N° d'ordre : 1910

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

par

Aude BARTHOLOMEUS-GOUBET
Ingénieur Centrale Lille

SUR LA STABILITE ET LA STABILISATION DES SYSTEMES RETARDES : CRITERES DEPENDANT DES RETARDS

Soutenue le 18 Décembre 1996, devant la commission d'examen :

Président :	M.	P. BORNE
Rapporteurs :	M.	L. DUGARD
	M.	V. KOLMANOVSKII
	M.	F. ROTELLA
Examinateurs :	M.	M. FLIESS
	M.	J.F. LAFAY
	M.	M. STAROSWIECKI
Directeurs :	M.	J.P. RICHARD
	M.	M. DAMBRINE

Table des matières

Introduction générale 1

Notations 5

Chapitre 1 : Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes à retards 8
Introduction 8
I Définitions 9
I.1. Notions d'état d'équilibre et de point d'équilibre 10
I.2. Stabilité d'une solution générale 11
I.3. Définitions relatives à la stabilité 11
I.3.1. Stabilité 12
I.3.2. Attractivité 13
I.3.3. Stabilité asymptotique 13
I.3.4. Stabilité exponentielle 14
I.3.5. Stabilité robuste 14
I.3.5.1. Stabilité sous perturbations persistentes 15
I.3.5.2. Stabilité (asymptotique) robuste d'un équilibre par rapport aux perturbations et au retard 15
I.3.5.3. Stabilité pratique 16
I.3.6. Estimation des domaines 18
I.4. Classification des critères 18
II. Stabilité des systèmes linéaires stationnaires à retards ponctuels 20
II.1. Critères fréquentiels 21
II.1.1. Extension du critère de Routh-Hurwitz 22
II.1.2. Méthodes du lieu des racines 23
II.1.3. Critères algébriques 25
II.2. Critères temporels 26
II.2.1. Critères basés sur les mesures de matrices 26
II.2.2. Critères basés sur les M-matrices 27
II.2.3. Extension de la seconde méthode de Lyapunov 28
II.3. Remarques de synthèse 32
III. Stabilité des systèmes linéaires incertains ou perturbés à retards ponctuels 33
III.1. Les différents types d'incertitudes 34
III.2. Seconde méthode de Lyapunov 35
III.3. Critères basés sur les mesures de matrices 36

IV. Stabilité des systèmes non linéaires et/ou non stationnaires 39
IV.1. Principes de comparaison 40
IV.2. Méthode des normes vectorielles 42
IV.3. Méthode développée par Kolmanovskii 45
IV.4. Systèmes non stationnaires.. 47
IV.4.1. Systèmes linéaires non stationnaires......................... 48
IV.4.2. Systèmes non linéaires non stationnaires 49
Conclusion 51

Chapitre 2 : Systèmes linéaires perturbés : stabilité asymptotique robuste et taux de convergence 52
Introduction 52
I Cas des perturbations structurées 54
I.1. Critère général 54
I.2. Intérêt de la décomposition.. 56
I.3. Cas des systèmes linéaires 57
I.3.1. Critère avec décomposition 57
I.3.2. Cas particuliers.. 58
I.4. Cas de systèmes à plusieurs retards... 58
II Cas des perturbations non structurées... 60
II.1. Critère général 60
II.2. Cas des systèmes linéaires 61
II.2.1. Critère avec décomposition 61
II.2.2. Cas particuliers.. 61
II.3. Systèmes avec plusieurs retards 62
III Comparaisons avec les critères existants et exemples d'application 62
III.1. Critères scalaires et matriciels. Comparaisons 62
III.2. Comparaisons avec les critères existants 63
III.3. Exemples comparatifs... 64
III.3.1. Premier exemple 64
III.3.2. Deuxième exemple... 66
III.3.3. Troisième exemple... 66
IV Cas de retards bornés 72
IV.1. Principe de réitération.. 72
IV.2. Itération à l'ordre 2... 72
IV.3. Itérations d'ordres quelconques 75
IV.4. Exemples 75
IV.5. Cas des systèmes scalaires 77
IV.5.1. Itérations d'ordres quelconques 77

IV.5.2. Itérations d'ordre infini 78
IV.5.3. Validation de l'intérêt du processus de réitération : comparaisons avec les CNS du cas linéaire 78
IV.5.4. Conclusion 80
Conclusion 80

Chapitre 3 : Systèmes non linéaires : Stabilité, taux de convergence et domaines 81
I. Critères de stabilité 81
I.1. Critères matriciels de stabilité et taux de convergence exponentielle 82
I.1.1. Théorèmes 82
I.1.2. Exemples 87
I.1.2.1. Stabilisation par retour retardé 87
I.1.2.2. Deuxième exemple 90
I.1.3. Critères obtenus à partir d'un majorant non linéaire 95
I.2. Critères scalaires de stabilité et taux de convergence exponentielle 95
II. Domaines de stabilité 97
II.1. Détermination 97
II.2. Exemple 102
II.2.1. Cas d'un retard constant 103
II.2.2. Cas d'un retard variable 104
III. Comparaison avec d'autres critères 106
Conclusion 107

Chapitre 4 : Stabilité pratique et commande sous contraintes des systèmes linéaires et non linéaires à retards 109
Introduction 109
I. Processus stabilisés par un retour retardé 112
II. Invariance positive pour les systèmes linéaires 116
II.1. Introduction 116
II.2. Rappels des résultats antérieurs 117
II.3. Prise en compte du retard maximal et des dynamiques 118
II.3.1. Invariance de $\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$ 119
II.3.2. Invariance de $\mathcal{L}(k, E(F, w_1, w_2))$ 122
II.4. Conclusion 123
III. Bornitude 124
III.1. Introduction 124
III.2. Méthode de résolution 124

IV. Stabilité et contraction pratiques avec temps d'établissement.................127
IV.1. Introduction 127
IV.2. Démarche...128
IV.3. Exemple : Stabilité pratique avec contraction d'un système non linéaire, instable 132
IV.3.1. Détermination de S et S_F connaissant C_I..................133
IV.3.1.1. Majoration scalaire..............................133
IV.3.1.2. Majoration vectorielle 134
IV.3.2. Détermination de C_I connaissant S_F 135
IV.3. Découpage de l'intervalle de temps..................................136
V. Commande sous contraintes...138
V.1. Position du problème 138
V.2. Différentes approches pour la résolution 139
V.3. Résolution...140
V.4. Exemple : Stabilisation sous contraintes d'un système linéaire instable avec une commande retardée 141
V.4.1. Détermination des conditions initiales admissibles........142
V.4.2. Bornitude 143
V.4.2.1. Utilisation du concept d'invariance positive..143
V.4.2.2. Méthode par majoration..........................146
Conclusion 147

Conclusion générale :...148

Annexe 1 : Normes et mesures de matrices 150
Annexe 2 : M-matrices...151
Annexe 3 : Généralisation du principe de comparaison de [Tokumaru et al. (1975)] au cas de systèmes à deux termes retardés 153
Annexe 4 : Articles publiés..155

Bibliographie 156

Introduction générale

Les équations héréditaires, définies comme des équations différentielles faisant intervenir des arguments de temps différents, servent à modéliser un grand nombre de phénomènes. De nombreux exemples de ces systèmes sont présentés dans Hale (1977), Kolmanovskii et Nosov (1986), Kolmanovskii et Myshkis (1992), Gopalsamy (1992). Nous reprenons ici quelques-uns de ces exemples dans des domaines particuliers.

• la biologie, l'écologie : Hutchinson (1948) a modélisé l'évolution d'une population d'individus d'une seule espèce par une équation faisant intervenir un retard. Volterra (1931), pour la même étude, a intégré l'effet de pollution de l'environnement par les individus, cette pollution ayant des effets toxiques s'accumulant (d'où l'introduction de retards distribués), provoquant éventuellement la mort avec un certain retard.
Des retards apparaissent également dans ces modèles d'évolution des populations lorsqu'on prend en compte le temps de maturation d'un individu. De plus, les périodes de procréation n'apparaissant qu'à certaines saisons, différents types de retards peuvent intervenir. Une étude de ces modèles a été réalisée par Gopalsamy (1992).

• la mécanique : Des retards distribués apparaissent dans les équations de mouvement des systèmes viscoélastiques soumis à des contraintes (bois, polymères, plastique, glace, ...) [Bloom (1977), Coleman et al. (1965)]. Certains modèles de moteurs pneumatiques font aussi intervenir des retards ponctuels.
Les phénomènes de transport (tuyauteries, tapis roulant, ...) se traduisent bien sûr également en terme de retards.

• la physique : Certains mouvements, même très rapides, ne peuvent pas toujours être considérés comme instantanés (propagation des champs électromagnétiques, de la chaleur, des électrons dans un oscillateur, d'une information pour la commande d'un satellite depuis la terre). De plus, la durée d'un traitement numérique des informations n'est pas toujours négligeable [Gorjachenko et al. (1988)].

• la médecine : Les réponses à des événements particuliers ou les actions de certains médicaments ne sont pas instantanées (processus de sécrétion de l'insuline, délai entre le début de la stimulation des lymphocytes et le début de la production d'anticorps [Marchuk et al. (1982)], ...).

• l'économie : Il faut prendre en compte les temps de réaction à un évènement, comme par exemple le retard entre une décision et la délivrance des biens sur le marché.

Remarquons de plus que le phénomène de retard ne doit pas forcément être évité puisque l'introduction de retards dans la commande d'un processus peut dans certains cas permettre de stabiliser celui-ci avec moins d'oscillations et avec un dépassement plus faible [Abdallah et al. (1993)].

Un retard peut être inhérent à un système, ainsi que nous l'avons précisé à travers les exemples précédents, mais il peut également être utile à la modélisation d'un phénomène plus complexe. En effet, l'introduction d'un retard dans une équation est souvent le résultat d'une simplification du modèle. Une équation aux dérivées partielles par exemple peut être simplifiée sous certaines hypothèses (conditions aux limites, etc....) pour donner une équation différentielle à retard. Les inerties peuvent également dans certains cas se modéliser par des retards.

Notons qu'un retard n'est pas nécessairement constant. Il peut dépendre du temps, ou même éventuellement de la solution x (par exemple les retards dits "autorégulateurs" [Kolmanovskii et al. (1992)]). Les retards peuvent être ponctuels ou distribués (répartition continue des retards dans un certain intervalle de temps).

Les systèmes héréditaires, dont nous venons de montrer l'importance par ces quelques exemples, peuvent être classés de la manière suivante :

- systèmes de type retardé;
- systèmes neutres;
- systèmes avancés.

Considérons par exemple l'équation différentielle suivante :

$$x^{(m)}(t) = f(t, x^{(m_1)}(t-h_1(t)), \dots x^{(m_k)}(t-h_k(t))),$$

où les réels m_k et $h_k(t)$ sont positifs ou nuls.

Elle est dite de type retardé si $\mathrm{Max}\{m_1,.., m_k\}<m$, de type neutre si $\mathrm{Max}\{m_1,.., m_k\}=m$, et enfin de type avancé si $\mathrm{Max}\{m_1, ..., m_k\}>m$ [Kolmanovskii et al. (1992)].

Ce sont les deux premiers types de ces systèmes qui apparaissent le plus souvent dans la modélisation des systèmes physiques. Notre étude porte exclusivement sur la première catégorie, c'est-à-dire les systèmes à retards.

La formalisation de l'étude de la stabilité des systèmes à retards a commencé dans les années 60 avec Krasovskii (1963), qui a étendu la méthode directe de Lyapunov. Cependant, des études moins formalisées avaient été réalisées auparavant, notamment par

Volterra, qui, dans les années 30, avait étudié la stabilité d'un système en utilisant une fonctionnelle. Les méthodes alors proposées étaient généralement très complexes, la détermination d'une fonctionnelle ou d'une fonction de Lyapunov étant encore moins aisée que dans le cas des équations différentielles ordinaires.

Durant ces dernières années, les études se sont développées, fournissant des méthodes relativement simples et de plus en plus précises pour l'étude des systèmes linéaires et linéaires incertains (cf. les nombreuses bibliographies mentionnées dans [Dambrine (1994), Niculescu (1996)]).

Par contre, l'étude des systèmes non linéaires est encore souvent très complexe en dépit de quelques méthodes récentes ([Dambrine (1994), Kolmanovskii (1995a et b)] qui tentent d'en simplifier l'approche. Pourtant il est bien connu que cet aspect non linéaire ne peut être négligé dès lors que le processus est utilisé dans de larges plages de fonctionnement. De même, les phénomènes fortement non stationnaires doivent aussi être pris en compte : il a par exemple été montré qu'un système exhibant un fonctionnement correct pour un retard constant borné pouvait devenir instable lorsque le retard varie dans les mêmes bornes (cf. paragraphe I.4. du chapitre 1).

Notre étude portera donc généralement sur les systèmes non linéaires, non stationnaires, et à retards variables. Certains cas plus simples (linéaire, stationnaires, ...) seront ponctuellement traités au cours du mémoire.

Une présentation plus détaillée des modèles considérés sera donnée ultérieurement, mais notons dès à présent la forme sous laquelle nous les étudierons :

- Les retards (variables) sont ponctuels, notés $\tau(t)$, continus par morceaux et bornés par une valeur τ_m.

- Les perturbations paramétriques du modèle sont représentées par un vecteur p variant dans un domaine S_p.

- L'état, représenté par x_t (fonction définie sur $[-\tau_m ; 0]$ par $x_t(\theta) = x(t+\theta)$), est régi par l'équation

$$\dot{x}(t) = h(t, x_t, p).$$

Nous tenterons notamment de simplifier l'étude de la stabilité et de la stabilisation de tels processus, éventuellement instables en boucle ouverte, ou stables pour des valeurs suffisamment petites du retard, ce qui constitue une des caractéristiques et un des apports de notre travail.

Cette étude sera réalisée à partir d'un système "de comparaison" dont la solution majore une norme vectorielle de l'état instantané (le plus souvent $|x(t)|$, vecteur formé des valeurs absolues de chaque composante de x(t)), ou bien une norme scalaire $\|x(t)\|$.

Cette étude permettra, à la fin du mémoire, de résoudre des problèmes plus pratiquement liés à la commande, le modèle étant cette fois du type :

$$\dot{x}(t) = h(t, x_t, p, u),$$

u étant alors une commande par retour d'état.

Le plan de ce mémoire est le suivant :

Sans reprendre le travail bibliographique très complet donné dans [Dambrine (1994), Niculescu (1996)], le premier chapitre rappelle toutefois quelques critères de stabilité déjà établis dans la littérature : critères pour systèmes linéaires, linéaires perturbés et non linéaires. Ce rappel nous permet, dans les chapitres suivants, de situer notre apport par rapport aux résultats existants, et d'effectuer des comparaisons.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des systèmes linéaires perturbés non linéairement, décrits par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t),$$

les éléments f et g étant des perturbations structurées ou non, conduisant respectivement à des critères matriciels ou scalaires. Ces critères sont évalués, soit de manière théorique, soit sur des exemples, le plus souvent rencontrés dans d'autres articles, lorsque des comparaisons théoriques ne sont pas possibles. Ces critères sont ensuite appliqués au cas particulier des systèmes linéaires, pour lesquels une réitération de la méthode se révèle parfois intéressante.

Les systèmes non linéaires sont traités dans le troisième chapitre, où nous montrons que les critères établis au chapitre 2 peuvent se généraliser (mais bien sûr sous une forme un peu plus compliquée) aux systèmes non linéaires. Les hypothèses sur les modèles envisagés sont très peu restrictives, et des comparaisons sont également effectuées avec les critères de la littérature, par ailleurs assez peu nombreux. Enfin, une étude quantitative est effectuée : nous montrons comment déterminer des estimations des domaines de stabilité. Ces estimations dépendent du retard maximal du système.

Enfin, le quatrième chapitre s'intéresse à des questions plus axées vers la commande, assez peu traitées dans la littérature. Nous montrons comment les méthodes de majoration proposées conduisent à des conditions d'invariance permettant de traiter les problèmes de la commande sous contraintes, et de la stabilité pratique avec temps d'établissement.

Notations

Les lettres latines majuscules sans indices représentent sauf indication contraire des matrices $A = (A_{ij})$ à coefficients réels. Les lettres minuscules représentent quant à elles des vecteurs, des réels ou des complexes. Les ensembles sont symbolisés par des lettres majuscules rondes ou grecques.

$\tau(t)$ retard du système.
τ_m retard maximal.
$\mathcal{T}_0 = [t_0\,, +\infty[$, t_0 étant l'instant initial.
$\mathbf{x(t_0,\varphi)(t)}$ (noté $\mathbf{x(t)}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté) : "état instantané" du système à l'instant t, avec pour état initial φ à l'instant initial t_0. $x(t_0,\varphi)(t) \in \mathbb{R}^n$.
$\mathbf{x_t(t_0,\varphi)}$ (noté $\mathbf{x_t}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté): état du système à l'instant t, défini de la manière suivante :

$$x_t(\theta) = x(t + \theta),\ \forall\ \theta \in [-\tau_m;0].$$

$E_0 = \{\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \leq t_0 : \exists\ a \geq t_0 \ /\ \lambda = a - \tau(a)\}$(ensemble des instants auxquels sont définies les conditions initiales pour un système à retard variable).
$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $\mathcal{C}(\Omega)$) est l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur $[-\tau_m;0]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (respectivement à valeurs dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$).
D est une région de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage de l'origine.
$\mathbf{S_p}$ est un ensemble de perturbations ou éléments incertains p.

$\|.\|$ norme d'un vecteur, ou norme de matrice associée.
$\mu(.)$ est la mesure de matrice associée à la norme $\|.\|$ (cf. Annexe 1).
$\|.\|_\tau$ est la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ définie par :

$$\|\varphi\|_\tau = \sup_{\theta \in [-\tau_m,0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

$\|.\|_{2\tau}$ est défini par : $\|\varphi\|_\tau = \sup_{\theta \in [-2\tau_m,0]} \|\varphi(\theta)\|.$
$\mathcal{C}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ représente l'ensemble des fonctions φ définies sur $[-\tau_m;0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que $\|\varphi\|_\tau < \alpha$.
$\mathcal{C}_I$ est un ensemble connexe ouvert de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (ensemble d'instants initiaux) contenant un voisinage de l'origine.
$\mathbf{S_A}$ et $\mathbf{S_F}$ sont deux ensembles connexes ouverts de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage de l'origine.

$\mathbf{T} = [\mathbf{t_0}, \mathbf{t_0} + \mathbf{t_f}[$, t_0 étant l'instant initial et $t_0 + t_f$ l'instant final (éventuellement infini).
$\mathbf{T_s} = [\mathbf{t_0} + \mathbf{t_s}, \mathbf{t_0} + \mathbf{t_f}[$, $t_f \geq t_s$.

z étant un nombre complexe, Re(z), Im(z) et |z| représentent respectivement la partie réelle, la partie imaginaire et le module de z. j est tel que $j^2 = -1$.

A étant une matrice, **det (A)** et **tr (A)** représentent respectivement son déterminant et sa trace. L'élément de la matrice A situé sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne est noté A_{ij}.
Les valeurs propres de A sont notées $\lambda_{\mathbf{k}}(\mathbf{A})$.
A* est la matrice définie par : $A^*_{ij} = A_{ij}$ si $i = j$; $A^*_{ij} = |A_{ij}|$ si $i \neq j$. $|A|$ est la matrice constituée des valeurs absolues des éléments de A. Les matrices $\mathbf{A^+}$, $\mathbf{A^-}$, $\mathbf{A_+}$, $\mathbf{A_-}$ sont définies de la manière suivante par leurs coefficients :

$$A^+_{ij} = \begin{cases} A_{ii} & \text{si } i = j \\ \max\{0, A_{ij}\} & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

$$A^-_{ij} = A_{ij} - A^+_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \max\{0, -A_{ij}\} & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

$$A_{+ij} = \{\max(0, A_{ij})\},$$

$$A_{-ij} = A_{ij} - A_{+ij} = \{\max(0, -A_{ij})\}.$$

x étant un vecteur, **|x|** est le vecteur dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de x.
La borne supérieure (notée **Sup**) d'un vecteur ou d'une matrice est le vecteur ou la matrice consitué des bornes supérieures de chacun des éléments. De même, $\mathbf{Max}\{v_1; v_2\}$ est le vecteur de composantes $\mathrm{Max}\,\{v_{1i}; v_{2i}\}$.
L'inégalité vectorielle $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ $(x < y)$, où $x = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$ et $y = [y_1\ y_2\ \dots\ y_n]^T$, est équivalente aux n inégalités $x_i \leq y_i$ $(x_i < y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. La même remarque peut être effectuée à propos des inégalités entre matrices.
Un vecteur (une matrice) est dit positif(ve) si chacun de ses éléments est positif. De même pour un vecteur ou une matrice négatifs.
v et **V** sont respectivement une fonction et une fonctionnelle de Lyapunov.
Soit $\mathcal{V}$ une norme vectorielle définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k_+$, soient également un vecteur d de $\mathbb{R}^k$ à composantes strictement positives, un réel α strictement positif. Les domaines $\mathbf{I}_{\mathcal{V}}(\mathbf{d},\alpha)$, $\mathbf{I}(\mathbf{d},\alpha)$, $\mathbf{I_N}(\alpha)$, $\mathfrak{I}_{\mathcal{V}}(\mathbf{d},\alpha)$, $\mathfrak{I}(\mathbf{d},\alpha)$, $\mathfrak{I}_{\mathbf{N}}(\alpha)$ **et** $\mathfrak{I}_{\mathbf{2}}(\mathbf{d},\alpha)$ sont alors définis de la manière suivante :
$I_{\mathcal{V}}(d,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(x) \leq \alpha\, d\}$,

$\mathfrak{I}_{\mathcal{V}}(d,\alpha) = \mathcal{C}(I_{\mathcal{V}}(d,\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n) : \mathcal{V}(\varphi(s)) \leq \alpha\, d,\ \forall\, s \in [-\tau_m, 0]\}$,

$I(d,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \alpha\, d\}$,

$\mathfrak{I}(d,\alpha) = \mathcal{C}(I(d,\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : |\varphi(s)| \leq \alpha\, d,\ \forall\, s \in [-\tau_m, 0]\}$.

$\mathfrak{I}_2(d,\alpha) = \mathcal{C}(I(d,\alpha)) = \{\varphi : |\varphi(s)| \leq \alpha\, d,\ \forall\, s \in [-2\tau_m, 0]\}$.

$\mathbf{I_N}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \alpha\}$,

$\mathfrak{I}_N(\alpha) = \mathcal{C}(I_N(\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi(s)\| \leq \alpha,\ \forall\, s \in [-\tau_m, 0]\}$.

$\mathcal{E}(\mathbf{F},\ \mathbf{w_1},\ \mathbf{w_2}) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \forall\, s \in [-\tau_m, 0],\ -w_2 \leq F\varphi(s) \leq w_1\}$ (F n'est pas nécessairement carrée).

$\mathbf{E(F,\ w_1,\ w_2)} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ -w_2 \leq Fx \leq w_1\}$.

$\mathcal{L}(\mathbf{k}, \mathbf{E})$ est l'ensemble des fonctions continues φ de $[-\tau_m , 0]$ dans E telles que :

$$|\, \varphi(0) - \varphi(s)\, | \leq -s\, k, \qquad \forall\, s \in [-\tau_m , 0],$$

k étant un vecteur strictement positif.

M étant une matrice, on note $\lambda_m(\mathbf{M})$ (respectivement $\lambda_M(\mathbf{M})$) sa valeur propre de plus petite partie réelle (respectivement de plus grande partie réelle). Compte-tenu des propriétés des M-matrices (cf Annexe 2), si M est l'opposée d'une M-matrice, alors $\lambda_M(M)$ est réelle strictement négative. Si M est une M-matrice, alors $\lambda_m(M)$ est réelle strictement positive.

f étant une fonction définie sur [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{Var}_{[a,t]}\mathbf{f} = \sup_{P(a,t)} \sum_{i=1}^{N} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|,$$

où P(a,t) représente l'ensemble des partitions $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_N = t$ de [a,t].

Si $\mathrm{Var}_{[a,b]}f$ est bornée, f est dite à variation bornée [Diekmann et al. (1995)]

Chapitre 1 : Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes à retards

Introduction

Ce chapitre a pour but de faire un tour d'horizon des méthodes d'étude de la stabilité des systèmes à retards et des différents résultats. Comme on le sait, cette notion traduit la tendance d'un système à rester proche d'une trajectoire donnée après une faible perturbation.

Dans un premier temps, quelques définitions sont données, concernant les notions de solution d'un système à retards, de trajectoire ou point d'équilibre, de stabilité (au sens de Lyapunov), stabilité asymptotique, stabilité exponentielle, stabilité pratique, ainsi que les domaines qui leur sont associés.

Notons que c'est la notion de stabilité asymptotique qui est la plus couramment utilisée. Elle est notamment indispensable à la commande puisqu'elle traduit le caractère d'un système à rester proche d'une trajectoire et à la rejoindre de manière asymptotique.

La notion de stabilité exponentielle permet quant à elle de quantifier l'écart entre deux trajectoires en fonction du temps et de l'écart entre les états initiaux et ainsi d'estimer la rapidité de convergence vers une trajectoire donnée.

Le concept de stabilité pratique est sensiblement différent du concept usuel de stabilité, mais le but poursuivi est similaire : s'assurer que si l'on se restreint à certaines conditions de fonctionnement (notamment en termes de conditions initiales), l'évolution du système sera proche de celle que l'on souhaite. La stabilité pratique permet de prendre en compte trois notions supplémentaires qui, pour l'utilisateur, ont un sens très concret:

- la définition d'un temps d'établissement t_s ("settling time"), au bout duquel on veut pouvoir vérifier la proximité de la trajectoire par rapport à son objectif,
- la prise en considération du fait que le temps t_f d'utilisation du système peut être fini (ce qui est toujours le cas en pratique). Il est donc suffisant de travailler sur un horizon fini.
- la prise en compte de perturbations, non seulement initiales, mais aussi intervenant au cours du fonctionnement.

A chacune de ces notions peut être associé un domaine permettant, par exemple dans le cas de la stabilité asymptotique, de quantifier l'écart admissible entre les états initiaux pour que les trajectoires restent proches l'une de l'autre et se rejoignent à l'infini.

Après avoir défini mathématiquement ces notions, nous donnerons les principaux critères de stabilités asymptotique et exponentielle pour les systèmes à retards. La stabilité pratique n'est pas abordée dans ce premier chapitre car, à notre connaissance, aucune étude n'a auparavant été menée sur ce sujet. Ces critères sont répartis en trois classes, suivant le type de systèmes auxquels ils s'appliquent : systèmes linéaires, systèmes linéaires incertains et systèmes non linéaires.
Nous insistons dans cette classification sur les critères pouvant être facilement comparés aux nôtres, c'est-à-dire du même type, partant d'une même représentation du système envisagé (en particulier critères sur les matrices de la représentation d'état).

I Définitions

Nous commençons ce chapitre en donnant la définition d'une solution d'un système à retards général en nous inspirant de Krasovskii (1963), avant de donner la forme des systèmes qui nous intéressent plus particulièrement.

Soit le système à retards écrit sous la forme générale :

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = X_i\,(x_1(t+\theta), \ldots, x_n(t+\theta), t), \text{ i variant de 1 à n,} \qquad (1.1)$$

où X_i sont des fonctionnelles définies pour des fonctions $x_j(t+\theta)$ continues par morceaux, $-\tau_m \leq \theta \leq 0$.

Ces équations peuvent être à retards discrets, comme par exemple

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = X_i\,(x_1(t - h(t)), \ldots, x_n(t - h(t)), t), \text{ i variant de 1 à n,}$$

ou à retards distribués :

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = X_i\,\left(\int_{t-\tau_m}^{t} f_1(x_1(\theta))d\phi_1(\theta), \ldots, \int_{t-\tau_m}^{t} f_n(x_n(\theta))d\phi_n(\theta), t\right), \text{ i variant de 1 à n.}$$

L'état du système est la fonction x_t (voir les notations) définie sur $[-\tau_m,0]$, et $x(t)$ est appelé état instantané du système à l'instant t.

Remarquons que les 2 types d'équations précédentes (retards discrets et retards distribués) peuvent s'écrire sous la forme plus générale suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t)$$

où f_i, $i^{\text{ème}}$ composante de f, est définie par :

$f_i(t,\varphi) = X_i(\varphi_1(-h(t)), .., \varphi_n(-h(t)), t)$ dans le premier cas,

$f_i(t,\varphi) = X_i(\int_{-\tau_m}^{0} f_1(\varphi_1(\theta))d\phi_1(t+\theta), ..., \int_{-\tau_m}^{0} f_n(\varphi_n(\theta))d\phi_n(t+\theta), t)$ dans le deuxième.

La fonctionnelle X_i pouvant présenter des discontinuités à certains instants t_k, seule la dérivabilité à droite de la solution x(t) est exigée. Nous noterons $\frac{dx_i}{dt}(t)$ cette dérivée à droite pour la fonction $x_i(t)$.

Considérons un instant initial t_0 et une fonction φ continue par morceaux, définie sur $[-\tau_m,0]$. x(t) est solution de l'équation (1.1) avec pour condition initiale φ à l'instant t_0 si x est une fonction continue pour $t \geq t_0$, si sa dérivée à droite vérifie l'équation (1.1) et si x vérifie les conditions initiales $x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta)$, $-\tau_m \leq \theta \leq 0$.
Une solution de (1.1) avec pour condition initiale φ à l'instant t_0 sera notée $x_t(t_0,\varphi)$ ou $x(t_0,\varphi)(t)$ (respectivement x_t ou x(t) s'il n'y a aucune ambiguité) suivant que l'on considère l'état du système ou l'état instantané.

Des conditions d'existence et d'unicité de la solution de (1.1) sont données dans Krasovskii (1963). Nous supposons ici que ces conditions sont satisfaites : tous les systèmes étudiés sont supposés présenter une solution et une seule.

Nous considérons dans ce chapitre que les systèmes étudiés sont décrits sous la forme d'une équation d'état :

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) \qquad (1.2)$$

L'instant initial est t_0, l'état initial φ_0, et le retard maximal τ_m.
Ainsi que nous l'avons précisé dans l'introduction, la solution à l'instant t est notée $x(t_0,\varphi_0)(t)$ (ou x(t) s'il n'y a aucune ambiguïté), la fonction d'état solution étant $x_t(t_0,\varphi_0)$. x(t) est un élément de $\mathbb{R}^n$.

I.1. Notions d'état d'équilibre et de point d'équilibre

Un état φ_e (c'est-à-dire une trajectoire définie sur l'intervalle $[-\tau_m;0]$) est appelé *état d'équilibre* de l'équation (1.2) si la solution de (1.2) existe pour $\varphi_0 = \varphi_e$ et vérifie $x_t(t_0,\varphi_e) = \varphi_e$ pour tout $t > t_0$.
Il est facilement démontré que si φ_e est un état d'équilibre alors il existe $x_e \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi_e(\theta) = x_e$ pour tout θ appartenant à l'intervalle $[-\tau_m;0]$.

Nous utilisons donc indifféremment la notion d'état d'équilibre φ_e définie par $\varphi_e(\theta) = x_e$ ou de point d'équilibre x_e lors de l'étude de la stabilité ou de l'attractivité.

I.2. Stabilité d'une solution générale

Considérons la solution $x_t(t_0,\varphi_0)$ de l'équation (1.2) ayant pour état initial φ_0 à l'instant initial t_0.

Définition :
Cette solution est dite stable par rapport à t_0 si :
$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\ \eta(t_0,\varepsilon) > 0)\ (\|\varphi - \varphi_0\|_\tau < \eta(t_0,\varepsilon))\ (\forall\ t \geq t_0)\ (\|x(t_0,\varphi)(t) - x(t_0,\varphi_0)(t)\| < \varepsilon)$.

Soit y(t) l'écart entre la solution $x(t_0,\varphi)(t)$ de (1.2) et la trajectoire étudiée $x(t_0,\varphi_0)(t)$: $y(t) = x(t_0,\varphi)(t) - x(t_0,\varphi_0)(t)$.

y(t) vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) = g(t,y_t) \tag{1.3}$$

où $g(t,y_t) = f(t,y_t + x_t(t_0,\varphi_0)) - f(t,x_t(t_0,\varphi_0))$.

On vérifie que $g(t,0) = 0$.

Il peut donc être facilement démontré que la stabilité de la solution $x_t(t_0,\varphi_0)$ de l'équation (1.2) est équivalente à celle de la solution nulle de l'équation (1.3). C'est pourquoi nous supposons par la suite que **f(t,0) = 0** pour tout instant t supérieur ou égal à t_0, et nous nous restreignons à l'étude de la trajectoire nulle (ou du point d'équilibre 0).

I.3. Définitions relatives à la stabilité

Le système (1.2) étudié n'étant pas nécessairement stationnaire, les définitions sont relatives à l'instant initial t_0 ou à un intervalle d'instants initiaux $\mathcal{T}_i \subseteq \mathbb{R}$.

Rappelons que nous supposons que $f(t,0) = 0$ pour tout instant t.

Les références dans ce domaine ne manquent pas. Citons à titre d'exemples Hale (1977), Kolmanovskii et Nosov (1986), Kolmanovskii et Myshkis (1992), Driver (1977), Krasovskii (1963), Grujić (1975), Dambrine (1994).

En ce qui concerne les domaines de stabilité, nous nous référons à Dambrine (1994) qui a généralisé les notions définies par Grujić (1975) pour les systèmes non retardés, lui-même ayant complété les notions de domaines d'attraction introduites par Hahn (1963) et Zubov (1961).

De même en ce qui concerne la stabilité pratique, nous adoptons et élargissons les définitions de Grujić (1973).

Les notions de stabilité et attractivité uniformes ne sont pas abordées ici. On se référera par exemple à Dambrine (1994).

I.3.1. Stabilité

• 0 est un équilibre *stable* par rapport à t_0 pour le système (1.2) si :
$(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \eta(t_0,\varepsilon) > 0)\ (\forall\, \varphi : \|\varphi\|_\tau < \eta(t_0,\varepsilon))\ (\forall\, t \geq t_0)\ (\|x(t_0,\varphi)(t)\| < \varepsilon)$.

$\mathcal{D}_s(t_0)$ est le domaine de stabilité de la solution nulle de (1.2) si :

(i) $\mathcal{D}_s(t_0,\varepsilon)$ est le plus grand voisinage connexe de $\varphi=0$ inclus dans le domaine $\{\ \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : (\forall\, t \geq t_0)\ (\|x(t_0,\varphi)(t)\| < \varepsilon)\}$.

(ii) $\mathcal{D}_s(t_0) = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{D}_s(t_0,\varepsilon)$.

Dans le cas où $\mathcal{D}_s(t_0)$ est l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ entier, alors l'équilibre 0 est dit globalement stable (sinon il n'est que localement stable).

• Il est dit stable par rapport à $\mathcal{T}_i$ s'il l'est par rapport à tout instant de l'ensemble $\mathcal{T}_i$.

• Il est stable s'il est stable par rapport à $\mathbb{R}$.

• Un équilibre est dit *stable i.o.d.*("independent of delay") s'il est stable pour toute valeur de son retard. La stabilité est dite *d.d.* ("delay dependent") si elle n'est prouvée que pour certaines valeurs du retard.

Remarque concernant les fonctions initiales considérées :

Dans les différentes définitions de stabilité, il est normalement supposé que les conditions initiales sont simplement continues par morceaux. Or, suivant le problème considéré, il est possible que les conditions initiales n'appartiennent qu'à un domaine restreint inclus dans le large domaine des fonctions continues par morceaux sur $[-\tau_m;0]$ (par exemple leur dynamique peut être limitée pour des raisons de réalisme physique).
Dans le cadre d'une étude générale, ce domaine restreint n'est évidemment pas connu. Néanmoins, si on considère une équation du type de (1.1), où la fonctionnelle X_i est continue par morceaux, les états x_t, $t \geq t_0+\tau_m$, sont des fonctions continues sur leur

intervalle de définition. C'est pourquoi nous pouvons considérer, afin de simplifier l'étude, que les fonctions initiales sont continues.
On pourrait même considérer comme fonction initiale une fonction lipschitzienne (voir à ce propos [Krasovskii (1963), pp. 131-133]).
La majoration des dynamiques des conditions initiales (qui ne peuvent physiquement pas être infinies) peut permettre d'affiner des résultats (voir dans ce mémoire les problèmes d'invariance positive et de commande sous contraintes au chapitre 4).

I.3.2. Attractivité

• 0 est un équilibre *attractif* par rapport à t_0 pour le système (1.2) si :
$(\exists\ \eta(t_0) > 0)\ (\forall\ \varphi : \|\varphi\|_\tau < \eta(t_0))\ (\lim_{t \to \infty} \|x(t_0,\varphi)(t)\| = 0)$.

$\mathcal{D}_a(t_0)$ est le plus grand voisinage connexe de $\varphi=0$ tel que :

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}_a(t_0), \qquad \lim_{t \to \infty} \|x(t_0,\varphi)(t)\|=0.$$

• 0 est attractif par rapport à $\mathcal{T}_i$ pour le système (1.2) s'il est attractif par rapport à tout instant de l'ensemble $\mathcal{T}_i$.

• 0 est attractif s'il est attractif par rapport à $\mathbb{R}$.

I.3.3. Stabilité asymptotique

Le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable par rapport à t_0 (respectivement $\mathcal{T}_i$ ou $\mathbb{R}$) s'il est stable et attractif par rapport à t_0 (respectivement $\mathcal{T}_i$ ou $\mathbb{R}$).

Le domaine de stabilité asymptotique $\mathcal{D}_{sa}(t_0)$ est l'intersection des domaines de stabilité et d'attractivité. Si ce domaine est l'espace $C(\mathbb{R}^n)$ alors 0 est dit globalement asymptotiquement stable.

Remarque : Nous dirons qu'un système est stable (respectivement asymptotiquement stable) si son équilibre 0 est stable (respectivement asymptotiquement stable).

I.3.4. Stabilité exponentielle

L'équilibre 0 est *exponentiellement stable* par rapport à t_0 si :
$(\exists\ (\eta,\alpha,\beta) > 0)\ (\forall\ \varphi : \|\varphi\|_\tau < \eta)\ (\forall\ t \geq t_0)\ (\|x(t_0,\varphi)(t)\| < \alpha\ \|\varphi\|_\tau \exp(-\beta(t-t_0))$.

Remarque : Les constantes η, α et β dépendent éventuellement de t_0. β est appelé taux de convergence exponentielle.

Le domaine de stabilité exponentielle $\mathcal{D}_e(t_0, \alpha, \beta)$ de l'équilibre 0 se définit comme le plus grand voisinage connexe de cet équilibre tel que :
$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}_e(t_0, \alpha, \beta), \forall\ t \geq t_0,\ \|x(t_0,\varphi)(t)\| < \alpha\ \|\varphi\|_\tau \exp(-\beta(t-t_0))$.

La stabilité exponentielle par rapport à un intervalle de temps se définit de la même manière que précédemment par rapport à chaque instant de l'intervalle.

I.3.5. Stabilité robuste

Le terme "stabilité robuste" peut faire référence à différents types de robustesse. Pour Verriest (1994), un système à retards est $\mathcal{H}$-robustement stable si son équilibre est asymptotiquement stable pour toute fonction $\tau(t)$ dans le domaine $\mathcal{H}$. Si on fait maintenant référence à [Niculescu et al. (1994)], un système incertain est dit robustement stable si son équilibre est asymptotiquement stable pour toutes les incertitudes admissibles sur les paramètres du modèle. On pourrait également convenir de définir la stabilité robuste comme la propriété d'un système à maintenir, sous de "petites perturbations" de son équation d'état, son équilibre, asymptotiquement stable, autour de 0 (0 étant le point d'équilibre du système nominal).

Notre but est de généraliser ces diverses définitions à travers trois notions, celles de stabilité sous perturbations persistentes [Krasovskii (1963) p. 161], de stabilité asymptotique robuste d'un équilibre, et de stabilité pratique d'un système.

Considérons pour cela le système suivant :

$$\dot{x}\ (t) = f(t, x_t, p) \tag{1.4}$$

où p représente les perturbations, appartenant à un domaine S_P. Dans le cas où elles sont additives, l'équation est réécrite sous la forme :

$$\dot{x}\ (t) = f(t, x_t) + h(t, x_t) \tag{1.5}$$

Le retard est ici $\tau_d(t)$. Par contre le retard du système nominal, c'est-à-dire sans perturbations, sera toujours noté $\tau(t)$. On notera $\mathcal{T}$ le domaine d'appartenance de la fonction τ_d.

Les perturbations ("p" ou "$h(t, x_t)$") sont de différents types : elles peuvent par exemple prendre en compte les incertitudes sur les coefficients du système; elles peuvent aussi représenter des éléments variables dans le temps ou non linéaires alors que le système nominal est linéaire stationnaire.

I.3.5.1. Stabilité sous perturbations persistantes

Définition : [Krasovskii (1963) p. 161]

> 0 est un point d'équilibre *stable sous perturbations persistantes* pour le système (1.5) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe 3 réels strictement positifs $\eta(t_0, \varepsilon)$, $\delta(t_0, \varepsilon)$ et $\alpha(t_0, \varepsilon)$ tels que si $\|\varphi\|_\tau < \eta(t_0, \varepsilon)$, si $\|h(t, x_t)\| < \delta(t_0, \varepsilon)$ pour tous $t \geq t_0$ et x_t tels que $\|x_t\|_\tau < \varepsilon$, si de plus $|\tau_d(t) - \tau(t)| < \alpha(t_0, \varepsilon)$, alors $\|x(t_0,\varphi)(t)\| < \varepsilon$.

On peut résumer cette définition par la propriété à rester proche de l'équilibre du système nominal si les perturbations additives et celles sur le retard sont suffisamment faibles.

I.3.5.2. Stabilité (asymptotique) robuste d'un équilibre par rapport aux perturbations et au retard

On suppose ici que 0 est un point d'équilibre du système (1.4) pour tout $p \in S_P$.

Définition :

> L'équilibre 0 du système (1.4) est *robustement (asymptotiquement) stable* par rapport à S_P et à $\mathcal{T}$ s'il est (asymptotiquement) stable pour toute perturbation $p \in S_P$ et tout retard $\tau_d \in \mathcal{T}$.

Nous écrirons également que l'équilibre 0 du système (1.4) est *robustement exponentiellement stable* avec un taux de convergence α par rapport à S_P et à $\mathcal{T}$ si la solution nulle est exponentiellement stable avec un taux de convergence α pour toutes les perturbations admissibles $p \in S_P$ et pour tout retard $\tau_d \in \mathcal{T}$.

Remarques : • Les définitions de stabilité robuste données dans [Verriest (1994)] et [Niculescu et al. (1994)] correspondent aux notions de stabilité asymptotique robuste par rapport à $\mathcal{T}$ et par rapport à S_P respectivement.

• Lorsque la nature des domaines S_P et $\mathcal{T}$ est évidente, nous ometterons le terme "par rapport à S_P et à $\mathcal{T}$".

I.3.5.3. Stabilité pratique

Il n'est pas supposé ici que 0 est un point d'équilibre du système. En effet, on s'intéresse à la distance de l'état au "point 0", mais la convergence vers ce point n'est pas nécessaire. Cette notion de stabilité pratique est intéressante dans le cadre d'une application industrielle. Elle traduit en effet la présence de l'état à l'intérieur d'un domaine plus ou moins grand, non pas lorsque la variable temps tend vers l'infini, mais entre deux intants déterminés.

La notion de stabilité pratique a été envisagée dans [Lasalle et al. (1961)]. Elle a été ensuite définie de façon plus précise dans [Hahn (1963)] (notion de stabilité pratique), [Weiss et al. (1967)] (notion de stabilité en temps fini), [Michel et al. (1977)], [Grujić (1973)] (notion de temps d'établissement).

Nous nous basons ici sur les définitions proposées par Grujić (1973) dans le cas des systèmes sans retards. Elles ne doivent pas être confondues avec la définition de stabilité pratique des systèmes à retards donnée par d'autres scientifiques [Palmor (1980)], [Palmor et al. (1983)], [Yamanaka et al. (1987)] car les notions envisagées sont très différentes.

Nous proposons de généraliser les définitions de [Grujić (1973)] et [Grujić et al. (1996)] au cas des systèmes à retards sous la forme suivante :

Définition 1 :

(1.4) est *pratiquement stable* par rapport à $\{t_0 ; T ; \mathcal{C}_I ; S_A; S_P; \mathcal{T}\}$ si :
$(\forall \varphi \in \mathcal{C}_I)\ (\forall t \in T)\ (\forall p \in S_P)\ (\forall \tau_d \in \mathcal{T})(x(t_0,\varphi)(t) \in S_A)$,

$\mathcal{C}_I$ étant un ensemble connexe ouvert de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (ensemble des états initiaux) contenant un voisinage de l'origine,

S_A étant un ensemble connexe ouvert de $\mathbb{R}^n$ (ensemble des solutions admissibles) contenant un voisinage de l'origine,

$T = [t_0, t_0 + t_f[$, t_0 étant l'instant initial et $t_0 + t_f$ l'instant final (éventuellement infini).

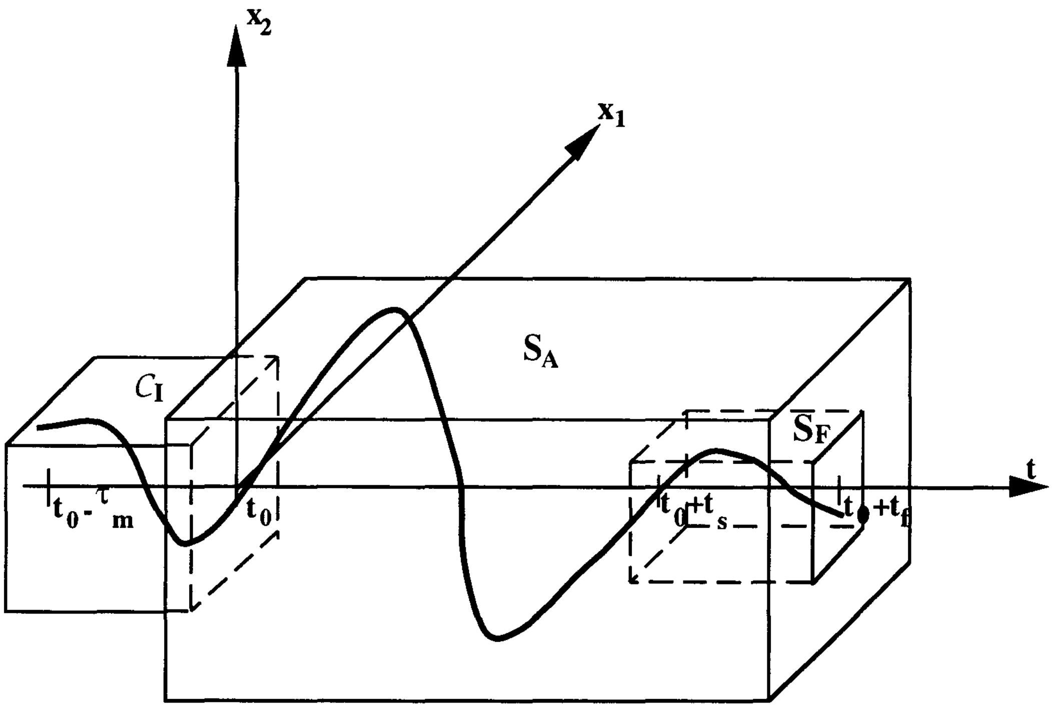
Définition 2 :

(1.4) est *pratiquement contractant avec le temps d'établissement t_s* par rapport à $\{t_0\,;\,T_s\,;\,\mathcal{C}_I\,;\,S_F;\,S_P;\,\mathcal{T}\}$ si :
$(\forall\,\varphi \in \mathcal{C}_I)\ (\forall\, t \in T_s)(\forall\, p \in S_P)\ (\forall\,\tau_d \in \mathcal{T})\ (x(t_0,\varphi)(t) \in S_F)$,
S_F étant un ensemble connexe ouvert de $\mathbb{R}^n$ (ensemble des solutions finales) contenant un voisinage de l'origine,
$T_s = [t_0 + t_s, t_0 + t_f[,\ t_f \geq t_s$.

Définition 3 :

(1.4) est *pratiquement stable avec le temps d'établissement t_s* par rapport à $\{t_0\,;\,T\,;\,T_s\,;\,\mathcal{C}_I\,;\,S_A\,;\,S_F;\,S_P;\,\mathcal{T}\}$ si (1.4) est pratiquement stable par rapport à $\{t_0\,;\,T\,;\,\mathcal{C}_I\,;\,S_A;\,S_P;\,\mathcal{T}\}$ et pratiquement contractant avec le temps d'établissement t_s par rapport à $\{t_0\,;\,T_s\,;\,\mathcal{C}_I\,;\,S_F;\,S_P;\,\mathcal{T}\}$.

Le schéma suivant illustre cette dernière définition dans le cas où n = 2.



Stabilité pratique d'un système à retards

Ces définitions répondent à des problèmes concrets, rencontrés lorsque l'objectif n'est pas que l'état du système atteigne précisément un point donné au bout d'un temps infini, mais qu'il reste " suffisamment proche " d'un point donné au bout d'un temps t_s et pendant une durée $t_f - t_s$. Ces définitions concernent le système (1.4) et non pas l'équilibre de ce système car les ensembles S_A et S_F sont parfois des voisinages d'un point d'équilibre asymptotiquement stable, mais ils peuvent également ne contenir aucun point d'équilibre ou être des voisinages d'un point d'équilibre instable ou non attractif. L'état du système après l'instant $t_0 + t_f$ ne nous intéresse pas : il peut par exemple s'éloigner de l'équilibre. Bien sûr, t_f peut être infini.

Remarque : Il y a équivalence entre le fait que l'équilibre 0 soit robustement stable par rapport à S_P et à $\mathcal{T}$ et le fait que pour tout voisinage S_A de 0, il existe un ensemble $\mathcal{C}_I$ de conditions initiales tels que le système (1.4) soit pratiquement stable par rapport à $\{t_0 ; [t_0,\infty[; \mathcal{C}_I ; S_A; S_P; \mathcal{T}\}$.

I.3.6. Estimation des domaines

Remarquons que le domaine de stabilité (respectivement de stabilité asymptotique, d'attraction ou de stabilité exponentielle) de la solution nulle d'un système non linéaire ne peut en général pas être déterminé de façon exacte. On recherche alors une estimation la plus grande possible de celui-ci.

Définition : estimations de domaines [Grujić et al. (1996)]

Un domaine $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ est un estimation du domaine de stabilité (respectivement de stabilité asymptotique, d'attractivité ou de stabilité exponentielle) de l'équilibre 0 si :

$\mathcal{C}$ est un voisinage connexe de $\varphi=0$,

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}_s(t_0)$ (respectivement $\mathcal{D}_{sa}(t_0)$, $\mathcal{D}_a(t_0)$, $\mathcal{D}_e(t_0)$).

Il est courant de déterminer comme estimation d'un domaine de stabilité un domaine positivement invariant pour le processus étudié.

Définition : domaine positivement invariant

Un domaine $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ est un domaine positivement invariant pour le système (1.4) si pour toute condition initiale à l'intérieur de ce domaine, l'état futur du système reste dans le domaine.

I.4. Classification des critères

Afin de pouvoir effectuer des comparaisons entre les différents critères de stabilité existant dans le cas des systèmes à retards, il est nécessaire de les classer car ils sont en très grand nombre (voir par exemple [Dambrine et al. (1996)]).

Différents types de classifications peuvent être effectués. Nous en donnons ici quelques exemples.

• *critères i.o.d. ("independent of delay") / critères d.d. ("delay-dependent").*

Les critères i.o.d. paraissent intéressants pour l'étude de systèmes dont le retard n'est absolument pas connu et peut prendre une grande valeur. Par contre, ils ne s'appliquent qu'aux systèmes "très stables" (stables pour toute valeur du retard). Leur utilisation est donc limitée; dans la plupart des exemples que nous étudions dans ce mémoire, les critères i.o.d. n'apportent aucun résultat.

Les critères dépendant du retard sont de différents types, comme nous le verrons au cours de ce chapitre. Certains d'entre eux donnent une valeur maximale en dessous de laquelle le système est toujours stable. Ils permettent ainsi d'étudier des systèmes de retard inconnu, mais borné.

• *critères valables uniquement pour un retard constant / critères valables pour un retard dépendant du temps.*

Il est important de distinguer ces deux types de critères. En effet, ça n'est pas parce qu'un système est stable pour tout retard constant appartenant à un certain intervalle qu'il sera stable pour tout retard évoluant dans ce même intervalle. Un exemple de tels systèmes est donné dans [Gopalsamy (1992)] :

Considérons l'équation scalaire suivante :

$$\dot{x}(t) + x(t-\tau(t)) = 0 \tag{1.6}$$

Soit α appartenant à l'intervalle $(3/2,\pi/2)$.

Si $\tau(t)$ est une fonction constante, alors la solution nulle de (1.6) est asymptotiquement stable pour toute valeur du retard comprise entre 0 et α.

Par contre, si on considère le retard variable suivant :

$$\tau(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \alpha \\ \alpha & \alpha \leq t \leq \alpha + 1 \end{cases},$$

$$\text{et } \tau(t + (\alpha+1)) = \tau(t) \text{ pour } t \geq (\alpha + 1),$$

la solution nulle de l'équation est alors instable (cependant, le retard variable considéré est compris entre 0 et α).

• *critères applicables aux systèmes à retard unique / aux systèmes à plusieurs retards commensurables* (c'est-à-dire multiples d'un même réel positif appelé retard de base) */ aux systèmes à plusieurs retards non commensurables.*

• *critères obtenus à partir d'une représentation d'état / résultats obtenus à partir de l'équation caractéristique.*

A l'intérieur d'une même classe de critères, nous effectuons bien sûr des sous-classifications du type des précédentes, ceci afin de pouvoir comparer les différents critères.

Dans les paragraphes II, III et IV, nous étudions successivement les systèmes linéaires stationnaires, les systèmes linéaires perturbés et les systèmes non linéaires. Les critères abordés (dans le paragraphe II ainsi que dans les suivants) concernent la stabilité, la stabilité exponentielle et asymptotique. A notre connaissance, il n'existe aucun résultat, hormis les notres, sur la stabilité pratique des systèmes à retards.

Nous ne cherchons pas à faire une étude exhaustive de tous les critères de stabilité existants. Notre but est de donner les principaux théorèmes, afin de relever les difficultés et de pouvoir ensuite montrer les apports de nos critères (présentés dans les chapitres suivants). Nous insistons sur les critères comparables aux nôtres (d'un point de vue forme, hypothèses, etc...).

II. Stabilité des systèmes linéaires stationnaires à retards ponctuels

La littérature est abondante sur le sujet et ne cesse de se développer. Il existe des critères nécessaires et suffisants de stabilité mais beaucoup ne concernent que la stabilité indépendante du retard, ce qui est restrictif. D'autres auteurs définissent des valeurs du retard en dessous desquelles le système est asymptotiquement stable (conditions suffisantes). D'autres enfin fournissent des conditions nécessaires et suffisantes prenant en compte le retard du système [Walton et al. (1987), Neimark (1949), Thowsen (1981), etc...].

Nous insistons dans cette partie sur les critères pouvant se généraliser à l'étude des systèmes linéaires incertains et/ou à retards variables.

Considérons le système d'équation :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k\, x(t-\tau_k), \tag{1.7}$$

où $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ sont des retards constants.

Si les retards τ_i sont tous multiples d'un même réel positif h, le système est dit à retards commensurables. h est appelé retard de base.

Associons à ce système les deux systèmes suivants :

$$\dot{x}(t) = A\, x(t), \tag{1.8}$$

$$\dot{x}(t) = (A + \sum_{k=1}^{m} B_k)\, x(t) \tag{1.9}$$

Els'gol'ts et Norkin (1973) ont montré que si (1.8) admet au moins une racine caractéristique à partie réelle positive, alors (1.7) n'est pas stable i.o.d. (indépendamment des retards). C'est pourquoi les critères de stabilité i.o.d. s'appuient sur la stabilité de la matrice A et ne sont valables que lorsque les coefficients de B sont faibles devant ceux de A.

Par contre, dans le cas de valeurs faibles des retards, c'est la stabilité de la solution nulle de (1.9) qui prime. En effet, Els'gol'ts et Norkin (1973) ont montré que la stabilité (respectivement instabilité) de (1.9) implique celle de (1.7) pour des valeurs de τ_m suffisamment petites. Les critères de stabilité dépendant du retard s'obtiennent d'ailleurs parfois à partir de critères i.o.d. appliqués à (1.7) après réécriture du système (en faisant apparaître $(A + \sum_{k=1}^{m} B_k)\, x(t)$).

Les critères de stabilité sont classés de la manière suivante :

• critères temporels, qui se basent sur l'écriture du système sous forme d'une équation d'état (1.7).

• critères fréquentiels, établis à partir de l'équation caractéristique :

$$\det (sI - A - \sum_{k=1}^{m} B_k \exp(-\tau_k s)) = 0$$

Compte-tenu de la remarque du paragraphe I.3.1 concernant les conditions initiales, nous pouvons ici, pour l'étude de la stabilité, considérer des fonctions initiales continues sur $[-\tau_m;0]$, c'est-à-dire appartenant à $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (cf. notations).

II.1. Critères fréquentiels

On note dans ce paragraphe

$$D(s,\exp(-\tau_1 s),\ldots,\exp(-\tau_m s)) = \det (sI - A - \sum_{k=1}^{m} B_k \exp(-\tau_k s)) \tag{1.10}$$

Similairement au cas des systèmes linéaires non retardés, un critère nécessaire et suffisant de stabilité asymptotique de la solution nulle de (1.7) est :

$$D(s,\exp(-\tau_1 s),...,\exp(-\tau_m s)) \neq 0, \ \forall\ s \ / \ Re(s) \geq 0.$$

Ce résultat est démontré dans [Bellman et al. (1963)] et [Hale (1977)].

Cependant, les critères qui en découlent ne sont pas aussi simples que la condition de Routh-Hurwitz s'appliquant aux systèmes linéaires non retardés.

On peut montrer que les racines de l'équation $D(s,\exp(-\tau_1 s),...,\exp(-\tau_m s)) = 0$ admettent une borne supérieure finie et que le nombre de racines ayant une partie réelle supérieure à un réel donné est fini. Par contre, cette équation admet en général une infinité de solutions.

Dans le cas des systèmes à retards commensurables, de nombreuses études ont porté sur le problème de la localisation des racines d'un quasi-polynôme $\Delta(s,z)$ à 2 variables complexes indépendantes, s et z = exp(-hs). Kamen (1980) a notamment démontré un critère nécessaire et suffisant de stabilité asymptotique i.o.d. de (1.7), sous l'hypothèse $\Delta(0,z) \neq 0, \ \forall\ z \ / \ |z| = 1$, sous la forme suivante :

$$\Delta(s,z) \neq 0, \ \forall\ s \ / \ Re(s) \geq 0, \ \forall\ z \ / \ |z| = 1,$$

où $\Delta(s,\exp(-hs))$ est l'équation caractéristique du système.

Ce critère permet de déterminer en un nombre fini d'étapes si un système à retards commensurables est asymptotiquement stable i.o.d. ou non. Il reste cependant difficile à exploiter lorsque la taille du système est importante.

Cette méthode a été généralisée au cas de retards non commensurables.

Quant à la stabilité exponentielle, le théorème suivant a été donné par Hale (1977): Soit α un réel positif. Si $\Delta(s,\exp(-hs)) \neq 0, \ \forall\ s \ / \ Re(s) \geq -\alpha$, alors le système (1.7) est exponentiellement stable avec un taux de convergence exponentielle β tel que $\beta > \alpha$.

D'autres critères de stabilité i.o.d. ainsi que des critères de stabilité exponentielle basés sur l'étude directe de $\Delta(s,z)$ sont donnés dans Kamen (1982) et Thowsen (1982).

Les difficultés inhérentes à l'étude de ces quasi-polynômes ont poussé de nombreux auteurs à rechercher d'autres critères, que nous décrivons brièvement dans cette section. Une étude plus détaillée est donnée dans [Dambrine (1994)] (avec entre autres une comparaison des différentes méthodes sur un exemple), et [Niculescu (1996)].

II.1.1. Extension du critère de Routh-Hurwitz

Considérons le système (1.7) avec des retards commensurables.

Des auteurs [Chebotarev et al. (1949), Pontryagin (1942)] ont tenté de généraliser le critère de Routh-Hurwith au cas des systèmes à retards, en développant en séries de Taylor les termes exponentiels de $\Delta(s,\exp(-hs)).e^{Ts}$ (T étant le "retard" maximal apparaissant dans l'équation caractéristique).

Les premiers ont obtenu une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique en terme de positivité d'un nombre infini de déterminants obtenus à partir de l'équation caractéristique. Ce critère ne permet donc en pratique que de démontrer l'instabilité de systèmes (il suffit alors de démontrer qu'un des déterminants est négatif).

