N° d'ordre : 1858

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Ousmane BAH

Régularité des multiplicateurs pour un problème de contrôle optimal

Soutenue le 28 novembre 1996 devant la Commission d'Examen :

Président :	G. CŒURÉ, Université de Lille I
Rapporteurs :	J.-C. DUPIN, Université de Valenciennes
	S. NICAISE, Université de Valenciennes
Examinateur :	Ph. ANTOINE, Université de Lille I

Monsieur le Professeur Ph. Antoine m'a confié ce sujet et m'a guidé tout au long de ce travail par ses conseils, suggestions et encouragements. Ses qualités pédagogiques et aussi sociales m'ont beaucoup inspiré. Je l'en remercie très sincèrement et lui exprime toute ma profonde reconnaissance.

Je remercie Monsieur le Professeur G. Cœuré qui a bien voulu présider le Jury de cette thèse ainsi que Monsieur le Professeur S. Nicaise et Monsieur le Docteur J.-C. Dupin qui ont accepté de juger ce travail.

Je tiens à exprimer tous mes remerciements à la Mission Française de Coopération et d'Action Culturelle à Conakry et la Gouvernement Guinéen pour leur soutien tant moral, matériel que financier.

Mes remerciements vont également à ma famille ainsi qu'à tout le personnel du service de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques.

Enfin, que tous ceux qui de près ou de loin, à un moment ou à un autre, m'ont accordé leur soutien dans le cadre de ma formation, trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Régularité des multiplicateurs pour un problème de contrôle optimal

Introduction

Le théorème de séparation de Dubovitskii-Milyutin est un outil puissant pour établir des conditions nécessaires d'optimalité (cf. I.V. Girsanov [1]) pour une vaste classe de problèmes du calcul des variations et de la théorie de l'optimisation. Ce théorème permet d'exprimer par une équation fonctionnelle que l'intersection d'une famille de cônes convexes est vide, sous l'hypothèse que ces cônes, sauf au plus un, soient ouverts. L'équation fonctionnelle exprime l'existence pour chaque cône d'une forme linéaire continue, négative sur ce cône, de telle manière que la somme de ces formes linéaires soit nulle.

De nombreux résultats nouveaux portant sur les conditions nécessaires d'optimalité ont été obtenus à partir du théorème de Dubovitskii-Milyutin. Leur objectif commun est d'étendre le champ d'application de ce théorème. On peut citer les travaux de :

— S. Walczack [2], qui donne une version du théorème de Dubovitskii-Milyutin, généralisée en ce sens qu'il considère plusieurs cônes fermés sous certaines hypothèses : cônes de même sens et de sens opposés. Il obtient ainsi une condition nécessaire d'optimalité pour des problèmes de contrôle optimal avec des contraintes d'égalité sur les variables d'état.

— A. V. Arutyunov [3], qui établit des conditions nécessaires d'optimalité pour un problème avec des contraintes de phase. Il obtient des conditions nécessaires pour des problèmes de minimisation ne satisfaisant pas la condition de Lyusternik.

— U. Ledzewicz [4], qui obtient une extension de la méthode de Dubovitskii-Milyutin dans le cas des contraintes non régulières grâce à une généralisation du théorème de Lyusternik, due à

E.R. Avakov ([5]). Ce résultat est appliqué à la résolution de problèmes d'optimisation avec des contraintes d'égalité et d'inégalité.

Les conditions nécessaires ainsi obtenues s'expriment par des "multiplicateurs" qui sont des formes linéaires continues sur les espaces considérés, astreintes à des conditions liées aux contraintes du problème étudié. L'explicitation effective de ces multiplicateurs, pour un problème concret, et non un problème théorique, se heurte à deux difficultés majeures pour lesquelles la présente thèse propose des éléments de solution :

1. La régularité des multiplicateurs.

Sauf à se restreindre au cas de problème d'optimisation posés sur des espaces de Hilbert, les espaces modèles sont des espaces de Banach, par exemple des espaces de Sobolev $W^{1,\infty}\left(I;\mathbf{R}^p\right)$, et les multiplicateurs sont alors en général très difficiles à expliciter dans un calcul effectif : par exemple, le principe du maximum de Ledzewicz s'exprime avec des multiplicateurs appartenant au dual d'espaces de fonctions mesurables bornées.

Une solution évidente serait de se restreindre aux modèles hilbertiens, mais cette solution n'est pas toujours acceptable, au moins pour deux raisons :

- *Le modèle hilbertien ne rend compte que d'une classe restreinte de problèmes.*

Si u est une fonction de carré intégrable définie sur un intervalle borné I, l'application $f \circ u$ n'est pas en général de carré intégrable, même si f est très régulière (un polynôme par exemple). Un problème de contrôle optimal comporte usuellement plusieurs applications du type $u \mapsto f \circ u$ (le lagrangien, l'équation d'évolution, etc.) : il ne pourra être traité à partir d'un modèle hilbertien que si les données du problème vérifient des conditions très restrictives.

- *Le modèle hilbertien manque de souplesse pour certains calculs.*

D'un point de vue théorique, il est toujours possible de regrouper toutes les contraintes et de dériver des conditions d'optimalité de l'étude du cône tangent en un point de l'ensemble Q des points admissibles. D'un point de vue pratique, faute de savoir déterminer explicitement ce cône tangent, on est amené à dissocier les contraintes et à interpréter Q comme étant l'intersection de parties Q_i plus simples. Étant donné les hypothèses du théorème de

Dubovitskii-Milyutin, cette démarche conduit à n'utiliser le cône tangent que pour au plus une des parties Q_i et de lui substituer le cône des directions admissibles pour les autres parties. En contrôle optimal, par exemple, on est amené à utiliser le cône tangent pour les contraintes bilatérales et le cône des directions admissibles pour les contraintes unilatérales, mais ces cônes de directions admissibles sont en général vides dans un modèle hilbertien : par exemple, dans $L^2(I;\mathbf{R})$, l'ensemble des classes de fonctions u telles que $u(t) \geq 0$ pour presque tout t est d'intérieur vide, donc tous les cônes de directions admissibles sont vides.

Une manière de surmonter ces difficultés est d'accepter des modèles non hilbertiens et d'établir pour ces modèles un théorème de régularité des multiplicateurs qui permette de restreindre la recherche des multiplicateurs à des sous-espaces simples des espaces duaux.

Dans certains cas, la régularité des multiplicateurs est une conséquence immédiate de la régularité des données. Considérons par exemple un problème du type

$$\left|\begin{array}{ll}\text{minimiser} & f(x)\\ \text{avec} & x \in Q \subset E\end{array}\right.$$

Sous les hypothèses usuelles, les conditions d'optimalité d'ordre 1, en un point a, s'écrivent sous la forme

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^+ \times E^*, \quad \lambda\, Df(a) + \mu = 0$$

où μ est une forme linéaire continue sur E, négative sur le cône T_aQ tangent à Q en a. Si on sait que l'application différentielle Df prend ses valeurs dans un sous-espace E' du dual E^* de E, on a nécessairement $\mu \in E'$, donc un résultat de régularité pour le multiplicateur μ.

Le plus souvent, la régularité des multiplicateurs n'est pas une conséquence immédiate de la régularité des données. Considérons par exemple un problème du type

$$\left|\begin{array}{ll}\text{minimiser} & f(x)\\ \text{avec} & x \in Q \subset E \quad \text{et} \quad h(x) = 0\end{array}\right.$$

Sous les hypothèses usuelles, les conditions d'optimalité d'ordre 1, en un point a, s'écrivent sous la forme

$$\exists(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbf{R}^+ \times E^* \times F^*, \quad \lambda\, Df(a) + \mu + \nu \circ Dh(a) = 0$$

où μ est une forme linéaire continue sur E, négative sur le cône A_aQ des directions admissibles de Q en a et v est une forme linéaire continue sur l'espace F but de h. Si on sait que l'application différentielle Df prend ses valeurs dans un sous-espace E' du dual E^* de E, pour pouvoir en déduire que μ appartient à E', il faudrait que l'image de la transposée de $Dh(a)$ soit contenue dans E'. Cette condition peut être vérifiée si F est de dimension finie (cas de conditions aux bornes ou de conditions isopérimétriques) mais elle n'est que très exceptionnellement vérifiée si F est de dimension infinie (cas d'une équation d'évolution) et si E' est assez petit pour que l'appartenance de μ à E' soit un résultat intéressant. Une autre approche est donc nécessaire pour obtenir un théorème de régularité des multiplicateurs.

La démonstration de la condition d'optimalité se ramène dans le cas générique à exprimer, grâce au théorème de Dubovitskii-Milyutin, la séparation de trois cônes convexes : le cône de décroissance $D_a^< f$ de f en a, le cône des directions admissibles A_aQ de Q en a et le cône tangent $T_a h^{-1}(0) = \mathrm{Ker} Dh(a)$ de $h^{-1}(0)$ en a. Si E est en dualité séparante avec un sous-espace E' de son dual et si les hypothèses du théorème de Dubovitskii-Milyutin sont encore vérifiées lorsque E est muni d'une topologie τ compatible avec cette dualité, la condition de séparation peut s'exprimer au moyen de formes linéaires continues pour la topologie τ : ces formes appartiennent alors au sous-espace E', d'où un résultat de régularité pour les multiplicateurs. Les hypothèses du théorème de Dubovitskii-Milyutin imposant que tous les cônes, sauf un, soient ouverts, on prendra naturellement pour τ la topologie localement convexe séparée la plus fine compatible avec la dualité, c'est-à-dire la topologie de Mackey $\tau(E,E')$.

Dans la pratique, le cône de décroissance $D_a^< f$ sera $\tau(E,E')$-ouvert si $Df(a)$ appartient à E', ce qu'on supposera, et le cône tangent $T_a h^{-1}(0) = \mathrm{Ker} Dh(a)$ ne sera pas $\tau(E,E')$-ouvert. Le succès de la méthode reposera donc soit sur une hypothèse de $\tau(E,E')$-ouverture pour le cône A_aQ, soit sur un théorème d'extension des formes linéaires négatives permettant de déterminer le cône dual de $A_aQ \cap \mathrm{Ker} Dh(a)$ dans E muni de la topologie $\tau(E,E')$, soit sur une conjonction de ces deux approches. La modélisation de cette situation est faite au chapitre **I** où un théorème abstrait de régularité des multiplicateurs est établi (Théorème **I.1.9** et corollaire **I.1.10**). Le chapitre **II** est consacrée à l'explicitation du corollaire **I.1.10** pour une large classe de problèmes de contrôle optimal. On obtient (Théorèmes **II.1.1** et **II.7.2**), compte tenu des résultats du chapitre **III** sur la détermination des cônes de directions admissibles, des conditions dont les multiplicateurs sont des scalaires et des fonctions à variation bornée.

2. Détermination explicite de cônes de directions admissibles

Caractériser l'appartenance d'une forme linéaire au cône dual d'un cône d'exploration locale (cône tangent ou cône de directions admissibles) suppose avant une connaissance explicite ces cônes. Si de nombreux résultats sont connus pour la détermination des cônes tangents (**[5]**, **[6]**, **[7]**, **[8]**, **[9]**, **[10]**), il ne semble pas en aller de même pour les cônes de directions admissibles et beaucoup de résultats ne sont énoncés que d'une manière abstraite - même pour une partie convexe. Notre projet étant de donner une expression explicite des conditions d'optimalité, à moins de se limiter à des contraintes élémentaires (une intersection de demi-espaces par exemple), il fallait trouver des outils pour expliciter certains cônes de directions admissibles attachés à des contraintes usuelles.

Deux exemples, exploités au théorème **II.1.1** pour le premier et au théorème **II.7.2** pour le second, sont étudiés au chapitre **III** :

- *Cônes des directions admissibles de l'ensemble de classes de fonctions mesurables bornées prenant leurs valeurs dans une partie C.*

Soit C est une partie fermée de $\mathbf{R}^p$, I un intervalle borné et $L^\infty(I,C)$ l'ensemble des classes de fonctions mesurables bornées définies sur I et prenant leurs valeurs dans C. Il est facile de montrer (Proposition **III.2.10**) que si H est une direction admissible de $L^\infty(I,C)$ au point h, alors (h,H) prend ses valeurs dans

$$A_* C = \left\{(x,X) \,\middle|\, x \in C,\ X \in A_x C\right\},$$

mais la réciproque est fausse (Contre-exemple **III.2.11**).

Nous rappelons (Définition **III.1.3**) la notion de "partie admissiblement régulière" et démontrons (Théorème **II.2.12**) que la réciproque est vraie si la partie C est admissiblement régulière. De plus, $L^\infty(I,C)$ est alors lui aussi admissiblement régulier ce qui ouvre la voie à des constructions ultérieures.

Cette condition de régularité n'est pas trop restrictive puisque toute partie qui est localement l'épigraphe d'une fonction strictement différentiable (resp. localement un convexe d'intérieur non vide) est admissiblement régulière et que toute partie tangentiellement régulière est admissiblement régulière si, en tout point, son cône de Rockafellar est non vide (il est alors égal à l'intérieur du cône de Clarke).

- *Cônes des directions admissibles de l'ensembles de fonctions de classe $W^{1,\infty}$ essentiellement minorées par une classe de fonctions mesurables bornées.*

Soit I un intervalle borné, θ une fonction mesurable bornée définie sur I, prenant ses valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et G_θ l'ensemble des fonctions x appartenant à $W^{1,\infty}(I,p)$ vérifiant $x(t) \geq \theta(t)$ pour presque tout t. Cette partie est convexe, mais cela ne suffit pas pour en expliciter les cônes de directions admissibles : une caractérisation explicite de l'intérieur de cette partie n'est déjà pas évidente.

La notion d'"adhérence essentielle" (Définition **III.3.1**) apporte un élément de réponse : elle permet d'associer à chaque composante x_i d'une fonction x appartenant à G_θ, une partie fermée $J_i(x)$ de I telle que $X \in W^{1,\infty}(I,p)$ est une direction admissible de G_θ au point x si et seulement si, pour tout indice i, la $i^{\text{ème}}$ composante de X est strictement positive sur $J_i(x)$ (Théorème **III.4.5**).

I. Théorème de régularité des multiplicateurs

1. Énoncé du théorème

La notion d'espaces en dualité jouant un rôle essentiel dans cette étude, nous commencerons par rappeler les définitions et résultats essentiels et fixer les notations.

Définitions 1.1. ([11], chapitre IV). Deux espaces E et E' sont mis en *dualité séparante* par une forme bilinéaire Θ définie sur $E' \times E$ si et seulement si

$$(1) \quad \left(\forall x' \in E',\ \Theta(x',x) = 0\right) \Rightarrow (x = 0)$$
$$(2) \quad \left(\forall x \in E,\ \Theta(x',x) = 0\right) \Rightarrow (x' = 0)$$

Notations 1.2. L'implication (1) entraîne que l'espace E' s'injecte linéairement dans le dual algébrique $E^{\#}$ de E ; on note $\sigma(E',E)$ la topologie (*topologie faible*) induite sur E' par $E^{\#}$ muni de la topologie de la convergence simple.

L'implication (2) entraîne que l'espace E s'injecte linéairement dans le dual algébrique $E'^{\#}$ de E' ; on note $\tau(E,E')$ la topologie (*topologie de Mackey*) induite sur E par $E'^{\#}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties $\sigma(E',E)$-compactes de E'. Cette topologie est la topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe séparé sur E la plus fine *compatible avec la dualité*, c'est-à-dire telle que les formes linéaires continues sur E soient exactement celles représentées par E'.

Définition 1.3. Étant donné un cône K de E, on appelle *cône polaire* de K relativement à la dualité entre E et E', le cône convexe

$$K' = \left\{x' \in E' \mid \forall x \in K, \Theta(x',x) \le 0\right\}.$$

Lemme 1.4. ([1], lemmes 5.9, 5.10 et 5.11) *Soit* $\left\{K_i\right\}_{1 \le i \le n}$ *une famille de cônes convexes de* E, *ouverts pour une topologie compatible avec la dualité.*

a) *Si* L *est un sous-espace vectoriel de* E *et si* $L \cap \bigcap_{1 \le i \le n} K_i \ne \varnothing$, *on a*

$$\left(L \cap K_1 \cap \ldots \cap K_n\right)' = L' + K_1' + \ldots + K_n'$$

b) *Si L est un cône convexe de E et si $L \cap \bigcap_{1 \le i \le n} K_i = \varnothing$, il existe $x'_0 \in L'$, $x'_1 \in K'_1$, ... , $x'_n \in K'_n$, non tous nuls, tels que $x'_0 + x'_1 + \ldots + x'_n = 0$.*

Commentaire. Le **a)** est une conséquence immédiate du théorème de Krein sur le prolongement des formes linéaires continues positives sur un cône et le **b)** est une version du théorème de séparation de Dubovitskii-Milyutin.

