

N° d'ordre : 1674

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

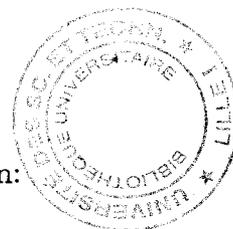
SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES

par

Miloud BENAYED

EXTENSIONS CENTRALES. QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE  
ET MÉTHODE DES ORBITES.

Soutenu le 16 Janvier 1996 devant la Commission d'Examen:



*Président*  
*Directeur de Thèse*  
*Rapporteurs*  
*Membres*

J. Huebschmann  
G. Tuynman  
C. Duval  
J. Elhadad  
R. Gergondey

*Université de Lille I*  
*Université de Lille I*  
*Université d'Aix-Marseille II*  
*Université d'Aix-Marseille I*  
*Université de Lille I*

## REMERCIEMENTS

Je remercie très vivement mon directeur de thèse Monsieur G. Tuynman qui m'a initié à la quantification géométrique en me confiant ce sujet. Son aide et sa disponibilité constante m'ont permis de mener à bien ce travail. Aussi, je souhaite lui exprimer ma plus profonde gratitude.

Je tiens à remercier Monsieur J. Huebschmann d'avoir accepté de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Je suis très reconnaissant à Messieurs C. Duval et J. Elhadad d'avoir bien voulu juger ce travail sur un sujet auquel ils ont eux mêmes contribué. Leurs suggestions m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce travail.

Je souhaite exprimer mes chaleureux remerciements à Monsieur R. Gergondey d'avoir accepté d'examiner le travail final et de participer au jury.

Mes remerciements vont également au service de reprographie de l'UFR de Mathématiques pour la réalisation matérielle de ce travail.

Enfin, je n'oublie ni ma femme ni ma famille qui m'ont toujours apporté leur soutien tout au long de la préparation de cette thèse, sans oublier mes amis, particulièrement K. Bouklou de l'Université de Bordeaux à qui je souhaite bonne chance pour sa très prochaine soutenance de thèse. Je voudrais aussi exprimer ma profonde reconnaissance à mon Professeur et ami A. Intissar de l'Université de Rabat pour son soutien aussi bien moral que matériel.

## TABLE DES MATIÈRES.

Introduction. ....	1
--------------------	---

### Première partie

I. Extensions centrales des bigèbres de Lie et des groupes de Lie-Poisson. ..	4
1. Extensions centrales des bigèbres de Lie .....	4
2. Extensions centrales des groupes de Lie-Poisson .....	7
3. Correspondance $Ext_{L.P.}(G, A) \rightarrow Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ .....	11

### Deuxième partie

II. Préliminaires sur la méthode des orbites. ....	13
1. Notations et rappels .....	14
2. Représentations induites .....	16
3. Représentations induites holomorphes et modification de Duflo .....	18
III. Quantification géométrique d'une orbite coadjointe $\mathcal{O}$ . ....	20
1. Rappel de la structure symplectique de $\mathcal{O}$ .....	21
2. Préquantification de $\mathcal{O}$ .....	22
3. Polarisation géométrique $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{O}$ .....	27
4. Les $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités sur $\mathcal{O}$ .....	30
5. Quantification par $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités .....	31
6. Discussion et conclusion .....	34
7. Les $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes sur $\mathcal{O}$ .....	35
8. Quantification par $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes .....	39
9. Conclusion .....	41
IV. Quantification géométrique d'un sous fibré symplectique $F$ de $T^*(G/D)$ . ..	42
1. Définition et structure symplectique de $F$ .....	43
2. Préquantification de $F$ .....	44
3. Polarisation géométrique $\mathcal{F}$ et son fibré des repères sur $F$ .....	47
4. Quantification par $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités .....	49
5. Quantification par $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes .....	54
6. Conclusion .....	56
V. Appendice I. ....	57
VI. Appendice II. ....	66
Références. ....	73

## INTRODUCTION

Cette thèse a pour sujet la quantification géométrique. Aussi, elle se scinde en deux parties indépendantes. Dans une première partie (chapitre I), nous étudions un problème rencontré en préquantification géométrique. Soit  $G$  un groupe de Lie de symétries d'une variété symplectique  $M$  admettant une application moment. Ce groupe de symétries détermine une algèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{g}}$  extension centrale de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$ . L'algèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{g}}$  s'intègre en un groupe de Lie  $\widehat{G}$  extension centrale de  $G$  par  $\mathbb{T}^1$ . En général, la préquantification géométrique de  $M$  donne une représentation unitaire de  $\widehat{G}$ , et non pas de  $G$  (voir [T-W]). Nous nous sommes intéressés à l'étude de ces extensions centrales dans le cas où  $G$  est un groupe de Lie-Poisson, et  $\mathfrak{g}$  est sa bigèbre de Lie. Nous en donnons la classification complète, ensuite nous réalisons la correspondance entre les extensions centrales de  $G$  et celles de  $\mathfrak{g}$  en termes de notre classification. Les résultats principaux de cette partie ont été publiés dans «Journal of Geometry and Physics» ([Ben]).

La deuxième partie de ce travail consiste à établir un lien explicite entre deux procédures de construction de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie  $G$ : la méthode des orbites et la quantification géométrique. Soit  $\mu_0$  un élément fixé de  $\mathfrak{g}^*$ , l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . On suppose qu'il existe une polarisation  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  au point  $\mu_0$ , et on note  $D$  un sous groupe de Lie de  $G$  contenant le stabilisateur  $G_{\mu_0}$  de  $\mu_0$  et dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$ . Sous l'hypothèse du relèvement de la forme  $i\mu_0$  sur  $\mathfrak{d}$  en un caractère unitaire  $\chi$  de  $D$ , on associe à  $\mathcal{O}$  une représentation unitaire (irréductible)  $\text{Hol}_D^G \chi$  de  $G$  appelée la représentation induite holomorphe, qui est une sous représentation de la représentation  $\text{Ind}_D^G \chi$  induite par le caractère  $\chi$  de  $D$  à  $G$  (voir [Ber]). Cette procédure est appelée la méthode des orbites. Elle a été introduite par Kirillov dans le cadre des groupes de Lie nilpotents, et a été développée pour d'autres classes de groupes par plusieurs auteurs: Auslander, Bernat, Duflo, Kostant, Pukanszky, Vergne ... Dans ce même cadre, M. Duflo ([Du]) a introduit une modification de la représentation  $\text{Hol}_D^G \chi$  de  $G$ . Elle consiste à remplacer le caractère  $\Delta_{D,G}^{-1/2} : D \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $\Delta_{D,G}(d) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(d)|$ , qui intervient dans la construction de l'espace de la représentation  $\text{Hol}_D^G \chi$ , par une racine carrée  $\eta$  (lorsqu'elle existe) de  $(\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}})^{-1}$ .

D'autre part, l'orbite coadjointe  $\mathcal{O}$  de  $\mu_0$  est une variété symplectique sur laquelle le groupe  $G$  agit, et cette action admet une application moment équivariante. Sous certaines conditions, on peut appliquer la procédure de la quantification géométrique, introduite d'une manière indépendante par Souriau et Kostant, à  $\mathcal{O}$  pour obtenir une représentation unitaire de  $\mathfrak{g}$ . Si cette représentation s'intègre à  $G$ , alors cette procédure permet aussi d'associer à  $\mathcal{O}$  une représentation unitaire de  $G$ . Nous nous sommes donc posés les questions suivantes:

*Si on se place dans le cadre des hypothèses de la méthode des orbites, les conditions d'existence de la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  sont-elles remplies? Si cette quantification existe, la représentation de  $\mathfrak{g}$  obtenue s'intègre t-elle en une représentation de  $G$ ?, et quelle représentation de  $G$  obtient-on?*

Nous commençons par fixer le cadre de notre travail en faisant des préliminaires sur la méthode des orbites dans le chapitre II. Nous donnons ensuite des réponses complètes à ces questions en étudiant la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  (chapitre III). Nous résumons les résultats de ce chapitre comme suit. L'existence du caractère  $\chi$  sur  $G_{\mu_0}$  est équivalente à l'existence d'un fibré préquantique au dessus de  $\mathcal{O}$  sur lequel l'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathcal{O}$  se relève en une action qui préserve sa connexion. La donnée d'une polarisation  $\mathfrak{h}$  au point  $\mu_0$  est équivalente à la donnée d'une polarisation  $\mathcal{F}$ , au sens de la quantification géométrique, sur  $\mathcal{O}$  qui est  $G$ -invariante. Ainsi, les données de  $\chi$  sur  $G_{\mu_0}$  et de  $\mathfrak{h}$  permettent de quantifier  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités. Nous montrerons que cette quantification donne une représentation unitaire de  $G$  dans un espace de Hilbert. La donnée supplémentaire de  $\eta$  sur  $G_{\mu_0}$  garantit la quantification de  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes, et cette quantification donne aussi une représentation unitaire de  $G$ . Nous concluons que les conditions sur  $\chi$  et  $\eta$  pour quantifier  $\mathcal{O}$  sont plus faibles que celles nécessaires à l'application de la méthode des orbites. Si les caractères  $\chi$  et  $\eta$  existent sur  $D$ , alors la représentation de  $G$  obtenue par la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités est la représentation induite holomorphe  $\text{Hol}_D^G \chi$ , et sa modification s'obtient en quantifiant  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes. Pour alléger ce chapitre, nous avons regroupé certaines démonstrations techniques ainsi que quelques définitions qui s'y rapportent dans l'appendice I.

**Remarque.** Dans la méthode des orbites, L. Pukanszky a introduit une condition sur  $\mathfrak{h}$  portant son nom pour garantir l'irréductibilité de la représentation  $\text{Hol}_D^G \chi$  dans le cas des groupes résolubles. Si  $\chi$  existe sur  $G_{\mu_0}$ , alors la condition de Pukanszky sur  $\mathfrak{h}$  est aussi suffisante (non nécessaire) pour étendre le caractère  $\chi$  à  $D$  (voir [Ber]). Donc, si  $\mathfrak{h}$  vérifie la condition de Pukanszky alors la méthode des orbites est équivalente à la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$ .

Dans ([DET]), les auteurs ont construit, à l'aide de  $\mu_0$  et de  $\mathfrak{h}$ , un sous fibré symplectique  $F$  d'un cotangent modifié  $T^*(G/D)$ . Une modification du cotangent  $T^*(G/D)$  consiste à le munir de la 2-forme canonique modifiée par la relevée d'une 2-forme fermée sur  $G/D$ . Le groupe de Lie  $G$  agit sur  $F$ , et cette action symplectique admet une application moment  $J : F \rightarrow \mathfrak{g}^*$  équivariante. Dans ce même travail, les auteurs ont montré que  $\mathfrak{h}$  satisfait la condition de Pukanszky si et seulement si l'application moment  $J$  est un symplectomorphisme entre  $F$  et l'orbite coadjointe  $\mathcal{O}$  de  $\mu_0$ . Ce résultat nous a conduit à nous poser les

questions suivantes:

*Si la condition de Pukanszky n'est pas satisfaite par  $\mathfrak{h}$ , peut-on quantifier ce sous fibré symplectique  $F$ ? Si la réponse est positive, cette quantification donne-t-elle une représentation de  $G$ ?, et éventuellement comparer la représentation obtenue avec celle donnée par la méthode des orbites.*

Le chapitre IV est consacré à la quantification géométrique de  $F$  dans le cas où  $\mathfrak{h}$  ne satisfait pas la condition de Pukanszky. L'existence du caractère  $\chi$  sur  $D$  entraîne l'existence d'un fibré préquantique  $L$  au dessus de  $F$  sur lequel l'action de  $G$  sur  $F$  se relève en une action qui préserve sa connexion. A l'aide de  $\mathfrak{h}$ , nous construisons une polarisation  $\mathcal{F}$  sur  $F$ ,  $G$ -invariante. Nous établissons que la quantification géométrique de  $F$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités donne une représentation unitaire de  $\mathfrak{g}$  qui s'intègre en la représentation induite holomorphe  $\text{Hol}_D^G \chi$  de  $G$ . La donnée supplémentaire de  $\eta$  sur  $D$  nous a permis de quantifier  $F$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes au lieu des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités. Cette quantification donne la représentation modifiée de  $\text{Hol}_D^G \chi$  de  $G$ . L'appendice II contient quelques démonstrations techniques de certains résultats énoncés dans ce chapitre.

**Remarque.** Nous sommes persuadés que l'existence d'un caractère unitaire  $\chi$  sur  $D$  tel que  $d_e \chi = i\mu_0|_{\mathfrak{d}}$  est aussi nécessaire pour l'existence d'un fibré préquantique  $L$  au dessus de  $F$ , sur lequel l'action de  $G$  se relève en une action qui préserve la connexion sur  $L$ . Nos résultats établissent donc l'équivalence entre la méthode des orbites et la quantification géométrique de  $F$ .

# PREMIÈRE PARTIE

## CHAPITRE I. EXTENSIONS CENTRALES DES BIGÈBRES DE LIE ET DES GROUPES DE LIE-POISSON.

Soit  $G$  un groupe de Lie de symétries d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  admettant une application moment  $J$ . La préquantification géométrique de  $(M, \omega)$  est la donnée d'un fibré principal  $P$  au dessus de  $M$ , de groupe structural  $\mathbb{T}^1$ , muni d'une 1-forme de connexion  $\alpha$  de courbure  $\omega$ . La préquantification de  $M$  donne une représentation unitaire d'une algèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{g}}$  extension centrale de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$ , déterminé par le groupe de symétries  $G$ . Cette extension s'intègre en un groupe de Lie  $\widehat{G}$  extension centrale de  $G$  par  $\mathbb{T}^1$ . En général, la préquantification géométrique donne une représentation de  $\widehat{G}$ , et non pas de  $G$ . D'une manière équivalente, il n'y a pas de garantie que  $G$  soit un groupe de symétries de  $(P, \alpha)$ . C'est le groupe  $\widehat{G}$  qui est toujours un groupe de symétries de  $(P, \alpha)$ . Pour plus de détails sur ces résultats, on pourra consulter [T-W]. Nous nous proposons ici d'étudier ces extensions dans le cas où le groupe de symétries  $G$  de  $M$  est un groupe de Lie-Poisson, et  $\mathfrak{g}$  est sa bigèbre de Lie. Nous en donnons la classification explicite et la correspondance entre ces extensions.

### 1. Extensions centrales des bigèbres de Lie.

Une bigèbre de Lie ( $[A]$ , [A-KS], [Dr]) est une algèbre de Lie  $(\mathfrak{g}, [ , ]_{\mathfrak{g}})$  dont l'espace vectoriel dual  $\mathfrak{g}^*$  est également une algèbre de Lie  $(\mathfrak{g}^*, [ , ]_{\mathfrak{g}^*})$ , et ces deux crochets vérifient la compatibilité de Drinfeld suivante:

$$\begin{aligned} & \langle [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, [x, y]_{\mathfrak{g}} \rangle \\ &= -\langle [\text{coad}_x \xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, y \rangle - \langle [\xi, \text{coad}_x \eta]_{\mathfrak{g}^*}, y \rangle + \langle [\text{coad}_y \xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, x \rangle + \langle [\xi, \text{coad}_y \eta]_{\mathfrak{g}^*}, x \rangle ; \end{aligned}$$

où  $\text{coad}_x \xi$  désigne l'action coadjointe de  $x \in \mathfrak{g}$  sur  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ .

Soient  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{g}_2$  deux bigèbres de Lie. Une application linéaire  $u : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  est dite un morphisme de bigèbres de Lie si  $u : (\mathfrak{g}_1, [ , ]_{\mathfrak{g}_1}) \rightarrow (\mathfrak{g}_2, [ , ]_{\mathfrak{g}_2})$  est un morphisme d'algèbres de Lie, et sa transposée  $u^* : (\mathfrak{g}_2^*, [ , ]_{\mathfrak{g}_2^*}) \rightarrow (\mathfrak{g}_1^*, [ , ]_{\mathfrak{g}_1^*})$  est aussi un morphisme d'algèbres de Lie. Un isomorphisme de bigèbres de Lie est un morphisme bijectif.

Dans tout ce qui suit,  $\mathfrak{g}$  désigne une bigèbre de Lie réelle de dimension finie.

**1.1. Définition.** Une bigèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{g}}$  est dite une extension centrale de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$  s'il existe une suite exacte  $0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0$ , où  $i$ ,  $\pi$  sont des morphismes de bigèbres de Lie ( $\mathbb{R}$  étant muni de sa structure unique de bigèbre de Lie : la structure nulle) et  $i(\mathbb{R})$  est contenu dans le centre de l'algèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Deux extensions centrales  $\widehat{\mathfrak{g}}_1$  et  $\widehat{\mathfrak{g}}_2$  de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$  sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme de bigèbres de Lie  $\rho : \widehat{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_2$  rendant

commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \widehat{\mathfrak{g}}_1 & & & \\
 & & & \nearrow i_1 & & \searrow \pi_1 & \\
 0 & \rightarrow & \mathbb{R} & & \mathfrak{g} & \rightarrow & 0 \\
 & & & \searrow i_2 & & \nearrow \pi_2 & \\
 & & & \widehat{\mathfrak{g}}_2 & & & \\
 & & & \downarrow \rho & & & 
 \end{array}$$

On note  $Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions centrales de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$ . L'objet de cette section est de décrire explicitement l'ensemble  $Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ . Dans [L-R], Lecomte et Roger ont donné une autre description des extensions (non nécessairement centrales) de bigèbres de Lie en termes de foncteurs dérivés.

**1.2. Construction.** Soit  $\widehat{\mathfrak{g}}$  une bigèbre de Lie extension centrale de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$ . Par le choix d'une section  $s : \mathfrak{g} \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}$ , on identifie les espaces vectoriels  $\widehat{\mathfrak{g}}$  et  $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ . Le défaut de morphisme d'algèbres de Lie de  $s$  détermine un 2-cocycle  $\gamma$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ :  $\gamma(x, y) = [s(x), s(y)] - s([x, y])$ , tel que le crochet sur  $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$  soit donné par:

$$(1.3) \quad [(x, a), (y, b)] = ([x, y], \gamma(x, y)) \quad (x, y \in \mathfrak{g}; a, b \in \mathbb{R})$$

Comme  $i$  et  $\pi$  sont des morphismes de bigèbres de Lie, le crochet sur  $\widehat{\mathfrak{g}}^*$  (l'algèbre de Lie duale de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ ) identifiée avec  $\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}$  est nécessairement de la forme suivante:

$$(1.4) \quad [(\alpha, a), (\beta, b)] = ([\alpha, \beta] + af(\beta) - bf(\alpha), 0) \quad (\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*; a, b \in \mathbb{R})$$

où  $f$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{g}^*$ . L'identité de Jacobi de ce crochet entraîne que  $f$  est une dérivation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^*$ . La compatibilité de Drinfeld des crochets de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  et  $\widehat{\mathfrak{g}}^*$  implique que la transposée de  $f$ ,  $f^* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  (N.B:  $(\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$  car  $\mathfrak{g}$  est de dimension finie), vérifie la propriété suivante:

$$(1.5) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, f^*([x, y]) - [f^*(x), y] - [x, f^*(y)] = \text{coad}_{\tilde{\gamma}(y)}(x) - \text{coad}_{\tilde{\gamma}(x)}(y)$$

où  $\tilde{\gamma} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  est définie par:  $\langle \tilde{\gamma}(x), y \rangle = \gamma(x, y)$  et  $\text{coad}_{\tilde{\gamma}(x)}(y)$  désigne l'action coadjointe de  $\tilde{\gamma}(x) \in \mathfrak{g}^*$  sur  $y \in \mathfrak{g} \cong (\mathfrak{g}^*)^*$ . Si la propriété (1.5) qui mesure le défaut de dérivation de  $f^*$  est satisfaite, alors on dira que  $\gamma$  et  $f$  sont Drinfeld-compatibles. Ainsi, à toute extension centrale de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$ , on associe un 2-cocycle  $\gamma$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et une dérivation  $f$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^*$  Drinfeld-compatibles. Réciproquement, la donnée d'un 2-cocycle  $\gamma$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathbb{R}$  et d'une dérivation  $f$  de  $\mathfrak{g}^*$  Drinfeld-compatibles détermine une extension centrale  $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$  de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$  définie par les formules (1.3) et (1.4).