Pontryagin (1942) a obtenu un autre critère plus simple, qui peut être mis en oeuvre graphiquement. Il est cependant difficile à appliquer si le système présente des paramètres incertains.

II.1.2. Méthodes du lieu des racines

Ces méthodes se basent sur le fait qu'il y a continuité des solutions de l'équation caractéristique par rapport aux paramètres du système d'une part (méthode de la D-partition), par rapport au retard d'autre part (méthode de la τ-partition).

Elle sont intéressantes lorsque l'on cherche à déterminer, soit les paramètres qui conduisent à la stabilité dans le cas d'un modèle à retard fixe, soit les plages de retards pour lesquels le système est stable, les autres paramètres étant fixés.

Ces deux méthodes se basent sur la recherche de racines imaginaires pures de l'équation caractéristique.

En effet, un système stable pour certaines valeurs de ses paramètres deviendra instable lors de l'évolution de ceux-ci si une racine de l'équation caractéristique "traverse" l'axe imaginaire. Les valeurs des paramètres pour lesquels cette racine est imaginaire pure donnent donc des conditions limites de stabilité.

Inversement, un système instable avec une seule valeur propre positive passera à l'état stable quand l'évolution des paramètres permettra de faire diminuer la partie réelle de cette valeur propre maximale. C'est encore son passage par l'axe imaginaire qui fournira des conditions limites de stabilité.

Méthode de la D-partition [Neimark (1949)]

Elle vise à diviser l'espace des paramètres (coefficients de l'équation caractéristique ou coefficients des matrices de l'équation d'état) en régions où le nombre de racines à valeurs propres positives est le même. Pour ce faire, elle détermine d'abord les frontières de ces domaines qui sont des hypersurfaces (paramétrées par le retard) correspondant aux valeurs des paramètres pour lesquels l'équation caractéristique admet au moins une racine imaginaire pure. Si un point d'une région correspond à des valeurs de paramètres pour lesquels le système est stable, il en sera alors de même pour tous les autres points de cette région.

Cette méthode permet, dans le cas d'un système scalaire à un seul retard, de cractériser complètement la stabilité vis à vis de ses coefficients. Elle paraît cependant difficilement applicable pour un système de grande dimension présentant un nombre important de paramètres.

Dans la même optique, Hale et al. (1985) ont obtenu des critères à partir de l'étude du quasi-polynôme, donnant des conditions de stabilité i.o.d. portant sur les paramètres du modèle. A partir de ces résultats, des techniques de type faisceaux matriciels ont été développées [Niculescu (1996) et les références incluses].

Méthode de la τ-partition [Lee et al. (1969), Rekasius (1980), Thowsen (1981), Walton et al. (1987)]

Ces méthodes abordent uniquement la stabilité de systèmes à retards commensurables. Elle permettent de déceler les changements de stabilité d'un système avec l'évolution de son retard de base, les paramètres de ce système étant fixés.
Lee et Hsu (1969) ont traité le cas de systèmes à un seul retard. Les changements de stabilité lors du passage du retard par une valeur particulière sont testés en terme de passage d'une courbe par le cercle unité.

La méthode développée par Walton et Marshall (1987) est plus simple et s'intéresse à des systèmes à plusieurs retards commensurables. Elle propose de tester tout d'abord la stabilité du système pour un retard nul. Elle montre ensuite comment il est possible, par l'intermédiaire de l'étude des zéros d'un polynôme facilement calculable, de déterminer les valeurs du retard pour lesquelles une racine imaginaire pure est présente, ainsi que le signe de la dérivée de la partie réelle de la racine correspondante. Le signe de cette dérivée permet de déterminer comment le passage par ce retard modifie le nombre de racines caractéristiques à partie réelle positive. Les différentes valeurs du retard de base pour lesquelles le système est stable sont alors déterminées. C'est à notre avis la méthode la plus utile pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires à retards commensurables.

Quant à la méthode développée entre autres par Rekasius (1980) et Thowsen (1981), appelée méthode des pseudo-retards, elle préconise le remplacement du terme e^{-sh} par $\frac{1-sT}{1+sT}$ pour le premier et $\left(\frac{1-sT}{1+sT}\right)^2$ pour le second. Ceci permet de se ramener à une équation caractéristique ordinaire (pas de termes en e^{-sh}). Il est possible de déterminer une relation liant T à h pour que les racines imaginaires pures de cette dernière équation caractéristique ordinaire soient identiques à celles de l'équation de départ. L'absence de telles racines pour l'équation caractéristique auxiliaire implique ainsi la stabilité i.o.d. du système, si celui-ci est stable en l'absence de retard. Ce test est réalisé simplement à l'aide du critère de Routh-Hurwitz.

II.1.3. Critères algébriques

Se limitant au cas mono-retard, les critères algébriques s'expriment en termes de mesures et de valeurs propres de matrices, et tiennent compte de la taille du retard constant τ_m.

Premier critère [Mori et al. (1984)]

Les critères i.o.d. sont en général basés sur le fait que si la matrice non retardée est suffisamment stabilisante, alors le système sera stable à condition que les termes retardés soient faibles.

Le résultat rappelé ici propose une démarche opposée : un critère nécessaire et suffisant de stabilité pour le système $\dot{x}(t) = B\, x(t-\tau_m)$ est d'abord prouvé, en terme de présence des valeurs propres de la matrice B dans un domaine dépendant du retard. On remarque que l'ensemble des matrices satisfaisant cette condition sont des matrices de Hurwitz, et qu'elles sont de plus en plus nombreuses quand la taille du retard diminue.
Ce critère permet la détermination de conditions de stabilité pour le système

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, x(t-\tau_m) \tag{1.11}$$

si la matrice A est suffisamment faible.

D'autres critères proposent également de démontrer la stabilité asymptotique en examinant si les valeurs propres d'une matrice dépendant des paramètres du système appartiennent à un certain domaine [Mori et al. (1986)].

Deuxième critère [Mori (1985)]

Ce critère (suffisant) impose la vérification d'inégalités sur les mesures de A et de $B\exp(-j\tau_m\psi)$, le paramètre ψ variant dans un certain domaine assez difficile à déterminer. Cependant, quatre corollaires simplifient l'étude en proposant des domaines pour ψ. Le premier correspond au critère du paragraphe II.2.1. Les suivants sont de plus en plus précis, mais aussi de plus en plus difficiles à vérifier. Le quatrième correspond à une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique dans le cas scalaire.

Troisième critère [Mori et al. (1989), Wang (1992), Su et al. (1994), Su (1994)]

Ces critères sont basés sur le fait que les racines caractéristiques instables ne peuvent se trouver que dans un domaine borné de l'espace des complexes à parties réelles positives. Il suffit alors, pour démontrer qu'un système est stable, de vérifier qu'aucune racine caractéristique ne se trouve dans un certain domaine borné. On peut même réduire cet ensemble à une courbe de l'espace des nombres complexes à parties réelles positives (utilisation du principe du maximum pour une fonction harmonique). Ces critères tiennent compte du retard du système.

Autres critères

Citons également comme critères fréquentiels ceux basés sur le théorème du petit gain et le principe du maximum pour une fonction harmonique ou sous-harmonique (critères généralement i.o.d.) (voir les références incluses dans [Niculescu (1996)]).

II.2. Critères temporels

II.2.1. Critères basés sur les mesures de matrices

Mori et al. (1981) ont développé un critère scalaire simple de stabilité i.o.d. basé sur la notion de norme et de mesure de matrices (voir annexe 1 pour les définitions) :

Théorème : [Mori et al. (1981)]

Le système (1.7), avec un seul retard τ_m, est asymptotiquement stable indépendamment de la valeur de τ_m si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$-\mu(A) > \|B\| \tag{1.12}$$

Dans ce cas, le système est exponentiellement stable et vérifie :

$$\|x(t)\| \leq \|x_{t_0}\|_\tau \exp\left(-\sigma(t-t_0)\right),$$

σ étant l'unique racine strictement positive de l'équation :

$$\mu(A) + \sigma + \|B\| \exp(\sigma\tau_m) = 0 \tag{1.13}$$

Ce critère est extrêmement simple d'application, mais d'utilisation limitée aux systèmes stables i.o.d. De plus, les conditions données ne sont pas nécessaires et suffisantes.

Les résultats obtenus dépendent évidemment de la norme choisie.

Un critère similaire, plus précis mais plus difficile à utiliser, a été donné par Hmamed (1986) et corrigé par Bourlès (1987) :

Théorème : [Hmamed (1986) et Bourlès (1987)]

Si l'inégalité

$$-\mu(A) > \mu(zB)$$

est vérifiée pour tout nombre complexe z de module 1, alors le système (1.11) est asymptotiquement stable i.o.d. Si de plus il existe un réel α strictement positif tel que l'inégalité

$$-\mu(A) - \alpha > \mu(zB)$$

est vérifiée pour tout nombre complexe z de module exp $(\alpha\tau_m)$, alors le système (1.11) est exponentiellement stable avec un taux de décroissance égal à α.

II.2.2. Critères basés sur les M-matrices

Théorème : [Mori et al. (1981), Tokumaru et al. (1975), Lewis et al. (1980), Xu et al. (1991)]

Le système (1.11) est asymptotiquement stable indépendamment de la valeur de son retard si la matrice M + N définie par :

$$M = A^*;\ N = |B| \qquad \text{(cf notations)}$$

est l'opposée d'une M-matrice (cf Annexe 2 pour une définition).

Ce critère est également valable si le système présente des retards différents pour chacune des composantes d'état considérées. Il a été généralisé à certains cas de systèmes non linéaires (voir le paragraphe IV de ce chapitre).

Remarques : Ces critères sont plus précis que les précédents car les conditions données ne sont pas scalaires, mais matricielles. En effet, si $-\mu(A) > \| B \|$, alors, en utilisant les propriétés des normes et mesures de matrices (cf Annexe 1), $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B) \leq \mu(A) + \| B \| < 0$, et donc toutes les valeurs propres de A + B sont à parties réelles strictement négatives.

Les critères présentés dans ce paragraphe ainsi que le précédent donnent des conditions de stabilité indépendantes de la valeur du ou des retards. Ils nécessitent, comme la plupart des critères i.o.d., que la matrice A soit de Hurwitz, et que les termes retardés soient suffisamment faibles devant les éléments de A.

II.2.3. Extension de la seconde méthode de Lyapunov

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'extension de la méthode de Lyapunov ([Hale (1977), Halanay (1966), El'sgol'ts et al. (1973), Krasovskii (1963), Razumikhin (1956)]).

L'état d'un système à retards étant une fonction définie sur $[-\tau_m,0]$, une extension directe de la méthode de Lyapunov au cas des équations à retards, réalisée par Krasovskii (1963), conduit à l'utilisation de fonctionnelles usuellement appelées fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

Le principal inconvénient de ces méthodes est la difficulté de détermination d'une telle fonctionnelle permettant de démontrer la stabilité de la solution nulle d'un système.

Razumikhin (1956) a étendu cette méthode d'étude de la stabilité, en préférant l'utilisation de fonctions plutôt que de fonctionnelles.

Nous allons tout d'abord donner les principaux théorèmes dans le cas de systèmes à retards de la forme (1.2) :

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t)$$

avant de nous intéresser à leur application dans le cas des systèmes linéaires stationnaires. Nous supposons que $f(t,0) = 0$ pour tout t et nous nous intéressons à la stabilité de la solution nulle (cf paragraphe I.2). Nous faisons de plus l'hypothèse que f est une fonction continue, qu'elle vérifie une condition de Lipschitz en sa seconde variable et que si $\mathcal{S}$ est un ensemble borné de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, l'image par f de $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$. Sous ces hypothèses, l'existence et l'unicité des solutions sont assurées, ainsi que la continuité des solutions par rapport à l'instant initial et à la condition initiale.

Fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii :

Soit $V(t,\varphi)$ une fonctionnelle définie sur $[t_0,\infty[\times \mathcal{C}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue. Les théorèmes suivants font bien sûr intervenir sa dérivée par rapport au temps le long d'une solution du système. Elle est définie comme suit :

$$\dot{V}(t,x_t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{V(t+\Delta t, x_{t+\Delta t}) - V(t,x_t)}{\Delta t},$$

($\dot{V}(t,x_t)$ est donc la dérivée supérieure à droite au sens de Dini).

Le premier théorème présenté concerne les concepts de stabilité asymptotique et exponentielle. Rappelons tout d'abord qu'une fonction ω définie sur $[0,\alpha[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ est définie positive si $\omega(0) = 0$ et si $\omega(a) > 0$ pour tout $a \neq 0$.

Théorème : [Krasovskii (1963), Hale (1977)]

S'il est possible de déterminer trois fonctions ω_1, ω_2, ω_3 continues, définies positives sur $[0,\alpha[$ telles que pour tout t, toute fonction φ et toute solution x_t dans $C_\alpha(\mathbb{R}^n)$, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\omega_1(\|\varphi\|_\tau) \leq V(t,\varphi) \leq \omega_2(\|\varphi\|_\tau)$,

(ii) $\dot{V}(t,x_t) \leq -\omega_3(\|x_t\|_\tau)$,

alors l'équilibre 0 du système (1.2) est asymptotiquement stable.
Si de plus il existe deux réels α_0 et α_1 ($\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha$) tels que :

$$\inf_{t\geq t_0}[V(t,\varphi) : \|\varphi\|_\tau = \alpha_1] > \sup_{t\geq t_0}[V(t,\varphi) : \|\varphi\|_\tau = \alpha_0],$$

alors $C_{\alpha_0}(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans le domaine d'attraction du point $x = 0$.
L'ajout de la condition :
Il existe un réel $K > 0$ tel que, pour toutes fonctions φ_1, φ_2 de $C_\alpha(\mathbb{R}^n)$,

$$|V(t,\varphi_1) - V(t,\varphi_2)| \leq K \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\tau$$

permet de conclure à la stabilité exponentielle.

D'autres théorèmes, plus simples d'utilisation, font intervenir des majorations en fonction de $\|\varphi(0)\|$ et de $\left[\int_{-\tau_m}^{0} \|\varphi(\theta)\|^2 d\theta\right]^{\frac{1}{2}}$ pour $V(t,\varphi)$, de $\|x(t)\|$, $\left[\int_{-\tau_m}^{0} \|x(t+\theta)\|^2 d\theta\right]^{\frac{1}{2}}$ et éventuellement du temps pour $\dot{V}(t,x_t)$. Les principaux sont rappelés dans Dambrine (1994) et Niculescu (1996).

Fonctions de Lyapunov-Razumikhin :

La méthode d'étude de la stabilité à l'aide de fonctions de Lyapunov a été développée par Razumikhin (1956, 1960), Krasovskii (1956).

Soit v une fonction définie sur $[t_0,\infty[\times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue.

Razumikhin a développé des théorèmes ne nécessitant pas la vérification de la décroissance de v le long de toutes les solutions du système, mais seulement aux instants t pour lesquels il risque d'y avoir divergence, c'est-à-dire pour lesquels $\|x(t)\| \geq \|x(t+\theta)\|$, $\theta \in [-\tau_m,0]$, ou plus généralement $v(t,x(t)) \geq v(t+\theta,x(t+\theta))$.

De manière similaire au cas des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, la dérivée de v le long des solutions du système est définie par :

$$\dot{v}(t,x(t)) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{v(t+\Delta t, x(t+\Delta t)) - v(t,x(t))}{\Delta t},$$

$x(t+\Delta t)$ étant la solution à l'instant $t+\Delta t$ du système (1.2) passant par $x(t)$ à l'instant t (les solutions du système sont ici considérées comme évoluant dans $\mathbb{R}^n$ et non plus dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$).

Théorème : [Krasovskii (1956), Razumikhin (1956)]

S'il est possible de déterminer trois fonctions ω_1, ω_2, ω_3 continues, définies positives, croissantes telles que pour tout t, tout élément x de $\mathbb{R}^n$ et toute solution $x(t)$, les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(i) $\omega_1(|x(t)|) \leq v(t,x(t)) \leq \omega_2(|x(t)|)$,

(ii) $\dot{v}(t,x(t)) \leq -\omega_3(|x(t)|)$, pour toutes les solutions vérifiant $v(t+\theta,x(t+\theta)) \leq p(v(t,x(t)))$, $\theta \in [-\tau_m,0]$, p étant une fonction continue, strictement croissante et telle que $p(\xi) > \xi$, $\xi > 0$,

alors l'équilibre 0 du système (1.2) est asymptotiquement stable.

Si de plus il existe deux réels α_0 et α_1 ($\alpha_0 < \alpha_1$) tels que :
$\inf_{t \geq t_0}[v(t,x) : |x| = \alpha_1] > \sup_{t \geq t_0}[v(t,x) : |x| = \alpha_0]$,
alors $C_{\alpha 0}(\mathbb{R}^n)$ est inclus dans le domaine d'attraction du point $x = 0$.

La classe minimale de fonctions pour laquelle l'inégalité $\dot{v}(t,x(t)) \leq -\omega_3(|x(t)|)$ doit être vérifiée peut être définie de différentes manières [Dambrine (1994), Niculescu (1996) et les références incluses].

L'inconvénient de cette dernière méthode est que les théorèmes n'admettent pas de réciproques, contrairement à ceux basés sur l'utilisation de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii.

Applications :

De nombreuses publications, sur lesquelles nous ne nous attarderons pas dans ce mémoire, concernent cette extension de la méthode de Lyapunov et son application à des systèmes particuliers (cf par exemple [Krasovskii (1963), Hale (1977), Kolmanovskii et al. (1986)]).

Nous allons par contre nous intéresser à certains résultats qui, à partir de la théorie qui vient d'être exposée, relient la stabilité à l'existence d'une matrice définie positive solution d'une équation de Lyapunov ou de Riccati. La plupart de ces résultats ont été généralisés au cas des systèmes linéaires perturbés (cf paragraphe III de ce chapitre).

Théorème : [Verriest et al. (1994)]

Le système (1.11) est asymptotiquement stable i.o.d. s'il existe trois matrices symétriques définies positives P, Q et R telles que :

$$A^TP + PA + Q + PBQ^{-1}B^TP + R = 0 \qquad (1.14)$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'étude de la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii $V(x_t) = x^TPx + \int_{t-\tau_m}^{t} x^T(\sigma)Qx(\sigma)d\sigma$.

Il est bien sûr nécessaire que la matrice A soit stable pour que ce critère puisse être vérifié. Un critère similaire donné dans le même article permet d'étudier la stabilité du système (1.7) à plusieurs retards.

Dans le but d'obtenir des critères dépendant du retard, on recherche souvent la stabilité de la matrice (A + B) plutôt que celle de la matrice A (voir à ce propos l'introduction du paragraphe II). Les critères obtenus sont parfois similaires aux critères i.o.d. (bien qu'un peu plus compliqués) et font apparaître la matrice A + B là où apparaissait la matrice A.
C'est le cas du critère suivant, établi à partir de la fonction de Lyapunov-Razumikhin $v(x) = x^TPx$.

Théorème : [Niculescu et al. (1995 b)]

Supposons que la matrice A + B soit de Hurwitz (ses valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives).
Le système (1.11) est asymptotiquement stable pour toute valeur positive de τ_m strictement inférieure à τ^*, avec

$$\tau^*(Q,P,\beta_1,\beta_2) = \frac{1}{\|Q^{-\frac{1}{2}}[\beta_1 PBAP^{-1}A^T B^T P + \beta_2 PBBP^{-1}B^T B^T P + (\beta_1^{-1} + \beta_2^{-1})P]Q^{-\frac{1}{2}}\|} \quad (1.15)$$

β_1 et β_2 étant des réels positifs, P et Q des matrices symétriques définies positives vérifiant l'équation de Lyapunov :

$$(A + B)^T P + P(A + B) + Q = 0 \quad (1.16)$$

La valeur de τ^* dépend des valeurs de β_1 et β_2. Il est donné dans le même article une méthode d'optimisation de ce retard maximal, en utilisant des techniques LMI (inégalités linéaires matricielles).

Pour des raisons de concision, nous n'avons pas fait apparaître dans ce paragraphe certains critères de stabilité des systèmes linéaires stationnaires à retards, notamment ceux basés sur la mise en place d'une équation complexe de Lyapunov (équation différentielle généralisée sur un anneau ou sur un module) [Brierley et al. (1982), Lee et al. (1986)], qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité i.o.d. Ne sont pas non plus apparues les méthodes graphiques, basées sur le principe de l'argument [Gorecki et al. (1989)], les méthodes basées sur une représentation 2-D ou n-D suivant que les retards sont commensurables ou non [Agathoklis et al. (1989)].

II.3. Remarques de synthèse

Nous pouvons remarquer d'après cette classification que les critères fréquentiels (paragraphe II-1) sont en général plus précis mais plus difficiles d'application que les critères temporels (paragraphe II-2), qui sont souvent des critères i.o.d.
La méthode de la D-partition (paragraphe II-1-2) permet de tester la stabilité de systèmes dont les coefficients, constants, ne sont pas précisément connus.

Dans le cas où le retard du système n'est pas déterminé de manière exacte, les critères i.o.d., en général plus simples d'utilisation, peuvent être testés. Si le retard n'est pas très important, la méthode de Niculescu et al. (paragraphe II-2-3) permet la détermination d'une valeur du retard en-dessous de laquelle le système est stable. Les méthodes de la τ-partition (paragraphe II-1-2) permettent de déterminer de manière exacte les différentes valeurs du retard permettant de conclure à la stabilité.
Quant aux critères algébriques issus d'une représentation fréquentielle (paragraphe II-1-3) et aux extensions du critère de Routh-Hurwitz (paragraphe II-1-1), ils ne s'appliquent en général qu'aux systèmes à paramètres et retard(s) constants, évoluant éventuellement dans un certain intervalle.

III. Stabilité des systèmes linéaires incertains ou perturbés à retards ponctuels

Certaines des méthodes énoncées dans le paragraphe précédent permettent de tester la stabilité d'un système linéaire même si son retard n'est pas connu de manière précise; c'est bien sûr le cas des critères i.o.d. mais aussi des critères qui permettent de déterminer la stabilité quand le retard appartient à un certain intervalle.

Le but de ce paragraphe est essentiellement de nous intéresser aux résultats prenant en compte les incertitudes ou perturbations sur les éléments des matrices A et B de l'équation (1.11). Ces éléments peuvent être constants, mais mal connus. Ils peuvent également être variables.

Les méthodes fréquentielles se prêtent mal à une extension au cas des systèmes incertains. Seules quelques publications traitent de ce problème, mais se limitent à des systèmes à cœfficients constants mais dont on ne connaît pas la valeur exacte [Kharitonov et al. (1994), Xu et al. (1995) par exemple].

Nous nous intéressons donc essentiellement à l'extension des méthodes temporelles. Les méthodes ne conduisant qu'à des critères indépendants du retard ne sont pas données, car elles ne peuvent pas être facilement comparées aux critères développés dans ce mémoire.

Les systèmes considérés dans cette étude sont donnés par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t),t) \qquad (1.17)$$

où $\tau(t)$ admet une borne supérieure τ_m.

$f(0,t) = 0$, $g(0,t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$.
Nous noterons S_p l'ensemble des couples {f, g} admissibles (pouvant apparaître dans l'équation).
Les matrices A et B sont constantes. Dans le cas où elles dépendent du temps, d'autres critères sont applicables. Certains d'entre eux sont donnés dans le paragraphe IV-4.

Des restrictions supplémentaires sur la nature de $\tau(t)$ sont parfois nécessaires. Elles seront données pour chacune des méthodes proposées.
Du fait de la variation du retard dans le temps, la condition initiale est : $x(\theta) = \varphi(\theta)$ pour $\theta \in E_0 = \{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq t_0 : \exists\, a \geq t_0 / \lambda = a - \tau(a)\}$.

III.1. Les différents types d'incertitudes

Les incertitudes peuvent être stationnaires ou non, et prendre différentes formes.

* Premier type : incertitudes linéaires
[Niculescu et al. (1994)] considèrent que les incertitudes s'écrivent sous la forme suivante:

$$f(x(t),t) = \Delta A(t)\, x(t),$$
$$g(x(t-\tau(t),t) = \Delta B(t)\, x(t-\tau(t)),$$

avec :
$\Delta A(t) = DF(t)E_a$, $\Delta B(t) = D_dF_d(t)E_d$, où $F(t)$ et $F_d(t)$ sont des matrices inconnues, avec des éléments mesurables au sens de Lebesgue, satisfaisant :

$$F^T(t)F(t) \leq I \text{ et } F_d^{\,T}(t)F_d(t) \leq I,\ \forall t.$$

* Second type : incertitudes structurées
$|f(x,t)| \leq F\,|x|$, $|g(x,t)| \leq G\,|x|$, où F et G sont des matrices à éléments positifs (pour la définition de la valeur absolue d'un vecteur, se référer aux notations).

* Troisième type : incertitudes non structurées
$\|f(x,t)\| \leq \alpha\,\|x\|$; $\|g(x,t)\| \leq \beta\,\|x\|$, où α et β sont des réels positifs.

La classification en incertitudes structurées ou non (second et troisième types) est par exemple définie dans [Lee et al. (1993)].

Le premier type d'incertitudes peut paraître plus précis que les deux autres. Il semble par contre plus restrictif; il n'est en effet pas toujours facile d'écrire les éléments incertains sous la forme proposée. Quant aux deux derniers types d'incertitudes, ils proposent de majorer respectivement chacun des éléments incertains et une norme de la matrice constituée des incertitudes. Le deuxième est bien sûr plus précis que le troisième.

III.2. Seconde méthode de Lyapunov

Su et Huang (1992) ont développé un critère dépendant du retard pour les systèmes linéaires perturbés, à l'aide de la méthode des fonctions de Lyapunov-Razumikhin ($v(x) = x^TPx$). Les hypothèses sur les *incertitudes sont du troisième type* (incertitudes non structurées), puisqu'elles s'écrivent : $f(x(t),t) = \Delta A\ x(t)$, $g(x(t-\tau(t)) = \Delta B\ x(t-\tau(t))$, $\|\Delta A\| \leq \alpha$, $\|\Delta B\| \leq \beta$. Le retard *τ est supposé continu par rapport à t.* $\mathcal{T}$ est donc l'ensemble des fonctions τ positives, majorées par τ_m, et continues.

Théorème : [Su et al. (1992), corrigé par [Xu (1994)]]

Supposons que A + B soit de Hurwitz.
Soient P et Q des matrices symétriques, définies positives vérifiant l'équation de Lyapunov :

$$(A + B)^T P + P (A + B) = -Q$$

Alors l'équilibre 0 du système (1.17) est robustement asymptotiquement stable par rapport à S_p et à $\mathcal{T}$ si :

$$\tau_m < \frac{\sigma-\alpha-\beta}{\delta[\|BA\| + \|B^2\| + \|B\|(\alpha+\beta) + \alpha\ (\|A\| + \|B\|) + \alpha(\alpha+\beta)]} \qquad (1.18)$$

où $\sigma = \frac{\lambda_{min}(Q)}{2\lambda_{max}(P)}$ et $\delta = \left(\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}\right)^{\frac{1}{2}}$, λ_{min} et λ_{max} étant respectivement les valeurs propres minimale et maximale d'une matrice.

Niculescu et al. (1994) ont développé un autre critère tenant compte du retard, à l'aide de la méthode des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. *Le retard est ici supposé constant, inconnu. Les incertitudes sont du premier type.*
$\mathcal{T} = \{\tau : [t_0,\infty[\to \mathbb{R}^+ : \tau(t) = cste\}$.

Théorème : [Niculescu et al. (1994)]

Supposons que la matrice A + B soit de Hurwitz. S'il existe une matrice symétrique définie positive Q et un réel strictement positif ε tels que l'équation algébrique de Riccati :

$$(A+B)^T P + P(A+B) + P(DD^T + \varepsilon^{-1} D_d D_d^T)P + E_a^T E_a + \varepsilon E_d^T E_d + Q = 0 \qquad (1.19)$$

ait une solution P symétrique définie positive, alors l'équilibre 0 du système incertain (1.17) est robustement asymptotiquement stable par rapport à S_p et à $\mathcal{T}$ pour toute valeur de τ_m satisfaisant

$$\tau_m < \frac{\lambda_{min}(Q)}{2qk}, \qquad (1.20)$$

où $q = \left(\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$k = \|PBA\| + \|PB^2\| + \|PBD\|.\|E_a\| + \|PBD_d\|.\|E_d\| + \|PD_d\|(\|E_dA\| + \|E_dA_d\| + \|E_dD\|.\|E_a\| + \|E_dD_d\|.\|E_d\|)$.

Cette méthode a été généralisée au cas des systèmes à plusieurs retards dans la même publication.

La méthode mettant en oeuvre des techniques LMI (cf paragraphe II.2.3.) a été généralisée au cas des systèmes linéaires incertains à retard constant dans [Li et al. (1995)]. Les incertitudes considérées sont également du premier type.

III.3. Critères basés sur les mesures de matrices

Les résultats suivants sont des critères de stabilité exponentielle robuste.
Le premier, dû à Wang et al. (1987) considère des systèmes incertains à *retard* τ_m *constant* et présentant des *incertitudes du troisième type* (incertitudes non structurées). Les résultats donnés sont dépendants ou non du retard.

Théorème : [Wang et al. (1987)] (résultat i.o.d.)

Supposons que la matrice A soit de Hurwitz et que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\|\exp(At)\| \leq k \exp(-\eta t),\ t \geq t_0, \tag{1.21}$$

$k \geq 1, \eta > 0.$

Soit r_0 défini par :

$$r_0 = k(\|B\| + \beta)/\eta.$$

Si la relation suivante est vérifiée :

$$r_0 < (1-k\alpha/\eta),$$

alors le système (1.17) est robustement asymptotiquement stable par rapport à S_p et à $\mathcal{T}$, quelle que soit la valeur de τ_m, et, de plus,

$$\|x(t)\| \leq k\ \|x_{t0}\|_\tau \exp(-\sigma(t-t_0)),\ t \geq t_0, \tag{1.22}$$

où σ est l'unique racine strictement positive de l'équation :

$$(1 - \frac{k\alpha}{\eta}) - \frac{\sigma}{\eta} = r_0 \exp(\sigma\tau_m). \tag{1.23}$$

Remarquons qu'une inégalité du type de (1.21) est facilement obtenue à partir de la notion de mesure de matrice (cf Annexe 1). On retrouve ainsi, dans le cas d'un système non perturbé, les conditions suffisantes de stabilité i.o.d. prouvées par Mori et al. (1981) (cf paragraphe II.2.1.).

Le critère suivant est très similaire à celui qui vient d'être énoncé, mais il tient compte de la taille du retard.

Théorème : [Wang et al. (1987)] (résultat d.d.)

La première hypothèse concerne ici la matrice A + B :

$$\|\exp((A+B)t)\| \leq k' \exp(-\eta' t),\ t \geq t_0,\ k' \geq 1,\ \eta' > 0. \tag{1.24}$$

Soit $r_1(\tau_m)$ défini par :

$$r_1(\tau_m) = k'(\tau_m \|B\| (\|A\| + \|B\| + \alpha + \beta) + \beta)/\eta'.$$

Si la relation suivante est vérifiée : $r_1(\tau_m) < (1-k'\alpha/\eta')$,

alors le système (1.17) est robustement asymptotiquement stable par rapport à S_p et à $\mathcal{T}$ et, de plus,

$$\|x(t)\| \leq k'\ \|x_{t0}\|_{2\tau} \exp(-\sigma'(t-t_0)),\ t \geq t_0, \tag{1.25}$$

σ' étant l'unique racine strictement positive de l'équation :

$$(1 - \frac{k'\alpha}{\eta'}) - \frac{\sigma'}{\eta'} = k'\ \|B\|\ (\|A\| + \alpha + (\|B\| + \beta) \exp(\sigma'\tau_m))\frac{\exp(\sigma'\tau_m) - 1}{\eta'\sigma'} + \frac{k'\beta\exp(\sigma'\tau_m)}{\eta'} \tag{1.26}$$

Les deux théorèmes énoncés précédemment ont été étendus au cas des systèmes à plusieurs retards par les mêmes auteurs.

Niculescu et al. (1995 a) ont étendu les résultats de Wang et al. au cas des systèmes à retards variables dans le temps. Les perturbations considérées sont du *troisième type*. Les hypothèses suivantes sont faites sur le retard :

$\mathcal{T}$ est l'ensemble des *fonctions continues, dérivables et à dérivée bornée*, telles que :

$$0 < \tau(t) \le \tau_m, \ \forall\, t \ge t_0$$

$$0 \le \dot{\tau}(t) \le a < 1, \ \forall\, t \ge t_0$$

<u>Théorème :</u> [Niculescu et al. (1995 a)] (résultat i.o.d.)

Supposons que la matrice A soit de Hurwitz et que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\|\exp(At)\| \le k \exp(-\eta t),\ t \ge t_0,$$

$k \ge 1$, $\eta > 0$.

Si la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{k}{\eta}(\|B\| + \alpha + \beta) < 1,$$

alors le système (1.17) est robustement asymptotiquement stable par rapport à S_p et à $\mathcal{T}$, quelle que soit la valeur de τ_m, et, de plus,

$$\|x(t)\| \le M \sup_{\theta \in E_0} \|x_{t_0}(\theta)\| \exp\Big(-\sigma \int_{t_0}^{t} \frac{d\theta}{\tau(\theta)}\Big),\ t \ge t_0,\ M \ge 1, \tag{1.27}$$

où σ est l'unique racine strictement positive de l'équation :

$$1 - \frac{k\alpha}{\eta} - \frac{\sigma}{\eta\tau(0)} = \frac{k}{\eta}(\|B\| + \beta)\exp\Big(\frac{\sigma}{1-a}\Big). \tag{1.28}$$

De plus, le système est robustement exponentiellement stable avec un taux de convergence

$\dfrac{\sigma}{\tau_m}$.

Théorème : [Niculescu et al. (1995 a)] (résultat d.d.)

Si la matrice A + B est de Hurwitz et si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|\exp((A+B)t)\| \leq k' \exp(-\eta' t),\ t \geq t_0, \tag{1.29}$$

$k' \geq 1, \eta' > 0$.

Alors la relation :

$$\frac{k'}{\eta'}(\tau_m(\|BA\| + \|B^2\| + \|B\|\alpha + \|B\|\beta) + \alpha + \beta) < 1,$$

implique la stabilité asymptotique robuste du système (1.17). De plus,

$$\|x(t)\| \leq M \sup_{\theta \in E_0} \|x_{t_0}(\theta)\| \exp\left(-\sigma' \int_{t_0}^{t} \frac{d\theta}{\tau(\theta)}\right),\ t \geq t_0,\ M \geq 1, \tag{1.30}$$

où σ' est l'unique racine strictement positive de l'équation :

$$1 - \frac{k'\alpha}{\eta'} - \frac{\sigma'}{\eta'\tau(0)} = \frac{k'}{\eta'}(\tau_m(\|BA\| + \|B\|\alpha) + \beta)\exp\left(\frac{\sigma'}{1-a}\right) + \frac{k'}{\eta'}\tau_m(\|B^2\| + \|B\|\beta)\exp\left(\frac{2\sigma'}{1-a}\right) \tag{1.31}$$

De plus, le système est robustement exponentiellement stable avec un taux de convergence $\frac{\sigma'}{\tau_m}$.

Une extension aux systèmes à retards multiples est également donnée dans le même article.

Les techniques basées sur la mise en place d'une équation complexe de Lyapunov (équation différentielle sur un anneau ou sur un module) se prêtent également à des extensions au cas des systèmes incertains.

IV. Stabilité des systèmes non linéaires et/ou non stationnaires

L'étude de la stabilité d'un système non linéaire à retards repose en général sur l'application de la méthode de Lyapunov, rappelée dans le paragraphe II.2.3. Or l'application de cette méthode est compliquée car le choix d'une fonction ou d'une fonctionnelle de Lyapunov n'est pas aisé. Il n'existe pas de méthode générique, contrairement au cas des systèmes linéaires. Nous donnons dans ce paragraphe les critères qui nous semblent les plus simples et qui s'appliquent à une large classe de systèmes.

La détermination de certains de ces critères repose sur l'utilisation d'un principe de comparaison permettant de remplacer l'étude de la stabilité de la solution nulle du système par celle de la solution nulle d'un système plus simple (appelé système de comparaison), généralement linéaire stationnaire.

Nous proposons de définir un principe de comparaison, avant de donner les résultats développés par Dambrine (cf [Dambrine (1994)]) et ceux développés par Kolmanovskii ([Kolmanovskii (1993, 1995)]). Nous nous intéressons enfin à la stabilité des systèmes non stationnaires.

IV.1. Principes de comparaison

Certains des résultats énoncés dans les deux sections précédentes II et III ont été obtenus à partir de la définition de systèmes de comparaison. Il s'agit notamment des critères de Wang et al. (1987) (§ III.2.), de Tokumaru et al. (1975) (§ II.2.2), de Mori et al. (1981) (§ II.2.1.).

Des références concernant les différentes méthodes de comparaison pour les systèmes à retards peuvent être trouvées dans [Dambrine (1994)]. Nous nous contentons de donner un principe de comparaison, qui nous sera très utile par la suite.

Théorème : [Tokumaru et al. (1975)]

Soit $x(t)$ $(t \geq t_0)$ la solution de l'inégalité différentielle

$$\dot{x}(t) \leq g\big(x(t), \sup_{0 \leq \lambda \leq \tau_m} x(t-\lambda), t\big), \tag{1.32}$$

g étant une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{T}_0$.

Soit $z(t)$ vérifiant l'équation différentielle :

$$\dot{z}(t) = g\big(z(t), \sup_{0 \leq \lambda \leq \tau_m} z(t-\lambda), t\big), \text{ pour } t \geq t_0. \tag{1.33}$$

Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) croissance de $g(x, y, t)$ par rapport à sa deuxième variable y :
$g(x, y', t) \leq g(x, y'', t)$, pour tous vecteurs x, y', y'' de $\mathbb{R}^n$ tels que $y' \leq y''$,

(ii) quasi-monotonicité de $g(x, y, t)$ en x :
$x^1 \in \mathbb{R}^n$ et $x^2 \in \mathbb{R}^n$ étant des vecteurs tels que $x^1 \leq x^2$ et $x^1_i = x^2_i$, alors la $i^{\text{ème}}$ composante de g vérifie : $g_i(x^1, y, t) \leq g_i(x^2, y, t)$ pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ et pour $t \geq t_0$,

(iii) la solution de l'équation différentielle $\dot{y}(t) = g(y(t), \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} y (t-\lambda), t) + \varepsilon$ existe et est unique, pour toute fonction initiale y_{t_0}, et pour tout $\varepsilon \geq 0$ suffisamment petit.

Alors z(t) et x(t) sont telles que $x(t) \leq z(t)$ pour tout $t \geq t_0$ si $x_{t_0} \leq z_{t_0}$.

Ce principe de comparaison constitue une base de démonstration très utile dans le cadre de l'étude de la stabilité d'un équilibre à l'aide de la méthode de Lyapunov. En effet, la majoration de la dérivée d'une fonction de Lyapunov-Razumikhin peut conduire à une inégalité différentielle du type de l'équation (1.32), suffisamment simple pour que la stabilité de l'équation (1.33) qui lui est associée puisse être prouvée.

Si une inégalité différentielle

$$\dot{x}(t) \leq -Cx(t) + D \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} x(t-\lambda),\ t \geq t_0 \tag{1.34}$$

est obtenue, alors le théorème suivant peut être utile dans le cadre d'une étude de la stabilité.

Théorème : [Tokumaru et al. (1975)]

Soient C et D des matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et soit x(t) une solution de l'inégalité différentielle :

$$\dot{x}(t) \leq -C\, x(t) + D \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} x(t-\lambda),\ t \geq t_0. \tag{1.34}$$

Si $D \geq 0$ et si les éléments hors-diagonaux de C sont négatifs ou nuls, si de plus C - D est une M-matrice (cf Annexe 2), alors la solution x(t) de (1.34) est majorée par la solution du système globalement asymptotiquement stable suivant :

$$\dot{z}(t) = -C\, z(t) + D \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} z(t-\lambda),\ t \geq t_0, \tag{1.35}$$

si $x(t_0+\lambda) \leq z(t_0+\lambda)$, $-\tau_m \leq \lambda \leq 0$.

De plus, si (C - D) est irréductible, alors il existe un réel $\gamma>0$ et un vecteur $k > 0$ tels que $x(t) \leq ke^{-\gamma t}$, $t \geq t_0$.

k et γ sont calculés de la manière suivante :

- γ est la solution strictement positive de l'équation $\lambda(P_\gamma) = \gamma$, où $P_\gamma = C - De^{\gamma\tau_m}$ et $\lambda_m(P_\gamma)$ est la valeur propre de P_γ de plus petite partie réelle (cf Annexe 2).
- k est un vecteur propre strictement positif de P_γ associé à la valeur propre γ.

Remarques : γ peut être calculé de manière unique du fait des hypothèses considérées.

IV.2. Méthode des normes vectorielles

Cette méthode a été développée pour l'analyse numérique par Robert (1964), et pour l'étude de la stabilité par Borne (1976) et Gentina (1976), puis étendue au cas des systèmes à retards par Dambrine et al. (1993).
Elle consiste à utiliser un vecteur de fonctions de Lyapunov, plutôt qu'une fonction scalaire. L'étude de la dérivée de ce vecteur, accompagnée d'un principe de comparaison, permet l'analyse de la stabilité du système considéré. Le principal intérêt de cette méthode est la construction simple et systématique d'un système de comparaison.

L'ensemble de la méthode n'est pas détaillé dans ce mémoire puisqu'elle est développée dans [Dambrine (1994)]. Seuls quelques uns des principaux résultats sont donnés ici.

Pour simplifier, nous nous limitons à un système à retard unique constant; l'extension aux systèmes à retards multiples variant dans le temps est immédiate. Considérons l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t), x(t-\tau_m))\, x(t) + B(t, x(t), x(t-\tau_m))\, x(t-\tau_m) \qquad (1.36)$$

Définition :

Un système (A) est appelé système de comparaison du système (B) pour la stabilité (asymptotique) si la stabilité (asymptotique) de la solution nulle du système (B) est impliquée par celle du système (A).

Norme vectorielle :

Définissons d'abord la norme vectorielle utilisée. Pour cela, considérons la partition suivante de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_k,$$

$\oplus$ représentant la somme directe.
x étant un vecteur de $\mathbb{R}^n$, sa projection sur le sous-espace E_i est notée x^i :

$$x^i = P_i\, x,$$

où P_i est la matrice de projection de $\mathbb{R}^n$ dans E_i.
Soit p_i une norme (scalaire) définie sur le sous-espace E_i.
La norme vectorielle $\mathcal{V}$ est définie de la manière suivante par sa i-ème composante :

$$(\mathcal{V}(x))_i = p_i(x^i).$$

$\mathcal{V}$: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^k$ est appelée norme vectorielle de taille k.

Construction d'un système de comparaison :

Pour abréger, nous noterons ici $x = x(t)$ et $y = x(t - \tau_m)$.

Soit $A_{ij}(.) = P_i\, A(.)\, P_j$, $B_{ij}(.) = P_i\, B(.)\, P_j$, i et j variant entre 1 et k, (.) représentant $(t, x(t), x(t-\tau_m))$.

Les coefficients de $M(t, x, y)$ et $N(t, x, y)$ sont définis comme suit pour tout x et y dans D :

$\mu_{ij}(t, x, y) \geq \sup\limits_{u \in D} \{m_{ij}(t, x, y, u)\}$, avec :

$$m_{ij}(t, x, y, u) = \frac{\text{grad } p_i(u^i)^T A_{ij}(t,x,y)\, u^j}{p_j(u^j)},$$

$\nu_{ij}(t, x, y) \geq \sup\limits_{(u, v) \in D^2} \{n_{ij}(t, x, y, u, v)\}$, $\forall\, t \in \mathcal{T}_0$, $\forall\, (x, y) \in D^2$, avec :

$$n_{ij}(t, x, y, u, v) = \frac{\text{grad } p_i(u^i)^T B_{ij}(t,x,y)\, v^j}{p_j(v^j)}.$$

Remarquons que plus la majoration effectuée est grossière, moins les résultats obtenus sont précis. Par contre, une majoration plus grossière mais conduisant à des matrices constantes permet de simplifier l'étude.

Théorème : [Dambrine (1994)]

Supposons que le système suivant :

$$\dot{z}(t) = M(t, x(t), x(t-\tau_m))\, z(t) + N(t, x(t), x(t-\tau_m))\, z(t-\tau_m) \qquad (1.37)$$

admet une solution et une seule pour toute condition initiale $z_{t_0} \in \mathcal{V}(D)$ et pour toute solution x de condition initiale dans $\mathcal{C}(D)$.

Alors (1.37) est un système de comparaison du système initial (1.36) pour la stabilité (asymptotique).

Les matrices M(.) et N(.) peuvent être calculées très facilement dans le cas où les normes p_i sont des normes usuelles de Hölder (cf. Annexe 1). Les formules permettant de calculer ces matrices sont données dans [Dambrine (1994)].

Dans le cas particulier où aucune agrégation n'est effectuée, le choix de la norme vectorielle

$$V(x) = \begin{pmatrix} |x_1| \\ . \\ . \\ |x_n| \end{pmatrix}$$

conduit à un calcul extrêmement simple d'un système de comparaison, les coefficients des matrices M et N étant définis comme suit :

$$\mu_{ij}(t, x, y) \geq |a_{ij}(t, x, y)| \text{ si } i \neq j,\ (x,y) \in D^2,\ t \geq t_0$$

$$\mu_{ii}(t, x, y) \geq a_{ii}(t, x, y) \text{ si } i = j, (x,y) \in D^2, t \geq t_0$$
$$\nu_{ij}(t, x, y) \geq |b_{ij}(t, x, y)|, (x,y) \in D^2, t \geq t_0, \qquad (1.38)$$
où $a_{ij}(t, x, y)$ et $b_{ij}(t, x, y)$ sont les coefficients respectifs des matrices $A(t, x, y)$ et $B(t, x, y)$.
Cette simplicité est l'un des intérêts de la méthode des normes vectorielles.

Parmi les résultats de [Dambrine (1994)], nous rappelons ici un théorème et un corollaire qui donnent des conditions suffisantes de stabilité pour le système (1.36) dans le cas où le système de comparaison pris en considération est non linéaire, puis dans le cas d'un système linéaire. Ils indiquent également comment déterminer une estimation du domaine de stabilité d'un équilibre stable.

Théorème :

S'il est possible de définir pour le système (1.36) un système de comparaison dans le sens précisé dans ce paragraphe, relativement à une norme vectorielle $\mathcal{V}$ et à un domaine D, tel que :

(i) les éléments non constants de $Z(t, x, y) = M(t, x, y) + N(t, x, y)$ sont isolés dans une seule ligne,

(ii) il existe un réel positif ε tel que $Z(t, x, y) + \varepsilon I_k$ est l'opposé d'une M-matrice irréductible pour tout $t \in \mathcal{T}_0$ et tous vecteurs x, y dans D (cf. Annexe 2 pour la définition d'une M-matrice),

alors la solution du système (1.36) est stable (asymptotiquement stable si N(.) est bornée).

Si de plus il existe un réel $\varepsilon > 0$ et un vecteur d de $\mathbb{R}^n$ strictement positif tels que
$$Z(t, x, y)\, d \leq -\varepsilon d, \ \forall\, t \in \mathcal{T}_0, \ \forall\, (x,y) \in D^2,$$
alors il est possible de déterminer une estimation du domaine de stabilité :
Soit α un réel positif tel que le domaine $I_{\mathcal{V}}(d,\alpha)$ est inclus dans D. Alors l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}(d,\alpha)$ est positivement invariant pour le système (1.36) et est une estimation du domaine de stabilité de la solution nulle de ce système.

Corollaire :

S'il est possible d'obtenir un système de comparaison linéaire stationnaire

$$\dot{z}(t) = M\, z(t) + N\, z(t - \tau_m)$$

relativement à la norme vectorielle $\mathcal{V}$ et au domaine D tel que M + N est l'opposée d'une M-matrice (cf Annexe 2), alors :

i) la solution nulle du système (1.36) est asymptotiquement stable,

ii) une estimation du domaine de stabilité est donnée par le domaine $\mathfrak{I}_{\mathcal{V}}(d,\alpha)$ où α est le plus grand réel positif tel que $I_{\mathcal{V}}(d,\alpha)$ est inclus dans D, d vérifiant l'inégalité $(M+N)d<0$.

De plus, dans le cas où $D = \mathbb{R}^n$, la solution nulle est globalement asymptotiquement stable.

IV.3. Méthode développée par Kolmanovskii

Nous allons présenter deux méthodes basées sur une même procédure générale. La première [Kolmanovskii (1995 a)] met uniquement en oeuvre la méthode des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii, tandis que la seconde [Kolmanovskii (1995 b)] utilise également un principe de comparaison.

Les retards des systèmes considérés ne sont pas nécessairement bornés.

La procédure générale est la suivante :

Partant d'une équation de la forme

$$\dot{x}(t) = F(t,x_t), \tag{1.39}$$

où F est continue sur $[t_0,\infty)\mathrm{x}C[-\infty,0]$, satisfaisant une condition de Lipschitz locale par rapport au second argument, on récrit F sous la forme suivante :

$$F(t,x_t) = F_1(t,x(t)) + F_2(t,x_t), \tag{1.40}$$

où $F_1(t,0) = 0$ et $F_2(t,0) = 0$.

La solution nulle de l'équation

$$\dot{y}(t) = F_1(t,y(t)), \tag{1.41}$$

est supposée uniformément asymptotiquement stable. Il existe alors une fonction de Lyapunov v(t,y) pour cette dernière équation.

A partir de cette fonction v et de la transformation permettant le passage de F à F_1, on déduit une fonctionnelle V_1 fonction de x_t.

La première méthode propose alors de déterminer V_2 telle que la fonctionnelle $V = V_1 + V_2$ permette de conclure à la stabilité de la solution nulle de (1.39).

La seconde méthode permet d'éviter cette dernière étape. En effet, la détermination d'une inégalité différentielle vérifiée par $V_1 = \|x\|$ (avec une norme bien choisie à partir de l'équation (1.41)), permet de déterminer des conditions de stabilité à l'aide d'un principe de comparaison.

L'intérêt de ces deux méthodes est de simplifier la détermination d'une fonctionnelle, et surtout, dans le cas de la seconde méthode, d'obtenir des théorèmes assez généraux pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires.

Nous allons ici donner deux théorèmes importants, le premier obtenu à l'aide de la première méthode, le second à l'aide de la deuxième.

<u>Théorème</u> : [Kolmanovskii (1995 a)]

Soit l'équation :

$$\dot{x}(t) = F(t,x(t-h)), \tag{1.42}$$

où F est continue, continûment différentiable par rapport aux composantes du second argument.

Soient $f(t,x) = \dfrac{\partial F(t,x)}{\partial x}$ et $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine.

Soient $L = \sup\limits_{t \geq t_0, x \in D} \|f(t,x)\|$ et $a = -\sup\limits_{t \geq t_0, x \in D} \mu(f(t,x))$.

Si $a > hL^2$, alors la solution nulle de (1.42) est asymptotiquement stable.

Soit ω l'unique solution strictement positive de l'équation :

$$\omega = a - hL^2 \exp(2\omega h).$$

Alors deux solutions quelconques du système satisfont :

$\|-x_1(t) + x_2(t)\| \leq \sup\limits_{\theta \in [-h, 0]} \|-x_1(t+\theta) + x_2(t+\theta)\| \exp(-\omega(t - t_0))$

La démonstration de ce premier théorème s'appuie sur une décomposition de la fonction F de la manière suivante :

$F(t,x(t-h)) = F(t,x(t)) + \big(F(t,x(t-h)) - F(t,x(t))\big)$,

et donc $F_1(t,x(t)) = F(t,x(t))$; $F_2(t,x_t) = F(t,x(t-h)) - F(t,x(t))$.

Théorème : [Kolmanovskii (1995 b)]

Soit l'équation :

$$\dot{x}(t) = F_1(t,x(t)) + F_2(t,x_t). \qquad (1.43)$$

Soit $f(t,x) = \dfrac{\partial F_1(t,x)}{\partial x}$.

Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que pour toute fonction $\psi \in C_r(\mathbb{R}^n)$,

$\|F_2(t,\psi)\| \leq \int_0^{\infty} \|\psi(-s)\| d_sK(t,s)$,

où K est mesurable, non décroissante par rapport à s et de variation bornée :

$Var_{[0,\infty)}K(t,.) \leq \lambda(t)$, $t \geq t_0$, $\lambda \in L_1[t_0,\infty)$.

Si $\sup\limits_{x:\|x\|\leq r} (f(t,x)) + \int_0^{\infty} d_sK(t,s) \leq 0$ pour tout $t \geq t_0$, alors la solution nulle de (1.43) est stable.

Remarquons que les critères de ces deux théorèmes tiennent compte du(des) retard(s) du système.

IV.4. Systèmes non stationnaires

Les méthodes développées dans les 3 paragraphes précédents (IV.1 à 3) s'appliquent bien sûr aux systèmes non stationnaires. Il existe cependant des théorèmes plus simples dans le cas où le système présente une “partie non retardée” qui soit linéaire. Ils sont en général i.o.d.

Deux types d'équations sont traités :

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t-\tau(t)), \qquad (1.44)$$

et :

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + F(t,x_t). \qquad (1.45)$$

Dans le premier cas, les fonctions matricielles A(t) et B(t) sont supposées continues. Dans le deuxième, A(t) est continue, $F(t,x_t)$ est continue par rapport au temps. Chacun des retards est supposé borné.

IV.4.1. Systèmes linéaires non stationnaires

Deux types de résultats vont être présentés, l'un développé par Verriest (1994) et mettant en oeuvre des équations de Riccati, l'autre par Xu Daoyi (1986), faisant intervenir des tests matriciels en terme de M-matrices et de mesures de matrices.

Supposons que la dérivée du retard est bornée par 1 : $\dot{\tau}(t) < 1$, et que $\tau(t) \leq \tau_m$.

Théorème : [Verriest (1994)]

S'il existe un triplet de matrices (symétriques) continues P(t), Q(t,s) et R(t) telles que :

$$\dot{P} + A^T P + PA + Q(t,t) + \frac{[PBQ(t,t-\tau(t))^{-1}B^T P]}{1-\dot{\tau}(t)} + R = 0,$$

et s'il on peut écrire $\frac{\partial Q(t,s)}{\partial t} = -C^T(t,s)C(t,s)$,

avec $0 < p_m I \leq P(t) \leq p_M I$, $0 < r_m I \leq R(t)$, et pour tout t, $q_M I \geq Q(t,s) \geq 0$, $\forall\, s \in [t-\tau_m, t]$, alors la solution nulle du système (1.44) est robustement asymptotiquement stable par rapport à $\tau(t) \in \mathcal{H} = \{\tau(t) \,/\, 0 \leq \tau(t) \leq \tau_m \text{ et } \dot{\tau}(t) < 1\}$.

Des critères plus simples peuvent être obtenus en se restreignant à des systèmes de retard vérifiant $\dot{\tau}(t) < 1 - 1/\alpha^2$.

La norme utilisée par Xu Daoyi pour établir ses résultats est la norme 2 de Holder (cf Annexe 1). Un système de comparaison linéaire stationnaire, ainsi que le théorème de Tokumaru (rappelé dans le paragraphe IV.1.) sont utilisés pour démontrer les résultats.

Les matrices constantes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont définies de la manière suivante par leurs cœfficients :

$\mathcal{A}_{ii} = \operatorname{Sup}_{t\geq t_0} \{\mathcal{A}_{ii}(t)\}$; $\mathcal{A}_{ij} \geq \operatorname{Sup}_{t\geq t_0} \{|\mathcal{A}_{ij}(t)|\}(i\neq j)$ et $\mathcal{B}_{ij} \geq \operatorname{Sup}_{t\geq t_0} \{|\mathcal{B}_{ij}(t)|\}$pour tout i et j.

Théorème : [Xu Daoyi (1986)]

L'équilibre 0 du système (1.44) est exponentiellement stable si la matrice $(-\mathcal{A}-\mathcal{B})$ est une M-matrice.

Si la matrice $(-\mathcal{A}-\sigma I-\exp(\sigma\tau_m)\mathcal{B})$, τ_m étant la valeur maximale du retard, et σ étant un réel strictement positif, est une M-matrice, alors σ est un taux de convergence exponentielle pour le système.

Théorème : [Xu Daoyi (1986)]

S'il existe des constantes strictement positives c > d telles que $\max_i \lambda_i(A^T(t) + A(t))/2 \leq -c$, $\|B(t)\| \leq d$, alors l'équilibre 0 du système (1.44) est exponentiellement stable.

Ces résultats sont similaires à ceux de [Dambrine (1994)] appliqués aux systèmes linéaires non stationnaires.

IV.4.2. Systèmes non linéaires non stationnaires

Des critères de stabilité asymptotique i.o.d. de l'équilibre du système (1.45) ont été développés dans [Lehman et al. (1994)]. Ces résultats généralisent une partie des travaux de [Wang et al. (1987)] (cf. III.3.) en prenant en compte une matrice A dépendant du temps et en généralisant la forme des perturbations considérées. Ils généralisent également une partie des travaux de [Xu Daoyi (1986)] (notamment le dernier théorème du paragraphe précédent IV.4.1.), mais ajoutent une estimation de la réponse du système sous la forme d'une exponentielle $\exp\{-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\}$, $\gamma(t)$ dépendant du retard maximal τ_m du système.

La fonction $F(t,x_t)$ a la forme suivante : $F(t,x_t) = f(t,x(t-g_1(t)), ..., x(t-g_m(t))$.

Un premier lemme permettant de majorer la solution de l'inéquation différentielle $\dot{v}(t) \leq -f(t)v(t) + b\|v_t\|_\tau$ permettra de démontrer le théorème qui suit. Ce lemme sera également utilisé dans le troisième chapitre de cette thèse.

Lemme : [Lehman et al. (1994)]

Soient v(t) et f(t) des fonctions continues, positives, sur $[t_0-\tau_m;\beta[$ et $[t_0;\beta[$ respectivement. Supposons que f(t) est strictement positive et croissante sur $[t_0;\beta[$.
Soit l'inéquation :

$$\dot{v}(t) \leq -f(t)v(t) + b\|v_t\|_\tau, \tag{1.46}$$

b étant une constante strictement positive telle que $0 < b < f(t)$ pour tout $t \in [t_0;\beta[$.
Alors

$$v(t) \leq \|v_{t_0}\|_\tau \exp\{-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\} \text{ pour tout } t \in [t_0-\tau_m;\beta[,$$

$\gamma(t)$ étant l'unique solution croissante de :

$$\gamma(t) = f(t_0) - b\, e^{\gamma(t)\tau_m} \text{ si } t < t_0$$
$$= f(t) - b\, e^{\gamma(t)\tau_m} \text{ si } t \in [t_0;\beta[.$$

De plus, $\gamma(t)$ satisfait l'inégalité $0 < \gamma(t) < f(t)$, $t \in [t_0-\tau_m;\beta[$.

Théorème : [Lehman et al. (1994)]

Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ et un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\|F(t,\xi)\| \leq M\|\xi\|_\tau$, pour tout $(t,\xi) \in (t_0,\infty) \times C(\Omega)$, où la norme considérée est une norme de Holder. Supposons de plus que pour tout $t \geq t_0$, $\mu(A(t)) < -M < 0$ et que $\mu(A(t))$ est décroissante.
Alors : i) la solution nulle de (1.45) est asymptotiquement stable indépendamment de τ, et
ii) si $x_{t_0} \in C(\Omega)$, une estimation de la réponse du système est donnée par l'inéquation :

$$\|x(t)\| \leq \|x_{t_0}\|_\tau \exp\{-\int_{t_0}^{t} \gamma(s)ds\},$$

où $0 < \gamma(t) < -\mu(A(t))$, $\gamma(t)$ étant la solution de l'équation

$$\gamma(t) = -\mu(A(t)) - Me^{\gamma(t)\tau_m},\ t \geq t_0.$$

Si l'hypothèse sur la monotonicité de $\mu(A(t))$ n'est pas vérifiée, alors la solution nulle du système est encore asymptotiquement stable, et une estimation de la réponse du système est donnée par :

$$\|x(t)\| \leq \|x_{t_0}\|_\tau \exp\{-(t - t_0)\gamma\},$$

où $0 < \gamma < |\mu(A(t))|$, $\gamma = \underset{t\geq t_0}{\mathrm{Inf}}\{-\mu(A(t))\} - Me^{\gamma\tau}$, $t \geq t_0$.

Remarquons que dans le cas d'un système linéaire stationnaire, $\gamma(t)$ est une fonction constante et que l'on retrouve dans ce cas les résultats de Wang et al. (1987) (cf. III.3.).

Conclusion

Ce chapitre nous a permis de constater qu'il existe un nombre important de méthodes d'étude de la stabilité des systèmes à retards.

Dans le cas des systèmes linéaires, de nombreuses méthodes sont performantes, même s'il n'existe pas de méthode à la fois simple d'utilisation et performante dans le cas où certains paramètres ne sont pas précisément déterminés.