Le modèle de problème d'optimisation proposé ici est construit sur des espaces de Banach munis d'une dualité séparante compatible avec la structure banachique :

Définitions 1.5. ([12]). On appelle *couple d'espaces de Banach* la donnée $\mathbf{E} = (E, E', \Theta)$ de deux espaces de Banach E et E' mis en dualité séparante par une forme bilinéaire continue Θ. L'espace euclidien $\mathbf{R}^p$ sera identifié avec le couple formé de $\mathbf{R}^p$ mis en dualité avec lui-même par le produit scalaire.

Le *produit de deux couples d'espaces de Banach* $\mathbf{E}_1 = (E_1, E'_1, \Theta_1)$ *et* $\mathbf{E}_2 = (E_2, E'_2, \Theta_2)$ est le couple d'espaces de Banach défini par

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = (E_1 \times E_2, E'_1 \times E'_2, \Theta_1 + \Theta_2)$$

Un *morphisme* entre deux couples d'espaces de Banach $\mathbf{E} = (E, E', \Theta)$ et $\mathbf{F} = (F, F', \Phi)$ est une application linéaire continue u de E dans F compatible avec les dualités, c'est-à-dire telle qu'il existe une application linéaire continue u' de F' dans E' (*l'adjoint* de u), nécessairement unique, vérifiant

$$\forall y' \in F', \forall x \in E, \Theta(u'y', x) = \Phi(y', ux)$$

Le composé de deux morphismes est un morphisme et $(u \circ v)' = v' \circ u'$. Si $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, la forme linéaire u. est un morphisme si et seulement si elle est représentée par un élément de E'.

Une *quasi-section* d'un morphisme u de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$ est un morphisme s de $\mathbf{F}$ dans $\mathbf{E}$ tel que $u \circ s \circ u = u$ (et donc aussi $u' \circ s' \circ u' = u'$). Si $u \circ s$ est égal à l'identité de F, on dit que s est une section de u.

La forme bilinéaire Θ étant continue, l'injection canonique de E' dans $E^{\#}$ se factorise par une application linéaire continue injective θ de E' dans le dual topologique E^* de l'espace de Banach E. On vérifie aisément que

Lemme 1.6. *La topologie* $\sigma(E',E)$ *est la topologie induite sur* E' *par* $\sigma(E^*,E)$, *via l'injection* θ.

Notations 1.7. Étant donné un couple d'espaces de Banach $\mathbf{E} = (E,E',\Theta)$ et un cône K de E, on notera K^o le cône polaire de K relativement à la dualité entre E et E' et K^* le cône polaire de K relativement à la dualité entre E et son dual topologique E^*. On a $K^o = \theta^{-1}(K^*)$, où θ est l'injection canonique de E' dans E^*.

Lemme 1.8. *Si* K *est un sous-espace vectoriel de* E *de codimension finie, fermé pour la topologie faible, (resp. un cône polyédral ouvert pour la topologie faible), alors* $\theta(K^o) = K^*$ *et* θ *induit une bijection de* K^o *sur* K^*.

▲ La démonstration est élémentaire en identifiant le sous-espace vectoriel (resp. le cône polyédral) avec l'ensemble des points de E annulant (resp. rendant négatives) une famille finie de formes linéaires définies par des éléments de E'. ▼

Nous pouvons maintenant formuler un théorème de régularité des multiplicateurs pour une classe de problèmes d'optimisation définis sur des couples d'espaces de Banach :

Théorème 1.9. *Soient* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ *et* $\mathbf{F}$ *des couples d'espaces de Banach,* U *un ouvert de* $E_1 \times E_2$, P *et* Q *des parties de* $E_1 \times E_2$, R_2 *une partie de* E_2, f *une application de* U *dans* $\mathbf{R}$ *et* h *une application de* U *dans* F. *On considère le problème d'optimisation suivant :*

$$\left|\begin{array}{l} \textit{minimiser} \quad f(x_1,x_2) \\ \textit{avec} \quad (x_1,x_2) \in P \cap Q,\ x_2 \in R_2 \text{ et } h(x_1,x_2) = 0 \end{array}\right.$$

sur lequel on fait les hypothèses suivantes en un point $a = (a_1,a_2)$:

(H1) $A_{a_2} R_2$ *est convexe et non vide*

(H2) $A_a P$ *est convexe, non vide et* $\tau(E,E')$*-ouvert*

(H3) $A_a Q$ *est un cône polyédral* $\sigma(E,E')$*-ouvert*

(H4) *l'application* f *est différentiable au point* a *et* $Df(a)$ *est un morphisme de* $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ *dans* $\mathbf{R}$ *; l'application* h *est strictement différentiable au point* a *et* $Dh(a)$ *est un morphisme de* $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ *dans* $\mathbf{F}$

(H5) *la différentielle partielle* $D_1h(a_1, a_2)$ *(qui est un morphisme de* $\mathbf{E}_1$ *dans* $\mathbf{F}$*) admet une quasi-section et a une image de codimension finie.*

Une condition nécessaire pour que le problème ait une solution locale au point a *est que il existe* $\lambda \geq 0$, $(x_1', x_2') \in (A_aP)^o$, $(x_1'', x_2'') \in (A_aQ)^o$, $x_2''' \in (A_{a_2} R_2)^o$ *et* $y' \in F'$, *non tous nuls tels que*

$$\lambda \nabla f(a) + (x_1' + x_1'', x_2' + x_2'' + x_2''') + D'h(a)y' = 0$$

où $\nabla f(a) \in E_1' \times E_2$ *représente* $Df(a)$ *dans la dualité de* $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ *(c'est le "gradient" de* f *au point* a*) et où* $D'h(a)$ *est l'adjoint de* $Dh(a)$ *relativement aux dualités.*

On peut prendre $\lambda = 1$, *si est vérifiée la condition de qualification suivante :*
(H6) $Dh(a)$ *est surjectif et* $A_aP \cap A_aQ \cap (E_1 \times A_{a_2} R_2) \cap \mathrm{Ker} Dh(a) \neq \varnothing$

La démonstration de ce théorème est faite au paragraphe **3**; elle repose sur un lemme de séparation établi au paragraphe **2**.

Souvent, la partie Q est définie par

$$Q = \left\{ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid g(x_1, x_2) \leq 0 \right\}$$

où g est une application de U dans $\mathbf{R}^s$. On peut alors formuler une condition nécessaire d'optimalité, même lorsque l'hypothèse **(H3)** du théorème **1.9** n'est pas satisfaite :

Corollaire 1.10. *Si, dans le théorème* **1.9**, *la partie* Q *est de la forme*

$$Q = \left\{ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid g(x_1, x_2) \leq 0 \right\}$$

où g *est une application de* U *dans* $\mathbf{R}^s$, *différentiable au point* a *et telle que* $Dg(a)$ *soit un morphisme de* $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ *dans* $\mathbf{R}^s$, *on peut supprimer l'hypothèse* **(H3)** *et modifier ainsi la condition nécessaire d'optimalité : il existe* $\lambda \in \mathrm{R}^+$, $(x_1', x_2') \in (A_aP)^o$, $\gamma \in \mathbf{R}^s$ *avec* $\gamma \geq 0$, $x_2''' \in (A_{a_2} R_2)^o$ *et* $y' \in F'$, *non tous nuls tels que* $\langle \gamma | g(a) \rangle = 0$ *et*

$$\lambda \nabla f(a) + (x_1', x_2' + x_2''') + \sum_{1 \leq i \leq s} \gamma_i \nabla g_i(a) + D'h(a)y' = 0$$

▲ La condition $\langle \gamma | g(a) \rangle = 0$ exprime que $\gamma_i = 0$ lorsque $g_i(a) < 0$. Nous supposerons désormais que les contraintes non efficaces ont été omises et qu'on a donc $g(a) = 0$. Par ailleurs, s'il existe un indice i_0 tel que $Dg_{i_0}(a) = 0$, on prendra $\gamma_{i_0} = 1$ et tous les autres multiplicateurs nuls. Nous supposerons désormais que $Dg_i(a) \neq 0$ pour tout i.

$Dg(a)$ définissant un morphisme de couples, les formes linéaires $Dg_i(a)$ sont représentées dans $E_1' \times E_2'$ par leur gradient $\nabla g_i(a)$ et les demi-espaces

$$K_i = \left\{ X \in E_1 \times E_2 \mid Dg_i(a) \cdot X < 0 \right\}$$

sont ouverts pour la topologie faible. Si l'intersection des K_i est vide, le théorème de Dubovitskii-Milyutin assure qu'il existe $\gamma \in \mathbf{R}^s$, avec $\gamma \geq 0$ et $\gamma \neq 0$, tel que $\sum_{1 \leq i \leq s} \gamma_i \nabla g_i(a) = 0$; la condition est alors vérifiée en prenant tous les autres multiplicateurs nuls. Si l'intersection des K_i n'est pas vide, elle est égale à $A_a Q$ et l'hypothèse (**H3**) du théorème **1.9** est vérifiée : on applique le théorème. ▼

2. Variations autour des théorèmes de Krein et de Dubovitskii-Milyutin

Les lemmes suivants donnent des versions "régularisées" (relativement à une dualité fixée) du lemme **1.4** dans des cas où les hypothèses de ce lemme ne sont pas vérifiées pour une topologie compatible avec la dualité.

Lemme 2.1. *Soit* $\mathbf{E}$ *un couple d'espaces de Banach,* u *un morphisme de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{R}^p$ *et* K *un cône convexe non vide de* E*, ouvert pour la topologie de la norme.*

a) *Si* $K \cap \mathrm{Ker}u \neq \varnothing$*, on a* $(K \cap \mathrm{Ker}u)^o = K^o + \mathrm{Im}u'$

b) *Si* $K \cap \mathrm{Ker}u = \varnothing$*, il existe* $x' \in K^o$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}^p$*, non nuls, tels que* $x' + u'\lambda = 0$

▲ **a)** On suppose que $K \cap \mathrm{Ker}u \neq \varnothing$. Soit $x' \in (K \cap \mathrm{Ker}u)^o = \theta^{-1}\left((K \cap \mathrm{Ker}u)^*\right)$. Le lemme **1.4.a** sur l'espace de Banach E entraîne que $(K \cap \mathrm{Ker}\,u)^* = K^* + (\mathrm{Ker}u)^*$, donc que $\theta(x') = \mu + \nu$ avec $\mu \in K^*$ et $\nu \in (\mathrm{Ker}u)^*$. L'espace $\mathbf{R}^p$ étant de dimension finie et le dual de $\mathbf{R}^p$ étant identifié à $\mathbf{R}^p$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}^p$ tel que $\nu = {}^t u\lambda$, où ${}^t u$ est l'application transposée de u. L'application u étant un morphisme, on a enfin ${}^t u\lambda = \theta(u'\lambda)$, d'où

$$\theta(x') = \mu + \theta(u'\lambda)$$

ce qui entraîne que μ est représenté par l'élément $\bar{x}' = x' - u'\lambda$ de E'. On a alors $\bar{x}' \in K^o$ et $x' = \bar{x}' + u'\lambda$, ce qui démontre l'inclusion de $(K \cap \mathrm{Ker}u)^o$ dans $K^o + \mathrm{Im}u'$. L'inclusion en sens inverse est immédiate.

b) On suppose que $K \cap \mathrm{Ker}u = \varnothing$. Le cône K étant convexe, non vide et ouvert pour la topologie de la norme, le lemme **1.4.b** sur l'espace de Banach E entraîne qu'il existe des formes linéaires μ et ν sur E, avec $\mu \in K^*$ et ν nulle sur $\mathrm{Ker}u$, non nulles, telles que $\nu + \mu = 0$. Comme précédemment, on a $\nu = \theta(u'\lambda)$ donc μ est représenté par l'élément $x' = -u'\lambda$ de E'. On a alors $x' \in K^o$ et $x' + u'\lambda = 0$. ▼

Lemme 2.2. *Soient* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ *et* $\mathbf{F}$ *des couples d'espaces de Banach,* K_2 *un cône convexe non vide de* E_2, *ouvert pour la topologie de la norme,* $u = u_1 + u_2$ *un morphisme de* $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ *dans* $\mathbf{F}$ *tel que* u_1 *admette une quasi-section et ait une image de codimension finie.*

a) *Si* $(E_1 \times K_2) \cap \mathrm{Ker}\,u \neq \varnothing$, *on a* $\left((E_1 \times K_2) \cap \mathrm{Ker}\,u\right)^o = \left(\{0\} \times K_2^o\right) + \mathrm{Im}u'$

b) *Si* $(E_1 \times K_2) \cap \mathrm{Ker}\,u = \varnothing$, *il existe* $x_2' \in K_2^o$ *et* $y' \in \mathrm{Ker}\,u_1'$, *non nuls, tels que* $x_2' + u_2' y' = 0$

▲ Un élément (x_1, x_2) de $E_1 \times E_2$ appartient à $\mathrm{Ker}\,u$ si et seulement si $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$, ce qui impose $u_2 x_2 \in \mathrm{Im}\,u_1$. Par hypothèse sur u_1, ceci sera vérifié si et seulement si x_2 appartient au noyau du morphisme $\overline{u}_2$ composé de u_2 et de la surjection canonique de F sur l'espace de dimension finie $F/\mathrm{Im}u_1$ (l'adjoint de ce morphisme est le composé de l'injection canonique de $\mathrm{Ker}\,u_1'$ dans F' et de u_2').

Si x_2 vérifie cette condition, la forme générale de x_1 est donnée par $x_1 = z_1 - (s_1 \circ u_2)x_2$, où s_1 est une quasi-section de u_1 et $z_1 \in \mathrm{Ker}u_1$. On a donc

$$\mathrm{Ker}\,u = \left\{ \left(z_1 - (s_1 \circ u_2)x_2, x_2\right) \mid z_1 \in \mathrm{Ker}\,u_1, x_2 \in \mathrm{Ker}\,\overline{u}_2 \right\}$$

et donc

$$(\mathrm{E}_1 \times K_2) \cap \mathrm{Ker}u = \left\{ \left(z_1 - (s_1 \circ u_2)x_2, x_2\right) \mid z_1 \in \mathrm{Ker}u_1, x_2 \in K_2 \cap \mathrm{Ker}\overline{u}_2 \right\}.$$

a) On suppose que $(E_1 \times K_2) \cap \mathrm{Ker}\,u \neq \varnothing$. Un élément (x_1', x_2') de $E_1' \times E_2'$ appartient au polaire de $(E_1 \times K_2) \cap \mathrm{Ker}\,u$ si et seulement si

$$\forall z_1 \in \mathrm{Ker}\,u_1,\ \forall x_2 \in K_2 \cap \mathrm{Ker}\overline{u}_2,\ \Theta_1\left(x_1', z_1 - (s_1 \circ u_2)x_2\right) + \Theta_2(x_2', x_2) \le 0$$

soit encore, en passant aux adjoints

$$\forall z_1 \in \mathrm{Ker}\,u_1,\ \forall x_2 \in K_2 \cap \mathrm{Ker}\overline{u}_2,\ \Theta_1(x_1', z_1) + \Theta_2\left(x_2' - (u_2' \circ s_1')x_1', x_2\right) \le 0$$

c'est-à-dire $x_1' \in (\mathrm{Ker}u_1)^o$ et $x_2' - (u_2' \circ s_1')x_1' \in \left(K_2 \cap \mathrm{Ker}\overline{u}_2\right)^o$. Comme u_1 admet une quasi-section, on a $(\mathrm{Ker}\,u_1)^o = \mathrm{Im}\,u_1'$ (vérification immédiate). Comme $\overline{u}_2$ prend ses valeurs dans un espace de dimension finie et que, d'après la forme explicite de $(E_1 \times K_2) \cap \mathrm{Ker}\,u$, l'hypothèse

$(E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u \neq \varnothing$ entraîne $K_2 \cap \operatorname{Ker} \bar{u}_2 \neq \varnothing$ et alors $(K_2 \cap \operatorname{Ker} \bar{u}_2)^o = (K_2)^o + \operatorname{Im} \bar{u}_2'$ d'après le lemme **2.1.a**. On a donc

$$\exists y_1' \in F', \quad x_1' = u_1' y_1' \tag{1}$$

et

$$\exists z_2' \in (K_2)^o, \quad \exists y_2' \in \operatorname{Ker} u_1', \quad x_2' - (u_2' \circ s_1')x_1' = z_2' + u_2' y_2'. \tag{2}$$

On remplace dans (2) la valeur de x_1' donnée par (1). Il vient

$$x_2' = z_2' + u_2'\left(y_2' + (s_1' \circ u_1')y_1'\right) = z_2' + u_2' y'$$

en posant $y' = y_2' + (s_1' \circ u_1')y_1'$. On a alors

$$u_1' y' = u_1' y_2' + (u_1' \circ s_1' \circ u_1')y_1' = u_1' y_1' = x_1'$$

puisque $y_2' \in \operatorname{Ker} u_1'$ et que s_1 est une quasi-section de u_1. On a donc établi que

$$\exists z_2' \in (K_2)^o, \quad \exists y' \in F', \quad (x_1', x_2') = (u_1' y', z_2' + u_2' y').$$

La réciproque est immédiate.

b) On suppose que $(E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u = \varnothing$, la forme explicite de cette intersection montre qu'on a alors $K_2 \cap \operatorname{Ker} \bar{u}_2 = \varnothing$. On applique le lemme **2.1.b**. ▼

Proposition 2.3. *Soient* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ *et* $\mathbf{F}$ *des couples d'espaces de Banach,* H *un cône polyédral de* $E_1 \times E_2$*, ouvert pour la topologie faible,* K_2 *un cône convexe non vide de* E_2*, ouvert pour la topologie de la norme,* $u = u_1 + u_2$ *un morphisme de* $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ *dans* $\mathbf{F}$ *tel que* u_1 *admette une quasi-section et ait une image de codimension finie.*

a) *Si* $H \cap (E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u \neq \varnothing$, *on a* $(H \cap (E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u)^o = H^o + (\{0\} \times K_2^o) + \operatorname{Im} u'$

b) *Si* $H \cap (E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u = \varnothing$, *il existe* $(x_1', x_2') \in H^o$, $x_2'' \in K_2^o$ *et* $y' \in F'$, *non tous nuls, tels que* $x_1' + u_1' y' = 0$ *et* $x_2' + x_2'' + u_2' y' = 0$.

