

**THESE DE DOCTORAT**

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

présentée par

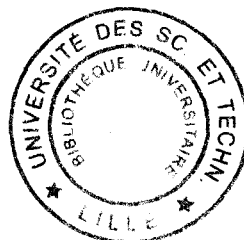
**Hassan SMAOUI**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES**

**Modélisation numérique tridimensionnelle de  
l'hydrodynamisme et des transports sédimentaires en Manche  
Orientale et dans le Sud de la Mer du Nord**

*(Rapport provisoire)*



# SOMMAIRE

## INTRODUCTION GENERALE

### Chapitre I

<b>I) EQUATIONS DE BASE</b>	<b>1</b>
I.1) Conservation de la masse	1
I.2) Conservation de la quantité du mouvement	1
I.3) Equation d'état	2
I.4) Equations de transport	2
<b>II) EQUATION DE L'ECOULEMENT MOYEN DANS LE TEMPS</b>	<b>5</b>
<b>III) TURBULENCE ET FERMETURE DU SYSTEME</b>	<b>6</b>
<b>IV) MODELISATION DE LA TURBULENCE</b>	<b>9</b>
IV.1) Turbulence verticale	9
IV.2) Turbulence horizontale	20
<b>V) APPROXIMATIONS</b>	<b>21</b>
V.1) Approximation de Boussinesq	21
V.2) Approximation $\beta$ -plan	22
V.3) Approximation hydrostatique	22
<b>VI) TRANSFORMATION DES EQUATIONS</b>	<b>24</b>
VI.1) Equations intégrées sur la largeur	25
VI.2) Transformation en coordonnée "Sigma"	26
<b>VII) CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES</b>	<b>31</b>
VII.1) Conditions aux limites	32
VII.1.1) Frontière ouverte	32
VII.1.2) Frontière supérieure	35
VII.1.3) Frontière latérale fermée	37
VII.1.4) Frontière latérale ouverte	37

VII.2) Conditions initiales	40
<b>VIII) PRINCIPE DE RESOLUTION DES ONDES DE GRAVITE</b>	<b>40</b>
VIII.1) Mode externe	41
VIII.2) Mode interne	42

## Références Bibliographiques du Chapitre I

## Chapitre II

<b>I) INTRODUCTION</b>	<b>46</b>
<b>II) DISCRETISATION DES EQUATIONS</b>	<b>47</b>
II.1) Discrétisation spatiale	47
II.2) Discrétisation temporelle	48
<b>III) METHODE DISCRETISATION DES EQUATIONS</b>	<b>48</b>
III.1) La méthode de développement en série de Taylor	48
III.2) La méthode du volume de contrôle (volume fini)	49
III.3) Convergence, Consistance et Stabilité	49
<b>VI) METHODE NUMERIQUES POUR LES EQUATIONS DE SAINT- VENANT</b>	<b>51</b>
VI.1) Analyse de quelques schémas existants	52
<b>V) DISCRETISATION DES EQUATIONS DU MODELE</b>	<b>62</b>
V.1) Equation du mode externe	63
V.2) Equation du mode interne	72
V.3) Equation de concentration	78
<b>VI) FILTRAGE NUMERIQUE</b>	<b>81</b>
VI.1) Valeurs négatives	81
VI.2) Instabilité de la colonne d'eau	83

## Références Bibliographiques du Chapitre II

## Chapitre III

I) INTRODUCTION	84
II) CAS SCHEMATIQUES	84
II.1) Onde sinusoïdale entrant dans un bassin	84
II.2) Résultats	85
III) APPLICATION DU MODELE A LA MANCHE ORIENTALE	87
III.1) Caractéristiques de la zone d'application	88
III.2) Conditions aux limites et initiales	88
III.3) Simulation des ondes M2 et M4	89
III.4) Validation du modèle 2D horizontal	93
III.5) Présentation de champs de courant moyen	95
III.6) Intensité et caractéristiques générales du courant de marée	96
III.7) Présentation de résultats du modèle 3D	97
IV) APPLICATION DU MODELE 3_D A LA MANCHE ORIENTALE ET AU SUD DE LA MER DU NORD	100
IV.1) Simulation de la structure hydrologique (fleuve côtier)	101
IV.2) Transport sédimentaire	104

### Références Bibliographiques du Chapitre III

## Chapitre IV

I) INTRODUCTION	115
II) DISCRETISATION VOLUME FINI D'UNE EQUATION MODELE	115
II.1) Equation modèle continue	115
II.2) Discrétisation par Volumes finis	116
III) NOTION DE FLUX NUMERIQUE	118
III.1) Principe de calcul de flux numérique H	119
III.2) Classe de schémas linéaires à cinq points décentrés amont	119
IV) LES SCHEMAS VTD (Variation Totale Diminuante)	128

IV.1) Anti-diffusion d'un schéma du premier ordre	129
<b>V) SCHEMA DE VAN LEER(1)</b>	<b>135</b>
V.1) Description générale de la méthode	135
V.2) Interprétation des pentes	138
<b>VI) TESTS NUMERIQUES</b>	<b>139</b>
<b>VII) INTERPRETATION DES RESULTATS DES TESTS NUMERIQUES</b>	<b>144</b>
VII.1) Schéma 1-D d'ordre (1,2)	144
VII.2) Schéma 1-D d'ordre (2,2)	146
VII.3) Schéma 2-D	148
VII.4) Cas schématique 2-D	152
<b>VIII) CONCLUSIONS</b>	<b>153</b>
<b>Références Bibliographiques du Chapitre IV</b>	
<b>CONCLUSIONS GENERALES</b>	<b>156</b>
<b>FIGURES</b>	
<b>ANNEXES</b>	

## INTRODUCTION

Le domaine côtier qui comprend la frange littorale, le plateau continental et les mers régionales est une zone extrêmement riche. En effet, avec seulement 8% de la surface des océans, elle produit 20 à 30% de la totalité de la biomasse végétale marine (Chardy, 1992). En outre, elle recèle d'importantes ressources minérales aisément extractibles. Malheureusement, de par sa position à l'interface entre le continent et l'océan, elle est en prise directe avec les perturbations liées au développements de l'activité humaine, et notamment les pollutions chimiques (métaux lourds, pesticides, sels nutritifs, etc.) et biologiques. La recherche dans le domaine de l'environnement côtier a pour objet de mieux connaître le fonctionnement de l'écosystème pour en assurer une meilleure gestion et une protection contre les perturbations qu'il subit.

La zone côtière de la Manche Orientale et du Sud de la Mer du Nord, constitue à ce titre un environnement exceptionnel dans lequel l'intensité du régime hydrodynamique induit par le marée et la présence d'apports fluviaux ont des conséquences capitales sur la dynamique et le fonctionnement du système.

Le développement d'une modélisation pluridisciplinaire intégrant divers compartiments du système passe en priorité par la mise au point d'une modélisation efficace des mouvements moyens et turbulents affectant la masse d'eau. La prise en compte des processus hydro-sédimentaires constitue une étape primordiale dans la progression vers une modélisation globale de l'écosystème.

L'évolution spatio-temporelle des processus hydrodynamiques et hydro-sédimentaires régit par une série de lois de conservation conduisant à des équations aux dérivées partielles. La complexité du problème ainsi posé nécessite des simplifications qui dans bon nombre de cas ne permettent cependant pas d'éviter le recours à des méthodes de résolution numérique.

Notre travail qui consiste à mettre au point un modèle numérique tridimensionnel aux différences finies de la Manche Orientale et du Sud de la Mer

du Nord entre dans ce cadre méthodologique. Les développements entrepris s'inscrivent dans la continuité des travaux de Hess (1985,1986) entrepris au sein de la NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) et concrétisés par le code MECCA (Model for Estuarine and Coastal Circulation Assessment).

- D'un point de vue "fondamental", nos travaux ont pour l'essentiel consister à:
- améliorer le schéma de fermeture de la turbulence en introduisant une équation de transport de l'énergie cinétique turbulente couplée à une expression de la longueur de mélange en fonction de l'énergie cinétique locale;
  - intégrer le transport des particules sédimentaires en résolvant un jeu d'équations d'advection-dispersion relatives à des particules de tailles diverses et en introduisant une paramétrisation des processus hydro-sédimentaires à l'interface eau-sédiment;
  - améliorer le filtrage des parasites numériques à l'aide d'un schéma conservant la masse et la forme.

- D'un point de vue appliqué, nous nous sommes attachés à:
- intégrer la bathymétrie du domaine;
  - interpoler les distributions granulométriques du substrat sédimentaire à l'aide d'une technique originale faisant appel à l'ACP (Analyse des Composantes Principales) et le krigeage;
  - "forcer le modèle" au niveau de frontières ouvertes, soit par l'onde de marée, soit par les débits fluviaux.

Le présent travail s'organise en quatre chapitres:

Le premier chapitre présente les équations générales de la mécanique des fluides, puis les approximations, les transformations et les hypothèses utilisées pour aboutir aux équations décrivant les écoulements côtiers (équations de l'eau peu profonde "Shallow-Water equations"). Une partie du chapitre est consacrée aux problèmes de la fermeture turbulente et aux différents modèles leur apportant "une solution". La fin du chapitre est réservée à la présentation de divers types de conditions aux limites envisageables dans nos applications.

Le deuxième chapitre examine quelques méthodes de discrétisations spatio-temporelles des équations de l'eau peu profonde, puis l'étude comparative entre

divers schémas numériques adaptés à ce type d'équations. Le chapitre se termine par une présentation détaillée de la discrétisation des équations du modèle et de leurs conditions aux limites pour aboutir à l'algorithme de résolution numérique mis en oeuvre dans cette étude.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des résultats et leurs validations, soit par les mesures disponibles, soit par comparaison avec les résultats d'autres modèles. La dernière partie de ce chapitre porte sur les applications du modèle à deux aspects essentiels en Manche Orientale (Panache des cours d'eau de la côte Picarde et transport sédimentaire), ainsi que l'influence de la nouvelle paramétrisation de la turbulence introduite dans le modèle.

Le quatrième chapitre justifié par le problème de la diffusion numérique inhérent au schéma Upwind utilisé dans le modèle actuel est consacré à l'étude détaillée d'une classe de schémas numériques (Limiteur de pente) d'ordre supérieur réduisant la diffusion numérique introduite par les schémas du premier ordre. Afin de déterminer les limites des différents schémas "limiteur de pente" une série de tests numériques dans différentes configurations pratiques est réalisée. Les résultats acquis offre une perspective globale de traitement des équations de transport (température, salinité, concentration en sédiments en suspension, etc).

Pour conclure, il convient de signaler que les recherches exposées dans le présent mémoire ont été effectuées dans le cadre de plusieurs programmes d'océanographie côtière élaborés au niveau:

- Région Nord-Pas de Calais (DYSCOP: DYnamique du Système CÔtier du Pas-de-Calais),
- National (PNOC: Programme National d'Océanographie Côtière),
- Européen (MAST: MARine Sciences and Technologies, projet Fluxmanche et PROMISE: PRe-Operational Modeling In the Seas of Europe).



# CHAPITRE 1

## I) EQUATIONS DE BASE

La description dans un repère orthonormé direct  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'évolution spatio-temporelle d'un fluide en mouvement est donnée par les équations de Navier-Stokes traduisant les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le champ de la pesanteur.

### I.1) Conservation de la masse (Equation de continuité)

Le principe fondamental que constitue la loi de conservation de la masse exprime le fait que la masse d'un élément fluide que l'on suit dans son mouvement demeure constante quand le temps varie. Ceci s'écrit de la manière suivante:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

où:

$\rho(x,t)$  : densité du fluide

$\mathbf{u}(x,t)$  : vecteur vitesse du fluide  $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)=(u, v, w)$

$t$  : le temps

$\mathbf{x}$  : vecteur position de la particule fluide

Pour un fluide incompressible telle que l'eau, les variations de la densité sont faibles. L'équation de la continuité se réduit à:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

### I.2) Conservation de la quantité de mouvement

Il s'agit du second principe de Newton qui exprime que le taux de variation de la quantité du mouvement d'une particule au cours du temps, est égal à la somme des forces qui s'exercent sur cette particule. Ce principe est donné par la relation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + 2\rho \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi} \quad (3)$$

où:

$\boldsymbol{\Omega}$  : vecteur rotation

$\boldsymbol{\Pi}$  : tenseur de contraintes dus à la viscosité moléculaire

$\mathbf{F}$  : vecteur force externe par unité de volume

Pour un fluide Newtonien tel que l'eau et en vertu de l'hypothèse d'incompressibilité, le tenseur de contrainte s'écrit:

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\nabla\mathbf{u} \quad (4)$$

où:

$p$  : champ de pression

$\mu$  : viscosité moléculaire

$\nu = \mu/\rho$  : viscosité cinématique

En substituant la relation (3) dans l'équation (4) on aura:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + 2\rho\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \rho\mathbf{F} - \nabla p + \nabla(\mu\nabla\mathbf{u}) \quad (5)$$

### **I.3) Equation d'état**

Pour l'eau de mer, le champ de densité est généralement fonction de la température, salinité, pression et éventuellement de la concentration de matière en suspension.

Dans cette étude, on se limitera à une expression de l'équation d'état de la forme:

$$\rho = \rho_0 [1 + F_p(S, T)] \quad (6)$$

où:

$\rho_0$  : densité de référence (eau douce)

$S(\mathbf{x}, t)$  : concentration saline du fluide

$T(\mathbf{x}, t)$  : température du fluide

$F_p$  : une fonction de  $S$  et de  $T$

### **I.4) Equations de transport**

Le système des équations ci-dessus (1-6) ne pourra donc être résolue que si on lui adjoint l'équation de conservation du sel et de la température, servant au calcul de la densité par la relation (6).

#### **I.4.1) Conservation du sel dissous**

Le bilan d'une substance dissoute tel que le sel dans une particule fluide en mouvement, s'exprime par la loi de conservation du sel qui s'écrit:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}S) - \nabla(\gamma_s \nabla S) = 0 \quad (7)$$

où:

$\gamma_s$  : diffusivité moléculaire du sel dissous

#### I.4.2) Bilan énergétique

L'application du premier principe de la thermodynamique à un fluide en mouvement conduit à (Candel 1990) :

$$\rho T \frac{dE}{dt} = \nabla(k \nabla T) + \phi + \psi \quad (8)$$

où:

$E(T,p)$  : l'entropie

$k$  : est la conductivité thermique du fluide

$\phi$  : terme de dissipation par les forces visqueuses

$\psi$  : les sources internes de chaleur

D'autre part, le taux de variation de l'entropie est tel que :

$$T \frac{dE}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} + T \beta g u_3 \quad (8.a)$$

où:

$C_p$  : la capacité calorifique de l'eau (exprimée en J/kg.°C)

$\beta$  : le coefficient de dilatation thermique de l'eau (exprimé en °C<sup>-1</sup>)

$u_3$  : la composante verticale du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$

Dans le cas d'un fluide newtonien, la fonction de dissipation  $\phi$  prend la forme (en utilisant la notation tensorielle) suivante:

$$\phi = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (8.b)$$

L'équation (8) s'écrit alors:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}T) = \nabla \left( \frac{k}{\rho C_p} \nabla T \right) + \frac{v}{C_p} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\psi}{\rho C_p} - \frac{\beta g}{C_p} T u_3 \quad (8.c)$$

On fait alors les hypothèses suivantes:

- i) La production de chaleur par frottement visqueux est faible ( $v \sim 10^{-6}$  et  $C_p \sim 4180$  J/kg.°C)
- ii) Le terme contenant le produit  $\beta u_3$  est également faible dans notre cas ( $u_3$  faible).
- iii) On suppose que  $\rho \equiv \rho_0 = \text{constante}$

Avec ces hypothèses, il s'ensuit que le bilan énergétique s'écrit:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}T) - \nabla(\gamma_T \nabla T) = R \quad (8.d)$$

où:

$\gamma_T$  : diffusivité thermique de l'eau ( $=k/\rho_0 C_p$ )

$R(x,t)$  : source interne de chaleur ( $=\psi/\rho_0 C_p$ )

### I.4.3) Conservation de la concentration en sédiment

La charge en sédiments ( $C_n$ ) transportée en suspension s'exprime par une équation de type convection-diffusion, mais comportant un terme de décantation sous l'effet de la vitesse de chute ( $w_{cn}$ ). Cette équation est donc donnée par:

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{cn}) C_n] - \nabla(\gamma_{cn} \nabla C_n) = R_{cn} \quad (9)$$

où:

$n$  : n<sup>ème</sup> classe de sédiment

$\mathbf{u}_{cn}(x,t)$  : vecteur vitesse de chute  $\mathbf{u}_{cn}(0,0,w_{cn})$

$R_{cn}(x,t)$  : terme source relative à la n<sup>ème</sup> classe de sédiment

$\gamma_{cn}$  : coefficient de diffusivité de la n<sup>ème</sup> classe

Une formulation vectorielle du système d'équations à résoudre est:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla(v\nabla\mathbf{u}) \quad (11)$$

$$\rho = \rho_0 [1 + F_p(S, T)] \quad (12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}S) - \nabla(\gamma_S \nabla S) = 0 \quad (13) \quad \text{S1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}T) - \nabla(\gamma_T \nabla T) = R \quad (14)$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{cn})C_n] - \nabla(\gamma_{cn} \nabla C_n) = R_{cn} \quad n=1, \dots, \text{nbclasse} \quad (15)$$

## II) EQUATION DE L'ECOULEMENT MOYEN DANS LE TEMPS

Le système (S1) ci-dessus décrit le mouvement instantané d'un écoulement turbulent pour un fluide incompressible et visqueux.

Avec les moyens de calcul actuels, on peut résoudre directement le système d'équations (S1) pour les mouvements à petite échelle dans certains cas simples. Cependant, ce type de simulations nécessite un énorme volume de stockage et temps de calcul, ce qui n'est pas envisageable pour des applications pratiques, telle que la modélisation océanique. En effet, les nombres de Reynolds atteints par la circulation en mer ou en estuaire sont extrêmement élevés, ce qui caractérise des écoulements fondamentalement turbulents. Pour contourner le problème, on s'intéresse en premier lieu aux valeurs exprimant l'écoulement moyen en temps. Pour cela Boussinesq (1877) décompose chaque variable instantanée en une valeur moyenne et une valeur fluctuante c'est à dire:

Pour une variable  $\varphi$  quelconque, on écrira:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi' \quad \text{avec:} \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} \varphi dt \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}' = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} \varphi' dt = 0 \quad (16)$$

La durée (T) sur laquelle on effectue la moyenne de  $\varphi$  doit être suffisamment longue par rapport à l'échelle de temps du mouvement turbulent.

En introduisant la décomposition (16) dans les équations du système (S1), puis en les moyennant sur la durée T, on obtient les équations de Navier-Stokes présentées par Reynolds (1895) qui décrivent le mouvement de l'écoulement moyen (équations 17 et 18). La nature quadratique du terme convectif dans l'équation de la quantité de mouvement du système (S1), fait apparaître des corrélations croisées des vitesses, appelées contraintes de Reynolds ou contraintes turbulentes ou flux turbulent.

Par une simple soustraction des équations (17) et (18) aux équations (10) et (11), on aboutit aux équations de Navier-Stockes pour les grandeurs turbulentes connues sous le nom d'équations de Reynolds (équations 20).

Si l'on projette l'équation du mouvement du système (S1) sur chacun des axes du repère  $(o, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ , on aura alors sous forme tensorielle le système suivant:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijp} \Omega_j \bar{u}_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (18)$$

$$\rho = \rho_0 [1 + F_p(S, T)] \quad (19)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j) + 2\varepsilon_{ijp} \Omega_j u'_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} - u'_i u'_j \right] \quad (20) \quad \text{S2}$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \quad (20.a)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{\phi}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \gamma \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} - \overline{u'_j \phi'_j} \right) + R \quad (21)$$

Avec:  $\phi$  : fonction scalaire (S, T)

$\gamma$  : diffusion moléculaire ( $\gamma_S, \gamma_T$ )

$$\tau_{ij} = \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_n}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{cn}) C_n] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \gamma_n \frac{\partial \bar{C}_n}{\partial x_j} - \overline{u'_j C'_n} \right] + R_{cn} \quad n=1, \dots, \text{nbclasse} \quad (23)$$

Dans ce qui suit, et par commodité d'écriture, on supprime les barres sur les grandeurs moyennes, en remplaçant  $(\bar{u}_i = U_i)$

### III) TURBULENCE ET FERMETURE DU SYSTEME

L'évolution spatio-temporelle des contraintes de Reynolds s'obtiennent à partir de l'équation (20) du système (S2) de la façon suivante (Donaldson 1973):

- 1) On multiplie l'équation dynamique pour les valeurs fluctuantes (équation 20) par  $u'_k$ .
- 2) Une équation équivalente est obtenue en permettant les indices (i et k).
- 3) Les équations issues des deux étapes précédentes sont ajoutées membre à membre.
- 4) On effectue la moyenne (au sens statistique) de l'équation qui en résulte, pour obtenir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\overline{u'_i u'_k})}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \overline{u'_i u'_k})}{\partial x_j} = & \underbrace{-\frac{g}{\rho} [\overline{\rho' u'_i \delta_{i3}} + \overline{\rho' u'_k \delta_{k3}}]}_1 - \underbrace{\left[ \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]}_2 + \underbrace{\frac{1}{\rho} \left[ \overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{p' \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} \right]}_3 \\
& \underbrace{-2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_j}}_4 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial(\overline{u'_i u'_k})}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} [\overline{p' u'_i \delta_{jk}} + \overline{p' u'_k \delta_{ij}}] \right]}_5 - \underbrace{2\Omega_j [\varepsilon_{ijp} \overline{u'_p u'_j} - 2\varepsilon_{kjp} \overline{u'_p u'_i}]}_6
\end{aligned} \tag{24}$$

Les termes de gauche de l'équation (24) représentent le transport par convection dans le mouvement moyen de la corrélation croisée  $\overline{u'_k u'_i}$ .

Les termes de droite s'interprètent comme suit:

- (1) :terme production-destruction de  $(\overline{u'_i u'_k})$  par les forces d'Archimède. Ce terme traduit l'effet d'une stratification de densité sur le transport turbulent.
- (2) :terme de production par le mouvement moyen.
- (3) :terme exprimant la tendance au retour à l'isotropie due à une redistribution de l'énergie cinétique entre les divers composants du tenseur par les fluctuations de pression. (Rotta 1951, Lewellen 1977).
- (4) :terme de dissipation de l'énergie cinétique turbulente par viscosité moléculaire.
- (5) :terme de diffusion de  $(\overline{u'_i u'_k})$  du respectivement à la convection moyenne liée au mouvement d'agitation, à la viscosité moléculaire et à l'action des fluctuations de pression.
- (6) :terme exprimant l'effet de l'accélération de Coriolis sur les contraintes de Reynolds.

Les équations (17) et (18) du système (S2) telles qu'elles sont exposées ci-dessus ne peuvent être convenablement résolues directement. En effet, l'opérateur moyen temporel fait apparaître des inconnues supplémentaires  $(\overline{u'_i u'_j}, \overline{u'_i \phi'})$  dans les équations (18 et 22) sans ajouter d'équations supplémentaires pour fermer le



système. Pour résoudre ce problème, Boussinesq a introduit en 1877, le concept de viscosité turbulente: il stipule que les contraintes de Reynolds sont proportionnelles aux gradients des vitesses moyennes comme dans le cas des contraintes visqueuses pour un écoulement laminaire. Cette constante de proportionnalité est appelée viscosité turbulente ( $\nu_t$ ), c'est à dire:.

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \quad i,j=1,2,3 \quad (25)$$

avec: 
$$K = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad i=1,2,3 \quad (26)$$

où K est l'énergie cinétique turbulente.

Moyennant le concept de la viscosité turbulente, l'équation dynamique (18) du système (S2) devient alors:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( p + \frac{2}{3} \rho K \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu_t + \nu) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (27)$$

D'une manière analogue avec le concept de la viscosité turbulente, on définit la diffusivité turbulente pour une fonction scalaire (S, T ou  $C_n$ ):

$$-\overline{u'_j \phi'} = \gamma_t \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad (28)$$

Et l'équation (21) du système (S2) devient alors:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\gamma_t + \gamma) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] + R \quad (29)$$

Dans les zones de turbulence, la viscosité et la diffusivité turbulente sont beaucoup plus grandes que les termes laminaires correspondants ( $\nu$  et  $\gamma$ ) qui sont souvent négligés. Dans le cadre de cette étude et du point de vue numérique, ces termes seront conservés pour éviter un terme diffusif nul.

Désormais, on note par ( $\nu_t$  et  $\gamma_t$ ) les coefficients de viscosité et de diffusivité turbulente englobant la viscosité et la diffusivité moléculaire.

## **IV) MODELISATION DE LA TURBULENCE**

La diffusion de la quantité de mouvement et du scalaire  $\phi$  par la turbulence possède des caractéristiques différentes selon les différentes directions de l'écoulement. On est souvent amené à distinguer les coefficients de mélange turbulent horizontal des coefficients de viscosité turbulente verticale (Blumberg & Mellor 1987), Sheng 1982, Delhez et Martin 1994).

### **IV.1) Turbulence verticale**

Si en écoulement laminaire, on peut accorder à l'échafaudage des couches fluides, un certain caractère ordonné, aucune régularité, ni périodicité n'apparaissent dans un mouvement turbulent. Un brassage très complexe des couches de fluides remplace alors la stabilité observée dans les écoulements laminaires. Ce brassage est aisément mis en évidence dans l'expérience de Reynolds (D'Allonnes 1994). Ainsi le désordre apparaît au sein du fluide rendant très difficile l'étude de ce type d'écoulements.

Le physicien soviétique Landau expliquait que les mouvements irréguliers de la turbulence hydrodynamique sont la superposition d'un certain nombre d'oscillations périodiques. D'autre part, Takens et Ruelle (1971) proposait une autre explication, basée sur la théorie mathématique des systèmes dynamiques faisant intervenir les notions des attracteurs étranges et du chaos mettant en défaut l'explication avancée par Landau. Ces divergences dans la définition et l'explication de la turbulence montre que ce phénomène n'obéit à aucune théorie précise. Cependant, ce désordre n'est pas parfait, de sorte qu'une analyse statistique des phénomènes liés à la turbulence permet de dégager certains caractères.

L'approche statistique consiste à se préoccuper exclusivement de propriétés de l'écoulement moyen, lorsqu'on permet aux inconnus turbulents de fluctuer autour de leur valeur moyenne, on rencontre dès lors et d'emblée, une insurmontable difficulté qui tient à la non linéarité des équations du système (S2). En fait, dans ces équations, on dénombre plus d'inconnues que d'équations, et ce en raison de l'agitation turbulente. Il convient alors, pour disposer d'un système résoluble, d'émettre des hypothèses sur la liaison de ces nouvelles inconnues aux grandeurs moyennes, ou de construire des équations supplémentaires. C'est le problème de la fermeture turbulente.

¶ Dans la théorie de la turbulence, on s'efforce de chercher des lois qui permettent d'exprimer les tensions de Reynolds, par exemple, en fonction des caractéristiques

du mouvement moyen. On distingue alors deux approches principales de fermeture turbulente, l'une est au premier ordre, l'autre au second ordre.

#### *IV.1.1) Modélisation au premier ordre*

Une illustration élémentaire et simpliste de la fermeture dite du premier ordre, encore fréquemment utilisée par de nombreux océanographes, s'appuie sur le concept de Boussinesq qui relie les flux turbulents aux variations spatiales de l'écoulement moyen par l'intermédiaire d'un simple coefficient de viscosité turbulente. Dans ce type de paramétrisation, le problème de la modélisation se ramène à la détermination d'un couple d'échelles caractéristiques de vitesse et de longueur.

Il est à noter que contrairement à la viscosité moléculaire où les échelles sont empruntées au mouvement d'agitation des molécules, la viscosité turbulente doit être caractérisée par des échelles représentatives du mouvement turbulent lui-même. Par conséquent, le problème de la fermeture des équations persiste. Ceci nous amène à considérer des modèles de la turbulence qui s'appuient sur des équations supplémentaires.

##### *a) Modèle à zéro équation: longueur de mélange*

Prandtl (1925) introduit avec succès la notion de la longueur de mélange, qui par analogie avec le libre parcours moyen utilisé en théorie cinétique des gaz, fait apparaître une certaine longueur  $\ell_m$  pendant laquelle les caractéristiques de la turbulence sont conservées.

Dans le cas d'un écoulement moyen bidimensionnel dans le plan  $(x, z)$ , la fluctuation de la vitesse est prise proportionnellement au gradient des vitesses moyennes suivant la relation (Schlichting 1968, Tennekes et Lumley 1972):

$$u' \equiv \ell_m(z) \frac{\partial U}{\partial z} \quad (30)$$

Prandtl admet que la quantité  $|w'|$  est de même ordre que  $|u'|$  et qu'il y a une corrélation entre  $u'$  et  $w'$ . Pour lier le signe de la tension turbulente avec celui du gradient de vitesse, il écrit:

$$-\overline{u'w'} = \ell_m^2(z) \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \frac{\partial U}{\partial z} \quad (31)$$

La viscosité turbulente est défini alors par:

$$v_t = \ell_m^2(z) \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \quad (32)$$

Par analogie avec le concept de la viscosité turbulente, la diffusivité turbulente est défini par:

$$-\overline{w'\phi'} = \gamma_t \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (33)$$

On définit également le nombre de Prandtl par la relation:

$$\sigma_\theta = \frac{v_t}{\gamma_t} \quad (34)$$

Les mesures expérimentales (Rodi 1980) montrent que ce nombre varie peu au sein d'un même écoulement homogène et que ses variations d'un écoulement à l'autre, sont faibles. On notera cependant que les effets gravitaires au sein d'un fluide stratifié modifient notablement cette valeur, comme on le verra dans le paragraphe suivant.

Rodi (1984) généralise l'expression de la viscosité turbulente pour un écoulement tridimensionnel par la formulation suivante:

$$v_t = \ell_m^2(z) \left[ \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right]^{\frac{1}{2}} \quad i=1,2 ; j=3 \quad (35)$$

La longueur du mélange  $\ell_m$  dépend du type de l'écoulement considéré. Elle peut être spécifiée d'une manière empirique ou semi-empirique de façon à représenter les gros tourbillons associés à l'écoulement turbulent Rodi (1980). En outre, contrairement au modèle à viscosité constante, le modèle de longueur de mélange donne de bons résultats dans le cas d'écoulements de type "couches limites" où on peut admettre un équilibre local entre production d'énergie cinétique et son taux de dissipation comme le précise Mellor et Yamada (1974).

Des formules empiriques ont été proposées par différents auteurs pour  $\ell_m$ . Chacune dépend de la nature de l'écoulement. A titre d'exemple, on cite,, la formulation relative aux écoulements à surface libre largement utilisée dans les écoulements à

faibles profondeurs. Elle est basée sur l'hypothèse que la taille des tourbillons est limitée par la présence du fond et de la surface, elle est donnée par Johns (1991) :

$$\ell_m(z) = \frac{\kappa(z+d+z_{0b})(\eta-z+z_{0s})}{(\eta+d+z_{0b}+z_{0s})} \quad (36)$$

où:

- d : hauteur d'eau.
- $\eta$  : l'élévation de la surface libre.
- $z_{0b}$  : rugosité du fond.
- $z_{0s}$  : rugosité de la surface.
- $\kappa$  : constante de Von Karman 0.41

Lorsqu'on tend vers le fond ( $z \rightarrow -d$ ) ou la surface ( $z \rightarrow \eta$ ), la relation (36) tend vers le formalisme des écoulements de type "couche limite" pour lequel on admet que l'échelle de longueur  $\ell_m$  est proportionnelle à l'étendue transversale de l'écoulement, c'est à dire:

$$z \rightarrow \eta \quad \ell_m \equiv \kappa(\eta - z + z_{0s}) \quad (37.a)$$

$$z \rightarrow -d \quad \ell_m \equiv \kappa(z + d + z_{0b}) \quad (37.b)$$

Lewellen (1975), note qu'une "petite" variation de densité est suffisante pour modifier d'une façon sensible le caractère turbulent de l'écoulement en présence de l'accélération gravitationnelle. La correction des paramètres turbulents en milieu stratifié est donc prise en compte par des relations empiriques via le nombre de Richardson (Ri) définit par:

$$Ri = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \quad (38)$$

Ainsi se sont développés des paramétrisations empiriques pour la correction de la longueur de mélange. Les expressions les plus couramment utilisées sont celles de Munk et Anderson (1948) qui proposent deux relations différentes, une pour la viscosité turbulente et l'autre pour la diffusivité turbulente soient:

$$\ell_{m,v} = \ell_0 (1 + 10Ri)^{-0.5} \quad (39)$$

$$\ell_{m,d} = \ell_0 (1 + 3.33Ri)^{-1.5} \quad (40)$$

où:

$\ell_0$  : La longueur de mélange dans le cas d'une stratification neutre (Ri=0).

$\ell_{m,v}$  : La longueur de mélange relative à la viscosité turbulente.

$\ell_{m,d}$  : Longueur de mélange relative à la diffusivité turbulente.

De même, on définit le nombre de Prandtl pour un fluide stratifié par:

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta 0} \frac{(1+10\text{Ri})^{-0.5}}{(1+3.33\text{Ri})^{-1.5}} \quad (41)$$

où  $\sigma_{\theta 0}$  est le nombre de Prandtl dans le cas d'une stratification neutre.

Comme toutes paramétrisations empiriques, les modèles à zéro équation présentent trois inconvénients majeurs qui sont:

- 1) manque d'universalité: les lois d'échelle de longueur sont trop empiriques et supposent une connaissance au préalable de l'écoulement à calculer.
- 2) l'impossibilité de calcul de l'énergie cinétique turbulente qui constitue un paramètre important dans l'estimation de l'intensité des fluctuations de la turbulence.
- 3) l'application aux écoulements stratifiés est l'une des limitations principales (Sauvaget 1987).

Pour combler ces lacunes, se sont développés des modèles plus performants dans lesquels l'échelle de la longueur  $\ell_m$  est fonction d'un ou plusieurs paramètres de la turbulence.

### *b) Modèle à une équation*

Le modèle de la turbulence à une équation a été introduit par Prandtl (1945). Il permet le calcul de l'énergie cinétique turbulente K suivant une équation de transport directement déduite des équations (24) par contraction des indices (i=k), c'est à dire:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial(U_j K)}{\partial x_j}}_C = - \underbrace{\frac{g}{\rho} \overline{\rho' u'_i} \delta_{i3}}_G - \underbrace{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_P - \underbrace{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_E - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{K u'_j} - \nu \frac{\partial K}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \overline{u'_i p} \delta_{ij} \right]}_D \quad (42)$$

où:

- C : Transport de l'énergie cinétique turbulente par convection.  
 G : Production-destruction de l'énergie cinétique turbulente par les forces d'Archimède.  
 P : Production de l'énergie cinétique turbulente par cisaillement.  
 E : Dissipation de l'énergie cinétique turbulente par viscosité.  
 D : Transport de l'énergie cinétique turbulente par diffusion.

L'équation (42) ne peut être utilisée directement pour la modélisation de la turbulence. En effet, comme pour les équations du mouvement, cette équation contient de nouvelles corrélations inconnues ( $\overline{\rho'u'_i}$ ,  $\overline{Ku'_j}$ ,  $\overline{p'u'_i}$ ) et le problème de la fermeture se pose à nouveau.

Pour pallier ce problème, on utilise le concept de Boussinesq associé aux équations de transport d'une quantité scalaire, on pose alors:

$$-\overline{\rho'u'_i} = \frac{v_t}{\sigma_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (43)$$

$$-\overline{Ku'_j} - \frac{1}{\rho} \overline{u'_i p} \delta_{ij} = \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial x_j} \quad (44)$$

où  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_k$  sont les analogues du nombre de Prandtl relatifs respectivement à la densité et à l'énergie cinétique turbulente.

Le terme de la dissipation  $\epsilon$  est généralement paramétrisé par:

$$\epsilon = C_\mu \frac{K^{1.5}}{\ell_m} \quad (45)$$

où  $C_\mu$  est une constante empirique et  $\ell$  est une longueur de turbulence comparable à la longueur de mélange défini précédemment.

Avec les relations (43, 44, 45) l'équation de l'énergie cinétique turbulente (42) devient:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial(U_j K)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{v_t}{\sigma_k} + v \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + v_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{v_t}{\sigma_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} - C_\mu \frac{K^{1.5}}{\ell_m} \quad (46)$$

La viscosité turbulente est donnée en fonction de  $K$  et de  $\ell_m$  par la relation:

$$v_t = C_\mu K^{1.5} \ell_m \quad (47)$$

L'échelle de longueur  $\ell_m$  sera prescrite de façon empirique ou semi-empirique comme dans les modèles à zéro équation. Les constantes  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_p$  sont déterminées de manière expérimentale à partir des configurations d'écoulements particuliers Rodi (1984). La simplicité et le faible coût d'utilisation de ce modèle dit à une équation (une équation supplémentaire) le rendent populaire pour les simulations des phénomènes complexes (Bradshaw et al. 1981, Johnson et King, 1984 et Sauvaget, 1987).

### c) Modèle à deux équations

La principale faiblesse des modèles à une équation réside toujours dans la difficulté de trouver une loi algébrique correcte pour l'échelle de longueur  $\ell_m$ . Ce problème peut être contourné en déterminant  $\ell_m$  par le biais d'une deuxième équation de transport.

Kolmogorov, (1942) peut être considéré comme le père de la modélisation de la turbulence. Il a été le premier à schématiser les phénomènes qui régissent un écoulement turbulent par la résolution de deux équations de transport où les variables dépendantes seraient l'énergie cinétique turbulente (K) et sa fréquence ( $\sqrt{K}/\ell_m$ ) (Rodi, 1984).

En général, les modèles à deux équations utilisent une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente (K) et une autre pour une variable définie par ( $Z = K^p \ell_m^q$ ). Le choix des valeurs (p, q) aboutit à différentes variantes passées en revue par Launder et al. (1984) et dont nous donnons quelques exemples de base au (tableau 1) (Rodi, 1984).

Auteur	Année	Variables dépendantes
Kolmogorov	1942	K , ( $\sqrt{K}/\ell$ )
Prandtl	1945	K , $\ell$ empirique
Rotta	1951	K , (K $\ell$ )
Harlow	1967	K , (K <sup>1.5</sup> / $\ell$ )
Kovaszny	1969	K , ( $\sqrt{K}.\ell$ )
Spalding	1969	K , (K/ $\ell^2$ )

Tableau 1 : Exemple des premiers modèles de la turbulence



Le modèle populaire, vraisemblablement le plus utilisé en écoulements industriels, reste de loin le modèle standard (K-ε), initialement proposé par Harlow et Nakayama, (1968). Il a été repris par Jones et Launder, (1972), Launder et al (1972) puis Launder et Spalding, (1974). Ce modèle fait appel à des équations de conservations relatives à l'énergie cinétique turbulente (K) et son taux de dissipation (ε) défini par l'expression (45).

L'équation de l'évolution spatio-temporelle du taux de dissipation (ε) peut être obtenue par des simples transformations des équations des corrélations doubles (expression 23). Cette équation est présentée par Rodi, (1984) comme suit:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (U_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{K} (P + C_{3\varepsilon} G) - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (48)$$

avec:

$$P = v_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (49)$$

$$G = \frac{g v_t}{\rho \sigma_\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (50)$$

où  $\sigma_\varepsilon, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_{3\varepsilon}$  sont des constantes empiriques.

La paramétrisation de la viscosité turbulente par le modèle (K-ε) s'exprime alors par:

$$v_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (51)$$

Le modèle (K-ε) a fourni dans la plupart des cas des résultats satisfaisants. Il est toutefois signalé de ne pas perdre de vue les faiblesses que peuvent présenter ce type de modèle (Ha Minh-Hieu, 1987):

- 1) Sur le plan fondamental, utiliser le concept de viscosité turbulente (équation 25) revient à attribuer aux contraintes turbulentes (grandeurs ayant une origine convective non linéaire) un caractère diffusif de type gradient donc de nature linéaire. Par conséquent, il faut s'attendre à ce que les effets de la turbulence stabilisent les mécanismes instationnaires issus de la non linéarité des équations des corrélations doubles (équations de Reynolds).

2) Dans certains type d'écoulements les termes sources (production-destruction) de l'énergie cinétique turbulente d'une part et du taux de dissipation turbulente d'autre part sont quasi-proportionnels entre eux. De ce fait, une simulation numérique avec une viscosité constante (donc faux régime laminaire) conduit généralement à des résultats analogues à ceux donnés par le concept de viscosité turbulente représentée par  $(K^2/\epsilon)$ , mais à des coûts de calcul bien moins élevés.

#### IV.1.2) Modélisation au second ordre

Pour les écoulements industriels, on constate un réel progrès de la part de la modélisation au second ordre (Hanjalic et Launder, 1972) qui constitue le deuxième type de fermeture turbulente.

En soulignant qu'il existe des circonstances particulières où le frottement turbulent ne s'annule pas avec les gradients de vitesse moyenne, Hanjalic et Launder, (1972) ont remplacé l'expression (25) par une équation de transport pour les corrélations  $(\overline{u'_i u'_k})$  (équation 24) considérées comme une quantité transportable. Cette démarche a été ensuite étendue à l'ensemble des contraintes turbulentes.

On rappelle l'équation des contraintes de Reynolds (Donaldson, 1973):

$$\frac{\partial(\overline{u'_i u'_k})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u_j u'_i u'_k})}{\partial x_j} = -\frac{g}{\rho} [\overline{\rho' u'_i \delta_{i3}} + \overline{\rho' u'_k \delta_{k3}}] - \left[ \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{\rho} \left[ \overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{p' \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} \right] \quad (50)$$

$$- 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial(\overline{u'_i u'_k})}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} [\overline{p' u'_i \delta_{jk}} + \overline{p' u'_k \delta_{ij}}] \right] - 2\Omega_j [\epsilon_{ijp} \overline{u'_p u'_j} - 2\epsilon_{kjp} \overline{u'_p u'_i}]$$

Plusieurs auteurs (Rotta, 1951, Hanjalic et Launder, 1972, Launder et Spalding 1972, Lewellen 1977, Rodi 1980, Mellor et Yamada 1982) ont proposé diverses formulations pour modéliser les termes supplémentaires  $(\overline{u'_i u'_j u'_k}, \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j})$  apparus

dans l'équation (50) lors de la dérivation des équations de Reynolds (Hinze 1959). La différence entre ces formulations est observée au niveau des coefficients empiriques introduits dans les modèles auxiliaires ((K- $\ell$ ) ou (K- $\epsilon$ )) pour fermer le système. Ces coefficients sont déterminés par l'analyse des données pour une catégorie plus ou moins étendue d'écoulements.

A titre d'exemple, nous exposons ci-dessous la modélisation proposée par Lewellen (1977):

- 1) Le terme de corrélation triple exprime un processus par lequel les tensions de Reynolds sont conservativement transmises d'une région à l'autre. La représentation la plus simple de ce terme est donnée par:

$$-\overline{u'_i u'_j u'_k} + v \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} [\overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_k} \delta_{ij}] = v_c \sqrt{K} \Lambda \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j} \quad (51)$$

où  $\Lambda$  représente la macro-échelle de la turbulence et  $v_c$  une constante empirique ( $v_c=0.3$ )

- 2) Le terme de la dissipation représente l'effet de la destruction visqueuse sur les tensions de Reynolds. Il est modélisé sous la forme:

$$v \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_j} = \frac{b}{3} \delta_{ik} \frac{K^{1.5}}{\Lambda} \quad (52)$$

où  $b$  est constante empirique égale à 0.125.

- 3) Le terme de corrélation pression-vitesse redistribue l'énergie turbulente produite par l'écoulement moyen:

$$\frac{1}{\rho} \left( \overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{p' \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} \right) = \frac{\sqrt{K}}{\Lambda} \left( \overline{u'_i u'_k} - \delta_{ik} \frac{K}{3} \right) \quad (53)$$

Les relations (51, 52, 53) substituées dans l'équation (50) donnent donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \overline{u'_i u'_k}) = & -\frac{g}{\rho} [\overline{p' u'_i} \delta_{i3} + \overline{p' u'_k} \delta_{k3}] - \left[ \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] + \frac{\sqrt{K}}{\Lambda} \left( \overline{u'_i u'_k} - \delta_{ik} \frac{K}{3} \right) \\ & - \frac{2}{3} b \delta_{ik} \frac{K^{1.5}}{\Lambda} + v_c \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{K} \Lambda \frac{\partial (\overline{u'_i u'_k})}{\partial x_j} \right) - 2\varepsilon_{ijp} \Omega_j \overline{u'_p u'_i} - 2\varepsilon_{kpi} \Omega_p \overline{u'_j u'_i} \end{aligned} \quad (54)$$

L'apparition dans l'équation (54) de l'énergie cinétique turbulente ( $K$ ) et de la macro-échelle de la longueur de la turbulence ( $\Lambda$ ), nécessite l'introduction de deux autres équations de transport relatives à ces deux quantités pour fermer le système (Lewellen 1977 et Sheng 1982,1984). En effet, l'équation pour l'énergie cinétique turbulente s'obtient par contraction d'indice dans l'équation (54), il vient donc:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j K) = \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{g}{\rho} \overline{\rho' u'_j} + v_c \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{K} \Lambda \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) - b \frac{K^{1.5}}{\Lambda} \quad (55)$$

et l'équation pour la macro-échelle ( $\Lambda$ ) est donnée par:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j \Lambda) = s_1 \frac{\Lambda}{K} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + s_2 \sqrt{K} + v_c \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{K} \Lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} \right) + \frac{s_3}{\sqrt{K}} \left( \frac{\partial(\sqrt{K} \Lambda)}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{s_4}{K} g \Lambda \overline{\rho' u'_j} \quad (56)$$

où  $s_1, s_2, s_3, s_4$  sont des nouvelles constantes expérimentales qui valent respectivement, 0.35, 0.6b, -0.375 et -0.8.

Pour fermer le système des équations (54, 55, 56), il faut donc ajouter deux équations de transport, une pour les corrélations densité-vitesse ( $\overline{\rho' u'_j}$ ) et l'autre pour les corrélations densité-densité ( $\overline{\rho' \rho'}$ ). Au total, ce système comportera douze équations aux dérivées partielles. Il est par conséquent lourd et coûteux à résoudre. C'est cet handicap qui a motivé le développement des modèles simplifiés pour la fermeture de la turbulence. Lewellen (1977) a utilisé la notion de l'équilibre local de la turbulence en supposant qu'à l'état d'équilibre, la production de turbulence est équivalente à la dissipation visqueuse. Cela revient donc à négliger les termes d'évolution temporelle et de diffusion dans l'équation de transport des corrélations doubles (équation 54). Cette hypothèse est justifiée lorsque l'échelle de temps caractéristique du mouvement turbulent ( $\Lambda/\sqrt{K}$ ) est petite devant l'échelle de temps de l'écoulement moyen et que les quantités turbulentes varient peu sur l'échelle de la longueur  $\Lambda$ . Sous ces hypothèses, la turbulence est donc modélisée par une équation de l'énergie cinétique turbulente et une équation de la macro-échelle de longueur de la turbulence.

Il est à noter que le point fort de cette formulation réside dans le fait que l'influence de la stratification n'est plus fonction de la loi de proportionnalité entre la diffusivité et la viscosité turbulente, ainsi on obtient Villaret (1987):

$$v_t = 0.25 \frac{\Lambda \sqrt{K} \left[ 1 + \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{b.s} \right) G \right]}{\left[ 1 - 2 \left( 1 + \frac{1}{b.s} \right) G \right] [1 - G]} \quad (57)$$

$$\gamma_t = -\frac{1}{3} \frac{\Lambda \sqrt{K}}{\left( 2 + \frac{1}{b.s} - \frac{1}{G} \right) G} \quad (58)$$

Avec

$$G = \frac{g\Lambda^2}{A\rho_0 K} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (59)$$

où A et s sont des constantes qui valent respectivement 0.75 et 2.8.

Bien que la modélisation au second ordre soit développée depuis plus d'une quinzaine d'années, elle n'a pas été souvent appliquée pour les écoulements complexes, là où elle a sa raison d'être. Car paradoxalement, la complexité de la résolution numérique fait que cette classe de modélisation n'est appliquée qu'aux écoulements simples, pour lesquels les modèles à concept de viscosité turbulente est souvent suffisant. De plus, ce type de modélisation a l'avantage de renforcer les termes linéaires dans les équations de transport à résoudre.

#### **IV.2) Turbulence horizontale**

Malgré la contribution turbulente, les effets de la diffusion dans le plan horizontale reste faible devant la convection horizontale pour les types d'écoulements qui nous intéressent. Ce constat a conduit certains auteurs à les négliger (Vasiliev et al. 1973). De ce fait et désormais comme nous l'avons mentionné ci-dessus, pour l'ensemble les équations à résoudre, nous distinguons les coefficients de mélange horizontal ( $A_h, D_h$ ) et les coefficients de mélange verticaux ( $A_v=v_v, D_v=\gamma_t$ ).

Il semble impossible de donner une définition précise à ces coefficients puisqu'ils traduisent des caractéristiques physiques propres à chaque secteur géographique. Certains modèles (Salomon 1980, Sauvaget 1987) utilisent les résultats des travaux d'Elder (1959), qui en étendant la théorie de Taylor établie pour un écoulement dans un tube aux écoulements uniformes permanents exprime  $A_h$  par:

- Suivant la direction de l'écoulement:

$$A_{hx} = 5.93Hu_* \quad (60.a)$$

- Suivant la direction normale à l'écoulement:

$$A_{hy} = 0.23Hu_* \quad (60.b)$$

où H est la hauteur d'eau totale et  $u_*$  la vitesse de frottement sur le fond dont la signification est fournie au paragraphe(VII.1.1).

Les relations (60.a) et (60.b) ne fournissent qu'un ordre de grandeur des coefficients de mélange horizontal. Ceux-ci étant fonction d'un grand nombre de facteurs tels

que la morphologie du fond, les caractéristiques des courants, des sédiments, de la stratification, l'action du vent, etc. Leurs valeurs numériques ne peuvent-êtré généralisées simplement sans avoir recours à la mesure. En annexe (1.1), nous donnons un exemple de calcul des coefficients de diffusion horizontale à partir des mesures *in situ* (Murthy 1976).

Dans le cadre de cette étude, nous suivrons la paramétrisation de Smagorinsky (1963) utilisée par Tag et al. (1979), Hess (1985) et Blumberg et Mellor (1987) qui s'exprime par la relation suivante:

$$A_h = C_{ah} \Delta x \Delta y \left[ 2 \left\{ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right\} + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (61.a)$$

$$D_h = A_h \quad (61.b)$$

où:

$C_{ah}$  : Constante empirique.

$\Delta x, \Delta y$  : Pas du maillage suivant x et y.

$\bar{u}, \bar{v}$  : Composantes horizontales du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  intégrée sur la hauteur d'eau.

Comme nous l'avons précisé précédemment, les coefficients de mélange horizontal dépendent fortement du secteur géographique étudié. Cependant, il est important de noter que cette propriété s'avère très utile sur le plan numérique car les variations de ces coefficients permettent le calibrage des modèles numériques. Nous soulignons aussi que le caractère diffusif de ces coefficients profite au lissage des solutions numériques éventuellement rendues instables par une convection dominante.

## V) APPROXIMATIONS

La résolution du système d'équations (S1) nécessite l'introduction de certaines approximations supplémentaires, généralement utilisées dans la dynamique des écoulements océaniques et côtiers. Ces approximations sont:

### V.1) Approximation de Boussinesq (1903)

Pour un fluide stratifié, la densité est supposée constante, exceptée dans le terme gravitaire. Le détail de cette approximation est présenté par Phillips (1966).

Elle suppose que les variations spatio-temporelles de la densité  $\rho(x,t)$  par rapport à la densité de référence de l'eau  $\rho_0$ , restent faibles en tout point et à tout instant.

## V.2) Approximation $\beta$ -plan

Les modèles numériques des écoulements géophysiques, sont généralement utilisés pour l'étude des zones limitées de l'océan. Pour prendre en compte la sphéricité de la terre, Rossby (1939) introduit l'approximation  $\beta$ -plan qui consiste à approcher la composante verticale du vecteur rotation  $\Omega$  (annexe 1.2) par une fonction linéaire en  $y$ , donnée par la relation:

$$f = f_0 + \beta y \quad (62)$$

Avec

$$\begin{aligned} f_0 &= 2\|\Omega\| \sin(\phi) \\ \beta &= 2\|\Omega\| \cos(\phi)/R \end{aligned} \quad (63)$$

$R$  étant la courbure de la terre.

Dans Leblond et al. (1978), on trouve un développement complet des hypothèses permettant l'obtention de cette approximation.

## V.3) Approximation hydrostatique

Si l'on considère que les mouvements horizontaux sont prépondérants, comparés aux mouvements verticaux, les variations de pression sur la colonne d'eau ne dépendent alors que du champ de densité. Pour justifier cette approximation, on procède par une analyse dimensionnelle qui permet d'étudier l'importance relative de chaque terme de la troisième équation de la quantité du mouvement.

Considérons un écoulement de profondeur ( $D$ ) caractérisant l'échelle du mouvement verticale, de même on suppose que l'échelle du mouvement horizontal est caractérisée par une longueur ( $L$ ).

Pour la théorie des écoulements régis par des équations de type "Shallow Water" utilisées dans cette étude, les grandeurs ( $D$ ) et ( $L$ ) vérifient la relation suivante:

$$\delta = \frac{D}{L} \ll 1 \quad (64)$$

Supposant que ( $U$ ) est une grandeur caractérisant l'échelle de vitesses horizontales, de l'équation de la continuité (10), on en déduit:

$$W = O(\delta U)$$

où, (W) est une grandeur caractérisant l'échelle de vitesse verticale.

Si l'on écrit l'équation de la quantité du mouvement relative à la troisième composante du vecteur vitesse  $u(u, v, w)$ , on obtient alors:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial ww}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_h \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A_h \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (65)$$

Si (T) est une échelle de temps caractérisant le mouvement horizontal, alors on peut écrire formellement:

$$L = UT \quad , \quad A_h = UL \quad , \quad A_v = WD$$

De la relation (64) on a:  $L = \frac{D}{\delta}$ , moyennant les relations ci-dessus, on a:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \approx \frac{W}{T} = \frac{WU}{L} = O(\delta U) \frac{U}{L} = O\left(\frac{\delta U^2}{L}\right) = O\left(\frac{\delta^2 U^2}{D}\right) \quad (65.a)$$

$$\frac{\partial uw}{\partial x} \approx \frac{UW}{L} = O\left(\frac{\delta^2 U^2}{D}\right) \quad (65.a)$$

$$\frac{\partial vw}{\partial y} \approx \frac{UW}{L} = O\left(\frac{\delta^2 U^2}{D}\right) \quad (65.b)$$

$$\frac{\partial ww}{\partial z} \approx \frac{WW}{D} = \frac{O(\delta U) \cdot O(\delta U)}{D} = O\left(\frac{\delta^2 U^2}{D}\right) \quad (65.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( A_h \frac{\partial w}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{L} \left( \frac{ULW}{L} \right) = O\left(\frac{\delta^2 U^2}{D}\right) \quad (65.d)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( A_h \frac{\partial w}{\partial y} \right) \approx \frac{1}{L} \left( \frac{ULW}{L} \right) = O\left(\frac{\delta^2 U^2}{D}\right) \quad (65.e)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial w}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{D} \left( \frac{WDW}{D} \right) = O\left(\frac{\delta^2 U^2}{D}\right) \quad (65.f)$$

Si l'on accepte une erreur au moins de l'ordre de  $O(\delta^2)$ , une sommation membre à membre des relations (65.a-65.f) montre que seulement le gradient vertical de pression est en équilibre avec la force d'Archimède et on peut écrire:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g + O(\delta^2) \quad (66)$$



La relation (66) constitue l'approximation hydrostatique.

Avec les approximations citées ci-dessus, le système (S3) des équations tridimensionnelles à résoudre s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (67)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u u}{\partial x} + \frac{\partial v u}{\partial y} + \frac{\partial w u}{\partial z} - f v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - g + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2A_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (68)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u v}{\partial x} + \frac{\partial v v}{\partial y} + \frac{\partial w v}{\partial z} + f u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - g + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2A_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (69)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (70)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u S}{\partial x} + \frac{\partial v S}{\partial y} + \frac{\partial w S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_v \frac{\partial S}{\partial z} \right) \quad (71) \quad (S3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial v T}{\partial y} + \frac{\partial w T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_v \frac{\partial T}{\partial z} \right) + R \quad (72)$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} + \frac{\partial u C_n}{\partial x} + \frac{\partial v C_n}{\partial y} + \frac{\partial [(w - w_{cn}) C_n]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial C_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial C_n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_v \frac{\partial C_n}{\partial z} \right) + R_{cn} \quad (73)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial u K}{\partial x} + \frac{\partial v K}{\partial y} + \frac{\partial w K}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial K}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial K}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_v \frac{\partial K}{\partial z} \right) + A_v \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (74)$$

$$+ \frac{g}{\rho_0} D_v \frac{\partial \rho}{\partial z} - C_\mu \frac{K^{1.5}}{\ell}$$

$$\ell = \frac{\kappa z \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \ell_0}{\ell_0 + \kappa z \left( 1 - \frac{z}{H} \right)} \quad \text{Avec: } \ell_0 = \alpha \frac{\int_{-h}^{\eta} z \sqrt{K} dz}{\int_{-h}^{\eta} \sqrt{K} dz} \quad \alpha: \text{ constante} \quad (75)$$

## VI) TRANSFORMATION DES EQUATIONS

## VI.1) Equations intégrées sur la largeur

Le domaine d'étude peut contenir des rivières et des estuaires, qui se caractérisent par une dynamique particulière. Ces deux types de milieu naturel sont sièges d'intenses interactions entre des phénomènes physiques, chimiques, biologiques et sédimentologiques, il est donc souhaitable de traiter ces zones d'une manière particulière afin de bien représenter ces phénomènes.

Dans les rivières, les gradients horizontaux de toute variable caractérisant l'écoulement sont faibles face aux gradients verticaux. Il est donc naturel, tant que les variables transversales conservent un caractère secondaire de décrire les phénomènes par la valeur des variables moyennées sur la dimension horizontale ( $x$  ou  $y$ ) (Sauvaget 1987, Salomon 1980).

La procédure de l'intégration sur la largeur (figure 2) est faite de la même manière que celles de Blumberg (1975, 1978), Wang et Kravitz (1980). Elle consiste à supposer que la largeur de l'écoulement notée  $B_x$  et  $B_y$  ne dépend ni de la profondeur ( $z$ ) ni du temps ( $t$ ). L'intégration détaillée des équations est donnée en annexe (1.3).

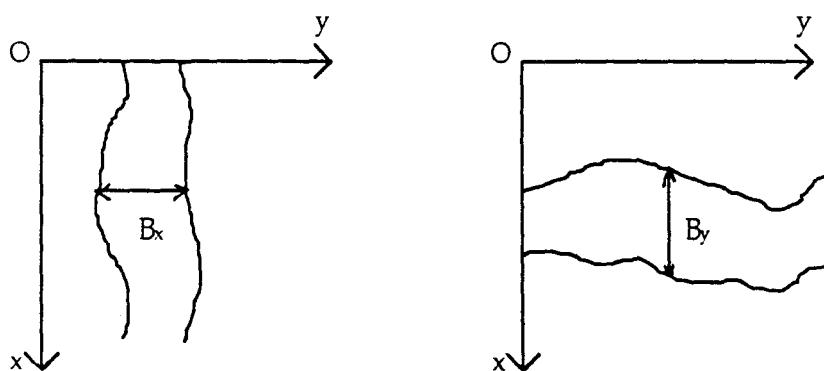


Figure 2 : Largeurs de rivière  $B_x$  et  $B_y$

De point de vue pratique, un paramètre  $\beta_c$  a été introduit pour permettre l'adaptation automatique de l'ensemble des équations du modèle au secteur d'étude (bidimensionnel vertical pour les rivières ou tridimensionnel pour les océans). Avec l'introduction des paramètres  $B_x$ ,  $B_y$  et  $\beta_c$  le système (S3) donne le nouveau système d'équations (S4):

$$\frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (B_x u) + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial x} (B_y v) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (76)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (B_x uu) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2A_h B_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{B_x} \beta_c C_{ws} u|u| \quad (77)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial x} (vu) + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} (B_y vv) + \frac{\partial}{\partial z} (vw) + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2A_h B_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_h \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{B_y} \beta_c C_{ws} v|v| \quad (78)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (79)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x uS - B_x D_h \frac{\partial S}{\partial x} \right] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y vS - B_y D_h \frac{\partial S}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ wS - D_v \frac{\partial S}{\partial z} \right] = 0 \quad (80)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x uT - B_x D_h \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y vT - B_y D_h \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ wT - D_v \frac{\partial T}{\partial z} \right] = R \quad (81)$$

$$\rho = \rho_0 [1 + F_p(S, T)] \quad (82) \quad (S4)$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x uC_n - B_x D_h \frac{\partial C_n}{\partial x} \right] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y vC_n - B_y D_h \frac{\partial C_n}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (w - wc_n) C_n - D_v \frac{\partial C_n}{\partial z} \right] = R_{cn} \quad n=1, \dots, \text{nbclasse} \quad (83)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x uK - B_x D_h \frac{\partial K}{\partial x} \right] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y vK - B_y D_h \frac{\partial K}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ wK - D_v \frac{\partial K}{\partial z} \right] = A_v \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{g}{\rho_0} D_v \frac{\partial \rho}{\partial z} - C_\mu \frac{K^{1.5}}{\ell} \quad (84)$$

$$\ell = \frac{\kappa z \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \ell_0}{\ell_0 + \kappa z \left( 1 - \frac{z}{H} \right)} \quad \text{Avec:} \quad \ell_0 = \alpha \frac{\int_{-h}^{\eta} z \sqrt{K} dz}{\int_{-h}^{\eta} \sqrt{K} dz} \quad (85)$$

où  $C_{ws}$  représente le coefficient de frottement latéral

## VI.2) Transformation en coordonnée "Sigma"

Dans des secteurs à fortes variations topographiques, il est souvent noté que le système des coordonnées cartésien  $(O,x,y,z)$ , ne peut pas donner une bonne représentation des processus physiques que l'on souhaite modéliser. Pour éviter cette difficulté, généralement, on introduit un nouveau système de coordonnées connu sous le nom "système de coordonnées Sigma", largement utilisé en modélisation océanique et météorologique (Phillips 1957, Freeman et al. 1972, Owen 1980, James 1986, Nihoul et al. 1986, Blumberg et Mellor 1987 et Ruddick et al. 1993). La représentation de la topographie est donc facilité par la transformation du système cartésien  $(O,x, y, z, t)$  en un nouveau système  $(O,x_s, y_s, \sigma, t_s)$  dans lequel la coordonnée verticale est la coordonnée  $\sigma$ . Cette transformation est donnée par:

$$x_s=x \quad ; \quad y_s=y \quad ; \quad t_s=t \quad (86.a)$$

$$\sigma = \frac{z-\eta}{d+\eta} = \frac{z-\eta}{H} \quad (86.b)$$

où:

$\eta$  : est l'élévation de la surface libre dépendant de  $(x, y, t)$

$d$  : est la profondeur d'eau (bathymétrie)

$H$  : la hauteur totale d'eau (figure 3)

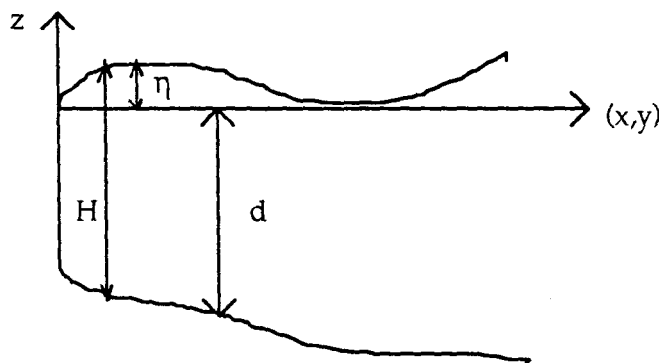


Figure 3 : Illustration du système de coordonnées  $(O,x,y,z)$

¶ Dans le plan physique, la colonne d'eau est comprise entre le fond ( $z=-d$ ) et la surface ( $z=\eta$ ), avec l'utilisation de la relation (86.b), elle sera comprise entre  $\sigma=-1$  et  $\sigma=0$  (figure 4)

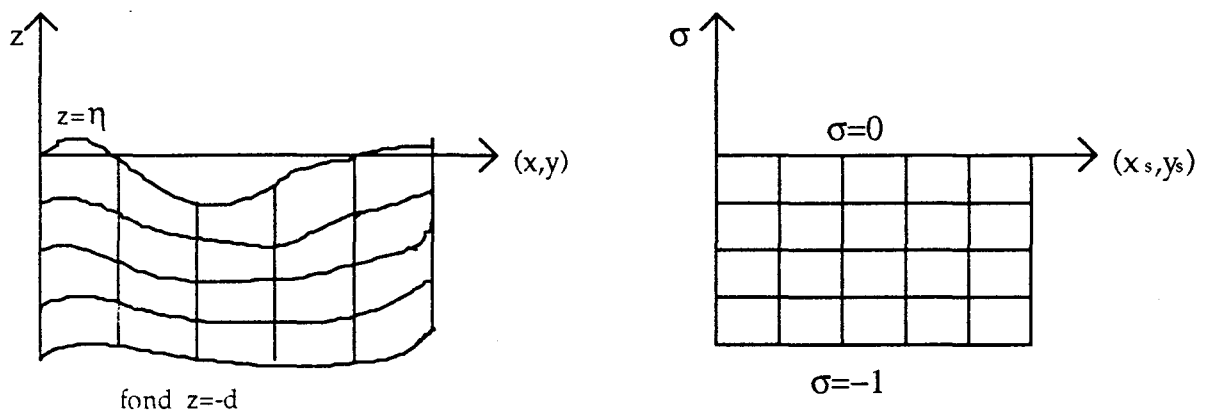


Figure 4 : Transformation verticale en coordonnée  $\sigma$

**Remarque:**

*Si  $\eta \ll d$  on a  $\sigma = z/d$  indépendamment du temps, cette simplification peut être source d'erreur si l'on tente d'appliquer le modèle à une zone peu profonde lors du passage d'une tempête qui risque de provoquer un découvrement de certaines mailles du domaine.*

La transformation en coordonnée sigma introduit des termes supplémentaires dans les gradients spatio-temporels du système d'équation (S4). Ces termes s'obtiennent par les formules de passage du système de coordonnées  $(O, x, y, z)$  au nouveau système  $(O, x_s, y_s, \sigma, t_s)$  qui s'exprime pour une fonction quelconque  $\phi$  par:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (87.a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x_s} - \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma \frac{\partial H}{\partial x} \right] \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (87.b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y_s} - \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial H}{\partial y} \right] \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (87.c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t_s} - \frac{1}{H} [1 + \sigma] \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (87.d)$$

En coordonnée sigma l'équation de l'approximation hydrostatique (79) devient:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\rho g H \quad (88)$$

Si l'on intègre analytiquement cette équation sur la verticale entre les bornes  $\sigma$  et 0 et on suppose que la pression à la surface ( $\sigma=0$ ) est égale à la pression atmosphérique  $p_a$  on a :

$$p = p_a + gH \int_{\sigma}^0 \rho d\sigma \quad (89)$$

Après application des formules de changement de système de coordonnées à l'expression (87), les gradients horizontaux de pression se déduisent de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\sigma=\text{cst}} - \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma \frac{\partial H}{\partial x} \right] \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial p_a}{\partial x} \\ &= g \frac{\partial}{\partial x} \left[ H \int_{\sigma}^0 \rho d\sigma \right] - \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma \frac{\partial H}{\partial x} \right] (-\rho g H) + \frac{\partial p_a}{\partial x} \\ &= g \frac{\partial}{\partial x} \left[ H \int_{\sigma}^0 \rho d\sigma \right] + \rho g \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial p_a}{\partial x} \end{aligned} \quad (90)$$

Si l'on substitue  $p = p_0 + (\rho_0 - \rho)$  dans l'expression (90) on a:

$$\alpha_0 \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial \eta}{\partial x} + G_x + \alpha_0 \frac{\partial p_a}{\partial x} \quad (91.a)$$

avec

$$G_x = \alpha_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ H \int_{\sigma}^0 (\rho - \rho_0) d\sigma \right] + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma \frac{\partial H}{\partial x} \right) (\rho - \rho_0) \right\} \quad (91.b)$$

la quantité ( $G_x$ ) permet l'introduction des effets de la stratification dans l'équation de mouvement. De la même manière, on calcule le gradient de pression horizontal suivant la direction ( $oy$ ) et le terme  $G_y$  correspondant :

$$\alpha_0 \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial \eta}{\partial y} + G_y + \alpha_0 \frac{\partial p_a}{\partial y} \quad (92.a)$$

$$C_y = \alpha_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ H \int_{\sigma}^0 (\rho - \rho_0) d\sigma \right] + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial H}{\partial y} \right) (\rho - \rho_0) \right\} \quad (92.b)$$

En situation de forte pente bathymétrique, Blumberg et Mellor (1985) montrent par un exemple simple le fonctionnement incorrect des modèles quand les termes introduits par la transformation "σ" sont négligés. Cette erreur d'approximation affecte plus particulièrement les termes de flux horizontaux, et ce propos, ils ont proposés une formulation adaptée à cette situation. Dans ce travail, nous suivrons ce formalisme pour paramétrer les termes de la diffusion horizontale dans le système des coordonnées (O, x<sub>s</sub>, y<sub>s</sub>, σ, t<sub>s</sub>), il est donné par les relations suivantes:

$$F_u = \frac{\partial}{\partial x_s} \left( 2A_h \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) + \frac{\partial}{\partial y_s} \left( A_h \left[ \frac{\partial u}{\partial y_s} + \frac{\partial v}{\partial x_s} \right] \right) \quad (93.a)$$

$$F_v = \frac{\partial}{\partial y_s} \left( 2A_h \frac{\partial v}{\partial y_s} \right) + \frac{\partial}{\partial x_s} \left( A_h \left[ \frac{\partial u}{\partial y_s} + \frac{\partial v}{\partial x_s} \right] \right) \quad (93.b)$$

$$F_\varphi = \frac{\partial}{\partial x_s} \left( D_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \right) + \frac{\partial}{\partial y_s} \left( A_h \frac{\partial \varphi}{\partial y_s} \right) \quad (93.c)$$

où:

φ : est une fonction scalaire ( S, T, K, C<sub>n</sub>).

F<sub>u</sub> : Terme diffusif pour l'équation de mouvement relatif à (u).

F<sub>v</sub> : Terme diffusif pour l'équation de mouvement relatif à (v).

F<sub>φ</sub> : Terme diffusif pour l'équation de mouvement relatif à (φ).

Pour ne pas alourdir l'écriture des équations, nous supprimons l'indice (s) annotant le nouveau système de coordonnées.

L'introduction des coordonnées sigma modifie l'ensemble des équations du système (S3) pour donner un nouveau système noté (S5) qui s'écrit par :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (HB_x u) + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial x} (HB_y v) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \sigma} = 0 \quad (94)$$

$$\frac{\partial H u}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (H B_x u u) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} (H u v) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (u \tilde{w}) - f H v = -g H \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} H \frac{\partial p_a}{\partial x} - H G_x +$$

$$\frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2 H A_h B_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_h H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( A_v \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) - \beta_c \frac{H}{B_x} C_{ws} u |u|$$
(95)

$$\frac{\partial H v}{\partial t} + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} (H B_y v v) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial x} (H u v) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (v \tilde{w}) + f H u = -g H \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} H \frac{\partial p_a}{\partial y} - H G_y +$$

$$\frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 H A_h B_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_h H \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( A_v \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) - \beta_c \frac{H}{B_y} C_{ws} v |v|$$
(96)

$$\tilde{w} = w - (1 + \sigma) \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sigma \frac{\partial H}{\partial x} \right) - v \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial H}{\partial y} \right)$$
(97)

$$\frac{\partial H S}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x H \left( u S - D_h \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y H \left( v S - D_h \frac{\partial S}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \tilde{w} S - \frac{D_v}{H} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] = 0$$
(98)

$$\frac{\partial H T}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x H \left( u T - D_h \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y H \left( v T - D_h \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \tilde{w} T - \frac{D_v}{H} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right] = H R$$
(99)

$$\rho = \rho_0 [1 + F_p(S, T)]$$
(100) (S5)

$$\frac{\partial H C_n}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x H \left( u C_n - D_h \frac{\partial C_n}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y H \left( v C_n - D_h \frac{\partial C_n}{\partial y} \right) \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ (\tilde{w} - w c_n) C_n - \frac{D_v}{H} \frac{\partial C_n}{\partial \sigma} \right] = H R_{cn}$$
n=1,...,nbclasse (101)

$$\frac{\partial H K}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x H \left( u K - D_h \frac{\partial K}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y H \left( v K - D_h \frac{\partial K}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \tilde{w} K - \frac{D_v}{H} \frac{\partial K}{\partial \sigma} \right]$$

$$= \frac{A_v}{H} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 \right] + \frac{g}{\rho_0} D_v \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} - C_\mu H \frac{K^{1.5}}{\ell}$$
(102)

$$\ell = \frac{\kappa (H \sigma + \eta) \left( 1 - \sigma - \frac{\eta}{H} \right) \ell_0}{\ell_0 + \kappa (H \sigma + \eta) \left( 1 - \sigma - \frac{\eta}{H} \right)}$$

$$\text{Avec } \ell_0 = \alpha \frac{\int_{-1}^0 (H \sigma + \eta) \sqrt{K} d\sigma}{\int_{-1}^0 \sqrt{K} d\sigma}$$
(103)

## VII) CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES



## VII.1) Conditions aux limites

Le système (S5) ne peut être résolu sans adjonction des conditions aux limites au bord du domaine d'étude. Pour les modèles de la circulation océanique, quatre types de frontières doivent être spécifiées: la frontière inférieure (fond), supérieure (surface), latérale ouverte (limite de forçage) et latérale fermée (la côte).

### VII.1.1) Frontière inférieure (fond océanique, $\sigma=-1$ )

#### a) Vitesse

En ce qui concerne les vitesses, deux conditions différentes peuvent être imposées:

i) Les trois composantes de la vitesse sont spécifiées nulles:

$$\text{à } \sigma = -1 \quad u = v = \bar{w} = 0 \quad (104)$$

Ce type de condition donne des résultats satisfaisants, à condition de disposer d'une résolution spatiale verticale suffisamment fine pour représenter correctement la couche limite du fond, et notamment le profil vertical logarithmique de la vitesse. Une telle discrétisation a aussi l'inconvénient d'introduire un nombre important de points du maillage, par conséquent une augmentation de temps de calcul.

ii) La deuxième condition peut être considérée comme une alternative au problème du maillage posé par la condition (i), elle consiste à évaluer la tension de Reynolds par la contrainte de cisaillement au fond (Blumberg et Mellor 1987, Sheng 1978 et Hess 1986). Cette condition s'exprime par:

$$\text{à } \sigma = -1 \quad \frac{A_v}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\tau_{bx}}{\rho_0} ; \quad \frac{A_v}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\tau_{by}}{\rho_0} ; \quad \bar{w} = 0 \quad (105)$$

où,  $\tau_{bx}$ ,  $\tau_{by}$  sont les contraintes de cisaillement au fond suivant les directions (x) et (y). Ces contraintes s'expriment généralement par des relations quadratiques du vecteur vitesse, c'est à dire:

$$\tau_{bx} = \rho_0 C_D u_b |u_b| \quad ; \quad \tau_{by} = \rho_0 C_D v_b |v_b| \quad (106)$$

où,  $(u_b, v_b)$  composantes de la vitesse horizontale calculée au premier niveau du maillage situé à une hauteur  $z_b$  au dessus du fond et  $C_D$  coefficient de frottement au fond, dont l'expression découle du profil vertical logarithmique de la vitesse, c'est à dire:

$$C_D = \left[ \frac{1}{\kappa} \text{Log} \left( \frac{z_b}{z_0} \right) \right]^{-2} \quad (107)$$

où,  $z_0$  est la longueur de la rugosité du fond, en absence de cette information, Weatherly et Martin (1978) suggèrent la valeur de (1 cm) pour  $z_0$ . D'autres auteurs (Hess 1986 et Davies 1993) utilisent une valeur constante de  $C_D$  qui vaut 0.0025. Une étude détaillée sur l'influence de ce coefficient sur l'hydrodynamisme se trouve dans Johns et Oguz (1987). De point de vue pratique, ce paramètre nous permettra le calibrage du modèle.

#### **b) Température, Salinité**

Le flux de la température et de la salinité à la limite inférieure (fond) sont supposés nuls (paroi imperméable), ce qui conduit à:

$$\text{à } \sigma = -1 \quad \frac{\partial T}{\partial \sigma} = 0 ; \quad \frac{\partial S}{\partial \sigma} = 0 \quad (108)$$

#### **c) Concentration en sédiment**

Pour la concentration en sédiment, l'imposition des conditions aux limites au fond est sans doute l'élément le plus important pour le calcul de la remise en suspension des sédiments, nous reviendrons sur ces conditions dans le chapitre (3).

On utilise généralement des conditions de flux ou de concentrations imposé, c'est à dire:

$$\text{à } \sigma = -1 \quad -\frac{D_v}{H} \frac{\partial C_n}{\partial \sigma} + w s_n C_n = \text{Flux} \quad \text{ou} \quad C_n = C_{\text{imp}} \quad (109)$$

#### **d) Energie Cinétique Turbulente**

Deux conditions aux limites peuvent être utilisées:

i) Dans la zone logarithmique, la production de la turbulence (P) a pour ordre de grandeur (Sauvaget 1987):

$$P = A_v \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \approx \kappa z u_* \frac{u_*^2}{(\kappa z)^2} \approx \frac{u_*^3}{\kappa z} \quad (110)$$

D'autre part, dans cette zone, on peut considérer que la dissipation de l'énergie cinétique turbulente ( $\epsilon$ ) est équilibrée par la production (P) (équilibre local) ce qui revient à écrire:

$$\epsilon \approx P \approx \frac{u_*^3}{\kappa z} \quad (111)$$

L'utilisation de la relation (51) permet d'obtenir une valeur estimée de l'énergie cinétique turbulente dans la zone logarithmique. Par conséquent, cette valeur nous servira comme condition imposée à la limite inférieure pour (K). On écrit alors:

$$\text{à } \sigma = -1 \quad K = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (112)$$

où,  $u_*$  est la vitesse du frottement au fond qui peut être calculée à partir de la contrainte de cisaillement au fond  $\tau_b$  par:

$$u_* = \sqrt{\frac{\|\tau_b\|}{\rho_0}} \quad (113)$$

ii) L'imperméabilité du fond permet aussi d'imposer le flux de l'énergie cinétique turbulente nul au fond, c'est à dire:

$$\text{à } \sigma = -1 \quad A_v \frac{\partial K}{\partial \sigma} = 0 \quad (114)$$

Pour nos simulations, nous utilisons la relation (112) comme condition à la limite inférieure. Cette condition est souvent employée en écoulement côtier (Blumberg et Mellor, 1987; Delhez and Martin, 1994; Sauvaget 1987 et Rodi, 1984).

### VII.1.2) Frontière supérieure (surface libre, $\sigma = 0$ )

#### a) Vitesse

Les variations verticales de la vitesse induites par le soufflement d'un vent à la surface de la mer, sont paramétrisées en fonction de la contrainte de cisaillement  $\tau_s$ , due au vent, qui s'exprime par la relation suivante:

$$\text{à } \sigma = 0 \quad \frac{A_v}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\tau_{sx}}{\rho_0} ; \quad \frac{A_v}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\tau_{sy}}{\rho_0} \quad (115)$$

Différents auteurs (Dean et Dalrymple, 1984; Leendertse and Gritton, 1971) ont proposé des relations empiriques pour la contrainte  $\tau_s$  faisant intervenir la vitesse du vent et la densité de l'air. Pour l'évaluation de  $\tau_s$ , nous utilisons la loi quadratique donnée par:

$$\tau_s = \rho_{\text{air}} C_v \|V_{10}\| V_{10} \quad (116)$$

où  $\rho_{\text{air}}$  est la densité de l'air,  $V_{10}$  est la vitesse du vent à 10 m au dessus de la surface de la mer et  $C_v$  est le coefficient d'entraînement de la surface dépendant du vent (Wu 1975,1984) propose la relation:

$$C_v = (0.8 + 0.065 |V_{10}|) 10^{-3} \quad (117)$$

#### b) Température, Salinité

Le flux de salinité à l'interface air-mer est le plus souvent considéré comme nul, par contre le flux de la température dépend des données atmosphériques telles que la température de l'air, l'humidité et d'autres variables généralement non nulles. Hess (1986) utilise les conditions de flux à travers la surface données par la relation:

$$\text{à } \sigma = 0 \quad \rho_0 \frac{D_v}{H} \frac{\partial T}{\partial \sigma} = \frac{Q}{C_p} ; \quad \frac{\partial S}{\partial \sigma} = 0 \quad (118)$$

où  $C_p$  est capacité calorifique de l'eau (exprimée en J/Kg. °C) et  $Q$  est le flux de chaleur total composé du flux radiatif et du flux de chaleur dans l'atmosphère (Parkison and Washington, 1979). Nous donnons la composition du terme  $Q$  dans l'annexe (1.4).

### c) Concentration en sédiment

La condition exprimant l'absence d'échange de masse à l'interface air-mer sera imposée comme suit:

$$\text{à } \sigma = 0 \quad -\frac{D_v}{H} \frac{\partial C_n}{\partial \sigma} + w_{s_n} C_n = 0 \quad (119)$$

### d) Energie Cinétique Turbulente

En absence de contrainte due au vent, une condition de symétrie peut être appliquée à la surface, c'est à dire:

$$\text{à } \sigma = 0 \quad \frac{\partial K}{\partial \sigma} = 0 \quad (120)$$

En présence du vent, si on néglige l'agitation de la surface libre (vagues), on peut considérer que la masse d'air se comporte comme une paroi rugueuse mobile, exerçant sur la masse d'eau la contrainte ( $\tau_s$ ). Dans ces conditions, certains auteurs (Rodi, 1984; Blumberg et Mellor, 1987; Sauvaget, 1987) ont fait l'analogie avec la dynamique du fond et utilisent l'hypothèse de l'équilibre local à la surface pour imposer:

$$\text{à } \sigma = 0 \quad K = \frac{\|\tau_s\|}{\rho_0 \sqrt{C_\mu}} \quad (121)$$

Cependant Delhez et Martin (1994) notent qu'en présence du vent, les vagues peuvent être considérées comme source d'injection de la turbulence à la surface de la colonne d'eau. Par ailleurs, ils précisent que l'analogie faite avec la dynamique du fond pour l'obtention de la relation (121) n'est pas valable dans ces conditions.

Puisque la diffusivité turbulente verticale de l'énergie cinétique n'est pas nulle au voisinage de la surface, l'état de la turbulence à l'interface air-mer dépend non seulement du vent mais aussi de la turbulence à l'intérieure de la couche limite de surface, dans ce cas la condition (121) sera remplacée par la condition de flux suivante (Delhez et Martin 1994):

$$\text{à } \sigma = 0 \quad \rho_0 \frac{D_v}{H} \frac{\partial K}{\partial \sigma} = \rho_{\text{air}} C_E \|\mathbf{V}_{10}\|^3 \quad (122)$$

où  $C_E$  est une constante empirique qui vaut  $0.63 \cdot 10^{-6}$

Celik, Hossain et Rodi (1982) fournissent une modélisation plus précise des conditions aux limites portant sur (K) à la surface lorsque l'écoulement est généré par le vent.

Dans le cadre de ce travail , on étudie uniquement les processus sous l'effet de la marée, ainsi la relation (120) sera utilisée comme condition à la surface de la colonne d'eau.

### VII.1.3) Frontière latérale fermée

La frontière latérale fermée sur la côte est considérée comme une paroi imperméable. De ce fait, on peut utiliser une condition de flux nul pour les différentes variables scalaires (S, T, C<sub>n</sub>, K) et une condition de vitesse normale nulle pour la variable vitesse.

Si  $\phi$  désigne l'une des variables scalaires citées ci-dessus, ces conditions s'expriment par:

$$\text{grad}(\phi) \cdot \mathbf{n} = 0 ; \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (123)$$

où  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la côte dirigé vers l'extérieur du domaine et  $\text{grad}$  désigne le vecteur gradient d'une fonction scalaire.

### VII.1.4) Frontière latérale ouverte

#### a) frontière en rivière

##### a.1) Vitesse

Au niveau des rivières en horizontal, on impose la direction et le débit de l'écoulement à partir duquel on déduit les vitesses moyennées sur la profondeur de la rivière par les relations suivantes:

$$U_{\text{riv}} = \frac{Q_r}{\Delta L \cdot B_x} ; \quad V_{\text{riv}} = \frac{Q_r}{\Delta L \cdot B_y} \quad (124)$$

où:

$Q_r$  : Le débit de l'écoulement (série temporelle)

$B_{x,y}$  : La largeur de la maille (suivant  $ox$  ou  $oy$ )

$\Delta L$  : Taille de la maille ( $\Delta x = \Delta y = \Delta L$ )

La structure verticale des vitesses est déduite d'un profil logarithmique calculé à partir de la vitesse moyenne.

### **a.2) Température, Salinité**

On choisit la source de la rivière suffisamment loin de l'estuaire afin d'utiliser des conditions de salinité nulle, la température sera imposée au fond et à la surface de la rivière, puis on procède par interpolation linéaire pour compléter le profil vertical.

### **a.3) Concentration en sédiment**

Pour le profil vertical de la concentration en sédiment, on résout un modèle unidimensionnel vertical (ce qui revient à négliger les gradients horizontaux dans l'équation (101)), en imposant au fond, soit une condition de concentration, soit une condition de flux.

### **a.4) Energie Cinétique Turbulente**

Comme pour l'équation de concentration en sédiment, on procède par résolution numérique d'un modèle unidimensionnel sur la vertical déduit de l'équation (102).

## **b) frontière au large (océan)**

### **b.1) Vitesse**

Les conditions à la frontière ouverte sont normalement obtenues à partir des mesures expérimentales ou des résultats de modèles couvrant une région plus vaste avec une discrétisation spatiale plus grossière. Dans les régions côtières, à la frontière ouverte, la variable la plus simple à mesurer est l'élévation de la surface libre, pour nos applications et pour décrire les valeurs aux limites ouvertes, nous utilisons les valeurs de cette variable extraites en quelques points du modèle de Salomon (1992) sous forme de série temporelle discrète  $(t_i, \eta_p(t_i))$ . Nous reviendrons sur l'introduction des conditions aux limites dans le chapitre 3.

La nature de la grille de calcul utilisée (grille décalée) nous permet de déduire de la hauteur d'eau  $\eta$  les valeurs de la vitesse  $(U, V)$  aux frontières, en résolvant simultanément l'équation de continuité et l'équation du mouvement appliquée à la

première maille de calcul. Le traitement numérique des conditions aux limites est détaillé dans le chapitre 2.

### **b.2) Température, Salinité**

En situation de flot, c'est à dire quand le courant est dirigé vers l'intérieur du domaine, la salinité et la température ne sont pas calculées par leurs équations de conservation (98) et (99), mais elles doivent être calculées par interpolation en fonction des valeurs observées en nature ou fournies par l'utilisateur sous forme d'une série temporelle. Cette procédure a été adoptée pour nos simulations.

Dans le cas contraire, quand le courant est dirigé vers l'extérieur (condition de jusant), la salinité et la température aux limites ouvertes sont calculées à partir de leurs équations de conservation dans lesquelles on néglige les termes de diffusion, ce qui revient à résoudre:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = -\mathbf{u}_n \frac{\partial T_0}{\partial \mathbf{n}} \quad ; \quad \frac{\partial S_0}{\partial t} = -\mathbf{u}_n \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{n}} \quad (125)$$

où:

$T_0, S_0$  : température et salinité aux limites ouvertes (à calculer)

$\mathbf{n}$  : vecteur normal à la frontière ouverte

$\mathbf{u}_n$  : vecteur vitesse normal à la frontière ouverte dirigé vers l'extérieur du domaine

D'autres traitements aux limites frontières de ces deux variables ont été proposés par plusieurs auteurs, on cite par exemple Harleman et al., (1974); De borne de Grandpre, (1979) et Perrels et Karelse, (1981).

### **b.3) Concentration en sédiment**

En quelques points sur la frontière ouverte, on résout l'équation unidimensionnelle verticale de la conservation de la masse de sédiment avec une condition au fond (concentration imposée ou flux imposé), puis on procède par interpolation pour déterminer les valeurs aux autres points de la frontière.

### **b.4) Energie Cinétique Turbulente**



Pour déterminer les valeurs de l'énergie cinétique turbulente à la limite ouverte, on suit le même procédé utilisé pour la détermination de la concentration en sédiment.

## **VII.2) Conditions initiales**

Pour les variables ( $u, v, w, \eta, C_n$ ), le modèle part du repos, par contre pour les fonctions scalaires ( $T, S$ ), le modèle part d'un état initial déduit par interpolation spatiale à partir des données aux limites prescrites par l'utilisateur. Afin d'éviter des éventuelles divisions par zéro pendant la résolution de l'équation de l'énergie cinétique turbulente ( $K$ ), cette variable est initialisée à la valeur  $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ .

## **VIII) PRINCIPE DE RESOLUTION DES ONDES DE GRAVITE**

Parmi les différentes approches de la modélisation tridimensionnelle, il existe les modèles multicouches (Leendertse et Liu, 1975, 1978) qui superposent plusieurs modèles tridimensionnels intégrés sur l'épaisseur de chacune des couches. La difficulté principale de ce type d'approches réside dans la paramétrisation des interactions entre deux couches successives, ainsi qu'à l'application de ces modèles à des zones littorales où le marnage est de même ordre de grandeur que la profondeur.

Une autre démarche consiste à découpler le calcul de la structure verticale de celui de courant moyen évalué à l'aide d'un modèle tridimensionnel horizontal. Cette technique a été employée de deux façons différentes:

- i) on résout un modèle vertical unidimensionnel pour établir des formulations appropriées qui seront ensuite utilisées pour la seconde étape qui consiste à résoudre le modèle bidimensionnel intégré sur la verticale (Forristall, 1974; Heaps, 1971, 1980; Davies et Owen, 1979).
- ii) les prédictions du modèle bidimensionnel horizontal fournissent les valeurs locales de forçage et les conditions aux limites du modèle unidimensionnel vertical (Nihoul, 1977).

Il est à noter que dans les deux cas la résolution du modèle unidimensionnel ignore les termes de la convection horizontale et les termes du cisaillement au fond et à la surface. Ces simplifications présentent un point faible de ces approches puisque ces

phénomènes influencent de manière considérable les écoulements dans les zones à marée.

Une autre technique de résolution des ondes de gravités largement utilisée en écoulement géophysique (Madelia et Piascek, 1977; Sheng et al., 1978; Blumberg et Mellor, 1980) consiste à décomposer les équations tridimensionnelles en un ensemble d'équations décrivant l'évolution des processus moyennés sur la hauteur d'eau (mode externe ou mode barotrope) et un autre ensemble d'équations traduisant la contribution de la structure verticale (mode interne ou mode barocline) à l'écoulement tridimensionnel.

La description de la technique de couplage des deux modes est donnée dans Blumberg et Mellor (1987), son principe se résume en deux étapes:

- 1) on calcule les variables moyennes à l'aide d'un modèle bidimensionnel intégré sur la verticale qui seront transmises au modèle tridimensionnel décrivant la structure verticale.
- 2) à son tour le modèle barocline fournit les forces de pression et les contraintes de cisaillement au fond.

Signalons que l'avantage de séparation en deux modes est la réduction de temps de calcul puisque le mode interne décrit des processus dynamiques à évolution lente, donc sera calculé moins fréquemment que le mode externe qui, lui décrit des processus rapides.

### VIII.1) Mode externe

Le mode externe est constitué par le modèle bidimensionnel intégré sur la hauteur d'eau. On cherchera donc à reproduire des phénomènes moyens sur la hauteur d'eau, ce qui se fera avec autant de réalisme que la zone littorale concernée sera mieux mélangée.

On définit  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  par:

$$\bar{u}(x, y, t) = \int_{-1}^0 u(x, y, \sigma, t) d\sigma \quad ; \quad \bar{v}(x, y, t) = \int_{-1}^0 v(x, y, \sigma, t) d\sigma \quad (126)$$

A cette étape du calcul, nous résolvons les équations donnant les composantes de la vitesse moyenne ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ) et la hauteur d'eau  $\eta$ .

Moyennant les conditions aux limites (105, 115) et la règle de Liebnitz l'intégration sur la verticale des équations (94, 95, 96) donne le système des équations du mode externe noté (ME)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (HB_x \bar{u}) + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial x} (HB_y \bar{v}) = 0 \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H\bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (HB_x \theta_{uu} \bar{u}) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} (H\theta_{uv} \bar{u}\bar{v}) - fH\bar{v} = -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} H \frac{\partial p_a}{\partial x} - HG_x^* + \\ \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2HA_h B_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_h H \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \tau_{sx} - \tau_{bx} - \beta_c \frac{H}{B_x} \theta_{su} C_{ws} \bar{u} |\bar{u}| \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H\bar{v}}{\partial t} + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial x} (H\theta_{uv} \bar{u}\bar{v}) + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} (HB_y \theta_{vv} \bar{v}) + fH\bar{u} = -gH \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} H \frac{\partial p_a}{\partial y} - HG_y^* + \\ \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( 2HA_h B_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_h H \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \tau_{sy} - \tau_{by} - \beta_c \frac{H}{B_y} \theta_{sv} C_{ws} \bar{v} |\bar{v}| \end{aligned} \quad (129)$$

Avec:

$$C_x^* = \int_{-1}^0 G_x d\sigma \quad ; \quad G_y^* = \int_{-1}^0 G_y d\sigma \quad (130)$$

$$\theta_{uu} = \int_{-1}^0 \frac{uu}{|u|} d\sigma \quad ; \quad \theta_{uv} = \int_{-1}^0 \frac{uv}{|u|} d\sigma \quad ; \quad \theta_{vv} = \int_{-1}^0 \frac{vv}{|v|} d\sigma \quad (131)$$

$$\theta_{su} = \int_{-1}^0 \frac{u}{|u|} \frac{|u|}{|u|} d\sigma \quad ; \quad \theta_{sv} = \int_{-1}^0 \frac{v}{|v|} \frac{|v|}{|v|} d\sigma \quad (132)$$

## VIII.2) Mode interne

$$\text{Si on pose: } u(x, y, \sigma, t) = \bar{u}(x, y, t) + \hat{u}(x, y, \sigma, t) \quad (133.a)$$

$$v(x, y, \sigma, t) = \bar{v}(x, y, t) + \hat{v}(x, y, \sigma, t) \quad (133.b)$$

$$\text{Avec: } \int_{-1}^0 \hat{u}(x, y, \sigma, t) d\sigma = 0 \quad ; \quad \int_{-1}^0 \hat{v}(x, y, \sigma, t) d\sigma = 0 \quad (133.c)$$

Les équations du mode interne décrivant la dynamique de la structure verticale s'obtiennent par une simple soustraction des équations du mode externe (127, 128, 129) aux équations du modèle tridimensionnel (94, 95, 96).

A cette étape, nous calculons les trois composantes de la vitesse ( $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ ), la température (T), la salinité (S), les variables turbulentes (K,  $\ell$ ) et la concentration en sédiment  $C_n$ .

Les équations ainsi obtenues forment le système du mode interne, noté (système **MI**).

$$\frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (HB_x \hat{u}) + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial x} (HB_y \hat{v}) + \frac{1}{H} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \sigma} = 0 \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H \hat{u}}{\partial t} + \beta_a \left\{ \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} [HB_x (uu - \theta_{uu} \overline{uu})] + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} [H(uv - \theta_{uv} \overline{uv})] + \frac{\partial(\hat{u}\hat{w})}{\partial \sigma} \right\} - fH\hat{v} = \\ HC_x^* - HG_x + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (2HA_h B_x \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_h H \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( A_v \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} \right) \\ - \tau_{sx} + \tau_{bx} - \frac{\beta_c}{B_x} HC_{ws} [u|u| - \theta_{su} \overline{u|u|}] \end{aligned} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H \hat{v}}{\partial t} + \beta_a \left\{ (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial x} [H(uv - \theta_{uv} \overline{uv})] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} [HB_y (vv - \theta_{vv} \overline{vv})] + \frac{\partial(\hat{v}\hat{w})}{\partial \sigma} \right\} + fH\hat{u} = \\ HC_y^* - HG_y + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial x} (2HA_h B_y \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_h H \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( A_v \frac{\partial \hat{v}}{\partial \sigma} \right) \\ - \tau_{sy} + \tau_{by} - \frac{\beta_c}{B_y} HC_{ws} [v|v| - \theta_{sv} \overline{v|v|}] \end{aligned} \quad (136)$$

Dans sa version originale, le modèle de Hess (1985), résout la turbulence par le concept de la viscosité turbulente en utilisant une loi parabolique pour la longueur de mélange. Cette paramétrisation s'avère insuffisante pour notre zone d'application où la turbulence joue un rôle essentiel pour la plupart des phénomènes à simuler (hydrodynamique, transport sédimentaire, panache d'eau douce, etc.). Nous avons donc remplacé cette paramétrisation par la résolution numérique du modèle (K,  $\ell$ ) dont les équations sont données par les relations (102-103).

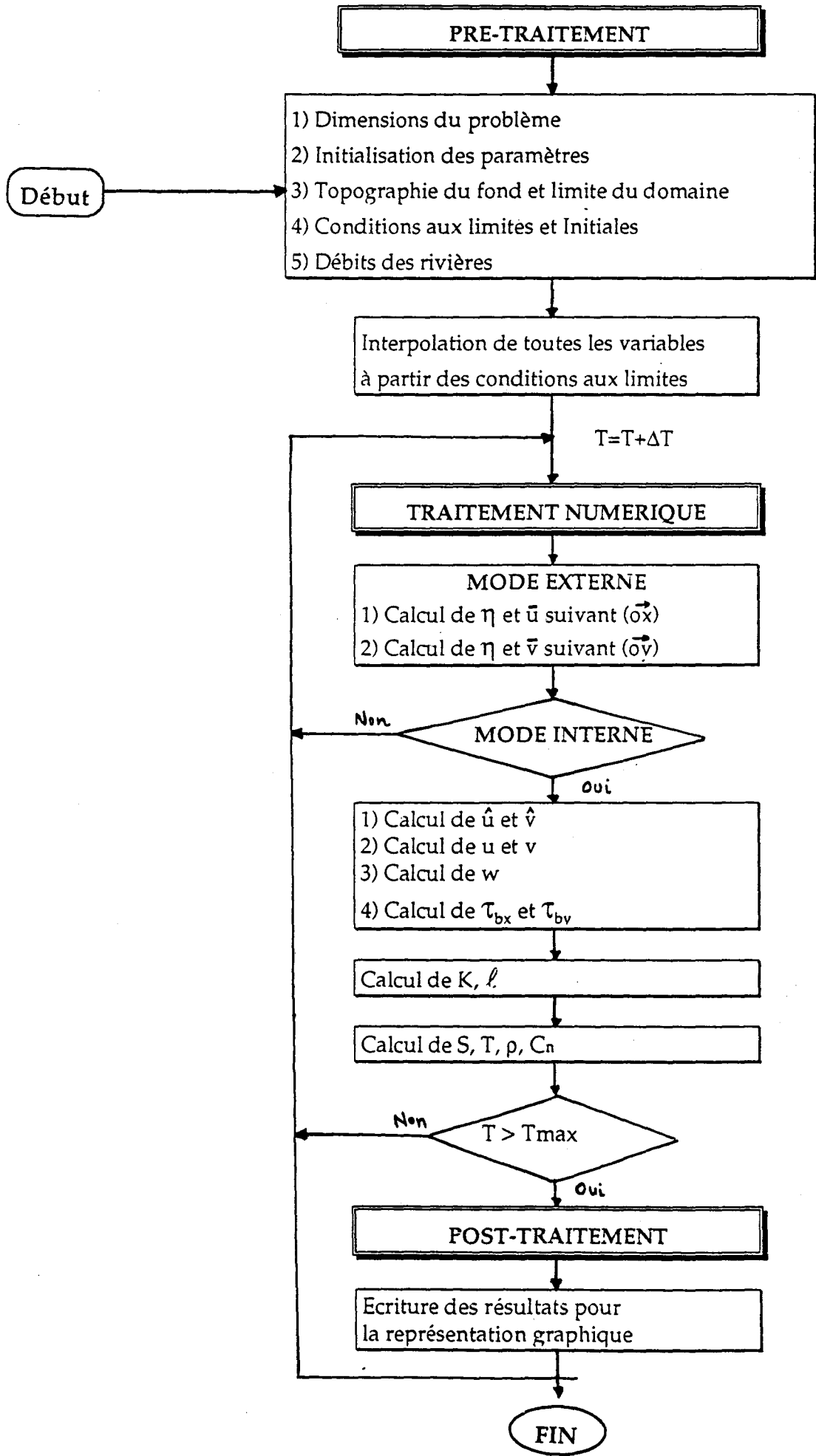
Pour la simulation du transport sédimentaire multiclasse, nous avons introduit un module de résolution de l'équation de la conservation de la concentration en sédiment donnée par la relation (101).

Finalement, les nouvelles équations du modèle tridimensionnel de la circulation côtière utilisé dans cette étude sont données par le système suivant, noté (EQ\_M3D):

- Le système **ME** (127, 128, 129)
- Le système **MI** (134, 135, 136)
- L'équation de la vitesse verticale (97)
- L'équation de conservation de la chaleur (99)
- L'équation de la conservation de la masse de sel (98)
- l'équation d'état (100)
- L'équation de la conservation de la masse de sédiment (101)
- L'équation de l'énergie cinétique turbulente (102)
- L'équation de la longueur de mélange (103)

Nous soulignons que les équations de la conservation de la chaleur , du sel, de la masse de sédiment et de l'énergie cinétique ne sont pas moyennées sur la hauteur d'eau puisque ces variables ont la même évolution temporelle que la structure verticale ( $u, v, w$ ), il est donc plus économique de les calculer en même temps que le mode interne.

Nous donnons ici le déroulement des calculs adopté dans ce travail.



## Références Bibliographiques du Chapitre 1

- Blumberg, A. F. (1975): A numerical investigation into the dynamics of estuarine circulation. Tech. Rep 91. Chesapeake Bay Institut, The Johns Hopkins University pp 59
- Blumberg, A. F. (1978): The influence of density variations on estuarine tides and circulations. Estuarine.Coastal.Mar.Sci; Vol 6; pp 209-215.
- Blumberg, A. F. and G. L. Mellor (1980): A coastal ocean numerical model, in "Mathematical Modelling of Estuarine Physics", *Proc. Int. Symp.*, Hamburg, August 24-26 1978, Edited by J. Sundermann, and K.L. Holtz, **Springer Verlag**, Berlin, pp 203-214.
- Blumberg, A. F. and G. L. Mellor (1987): A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model, in "three-dimensional coastal ocean models". Coastal and Estuarine Sciences 4. American Geophysical Union, Washington DC, pp 1-16.
- Boussinesq, J. (1903): Théorie analytique de la chaleur, volume 2, **Gauthier-Villars**, Paris
- Bradshaw, P.; T. Cebeci and J. H. Whiterlaw (1981): Engineering calculation methods for turbulent flow,, **Academic Press**, New York.
- Celik, I.; M. S. Hossaini and W. Rodi (1982): Modelling of free-surface proximity effects on turbulence, Compte rendu du Symposium : "La modélisation fine des écoulements", 7-10 sept, Paris, Vol. 1, pp 185-194.
- D'allones, M. R. (1994): Turbulence océanique (Effet coquille saint Jacques), Sciences et Avenir, Hors série N° 98, Août/Septembre.
- Davies, A. M. and A. Owen (1979): Three-dimensionnal numerical sea model using Galerkin method with a polynomial basis set. Appl. Math. Modelling, 3, pp 321-328.

- Davies, A. M. and J. Lawrence (1994): The response of the Irish sea to boundary and wind forcing, Results from a 3-D hydrodynamic model, *J. Geophys. Res.* (Ocean), Vol 99, N° C11, pp 22665-22687.
- De Borne de Grandpré. C. et Y. Du Penhoat (1979): Dynamique de la marée en Gironde et phénomènes connexes, *Rapport Scientifique*, Lab d'océanographie physique, Univ de Bretagne Occidentale, Brest, France, pp 203.
- Dean, R. G. and R. A. Dabymple (1984): Water wave mechanics for engineers and scientists, **Prentice Hall**.
- Delhez, E. J. and G. P. Martin (1994): 3D modelling of hydrodynamic and ecohydrodynamic processes on the north-western european continental shelf. *Bul. Soc. Roy. Sci. Liège*. Vol 63, 1-2, pp 5-64.
- Elder, J. W. (1959): The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. *J. Fluids.Mech*, Vol 5, N° 4 pp 544-560.
- Forristal, G. Z. (1974): The dimensionnal structure of storm generated currents, *J. Geophys. Res*, Vol 79, N° 18 pp 2721-2729.
- Freeman, N. G., A. M. Hale and M. B. Danard (1972): A modified sigma equations approach to the numerical modelling of great Lakes hydrodynamics, *J. Physical. Research*, Vol 77, pp 1050-1060.
- Ha-Minh Hieu (1987): Modélisation et simulation des écoulements en situations industrielles, " Exposé de synthèse ", *La Houille Blanche*, N° 7-8 pp 555-562
- Harleman, D. R. F. and M. L. Thatcher (1974): Longitudinal dispersion and unsteady salinity intrusion in estuarines. *La Houille Blanche*, N° 1-2, pp 99-120
- Harlow, F. H. and P. Nakayama (1968): Transport of turbulence energy decay rate, *Los Alamos Science Lab*, Univ. Calif, Report LA-3854.
- Heaps, N. S. (1971): On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges. *Mem. Soc. R. Sci. Liège*, 6; 2; pp 143-180.



- Heaps, N. S. (1980): Spectral method for the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamic equations for tides and surges. In *Notes on Coastal and Estuarine Studies. Mathematical Modelling of Estuarine Physics*, Edited by J. Sundermann et al., **Springer-Verlag**, Berlin.
- Hess, K. W. (1986): Numerical model of circulation in Chesapeake Bay and the Continental Shelf, *NOAA Technical Memorandum*, NESDIS AISC 6, U. S. Department of commerce pp 47.
- Hinze, O. (1959): Turbulence, **Mc Graw Hill**, New York.
- Johns, B. (1991): The modelling of the free surface flow of water over topography, *Coastal. Eng*, Vol 15, pp 257-278.
- Johns, B. and T. Oguz (1987): Turbulence Energy closure schemes. n "three-dimensional coastal ocean models". *Coastal and Estuarine Sciences* 4 . American Geophysical Union, Washington DC, pp 17-39.
- Johnson, D. A. and L. S. King (1984): A new Turbulence closure model for boundary layer flows with strong adverse pressure gradients and separation, *AIAA, Jour Paper* n° 84-0175.
- Jones, W. P. and B. E. Launder (1972): The predictions of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Inter. Jour. of Heat and Mass Transfer*, Vol 15 pp 301-314.
- Kolmogorov, A. N. (1942): The equation of turbulent motion in an incompressible fluid. *Izv. Acad. Sci. USSR, Phys.* Vol 6, pp 56-58.
- Landau, L. D. (1971): Mécanique des fluides. **Mir, Moscou**.
- Launder, B. E., A. Morse, W. Rodi and D. B. Spalding (1972): The prediction of free shear flows. A comparison of the performance of six Turbulence Models. *Proc of NASA conference on free shear flows*, Langley
- Launder, B. E. and D. B. Spalding (1974): The numerical computation of turbulent flow. *Comp. Meth in Appl. Mech and Eng*. Vol 3 pp 269-289

- Launder, B. E., W. C. Reynolds, W. Rodi, J. Mathieu and D. Jeaudel (1984): Turbulence models and their applications. Volume 2, Editions Eyrolles
- Leblond, P. H. and L. A. Mysak (1978): Waves in the ocean. Elsevier Oceanography series, 20, pp 602.
- Leendertse, J. J. and E. C. Gritton (1971): A water-quality simulation model for well mixed estuarines and coastal seas. Volume 2, Computational procedures, Report 708-NYC, The Rand Corporation, New York.
- Lewellen, W. S., M. E. Teske and C. Donaldson (1976): Variable density flows computed by a second order closure description of turbulence. AIAA. Jour. 14 (3), pp 382-387.
- Lewellen, W. S (1977): Use of invariant modelling. Handbook of Turbulence. Volume 1, pp 237-280, Plenum Publishing Corp
- Madala, R. V. and S. A. Piacsek (1977): A semi-implicit numerical model for baroclinic oceans. J. Comp. Phys. Vol 23, pp 167-178.
- Mellor, G. L. and T. Yamada (1974): A hierarchy of turbulence closure models planetary boundary layers. J. Atmos. Sci. Vol 31, pp 1791-1806.
- Mellor, G. L. and A. F. Blumberg (1985): Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system. J. Phys. Oceanog. Vol 113, pp 1379-1383.
- Munk, W. H. and E. P. Anderson (1948): Notes on the theory of the thermocline. J. Mar. Res., Vol 1, pp 276-295.
- Murthy, C. R. (1976): Horizontal diffusion characteristics in lake Ontario. J. Phys. Oceanog. Vol 6, pp 76-84.
- Nihoul, J. C. J. (1977): Three dimensional model of tides and storm surges in a shallow well mixed continental sea: *In Dynamics in Atmosphere and Oceans*, Volume 2, edited by J. C. J. Nihoul, Elsevier, Amsterdam.

- Nihoul, J. C. J., F. Waleffe and S. Djenidi (1986): A 3-D numerical model of the Northern Bering de. Envir. Software. pp 1-7.
- Okubo, A. (1971): Oceanic diffusion diagrams. Deep. Sea. Res. pp 789-802.
- Owen, A. (1980): A three-dimensionnal model of the Bristol channel. J. Phys. Oceanog. Vol 10, pp 1290-1302.
- Parkison, C. L. and W. M. Washington (1979): A large-scale numerical model of sea ice. J. Geophy. Res. Vol 84 pp 311-337.
- Perrls, P. A. J. and M. Karelse (1981): A two dimmensional lateral averaged model for salt intrusion in estuaries : *In Transport models for Inland an Coastal Waters*, Academic Press Inc.
- Phillips, N. A. (1957): A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. J. Meteorol. , Vol 14, pp 184-185.
- Phillips, O. M. (1966): The dynamics of the upper ocean. Combridge University Press, London.
- Prandtl, L. (1925): Uber die ansgebildete turbulenz, ZAMM , 5, 136.
- Ruelle, D. and F. Takens (1971): On the nature of turbulence. Comm. in Math. Phys. Vol 20, pp 167.
- Reynolds, O. (1895): On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Phil. Trans. Roy. Soc. London. series A, 188, 123.
- Rodi, W. (1984): Turbulence models and their application in hydraulics.: A state of the art review. IAHR, Delft. the Neterlands
- Rossby, C. G. (1939): Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanet centers of action. J. Mar. Res. Vol 2, pp 38-55.