Un changement de la section choisie  $s$  en une autre section  $s'$ ,  $s'(x) = s(x) + \phi(x)$  où  $\phi \in \mathfrak{g}^*$ , transforme  $(\gamma, f)$  en  $(\gamma + \delta\phi, f + \text{ad}_\phi)$ . Ici,  $\delta\phi$  désigne le cobord de la 1-cochaîne  $\phi$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\text{ad}$  représente l'action adjointe de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^*$  sur elle-même. On vérifie que l'application:  $(\mathfrak{g} \times \mathbb{R}, s) \rightarrow (\mathfrak{g} \times \mathbb{R}, s'), (x, a) \mapsto (x, a + \phi(x))$  entre les trivialisations de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  définies par  $s$  et  $s'$  respectivement est une équivalence d'extensions centrales. Un isomorphisme  $\rho$  définissant une équivalence de deux extensions centrales  $\widehat{\mathfrak{g}}_1$  et  $\widehat{\mathfrak{g}}_2$  de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$  trivialisées par  $(\mathfrak{g} \times \mathbb{R}, \gamma_1, f_1)$  et  $(\mathfrak{g} \times \mathbb{R}, \gamma_2, f_2)$  respectivement, est toujours de la forme précédente. On en déduit que  $\widehat{\mathfrak{g}}_1$  et  $\widehat{\mathfrak{g}}_2$  sont équivalentes si et seulement si il existe  $\phi \in \mathfrak{g}^*$  tel que  $\gamma_2 = \gamma_1 + \delta\phi$  et  $f_2 = f_1 + \text{ad}_\phi$ .

Si on note  $\mathcal{Z}^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des 2-cocycles de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\text{Der}(\mathfrak{g}^*)$  l'espace vectoriel des dérivations de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}^*$  alors, on a le résultat suivant.

**1.6. Théorème.** *Il y'a une correspondance biunivoque entre  $\text{Ext}_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  et le quotient de  $\{(\gamma, f) \in \mathcal{Z}^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \times \text{Der}(\mathfrak{g}^*) \mid \gamma, f \text{ Drinfeld-compatibles}\}$  par  $\{(\delta\phi, \text{ad}_\phi) \mid \phi \in \mathfrak{g}^*\}$ .*

**1.7. Remarque.** La compatibilité de Drinfeld des crochets de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}^*$  est équivalente à la condition que pour tout  $\phi \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\delta\phi$  et  $\text{ad}_\phi$  sont Drinfeld-compatibles.

Si on désigne par  $\text{Ext}_{alg}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  l'ensemble des classes d'équivalence d'algèbres de Lie extensions centrales de  $\mathfrak{g}$  (pour sa structure sous-jacente d'algèbre de Lie) par  $\mathbb{R}$ , alors on a une projection naturelle  $\pi_{big} : \text{Ext}_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Ext}_{alg}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ . La Drinfeld-compatibilité de  $\delta\phi$  et  $\text{ad}_\phi$  implique que si  $\delta\phi = 0$  alors  $\text{ad}_\phi^*$  est une dérivation de  $\mathfrak{g}$ ; le résultat suivant en découle immédiatement.

**1.8. Proposition.** *Le noyau de  $\pi_{big} : \text{Ext}_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Ext}_{alg}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  est isomorphe au quotient de  $\{f \in \text{Der}(\mathfrak{g}^*) \mid f^* \in \text{Der}(\mathfrak{g})\}$  par  $\{\text{ad}_\phi; \phi \in \mathfrak{g}^* \mid \delta\phi = 0\}$ .*

**1.9. Remarque.** Si  $\mathfrak{g}$  est semi-simple en tant qu'algèbre de Lie, alors le noyau de  $\pi_{big}$  est donné par  $\{f \in \text{Der}(\mathfrak{g}^*) \mid f^* \in \text{Der}(\mathfrak{g})\}$ ; cela découle du fait que le premier groupe de cohomologie  $\{\phi \in \mathfrak{g}^* \mid \delta\phi = 0\}$  d'une algèbre de Lie semi-simple est nul.

On va illustrer sur les exemples suivants que  $\pi_{big}$  n'est ni injective ni surjective en général.

**Exemple 1.10.** On rappelle que toute extension centrale d'une algèbre de Lie semi-simple est triviale grâce au lemme de Whitehead. Comme cas spécial, on considère  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  munie de sa structure standard de bigèbre de Lie exprimée dans la base canonique  $(H, X_+, X_-)$  de  $\mathfrak{g}$  et sa base duale  $(H^*, X_-^*, X_+^*)$ . Un calcul direct montre que le noyau de  $\pi_{big}$ , ou encore  $\text{Ext}_{big}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}); \mathbb{R})$ , est donné par l'ensemble des endomorphismes

de  $\mathfrak{g}^*$  qui s'écrivent dans la base  $(H^*, X_+^*, X_-^*)$  sous la forme suivante:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . Toutes ces extensions se projettent sur l'extension triviale d'algèbre de Lie .

**Exemple 1.11.** On munit  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$  d'une structure de bigèbre de Lie de la manière suivante: on prend la structure abélienne d'algèbre de Lie sur  $\mathfrak{g}$  et on définit le crochet sur  $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^2$  par:  $[e_1, e_2] = e_2$  où  $(e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . L'extension d'Heisenberg  $\mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^2$  par  $\mathbb{R}$  définie par la 2-forme symplectique  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^2$  qui est un 2-cocycle ( $\mathfrak{g}$  étant abélienne) n'a pas de préimage par  $\pi$ . En effet, la Drinfeld-compatibilité (1.5), qui se réduit dans ce cas à l'équation  $\text{coad}_{\tilde{\gamma}(y)}(x) - \text{coad}_{\tilde{\gamma}(x)}(y) = 0$ , ne peut pas être satisfaite. Donc il n'existe aucune structure de bigèbre de Lie sur  $\mathbb{R}^3$  qui en fait une extension centrale de  $\mathbb{R}^2$  (muni de la structure de bigèbre ci-dessus) par  $\mathbb{R}$  et dont la structure sous-jacente d'algèbre de Lie soit celle définie par  $\gamma$ .

## 2. Extensions centrales des groupes de Lie-Poisson.

Un groupe de Lie-Poisson ([A], [KS], [Lu-We], [STS]) est un groupe de Lie  $G$  muni d'une structure de variété de Poisson, telle que la multiplication  $m : G \times G \rightarrow G$  soit un morphisme de Poisson. On désigne par  $P$  le bivecteur de Poisson sur  $G$  et on définit  $l : G \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$  par:  $l(g) = \wedge^2(T_g R_{g^{-1}})P(g)$ . Ici,  $\mathfrak{g}$  est la bigèbre de Lie tangente à  $G$  en son élément neutre  $e$ ,  $R_{g^{-1}}$  désigne la translation à droite par  $g^{-1}$  sur  $G$  et  $T_g R_{g^{-1}}$  est son application linéaire tangente au point  $g$ . La multiplication  $m$  est un morphisme de Poisson si et seulement si  $l$  est un 1-cocycle pour l'action adjointe de  $G$  sur  $\wedge^2 \mathfrak{g}$ .

Un morphisme de groupes de Lie-Poisson est un morphisme de groupes de Lie, qui est aussi un morphisme de variétés de Poisson. Un isomorphisme de groupes de Lie-Poisson est un morphisme bijectif.

Dorénavant,  $G$  désigne un groupe de Lie-Poisson et  $A$  un groupe de Lie-Poisson abélien pour sa structure de groupe, de dimension 1, et donc sa structure unique de variété de Poisson est la structure nulle. Tous les groupes qui interviendront par la suite sont supposés connexes.

**2.1. Définition.** Un groupe de Lie-Poisson  $\widehat{G}$  est dit une extension centrale de  $G$  par  $A$  s'il existe une suite exacte  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$ , où  $i, \pi$  sont des morphismes de groupes de Lie-Poisson et  $i(A)$  est contenu dans le centre du groupe  $\widehat{G}$ . Deux extensions centrales  $\widehat{G}_1, \widehat{G}_2$  de  $G$  par  $A$  sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme de groupes

de Lie-Poisson  $\eta : \widehat{G}_1 \rightarrow \widehat{G}_2$  rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \widehat{G}_1 & & & \\
 & & i_1 \nearrow & & \searrow \pi_1 & & \\
 0 & \rightarrow & A & & & G & \rightarrow 1 \\
 & & i_2 \searrow & \downarrow \eta & \nearrow \pi_2 & & \\
 & & & \widehat{G}_2 & & & 
 \end{array}$$

On note  $Ext_{L.P.}(G, A)$  l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions centrales de  $G$  par  $A$ . Le but ici est de décrire d'une manière analogue aux bigèbres de Lie l'ensemble  $Ext_{L.P.}(G, A)$ ; voir [T-W] pour le problème équivalent d'extensions centrales des groupes de Lie.

**2.2. Construction.** Soit  $\widehat{G}$  une extension centrale de  $G$  par  $A$ . On note  $\widehat{P}$  son bivecteur de Poisson, et  $\widehat{l}$  le 1-cocycle associé. Comme  $\widehat{G}$  est en particulier un fibré principal au dessus de  $G$  avec groupe structural  $A$  alors, il existe une section  $s : G \rightarrow \widehat{G}$  lisse dans un voisinage de  $e$ . Par le choix de cette section  $s$ , on identifie  $\widehat{G}$  avec  $G \times A$  (en tant que groupes abstraits) muni de la multiplication:

$$(2.3) \quad (g, a) \cdot (h, b) = (gh, a + b - \phi(g, h))$$

où  $\phi(g, h) = s(gh)s(h)^{-1}s(g)^{-1}$  mesure le défaut de morphisme de groupes de  $s$ . Cette identification est lisse dans un voisinage de l'élément neutre  $\widehat{e}$  de  $\widehat{G}$ . On démontre que  $\phi$  est un 2-cocycle du groupe abstrait  $G$  à valeurs dans  $A$ , qui est évidemment différentiable dans un voisinage de l'élément  $(e, e)$  de  $G \times G$ . On notera  $\mathcal{Z}_e^2(G, A)$  l'ensemble de tels cocycles. Dans cette trivialisatation de  $\widehat{G}$  par  $s$ , l'action adjointe de  $\widehat{G}$  sur sa bigèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$  détermine une application  $M : G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ;  $g \mapsto M_g$  définie par:

$$\widehat{Ad}_{(g,a)}(x, u) = (Ad_g(x), u + M_g(x)) \quad ; \quad (g, a) \in G \times A, (x, u) \in \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$$

On vérifie que si  $g$  est dans un voisinage de  $e$  où  $\phi$  est lisse, alors  $M_g = T_e(\widetilde{\phi}(g))$ , où  $\widetilde{\phi}(g) : G \rightarrow A$  est définie par:  $(\widetilde{\phi}(g))(h) = \phi(g^{-1}, hg) - \phi(hg, g^{-1})$ . Comme  $i$  et  $\pi$  sont des morphismes de Lie-Poisson, alors il existe nécessairement une application  $F : G \rightarrow \mathfrak{g}$  telle que  $\widehat{l}$  soit de la forme suivante:  $\forall (g, a) \in \widehat{G}, \forall (\alpha, b), (\beta, c) \in \widehat{\mathfrak{g}}^* = \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}$ , on a:

$$(2.4) \quad \langle \widehat{l}(g, a), (\alpha, b) \otimes (\beta, c) \rangle = \langle l(g), \alpha \otimes \beta \rangle + \langle F(g), b\beta - c\alpha \rangle$$

L'application  $F$  est lisse dans un voisinage de  $e$ ; cela découle du fait que l'identification (2.3) est lisse dans un voisinage de  $\widehat{e}$  et que  $l$  et  $\widehat{l}$  sont lisses partout. La propriété de

1-cocycle de  $\widehat{l}$  entraîne la relation suivante qu'on appellera Lie-Poisson compatibilité de  $F$  et  $\phi$ :  $\forall \alpha \in \mathfrak{g}^*, \forall g, h \in G$  on a:

$$(2.5) \quad \langle F(gh), \alpha \rangle - \langle F(g), \alpha \rangle - \langle \text{Ad}_g F(h), \alpha \rangle = \langle \wedge^2(\text{Ad}_g)l(h), M_g \otimes \alpha \rangle$$

On remarque que la Lie-Poisson compatibilité de  $F$  et  $\phi$  contrôle le défaut de 1-cocycle de  $F$  pour l'action adjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$ . Comme  $\widehat{G}$  est connexe alors, la nullité du crochet de Schouten du bivecteur de Poisson  $\widehat{P}$  sur  $\widehat{G}$  avec lui même, notée  $[[\widehat{P}, \widehat{P}]] = 0$ , est équivalente à l'identité de Jacobi du crochet de Lie défini sur  $\widehat{\mathfrak{g}}^* = \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}$ . On vérifie que celui-ci est donné par  $[(\alpha, b), (\beta, c)] = ([\alpha, \beta] + b(T_e F)^*(\beta) - c(T_e F)^*(\alpha), 0)$ , donc  $[[\widehat{P}, \widehat{P}]] = 0$  est équivalente à  $(T_e F)^*$  est une dérivation de  $\mathfrak{g}^*$  (voir 1.4). On parvient ainsi à associer à toute extension centrale  $\widehat{G}$  de  $G$  par  $A$  un élément  $\phi$  de  $\mathcal{Z}_e^2(G, A)$  et une application  $F : G \rightarrow \mathfrak{g}$ , lisse dans un voisinage de  $e$ , telle que  $(T_e F)^* \in \text{Der}(\mathfrak{g}^*)$  et de plus  $\phi$  et  $F$  sont Lie-Poisson compatibles. Réciproquement, la donnée d'un couple  $(\phi, F)$  vérifiant les conditions précédentes détermine une extension centrale  $G \times A$  de  $G$  par  $A$  de la manière suivante. On munit  $G \times A$  de la loi de groupe définie par  $\phi$  (expression 2.3). La condition de différentiabilité de  $\phi$  dans un voisinage de  $e$  suffit pour l'existence d'une topologie (qui n'est pas, en général, la topologie directe) rendant  $G \times A$  un groupe de Lie et la projection  $\pi : G \times A \rightarrow G$  un morphisme de groupes de Lie. Avec l'injection  $i : A \rightarrow G \times A; a \mapsto (e, a + \phi(e, e))$ ,  $G \times A$  devient une extension centrale du groupe de Lie  $G$  par  $A$  ([T-W]). C'est pour cette raison qu'on avait choisi, dans la condition nécessaire, une section  $s$  de  $\widehat{G}$  lisse dans un voisinage de  $e$  afin que le 2-cocycle de groupe corespondant  $\phi$  soit lisse dans ce voisinage et par suite  $G \times A$  devienne un groupe de Lie pour la multiplication définie par  $\phi$ . Sur ce groupe de Lie, on définit  $\widehat{l}$  par la relation (2.4) et on vérifie que la Lie-Poisson compatibilité de  $\phi$  et  $F$  assure la propriété de 1-cocycle pour  $\widehat{l}$ . En plus, (2.4) montre aussi que  $\widehat{l}$  est lisse dans un voisinage de l'élément neutre  $\widehat{e} = (e, \phi(e, e))$  de  $G \times A$ , car  $l$  et  $F$  sont lisses dans un voisinage de  $e$  et dans un voisinage de  $\widehat{e}$  la topologie de  $G \times A$  est la topologie produit. Ainsi, grâce à sa propriété de 1-cocycle,  $\widehat{l}$  est lisse partout. On a aussi:  $[[\widehat{P}, \widehat{P}]] = 0$  puisque  $(T_e F)^* \in \text{Der}(\mathfrak{g}^*)$ .

Un changement de la section choisie  $s$  en une autre section  $s'$ , également lisse dans un voisinage de  $e$ , détermine une 1-cochaîne (une application)  $\chi$  de  $G$  dans  $A$  lisse dans un voisinage de  $e$  telle que  $s'(g) = \chi(g)s(g); g \in G$ . On note  $C_e^1(G, A)$  l'ensemble de telles cochaînes. Ce changement de section modifie  $(\phi, F)$  en  $(\phi + \delta\chi, F + \Gamma_\chi)$  où  $\delta\chi$  désigne le cobord de la 1-cochaîne  $\chi$  du groupe abstrait  $G$  à valeurs dans  $A$  et  $\Gamma_\chi : G \rightarrow \mathfrak{g}$ , est définie par:  $\langle \Gamma_\chi(g), \alpha \rangle = l(g)((T_e \chi) \otimes \alpha); g \in G, \alpha \in \mathfrak{g}^*$ . On vérifie que l'application:  $(G \times A, s) \rightarrow (G \times A, s'), (g, a) \mapsto (g, a + \chi(g))$  est une équivalence d'extensions centrales entre les trivialisations de  $\widehat{G}$  définies par  $s$  et  $s'$  respectivement. Un isomorphisme  $\eta$  de deux

extensions centrales équivalentes  $\widehat{G}_1$  et  $\widehat{G}_2$  de  $G$  par  $A$ , trivialisées par  $(G \times A, \phi_1, F_1)$  et  $(G \times A, \phi_2, F_2)$  respectivement, est nécessairement de la forme précédente pour un certain  $\chi \in C_e^1(G, A)$ . Donc  $\widehat{G}_1$  et  $\widehat{G}_2$  sont équivalentes si et seulement s'il existe  $\chi \in C_e^1(G, A)$  tel que  $\phi_2 = \phi_1 + \delta\chi$  et  $F_2 = F_1 + \Gamma_\chi$ .

Si on note  $C_e^\infty(G, \mathfrak{g})$  l'ensemble des applications de  $G$  dans  $\mathfrak{g}$  lisses dans un voisinage de  $e$  alors on a le théorème suivant.

**2.6. Théorème.**  $Ext_{L.P}(G, A)$  est en bijection avec l'ensemble quotient de  $\{(\phi, F) \in \mathcal{Z}_e^2(G, A) \times C_e^\infty(G, \mathfrak{g}) \mid (T_e F)^* \in Der(\mathfrak{g}^*) \text{ et } (\phi, F) \text{ Lie-Poisson compatibles}\}$  par  $\{(\delta\chi, \Gamma_\chi) \mid \chi \in C_e^1(G, A)\}$ .

**2.7. Remarque.** La condition de 1-cocycle de  $l : G \rightarrow \bigwedge^2 \mathfrak{g}$  pour l'action adjointe de  $G$  sur  $\bigwedge^2 \mathfrak{g}$  est équivalente à la Lie-Poisson compatibilité de  $\delta\chi$  et  $\Gamma_\chi$  pour tout  $\chi \in C_e^1(G, A)$ . On vérifie qu'on a:  $(T_e \Gamma_\chi)^* = \text{ad}_\psi$ , où  $\psi = (T_e \chi) \in \mathfrak{g}^*$  et  $\text{ad}$  désigne l'action adjointe de l'algèbre  $\mathfrak{g}^*$  sur elle-même.