▲ **a)** On suppose que $H \cap (E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u \neq \varnothing$. En appliquant deux fois le lemme **1.4.a**, il vient que

$$\begin{aligned}(H \cap (E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u)^* &= H^* + (E_1 \times K_2)^* + (\operatorname{Ker} u)^* \\ &= H^* + ((E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u)^*\end{aligned}$$

On a $H^* = (\theta_1 \times \theta_2)(H^o)$ d'après le lemme **1.8**, puisque H est un cône polyédral ouvert pour la topologie faible. Il en résulte que

$$\begin{aligned}(H \cap (E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u)^o &= (\theta_1 \times \theta_2)^{-1}\left(H^* + ((E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u)^*\right) \\ &= H^o + ((E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u)^o\end{aligned}$$

puis, par application du lemme **2.2.a**, que

$$\left(H \cap \left(E_1 \times K_2\right) \cap \operatorname{Ker} u\right)^o = H^o + \left(\{0\} \times K_2^o\right) + \operatorname{Im} u'.$$

b) On suppose que $H \cap \left(E_1 \times K_2\right) \cap \operatorname{Ker} u = \varnothing$. Deux cas se présentent, selon que l'on a $(E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u = \varnothing$ ou $(E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u \neq \varnothing$.

b.1) Si $(E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u = \varnothing$, le lemme **2.2.b** assure l'existence de $x_2'' \in K_2^o$ et de $y' \in \operatorname{Ker} u_1' \subset F'$, non nuls, tels que $x_2'' + u_2' y' = 0$. On prend alors $x_1' = 0$ et $x_2' = 0$.

b.2) Si $(E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u \neq \varnothing$, le cône H étant ouvert pour la topologie faible, le lemme **1.4.b** sur $E_1 \times E_2$ muni de la topologie faible entraîne qu'il existe $(x_1', x_2') \in H^o$ et $(\bar{x}_1'', \bar{x}_2'') \in \left((E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u\right)^o$, non nuls, tels que $x_1' + \bar{x}_1'' = 0$ et $x_2' + \bar{x}_2'' = 0$. On peut alors appliquer le lemme **2.1.a** à $(E_1 \times K_2) \cap \operatorname{Ker} u$: il existe $x_2'' \in K_2^o$ et $y' \in F'$ tels que $\bar{x}_1'' = 0 + u_1'(y')$ et $\bar{x}_2'' = x_2'' + u_2'(y')$. ▼

3. Démonstration du théorème 1.9

▲ Si $Df(a) = 0$, la condition d'optimalité du théorème est vérifiée en prenant

$$\lambda = 1, x_1' = 0, x_2' = \bar{x}_2' = 0 \text{ et } y' = 0.$$

Nous supposerons désormais que $Df(a)$ est non nul.

Si $Dh(a)$ n'est pas surjectif, nous allons montrer qu'alors $D'h(a)$ n'est pas injectif et que la condition d'optimalité du théorème est donc vérifiée en prenant

$$\lambda = 0, x_1' = 0, x_2' = \bar{x}_2' = 0 \text{ et } y' \in \operatorname{Ker} D'h(a) - \{0\}.$$

Les hypothèses faites sur la différentielle partielle $D_1h(a)$ assurent en effet que l'image de cette application linéaire est fermée et de codimension finie, donc que l'image de $Dh(a)$, qui en est un sur-espace, est elle-même fermée et de codimension finie : la dualité étant séparante, le noyau de $D'h(a)$ est alors isomorphe au dual de l'espace de dimension finie $F/\operatorname{Im} Dh(a)$. Nous supposerons désormais que $Dh(a)$ est surjectif.

La différentielle $Df(a)$ étant non nulle, on sait que

$$D_a^< f = \left\{x \in E \mid Df(a)x < 0\right\}$$

soit, en tenant compte de la dualité

$$D_a^< f = \left\{x \in E \mid \Theta\left(\nabla f(a), x\right) < 0\right\}$$

où l'on a noté Θ la dualité du couple produit $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$. Le cône de décroissance est donc un demi-espace ouvert pour la $\tau(E,E')$ topologie.

Le cône de directions admissibles de $Q_2 = E_1 \times R_2$ est égal à $E_1 \times A_{a_2} R_2$. Il est convexe et non vide mais n'est pas en général ouvert pour la $\tau(E,E')$ topologie : on en prendra l'intersection avec le cône tangent à $h^{-1}(0)$ pour appliquer le lemme de Dubovitskii-Milyutin. L'application h étant strictement différentiable et $Dh(a)$ étant surjective, on sait que $T_a\left(h^{-1}(0)\right) = \operatorname{Ker} Dh(a)$. Deux cas se présentant :

- ou bien $\left(E_1 \times A_{a_2} R_2\right) \cap \operatorname{Ker} Dh(a) = \varnothing$ et, d'après le lemme **2.2.b**, il existe $\overline{x}_2' \in \left(A_{a_2} R_2\right)^o$ et $y' \in \operatorname{Ker} D_1' h(a)$, non nuls, tels que $\overline{x}_2' + D_2' h(a) y' = 0$. La condition d'optimalité du théorème est alors vérifiée en prenant $\lambda = 0, x_1' = 0$ et $x_2' = 0$.
- ou bien $\left(E_1 \times A_{a_2} R_2\right) \cap \operatorname{Ker} Dh(a) \neq \varnothing$ et on peut appliquer le lemme de Dubovitskii-Milyutin dans l'espace E muni de la $\tau(E,E')$ topologie aux cônes $D_a^< f$, $A_a Q_1$ et $A_a Q_2 \cap T_a\left(h^{-1}(0)\right) = \left(E_1 \times A_{a_2} R_2\right) \cap \operatorname{Ker} Dh(a)$: il existe donc

$$\lambda \geq 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda \nabla f(a) \in \left(D_a^< f\right)^o$$
$$\left(x_1', x_2'\right) \in \left(A_a Q_1\right)^o$$
$$z' \in \left(A_a Q_2 \cap T_a\left(h^{-1}(0)\right)\right)^o = \left(\left(E_1 \times A_{a_2} R_2\right) \cap \operatorname{Ker} Dh(a)\right)^o$$

non tous nuls, tels que $\lambda \nabla f(a) + \left(x_1', x_2'\right) + z' = 0$. La condition d'optimalité du théorème résulte de cette relation et de l'expression du cône polaire de $\left(E_1 \times A_{a_2} R_2\right) \cap \operatorname{Ker} Dh(a)$ obtenue par application du lemme **2.2.a**. ▼

II. Exemples d'application : régularité des multiplicateurs pour certains problèmes de contrôle optimal

1. Formulation du problème.

On note

- E_1 l'espace de Sobolev $W^{1,\infty}(I, p)$ des fonctions absolument continues x de $I = [0,1]$ dans $\mathbf{R}^p$ dont la dérivée x' est mesurable bornée.
- E_2 l'espace $L^\infty(I, q)$ des classes de fonctions mesurables bornées u de I dans $\mathbf{R}^q$.
- U l'ouvert de $E_1 \times E_2$ formé des fonctions (x, u) prenant leurs valeurs dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$.

et on considère le problème suivant : minimiser la fonctionnelle f définie sur U par

$$f(x, u) = f_0(x(0), x(1)) + \int_0^1 f_1(t, x(t), u(t))\, dt$$

avec les conditions :

a) <u>Variables de phase admissibles</u> : x prend ses valeurs dans une partie fermée C_1 de $\mathbf{R}^p$.

b) <u>Commandes admissibles</u> : u prend ses valeurs dans une partie fermée C_2 de $\mathbf{R}^q$.

c) <u>Équation d'évolution</u> : x est solution de $x'(t) + h_1(t, x(t), u(t)) = 0$.

d) <u>Conditions aux bornes</u> : $h_0(x(0), x(1)) = 0$, avec h_0 à valeurs dans $\mathbf{R}^r$.

e) <u>Contraintes unilatérales</u> : $g(x,u) = \displaystyle\int_0^1 g_1(t, x(t), u(t))\, dt \leq 0$, avec g_1 à valeurs dans $\mathbf{R}^s$.

Ce problème se met sous la forme étudiée au corollaire **I.1.10** en posant :

- $P = P_1 \times E_2$, avec P_1 l'ensemble des x prenant leurs valeurs dans C_1.
- Q l'ensemble des (x,u) vérifiant $g(x,u) \leq 0$
- R_2 l'ensemble des u prenant leurs valeurs dans C_2.
- F l'espace produit $\mathbf{R}^r \times L^\infty(I, p)$ et h l'application de U dans F définie par

$$h(x, u) = (h_0(x(0), x(1)), x' + h_1(., x, u)).$$

Si les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, **(H4)**, **(H5)** sont vérifiées et si g est différentiable, il en résulte une condition nécessaire d'optimalité pour le problème de contrôle optimal.

Le corollaire **I.1.10**, comme le théorème **I.1.9**, suppose connus de manière explicite les cônes de directions admissibles de P et R_2. Une difficulté se présente ici : pour un ensemble $L^\infty(I,C)$, il est difficile d'expliciter les cônes de directions admissibles si C est une partie quelconque. Nous présentons au chapitre **III** la classe des *partie admissiblement régulière* pour lesquelles $A_h L^\infty(I,C)$ est toujours convexe, non vide et égal à l'ensemble des classes des fonctions mesurables bornées H telles que la fonction mesurable bornée (h,H) prenne ses valeurs dans $A_* C = \{(x,X) \mid x \in C,\ X \in A_x C\}$. Se limiter à cette classe de parties assure que l'hypothèse (**H1**) du théorème **I.1.9** est vérifiée et permet un calcul explicite des cônes duaux, sans trop diminuer la généralité du problème, puisque les convexes d'intérieur non vide, les domaines à frontière différentiable et, en dimension finie, les parties tangentiellement régulières dont les cônes tangents sont d'intérieur non vide sont des parties admissiblement régulières.

Une condition nécessaire d'optimalité est alors de la forme suivante, où ${}^\dagger M$ désigne la transposée d'une application linéaire M entre deux espaces euclidiens, $\nabla_i g$ désigne le gradient par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable d'une fonction numérique g définie sur un produit d'espaces euclidiens, $\langle\ |\ \rangle$ désigne le produit scalaire d'un espace euclidien et $z^+(s)$ (resp. $z^-(s)$) désigne la limite à droite (resp. à gauche) d'une fonction à variation bornée z au point s :

Théorème 1.1. *Si C_1 et C_2 sont des parties fermées admissiblement régulières, si f_0 et h_0 sont de classe C^1 et si f_1, g_1 et h_1 sont partiellement continûment différentiables en les deux dernières variables, une condition nécessaire d'optimalité est qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^+$, $\mu \in \mathbf{R}^r$,* $\gamma \in \mathbf{R}^s$ avec $\gamma \geq 0$, *et une fonction z à variation bornée, non tous nuls, tels que*

(**0**) $\displaystyle\int_0^1 \langle \gamma | g_1(t,x(t),u(t)) \rangle\, dt = 0.$

(**1**) *la fonction définie par*

$$y(t) = -z(t) + \int_0^t {}^\dagger D_2 h_1(s,x(s),u(s)) \cdot z(s)\, ds + \lambda \int_0^t \nabla_2 f_1(s,x(s),u(s))\, ds$$

$$+ \int_0^t {}^\dagger D_2 g_1(s,x(s),u(s)) \cdot \gamma\, ds$$

est telle que, pour tout $t \in I$ et tout $X \in A_{x(t)} C_1$, la fonction $\langle y | X \rangle$ soit essentiellement croissante au voisinage de t.

(2.1) $z^+(0) - \lambda\nabla_1 f_0(x(0),x(1)) - {}^\dagger D_1 h_0(x(0),x(1))\cdot\mu$ *appartient à* $\left(A_{x(0)}C_1\right)^o$.

(2.2) $-z^-(1) - \lambda\nabla_2 f_0(x(0),x(1)) - {}^\dagger D_2 h_0(x(0),x(1))\cdot\mu - \int_0^1 {}^\dagger D_2 g_1(s,x(s),u(s))\cdot\gamma\, ds$

appartient à $\left(A_{x(1)}C_1\right)^o$.

(3) $-\lambda\nabla_3 f_1(s,x(s),u(s)) - {}^\dagger D_3 h_1(s,x(s),u(s))\cdot z(s) - \int_0^1 {}^\dagger D_3 g_1(s,x(s),u(s))\cdot\gamma\, ds$

appartient à $\left(A_{u(s)}C_2\right)^o$ *pour presque tout* $s \in I$.

Remarque 1.2. Une fonction à variation bornée étant presque partout dérivable, la condition **(1)** du théorème peut être reformulée sous la forme équivalente suivante :

(1') **(a)** *pour presque tout* $s \in I$ *on a*

$$z'(s) - {}^\dagger D_2 h_1(s,x(s),u(s))\cdot z(s) - \lambda\nabla_2 f_1(s,x(s),u(s)) - {}^\dagger D_2 g_1(s,x(s),u(s))\cdot\gamma \in \left(A_{x(s)}C_1\right)^o$$

(b) *pour tout* $s \in I$ *on a*

$$z^+(s) - z^-(s) \in \left(A_{x(s)}C_1\right)^o.$$

Nous décrivons au paragraphe **2** des dualités pour $W^{1,\infty}(I,p)$ et pour $L^\infty(I,q)$. Les paragraphe **3** à **5** sont consacrés à la vérification des hypothèses **(H2)**, **(H4)** et **(H5)** du théorème **I.1.9.** La démonstration du théorème **1.1** résulte alors de la détermination explicite des cônes duaux des cônes de directions admissibles au paragraphe **6**.

2. Les couples d'espaces de Banach

Proposition 2.1. *L'espace* $L^\infty(I,q)$ *est mis en dualité séparante avec lui-même par*

$$\Theta_0(w,u) = \int_0^1 \langle w(t) \mid u(t)\rangle dt$$

où $\langle\ \mid\ \rangle$ *désigne le produit scalaire de* $\mathbf{R}^q$.

▲ La vérification est immédiate. ▼

Nous noterons $\mathbf{L}^{\infty}(I,q)$ le couple d'espaces de Banach ainsi défini.

Proposition 2.2. *L'espace $W^{1,\infty}(I,p)$ est mis en dualité séparante avec l'espace quotient*

$$\left(\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \times L^{\infty}(I,p)\right) \Big/ \left\{ (\lambda,-\lambda,\lambda) \,\middle|\, \lambda \in \mathbf{R}^p \right\}$$

par

$$\Theta_1(\text{«}\alpha,\beta,y\text{»},\, x) = \langle \alpha | x(0) \rangle + \langle \beta | x(1) \rangle + \int_0^1 \langle y(t) \,|\, x'(t) \rangle \, dt$$

où « α,β,y » désigne la classe de (α,β,y) dans l'espace quotient.