- Rotta, J. C. (1951): Statistische theorie nicht homogener turbulenz zeitschrift physic.: English translation: *Imperial College Department of Mechanical Engineering*. Report N° TWF/TN/38.39
- Salomon, J. C. (1980): Etude de l'estuaire de la Seine: Modélisation numérique de phénomènes physiques. Rapport interne, Univ de Brest, France. 190 p
- Salomon, J. C. and M. Breton (1992): Numerical hydrodynamic modeling (2D model) In: FLUXMANCHE Mast 0053, *Hydrodynamics and Biogeochemical Fluxes in the Eastern Channel, Fluxes into the North Sea*, Second Annual Progress Report June 1991 - Sept 1992.
- Sauvaget, P. (1987): Modélisation numérique des écoulements stratifiés en estuaires et réservoirs. Thèse de doctorat de l'U. J. F. Grenoble, France, pp 173
- Schlichting, H. (1968): Boundary-Layer theory. **Mc-Graw-Hill**, New York.
- Sheng, Y. P., W. Lick, R. T. Gendey and F. B. Molls (1978): Numerical computation of three-dimensional circulation in Lake Erie: A comparaison of free-surface model and rigid-lid model. J. Phys. Oceanog. Vol 8 pp 713-727.
- Sheng, Y. P. (1982): Hydraulic applications of a second order closure model of turbulent transport. In *Applying Research to Hydraulic Practice*. (Smith, P., Ed) ASCE, pp 106-119.
- Sheng, Y. P. (1983): Mathematical modeling of three dimensionnal coastal currents and sediment dispersion: Model developpment and applications. Tech Report U. S. Army Corps of Enginners, Coastal Engineering Research Center. Report N° CERC 83-2, pp 288
- Sheng, Y. P. (1984): A turbulent transport model of coastal processes. Proc 19<sup>th</sup> Conf. Coastal Eng. pp 2380-2396.
- Smagorinsky, J. (1963): General circulation experiments with the primitive equations. Part I) The basic experiment. Mon. Weather. Rev. Vol, 91 pp 99-163.
- Stommel, H. (1949): Horizontal diffusion due to oceanic turbulence. J. Mar. Res. Vol, 8, pp 199-225.

- Tag, P. M. , F. W. Murray and L. R. Koenig (1979): A comparaison of several forms of eddy viscosity parameterization in a two dimensinnal cloud model. J. Appl. Meteo. Vol, 18, pp 1429-1441.
- Tennekes, H. and J. L. Lumley (1972): A first course in Turbulence. The M.I.T. Press, Cambridge, MA
- Vasiliev, O. F., V. I. Kvon and R. T. Chernyshova (1973): Matematical modelling of the thermal pollution of water body. 15<sup>th</sup> IAHR Congr, Istambul, Vol, 2, pp 129-136.
- Wang, D. P. and D. W; Kravitz (1980): A semi-implicit two dimensionnal model of estuarine circulation. J. Phys. Oceano. Vol 10 , pp 441-454
- Weatherly, G. and P. J. Martin (1978) On the structure and dynamics of the ocean bottom boundary layer. J. Phys. Oceano. Vol 8 , pp 557-570
- Wu, J. (1986): Roughness elements of the sea surface, their spectral composition. Tellus. Vol 38(A), pp 178-188.

## CHAPITRE 2

## I) INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, les équations aux dérivées partielles modélisant les écoulements océaniques ont été présentées. Ces équations forment un système non linéaire à plusieurs inconnues qui n'admet une solution analytique que dans des cas très simple sans intérêt pratique. La solution doit donc être trouvée numériquement en utilisant des algorithmes adéquats à la modélisation océanique.

Diverses méthodes numériques adaptées à la résolution de ce système ont été publiées depuis une vingtaine d'années environ, qui relevaient initialement toutes des différences finies. Durant ces dernières années, d'autres techniques dites aux éléments finis initialement développées pour les problèmes de la mécanique des solides font leurs apparition dans le domaine de la modélisation à surface libre (Kinnmark et al. 1984, Lynch et al. 1988, Gray 1989). Ces méthodes ont l'avantage de proposer des solutions assez satisfaisantes pour les problèmes à maillage variable d'une part et une bonne approximation de la frontière du domaine d'étude d'autre part.

La méthode des éléments finis se base sur des principes variationnels. Elle est très bien adaptée à la résolution des problèmes de la mécanique des matériaux (principe variationnel vrai et conditions aux limites facile à imposer). La complexité des équations hydrodynamiques rend toutefois difficiles l'application aux écoulements des fluides visqueux, où les effets non linéaires sont importants. Du point de vue temps de calcul même implicite la méthode des éléments finis est plus coûteuse que la méthode des différences finies (Grotkip 1973 et Thacker 1978). Pour ces raisons et en se fondant sur les commentaires de Heaps (1969) et Leendertse (1967), le choix de Hess (1986) (modèle utilisé dans ce présent travail) s'est porté sur une méthode en directions alternées introduite par Peaceman et Rachford (1955). Le schéma numérique correspondant a été abondamment décrit par Leendertse (1967,1970), Sobey (1970).

Dans ce chapitre, nous présentons d'une manière brève les aspects fondamentaux de la méthode des différences finies. On commencera par la discrétisation spatio-temporelle des équations aux dérivées partielles, ensuite nous analysons la stabilité numérique, puis nous comparons quelques méthodes de résolution des équations de Saint Venant linéarisées, et enfin nous donnons la discrétisation des équations du modèle, suivie par leurs algorithmes de résolution numérique.

## II) DISCRETISATION DES EQUATIONS

### II.1) Discrétisation spatiale

La discrétisation des équations est la première étape dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Elle consiste à remplacer ces équations par des équations aux différences discrètes.

Le maillage le plus utilisé pour la résolution des problèmes océanographiques est de type décalé, proposé par Hansen (1966), Batten et Han (1981) (figure 1).

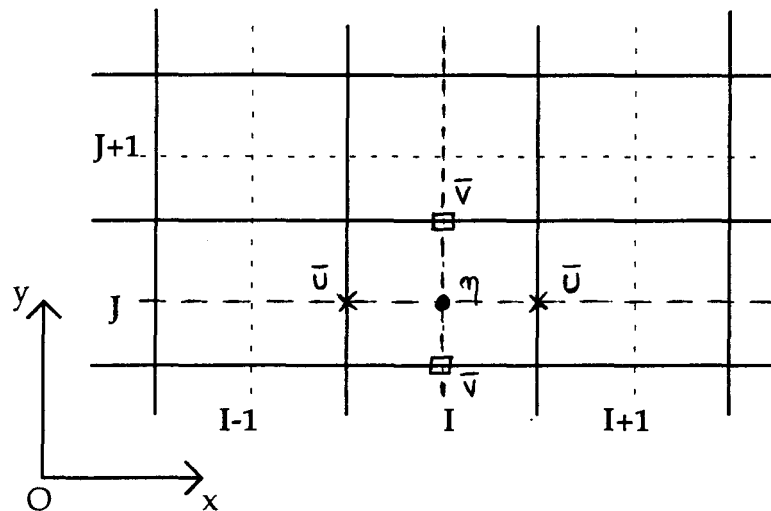


Figure 1: grille spatiale horizontale

Dans cette grille de calcul, les deux composantes de la vitesse moyenne ( $\bar{u}, \bar{v}$ ) et l'élévation de la surface libre  $\eta$  sont calculées en des points différents. Cette procédure simplifie considérablement le problème des conditions aux limites et permet une meilleure approximation des gradients de  $\eta$  qui interviennent dans les équations de mouvement et les gradients de  $(\bar{u}, \bar{v})$  qui interviennent dans l'équation de la continuité. Cependant, la connaissance de  $(\eta, \bar{u}, \bar{v})$  en un même point nécessite le passage par une procédure d'interpolation.

Le pas spatial ( $\Delta x$ ) peut être variable pour une grande résolution, mais cela introduit une grande complexité dans la mise en oeuvre de la méthode numérique choisie. Pour éviter ce problème, il est préférable d'effectuer dans un premier temps, un calcul avec une grille à maille grossière, puis dans un deuxième temps, superposer à cette grille, une grille plus fine pour laquelle les conditions aux limites seront les valeurs déterminées avec la grille grossière (Benqué et al. 1981).



## II.2) Discrétisation temporelle

Le choix de la grille temporelle dépend du schéma numérique utilisé pour résoudre le problème. Suivant la discrétisation temporelle choisie, on obtiendra des méthodes explicites, semi-implicites ou implicites. Dans les problèmes d'hydrodynamiques, ce sont les schémas semi-implicites qui s'avèrent les plus performants pour assurer une stabilité numérique acceptable (Leendertse 1979, Abbott 1981).

## III) METHODES DE DISCRETISATION

Pour la discrétisation spatiale des équations, les deux techniques les plus utilisées sont basées sur:

- i) le développement en série de Taylor des dérivées partielles
- ii) le bilan macroscopique pour un volume de contrôle.

### III.1) La méthode de développement en série de Taylor

Pour une fonction ( $\varphi$ ) quelconque, si l'on suppose le pas spatial constant ( $\Delta x$ ), le développement en série de Taylor donne:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{ij} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4)$$

Les relations (1), (2) et (3) représentent respectivement des différences en avant "Upstream", des différences en arrière "Downstream" et des différences centrées. La relation (4) représente par définition une différence centrée.

On remarque que les différences non centrées introduisent une erreur de troncature du premier ordre tandis que le calcul à partir des différences centrées introduit une

erreur de second ordre, il est donc préférable d'utiliser les différences centrées dès que possible pour minimiser les erreurs de troncature.

### **III.2) La méthode du volume de contrôle (volume fini)**

Cette méthode est présentée dans la littérature de plusieurs façons différentes, l'idée est cependant toujours la même: garantir la conservation des grandeurs macroscopiques. Certains auteurs dont Roache (1972a, 1977) présentent la méthode en termes de loi de conservation: le taux d'augmentation de ( $\phi$ ) à l'intérieur de volume de contrôle est égal au flux à travers les faces auquel, on ajoute la production et on retranche la dissipation à l'intérieur du volume. D'autres auteurs dont Patankar (1981) présentent plutôt la méthode comme l'intégration des équations sur le volume de contrôle à partir d'un profil de ( $\phi$ ) imposé à l'intérieur du volume. Généralement des profils linéaires ou à échelons sont choisis. L'équation aux différences finies obtenue de cette façon traduit de manière naturelle la loi de conservation de la quantité ( $\phi$ ) pour le volume de contrôle. Par conséquent la méthode des volumes finis garantit la conservation de la quantité transportée de point de vue macroscopique et non en tant que limite quand ( $\Delta x$ ) et ( $\Delta t$ ) s'approchent de zéro (la consistance). Ainsi la méthode des volumes de contrôle permet de donner une interprétation simple aux différentes discrétisations de la dérivée partielle première; les approximations (1) et (3) peuvent y être obtenues facilement: les différences centrées (3) sont obtenues quand on admet des profils linéaires entre les points de la grille, tandis que les différences non centrées (1) sont obtenues dans le cas des profils à échelons.

### **III.3) Convergence, Consistance et Stabilité**

Les méthodes numériques choisies pour la résolution des équations aux dérivées partielles d'un modèle doivent vérifier certaines conditions telles que la convergence, la consistance et la stabilité.

#### **III.3.1) Convergence**

Un schéma d'approximation est dit convergent si la solution numérique tend vers la solution du problème continu lorsque les pas spatial et temporel, tendent vers zéro, ou en d'autre terme un schéma est convergent si les erreurs dues à la discrétisation spatio-temporelle diminuent avec le pas spatial et temporel tout en restant bornées.

Dans la pratique, la vérification de cette propriété n'est pas immédiate. Par conséquent elle doit être effectuée par des méthodes indirectes faisant intervenir deux propriétés fondamentales du schéma: à savoir la consistance et la stabilité, d'où le théorème de Lax (Théorème d'équivalence).

### **Théorème:**

**Si les équations aux dérivées partielles sont approchées par un schéma consistant, alors ce schéma est convergent si et seulement si, il est stable.**

La démonstration de ce théorème se trouve dans Dautray et Lions (1988).

### ***III.3.2) Consistance***

Un schéma aux différences finies est consistant avec les équations aux dérivées partielles de départ si.

Lorsque les pas de discrétisation (spatial  $\Delta x$  et temporel  $\Delta t$ ) tendent vers zéro, le schéma définissant le problème discret se transforme en équations définissant le problème continu. Cette propriété est facile à vérifier en passant par les développements en série de Taylor.

### ***III.3.3) Stabilité***

L'écriture des équations aux dérivées partielles en différences finies permet de résoudre numériquement les équations du modèle, mais bien entendu la solution obtenue n'est qu'une approximation numérique et elle n'est satisfaisante que dans la mesure où elle tend vers la solution exacte lorsque le pas de l'intégration s'approche de zéro. Cette condition de convergence est fondamentale et elle entraîne la condition de stabilité qui impose à la solution d'être bornée quand la condition initiale l'est aussi pour tout  $(\Delta t)$  assez petit et  $(n\Delta t)$  fini.

Pour un schéma numérique, l'établissement de la condition de stabilité est un problème délicat et notamment pour les schémas non linéaires. Plusieurs méthodes de l'étude de la stabilité ont été proposées (Richtmyer et Morton 1967, Roache 1972b), mais sans généralisation possible. La méthode la plus utilisée est celle de Von Neuman décrite en 1950 par O'Brien, Hyman et Kaplan:

En annexe (2.1), nous donnons quelques éléments du calcul pratique des conditions de la stabilité des schémas linéaires en utilisant la méthode de Von Neuman.

Pour résoudre le problème de la stabilité numérique, plusieurs auteurs (Van Leer 1974, Roe 1981, Osher et al. 1984 et Sweby 1984) ont suivi une autre approche qui consiste à prendre en compte ce problème au moment même de la construction du schéma, en lui imposant de vérifier certaines propriétés telles que la conservativité, la positivité ou la propriété VTD (Variation Totale Décroissante, voir chapitre 4). Par exemple selon Patankar (1981) un schéma numérique doit vérifier :

- conservation de la quantité transportée.
- si la quantité à transporter augmente en un point, par convection et diffusion, elle ne doit pas diminuer aux points voisins.
- la diffusion doit rester linéaire.

## VI) METHODES NUMERIQUES POUR LES EQUATIONS DE SAINT- VENANT

Plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour la résolution des équations de Saint-Venant dans leurs formes primitives. Ces méthodes diffèrent au niveau de la discrétisation du terme temporel (premier ou deuxième ordre) et celle du terme convectif en temps (explicite, semi-implicite, ou totalement implicite) et en espace (différence amont, aval, ou centrée).

Les méthodes explicites ont été les premières utilisées sur le plan informatique grâce à la simplicité de leurs algorithmes de la mise en oeuvre, cependant pour assurer la stabilité des calculs ces méthodes sont limitées par un pas de temps imposé par la condition de Courant-Fredirics-Lievy (CFL). Pour un système d'équation de Saint-Venant linéarisé cette condition s'exprime par:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2gH_{\max}}} \quad (13)$$

où  $H_{\max}$  est la profondeur maximale de la zone d'étude.

Plusieurs modèles numériques à schéma explicite ont été proposés pour la simulation des zones côtières, on cite par exemple Hanssen (1966), Reid et al (1968), Heaps (1969), Leendertse et al (1973), Ronday (1976), Henry (1982). Il est à noter que dans les zones à "grande" profondeur, à pas spatial donné, le pas de temps imposé par la CFL devient "petit" (le temps de simulation devient long).

La contrainte sur le pas de temps pour assurer la stabilité a conduit au développement des schémas inconditionnellement stables qui rendent plus économique la modélisation des régions à grande profondeur tout en augmentant la résolution spatiale. Les méthodes les plus utilisées font appel à des techniques de "splitting" qui découpent les équations de manière à obtenir des algorithmes de résolution simple à mettre en oeuvre, on cite à titre d'exemple les techniques ADI (Alternating Direction Implicit) qui ramène la résolution des équations bidimensionnelles en deux résolutions monodimensionnelles (suivant  $x$ , puis suivant  $y$ ), qui ne demande qu'une inversion d'une matrice tri-diagonale suivant chaque direction.

Différents modèles ont été publiés, on cite par exemple: Leendertse (1969, 1970), Abbott (1967), Gustafsson (1971), Gerritsen (1982), Stelling (1983). Ces modèles sont de type semi-implicite c'est à dire la discrétisation du terme convectif se fait à l'instant  $n.\Delta t$  qui précède l'instant de calcul courant (i.e.  $(n+1)\Delta t$ ). Il est possible de discrétiser les équations d'une manière totalement implicite en linéarisant le terme convectif et sans passer par les techniques ADI. Cette procédure nécessite l'inversion de matrices pentadiagonales (pour les cas bidimensionnels) qui exige l'utilisation des méthodes itératives ou directes qui consomment beaucoup de temps de calcul. De telles méthodes ont été utilisées par Benqué et al. (1982), Blakhaus (1983).

## VI.1) Analyse de quelques schémas existants

### VI.1.1) Equations linéarisées

Dans ce paragraphe, on décrira les caractéristiques principales de quelques schémas explicites et notamment celles de Heaps (1968), Reid et al (1969) et implicites en considérant celles de Leendertse (1967), Abbott (1967). Pour comparer ces schémas, nous nous plaçons dans le cas de propagation d'une onde dont on connaît la solution analytique pour les équations de Saint-Venant linéarisées.

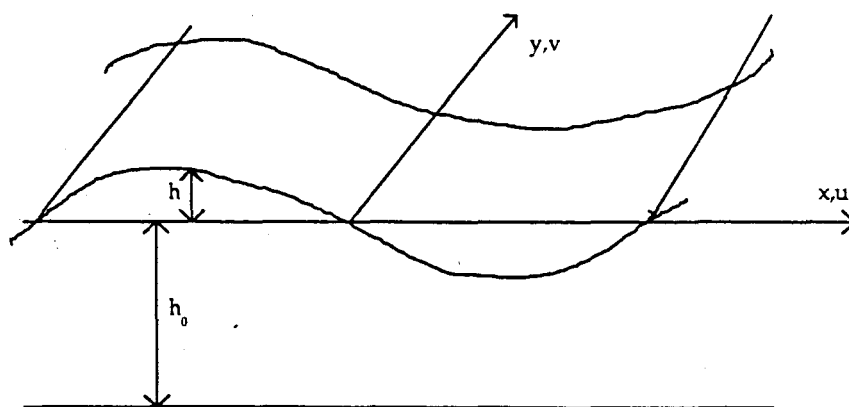


Figure 2: Propagation d'onde plane

Pour cette comparaison, nous utilisons le paramètre "facteur de propagation" appelé aussi facteur d'amplification introduit par Leendertse (1970) pour caractériser la déformation de l'onde "réelle" en amplitude et en phase.

Les équations linéarisées de la propagation d'une onde longue plane s'écrivent:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

où  $U, V$  sont les composantes de la vitesse horizontale moyennée sur la verticale,  $h_0$  est la profondeur du bassin et  $h$  est l'élévation de la surface libre (figure. 2).

#### a) Solution analytique (onde réelle)

Supposons que la solution du système des équations (14) admet un développement en série de Fourier, on a alors:

$$\bar{U} = \sum_m \bar{U}_m^* e^{i(t\beta_m + s\sigma_m)} \quad (15)$$

où:

$\bar{U}$  : vecteur  $(U, V, h)^T$  solution analytique.

$\bar{U}_m^*$  : vecteur  $(U_m^*, V_m^*, h_m^*)^T$  amplitude de l'harmonique  $m$

$\beta_m$  : fréquence de l'harmonique  $m$

$\sigma_m$  : nombre d'onde relatif à la  $m^{\text{ème}}$  harmonique

$s$  : abscisse dans la direction de propagation

Si l'on suppose que la direction de la propagation fait un angle  $(\gamma_m)$  avec l'axe  $o\bar{x}$ , les composantes du nombre d'onde s'obtiennent par projection sur les deux axes formant le système de coordonnées  $(o, x, y)$ , on a alors:

$$\sigma_{1m} = \sigma_m \cos(\gamma_m) \quad (16.a)$$

$$\sigma_{2m} = \sigma_m \sin(\gamma_m) \quad (16.b)$$

Comme on l'a mentionné dans l'annexe (2.1), les composantes de la série de Fourier n'interagissent pas entre elles et pour simplifier l'écriture, nous ne considérons par la suite qu'une seule harmonique. Soit alors:

$$\bar{U} = \bar{U}^* e^{i(\beta t + x\sigma_1 + y\sigma_2)} \quad (17)$$

Si l'on substitue la relation (17) dans le système d'équations (14), on aura le système suivant:

$$\begin{pmatrix} i\beta & 0 & i\sigma_1 g h_0 \\ 0 & i\beta & i\sigma_2 g h_0 \\ i\sigma_1 & i\sigma_2 & i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^* \\ V^* \\ h^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Ce système admet la solution nulle (sans intérêt), nous cherchons d'autres solutions en annulant le déterminant, c'est à dire :

$$\Delta = (i\beta)^3 + i\beta\sigma^2 g h_0 = 0 \quad \text{avec : } \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \text{et} \quad i^2 = -1 \quad (19)$$

L'équation ci-dessus admet trois solutions:

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = \sigma \sqrt{g h_0} \\ \beta_3 = -\sigma \sqrt{g h_0} \end{cases} \quad (20)$$

Substitués dans l'équation (17), les solutions ( $\beta_i$ ) définissent complètement la solution analytique du système (14).

### **b) Schémas numériques**

Dans ce paragraphe, nous écrivons les équations aux différences finies pour les quatre schémas cités ci-dessus. Pour cela, nous notons par  $\bar{U}_{ij}^n = (U_{ij}^n, V_{ij}^n, h_{ij}^n)$  la solution numérique à la position spatiale de coordonnées ( $i\Delta x, j\Delta y$ ) et à l'instant ( $n\Delta t$ ).

#### **b.1) Schéma de Heaps (1968)**

Le schéma de Heaps a la particularité de calculer les composantes de la vitesse (U,V) au même point du maillage (figure. 3.a), ce schéma est de type explicite et il est donné par:

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Delta t} + g \frac{h_{i+1,j+1}^n - h_{i-1,j+1}^n + h_{i+1,j-1}^n - h_{i-1,j-1}^n}{4\Delta s} = 0 \quad (\text{H.1})$$

$$\frac{V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n}{\Delta t} + g \frac{h_{i+1,j+1}^n - h_{i+1,j-1}^n + h_{i-1,j+1}^n - h_{i-1,j-1}^n}{4\Delta s} = 0 \quad (\text{H.2})$$

$$\frac{h_{ij}^{n+1} - h_{ij}^n}{\Delta t} + h_0 \left( \frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n + U_{i+1,j-1}^n - U_{i-1,j-1}^n}{4\Delta s} + \frac{V_{i+1,j+1}^n - V_{i+1,j-1}^n + V_{i-1,j+1}^n - V_{i-1,j-1}^n}{4\Delta s} \right) = 0 \quad (\text{H.3})$$

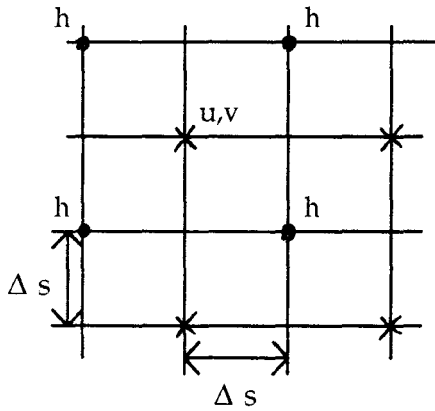


Figure 3.a): Grille de calcul utilisée par Heaps

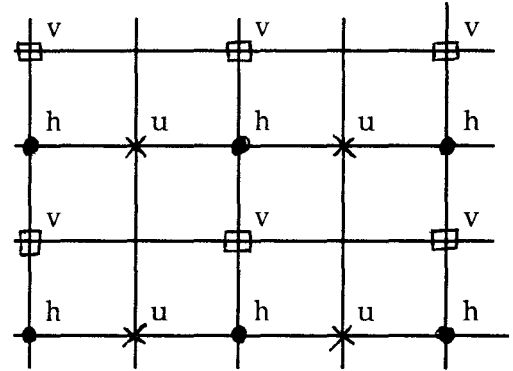


Figure 3.b): Grille de calcul utilisée par Reid et al, Leendertse et Abbott

Pour que le module de toutes les valeurs propres de la matrice d'amplification du schéma de Heaps soient inférieures à l'unité il faut que:

$$gh_0 \frac{\Delta t^2}{\Delta s^2} [\sin^2(\sigma_1 \Delta s) \cdot \cos^2(\sigma_2 \Delta s) + \sin^2(\sigma_2 \Delta s) \cdot \cos^2(\sigma_1 \Delta s)] < 4 \quad (\text{H.4})$$

L'expression (H.4) se réduit à la condition de stabilité du schéma de Heaps qui s'écrit par:

$$gh_0 \frac{\Delta t^2}{\Delta s^2} < 4 \quad (21)$$

### **b.2) Schéma de Reid et Bodine (1969)**

Reid et Bodine ont utilisé la maillage de la figure (3.b) pour exprimer d'une manière explicite leur schéma numérique donné par:



$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Delta t} + g \frac{h_{i+1,j}^n - h_{i-1,j}^n}{2\Delta s} = 0 \quad (\text{RB.1})$$

$$\frac{V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n}{\Delta t} + g \frac{h_{i,j+1}^n - h_{i,j-1}^n}{2\Delta s} = 0 \quad (\text{RB.2})$$

$$\frac{h_{ij}^{n+1} - h_{ij}^n}{\Delta t} + h_0 \left( \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta s} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta s} \right) = 0 \quad (\text{RB.3})$$

De la même manière Reid et Bodine ont donné la condition de stabilité de leur schéma par la relation suivante:

$$gh_0 \frac{\Delta t^2}{\Delta s^2} < 2 \quad (22)$$

### b.3) Schéma de Leendertse (1967)

Leendertse utilise le maillage de la figure (3.b) pour établir les équations aux différences finies définissant son schéma implicite de type "Leap-frog", dont la résolution se fait en deux étapes:

#### Etape 1 :

$$\frac{U_{ij}^* - U_{ij}^n}{\Delta t/2} + g \frac{h_{i+1,j}^* - h_{i-1,j}^*}{2\Delta s} = 0 \quad (\text{L1.1})$$

$$\frac{V_{ij}^* - V_{ij}^n}{\Delta t/2} + g \frac{h_{i,j+1}^n - h_{i,j-1}^n}{2\Delta s} = 0 \quad (\text{L1.2})$$

$$\frac{h_{ij}^* - h_{ij}^n}{\Delta t/2} + h_0 \left( \frac{U_{i+1,j}^* - U_{i-1,j}^*}{2\Delta s} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta s} \right) = 0 \quad (\text{L1.3})$$

#### Etape 2 :

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^*}{\Delta t/2} + g \frac{h_{i+1,j}^* - h_{i-1,j}^*}{2\Delta s} = 0 \quad (\text{L2.1})$$

$$\frac{V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^*}{\Delta t/2} + g \frac{h_{i,j+1}^{n+1} - h_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta s} = 0 \quad (\text{L2.2})$$

$$\frac{h_{ij}^{n+1} - h_{ij}^*}{\Delta t/2} + h_0 \left( \frac{U_{i+1,j}^* - U_{i-1,j}^*}{2\Delta s} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta s} \right) = 0 \quad (\text{L2.3})$$

Leendertse a montré que le module de toutes les valeurs propres de la matrice d'amplification est inférieur à l'unité sans aucune condition sur  $\Delta t$  et  $\Delta s$ , de ce fait son schéma est inconditionnellement stable.

#### **b.4) Schéma d'Abbott (1967)**

Comme Leendertse, Abbott utilise la grille de la figure (3.b) pour calculer la solution numérique par un schéma implicite qui diffère de celui de Leendertse (1967) par la discrétisation temporelle des gradients spatiaux de  $U$  et de  $h$ . Ce schéma est donné en deux étapes par :

##### **Etape 1 :**

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\Delta t} + g \frac{h_{i+1,j}^* - h_{i-1,j}^*}{2\Delta s} = 0 \quad (\text{A1.1})$$

$$\frac{h_{ij}^* - h_{ij}^n}{\Delta t/2} + h_0 \left( 0.5 \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta s} + 0.5 \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta s} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta s} \right) = 0 \quad (\text{A1.2})$$

##### **Etape 2 :**

$$\frac{V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n}{\Delta t} + g \left( 0.5 \frac{h_{i,j+1}^{n+1} - h_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta s} + 0.5 \frac{h_{i,j+1}^n - h_{i,j-1}^n}{2\Delta s} \right) = 0 \quad (\text{A2.1})$$

$$\frac{h_{ij}^{n+1} - h_{ij}^*}{\Delta t/2} + h_0 \left( 0.5 \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta s} + 0.5 \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta s} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta s} \right) = 0 \quad (\text{A2.2})$$

Toutes les valeurs propres de la matrice d'amplification ont un module inférieur à l'unité (annexe 2.2) sans aucune condition sur  $\Delta s$  et  $\Delta t$ , par conséquent le schéma d'Abbott est inconditionnellement stable.

### c) Solution numérique (onde calculée) et facteur de propagation

Pour les quatre schémas décrits ci-dessus, nous supposons que la solution numérique admet un développement en série de Fourier discret dont nous donnons la forme d'une seule harmonique, c'est à dire:

$$\bar{U} = \bar{U}_c e^{i(\beta' n \Delta t + j \Delta s \sigma_1 + k \Delta s \sigma_2)} \quad (23)$$

où  $\bar{U}_c = (U_c, V_c, h_c)^T$  désigne les variables calculées numériquement,  $\beta'$  est nombre complexe homogène à une fréquence telle que: sa partie réelle représente la fréquence de l'onde calculée et sa partie imaginaire mesure indirectement la déformation de l'amplitude de l'onde.

Dans tout ce qui suit, on pose:

$$\phi = e^{i\beta' \Delta t} \quad (24)$$

Comme dans le cas de la solution analytique et pour l'ensemble des schémas, nous cherchons le paramètre  $\beta'$  qui détermine la solution numérique. Nous donnons la procédure du calcul seulement pour le schéma de Heaps, pour les autres schémas le calcul se fait de manière analogue.

Si l'on substitue la relation (23) dans les équations aux différences finies du schéma de Heaps (H.1 - H.3) et si l'on pose:

$$A_1 = \sin((\sigma_1 + \sigma_2) \Delta s) \quad \text{et} \quad A_2 = \sin((\sigma_1 - \sigma_2) \Delta s) \quad (25)$$

L'écriture matricielle du schéma donne:

$$\begin{pmatrix} \phi - 1 & 0 & ig \frac{\Delta t}{2 \Delta s} (A_1 + A_2) \\ 0 & \phi - 1 & g \frac{\Delta t}{2 \Delta s} (A_1 - A_2) \\ \frac{ih_0 \Delta t}{2 \Delta s} (A_1 + A_2) & \frac{ih_0 \Delta t}{2 \Delta s} (A_1 + A_2) & \phi - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_c \\ V_c \\ h_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Si l'on annule le déterminant de ce système, on aura:

$$\phi_1 = 1 \quad (27.a)$$

$$\phi_2 = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta s} \sqrt{\frac{gh_0(A_1^2 + A_2^2)}{2}} \quad \text{et} \quad \phi_3 = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta s} \sqrt{\frac{gh_0(A_1^2 + A_2^2)}{2}} \quad (27.b,c)$$

ou encore:

$$\beta'_1 = 0 \quad (28.a)$$

$$\beta'_2 = \text{Arctg} \left( \sqrt{\frac{\Delta t^2}{2\Delta s^2} gh_0(A_1^2 + A_2^2)} \right) - i \text{Log} \left( \sqrt{1 + \frac{\Delta t^2}{2\Delta s^2} gh_0(A_1^2 + A_2^2)} \right) \quad (28.b)$$

$$\beta'_3 = -\text{Arctg} \left( \sqrt{\frac{\Delta t^2}{2\Delta s^2} gh_0(A_1^2 + A_2^2)} \right) - i \text{Log} \left( \sqrt{1 + \frac{\Delta t^2}{2\Delta s^2} gh_0(A_1^2 + A_2^2)} \right) \quad (28.c)$$

Pour mesurer la déformation de l'onde introduite par le schéma numérique, Leendertse (1967) a introduit le "facteur de propagation" défini par le rapport entre "l'onde calculée" (solution des équations aux différences finies) et "l'onde réelle" (solution analytique). Ce facteur s'écrit donc:

$$T = \frac{e^{i(\beta'\Delta t + \sigma s)}}{e^{i(\beta\Delta t + \sigma s)}} \quad (29)$$

Ainsi le module de (T) mesure l'erreur d'amplitude de l'onde propagée et son argument mesure l'erreur de phase.

Si l'on désigne par (L) la longueur de l'onde réelle et (P) sa période, c'est à dire

$$L = \frac{2\pi}{\sigma} \quad \text{et} \quad P = \frac{2\pi}{\beta}$$

Au bout d'une période temporelle (t=P), le facteur de propagation devient:

$$T = e^{i2\pi \left( \frac{\beta'}{\beta} - 1 \right)} \quad (30)$$

Si l'on note par (p) le nombre de pas de temps nécessaire pour que l'onde réelle parcourt sa longueur d'onde (L), c'est à dire:

$$p = \frac{P}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\beta\Delta t}$$

alors, le module et l'argument du facteur de propagation (T) s'écrivent:

$$|T| = \left| e^{-\text{Im}(\beta'\Delta t)} \right|^p \quad (31)$$

$$\text{Arg}(T) = p \cdot \text{Re}(\beta'\Delta t) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (32)$$

Pour le schéma de Heaps, les expressions (31) et (32) deviennent alors:

$$|T_{\text{Heaps}}| = \left[ 1 + \frac{gh_0 \Delta t^2}{2\Delta s^2} (A_1^2 + A_2^2) \right]^{p/2} \quad (33)$$

$$\text{Arg}(T_{\text{Heaps}}) = p \cdot \text{Arctg} \left( \sqrt{\frac{\Delta t^2}{2\Delta s^2} gh_0 (A_1^2 + A_2^2)} \right) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad (34)$$

De la même manière on en déduit le module et l'argument du facteur de propagation des autres schémas (annexe 2.3).

#### **d) Comparaison des schémas**

La comparaison de ces quatre schémas se fera par le biais de l'analyse du facteur de propagation. En effet, le module et l'argument de ce paramètre mesurent la déformation en amplitude et en phase de l'onde "calculée".

On remarquera que le facteur de propagation fourni par le schéma de Leendertse est identique à celui fourni par le schéma d'Abbott (annexe 2.4). Dès lors la comparaison se fera entre le schéma de Reid et Bodine, de Leendertse et de Heaps.

Pour étudier la sensibilité du facteur de propagation (T) au nombre de courant (Cr) et à la direction de propagation ( $\gamma$ ), nous présentons une série d'essai pour les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{lll} \text{Cr}=0.1 & ; & \text{Cr}=1.0 & ; & \text{Cr}=5.0 \\ \gamma=0.0^\circ & ; & \gamma=22.5^\circ & ; & \gamma=45.0^\circ \end{array}$$

Les figures (4, 5 et 6) nous permettent de faire quelques commentaires sur le comportement de chacun des schémas:

Nous soulignons le bon comportement du schéma de Reid et Bodine lorsque le critère de stabilité est respecté et notamment pour les nombres de courant avoisinant l'unité (figure 5). Dans ces conditions le schéma de Reid et Bodine devient plus

avantageux que le schéma de Leendertse implicite. Par contre quand le nombre de courant est supérieur à 4, la déformation en amplitude de l'onde "calculée" est catastrophique pour l'ensemble des valeurs de  $\gamma$  (figure 6). D'une manière positive, ces figures permettent de vérifier le résultat théorique annoncé sur la stabilité des schémas explicite (équation 23).

En ce qui concerne le schémas de Heaps, nous signalons que même à faible nombre de courant ( $Cr=0.1$ ), la déformation de l'amplitude de l'onde "calculée" est toujours présente (figure 4). Cette déformation s'accroît lorsque  $\gamma$  s'approche de zéro (figure 4a.1, 4b.1, 4c.1). Il est à noter que, pour le schéma de Heaps l'augmentation de  $\gamma$  entraîne un gain de précision pour la phase de l'onde "calculée".

Les caractéristiques de l'onde calculée (module et argument du facteur de propagation) fournies par le schéma de Leendertse et le schéma d'Abbott sont satisfaisantes et présentent le "meilleur" compromis (précision/stabilité) (figure 4, 5, 6). Sur le plan pratique, ces schémas laissent le choix du pas de temps adéquat aux processus étudiés. Cette propriété rend ce type de schémas très populaire en modélisation côtière.

La liste des schémas semi-implicites qui ont été proposés dans la littérature n'est pas exhaustive, nous citons par exemple Gustafsson (1971), Duwe et Hewer (1982), Stelling (1983). Cependant les schémas analysés ci-dessus sont représentatifs des différents types de schémas applicables à des situations pratiques.

### VI.1.2) Equations avec termes convectifs

Par son caractère non linéaire, le terme de convection est le terme qui pose le plus de problème dans la modélisation des écoulements de fluide. Différentes méthodes ont été proposées dans la littérature relative à l'importance donnée à:

- la conservation de la forme à advecter
- la conservation de la quantité transportée (conservation de la masse)
- la précision de la méthode (ordre de l'erreur de troncature)

De point de vu physique, le transport d'une quantité ( $\phi$ ) par advection se fait dans le sens de la vitesse. Un schéma numérique doit respecter cette caractéristique considérée comme fondamentale par de nombreux auteurs (Spalding, 1972, Raithby, 1976 et Patankar 1981). De point de vu numérique, cette propriété ne peut être vérifiée que par des différences non centrées. Sa vérification est à l'origine des schémas amont connus sous les noms "upstream" ou "upwind".

La propriété de la conservation de la masse est essentielle dans le cas des équations scalaires d'advection-diffusion et notamment pour les équations sans termes sources ou puits. Cette propriété peut être vérifiée numériquement par des différences centrées ou non.

La minimisation de l'erreur de troncature, c'est à dire le passage à un ordre de précision élevé est toujours désirable. Cependant une erreur de troncature minimale n'implique pas nécessairement une erreur minimale dans le résultat final, tout dépend de l'arithmétique de la machine utilisée.

Pour illustrer les problèmes de stabilité et de propagation, nous analyserons en annexe (2.4) les différentes méthodes de discrétisation spatiale (amont, avale et centrée) d'une équation monodimensionnelle purement convectif et ceci pour des schémas explicites et implicites.

## V) DISCRETISATION DES EQUATIONS DU MODELE

Dans ce paragraphe, nous présentons la discrétisation des équations du modèle établies dans le chapitre (1) (système EQ\_M3D), c'est à dire un schéma upstream pour le terme d'advection et le schéma d'Abbott pour le terme de propagation. En effet l'étude faite dans le paragraphe (VI.1.1.c) de ce chapitre concernant le facteur de propagation, montre que pour certaines valeurs de direction de propagation ( $\gamma$ ) et de nombre de courant ( $Cr$ ), le schéma d'abbott n'introduit pas de déformation en amplitude, par contre en phase, il introduit une distorsion inférieure à  $15^\circ$  pour les nombres de points par longueur d'onde ( $N$ ) supérieur à 10 (figures 5 et 6).

Nous détaillons ici la discrétisation spatio-temporelle uniquement pour le premier demi pas de temps (calcul de  $\eta_{(n+1/2)}$  et  $\bar{u}_{(n+1)}$ ); le second demi pas de temps (calcul de  $\eta_{(n+1)}$  et  $\bar{v}_{(n+1)}$ ) s'obtient de la même manière.

Pour simplifier l'écriture des équations discrétisées, nous adoptons les notations suivantes pour exprimer les gradients spatiaux et temporels.

1) Pour une fonction ( $\varphi$ ) quelconque on pose:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(t) & \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varphi_{,x} \\ \varphi' &= \varphi(t + \Delta t/2) \\ \varphi'' &= \varphi(t + \Delta t) \end{aligned} \tag{35}$$

2) Si  $u$  est la vitesse dans le direction  $x$ , le schéma upstream s'écrit indépendamment du signe de  $u$  par:

$$\varphi_{,x} = \frac{1}{2\Delta x} \left\{ (1 - Cu)(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + (1 + Cu)(\varphi_j - \varphi_{j-1}) \right\} \quad (36)$$

avec  $Cu = \frac{u}{|u|} = \text{signe}(u)$

3) on utilise la grille décalée pour la discrétisation de l'ensemble des équations. Cette grille est schématisée par:

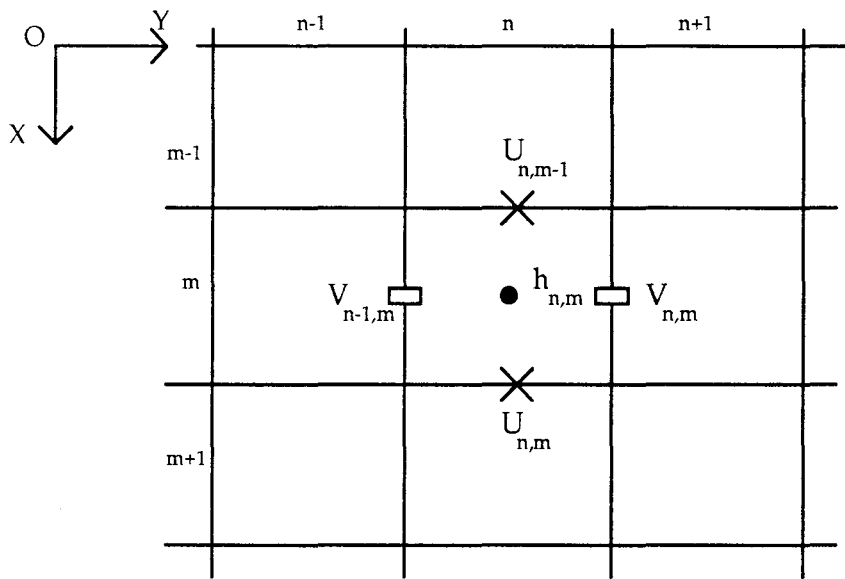


Figure 11: Grille de calcul utilisée par Hess (1986)

### V.1) Equation du mode externe (mode barotrope)

Pour la discrétisation des équations du mode externe (système ME du chapitre 1), nous reprenons seulement l'équation du mouvement relative à la composante  $u$  du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  et l'équation de continuité, c'est à dire:

$$\frac{\partial H\bar{u}}{\partial t} + \beta_s \left\{ \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (HB_x \theta_{uu} \bar{u}\bar{u}) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} (H\theta_{uv} \bar{u}\bar{v}) \right\} - fH\bar{v} = -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} H \frac{\partial p_a}{\partial x} - HC_x^* + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2HA_h B_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_h H \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \tau_{sx} - \tau_{bx} - \beta_c \frac{H}{B_x} \theta_{su} C_{ws} \bar{u} |\bar{u}| \quad (37)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} (HB_x \bar{u}) + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial x} (HB_y \bar{v}) = 0 \quad (38)$$



Pour simplifier l'écriture des équations (37-38), on pose:

$$U = H\bar{u} \quad ; \quad V = H\bar{v}$$

$$A = B_x B_y \quad ; \quad \Theta = B_x \theta_{uu} \bar{u} \quad ; \quad \oplus = H \theta_{uv} \bar{u} \bar{v} \quad ; \quad \tau_{bx} = \phi \left( \frac{U}{H} + \hat{u}_b \right)$$

$$\phi = C_{wb1} + C_{wb2} \sqrt{u_b^2 + v_b^2} \quad ; \quad X = \tau_{sx} - \alpha_0 H p_{a,x} - H G_x^* - \phi \hat{u}_b \quad ; \quad F_{bx} = \phi / H + \beta_c \theta_{su} C_{ws} |\bar{u}| / B_x$$

Avec ces notations les équations (37-38) deviennent alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \beta_a \left\{ \frac{1}{B_x} \frac{\partial(\Theta U)}{\partial x} + \frac{\partial \oplus}{\partial y} \right\} = -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + X + fV - F_{bx} U + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2HA_h B_x \frac{\partial(U/H)}{\partial x} \right) \\ + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_h H \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (39)$$

$$A \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (B_x U) + \frac{\partial}{\partial y} (B_y V) = 0 \quad (40)$$

La discrétisation des équations (39-40) par le schéma d'Abbott suivant la direction ox donne alors:

### 1) Equation de continuité

$$\begin{aligned} 2 \frac{A_{n,m}}{\Delta t} (\eta'_{n,m} - \eta_{n,m}) + \frac{1}{2\Delta L} \{ BX_{n,m} U''_{n,m} - BX_{n,m-1} U''_{n,m-1} + BX_{n,m} U_{n,m} - BX_{n,m-1} U_{n,m-1} \} \\ + \frac{1}{2\Delta L} \{ BY_{n,m} V_{n,m} - BY_{n-1,m} V_{n-1,m} \} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{ou encore} \quad U''_{n,m-1} [-BX_{n,m-1} C_1] + \eta'_{n,m} A_{n,m} + U''_{n,m} [BX_{n,m} C_1] = D_{n,m} \quad (41.a)$$

Avec:

$$D_{n,m} = A_{n,m} \eta_{n,m} - C_1 [BX_{n,m} U_{n,m} - BX_{n,m-1} U_{n,m-1} + 2(BY_{n,m} V_{n,m} - BY_{n-1,m} V_{n-1,m})] \quad (41.b)$$

$$C_1 = \Delta t / 4\Delta L$$

Dans la suite, nous développons une relation récurrente liant  $U''_{n,m}$  et  $\eta'_{n,m}$  par une relation de la forme :

$$U''_{n,m-1} = FA_{m-1} - FB_{m-1} \eta'_{n,m} \quad (42)$$

En substituant la relation (42) dans l'expression (41.a), nous obtenons:

$$\eta'_{n,m} = \frac{D_m + C_1 F A_{m-1} B X_{n,m-1}}{[A_{n,m} + C_1 F B_{m-1} B X_{n,m-1}]} - U''_{n,m} \frac{C_1 B X_{n,m}}{[A_{n,m} + C_1 F B_{m-1} B X_{n,m-1}]} = G A_m - U''_{n,m} G B_m \quad (43)$$

avec:

$$G A_m = D_m + C_1 F A_{m-1} B X_{n,m-1} / [A_{n,m} + C_1 F B_{m-1} B X_{n,m-1}] \quad (43.a)$$

$$G B_m = C_1 B X_{n,m} / [A_{n,m} + C_1 F B_{m-1} B X_{n,m-1}] \quad (43.b)$$

La relation (42) permet de résoudre l'équation de continuité lorsque  $U''_{n,m}$  est connue. Ceci est possible en résolvant l'équation de la quantité du mouvement relative à  $U$  (équation 39).

## 2) Equation de la quantité du mouvement (pour $U$ )

Par simplification, on pose:

$$U E = \bar{u} \quad ; \quad V E = \bar{v} \quad ; \quad H A_h = A H \quad ; \quad H_{n,m} = \beta_h \eta_{n,m} + d_{n,m}$$

$$C u = U_{n,m} / |U_{n,m}| \quad ; \quad A H C_{n,m} = 0.25 [A H_{n,m+1} + A H_{n,m} + A H_{n+1,m} + A H_{n+1,m+1}]$$

Avec ces notations, l'équation (39) discrétisée s'écrit alors:

$$\frac{U''_{n,m} - U_{n,m}}{\Delta t} + \text{Convxy} = \text{Forc} + \text{Diffx} + \text{Diffy} \quad (44)$$

Avec:

$$\begin{aligned} \text{Convxy} = & \frac{\beta_a}{2 B X_{n,m} \Delta L} \left[ (1 - C u) (\Theta_{n,m+1} U''_{n,m+1} - \Theta_{n,m} U''_{n,m}) + (1 + C u) (\Theta_{n,m} U''_{n,m} - \Theta_{n,m-1} U''_{n,m-1}) \right] \\ & + \frac{\beta_a}{\Delta L} [\oplus_{n,m} - \oplus_{n-1,m}] \end{aligned} \quad (44.a)$$

$$\text{Forc} = \frac{-g}{2 \Delta L} (H_{n,m+1} + H_{n,m}) (\eta'_{n,m+1} - \eta'_{n,m}) + X_{n,m} + \frac{f}{4} [V_{n,m} + V_{n,m+1} + V_{n-1,m} + V_{n-1,m+1}] + F b x_{n,m} U''_{n,m}$$

$$\begin{aligned} \text{Diffx} = & \frac{1}{B X_{n,m} \Delta L^2} \left\{ A H_{n,m+1} (B X_{n,m} + B X_{n,m+1}) \left[ \frac{U''_{n,m+1}}{[H_{n,m+2} + H_{n,m+1}]} - \frac{U''_{n,m}}{[H_{n,m+1} + H_{n,m}]} \right] \right. \\ & \left. - A H_{n,m} (B X_{n,m} + B X_{n,m-1}) \left[ \frac{U''_{n,m}}{[H_{n,m+1} + H_{n,m}]} - \frac{U''_{n,m-1}}{[H_{n,m-1} + H_{n,m}]} \right] \right\} \end{aligned} \quad (44.b)$$

$$\text{Diffy} = \frac{(1-\beta_c)}{\Delta L^2} \left[ \text{AHC}_{n,m} \{ \text{UE}_{n+1,m} - \text{UE}_{n,m} + \text{VE}_{n,m+1} - \text{VE}_{n,m} \} \right. \\ \left. - \text{AHC}_{n-1,m} \{ \text{UE}_{n,m} - \text{UE}_{n-1,m} + \text{VE}_{n-1,m+1} - \text{VE}_{n-1,m} \} \right] \quad (44.c)$$

Après réarrangement des termes, l'équation (44) devient:

$$U''_{n,m-1} \left[ \frac{-B_m}{(H_{n,m} + H_{n,m-1})} - \Theta_{n,m-1} Q_m \right] + \eta'_{n,m} [-\text{HH}_m] + U''_{n,m} \left[ \frac{B_p}{(H_{n,m} + H_{n,m+1})} + 1 + \Delta t \text{Fb} x_{n,m} + \right. \\ \left. \frac{B_m}{(H_{n,m} + H_{n,m+1})} + \Theta_{n,m} (Q_m - Q_p) \right] + \eta'_{n,m+1} [\text{HH}_m] + U''_{n,m+1} \left[ \frac{-B_p}{(H_{n,m+1} + H_{n,m+2})} - \Theta_{n,m+1} Q_p \right] \\ = U_{n,m} + \Delta t X_{n,m} + \text{AHUYY} + f \Delta t \text{Vc} - \text{AUV} \quad (45)$$

Les nouveaux paramètres  $Q_m$ ,  $Q_p$ ,  $B_m$ ,  $B_p$ ,  $\text{HH}_m$ ,  $\text{AHUYY}$ ,  $\text{Vc}$  et  $\text{AUV}$  sont définis en annexe(2.5).

D'une manière plus simplifiée l'équation (44) peut s'écrire comme:

$$U''_{n,m-1} \text{F1} + \eta'_{n,m} [-\text{HH}_m] + U''_{n,m} \text{F2} + \eta'_{n,m+1} [\text{HH}_m] + U''_{n,m+1} \text{F3} = \text{F4} \quad (46)$$

où:

$$\text{F1} = \frac{-B_m}{(H_{n,m} + H_{n,m+1})} - \Theta_{n,m-1} Q_m$$

$$\text{F2} = 1 + \Delta t \text{Fb} x_{n,m} + \frac{B_p}{(H_{n,m+1} + H_{n,m+2})} + \frac{B_m}{(H_{n,m} + H_{n,m+1})} + \Theta_{n,m} (Q_m - Q_p)$$

$$\text{F3} = \frac{-B_p}{(H_{n,m} + H_{n,m+2})} - \Theta_{n,m+1} Q_p$$

$$\text{F4} = U_{n,m} + \Delta t X_{n,m} + \text{AHUYY} + f \Delta t \text{Vc} - \text{AUV}$$

Les expressions (41.a) et (46) permettent d'écrire le système linéaire à résoudre à chaque pas de temps (annexe 2.6). Ce système met en évidence une structure matricielle de type tri-diagonale par bloc ou pentadiagonale par point qu'on résout généralement par des méthodes itératives. Pour éviter ce genre de méthodes qui coûtent chère en temps de calcul pour nos applications, souvent on a recours à des méthodes dites "double balayage" qui reposent sur la méthode de Gauss et qui consistent à établir des relations récurrentes entre les inconnues qui seront ensuite

calculées par remontée. En effet si on substitue la relation (42) dans l'expression (46) on aura:

$$\eta'_{n,m}[-FB_{m-1}F1 - HH_m] + U''_{n,m}F2 + \eta'_{n,m+1}HH_m + U''_{n,m+1}F3 = F4 - FA_{m-1}F1 \quad (47)$$

D'autre part si nous utilisons la relation (43), on aura alors:

$$U''_{n,m}[-GB_m(-FB_{m-1}F1 - HH_m) + F2] + \eta'_{n,m+1}HH_m + U''_{n,m+1}F3 = F4 - FA_{m-1}F1 + GA_m[FB_{m-1}F1 + HH_m] \quad (48)$$

L'expression (41) appliquée à la maille (n, m+1) donne:

$$U''_{n,m+1} = \frac{D_{m+1}}{BX_{n,m}C_1} + U''_{n,m} \frac{BX_{n,m}}{BX_{n,m+1}} - \eta'_{n,m+1} \frac{A_{n,m}}{BX_{n,m+1}C_1} \quad (49)$$

Si l'on introduit la relation (49) dans l'expression (48), on obtient alors:

$$U''_{n,m} \left[ GB_m (FB_{m-1}F1 + HH_m) + F2 + F3 \frac{BX_{n,m}}{BX_{n,m+1}} \right] + \eta'_{n,m+1} \left[ HH_m - \frac{A_{n,m+1}}{BX_{n,m+1}C_1} F3 \right] = F4 - FA_{m-1}F1 + GA_m [FB_{m-1}F1 + HH_m] - \frac{D_{m+1}}{BX_{n,m+1}C_1} F3 \quad (50)$$

Ceci permettra d'écrire la relation récurrente identique à l'expression (42), mais exprimée pour la maille (n, m+1), c'est à dire:

$$U''_{n,m} = FA_m - FB_m \eta'_{n,m+1} \quad (51)$$

Avec:

$$FA_m = \frac{F4 - FA_{m-1}F1 + GA_m [FB_{m-1}F1 + HH_m] - \frac{D_{m+1}}{BX_{n,m+1}C_1} F3}{DD} \quad (51.a)$$

$$FB_m = \frac{HH_m - \frac{A_{n,m+1}}{BX_{n,m+1}C_1} F3}{DD} \quad (51.b)$$

$$DD = GB_m (FB_{m-1}F1 + HH_m) + F2 + F3 \frac{BX_{n,m}}{BX_{n,m+1}} \quad (51.c)$$

Ainsi, après introduction des conditions aux limites, la solution  $(\eta'_{n,m}, U''_{n,m})$  est obtenue sur toute les mailles dans la direction  $(o\bar{x})$ .

### V.1.1) Introduction des conditions aux limites

#### a) Limite supérieure

La disposition du maillage et les relations de récurrence liant  $\eta'$  et  $U''$  permettent d'imposer les conditions aux limites soit sur la variable hauteur d'eau  $\eta'$ , soit sur la variable vitesse  $U''$ . Si l'on désigne par (mp) la première maille de calcul, la condition au limite doit donc être spécifiée à la maille (mp-1) notée aussi (mpm) (figure 12.a)

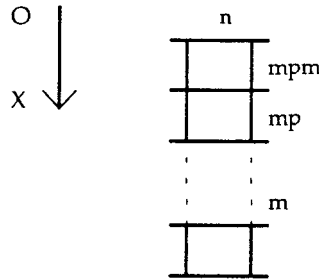


Figure 12.a: maille limite supérieure suivant la direction  $(o\bar{x})$

#### a.1) condition au limite donnée sur $\eta'$

Dans ce cas, la hauteur d'eau est donnée à chaque instant à la maille (mpm), c'est à dire:

$$\eta'_{n,mpm} = \eta_0(t)$$

A cette maille, on néglige dans l'équation de la quantité du mouvement (44) les termes d'advections, la viscosité horizontale et l'accélération de Coriolis. On obtient donc:

$$U''_{n,mpm} - U_{n,mpm} = \Delta t X_{n,mpm} - HH_{mpm} (\eta'_{n,mpm} - \eta_0) - \Delta t F b x_{n,mpm} U''_{n,mpm} \quad (52)$$

Après réarrangement des termes de la relation (52), on aboutit à:

$$U''_{n,mpm} = \frac{U_{n,mpm} + \Delta t X_{n,mpm} + HH_{mpm} \eta_0}{1 + \Delta t F b x_{n,mpm}} - \frac{HH_{mpm}}{1 + \Delta t F b x_{n,mpm}} \eta'_{n,mp} \quad (53)$$

Par identification avec la relation récurrente (42), on déduit  $FA_{mpm}$  et  $FB_{mpm}$  par:

$$FA_{mpm} = \frac{U_{n,mpm} + \Delta t X_{n,mpm} + HH_{mpm} \eta_0}{1 + \Delta t Fb x_{n,mpm}} \quad (53.a)$$

$$FB_{mpm} = \frac{HH_{mpm}}{1 + \Delta t Fb x_{n,mpm}} \quad (53.b)$$

### a.2) condition au limite donnée pour U''

Dans ce cas, on suppose que le débit  $U''$  est spécifié à tout instant à la maille (mpm), c'est à dire:

$$U''_{mpm} = U_0(t) \quad (54)$$

d'où:

$$FA_{mpm} = U_0 \quad (54.a)$$

$$FB_{mpm} = 0 \quad (54.b)$$

### b) Limite inférieure

Si l'on désigne par (md) la dernière maille de calcul, la condition au limite doit donc être spécifier à la maille (md+1) (notée aussi mdp) (figure 12.b)

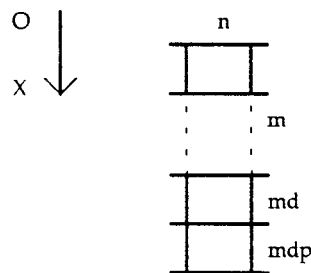


Figure 12.b: maille limite inférieure suivant la direction ox

### b.1) condition au limite donnée sur $\eta'$

Dans ce cas, on a:  $\eta'_{n,mdp} = \eta_0(t)$

A la maille voisine (md), on néglige dans l'équation de la quantité du mouvement (44) les effets de l'advection, de la viscosité horizontale et de l'accélération de Coriolis. On obtient donc:

$$U''_{n,md} - U_{n,md} = \Delta t X_{n,md} - HH_{md}(\eta_0 - \eta'_{n,md}) - \Delta t Fb x_{n,md} U''_{n,md} \quad (55)$$

A la maille (md), la relation récurrente (43) devient alors:

$$\eta'_{n,md} = GA_{md} - U''_{n,md} GB_{md} \quad (56)$$

La combinaison des relations (55) et (56) donne:

$$U''_{n,md} = \frac{U_{n,md} + \Delta t X_{n,md} + HH_{md} GA_{md}}{1 + HH_{md} GB_{md} + \Delta t Fb x_{n,md}} - \frac{HH_{md}}{1 + HH_{md} GB_{md} + \Delta t Fb x_{n,md}} \eta'_0 \quad (57)$$

Par identification avec la relation récurrente (51), on déduit  $FA_{md}$  et  $FB_{md}$  par:

$$FA_{md} = \frac{U_{n,md} + \Delta t X_{n,md} + HH_{md} GA_{md}}{1 + HH_{md} GB_{md} + \Delta t Fb x_{n,md}} \quad (57.a)$$

$$FB_{md} = \frac{HH_{md}}{1 + HH_{md} GB_{md} + \Delta t Fb x_{n,md}} \quad (57.b)$$

### **b.2) condition au limite donnée pour U''**

De la même façon si le débit  $U_0$  est imposé à la maille (md), la relation récurrente (51) se réduit à:

$$U''_{n,md} = U_0 \quad (58)$$

à partir de laquelle on en déduit:

$$FA_{md} = U_0 \quad (58.a)$$

$$FB_{md} = 0 \quad (58.b)$$

A ce stade, nous disposons de toutes les expressions mathématiques nécessaires au calcul de la solution numérique dont nous illustrons l'algorithme de résolution.

### V.1.2) Algorithme de résolution du mode externe

On désigne par (mp) et (md) respectivement la première et la dernière maille de calcul (figure 12.c)

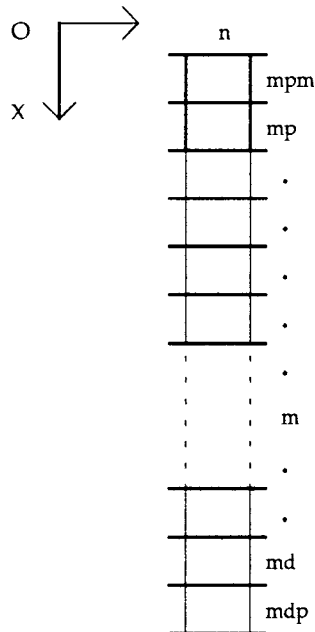


Figure 12.c: balayage suivant la direction ox à y fixe

Pour une direction y fixe, on suppose que toutes les mailles comprises entre (mp) et (md) sont dans l'eau, l'algorithme de résolution par la méthode double balayage se résume dans les étapes suivantes:

Pour n fixe ( la colonne n)

1) A la maille (mpm), on calcule les termes  $FA_{mpm}$  et  $FB_{mpm}$

Si la limite est fermée

$$FA_{mpm} = FB_{mpm} = 0$$

Sinon

On utilise: (53.a) et (53.b) pour une condition sur  $\eta$

ou (54.a) et (54.b) pour une condition sur U

Fin si

2) boucle sur m=mp à md-1

calcul de  $GA_m$  et  $GB_m$  par les relations (43.a) et (43.b)



calcul de  $FA_m$  et  $FB_m$  par les relations (51.a) et (51.b)

Fin de boucle

3) A la maille(md), on calcule  $GA_m$  et  $GB_m$  comme dans l'étape (2), mais on vérifie l'état de la limite (fermée ou ouverte), c'est à dire:

Si la limite est fermée

$$FA_{md}=FB_{md}=0$$

Sinon

On utilise: (57.a) et (57.b) pour une condition sur  $\eta$

ou (58.a) et (58.b) pour une condition sur U

Fin si

4) Etape de remontée

boucle sur  $m=md$  à  $mp$

calcul de  $U''_{n,m}$  par la relation (51)

calcul de  $\eta'_{n,m}$  par la relation (43)

Fin de boucle

5) A la maille mpm, le débit est calculé par:

$$U''_{n,mpm} = FA_{mpm} - FB_{mpm} \eta'_{n,mp}$$

Fin de calcul pour la colonne (n)

A l'issue de cette étape, on dispose en tout point (n,m) du maillage des variables  $\eta'_{n,m}$  et  $U''_{n,m}$ , la deuxième étape (balayage suivant oy) permettra de calculer  $\eta''_{n,m}$  et  $V''_{n,m}$  en utilisant la même discrétisation spatio-temporelle pour l'équation de la quantité du mouvement relative à la composante V (chapitre 1, équation 129) et l'équation de continuité.

## V.2) Equation du mode interne (mode barocline)

Comme pour les équations du mode externe, nous donnons uniquement la discrétisation de l'équation de mouvement relative à la composante  $\hat{u}$  dont nous rappelons l'expression:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H\hat{u}}{\partial t} + \beta_a \left\{ \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} [HB_x (uu - \theta_{uu} \bar{u}\bar{u})] + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} [H(uv - \theta_{uv} \bar{u}\bar{v})] + \frac{\partial(\hat{u}\tilde{w})}{\partial \sigma} \right\} - fH\hat{v} = \\
& HG_x^* - HG_x + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2HA_h B_x \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) + (1 - \beta_c) \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_h H \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( A_v \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} \right) \\
& -\tau_{sx} + \tau_{bx} - \frac{\beta_c}{B_x} HC_{ws} [u|u| - \theta_{su} \bar{u}|\bar{u}|]
\end{aligned} \tag{59}$$

Nous avons vu au chapitre (1) que le principe de la séparation des modes a permis d'établir les équations du mode interne qui représentent la contribution de la structure verticale à l'écoulement total. De point de vue numérique, nous utilisons ce principe pour réécrire l'équation (59) sous une nouvelle forme telle que:

$$\frac{\partial H\hat{u}}{\partial t} + \beta_a \frac{\partial(\hat{u}\tilde{w})}{\partial \sigma} - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( A_v \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} \right) + \frac{\beta_c HC_{ws} \hat{u} |\hat{u} + \bar{u}|}{B_x} = RS \tag{60}$$

En dérivant le terme temporel et en divisant toute l'équation par H, on aura alors:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{1}{H} \hat{u} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\beta_a}{H} \frac{\partial(\hat{u}\tilde{w})}{\partial \sigma} - \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( A_v \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} \right) + F_s \hat{u} = RS' \tag{61}$$

où: RS' terme englobant tous les termes restant de l'équation (59) et  $F_s = \frac{\beta_c}{B_x} C_{ws} |\hat{u} + \bar{u}|$ .

L'écoulement vertical se caractérise par un processus diffusif dominant l'advection verticale. Ce constat permet donc de discrétiser les gradients spatiaux de l'équation (61) d'une manière totalement implicite.

Avant d'établir les équations aux différences finies, nous donnons la position sur la verticale des variables à calculer (figure 13).

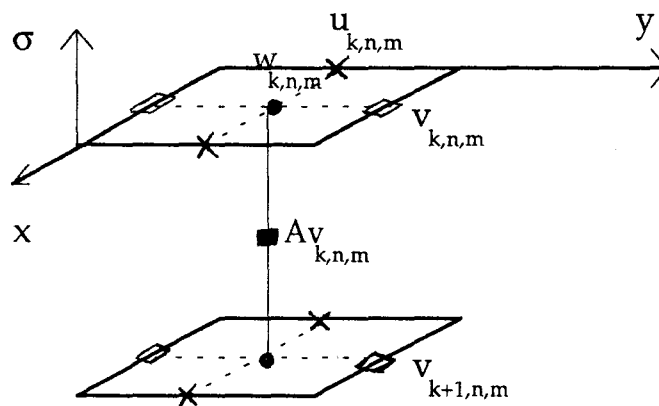


Figure 13: Position des variables sur la verticale

Pour ne pas alourdir la notation, nous supprimons le tilde sur  $\tilde{w}(\tilde{w} \equiv w)$  et le chapeau sur  $\hat{u}(\hat{u} \equiv u)$ .

La discrétisation spatio-temporelle de l'équation (61) donne:

$$\begin{aligned} & \frac{u'_{k,n,m} - u_{k,n,m}}{\Delta T} + \frac{u'_{k,n,m} + u_{k,n,m}}{H_{n,m+1} + H_{n,m}} \frac{\partial H}{\partial t} \\ & + \frac{\beta_a}{4\Delta\sigma} \left\{ (w_{k-1,n,m} + w_{k-1,n,m+1} + w_{k,n,m} + w_{k,n,m+1})(u'_{k-1,n,m} + u_{k,n,m}) \right. \\ & \quad \left. - (w_{k,n,m} + w_{k,n,m+1} + w_{k+1,n,m} + w_{k+1,n,m+1})(u'_{k,n,m} + u_{k+1,n,m}) \right\} \\ & - \frac{1}{2\Delta\sigma^2 [H_{n,m} + H_{n,m+1}]^2} \left\{ (Av_{k-1,n,m} + Av_{k-1,n,m+1})(u'_{k-1,n,m} - u'_{k,n,m}) \right. \\ & \quad \left. - (Av_{k,n,m} + Av_{k,n,m+1})(u'_{k,n,m} - u'_{k+1,n,m}) \right\} + F_s u'_{k,n,m} = RS'_{k,n,m} \end{aligned} \quad (62)$$

Pour simplifier l'écriture de l'équation (62), nous introduisons des nouvelles variables ( $G_m, G_p, D_m, D_p, DH, \bar{H}_{n,m}$ ) dont l'expression est donnée en annexe (2.7) Après réarrangement des inconnues, l'équation (62) peut s'écrire sous la forme:

$$F1u'_{k-1,n,m} + F2u'_{k,n,m} + F3u'_{k+1,n,m} = F4 \quad (63)$$

Avec:

$$F1 = G_m - D_m \quad (63.a)$$

$$F2 = 1 + DH + \Delta T \cdot F_s + G_m - G_p + D_m + D_p \quad (63.b)$$

$$F3 = -G_p - D_p \quad (63.c)$$

$$F4 = RS'_{k,n,m} + (1 - DH)u_{k,n,m} \quad (63.d)$$

A maille horizontale  $(n,m)$  fixe, l'équation (62) représente un système linéaire de structure matricielle tri-diagonale, dont la résolution se fait aisément par la méthode "double balayage", en établissant des relation de récurrences de la forme:

$$u'_{k,n,m} = FA_k + FB_k u'_{k+1,n,m} \quad (64.a)$$

ou encore

$$u'_{k-1,n,m} = FA_{k-1} + FB_{k-1} u'_{k,n,m} \quad (64.b)$$

La relation (64.b) substituée dans l'équation (63) donne:

$$F1(FA_{k-1} + FB_{k-1} u'_{k,n,m}) + F2u'_{k,n,m} + F3u'_{k+1,n,m} = F4 \quad (65)$$

ou encore:

$$u'_{k,n,m} = \frac{F4 - F1 \cdot FA_{k-1}}{F2 + F1 \cdot FB_{k-1}} + \frac{-F3}{F2 + F1 \cdot FB_{k-1}} u'_{k+1,n,m} \quad (66)$$

Par identification avec la relation (64.a) on obtient:

$$FA_k = \frac{F4 - F1 \cdot FA_{k-1}}{F2 + F1 \cdot FB_{k-1}} \quad (66.a)$$

$$FB_k = \frac{-F3}{F2 + F1 \cdot FB_{k-1}} \quad (66.b)$$

La donnée des conditions aux limites au fond et à la surface permettent de calculer d'une manière récurrente les vecteurs FA et FB et par conséquent le calcul de  $u'_{k,n,m}$ .

### V.2.1) Introduction des conditions aux limites

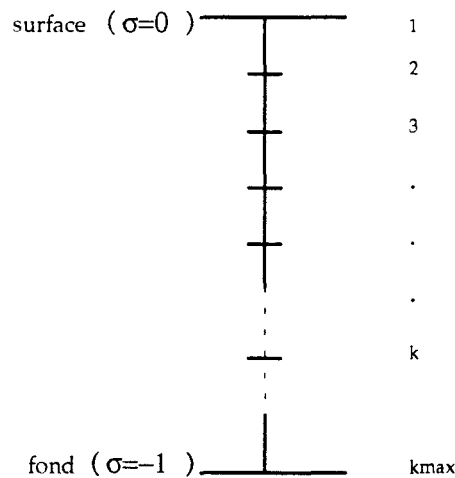


Figure 14: maillage vertical

#### a) condition à la surface (k=1, σ=0)

La condition à la surface s'exprime en fonction de la contrainte de cisaillement due au vent. Cette condition est donnée par (chapitre1, équation 115):

$$\text{à } \sigma=0 \quad \rho_0 \frac{Av}{H} \frac{\partial u'}{\partial \sigma} = \tau_{sx} \quad (67)$$

Une discrétisation de la condition (67) en différence finie au premier ordre donne:

$$u'_1 - u'_2 = \frac{\Delta\sigma H}{\rho_0 A v} \tau_{sx} \quad \text{ou encore} \quad u'_1 = \frac{\Delta\sigma H}{\rho_0 A v} \tau_{sx} + u'_2 \quad (68)$$

Ainsi on obtient:

$$FA_1 = \frac{\Delta\sigma H}{\rho_0 A v} \tau_{sx} \quad (68.a)$$

$$FB_1=1 \quad (68.b)$$

**b) condition au fond (k=kmax, σ=-1)**

Au fond, il est possible d'introduire deux types de conditions: soit une condition de non glissement (vitesse totale nulle), soit une condition de glissement qui s'exprime en fonction de la contrainte de cisaillement au fond  $\vec{\tau}_b$ .

**i) condition de non glissement**

Cette condition suppose que la vitesse totale au fond est nulle, c'est à dire:

$$u = \bar{u} + u'_{k_{max}, n, m} = 0 \quad \text{ou encore} \quad u'_{k_{max}, n, m} = -\bar{u} \quad (69)$$

**ii) condition de glissement**

Cette condition relie le gradient vertical de la composante u du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  à la composante suivant  $\vec{o}\vec{x}$  de la contrainte de cisaillement au fond  $\tau_b$  par la relation suivante (chapitre 1, équation 105):

$$\text{à } \sigma=-1 \quad \rho_0 \frac{A v}{H} \frac{\partial u'}{\partial \sigma} = \tau_{bx} \quad (70)$$

De l'expression (chapitre.1, équation 106), la contrainte  $\tau_{bx}$  peut s'écrire sous la forme:

$$\tau_{bx} = \phi(\bar{u} + u'_{k_{max}, n, m}) \quad (70.a)$$

La discrétisation au premier ordre de la condition (70) donne:

$$u'_{k \max-1, n, m} - u'_{k \max, n, m} = \frac{\Delta\sigma \cdot H}{\rho_0 A v} \phi(\bar{u} + u'_{k \max, n, m}) \quad (71)$$

si l'on pose

$$\varphi = \frac{\Delta\sigma \cdot H}{\rho_0 A v} \phi$$

on aura alors:

$$u'_{k \max-1, n, m} = \varphi \bar{u} + (1 + \varphi) u'_{k \max, n, m} \quad (72)$$

D'autre part la relation de récurrence (64.b) appliquée à la maille ( $k_{\max}$ ) donne:

$$u'_{k \max-1, n, m} = FA_{k \max-1} + FB_{k \max-1} u'_{k \max, n, m} \quad (73)$$

Une combinaison des relations (72) et (73) permet de trouver:

$$u'_{k \max, n, m} = \frac{FA_{k \max-1} - \varphi \bar{u}}{1 + \varphi - FB_{k \max-1}} \quad (74)$$

En conclusion, les expressions (68.a), (68.b) et (69) ou (74) suffisent pour le calcul de la solution numérique. En effet les deux premières permettent de calculer les vecteurs **FA** et **FB** sur toute la colonne d'eau à partir des relations (66.a et 66.b) et l'une des deux dernières permet de calculer  $u'$  par remontée.

### V.2.2) Algorithme de résolution du mode interne

Pour la maille ( $n, m$ ) fixe

- 1) A la surface, on calcule les termes  
 $FA_1$  et  $FB_1$  par les relations (68.a) et (68.b)
- 2) boucle sur  $k=2$  à  $k_{\max}-1$   
calcul de  $FA_k$  et  $FB_k$  par les relations (66.a) et (66.b)  
Fin de boucle
- 3) Au fond on applique la condition au limite (69) ou (74) pour calculer  $\hat{u}_{k_{\max}}$

#### 4) Etape de remontée

boucle sur  $k=k_{\max}-1$  à 1

calcul de  $\hat{u}_{k,n,m}$  par la relation (64.a)

Fin de boucle

#### 5) Tester si l'intégrale sur la verticale de $\hat{u}$ est nulle (chapitre 1, équation 133.c)

Sinon correction par:

$$\hat{u}_{k,n,m} \leftarrow \hat{u}_{k,n,m} - I \quad \text{avec} \quad I = \sum_{k=2}^{k_{\max}} 0.5(\hat{u}_{k-1,n,m} + \hat{u}_{k,n,m}) = \int_z \hat{u}(z) dz$$

Fin de calcul de  $\hat{u}$

### **Remarque:**

*Il est possible d'avoir une discrétisation précise au second ordre du gradient vertical de la composante  $u$  intervenant dans les conditions aux limites à la surface et/ou fond, en utilisant l'approximation suivante:*

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} \equiv \frac{3\hat{u}_1 - 4\hat{u}_2 + \hat{u}_3}{2\Delta\sigma} + O(\Delta\sigma^2)$$

Avec cette approximation les expressions (68.a), (68.b) et (74) prendront une autre forme dont le détail est donné en annexe (2.8).

Le calcul de la composante  $v$  du vecteur vitesse du mode interne est effectué par le même algorithme de résolution de la composante  $\hat{u}$  exposé ci-dessus. Par contre la composante verticale  $w$  est calculée par une simple discrétisation en différences finies de l'équation de continuité du mode interne (chapitre 1, équation 134), moyennant la condition au fond:

$$\tilde{w}_{k_{\max},n,m} = 0$$

### **V.3) Equation de concentration (Température, Salinité, Sédiment)**

Avant de donner la discrétisation de l'équation d'une concentration (C), nous rappelons que la structure verticale est réactualisée avec un pas de temps ( $\Delta T$ ) multiple du pas de temps du mode externe ( $\Delta T = n\Delta t$ ,  $n > 1$ ) (figure 15).

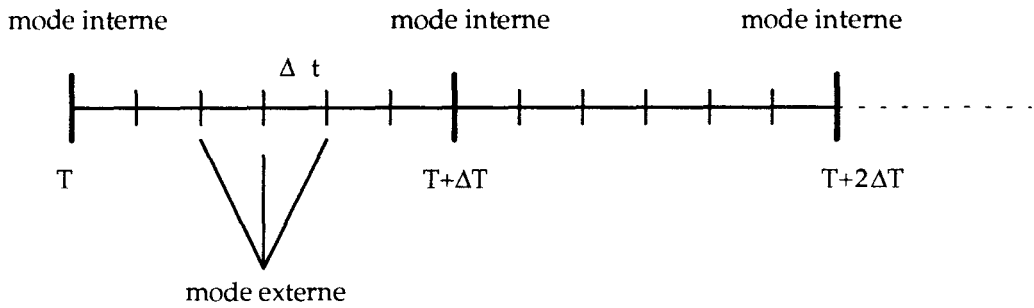


Figure 15: Pas de temps du mode externe et interne

L'équation de concentration sera calculée en même temps que le mode interne, alors que les vitesses moyennes horizontales ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ) qui interviennent dans cette équation sont calculées tous les pas de temps ( $\Delta t$ ) du mode externe.

La validité des approximations par différences finies des équations aux dérivées partielles suppose que la solution à approcher varie linéairement sur l'intervalle élémentaire d'approximation, c'est à dire: le pas de discrétisation doit être choisi de telle sorte que cette hypothèse soit vérifiée. Avec le pas de temps du mode interne ( $\Delta T$ ), l'équation de concentration peut poser problème quant à l'approximation de l'advection horizontale. En effet pendant la période ( $\Delta T = n\Delta t$ ), les vitesses horizontales du mode externe ont le temps de varier et peut-être pas linéairement et notamment pour ( $n$ ) assez "grand".

Pour une meilleure consistance avec le principe des séparations des modes, nous utilisons les composantes ( $U_0$ ,  $V_0$ ) de la vitesse du mode externe moyennée sur l'intervalle  $[T, T+\Delta T]$ , ces composantes, à leur tour, doivent vérifier l'équation de la continuité du mode externe.

Pour cela, on pose :

$$- \Delta T = n\Delta t$$

- Pour une fonction ( $\varphi$ ) quelconque, on note:

$$\varphi^k = \varphi(t)$$

$$\varphi^{k+1} = \varphi(t+\Delta t)$$

Une discrétisation hybride en temps de l'équation (40) de continuité du mode externe donne pour tout  $1 \leq j \leq n$ :

$$\frac{\eta^{k+j} - \eta^{k+j-1}}{\Delta t} + 0.5 \left\{ \frac{\partial [B_x (U^{k+j} + U^{k+j-1})]}{\partial x} + \frac{\partial [B_y (V^{k+j} + V^{k+j-1})]}{\partial y} \right\} = 0 \quad (75)$$



Une sommation membre à membre de l'équation (75) donne:

$$\frac{\eta^{k+n} - \eta^k}{\Delta t} + 0.5 \left\{ \frac{\partial \left[ B_x \sum_{j=1}^{j=n} (U^{k+j} + U^{k+j-1}) \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[ B_y \sum_{j=1}^{j=n} (V^{k+j} + V^{k+j-1}) \right]}{\partial y} \right\} = 0 \quad (76)$$

En divisant l'équation (76) par (n), on aura:

$$\frac{\eta^{k+n} - \eta^k}{n\Delta t} + \frac{\partial(B_x U_0)}{\partial x} + \frac{\partial(B_y V_0)}{\partial y} = 0 \quad (77)$$

Avec:

$$U_0 = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{j=n} (U^{k+j} + U^{k+j-1}) \quad (77.a)$$

$$V_0 = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{j=n} (V^{k+j} + V^{k+j-1}) \quad (77.b)$$

**Remarque:**

Les composantes  $U_0$  et  $V_0$  peuvent être obtenues par une simple intégration numérique (méthode de trapèze) sur l'intervalle  $[T, T+DT]$  des composantes  $U$  et  $V$  de l'équation (40).

L'équation du transport advectif-diffusif d'un scalaire  $\phi$  ( $S, T, K, C_n$ ) est donnée dans le chapitre (1) par l'équation (99) dont nous rappelons l'expression:

$$\frac{\partial H\phi}{\partial t} + \frac{1}{B_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x H \left( u\phi - D_h \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{B_y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y H \left( v\phi - D_h \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \tilde{w}\phi - \frac{D_v}{H} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right] = HR \quad (78)$$

En regroupant les gradients horizontaux dans le second membre, l'équation (78) devient:

$$AH \frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial H}{\partial t} \phi + A \frac{\partial(\tilde{w}\phi)}{\partial \sigma} - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( D_v \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) = F + AHR \quad (79)$$

Avec:

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x HD_h \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \frac{\partial (B_x [U + \hat{u}H]\phi)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y HD_h \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] - \frac{\partial (B_y [V + \hat{v}H]\phi)}{\partial y} \quad (79.a)$$

Comme dans l'équation de la composante  $\hat{u}$ , le second membre de l'équation (79) sera discrétisé à l'instant  $n\Delta T$  et le terme de gauche à l'instant  $(n+1)\Delta T$ , les nouvelles composantes  $U_0$  et  $V_0$  interviendront dans la discrétisation du terme  $F$  annexe (2.9).

Pour un pas ( $\Delta T$ ), la discrétisation spatio-temporelle de l'équation (79) pour une maille  $(n, m)$  donnée, s'exprime par:

$$\begin{aligned} & A_{n,m} H_{n,m} (\phi'_{k,n,m} - \phi_{k,n,m}) + \Delta T A_{n,m} \frac{\partial \eta}{\partial t} \phi'_{k,n,m} \\ & + \frac{\Delta T A_{n,m}}{4\Delta\sigma} \left[ (\phi'_{k-1,n,m} + \phi'_{k,n,m}) (w_{k-1,n,m} + w_{k,n,m}) - (\phi'_{k+1,n,m} + \phi'_{k,n,m}) (w_{k+1,n,m} + w_{k,n,m}) \right] \quad (80) \\ & - \frac{\Delta T A_{n,m}}{H_{n,m} \Delta\sigma^2} \left[ Dv_{k-1,n,m} (\phi'_{k-1,n,m} - \phi'_{k,n,m}) - Dv_{k,n,m} (\phi'_{k,n,m} - \phi'_{k+1,n,m}) \right] = (F + A_{n,m} H_{n,m} R) \Delta T \end{aligned}$$

Après réarrangement l'équation (80) devient alors:

$$\begin{aligned} & \phi'_{k-1,n,m} (GC_m - DC_m) + \phi'_{k,n,m} (HH + SS + GC_m - GC_p + DC_m + DC_p) \\ & + \phi'_{k+1,n,m} (-GC_p - DC_p) = (F + HH.R) \Delta T + HH \cdot \phi_{k,n,m} \quad (81) \end{aligned}$$

où les paramètres  $GC_m, DC_m, HH, SS, GC_p, DC_p$  sont donnés en annexe (2.10).

L'équation (81) représente un système linéaire de structure matricielle tri-diagonale dont la résolution se fait d'une manière analogue à celle du système linéaire résultant de la discrétisation de l'équation de  $\hat{u}$  (équation 61).

## VI) FILTRAGE NUMERIQUE

### VI.1) Valeurs négatives

Au cours de la résolution numérique d'une équation de concentration par certaines méthodes de discrétisation, il est possible de voir apparaître des valeurs négatives qui n'ont parfois aucune réalité physique (salinité, sédiment) et qui sont à l'origine d'instabilités numériques. Pour éviter ce problème, plusieurs procédures de filtrage ont été proposées (Forester 1977, Chapman 1981), dont celle de Hess (1989)

qui initialise à zéro les valeurs négatives dès leur apparition dans les calculs. Cette solution viole la propriété fondamentale (conservation de la masse) de l'équation de type convection-dispersion. Pour pallier à cette difficulté, nous avons introduit un module de filtrage (Bartnicki 1983) dont l'algorithme (annexe 2.11) permettant la suppression des éventuelles valeurs négatives tout en conservant la masse et si possible la forme et le maximum (figure 16).

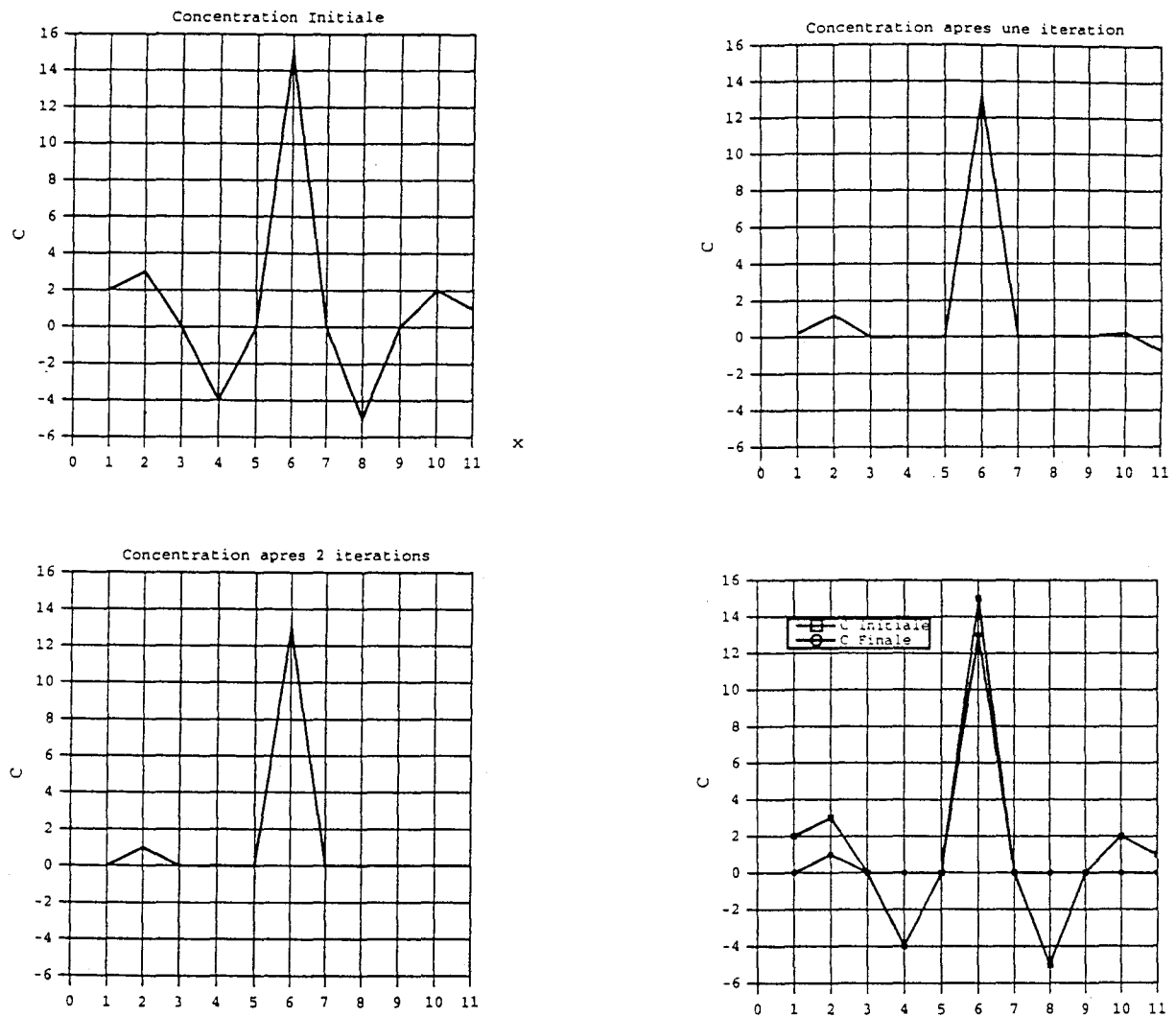


Figure 16: Filtrage des valeurs négatives (Bartnicki 1983).

## VI.1) Instabilité de la colonne d'eau

Numériquement, on peut avoir un gradient de densité négative qui n'a aucun sens physique (profil de densité instable). Pour une représentation plus réaliste de ce phénomène, Hess (1989) propose de rendre le profil de température et de salinité uniforme sur la verticale. Pour cela on calcule la quantité ( $\delta S$ ) que l'on ajoute à la salinité au niveau ( $k+1$ ), puis que l'on retranche à la salinité au niveau ( $k$ ). La même procédure est accomplie pour la température.

Les quantités ( $\delta S$ ) et ( $\delta T$ ) sont calculées par:

$$\delta S = \frac{\lambda_k S_k - \lambda_{k+1} S_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}$$

$$\text{où } \lambda_k = \begin{cases} 0.5 & \text{si } k=1 \text{ ou } k=k_{\max} \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$$

$$\delta T = \frac{\lambda_k T_k - \lambda_{k+1} T_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}$$

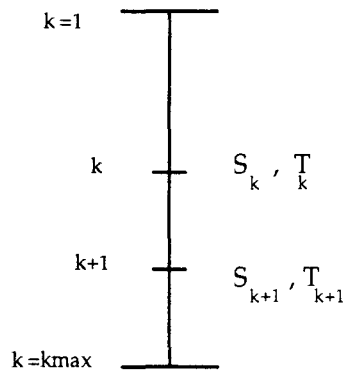


Figure 17: Stabilité de la colonne d'eau

Ainsi on aura:

$$S_k \leftarrow S_k + \delta S$$

$$S_{k+1} \leftarrow S_{k+1} - \delta S$$

et

$$T_k \leftarrow T_k - \delta T$$

$$T_{k+1} \leftarrow T_{k+1} + \delta T$$

## Références Bibliographiques du Chapitre 2

- Abbott, M. B. , F. Ionescu (1967): On the numerical computation of nearly-horizontal flows. *Journ. Hyd. Res.* Vol, 5 pp 97-117
- Abbott, M. B., A. Mc Cowan and I. R. Warren (1981): Numerical modelling of free-surface flows that are two-dimensional in plan. In: *Transport Models for Inland and Coastal Waters*. Edited by H. B. Fisher. **Academic Press**. NY.
- Abbott, M. B., and D. R. Basco (1994): Computational Fluid Dynamics. *Longman Scientific and Technical*, copub with **John Wiley & Sons** Inc, New York
- Backhaus, J. D. (1983): A Semi-Implicit scheme for the shallow water equations for application to schelf sea modelling. *Conti. Schelf. Sea. Res.* Vol, 2 pp 243-254.
- Bartnicki, J. (1989): A simple filtering procedure for removing negative values from numerical solutions of the advection equations. *Enviro.Software*. Vol, 2, N° 4, pp 187-201.
- Batten, M. L. and Y. J. Han (1981): On the computational noise of finite-difference schemes used in ocean models, *Tellus*, Vol 33, pp 387-396.
- Benqué, J. P. , A. Hauguel and P. L. Viollet (1981a): Quelques modélisations numériques de fluides dans l'environnement. *Rapports EDF*, HE041/81.12; HE042/81.03; HE044/81.05.
- Benqué, J. P., Cunge, J., J. Feuillet and A. Hauguel (1981b): A new method for tidal current computations. *Rapports EDF*, HE41/81.26 et HE42/81.17.
- Boris, J. P. and D. L. Book (1973): Flux-Corrected Transport I, SHASTA: A fluid transport algorithm that work, *J. Comput. Phys.*, 11, pp. 38-69.
- Bott, A. (1992): Monotone flux limitation in the area-preserving flux form advection algorithm. *Mon. Wea. Rev.* Vol, 120, pp 2592-2602.

- Casulli, V. (1990): Semi-Implicit finite difference methods for two-dimensional shallow water equations. *J. Comp. Phys.* Vol, 86 pp 56-74.
- Chapman, M. (1981): FRAM Nonlinear damping algorithm for the continuity equation. *J. Comp. Phys.* Vol, 44 pp 84-103.
- Dautry, R. and J. L. Lions (1988): Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques. Vol, 9 "Evolution Numérique Transport" Collection Enseignement INSTN, CEA, **Masson Edition**, pp 857-1275.
- Forester, K. C. (1977): Higher order monotonic convective difference schemes. *J. Comp. Phys.* Vol, 23, pp 1-22.
- Gerritsen, H. (1982): Accurate boundary treatment in shallow water flow computations. *PhD Thesis* Technische Hogeschool to Delft, Netherlands. 17 June pp 210.
- Gray, W. G. (1989): A finite element study of tidal flow data for the North Sea and English Channel. *Adv. Water Resources.* Vol, 12, Sept, pp 143-154.
- Grotkop, G. (1973): finite element analysis of long period water waves. *Comp. Math. in Appl. Mech. and Eng.* Vol, 2, pp 147-157.
- Gustafson, B. (1971) An alternating semi-implicit method for solving the shallow water equations. *J. Comp. Phys.* Vol, 7 pp 33-57.
- Hansen, D. V. and M. Jr. Rattray (1966): New dimensions in estuary classification. *Limnology and Oceanography.* Vol, 11(3), pp 319-326.
- Heaps, N. S. (1969): A two-dimensional numerical model. *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* A 265, pp 93-137.
- Henry, R. F. (1982): Automated programming of explicit shallow water models. Part I: Linearized methods with linear or quadratic friction. *Canadian Technical Report of Hydrography and Ocean Sciences* N° 3, Institute of Ocean Sciences, Department of Fisheries and Oceans. Sidney, B. C. pp 70.

- Hess, K. W. (1985): Assessment model for estuarine circulation and salinity. NOAA Technical Memorandum NESDIS, AISC 3, N. O. A. A., U. S. Department of Commerce, pp 39.
- Hess, K. W. (1986): Numerical model of circulation in Chesapeake Bay and the Continental Shelf, NOAA Technical Memorandum, NESDIS AISC 6, U. S. Department of commerce pp 47.
- Kinnmark, I. P. E., and Gray, W. G. (1984): A two-dimensionnal analysis of the wave equation model for finite element tidal computations. Inter. Jour. Num. Meth. Eng. Vol, 20, pp 369-383.
- Leendertse, J. J. (1967): Aspect of a computational model for long period wave propagation. Rand Corporation Memorandum RM-5294-PR, Santa Monica, California.
- Leendertse, J. J. (1970): A water quality simulation model for well mixed estuarines and Coastal seas. Volume I, Principles of Computations. Rand Corporation Memorandum RM-6230-RC, Santa Monica, California.
- Leendertse, J. J., R. C. Alexander and S. K. Liu (1973): Three-dimensionnal model for estuarines and coastal seas, Volume I, Principles of Computations. Rand Corporation Memorandum R-1417-OWRR, Santa Monica, California.
- Lynch, D. R. and F. E. Werner (1988): Long-term simulation and harmonic analysis of North sea/English Channel tide. Proc VII International Conference on Computational Methods in Water Resources, **Springer-Verlag**.
- Mesinger, F. and A. Arakawa (1976): Numerical methods used in atmospheric models. Global. Atmos. Res. Program. Technical Report, 17, Geneva
- Noyé, J. (1981): Finte difference methods for partial differential equations. In : Numerical Solution for Partial Differential Equations. Ed by J. Noyé North Holland Publ co, Amsterdam.
- O'Brien, G. C., M. A. Hyman and S. Kaplan (1965): A study of the numerical solution of partial differential equations. J. of Math. Phys. Vol, 29, pp 223-251.

- Osher, S. and S. R. Chakravarthy (1984): High resolution schemes and the entropy condition. *SIAM J. Num. Anal.*, Vol 21, N 5, pp. 955-984.
- Patankar, S. V. (1981): Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. **Hemisphere Publ** **co**, Mc-Graw-Hill Book Company.
- Peacemen, D. W. and H. H. Rachford (1955): The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *SIAM*, 3, 28.
- Raithby, G. D. (1976): Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng.* Vol, 5, 153-164.
- Reid, R. O. and B. R. Bodine (1968): Numerical model for storm surges in Galveston Bay. *Proceeding American Society of Civil Engineers, Journal Waterways and Harbors Divisions*. Vol, 94, N° ww1, pp 33-57.
- Richtmyer, R. D. and K. W. Morton (1967): Difference Methods for Initial Value Problems. **Interscience Publ, Wiley**, New York.
- Roache, P. J. (1972a): Computational Fluid Dynamics. **Hermosa Publ**. Albuquerque, N. M. pp 446.
- Roache, P. J. (1972b): On artificial viscosity. *J. Comp. Phy.* Vol, 10, pp 169-184.
- Roache, P.J. (1977): Computational Fluid Dynamics. **Hermosa Publ**. Albuquerque, N. M. (Revised).
- Roe, P. L. (1981): Numerical algorithms for the linear wave equation. *Technical Report* 81047, Royal Aircraft. Establishment.
- Roe, P. L. (1983): Some contribution to the modelling of discontinuous flows. *Proc. AMS/SIAM*. Seminar. San Diego.
- Ronday, F. C. (1976): Modèle hydrodynamique de la Mer du Nord. *PhD dissertation*. Université de Liège. Belgique. pp 269.
- Smolarkiewicz, P. K. (1984): A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. *J. Comp. Phy.* Vol, 54, pp 325-362.



- Smolarkiewicz, P. K. (1986): The multidimensional positive definite advection transport algorithm. " Further development and applications". *J. Comp. Phy.* Vol, 67, pp 396-438.
- Sobey, R. J. (1970): Finite difference schemes compared for wave-deformation characteristics in mathematical modelling of two-dimensional long-wave propagation. *Technical Memorandum*. 32, U. S. Army Corps of Engineers. *Coastal Engineering Research Center*, pp 29.
- Spalding, D. B. (1972): A novel finite difference formulation for differential expression involving both first and second derivatives. *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol, 4, pp, 551-559.
- Stelling, G. S. (1983): On the construction of computational methods for shallow water flow problems. *PhD Thesis* Technische Hogeschool to Delft. Netherlands 6 December, pp 224.
- Sweby, P. K. (1984): High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol 21, N 5, pp. 995-1011.
- Thacker, W. C. (1978): Comparaison of finite element and finite difference scheme.  
Part I: On dimensional gravity wave motion.  
Part II: Two dimensional gravity wave motion.  
*J. Phy. Oceanography*. Vol, 8 pp 676-689.
- Van Leer, B. (1974): Towards the ultimate conservative difference scheme Part 2 :Monotonicity and conservation combined in a second order Scheme *J. Comput. Phys.* Vol 14, pp. 361-370.
- Zalesak, S. T. (1979): Fully multidimensional flux corrected transport algorithm for fluid. *J. Comp. Phy.* Vol, 31, pp 335-362.

## CHAPITRE 3

## **I) INTRODUCTION**

D'une manière générale l'étape suivant la conception et la réalisation d'un code numérique est l'étape de validation du modèle. Elle s'effectue par comparaison, soit avec des configurations d'écoulements simples dont on connaît la solution analytique, soit avec des mesures disponibles. Cette opération permet en fait de vérifier le bon déroulement des calculs et de rendre compte des difficultés rencontrées dans l'application du modèle à des cas réels.

La comparaison avec des solutions analytiques a l'avantage de pouvoir estimer les erreurs d'approximation numérique et d'examiner les effets parasites introduits par la méthode utilisée. L'analyse des origines de ces erreurs permet ensuite d'améliorer les performances numériques et physiques du modèle.

A ce sujet Hess, (1985) a effectué une large série de tests et de comparaisons avec des solutions analytiques relatives à la plupart des phénomènes rencontrés en nature, nous citons par exemple:

- 1) propagation d'ondes sinusoïdales
- 2) écoulement induit par le vent
- 3) écoulement induit par gradient de densité
- 4) équilibre convection - frottement
- 5) diffusion horizontale 1-D d'une concentration (substance dissoute)
- 6) convection-diffusion dans le plan  $(x,z)$  d'une concentration.

Avant d'appliquer le modèle à la Manche Orientale, nous avons ajouté à ces tests, le cas de la propagation d'une onde sinusoïdale soumise à l'accélération de Coriolis dans un bassin à fond plat, ouvert à l'Ouest et fermé à l'Est. Ce cas test constitue en quelque sorte la schématisation du cas réel de la Manche dont l'extrémité orientale sera traitée avec ces caractéristiques hydrodynamiques, hydrologiques et sédimentologiques comme application du modèle développé dans ce travail.

## **II) CAS SCHEMATIQUES**

### **II.1) Onde sinusoïdale entrant dans un bassin.**

Ce cas test étudie la propagation d'une onde sinusoïdale de période  $(T)$  dans un bassin rectangulaire à fond plat de profondeur  $h=10$  m, long de 300 km et large de 100 km, ouvert à l'Ouest et fermé à l'Est (Figure 1).

La grille de calcul comprend 30x10 mailles carrées de pas régulier  $\Delta x = \Delta y = 10$  km. Les frontières fermées qui bordent le bassin sont placées au sud en ( $m=1$ ) et au nord en ( $m=10$ ), le bord Est limite le bassin en ( $n=30$ ) et le domaine est ouvert à ( $n=1$ ) (Figure 1).

A l'instant initial Toutes les vitesses. A la limite Ouest, les élévations de la surface libre varient périodiquement au cours du temps suivant l'expression:

$\eta = A \exp(-fy/c) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$  qui décrit l'onde de Kelvin. Cette dernière tient compte de la force de Coriolis par le terme à décroissance exponentielle qui traduit la variation de l'amplitude de l'onde dans un plan perpendiculaire à la direction de la propagation.

Les équations de ce cas schématique sont:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - c_d |u|u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - c_d |v|v \end{cases}$$

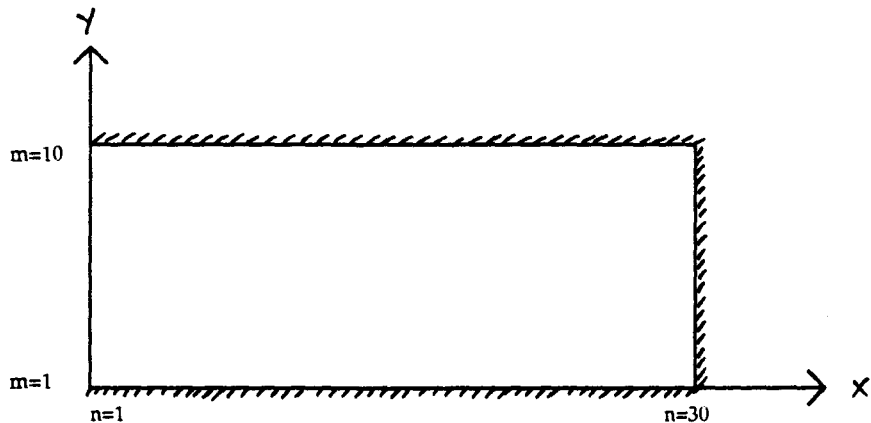


Figure 1 : Domaine de propagation de l'onde

## II.2) Résultats:

Sur la Figure (2), on observe l'évolution dans le bassin d'un système d'onde résultant de la superposition d'une onde incidente et d'une réfléchi. L'onde incidente introduite comme condition au limite ( $n=1$ ) se réfléchit sur le bord Est ( $n=30$ ) et engendre une onde réfléchi d'amplitude plus faible. En effet, celle-ci est

amortie par frottement sur le fond. Par conséquent, leur superposition ne forme pas un système d'onde stationnaire pure, mais elle se rapproche par un système dominé par une onde progressive se propageant dans le sens de l'onde incidente plus importante. Cette onde résultante se caractérise par des zones de flot et de jusant séparées par des lignes de convergences et de divergences des courants horizontaux (Figure 2).

### Point amphidromique

C'est la conséquence de la propagation de deux ondes en sens inverse dans un canal de grandes dimensions soumis à la force de Coriolis. Ce phénomène donne lieu à une figure d'onde appelée amphidromie de Kelvin.

Dans le bassin, on observe une rotation du front de l'onde résultante autour d'un point situé à une distance comprise entre  $10.5$  et  $11\Delta x$  soit  $110$  km du bord Est du bassin. Ce phénomène se traduit à travers les lignes d'isophases, tracées sur la figure (3.b) par une convergence au niveau de cette zone qui correspond aussi à un lieu d'amplitude minimale.

Si l'on considère que l'onde résultante dans le bassin est la superposition de deux ondes  $\eta_1$  et  $\eta_2$  monodimensionnelles se propageant en sens inverse, le point amphidromique est un point d'amplitude nulle c'est-à-dire:

Si

$$\eta_1 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\sqrt{gh}}\right)\right) \quad \text{et} \quad \eta_2 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{\sqrt{gh}}\right)\right)$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2$$

Les noeuds d'amplitude nulle sont placés aux abscisses  $x$  tel que:  $\eta=0$  quelque soit  $t$

$$\text{c'est-à-dire : } \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0 \quad \text{soit } x = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde est égale à  $T\sqrt{gh}$ .

Si l'on prend  $k=0$ , la distance  $x=\lambda/4$  entre le point amphidromique et l'extrémité Est du bassin est à peu près bien respectée dans notre application puisque sa valeur se situe entre  $105$  et  $110$  km (Figure 3.b), alors que la longueur d'onde de la marée semi-diurne vaut ici  $\lambda=447$  km, soit donc  $x = 112$  km.

Ces résultats peuvent être mis en parallèle (d'une manière schématique) avec les observations faites en Manche. En effet, la marée en Atlantique Nord crée une onde dérivée en Manche qui se propage vers l'Est. Celle-ci se superpose à deux ondes d'amplitude plus faible, l'une issue de la mer du Nord et l'autre réfléchiée par la côte du Boulonnais et qui se propage vers l'Ouest.

En regardant l'atlas des composantes harmoniques de la marée dans la Manche (Chabert D'Hières et Le Provost, 1978), on retrouve bien pour l'onde M2 semi-diurne, la même allure des lignes d'égales phases qui se redressent au niveau de la zone d'amplitude minimum entre Portland et Southampton (Figure 3.a)

### **III) APPLICATION DU MODELE A LA MANCHE ORIENTALE**

La Manche orientale a été choisie pour appliquer le modèle dans une région littorale à topographie réelle. D'une part par ces caractéristiques qui font un exemple intéressant pour explorer les possibilités du calcul tridimensionnel qui apportera de nouveaux éléments aux études déjà effectuées sur ce site, d'autre part, le choix de cette zone correspond aux zones d'intérêts du programme régional DYSCOP.

Depuis plusieurs décennies, le littoral du Nord Pas-de-Calais est soumis à d'intenses perturbations liées au développement des activités humaine pas nécessairement compatibles et par conséquent engendrent une succession de problèmes dont la résolution nécessite une bonne compréhension des processus physiques, sédimentologiques, chimiques et biologiques qui interagissent entre eux. De nombreuses disciplines sont donc concernées, notamment la physique et la modélisation numérique qui permettent de mieux connaître la circulation marine et à partir de laquelle un certain nombre de phénomènes pourront être appréhendés de façon plus précise.

Dans le cadre du programme DYSCOP, un certain nombre d'études pluridisciplinaires ont été entreprises et en ce qui concerne la physique, deux moyens d'investigation ont été engagés, d'une part les mesures en nature par mouillage d'une station benthique instrumentée (Chapalain, 1996a, 1996b) pour connaître la courantologie, l'hydrologie et la matière en suspension, d'autre part la modélisation numérique tridimensionnelle qui permettra l'étude des mouvements de la masse d'eau engendrés par la topographie réelle et d'autres phénomènes qui en découlent (gradients de salinité, transport sédimentaire, qualité des eaux, etc).

L'application à la Manche Orientale du modèle tridimensionnel présenté dans ce mémoire fait donc partie de ce programme.

### **III.1) Caractéristiques de la zone d'application**

Le domaine modélisé orienté N-S/E-W s'étend de Dieppe(1°11'E) à l'Ouest jusqu'au Ostende (51°12'N) à l'Est. Cette zone présente une morphologie très variée. Au niveau de la Flandre maritime, elle se caractérise par de larges estants et des bancs de sables, tandis qu'au niveau du Boulonnais, elle présente une côte à falaise. Ajoutons qu'au niveau du Marquenterre, on rencontre des estuaires (la Canche, l'Authie et la Somme) (Figure 4.a). L'ensemble de la zone d'étude est caractérisé par des profondeurs inférieures à 60 m (Figure 4.b). L'hydrodynamisme est dominé par de forts courants de marée qui atteignent (3.4 à 4 noeuds dans le détroit du Pas-de-Calais). D'une manière générale, il s'avère que les irrégularités morphologiques du fond (bancs de sable) et des côtes affectent profondément les courants et les houles.

Le domaine physique de dimension (151x134 Km) est discretisé selon une grille de calcul tridimensionnelle dont l'axe vertical ascendant a son origine locale au niveau du fond. Les axes ( $ox$  et  $oy$ ) sont orientés Nord-Sud et Ouest-Est respectivement (Figure 5). Dans le plan horizontal le domaine est discrétisé selon une grille régulière de pas  $\Delta x = \Delta y = 2.3$  km, et sur la verticale par une grille à 10 niveaux équidistants. La topographie résulte d'une interpolation d'un fichier bathymétrique de la Manche élaboré par Salomon et al., (1991) (Figure 6).

### **III.2) Conditions aux limites et initiales**

#### **III.2.1) Conditions initiales**

Pour toutes les simulations qui seront effectuées, le repos a été choisi comme condition initiale pour toutes les variables. Le temps de mise en régime du modèle correspond à deux cycles de marée.

#### **III.2.2) Conditions aux limites**

la discrétisation des équations du mode externe (Chapitre 2, Paragraphe V.1.) nécessite la connaissance aux limites ouvertes soit de la dénivellation de la surface libre, soit les composantes de la vitesses moyenne ( $\bar{u}, \bar{v}$ ). Dans le cas présent, nous avons choisi d'imposer les hauteur d'eau étant donné qu'elles sont mieux connues que les vitesses.

Dans le cadre des programmes de recherche FLUXMANCHE et PNOC, nous disposons des champs de courant moyen ( $\bar{u}, \bar{v}$ ) et de dénivellation de la surface libre, étendus à toute la Manche calculés par le modèle bidimensionnel de Salomon et al., (1991) forcé par l'onde M2. Le pas de sortie de cette information est de 24 minutes. De ces résultats, nous avons extrait en une série de 10 points (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J) répartis sur les deux frontières ouvertes (Figure 5), la hauteur d'eau sous forme de série temporelle ( $t_k, \eta_k$ ) couvrant une période de marée (12.4h). A partir de cette série nous avons reconstitué le signal à chaque point en utilisant la décomposition en série de Fourier qui donne l'accès à tout instant à la valeur de la hauteur d'eau ponctuelle. On procède ensuite à une interpolation linéaire pour estimer en chaque maille le long des frontières ouvertes.

### **III.3) Simulation des ondes M2 et M4**

Dans la présente étude, nous nous focalisons sur l'onde principale lunaire M2, retenue comme unique forçage à l'Ouest de la Manche par Salomon et al., (1991), ainsi que l'harmonique supérieure générée par les non linéarités (M4).

En préalable à la présentation des résultats, nous commentons brièvement les conclusions issues de tests de sensibilité réalisés sur deux paramètres susceptibles d'intervenir dans la calage du modèle, à savoir le coefficient de frottement introduit dans la paramétrisation de la contrainte de cisaillement au fond  $\tau_b$  (Chapitre 1, Expression 106) et la viscosité horizontale. L'influence directe de ce coefficient sur l'hydrodynamique a été étudiée d'une manière détaillée dans Johns et Oguz, (1987) et Pingree, (1983).