Par contre, il reste beaucoup à faire pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires incertains et non linéaires. Les méthodes s'appliquant dans ces cas sont essentiellement des méthodes temporelles, s'appuyant sur la méthode de Lyapunov ainsi que sur des principes de comparaison. Jusqu'à ces dernières années, les méthodes proposées étaient i.o.d. A l'heure actuelle, quelques méthodes d.d. existent pour l'étude des systèmes linéaires incertains. Par contre, elles sont pratiquement inexistantes dans le cas des systèmes non linéaires.

Nous présentons dans la suite de ce mémoire des critères dépendant du retard valables en linéaire, linéaire incertain et non linéaire. Ceux-ci nous permettent de prendre en compte l'éventuel effet stabilisant des termes retardés. Un de leurs intérêts est qu'elles s'appliquent de la même manière aux trois types de systèmes considérés dans ce chapitre. Des énoncés i.o.d. sont également proposés.

Chapitre 2 : Systèmes linéaires perturbés : stabilité asymptotique robuste et taux de convergence

Introduction

Ce chapitre a pour but l'étude de la stabilité asymptotique et exponentielle robuste des systèmes linéaires perturbés à retards. Une telle étude concerne des systèmes présentant des incertitudes ou perturbations structurées ou non (cf. chapitre 1, paragraphe III.1.). Dans le cas structuré, on dispose d'informations sur les incertitudes affectant chacun des paramètres. Dans le cas contraire, seule une information globale est disponible. Ainsi, on obtiendra des critères scalaires (basés sur la notion de mesure de matrice) dans le cas des perturbations non structurées, et critères matriciels (basés sur les M-matrices) dans le cas des perturbations structurées.

Ces résultats s'appuient sur une représentation temporelle du système, dont l'équation d'état s'écrit :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t) \qquad (2.1)$$
$$t \geq t_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n,$$
$$x(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in E_0 = \{\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \leq t_0 : \exists\, a \geq t_0 \,/\, \lambda = a - \tau(a)\},$$

φ étant une fonction continue par morceaux.

Les hypothèses d'existence et d'unicité d'une solution sont données dans le premier chapitre.

On supposera que $f(0, t) = 0$, $g(0, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$.

Les fonctions f et g sont *continues par morceaux*. Elles sont constituées des coefficients de l'équation dépendant du temps et/ou fonction de l'état du système, mais également des éléments dont on ne connaît pas la valeur exacte (par exemple des éléments de la forme $f(x(t),t) = \Delta A x(t)$ et $g(x(t-\tau(t)),t) = \Delta B x(t-\tau(t))$, ΔA et ΔB étant bornées par des éléments constants connus). Les couples (f, g) appartiennent à un domaine noté S_p.

$\mathcal{T}$, l'ensemble des retards possibles, est constitué des fonctions positives, bornées par τ_m et *continues par morceaux*. Les critères mis en place sont pour la plupart dépendants de cette valeur maximale du retard.

La robustesse des systèmes considérés sera étudiée par rapport à S_p et à $\mathcal{T}$.

Les critères originaux que nous proposons dans ce chapitre s'appuient sur une décomposition intéressante de la matrice B sous la forme B = B' + B".

Les deux premières sections de ce chapitre sont consacrées à l'étude des deux types de critères, matriciels puis scalaires. Des corollaires concernent l'étude des systèmes linéaires stationnaires. Nous comparons dans la section III ces critères avec les autres critères de la littérature, et donnons trois exemples illustratifs de cette comparaison. Un quatrième paragraphe propose une amélioration à l'aide d'une technique de réitération de la méthode, permettant de prendre en compte un minorant strictement positif du retard. Enfin, la dernière section est consacrée à l'extension de ces critères aux systèmes de grande dimension.

Nous donnons ici un lemme qui servira de base à toutes les démonstrations futures. La démonstration de ce lemme est donnée en Annexe 3. Il généralise aux systèmes à deux retards le théorème de [Tokumaru et al. (1975)] rappelé au premier chapitre (paragraphe IV.1.).

Lemme de Tokumaru généralisé :

Soient C, D_1, D_2 des matrices réelles d'ordre n et soit x(t) une solution de l'inégalité différentielle

$$\dot{x}(t) \leq -Cx(t) + D_1 \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_1} x(t-\lambda) + D_2 \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_2} x(t-\lambda)$$

Si $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, si les éléments hors-diagonaux de C sont négatifs ou nuls, et si $(C-D_1-D_2)$ est une M-matrice, alors la solution x(t) de cette inégalité est majorée par la solution de l'équation

$$\dot{z}(t) = -Cz(t) + D_1 \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_1} z(t-\lambda) + D_2 \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_2} z(t-\lambda)$$

si $x(t_0 + \theta) \leq z(t_0 + \theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$, où $\tau = \mathrm{Max}\ \{\tau_1,\tau_2\}$.

De plus, s'il existe un réel $\gamma > 0$ et un vecteur $k > 0$ tels que $\gamma k = (C-D_1e^{\gamma\tau_1}-D_2e^{\gamma\tau_2})k$, alors $x(t) \leq \alpha k e^{-\gamma t}$, pour $t \geq t_0$ si cette même inégalité est vérifiée sur $[t_0-\tau, t_0]$.
Dans le cas où la matrice $(C - D_1 - D_2)$ est irréductible, alors de tels réel et vecteur existent; ils sont déterminés de la manière suivante :

- γ est la solution réelle strictement positive de l'équation $\lambda_m(C-D_1e^{\gamma\tau_1}-D_2e^{\gamma\tau_2}) = \gamma$.
- k est un vecteur propre strictement positif de $(C-D_1e^{\gamma\tau_1}-D_2e^{\gamma\tau_2})$ associé à la valeur propre γ.

I Cas des perturbations structurées

Dans le cas des perturbations structurées, des majorations de chacune des composantes des perturbations sont supposées connues :

$$|f(x,t)| \leq F\,|x|,\ |g(x,t)| \leq G\,|x|,$$

où F et G sont des matrices à éléments positifs. Rappelons que les inégalités données doivent être lues composante à composante (cf. notations).

I.1. Critère général

La matrice B est décomposée de la manière suivante :

$$B = B' + B''.$$

Généralement, B' contient les éléments "stabilisants" de B. Une remarque est effectuée à ce sujet dans le paragraphe suivant (I.2.).

Le théorème suivant donne un critère de stabilité pour le système (2.1). Il fournit également une manière simple de calculer un taux de convergence exponentielle pour ce même système.

Soit P_σ la matrice définie par :

$$P_\sigma = (A + B')^* + F + \left[\tau_m(|B'A| + |B'|F) + |B''| + G\right]e^{\sigma\tau_m} + \tau_m(|B'B| + |B'|G)e^{2\sigma\tau_m}.$$

Sa valeur en $\sigma = 0$ est :

$$P_0 = (A + B')^* + F + G + |B''| + \tau_m\big(|B'A| + |B'B| + |B'|(F + G)\big).$$

Théorème 2.1 : [Goubet-Bartholoméüs et al. (1997 a)]

Si P_0 est l'opposée d'une M-matrice, alors la solution nulle du système non linéaire (2.1) est robustement asymptotiquement stable.
Si de plus P_0 est irréductible, il est alors possible de majorer l'état instantané du système, à valeur de τ_m fixée :

$$|x(t)| \leq k.e^{-\gamma t},\ t \geq t_0 + \tau_m,$$

$$\text{si } |x(t_0+\theta)| \leq k.e^{-\gamma(t_0+\theta)} \text{ pour tout } \theta \in [-\tau_m, \tau_m],$$

k et γ étant déterminés de la manière suivante :

• γ est la solution réelle positive de l'équation :

$$-\lambda_m(P_\gamma) = \gamma,$$

où $\lambda_M(P_\gamma)$, comme précisé dans les notations, est la valeur propre de P_γ de plus grande partie réelle ($\lambda_M(P_\gamma)$ est réelle, cf Annexe 2).

• k est un vecteur propre de P_γ associé à la valeur propre $-\gamma$ (il peut être choisi à composantes positives, cf Annexe 2).

Démonstration :

L'équation d'état du système peut être réécrite sous le forme suivante, pour tout $t \geq t_0 + \tau_m$:

$$\dot{x}(t) = (A+B')\,x(t) - B'\int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s)ds + B''\,x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t).$$

Remplaçons $\dot{x}(s)$ par $A\,x(s) + B\,x(s-\tau(s)) + f(x(s),s) + g(x(s-\tau(s)),s)$:

$$\dot{x}(t) = (A+B')x(t) - B'A\int_{t-\tau(t)}^{t} x(s)ds - B'B\int_{t-\tau(t)}^{t} x(s-\tau(s))ds - B'\int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(s),s)ds$$

$$- B'\int_{t-\tau(t)}^{t} g(x(s-\tau(s)),s)ds + B''\,x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t).$$

Evaluons la dérivée de Dini à droite de chacune des composante de $|x(t)|$:

$$\frac{d^+|x_i|}{dt}(t) = \sum_{k=1}^{n}(A+B')_{ik}\,x_k(t)\,\mathrm{sgn}(x_i(t)) - \sum_{k=1}^{n}(B'A)_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t} x_k(s)\,ds\,\mathrm{sgn}(x_i(t))$$

$$- \sum_{k=1}^{n}(B'B)_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t} x_k(s-\tau(s))\,ds\,\mathrm{sgn}(x_i(t)) - \sum_{k=1}^{n}(B')_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t} f_k(x(s),s)\,ds\,\mathrm{sgn}(x_i(t))$$

$$- \sum_{k=1}^{n}(B')_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t} g_k(x(s-\tau(s)),s)\,ds\,\mathrm{sgn}(x_i(t)) + \sum_{k=1}^{n}(B'')_{ik}\,x_k(t-\tau(t))\,\mathrm{sgn}(x_i(t))$$

$$+ f_i(x(t),t)\,\mathrm{sgn}(x_i(t)) + g_i(x(t-\tau(t)),t)\,\mathrm{sgn}(x_i(t))\,.$$

Etant donné que $x_i(t)\ \mathrm{sgn}(x_i(t)) = |x_i(t)|$ et que $|x_k(t)\ \mathrm{sgn}(x_i(t))| = |x_k(t)|$, nous obtenons, en majorant chacun des termes sauf le premier $\left(\sum_{k=1}^{n}(A+B')_{ik}\, x_k(t)\ \mathrm{sgn}(x_i(t))\right)$ par sa valeur absolue :

$$\frac{d^+|x_i|}{dt}(t)\leq \sum_{k=1}^{n}(A+B')^*_{ik}|x_k(t)|+\tau_m\sum_{k=1}^{n}(|B'A|)_{ik}\sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m}|x_k(t-\lambda)|+\tau_m\sum_{k=1}^{n}(|B'B|)_{ik}\sup_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m}|x_k(t-\lambda)|$$

$$+\tau_m\sum_{k=1}^{n}(|B'|F)_{ik}\sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m}|x_k(t-\lambda)|+\tau_m\sum_{k=1}^{n}(|B'|G)_{ik}\sup_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m}|x_k(t-\lambda)|+\sum_{k=1}^{n}(|B''|)_{ik}\sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m}|x_k(t-\lambda)|$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(F)_{ik}|x_k(t)|+\sum_{k=1}^{n}(G)_{ik}\sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m}|x_k(t-\lambda)|.$$

Donc $\frac{d^+|x|}{dt}(t) \leq [(A + B')^* + F]\,|x(t)| + \left(\tau_m\,(|B'A|+ |B'|.F) + |B''| + G\right) \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} |x(t-\lambda)|$

$+ \tau_m\,(\,|B'B|+|B'|G\,) \sup_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m} |x(t-\lambda)|.$

Considérons l'équation différentielle associée à cette inégalité :

$\frac{d^+z}{dt}(t) = [(A + B')^* + F]\, z(t) + \left(\tau_m\,(|B'A|+ |B'|.F) + |B''| + G\right) \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} z(t-\lambda)$

$+ \tau_m\,(\,|B'B|+|B'|G\,) \sup_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m} z(t-\lambda).$

Remarquons que c'est une équation différentielle fonctionnelle à coefficients constants, de retard $2\tau_m$.

Etant donné que les éléments hors-diagonaux de $(A + B')^*+ F$ sont positifs ou nuls, ainsi que tous les éléments des matrices $\tau_m(|B'A|+ |B'|.F) + |B''| + G$ et $\tau_m\,(\,|B'B|+|B'|G\,)$, le lemme de Tokumaru généralisé permet d'affirmer que l'équilibre 0 du système est asymptotiquement stable si la matrice P_0 est l'opposée d'une M-matrice. L'estimation du taux de convergence exponentielle est réalisée à partir du même théorème. $\Delta\Delta$

Du fait que l'étude du système initial, de retard τ_m, est remplacée par celle d'un système de retard double, le taux de convergence exponentielle ne peut être déterminé qu'après majoration de x(t) sur un intervalle de longueur $2\tau_m$. Il est cependant possible, connaissant l'état initial du système sur $[t_0-\tau_m,t_0]$, d'estimer l'état futur sur $[t_0,t_0+\tau_m]$. Ces techniques sont exposées dans le chapitre suivant (paragraphe I.3.1.).

I.2. Intérêt de la décomposition

Notons $P_0 = P_{01} + P_{02}$, avec

$$P_{01} = (A + B')^*,$$
$$P_{02} = F + G + |B''| + \tau_m\big[|B'A| + |B'B| + |B'|(F + G)\big].$$

P_{02} étant une matrice à coefficients tous positifs, il est nécessaire, afin que P_0 soit une -M-matrice, que les coefficients de P_{02} soient suffisamment faibles par rapport aux valeurs absolues des coefficients diagonaux négatifs de P_{01}.
Il est donc nécessaire que $(A + B')^*$ soit une matrice suffisamment stable (c'est-à-dire à coefficients hors diagonaux suffisamment petits par rapport aux valeurs absolues de ses autres éléments). Il faut également que les éléments de la matrice P_{02} soient suffisamment faibles. Or les deux matrices P_{01} et P_{02} dépendent de B' : une augmentation des valeurs absolues des coefficients diagonaux négatifs de B' permet d'accroître la stabilité de P_{01}, mais entraîne par contre une augmentation des coefficients de P_{02}.
Il est donc nécessaire de réaliser un compromis entre les deux conditions suivantes :

P_{01} suffisamment stable,

P_{02} constituée d'éléments petits.

Un exemple d'optimisation partielle de la décomposition est donné dans le paragraphe III.3.3 de ce chapitre.

I.3. Cas des systèmes linéaires

Le théorème 2.1 est ici appliqué au système linéaire (2.2), puis donné dans les deux cas particuliers B' = 0, B'' = 0.

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t - \tau(t)),\ t \geq t_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$
$$x_{t0}(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } \theta \in E_0 = \{\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \leq t_0 : \exists\, a \geq t_0 \,/\, \lambda = a - \tau(a)\},$$

Il ne sera donné que les critères de stabilité. Le calcul des taux de convergence exponentielle est le même que dans le cas général.

I.3.1. Critère avec décomposition

Dans le cas d'absence d'incertitudes et /ou de perturbations, mais en présence d'un retard variable $\tau(t) \in [0, \tau_m]$, P_σ est donnée par :

$$P_\sigma = (A + B')^* + \big[\tau_m|B'A| + |B''|\big]e^{\sigma\tau_m} + \tau_m|B'B|e^{2\sigma\tau_m}.$$

Théorème 2.2 :

Si $(A + B')^* + \tau_m(\lvert B'A\rvert + \lvert B'B\rvert) + \lvert B''\rvert$ est l'opposée d'une M-matrice, alors la solution nulle du système linéaire (2.2) est asymptotiquement stable pour tout retard $\tau(t) \in [0, \tau_m]$.

I.3.2. Cas particuliers

Cas B' = 0 :

Le critère obtenu dans ce cas est indépendant de la valeur du retard :

Corollaire 2.3 :

Si $A^* + \lvert B\rvert$ est l'opposée d'une M-matrice, alors la solution nulle du système linéaire (2.2) est asymptotiquement stable.

Cas B'' = 0 :

Corollaire 2.4 :

Si $(A + B)^* + \tau_m(\lvert BA\rvert + \lvert B^2\rvert)$ est l'opposée d'une M-matrice, alors la solution nulle du système linéaire (2.2) est asymptotiquement stable.

I.4. Cas de systèmes à plusieurs retards

Considérons le système à 2 retards ponctuels suivant :

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B_1\, x(t - \tau_1(t)) + B_2\, x(t - \tau_2(t)) + f(x(t),t) + g(x(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_2(t)), t) \qquad (2.3)$$

où $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ sont des fonctions positives, continues par morceaux, bornées respectivement par τ_{m_1} et τ_{m_2}. $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ sont bien-sûr non commensurables en général.

Notons
$B_1 = B_1' + B_1''$ et $B_2 = B_2' + B_2''$.

Les perturbations ou éléments incertains f et g sont majorés de la manière suivante :

$|f(x,t)| \leq F\,|x|$, $|g(x,y,t)| \leq G_1\,|x| + G_2\,|y|$,

F, G_1 et G_2 étant des matrices positives.

Théorème 2.5 :

La solution nulle du système non linéaire (2.3) est robustement asymptotiquement stable par rapport à $\mathcal{T}$ et S_p (définis au début du chapitre) si la matrice

$$(A + B_1' + B_2')^* + F + G_1 + G_2 + |B_1''| + |B_2''| + \tau_{m1}(|B_1'A| + |B_1'B_1| + |B_1'B_2|) + \tau_{m2}(|B_2'A| + |B_2'B_1| + |B_2'B_2|) + \tau_{m1}|B_1'|(F + G_1 + G_2) + \tau_{m2}|B_2'|(F + G_1 + G_2)$$

est l'opposée d'une M-matrice.

Le taux de convergence asymptotique peut se calculer de la même façon que précédemment (Théorème 2.1) en définissant

$$P_\sigma = (A+B_1'+B_2')^* + F + [\tau_{m1}(|B_1'A| + |B_1'|F) + G_1 + |B_1''|]\, e^{\sigma\tau_{m1}} + [\tau_{m2}(|B_2'A| + |B_2'|F) + G_2 + |B_2''|]\, e^{\sigma\tau_{m2}} + \tau_{m1}(|B_1'B_1| + |B_1'|G_1)\, e^{2\sigma\tau_{m1}} + \tau_{m2}(|B_2'B_2| + |B_2'|G_2)\, e^{2\sigma\tau_{m2}} + [\tau_{m1}\,(|B_1'B_2| + |B_1'|G_2) + \tau_{m2}\,(|B_2'B_1| + |B_2'|G_1)]\, e^{\sigma(\tau_{m1}+\tau_{m1})}.$$

Ces résultats se généralisent facilement au cas d'un système présentant un nombre de retards supérieur. Considérant le système suivant :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + \sum_{i=1}^{p} B_i\,x(t - \tau_i(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau_1(t)), .., x(t-\tau_p(t)), t)$$

où

$|f(x,t)| \leq F\,|x|$ et $|g(x_1, .., x_p, t)| \leq \sum_{i=1}^{p} G_i|x_i|$,

$\tau_i(t) \leq \tau_{mi}$,

il suffit de considérer la matrice :

$$(A+\sum_{i=1}^{p} B_i')^* + F + \sum_{i=1}^{p} G_i + \sum_{i=1}^{p} |B_i''| + \sum_{i=1}^{p} \tau_{mi}(|B_i'A|+\sum_{j=1}^{p}|B_i'B_j|) + \tau_{mi}|B_i'|(F+\sum_{i=1}^{p} G_i).$$

II Cas des perturbations non structurées

Dans ce cas, on dispose de moins d'informations sur les bornes des perturbations, qui vérifient les inégalités scalaires suivantes :

$\|f(x,t)\| \leq \alpha \|x\|$; $\|g(x,t)\| \leq \beta \|x\|$,

où α et β sont des réels positifs.

II.1. Critère général

Théorème 2.6 : [Goubet-Bartholoméüs et al. (1997a)]

Si

$$\mu(A+B') + \alpha + \beta + \|B''\| + \tau_m (\|B'A\| + \|B'B\| + \alpha\|B'\| + \beta\|B'\|) < 0,$$

alors l'équilibre 0 du système (2.1) est robustement asymptotiquement stable.

De plus, à valeur de τ_m fixée :

$$\|x(t)\| \leq \sup_{-\tau_m \leq \theta \leq \tau_m} \{\|x(t_0+\theta)\|.e^{\sigma(t_0+\theta)}\}e^{-\sigma t}$$

pour tout $t \geq t_0 + \tau_m$,

$\sigma > 0$ étant l'unique solution de l'équation :

$$\sigma + \left(\tau_m (\|B'A\| + \alpha\|B'\|) + \beta + \|B''\|\right) e^{\sigma\tau_m} + \tau_m (\|B'B\| + \beta\|B'\|) e^{2\sigma\tau_m} + \mu(A+B') + \alpha = 0.$$

La démonstration de ce résultat est donnée en Annexe 4, dans l'article "Stability of Perturbed Time-Varying Delay Systems" [Goubet-Bartholoméüs et al. (1997a)]. Comme dans le cas matriciel, l'étude de la stabilité du système est réalisée à partir de l'étude d'un système linéaire stationnaire, ici scalaire, de retard double du système initial.

Remarque : Dans le cas d'un système scalaire, les théorèmes 2.1. et 2.6. sont équivalents.

II.2. Cas des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires dont on connaît parfaitement les coefficients (α=0 et β=0), on obtient les critères qui suivent. Pour ces cas particuliers, le calcul d'un taux de convergence exponentielle, non rappelé ici, est réalisé à l'aide du Théorème 2.6.

II.2.1. Critère avec décomposition

Théorème 2.7 :

Si

$$\mu(A+B') + \|B''\| + \tau_m (\|B'A\| + \|B'B\|) < 0,$$

alors l'équilibre 0 du système linéaire (2.2) est asymptotiquement stable.

II.2.2. Cas particuliers

Cas B' = 0 :

Comme dans le cas de perturbations structurées, le critère obtenu est alors indépendant du retard du système.

Corollaire 2.8 :

Si

$$\mu(A) + \|B\| < 0,$$

alors l'équilibre 0 du système linéaire (2.2) est asymptotiquement stable.

Cas B'' = 0 :

Corollaire 2.9 :

Si

$$\mu(A+B) + \tau_m (\|BA\| + \|B^2\|) < 0,$$

alors l'équilibre 0 du système linéaire (2.2) est asymptotiquement stable.

II.3. Systèmes avec plusieurs retards

Considérons de nouveau le système à deux retards (2.3). Sa solution nulle est robustement asymptotiquement stable si

$\mu(A + B_1' + B_2') + \alpha + \beta_1 + \beta_2 + \|B_1''\| + \|B_2''\| + \tau_{m1}(\|B_1'A\| + \|B_1'B_1\| + \|B_1'B_2\|) + \tau_{m2}(\|B_2'A\| + \|B_2'B_1\| + \|B_2'B_2\|) + \tau_{m1}\|B_1'\|(\alpha + \beta_1 + \beta_2) + \tau_{m1}\|B_2'\|(\alpha + \beta_1 + \beta_2) < 0,$

β_1 et β_2 étant tels que

$$\|g(x,y,t)\| \leq \beta_1 \|x\| + \beta_2 \|y\|.$$

III Comparaisons avec les critères existants et exemples d'application

Nous comparons dans ce paragraphe les différents théorèmes énoncés jusqu'à présent. Nous montrons l'intérêt de ces théorèmes par rapport à ceux développés par d'autres auteurs.

Deux exemples tirés des publications [Niculescu et al. (1994), Su et Huang (1992), Li et de Souza (1995)] nous permettent ensuite de concrétiser ces différentes remarques.

Enfin, il est réalisé sur une dernière application une optimisation partielle de la décomposition de B en B' + B''.

III.1. Critères scalaires et matriciels. Comparaisons

Comme nous l'avons remarqué au chapitre 1, la modélisation des perturbations sous forme structurée est plus précise que celle sous forme non structurée. De plus, les critères matriciels sont plus précis que les critères scalaires, même en l'absence de perturbations (voir à ce propos la première remarque du paragraphe II.2.2. du chapitre 1). Il est donc préférable, dans la mesure du possible, d'utiliser le Théorème 2.1. plutôt que le 2.6.

Remarquons qu'un autre inconvénient des critères scalaires est que leur efficacité dépend de la norme choisie, ce qui n'est pas le cas des théorèmes matriciels.

Les exemples donnés dans ce paragraphe III permettent de vérifier ces remarques.

III.2. Comparaisons avec les critères existants

Le but de ce paragraphe est de comparer les critères donnés dans ce chapitre avec des critères similaires déjà développés dans la littérature. Ceux-ci font intervenir soit des inégalités de normes et mesures de matrices, soit des M-matrices. Dans le cas des critères non similaires, les comparaisons sont effectuées sur des exemples dans le paragraphe suivant (III.3.) car les comparaisons théoriques sont souvent très difficiles à effectuer.

Les critères matriciels ne sont pas courants dans la littérature. De plus, ils sont pour la plupart indépendants du retard du système. Le théorème 2.1. constitue une généralisation de ces différents critères [Mori et al. (1981), Tokumaru et al. (1975), Lewis et al. (1980), Xu et al. (1991)] (paragraphe II.2.2. du chapitre 1), puisque le cas B' = 0 correspond à ceux-ci. Le taux de convergence calculé à l'aide de notre méthode dans le cas particulier B' = 0 correspond à celui donné dans [Tokumaru et al. (1975)].

Différents travaux donnent des critères de stabilité faisant intervenir des inégalités entre normes et mesures de matrices. Parmi ceux-ci, [Wang et al. (1987)] et [Niculescu et al. (1995a)] (voir le paragraphe III.3. du chapitre 1) donnent des critères dépendant du retard.

Etant donné que $\|CD\| \leq \|C\| \, \|D\|$ quelles que soient les matrices C et D, les résultats obtenus à l'aide des méthodes de ce mémoire sont meilleurs que ceux de [Wang et al. (1987)]. De plus, les hypothèses sur le retard sont moins restrictives.

Quant au critère de Niculescu et al. (1995a), les hypothèses sur le retard ne sont pas les mêmes que celles utilisées ici : ces auteurs imposent en effet que $\tau(t)$ soit continue et dérivable et que de plus sa dérivée soit positive ou nulle et majorée par $\alpha < 1$. Quand aux conditions de stabilité, elles sont identiques à celles du théorème 2.6. dans les cas particuliers suivants : B' = 0 (i.o.d.), B'' = 0 (d.d.). Enfin, en ce qui concerne l'estimation du taux de convergence exponentielle, elle est plus faible (et donc moins précise) que la nôtre. Par contre, un avantage de la méthode décrite dans [Niculescu et al. (1995a)] est que la norme de l'état instantané du système est majorée par une fonction de Sup $\|x(t_0 + \theta)\|$ sur un intervalle de longueur τ_m au lieu de $2\tau_m$ dans notre cas.

Tableau récapitulatif de ces comparaisons :

Le tableau suivant effectue une récapitulation des comparaisons avec nos critères :

Critère	Inconvénients	Avantages
Mori et al. (1981) Tokumaru et al. (1975) Lewis et al. (1980) Xu et al. (1991)	i.o.d.	
Wang et al. (1987)	Critères scalaires. Valeur maximale de τ_m plus petite. Retard supposé constant.	
Niculescu et al. (1995)	Critères scalaires Hypothèses supplémentaires sur le retard : continu, dérivable, de dérivée positive ou nulle majorée par 1. Taux de convergence exponentielle plus faible. Critères identiques à nos résultats scalaires dans les cas particuliers B' = 0 et B" = 0.	Majoration exponentielle : inutile de majorer l'état sur $[t_0; t_0 + \tau_m]$.

III.3. Exemples comparatifs

Ces exemples ont pour but de vérifier les remarques précédentes et surtout de déterminer l'ordre de grandeur des écarts entre les différentes méthodes. Ils permettent aussi de comparer des critères de formes très différentes.

III.3.1. Premier exemple

Soit le système

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t) \qquad (2.4)$$

$$t \geq t_0,\ x(t) \in \mathbb{R}^2,$$

avec $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $f(x(t),t) = \begin{bmatrix} \alpha_1(t,.) & 0 \\ 0 & \alpha_2(t,.) \end{bmatrix} x(t)$,

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; g(x(t-\tau(t)),t) = \begin{bmatrix} \beta_1(t,.) & 0 \\ \mu & \beta_2(t,.) \end{bmatrix} x(t-\tau(t)).$$

Les éléments incertains et/ou variant dans le temps sont bornés de la manière suivante :
$|\alpha_1(t,.)| \leq 1{,}6$; $|\beta_1(t,.)| \leq 0{,}1$; $|\alpha_2(t,.)| \leq 0{,}05$; $|\beta_2(t,.)| \leq 0{,}3$; $|\mu| \leq 1$.
Cet exemple a été traité dans [Goubet-Bartholoméüs et al. (1996b)].

Un cas particulier de ce premier exemple est apparu dans [Niculescu et al. (1994), Li et de Souza (1995)]. Rappelons que dans ces deux articles, c'est la méthode de Lyapunov qui a été utilisée (voir paragraphe III.2. du chapitre 1). Dans ces travaux, les éléments incertains s'écrivent de la manière suivante :
$\alpha_1(t,.) = \alpha_1\cos(t)$, $\alpha_2(t,.) = \alpha_2\sin(t)$, $\beta_1(t,.) = \beta_1\cos(t)$, $\beta_2(t,.) = \beta_2\cos(t)$, $\mu = -1$.
Les résultats de ces auteurs sont les suivants : le système (2.4) est stable pour toute valeur *constante* du retard telle que respectivement

τ_m **< 0,1036** [Niculescu et al. (1994)],

τ_m **< 0,2013** [Li et de Souza (1995)].

Appliquons maintenant les théorèmes donnés dans ce chapitre.
B étant diagonale-négative, il ne paraît pas nécessaire d'effectuer une décomposition de cette matrice. Nous choisissons donc B' = B, B'' = 0.

Nous n'appliquons ici que le critère matriciel (Théorème 2.1). Nes résultats matriciels et scalaires seront comparés dans le troisième exemple.
Les matrices F et G sont les suivantes :

$$F = \begin{bmatrix} 1{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}05 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}3 \end{bmatrix},$$

$$\text{et donc } P_0 = \begin{bmatrix} -1{,}3+4{,}7\tau_m & 0 \\ 1+\tau_m & -1{,}65+2{,}35\tau_m \end{bmatrix}.$$

La condition pour que P_0 soit l'opposée d'une M-matrice est simplement que ses coefficients diagonaux soient strictement négatifs, ce qui est équivalent à τ_m **< 0,276**.
Le système (2.4) est donc asymptotiquement stable pour tout retard *continu par morceaux* $\tau(t) < 0{,}276$. Cette borne maximale du retard est supérieure aux valeurs données dans [Niculescu et al. (1994)] et [Li et de Souza (1995)]. De plus, notre méthode accepte des retards variables.

III.3.2. Deuxième exemple

L'exemple proposé dans ce paragraphe est repris de [Su et Huang (1992)] et [Xu (1994)].

Le système considéré est le suivant :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A\,x(t) + B\,x(t - \tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t)$$

avec $f(x(t),t) = \begin{bmatrix} 0{,}3\cos t & 0 \\ 0 & 0{,}2\sin t \end{bmatrix} x(t)$, $g(x(t-\tau(t)),t) = \begin{bmatrix} 0{,}2\cos t & 0 \\ 0 & 0{,}3\sin t \end{bmatrix}$ $x(t-\tau(t))$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

L'application du critère de [Su et Huang (1992)] corrigé dans [Xu (1994)] donne les résultats suivants :

pour $Q = I$, $\tau_m < 0{,}1198$,

pour $P = I$, τ_m **< 0,1575**.

Appliquons maintenant le théorème 2.1 défini dans ce mémoire. Sans réaliser d'optimisation de la décomposition, on peut penser que le choix suivant sera satisfaisant :

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ et } B'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ces conditions, $P_0 = \begin{bmatrix} -2{,}5+3{,}5\tau_m & 0 \\ 1+\tau_m & -1{,}5+2{,}5\tau_m \end{bmatrix}$.

Le système est donc stable si τ_m **< 0,6**.

III.3.3. Troisième exemple

Ce troisième exemple va nous permettre de montrer l'utilité de la décomposition de la matrice B, et également de vérifier que les critères matriciels sont plus précis que les critères scalaires. Les résultats vont aussi être comparés à d'autres. Le taux de convergence exponentielle obtenu à l'aide de ces différentes méthodes est donné (pour une même valeur du retard maximal).

Soit le système

$$\frac{dx}{dt}(t) = A\, x(t) + B\, x(t - \tau(t)) + g(x(t-\tau(t)),t), \qquad t_0 = 0, \tag{2.5}$$

où $A = \begin{bmatrix} -1,2 & 0,1 \\ -0,1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -0,6 & 0,7 \\ -1 & -0,8 \end{bmatrix}$, $g(x(t-\tau(t),t) = \begin{bmatrix} \beta(x(t-\tau(t)),t)\; x_1(t-\tau(t)) \\ 0 \end{bmatrix}$,

avec $|\beta(x(t-\tau(t)),t)| \leq 0,1$ pour tout $t \geq 0$ et tout $x(t-\tau(t))$ dans $\mathbb{R}^2$.

Le retard τ, β, ainsi que la condition initiale sont continus par morceaux.

La norme utilisée est la norme 1 :
$\|y\| = |y_1| + |y_2|$.
Rappelons que la mesure de matrice et la norme de matrice qui lui sont associées sont les suivantes :
$\|M\| = \text{Max}\ \{|M_{11}| + |M_{21}|; |M_{12}| + |M_{22}|\}$; $\mu(M) = \text{Max}\ \{M_{11} + |M_{21}|; |M_{12}| + M_{22}\}$.

$\|g(x(t-\tau(t)),t)\| \leq 0,1\ \|x(t-\tau(t))\|$ donc $\beta = 0,1$ $(\alpha = 0)$;
$|g(x(t-\tau(t)),t)| \leq \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} |x(t-\tau(t))|$ donc $G = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(F = 0)$ en reprenant les notations du chapitre.

La stabilité ne peut pas être prouvée avec un critère i.o.d.

Les résultats obtenus à l'aide des différents critères d.d. sont donnés ici. Pour certains d'entre eux, des hypothèses doivent être ajoutées.

1) Critère de Wang et al. (1987) (voir paragraphe III.3. du chapitre 1) :
Les hypothèses suivantes doivent être ajoutées : fonction initiale continue et **retard constant**.

Nous prenons ici certaines notations de l'article [Wang et al. (1987)].

$\|\exp((A+B)t)\| \leq \exp(\mu(A+B)t)$, $t \geq t_0$, (voir Annexe 1), avec $\mu(A+B) = -0,7$.
$r_1(\tau_m) = -(\tau_m \|B\| (\|A\| + \|B\| + \beta) + \beta)/\mu(A+B)$.

La relation $r_1(\tau_m) < 1$ est vérifiée si et seulement si $\tau_m < 0{,}125$.
De plus, $\|x(t)\| \le \|x_{t_0}\|_{2\tau} \exp(-\sigma'(t-t_0))$, $t \ge t_0$, avec $\sigma' = 0{,}11$ si $\tau_m = 0{,}1$.

2) Critère de Niculescu et al. (1995a) (voir paragraphe III.3. du chapitre 1) :

Nous supposons ici que τ est **continue et différentiable** et que $0 \le \dot{\tau}(t) \le a < 1$.
L'inéquation

$$\frac{1}{-\mu(A+B)}(\tau_m(\|BA\| + \|B^2\| + \|B\|\beta) + \beta) < 1$$

est équivalente à $\tau_m < 0{,}156$.

Dans le cas où $\tau_m = 0{,}1$, le taux de convergence asymptotique trouvé, $\frac{\sigma'}{\tau_m}$, est égal à **0,20** si $a = 0$ ($\tau(t) = \tau_m$), de **0,10** si $a = 0{,}5$ et si $\tau(0) = 0{,}05$.

3) Application de nos critères :

Le retard $\tau(t)$ peut ici être **variable, continu par morceaux**, sans restriction sur sa dérivée.

• Critère scalaire :

♦ Sans décomposition : $(B' = B;\ B'' = 0)$

$\mu(A+B) + \beta + \tau_m(\|BA\| + \|B^2\| + \beta\|B\|) < 0$ est équivalent à $\tau_m < 0{,}156$.
De plus, $\|x(t)\| \le \sup_{-\tau_m \le \theta \le \tau_m} \{\|x(\theta)\|.e^{\sigma\theta}\} e^{-\sigma t}$ pour tout $t \ge \tau_m$, σ étant égal à **0,20** ($\tau_m = 0{,}1$).

♦ Avec la décomposition assez naturelle suivante :

$$B = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\tau_m < 0{,}286$, et $\|x(t)\| \le \sup_{-\tau_m \le \theta \le \tau_m} \{\|x(\theta)\|.e^{0{,}34\theta}\} e^{-0{,}34t}$ dans le cas où $\tau_m = 0{,}1$.

• Critère matriciel :

♦ Sans décomposition : $(B' = B;\ B'' = 0)$

$$P_\sigma = (A+B)^* + [\tau_m|BA| + G]e^{\sigma\tau_m} + \tau_m(|B^2| + |B|G)e^{2\sigma\tau_m}.$$

$P_0 = \begin{bmatrix} -1,7+1,05\tau_m & 0,8+1,74\tau_m \\ 1,1+2,78\tau_m & -1,8+0,76\tau_m \end{bmatrix}$ est l'opposée d'une M-matrice si τ_m **< 0,260**.

Pour toutes ces valeurs de τ_m, la matrice P_0 est irréductible.

Dans le cas où $\tau_m = 0,1$,

$\lambda(P_\gamma) = \dfrac{S + (S^2 - 4P)^{\frac{1}{2}}}{2}$, avec $S = -3,6 + 0,235e^{0,1\gamma} + 0,046e^{0,2\gamma}$

et $P = (-1,8+0,165e^{0,1\gamma}+0,04e^{0,2\gamma})(-1,8+0,7e^{0,1\gamma}+0,006^{0,2\gamma})$

$-(1,1+0,128^{0,1\gamma}+0,15^{0,2\gamma})(0,8+0,076^{0,1\gamma}+0,098^{0,2\gamma})$.

La solution de l'équation $-\lambda(P_\gamma) = \gamma$ est 0,474.

$P_{0,474} = \begin{bmatrix} -1,583 & 0,987 \\ 1,399 & -1,720 \end{bmatrix}$.

Un vecteur propre de $P_{0,474}$ associé à la valeur propre 0,474 est $k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,123 \end{bmatrix}$.

Et donc $|x(t)| \le \begin{bmatrix} 1 \\ 1,123 \end{bmatrix}.e^{-0,474t}$, $t \ge \tau_m$,

si $|x(\theta)| \le \begin{bmatrix} 1 \\ 1,123 \end{bmatrix}.e^{-0,474\theta}$ pour tout $\theta \in [-\tau_m, \tau_m]$.

♦ Avec la décomposition $B = \begin{bmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & -0,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$:

τ_m **< 0,417** et dans le cas où $\tau_m=0,1$, $|x(t)| \le \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1,1 \end{bmatrix}.e^{-0,55t}$.

♦ Avec une ***optimisation partielle de la décomposition*** :

Une optimisation de la décomposition en fonction des coefficients de la matrice B' est pratiquement impossible vue la nature des calculs à effectuer.

Il est par contre possible d'effectuer une optimisation locale autour d'une décomposition intuitive, ici $B = \begin{bmatrix} -0,6 & 0 \\ 0 & -0,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Notons pour cela la matrice B' sous la forme :

$B' = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$.

Nous allons donner ici les premiers pas de l'algorithme d'optimisation partielle :

1^{er} pas : b_1, b_3, b_4 sont tout d'abord fixés respectivement à -0,6; 0 et -0,8.
Le but est de rechercher la valeur de b_2 donnant la valeur de τ_m la plus grande possible.

Si $-0{,}06 \le b_2 \le 0{,}36$, $P_0 = \begin{bmatrix} -1{,}7+(1{,}14-1{,}1b_2)\tau_m & 0{,}8+(0{,}48+1{,}8b_2)\tau_m \\ 1{,}1+0{,}88\tau_m & -1{,}8+1{,}44\tau_m \end{bmatrix}$.

La valeur maximale de τ_m pour laquelle P_0 est l'opposée d'une M-matrice est la plus grande dans le cas où $b_2 = -0{,}06$. Elle est de **0,425**.

Si $-0{,}1 \le b_2 \le -0{,}06$, $P_0 = \begin{bmatrix} -1{,}7+(1{,}14-1{,}1b_2)\tau_m & 0{,}8+(0{,}36-0{,}2b_2)\tau_m \\ 1{,}1+0{,}88\tau_m & -1{,}8+1{,}44\tau_m \end{bmatrix}$.

La valeur de b_2 obtenue est également de -0,06.

$2^{ème}$ pas : b_1, b_2, b_4 sont fixés respectivement à -0,6; -0,06 et -0,8.
Nous effectuons la même démarche.

La valeur de b_3 maximisant τ_m est $b_3 = 0{,}0667$ (τ_m < **0,429**).

$3^{ème}$ pas : b_1, b_2, b_3 sont fixés respectivement à -0,6; -0,06 et 0,0667.
La valeur optimale de b_4 est -0,8. La valeur de τ_m obtenue est donc inchangée par rapport à l'étape précédente.

La décomposition retenue à l'issue de ces 3 étapes est donc

$$B = \begin{bmatrix} -0{,}6 & -0{,}06 \\ 0{,}067 & -0{,}8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}76 \\ -1{,}067 & 0 \end{bmatrix}$$

pour une valeur de τ_m (0,429) légèrement supérieure à la valeur obtenue à partir de la décomposition intuitive (0,417).

Le taux de convergence exponentielle est très similaire à celui obtenu avec la décomposition intuitive $B = \begin{bmatrix} -0{,}6 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ce troisième exemple nous a donc permis de montrer l'intérêt de notre méthode et de la décomposition introduite. Nous avons vu qu'une décomposition, même intuitive, permet d'améliorer de façon significative les résultats. Par contre, il n'est pas toujours judicieux de chercher à réaliser une optimisation de la décomposition car elle peut être lourde et ne conduire qu'à peu d'amélioration.

Tableau récapitulatif :

Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus pour chacun des trois exemples. Nous avons laissé ici une précision à 4 décimales, afin de faciliter la comparaison. Bien-sûr, ceci n'aurait pas forcément de sens dans une application pratique.

Critères	Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3
Wang et al. (1987)			Retard constant $\tau_m < 0,125$ $\|x(t)\| \leq \|x_0\|_{2\tau} \exp(-\sigma t)$, $\sigma' = 0,11$ si $\tau_m=0,1$.
Su et Huang (1992) Xu (1994)		Retard continu $\tau_m < 0,1575$	
Niculescu et al. (1994)	Retard constant $\tau_m < 0,1036$		
Niculescu et al. (1995 a)			τ continue et différentiable $\dot{\tau}(t) \leq a < 1$ $\tau_m < 0,156$ $\frac{\sigma'}{\tau_m} = 0,20$ si $a=0 (\tau(t)= \tau_m)$, $=0,10$ si $a=0,5$ et $\tau(0) = 0,05$
Li et de Souza (1995)	Retard constant $\tau_m < 0,2013$		
Méthode proposée dans ce mémoire : cas scalaire			τ continue par morceaux Sans décomposition : $\tau_m < 0,156$ $\|x(t)\| \leq \sup_{-\tau_m \leq \theta \leq \tau_m} \{\|x(\theta)\|.e^{0,20\theta}\} e^{-0,20t}$, $t \geq \tau_m$, $\tau_m=0,1$. Avec décomposition : $\tau_m < 0,286$, $\|x(t)\| \leq \sup_{-\tau_m \leq \theta \leq \tau_m} \{\|x(\theta)\|.e^{0,34\theta}\} e^{-0,34t}$, dans le cas où $\tau_m=0,1$.
Méthode proposée dans ce mémoire : cas matriciel	Retard continu par morceaux $\tau_m < 0,2760$	$\tau_m < 0,6$	τ continue par morceaux Sans décomposition : $\tau_m < 0,260$ $\lvert x(t) \rvert \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1,123 \end{bmatrix} .e^{-0,474t}$, $t \geq \tau_m$, $\tau_m=0,1$ Avec décomposition : $\tau_m < 0,4289$

IV Cas de retards bornés

Nous considérons ici des retards pour lesquels une borne inférieure est connue.

IV.1. Principe de réitération

Les résultats originaux que nous avons présentés dans ce chapitre sont basés sur une réécriture du système faisant apparaître le terme (A + B') x(t) et un terme intermédiaire à retard double. Rappelons que ceci est obtenu (cf paragraphe I.1.) en remplaçant $x(t-\tau(t))$ par

$$x(t-\tau(t)) = x(t) - \int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(u)du.$$

Nous allons dans cette partie montrer que ce processus peut être réitéré afin d'améliorer encore les résultats proposés jusqu'à présent.

Ces réitérations permettent également de considérer des intervalles de variation du retard du type $\tau(t) \in [\tau_0, \tau_m]$, τ_0 pouvant cette fois être non nul.

IV.2. Itération à l'ordre 2

Considérons le système (2.1) :

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, x(t - \tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t) \tag{2.1}$$

Selon la démarche précédente (voir démonstration du Théorème 2.1.), il peut se réécrire sous la forme suivante pour tout $t \geq t_0 + \tau_m$:

$$\dot{x}(t) = (A+B')\, x(t) - B'A \int_{t-\tau(t)}^{t} x(s)ds - B'B \int_{t-\tau(t)}^{t} x(s - \tau(s))ds - B' \int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(s),s)ds$$

$$- B' \int_{t-\tau(t)}^{t} g(x(s-\tau(s)),s)ds + B''\, x(t - \tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t).$$

L'intégrale $\int_{t-\tau(t)}^{t} x(s)ds$ étant égale à $\tau(t)\, x(t) + \int_{t-\tau(t)}^{t} (x(s) - x(t))\, ds$, on peut réitérer le processus de factorisation de la manière suivante :

$$\dot{x}(t) = (A+B'- B'A\tau(t))\, x(t) + B'A \int_{t-\tau(t)}^{t} \int_{s}^{t} \dot{x}(u)duds - B'B \int_{t-\tau(t)}^{t} x(s -\tau(s))ds$$

$$- B' \int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(s),s)ds - B' \int_{t-\tau(t)}^{t} g(x(s-\tau(s)),s)ds + B''x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t).$$

En remplaçant à nouveau $\dot{x}(u)$ par $A\, x(u) + B\, x(u -\tau(u)) + f(x(u),u) + g(x(u-\tau(u)),u)$, on obtient :

$$\dot{x}(t) = (A+B'- B'A\tau(t))\, x(t) + B'A^2 \int_{t-\tau(t)}^{t} \int_{s}^{t} x(u)duds + B'AB \int_{t-\tau(t)}^{t} \int_{s}^{t} x(u -\tau(u))duds$$

$$+ B'A \int_{t-\tau(t)}^{t} \int_{s}^{t} f(x(u),u)duds + B'A \int_{t-\tau(t)}^{t} \int_{s}^{t} g(x(u-\tau(u)),u)duds - B'B \int_{t-\tau(t)}^{t} x(s -\tau(s))ds$$

$$- B' \int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(s),s)ds - B' \int_{t-\tau(t)}^{t} g(x(s-\tau(s)),s)ds + B''x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t).$$

La majoration de $\frac{d^+|x_i|}{dt}(t)$, semblable à celle du théorème 2.1., conduit à l'inégalité:

$$\frac{d^+|x|}{dt}(t) \le [(A+B'- B'A\tau(t))^* + F]\, |x(t)|$$
$$+ \Big(\frac{\tau_m^2}{2} (|B'A^2| + |B'A|.F) + \tau_m |B'|F + |B''| + G \Big) \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} |x(t-\lambda)|$$
$$+ \frac{\tau_m^2}{2} (|B'AB| + |B'A|G) + \tau_m(|B'|G + |B'B|) \sup_{0\le\lambda\le 2\tau_m} |x(t-\lambda)|.$$

du fait que $\int_{t-\tau(t)}^{t} \int_{s}^{t} duds = \frac{\tau(t)^2}{2} \le \frac{\tau_m^2}{2}$.

Le résultat suivant est alors immédiat. Notons Q_σ la matrice définie par :

$$Q_\sigma = \sup_{\tau(t)}(A+B'- B'A\tau(t))^* + F + \Big(\frac{\tau_m^2}{2} (|B'A^2| + |B'A|.F) + |B''| + G \Big) e^{\sigma\tau_m}$$
$$+ \Big(\frac{\tau_m^2}{2} (|B'AB| + |B'A|G) + \tau_m(|B'|G + |B'|F + |B'B|) \Big) e^{2\sigma\tau_m}.$$

En particulier, pour $\sigma = 0$,

$$Q_0 = \sup_{\tau(t)}(A+B'- B'A\tau(t))^* + F + G + |B''| + \tau_m(|B'|G + |B'|F + |B'B|)$$
$$+ \frac{\tau_m^2}{2} \Big(|B'A^2| + |B'AB| + |B'A|(F + G)\Big).$$

Théorème 2.10 :

Si Q_0 est l'opposée d'une M-matrice, alors la solution nulle du système (2.1) est robustement asymptotiquement stable.
Si de plus Q_0 est irréductible et si les conditions initiales vérifient $|x(t_0 + \theta)| \leq k.e^{-\gamma(t_0+\theta)}$ pour tout $\theta \in [-\tau_m, \tau_m]$, alors il est possible de majorer l'état instantané du système, à valeur de τ_m fixée :

$$|x(t)| \leq k.e^{-\gamma t},\ t \geq t_0 + \tau_m,$$

k et γ étant déterminés de la même façon que dans le Théorème 2.1, en remplaçant bien sûr P_σ par Q_σ.

Notons que les matrices Q_0 et Q_σ dépendent à la fois de la borne supérieure du retard τ_m et de sa borne inférieure τ_0.

Le même type de résultat est obtenu dans le cas où les perturbations sont non structurées :

Théorème 2.11 :

Si

$$\sup_{\tau(t)} \mu(A+B'-B'A\tau(t)) + \alpha + \beta + \|B''\| + \tau_m(\|B'\|\beta + \|B'\|\alpha + \|B'B\|)$$
$$+ \frac{\tau_m^2}{2}(\|B'AB\| + \|B'A\|\beta) + \tau_m(\|B'\|\beta + \|B'\|\alpha + \|B'B\|) < 0,$$

alors l'équilibre 0 du système (2.1) est robustement asymptotiquement stable.
De plus, à valeur de τ_m fixée :

$$\|x(t)\| \leq \sup_{-\tau_m \leq \theta \leq \tau_m} \{\|x(t_0+\theta)\|.e^{\sigma(t_0+\theta)}\} e^{-\sigma t}$$

pour tout $t \geq t_0 + \tau_m$,
$\sigma > 0$ étant l'unique solution de l'équation :

$$\sigma + \Big(\frac{\tau_m^2}{2}(\|B'A^2\| + \|B'A\|.\alpha) + \|B''\| + \beta\Big) e^{\sigma\tau_m} + \Big(\frac{\tau_m^2}{2}(\|B'AB\| + \|B'A\|\beta)$$
$$+ \tau_m(\|B'\|\beta + \|B'\|\alpha + \|B'B\|)\Big) e^{2\sigma\tau_m} + \sup_{\tau(t)} \mu(A+B'-B'A\tau(t)) + \alpha = 0.$$

IV.3. Itérations d'ordres quelconques

Il est possible de réaliser des itérations à des ordres supérieurs. Dans le cas de perturbations structurées, nous obtenons à l'ordre j le théorème suivant :

Théorème 2.12 : (ordre j, $j \geq 1$)

Si

$$R_0(j) = \sup_{\tau(t)} \Big(A + \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \frac{\tau(t)^k}{k!} B'A^k\Big)^* + F + G + |B''| + \frac{\tau_m^{\ j}}{j!}|B'A^j| + \sum_{k=1}^{j} \frac{\tau_m^{\ k}}{k!}|B'A^{k-1}B|$$
$$+ \sum_{k=1}^{j} \frac{\tau_m^{\ k}}{k!}|B'A^{k-1}|(F + G)$$

est l'opposée d'une M_matrice, alors la solution nulle du système (2.1) est robustement asymptotiquement stable.

Pour j = 1, on retrouve le Théorème 2.1. ($R_0(1) = P_0$). Quant au Théorème 2.11, il correspond bien à l'ordre 2 ($R_0(2) = Q_0$). De manière générale, $R_0(j)$ dépend des deux bornes $\tau_0$et τ_m.

Le théorème suivant traite des perturbations non structurées.

Théorème 2.13 : (ordre j, $j \geq 1$)

Si

$$\sup_{\tau(t)} \mu\Big(A + \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \frac{\tau(t)^k}{k!} B'A^k\Big)^* + \alpha + \beta + \|B''\| + \frac{\tau_m^{\ j}}{j!}\|B'A^j\| + \sum_{k=1}^{j} \frac{\tau_m^{\ k}}{k!}\|B'A^{k-1}B\|$$
$$+ \sum_{k=1}^{j} \frac{\tau_m^{\ k}}{k!}\|B'A^{k-1}\|(\alpha + \beta) \leq 0$$

alors la solution nulle du système (2.1) est robustement asymptotiquement stable.

IV.4. Exemples

Nous reprenons ici le système considéré au paragraphe III.3.1. Nous supposons que le retard présente une borne inférieure positive :
$\tau(t) \in [\tau_0, \tau_m]$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}05 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Appliquons le théorème 2.12. à différents ordres.

Ordre 1 : D'après nos résultats exposés au paragraphe II.3.1., le système est stable pour tout retard variable $0 \leq \tau(t) < 0{,}276$. La prise en compte de la borne inférieure strictement positive ne peut pas être réalisée ici.

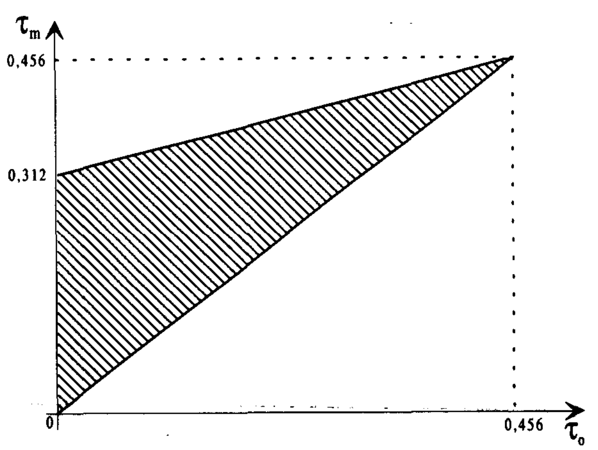
Ordre 2 : La matrice à étudier est la suivante : $\underset{\tau(t)}{\mathrm{Sup}} \left(A + B - \tau(t)\, BA\right)^* + \frac{\tau_m^2}{2} |BA^2| + \tau_m |B^2|$ $+ \frac{\tau_m^2}{2} |BAB| + \tau_m |B| F + \frac{\tau_m^2}{2} |BA| F + \tau_m |B| G + \frac{\tau_m^2}{2} |BA| G + F + G$

$$= \begin{bmatrix} -1{,}3-2\tau_0+4{,}7\frac{\tau_m^2}{2} + 2{,}7\tau_m & 0 \\ 1 + \frac{\tau_m^2}{2} + \tau_m & -1{,}65-\tau_0+4{,}7\frac{\tau_m^2}{2} + 2{,}7\tau_m \end{bmatrix}.$$

Dans le cas où $\tau(t)$ peut varier entre 0 et τ_m, $\underset{\tau(t)}{\mathrm{Sup}} \left(A + B - \tau(t)\, BA\right)^* = (A + B)^*$. La stabilité est alors prouvée pour tout retard $0 \leq \tau(t) < 0{,}312$.

Dans le cas où $\tau(t)$ est constant et égal à τ_m, la stabilité est prouvée pour $\tau_m < 0{,}456$.

Pour les cas où $\tau(t) \in [\tau_0, \tau_m]$, le schéma suivant donne les valeurs de τ_m admissibles en fonction de τ_0.



$$\tau_0 \leq \tau_m \leq \frac{-2{,}7+(37{,}6\tau_0 + 31{,}73)^{\frac{1}{2}}}{9{,}4},$$

Ordre 3 : Les résultats sont les suivants :

$0 \leq \tau(t) < 0,329$ dans le cas où le retard est variable,

$\tau_m < 0,589$ dans le cas où il est constant.

Nous pourrions de la même façon exprimer les valeurs de τ_m admissibles en fonction de τ_0.

Cet exemple montre l'intérêt de la réitération. Les résultats trouvés sont bien meilleurs que ceux proposés dans la littérature.

IV.5. Cas des systèmes scalaires

L'étude des systèmes scalaires va nous permettre de comparer les critères obtenus aux différents ordres, et de discerner, à l'aide de comparaisons avec des CNS, les conditions pour lesquelles nos théorèmes sont intéressants. Certaines de ces constatations sont généralisées au cas matriciel.

IV.5.1. Itérations d'ordres quelconques

Considérons le système scalaire perturbé suivant :

$$\dot{x}(t) = a\, x(t) + b\, x(t - \tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t) \tag{2.6}$$

où $|f(x(t),t)| \leq \alpha\, |x(t)|$, et $|g(x(t-\tau(t)),t)| \leq \alpha\, |x(t-\tau(t))|$.

En appliquant les théorèmes 2.10 et 2.12 à ce système, les résultats suivants sont obtenus:

Corollaire 2.14 :

Si $a + \sup\limits_{\tau(t)} \left(\sum\limits_{k=0}^{j-1} (-1)^k \frac{\tau(t)^k}{k!}\, ba^k \right) + \frac{\tau_m^{\,j}}{j!} |ba^j| + \sum\limits_{k=1}^{j} \frac{\tau_m^{\,k}}{k!} |b^2 a^{k-1}| + \sum\limits_{k=1}^{j} \frac{\tau_m^{\,k}}{k!} |ba^{k-1}| (\alpha + \beta) + \alpha + \beta < 0,$

alors la solution nulle du système (2.6) est robustement asymptotiquement stable.

IV.5.2. Itérations d'ordre infini

Dans le cas où a < 0, c'est-à-dire si le système non perturbé et sans termes retardés est stable, alors il est possible de faire tendre l'ordre j vers l'infini.

$$\sup_{\tau(t)} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \frac{\tau(t)^k}{k!} ba^k = \sup_{\tau(t)} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\tau(t)^k}{k!} b(-a)^k.$$

Si b est positif, il semble inintéressant de réaliser des réitérations, étant donné que l'ajout d'un terme supplémentaire $\frac{\tau(t)^k}{k!} b(-a)^k$ positif ne faciliterait pas la vérification du critère.

Considérons donc le cas b < 0 :

$$\sup_{\tau(t)} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\tau(t)^k}{k!} b(-a)^k = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\tau_0^{\ k}}{k!} b(-a)^k.$$

De plus, $\sum_{k=0}^{j-1} \frac{\tau_0^{\ k}}{k!} b(-a)^k = be^{-\tau_0 a}$, $\lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{j} \frac{\tau_m^{\ k}}{k!} b^2(-a)^{k-1} = \frac{b^2}{-a} (e^{-a\tau_m} - 1)$,

$\sum_{k=1}^{j} \frac{\tau_m^{\ k}}{k!} (-b)(-a)^{k-1}(\alpha + \beta) = \frac{b}{a} (e^{-a\tau_m} - 1)(\alpha + \beta)$.

Le critère suivant est donc obtenu :

Théorème 2.15 :

Si $a + be^{-\tau_0 a} + \frac{b^2}{-a} (e^{-a\tau_m} - 1) + \frac{b}{a} (e^{-a\tau_m} - 1)(\alpha + \beta) + \alpha + \beta < 0$, alors la solution nulle du système (2.6) est robustement asymptotiquement stable, $\tau(t) \in [\tau_0, \tau_m]$.

IV.5.3. Validation de l'intérêt du processus de réitération : comparaisons avec les CNS du cas linéaire

Le but de ce paragraphe est de comparer la qualité des résultats obtenus à différents ordres, dans le cas où une CNS de stabilité existe pour nous servir de référence; on choisit donc ici un système linéaire non perturbé. Dans le cas d'un système scalaire à retard constant, de telles CNS existent.

Nous considérons ainsi le système :

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,x(t - \tau_m) \tag{2.7}$$

Nous n'étudions que le cas a < 0, b < 0 et b < a, pour les raisons suivantes :

- Si a < 0, b < 0, b ≥ a, le système est stable indépendamment du retard.
- Si a > 0 et b < 0, la réitération n'est pas intéressante car les termes $\frac{\tau(t)^k}{k!} b(-a)^k$ sont de signes alternés et ne permettent donc pas nécessairement une amélioration du critère.
- Si b > 0, le système est soit stable i.o.d soit instable quelle que soit la valeur du retard.