▲ La seule partie délicate est de montrer que si $\Theta_1(\text{«}\alpha,\beta,y\text{»},\, x) = 0$ pour tout x de $W^{1,\infty}(I,p)$, on a $(\alpha,\beta,y) = (\lambda,-\lambda,\lambda)$. En considérant les fonctions x nulles aux bornes et en calquant la démonstration classique du lemme de Du Bois-Reymond, il vient que y est constante. En considérant alors les fonctions affines, il vient que $\alpha = -\beta = y$. ▼

Nous noterons $\mathbf{W}^{1,\infty}(I,p)$ le couple d'espaces de Banach ainsi défini.

Proposition 2.3. *La topologie de Mackey sur $W^{1,\infty}(I,p)$ est plus fine que la topologie induite par l'injection j de $W^{1,\infty}(I,p)$ dans $L^{\infty}(I,p)$ muni de la topologie de la norme.*

▲ Étant donné un point a de I et un vecteur v de $\mathbf{R}^p$, la mesure de Dirac $\delta_{a,v}$ définie sur $W^{1,\infty}(I,p)$ par $\delta_{a,v}(x) = \langle v | x(a) \rangle$ est représentée dans la dualité par l'action de « $v, 0, \chi_a v$ », où χ_a désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,a]$: la vérification est immédiate. Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée de $\mathbf{R}^p$. L'application

$$I \times \overline{B} \to \left(\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \times L^{\infty}(I,p)\right) \Big/ \left\{ (\lambda,-\lambda,\lambda) \,\middle|\, \lambda \in \mathbf{R}^p \right\} \qquad (a,v) \mapsto \text{«}v,0,\chi_a v\text{»}$$

est continue si on munit l'espace d'arrivée de la topologie faible, donc son image Δ est un compact pour la topologie faible et

$$\begin{aligned} &\left\{ x \in W^{1,\infty}(I,p) \,\middle|\, \forall \text{«}v,0,\chi_a v\text{»} \in \Delta, \quad \Theta_1(\text{«}v,0,\chi_a v\text{»}, x) \le 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in W^{1,\infty}(I,p) \,\middle|\, \forall v \in \overline{B}, \quad \forall a \in I, \quad \langle v | x(a) \rangle \le 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in W^{1,\infty}(I,p) \,\middle|\, \|x\|_{\infty} \le 1 \right\} \end{aligned}$$

est un voisinage de 0 pour la topologie de Mackey. ▼

3. Vérification de l'hypothèse (H2)

Proposition 3.1. *Soit C une partie fermée de $\mathbf{R}^p$, admissiblement régulière, et I un intervalle borné. L'ensemble $W^{1,\infty}(I,C)$ des fonctions à dérivée mesurable bornée prenant leurs valeurs dans C, est admissiblement régulière dans l'espace de Sobolev $W^{1,\infty}(I,p)$ et H est une direction admissible au point h si et seulement si (h,H) prend ses valeurs dans A_*C.*

▲ $W^{1,\infty}(I,C)$ est l'image réciproque de $L^\infty(I,C)$ par l'application linéaire continue

$$j : W^{1,\infty}(I,p) \to L^\infty(I,p) \qquad x \mapsto x.$$

Alors $W^{1,\infty}(I,C)$ est admissiblement régulière, et le cône de directions admissibles en un point x est l'image réciproque par j du cône $A_{j(x)}L^\infty(I,C)$, si j vérifie les hypothèses du théorème **III.1.8** en tout point x de $W^{1,\infty}(I,C)$. La condition de différentiabilité est évidemment vérifiée; il reste à montrer que l'image de j rencontre $A_{j(x)}L^\infty(I,C)$. En prenant dans la démonstration de la proposition **III.2.13** une partition de l'unité différentiable, on obtient une section globale différentiable σ de la fibration $A_*C \to C$. Alors $(x,X) = \sigma \circ x$ est à dérivée mesurable bornée et X appartient à l'intersection de l'image de j et de $A_{j(x)}L^\infty(I,C)$. ▼

Corollaire 3.2. *Soit C une partie fermée admissiblement régulière de $\mathbf{R}^p$. Le cône de directions admissibles en un point x de $W^{1,\infty}(I,C)$ est ouvert quand $W^{1,\infty}(I,p)$ est muni de la topologie de Mackey associée au couple $\mathbf{W}^{1,\infty}(I,p)$*

▲ Le cône $A_xW^{1,\infty}(I,C)$ étant l'image réciproque par l'injection j de $W^{1,\infty}(I,p)$ dans $L^\infty(I,p)$ du cône $A_{j(x)}L^\infty(I,C)$, il est ouvert pour la topologie de la convergence uniforme, donc pour la topologie de Mackey d'après la proposition **2.3**. ▼

Corollaire 3.3. *C_1 étant une partie fermée admissiblement régulière de $\mathbf{R}^p$, les cônes de directions admissibles de la partie $P = W^{1,\infty}(I,C_1) \times L^\infty(I,q)$ sont convexes, non vides et ouverts pour la topologie de Mackey associée au couple $\mathbf{W}^{1,\infty}(I,p) \times \mathbf{L}^\infty(I,q)$. Une telle partie vérifie donc l'hypothèse* (**H2**) *du théorème* **I.1.9.**

▲ On a

$$A_{(x,u)}P = A_xW^{1,\infty}(I,C_1) \times L^\infty(I,q)$$

qui est convexe et non vide puisque $W^{1,\infty}(I,C_1)$ est admissiblement régulier d'après la proposition **3.1**. Par ailleurs, $A_x W^{1,\infty}(I,C_1)$ est ouvert pour la topologie de Mackey d'après le corollaire **3.2**. ▼

4. Différentiabilité de f, g et h relativement aux couples d'espaces de Banach

La différentiabilité des applications f, g et h décrites au paragraphe **1**, ainsi que l'expression de leur différentielle, sont des résultats classiques. On a

$$Df(x,u)\cdot(X,U) = D_1 f_0(x(0),x(1))\cdot X(0) + D_2 f_0(x(0),x(1))\cdot X(1) + \int_0^1 \left(D_2 f_1(s,x(s),u(s))\cdot X(s) + D_3 f_1(s,x(s),u(s))\cdot U(s)\right) ds$$

$$Dg(x,u)\cdot(X,U) = \int_0^1 \left(D_2 g_1(s,x(s),u(s))\cdot X(s) + D_3 g_1(s,x(s),u(s))\cdot U(s)\right) ds$$

$$Dh(x,u)\cdot(X,U) = \Big(D_1 h_0(x(0),x(1))\cdot X(0) + D_2 h_0(x(0),x(1))\cdot X(1) \;,\; X' + D_2 h_1(\bullet,x,u)\cdot X + D_3 h_1(\bullet,x,u)\cdot U \Big)$$

et une vérification élémentaire montre que ces applications linéaires sont compatibles avec les dualités qui viennent d'être décrites :

- le gradient $\nabla f(x,u)$ de f relativement au couple produit $\mathbf{W}^{1,\infty}(I,p)\times\mathbf{L}^{\infty}(I,q)$ est donné par

$$\nabla f(x,u) = \Big(« \nabla_1 f_0(x(0),x(1)), \nabla_2 f_0(x(0),x(1)) + \int_0^1 \nabla_2 f_1(s,x(s),u(s))\,ds \;,\; \int_0^{\bullet} -\nabla_2 f_1(s,x(s),u(s))\,ds » \;, \nabla_3 f_1(\bullet,x,u) \Big)$$

où $\nabla_\alpha f_\beta$ désigne le gradient de f_β par rapport à la $\alpha^{\text{ème}}$ variable;

- l'adjoint $D'g(x,u)$ de $Dg(x,u)$ est l'application qui à $\gamma \in \mathbf{R}^s$ associe

$$\Big(« \;0, \int_0^1 {}^{\dagger}D_2 g_1(s,x(s),u(s))\cdot\gamma\,ds \;,\; \int_0^{\bullet} -{}^{\dagger}D_2 g_1(s,x(s),u(s))\cdot\gamma\,ds » \;,\; {}^{\dagger}D_2 g_1(\bullet,x,u)\cdot\gamma \Big)$$

- l'adjoint $D'h(x,u)$ de $Dh(x,u)$ est l'application qui à $(\lambda,y)\in\mathbf{R}^s\times L^{\infty}(I,p)$ associe

$$\Big(« \, {}^{\dagger}D_1 h_0(x(0),x(1)) \cdot \lambda \ , \quad {}^{\dagger}D_2 h_0(x(0),x(1)) \cdot \lambda + \int_0^1 {}^{\dagger}D_2 h_1(s,x(s),u(s)) \cdot y(s)\, ds \ ,$$

$$y - \int_0^{\bullet} {}^{\dagger}D_2 h_1(s,x(s),u(s)) \cdot y(s)\, ds \, » \ , \quad {}^{\dagger}D_3 h_1(\bullet,x,u) \cdot y \Big)$$

où ${}^{\dagger}D_\alpha h_\beta$ désigne la transposée de $D_\alpha h_\beta$.

5. Vérification de l'hypothèse (H5)

Le morphisme $Dh(x,u)$ a pour composantes les morphismes

$$u_0 : W^{1,\infty}(I,p) \times L^\infty(I,q) \to \mathbf{R}^r \qquad (X,U) \mapsto D_1 h_0(x(0),x(1)) \cdot X(0) + D_2 h_0(x(0),x(1)) \cdot X(1)$$

et

$$u_1 : W^{1,\infty}(I,p) \times L^\infty(I,q) \to L^\infty(I,p) \qquad (X,U) \mapsto X' + D_2 h_1(\bullet,x,u) \cdot X + D_3 h_1(\bullet,x,u) \cdot U$$

Lemme 5.1. *Le morphisme u_0 admet une quasi-section.*

▲ C'est un résultat général : tout morphisme u d'un couple d'espaces de Banach $\mathbf{E} = (E,E',\Phi)$ dans un espace euclidien $\mathbf{R}^n$ admet une quasi-section.

On choisit une base orthonormée $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m\}$ de $\operatorname{Im} u$ que l'on complète en une base orthonormée $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m,\ldots,\varepsilon_n\}$ de $\mathbf{R}^n$. On choisit alors des éléments $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ de E tels que $u(e_i) = \varepsilon_i$ et on pose $e_i' = u'(\varepsilon_i)$ pour $1 \le i \le m$. De la propriété d'adjonction de u et u' il résulte que

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \sum_{1 \le i \le m} \Phi(e_i',x)\varepsilon_i \tag{1}$$

et on a en particulier

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,m\}^2, \quad \Phi(e_i',e_j) = \delta_{ij}. \tag{2}$$

L'application linéaire

$$s : \mathbf{R}^n \to E \qquad \lambda \mapsto \sum_{1 \le i \le m} \langle \varepsilon_i | \lambda \rangle e_i$$

définit un morphisme de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{E}$ dont l'adjoint est

$$s' : E' \to \mathbf{R}^n \qquad x' \mapsto \sum_{1 \le i \le m} \Phi(x',e_i)\,\varepsilon_i$$

et ce morphisme est une quasi-section de u : la vérification de $u \circ s \circ u = u$ est immédiate au moyen de (1) et (2). ▼

Lemme 5.2. *Le morphisme u_1 admet une section.*

▲ Soit $R(t,s)$ la résolvante de l'équation différentielle linéaire

$$X' + D_2 h_1(t,x(t),u(t)) \cdot X = 0\,.$$

L'application linéaire

$$L^\infty(I,p) \to W^{1,\infty}(I,p) \times L^\infty(I,q) \qquad Y \mapsto \left(\int_0^{\bullet} R(\bullet,s)\cdot Y(s)\,ds \quad , \quad 0 \right)$$

définit un morphisme de $\mathbf{L}^\infty(I,p)$ dans $\mathbf{W}^{1,\infty}(I,p) \times \mathbf{L}^\infty(I,q)$ dont l'adjoint est

$$(\text{« } \alpha, \beta, y \text{ »}, z) \mapsto {}^{\dagger}R(t,\bullet)\cdot\beta \; + \; y \; + \int_{\bullet}^{1} {}^{\dagger}R_1'(s,\bullet)\cdot y(s)\,ds$$

et ce morphisme est une section de u_1. ▼

L'hypothèse **(H5)** pour le morphisme $Dh(x,u)$ résulte alors du lemme suivant :

Lemme 5.3. *Soit $u = (u_0, u_1)$ un morphisme d'un couple d'espaces de Banach $\mathbf{E}$ dans un produit $\mathbf{F}_0 \times \mathbf{F}_1$ de couples d'espaces de Banach. Si $\mathbf{F}_0$ est de dimension finie et si le morphisme u_1 admet une section s_1, alors le morphisme u admet une quasi-section et son conoyau est de dimension finie.*

▲ Le morphisme $v_0 = u_0 \circ (id_E - s_1 \circ u_1)$ de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}_0$ admet, d'après le lemme **5.1**, une quasi-section s_0 qui est un morphisme de $\mathbf{F}_0$ dans $\mathbf{E}$ tel que

$$u_0 \circ (id_E - s_1 \circ u_1) \circ s_0 \circ u_0 \circ (id_E - s_1 \circ u_1) = u_0 \circ (id_E - s_1 \circ u_1) \tag{3}$$

L'application linéaire

$$s : F_0 \times F_1 \to E \qquad (y_0, y_1) \mapsto (id_E - s_1 \circ u_1) \circ s_0 \cdot y_0 + (id_E - s_0 \circ u_0 + s_1 \circ u_1 \circ s_0 \circ u_0) \circ s_1 \cdot y_1$$

définit un morphisme de $\mathbf{F}_0 \times \mathbf{F}_1$ dans $\mathbf{E}$ pour lequel on vérifie que $u \circ s \circ u = u$ grâce à la relation (3).

Le conoyau de u est isomorphe au noyau du projecteur $u \circ s$. Or on a

$$u \circ s \cdot (y_0, y_1) = \left(u_0 \circ (id_E - s_1 \circ u_1) \circ s_0 \cdot y_0 + u_0 \circ (id_E - s_0 \circ u_0 + s_1 \circ u_1 \circ s_0 \circ u_0) \circ s_1 \cdot y_1 \;\; , \;\; y_1 \right)$$

donc Ker $(u \circ s)$ est isomorphe à Ker $(u_0 \circ (id_E - s_1 \circ u_1) \circ s_0)$ qui est de dimension finie. ▼

6. Cônes duaux

Proposition 6.1. *Soit C une partie admissiblement régulière de $\mathbf{R}^p$. Le cône dual de $A_u L^\infty(I,C)$, relativement à la dualité du couple $\mathbf{L}^\infty(I,p)$, est l'ensemble des classes de fonctions mesurables bornées w telles que $w(t) \in \left(A_{u(t)}C\right)^o$ pour presque tout t.*

▲ Si $w(t) \in \left(A_{u(t)}C\right)^o$ pour presque tout t, il est clair que w appartient à $\left(A_u L^\infty(I,C)\right)^o$ puisque l'intégrale d'une fonction négative presque partout est négative.

Réciproquement, soit w un élément de $\left(A_u L^\infty(I,C)\right)^o$: nous allons montrer qu'en tout point t régulier pour u et w, on a $w(t) \in \left(A_{u(t)}C\right)^o$. S'il existait $M \in A_{u(t)}C$ tel que $\langle w(t) | M \rangle > 0$, on pourrait construire, grâce à une section continue de $A_* C$ (cf. proposition **III.2.13**) un élément $\bar{u}$ de $A_u L^\infty(I,C)$ tel que t soit un point régulier de $\bar{u}$ et que $\bar{u}(t) = M$; étant donné une suite $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en escalier définies sur I, telles que $\theta_n(t) = n$ sur un sous-intervalle $I_n \subset I$ de longueur $\dfrac{1}{n}$, contenant t, et $\theta_n(t) = \dfrac{1}{n}$ sur $I - I_n$, $\bar{u}_n = \theta_n \bar{u}$ appartiendrait à $A_u L^\infty(I,C)$ pour tout n et $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \langle w(s) | \bar{u}_n(s) \rangle \, ds = \langle w(t) | M \rangle$ serait strictement positif, ce qui contredirait l'hypothèse $w \in \left(A_u L^\infty(I,C)\right)^o$. ▼

Remarque 6.2. On ne peut pas se servir du lemme de Minkowski-Farkas pour déterminer le cône dual de $A_x W^{1,\infty}(I,C) = j^{-1}\left(A_{j(x)} L^\infty(I,C)\right)$: pour toute topologie compatible avec la dualité de $\mathbf{L}^\infty(I,p)$, le cône $A_u L^\infty(I,C)$ est en général d'intérieur vide. De fait, le cône dual de $A_x W^{1,\infty}(I,C)$ n'est pas, en général, l'image par l'adjoint de j du cône dual de $A_{j(x)} L^\infty(I,C)$ et il faut en donner une description autonome.