Dans la suite, les résultats du modèle seront donnés en quelques points du maillage considérés comme représentatifs des secteurs constituant la zone d'étude (Figure 7). Ainsi les points:

- K et DK: la Flandre maritime
- B, C et D: le détroit du Pas-de-Calais
- E, F, M et H :le Boulonnais
- I, J et O:la Marquenterre

#### **III.3.1) Coefficient de frottement**

Le coefficient de frottement  $C_D$  intervient dans la formulation de la contrainte de cisaillement au fond  $\tau_b$  selon la relation (Chapitre 1, Expression 106):



$$\tau_b = \rho_0 C_D |u_b| u_b$$

Nous avons testé des valeurs constantes en temps et en espace comprises entre  $1.5$  et  $3.0 \cdot 10^{-3}$ . Ce coefficient est souvent pris sous la forme  $C_D = g/C$ , où  $C$  est le coefficient de Chézy. Pour un canal unidimensionnel,  $C_D$  dépend essentiellement de la longueur de rugosité du fond. On peut citer des ordres de grandeurs rencontrés dans le littoral (Chabert d'Hières et al., 1980):

- $C_D \sim 2.2 \cdot 10^{-3}$  pour des fonds sableux peu profonds ( $\sim 10$  m).
- $C_D \sim 3.2 \cdot 10^{-3}$  pour des fonds sableux présentant de nombreuses rides.
- $C_D \sim 1.8 \cdot 10^{-3}$  pour des fonds de 80 m.

Karjuira, (1964) note que la valeur du coefficient  $C_D$ , dans le cas de courant de marée a toujours été estimée entre  $1.5$  et  $3.0 \cdot 10^{-3}$ . En fait, ce coefficient est fonction de:

- L'amplitude de la vitesse horizontale près du fond.
- La profondeur d'eau.
- La rugosité  $z_0$  du fond.

L'évaluation de  $z_0$  nécessite la connaissance de la distribution de la couverture sédimentaire du domaine d'étude conformément à divers formules empiriques. En absence de cette information, Blumberg et Mellor, (1987) suggèrent de prendre  $z_0 = 1$  cm.

L'analyse des différents essais mentionnées ci-dessus, nous a conduit à un certain nombre de conclusions que nous allons commenter ci-après:

### a) L'onde M2

En ce qui concerne les vitesses des courants, la figure (8) confirme un résultat classique, à savoir un amortissement et un retard de phase des courants pour l'ensembles des points concomitants à une augmentation du frottement. Les variations les plus fortes sont observées aux points C, D et L1 situés dans le détroit du Pas-de-Calais et caractérisés par des très fortes vitesses. Cet effet est exacerbé par la forme quadratique de la loi de frottement qui conduit à un amortissement plus sensible aux variations du coefficient de frottement dans ces endroits.

En ce qui concerne la dénivellation de la surface libre, nous restreignons la présentation de l'étude de sensibilités au coefficient de frottement à ceux obtenus pour les valeurs extrêmes de  $C_D$  (0.0015 et 0.003).

L'onde résultante dans la Manche Orientale est la superposition de deux ondes progressives dérivées de l'océan atlantique (SHOM, 1968). La première se propage à travers la Manche et empreinte le détroit du Pas-de-Calais. La seconde, moins importante, contourne la pointe de l'Ecosse et se dirige vers le sud de la Mer du Nord. A ces ondes dérivées s'ajoutent donc dans la partie orientale des ondes réfléchies sur le littoral français. On constate que l'augmentation du coefficient de frottement entraîne une modification du rapport entre l'amplitude de l'onde incidente et celle de l'onde réfléchie sur la côte picarde. Il en résulte un déplacement (diminution) des lignes d'égale amplitude dans la direction Nord-Sud (Figure 9.a). Au vu des figures (9.a, 9.b), l'influence du coefficient de frottement n'apparaît pas aux frontières du domaine, ceci est uniquement dû au fait que l'on impose pour tous les essais les mêmes conditions aux limites.

Au niveau des lignes d'égales phases, il est à noter que l'augmentation du coefficient de frottement se traduit par un retard de phase (Figure 9.b) imputable au caractère résistif de la force de frottement.

Signalons que l'insensibilité de l'hydrodynamisme aux variations du frottement au Sud de la Mer du Nord est probablement due à la proximité de ce secteur aux limites nord du domaine d'étude.

### **b) L'onde M4**

Sur la Figure (10.a), on distingue deux secteurs où l'effet du coefficient de frottement est totalement opposé. Le premier se situe au voisinage de la limite ouest du domaine. Dans cette zone, l'augmentation du coefficient de frottement entraîne une diminution de l'amplitude de l'onde M4 (isoligne 0.255 m). Le second secteur, proche des zones de la réflexion des ondes, correspond au littoral français et au le littoral nord Franco-Belge. A ces endroits, contrairement à l'onde M2, l'augmentation du coefficient de frottement introduit une augmentation de l'amplitude de l'onde M4 imputable à la forme quadratique du terme de frottement. Ces résultats rejoignent ceux résultats du cas schématique de la Manche étudié par Orbi, (1986).

En ce qui concerne les lignes d'égales phases, l'augmentation du coefficient de frottement conduit une variation de la phase de l'onde M4 plus importante que celle de la phase de M2 (Figure 10.b). De même, le caractère résistif d'une force de frottement est observé.

### III 3.2) Coefficient de viscosité horizontale

Comme nous l'avons précisé dans le premier chapitre, le coefficient de viscosité horizontale est l'un des paramètres les plus difficile à évaluer. Plusieurs études menées sur le terrain et en laboratoire ont montré que ce coefficient dépend fortement de la nature de l'écoulement et donc de la zone d'étude. A titre d'exemple, on cite par exemple pour le lac d'Erie  $A_h=100 \text{ m}^2/\text{s}$  (Sheng, 1983), pour l'océan Atlantique  $A_h=10 \text{ m}^2/\text{s}$  (Blumberg et Mellor, 1987). Cette disparité fait que ce paramètre ne représente plus la viscosité turbulente réelle, mais bien un coefficient de lissage numérique rendu nécessaire pour la reproduction des phénomènes physiques par modélisation numérique. En pratique, ce coefficient servira donc de paramètre d'étalonnage des modèles.

Pour les deux ondes de marée M2 et M4, il est difficile de distinguer sur la figure (11) les variations introduites par les modifications du coefficient de la viscosité horizontale  $A_h$ . Pour montrer l'influence de ce coefficient sur l'hydrodynamisme, nous commentons les résultats ponctuels du modèle pour trois valeurs de  $A_h$  ( $A_h=100 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $A_h=500 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $A_h=f(x,y,t)$  donnée par le relation (61.a) du Chapitre 1) aux points C, D, L.

Au point C (Figure 11), les variations du coefficient de viscosité ont eu un effet qualitativement semblable aux variations du coefficient de frottement pour l'onde M2 (l'augmentation de  $A_h$  entraîne une diminution de l'amplitude de vitesse). Cependant, cet effet n'est pas de même grandeur. Remarquons que pour les autres points, une augmentation du coefficient  $A_h$  provoque généralement pendant le montant (marée montante) une faible augmentation d'amplitude et un léger retard de la phase de la vitesse, sauf au point (I) où aucune modification n'est observée. Ce point a la particularité d'être situé dans une zone de faible hydrodynamisme. En effet, le coefficient  $A_h$  représente l'état de mélange induit par la turbulence horizontale et de manière analogue à la définition du coefficient  $A_v$ , il peut être lié à une échelle de longueur et un gradient de vitesse horizontale moyenne  $(\bar{u}, \bar{v})$  (Smagorinsky, 1963). Ceci explique que l'importance des variations introduites par les modifications du coefficient  $A_h$ , dépend fortement de l'intensité de l'hydrodynamisme de la zone étudiée.

Dans la suite, toutes les simulations utiliseront le coefficient de frottement  $C_D$  et le coefficient  $A_h$  donnés respectivement par les relations (107 et 62.a) du chapitre 1.

### **III.4) Validation du modèle 2D horizontale (2DH)**

Pour la validation du modèle bidimensionnel intégré sur la verticale (mode externe), nous examinons les lignes d'égales phases et d'égales amplitudes des ondes M2 et M4. Nos résultats seront comparés à ceux d'autres modèles numériques appliqués au même secteur (Salomon et Breton, 1991; Runday, 1976). Ensuite, elles seront comparés à des mesures effectuées dans une série de ports effectuées par le SHOM (Service Hydrographique et Océanographique de la Marine).

Comme mentionné précédemment, nous avons utilisé les résultats du modèle de Salomon (Figure 6) pour forcer notre modèle, il semble donc judicieux d'effectuer en premier lieu une comparaison de nos résultats avec ceux de ce dernier. Cependant dans Salomon et Breton, (1991), on trouve uniquement les résultats relatifs à l'onde de marée M2. Pour tester la propagation de l'onde M4 générée à la fois par les variations de la topographie et les termes non linéaires, nous avons effectué un second essai en s'appuyant sur les résultats du modèle de Runday, (1976) concernant les ondes M2 et M4 dans toute la Manche. Pour cet essai, l'imposition des conditions aux limites se fait donc par extraction en quelques points des frontières ouvertes (Figure 5) des amplitudes et des phases des ondes M2 et M4 calculées par le modèle.

Nous présentons sur les cartes de la Figure (12, 13 et 14), les réseaux d'amplitude et de phases à partir des trois modèles. Malgré leur ressemblance, nous ferons quelques commentaires critiques.

#### **III.4.1) Comparaison avec le modèle de Salomon**

En ce qui concerne la phase de M2, le modèle reproduit parfaitement les lignes d'égales phases calculées par le modèle Salomon (Figure 12.a). Les lignes d'égales amplitudes sont reproduites d'une manière concordante dans le détroit du Pas-de-Calais et au nord du Cap Gris-Nez. Par contre, dans la Manche orientale, un léger décalage est observé (Figure 12.b) probablement dû à l'erreur commise lors de la localisation des frontières ouvertes et l'extraction des valeurs de la surface libre servant aux conditions aux limites à notre modèle. Rappelons aussi qu'une interpolation linéaire a été utilisée pour compléter les valeurs de dénivellations de la surface libre ( $\eta$ ) aux frontières, ceci peut-être une source d'erreur supplémentaire.

### **III.4.2) comparaison avec le modèle de Ronday**

#### **a) l'onde M2**

Comme dans la comparaison avec le modèle de Salomon, nous remarquons que globalement le modèle concorde d'une manière satisfaisante avec celui de Ronday (Figure 13.a). Néanmoins nous signalons le décalage de la ligne d'égalité d'amplitude 3 m, ceci est probablement dû, d'une part à la différence de la résolution des maillages des deux modèles ( $\Delta x_{\text{Ronday}}=10 \text{ km}$ ,  $\Delta x_{\text{modele}}=2.333 \text{ km}$ ) et d'autre part aux forts gradients topographiques dus à la présence des bancs de sable dans ce secteur (bancs de la bassure de Baas et de la Battur). Enfin, remarquons la bonne concordance des deux réseaux des lignes d'égalité de phase dans toute la zone d'étude (Figure 13.b).

#### **b) l'onde M4**

Le second essai nous a permis aussi de tester les capacités du modèle à propager l'harmonique M4 introduite par les termes non linéaire et essentiellement par les termes de convection.

Les figures (14.a et 14.b) montrent un parfait accord des lignes d'égalité d'amplitudes des deux modèles. Cependant, nous signalons un décalage des isovaleurs au niveau du Boulonnais qui peut-être dû à la fois à la présence des forts gradients topographiques et à la précision de la méthode de discrétisation spatiale des termes de convection responsable en grande partie de la génération de l'onde quart diurne M4.

### **III.4.3) Comparaison avec les mesures dans les ports**

Les caractéristiques mesurées et calculées de l'onde M2 dans les ports bordant les limites du domaine sont présentées dans le tableau (1) avec les valeurs naturelles. Nous observons une bonne concordance entre le modèle et les mesures. Remarquons tout de même que pour les amplitudes les écarts les plus importants sont atteints au port de Calais (Tableau 1), cette zone est caractérisée par un fort hydrodynamisme et la présence de bancs de sable qui peut rendre l'écoulement plus complexe et donc plus difficile à simuler.

	SHOM	Présent Modèle	Modèle Runday
Ostende (Amplitude) (Phase)	1.80 m 5°	1.77 m 7°	1.57 m 6°
Dunkerque (Amplitude) (Phase)	2.06 m 352°	2.12 m 353°	2.03 m 348°
Calais (Amplitude) (Phase)	2.46 m 345°	2.36 m 344°	2.50 m ---
Boulogne (Amplitude) (Phase)	2.93 m 331°	2.88 m 328°	3.03 m ---
Dieppe (Amplitude) (Phase)	3.08 m 311°	3.02 m 304°	3.18 m 307°
Douvres (Amplitude) (Phase)	2.23 m 330°	2.15 m 334°	2.15 m 336°

Tableau 1: Amplitude et Phase de l'onde M2 dans les ports

Finale­ment, il est à noter que la solution fournie par le modèle doit être meilleure au large que près des côtes, à cause d'une part de la relativement faible résolution spatiale ( $\Delta x = \Delta y = 2.333$  km) et d'autre part à cause du maillage décalé qui conduit à calculer les dénivellations de la surface libre à 1,16 km de la frontière du domaine.

Ajoutons que les résultats du modèle est en accord raisonnable avec ceux du modèle physique (Chabert D'Hières et Le Provost, 1977) de la Manche réalisé sur la plaque Coriolis de IMG (Institut du Mécanique de Grenoble).

### **III.5) Présentation de champs de courant moyen**

La connaissance précise des courants moyens dans la Manche à partir des mesures est une opération assez délicate du fait des difficultés de mesures liées à l'appareillage (bruit électronique, plage de fonctionnement, interférence, etc.). Ainsi, Bertherat, (1981) a montré qu'une bonne précision sur les courants de M2 était obtenue par analyse harmonique, seulement si l'enregistrement analysé a une durée de 21 jours au minimum. Cependant, nous tenons à présenter les champs de courants obtenus par notre modèle en les comparant qualitativement avec ceux mesurés par SHOM.

La brève comparaison présentée ici ne prétend pas confronter en détail les résultats des mesures publiées par SHOM et ceux de notre modèle puisqu'ils ne concernent

pas les mêmes coefficients de marée, de plus les vecteurs de courant visualisés sur nos cartes représentent les courants moyens intégrés sur la hauteur d'eau, alors que ceux fournis par SHOM sont mesurés à certaines profondeurs.

Les résultats du modèle sont confrontés à ceux des mesures à la figure (15) à différents instants au cours d'un cycle de marée moyenne (coefficient 70). Un bon accord est observé entre les mesures et les résultats du modèle, de sorte que la circulation générale dans la Manche orientale est bien reproduite par le modèle.

Quelques différences dans la direction de courant sont toutefois observées pendant PM-03 et PM+03 (PM: Pleine Mer à Boulogne/mer) au niveau de la frontière nord au voisinage des côtes anglaises. Ceci est probablement dû d'une part à la qualité de l'interpolation utilisée pour compléter les conditions aux limites sur cette frontière, et d'autre part à la proximité du détroit du Pas-de-Calais qui se caractérise par un hydrodynamisme particulièrement intense.

De manière synoptique, les retards dans l'établissement des courants sont mis en évidence par les lignes de séparation ou de rencontre (Figure 15) qui matérialisent les points du bassin pour lesquels la vitesse du courant s'annule. sont correctement reproduit

### **III.6) Intensité et caractéristiques générales du courant de marée**

D'une manière générale, l'intensité des courants augmente d'Ouest en Est du détroit de Pas-de-Calais (3.6 noeuds au point D), en raison du rétrécissement de la Manche au niveau du Cap Gris-Nez. Les caractéristiques des courants peuvent toutefois varier localement en fonction de la morphologie littorale (présence de bancs, caps, aménagements côtiers, etc.) (Pingree et Maddock 1977)

Au large de la Flandre et sur les bancs de sable, les courants aux points DK et K giratoires cycloniques présentent une grande variabilité spatiale (Figure 16.a et 17.a). A proximité de ces bancs, les vitesses maximales enregistrées SHOM (1968) peuvent atteindre 2,4 noeuds en vive eau moyenne. Près de la côte, les courants sont sensiblement alternatifs (Figure 17.b) et suivent la direction des chenaux entre les bancs. Ainsi que dans cette zone, les vitesses de courant varient d'un point à l'autre (Figures 16.a et 17.a) en fonction de la configuration des fonds. Les vitesses les plus importantes (2 noeuds) sont observées dans le secteur de Dunkerque (Figure 17.a) caractérisé par l'étroitesse des chenaux et la présence de nombreux bancs de sable (Figure 4.a).

Dans le secteur du Boulonnais (Points E, F, M), les courants sont moins intenses avec une vitesse maximale qui varie de 0,5 noeud à 1,6 noeuds pour un coefficient de marée de 70 (Figures 18.a et 19.a). Au large de Boulogne sur Mer, les courants sont parallèles à la côte, orientés avec un axe principal d'ellipse de courant orienté Nord-Sud (Figure 18.b). Plus au large et loin des ouvrages portuaires de Boulogne sur Mer, le flot porte au Nord-Est et le jusant au Sud-Ouest (Figure 19.b).

Au large du Marquenterre (Points I, J, O), les courants de marée oscillent plutôt suivant un axe orienté Nord-Est (Figure 20.b). En revanche, au centre de la zone et tout particulièrement au large de la baie de Somme, ils deviennent essentiellement giratoires (Figure 20.d). En ce qui concerne l'intensité des courants, loin de la côte, les composantes des vitesses subissent un amortissement d'amplitude probablement dû à la réflexion de l'onde de marée sur les côtes (Figures 20.a, 20.c et 20.e). Signalons aussi que dans cette zone, les courants de marée sont nettement plus faibles que ceux de la zone du Boulonnais. Devant l'embouchure de la Somme, les courants sont quasiment rotatoire et présentent une dissymétrie qui se traduit par l'écartement de l'ellipse dans le sens Nord-Ouest/Sud-Est (Figure 20.f). Cette dissymétrie est probablement due au débit de la Somme qui vient influencer la composante Ouest-Est (composante  $u$ ) du courant.

Finalement, nous présentons à la Figure (21.c) le champ de courant maximum dans la zone d'étude, ces résultats sont comparables à ceux publiés dans la littérature par Le Provost et al., (1985) (Figure 21.b) , Salomon et Breton, (1991) (Figure 21.a). Ces vitesses extrêmes de la marée peuvent être mise en étroite relation avec la composition sédimentaire des fonds (Larsonneur et al., 1982); la limite entre les sables et sables fins se situent autour de 0,4 m/s, la limite inférieure des sables graveleux à 0,6 m/s, les graviers au delà de 0,8 m/s et les fonds rocheux à partir de 0,9 m/s environ.

### **III.7) Présentation des résultats du modèle 3D.**

Dans ce paragraphe, nous présentons un ensemble de résultats obtenus par le modèle 3D pour montrer sa capacité de reproduire des les résultats classiques tels que , la spirale d'Ekman et le profil logarithmique des vitesses horizontales.

#### **a) Spirale d'Ekman induite par le vent et courant d'inertie**

Dans ce cas de figuré, les équations résolues par le modèle se réduisent à:



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = \frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) & E_1 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = \frac{\partial}{\partial z} \left( A_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) & E_2 \end{cases}$$

Pour reproduire ce phénomène contrôlé par l'accélération de Coriolis, nous reprenons le cas schématique traité par Thouvenin et Salomon, (1984) qui considèrent une portion de mer carrée 270 km de côtés, de fond plat  $h=180$  m, ouverte des quatre côtés sur laquelle souffle un vent de sud. Cette zone est discrétisée selon un maillage horizontal carré de 10 km de pas et 20 niveaux réguliers sur la verticale

La condition initiale est le repos. Les conditions aux limites latérales sont définies par la dénivellation de la surface libre ( $\eta$ ) admise constants en temps et en espace. Par conséquent, la poussée par le vent ne se répercutera au niveau des limites Ces conditions schématiques font de cette application un cas purement théorique.

Partant du repos, le vent ne se lève pas brusquement, mais croît linéairement jusqu'à sa valeur maximale 32 m/s atteinte à l'instant 24 heures et pour tout le reste de la simulation (120 heures). Le coefficient de viscosité verticale  $A_v$  est pris égal à 0.08  $m^2/s$  pour pouvoir comparer nos résultats avec la théorie d'Ekman (voir Lacombe 1965).

Les résultats obtenus montrent une combinaison entre la spirale d'Ekman et les courants d'inertie. En effet, le vent entraîne la couche de surface et son influence se transmet en profondeur par viscosité verticale. La structure verticale des courants se rapproche de la célèbre spirale d'Ekman (1905), obtenue en régime permanent (Lacombe, 1965)

Les résultats du calcul au centre du bassin sont présentés à la figure (23). A partir de  $t=50h$ , la forme de la spirale est parfaitement établie, tout en oscillant dans le temps sous l'effet du courant d'inertie constant avec la profondeur. En effet, en première approximation, la solution des équations ( $E_1$ ,  $E_2$ ) peut-être considérée comme la superposition du courant d'inertie et du courant d'Ekman, c'est à dire:

$$\begin{cases} u(z,t) = |V_i| \sin(ft) + V_0 \exp(-az) \cos\left(\frac{\pi}{4} - az\right) & S_1 \\ v(z,t) = |V_i| \cos(ft) + V_0 \exp(-az) \sin\left(\frac{\pi}{4} - az\right) & S_2 \end{cases}$$

Avec:

$V_0$  : vitesse à la surface

$a$  : coefficient de la spirale tel que:  $a^2 = \frac{2\omega \sin(\varphi)}{A_v} = \frac{f}{2A_v}$

$\theta$  : L'angle dont tourne la spirale  $\theta = \frac{\pi}{4} - az$

$|V_i|$  : Le module de la vitesse d'inertie.

Une simple analyse des solutions  $S_1$  et  $S_2$  montre que toutes les couches oscillent à la même période  $T=2\pi/f$  (ici  $T=17.45$  h), mais à des amplitudes différentes qui diminuent avec la profondeur. Quant au déphasage  $\theta = \frac{\pi}{4} - az$ , il varie avec la profondeur  $z$  et il est d'autant plus important que le coefficient  $a$  est "grand" ou  $A_v$  est "petite".

Les figures (24.b et 24.c) décrivant l'évolution des courants à trois niveaux différents (Surface, mi-fond et fond) montre que le modèle est capable de reproduire les résultats théoriques ci-dessus. La valeur de la période d'inertie calculée par le modèle est de  $T_{\text{modèle}}=17.7$ h, soit la valeur théorique calculée ci-dessus.

### Remarque:

Le coefficient "a" peut être calculé à chaque niveau  $z_k$  par les relations suivantes (Lacombe, 1965):

$$\operatorname{tg}(\theta_k) = \frac{v_k - v_f}{u_k - u_f}, \quad a_k = \frac{\frac{\pi}{4} - \theta_k}{z_k}$$

Où:

$u_k, v_k$  : Les composantes de la vitesse au niveau  $z=z_k$

$u_f, v_f$  : Les composantes de la vitesse au fond.

Des différences entre les coefficients " $a_k$ " et " $a$ " peuvent être observées, elles permettent en fait de mesurer de combien le coefficient  $A_v$  a été sur ou sous-estimé.

En conclusion, le modèle reproduit d'une manière satisfaisante le caractère tridimensionnel de l'écoulement induit par un vent. Enfin une étude détaillée de ce cas schématique peut-être consulté dans Kundu, (1980); Lacombe, (1965) et Forristall, (1974).

## b) Structure logarithmique des vitesses verticales

Dans cette partie, nous reprenons le cas réel de la Manche orientale pour exposer brièvement quelques résultats classiques reflétant l'aspect tridimensionnel d'une circulation marine dans des régions côtières à marée. Pour donner ces résultats, nous avons donc choisi quelques points du domaine (Figure 7) considérés comme représentatifs de chaque secteur (Flandre (Point K), Déroit du Pas-de-Calais (Point PC3), Boulonnais (Point E) et Marquenterre (Point O)).

Les figures (25) donnent les profils verticaux du module et des composantes (u,v) de la vitesse toutes les deux heures pendant un cycle de marée. On remarque que le modèle capable de reproduire la structure verticale logarithmique du courant. On retrouve également de déphasage du courant sur la verticale qui peut parfois donner lieu à une inversion de la vitesse au moment de la renverse (Figure 25.c, 25.d). Ce déphasage est observé sur les ellipses de courant qui se trouvent légèrement décalées (Figures 25.c et 25.d).

Théoriquement, si l'on suppose que le profil vertical de la vitesse est logarithmique, par une simple intégration on montre que la vitesse moyenne ( $\bar{u}, \bar{v}$ ) est atteinte au niveau  $z_c = H/e$  ( $e=2.718$ ), le tableau (2) montre que la modèle fourni des valeurs satisfaisantes de  $z_c$  sachant que les différences observées sont dues à la résolution du maillage vertical restreinte à 10 niveaux qui ne permet pas de localiser avec précision la côte de la vitesse moyenne.

	H, $z_m=H-z_c$	$z_{m,model}$
Point K	H=-26.65 m $z_m=-16.84$ m	$z_m=-16.63$ m
Point PC3	H=-40.68 m $z_m=-25.72$ m	$z_m=-25.28$ m
Point E	H=-31.33 m $z_m=-19.80$ m	$z_m=-20.09$ m
Point O	H=-28.74 m $z_m=-18.16$ m	$z_m=-18.09$ m

Tableau 2: côte de la vitesse moyenne ( $\bar{u}, \bar{v}$ )

## IV) APPLICATIONS DU MODELE 3-D A LA MANCHE ORIENTALE ET LE SUD DE LA MER DU NORD

### IV.1) Simulation de la structure hydrologique liée aux panaches de cours d'eau Picards et Boulonnais (du fleuve côtier)

#### *IV.1.1) Présentation du fleuve côtier*

Des études hydrologiques et hydrobiologiques réalisées en Manche Orientale (Brylinski et al., 1991; Dupont et al., 1991a,b) montrent une individualisation hydrologique et biologique permanente (Viollier et al., 1978; Brylinski et al., 1984) d'une masse d'eau côtière permanente le long des côtes Boulonnais du Pas-de-Calais sans cesse entretenue par les apports fluviaux qui s'étendent de la baie de Seine au Pas-de-Calais. Cette masse d'eau s'avère riche en éléments de toute sorte: polluants (Skiker et al., 1988), matières en suspension (Dupont et al., 1991a,b) et phytoplancton (Brunet, 1994).

La séparation avec les eaux du large constitue une zone frontale (Figure 26.a) (Brylinski et Laguadeuc, 1990). Par ailleurs, des modèles mathématiques de circulation des masses d'eaux en Manche (Salomon et Breton, 1992; Garreau, 1993) et des études à partir des traceurs conservatifs (Guegueniat et al., 1993) mettent en évidence l'existence de plusieurs veines d'eau en Manche orientale se dirigeant toutes vers la Mer du Nord avec une vitesse plus lente à la côte qu'au large.

La masse d'eau côtière française appelée "fleuve côtier" (Brylinski et al., 1990) est une bande de 3 à 5 milles de large, caractérisée par une déssalure relative entre 32‰ et 33‰, séparée des eaux du large par une zone de transition formant un front côtier (Figure 26.a). Les eaux du fleuve côtier dérivent lentement vers le Nord suivant la résiduelle de marée (Salomon et Breton, 1991) et des vents dominants de secteur Sud-Ouest. Elles peuvent être influencées sous certaines conditions par les eaux de la Seine, notamment par fort débit de ce fleuve et par vent favorable d'Ouest et de Sud-Ouest (Brylinski et al., 1993).

Dans la suite, nous allons donc tenté de reproduire ce phénomène par le modèle tridimensionnel. En ce qui concerne les débits fluviaux mensuels moyens, nous disposons des données recueillies par l'IFREMER (1989) (Tableau 3). Pour nos simulations, nous utilisons celles fournies par l'agence de l'eau (dernière colonne du tableau 3), Prygiel, 1993 (communication personnelle).

	1983	1984	1985	Prygiel (1993)
Aa	(5,9 - 18,1)	(5,0 - 17,6)	(5,8 - 12,7)	6,95
Liane	(1,0 - 10,1)	(0,9 - 12,2)	(1,1 - 11,7)	5,80
Canche	(14,6 - 25,7)	(13,3 - 22,3)	(12,5 - 22,2)	14,10
Authie	14,1*	10,4*	(8,7 - 15,3)	8,55
Somme	(35,0 - 55,8)	(31,3 - 46,1)	(32,4 - 44,9)	40,5

( ) :Débits moyens mensuels minimum et maximum.

(\*) :Valeurs estimés, mesures manquantes.

Tableau 3 : Débits ( $m^3/s$ ) des principaux cours d'eau bordant la zone d'étude

Le premier essai consiste à utiliser le schéma de la fermeture turbulente simplifiée utilisant le modèle à zéro équation basé sur le concept de la viscosité turbulente. Ce schéma est mis en oeuvre dans la version originale du modèle proposée par Hess, (1985,1986).

#### **IV.1.2) Résultats du modèle à zéro équation**

Pour étudier les caractéristiques des eaux côtières françaises, nous avons choisi de présenter les résultats du modèle en deux points du domaine, le premier (FC1) dans la zone du fleuve côtier, le second (FC2) plus au large est en dehors de la zone dessalée (Figure 26.b).

L'examen des figures (27 et 28.a) montre la limite de ce type de paramétrisation de la turbulence dans des zones aussi complexes que celle étudiée caractérisée par de faibles profondeurs et de forts courants de marée et par conséquent d'intense mélange sur la verticale. De ce fait l'hypothèse de l'équilibre entre la production et la dissipation de l'ECT (Energie Cinétique Turbulente) concernant essentiellement la couche limite de fond et sur laquelle est basé le modèle à zéro équation, ne peut-être appliquée correctement. En effet, la figure (28.b.1), montre que l'ECT calculée par ce type de modèle décroît rapidement vers zéro du fond vers la surface et elle n'agit que dans la couche de fond. En d'autre terme puisque les termes de la convection et de diffusion ont été négligés dans ce type de modèle, le mélange ne peut s'effectuer sur toute la colonne d'eau. Ceci explique la présence d'une stratification permanente dans la couche de surface (Figures 28.c.2 et 29), alors que les observations *in situ* ne montrent qu'une stratification occasionnelle, par faible coefficient de marée (Brylinski et al., 1990).

Deux hypothèses peuvent expliquer les différences observées entre les mesures et les résultats des calculs par le modèle dans sa version originale (Hess, 1985,1986) (Figures 27 et 28.a). Il s'agit d'une part de la diffusion numérique introduite par le schéma Upwind, d'autre part de la sous-estimation physique de l'intensité la turbulente. Dans un premier temps, nous nous focaliserons sur la seconde hypothèse d'ordre physique en modifiant la paramétrisation de la viscosité et de la diffusivité. Pour se faire nous examinons les résultats produits par l'introduction du module de calcul résolvant l'équation de transport de l'ECT (K) (Chapitre 1, Equation 74) et calculant la longueur de mélange  $\ell$  par une relation empirique (Chapitre 1, Expression 75).

#### *IV.1.3) Résultats du modèle K- $\ell$*

La figure (30.a.1) représente les profils verticaux de l'ECT pendant un cycle de marée au point FC1. A la différence du modèle précédent à zéro équation, on remarque que l'ECT ne reste plus confinée dans la couche de fond (Figure 28.b.1), mais qu'elle diffuse dans toute la colonne d'eau favorisant le mélange vertical (Figure 30.b.1). En ce qui concerne la structure haline, il s'avère conformément aux observations (Brylinski et al., 1988; Dupont et al., 1991b), que l'évolution au cours d'un cycle de marée aux points FC1 et FC2 et selon la coupe verticale ( $y \sim 112$  km) (Figure 30.b.2 et 30.c) ne révèle aucune stratification importante dans la zone côtière.

Les profils côte-large de salinité de surface (Figure 31) montrent que les salinités les plus élevées (supérieures à 34.5 ‰), se rencontrent au large et correspondent aux eaux Atlantique non affectées par les apports fluviaux côtiers. Ce résultat corrobore les observations effectuées par Brylinski et al., (1990), Dupont et al., (1991b) et également les résultats d'une modélisation numérique bidimensionnelle à l'échelle de la Manche réalisé par Salomon et Breton, (1991). Le gradient de salinité normale à la côte diminue au moment du jusant en raison probablement de l'intrusion des eaux plus salées provenant du secteur nord du Cap Gris-Nez (Figure 31, PM+06, PM-04 et PM-02).

Le panache d'eau douce provenant de l'ensemble des rivières, se trouve déplacer vers le nord et plaqué à la côte pendant le flot (Figure 32, PM, PM+02), tandis qu'il subit un transport vers le sud-ouest accompagné d'un étalement en direction du large au cours du jusant (Figure 32, PM+06, PM-04).

La succession de profils verticaux de la salinité au point FC1 (Figure 30.b) pendant le cycle de marée, révèle clairement le rôle du mélange. Ce résultat est conforme à la

dynamique de cette structure hydrologique, déjà décrite par Brylinski et al., (1988) et Dupont et al., (1991b).

L'évolution de la distribution horizontale de la salinité de surface dans la Manche Orientale (Figure 32) montre que la position des isohalines 33 et 34‰ varie peu pendant un cycle de marée moyenne, excepté à proximité de la principale zone estuarienne constituée par la Somme. Au niveau de cette dernière, l'extension des eaux côtières dessalées pendant le jusant (Figures 32, PM+06, PM-04, PM-02) est soulignée par le déplacement vers le sud-ouest des eaux de salinité inférieure (< 31.5‰) alimentées par la vidange de cet estuaire.

En conclusion, l'introduction du modèle de turbulence ( $K-\ell$ ) a permis d'améliorer d'une manière satisfaisante la simulation du fleuve côtier. Il s'avère toutefois que le modèle surestime la largeur de la bande des eaux côtières que Brylinski et al., (1991) évalue entre 3 et 5 milles. Cette différence est sans doute imputable au schéma numérique utilisé pour résoudre l'équation de la salinité (Schéma Upwind) qui se caractérise par une diffusion numérique importante. Une amélioration visant à résoudre ce problème consiste à adopter un schéma d'approximation de type "limiteur de pente" dont une série de variantes sera étudiée au Chapitre 4.

#### **IV.2) Transport sédimentaire**

La présence de quantité de sédiments en suspension dans les zones côtières pose des problèmes délicats pour l'aménagement et le maintien des chenaux de navigation. A ces problèmes s'ajoutent aussi la qualité des eaux. En effet, les sédiments piègent de nombreux éléments tels que les métaux d'origine industrielle. Il peut y avoir transport voire accumulation de ces polluants susceptibles d'être remis en suspension sous l'effet de l'hydrodynamisme.

La compréhension et le contrôle des interactions à l'interface eau-sédiment se révèle extrêmement complexes en raison de la présence de plusieurs processus de natures et d'échelles spatio-temporelles très diverses.

L'objet de la présente partie est de simuler le transport sédimentaire tridimensionnel dans le secteur de la Manche Orientale. La répartition des sédiments marins de ce secteur est relativement bien connue (Figure 33.a) (Clabaut, 1988; Dewez, 1988; Larsonneur et al., 1982; Augris et al., 1990). Elle est fortement influencée par les

courant de marée. Pour les simulations qui suivent, seuls les courants de marée sont donc pris en compte en terme de processus moteur

La modélisation de la dynamique sédimentaire suppose l'intégration préalable d'informations locales relatives à la nature des sédiments. Cette étape consiste à calculer différents paramètres de position  $d_{16}$  (diamètre maximum qu'admettent 16% des particules en présence),  $d_{35}$ ,  $d_{50}$ ,  $d_{65}$ ,  $d_{84}$ ,  $d_{90}$  à partir de la distribution granulométrique observée (Figure 33.b). Pour étendre ces distributions granulométriques collectées en une série de points dans le cadre du programme "Recherche Coopérative sur Programme Benthos de la Manche" (Figure 33.b), nous avons réalisé en collaboration avec A. Leprêtre et P. Carpentier un module de traitement de données basé sur les techniques de reconstitution et de krigeage (Annexe 3.1).

Les processus hydro-sédimentaire sont régis par l'action de frottement exercé par les courants sur le fond. Il est communément admis que le transport sédimentaire s'effectuent selon deux modes: charriage sur le fond et suspension dans la masse d'eau (Sleath, 1984 et Dyer, 1986).

#### IV.2.1) Transport par charriage

Au début de l'entraînement des particules la contrainte de cisaillement au fond devient suffisante pour vaincre les forces de frottement et de cohésion sur le fond, il se produit alors un mouvement des particules principalement dans le sens du courant. Ce résultat est généralement exprimé par l'intermédiaire de paramètre de Schield (1936) (Figure 34.a):

$$\theta = \frac{\tau_b}{(\rho_s - \rho)gd} \geq \theta_{cr} = \frac{\tau_{b,cr}}{(\rho_s - \rho)gd} \quad (1)$$

où  $\rho_s$  est la densité du sédiment ( $2650 \text{ Kg/m}^3$ ), ( $\tau_{b,cr}$ ) est le seuil critique de mise en mouvement des sédiments,  $d$  est le diamètre de la particule. Le paramètre de Shield est souvent exprimé en fonction du nombre de Reynolds de la particule  $Re_* = \frac{u_*d}{\nu}$  où  $\nu$  est la viscosité moléculaire du fluide et  $u_*$  est la vitesse du frottement. Pour déterminer le seuil critique de mise en mouvement, Miller et al., (1979) ont effectué des mesures en laboratoire dans des conditions d'un écoulement unidirectionnel. Ces mesures ont permis d'étendre et de modifier les limites de la courbe de Shield, (1936) et notamment pour les classes fines du sédiment (Figure 34.b). Yalin, (1972) a



proposé une courbe (Figure 34.c) exprimant ( $\theta_{cr}$ ) en fonction d'un nouveau paramètre ( $\Xi = \frac{Re_*}{\theta_{cr}} = \frac{(\rho_s - \rho)gd^3}{\rho v^2}$ ) lié à l'écoulement et à la taille des sédiments et non en fonction du nombre de Reynolds de la particule  $Re_*$ . Cette paramétrisation a l'avantage d'une part, d'exprimer ( $\Xi$ ) en fonction des variables parfaitement connues ( $\rho_s, \rho, v, d$ ) et d'autre part de calculer ( $\theta_{cr}$ ) directement sans passer par des processus itératifs.

Pour estimer la quantité de sédiment transportée par charriage, plusieurs formulations empirique basées sur l'expérimentations en laboratoire ont été proposées, nous citons par exemple les plus souvent utilisées (Akers and White, 1973; Engelund and Hansen, 1967 et Van Rijn, 1984a). Notons que dans Chapalain et al., (1992, 1993) on trouvera une synthèse d'autres formulations utilisées pour estimer le transport par charriage.

#### **IV.2.2) Transport par suspension**

Lorsque les forces hydrodynamiques sont suffisantes, elles soulèvent les sédiments hors du fond et les entraînent au sein de l'écoulement turbulent. Les fluctuations turbulentes dans l'eau transmettent de l'énergie aux particules empêchant ainsi leur mouvement vers le fond tant que ces fluctuations restent supérieure à la vitesse du chute  $w_{ci}$  donnée par la formule de Stokes pour une particule sphérique:

$$w_{ci} = \frac{(\rho_s - \rho)g}{18\rho\nu} d_i^2 \quad \text{pour } d_i \leq 100\mu\text{m} \quad (2.1)$$

$$w_{ci} = 10 \frac{\nu}{d_i} \left( \left[ 1 + 0.01 \frac{(\rho_s - \rho)g}{\nu^2} d_i^3 \right]^{0.5} - 1 \right) \quad \text{pour } 100\mu \leq d_i \leq 1000\mu\text{m} \quad (2.2)$$

Pour ce mode de transport il s'agit de résoudre numériquement l'équation tridimensionnelle d'advection-diffusion (Chapitre 1, Equation 73) appliquée à la  $i^{\text{eme}}$  classe de sédiment dont on rappelle l'expression:

Pour chaque classe (i) de sédiment on a :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial u C_i}{\partial x} + \frac{\partial v C_i}{\partial y} + \frac{\partial [(w - w_{ci}) C_i]}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_h \frac{\partial C_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_h \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_v \frac{\partial C_i}{\partial z} \right) + R_{c,i} \quad (3)$$

Sur un site, la granulométrie en présence et souvent étendue, certains auteurs (Van Rijn, 1984b, 1986; Celik et al., 1984, 1986) utilisent en effet une classe représentative déterminée par d35 ou d50. Si nous optons pour cette solution, il nous faudra prendre des précautions quant au choix de la classe représentative, puisque sur un site, d35 et d50 peuvent varier d'un point à un autre comme le cas de la Manche orientale. Pour éviter ce problème, nous proposons un modèle tridimensionnel multiclassés permettant de simuler les mouvements des petites, moyennes et grosses particules. Dans notre cas (sédiment non cohésifs), on suppose les concentrations suffisamment faibles pour que les interactions particulières soient négligées. Dans ces conditions les équations de transport des différentes classes sont totalement découplées.

La résolution des équations (3) suppose la connaissance des conditions aux limites et notamment celles à la surface et au fond.

#### a) Condition à la surface

La condition de surface exprime qu'il n'y a pas de flux de sédiment à travers la surface libre (ni apport, ni perte de sédiment à travers la surface). On a alors:

$$\text{à } z=\eta \quad D_v \frac{\partial C_i}{\partial z} + Wc_i C_i = 0 \quad i = 1, \dots, \text{nbclasse} \quad (4)$$

#### b) Condition au fond

Au fond, on peut imposer, soit une condition de type Dirichlet (concentration imposée), soit une condition de type Neuman (flux de concentration imposé).

En ce qui concerne la première condition, on peut exprimer la concentration  $C_a$  à un niveau  $z_a$  près du fond (concentration de référence) (Figure 34.d) à partir de la charge transportée par charriage en supposant que le régime est en équilibre (Yalin, 1977; Yang 1985).

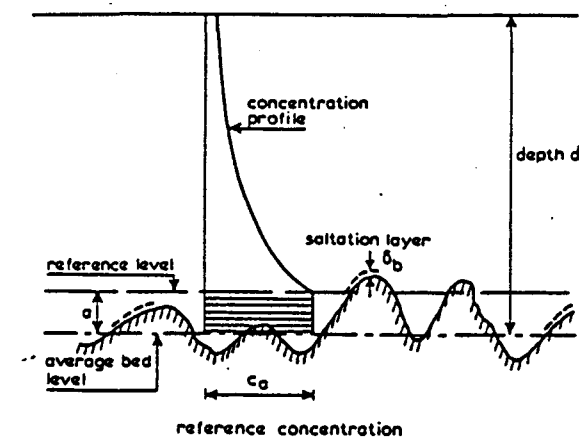


Figure 34.d : Schématisation de la concentration de référence (Van Rijn 1984b)

Sur ce principe, Van Rijn (1986b) propose l'expression suivante:

$$C_{a,e} = \frac{0.035}{\alpha} \rho_s \frac{d_{50}}{(z_a - z_f)} \frac{T^{1.5}}{D_*^{0.3}} \quad (5)$$

Où:  $D_* = d_{50} \left( \frac{(\rho_s - \rho) g}{\rho v^2} \right)^{1/3}$  et  $T = \frac{\tau'_b - \tau_{b,cr}}{\tau_{b,cr}}$

$D_*$  : paramètre relatif aux particules.

$T$  : excès du cisaillement normalisé.

$d_{50}$  : diamètre médiane des particules du lit.

$\tau'_b$  : contrainte de cisaillement sur les particules.

$\alpha$  : constante empirique.

$z_a$  : Niveau de référence près du fond

Il est à noter que dans ce présent travail, le fond est supposé plat, à savoir dépourvu de microtopographie et par conséquent, on considère:

$$\tau'_b = \tau_b$$

D'autres auteurs proposent des lois empiriques issues de mesures en laboratoire ou *in situ* (Einstein, 1950; Smith, 1977; Smith et McLean, 1977; Itakura et al., 1980 et Dyer, 1986). Citons celle de Smith et McLean, (1977) que nous emploierons dans la présente étude:

$$\text{à } z=z_a \quad C_a = C_0 \frac{\gamma_0 \left( \frac{\tau_b}{\tau_{b,cr}} - 1 \right)}{1 + \gamma_0 \left( \frac{\tau_b}{\tau_{b,cr}} - 1 \right)} \quad (6)$$

où  $\gamma_0$  est une constante empirique égale à  $3 \cdot 10^{-3}$  en rivière et  $4.45 \cdot 10^{-5}$  en mer qui peut constituer un paramètre de calage du modèle.

Le deuxième type de condition (flux imposé) exprime les échanges entre le fond et l'écoulement qui résultent du flux descendant de dépôt sous l'action de la gravité et du flux ascendant d'érosion contrôlé par les processus turbulents. L'expression traduisant ces échanges s'écrit par:

$$\text{à } z=-h \quad D_v \frac{\partial C_i}{\partial z} + W_{c,i} C_i = D_i - E_i \quad i = 1, \dots, \text{nbclasse} \quad (7)$$

où  $D_i$  est le flux du dépôt et  $E_i$  est le flux d'érosion.

### 1) Dépôt

Compte tenu de la taille des particules étudiées ( $d > 75 \mu\text{m}$ ) (Lavelle et al., 1984), le flux de dépôt est simplement exprimé par (Celik et Rodi, 1988):

$$D_i = W_{c,i} C_{a,i} \quad (8)$$

Dans le cas des sédiments cohésifs, des variantes telle que celle proposée par Krone, (1963) a été envisagée, c'est à dire:

$$D_i = w_{c,i} C_{a,i} \left( 1 - \frac{\tau'_b}{\tau_{cd,i}} \right) \quad \text{pour } \tau'_b < \tau_{cd,i} \quad (9)$$

Le facteur de pondération  $P = \left( 1 - \frac{\tau'_b}{\tau_{cd,i}} \right)$  exprime la probabilité qu'il y ait dépôt sur le fond d'une particule sujette à des phénomènes de floculation extrêmement sensible à la turbulence.

Plusieurs expressions ont été proposées pour évaluer  $\tau_{cd,i}$ , dont celle de White et al., (1975) valable pour des faibles nombres de Reynolds de particules:

$$\tau_{cd,i}^{5/4} = 0.06g \left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)^{1/2} d_i^{1/2} \quad (10)$$

Il est à noter que pour les sédiments cohésifs  $\tau_{cd,i}$  est relié à la concentration pour tenir compte des phénomènes de floculation.

### 2) Erosion

La paramétrisation de flux d'érosion est particulièrement difficile. Elle bénéficie à l'heure actuelle de nombreuses recherches fondamentales basées sur l'observation et les mesures fines des processus d'échanges au voisinage du fond (Young, 1977; Wilkinson et al., 1989; Amos et al., 1992; Helen et al., 1996). Dans le cas

des sédiments non-cohésifs comme ceux présents dans la zone d'étude, nous utiliserons la loi d'érosion empirique proposée par Beach et al., (1992), c'est à dire:

$$E_i = \left( D_v \frac{\partial C_i}{\partial z} \right)_{z=z_s} = -\gamma_1 C_b T_i u_* \quad (11)$$

où:

- $\gamma_1$  : constante empirique égale à  $1.5 \cdot 10^{-3}$
- $C_b$  : concentration volumétrique vaut 0.65
- $T_i$  : excès de cisaillement normalisé pour la  $i^{\text{ème}}$  particule
- $u_*$  : vitesse de frottement

Dans la perspective de la modélisation du transport sédimentaire cohésifs, d'autres lois ont d'ores et déjà été introduite dans le code. En particulier celle de Partheniades (1965) qui s'exprime par:

$$E_i = M \left( \frac{\tau_b}{\tau_{ce,i}} - 1 \right) \quad \text{pour } \tau_b > \tau_{ce,i} \quad (12)$$

où  $M$  est une constante dépendant de la concentration et de la nature du substrat constituant le lit, elle pourra être déterminée à partir des mesures *in situ*. En ce qui concerne  $\tau_{ce,i}$ , Celik et Rodi, (1991) proposent une relation empirique établie à partir d'une série de mesure de la forme:

$$\frac{\tau_{ce,i}}{(\rho_s - \rho)gd_i} = \begin{cases} 0.15 Re_{*i} & \text{si } Re_{*i} \leq 0.6 \\ 0.25 & \text{si } Re_{*i} > 0.6 \end{cases} \quad (13)$$

### **IV.2.3) Résultats du modèle hydrosédimentaire**

#### **a) Transport en charriage**

L'application du modèle tridimensionnel au transport sédimentaire par charriage consiste à combiner des équations empiriques de transport de sédiments aux résultats hydrodynamiques du modèle. Dans ce présent travail, nous utilisons la formule la plus récente proposée par Van Rijn, (1986b) c'est à dire:

$$q_b = E \cdot \lambda \quad (14)$$

où E est la "pick up function" donnée par:

$$E = 0.00033 \rho_s \sqrt{\frac{(\rho_s - \rho)}{\rho}} g d_i D_*^{0.3} T_i^{1.5} \quad \text{pour } T > 0 \quad (15)$$

et  $\lambda$  est la longueur de saltation estimée par Van Rijn (1985) par:

$$\lambda = 3 d_{50} D_*^{0.6} T^{0.9} \quad (16)$$

Les résultats du modèle sont donnés pour un transport intégré sur un cycle de marée (Figure 35). Ils sont comparables aux schémas connus des transports par charriage (Grochowski et al., 1993, Beck, 1991; Chapalain et al., 1993). La marée est le principal facteur responsable du transport par charriage, avec un transit dominé par le jusant au centre du détroit du Pas-de-Calais (de la mer du Nord vers la Manche) et un transit domine par le flot le long des côtes. La figure (36) montre également la bonne corrélation entre les vitesses maximales et les zones de transport citées précédemment ( paragraphe III.6).

### **b) Transport en suspension**

les résultats du transport en suspension sont présentés en quelques points du domaine proches de ceux qui ont été choisis par le programme FLUXMANCHE pour l'étude du flux de la MES (Matière En Suspension) à travers le détroit du Pas-de-Calais (Figure 37).

L'application du modèle hydro-sédimentaire est réalisée en se plaçant dans les conditions d'une marée moyenne (coefficient 70) et en utilisant la couverture sédimentaire réelle de la zone (Sanvincente, 1995). Bien que le modèle permette le calcul de plus de classes, particulièrement nous considérons ici les résultats relatifs à deux classes de sédiments ( $d_1=75\mu\text{m}$  et  $d_2=150\mu\text{m}$ ).

Pour les deux diamètres, les vitesses de chutes  $w_{c1}$  et  $w_{c2}$  sont estimées conformément à la formule de Gibbs et al., (1971) valable dans la gamme de 63  $\mu\text{m}$  à 1 cm:

$$w_{c_i} = \frac{-3v + \sqrt{9v^2 + g d_i^2 (s-1)(0.003869 + 0.02480 d_i)}}{0.011607 + 0.07440 d_i} \quad (17)$$

où,  $s = \frac{\rho_s}{\rho}$ ,  $w_{c_i}$  est exprimée en cm/s, le diamètre  $d_i$  en cm et la viscosité moléculaire  $v$  en  $\text{cm}^2/\text{s}$ .

Les conditions au fond sont celles de flux donné par Beach et al. (1992) (Expression 11, avec  $\gamma_1=1.5 \cdot 10^{-3}$ ). Le modèle permet aussi de choisir la condition de flux proposée par Van Rijn, (1986b) (Expression 5).

Avant d'examiner de manière synoptique la concentration de sédiment près de la surface, nous présentons à la figure(38), l'évolution temporelle du flux ascendant (Expression 11) aux points (FX1, FX4, FX5) et aux figures (39.a et 39.b), l'évolution temporelle correspondantes de la concentration des deux classes de sédiments en suspension à deux niveaux différents dans la colonne d'eau.

L'évolution du flux suit parfaitement celle de l'excès de cisaillement ( $\tau_b - \tau_{b,cr}$ ) responsable de la mise en suspension (Figure 38). Les figures (39) et (40) relatives à l'évolution de la concentration suggèrent trois remarques:

- décroissance rapide de la concentration sur la verticale évidente sur la figure (40, FX2 et FX3) qui représente les profils verticaux à différentes heures marée.
- concentration C très faible, voire nulle au moment de la renverse de marée qui coïncide avec l'annulation de  $\tau_b$  (Figure 39).
- le retard de phase entre les deux pics aux deux niveaux lié au processus de diffusion du flux des particules issues fond (Figure 39.a, FX4), et croissant avec la distance à la source (fond).

Pour le calage et la validation du modèle hydro-sédimentaire, nous ne disposons pas à l'heure actuelle de mesures ponctuelles à l'échelle d'un cycle de marée pour pouvoir mener une comparaison avec les résultats de modèle. Il existe cependant des données globales relatives aux eaux centrales et côtières de la Manche Orientale (Mc cave, 1973; Eisma et Kalf, 1979 et Van Alphen, 1990). En outre dans le cadre du programme de recherche FLUXMANCHE (Shimwell et al., 1993) des mesures mensuelles de la MES ont été effectuées en six stations réparties sur la radiale (Cap Gris-Nez - Folkestone) (Figure 37.a). L'ensemble de ces observations permet de montrer que les résultats du modèle sont raisonnables (Tableaux 4 et 5).

	Eaux centrales	Eaux côtières
FLUXMANCHE	2 - 3 mg/l	10 - 35 mg/l
Mc Cave (1973)	0.3 mg/l	12 mg/l
Eisma et Kalf (1979)	0.9 - 5 mg/l	1.3 - 11 mg/l
Van Alphen (1990)	3.4 mg/l	10.6 mg/l
<b>Présent Modèle</b>	<b>1.3 - 5 mg/l</b>	<b>17 - 44 mg/l</b>

	FLUXMANCHE	Présent Modèle
Point FX1	8.0 - 35 mg/l	2.5 - 44 mg/l
Point FX4	2.5 - 4 mg/l	0.4 - 3.8 mg/l
Point FX6	1.5 - 8 mg/l	1.3 - 17 mg/l

Tableau 5 : Gamme des valeurs mesurées et calculées au cours d'un cycle de marée

La différence remarquée pour les points FX1 et FX6 peut être imputée à la localisation approximative de ces points sur la grille de calcul et à la proximité des frontières ouvertes ou fermées d'autre part. Nous soulignons le bon accord des calculs avec le point FX4 qui se trouve loin de l'influence des valeurs aux limites du modèle.

L'ensemble des figures (41) représentant les champs de la MES près de la surface, révèle la complexité de la répartition spatiale de la turbidité de part et d'autre du Cap Gris-Nez. Ces figures montrent également qu'un transport particulaire en suspension est omniprésent à l'Est de la Baie de Wissant. Ceci est en parfait accord avec les résultats du modèle simplifié de Van Rijn (Chapalain et al., 1992) appliqué au site des deux caps. Il est à noter également que, plus au large et à certaines heures marée (Figure 41, PM, PM+04, PM+05, PM+06), des turbidités plus faibles soulignent la présence de haut fonds tels que la Bassure de Baas et la Battur.

Au large du Cap Gris-Nez (Figure 42.c) une radiale à travers la zone côtière montre une répartition de la turbidité de surface tout à fait comparable à celle mesurée par Brylinski et al., (1984) (Figure 42.b), pour des conditions de marée semblables (Coefficient 66).

Sur les côtes anglaises et tout particulièrement au nord de Folkestone, nous enregistrons pendant le flot de fortes turbidité (Figure 41), qui résultent probablement de la présence dans cette zone des sédiments fins faciles à mettre en suspension. La répartition de cette turbidité est également mise en évidence par une image satellite SPOT du 23 mars 1995 (Figures 43.a, 43.b) acquise dans des conditions de marée similaire et traitée par Kergomard (communication personnelle).

Une deuxième simulation (Annexe 3.2) a été effectuée en utilisant une condition de concentration imposée au fond (expression 6). Les résultats mettent en évidence des répartitions spatiales des sédiments en suspension en surface très



similaires, mais à des quantités moins moindres que celles obtenues en utilisant la condition de flux. Ces différences s'expliquent par l'incertitude entachant les lois et en particulier les constantes empiriques  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  présentes dans chacune d'elles.

En conclusion, la diversité des résultats de la MES dans la Manche Orientale ne permet de tirer aucune conclusion définitive concernant le transport sédimentaire par suspension. Une réponse devrait être apportées par des mesures ponctuelles à l'aide des stations instrumentées (Chapalain, 1996a, 1996b). En effet, celles-ci devraient permettent fournir aux modèles numériques les conditions au fond (Concentration, Flux de la MES ) et des profils verticaux de la concentration de sédiment en suspension nécessaire pour valider la modélisation.

## Références Bibliographiques du Chapitre 3

- Ackers, P. and White, W. R. (1973): Sediment transport: New approach and analysis. J. Hydr. Div, Am. Soc. Civ. Engrs. Vol 99, pp 2041-2060.
- Amos, C. L., J. Grant, G. R. Daborn and K. Black (1992): Sea Carousel- a benthic, annular flume. Estu. Coast. Shelf. Sci. Vol 34, pp 557-577.
- Augris, C., Ph. Clabaut, O. Vicaire (1990): Le domaine marin du Nord Pas-de-Calais, Nature, Morphologie et Mobilité des fonds. IFREMER-Université des Sciences et Technologies de Lille. pp 93.
- Beach, R. A. and Stenberg, R. W. (1992): Suspended sediment transport in the surf zone: Response to incident wave and longshore current interaction. Mar. Geol. Vol, 108 pp 275-294.
- Beck, C., Ph. Clabaut, S. Dewez, O. Vicaire, H. Chameley, C. Augris, R. Hoslin and A. Caillot (1991): Sand bodies and sand transport paths at the English Channel North sea border: Morphology, Hydrodynamics and Radio-active tracing. Oceano. Acta. Vol Sp, 11, pp 111-121.
- Bertherat (1980): Sur l'analyse et la prediction des marées à partir d'enregistrements de courte durée. Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, USMG-INPG, Grenoble France
- Blumberg, A. F. and G. L. Mellor (1987): A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model, in "three-dimensional coastal ocean models". Coastal and Estuarine Sciences 4 . American Geophysical Union, Washington DC, pp 1-16.
- Brunet, Ch. (1994): Analyse des pigments photosynthétique par HLPC : Communautés phytoplanctonique et productivité primaire en Manche Orientale. Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. pp 368.

- Brylinski, J. M. , J. Dupont and D. Bently (1984): Conditions hydrobiologiques au large du Cap Gris-Nez (France): Premiers résultats. Oceano. Acta. Vol, 7(3), pp 315-322.
- Brylinski, J. M. et Y. Laguadeuc (1988): Influence du coefficient de marée sur la répartition côte-large d'une espèce planctonique à affinités côtières. C. R. Acad. Sci. Paris, 307, série III, pp 183-187.
- Brylinski, J. M. et Y. Laguadeuc (1990): L'interface eaux côtières / eaux de large dans le Pas-de-Calais (côté Français): Une zone frontale. C. R. Acad. Sci. Paris, 311, série II, pp 535-540.
- Brylinski, J. M., V. Gentilhomme, J. P. Dupont, R. Lafite, P. A. Dupeuple, M. F. Huault, Auger, E. Puskaric, M. Wartel et L. Cabioch (1991): Le fleuve côtier: Un phénomène hydrologique important en Manche Orientale. Exemple du Pas-de Calais. Oceano. Acta. Vol, 16(5-6), pp 671-676.
- Brylinski, J. M. and Aelbrecht (1993): Plankton transfert and coastal front in the Dover Strait. Oceano. Acta. Vol sp, 11, pp 197-203.
- Celik, I and W. Rodi (1984): A deposition-entrainment model for suspended sediment transport. Report SFB 210/76/T16. University of Karlsruhe. Federal Republic of Germany.
- Celik, I. and W. Rodi (1986): Sediment transport under study non equilibrium situations. In: Transport of suspended solids in open channels. Edited by W. Bechtela, Balkma Publishers, Rotterdam/Boston pp 97-100.
- Celik, I. and W. Rodi (1988): Modelling suspended sediment transport in non-equilibrium situations, J. Hydr. Eng. Vol 114 , N° 10, pp 1157-1191.
- Celik, I. and W. Rodi (1991): Suspended sediment transport capacity for open channel flow. J. Hydr. Eng. Vol 117, N° 2, pp 191-204.
- Chabert D'Hières. G et Ch. Le Provost (1977): Synthèse sur la détermination des principales compantes de la marée dans la Manche, résolue à l'aide du modèle réduit de Grenoble. Annales Hydrographiques. pp 47-55.

- Chabert D'Hières. G et Ch. Le Provost (1978): Atlas des composantes harmoniques de la marée dans la Manche. Annales Hydrographiques. Vol 6, Fascicule 3.
- Chabert D'Hières. G et A. Marion (1980): Synthèse des mesures de courant et des modèles existants dans le Nord-Pas de Calais. Rapport de Contrat C. N. E. X. O., N° 81/6517, Institut de Mécanique de Grenoble, France, pp 85
- Chapalain, G. et H. Smaoui (1992): Modélisation du transport sédimentaire dans le secteur des deux caps (détroit de Pas-de-Calais). Symposium Manche. "Flux et processus à l'échelle d'une mer macrotidale" 2-3-4 Sept 1992, IFREMER, Brest, France.
- Chapalain, G. , H. Smaoui , A. Lepretre, K. D. Nguyen, A. Ouahssine, and B. Tessier (1993): Modelling of tidally-induced hydro-sedimentary processes in the coastal zone of the Southern part of the Dover Strait. Oceano. Acta. Vol, 16(5-6), pp 517-529.
- Chapalain, G. (1996a): Station Benthique Instrumentée. Rapport DYSCOP. Laboratoire Ecologie Numérique. Université des Sciences et Technologies de Lille. Première Partie, pp 31.
- Chapalain, G. (1996b): Station Benthique Instrumentée. Rapport DYSCOP. Laboratoire Ecologie Numérique. Université des Sciences et Technologies de Lille. Deuxième Partie, pp 32.
- Clabaut, P. (1988): Dynamique sédimentaire dans le détroit du Pas-de-Calais (Large des côtes Françaises). Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. pp 251.
- Dewez, S. (1988): Sédimentation et dynamique en Manche Orientale (de la Baie d'Authie au Cap d'Alprech). Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. pp 276.
- Dupont, J. P., R. Lafite and D. Eisma (1991a): Comparaison de la dynamique du matériel en suspension dans les eaux côtières de la Manche Orientale et de la Baie meridionale de la Mer du Nord. In: Estuarines an Coasts Temporal and Spatial Intercomparisons. Eds by M. Elliotts and J. P. Ducrotory. Olsen & Olsen, pp 57-62.

- Dupont, J. P., R. Lafite, M. F. Huault, P. A. Dupeuple, J. M. Brylinski, P. Guegueniat, P. Lamboy et L. Cabioch (1991b): La dynamique des masses d'eaux et des remises en suspension en Manche Orientale. *Oceano. Acta*. Vol sp, 11, pp 177-186.
- Dyer, K. R. (1986): Coastal and Estuarine Sediment Dynamics. Eds Wiley-Interscience pp 342.
- Einstein, H. A. (1950): The bed load function of sediment transport in open channel flows. *Technical Bulletin*. N° 1026, U. S. Dept of Agricol Soil Conservation Service, pp 70.
- Eisma, D. and J. Kalf (1979): Distribution and particle size of suspended matter in the Southern Bight of the North sea and Eastern channel. *Neth. J. Sea. Res.* Vol, 13, pp 298-324.
- Ekman, V. W. (1905): On the influence of the earth's rotation on Ocean currents. *Arch. Mat. Astron. Fys.* Vol, 2(11), pp 1-53.
- Engelund, F. and E. Hansen (1967): A monograph on sediment transport in alluvial streams. *Teknisk Forlag*. Copenhagen, Denmark, pp 62.
- Forristal, G. Z. (1974): The dimensionnal structure of storm generated currents, *J. Geophy. Res.* Vol 79, N° 18 pp 2721-2729.
- Garreau, P. (1993): 3D model of the Eastern channel and North Sea. In: *FLUXMANCHE Mast 0053, Hydrodynamics and Biogeochemical Fluxes in the Eastern Channel, Fluxes into the North Sea*, Final Report June 1990- August 1993.
- Gibbs, D., M. D. Matthews and D. A. Luik (1972): The relationship between sphere size and settling velocity. *J. Sedim. Petr.* Vol, 41, N° 1, pp7-78.
- Grochowski, N. T., M. B. Collins, S. R. Boxall, J. C. Salomon, M. Breton and R. Lafitte (1993): Sediment transport pathways in the Eastern English Channel. *Oceano. Acta*. Vol, 16(5-6), pp 531-537.
- Guegueniat, P., J. C. Salomon, M. Wartel, L. Cabioch and A. Fraizier (1993): Transfert pathways and transit time of dissolved matter in the Eastern English Channel

indicated by space time radio-tracers measurement and hydrodynamic modelling. Estu. Coast. Shelf. Sci. Vol 36, pp 477-494.

Hess, K. W. (1985): Assessment model for estuarine circulation and salinity. NOAA Technical Memorandum NESDIS, AISC 3, N. O. A. A., U. S. Department of Commerce, pp 39.

Hess, K. W. (1986): Numerical model of circulation in Chesapeake Bay and the Continental Shelf, NOAA Technical Memorandum, NESDIS AISC 6, U. S. Department of commerce pp 47.

IFREMER (1989); Le littoral de la région Nord-Pas de Calais. "Apports à la Mer", Rapport Scientifique et Technique., IFREMER N° 15, pp 152.

Itakura, T. and T. Kishi (1980): Open channel flow with suspended sediments. J. Hydr. Div. Vol, 106(HY8), pp 1325-1343.

Johns, B. and T. Oguz (1987): Turbulence Energy closure schemes. n "three-dimensional coastal ocean models". Coastal and Estuarine Sciences 4 . American Geophysical Union, Washington DC, pp 17-39.

Kajura, (1964): On the bottom friction in an oscillatory current. Bulletin of the Earthquake Research Institut. Vol, 42, pp 147-174.

Krone, R. B. (1963): A study of rheological properties of estuarial sediments. Report. Hydr. Eng. Lab. University of California Berkeley. Report N° 63-8.

Kundu, P. K. (1980): A numerical investigation of mixed-layer dynamics. J. Phys. Oceanog. Vol, 10, pp 220-236.

Lacombe, H. (1965): Cours d'Océanographie Physique. Gauthier-Villars.

Larsonneur, C., P. Bouysse and J. Auffret (1982): The superficial sediments of the English Channel and its Western approaches. Sedimentology. Vol, 29, pp 851-864.

Lavelle, J. W., M. O. Mofjeld and E. T. Traker (1984): An in-situ erosion rate for a fine-grained marine sediment, J. Geophys. Res. Vol, 89, C4, pp 6543-6552.

- Le Provost, Ch. and M. Fornierino (1985): Tidal Spectroscopy of the English Channel with a numerical model. J. Phys. Oceanog. Vol, 15, pp 1009-1031.
- Mc Cave, I. N. (1973): Mud in the North sea. In: *North Sea Science*. Goldberg (Eds), M. I. T. Press, pp 75-100.
- Miller, M. C., I. N. Cave and P. D. Komar (1979): Thershold of sediment motion under unidimensional current. Sedimentology. Vol 24, pp 507-527.
- Orbi, A. (1986): Circulation de Marée dans le Golfe Normand-Breton. Thèse de doctorat de l'Université des Siences et Techniquess de Bretagne Occidentale Brest, France, pp 229.
- Partheniades, E. (1965): Erosion and deposition of cohesive siols. Proc A. S. C. E., HY1, January, pp 105-139.
- Pingree, R. D. and L. Maddock (1977): Tidal residuals in the English Channel. J. Mar. Biol. Ass. Vol 57, pp 337-354.
- Pingree, R. D. (1983): Spring tides and quadratic friction. Deep. Sea. Res. Vol 30, N° 9A, pp 929-944.
- Runday, F. C. (1976): Tidal and residual circulation inthe English Channel. In: *Marine Forecasting*. Edited by J. C. J. Nihoul, Elsevier, pp 351-384.
- Salomon, J. C. and M. Breton (1991): Courants residuals de marée dans la Manche. Oceano. Acta. Vol Sp 11, pp 47-53.
- Salomon, J. C. and M. Breton (1992): Numerical hydrodynamic modeling (2D model) In: *FLUXMANCHE Mast 0053, Hydrodynamics and Biogeochemical Fluxes in the Eastern Channel, Fluxes into the North Sea*, Second Annual Progress Report June 1991 - Sept 1992.
- Sanvicente, L. E. A. (1995): Détermination des Structures Benthiques Spatiales en Manche Orientale au Moyen de Méthodes d'Analyse Multivariable et de Techniques d'Interpolation. Thèse de doctorat de l'Université des Siences et Technologies de Lille. pp 169+105 pages (annexes).

- Sheng, Y. P. (1983): Mathematical modeling of three dimensionnal coastal currents and sediment dispersion: Model developpment and applications. Tech Report. U. S. Army Corps of Enginners, Coastal Engineering Research Center. Report N° CERC 83-2, pp 288.
- Shield, A. (1936): Application of similarity principles and turbulence research to bed load movement. Calif. Inst. Tech. Report. Lab of Hydraulics and Water Resources. Report N° 167.
- Shimwell, S. J., R. Lafite, J. P. Dupont, M. F. Huault, M. Lamboy and M. B. Collins (1991): Suspended material fluxes through the strait of Dover. In: *FLUXMANCHE Mast 0053, Hydrodynamics and Biogeochemical Fluxes in the Eastern Channel, Fluxes into the North Sea*, First Annual Progress Report June 1990- May 1991. pp 61-83.
- SHOM (1968): Courants de marée dans la Manche et sur les côtes Françaises de l'Atlantique. S. H. 550. Imprimerie National, Paris, pp 287.
- Skiker, M., E. Puskaric, M. Hoenig et M. Wartel (1988): Le manganèse dans l'eau de Mer: Dosage et étude de sa dispersion. Oceanis, Vol 14, pp 49-61.
- Sleath, J. F. (1984): Sea Bed Mechanics. Eds Wiley-Interscience, NY
- Smagorinsky, J. (1963): General circulation experiments with the primitive equations. Part I: The basic experiment. Mon. Weather. Rev. Vol, 91 pp 99-163.
- Smith, J. D. (1977a): Modelling od sediment transport on continental Shelves. In: *the Sea*, Vol 6, Eds Wiley-Interscience, NY, pp 539-578.
- Smith, J. D., and S. L. Mc Lean (1977b): Spatially averaged flow over a wavy surface. J. Geophy. Res. Vol 82, C12, pp 1735-1746.
- Van Alphen, J. S. (1990): A mixed balance for Belgium Dutch coastal waters between 1969 and 1986. Neth. J. Sea. Res. Vol 25, pp 19-30.
- Van Rijn, L. C. (1984a): Sediment transport. Part I: Bed load transport. J. Hyd. Div, Am. Soc. Civ. Eng. Vol 110 (10), pp 1431-1456.



- Van Rijn, L. C. (1984b): Sediment transport. Part II: Suspended load transport. *J. Hyd. Div. Am. Soc. Civ. Eng.* Vol 110 (10), pp 1494-1502.
- Van Rijn, L. C. (1985): Two dimensional mathematical model for suspended sediment transport. *Delft. Hydr. Lab. Report.* Report N° S488-IV, Delft, The Netherlands
- Van Rijn, L. C. (1986): Mathematical modelling of suspended sediment in non-uniform flows. *J. Hydr. Eng. ASCE*, Vol 112, pp 433-455.
- Van Rijn, L. C. (1986b): Application of sediment pick-up function. *J. Hyd. Div. Am. Soc. Civ. Eng.* Vol 112, pp 867-874.
- Violer, M., P. Leconte, M. Bougard et A. Richard (1978): Expérience aéroporté de télédétection (température et couleur de la mer) dans le détroit du Pas-de-Calais, *Oceano. Acta.* Vol 1, pp 177-186.
- White, W. R., M. Miller and A. D. Crabbe (1975): Sediment transport theories: A review. *Proc. Inst. Civ. Eng.* Part II, 59, pp 265-292.
- Wilkinson, D. L., I. S. F. Jones (1989): A device for in-situ measurement of scour of bottom sediments. *Proceedings of 9th Australian Conference on Coastal and Ocean Engineering.* Adelaide, Australia, 4-8 December.
- Yalin, M. J. (1972) *Mechanics of Sediment Transport.* **Pergamon Press.** New York, pp 248.
- Yalin, M. J. (1977) *Mechanics of Sediment Transport.* **Pergamon Press.** 2th edition, New York.
- Yang, G. L.(1989): Modèle de transport complet en rivière avec granulométrie étendue. *Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier- Laboratoire d'Hydraulique de France* , Grenoble, France
- Young, R. N. (1977): Seaflume: A device for in situ studies of threshold erosion velocity and erosional behavior of undisturbed marine muds. *Mar. Geol.* Vol 23, 11-18

Young, R. N. and J. B. Southard (1978): Erosion of fine-grained marine sediments: sea-floor and laboratory experiments. *Bulletin. of the American Geographical Society*, Vol 89, pp 663-672.

## CHAPITRE 4

## I) INTRODUCTION

Ce chapitre a pour fondement un ensemble d'essais numériques simples, les uns unidimensionnels, les autres bidimensionnels, qui ont permis de montrer les difficultés que peuvent rencontrer les numériciens dans la résolution d'une loi de conservation scalaire, difficultés que l'on rencontrera également dans les problèmes plus généraux et notamment dans les étapes de transport des systèmes d'équations régissant le mouvement d'un fluide quelconque (équation de Bürger, équations de Navier-Stokes) et dans les systèmes de lois de conservation.

En premier lieu, on abordera les notions des formes conservatives et quasi-linéaires d'une loi de conservation scalaire. On insistera plus sur la première de ses formes en montrant les intérêts qu'elle présente et en dégagant la classe des méthodes qu'elle engendre (notions de volumes finis, de schéma conservatif et de flux numérique).

On sait que la principale difficulté rencontrée dans la résolution de ce type de problème réside dans le choix de l'ordre d'approximation du schéma ou plutôt dans la suppression des défauts attachés aux diverses options de ce choix: un schéma du premier ordre d'approximation "diffuse" la solution, un schéma du second ordre crée des oscillations parasites. On définira une classe de schémas qui soit à variation totale diminuante, en l'occurrence qui préservent la monotonie tout en conservant, si possible, un ordre d'approximation élevé. En suite, on consacra une partie à la discrétisation des méthodes existantes (Upwind, différence centrée, Lax Wendroff), ce qui permettra de mieux cerner le contexte dans lequel doivent s'insérer les méthodes envisagées afin d'améliorer la précision des schémas (flux limité appelé aussi limiteur de pentes).

## II) DISCRETISATION VOLUME FINI D'UNE EQUATION MODELE

### II.1) Equation modèle continue

Dans cette partie, nous considérons le problème engendré par une loi de conservation d'une grandeur scalaire dans un espace unidimensionnel, ce problème est modélisé par l'équation suivante:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial f(c)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

où  $f$  est une fonction linéaire ou non de la solution  $c$ , vérifiant certaines hypothèses de régularité,  $f$  est appelé "flux de la variable  $c$ ".

Cette loi est présentée ici sous forme conservative (c'est à dire représentable par une divergence). on peut aussi l'écrire sous une forme équivalente au niveau continu pour des solutions régulières.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + f'(c) \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Cette forme est dite quasi-linéaire (c'est à dire non linéaire, mais linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé).

Ces deux formulations englobent une variété de problèmes dans le cadre des solutions régulières, on cite par exemple:

i) Equation de convection linéaire

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad \text{Avec: } f'(c) = u = \text{cste}$$

ii) Equation de convection non linéaire (équation de Bürger)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(c) \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad \text{Avec: } u(c) = f'(c) = c$$

iii) Les ondes de continuité

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial [u(c)c]}{\partial x} = 0$$

où  $u(c)$  est donnée par l'équation de quantité du mouvement.

### Remarque:

En construisant la forme quasi-linéaire de l'équation suivante:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(c) \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t} + \left[ u(c) + c \frac{du}{dc} \right] \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

On s'aperçoit que les perturbations sont advectées à la vitesse  $u^* = u(c) + c \frac{du}{dc}$  qui peut être différente de la vitesse  $u$  et parfois même de signe opposé.

## II.2) Discrétisation par Volumes finis

Reprenons l'équation modèle accompagnée cette fois-ci d'une condition initiale

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial f(c)}{\partial x} = 0 \\ c(x,0) = c^0(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

Avec:  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in ]0, T[$  et  $f \in C^1(\mathbb{R})$

La discrétisation retenue pour ce problème est une discrétisation en volumes finis, qui assure la conservativité par construction. Pour cela, on approche alors la variable  $c$  par une fonction constante par morceau définie comme suit:

Pour tout  $(x,t) \in [(i-1/2)\Delta x, (i+1/2)\Delta x] \times [(n-1/2)\Delta t, (n+1/2)\Delta t] \subset \mathbb{R} \times ]0, T[$   $n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}$

$$c(x,t) \equiv c(i\Delta x, n\Delta t) = c_i^n \quad (2)$$

où  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sont respectivement les pas du maillage spatial et temporel.

Pour alléger l'écriture, nous notons par la suite  $x_i^- = (i-1/2)\Delta x$  et  $x_i^+ = (i+1/2)\Delta x$ .

La condition initiale est projetée dans l'espace des fonctions constantes par morceaux de la façon suivante:

$$c^0(i\Delta x) = c_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i^-}^{x_i^+} c^0(x) dx \quad \text{pour } i \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

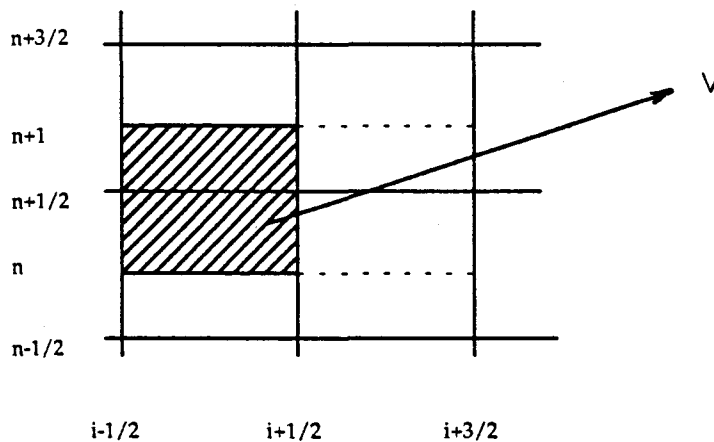


Figure 1: Volume de contrôle

Si l'on intègre les termes de la première équation du système (1.3) sur le volume de contrôle  $V$  (figure 1), on aura alors:

$$\int_v \frac{\partial c}{\partial t} dx dt = (c_i^{n+1} - c_i^n) \Delta x \quad \text{et} \quad \int_v \frac{\partial f(c)}{\partial x} dx dt = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \{f[c(x_i^+, t)] - f[c(x_i^-, t)]\} dt$$

Définir un schéma numérique conservatif revient à approcher respectivement les intégrales  $\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \{f[c(x_i^+, t)]\} dt$  et  $\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \{f[c(x_i^-, t)]\} dt$  par les quantités  $H_{i+1/2}^n$  et  $H_{i-1/2}^n$ .

Le schéma s'écrit alors:

$$c_i^{n+1} = c_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [H_{i+1/2}^n - H_{i-1/2}^n] \quad (4)$$

### Remarques sur les volumes finis

i) L'approche "volumes finis" peut être considérée comme une notion physique puisqu'elle consiste à écrire des bilans sur chaque maille.

ii) C'est l'approche "volumes finis" qui permet de relier la définition d'un schéma numérique conservatif à la définition du flux numérique  $H$ .

iii) Un schéma conservatif n'est pas forcément issu d'une forme conservative: exemple: Prenons l'équation de Bürger sous forme quasi-linéaire

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Une discrétisation envisageable pour cette forme non conservative est:

$c_i^{n+1} = c_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{i-1/2}^n [c_i^n - c_{i-1}^n]$ . Or ce schéma sera conservatif lorsqu'on choisira l'interpolation  $c_{i-1/2}^n = (c_i^n + c_{i-1}^n)/2$ .

## III) NOTION DE FLUX NUMERIQUE

On appelle schéma explicite à  $(2p+1)$  points, un schéma qui s'écrit sous la forme suivante:

$$c_i^{n+1} = G(c_{i-p}^n, \dots, c_i^n, \dots, c_{i+p}^n) \quad (6)$$

où  $G$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}^{2p+1}$  dans  $\mathbb{R}$

On dit que le schéma est écrit sous forme conservative: si et seulement s'il existe une fonction  $H$  continue de  $\mathbb{R}^{2p}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que:

$$G(c_{i-p}^n, \dots, c_i^n, \dots, c_{i+p}^n) = c_i^n - \left[ H(c_{i-p+1}^n, \dots, c_{i-1}^n, c_{i+1}^n, \dots, c_{i+p}^n) - H(c_{i-p}^n, \dots, c_{i-1}^n, c_{i+1}^n, \dots, c_{i+p-1}^n) \right] \quad (6.a)$$

$H$  s'appelle la fonction flux numérique du schéma

### **III.1) Principe de calcul de flux numérique $H$**

L'approche la plus générale pour déterminer le flux numérique  $H$  à l'interface des mailles de calcul est de le considérer comme une fonction des valeurs de la variable  $c$  en un certain nombre de mailles et à un certain nombre d'instant de calcul, c'est à dire, là où la variable est supposée être déterminée à un instant donné du passé ou de l'avenir (schéma implicite).

Pour un schéma explicite à  $(2p+1)$  points d'espace, on note:

$$H_{i+1/2}^n = H(c_{i-p+1}^n, \dots, c_{i-1}^n, c_{i+1}^n, \dots, c_{i+p}^n) \quad (6.b)$$

Cette approche consiste donc à interpoler les valeurs moyennes de la variable  $c$  sur la facette  $(i+1/2)$  et ensuite de calculer exactement le flux associé.

Dans cette étude, nous utilisons une approche plus restrictive qui peut s'expliquer en deux étapes:

- i) Calcul du flux  $f(c_i)$  sur les mailles à partir des valeurs moyennes  $c_i$  de la variable  $c$ .
- ii) Détermination de  $H_{i+1/2}^n$  par interpolation des  $f(c_i)$  sur la facette  $(i+1/2)$  des  $f(c_i)$ .

L'intérêt de cette restriction provient du fait que dans la pratique, l'expression du flux fait intervenir des grandeurs que l'on connaît uniquement par leurs valeurs moyennes sur les mailles. Il semble donc plus judicieux dans ce cas d'utiliser cette information pour calculer les flux sur chaque maille et de les interpoler ensuite à l'interface. Bien entendu le flux numérique doit respecter les contraintes suivantes:

- i) Le flux doit être consistant, c'est à dire  $H(c, c, c, \dots, c, c) = f(c)$
- ii) Le flux doit être relativement simple à calculer

### **III.2) Classe de schémas linéaires à cinq points décentrés vers l'amont**

Dans cette partie, on étudie la classe de schémas définie comme suit:



$$H_{i+1/2} = \begin{cases} \alpha f_{i+1} + \beta f_i + \gamma f_{i-1} & \text{si } \lambda_{i+1/2} \geq 0 \\ \alpha f_i + \beta f_{i+1} + \gamma f_{i+2} & \text{sin on} \end{cases} \quad (7)$$

où  $\lambda_{i+1/2} = f'(c_{i+1/2}) \frac{\Delta t}{\Delta x}$  appelé nombre de courant,  $\Delta x$  pris constant et  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

Pour cette classe de schémas, l'écriture du flux sur les facettes (figure 2) résulte donc d'une interpolation sur trois points décentrés vers l'amont:

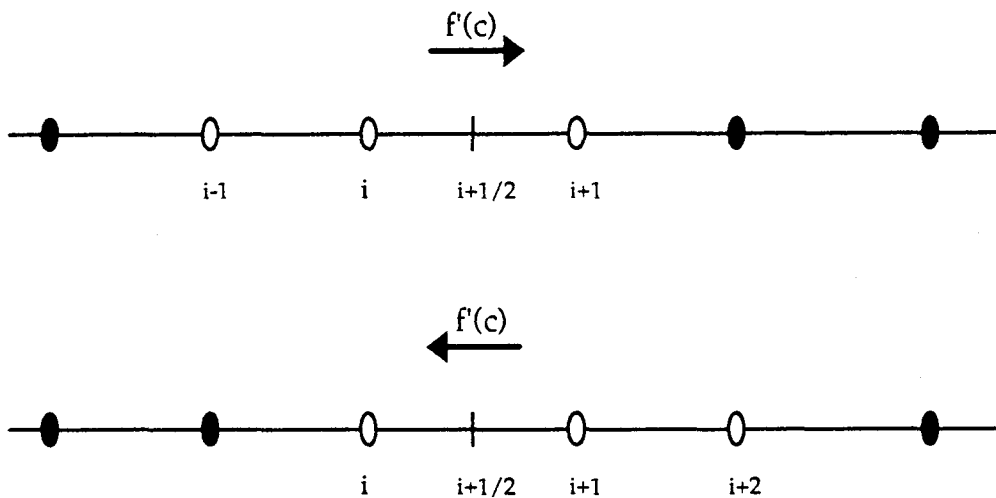


Figure 2: Calcul du flux numérique

Le flux numérique ainsi défini est linéaire, donc continu. La propriété de la consistance impose la condition:  $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Soit alors:

$$H_{i+1/2} = \begin{cases} \alpha f_{i+1} + \beta f_i + (1 - \alpha - \beta) f_{i-1} & \text{si } \lambda_{i+1/2} \geq 0 \\ \alpha f_i + \beta f_{i+1} + (1 - \alpha - \beta) f_{i+2} & \text{sin on} \end{cases} \quad (8)$$

Nous donnons quelques exemples des schémas classiques appartenant à cette classe.

$\alpha$	$\beta$	Type du schéma
0	1	Schéma Upwind ou Donor cell (cellule donneuse) premier ordre en temps.
1/4	1	Schéma Fromm [Van Leer(1)] premier ordre en temps

3/8	3/4	Schéma Quick [Leonard]
0	3/2	Schéma Second Upwind premier ordre en temps
1/2	1/2	Schéma centré [schéma de Lax-Wendroff] premier ordre en temps

Tableau 1: Les schémas classiques à partir des schémas linéaires à cinq points

### III.2.1) Précision des schémas à cinq points

Dans cette partie, nous étudions l'ordre d'approximation (l'ordre de troncature) en espace d'un schéma quelconque appartenant à cette classe. Pour cela on pose:

$$\tau_x = \frac{H_{i+1/2} - H_{i-1/2}}{\Delta x} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i \quad (9)$$

Pour un nombre de courant  $\lambda_{i+1/2} \geq 0$ , on a:

$$H_{i+1/2} - H_{i-1/2} = \alpha f_{i+1} + (\beta - \alpha) f_i + (1 - \alpha - 2\beta) f_{i-1} - (1 - \alpha - \beta) f_{i-2} \quad (10)$$

Calculons le développement en série de Taylor:

$$f_{i+k} = f_i + (k\Delta x) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \frac{(k\Delta x)^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(k\Delta x)^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots \quad (11)$$

Une combinaison des relations (9) et (11) donne alors:

$$\tau_x = \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} [4\alpha + 2\beta - 3] + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} [7 - 6\alpha - 6\beta] + \frac{\Delta x^3}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} [16\alpha + 14\beta - 15] + O(\Delta x^4) \quad (12)$$

Avec les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  données dans le tableau (1), on vérifie que le schéma Upwind (ou Donor cell) est d'ordre 1 en espace et que le schéma de Lax-Wendroff, le schéma second upwind et le schéma Quick sont d'ordre deux en espace. D'autre part dans cette classe, il n'existe donc qu'un seul schéma d'ordre trois en espace définie par ( $\alpha=1/3$  et  $\beta=5/6$ ).

### III.2.2) Stabilité des schémas à cinq points

Dans le cas de la résolution d'une équation de convection linéaire à vitesse constante  $u$ , il est possible d'effectuer une analyse de stabilité par la méthode de Fourier.

Si cette équation s'écrit par:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

Le schéma de discrétisation à cinq points pour  $u \geq 0$  s'exprime par:

$$c_i^{n+1} = c_i^n - v [\alpha c_{i+1}^n + (\beta - \alpha) c_i^n + (1 - \alpha - 2\beta) c_{i-1}^n - (1 - \alpha - \beta) c_{i-2}^n] \quad (14)$$

Avec  $v = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$

Pour une condition initiale de la forme:

$$c_j^0 = \hat{c}^0 \exp(ikx_j) \quad \text{Avec: } i^2 = -1$$

Le schéma numérique de la classe étudiée s'écrit alors:

$$c_j^n = \hat{c}^n \exp(ikx_j) \quad (15)$$

où  $\hat{c}^n$  est donnée de façon récurrente par:

$$\hat{c}^{n+1} = [1 - v(\beta - \alpha) - v\alpha e^{i\eta} - v(1 - \alpha - 2\beta)e^{-i\eta} + v(1 - \alpha - \beta)e^{-2i\eta}] \hat{c}^n \quad (16)$$

ou encore:

$$\hat{c}^{n+1} = g(v, \eta) \hat{c}^n \quad \text{Avec: } \eta = k\Delta x \quad (16.a)$$

$g(v, \eta)$  est appelée coefficient d'amplification du schéma. Son module  $|g(v, \eta)|$  mesure l'amortissement de l'amplitude d'un signal et son argument  $\theta$  mesure l'erreur de phase.

- Si  $|g(v, \eta)| < 1$ , le schéma amorti la solution: il est dissipatif.
- Si  $|g(v, \eta)| = 1$ , le schéma conserve la valeur de la solution.
- Si  $|g(v, \eta)| > 1$ , le schéma amplifie la solution: il est instable.
- Si  $\text{Arg}(g(v, \eta)) + \eta v \neq 0$ , le schéma est dispersif.

- Dans le cas du schéma upwind ( $\alpha=0, \beta=1$ ), les erreurs d'amplitude et de phase sont respectivement données par:

$$E_a = |g(v, \eta)| - 1 \cong \frac{v(v-1)}{2} \eta^2 + O(\eta^4) \quad (17.a)$$

$$E_\varphi = \theta + v\eta \cong \frac{v(v-1)(2v-1)}{6} \eta^3 + O(\eta^5) \quad (17.b)$$

- Dans le cas d'un schéma de la classe étudiée du second ordre en espace ( $4\alpha+2\beta-3=0$ )

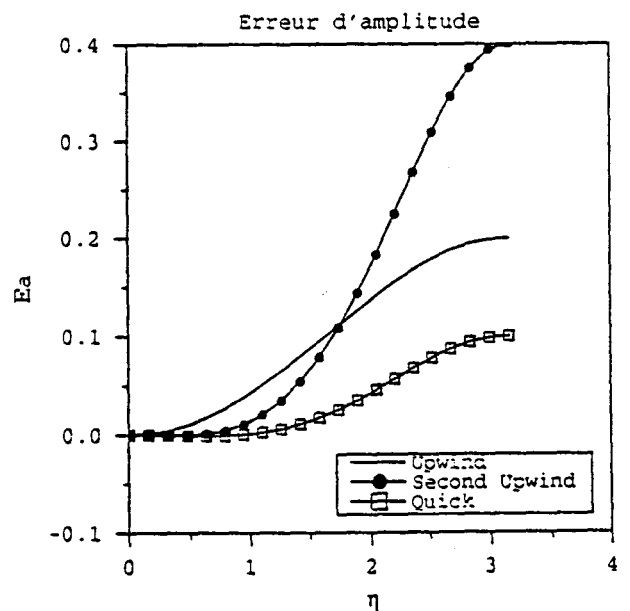
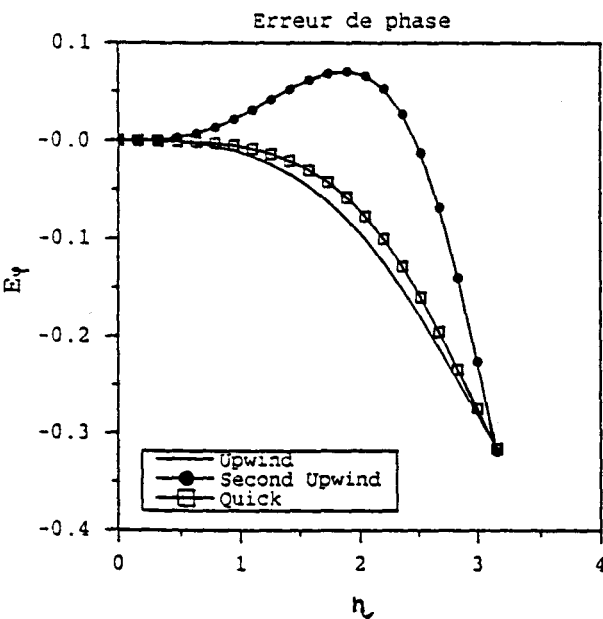
$$E_a \cong \frac{v^2}{2} \eta^2 + O(\eta^4) \quad (18.a)$$

$$E_\varphi \cong v \left[ \frac{v^2}{3} + \alpha - \frac{1}{3} \right] \eta^3 + O(\eta^5) \quad (18.b)$$

Sur des cas tests numériques, Lepage (1983) a constaté:

- i) L'avance en phase du schéma second upwind
- ii) Les conditions de stabilité très restrictives sur le nombre de courant pour le schéma du second ordre en espace tels que Quick et second upwind.

A titre d'exemple, ci-contre l'allure de l'erreur de phase  $E_\varphi$  et d'amplitude  $E_a$  calculées pour les trois schémas Upwind, Second Upwind et Quick pour  $v=0.1$



En fait, tous les schémas de la classe étudiée sont stables au sens de la norme  $L^2$ , c'est à dire:

$$(\forall c_{\Delta x}^0 \in L^2), \exists M \geq 0, \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ tels que: } \|c_{\Delta x, \Delta t}(\cdot, n\Delta t)\|_{L^2} \leq \|c_{\Delta x}^0\|_{L^2} M e^{-\varepsilon t} \quad \forall n\Delta t < T \quad (19)$$

D'autre part, même dans le cadre linéaire (et à fortiori non linéaire), il n'existe pas de schémas appartenant à la classe étudiée qui conduit réellement à une bonne représentation de la solution exacte. En effet:

- i) Les schémas du premier ordre d'approximation spatiale (type upwind) sont très dissipatifs (l'amplitude du coefficient d'amplification est inférieur à l'unité), ceci conduit à des solutions numériques très étalées. Cependant un schéma comme upwind a le mérite de vérifier le principe du maximum suivant:

$$\text{Si } c_{\text{inf}} \leq c_i^0 \leq c_{\text{sup}} \quad \text{Alors} \quad c_{\text{inf}} \leq c_i^n \leq c_{\text{sup}} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{IN}$$

- ii) Les schémas du deuxième ordre d'approximation ne sont pas stables pour la norme  $L^\infty$  et ils ne vérifient donc pas le principe du maximum. Les solutions numériques obtenues avec ce type de schéma présentent des oscillations dépassant les extrémas de la condition initiale lorsque celle-ci contient des fréquences correspondantes à des nombres d'onde  $k$  tels que  $|g(v, k\Delta x)| > 1$ .

On voulait donc construire des schémas qui donnent des solutions approchées vérifiant le principe de maximum et qui soit de plus d'ordre deux en approximation spatiale presque partout, c'est à dire dans les intervalles où la solution est régulière. Ceci fera l'objet des paragraphes suivants.

### III.2.3) Analyse graphique du principe du maximum

Pour donner une illustration de ce principe, considérons l'équation de transport advectif d'une concentration  $c$  à vitesse constante positive  $u$ .

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \tag{20}$$

Dans ce cas  $f(c)=uc$  est le flux de la loi de conservation équivalente. Un schéma conservatif pour résoudre cette équation s'écrit par:

$$c_i^{n+1} = c_i^n - \frac{u\Delta t}{\Delta x} [c_{i+1/2}^n - c_{i-1/2}^n] \tag{21}$$

Supposons que la solution ait la forme suivante à l'instant  $t_n$ .

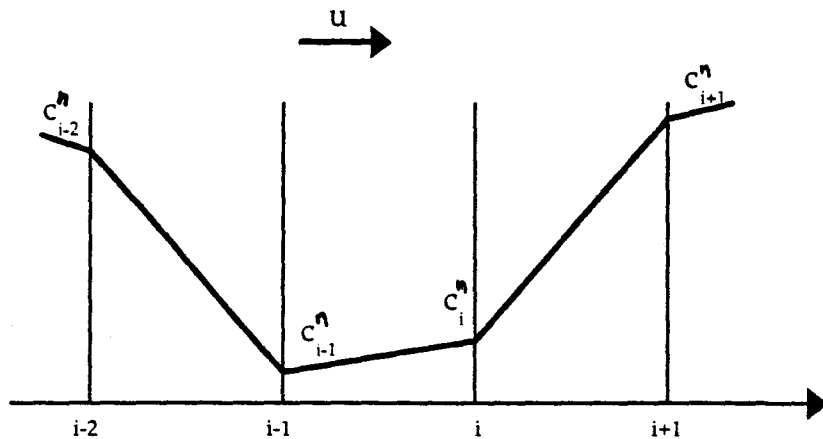


Figure 3 : allure de la solution à l'instant  $t_n$

### Première Etape:

Elle consiste à évaluer le flux numérique aux points  $(i+1/2)$  et  $(i-1/2)$ . Dans ce cas bien précis, cela signifie qu'il faille donner une valeur à  $c_{i+1/2}^n$  et à  $c_{i-1/2}^n$ .

Dans le cas d'un schéma explicite linéaire à cinq points décentré vers l'amont,  $c_{i+1/2}^n$  peut s'exprimer par:

$$\frac{c_{i+1/2}^n - c_i^n}{\Delta x/2} = a \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{\Delta x} + b \frac{c_i^n - c_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (22)$$

Graphiquement, ceci revient à déterminer  $c_{i+1/2}^n$  à partir d'une droite issue de  $c_i^n$  et dont la pente est calculée comme une moyenne pondérée des pentes  $(c_{i+1}^n - c_i^n)/\Delta x$  et  $(c_i^n - c_{i-1}^n)/\Delta x$  (figure 4).

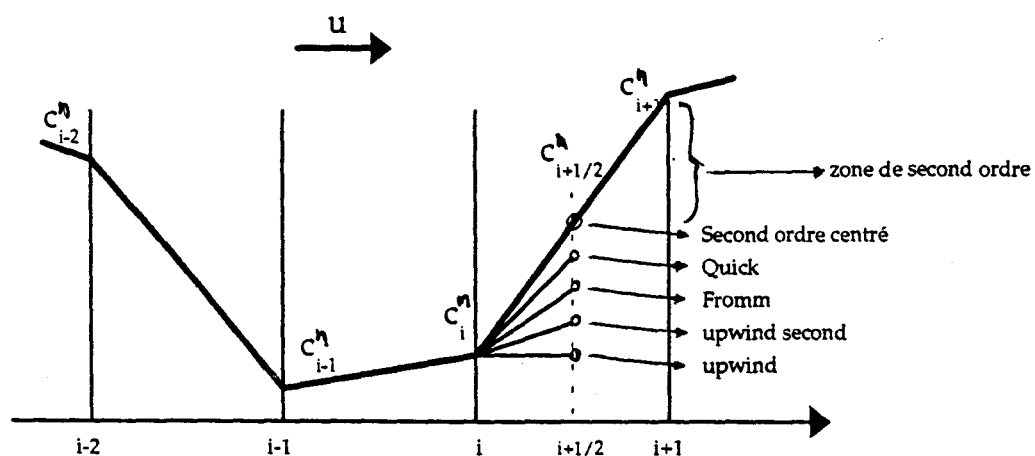


Figure 4: Détermination de  $c_{i+1/2}^n$

### Deuxième Etape:

Cette étape consiste à considérer l'équation (21) comme l'équation d'une droite déterminatrice.

Soit la droite  $\Delta_1$  passant par  $c_{i-1/2}^n$  et  $c_{i+1/2}^n$ .  $\Delta_1$  a pour pente  $(c_{i+1/2}^n - c_{i-1/2}^n)/\Delta x$  qui est également la pente de la droite  $\Delta_2$ .

On construit donc la droite  $\Delta_2$  comme étant la parallèle à la droite  $\Delta_1$  et passant par  $c_i^n$ . Pour attribuer une valeur à  $c_i^{n+1}$ , il suffit donc de considérer celle-ci comme ordonnée du point d'abscisse  $(i\Delta x - u\Delta t)$  situé sur la droite  $\Delta_2$  (figure. 3)

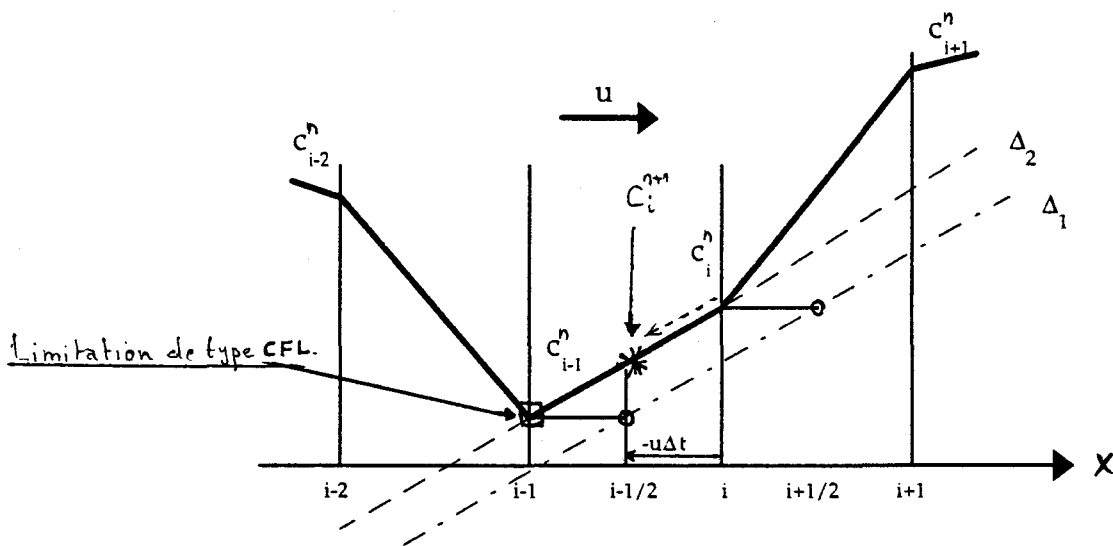


Figure 5: Limitation type CFL pour le schéma upwind (premier ordre en espace)

La figure (5) résume l'application de la deuxième étape de la construction au schéma upwind du premier ordre en espace. Dans ce cas, la droite déterminatrice  $\Delta_2$  est la droite passant par les points d'ordonnées  $c_{i-1}^n$  et  $c_i^n$ . La seule limitation est alors la condition sur le nombre de courant (CFL,  $u\Delta t \leq \Delta x$ ) qui impose de ne pas aller chercher une valeur  $c_i^{n+1}$  au deçà du point d'indice  $(i-1)$ . Ainsi pour le schéma upwind le principe du maximum (pas d'augmentation de l'extremum, ici situé au point d'indice  $(i-1)$ ) sera vérifié puisque ce principe est intrinsèque à la condition CFL sur le nombre du courant.

La figure (6) schématise l'application de la deuxième étape de la construction au schéma de second ordre en espace (Schéma centré). Pour ne pas augmenter la valeur de l'extremum, il ne faut pas que la quantité  $u\Delta t$  dépasse une certaine fraction du pas d'espace  $\Delta x$  notée  $\mu\Delta x$  ( $\mu < 1$ ) (figure 6). Ceci est donc équivalent à une limitation de type CFL donnée par:

$$v = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \mu < 1.$$

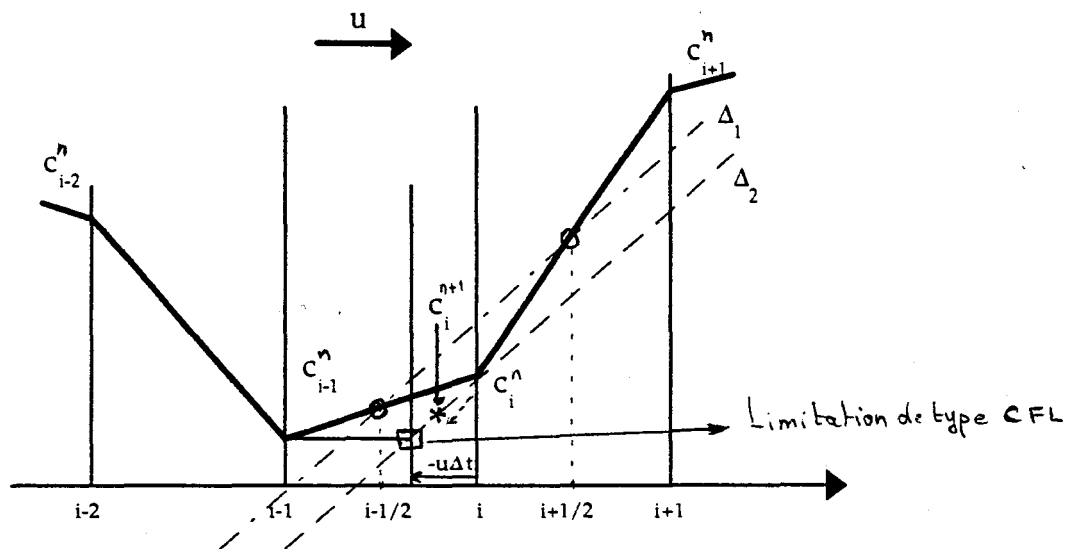


Figure 6: Limitation type CFL pour le schéma centré (second ordre en espace)

En considérant ces exemples extrêmes de limitation de type CFL, nous montrons que pour résoudre le problème à nombre de courant  $v$  supérieur à  $\mu$ , il faudra alors choisir un schéma qui autorise une condition CFL moins sévère (à la limite de schéma upwind).

Enfin, cette interprétation graphique laisse penser que le nombre de courant limite pour l'utilisation du schéma de second ordre (ou plutôt la fraction limite du pas d'espace  $\mu\Delta x$ ) dépendra d'un coefficient mesurant le rapport des pentes utilisées à l'instant  $t_n$  pour évaluer  $c_i^{n+1}$ , par exemple le rapport  $r$  donné par:

$$r = \frac{c_{i+1}^n - c_i^n}{c_i^n - c_{i-1}^n} \quad (23.a)$$

Ce coefficient est utilisé dans les classes de schémas dites "limiteur de pente" (ou limiteur de flux).

D'une manière analogue pour une loi de conservation non linéaire, il est possible d'utiliser une construction géométrique basée sur le flux numérique écrit à l'instant  $t_n$  et au point  $x_i$ . Dans ce cas le rapport considéré s'écrit sous la forme:

$$r = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{f_i^n - f_{i-1}^n} \quad (23.b)$$



#### IV) LES SCHEMAS VTD (Variation Totale Diminuante)

Dans de nombreux domaines de calcul numérique, les variables décrivant l'évolution du système considéré sont tenues de rester dans leur domaine de définition. Ainsi par exemple la variable salinité dans un écoulement océanique doit rester positive et de même pour une concentration en sédiment. D'autre part quand la résolution est faite à partir des modèles numériques, il ne faut retenir que les solutions physiques, puisque certains schémas peuvent introduire des oscillations (extremums locaux) d'origine purement numérique.

De point de vue mathématique, il serait intéressant d'avoir un schéma numérique qui possède une des propriétés suivantes:

i) La préservation de la monotonie (i.e. l'image par ce schéma de toute solution monotone est monotone), en d'autre terme aucune création d'extremums locaux n'est possible.

ii) La monotonie du schéma (i.e. par exemple, si le schéma numérique s'exprime par :  $c_i^{n+1} = G(c_{i-p+1}^n, \dots, c_{i+q}^n)$  avec  $G$  une fonction monotone de ses arguments. Alors le schéma est dit monotone).

iii) La stabilité en norme  $L^\infty$   $\left( \exists M > 0, \forall n \geq 0 \quad \text{Alors on a: } \sup_i |c_i^{n+1}| \leq M \sup_i |c_i^n| \right)$ .

iv) La vérification du principe du maximum.

Une autre notion relativement récente introduite par Harten (1981) se situe entre les divers concepts de monotonie. C'est la notion de schéma à variation totale diminuante connu par l'abréviation anglo-saxonne par TVD (Total Variation Diminishing).

Un schéma sous forme conservative sera dit TVD s'il vérifia:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z} \quad \text{TV}(c^{n+1}) = \sum_i |c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}| \leq \sum_i |c_{i+1}^n - c_i^n| = \text{TV}(c^n)$$

#### Remarques:

*Un schéma TVD préserve la monotonie. (Cette propriété assure l'absence d'oscillations des approximations issues d'un schéma TVD).*

*Un schéma monotone est TVD*

A partir de la classe des schémas linéaires à cinq points étudiée précédemment, on construira des schémas TVD d'ordre élevé ( $\geq 2$ ). Cette construction se décompose en trois étapes:

- i) Ecriture réduite de l'anti-diffusion.
- ii) Mise sous forme incrémentale du schéma.
- iii) Ecriture des conditions suffisantes pour que le schéma soit TVD en utilisant un théorème énoncé par Harten.

#### **IV.1) Définition de l'anti-diffusion d'un schéma du premier ordre:**

La première étape de construction consiste à écrire le flux numérique  $H_{i+1/2}^n$  sous la forme suivante :

$$H_{i+1/2}^n = g_{i+1/2}^n + a_{i+1/2}^n \quad (24)$$

où:

$g_{i+1/2}^n$  est le flux numérique d'un schéma du premier ordre d'approximation spatiale. En pratique on utilise le flux du schéma upwind défini par:

$$g_{i+1/2}^n = \begin{cases} f_i^n & \text{si } \lambda_{i+1/2}^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{c_{i+1}^n - c_i^n} \geq 0 \\ f_{i+1}^n & \text{sin on} \end{cases} \quad (25)$$

$a_{i+1/2}^n$  est appelé flux d'anti-diffusion. C'est sur lui que l'on doit jouer pour contrer la diffusion numérique attachée au flux  $g_{i+1/2}^n$ , afin d'atteindre un ordre d'approximation supérieur en restant toutefois TVD.

Différents schémas ont été proposés qui reposent sur cette décomposition (flux du premier ordre plus un terme de correction), on cite par exemple:

Schéma de Flux-Corrected-Transport (FCT) (Boris and Book 1973, Zalesak 1979).

Schéma de Flux limité (ou limiteur de pente) (Van Leer 1974, Roe et al., (1992), Osher et al., 1984).

##### **IV.1.1) Ecriture réduite de l'anti-diffusion**

Une des décompositions possible du flux numérique  $H_{i+1/2}^n$  en une forme similaire à l'expression (24) est:

$$H_{i+1/2}^n = g_{i+1/2}^n + \frac{H_{i+1/2}^n - g_{i+1/2}^n}{c_{i+1}^n - c_i^n} (c_{i+1}^n - c_i^n) \quad (26)$$

On a alors:

$$a_{i+1/2}^n = \frac{H_{i+1/2}^n - g_{i+1/2}^n}{c_{i+1}^n - c_i^n} (c_{i+1}^n - c_i^n) \quad (26.a)$$

Il est donc intéressant de réécrire le flux d'anti-diffusion en fonction des paramètres reliant le rapport des pentes  $r_{i+1/2}^n$  (appelé aussi nombre réduit) et sa fonction  $\varphi$  appelée le flux réduit. Ces paramètres sont définis par:

$$r_{i+1/2}^n = \begin{cases} \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{f_i^n - f_{i-1}^n} & \text{si } \lambda_{i+1/2}^n \geq 0 \\ \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{f_{i+2}^n - f_{i+1}^n} & \text{si } \lambda_{i+1/2}^n < 0 \end{cases} \quad (26.b)$$

$$\varphi(r_{i+1/2}^n) = \begin{cases} \frac{H_{i+1/2}^n - g_{i+1/2}^n}{f_i^n - f_{i-1}^n} = \frac{H_{i+1/2}^n - f_i^n}{f_i^n - f_{i-1}^n} & \text{si } \lambda_{i+1/2}^n \geq 0 \\ \frac{H_{i+1/2}^n - g_{i+1/2}^n}{f_{i+2}^n - f_{i+1}^n} = \frac{H_{i+1/2}^n - f_{i+1}^n}{f_{i+2}^n - f_{i+1}^n} & \text{si } \lambda_{i+1/2}^n < 0 \end{cases} \quad (26.c)$$

Par une simple manipulation de calcul, on peut écrire:

$$a_{i+1/2}^n = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left| \lambda_{i+1/2}^n \right| \frac{\varphi(r_{i+1/2}^n)}{r_{i+1/2}^n} (c_{i+1}^n - c_i^n) \quad (26.d)$$

Le plan  $(r, \varphi)$  est appelé plan réduit, dans ce plan les schémas linéaires à cinq points étudiés précédemment peuvent se représenter par les droites:

$$\varphi(r) = ar + b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

En effet:

Pour  $\lambda_{i+1/2}^n \geq 0$ , le flux numérique d'un schéma linéaire à cinq points s'écrit:

$$H_{i+1/2}^n = \alpha f_{i+1}^n + \beta f_i^n + (1 - \alpha - \beta) f_{i-1}^n$$

Dans ce cas on a aussi:

$$\varphi(r_{i+1/2}^n) = \frac{H_{i+1/2}^n - f_i^n}{f_i^n - f_{i-1}^n} = \frac{\alpha(f_{i+1}^n - f_i^n) - (1 - \alpha - \beta)(f_i^n - f_{i-1}^n)}{f_i^n - f_{i-1}^n}$$

Finalement, on obtient:

$$\varphi(r_{i+1/2}^n) = ar_{i+1/2}^n + b \quad \text{Avec : } a = \alpha \quad \text{et } b = -(1 - \alpha - \beta)$$

En utilisant les valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  données dans le tableau (1), les schémas classiques linéaires à cinq points peuvent être représentés dans le plan réduit par la figure (7).

