De part et d'autre de ce domaine chaotique, on observe des régimes quasipériodiques à deux fréquences (voir Figure III-7-c). Enfin, pour des puissances inférieures à 2.2 fois le seuil, on retrouve des régimes périodiques de fréquences voisines d'un ISL. Globalement, la nature de ces régimes et les domaines des paramètres pour lesquels ils sont observés s'accordent bien aux résultats de Harrison et al [94].

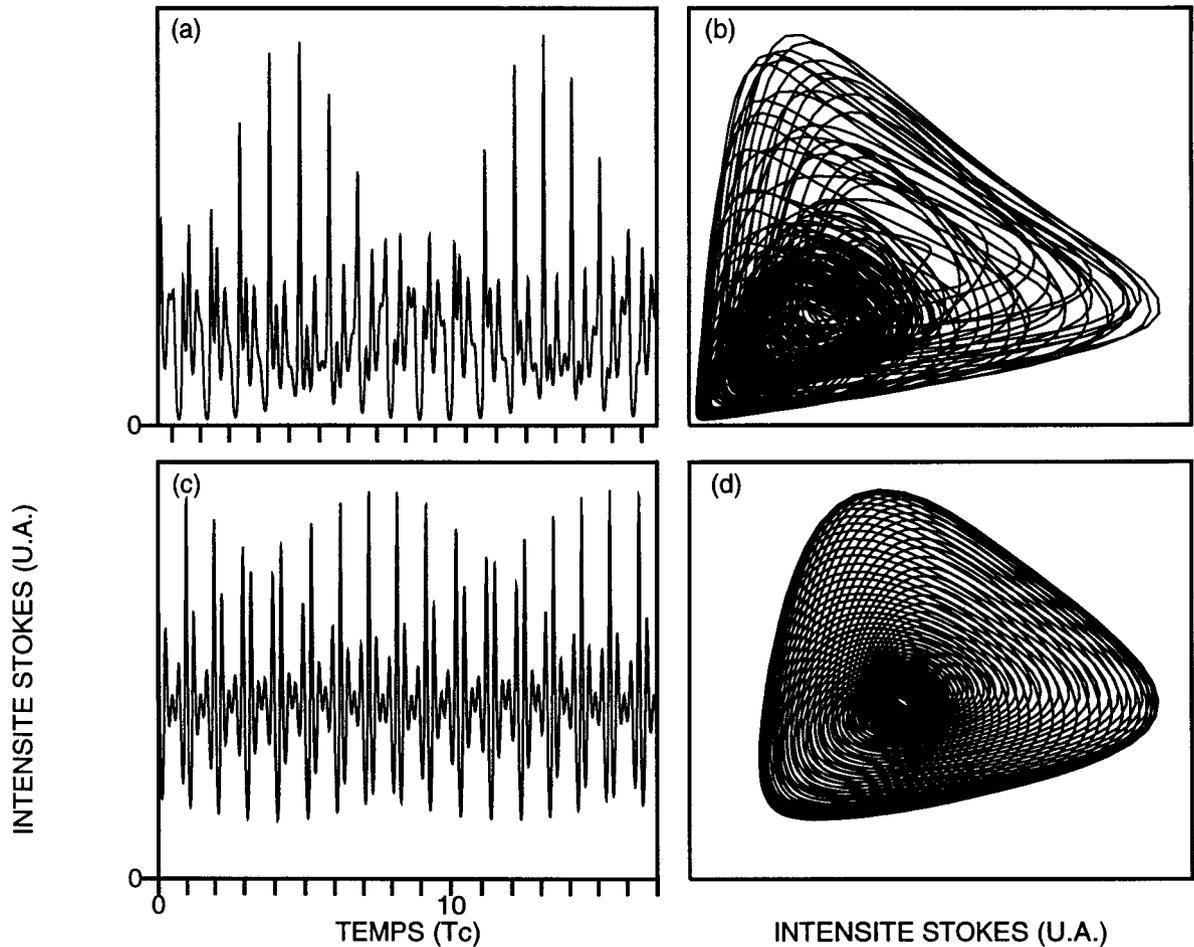


Fig. III-7: Evolution temporelle de l'intensité de l'onde Stokes

et portrait de phase reconstruit. $N = 100$,

a) et b) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.56$, c) et d) $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.85$.

L'ensemble des résultats que nous venons de décrire est rassemblé sur le diagramme III-8. Les régimes périodiques, quasipériodiques à deux fréquences, quasipériodiques à trois fréquences et chaotiques, sont marqués respectivement d'un point, d'une croix, d'un triangle et d'une étoile. Les fréquences dominantes sont repérées à droite de chaque point par l'indice du mode latéral associé. Nous avons également reporté sur ce graphe les limites des domaines instables associés à chaque mode

latéral. Les comportements génériques du laser Brillouin apparaissent ici clairement. Pour des puissances inférieures à 2.2 fois le seuil, et quelque soit le nombre de modes N , l'oscillation est périodique à une fréquence voisine de un ISL. C'est seulement dans un domaine compris entre 2.2 et 2.8 fois le seuil que d'autres modes peuvent osciller librement. L'augmentation de N fait alors apparaître des modes d'ordre croissant, tout comme le prévoit l'analyse de stabilité. Les dynamiques les plus complexes sont toujours rencontrées au voisinage de la limite supérieure du domaine instable associé au premier mode latéral, soit une puissance normalisée voisine de 2.6. Pour les plus faibles valeurs de N , l'émission est stable. En augmentant N , on observe une route vers le chaos de type Ruelle-Takens caractérisée par l'apparition successive de régimes périodiques, quasipériodiques à deux et trois fréquences, puis chaotiques. De part et d'autre de cette zone, on observe en général des régimes quasipériodiques à deux fréquences.

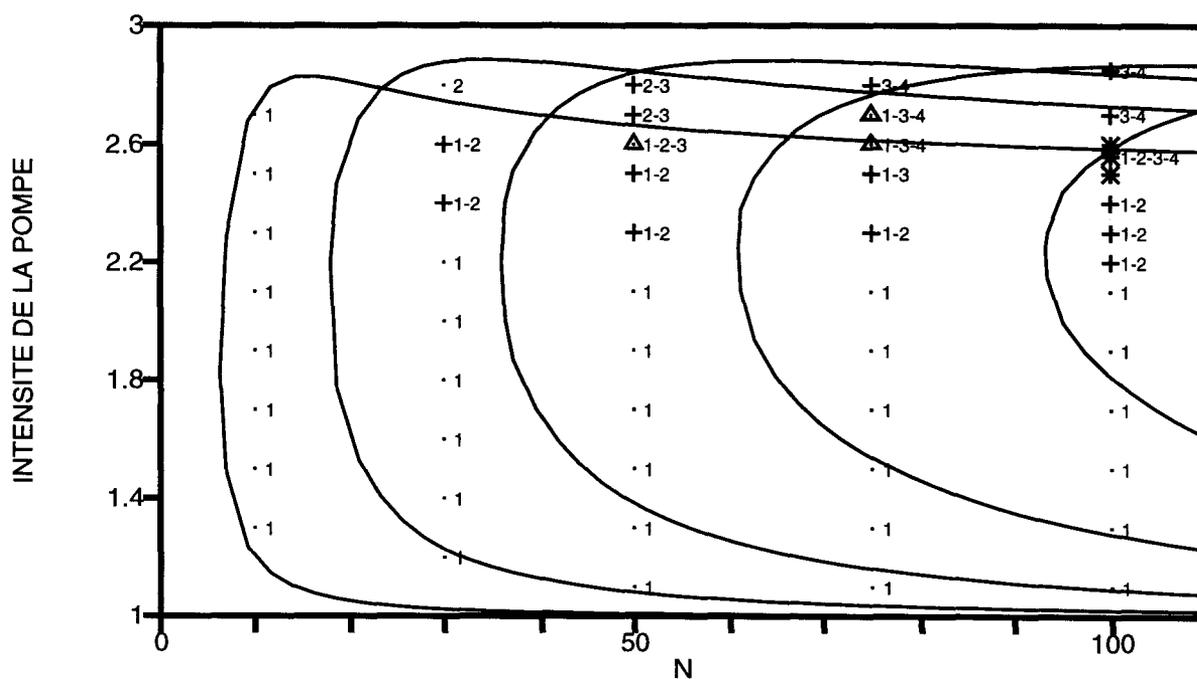


Fig. III-8: Domaines instables (traits pleins) et types de régimes observés (points),
 (\cdot) périodique, ($+$) quasipériodique à deux fréquences,
 (Δ) quasipériodique à trois fréquences, ($*$) chaotique,
 Les chiffres indiquent l'ordre des modes latéraux dominants.

Cette disposition particulière trouve son origine dans la répartition du gain entre les différents modes latéraux. L'analyse de stabilité ne

donne accès à cette répartition qu'au démarrage de l'instabilité à partir de l'état stationnaire. Toutefois, les tendances qu'elle met en évidence s'avèrent représentatives de la dynamique à long terme. Sur la figure III-9, nous avons représenté l'évolution en fonction de la puissance de pompe, du gain de la sonde lorsque celle-ci est maintenue en résonance avec la cavité active. Les quatre courbes correspondent au gain de sonde associé aux quatre premiers modes latéraux, et ont été obtenus pour $N=75$. Pour des intensités de pompe inférieures à 2.2 fois le seuil, le mode 1 a toujours un gain nettement supérieur à celui des autres modes. Il impose donc sa dynamique aux autres, ce qui conduit aux régimes pulsés bien connus pour ce système. Pour des puissances normalisées comprises entre 2.2 et 2.8, et en particulier près de la bifurcation associée au mode 1 (vers 2.6), les quatre modes ont des gains très voisins, c'est pourquoi on pourra observer des comportements dynamiques qui mettent en jeu l'ensemble de ces modes. Suivant les conditions, de légers avantages de gain ou encore des combinaisons de fréquences favorables ou non à un accrochage, un mode, une paire ou un triplet de modes pourront être dominants et imposer une dynamique à une, deux ou trois fréquences.

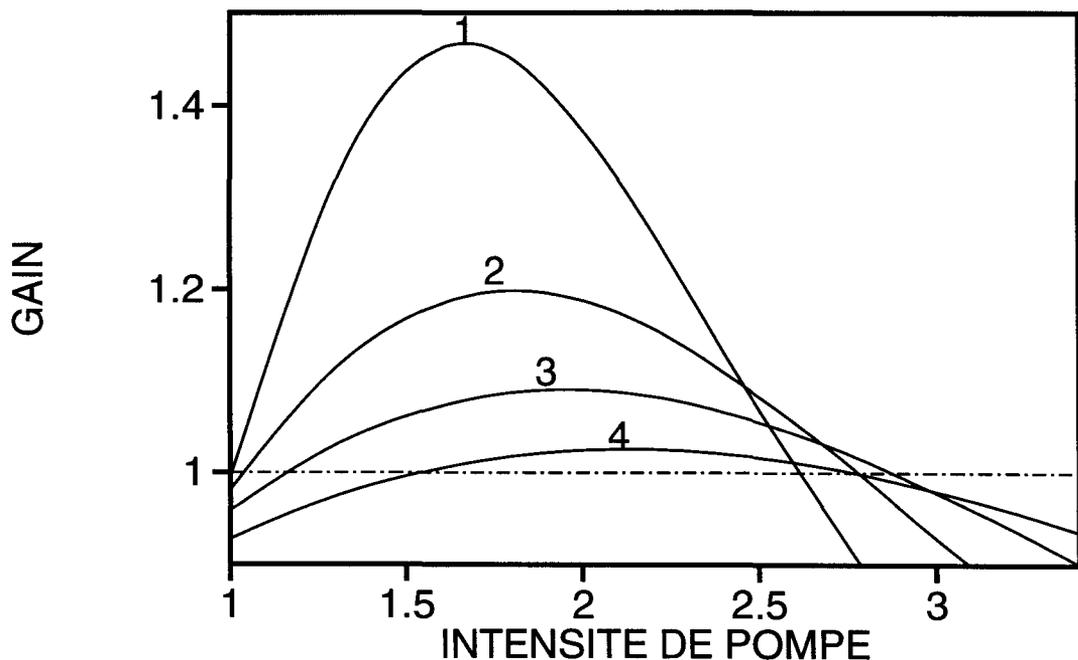


Fig. III-9: Gains des différents modes au démarrage d'une instabilité en fonction de l'intensité du pompage, $N = 75$.

III.3 Signatures de la dynamique

Comme on l'aura certainement remarqué tout au long de la section qui précède, la visualisation d'un signal de durée courte ou du portrait de phase permettent simplement de déterminer les modes qui entrent en jeu dans la dynamique, et de faire la distinction entre un régime périodique, quasipériodique à deux fréquences et un régime plus complexe. Nous ferons ici l'inventaire des signes caractéristiques que nous avons pu noter pour chaque type de régime (ceci s'applique également aux régimes obtenus pour une cavité en anneau). Nous présenterons également les outils numériques que nous avons mis en oeuvre afin de déterminer de manière indiscutable la nature du régime dans les cas les plus complexes.

III.3.a Dynamiques aux temps longs et analyse spectrale

L'ensemble des résultats présentés jusqu'ici montre clairement que les instabilités observées sont liées à la nature multimode de l'émission. Lorsqu'ils sont suffisamment découplés, chacun des modes évolue à sa fréquence propre, qui peut varier, selon la puissance de pompe, dans un petit domaine autour de chaque résonance de cavité passive. La conséquence en est que les régimes dynamiques évoluent selon deux échelles de temps. La plus courte est liée aux fréquences relatives de chacun des modes participant à la dynamique. L'évolution aux temps longs naît des battements entre harmoniques et combinaisons linéaires des fréquences fondamentales, qui peuvent apparaître très nombreuses dans ce système fortement non-linéaire. Comme ces fréquences fondamentales sont toujours voisines d'une harmonique de l'ISL, elles engendrent des battements à basse fréquence.

Pour chacun des régimes quasipériodiques à deux fréquences que nous avons répertorié, on observe systématiquement une modulation à basse fréquence ($\approx \text{ISL}/10$) du signal comme on peut remarquer sur la figure III-10 (en haut). On retrouve dans le spectre cette basse fréquence. Elle est associée au battement entre l'harmonique 2 du premier mode ($2f_1$) et le second mode (f_2), qui correspondent aux deux pics de plus grande intensité du spectre. Notons que les fréquences de

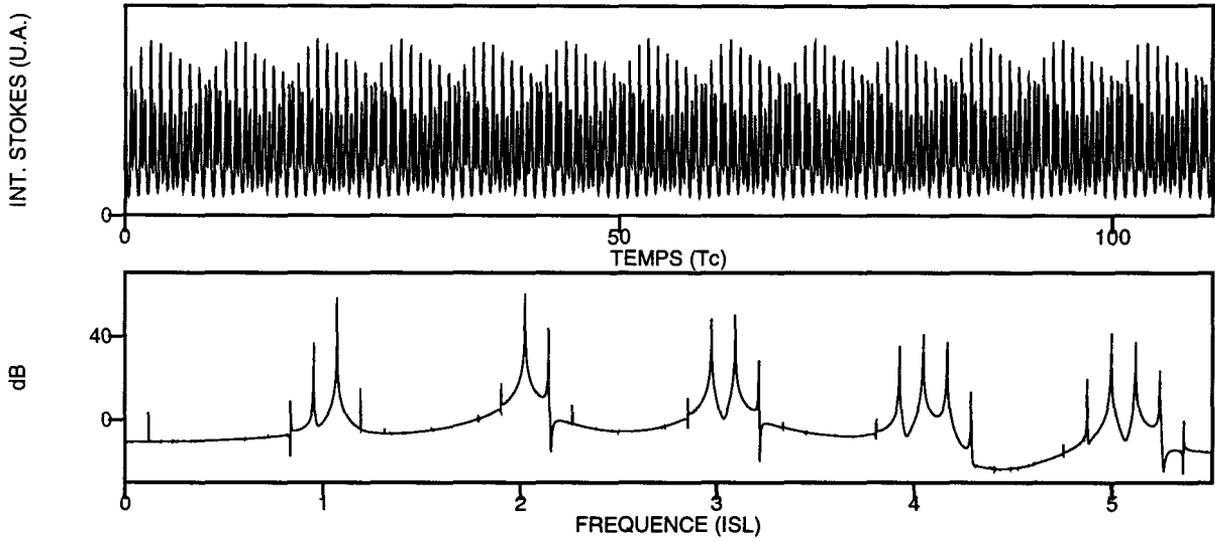
toutes les autres composantes du spectre sont des combinaisons linéaires des fréquences f_1 et f_2 .

Dans le cas de régimes quasipériodiques à trois fréquences (Figure III-10 au centre), une modulation de très basse fréquence ($\approx ISL/200$) vient s'ajouter à la première. L'analyse spectrale d'un tel signal montre que la combinaison de fréquence la plus simple qui donne cette basse fréquence est $(2f_2 - f_1 - f_3)$. Ceci est d'ailleurs tout à fait en accord avec les observations que nous avons faites dans les compléments C-1 du chapitre II, qui montraient également que ces régimes apparaissent lorsque l'accrochage des composantes spectrales de fréquences $(2f_2 - f_1)$ et f_3 est rompu.

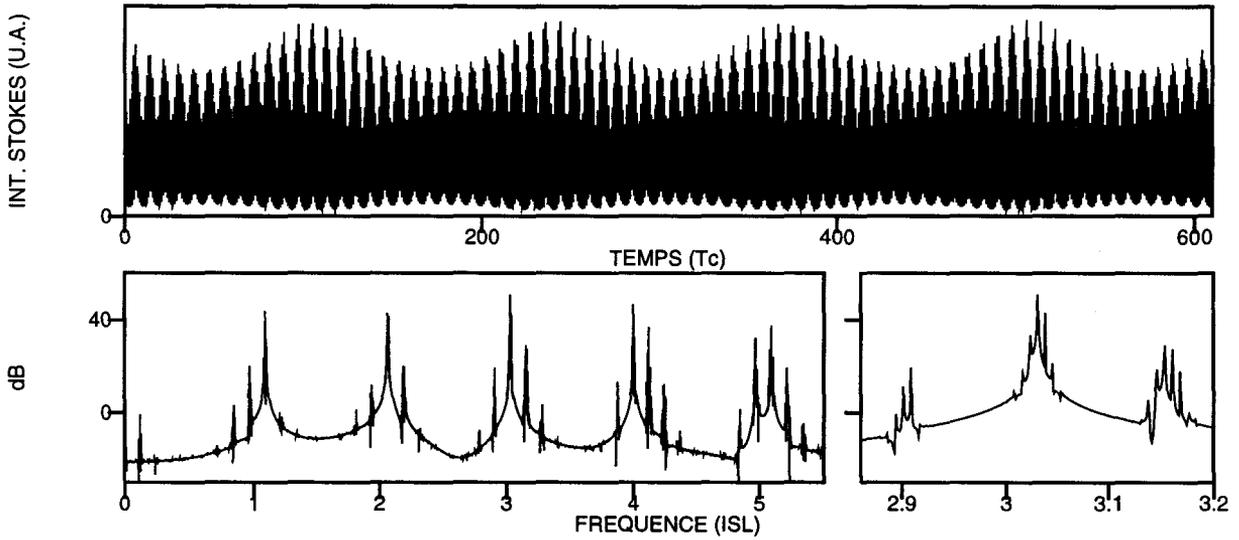
On notera que le simple fait de pouvoir observer des régimes quasipériodiques à trois fréquences dans des systèmes non-linéaires a longtemps fait l'objet d'une polémique [Ruelle, 71 ; Newhouse, 78]. On montrait alors que si ce type de régime pouvait effectivement être rencontré, il existait toujours des perturbations spécifiques du système qui le déstabilisaient, pour donner naissance à un chaos déterministe. En d'autres termes, un régime quasipériodique à trois fréquences n'était pas observable puisque structurellement instable. En fait, il fut par la suite montré que l'occurrence de ces perturbations pouvait être fort improbable [Grebogi, 83]. L'observation de régimes quasipériodiques à trois, voir quatre ou cinq, fréquences dans de nombreux systèmes, même expérimentaux, vint d'ailleurs appuyer cette dernière proposition [Walden, 84 ; Wang, 87]. Il n'en demeure pas moins que certains systèmes présentent des évolutions chaotiques dès l'apparition d'une troisième fréquence [Brandtl, 87].