Proposition 6.3. *Soit C une partie admissiblement régulière de $\mathbf{R}^p$. Le cône dual de $A_x W^{1,\infty}(I,C)$, relativement à la dualité du couple $\mathbf{W}^{1,\infty}(I,p)$, est l'ensemble des «$\alpha, \beta, y$» vérifiant :*

1) *y est à variation bornée et, pour tout $t \in I$ et tout $X \in A_{x(t)}C$, la fonction $s \mapsto \langle y(s) | X \rangle$ est essentiellement croissante au voisinage de t;*

2) $\alpha - y^+(0) \in \left(A_{x(0)}C\right)^o$;

3) $\beta + y^-(1) \in \left(A_{x(1)}C\right)^o$.

▲ **Nécessité des conditions.**

La forme linéaire associée à un élément «α, β, y» de $\left(A_x W^{1,\infty}(I,C)\right)^{\mathrm{o}}$ est négative sur tout élément de la fermeture de $A_x W^{1,\infty}(I,C)$, donc en particulier, sur toute fonction $\bar{x}$ appartenant à $W^{1,\infty}(I,p)$ et vérifiant $\bar{x}(s) \in \{0\} \cup A_{x(s)}C$ pour tout $s \in I$.

Soient $t \in I$ et $X \in A_{x(t)}C = R_{x(t)}C$. D'après le lemme **III.1.2**, X est encore une direction admissible en tout point de C assez voisin de $x(t)$ et, la fonction x étant continue, Il existe un intervalle J, voisinage de t dans I, tel que $X \in A_{x(s)}C$ pour tout s de J. Pour toute fonction $\theta \in W^{1,\infty}(I,1)$ à support dans J, la forme linéaire associée à «α, β, y» est donc négative sur $\bar{x} = \theta X$, c'est-à-dire

$$\theta(0)\langle\alpha|X\rangle + \theta(1)\langle\beta|X\rangle + \int_J \theta'(s)\langle y(s)|X\rangle\, ds \leq 0 \qquad (4)$$

Soient $t_1 < t_2$ deux points de J, intérieurs à I et réguliers pour y. Pour tout $\varepsilon > 0$ vérifiant $2\varepsilon < t_2 - t_1$, on applique la relation (4) aux fonctions affines par morceaux θ_ε, nulles hors de $[t_1, t_2]$, valant 1 sur $[t_1 + \varepsilon, t_2 - \varepsilon]$ et affines sur $[t_1, t_1 + \varepsilon]$ et sur $[t_2 - \varepsilon, t_2]$. Il vient

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} \langle y(s)|X\rangle\, ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_2-\varepsilon}^{t_2} \langle y(s)|X\rangle\, ds \leq 0.$$

Les points t_1 et t_2 étant réguliers pour y, donc pour $\langle y|X\rangle$, on peut utiliser le lemme **III.2.7** : en faisant tendre ε vers 0, il vient la relation

$$\langle y(t_1)|X\rangle - \langle y(t_2)|X\rangle \leq 0$$

qui exprime que $\langle y|X\rangle$ est essentiellement croissante sur J.

Soit maintenant $X \in \mathbf{R}^p$. Le cône $A_{x(t)}C$ étant ouvert, X est différence de deux éléments de $A_{x(t)}C$ et la fonction $\langle y|X\rangle$, différence de deux fonctions essentiellement croissantes au voisinage de t, est à variation bornée au voisinage de t; l'intervalle I étant compact, il en résulte que $\langle y|X\rangle$ est à variation bornée sur I. En particulier, les composantes de y sont à variation bornée et donc y est à variation bornée.

Pour $t = 0$ et tout ε assez petit pour que $[0, \varepsilon] \subset J$, on peut appliquer la relation (4) aux fonctions affines par morceaux θ_ε valant 1 en 0, affines sur $[0, \varepsilon]$ et nulles sur $[\varepsilon, 1]$. Il vient

$$\langle\alpha|X\rangle - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \langle y(s)|X\rangle\, ds \leq 0.$$

La fonction y étant à variation bornée, a une limite à droite $y^+(0)$ en 0. On a donc, en faisant tendre n vers l'infini

$$\langle \alpha | X \rangle - \langle y^+(0) | X \rangle \leq 0,$$

ce qui entraîne que $\alpha - y^+(0) \in \left(A_{x(0)}C\right)^o$. On démontre de même que

$$\langle \beta | X \rangle + \langle y^-(1) | X \rangle \leq 0$$

pour tout $X \in A_{x(1)}C$, donc que $\beta + y^-(1) \in \left(A_{x(1)}C\right)^o$.

Suffisance des conditions.

Soit «α, β, y» vérifiant les conditions **1**, **2** et **3** et soit $\bar{x} \in A_x W^{1,\infty}(I,C)$. Pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon < 1$, on pose

$$y_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{(1-\varepsilon)t}^{(1-\varepsilon)t+\varepsilon} y(s)\, ds$$

La fonction y_ε appartient à $W^{1,\infty}(I,p)$ et elle tend vers y dans $L^1(I,p)$ quand ε tend vers 0. On a donc $\Theta_1(«\alpha, \beta, y», \bar{x})$ égal à la limite, quand ε tend vers 0, de

$$\langle \alpha | \bar{x}(0) \rangle + \langle \beta | \bar{x}(1) \rangle + \int_0^1 \langle y_\varepsilon(s) | \bar{x}'(s) \rangle\, ds$$

quantité qu'une intégration par parties transforme en

$$\langle \alpha - y_\varepsilon(0) | \bar{x}(0) \rangle + \langle \beta + y_\varepsilon(1) | \bar{x}(1) \rangle - \int_0^1 \langle y_\varepsilon'(s) | \bar{x}(s) \rangle\, ds.$$

On a $\lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(0) = y^+(0)$ et la condition **2** entraîne que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \alpha - y_\varepsilon(0) | \bar{x}(0) \rangle = \langle \alpha - y^+(0) | \bar{x}(0) \rangle \leq 0$$

puisque $\bar{x}(0) \in A_{x(0)}C$.

On démontre de même, grâce à la condition **3**, que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \beta + y_\varepsilon(1) | \bar{x}(1) \rangle = \langle \beta + y^-(1) | \bar{x}(1) \rangle \leq 0.$$

En explicitant $y_\varepsilon'(s)$, l'expression intégrale s'écrit

$$-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int_0^1 \langle y((1-\varepsilon)s + \varepsilon) - y((1-\varepsilon)s) \mid \bar{x}(s) \rangle\, ds.$$

La condition **1** entraîne que l'application $t \mapsto \langle y(t) | \bar{x}(s) \rangle$ est localement essentiellement croissante en tout point t tel que $\bar{x}(s) \in A_{x(t)}C$, donc essentiellement croissante sur tout intervalle où cette propriété est vérifiée. La négativité de l'expression intégrale pour ε assez petit résulte alors de l'existence d'un réel $r > 0$ tel que pour tout $s \in I$ on ait $\bar{x}(s) \in A_{x(t)}C$ quel que soit $t \in]s-r, s+r[\cap I$: s'il n'existait pas un tel r, il existerait deux suites s_n et t_n de I, convergentes (I étant compact) et de même limite s, telles que non$\left(\bar{x}(s_n) \in A_{x(t_n)}C\right)$ pour tout n, ce qui serait en contradiction avec le lemme **III.1.2** au point $\bar{x}(s) \in A_{x(s)}C$. ▼

Remarque 6.4. La condition **1** de la proposition **6.3** peut être reformulée de la manière équivalente suivante :

1') *y est à variation bornée, pour presque tout t de I on a $-y'(t) \in \left(A_{x(t)}C\right)^o$ et pour tout t de I on a $y^-(t) - y^+(t) \in \left(A_{x(t)}C\right)^o$.*

C'est une conséquence immédiate de la caractérisation des fonctions croissantes parmi les fonctions à variation bornée.

7. Une variante du problème de contrôle optimal

Les notations sont celles du paragraphe **1**.

Une extension naturelle de la contrainte de phase "x prend ses valeurs dans une partie fermée, admissiblement régulière, de $\mathbf{R}^p$" est d'imposer que, pour presque tout t, on ait $x(t) \in C_1(t)$, où $\left\{C_1(t) \mid t \in I\right\}$ est une famille de parties fermées, admissiblement régulières, de $\mathbf{R}^p$, la manière dont ces parties dépendent de t restant à préciser.

Une mesure de la difficulté présentée dans le cas général par un tel problème est donnée par l'étude, proposée dans ce paragraphe, d'un exemple élémentaire : celui où, une fonction mesurable bornée $\theta \in L^\infty(I,p)$ étant fixée, on pose

$$C_1(t) = \left\{X \in R^p \mid \forall i \in \{1,2,\ldots,p\},\ X_i \geq \theta(t)\right\},$$

c'est-à-dire le translaté par $\theta(t)$ du premier quadrant de $\mathbf{R}^p$.

On est amené, dans la formalisation du problème de contrôle optimal, à remplacer $P_1 = W^{1,\infty}(I,C_1)$ par $P_1 = G_\theta$ avec

$$G_\theta = \left\{x \in W^{1,\infty}(I,p) \mid \forall_\mu\, t \in I,\ x(t) \geq \theta(t)\right\}$$

où "$\forall_\mu t$" signifie "pour presque tout t, relativement à la mesure de Lebesgue μ". La difficulté du problème est technique : elle réside dans la détermination explicite (cf. Annexes, théorème **III.4.6**) des cônes de directions admissible de G_θ, détermination pour laquelle la notion d'adhérence essentielle d'une partie (cf. Annexes, **III.3**) semble être un outil incontournable.

D'après le corollaire **III.4.7**, ces cônes sont convexes, non vides et ouverts pour la topologie induite par celle de $L^\infty(I,p)$, donc ouverts pour la topologie de Mackey sur $W^{1,\infty}(I,p)$ (proposition **2.3**) : $P = G_\theta \times E_2$ vérifie donc l'hypothèse (**H2**) du théorème **I.1.9**. Les conditions d'optimalité (théorème **7.2**) résultent donc du corollaire **I.1.10** et de la détermination explicite du cône dual de $A_x G_\theta$:

Proposition 7.1. *Soit x un élément de G_θ. Le cône dual de $A_x G_\theta$, relativement à la dualité du couple $\mathbf{W}^{1,\infty}(I,p)$ est l'ensemble des «α,β,y» tels que, quel que soit l'indice $i \in \{1,2,\ldots,p\}$, on ait :*

1) *y_i est essentiellement croissante sur I et essentiellement constante sur les composantes connexes de $I - J_i(x)$;*

2) *$\alpha_i - y_i^+(0) \le 0$, avec égalité si $0 \notin J_i(x)$;*

3) *$\beta_i + y_i^-(1) \le 0$, avec égalité si $1 \notin J_i(x)$.*

▲ Le cône $A_x G_\theta$ est le produit des cônes $A_{x_i} G_{\theta_i}$ de $W^{1,\infty}(I,1)$, donc son cône dual est la somme des cônes duaux des $A_{x_i} G_{\theta_i}$. Il suffit donc de faire la démonstration dans le cas $p = 1$.

Nécessité des conditions.

Si «α,β,y» appartient au cône dual de $A_x G_\theta$, c'est que la forme linéaire associée à «α,β,y» est négative pour tout $\overline{x} \in W^{1,\infty}(I,1)$ qui est strictement positif sur $J(x)$ (cf. théorème **III.4.6**). Par passage à la limite, cette forme linéaire est également négative sur tout $\overline{x}$ positif ou nul sur $J(x)$ (corollaire **III.4.8**).

Soient $t_1 < t_2$ deux points de I, réguliers pour y. Pour tout $\varepsilon > 0$ vérifiant $2\varepsilon < t_2 - t_1$, la fonction $\overline{x}_\varepsilon$, nulle en dehors de $[t_1, t_2]$, valant 1 sur $[t_1 + \varepsilon, t_2 - \varepsilon]$ et affine sur $[t_1, t_1 + \varepsilon]$ et sur $[t_2 - \varepsilon, t_2]$ est positive sur I, donc positive sur $J(x)$. On a donc :

$$\Theta_1(«\alpha,\beta,y», \bar{x}_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} y(s)\,ds \;-\; \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_2-\varepsilon}^{t_2} y(s)\,ds \;\leq\; 0.$$

En faisant tendre ε vers 0, t_1 et t_2 étant réguliers pour y, le lemme **III.2.7** entraîne qu'on a $y(t_1) - y(t_2) \leq 0$. L'application y est donc essentiellement croissante sur I. Si les points t_1 et t_2 appartiennent à une même composante connexe du complémentaire de $J(x)$, la fonction $-\bar{x}_\varepsilon$ est aussi positive sur $J(x)$ et on a donc aussi $-y(t_1) + y(t_2) \leq 0$, c'est-à-dire $y(t_1) = y(t_2)$. L'application y est donc essentiellement constante sur les composantes connexes du complémentaire de $J(x)$.

Pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon < 1$, la fonction $\bar{x}_\varepsilon$ valant 1 en 0, affine sur $[0, \varepsilon]$ et nulle sur $[\varepsilon, 1]$ est positive, donc positive sur $J(x)$. On a donc :

$$\Theta_1(«\alpha,\beta,y», \bar{x}_\varepsilon) = \alpha \;-\; \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} y(s)\,ds \;\leq\; 0.$$

La fonction y étant essentiellement croissante a une limite à droite $y^+(0)$ en 0. On a donc, en faisant tendre ε vers 0, l'inégalité $\alpha - y^+(0) \leq 0$. Si le point 0 n'appartient pas à $J(x)$, la fonction $-\bar{x}_\varepsilon$ est positive sur $J(x)$ dès que ε est assez petit et on a donc aussi $-\alpha + y^+(0) \leq 0$, c'est-à-dire $\alpha - y^+(0) = 0$. On montre de même que $\beta + y^-(1) \leq 0$, avec égalité si 1 n'appartient pas à $J(x)$.

Suffisance des conditions.

Soit $«\alpha,\beta,y»$ vérifiant les conditions **1**, **2** et **3** et soit $\bar{x} \in A_x G_\theta$. Comme à la proposition **6.3**, on considère les fonctions

$$y_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{(1-\varepsilon)t}^{(1-\varepsilon)t+\varepsilon} y(s)\,ds$$

qui appartiennent à $W^{1,\infty}(I,1)$ et tendent vers y dans $L^1(I,1)$ quand ε tend vers 0. Alors, $\Theta_1(«\alpha,\beta,y»,\bar{x})$ est la limite, quand ε tend vers 0, de

$$\alpha\, X(0) + \beta\, X(1) + \int_0^1 y_\varepsilon(s)\,\bar{x}'(s)\,ds$$

quantité qu'une intégration par parties transforme en

$$\left(\alpha - y_\varepsilon(0)\right)\bar{x}(0) + \left(\beta + y_\varepsilon(1)\right)\bar{x}(1) - \int_0^1 \left\langle y'_\varepsilon(s) \middle| \bar{x}(s)\right\rangle ds.$$

On a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(0) = y^+(0)$ et la condition **2** entraîne que

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\alpha - y_\varepsilon(0)\right)\bar{x}(0) \;=\; \left(\alpha - y^+(0)\right)\bar{x}(0) \le 0$$

puisqu'on a, ou bien $\alpha - y^+(0) < 0$, et alors $0 \in J(x)$ donc $\bar{x}(0) > 0$, ou bien $\alpha - y^+(0) = 0$.