Si on note  $Ext_L(G, A)$  l'ensemble des classes d'équivalences des groupes de Lie extensions centrales de  $G$  par  $A$  ( $G, A$  étant bien sûr des groupes de Lie) alors on a une projection naturelle  $\pi_{L.P} : Ext_{L.P}(G, A) \rightarrow Ext_L(G, A)$ . La Lie-Poisson compatibilité du cocycle nul ( $\phi = 0$ ) et de  $F \in C_e^\infty(G, \mathfrak{g})$  est équivalente à la condition que  $F$  est un 1-cocycle de  $G$  dans  $\mathfrak{g}$  pour l'action adjointe  $\text{Ad}$  de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$ . On note  $\mathcal{A}_e^\infty(G, \mathfrak{g})$  l'ensemble des 1-cocycles de  $G$  dans  $A$  pour l'action adjointe qui sont lisses dans un voisinage de  $e$ . Le noyau de  $\pi_{L.P}$  est isomorphe à  $\{F \in \mathcal{A}_e^\infty(G, \mathfrak{g}) \mid (T_e F)^* \in Der(\mathfrak{g}^*)\} / \{\Gamma_\chi; \chi \in C_e^1(G, A) \mid \delta\chi = 0\}$ . En remarquant que  $\{\chi \in C_e^1(G, A) \mid \delta\chi = 0\} = \text{Hom}_e(G, A)$ , où  $\text{Hom}_e(G, A)$  désigne l'ensemble des morphismes de groupes de  $G$  dans  $A$  différentiables dans un voisinage de  $e$ , alors on a la proposition suivante.

**2.8. Proposition.** Le noyau de  $\pi_{L.P} : Ext_{L.P}(G, A) \rightarrow Ext_L(G, A)$  est isomorphe à  $\{F \in \mathcal{A}_e^\infty(G, \mathfrak{g}) \mid (T_e F)^* \in Der(\mathfrak{g}^*)\} / \{\Gamma_\chi \mid \chi \in \text{Hom}_e(G, A)\}$ .

**2.9. Remarque.** Si  $F \in \mathcal{A}_e^\infty(G, \mathfrak{g})$  alors  $T_e F : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est un 1-cocycle pour l'action adjointe  $\text{ad}$  de  $\mathfrak{g}$  sur elle-même, c'est à dire que  $T_e F$  est une dérivation de  $\mathfrak{g}$ . On en déduit que si  $F$  est un élément du noyau de  $\pi_{L.P}$  alors  $(T_e F)^*$  est un élément du noyau de  $\pi_{big}$ .

**Exemple 2.10.** On considère  $G = SL(2, \mathbb{R})$  muni de la structure de Lie-Poisson définie par la solution de l'équation de Yang-Baxter suivante:  $\Lambda = \frac{1}{2} X_+ \wedge X_-$ , où  $(H, X_+, X_-)$  désigne la base canonique de  $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{R})$ . On considère l'application  $F : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow sl(2, \mathbb{R})$ ,  $A \mapsto \frac{a}{2}(H - AHA^{-1})$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . On vérifie que  $F \in \mathcal{A}_I^\infty(SL(2, \mathbb{R}), sl(2, \mathbb{R}))$ , où  $I$  désigne la matrice identité. La matrice de  $(T_I F)^*$  relativement à la base duale de

$(H, X_+, X_-)$  est donnée par:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ . On retrouve les dérivations de  $\mathfrak{g}^*$  dont la transposée est une dérivation de  $\mathfrak{g}$  (voir l'exemple 1.10). Il est clair que  $F$  n'est pas un morphisme de groupes, donc  $F$  est un élément non trivial du noyau de  $\pi_{L,P}$  pour tout  $a$  non nul. On en déduit que  $\pi_{L,P}$  n'est pas injective.

**Exemple 2.11.** On remarque tout d'abord que si  $G$  est abélien alors, en écrivant que  $F(gh) = F(hg)$  pour tout  $g, h \in G$ , la Lie-Poisson compatibilité entraîne la condition nécessaire suivante:  $\langle l(g), M_h \otimes \alpha \rangle = \langle l(h), M_g \otimes \alpha \rangle, \alpha \in \mathfrak{g}^*$ . On munit le groupe additif  $G = \mathbb{R}^2$  de la structure de Lie-Poisson définie par:  $P(e_1) = 0$  et  $P(e_2) = e_1 \wedge e_2$ , où  $(e_1, e_2)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . On vérifie que la 2-forme symplectique  $\phi$  de  $\mathbb{R}^2$  est un 2-cocycle du groupe  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $A = \mathbb{R}$  et qui est évidemment lisse partout. Dans ce cas, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a:  $M_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x', y') \mapsto xy' - yx'$ , et donc en particulier,  $M_{e_1} = e_2^*$ , où  $(e_1^*, e_2^*)$  est la base duale de  $(e_1, e_2)$ . L'extension centrale  $\mathbb{R}^3$  du groupe de Lie  $\mathbb{R}^2$  par  $\mathbb{R}$  associée à  $\phi$ , n'a pas de préimage par  $\pi_{L,P}$ . En effet, la condition nécessaire ci-dessus n'est pas satisfaite pour  $g = e_1, h = e_2$  et  $\alpha = e_1^*$ . Donc, ici  $\pi_{L,P}$  n'est pas surjective.

### 3. La correspondance $Ext_{L,P}(G, A) \rightarrow Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ .

On rappelle que si  $u : \widehat{G}_1 \rightarrow \widehat{G}_2$  est un morphisme de Lie-Poisson alors  $T_{e_1}u : \widehat{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_2$  est un morphisme de bigèbres de Lie ( $[A]$ ). Il en découle que, si  $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$  est une extension centrale de  $G$  par  $A$ , alors  $0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{T_{0i}} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{T_{\widehat{c}}\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0$  est une extension centrale de  $\mathfrak{g}$  par  $\mathbb{R}$ . Ainsi, on a une correspondance  $Ext_{L,P}(G, A) \rightarrow Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  qui à chaque élément  $\widehat{G}$  de  $Ext_{L,P}$  fait correspondre sa bigèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Le but ici est de réaliser cette correspondance à travers les descriptions données par les théorèmes (2.6) et (1.6). Tout d'abord, si  $\phi \in \mathcal{Z}_e^2(G, A)$ , on peut définir l'élément  $\gamma$  de  $\mathcal{Z}^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  par:

$$\gamma(x, y) = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \Big|_{t=0, s=0} (\phi(\exp tx, \exp sy) - \phi(\exp sy, \exp tx)) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

En dérivant successivement à  $t = 0$  et  $s = 0$  la relation (2.5) écrite pour  $g = \exp(tx)$  et  $h = \exp(sy)$ , on obtient:  $(T_e F)[x, y] - [(T_e F)(x), y] - [x, (T_e F)(y)] = \text{coad}_{\tilde{\gamma}(y)}(x) - \text{coad}_{\tilde{\gamma}(x)}(y)$ . On en déduit que  $\gamma$  et  $(T_e F)^*$  sont Drinfeld-compatibles. Soit  $(\phi', F')$  un autre représentant de la classe de  $(\phi, F)$  notée  $((\phi, F))$ , définie dans le théorème (2.6). On vérifie que, si  $\phi' = \phi + \delta\chi$  et  $F' = F + \Gamma_\chi, \chi \in C_e^1(G, A)$ , alors  $\gamma' = \gamma + \delta\psi$  et  $(T_e F')^* = (T_e F)^* + \text{ad}_\psi$ , où  $\psi = T_e\chi$ . Donc  $(\gamma', (T_e F')^*)$  appartient à la classe de  $(\gamma, (T_e F)^*)$ , notée  $((\gamma, (T_e F)^*))$ , dans l'espace classifiant de  $Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  (voir théorème 1.6).

**3.1. Proposition.** La correspondance  $Ext_{L.P}(G, A) \rightarrow Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  est donnée explicitement par:  $((\phi, F)) \mapsto ((\gamma, (T_e F)^*))$ .

On a une injection naturelle  $i_L : Ext_L(G, A) \rightarrow Ext_{L.P}(G, A)$ , qui consiste à munir chaque groupe dans l'extension  $0 \rightarrow A \rightarrow \widehat{G} \rightarrow G \rightarrow 1$  de la structure de Poisson nulle. De la même façon, il existe une injection naturelle correspondante  $i_A : Ext_{alg}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \rightarrow Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ . Comme la correspondance  $Ext_L(G, A) \rightarrow Ext_{alg}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  n'est ni injective ni surjective en général, alors il en est de même pour  $Ext_{L.P}(G, A) \rightarrow Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ . Cela découle de la commutativité des diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc}
 Ext_L(G, A) & \longrightarrow & Ext_{alg}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) & & Ext_L(G, A) & \longrightarrow & Ext_{alg}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \\
 \downarrow i_L & & \downarrow i_A & & \uparrow \pi_{L.P} & & \uparrow \pi_{big} \\
 Ext_{L.P}(G, A) & \longrightarrow & Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) & & Ext_{L.P}(G, A) & \longrightarrow & Ext_{big}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})
 \end{array}$$

# DEUXIÈME PARTIE

## CHAPITRE II. PRÉLIMINAIRES SUR LA MÉTHODE DES ORBITES.

La méthode des orbites a été introduite par A. A. Kirillov dans le cadre suivant ([Ber]): Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\mu_0$  un élément de  $\mathfrak{g}^*$  et  $\mathcal{O}$  son orbite coadjointe. On montre qu'il existe toujours des sous algèbres  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  telles que  $\mu_0([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ , et de codimension  $\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}$ ; de telles sous algèbres sont appelées polarisations au point  $\mu_0$ . Soit  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  une polarisation au point  $\mu_0$ , notons  $D = \exp(\mathfrak{h})$  le sous groupe de Lie de  $G$  correspondant. Ce sous groupe  $D$  admet un caractère unitaire  $\chi$  de forme infinitésimale  $i\mu_0|_{\mathfrak{h}}$ . On construit une représentation unitaire irréductible  $\text{Ind}_D^G \chi$  de  $G$  par induction à partir de  $\chi$ . Soit  $\mu$  un autre élément de  $\mathfrak{g}^*$  pour lequel on construit  $D'$  et  $\chi'$  comme ci-dessus, à partir d'une polarisation  $\mathfrak{h}'$  au point  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ . On montre que la représentation  $\text{Ind}_D^G \chi$  de  $G$  est indépendante de  $\mathfrak{h}$  à équivalence près, et que:

$$\text{Ind}_D^G \chi \text{ et } \text{Ind}_{D'}^G \chi' \text{ sont équivalentes } \iff \mu \in \mathcal{O}.$$

Ce qui prouve que la représentation  $\text{Ind}_D^G \chi$  de  $G$  ne dépend que de l'orbite coadjointe  $\mathcal{O}$  de  $\mu_0$ , d'où l'appellation «Méthode des orbites». De plus, on obtient dans ce cas une bijection entre le dual unitaire  $\widehat{G}$  de  $G$  et l'ensemble des orbites coadjointes.

Mais la situation envisagée par Kirillov était idéale: pour généraliser sa procédure à d'autres classes de groupes, on se heurte à des problèmes d'existence de polarisations réelles, de relèvement de  $i\mu_0|_{\mathfrak{h}}$  en un caractère  $\chi$  unitaire de  $D$  et d'irréductibilité de  $\text{Ind}_D^G \chi$ .

- Pour un groupe de Lie exponentiel, la procédure de Kirillov s'applique encore, mais cette fois  $\text{Ind}_D^G \chi$  n'est plus irréductible. Pukanszky a montré que  $\text{Ind}_D^G \chi$  est irréductible si et seulement si  $\mathfrak{h}$  satisfait une condition qui porte son nom.
- Pour un groupe de Lie résoluble, il n'existe pas toujours de polarisation réelle. La notion de polarisation réelle est alors remplacée par celle de polarisation complexe et le sous groupe  $D$  correspondra à la partie réelle  $\mathfrak{d}$  de la polarisation. Choisissons une polarisation complexe au point  $\mu_0$  et supposons que  $i\mu_0|_{\mathfrak{d}}$  se relève en un caractère unitaire  $\chi$  de  $D$ . La représentation  $\text{Ind}_D^G \chi$  n'est pas toujours irréductible. Harish-Chandra et Gelfand-Graev ont introduit la notion de représentation induite holomorphe  $\text{Hol}_D^G \chi$  qui est une sous représentation de  $\text{Ind}_D^G \chi$ . Sous certaines conditions sur  $\mathfrak{h}$  ( en particulier, la condition de Pukansky), Auslander et Kostant ont montré que  $\text{Hol}_D^G \chi$  est irréductible.
- Pour des groupes de Lie plus généraux que les résolubles, il n'existe pas toujours de polarisation complexe.

Dans le cadre de notre travail, on considère un groupe de Lie  $G$  quelconque, puis l'on

suppose l'existence d'une polarisation complexe  $\mathfrak{h}$  au point  $\mu_0$  et le relèvement de  $i\mu_0|_{\mathfrak{d}}$  en un caractère unitaire  $\chi$  de  $D$ . Par suite, on considère la représentation induite holomorphe  $\text{Hol}_D^G \chi$  de  $G$ : c'est ce que l'on entendra ici par méthode des orbites. Notre but est d'établir un lien entre la méthode des orbites et la quantification géométrique de l'orbite coadjointe  $\mathcal{O}$  de  $\mu_0$ , et d'un certain sous fibré symplectique  $F$  déterminé par  $\mu_0$  et  $\mathfrak{h}$ , d'un cotangent modifié de  $G/D$ . On traitera aussi une modification de  $\text{Hol}_D^G \chi$  introduite dans [Du]. On commence avant tout par fixer les notations qui seront utilisées dans les chapitres suivants et par donner quelques rappels.

### 1. Notations et rappels.

Soit  $G$  un groupe de Lie réel d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} \cong T_e G$ , on note  $X^\ell$  le champ invariant à gauche défini par  $X \in \mathfrak{g}$ :  $X^\ell|_e = X$ . Le groupe  $G$  opère dans  $\mathfrak{g}$  par l'action adjointe  $\text{Ad}$  et dans son espace vectoriel dual  $\mathfrak{g}^*$  par l'action coadjointe  $\text{Coad}$ . Les actions infinitésimales correspondantes sont notées par  $\text{ad}$  et  $\text{coad}$ . On note  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$  l'espace vectoriel complexifié de  $\mathfrak{g}$  et  $\bar{\cdot} : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  la conjugaison complexe dans  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . On étend l'action adjointe de  $G$  par linéarité à  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  et le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$  à  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  par bilinéarité.

Soit  $\mu_0$  un élément de  $\mathfrak{g}^*$ . On note  $G_{\mu_0} = \{g \in G \mid \text{Coad}(g)\mu_0 = \mu_0\}$  le stabilisateur de  $\mu_0$  dans  $G$ , et  $\mathfrak{g}_{\mu_0} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{coad}(X)\mu_0 = 0\}$  son algèbre de Lie. L'élément  $\mu_0 \in \mathfrak{g}^*$  définit une forme bilinéaire alternée  $B$  sur  $\mathfrak{g}$  par:

$$B(X, Y) = \mu_0([X, Y]), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Soit  $W$  un sous espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$ , on note  $W^\perp$  l'orthogonal de  $W$  dans  $\mathfrak{g}$  pour la 2-forme  $B$ :  $W^\perp = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall Y \in W : B(X, Y) = 0\}$ . Comme  $\mathfrak{g}^\perp = \mathfrak{g}_{\mu_0}$  alors  $B$  définit, par passage au quotient, une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mu_0}$ , qu'on note encore  $B$ . L'espace  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mu_0}$  muni de cette 2-forme  $B$  est un espace vectoriel symplectique. Un sous espace vectoriel  $W$  de  $\mathfrak{g}$  est dit isotrope maximal si et seulement si  $W^\perp = W$ , ou encore  $W \subset W^\perp$  et  $\dim W = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_{\mu_0})$ .

**1.1. Définition.** Une polarisation au point  $\mu_0 \in \mathfrak{g}^*$  est une sous algèbre de Lie (complexe)  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  contenant  $\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$  et satisfaisant les conditions suivantes:

- (i)  $\mathfrak{h}$  est invariante sous l'action adjointe de  $G_{\mu_0}$ .
- (ii)  $\mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{h}$ .
- (iii)  $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$  est une sous algèbre de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ .

A chaque polarisation  $\mathfrak{h}$ , on associe deux sous algèbres de Lie réelles  $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{e}$  de  $\mathfrak{g}$  définies par:  $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$  et  $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{h}}$ . On dit que  $\mathfrak{h}$  est réelle si  $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}}$ , dans l'autre extrême:  $\mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{h}$  est dite purement complexe.

On note  $D_0 \subset E_0$  les sous groupes de Lie connexes de  $G$  d'algèbres de Lie  $\mathfrak{d}$  et  $\mathfrak{e}$  respectivement. Comme  $\mathfrak{h}$  est invariante sous l'action adjointe de  $G_{\mu_0}$ , alors il en est de même pour  $\mathfrak{d}$  et  $\mathfrak{e}$ . On en déduit que  $D = G_{\mu_0} \cdot D_0 \subset E = G_{\mu_0} \cdot E_0$ , sont des sous groupes de  $G$ . Notons  $\mathfrak{e}^0 = \{\mu \in \mathfrak{g}^* \mid \forall x \in \mathfrak{e} : \mu(x) = 0\}$  l'annulateur de  $\mathfrak{e}$  dans  $\mathfrak{g}^*$ . Rappelons les propriétés suivantes:

### 1.2. Lemme ([Ber]).

- (i)  $\mathfrak{d}^\perp = \mathfrak{e}$ .
- (ii)  $D_0$  et  $D$  sont des sous groupes fermés de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{d}$ .
- (iii)  $\mathfrak{e}^0$  et  $\mu_0 + \mathfrak{e}^0$  sont invariants sous l'action coadjointe  $\text{Coad}_G$  de  $D$ .

**1.3. Définition.** ([Ber], [DET]) On dit qu'une polarisation  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  au point  $\mu_0$  satisfait la condition de Pukansky si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes:

- (i)  $\mu_0 + \mathfrak{e}^0 \subset \mathcal{O}$ .
- (ii)  $D \cdot \mu_0 = \mu_0 + \mathfrak{e}^0$ .
- (iii)  $D \cdot \mu_0$  est fermé dans  $\mathfrak{g}^*$ .

On note  $\Delta_G : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Delta_G(g) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(g)|^{-1}$ , la fonction module sur  $G$ . Pour tout élément  $d$  de  $D$ , on pose:  $\Delta_{D,G}(d) = \frac{\Delta_D(d)}{\Delta_G(d)}$ . Précisons tout d'abord la notation suivante qui sera souvent utilisée dans ce texte.

**1.4. Notation.** Soient  $V_1 \subset V_2$  des sous espaces vectoriels de  $\mathfrak{g}$  stables sous l'action adjointe  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}$  d'un sous groupe de Lie  $H$  de  $G$ . On note  $\text{Ad}_{V_2/V_1}(h)$ ,  $h \in H$ , l'application linéaire induite par  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(h)$  sur l'espace quotient  $V_1/V_2$ . On adopte la même notation pour des sous espaces  $V_1 \subset V_2$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  stables sous l'action de  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$  de  $H$ . Cette condition de stabilité de  $V_1$  et  $V_2$  sera toujours sous-entendue dans la suite lorsqu'on écrit  $\text{Ad}_{V_1/V_2}$ .

Soit  $d$  un élément de  $D$ , la matrice  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(d)$  s'écrit:  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}}(d) = \begin{pmatrix} \text{Ad}_{\mathfrak{d}}(d) & * \\ 0 & \text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(d) \end{pmatrix}$ . D'où,  $\Delta_{D,G}(d) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(d)|$ .

**1.5. Lemme.** Pour tout élément  $d$  de  $D$ , on a:

- (i)  $\det \text{Ad}_{\mathfrak{e}/\mathfrak{d}}(d) = 1$ .
- (ii)  $|\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}}(d)| = 1$ .
- (iii)  $\Delta_{D,G}(d) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(d)|$ .