Enfin, pour les régimes chaotiques, l'évolution à basse fréquence est typiquement celle du signal présenté en bas de la figure III-10. Il est à noter que, sur les dernières périodes de cavité du signal présenté ($t > 1000 T_c$), une seule modulation apparaît clairement, le signal ressemble alors fortement à un quasipériodique à deux fréquences. Comme nous l'avons déjà indiqué, ce comportement peut perdurer parfois jusqu'à 1000 périodes de cavité, et il est donc impératif d'analyser l'évolution du signal sur un laps de temps très long pour pouvoir définir la nature du régime observé.

QUASIPERIODIQUE A DEUX FREQUENCES



QUASIPERIODIQUE A TROIS FREQUENCES



CHAOTIQUE

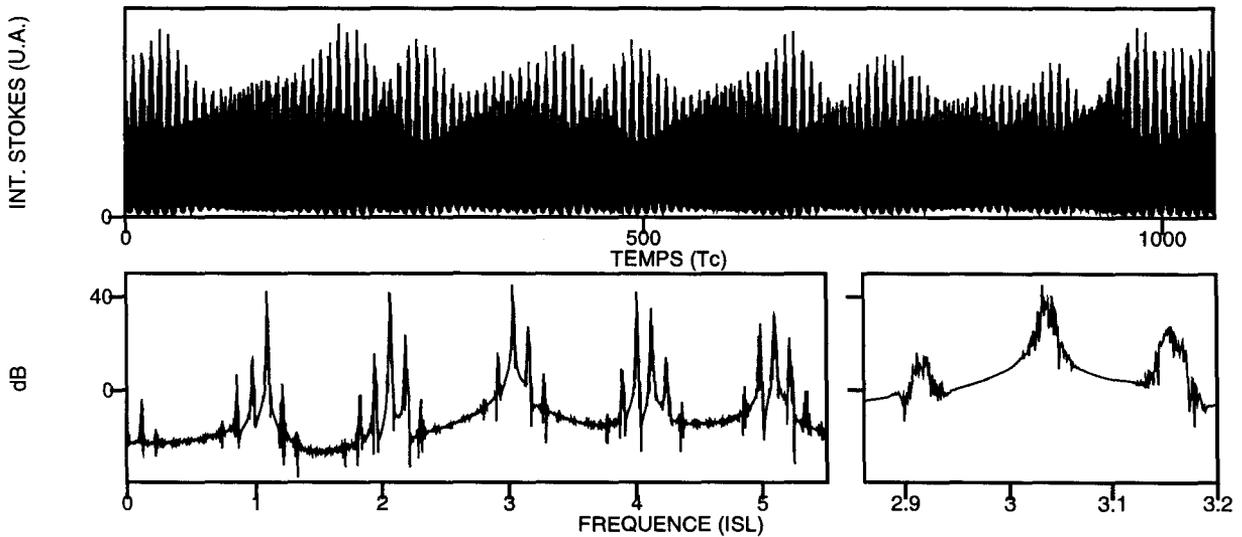


Fig. III-10: Evolution temporelles typiques et spectres correspondants.

Haut: $N=30$, $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.6$. Centre: $N=75$, $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.7$. Bas: $N=100$, $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 2.56$.

L'analyse spectrale du signal temporel montre que les différentes composantes ne se répartissent plus de manière discrète, mais semblent plutôt former le continuum typique d'une évolution chaotique. Afin de confirmer le caractère des signaux, il est impératif de faire appel à des méthodes d'analyse plus élaborées telles que l'analyse de dimension.

III.3.b Analyse de dimension

Confrontés aux évolutions temporelles très complexes des systèmes chaotiques, les dynamiciens ont dû élaborer de nouveaux moyens de caractérisation de cette évolution. Il fallait en outre être capable de faire la distinction entre régimes stochastiques et déterministes. La particularité fondamentale d'une évolution déterministe est de rester toujours corrélée aux états antérieurs. En s'appuyant sur cette propriété, on a pu montrer l'existence de quantités invariantes, et des méthodes numériques ont été développées pour évaluer ces quantités. L'invariant le plus facile à obtenir est sans doute la dimension de corrélation de l'attracteur, qui de plus s'associe facilement à l'idée concrète que l'on se fait de la dimension d'un objet. Dans l'espace des phases, une évolution périodique est décrite par une courbe fermée de dimension 1. La trajectoire associée à un signal quasipériodique à deux fréquences occupe un tore, soit une surface de dimension 2. Pour un régime quasipériodique à trois fréquences, l'attracteur est de dimension 3 et ainsi de suite. En revanche, l'attracteur chaotique est un objet fractal dont la dimension est non entière.

Pour déterminer la dimension de l'attracteur, nous avons utilisé la méthode de Grassberger et Procaccia qui est présentée dans l'annexe IV. Les séries temporelles utilisées sont formées de 100.000 points, échantillonnés à intervalles de temps réguliers, et représentent une durée totale de $4000 T_c$. En raison des limitations du programme de calcul, "seuls" les 20.000 premiers points sont utilisés comme référence pour le décompte des proches voisins. Le délai choisi pour la reconstruction de l'attracteur vaut $T_c/8$.

Les résultats présentés sur la figure III-11 ont été obtenus pour les trois conditions typiques déjà présentées au paragraphe précédent. Les différentes courbes représentent la dimension de corrélation en fonction du rayon r des sphères qui définissent l'état de voisinage de

deux points dans l'espace des phases. Chaque tracé correspond à une valeur particulière de la dimension de plongement D_p , qui croit de 2 à 20 par incrément de 2. Sur la figure III-11-a et pour $D_p > 4$, toutes les courbes convergent vers un même large plateau horizontal de dimension de corrélation égal à 2, indicatif d'un régime quasipériodique à deux fréquences. Sur le graphe III-11-b associé au régime quasipériodique à trois fréquences, la convergence est plus lente et le plateau moins clairement défini, correspondant à une dimension proche de trois. Cette imprécision dans l'estimation de la dimension est compréhensible si l'on considère que la durée du signal analysé ne représente que 20 fois la période de la modulation de plus basse fréquence.

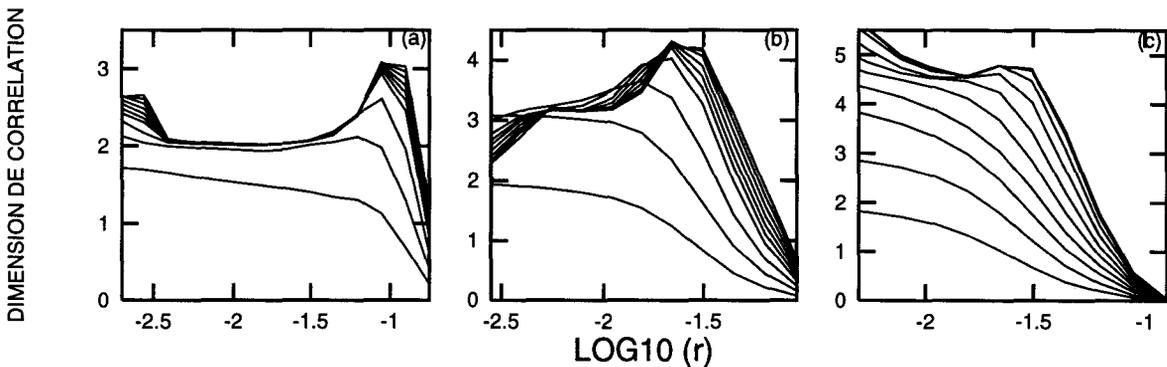


Fig. III-11: Analyse de la dimension de corrélation, appliquée aux trois régimes typiques de la figure III-10.

Enfin, pour le régime chaotique (Fig. III-11-c), la convergence n'est observée que pour une seule valeur du rayon r , suggérant une dimension de l'ordre de 4.6. Ce résultat, quoique très imprécis, s'accorde bien avec l'idée que les quatre ou cinq premiers modes latéraux régulent la dynamique de l'émission dans les conditions de cette simulation (voir le point correspondant sur la figure III-8). A ce niveau, on peut noter une nette divergence entre notre résultat et les résultats expérimentaux de Harrison et al [94] auxquels nous faisons référence. En effet, les auteurs annoncent une dimension de 2.1, toutefois, ils précisent que leur calcul a été effectué pour des séries temporelles de 16000 points, représentant une durée d'environ $66 T_c$. Nous avons reproduit le calcul pour une séquence numérique équivalente (toujours pour $N=100$,

et à 2.56 fois le seuil). Nous avons obtenu des convergences assez mal définies, donnant des dimensions comprises entre 2 et 3 selon la série choisie. Clairement, la durée du signal doit être choisie en rapport avec l'évolution à basse fréquence du système. Une détermination précise de la dimension de l'attracteur requiert un nombre d'échantillons plus grand que celui que nous avons utilisé, ce qui est hors de portée de nos moyen de calcul.

III.3.c Sensibilité aux conditions initiales

Même si l'on peut déjà avoir de fortes présomptions, aucun des résultats présentés jusqu'ici ne prouve de manière irréfutable la nature chaotique des régimes que nous avons pourtant annoncés comme tels. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la dimension élevée de l'attracteur et l'évolution très lente du système rendent imprécises les méthodes classiques d'analyse du signal. Le test que nous décrivons ici porte sur la sensibilité de l'évolution temporelles aux conditions initiales. Cette caractéristique, inhérente aux systèmes chaotiques, fait que deux trajectoires, parties de conditions initiales infiniment proches mais distinctes, finissent par être totalement décorréelées après un temps suffisant.

Après une intégration numérique qui dépasse la durée du transitoire, on stoppe le programme d'intégration, en conservant toutes les données qui caractérisent l'état du système à cet instant, pris par la suite comme origine des temps. L'intégration est alors être reprise à partir de cet état, et donne l'évolution de l'intensité Stokes $I_{ref}(t)$ qui servira de référence. On reprend ensuite le même calcul, après avoir légèrement perturbé l'état initial (en fait de perturbation, on multiplie le champ Stokes en tous points par $(1+10^{-6})$), le signal alors obtenu est noté $I_{pert}(t)$. On compare ensuite ces deux signaux en traçant l'évolution de leur écart relatif $|I_{ref}(t) - I_{pert}(t)|/I_{moy}$, où I_{moy} est la moyenne temporelle du signal $I_{ref}(t)$. Cette procédure a été appliquée à un régime quasipériodique à trois fréquences ainsi qu'à un régime chaotique, les résultats obtenus sont représentés sur la figure III-12. On peut déjà vérifier qu'aux premiers instants, l'écart relatif est très faible. Il se maintient à un niveau négligeable sur des temps très longs pour le régime quasipériodique à trois fréquences. Ceci montre non seulement que ce type de régime n'est pas sensible aux conditions initiales, mais

aussi que l'erreur de l'intégration numérique, cumulée sur 5000 tours de cavité, reste négligeable. Par contre, l'écart augmente de façon exponentielle dans le cas du régime chaotique. La pente de la droite, dans cette représentation semi-logarithmique, permet d'estimer à une valeur de $7.10^{-3} (T_c)^{-1}$ l'exposant de cette croissance, il correspond au plus grand exposant de Lyapunov associé à ce régime. La croissance de l'écart est évidemment stoppée lorsque celui-ci atteint des valeurs de l'ordre de l'amplitude de la modulation du signal ($\approx 2.I_{moy}$). Après 3000 T_c , les deux signaux ont donc perdu toute corrélation ; cette sensibilité aux conditions initiales est une signature indiscutable de la nature chaotique du régime considéré.

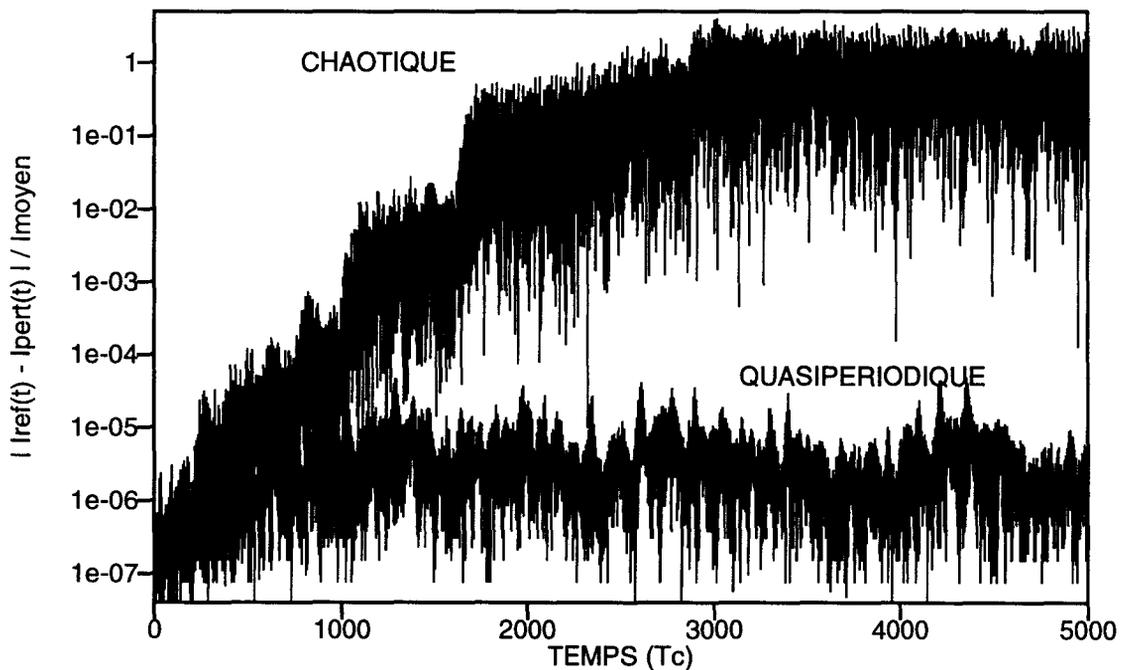


Fig. III-12: Evolution en fonction du temps de l'écart relatif entre signal perturbé et signal de référence pour un régime quasipériodique à trois fréquences et pour un régime chaotique.

Toute l'étude qui précède se voulait des plus générales et visait essentiellement à faire ressortir les mécanismes principaux contribuant à la dynamique du laser. Le modèle résonant, strictement limité aux couplages de la DBS, permet néanmoins de reproduire la plupart des régimes observés expérimentalement par l'équipe Ecossoise [Lu, 92 ; Harrison, 94]. En particulier, nous retrouvons des comportements chaotiques dont l'origine était jusqu'à présent attribués aux couplages

des champs par l'effet Kerr [Lu, 92 ; Yu, 95], mais qui sont en fait intrinsèques au processus de diffusion en cavité. Nous signalions au paragraphe I-6 que les pertes de la fibre et le désaccord de la cavité figurent en tête de liste des paramètres qui peuvent jouer un rôle important mais que nous avons toutefois négligé dans notre analyse. Comme nous le verrons dans le prochain paragraphe, l'influence de ces deux paramètres apparaît clairement parmi les résultats présentés dans la littérature et les deux expériences que nous présentons.

III.4 Expériences en cavité "naturelle"

Tout d'abord, revenons sur l'expérience de Lu et al [92], qui se caractérise par un nombre de mode sous la courbe de gain $N=50$ et des pertes de fibre de 30% (voir tableau A-1 de l'annexe II). Les auteurs signalent l'apparition de régimes périodiques et quasipériodiques, comportements qui sont parfaitement interprétés dans notre analyse. Gaeta et al [92] ont étudié un système similaire mais cette fois avec des pertes de fibre de 60%. Le modèle théorique utilisé est équivalent au notre, mais prend en compte les pertes de la fibre. Dans l'expérience comme dans les simulations numériques, les auteurs n'ont observé que les régimes périodiques. Il semble donc que l'effet principal d'une forte perte est d'empêcher la croissance des modes d'ordre élevé de moindre gain, et, en quelque sorte, de "simplifier" la dynamique.

Dans la plupart des expériences, les auteurs rapportent l'existence d'oscillations aux fréquences harmoniques de l'ISL, qui apparaissent par intermittence et sur des temps typiquement de l'ordre de la milliseconde. Gaeta et al [92] ont avancé l'hypothèse que ces brusques sautes de régime, non reproduites dans leurs simulations, sont dues aux fluctuations de la longueur de cavité induites par des perturbations thermiques et mécaniques. Dämmig et al [93] en ont ensuite donné la preuve en montrant que les irrégularités peuvent être supprimées par une stabilisation active de la longueur de la fibre. Dans le régime de miroir Brillouin, la durée typique des séquences d'émission stable augmente avec la puissance, tandis que les bouffées d'instabilités sont de plus en plus brèves [Lu, 92 ; Harrison, 94].

Les deux expériences que nous avons réalisées en cavité "naturelle" présentent non seulement un bon accord général avec nos simulations numériques, mais elles donnent accès à quelques informations supplémentaires sur l'effet des paramètres négligés. Les conditions expérimentales sont définies dans tableau A-1 de l'annexe II (colonnes A et B).