Il existe dans le cas des sytèmes scalaires à retard constant une condition nécessaire et suffisante de stabilité donnée dans [El'sgol'ts et Norkin (1973)]:

$$\tau_m < \frac{\operatorname{Arccos}\left(-\frac{a}{b}\right)}{(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

L'application de nos critères donne les résultats suivants :

à l'ordre 1 : $a + b + \tau_m\,(|ab| + |b^2|) < 0 \iff \tau_m < \frac{-a-b}{|ab|+|b^2|}$,

à l'ordre ∞ : $a + be^{-a\tau_m} + \frac{b^2}{-a}(e^{-a\tau_m} - 1) < 0 \iff \tau_m < -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\frac{b^2}{a}}{\frac{b^2}{a}-b}\right)$.

Le tableau suivant donne les valeurs maximales de τ_m obtenues à l'aide des trois formules précédentes :

b (a < 0)	1,1a	2a	5a	10a
$-a\tau_m$ (CNS)	5,92	1,21	0,362	0,168
$-a\tau_m$ (Ordre 1)	0,909	0,50	0,200	0,100
$-a\tau_m$ (Ordre ∞)	3,00	0,916	0,262	0,115

On constate que le critère est meilleur à l'ordre infini qu'à l'ordre 1. L'amélioration (par rapport au critère d'ordre 1) est d'autant plus notable que b est proche de a. Par contre, les valeurs données par le critère d'ordre infini sont d'autant meilleures (par rapport à la CNS) que b s'éloigne de a.

IV.5.4. Conclusion

L'utilisation des critères obtenus par réitération dans ce paragraphe IV peut conduire à des améliorations par rapport aux critères des paragraphes précédents. Dans le cas d'un système multivariable, on se limitera en général aux ordres 2 et 3. Ces critères sont valables pour les systèmes linéaires ou non, perturbés ou non, mais aussi les systèmes à retard variable. Ils font intervenir non seulement la borne supérieure du retard, mais aussi sa borne inférieure, ce qui est rarement le cas dans la littérature des systèmes linéaires, et jamais pour les systèmes non linéaires.

En généralisant les résultats du paragraphe IV.5.3. au cas multidimensionnel, on peut affirmer que la réitération est utile dans le cas où A est stable et où B', de coefficients du même ordre que ceux de A, l'est suffisamment.

Par contre, la réitération à un ordre supérieur ou égal à 3 semble assez fastidieuse dans le cas des systèmes non stationnaires et/ou nonlinéaires.

Conclusion

Il a été donné dans ce chapitre des critères simples de stabilité pour les systèmes linéaires perturbés de manière non linéaire. Les hypothèses faites ne sont pas restrictives : retard continu par morceaux, incertitudes structurées ou non. Il a été montré comment une décomposition intéressante de la matrice B permet d'améliorer les résultats, et qu'une simple décomposition intuitive peut s'avérer très intéressante, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à un algorithme d'optimisation. Cette décomposition de la matrice B permet l'obtention de théorèmes i.o.d. et d.d. sous une même forme. Des exemples et des comparaisons avec d'autres critères ont permis de montrer l'intérêt de nos résultats.

Nous avons également proposé des critères dépendant d'un retard variable dans un segment de borne inférieure non nulle.

Ces méthodes simples sont facilement généralisables aux systèmes non linéaires, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

Chapitre 3 : Systèmes non linéaires : stabilité, taux de convergence et domaines

Le but de ce chapitre est de généraliser les théorèmes du chapitre précédent aux systèmes non linéaires et/ou non stationnaires. Afin d'obtenir un système de comparaison plus simple que le système initial, nous proposons comme précédemment une réécriture du système associée à des majorations. L'étude du système de comparaison permet la détermination de critères de stabilité intéressants de par leur simplicité.

En plus de cette étude qualitative, nous proposons une étude quantitative en général indispensable. En effet, même s'il est utile de savoir si un équilibre est stable, ce résultat est quasiment inutilisable si on ne connaît pas un ensemble de conditions initiales admissibles, c'est-à-dire pour lesquelles le système converge vers l'équilibre. Il est également utile de déterminer quelles sont les perturbations n'empêchant pas la convergence du système. C'est pourquoi on ajoute aux critères de stabilité asymptotique l'estimation du domaine de stabilité asymptotique, qui regroupe des conditions initiales pour lesquelles l'état futur du système reste toujours suffisamment proche de l'équilibre et converge vers celui-ci quand t tend vers l'infini.

Le premier paragraphe concerne la détermination de conditions de stabilité scalaires et matricielles, à partir d'un système majorant linéaire stationnaire, ou non. La section II s'intéresse à l'aspect "quantitatif" (estimation de domaines de stabilité). Les critères obtenus sont ensuite comparés aux autres critères donnés dans la littérature (paragraphe III).

I. Critères de stabilité

Soit le système suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t, x_t, p)\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)) \qquad (3.1)$$
$$x(s) = \varphi(s),\ s \in \{t \le t_0 : \exists\ t_1 \ge t_0,\ t = t_1 - \tau(t_1)\}.$$

Ainsi que précisé dans l'introduction de ce mémoire, les hypothèses suivantes sont considérées :

- le retard $\tau(t)$, de borne supérieure τ_m, est continu par morceaux.

- les matrices $A(t, x_t, p)$ et $B(t, x_t, p)$ sont également continues par morceaux. Le symbole p représente des éléments incertains ou des perturbations, appartenant à un domaine S_P tel que les coefficients des matrices $A(t, x_t, p)$ et $B(t, x_t, p)$ sont bornés dès que leurs deux premiers paramètres (t, x_t) le sont.

- le système est supposé avoir une unique solution $(t \geq t_0)$ pour toutes les conditions initiales considérées ici et pour toutes les perturbations dans S_P.

Dans l'ensemble de ce chapitre, les bornes supérieures, notées $\operatorname*{Sup}_{t,x,p}$, sont calculées, sauf indication contraire, pour $t \geq t_0 + \tau_m$, la fonction x étant à valeurs dans D ($D \subseteq IR^n$, voisinage de l'origine), la perturbation p évoluant dans l'ensemble S_P.

Lorsque la majoration est réalisée simplement par rapport à x et à la perturbation, la borne supérieure est notée $\operatorname*{Sup}_{x,p}$.

De manière similaire à ce qui a été effectué dans le chapitre précédent, nous décomposons la matrice B de la manière suivante :

$$B(t, x_t, p) = B'(t, x_t, p) + B''(t, x_t, p).$$

I.1. Critères matriciels de stabilité et taux de convergence exponentielle

I.1.1. Théorèmes

Soient P_σ et Q_σ les deux matrices suivantes :

$$P_\sigma = \operatorname*{Sup}_{t,x,p}\left\{ [A(t, x_t,p) + B'(t, x_t,p)]^* \right\}$$
$$+ e^{2\sigma\tau_m} \operatorname*{Sup}_{t,x,p}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t}\Big(|B'(t,x_t,p)\ A(s,x_s,p)| + |B'(t,x_t,p)\ B(s,x_s,p)|\Big)ds + |B''(t,x_t,p)| \right\},$$

$$Q_\sigma = \operatorname*{Sup}_{t,x,p}\left\{ [A(t,x_t,p)+B'(t,x_t,p)]^* \right\} + e^{\sigma\tau_m}\operatorname*{Sup}_{t,x,p}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t,x_t,p)A(s,x_s,p)|ds+|B''(t, x_t,p)| \right\}$$

$$+ e^{2\sigma\tau_m} \operatorname*{Sup}_{t,x,p}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t, x_t, p)\ B(s, x_s, p)|ds \right\}.$$

et donc

$$P_0 = \operatorname*{Sup}_{t,x,p}\left\{ [A(t, x_t,p) + B'(t, x_t,p)]^* \right\}$$

$$+ \underset{t,x,p}{\mathrm{Sup}}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t} \Big(|B'(t, x_t,p)\ A(s, x_s,p)| + |B'(t, x_t, p)\ B(s, x_s, p)| \Big) ds + |B''(t, x_t,p)| \right\},$$

$$Q_0 = \underset{t,x,p}{\mathrm{Sup}}\left\{ [A(t,x_t,p)+B'(t,x_t,p)]^* \right\} + \underset{t,x,p}{\mathrm{Sup}}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t} |B'(t,x_t,p)A(s,x_s,p)|ds+|B''(t,x_t,p)| \right\}$$

$$+ \underset{t,x,p}{\mathrm{Sup}}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t} |B'(t, x_t, p)\ B(s, x_s, p)|ds \right\}.$$

(on peut remarquer que $P_0 \leq Q_0$).

Théorème 3.1 :

Soit R_σ la matrice P_σ ou Q_σ.
Si R_0 est l'opposée d'une M-matrice, alors l'équilibre 0 du système (3.1) est asymptotiquement stable.
Si de plus il existe un réel $\gamma > 0$ et un vecteur $k > 0$ tels que $-R_\gamma k = \gamma k$, alors l'état instantané du système vérifie la majoration suivante:

$$|x(t)| \leq \alpha k.e^{-\gamma t},\ t \geq t_0 + \tau_m,$$

$$\text{si } |x(t_0 + \theta)| \leq \alpha k.e^{-\gamma(t_0 + \theta)} \text{ pour tout } \theta \in [-\tau_m, \tau_m],$$

quel que soit α positif, tant que l'état instantané reste dans D.

Corollaire 3.2 :

Soit R_σ la matrice P_σ ou Q_σ.
Si R_0 est l'opposée d'une M-matrice irréductible, alors l'équilibre 0 du système (3.1) est exponentiellement stable :

$$|x(t)| \leq k.e^{-\gamma t},\ t \geq t_0 + \tau_m,$$

$$\text{si } |x(t_0 + \theta)| \leq k.e^{-\gamma(t_0 + \theta)} \text{ pour tout } \theta \in [-\tau_m, \tau_m],$$

$k > 0$ et $\gamma > 0$ étant déterminés de la manière suivante :

- γ est la solution réelle strictement positive de l'équation :

$$\lambda_m(-R_\gamma) = \gamma,$$

- k est un vecteur propre de $(-R_\gamma)$ associé à la valeur propre γ (il peut être choisi à composantes strictement positives, cf Annexe 2), tel que :

$$\{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \leq k.e^{-\gamma(t_0 - \tau_m)}\} \subseteq D.$$

Remarques :

1- Soit le système d'équation

$$\frac{dz}{dt}(t) = K\, z(t) + L \sup_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m} z(t-\lambda)$$

où K et L sont par exemple définies par :

$$K = \sup_{t,x,p}\{ [A(t, x_t, p) + B'(t, x_t, p)]^* \},$$

$$L = \sup_{t,x,p}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t} (|B'(t,x_t,p)A(s,x_s,p)|+|B'(t,x_t,p)B(s,x_s,p)|)ds+|B''(t,x_t,p)| \right\}$$

Les solutions de ce système majorent les valeurs absolues (composante par composante) des solutions du système (3.1) si la majoration est vraie sur l'intervalle $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$.

2- La matrice P_0 étant toujours inférieure ou égale à la matrice Q_0, le fait que Q_0 soit l'opposée d'une M-matrice implique que P_0 est également l'opposée d'une M-matrice. Il est donc plus judicieux de travailler avec la matrice P_0 lorsque l'on cherche simplement à démontrer la stabilité asymptotique de l'équilibre. Si par contre l'objectif est de déterminer une estimation du taux de convergence exponentielle, la matrice Q_σ peut se montrer plus intéressante que P_σ (du fait de la présence d'un terme en $e^{\sigma\tau_m}$ au lieu de $e^{2\sigma\tau_m}$). un exemple (paragraphe I.1.2.2. de ce chapitre) permet d'illustrer cette remarque.

3- Les remarques concernant la décomposition de la matrice B faites au chapitre 2 sont bien sûr valables dans le cas des systèmes non linéaires. Dans le cas ou B" est choisie égale à B, des critères indépendant du retard sont obtenus.

Schéma de démonstration du théorème et de son corollaire :

Nous rappelons simplement ici les différentes étapes car la démonstration a été donnée (avec la matrice Q_σ) dans [Goubet-Bartholoméüs et al. (1996b)] (voir l'Annexe 4 comportant une copie de cet article).

Le schéma de démonstration est ici donné avec la matrice P_σ.

Nous pouvons démontrer, de la même façon que dans [Goubet-Bartholoméüs et al. (1996b)], que l'inégalité suivante, où $\frac{d^+}{dt}$ représente la dérivée de Dini à droite par rapport à t, est vérifiée pour tout $t \geq t_0 + \tau_m$:

$$\frac{d^+|x|}{dt}(t) \leq \sup_{t,x,p}\{ [A(t, x_t, p) + B'(t, x_t, p)]^* \} |x(t)|$$
$$+\sup_{t,x,p}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t} (|B'(t,x_t,p)A(s,x_s,p)|+|B'(t,x_t,p)B(s,x_s,p)|)ds+|B''(t,x_t,p)| \right\} \sup_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m} |x(t-\lambda)| \quad (3.2)$$

Rappelons que les majorants des éléments des matrices sont calculés pour

$x(t + \lambda) \in D$ (voisinage de l'origine), $\lambda \in [-2\tau_m, 0]$, $p \in S_p$, l'inégalité est valide tant que l'état instantané du système reste dans le domaine D.

Considérons l'équation différentielle fonctionnelle obtenue à partir de cette inégalité (3.2) en remplaçant le signe $\leq$ par le signe =, et $|x(t)|$ par z(t).

$$\frac{dz}{dt}(t) = \operatorname*{Sup}_{t,x,p}\{[A(t, x_t, p) + B'(t, x_t, p)]^*\} z(t)$$

$$+\operatorname*{Sup}_{t,x,p}\left\{\int_{t-\tau(t)}^{t}(|B'(t,x_t,p)A(s,x_s,p)|+|B'(t,x_t,p)B(s,x_s,p)|)ds+|B''(t,x_t,p)|\right\} \operatorname*{Sup}_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m} z(t-\lambda) \quad (3.3)$$

En utilisant le lemme de Tokumaru généralisé (voir l'introduction du Chapitre 2 et l'Annexe 3), il est facilement démontré que

$$z(t) \geq |x(t)|,\ x(t) \in D,\ t \geq t_0 + \tau_m$$

si cette même inégalité est vérifiée lorsque $t_0 - \tau_m \leq t \leq t_0 + \tau_m$.

On déduit de cette même annexe que

$$|x(t)| \leq k.e^{-\gamma t},\ t \geq t_0 + \tau_m,$$

$$\text{si } |x(t_0 + \theta)| \leq k.e^{-\gamma(t_0 + \theta)} \text{ pour tout } \theta \in [-\tau_m, \tau_m],$$

tant que x(t) reste dans D. La condition

$$\text{"}\{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \leq k.e^{-\gamma(t_0-\tau_m)}\} \subseteq D\text{"}$$

permet d'assurer l'appartenance à D de tout élément x tel que $|x| \leq k.e^{-\gamma t}$, quelle que soit la valeur de $t \geq t_0 - \tau_m$.

Si l'inégalité suivante est utilisée à la place de (3.2) :

$$\frac{d^+|x|}{dt}(t) \leq \operatorname*{Sup}_{t,x,p}\{[A(t, x_t, p) + B'(t, x_t, p)]^*\} |x(t)|$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{t,x,p}\left\{\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t, x_t,p)\ B(s, x_s,p)|ds\right\} \operatorname*{Sup}_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m} |x(t-\lambda)|$$

$$+ \operatorname*{Sup}_{t,x,p}\left\{\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t,x_t,p)A(s,x_s,p)|ds+|B''(t, x_t,p)|\right\} \operatorname*{Sup}_{0\leq\lambda\leq\tau_m} |x(t-\lambda)|, \quad (3.4)$$

la formulation avec Q_σ est obtenue. $\Delta\Delta$

Si les matrices intervenant dans les inéquations (3.2) et (3.4) sont à nouveau majorées, un autre critère est obtenu, moins précis mais plus simple :

Corollaire 3.3 :

Si l'une des deux matrices P'_0 ou Q'_0, P'_σ et Q'_σ étant définies par :

$$P'_\sigma = \sup_{t,x,p}\left\{ [A(t, x_t,p) + B'(t, x_t,p)]^* \right\}$$
$$+e^{2\sigma\tau_m}\sup_{t,x,p}\left\{ \tau_m \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} \left\{ |B'(t, x_t,p)A(t-\lambda, x_{t-\lambda},p)|+|B'(t, x_t,p)B(t-\lambda, x_{t-\lambda},p)| \right\} +|B''(t, x_t,p)| \right\}$$

ou

$$Q'_\sigma = \sup_{t,x,p}\left\{ [A(t,x_t,p)+B'(t,x_t,p)]^* \right\}$$
$$+e^{\sigma\tau_m}\sup_{t,x,p}\left\{ \tau_m \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} \left\{ |B'(t,x_t,p)A(t-\lambda,x_{t-\lambda},p)| \right\} +|B''(t,x_t,p)| \right\}$$
$$+ e^{2\sigma\tau_m}\sup_{t,x,p}\left\{ \tau_m \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} \left\{ |B'(t, x_t, p)\, B(t-\lambda, x_{t-\lambda}, p)| \right\} \right\},$$

est l'opposée d'une M-matrice, alors la solution nulle de (3.1) est asymptotiquement stable. De plus, un taux de convergence exponentielle peut être calculé de la même façon que précédemment (cf. Théorème 3.1 et Corollaire 3.2).

Remarques : • La condition "$\{x \in \mathbb{R}^n, |x| \le k.e^{-\gamma(t_0-\tau_m)}\} \subseteq D$" est nécessaire pour valider les majorations effectuées. Des conditions de ce type seront également indispensables lors de la détermination de domaines de stabilité.

• Des majorations des matrices intervenant dans les inéquations (3.2) et (3.4) permettent d'obtenir différents critères, d'autant plus précis que la majoration effectuée est fine. Malheureusement, plus le critère est précis, plus il est compliqué à utiliser.

Les conditions données dans le théorème et les corollaires sont très intéressantes car elles permettent l'étude de systèmes non linéaires éventuellement incertains, de la même façon que pour les systèmes linéaires. Ces conditions sont relativement simples à tester et permettent l'étude d'une large classe de systèmes : pour ce faire, il suffit de connaître des majorants et minorants de chacun des termes apparaissant dans l'équation d'état.

Comme nous l'avons vu pour les systèmes linéaires stationnaires, les critères proposés sont soit dépendants du retard, soit indépendants de celui-ci, suivant la décomposition de la matrice B effectuée. Nous pouvons effectuer le même type de remarques que dans le chapitre 2 (paragraphe I.2.) concernant l'intérêt de cette décomposition, son optimisation et la forme des systèmes pour lesquels ce type de méthodes est particulièrement intéressant.

Notons l'intérêt de notre démarche : les critères de stabilité pour systèmes non linéaires sont rares dans la littérature.

Nous allons maintenant traiter deux exemples d'application.

I.1.2. Exemples

Nous traitons ici deux exemples d'application, un premier concernant la stabilisation d'un système non retardé instable en boucle ouverte à l'aide d'un retour de sortie proportionnel + dérivée retardée [Goubet et al. (1995)]. Le deuxième est un problème d'étude de la stabilité d'un système non linéaire; la détermination de domaines de stabilité dépendant du retard maximal du système sera réalisée par la suite sur ce même système (paragraphe I.3.2.).

I.1.2.1. Stabilisation par retour retardé

Considérons le système décrit par l'équation différentielle suivante :

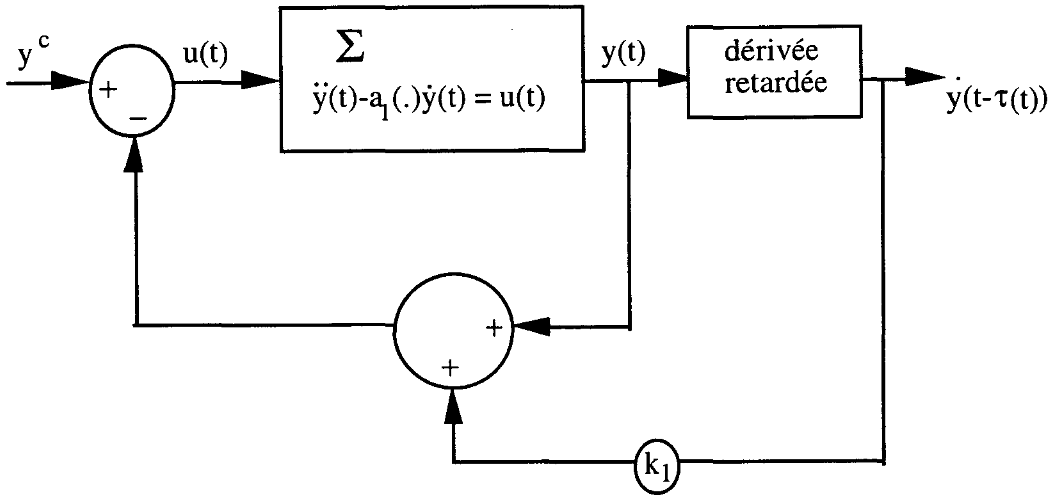
$$\ddot{y}(t)-a_1(.)\dot{y}(t) = u(t), \tag{3.5}$$

u et y étant respectivement l'entrée et la sortie du processus.

Le paramètre $a_1(.)$ varie entre 1,5 et 2, dépend du temps, de l'état, de perturbations éventuelles; sa variation est supposée continue par morceaux.

Le système est instable en boucle ouverte pour toute valeur constante de ce paramètre a_1 entre 1,5 et 2. Il ne peut être stabilisé en boucle fermée par aucun retour statique de sortie $u(t) = ky(t)$. On souhaite donc effectuer un retour en $\dot{y}$. $\dot{y}(t)$ n'étant pas forcément mesurable, on utilise un reconstructeur qui nous donne sa valeur passée $\dot{y}(t-\tau(t))$.

$\tau(t)$ est dépendant du temps et majoré par τ_m.



Le but de l'étude est donc de déterminer les valeurs de k_1 permettant de stabiliser le système pour tout retard $\tau(t)$ majoré par τ_m.

Si l'équilibre 0 du système en boucle fermée et à entrée nulle, est asymptotiquement stable, alors $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y^c$. Pour simplifier cette étude, nous considérons donc $y^c = 0$ lors de l'étude de la stabilité.

Considérons tout d'abord une équation du système en boucle fermée :

$\dot{z}(t) = M(.)\, z(t) + N\, z(t - \tau(t)),$

$y(t) = [1\ 0]\, z(t),$

$$\text{avec } M(.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a_1(.) \end{bmatrix} \text{ et } N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix}.$$

Appliquons le changement de variables suivant :

$$x = Pz,\ P = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \lambda > 0.$$

L'équation du système en boucle fermée peut alors se réécrire :

$$\dot{x}(t) = A(.)\, x(t) + B\, x(t - \tau(t)), \tag{3.6}$$

$$\text{où } A(.) = PM(.)P^{-1} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1+\lambda^2+\lambda a_1(.) \\ -1 & \lambda+a_1(.) \end{bmatrix}$$

et $B = PNP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda k_1 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix}$.

Sans décomposition, le critère (Corollaire 3.3) s'énonce :
"Si la matrice

$$\underset{t,x,d}{\mathrm{Sup}}\left\{ [A(.) + B]^* \right\} + \tau_m \underset{t,x,d}{\mathrm{Sup}}\left\{ |BA(.)| + |B^2| \right\}$$

est une -M-matrice, alors l'équilibre 0 du système est asymptotiquement stable."

$$[A(.) + B]^* = \begin{bmatrix} -\lambda & |1+\lambda^2+\lambda(a_1(.)-k_1)| \\ 1 & \lambda+a_1(.)-k_1 \end{bmatrix},$$

$$\underset{t,x,d}{\mathrm{Sup}}[A(.) + B]^* = \begin{bmatrix} -\lambda & \mathrm{Max}\{1+\lambda^2+\lambda(2-k_1),-1-\lambda^2-\lambda(1,5-k_1)\} \\ 1 & \lambda+2-k_1 \end{bmatrix}.$$

$$|BA(.)| + |B^2| = \begin{bmatrix} |k_1|\lambda & \lambda|k_1(\lambda+a_1(.))| + \lambda k_1^2 \\ |k_1| & |k_1(\lambda+a_1(.))| + k_1^2 \end{bmatrix},$$

et donc :

$$\underset{t,x,d}{\mathrm{Sup}}\left\{ [A(.) + B]^* \right\} + \tau_m \underset{t,x,d}{\mathrm{Sup}}\left\{ |BA(.)| + |B^2| \right\} =$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda+\tau_m|k_1|\lambda & \mathrm{Max}\{1+\lambda^2+\lambda(2-k_1),-1-\lambda^2-\lambda(1,5-k_1)\}+\tau_m\left(\lambda\underset{t,x,d}{\mathrm{Sup}}\{|k_1(\lambda+a_1(.))|\} + \lambda k_1^2\right) \\ 1+\tau_m|k_1| & \lambda+2-k_1+\tau_m\left(\underset{t,x,d}{\mathrm{Sup}}\{|k_1(\lambda+a_1(.))|\} + k_1^2\right) \end{bmatrix}$$

Pour que cette matrice soit l'opposée d'une M-matrice, il est nécessaire que sa trace soit strictement négative, ce qui implique

$$-\lambda+(\lambda+2-k_1) < 0,$$

ce qui est équivalent à $k_1 > 2$.
Cette inégalité va nous permettre de déterminer les valeurs supérieures manquantes :

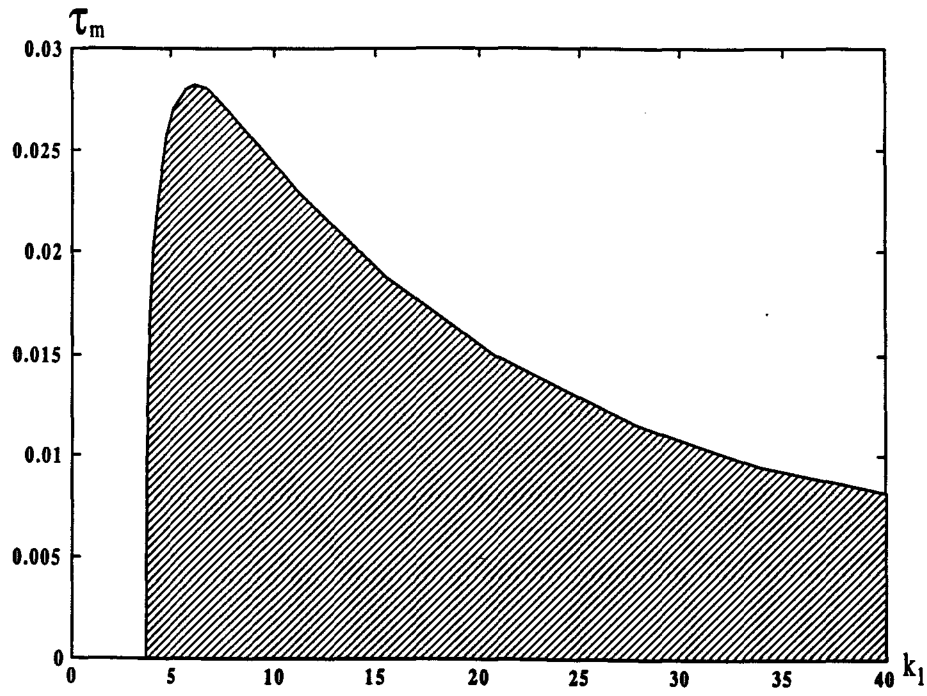
$$\underset{t,x,d}{\mathrm{Sup}}\{|k_1(\lambda+a_1(.))|\} = k_1(\lambda+2).$$

La matrice à étudier est donc la suivante :

$$\begin{bmatrix} -\lambda+\tau_m|k_1|\lambda & \mathrm{Max}\{1+\lambda^2+\lambda(2-k_1),-1-\lambda^2-\lambda(1,5-k_1)\}+\tau_m\left(\lambda k_1(\lambda+2) + \lambda k_1^2\right) \\ 1+\tau_m|k_1| & \lambda+2-k_1+\tau_m\left(k_1(\lambda+2) + k_1^2\right) \end{bmatrix}.$$

Si la valeur de k_1 choisie permet de rendre la trace de cette matrice strictement négative et son déterminant strictement positif, alors l'équilibre 0 du système en boucle fermée est asymptotiquement stable. Ces deux conditions (trace < 0, déterminant > 0) nous permettent de déterminer des valeurs admissibles de k_1 en fonction de τ_m ou inversement.

La figure suivante donne les valeurs admissibles de τ_m en fonction de k_1. Rappelons que le retard $\tau(t)$ peut varier entre 0 et τ_m.



D'après ce schéma, la stabilité du système en boucle fermée ne peut être prouvée que si la valeur de k_1 est suffisamment élevée. Cet exemple nous permet de démontrer qu'un terme retardé peut permettre la stabilisation d'un système (le système considéré ici est instable en boucle ouverte et ne peut être stabilisé par un seul retour proportionnel). Quelle que soit la valeur de τ_m comprise entre 0 et 0,028, il existe plusieurs valeurs de k_1 permettant la stabilisation du système. Plus la valeur maximale du retard est petite, plus la plage d'évolution du paramètre k_1 est grande, et donc plus le système semble facilement stabilisable.

I.1.2.2. Deuxième exemple

Considérons le système décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t, p)\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)),$$
$$x(s) = \varphi(s),\ s \in \{t \leq t_0 : \exists\, t_1 \geq t_0,\ t = t_1 - \tau(t_1)\} \tag{3.7}$$

$$\text{où } A(t, p) = \begin{bmatrix} -2 + \alpha_1(t, p) & 0 \\ 0 & -1 + \alpha_2(t, p) \end{bmatrix},$$

$$B(t, x_t, p) = \begin{bmatrix} -1 + \beta_1 g(t, x_2(t)) & 0 \\ \mu & -1 + \beta_2(t, p) \end{bmatrix}.$$

$| \alpha_1(t, p) | \leq 1{,}6$; $| \beta_1 | \leq 0{,}1$; $| \alpha_2(t, p) | \leq 0{,}05$; $| \beta_2(t, p) | \leq 0{,}3$; $| \mu | \leq 1$.
L'élément non linéaire est majoré de la manière suivante : $|g(t, x_2(t))| \leq |x_2(t)|$.

La structure de ce système est analogue à celle de l'exemple de [Niculescu et al. (1994)] et de [Li et de Souza (1995)], rappelé dans le paragraphe III.3.1. du chapitre précédent. Par contre, les paramètres donnés ici sont plus généraux, et une non linéarité apparaît ($g(t, x_2(t))$).

Étudions la stabilité asymptotique de la solution nulle de ce système.

Nous choisissons $B' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$$B''(t, x_t, p) = \begin{bmatrix} \beta_1 g(t, x_2(t)) & 0 \\ \mu & \beta_2(t, p) \end{bmatrix}.$$

Du fait de la présence de l'élément non linéaire $g(t, x_2(t))$, majoré en valeur absolue par $|x_2(t)|$, les majorations conduisant à un système linéaire doivent être effectuées sur un domaine de $\mathbb{R}^2$ limitant la valeur de $|x_2(t)|$. Nous prenons comme domaine :

$$D = D_\psi = \{x \in \mathbb{R}^2 : | x_2 | \leq \psi\}.$$

Afin de déterminer des conditions de stabilité, étudions la matrice

$$X = \sup_{t,x,p}\left\{ [A(t, p) + B'(t, x_t, p)]^* \right\}$$
$$+\sup_{t,x,p}\left\{ \tau_m \sup_{0 \leq \lambda \leq \tau_m} \left\{ |B'(t, x_t, p)A(t-\lambda, p)| + |B'(t, x_t, p)B(t-\lambda, x_{t-\lambda}, p)| \right\} + |B''(t, x_t, p)| \right\}$$

$$\sup_{t,x,p}\left\{ [A(t, p) + B'(t, x_t, p)]^* \right\} = \begin{bmatrix} -1{,}4 & 0 \\ 0 & -1{,}95 \end{bmatrix}.$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq \tau_m} \left\{ |B'(t, x_t, p)A(t-\lambda, p)| + |B'(t, x_t, p)B(t-\lambda, x_{t-\lambda}, p)| \right\} =$$

$$\begin{bmatrix} \sup\limits_{0\le\lambda\le\tau_m} \{2-\alpha_1(t,p)+|1-\beta_1 g(t-\lambda,x_2(t-\lambda))|\} & 0 \\ 1 & 2{,}35 \end{bmatrix}.$$

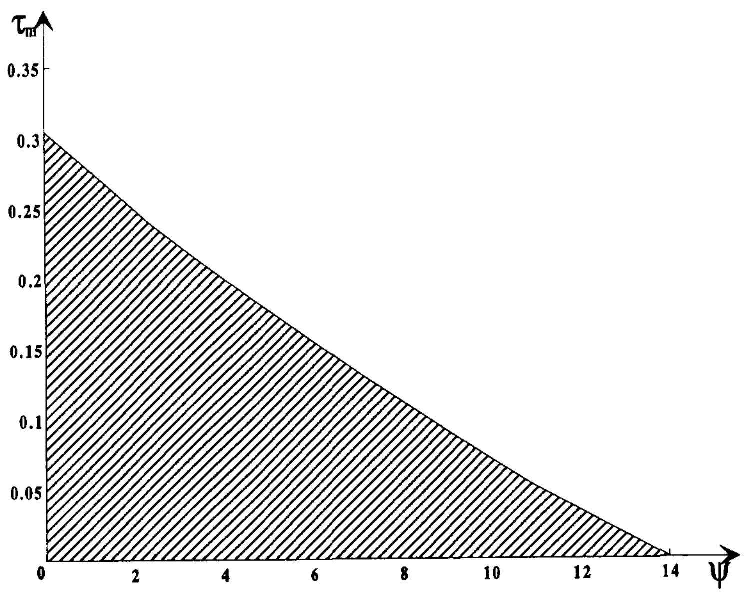
$$\sup_{0\le\lambda\le\tau_m} \{2-\alpha_1(t,p)+|1-\beta_1 g(t-\lambda,x_2(t-\lambda))|\} = 4{,}6 + 0{,}1\psi.$$

On déduit facilement de ces différentes matrices les coefficients de la matrice à étudier :

$$X = \begin{bmatrix} -1{,}4+0{,}1\psi+\tau_m(4{,}6+0{,}1\psi) & 0 \\ 1+\tau_m & -1{,}65+2{,}35\tau_m \end{bmatrix}.$$

Si chacun des coefficients diagonaux de cette matrice est strictement négatif, c'est-à-dire si $\tau_m < \dfrac{14-\psi}{46+\psi}$, la matrice X est une -M-matrice.

Ces conditions sur τ_m sont représentées sur le schéma suivant :



Pour toute valeur de $\tau_m < \dfrac{14}{46} \approx 0{,}304$, il existe un domaine $D_\psi = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| \le \psi\}$ sur lequel la matrice étudiée est l'opposée d'une M-matrice.

L'équilibre 0 du système est donc asymptotiquement stable pour toute valeur de τ_m inférieure à 0,304.

Les conditions obtenues sur la valeur de τ_m dépendent de ψ, et donc du domaine d'évolution de l'état instantané du système. Si à un moment cet état instantané sort du domaine D_ψ, la convergence vers l'équilibre n'est pas assurée. Il est donc nécessaire, pour chacun des couples (τ_m , ψ) déterminés, de connaître un domaine D inclus dans D_ψ tel que, si l'état initial du système est dans ce domaine C(D), l'état instantané reste dans le domaine D_ψ pour tout $t \geq t_0$. Cette étude sera réalisée ultérieurement, lorsque des théorèmes permettant de déterminer des domaines de stabilité auront été prouvés (paragraphe I.3.).

Détermination d'un taux de convergence exponentielle :

$$-P'_\sigma = \begin{bmatrix} 1{,}4\text{-}e^{2\sigma\tau_m}(0{,}1\psi+\tau_m(4{,}6+0{,}1\psi)) & 0 \\ -e^{2\sigma\tau_m}(1+\tau_m) & 1{,}95\text{-}e^{2\sigma\tau_m}(2{,}35\tau_m+0{,}3) \end{bmatrix}.$$

Les deux valeurs propres de cette matrice sont positives pour des valeurs faibles de σ. Mais le vecteur propre associé à la valeur propre $1{,}95\text{-}e^{2\sigma\tau_m}(2{,}35\tau_m+0{,}3)$ a une composante nulle. Il n'est donc pas intéressant pour la détermination d'un taux de convergence exponentielle.
Par contre, si l'équation

$$\sigma = 1{,}4\text{-}e^{2\sigma\tau_m}(0{,}1\psi+\tau_m(4{,}6+0{,}1\psi)) \tag{3.8}$$

admet une solution positive $\sigma = \gamma$ et qu'un vecteur propre k associé à γ a des composantes strictement positives, alors une estimation du taux de convergence exponentielle est possible. En effet, l'équation $-P'_\gamma k = \gamma k$ sera vérifiée (Théorème 1.1.).

Étudions le cas d'un système dont le retard, variable, est inférieur à 0,1.
La matrice $(-P'_\sigma)$ est une M-matrice sur tout ensemble D_ψ, ψ étant inférieur à 8,54. L'estimation du taux de convergence exponentielle dépend de l'ensemble sur lequel on étudie le système.
Considérons par exemple le cas $\psi = 3$. La solution de l'équation (3.8) est $\gamma = 0{,}52$. Un vecteur propre de $(-P'_\gamma)$ associé à cette valeur propre est $\begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}46 \end{bmatrix}$. Si l'inégalité $|x(t)| \leq \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}46 \end{bmatrix} . e^{-0{,}52t}$ est vérifiée sur $[t_0 - 0{,}1 ; t_0 + 0{,}1]$, alors elle est vérifiée pour tout $t \geq t_0 + 0{,}1$, à condition que $|x_2(t)|$ reste inférieur à 3. Cette dernière condition est vérifiée si $1{,}46\ \alpha\ e^{-0{,}52(t_0-0{,}1)} \leq 0{,}3$.

En considérant d'autres valeurs de ψ, les résultats suivants sont obtenus :

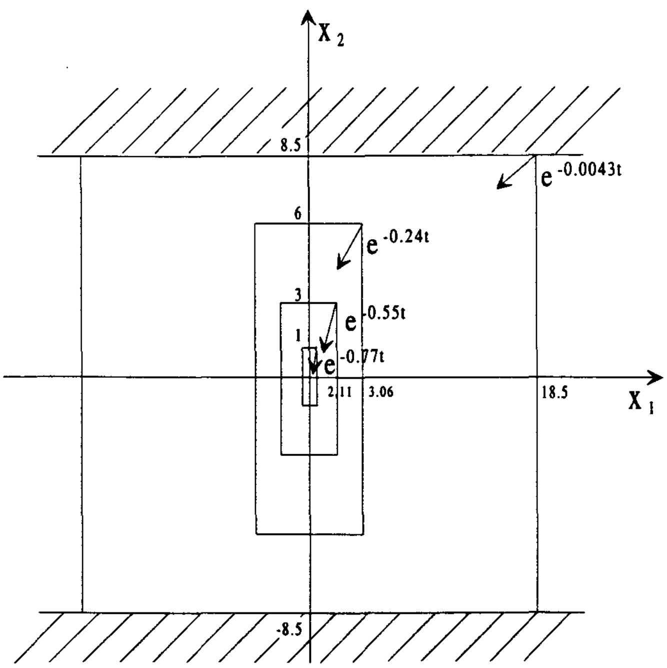
ψ	1	3	6	8,5
γ	0,74	0,52	0,22	0,0039
k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}46 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}99 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}78 \end{bmatrix}$

Remarquons que plus le domaine d'étude est restreint, plus l'estimation du taux de convergence exponentielle est importante, ce qui semble logique.

Ces résultats ont été obtenus à partir de l'étude de la matrice P'_γ. En considérant maintenant la matrice Q'_γ, les estimations suivantes sont obtenues :

ψ	1	3	6	8,5
γ	0,77	0,55	0,24	0,0043
k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}42 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}98 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}46 \end{bmatrix}$

La figure suivante résume ces résultats :



La première remarque faite à la suite de l'énoncé du Théorème 3.1. et des corollaires 3.2. et 3.3. est ici vérifiée : les matrices P_γ et P'_γ peuvent se révéler moins intéressantes que les matrices Q_γ et Q'_γ pour la détermination d'un taux de convergence exponentielle γ, même s'il arrive qu'elles soient plus intéressantes pour la détermination de conditions de stabilité asymptotique.

Remarquons que les résultats donnés dans ce paragraphe peuvent être généralisés à des normes vectorielles autres que $|x(t)|$ (cf. premier chapitre, paragraphe IV.2. pour une définition des normes vectorielles), de manière par exemple à traiter plus facilement les systèmes de grande dimension.

I.1.3. Critères obtenus à partir d'un majorant non linéaire

Les critères précédents ont été obtenus à partir de l'étude de la stabilité de l'équilibre 0 d'un système de comparaison linéaire stationnaire (par exemple (3.3)). La même étude peut être envisagée à partir de systèmes de comparaison non linéaires et/ou non stationnaires, en s'inspirant de la méthode développée dans [Dambrine (1994)].

Considérons le système (3.1). Il admet le système de comparaison suivant :

$$\frac{dz}{dt}(t) = M(t, x_t,p)\, z(t) + N(t, x_t,p) \sup_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m} z(t-\lambda),$$

les matrices $M(t, x_t,p)$ et $N(t, x_t,p)$ étant par exemple définies de la manière suivante :

$M(t, x_t,p) \geq [A(t, x_t,p) + B'(t, x_t,p)]^*,$

$N(t, x_t,p) \geq \tau(t) \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} \left\{ |B'(t, x_t,p)A(t-\lambda, x_{t-\lambda},p)| + |B'(t, x_t,p)B(t-\lambda,x_{t-\lambda},p)| \right\} + |B''(t,x_t,p)|.$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$v(x(t)) = \max_{1\leq i\leq n} \left\{ \frac{|x_i(t)|}{u_i} \right\}$, où u est un vecteur strictement positif de $\mathbb{R}^n$.

La stabilité de (3.1) peut alors être prouvée si par exemple les éléments non constants de $M(t, x_t,p) + N(t, x_t,p)$ sont isolés dans uns seule ligne et qu'il existe un réel strictement positif η tel que $M(t, x_t,p) + \eta I$ est l'opposée d'une M-matrice.

Ces études ne seront pas développées ici. Par contre, l'étude d'un système majorant scalaire non stationnaire étant simple, elle sera développée dans le paragraphe suivant.

I.2. Critères scalaires de stabilité et taux de convergence exponentielle

Considérons de nouveau le système (3.1). Le théorème suivant donne des conditions de stabilité de la solution nulle de ce système sous forme d'une inégalité scalaire.

Théorème 3.4. :

$$\text{Si } \sup_{x,p}\{\mu[A(t, x_t,p) + B'(t, x_t,p)]\}$$
$$+ \sup_{x,p}\left\{ \|B''(t, x_t,p)\| + \int_{t-\tau(t)}^{t}(\|B'(t, x_t,p)A(u, x_u,p)\| + \|B'(t, x_t,p)B(u, x_u,p)\|)\, du\right\} < 0,$$

pour tout $t \geq t_0 + \tau_m$,

alors l'équilibre 0 du système (3.1) est asymptotiquement stable.

Une estimation du taux de convergence exponentielle peut également être calculée. Il est également possible, en utilisant le lemme de [Lehman et al. (1994)] rappelé dans le paragraphe IV.4.2 du premier chapitre, de déterminer une estimation de la réponse avec un taux de décroissance exponentielle dépendant du temps. Les hypothèses sont alors plus restrictives. Les hypothèses de continuité par morceaux doivent par exemple être remplacées par des hypothèses de continuité.

Théorème 3.5. :

Soient le système (3.1), et σ l'unique solution strictement positive de l'équation :

$$\sigma + \sup_{t,x,p}\left\{ \|B''(t, x_t,p)\| + \int_{t-\tau(t)}^{t}(\|B'(t, x_t,p)A(u, x_u,p)\| + \|B'(t, x_t,p)B(u, x_u,p)\|)\, du\right\} e^{2\sigma\tau_m}$$

$$+\sup_{t,x,p}\{\mu[A(t, x_t,p)+B'(t,x_t,p)]\} = 0. \tag{3.9}$$

L'inégalité suivante est alors vérifiée :

$$\|x(t)\| \leq \sup_{-\tau_m \leq \theta \leq \tau_m} \{\|x(t_0 + \theta)\|.e^{\sigma(t_0+\theta)}\} e^{-\sigma t}$$

pour tout $t \geq t_0 + \tau_m$.

Si de plus $\sup_{x,p}\{\mu[A(t, x_t,p) + B'(t, x_t,p)]\} = -f(t)$ est une fonction <u>continue</u> <u>décroissante</u> de t, et si x(t) est continue, $\|x(t)\|$ peut être majorée de la manière suivante :

$$\|x(t)\| \leq \sup_{-\tau_m \leq \theta \leq \tau_m} \{\|x(t_0 + \theta)\|\} \exp\{-\int_{t_0+\tau_m}^{t} \gamma(s)ds\} \text{ pour tout } t \geq t_0 + \tau_m$$

$\gamma(t)$ étant l'unique solution croissante de :

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= f(t_0+\tau_m) - b\, e^{2\gamma(t)\tau_m} \text{ si } t < t_0+\tau_m \\ &= f(t) - b\, e^{2\gamma(t)\tau_m} \text{ si } t \geq t_0+\tau_m,\end{aligned} \tag{3.10}$$

où $b = \sup_{t,x,p}\left\{ \|B''(t, x_t,p)\| + \int_{t-\tau(t)}^{t}(\|B'(t, x_t,p)A(u, x_u,p)\| + \|B'(t, x_t,p)B(u, x_u,p)\|)\, du\right\}$.

Remarquons que si f(t) est une fonction constante (par exemple si $\underset{x,p}{\mathrm{Sup}}\{\ \mu\ [\ A\ (t,\ x_t,\ p)\ +\ B'\ (t,\ x_t,\ p)\ ]\ \}$ est remplacé par son majorant $\underset{t,x,p}{\mathrm{Sup}}\{\mu[A(t, x_t, p) + B'(t,x_t, p)]\}$), alors la solution de (3.10) est constante et est égale à la solution de (3.9).

De plus, $\gamma(t_0+\tau_m)$ est égale à la solution de (3.9). $\gamma(t)$ étant une fonction croissante, le taux de décroissance exponentielle dépendant du temps, $\gamma(t)$ est toujours inférieur au taux de décroissance σ.

Comme dans le cas matriciel, il est possible d'établir un autre critère en séparant les termes multiplicatifs de $\underset{0\le\lambda\le\tau_m}{\mathrm{Sup}}\ \|x(t-\lambda)\|$ de ceux de $\underset{0\le\lambda\le 2\tau_m}{\mathrm{Sup}}\ \|x(t-\lambda)\|$. L'équation à résoudre pour l'estimation du taux de convergence exponentielle est alors la suivante :

$$\sigma + \underset{x,p}{\mathrm{Sup}}\left\{\|B''(t,\ x_t,p)\| + \int_{t-\tau(t)}^{t}(\|B'(t,\ x_t,p)A(u,\ x_u,p)\|)\ du\right\}e^{\sigma\tau_m}$$

$$+\ \underset{x,p}{\mathrm{Sup}}\left\{\int_{t-\tau(t)}^{t}\|B'(t,\ x_t,p)B(u,\ x_u,p)\|\ du\right\}e^{2\sigma\tau_m} + \underset{x,p}{\mathrm{Sup}}\{\mu[A(t,\ x_t,p)+B'(t,x_t,p)]\} = 0.$$

La démonstration de ces théorèmes combine les majorations effectuées dans le paragraphe précédent (I.1.) avec celles du chapitre précédent (détermination du critère scalaire, paragraphe II.1.). Nous ne la donnerons donc pas ici.

II. Domaines de stabilité

II.1. Détermination

Comme il a été écrit dans l'introduction, une approche qualitative de la stabilité est nécessaire mais non suffisante. Il faut y associer une approche quantitative, qui comprend la détermination du domaine de stabilité de l'équilibre stable considéré.

La détermination exacte d'un domaine de stabilité est en général impossible. Il est par contre intéressant de pouvoir en donner une estimation, au sens défini dans le chapitre 1 (paragraphe I.3.6).

La mise en place d'un système de comparaison pour la stabilité (respectivement stabilité asymptotique) permet souvent de déterminer des ensembles invariants inclus dans le domaine de stabilité (respectivement stabilité asymptotique). Cette méthode d'estimation des domaines de stabilité a été appliquée dans [Dambrine (1994), Dambrine et Richard (1994)] pour des systèmes stables indépendamment du retard.

La méthode utilisée ici est similaire, mais une difficulté supplémentaire apparaît, du fait de la présence dans le système obtenu après majoration, d'un retard double du retard initial. Les estimations des domaines de stabilité obtenues dépendent du retard du système, et sont invariantes pour le système de comparaison, mais pas pour le système initial (système étudié).

Considérons de nouveau le système (3.1).

Nous définissons les deux matrices suivantes :

$$M = \mathrm{Sup}\,\{(A(t, x_t, p))^*\};\ N = \mathrm{Sup}\,\{|B(t, x_t, p)|\}, \tag{3.11}$$

et les deux réels :

$$m = \mathrm{Sup}\,\{\mu(A(t, x_t, p))\};\ b = \mathrm{Sup}\,\{\|B(t, x_t, p)\|\} \tag{3.12}$$

Ces valeurs supérieures, notées Sup (sans indice), sont cette fois calculées pour $t_0 \le t \le t_0+\tau_m$, $x_t \in \mathcal{C}(D)$, et pour des perturbations variant dans le domaine S_P.

Nous utilisons les notations suivantes :

$I_{\mathcal{V}}(d,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(x) \le \alpha\, d\}$,

$\mathfrak{I}_{\mathcal{V}}(d,\alpha) = \mathcal{C}(I_{\mathcal{V}}(d,\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \mathcal{V}(\varphi(s)) \le \alpha\, d,\ \forall\, s \in [-\tau_m, 0]\}$,

$I(d,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le \alpha\, d\}$,

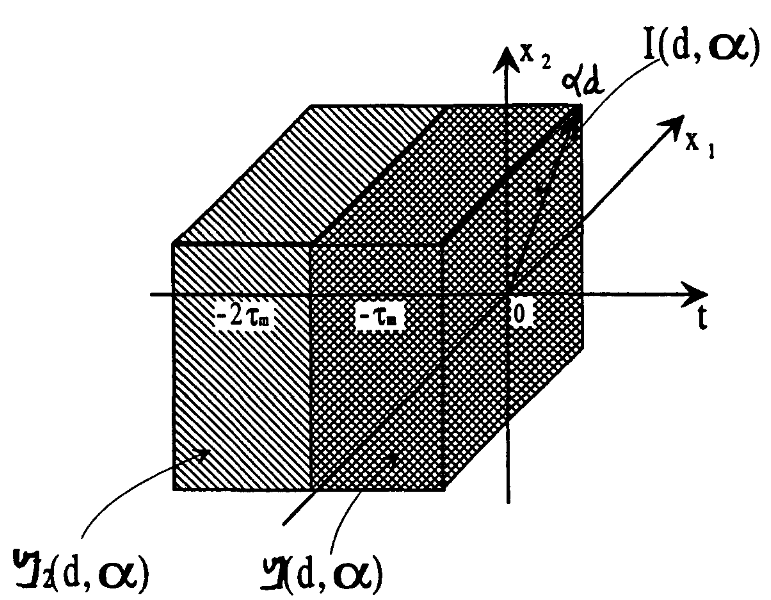
$\mathfrak{I}(d,\alpha) = \mathcal{C}(I(d,\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : |\varphi(s)| \le \alpha\, d,\ \forall\, s \in [-\tau_m, 0]\}$.

$\mathfrak{I}_2(d,\alpha) = \mathcal{C}(I(d,\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : |\varphi(s)| \le \alpha\, d,\ \forall\, s \in [-2\tau_m, 0]\}$.

$I_N(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le \alpha\}$,

$\mathfrak{I}_N(\alpha) = \mathcal{C}(I_N(\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi(s)\| \le \alpha,\ \forall\, s \in [-\tau_m, 0]\}$.

Le schéma suivant permet de visualiser les différents domaines $I(d,\alpha)$, $\mathfrak{I}(d,\alpha)$, $\mathfrak{I}_2(d,\alpha)$:



Théorème 3.7. : [Goubet-Bartholoméüs et al. (1996b)]

Supposons que les hypothèses du Théorème 3.1., ou celles du Corollaire 3.3. sont vérifiées. Nous notons P une des matrices P_0, Q_0, P'_0, Q'_0.
Soit d un vecteur à composantes strictement positives tel que $Pd \leq 0$, et $I(d,1) \subseteq D$.
Une estimation du domaine de stabilité de l'équilibre 0 de (3.1) peut être calculée de la manière suivante :

Cas 1 : $\tau(t)$ est constant et connu ($\tau(t) = \tau_m$).
Soit k_1 un vecteur strictement positif de $\mathbb{R}^n$ tel que : $e^{M(t-t_0)}\left(k_1 + \int_0^{(t-t_0)} e^{-Ms} N k_1 ds\right) \leq d$, pour tout $t \in [t_0 ; t_0 + \tau_m]$.
Alors $\mathfrak{I}(k_1,1)$ est une estimation du domaine de stabilité de l'équilibre.

Cas 2 : $\tau(t) \leq \tau_m$ et un vecteur $k_2 > 0$ tel que $(M + N)\, k_2 \leq 0$ peut être déterminé.
Soit α un réel strictement positif tel que $\alpha k_2 \leq d$.
Alors $\mathfrak{I}(\alpha k_2,1)$ est une estimation du domaine de stabilité de l'équilibre.

Cas 3 : $-m > b$.
Soit β l'unique solution strictement positive de l'équation :

$$\beta + m + b\, e^{\beta \tau_m} = 0$$

et soit ω_1 le plus grand réel strictement positif tel que $I_N(\omega_1 e^{-\beta(t_0 - \tau_m)}) \subseteq I(d,1)$.
Alors $\mathfrak{I}_N(\omega_1 e^{-\beta(t_0 + \tau_m)})$ est une estimation du domaine de stabilité de l'équilibre.

Cas 4 : $-m \leq b$.
Soit δ l'unique solution strictement positive de l'équation :

$$\delta - m - b\, e^{-\delta \tau_0} = 0,$$

où τ_0 est la valeur minimale du retard.
Soit ω_2 le plus grand réel strictement positif tel que $I_N(\omega_2 e^{\delta(t_0 + \tau_m)}) \subseteq I(d,1)$.
Alors $\mathfrak{I}_N(\omega_2 e^{\delta(t_0 - \tau_m)})$ est une estimation du domaine de stabilité de l'équilibre.

Démonstration :

Nous donnons simplement les différentes étapes de cette démonstration, le détail pouvant être trouvé dans [Goubet-Bartholoméüs et al. (1996b)] (cf. Annexe 4).

Cette démonstration est effectuée pour $P = P_0$. Dans les autres cas, la démarche est identique.

D'après la démonstration du Théorème 3.1., $|x(t)|$ est majoré par la solution z(t) de l'équation

$$\frac{dz}{dt}(t) = \sup_{t,x,p}\left\{ [A(t, x_t, p) + B'(t, x_t, p)]^* \right\} z(t)$$

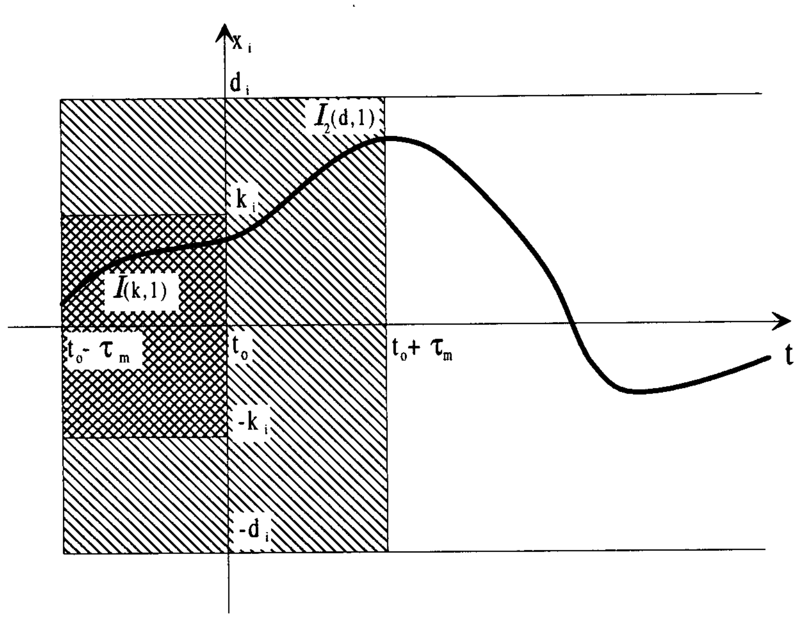
$$+\sup_{t,x,p}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t} (|B'(t,x_t,p)A(s,x_s,p)|+|B'(t,x_t,p)B(s,x_s,p)|)ds+|B''(t,x_t,p)| \right\} \sup_{0\le\lambda\le 2\tau_m} z(t-\lambda) \qquad (3.3)$$

tant que x(t) reste dans D, et à condition que $|x(t)| \le z(t)$ sur $[t_0 - \tau_m; t_0 + \tau_m]$.

Il est démontré dans [Goubet-Bartholoméüs et al. (1996b)] que le domaine $\mathfrak{I}_2(d,1)$ est un domaine positivement invariant pour le système décrit par l'équation (3.5). Comme I(d,1) est inclus dans D, l'hypothèse "$|x(t)| \le d$ pour t tel que $t_0 - \tau_m \le t \le t_0 + \tau_m$" implique alors que $|x(t)| \le d$ pour les valeurs suivantes de t.

Une difficulté est liée au fait que l'inégalité $|x(t)| \le d$ n'est pas facile à vérifier sur un intervalle de largeur $2\tau_m$, étant donné que les conditions initiales sont définies sur un intervalle de largeur τ_m.

Notre but est donc maintenant de déterminer un ensemble $\mathfrak{I}(k,1)$ de conditions initiales tel que pour toute condition initiale φ prise dans ce domaine, l'inégalité $|x(t_0,\varphi)(t)| \le d$ soit vérifiée pour tout t compris entre $t_0 - \tau_m$ et $t_0 + \tau_m$. Ceci est illustré sur la figure suivante :



Pour cela, déterminons un système majorant du système initial pour la stabilité (voir paragraphe IV.2. du premier chapitre pour une définition). D'après [Dambrine (1994)], le système suivant

$$\dot{y}(t) = My(t) + Ny(t - \tau(t)) \qquad (3.13)$$

(M et N étant définies par (3.11))

est un tel système. Si les conditions initiales de ce système majorent les conditions initiales du système étudié (3.1), alors cette même majoration sera valable sur $[t_0,t_0 + \tau_m]$.

Dans les deux premiers cas étudiés dans le théorème, c'est ce système majorant qui est pris en compte.
Dans le premier cas, une solution exacte de ce système peut être calculée sur $[t_0,t_0+\tau_m]$ à condition initiale constante.
Dans le deuxième, la solution exacte de (3.13) n'est pas connue; par contre, un domaine positivement invariant de ce système peut être déterminé.

Lorsqu'il n'est pas possible de déterminer un vecteur strictement positif $k_2 > 0$ tel que $(M + N)\, k_2 \leq 0$, il est plus difficile de déterminer un domaine positivement invariant pour (3.13). On peut par contre dans ce cas déterminer un système majorant scalaire, plus facilement exploitable, mais donnant bien sûr des résultats moins précis :

$$\dot{w}(t) = m.w(t) + b \sup_{\tau_0 \leq \theta \leq \tau_m} w(t - \theta) \tag{3.14}$$

(m et b sont définis par (3.12))
Les solutions de (3.14) majorent $\|x(t)\|$ si la même majoration est vérifiée sur $[t_0 - \tau_m,t_0]$.
Rappelons que τ_0 est la valeur minimale de $\tau(t)$ $(0 \leq \tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_m)$.
Si $-m > b$, $\omega_1 e^{-\beta(t - t_0)}$ est une solution de l'équation (3.14).
If $-m \leq b$, la solution exponentielle est croissante : $(\omega_2 e^{\delta(t - t_0)}, \delta > 0)$. δ dépend de la valeur minimale du retard.
La suite de la démonstration est similaire à celle des deux premiers cas envisagés. $\Delta\Delta$

<u>Remarques :</u>

1- Si l'inégalité $Pd \leq 0$ est stricte, i.e. $Pd < 0$, alors l'ensemble trouvé est une estimation du domaine de stabilité asymptotique. Remarquons qu'il est possible d'obtenir une inégalité stricte de ce type dans le cas où P est l'opposée d'une M-matrice (cf. Annexe 2).

2- L'estimation est plus précise si le système majorant considéré sur $[t_0-\tau_m,t_0+\tau_m]$ est de dimension n (cas 1 et 2). Si M + N est l'opposée d'une M-matrice, l'un de ces deux cas peut être considéré; en effet, un vecteur strictement positif k_2 tel que $(M + N)\, k_2 \leq 0$ existe (cf. Annexe 2).
Remarquons de plus que si les éléments de M et N (qui sont des Sup d'éléments des matrices d'état) sont calculés non pas pour $t_0 \leq t \leq t_0+\tau_m$ mais pour $t \geq t_0$, et que M + N est l'opposée d'une M-matrice, alors l'équilibre du système est stable indépendamment de

la valeur de τ_m et le domaine de stabilité se calcule plus aisément en utilisant les résultats de [Dambrine (1994)].