*Preuve.* La 2-forme  $B$  sur  $\mathfrak{g}$  induit une 2-forme symplectique sur  $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ . Pour tout élément  $d$  de  $D$ ,  $\text{Ad}_{\mathfrak{e}/\mathfrak{d}}(d)$  est un symplectomorphisme de  $\mathfrak{e}/\mathfrak{d}$ , et donc  $(\det \text{Ad}_{\mathfrak{e}/\mathfrak{d}}(d))^2 = 1$ . D'autre part,  $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}} \oplus \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ , et on vérifie que la matrice  $\text{Ad}_{\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}}(d)$  s'écrit sous la forme:

$\text{Ad}_{\mathfrak{e}/\mathfrak{d}}(d) = \begin{pmatrix} \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}}(d) & 0 \\ 0 & \text{Ad}_{\overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}}(d) \end{pmatrix}$ . D'où,  $\det \text{Ad}_{\mathfrak{e}/\mathfrak{d}}(d) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}}(d)|^2$ . On en conclut que,  $\det \text{Ad}_{\mathfrak{e}/\mathfrak{d}}(d) = 1$ , et par conséquent on a:  $|\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}}(d)| = 1$ . L'affirmation (iii) se déduit de (ii) grâce à l'identification  $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}})/(\mathfrak{h}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}) \cong \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}$ . ■

### 1.6. Remarques.

- La propriété (i) entraîne  $\Delta_{D,E} \equiv 1$ .
- Comme conséquence de la propriété (i), on a:  $\Delta_{D,G}(d) = |\text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{e}}(d)|$ , pour tout élément  $d$  de  $D$ .

**1.7. Lemme.** Pour tout élément  $g_0$  de  $G_{\mu_0}$ , on a:  $\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0) = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(g_0))^{-1}$ , et par conséquent:  $\Delta_{D,G}(g_0) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0)|^{-1}$ .

*Preuve.* La matrice  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0)$ ,  $g_0 \in G_{\mu_0}$ , s'écrit sous la forme:

$$\text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0) = \begin{pmatrix} \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0) & * \\ 0 & \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(g_0) \end{pmatrix}.$$

En écrivant que  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0)$  préserve la 2-forme symplectique  $B$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$ , on obtient:  ${}^t(\text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0)) \cdot \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(g_0) = I_n$ , où  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n = \dim \mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}} = \dim \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}$ . D'où,  $\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0) = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(g_0))^{-1}$ . Par passage au modules, on obtient:  $|\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0)| = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(g_0)|^{-1} = \Delta_{D,G}^{-1}(g_0)$  (d'après le lemme précédent). D'où le résultat. ■

**1.8. Remarque.** Si  $X$  est un élément de  $\mathfrak{g}_{\mu_0}$ , alors on a:  $\text{trace ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(X) = -\text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(X)$ .

## 2. Représentations induites.

Supposons qu'il existe un caractère unitaire  $\chi$  de  $D$  tel que  $d_e \chi = i\mu_0|_{\mathfrak{d}}$ . On considère l'espace des fonctions lisses  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$  qui vérifient la condition suivante de quasi-invariance par  $D$ :

$$(2.1) \quad \varphi(gd) = \chi(d)^{-1} \Delta_{D,G}(d)^{\frac{1}{2}} \varphi(g), \quad g \in G, d \in D.$$

Afin de construire un espace de Hilbert à partir de l'espace de ces fonctions, on pense aux fonctions  $\varphi$  qui sont de carré sommable par rapport à une mesure de Haar (à gauche)  $d\mu_G$  sur  $G$ . Ces fonctions sont « constantes » (à un facteur près) sur les orbites de  $D$  pour l'action à droite sur  $G$ . Le problème qui se pose est que si  $D$  n'est pas compact, alors l'intégrale  $\int_G |\varphi|^2 d\mu_G$  diverge. Pour cela, on va intégrer ces fonctions sur l'espace  $G/D$  des orbites de  $D$ , d'où la nécessité d'une mesure sur  $G/D$ . Une autre difficulté qui se présente est que même si  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient la propriété ci-dessus,  $\overline{\varphi}\psi$  n'est pas une fonction sur  $G/D$ .

On se fixe une base  $(X_i)_{i=1}^k$  de  $\mathfrak{d}$ , et on note  $\alpha = i(X_1^\ell, \dots, X_k^\ell)d\mu_G$  la forme différentielle sur  $G$  obtenue par contraction de  $d\mu_G$  avec les champs  $(X_i^\ell)_{i=1}^k$  invariants à gauche sur  $G$ . La forme différentielle  $\overline{\varphi}\psi\alpha$  se projette presque (i. e. au signe près) sur  $G/D$ : en fait, pour tout élément  $d$  de  $D$ , on a:  $R_d^*\alpha = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}(d))^{-1} \cdot \alpha$ , et  $R_d^*(\overline{\varphi}\psi) = \Delta_{D,G}(d)\overline{\varphi}\psi$ ,  $R_d$  étant l'action à droite de  $d$  sur  $G$ . Si on met le module autour de  $\alpha$ , alors  $\overline{\varphi}\psi|\alpha|$  se projette sur  $G/D$ . De manière plus précise.

On définit une mesure  $\overline{\varphi}\psi d\mu_{G,D}$  sur  $G/D$ , i.e: fonction sur les repères  $R$  de  $G/D$  telle que:  $\overline{\varphi}\psi d\mu_{G,D}(R \cdot A) = |\det A| \cdot \overline{\varphi}\psi d\mu_{G,D}(R)$ ,  $A \in GL(k', \mathbb{R})$ ,  $k' = \dim G/D$ , comme suit. Soient  $R$  un repère en un point  $m \in G/D$ , et  $\widehat{R}$  un repère de  $G$  au point  $g \in p^{-1}(m)$ , tel que:  $p_*\widehat{R} = R$ ,  $p: G \rightarrow G/D$  étant la projection canonique. On pose:

$$(\overline{\varphi}\psi d\mu_{G,D})(R) = (\overline{\varphi}\psi)(g)|\alpha_g(\widehat{R})|.$$

En vertu de la définition de  $\alpha$ ,  $\overline{\varphi}\psi d\mu_{G,D}(R)$  ne dépend pas du choix de  $\widehat{R}$  tel que:  $p_*\widehat{R} = R$ , et vérifie la propriété d'une mesure. Pour tout élément  $d$  de  $D$ , on a:

$$(\overline{\varphi}\psi)(gd) \cdot |\alpha_{gd}(R_{d*}\widehat{R})| = (\overline{\varphi}\psi)(g) \cdot |\alpha_g(\widehat{R})|.$$

Donc,  $(\overline{\varphi}\psi)d\mu_{G,D}$  est indépendante du choix de  $g \in \pi^{-1}(m)$ . En conclusion,  $\overline{\varphi}\psi d\mu_{G,D}$  est une mesure sur  $G/D$  bien définie. En intégrant cette mesure sur la variété  $G/D$ , on obtient un produit hermitien  $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{G/D} \overline{\varphi}\psi d\mu_{G,D}$  sur l'espace des fonctions satisfaisant la condition (2.1) et qui sont bien sûr de carré sommable:  $\int_{G/D} |\varphi|^2 d\mu_{G,D} < \infty$ . Ensuite, on complète cet espace préhilbertien par rapport à son produit hermitien, pour obtenir un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Cette complétion sera toujours sous-entendue par la suite.

**2.2. Notation.** Soit  $\widehat{\chi}$  un caractère de  $D$ . On note  $C_{\widehat{\chi}}^\infty(G)$  l'espace des fonctions lisses  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ , telles que: pour tout élément  $g$  de  $G$  et tout élément  $d \in D$ , on a:  $\varphi(gd) = \widehat{\chi}(d)^{-1}\varphi(g)$ . En adoptant cette notation,  $C_{\chi \cdot \Delta_{D,G}^{-1/2}}^\infty(G)$  désigne l'espace des fonctions  $\varphi$  vérifiant la la propriété (2.1).

Avec cette notation, l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  s'écrit:

$$(2.3) \quad \mathcal{H} = \left\{ \varphi \in C_{\chi \cdot \Delta_{D,G}^{-1/2}}^\infty(G) \mid \int_{G/D} |\varphi|^2 d\mu_{G,D} < \infty \right\}.$$

On obtient une représentation unitaire  $U$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  en faisant agir  $G$  sur  $\mathcal{H}$  par translations à gauche:

$$(2.4) \quad (U(g)\varphi)(g') = \varphi(g^{-1}g'), \varphi \in \mathcal{H}, g, g' \in G.$$

**2.5. Définition.** La représentation unitaire  $(\mathcal{H}, U)$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  est appelée la représentation induite par  $\chi$  de  $D$  à  $G$ . On la note:  $\text{Ind}_D^G \chi = (\mathcal{H}, U)$ .

### 3. Représentations induites holomorphes et modification de Duflo.

Harish-Chandra et Gelfand-Graev ont constaté la stabilité par  $U$  du sous espace  $\mathcal{H}_{hol}$  de  $\mathcal{H}$  suivant:

$$\mathcal{H}_{hol} = \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = (-i \langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(Z)) \cdot \varphi \},$$

où  $Z^\ell \varphi$  est la dérivée de  $\varphi$  suivant le champ invariant à gauche  $Z^\ell$  sur  $G$ .

**3.1. Définition.** La sous représentation  $(\mathcal{H}_{hol}, U)$  de  $\text{Ind}_D^G \chi$  est appelée la représentation induite holomorphe par  $\chi$  de  $D$  à  $G$ . Elle est notée:  $\text{Hol}_D^G \chi = (\mathcal{H}_{hol}, U)$ .

#### 3.2. Remarques.

- Si  $Z \in \mathfrak{d}$ , alors la condition  $Z^\ell \varphi = (-i \langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}}(Z)) \cdot \varphi$  est la version infinitésimale de la propriété  $\varphi \in C_{\chi \cdot \Delta_{D,G}^{-1/2}}^\infty(G)$ ; on utilise le fait que  $\Delta_{D,G}(d) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}(d)|$ ,  $d \in D$  (voir remarque 1.6).
- Si on induit le caractère  $\chi$  de  $D$  à  $E$  alors l'espace de la représentation  $\text{Hol}_D^E \chi$  s'identifie à l'ensemble des sections holomorphes de carré intégrable d'un certain fibré holomorphe sur  $E/D$  (voir [Ber]). D'où la terminologie de représentation induite holomorphe.

Dans ([Du]), Duflo a introduit une modification dans l'espace  $\mathcal{H}_{hol}$  qu'on peut décrire de la manière suivante.

On suppose qu'il existe un caractère  $\eta : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  tel que:  $\eta(d)^2 = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(d))^{-1}$ . Puisque  $\Delta_{D,G}(d) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(d)|$  (lemme 1.5), alors  $|\eta(d)| = \Delta_{D,G}(d)^{-\frac{1}{2}}$ . L'hypothèse d'existence du caractère  $\eta$  revient donc à enlever le module autour de « $\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}$ » dans l'expression de  $\Delta_{D,G}$ . La modification de Duflo de l'espace  $\mathcal{H}_{hol}$  de la représentation  $\text{Hol}_D^G \chi$  consiste à remplacer  $\Delta_{D,G}^{-\frac{1}{2}}$  par une racine carrée  $\eta$  de  $(\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}})^{-1}$ . On modifie l'espace  $C_{\chi \cdot \Delta_{D,G}^{-1/2}}^\infty(G)$  par l'espace  $C_{\chi \cdot \eta}^\infty(G)$  des fonctions lisses  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ , telles que:

$$(3.3) \quad \varphi(gd) = \chi(d)^{-1} \cdot \eta(d)^{-1} \varphi(g), \quad g \in G, \quad d \in D.$$

Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions vérifiant la propriété ci-dessus. Soient  $g$  un élément de  $G$  et  $d$  un élément de  $D$ . Alors, on a:

$$\overline{\varphi(gd)} \cdot \psi(gd) = |\eta(d)|^{-2} \cdot \overline{\varphi(g)} \cdot \psi(g) = \Delta_{D,G}(d) \cdot \overline{\varphi(g)} \cdot \psi(g).$$

Grâce à cette propriété, on applique la même procédure que pour les représentations induites, pour construire la mesure  $\overline{\varphi} \psi d\mu_{G,D}$  sur  $G/D$ . L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}'_{hol}$  modifié de

$\mathcal{H}_{hol}$  est donné par:

$$\mathcal{H}'_{hol} = \left\{ \varphi \in C_{\chi \cdot \eta}^{\infty}(G) \mid \int_{G/D} |\varphi|^2 d\mu_{G,D} < \infty, \text{ et} \right. \\ \left. \forall Z \in \mathfrak{h} : Z^{\ell} \varphi = (-i \langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g} \mathfrak{C} / \mathfrak{h}}(Z)) \varphi \right\}$$

La représentation  $U$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}'_{hol}$  étant donnée par la même expression que dans (2.4).

**3.4. Remarque.** Si  $Z \in \mathfrak{d}$ , alors la condition  $Z^{\ell} \varphi = (-i \langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g} \mathfrak{C} / \mathfrak{h}}(Z)) \varphi$  est la version infinitésimale de la propriété  $\varphi \in C_{\chi \cdot \eta}^{\infty}(G)$ .

Pour plus de détails et pour les raisons de cette modification, on pourra consulter ([Du], [G]).

### CHAPITRE III. QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE ORBITE COADJOINTE.

On désigne par  $\mathcal{O}$  l'orbite coadjointe d'un élément  $\mu_0$  fixé dans  $\mathfrak{g}^*$ ; les notations étant celles du chapitre précédent. L'objectif de ce chapitre est d'apporter des réponses complètes aux questions suivantes que nous nous sommes posés dans l'introduction de cette thèse:

*Les hypothèses de la méthode des orbites garantissent-elles la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$ ? Si cette quantification est possible, la représentation de  $\mathfrak{g}$  obtenue s'intègre-t-elle en une représentation de  $G$ ? Eventuellement, comparer cette représentation à celle donnée par la méthode des orbites.*

Après avoir rappelé la structure symplectique de  $\mathcal{O}$ , nous traitons le problème de sa préquantification. Nous montrerons que le relèvement de la forme  $i\mu_0$  sur  $\mathfrak{g}_{\mu_0}$  en un caractère unitaire  $\chi$  de  $G_{\mu_0}$  est équivalent à l'existence d'un fibré préquantique  $L$  au dessus de  $\mathcal{O}$  sur lequel l'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathcal{O}$  se relève en une action qui préserve la connection donnée sur  $L$ . Supposons l'existence d'un tel caractère  $\chi$  sur  $G_{\mu_0}$ . Nous montrerons que la préquantification de  $\mathcal{O}$  donne une représentation unitaire de  $G$ . L'étape suivante de la quantification géométrique est l'introduction d'une polarisation  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{O}$  pour réduire l'espace de Hilbert donné par la préquantification. Nous établissons que la donnée d'une polarisation  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  au point  $\mu_0$  est équivalente à la donnée d'une polarisation  $\mathcal{F}$ , au sens de la quantification géométrique,  $G$ -invariante sur  $\mathcal{O}$ . Supposons l'existence d'une polarisation  $\mathfrak{h}$  au point  $\mu_0$ , et notons  $\mathcal{F}$  la polarisation «géométrique» sur  $\mathcal{O}$  associée. Nous appliquons la procédure de la quantification géométrique à  $\mathcal{O}$ , et en déduisons un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_Q$  défini à partir des sections du fibré quantique  $Q = L \otimes B$  au dessus de  $\mathcal{O}$ ;  $B$  étant un fibré en ligne complexe associé au fibré des repères  $\mathcal{R}\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}$ . Les sections de  $B$  sont les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités sur  $\mathcal{O}$ , et cette quantification est dite par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités. Grâce à la  $G$ -invariance de  $\mathcal{F}$ , l'application moment de  $\mathcal{O}$  est quantifiable; ce qui donne une représentation unitaire de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_Q$ , qui s'intègre à  $G$  dans notre cas. Nous concluons que nous n'avons pas besoin de relever la forme  $i\mu_0|_{\mathfrak{d}}$  à  $D$  pour quantifier  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités, et que le relèvement de  $i\mu_0|_{\mathfrak{g}_{\mu_0}}$  en un caractère unitaire  $\chi$  de  $G_{\mu_0}$  suffit pour le faire. Nous montrerons que si  $\chi$  se prolonge à  $D$ , alors la représentation de  $G$  obtenue par la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités est exactement celle donnée par la méthode des orbites, à savoir la représentation induite holomorphe  $\text{Hol}_D^G \chi$ .

Nous aborderons ensuite la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes, qui consiste à modifier le fibré  $B$  par un fibré  $\tilde{B}$  (qui n'existe pas toujours) dont les sections sont les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes. Nous montrerons que l'existence du caractère  $\eta$ , introduit par Duflo, sur  $G_{\mu_0}$  suffit pour l'existence de  $\tilde{B}$  dans le cas de  $\mathcal{O}$ . En quantifiant  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes, nous

obtenons une représentation unitaire de  $\mathfrak{g}$ , qui s'intègre à  $G$ , dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$  défini à partir des sections du fibré quantique par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes  $\tilde{Q} = L \otimes \tilde{B}$ . Si les caractères  $\chi$  et  $\eta$  de  $G_{\mu_0}$  s'étendent à  $D$ , alors cette représentation de  $G$  est la même que celle donnée par la méthode des orbites modifiée par M. Duflo.

### 1. Rappel de la structure symplectique de $\mathcal{O}$ .

On note  $\pi : G \rightarrow \mathcal{O}$ ,  $g \mapsto \text{Coad}(g)\mu_0$ , la projection canonique de  $G$  sur  $\mathcal{O}$ . Cette projection  $\pi$  donne, par passage au quotient  $G/G_{\mu_0}$ , un difféomorphisme entre  $G/G_{\mu_0}$  et  $\mathcal{O} : G/G_{\mu_0} \rightarrow \mathcal{O}$ ,  $[g] \mapsto \text{Coad}(g)\mu_0$ , où  $[g] = gG_{\mu_0}$  désigne la classe à droite de  $g \in G$ , modulo  $G_{\mu_0}$ .

Le groupe  $G$  agit à gauche sur  $\mathcal{O}$  par l'action coadjointe. Si  $X \in \mathfrak{g}$ , on note  $X_{\mathcal{O}}$  le champ fondamental sur  $\mathcal{O}$  de générateur infinitésimal  $X$ :

$$X_{\mathcal{O}}|_{\mu} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Coad}(\exp -tX)\mu = -\text{coad}(X)\mu, \quad \mu \in \mathcal{O}.$$

L'application  $X \mapsto X_{\mathcal{O}}$  est un morphisme d'algèbres de Lie de  $\mathfrak{g}$  dans l'espace  $\mathcal{X}(\mathcal{O})$  des champs de vecteurs sur  $\mathcal{O}$ . L'espace tangent à  $\mathcal{O}$  est engendré par ces champs fondamentaux  $X_{\mathcal{O}}$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ .