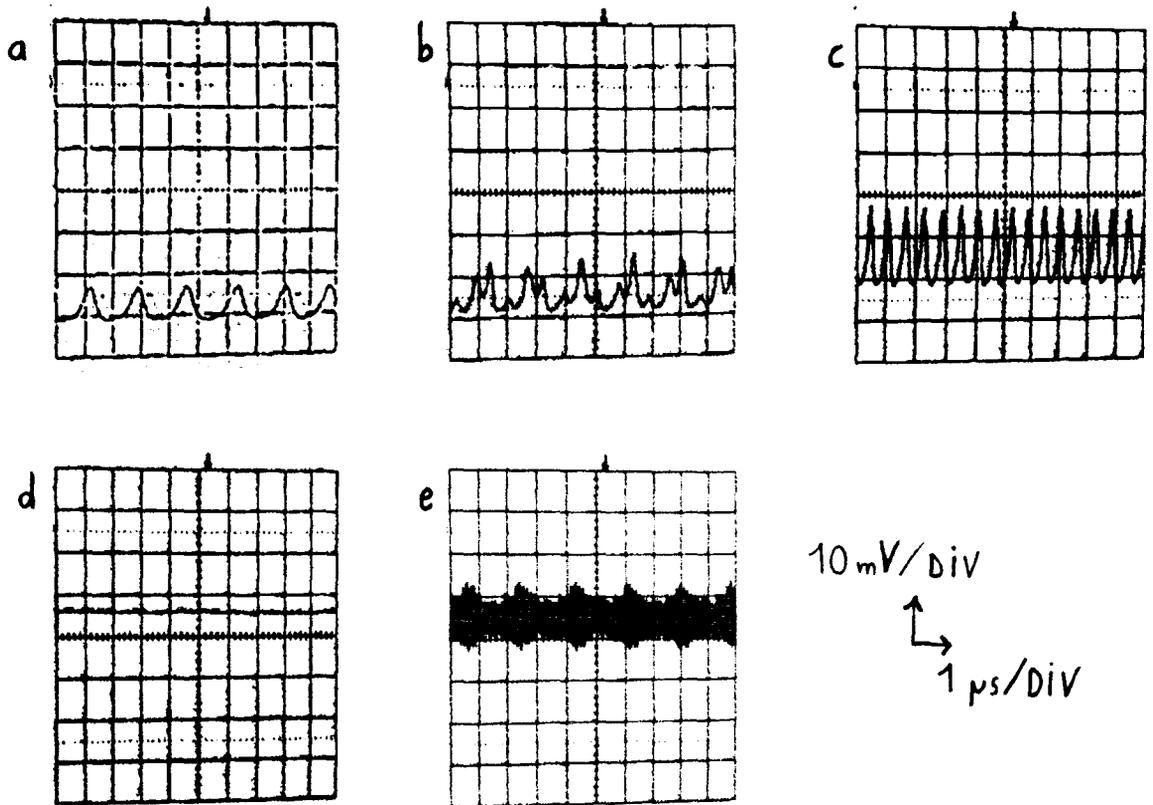


Fig. III-13: Régimes typiques observés expérimentalement pour des valeurs croissantes de l'intensité de pompe. $N = 70$.

La première expérience (A) est caractérisée par un nombre de mode sous la courbe de gain égal à 70, et des pertes de 30%. Pour ne rien manquer des nombreux comportements dynamiques de ce système, nous avons préféré enregistrer avec une camera les signaux affichés à l'oscilloscope, au cours d'un balayage lent de la puissance de pompe incidente. Cette technique nous a en outre permis de constater que l'enchaînement des comportements était identique d'un balayage sur l'autre, et rigoureusement symétrique dans la montée et la descente. Quasiment dès le seuil, on observe des régimes périodiques à la fréquence de cavité (Fig. III-13-a), brusquement remplacés, pour des puissances voisines de deux fois le seuil, par des oscillations quasipériodiques (Fig. b) dont les composantes spectrales principales sont de toute évidence associées aux modes 1 et 3. Ce régime évolue ensuite continûment vers une oscillation périodique à la fréquence 3 (Fig. c), dont l'amplitude diminue jusqu'à la stabilisation de l'émission (Fig. d) obtenue pour une puissance d'environ 4 fois le seuil. Au delà,

l'émission est stable la plupart du temps, mais passe de manière erratique par des comportements périodiques ou quasipériodiques (Fig. e) avec toujours pour dominante une harmonique de l'ISL. Nous avons pu augmenter la puissance jusqu'à six ou sept fois le seuil, et constater que l'ordre de l'harmonique a tendance à augmenter avec la puissance (jusqu'à l'harmonique 20 dans cette expérience). Cette augmentation s'accompagne d'un allongement de la durée des émissions stables (cf. [Harrison, 94]), ce qui tend à montrer que ces régimes sont associés à des sauts de modes. Comme nous l'avons déjà discuté au paragraphe IV-1 de l'article, un mode portant une émission de plus en plus intense peut devenir multistable avec un nombre croissant de modes latéraux. Le désaccord nécessaire pour provoquer le saut de mode augmente alors en conséquence, et, comme ce désaccord est soumis à des variations erratiques, la probabilité d'observer un saut de mode diminue. Le transfert d'énergie d'un mode à un autre n'étant pas instantané, on observe transitoirement le battement du mode initialement actif avec celui qui le remplace (en principe, un mode plus proche du maximum de gain).

Outre son intérêt fondamental, la multistabilité de nombreux modes latéraux à fort niveau de pompage n'est pas sans implications dans la pratique. Cette caractéristique devrait en effet permettre la réalisation de sources lasers accordables, qui nécessiterait toutefois un contrôle actif de la longueur de cavité. Dans notre expérience, des sauts de 20 modes ont été observés, ce qui permet d'espérer une accordabilité sur 20 ISL de part et d'autre du maximum de gain, soit environ 20 MHz.

On notera que le signal périodique à la fréquence 3 ISL, présenté sur la figure III-13-c, n'est pas retrouvé dans nos simulations numériques pour $N=75$ et une puissance de pompe égale à trois fois le seuil (Voir la figure III-8). Ce régime n'a pourtant rien à voir avec les sauts de modes que nous venons de mettre en évidence. Il s'agit bien d'un régime dynamique stationnaire qui se reproduit presque systématiquement. De même, Harrison et al [94] ont présenté un signal périodique à la fréquence 4 ISL, observé pour une puissance de pompe comparable et $N=95$. Sans faire une étude exhaustive, nous avons testé numériquement la dynamique du laser pour quelques valeurs du désaccord de cavité pour une puissance de trois fois le seuil. Nous avons

ainsi pu reproduire ces oscillations périodiques aux fréquences 3 et 4 ISL respectivement pour $N=75$ et $N=100$ et un désaccord de fréquence entre le maximum de gain et le mode de cavité le plus proche égal à 0.45 ISL. Ces signaux sont présentés sur la figure III-14.

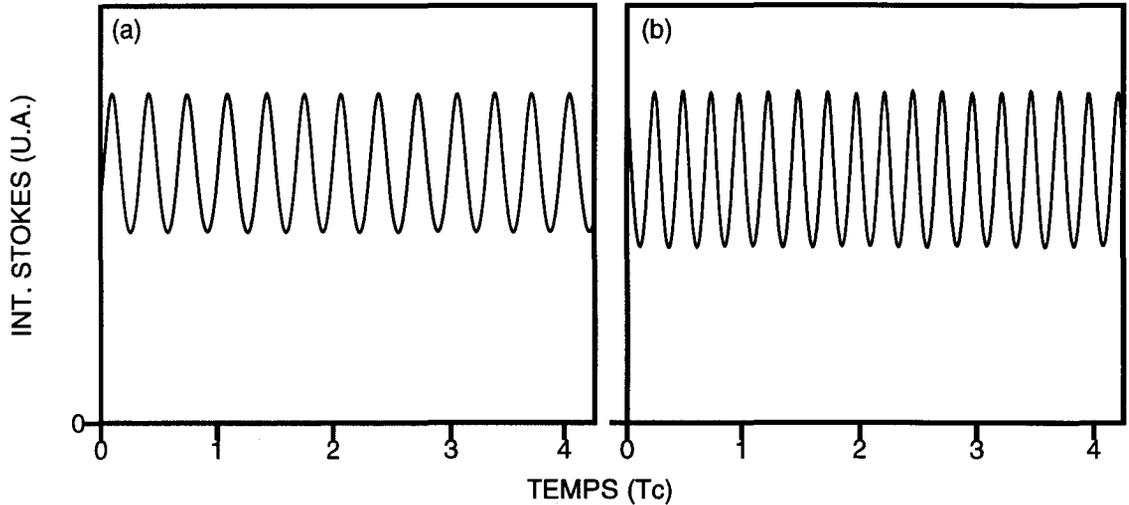


Fig. III-14: Evolution temporelle de l'intensité de l'onde Stokes en présence de désaccord de cavité.

a) $N=75$, $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 3$, $\Delta_0 = 0.45$ ISL, b) $N=100$, $\mu^2 / \mu_{\text{Seuil}}^2 = 3$, $\Delta_0 = 0.45$ ISL.

L'expérience (B) est déjà en partie décrite dans le paragraphe III-3 de l'article. Le nombre de modes $N=7$ est juste supérieur au nombre de modes critique $N_{c1}=6$, les pertes de la fibre (3%) sont négligeables devant les 99.9% de pertes de la cavité. Lorsque le maximum de gain coïncide avec un mode de cavité, tous les critères qui ont permis l'établissement du modèle III-1 sont remplis. La figure 8 de l'article, obtenue dans ces conditions, montre que l'émission est d'abord stable juste au dessus du seuil, puis se déstabilise pour des puissances plus fortes, tout comme le prévoit l'analyse de stabilité. Les régimes observés alors sont périodiques de période T_c , en accord avec nos simulations. Nous voulons ici montrer quelle est l'influence du désaccord de cavité sur un tel système. Ce paramètre est contrôlé en balayant la fréquence du laser de pompe. Les figures III-15 montrent l'évolution de l'intensité de l'émission Stokes au cours d'un balayage quasi-adiabatique de la fréquence de pompe sur trois ISL, pour une puissance de pompe fixe légèrement supérieure au seuil (a), et de l'ordre de deux fois le seuil (b). Ces résultats montrent que, dans des conditions pour lesquelles l'émission est stable à la résonance (a), on peut observer des instabilités

(qui se limitent ici aux régimes périodiques de période T_c) pour des désaccords correspondant à l'anti-résonance. En revanche, lorsque l'émission est instable à la résonance (b), elle l'est quelque soit le désaccord.

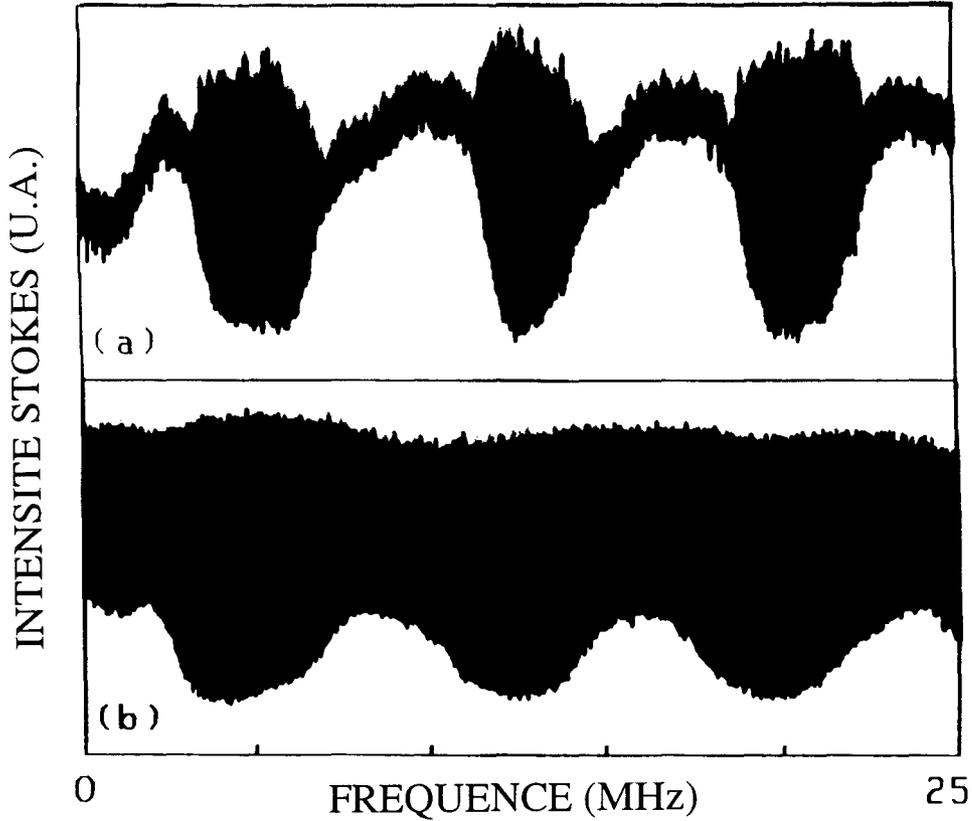


Fig. III-15: Intensité de l'onde Stokes aux cours du balayage lent de la fréquence de pompe sur près de trois ISL. $N = 7$, a) pompage faible, b) pompage intense.

Le désaccord du maximum de gain Stokes par rapport aux modes de cavité passive évolue continuellement dans un laser réel dont la longueur n'est pas asservie. Lorsque l'émission est déjà instable à la résonance, les variations provoquées ou les fluctuations du désaccord ne semblent qu'ajouter des modulations régulières (expérience B) ou erratiques [Gaeta, 92] à l'enveloppe du signal, sans entraîner l'apparition de nouveaux régimes dynamiques.

Conclusion

L'analyse de stabilité de l'état stationnaire donne accès à de nombreuses informations qui permettent la prédiction des régimes dynamiques que l'on rencontre dans les simulations numériques. Pour les cavités Perot-Fabry de faibles finesse, on peut par exemple constater que chaque résonance de cavité coïncide avec une résonance du gain, alors que ce n'était le cas que pour une résonance de cavité sur deux dans le cas d'un anneau. De fait, un plus grand nombre de modes peuvent porter l'émission Stokes indépendamment les uns des autres et participer à la dynamique du système. Par ailleurs, nous avons montré que l'importance relative des gains de chacun des modes latéraux au démarrage d'une instabilité reflète déjà leur niveau d'implication au sein de régimes dynamiques fortement développés. On peut ainsi remarquer que le premier mode latéral a toujours un gain nettement supérieur aux autres pour des puissances de pompe relativement faibles (< 2.2 fois le seuil pour la cavité "naturelle"). Ceci explique les régimes pulsés de période T_c observables dans ces conditions, et qui correspondent à un accrochage en fréquence de tous les modes latéraux sur le premier mode. Pour de plus forts pompages, et, en général, autour de 2.6 fois le seuil, des modes latéraux d'ordres supérieurs peuvent s'affranchir de cet accrochage, en nombre croissant avec le nombre N de modes sous la courbe de gain. On assiste alors à une route vers le chaos de type Ruelle-Takens, passant d'une émission stable pour les plus faibles valeurs de N , à des régimes périodiques, quasipériodiques à deux fréquences, puis à trois fréquences et enfin chaotiques pour N voisin de 100.

Ces résultats théoriques sont en bon accord avec ceux obtenus expérimentalement. Même si quelques paramètres non considérés dans l'analyse théorique tels que le désaccord de cavité ou les pertes de la fibre, peuvent modifier les comportements expérimentaux, leur contribution est clairement mise en relief. Les fluctuations du désaccord de cavité provoquent essentiellement des sauts de modes. Les régimes transitoires au cours du saut présentent parfois des allures complexes, mais les fréquences typiques de ces signaux sont toujours des harmoniques de l'ISL. La perte de la fibre, lorsqu'elle est importante

(>30%), empêche la croissance des modes de moindre gain et limite ainsi la complexité des comportements dynamiques.

L'analyse de stabilité de l'état stationnaire, outre son intérêt fondamental comme point de départ d'une étude de la dynamique, nous a permis de définir les domaines de paramètres pour lesquels l'émission du laser Brillouin en cavité Perot-Fabry est stable. En particulier, nous avons montré que le nombre critique de modes augmente rapidement avec le coefficient de réinjection des miroirs. Il est donc possible de réaliser des lasers Brillouin de grandes longueurs et donc de très faibles seuils, dont l'émission reste néanmoins stable et monomode quelque soit la puissance de pompe. Dans le chapitre suivant, nous étudierons une cavité Brillouin en ligne fermée par des réseaux de Bragg, et discuterons des avantages qu'offre un tel système pour la génération d'un rayonnement stable et très cohérent.

CHAPITRE IV

**Réalisation d'un laser
Brillouin "tout-fibre"
à réseaux de Bragg**

Nous avons montré dans les deux chapitres précédents que l'émission des lasers Brillouin est toujours stable pour des nombres de modes sous la courbe de gain suffisamment faibles, et ce quelque soit le type et la finesse de la cavité. D'un point de vue pratique, les cavités de courtes longueurs présentent de nombreux avantages ; les pertes de la fibre sont négligeables, le dispositif est peu encombrant et peu sensible aux perturbations extérieures.

Dans des conditions d'émission stable, Smith et al [91] ont mis en évidence une nette amélioration de la qualité spectrale de l'onde Stokes en comparaison de celle du laser de pompe. A priori, toute source pourrait être convertie de la même façon et affinée spectralement via le processus de diffusion Brillouin stimulée. La conversion est efficace tant que la largeur spectrale de la source reste inférieure à la largeur de gain Brillouin spontané [Lichtman, 87]. En outre, la procédure est relativement simple car elle ne nécessite qu'une fibre optique insérée dans une cavité, de plus, elle est applicable quelque soit la longueur d'onde de pompe.

Jusqu'à présent, des cavités en anneau utilisant un coupleur à fibre ont généralement été utilisées pour ce type d'applications [Stokes, 82 ; Bayvel, 89a-b ; Smith, 91 ; Toyama, 93]. Cette configuration présente toutefois quelques inconvénients. Tout d'abord, l'onde Stokes est toujours retournée vers le laser de pompe, il faut donc interposer entre le laser de pompe et la cavité à fibre un dispositif de séparation de l'onde Stokes (une séparatrice ou un coupleur sur la fibre) ainsi qu'un isolateur optique pour protéger le laser de pompe. La part réellement disponible de l'onde Stokes créée est alors réduite et, dans le meilleur des cas, le taux de conversion mesuré s'élève à 10% [Stokes, 82 ; Bayvel, 89a]. De plus, la puissance de pompe ne peut excéder deux ou trois fois le seuil, car l'onde Stokes devient alors suffisamment intense pour donner naissance à une onde Stokes d'ordre deux, qui peut déstabiliser l'émission. On ne pourra remédier à ce dernier problème qu'en insérant un isolateur optique dans la cavité de sorte que seule l'onde Stokes puisse s'y propager (voir le paragraphe 4.2 du chapitre II). En résumé, la configuration en anneau ne peut en aucun cas être réduite à une simple boucle constituée d'une fibre et un coupleur. Les éléments qu'il

faut ajouter rendent le dispositif complexe et coûteux, et les rendements de conversion accessibles sont relativement faibles.

La configuration Perot-Fabry usuelle, constituée par une fibre optique et deux miroirs "classique" placés à chacune de ses deux extrémités, n'apporte que des complications supplémentaires. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le nombre critique de modes N_c est environ deux fois plus petit que celui d'une cavité en anneau. Il est donc nécessaire de raccourcir encore la longueur de cavité pour obtenir une émission stable, ce qui a pour premier effet d'augmenter le seuil d'émission. En outre, dans cette configuration, les champs de pompe et Stokes sont tous deux réfléchis et transmis par la cavité ; l'onde Stokes créée n'est donc pas directement accessible. Enfin, la cascade Stokes est inévitable, et peut se compliquer encore par l'apparition de composantes anti-Stokes. On comprend mieux ainsi pourquoi cette configuration n'a attiré jusqu'ici qu'un intérêt limité.

L'utilisation de réseaux de Bragg en lieu et place de miroirs "classiques", nous a permis de réaliser un laser Brillouin en cavité Perot-Fabry, dont les caractéristiques et les comportements se démarquent clairement du tableau pessimiste que nous venons de décrire. Ce travail est le fruit d'une collaboration avec l'équipe de P. Niay du Laboratoire de Dynamique Moléculaire et Photonique de Lille (L.D.M.P.), spécialisée dans l'inscription de réseaux de Bragg sur des matériaux photo-réfractifs. Outre sa bonne réflectivité, ce type de miroirs est caractérisé par une largeur spectrale très étroite. Accordé à la fréquence de l'onde Stokes, le miroir de Bragg peut alors transmettre l'onde de pompe ainsi qu'une part importante des éventuelles ondes Stokes d'ordres supérieurs ou anti-Stokes, qui ne peuvent pas croître dans la cavité. Les miroirs de Bragg permettent la réalisation de cavités Perot-Fabry entièrement fibrées, plus simples et plus performantes que les cavités en anneau.