3- Remarquons que le premier cas du théorème est plus précis, mais les hypothèses sont plus restrictives que pour le second, et ainsi de suite.

4- Les estimations obtenues dépendent des vecteurs d, k_1, ou autres, considérés. Supposons par exemple que deux vecteur d_1 et d_2 satisfont l'inégalité $Pd \le 0$. Il est alors préférable de choisir comme vecteur d celui dont le rapport entre les composantes se rapproche le plus de celui des conditions initiales usuellement envisagées. Si d_1 satisfait à ce critère, d est choisi égal à αd_1, α étant le réel positif maximal tel que $I(d,1) \subseteq D$.

5- Il a été remarqué que les domaines obtenus dépendent de différents paramètres : le vecteur d, les vecteurs k_1 et k_2 éventuels, etc... Une union d'estimations du domaine de stabilité (vis à vis des conditions initiales) obtenues par le théorème proposé est également une estimation du domaine de stabilité. Mais l'union de deux domaines $\mathfrak{I}(k',1)$ et $\mathfrak{I}(k'',1)$ n'est pas le domaine $\mathfrak{I}(\text{Max}\ \{k'; k''\},1)$.

6- Le théorème a donné des estimations du domaine de stabilité de la solution nulle du système sous la forme $\{\varphi \in C(\mathbb{R}^n) : |\varphi(s)| \le k,\ \forall\ s \in [-\tau_m, 0]\}$, k étant un vecteur constant. Il est également facile de déterminer des estimations du type $\{\varphi \in C(\mathbb{R}^n) : |\varphi(s)| \le ke^{-\beta(t_0+s)},\ \forall\ s \in [-\tau_m, 0]\}$ ou du type $\{\varphi \in C(\mathbb{R}^n) : \|\varphi(s)\| \le \alpha e^{-\beta(t_0+s)},\ \forall\ s \in [-\tau_m, 0]\}$. Considérons par exemple le cas 3. L'ensemble $\{\varphi \in C(\mathbb{R}^n) : \|\varphi(s)\| \le \omega_1 e^{-\beta s},\ \forall\ s \in [-\tau_m, 0]\}$ est une estimation du domaine de stabilité de l'équilibre.

7- Le dernier cas du Théorème 3.7 (cas 4) fait intervenir une borne inférieure du retard non nécessairement nulle. Nous verrons sur l'exemple suivant que plus la connaissance du retard est précise, meilleure est l'estimation obtenue

.

II.2. Exemple

Reprenons l'exemple étudié précédemment (paragraphe I.1.2.2.). Il a été démontré que l'équilibre 0 du système est asymptotiquement stable pour tout retard inférieur à 0,304. Il a été de plus remarqué que le domaine sur lequel la matrice étudiée est une -M-matrice est d'autant plus restreint que le retard maximal du système est élevé. Il faut donc s'attendre à obtenir des estimations des domaines de stabilité d'autant plus restreintes que le retard du système est grand.

Nous reprenons les notations du paragraphe I.1.2.2.

$$P = \begin{bmatrix} -1{,}4+0{,}1\psi+\tau_m(4{,}6+0{,}1\psi) & 0 \\ 1+\tau_m & -1{,}65+2{,}35\tau_m \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $d = \begin{bmatrix} \frac{1,65-2,35\tau_m}{1+\tau_m}.\psi \\ \psi \end{bmatrix}$ est un vecteur strictement positif tel que $Pd \leq 0$,

pour tout τ_m positif inférieur à $\frac{14-\psi}{46+\psi}$. De plus, il vérifie la condition $I(d,1) \subseteq D_\psi$, qui s'écrit dans le cas de cet exemple $d_2 \leq \psi$.

Afin d'appliquer le théorème, déterminons les matrices M et N :

$$M = \text{Sup}\ \{(A(t, x_t, p))^*\} = \begin{bmatrix} -0,4 & 0 \\ 0 & -0,95 \end{bmatrix},$$

$$N = \text{Sup}\ \{|B(t, x_t, p)|\} = \begin{bmatrix} 1+0,1\psi & 0 \\ 1 & 1,3 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que M+N n'est pas l'opposée d'une M-matrice. Les critères i.o.d. [Dambrine (1994)] obtenus à partir du système de comparaison

$$\dot{y}(t) = My(t) + Ny(t - \tau(t))$$

ne permettent pas de conclure à la stabilité.

II.2.1. Cas d'un retard constant

Dans le cas d'un système à retard constant, le premier cas du théorème peut être appliqué. La détermination d'un vecteur k_1 tel que :

$$e^{Mt}\left(k_1 + \int_0^t e^{-Ms}Nk_1 ds\right) \leq d, \text{ pour tout } t \in [0 ; \tau_m]$$

permet l'estimation du domaine de stabilité de l'équilibre.

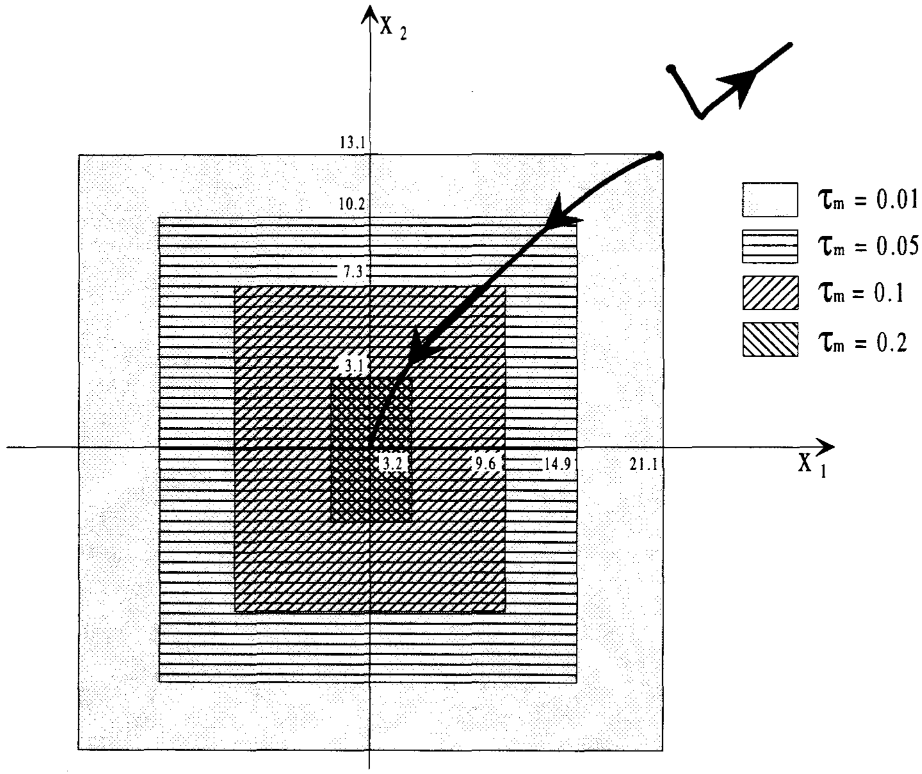
Cette inégalité est équivalente aux deux inéquations :

$$k_{11} \leq \frac{1,65-2,35\tau_m}{(1+\tau_m)\left(2,5+0,25\psi-(1,5+0,25\psi)e^{-0,4\tau_m}\right)}.\psi$$

$$k_{11}(1-e^{-0,95\tau_m}) + k_{12}(1,3-0,35e^{-0,95\tau_m}) \leq 0,95\psi.$$

si $k_1 = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix}$.

En choisissant $k_{11} = \frac{1,65-2,35\tau_m}{(1+\tau_m)\left(2,5+0,25\psi-(1,5+0,25\psi)e^{-0,4\tau_m}\right)}.\psi$, on obtient les estimations suivantes pour le domaine de stabilité de la solution nulle du système, en fonction du retard maximal du système :



Les domaines de stabilité sont en fait l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[-\tau_m ; 0]$ à valeurs dans le domaine représenté dans $\mathbb{R}^2$.

Deux simulations sont également représentées sur la figure pour le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0{,}4 & 0 \\ 0 & -0{,}95 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 + 0{,}1x_2(t) & 0 \\ 1 & -0{,}7 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)),$$

de retard maximal 0,01, avec des conditions initiales constantes égales respectivement à $\begin{bmatrix} 21{,}5 \\ 16 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 21 \\ 13 \end{bmatrix}$.

Remarquons que d'autres estimations sont obtenues en choisissant une valeur plus faible de k_{11}. On aurait alors obtenu une valeur de k_{12} plus grande.

II.2.2. Cas d'un retard variable

Considérons maintenant le cas plus général d'un système à *retard variable*, variant entre τ_0 et τ_m.

La matrice M + N n'étant pas l'opposée d'une M-matrice, le cas 2 ne va pas être utilisé. Nous considérons donc un système de comparaison scalaire (cas 3 ou 4).

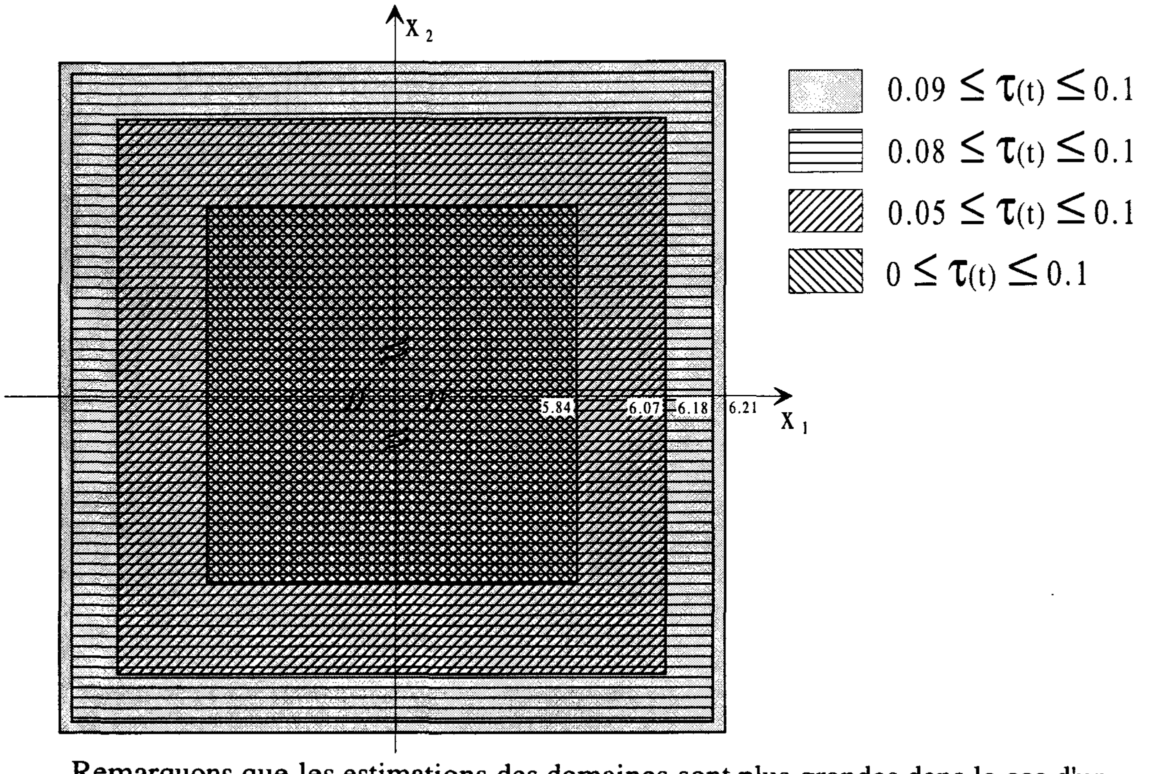
La norme suivante est utilisée : $\| x \| = \text{Max} \{ |x_1| ; |x_2| \}$. La mesure de matrice associée est (cf. Annexe 1) : $\mu(A) = \text{Max}\{a_{11} + |a_{12}| ; a_{22} + |a_{21}|\}$. Les valeurs obtenues pour m et b sont les suivantes : m = -0,4; b = 2,3.

Etant donné que $-m \leq b$, c'est le quatrième cas que nous allons considérer : Soit δ l'unique solution strictement positive de l'équation :

$$\delta + 0{,}4 - 2{,}3\, e^{-\delta\tau_0} = 0 \qquad (3.15)$$

Considérons par exemple le cas $\tau_0 = 0{,}08$ et $\tau_m = 0{,}1$. la solution de (3.15) est alors $\delta = 1{,}62$. Le plus grand réel strictement positif vérifiant l'inclusion $I_N(\omega_2 e^{\delta(t_0+\tau_m)}) \subseteq I(d,1)$ est $\omega_2 = e^{-\delta\tau_m}$ Min $\{d_1;d_2\}$. L'estimation du domaine de stabilité ainsi obtenue est l'ensemble des fonctions à valeurs dans le domaine $\| x_1 \| \leq 6{,}18$ et $\| x_2 \| \leq 6{,}18$.

La figure suivante représente les domaines obtenus pour différentes valeurs de τ_0, τ_m étant fixé à 0,1. Comme précédemment, une estimation du domaine de stabilité est l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[-\tau_m ; 0]$ à valeurs dans l'ensemble représenté dans $\mathbb{R}^2$.



Remarquons que les estimations des domaines sont plus grandes dans le cas d'un retard constant que dans le cas d'un retard variable.

Nous avions remarqué à la suite du Théorème 3.7. (remarque 7) que, dans le cas d'un retard variable, la connaissance d'une borne inférieure du retard peut permettre d'améliorer la précision dans l'estimation d'un domaine de stabilité. En pratique, il est courant de connaître une telle borne, notamment pour les systèmes dont le retard n'est pas précisément connu, mais pour lequel un ordre de grandeur est déterminé.

On pourrait encore affiner l'étude en choisissant une autre norme et en effectuant l'union des domaines obtenus avec chacune des normes.

III. Comparaison avec d'autres critères

Comme nous l'avons déjà écrit dans le premier chapitre de ce mémoire (paragraphe IV), les critères de stabilité pour systèmes retardés non linéaires et/ou non stationnaires sont rares. Nous avons répertorié dans le premier chapitre ceux qui nous paraissaient applicables de façon relativement aisée à une large classe de systèmes [Xu Daoyi (1986), Dambrine (1994), Verriest (1994), Kolmanovskii (1995 a), Kolmanovskii (1995 b), Lehman et al. (1994), Tokumaru (1975)].

Si les critères de stabilité applicables aux systèmes non linéaires sont rares, ceux relatifs aux domaines de stabilité le sont encore plus.

Le but de ce paragraphe est de les comparer avec nos résultats de ce troisième chapitre.

Les critères existants peuvent se décomposer en deux classes : critères indépendants du retard, et critères dépendants du retard. Les critères établis dans ce chapitre à partir d'un majorant linéaire stationnaire constituent une généralisation des critères i.o.d., scalaires et matriciels, de [Tokumaru (1975)], [Xu Daoyi (1986)] et surtout de [Dambrine (1994)]. Le cas des critères indépendants du retard ne sera donc pas plus longuement abordé; rappelons simplement que ces critères i.o.d. n'auraient pas permis de prouver la stabilité asymptotique des systèmes considérés dans les deux exemples de ce chapitre.
En ce qui concerne les critères développés dans [Verriest (1994)], ils nécessitent la résolution d'une équation de type Riccati relativement compliquée et nécessitent une connaissance précise du système et de son retard.

Quant aux critères dépendant du retard, ils sont de deux types : soit matriciels, soit scalaires. Les critères de la littérature répertoriés sont du second type. Considérons les critères développés par Kolmanovskii ([Kolmanovskii (1995 a)] et [Kolmanovskii (1995 b)]), et comparons-les avec nos critères scalaires. Les démarches adoptées sont similaires:

• même type de décomposition de l'équation différentielle sous la forme d'un premier élément non retardé et d'un deuxième prenant en compte le retard du système,

• calcul de la dérivée de Dini de $\| x(t) \|$ permettant, à l'aide de théorèmes de comparaison et/ou de la théorie de Lyapunov, de conduire à des conditions de stabilité. Nous pouvons d'ailleurs vérifier que les démonstrations du théorème 3.4 d'une part, et du théorème donné dans [Kolmanovskii 1995 b)] (cf. paragraphe IV.3 du chapitre 1) sont très similaires.

Les différences se situent essentiellement au niveau des types de systèmes étudiés: Kolmanovskii considère des systèmes de forme plus générale (F(t, x_t) au lieu de A(t,x_t) x(t), systèmes à retards non bornés ou distribués); à l'aide de la notion de matrice Jacobienne, les systèmes de comparaison obtenus ont des représentations similaires au nôtres. Il ne prend par contre pas en compte d'incertitudes sur la représentation d'état et considère des hypothèses plus restrictrives (continuité). De plus, les critères donnés par Kolmanovskii sont scalaires, donc moins précis que les critères vectoriels.

En ce qui concerne les méthodes d'estimation de domaines de stabilité, on peut citer [Dambrine (1994)] dans le cas i.o.d. Quant à Kolmanovskii, il n'a pas vraiment développé l'étude de ces domaines.

Ajoutons enfin que les critères développés dans ce mémoire d'une part et dans les articles de Kolmanovskii d'autre part l'ont été au même moment. Nous n'avions donc pas connaissance des résultats donnés dans [Kolmanovskii (1995 a)] et [Kolmanovskii 1995 b)] lors de l'établissement des résultats de cette thèse.

Conclusion

Les théorèmes donnés dans ce chapitre permettent de tester la stabilité de systèmes non linéaires et/ou non stationnaires. Les critères sont dépendant du retard et fournissent non seulement une étude qualitative, mais donnent également des renseignements quantitatifs sur la stabilité (détermination de domaines de stabilité dépendant du retard du système). Les résultats donnés sont facilement généralisables aux systèmes à plusieurs retards, de la même manière que pour les systèmes linéaires incertains (deuxième chapitre).

Des comparaisons ont été effectuées avec les autres critères de la littérature. Les critères proposés dans ce mémoire ont l'avantage d'être très robustes, mais ils supposent un conditionnement préalable du système. Ils sont plus particulièrement adaptés aux systèmes soit à paramètres non complètement identifiés, soit à des systèmes complexes dont les coefficients doivent être majorés. Ils sont facilement applicables, puisque la procédure ne nécessite pas la recherche d'une fonction de Lyapunov générale, mais est basée sur une décomposition des termes retardés permettant de tenir compte de manière différente des termes retardés stabilisateurs et de ceux qui ont tendance à destabiliser le système.

Un apport important des critères qui viennent d'être présentés est qu'ils sont matriciels et permettent ainsi de tenir compte de manière plus précise de la structure du système. L'estimation des domaines de stabilité et des taux de convergence constitue la deuxième originalité de notre travail. Enfin, la borne inférieure de variation du retard est parfois prise en compte (cas 4 du Théorème 3.7); plus les informations sur le retard sont précises, plus les estimations effectuées sont fines.

Chapitre 4 : Stabilité pratique et commande sous contraintes des systèmes linéaires et non linéaires à retards

Introduction

Les chapitres précédents s'intéressaient à la propriété de stabilité et au calcul des domaines correspondants, ceci sans se préoccuper des demandes de l'utilisateur. Dans ce quatrième chapitre, nous appliquons ces résultats afin d'imposer au système certaines contraintes de fonctionnement, en général définies en termes de domaines.

Nous étudions ainsi quatre situations :

a- la propriété d'invariance positive : (figure 4.1)

Si l'état initial est dans un domaine C_I peut-on garantir qu'il y reste?

Cette propriété peut compléter celle de stabilité puisque cette dernière n'apporte aucune information sur le domaine auuel appartient l'état du système après l'instant initial. Cette propriété d'invariance positive se montre particulièrement intéressante : certaines variables d'état de systèmes doivent être bornée pour des questions de sécurité par exemple.

L'étude est menée pour des systèmes linéaires, de retard constant ou non :

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + B\, x(t - \tau(t)) \tag{4.1}$$

$$\dot{\tau}(t) = 0 \text{ ou } \dot{\tau}(t) \leq 1.$$

b- la "bornitude" (ou stabilité pratique simple, sans contraction ni perturbations additives) : (figure 4.2)

Si on veut que l'état instantané reste dans un domaine S, quel domaine de conditions initiales C_I doit-on imposer?

Les domaines considérés sont des polyèdres symétriques ou non. L'étude concerne alors des systèmes non linéaires du type :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t, x_t, p)\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)) \tag{4.2}$$

Les modèles sont ici plus généraux que dans la situation précédente, et les objectifs sont par conséquent plus restreints : si on veut s'assurer que l'état du système non linéaire appartient toujours à un domaine $C(S)$, il faut éventuellement que l'état instantané appartiennent à un domaine plus restreint C_I.

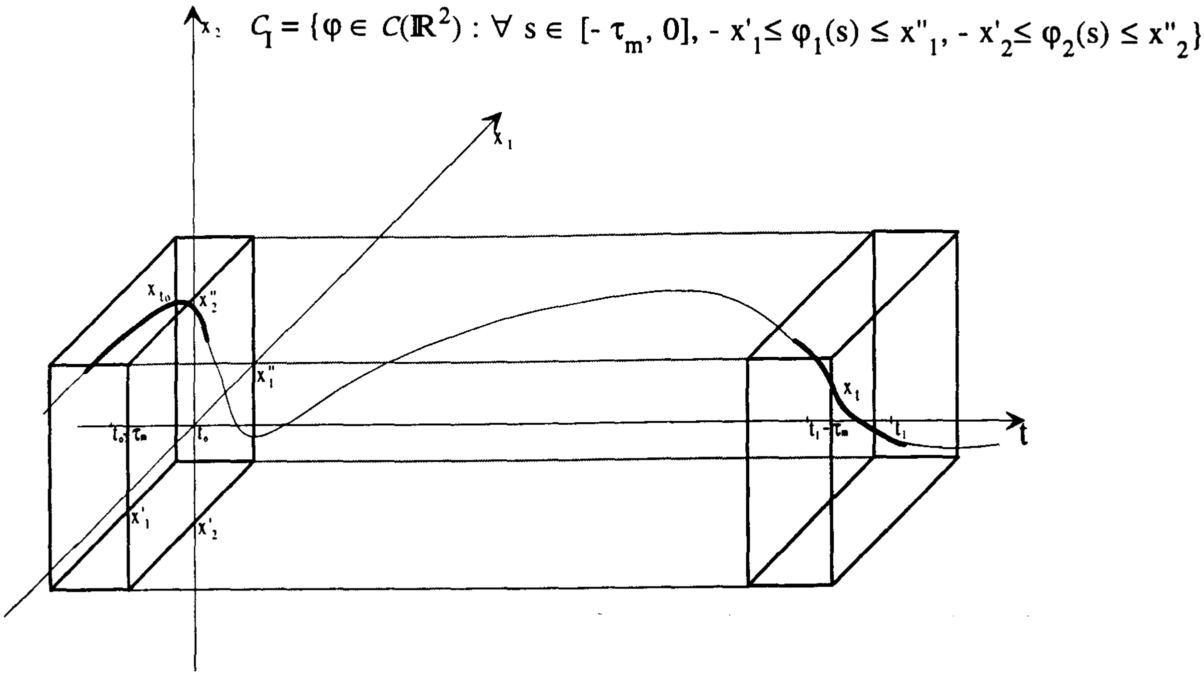


Figure 4.1 : Invariance positive

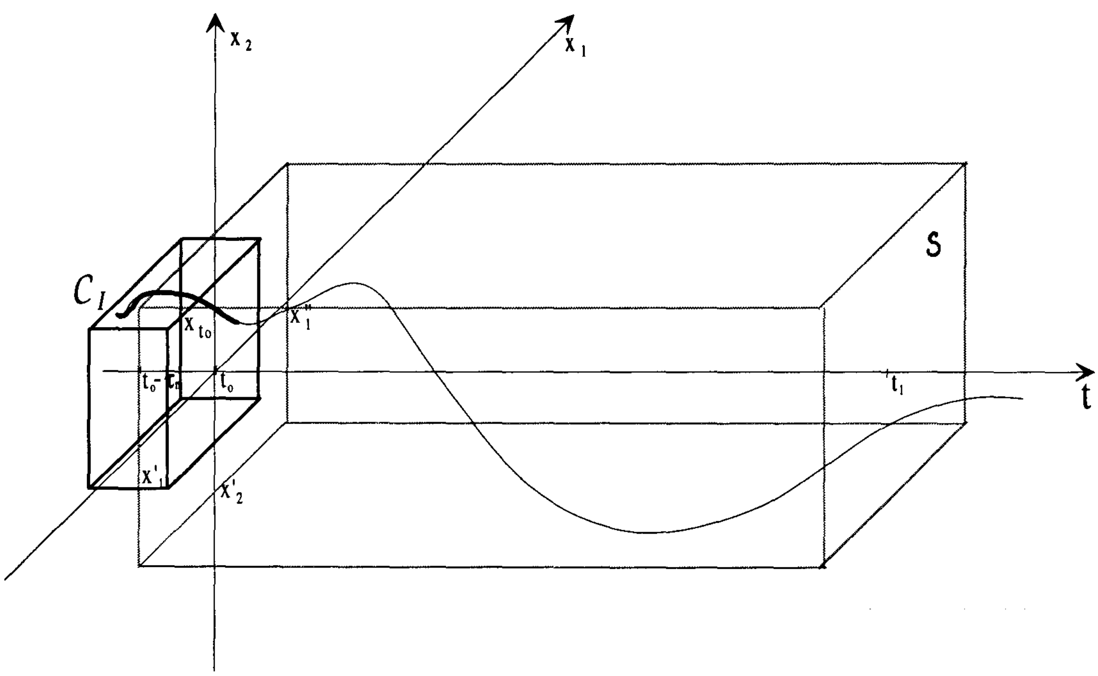


Figure 4.2 : Bornitude

c- la stabilité pratique avec temps d'établissement sous perturbations additives : (figure 4.3)

Comment garantir que l'état instantané du système reste dans un domaine S de t_0 jusqu'à un temps d'établissement $t_0 + t_s$, puis dans un domaine plus restreint S_F de $t_0 + t_s$ jusqu'à l'instant "final" $t_0 + t_f$?

Le système est alors décrit par :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t, x_t, p)\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)) + h(t, x_t) \tag{4.3}$$

La recherche de la stabilité ou de la stabilité asymptotique d'un système en boucle fermée n'est pas toujours justifiée car ces concepts s'intéressent au comportement d'un système de l'instant initial t_0 à l'infini. Or pour une application pratique le comportement à l'infini d'un système n'est pas intéressant car la durée de fonctionnement de ce dernier est nécessairement fini. C'est pour cette raison que nous proposons ce type d'étude.

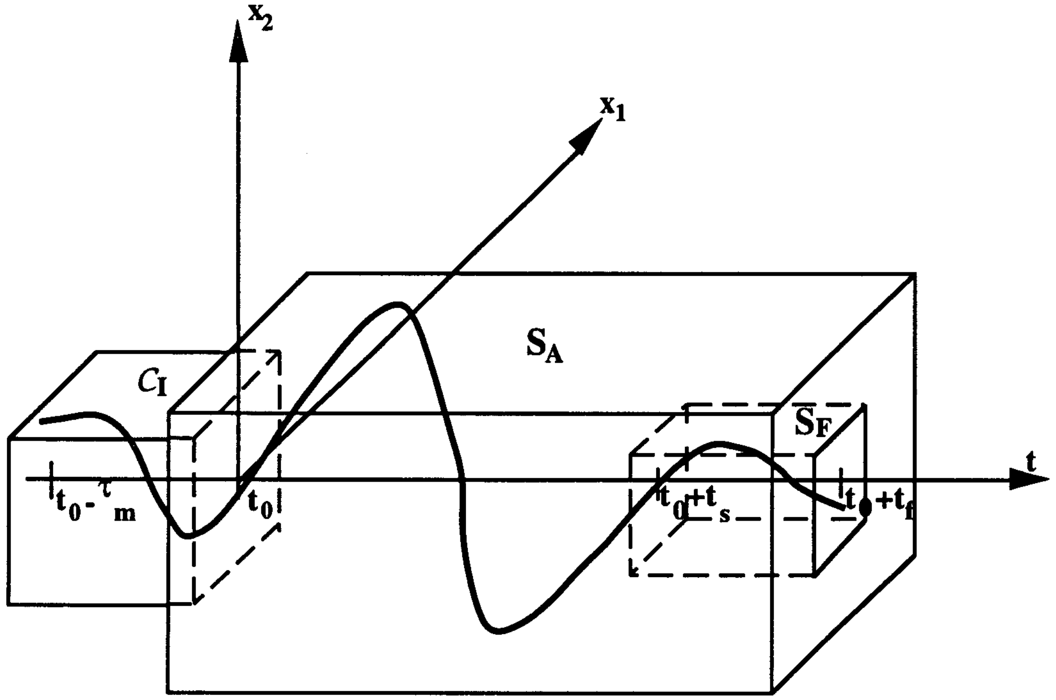


Figure 4.3 : Stabilité pratique avec temps d'établissement

d- la commande sous contraintes : (figure 4.4)

Comment imposer la convergence asymptotique vers zéro par retour d'état statique (u = Kx) sans que l'état et/ou la commande ne sortent de domaines de contraintes imposés?

Le système en boucle ouverte est décrit sous la forme générale suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t, x_t, p)\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)) + C(t, x_t, p)\, u(t) + D(t, x_t, p)\, u(t - \tau(t)) \tag{4.4}$$

$$FA = GF$$
$$FB = HF$$

nous permettent de remplacer l'étude du système (4.8) par celle du système suivant :

$$\frac{dz}{dt}(t) = Gz(t) + H\, z(t - \tau(t))$$

Des détails complémentaires peuvent être trouvés dans [Dambrine et al. (1995 b)] et [Bitsoris (1991)] (cf. en Annexe 4 l'article [Dambrine et al. (1995 b)]).

II.4. Conclusion

Nous avons donné des conditions suffisantes d'invariance positive de domaines de contraintes linéaires, non symétriques, en tenant compte des dynamiques des conditions initiales et du système, et du retard.

Il n'est pas facile de généraliser ce qui vient d'être fait au cas des systèmes non linéaires. Des critères d'invariance positive ont été déterminés dans [Dambrine (1994)], mais ils sont indépendants du retard. La difficulté à établir des résultats dépendant du retard sur la base du changement de variables exposé au chapitre 3 vient de ce qu'il conduit à des systèmes majorants dont le retard est double de celui du système initial.

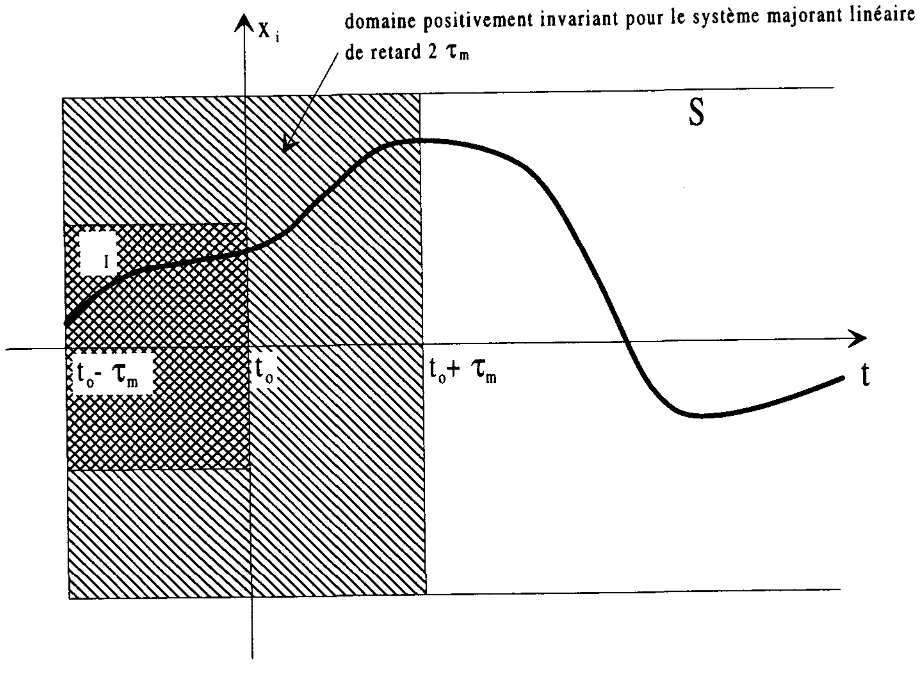


Figure 4.8

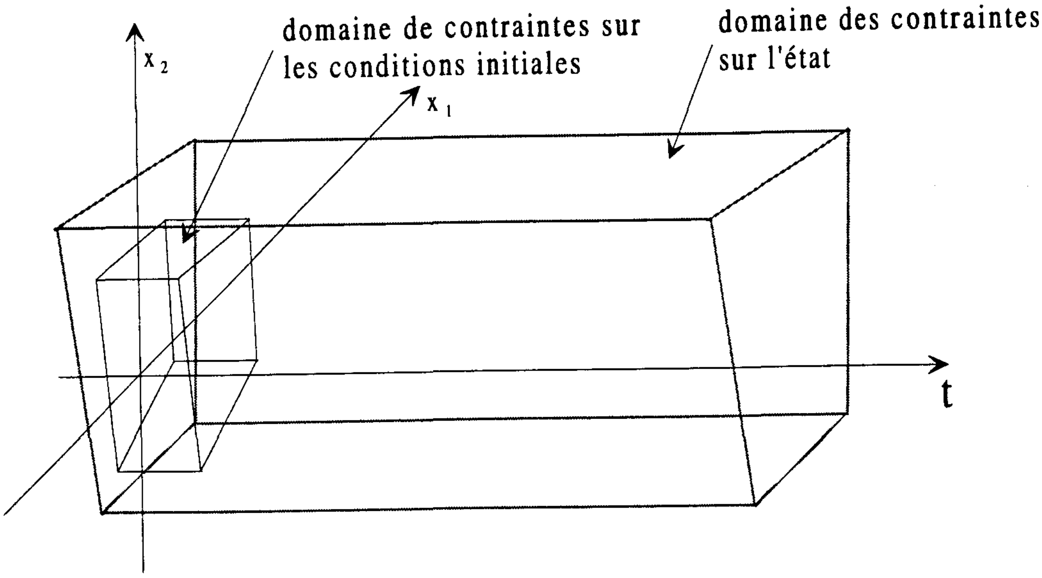


Figure 4.4 : Commande sous contraintes

Dans l'équation précédente, $u \in \mathbb{R}^m$ représente la commande; $p \in S_P$ représente les perturbations. Le retard $\tau(t)$ appartient à $\mathcal{T}$, ensemble des fonctions positives, continues par morceaux, et majorées par τ_m (fini ou non). A(.) et B(.) sont des matrices de $\mathbb{R}^{n\mathrm{x}n}$, continues par morceaux. Les coefficients de ces matrices sont bornés ($p \in S_P$) si leurs deux premiers paramètres (t, x_t) le sont aussi.
Le système est supposé avoir une solution unique ($t \geq t_0$) pour toutes les conditions initiales considérées ici (continues par morceaux) et pour toutes les perturbations dans S_P.

Le plan de ce chapitre respecte les quatre points successifs précisés dans cette introduction. Avant de traiter chacune de ces situations, nous faisons quelques remarques sur le problème général du bouclage d'un processus par une commande par retour d'état retardé.

I. Processus stabilisés par un retour retardé

Les publications s'intéressant au problème de la stabilisation ou de la commande des systèmes à retards considèrent en général le cas d'une commande non retardée u(t), ou éventuellemnt d'une commande faisant intervenir certains termes retardés en plus des termes instantanés. Par contre, le cas d'une commande retardée pure est très rarement envisagé. Ce paragraphe a pour but d'introduire des outils permettant de traiter ces problèmes, de façon similaire pour les commandes retardées et non retardées.

Considérons le système (4.4) :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t, x_t, p)\,x(t) + B(t, x_t, p)\,x(t - \tau(t)) + C(t, x_t, p)\,u(t) + D(t, x_t, p)\,u(t - \tau(t)) \quad (4.4)$$

commandé par un retour d'état $u(t) = K\,x(t)$.

♦ Le cas $D(t, x_t, p) = 0$ est celui rencontré dans la littérature : l'équation du système en boucle fermée est la suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = [A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)\,K]\,x(t) + B(t, x_t, p)\,x(t - \tau(t)) \quad (4.5)$$

S'il est possible de déterminer une matrice K telle que $[A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)\,K]$ soit "suffisamment stable", alors le retour d'état peut permettre une stabilisation du système. Des critères de stabilité indépendants du retard, s'appuyant sur la stabilité de la partie non retardée du système, peuvent éventuellement permettre de résoudre ce problème. Celui-ci est traité dans la littérature.

♦ Par contre, le cas d'une matrice $D(t, x_t, p)$ non nulle est pratiquement absent de la littérature. Si de plus $C(t, x_t, p)$ est nulle (commande purement retardée), alors seuls des critères de stabilité prenant en compte l'effet stabilisateur de la matrice retardée permettent de résoudre le problème. Comme nous l'avons vu dans les deux chapitres précédents, ces critères sont rares dans la littérature.

Deux cas peuvent être distingués :

• supposons un *système au démarrage* : la commande est alors imposée au système à partir de l'instant t_0. $u(t)$ est donc nulle pour tout instant inférieur à cet instant initial. L'équation du système en boucle fermée est :

$$\frac{dx}{dt}(t) = [A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)K]\,x(t) + B(t, x_t, p)\,x(t - \tau(t)) \quad (4.6)$$

lorque $t - \tau(t) < t_0$.

Elle n'est :

$$\frac{dx}{dt}(t) = [A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)K]\,x(t) + [B(t, x_t, p) + D(t, x_t, p)K]\,x(t - \tau(t)) \quad (4.7)$$

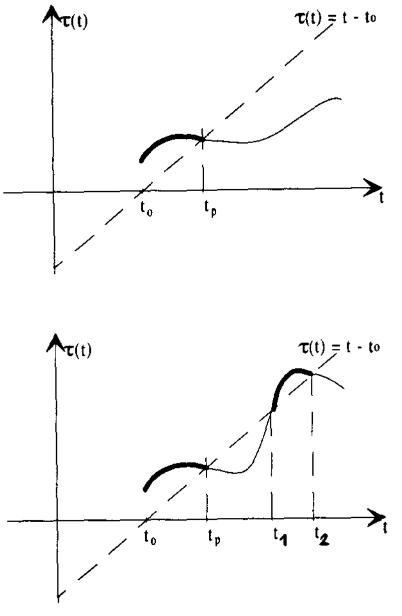
que pour $t - \tau(t) \geq t_0$.

Définissons alors t_p de la manière suivante :

$$t_p = \mathrm{Inf}\,\{t \,/\, t - \tau(t) \geq t_0\}.$$

Remarquons que t_p est compris entre t_0 et $t_0+\tau_m$.

Si t - $\tau(t)$ est supérieur à t_0 pour tout t supérieur ou égale à t_p, c'est-à-dire par exemple si on suppose $\dot{\tau}(t) \leq 1$ dans le cas d'un retard continu.



$\forall\, t \geq t_p,\ t - \tau(t) \geq t_0$

$t_1 \leq t \leq t_2,\ t - \tau(t) \leq t_0$

Figure 4.5

Il est alors possible d'écrire le système de la manière suivante :

$t < t_p,\ \frac{dx}{dt}(t) = [A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)K]\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t))$

$t \geq t_p,\ \frac{dx}{dt}(t) = [A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)K]\, x(t) + [B(t, x_t, p) + D(t, x_t, p)K]\, x(t - \tau(t))$.

• supposons maintenant un *changement de régime* ou une *perturbation* pendant le fonctionnement, à l'instant t_0 (la commande u étant appliquée bien avant cet instant) : le système en boucle fermée s'écrit alors

$$\frac{dx}{dt}(t) = [A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)K]\, x(t) + [B(t, x_t, p) + D(t, x_t, p)K]\, x(t - \tau(t))$$

pour tout t supérieur à t_0.

Revenons au cas d'un système au démarrage, dont une partie de la commande est retardée. Les méthodes des deux chapitres précédents sont basées sur la détermination d'un système majorant pour le système initial. Or un système majorant établi à partir de l'équation (4.7) ne sera valable que pour $t \geq t_p + \tau_m$. Nous nous proposons donc d'établir un système majorant valable à partir de $t_0 + \tau_m$.

Notons :

$$\mathcal{A}(t, x_t, p) = A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)K,$$
$$\mathcal{B}(t, x_t, p) = B(t, x_t, p) + D(t, x_t, p)K,$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' + \mathcal{B}''.$$

Comme dans le chapitre 3 (démonstration du Théorème 3.1.), étudions la variation de $|x(t)|$ pour $t \geq t_0+\tau_m$:

$$\dot{x}(t) = \big(\mathcal{A}(t, x_t,p)+\mathcal{B}'(t, x_t,p)\big)\, x(t) - \mathcal{B}'(t, x_t,p) \int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s)ds + \mathcal{B}''(t, x_t,p)\, x(t-\tau(t)).$$

$\dot{x}(s)$ est égal :

soit à $\mathcal{A}(s, x_s, p)\, x(s) + B(s, x_s, p)\, x(s - \tau(s)) \quad (s < t_p)$,

soit à $\mathcal{A}(s, x_s, p)\, x(s) + \mathcal{B}(s, x_s, p)\, x(s - \tau(s)) \quad (s \geq t_p)$.

Soit $I = \int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s)ds$.

Si $t - \tau(t) \geq t_p$,

$$I = \int_{t-\tau(t)}^{t} \big[\mathcal{A}(s, x_s, p)\, x(s) + \mathcal{B}(s, x_s, p)\, x(s - \tau(s))\big]ds.$$

Si $0 \leq t - \tau(t) < t_p$ et si $t \geq t_p$,

$$I=\int_{t-\tau(t)}^{t_p}\big[\mathcal{A}(s,x_s,p)x(s)+B(s,x_s,p)x(s-\tau(s))\big]ds+\int_{t_p}^{t}\big[\mathcal{A}(s,x_s,p)x(s)+\mathcal{B}(s,x_s,p)x(s-\tau(s))\big]ds.$$

Si $t < t_p$,

$$I = \int_{t-\tau(t)}^{t} \mathcal{A}(s, x_s, p)\, x(s) + B(s, x_s, p)\, x(s - \tau(s))ds.$$

Il suffit donc de remplacer dans les calculs réalisés au chapitre précédent (quand les matrices sont considérées en module) la matrice $\int_{t-\tau(t)}^{t} |\mathcal{B}'(t, x_t,p)\ \mathcal{B}(s, x_s,p)|ds$ par la

matrice

$$\int_{t-\tau(t)}^{t} \mathrm{Max}\{|\mathcal{B}'(t, x_t,p)\ \mathcal{B}(s, x_s,p)|;|\mathcal{B}'(t, x_t,p)\ B(s, x_s,p)|\}ds$$

(le maximum étant calculé composante par composante).

L'inégalité suivante est alors obtenue :

$$\frac{d^+|x|}{dt}(t) \leq \underset{t,x,p}{\text{Sup}}\{[\mathcal{A}(t, x_t, p) + \mathcal{B}(t, x_t, p)]^*\}\ |x(t)|$$

$$+ \underset{t,x,p}{\text{Sup}}\{\int_{t-\tau(t)}^{t} \text{Max}\{|\mathcal{B}'(t, x_t,.)\ \mathcal{B}(s, x_s,.)|;|\mathcal{B}'(t, x_t,.)\ B(s, x_s,.)|\}ds\ \underset{0\leq\lambda\leq 2\tau_m}{\text{Sup}}\ |x(t-\lambda)|$$

$$+ \underset{t,x,p}{\text{Sup}}\{\int_{t-\tau(t)}^{t}|\mathcal{B}'(t,x_t,p)\mathcal{A}(s,x_s,p)|ds+|\mathcal{B}''(t, x_t,p)|\}\ \underset{0\leq\lambda\leq\tau_m}{\text{Sup}}\ |x(t-\lambda)|.$$

Il est donc possible d'utiliser les résultats et méthodes du chapitre précédent, même dans ce cas d'un système commandé à partir de t_0 par un retour retardé.

II. Invariance positive pour les systèmes linéaires

II.1. Introduction

La définition de l'invariance positive a été donnée dans le paragraphe I.3.6. du premier chapitre. Son étude, dans le cas des systèmes linéaires ou non, a été traitée dans [Dambrine (1994)] sous la forme de conditions indépendantes du retard.

Nous nous intéressons ici aux systèmes linéaires, à retard constant ou variable. Des conditions d'invariance positive de domaines prenant en compte le retard du système sont prouvées. Sont également prises en compte les dynamiques des conditions initiales et celles du système. Ces résultats constituent une extension de [Dambrine et al. (1995 b)] (qui traite le cas d'un retard constant), et seront comparés avec [Bitsoris (1991)].

Les systèmes considérés sont décrits de la manière suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + B\ x(t - \tau(t)) \tag{4.8}$$

Les conditions initiales et le retard sont supposés continus. Le retard, dans le cas où il est variable, est supposé de dérivée bornée par 1 : $\dot{\tau}(t) \leq 1$.

Les domaines étudiés sont les suivants (cf. illustration Figure 4.5 a) :

$$\mathcal{E}(F, w_1, w_2) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \forall\ s \in [-\tau_m, 0], -w_2 \leq F\varphi(s) \leq w_1\},$$

F étant une matrice de $\mathbb{R}^{q \times n}$ et les vecteurs w_1 et w_2 appartenant à $\mathbb{R}^q$.

On associe à ce domaine de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ le domaine de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$E(F, w_1, w_2) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ -w_2 \leq Fx \leq w_1\}.$$

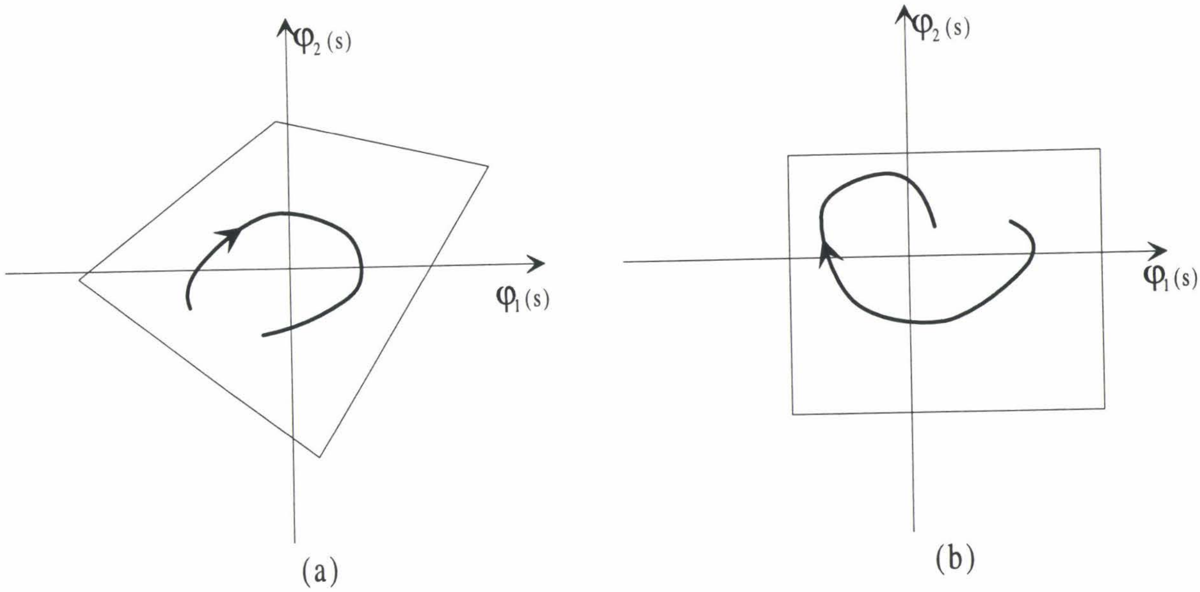


Figure 4.6

Pour simplifier, nous considérons tout d'abord le cas F = I, matrice identité (illustration Figure 4.5 b). Nous verrons par la suite que le cas général se déduit très facilement de ce cas particulier.

II.2. Rappels des résultats antérieurs

Rappelons tout d'abord les résultats existants :
Des conditions nécessaires et suffisantes d'invariance de domaines ont été établies dans le cas des systèmes linéaires ordinaires dans [Bitsoris (1991)] :

Théorème 4.1. : [Bitsoris (1991)]

Le domaine $E(I, w_1, w_2)$ est positivement invariant pour le système :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A\,x(t), \tag{4.9}$$

si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} A^+ w_1 + A^- w_2 \leq 0 \\ A^- w_1 + A^+ w_2 \leq 0, \end{cases} \qquad (4.10))$$

les matrices A^+ et A^- ayant été définies dans les Notations.

[Dambrine (1994)] donne des conditions similaires dans le cas des systèmes retardés :

Théorème 4.2. : [Dambrine (1994)]

Le domaine $\mathcal{E}(I, w_1, w_2)$ est positivement invariant pour le système (4.8) quelle que soit la valeur de τ_m si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} A^+ + B_+ & A^- + B_- \\ A^- + B_- & A^+ + B_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \leq 0. \tag{4.11}$$

Remarque : Considérons le système (4.8) dans le cas où $\tau(t) = 0$ pour tout instant t. Nous pouvons appliquer à ce système les conditions d'invariance proposée par Bitsoris (Théorème 4.1), et également les conditions du Théorème 4.2. La première condition alors obtenue est évidemment moins restrictive que la deuxième. La condition (4.11) étant une condition indépendante du retard, elle est mal adaptée aux systèmes de retard majoré et petit. De plus, la condition (4.11) n'est jamais vérifiée si la matrice A n'est pas une matrice de Hurwitz. Or on peut penser qu'il est possible de déterminer un domaine positivement invariant pour un système dont la matrice non retardée n'est pas stable. En effet, de même qu'un système peut être stabilisé par un terme retardé, la matrice B peut servir à maintenir l'état du système dans des limites raisonnables.

Notre but est donc maintenant de déterminer une condition de positive invariance qui prenne en compte le retard maximal τ_m du système. Nous espérons notamment déterminer une condition moins restrictive, n'imposant pas la stabilité de la matrice A. Pour cela, les dynamiques du système et des conditions initiales sont considérées. Cette limitation de la dynamique des conditions initiales permet de prouver l'invariance de domaines plus petits que dans le cas où les dynamiques sont quelconques (et pouvant doncprendre des valeurs importantes, physiquement non concevables). Les conditions obtenues sont alors moins restrictives.

II.3. Prise en compte du retard maximal et des dynamiques

Afin de tenir compte des dynamiques des conditions initiales, nous considérons des domaines $\mathcal{L}(k, D)$ définis de la manière suivante : une fonction continue φ sur $[-\tau_m, 0]$ appartient à $\mathcal{L}(k, D)$ si $\varphi(s) \in D$ pour tout $s \in [-\tau_m, 0]$, et si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$|\varphi(0) - \varphi(s)| \leq -s\,k, \qquad \forall s \in [-\tau_m, 0], \tag{4.12}$$

k étant un vecteur à composantes strictement positives.

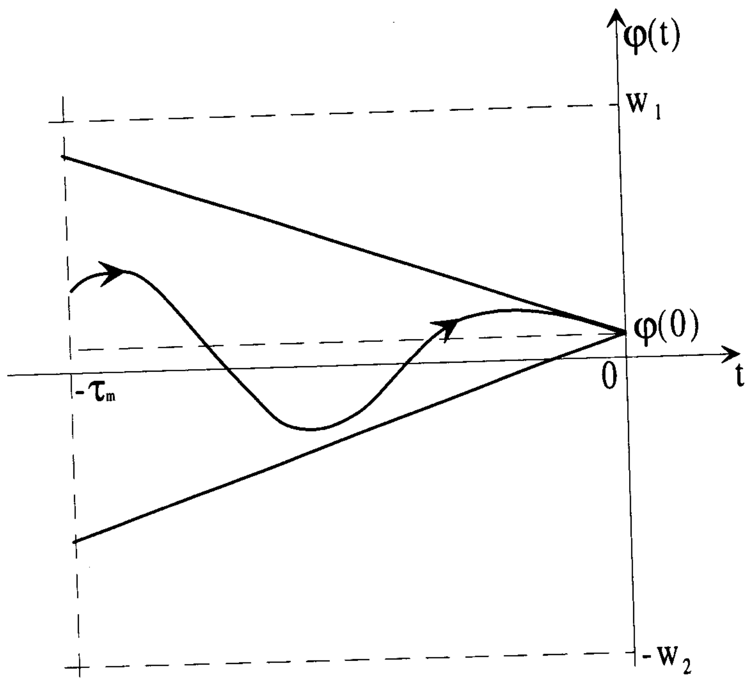


Figure 4.7 : domaine $\mathcal{L}$(k, D) dans le cas scalaire

Nous nous intéressons donc à l'invariance positive de $\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$, k étant tel que toute fonction initiale φ considérée vérifie la condition (4.12). Le vecteur k doit également, afin de majorer les dynamiques du système, être supérieur au vecteur k' défini de la manière suivante :

$$k \geq k' = \text{Max} \{ | Ax + By | : (x, y) \in E(I_n, w_1, w_2) \times E(I_n, w_1, w_2)\} \qquad (4.13)$$

De cette manière, pour toute fonction initiale φ dans $\mathcal{E}(I, w_1, w_2)$, l'inégalité

$$| x(t) - x(t-s) | \leq -s\, k, \forall\, s \in [-\tau_m , 0], \forall\, t \geq 0,$$

est vérifiée, x étant la solution du système (4.8) avec la condition initiale φ, et l'invariance de $\mathcal{E}(I, w_1, w_2)$ entrainera celle de $\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$.

II.3.1. Invariance de $\mathcal{L}$(k, E(I, w1, w2))

Le théorème suivant donne une condition suffisante d'invariance de $\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$:

Théorème 4.3. :

$\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$ (où k vérifie (4.13)) est un domaine positivement invariant pour le système (4.8) si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} (A + B)^+ w_1 + (A + B)^- w_2 + \tau_m \mathcal{M} v \le 0 \\ (A + B)^- w_1 + (A + B)^+ w_2 + \tau_m \mathcal{M} v \le 0 \end{cases} \qquad (4.14))$$

$\mathcal{M}$ et v étant la matrice et le vecteur suivants :

$\mathcal{M} = \{m_{ij}\} \in \mathbb{R}^{nxn}$ avec :

$$m_{ii} = \max(0, -b_{ii}),$$

$$m_{ij} = \begin{cases} \max(0, -a_{ij}) + \max(0, -b_{ij}) \text{ si } a_{ij} + b_{ij} \ge 0 \\ \max(0, a_{ij}) + \max(0, b_{ij}) \text{ si } a_{ij} + b_{ij} < 0 \end{cases} \quad \text{si } i \ne j.$$

$v = (v_i)$:

$$v_i = \min(k_i, (w_{1i} + w_{2i}) / \tau_m), \ i = 1, \dots, n.$$

Démonstration :

Le principe de la démonstration est similaire à celui du Théorème 1 donné dans [Dambrine et al. (1995 b)], mais nous nous intéressons cette fois à un retard variable.

Supposons que les conditions (4.14) sont satisfaites, mais que le domaine $\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$ n'est pas positivement invariant pour le système (4.8). Il existe alors une solution x_1 de (4.8), avec une condition initiale dans $\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$, qui quitte le domaine $\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$, c'est-à-dire qu'il existe un instant t_1 tel que $x_1(t_1) \notin E(I, w_1, w_2)$ (étant donné que la condition sur les dynamiques est toujours vérifiée si la solution reste dans $E(I, w_1, w_2)$).

Soit t_u la borne supérieure du domaine suivant :

$$\{t \ge t_0 : \forall s \in [0, t], x_1(s) \in E(I, w_1, w_2)\}.$$

Alors $x_1(t_u)$ est sur la frontière de $E(I, w_1, w_2)$, et que, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un instant $t_\varepsilon > t_u$ tel que les conditions suivantes sont remplies :

- pour tout $t < t_\varepsilon$, $x_1(t)$ est dans le domaine $E(I, (1+\varepsilon)w_1, (1+\varepsilon)w_2)$
- $x_1(t_\varepsilon)$ est sur la frontière de $E(I, (1+\varepsilon)w_1, (1+\varepsilon)w_2)$, sa dérivée étant orientée à l'extérieur de ce domaine; c'est-à-dire qu'il existe un entier i compris entre 1 et n tel que soit $x_{1i}(t_\varepsilon) = (1 + \varepsilon) w_{1i}$ et $\dot{x}_{1i}(t_\varepsilon) > 0$, soit $x_{1i}(t_\varepsilon) = -(1 + \varepsilon) w_{2i}$ et $\dot{x}_{1i}(t_\varepsilon) < 0$.

Le système étant linéaire, k' étant défini par (4.13),

$$| x_1(t) - x_1(s) | \le (t - s)(1 + \varepsilon) k'$$

pour tout t et s tels que $t_u \le s \le t \le t_\varepsilon$.

Considérons maintenant la fonction suivante :

$$x(t) = \frac{1}{1 + \varepsilon} x_1(t).$$

$x(t)$ est une solution de (4.8) telle que :

- sa condition initiale est dans $\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$,
- $\forall\ t \leq t_\varepsilon$, x_t est dans $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$,
- il existe un entier i compris entre 1 et n tel que :

  • soit $x_i(t_\varepsilon) = w_{1i}$ et $\dot{x}_i(t_\varepsilon) > 0$,

  • soit $x_i(t_\varepsilon) = - w_{2i}$ et $\dot{x}_i(t_\varepsilon) < 0$.

Considérons le premier cas ($x_i(t_\varepsilon) = w_{1i}$ et $\dot{x}_i(t_\varepsilon) > 0$).

D'après l'équation (4.8), la dérivée de $x_i(t)$ en t_ε s'exprime de la manière suivante :

$$\dot{x}_i(t_\varepsilon) = (a_{ii} + b_{ii})\ w_{1i}\ - b_{ii}\ (x_i(t_\varepsilon) - x_i(t_\varepsilon - \tau(t_\varepsilon))) + \sum_{j\neq i} (a_{ij}\ x_j(t_\varepsilon) + b_{ij}\ x_j(t_\varepsilon - \tau(t_\varepsilon))).$$

Or $\qquad - b_{ii}\,(x_i(t_\varepsilon) - x_i(t_\varepsilon - \tau(t_\varepsilon))) \leq \max\,(0, -b_{ii})\,\tau_m \min\,(k_i, \dfrac{w_{1i} + w_{2i}}{\tau_m})$.

De plus, si $j \neq i$, $a_{ij}\,x_j(t_\varepsilon) + b_{ij}\,x_j(t_\varepsilon - \tau(t_\varepsilon)) \leq \max\,(a_{ij}\,u + b_{ij}\,v : (u, v) \in \Omega)$,

Ω étant défini comme suit : $\Omega = \{(\alpha, \beta) \in [- w_{2j}\,,\, w_1] \times [- w_{2j}\,,\, w_1] : |\,\alpha - \beta\,| \leq \tau_m k_j\}$.

Ce maximum est égal à : $(a_{ij} + b_{ij})^+\ w_{1j} + (a_{ij} + b_{ij})^-\ w_{2j} + \tau_m\, m_{ij}\, v_j$.

Les inégalités suivantes sont alors obtenues :

$$0 < \dot{x}_i(t_\varepsilon) \leq [(A+B)^+\ w_1 + (A+B)^-\ w_2 + \tau_m M\ v]_i \leq 0,$$

ce qui est bien sûr contradictoire.

On peut donc en déduire que les relations (4.14) impliquent la positive invariance de $\mathcal{L}(k, E(I, w_1, w_2))$.

Dans le cas où $x_i(t_\varepsilon) = - w_{2i}$ et $\dot{x}_i(t_\varepsilon) < 0$, on montre de manière similaire que

$$0 < - \dot{x}_i(t_\varepsilon) \leq [(A + B)^-\ w_1 + (A + B)^+\ w_2 + \tau_m M\ v]_i \leq 0.$$

Le théorème est donc démontré. $\qquad\qquad \Delta\Delta\Delta$

Considérons maintenant un système à retard constant ($\tau(t) = \tau_m$).

Théorème 4.4 : [Dambrine et al. (1995)]

Dans le cas d'un retard constant, la condition (4.14) donnée dans le Théorème 4.3 est nécessaire et suffisante.

Démonstration :

La démonstration du théorème est donnée dans [Dambrine et al. (1995)] (cf. Annexe 4).

Remarques :

Dans le cas où le retard du système est nul, les conditions (4.14) sont équivalentes aux conditions nécessaires et suffisantes (4.10) données par Bitsoris. Si le retard du système est suffisamment grand, les conditions (4.14) sont équivalentes aux conditions nécessaires et suffisantes (4.11). Ce résultat, en particulier dans le cas d'un retard constant, établit donc un lien de continuité entre les deux conditions nécessaires et suffisantes.