On considère la dérivée extérieure  $d\mu_0^{\ell}$  de la 1-forme invariante à gauche  $\mu_0^{\ell}$  sur  $G$  définie par l'élément  $\mu_0$  de  $\mathfrak{g}^*$  ( $\cong T_e^*G$ ):

$$(d\mu_0^{\ell})(X^{\ell}, Y^{\ell}) = -\langle \mu_0, [X, Y] \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Grâce à la stabilité de  $\mu_0$  sous l'action coadjointe de  $G_{\mu_0}$ , la 1-forme  $\mu_0^{\ell}$  (et donc  $d\mu_0^{\ell}$ ) est invariante sous l'action à droite de  $G_{\mu_0}$  sur  $G$ . Par le même argument, la 1-forme  $i(X^{\ell})d\mu_0^{\ell}$  sur  $G$  est nulle partout pour tout élément  $X$  de  $\mathfrak{g}_{\mu_0}$ . Il en résulte qu'il existe une et une seule 2-forme différentielle  $\omega$  sur  $\mathcal{O} \cong G/G_{\mu_0}$ , telle que  $\pi^*\omega = d\mu_0^{\ell}$ :

$$(\omega(X_{\mathcal{O}}, Y_{\mathcal{O}}))([g]) = -\langle \text{Coad}(g)\mu_0, [X, Y] \rangle, \quad g \in G, \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Cette 2-forme  $\omega$  est fermée et non dégénérée. Donc,  $\omega$  est une 2-forme symplectique sur  $\mathcal{O}$ : c'est la 2-forme de Kirillov-Kostant-Souriau sur  $\mathcal{O}$ , et  $(\mathcal{O}, \omega)$  est une variété symplectique. On appelle champ hamiltonien  $\xi_f$  associé à une fonction  $f \in C^{\infty}(\mathcal{O})$  le champ de vecteurs sur  $\mathcal{O}$  donné par:  $i(\xi_f)\omega + df = 0$ . La variété symplectique  $\mathcal{O}$  est en particulier une variété de Poisson, son crochet de Poisson  $\{, \}$  étant donné par:

$$\{f_1, f_2\} = \omega(\xi_{f_1}, \xi_{f_2}), \quad f_1, f_2 \in C^{\infty}(\mathcal{O}).$$

L'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathcal{O}$  préserve la 2-forme  $\omega$ , et admet une application moment  $J : \mathcal{O} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ,  $\mu \mapsto \mu$ , Coad-équivariante. Ou, de manière équivalente, on définit  $J$  par:

$$J : \mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})$$

$$X \longmapsto J_X : \mu \mapsto \langle J(\mu), X \rangle = \langle \mu, X \rangle.$$

Le fait que  $J$  est une application moment sur  $\mathcal{O}$  s'exprime par la propriété suivante:  $\forall X \in \mathfrak{g}$ ,  $i(X_{\mathcal{O}})\omega + dJ_X = 0$ , ou encore:  $X_{\mathcal{O}} = \xi_{J_X}$ . L'équivariance de  $J : \mathcal{O} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  entraîne que  $J : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(\mathcal{O})$  est un morphisme d'algèbres de Lie.

## 2. Préquantification de $\mathcal{O}$ .

**2.1. Définition.** Un fibré préquantique au dessus d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  est un fibré en ligne complexe  $L$  muni d'une connexion  $\nabla$  de courbure  $i\omega$ , et d'un produit hermitien compatible avec  $\nabla$ . Si un tel fibré existe, on dit que  $M$  est préquantifiable.

**2.2. Remarque.** On définit aussi un fibré préquantique au dessus de  $M$  comme étant un fibré principal  $P$  sur  $M$  de groupe structural  $\mathbb{T}^1$ , muni d'une 1-forme de connexion  $\alpha$  de courbure  $\omega$ . En fait, dans la définition ci-dessus  $L$  est le fibré en ligne complexe associé à  $P$  par la représentation identité de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{C}$ , muni de la connexion  $\nabla$  associée à  $\alpha$ .

C'est un fait classique ([Weil]) que  $(M, \omega)$  est préquantifiable si et seulement si  $\omega$  détermine une classe de cohomologie  $[\omega]$  entière. Un fibré préquantique (lorsqu'il existe) n'est pas unique, les différents choix possibles sont donnés par le 1er groupe de cohomologie  $H^1(M, \mathbb{T}^1)$ .

Notre but ici est de préquantifier la variété symplectique  $M = \mathcal{O}$ . En vertu de la définition de la 2-forme canonique  $\omega$  de  $\mathcal{O} \cong G/G_{\mu_0}$ , on a une condition (algébrique) suffisante pour la préquantification de  $\mathcal{O}$ .

**2.3. Théorème ([Ko]).** *Si la forme linéaire  $i\mu_0$  sur  $\mathfrak{g}_{\mu_0}$  se relève en un caractère unitaire  $\chi$  de  $G_{\mu_0}$ , alors  $\mathcal{O}$  est préquantifiable.*

Pour son utilité par la suite, rappelons brièvement la démonstration de ce théorème.

*Preuve.* On considère le fibré en ligne complexe  $L$  sur  $\mathcal{O}$  associé au fibré principal  $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$ , de groupe structural  $G_{\mu_0}$ , par le caractère  $\chi : G_{\mu_0} \rightarrow \mathbb{T}^1 \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$ . Plus précisément:  $L = (G \times \mathbb{C})/G_{\mu_0} (\cong G \times_{G_{\mu_0}} \mathbb{C})$ , où l'action à droite de  $G_{\mu_0}$  sur  $G \times \mathbb{C}$  est donnée par:  $(g, z) \cdot g_0 = (gg_0, \chi(g_0)^{-1}z)$ ,  $g \in G$ ,  $g_0 \in G_{\mu_0}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Soit  $L^* = (G \times \mathbb{C}^*)/G_{\mu_0}$  le  $\mathbb{C}^*$ -fibré principal au dessus de  $\mathcal{O}$  dont  $L$  est le fibré en ligne complexe associé par la représentation identité de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}$ . L'action à droite de  $\mathbb{C}^*$  sur  $L^*$  étant donnée par:  $[g, z] \cdot w = [g, zw]$ ,  $[g, z] \in L^*$ , et  $w \in \mathbb{C}^*$ . On définit une 1-forme de connexion sur  $L^*$  comme suit.

La 1-forme complexe  $\tilde{\alpha} = \mu_0^\ell + dz/iz$ , où  $z$  est une coordonnée sur  $\mathbf{C}^*$ , est une 1-forme de connexion sur le fibré trivial  $G \times \mathbf{C}^*$  au dessus de  $G$ , de courbure  $d\mu_0^\ell$ . Comme  $\mu_0^\ell$  est invariante sous l'action à droite de  $G_{\mu_0}$ , et  $dz/iz$  est invariante par multiplication par  $\mathbf{C}^*$ , alors  $\tilde{\alpha}$  est invariante sous l'action à droite de  $G_{\mu_0}$  sur  $G \times \mathbf{C}^*$ . Si  $X_{G \times \mathbf{C}^*}$  désigne le champ fondamental de générateur  $X \in \mathfrak{g}_{\mu_0}$  pour l'action à droite de  $G_{\mu_0}$  sur  $G \times \mathbf{C}^*$ , alors la contraction de  $\tilde{\alpha}$  avec  $X_{G \times \mathbf{C}^*}$  est nulle. Il s'ensuit que  $\tilde{\alpha}$  se projette en une 1-forme de connexion  $\alpha$  sur  $L^* = (G \times \mathbf{C}^*)/G_{\mu_0}$  au dessus de  $G/G_{\mu_0} \cong \mathcal{O}$ , de courbure  $\omega$ . Soit  $\nabla$  la connexion sur  $L$  associée à la 1-forme de connexion  $\alpha$  sur  $L^*$ . On vérifie qu'elle est de courbure  $i\omega$ . Le produit hermitien sur  $L$  compatible avec  $\nabla$  provient ensuite du fait que  $\chi$  est unitaire. ■

**2.4. Remarque.** La réciproque de ce théorème n'est pas vraie en général, voici un exemple. Soit  $G = SO(3, \mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{g} = so(3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$ . Soit  $\mu_0 = (\lambda, 0, 0) \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3$ , avec  $\lambda > 0$ . Dans ce cas,  $G_{\mu_0} = \mathbb{T}^1$  et  $\mathcal{O}$  est la sphère  $S^2$  de rayon  $\lambda$ . Il est bien connu que  $\mathcal{O}$  est préquantifiable si et seulement si  $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$ . Par contre,  $i\mu_0$  se relève en un caractère de  $G_{\mu_0} = \mathbb{T}^1$  si et seulement si  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi, si  $\lambda = \frac{n}{2}$  avec  $n$  impair, alors  $i\mu_0$  ne se relève pas en un caractère de  $G_{\mu_0} = \mathbb{T}^1$  pourtant  $\mathcal{O}$  est préquantifiable.

**2.5. Proposition.** *La forme linéaire  $i\mu_0$  sur  $\mathfrak{g}_{\mu_0}$  se relève en un caractère unitaire  $\chi$  de  $G_{\mu_0}$  si et seulement si il existe un fibré préquantique  $L \xrightarrow{\tau} \mathcal{O}$ , sur lequel l'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathcal{O}$  se relève en une action qui préserve sa connexion.*

*Preuve.* Condition nécessaire: supposons que la forme  $i\mu_0$  sur  $\mathfrak{g}_{\mu_0}$  se relève en un caractère unitaire  $\chi$  de  $G_{\mu_0}$ . Dans la preuve du théorème (2.3), on a construit un fibré préquantique  $L$  au dessus de  $\mathcal{O}$ . L'action  $\Phi$  de  $G$  sur  $L = (G \times \mathbf{C})/G_{\mu_0}$  donnée par:  $\Phi(g)([h, z]) = [gh, z]$ ,  $g, h \in G$ ,  $z \in \mathbf{C}$ , est un relèvement de l'action de  $G$  sur  $\mathcal{O}$ . Grâce à l'invariance de  $\mu_0^\ell$  (par définition) sous l'action de  $G$ , la 1-forme de connexion  $\alpha$  sur  $L^*$  est invariante sous l'action de  $G$  sur  $L^*$ .

Condition suffisante: Soit  $L \xrightarrow{\tau} \mathcal{O}$  un fibré préquantique au dessus de  $\mathcal{O}$ , sur lequel l'action de  $G$  sur  $\mathcal{O}$  se relève en une action  $\Phi$  de fibré vectoriel, préservant sa connexion. En particulier, on a:  $\tau(\Phi(g)p) = \text{Coad}(g)\tau(p)$ ,  $g \in G$ , et  $p \in L$ . Soit  $p$  un élément fixé de  $L^*$  (donc,  $\Phi(g)p \in L^*$ ,  $\forall g \in G$ ), tel que:  $\tau(p) = \mu_0$ . Ainsi, on a:

$$\forall g \in G_{\mu_0} : \tau(\Phi(g)p) = \mu_0 = \tau(p),$$

ce qui entraîne l'existence d'une application  $\chi : G_{\mu_0} \rightarrow \mathbf{C}^*$ ,  $g \mapsto \chi(g)$  donnée par:

$$\Phi(g)p = p \cdot \chi(g), \quad g \in G_{\mu_0}.$$

Comme  $\Phi$  est une action de  $G$  sur  $L$ , alors  $\chi$  est un caractère de  $G_{\mu_0}$ . Vérifions que  $d_e\chi = i\mu_0$ . Dans une carte locale  $U \times \mathbf{C}^*$  de  $L^*$ ,  $p = (\mu_0, z_0)$ ,  $z_0 \in \mathbf{C}^*$ , et l'action de  $\mathbf{C}^*$  sur  $p$  est donnée par:  $(\mu_0, z_0) \cdot w = (\mu_0, z_0 w)$ ,  $w \in \mathbf{C}^*$ . Soit  $X \in \mathfrak{g}_{\mu_0}$ , on a:

$$(d_e\chi)(X)_{z_0} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p \cdot \chi(\exp tX) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(\exp tX)p = X_L|_p,$$

où  $X_L$  est le champ fondamental sur  $L^*$  associé à  $X \in \mathfrak{g}_{\mu_0}$ . La 1-forme de connexion  $\alpha$  s'écrit:  $\alpha = \theta + dz/iz$ , où  $\theta$  est un potentiel de  $\omega$  sur  $U$ , i.e:  $d\theta = \omega$ . En écrivant que la dérivée de Lie  $\mathcal{L}_{X_L}\alpha$  de  $\alpha$  suivant le champ de vecteurs  $X_L$  est nulle (puisque  $G$  préserve  $\alpha$ ), on obtient que le champ fondamental  $X_L$  s'écrit sur  $U$  sous la forme:  $X_L = X_{\mathcal{O}} + (J_X - \theta(X_{\mathcal{O}}))iz\partial/\partial z$ . Comme  $X \in \mathfrak{g}_{\mu_0}$  alors  $X_{\mathcal{O}} = 0$  et par conséquent:  $X_L|_{(\mu_0, z_0)} = J_X(\mu_0)iz_0\partial/\partial z = i\langle \mu_0, X \rangle z_0\partial/\partial z$ . D'où  $(d_e\chi)(X) = i\langle \mu_0, X \rangle$ . Le caractère  $\chi$  est unitaire sur la composante connexe de  $G_{\mu_0}$  (car  $d_e\chi = i\mu_0$ ). En posant  $\hat{\chi} = \chi/|\chi|$ , alors  $\hat{\chi}$  est bien un caractère unitaire de  $G_{\mu_0}$ , tel que  $d_e\chi = i\mu_0$ . D'où le résultat. ■

**2.6. Remarque.** Dans le cadre de la méthode des orbites, on suppose que la forme  $i\mu_0$  sur  $\mathfrak{d}$  se relève en un caractère unitaire  $\chi$  de  $D$ . Pour préquantifier  $\mathcal{O}$ , on n'a besoin que du relèvement de  $i\mu_0$  à  $G_{\mu_0}$ , et non pas à  $D$  tout entier.

Dans tout ce qui suit, on suppose que la forme  $i\mu_0$  sur  $\mathfrak{g}_{\mu_0}$  se relève en un caractère unitaire  $\chi$ , et on se fixe le fibré préquantique  $(L, \nabla)$  au dessus de  $\mathcal{O}$ , construit dans le théorème (2.3). Notons  $\Gamma(L)$  l'espace des sections lisses de  $L$  au dessus de  $\mathcal{O}$ . Par construction de  $L (\cong G \times_{G_{\mu_0}} \mathbf{C})$  comme étant le fibré en ligne complexe associé au fibré principal  $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$  par le caractère  $\chi$ , on a une bijection :

$$\Gamma(L) \cong C_X^\infty(G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \varphi(gg_0) = \chi(g_0^{-1})\varphi(g), g \in G, g_0 \in G_{\mu_0}\},$$

donnée par:  $s([g]) = [g, \varphi(g)]$ ,  $s \in \Gamma(L)$ ,  $\varphi \in C_X^\infty(G)$ . Il est à noter que toutes les fonctions qu'on considère dans ce texte sont supposées à valeurs dans  $\mathbf{C}$ . Dans un contexte local sur un ouvert  $U$  de  $\mathcal{O}$ , cette identification s'écrit:  $\Gamma_U(L) \cong C_X^\infty(\pi^{-1}(U))$ , elle est donnée par:  $s(m) = [u, \varphi(u)]$ ,  $m \in U$ ,  $u \in \pi^{-1}(m)$ . Ici,  $\Gamma_U(L)$  désigne l'espace des sections (locales) de  $L$  au dessus de  $U$  de  $\mathcal{O}$ .

On cherche à définir un espace de Hilbert à partir de  $\Gamma(L)$ , pour cela fixons la notation suivante. Si  $s_1$  et  $s_2$  sont deux éléments de  $\Gamma(L)$ , alors on note  $(s_1, s_2)$  la fonction sur  $\mathcal{O}$  définie par:

$$(s_1, s_2)([g]) = \langle s_1([g]), s_2([g]) \rangle, g \in G,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit hermitien dans les fibres de  $L$ . Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions sur  $G$  qui représentent  $s_1$  et  $s_2$  (respectivement) dans l'identification  $\Gamma(L) \cong C_X^\infty(G)$ , alors

la fonction  $(s_1, s_2)$  sur  $\mathcal{O}$  n'est rien d'autre que  $\bar{\varphi} \cdot \psi$ . Il est à noter que  $\bar{\varphi}\psi$  est bien une fonction sur  $\mathcal{O}$ , cela découle du fait que  $\chi$  est unitaire. En intégrant cette fonction  $(s_1, s_2)$  sur  $\mathcal{O}$  par rapport à la mesure de Liouville  $\varepsilon_\omega = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!} \omega^n$  de  $\mathcal{O}$ , on obtient un produit hermitien:  $\langle s_1, s_2 \rangle = \int_{\mathcal{O}} (s_1, s_2) \varepsilon_\omega$  sur l'espace de Hilbert des sections  $s$  de  $L$  qui sont de carré sommable:  $\int_{\mathcal{O}} (s, s) \varepsilon_\omega < \infty$ . L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_L$  construit par la préquantification géométrique de  $\mathcal{O}$  est donc,

$$\mathcal{H}_L \cong \left\{ \varphi \in C_X^\infty(G) \mid \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 \varepsilon_\omega < \infty \right\},$$

muni du produit hermitien:  $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathcal{O}} \bar{\varphi} \psi \varepsilon_\omega$ ,  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_L$ .

A chaque fonction  $f \in C^\infty(\mathcal{O})$ , la préquantification géométrique associe un opérateur  $\mathcal{Q}(f)$  sur  $\mathcal{H}_L$  défini par:

$$\mathcal{Q}(f)s = -i\nabla_{\xi_f} s + fs, \quad s \in \mathcal{H}_L.$$

Si on note  $[, ]$  le commutateur des opérateurs sur  $\mathcal{H}_L$ , alors cette correspondance  $f \mapsto \mathcal{Q}(f)$  est construite de telle façon que:

$$\mathcal{Q}(\{f_1, f_2\}) = i[\mathcal{Q}(f_1), \mathcal{Q}(f_2)], \quad f_1, f_2 \in C^\infty(\mathcal{O}).$$

Ici, on s'intéresse à la représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_L$  donnée par la préquantification de  $\mathcal{O}$ : c'est la correspondance  $X \mapsto i\mathcal{Q}(J_X)$ . Afin de décrire les opérateurs  $\mathcal{Q}(J_X)$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , on aura besoin d'explicitier la connexion  $\nabla$  sur les champs fondamentaux  $X_{\mathcal{O}} = \xi_{J_X}$ , en termes de l'identification  $\Gamma(L) \cong C_X^\infty(G)$ . La réponse est donnée par la proposition suivante:

**2.7. Proposition.** Si  $\varphi \in C_X^\infty(G)$  correspond à  $s \in \Gamma(L)$ , alors la section  $\nabla_{X_{\mathcal{O}}} s$  de  $L$  correspond à l'élément  $X^r \varphi + i\mu_0^\flat(X^r)\varphi$  de  $C_X^\infty(G)$ , où  $X^r$  désigne le champ invariant à droite sur  $G$  défini par  $X \in \mathfrak{g}$ :  $X^r|_g = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(-tX)g)$ . Il est à noter que  $X^r|_e = -X$ , et que  $[X^r, Y^r] = [X, Y]^r$ .