Dans ce chapitre, nous décrivons tout d'abord succinctement la technique d'inscription des réseaux de Bragg au coeur de la fibre. Nous présentons ensuite les caractéristiques des réseaux obtenus, de la cavité qu'ils forment, et de l'onde Stokes générée. Enfin, l'analyse théorique d'une cavité idéale nous permettra de discuter les perspectives attendues d'un tel dispositif expérimental.

IV.1 Inscription des réseaux de Bragg

La technique d'inscription de réseaux de Bragg sur fibres optiques que nous avons utilisée a été développée au L.D.M.P.. On trouvera des informations très détaillées sur ce sujet dans les mémoires de thèse de S. Legoubin [94] et E. Fertein [95].

La méthode d'inscription [Meltz, 89] s'appuie sur le fait que l'irradiation par rayonnement ultraviolet d'une fibre optique provoque des variations permanentes de son indice par effet photoréfractif. Ce dernier est en partie attribué à la présence d'oxyde de Germanium et d'autres impuretés dans le coeur. Cet effet peut être augmenté par un traitement de la fibre à l'hydrogène gazeux sous pression [Lemaire, 94]. Lorsque la fibre est placée dans un champ d'interférences ultraviolettes, dont les franges sont perpendiculaires à l'axe de la fibre, un réseau d'indice se forme le long de celle-ci. L'interfrange Λ fixe le pas du réseau et donc la longueur d'onde de Bragg λ_B pour laquelle ce réseau est réfléchissant ($\lambda_B = 2 n \Lambda$, où n est l'indice moyen du coeur à la longueur d'onde λ_B). La réflectivité du réseau est d'autant meilleure que la modulation d'indice est forte et le réseau long.

Si le principe paraît très simple, sa mise en oeuvre s'accompagne de nombreuses complications. Tout d'abord, la concentration en impuretés de la silice varie d'une fibre à l'autre, l'efficacité du processus d'inscription et donc la durée d'exposition de la fibre varie également. Or, si le temps d'exposition est trop long, on observe une saturation de la variation de l'indice au voisinage des maximums d'intensité, la modulation d'indice perd alors sa forme sinusoïdale et le réseau de sa sélectivité en fréquence. Par ailleurs, l'indice moyen, et donc λ_B , évoluent au cours de l'inscription [Fertein, 91]. Cette particularité pourrait ne pas porter à conséquence dans un système idéal, mais la structure transverse du faisceau d'irradiation, un mauvais positionnement de la fibre, ou des défauts de celle-ci entraînent inévitablement des inhomogénéités de la figure d'interférence. La longueur d'onde de Bragg n'évolue donc pas de la même manière tout au long du réseau, et la bande spectrale réfléchie par le réseau s'élargit au fur et à mesure que celui-ci se forme. Il est donc indispensable de

contrôler les caractéristiques du réseau au cours de son inscription, en visualisant l'évolution de la courbe de transmission de la fibre au voisinage de la longueur d'onde de Bragg.

Le faisceau ultraviolet émis par laser continu ou pulsé, est traité par un système de lentilles afin de lui conférer une structure transverse aplatie à l'intérieur de laquelle la distribution du champ s'approche de celle d'une onde plane. Ce faisceau éclaire un prisme suivant le schéma IV-1, le faisceau directement transmis et la partie réfléchiée interfèrent à l'arrière du prisme. L'interfrange Λ est ajustée en modifiant la valeur de l'angle d'incidence du faisceau sur le prisme. La fibre dénudée est placée contre la face arrière du prisme dans le champ d'interférence. L'inscription est contrôlée en observant le spectre en transmission de la fibre, obtenu soit avec un système lumière blanche/spectromètre, soit avec un laser continûment accordable autour de λ_B .

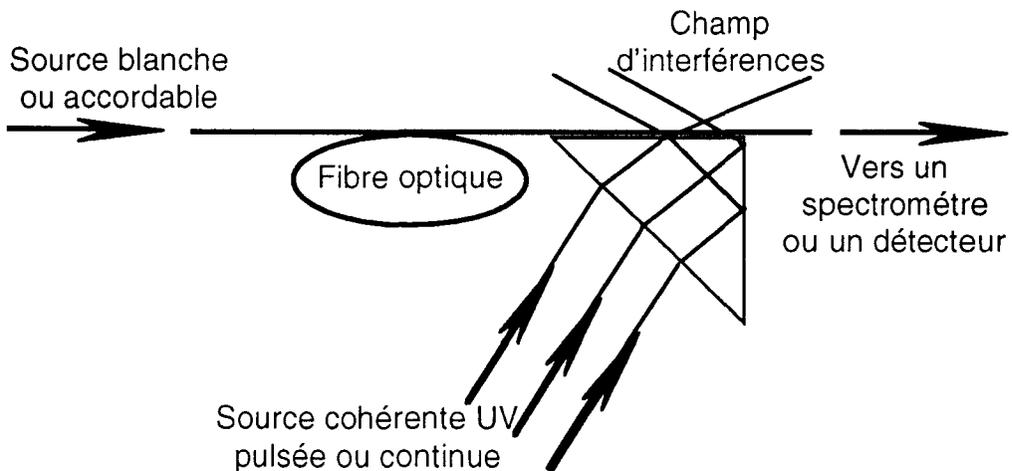


Fig. IV-1: Schéma de principe du dispositif expérimental utilisé pour l'inscription de réseaux de Bragg.

Après divers essais qui nous ont permis de connaître la réponse de la fibre à l'irradiation, il s'est avéré que les miroirs les plus sélectifs sont obtenus sans traitement préalable de la fibre à l'hydrogène gazeux. La fibre utilisée (Andrew 205170-820S-2) est biréfringente ($\frac{\Delta n}{n} = 1.5 \cdot 10^{-4}$), et de coeur elliptique ($1.75 \times 2.5 \mu\text{m}$), elle assure donc le maintien de la

polarisation de l'onde. A la longueur d'onde de travail (800 nm), la propagation est monomode transverse, en outre, le coefficient d'atténuation de la fibre est estimé à 2.10^{-3} m^{-1} . Cette fibre particulière a été choisie pour la forme en D de sa gaine extérieure. Cette caractéristique permet de repérer les lignes neutres et de corriger d'éventuelles torsions de la fibre au moment de l'inscription, qui nuiraient à l'homogénéité de l'irradiation. L'inscription a été effectuée en lumière UV continue, issue d'un laser à Argon ionisé doublé en fréquence (FRED Coherent). Le contrôle de l'inscription était assuré au moyen d'un laser Saphir-Titane.

La courbe de transmission des deux réseaux inscrits sur une même fibre est présentée sur la figure IV-2. On pourra constater l'existence d'une "traîne" vers les hautes fréquences sur chacune des deux courbes de transmission. Cette traîne, qui constitue la part essentielle de l'élargissement du réseau, est due aux inhomogénéités persistantes de l'irradiation. Il nous a fallu trouver un compromis entre une réflectivité maximale et une faible largeur spectrale. Nous avons arrêté le processus d'inscription lorsque la réflectivité était de 70% pour une largeur à mi-hauteur quasiment égale au décalage en fréquence pompe/Stokes ($\approx 21 \text{ GHz}$ à 800 nm).

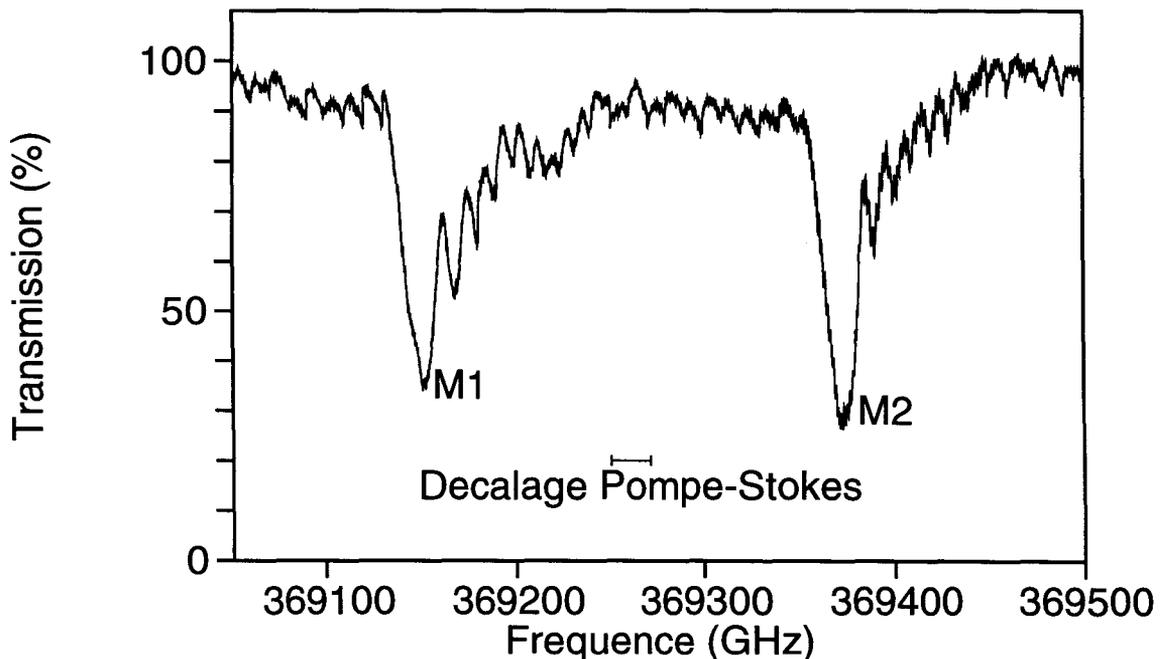


Fig. IV-2: Spectre de la transmission de la fibre portant les deux réseaux.

IV.2 Dispositif expérimental, mise en oeuvre

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure IV-3. La cavité est pompée par le laser Saphir-Titane émettant à environ 812 nm. Les réseaux d'entrée (M1) et de sortie (M2) sont placés sur des platines d'étirement, qui permettent d'ajuster finement la longueur d'onde de Bragg ; la variation relative de λ_B est alors égale à la variation relative de la longueur de fibre étirée. Il va de soit que l'on ne peut qu'augmenter la longueur d'onde de Bragg par rapport à sa valeur au repos. La longueur de fibre comprise entre les deux réseaux est de 2 mètres. Dans ces conditions, un seul mode de cavité se situe en dessous de la courbe de gain Brillouin ($\Delta\nu_B = 60$ MHz), et l'on peut donc s'attendre à ce que l'émission du laser soit monomode et stable en toutes circonstances (Cf. le diagramme de stabilité A-3 de l'annexe II).

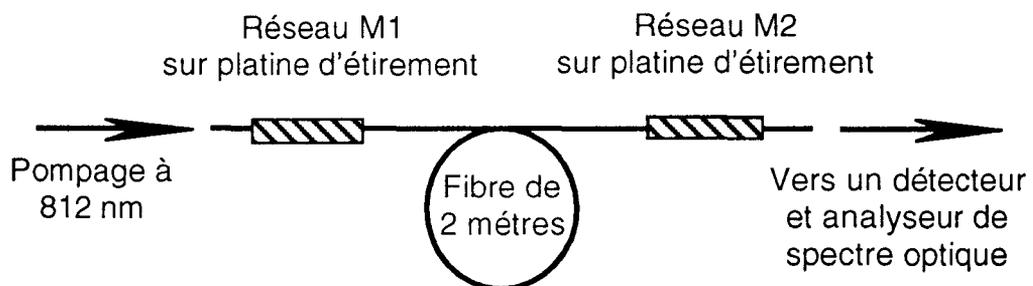


Fig. IV-3: Schéma de la cavité à réseaux de Bragg.

L'onde transmise par la cavité est dirigée sur un détecteur, ainsi que sur un analyseur de spectre optique. Pour accorder les réseaux à la fréquence Stokes ν_S , on fixe tout d'abord la fréquence d'émission du laser Saphir-Titane à cette valeur (par exemple $\nu_S = 369\,100$ GHz sur la Figure IV-2). On étire ensuite un des réseaux jusqu'à obtention d'un minimum de transmission. On balaye alors la fréquence du laser sur environ 300 MHz autour de ν_S , de façon à visualiser et optimiser les modes de cavité qui se forment lorsque le second réseau est accordé. Les

modes de la cavité ainsi réalisée sont représentés sur la figure IV-4-a. La finesse de la cavité à la fréquence Stokes est proche de 6. La fréquence du Saphir-Titane peut alors être ajustée à la fréquence de pompe ($\nu_P = \nu_S + \nu_a$, où ν_a est la fréquence de l'onde acoustique). Pour un pompage inférieur au seuil d'émission Brillouin, on peut visualiser les modes de cavité passive à la fréquence pompe (Fig. IV-4-b) ; bien qu'ils soient beaucoup moins prononcés qu'à la fréquence Stokes, on notera que l'intensité de pompe intracavité diminue quand même de moitié lorsque la pompe est en antirésonance.

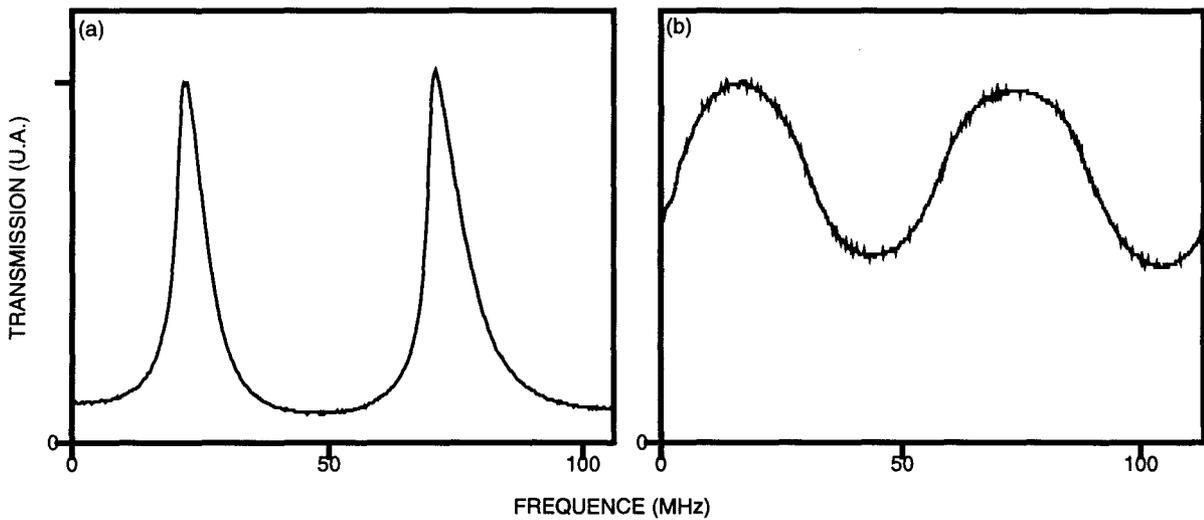


Fig. IV-4: Modes de la cavité passive

(a) à la fréquence Stokes ν_S ,

(b) à la fréquence de pompe ν_P .

Le seuil du laser a été estimé à 120 mW, il correspond à la valeur minimale de la puissance de pompe couplée dans la cavité, pour laquelle l'onde Stokes est observable au moyen de l'analyseur de spectre optique. Malgré la cage de Plexiglas qui protège l'ensemble du dispositif expérimental, la longueur de la cavité dérive au cours du temps, l'émission du laser, d'une durée de quelques minutes, s'interrompt pour reprendre sur un autre mode. Notre estimation du seuil correspond probablement à une situation proche de la résonance à la fois pour les ondes de pompe et Stokes. Notons que le réglage par étirement des miroirs de Bragg est très stable, ne nécessitant pas de correction au cours d'une journée d'utilisation.

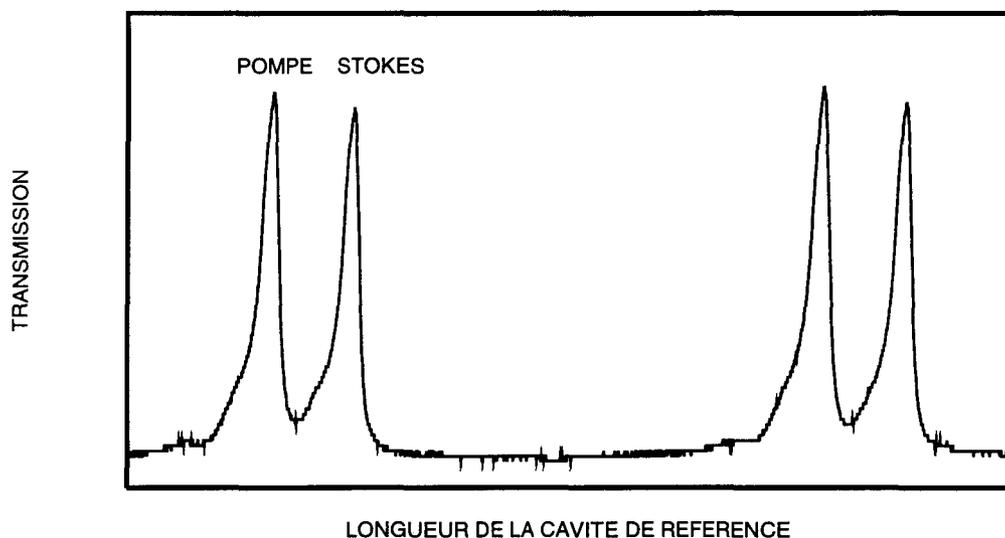


Fig. IV-5: Spectre optique du champ transmis par la cavité pour un pompage égal à trois fois le seuil. L'intervalle spectral libre de la cavité de référence est de 10 GHz.

La figure IV-5 présente un spectre optique du champ transmis par la cavité, obtenu pour une puissance de pompe voisine de trois fois le seuil. Les intensités des champs de pompe et Stokes sont du même ordre de grandeur. Bien que toute l'onde Stokes générée ne soit pas directement utilisable puisqu'elle est mêlée à la pompe et en partie retournée vers le laser de pompe, le rendement de la conversion semble nettement meilleur que celui obtenu jusqu'à présent avec des cavités en anneau (8%). L'intervalle spectral libre de la cavité de référence de l'analyseur étant de 10 GHz et le décalage pompe/Stokes d'un peu plus de 20 GHz, les deux pics consécutifs associés respectivement aux fréquences pompe et Stokes correspondent donc aux ordres k et $k+2$ (où k entier) de cette cavité. On peut donc mesurer le décalage Brillouin, qui est ici estimé à 21.5 GHz.

Nous avons augmenté la puissance de pompe au delà de quatre fois le seuil, sans jamais observer de composante anti-Stokes ni de composante Stokes d'ordre supérieur. Notre dispositif expérimental présente donc un grand avantage par rapport aux cavités usuelles, puisqu'il permet une conversion efficace de l'onde de pompe vers la composante Stokes d'ordre 1, et ce a priori sans limitation de la puissance de pompe.