II.3.2. Invariance de $\mathcal{L}$(k, E(F, w1, w2))

Des conditions du même type que celles données dans le théorème 4.3. sont obtenues pour l'invariance positive de $\mathcal{L}(k, E(F, w_1, w_2))$, $F \neq I$, grâce au théorème suivant :

Théorème 4.5. : [Dambrine et al. (1995 b)]

$\mathcal{L}(k, E(F, w_1, w_2))$ est positivement invariant pour le système (4.8) si :

- il existe deux matrices G et H de $\mathbb{R}^{q \times q}$ telles que

$$FA = GF$$
$$FB = HF$$

- les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(G + H)^+ w_1 + (G + H)^- w_2 + \tau \mathcal{M}' k_1' \leq 0$$
$$(G + H)^- w_1 + (G + H)^+ w_2 + \tau \mathcal{M}' k_1' \leq 0 \qquad (4.15)$$

$\mathcal{M}' = \{m_{ij}'\} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ étant définie par :

$$m_{ii}' = \max(0, -h_{ii}),$$

$$m_{ij}' = \begin{cases} \max(0, -g_{ij}) + \max(0, -h_{ij}) \text{ if } g_{ij} + h_{ij} \geq 0 \\ \max(0, g_{ij}) + \max(0, h_{ij}) \text{ if } g_{ij} + h_{ij} < 0 \end{cases} \quad \text{si } i \neq j$$

et k_1' ayant pour composantes :

$$k_{1i}' = \min([\,|F|\,k]_i , (w_1 + w_2)/\tau), \; i = 1, \dots , q.$$

Démonstration :

La démonstration de ce théorème repose sur la mise en place du changement de variables

$$z(t) = Fx(t).$$

Les relations

La détermination de domaines positivement invariants pour ces systèmes à retard double ne conduit pas directement à des domaines positivement invariants pour le système initial. Il est par contre possible de déterminer des domaines de conditions initiales tels que pour toute condition initiale dans ce domaine, l'état futur du système reste dans un domaine déterminé, plus grand. Ce problème est l'un de ceux rencontrés en stabilité pratique; il est étudié dans le paragraphe suivant.

III. Bornitude

III.1. Introduction

Nous proposons donc dans ce paragraphe d'utiliser les techniques développées dans les deux chapitres précédents pour étudier la stabilité pratique, à horizon infini, des systèmes non linéaires. Ceci constitue, comme nous l'avons remarqué dans la conclusion précédente, une façon constructive d'envisager la propriété d'invariance dans le cas non linéaire.

Le système étudié est le suivant :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t, x_t, p)\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)) \tag{4.16}$$

avec les notations et les hypothèses précisées au début de ce chapitre.

Notre étude porte essentiellement sur le problème suivant : connaissant un domaine S de $\mathbb{R}^n$, déterminer un domaine $\mathcal{C}_I$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$(\forall\ \varphi \in \mathcal{C}_I)(x(t\ ;\ t_0,\varphi) \in S,\ t \geq t_0 - \tau_m).$$

Ce problème est identique à celui de l'étude de la stabilité pratique du système (4.16) par rapport à $\{t_0\ ;\ [t_0,\infty[\ ;\ \mathcal{C}_I\ ;\ S;\ S_P;\ \mathcal{T}\}$.

Remarquons qu'il est bien sûr nécessaire que $S \subseteq D$, domaine sur lequel le système est étudié et sur lequel les majorations sont effectuées (notation du chapitre 3).

III.2. Méthode de résolution

La démarche mise en œuvre est similaire à celle proposée pour la détermination d'estimations de domaines de stabilité (Théorème 3.7) :

• déterminer un système majorant l'évolution de $|x(t)|$ à partir de $t_0 + \tau_m$ (système à retard double du retard initial), par exemple

$$\frac{dz}{dt}(t) = K\, z(t) + L \sup_{0\le\lambda\le 2\tau_m} z(t-\lambda) \qquad (4.17)$$

où K et L sont définies par : (cf. Théorème 3.1)

$$K = \sup_{t,x,p}\{ [A(t, x_t, p) + B'(t, x_t, p)]^* \},$$

$$L = \sup_{t,x,p}\left\{ \int_{t-\tau(t)}^{t} (|B'(t,x_t,p)A(s,x_s,p)|+|B'(t,x_t,p)B(s,x_s,p)|)ds+|B''(t,x_t,p)| \right\}$$

• déterminer un domaine positivement invariant pour ce système linéaire (4.17), par exemple $\mathfrak{S}_2(d,1) \subseteq S$, $d > 0$ étant tel que $(K + L)\, d \le 0$ (cf. Théorème 3.7).

• estimer l'état du système sur $[t_0;\ t_0+\tau_m]$ connaissant l'état sur $[t_0-\tau_m;t_0]$.

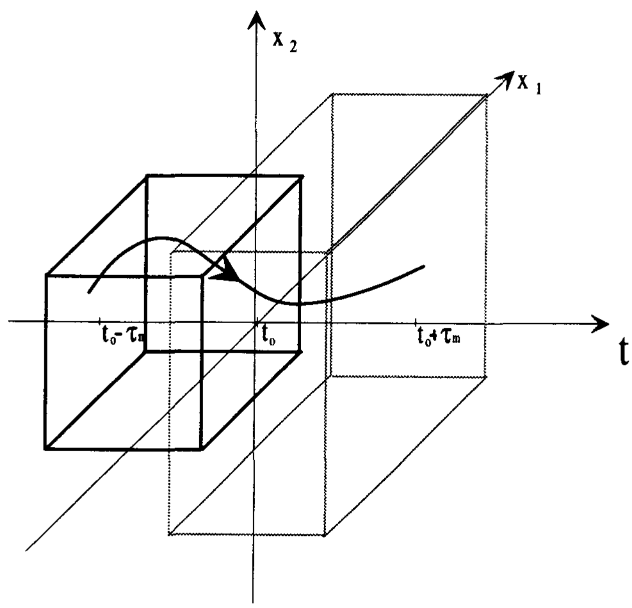


Figure 4.9

Cette dernière démarche conduit à différentes possibilités déjà rencontrées dans la démonstration du Théorème 3.7 :

1- Définissant les matrices $M = \sup \{(A(t, x_t, p))^*\}$; $N = \sup \{|B(t, x_t, p)|\}$, le système

$$\frac{dy}{dt}(t) = M\, y(t) + N\, y(t-\tau(t)) \qquad (4.18)$$

est un système majorant du système initial : si $|x(t)| \le y(t)$ pour $t \in [t_0-\tau_m;t_0]$ alors la même inégalité est vraie pour $t \ge t_0$ tant que $x(t)$ reste dans D.

a- Dans le cas où le retard est constant et connu, la solution de (4.18) avec une condition initiale constante est facilement calculable. Il suffit alors de déterminer une condition initiale constante k_1 ($\leq$ d) telle que la solution de (4.18) sur $[t_0; t_0+\tau_m]$ soit inférieure à d. Si $\mathcal{C}_I$ est choisi égal à $\mathfrak{I}(k_1,1)$, alors le système (4.16) est pratiquement stable par rapport à $\{t_0 ; [t_0,\infty[; \mathcal{C}_I ; I(d,1); S_P; \mathcal{T}\}$.

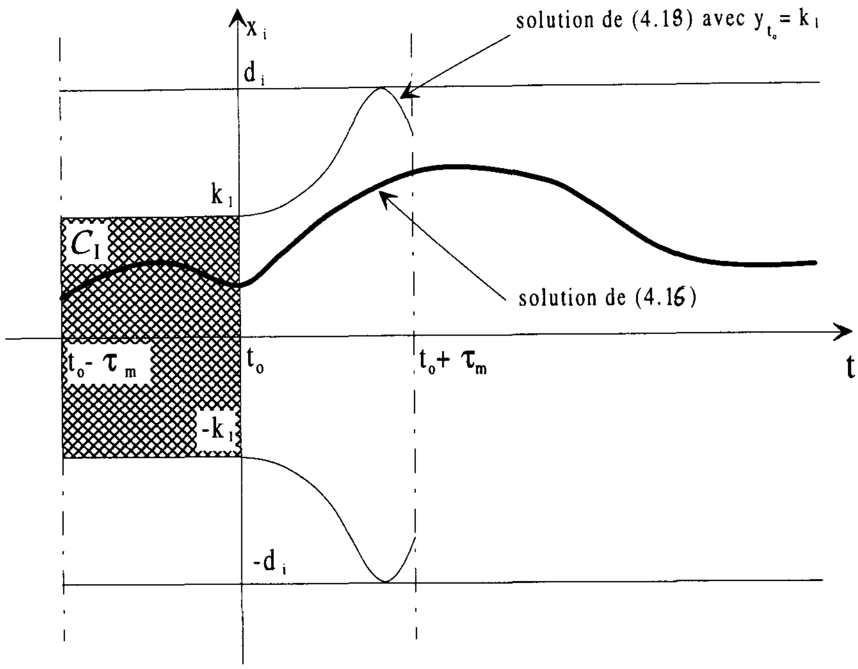


Figure 4.10

b- Si le retard n'est pas constant et/ou n'est pas connu, et si M+N est l'opposé d'une M-matrice, alors il suffit de choisir $k \leq d$, k étant un vecteur strictement positif tel que $(M + N)k \leq 0$. En effet, le domaine $\mathfrak{I}(k,1)$ ainsi défini est un domaine positivement invariant de (4.18).

2- Si les techniques précédentes ne peuvent être appliquées, il est néanmoins possible de définir un système scalaire majorant la norme de x(t) :

Soit le système

$$\dot{w}(t) = m.w(t) + b \sup_{\tau_0 \leq \theta \leq \tau_m} w(t - \theta) \qquad (4.19)$$

où $m = \text{Sup}\ \{\mu(A(t, x_t, d))\}$; $b = \text{Sup}\ \{\|B(t, x_t, d)\|\}$, τ_0 étant le retard minimal du système. w(t) majorant l'évolution de $\|x(t)\|$ et la solution de (4.19), à condition initiale constante, étant connue, il est possible de résoudre le problème de la même façon qu'au point (1-).

Ces notions de domaines positivement invariants et de systèmes pratiquement stables par rapport à un horizon infini sont utilisées par la suite (paragraphe IV) pour l'étude de la commande sous contraintes. Un exemple de système à entrée retardée, donc commandé à partir de $t = t_0 + \tau_m$, est étudié dans le paragraphe III.3.

IV. Stabilité et contraction pratiques avec temps d'établissement

IV.1. Introduction

Trois définitions relatives à la stabilité pratique ont été données dans le premier chapitre. Pour l'instant, seul le concept de stabilité pratique à horizon infini a été étudié. Il nous reste donc à traiter la contraction et la stabilité pratiques avec temps d'établissement (cf. paragraphe I.3.6.3. du chapitre 1 pour les définitions).

Rappelons que ces notions se différencient des définitions usuelles relatives à la stabilité par différents aspects :

- la trajectoire étudiée n'est pas nécessairement une solution du système,
- l'horizon sur lequel l'étude est effectuée n'est pas nécessairement infini.

L'étude de la stabilité pratique correspond à une étude de la proximité de l'état par rapport à une trajectoire donnée sur un horizon fini ou non.

On donne ici des critères d'étude de la stabilité et de la contraction pratique du système suivant :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t, x_t, p)\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)) + h(t, x_t) \qquad (4.20)$$

où $h(t, x_t)$ modélise des perturbations additives.

Les hypothèses considérées sont celles rappelées au début de ce chapitre.

Le système (4.20) est étudié autour de zéro, la trajectoire nulle n'étant pas nécessairement solution de ce système.

Nous utilisons les notations suivantes :

$T = [t_0, t_0 + t_f[$,

$T_s = [t_0 + t_s, t_0 + t_f[$, t_s étant le temps d'établissement et t_f l'instant final,

$\mathcal{C}_I$ est un ensemble des conditions initiales, connexe ouvert de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ contenant un voisinage de l'origine,

S_F et S sont des ensembles connexes ouverts de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage de l'origine (ensemble des états instantanés entre t_0+t_s et t_0+t_f, t_0 et t_0+t_f, respectivement).

La classe des systèmes considérés ici est très large : le système (4.20) est perturbé; il présente un équilibre 0 en l'absence de perturbations additives, mais cet équilibre n'est pas nécessairement préservé en présence de perturbations; même s'il l'est, il est éventuellement instable.

Nous limitons l'étude à l'intervalle de temps $[t_0,t_0 + t_f[$ pendant lequel on veut vérifier la présence de l'état dans un certain domaine. Cet intervalle de temps correspond au temps pendant lequel le processus est utilisé. L'étude de la stabilité pratique permet notamment de résoudre des problèmes du type : déterminer un retour d'état (ou une autre commande) tel que l'état du système en boucle fermée soit suffisamment proche de la consigne au bout du temps t_s et reste suffisamment proche de celle-ci entre t_s et t_f. L'aspect "quantitatif" est donc pris en compte.

Des travaux récents [Perruquetti et al.(1995 a et b)] ont permis d'étudier la stabilité pratique de systèmes ordinaires en utilisant les notions de normes vectorielles et de système de comparaison. Par contre, aucune publication n'a, à notre connaissance, traité de la stabilité pratique des sytèmes retardés.
La démarche proposée ici est similaire à celle de [Perruquetti et al.(1995 a et b)], mais nous verrons que des difficultés supplémentaires apparaissent. Ces difficultés sont dues au fait que la solution d'un système à retard, même linéaire, n'est pas connue de manière analytique.

Nous proposons tout d'abord d'expliquer la démarche utilisée, puis de l'appliquer sur un exemple. Une réflexion sur cette méthode permettra ensuite d'améliorer les résultats, en utilisant non pas un système de comparaison sur tout l'intervalle considéré, mais plusieurs systèmes de comparaison valables sur différentes subdivisions de l'intervalle d'étude.

IV.2. Démarche

Notre approche s'appuie sur la mise en place d'un système de comparaison plus simple que le système initial, et dont la stabilité pratique implique celle du système initial (4.20). Les systèmes de comparaison (SC) mis en place, souvent linéaires stationnaires, ont des coefficients dépendants ou non du retard maximal du système initial. L'étude de ces systèmes (SC) permet également celle de la stabilité pratique du système initial. En effet, étant donné que la solution de (SC) majore une norme vectorielle de l'état instantané de (4.20), il est possible de lier l'appartenance des solutions de (SC) à un certain domaine à celle des solutions de (4.20) à un domaine de $\mathbb{R}^n$.

Rappelons la forme des systèmes de comparaison qui peuvent être mis en place. Afin de simplifier la présentation, nous n'utilisons ici que la norme vectorielle suivante :

$$V(x) = \begin{pmatrix} |x_1| \\ . \\ . \\ |x_n| \end{pmatrix}.$$

Notons cependant que des normes vectorielles de dimension plus faible pourraient aussi être utilisées, comme par exemple :

$$V(x) = \begin{pmatrix} |x_1|+|x_2| \\ |x_3| \\ . \\ |x_{n-1}|+|x_n| \end{pmatrix}.$$

Un système de comparaison de coefficients indépendants du retard pour le système (4.20) est le suivant :

$$\frac{dz}{dt}(t) = M\, z(t) + N \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} z(t-\lambda) + q \tag{4.21}$$

La mise en place de ces systèmes a été exposée dans le premier chapitre de ce mémoire (paragraphe IV.2.), conduisant à des majorants indépendants de τ_m.

Il est possible de considérer un système de comparaison de coefficients dépendant du retard τ_m (cf. chapitres 2 et 3 de ce mémoire) :

$$\frac{dz}{dt}(t) = K(\tau_m)\, z(t) + L(\tau_m) \sup_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m} z(t-\lambda) + q'(\tau_m) \tag{4.22}$$

(SC) est donc l'un des systèmes (4.21) ou (4.22).

Nous supposons que les systèmes de comparaison mis en place sont valables pour x(t) dans le domaine D, connexe ouvert de $\mathbb{R}^n$, et pour tout instant t dans l'intervalle $[t_0; t_0 + t_c[$. On parle donc de système de comparaison (t,x)-locaux.

Considérons de manière générale le problème de la stabilité pratique avec le temps d'établissement t_s par rapport à $\{t_0 ; T ; T_s ; \mathcal{C}_I ; S ; S_F; S_P; \mathcal{T}\}$.

♦ Supposons dans un premier temps que le domaine de conditions initiales est imposé, ainsi que les instants t_s et t_f, et que le but de l'étude est de déterminer les domaines S et S_F. Il est possible de déterminer une condition initale z_{t_0} pour le système (SC) telle que la solution de ce système majore les normes vectorielles des solutions de (4.20), pour toute condition intiale dans $\mathcal{C}_I$. La solution de (SC) avec z_{t_0} pour condition initiale n'est en général pas connue de manière analytique, mais une simulation permet de résoudre le problème.

♦ Par contre le problème inverse est plus difficile à traiter. Supposons que les domaines S et S_F sont imposés et que le but de l'étude est la détermination de $\mathcal{C}_I$. Dans le cas de systèmes non retardés, la donnée de $z(t_2)$, $t_2 > t_0$, et de l'équation non retardée définissant z(t), permet le calcul de $z(t_0)$. Par contre, ceci n'est pas valable dans le cas de systèmes retardés, puisque le calcul de $z(t_0 + \theta)$, $\theta \in [- \tau_m ; 0]$, condition initiale d'une équation linéaire stationnaire à retards, est impossible à partir de $z(t_2)$.

Le but de l'étude est donc essentiellement de parvenir à des méthodes permettant de "remonter le temps", non plus en termes de conditions initiales mais en termes de domaines : il s'agit de déterminer un domaine de conditions initiales admissibles à partir de la donnée d'un domaine final S_F, ensemble dans lequel doit évoluer x(t) entre deux instants déterminés (d'établissement et final), et du domaine S.

Nous allons bâtir ces méthodes sur la base du système de comparaison (4.21) (cependant, la méthode proposée peut être également appliquée à (4.22)).

Si (M + N) est une matrice inversible, le système (4.21) admet un unique point d'équilibre $z_e = - (M + N)^{-1}q$. Notant $y(t) = z(t) + (M + N)^{-1}q$, la variable y(t) est solution de l'équation suivante :

$$\frac{dy}{dt}(t) = M\, y(t) + N \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} y(t-\lambda) \qquad (4.23)$$

La résolution du problème suppose la majoration des solutions de cette équation. Il existe deux types de majorations : majoration vectorielle ou majoration scalaire.

• <u>majoration vectorielle :</u> [Tokumaru (1975)]

S'il est possible de trouver un réel β et un vecteur k strictement positif tels que β soit une valeur propre de $(- M - Ne^{\beta\tau_m})$ et k un vecteur propre associé à cette valeur propre, alors $\alpha k e^{-\beta(t-t_0)}$ est une solution de (4.23), quel que soit α positif.

Dans le cas où (M + N) est l'opposée d'une M-matrice, un tel couple (β,k) existe [Tokumaru (1975)]. Rappelons que β peut être déterminé de la manière suivante (dans le cas où M+N est l'opposée d'une M-matrice) :

β est la solution réelle strictement positive de l'équation :

$$\lambda_m(- M - Ne^{\gamma\tau_m}) = \gamma.$$

Ces majorations vectorielles ne sont pas toujours possibles. c'est pourquoi nous proposons également des majorations scalaires, possibles dans tous les cas, mais bien sûr moins précises.

• majoration scalaire :

$\| . \|$ étant une norme de $\mathbb{R}^n$, $\| y(t) \|$ est majorée par la solution de l'équation différentielle scalaire à retard suivante :

$$\frac{dw}{dt}(t) = \mu(M)\, w(t) + \|N\| \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} w(t-\lambda) \tag{4.24}$$

Il est possible de déterminer simplement une solution de cette équation, convergente ou non selon le signe de $\mu(M) - \|N\|$:

• si $\mu(M) + \|N\| < 0$, on peut déterminer une solution positive décroissante pour l'équation (4.24) : $\alpha e^{-\beta(t-t_0)}$, α étant un réel positif, est une solution de (4.24), β étant l'unique solution réelle strictement positive de l'équation :

$$-\beta = \mu(M) + \|N\|\, e^{\beta\tau_m}.$$

• si $\mu(M) + \|N\| > 0$, la solution particulière obtenue de la même manière est alors croissante : $\alpha e^{\beta(t-t_0)}$, α étant un réel positif, est une solution de (4.24), β étant l'unique solution réelle strictement positive de l'équation :

$$\beta = \mu(M) + \|N\|\, e^{-\beta\tau_0}.$$

Notons que cette fois c'est la *borne inférieure* de retard $\tau(t)$ qui est prise en compte.

Ces différentes méthodes fournissant une majoration de l'état instantané du système initial pour toute condition initiale dans un domaine de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ (condition initiale inférieure à celle du système majorant) permettent de résoudre le problème de la stabilité pratique. L'exemple qui suit présente une telle résolution. Il permet également de comparer une majoration vectorielle à une majoration scalaire.

Remarquons également que du fait des majorations effectuées, les domaines considérés ont l'une des formes suivantes :

dans le cas des majorations vectorielles,

$I_{\mathcal{V}}(d,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(x) \leq \alpha\, d\}$,

$\mathfrak{S}_{\mathcal{V}}(d,\alpha) = \mathcal{C}(I_{\mathcal{V}}(d,\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \mathcal{V}(\varphi(s)) \leq \alpha\, d, \forall\, s \in [-\tau_m, 0]\}$,

soit dans le cas où $\mathcal{V}(x) = |x|$,

$I(d,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \alpha\, d\}$,

$\mathfrak{S}(d,\alpha) = \mathcal{C}(I(d,\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : |\varphi(s)| \leq \alpha\, d, \forall\, s \in [-\tau_m, 0]\}$.

dans le cas des majorations scalaires,

$I_N(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \alpha\}$,

$\mathfrak{S}_N(\alpha) = \mathcal{C}(I_N(\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi(s)\| \leq \alpha, \forall\, s \in [-\tau_m, 0]\}$.

Si les ensembles considérés en pratique ne sont pas de cette forme, ils contiennent ou sont inclus dans des domaines de ce type. La norme vectorielle et la représentation d'état peuvent être choisies en fonction des domaines considérés en pratique.

IV.3. Exemple : Stabilité pratique avec contraction d'un système non linéaire, instable

Considérons le système suivant :

$$\frac{d(x_1)}{dt}(t) = -4\, x_1(t) + \frac{t^2}{32}|x_2(t)| + h_1(.)$$
$$\frac{d(x_2)}{dt}(t) = \frac{t^2}{32}|x_1(t)| - 4\, x_2(t) + 0{,}5\, f(t)\, x_2(t - \tau(t)) + h_2(.) \tag{4.25}$$

* $\tau(t)$ étant compris entre 1 et 2, $\tau_0 = 1$ et $\tau_m = 2$. L'instant initial est $t_0 = 0$.

* $h_1(.)$ et $h_2(.)$ représentent des petites perturbations, dépendant de paramètres quelconques (temps, états, ...), vérifiant les inégalités : $|h_1(.)| \leq 10^{-2}$, $|h_2(.)| \leq 10^{-2}$.

* f(t) vérifie l'inégalité : $|f(t)| \leq 1$ pour tout t.

Cet exemple est traité dans [Goubet-Bartholoméüs et al. (1997 b)].

Remarquons que 0 n'est pas un équilibre du système perturbé. Même dans le cas où les perturbations sont nulles, l'équilibre 0 du système est instable du fait de la présence des termes $\frac{t^2}{32}$. Nous allons pourtant montrer que nous pouvons déterminer un domaine de conditions initiales tel que l'état instantané du système reste suffisamment proche de 0 (cet aspect sera quantifié) pendant un intervalle de temps déterminé.

Soit t_e un réel strictement positif. Pour tout t appartenant à $[0, t_e[$, les coefficients de l'équation peuvent être majorés. Ceci conduit à l'établissement du système de comparaison suivant :

$$\frac{dz}{dt}(t) = M\, z(t) + N \sup_{0 \leq \lambda \leq \tau_m} z(t-\lambda) + q \tag{4.26}$$

avec $M = \begin{bmatrix} -4 & \frac{t_e^2}{32} \\ \frac{t_e^2}{32} & -4 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} 10^{-2} \\ 10^{-2} \end{bmatrix}$.

Remarquons que si le système est étudié sur un intervalle suffisamment petit (soit $t_e < 10{,}9$), la matrice M + N est inversible, et de plus elle est l'opposée d'une M-matrice. Des majorations exponentielles des solutions de (4.26) peuvent donc être effectuées.

Le système (4.26) admet un unique point d'équilibre $z_e = -(M+N)^{-1}q$.

Notant $y(t) = z(t) + (M+N)^{-1}q$, la variable y(t) est solution de l'équation suivante :

$$\frac{dy}{dt}(t) = M\,y(t) + N \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} y(t-\lambda) \tag{4.27}$$

Le problème de la stabilité pratique avec le temps d'établissement t_s par rapport à $\{t_0 ; T ; T_s ; \mathcal{C}_I ; S ; S_F; S_P; \mathcal{T}\}$ peut se présenter de différentes manières :

- connaissant $\mathcal{C}_I$, t_0, T , T_s, S_P, $\mathcal{T}$, en déduire S et S_F ?

- connaissant S_F, t_0, T, T_s, S_P, $\mathcal{T}$, déterminer un domaine de conditions initiales admissibles $\mathcal{C}_I$?

Chacun de ces problèmes va être étudié. Nous considérerons T = [0; 8[et T_s = [6; 8[.

Remplaçant t_e par 8, $M = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ et $(M+N)^{-1}q = \begin{bmatrix} -5{,}5.10^{-3} \\ -6.10^{-3} \end{bmatrix}$.

IV.3.1. Détermination de S et S_F connaissant $\mathcal{C}_I$

$\mathcal{C}_I = \mathcal{S}([1;1]^T,1)$.

Nous allons présenter tour à tour les deux méthodes de majoration présentées dans cette section.

IV.3.1.1. Majoration scalaire

Considérons la norme de vecteurs :

$$\|y\| = \mathrm{Sup}\{|y_1| ; |y_2|\}.$$

Rappelons les norme et mesure de matrice associées :

$\|A\| = \mathrm{Sup}\{|a_{11}| + |a_{12}| ; |a_{21}| + |a_{22}|\}$ et $\mu(A) = \mathrm{Sup}\{a_{11} + |a_{12}| ; |a_{21}| + a_{22}\}$,

si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (cf. Annexe 1).

Il vient donc : $\mu(M) = -4 + \frac{t_e^2}{32} = -2$ ($t_e = 8$), $\|N\| = 0{,}5$.

La solution réelle de l'équation

$$-\beta = \mu(M) + \|N\|\, e^{\beta\tau_m}$$

est $\beta \approx 0{,}537$.

Soit $\alpha = 1 - 6.10^{-3}$. Quelle que soit la fonction initiale x_0 dans $\mathcal{C}_I$,

$\| x_0(\theta) + (M + N)^{-1}q \| \leq \alpha\, e^{-\beta\theta}$, $\theta \in [-2 , 0]$, et donc $\| x(t) + (M + N)^{-1}q \| \leq \alpha\, e^{-\beta t}$ pour tout $t \in T$.

On en déduit qu'il est possible de choisir $\mathbf{S} = \mathbf{I([1\,;1\,]^T},1)$ et $\mathbf{S_F} = \mathbf{I([0{,}0456;0{,}0456]^T},1)$ car

$$\| x(t) + (M + N)^{-1}q \| \leq \alpha\, e^{-6\beta} \text{ pour tout t dans } [6; 8[.$$

En conclusion, toute condition initiale fonctionnelle bornée par $[1;1]^T$ conduira à un comportement borné par $[0{,}045;0{,}045]^T$ entre les instants 6 et 8, ceci quels que soient f(t) (borné par 1 en valeur absolue) et les perturbations h_i (bornées par 10^{-2}).

IV.3.1.2. Majoration vectorielle

$$- M - N\, e^{2\gamma} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4\text{-}0{,}5.e^{2\gamma} \end{bmatrix}.$$

$\lambda_m(- M - Ne^{2\gamma}) = 4 - 0{,}25\, e^{2\sigma} - (4 + \frac{0{,}25}{4}\, e^{4\sigma})^{\frac{1}{2}}$. L'équation $\lambda_m(- M - Ne^{2\gamma}) = \gamma$ admet pour unique solution réelle positive $\beta = 0{,}711$. Un vecteur propre de A_β associé à cette valeur propre est $k = [1;1{,}645]^T$.

Il est possible de majorer $|x(t)|$ par $\alpha k e^{-\beta t} - (M + N)^{-1}\, q$, avec $\alpha = 0{,}994$.

Les domaines suivants sont alors obtenus :

$\mathbf{S} = \mathbf{I([1\,;1]^T},1)$ et $\mathbf{S_F} = \mathbf{I([0{,}0194;0{,}0289]^T},1)$.

En conclusion, toute condition initiale fonctionnelle bornée par $[1;1]^T$ conduira à un comportement borné par $[0{,}0194;0{,}0289]^T$ entre les instants 6 et 8, ceci quels que soient f(t) (borné par 1 en valeur absolue) et les perturbations h_i (bornées par 10^{-2}).

Remarquons que la majoration vectorielle est bien plus fine que la majoration scalaire, et que le domaine S_F obtenu après majoration vectorielle n'est pas symétrique en x_1 et x_2.

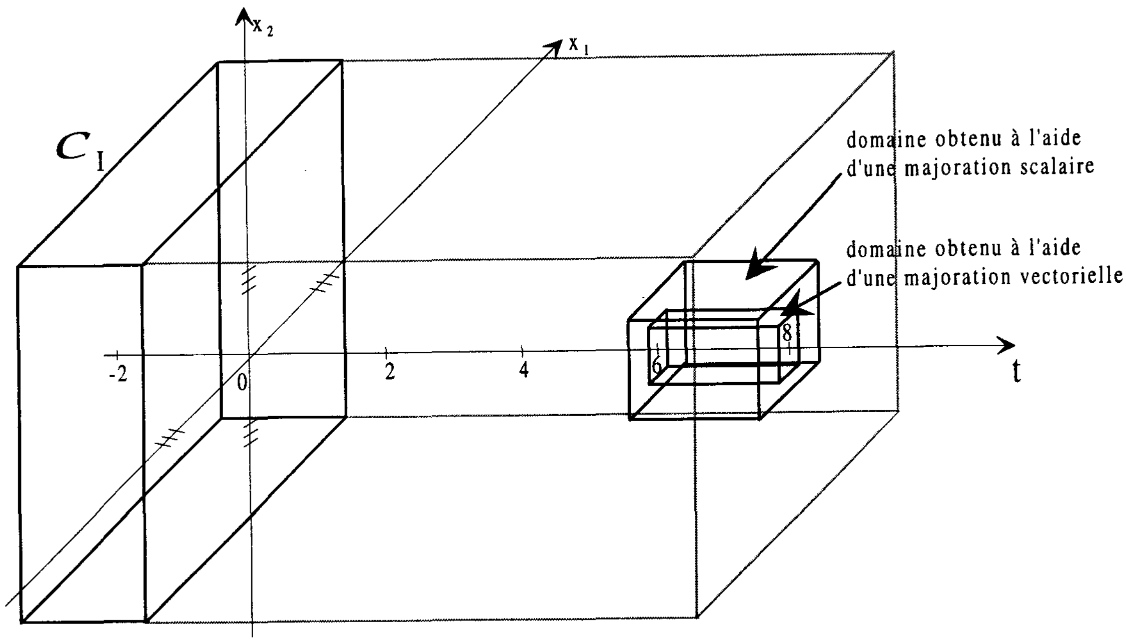


Figure 4.11

IV.3.2. Détermination de C_I connaissant S_F

Nous envisageons maintenant le problème inverse, plus complexe mais plus intéressant en pratique.

Considérons par exemple l'ensemble $S_F = I([0{,}0194;0{,}0289]^T,1)$ issu de la majoration vectorielle précédente.

La majoration effectuée dans le paragraphe précédent est valable ici : si l'inégalité

$$|x(t)| \leq \alpha[1;1{,}645]^T e^{-0{,}711t} - (M+N)^{-1} q, \tag{4.28}$$

est vérifiée sur [-2 , 0], alors elle reste vraie sur T = [0; 8[.

Le choix de $\alpha = 0{,}994$ permet d'affirmer que si (4.28) est vérifiée sur [-2 , 0], alors l'état instantané du système appartient à S_F entre 6 et 8.

Le domaine de conditions initiales obtenu est alors

$$\begin{aligned} C_I &= \{\varphi \in C(\mathbb{R}^n) : |\varphi(s)| \leq \alpha[1;1{,}645]^T - (M+N)^{-1} q,\ \forall\, s \in [-2, 0]\} \\ &= \mathfrak{I}([1;1{,}641]^T,1). \end{aligned}$$

Remarque : Le domaine de conditions initiales admissibles associé à un domaine S_F lui-même obtenu à partir d'un domaine initial imposé est plus "grand" que ce dernier.

Ceci est dû au fait que la majoration effectuée l'a été suivant une direction particulière. En effet, les domaines C_I ou S_F imposés sont définis par un vecteur qui n'est pas nécessairement proportionnel au vecteur k utilisé pour les majorations. Les domaines devant être remplacés par des domaines du type $\mathfrak{I}(k,\alpha)$, une partie de l'information initiale est perdue.

La figure suivante illustre ce problème, dans $\mathbb{R}^2$.

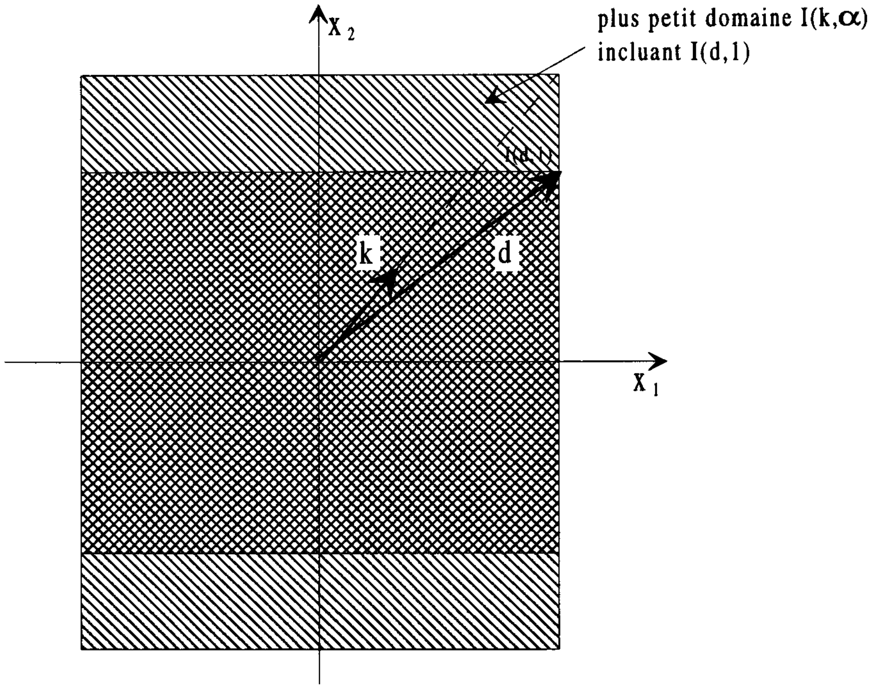


Figure 4.12

Nous avons illustré ici la perte d'information due au "remplacement" du domaine de conditions initiales par un domaine plus grand. Le même problème intervient lorsque le domaine final S_F est imposé, et qu'il faut également considérer pour l'étude un domaine qui le contient.

Remarquons que le vecteur k obtenu pour les majorations dépend de la norme vectorielle utilisée pour les calculs. Il est donc intéressant de choisir une base et une norme vectorielle telles que le vecteur k obtenu soit le plus colinéaire possible aux vecteurs définissant les domaines imposés.

IV.3. Découpage de l'intervalle de temps

Nous avons jusqu'à présent résolu le problème de la stabilité pratique en mettant en place un système majorant valable sur l'intervalle T_s. La figure suivante représente comment un majorant de la solution du système de comparaison, ainsi que la donnée d'un domaine de conditions initiales, permettent la détermination d'un domaine S_F tel que le système (4.25) soit pratiquement stable avec le temps d'établissement t_s par rapport à $\{t_0$; T ; T_s ; $\mathcal{C}_I$; S ; S_F; S_P; $\mathcal{T}\}$.

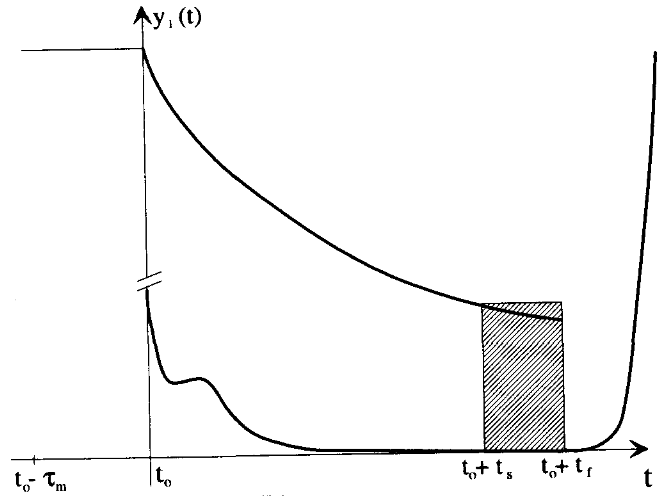


Figure 4.13.

La figure 4.14. permet de comprendre pourquoi une décomposition de l'intervalle des temps permet d'obtenir des estimations plus précises : un majorant de chacune des composantes de la norme vectorielle est calculé pour différents instants finaux. L'ensemble S_F obtenu est alors plus petit que celui issu des paragraphes précédents.

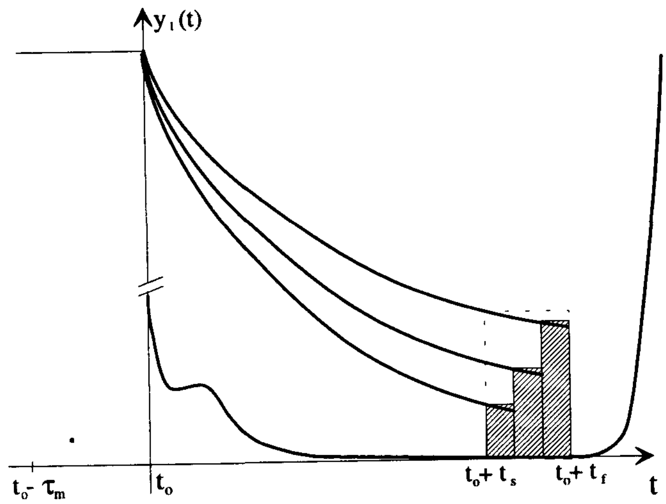


Figure 4.14.

En appliquant cette technique à notre exemple, c'est-à-dire en décomposant l'intervalle T_s en sous-intervalles et faisant tendre la largeur des intervalles vers 0, les résultats suivants sont obtenus dans le cas d'une majoration vectorielle :

$$\mathbf{S_F = I([0{,}00419;0{,}010]^T,1)}$$

Ces résultats sont bien meilleurs que les précédents.

D'autres types de décompositions auraient également pu être effectués, comme par exemple une subdivision de l'intervalle T (et donc la mise en place de systèmes de comparaison valables sur $[t_0 + t_i, t_0 + t_{i+1}[\subset [t_0, t_0 + t_f[$).

V. Commande sous contraintes

V.1. Position du problème

Considérons de manière générale le système décrit par l'équation (4.29) :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t, x_t, p)\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)) + C(t, x_t, p)\, u(t) + D(t, x_t, p)\, u(t - \tau(t)) \quad (4.29)$$

pour tout instant $t \geq t_0$.

Le but de cette étude est de déterminer un retour d'état statique $u(t) = K\, x(t)$ ($t \geq t_0$) tel que:

• l'équilibre 0 du système en boucle fermée

$$\frac{dx}{dt}(t) = [A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)\, K]\, x(t) + [B(t, x_t, p) + D(t, x_t, p) K]\, x(t - \tau(t)) \quad (4.30)$$

soit **asymptotiquement stable**.

• différentes **contraintes** sur l'état du système, l'état initial et la commande soient respectées.

Nous donnons ci-dessous le détail de ces deux objectifs :

- Remarquons que cette équation n'est valable que pour $t \geq t_p$, t_p étant défini dans le paragraphe II.3.1. Pour $t_0 \leq t \leq t_p$, l'équation du système est la suivante :

$$\frac{dx}{dt}(t) = [A(t, x_t, p) + C(t, x_t, p)\, K]\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)) \quad (4.31)$$

Nous supposons, comme dans ce paragraphe II.3.1., que $\dot{\tau}(t) \leq 1$.

- Quant aux contraintes, leurs causes peuvent être multiples : respect de règles de sécurité, limitation de l'amplitude de certains actionneurs, etc.... Elles s'expriment de la manière suivante :

♦ la **commande** u du système est toujours comprise entre $-g_2$ et g_1, g_1 et g_2 étant des vecteurs positifs de $\mathbb{R}^m$. Nous noterons $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : -g_2 \leq u \leq g_1\}$.

Cette condition sur les commandes peut être réécrite sous la forme d'une condition sur l'état du système, du fait que les deux variables sont liées par le retour d'état u = K x. L'état du système doit donc appartenir à $\mathcal{E}(K, g_1, g_2)$ pour tout $t \geq t_0$.

♦ l'**état** du système est contraint d'appartenir au domaine $\mathcal{E}(F, w_1, w_2)$, pour tout $t \geq t_0$, F étant une matrice de $\mathbb{R}^{q \times n}$, les vecteurs w_1 et w_2 appartenant à $\mathbb{R}^q$.

♦ les **conditions initiales** appartiennent à $\mathcal{E}(H, c_1, c_2) \subseteq \mathcal{E}(F,w_1,w_2)$, H étant une matrice de $\mathbb{R}^{r \times n}$. De plus, les dynamiques des conditions initiales sont bornées de la manière suivante :

$$|x_{t_0}(0) - x_{t_0}(s)| \leq -sk'' \text{ pour tout s appartenant à } [-\tau_m;0].$$

En notant k = Max {k';k"}, où k' majore les dynamiques du système (cf. paragraphe I.3. de ce chapitre), l'invariance d'un domaine $\mathcal{C}(S)$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est équivalente à celle de $\mathcal{L}(k,S)$. Les dynamiques étant mieux prises en compte, le critère obtenu est plus précis que dans le cas où les dynamiques ne sont pas bornées (et peuvent donc prendre en particulier des valeurs physiquement inconcevables). De plus, il tient compte du retard maximal τ_m du système.

V.2. Différentes approches pour la résolution

Différentes approches permettent de résoudre ce problème. Une première consiste à établir une loi de contrôle indépendamment des contraintes, puis de limiter matériellement les amplitudes qui doivent l'être. Cette méthode ne garantit bien sûr pas la stabilité du système [Gutman et al. (1985)]. Une deuxième méthode consiste en l'application de la théorie de la commande optimale, technique souvent difficile à implémenter. Nous utilisons une troisième approche, basée sur la détermination de domaines positivement invariants, comme nous l'avons déjà précisé au début de ce chapitre. Cette méthode a déjà été appliquée aux systèmes linéaires continus et discrets [Vassilaki et al. (1988, 1989)]. Couplée avec un principe de comparaison, cette méthode se révèle intéressante pour les systèmes non linéaires [Vassilaki (1990), Radhy et al. (1990)]. En ce qui concerne les systèmes à retards, une étude a été réalisée dans [Dambrine et al. (1995 a), Dambrine (1994)], donnant des conditions indépendantes du retard pour la commande sous contraintes de systèmes linéaires ou non. Le but de ce paragraphe est d'affiner ces résultats en proposant des méthodes faisant intervenir le retard du système. Une partie des nouveaux résultats exposés ici ainsi qu'un résumé des techniques indépendantes du retard sont donnés dans [Goubet-Bartholoméüs et al. (1996 a)]. Nous proposons une étude du problème en faisant intervenir non seulement des domaines positivement invariants, mais aussi en faisant intervenir la bornitude.

V.3. Résolution

Le problème de stabilisation sous contraintes est résolu si les conditions suivantes sont réunies :

1 • il existe un domaine S de $\mathbb{R}^n$ et un domaine $\mathcal{C}_I$ de conditions initiales tels que le système en boucle fermée, décrit par (4.31) entre t_0 et t_p, par (4.30) ensuite, est pratiquement stable par rapport à $\{t_0 ; [t_0,\infty[; \mathcal{C}_I ; S; S_P; \mathcal{T}\}$.

2 • les domaines S et $\mathcal{C}_I$ vérifient les différentes inclusions :
$\mathcal{C}_I \subseteq \mathcal{E}(H, c_1, c_2)$; $S \subseteq E(F, w_1, w_2)$; $S \subseteq E(K, g_1, g_2)$.

3 • l'équilibre 0 du système (4.30) est asymptotiquement stable, et son domaine de stabilité asymptotique est inclus dans $\mathcal{C}(S)$.

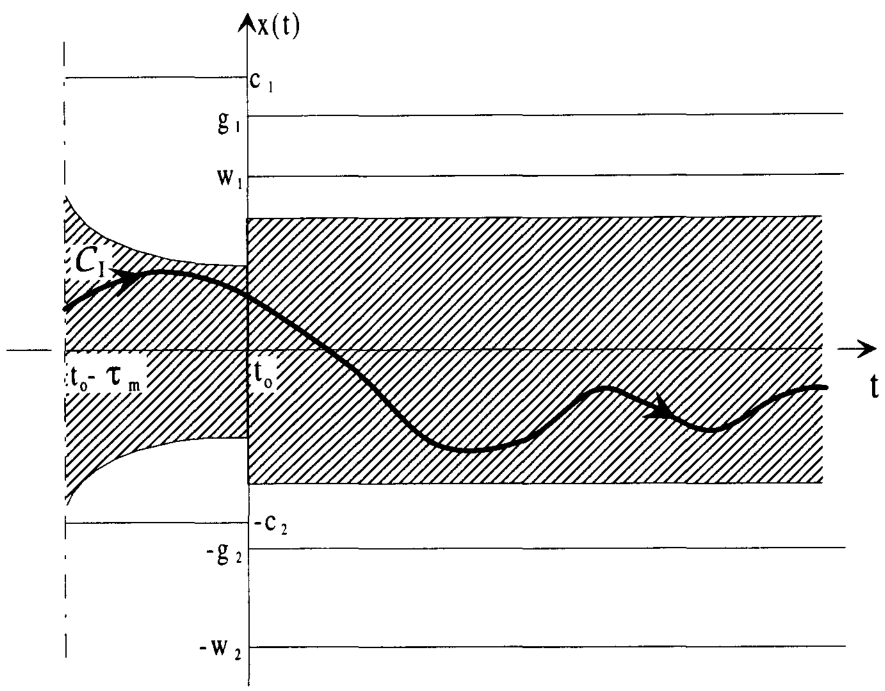


Figure 4.15

Remarques :

♦ Remarque concernant la condition 1• : Dans le cas où le système étudié est un système linéaire, il a été donné dans le paragraphe I de ce chapitre des théorèmes pour la détermination de domaines positivement invariants. Si $\mathcal{C}(S)$, ou $\mathcal{L}(k,S)$, est un tel domaine pour le système (4.30), il est quand même nécessaire, dans le cas où la matrice $D(t, x_t, p)$ est non nulle de déterminer un ensemble $\mathcal{C}_I$ de conditions initiales tel que le système soit pratiquement stable par rapport à $\{t_0\, ;\, [t_0,\infty[\, ;\, \mathcal{C}_I\, ;\, S;\, S_P;\, \mathcal{T}\}$. En effet, le système n'est pas décrit par (4.30) juste après t_0, mais par (4.31).

♦ La condition 3• peut être testée grâce aux critères de stabilité établis dans les deux chapitres précédents, ou grâce à d'autres méthodes dans le cas des systèmes linéaires par exemple.

Quant à la condition 1•, elle est testée à l'aide des techniques présentées dans les deux premières sections de ce chapitre (I et II). Dans le cas d'un système linéaire, il est bien sûr intéressant de tenir compte des dynamiques, et donc d'étudier l'invariance de $\mathcal{L}(k,S)$ pour le système (4.30). Si la matrice $D(t, x_t, p)$ n'est pas nulle, il faut également déterminer un ensemble de conditions initiales $\mathcal{C}_I$ et donc utiliser le paragraphe II. Les dynamiques des conditions initiales considérées pour l'invariance de $\mathcal{L}(k,S)$ sont dans ce cas les dynamiques du système sur $[t_0; t_0+\tau_m]$ (voir à ce propos l'exemple donné dans le paragraphe suivant).

♦ Remarque quant au choix du domaine S : Le domaine S peut être choisi égal à $E(F, w_1, w_2)$, et le retour d'état K tel que les trois conditions précédentes sont vérifiées.

♦ Il est possible d'utiliser les techniques i.o.d., elles peuvent être plus simples, mais par contre conduire à des résultats plus restrictifs.

V.4. Exemple : Stabilisation sous contraintes d'un système linéaire instable avec une commande retardée

Considérons le système décrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t-\tau_m) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t-\tau_m) \qquad (4.32)$$

Le but de ce paragraphe est de proposer un retour d'état stabilisant ce système sous les contraintes suivantes :

— $[-1, -1]^T \le x(t) \le [1, 1]^T$, pour tout $t \ge -\tau_m$,

— $|u(t)| \le 4$, pour tout $t \ge 0$.

La commande $u(t-\tau_m)$ étant nulle pour tout $t-\tau_m \leq 0$, le système est décrit de la manière suivante en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t-\tau_m) \text{ pour } 0 \leq t \leq \tau_m, \tag{4.33}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} K_1 & 1+K_2 \\ 2+K_1 & 1+K_2 \end{pmatrix} x(t-\tau_m) \text{ pour } t \geq \tau_m. \tag{4.34}$$

Le système étant linéaire, il est possible de déterminer un ensemble $\mathcal{C}(S)$ positivement invariant pour le système (4.34), puis de déterminer un ensemble de conditions initiales $\mathcal{C}_I$ tel que pour toute condition initiale dans ce domaine, l'état instantané du système reste dans S.

Nous proposons également d'appliquer dans un deuxième temps la méthode proposée pour les systèmes linéaires afin de pouvoir effectuer des comparaisons.

Dans chacune de ces méthodes, nous proposons de déterminer un retour d'état statique $u(t) = Kx(t)$ et un domaine de conditions initiales $\mathcal{C}_I$ tels que le système soit pratiquement stable par rapport à $\{0\,;\, [0,\infty[\,;\, \mathcal{C}_I\,;\, I([1;1]^T,1);\, \mathcal{T}\}$, où $\mathcal{T}$ est l'ensemble des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $[0, \tau_m]$. **Le domaine S est donc choisi égal à $I([1;1]^T,1)$.**

Etant donné que l'état instantané du système restera dans $I\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},1\right)$, il suffit, pour que les contraintes sur les commandes soient respectées, que le vecteur K soit tel que ses composantes vérifient : $|K_1| + |K_2| \leq 4$.

Il nous faut dans un premier temps déterminer un ensemble de conditions initiales $\mathcal{C}_I$ tel que pour toute condition initiale dans ce domaine, l'état instantané vérifie les contraintes sur l'état : $[-1, -1]^T \leq x(t) \leq [1, 1]^T$.

V.4.1. Détermination des conditions initiales admissibles

Le système étant décrit par l'équation (4.33) entre 0 et τ_m, le but de ce paragraphe est de déterminer un ensemble de conditions initiales, aussi grand que possible, tel que l'état du système entre 0 et τ_m respecte les contraintes sur l'état. Pour cela, nous utilisons la méthode proposée dans le paragraphe II.2. de ce chapitre, développée dans la démonstration du Théorème 3.7 du chapitre précédent.

Le retard étant constant, un système majorant matriciel peut être pris en compte :
Soient M et N les matrices suivantes :

$$M = A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ et } N = |B| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système

$$\dot{y}(t) = My(t) + Ny(t - \tau(t)) \tag{4.35}$$

est un système de comparaison de (4.33), et donc si la condition initiale de (4.33) est inférieure ou égale à celle de (4.35), alors la même comparaison pourra être effectuée sur $[0, \tau_m]$.

La solution de (4.35) avec la condition initiale constante k_1 est la suivante :

$$e^{Mt}\left(k_1 + \int_0^t e^{-Ms} N k_1 ds\right) = \begin{pmatrix} k_{11}e^t + k_{12}(e^t - 1) \\ k_{11}\left(\frac{e^t}{3} - \frac{4}{3}e^{-2t} + 1\right) + k_{12}\left(\frac{e^t}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t}\right) \end{pmatrix},$$

pour tout $t \in [0 ; \tau_m]$, k_{11} et k_{12} étant les deux composantes du vecteur k_1.

Il semble raisonnable, étant donné que les contraintes sur l'état du système sont symétriques, de rechercher un domaine de conditions initiales également symétrique, c'est-à-dire d'imposer $k_{11} = k_{12}$.

La condition obtenue sur la condition initiale s'exprime alors de la manière suivante :

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{I}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2e^{\tau_m} - 1} \\ \frac{1}{2e^{\tau_m} - 1} \end{pmatrix}, 1\right).$$

Ainsi, pour toute condition initiale dans ce domaine, l'état du système est borné en valeurs absolues par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur $[0, \tau_m]$.

Remarquons que plus la valeur de τ_m est petite, plus le majorant des conditions initiales est grand(et donc moins contraignant en régulation).

Dans ces conditions, les dynamiques du système entre 0 et τ_m peuvent être bornées : $|\dot{x}(s)| \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ pour tout s dans $[0, \tau_m]$.

V.4.2. Bornitude

V.4.2.1. Utilisation du concept d'invariance positive

Cette méthode a été utilisée sur le même exemple dans [Dambrine et al. (1995 a)] et dans [Goubet-Bartholoméüs et al. (1996 a)].

Déterminons un retour d'état statique u(t) = K x(t) tel que le domaine $\mathcal{C}$(S) soit positivement invariant pour le système (4.34).

Si les dynamiques du système ne sont pas prises en compte (utilisation de conditions indépendantes du retard), les inégalités suivantes doivent être vérifiées pour que $\mathcal{C}$(S) soit positivement invariant :

$$\begin{pmatrix} 1+|K_1| & |1+K_2| \\ 1+|2+K_1| & -2+|1+K_2| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0.$$

Ces conditions ne peuvent jamais être vérifiées.

C'est pourquoi nous allons appliquer le Théorème 4.3. (paragraphe I.3.1. de ce chapitre). Le vecteur k majorant les dynamiques peut être choisi égal à $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ du fait que les valeurs absolues des composantes du vecteur état sont inférieures à 1 et que les dynamiques des conditions initiales sont majorées par $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Remarquons d'ailleurs que l'instant initial considéré ici est τ_m.

Les inégalités (4.14) sont vérifiées si :

$$\begin{pmatrix} 1+K_1 & |1+K_2| \\ |3+K_1| & -1+K_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau_m \begin{pmatrix} \mathrm{Max}\ \{0, -K_1\} & 0 \\ b(K_1) & \mathrm{Max}\ \{0, -1 - K_2\} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Max}\{6, \frac{2}{\tau_m}\} \\ \mathrm{Max}\{10, \frac{2}{\tau_m}\} \end{pmatrix} \leq 0,$$

$$\text{avec } b(K_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } K_1 < -3 \\ -2 - K_1 & \text{si } -3 \leq K_1 \leq -2 \\ 0 & \text{si } K_1 \geq -2 \end{cases}.$$

Ces inégalités sont vérifiées pour tout retard $\tau_m \leq \frac{1}{9}$ dans le cas où $K_1 = -3$ et $K_2 = -1$.

Connaissant les valeurs de K_1 et K_2, on peut même déterminer de manière plus précise la valeur maximale du retard pour lequel les conditions du Théorème 4.3 sont vérifiées; l'équation du système s'écrivant

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t-\tau_m) \text{ pour } t \geq \tau_m,$$

le vecteur k peut être choisi égal à $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Les inégalités (4.14) s'expriment alors de la manière suivante :

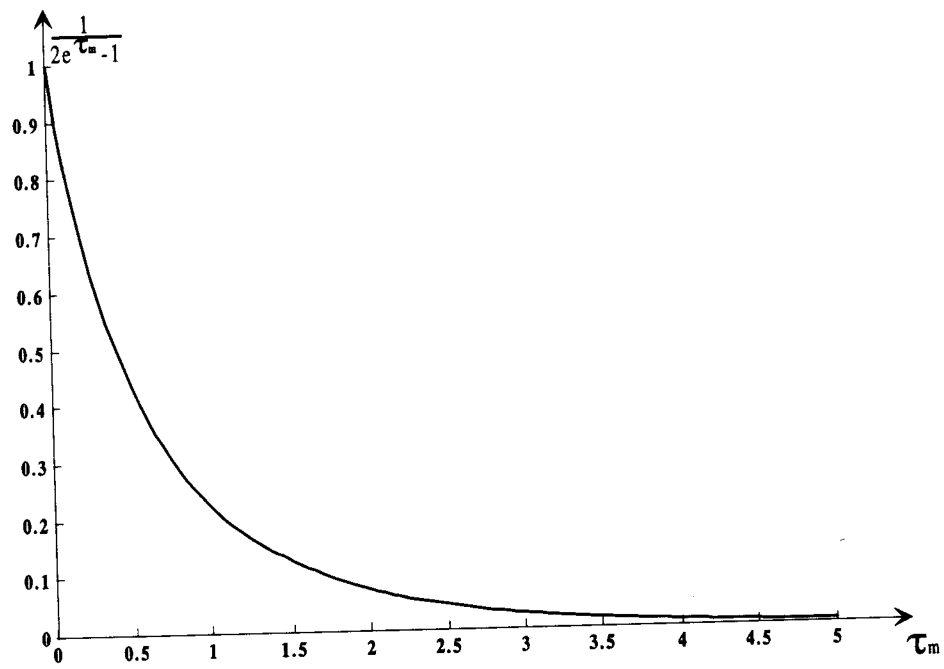
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau_m \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Max}\{4, \frac{2}{\tau_m}\} \\ \\ \mathrm{Max}\{6, \frac{2}{\tau_m}\} \end{pmatrix} \leq 0,$$

et sont vérifiées pour tout retard inférieur à $\frac{1}{6}$. Dans ces conditions, il y a également stabilité asymptotique de la solution nulle.

En conclusion, le retour d'état $u(t) = (-3 \quad -1)x(t)$ stabilise le système pour tout retard inférieur à $\frac{1}{6}$ en respectant les contraintes, quelle que soit la condition initiale dans $I\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2e^{\tau_m}-1} \\ \frac{1}{2e^{\tau_m}-1} \end{pmatrix}, 1 \right)$**.**

$\frac{1}{2e^{\tau_m}-1}$ prend les valeurs suivantes en fonction du retard :

τ_m	0	0,05	0,1	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2e^{\tau_m}-1}$	1	0,90	0,83	0,73



Ajoutons qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique de l'équilibre 0 du système en boucle fermée (méthode de [Walton et al. (1987)]) est $\tau_m \leq 0.435$.

V.4.2.2. Méthode par majoration

Nous proposons d'appliquer la seconde méthode définie dans ce chapitre, méthode applicable aux systèmes non linéaires. D'après le paragraphe II.3. de ce chapitre, le système linéaire suivant

$$\frac{d^+z}{dt}(t) = [A + \mathcal{B}]^* z(t)$$
$$+ \tau_m \mathrm{Max}\{|\mathcal{B}\mathcal{B}|;|\mathcal{B}B|\} \sup_{0\leq\lambda\leq 2\tau_m} z(t-\lambda) + \tau_m |\mathcal{B}A| \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_m} z(t-\lambda) \qquad (4.36)$$

majore l'évolution du système, les matrices A, B et $\mathcal{B}$ étant les suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};\ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} K_1 & 1+K_2 \\ 2+K_1 & 1+K_2 \end{pmatrix}.$$

En effet, si la condition intiale de ce système (4.36) est supérieure à l'évolution de $|x(t)|$ entre $-\tau_m$ et τ_m, alors z(t) restera supérieur à $|x(t)|$.

Soit d un vecteur strictement positif tel que

$$\big[[A + \mathcal{B}]^* + \tau_m [\mathrm{Max}\{|\mathcal{B}^2|;|\mathcal{B}B|\} + |\mathcal{B}A|]\big] d \leq 0 \qquad (4.37)$$

$\mathfrak{S}_2(d,1)$ est un domaine positivement invariant pour le système (4.36).

Les inégalités (4.37) sont équivalentes, dans le cas où $K_1 = -3$ et $K_2 = -1$, $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (S est choisi égal au domaine des contraintes sur l'état), à :

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \tau_m \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0.$$

Ces inégalités sont vérifiées pour tout retard inférieur à $\frac{2}{15}$. Cette condition sur le retard est plus restrictive que celle obtenue à l'aide de la première méthode. Les majorations effectuées ici sont en effet moins fines. Par contre, cette deuxième méthode a l'avantage de pouvoir s'appliquer aux systèmes non linéaires.