*Démonstration.* Puisque  $L$  est le fibré en ligne complexe associé au fibré principal  $L^*$  ( $\equiv G \times_{G_{\mu_0}} \mathbf{C}^*$ ) sur  $\mathcal{O}$  par la représentation identité:  $\mathbf{C}^* \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{C})$ , alors on a une bijection:

$$\Gamma(L) \cong \left\{ \tilde{\varphi} \in C^\infty(L^*) \mid \tilde{\varphi}([g, z].w) = w^{-1} \tilde{\varphi}([g, z]), \quad [g, z] \in L^*, \quad w \in \mathbf{C}^* \right\},$$

donnée par:  $s([g]) = [g, \tilde{\varphi}([g, 1])]$ ,  $g \in G$  ( $[g] \in \mathcal{O}$  et  $[g, 1] \in L^*$ ). Il est bien connu ([T]) que  $\nabla_{X_{\mathcal{O}}} s$  est représentée par la fonction  $\widetilde{X_{\mathcal{O}}} \tilde{\varphi}$ , où  $\widetilde{X_{\mathcal{O}}}$  est le champ de vecteurs sur  $L^*$ , horizontal pour la 1-forme de connexion  $\alpha$ , et qui se projette sur  $X_{\mathcal{O}}$ . La correspondance entre  $\tilde{\varphi}$  et la fonction  $\varphi \in C_X^\infty(G)$  représentant la même section  $s$  de  $L$  est donnée par:

$\tilde{\varphi}([g, z]) = z^{-1}\varphi(g)$ . Cherchons la fonction  $\psi \in C_x^\infty(G)$  correspondante à  $\widetilde{X_{\mathcal{O}}}\tilde{\varphi}$ . Comme le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} (G \times \mathbf{C}^*, \tilde{\alpha}) & \longrightarrow & (G, d\mu_0^\ell) \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ (G \times \mathbf{C}^*/G_{\mu_0}, \alpha) & \longrightarrow & (\mathcal{O}, \omega) \end{array}$$

est commutatif, et  $X_{\mathcal{O}} = \pi_* X^r$ , alors  $\widetilde{X_{\mathcal{O}}} = \tilde{\pi}_*(\widetilde{X^r})$ , où  $\widetilde{X^r}$  est le champ de vecteurs sur  $G \times \mathbf{C}^*$ , horizontal pour  $\tilde{\alpha}$ , et qui s'envoie sur  $X^r$  par la projection naturelle de  $G \times \mathbf{C}^*$  sur  $G$ . Rappelons que:  $\tilde{\alpha} = \mu_0^\ell + dz/iz = \mu_0^\ell + d\theta - idr/r$ , où  $z = re^{i\theta}$ . Donc:  $\widetilde{X^r} = X^r - \mu_0^\ell(X^r)\partial/\partial\theta$ , et  $\widetilde{X_{\mathcal{O}}} = \tilde{\pi}_*(X^r - \mu_0^\ell(X^r)\partial/\partial\theta)$ . D'où

$$\begin{aligned} (\widetilde{X_{\mathcal{O}}}\tilde{\varphi})([g, z]) &= \left( (X^r - \mu_0^\ell(X^r)\frac{\partial}{\partial\theta})\tilde{\pi}^*\tilde{\varphi} \right)(g, z) \\ &= (z^{-1} \cdot X_g^r \varphi) - \mu_0^\ell(X^r)|_g \cdot \frac{\partial(z^{-1})}{\partial\theta} \cdot \varphi(g) \\ &= z^{-1} \cdot \left( (X_g^r \varphi) + i\mu_0^\ell(X^r)|_g \varphi(g) \right) \end{aligned}$$

ou encore,  $\nabla_{X_{\mathcal{O}}}s$  est représentée par la fonction  $X^r\varphi + i\mu_0^\ell(X^r)\varphi$ . ■

Par conséquent, on a:

**2.8. Proposition.** *La représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_L$  obtenue par la préquantification géométrique de  $\mathcal{O}$  est donnée par:  $T(X)\varphi = X^r\varphi$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}_L$ .*

*Preuve.* Soit  $X \in \mathfrak{g}$ . Comme  $\xi_{J_X} = X_{\mathcal{O}}$ , on en déduit en utilisant la proposition précédente que si  $s \cong \varphi \in \mathcal{H}_L$ , alors  $\mathcal{Q}(J_X)s \cong -iX^r\varphi + \mu_0^\ell(X^r)\varphi + \pi^*(J_X)\varphi$ . On vérifie facilement que  $\mu_0^\ell(X^r) + \pi^*(J_X) = 0$ . Par suite, on a:  $T(X)\varphi = i\mathcal{Q}(J_X)\varphi = X^r\varphi$ . D'où le résultat. ■

On constate que:  $(U(g)\varphi)(g') = \varphi(g^{-1}g')$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}_L$ ,  $g, g' \in G$ , est une représentation unitaire de  $G$  dans  $\mathcal{H}_L$ . La représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_L$ , obtenue par la préquantification géométrique de  $\mathcal{O}$  n'est rien d'autre que la représentation infinitésimale correspondante à  $U$ . On a donc:

**2.9. Corollaire.** *La préquantification géométrique de  $\mathcal{O}$  donne la représentation  $U$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}_L$*

**2.10. Remarque.** Comme  $G$  agit sur  $L$ , alors  $G$  agit sur  $\Gamma(L) \cong C_x^\infty(G)$ , et cette action se traduit par  $U$ .

Nous allons maintenant faire intervenir une polarisation géométrique sur  $\mathcal{O}$  afin de réduire l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_L$ ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

### 3. Polarisation géométrique $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{O}$ .

On a vu dans les préliminaires la notion de polarisation au point  $\mu_0$ , qu'on conviendra d'appeler ici «polarisation algébrique». La notion de polarisation est utilisée aussi en quantification géométrique. Afin de la distinguer, on l'appellera «polarisation géométrique». Commençons par en rappeler la définition.

**3.1. Définition.** Une distribution complexe  $\mathcal{F}$  sur une variété symplectique  $M$  ( $\equiv \mathcal{F}$  est un sous fibré de  $(TM)^{\mathbb{C}}$ ) est appelée une polarisation géométrique si elle satisfait les conditions suivantes:

- (i)  $\mathcal{F}$  est involutive
- (ii)  $\mathcal{F}$  est lagrangienne ( $\equiv$  isotrope maximale) pour la 2-forme  $\omega$  sur  $M$
- (iii)  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{F}})$  est constante, et
- (iv)  $\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}}$  est involutive.

Etant donné une polarisation géométrique  $\mathcal{F}$  sur  $M$ , on définit deux distributions réelles  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}$  sur  $M$ :  $\mathcal{E}^{\mathbb{C}} = \mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}}$  et  $\mathcal{D}^{\mathbb{C}} = \mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{F}}$ . Si  $M$  est l'orbite coadjointe  $\mathcal{O}$ , le lien entre les polarisations algébriques au point  $\mu_0$  et les polarisations géométriques sur  $\mathcal{O}$  est donné par.

**3.2. Proposition.** *L'application qui fait correspondre à chaque polarisation algébrique  $\mathfrak{h}$  au point  $\mu_0$  la polarisation géométrique  $\mathcal{F}$ ,  $G$ -invariante, sur  $\mathcal{O}$  définie par:  $\mathcal{F}_{\mu_0} = \pi_* \mathfrak{h}$ , est une correspondance biunivoque.*

*Preuve.* Soit  $\mathfrak{h}$  une polarisation algébrique au point  $\mu_0$ . On pose  $\mathcal{F}_{\mu_0} = \pi_* \mathfrak{h}$ , et  $\mathcal{F}_{\mu} = \text{Coad}(g)\mathcal{F}_{\mu_0}$  si  $\mu = \text{Coad}(g)\mu_0 \in \mathcal{O}$ ,  $g \in G$ . Grâce à l'invariance de  $\mathfrak{h}$  sous l'action adjointe de  $G_{\mu_0}$ , on vérifie que si  $\mu = \text{Coad}(g)\mu_0 = \text{Coad}(g')\mu_0$ , alors  $\text{Coad}(g)\mathcal{F}_{\mu_0} = \text{Coad}(g')\mathcal{F}_{\mu_0}$ , et donc  $\mathcal{F}_{\mu}$  est bien définie. On conclut que  $\mathcal{F}$  est une distribution  $G$ -invariante sur  $\mathcal{O}$ . Le fait que  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$  soient des sous algèbres de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , entraîne que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}}$  sont involutives. Comme  $\mathcal{F}$  est  $G$ -invariante, et donc  $\overline{\mathcal{F}}$ , alors  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{F}})$  est constante. Finalement,  $\mathfrak{h}^{\perp} = \mathfrak{h}$  entraîne que  $\mathcal{F}$  est lagrangienne.

Inversement, étant donné une polarisation géométrique  $\mathcal{F}$ ,  $G$ -invariante sur  $\mathcal{O}$ , on considère le sous espace vectoriel  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  défini par:  $\mathfrak{h} = \pi_*^{-1}(\mathcal{F}_{\mu_0})$ . Comme  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}}$  sont involutives, alors  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$  sont des sous algèbres de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . Le fait que  $\mathcal{F}$  soit lagrangienne entraîne que  $\mathfrak{h}^{\perp} = \mathfrak{h}$ . L'invariance de  $\mathfrak{h}$  sous l'action adjointe de  $G_{\mu_0}$  provient du fait que  $\mathcal{F}$  soit bien définie. ■

Dorénavant, on se fixe une polarisation algébrique  $\mathfrak{h}$  au point  $\mu_0$  et on ne distingue plus entre  $\mathfrak{h}$  et  $\mathcal{F}$  selon l'identification faite dans la proposition ci-dessus. La polarisation

$\mathcal{F}$  a été introduite pour réduire l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_L$  donné par la préquantification géométrique de  $\mathcal{O}$ . Cela consiste à considérer les sections  $s$  de  $L$  qui sont  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$ , et alors en particulier  $(s, s)$  est une fonction constante le long des feuilles de  $\mathcal{D}$ . Si les feuilles de  $\mathcal{D}$  ne sont pas compactes, alors  $\int_{\mathcal{O}}(s, s)\varepsilon_{\omega}$  diverge, et donc  $s \notin \mathcal{H}_L$ . On pense alors à intégrer  $(s, s)$  sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$ , mais pour cela il nous faut une mesure naturelle sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$  (qu'à priori l'on n'a pas). Pour résoudre ce problème, la quantification géométrique procède comme suit. On introduit un fibré  $B$  en ligne complexe sur  $\mathcal{O}$ , associé au fibré des repères de  $\mathcal{F}$ . Ce fibré  $B$  contient toutes les informations qui permettent de construire une mesure sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$ . Mais pour qu'une section de  $B$  passe au quotient  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$ , il faut qu'elle soit «constante» sur les feuilles de  $\mathcal{D}$ . D'où la nécessité d'une connexion sur  $B$  pour définir cette notion de sections constantes. Ensuite, on munit le fibré quantique  $Q = L \otimes B$  de la connexion somme des connexions sur  $L$  et  $B$ . Etant donné deux sections  $\psi_1$  et  $\psi_2$  de  $Q$  constantes le long de  $\mathcal{F}$ , on construit une 1-densité ( $\equiv$  mesure)  $(\psi_1, \psi_2)$  sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$ . L'intégration de cette mesure sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$  donne un produit hermitien sur l'espace  $\mathcal{H}_Q$  des sections de  $Q$ , constantes le long de  $\mathcal{F}$ , et qui sont de carré sommable: c'est l'espace de Hilbert construit par la quantification géométrique. Cette quantification est dite par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités en référence au fibré  $B$  dont les sections sont appelées les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités.

Le but original de la quantification géométrique est d'associer à une classe de fonctions  $f \in C^\infty(\mathcal{O})$  aussi large que possible, des opérateurs  $\mathcal{Q}(f)$  sur  $\mathcal{H}_Q$ , vérifiant en particulier:

$$\mathcal{Q}(\{f_1, f_2\}) = i[\mathcal{Q}(f_1), \mathcal{Q}(f_2)] , f_1, f_2 \in C^\infty(\mathcal{O}).$$

Pour des fonctions  $f$  préservant  $\mathcal{F}$ , i.e:  $[\xi_f, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}$ , on sait associer de tels opérateurs. Ces fonctions sont dites quantifiables. L'expression de  $\mathcal{Q}(f)$  sur une section  $\psi$  de  $Q$  de la forme  $\psi = s \otimes \nu$  est la suivante:

$$(3.3) \quad \mathcal{Q}(f)(s \otimes \nu) = (-i\nabla_{\xi_f} s + fs) \otimes \nu - is \otimes \mathcal{L}_{\xi_f} \nu ,$$

où  $\mathcal{L}$  désigne la dérivée de Lie sur les sections de  $B$ . Elle n'est définie que pour les champs de vecteurs sur  $\mathcal{O}$  qui préservent  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}$  est  $G$ -invariante (ce qui est le cas ici), alors les fonctions  $J_X$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , sont quantifiables. La correspondance  $X \mapsto i\mathcal{Q}(J_X)$  est une représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_Q$ : c'est la représentation de  $\mathfrak{g}$  donnée par la quantification géométrique. Notre but ici est d'expliciter cette représentation afin de mettre un lien avec la méthode des orbites. Pour cela, on suit la procédure de la quantification géométrique esquissée ci-dessus (pour plus de détails, on pourra consulter [T], [W]).

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer l'espace des sections de  $L$  qui sont  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$ . Ensuite, nous étudions le fibré  $\mathcal{RF}$  des repères de  $\mathcal{F}$ .

**3.4. Proposition.** *L'ensemble des sections de  $L$  constantes le long de  $\mathcal{F}$  est en bijection avec les fonctions  $\varphi \in C_X^\infty(G)$ , telles que:  $\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = -i\langle \mu_0, Z \rangle \varphi$ .*

*Preuve.* La démonstration sera donnée dans l'appendice I.

### 3.5. Remarques.

- L'identification ci-dessus est valable aussi dans un contexte local: si  $s \in \Gamma_U(L)$  est représentée par une fonction  $\varphi \in C_X^\infty(\pi^{-1}(U))$ , alors  $s$  est constante le long de  $\mathcal{F}$  si et seulement  $\varphi$  vérifie la propriété infinitésimale ci-dessus.
- Pour un  $Z \in \mathfrak{h}$  fixé, la condition  $Z^\ell \varphi = -i\langle \mu_0, Z \rangle \varphi$  n'exprime pas en général que la section  $s$  de  $L$  représentée par la fonction  $\varphi$  est  $\nabla$ -constante dans une direction de  $\mathcal{F}$ . L'identification est plutôt dans le sens suivant:  $(\forall \xi \in \mathcal{F} : \nabla_\xi s = 0) \iff (\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = -i\langle \mu_0, Z \rangle \varphi$ .

Soit  $r = \dim \mathfrak{g}_{\mu_0}$ ,  $r + k = \dim \mathfrak{d}$ ,  $r + n = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ , et donc  $\dim \mathcal{O} = 2n$ . Dans tout ce qui suit, on se fixe une base  $(s_1, \dots, s_r, Z_1, \dots, Z_n)$  de  $\mathfrak{h}$ , telle que  $(s_1, \dots, s_r)$  soit une base réelle de  $\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$ , et  $(s_1, \dots, s_r, Z_1, \dots, Z_k)$  une base réelle de  $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ . Par le choix de la base  $(Z_1, \dots, Z_n)$  de  $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$  (abus de langage), on identifie le groupe des automorphismes de  $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$  avec  $GL(n, \mathbb{C})$ . On a alors le résultat suivant.

**3.6. Proposition.** *Le fibré  $\mathcal{RF}$  des repères de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $\mathcal{O}$  se réalise comme étant le  $GL(n, \mathbb{C})$ -fibré principal associé au fibré principal  $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$ , de groupe structural  $G_{\mu_0}$ , par le morphisme  $\text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}} : G_{\mu_0} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ .*

*Preuve.* Soit  $g \in G$ , alors on a:  $\pi_* s_i^\ell|_g = 0$ ,  $1 \leq i \leq r$ , et  $(\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n$  est une base de  $\mathcal{F}_{\pi(g)}$ . On considère l'application  $\tilde{\pi}$  définie par:

$$\tilde{\pi} : G \times GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{RF}$$

$$(g, A) \mapsto (R_1, \dots, R_n) : \text{repère de } \mathcal{F} \text{ au point } \pi(g),$$

où  $R_j = (\pi_* Z_i^\ell|_g) A_{ij}$  (convention de sommation). L'application  $\tilde{\pi}$  est évidemment surjective, puisque  $(\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n$  est une base de  $\mathcal{F}_{\pi(g)}$ . Examinons à présent le «noyau» de  $\tilde{\pi}$ . Supposons que le repère  $(R_1, \dots, R_n)$  associé à  $(g, A)$  est le même que celui associé à  $(gg_0, B)$ ,  $g \in G$ ,  $g_0 \in G_{\mu_0}$ , et  $A, B \in GL(n, \mathbb{C})$ . En écrivant que  $\pi_* Z_j^\ell|_{gg_0} = \pi_*(\text{Ad}_{g_0} Z_j)^\ell|_g$ ,  $1 \leq j \leq n$ , et en utilisant le fait que  $(\pi_* s_j^\ell|_g)_{i=1}^r = 0$ , on obtient:

$$\begin{aligned} R_j &= (\pi_* Z_i^\ell|_{gg_0}) B_{ij} = (\pi_* Z_k^\ell|_g) (\text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0))_{ki} B_{ij} \\ &= (\pi_* Z_k^\ell|_g) (\text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0) \cdot B)_{kj}. \end{aligned}$$

On en conclut que  $(g, A)$  et  $(gg_0, B)$  représentent un même repère  $(R_1, \dots, R_n)$  au point  $\pi(g)$ , si et seulement si  $B = \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0^{-1}) \cdot A$ . D'où le résultat:  $\mathcal{RF} \cong G \times GL(n, \mathbb{C})/G_{\mu_0}$ , où  $G_{\mu_0}$  agit à droite sur  $G \times GL(n, \mathbb{C})$  par:  $(g, A) \cdot g_0 = (gg_0, \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0^{-1}) \cdot A)$ .  $\blacksquare$

#### 4. Les $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités sur $\mathcal{O}$ .

**4.1. Définition.** Soit  $B$  le fibré en ligne complexe associé à  $\mathcal{RF}$  par le morphisme  $A \mapsto |\det A|^{1/2}$ , de  $GL(n, \mathbb{C})$  dans  $\mathbb{R}_+^* \subset Aut(\mathbb{C})$ . Une section de  $B$  au dessus de  $\mathcal{O}$  est appelée une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité sur  $\mathcal{O}$ .

Comme d'habitude pour les fibrés associés, une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité s'identifie avec une fonction  $\nu : \mathcal{RF} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant  $\nu(R.A) = |\det A|^{-1/2} \nu(R)$ ,  $R \in \mathcal{RF}$ ,  $A \in GL(n, \mathbb{C})$ .

D'après la réalisation de  $\mathcal{RF}$  dans la proposition (3.6), alors  $B$  est aussi le fibré en ligne associé au fibré principal  $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$ , de groupe structural  $G_{\mu_0}$ , par le caractère  $\Delta : G_{\mu_0} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \subset Aut(\mathbb{C})$ , donné par:  $\Delta(g_0) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0)|^{1/2}$ . Alors, une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité  $\nu : \mathcal{RF} \rightarrow \mathbb{C}$  s'identifie avec une fonction lisse  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que:  $\varphi(gg_0) = \Delta(g_0)^{-1} \varphi(g)$ ,  $g \in G$ ,  $g_0 \in G_{\mu_0}$ ; l'identification est donnée par:  $\varphi(g) = \nu(\pi(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n)$ ,  $g \in G$ . Ainsi, on a la proposition suivante.

**4.2. Proposition.** L'espace  $\Gamma(B)$  des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités est en bijection avec l'ensemble  $C_{\Delta}^{\infty}(G) = \{\varphi \in C^{\infty}(G) \mid \varphi(gg_0) = \Delta(g_0)^{-1} \varphi(g), g \in G, g_0 \in G_{\mu_0}\}$ . Localement sur un ouvert  $U$  de  $\mathcal{O}$ , cette identification s'écrit  $\Gamma_U(B) \cong C_{\Delta}^{\infty}(\pi^{-1}(U))$ .

**4.3. Remarque.**  $\Delta$  est la restriction du caractère  $\Delta_{D,G}^{-1/2} : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  à  $G_{\mu_0}$ , voir lemme II.1.7.

L'étape suivante de la quantification géométrique est de construire une connexion sur  $B$  afin de définir la notion de sections constantes le long de  $\mathcal{F}$ . Contrairement au fibré préquantique où la connexion a été partout définie, on a une connexion partielle  $\nabla$  sur  $B$  définie uniquement pour les champs de vecteurs dans  $\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{E}^{\mathbb{C}}$ . On a préféré donner son expression dans l'appendice I puisqu'elle est liée directement à la démonstration assez technique du résultat suivant.

**4.4. Théorème.** L'espace des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités  $\nabla$ -constantes le long  $\mathcal{F}$  est en bijection avec les fonctions  $\varphi \in C_{\Delta}^{\infty}(G)$  telles que:  $\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = (\frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}} Z) \varphi$ .

#### 4.5. Remarques.

- Cette identification est valable aussi dans un contexte local.
- L'identification (globale et locale) est faite dans le même sens que la remarque (3.5).

Sur l'espace des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités on a une notion de dérivée de Lie, mais qui est partielle: elle n'est définie que pour les champs de vecteurs  $\xi$  sur  $\mathcal{O}$  qui préservent  $\mathcal{F}$ .