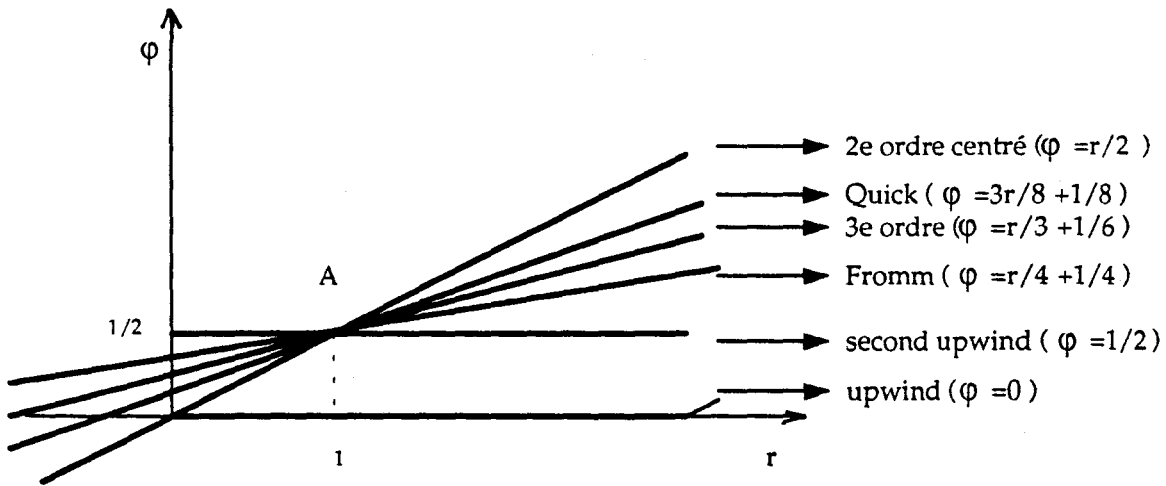


Figure 7: Représentation des schémas linéaires à 5 points dans le plan réduit

**Remarque:**

Le faisceau de droites issues du point  $A(1,1/2)$  représente les schémas linéaires à cinq points du deuxième ordre en approximation spatiale.

**IV.1.2) Mise sous forme incrémentale**

A partir de la forme réduite de l'anti-diffusion, il est possible d'exprimer des conditions sur  $\phi$  qui permettent la construction d'un schéma TVD. En premier lieu on doit réécrire le schéma sous une forme incrémentale, c'est à dire:

$$c_i^{n+1} = c_i^n - C_{i-1/2}^n (c_i^n - c_{i-1}^n) + D_{i+1/2}^n (c_{i+1}^n - c_i^n) \quad (27)$$

**Remarque:**

L'écriture sous forme incrémentale est toujours possible, cependant le couple  $(C_{i-1/2}^n, D_{i+1/2}^n)$  n'est pas unique.

A partir de la forme réduite de l'anti-diffusion, on aboutit à l'une des décompositions incrémentales envisageables soit par exemple:

$$\left. \begin{aligned} C_{i-1/2}^n &= \lambda_{i-1/2}^n \left[ \varphi(r_{i+1/2}^n) - \frac{\varphi(r_{i-1/2}^n)}{r_{i-1/2}^n} + 1 \right] \\ D_{i+1/2}^n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ lorsque } \lambda_{i-1/2}^n \geq 0 \text{ et } \lambda_{i+1/2}^n \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} C_{i-1/2}^n &= 0 \\ D_{i+1/2}^n &= -\lambda_{i+1/2}^n \left[ 1 + \frac{\varphi(r_{i+1/2}^n)}{r_{i+1/2}^n} - \varphi(r_{i-1/2}^n) \right] \end{aligned} \right\} \text{ lorsque } \lambda_{i+1/2}^n < 0 \text{ et } \lambda_{i-1/2}^n < 0$$

**Théorème de Harten, (1983)**

Une condition suffisante pour qu'un schéma mis sous forme incrémentale soit TVD est que:

$$C_{i+1/2}^n \geq 0 \quad D_{i+1/2}^n \geq 0 \quad \text{et} \quad C_{i+1/2}^n + D_{i+1/2}^n \leq 1 \quad \forall i$$

**Remarques:**

Les deux premières conditions traduisent une condition de CFL

La troisième condition mesure la diffusion numérique du schéma:  $Q_{i+1/2}^n = C_{i+1/2}^n + D_{i+1/2}^n$

En effet:

L'écriture incrémentale du schéma donne:

$$c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1} = (1 - C_{i+1/2}^n - D_{i+1/2}^n)(c_{i+1}^n - c_i^n) + C_{i-1/2}^n (c_i^n - c_{i-1}^n) + D_{i+3/2}^n (c_{i+2}^n - c_{i+1}^n)$$

On a alors:

$$|c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}| \leq (1 - C_{i+1/2}^n - D_{i+1/2}^n) |c_{i+1}^n - c_i^n| + C_{i-1/2}^n |c_i^n - c_{i-1}^n| + D_{i+3/2}^n |c_{i+2}^n - c_{i+1}^n|$$

Si l'on désigne par  $N_x$  le nombre total de noeuds constituant le maillage, les hypothèses du théorème et une sommation sur l'indice  $i$  permettent d'écrire:

$$\sum_{i=0}^{N_x-1} |c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}| \leq \sum_{i=0}^{N_x-1} (1 - C_{i+1/2}^n - D_{i+1/2}^n) |c_{i+1}^n - c_i^n| + \sum_{i=0}^{N_x-1} C_{i-1/2}^n |c_i^n - c_{i-1}^n| + \sum_{i=0}^{N_x-1} D_{i+3/2}^n |c_{i+2}^n - c_{i+1}^n|$$

Après deux changements d'indice pour les deux derniers termes (annexe 4.1), on aboutit à:

$$\sum_{i=0}^{N_x-1} |c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}| \leq \sum_{i=0}^{N_x-1} (1 - C_{i+1/2}^n - D_{i+1/2}^n) |c_{i+1}^n - c_i^n| + \sum_{i=0}^{N_x-1} C_{i+1/2}^n |c_{i+1}^n - c_i^n| + \sum_{i=0}^{N_x-1} D_{i+1/2}^n |c_{i+1}^n - c_i^n| \quad (R1)$$

Le terme de droite dans l'inégalité est donc égal à  $\sum_{i=0}^{N_x-1} |c_{i+1}^n - c_i^n|$

D'où  $\sum_{i=0}^{N_x-1} |c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}| \leq \sum_{i=0}^{N_x-1} |c_{i+1}^n - c_i^n|$  ce qui montre que le schéma est TVD ■

### Remarque:

Si en plus des deux premières conditions du théorème on a:

$$C_{i-1/2}^n + D_{i+1/2}^n \leq 1 \quad (R2). \text{ Alors } \|c^{n+1}\|_{\infty} \leq \|c^n\|_{\infty} \left( \text{i.e. } \sup_i |c_i^{n+1}| \leq \sup_i |c_i^n| \right)$$

Cette propriété assure la  $L^\infty$  stabilité d'un schéma TVD.

En effet, après un simple développement, le schéma sous forme incrémentale peut s'exprimer par:

$$c_i^{n+1} = c_i^n (1 - C_{i-1/2}^n - D_{i+1/2}^n) + C_{i-1/2}^n c_{i-1}^n + D_{i+1/2}^n c_{i+1}^n$$

Les deux premières conditions du théorème ci-dessus et la condition (R2) impliquent:

$$|c_i^{n+1}| \leq |c_i^n| \left( (1 - C_{i-1/2}^n - D_{i+1/2}^n) + C_{i-1/2}^n |c_{i-1}^n| + D_{i+1/2}^n |c_{i+1}^n| \right)$$

En majorant  $\forall i \quad |c_i^n|$  par  $\|c^n\|_{\infty}$ , il vient alors

$$|c_i^{n+1}| \leq \|c^n\|_{\infty} (1 - C_{i-1/2}^n - D_{i+1/2}^n) + C_{i-1/2}^n \|c^n\|_{\infty} + D_{i+1/2}^n \|c^n\|_{\infty} = \|c^n\|_{\infty} \text{ et par suite } \|c^{n+1}\|_{\infty} \leq \|c^n\|_{\infty}$$

L'interprétation d'un schéma TVD se résume alors par:

dans les zones régulières de la solution, c'est à dire lorsque le nombre réduit ( $r$ ) reste relativement proche de l'unité, il est possible d'utiliser un schéma d'ordre élevé (Quick, Lax Wendroff) sans risque de création des oscillations parasites (perte de la propriété TVD). D'autre part, lorsqu'on est au voisinage d'un extremum de la solution, le nombre réduit devient alors négatif, dans ce cas de figure il est souhaitable d'utiliser un schéma du premier ordre (upwind par exemple) afin d'éviter l'apparition des instabilités numériques à ce voisinage.

De nombreux schémas, issus soit de la littérature sur les problèmes hyperboliques, soit de celle sur les problèmes de transport, mais tous résultent d'une approche commune de type " limiteur de pente". peuvent donc s'écrire aisément dans la formulation réduite. On cite quelques exemples donnés par Sweby (1984):.

Schéma	Forme réduite
1) Schéma de Roe (minmod)	$\varphi(r)=\max[0, \min(1,r)]$ TVD si $v \leq 1/3$
2) Schéma de Roe corrigé (superbee)	$\varphi(r)=\max[0, \min(1,2r), \min(2,r)]$ TVD si $v \leq 1/3$
3) Schéma de Van Leer(1)	$\varphi(r) = (r +  r )/(1 +  r )$ TVD si $v \leq 1/3$
4) Schéma de Van Leer(2) appelé aussi schéma MC (Monotone Centred)	$\varphi(r)=\max[0, \min((1+r)/2, 2, 2r)]$
5) Schéma de Chakravarthy-Oscher	$\varphi(r)=\max[0, \min(\phi, \phi r)]$ $0 \leq \phi \leq 1$ TVD si $v \leq 1/(\phi + 1)$
6) Schéma de Sweby	$\varphi(r)=\max[0, \min(1, \phi r), \min(\phi, r)]$ $0 \leq \phi \leq 1$ TVD si $v \leq 1/(\phi + 1)$

Tableau 2 : Fonction du flux réduit pour divers schémas "limiteur de pente"

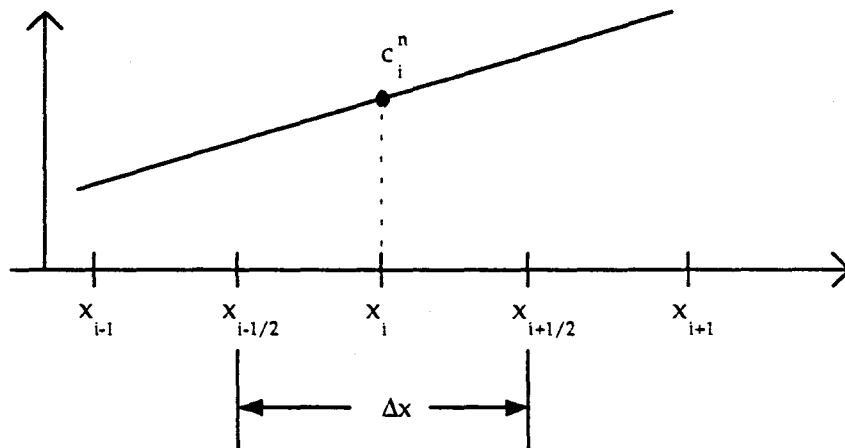
Pour une synthèse plus complète de ces schémas, on pourra consulter Sweby (1984), Morton and Sweby (1987), Davies (1984), Leveque (1990) et plus récemment Schultz-Rinne (1993) pour une discussion concernant les méthodes limiteurs de pente et leurs cas d'extension.

Pour donner une idée sur les méthodes de type "limiteur de pente", nous avons choisi d'étudier le schéma de Van Leer dans sa version de base qui est plus simple à interpréter géométriquement.

## V) SCHEMA DE Van Leer(1)

### V.1) Description générale de la méthode

La méthode a été initialement développée pour les problèmes de la dynamique des gaz. Elle repose sur les mêmes principes que la méthode de Godunov à l'exception du choix de l'espace d'approximation des fonctions. En fait pour le schéma de Van Leer(1), on utilise des fonctions affines discontinues par maille et non plus des fonctions constantes par maille.



Sur l'intervalle  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , on pose  $c^n(x) = c_i^n + (x - x_i)P_i^n$

Où  $P_i^n$  est la pente de la droite passant par le point d'ordonnée  $(x_i, c_i^n)$ .

L'obtention d'un schéma limiteur de pente se fait généralement en trois étapes:

#### Etape 1

On résout l'équation de la loi de conservation considérée par un schéma classique du premier ou second ordre (upwind, Lax-Wendroff, Leap-frog, etc.).

Soit à résoudre par exemple l'équation:



$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial f(c)}{\partial x} = 0 \\ c(x,0) = c^0(x) \end{cases} \quad (28)$$

et soit  $c(x, t_n)$  la solution à l'instant  $t_n = n\Delta t$ .

### Etape 2:

On projette la solution de l'étape (1) sur un espace de fonctions discontinues et affines par morceau.

### Etape 3:

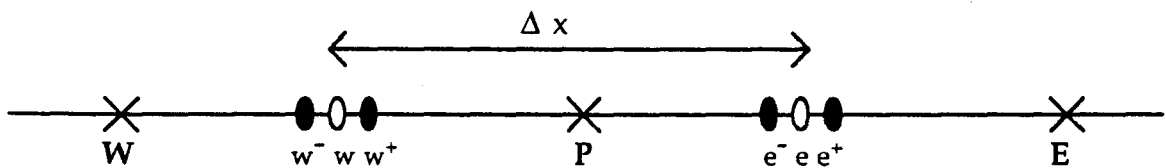
On corrige les pentes obtenues sur chaque maille de manière à empêcher toutes oscillations parasites (cette étape permet l'obtention de  $c^{n+1}$  tout en assurant la monotonie du schéma).

Pour une illustration plus claire des ces étapes, nous résolvons l'équation de transport monodimensionnel par le schéma de Van Leer(1)

Soit à résoudre:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} = 0 & x \in [0,1] \\ c(x,0) = 0 \\ c(0,t) = a, \quad c(1,t) = b & \text{avec } a, b \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (29)$$

Pour cette résolution on considère le maillage spatiale suivant:



Si l'on intègre l'équation (29) en temps et en espace, on aura:

$$\iint_{\Delta t \Delta x} \frac{\partial c}{\partial t} dt dx + \iint_{\Delta t \Delta x} \frac{\partial(uc)}{\partial t} dt dx = 0$$

Pour une maille de centre  $P$ , les deux intégrales sont approchées par:

$$\iint_{\Delta t \Delta x} \frac{\partial c}{\partial t} dt dx \equiv \Delta x [c^{n+1} - c^n]$$

$$\iint_{\Delta t \Delta x} \frac{\partial(uc)}{\partial t} dt dx \equiv \Delta t [(uc)_e^n - (uc)_w^n]$$

L'idée du schéma de Van Leer(1) est la même que celle du schéma upwind traditionnel. Pour ce dernier, on approche  $c_e^n$  par une valeur prise en amont de  $c_e^n$  si  $u_e^n$  est positive ou par une valeur prise en aval si  $u_e^n$  est négative. La différence avec le schéma de Van Leer(1) se situe au niveau du choix de ces valeurs (en amont ou en aval). Van Leer prend pour valeur en amont, la valeur notée  $c_e^{n-}$  et pour valeur en aval, la valeur notée  $c_e^{n+}$ , alors que dans le schéma upwind on prend généralement  $c_p^n$  pour valeur amont et  $c_e^n$  pour valeur aval.

C'est précisément pour approcher les valeurs  $c_e^{n-}$  et  $c_e^{n+}$  que l'on fait intervenir les pentes et leurs limiteurs. L'introduction de l'espace des fonctions affines par morceau comme espace de projection des solutions permet d'évaluer ces valeurs par les relations suivantes:

$$c_e^{n+} = c_e^n - (x_e - x_e)P_e^n$$

$$c_w^{n+} = c_p^n - (x_p - x_e)P_p^n$$

$$c_e^{n-} = c_p^n + (x_e - x_p)P_p^n$$

$$c_w^{n-} = c_w^n + (x_w - x_w)P_w^n$$

Il reste maintenant à calculer les pentes  $P_w^n, P_p^n, P_e^n$  à l'aide de la dernière étape de la méthode de Van Leer(1): l'estimation et la limitation des flux.

En première estimation les pentes  $P_w^n, P_p^n, P_e^n$  sont approchées par les différences centrées non limitées, par exemple pour  $P_p^n$  on a:

$$\tilde{P}_p^n = \frac{c_e^n - c_w^n}{2\Delta x}$$

Et finalement la limitation se fait conformément à la procédure suivante:

$$P_p^n = \begin{cases} \text{sign}(\tilde{P}_p^n) \cdot \text{Min} \left\{ |\tilde{P}_p^n|; \frac{\gamma}{\Delta x} |c_p^n - c_w^n|; \frac{\gamma}{\Delta x} |c_e^n - c_p^n| \right\} & \text{si } \text{sign}(c_e^n - c_p^n) = \text{sign}(c_p^n - c_w^n) = \text{sign}(\tilde{P}_p^n) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Les pentes  $P_w^n, P_e^n$  s'obtiennent de la même manière.

### Remarques:

Le coefficient  $\gamma$  a été introduit pour favoriser des termes plutôt que d'autres dans le calcul du minimum.

On constatera (Tests numériques), que certaines de ces valeurs évitent d'obtenir des oscillations parasites (overshoot, undershoot).

La valeur de  $\gamma$  la plus fréquemment utilisée est 2 ou 1. (par raison de la stabilité de la méthode).

Si l'on n'accomplit pas la procédure de la limitation des pentes, le schéma est du deuxième ordre en espace, mais la propriété TVD ne sera pas assurée. Des tests numériques montrent effectivement le développement des oscillations aux voisinages des chocs (discontinuités).

### V.2) Interprétation de $P_p^n$

Si  $P_p^n$ ;  $(c_E^n - c_p^n)$ ;  $(c_p^n - c_W^n)$  sont de même signe,  $P_p^n$  est une approximation du gradient  $\frac{\partial c}{\partial x}$  au point  $x_p$  et à l'instant  $t_n = n\Delta t$ . Si non,  $c_p^n$  est un extremum local de  $c^n$  et on choisit  $P_p^n = 0$ , de manière à ne pas accentuer ce caractère extrémal origine des instabilités. De ce fait on empêche l'apparition d'oscillations parasites. Géométriquement la valeur  $P_p^n$  correspond à la valeur la plus faible des trois pentes situées autour du point  $x_p$  comme le montre la figure (8), c'est à dire:

$$P_p^n = \text{Min}\{\text{tg}\alpha, \text{tg}\beta, \text{tg}\theta\}$$

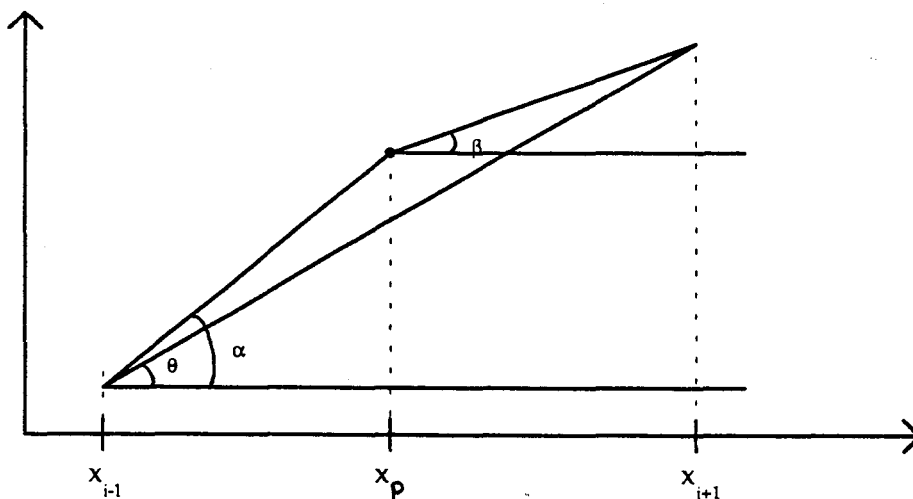


Figure 8: Interprétation géométrique de la pente  $P_i^{n+1}$

En annexe (4.2), nous donnons quelques éléments concernant la consistance, stabilité et la convergence de la méthode de Van Leer(1) ci-dessus présentée.

L'extension de la méthode de Van Leer(1) à plusieurs dimensions ne pose aucun problème particulier (Pfertzfel, 1987; Dulac, 1989). Cependant, si l'on désire obtenir une précision d'ordre deux en temps et en espace en utilisant la fonction du flux donnée par la méthode de Lax-Wendroff, nous nous verrons confronter à des termes supplémentaires faisant intervenir des termes croisés (dérivées partielles mixtes). En effet, supposons qu'on veut résoudre l'équation de transport bidimensionnel suivante:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad u, v \text{ constants} \quad (30)$$

La méthode de Lax-Wendroff, consiste à développer en série de Taylor le terme  $c_i^{n+1}$ , c'est à dire:

$$c_{i,j}^{n+1} = c_{i,j}^n + \Delta t \left( \frac{\partial c}{\partial t} \right)_{i,j} + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} \right)_{i,j} + O(\Delta t^3)$$

Pour obtenir une méthode de second ordre et de deux niveaux en temps, il faut éliminer le terme  $\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}$ . Or si l'on dérive par rapport au temps l'équation (30), on aura:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + u^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0 \quad (30.a)$$

D'où l'apparition du terme croisé qui ne facilite pas la généralisation de ce type de méthode en plusieurs dimensions (Leveque 1996).

## VI) TESTS NUMERIQUES

Pour tester les performances des schémas retenues dans cette étude (schémas upwind, Lax- Wendroff et les quatres premiers schémas du tableau 2) et afin de nous rendre compte des difficultés rencontrées lors de leur application, nous avons effectué une série d'essais numériques sur l'équation de transport purement convectif mono et bidimensionnelle à vitesse constante ou variable. Les résultats obtenus

seront comparés soit à des solutions analytiques, soit à des résultats existants dans la littérature.

Afin d'avoir un ordre de grandeur numérique des propriétés des solutions approchées concernant l'équation de transport, des mesures permettant d'évaluer des caractéristiques telles que: la précision, l'amortissement et la positivité ont été effectuées:

- Pour la précision, on donne:  $\|c_{\text{exacte}} - c_{\text{num}}\|_{\infty}$  et  $\|c_{\text{exacte}} - c_{\text{num}}\|_1$
- Pour la positivité, on donne:  $c_{\min} = \min_i (c_i^{n+1})$
- Pour l'amortissement, on donne:  $|1 - r_{\text{mass}}|$

Avec:

$$r_{\text{mass}} = \frac{\int_{\Omega} c_{\text{exact}} d\Omega}{\int_{\Omega} c_{\text{num}} d\Omega} \quad \text{où } \Omega \text{ est le domaine de calcul}$$

En ce qui concerne le calcul de flux numérique, nous utilisons:

- i) La méthode de Van Leer telle qu'elle est exposée au paragraphe (V). C'est à dire: on considère le flux numérique donné par le schéma upwind (premier ordre en espace) que l'on corrige avec un terme faisant intervenir les pentes de la solution à la maille considérée. Cette méthode sera comparée avec le schéma upwind et le schéma de Lax-Wendroff pour différents nombres de courant.
- ii) La forme du flux numérique proposée par Leveque (1996) dont nous donnons le résumé:

Pour un écoulement incompressible, la loi de conservation (1) discrétisée sous sa forme conservative s'exprime par:

$$c_i^{n+1} = c_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(c^n; i+1) - F(c^n; i)]$$

Où  $F(c^n; i)$  est une approximation du flux moyen basé sur la donnée  $c_i^n$ .

Avec ces notations et dans le cas où  $f(c)=uc$ , la méthode upwind (premier ordre en espace) a pour flux numérique la fonction  $F^{\text{up}}$  donnée par:

$$F^{up}(c; i) = \begin{cases} uc_{i-1} & \text{si } u > 0 \\ uc_i & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

De même le flux numérique de la méthode de Lax-Wendroff (second ordre en espace) s'exprime par la fonction  $F^{LW}$  donnée par:

$$F^{LW}(c; i) = \frac{1}{2}u(c_{i-1} + c_i) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}u^2(c_i - c_{i-1})$$

**Remarque:**

Le flux numérique du schéma de Lax-Wendroff peut s'écrire comme le flux numérique du schéma upwind plus un terme correctif, c'est à dire:

$$F^{LW}(c; i) = F^{up}(c; i) + \frac{1}{2}|u|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|u|\right)(c_i - c_{i-1})$$

Pour aboutir à une fonction de flux limitée, Leveque a introduit le limiteur  $\phi$  tel que:

$$F(c; i) = F^{up}(c; i) + \frac{1}{2}|u|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|u|\right)(c_i - c_{i-1})\phi(r_i) \tag{31}$$

Où  $\phi$  est l'une des quatre premières fonctions réduites données dans le tableau 1.

**Remarques:**

Si  $\phi=0$ , l'expression (30) se réduit exactement au flux numérique upwind  $F^{up}$ .

Si  $\phi=1$ , l'expression (30) se réduit exactement au flux numérique de Lax-Wendroff  $F^{LW}$ .

**Essai 1:**

L'équation de la convection pure monodimensionnelle:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0 & x \in [0,1] \\ c(x,0) = c_0(x) \end{cases}$$

- a) la fonction  $c_0$  est de forme rectangulaire.
- b) la fonction  $c_0$  est de forme triangulaire.
- c) la fonction  $c_0$  est de forme gaussienne.

Cette équation admet une solution exacte donnée par:  $c(x,t) = c_0(x-ut)$ .

### Essai 2:

Cet essai résout la convection pure bidimensionnelle d'un spot carré de concentration: dans un champ de vitesse oblique et constant:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = 0 & x, y \in [0,1] \\ c(x, y, 0) = c_0(x, y) \end{cases}$$

Avec un champ de vitesse oblique et constant donné par:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = 0.5$$

et une condition initiale de la forme:

$$c_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25 \text{ et } 0 \leq y \leq 0.25 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est donnée par:  $c(x, y, t) = c_0(x - ut, y - vt)$ .

### Essai 3:

Connu sous le nom de "Molenkamp test", cet essai résout l'équation en deux dimensions de la convection pure dans un champ de vitesses en rotation:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = 0 & x, y \in [0,1] \\ c(x, y, 0) = c_0(x, y) \end{cases}$$

Avec un champ de vitesse variable donné par:

$$u(x, y) = -\omega y$$

$$v(x, y) = \omega x$$

$$\omega = 2\pi$$

et une condition initiale donnée par la distribution gaussienne de la forme:

$$c(x, y, 0) = c_0(x, y) = 0.01^{4r^2} \quad , \quad r = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$$

La solution exacte de cette équation est donnée par (Vreugdenhil, 1993):

$$c(x, y, t) = 0.01^{4r^2} \quad , \quad r = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \cos(\omega t)\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \sin(\omega t)\right)^2}$$

**Essai 4:**

Avant d'insérer le schéma limiteur de pente dans le modèle de la circulation océanique pour le traitement des termes convectifs des équations scalaires telles que la salinité, la température, l'énergie cinétique et la concentration en sédiment et pour montrer l'effet de la diffusion numérique introduite par le schéma upwind actuellement utilisé pour la résolution de ces variables, nous avons tester ce nouveau schéma dans le cas d'un bassin semi-fermé de profondeur constante  $h_0$  et forcé par une onde de marée (figure 9), en considérant l'équation d'onde bidimensionnelle auquel on lui adjoint une équation de contaminant (salinité par exemple). Ainsi le modèle simplifié s'écrit:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = 0$$

Au repos on a  $\eta = u = v = 0$

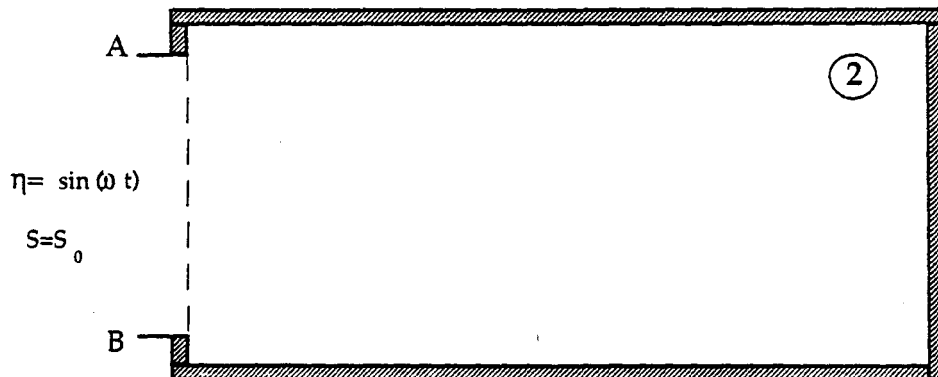
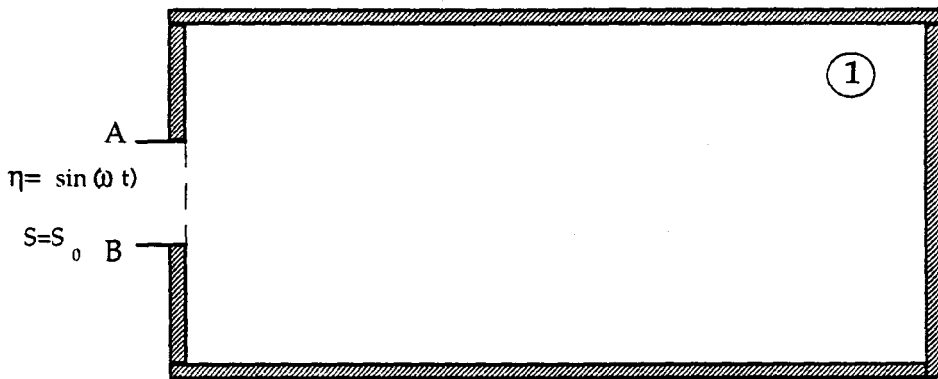


Figure 9: Domaines de la propagation de l'onde de marée



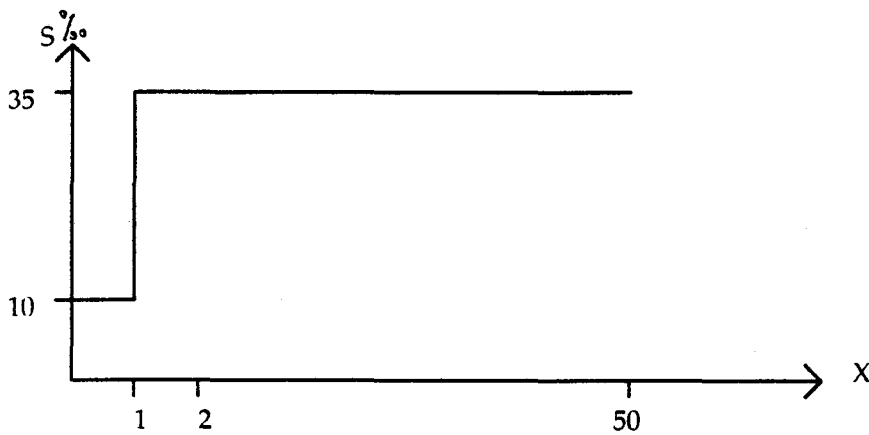


Figure 10: Coupe  $A \leq y \leq B$  de la Condition initiale de la salinité

## VII) INTERPRETATION DES RESULTATS DES TESTS NUMERIQUES

### VII.1) Schéma 1-D d'ordre(1,2)

#### a) Condition Initiale (Distribution Rectangulaire)

##### a.1) nombre de courant ( $cr=0.2$ )

Au vue du tableau (11.1) et figure (11.1), on soulignera tout d'abord la parfaite conservativité de l'ensemble des schémas ( $r_{\text{mass}}=1.0$ ).

Pour  $\gamma=1$ , le schéma de Van Leer(1) préserve bien le maximum, on notera tout de même l'apparition des valeurs négatives relativement faibles au voisinage des discontinuités (fig. 11.1), on peut considérer que la faible valeur du nombre de courant ( $Cr=0.2$ ) permet au schéma de Van Leer(1) de posséder la propriété TVD. Par contre pour  $\gamma=2$ , ces valeurs négatives s'accroissent aux points de discontinuité, de plus le maximum n'est plus préservé (tableau 11.2). Cependant, on observera une diffusion numérique moins importante que dans le cas  $\gamma=1$  (fig.11.2).

On sait que, le schéma upwind ne fait jamais apparaître des oscillations parasites tant que le critère de stabilité est respecté (i.e.  $Cr < 1$ ). Vue la discrétisation de l'équation par ce schéma, le caractère diffusif sera toujours présent (fig. 11.1 et 11.2).

Pour le schéma de Lax-Wendroff, si l'on examine la discrétisation du flux, on remarquera que ce schéma se décompose d'une approximation centrée de la dérivée partielle première plus un terme de correction diffusif qui dépend du nombre de courant  $Cr$ .

Pour un nombre de courant inférieur à l'unité, la diffusion est dominée par la convection et on retrouve les instabilités numériques introduites par un schéma centré et notamment dans ce cas de figure (présence de discontinuités) (fig. 11.1 et 11.2).

Dans Collela (1993), on trouve une étude détaillée sur les principaux paramètres responsables de l'apparition des oscillations autour d'un point de discontinuité.

### a.2) nombre de courant ( $Cr=0.75$ )

La conservativité des schémas et plus ou moins vérifiée (tableau 11.3). La solution donnée par le schéma de Van Leer(1) dans le cas  $\gamma=1$  présente des oscillations parasites autour des points de discontinuité (fig. 11.3). Cette constatation ne fait que vérifier le résultat théorique puisque pour cette valeur de nombre de courant, on est au dessus de la condition CFL ( $Cr < 0.66$ ) garantissant la propriété TVD du schéma. Dans le cas où  $\gamma=2$  la condition CFL qui assure la stabilité du schéma devient  $Cr < 0.5$  par conséquent et avec le nombre de courant considéré on s'éloigne d'avantage de la condition CFL, ceci ne peut qu'amplifier les oscillations aux points critiques (fig. 11.4).

En ce qui concerne le schéma de Lax-Wendroff, on observera une diminution du maximum de la solution et une augmentation de la valeur minimale (négative). En effet avec le nombre de courant considéré, l'aspect dominant de la convection a été réduit par l'augmentation du terme diffusif correcteur (fig. 11.4 et tableau 11.4).

Pour le schéma upwind, on observera un étalement plus important de la solution numérique et un écartement du maximum de la solution analytique. En fait, ceci est dû à la décroissance exponentielle introduite par la diffusion numérique.

### b) Condition Initiale (Distribution Triangulaire)

Dans ce cas test, on observera dans les deux cas ( $Cr=0.2$  et  $Cr=0.75$ ) une nette amélioration de la réponse du schéma de Lax-Wendroff concernant les oscillations numériques au voisinage des points où la solution est non dérivable, ceci est sans doute est dû à la présence d'un gradient moins "brutal" que dans la cas précédent. On soulignera aussi la différence de phase introduite par le schéma dans la solution numérique (décalage des maximums).

Pour le schéma de Van Leer(1), on remarque dans le cas  $Cr=0.2$ :

- i) Une parfaite conservativité du schéma.
- ii) Pour  $\gamma=1$ , le schéma a tendance d'être TVD, mais plus diffusif que dans le cas  $\gamma=2$  (fig. 11.5 et 11.6).
- iii) Pour  $\gamma=1$ , l'amortissement de la solution numérique est plus important que dans le cas  $\gamma=2$ .
- iv) Pour les deux valeurs de  $\gamma$ , le schéma de Van Leer(1) a tendance à être "overcompressif" (i.e. le maximum de la solution est réalisé pour un ensemble de points  $x_i$  et non en un point unique) (fig. 11.5 et 11.6).

Pour un nombre de courant  $Cr=0.75$ , on notera la non conservativité (tableaux 11.7 et 11.8) de l'ensemble des trois schémas et la génération des oscillations numériques par le schéma de Van Leer(1) le long du support de la solution. Ces oscillations s'amplifient pour  $\gamma=2$  (fig.11.7 et 11.8).

### c) Condition Initiale (Distribution Gaussienne)

Dans ce cas de figure, on rappelle que la distribution initiale est une fonction assez régulière ( $C^\infty$ ), on observera pour le nombre de courant  $Cr=0.2$ :

- i) La parfaite conservativité des trois schémas (tableaux 11.9 et 11.10).
- ii) Comme dans le cas de la distribution triangulaire et pour les deux valeurs de  $\gamma$ , le schéma de Van Leer(1) est "overcompressif", on verra plus loin que cette tendance est due principalement à la discrétisation au premier ordre en temps. On constatera aussi que la propriété TVD du schéma de Van Leer(1) a été conservée (fig. 11.9 et 11.10).
- iii) Le schéma de Lax-Wendroff ne présente aucune oscillation, ceci est probablement dû à la parfaite régularité de la condition initiale sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Cette condition est nécessaire pour la validité du développement en série de Taylor sur lequel est basé le schéma. Par contre les oscillations parasites sont toujours présentes, mais par "faibles" valeurs (tableau 11.9).

Pour le nombre de courant  $Cr=0.75$ , on obtient les mêmes résultats numériques que dans le cas où la condition initiale est une distribution triangulaire (fig. 11.11 et 11.12) et (tableaux 11.11 et 11.12).

## VII.2) Schéma 1-D d'ordre(2,2)

Dans cette partie le flux numérique a été calculé à partir d'un schéma de second ordre en espace et en temps (schéma de Lax-Wendroff) rendu TVD par l'introduction d'un limiteur de pente.

Les schémas utilisés pour ces tests sont les suivants:

Deux schémas classiques:

1) Upwind

2) Lax-Wendroff

et quatre schémas basés sur le flux numérique donné par la méthode de Lax-Wendroff et limité par (Leveque 1996):

3) Limiteur Minmod (Roe 1)

4) Limiteur Superbee (Roe 2)

5) Limiteur Van Leer(2)

6) Limiteur Centrée Monotone (C.M.)

Les deux premiers schémas ont été présentés dans la première série de tests (paragraphe VII.1), nous préférons les présenter à nouveau dans ce paragraphe pour montrer les améliorations apportées par l'introduction des limiteurs de pente en ce qui concerne:

i) la réduction de la diffusion numérique.

ii) la suppression des oscillations parasites.

En ce qui concerne les schémas upwind et Lax-Wendroff et pour le nombre de courant  $Cr=0.2$ , on retrouve les mêmes résultats décrits dans le paragraphe précédent (VII.1).

Dans tous les cas de figure aucune génération des extremums locaux n'est observée pour l'ensemble des distributions initiales (rectangulaire, triangulaire et gaussienne). Au vu des tableaux 11.13, 11.15 et 11.17 et à l'exception de la condition initiale rectangulaire, on signalera la parfaite conservativité des quatres schémas limiteur de pente et particulièrement le bon comportement des limiteurs Superbee et C.M. pour l'ensemble des ces cas tests. Il est à noter aussi que ces schémas diminuent considérablement la diffusion numérique introduite par la discrétisation spatiale (fig. 11.13.b, 11.13.c ; fig. 11.15.b, 11.15.c et fig. 11.17.b, 11.17.c).

Excepté le cas de la distribution rectangulaire, aucun schéma n'a produit le maximum de la solution analytique (introduction de l'amortissement) (tableaux 11.15, 11.17).

Pour le nombre de courant  $Cr=0.75$ , les schémas limiteurs de pente perdent la propriété de conservativité, par contre ils conservent le caractère TVD (suppression des extremums locaux) (fig. 11.14.a, 11.14.b ; fig. 11.16.a, 11.16.b et fig. 11.18.a, 11.18.b).

Comme dans le cas  $Cr=0.2$  et mis à part la distribution rectangulaire, aucun des schémas ne conservent le maximum (tableaux 11.16 et 11.18).

### **VII.3) Schéma 2-D**

Comme dans le cas monodimensionnel, nous commentons les réponses des schémas numériques utilisés pour simuler la convection oblique d'un spot carré de concentration (essai 2) et la convection d'une distribution gaussienne en rotation (essai 3, Test de Molenkamp).

#### **a) Condition Initiale (Distribution Carrée)**

Afin de rendre compte des difficultés liées à la construction d'un schéma multidimensionnel à partir d'un schéma de base monodimensionnel, nous présentons pour différents nombres de courant, les résultats numériques d'une équation bidimensionnelle (essai 2) discrétisée en mode découplé (mode splitting) pour l'ensemble des schémas étudiés sauf pour le schéma Upwind qui par sa construction se discrétise totalement en bidimensionnel.

##### **a.1) nombre de courant ( $Cr_x=Cr_y=0.50$ )**

Au vue du tableau (12-A), on signalera tout d'abord une relative conservativité de l'ensemble des schémas ( $r_{\text{mass}}=1.0$ ) et la vérification du principe du maximum par les schémas Superbee, C.M. et Van Leer(2). On notera également l'absence de toutes oscillations parasites (i.e. préservation de la propriété TVD), excepté pour les schémas Upwind et Lax-Wendroff (fig. 12-1.a et 12-1.b). Pour les autres schémas "limiteur de pente", on observera une diffusion numérique moins importante que celle introduite par le schéma Upwind et notamment pour le limiteur "Superbee" (fig. 12-1.d) qui donne aussi les meilleurs résultats de convergence en  $L^1$  et  $L^2$  (tableau 12-A).

Nous signalons que l'apparition des "faibles" valeurs négatives pour le schéma Upwind est dû aux nombres des courants ( $Cr_x$ ) et ( $Cr_y$ ) qui sont exactement à la limite de la condition CFL ( $Cr_x + Cr_y \leq 1$ )

### a.2) nombre de courant ( $C_{rx}=C_{ry}=0.55$ )

Le tableau (12-B) montre une accentuation des instabilités numériques de la part du schéma Upwind (fig. 12-2.a), ceci est sans doute dû au violation de la condition CFL puisque dans ce cas de figure, on a  $C_{rx}+C_{ry} > 1$ . Cependant, nous remarquons un gain de précision (tableau 12-B) et une réduction de la diffusion numérique (fig. 12-2.c, 12-2.d, 12-2.e et 12-2.f) de la part des autres schémas. En effet, la discrétisation de l'équation de l'essai (2) par le schéma Upwind impose la condition de stabilité ( $C_{rx} + C_{ry} \leq 1$ ), c'est à dire dans notre cas ( $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u|+|v|} = \Delta t_{up}$ ), alors que pour le mode splitting avec lequel ont été discrétisées les schémas "limiteur de pente" impose la condition CFL monodimensionnel suivant chaque direction ( $C_{rx} \leq 1$  et  $C_{ry} \leq 1$ ) ce qui se traduit dans notre cas par:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|u|} \quad \text{et} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|}$$

ou encore: 
$$\Delta t \leq \text{Max}\left(\frac{\Delta x}{|u|}, \frac{\Delta x}{|v|}\right) = \Delta t_{lp} > \Delta t_{up}$$

### a.3) nombre de courant ( $C_{rx}=C_{ry}=1.0$ )

Dans ce cas de figure, le maximum des solutions numériques fournies par l'ensemble des schémas excepté, le schéma Upwind, atteint parfaitement le maximum de la solution analytique (tableau 12-C). On notera que la propriété TVD est respectée par tous les schémas sauf le schéma Upwind (fig. 12-3.a). Les schémas "limiteur de pente" introduisent une diffusion numérique moins importante que dans les cas précédents d'une part (fig. 12-3.c, 12-3.d, 12-3.e et 12-3.f) et ils ont le même comportement vis à vis la convergence en  $L^1$ ,  $L^2$  et  $L^\infty$  d'autre part. Finalement, on signalera que pour ces nombres de courant le schéma de Lax-Wendroff fournit la solution exacte (fig. 12-3.b).

### a.4) nombre de courant ( $C_{rx}=C_{ry}=1.05$ )

Les résultats de ce cas de figure ne sont pas inattendus (tableau 12-D) puisque, pour l'ensemble des schémas, ces nombres de courant violent la condition CFL assurant la stabilité et par conséquent la propriété TVD (théorème de Harten). Le tableau (12-D) et la figure (12-4.a) montrent que le schéma de Lax-Wendroff amplifie d'avantage le maximum et augmente les valeurs négatives parasites. Les figures (12-4.b, 12-4.c, 12-4.d et 12-4.e) montrent que les schémas "limiteur de pente"

ont un comportement semblable pour des nombres de courant violant la condition CFL.

### **b) Condition Initiale (Distribution Gaussienne)**

Dans ce cas test, nous résolvons l'équation de transport en deux dimensions à vitesse variable (essai 3) par une discrétisation totalement bidimensionnelle. Les fonctions de flux correspondants aux termes croisés seront approchés par la méthode de Lax-Wendroff.

Pour cet essai, nous commentons les résultats obtenus pour trois nombres de courant ( $C_{rx}=C_{ry}=0.314$ ,  $C_{rx}=C_{ry}=0.628$  et,  $C_{rx}=C_{ry}=0.691$ )

#### **b.1) nombre de courant ( $C_{rx}=C_{ry}=0.314$ )**

Pour l'ensemble des schémas, on notera, ni apparition de valeurs négatives, ni génération des extremums locaux (tableau 13-A), le nombre de courant  $C_{rx}=C_{ry}=0.314$  permet donc aux schémas de préserver la monotonie, par conséquent la propriété TVD.

Le schéma Upwind fait apparaître un dédoublement d'isolignes au voisinage de la limite gauche du domaine (fig. 13-1.a1). Ce phénomène est sans doute dû à la forte diffusion numérique introduite par ce type de schéma qui se traduit par un étalement de la courbe en espace (fig. 13-1.a2).

Dans la catégorie des schémas "limiteur de pente", on notera la faiblesse de la conservation du maximum de la part du limiteur Minmod (tableau 13-A, fig. 13-1.c2). On retrouve également le caractère "overcompressif" (aplatissement du maximum) du limiteur Superbee (fig. 13-1.d2) déjà mentionné dans les tests unidimensionnels. On signalera les meilleures performances du schéma de Lax-Wendroff et notamment en convergence  $L^\infty$  (tableau 13-A). Ce constat n'est pas inattendu, puisqu'il s'agit ici d'une condition initiale de classe  $C^\infty$  (i.e. distribution gaussienne).

Dans la classe des schémas "limiteur de pente", le limiteur Superbee fournit les meilleurs résultats concernant la conservation du maximum et de la masse (tableau 13-A, fig. 13-1.d2) ainsi que la convergence en  $L^1$  et  $L^2$ .

Finalement, nous signalons que pour ce nombre de courant, les limiteurs Van Leer(2) et C.M. sont similaires du point de vue de la conservation de la masse et de la convergence en  $L^1$ ,  $L^2$  et  $L^\infty$  (tableau 13-A).

### b.2) nombre de courant ( $C_{rx}=C_{ry}=0.628$ )

Pour ce nombre de courant, on notera l'apparition des valeurs négatives (tableau 13-B) observées pour le limiteur Minmod dans les zones de fortes vitesses (fig. 13.a) qui se traduisent par des instabilités numériques (fig. 13-2.c1). En fait, pour ce schéma le nombre de courant  $C_{rx}=C_{ry}=0.628$  implique la violation de la condition CFL, donc la perte de la propriété TVD.

En ce qui concerne, la conservation de la masse, on constatera le comportement semblable de tous les schémas (tableau 13-B), sauf le schéma Upwind qui garde toujours les caractères diffusif et amortisseur de la solution numérique (fig. 13-2.a1 et 13-2.a2). Le limiteur Superbee est toujours "overcompressif" (fig. 13-2.d2). Cependant, ce limiteur est toujours supérieur aux autres "limiteur de pente" vis à vis de la conservation de la masse, du maximum et de la convergence en  $L^1$ ,  $L^2$  et  $L^\infty$  (tableau 13-B).

Enfin, nous signalons le bon comportement du schéma de Lax-Wendroff (tableau 13-B, fig. 13-2.b1 et fig. 13-2.b2) en comparaison avec la solution analytique (fig. 13.b et fig. 13.c).

### b.3) nombre de courant ( $C_{rx}=C_{ry}=0.691$ )

Dans ce cas de figure, les schémas "limiteur de pente" et Upwind deviennent instables (tableau 13-C). Cependant cette instabilité n'affecte pas le spot de concentration C. En effet, ce spot parcourt un quart de cercle dans une zone de faible vitesse (fig. 13.a) dont le nombre de courant calculé à partir des vitesses locales reste bien inférieur à la limite provoquant la perte de la propriété TVD. Par contre, le nombre de courant calculé à partir de la vitesse maximale (réalisée au point de coordonnées  $x=y=1$ ) devient supérieur à cette limite. Ceci explique l'apparition des instabilités dans la partie supérieure à droite du domaine du calcul (fig. 13-3.a1, fig. 13-3.c1, fig. 13-3.d1, fig. 13-3.e1, et fig. 13-3.f1)

Finalement, nous signalons que dans la catégorie des schémas "limiteur de pente", le limiteur Superbe présente globalement les meilleurs performances.



Cependant dans le cas d'une discrétisation bidimensionnel avec une condition initiale de classe  $C^\infty$  (i.e. distribution gaussienne), le schéma de Lax-Wendroff nous semble légèrement supérieur même pour des nombres de courant plus important (à la limite de la condition CFL). Cette supériorité est d'autant plus confirmée lorsque le facteur temps de calcul est pris en compte. Ainsi le schéma de Lax-Wendroff devient plus avantageux que les autres schémas "limiteur de pente" présentés dans cette étude.

#### VII.4) Cas schématique 2-D

Dans la perspective de mettre en oeuvre l'une des schémas "limiteur de pente" dans le modèle tridimensionnel, nous avons réalisé un cas schématique calculant les champs de vitesse à partir des équations de Saint-Venant linéarisées aux quelles on adjoint une équation de transport scalaire (Salinité) purement convective (essai 4). Ce cas test sera appliqué à deux domaines de géométrie différentes (fig. 9.1 et fig. 9.2). A la frontière ouverte, nous imposons une onde sinusoïdale et condition initiale de salinité donnée par la figure (10), c'est à dire:

$$S(i, j, 0) = S_0(i, j) = \begin{cases} 10 & \text{si } A \leq j \leq B \text{ et } i = 1 \\ 35 & \text{si non} \end{cases}$$

Nous rappelons que pour ce cas schématique, l'équation de transport a été discrétisée en bidimensionnel, c'est à dire, on aura des termes supplémentaires à discrétiser (termes des dérivées partielles croisés) pour les schémas d'ordre deux en espace et en temps (les schémas "limiteur de pente" et le schéma de Lax-Wendroff).

Pour ne pas alourdir la présentation, nous commentons les résultats de la simulation uniquement pour l'heure de la pleine mer à la frontière ouverte.

##### a.1) Géométrie 1

Cette géométrie génère à l'ouverture du domaine une vitesse de "forte" intensité et également une composante verticale ( $v$ ) au voisinage de la frontière ouverte (fig. 14.b).

Au vu du tableau (14), nous signalons le bon comportement de l'ensemble des schémas vis à vis la préservation de la monotonie, excepté le schéma de Lax-Wendroff. Plus clair sur les figures (fig. 14-a2 et fig. 14-c2), le schéma Upwind et le limiteur Minmod introduisent une diffusion plus importante que celle introduite par les autres limiteurs (fig. 14-d2, fig. 14-e2 et fig. 14-f2). Quant au schéma de Lax-

Wendroff, la figure (14-b2) montre que ce schéma introduit une diffusion numérique plus faible que celle des limiteurs Minmod, Van Leer(2) et C.M. (fig. 14-c2, fig. 14-e2 et fig. 14-f2) et comparable à celle du limiteur Superbee (fig. 14-b2 et fig. 14-d2). Cependant le tableau (14) montre également que ce schéma ne respecte pas le principe du maximum et notamment dans les zones à "forte" vitesse (fig. 14-b1). En effet la dynamique du front côtier peut-être considérée comme un problème aux conditions initiales discontinues (fig. 10), or nous avons vu aux paragraphes (VII.2 et VII.3) que dans ce cas, le schéma de Lax-Wendroff se comporte comme un schéma dépourvu de la propriété TVD.

Concernant la conservation de la masse, le limiteur Superbee et le schéma de Lax-Wendroff présentent les meilleures performances à ce sujet (tableau 14).

### a.2) Géométrie 2

Dans ce cas de figure (vitesses uniformes à l'ouverture du domaine), les schémas "limiteurs de pente" et le schéma Upwind préservent la monotonie (tableau 15). Contrairement au cas précédent, la diffusion numérique introduite par le limiteur Minmod est moins importante que celle introduite par le schéma Upwind (fig. 15-a2 et fig. 15-c2). Le schéma de Lax-Wendroff conserve le maximum, cependant, on observe la perte de la propriété TVD qui se traduit par la création d'un minimum locale (tableau 15 et fig. 15-b2).

Finalement, nous observons une réduction de la diffusion numérique de la part de tous les schémas "limiteur de pente" et plus particulièrement, le limiteur Superbee s'avère plus performant que les autres limiteurs (fig. 15-d2).

## VIII) CONCLUSIONS

Les premiers tests ont consisté en une résolution numérique de la convection pure monodimensionnelle pour différentes conditions initiales (distribution rectangulaire, triangulaire et gaussienne). Cette résolution a été accomplie par les schémas classiques Upwind, Lax-Wendroff et un schéma limiteur de pente du premier ordre en temps et quasi-second ordre en espace (schéma de Van Leer(1)). Ceci a permis de conclure:

- Le schéma Upwind est toujours "fortement" diffusif, mais conserve la propriété TVD tant que la condition CFL est respectée.

- Le schéma de Lax-Wendroff fournit des solutions précises au second ordre quand les conditions initiales sont suffisamment régulières (distribution gaussienne), par contre quand celles-ci sont discontinues (distribution rectangulaire) ou de dérivée non continue (distribution triangulaire), le schéma fournit des solutions catastrophiques en ce qui concerne la propriété TVD. Ceci est dû au concept même de ce schéma qui est basé sur le développement en série de Taylor qui suppose pour sa validité des fonctions assez régulières.

- Pour des "faibles" nombres de courant et quand la condition initiale est une distribution discontinue, le schéma de Van Leer(1) permet de réduire la diffusion numérique, par contre pour des nombres de courant supérieur à 0.5, le schéma perd sa principale caractéristique qui a motivée sa construction (la propriété TVD). La difficulté de ce schéma réside dans le choix de couple des paramètres  $(\gamma, \lambda)$  donnant la "meilleur" solution acceptable.

- Pour des nombres de courant inférieur à 0.5 et quand la condition initiale est une distribution gaussienne ou triangulaire, le schéma de Van Leer(1) devient "overcompressif", ce phénomène a été introduit par la discrétisation temporelle du premier ordre. Ce problème a été donc résolu par l'utilisation d'un schéma de second ordre en temps (Lax-Wendroff) pour le calcul du flux numérique et un limiteur de pente (Minmod, Superbee, Van Leer et C.M.) pour le terme de l'anti-diffusion. L'ensemble des nouveaux schémas construits à partir des "limiteur de pente" donne de très bons résultats tout en conservant la propriété TVD, même pour des nombres de courant bien supérieur à ceux imposés par la méthode de Van Leer(1).

En ce qui concerne les tests bidimensionnels, l'utilisation de la méthode de Lax-Wendroff pour le calcul du flux numérique introduit des termes aux dérivées partielles mixtes, de ce fait les résultats obtenus en monodimensionnel ne peuvent-êtr être étendus en bidimensionnel sans tenir compte de ces termes.

Les tests numériques de l'essai (3) ont montré que la discrétisation en bidimensionnel rend complexe la mise en oeuvre des méthodes (discrétisation des dérivées partielles mixtes) d'une part, et impose une condition de CFL assurant la stabilité plus restrictive qu'en monodimensionnel d'autre part et par conséquent coûteuse en temps de calcul. Une alternative à ce problème a été présentée à travers des tests numériques de l'essai (2) qui utilise une discrétisation en mode splitting. Ce mode de discrétisation est simple à mettre en oeuvre tout en conservant les mêmes conditions

CFL établies en monodimensionnel. En annexe (4.3), nous donnons quelques opérateurs splitting fréquemment utilisés.

Nous concluons en signalant que les méthodes "limiteur de pente" ne convergent pas uniformément (ne convergent pas en  $L^\infty$ ) d'une part et d'autre part elles sont plus coûteuse en temps de calcul comparées aux méthodes classiques (Upwind, Lax-Wendroff). Pour ce dernier inconvénient, un traitement implicite en temps peut-être concluant. Nous soulignons également que le limiteur Superbee s'avère plus efficace que les autres schémas pour réduire la diffusion numérique tout en conservant les propriétés fondamentales que doit posséder un schéma numérique.

## Références Bibliographiques du Chapitre 4

- Boris, J. P. and D. L. Book (1973): Flux-Corrected Transport I, SHASTA: A fluid transport algorithm that work, *J. Comput. Phys.*, Vol 11, pp. 38-69.
- Davis, S. F. (1984): TVD Finite difference schemes an artificial viscosity *Report (NASA), ICASE REPORT N° 84-20.*
- Dulac, E. (1989): Résolution d'une équation de convection-dispersion par le schéma de Van Leer. *Rapport de Maitrise. Inge. Math.* Vetrotex International (Saint Gobain), Chambéry, France, pp 60.
- Forester, C. K. (1977): High order monotonic convective differences schemes *L. Comput. Phys.*, Vol 23, pp. 1-22
- Harten, A.(1983): High resolution schemes for hyperbolic conservation laws *L. Comput. Phys.*, Vol 49, pp. 357-393.
- Leonard, B. P. (1993): Positivity-preserving numerical schemes for multidimensional advection, *NASA Technical Memorandum 106055, ICOMP 93-05.*
- Leveque, R. J. (1990): Numerical Methods for Conservation Laws. *Birkhäuser-Verlag*
- Leveque, R. J. (1996): High resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow. *SIAM J. Num. Anal.* Vol 33, N° 2, pp 627-665.
- Morton, K. W. and P. K. Sweby (1987): A comparaison of flux-limiters differences schemes and characterstic Galerkin methods for shock modelling *J. Comput. Phys.*, Vol 73, pp. 203-230.
- Osher, S. and S. R. Chakravarthy (1984): High resolution schemes and the entropy condition. *SIAM J. Num. Anal.*, Vol 21, N° 5, pp. 955-984.
- Pfertzfel, A. (1987): Sur quelques schémas numériques pour la résolution des écoulements multiphasiques en milieu poreux. *Thèse de doctorat de l'Université Paris 6.* pp 188.

- Roe, P. L. and D. Sidilkover (1992): Optimum positive linear schemes for advection in two and three dimension, SIAM J. Num. Anal., Vol 29, pp. 1542-1568
- Rood, R. B. (1987): Numerical advection algorithms and their role in atmospheric transport and chemistry models, Reviews in Geophysics, Vol 25, pp. 71-100.
- Schultz-Rinne, C. (1993): The Riemann problem for two dimensional gas dynamics and new limiters for high order schemes. PhD Thesis ETH Zurich
- Sweby, P. K. (1984): High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, SIAM J. Num. Anal., Vol 21, N 5, pp. 995-1011.
- Van Leer, B. (1974): Towards the ultimate conservative difference scheme Part 2 : Monotonicity and conservation combined in a second order Scheme J. Comput. Phys., Vol 14, pp. 361-370.
- Vreugdenhil, C. B. (1993): Numerical methods for advection-diffusion problems. "Notes on Numerical Fluids Mechanics", Vol 45, Ed C. B. Vreugdenhil and B. Koren, Vieweg, pp 373.
- Zalesak, S. T. (1979): Fully multidimensional flux corrected transport algorithms for fluids, J. Comput. Phys., Vol 31, pp. 335-362.

## CONCLUSIONS

Au cours de cette étude, nous avons élaboré un modèle numérique tri-dimensionnel de l'hydrodynamisme et des transports sédimentaires associés en Manche Orientale et dans le Sud de la Mer du Nord. Ce modèle permet à partir de la bathymétrie, des caractéristiques granulométriques du substratum, des conditions de marée au large et des débits fluviaux de connaître l'évolution spatio-temporelle de la hauteur d'eau ( $\eta$ ), des courants ( $u, v, w$ ), des variables hydrologiques (température (T), salinité (S)) et des concentrations des particules sédimentaires en suspension.

Le modèle numérique s'inscrit dans la continuité du modèle **MECCA** développé par Hess (1985,1986) au sein de la NOAA. Le jeu d'équations de base a été modifié par l'introduction d'une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente accompagnée d'une expression semi-empirique pour la longueur de mélange et l'adjonction d'une série d'équations d'advection-diffusion des particules solides en suspension dans la masse d'eau.

La résolution du système des équations aux dérivées partielles s'appuie sur un schéma aux différences finies de type (ADI) utilisant la technique de séparation des modes externe et interne pour résoudre les équations hydrodynamiques. Les équations du transport scalaire (S, T,  $C_n$ , K) sont quant à elles résolues par un schéma aux différences finies implicite sur la verticale et explicite pour les gradients horizontaux. Les conditions au voisinage du fond pour les équations d'advection-dispersion des particules sédimentaires en suspension intègre des lois empiriques exprimant soit une concentration de référence, soit un flux.

En terme d'hydrodynamique, le modèle s'avère capable de prédire l'évolution spatio-temporelle de la marée et de reproduire les grands traits de la structure frontale d'origine haline caractérisant la Manche Orientale et communément appelée "fleuve côtier". Les simulations relatives à la dynamique des particules sédimentaires en suspension produisent des résultats cohérents avec les données disponibles dans le secteur. La résolution des équations scalaires (S, T,  $C_n$ , K) a toutefois révélé l'influence néfaste de la diffusion numérique importante attachée à l'approximation

du terme convectif par un schéma du premier ordre (Schéma Upwind). Afin "d'éliminer" ce phénomène indésirable affectant la diffusion physique, une série de schémas localement d'ordre deux de type "limiteur de pente" ou "flux limiter" a été étudiée de manière détaillée (chapitre 4). Des cas tests de conditions initiales extrêmes (discontinues, non dérivables) ont été réalisées pour connaître les limites (propriété TVD) de ces schémas souvent liées à la condition de CFL. Un cas test simulant de manière schématique la structure haline du "fleuve côtier" a montré les améliorations à attendre de ce nouveau type de schéma. Il convient cependant d'ajouter que ces modifications induisent un surcoût de mise en oeuvre informatique auquel on pourra remédier par un traitement de type splitting.

A l'avenir, les améliorations précédentes devraient être intégrées au modèle tri-dimensionnel de la Manche Orientale et du Sud de la Mer du Nord, de même que des maillages (horizontal et vertical) variables basés sur des transformations géométriques adéquates plus à même de résoudre la variabilité spatiale liée aux gradients bathymétriques et aux couches limites latérales et verticales de fond et de surface.



## **ANNEXES DU CHAPITRE 1**

## ANNEXE 1.1

En utilisant des traceurs dans le lac d'antario, Murthy, (1976) calcule les variances correspondant à la distribution de la concentration observée pour les lier à des coefficients de mélange horizontaux. Ces variances sont définies par:

- Suivant la direction Ox:

$$S_x^2(t) = \frac{1}{M(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 C(x, y, t) dx dy \quad (1)$$

- Suivant la direction Oy:

$$S_y^2(t) = \frac{1}{M(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 C(x, y, t) dx dy \quad (2)$$

où:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(x, y, t) dx dy$$

C: est la concentration de traceur observée.

On rappelle que pour l'interprétation des données et des résultats de traçage, il est nécessaire de faire appel à des caractéristiques de la diffusion tels que le temps de la diffusion, la variance du nuage de la substance diffusée et l'échelle de longueur de la diffusion (Stommel, 1949; Okubo, 1971).

En traçant la courbe log-log de la variance  $S^2$  en fonction de la variable temps, Murthy établie la relation empirique suivante:

$$S^2 = at^m \quad (3)$$

où:

- S : Variance suivant ox ou oy
- a : Constante de proportionnalité
- t : Temps de la diffusion
- m : un entier deduit de la courbe expirimentale

A partir de la relation (3), on définit donc la diffusivité par:

$$A_h = \frac{1}{2} \frac{dS^2}{dt} \quad (4)$$

D'ou:

$$A_h = \frac{m \cdot a}{2} t^{m-1} = c \cdot S^n \quad (5)$$

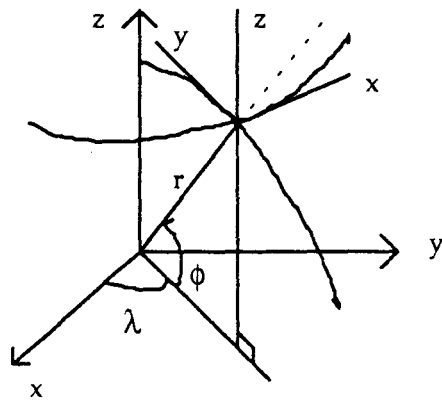
Avec

$$c = \frac{m}{2} a^{1/m} \quad \text{et} \quad n = \frac{2(m-1)}{m}$$

Rappelons que ces résultats sont obtenus pour un lac dont la circulation est généralement générée par le vent, pour les mers à marée Stommel (1949) et Okubo (1971) ont trouvé des coefficients de mélanges plus importants que ceux de Murthy, ces différences des résultats ont été attribuées à la présence des gradients horizontaux de vitesse.

## ANNEXE 1.2

Nous donnons les transformations permettant d'obtenir les coordonnées du vecteur  $2\Omega \wedge \mathbf{u}$  qui apparait dans l'équation du mouvement (Chapitre 1)



En coordonnées cartésiennes on a:  $\Omega = (0, 0, \Omega)$ . D'autre part on:  $\Omega = (0, \Omega \cos(\phi), \Omega \sin(\phi))$

$$\begin{aligned} 2\Omega \wedge \mathbf{u} &= 2\Omega(0, \cos(\phi), \sin(\phi)) \wedge (u, v, w) \\ &= 2\Omega(-v \sin(\phi) + w \cos(\phi), u \sin(\phi), -u \cos(\phi)) \\ &= (-f_0 v + f_1 w, f_0 u, -f_1 u) \end{aligned}$$

Avec:

$$f_0 = 2\Omega \sin(\phi) \quad \text{et} \quad f_1 = 2\Omega \cos(\phi)$$

D'où, les coefficients utilisés dans l'approximation  $\beta$ -plan.

## **ANNEXES DU CHAPITRE 2**

## ANNEXE 2.1

Pour donner une idée de la détermination de la condition de stabilité, nous supposons que l'opérateur  $L_\Delta$  de discrétisation fournit un schéma de (k) niveau en temps et (p) points en espace,  $L_\Delta$  s'écrit:

$$L_\Delta(U) = \sum_{k,p} a_p^{(k)} U_{j+p}^{(n+k)} = 0 \quad (1)$$

où  $k = -k_1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k_2$

$l = -l_1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l_2$

Si l'on suppose que la solution du problème continu est périodique en espace de longueur d'onde (L), alors le développement en série de Fourier donne:

$$u(x, t) = \sum_m a_m(t) e^{i\sigma_m x} \quad (2)$$

où  $i$  est le complexe imaginaire pur ( $i^2 = -1$ ),  $a_m(t)$  est l'amplitude de l'harmonique (m) et  $\sigma_m$  est la pulsation de l'harmonique (m) défini par :

$$\sigma_m = \frac{2\pi m}{L} \quad (2.a)$$

On peut écrire un développement analogue pour la solution numérique, mais avec un nombre limité d'harmonique soit par exemple (N+2) qui désigne aussi le nombre de points du maillage de l'intervalle [0, L], on aura alors:

$$U_j^{(n)} = \sum_{m=0}^{N+1} A_m^{(n)} e^{j\Delta x i \sigma_m} \quad (3)$$

où  $A_m^{(n)}$  est l'amplitude de l'harmonique (m) à l'instant ( $n\Delta t$ )

Dans le cas des schémas linéaires, les différentes harmoniques de la série de Fourier n'interagissent pas entre elles, par conséquent elles peuvent être analysées séparément.

Si l'on note par  $(U_j^{(n)})_m$  l'harmonique (m) à l'instant ( $n\Delta t$ ) et au point ( $j\Delta x$ ), on a alors:

$$(U_j^{(n)})_m = A_m^{(n)} e^{j\Delta x i \sigma_m} \quad \text{et} \quad (U_{j+p}^{(n+k)})_m = A_m^{(n+k)} e^{(j+p)\Delta x i \sigma_m} \quad (4)$$

On désigne par  $G_m$  le coefficient d'amplification de l'harmonique (m) entre les instants discrets consécutifs, on a ainsi:

$$A_m^{(n+1)} = G_m A_m^{(n)} \quad \text{et} \quad A_m^{(n+k)} = G_m^k A_m^{(n)} \quad (5)$$

En écrivant que chaque harmonique vérifie l'équation (1), il vient:

$$\sum_{k,p} a_p^{(k)} A_m^{(n+k)} e^{(j+p)\Delta x i \sigma_m} = 0 \quad (5.a)$$

ou encore:

$$A_m^{(n)} e^{j\Delta x i \sigma_m} \sum_{k,p} a_p^{(k)} G_m^k e^{p\Delta x i \sigma_m} = 0 \quad (5.b)$$

soit:

$$\sum_{k,p} a_p^{(k)} G_m^k e^{p\Delta x i \sigma_m} = 0 \quad (5.c)$$

L'expression (5.c) représente l'équation d'amplification relative à l'harmonique (m). Si une solution  $G_m$  de cette équation admet un module supérieur à l'unité, les erreurs sur cet harmonique vont s'amplifier et le calcul devient instable. La condition de stabilité consiste à qu'aucun de ces coefficients ne soit supérieur à l'unité en module c'est à dire:

$$\max_m |G_m| \leq 1 \quad (6)$$

**Remarque:**

*Il est à remarquer que l'écriture de l'équation qui donne le coefficient d'amplification est toujours immédiate. Il suffit de remplacer dans le schéma discrétisé (1)  $U_{j+p}^{(n+k)}$  par  $G_m^k e^{p\Delta x i \sigma_m}$  et ceci quels que soient les signes de k et p.*

Dans l'annexe (2.2), nous allons voir que dans le cas d'un système d'équations,  $G_m$  serait une matrice (la matrice d'amplification). Dans ce cas la condition de stabilité serait donc portée sur les valeurs propres de cette matrice.

$$|\lambda_{m,q}| \leq 1 \quad \forall q \quad (7)$$

q: désigne la q<sup>eme</sup> valeur propre de la matrice  $G_m$ .

Dans le cas où les équations aux différences finies ne sont pas simple à étudier, les valeurs propres de la matrice d'amplification peuvent être approcher numériquement.

La méthode de Von Neuman a l'avantage de fournir des informations sur l'amortissement et le déphasage de la solution numérique. En effet, le module de  $G_m$  donne l'amortissement et le rapport entre la vitesse de phase numérique et la vitesse de phase théorique est lié à l'argument  $\psi$  de  $G_m$  par la relation (Noyé 1981, Abbott 1993):

$$\frac{U_N}{U} = -\frac{\Psi}{\Delta x \sigma_m Cr} \quad (8)$$

où  $U_N$  est la vitesse de phase numérique,  $U$  est la vitesse de phase théorique et  $Cr$  est le nombre de courant.



## ANNEXE 2.2

Sous la forme matricielle, le schéma résolvant le système d'équations linéarisées de Saint-Venant s'écrit par la relation suivante:

$$U^{n+1} = GU^n$$

Avec  $U=(u,v,h)^T$

Pour le schéma d'Abbott, la matrice d'amplification  $G=(g_{ij})_{i,j=1,2,3}$  est donnée par:

$$g_{11} = \frac{1 - \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s)}{1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s)}$$

$$g_{12} = \frac{-2 \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin(\sigma_1\Delta s) \cdot \sin(\sigma_2\Delta s)}{1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s)}$$

$$g_{13} = \frac{-i \frac{2g\Delta t^2}{2\Delta s} \sin(\sigma_1\Delta s)}{1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s)}$$

$$g_{21} = \frac{-2 \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin(\sigma_1\Delta s) \cdot \sin(\sigma_2\Delta s)}{\left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s) \right] \left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_2\Delta s) \right]}$$

$$g_{22} = \frac{\frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s) \left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_2\Delta s) \right] + \left[ 1 - \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_2\Delta s) \right]}{\left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s) \right] \left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_2\Delta s) \right]}$$

$$g_{23} = \frac{-i \frac{2g\Delta t^2}{2\Delta s} \sin(\sigma_2\Delta s)}{\left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s) \right] \left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_2\Delta s) \right]}$$

$$g_{31} = \frac{-i \frac{2g\Delta t^2}{2\Delta s} \sin(\sigma_1\Delta s)}{\left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s) \right] \left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_2\Delta s) \right]}$$

$$g_{32} = \frac{-i \frac{2g\Delta t^2}{2\Delta s} \sin(\sigma_2\Delta s)}{\left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s) \right] \left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_2\Delta s) \right]}$$

$$g_{33} = \frac{\left[ 1 - \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s) \right] - \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_2\Delta s) \left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s) \right]}{\left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_1\Delta s) \right] \left[ 1 + \frac{gh_0\Delta t^2}{4\Delta s^2} \sin^2(\sigma_2\Delta s) \right]}$$

L'étude des valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice G montre que pour toutes valeurs de  $\Delta s$  et  $\Delta t$ , on a:

$$|\lambda_i| \leq 1$$

Ceci traduit que le schéma d'Abbott satisfait la condition de Von Neuman nécessaire à la stabilité quelles que soient les valeurs de  $\Delta s$  et  $\Delta t$ , d'où le caractère implicite du schéma mentionné précédemment.

## ANNEXE 2.3

### 1) Schéma de Reid et Bodine

on pose:  $p_1 = \sqrt{gh_0} \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin(\sigma_1 \Delta s)$  ;  $p_2 = \sqrt{gh_0} \frac{\Delta t}{\Delta s} \sin(\sigma_2 \Delta s)$

$$b_R = p_1^2 + p_2^2 - 2$$

on a alors:

$$\phi_1 = 1 \quad ; \quad \phi_{2,3} = \frac{-b_R \pm \sqrt{b_R^2 - 4}}{2}$$

\* 1<sup>er</sup> cas

si  $b_R^2 - 4 > 0$  on aura alors:

$$\beta'_1 = 0 \quad ; \quad \beta'_{2,3} \cdot \Delta t = -i \cdot \text{Log} \left| -\frac{b_R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_R}{2}\right)^2 - 1} \right|$$

#### facteur de propagation

$$|T_{2,3}| = \left| -\frac{b_R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_R}{2}\right)^2 - 1} \right|^p \quad ; \quad \text{Arg}(T_{2,3}) = -2\pi$$

#### Remarque:

La condition  $b_R^2 - 4 > 0$  est équivalente à :

$$p_1^2 + p_2^2 > 4 \Leftrightarrow gh_0 \frac{\Delta t^2}{\Delta s^2} [\sin^2(\sigma_1 \Delta s) + \sin^2(\sigma_2 \Delta s)] > 4 \Leftrightarrow \text{instabilité du schéma}$$

\* 2<sup>eme</sup> cas

si  $b_R^2 - 4 \leq 0$  on aura alors:

$$\beta'_1 = 0 \quad ; \quad \beta'_{2,3} \cdot \Delta t = \pm \text{Arc sin} \left( \sqrt{1 - \left(\frac{b_R}{2}\right)^2} \right)$$

### facteur de propagation

$$|T|=1 \quad ; \quad \text{Arg}(T) = 2\pi \left\{ \frac{\text{Arc sin} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{b_R}{2} \right)^2} \right)}{\sqrt{gh_0} \frac{\Delta t}{\Delta s} \sigma \Delta s} - 1 \right\}$$

### 2) Schéma Leendertse et schéma d'Abbott

$$\text{On pose} \quad A_L = \frac{p_1^2}{4} + \frac{p_1^2 p_2^2}{16} + \frac{p_2^2}{4} \quad \text{et} \quad b_L = \frac{2(A_L - 1)}{A_L + 1}$$

On aura alors:

$$\phi_1 = 1 \quad ; \quad \phi_{2,3} = \frac{-b_L \pm \sqrt{b_L - 4}}{2}$$

On montre que l'expression  $b_L^2 - 4$  est toujours négative et on a:

$$\beta'_1 = 0 \quad ; \quad \beta'_{2,3} \cdot \Delta t = \pm \text{Arc sin} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{b_L}{2} \right)^2} \right)$$

### facteur de propagation

$$|T|=1 \quad ; \quad \text{Arg}(T) = 2\pi \left\{ \frac{\text{Arc sin} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{b_L}{2} \right)^2} \right)}{\sqrt{gh_0} \frac{\Delta t}{\Delta s} \sigma \Delta s} - 1 \right\}$$

## ANNEXE 2.4

Pour illustrer les problèmes de stabilité et de propagation, nous analyserons les méthodes de discrétisation centrée et amont pour une équation monodimensionnelle purement convective et ceci pour les schémas explicites et implicites.

Pour chaque méthode de discrétisation le facteur d'amplification sera calculé et seront représentées des figures de l'amortissement et le déphasage en fonction du nombre de points (N) de calcul par longueur d'onde et du nombre de courant.

En supposant le domaine infini et une vitesse  $u$  constante, l'équation de convection pure s'écrit:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

### **I) Différence centrée**

#### *I.1) Schéma explicite*

Le schéma explicite centrée en espace s'obtient en utilisant la relation (3) du chapitre (2) et en discrétisant les dérivées partielles spatiales en arrière dans le temps, la discrétisation de l'équation (1) s'écrit alors:

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} + u \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.a)$$

ou encore:

$$\phi_j^{n+1} - \phi_j^n + \frac{Cr}{2} (\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) = 0 \quad (2.b)$$

où  $Cr$  désigne le nombre de courant ( $Cr = u\Delta t / \Delta x$ )

Une analyse de la consistance par développement de Taylor montre que l'erreur de troncature est donnée par la relation suivante:

$$\epsilon_j = -\frac{1}{2} u^2 \Delta t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (3)$$

Cette erreur (premier ordre dans le temps et deuxième en espace) introduit une diffusion numérique négative:

$$D_{\text{num}} = -\frac{1}{2}u^2\Delta t \quad (3.a)$$

Pour la stabilité, nous utilisons la méthode de Von Neuman et en l'occurrence la relation (5.a) de l'annexe (2.1) donnant l'expression du facteur d'amplification, on trouve alors:

$$G=1-i.Cr.\sin(\sigma\Delta x) \quad (3.b)$$

Il est bien évident que le module de G est supérieur à l'unité pour toutes valeurs de Cr et par conséquent la méthode est inconditionnellement instable (figure. 1.a et 1.b).

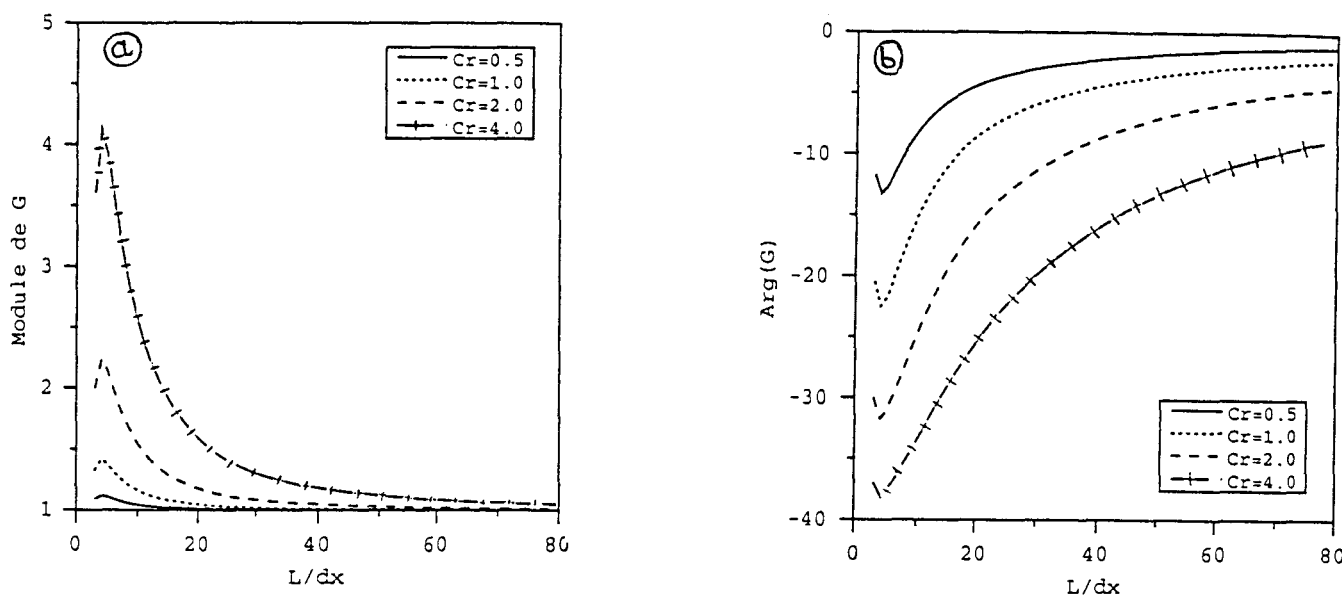


Figure 1: Schéma centré explicite

**Remarque:**

*Cette méthode peut être rendue stable, en ajoutant un terme de diffusion tel que la diffusion totale soit non négative*

**I.2) Schéma implicite**

Ce schéma s'obtient en discrétisant à l'instant courant de calcul (n+1) le gradient spatial et il s'écrit donc:

$$\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n+1} + \frac{Cr}{2}(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j-1}^{n+1}) = 0 \quad (4)$$

Pour ce schéma, l'erreur de troncature est du même ordre en temps et en espace que le schéma explicite, mais la diffusion numérique introduite par ce schéma est strictement positive:

$$D_{\text{num}} = \frac{1}{2} u^2 \Delta t \quad (4.a)$$

De la même manière le coefficient d'amplification s'obtient à partir de la relation (5.a) de l'annexe (2.1) et on trouve:

$$G = \frac{1 - i \cdot Cr \cdot \sin(\sigma \Delta x)}{1 + Cr^2 \cdot \sin^2(\sigma \Delta x)} \quad (4.b)$$

Le module de  $G$  est inférieur ou égal à l'unité, le schéma est donc inconditionnellement stable (figure. 2.a et 2.b). Malgré cette propriété de stabilité le nombre de courant doit rester inférieur à l'unité pour ne pas amortir la solution (figure. 2.a ). En effet, la relation (4) conduit à l'inversion d'une matrice tri-diagonale qui exige que cette matrice soit à diagonale dominante.

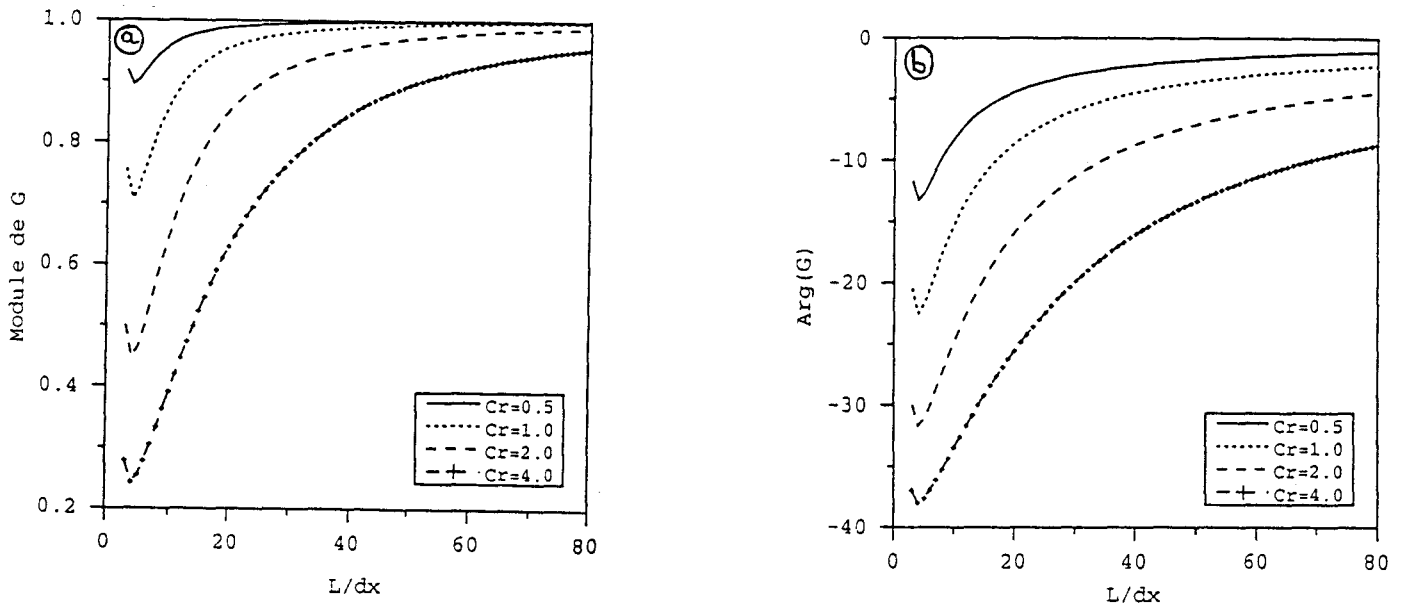


Figure 2: Schéma centré implicite

## II) Différence amont (upwind-upstream)

Dans ce type de discrétisation, la dérivée spatiale est évaluée en arrière si la vitesse est positive et en avant dans le cas contraire. Dans ce qui suit, nous supposons et sans perdre de généralité que la vitesse  $u$  est positive.

## II.1) Schéma explicite

Dans ce cas l'équation aux différences finies est donnée par la relation suivante:

$$\phi_j^{n+1} + (Cr - 1)\phi_j^n - Cr \cdot \phi_{j-1}^n = 0 \quad (5)$$

L'analyse de la consistance montre que ce type de schéma est du premier ordre en temps et en espace, et que la diffusion numérique ainsi introduite est de l'ordre de:

$$D_{\text{num}} = \frac{1}{2} u \Delta x (1 - Cr) \quad (5.a)$$

La méthode de Von Neuman fournit le facteur d'amplification suivant:

$$G = 1 - Cr[1 - \cos(\sigma \Delta x)] - i \cdot Cr \cdot \sin(\sigma \Delta x) \quad (5.b)$$

Les figures 3.a et 3.b montrent que ce schéma est stable si la condition CFL est respectée (Cette condition vérifie aussi la positivité des coefficients).

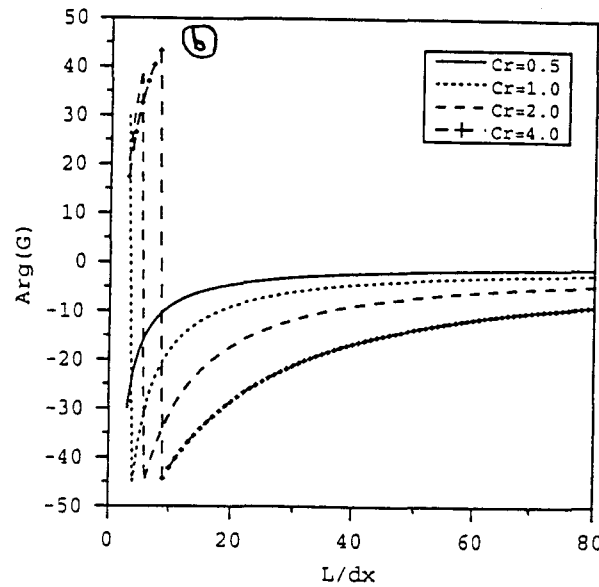
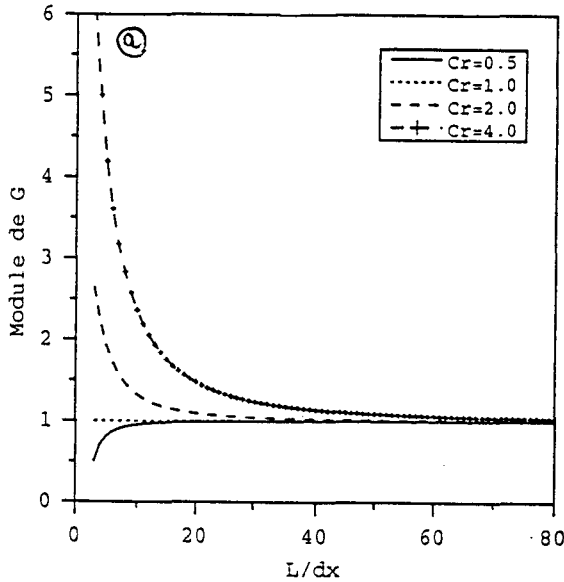


Figure 3: Schéma Upwind explicite

### Remarque:

Si  $Cr$  est égal à l'unité, on obtient exactement la solution analytique.

## II.2) Schéma implicite

Pour un calcul implicite le schéma se présente par:



$$\phi_j^{n+1} - \phi_j^n + Cr(\phi_j^{n+1} - \phi_{j-1}^{n+1}) = 0 \quad (6)$$

L'analyse de l'erreur de troncature montre que le schéma est du premier ordre en temps et en espace et que la diffusion numérique introduite par cette classe de schéma est évaluée par:

$$D_{\text{num}} = \frac{1}{2} u \Delta x (1 + Cr) \quad (6.a)$$

Elle est toujours positive, mais plus importante que dans la cas explicite.

Le facteur d'amplification est donné par l'expression suivant:

$$G = \frac{1 + Cr[1 - \cos(\sigma \Delta x)] - i \cdot Cr \cdot \sin(\sigma \Delta x)}{1 + Cr[1 - \cos(\sigma \Delta x)] + Cr^2 \cdot \sin^2(\sigma \Delta x)} \quad (6.b)$$

Le module de G est toujours inférieur ou égal à l'unité, par conséquent le schéma est inconditionnellement stable. Les figures (4.a et 4.b) illustrent les caractéristiques de propagation relatives à ce schéma.

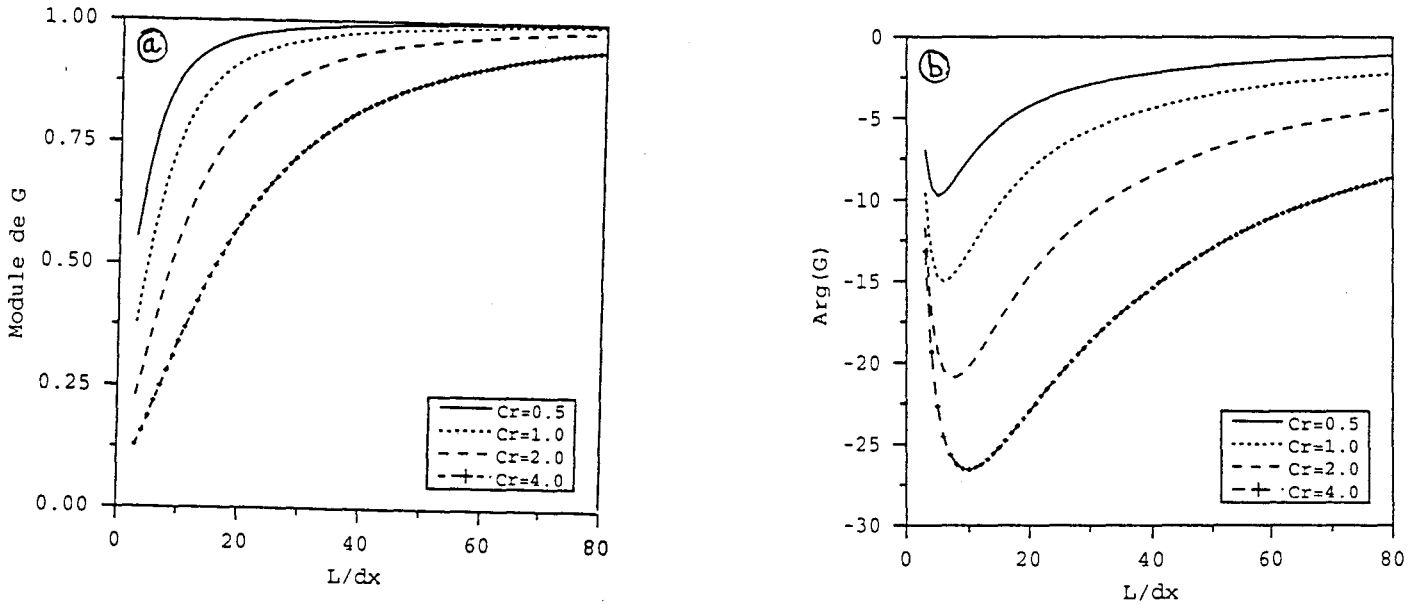


Figure 4: Schéma Upwind implicite

Il existe un autre type de schéma appelé "type hybride" qui consiste à pondérer une discrétisation spatiale du terme advectif à l'instant  $t_n$  et une autre à l'instant  $t_{n+1}$ . Cette classe de schémas est connue sous le nom de " $\theta$ -schéma" qui s'écrit dans le cas d'une discrétisation amont par:

$$\phi_j^{n+1} - \phi_j^n + Cr \left\{ \theta (\phi_j^{n+1} - \phi_{j-1}^{n+1}) + (1 - \theta) (\phi_j^n - \phi_{j-1}^n) \right\} = 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (7)$$

L'évaluation du facteur d'amplification par la relation (5.a) de l'annexe (2.1) montre que la condition de stabilité s'obtient par une condition sur  $\theta$ :

Il est à noter que les schémas de type hybride appliqués à la discrétisation amont sont de second ordre en espace.

### **III) Analyse comparative**

Les figures (1-4), montrent le comportement des paramètres de propagation pour différentes discrétisations spatio-temporelle. Pour des grandes valeurs de (N) et à l'exception des différences centrées explicite (toujours instables), toutes les méthodes étudiées possèdent de bonnes caractéristiques de propagation. Ce constat n'est que la vérification du résultat théorique (Théorème de Lax). En d'autres termes les méthodes étant convergentes et stables, la solution des équations aux différences finies doit donc tendre vers la solution des équations aux dérivées partielles continues, quand  $(\Delta x)$  et  $(\Delta t)$  tendent vers zéro.

Le schéma amont explicite possède "les meilleures" caractéristiques de propagation et notamment pour un nombre de courant égal à l'unité où l'on aboutit à la solution exacte. De point de vue physique, ceci est cohérent avec le transport advectif. En effet, à un moment donné, un point de maillage n'est influencé que par ce que lui a été transporté de l'amont (c'est le principe même des calculs de flux par un schéma amont), contrairement aux schémas de différences centrées qui font intervenir un point de maillage en aval où l'information est inconnue, par conséquent ce type de schéma viole la propriété "transportive" et ne peut fournir la solution exacte que lorsque  $(\Delta x)$  s'approche de zéro.

Les deux méthodes de discrétisation du terme advectif décrites ci-dessus ne sont pas les seuls possibles. Pour diminuer la diffusion numérique et par conséquent l'erreur de troncature, plusieurs méthodes ont été proposées introduisant les notions d'anti-diffusion (Boris et Books, 1973, Zalesak 1979, Smolarkiewicz, 1984,1986) ou de limiteur de pente (Van Leer 1974, Roe 1981, Osher et al. 1984, Sweby 1984 et Bott 1992).

## ANNEXE 2.5

$$C_2 = g\Delta t / (2.\Delta L)$$

$$C_3 = \Delta t / \Delta L$$

$$C_4 = \Delta t / \Delta L^2$$

$$C_5 = \Delta t / (2.\Delta L)$$

$$HH_m = C_2 (H_{n,m} + H_{n,m+1})$$

$$Vc = 0.25 (V_{n,m} + V_{n,m+1} + V_{n-1,m} + V_{n-1,m+1})$$

$$AUV = \beta_a C_3 [\oplus_{n,m} - \oplus_{n-1,m}]$$

$$Q_m = C_5 (1 + Cu) / BX_{n,m}$$

$$Q_p = C_5 (1 - Cu) / BX_{n,m}$$

$$AHUY Y = (1 - \beta_c) C_4 \left[ AHC_{n,m} (UE_{n+1,m} - UE_{n+1,m} + VE_{n,m+1} - VE_{n,m}) \right. \\ \left. - AHC_{n-1,m} (UE_{n,m} - UE_{n-1,m} + VE_{n-1,m+1} - VE_{n-1,m}) \right]$$

$$B_p = C_4 \left( 1 + BX_{n,m+1} / BX_{n,m} \right) AH_{n,m+1}$$

$$B_m = C_4 \left( 1 + BX_{n,m-1} / BX_{n,m} \right) AH_{n,m}$$

## ANNEXE 2.6

Nous rappelons les équations (41.a) et (46) établies dans le chapitre (2) et à partir des quelles, nous calculons à chaque instant les inconnues ( $\eta'$  et  $U''$ ) quand le balayage est effectué suivant la direction ( $ox$ ).

$$U''_{n,m-1}[-BX_{n,m-1}C_1] + \eta'_{n,m}A_{n,m} + U''_{n,m}[BX_{n,m}C_1] = D_{n,m}$$

$$U''_{n,m-1}F_1 + \eta'_{n,m}[-HH_m] + U''_{n,m}F_2 + \eta'_{n,m+1}[HH_m] + U''_{n,m+1}F_3 = F_4$$

Pour le système linéaire à résoudre, ces équations mettent en évidence une structure matricielle tridiagonale par bloc ou pentadiagonale par point. donnée par:

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) & & & & & & \\ & \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) & & & & & \\ & & \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) & & & & \\ & & & \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \\ 0 & F_1 \end{array} \right) & & & \\ & & & & \left( \begin{array}{cc} A_{n,m} & A_2 \\ -HH_m & F_2 \end{array} \right) & & \\ & & & & & \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ HH_m & F_3 \end{array} \right) & \\ & & & & & & \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ & & & & & & \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \eta'_{n,m-1} \\ U''_{n,m-1} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \eta'_{n,m} \\ U''_{n,m} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \eta'_{n,m+1} \\ U''_{n,m+1} \end{array} \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} D_{n,m} \\ F_4 \end{array} \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \left( \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \end{bmatrix}$$

Où:  $A_1 = -BX_{n,m-1}C_1$  et  $A_2 = BX_{n,m}C_1$

## ANNEXE 2.7

$$C_1 = \Delta T / (8 \cdot \Delta \sigma)$$

$$C_2 = \Delta T / (2 \cdot \Delta \sigma^2)$$

$$\bar{H}_{n,m} = (H_{n,m} + H_{n,m+1}) / 2$$

$$G_m = \beta_a C_1 [\tilde{w}_{k-1,n,m} + \tilde{w}_{k-1,n,m+1} + \tilde{w}_{k,n,m} + \tilde{w}_{k,n,m+1}] / \bar{H}_{n,m}$$

$$G_p = \beta_a C_1 [\tilde{w}_{k,n,m} + \tilde{w}_{k,n,m+1} + \tilde{w}_{k+1,n,m} + \tilde{w}_{k+1,n,m+1}] / \bar{H}_{n,m}$$

$$D_m = C_2 [Av_{k-1,n,m} + Av_{k-1,n,m+1}] / \bar{H}_{n,m}^2$$

$$D_p = C_2 [Av_{k,n,m} + Av_{k,n,m+1}] / \bar{H}_{n,m}^2$$

$$DH = \frac{\Delta T}{2\bar{H}_{n,m}} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

## ANNEXE 2.8

l'approximation au second ordre de la condition (75) donne:

$$u_1 - \frac{4}{3}u_2 + \frac{1}{3}u_3 = \frac{2\Delta\sigma H}{3Av} \tau_{sx} = T'' \quad \text{ou encore} \quad u_1 = \frac{4}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 + T'' \quad (1)$$

au niveau  $k=2$  l'expression (71) devient:

$$F_1 u_1 + F_2 u_2 + F_3 u_3 = F_4 \quad (2)$$

Si on substitue la relation (1) dans l'expression (2) on aura:

$$F_1 \left[ \frac{4}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 + T'' \right] + F_2 u_2 + F_3 u_3 = F_4$$

ou encore: 
$$u_2 = \frac{[F_4 - F_1 T'']}{[F_2 + 4F_1/3]} + \frac{[-F_3 + F_1/3]}{[F_2 + 4F_1/3]} u_3 \quad (3)$$

Dans ce cas, les relations analogues à (74.a et 74.b) et définissant la forme récurrente (72.a) s'écrivent alors:

$$FA_1 = T'' \quad \text{et} \quad FB_1 = 4/3$$

et le numérateur de  $FB_2$  est augmenté par le terme  $F_1/3$ , c'est à dire:

$$FB_2 = \frac{[-F_3 + F_1/3]}{[F_2 + 4F_1/3]}$$

*Il est à noter que, avec une approximation en second ordre, la vitesse à la surface doit être calculer par la relation (1) ci-dessus.*

## ANNEXE 2.9

Nous rappelons le terme F englobant les flux horizontaux intervenant dans l'équation de concentration (87):

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x H D_h \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \frac{\partial (B_x [U + \hat{u}H] \phi)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y H D_h \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] - \frac{\partial (B_y [V + \hat{v}H] \phi)}{\partial y}$$

Nous donnons ici uniquement la discrétisation du flux suivant ox, le flux suivant oy s'obtient d'une manière analogue.

On pose:  $HD_h = DH_{n,m}$  ;  $C_3 = \Delta T / (2 \cdot \Delta L^2)$

### TERME DIFFUSIF

$$\Delta T \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( B_x H D_h \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] = C_3 (DH_{n,m} + DH_{n,m+1}) BX_{n,m} (\phi_{k,n,m+1} - \phi_{k,n,m}) \\ - C_3 (DH_{n,m} + DH_{n,m-1}) BX_{n,m-1} (\phi_{k,n,m} - \phi_{k,n,m-1})$$

### TERME CONVECTIF

Pour le terme convectif, on utilise l'approximation suivante:

$$U + \hat{u}H \approx (U_0)_{n,m} + \langle \hat{u}H \rangle$$

Avec:

$$\langle \hat{u}H \rangle = \frac{(\hat{u}_{k-1,n,m} + 2\hat{u}_{k,n,m} + \hat{u}_{k+1,n,m})(H_{n,m} + H_{n,m+1})}{8}$$

Si on pose:  $C_4 = \Delta T / (2 \cdot \Delta L)$  et  $C_5 = \Delta T / (16 \cdot \Delta L)$ , on aura alors:

$$\Delta T \frac{\partial}{\partial x} [B_x (U + \hat{u}H) \phi] = \\ \left[ C_4 BX_{n,m} (U_0)_{n,m} + C_5 BX_{n,m} (\hat{u}_{k-1,n,m} - 2\hat{u}_{k,n,m} + \hat{u}_{k+1,n,m})(H_{n,m} + H_{n,m+1}) \right] (\phi_{k,n,m} + \phi_{k,n,m+1}) \\ - \left[ C_4 BX_{n,m-1} (U_0)_{n,m-1} + C_5 BX_{n,m-1} (\hat{u}_{k-1,n,m-1} - 2\hat{u}_{k,n,m-1} + \hat{u}_{k+1,n,m-1})(H_{n,m} + H_{n,m-1}) \right] (\phi_{k,n,m} + \phi_{k,n,m-1})$$

En regroupant les coefficients des termes  $\phi_{k,n,m+1}$ ;  $\phi_{k,n,m}$ ;  $\phi_{k,n,m-1}$  on aura alors:

$$\Delta T \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ B_x H D_h \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] - \frac{\partial (B_x [U + \hat{u}H]\phi)}{\partial x} \right) = \text{FXMP} \phi_{k,n,m+1} + \text{FXMC} \phi_{k,n,m} + \text{FXMM} \phi_{k,n,m-1}$$

Avec:

$$\begin{aligned} \text{FXMM} = & C_3 B X_{n,m-1} (DH_{n,m} + DH_{n,m-1}) \\ & + \left[ C_4 B X_{n,m-1} (U_0)_{n,m-1} + C_5 B X_{n,m-1} (\hat{u}_{k-1,n,m-1} - 2\hat{u}_{k,n,m-1} + \hat{u}_{k+1,n,m-1}) (H_{n,m} + H_{n,m-1}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{FXMP} = & C_3 B X_{n,m} (DH_{n,m} + DH_{n,m+1}) \\ & + \left[ C_4 B X_{n,m} (U_0)_{n,m} + C_5 B X_{n,m} (\hat{u}_{k-1,n,m} - 2\hat{u}_{k,n,m} + \hat{u}_{k+1,n,m}) (H_{n,m} + H_{n,m+1}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{FXMC} = & -C_3 B X_{n,m} (DH_{n,m} + DH_{n,m+1}) - C_3 B X_{n,m-1} (DH_{n,m} + DH_{n,m-1}) \\ & + \left[ C_4 B X_{n,m} (U_0)_{n,m} + C_5 B X_{n,m} (\hat{u}_{k-1,n,m} - 2\hat{u}_{k,n,m} + \hat{u}_{k+1,n,m}) (H_{n,m} + H_{n,m+1}) \right] \\ & - \left[ C_4 B X_{n,m-1} (U_0)_{n,m-1} + C_5 B X_{n,m-1} (\hat{u}_{k-1,n,m-1} - 2\hat{u}_{k,n,m-1} + \hat{u}_{k+1,n,m-1}) (H_{n,m} + H_{n,m-1}) \right] \end{aligned}$$

D'une manière analogue, en regroupant les coefficients des termes  $\phi_{k,n+1,m}$ ;  $\phi_{k,n,m}$ ;  $\phi_{k,n-1,m}$  on aura alors:

$$\Delta T \left( \frac{\partial}{\partial y} \left[ B_y H D_h \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] - \frac{\partial (B_y [V + \hat{v}H]\phi)}{\partial y} \right) = \text{FYNP} \phi_{k,n+1,m} + \text{FYNC} \phi_{k,n,m} + \text{FYNM} \phi_{k,n-1,m}$$

Avec:

$$\begin{aligned} \text{FYNM} = & C_3 B Y_{n-1,m} (DH_{n-1,m} + DH_{n,m}) \\ & + \left[ C_4 B Y_{n-1,m} (V_0)_{n-1,m} + C_5 B Y_{n,m} (\hat{v}_{k-1,n-1,m} - 2\hat{v}_{k,n-1,m} + \hat{v}_{k+1,n-1,m}) (H_{n,m} + H_{n-1,m}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{FYNP} = & C_3 B Y_{n,m} (DH_{n,m} + DH_{n+1,m}) \\ & + \left[ C_4 B Y_{n,m} (V_0)_{n,m} + C_5 B Y_{n,m} (\hat{v}_{k-1,n,m} - 2\hat{v}_{k,n,m} + \hat{v}_{k+1,n,m}) (H_{n+1,m} + H_{n,m}) \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
FYNC = & -C_3 BY_{n,m} (DH_{n+1,m} + DH_{n,m}) - C_3 BY_{n-1,m} (DH_{n,m} + DH_{n,m-1}) \\
& + \left[ C_4 BY_{n,m} (V_0)_{n,m} + C_5 BY_{n,m} (\hat{v}_{k-1,n,m} - 2\hat{v}_{k,n,m} + \hat{v}_{k+1,n,m}) (H_{n,m} + H_{n,m+1}) \right] \\
& - \left[ C_4 BY_{n-1,m} (V_0)_{n-1,m} + C_5 BY_{n-1,m} (\hat{v}_{k-1,n-1,m} - 2\hat{v}_{k,n-1,m} + \hat{v}_{k+1,n-1,m}) (H_{n,m} + H_{n-1,m}) \right]
\end{aligned}$$

Finalemment le flux horizontal s'exprime

$$\Delta T. F = \phi_{k,n,m+1} FXMP + \phi_{k,n,m-1} FXMM + \phi_{k,n,m} (FXMC + FYNC) + \phi_{k,n+1,m} FYNP + \phi_{k,n-1,m} FYNM$$

## ANNEXE 2.10

$$C_1 = \Delta T / (4 \cdot \Delta \sigma)$$

$$C_2 = \Delta T / \Delta \sigma^2$$

$$HH = A_{n,m} H_{n,m}$$

$$SS = \Delta T A_{n,m} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$GC_m = C_1 A_{n,m} [\tilde{w}_{k-1,n,m} + \tilde{w}_{k,n,m}]$$

$$GC_p = C_1 A_{n,m} [\tilde{w}_{k+1,n,m} + \tilde{w}_{k,n,m}]$$

$$DC_m = C_2 A_{n,m} \frac{Dv_{k,n,m}}{H_{n,m}}$$

$$DC_p = C_2 A_{n,m} \frac{Dv_{k-1,n,m}}{H_{n,m}}$$

$$DH = \frac{\Delta T}{2 \bar{H}_{n,m}} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

## ANNEXE 2.11

On désigne par  $(N)$  le nombre de maille constituant le domaine d'étude et par  $c_j$  la concentration au point  $x_j$ :

$N_1$ : désigne le nombre de points  $x_j$  où la concentration est positive

$N_2$ : désigne le nombre de points  $x_j$  où la concentration est nulle

$N_3$ : désigne le nombre de points  $x_j$  où la concentration est négative

On a alors:  $N=N_1+N_2+N_3$

$$\text{Soit } M_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ c_j > 0}}^N c_j \quad \text{et} \quad M_3 = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ c_j < 0}}^N c_j \right|$$

L'algorithme de filtrage des éventuelles valeurs négatives pouvant apparaître lors de la résolution numérique d'une équation de concentration  $(S,T,C_n)$  est donné par:

1. Calcul de la masse  $M_3$

Si  $M_3$  est égale à zéro                      Alors faire l'étape 5

Sinon faire l'étape 2

2. Calcul du nombre  $N_1$  (nombre de concentration positive)

3. Vérifier le signe des concentrations  $c_j$  pour  $j=1, \dots, N$

Si  $c_j$  est nulle                                      Alors, faire l'étape 4

Si  $c_j$  est strictement positive              Alors, faire:  $c_j := c_j - \frac{M_3}{N_1}$

Si  $c_j$  est strictement négative              Alors, faire:  $c_j := 0$

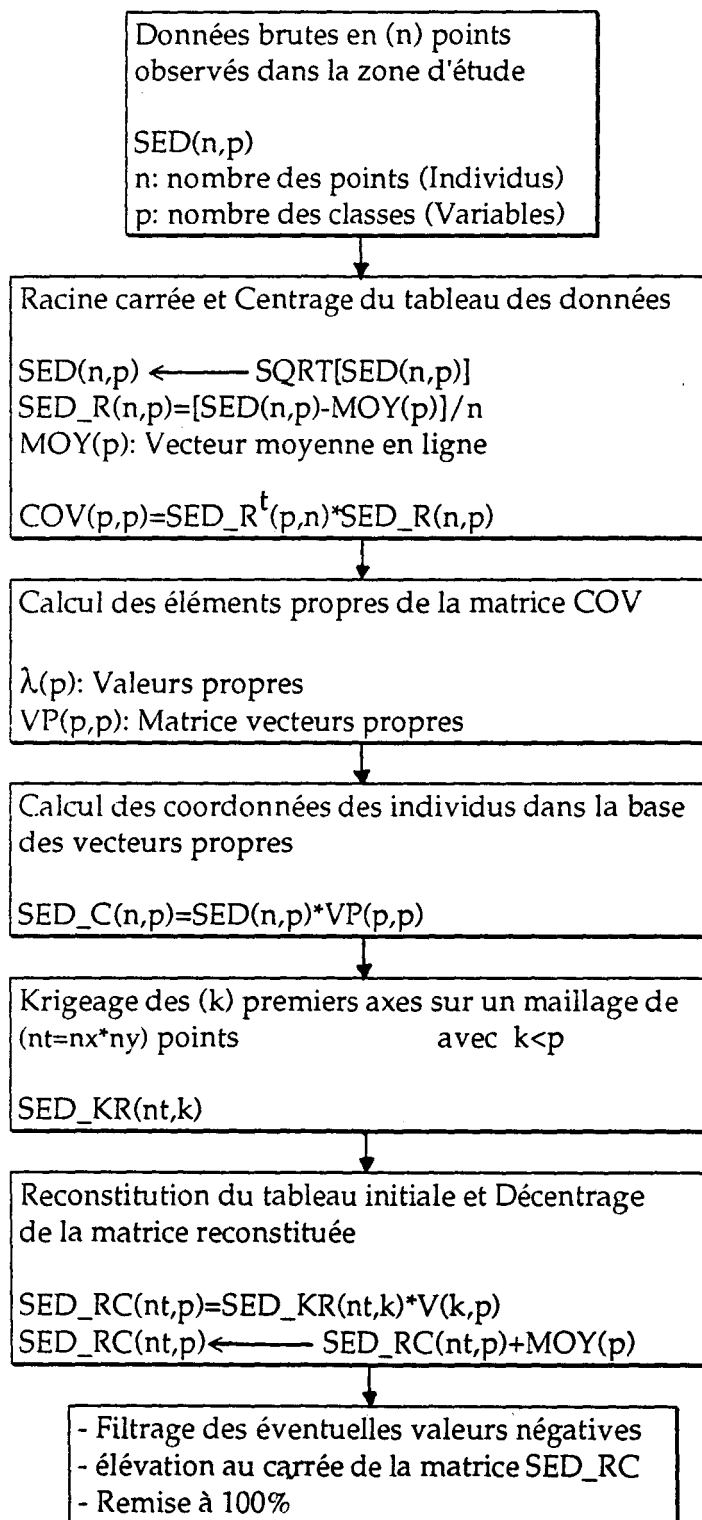
4. Faire l'étape 1

5. STOP

## **ANNEXES DU CHAPITRE 3**

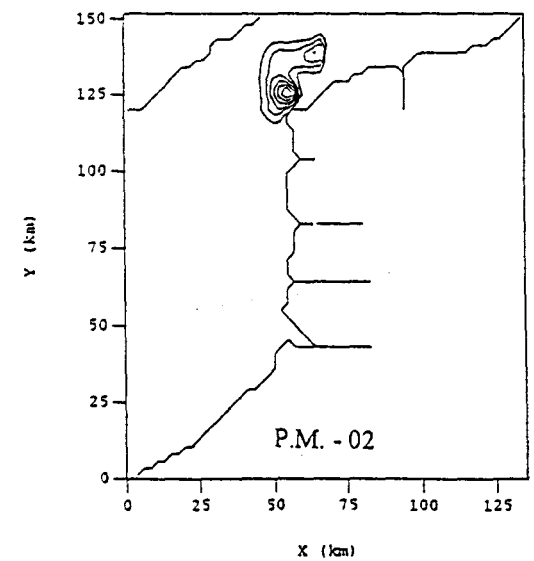
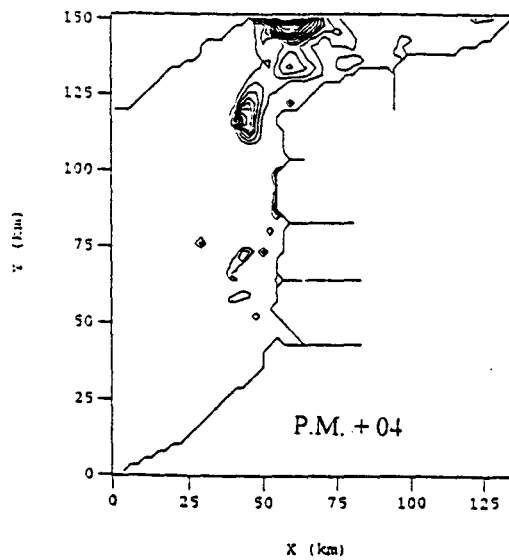
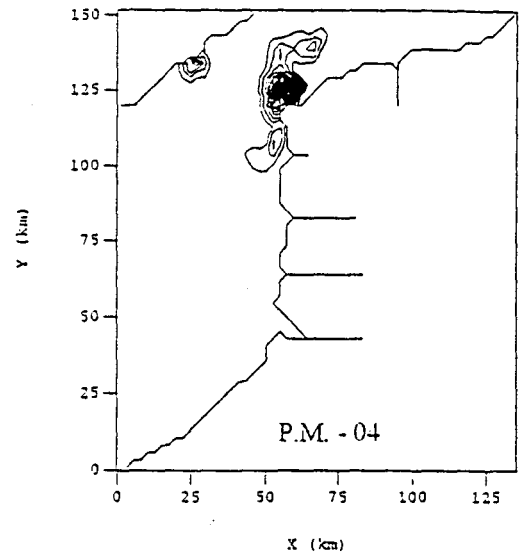
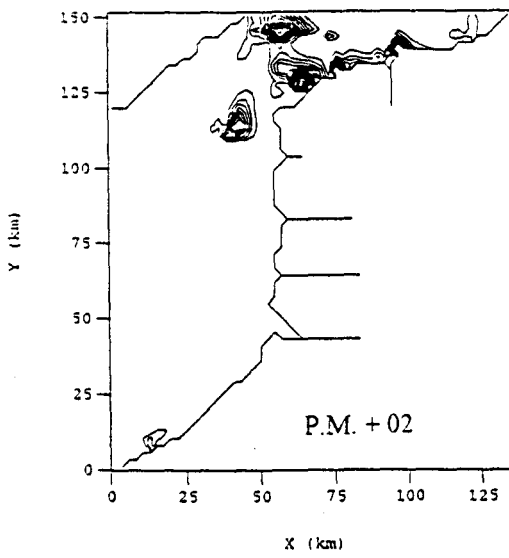
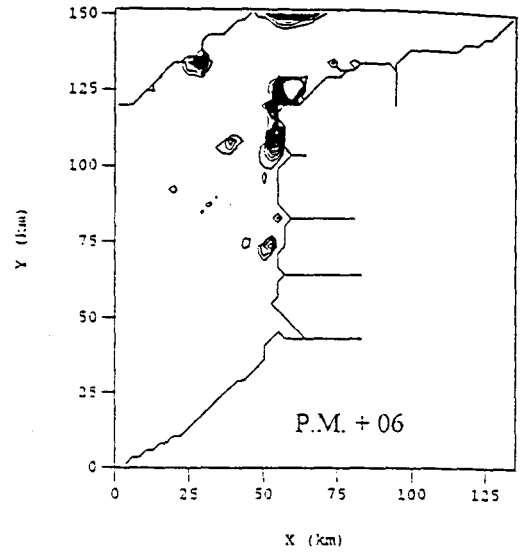
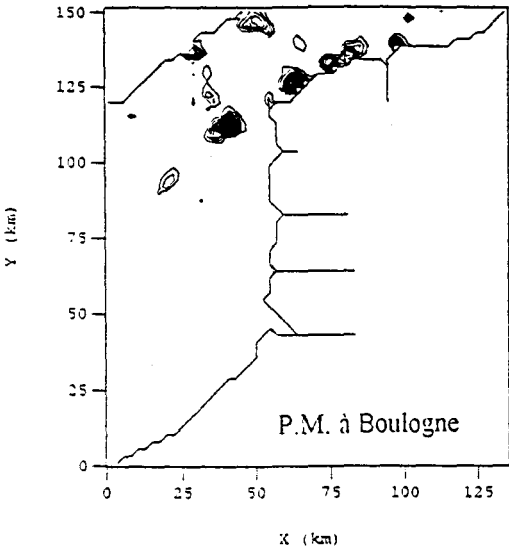
### ANNEXE 3.1

La procédure du krigeage se fait sur les données de la distribution granulométrique représentant les pourcentages de la quantité des sédiments dans chaque classe.