Conclusion

Ce dernier chapitre s'est intéressé à des problèmes plus pratiques que les chapitres précédents, tout en utilisant les résultats de ces derniers. Nous nous sommes intéressés en particulier à des systèmes non linéaires commandés, sans négliger le retard de commande dû soit au capteur, soit à l'actionneur. Des études quantitatives ont été effectuées (stabilité pratique, concept très peu étudié et pourtant intéressant; commande sous contraintes). Nous avons montré comment la détermination de systèmes majorants (en général linéaires) permettaient de résoudre une grande partie de ces problèmes. Certains des résultats dépendent de la valeur minimale prise par le retard, et non pas uniquement de la valeur maximale. Enfin, nous avons montré que l'étude de l'invariance d'un système est plus précise si les dynamiques des conditions initiales sont prises en considération.

D'autres problèmes peuvent être traités avec les mêmes outils. On peut éventuellement envisager des problèmes de commande sous contraintes à horizon fini.

Conclusion générale :

Une méthode d'étude de la stabilité des systèmes non linéaires à retards a été développée dans ce mémoire. Celle-ci permet l'étude de systèmes non linéaires présentant des incertitudes, et un retard dépendant du temps, continu par morceaux. Elle a l'avantage de pouvoir démontrer la stabilité d'une solution d'un système n'étant éventuellement stable que pour des valeurs suffisamment petites du retard. L'éventuel effet stabilisateur des termes retardés est pris en compte, ce qui n'est pas toujours le cas dans la littérature, où les critères indépendants du retard sont plus nombreux que les résultats dépendants de celui-ci.

Les méthodes proposées s'appuient sur la mise en place d'un système majorant, permettant l'étude de systèmes linéaires, linéaires incertains (chapitre 2) et non linéaires (chapitre 3) de la même manière. Les avantages de ces techniques sont les suivants :

• Les critères obtenus présentent des caractéristiques de robustesse : par rapport aux coefficients, dont on ne connaît éventuellement qu'un intervalle d'évolution, et par rapport au retard dont on ne connaît que la valeur supérieure de variation. Les critères sont soit scalaires, soit matriciels, plus précis dans le second cas.

• L'étude du système majorant permet une approche quantitative de la stabilité : détermination de domaines de stabilité, dépendant du retard maximal du système, de l'invariance positive de domaines, conduisant à une méthode de stabilisation sous contraintes. Elle permet également l'étude de concepts peu étudiés dans la littérature tels que la stabilité et la contraction pratiques.

• Enfin, l'ordre de grandeur du retard est réellement pris en compte : toutes nos méthodes tiennent compte de la valeur maximale des retards, mais certaines d'entre elles font aussi intervenir la valeur minimale. Ces bornes sont apparues dans le chapitre 2 (section IV, méthodes de réitération), mais aussi dans le dernier chapitre (paragraphe IV.2., majoration scalaire pour l'étude de la stabilité pratique avec temps d'établissement). Ceci est intéressant puisque, dans la pratique, le retard est souvent connu par son ordre de grandeur, et donc peut être minoré et majoré.

Rappelons également que dans l'étude de l'invariance positive de domaines pour des systèmes linéaires, une méthode originale de majoration des dynamiques des conditions initiales a permis d'améliorer les critères indépendants du retard précédemment établis. Elle a établi une forme de continuité entre des conditions nécessaires et suffisantes obtenues pour des systèmes sans retard et des conditions nécessaires et suffisantes indépendantes de la taille du retard.

Différentes perpectives se présentent suite à ce travail. Il sera intéressant par exemple de traiter de la stabilité de systèmes autres que ceux décrits sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t, x_t, p)\, x(t) + B(t, x_t, p)\, x(t - \tau(t)).$$

Par exemple dans le cas

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, p),$$

il faudrait faire intervenir la notion de matrice Jacobienne. On généraliserait ainsi la méthode de Kolmanovskii en établissant des critères matriciels, à la place des critères scalaires existants.

Il est également possible de généraliser l'étude à celle des systèmes à retards distribués.

L'étude des systèmes neutres est d'ores et déjà en cours [Tchangani et al. (1996 et 1997)].

Annexe 1 : Normes et mesures de matrices carrées

Soit $\| \,.\, \|$ une norme de $\mathbb{R}^n$.

La norme de matrice qui lui est associée (et qui est notée de la même façon) est définie par:

$$\| A \| = \sup_{\|x\| = 1} \| Ax \|.$$

La mesure de matrice associée est définie de la manière suivante : [Coppel (1965)]

$$\mu(A) = \lim_{h \to 0^+} (\|I + hA\| - 1)/h.$$

Pour les normes usuelles de Hölder, ces norme et mesure sont données par les formules suivantes :

Norme 1 :

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad \| A \|_1 = \mathrm{Max}_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|; \quad \mu_1(A) = \mathrm{Max}_j \Big(\mathrm{Re}(a_{jj}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|\Big).$$

Norme 2 :

$$\| x \|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}; \quad \| A \|_2 = \Big(\mathrm{Max}_i\, \lambda_i(A^T A)\Big)^{\frac{1}{2}}; \quad \mu_2(A) = \Big(\mathrm{Max}_i\, \lambda_i(A^T + A)/2\Big).$$

Norme ∞ :

$$\| x \|_\infty = \mathrm{Max}_i |x_i|; \quad \| A \|_\infty = \mathrm{Max}_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|; \quad \mu_\infty(A) = \mathrm{Max}_i \Big(\mathrm{Re}(a_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\Big).$$

Propriétés :

- $\mathrm{Re}(\lambda(A)) \leq \mu(A)$, $\lambda(A)$ étant une valeur propre quelconque de la matrice A.
- $\mu(A) \leq \| A \|$.
- $\mu(A + cI) = \mu(A) + c$, pour tout réel c.
- $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
- Pour toute valeur de $t \geq 0$, $\|\exp(At)\| \leq \exp(\mu(A)t)$ [Desoer et al. (1975)].

Annexe 2 : M-matrices

Définitions : Une matrice carrée A d'ordre n est une M-matrice si ses cœfficients hors-diagonaux sont négatifs ou nuls et si les parties réelles de ses valeurs propres sont strictement positives.

Elle est réductible s'il est possible de trouver un entier p, $0 < p < n$, tel que les éléments a_{ik} sont nuls si $1 \leq i \leq p$ et $p+1 \leq k \leq n$. Elle est dite irréductible dans le cas contraire.

Propriétés : [Fiedler et Ptåk (1962)]

Soit A est une matrice à coefficients hors-diagonaux négatifs ou nuls. Il y a alors équivalence des propositions suivantes :

- A est une M-matrice.
- Il existe un vecteur $x > 0$ tel que $Ax > 0$.
- Les mineurs principaux centrés de A sont strictement positifs.
- L'inverse A^{-1} de A existe et est positive ou nulle.
- Quel que soit le vecteur $x \neq 0$, il existe un indice k tel que $x_k y_k > 0$, $y = Ax$.
- $A = \alpha I - P$, $P \geq 0$, $\alpha > 0$, et $\alpha > \rho(P)$, $\rho(P)$ étant la racine de Perron de P (valeur propre, réelle positive, supérieure au module de l'une quelconque de ses valeurs propres).

A étant une M-matrice, elle admet une valeur propre réelle $\lambda(A) = \lambda_m(M)$ telle que la partie réelle d'une quelconque de ses valeurs propres est supérieure ou égale à $\lambda(A)$. $\lambda(A)$ est aussi le plus petit des modules des valeurs propres de A.
Si A^{-1} est irréductible, cette valeur propre est simple et on peut trouver un vecteur propre associé à composantes strictement positives.

Une autre classe (K_0) de matrices est définie dans [Fiedler et Ptåk (1962)]; elle peut être définie comme la fermeture de la classe (notée K) des M-matrices. Il s'agit des matrices à cœfficients hors-diagonaux négatifs ou nuls et à valeurs propres de parties réelles positives ou nulles. Les propriétés suivantes sont vérifiées pour une matrice B de classe K_0 :

- Les mineurs principaux de B sont positifs ou nuls.
- $B + \varepsilon I$ est une M-matrice, quel que soit $\varepsilon > 0$.
- Il existe un vecteur $x \geq 0$ tel que $Bx \geq 0$.
- Si B est irréductible, il existe un vecteur $x > 0$ tel que $Bx \geq 0$.

Annexe 3 : Démonstration de la généralisation du principe de comparaison de [Tokumaru et al. (1975)] au cas de systèmes à deux termes retardés

Rappelons tout d'abord le théorème, avant d'en donner la démonstration.

Théorème :

Soient C, D_1, D_2 des matrices réelles d'ordre n et soit x(t) une solution de l'inégalité différentielle

$$\dot{x}(t) \leq -Cx(t) + D_1 \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_1} x(t-\lambda) + D_2 \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_2} x(t-\lambda) \qquad (3)$$

Si $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, si les éléments hors-diagonaux de C sont négatifs ou nuls, et si $(C-D_1-D_2)$ est une M-matrice, alors la solution x(t) de cette inégalité est majorée par la solution de l'équation

$$\dot{z}(t) = -Cz(t) + D_1 \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_1} z(t-\lambda) + D_2 \sup_{0\leq\lambda\leq\tau_2} z(t-\lambda) \qquad (4)$$

si $x(t_0 + \theta) \leq z(t_0 + \theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$.

De plus, s'il existe un réel $\gamma > 0$ et un vecteur $k > 0$ tels que $\gamma k = (C-D_1e^{\gamma\tau_1}-D_2e^{\gamma\tau_2})k$, alors $x(t) \leq \alpha k e^{-\gamma t}$, pour $t \geq t_0$ si cette même inégalité est vérifiée sur $[t_0-\tau, t_0]$.
Dans le cas où la matrice $(C - D_1 - D_2)$ est irréductible, alors de tels réel et vecteur existent; ils sont déterminés de la manière suivante :

- γ est la solution réelle strictement positive de l'équation $\lambda_m(C-D_1e^{\gamma\tau_1}-D_2e^{\gamma\tau_2}) = \gamma$.
- k est un vecteur propre strictement positif de $(C-D_1e^{\gamma\tau_1}-D_2e^{\gamma\tau_2})$ associé à la valeur propre γ.

Démonstration :

Le lemme de Tokumaru, ainsi que le théorème de stabilité rappelés dans le premier chapitre (paragraphe II.2.2.) nous permettent d'affirmer que les solutions de l'équation différentielle (4) majorent les solutions de l'inégalité différentielle (3), et que l'équilibre 0 de (4) est asymptotiquement stable.

Quant à l'estimation du taux de convergence exponentielle, $\alpha k e^{-\gamma t}$ est une solution de l'équation différentielle (4) avec la condition initiale $\alpha k e^{-\gamma(t_0+\theta)}$, $-\tau \leq \theta \leq 0$, si et seulement si $\gamma k = (C-D_1e^{\gamma\tau_1}-D_2e^{\gamma\tau_2})k$. On en déduit facilement la première affirmation concernant la majoration exponentielle des solutions de (3).

Si $(C - D_1 - D_2)$ est une matrice irréductible, les propriétés des M-matrices (rappelées dans l'annexe 2) nous permettent de démontrer l'existence d'un réel $\gamma > 0$ et d'un vecteur $k > 0$ tels que $\gamma k = (C-D_1e^{\gamma\tau_1}-D_2e^{\gamma\tau_2})k$:
Soit A_σ la matrice définie par $A_\sigma = C - D_1e^{\sigma\tau_1} - D_2e^{\sigma\tau_2}$. A_0 est une M-matrice irréductible.
La matrice A_σ peut s'écrire $A_\sigma = bI - P_\sigma$ ($P_\sigma \geq 0$) où b est la valeur maximale des éléments diagonaux de $(C - D_1 - D_2)$.
D'après les propriétés des M-matrices, A_σ est une M-matrice si et seulement si $b > \rho(P_\sigma)$, où $\rho(P_\sigma)$ est la racine de Perron de P_σ (valeur propre positive, supérieure au module de l'une quelconque des valeurs propres de P_σ). A_σ est donc une M-matrice, de plus irréductible, pour des valeurs suffisamment faibles de σ.
$\lambda_m(A_\sigma) = b - \rho(P_\sigma)$.
Pour $\sigma_1 < \sigma_2$, $\rho(\sigma_1) \leq \rho(\sigma_2)$, et donc $\lambda_m(A_{\sigma_1}) \geq \lambda_m(A_{\sigma_2})$.
$\lambda_m(A_\sigma)$ est donc une fonction décroissante de σ, strictement positive pour $\sigma = 0$. Il existe de plus une valeur de σ à partir de laquelle $\lambda_m(A_\sigma)$ s'annule puis devient négative (A_σ n'est plus alors une M-matrice).
L'équation $\lambda_m(A_\sigma) = \sigma$ admet donc une solution strictement positive γ.
A_γ étant une M-matrice irréductible, un vecteur propre $k > 0$ de A_γ associé à la valeur propre γ peut être trouvé.
Le théorème est donc démontré.

Annexe 4 : Articles publiés

Cette annexe comprend quelques articles publiés.

Delay-dependent stability domains of nonlinear time-varying delay systems

by A. Goubet-Bartholoméüs, M. Dambrine, J.P. Richard

LAIL - URA CNRS D1440,
Ecole Centrale de Lille, Cité Scientifique
BP 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cédex - FRANCE
e-mail : goubet@ec-lille.fr

ABSTRACT

This paper gives original conditions on robust stability and time-response of time-varying delay systems. These conditions depend on the maximum value of the delay, and are valid for nonlinear models. Stability domains and exponential rates of convergence are estimated in the same way.

1 INTRODUCTION

Nonlinear time-delay models often occur in industrial processes : on the one hand, the time-delay phenomenon appears as soon as material or information transport lags cannot be neglected, in particular when the velocity performances of closed loop controlled systems are expected to increase. On the other hand, nonlinear phenomena have to be taken into account if the process is worked in wide operating conditions.

Many studies have been devoted to the control of time-delay systems, and in particular to the basic question of their closed-loop stability properties (see a review in [6]). Several articles have dealt with the stability study of linear uncertain systems [2, 3, 7, 13 for example]. However, only some of them give workable results which can be applied to nonlinear systems [see for instance 5, 8, 11]. Even fewer give results which are dependent on the delay of the system.
Moreover they usually deal with the *qualitative* question of whether an equilibrium point is asymptotically stable, or not. Obviously, this is a necessary first step in the validation of a control law, but in practice, it is not a sufficient result, since it is also of importance to lead a *quantitative* study, which means to calculate, or estimate :

1- the (asymptotic) stability domain, which is the set of all initial conditions (which, for delay systems, are functions) that will make the state converge towards the equilibrium; this is necessary to provide the admissible changes of operating points, or to determine whether bounded additive perturbations on the state may destabilize the closed loop system;

2- the admissible bounds on the structural perturbations (on the model), which give conditions of robust stability;

3- the exponential rate of convergence, which guarantees velocity of the final controlled process.

Only a few studies have considered both these qualitative and quantitative questions for time-delay systems : the authors ([5]) dealt with the first point for nonlinear models, but the given conditions are independent of the delay (i.o.d.); if they are consequently very robust, they may turn out to be rather conservative for processes with small delays.
They also recently considered point 1 [12] within the framework of the constrained stabilization of linear time-delay systems.
Among others, Niculescu et al. ([7]), Su et al. ([3]) and Wang et al. ([2]) provided delay-dependent conditions for points 2 and 3, in the case of linear uncertain systems.
The present paper aims to answer the three points by studying the general problem of the local stability of nonlinear systems, providing delay-dependent estimates of the (asymptotic) stability domain (i.e. sets included in the (asymptotic) stability domain of the zero solution), and a convergence rate.
The different results take into account the possible stabilizing effects of delayed terms. To this end, a special decomposition of the delayed matrix is done.

The systems studied here are of the following form :

$$\dot{x}(t) = A(t, x_t, .)\, x(t) + B(t, x_t, .)\, x(t-\tau(t)) \quad \text{for } t \geq t_0 \text{ and } x(t) \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$x_0(s) = \varphi(s) \text{ for } s \in \{t \leq t_0 : \exists\, t_1 \geq t_0,\, t = t_1 - \tau(t_1)\}.$$

The following hypotheses are assumed :
hypotheses H :
-the delay $\tau(t)$, which depends on time only, has an upper limit τ_m; $\tau(t)$ may be known or not;
-the matrices $A(t, x_t, .)$ and $B(t, x_t, .)$ may depend on time, on the state function x_t (see the notations) and on a disturbance parameter (.) belonging to a domain D_p such that the coefficients of the matrices are bounded as soon as x_t is bounded;
-$\tau(t)$, $A(t, x_t, .)$ and $B(t, x_t, .)$ are such that the system (1) admits a unique continuous solution ($t \geq t_0$), as soon as the initial condition φ is continuous.

After a brief presentation of the notations, the next section deals with the main theorems, giving local stability conditions, exponential rates of convergence and estimates of stability domains, taking into account the maximum value τ_m of the delay.
The proof of the theorems are lead using a comparison theorem and special vector Lyapunov functions.
The stability (respectively asymptotic stability) of a system is proved if a linear system, the construction of which is explained, is stable (respectively asymptotically stable).
An illustrative example is given in the third section.

Notations :
The entries of the matrices and vectors appearing in this paper are real, and the elements of a matrix X and a vector x are respectively written X_{ij} and x_i. Moreover, $|X|_{ij} = |X_{ij}|$, $|x|_i = |x_i|$. The matrix X is sometimes written (X_{ij}).

Let x(t) satisfy the equation (1). Then x(t) is called the instantaneous state of the system. The state of the system is the function x_t defined by $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau_m , 0]$. The initial state is x_{t_0}, where t_0 is the initial time.
The symbol ".", appearing as a parameter of a matrix, denotes any unknown perturbation.
0 is either the zero element of $\mathbb{R}$ or the vector of $\mathbb{R}^n$ whose components are zero.
With the matrix $A(d) = (A_{ij}(d))$, where d is any parameter, two matrices are associated: $\underset{d\in D}{\mathrm{Sup}}\,\{A\} = (\underset{d\in D}{\mathrm{Sup}}\,\{A_{ij}(d)\})$ and $A^*(d) = (A^*_{ij}(d))$ which has the following entries:
$A^*_{ii}(d) = A_{ii}(d)$
$A^*_{ij}(d) = |A_{ij}(d)|$ if $i \neq j$.
$A > B$ (respectively $A \geq B$) has to be understood as n^2 inequalities $A_{ij} > B_{ij}$ (resp $A_{ij} \geq B_{ij}$).
If P is the opposite of an M_matrix (see Appendix 2 for a definition), then $\lambda(P)$ is its eigenvalue which has the maximum real part ($\lambda(P)$ is real [10]). Moreover, if P is irreducible, an eigenvector of P associated with the eigenvalue $\lambda(P)$ may be chosen with positive components [10]. Such an eigenvector is noted k(P).
$\|\ .\ \|$ denotes either any scalar norm of a vector or the induced norm of a matrix, and $\mu(\ .\ )$ the induced measure of a matrix [9].
D is a connected domain of $\mathbb{R}^n$ containing a neighbourhood of 0.
$\mathcal{C}(\Omega)$ denotes the set of all continuous functions from $[-\tau_m, 0]$ to $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
The sets $I(d,\alpha)$, $\mathfrak{S}(d,\alpha)$, and $\mathfrak{S}_2(d,\alpha)$ are defined by :
$I(d,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \alpha\, d\}$,
$\mathfrak{S}(d,\alpha) = \mathcal{C}(I(d,\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : |\varphi(s)| \leq \alpha\ d,\ \forall\ s \in [-\tau_m, 0]\}$,
$\mathfrak{S}_2(d,\alpha) = \{\varphi : [\ -2\tau_m\ , 0\ ] \to \mathbb{R}^n : |\varphi(s)| \leq \alpha\ d,\ \forall\ s \in [-2\tau_m, 0]\}$,
where d is a vector with positive components, and α is a positive constant.
$I_N(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \alpha\ \}$,
$\mathfrak{S}_N(\alpha) = \mathcal{C}(I_N(\alpha)) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi(s)\| \leq \alpha, \forall s \in [-\tau_m, 0]\}$.
If χ is a real, $\mathrm{sgn}(\chi)$ is defined as : $\mathrm{sgn}(\chi) = 1$ iff $\chi \geq 0$; $\mathrm{sgn}(\chi) = -1$ iff $\chi < 0$.

2 MAIN THEOREMS

The form of the system under consideration is given by the equations (1).
Define P_σ as the matrix :

$$P_\sigma = \mathrm{Sup}\{\ [A(t, x_t,.) + B'(t, x_t,.)]^*\ \} + e^{\sigma\tau_m}\,\mathrm{Sup}\{\ \int_{t-\tau(t)}^{t} |B'(t, x_t,.)\ A(s, x_s,.)|ds + |B''(t, x_t,.)|\ \} + e^{2\sigma\tau_m}\,\mathrm{Sup}\{\ \int_{t-\tau(t)}^{t} |B'(t, x_t, .)\ B(s, x_s, .)|ds\ \},$$

where the suprema are calculated for $t \geq t_0 + \tau_m$, $x(t + \lambda) \in D$, $\lambda \in [-2\tau_m, 0]$ and when the perturbations (.) remain in D_p.
$B'(t, x_t, .)$ and $B''(t, x_t, .)$ verify :

$$B(t, x_t, .) = B'(t, x_t, .) + B''(t, x_t, .).$$

P_0 is the value of P_σ for $\sigma = 0$.

Let us denote $M = \mathrm{Sup}\,\{(A(t, x_t, .))^*\}$, $N = \mathrm{Sup}\,\{|B(t, x_t, .)|\}$, and $m = \mathrm{Sup}\,\{\mu(A(t, x_t, .))\}$, $b = \mathrm{Sup}\,\{\|B(t, x_t, .)\|\}$. These suprema are this time calculated for $t_0 \leq t \leq t_0+\tau_m$, $x_t \in \mathcal{C}(D)$, and when the perturbations take all their admissible values.

The three following theorems state conditions of stability for the system (1) and give an exponential rate of convergence as well as estimates of the (asymptotic) stability domain of the equilibrium point.

__Theorem 1:__ Asymptotic stability
On hypotheses H, if P_0 is the opposite of an M_matrix, then the equilibrium 0 of the system (1) is asymptotically stable. ΔΔΔ

__Theorem 2 :__ Exponential rate
If the conditions of Theorem 1 are satisfied and if moreover P_0 is irreducible, then $|x(t)| \leq \alpha k(P_\gamma).e^{-\gamma t}$ for $t \geq t_0 + \tau_m$, as soon as $|x(t_0 + \theta)| \leq \alpha k(P_\gamma).e^{-\gamma(t_0+\theta)}$, $\theta \in [\ -\tau_m\ , \tau_m\ ]$, where α is any positive real number such that $\alpha k(P_\gamma).e^{-\gamma(t_0-\tau_m)} \in D$ and γ is the real positive solution of the equation $-\lambda(P_\gamma) = \gamma$. ΔΔΔ

__Theorem 3 :__ Stability domains
Suppose the hypotheses of Theorem 1 are valid, and let d be a positive vector such that $P_0 d \leq 0$, and $I(d,1) \subseteq D$.
An estimate of the stability domain may be found as follows :
__Case 1__ : $\tau(t)$ is constant and known ($\tau(t) = \tau_m$).
Let k_1 be a positive real vector of $\mathbb{R}^n$ satisfying the following condition :
$e^{M(t-t_0)}\left(k_1 + \int_0^{(t-t_0)} e^{-Ms} N k_1 ds\right) \leq d$, $t \in [t_0\ ;\ t_0 + \tau_m]$.
The domain $\mathfrak{S}(k_1,1)$ is an estimation of the stability domain of the system.
__Case 2 :__ $\tau(t) \leq \tau_m$ and a vector $k_2 > 0$ such that $(M + N)\ k_2 \leq 0$ may be found.
Let α be a positive real such that $\alpha k_2 \leq d$.
Then $\mathfrak{S}(\alpha k_2,1)$ is an estimation of the stability domain of the system.
__Case 3 :__ cases 1 and 2 do not hold, and $-m > b$.
Let β be the unique positive solution of the equation :

$$\beta + m + b\, e^{\beta\tau_m} = 0$$

and ω_1 be the greatest real positive number such that $I_N(\omega_1 e^{-\beta(t_0 - \tau_m)}) \subseteq D$.
Then $\mathfrak{S}_N(\omega_1 e^{-\beta(t_0 + \tau_m)})$ is an estimate of the stability domain of the equilibrium point.
__Case 4 :__ cases 1 and 2 do not hold, and $-m \leq b$.
Let δ be the unique positive solution of the equation :

$$\delta - m - b\, e^{-\delta\tau_0} = 0,$$

where τ_0 is the minimum possible value of the delay.
Let ω_2 be the greatest real positive number such tha $I_N(\omega_2 e^{\delta(t_0 + \tau_m)}) \subseteq D$.
Then $\mathfrak{S}_N(\omega_2 e^{\delta(t_0 - \tau_m)})$ is an estimate of the stability domai of the equilibrium point. ΔΔ

__Corollary :__ Simplified statement
On the hypotheses H, if one of the following two matrices

$$\mathrm{Sup}\{(A(t, x_t,.) + B'(t, x_t,.))^*\} + \tau_m\,\mathrm{Sup}\{\underset{0\leq\lambda\leq\tau_m}{\mathrm{Sup}}\,\{|B'(t, x_t,.)\ A(t-\lambda, x_{t-\lambda},.)|\} + |B''(t, x_t,.)|\}$$

$$+ \tau_m \mathrm{Sup}\{ \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} \{ |B'(t, x_t, .)\, B(t-\lambda, x_{t-\lambda},.)| \} \}.$$

or

$$\mathrm{Sup}\{ (A(t, x_t,.) + B'(t, x_t,.))^* \}$$
$$+ \tau_m \mathrm{Sup}\{ \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} \{ |B'(t, x_t,.)\, A(t-\lambda, x_{t-\lambda},.)| + |B'(t, x_t, .)\, B(t-\lambda, x_{t-\lambda},.)| \} + |B''(t, x_t,.)| \}.$$

is the opposite of an M_matrix, then the zero solution of (1) is asymptotically stable. The exponential rate of convergence and the estimates of the stability domain can also be calculated using these simplifications. ΔΔΔ

__Proofs :__ The proofs of the theorems 1, 2 and 3 can be found in the Appendix 1.

__Remarks__: 1) The given theorems may seem complicated; in fact, they are rather easy to use, as shown in the examples.

2) The entries of the matrices P_σ depend on the value of the supremum τ_m of the delay. The stability criterion (Theorem 1) is thus a delay-dependent one.

3) The efficiency of these theorems depends on the decomposition of the matrix $B(t, x_t, .)$:
$B'(t, x_t, .)$ must be chosen such that $\mathrm{Sup}\{(A(t, x_t, .) + B'(t, x_t, .))^*\}$ is the opposite of an M-matrix.
Moreover, the criterion is all the more likely to hold that $\mathrm{Sup}\ \{(A(t, x_t, .) + B'(t, x_t, .))^*\}$ has small off-diagonal elements compared to the absolute values of the diagonal ones, and that

$$\mathrm{Sup}\{ \int_{t-\tau(t)}^{t} |B'(t, x_t,.)\, A(s, x_s,.)| ds + |B''(t, x_t,.)| \}$$
$$+ \mathrm{Sup}\{ \int_{t-\tau(t)}^{t} |B'(t, x_t, .)\, B(s, x_s, .)| ds \}$$

is a small matrix. A compromise has thus to be found.
The theorems take into account the fact that delayed terms may stabilize a system [8]. Theorem 1 may hold even if A is unstable. Indeed, if $B(t, x_t, .)$ has stabilizing elements (negative diagonal elements with large absolute values), $B'(t, x_t, .)$ may be chosen such that $\mathrm{Sup}\ \{(A(t, x_t, .) + B'(t, x_t, .))^*\}$ is the opposite of an M_matrix.

4) The theorems can easily be extended to the study of systems with multiple time-delays.

5) If P_0 is not irreducible, a non-negative vector $k(P_\gamma)$ can be found but it may happen that some of its components cancel out. The exponential rate of convergence (Theorem 2) is then not necessarily valid for each component of the state.

6) If the inequality $P_0 d \le 0$ is strict, i.e. $P_0 d<0$, then the set which is found with the above method (Theorem 3) is an estimation of the *asymptotic* stability domain.

In each case of Theorem 3, different estimations of the stability domain may be found. In any of the four cases, a union of such sets is also an estimate of the stability domain.

__Remark :__ If M + N is the opposite of an irreducible M_matrix, then we can find $k > 0$ such that $(M + N)\, k \le 0$ and so the results of the second case of Theorem 3 can be used.

3 APPLICATION

Let us consider the following system, with unknown varying parameters :
$\dot{x}(t) = A(t, .)\, x(t) + B(t, x_t, .)\, x(t - \tau(t))$,
$x(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-\tau_m , 0]$,

$$\text{where } A(t, .) = \begin{bmatrix} -2 + \alpha_1(t, .) & 0 \\ 0 & -1 + \alpha_2(t, .) \end{bmatrix},$$

$$B(t, x_t, .) = \begin{bmatrix} -1 + \beta_1 g(t,x_2(t)) & 0 \\ \varepsilon & -1 + \beta_2(t, .) \end{bmatrix}.$$

$|\alpha_1(t, .)| \le 1.6$; $|\beta_1| \le 0.1$; $|\alpha_2(t, .)| \le 0.05$; $|\beta_2(t, .)| \le 0.3$; $|\varepsilon| \le 1$.

Two cases are considered for the expression of $g(t,x_2(t))$:
• __First application__ : linear time-varying system
$g(t,x_2(t)) = \cos t$
This example is similar to the one developed by Su et al. [3] and is exactly the same as the example given by Niculescu et al. [7] and Li et al. [13], if $\alpha_1(t, .) = \alpha_1\cos(t)$, $\alpha_2(t, .) = \alpha_2\sin(t)$, $\beta_2(t, .) = \beta_2\cos(t)$. In these last papers, the zero solution was proved to be asymptotically stable for any *constant* time-delay $\tau_m < 0.1036$ and $\tau_m < 0{,}2013$ respectively.

In order to apply our results, let us consider the following decomposition :

$$B'(t, x_t, .) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{and } B''(t, x_t, .) = \begin{bmatrix} \beta_1 \cos t & 0 \\ \varepsilon & \beta_2(t, .) \end{bmatrix}.$$

Using Theorem 1, it can be proved that if

$$\begin{bmatrix} -1.3+4.7\tau_m & 0 \\ 1+\tau_m & -1.65+2.35\tau_m \end{bmatrix}$$ is the opposite of an M_matrix, then the zero solution of (1) is asymptotically stable.
This condition is equivalent to the inequality $\tau_m < 0.276$.
So the system is asymptotically stable for every *time-varying* delay $\tau(t) < 0.276$.

• __Second application :__ nonlinear system
$|g(t, x_2(t))| \le |x_2(t)|$
The asymptotic stability of the system is studied here and estimates of the stability domain are given. They depend on the maximum value of the delay.
The decomposition of the matrix $B(t, x_t, .)$ is similar to that of the first case :

$$B'(t, x_t, .) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{and } B''(t, x_t, .) = \begin{bmatrix} \beta_1 g(t,x_2(t)) & 0 \\ \varepsilon & \beta_2(t, .) \end{bmatrix}.$$

$D = D_\psi = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| \le \psi\}$.
The matrix P_0 that is obtained is :

$$P_0 = \begin{bmatrix} -1.4+0.1\psi+\tau_m(4.6+0.1\psi) & 0 \\ 1+\tau_m & -1.65+2.35\tau_m \end{bmatrix}.$$

Considering any value of τ_m less than 0.304, there exists a domain D_ψ on which P_0 is the opposite of an M_matrix. ψ must verify : $\psi < \frac{14-46\tau_m}{1+\tau_m}$

ψ decreases as τ_m increases, thus the greater the delay, the smaller the domain in which the stability can be studied.

The vector $d = \begin{bmatrix} \frac{1.65-2.35\tau_m}{1+\tau_m}\psi \\ \psi \end{bmatrix}$ satisfies the constraints of Theorem 3.

If the delay is constant, the first procedure of Theorem 3 can be used. The determination of the greater vector k satisfying $e^{Mt}\left(k + \int_0^t e^{-Ms}Nkds\right) \leq d$, $t \in [0; \tau_m]$, leads to the following result (Fig. 1), representing estimates of the stability domain with respect to the delay.

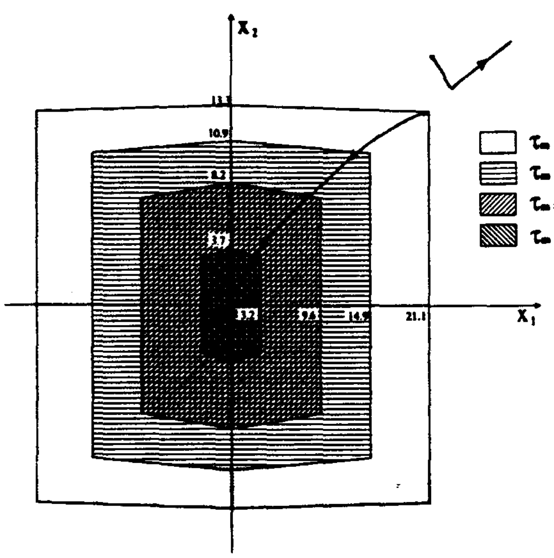


Fig.1: Estimates of the stability domain of the equilibrium point 0 with respect to the delay τ_m of the system (case of a constant delay).

Two simulation are also shown in the above figure (constant initial function).

Estimates of the stability domains have also been calculated considering a time-varying delay $\tau_0 \leq \tau(t) \leq \tau_m$. M + N is not the opposite of an M_matrix. The fourth case of Theorem 3 has been considered. Using the norm $\| x \| = \sup \{ |x_1| ; |x_2| \}$, the following results have been obtained :

m = -0.4; b = 2.3.

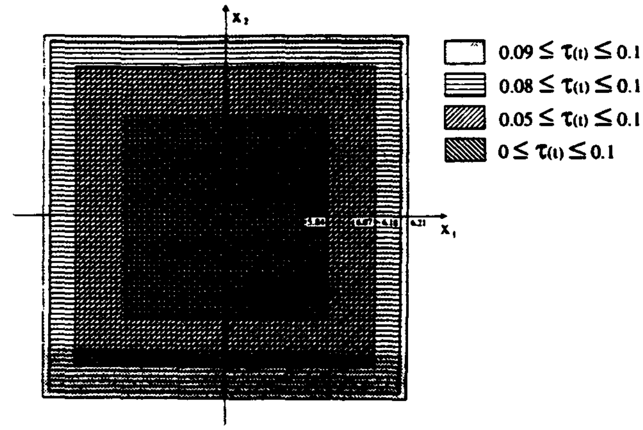


Fig.2 : Estimates of the stability domain of the equilibrium point 0 with respect to the minimum and maximum bounds of the varying delay $\tau(t)$.

4 CONCLUSION

This paper has stated stability criteria that have been compared to others from the recent literature. The main originality of the results is the delay-dependent estimation of stability domains. The knowledge of the size of the stability domains with respect to the size of the delay allows for the determination of admissible perturbations on the initial states. The greater the delay, the smaller the allowed perturbations. This dependence on the delay is an originality of this article.

Other applications of these results are the stabilization of unstable systems by means of delayed controllers [8] and the constrained control of time-delay systems : the knowledge of estimates of the stability domains permits the determination of initial conditions which guarantee that the state and the inputs of the system will remain in previously given domains of constraints.

APPENDIX 1
Proof of the theorems

First, let us recall the notion of comparison system which is used in these proofs.

A dynamic system (A) is said to be a comparison system of a dynamic system (B) with regard to (asymptotic) stability if the (asymptotic) stability of the zero solution of (A) implies the (asymptotic) stability of the zero solution of (B).

Proof of Theorems 1 and 2 :

The equation of the system can be rewritten in the following way, whenever $t \geq t_0 + \tau_m$:

$$\dot{x}(t) = \left(A(t, x_t, .)+B'(t, x_t, .)\right) x(t)$$

$$- B'(t, x_t, .) \int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s)ds + B''(t, x_t, .)\, x(t-\tau(t)).$$

Replacing $\dot{x}(s)$ by its value
$A(s, x_s, .)\, x(s) + B(s, x_s, .)\, x(s - \tau(s))$,
it yields, as

$$\frac{d^+|x_i|}{dt}(t) = \frac{d^+x_i}{dt}(t).\mathrm{sgn}(x_i(t)),$$

$$\frac{d^+|x_i|}{dt}(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(A(t, x_t, .)+B'(t, x_t, .)\right)_{ik} x_k(t)\ \mathrm{sgn}(x_i(t))$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(B'(t, x_t, .))_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t}\sum_{j=1}^{n}(A(s, x_s, .))_{kj}x_j(s)ds\ \ \mathrm{sgn}(x_i(t))$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(B'(t,x_t,.))_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t}\sum_{j=1}^{n}(B(s,x_s,.))_{kj}x_j(s-\tau(s))ds\ \ \mathrm{sgn}(x_i(t))$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(B''(t, x_t, .))_{ij}\, x_j(t-\tau(t))\ \mathrm{sgn}(x_i(t)).$$

Using the same kind of overvaluation as in [4] and [5], this equality yields:

$$\frac{d^+|x_i|}{dt}(t) \le \sum_{k=1}^{n}\left(A(t, x_t, .)+B'(t, x_t, .)\right)^*_{ik}|x_k(t)|$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}\Big|\sum_{k=1}^{n}B'(t,x_t,.)_{ik}A(s, x_s, .)_{kj}\Big|ds + |B''(t, x_t, .)|_{ij}\Big]\sup_{0\le\lambda\le\tau_m}|x_k(t-\lambda)|$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}\Big|\sum_{k=1}^{n}B'(t, x_t, .)_{ik}B(s, x_s, .)_{kj}\Big|ds\Big]\sup_{0\le\lambda\le2\tau_m}|x_k(t-\lambda)|.$$

So
$$\frac{d^+|x|}{dt}(t) \le [(A(t, x_t, .) + B'(t, x_t, .))^*]\, |x(t)|$$

$$+\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t, x_t,.)\, A(s, x_s,.)|ds + |B''(t, x_t,.)|\Big]\sup_{0\le\lambda\le\tau_m}|x(t-\lambda)|$$

$$+\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t, x_t, .)\, B(s, x_s, .)|ds\sup_{0\le\lambda\le2\tau_m}|x(t-\lambda)|.$$

$$\frac{d|x|}{dt}(t) \le \mathrm{Sup}[(A(t, x_t, .) + B'(t, x_t, .))^*]\, |x(t)|$$

$$+ \mathrm{Sup}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t,x_t,.)A(s,x_s,.)|ds+|B''(t, x_t,.)|\Big]\sup_{0\le\lambda\le\tau_m}|x(t-\lambda)|$$

$$+ \mathrm{Sup}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t, x_t,.)\, B(s, x_s,.)|ds\Big]\sup_{0\le\lambda\le2\tau_m}|x(t-\lambda)| \qquad (2)$$

where the suprema are calculated for $t \ge t_0 + \tau_m$, $x(t - \lambda)$ in D whenever $0 \le \lambda \le 2\tau_m$, and when the unknown parameters vary in their domain.
The above inequality is valid as soon as x(t) remains in D.
Let us now consider the following equation :

$$\frac{dz}{dt}(t) = \mathrm{Sup}[(A(t, x_t, .) + B'(t, x_t, .))^*]\, z(t)$$

$$+\mathrm{Sup}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t,x_t,.)A(s,x_s,.)|ds+|B''(t,x_t,.)|\Big]\sup_{0\le\lambda\le\tau_m}z(t-\lambda)$$

$$+ \mathrm{Sup}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t, x_t,.)\, B(s, x_s,.)|ds\Big]\sup_{0\le\lambda\le2\tau_m}z(t-\lambda) \qquad (3)$$

Using the comparison theorem 1 of Tokumaru et al. [1], it is easily proved that if $z(t) \ge |x(t)|$, $x(t) \in D$, whenever $t_0 - \tau_m \le t \le t_0 + \tau_m$, then $z(t) \ge |x(t)|$ for greater values of t, as long as x(t) remains in D.
A generalization of the second theorem of [1] to the case of a system with two delays permits the proof of the Theorems 1 and 2 of this article.

Proof of Theorem 3 :
Let us consider the equation (3).
Let us first prove that the set $\mathfrak{I}_2(d,1)$ is a positively invariant set of this system.
If it was not the case, it would be possible to find an initial function $z_{t_0+\tau_m}$ in $\mathfrak{I}_2(d,1)$ such that there exist a time $t_0 + \tau_m + t'$ $(t' > 0)$, two positive reals $\varepsilon > 0$ and $\alpha > 1$, and an integer between 1 and n, satisfying :

$$\forall\ t_0 - \tau_m \le t \le t_0 + \tau_m + t',\ |z(t)| \le d,$$

$$\forall\ t_0 + \tau_m + t' \le t \le t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon,\ |z(t)| \le \alpha d \qquad (4)$$

$$\text{and either}\begin{cases} z_i(t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon) = \alpha d_i \\ \dot{z}_i(t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon) > 0 \end{cases}, \qquad (5)$$

$$\text{or}\quad\begin{cases} z_i(t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon) = -\alpha d_i \\ \dot{z}_i(t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon) < 0. \end{cases}$$

Let us consider the first possibility (for the second one the steps are similar).
As equation (3) holds,

$$\dot{z}_i(t_0+\tau_m+t'+\varepsilon)=\mathrm{Sup}[(A(t,x_t,.)+B'(t,x_t,.))_{ii}{}^*]z_i(t_0+\tau_m+t'+\varepsilon)$$

$$+\sum_{j\ne i}\left(\mathrm{Sup}[(A(t, x_t, .)+B'(t, x_t, .))_{ij}{}^*]\right) z_j(t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Sup}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t, x_t,.)\, A(s, x_s,.)|_{ij}ds + |B''(t, x_t,.)|_{ij}\Big]\sup_{0\le\lambda\le\tau_m}z_j(t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon - \lambda)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Sup}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t,x_t,.)B(s,x_s,.)|_{ij}ds\Big]\sup_{0\le\lambda\le2\tau_m}z_j(t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon - \lambda).$$

Because of (4) and the equality of (5),

$$\dot{z}_i(t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon) \le \mathrm{Sup}[(A(t, x_t, .) + B'(t, x_t, .))_{ii}{}^*]\, \alpha d_i$$

$$+\sum_{j\ne i}\left(\mathrm{Sup}[(A(t, x_t, .) + B'(t, x_t, .))_{ij}{}^*]\right)\alpha d_j$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Sup}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t, x_t,.)\, A(s, x_s,.)|_{ij}ds + |B''(t, x_t,.)|_{ij}\Big]\alpha d_j$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Sup}\Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}|B'(t, x_t,.)\, B(s, x_s,.)|_{ij}ds\Big]\alpha d_j \le 0,$$

because $P_0 d \le 0$.
This inequality is in contradiction with the inequality $\dot{z}_i(t_0 + \tau_m + t' + \varepsilon) > 0$.
These considerations prove the positive invariance of $\mathfrak{I}_2(d,1)$.

As a consequence, as $I(d,1) \subseteq D$, $|x(t)| \le d$ for $t \ge t_0 + \tau_m$ as soon as the same inequality is valid for $t_0 - \tau_m \le t \le t_0 + \tau_m$.

This fact allows us to determine estimations of the stability domain of the equilibrium of (1).

In cases 1 and 2, the following overvaluing system is studied:

$$\dot{y}(t) = My(t) + Ny(t - \tau(t)) \quad (6)$$

(see [4] for the determination of this comparison system).

If $\tau(t) = \tau_m$ (case 1) then the solution of this comparison system on $[t_0, t_0 + \tau_m]$ is :

$y(t) = e^{M(t-t_0)}\left(k_1 + \int_0^{(t-t_0)} e^{-Ms} N k_1 ds\right)$ if y(t) is constant and equal to k_1 when $t \in [t_0 - \tau_m, t_0]$ (k_1 is defined in case 1 of Theorem 3).

$|x(t)| \leq y(t)$, $t \geq t_0$, whenever $|x(t)| \leq y(t)$ for $t \in [t_0 - \tau_m, t_0]$.

So if $x_{t_0} \in \mathcal{S}(k_1, 1)$,

then $|x(t)| \leq e^{M(t-t_0)}\left(k_1 + \int_0^{(t-t_0)} e^{-Ms} N k_1 ds\right)$, $t \in [t_0, t_0 + \tau_m]$,

and so $|x(\theta)| \leq d$, $\theta \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$,
which implies that $|x(t)| \leq d$, $t \geq t_0 + \tau_m$.
As k_1 was chosen such that $I(k_1, 1)$ is included in D, the conclusion is immediate.

In the second case, as $\mathcal{S}(k_2, 1)$ is an invariant set of (6) (see [4]), the same reasoning can be repeated.

In the third and fourth cases, the scalar system

$$\dot{w}(t) = m.w(t) + b \sup_{\tau_0 \leq \theta \leq \tau_m} w(t - \theta) \quad (7)$$

gives solutions that are greater than $\|x(t)\|$ if this is true on the interval $[t_0 - \tau_m, t_0]$.

If $-m > b$, $\omega_1 e^{-\beta(t - t_0)}$ is a solution of the equation (7).
If $-m \leq b$, the exponential solution of the scalar equation (7) is increasing ($\omega_2 e^{\delta(t - t_0)}$, $\delta > 0$).
The proof is similar to the above one (cases 1 and 2).

APPENDIX 2
Definition and properties of -M_matrices

A matrix M is the opposite of an M_matrix if it is a Hurwitz matrix with non-negative off-diagonal elements.
If M is the opposite of an M-matrix, then the following statements hold :

- The real parts of the eigenvalues of M are negative.
- M admits a real negative eigenvalue $\lambda(M)$, called the importance eigenvalue, such that for any eigenvalue λ_i of M, $Re(\lambda_i) \leq \lambda(M)$.

There is a non-negative eigenvector k(M) associated with $\lambda(M)$, so called importance vector. Moreover if M is irreducible then the components of k(M) are strictly positive.

- M verifies the Kotelyanski conditions, i.e. its successive principal minors are sign-alternate (the first one being negative).

For more details about M_matrices, see [10].

REFERENCES:

[1] H. Tokumaru; N. Adachi; T. Amemyia, "Macroscopic stability of interconnected systems", *6-th IFAC Congress*, ID44.4, 1975.

[2] S.S. Wang; B.-S. Chen; T.-P. Lin, "Robust stability of uncertain time-delay systems", *Int.J.Control*, Vol.46, N° 5, 1987, pp. 963-976.

[3] T.-J. Su; C.-G. Huang, "Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, N° 10, 1992, pp. 1656-1659.

[4] M. Dambrine; J.-P. Richard, "Stability Analysis of Time-Delay Systems", *Dynamic Systems and Applications*, Vol. 2, 1993, pp. 405-414.

[5] M. Dambrine; J.-P. Richard, "Stability and Stability Domains Analysis for Nonlinear Differential-Difference Equations", *Dynamic Systems and Applications*, Vol.3, N° 3, 1994, pp. 369-378.

[6] M. Dambrine, "Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards", Thesis, University of Lille I, France, N° 1386, Oct. 1994.

[7] S.-I. Niculescu; C.E. de Souza; J.-M. Dion; L. Dugard, "Robust Stability and Stabilization for Uncertain Linear Systems with State Delay: Single Delay Case (I)", *Proc. Workshop on Robust Control Design*, Rio de Janeiro, Brazil, 1994, pp. 469-474.

[8] A. Goubet; M. Dambrine; J.-P. Richard, "An extension of stability criteria for linear and nonlinear time delay systems", *Proceedings of the IFAC Conference System Structure and Control*, Nantes France, 1995, pp. 278-283.

[9] C.A. Desoer; M. Vidyasagar, "Feedback Systems : Input-Output Properties", Academic Press, New York, 1995.

[10] M. Fiedler; V. Pták, "On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors", *Czech. Math. J.*, Vol.12, N°.87, 1962, pp.382-400.

[11] V.B. Kolmanovskii, "Applications of Differential Inequalities for Stability of some Functional Differential Equations", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, Vol. 25, N° 9-10, 1995, pp.1017-1028.

[12] M. Dambrine; A. Goubet; J.-P. Richard, "New results on contrained stabilizing control of time-delay systems", *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, 1995, pp. 2052-2057.

[13] X. Li; C.E. de Souza, "LMI Approach to Delay-Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems", *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA 1995, pp. 3614-3619.

Proceedings of the 34th
Conference on Decision & Contro
New Orleans, LA - December 199

New results on constrained stabilizing control of time-delay systems

M. DAMBRINE, A. GOUBET and J. P. RICHARD

LAIL -URA CNRS D 1440, Ecole Centrale de Lille
BP 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex - FRANCE
E-mail : dambrine@ec-lille.fr

Abstract: The problem of stabilization under state and control linear constraints is considered for linear time-delay systems. The proposed approach is based on necessary and sufficient conditions for the positive invariance of a realistic set of initial states. These conditions take into account the dynamics of the system and the size of the delay. Then the obtained results are applied to the design of a stabilizing controller with respect to the given constraints. The results in this paper can be used for both memoryless or delayed, controlled systems. The efficiency of the results is illustrated by an example.

I. INTRODUCTION

In practical control engineering, the design of a controller must take into account the fact that control inputs and state variables are constrained to belong to bounded domains. These constraints are generally due to safety considerations or to physical limitations such as, for instance, limitations of the amplitudes or of the response velocity of the actuators.

In this paper, the design of constrained regulators is studied for systems modelled by time-delay equations, and more precisely for systems described by linear differential-difference equations.

The approach proposed in this paper is based on the property of positive invariance of a new class of state sets. It follows the methods now developed for a wide variety of models: discrete-time systems [1]-[3], continuous-time systems [4]-[9], and time-delay systems [10]-[11].

Our results improve the previous one obtained by some of the authors in [11] b giving conditions of invariance depending o the dynamics of the system and on the size c the delay. This yields to less conservativ results which more efficiently allow th consideration of the constrained control proble for systems with delay on both state an control.

The results are organized in the following wa Section II recalls some previous results. It shown that when the size of the delay decreasing, there appears a gap between th conditions of positive invariance of a polyhedr set for systems with delay given in [11] an those for systems without delay. Ne assumptions will be given to find a solution this problem. Then, in section III, necessar and sufficient conditions for the positiv invariance of a polyhedral-type set are give The application to the constrained contr problem is explained in section IV, and a example is given.

The following notations will be used :
Let x, y ∈ $\mathbb{R}^n$, then the vector inequality x ≤ (x < y) is equivalent to the set of inequalitie $x_i \le y_i$ ($x_i < y_i$) for i = 1, ... , n, where (resp. y_i) denotes the i^{th} component of vector (resp. y). $|x|$ is the vector of i^{th} component $|x_i$
Let $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, then the matrices A^+ $\{a^+_{ij}\}$, $A^- = \{a^-_{ij}\}$ are defined by : $a^+_{ii} = a_{ii}$, a^-_{ii} 0, and $a^+_{ij} = \max(0, a_{ij})$, $a^-_{ij} = \max(0, -a_{ij})$ f $j \neq i$, $\forall$ i, j = 1, 2, ... , n, and $|A|$ is th matrix with entries $\{ |a_{ij}| \}$.
With a vector $k \in \mathbb{R}^n$ with positive componen and a region $\mathcal{D}$ of $\mathbb{R}^n$ is associated the s $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$ composed of all the continuou

0-7803-2685-7/95 $4.00 © 1995 IEEE

functions φ mapping $[-\tau, 0]$ into $\mathcal{D}$ and satisfying

$$|\varphi(0)-\varphi(s)| \leq -s\,k, \quad \forall s \in [-\tau, 0]$$

At last, if $x(t)$ is a function defined for $t \geq -\tau$ then, for $t \geq 0$, x_t denotes the function defined on the segment $[-\tau, 0]$ by:

$$x_t(s) = x(t+s), \ \forall s \in [-\tau, 0].$$

II. PRELIMINARY REMARKS AND NEW ASSUMPTIONS

It can be affirmed that any system controlled by a feedback law will almost certainly involve time delays which express the fact that it takes a finite time to sense information and then react to it. If the sizes of these delays are small compared to the dynamics of the system then a common practice in control engineering is to neglect them. But, it seems at first glance that this approximation is not justified for the property of positive invariance of a polyhedral set. Indeed, the necessary and sufficient conditions obtained for the set

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : -\underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

(where $\underline{x}$ and $\bar{x}$ are two vectors of $\mathbb{R}^n$ with positive components) to be positively invariant with respect to the system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) \qquad (1)$$

with $B \neq 0$, are ([11]):

$$\begin{cases} (A^+ + B_+)\,\bar{x} + (A^- + B_-)\,\underline{x} \leq 0 \\ (A^- + B_-)\,\bar{x} + (A^+ + B_+)\,\underline{x} \leq 0, \end{cases} \qquad (2)$$

where $B_+ = \{\max(0, b_{ij})\}$ and $B_- = \{\max(0, -b_{ij})\}$.

These conditions are independent of the size τ of the delay, and are generally more restrictive than the ones given for systems without any delay [12]:

$$\begin{cases} (A+B)^+\,\bar{x} + (A+B)^-\,\underline{x} \leq 0 \\ (A+B)^-\,\bar{x} + (A+B)^+\,\underline{x} \leq 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Indeed, it can be shown that if A is not a Hurwitz matrix then there is no matrix B verifying the conditions (2).

This gap can be explained in the following way: the initial conditions of system (1) were assumed to belong to the set $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ composed of all the continuous functions mapping the segment $[-\tau, 0]$ into the set $\mathcal{D}$. This hypothesis is very strong because it does not take into account the dynamics of the system. With this assumption, the time derivative of any component of the vector x may have values higher than, for instance, the speed of light !

In this paper, the following assumptions will be made:

- The set of initial conditions is supposed to be the set $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$ composed of all the continuous functions φ mapping $[-\tau, 0]$ into $\mathcal{D}$ and satisfying

  $$|\varphi(0)-\varphi(s)| \leq -s\,k, \quad \forall s \in [-\tau, 0] \quad (4)$$

  where k is a vector with positive components compatible with the dynamics of the system, in particular, it happens if any realistic initial function φ satisfies

  $$|\dot{\varphi}(s)| \leq k, \qquad \forall s \in [-\tau, 0].$$
- It will be assumed in this paper that k verifies the inequality

$$k > k_m = \max\{\,|Ax+By| : (x, y) \in \mathcal{D}\times\mathcal{D}\}, \quad (5)$$

where the maximum is calculated for each corresponding component.

III. CONDITIONS OF POSITIVE INVARIANCE FOR A POLYHEDRAL SET

The following theorem gives the necessary and sufficient conditions for the set $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$ with $k > k_m$ to be positively invariant with respect to system (1).

Let $M = \{m_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be defined by:

$$m_{ii} = \max(0, -b_{ii}),$$

and for $j \neq i$:

if $a_{ij} + b_{ij} \geq 0$:

$$m_{ij} = \max(0, -a_{ij}) + \max(0, -b_{ij})$$

if $a_{ij} + b_{ij} < 0$:

$$m_{ij} = \max(0, a_{ij}) + \max(0, b_{ij}),$$

and let k_1 be the vector of i^{th} component defined by

$$k_{1i} = \min(k_i, (\bar{x}_i + \underline{x}_i)/\tau), \ \text{for } i = 1, \ldots, n.$$

Theorem 1 : The set $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$ is positively invariant for (1) if and only if the two vector inequalities

$$\begin{cases} (A+B)^{+}\bar{x}+(A+B)^{-}\underline{x}+\tau M k_1 \leq 0 \\ (A+B)^{-}\bar{x}+(A+B)^{+}\underline{x}+\tau M k_1 \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

are satisfied.

Proof : see Appendix

Remarks : — When $\tau = 0$, the conditions (6) are identically equal to the conditions (3) of positive invariance of the set $\mathcal{D}$ for the system without delay

$$\dot{x}(t) = (A + B)\, x(t).$$

— For higher values of the delay τ (when $\tau k \geq \bar{x} + \underline{x}$) then conditions (6) are reduced to the independent-of-delay conditions (2).
Consequently, our theorem restores the link between systems with and without delay.

IV. APPLICATION TO THE PROBLEM OF CONSTRAINED STABILIZATION

Let us now consider the controlled system described by

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau) + C\,u(t-\tau), \text{ for } t>0, \quad (7)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

The vector $x(t)$ is constrained to belong to the polyhedral set

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : -w_2 \leq Sx \leq w_1\}, \quad (8)$$

where S is a real $q \times n$ matrix of rank n, and w_1, w_2 are real q-vectors with positive components.

The control vector $u(t)$ is also subject to non-symmetrical linear constraints :

$$u(t) \in \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : -d_2 \leq u \leq d_1\} \quad (9)$$

where d_1, d_2 are real m-vectors with positive components.

Moreover, it is assumed that the initial states x_0 belong to the set $\mathcal{L}(k, \mathcal{S}_0)$, where k is such that

$$k > k_m, \quad (10$$

$k_m = \max\{\,|Ax+By+Cu| : (x,y,u) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\mathcal{U}$
(the maximum is again calculated for ea
corresponding component), and the set $\mathcal{S}_0$
defined by

$$\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : -c_2 \leq Dx \leq c_1\}, \quad (11$$

D is a real $r \times n$ matrix of rank n, and c_1, c_2 a
real r-vectors with positive components.
course, initial states have to satisfy the sta
constraints, i.e. $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$.

The constrained control problem studied he
is to find a linear control law, $u(t) = Fx(t)$, th
stabilizes (7) and such that for any initi
function in $\mathcal{L}(k, \mathcal{S}_0)$, the solution satisfi
constraints (8) and (9).

For this, we follow the method initial
proposed in [2] : the previous problem is solv
if it can be found a matrix F and a subset Ω
$\mathbb{R}^n$ such that :

(i) the closed-loop system

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + (B + CF)\,x(t-\tau) \quad (12$$

is asymptotically stable,

(ii) the set $\mathcal{L}(k, \Omega)$ is positively invariant for (12),

(iii) $\mathcal{S}_0 \subseteq \Omega \subseteq \mathcal{S}$, and

$$\Omega \subseteq \mathcal{S}_u = \{x \in \mathbb{R}^n : Fx \in \mathcal{U}\}.$$

A practical choice for Ω is a polyhedral set (
instance $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}$ or $\mathcal{S}_u$), then condition (ii) can
easily tested by using the following result :

Theorem 2 : Let $P \in \mathbb{R}^{p \times n}$ with rank P =
and $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^n$, the set defined by $\mathcal{D}' = \{x \in \mathbb{R}$
$-\underline{z} \leq Px \leq \bar{z}\}$, where $\underline{z}$ and $\bar{z}$ are two p-vect
with positive components.

If there are two matrices G and H in $\mathbb{R}^p$
such that

$$PA = GP, \quad (1$$

$$P(B + CF) = HP, \quad (1$$

$$(G+H)^{+}\bar{z}+(G+H)^{-}\underline{z}+\tau M' k_1' \leq 0 \quad (1$$

$$(G+H)^{-}\bar{z}+(G+H)^{+}\underline{z}+\tau M' k_1' \leq 0 \quad (1$$

where $M' = \{m_{ij}'\} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ is defined by :

$$m_{ii}' = \max(0, -h_{ii}),$$

and for $j \neq i$,
if $g_{ij} + h_{ij} \geq 0$:
$$m'_{ij} = \max(0, -g_{ij}) + \max(0, -h_{ij}),$$
if $g_{ij} + h_{ij} < 0$:
$$m'_{ij} = \max(0, g_{ij}) + \max(0, h_{ij}),$$

and k'_1 is the p-vector of i^{th} component :

$k'_{1i} = \min([\,|P|\,k]_i, (\bar{z}_i + \underline{z}_i)/\tau)$, for $i = 1, \ldots, p$,

then the set $\mathcal{L}(k, \mathcal{D}')$ is positively invariant for (12).

Proof : see Appendix.

Example :
It is aimed to stabilize the system :
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t-\tau) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t-\tau) .$$
with the following constraints :
— for all $t \geq -\tau$, $[-1, -1]^T \leq x(t) \leq [1, 1]^T$, and
— for all $t \geq 0$, $|u(t)| \leq 4$.
This yields : $k_m = [6, 10]^T$.
The conditions given in [11] are (with $F = [f_1, f_2]$) :
$$\begin{pmatrix} 1 + |f_1| & |1 + f_2| \\ 1 + |2 + f_1| & -2 + |1 + f_2| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0,$$
which is never satisfied.
Let us now apply the conditions (15) with $P = I_2$:
$$\begin{pmatrix} 1+f_1 & |1+f_2| \\ |3+f_1| & -1+f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} a(f_1) & 0 \\ b(f_1) & c(f_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} \leq 0,$$
where $a(f_1) = \max(0, f_1)$,
$$b(f_1) = \begin{cases} 1 & \text{if } f_1 \leq -3 \\ -2 - f_1 & \text{if } -3 \leq f_1 \leq -2 \\ 0 & \text{if } f_1 \geq -2 \end{cases}$$
and $c(f_2) = \max(0, -1 - f_2)$.
Taking $f_1 = -3$ and $f_2 = -1$ leads to the condition $\tau k_{11} \leq \frac{2}{3}$ (with $k_{11} > k_{m1} = 6$). This condition is sufficient to ensure the stability of the closed-loop system, since, using the method described in [13], the upper bound of the delay values for which the system is asymptotically stable is $\tau_m = 0.435$.