**4.6. Définition.** Soient  $\xi$  un champ de vecteurs sur  $\mathcal{O}$  qui préserve  $\mathcal{F}$ , de flot  $\rho_t$ , et  $\nu$  une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité sur  $\mathcal{O}$ . La dérivée de Lie de  $\nu$  suivant le champ  $\xi$  est définie par:

$$(\mathcal{L}_\xi \nu)(m, (\eta)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(\rho_t(m), \rho_{t*}(\eta)) , m \in \mathcal{O} , (\eta) \in \mathcal{RF}_m.$$

**4.7. Remarque.** On montre que  $\mathcal{L}_\xi \nu$  est de nouveau une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité sur  $\mathcal{O}$  (voir [T]).

La représentation de  $\mathfrak{g}$  construite par la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  consiste en la quantification des fonctions  $J_X$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , sur  $\mathcal{O}$ . Comme les champs hamiltoniens associés à ces fonctions sont les champs fondamentaux  $X_{\mathcal{O}}$ , alors d'après l'expression (3.3) des opérateurs  $\mathcal{Q}(J_X)$ , nous aurons besoin d'explicitier cette dérivée de Lie suivant ces champs en termes de l'identification  $\Gamma(B) \cong C_\Delta^\infty(G)$ . Il faut souligner que les champs fondamentaux  $X_{\mathcal{O}}$  préservent  $\mathcal{F}$  puisque la polarisation  $\mathcal{F}$  est  $G$ -invariante.

**4.8. Proposition.** Si  $\nu \in \Gamma(B)$  est représentée par une fonction  $\varphi \in C_\Delta^\infty(G)$ , alors  $\mathcal{L}_{X_{\mathcal{O}}} \nu$  est représentée par la fonction  $X^r \varphi \in C_\Delta^\infty(G)$ .

*Preuve.* Le flot de  $X_{\mathcal{O}}$  sur  $\mathcal{O}$  est  $\rho_t = \text{Coad}(\exp(-tX))$ . En écrivant que:  $\rho_t \circ \pi = \pi \circ \ell_{\exp(-tX)}$ ,  $\ell_{\exp(-tX)}$  étant la translation à gauche par  $\exp(-tX)$  sur  $G$ , on obtient:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_{\mathcal{O}}} \nu)(\pi(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(\pi(\exp(-tX)g), (\pi_* Z_i^\ell|_{\exp(-tX)g})_{i=1}^n) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(\exp(-tX)g) = (X^r \varphi)(g). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

## 5. Quantification par $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités.

**5.1. Définition.** Le fibré en ligne complexe  $Q = L \otimes B$ , produit tensoriel de  $L$  et  $B$  au dessus de  $\mathcal{O}$ , est appelé fibré quantique sur  $\mathcal{O}$ .

Par définition de  $L$  et  $B$ , le fibré en ligne complexe  $Q$  est associé au fibré principal  $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$ , de groupe structural  $G_{\mu_0}$ , par le caractère  $\chi \cdot \Delta : G_{\mu_0} \rightarrow \mathbf{C}^*$ , produit des caractères  $\chi$  et  $\Delta$ . Il en découle immédiatement:

**5.2. Proposition.** L'espace  $\Gamma(Q)$  des sections de  $Q$  au dessus de  $\mathcal{O}$  est en bijection avec l'ensemble  $C_{\chi \cdot \Delta}^\infty(G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \varphi(gg_0) = \chi(g_0)^{-1} \Delta(g_0)^{-1} \varphi(g), g \in G, g_0 \in G_{\mu_0}\}$ . Localement, on a  $\Gamma_U(Q) \cong C_{\chi \cdot \Delta}^\infty(\pi^{-1}(U))$ ,  $U$  étant un ouvert de  $\mathcal{O}$ .

On définit une connexion «somme» sur  $Q$  des connexions sur  $L$  et  $B$ . Plus précisément, si  $\psi$  est une section de  $Q$  de la forme  $\psi = s \otimes \nu$ ,  $s \in \Gamma(L)$ ,  $\nu \in \Gamma(B)$ , alors pour tout champ de vecteurs  $\xi$  dans  $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ , on a:  $\nabla_\xi \psi = (\nabla_\xi s) \otimes \nu + s \otimes (\nabla_\xi \nu)$ .

**5.3. Remarque.** La notion de connexion est locale, et comme l'écriture  $\psi = s \otimes \nu$  est toujours possible localement (et non pas globalement), alors  $\nabla$  est définie sur toutes les sections de  $Q$ .

On peut montrer (voir [T]) que toute section  $\psi$  de  $Q$ , constante le long de  $\mathcal{F}$ , s'écrit localement sur un ouvert  $U$  de  $\mathcal{O}$  sous la forme  $\psi = s \otimes \nu$ , où  $s \in \Gamma_U(L)$  et  $\nu \in \Gamma_U(B)$  sont constantes le long de  $\mathcal{F}$ , pour les connexions respectives sur  $L$  et  $B$ . Comme conséquence des propositions (3.4) et (4.4), nous obtenons le résultat suivant.

**5.4. Théorème.** *L'espace des sections de  $Q$ ,  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$ , est en bijection avec le sous espace des fonctions  $\varphi \in C_{\mathcal{X} \cdot \Delta}^\infty(G)$ , telles que:*

$$\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = (-i \langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g} \subset \mathfrak{c} / \mathfrak{c}} Z) \varphi.$$

L'étape suivante de la quantification géométrique est la construction d'une mesure sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$ , à partir des sections de  $Q$  constantes le long de  $\mathcal{F}$ . Tout d'abord, examinons l'espace  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$  des feuilles du feuilletage réel  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{O}$ . Le feuilletage  $\mathcal{D}$  est, par construction, la projection par  $\pi$  du feuilletage  $\tilde{\mathcal{D}}$  sur  $G$ ,  $G$ -invariant à gauche définie par  $\tilde{\mathcal{D}}_e = \mathfrak{d}$ . L'espace des feuilles de  $\tilde{\mathcal{D}}$  sur  $G$  n'est rien d'autre que  $G/D_0$  ( $D_0$  étant la composante neutre de  $D$ ), il s'ensuit que l'espace des feuilles de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{O}$  est  $(G/D_0)/G_{\mu_0} \cong G/D$ , qui est une variété lisse. Etant donné deux sections  $\psi_1$  et  $\psi_2$  de  $Q$ , constantes le long de  $\mathcal{F}$ , on sait construire une 1-densité  $(\psi_1, \psi_2)$  sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D} \cong G/D$  (voir [T], [W]) dont l'expression sera donnée dans l'appendice I, accompagnée de la démonstration du résultat suivant.

**5.5. Lemme.** *On note  $\alpha$  la forme différentielle sur  $G$  obtenue par contraction de  $\pi^* \varepsilon_\omega = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!} (d\mu_0^\ell)^n$  avec les champs invariants à gauche  $Z_1^\ell, \dots, Z_k^\ell$  sur  $G$ . Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les fonctions (du théorème précédent) sur  $G$  qui représentent  $\psi_1$  et  $\psi_2$  respectivement. Alors, la 1-densité  $(\psi_1, \psi_2)$  sur  $G/D$  est, à un facteur positif près, la mesure obtenue par la projection de  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 |\alpha|$  (défini sur  $G$ ) sur  $G/D$ .*

**5.6. Remarque.** La projection de  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 |\alpha|$  sur  $G/D$  est une mesure grâce aux propriétés de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , et la définition de  $\alpha$ . En fait, la quasi-invariance de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  par  $G_{\mu_0}$  entraîne que  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 |\alpha|$  est invariante sous l'action à droite de  $G_{\mu_0}$  sur  $G$ . Leur quasi-invariance infinitésimale par  $\mathfrak{d}$  entraîne l'invariance infinitésimale par  $\mathfrak{d}$  de la forme différentielle  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 \alpha$  sur  $G$ , et donc son invariance par  $D_0$ . En conclusion,  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 |\alpha|$  se projette en une mesure sur  $G/D$ .

Notons que cette forme différentielle  $\alpha$  sur  $G$ , de degré  $2n - k = \dim G/D$ , peut être obtenue comme suit. La forme  $d\mu_G = (s_1^*)^\ell \wedge \dots \wedge (s_r^*)^\ell \wedge \pi^* \varepsilon_\omega$  est une mesure de Haar à gauche sur  $G$ ; la non nullité de cette forme résulte du fait que  $i(X^\ell) d\mu_0^\ell = 0$  si et seulement

si  $X \in \mathfrak{g}_{\mu_0}$ . La contraction de  $d\mu_G$  avec les champs de vecteurs  $s_1^\ell, \dots, s_r^\ell, Z_1^\ell, \dots, Z_k^\ell$  est exactement la forme  $\alpha$ . Cette réalisation de  $\alpha$  montre que la mesure sur  $G/D$  construite par la quantification géométrique s'obtient par la même procédure que celle de la méthode des orbites (voir chapitre II) mais avec des conditions plus faibles sur  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  pour pouvoir projeter  $\overline{\varphi_1}\varphi_2|\alpha|$  sur  $G/D$ . En fait, la quasi-invariance de  $\varphi_1$  et de  $\varphi_2$  par  $G_{\mu_0}$ , et leur quasi-invariance infinitésimale par  $\mathfrak{d}$  suffisent pour construire la mesure  $\overline{\varphi_1}\varphi_2 d\mu_{G,D}$  sur  $G/D$ , alors que dans la méthode des orbites on utilise la quasi-invariance de  $\varphi_1$  et de  $\varphi_2$  par  $D$  pour construire cette même mesure.

L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_Q$  construit par la quantification géométrique

$$\mathcal{H}_Q = \{ \psi \in \Gamma(Q) \mid (\forall \xi \in \mathcal{F} : \nabla_\xi \psi = 0) \text{ et } \int_{G/D} (\psi, \psi) < \infty \}.$$

est donné par:

**5.7. Proposition.**  $\mathcal{H}_Q$  est l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_{X,\Delta}^\infty(G)$ , telles que:

- (i)  $\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = (-i\langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}} Z) \varphi$
- (ii)  $\int_{G/D} |\varphi|^2 d\mu_{G,D} < \infty$ ,

muni du produit hermitien  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{G/D} \overline{\varphi_1} \varphi_2 d\mu_{G,D}$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_Q$ .

Explicitons la représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_Q$  donnée par la quantification géométrique,  $T : X \mapsto iQ(J_X)$ . Bien sûr, les fonctions  $f = J_X$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , sont quantifiables ici, puisque la polarisation  $\mathcal{F}$  est  $G$ -invariante, et on a:

**5.8. Proposition.** La représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_Q$ , obtenue par la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités, est donnée par:  $T(X)\varphi = X^r \varphi$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , et  $\varphi \in \mathcal{H}_Q$ .

*Preuve.* Soit  $\psi$  une section de  $Q$  de la forme  $\psi = s \otimes \nu$ , où  $s \in \Gamma(L)$ , et  $\nu \in \Gamma(B)$ . Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des fonctions sur  $G$  qui représentent  $s$  et  $\nu$  respectivement, alors la fonction  $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$  représente la section  $\psi$  de  $Q$ . D'après les propositions (4.8), (2.7) et l'expression de la représentation quantique  $\mathcal{Q}$  donnée par (3.3), la section  $\mathcal{Q}(J_X)\psi$  de  $Q$  est représentée par la fonction  $(-iX^r \varphi_1) \cdot \varphi_2 - i\varphi_1 \cdot (X^r \varphi_2) = -iX^r(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = -iX^r \varphi$ . Le résultat découle ensuite du fait que  $T(X) = iQ(J_X)$  ■

On constate que  $(U(g)\varphi)(g') = \varphi(g^{-1}g')$  est une représentation unitaire de  $G$  dans  $\mathcal{H}_Q$ . La représentation infinitésimale correspondante n'est rien d'autre que  $T$ . Donc, la représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_Q$  donnée par la quantification géométrique s'intègre en une représentation de  $G$  dans  $\mathcal{H}_Q$  (ce qui n'est pas toujours garanti).

**5.9. Corollaire.** La quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités donne la représentation unitaire  $U$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}_Q$ .

**5.10. Remarque.** L'existence du caractère  $\chi$  sur  $G_{\mu_0}$  entraîne le relèvement de l'action de  $G$  sur  $\mathcal{O}$  à  $L$ , et grâce à la  $G$ -invariance de  $\mathcal{F}$ , l'action de  $G$  se relève aussi sur  $B$ , et donc sur  $Q$ . Dans l'identification  $\Gamma(Q) \cong C_{\chi, \Delta}^{\infty}(G)$ , l'action de  $G$  sur  $\Gamma(Q)$  se traduit par  $U$ . Donc, il n'est pas surprenant que l'intégrale de  $T$  soit donnée par  $U$ .

## 6. Discussion et conclusion.

L'existence d'un caractère unitaire  $\chi$  de  $G_{\mu_0}$  tel que  $d_e\chi = i\mu_0|_{\mathfrak{g}_{\mu_0}}$  est équivalente à l'existence d'un fibré préquantique  $L$  au dessus de  $\mathcal{O}$ , sur lequel l'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathcal{O}$  se relève en une action sur  $L$  qui préserve sa connexion. La donnée d'un tel caractère  $\chi$  nous a permis de préquantifier l'orbite coadjointe  $\mathcal{O}$  de  $\mu_0$ . Cette préquantification associe à  $\mathcal{O}$  une représentation unitaire  $U$  de  $G$  dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_L = \{\varphi \in C_X^{\infty}(G) \mid \int_{\mathcal{O}} |\varphi|^2 \varepsilon_{\omega} < \infty\}$ , donnée par:  $(U(g)\varphi)(g') = \varphi(g^{-1}g')$ .

On cherche à réduire l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_L$ , pour cela il nous faut une polarisation géométrique sur  $\mathcal{O}$ . La donnée d'une polarisation algébrique  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  au point  $\mu_0$  est équivalente à la donnée d'une polarisation géométrique  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{O}$ ,  $G$ -invariante. La quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités donne une représentation unitaire  $U$ , donnée par l'expression ci-dessus, de  $G$  dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_Q$  suivant:

$\mathcal{H}_Q$  est l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_{\chi, \Delta}^{\infty}(G)$ , telles que:

$$(6.1) \quad \forall Z \in \mathfrak{h} : Z^{\ell}\varphi = (-i\langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/_{\mathfrak{e}, \mathbb{C}}} Z)\varphi$$

$$(6.2) \quad \int_{G/D} |\varphi|^2 d\mu_{G,D} < \infty$$

Ainsi, l'existence d'un caractère  $\chi$  de  $G_{\mu_0}$  tel que  $d_e\chi = i\mu_0|_{\mathfrak{g}_{\mu_0}}$ , et la donnée d'une polarisation  $\mathfrak{h}$  au point  $\mu_0$  sont suffisantes pour quantifier  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités, et cette quantification associe à  $\mathcal{O}$  une représentation unitaire  $U$  de  $G$  dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_Q$  ci-dessus. Si  $\chi$  ne se prolonge pas à  $D$ , la méthode des orbites ne s'applique pas, par contre la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  est possible, et donne une représentation unitaire de  $G$ . Autrement dit, les conditions pour quantifier  $\mathcal{O}$  sont plus faibles à celles de la méthode des orbites.

Plaçons nous maintenant dans le cas où  $\chi$  se prolonge en un caractère unitaire de  $D$ , qu'on note encore  $\chi$ , tel que  $d_e\chi = i\mu_0|_{\mathfrak{d}}$ , et considérons la représentation induite holomorphe  $\text{Hol}_D^G \chi$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}_{hol}$ , construite par la méthode des orbites (voir chapitre II). Notre but ici est de comparer cette représentation et la représentation  $(\mathcal{H}_Q, U)$  de  $G$  donnée par la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$ . Pour cela, il suffit de comparer  $\mathcal{H}_{hol}$  et  $\mathcal{H}_Q$ , puisque l'action de  $G$  sur ces espaces est la même.

En intégrant sur  $D_0$  la propriété (6.1) de  $\varphi$  écrite pour les éléments  $Z$  dans  $\mathfrak{d}$ , on obtient:  $\varphi(gd) = \chi(d)^{-1} \Delta_{D,G}^{1/2}(d)\varphi(g)$ ,  $g \in G$ ,  $d \in D_0$ . Cette propriété est aussi vérifiée sur  $G_{\mu_0}$  car

$\varphi \in C_{\chi, \Delta}^{\infty}(G)$ , et  $\Delta$  est la restriction du caractère  $\Delta_{D, G}^{-1/2} : D \rightarrow \mathbb{C}^*$  à  $G_{\mu_0}$  (voir remarque 4.3). Comme  $D = G_{\mu_0} \cdot D_0$ , alors cette propriété de  $\varphi$  est valable sur  $D$ . Autrement dit,  $\varphi \in C_{\chi \cdot \Delta_{D, G}^{-1/2}}^{\infty}(G)$ ; cette écriture sous-entend que  $\chi$  est défini sur  $D$ , et  $\varphi \in C_{\chi, \Delta}^{\infty}(G)$  sous-entend qu'on prend la restriction de  $\chi$  à  $G_{\mu_0}$ . Les conditions  $\varphi \in C_{\chi, \Delta}^{\infty}(G)$  et  $\varphi$  satisfait (6.1) sont équivalentes aux conditions  $\varphi \in C_{\chi \cdot \Delta_{D, G}^{-1/2}}^{\infty}(G)$  et  $\varphi$  satisfait (6.1). La mesure  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 d\mu_{G, D}$  construite à partir de deux éléments  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de  $\mathcal{H}_Q$  est exactement  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 d\mu_{G, D}$  construite par la méthode des orbites; ici  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont dans  $C_{\chi \cdot \Delta_{D, G}^{-1/2}}^{\infty}(G)$ . D'où,  $\mathcal{H}_Q = \mathcal{H}_{hol}$ .

**6.3. Conclusion.** *Si  $\chi$  se prolonge à  $D$ , alors la représentation  $(\mathcal{H}_Q, U)$  de  $G$  associée à  $\mathcal{O}$  par la quantification géométrique est exactement la représentation induite holomorphe  $\text{Hol}_D^G \chi$  construite par la méthode des orbites.*

La modification de M. Duflo dans l'espace de la représentation  $\text{Hol}_D^G \chi$  induite holomorphe trouve son explication, en quantification géométrique, par le passage des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités aux  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes: c'est l'objectif des paragraphes suivants.

## 7. Les $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ formes sur $\mathcal{O}$ .

Soit  $M$  une variété symplectique muni d'une polarisation  $\mathcal{F}$ . La description «quantique» de  $M$  par le biais de la quantification géométrique par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités diffère dans certains cas de la réalité physique. Par exemple ([T]), dans le cas de l'oscillateur harmonique  $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$  muni de la polarisation holomorphe  $\mathbb{C}(\frac{\partial}{\partial p} + i\frac{\partial}{\partial q})$ , les niveaux d'énergie (i.e: les valeurs propres de l'opérateur  $Q(H)$  associé au hamiltonien  $H = \frac{1}{2}\hbar(p^2 + q^2)$ ) sont:  $n\hbar$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et donc différent d'un facteur  $\frac{1}{2}$  des niveaux d'énergie donnés par la mécanique quantique. Dans ce cas, cette erreur peut être corrigée par la suppression des modules (et donc il faut choisir une racine carrée) dans la définition des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités:  $\nu(R \cdot A) = |\det A|^{-1/2} \nu(R)$ . Les objets obtenus sont appelés les  $\frac{1}{2}$ -formes. La quantification géométrique par  $\frac{1}{2}$ -formes est la modification des  $\frac{1}{2}$ -densités par les  $\frac{1}{2}$ -formes. Cette opération n'est pas toujours possible: elle est liée à l'existence d'un certain fibré des métarepères  $\mathcal{MF}$  qui est un revêtement à deux feuillets (choix de racine carrée) du fibré des repères  $\mathcal{RF}$ . On remplace le fibré  $B$  construit dans la quantification par  $\frac{1}{2}$ -densités par un fibré en ligne complexe  $\tilde{B}$  associé à  $\mathcal{MF}$ , et les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes ne sont autres que les sections de ce fibré. Le fibré quantique devient  $\tilde{Q} = L \otimes \tilde{B}$ . La quantification géométrique par  $\frac{1}{2}$ -formes suit les mêmes étapes que celle par  $\frac{1}{2}$ -densités. On construit une connexion (partielle) sur  $\tilde{B}$ , et par suite on considère la connexion somme sur  $\tilde{Q}$ . Etant donné deux sections  $\psi_1$  et  $\psi_2$  de  $\tilde{Q}$ , constantes le long de  $\mathcal{F}$ , on construit une 1-densité  $(\psi_1, \psi_2)$  sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$ . On obtient ainsi un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}} = \{\psi \in \Gamma(\tilde{Q}) \mid (\forall \xi \in \mathcal{F} : \nabla_{\xi} \psi = 0), \text{ et } \int_{\mathcal{O}/\mathcal{D}} (\psi, \psi) < \infty\}$ .