Dans notre application, l'entier ( $k$ ) désigne le nombre d'axes (vecteurs propres) contenant 95% de l'information. Cette procédure peut ainsi être considérée comme un filtrage des observations (filtrage des bruits).

# ANNEXE 3.2



Les figures précédentes représentent la concentration en sédiments près de la surface pour une condition au limite de type Dirichlet (concentration imposée). L'échelle de représentation est propre à chaque figure, le tableau suivant précise la concentration minimale (Cmin), la concentration Maximale (Cmax) et le pas des iso-contours (dc) pour chacune d'entre elle.

	Cmin (mg/l)	Cmax (mg/l)	dc (mg/l)
PM à Boulogne	0.00	0.52	0.0075
PM + 02h	0.00	0.40	0.0200
PM + 04h	0.00	0.12	0.0050
PM + 06h	0.00	1.60	0.0750
PM - 04h	0.00	2.20	0.1000
PM - 02h	0.00	0.35	0.0500



## **ANNEXES DU CHAPITRE 4**

## ANNEXE 4.1

On reprend ici l'expression apparue dans la démonstration du théorème de Harten:

$$\sum_{i=0}^{N_X-1} |c_{i+1}^{n+1} - c_i^{n+1}| \leq \sum_{i=0}^{N_X-1} (1 - C_{i+1/2}^n - D_{i+1/2}^n) |c_{i+1}^n - c_i^n| + \sum_{i=0}^{N_X-1} C_{i-1/2}^n |c_i^n - c_{i-1}^n| + \sum_{i=0}^{N_X-1} D_{i+3/2}^n |c_{i+2}^n - c_{i+1}^n|$$

Si l'on pose:  $j = i-1$  et  $c_{-1} = c_0$ , la deuxième somme dans le terme de droite devient:

$$\sum_{i=0}^{N_X-1} C_{i-1/2}^n |c_i^n - c_{i-1}^n| = \sum_{j=-1}^{N_X-2} C_{j+1/2}^n |c_{j+1}^n - c_j^n| = \sum_{j=0}^{N_X-2} C_{j+1/2}^n |c_{j+1}^n - c_j^n|$$

et avec les hypothèses du théorème de Harten ( $C_{j+1/2}^n \geq 0$ ) on aura donc

$$\sum_{j=0}^{N_X-2} C_{j+1/2}^n |c_{j+1}^n - c_j^n| \leq \sum_{j=0}^{N_X-1} C_{j+1/2}^n |c_{j+1}^n - c_j^n| \quad (1)$$

De même si l'on pose  $j = i+1$  et  $c_{N_X+1} = c_{N_X}$ , la troisième somme dans le terme de droite devient:

$$\sum_{i=0}^{N_X-1} D_{i+3/2}^n |c_{i+2}^n - c_{i+1}^n| = \sum_{j=1}^{N_X} D_{j+1/2}^n |c_{j+1}^n - c_j^n| = \sum_{j=1}^{N_X-1} D_{j+1/2}^n |c_{j+1}^n - c_j^n|$$

et avec les hypothèses du théorème ( $D_{j+1/2}^n \geq 0$ ) on aura donc

$$\sum_{j=1}^{N_X-1} D_{j+1/2}^n |c_{j+1}^n - c_j^n| \leq \sum_{j=0}^{N_X-1} D_{j+1/2}^n |c_{j+1}^n - c_j^n| \quad (2)$$

Les relations (1 et 2) permettent d'écrire la relation (R1) qui figure dans la démonstration du théorème de Harten.

## ANNEXE 4.2

### A) Consistance du schéma de Van Leer (1)

Pour rappeler la notion de la consistance d'un schéma d'approximation, nous notons d'une façon symbolique le problème à résoudre par:

$$\begin{cases} L(u) = g & \text{sur } \Omega \\ B(u) = h & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où,  $L$  et  $B$  sont des opérateurs des dérivées partielles,  $u$  est la variable inconnue du problème,  $\Omega$  est le domaine de l'intégration et  $\Gamma$  sa frontière.

Le problème mis sous forme discrétisé sera noté par:

$$\begin{cases} L_{\Delta}(u) = g & \text{sur } \Omega_{\Delta} \\ B_{\Delta}(u) = h & \text{sur } \Gamma_{\Delta} \end{cases} \quad (2)$$

où:

$\Delta$  et le pas de la discrétisation.

$L_{\Delta}$  et  $B_{\Delta}$  sont les opérateurs discrets.

$\Omega_{\Delta}$  et  $\Gamma_{\Delta}$  sont respectivement le domaine et sa frontière discrets.

On appelle erreur de troncature (ou erreur de discrétisation), l'expression définit par:

$$R_{\Delta}(u) = L_{\Delta}(u) - L(u) \quad (3)$$

L'approximation de  $L$  par  $L_{\Delta}$  est dite consistante, si l'erreur de troncature  $R_{\Delta}$  tend vers zéro lorsque tous les pas de discrétisation tendent eux-mêmes vers zéro ( $\Delta \rightarrow 0$ ).

Pour étudier la consistance de la méthode de Van Leer(1), nous considérons l'équation de transport scalaire dans un champ de vitesse  $U_0$  constante et positive donnée par:

$$\begin{cases} L(c) = \frac{\partial c}{\partial t} + U_0 \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \\ c(x,0) = c^0(x) \end{cases} \quad (4)$$

Les pas de discrétisation spatiale et temporel sont noté respectivement (h) et ( $\Delta t$ ).

Si l'on utilise les pentes non limitées suivantes:

$$P_i^n = \frac{c_{i+1}^n - c_{i-1}^n}{2h} \quad ; \quad P_{i-1}^n = \frac{c_i^n - c_{i-2}^n}{2h}$$

On obtient:

$$L_{h,\Delta t}(c) = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} + \frac{U_0}{h} \left[ c_i^n - c_{i-1}^n + \frac{1}{4}(c_{i+1}^n - c_{i-1}^n) - \frac{1}{4}(c_i^n - c_{i-2}^n) \right] \quad (5)$$

Si l'on effectue un développement en série de Taylor de la solution (c) au voisinage des points  $(i-1)h$ ,  $ih$  et  $(i+1)h$ , ainsi par rapport au temps à l'instant  $t_{n+1}$  et si l'on suppose de plus que (c) est de classe  $C^3$  on a alors:

$$c_{i+1}^n = c_i^n + h \frac{\partial c}{\partial x}(ih, n\Delta t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(ih, n\Delta t) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_1)$$

$$c_{i-1}^n = c_i^n - h \frac{\partial c}{\partial x}(ih, n\Delta t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(ih, n\Delta t) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_2)$$

$$c_{i-2}^n = c_i^n - 2h \frac{\partial c}{\partial x}(ih, n\Delta t) + 2h^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(ih, n\Delta t) - \frac{4h^3}{3} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_3)$$

$$c_i^{n+1} = c_i^n + \Delta t \frac{\partial c}{\partial t}(ih, n\Delta t) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\epsilon_4)$$

De ces expressions on déduit une approximation des dérivées partielles  $\frac{\partial c}{\partial x}(ih, n\Delta t)$  et

$\frac{\partial c}{\partial t}(ih, n\Delta t)$  donnée par:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(ih, n\Delta t) \cong \frac{1}{h} \left[ c_i^n - c_{i-1}^n + \frac{1}{4}(c_{i+1}^n - c_{i-1}^n) - \frac{1}{4}(c_i^n - c_{i-2}^n) \right] + h^2 \left[ -\frac{1}{6} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_2) - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_1) + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_2) + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_3) \right]$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}(ih, n\Delta t) \cong \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\epsilon_4)$$

Si nous remplaçons ces approximations dans l'expression (4), on aura donc:

$$R_{h,\Delta t}(c) = L_{h,\Delta t}(c) - L(c) \equiv \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\epsilon_4) - U_0 h^2 \left[ -\frac{1}{6} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_2) - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_1) + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_2) + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3}(\epsilon_3) \right]$$

D'où:

$$\|R_{h,\Delta t}\|_{\infty} \leq \frac{\Delta t}{2} \left\| \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial t^2} \right\|_{\infty} + \frac{7}{12} U_0 h^2 \left\| \frac{\partial^3 \bar{c}}{\partial x^3} \right\|_{\infty} \quad (6)$$

Ce qui montre qu'un schéma du Van Leer(1) est du premier ordre en temps et d'ordre deux en espace, sauf peut être aux points de discontinuités de la solution (c). Le schéma est donc quasi d'ordre deux en espace.

Dans l'expression (6), si (h) et ( $\Delta t$ ) tendent vers zéro, on a  $R_{h,\Delta t} \rightarrow 0$ . Par conséquent, le schéma de Van Leer(1) est consistant.

## B) Stabilité

si l'on pose:  $\lambda = U_0 \frac{\Delta t}{h}$ . Le schéma s'écrit alors:

$$c_i^{n+1} = c_i^n - \lambda \left[ c_i^n + P_i^n \frac{h}{2} - c_{i-1}^n - P_{i-1}^n \frac{h}{2} \right] \quad \forall i \quad (7)$$

Si de plus les pentes  $P_i^n$  et  $P_{i-1}^n$  sont limitées on peut écrire:

$$\exists \alpha_i \in [0,1] \quad \text{tel que:} \quad P_i^n = \alpha_i \frac{\gamma(c_i^n - c_{i-1}^n)}{h}$$

$$\exists \alpha_{i-1} \in [0,1] \quad \text{tel que:} \quad P_{i-1}^n = \alpha_{i-1} \frac{\gamma(c_i^n - c_{i-1}^n)}{h}$$

On a alors:

$$c_i^{n+1} = \left( 1 - \lambda - \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_i + \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_{i-1} \right) c_i^n + \left( \lambda + \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_i - \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_{i-1} \right) c_{i-1}^n$$

Si l'on pose:

$$\eta = \lambda + \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_i - \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_{i-1} \quad \text{on a:} \quad c_i^{n+1} = (1 - \eta) c_i^n + \eta c_{i-1}^n$$

La solution  $c_i^{n+1}$  peut être considérée comme le barycentre de  $c_i^n$  et  $c_{i-1}^n$ , si:  $\eta \geq 0$  et  $1 - \eta \geq 0$ .

Il est bien évident que  $\eta \geq 0$ . Si l'on suppose de plus que  $1 - \eta \geq 0$  on a alors:

$$\forall i, n \quad \|c_i^{n+1}\| \leq (1 - \eta) \|c_i^n\| + \eta \|c_i^n\| = \|c_i^n\| \quad \text{d'où} \quad \forall n \quad \|c^{n+1}\|_{\infty} \leq \|c^n\|_{\infty}$$

Par conséquent le schéma est stable sous la contrainte  $1 - \lambda \left[ 1 + \frac{\gamma}{2} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \right] \geq 0$  qui n'est autre que la condition CFL:

$$\lambda \leq \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{2} (\alpha_i - \alpha_{i-1})}$$

On constate que la stabilité dépend de  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i-1}$  que l'on ne connaît pas à priori, par conséquent on se contente de donner une condition suffisante de stabilité ( $\alpha_i=1, \alpha_{i-1}=0$  ou  $\alpha_i=0, \alpha_{i-1}=1$ ). Ainsi on obtient:

$$\lambda \leq \frac{2}{2 + \gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma=1 \text{ ou } \gamma=2$$

### C) Convergence

Les schémas utilisés dans cette étude sont des schémas linéaires, la convergence s'obtient donc aisément, en appliquant le théorème d'équivalence de Lax (voir chapitre 2).

#### Remarque:

Si  $U_0$  est négative, le schéma définie par la relation (7) devient alors:

$$c_i^{n+1} = c_i^n - \left[ c_{i+1}^n + p_{i+1}^n \frac{h}{2} - c_i^n - p_i^n \frac{h}{2} \right] \quad \forall i$$

$$c_i^{n+1} = \left( 1 + \lambda - \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_{i+1} + \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_i \right) c_i^n - \left( \lambda - \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_{i+1} + \frac{\lambda}{2} \gamma \alpha_i \right) c_{i+1}^n$$

Si l'on prend par exemple  $\gamma=1$  et on pose  $\lambda = -|U_0| \frac{\Delta t}{h}$ , on a alors:

$$-\lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha_{i+1} + \frac{1}{2} \alpha_i \right) = \frac{|U_0| \Delta t}{h} \left[ 1 - \frac{1}{2} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \right] \geq 0$$

et

$$1 + \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha_{i+1} + \frac{1}{2} \alpha_i \right) = 1 - \frac{|U_0| \Delta t}{h} \left[ 1 + \frac{1}{2} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \right]$$

On constate que la condition de stabilité est la même que dans le cas  $U_0 > 0$

## ANNEXE 4.3

En deux dimensions, l'équation d'une loi de conservation s'écrit par:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial f(c)}{\partial x} + \frac{\partial g(c)}{\partial y} = 0$$

### 1) Méthodes de type "Splitting".

De même que les méthodes précédemment décrites, les techniques de "splitting" consiste à combler les défauts de la discrétisation temporelle du schéma d'Euler explicite par une discrétisation spatiale du terme  $O(\Delta t)$  de l'équation équivalente. Elles ont donc également pour origine le schéma de Lax-Wendroff, mais cette fois ci, il s'agit de n'utiliser comme opérateurs de discrétisation que les opérateurs  $L_x^{\Delta t}$  et  $L_y^{\Delta t}$ , c'est à dire:

$$L_x^{\Delta t}(c_{i,j}) = \frac{h_{i+1/2,j}^{LW} - h_{i-1/2,j}^{LW}}{\Delta x}$$

$$L_y^{\Delta t}(c_{i,j}) = \frac{k_{i,j+1/2}^{LW} - k_{i,j-1/2}^{LW}}{\Delta y}$$

Où  $h^{LW}$  (resp.  $k^{LW}$ ) est un flux numérique associé à  $f$  (resp.  $g$ ) de type Lax-Wendroff. L'indice supérieur ( $\Delta t$ ) signale la dépendance de l'opérateur vis-à-vis du pas de temps.

Strang propose les schémas suivants:

$$i) \quad c_{i,j}^n = (I - \Delta t L_x^{\Delta t})(I - \Delta t L_y^{\Delta t})c_{i,j}^n$$

$$ii) \quad c_{i,j}^n = \left( I - \frac{\Delta t}{2} L_x^{\Delta t/2} \right) (I - \Delta t L_y^{\Delta t}) \left( I - \frac{\Delta t}{2} L_x^{\Delta t/2} \right) c_{i,j}^n$$

$$iii) \quad c_{i,j}^n = \frac{1}{2} \left[ \left( I - \frac{\Delta t}{2} L_x^{\Delta t/2} \right) \left( I - \frac{\Delta t}{2} L_y^{\Delta t/2} \right) + \left( I - \frac{\Delta t}{2} L_y^{\Delta t/2} \right) \left( I - \frac{\Delta t}{2} L_x^{\Delta t/2} \right) \right] c_{i,j}^n$$

Les deux derniers schémas ont l'avantage d'être du second ordre en temps et en espace contrairement au splitting le plus naturel  $(I - \Delta t L_x^{\Delta t})(I - \Delta t L_y^{\Delta t})$ .

Le schéma (iii) possède la qualité d'être symétrique par rapport aux deux dimensions d'espace.

Au point de vu stabilité, ces trois schémas sont stable sous les conditions CFL unidimensionnelles Cahouet et al (1988).

## 2) Méthodes de type Runge Kutta

Ce type de schéma permet d'atteindre le second ordre en temps par une discrétisation temporelle plus fine d'une part et d'autre part il permet d'appliquer directement la discrétisation spatiale unidimensionnelle aux problèmes multidimensionnels puisque dans ce cas il n'y a pas interaction, lors de la discrétisation, entre les deux opérateurs (spatial et temporel).

Soit en deux dimensions:

$$c_{i,j}^* = c_{i,j}^n - \Delta t [L_x(c_{i,j}^n) + L_y(c_{i,j}^n)]$$

$$c_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}c_{i,j}^* + \frac{1}{2}c_{i,j}^n - \frac{1}{2}[L_x(c_{i,j}^*) + L_y(c_{i,j}^*)]$$

Où  $L_x$  et  $L_y$  sont les opérateurs spatiaux discrets de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial g}{\partial y}$

Ces méthodes ont pour avantages:

- 1) Généralisation possible à des équations plus complexe contenant des termes sources, de diffusion, etc., discrétisés au second ordre en espace.
- 2) On dispose des résultats de stabilité  $L^\infty$  en multidimensionnel, ainsi que de résultats de stabilité TVD en unidimensionnel. Villa (1986).
- 3) Elles sont applicables quelle que soit la dimension de l'espace.
- 4) Ces schémas sont purement temporels et ne compliquent pas la discrétisation spatiale.

Ce type de schémas est toutefois deux fois plus cher en temps de calcul que le schéma d'Euler explicite, ceci quelque soit la dimension de l'espace.



## **FIGURES DU CHAPITRE 1**

## **FIGURES DU CHAPITRE 2**

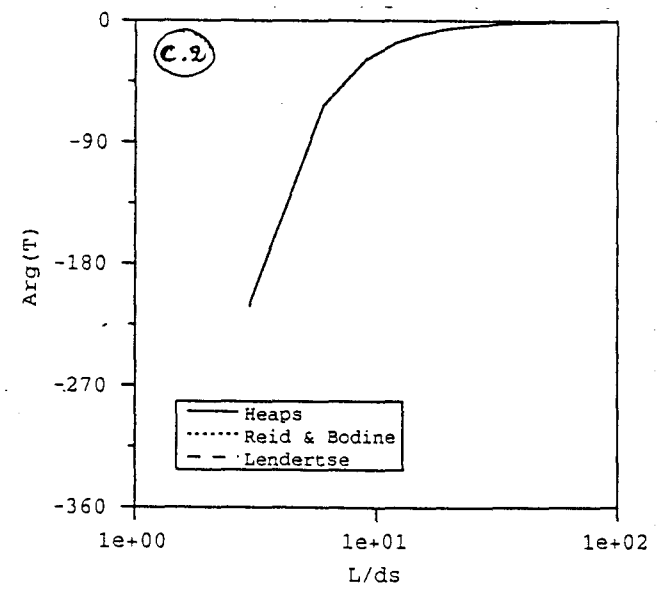
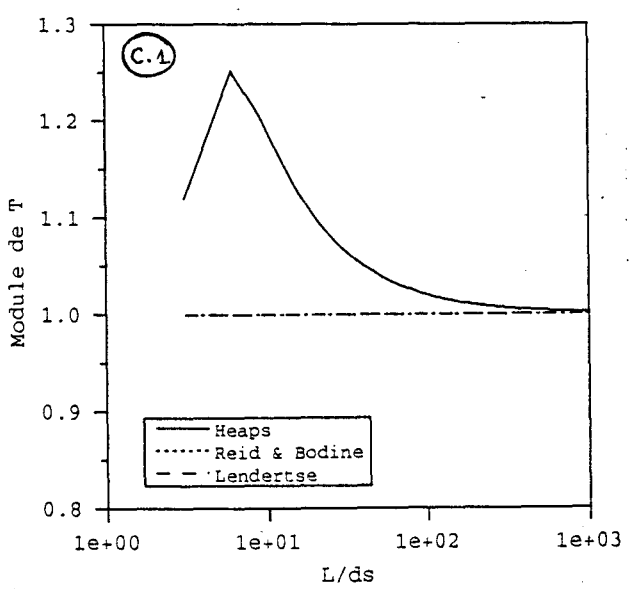
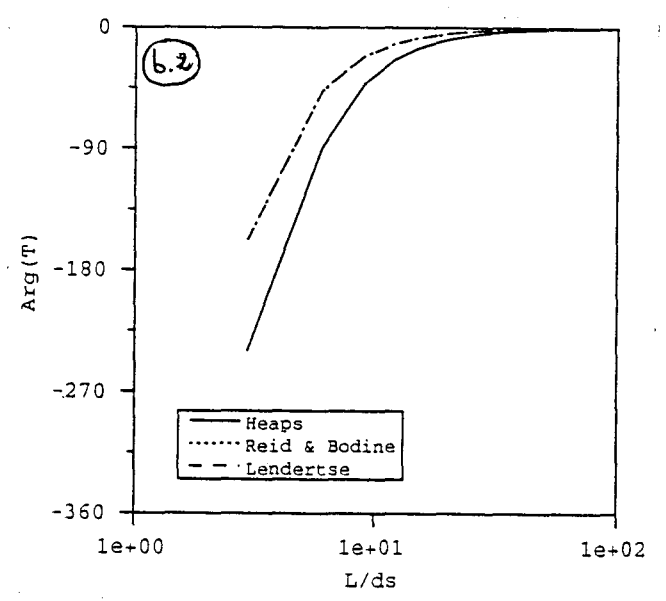
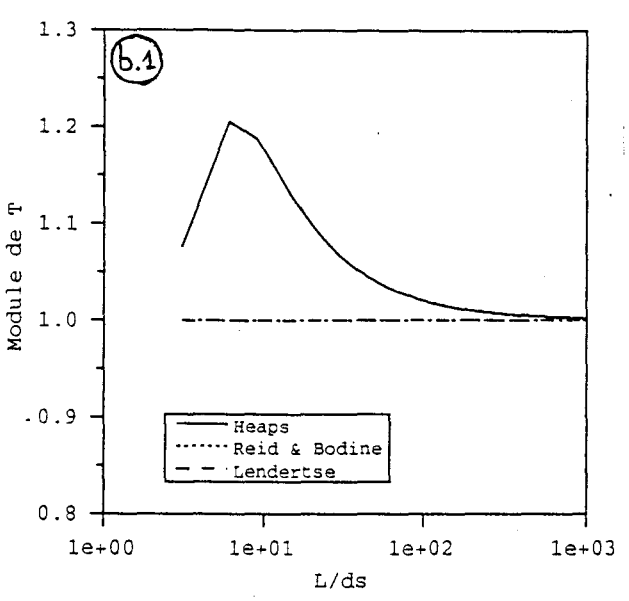
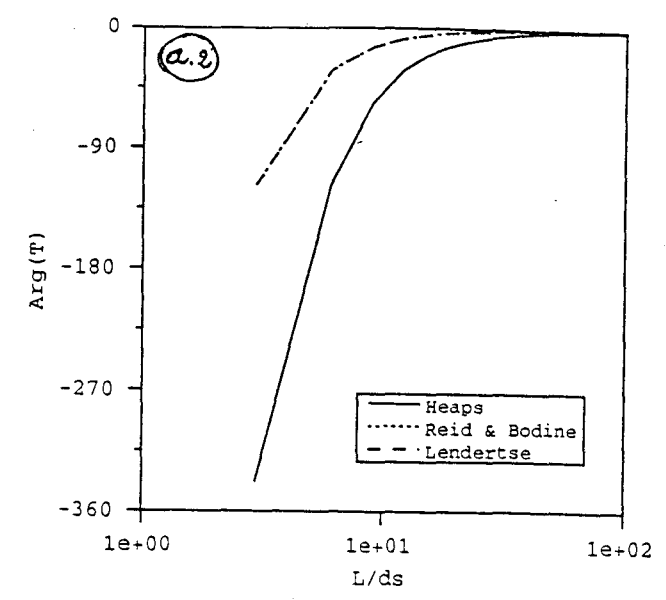
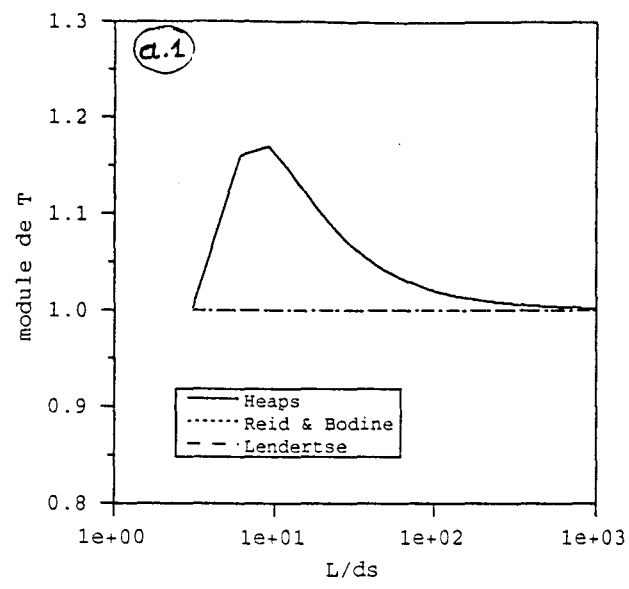


Figure 4: Sensibilité du coefficient de propagation T

- a)  $Cr=0.1 \quad \gamma=45^\circ$
- b)  $Cr=0.1 \quad \gamma=22.5^\circ$
- c)  $Cr=0.1 \quad \gamma=0^\circ$

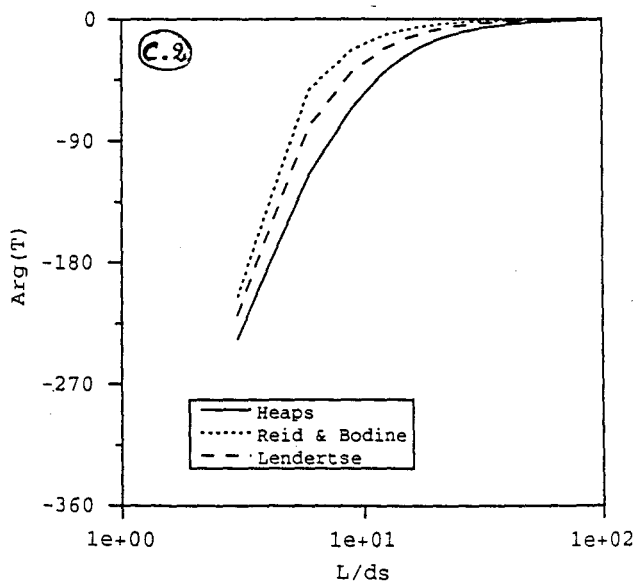
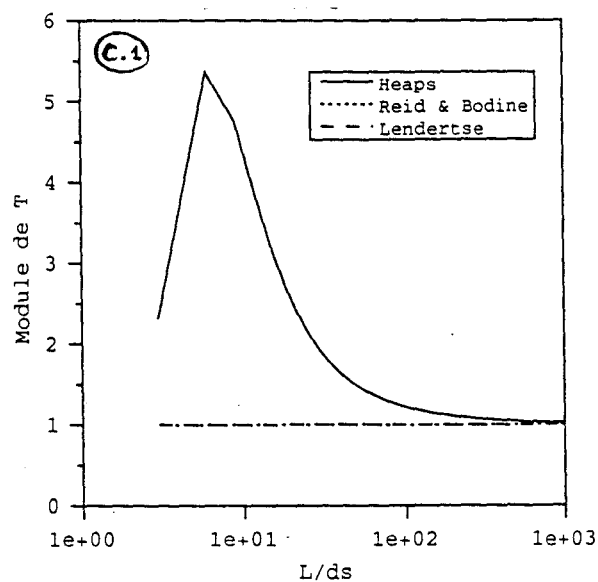
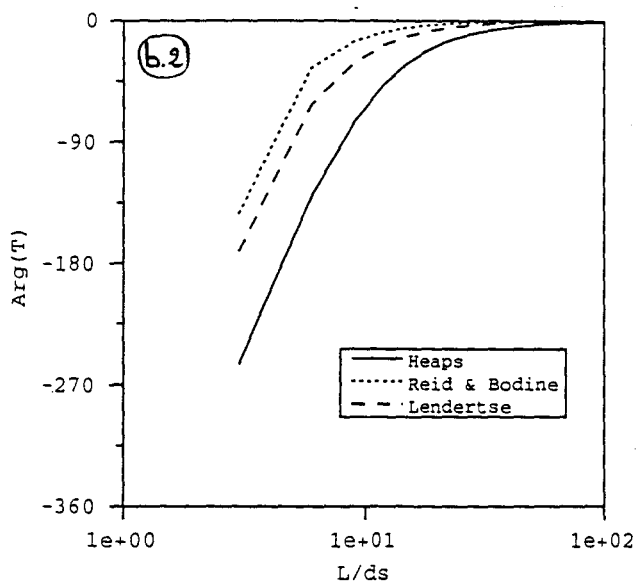
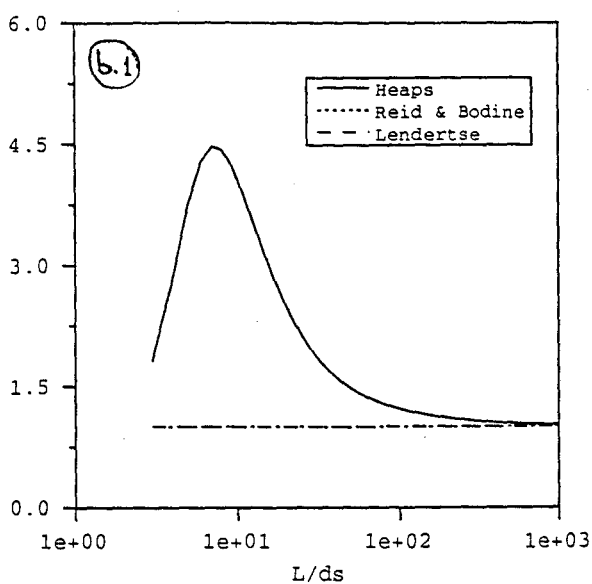
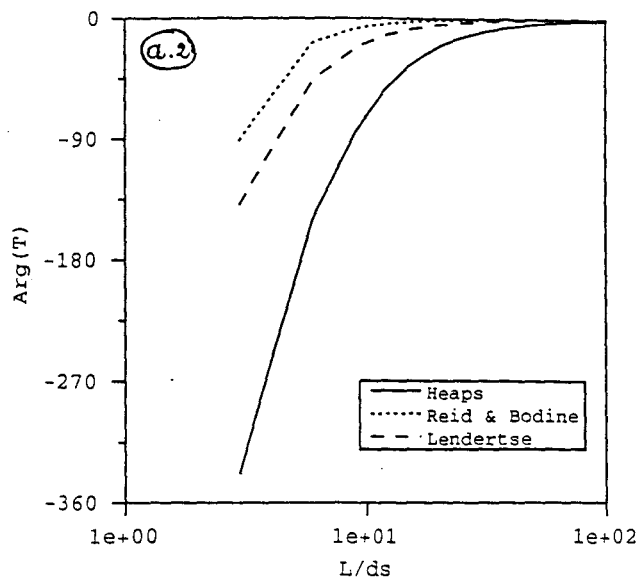
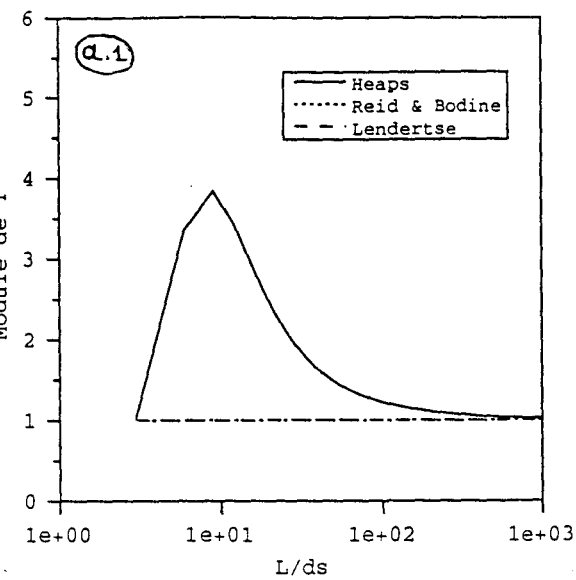


Figure 5: Sensibilité du coefficient de propagation T

- a)  $Cr=1.0 \quad \gamma=45^\circ$
- b)  $Cr=1.0 \quad \gamma=22.5^\circ$
- c)  $Cr=1.0 \quad \gamma=0^\circ$

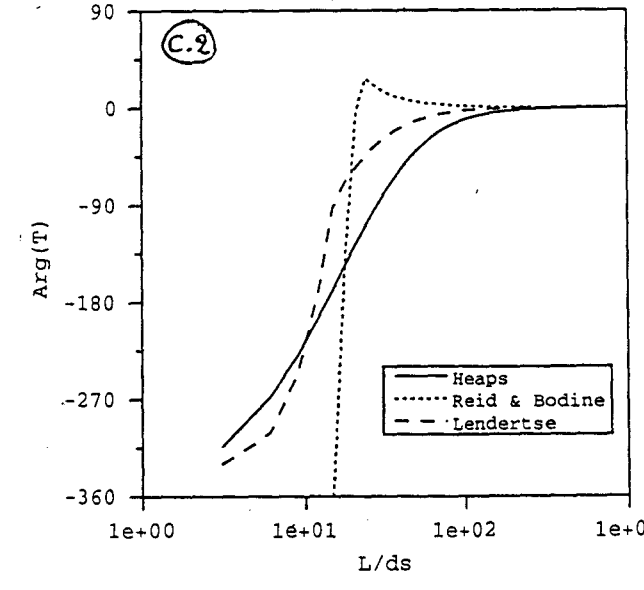
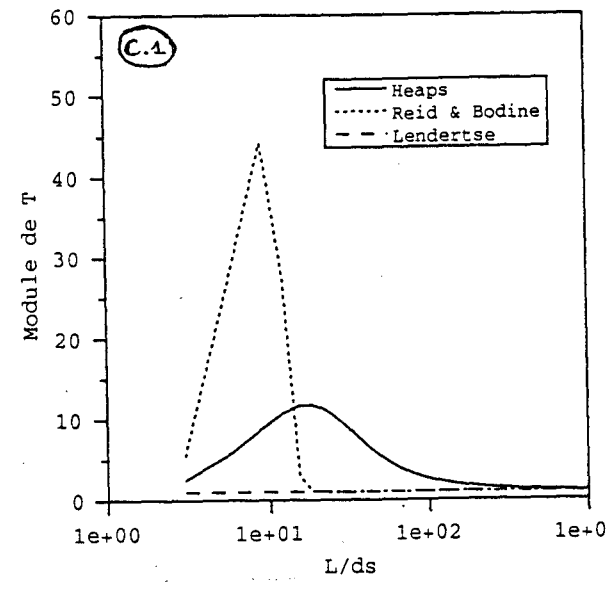
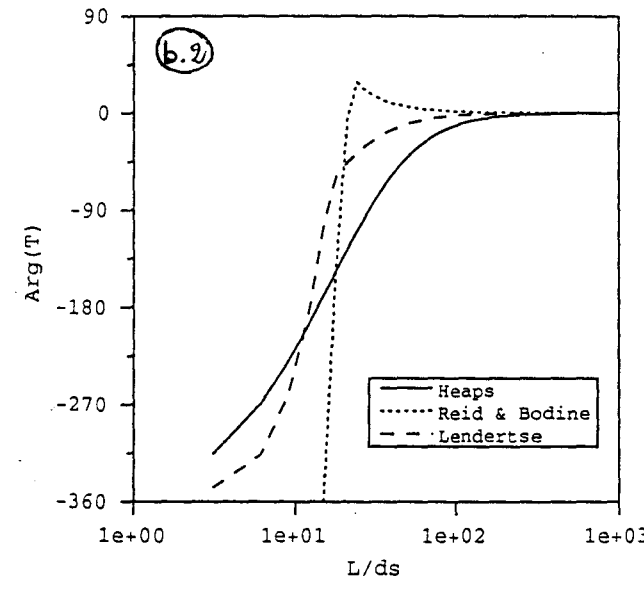
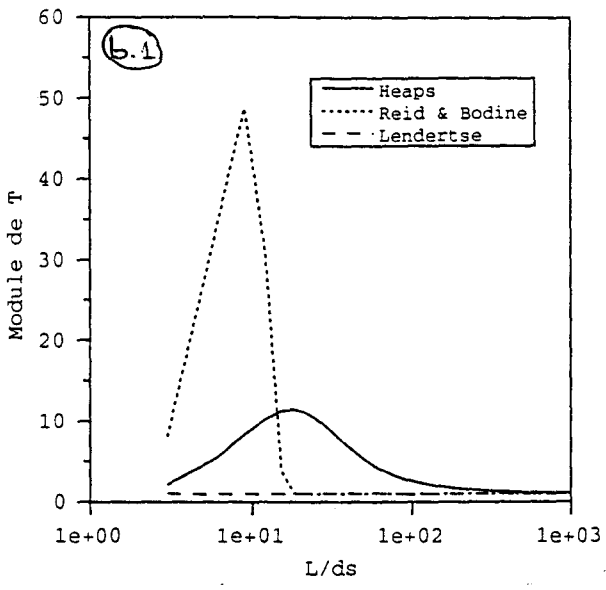
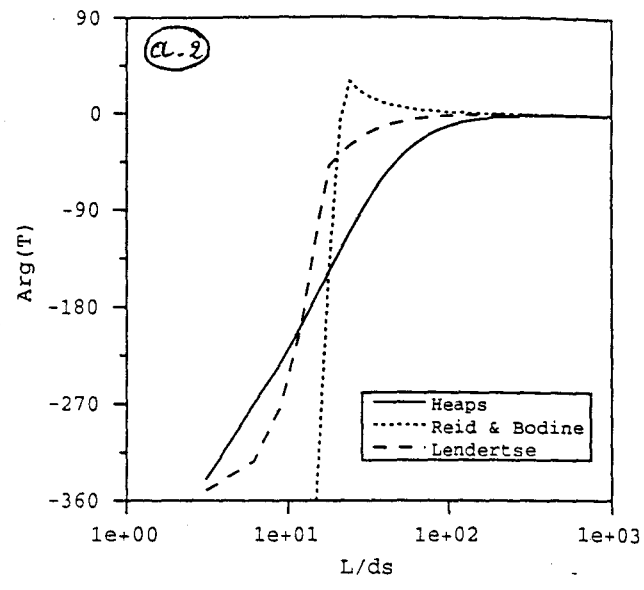
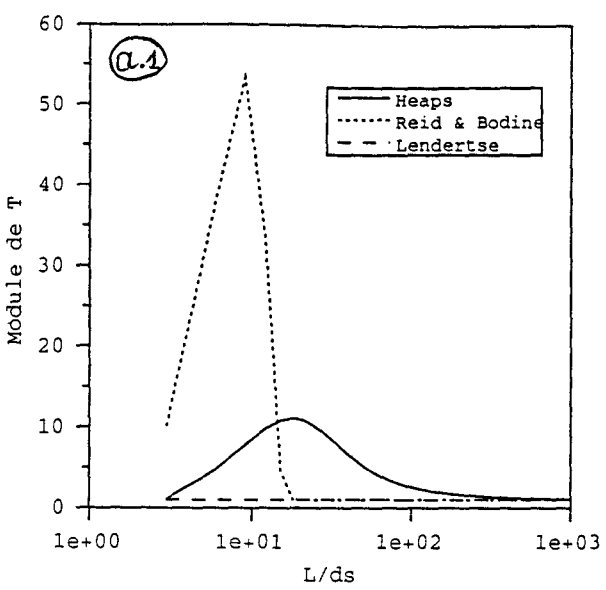
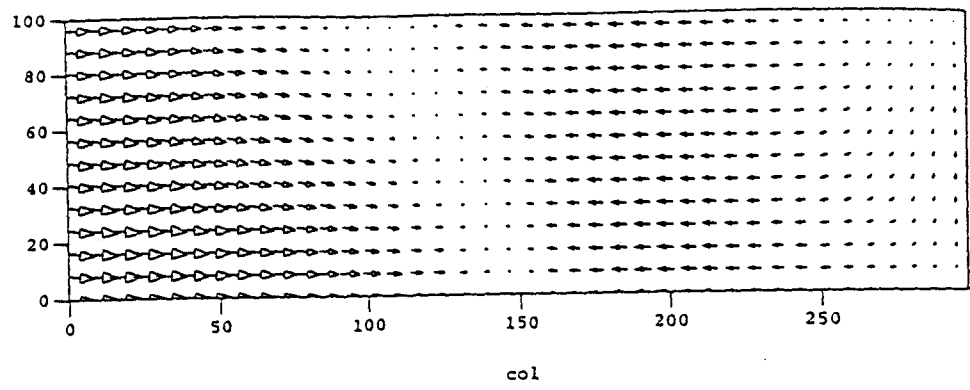


Figure 6: Sensibilité du coefficient de propagation T

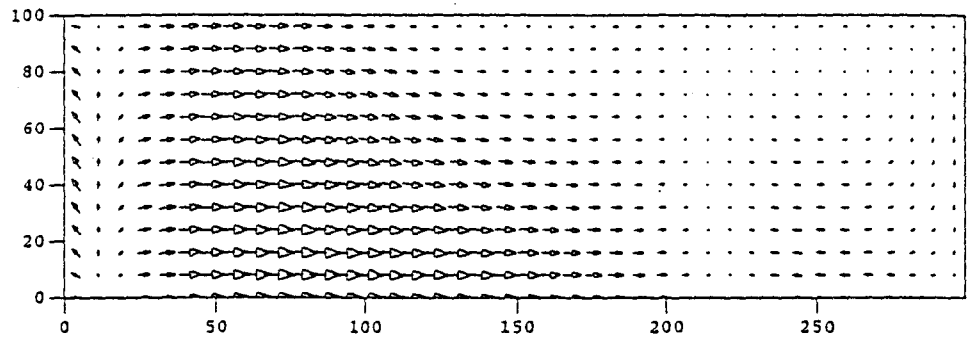
- a)  $Cr= 5.0 \quad \gamma= 45^\circ$
- b)  $Cr= 5.0 \quad \gamma= 22.5^\circ$
- c)  $Cr= 5.0 \quad \gamma= 0^\circ$

## **FIGURES DU CHAPITRE 3**



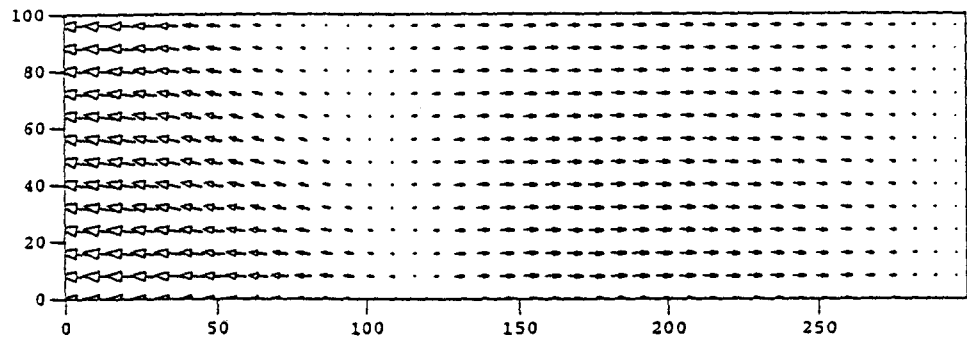
$\rightarrow = 0.88$

$t=22$  h



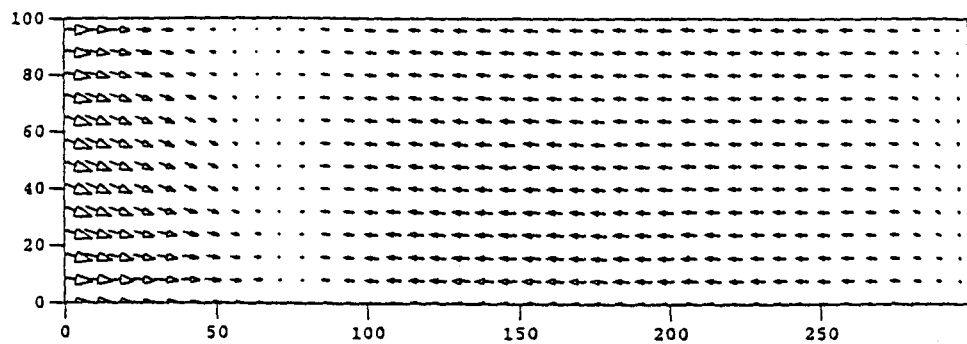
$\rightarrow = 0.62$

$t=25$  h



$\rightarrow = 0.99$

$t=30$  h



$\rightarrow = 0.92$

Figure 2 : Propagation de l'onde dans le bassin en 10 heures .

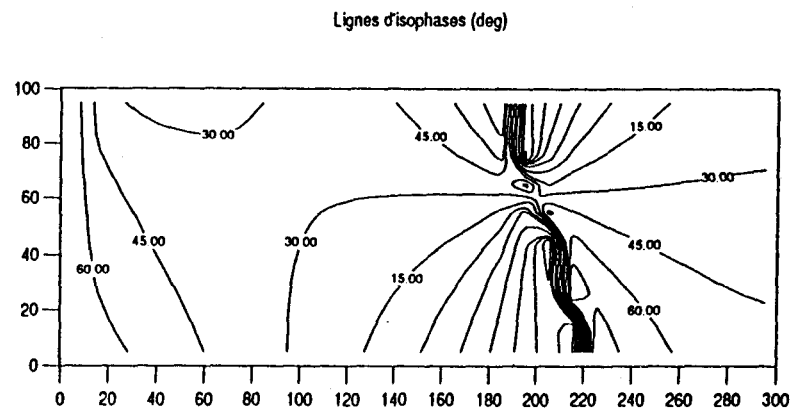
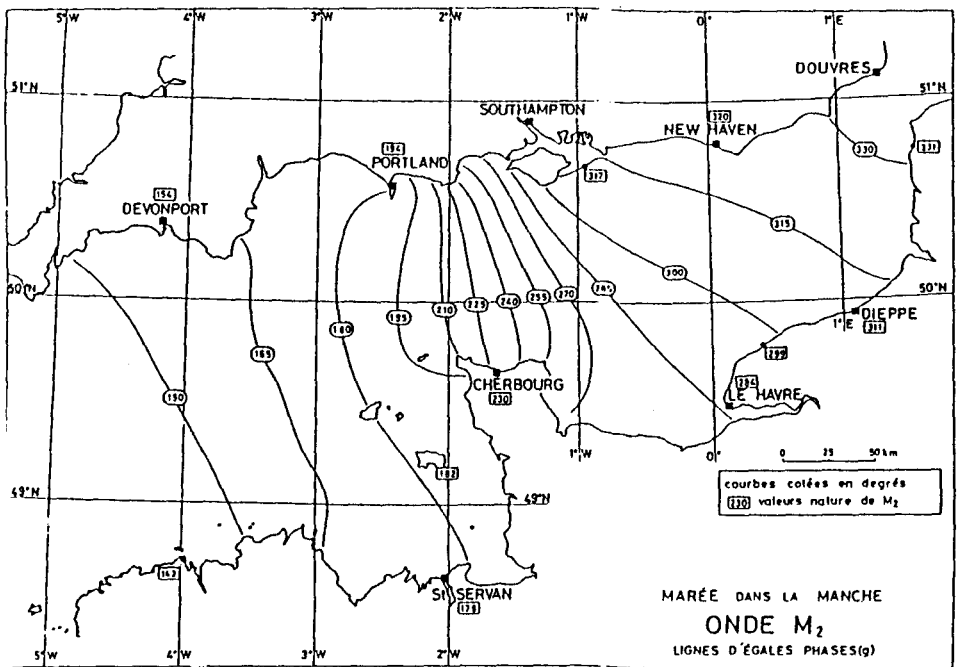
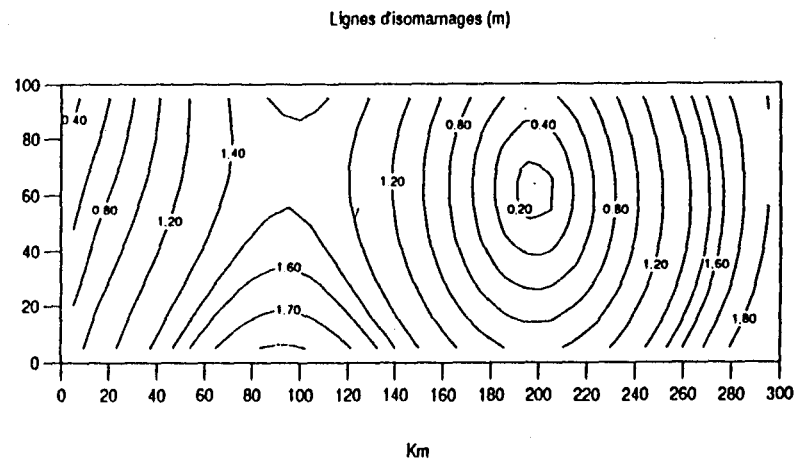
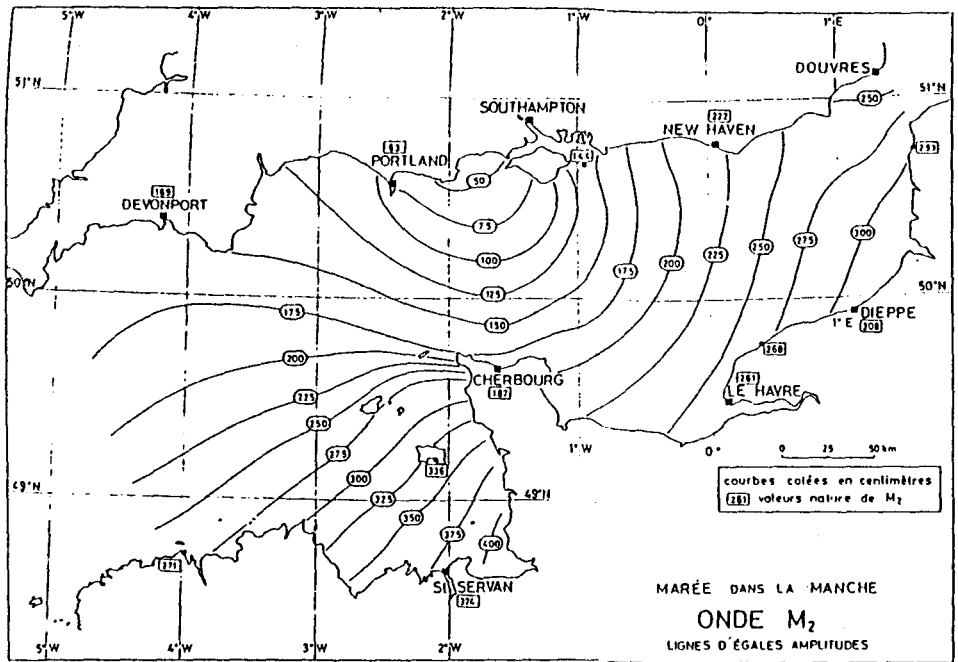


Figure 3.b : Amplitude et phase de l'onde de Kelvin

Figure 3 a



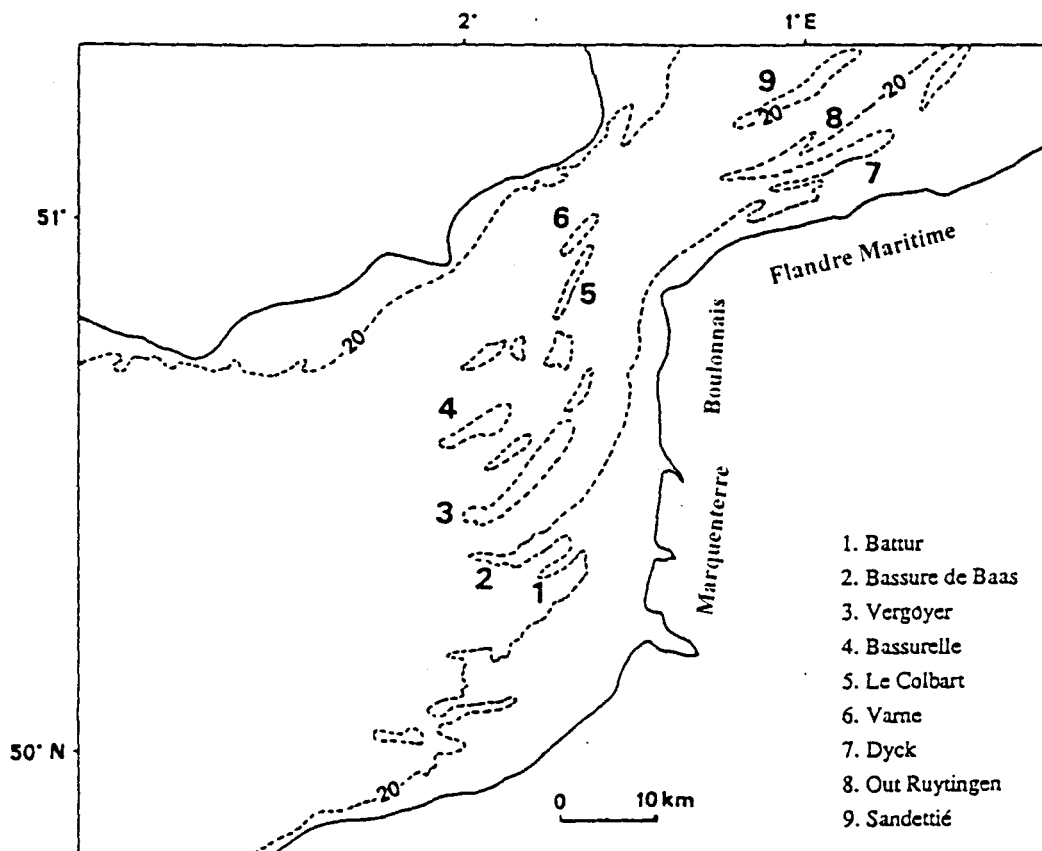


Figure 4.a : Localisation des bancs de sable dans la Manche Orientale et le sud de la mer du Nord

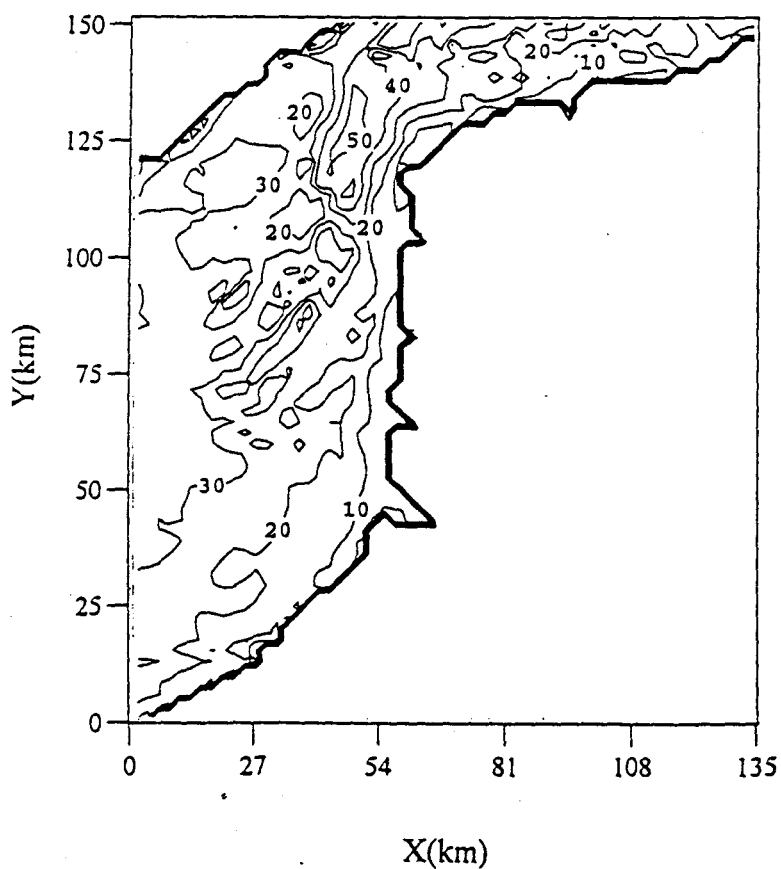


Figure 4.b : Topographie de la zone d'étude (Manche Orientale)

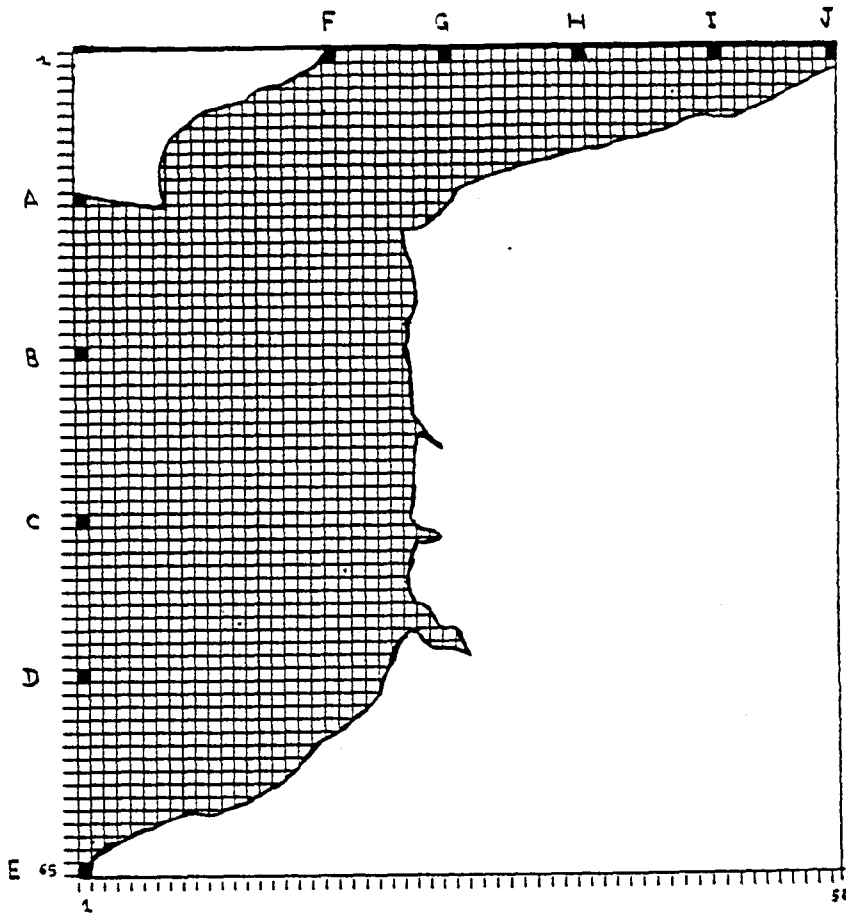


Figure 5 : Maillage de la zone d'étude et localisation des points conditions aux limites

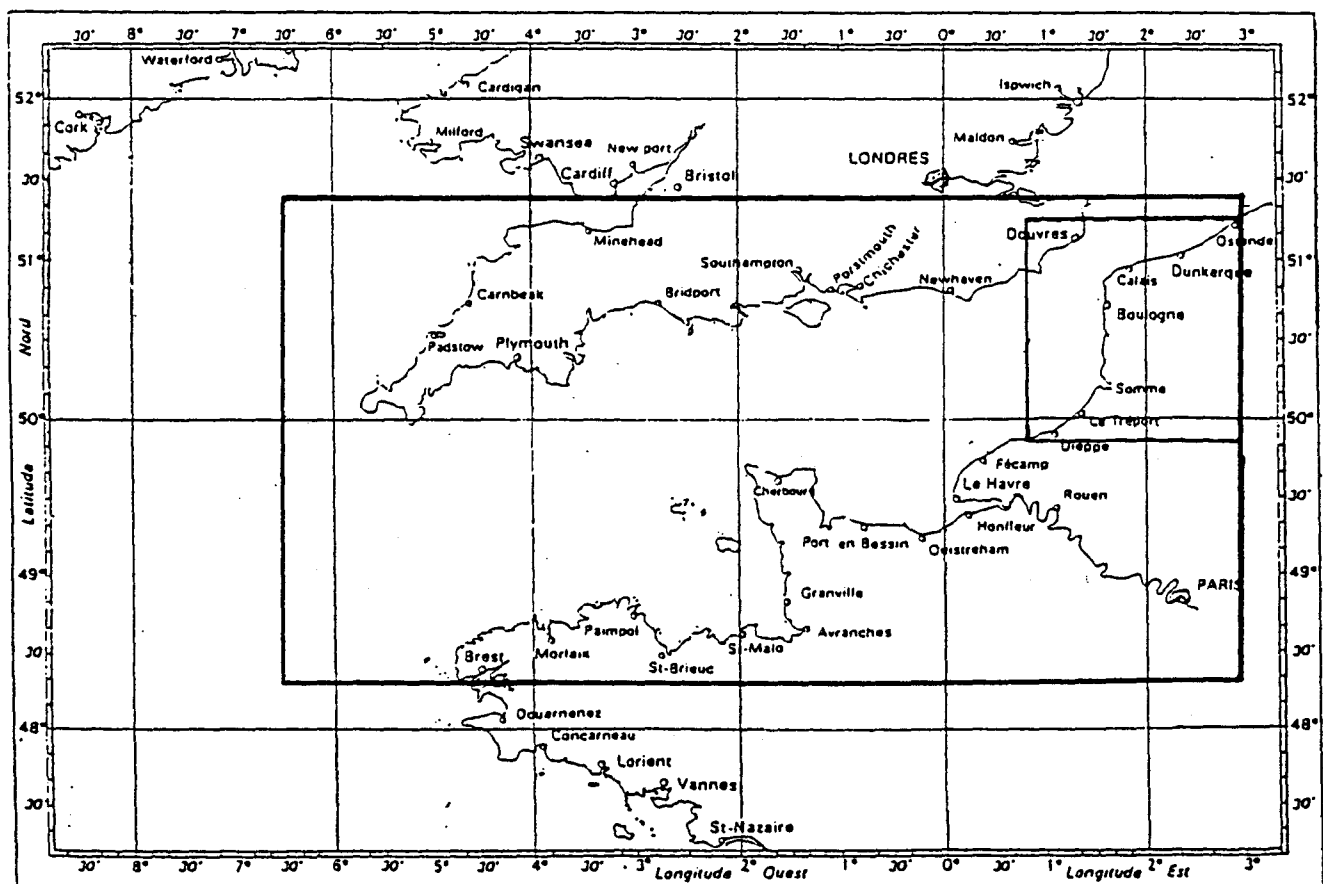


Figure 6 : Zone d'étude du modèle de Salomon (1991)

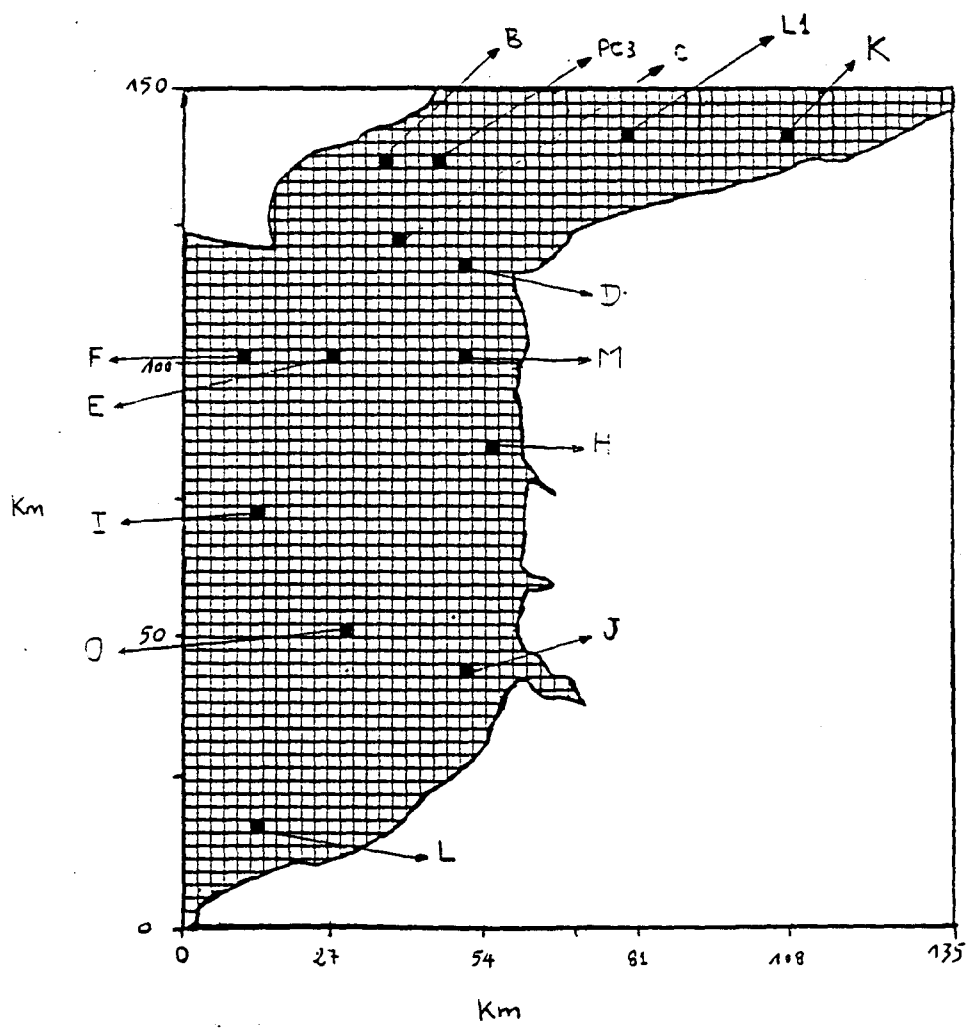


Figure 7 : Localisation des points de sortie des résultats

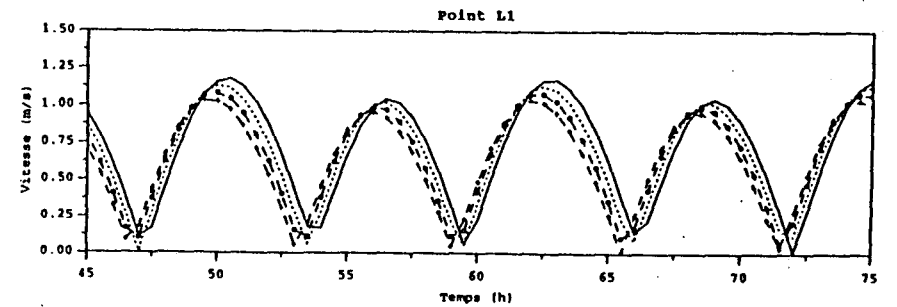
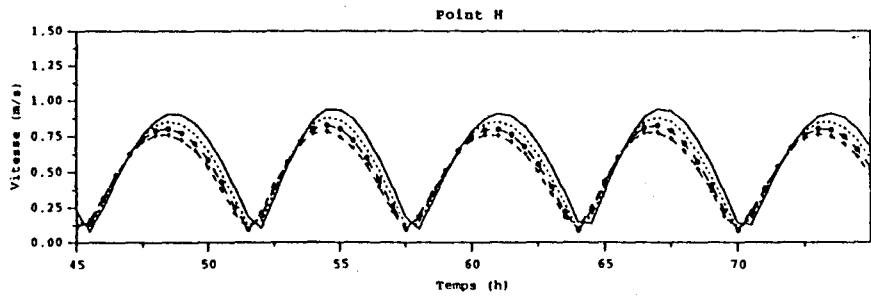
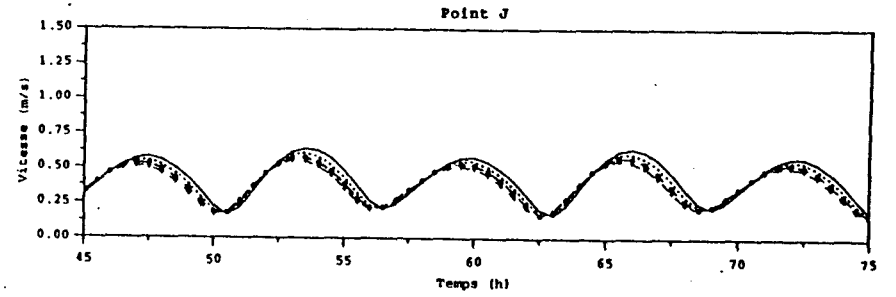
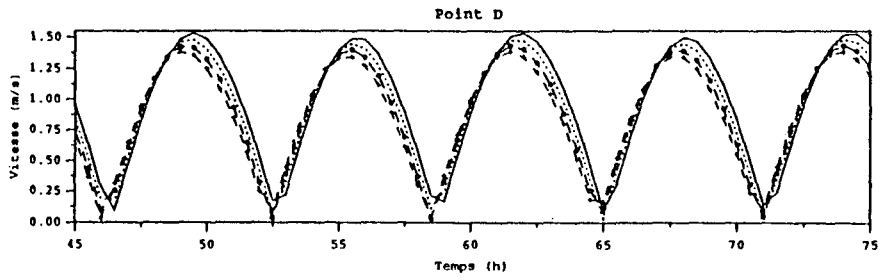
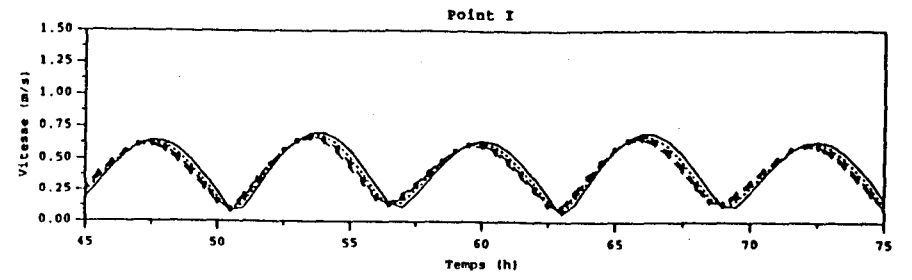
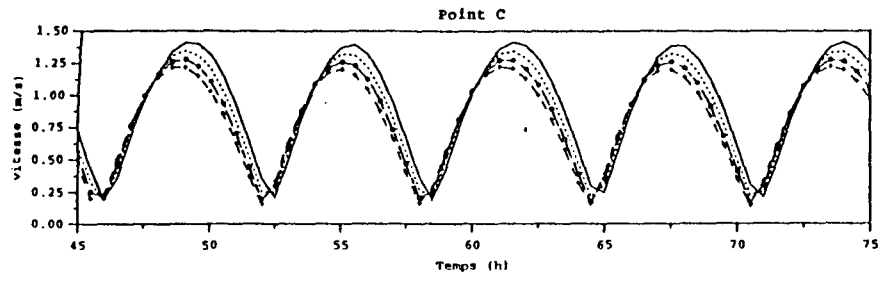


Figure 8 : Influence du coefficient de frottement  $C_d$

$C_d = 0.0015$   
 $C_d = 0.0020$   
 $C_d = 0.0025$   
 $C_d = 0.0030$

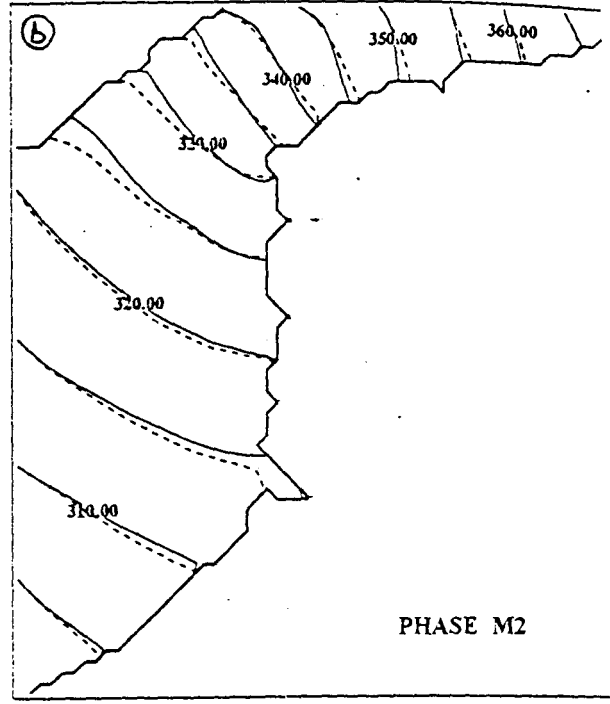
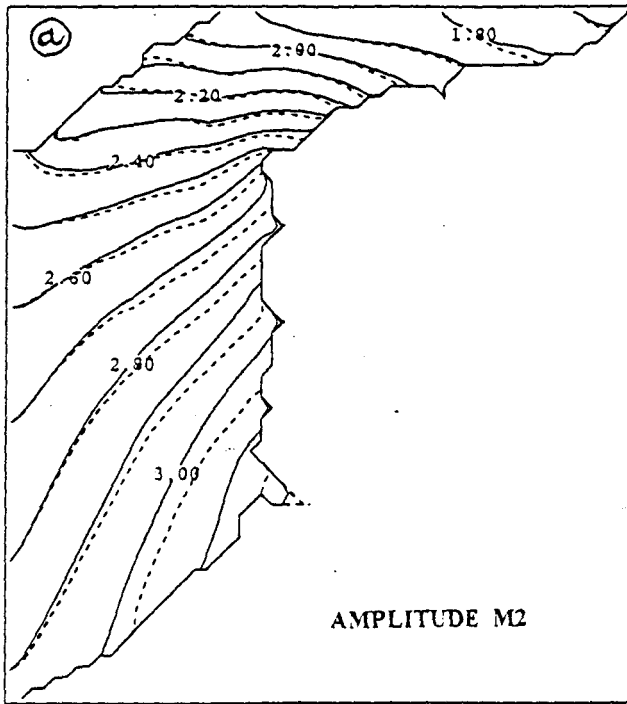


Figure 9 : a) Influence du coefficient de frottement sur l'amplitude de M2  
 b) Influence du coefficient de frottement sur la phase de M2

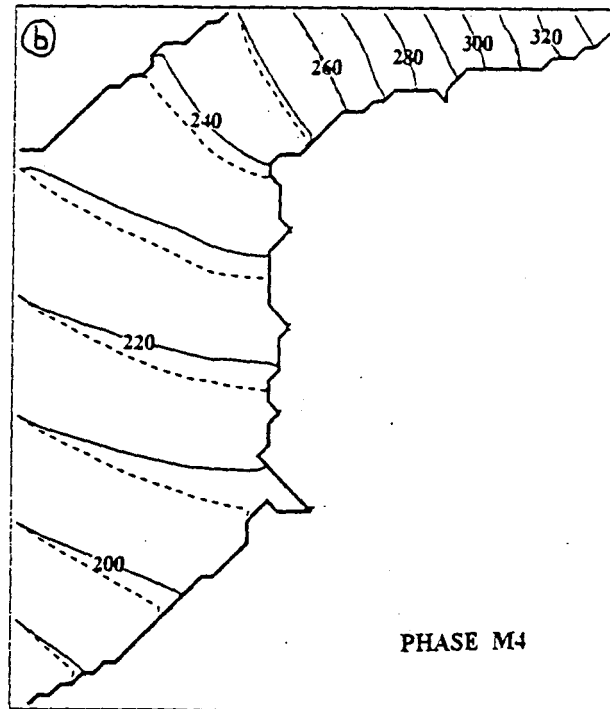
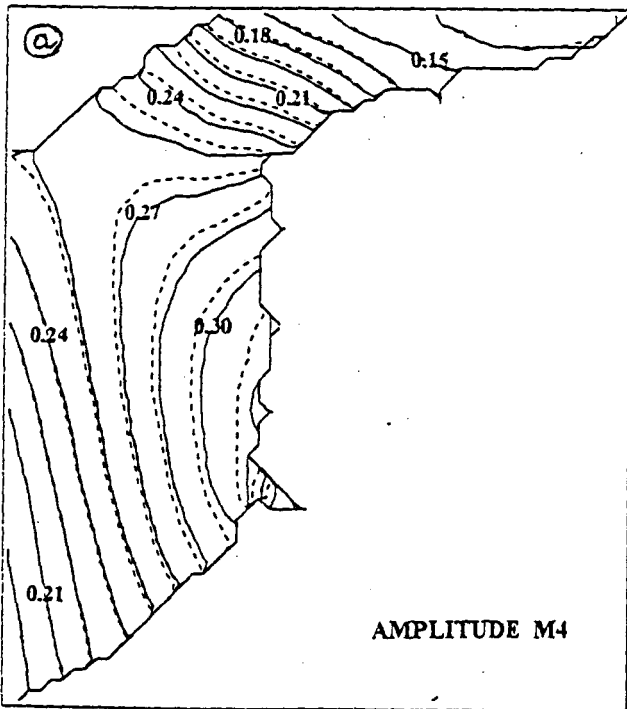
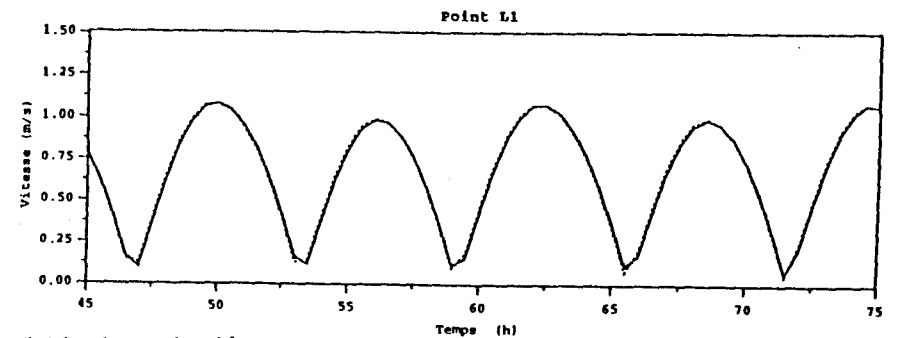
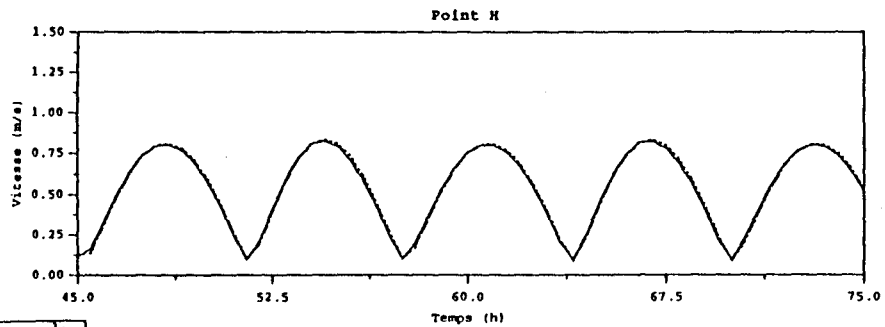
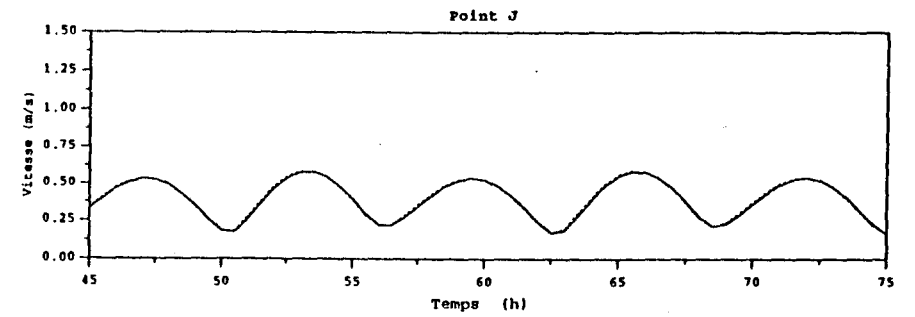
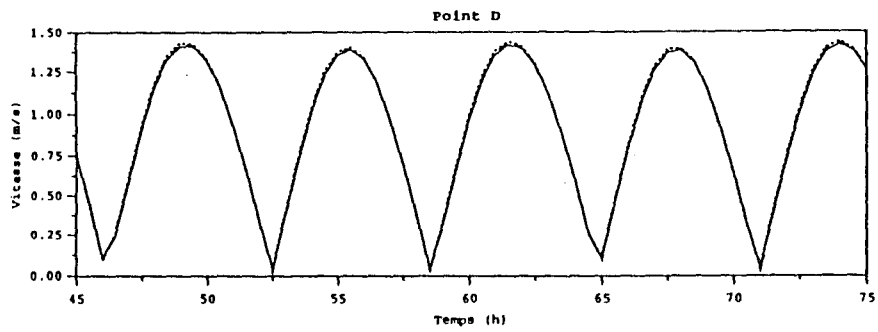
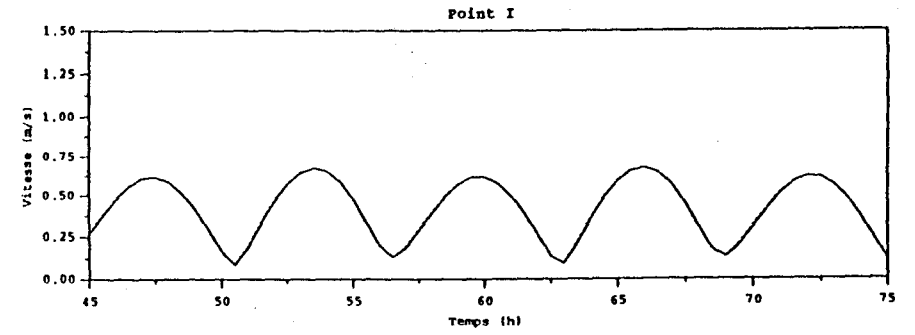
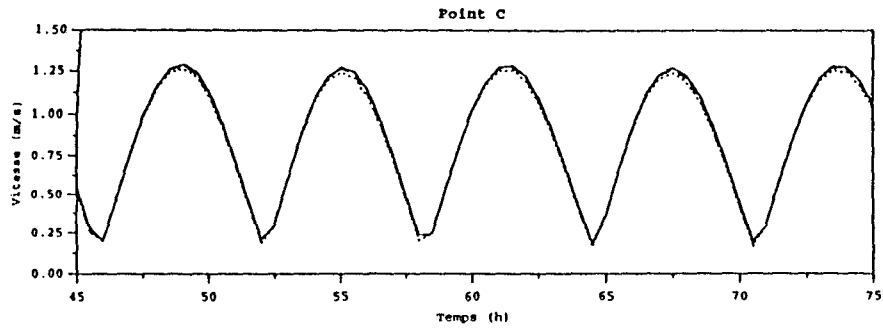


Figure 10 : a) Influence du coefficient de frottement sur l'amplitude de M4  
 b) Influence du coefficient de frottement sur la phase de M4



- - Ah=100 m<sup>2</sup>/s  
 ··· Ah=500 m<sup>2</sup>/s  
 - - Ah=f(x,y,t)

Figure 11: Influence du coefficient de viscosité horizontale Ah

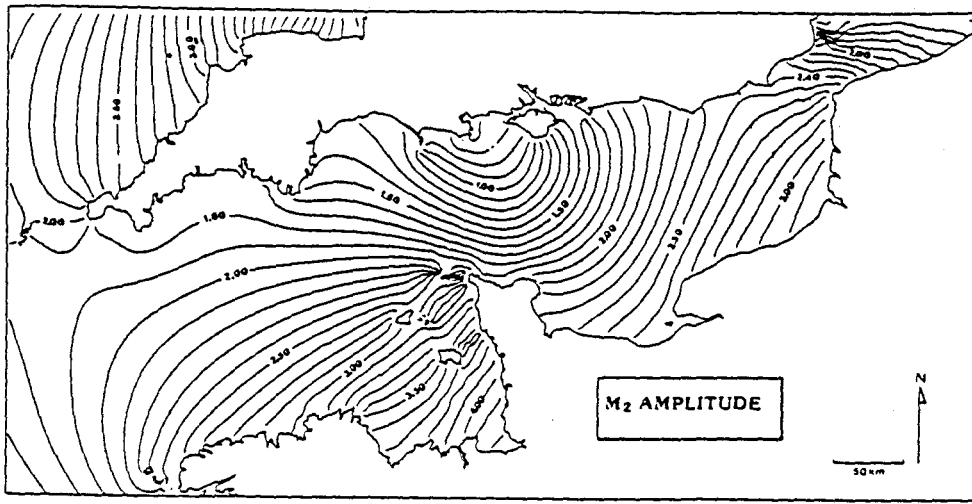
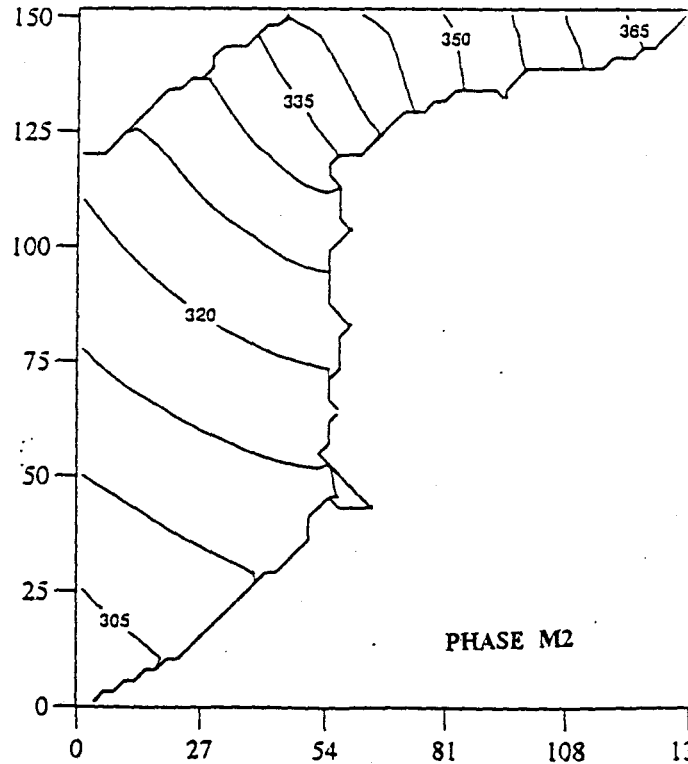
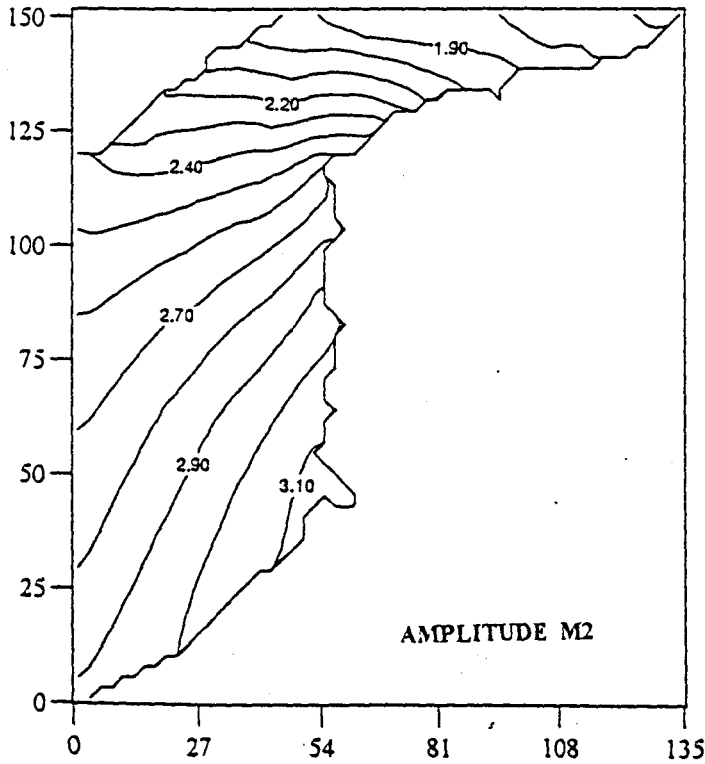
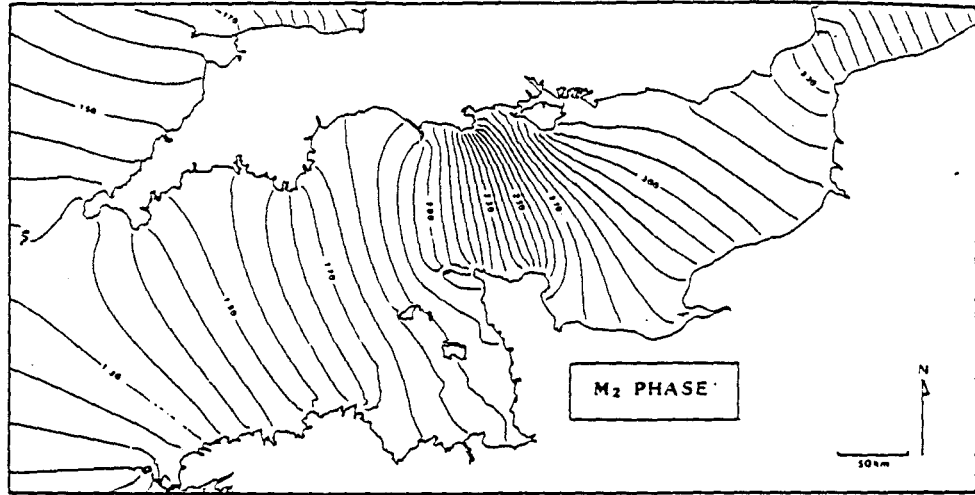


Figure 12.a : Modèle de Salomon (1991)



Km

Figure 12.b : Présent Modèle

Km

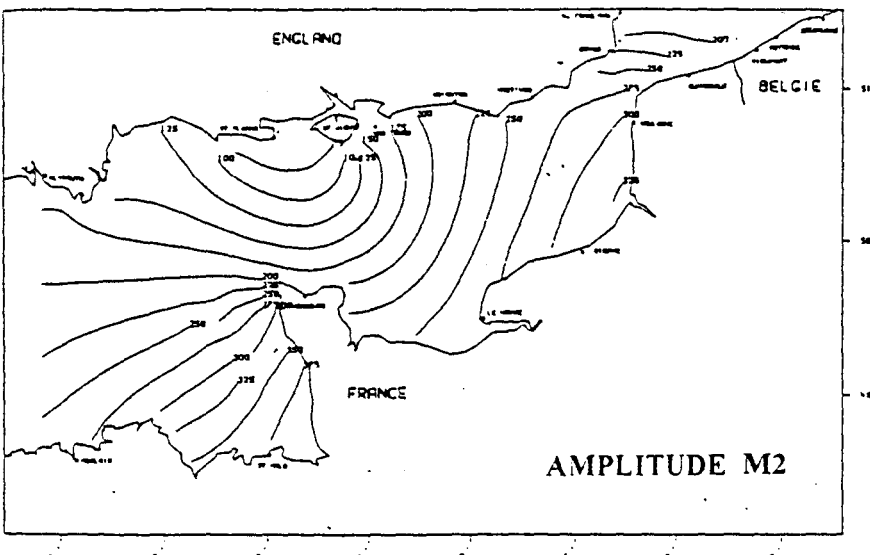


Figure 13.a : Modèle de Ronday (1976)

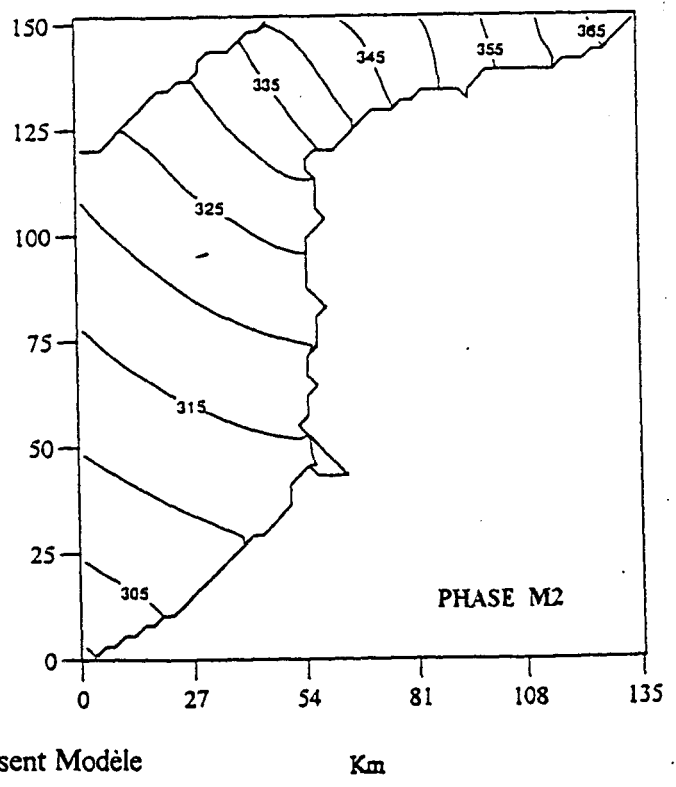
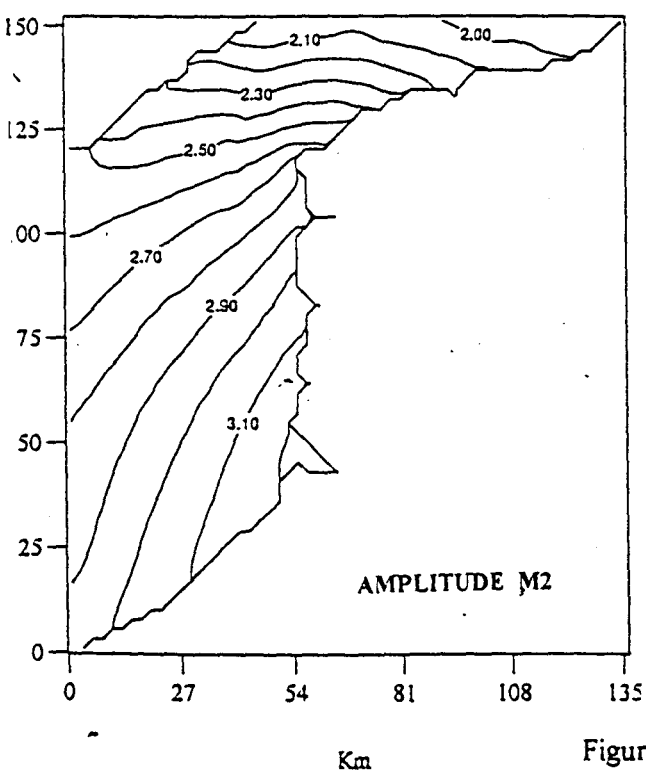
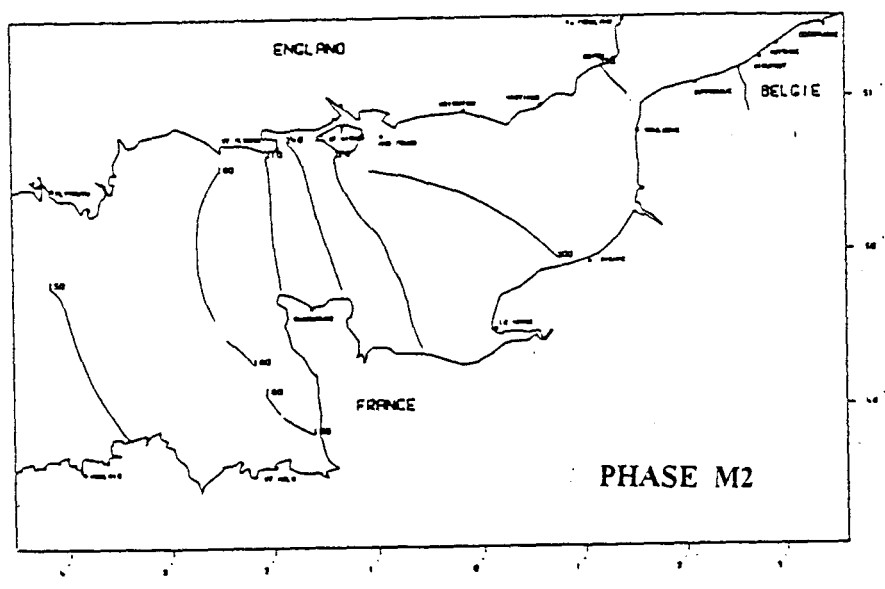


Figure 13.b : Présent Modèle



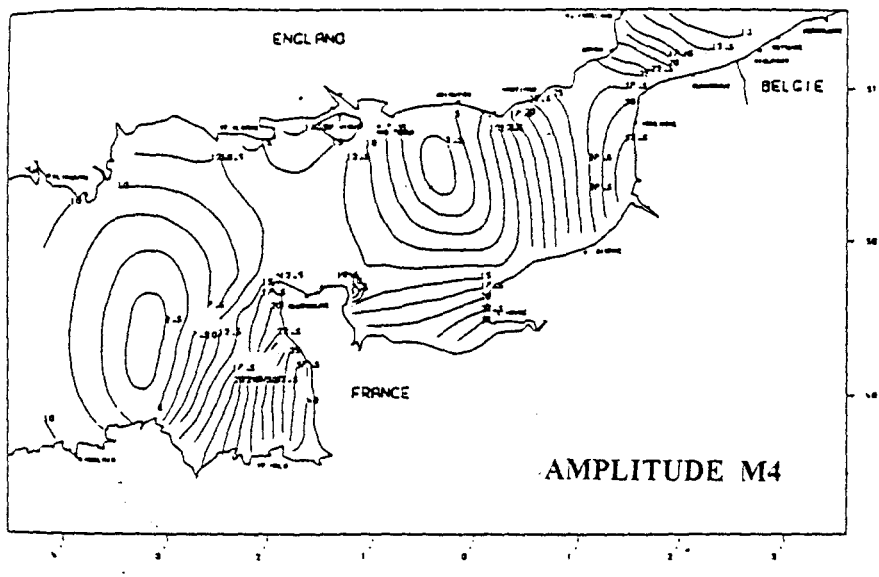


Figure 14.a : Modèle de Ronday (1976)

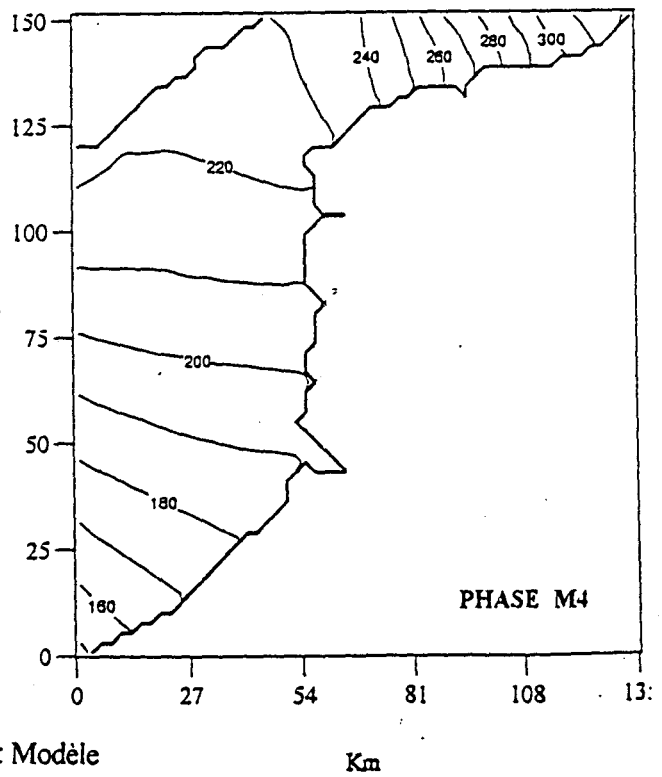
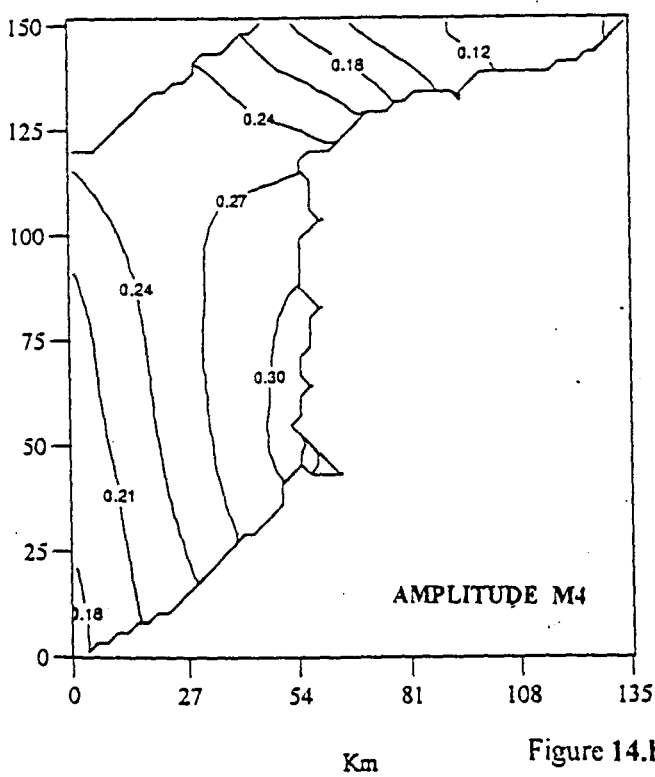
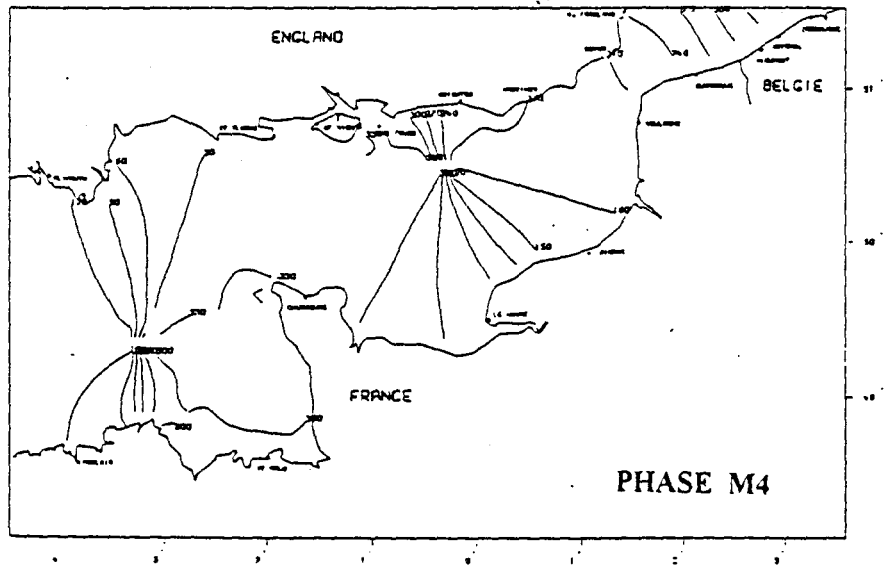
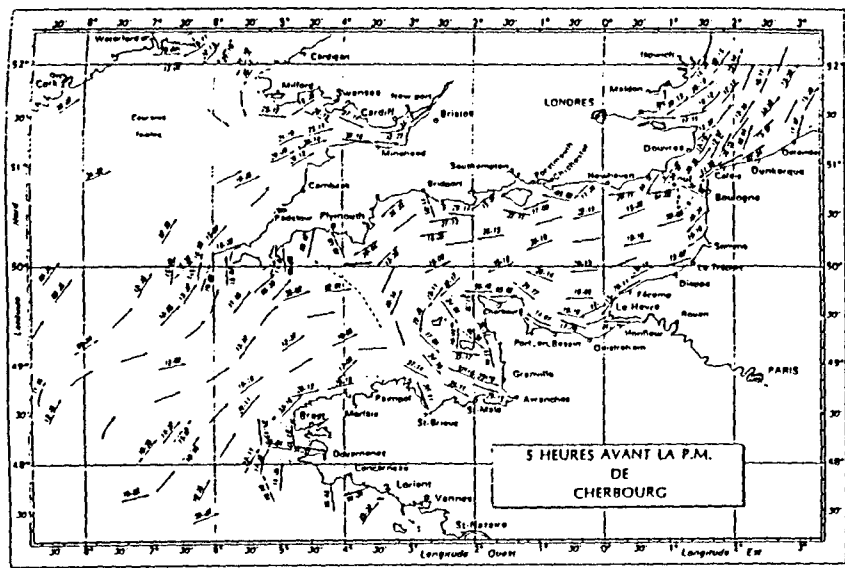
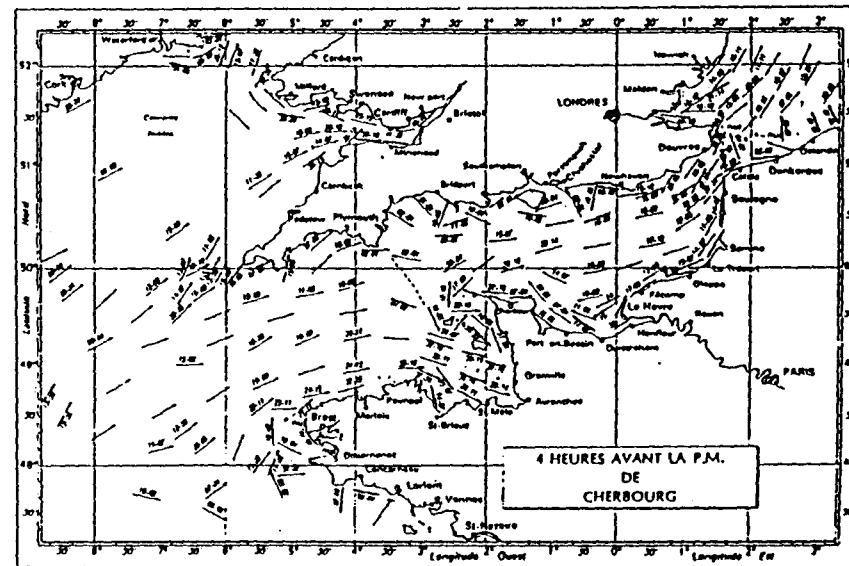