IV.3 Largeur spectrale du rayonnement généré

L'intérêt majeur d'un laser Brillouin stable réside dans l'amélioration de la qualité spectrale du rayonnement au cours de la conversion pompe/Stokes. Nous avons donc entrepris une expérience similaire à celle réalisée par Smith et al [91], qui permet de mesurer la largeur spectrale de l'onde Stokes, à partir du signal de battement de deux lasers Brillouin identiques mais indépendants.

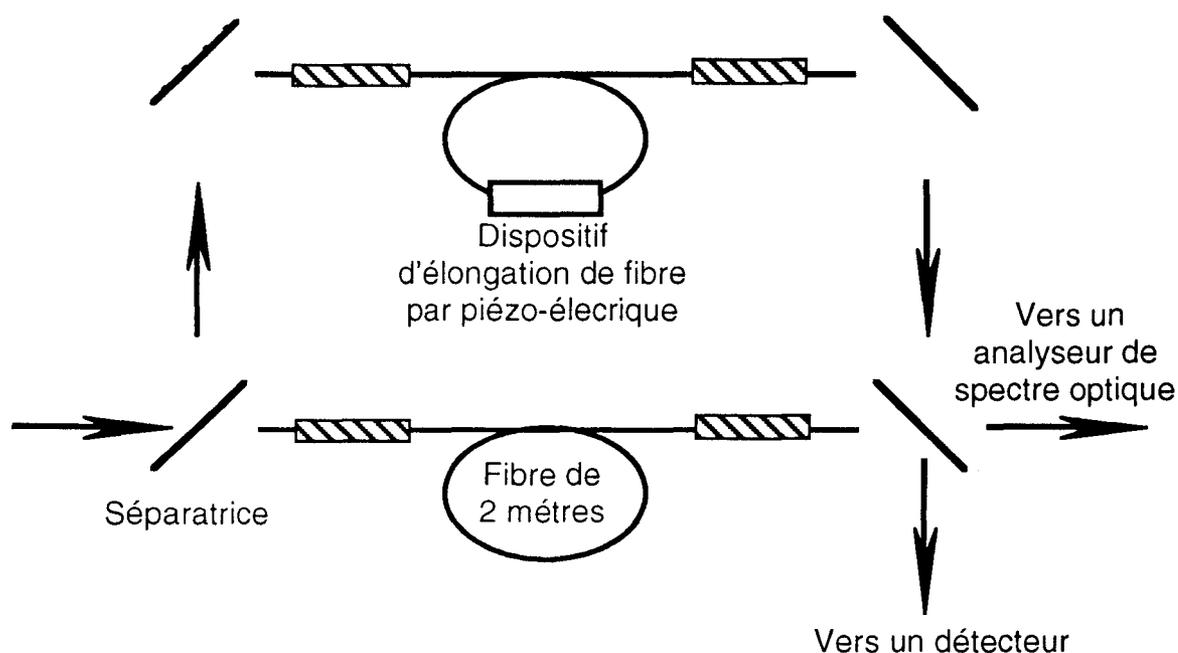


Fig. IV-6: Dispositif expérimental mis en place pour effectuer une mesure de la largeur spectrale de l'émission.

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure IV-6. Le faisceau issu du laser Saphir-Titane est séparé pour pomper simultanément deux cavités de caractéristiques très voisines (l'une étant celle décrite précédemment). Une des cavités est équipée d'un système piézo-électrique permettant l'étirement de la fibre, en vue d'un ajustement fin de l'accord de cavité. Les faisceaux transmis par les deux

cavités sont dirigés vers un même détecteur ainsi que vers l'analyseur de spectre optique. On accorde alors les réseaux des deux cavités comme précédemment. Pour cette expérience, nous disposons d'une puissance de pompe maximale d'environ deux fois le seuil pour chacun des lasers. Dans ces conditions, les lasers peuvent être soit allumés, soit éteints, selon le désaccord de cavité. Afin d'obtenir une émission simultanée des deux lasers, la longueur d'onde de pompe est ajustée pour que l'un des lasers soit amené à la résonance, le second étant ensuite accordé en jouant sur sa longueur au moyen de la céramique piézo-électrique.

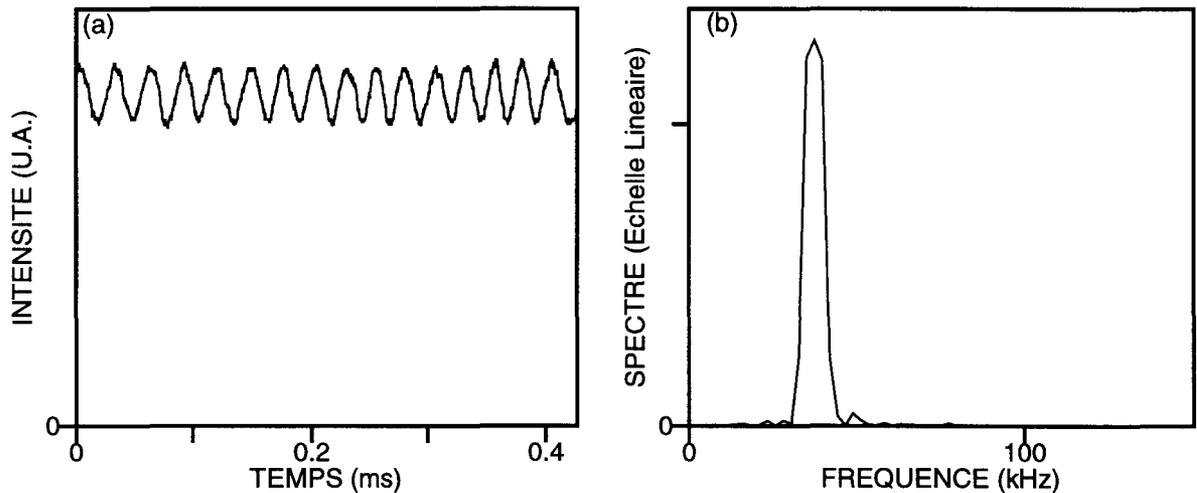


Fig. IV-7: (a) signal de battement des deux ondes Stokes,
(b) spectre de ce signal (résolution de 2 kHz).

Les fréquences d'émission des deux lasers sont toujours soumises aux fluctuations de longueur des cavités. L'écart entre ces deux fréquences, limité par la largeur de gain Brillouin, reste néanmoins inférieur à 100 MHz. Le battement des deux ondes Stokes peut donc être détecté au moyen d'une photodiode classique. Le signal de la figure IV-7-a présente une amplitude et une fréquence quasiment constantes sur un peu plus de 0.4 ms. Le spectre de ce battement est tracé sur la figure IV-7-b, le pic observé a une largeur à mi-hauteur inférieure à 8 kHz. Cette valeur ne peut toutefois pas être associée à la largeur spectrale ultime du laser Brillouin. Elle reflète en fait l'évolution lente des fréquences des lasers, liée aux fluctuations des longueurs de cavité, qui, rappelons le, ne sont pas asservies. Notre résultat s'approche d'ailleurs fortement de celui obtenu par Smith et al [91], qui ont mesuré une

largeur spectrale de battement de 2 kHz, les cavités laser étaient alors deux anneaux de 20 mètres de long et de finesse 70. Dans une seconde expérience, les auteurs ont pu mesurer la largeur spectrale intrinsèque en faisant battre deux ondes Stokes produites indépendamment dans une même cavité en anneau. Pour garantir un découplage total des deux ondes Stokes, les deux lasers de pompe de fréquences légèrement différentes étaient injectés en sens inverse dans la cavité. En revanche, les deux ondes Stokes, produites dans une même cavité, subissent les mêmes dérives de fréquence, et leur battement garde une fréquence constante. La largeur intrinsèque du rayonnement a ainsi pu être estimée inférieure à 30 Hz (résolution ultime de l'analyseur de spectre utilisé). Cette largeur est à comparer à la largeur spectrale du rayonnement de pompe, qui est estimée à 120 kHz. Un affinement de plus de trois ordres de grandeur a ainsi pu être mis en évidence. L'expérience que nous avons présenté ici n'a certes pas conduit à un tel résultat mais montre néanmoins la grande souplesse d'utilisation qu'offre les réseaux de Bragg. Nous projetons d'adapter la seconde expérience de Smith et al au cas d'une cavité Perot-Fabry, afin d'estimer la largeur intrinsèque du rayonnement dans cette configuration.

IV.4 Perspectives

Compte tenu des caractéristiques des réseaux réalisés pour notre expérience, la possibilité d'obtenir une réflectivité proche de 100% en même temps qu'une largeur spectrale inférieure à 10 GHz ne semble pas déraisonnable. Dans l'attente d'un tel résultat, rien ne nous empêche en tout cas d'envisager une configuration de cavité idéale, et de décrire les caractéristiques théoriques du laser ainsi réalisé. Mais quelle peut être cette configuration idéale dans notre contexte? Afin d'éviter tout retour vers le laser de pompe, les deux miroirs doivent transmettre intégralement l'onde de pompe ($r_{p1}=r_{p2}=0$), et l'onde Stokes se propageant vers l'arrière doit être totalement reprise dans la cavité ($r_{s1}=1$). En outre, le miroir de sortie doit permettre l'évacuation d'une part du champ Stokes ($r_{s2}^2=95\%$). Il n'y aurait alors aucun besoin de protéger le laser de pompe des retours d'onde, et toute l'énergie convertie serait transmise en sortie de cavité.

L'état stationnaire du système, présenté en annexe I, permet d'accéder à toutes les caractéristiques du laser. En supposant qu'on utilise une fibre de 1 mètre identique à celle utilisée dans nos expériences, on peut facilement calculer le seuil d'émission du laser à partir de nos mesures et de l'expression théorique du seuil (relation A-10 de l'annexe I), on l'estime ainsi à 30 mW lorsque l'onde Stokes est en résonance avec la cavité. D'après le diagramme de stabilité A-5 de l'annexe II, calculé pour des caractéristiques de miroirs très voisines, le nombre critique de modes sous la courbe de gain est environ 30. La longueur de fibre comprise entre les deux miroirs pourrait être étendue à 50 mètres. Le seuil théorique, inversement proportionnel à la longueur, vaudrait alors 0.6 mW ; néanmoins, les pertes de la fibre n'étant alors plus négligeables devant les pertes des miroirs, le seuil réel serait plutôt de l'ordre du milliwatt.

Dans le cas d'un laser de 1 mètre de long, nous avons tracé sur la figure IV-8 l'intensité de l'onde Stokes (a) et de la pompe (b) transmises, en fonction du désaccord en fréquence de l'onde Stokes, pour différentes valeurs de l'intensité du pompage (2, 4 et 8 fois le seuil). Les intensités des champs transmis ont été normalisées à

l'intensité du champ de pompe incident, la figure IV-8-a donne donc directement le taux de conversion de notre système. Pour une puissance de pompe de huit fois le seuil, la conversion est toujours supérieure à 80%, et tend vers 100% à la résonance. Il va de soit que ce niveau ne peut être atteint ; les pertes propres à la fibre, jusqu'ici négligées, doivent alors être prise en compte pour évaluer le taux de conversion. En supposant que la qualité spectrale de l'onde Stokes est aussi bonne que celle mise en évidence par Smith et al, ce dispositif est bien plus efficace et facile à mettre en oeuvre que les systèmes d'asservissement usuellement appliqués pour limiter le "jittage" en fréquence d'une source.

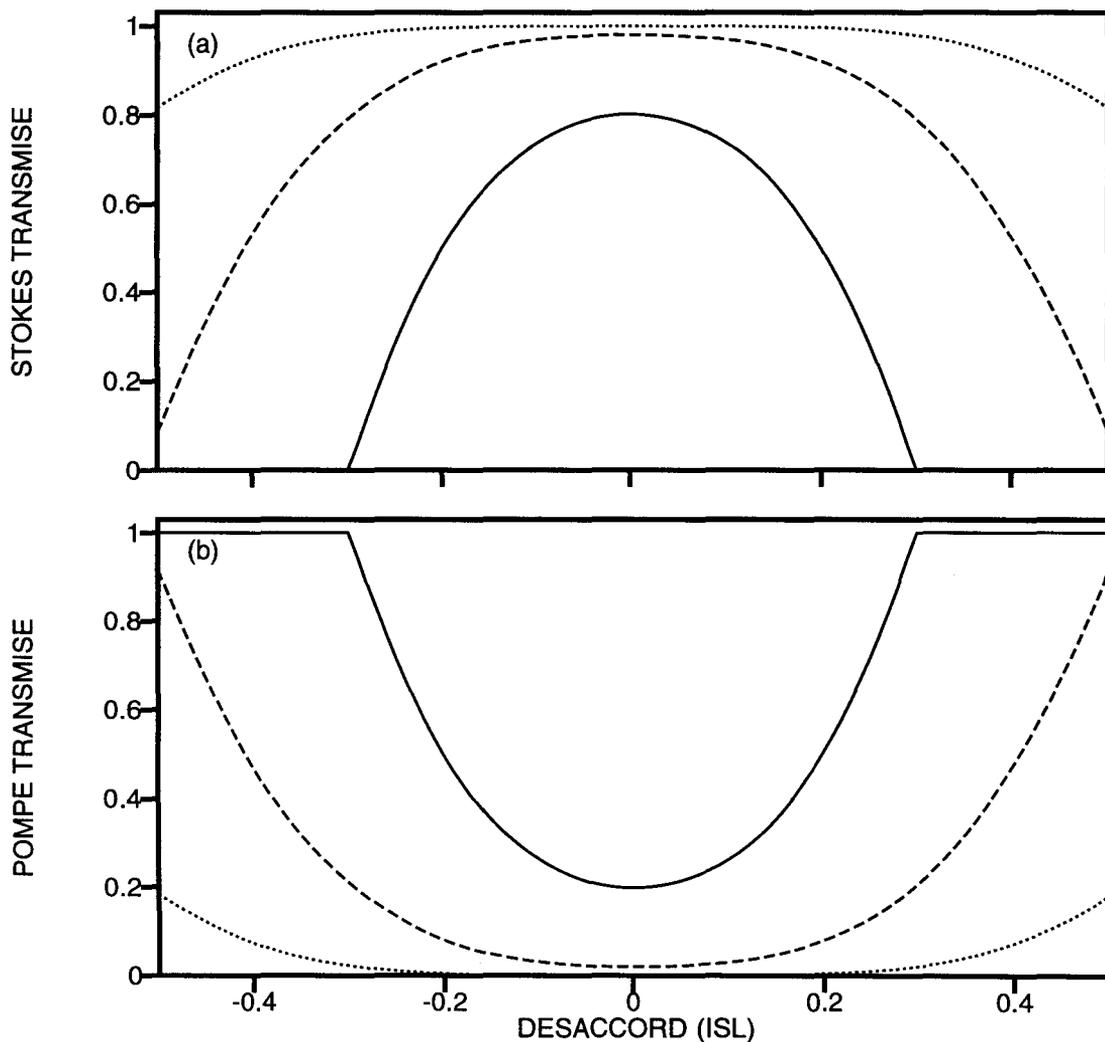


Fig. IV-8: Intensité des ondes Stokes (a) et de pompe (b) transmises par la cavité en fonction du désaccord de l'onde Stokes ($l=1m$, $r_{p1}=r_{p2}=0$, $r_{s1}^2=1$, $r_{s2}^2=0.95$).

Les tracés continu, en tirés et en pointillés correspondent respectivement à des puissances de pompe de deux, quatre et huit fois le seuil.

Conclusion

Nous avons montré la faisabilité d'un laser Brillouin "tout-fibre" en cavité à réseaux de Bragg. La cavité que nous avons réalisée permet d'éviter la cascade Stokes, et le laser est ainsi utilisable quelque soit la puissance de pompe. De plus, la configuration Perot-Fabry présente l'avantage de transmettre l'onde Stokes alors qu'elle est toujours rétrodiffusée dans les configurations en anneau. L'importance de cette dernière caractéristique apparaît clairement dans l'analyse théorique que nous faisons dans le cas d'une cavité idéale. Elle devrait permettre la conversion totale de l'onde de pompe vers l'onde Stokes, entièrement disponible puisque transmise par la cavité, le tout sans utiliser d'autre élément optique qu'une simple fibre. Il s'agit bien sur d'un cas idéal, mais l'état de l'art actuel dans le domaine de l'inscription de réseaux et l'enjeu technologique que représente cette technique laisse penser qu'il pourrait être bientôt accessible expérimentalement. L'intérêt d'un tel dispositif est avant tout l'extrême stabilité de l'onde Stokes créée ; Smith et al [91] ont mis en évidence une réduction d'un facteur 4000 de la largeur spectrale de l'onde de pompe.

CONCLUSION

Nous avons réalisé une étude théorique et expérimentale de la dynamique des lasers Brillouin à fibre. La partie théorique est basée sur un modèle dit "cohérent", rendant compte de la propagation des champs dans la cavité et de leurs interactions via l'onde acoustique. La formulation de ce modèle a été adaptée de façon à faire ressortir les ingrédients essentiels intervenant dans la dynamique du laser. Nous avons montré dans quelles conditions les couplages des champs par effet Kerr, les pertes de la fibre, ou encore le désaccord de cavité pouvaient être négligés. Ces approximations nous ont permis d'aborder une étude très générale de la dynamique, en ne conservant qu'un nombre de paramètres relativement restreint. Ces paramètres sont les coefficients de réinjection de la cavité, le nombre N de modes de cavité sous la courbe de gain, et la puissance de pompe normalisée à sa valeur au seuil d'émission du laser. La relative simplicité de notre description facilite grandement l'analyse de la dynamique et la comparaison avec des travaux théoriques ou expérimentaux antérieurs. Notre étude a ainsi permis la mise en évidence de comportements dynamiques génériques parmi une masse d'informations et observations diverses qui pouvaient parfois paraître contradictoires. Les tendances générales apparaissent dès l'analyse de stabilité de l'état stationnaire, qui révèle l'existence de différents domaines d'instabilité associés respectivement à la déstabilisation des différents modes latéraux. En particulier, nous montrons qu'il existe des nombres critiques de modes N_{c_j} au delà desquels les $j^{\text{èmes}}$ modes latéraux peuvent se déstabiliser à partir de l'état stationnaire. Ceux-ci apparaissent successivement pour des valeurs croissantes de N ($N_{c_j} < N_{c_{j+1}}$), et impliquent des régimes dynamiques de plus en plus complexes. Ce scénario est confirmé par des simulations numériques ; lorsqu'on augmente N , on assiste en effet à une route vers le chaos de type Ruelle-Takens, le système passe d'un régime d'émission monomode stable pour $N < N_{c_1}$, à des oscillations périodiques pour $N > N_{c_1}$, quasipériodiques à deux ($N > N_{c_2}$) puis trois fréquences ($N > N_{c_3}$) et finalement chaotiques. Cette succession de régimes a été observée pour des paramètres correspondant à la cavité Perot-Fabry dite "naturelle", mais le phénomène est commun à tous les lasers Brillouin de faible finesse, du moins dans ses grandes lignes.

L'analyse de stabilité révèle que, lorsqu'on augmente la finesse de la cavité, les domaines d'instabilité sont déportés vers les grandes

valeurs de N ; une étude détaillée des comportements dynamiques dans ces conditions nécessiterait des temps de calcul excessivement longs. On notera toutefois que l'effet sélectif d'une "bonne cavité" impose des fréquences d'oscillations très proches des fréquences des modes de la cavité passive, il est donc fort probable que la dynamique se limite alors essentiellement à des régimes périodiques de fréquence égale à l'intervalle spectral libre de la cavité.