On démontre de même, grâce à la condition **3**, que

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\beta + y_\varepsilon(1)\right)\bar{x}(1) \;=\; \left(\beta + y^-(1)\right)\bar{x}(1) \;\le\; 0.$$

En explicitant $y'_\varepsilon(s)$, l'expression intégrale s'écrit

$$-\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^1 \left\langle y((1-\varepsilon)s+\varepsilon) - y((1-\varepsilon)s) \;\middle|\; \bar{x}(s)\right\rangle\, ds.$$

La fonction $\bar{x}$ étant continue sur I et strictement positive sur le compact $J(x)$, il existe $\rho > 0$ tel que $\bar{x}$ soit positive sur $J^\rho(x) = I \cap \left(J(x) + [-\rho,\rho]\right)$. Pour $\varepsilon < \rho$, la fonction intégrée est essentiellement positive : la fonction y étant essentiellement croissante, c'est évident sur $J^\rho(x)$; si $s \in I - J^\rho(x)$, alors $\left[(1-\varepsilon)s, (1-\varepsilon)s + \varepsilon\right] \subset I - J(x)$ et la fonction intégrée est donc presque partout nulle sur $I - J^\rho(x)$. La limite de l'expression intégrale est donc négative. ▼

Les conditions d'optimalité pour le nouveau problème sont donc :

Théorème 7.2. *La condition* $x \in W^{1,\infty}(I, C_1)$ *étant remplacée par* $x \in G_\theta$, *si* C_2 *est une partie fermée admissiblement régulière, si* f_0 *et* h_0 *sont de classe* C^1 *et si* f_1, g_1 *et* h_1 *sont partiellement continûment différentiables en les deux dernières variables, une condition nécessaire d'optimalité est qu'il existe* $\lambda \in \mathbf{R}^+$, $\mu \in \mathbf{R}^r$, $\gamma \in \mathbf{R}^s$ *avec* $\gamma \ge 0$, *et une fonction* z *à variation bornée, non tous nuls, tels que*

(0) $\displaystyle\int_0^1 \left\langle \gamma \middle| g_1(t, x(t), u(t))\right\rangle dt = 0.$

(1) *la fonction définie par*

$$y(t) = -z(t) + \int_0^t {}^\dagger D_2 h_1(s, x(s), u(s)) \cdot z(s)\, ds + \lambda \int_0^t \nabla_2 f_1(s, x(s), u(s))\, ds$$

$$+ \int_0^t {}^\dagger D_2 g_1(s, x(s), u(s)) \cdot \gamma\, ds$$

est telle que, quel que soit l'indice $i \in \{1,2,\ldots,p\}$, *la fonction* y_i *est essentiellement croissante sur* I *et essentiellement constante sur les composantes connexes de* $I - J_i(x)$.

(2.1) *Quel que soit l'indice* $i \in \{1,2,\ldots,p\}$, *on a*

$$\left(z^+(0) - \lambda \nabla_1 f_0(x(0),x(1)) - {}^{\dagger}D_1 h_0(x(0),x(1)) \cdot \mu \right)_i \leq 0,$$

avec égalité si $0 \notin J_i(x)$.

(2.2) *Quel que soit l'indice* $i \in \{1,2,\ldots,p\}$, *on a*

$$\left(-z^-(1) - \lambda \nabla_2 f_0(x(0),x(1)) - {}^{\dagger}D_2 h_0(x(0),x(1)) \cdot \mu - \int_0^1 {}^{\dagger}D_2 g_1(s,x(s),u(s)) \cdot \gamma \, ds \right)_i \leq 0,$$

avec égalité si $1 \notin J_i(x)$.

(3) $$- \lambda \nabla_3 f_1(s,x(s),u(s)) - {}^{\dagger}D_3 h_1(s,x(s),u(s)) \cdot z(s) - \int_0^1 {}^{\dagger}D_3 g_1(s,x(s),u(s)) \cdot \gamma \, ds$$

appartient à $\left(A_{u(s)} C_2\right)^{\mathrm{o}}$ *pour presque tout* $s \in I$.

III. Détermination explicite de certains cônes de directions admissibles

A. Cônes de directions admissibles des parties $L^{\infty}(I,C)$

Soit C une partie fermée de $\mathbf{R}^{p}$, I un intervalle borné et $L^{\infty}(I,C)$ l'ensemble des classes de fonctions mesurables bornées définies sur I et prenant leurs valeurs dans C. On montre (proposition **2.10**) qu'une direction admissible H de $L^{\infty}(I,C)$ en un point h est telle que (h,H) appartienne à

$$A_{*}C = \left\{ (x,X) \,\middle|\, x \in C,\ X \in A_{x}C \right\}$$

mais la réciproque est fausse (contre-exemple **2.11**). On présente au paragraphe **1** la notion de partie admissiblement régulière (Benlarbi [**5**]) qui caractérise une classe de parties C pour lesquelles cette réciproque est vraie (théorème **2.12**), ce qui donne une description explicite de cônes de directions admissibles des parties $L^{\infty}(I,C)$ lorsque C est admissiblement régulière.

1. Notion de parties admissiblement régulières

Notation 1.1. Soit E un espace normé, C une partie de E et x un point de C. Nous noterons $R_{x}C$ l'ensemble des éléments X de E vérifiant les propriétés équivalentes suivantes :

1.1.1. Pour toute suite $x_n \in C, x_n \to x$, toute suite $\lambda_n > 0, \lambda_n \to 0$ et toute suite $X_n \in E, X_n \to X$, on a $x_n + \lambda_n X_n \in C$ pour n assez grand.

1.1.2. Il existe un voisinage V de x, un réel $\alpha > 0$ et un voisinage W de X tels que, quels que soient $x' \in V \cap C$, $\lambda \in]0,\alpha[$ et $X' \in W$ on ait $x' + \lambda X' \in C$.

Le cône R_xC a été introduit par Rockafellar [13] qui a démontré qu'il coïncide, en dimension finie, avec l'intérieur du cône tangent au sens de Clarke (alias "cône péritangent") P_xC de C au point x, résultat qui s'étend facilement au cas de la dimension infinie sous l'hypothèse que R_xC ne soit pas vide. Ce cône est ouvert, convexe et il est contenu dans le cône A_xC des directions admissibles de C au point x. Ce dernier point peut être renforcé :

Lemme 1.2. *Soit $X \in R_xC$. Il existe alors un voisinage V de x et un voisinage W de X tels que $W \subset A_{x'}C$ pour tout x' de V.*

▲ C'est une conséquence immédiate de la propriété **1.1.2.** ▼

Définition 1.3. (Benlarbi [14]) Soit E un espace normé, C une partie de E et x un point de C. Nous dirons que C *est admissiblement régulier au point* x si R_xC est non vide et égal à A_xC. Nous dirons que C *est admissiblement régulier* si C est admissiblement régulier en tout point de C.

Cette notion de régularité est l'adaptation, pour l'étude des cônes de directions admissibles, de la notion classique de régularité tangentielle. Le lien entre ces deux notions est éclairé par l'introduction du cône tangent au sens de Dubovitskii-Milyutin (cf. [1]), ensemble des X de E vérifiant :

> Pour toute suite $\lambda_n > 0, \lambda_n \to 0$, il existe une suite $X_n \in E, X_n \to X$ telle que $x + \lambda_n X_n \in C$ pour n assez grand.

Nous noterons S_xC ce cône. Il est fermé, il contient A_xC et il est inclus, en général strictement, dans le cône tangent au sens de Bouligand T_xC (alias "cône contingent").

Lemme 1.4. *Si R_xC est non vide, alors A_xC est dense dans S_xC et égal à l'intérieur de ce cône.*

▲ Soit $X \in S_xC$ et $Y \in R_xC$. Pour toute suite $\lambda_n > 0, \lambda_n \to 0$, il existe une suite $X_n \in E, X_n \to X$, telle que $x + \lambda_n X_n \in C$ quel que soit n. Pour toute suite $Z_n \in E, Z_n \to X + Y$, la suite $Y_n = Z_n - X_n$ tend vers Y; comme $x + \lambda_n X_n$ est une suite de C

tendant vers x et que Y appartient à $R_x C$, il vient que $x + \lambda_n Z_n = (x + \lambda_n X_n) + \lambda_n Y_n$ appartient à C pour n grand, ce qui démontre que $X + Y \in A_x C$.

En appliquant ce résultat à $(1-\alpha)X$ et αY, avec $\alpha \in]0,1[$, il vient finalement que $X_\alpha = (1-\alpha)X + \alpha Y$ appartient à $A_x C$, donc que $X = \lim\limits_{\alpha \to 0} X_\alpha$ est adhérent à $A_x C$.

Soit X_0 un point intérieur de $S_x C$. Étant donné $Y \in R_x C$, il existe $X \in S_x C$ et $\alpha \in]0,1[$ tels que $X_0 = (1-\alpha)X + \alpha Y$, donc $X_0 \in A_x C$, ce qui montre que $A_x C$ est l'intérieur de $S_x C$. ▼

Proposition 1.5. *Une partie C d'un espace normé E est admissiblement régulière en un point x si et seulement si $R_x C$ est non vide et $P_x C = S_x C$.*

▲ C'est une conséquence immédiate du fait que si $R_x C$ est non vide, alors $R_x C$ est l'intérieur de $P_x C$ et $A_x C$ est l'intérieur de $S_x C$. ▼

Corollaire 1.6. *La régularité tangentielle au point x entraîne la régularité admissible au point x si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

(a) *$R_x C$ est non vide*

(b) *E est de dimension finie et $T_x C$ est d'intérieur non vide.*

▲ Les inclusions $P_x C \subset S_x C \subset T_x C$ sont toujours vraies et on a $P_x C = T_x C$ par hypothèse, donc $P_x C = S_x C$. Si $R_x C$ est non vide, on applique directement la proposition **1.5**. En dimension finie, $R_x C$ est l'intérieur de $P_x C$ et, si (**b**) est vérifié, il est non vide puisqu'il est égal à l'intérieur de $T_x C$. ▼

Corollaire 1.7. *Une partie C vérifiant l'une des conditions suivantes est admissiblement régulière au point x :*

(a) *x est un point intérieur de C*

(b) *C est, au voisinage de x, représentable par l'épigraphe d'une fonction strictement différentiable*

(c) *C est, au voisinage de x, un convexe d'intérieur non vide.*

▲ Chacune de ces conditions entraîne que C est tangentiellement régulière au point x et que $R_x C$ est non vide. ▼

La condition (**b**) peut se généraliser ainsi :

Théorème 1.8. *Soit E et F deux espaces normés et θ une application définie sur un ouvert de E, à valeurs dans F, strictement différentiable au point x. Si C est une partie de F admissiblement régulière au point $y = \theta(x)$ et si l'image de $D\theta(x)$ rencontre A_yC, alors $B = \theta^{-1}(C)$ est admissiblement régulière au point x et $A_xB = (D\theta(x))^{-1}(A_yC)$.*

▲ Une vérification élémentaire donne les inclusions suivantes :

$$(D\theta(x))^{-1}(A_yC) \subset A_xB \tag{1}$$

$$S_xB \subset (D\theta(x))^{-1}(S_yC) \tag{2}$$

$$(D\theta(x))^{-1}(R_yC) \subset R_xB \tag{3}$$

C étant admissiblement régulier au point y, on a $S_yC = P_yC$ (proposition **1.5**), donc S_yC est convexe et son intérieur est égal à A_yC (lemme **1.4**). L'image de $D\theta(x)$ rencontre donc l'intérieur du convexe S_yC et, par un résultat classique sur l'image réciproque d'un convexe par une application linéaire continue, on a :

$$(D\theta(x))^{-1}(S_yC) = (D\theta(x))^{-1}\left(\overline{A_yC}\right) = \overline{(D\theta(x))^{-1}(A_yC)} \tag{4}$$

Les relations (1), (2) et (4) donnent alors

$$S_xB \subset (D\theta(x))^{-1}(S_yC) = \overline{(D\theta(x))^{-1}(A_yC)} \subset \overline{A_xB} \tag{5}$$

qui entraîne que $(D\theta(x))^{-1}(A_yC)$ est une partie ouverte, convexe et dense de S_xB, donc est égal à l'intérieur de S_xB. Alors, $(D\theta(x))^{-1}(A_yC)$ contient A_xB et donc (1) entraîne que

$$(D\theta(x))^{-1}(A_yC) = A_xB. \tag{6}$$

Les relations (6) et (3) donnent :

$$A_xB = (D\theta(x))^{-1}(A_yC) = (D\theta(x))^{-1}(R_yC) \subset R_xB.$$

On a donc $A_xB = R_xB$, puisque l'inclusion inverse est toujours vraie, et R_xB non vide puisque $(D\theta(x))^{-1}(A_yC)$ est non vide par hypothèse. Il en résulte que B est admissiblement régulier au point x. ▼

2. Cônes de directions admissibles des parties $L^{\infty}(I,C)$

Définitions 2.1. (Pontryagin *et al.* [**15**]) Soit h une fonction mesurable bornée définie sur un intervalle borné I, à valeurs dans un espace euclidien $\mathbf{R}^p$. Un point t de I est un *point régulier de* h et $h(t)$ est une *valeur régulière de* h si, pour tout voisinage U de $h(t)$, t est un point de densité de $h^{-1}(U)$, c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{\mu(J)\to 0 \\ t\in J}} \frac{\mu\left(h^{-1}(U)\cap J\right)}{\mu(J)} = 1$$

où J est un sous-intervalle de I et μ est la mesure de Lebesgue. Il est évidemment suffisant que cette condition soit vérifiée pour tous les voisinages d'un système fondamental de voisinages de $h(t)$.

Lemme 2.2. *Soit h et k des fonctions mesurables bornées définies sur un intervalle borné I, à valeurs respectivement dans $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$. Alors t est un point régulier de la fonction (h,k) de I dans $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ si et seulement si t est un point régulier de h et de k.*

▲ Soit $U\times V$ un voisinage produit de $(h(t),k(t))$. On a alors

$$(h,k)^{-1}(U\times V)\cap J = \left(h^{-1}(U)\cap J\right)\cap\left(k^{-1}(V)\cap J\right)$$

et le lemme résulte des inégalités suivantes :

$$\mu\left(h^{-1}(U)\cap J\right)+\mu\left(k^{-1}(V)\cap J\right)-\mu(J)\le\mu\left((h,k)^{-1}(U\times V)\cap J\right)$$

$$\mu\left((h,k)^{-1}(U\times V)\cap J\right)\le\min\left\{\mu\left(h^{-1}(U)\cap J\right),\mu\left(k^{-1}(V)\cap J\right)\right\}$$ ▼

Corollaire 2.3. *Soit h une fonction mesurable bornée définie sur un intervalle borné I, à valeurs dans $\mathbf{R}^p$. L'ensemble des points réguliers de h est l'intersection des ensembles de points réguliers des composantes de h.*

Lemme 2.4. *Soit h une fonction mesurable bornée définie sur un intervalle borné I, à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et soit f une application continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$. Si t est un point régulier de h, alors t est un point régulier de $f\circ h$.*

▲ Soit U un voisinage de $f\circ h(t)$. Alors $V=f^{-1}(U)$ est un voisinage de $h(t)$ et

$$(f \circ h)^{-1}(U) \cap J = h^{-1}(V) \cap J,$$

ce qui entraîne que si t est un point régulier de h, alors c'est aussi un point régulier de $f \circ h$. ▼

Corollaire 2.5. *Soit h et k des fonctions mesurables bornées définies sur un intervalle borné I, à valeurs dans $\mathbf{R}^p$. Si t est un point régulier de h et de k, alors t est un point régulier de toute combinaison linéaire $\alpha h + \beta k$.*

▲ La combinaison linéaire $\alpha h + \beta k$ est la composée de l'application linéaire (continue) f de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^p$ définie par $f(x,y) = \alpha x + \beta y$ avec la fonction mesurable bornée (h,k) pour laquelle t est un point régulier (lemme **2.2**). ▼

Lemme 2.6. *Soit h une fonction mesurable bornée définie sur un intervalle borné I, à valeurs dans un espace euclidien $\mathbf{R}^p$. Alors, la norme d'une valeur régulière est majorée par $\|h\|_\infty$ et presque tous les points de I sont des points réguliers de h*

▲ Si $\|h(t)\| > \|h\|_\infty$, il existe un voisinage U de $h(t)$ tel que $\|y\| > \|h\|_\infty$ pour tout y de U et alors $\mu\left(h^{-1}(U) \cap J\right) = 0$ quel que soit J : $h(t)$ n'est donc pas une valeur régulière.

Si $p = 1$, la fonction scalaire h est approximativement continue en presque tout point de I (cf. Natanson [**16**]), donc presque tous les points de I sont des points réguliers de h. Si $p > 1$, l'ensemble des points réguliers de h étant l'intersection des ensembles de points réguliers des composantes de h (corollaire **2.3**), on applique le résultat précédent. ▼

Lemme 2.7. *Soit h une fonction mesurable bornée définie sur un intervalle borné I, à valeurs dans un espace euclidien $\mathbf{R}^p$ et t un point régulier de h. Si t est intérieur à I, on a*

$$h(t) = \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} h(s)\, ds \right).$$

Si t est une borne de I, on a le même résultat en faisant tendre α vers 0^+ (resp. 0^-).