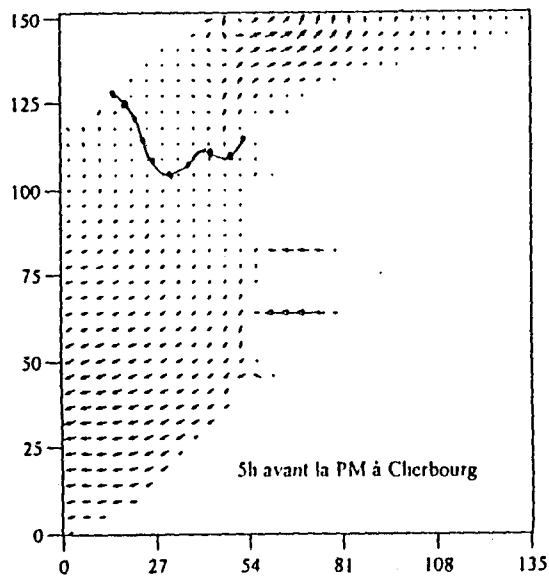
Figure 14.b : Présent Modèle



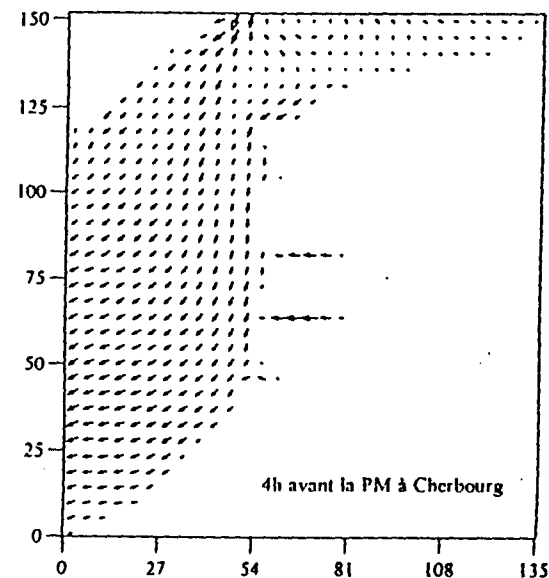
--- Ligne de convergence des courants    - - - Ligne de séparation des courants



--- Ligne de convergence des courants    - - - Ligne de séparation des courants



→ = 1.80 m/s



→ = 1.80 m/s

Figure 15 : Comparaison des courants de marée ( coefficient 70)

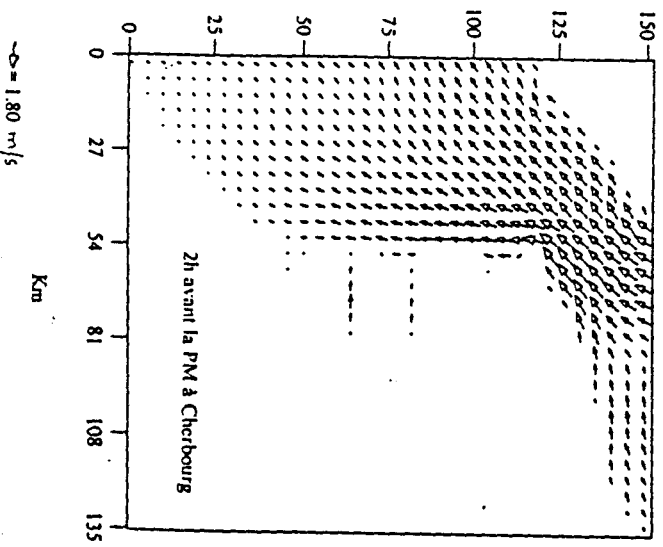
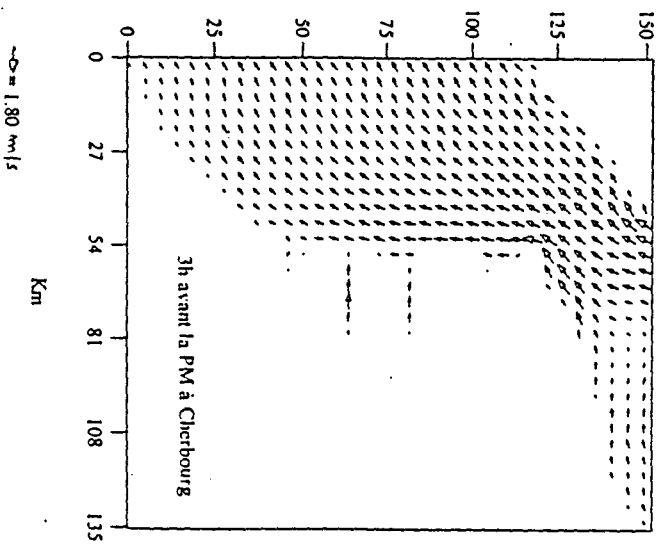
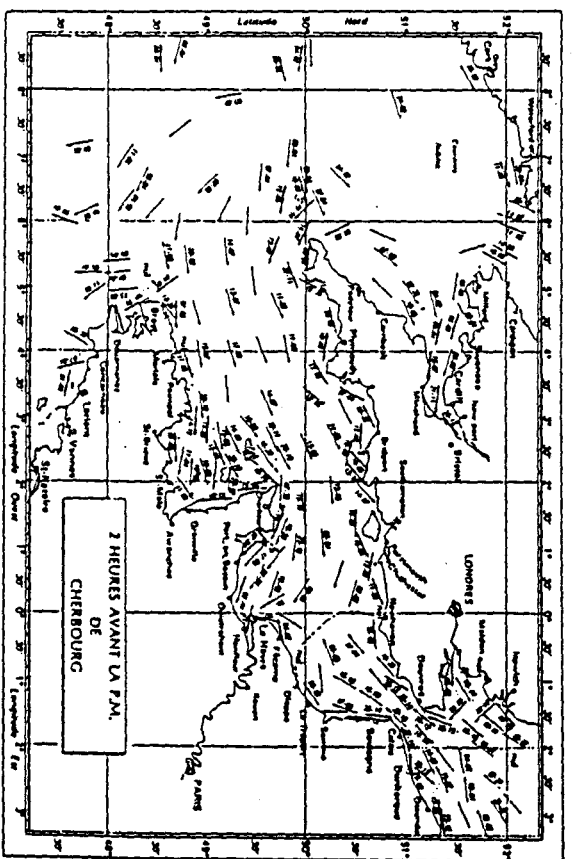
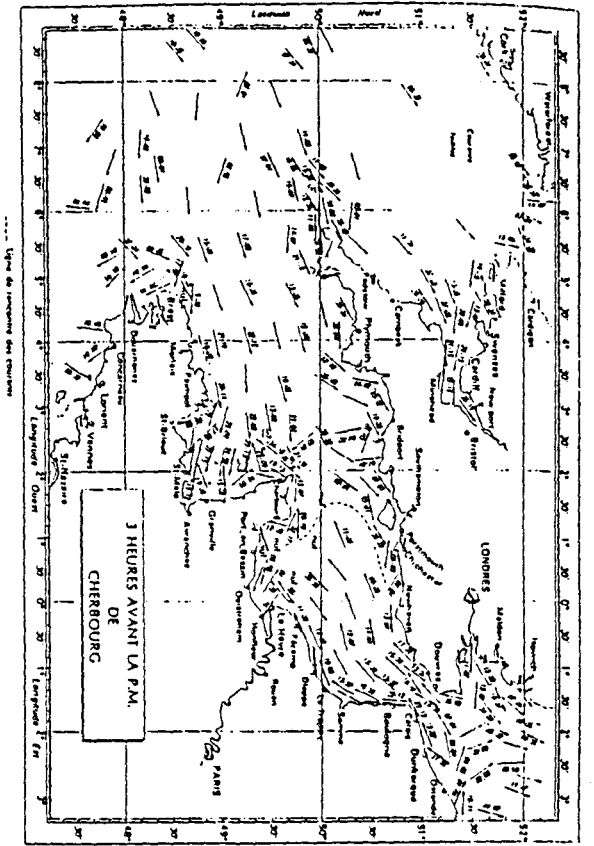


Figure 15 : suite

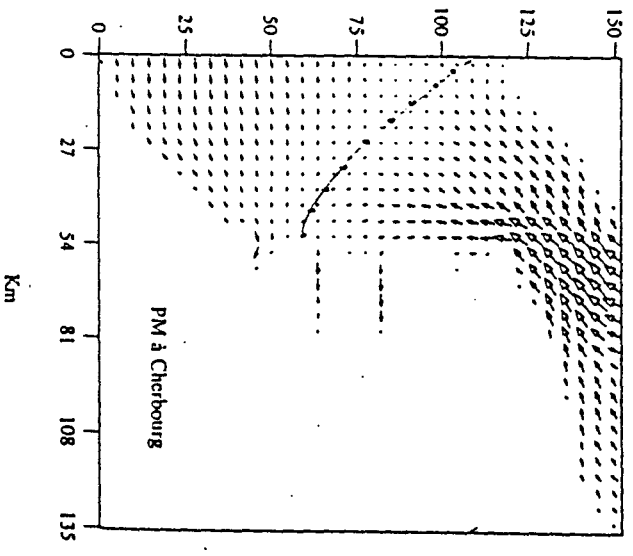
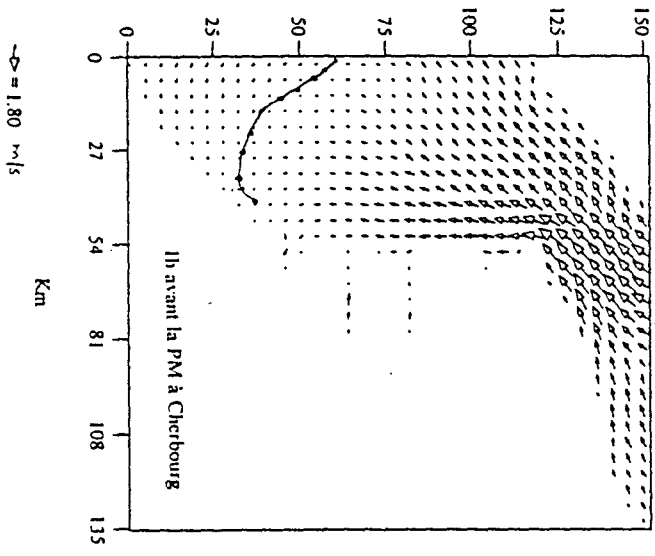
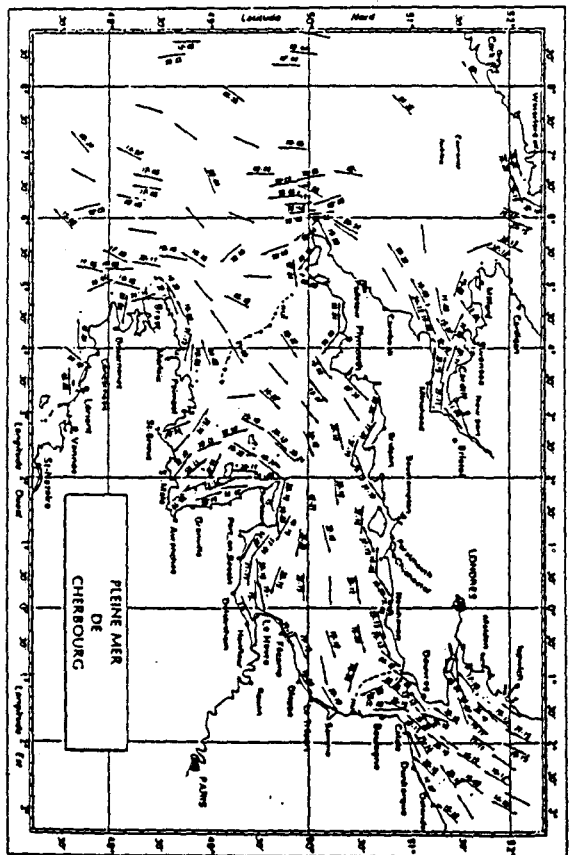
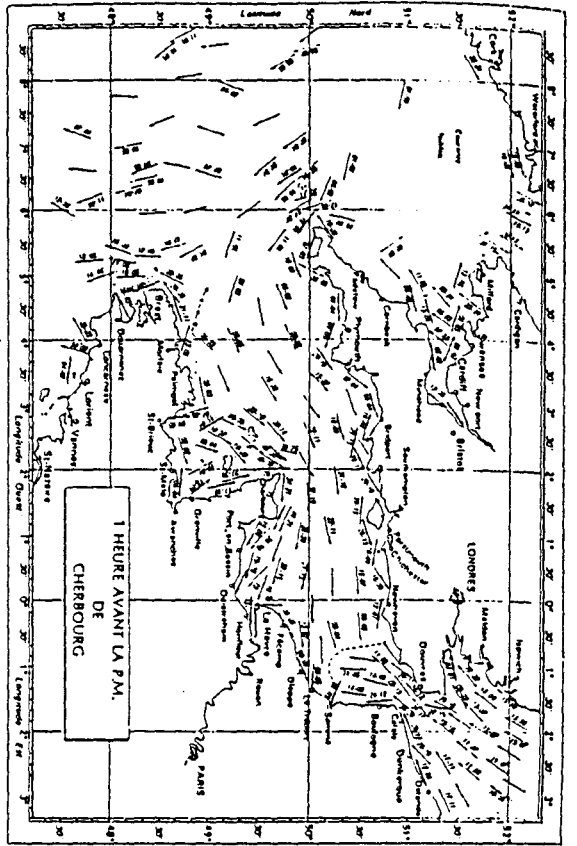


Figure 15 : suite

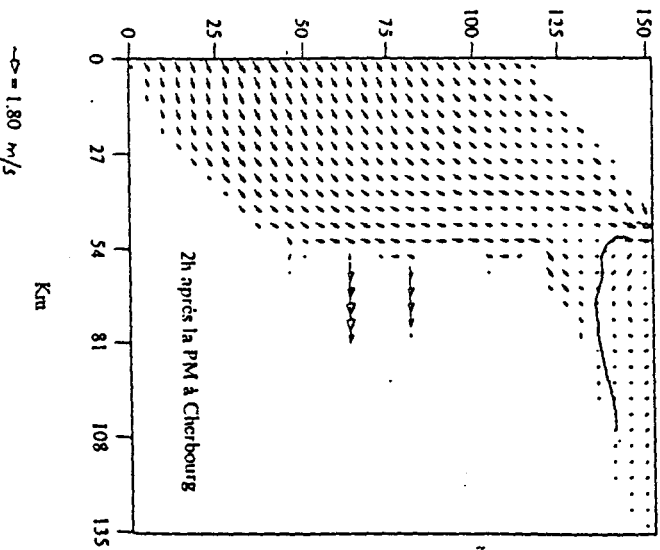
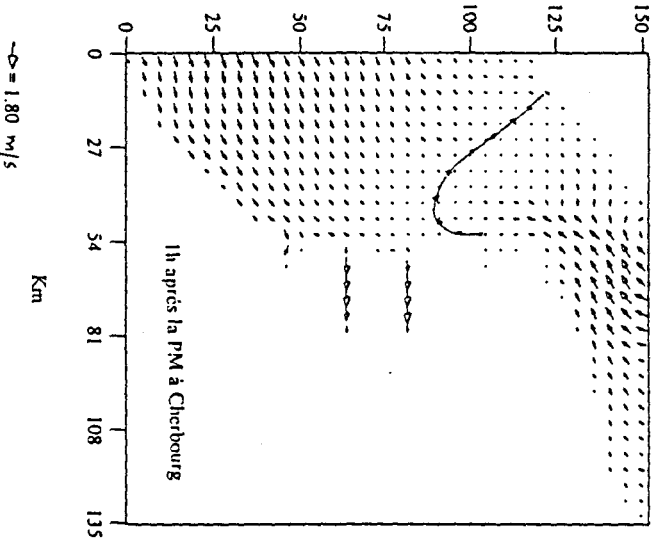
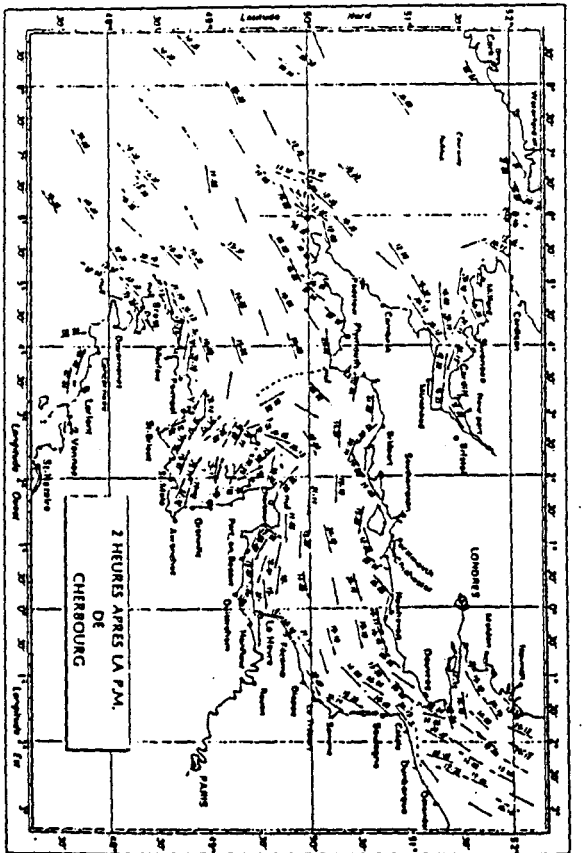
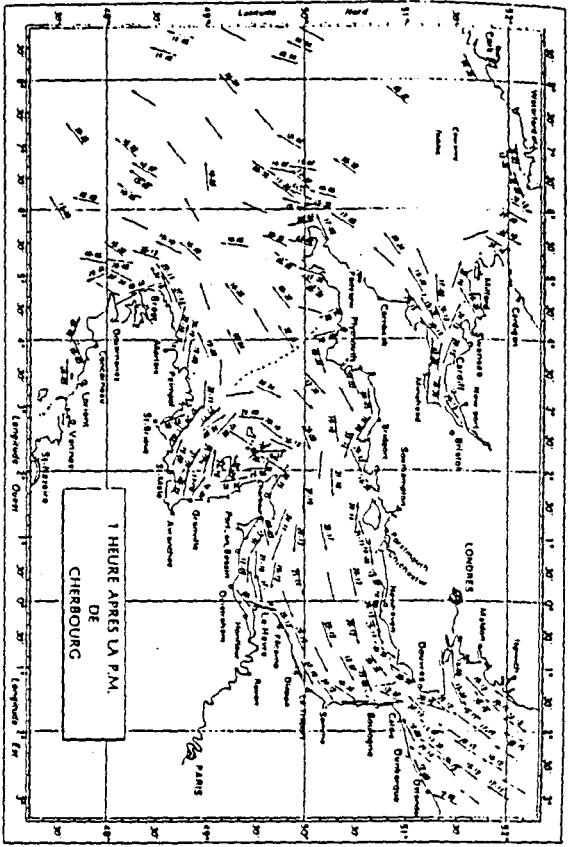


Figure 15 : suite

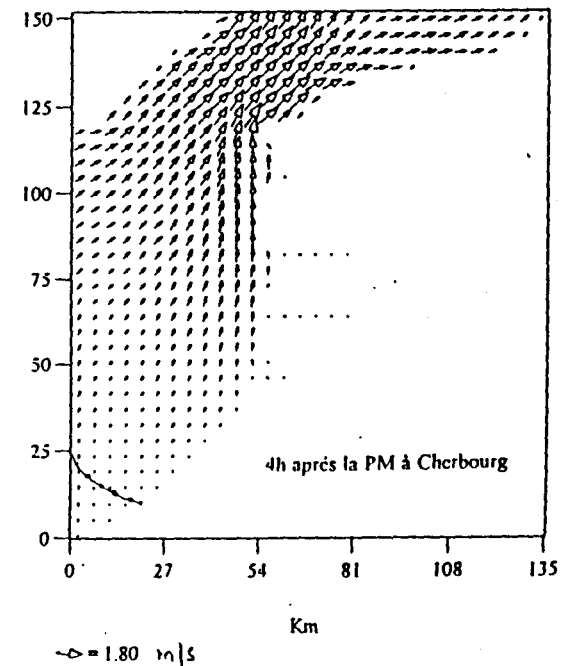
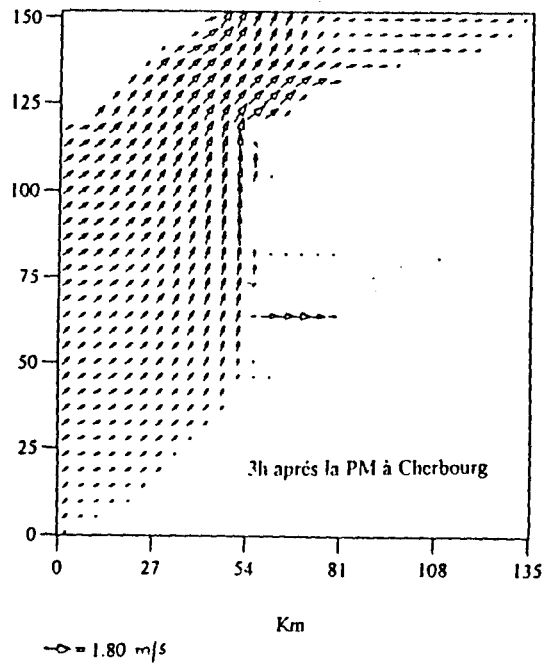
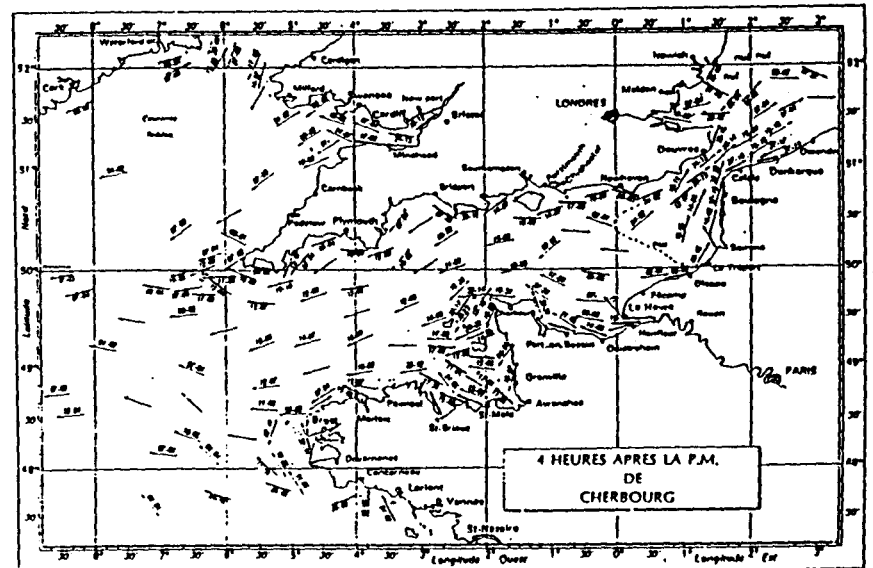
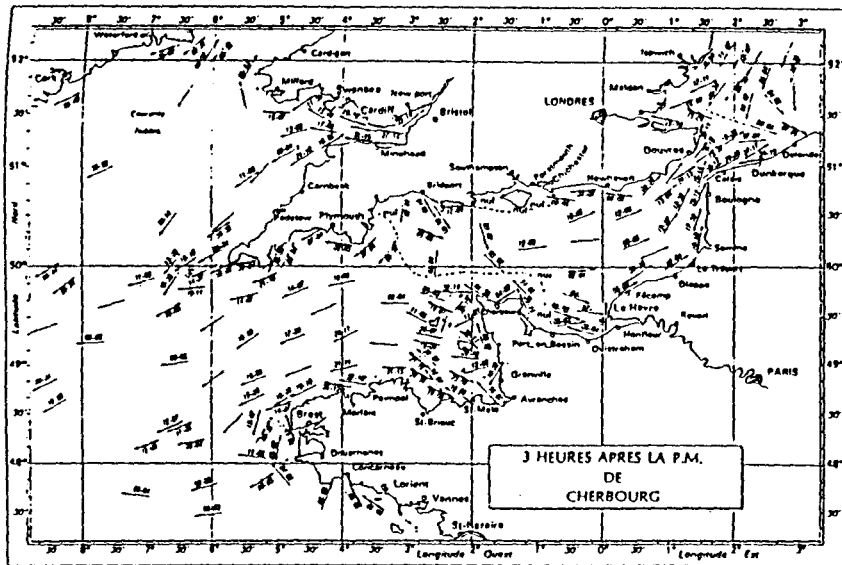
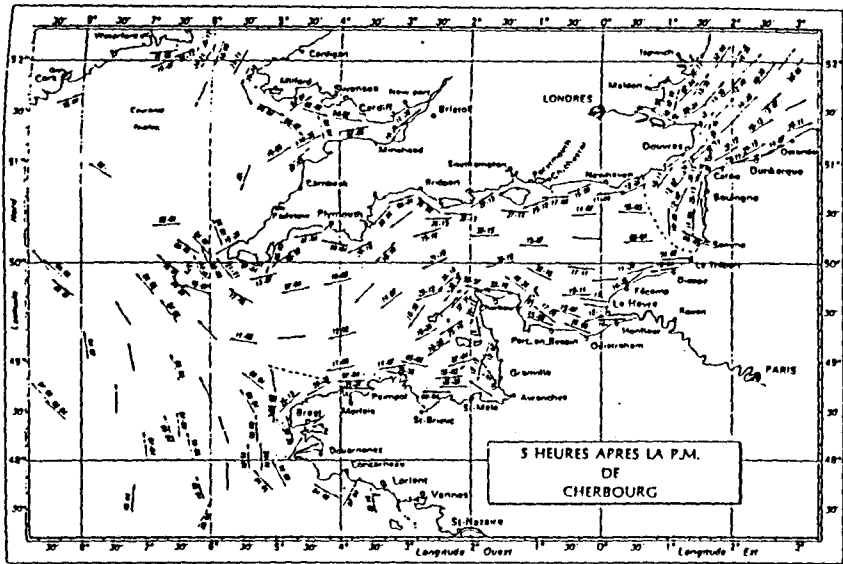
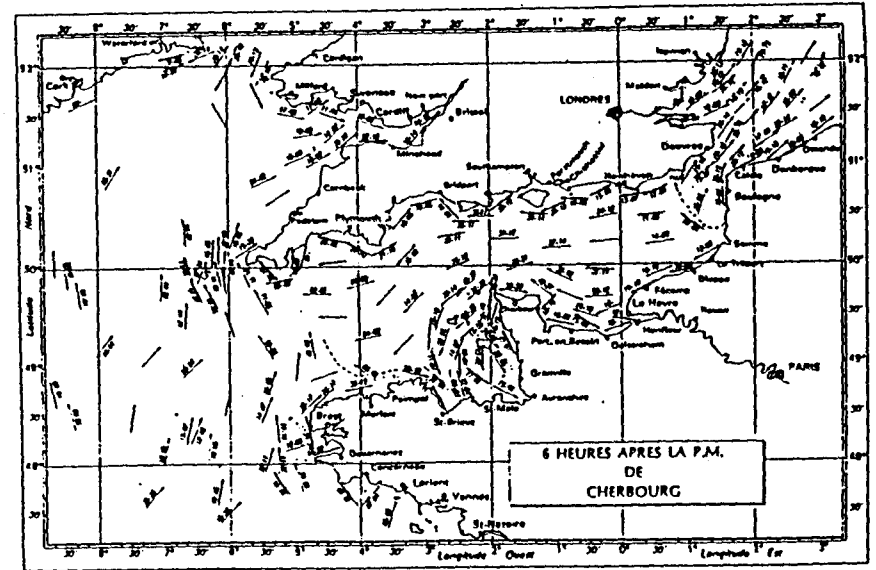


Figure 15 : suite



..... ligne de rencontre des courants      .... ligne de séparation des courants



..... ligne de rencontre des courants      .... ligne de séparation des courants

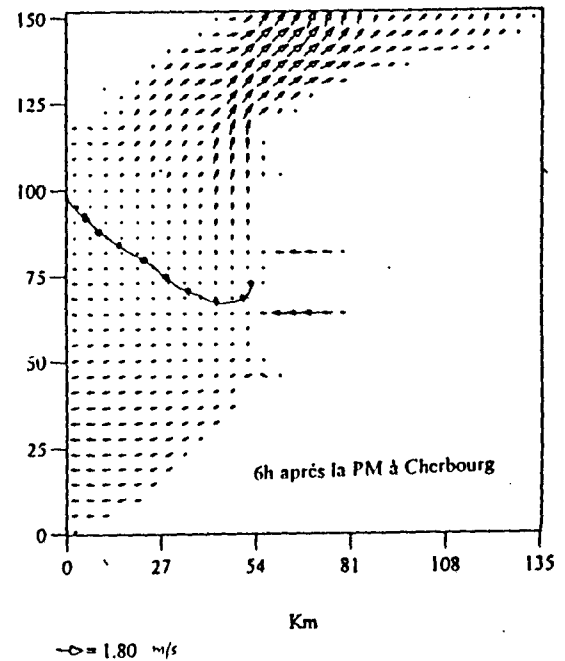
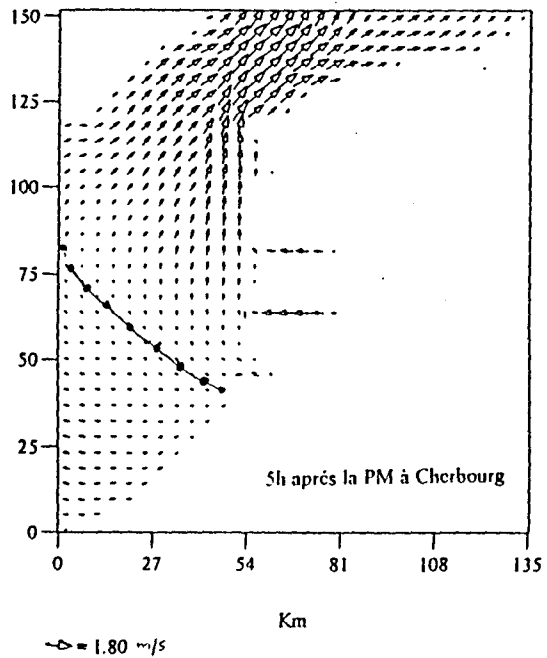


Figure 15 : suite

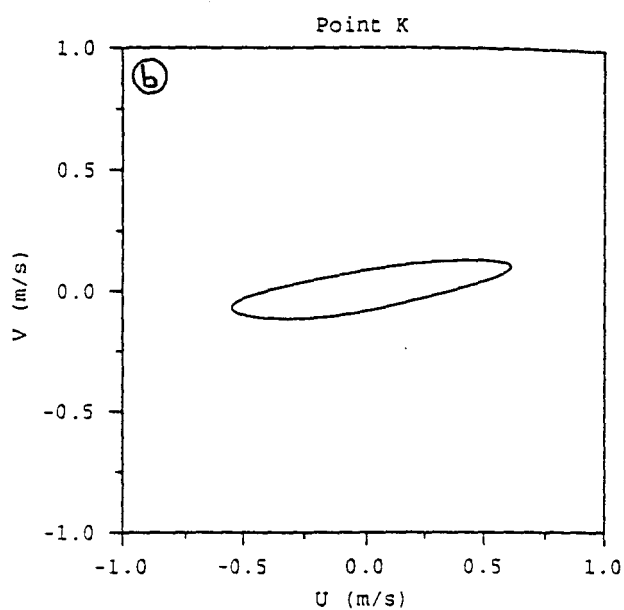
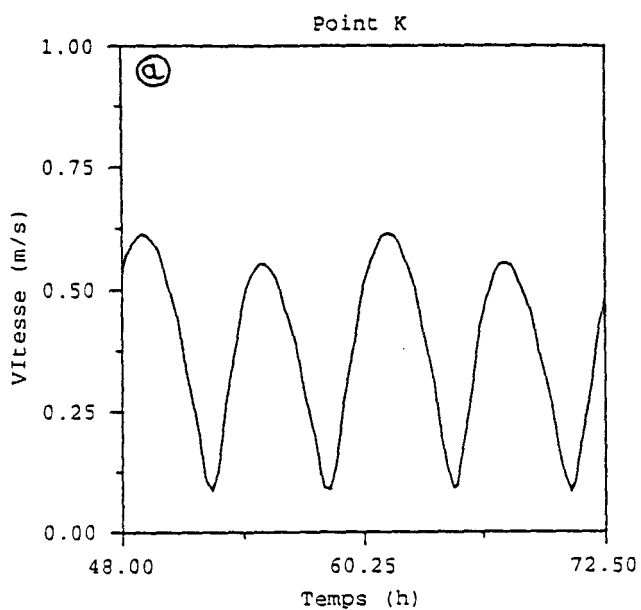


Figure 16 : Secteur des Flandres maritimes

- a) Module de la vitesse au point K (coeff 70)
- b) Ellipse de courant au point K (coeff 70)

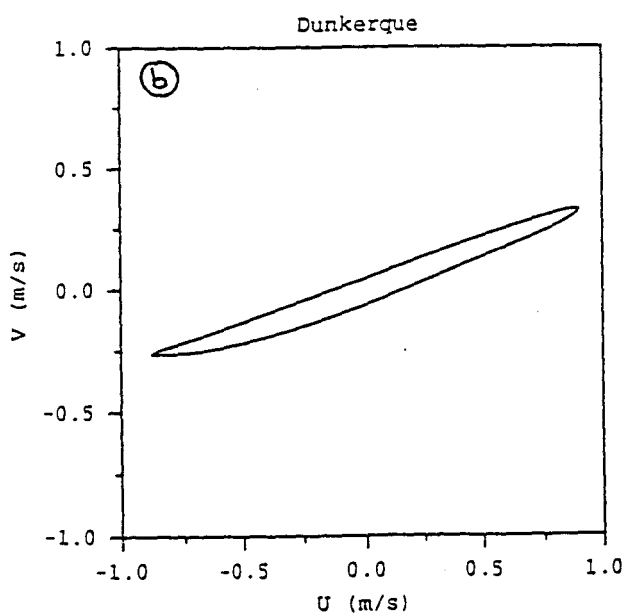
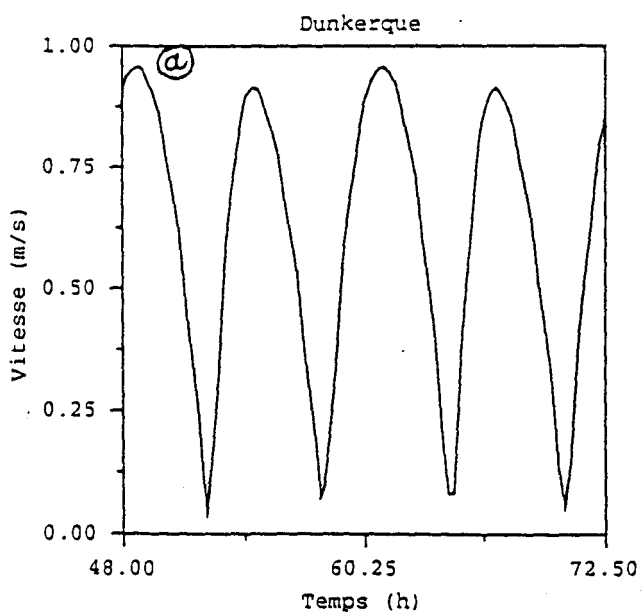


Figure 17 : Secteur des Flandres maritimes

- a) Module de la vitesse à Dunkerque (coeff 70)
- b) Ellipse de courant à Dunkerque (coeff 70)



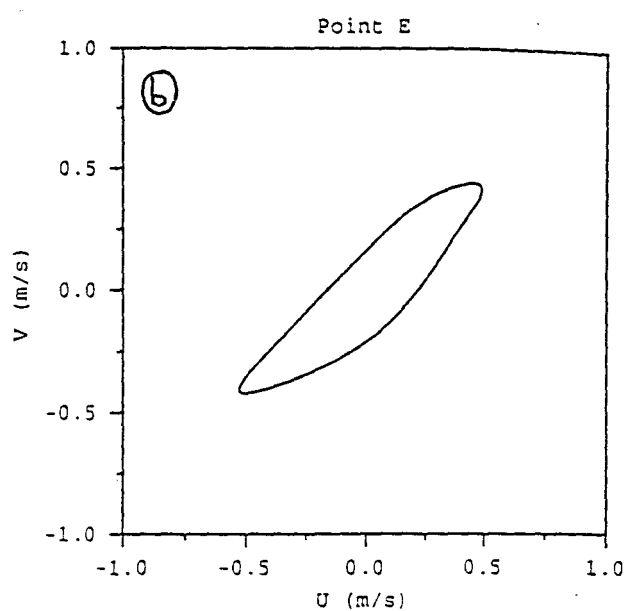
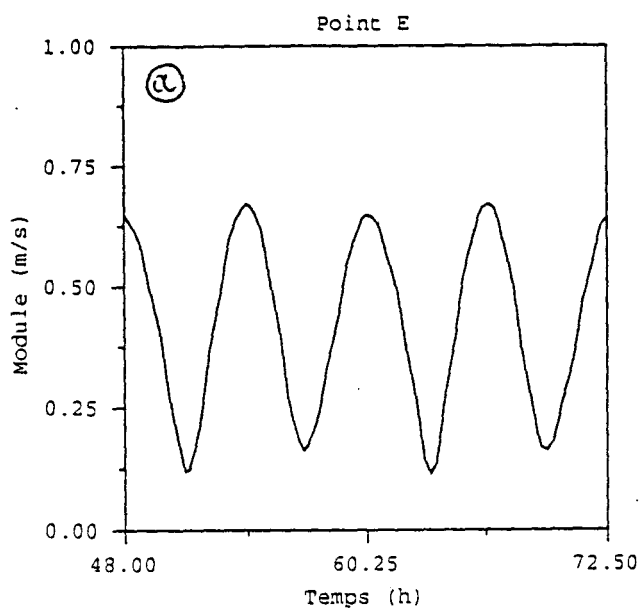


Figure 18 : Secteur du Boulonnais

- a) Module de la vitesse au point E (coeff 70)  
 b) Ellipse de courant au point E (coeff 70)

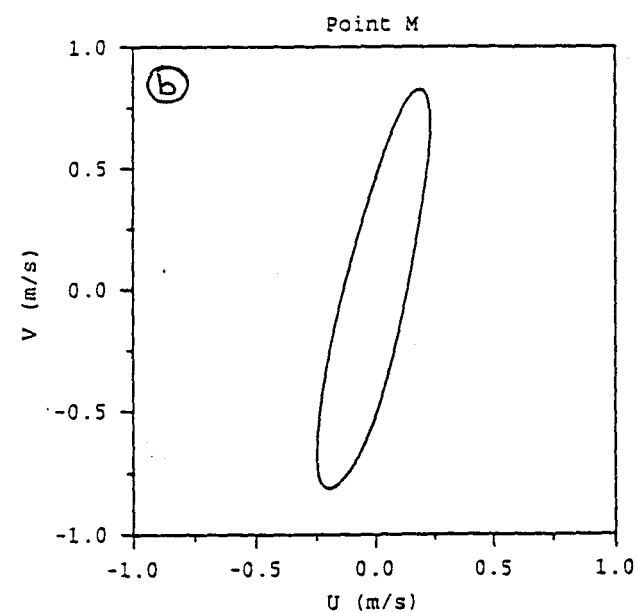
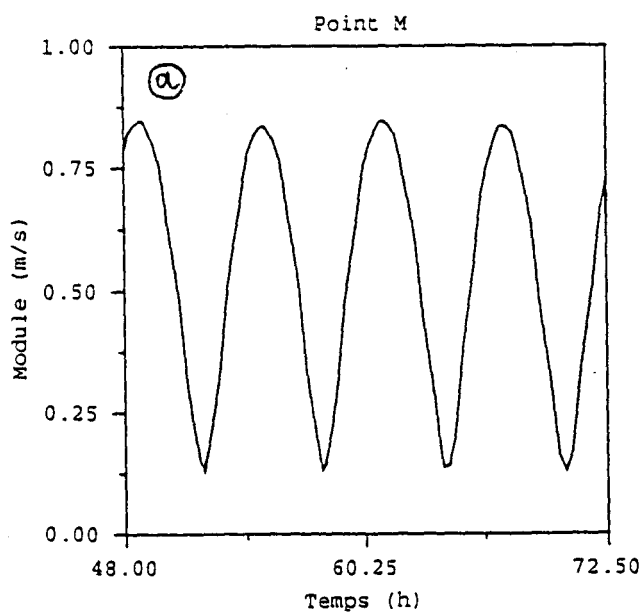


Figure 19 : Secteur du Boulonnais

- a) Module de la vitesse au point M (coeff 70)  
 b) Ellipse de courant au point M (coeff 70)

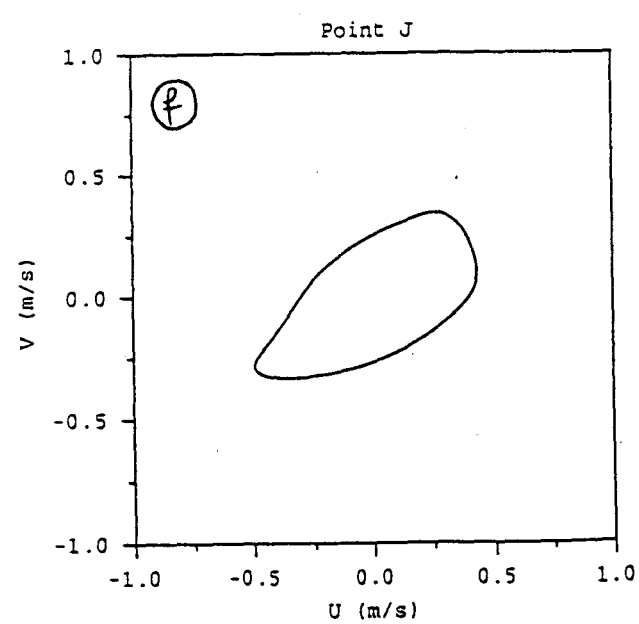
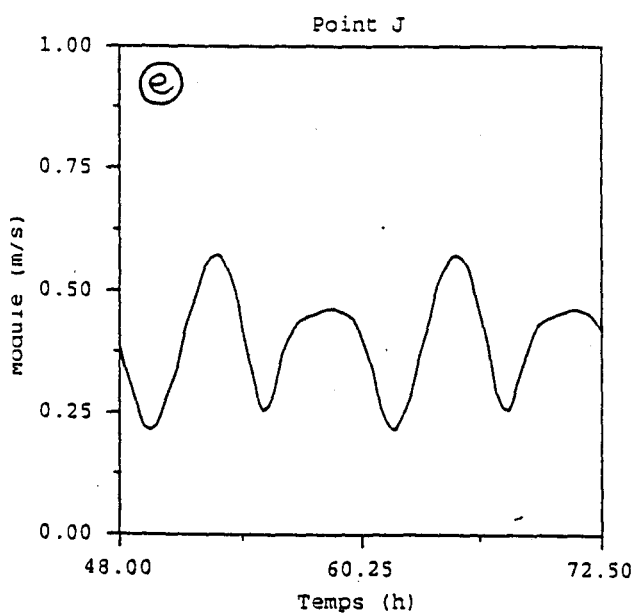
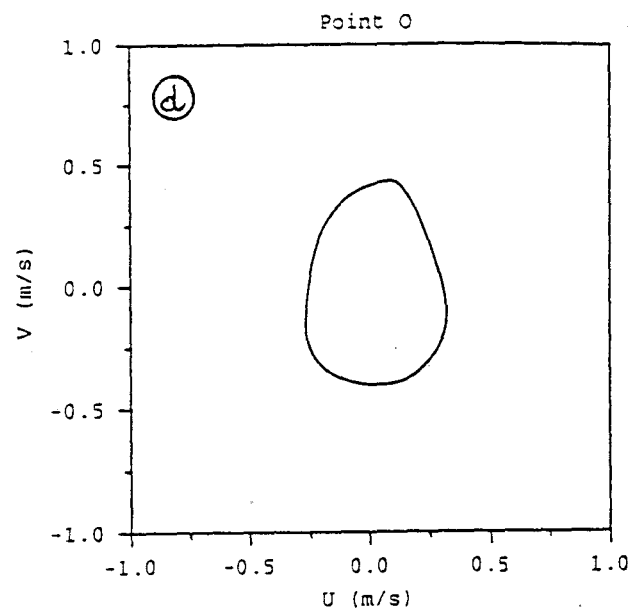
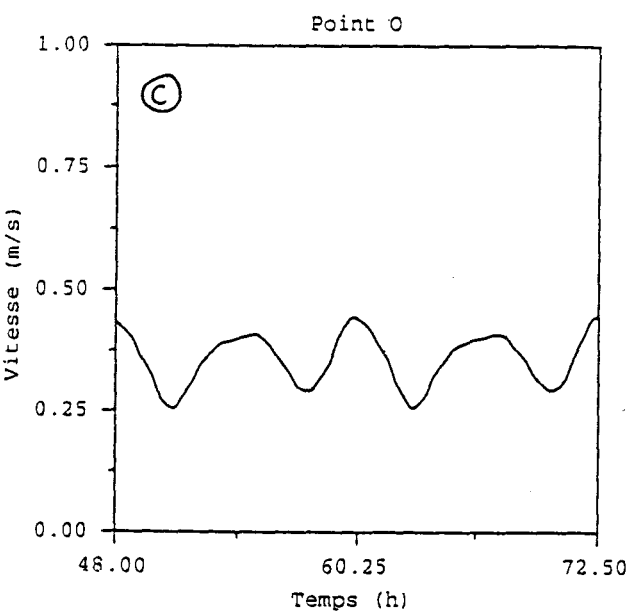
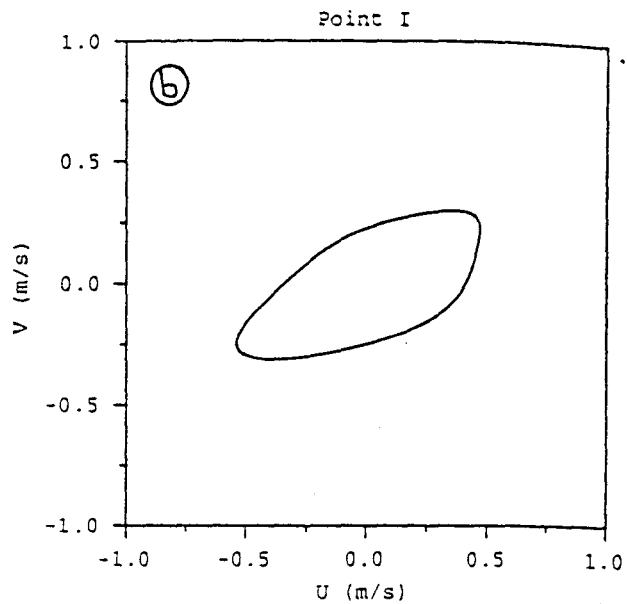
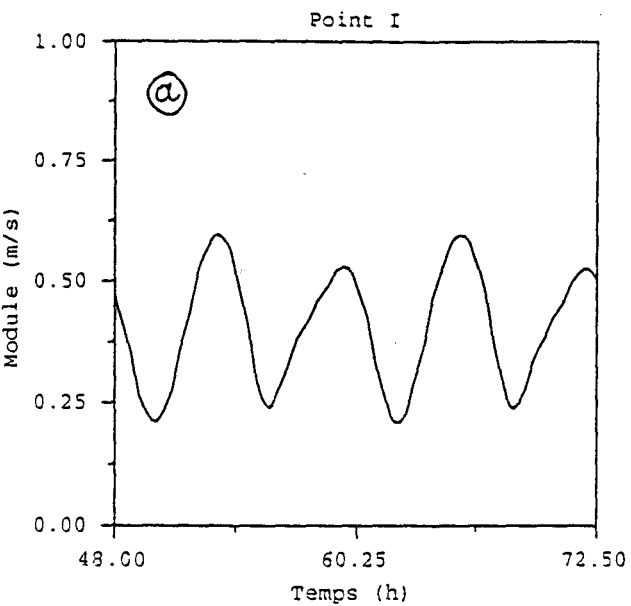


Figure 20 : Module et Ellipse de courant dans le secteur Marquenterre (coeff 70)

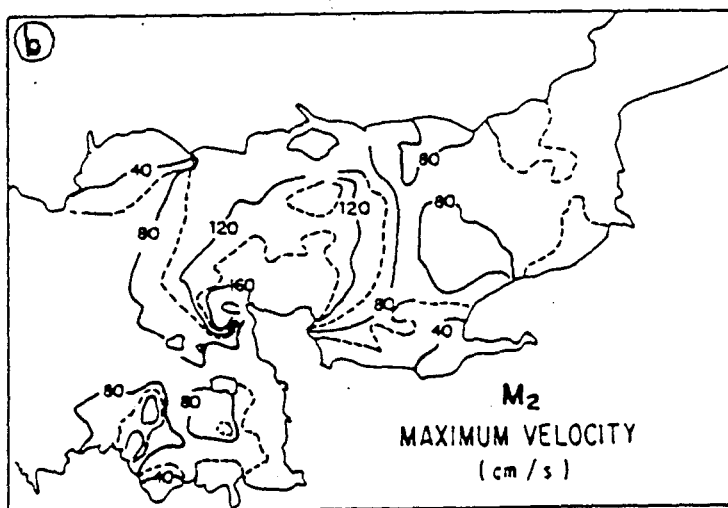
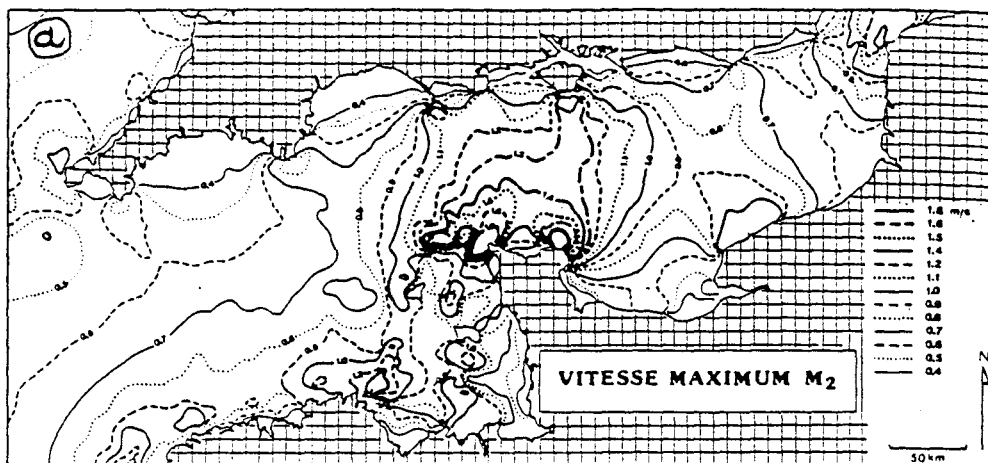
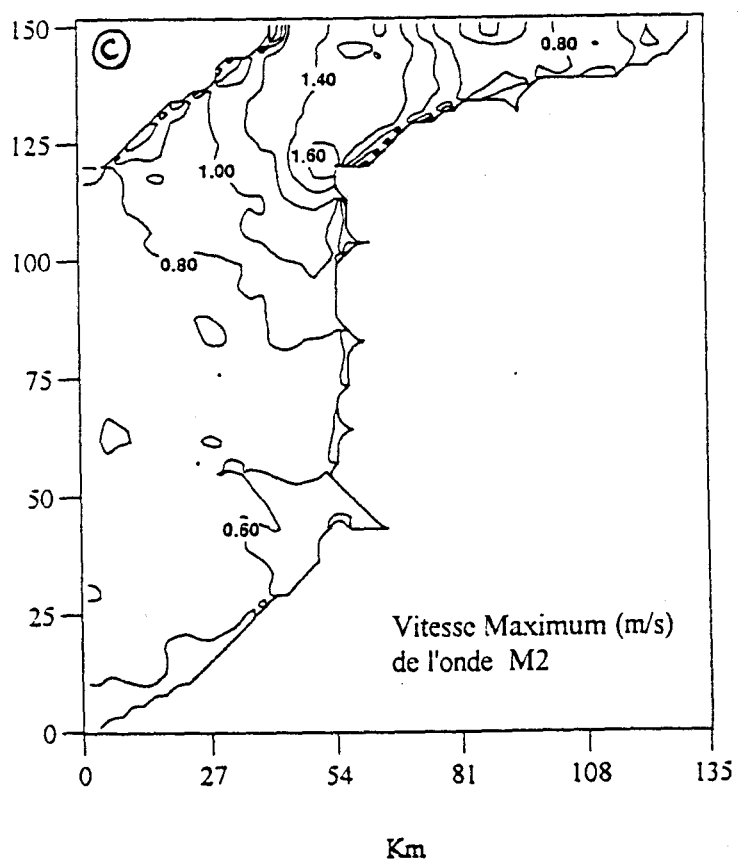


Figure 21 : a) Modèle de Salomon (1991)  
b) Modèle de LeProvost (1985)  
c) Présent Modèle



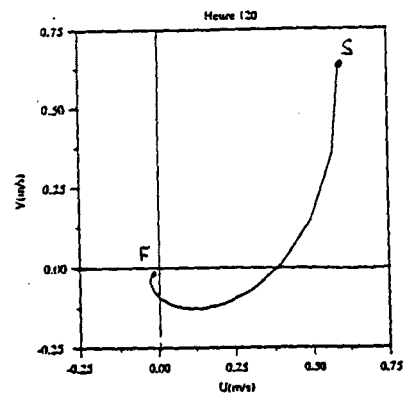
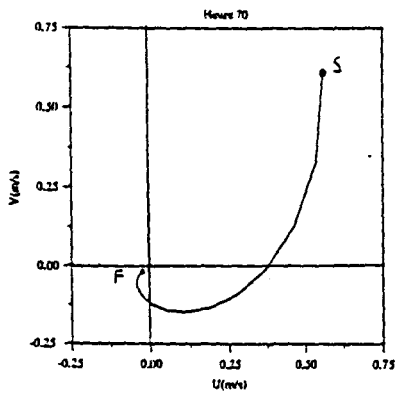
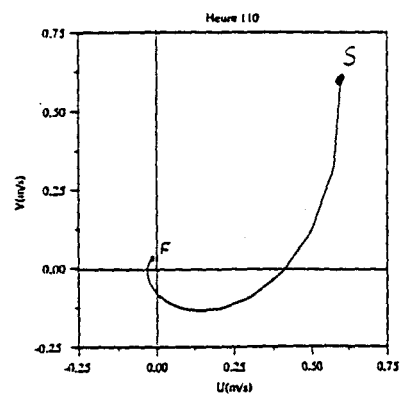
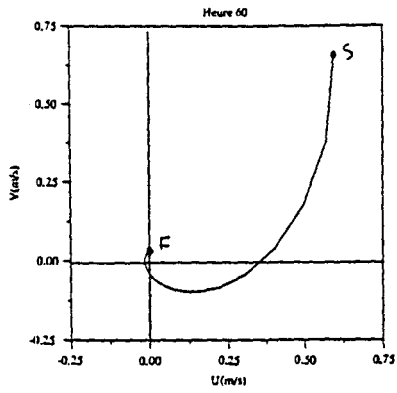
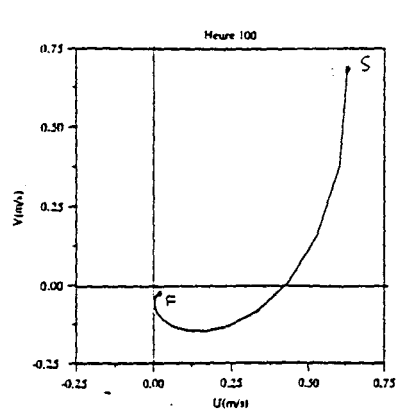
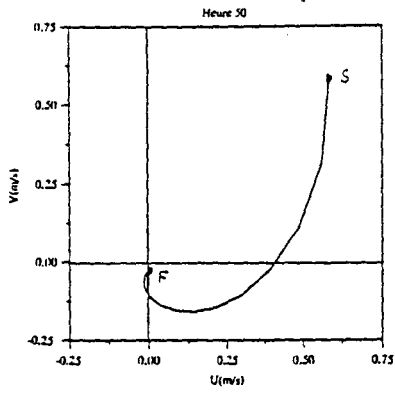
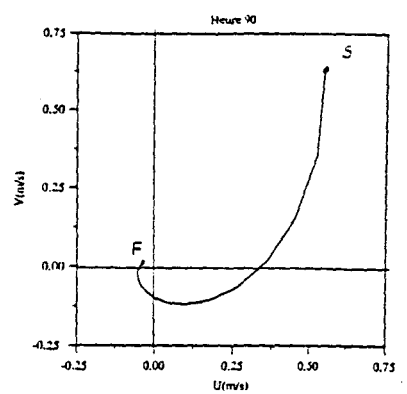
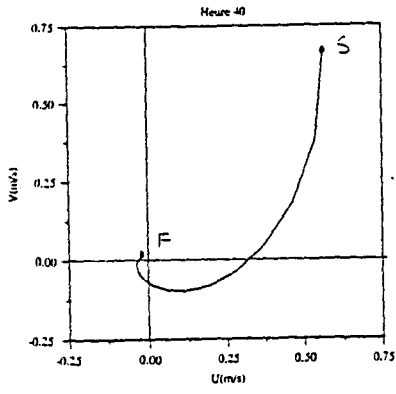
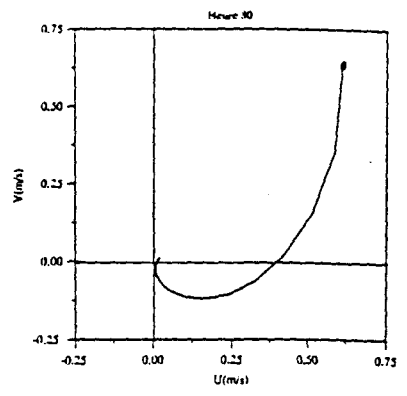
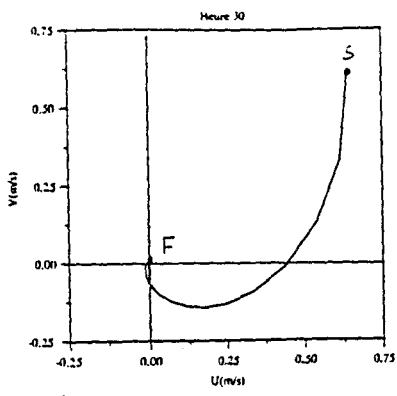
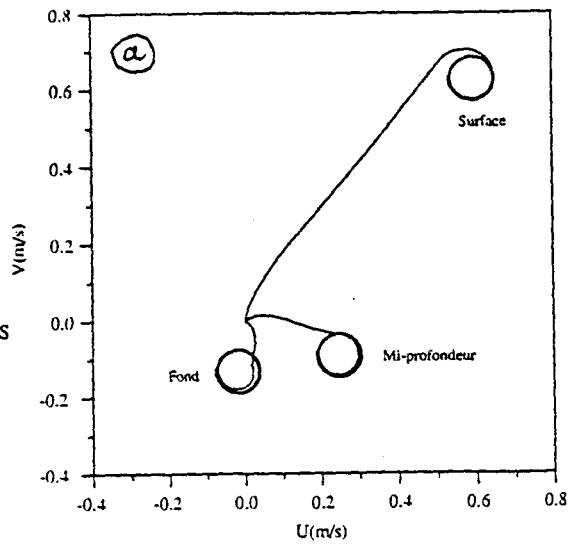


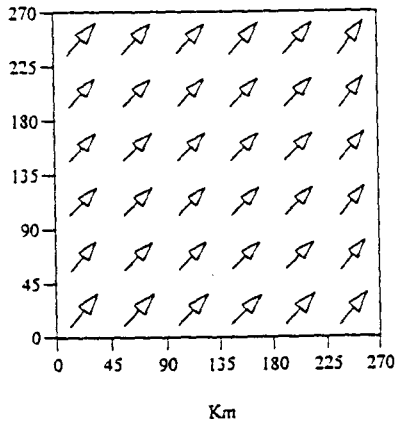
Figure 23 :  
Evolution de la spirale  
d'Ekman

S : surface  
F : fond

Figure 24.a : Trajectoire des particules

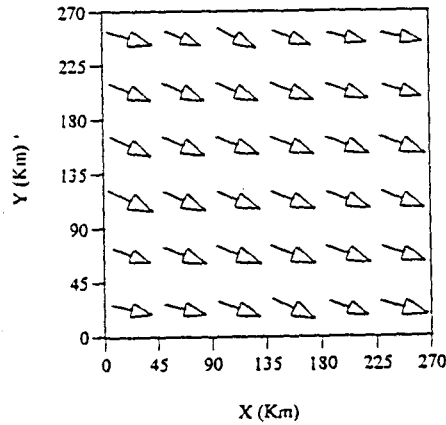


Courant de Surface



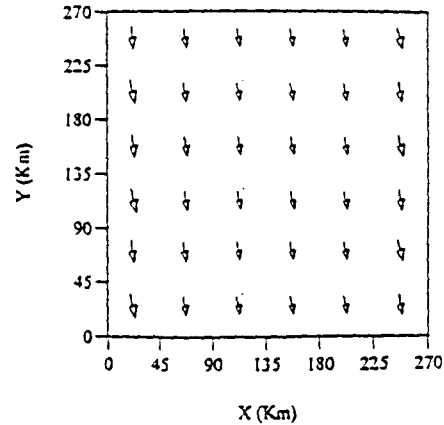
→ = 1.30

Courant à Mi-profondeur



→ = 0.51

Courant au Fond



→ = 0.38

Figure 24.b : Champ des vitesses

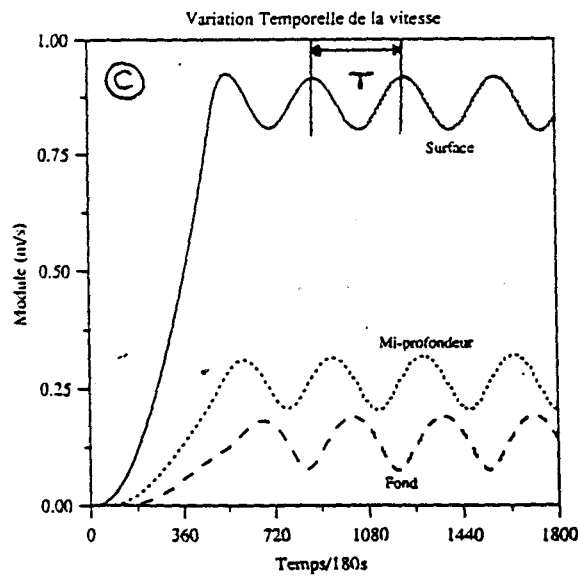


Figure 24.c : Oscillation d'inertie à différentes profondeurs

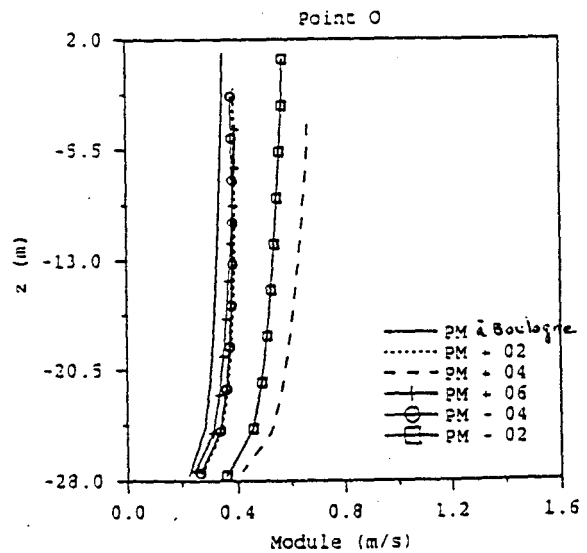
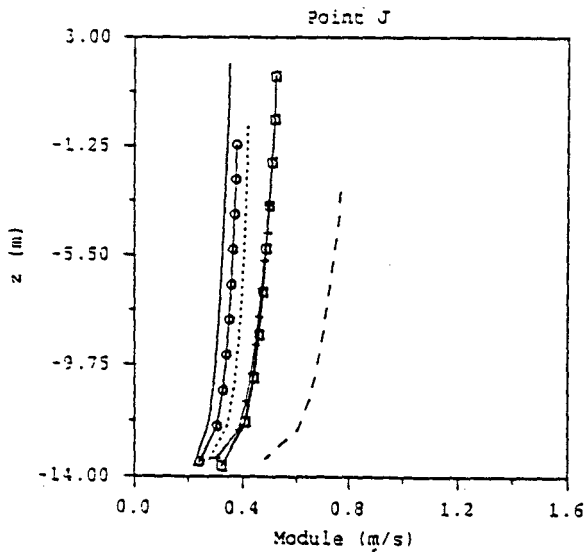
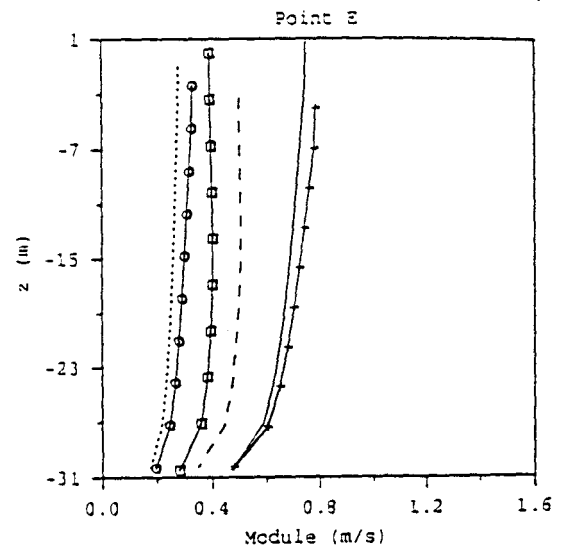
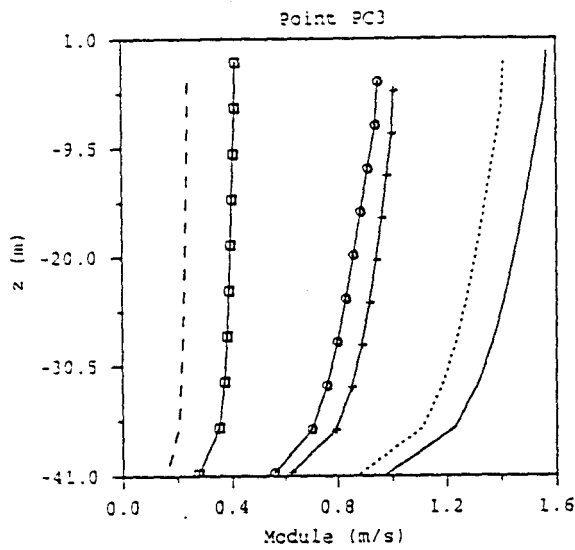
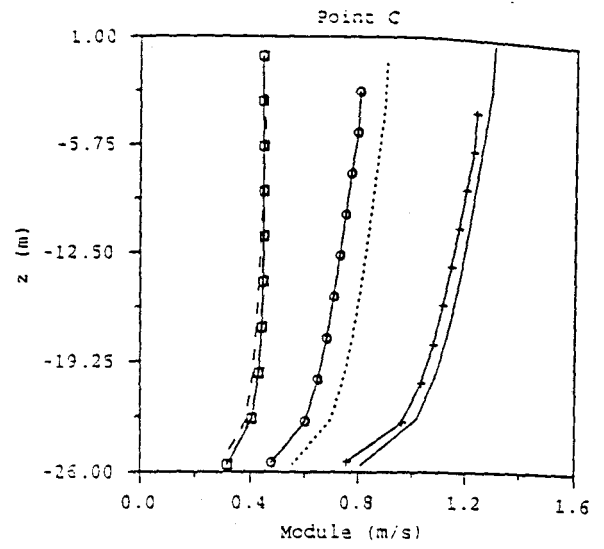
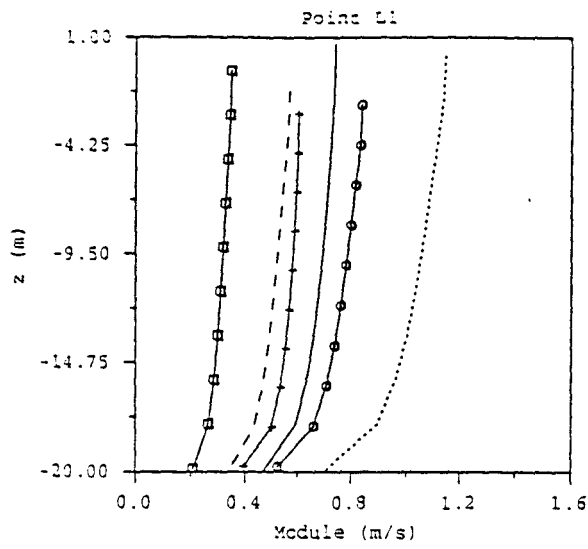


Figure 25.a : Profil vertical du module de la vitesse à différents points de la zone

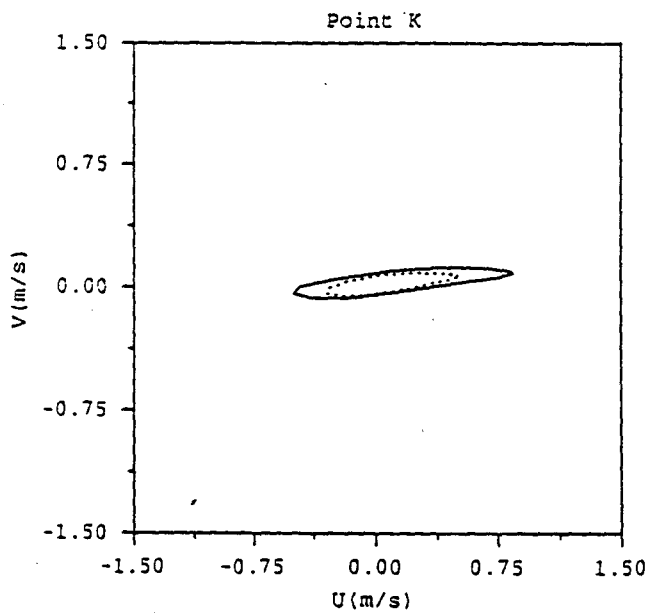
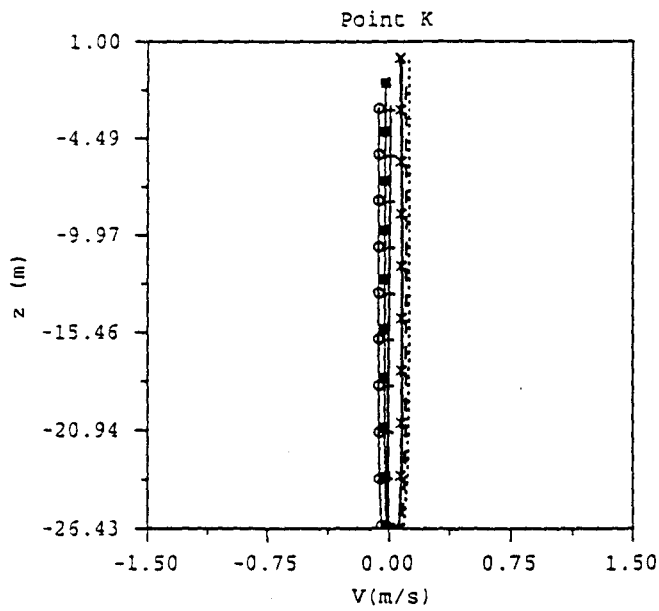
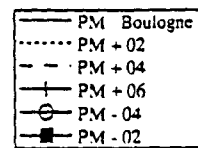
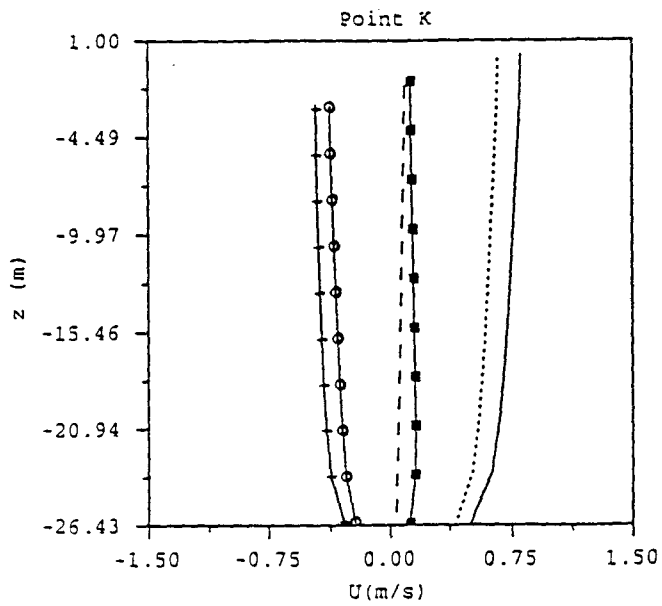


Figure 25.b : Secteur des Flandres maritimes

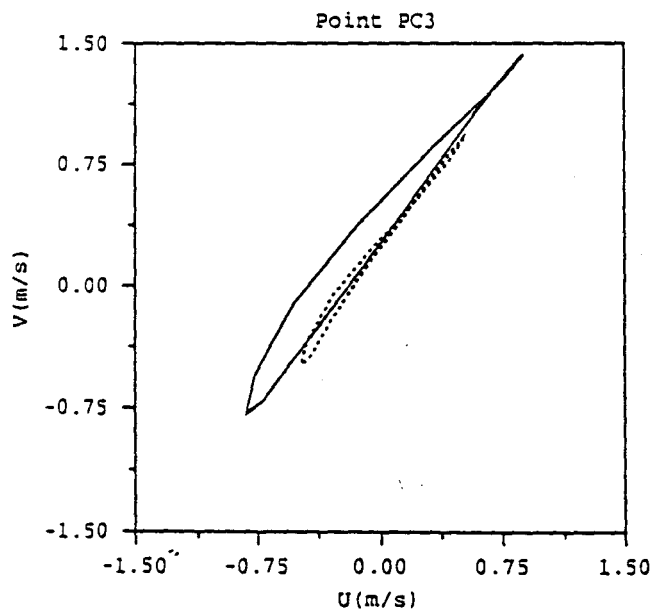
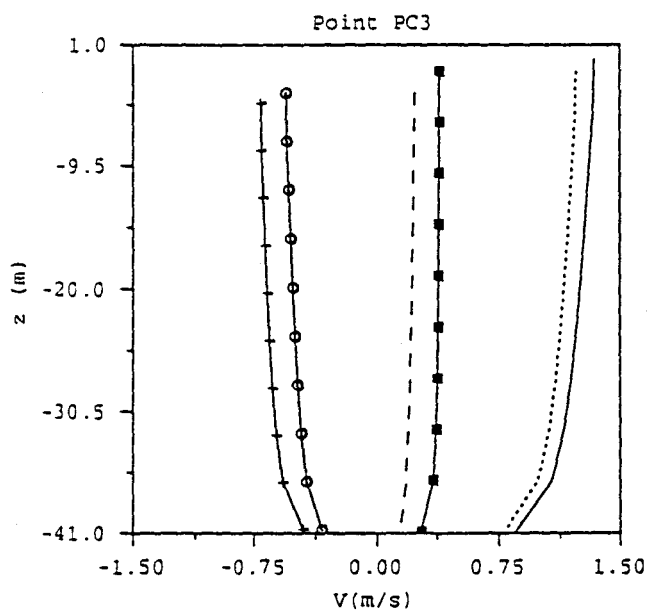
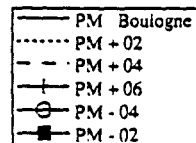
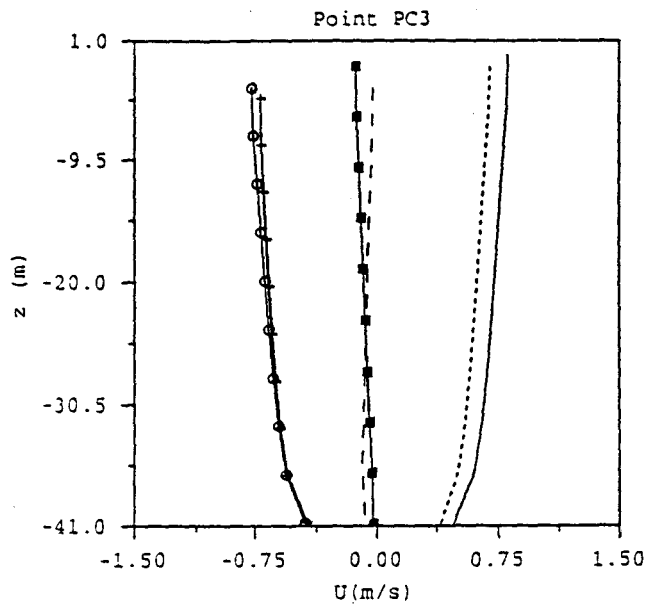


Figure 25.c : Secteur du détroit de Pas-de-Calais



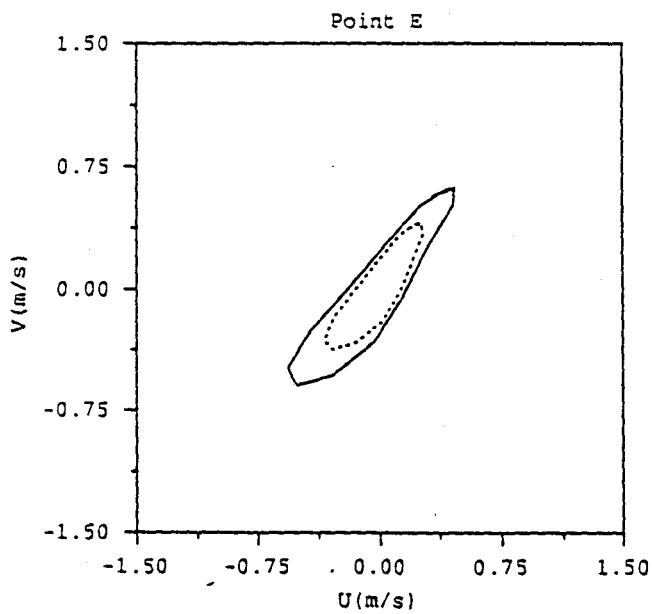
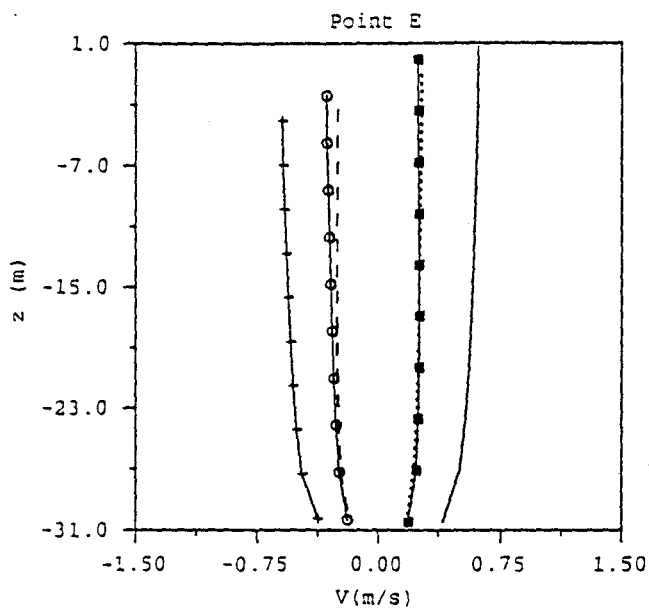
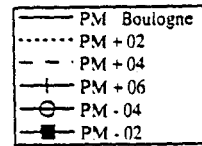
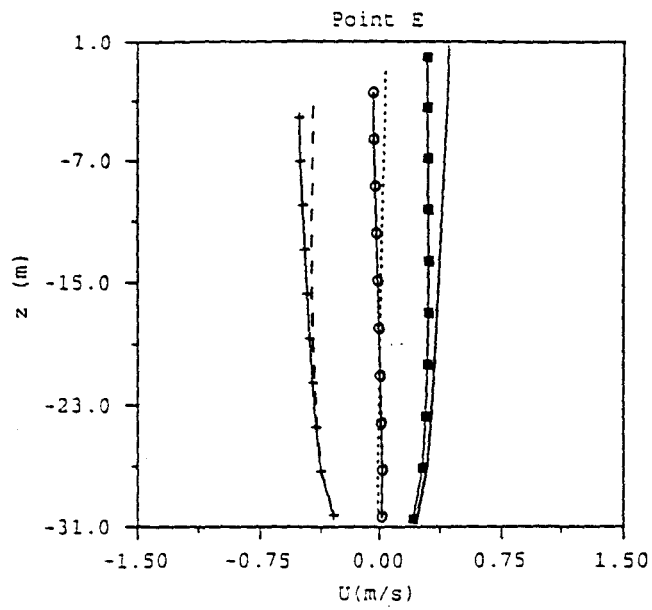


Figure 25.d : Secteur du Boulonnais

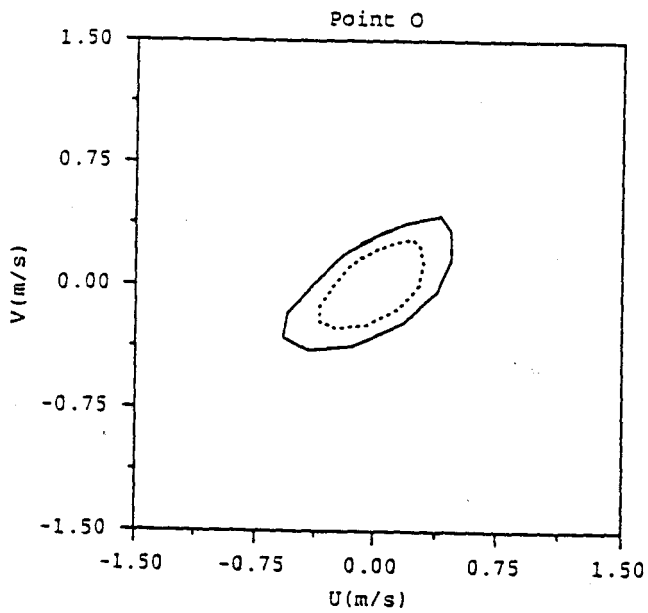
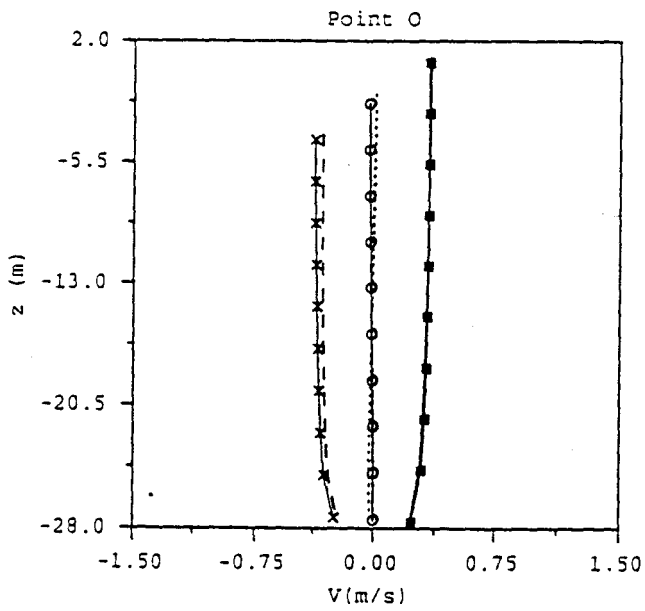
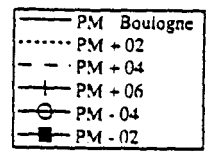
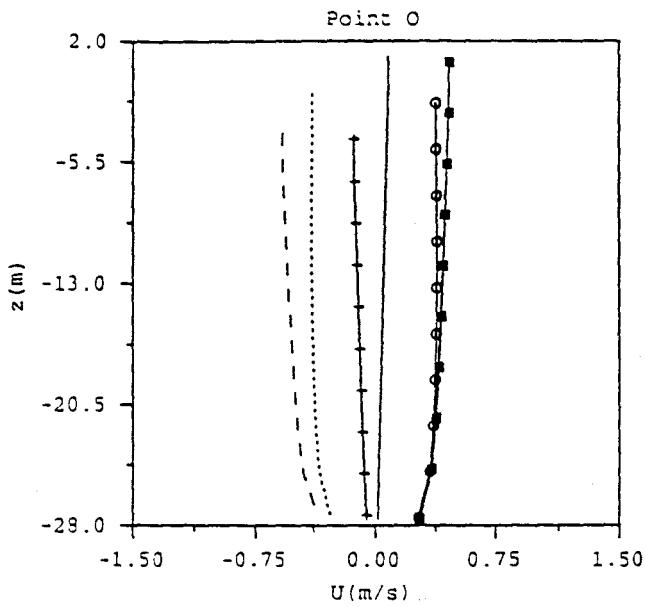


Figure 25.e : Secteur du Marquenterre

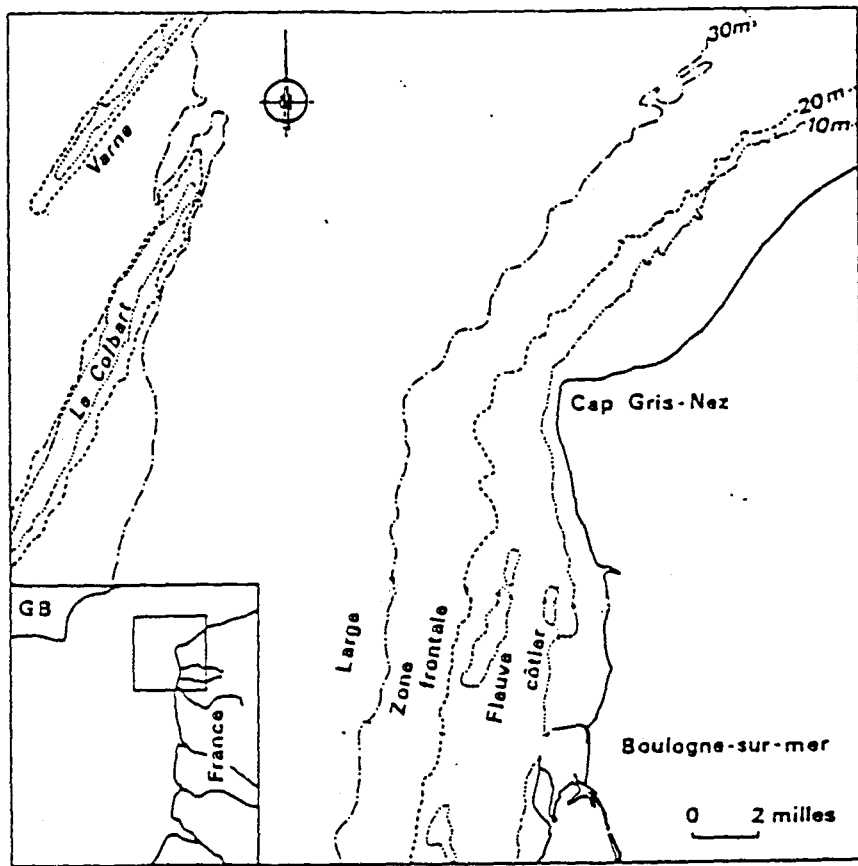


Figure 26.a : Localisation du fleuve côtier et de la zone frontale (Brunet 1994)

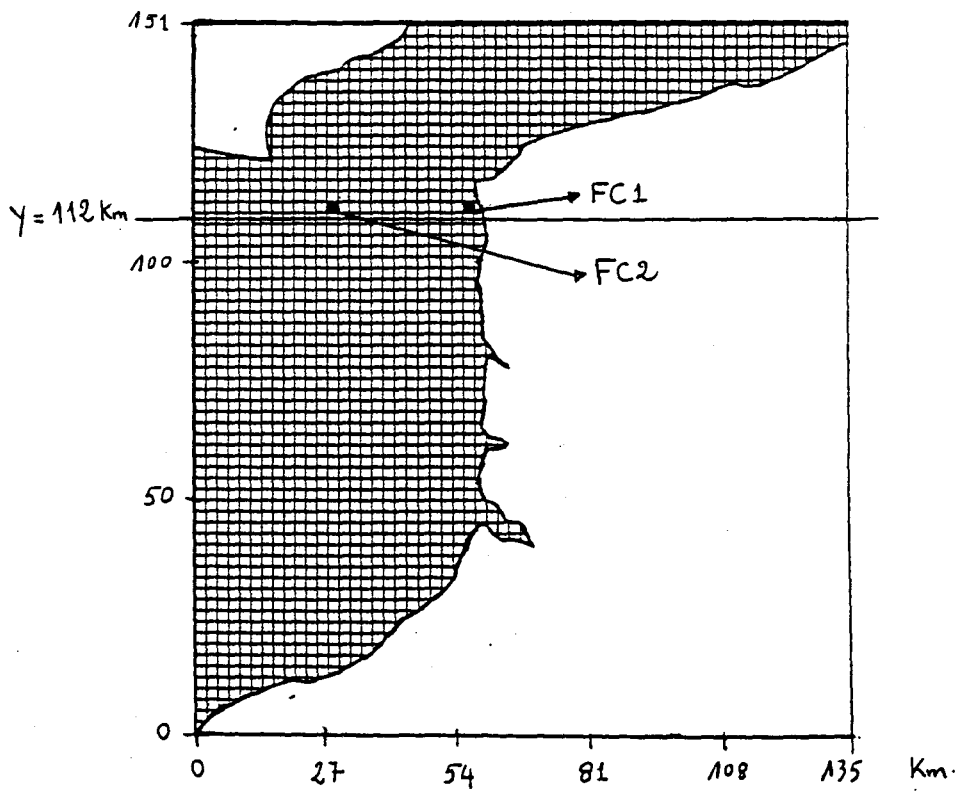


Figure 26.b : Localisation de la coupe transversale et des points de sortie des résultats

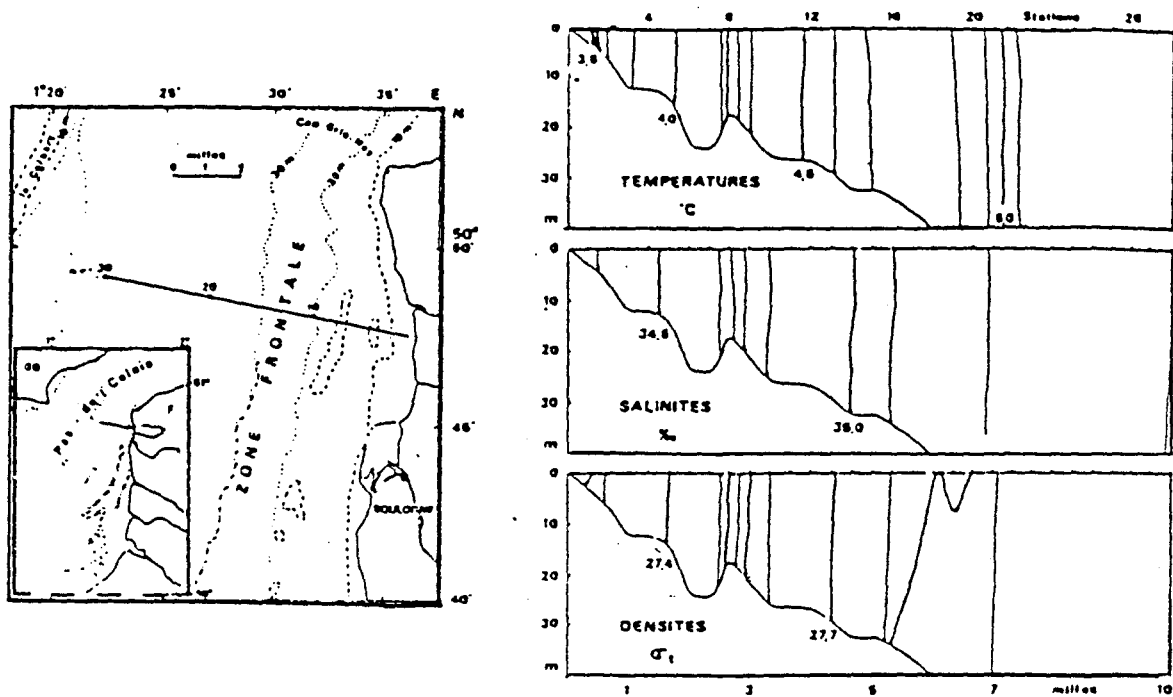


Figure 27 : Hydrologie de la radiale côte-large le 14 mars 1987  
(coeff 77, entre PM à Boulogne et PM+04) (Brylinski et al. 1990)

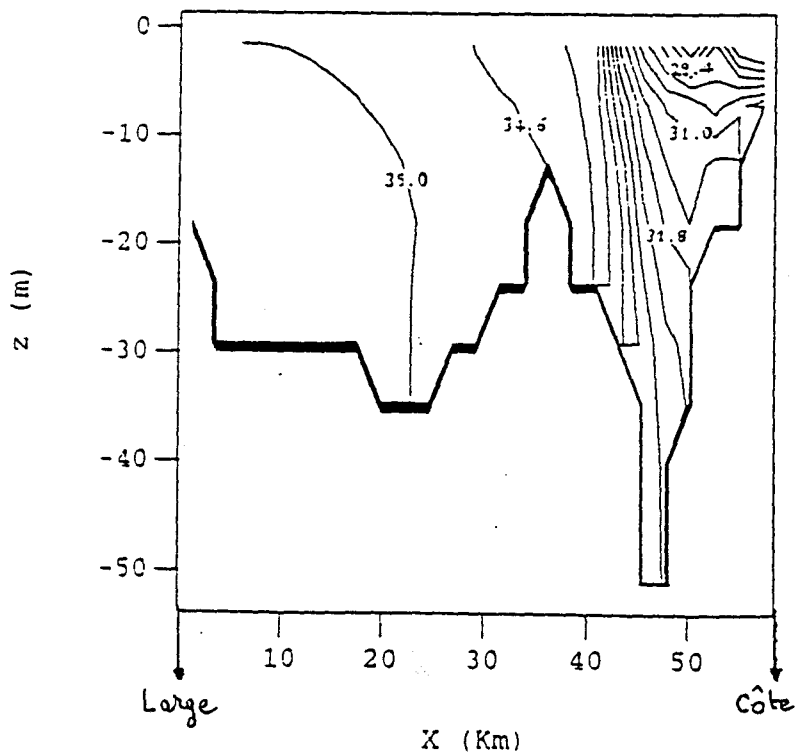


Figure 28.a : Coupe transversale ( $y=112$  Km) de Salinité à PM+04 (coeff 70)  
(Modèle à zéro équation)

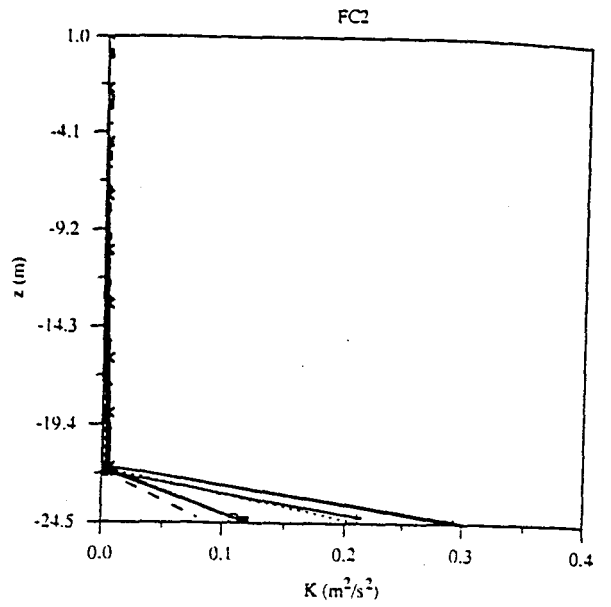
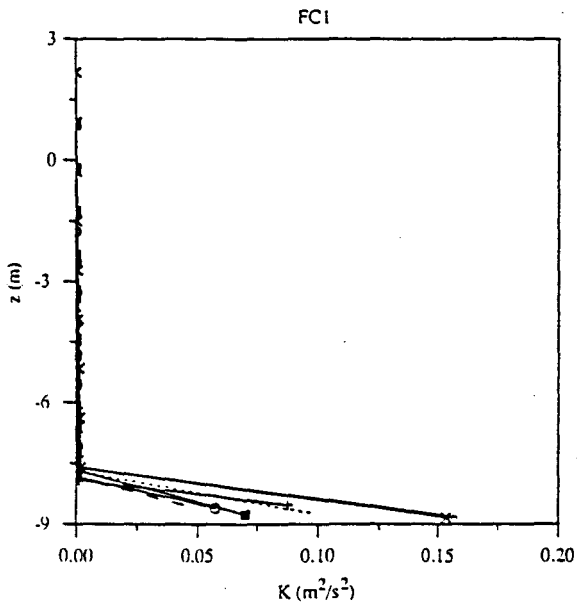


Figure 28.b.1 : Profils de l'Energie Cinétique Turbulente (Modèle à zéro équation)

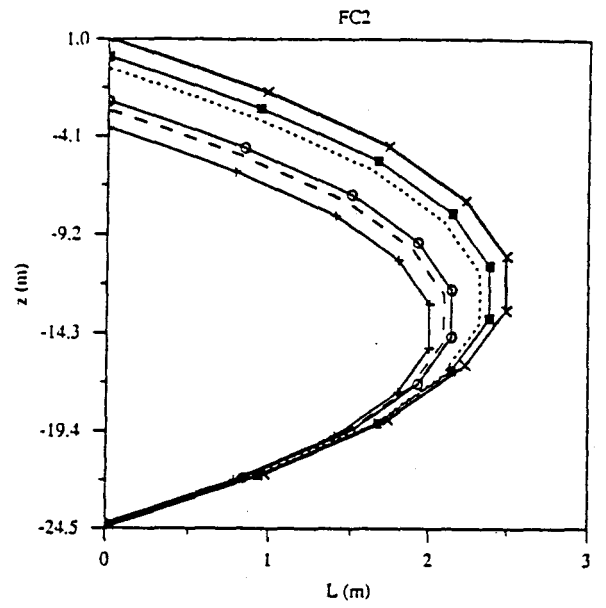
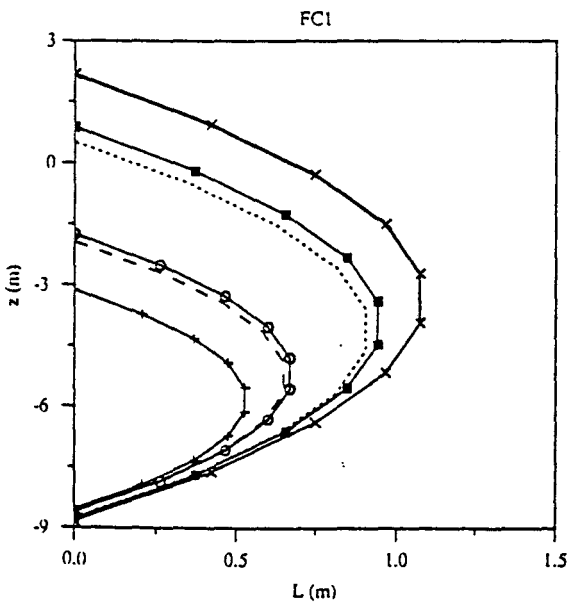
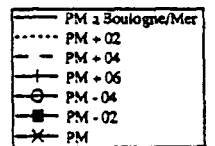


Figure 28.b.2 : Profils de la Longueur de Mélange (Modèle à zéro équation)



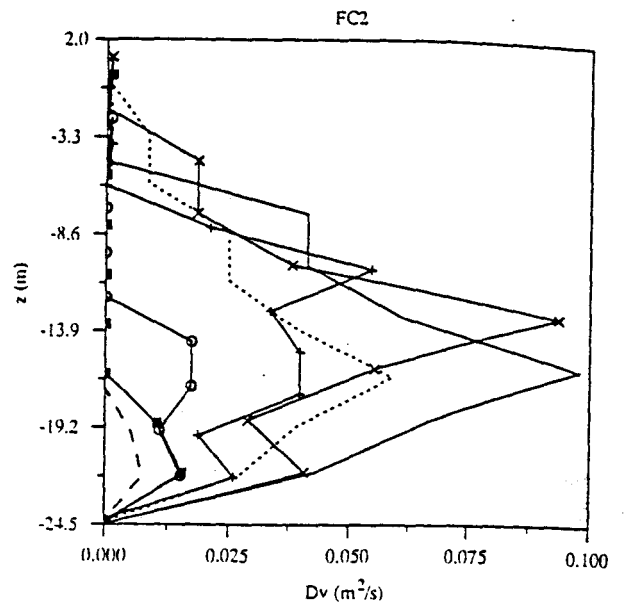
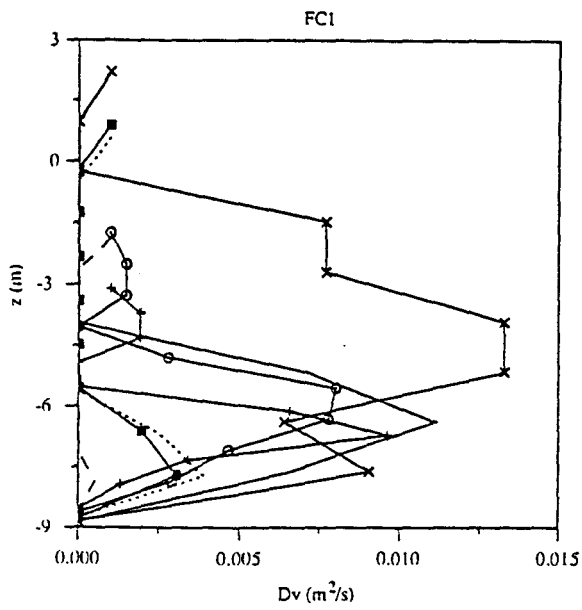


Figure 28.c.1 : Profils de Diffusivité Turbulente (Modèle à zéro équation)

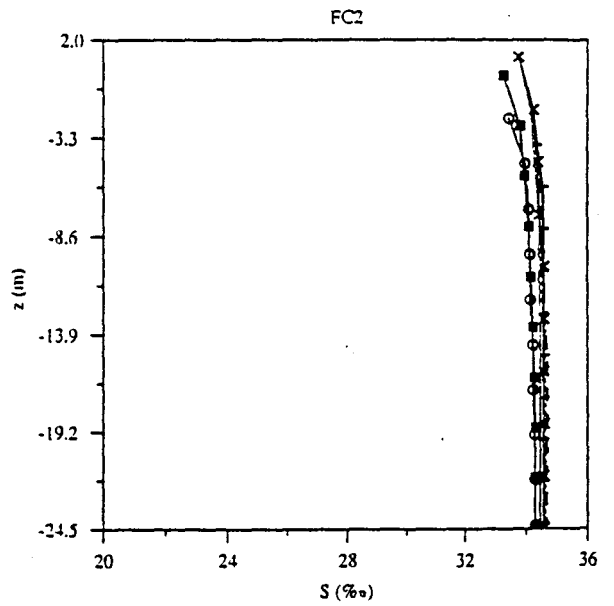
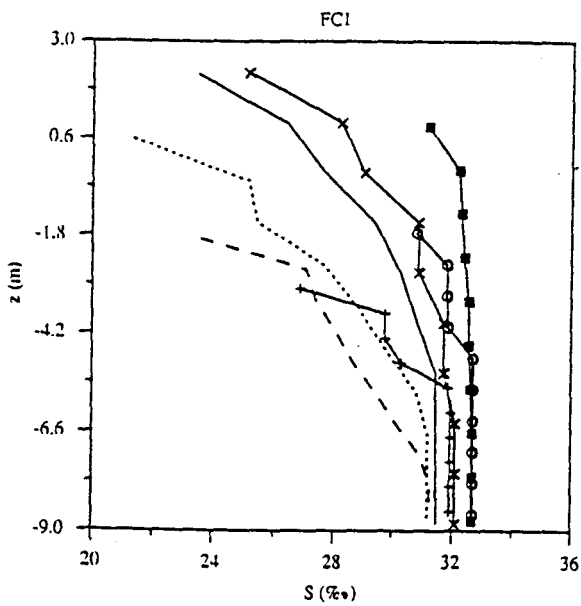


Figure 28.c.2 : Profils de Salinité (Modèle à zéro équation)

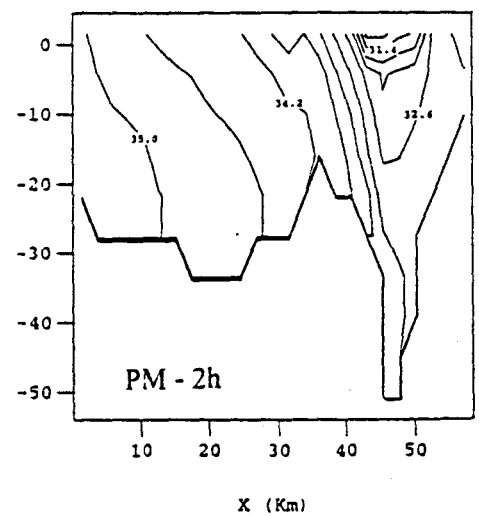
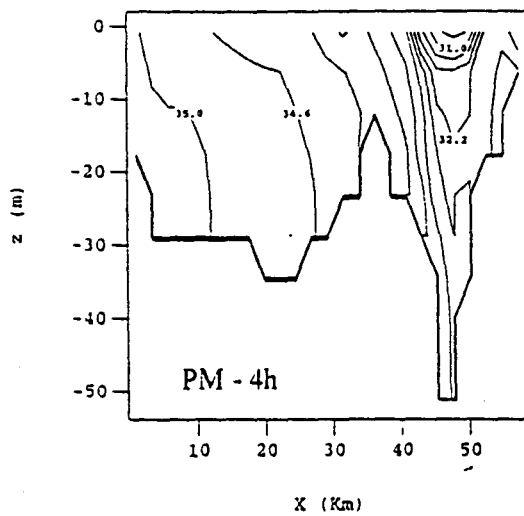
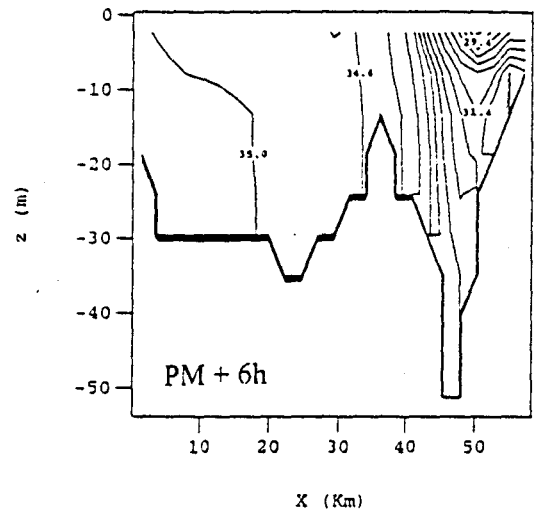
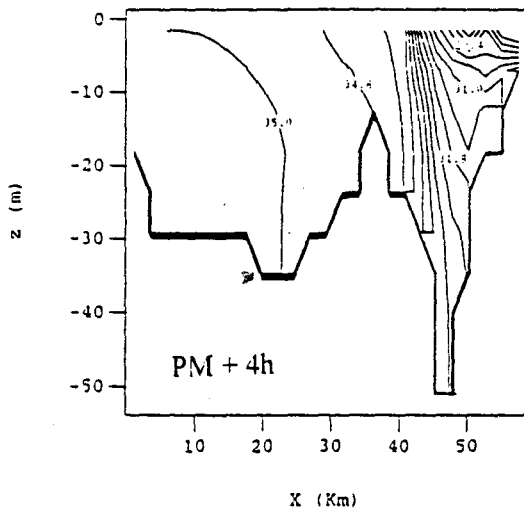
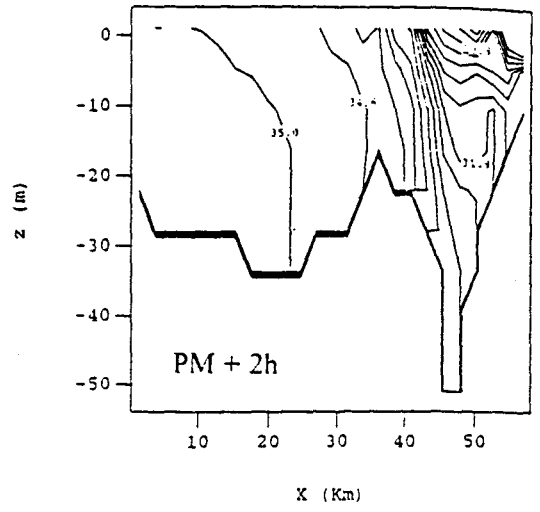
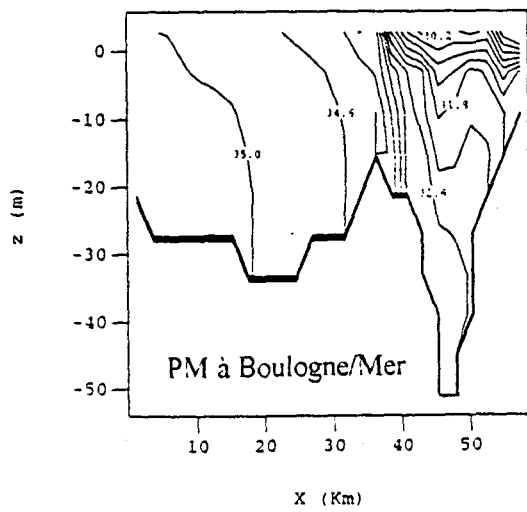


Figure 29 : Evolution de la Salinité ( $y=112$  Km) (Modèle à zéro équation)