Dans quelques situations typiques, nous avons étudié l'influence du désaccord de l'onde Stokes par rapport aux modes de la cavité. Lorsque l'émission est instable à la résonance, elle l'est quelque soit le désaccord, et ce paramètre n'apporte pas de changement notable dans la dynamique. En revanche, si l'émission est stable à la résonance, elle peut être instable en présence de désaccord, notamment autour de la condition d'antirésonance et pour des puissances de pompe relativement faibles. Lorsque la puissance de pompe augmente, la stabilité d'un mode particulier s'étend sur des domaines de désaccord de plus en plus grands. Ce mode devient tour à tour bistable avec un mode adjacent, puis multistable avec un nombre croissant de modes latéraux. Ce phénomène devrait permettre la réalisation de laser Brillouin accordables sans saut de mode sur des domaines de fréquence comparables à la largeur de gain Brillouin spontané.

Dans ce contexte, nous avons réalisé un laser Brillouin d'émission stable, dans une cavité Perot-Fabry fermée par des réseaux de Bragg. La forte sélectivité en fréquence de ces miroirs permet d'éviter la cascade Stokes, ce qui conduit à une forte amélioration des capacités de conversion de l'onde de pompe vers l'onde Stokes. L'étude en est encore à un stade préliminaire, mais nous envisageons la réalisation d'un dispositif d'affinement spectral de sources cohérentes à faibles pertes, qui devrait être utilisable sur tout le domaine du visible et du proche infrarouge.

ANNEXES

ANNEXE I: Etablissement de l'état stationnaire du laser Brillouin en cavité Perot-Fabry

Les équations de la DBS en cavité Perot-Fabry ont été établies au chapitre I (Eqs. I-15 et 16), nous les reprenons ici en négligeant les couplages par effet Kerr ainsi que l'atténuation β de la fibre:

$$\frac{\partial E_{\vec{p}}}{\partial t} + \frac{\partial E_{\vec{p}}}{\partial z} = - E_{\vec{s}}^{\leftarrow} E_{\vec{a}}^{\rightarrow}, \quad (\text{A-1-a})$$

$$\frac{\partial E_{\vec{s}}^{\leftarrow}}{\partial t} - \frac{\partial E_{\vec{s}}^{\leftarrow}}{\partial z} = E_{\vec{p}}^{\rightarrow} E_{\vec{a}}^{\rightarrow*}, \quad (\text{A-1-b})$$

$$\frac{\partial E_{\vec{a}}^{\rightarrow}}{\partial t} + (1 + i\Delta_1) E_{\vec{a}}^{\rightarrow} = E_{\vec{p}}^{\rightarrow} E_{\vec{s}}^{\leftarrow*}, \quad (\text{A-1-c})$$

$$\frac{\partial E_{\vec{p}}^{\leftarrow}}{\partial t} - \frac{\partial E_{\vec{p}}^{\leftarrow}}{\partial z} = - E_{\vec{s}}^{\rightarrow} E_{\vec{a}}^{\leftarrow}, \quad (\text{A-1-d})$$

$$\frac{\partial E_{\vec{s}}^{\rightarrow}}{\partial t} + \frac{\partial E_{\vec{s}}^{\rightarrow}}{\partial z} = E_{\vec{p}}^{\leftarrow} E_{\vec{a}}^{\leftarrow*}, \quad (\text{A-1-e})$$

$$\frac{\partial E_{\vec{a}}^{\leftarrow}}{\partial t} + (1 + i\Delta_1) E_{\vec{a}}^{\leftarrow} = E_{\vec{p}}^{\leftarrow} E_{\vec{s}}^{\rightarrow*}. \quad (\text{A-1-f})$$

Apparaissent ainsi deux systèmes d'équations indépendants liant respectivement $E_{\vec{p}}^{\rightarrow}, E_{\vec{s}}^{\leftarrow}, E_{\vec{a}}^{\rightarrow}$ et $E_{\vec{p}}^{\leftarrow}, E_{\vec{s}}^{\rightarrow}, E_{\vec{a}}^{\leftarrow}$. Les seuls couplages entre les champs optiques des deux systèmes proviennent des conditions de bouclage (I-16) imposés par la cavité. Pour calculer l'état stationnaire du système complet, on procède de la même manière qu'au chapitre II.2 de l'article. Après avoir annulé toutes les dérivées temporelles des champs ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) dans les équations (A-1), on sépare les amplitudes et phases des champs en les notant:

$$E_j(z) = A_j(z) \exp(i\Phi_j(z)), \quad (\text{A-2})$$

avec $j = \vec{p}, \overleftarrow{p}, \vec{s}, \overleftarrow{s}, \vec{a}, \overleftarrow{a}$.

Les équations décrivant l'état stationnaire se mettent alors sous la forme:

$$\frac{dA_{\vec{p}}}{dz} = - \frac{A_{\vec{s}}^2 A_{\vec{p}}}{1+\Delta_1^2}, \quad (\text{A-3-a})$$

$$\frac{dA_{\vec{s}}}{dz} = - \frac{A_{\vec{p}}^2 A_{\vec{s}}}{1+\Delta_1^2}, \quad (\text{A-3-b})$$

$$\frac{d\Phi_{\vec{p}}}{dz} = \frac{\Delta_1}{1+\Delta_1^2} A_{\vec{s}}^2, \quad (\text{A-3-c})$$

$$\frac{d\Phi_{\vec{s}}}{dz} = - \frac{\Delta_1}{1+\Delta_1^2} A_{\vec{p}}^2, \quad (\text{A-3-d})$$

$$\frac{dA_{\vec{p}}}{dz} = \frac{A_{\vec{s}}^2 A_{\vec{p}}}{1+\Delta_1^2}, \quad (\text{A-3-e})$$

$$\frac{dA_{\vec{s}}}{dz} = \frac{A_{\vec{p}}^2 A_{\vec{s}}}{1+\Delta_1^2}, \quad (\text{A-3-f})$$

$$\frac{d\Phi_{\vec{p}}}{dz} = - \frac{\Delta_1}{1+\Delta_1^2} A_{\vec{s}}^2, \quad (\text{A-3-g})$$

$$\frac{d\Phi_{\vec{s}}}{dz} = \frac{\Delta_1}{1+\Delta_1^2} A_{\vec{p}}^2. \quad (\text{A-3-h})$$

Les champs acoustiques, dans l'état stationnaire, suivent les variations longitudinales du terme d'interférence pompe-Stokes, et sont définis par les relations:

$$A_{\vec{a}} = \frac{A_{\vec{p}} A_{\vec{s}} \exp(-i\Phi_1)}{1+i\Delta_1}, \quad (\text{A-4-a})$$

$$A_{\vec{a}} = \frac{A_{\vec{p}} A_{\vec{s}} \exp(-i\Phi_2)}{1+i\Delta_1}, \quad (\text{A-4-b})$$

où $\Phi_1 = \Phi_{\vec{a}} + \Phi_{\vec{s}} - \Phi_{\vec{p}}$ et $\Phi_2 = \Phi_{\vec{a}} + \Phi_{\vec{s}} - \Phi_{\vec{p}}$.

Comme $A_{\vec{a}}$ et $A_{\vec{a}}$ sont des quantités réelles, Φ_1 et Φ_2 vérifient la relation:

$$\tan \Phi_{1,2} = - \Delta_1 .$$

Pour simplifier l'écriture des solutions, on introduit les intensités normalisées $I_j = A_j^2$ (avec $j = \vec{p}, \overleftarrow{p}, \vec{s}, \overleftarrow{s}$). La distribution longitudinale des intensités et phases des champs est donnée par:

$$I_{\vec{p}}(z) = \frac{I_{\vec{p}}(0) (1-F_1)}{1 - F_1 \exp[-2\eta(1-F_1)I_{\vec{p}}(0)z]} , \quad (\text{A-5-a})$$

$$I_{\overleftarrow{s}}(z) = \frac{I_{\vec{p}}(0) (1-F_1) F_1}{\exp[2\eta(1-F_1)I_{\vec{p}}(0)z] - F_1} , \quad (\text{A-5-b})$$

$$\Phi_{\vec{p}}(z) - \Phi_{\vec{p}}(0) = - \frac{\Delta_1}{2} \text{Ln} \left(\frac{I_{\vec{p}}(z)}{I_{\vec{p}}(0)} \right) , \quad (\text{A-5-c})$$

$$\Phi_{\overleftarrow{s}}(z) - \Phi_{\overleftarrow{s}}(0) = \frac{\Delta_1}{2} \text{Ln} \left(\frac{I_{\overleftarrow{s}}(z)}{I_{\overleftarrow{s}}(0)} \right) , \quad (\text{A-5-d})$$

et, pour les ondes réfléchies,

$$I_{\overleftarrow{p}}(z) = \frac{I_{\overleftarrow{p}}(L') (1-F_2)}{1 - F_2 \exp[-2\eta(1-F_2)I_{\overleftarrow{p}}(L')(L'-z)]} , \quad (\text{A-6-a})$$

$$I_{\vec{s}}(z) = \frac{I_{\overleftarrow{p}}(L') (1-F_2) F_2}{\exp[2\eta(1-F_2)I_{\overleftarrow{p}}(L')(L'-z)] - F_2} , \quad (\text{A-6-b})$$

$$\Phi_{\vec{p}}^{\leftarrow}(z) - \Phi_{\vec{p}}^{\leftarrow}(L') = -\frac{\Delta_1}{2} \text{Ln} \left(\frac{I_{\vec{p}}^{\leftarrow}(z)}{I_{\vec{p}}^{\leftarrow}(L')} \right), \quad (\text{A-6-c})$$

$$\Phi_{\vec{s}}^{\rightarrow}(z) - \Phi_{\vec{s}}^{\rightarrow}(L') = \frac{\Delta_1}{2} \text{Ln} \left(\frac{I_{\vec{s}}^{\rightarrow}(z)}{I_{\vec{s}}^{\rightarrow}(L')} \right), \quad (\text{A-6-d})$$

$$\text{où } F_1 = \frac{I_{\vec{s}}^{\leftarrow}(0)}{I_{\vec{p}}^{\leftarrow}(0)}, F_2 = \frac{I_{\vec{s}}^{\rightarrow}(L')}{I_{\vec{p}}^{\leftarrow}(L')}, \text{ et } \eta = \frac{1}{1 + \Delta_1^2}.$$

Ces deux systèmes sont couplés par les conditions aux bords (I-16), lesquelles, après séparation des amplitudes et phases des champs, s'écrivent:

$$\mu = A_{\vec{p}}^{\rightarrow}(0) \exp(i\Phi_{\vec{p}}^{\rightarrow}(0)) - r_{p1} A_{\vec{p}}^{\leftarrow}(0) \exp(i\Phi_{\vec{p}}^{\leftarrow}(0)), \quad (\text{A-7-a})$$

$$I_{\vec{p}}^{\leftarrow}(L') = r_{p2}^2 I_{\vec{p}}^{\rightarrow}(L'), \quad (\text{A-7-b})$$

$$I_{\vec{s}}^{\rightarrow}(0) = r_{s1}^2 I_{\vec{s}}^{\leftarrow}(0), \quad (\text{A-7-c})$$

$$I_{\vec{s}}^{\leftarrow}(L') = r_{s2}^2 I_{\vec{s}}^{\rightarrow}(L'), \quad (\text{A-7-d})$$

$$\Phi_{\vec{p}}^{\leftarrow}(L') - \Phi_{\vec{p}}^{\rightarrow}(L') = -\delta_p, \quad (\text{A-7-e})$$

$$\Phi_{\vec{s}}^{\rightarrow}(0) = \Phi_{\vec{s}}^{\leftarrow}(0), \quad (\text{A-7-f})$$

$$\Phi_{\vec{s}}^{\leftarrow}(L') - \Phi_{\vec{s}}^{\rightarrow}(L') = -\delta_s. \quad (\text{A-7-g})$$

Rappelons que le déphasage de l'onde Stokes δ_s peut s'écrire $\delta_s = \frac{2\gamma_{an}L}{c} (\Delta_0 - \Delta_1)$. La relation donnant le tirage en fréquence du laser est obtenue à partir des relations (A-7-f et g), (A-5-d) et (A-6-d), on retrouve la relation déjà établie pour la cavité en anneau (Eq. (2-10-b) de l'article), et désormais classique pour les lasers à élargissement homogène:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta_0}{1 + \frac{\kappa}{\gamma_a}} = \frac{\Delta_0}{1 + \frac{\Delta v^{CP}}{\Delta v^B}}, \quad (\text{A-8})$$

où $\kappa = \frac{c|\text{Ln}(r_{s1}r_{s2})|}{2nL}$ est le taux de décroissance du champ Stokes dans la cavité, $\Delta v^{CP} = \frac{\kappa}{\pi}$ et $\Delta v^B = \frac{\gamma_a}{\pi}$ sont les largeurs à mi-hauteur respectives des modes de la cavité passive et de la courbe de gain Brillouin spontanée.

Les désaccords de cavité étant fixés, la solution stationnaire ne dépend que des paramètres $I_{\vec{p}}(0)$, $I_{\overleftarrow{p}}(L')$, F_1 et F_2 . Quatre relations indépendantes permettent de relier ces inconnues au paramètre de pompage μ^2 ; ces relations s'écrivent:

$$F_2 = \frac{1}{r_{s2}^2 r_{p2}^2} F_1 \exp[-2\eta(1-F_1)I_{\vec{p}}(0)L'], \quad (\text{A-9-a})$$

$$I_{\overleftarrow{p}}(L') = r_{p2}^2 \frac{I_{\vec{p}}(0)(1-F_1)}{1 - F_1 \exp(-2\eta(1-F_1)I_{\vec{p}}(0)L')}, \quad (\text{A-9-b})$$

$$(1-F_1)(1-F_2) = r_{s1}^2 r_{s2}^2 (\exp[2\eta(1-F_1)I_{\vec{p}}(0)L'] - F_1) \\ * (\exp[2\eta(1-F_2)I_{\overleftarrow{p}}(L')L'] - F_2), \quad (\text{A-9-c})$$

$$\mu^2 = I_{\vec{p}}(0) + r_{p1}^2 I_{\overleftarrow{p}}(0)$$

$$- 2 r_{p1} \cos \left[\frac{\Delta_1}{2} \text{Ln} \left(r_{p2}^2 \frac{I_{\vec{p}}(0)}{I_{\overleftarrow{p}}(0)} \right) - \delta_p \right] (I_{\vec{p}}(0) I_{\overleftarrow{p}}(0))^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A-9-d})$$

obtenues respectivement en combinant les équations (A-7-b, d)(A-5-a, b) ; (A-5-a)(A-7-b) ; (A-5-b)(A-6-b)(A-7-c, d) ; (A-7-a, b, e)(A-6-c). La valeur de $I_{\overleftarrow{p}}(0)$, qui apparaît dans l'équation (A-9-d), est donnée par la relation (A-6-a), et s'exprime en fonction de F_2 et $I_{\overleftarrow{p}}(L')$.

Une méthode numérique itérative s'impose pour résoudre ce système. Pour une valeur donnée μ^2 du taux de pompage, on fixe tout

d'abord l'intensité $I_{\vec{p}}(0)$ à la valeur qu'elle aurait si la cavité était passive. Compte tenu des relations (A-9-a) et (A-9-b), une méthode de Newton de variable F_1 permet d'accéder aux valeurs de F_1 , F_2 et $I_{\vec{p}}(L')$ qui vérifient la relation (A-9-c). L'équation (A-9-d) conduit alors à une seconde valeur du taux de pompage, l'écart entre les deux valeurs de μ^2 permet de corriger $I_{\vec{p}}(0)$, et la procédure est répétée jusqu'à ce que cet écart soit inférieur à 10^{-3} en valeur relative.

Au seuil de l'émission laser, les champs Stokes sont nuls ($F_1 = F_2 = 0$), l'intensité du champ de pompe intracavité se propageant dans la direction du champ incident est constante et égale à $I_{\vec{p}}(0)$, sa valeur au retour est $r_{p2}^2 \cdot I_{\vec{p}}(0)$. Au seuil, l'intensité du champ de pompe injecté dans la cavité est obtenue en combinant les relations (A-9-c) et (A-9-d):

$$\mu_{\text{Seuil}}^2 = \frac{2 \kappa}{\gamma_a (1 + r_{p2}^2)} (1 + \Delta_l^2) (1 + r_{p1}^2 r_{p2}^2 - 2 r_{p1} r_{p2} \cos(\delta_p)).$$

(A-10)

L'expression du seuil diffère très peu de celle obtenue pour les cavités en anneau (Eq. (2-11) de l'article). Seul le facteur $\frac{1}{(1 + r_{p2}^2)}$ est nouveau et rend compte du gain apporté par le champ de pompe sur son trajet retour.

ANNEXE II: Paramètres des expériences en cavité "naturelle"

Le tableau A-1 rassemble les valeurs des paramètres des expériences mentionnées au chapitre III. Certains paramètres de l'expérience de Harrison et al [94] figurent dans un article théorique de cette même équipe [Yu, 95]. Nos propres conditions expérimentales ont été notées A et B. $\Delta\nu_p$ est la largeur spectrale de la source utilisée. Les deux dernières lignes du tableau donnent les pertes de la fibre (calculées pour un aller-retour) et le nombre N de modes sous la courbe de gain, ces deux données permettent une comparaison directe des expériences avec nos simulations numériques.

	Lu 92	Harrison94	Gaeta 92	A	B
λ_p (nm)	514	1060	514	800	800
$\Delta\nu_p$ (kHz)	15	40	?	< 500	< 500
L	36	124	100	180	12
\varnothing (μm)	4,8	5,5	3,5	4	2,75
α (10^{-3} m^{-1})	4,6	0,33	4,4	1	1
$\Delta\nu_B$ (MHz)	143	80	50	40	60
Maint. Polar.	non	non	non	non	oui
Pertes (%)	30	8	60	30	3
N	50	95	50	70	7

Tableau A-1: Paramètres des diverses expériences

ANNEXE III: Diagrammes de stabilité en cavité Perot- Fabry

Le but de cette annexe est de compléter l'étude du chapitre III par l'analyse de diagrammes de stabilité obtenus dans quelques cas typiques de cavités en ligne, qui utilisent soit des miroirs classiques soit des réseaux de Bragg.