▲ Pour α tendant vers 0^+, on a

$$\left\| \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} h(s)\, ds - h(t) \right\| \leq \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} \| h(s) - h(t) \|\, ds.$$

On prend pour voisinage U la boule de centre $h(t)$ et de rayon ε et on pose $J_\alpha = [\,t,\ t+\alpha\,]$ et $J'_\alpha = \{\, s \in J_\alpha \mid \|h(s)-h(t)\| < \varepsilon \,\}$. On a alors

$$\left\| \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} h(s)\,ds - h(t) \right\| \le \frac{1}{\alpha}\Big(\varepsilon\, \mu(J'_\alpha) + 2\|h\|_\infty\, \mu(J_\alpha - J'_\alpha) \Big)$$

Or, $\frac{1}{\alpha}\mu(J'_\alpha) = \dfrac{\mu\big(h^{-1}(U) \cap J_\alpha\big)}{\mu(J_\alpha)}$ tend vers 1 et $\frac{1}{\alpha}\mu(J_\alpha - J'_\alpha) = \dfrac{\alpha - \mu(J'_\alpha)}{\mu(J_\alpha)}$ tend vers 0 quand α tend vers 0, puisque t est un point régulier de h. Pour α assez petit, on a donc :

$$\left\| \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} h(s)\,ds - h(t) \right\| \le 2\varepsilon .$$

▼

Lemme 2.8. *Soit C une partie de $\mathbf{R}^p$, I un intervalle borné et h une fonction mesurable bornée de I dans $\mathbf{R}^p$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un compact K inclus dans C tel que $h(t) \in K$ pour presque tout t dans I.*

(ii) *L'adhérence de l'ensemble des valeurs régulières de h est contenue dans C.*

▲ L'ensemble des valeurs régulières est borné (lemme **2.6**), donc son adhérence est compacte. Comme presque tout point de I est un point régulier (lemme **2.6**), **(ii)** entraîne **(i)**.

Soit K un compact tel que $h(t) \in K$ pour presque tout t dans I. Alors $h(t) \in K$ pour tout point régulier de h : si ce n'était pas le cas, il existerait un voisinage U de $h(t)$ ne rencontrant pas K et un intervalle J tel que $\mu\big(h^{-1}(U) \cap J\big) > \frac{1}{2}\mu(J) > 0$ et on aurait alors $\mu\big(h^{-1}(K)\big) < 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite. Il en résulte que **(i)** entraîne **(ii)**. ▼

Remarques 2.9. La propriété **(i)** est usuellement prise comme définition de "*h prend ses valeurs dans C*" mais la propriété **(ii)** ne nécessite pas la détermination a priori d'un compact. Si C est fermé, elle se réduit à "$h(t) \in C$ pour tout point régulier t de h".

Proposition 2.10. *Soit C une partie fermée de $\mathbf{R}^p$, I un intervalle borné et $L^\infty(I,C)$ l'ensemble des classes de fonctions mesurables bornées définies sur I et prenant leurs valeurs dans C. Si H est une direction admissible de $L^\infty(I,C)$ au point h, alors (h,H) prend ses valeurs dans*

$$A_* C = \big\{ (x,X) \mid x \in C,\ X \in A_x C \big\}.$$

▲ Soit I_r l'ensemble des points réguliers de (h,H) et soit (x,X) un point adhérent à l'ensemble des valeurs régulières de (h,H). Il existe alors une suite $t_n \in I_r$ telle que $h(t_n) \to x$ et $H(t_n) \to X$. Les points t_n sont aussi des points réguliers de h (lemme **2.2**) et h prend ses valeurs dans C, alors x, qui est limite d'une suite de valeurs régulières de h, appartient à C (lemme **2.8**). Comme par hypothèse H est une direction admissible en h, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $Y \in \mathbf{R}^p$ tel que $\|Y\| < \alpha$ et tout $\lambda \in]0,\alpha[$, la fonction $h + \lambda(H+Y)$ prend ses valeurs dans C. Comme tout point de I_r est un point régulier de $h+\lambda(H+Y)$ (corollaire **2.5**), il vient que $x+\lambda(X+Y)$, limite d'une suite de valeurs régulières de $h+\lambda(H+Y)$, appartient à C (lemme **2.8**) et on a donc $X \in A_x C$ ▼

Contre-exemple 2.11. La réciproque de la proposition **2.10** est fausse. Soit

$$C = \left\{ (s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid s \geq 0 \text{ ou } t \geq 0 \right\},$$

h la fonction à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, définie sur $I = [0,1]$ par $h(t) = (-t, 0)$ et H la fonction à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, définie sur $[0,1]$ par $H(t) = (1,t)$. La fonction continue h prend ses valeurs dans C et la fonction continue (h,H) prend ses valeurs dans $A_* C$ mais H n'est pas une direction admissible en h : pour tout $\alpha \in]0,1[$, soit H_α la fonction définie sur $[0,1]$ par $H_\alpha(t) = (1, t-\alpha)$; on a $\|H_\alpha - H\|_\infty = \alpha$ mais, pour $\lambda \in]0,\alpha[$, $h(t) + \lambda H_\alpha(t)$ n'appartient pas à C si $t \in]\lambda,\alpha[$, donc $h + \lambda H_\alpha$ n'appartient pas à $L^\infty(I,C)$.

Théorème 2.12. *Soit C une partie fermée de $\mathbf{R}^p$, admissiblement régulière, et I un intervalle borné. Alors $H \in L^\infty(I,p)$ est une direction admissible de $L^\infty(I,C)$ en h si et seulement si (h,H) prend ses valeurs dans $A_* C$.*

▲ Soit H une fonction mesurable bornée telle que (h,H) prenne ses valeurs dans $A_* C$. Nous allons montrer qu'alors H appartient au cône de Rockafellar $R_h L^\infty(I,C)$.

Soit K la fermeture de l'ensemble des valeurs régulières de (h,H) : c'est un compact de $A_* C$. Il existe alors un scalaire $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in C$, tout $(x,X) \in K + \alpha B$, où B désigne la boule unité, et tout $\lambda \in]0,\alpha[$ on ait $x + \lambda X \in C$: si ce n'était pas le cas, il existerait des suites $x_n \in C$, $(x_n, X_n) \in K + \frac{1}{n} B$ et $\lambda_n \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$ telles que, pour tout n, $x_n + \lambda_n X_n$ n'appartienne pas à C ; K étant compact, la suite (x_n, X_n) aurait une valeur d'adhérence (x,X)

dans K, donc dans A_*C, et X appartiendrait à $A_xC = R_xC$, ce qui serait en contradiction avec $\mathrm{non}(x_n + \lambda_n X_n \in C)$ pour tout n.

Le scalaire α étant ainsi fixé, considérons une fonction mesurable bornée $\tilde{h}$ prenant ses valeurs dans C et telle que $\|\tilde{h} - h\|_\infty < \alpha$, une fonction mesurable bornée $\tilde{H}$ telle que $\|\tilde{H} - H\|_\infty < \alpha$ et un scalaire $\lambda \in]0,\alpha[$ .Soit $\tilde{I}_r$ l'ensemble des points réguliers pour chacune des fonctions $h, \tilde{h}, H$ et $\tilde{H}$. Pour tout $t \in \tilde{I}_r$, on a $(\tilde{h}(t), \tilde{H}(t)) \in K + \alpha B$ et $\tilde{h}(t) \in C$ donc $\tilde{h}(t) + \lambda \tilde{H}(t)$ appartient à C d'après le choix fait de α. L'ensemble $\tilde{I}_r$ étant de mesure totale de I et C étant fermé, il en résulte que $\tilde{h} + \lambda \tilde{H}$ prend ses valeurs dans C, donc que H appartient à $R_h L^\infty(I,C)$.

L'inclusion de $R_h L^\infty(I,C)$ dans $A_h L^\infty(I,C)$ étant toujours vraie, ce résultat joint à la proposition **2.10**, entraîne que ces cônes sont égaux et coïncident avec l'ensemble des H tels que (h,H) prenne ses valeurs dans A_*C. ▼

Proposition 2.13. *Sous les hypothèses du théorème* **2.12**, $L^\infty(I,C)$ *est une partie admissiblement régulière de* $L^\infty(I,p)$.

▲ Il suffit de montrer que $R_h L^\infty(I,C) = A_h L^\infty(I,C)$ est non vide.

La partie C étant admissiblement régulière, pour tout $x \in C$, le cône $R_xC = A_xC$ est non vide et, pour $X \in R_xC = A_xC$ donné, il existe un voisinage V de x tel que $X \in R_{x'}C = A_{x'}C$ pour tout x' de $V \cap C$ (lemme **1.2**); la fibration $A_*C \to C$ admet donc une section locale continue en tout point de C et, les fibres étant convexes (propriété du cône de Rockafellar), on obtient une section globale continue σ en recollant des sections locales au moyen d'une partition de l'unité continue. Étant donné $h \in L^\infty(I,C)$, la fonction $(h,H) = \sigma \circ h$ est mesurable bornée et vérifie $H(t) \in A_{h(t)}C$ en tout point régulier t de h. Si K est la fermeture de l'ensemble des valeurs régulières de h, alors $\sigma(K)$ est un compact contenu dans A_*C et $(h(t), H(t)) \in \sigma(K)$ pour presque tout point t de I, donc H est une direction admissible au point h, ce qui montre que $A_h L^\infty(I,C)$ n'est pas vide. ▼

B. Cônes de directions admissibles des parties G_θ

Soit I un intervalle borné et θ une fonction mesurable bornée définie sur I et prenant ses valeurs dans $\mathbf{R}^p$. On notera G_θ la partie :

$$G_\theta = \left\{ x \in W^{1,\infty}(I,p) \,\middle|\, \forall_\mu t \in I, x(t) \geq \theta(t) \right\}$$

où "$\forall_\mu t$" signifie "pour presque tout t", relativement à la mesure de Lebesgue μ. Cette partie ne dépend que de la classe de θ dans $L^\infty(I,p)$.

Le paragraphe **3** rassemble des résultats techniques permettant (théorème **4.6**) de décrire explicitement le cône des directions admissibles de G_θ en un point h.

3. Adhérence essentielle d'une partie

Définition 3.1. Soit M une partie mesurable de $\mathbf{R}^n$. Un point a sera dit un *point adhérent essentiel* de M si

$$\forall \alpha > 0,\ \mu\big(\mathrm{B}(a;\alpha) \cap M\big) \neq 0.$$

On appellera *adhérence essentielle* de M, et on notera $\overline{\mathrm{ess}}(M)$, l'ensemble des points adhérents essentiels de M.

Tout pont adhérent essentiel de M est adhérent à M, mais un point de M, a fortiori un point adhérent à M, n'est pas nécessairement un point adhérent essentiel de M : par exemple, un point isolé de M n'est pas un point adhérent essentiel de M. On a cependant les deux résultats suivant :

Proposition 3.2. *L'ensemble des points de M qui ne sont pas des points adhérents essentiels de M est de mesure nulle.*

▲ On considère pour tout entier n la partie

$$X_n = \left\{ a \in M \cap \mathrm{B}(a\,;n) \,\middle|\, \mu\left(\mathrm{B}\left(a\,;\tfrac{1}{n}\right) \cap M\right) = 0 \right\}.$$

qui est relativement compacte, donc recouverte par un nombre fini de boules $B\left(a_i\,;\frac{1}{n}\right)$ avec $a_i \in X_n$, donc

$$X_n \subset \bigcup_{1\leq i\leq p} \left(B\left(a_i\,;\tfrac{1}{n}\right)\cap M\right)$$

est de mesure nulle. L'ensemble des points de M étant la réunion des X_n, cet ensemble est de mesure nulle. ▼

Proposition 3.3. *L'adhérence essentielle d'une partie M est l'adhérence de l'ensemble des points de M qui sont des points adhérents essentiels de M.*

▲ 1) Soit a un point adhérent à $M\cap\overline{\text{ess}}(M)$. On a

$$\forall\alpha>0,\, B(a;\alpha)\cap\left(M\cap\overline{\text{ess}}(M)\right)\neq\varnothing.$$

Soit b un point de cette intersection. C'est un point adhérent essentiel de M donc

$$\mu\left(B\left(b;\tfrac{\alpha}{2}\right)\cap M\right)\neq 0$$

et on a

$$B(a;\alpha)\cap M\supset B\left(b;\tfrac{\alpha}{2}\right)\cap M$$

donc

$$\mu\left(B(a;\alpha)\cap M\right)\geq\mu\left(B\left(b;\tfrac{\alpha}{2}\right)\cap M\right)>0,$$

ce qui entraîne que a appartient à $\overline{\text{ess}}(M)$. On a donc $\overline{M\cap\overline{\text{ess}}(M)}\subset\overline{\text{ess}}(M)$.

2) Réciproquement, soit a un point de $\overline{\text{ess}}(M)$. On a

$$\forall\alpha>0,\, \mu\left(B(a;\alpha)\cap M\right)\neq 0$$

L'ensemble des points de M non adhérents essentiels de M étant de mesure nulle, il en résulte que

$$\forall\alpha>0,\, \mu\left(B(a;\alpha)\cap\left(M\cap\overline{\text{ess}}(M)\right)\right)\neq 0$$

donc a est un point adhérent (et même adhérent essentiel) à $M\cap\overline{\text{ess}}(M)$. On a donc

$$\overline{\text{ess}}(M)\subset\overline{M\cap\overline{\text{ess}}(M)}$$

ce qui achève la démonstration. ▼

Il en résulte en particulier qu'une partie M est de mesure nulle si et seulement si son adhérence essentielle est vide. Plus généralement, l'adhérence essentielle de M ne dépend que de la classe de M modulo les parties de mesure nulle :

Proposition 3.4. *Deux parties dont la différence symétrique est de mesure nulle ont la même adhérence essentielle.*

▲ Soit M_1 et M_2 deux parties, N_1 l'ensemble des points de M_1 n'appartenant pas à M_2 et N_2 l'ensemble des points de M_2 n'appartenant pas à M_1 . Par hypothèse on a

$$\mu(M_1 \Delta M_2) = \mu(N_1 \cup N_2) = 0$$

donc N_1 et N_2 sont de mesure nulle. En remarquant que $M_2 = (M_1 - N_1) \cup N_2$ la proposition résulte des lemmes suivants :

Lemme 3.5. *On ne change pas l'adhérence essentielle d'une partie* M *en rajoutant à* M *une partie* N *de mesure nulle, c'est-à-dire*

$$(\mu(N) = 0) \Rightarrow (\overline{\text{ess}}(M \cup N) = \overline{\text{ess}}(M)).$$

▲ **1**) L'inclusion $\overline{\text{ess}}(M) \subset \overline{\text{ess}}(M \cup N)$ est évidente (sans hypothèse sur N).

2) Soit a un point de $\overline{\text{ess}}(M \cup N)$. Pour tout $\alpha > 0$ on a

$$B(a;\alpha) \cap (M \cup N) = (B(a;\alpha) \cap M) \cup (B(a;\alpha) \cap N)$$

d'où, N étant de mesure nulle

$$\mu(B(a;\alpha) \cap M) = \mu(B(a;\alpha) \cap (M \cup N)) \neq 0$$

ce qui entraîne que a appartient à $\overline{\text{ess}}(M)$. ▼

Lemme 3.6. *On ne change pas l'adhérence essentielle d'une partie* M *en ôtant de* M *une partie de mesure nulle, c'est-à-dire*

$$(N \subset M \text{ et } \mu(N) = 0) \Rightarrow (\overline{\text{ess}}(M - N) = \overline{\text{ess}}(M)).$$

▲ On applique le lemme précédent à $M - N$ et N. ▼

Une application de l'adhérence essentielle est de régulariser l'étude de certaines propriétés "vraies presque partout" :

Théorème 3.7. *Soit $\mathcal{P}$ une propriété paramétrée par les points d'une partie fermée $A \subset \mathbf{R}^n$, telle que l'ensemble des points de A pour lesquels $\mathcal{P}$ est vraie soit un fermé. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{P}$ soit presque partout vraie sur une partie M de A est que $\mathcal{P}$ soit partout vraie sur l'adhérence essentielle de M.*

▲ **Condition suffisante.** Si $\mathcal{P}$ est vraie sur $\overline{\mathrm{ess}}(M)$, alors elle est vraie sur $M \cap \overline{\mathrm{ess}}(M)$ dont le complémentaire dans M est de mesure nulle (proposition **3.2**), donc $\mathcal{P}$ est presque partout vraie sur M.