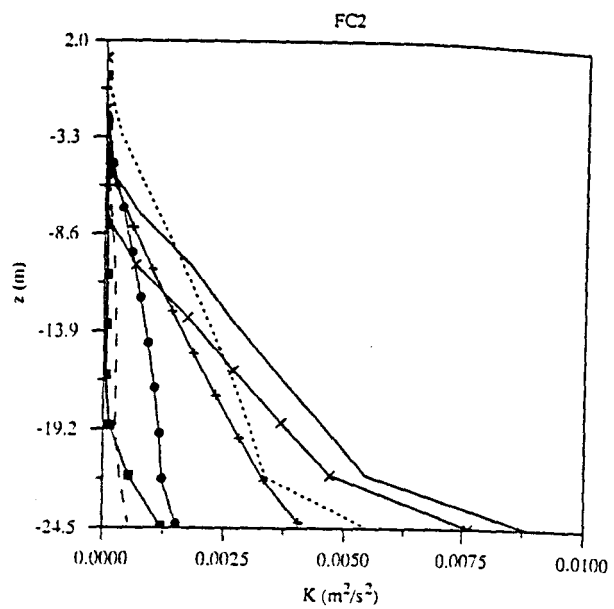
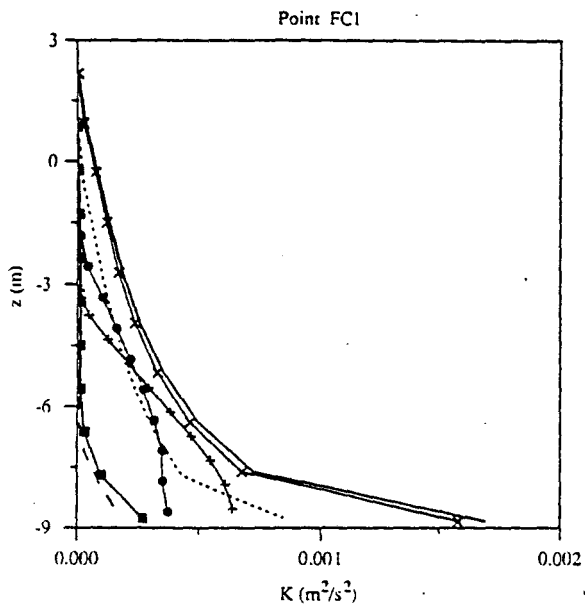


Figure 30.a.1 : Profils de l'Energie Cinétique Turbulente (Modèle K-L)

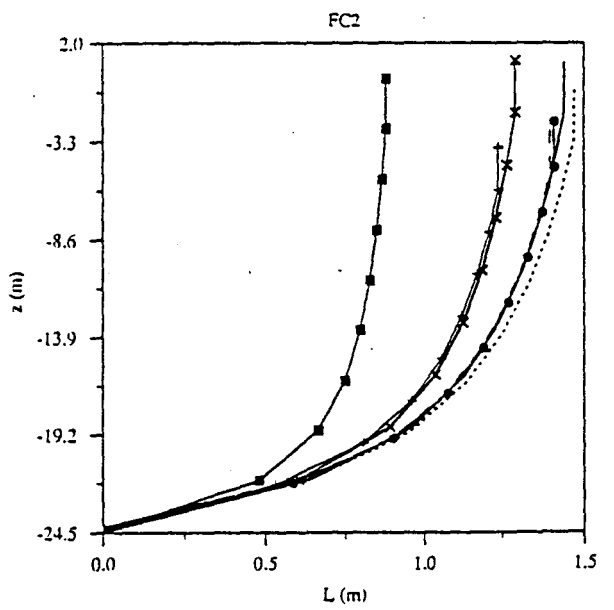
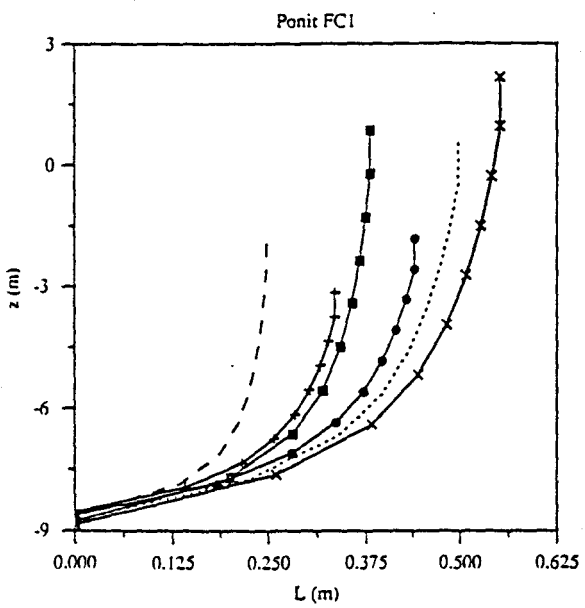
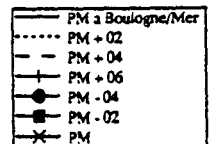


Figure 30.a.2 : Profils de la Longueur de Mélange (Modèle K-L)





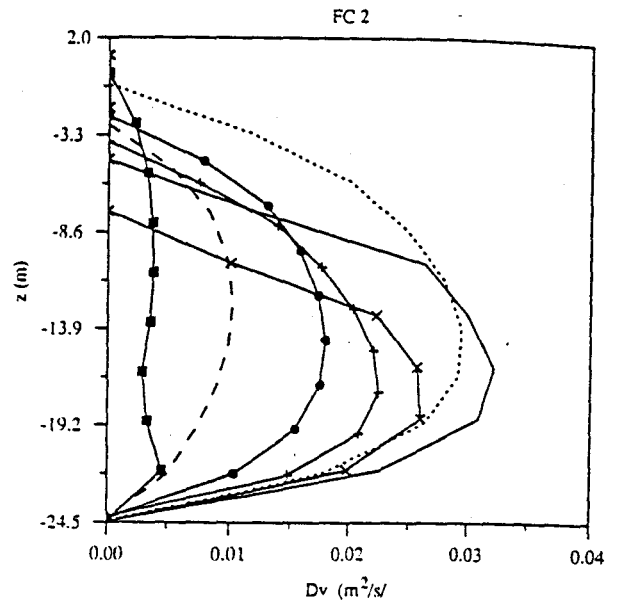
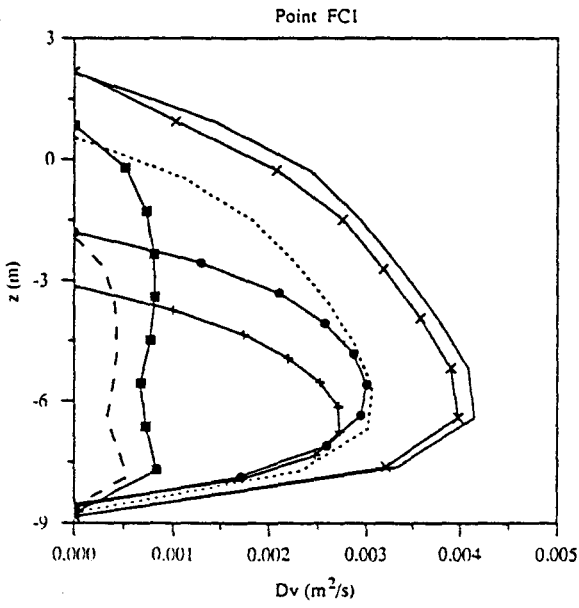


Figure 30.b.1 : Profils de Diffusivité Turbulente (Modèle K-L)

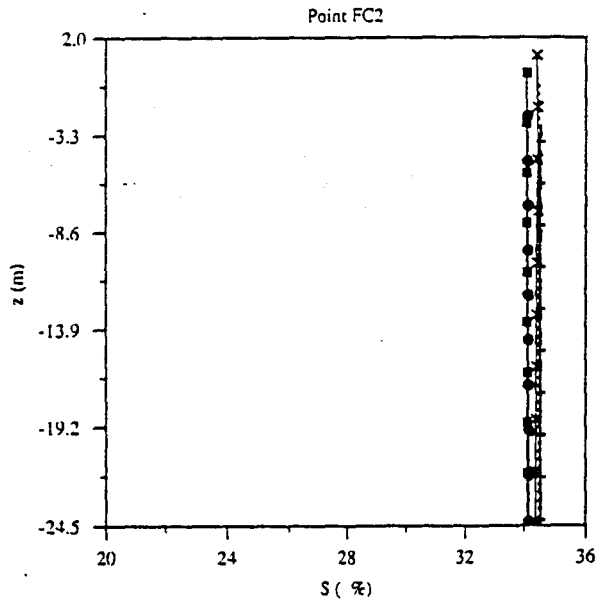
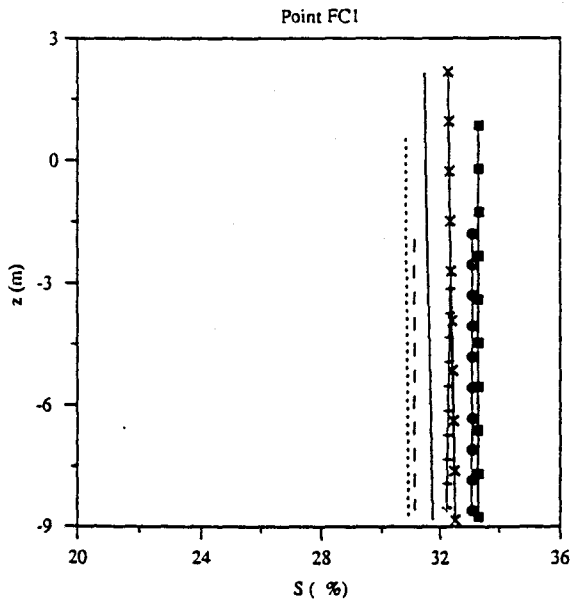


Figure 30.b.2 : Profils de Salinité (Modèle K-L)

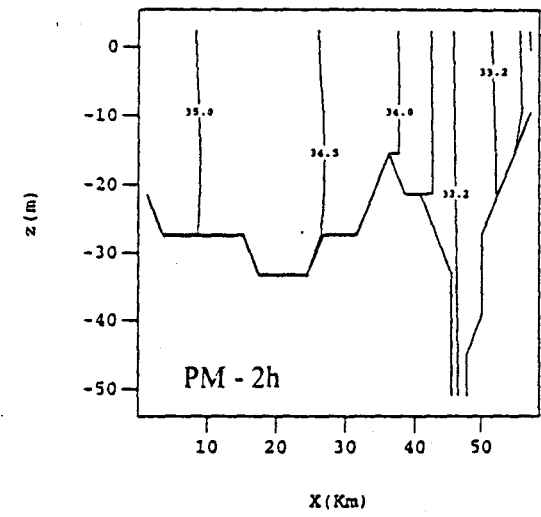
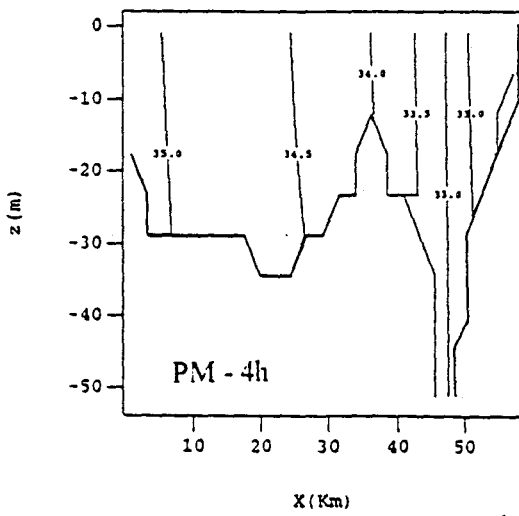
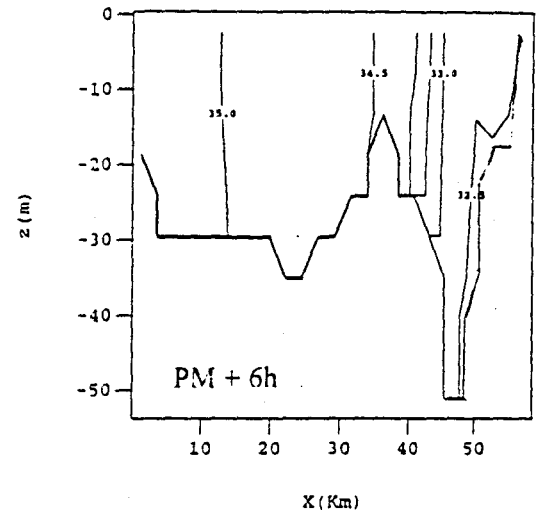
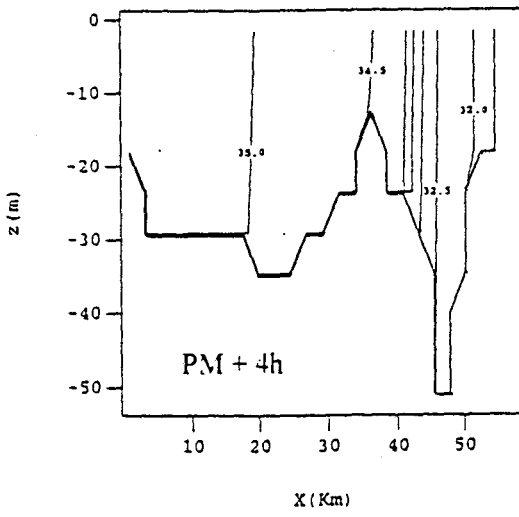
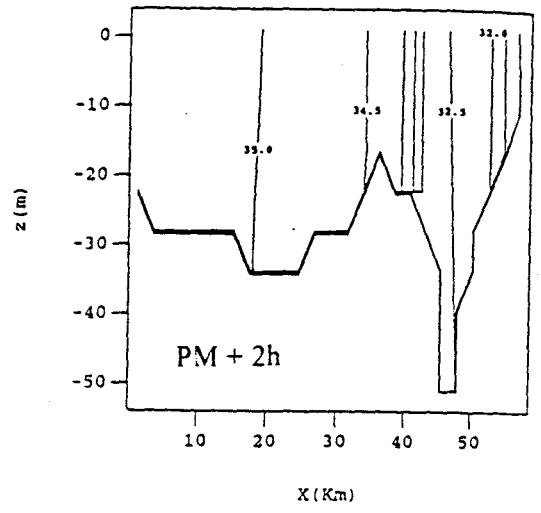
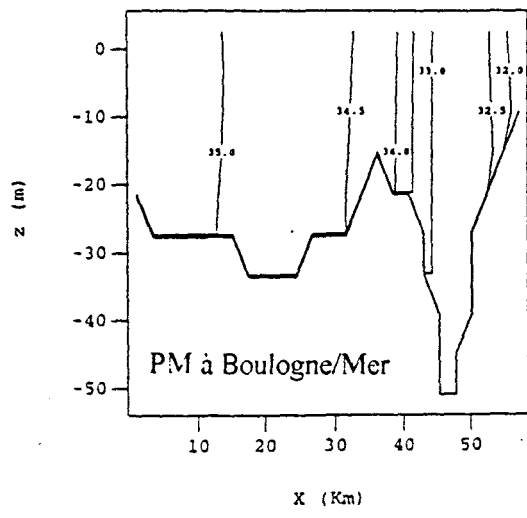


Figure 30.c : Evolution de la Salinité ( $y=112$  Km) (Modèle K-L)

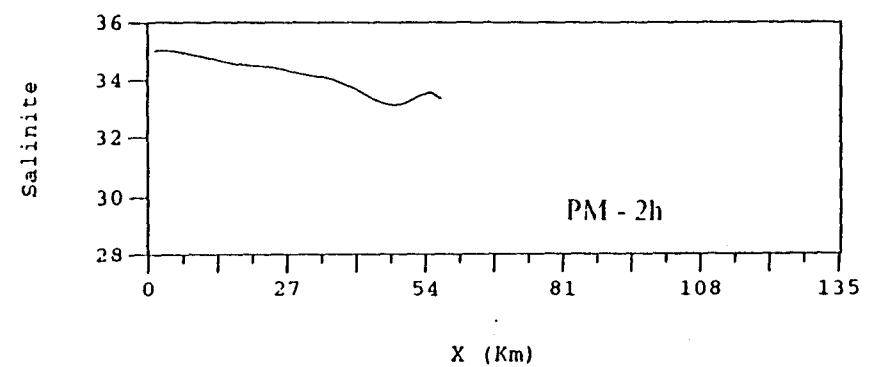
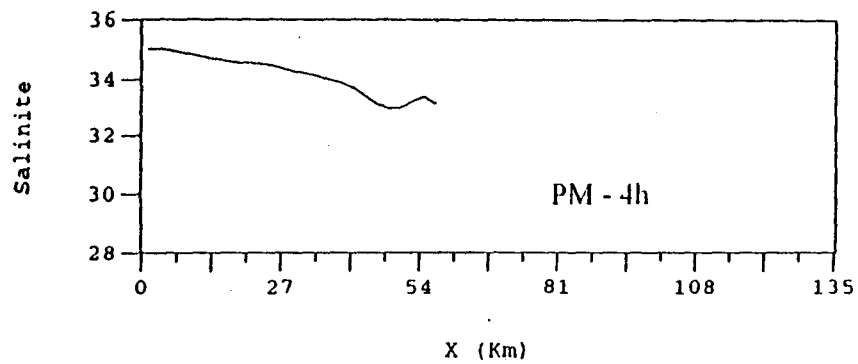
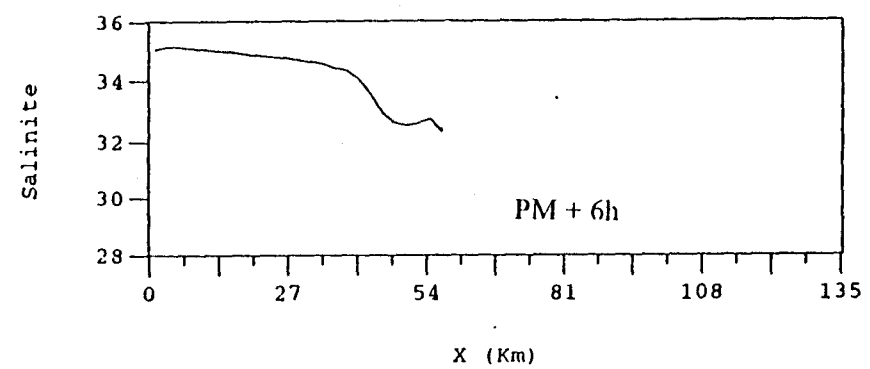
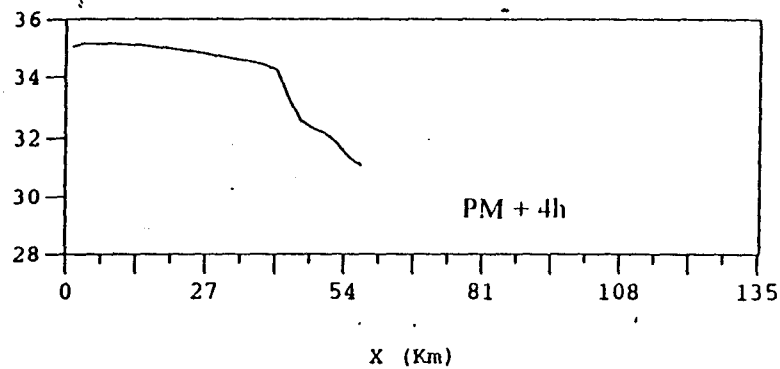
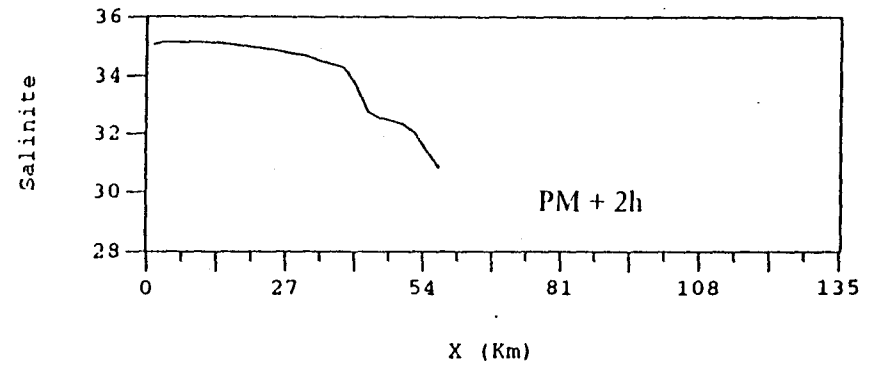
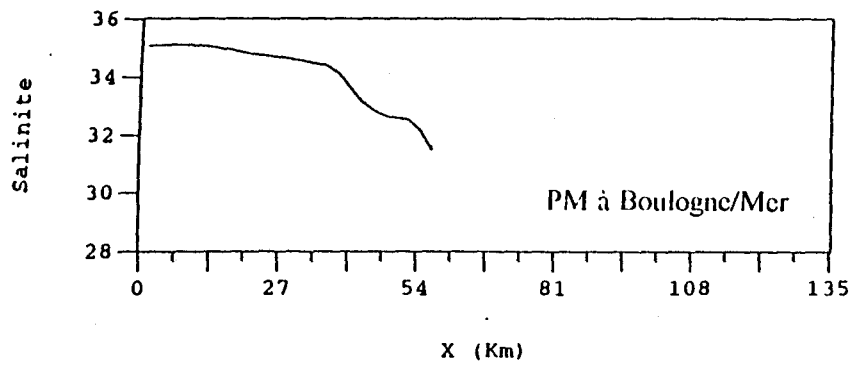


Figure 31 : Profil côte-large de la Salinité de surface (y=112 Km)

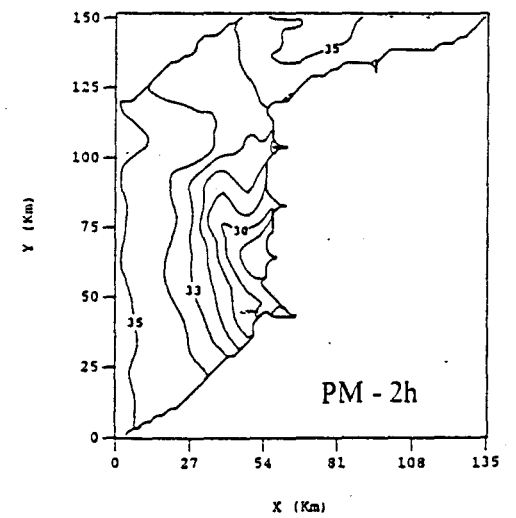
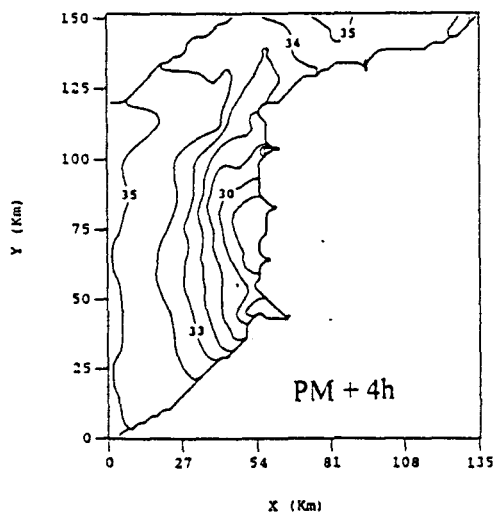
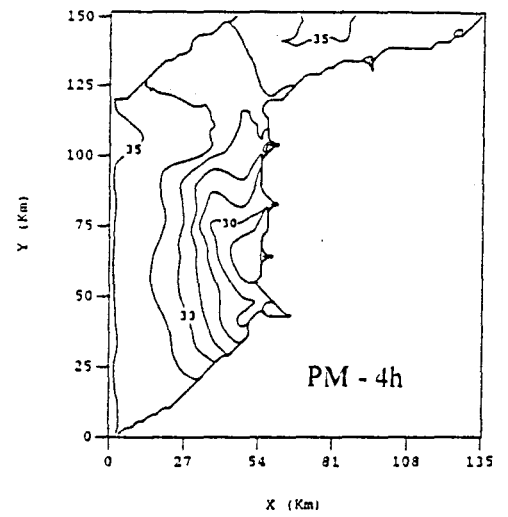
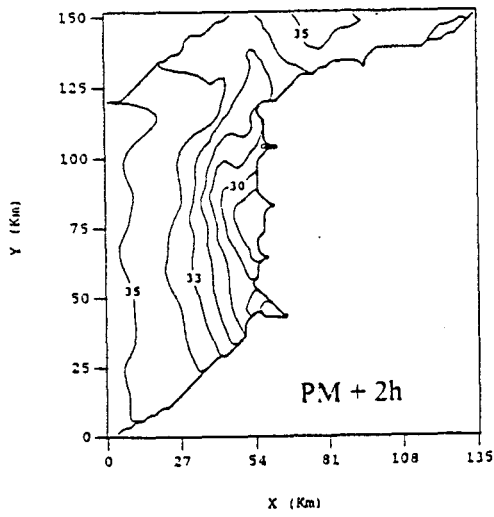
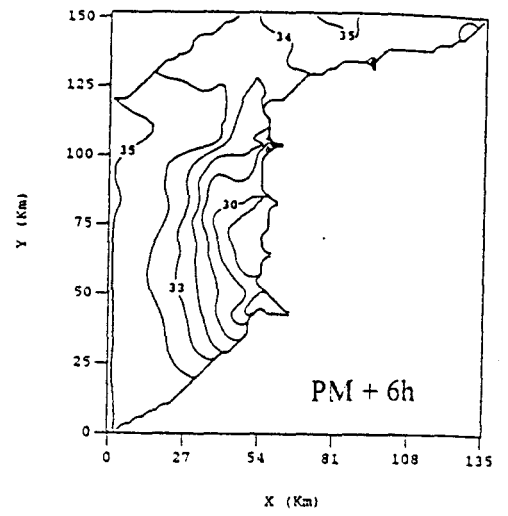
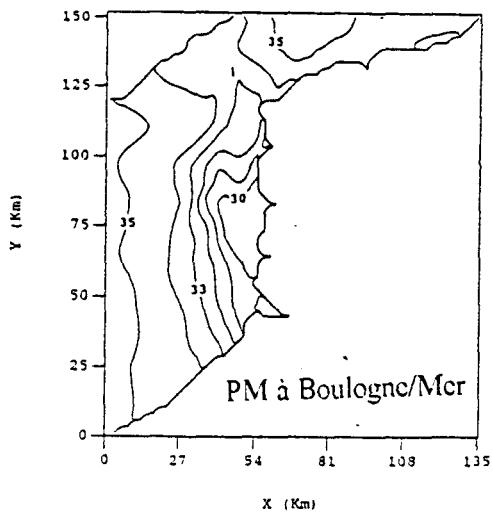


Figure 32 : Distribution spatiale de la Salinité de surface au cours d'un cycle de marée

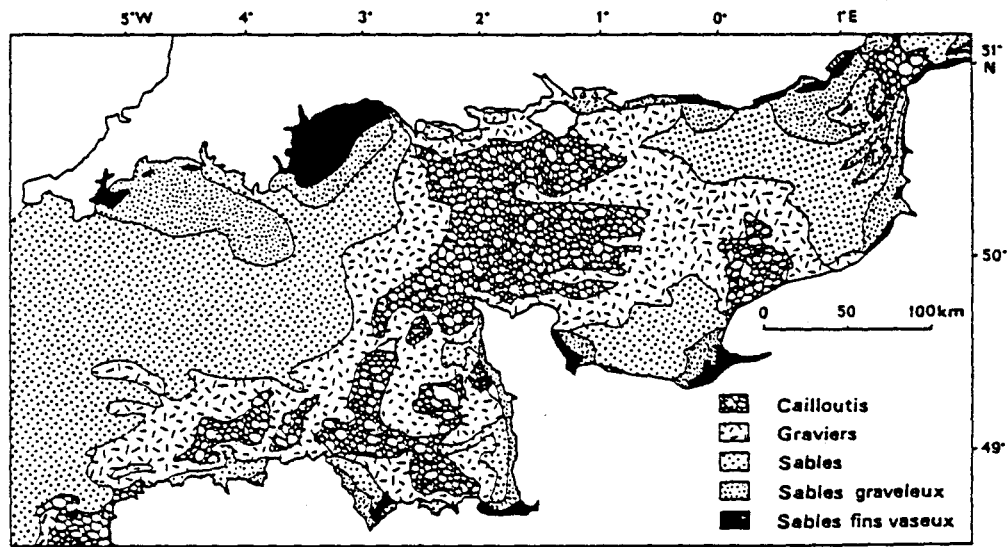


Figure 33.a : Distribution des sédiments superficiels dans la Manche (d'après Larsonneur *et al.*, 1982).

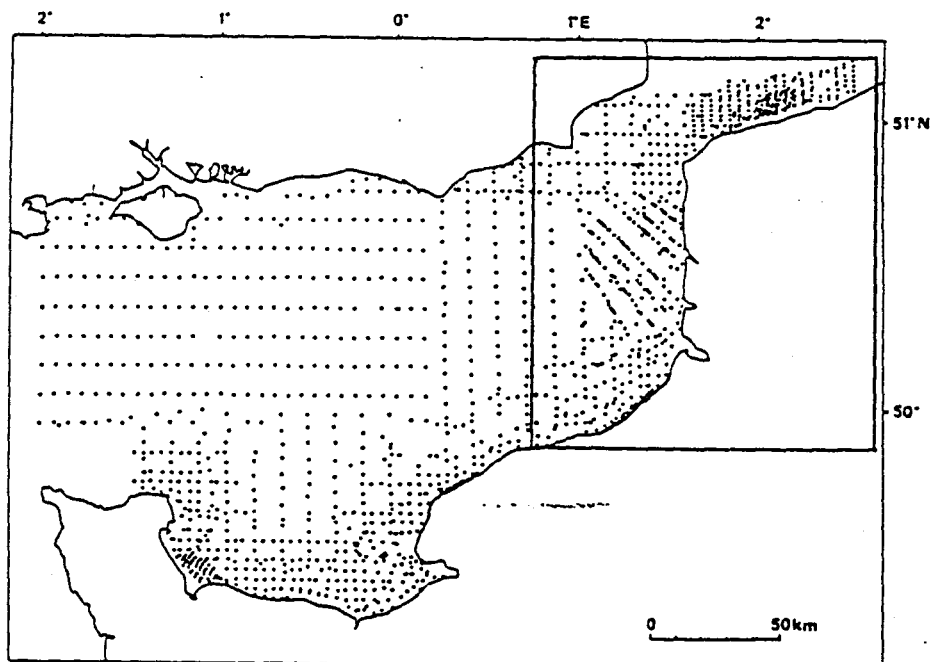


Figure 33.b : Localisation des sites de prélèvement en Manche Orientale du programme "RCP Benthos de la Manche" (1971 à 1976).

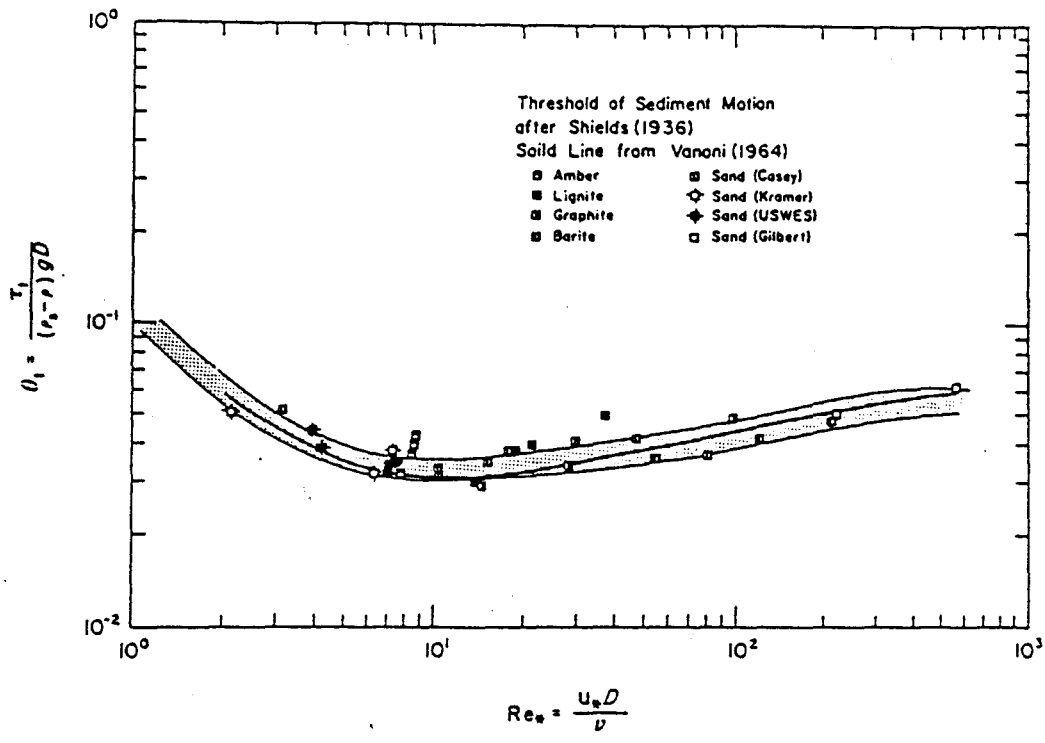


Figure 34.a : The original Shields threshold curve of the grain Reynolds number  $Re_*$  versus the Shields threshold criterion  $\theta_t$ . The heavy solid line was added by later investigators.

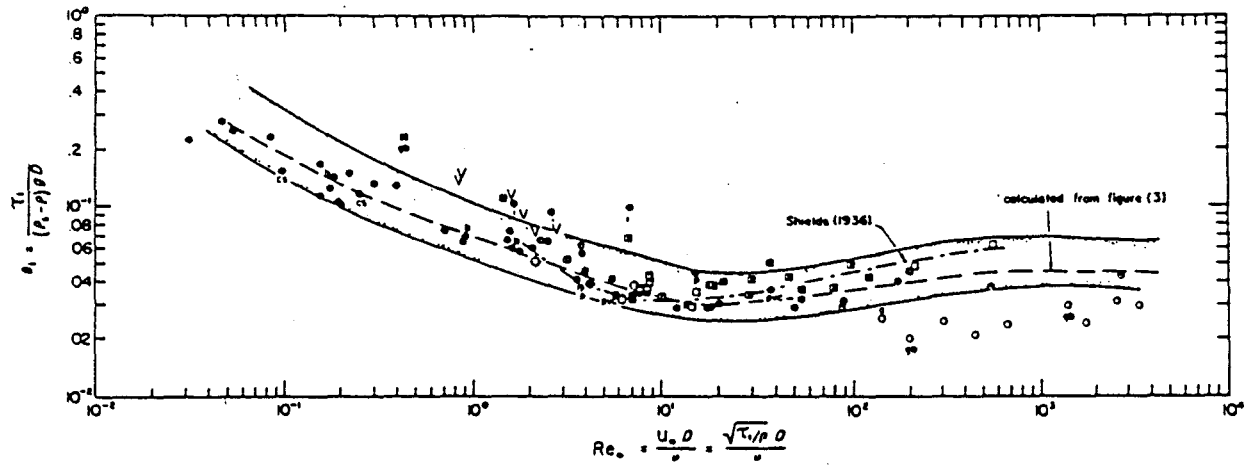


Figure 34.b : The proposed modified Shields curve of  $\theta_t$  versus  $Re_*$  based on additional carefully selected data.

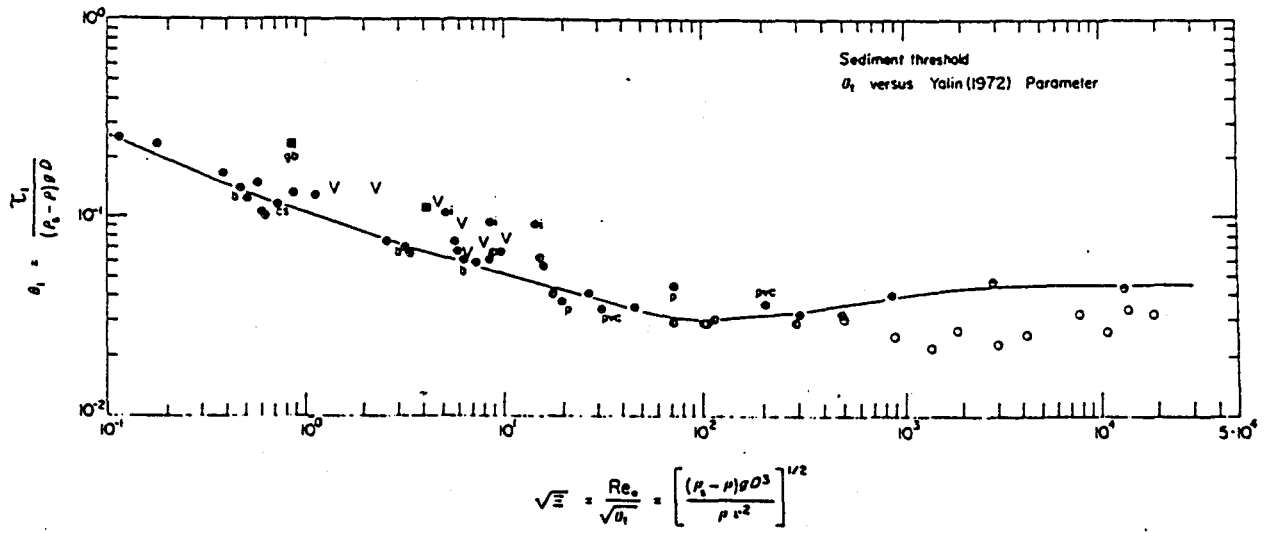


Figure 34.c : The Yalin parameter  $\sqrt{\Xi}$  versus the Shields threshold criterion  $\theta_t$ .

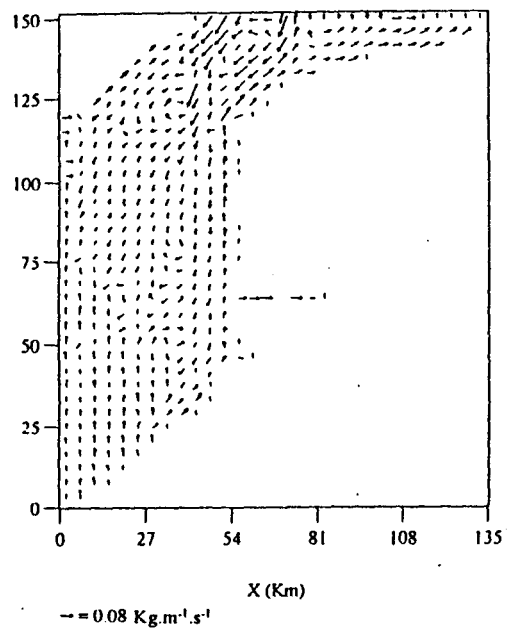


Figure 35 : Transport par charriage intégré sur un cycle de marée  
Formule de Van Rijn (1988)

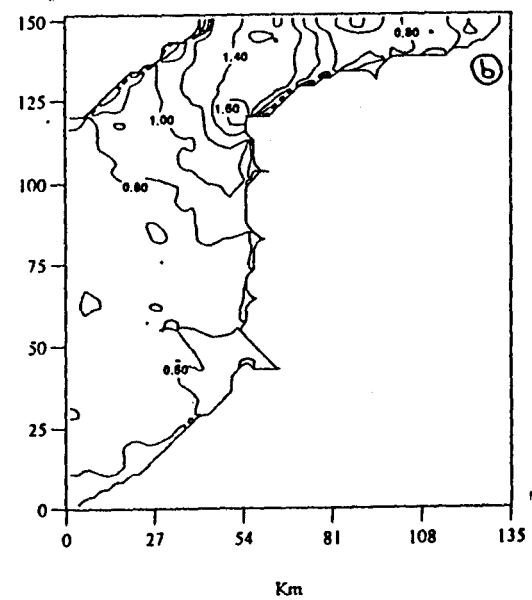
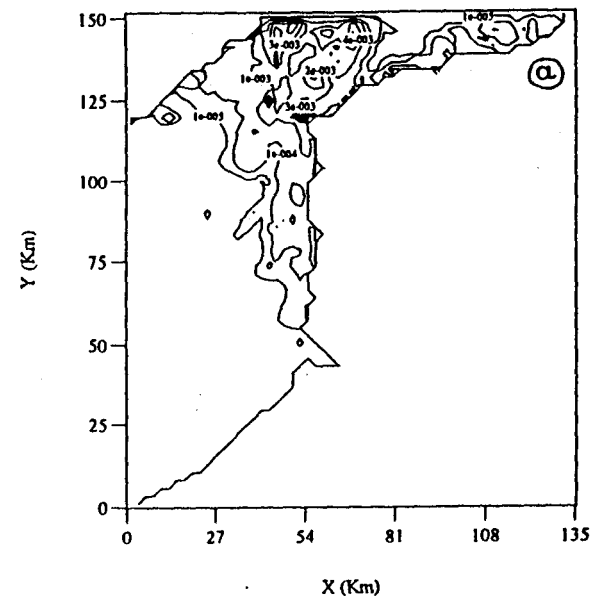


Figure 36 : a) Zone de transport par charriage (Kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>)  
b) Vitesse Maximum de M2 (m/s)

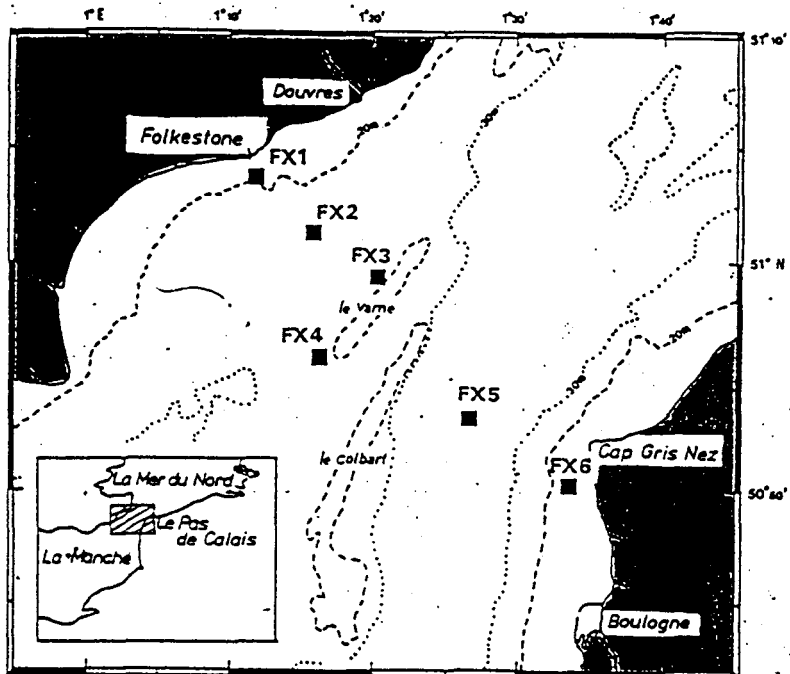


Figure 37.a : Points de mesures du Programme FLUXMANCHE.

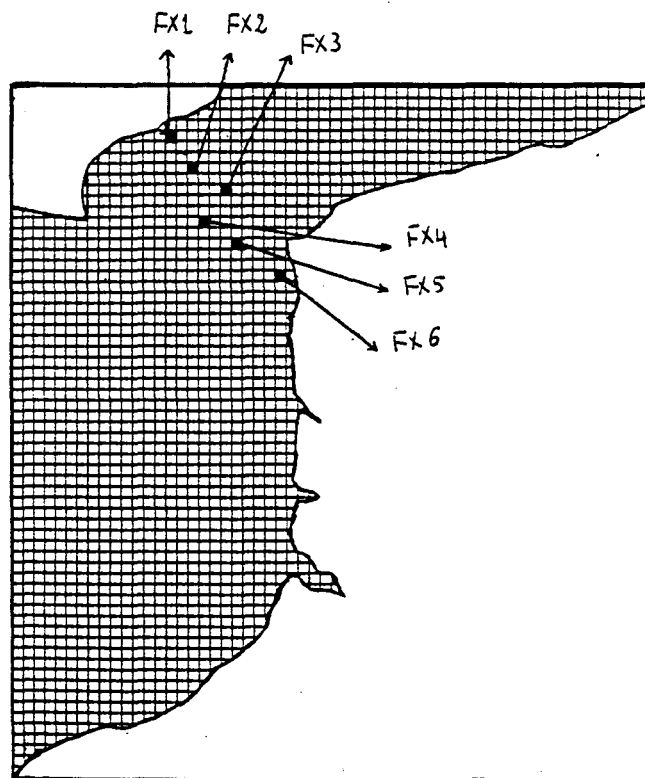


Figure 37.b : Localisation des points de mesures du Programme FLUXMANCHE sur le maillage de la zone d'étude.



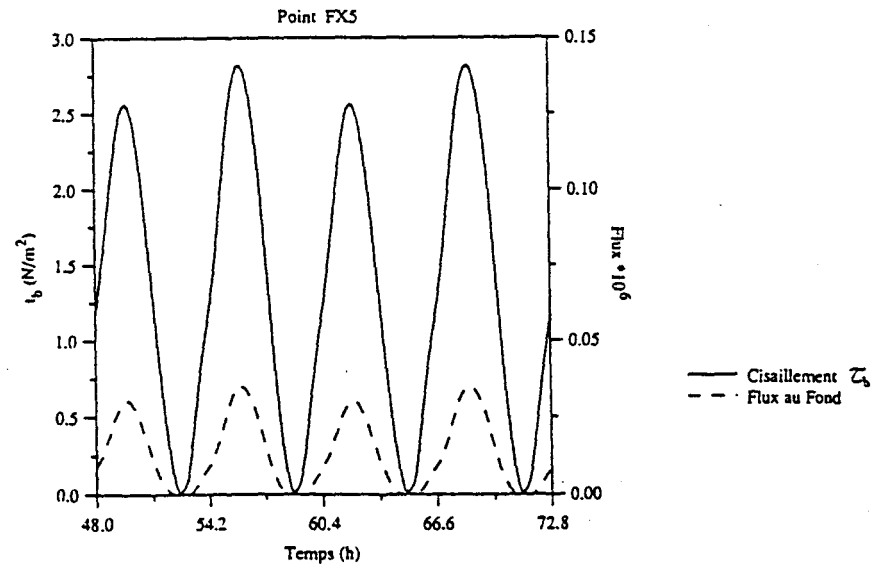
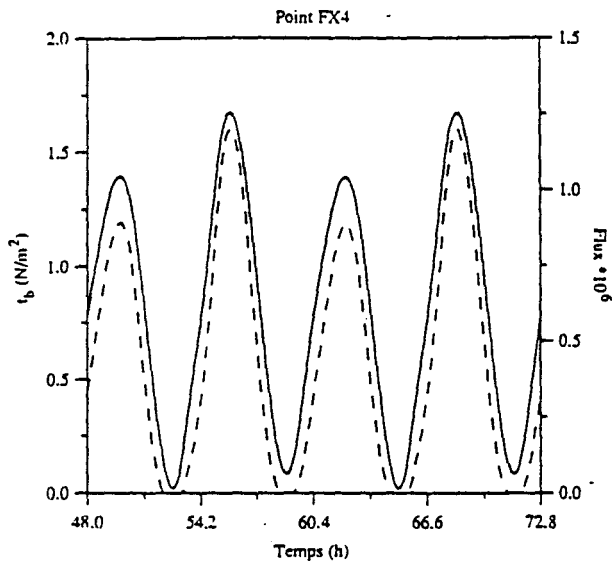
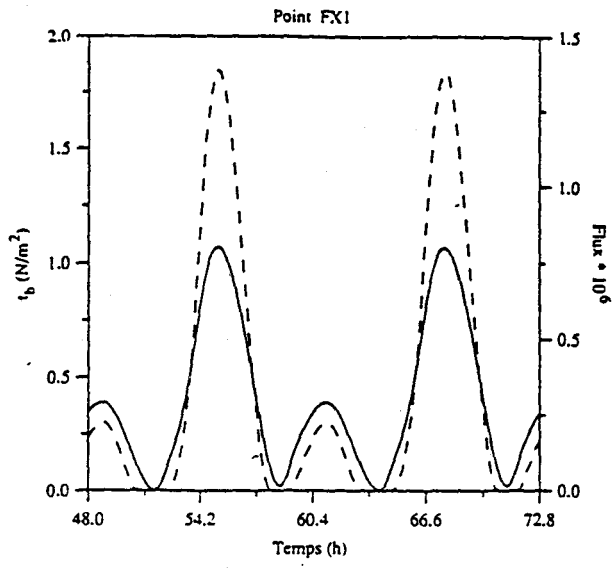
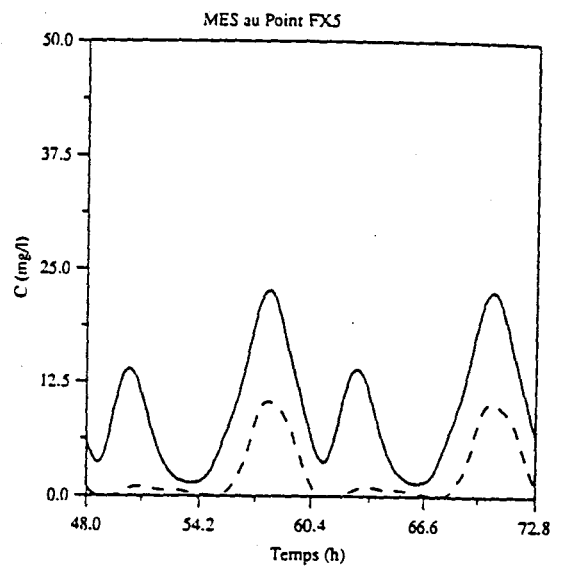
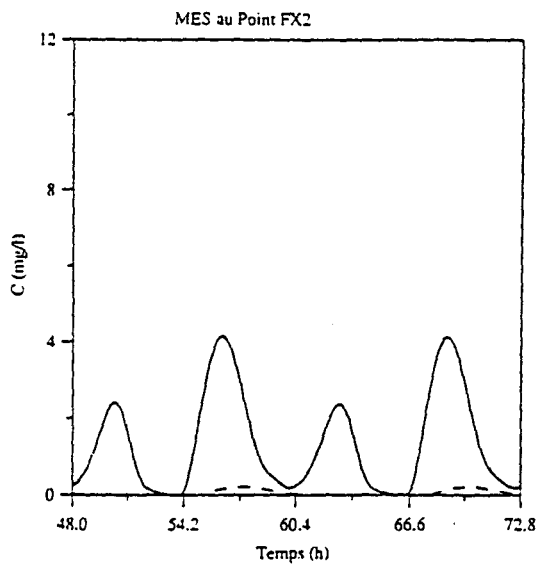
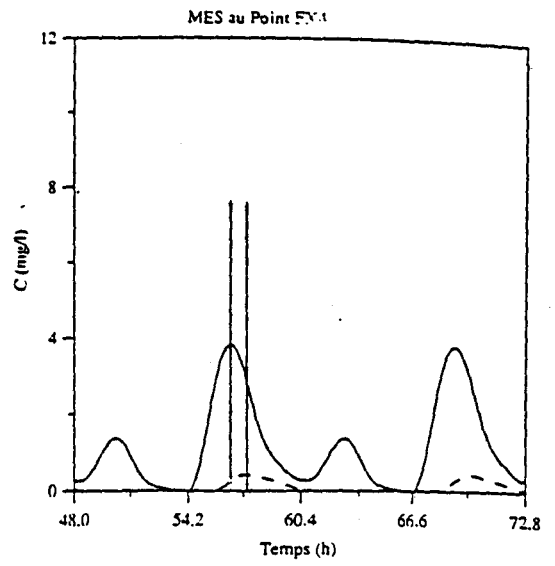
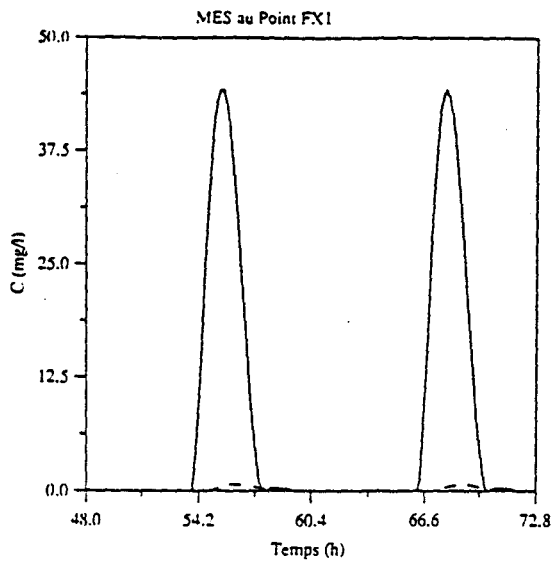


Figure 38 : Evolution de la contrainte de cisaillement et du flux de sédiments au fond.



— Près du Fond  
 - - - Près de la Surface

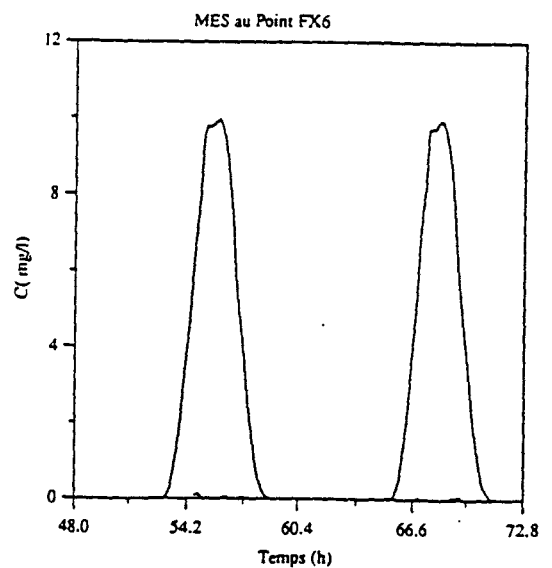
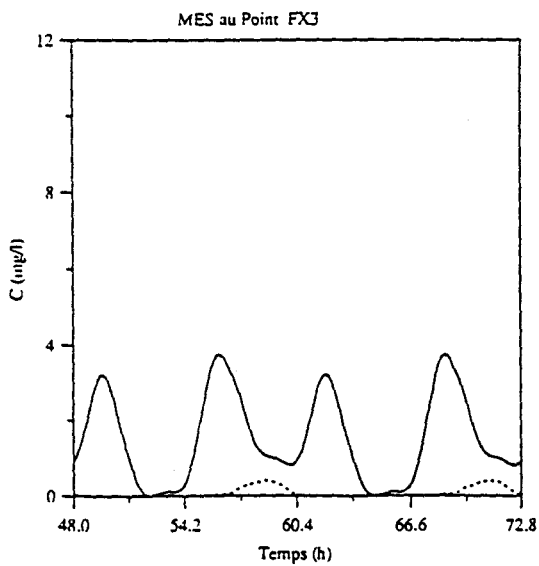
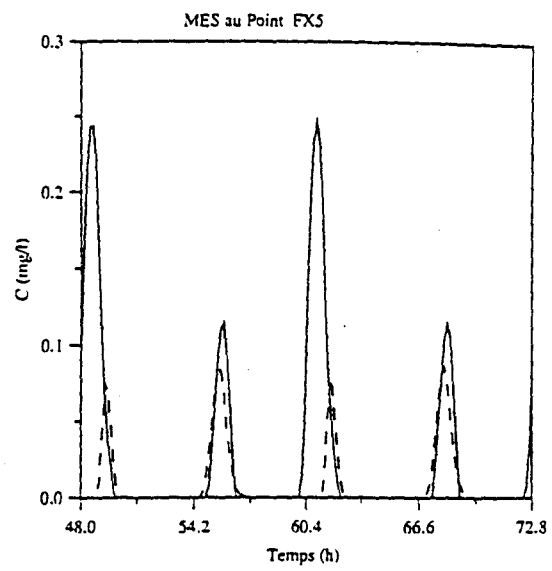
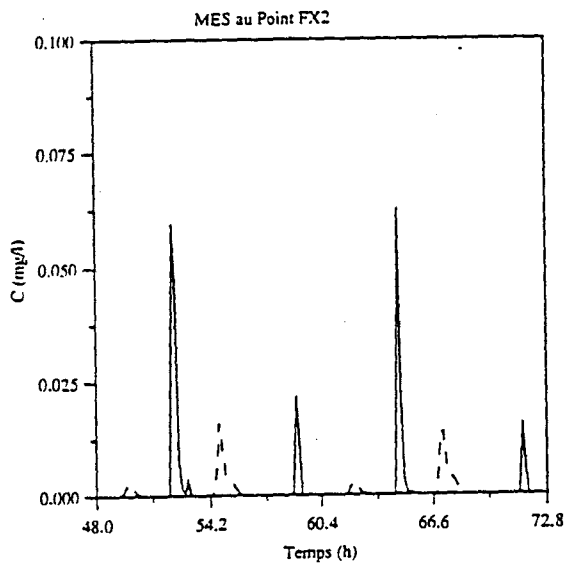
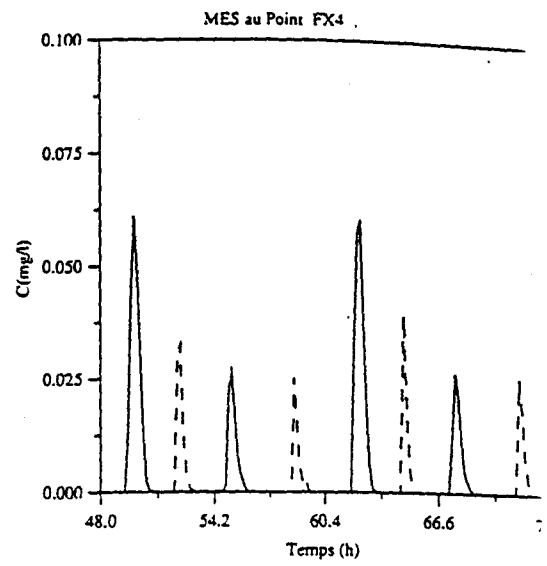
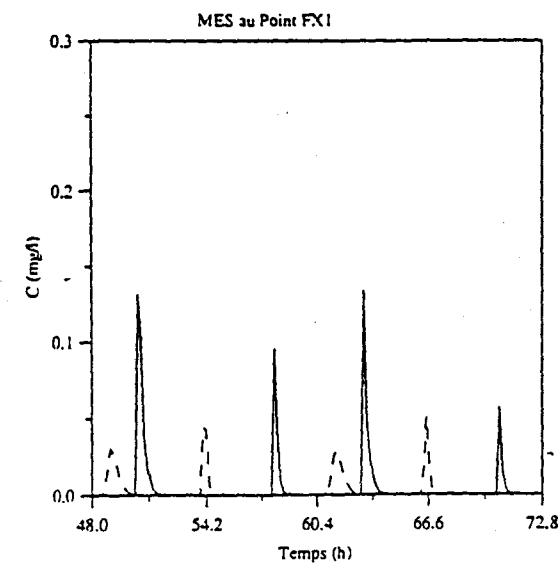


Figure 39.a : Evolution de la concentration à deux niveaux différents (Diamètre 75  $\mu\text{m}$ )



— Près du Fond  
 - - Près de la Surface

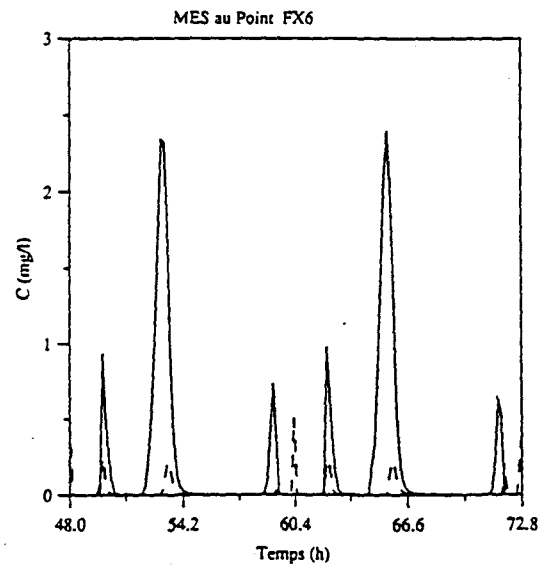
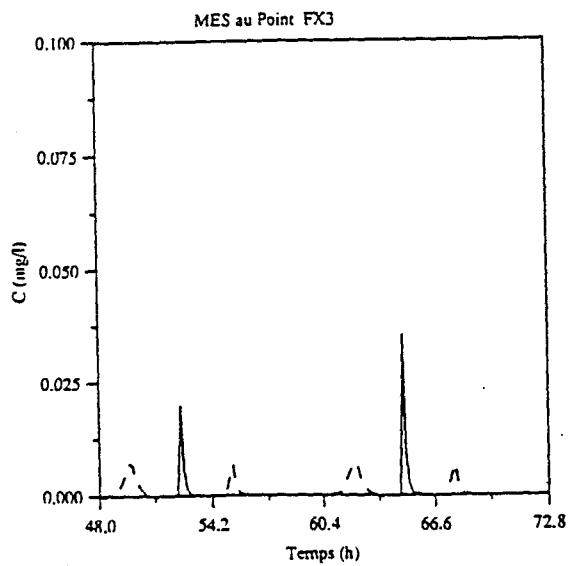


Figure 39.b : Evolution de la concentration à deux niveaux différents (Diamètre 150  $\mu$ m)

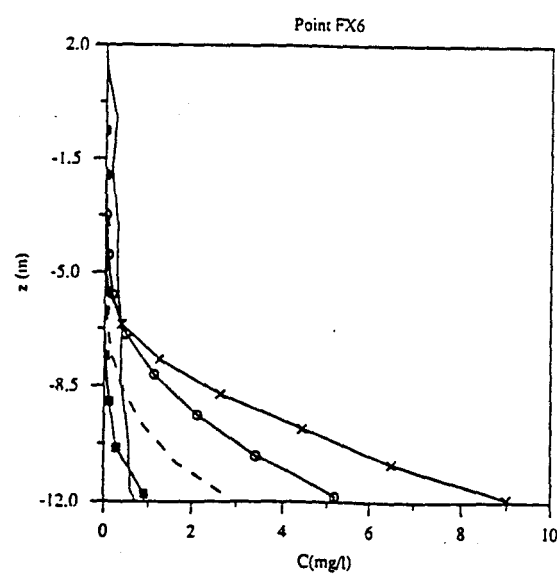
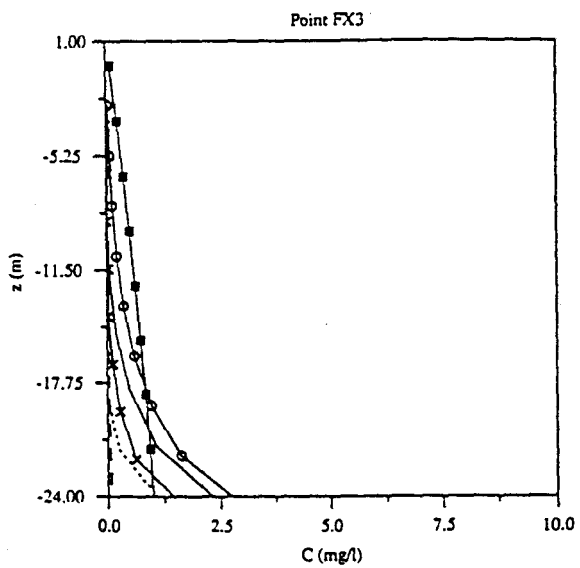
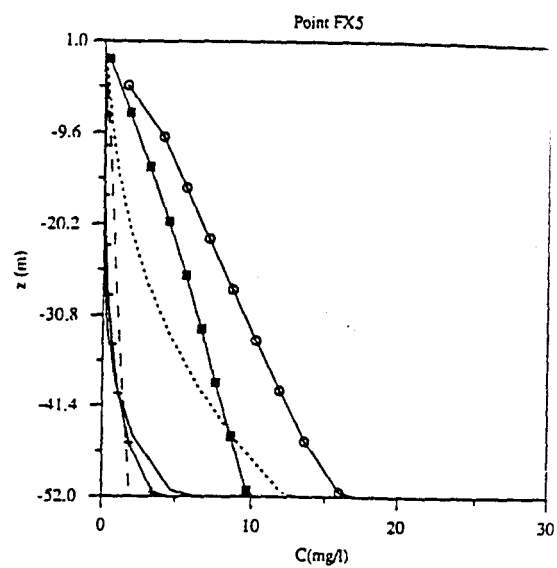
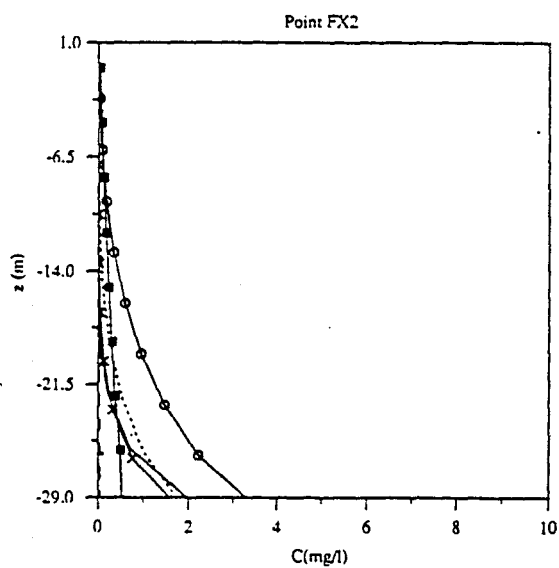
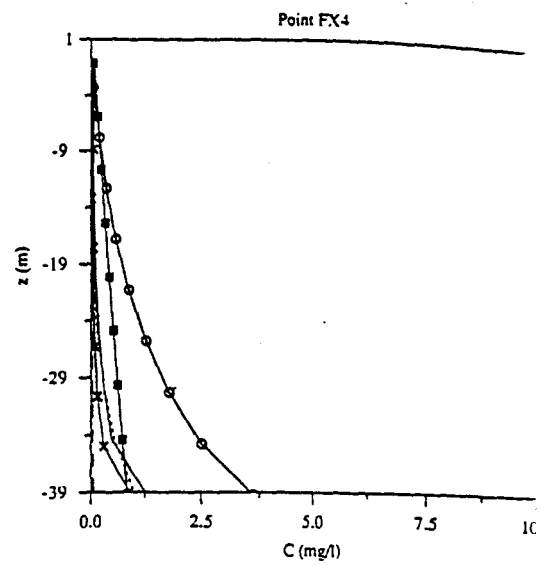
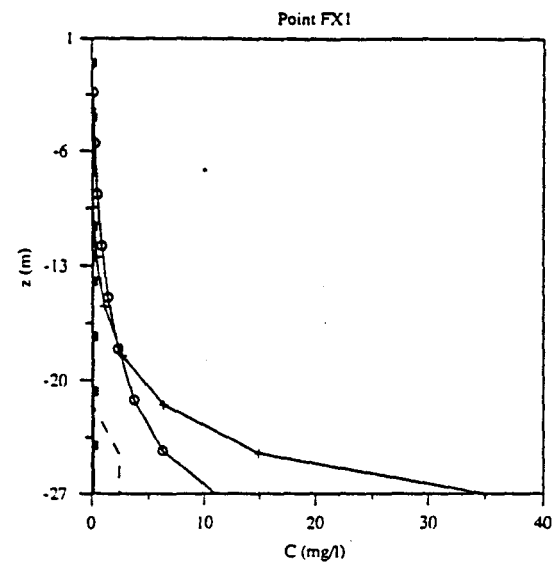


Figure 40 : Profils verticaux de la concentration en sédiment au cours d'un cycle de marée

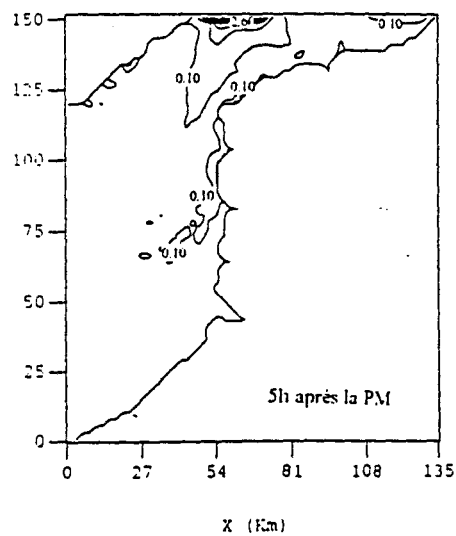
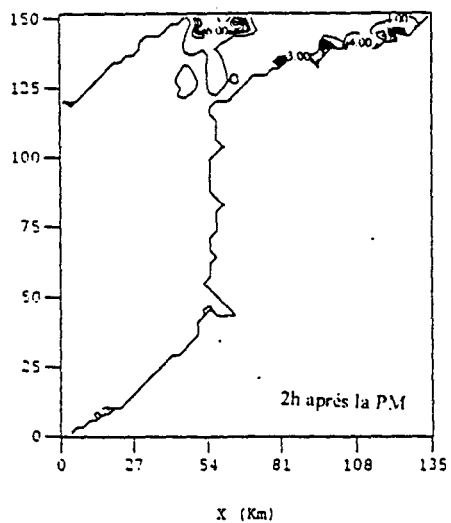
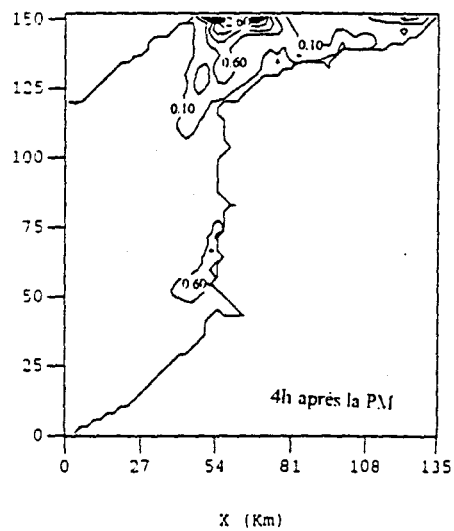
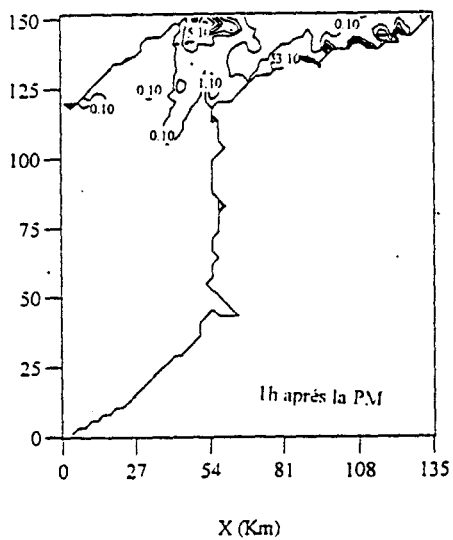
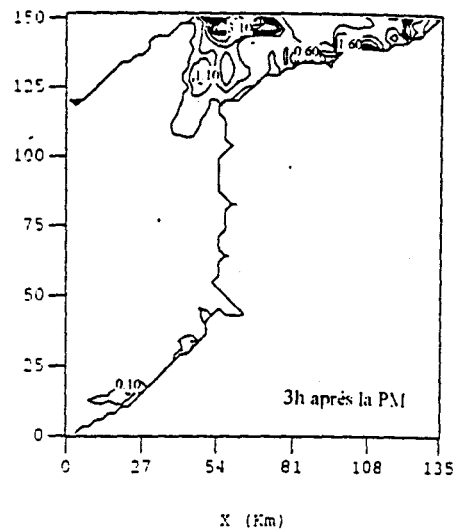
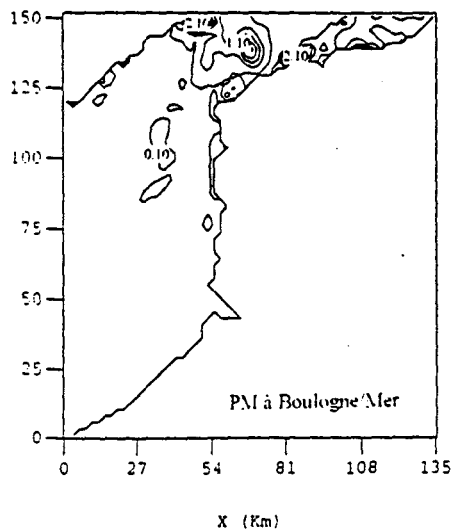


Figure 41 : Distribution spatiale de la MES près de la surface :  
au cours d'un cycle de marée (coeff 70).

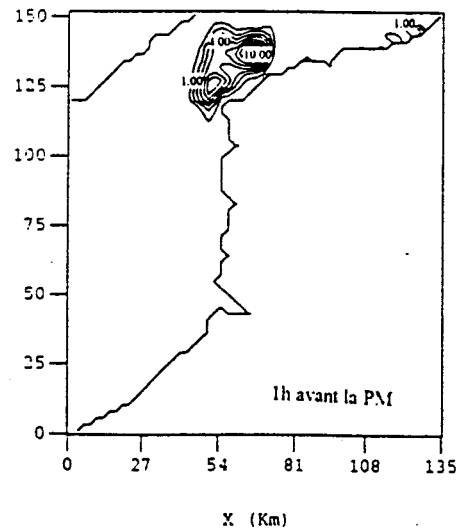
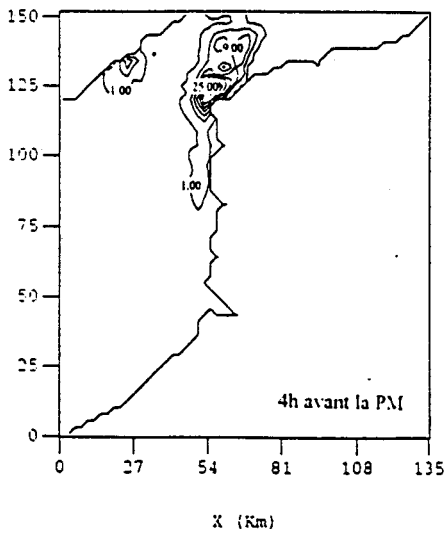
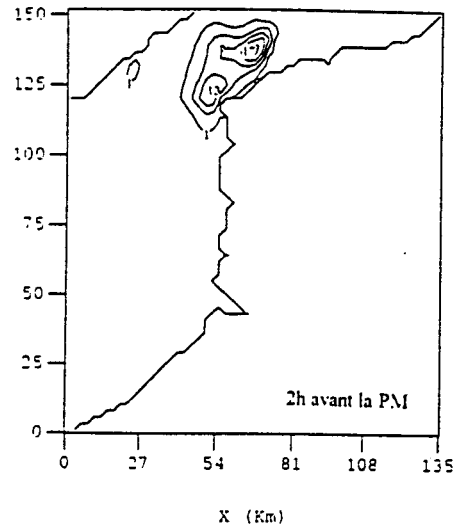
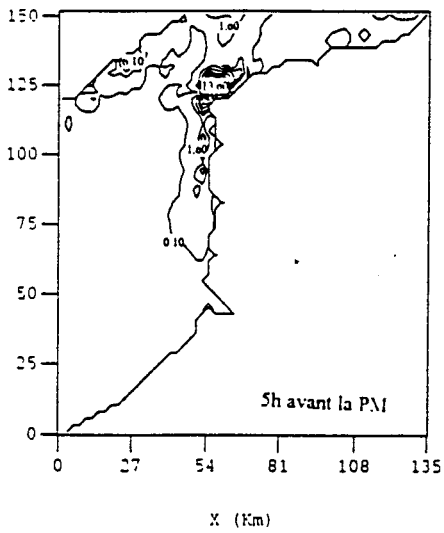
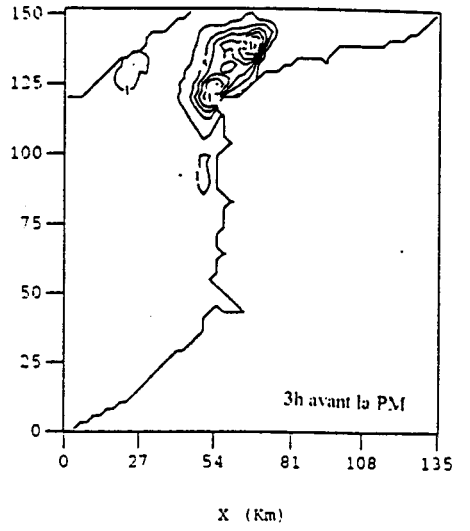
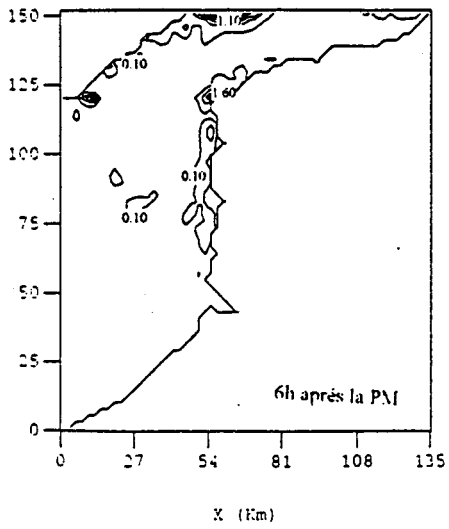


Figure 41 : suite

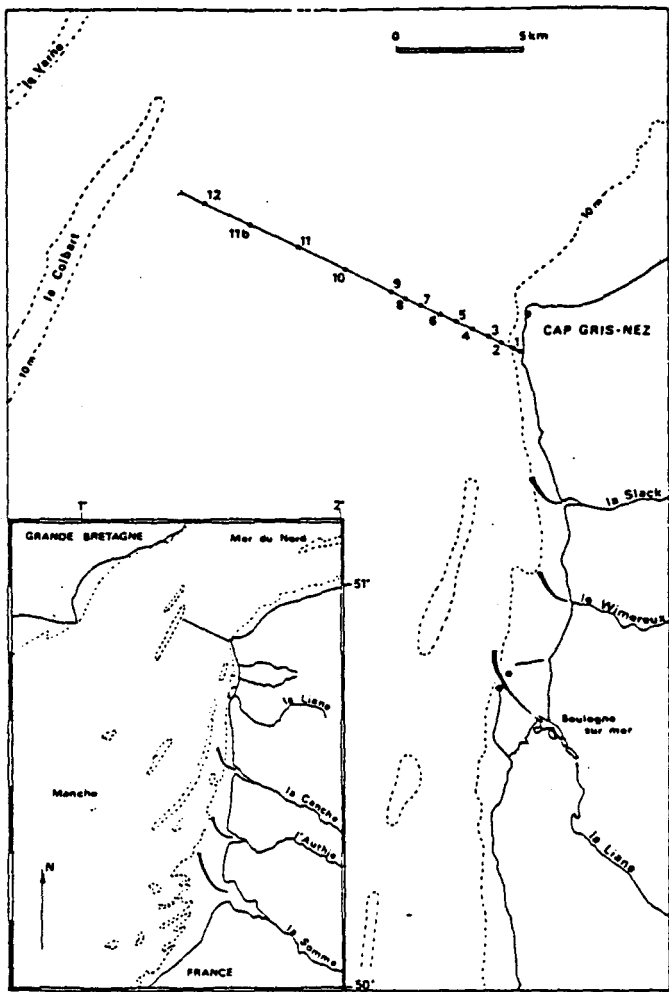


Figure 42.a : Localisation des prélèvements effectués sur un transect par Brylinski et al. (1984)

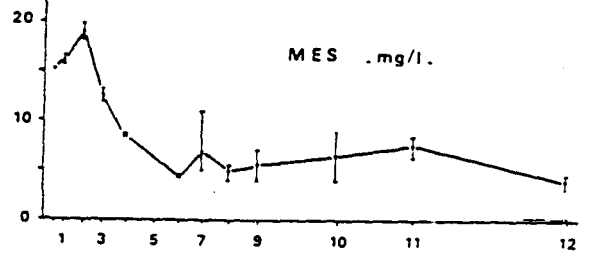


Figure 42.b : Distribution des matières en suspension mesurées le long du transect par Brylinski et al. (1984)

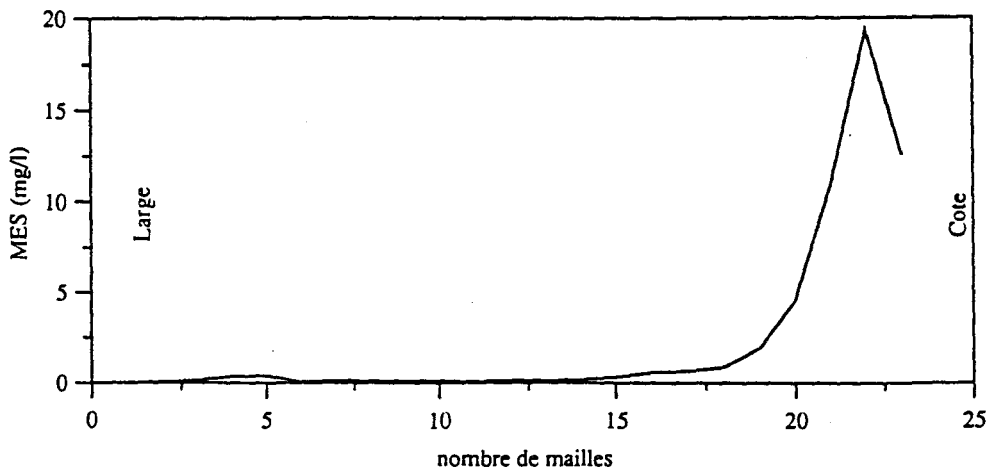


Figure 42.c : Distribution de la MES en surface calculée le long de la coupe (y=112 km)

## **FIGURES DU CHAPITRE 4**



	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinité
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.999937E+00	0.100010E+01	0.540237E-01	0.547587E+00
Centré	-0.243983E+00	0.124463E+01	0.104324E+01	0.474379E-01	0.556592E+00
Van Leer(1)	-0.117730E-04	0.100001E+01	0.100010E+01	0.260412E-01	0.669200E+00

Tableau 11.1

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinité
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.999937E+00	0.100010E+01	0.540237E-01	0.547587E+00
Centré	-0.243983E+00	0.124463E+01	0.104324E+01	0.474379E-01	0.556592E+00
Van Leer(1)	-0.579540E-02	0.100580E+01	0.100010E+01	0.168317E-01	0.763567E+00

Tableau 11.2

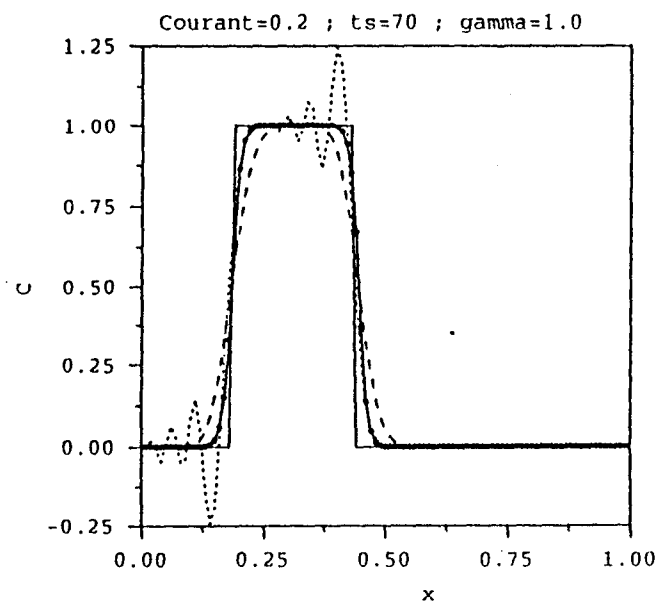


Figure 11.1

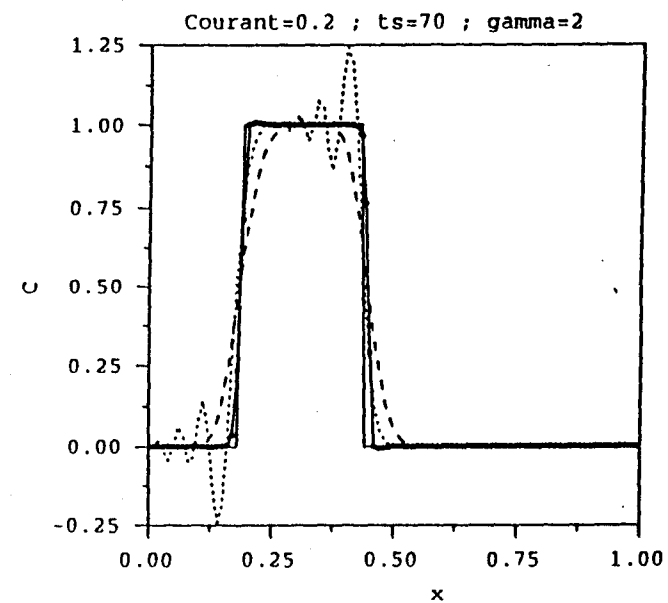


Figure 11.2

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinié
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.999752E+00	0.104000E+01	0.580651E-01	0.509254E+00
Centré	-0.174215E+00	0.117422E+01	0.104324E+01	0.449023E-01	0.637696E+00
Van Leer(1)	-0.864211E+00	0.186421E+01	0.104000E+01	0.615233E-01	0.102248E+01

Tableau 11.3

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinié
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.999752E+00	0.104000E+01	0.580651E-01	0.509254E+00
Centré	-0.174215E+00	0.117422E+01	0.104324E+01	0.449023E-01	0.637696E+00
Van Leer(1)	-0.600037E+01	0.700037E+01	0.104000E+01	0.838797E+00	0.660182E+01

Tableau 11.4

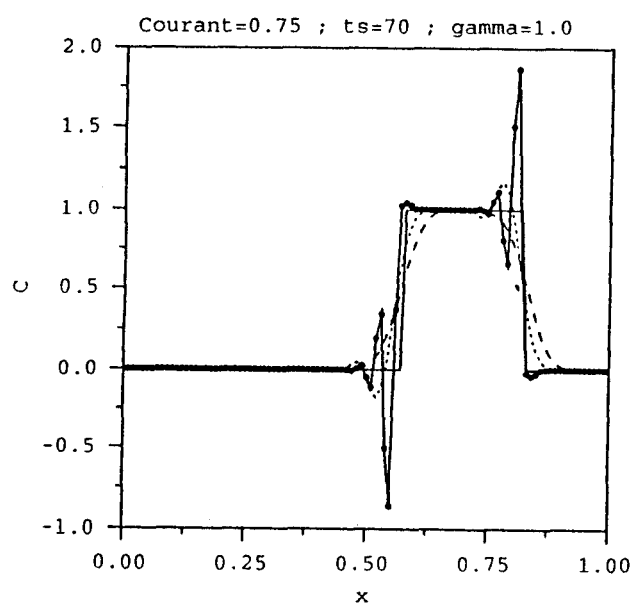


Figure 11.3

— Exacte  
 ..... Centré  
 - - - Upwind  
 ○ Van Leer

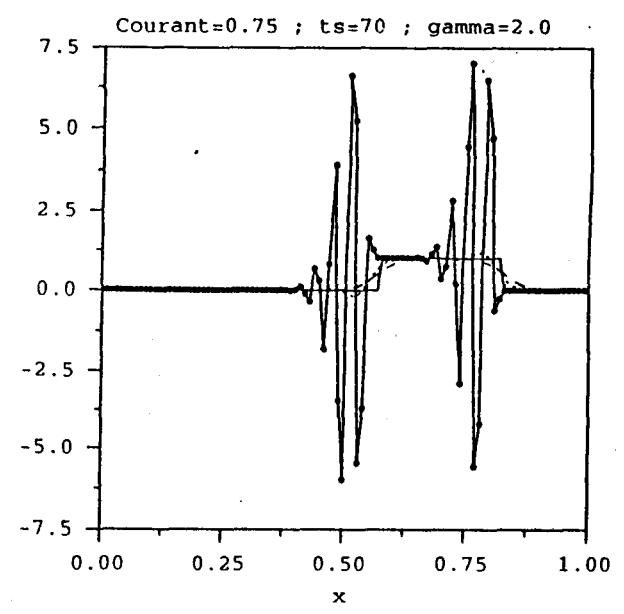


Figure 11.4

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.783938E+00	0.100000E+01	0.175231E-01	0.177945E+00
Centré	-0.335806E-01	0.927856E+00	0.999798E+00	0.730189E-02	0.637696E-01
Van Leer(1)	-0.135289E-05	0.902100E+00	0.100000E+01	0.855224E-02	0.633846E-01

Tableau 11.5

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.783938E+00	0.100000E+01	0.175231E-01	0.177946E+00
Centré	-0.335806E-01	0.927856E+00	0.999798E+00	0.730189E-02	0.637696E-01
Van Leer(1)	-0.150630E-02	0.944657E+00	0.100000E+01	0.670529E-02	0.715447E-01

Tableau 11.6

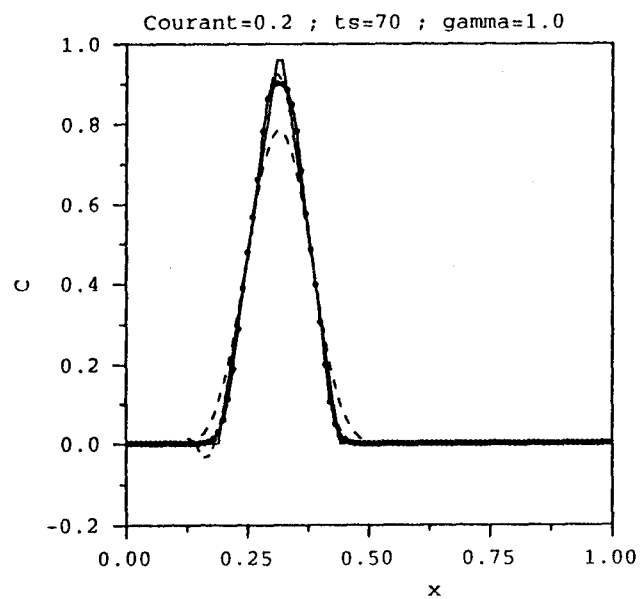


Figure 11.5

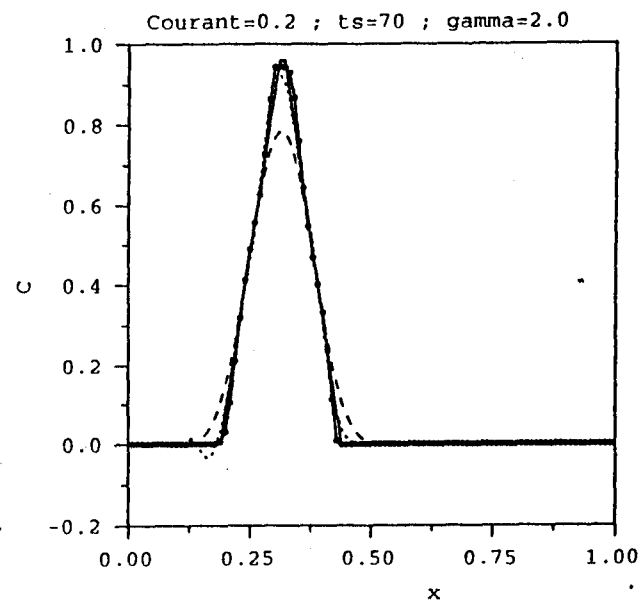


Figure 11.6

	Cmin	Cmax	Rmass	EI	Einfinité
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.767786E+00	0.996805E+00	0.202904E-01	0.232214E+00
Centré	-0.328777E-01	0.911405E+00	0.996805E+00	0.834940E-02	0.959834E-01
Van Leer(1)	-0.643516E+00	0.174030E+01	0.996805E+00	0.847224E-01	0.900302E+00

Tableau 11.7

	Cmin	Cmax	Rmass	EI	Einfinité
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.767786E+00	0.996805E+00	0.202904E-01	0.232214E+00
Centré	-0.328777E-01	0.911405E+00	0.996805E+00	0.834940E-02	0.959834E-01
Van Leer(1)	-0.104063E+02	0.921015E+01	0.996804E+00	0.149357E+01	0.106863E+02

Tableau 11.8

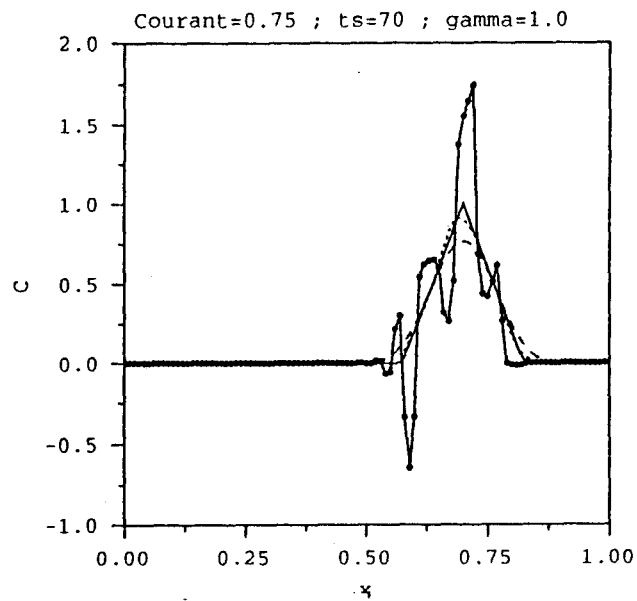


Figure 11.7

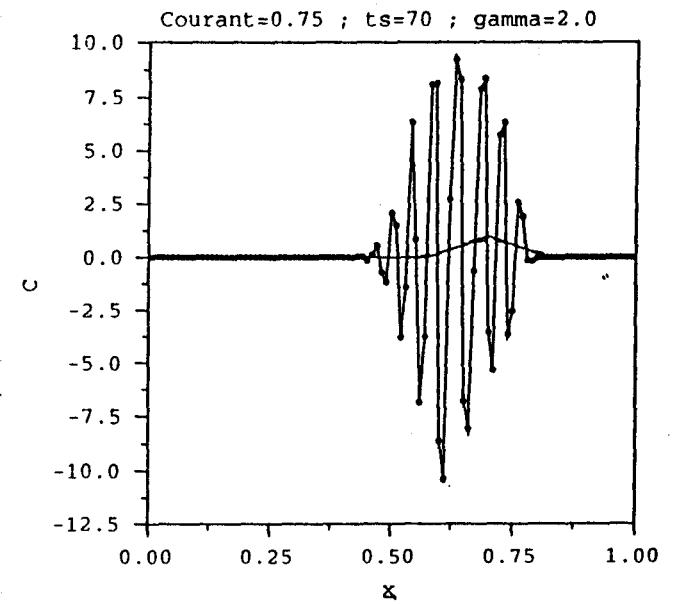


Figure 11.8

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinité
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.141184E-10	0.903854E+00	0.999997E+00	0.173479E-01	0.961464E-01
Centré	-0.782592E-08	0.999311E+00	0.100000E+01	0.168967E-02	0.869417E-02
Van Leer(1)	0.736491E-13	0.977430E+00	0.100000E+01	0.536846E-02	0.464637E-01

Tableau 11.9

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinité
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.141184E-10	0.903854E+00	0.999997E+00	0.173479E-01	0.961464E-01
Centré	-0.782592E-08	0.999311E+00	0.100000E+01	0.168967E-02	0.869417E-02
Van Leer(1)	0.215348E-16	0.996707E+00	0.100000E+01	0.483554E-02	0.541838E-01

Tableau 11.10

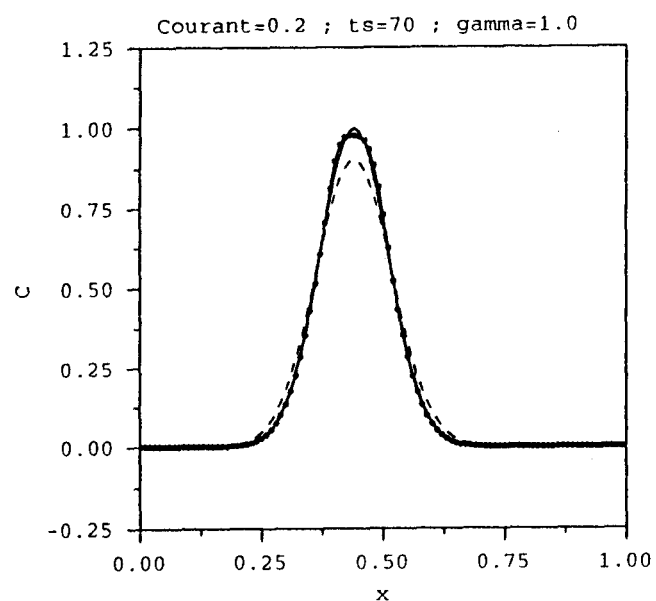


Figure 11.9

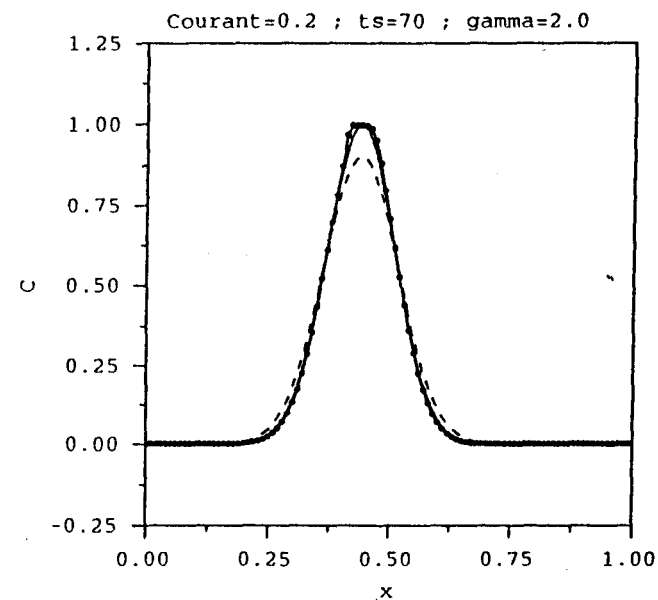


Figure 11.10

	Cmin	Cmax	Rmass	EI	Einfine
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.275953E-29	0.888518E+00	0.993080E+00	0.187524E-01	0.109719E+00
Centré	-0.100603E-06	0.996422E+00	0.999484E+00	0.278505E-02	0.208787E-01
Van Leer(1)	-0.202483E-01	0.128228E+01	0.100647E+01	0.566775E-01	0.518848E+00

Tableau 11.11

	Cmin	Cmax	Rmass	EI	Einfine
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.275953E-29	0.888518E+00	0.993080E+00	0.187524E-01	0.109719E+00
Centré	-0.100603E-06	0.996422E+00	0.999484E+00	0.278505E-02	0.208787E-01
Van Leer(1)	-0.265643E+01	0.463516E+01	0.100675E+01	0.445661E+00	0.365740E+01

Tableau 11.12

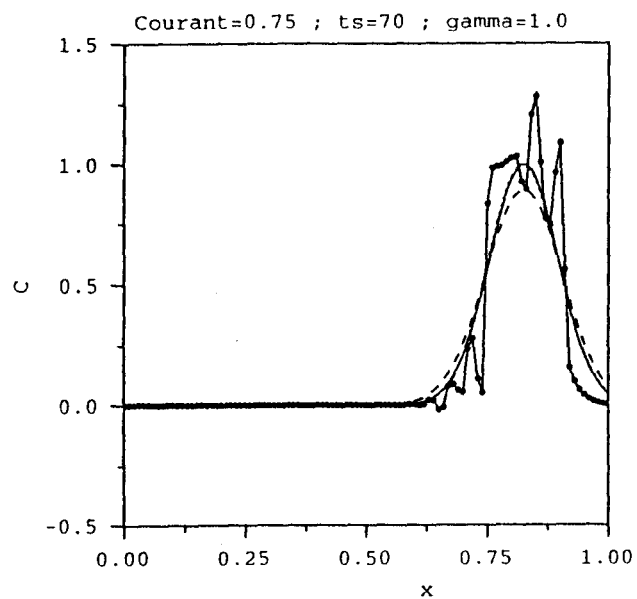


Figure 11.11

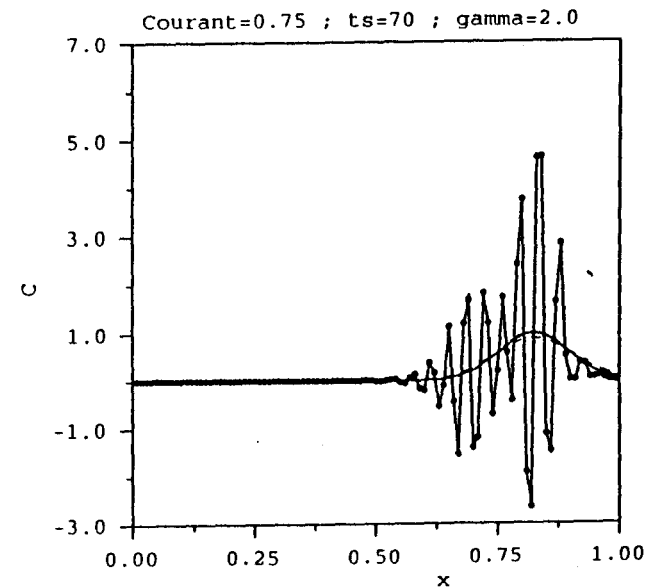


Figure 11.12

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.999937E+00	0.100010E+01	0.540237E-01	0.547587E+00
Lax-Wendroff	-0.243983E+00	0.124463E+01	0.104324E+01	0.474379E-01	0.556592E+00
Minmod	0.000000E+00	0.100001E+01	0.104000E+01	0.314148E-01	0.626922E+00
Superbee	0.000000E+00	0.100001E+01	0.104000E+01	0.194004E-01	0.712898E+00
Van Leer (2)	0.000000E+00	0.100001E+01	0.104000E+01	0.255676E-01	0.655392E+00
M C	0.000000E+00	0.100001E+01	0.104000E+01	0.230519E-01	0.659761E+00

Tableau 11.13

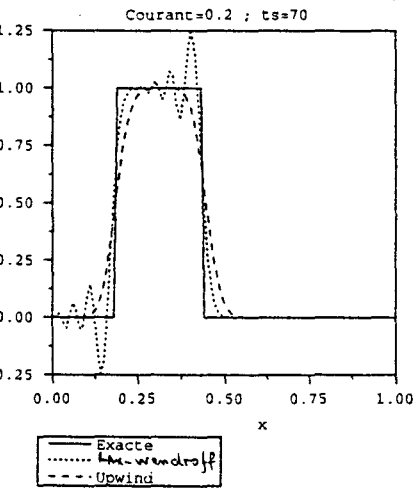


Figure 11.13.a

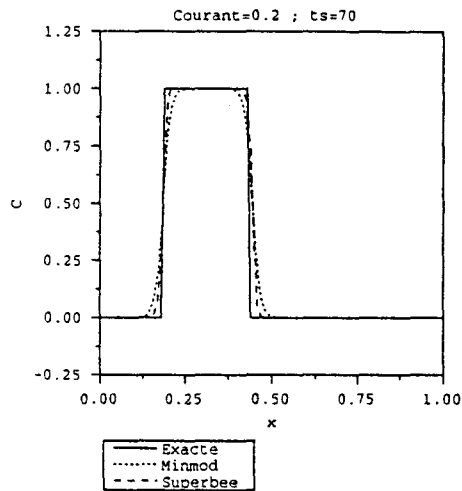


Figure 11.13.b

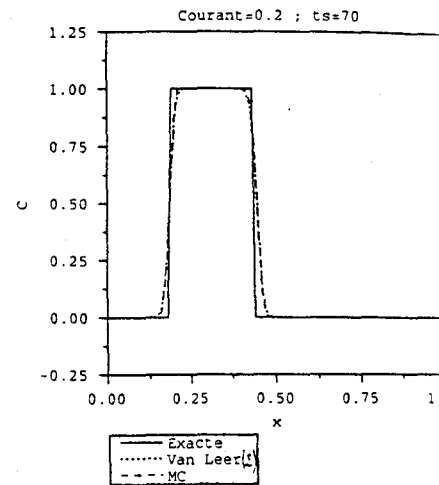


Figure 11.13.c

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfinie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.999752E+00	0.104000E+01	0.580651E-01	0.509254E+00
Lax-Wendroff	-0.174215E+00	0.117422E+01	0.104324E+01	0.449023E-01	0.637696E+00
Minmod	0.000000E+00	0.999999E+00	0.104000E+01	0.318335E-01	0.509022E+00
Superbee	0.000000E+00	0.100001E+01	0.104000E+01	0.172269E-01	0.520495E+00
Van Leer (2)	0.000000E+00	0.100001E+01	0.104000E+01	0.248647E-01	0.519662E+00
M C	0.000000E+00	0.100001E+01	0.104000E+01	0.220723E-01	0.516010E+00

Tableau 11.14

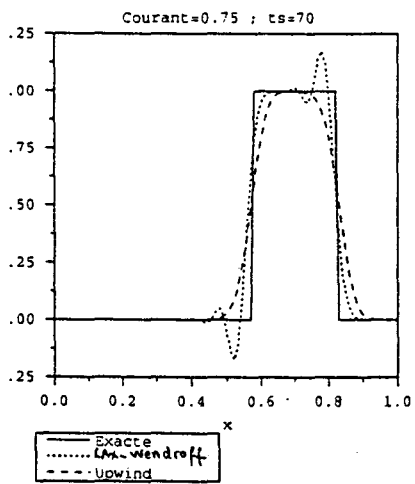


Figure 11.14.a

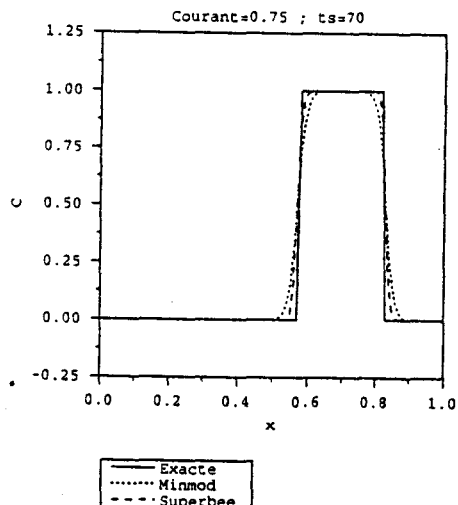


Figure 11.14.b

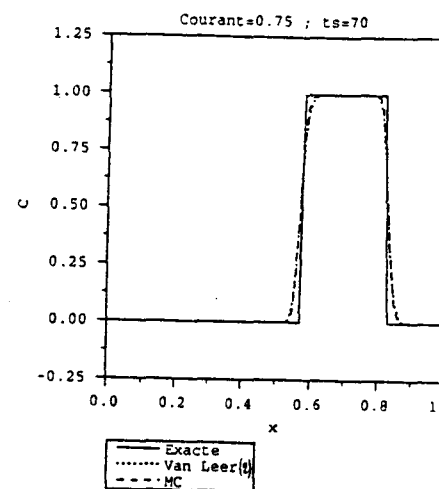


Figure 11.14.c

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfine
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.783938E+00	0.100000E+01	0.175231E-01	0.177946E+00
Lax-Wendroff	-0.335806E-01	0.927856E+00	0.999798E+00	0.730189E-02	0.637696E-01
Minmod	-0.196159E-14	0.879063E+00	0.100000E+01	0.694795E-02	0.832814E-01
Superbee	-0.196159E-14	0.919270E+00	0.100000E+01	0.315250E-02	0.427931E-01
Van Leer (2)	-0.196159E-14	0.900838E+00	0.100000E+01	0.420345E-02	0.617489E-01
M C	-0.196159E-14	0.910480E+00	0.100000E+01	0.327310E-02	0.518615E-01

Tableau 11.15

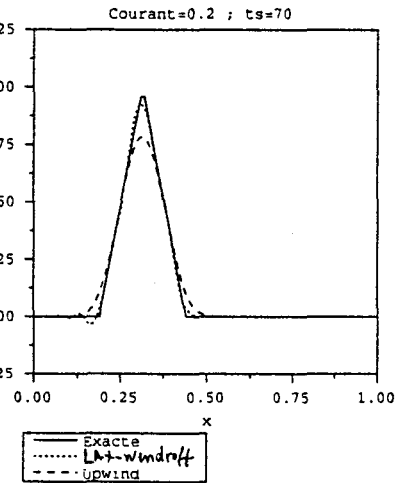


Figure 11.15.a

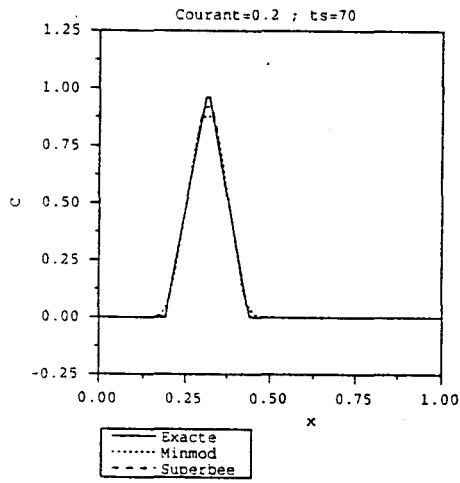


Figure 11.15.b

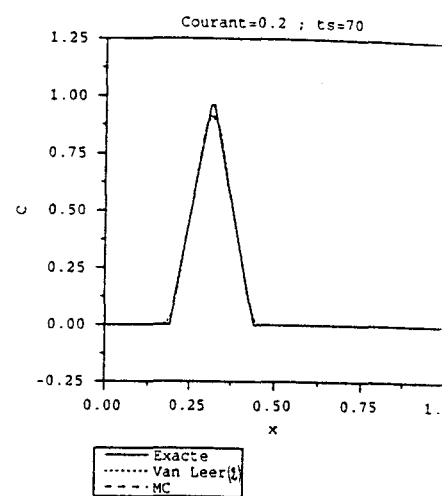


Figure 11.15.c

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfine
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.000000E+00	0.767786E+00	0.996805E+00	0.202904E-01	0.232214E+00
Lax-Wendroff	-0.328777E-01	0.911405E+00	0.996805E+00	0.834940E-02	0.959834E-01
Minmod	0.000000E+00	0.871985E+00	0.996805E+00	0.776979E-02	0.128015E+00
Superbee	0.000000E+00	0.915382E+00	0.996805E+00	0.321999E-02	0.846174E-01
Van Leer (2)	0.000000E+00	0.895452E+00	0.996805E+00	0.473508E-02	0.104547E+00
M C	0.000000E+00	0.905693E+00	0.996805E+00	0.352087E-02	0.943065E-01

Tableau 11.16

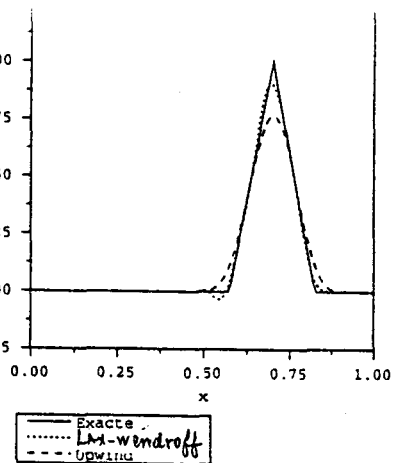


Figure 11.16.a

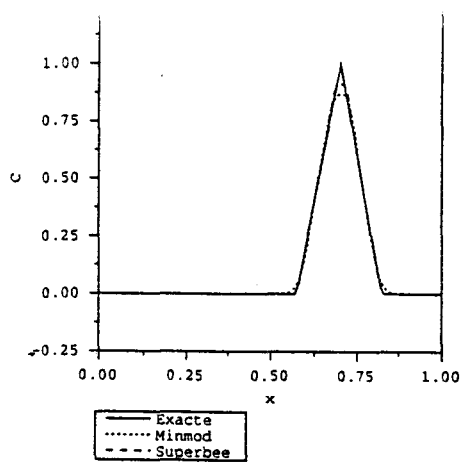


Figure 11.16.b

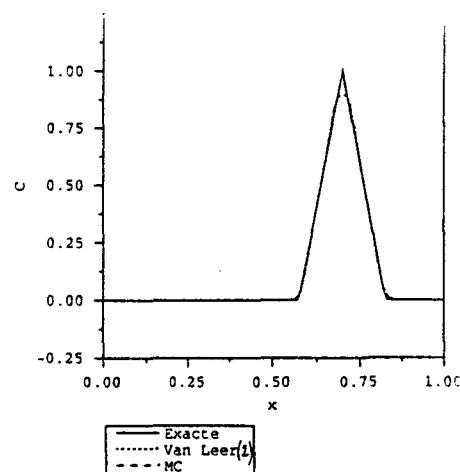


Figure 11.16.c



	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfnie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.141184E-10	0.903854E+00	0.999997E+00	0.173479E-01	0.961464E-01
Lax-Wendroff	-0.782592E-08	0.999311E+00	0.100000E+01	0.168967E-02	0.869417E-02
Minmod	0.875363E-11	0.965578E+00	0.100000E+01	0.274209E-02	0.344255E-01
Superbee	0.659127E-11	0.989706E+00	0.100000E+01	0.208680E-02	0.197929E-01
Van Leer (2)	0.703591E-11	0.979367E+00	0.100000E+01	0.121551E-02	0.206332E-01
MC	0.644755E-11	0.985063E+00	0.100000E+01	0.854271E-03	0.149373E-01