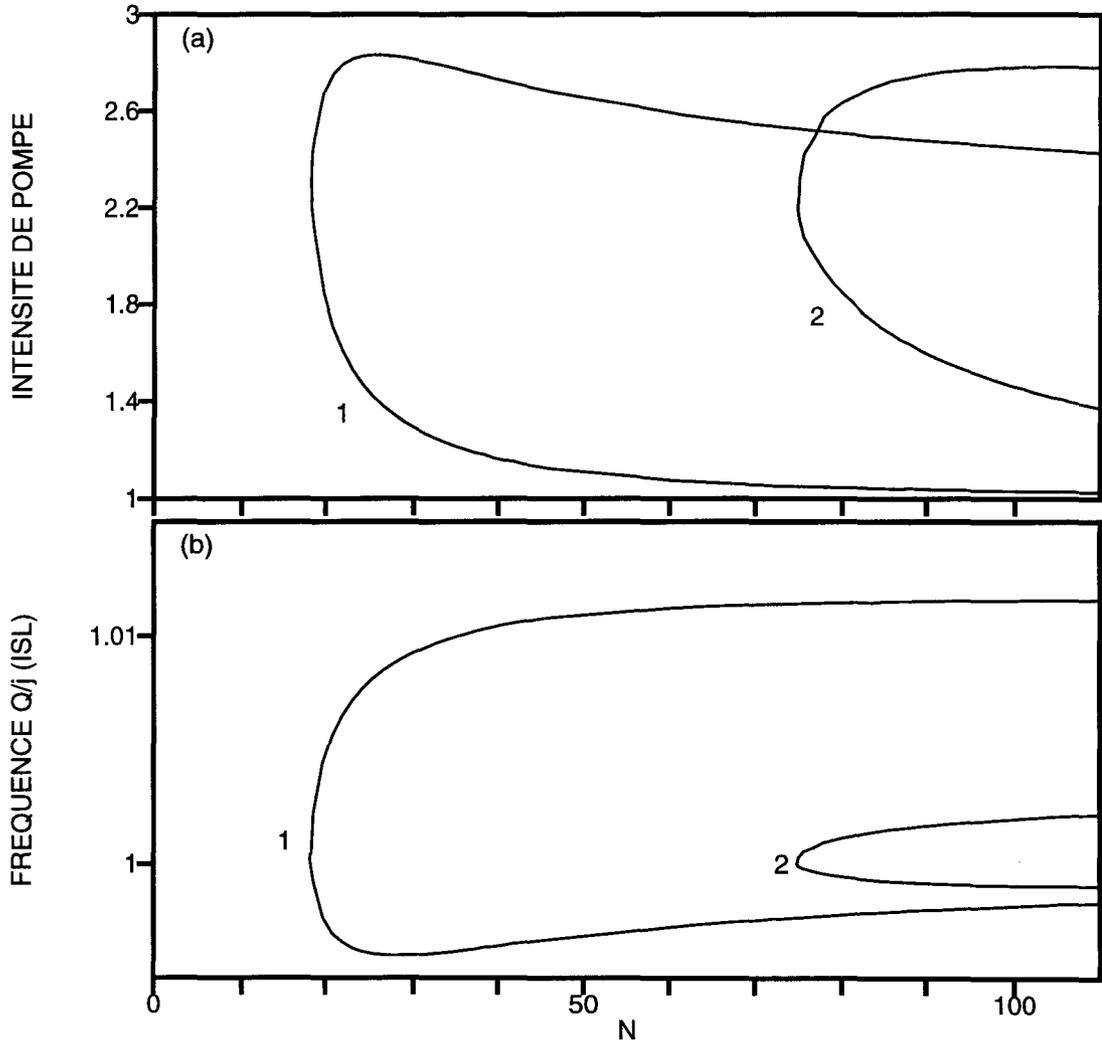


Fig. A-1: a) Domaines d'instabilités des deux premiers modes

b) Fréquences des oscillations aux points de bifurcation.

$$r_i^2 = 50\%.$$

Les tracés de la figure A-1-a délimitent les domaines d'instabilité associés aux deux premiers modes latéraux lorsque les miroirs ont une réflectivité de 50% ($r_i^2 = 50\%$, où $i = p1, s1, p2, s2$). Les fréquences

d'oscillation aux limites de ces domaines instables sont tracées sur la figure A-1-b. En comparant ces diagrammes à ceux obtenus pour $r_i^2=10\%$ (figure III-3), on constate que, lorsque r est augmenté, les domaines d'instabilité sont repoussés vers les grandes valeurs de N , tandis que les domaines de variation des fréquences d'oscillation s'amenuisent ($<2\%$ pour $r_i^2=50\%$). Ces deux tendances s'accroissent lorsqu'on augmente encore les coefficients de réflexion, les modes d'ordre élevés sont alors toujours stables pour $N<100$, et les variations de fréquence deviennent négligeables. La figure A-2 donne, pour des réflectivités de 70 et 80%, les limites des domaines d'instabilité associés au premier mode latéral. Dans ces conditions, les variations des fréquences d'oscillation sont inférieures à 0.3%.

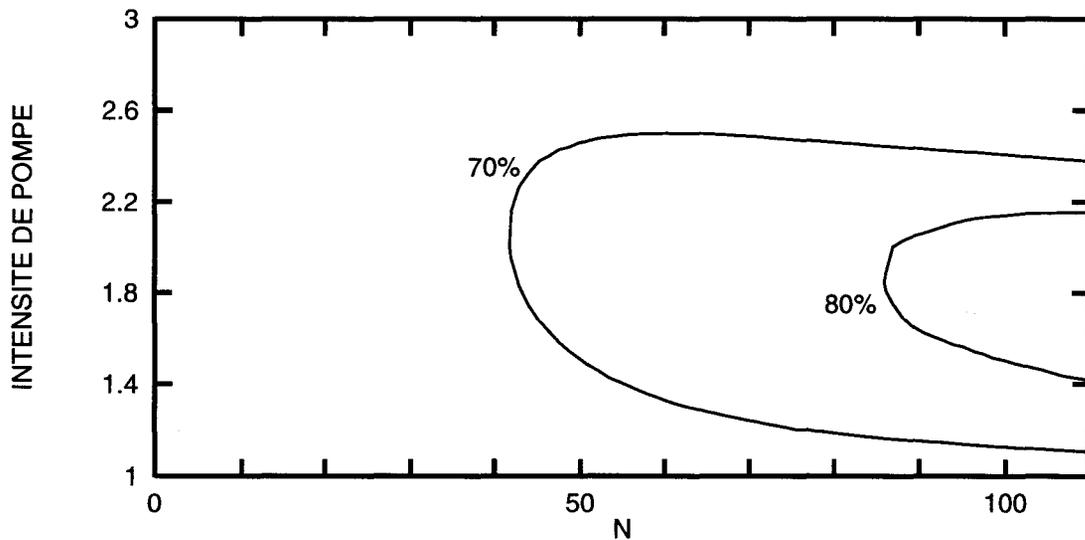


Fig. A-2: Domaines d'instabilités du premier mode pour $r_i^2 = 70\%$ et $r_i^2 = 80\%$.

Les paramètres de cavité utilisés pour le calcul des diagrammes suivant ne sont accessibles qu'avec des miroirs de Bragg. Les paramètres utilisés pour le diagramme A-3 correspondent à des réseaux tels que ceux que nous avons réalisés et qui sont décrits au chapitre IV. Dans cette configuration le nombre critique de modes vaut 18. Pour ce type de cavité et une longueur d'onde de travail de 800 nm ($\Delta\nu_B=60$ MHz), l'émission est toujours monomode et stable pour des fibres de longueurs inférieures à 30 mètres.

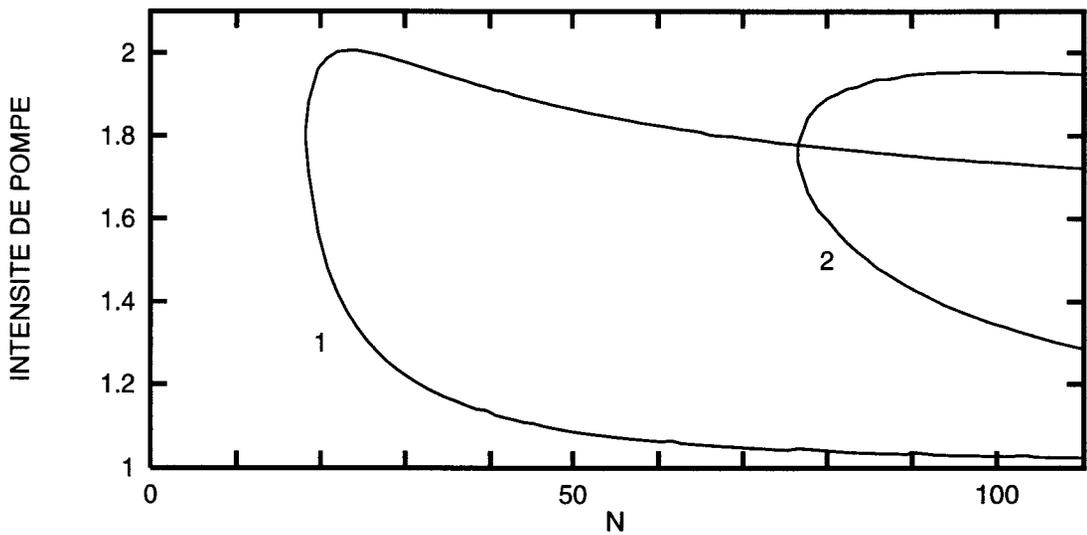


Fig. A-3: Domaines d'instabilités des deux premiers modes,

$$r_{s1}^2 = r_{s2}^2 = 70\%, r_{p1}^2 = r_{p2}^2 = 30\%.$$

Nous avons également envisagé le cas de réseaux totalement transparents à la fréquence de pompe, bien que cette situation soit encore difficilement réalisable expérimentalement. Les diagrammes A-4 et A-5 ont été obtenus pour des coefficients de réflexion à la fréquence Stokes ($r_{s1}^2 = r_{s2}^2$) respectivement égaux à 50% et 90%. On notera que, dans ce dernier cas, les domaines d'instabilités sont localisés sur un très petit domaine de puissance (< 1.2 fois le seuil), et qu'un tel laser, quelque soit sa longueur, est généralement stable.

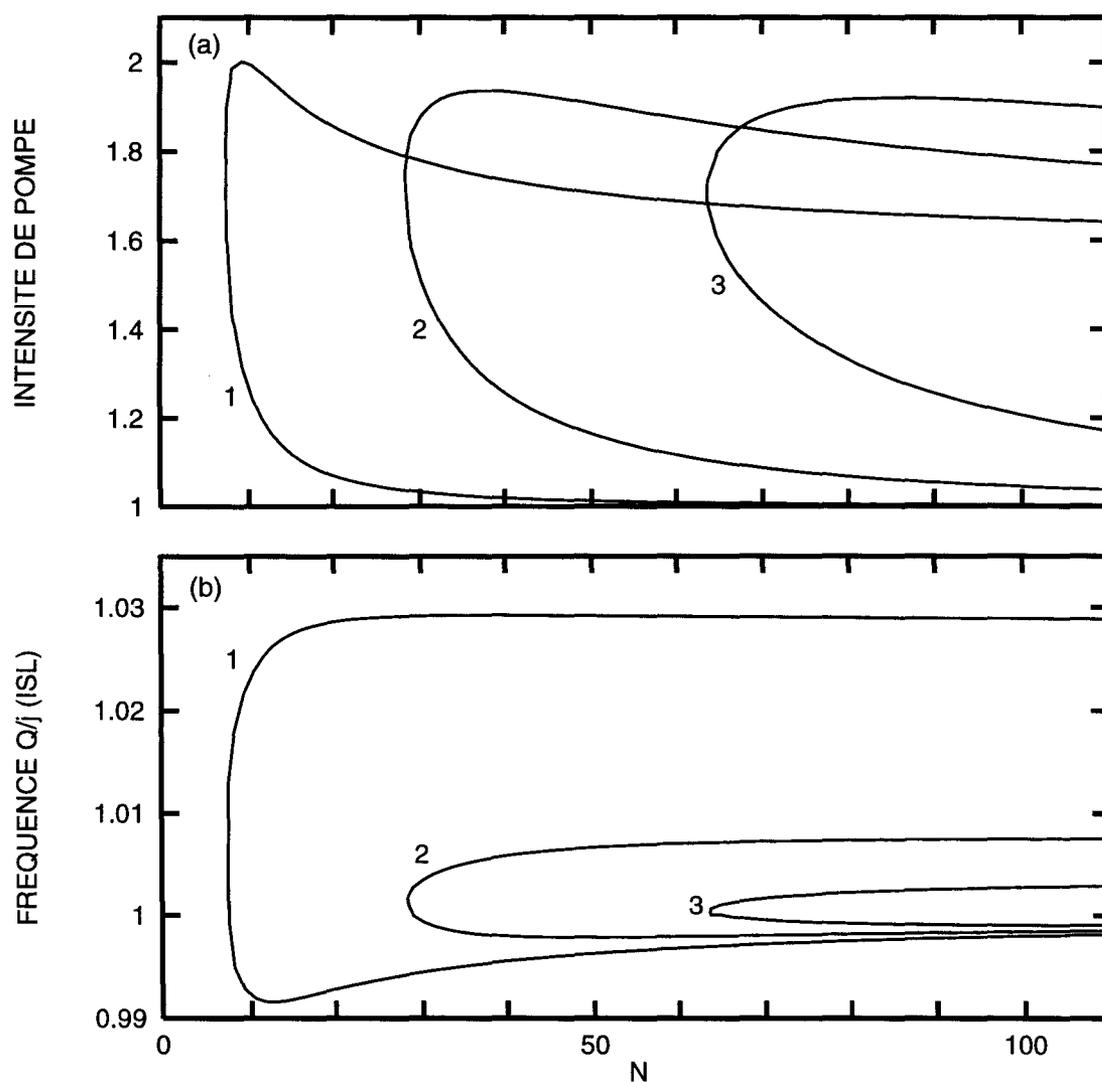


Fig. A-4: a) Domaines d'instabilités des trois premiers modes

b) Fréquences des oscillations aux points de bifurcation.

$$r_{s1}^2 = r_{s2}^2 = 50\%, r_{p1}^2 = r_{p2}^2 = 0.$$

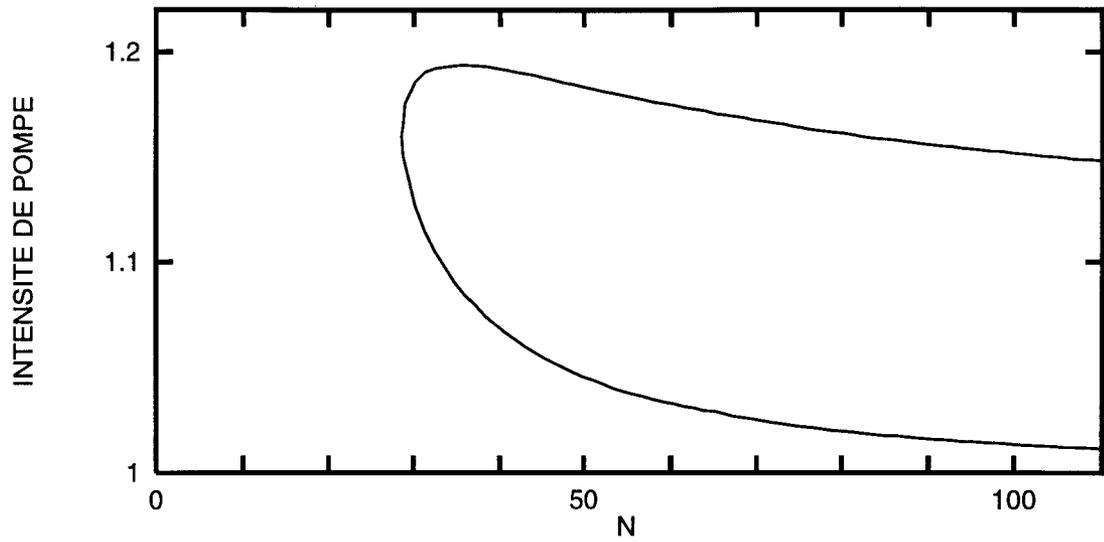


Fig. A-5: Domaine d'instabilité du premier mode,
 $r_{s1}^2 = r_{s2}^2 = 90\%$, $r_{p1}^2 = r_{p2}^2 = 0$.

ANNEXE IV: Calcul de la dimension de corrélation

Nous décrivons ici une méthode développée par Grassberger et Procaccia [83] qui permet d'estimer la dimension de corrélation d'un attracteur à partir d'une simple série décrivant l'évolution temporelle d'une seule variable du système. La série est constituée de N éléments $x(n)$ ($1 \leq n \leq N$) échantillonnés à intervalle de temps Δt . L'attracteur, reconstruit par la méthode des délais [Packard, 80], est projeté sur un espace des phases de dimension D_p (appelée dimension de plongement). Chaque point de la trajectoire est alors repéré par son vecteur position qui s'écrit:

$$\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n+T), \dots, x(n+(D_p-1)T)] \quad (\text{A-11})$$

où T est le délai choisi, exprimé en unités de temps Δt .

La mesure de la dimension est obtenue à partir des corrélations dans la série $\mathbf{X}(n)$. L'intégrale de corrélation correspond à la valeur moyenne des corrélations de chaque point avec le reste du signal, elle s'écrit:

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \theta \left(r - \|\mathbf{X}(m) - \mathbf{X}(n)\| \right) \quad (\text{A-12})$$

où $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside, et r une distance dans l'espace de phases. Cette intégrale donne la proportion des points séparés par une distance inférieure à r parmi les points de la série. Le lien essentiel qui relie cette intégrale à la dimension de l'attracteur est que, pour les valeurs faibles de r et pour une dimension de plongement suffisamment grande, $C(r)$ évolue comme une puissance de r :

$$C(r) = \alpha r^{D_2} \quad (\text{A-13})$$

où D_2 est justement la dimension de corrélation du signal. Ainsi, lorsque l'on trace l'évolution de $C(r)$ en fonction de r en coordonnées logarithmiques, la courbe doit présenter un comportement linéaire pour les petites valeurs de r . La pente locale est alors égale à la dimension de corrélation de l'attracteur.

Nous n'entrerons pas dans le détail de l'algorithme de calcul que nous avons utilisé. Celui-ci a été mis au point par J. Goldberg et le programme mis à disposition sur le réseau ; nous l'en remercions fortement. Ajoutons simplement que, pour réduire le nombre des calculs, il est possible de limiter le nombre de points dans la première sommation de l'intégrale de corrélation, on calcule alors:

$$C(r) = \frac{1}{M(N-1)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \theta \left(r - \left\| \mathbf{X}(m) - \mathbf{X}(n) \right\| \right) \quad (\text{A-14})$$

où M est un entier inférieur à N , que l'on appellera le nombre de points de référence. Dans les calculs de dimension présentés dans ce mémoire, nous avons toujours utilisé 20 000 points de référence pour des séries de 100 000 points. Ce choix correspond aux limites d'utilisation du programme de calcul. Par ailleurs, le délai T choisi pour la reconstruction de l'attracteur vaut $T_c/8$.

La figure A-6 montre les deux étapes du calcul appliqué à un signal quasipériodique à deux fréquences. La figure A-6-a représente, en coordonnées logarithmiques, l'évolution de l'intégrale de corrélation en fonction de la distance r , pour des valeurs croissantes de la dimension de plongement (l'incrément est de 2 entre deux tracés consécutifs). Ces courbes présentent bien des évolutions linéaires sur un large domaine des valeurs de r . Les pentes locales de ces courbes sont tracées sur la figure A-6-b. Le plateau qu'elles forment nous confirme que l'attracteur quasipériodique à deux fréquences a bien une dimension 2.