APPENDIX

The following results will be useful for the proofs of theorems 1 and 2.

Lemma 1 : Let x(t) be a solution of (1) with an initial condition in $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$. If, for all $t \geq 0$, x(t) belongs to $\mathcal{D}$, then the function x_t is in $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$ for all $t \geq 0$.

Proof : Since x(t) is a solution of (1), it follows :

$|\dot{x}(\theta)| = |Ax(\theta) + Bx(\theta - \tau)|$, $\forall \theta \in [t-\tau, t]$, $t \geq \tau$, but, from (5), we deduce that
$$|\dot{x}(\theta)| \leq k_m < k, \quad \forall \theta \in [t-\tau, t],$$
and, finally this implies that each component x_i of x satisfies a Lipschitz condition with constant k_i on the interval $[t-\tau, t]$, and thus :
$$|x(t) - x(t+s)| \leq -s\,k, \ \forall s \in [-\tau, 0]. \quad (16)$$

Lemma 2 : The maximum of the function $(x, y) \to a\,x + b\,y$ on the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ defined by :
$$\Omega = \{(x, y) \in [-\beta, \alpha] \times [-\beta, \alpha] : |x - y| \leq \delta\}$$
is equal to
$$\max(0, a+b)\,\alpha + \max(0, -a-b)\,\beta + f(a, b)\min(\delta, \alpha+\beta),$$
where
$$f(a, b) = \begin{cases} \max(0, -a) + \max(0, -b), & \text{if } a+b \geq 0 \\ \max(0, a) + \max(0, b), & \text{if } a+b < 0. \end{cases}$$

The proof of this result is simple but quite long, so we do not reproduce it here.

A1) Proof of theorem 1

(a) *Sufficiency* :
We assume here that the conditions (6) are satisfied.
If the set $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$ is not positively invariant for (1) then there is a solution $x_1(t)$ of (1) with an initial condition in $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$ that leaves the set $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$, so according to lemma 1, there is a time t_1 such that $x_1(t_1) \notin \mathcal{D}$.

Let t_u be the upper bound of the set

$$\{t \geq 0 : \forall s \in [0, t], x_1(s) \in \mathcal{D}\}.$$

Obviously, $x_1(t_u)$ is on the boundary of $\mathcal{D}$, and for any $\varepsilon > 0$, sufficiently small, there is a time $t_\varepsilon > t_u$ such that :

(i) for $t < t_\varepsilon$, $x_1(t)$ is in the set

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : -(1+\varepsilon)\, \underline{x} \leq x \leq (1+\varepsilon)\, \bar{x}\}$$

(ii) $x_1(t_\varepsilon)$ is on the boundary of the set $\mathcal{D}_\varepsilon$ and the vector $\dot{x}_1(t_\varepsilon)$ is oriented outwards this set ; it means that there is an index $i \in \{1, \ldots, n\}$ such that $x_{1i}(t_\varepsilon) = (1+\varepsilon)\, \bar{x}_i$ and $\dot{x}_{1i}(t_\varepsilon) > 0$, or $x_{1i}(t_\varepsilon) = -(1+\varepsilon)\, \underline{x}_i$ and $\dot{x}_{1i}(t_\varepsilon) < 0$.

And, in the same way we proved lemma 1, we can show that

$$|x_1(t) - x_1(s)| \leq (t-s)\,(1+\varepsilon)\, k_m ,$$

$\forall\, t, s : t_u \leq s \leq t \leq t_\varepsilon$

Let us consider now the function $x(t) = \dfrac{1}{1+\varepsilon}\, x_1(t)$.

The function $x(t)$ is a solution of (1) such that :

- its initial condition is in $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$,
- for any $t \leq t_\varepsilon$, x_t is in $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$,
- and there is an index $i \in \{1, \ldots, n\}$ such that:

$$x_i(t_\varepsilon) = \bar{x}_i \text{ and } \dot{x}_i(t_\varepsilon) > 0, \qquad (17)$$

or

$$x_i(t_\varepsilon) = -\underline{x}_i \text{ and } \dot{x}_i(t_\varepsilon) < 0. \qquad (18)$$

But, this is impossible. Indeed, if (17) holds then

$$\dot{x}_i(t_\varepsilon) = (a_{ii} + b_{ii})\, \bar{x}_i - b_{ii}\,(x_i(t_\varepsilon) - x_i(t_\varepsilon - \tau)) + \sum_{j \neq i} (a_{ij}\, x_j(t_\varepsilon) + b_{ij}\, x_j(t_\varepsilon - \tau)), \qquad (19)$$

but

$$-b_{ii}\,(x_i(t_\varepsilon) - x_i(t_\varepsilon - \tau)) \leq \max(0, -b_{ii})\, \tau \min\left(k_i, \frac{\bar{x}_i + \underline{x}_i}{\tau}\right) \qquad (20)$$

and, for $j \neq i$,

$$a_{ij}\, x_j(t_\varepsilon) + b_{ij}\, x_j(t_\varepsilon - \tau) \leq \max(a_{ij}\, u + b_{ij}\, v : (u, v) \in \Omega), \qquad (21)$$

where $\Omega = \{(\alpha, \beta) \in [-\underline{x}_j, \bar{x}_j] \times [-\underline{x}_j, \bar{x}_j] : |\alpha - \beta| \leq \tau k_j\}$.

According to lemma 2, this maximum is eq[...] to

$$(a_{ij} + b_{ij})^+\, \bar{x}_j + (a_{ij} + b_{ij})^-\, \underline{x}_j + \tau\, m_{ij}\, k_{1j}, \qquad (2$$

and so the contradiction :

$$0 < \dot{x}_i(t_\varepsilon) \leq [(A+B)^+ \bar{x} + (A+B)^- \underline{x} + \tau M k_1]_i \leq$$

where $[\ ]_i$ denotes the i^{th} component of [...] vector inside the brackets.

If it is the case (18) that holds, then we [...] show similarly that it leads to

$$0 < -\dot{x}_i(t_\varepsilon) \leq [(A+B)^- \bar{x} + (A+B)^+ \ldots \tau M k_1]_i \leq 0.$$

So, the set $\mathcal{L}(k, \mathcal{D})$ is shown to be positi[...] invariant for (1).

(b) *Necessity* : For any index $i \in \{1, \ldots, n$ [...] is possible to define a special initial functio[...] such that $\varphi \in \mathcal{L}(k, \mathcal{D})$ generating a solution [...] of (1) which satisfies : $x_i(0) = \bar{x}_i$ (r[...] $x_i(0) = -\underline{x}_i$) and

$$\dot{x}_i(0) = [(A+B)^+ \bar{x} + (A+B)^- \underline{x} + \tau M k_1]_i$$

$$(\dot{x}_i(0) = [(A+B)^- \bar{x} + (A+B)^+ \underline{x} + \tau M k$$

So, if one of the 2n inequalities (6) does [...] hold, then there is a time $t_1 > 0$ such [...] $x_{t_1} \notin \mathcal{L}(k, \mathcal{D})$: this means that this set is [...] positively invariant for (1).

A2) Proof of theorem 2

Let us assume that the hypotheses of theore[...] hold, then by the use of Theorem 1, [...] condition (15) implies that the set $\mathcal{L}(|P|$ k[...]

(where $\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^p : -\underline{z} \leq z \leq \bar{z}\}$[...]

positively invariant for the system

$$\dot{z}(t) = Gz(t) + Hz(t-\tau) \qquad ($$

Now, let us assume that the set $\mathcal{L}(k, \mathcal{D}')$ is [...] positively invariant for (12), this means [...] there is a solution $x_1(t)$ of (12) with its in[...] condition in $\mathcal{L}(k, \mathcal{D}')$ that leaves $\mathcal{L}(k, \mathcal{D}')$, [...] is, there exists a time $t_1 > 0$ such [...] $x_1(t_1) \notin \mathcal{D}'$). But then, since the equalities [...] and (14) occur, the fonction $z(t) = Px_1(t)$[...] solution of (23). Its initial condition i[...]

$\mathcal{L}(|P|k, \mathcal{Z})$; indeed, for any s in $[-\tau, 0]$, z(s) satisfies :

$$-\underline{z} \le z(s) = Px_1(s) \le \bar{z} \quad (\text{since } x_1(s) \in \mathcal{D}'),$$

and

$$|z(0) - z(s)| = |Px(0) - Px(s)| \le |P||x(0) - x(s)| \le -s|P|k.$$

In addition, z(t) leaves the set $\mathcal{L}(|P|k, \mathcal{Z})$ (at $t = t_1, z(t_1) \notin \mathcal{Z}$). This is in contradiction with the positive invariance of $\mathcal{L}(|P|k, \mathcal{Z})$ with respect to (19). So, the set $\mathcal{L}(k, \mathcal{D}')$ is positively invariant for (12).

REFERENCES

[1] A. Benzaouia and C. Burgat, "Regulator problem for linear discrete-time systems with non-symmetrical constrained control". Int. J. Control, Vol 48, No. 6, pp. 2441-2451, 1988.

[2] M.Vassilaki, J. C.Hennet and G. Bitsoris, "Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints". Int. J. Control, Vol 47, No. 6, pp. 1727-1735, 1988.

[3] N.E. Radhy and P. Borne, "Stabilization and robustness of constrained time-varying nonlinear discrete-time systems", Proc. of the 13th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, Dublin, vol. 3, pp. 1252-1253, 1991.

[4] P. O. Gutman and P. Hagander, "A new design of constrained controllers for linear systems." IEEE Trans. on Aut. Cont., Vol. 30, No. 1, pp. 22-33, 1985.

[5] J. Chegancas and C. Burgat, "Régulateur p-invariant avec contraintes sur les commandes". Actes du Congrès Automatique d'AFCET, Toulouse, France, 1986, pp. 193-203.

[6] M. Vassilaki and G. Bitsoris, "Constrained regulation of linear continuous-time dynamical systems". Systems & Control Letters, vol. 13, pp. 247-252, 1989.

[7] M. Vassilaki, "Applications of the method of Lyapunov functions to the design of constrained regulators". In *The Lyapunov functions method and applications*. P. Borne and V. Matrosov (Eds). J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co., 1990, pp. 97-102.

[8] N.E. Radhy and P. Borne, "Stabilizing regulators for constrained nonlinear time-varying continuous systems". *Proc. of IMACS-MCTS Symposium*, Vol 2, Lille, France, May 1991, pp. 350-356.

[9] N.E. Radhy, P. Borne and J. P. Richard, "Regulation of nonlinear time-varying continuous systems with constrained state". In *The Lyapunov functions method and applications*.P. Borne and V. Matrosov (Eds). J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co., 1990, pp. 81-88.

[10] M. Dambrine and J. P. Richard, "Stabilization of constrained nonlinear time-delay systems", Proc. of the IMACS Symposium on Mathematical Modelling (1. MATHMOD), Vienna (Austria), vol. 3, pp. 488-491, Feb. 1994.

[11] M. Dambrine, J. P. Richard and P. Borne, "Feedback Control of time-delay systems with bounded control and state" J. Mathematical problems in Engineering, vol. 1, N° 1, 1995.

[12] G. Bitsoris, "Existence of positively invariant polyhedral sets for continuous-time linear systems" Control Theory and Advanced Technology, vol. 7, N° 3, pp. 407-427, 1991.

[13] K.Walton, J.E. Marschall,"Direct method for TDS stability analysis". I.E.E. Proc., vol. 134, part D, N° 2, pp. 101-107, 1987.

Systems and Control Letters 95-328

Stability of Perturbed Systems with Time-Varying Delays

Goubet-Bartholoméüs A.; Dambrine M.; Richard J.P.
L.A.I.L. - URA CNRS 1440
Ecole Centrale de Lille B.P.48
59651 Villeneuve d'Ascq Cedex
FRANCE

Abstract : This paper gives easily verifiable sufficient conditions of robust asymptotic stability of linear time-delay systems subject to parametric unstructured or highly-structured perturbations. The criteria given in this paper are delay-independent or delay-dependent. The considered delay may be time-varying. An estimation of the transient behaviour of the studied systems is also provided (exponential rate of convergence).

Scalar or vectorial inequalities involving Hurwitz matrices, matrix measures and norms constitute the mathematical foundations of the exposed results.

Keywords : time-varying delay, perturbations, robust asymptotic stability, comparison principle, M-matrix, matrix measure.

I Introduction:

The stability of time-delay systems has been studied a lot during the past decades. In fact, time-delays, due to transportation lags, finite calculation times, measurement times, etc..., appear in numerous industrial and natural processes, often leading to oscillations and sometimes instability. It is therefore essential to study their effects on the responses of the systems, particularly when considering closed-loop control.

Numerous works deal with the stability of time delay systems [4, 7, 9]. Some criteria are directly obtained from the characteristic equation ([14, 18, 23, 24, 17]), sometimes involving the determination of eigenvalues or norms of matrices ([1, 12, 19]). Others involve the Lyapunov-Razumikhin theorem and Riccati or Lyapunov equations ([7, 9, 15]). Others deal with scalar conditions in terms of matrix measures and norms ([10, 13, 25]), or matrix ones in terms of Hurwitz matrices ([3, 6, 21]).

The conditions given in this paper are of the last two types.

When studying the stability of an industrial process, it is almost always necessary to use a criterion which is delay-dependent. Moreover, the stability property of a working point is really robust if it still holds when perturbations make the model vary. In practice, the perturbed parameters include the delay. In spite of these remarks, only a few articles ([6, 16]) give delay-dependent theorems valid for time-varying delays among those dealing with the stability of perturbed time-delay systems. Our aim is to improve these criteria and to break away from some of the hypotheses of previous articles.

The systems which are in our interest can be written in the following form :

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, x(t - \tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t) \quad \text{for } t \geq 0 \text{ and } x(t) \in \Re^n, \tag{1}$$

$x_0(\theta) = \varphi(\theta)$ for $\theta \in \{\lambda \in \Re, \lambda \leq 0 : \exists\, a \geq 0 \,/\, \lambda = a - \tau(a)\}$, where φ is piecewise continuous.

The functions f and g are unknown and represent the perturbations, structured or not ([10]). They satisfy : $f(0, t) = 0$ and $g(0, t) = 0$ whatever $t \geq 0$. The delay $\tau(t)$ is piecewise continuous and verifies $0 \leq \tau(t) \leq \tau_m$. The existence and uniqueness of the solution of the problem (1) are assumed.

One key point of the criteria presented here is a decomposition of the matrix B. More details about this splitting-up are given in the remarks following the first theorem.

Our paper is organized as follows :

The next part is concerned with the scalar criterion. The perturbations that are considered are unstructured. A condition of asymptotic stability is given, as well as a way to determine an estimation of the transient response of the system. This criterion is compared with other ones. Part III deals with a matrix criterion expressed in terms of M-matrices. The perturbations are this time highly structured. The last part (IV) deals with an example of application of the different theorems.

<u>Notations:</u>

The capital letters without indices represent matrices; the small ones represent either vectors or scalars.

$|\cdot|$ denotes the absolute value of a real.

If x is a vector, $|x|$ denotes the vector whose components are the absolute values of the components of x.

$\sup\limits_{0\leq\lambda\leq a} |x(t-\lambda)|$ is the vector whose entries are $\sup\limits_{0\leq\lambda\leq a} |x_i(t-\lambda)|$.

If $A = (A_{ij})$, then $|A| = (|A_{ij}|)$, and $A^* = (A^*_{ij})$ with $A^*_{ii} = A_{ii}$ and $A^*_{ij} = |A_{ij}|$ if $i \neq j$.

$\|\cdot\|$ denotes any norm in $\Re^n$ or its induced matrix norm. $\mu(\cdot)$ is the associated matrix measure, defined by : $\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\Big[(\|I + h A)\| - 1)\Big] = \mu(A)$ [22].

A matrix is said to be negative (respectively positive) if each of its element is negative (resp positive). The vector inequality $v \leq w$ has to be understood as n inequalities $v_i \leq w_i$.

A matrix A is said to be an M-matrix if its off-diagonal elements are nonpositive and if the real parts of its eigenvalues are positive. If A is such a matrix, $\lambda(A)$ denotes the minimum real part of its eigenvalues. It can be proved that $\lambda(A)$ is positive and is an eigenvalue of A. Moreover, if A is irreducible, an eigenvector associated with this eigenvalue $\lambda(A)$ may be chosen with positive components. Several definitions and properties concerning M-matrices are given in [5] and [8].

If χ is a real, $\mathrm{sgn}(\chi) = 1$ if $\chi \geq 0$; $\mathrm{sgn}(\chi) = -1$ if $\chi < 0$.

II Unstructured perturbations (scalar criterion) :

Let us decompose the matrix B in the following way : B = B' + B''. The system **(1)** is considered with unstructured perturbations : $\|f(x,t)\| \leq \alpha\|x\|$, $\|g(x,t)\| \leq \beta\|x\|$.

Theorem 1:

If $\mu(A+B') + \alpha + \beta + \|B''\| + \tau_m (\|B'A\| + \|B'B\| + \alpha\|B'\| + \beta\|B'\|) < 0$, then the equilibrium 0 of the system (1) is asymptotically stable.

Furthermore, the following inequality : $\|x(t)\| \leq \sup_{-\tau_m \leq \theta \leq \tau_m} \{\|x(\theta)\|.e^{\sigma\theta}\} e^{-\sigma t}$ holds, whenever $t \geq \tau_m$,

where σ is the unique positive real solution of the following equation:

$$\sigma + \big(\tau_m (\|B'A\| + \alpha\|B'\|) + \beta + \|B''\|\big) e^{\sigma\tau_m} + \tau_m (\|B'B\| + \beta\|B'\|) e^{2\sigma\tau_m} + \mu(A+B') + \alpha = 0 \qquad (2)$$

Proof: see Appendix 1

Remarks : 1) One key point of this criterion is the decomposition of the matrix B into B = B'+ B'', where B' is chosen such that A + B' is "more stable" than A. Roughly, this decomposition corresponds to a decomposition of the delayed terms into two groups : the stabilizing ones and the destabilizing ones. This technique enables one to take the stabilizing effect of part of the delayed terms into account. The example given at the end of this paper compares the results obtained by setting B' = B, B" = 0 (no decomposition), with the results obtained with a decomposition of B. Let us remark that a delay-independent criterion is obtained if B' is set to 0.

2) A partial optimization of the decomposition is possible, but is not necessarily interesting : the optimisation is quite long, and moreover "natural" decompositions which lead to very interesting results are easily found (see the first example). These natural decompositions are chosen such that A+B' is sufficiently stable and $\|B''\| + \tau_m (\|B'A\| + \|B'B\| + \alpha\|B'\| + \beta\|B'\|)$ is not too big.

3) As written in the introduction, this criterion can be compared to several results found in the literature ([25], [16]). In addition to the preceding remark 1), comparisons may be made with other results : Wang et al. ([25]) considered delay-dependent as well as delay-independent criteria, but did not allow the delay(s) to be time-varying. Moreover, as $\|CD\| \leq \|C\| \, \|D\|$ whatever the matrices C and D, our criterion is more precise. Niculescu et al. ([16]) considered time-varying delays, and both delay-dependent and delay-independent criteria. Theorem 1 is similar to the delay-dependent criterion they gave, but the domain of application of the theorem proposed here is wider (no restriction on the derivative $\dot{\tau}(t)$, no need to know $\tau(0)$ for the overvaluation of $\|x(t)\|$).

III Highly structured perturbations (matrix criterion):

The perturbations on the system **(1)** are now highly structured :

$|f(x,t)| \leq F\,|x|$, $|g(x,t)| \leq G\,|x|$, where $F > 0$ and $G > 0$.

Theorem 2:

If the real parts of the eigenvalues of the matrix $M = (A + B')^* + |B''| + F + G + \tau_m\big(|B'A| + |B'B| + |B'|(F+G)\big)$ are negative (or equivalently M is the opposite of an M-matrix), then the equilibrium 0 of the system **(1)** is asymptotically stable.

Moreover, if M is irreducible, then $|x(t)| \leq k.e^{-\gamma t}$ for $t \geq \tau_m$, as soon as $|x(\theta)| \leq k.e^{-\gamma\theta}$, $\theta \in [-\tau_m, \tau_m]$, where k and γ are determined as follows :

- $P_\sigma = -(A + B')^* - F - \big[\tau_m(|B'A| + |B'|F) + |B''| + G\big]e^{\sigma\tau_m} - \tau_m(|B'B| + |B'|G)e^{2\sigma\tau_m}$.
- γ is the real positive solution of the equation $\lambda(P_\gamma) = \gamma$ (see the notations for the definition of $\lambda(P_\gamma)$).
- k is a positive eigenvector of P_γ associated with the eigenvalue γ.

Proof : see Appendix 2. The proofs of Theorems 1 and 2 are based on lemma 1 (see Appendix 3), which is a generalisation of a theorem given in [21].

Remarks : The matrix criterion is more precise than the scalar criterion, because of the use of a comparison system with the same dimension as the initial one. Moreover, the perturbations are modeled more accurately.

It generalizes the delay-independent results published by Dambrine et al.([3]). It also improves the criteria given in Goubet et al. ([6]) : in fact, as the matrix $|CD|$ is always smaller than the matrix $|C|.|D|$, the stability criterion written here is more interesting. Moreover, this article provides estimates of the asymptotic rate of convergence, which are not given in [6], and allows the delay and the initial function to be piecewise continuous.

Theorem 2 enables the proof of the *robust* stability : the considered delay is time-varying and not necessary known. As for the uncertainties or perturbing terms, the bounds only are necessary for the proof of the stability. Of course, the same remark could have been written after Theorem 1.

IV Examples:

Two examples are considered in this section : the first one aims at comparing our results with the theorems of the same kind [25, 16, 6] (formal comparisons have already been made bellow the 2 theorems). The second one has already been studied in [15, 11] with other methods.

First example :

Let us consider the following system :

$$\frac{dx}{dt}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau(t)) + G(x(t-\tau(t))),$$

where $A = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.1 \\ -0.1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.7 \\ -1 & -0.8 \end{bmatrix}$, $G(x(t-\tau(t))) = \begin{bmatrix} \beta(x(t-\tau(t)),t)\, x_1(t-\tau(t)) \\ 0 \end{bmatrix}$,

with $|\beta(x(t-\tau(t)),t)| \leq 0.1$ whatever the values of the parameters.

τ, the initial function, and β are piecewise continuous.

Our criteria, as well as the ones proved by other authors, have been applied to this system.

The norm used is the following one : $\|y\| = |y_1| + |y_2|$.

The associated matrix norm and measure are :

$\|M\| = \text{Sup}\ \{|M_{11}| + |M_{21}|;\ |M_{12}| + |M_{22}|\}$; $\mu(M) = \text{Sup}\ \{M_{11} + |M_{21}|;\ |M_{12}| + M_{22}\}$.

The results obtained with the different theorems are given here :

1) <u>Criterion of Wang et al. [25]</u> :

The following hypotheses must be added : the initial function is continuous, $\tau(t)$ is constant.

The system is proved to be stable if $\tau_m < 0.125$, and $\|x(t)\| \leq \sup\limits_{-\tau_m \leq s \leq \tau_m} \{\|x(s)\|\} e^{-0.11t}$ if $\tau_m = 0.1$.

2) <u>Criterion of Niculescu et al. [16]</u> :

Hypotheses : the initial function, τ and β are continuous. τ is differentiable. $0 \leq \dot{\tau}(t) \leq \alpha < 1$.

Conclusion : stability for $\tau_m < 0.157$.

The exponential rate of convergence (with τ_m=0.1) is : $\sigma = 0.20$ if $\alpha = 0$ ($\tau(t) = \tau_m$),

$\sigma = 0.10$ if $\alpha = 0.5$ and $\tau(0) = 0.05$.

3) <u>Matrix criterion of Goubet et al. [6]</u> :

Hypotheses : the initial function, τ and β are continuous.

Conclusion : stability for $\tau_m < 0.382$ with the decomposition : $B = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.06 \\ 0.067 & -0.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.76 \\ -1.067 & 0 \end{bmatrix}$.

The article does not provide any estimation of the exponential rate of convergence.

4) <u>Criteria of this article</u> :

- scalar criterion without decomposition (B' = B; B" = 0) : stability if $\tau_m < 0.157$.
- scalar criterion with the splitting-up $B = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$: $\tau_m < 0.286$,

and $\|x(t)\| \leq \sup\limits_{-\tau_m \leq \theta \leq \tau_m} \{\|x(\theta)\|.e^{0.34\theta}\} e^{-0.34t}$ if $\tau_m = 0.1$.

- matrix criterion without decomposition : $\tau_m < 0.260$.
- matrix criterion with the decomposition : $B = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$: $\tau_m < 0.417$, and, if $\tau_m = 0.1$,

$|x(t)| \leq \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1.1 \end{bmatrix} .e^{-0.55t}$, where α is such that $|x(\theta)| \leq \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1.1 \end{bmatrix} .e^{-0.55\theta}$, $\theta \in [-0.1, 0.1]$.

- matrix criterion with the decomposition : $B = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.06 \\ 0.067 & -0.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.76 \\ -1.067 & 0 \end{bmatrix}$ (this decomposition has been obtained from an optimization procedure which is not detailed here) : $\tau_m < 0.429$.

This example shows that the "natural" decomposition $B = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ leads to very interesting results, and that an optimization is not necessary.

Second example :

The following system has been studied in [15] and [11] :

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, x(t - \tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t)$$

with $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $f(x(t),t) = \begin{bmatrix} \alpha_1\cos(t) & 0 \\ 0 & \alpha_2\sin(t) \end{bmatrix}$,
$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $g(x(t-\tau(t)),t) = \begin{bmatrix} \beta_1\cos(t) & 0 \\ \varepsilon & \beta_2\cos(t) \end{bmatrix}$.

The upperbounds of the uncertainties are : $|\alpha_1| \leq 1.6$; $|\beta_1| \leq 0.1$; $|\alpha_2| \leq 0.05$; $|\beta_2| \leq 0.3$.

The results of the two publications are the following : $\tau_m < 0.1036$ [15], $\tau_m < 0.2013$ [11].

Let us apply the theorems of this article without any decomposition : B' = B, B'' = 0.

The system can be shown asymptotically stable for any piecewise continuous delay $\tau(t) < 0.276$. This result is better than the ones given before for the same system. Moreover, the hypotheses on the delay are less strong. We even could have considered elements of more general forms, for example a nonlinear parameter α_1 such that $|\alpha_1(t, x(t), x(t-\tau(t)))| \leq 1.6$ (instead of $\alpha_1\cos(t)$).

Conclusion:

The delay-dependent criteria given in this paper enable the study of processes with a piecewise-continuous time-varying delay without any knowledge of this delay except its upper bound; the criteria are easily checkable. They also allow for the estimation of the transient responses of the models, and can easily be generalized to systems with several delays. The stability is considered with regard to unstructured or highly-structured perturbations, as classically defined in the robustness studies.

The results are extensions of several articles listed in this paper. One originality is the decomposition of the delayed matrix.

Appendix 1: Proof of Theorem 1

The equation of the system can be rewritten in the following way, whenever $t \geq \tau_m$:

$$\dot{x}(t) = (A+B')\, x(t) - B'\int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s)ds + B''\, x(t - \tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t).$$

Replacing $\dot{x}(s)$ by its value $A\, x(s) + B\, x(s - \tau(s)) + f(x(s),s) + g(x(s-\tau(s)),s)$, it yields:

$$\dot{x}(t) = (A+B')x(t) - B'A\int_{t-\tau(t)}^{t} x(s)ds - B'B\int_{t-\tau(t)}^{t} x(s - \tau(s))ds - B'\int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(s),s)ds - B'\int_{t-\tau(t)}^{t} g(x(s-\tau(s)),s)ds$$

$$+ B'' x(t-\tau(t)) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau(t)),t). \qquad (3)$$

Let us evaluate the rate of change of the norm of x(t) : (right-hand derivative)

$$\frac{d^+\|x(t)\|}{dt} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\|x(t+h)\| - \|x(t)\|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big[\|x(t) + h\,\dot{x}(t)\| - \|x(t)\|\Big].$$

Using the properties of the associated norms of vectors and matrices, the following inequality is obtained:

$$\frac{d^+\|x(t)\|}{dt} \le \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big[\|x(t) + h\,(A+B')\,x(t)\| - \|x(t)\|\Big] + \|B'A\|\int_{t-\tau(t)}^{t} \|x(s)\|ds + \|B'B\|\int_{t-\tau(t)}^{t} \|x(s-\tau(s))\|ds$$

$$+\|B'\|\int_{t-\tau(t)}^{t} \|f(x(s),s)\|ds + \|B'\|\int_{t-\tau(t)}^{t} \|g(x(s-\tau(s)),s)\|ds + \|B''\|\,\|x(t-\tau(t))\| + \|f(x(t),t)\| + \|g(x(t-\tau(t)),t)\|.$$

$$\le\Big\{\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big[(\|I + h\,(A+B')\| - 1)\Big]+\alpha\Big\}\|x(t)\|+ \Big[\tau_m\big(\|B'A\|+\|B'\|\,\alpha\big)+\|B''\|+\beta\Big] \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} \|x(t-\lambda)\|$$

$+\tau_m\big(\|B'B\|+\|B'\|\beta\big) \sup_{0\le\lambda\le 2\tau_m} \|x(t-\lambda)\|$, where I is the identity matrix.

As $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big[(\|I + h\,(A+B')\| - 1)\Big] = \mu(A+B')$ (see [22]),

$$\frac{d^+\|x(t)\|}{dt} \le\big[\mu(A+B')+\alpha\big]\|x(t)\|+\Big[\tau_m\big(\|B'A\|+\|B'\|\alpha\big)+\|B''\|+\beta\Big] \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} \|x(t-\lambda)\|+\tau_m\big(\|B'B\|+\|B'\|\beta\big) \sup_{0\le\lambda\le 2\tau_m} \|x(t-\lambda)\|.$$

Then the criterion immediately follows, using lemma 1 (see Appendix 3) : As a solution of the differential equation

$$\frac{d^+z(t)}{dt} = \big[\mu(A+B')+\alpha\big]z(t)+\Big[\tau_m\big(\|B'A\|+\|B'\|\alpha\big)+\|B''\|+\beta\Big] \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} z(t-\lambda)+\tau_m\big(\|B'B\|+\|B'\|\beta\big) \sup_{0\le\lambda\le 2\tau_m} z(t-\lambda).$$

is $ae^{-\sigma t}$, where σ is given by (2), $\|x(t)\| \le ae^{-\sigma t}$ if the same inequality is valid for $-\tau_m \le t \le \tau_m$.

Appendix 2 : Proof of Theorem 2

The equality (3) of Appendix 1 leads to :

$$\frac{d^+|x_i|}{dt}(t)=\sum_{k=1}^{n}(A+B')_{ik}x_k(t)\mathrm{sgn}(x_i(t))-\sum_{k=1}^{n}(B'A)_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t} x_k(s)ds.\mathrm{sgn}(x_i(t))-\sum_{k=1}^{n}(B'B)_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t} x_k(s-\tau(s))ds.\mathrm{sgn}(x_i(t))$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(B')_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t} f_k(x(s),s)ds\,\mathrm{sgn}(x_i(t))-\sum_{k=1}^{n}(B')_{ik}\int_{t-\tau(t)}^{t} g_k(x(s-\tau(s)),s)ds.\mathrm{sgn}(x_i(t))+\sum_{k=1}^{n}(B'')_{ik}x_k(t-\tau(t))\mathrm{sgn}(x_i(t))$$

$+ f_i(x(t),t)\ \mathrm{sgn}(x_i(t)) + g_i(x(t-\tau(t)),t)\ \mathrm{sgn}(x_i(t))$.

As $x_i(t)\mathrm{sgn}(x_i(t)) = |x_i(t)|$ and as $|\mathrm{sgn}(x_i(t))| = 1$, an upperbound of $\frac{d^+|x_i|}{dt}(t)$ is easily calculated (see the valuations done in [3] and [6] for more details) :

$$\frac{d^+|x_i|}{dt}(t)\le\sum_{k=1}^{n}(A+B')^*_{ik}|x_k(t)|+\tau_m\sum_{k=1}^{n}(|B'A|)_{ik} \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} |x_k(t-\lambda)|+ \tau_m\sum_{k=1}^{n}(|B'B|)_{ik} \sup_{0\le\lambda\le 2\tau_m} |x_k(t-\lambda)|$$

$$+\tau_m \sum_{k=1}^{n}(|B'|F)_{ik} \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} |x_k(t-\lambda)| + \tau_m \sum_{k=1}^{n}(|B'|G)_{ik} \sup_{0\le\lambda\le 2\tau_m} |x_k(t-\lambda)| + \sum_{k=1}^{n}(|B''|)_{ik} \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} |x_k(t-\lambda)|$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}(F)_{ik} |x_k(t)| + \sum_{k=1}^{n}(G)_{ik} \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} |x_k(t-\lambda)|.$$

So $\frac{d^+|x|}{dt}(t) \le [(A+B')^*+F]\,|x(t)| + \left(\tau_m (|B'A|+|B'|.F)+|B''|+G\right) \sup_{0\le\lambda\le\tau_m} |x(t-\lambda)| + \tau_m (|B'B|+|B'|G) \sup_{0\le\lambda\le 2\tau_m} |x(t-\lambda)|.$

As the off-diagonal elements of $(A + B')^* + F$ and all elements of $\tau_m(|B'A| + |B'|.F) + |B''| + G$ and of $\tau_m (|B'B|+|B'|G)$ are non-negative, lemma 1 (see Appendix 3) can be used; the theorem is proved.

Appendix 3 : Comparison principle

The following lemma is a generalization of a comparison principle given in [21] to systems with two delays.

Lemma 1 :

Let C, D_1, D_2 be $n \times n$ matrices with real elements and let $x(t)$ be a solution of the differential inequality

$$\dot{x}(t) \le -Cx(t) + D_1 \sup_{0\le\lambda\le\tau_1} x(t-\lambda) + D_2 \sup_{0\le\lambda\le\tau_2} x(t-\lambda) \text{ for } t \ge 0 \tag{4}$$

If $D_1 \ge 0$, $D_2 \ge 0$, if the off-diagonal elements of C are non positive, and if $(C - D_1 - D_2)$ is an M-matrix, then a solution $x(t)$ of this inequality is overvalued by the asymptotically stable solution $z(t)$ of the differential equation

$$\dot{z}(t) = - Cz(t) + D_1 \sup_{0\le\lambda\le\tau_1} z(t-\lambda) + D_2 \sup_{0\le\lambda\le\tau_2} z(t-\lambda) \text{ for } t \ge 0 \tag{5}$$

as soon as $x(\theta) \le z(\theta)$ for $-\sup(\tau_1, \tau_2) \le \theta \le 0$.

Moreover, if $(C - D_1 - D_2)$ is an irreducible M-matrix, then there exist a constant $\gamma>0$ and a constant vector $k>0$ such that $x(t) \le ke^{-\gamma t}$, for $t \ge 0$.

k and γ are obtained in the following way :

- γ is the positive real solution of the equation $\lambda(A_\gamma) = \gamma$, where $A_\gamma = C - D_1e^{\gamma\tau_1} - D_2e^{\gamma\tau_2}$ and $\lambda(A_\gamma)$ denotes the eigenvalue of A_γ which has the minimum real part.
- k is a positive eigenvector of A_γ associated with the eigenvalue γ.

Proof : (for more details, see [21])

♦ First part of the theorem :

The conclusion is easily proved using the theorems given in [21], [3] for example.

♦ Second part of the theorem : (case of irreducibility of $C - D_1 - D_2$)

$ke^{-\gamma t}$ is a solution of the equation (5) if and only if γ is an eigenvalue of $C - D_1e^{\gamma\tau_1} - D_2e^{\gamma\tau_2}$ and k is an eigenvector associated with it.

Let us define $A_\sigma = C - D_1e^{\sigma\tau_1} - D_2e^{\sigma\tau_2} = bI - P_\sigma$ ($P_\sigma \geq 0$) where b is the maximum value of the diagonal elements of $(C - D_1 - D_2)$. Its eigenvalue with the minimum real part, $\lambda(A_\sigma)$, is equal to $b-\rho(P_\sigma)$ where $\rho(P_\sigma)$ is the spectral radius of P_σ (the maximum eigenvalue, nonnegative in the case of a nonnegative matrix).

Considering the properties of M-matrices and of matrices with non negative entries (see [5] and [8]), it can be proved that : • As A_0 is an M-matrix, $b > \rho(P_0)$, and so $b > \rho(P_\sigma)$ for small values of $\sigma > 0$. Thus A_σ is an M-matrix for small values of $\sigma > 0$.

- A_σ is irreducible.
- $\lambda(A_{\sigma 1}) \geq \lambda(A_{\sigma 2})$ if $\sigma_1 < \sigma_2$;
- $\lambda(A_0) > 0$;
- $\lambda(A_\sigma) < 0$ for large values of σ.

So $\lambda(A_\sigma) = \sigma$ has a positive solution γ.

As A_γ is an irreducible M-matrix, an eigenvector $k > 0$ of A_γ associated with the eigenvalue γ may be found.

References:

[1] J. Chen, G. Gu, C.N. Nett, A New Method for Computing Delay Margins for Stability of Linear Delay Systems, *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control,* Lake Buena Vista, FL (1994) 433-437.

[2] M. Dambrine, A. Goubet, J.P. Richard, New results on constrained stabilizing control of time-delay systems, *34th IEEE Conference on Decision and Control,* New Orleans (1995) 2052-2057.

[3] M. Dambrine, J.P. Richard, Stability analysis of time-delay systems, *Dynamic systems and Applications*, Vol.3, No.3 (1994) 369-378.

[4] L.E. El'sgol'ts, S.B. Norkin, Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments, *Math. in Science and Eng.*, Vol. 105, Academic Press, New York (1973).

[5] M. Fiedler, V. Pták, On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors, *Czech. Math. J*, vol.12, No.87 (1962) 382-400.

[6] A. Goubet, M. Dambrine, J.P. Richard, An extension of stability criteria for linear and nonlinear time delay systems, *IFAC Conference System Structure and Control*, Nantes, France (1995) 278-283.

[7] J.K. Hale, Theory of functional differential equations, *Applied Mathematical Sciences,* Vol. 3, Springer Verlag, New York (1977).

[8] R.A. Horn, C.R. Johnson, Topics in Matrix Analysis, *Cambridge University Press, Cambridge* (1991).

[9] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, Stability of functional differential equations, *Math. in Sciance and Eng.*, Vol. 180, Academic Press, New York (1986).

[10] C-H. Lee, T-H.S. Li, F-C. Kung, A New Approach for the Robust Stability of Perturbed Systems with a class of Noncommensurate Time Delays, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* - 1 : Fundamental Theory and Applications, Vol.40, No.9 (1993) 605-608.

[11] X. Li, C.E.de Souza, LMI Approach to Delay-Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems, *Proc. of the 34th IEEE CDC,* New Orleans (1995) 3614-3619.

[12] Y. Li, K.M. Nagpal, E.B. Lee, Stability Analysis of Polynomials with Coefficients in Disks, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol.37, No.4 (1992) 509-513.

[13] T. Mori, N. Fukuma, M. Kuwahara, Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delays, *Int.J.Control* , Vol.34, No.6 (1981) 1185-1194.

[14] T. Mori, H. Kokame, Stability of $dx(t)/dt = A\,x(t) + B\,x(t-\tau)$, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol.34, No.4 (1989) 460-462.

[15] S.I. Niculescu, C.E. de Souza, J.-M. Dion, L. Dugard, Robust stability and stabilization for uncertain linear systems with state delay : Single delay case (I), *Proc. IFAC Workshop on Robust Control Design,* Rio de Janeiro, Brazil (1994) 469-474.

[16] S-I. Niculescu, C.E. de Souza, L. Dugard, J-M. Dion, Robust Exponential Stability of Uncertain Linear Systems with Time-Varying Delays, *3rd European Contr. Conf.*, Roma (Italy) (1995) 1802-1808.

[17] L.S. Pontryagin, On the zeros of some elementary transcendental functions, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR*, Vol. 6, No.33. (1942) 115-134. An English translation is given in *Amer. Math. Soc. Transl.,* Ser. 2, Vol.1 (1955) 95-110.) 95-110.

[18] J-H. Su, On the stability of time-delay systems, *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control,* Lake Buena Vista, FL (1994) 429-430.

[19] J-H. Su, I-K. Fong, C-L. Tseng, Stability Analysis of Linear Systems with Time Delay, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol.39, No.6 (1994) 1341-1344.

[20] T.-J. Su, C.-G. Huang, Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 37, No. 10 (1992) 1656-1659.

[21] H. Tokumaru, N. Adachi, T. Amemiya, Macroscopic stability of interconnected systems, *6-th IFAC Congress* , paper ID44.4 (1975) 1-7.

[22] C.A. Desoer, M. Vidyasagar, Feedback Systems : Input-Output Properties, *Academic Press, New York* (1975).

[23] K. Walton, J.E. Marschall, Direct method for TDS stability analysis, *I.E.E. Proceedings*, Vol. 134, part D, No.2 (1987) 101-107.

[24] S-S. Wang, Further results on stability of $dx(t)/dt = A\,x(t) + B\,x(t-\tau)$, *Systems and Control Letters* (19), North-Holland (1992) 165–168.

[25] S-S. Wang, B-S. Chen, T-P. Lin, Robust stability of uncertain time-delay systems, *Int.J.Control*, Vol.46, No.3 (1987) 963-976.

[26] B. Xu, Comments on 'Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems', *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol.39, No.11 (1994) 2365.

Bibliographie

ABDALLAH, C.; DORATO, P.; BENITEZ-READ, J.; BYRNE, R. (1993) : "Delayed Positive Feedback Can Stabilize Oscillatory Systems".
Proc. of the American Control Conference, San Francisco, California, pp.3106-3107.

AGATHOKLIS, P.; FODA, S. (1989) : "Stability and the matrix Lyapunov equation for delay-differential systems".
Int.J.Control, Vol.49, No.2, pp.417-432.

BELLMAN, R.E.; COOKE, K.L. (1963) : "Differential-Difference Equations".
Math. in Science and Eng., Vol. 6, Academic Press, New York.

BITSORIS, G. (1991) : "Existence of positively invariant polyhedral sets for continuous-time linear systems"
Control-Theory and Advanced Technology, Vol. 7, No. 3, pp. 407-427.

BLOOM, F. (1977) : "Continuous data dependence for abstract Volterra integro-differential equations in Hilbert space with applications to viscoelasticity".
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. Ser. 14, 4:1, pp. 179-207.

BORNE, P. (1976) : "Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés".
Thèse d'état, Université de Lille.

BOURLES, H. (1987) : "α-stability of systems governed by a functional differential equation - extension of results concerning linear delay systems."
Int. J. Control, Vol. 45, No. 6, pp. 2233-2234.

BRIERLEY, S.D.; CHIASSON, J.N.; LEE, E.B.; ZAK, S.H. (1982) : "On stability independent of delay for linear systems".
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, Vol. AC-27, No.1, pp. 252-254.

CHEBOTAREV, N.G.; MEYMAN, N.N. (1949) : "Problems of Routh-Hurwitz for polynomials and entire functions".
Trudy Mat. Instituta im. V.A. Steklova, Vol. XXVI (en russe).

COLEMAN, B.D., GURTIN, M.E. (1965) : "Waves in materials with memory : II. On the growth and decay of one-dimensional acceleration waves; III. Thermodynamic influences on the growth and decay of acceleration waves".
Arch. Rat. Mech. & Anal., 19 : 4, pp. 239-265, pp. 266-298.

COPPEL, W.A. (1965) : "Stability and asymptotic behavior of differential equations".
D.C. Heath, Boston.

DAMBRINE, M.; RICHARD, J.-P. (1993) : "Stability analysis of time-delay systems".
Dynamic Systems and Applications, Vol.2, pp. 405-414.

DAMBRINE, M.; RICHARD, J.-P. (1994) : "Stability and stability domains for nonlinear differential-difference equations".
Dynamic Systems and Applications, Vol.3, No. 3, pp. 369-378.

DAMBRINE, M. (1994) : "Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes à retards".
These, University of Lille I, France, n^0 1386.

DAMBRINE, M; RICHARD, J.-P.; BORNE, P. (1995 a) : "Feedback Control of Time-Delay Systems with Bounded Control and State".
J. Mathematical Problems in Engineering, Vol. 1, No. 1, pp. 77-87.

DAMBRINE, M.; GOUBET, A.; RICHARD, J.-P. (1995 b) : "New Results on Constrained Stabilizing Control of Time-Delay Systems".
Proceedings de 34th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, pp. 2052-2057.

DAMBRINE, M.; GOUBET-BARTHOLOMEUS, A.; RICHARD, J.P.; NICULESCU, S.I.; DUGARD, L.; DION, J.M. (1996) : "Stabilité et stabilisation des systèmes à retards: Un tour d'horizon".
Colloque Analyse et Commande des Systèmes avec Retards, Nantes, France, pp.79-100.

DESOER, C.A.; VIDYASAGAR, M. (1975) : "Feedback Systems : Input-Output Properties".
Academic Press, New York.

DIECKMANN, O.; VAN DILS, S.A.; VERDUYN LUNEL, S.M.; WALTHER, H.-O. (1995) : "Delay Equations Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis".
Applied Mathematical Sciences 110, Springer Verlag New York, Inc., pp. 443-451.

DRIVER, R.D. (1977) : "Ordinary and delay differential equations".
Springer Verlag, New York.

EL'SGOL'TS, L.E.; NORKIN, S.B. (1973) : "Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments".
Math. in Science and Eng., 105, Academic Press, New York.

FIEDLER, M.; PTAK, V. (1962) : "On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors."
Czech. Math.J., Vol.12, No.87, pp.382-400.

GENTINA, J.-C. (1976) : "Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".
Thèse d'état, Université de Lille.

GOPALSAMY, K. (1992) : "Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics".
Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

GORECKI, H.; FUKSA, S.; GRABOWSKI, P.; KORYTOWSKI (1989) : "Analysis and Synthesis of time-delay systems".
John Wiley & Sons, Chichester and PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa.

GORJACHENKO, V.D.; ZOLOTAREV, S.L.; KOLCHIN, V.A. (1988) : "Quantitative Methods in Nuclear Reactor Dynamics, Energoatomizdat, Moscow.

GOUBET, A.; DAMBRINE, M.; RICHARD, J.-P. (1995) : "An extension of stability criteria for linear and nonlinear time-delay systems".
Proceedings of the IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes, France, pp. 278-283.

GOUBET-BARTHOLOMEUS, A.; DAMBRINE, M.; RICHARD, J.-P. (1996b) : "Delay-dependent stability domains of nonlinear time-varying delay systems".
Proc. IEEE-SMC, CESA'96 IMACS Multiconference, Lille, France, pp. 801-806.

GOUBET-BARTHOLOMEUS, A.; DAMBRINE, M.; RICHARD, J.-P. (1996a) : "Bounded domains and constrained control of time-delay systems".
Actes du colloque "Analyse et Commande des systèmes avec retards", Nantes, France, pp. 137-155.

GOUBET-BARTHOLOMEUS, A.; DAMBRINE, M.; RICHARD, J.-P. (1996c) : "A criterion for the Robust Stabilization of Systems with a Time-Varying Delay".
Circuits, Systems and Computers ' 96, Int. Conf. Hellenic Navy General Staff, Hellenic Naval Academy, Piraeus, Grèce.

GOUBET-BARTHOLOMEUS, A., DAMBRINE, M.; RICHARD, J.-P. (1997a) : "Stability of Perturbed Time-Varying Delay Systems".
à paraître dans Systems and Control Letters.

GOUBET-BARTHOLOMEUS, A., DAMBRINE, M.; RICHARD, J.-P. (1997b) : "Practical Stability of Nonlinear Time-Varying Delay Systems".
IFAC-IFIP-IMACS Conference on Control of Industrial Systems.

GRUJIĆ, Lj.T. (1973) : "On practical stability".
Int.J.Control, Vol. 17, No. 4, pp. 881-887.

GRUJIĆ, Lj.T. (1975) : "Novel development on Lyapunov stability of motion".
Int.J.Control, Vol. 22, No. 4, pp. 525-549.

GRUJIĆ, Lj.T.; BORNE, P.; GENTINA, J.-C; RICHARD, J.-P. (1997) : "Stability domains : time-invariant continuous-time systems".
Livre à paraître en 1997.

GUTMAN, P.O.; HAGANDER, P. (1985) : "A new design of constrained controllers for linear systems".
IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. 30, No. 1, pp. 22-33 .

HAHN, W. (1963) : "Theory and Application of Liapunov's direct method".
Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

HALANAY, A. (1966) : "Differential Equations : stability, oscillations, time-lags".
Academic Press, New york.

HALE, J.K. (1977) : "Theory of functional differential equations".
Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, Springer Verlag, New York.

HALE, J.K.; INFANTE, E.F.; TSEN, F-S.P. (1985) : "Stability in Linear Delay Equations".
Journal of Mathematical Analysis and Applications 105, pp.533-555.

HMAMED, A. (1986) : "On the stability of time-delay systems : New results."
Int. J. Control, Vol.43, No.1, pp.321-324.

HUTCHINSON, G.E. (1948) : "Circular causal systems in ecology".
Ann. N. Y. Acad. Sci. 50, pp. 221-246.

KAMEN, E.W. (1980) : "On the relationship between zero criteria for two-variable Polynomials and Asymptotic Stability of Delay Differential Equations".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-25, No.5, pp. 983-984.

KAMEN, E.W. (1982) : "Linear Systems with Commensurate Time Delays : Stability and Stabilization Independent of Delay".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-27, No. 2, pp.367-375.

KHARITONOV, V.L.; ZHABKO, A.P. (1994) : "Robust Stability of Time-Delay Systems".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No.12, pp. 2388-2397.

KOLMANOVSKII, V.B. ET MYSHKIS, A. (1992) : "Applied theory of functional differential equations".
Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

KOLMANOVSKII, V.B. ET NOSOV, V.R. (1986) : "Stability of functional differential equations".
Math. in Science and Eng., vol. 180, Academic Press, New york.

KOLMANOVSKII, V.B. (1993) : "Stability of some systems with arbitrary after effect".
Reports Russ. Acad. Sci. 331, 421-425.

KOLMANOVSKII, V.B. (1995 a) : Stability of some nonlinear functional differential equations".
Nonlinear ordinary differential equations and applications, N2, pp.1-14.

KOLMANOVSKII, V.B. (1995 b) : "Applications of differential inequalities for stability of some functional differential equations".
Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol.25, Nos.9-10, pp. 1017-1028.

KRASOVSKII, N.N. (1956) : "On asymptotic stability of systems with after effect".
Prikl. Mat. Meh., Vol.20, No.4, pp.513-518.

KRASOVSKII, N.N. (1963) : "Stability of Motion : Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay".
Stanford University Press, Stanford.

LASALLE, J.P.; LEFSCHETZ, S. (1961) : "Stability by Liapunov's Direct Method with Applications".
Academic Press.

LEE, C-H.; LI, T-H.S.; KUNG, F-C (1993) : "A New Approach for the Robust Stability of Perturbed Systems with a class of Noncommensurate Time Delays".
IEEE Transactions on Circuits ans Systems-1 : Fundamental Theory and Applications, Vol.40, No. 9, pp. 605-608.

LEE, E.B.; LU, W.S.; WU, N.E. (1986) : A Lyapunov Theory for Linear Time-Delay Systems".
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, Vol. AC-31, No. 3, pp. 259-261.

LEE, M.S.; HSU, C.S. (1969) : "On the τ-decomposition method of stability analysis for retarded dynamical systems".
SIAM J. Control, Vol.7, No.2, pp. 242-259.

LEHMAN, B.; SHUJAEE K. (1994) : “Delay Independent Stability Conditions and Decay Estimates for Time-Varying Functional Differential Equations”.
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, No.8, pp. 1673-1676.

LEWIS, R.M.; ANDERSON, B.D.O. (1980) : "Necessary and Sufficient Conditions for Delay-Independent Stability of Linear Autonomous Systems".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-25, No.4, pp. 735-739.

LI, X.; DE SOUZA, C.E. (1995) : "LMI Approach to Delay-Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems".
Proc. of the 34th IEEE CDC, New Orleans, pp. 3614-3619.

MARCHUK, G.I.; BELYKH, L.N. (1982) : "On the treatment of chronic forms of disease according to a mathematical model", Lecture Notes & Int. Sci. 38, pp. 77-87.

MICHEL, A.N.; MILLER, R.K. (1977) : "Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems".
Academic Press, New York.

MORI, T; FUKUMA, N; KUWAHARA, M. (1981) : "Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delays".
Int.J. Cont., Vol.34, No.6, pp. 1175-1184.

MORI, T.; NOLDUS, E. (1984) : "Stability criteria for linear differential difference systems".
Int. J. Systems Sci., Vol.15, No.1, pp. 87-94.

MORI, T. (1985) : "Criteria for Asymptotic Stability of Linear time-Delay Systems".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-30, No.2, pp. 158-160.

MORI, T; KOKAME, H.; KUWAHARA, M. (1986) : "Analysis of Time-Delay Systems: Stability and Instability".
Proc. of the 25th Conf. on Decision and Control, Athens, Greece, pp. 895-898.

MORI, T.; KOKAME, H. (1989) : "Stability of $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau)$".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.34, No.4, pp. 460-462.

NEIMARK, J. (1949) : "D-subdivisions ans spaces of quasi-polynomials".
Ptikl. Mat. Meh., Vol. 13, No.4, pp. 349-380.

NICULESCU, S.I.; DE SOUZA, C.E.; DION, J.-M.; DUGARD, L. (1994) : "Robust stability and stabilization for uncertain linear systems with state delay : Single delay case (I)".
Proc. IFAC Workshop on Robust Control Design, Rio de Janeiro, Brazil, pp.469-474.

NICULESCU, S.I.; DE SOUZA, C.E.; DUGARD, L.; DION, J.-M. (1995 a) : "Robust exponential stability of uncertain linear systems with time-varying delays".
Proc. 3rd European Contr. Conf., Rome, Italy, pp. 1802-1808.

NICULESCU, S.I.; TROFINO-NETO, A.; DION, J.-M.; DUGARD, L. (1995 b) : "Delay-dependent stability of linear systems with delayed state : An L.M.I. approach".
Proc. 34th IEEE CDC, New Orleans, pp. 1495-1496.

NICULESCU, S.I. (1996) : "Sur la stabilité et la stabilisation des systèmes linéaires à états retardés".
Thèse de doctorat de l'INPG, Grenoble.

PALMOR, Z. (1980) : "Stability properties of Smith dead-time compensator controllers".
Int. J. Control., Vol. 32, pp. 937-949.

PALMOR, Z.; HALEVI, Y. (1983) : "On the design and properties of multivariable dead time compensators".
Automatica, Vol. 19, pp. 255-264.

PERRUQUETTI, W. ; RICHARD, J.P. ; GRUJIC, LJ.T. ; BORNE, P (1995 a) : "On Practical Stability with the Settling Time via Vector Norms".
Int. J. Control, Vol. 62, No. 1, pp. 173-189.

PONTRYAGIN, L.S. (1942) : "On the zeros of some elementary transcendental functions".
Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Vol. 6, No.33, pp. 115-134. (Une traduction anglaise est disponible dans Amer. Math. Soc. Transl. (1955), Ser. 2, Vol.1, pp. 95-110.).

RADHY, N.E.; BORNE, P. AND RICHARD, J.-P. (1990) : "Regulation of nonlinear time-varying continuous systems with constrained state".
In The Lyapunov functions method and applications. P. Borne and V. Matrosov (Eds). J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co.-IMACS pp.81-88.

RAZUMIKHIN, B.S. (1956) : "On the stability of systems with a delay".
Ptikl. Math. Meh., Vol. 20, No.4, pp. 500-512.

RAZUMIKHIN, B.S. (1960) : "The application of Lyapunov's method to problems in the stability of systems with delay".
Automat. i Telem., Vol. 21, No.6, pp. 740-748.

REKASIUS, Z.V. (1980) : "A stability test for systems with delays".
In Proc. of the 1980 Joint Automatic Control Conf., San Francisco, CA, paper TP9-A.

RICHARD, J.-P.; GOUBET-BARTHOLOMEUS, A; TCHANGANI, P.A.; DAMBRINE, M. (1997) : "Nonlinear Delay Systems : Tools for a Quantitative Approach of Stabilization".
Chapitre du livre : *Stability and Control of Time-Delay systems.* Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, à paraître en 1997.

ROBERT, F. (1964) : "Normes vectorielles de vecteurs et de matrices".
Revue française de traitement de l'information, Vol.7, No. 4, pp. 261-269.

SU, J-H. (1994) : "On the Stability of Time-Delay Systems".
Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, pp.429-430.

SU, J-H.; FONG, I-K.; TSENG, C-L. (1994) : "Stability Analysis of Linear Systems with Time Delay".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No.6, pp. 1341-1344.

SU, T.-J.; HUANG, C.-G. (1992) : "Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.37, No.10, pp. 1656-1659.

TCHANGANI, P., DAMBRINE, M., RICHARD, J.P. (1996) : "New Stability Criteria for Nonlinear Neutral Systems".
A paraître dans les proceedings de la Conference ECC Bruxelles.

TCHANGANI, P., DAMBRINE, M., RICHARD, J.P. (1996) : "Stability Domains for Neutral Systems".
Proceedings de la Conference IEEE CDC à Kobé (Japon).

THOWSEN, A. (1981) : "The Routh-Hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems".
Int.J.Cont, Vol.33, No.5, pp. 991-995.

THOWSEN, A. (1982) : "Delay-Independent Stability of Linear Systems".
IEE Proc., Vol. 129, Pt.D., No.3, pp.73-75.

TOKUMARU, H.; ADACHI, N.; AMEMYIA, T. (1975) : "Macroscopic stability of interconnected systems".
6-th IFAC Congress, paper ID44.4, pp. 1-7.

VASSILAKI, M.; HENNET, J. C. AND BITSORIS, G. (1988) : "Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints".
Int. J. Control, Vol. 47, No. 6, pp. 1727-1735.

VASSILAKI, M.; BITSORIS, G. (1989) : "Optimum algebraic design of continuous-time regulators with polyhedral constraints".
Preprints of AIPAC'89, Nancy, France, IFAC, Vol. 1, pp. 61-64.

VASSILAKI, M. (1990) : "Application of the method of Lyapunov functions to the design of constrained regulators".
In The Lyapunov functions method and applications. P. Borne and V. Matrosov (Eds). J.C. Baltzer AG, Scientific Publishing Co.-IMACS, pp.97-102.

VERRIEST, E.I. (1994) : "Robust stability of Time-Varying Systems with Unknown Bounded Delays".
Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, pp. 417-422.

VERRIEST, E.I.; IVANOV, A.F. (1994) : "Robust stability of systems with delayed feedback".
Circuits, Systems and Signal Processing, 13(2) / 13(3).

VOLTERRA, V. (1931) : "Leçon sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie".
Gauthier Villars, Paris.

WALTON, K; MARSHALL, J.E. (1987) : "Direct method for TDS stability analysis".
IEE Proceedings, Vol.134, Pt. D., No.2, pp. 101-107.

WANG, S.-S. (1992) : "Further results on stability of $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau)$".
Systems and Control Letters 19, pp.165-168.

WANG, S.-S.; CHEN, B.-S.; LIN, T.-P. (1987) : "Robust stability of uncertain time-delay systems".
Int. J. Control, Vol. 46, No. 3, pp. 963-976.

WEISS, L.; INFANTE, E.F. (1967) : "Finite Time Stability Under Perturbing Forces and on Product Spaces".
I.E.E.E. Trans. Auto. Control., Vol. AC-12, No.1, pp. 54-59.

XU, B. (1994) : "Comments on 'Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems".
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 11, pp. 2365.

XU, S.J.; RACHID, A. (1995) : "On the Stability and Robustness of Time-Delay systems".
Proc. of the 34th Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, pp. 1503-1504.

XU, D.-Y., XU, Z.-F. (1991) : Stability Analysis of Linear Delay Differential Systems".
Control-Theory and Advanced Technology, Vol. 7, No. 4, pp. 629-642.

XU DAOYI (1986) : "Stability Criteria for Time-Varying Delay Systems".
in "Frequency Domain and State Space Methods for Linear Systems", C.I. Byrnes and A. Lindquist (Editors), Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), pp. 431-437.

YAMAHAKA, K.; SHIMEMURA, E. (1987) : "Effects of mismashed Smith controller on stability in systems with time delays".
Automatica, Vol. 23, pp. 787-791.

ZUBOV, V.I. (1961) : "Methods of A.M. Lyapunov and their applications".
Transl. Series of United States Atomic Energy Commission.