Tableau 11.17

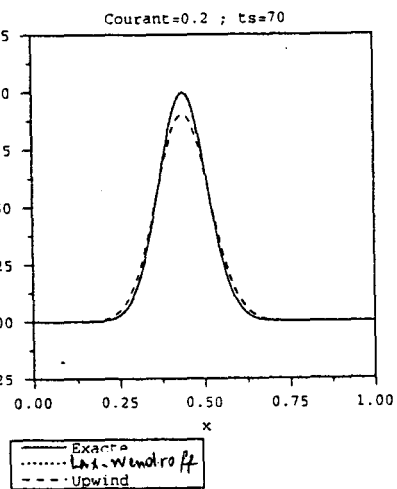


Figure 11.17.a

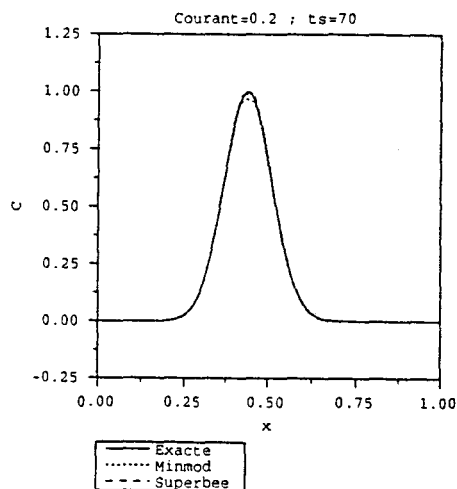


Figure 11.17.b

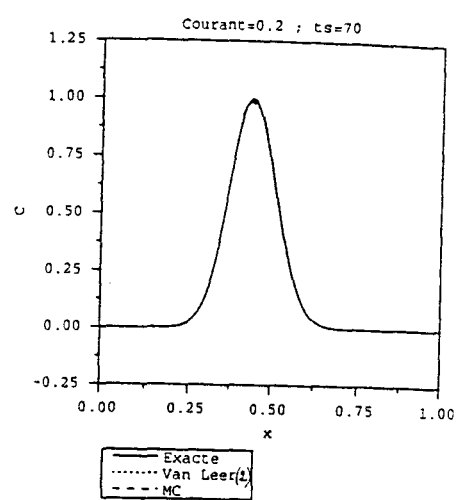


Figure 11.17.c

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	Einfnie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-
Upwind	0.275953E-29	0.888518E+00	0.993080E+00	0.187524E-01	0.109719E+00
Lax-Wendroff	-0.100603E-06	0.996422E+00	0.999484E+00	0.278505E-02	0.208787E-01
Minmod	0.000000E+00	0.961619E+00	0.999491E+00	0.304178E-02	0.370433E-01
Superbee	0.000000E+00	0.988777E+00	0.100114E+01	0.230526E-02	0.188627E-01
Van Leer (2)	0.000000E+00	0.977339E+00	0.100018E+01	0.137543E-02	0.214037E-01
MC	0.000000E+00	0.983634E+00	0.100030E+01	0.990069E-03	0.173750E-01

Tableau 11.18

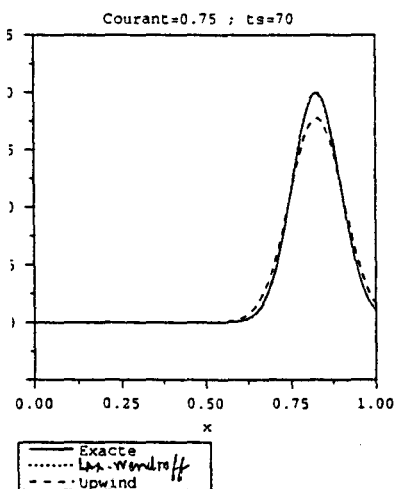


Figure 11.18.a

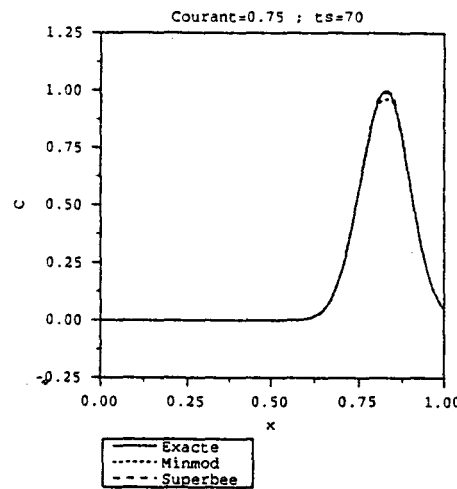


Figure 11.18.b

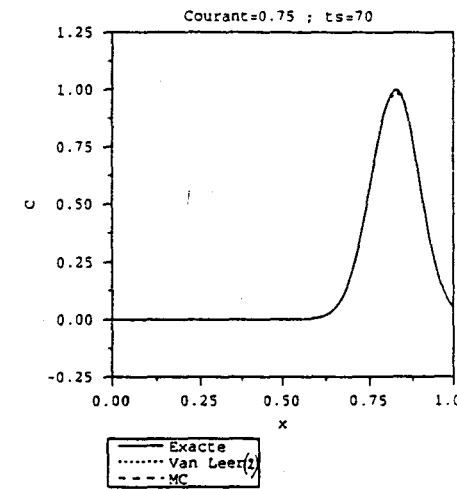


Figure 11.18.c

Champ de courant

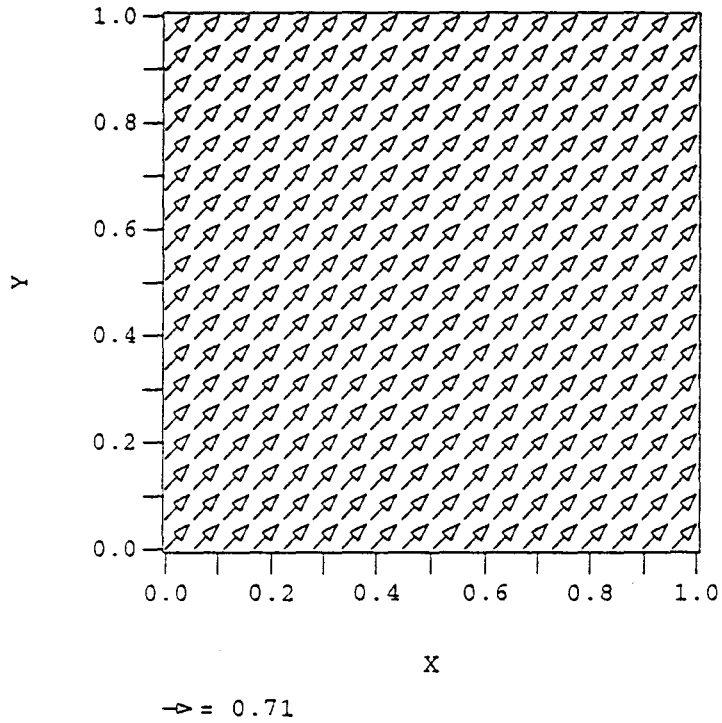


Figure 12.a : Champ de vitesse

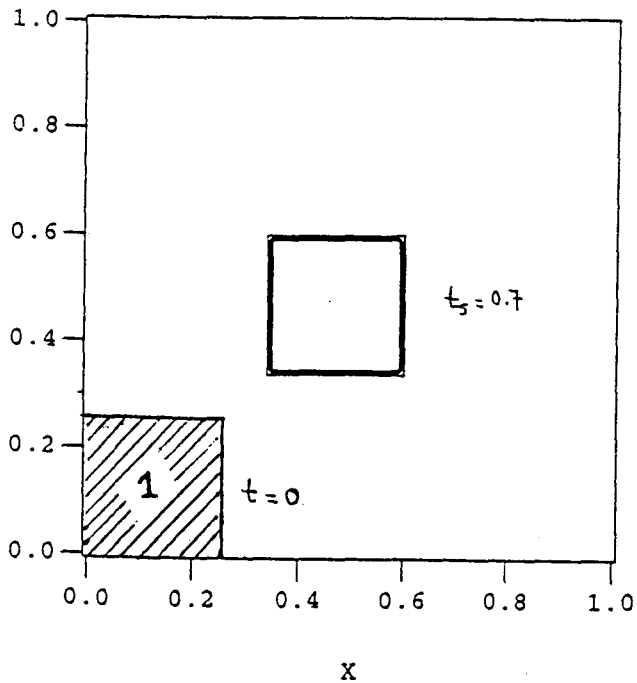


Figure 12.b : - Solution analytique à  $t_s=0.7$   
- Condition Initiale

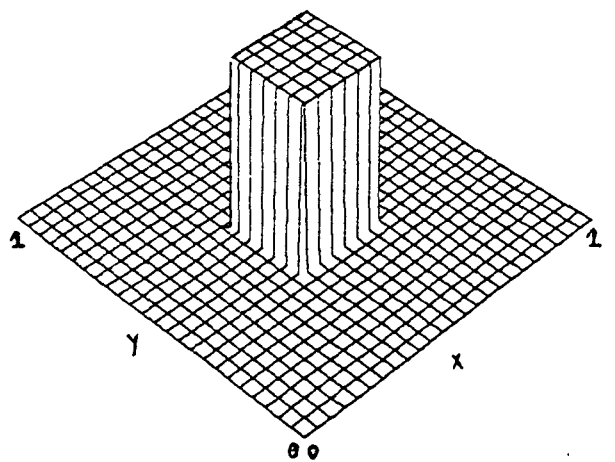


Figure 12.c : Solution analytique  
à  $t=0.7$

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	E2	Einfinie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-	-
Upwind	-0.267517E-08	0.997452E+00	0.999615E+00	0.308067E-01	0.101672E+00	0.100000E+01
Lax-Wendroff	-0.216459E+00	0.145473E+01	0.999904E+00	0.227620E-01	0.800566E-01	0.809401E+00
Minmod	0.000000E+00	0.999975E+00	0.100904E+01	0.184695E-01	0.737676E-01	0.754197E+00
Superbee	0.000000E+00	0.100000E+01	0.998175E+00	0.995050E-02	0.573683E-01	0.765059E+00
Van Leer (2)	0.000000E+00	0.999997E+00	0.100514E+01	0.145511E-01	0.669353E-01	0.764208E+00
MC	0.000000E+00	0.100000E+01	0.100348E+01	0.130598E-01	0.649319E-01	0.763133E+00

Tableau : 12-A

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	E2	Einfinie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-	-
Upwind	-0.451925E+03	0.485077E+03	0.100346E+01	0.531098E+01	0.326556E+02	0.484077E+03
Lax-Wendroff	-0.204760E+00	0.143963E+01	0.999884E+00	0.211873E-01	0.746528E-01	0.681060E+00
Minmod	0.000000E+00	0.999988E+00	0.100799E+01	0.177623E-01	0.718721E-01	0.682186E+00
Superbee	0.000000E+00	0.999999E+00	0.998259E+00	0.996173E-02	0.583348E-01	0.666472E+00
Van Leer (2)	0.000000E+00	0.999998E+00	0.100466E+01	0.141424E-01	0.657836E-01	0.681528E+00
MC	0.000000E+00	0.999998E+00	0.100332E+01	0.128013E-01	0.643471E-01	0.681287E+00

Tableau : 12-B

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	E2	Einfinie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-	-
Upwind	-0.300438E+15	0.288211E+15	-0.970968E+05	0.250158E+13	0.160508E+14	0.300438E+15
Lax-Wendroff	0.000000E+00	0.100000E+01	0.999615E+00	0.260000E-02	0.509902E-01	0.100000E+01
Minmod	0.000000E+00	0.100000E+01	0.999615E+00	0.637500E-02	0.549494E-01	0.875000E+00
Superbee	0.000000E+00	0.100000E+01	0.999615E+00	0.637500E-02	0.549494E-01	0.875000E+00
Van Leer (2)	0.000000E+00	0.100000E+01	0.999615E+00	0.637500E-02	0.549494E-01	0.875000E+00
MC	0.000000E+00	0.100000E+01	0.999615E+00	0.637500E-02	0.549494E-01	0.875000E+00

Tableau : 12-C

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	E2	Einfinie
Exacte	0.000000E+00	0.100000E+01	-	-	-	-
Upwind	-0.292134E+15	0.291481E+15	-0.660941E+04	0.233840E+13	0.154715E+14	0.292134E+15
Lax-Wendroff	-0.174079E+04	0.176266E+04	0.999576E+00	0.204795E+02	0.128842E+03	0.176166E+04
Minmod	-0.143040E+02	0.250319E+02	0.998572E+00	0.916553E-01	0.636590E+00	0.240319E+02
Superbee	-0.143040E+02	0.250319E+02	0.999416E+00	0.957615E-01	0.647219E+00	0.240319E+02
Van Leer (2)	-0.143040E+02	0.250319E+02	0.998894E+00	0.941787E-01	0.643042E+00	0.240319E+02
MC	-0.143040E+02	0.250319E+02	0.999080E+00	0.956958E-01	0.646757E+00	0.240319E+02

Tableau : 12-D

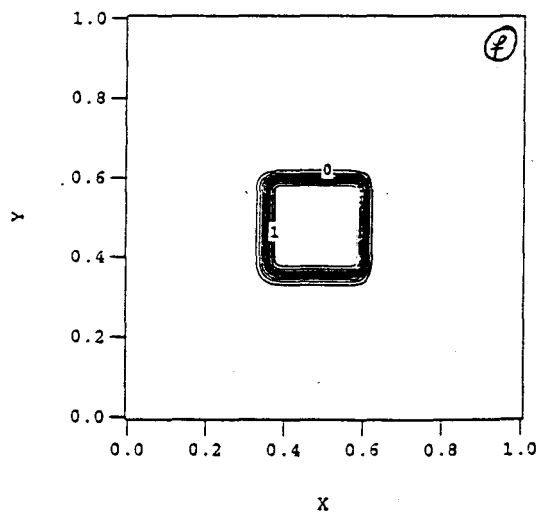
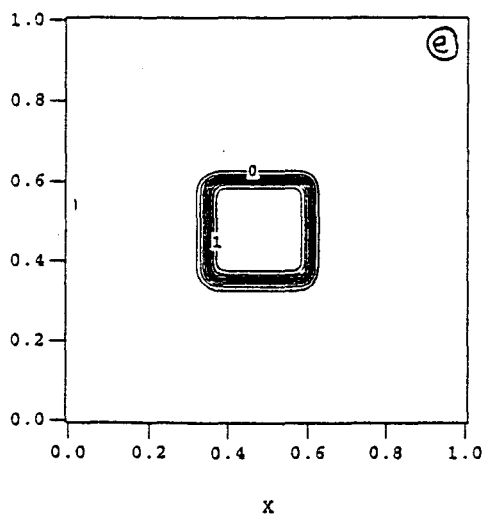
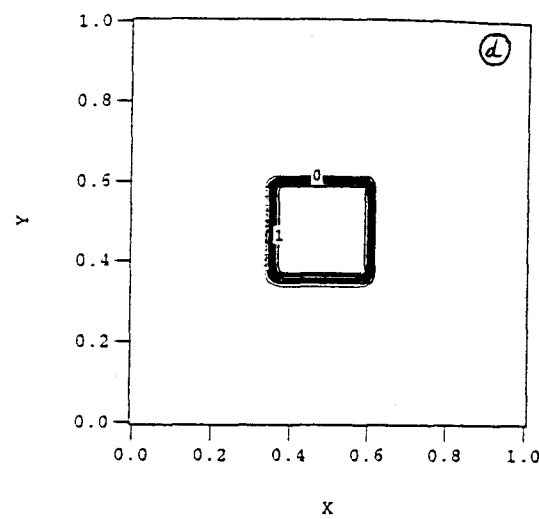
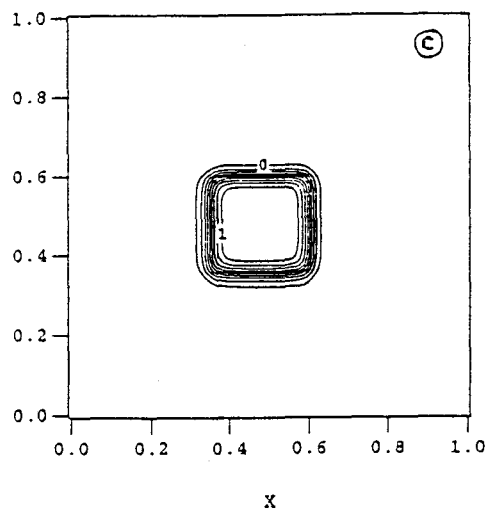
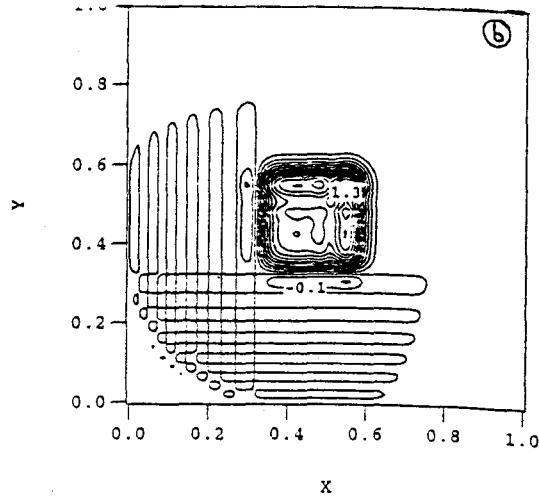
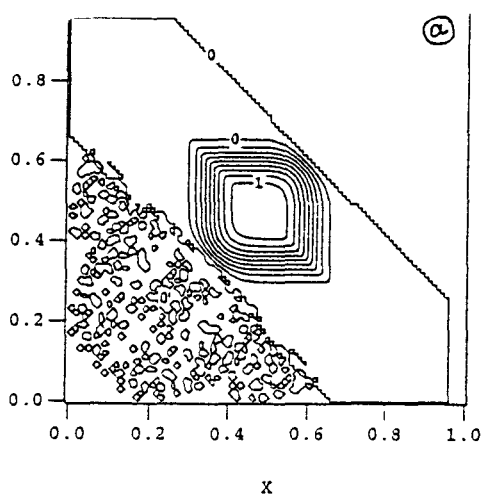


Figure 12-1:  $C_x = C_y = 0.50$

- a) Schéma Upwind
- b) Schéma Lax-Wendroff
- c) Limiteur Minmod
- d) Limiteur Superbee
- e) Limiteur Van Leer(2)
- f) Limiteur C.M.

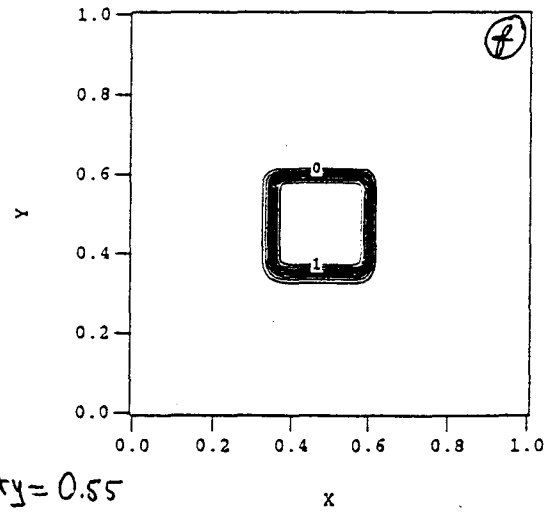
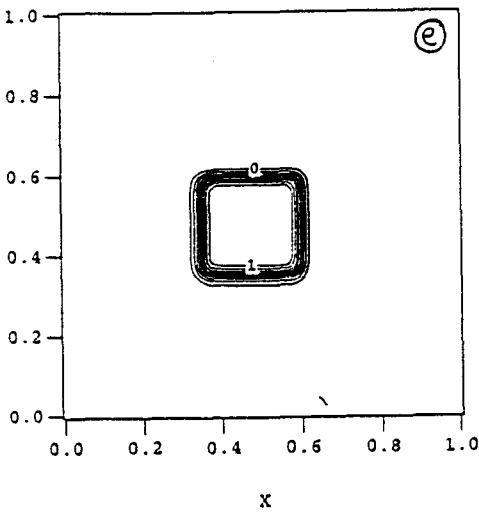
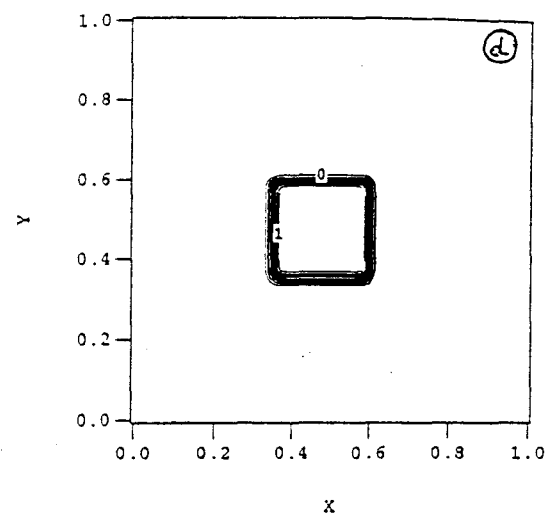
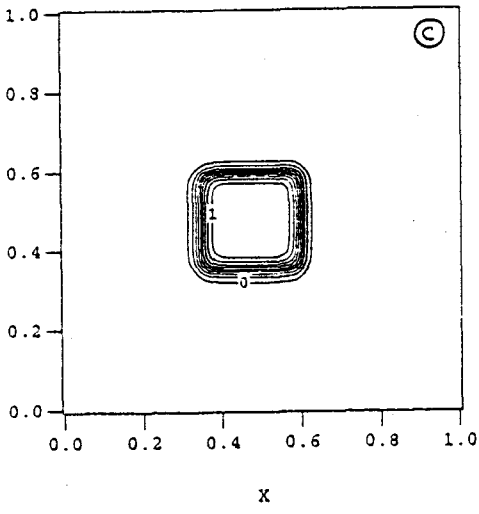
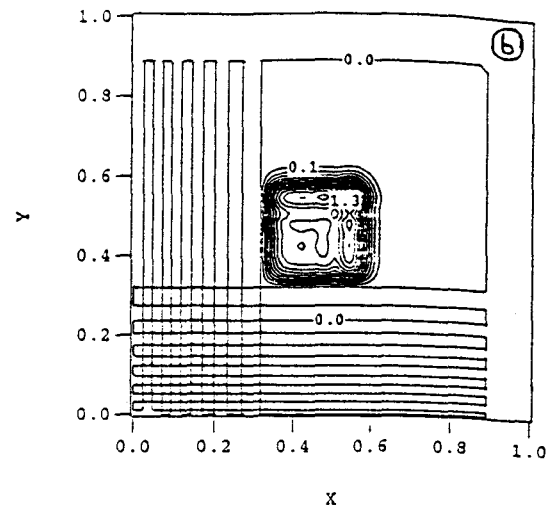
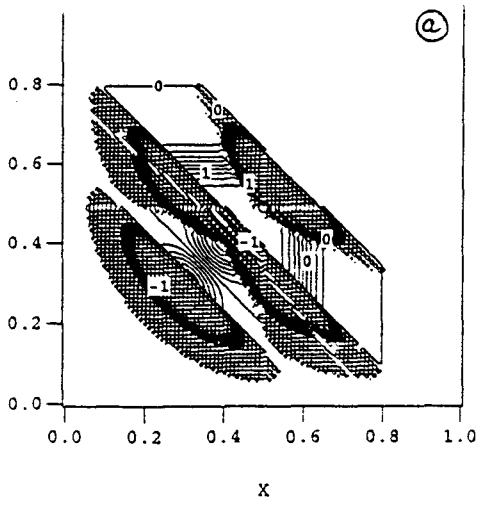


Figure 12-2:  $C_{rx} = C_{ry} = 0.55$

- a) Schéma Upwind
- b) Schéma Lax-Wendroff
- c) limiteur Minmod
- d) limiteur Superbee
- e) limiteur Van Leer(2)
- f) limiteur C.M.

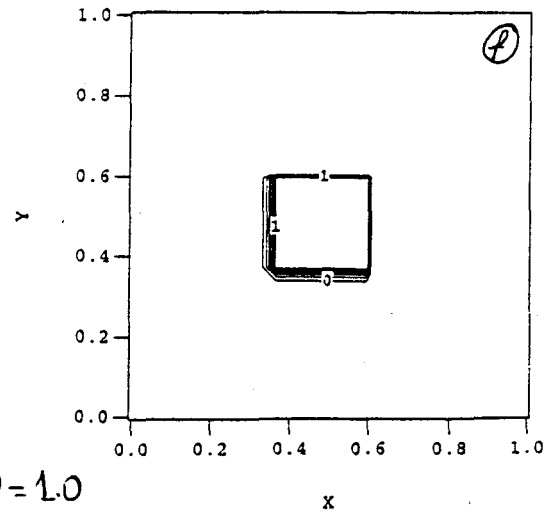
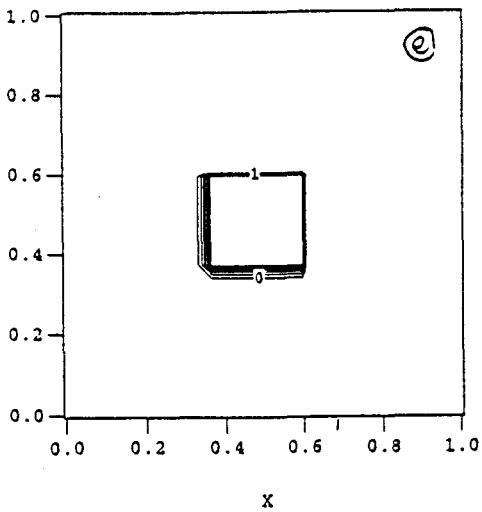
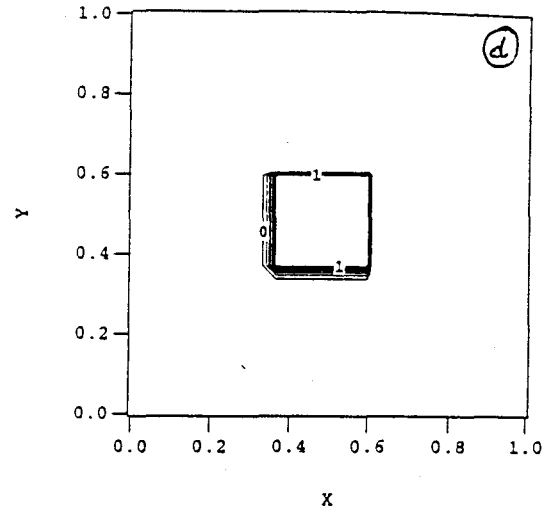
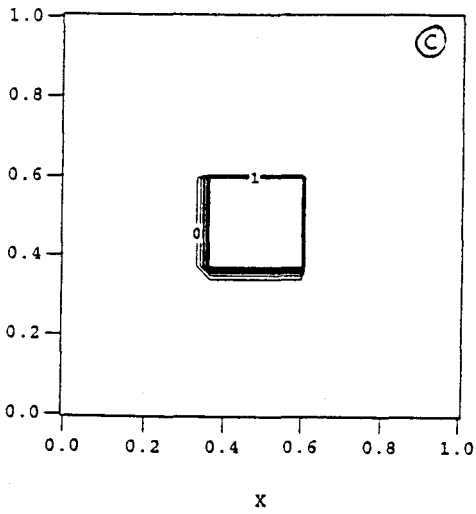
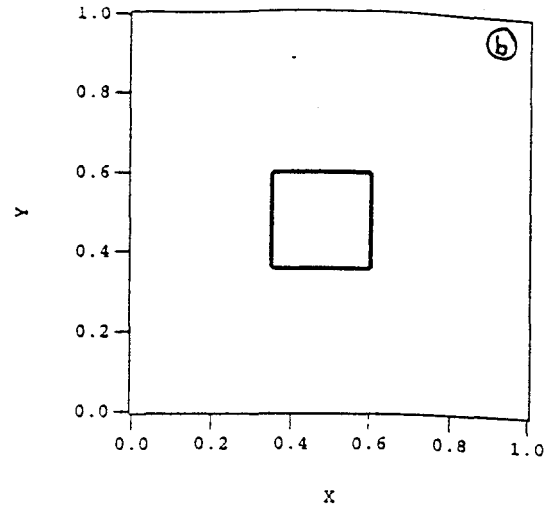
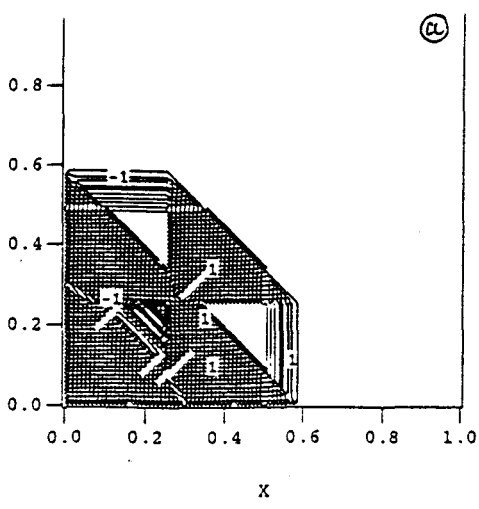


Figure 12-3 :  $C_{rx} = C_{ry} = 1.0$

- a) schéma Upwind
- b) schéma Lax-Wendroff
- c) limiteur Minmod
- d) limiteur Superbee
- e) limiteur Van Leer (2)
- f) limiteur C.M.

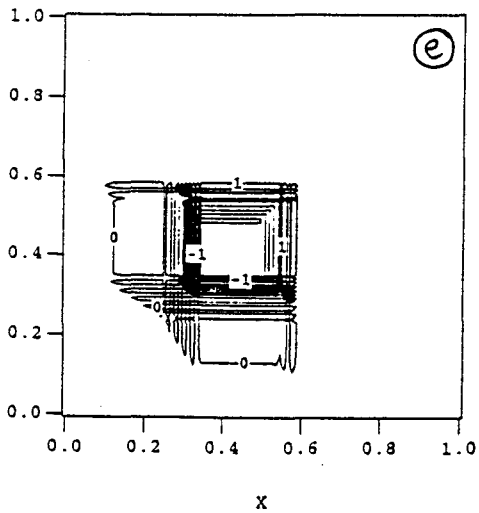
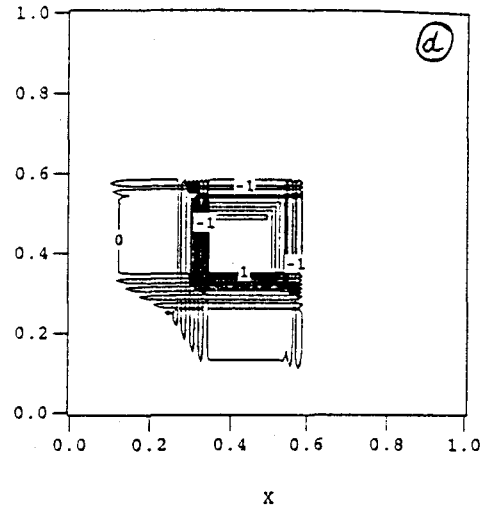
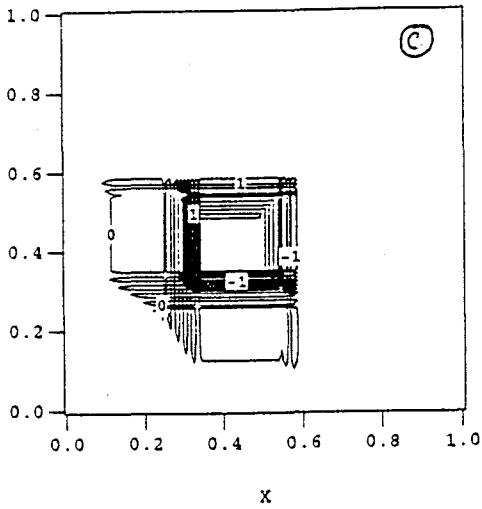
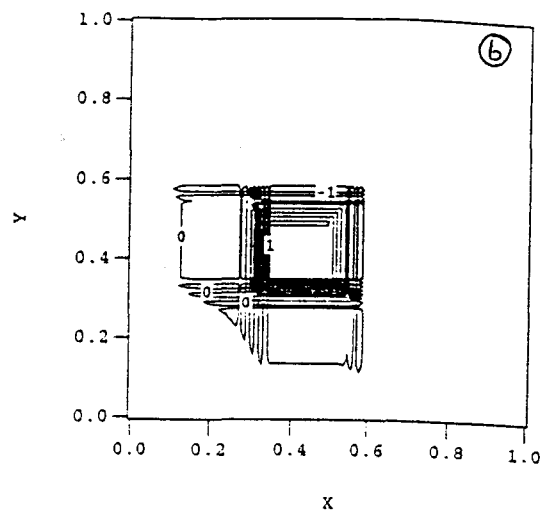
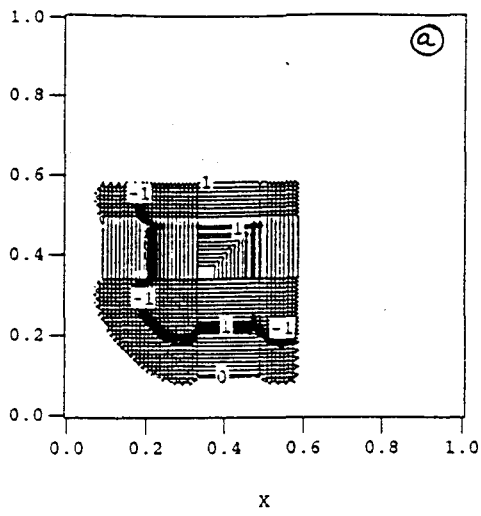
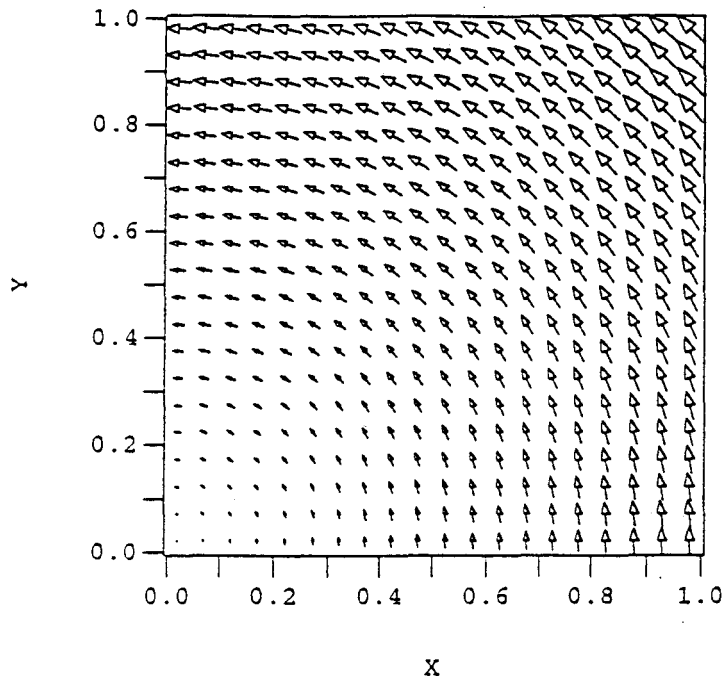


Figure 12-4:  $C_{rx} = C_{ry} = 1.05$

- a) schéma Lax-Wendroff.
- b) limiteur Minmod
- c) limiteur Superbee
- d) limiteur Van Leer(2)
- e) limiteur C.M.

Champ de courant



$\rightarrow = 8.89$

Figure 13.a : champ de vitesse

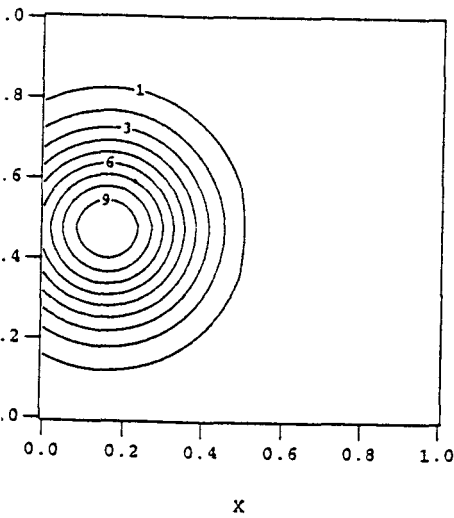


Figure 13.b : Solution Analytique  
 $\bar{a}$   $t_s = 0.7$

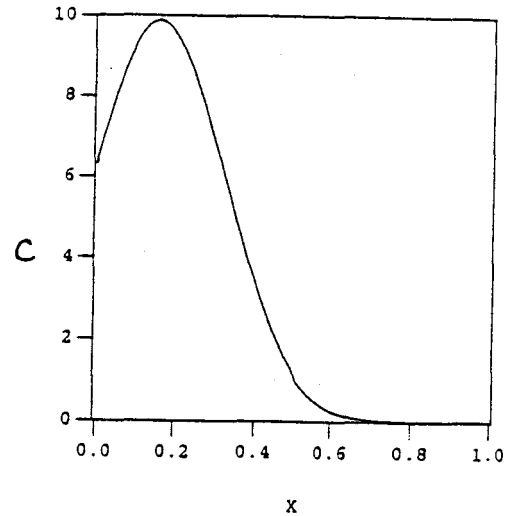


Figure 13.c : Coupe  $y = 0.5$   
de la Solution Analytique  
 $\bar{a}$   $t_s = 0.7$

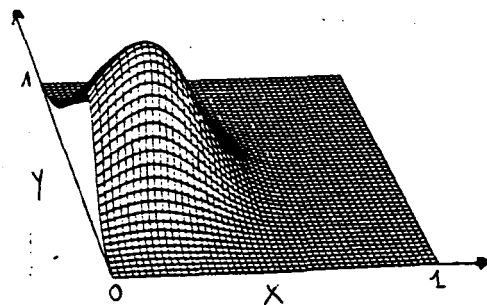


Figure 13.d : vue 3-D de la solution  
analytique  $\bar{a}$   $t_s = 0.7$



	Cmin	Cmax	Rmass	E1	E2	Einfine
Exacte	0.124932E-07	0.999253E+00	-	-	-	-
Upwind	0.124932E-07	0.883305E+00	0.966119E+00	0.106935E-01	0.241870E-01	0.120541E+00
Lax-Wendroff	0.124932E-07	0.995857E+00	0.995323E+00	0.101812E-02	0.202591E-02	0.843078E-02
Minmod	0.124932E-07	0.965521E+00	0.994568E+00	0.137587E-02	0.319072E-02	0.342605E-01
Superbee	0.124932E-07	0.990808E+00	0.995085E+00	0.109527E-02	0.211250E-02	0.146159E-01
Van Leer (2)	0.124932E-07	0.980005E+00	0.994794E+00	0.114100E-02	0.228492E-02	0.197922E-01
MC	0.124932E-07	0.985295E+00	0.994806E+00	0.113144E-02	0.219348E-02	0.143223E-01

Tableau: 13-A

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	E2	Einfine
Exacte	0.129616E-07	0.999503E+00	-	-	-	-
Upwind	0.129616E-07	0.897593E+00	0.973326E+00	0.960838E-02	0.213283E-01	0.105721E+00
Lax-Wendroff	0.129616E-07	0.996099E+00	0.991863E+00	0.162749E-02	0.322218E-02	0.127797E-01
Minmod	-0.136572E-02	0.968327E+00	0.991282E+00	0.185785E-02	0.387685E-02	0.314936E-01
Superbee	0.129616E-07	0.990921E+00	0.991731E+00	0.165731E-02	0.320059E-02	0.149010E-01
Van Leer (2)	0.129616E-07	0.981158E+00	0.991500E+00	0.168000E-02	0.332201E-02	0.185663E-01
MC	0.129616E-07	0.986056E+00	0.991512E+00	0.166851E-02	0.327305E-02	0.135950E-01

Tableau: 13-B

	Cmin	Cmax	Rmass	E1	E2	Einfine
Exacte	0.124013E-07	0.999225E+00	-	-	-	-
Upwind	-0.801502E-01	0.9000167E+00	0.974647E+00	0.954826E-02	0.209515E-01	0.102957E+00
Lax-Wendroff	0.124013E-07	0.995852E+00	0.991175E+00	0.175215E-02	0.347127E-02	0.137349E-01
Minmod	-0.324066E+02	0.322387E+02	0.990545E+00	0.113989E+00	0.126936E+01	0.324066E+02
Superbee	-0.466591E-04	0.991074E+00	0.991045E+00	0.177694E-02	0.344369E-02	0.157220E-01
Van Leer (2)	-0.124312E-01	0.981422E+00	0.990818E+00	0.184668E-02	0.359043E-02	0.181419E-01
MC	-0.130559E-02	0.986248E+00	0.990834E+00	0.179095E-02	0.351141E-02	0.1343920E-01

Tableau: 13-C

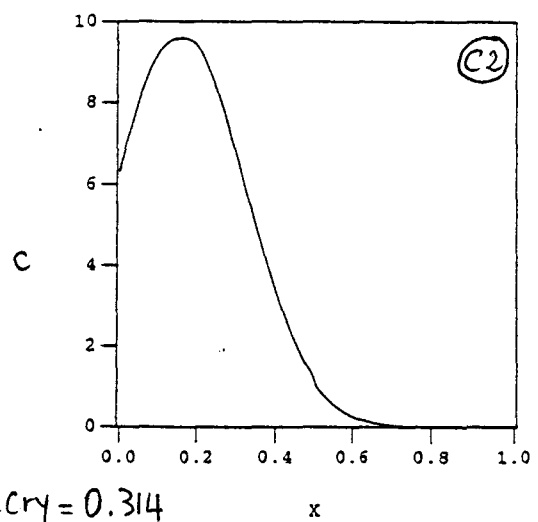
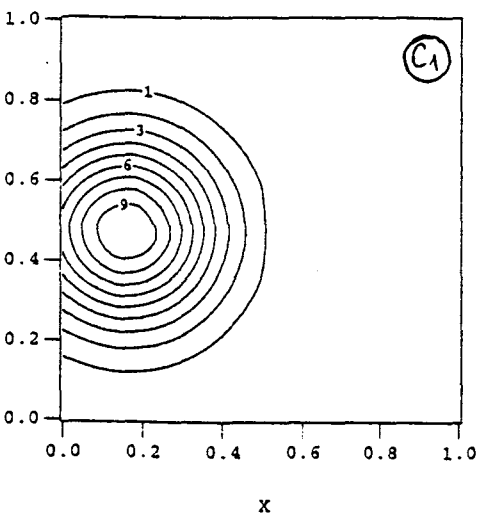
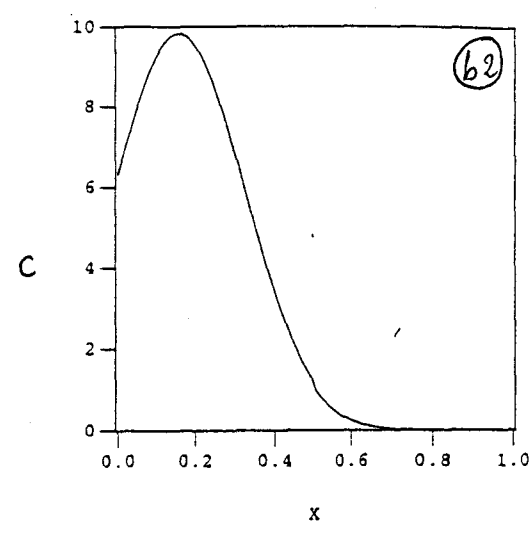
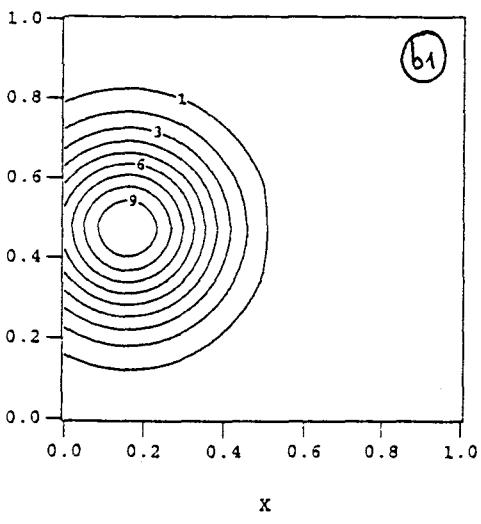
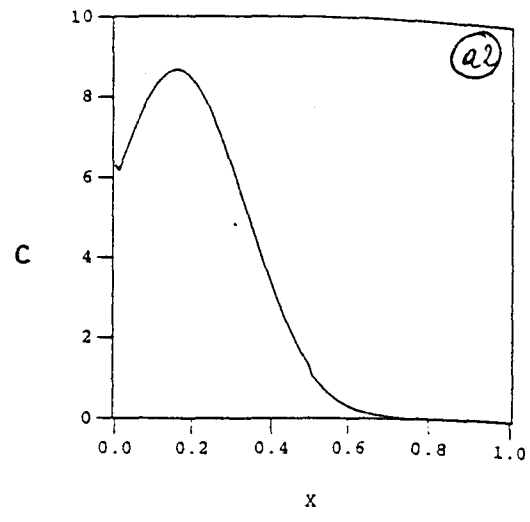
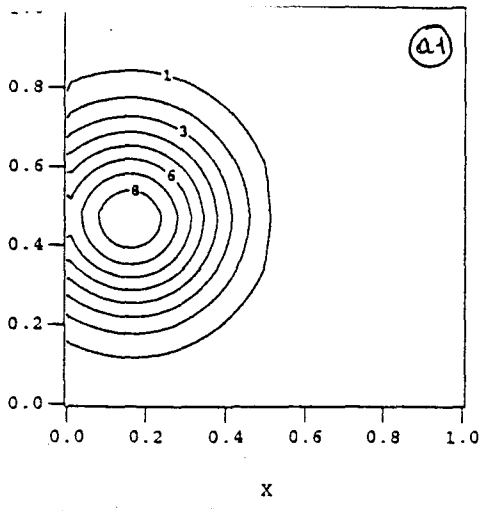


Figure 13.1 :  $cr_x = cr_y = 0.314$

- a1) Schéma Upwind
- b1) Schéma Lax-Wendroff
- c1) Limiteur Minmod

- a2) Coupe  $y=0.5$ , Schéma Upwind
- b2) Coupe  $y=0.5$ , Lax-Wendroff
- c2) Coupe  $y=0.5$ , Minmod

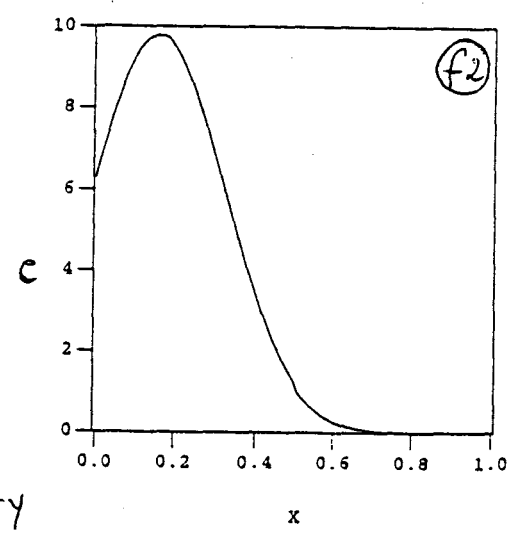
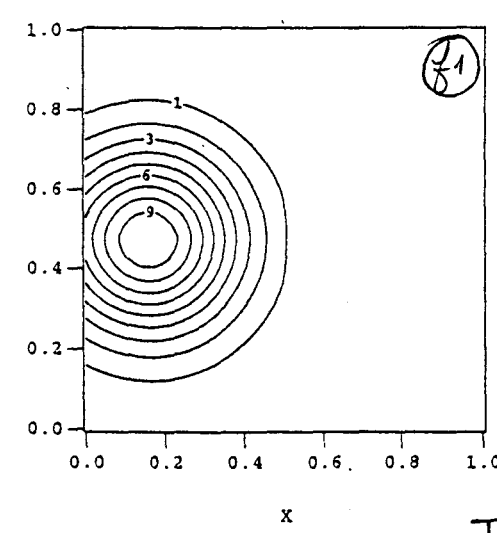
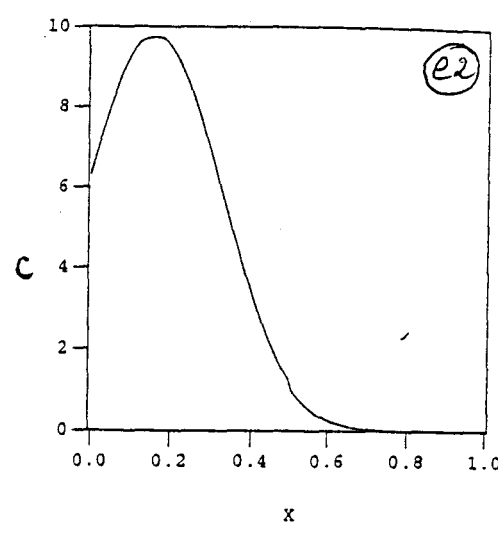
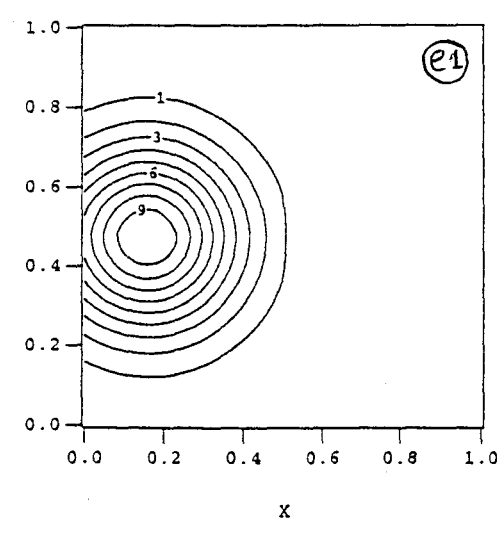
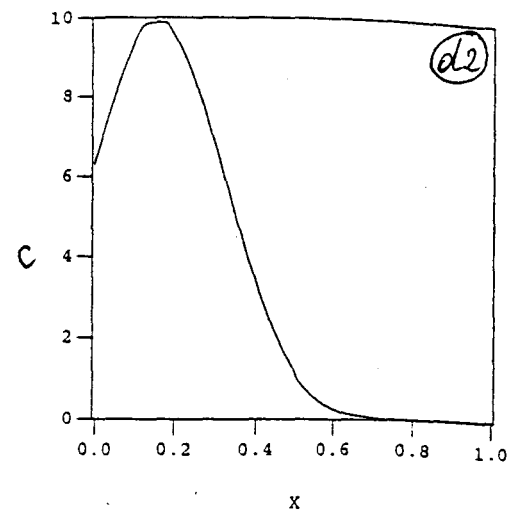
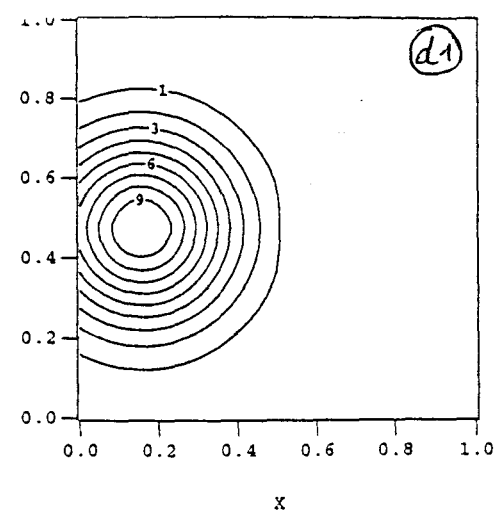


Figure 13.1:  $C \cdot x = 0.314 = C \cdot y$

- d1) limiteur Superbee
- e1) limiteur Van Leer(2)
- f1) limiteur C.M.

- d2) Coupe  $\gamma=0.5$ , Superbee
- e2) Coupe  $\gamma=0.5$ , Van Leer(2)
- f2) Coupe  $\gamma=0.5$ , C.M.

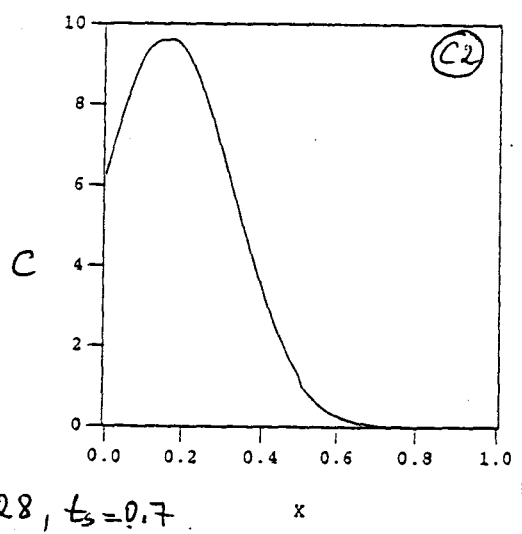
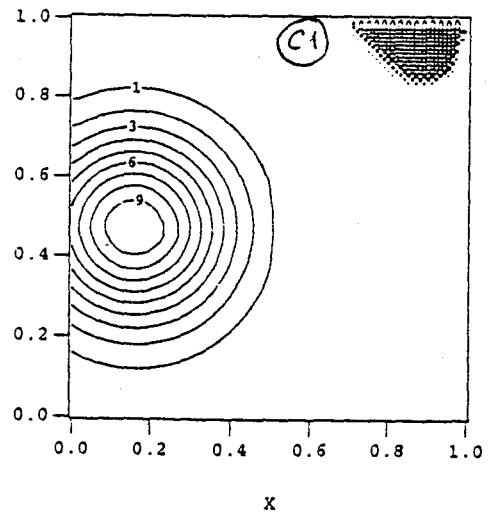
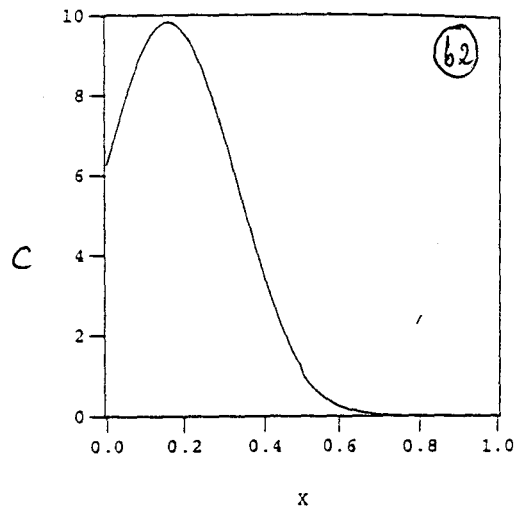
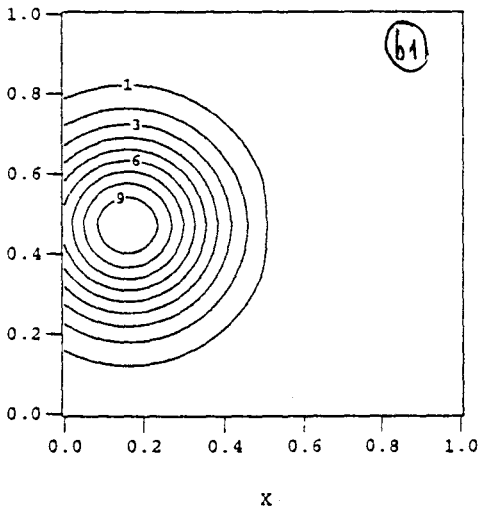
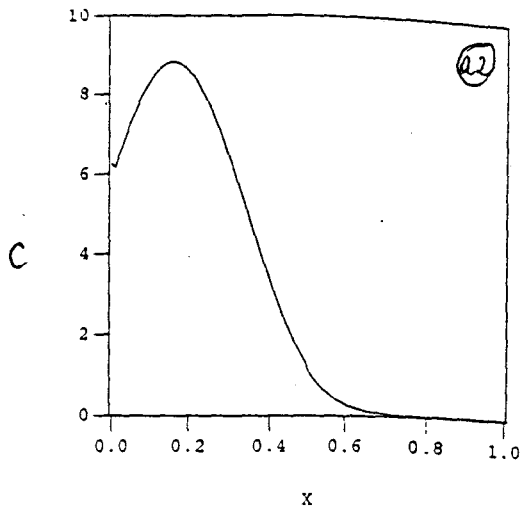
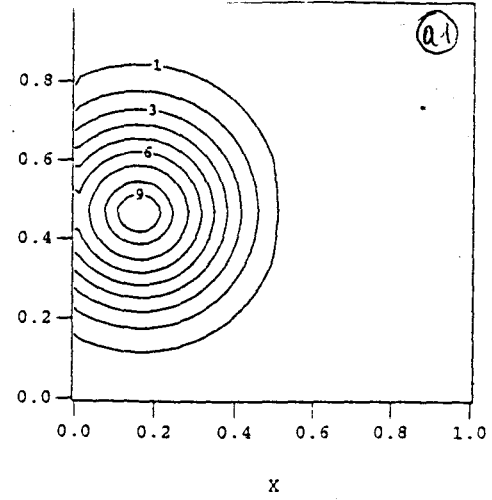


Figure 13.2:  $crx = cry = 0.628$ ,  $t_3 = 0.7$ .

- a1) Schema Upwind
- b1) Schema Lax-Wendroff
- c1) Limiteur Minmod

- a2) Coupe  $y=0.5$ , Upwind
- b2) Coupe  $y=0.5$ , Lax-Wendroff
- c2) Coupe  $y=0.5$ , Minmod

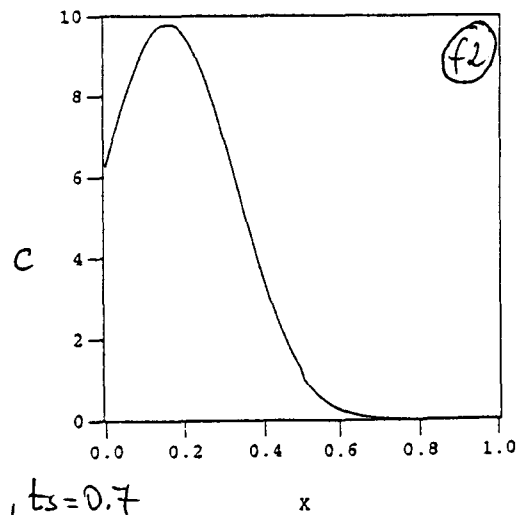
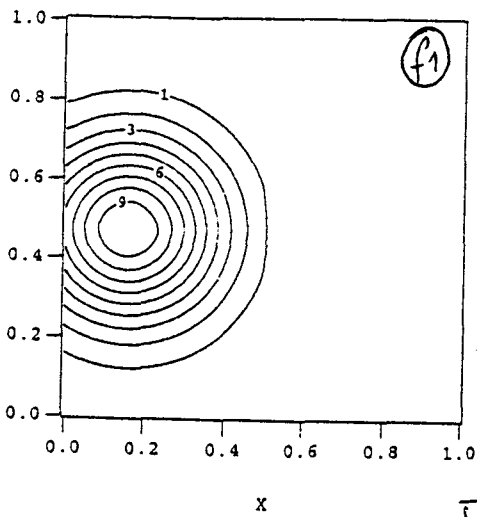
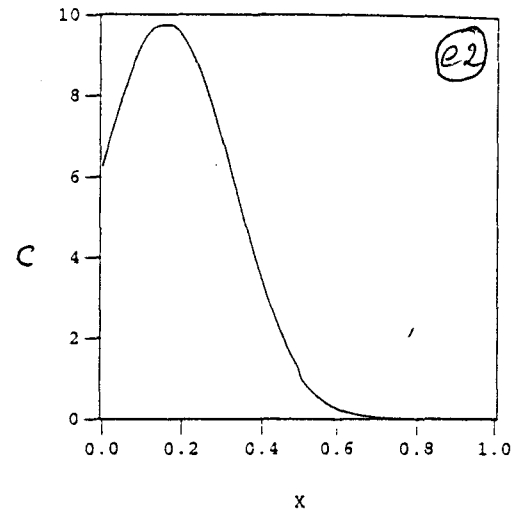
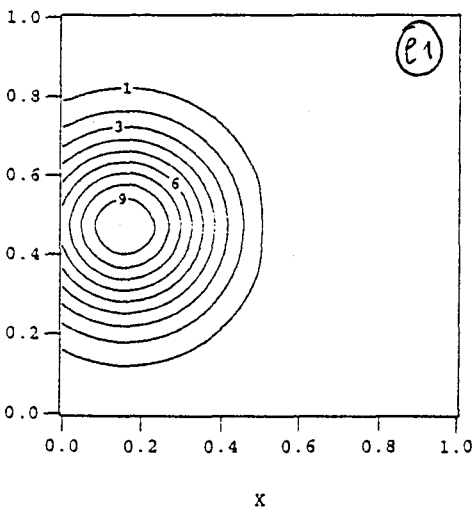
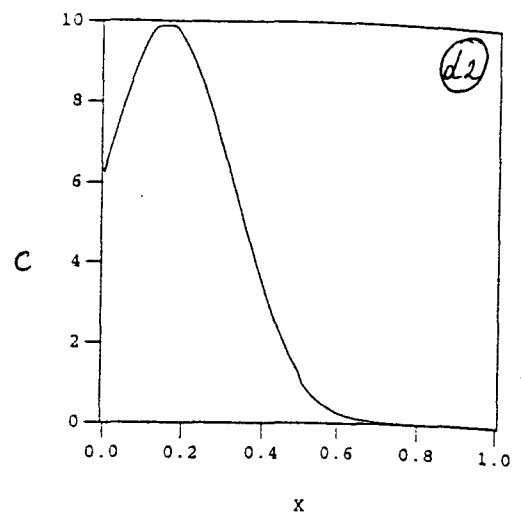
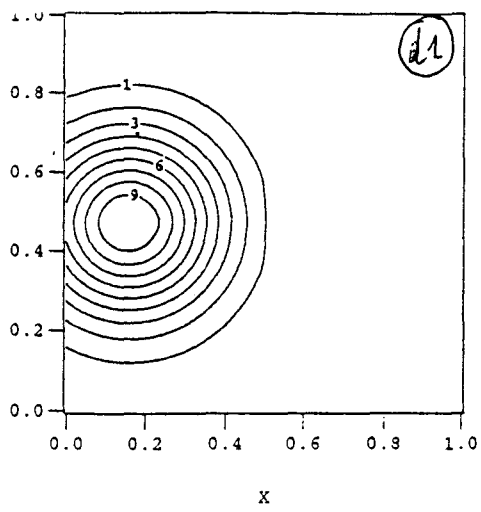


Figure 13.2:  $C_{xy} = C_{yx} = 0.628$ ,  $t_s = 0.7$

- d1) Limiteur Superbee
- e1) Limiteur VanLeer(2)
- f1) Limiteur C.M.

- d2) Coupe  $y=0.5$ , Superbee
- e2) Coupe  $y=0.5$ , VanLeer(2)
- f2) Coupe  $y=0.5$ , C.M.

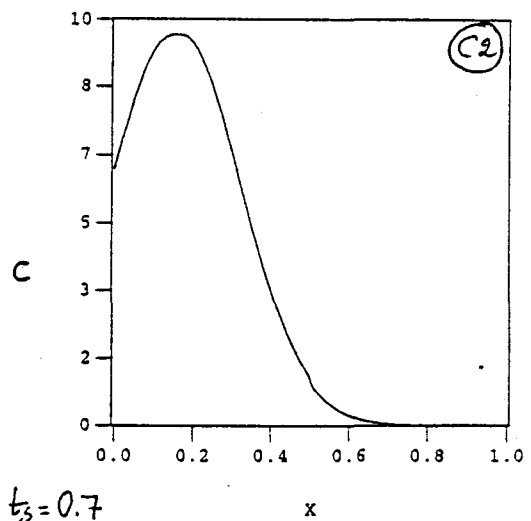
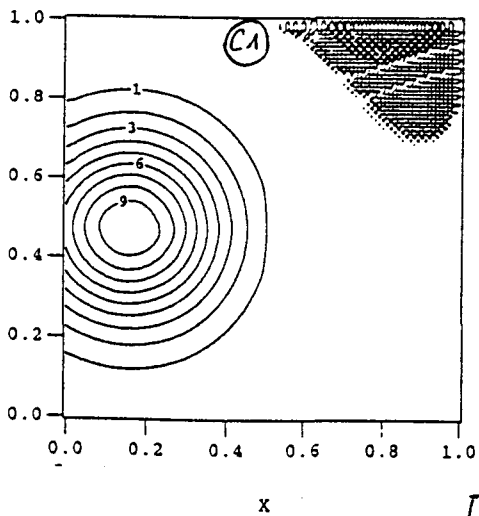
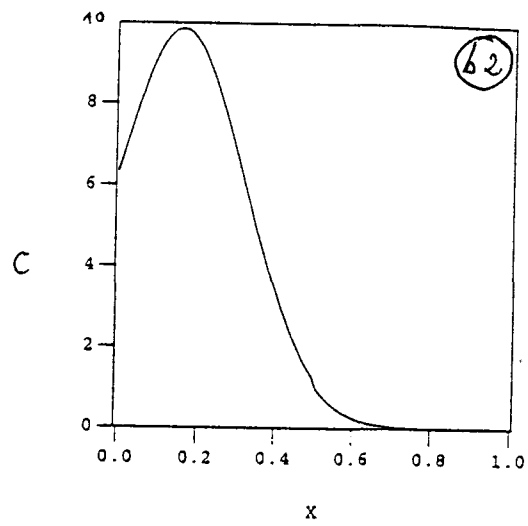
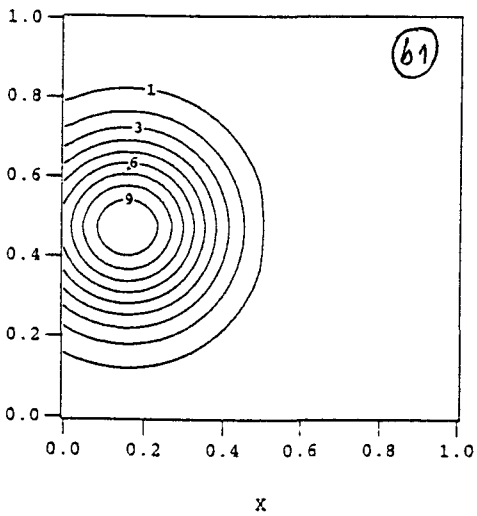
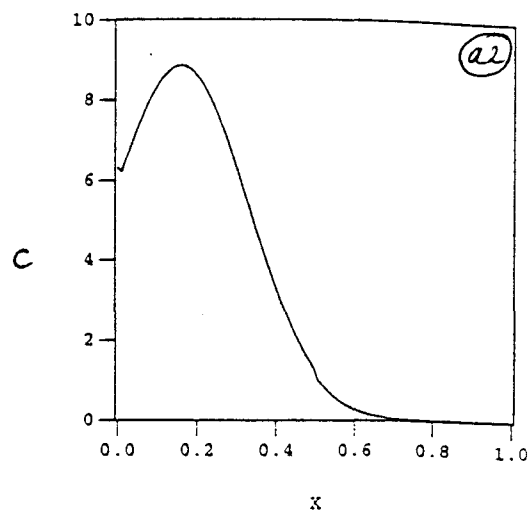
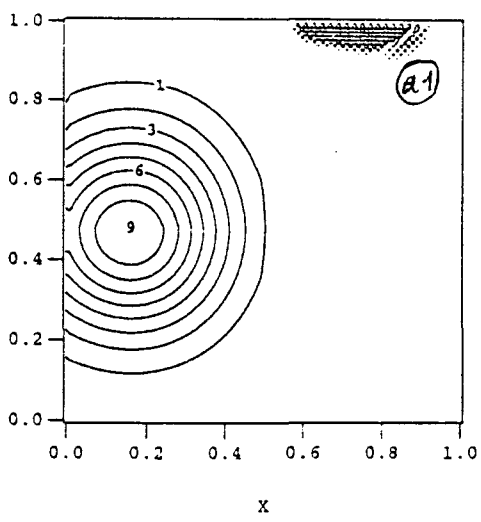


Figure 13.3 :  $C_{Tx} = C_{Ty} = 0.691, t_3 = 0.7$

- a1) Schéma Upwind
- b1) Schéma Lax-Wendroff
- c1) Limiteur Minmod

- a2) Coupe  $y=0.5$ , Upwind
- b2) Coupe  $y=0.5$ , Lax-Wendroff
- c2) Coupe  $y=0.5$ , Minmod

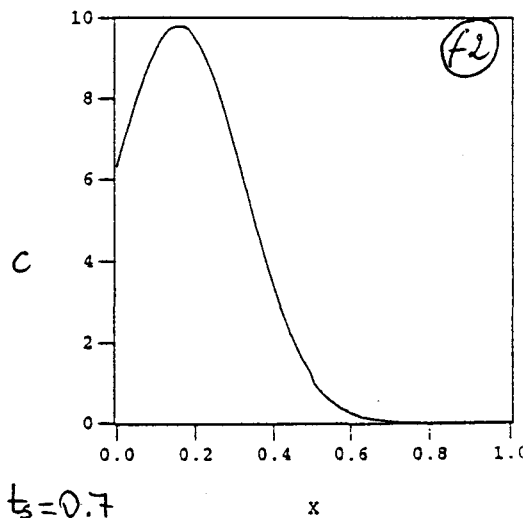
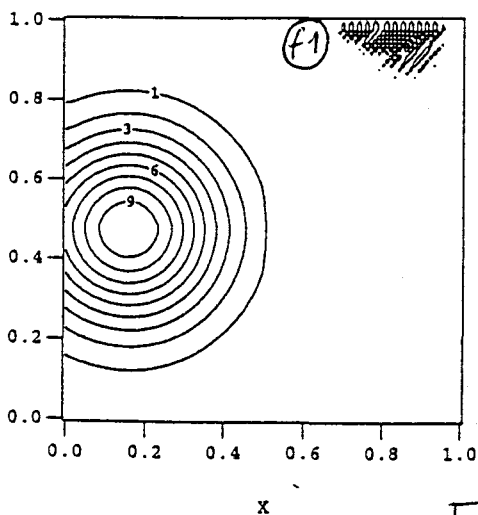
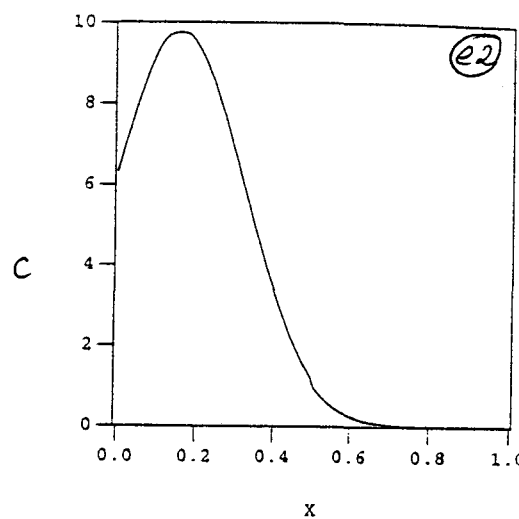
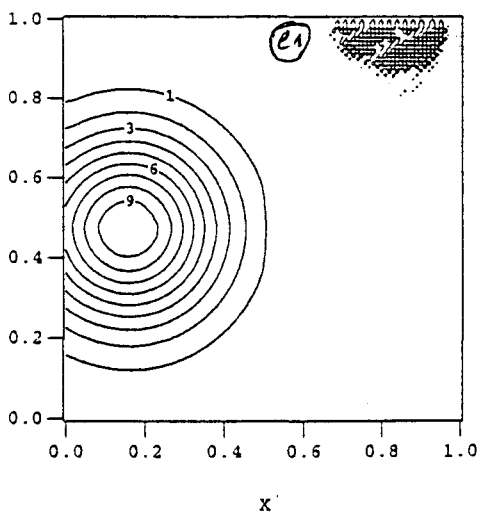
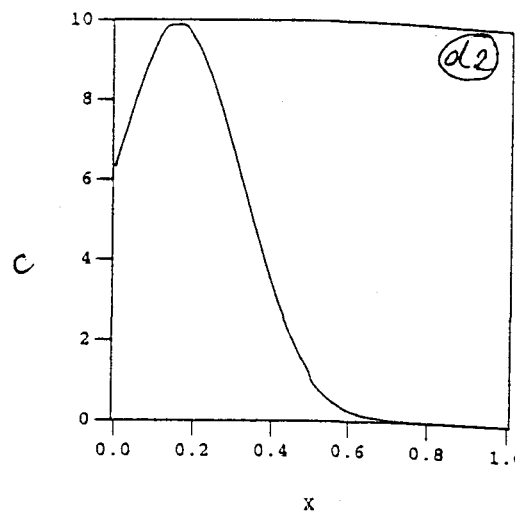
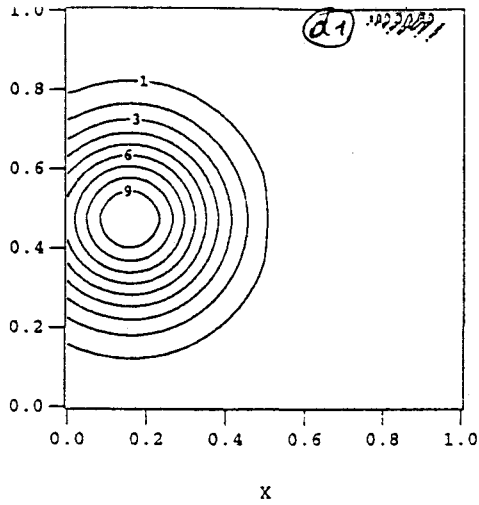


Figure 13.3:  $crx = cry = 0.691$ ,  $t_3 = 0.7$

- d1) Limiteur Superbee
- e1) Limiteur Van Leer(2)
- f1) Limiteur C.M.

- d2) Coupe  $y=0.5$ , Superbee
- e2) Coupe  $y=0.5$ , Van Leer(2)
- f2) Coupe  $y=0.5$ , C.M.

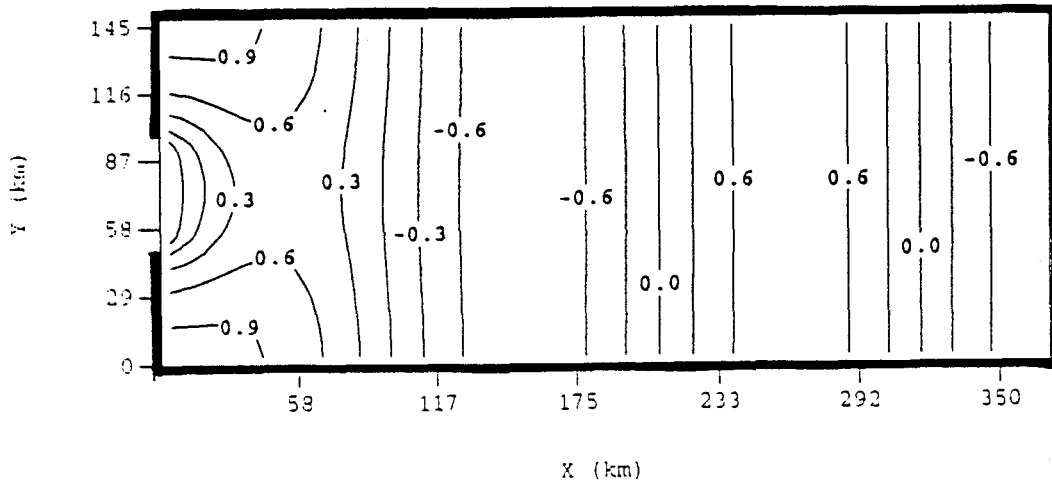
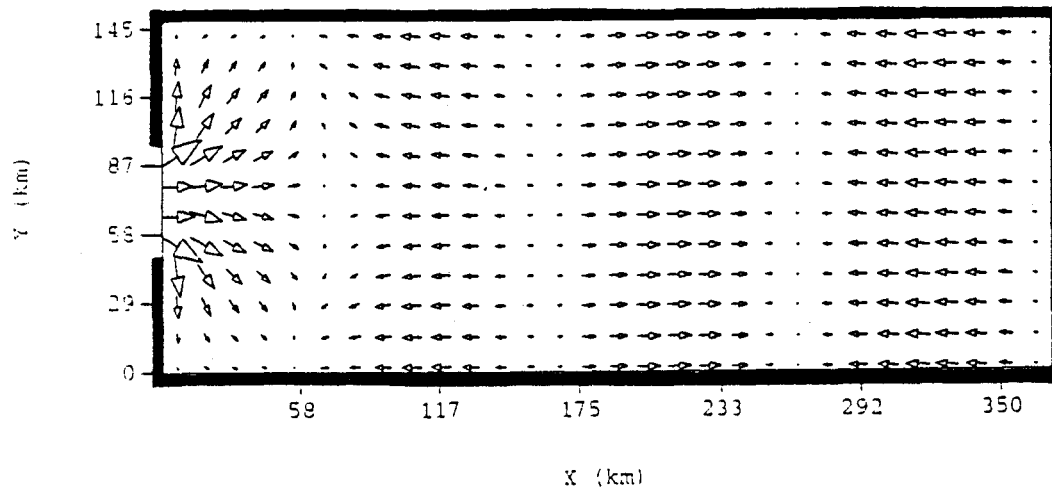


Figure 14.a : hauteur d'eau ( $\eta$ (m)) à P.M.



→ = 1.35 m/s

Figure 14.b : champ de vitesse à P.M.

	Smin	Smax	Rmass
Upwind	10.00	35.00	0.9476
Lax-Wendroff	10.00	38.72	0.9996
Minmod	10.00	35.00	0.9689
Superbee	10.00	35.00	0.9966
Van Leer (2)	10.00	35.00	0.9880
M.C.	10.00	35.00	0.9888

Tableau:14



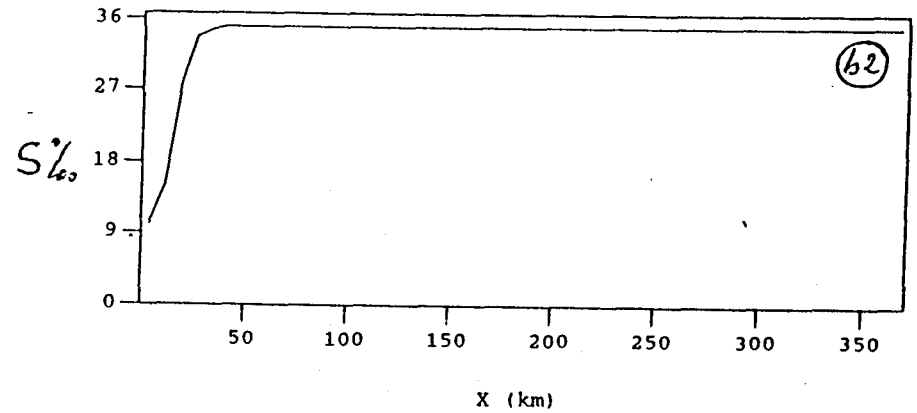
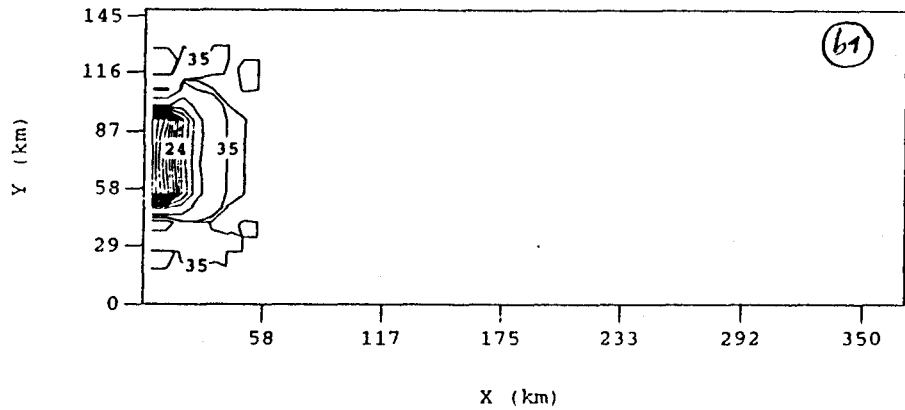
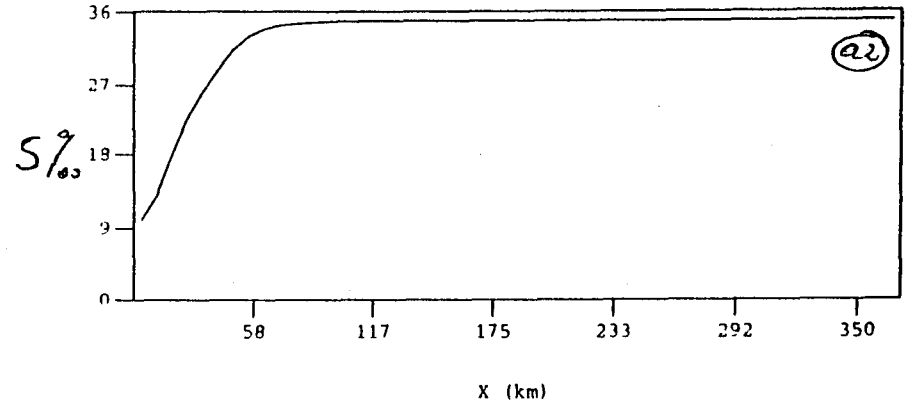
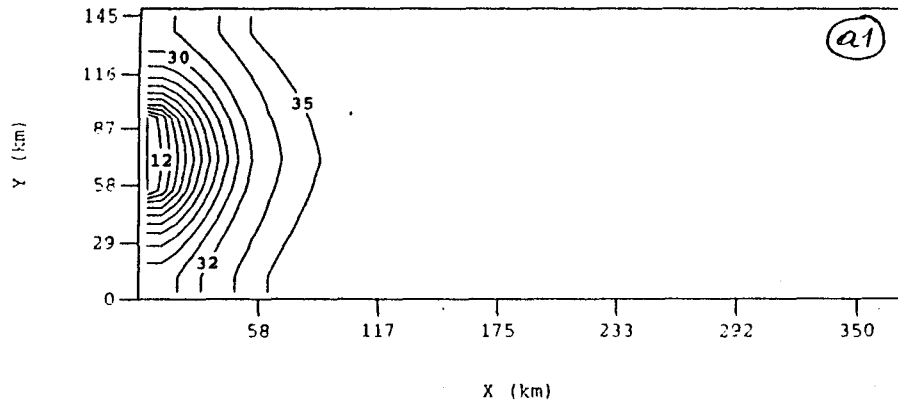


Figure 14: Salinité à P.M.

- a<sub>1</sub>) Schéma Upwind
- b<sub>1</sub>) Schéma Lax-Wendroff

- a<sub>2</sub>) Coupe  $y=77$  km, Upwind
- b<sub>2</sub>) Coupe  $y=77$  km, Lax-Wendroff

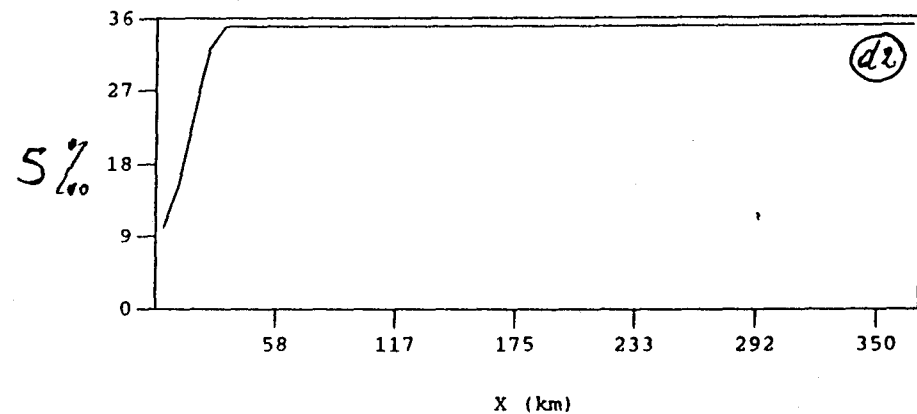
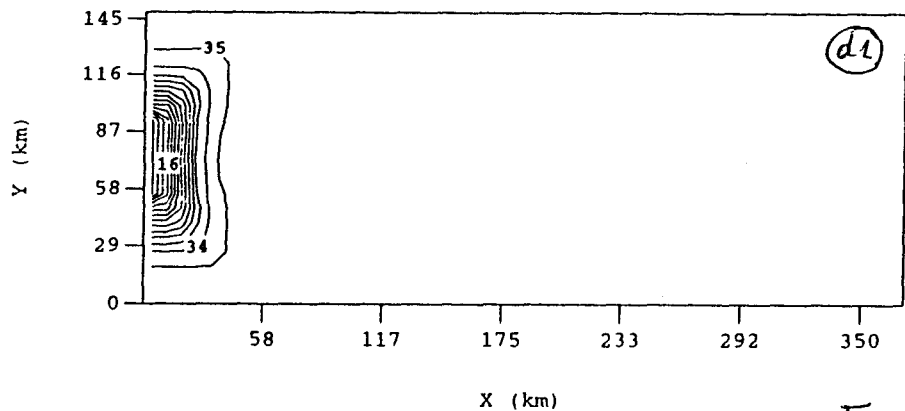
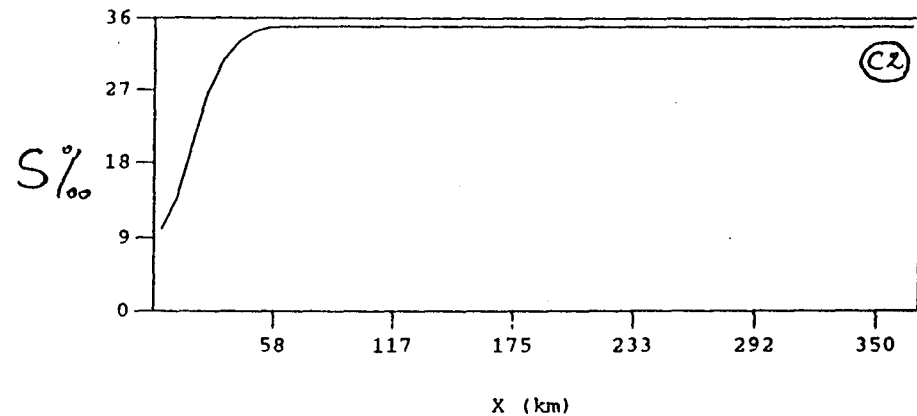
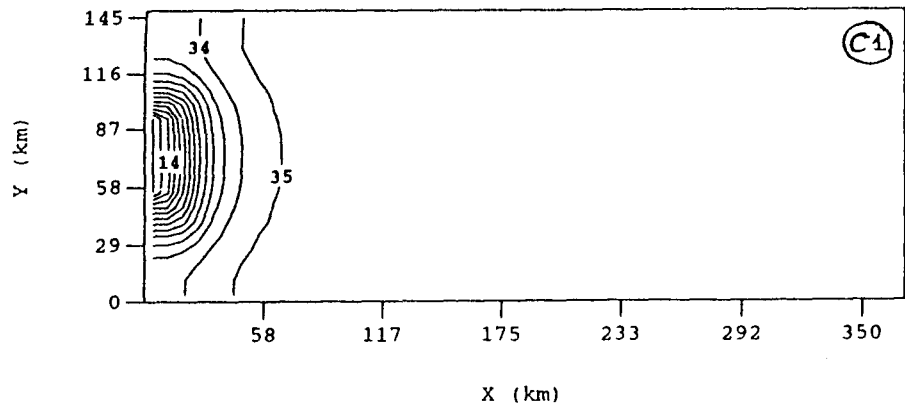


Figure 14 : Salinité à P.M.

c1) Limiteur Minmod  
 d1) Limiteur Superbee

c2) Coupe  $y = 77 \text{ km}$ , Minmod  
 d2) Coupe  $y = 77 \text{ km}$ , Superbee

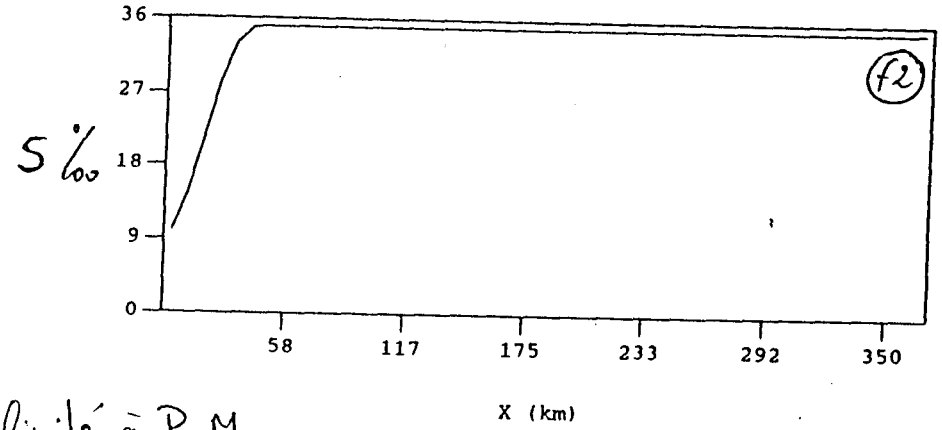
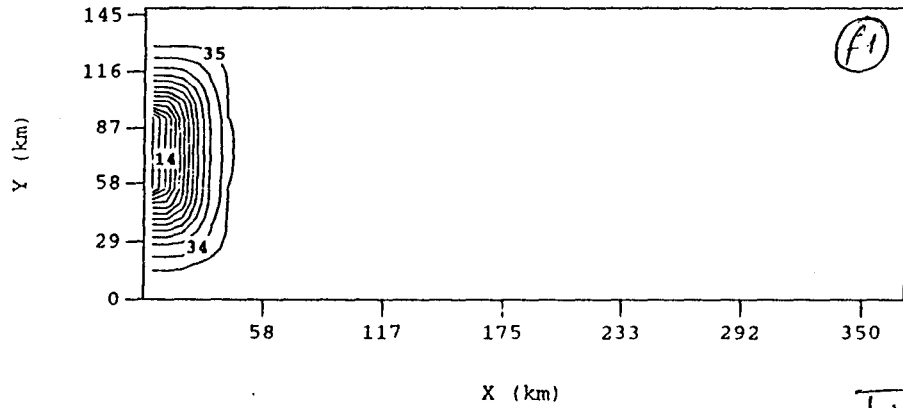
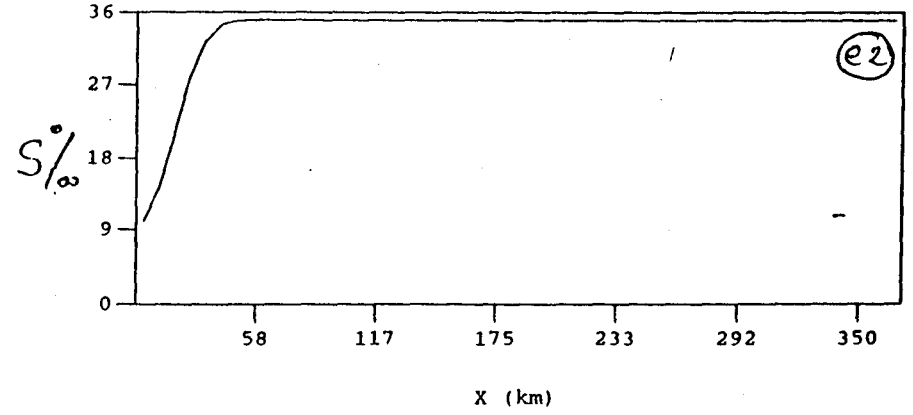
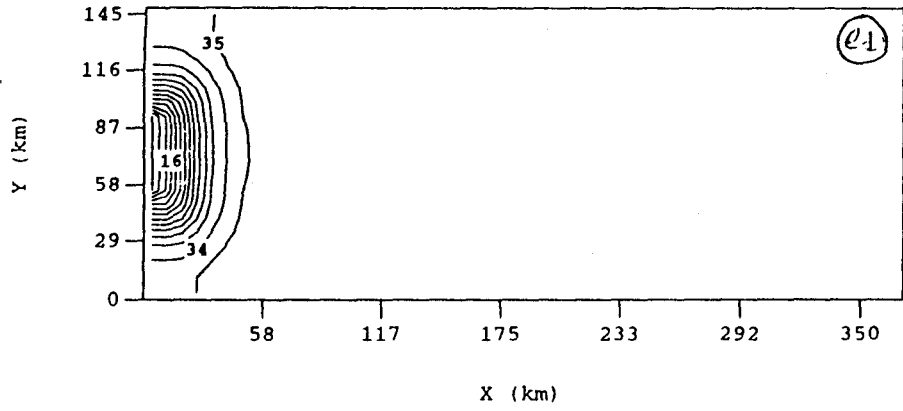


Figure 14: Salinité à P.M.

e1) Limiteur Van Leer(2)  
 f1) Limiteur C.M.

e2) Coupe  $y=77$  Km, Van Leer(2)  
 f2) Coupe  $y=77$  Km, C.M.

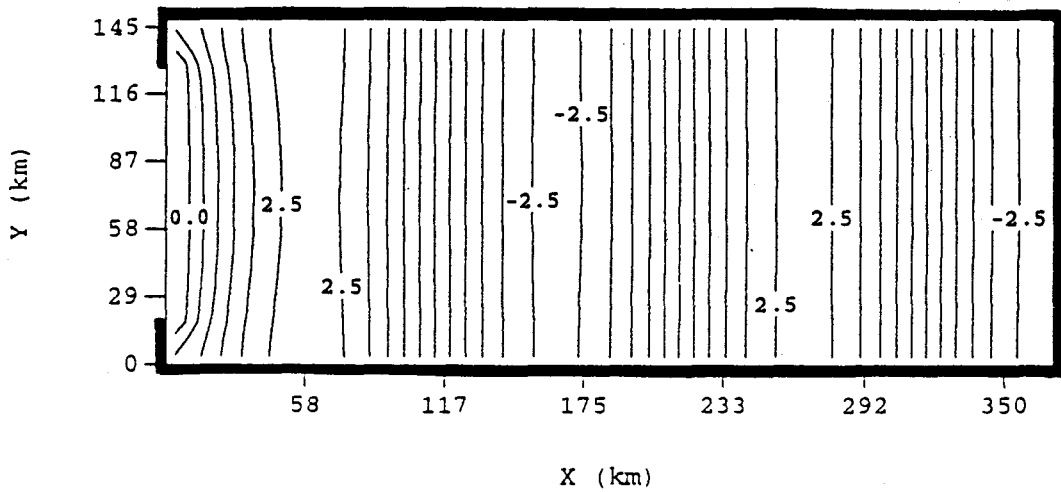
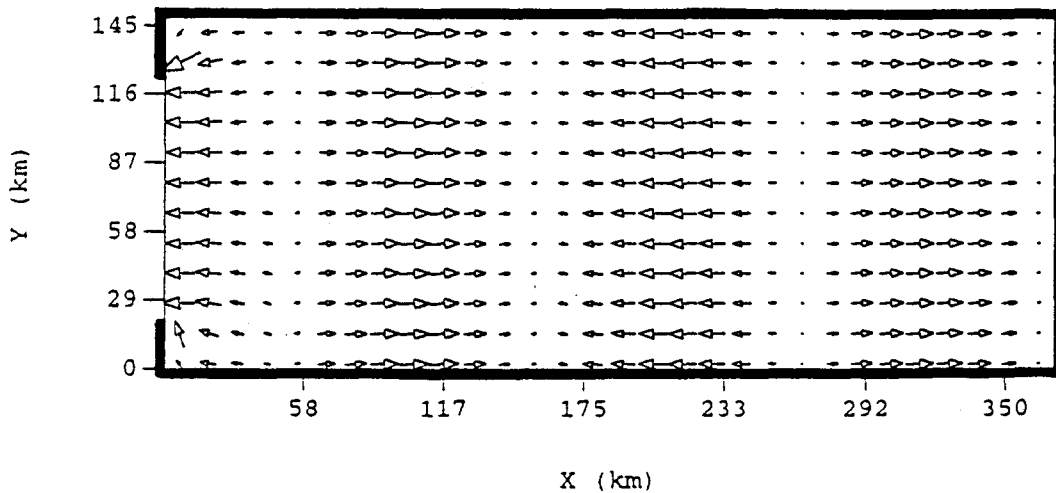


Figure 15.a: hauteur d'eau (m) à P.M.



$\rightarrow = 1.36 \text{ m/s}$

Figure 15.b: champ de vitesse à P.M.

	Smin	Smax	Rmass
Upwind	10.00	35.00	0.9370
Lax-Wendroff	05.96	35.00	0.9862
Minmod	10.00	35.00	0.9673
Superbee	10.00	35.00	0.9816
Van Leer (2)	10.00	35.00	0.9726
M.C.	10.00	35.00	0.9746

Tableau 15

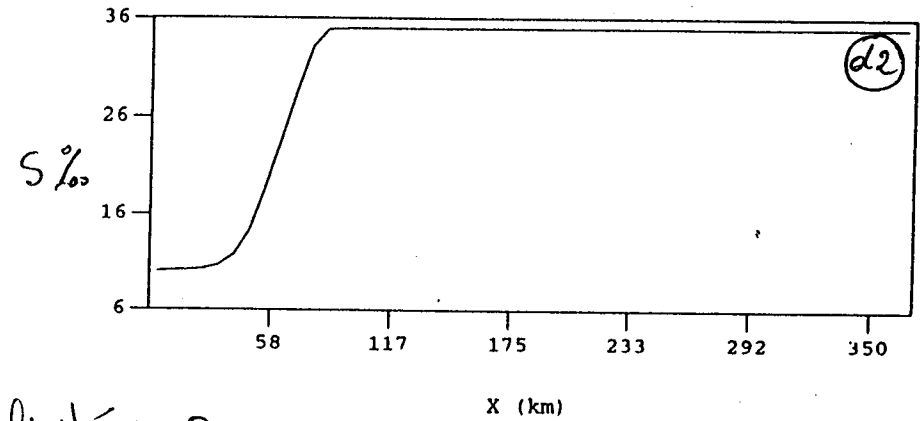
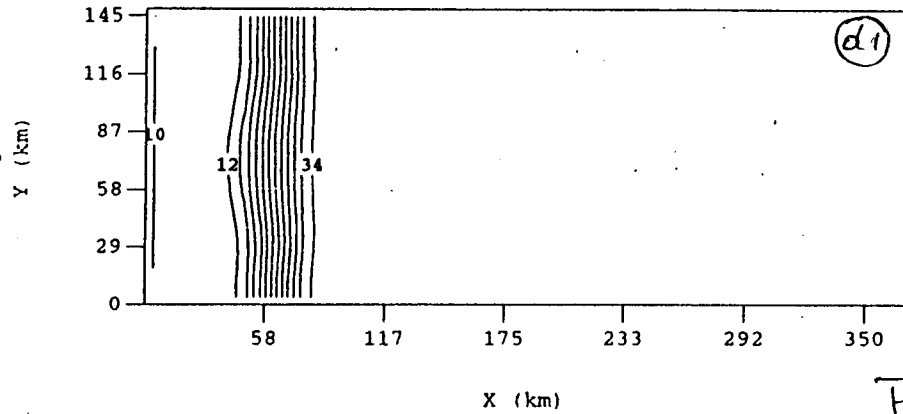
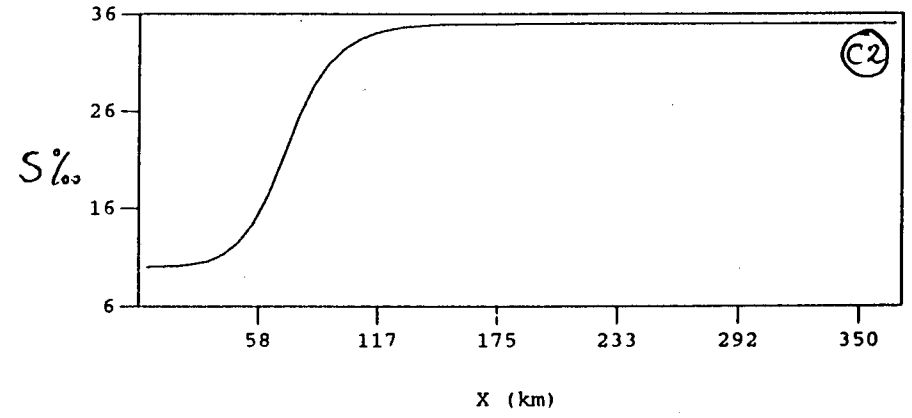
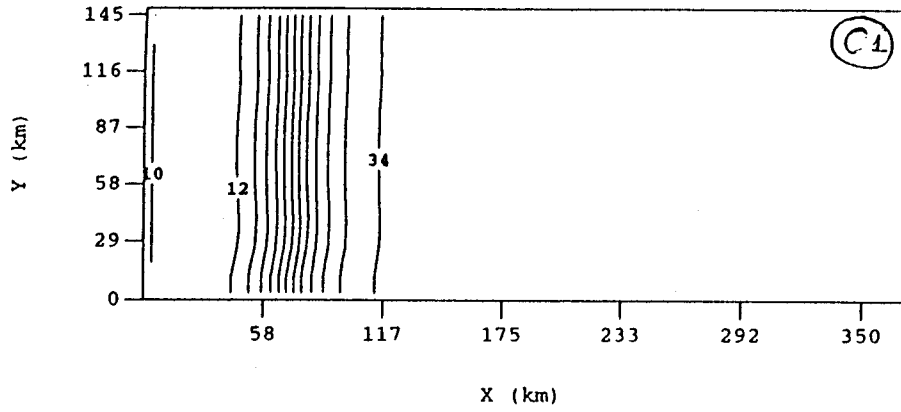


Figure 15: Salinité à P.M.

c1) Limiteur Minmod

d1) Limiteur Superbee

c2) Coupe  $y=77$  Km, Minmod

d2) Coupe  $y=77$  Km, Superbee

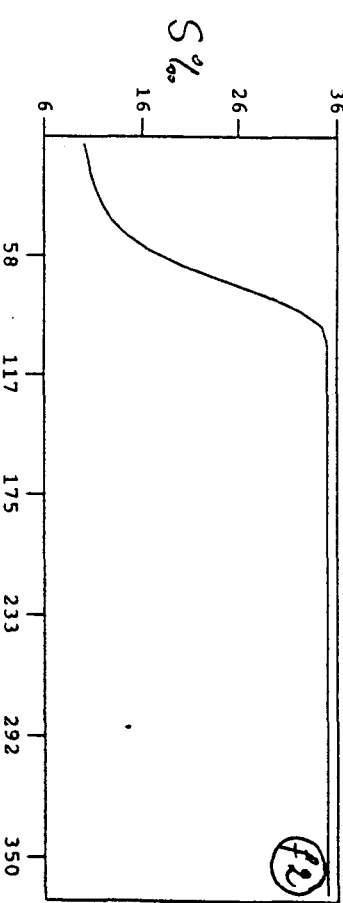
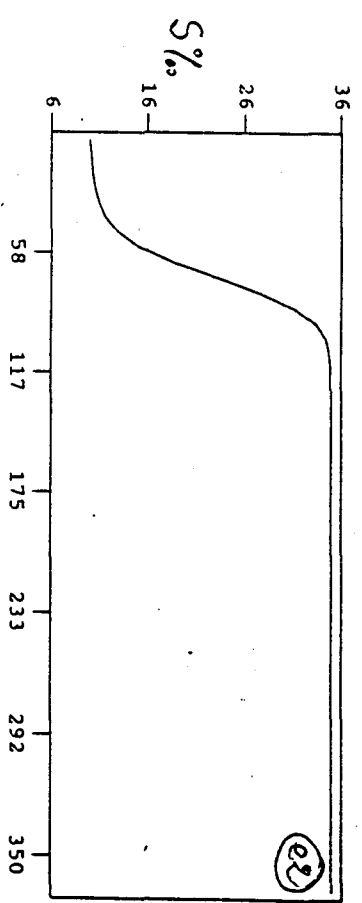
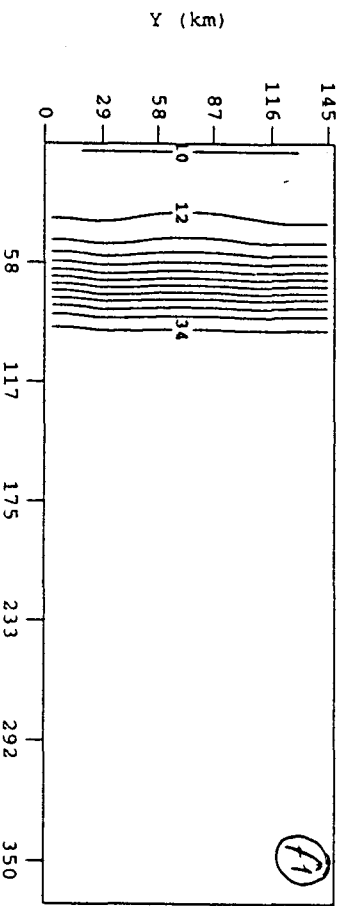
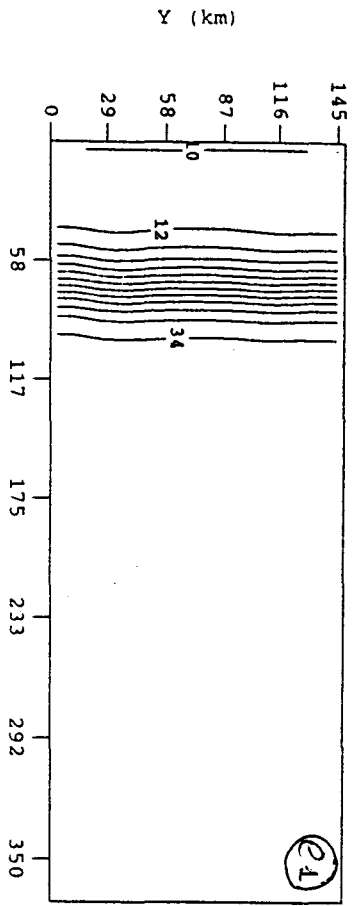


Figure 15: Salinité à P.M.

e1) Limiteur Van Leer (2)  
 f1) Limiteur C.M.

e2) Coupe y=77km, Van Leer (2)  
 f2) Coupe y=77km, C.M.

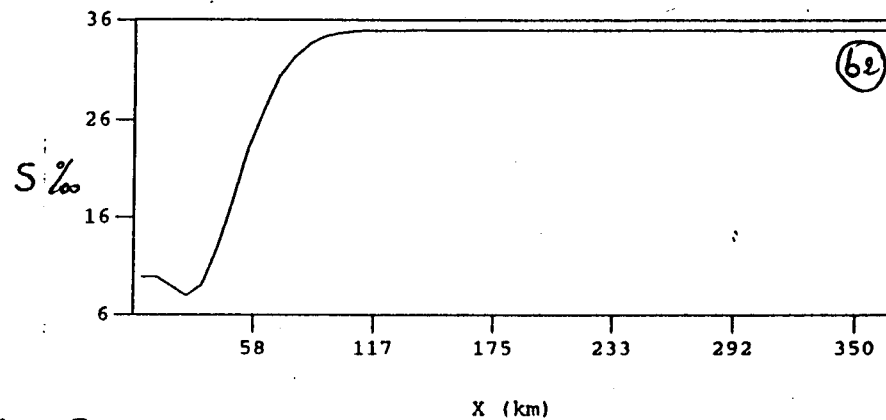
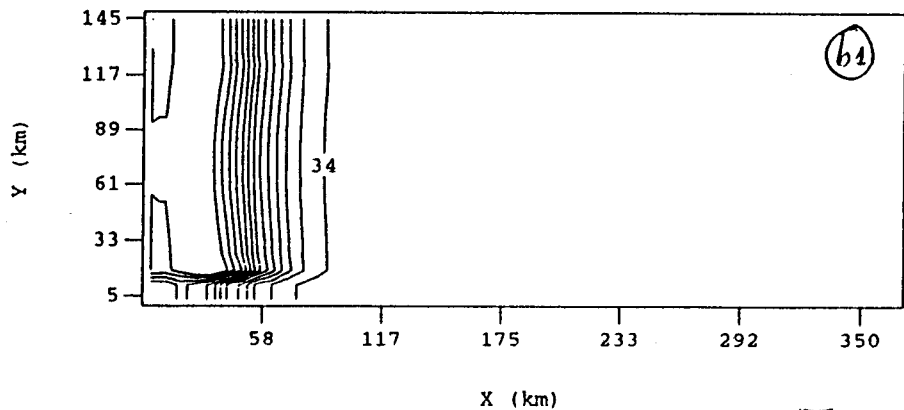
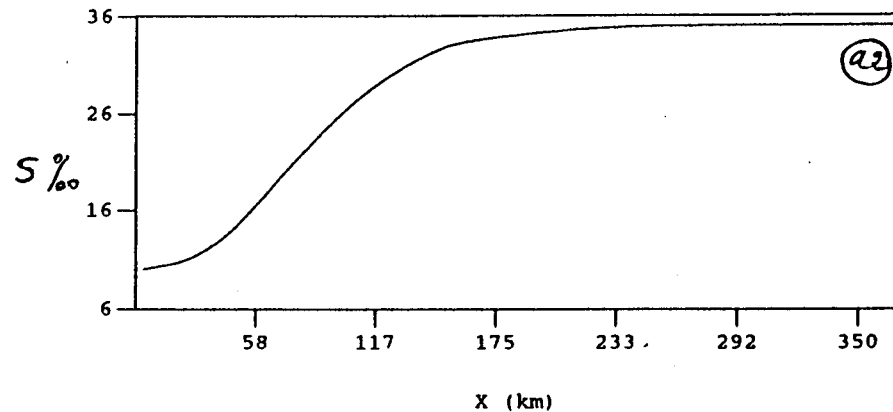
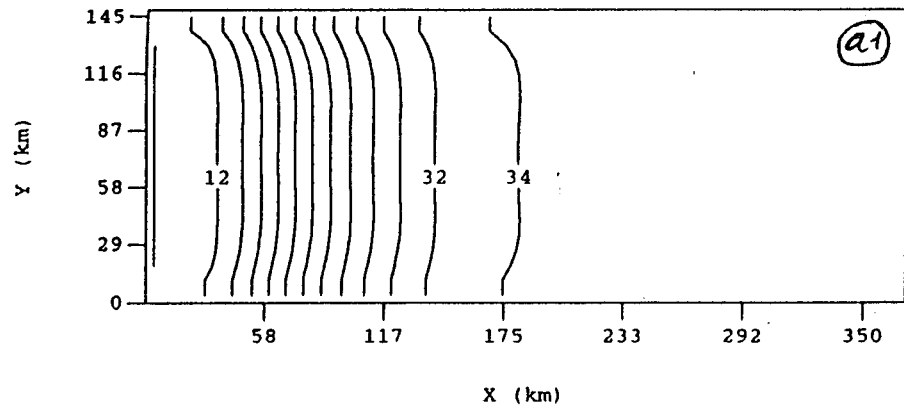


Figure 15: Salinité à P.M.

a1) Schéma Upwind  
 b1) Schéma Lax-Wendroff

a2) Coupe  $y=77$  Km, Upwind  
 b2) Coupe  $y=77$  Km, Lax-Wendroff