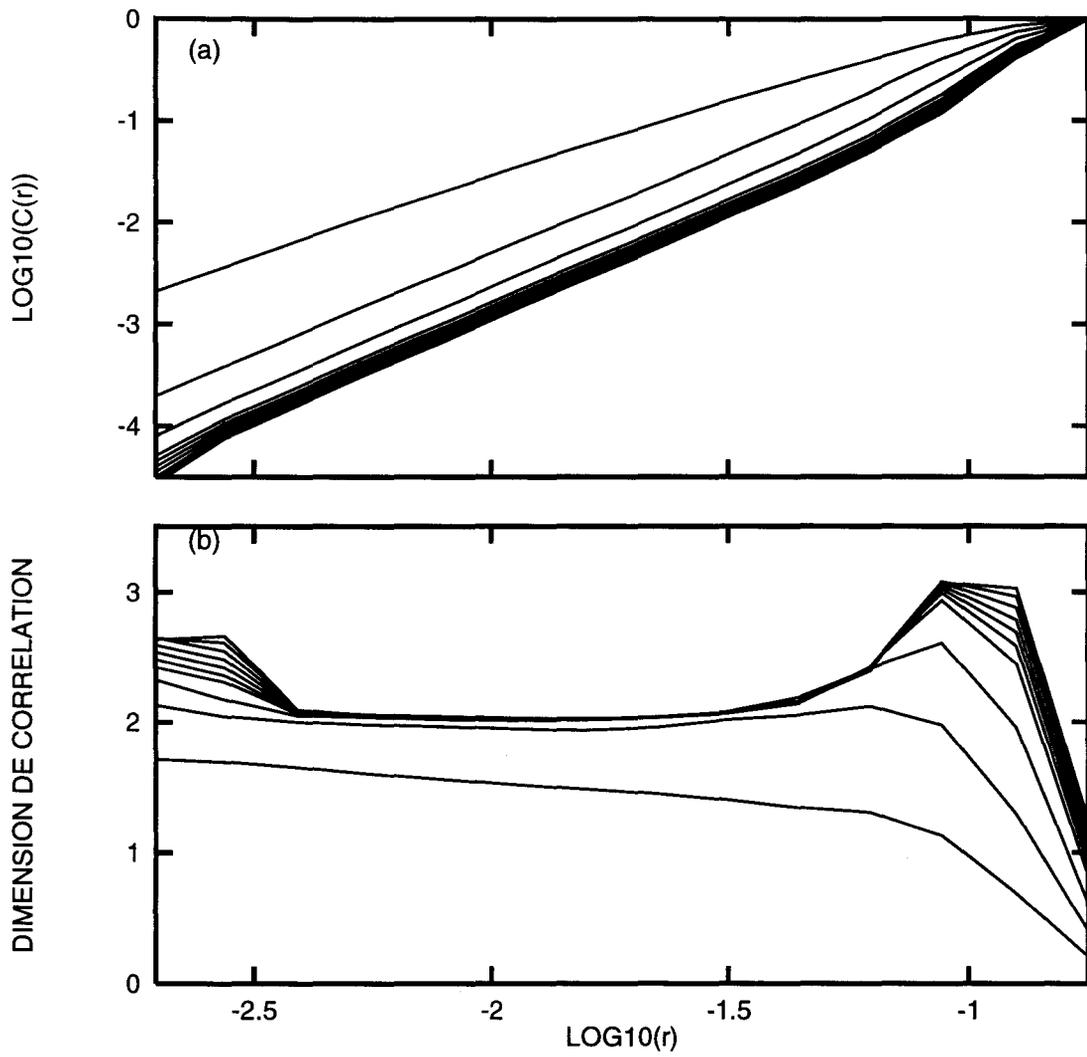


Fig. A-6: a) Tracés de $\text{Log}(C(r))$ en fonction de $\text{Log}(r)$ pour des dimensions de plongements variant de 2 à 20 pour un signal quasipériodique à deux fréquences
 b) Pentes locales des tracés a) en fonction de $\text{Log}(r)$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Agrawal, 89 *Nonlinear Fiber Optics*, G.P. Agrawal, Academic Press, New-York (1989).
- Azuma, 88 "Wavelength dependence of Brillouin-gain spectra for single-mode optical fibres", Y. Azuma, N. Shibata, T. Horiguchi, M. Tateda, *Electron. Lett.* **24**, 250 (1988).
- Bar-Joseph, 85 "Steady and relaxation oscillations of Stimulated Brillouin scattering in single-mode optical fibers", I. Bar-Joseph, A. A. Friesem, E. Lichtman, and R.G. Waarts, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1606 (1985).
- Bar-Joseph, 86 "Spontaneous mode locking of single and multi mode pumped SBS fiber lasers", I. Bar-Joseph, A. Dienes, A.A. Friesem, E. Lichtman, R.G. Waarts, and H.H. Yaffe, *Opt. Comm.* **59**, 296 (1986).
- Bayvel, 89a "Linewidth narrowing in semiconductor laser pumped all-fiber Brillouin ring laser", P. Bayvel, I.P. Giles, *Electronics Letters* **25**, 260 (1989).
- Bayvel, 89b "Evaluation of performance parameters of single-mode all-fiber Brillouin ring lasers", P. Bayvel, I.P. Giles, *Optics Letters* **14**, 581 (1989).
- Botineau, 89 "Diffusion Brillouin stimulée dans un laser en anneau à fibre optique", J. Botineau, C. Leycuras, C. Montes, and E. Picholle, *Ann. Télécommun.* **44**, 173 (1989).
- Botineau, 94 "A coherent approach to stationary stimulated Brillouin fiber amplifiers", J. Botineau, C. Leycuras, C. Montes, and E. Picholle, *Ann. Télécommun.* **49**, 479 (1994).
- Boyd, 90 "Noise initiation of stimulated Brillouin scattering", R. W. Boyd, K. Rzazewski, and P. Narum, *Phys. Rev. A* **42**, 5514 (1990).
- Brandt, 87 A. Brandt, T. Geisel, and W. Prettl, *Europhys. Lett.* **3**, 401 (1987).
- Chow, 93 "Chaotic stimulated Brillouin scattering in a finite-length medium", C. C. Chow and A. Bers, *Phys. Rev. A* **47**, 5144 (1993).
- Coste, 86 "Asymptotic evolution of stimulated Brillouin scattering, implications for optical fibers", J. Coste and C. Montes, *Phys. Rev. A* **34**, 3940 (1986).
- Cotter, 83 "Stimulated Brillouin scattering in monomode optical fiber", D. Cotter, *Opt. Commun.* **4**, 10 (1983).
- Dämmig, 93 "Stimulated Brillouin scattering in fibers with and without external feedback", M. Dämmig, G. Zinner, F. Mitschke, and H. Weilling, *Phys. Rev. A* **48**, 3301 (1993).

- Douay, 90 "Estimation of the mean coherence time of stimulated Brillouin scattering in an optical fiber using unbalanced heterodyne interferometry", M. Douay, P. Bernage, and P. Niay, *Opt. Comm.* **81**, 231 (1990).
- Fertein, 91 "Shifts in resonance wavelengths of Bragg gratings during writing or bleaching experiments by U.V. illumination within a germanosilicate fiber", E. Fertein, S. Legoubin, M. Douay, S. Canon, P. Bernage, P. Niay, J.F. Bayon, T. Georges, *Electronics Letters* **27**, 1838 (1991).
- Fertein, 95 "Contribution à l'étude des mécanismes de la photoréfraction dans des fibres dopées à l'oxyde de Germanium", E. Fertein, Thèse de doctorat, USTL (1995).
- Feynman, 79 "Le cours de Physique de Feynman", Mécanique Vol. 2, Interéditions, Paris (1979).
- Foley, 89 "Gain saturation in Fiber Raman/amplifiers due to Stimulated Brillouin Scattering", B. Foley, M. L. Dakss, R. V. Davies, and P. Melman, *J. Light. Techn.* **7**, 2024 (1989).
- Gaeta, 92 "Stimulated Brillouin scattering in the presence of external feedback", A. L. Gaeta and R.W. Boyd, *International Journal of Nonlinear Optical Physics*, World Scientific Publishing company, **1**, 581 (1992).
- Garus, 92 "Cascaded stimulated Brillouin scattering in high finesse all-fiber ring resonators", D. Garus, R. Hereth, *Nonlinear dynamics in optical systems*, Alpbach (Austria), Technical digest series **16**, p. TuB2-1/129 (1992).
- Grassberger, 83 "Characterization of Strange Attractors", P. Grassberger and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346 (1983).
- Grebogi, 83 "Are three-frequency quasiperiodic orbits to be expected in typical nonlinear dynamical systems?", C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 339 (1983).
- Harrison, 94 "Observation and characterization of deterministic chaos in stimulated Brillouin scattering with weak feedback", R. G. Harrison, P. M. Ripley, and W. Lu, *Phys. Rev. A* **49**, R24 (1994).
- Hill, 76a "CW Brillouin laser", K. O. Hill, B. S. Kawasaki, and D.C. Johnson, *App. Phys. Lett.* **28**, 608 (1976).
- Hill, 76b "CW generation of multiple Stokes and anti-Stokes Brillouin-shifted frequencies", K.O. Hill, D.C. Johnson, and B. S. Kawasaki, *Appl. Phys. Lett.* **29**, 185 (1976).
- Ippen, 72 "Stimulated Brillouin scattering in optical fibers", E. P. Ippen and R. H. Stolen, *Appl. Phys. Lett.* **21**, 539 (1972).

- Johnson, 71 "Relaxation oscillations in stimulated Raman and Brillouin scattering", R. V. Johnson and J. H. Marburger, Phys. Rev. A **4**, 1175 (1971).
- Kaiser, 72 *Laser Handbook*, W. Kaiser and M. Maier, Ed. F. T. Arrechi and E. O. Schulz-Dubois, Amsterdam, p.1077 (1972).
- Kawasaki, 78 "Bandwidth-limited operation of a mode-locked Brillouin parametric oscillator", B. S. Kawasaki, D. C. Johnson, Y. Fuji, and K. O. Hill, Appl. Phys. Lett. **32**, 429 (1978).
- Kim, 94 "Measurement of the nonlinear index of silica-core and dispersion-shifted fibers", K. S. Kim, and R. H. Stolen, Opt. Lett. **19**, 257 (1994).
- Landau, 71 *Mécanique des fluides*, L. Landau et E. Lifchitz, Eds. Mir, Moscou (1971).
- Lecoeuche, 96a "Dynamics of Brillouin fiber ring lasers: Off-resonant case", V. Lecoeuche, S. Randoux, B. Ségard, and J. Zemmouri, Phys. Rev. A. **53**, 2822 (1996).
- Lecoeuche, 96b "Modes of destabilisation of the Brillouin fiber ring lasers", V. Lecoeuche, B. Ségard, and J. Zemmouri, A paraître dans Optics Comm.
- Legoubin, 94 "Etude expérimentale et théorique de la réponse spectrale de composants photo-inscrits dans des fibres optiques", S. Legoubin, Thèse de doctorat, USTL (1994).
- Lemaire, 94 "Refractive index changes in optical fibers sensitized with molecular hydrogen", P.J. Lemaire, A.M. Vengsarkar, W.A. Reed, V. Mizrahi, OFC Technical digest, p. 47 (1994).
- Lichtman, 87 "Stimulated Brillouin scattering excited by a multimode laser in single-mode optical fibers", E. Lichtman and A. A. Friesem, Opt. Comm. **64**, 544 (1987).
- Lorrain, 79 "Champs et ondes électromagnétiques", P. Lorrain et D.R. Corson, Librairie Armand Collin, Paris (1979).
- Lu, 92 "Deterministic dynamics of stimulated scattering phenomena with external feedback", W. Lu, A. Johnstone, and R. G. Harrison, Phys. Rev. A **46**, 4114 (1992).
- Mamhoud, 96 "Morphogénèse solitonique dans un laser Brillouin à fibre optique pompé en continu", A. Mamhoud, Thèse de doctorat, Uni. de Nice Sophia-Antipolis (1996).
- Meltz, 89 "Formation of Bragg gratings in optical fibers by a transverse holographic method", G. Meltz, W.W. Morey, W.H. Glenn, Optics Letters **14**, 823 (1989).

- Montes, 83 "Efficient way to prevent reflection from Stimulated Brillouin backscattering", C. Montes, Phys. Rev. Lett. **50**, 1129 (1983).
- Montes, 85 "Reflection limitation by driven stimulated Brillouin rescattering and finite-bandwidth spectral interaction", C. Montes, Phys. Rev. A **31**, 2366 (1985).
- Montes, 87 "Optical turbulence in multiple stimulated Brillouin backscattering", C. Montes, J. Coste, Laser and Particle Beams **5**, pp. 405-411 (1987).
- Montes, 94a "Bifurcation in a cw-pumped Brillouin fiber ring laser: Coherent soliton morphogenesis", C. Montes, A. Mahmoud, and E. Picholle, Phys. Rev. A **49**, 1344 (1994).
- Montes, 94b "Three-wave soliton morphogenesis in a CW-pumped Brillouin fiber ring laser", C. Montes, A. Mahmoud, J. Botineau, and E. Picholle, Fluctuation Phenomena: Disorder and nonlinearity, Madrid, Ed. by A. R. Bishop, S. Jimenez, and L. Vazquez, World Scientific, 397 (1994).
- Narducci, 86 "Mode-mode competition and unstable behavior in a homogeneously broadened ring laser", L. M. Narducci, J. R. Tredicce, L. A. Lugiato, N. B. Abraham, and D. K. Bandy, Phys. Rev. A **33**, 1842 (1986).
- Newhouse, 78 S. Newhouse, D. Ruelle and F. Takens, Commun. Math. Phys. **64**, 35 (1978).
- Nicati, 93 "Temperature effects in a Brillouin fiber ring laser", P. A. Nicati, K. Toyama, S. Huang, and H. J. Shaw, Opt. Lett. **18**, 2123 (1993).
- Nicati, 95 "Frequency stability of a Brillouin fiber ring laser", P. A. Nicati, K. Toyama, and H. J. Shaw, J. Light. Techn. **13**, 1445 (1995).
- Packard, 80 "Geometry from a time series", N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J. D. Farmer and R.S. Shaw, Phys. Rev. Lett. **45**, 712 (1980).
- Picholle, 91a "Observation of dissipative superluminescent solitons in a Brillouin fiber ring laser", E. Picholle, C. Montes, C. Leycuras, O. Legrand, and J. Botineau, Phys. Rev. Lett. **66**, 1454 (1991).
- Picholle, 91b "Dynamique de la diffusion Brillouin stimulée dans les fibres optiques", E. Picholle, Thèse de doctorat, Univ. de Nice Sophia-Antipolis (1991).
- Ponikvar, 81 "Stabilized single-frequency stimulated Brillouin fiber ring laser", D. R. Ponikvar and S. Ezekiel, Opt. Lett. **6**, 398 (1981).
- Randoux, 95a "Dynamical analysis of Brillouin fiber lasers: an experimental approach", S. Randoux, V. Lecoecuche, B. Ségard, and J. Zemmouri, Phys. Rev. A **51**, R4345 (1995).



- Randoux, 95b *"Dynamical behavior of a Brillouin fiber ring laser emitting two Stokes components"*,
S. Randoux, V. Lecocuche, B. Ségard, and J. Zemmouri,
Phys. Rev. A **52**, 221 (1995).
- Randoux, 95c *"Etude expérimentale et théorique de la dynamique de lasers Brillouin à fibre optique"*,
S. Randoux, Thèse de doctorat, USTL (1995).
- Ruelle, 71 *"On the nature of turbulence"*,
D. Ruelle and F. Takens,
Commun. Math. Phys. **20**, 167 (1971).
- Shen, 65 *"Theory of stimulated Brillouin and Raman scattering"*,
Y. R. Shen and N. Bloembergen,
Phys. Rev. A **137**, 1787 (1965).
- Smith, 91 *"Narrow-linewidth stimulated Brillouin fiber laser and applications"*,
S. P. Smith, F. Zarinetchi, and S. Ezekiel,
Opt. Lett. **16**, 393 (1991).
- Stokes, 82 *"All-fiber stimulated Brillouin laser with submilliwatt pump threshold"*, L. F. Stokes, M. Chodorow, and H. J. Shaw,
Opt. Lett. **7**, 509 (1982).
- Takushima, 95 *"Spectral gain hole burning and modulation instability in a Brillouin fiber amplifier"*, Y. Takushima and K. Kikuchi,
Opt. Lett. **20**, 34 (1995).
- Thevenaz, 94 *"High-accuracy Brillouin gain spectrum measurements of single-mode fibers"*, L. Thevenaz, M. Nikles, and P. Robert,
Technical Digest of the symposium on optical fiber measurements,
Boulder CO, NIST Special publication **864**, 211 (1994).
- Toyama, 93 *"Generation of multiple Stokes waves in a Brillouin fiber ring laser"*,
K. Toyama, S. Huang, P. A. Nicati, B. Y. Kim, and H. J. Shaw,
"Optical fiber sensor conference, Firenze, Italia, p. Tu1.3/11 (1993).
- Walden, 84 *"Nonchaotic Rayleigh-Bénard convection with four and five incommensurate frequencies"*,
R. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner, and C. M. Surko,
Phys. Rev. Lett. **53**, 242 (1984).
- Wang, 87 *"Bifurcation phenomena in coupled chemical oscillators: Normal form analysis and numerical simulations"*, X. J. Wang and G. Nicolis,
Physica D **26**, 140 (1987).
- Yu, 95 *"Physical origin of dynamical stimulated Brillouin scattering in optical fibers with feedback"*, D. Yu, W. Lu, and R.G. Harrison,
Phys. Rev. A **51**, 669 (1995).
- Zel'dovich, 85 *"Principles of phase conjugation"*,
B.Y. Zel'dovich, N.F. Pilipetskii, and V. N. Shkunov,
Springer-Verlag, Berlin (1985).

RESUME

Ce travail concerne l'étude de la dynamique des lasers Brillouin à fibre optique. Nous montrons que la quasi-totalité des comportements de ces lasers peut s'interpréter dans le cadre d'une analyse modale de l'émission. En l'occurrence, le nombre N des modes de cavités situés sous la courbe de gain Brillouin apparaît comme un facteur primordial dans la dynamique.

Lorsque le maximum de gain coïncide avec un mode de la cavité (mode d'ordre 0), l'analyse de la stabilité de l'état stationnaire porté par ce mode montre qu'il existe des valeurs critiques N_{c_j} du nombre de modes N , au delà desquelles les modes latéraux d'ordre j deviennent instables. Ceux-ci se déstabilisent successivement pour des valeurs croissantes de N ($N_{c_j} < N_{c_{j+1}}$), et sont à l'origine de comportements dynamiques de plus en plus complexes. Ce scénario est confirmé par des simulations numériques effectuées pour des cavités de faible finesse en anneau ou en ligne. Lorsqu'on augmente la valeur de N , la dynamique passe par les différentes étapes d'une route vers le chaos de type Ruelle-Takens (instabilités périodiques, quasi-périodiques et chaos). Chaque bifurcation est attribuable à la déstabilisation d'un nouveau mode latéral d'ordre plus élevé. Dans quelques situations typiques, nous analysons théoriquement et expérimentalement l'influence du désaccord de cavité par rapport au maximum de gain.

L'analyse de stabilité, outre son intérêt fondamental comme point de départ d'une étude de la dynamique, nous a permis de définir les domaines de paramètres pour lesquels l'émission du laser est toujours stable. Ce mode d'émission s'avère particulièrement intéressant pour des applications pratiques, dans la mesure où l'émission Stokes se caractérise alors par une très grande cohérence temporelle. Aussi avons nous réalisé un laser Brillouin dans une cavité fermée par des réseaux de Bragg. Nous discutons les avantages qu'offre une telle configuration pour la génération d'un rayonnement stable.