Condition nécessaire. Soit N l'ensemble de mesure nulle des points de M en lesquels $\mathcal{P}$ n'est pas vraie. La propriété $\mathcal{P}$ est vraie sur $(M-N) \cap \overline{\mathrm{ess}}(M-N)$, donc aussi sur l'adhérence de cette partie, c'est-à-dire sur $\overline{\mathrm{ess}}(M-N)$ (proposition **3.3**), puisque l'ensemble des points de A pour lesquels $\mathcal{P}$ est vraie est un fermé. Il en résulte que $\mathcal{P}$ est vraie sur $\overline{\mathrm{ess}}(M)$ (proposition **3.4**). ▼

Corollaire 3.8. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle f, définie et continue sur A, soit presque partout nulle (resp. positive) sur une partie M est que cette application soit nulle (resp. positive) en tous points de l'adhérence essentielle de M.*

4. Cônes de directions admissibles des parties G_θ

Notations 4.1. L'espace $\mathbf{R}^p$ est muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{1 \le i \le p} |x_i|$$

et de la relation d'ordre définie par $x \geq y$ si et seulement si $x_i \geq y_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Étant donné un réel λ on notera $\bar{\lambda}$ l'élément de $\mathbf{R}^p$ dont toutes les composantes sont égales à λ.

Étant donné un entier i, $1 \le i \le p$, un réel $\varepsilon > 0$ et un élément h de $W^{1,\infty}(I, p)$, on notera $I_{i,\varepsilon}(h)$ la partie

$$I_{i,\varepsilon}(h) = \left\{ t \in I \,\middle|\, h_i(t) < \theta_i(t) + \varepsilon \right\},$$

$J_{i,\varepsilon}(h)$ l'adhérence essentielle de $I_{i,\varepsilon}(h)$ et $J_i(h)$ l'intersection des parties $J_{i,\varepsilon}(h)$. Les parties $J_{i,\varepsilon}(h)$ et $J_i(h)$ sont fermées; elles ne dépendent que de la classe de θ dans $L^\infty(I,p)$.

Remarque 4.2. Si θ est continue, $J_i(h)$ est l'ensemble

$$\left\{t \in I \mid h_i(t) \leq \theta_i(t)\right\}.$$

Dans le cas général, $J_i(h)$ joue le rôle de cet ensemble mais ne peut pas en être déduit directement ainsi que le montre l'exemple suivant :

Exemple 4.3. On prend $I = [0;1]$, $p = 1$, θ la fonction définie par

$$\theta(t) = -t \text{ si } t \in]0;1[, \quad \theta(0) = -1 \ , \quad \theta(1) = 0$$

et h la fonction identiquement nulle. On a

$$\forall \varepsilon \in]0;1[, \quad I_{i,\varepsilon}(h) =]0;\varepsilon] \cup \{1\}$$

donc $J_{1,\varepsilon}(h) = [0;\varepsilon]$ et $J_1(h) = \{0\}$ alors que $\left\{t \in I \mid h(t) = \theta(t)\right\} = \{1\}$

Proposition 4.4. *Soit h un élément de G_θ. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *h appartient à l'intérieur de G_θ*

(ii) *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit i, la partie $I_{i,\varepsilon}(h)$ est de mesure nulle*

(iii) *Quel que soit l'indice i, la partie $J_i(h)$ est vide.*

▲ **(i) ⟹ (ii)** Si h est intérieur à G_θ, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}(h;\varepsilon)$ soit contenue dans G_θ. En particulier, $h - \bar{\varepsilon}$ appartient à G_θ, c'est-à-dire

$$\forall_\mu t \in I, \ \forall i \in \{1,2,..,p\}, \ h_i(t) - \varepsilon \geq \theta_i(t).$$

donc $I_{i,\varepsilon}(h)$ est de mesure nulle.

(ii) ⟹ (iii) Si $I_{i,\varepsilon}(h)$ est de mesure nulle, alors $J_{i,\varepsilon}(h)$ est vide (proposition **3.4**), donc $J_i(h)$ est a fortiori vide.

(iii) ⟹ (i) Si $J_i(h)$ est vide, $\left\{J_{i,\varepsilon}(h)\right\}_{\varepsilon>0}$ étant une famille décroissante de compacts, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $J_{i,\varepsilon_i}(h)$ soit vide, donc que $I_{i,\varepsilon_i}(h)$ soit de mesure nulle (proposition **3.4**). En prenant $\varepsilon = \inf\left\{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq p\right\}$, on a

$$\forall_\mu t \in I, \ h(t) - \bar{\varepsilon} \geq \theta(t).$$

donc, quel que soit $k \in \overline{B}(h;\varepsilon)$

$$\forall_\mu t \in I,\ k(t) \geq h(t) - \bar{\varepsilon} \geq \theta(t).$$

La boule $\overline{B}(h;\varepsilon)$ est donc contenue dans G_θ et h est intérieur à G_θ. ▼

Corollaire 4.5. *L'intérieur de G_θ pour la topologie de $W^{1,\infty}(I,p)$ est non vide et coïncide avec l'intérieur de G_θ pour la topologie induite par celle de $L^\infty(I,p)$.*

▲ La fonction θ étant essentiellement bornée, il existe une constante M telle que $M \geq \theta(t) + 1$ pour presque tout t. Il résulte de (**ii**) que la fonction constante égale à M est un point intérieur de G_θ.

Dans la démonstration de (**iii**) $\Rightarrow$ (**i**), on n'utilise pas toute l'hypothèse $k \in \overline{B}(h;\varepsilon)$ mais seulement que $\|k - h\|_\infty \leq \varepsilon$: on a en fait démontré que h est intérieur à G_θ pour la topologie induite par celle de $L^\infty(I,p)$. ▼

Théorème 4.6. *Soit h un élément de G_θ et H un élément de $W^{1,\infty}(I,p)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(**i**) *H est une direction admissible de G_θ au point h.*

(**ii**) *Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que*

$$\forall_\mu t \in I, H(t) \geq \alpha\left(\theta(t) - h(t)\right) + \bar{\beta}.$$

(**iii**) *Quel que soit l'indice i, la fonction H_i est strictement positive sur $J_i(h)$.*

▲ (i) $\Rightarrow$ (**ii**) Si $H \in A_h(G_\theta)$, il existe $\lambda > 0$ tel que $h + \lambda H$ soit intérieur à G_θ, donc (proposition **4.4**) il existe $\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit i, la partie $I_{i,\varepsilon}(h + \lambda H)$ est de mesure nulle. On a donc

$$\forall_\mu t \in I,\ h(t) + \lambda H(t) \geq \theta(t) + \bar{\varepsilon}$$

c'est-à-dire, en posant $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ et $\beta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$,

$$\forall_\mu t \in I, H(t) \geq \alpha\left(\theta(t) - h(t)\right) + \bar{\beta}.$$

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**). Pour tout i on a

$$\forall_\mu t \in I,\ H_i(t) \geq \alpha\left(\theta_i(t) - h_i(t)\right) + \beta$$

et sur $I_{i,\varepsilon}(h)$ on a $\theta_i(t) - x_i(t) > -\varepsilon$ donc

$$\forall_\mu t \in I_{i,\varepsilon}(h),\ H_i(t) \geq -\alpha\,\varepsilon + \beta.$$

Comme H_i est continue, le corollaire **3.8** entraîne que l'inégalité est encore vraie en tous points de $J_{i,\varepsilon}(h) = \overline{ess}(I_{i,\varepsilon}(h))$: on a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in J_{i,\varepsilon}(h),\ H_i(t) \geq -\alpha\,\varepsilon + \beta$$

d'où

$$\forall t \in J_i(h) = \bigcap_{\varepsilon > 0} J_{i,\varepsilon}(h)\ ,\ H_i(t) \geq \sup_{\varepsilon > 0}(-\alpha\,\varepsilon + \beta) = \beta$$

La condition (iii) est donc vérifiée puisque $\beta > 0$.

(iii) $\Rightarrow$ **(ii)**. Les fonctions numériques H_i étant continues et les parties $J_i(h)$ étant compactes, on définit un réel $\beta > 0$ en posant

$$2\beta = \inf_i \left(\inf_{t \in J_i(h)} H_i(t) \right).$$

Comme H_i est continue, $\Omega_i = \{ t \in I \mid H_i(t) > \beta \}$ est ouvert. Cet ouvert contient $J_i(h)$ et, les $J_{i,\varepsilon}(h)$ formant une suite décroissante de compacts, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in J_{i,\varepsilon}(h),\ H_i(t) > \beta .$$

et donc (proposition **3.8**)

$$\forall_\mu\, t \in I_{i,\varepsilon}(h),\ H_i(t) > \beta .$$

• puisque $h \in G_\theta$, on a $\theta_i(t) - h_i(t) \leq 0$ pour presque tout t, donc

$$\forall_\mu\, t \in I_{i,\varepsilon}(h),\ H_i(t) > \beta \geq \alpha\big(\theta_i(t) - h_i(t)\big) + \beta$$

quel que soit $\alpha > 0$.

• sur $I - I_{i,\varepsilon}(h)$ on a $\theta_i(t) - h_i(t) \leq -\varepsilon$ donc

$$\forall t \in I - I_{i,\varepsilon}(h),\ H_i(t) \geq -\|H\|_\infty \geq -\alpha\varepsilon + \beta \geq \alpha\big(\theta_i(t) - h_i(t)\big) + \beta$$

pourvu que $\alpha \geq (\|H\|_\infty + \beta)/\varepsilon$. La condition du **(ii)** est donc vérifiée en prenant $\alpha = (\|H\|_\infty + \beta)/\varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ **(i)**. Si H vérifie

$$\forall_\mu\, t \in I,\ H(t) \geq \alpha\big(\theta(t) - h(t)\big) + \vec{\beta}$$

alors, pour tout K de la boule $\overline{B}(H;\beta)$ on a

$$\forall_\mu t \in I,\ K(t) \geq H(t) - \bar{\beta} \geq \alpha(\theta(t) - h(t))$$

d'où, pour tout réel $\lambda \in \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[$,

$$\forall_\mu t \in I,\ h(t) + \lambda K(t) \geq h(t) + \lambda\alpha(\theta(t) - h(t)) = \theta(t) + (1 - \lambda\alpha)(h(t) - \theta(t)) \geq \theta(t)$$

ce qui exprime que $h + \lambda K$ appartient à G_θ pour tout $K \in \overline{B}(H;\beta)$ et tout $\lambda \in \left]0; \frac{1}{\alpha}\right[$ et donc que H est une direction admissible au point h. ▼

Corollaire 4.7. *Le cône de directions admissibles en un point de G_θ est convexe, non vide et ouvert pour la topologie induite par celle de $L^\infty(I,p)$.*

▲ G_θ est une partie convexe, d'intérieur non vide (corollaire **4.5**), donc les cônes de directions admissibles sont convexes et non vides.

Dans la démonstration de (**ii**) $\Rightarrow$ (**i**), on n'utilise pas toute l'hypothèse $K \in \overline{B}(H;\beta)$ mais seulement que $\|K - H\|_\infty \leq \beta$: on a en fait démontré que H est une direction admissible de G_θ pour la topologie induite par celle de $L^\infty(I,p)$. Il en résulte que le cône de directions admissibles est ouvert pour la topologie induite par celle de $L^\infty(I,p)$. ▼

Corollaire 4.8. *H est adhérent au cône des directions admissibles de G_θ au point h si et seulement si, quel que soit i, la fonction H_i est positive ou nulle sur $J_i(h)$.*

▲ La condition (**iii**) du théorème assure que si H est limite d'une suite d'éléments de A_hG_θ alors, pour tout i, H_i est positive ou nulle sur $J_i(h)$. Réciproquement, si, pour tout i, H_i est positive ou nulle sur $J_i(h)$, alors, quel que soit $\gamma > 0$, $H + \bar{\gamma}$ vérifie la condition (**iii**) du théorème, donc appartient à A_hG_θ, et tend vers H quand γ tend vers 0, donc H est adhérent à A_hG_θ. ▼

Références bibliographiques

[1] GIRSANOV (I.V.), 1972. *Lectures on mathematical theory of extremum problems.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 67, Springer, 136 pp.

[2] WALCZAK (S.), 1984. Some properties of cones in normed spaces and their application to investigating extremal problems. *Journal of Optimization Theory and Applications* 42 : 561-582.

[3] ARUTYONOV (A.V.), 1985. On necessary optimality conditions in a problem with phase constraints. *Soviet Math. Dokl.*31, N° 1.

[4] LEDZEWICZ (U.), 1993. On abnormal optimal control problems with mixed equality and inequality constraints. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 173 : 18-42.

[5] AVAKOV (E.R.), 1985. Extremum conditions for smooth problems with equality-type constraints. *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.*.25 : 680-693.

[6] LYUSTERNIK (L.A.) & SOBOLEV (V.I.), 1966. *Elements of functional analysis* Nauka, Moscou.

[7] ANTOINE (Ph.), 1981. Détermination explicite du cône tangent à une surface de niveau; application. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris.*293, série I : 353-355.

[8] EL BOUKHARI (A.), à paraître. Necessary optimality conditions for an optimization problem with equality constraint. *J.Optimization.*

[9] ZOUAKI (H.), 1989. *Un théorème de submersion pour une classe de fonctions multivoques. Application à la détermination de cônes tangents.* Thèse, Univ. de Lille I.

[10] ANTOINE (PH.) & ZOUAKI (H.), 1990. Etude locale de l'ensemble des points critiques d'un problème d'optimisation paramétré. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 310 : 587-590

[11] BOURBAKI (N.), 1955. *Éléments de mathématique*, Livre V: *Espaces vectoriels topologiques*, Chapitres 3, 4 et 5. Hermann & Cie, Paris, 191 pp.

[12] ANTOINE (Ph.), 1979 Conditions pour un minimum local d'une fonction différentiable. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle* 20 : 109-153.

[13] ROCKAFELLAR (R.T.), 1979. Clarke's tangent cones and the boundary of closed sets in $\mathbf{R}^n$. *Nonlinear Analysis* 3 : 145-154.

[14] BENLARBI (M.), 1996. Caractère lipschitzien et dérivabilité directionnelle des solutions de systèmes d'équations et d'inéquations paramétrées. *C. R. Acad. Sci. Paris* **323** : 137-142.

[15] PONTRIAGUINE (L.), BOLTIANSKI (V.), GAMKRÉLIDZÉ (R.) & MITCHENKO (E.), 1974. *Théorie mathématique des processus optimaux*. Editions Mir, Moscou, 317 pp.

[16] NATANSON (I.P.), 1955. *Theory of functions of a real variable*. Volume I . Ungar, New York, 271 pp.

Table des matières

Introduction 3

I. Théorème de régularité de multiplicateurs 9

1. Enoncé du théorème 9
2. Variations autour des théorèmes de Krein et de Dubovitskii-Milyutin 13
3. Démostration du théorème 16

II. Application à un problème de contrôle optimal 19

1. Formulation du problème 19
2. Les couples d'espaces de Banach 21
3. Vérification de l'hypothèse (H2) 23
4. Différentiabilité de f, g et h relativement aux couples d'espaces de Banach 24
5. Vérification de l'hypothèse (H5) 25
6. Cônes duaux 27
7. Une variante du problème de contrôle optimal 30

III. Détermination explicite de certains cônes de directions admissibles 35

1. Notion de parties admissiblement régulières 35
2. Cônes de directions admissibles des parties $L^\infty(I,C)$ 39
3. Adhérence essentielle d'une partie 44
4. Cônes de directions admissibles des parties G_θ 48

Références bibliographiques 53

Résumé

L'explicitation des conditions nécessaires pour un problème d'optimisation explicitement donné se heurte à deux difficultés majeures pour lesquelles des éléments de solution sont proposés :

1. Les conditions d'optimalité s'expriment à l'aide de multiplicateurs qui sont des formes linéaires continues ; sauf dans le cas hilbertien, leur description reste toute théorique. Des versions nouvelles des théorèmes de Krein et de Dubovitskii-Milyutin, adaptées aux couples d'espaces de Banach en dualité, nou permettent (chapitre I) de proposer un modèle de problème d'optimisation pour lequel les multiplicateurs appartiennent à des sous-espaces simples des espaces duaux. Nous montrons (chapitre II) que ce modèle couvre en particulier une large classe de problèmes de contrôles optimal définis sur des espaces de Sobolev de fonctions à dérivée mesurable bornée, établissant ainsi que, pour ces problèmes, les multiplicateurs sont des scalaires et des fonctions à variation bornée.

2. Certains multiplicateurs devant appartenir au cône dual d'un cône de directions admissibles, leur explicitation suppose une description explicite de ces cônes. Nous donnons une telle description pour les parties suivantes :

a) dans un espace des classes de fonctions mesurables bornées, définies sur un segment, le sous-ensemble des classes de fonctions prenant leurs valeurs dans une partie fermée, sous une hypothèse assez large de régularité pour cette partie.

b) dans un espace de Sobolev de fonctions continues à dérivée mesurable bornée, définies sur un segment, le sous-ensemble des fonctions presque partout minorées par une fonction mesurable bornée donnée.

Mots clés : **Optimisation - cônes admissibles - multiplicateurs**