L'expression de  $\mathcal{Q}(f)$  associé à une fonction lisse  $f$  sur  $\mathcal{O}$  qui préserve  $\mathcal{F}$  est la même que celle donnée par la quantification par  $\frac{1}{2}$ -densités, sauf que  $\mathcal{Q}(f)$  agit dans ce cas sur  $\Gamma(\tilde{Q})$  au lieu de  $\Gamma(Q)$ . En particulier, on a aussi une dérivée de Lie sur les  $\frac{1}{2}$ -formes définie suivant les champs sur  $\mathcal{O}$  qui préservent  $\mathcal{F}$ .

Nous montrerons que l'existence d'un caractère  $\eta : G_{\mu_0} \rightarrow \mathbf{C}^*$ , tel que:  $\eta^2 = \det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbf{C}}}$ , est suffisante pour construire un fibré des métarepères  $\mathcal{MF}$  de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $\mathcal{O}$ ;  $\mathcal{F}$  étant toujours la polarisation sur  $\mathcal{O}$  construite à partir de  $\mathfrak{h}$ . Nous pouvons ainsi quantifier  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes. Nous montrerons que la représentation de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$  obtenue s'intègre en une représentation unitaire de  $G$ .

Afin d'introduire les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes sur  $\mathcal{O}$ , on aura besoin des étapes suivantes.

**7.1. Définition.** On appelle groupe métalinéaire, qu'on note  $ML(n, \mathbf{C})$ , le sous groupe de  $GL(n, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}^*$  suivant:  $ML(n, \mathbf{C}) = \{(A, z) \in GL(n, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}^* \mid z^2 = \det A\}$ .

On note  $p$  et  $\lambda$  les projections naturelles de  $ML(n, \mathbf{C})$  sur  $GL(n, \mathbf{C})$  et  $\mathbf{C}^*$ .

**7.2. Définition.** Un fibré  $\mathcal{MF}$  de métarepères de  $\mathcal{F}$  est un  $ML(n, \mathbf{C})$ -fibré principal sur  $\mathcal{O}$ , avec une projection  $\tilde{p} : \mathcal{MF} \rightarrow \mathcal{RF}$  qui est simultanément un morphisme de fibrés et un revêtement à 2-feuillets, et telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{MF} \times ML(n, \mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{MF} \\ \tilde{p} \times p \downarrow & & \tilde{p} \downarrow \\ \mathcal{RF} \times GL(n, \mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{RF} \end{array}$$

Les flèches horizontales étant les actions à droite de  $ML(n, \mathbf{C})$  sur  $\mathcal{MF}$ , et de  $GL(n, \mathbf{C})$  sur  $\mathcal{RF}$ .

Ce fibré  $\mathcal{MF}$  n'existe pas toujours, et on n'a pas obligatoirement unicité d'existence. Pour plus de détails sur l'existence et les choix possibles de  $\mathcal{MF}$  (lorsqu'il existe), on pourra consulter [SW]. Dans le cadre de notre étude, la restriction à  $G_{\mu_0}$  du caractère  $\eta$  qui a permis à Duflo pour modifier la méthode des orbites est suffisante pour construire un fibré des métarepères de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $\mathcal{O}$ .

**7.3. Proposition.** Supposons qu'il existe un caractère  $\eta : G_{\mu_0} \rightarrow \mathbf{C}^*$ , tel que:  $\eta^2 = \det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbf{C}}}$ . Alors le  $ML(n, \mathbf{C})$ -fibré principal  $\mathcal{MF}$  associé au fibré principal  $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$ , de groupe structural  $G_{\mu_0}$ , par le morphisme:

$$\begin{aligned} \hat{\eta} : G_{\mu_0} &\longrightarrow ML(n, \mathbf{C}) \\ g_0 &\longmapsto \left( \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbf{C}}}(g_0), \eta(g_0) \right) \end{aligned}$$

est un fibré de métarepères au dessus de  $\mathcal{O}$ .

*Preuve.* Rappelons que le fibré des repères  $\mathcal{RF}$  est associé au fibré principal  $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$  par le morphisme  $\text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}$  de  $G_{\mu_0}$  dans  $GL(n, \mathbb{C})$ . L'existence du caractère  $\eta$  permet donc d'avoir le morphisme  $\widehat{\eta}$  (ci-dessus) de  $G_{\mu_0}$  dans  $ML(n, \mathbb{C})$ , et de considérer l'espace quotient  $\mathcal{MF} = (G \times ML(n, \mathbb{C}))/G_{\mu_0}$  pour l'action à droite de  $G_{\mu_0}$  sur  $G \times ML(n, \mathbb{C})$ :  $(g, \widetilde{A}) \cdot g_0 = (gg_0, \widehat{\eta}(g_0^{-1}) \cdot \widetilde{A})$ . Par construction,  $\mathcal{MF}$  est bien un  $ML(n, \mathbb{C})$ -fibré principal au dessus de  $\mathcal{O}$ . La projection  $\widetilde{p}$  de  $\mathcal{MF}$  sur  $\mathcal{RF}$  est donnée par:  $\widetilde{p}([g, \widetilde{A}]) = [g, A] \in (G \times GL(n, \mathbb{C}))/G_{\mu_0} \cong \mathcal{RF}$ , où  $A = p(\widetilde{A})$ . On vérifie que  $\mathcal{MF}$  satisfait toutes les propriétés d'un fibré métalinéaire. D'où le résultat.  $\blacksquare$

#### 7.4. Remarques.

- En vertu de la réalisation  $(G \times GL(n, \mathbb{C}))/G_{\mu_0}$  de  $\mathcal{RF}$  (voir preuve de la proposition 3.6), on identifie un métarepère  $[g, \widetilde{A}] \in \mathcal{MF}$  avec  $((\pi_* Z_i^\ell|_g A_{ij})_{j=1}^n, z)$  au point  $\pi(g)$ , où  $A = p(\widetilde{A})$ , et  $z = \lambda(\widetilde{A})$ .
- Le caractère  $\eta$  est la restriction à  $G_{\mu_0}$  du caractère, noté aussi  $\eta$ , de  $D$  tel que:  $\eta^2 = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}})^{-1}$  (voir lemme II.1.7). Ce caractère sur  $D$  a été introduit par Duflo pour modifier la représentation  $\text{Hol}_d^G \chi$  dans le cadre de la méthode des orbites.

Dans tout ce qui suit, on suppose l'existence de ce caractère  $\eta$  (sur  $G_{\mu_0}$ ), et on se fixe le fibré  $\mathcal{MF}$  construit dans la proposition précédente.

**7.5. Définition.** On note  $\widetilde{B}$  le fibré en ligne complexe associé au fibré principal  $\mathcal{MF}$  par le morphisme «racine carrée»  $\lambda : ML(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^* \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$ . Une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -forme est une section du fibré  $\widetilde{B}$  au dessus de  $\mathcal{O}$ . D'après les propriétés des fibrés associés, une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -forme s'identifie avec une fonction lisse  $\widetilde{\nu} : \mathcal{MF} \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que:  $\widetilde{\nu}(\widetilde{R} \cdot \widetilde{A}) = \lambda(\widetilde{A})^{-1} \cdot \widetilde{\nu}(\widetilde{R})$ ,  $\widetilde{R} \in \mathcal{MF}$  et  $\widetilde{A} \in ML(n, \mathbb{C})$ .

Par construction de  $\mathcal{MF}$ , le fibré  $\widetilde{B}$  est associé au fibré principal  $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$ , de groupe structural  $G_{\mu_0}$ , par le caractère  $\eta : G_{\mu_0} \rightarrow \mathbb{C}^* \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$ . Etant donné une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -forme  $\widetilde{\nu} : \mathcal{MF} \rightarrow \mathbb{C}$ , on définit une fonction  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$  par:  $\varphi(g) = \widetilde{\nu}(\pi(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n, 1)$ . On vérifie que,  $\varphi(gg_0) = \eta(g_0)^{-1} \varphi(g)$ ,  $g \in G$  et  $g_0 \in G_{\mu_0}$ . Inversement, par la donnée d'une fonction  $\varphi$  vérifiant la précédente propriété, on construit une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -forme  $\widetilde{\nu}$  qui prend la valeur  $\varphi(g)$  sur le métarepère  $((\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n, 1)$  au point  $\pi(g)$ . Cette  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -forme est bien définie grâce à la propriété vérifiée par  $\varphi$ . On a donc établi.

**7.6. Proposition.** Il y a une correspondance biunivoque entre  $\Gamma(\widetilde{B})$  et l'espace des fonctions  $C_\eta^\infty(G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \varphi(gg_0) = \eta(g_0)^{-1} \varphi(g), g \in G, g_0 \in G_{\mu_0}\}$ .

On définit une connexion partielle  $\nabla$  sur  $\Gamma(\tilde{B})$  uniquement pour les champs de vecteurs dans  $\mathcal{F}$ , contrairement aux  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités où la connexion  $\nabla$  a été définie pour tous les champs dans  $\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{E}^{\mathcal{O}}$ . Pour cela, on introduit la notion de métarepère localement hamiltonien.

**7.7. Définition.** Un métarepère localement hamiltonien est une section de  $\mathcal{MF}$  au dessus d'un ouvert  $U$  de  $\mathcal{O}$ ,  $\tilde{R} : U \rightarrow \mathcal{MF}$ , telle que:  $\tilde{p} \circ \tilde{R}$  est un repère localement hamiltonien, i.e: il existe des champs hamiltoniens  $\eta_1, \dots, \eta_n$  définis sur  $U$  tels que:  $\tilde{p}(\tilde{R}(m)) = (\eta_1|_m, \dots, \eta_n|_m)$ ,  $\forall m \in U$ .

De telles sections existent; cela découle du fait que  $\mathcal{F}$  est une polarisation et  $\mathcal{MF}$  est un revêtement à 2-feuillets de  $\mathcal{RF}$ .

**7.8. Définition.** Soient  $\xi \in \mathcal{F}$  et  $\tilde{\nu} \in \Gamma(\tilde{B})$ . Soient  $\tilde{R}_0 \in \mathcal{MF}_{m_0}$ ,  $m_0 \in \mathcal{O}$ , et  $\tilde{R}$  un métarepère localement hamiltonien tel que:  $\tilde{R}(m_0) = \tilde{R}_0$ . On définit  $\nabla_{\xi} \tilde{\nu}$  par:

$$(\nabla_{\xi} \tilde{\nu})(m_0, \tilde{R}_0) = \xi|_{m_0} \tilde{\nu}(m, \tilde{R}(m)).$$

On montre que  $\nabla_{\xi} \tilde{\nu}$  ne dépend pas de la section  $\tilde{R}$  choisie et qu'elle est bien une connexion qui laisse l'espace  $\Gamma(\tilde{B})$  invariant, pour les champs dans  $\mathcal{F}$  ([T]).

Cherchons à présent les sections de  $\tilde{B}$ ,  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$ . On a.

**7.9. Théorème.** L'ensemble des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$  est en bijection avec l'ensemble des fonctions  $C_{\eta}^{\infty}(G)$  telles que:

$$\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^{\ell} \varphi = \left(\frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathcal{C}}/\mathfrak{h}} Z\right) \varphi.$$

*Preuve.* La démonstration est similaire à celle pour les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités. On donnera les éléments de cette démonstration dans l'appendice I. ■

**7.10. Remarques.**

- Pour  $Z \in \mathfrak{h}$  fixé, la condition  $Z^{\ell} \varphi = \left(\frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathcal{C}}/\mathfrak{h}} Z\right) \varphi$  n'exprime pas le fait que  $\tilde{\nu} \cong \varphi$  est constante dans une direction de  $\mathcal{F}$ . Mais plutôt, l'ensemble des conditions  $(\forall \xi \in \mathcal{F} : \nabla_{\xi} \tilde{\nu} = 0)$  est équivalent à l'ensemble des conditions  $(\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^{\ell} \varphi = \left(\frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathcal{C}}/\mathfrak{h}} Z\right) \varphi)$ .
- L'identification ci-dessus est aussi valable localement.

Comme pour les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités, on définit une dérivée de Lie sur  $\Gamma(\tilde{B})$  pour les champs de vecteurs  $\xi$  sur  $\mathcal{O}$  qui préservent  $\mathcal{F}$ . Soient  $\tilde{\nu} \in \Gamma(\tilde{B})$ ,  $\rho_t$  le flot de  $\xi$ , et  $\tilde{\eta} \in \mathcal{MF}_m$ ,  $m \in \mathcal{O}$ . On relève l'action  $\rho_{t*}$  ( $t$  assez petit) sur le repère  $\tilde{p}(\tilde{\eta})$  de  $\mathcal{F}$  en une action  $\tilde{\rho}_{t*}$  sur  $\tilde{\eta}$ , par extension de  $\lambda(\tilde{\eta})$  dans un voisinage de  $m$ . La dérivée de Lie de  $\tilde{\nu}$  suivant  $\xi$ , est définie par:

$$(\mathcal{L}_\xi \tilde{\nu})(m, (\tilde{\eta})) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{\nu}(\rho_t(m), \tilde{\rho}_{t*}(\tilde{\eta})).$$

On montre qu'on obtient ainsi une nouvelle  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -forme, et que  $\mathcal{L}$  a les mêmes propriétés qu'une dérivée de Lie, sauf qu'elle n'est pas partout définie ([T]). Pour expliciter la représentation de  $\mathfrak{g}$  donnée par la quantification géométrique par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes, on aura besoin de la dérivée de Lie des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes suivant les champs fondamentaux  $X_{\mathcal{O}}$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ . On a.

**7.11. Proposition.** *Soit  $\tilde{\nu} \cong \varphi \in C_\eta^\infty(G)$  une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$  forme sur  $\mathcal{O}$ , alors  $\mathcal{L}_{X_{\mathcal{O}}} \tilde{\nu}$  est la  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$  forme sur  $\mathcal{O}$  représentée par la fonction  $X^r \varphi \in C_\eta^\infty(G)$ .*

*Preuve.* Rappelons que l'action du flot  $\rho_t = \text{Coad}(\exp tX)$  de  $X_{\mathcal{O}}$  sur le repère  $(\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n$ , au point  $\pi(g)$ , est donnée par:  $\rho_{t*}(\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n = (\pi_* Z_i^\ell|_{\exp(-tX)g})_{i=1}^n$ . Donc,  $\rho_{t*}$  s'étend naturellement sur  $((\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n, 1)$  par:  $\rho_{t*}((\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n, 1) = ((\pi_* Z_i^\ell|_{\exp(-tX)g})_{i=1}^n, 1)$ . D'où:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathcal{O}} \tilde{\nu})\left(\pi(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n, 1\right) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tilde{\nu}(\pi(\exp(-tX)g), (\pi_* Z_i^\ell|_{\exp(-tX)g})_{i=1}^n, 1) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(\exp(-tX)g) \\ &= (X^r \varphi)(g). \end{aligned}$$

■

## 8. Quantification par $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes.

**8.1. Définition.** Le fibré en ligne complexe  $\tilde{Q} = L \otimes \tilde{B}$ , produit tensoriel de  $L$  et  $\tilde{B}$  au dessus de  $\mathcal{O}$ , est appelé un fibré quantique par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes au dessus de  $\mathcal{O}$ .

Par construction de  $L$  et  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{Q}$  se réalise comme étant le fibré en ligne complexe associé au fibré principal  $G \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}$ , de groupe structural  $G_{\mu_0}$ , par le caractère  $\chi \cdot \eta$ , produit de  $\chi$  et  $\eta$ . Il en découle immédiatement.

**8.2. Proposition.** *L'espace  $\Gamma(\tilde{Q})$  des sections de  $\tilde{Q}$  au dessus de  $\mathcal{O}$  est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des fonctions*

$$C_{\chi \cdot \eta}^\infty(G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \varphi(gg_0) = \chi(g_0)^{-1} \eta(g_0)^{-1} \varphi(g), g \in G, g_0 \in G_{\mu_0}\}.$$

On définit une connexion somme  $\nabla$  sur  $\tilde{Q}$ , pour les champs de vecteurs dans  $\mathcal{F}$ , par la même expression que la connexion sur  $Q$  (voir 3.3), et on obtient.

**8.3. Théorème.** *L'espace des sections de  $\tilde{Q}$ ,  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$ , est en bijection avec l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_{\chi, \eta}^{\infty}(G)$ , telles que:*

$$\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^{\ell} \varphi = (-i \langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}} Z) \varphi.$$

*Preuve.* Ce résultat est une conséquence de la description des sections de  $L$  et de  $\tilde{B}$  qui sont constantes le long de  $\mathcal{F}$ . ■

Etant donné deux sections  $\psi_1$  et  $\psi_2$  de  $\tilde{Q}$ ,  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$ , on construit une 1-densité  $(\psi_1, \psi_2)$  sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D} \cong G/D$ , par la même expression que pour les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités. Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les fonctions (du théorème ci-dessus) sur  $G$  qui représentent  $\psi_1$  et  $\psi_2$  respectivement. D'une manière similaire au cas des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités, la 1-densité  $(\psi_1, \psi_2)$  sur  $G/D$  est, à un facteur positif près, la mesure  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 d\mu_{G,D}$  (voir lemme 5.5). L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$

$$\mathcal{H}_{\tilde{Q}} = \{ \psi \in \Gamma(\mathcal{O}) \mid (\forall \xi \in \mathcal{F} : \nabla_{\xi} \psi = 0) \text{ et } \int_{G/D} (\psi, \psi) < \infty \},$$

construit par la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes, est donné par.

**8.4. Proposition.** *L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$  est l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_{\chi, \eta}^{\infty}(G)$  telles que:*

- (i)  $\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^{\ell} \varphi = (-i \langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}} Z) \varphi.$
- (ii)  $\int_{G/D} |\varphi|^2 d\mu_{G,D} < \infty.$

A chaque fonction  $f \in C^{\infty}(\mathcal{O})$  qui préserve  $\mathcal{F}$ , on associe un opérateur  $Q(f)$  sur  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$  défini de la même façon que pour les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités:

$$Q(f)(s \otimes \tilde{\nu}) = (-i \nabla_{\xi_j} s + f s) \otimes \tilde{\nu} - i s \otimes \mathcal{L}_{\xi_j} \tilde{\nu}, \quad s \otimes \tilde{\nu} \in \mathcal{H}_{\tilde{Q}}.$$

Examinons la représentation  $T : X \mapsto iQ(J_X)$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$ , donnée par la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes. On a.

**8.5. Proposition.** *La représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$  est donnée par:  $T(X)\varphi = X^r \varphi.$*

*Preuve.* La démonstration est identique à celle pour les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités (voir preuve de la proposition 2.8).

On constate que  $(U(g)\varphi)(g') = \varphi(g^{-1}g')$  est une représentation unitaire de  $G$  dans  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$ . La représentation infinitésimale correspondante n'est rien d'autre que  $T$ .

**8.6. Corollaire.** *La représentation de  $\mathfrak{g}$  donnée par la quantification géométrique s'intègre en la représentation  $U$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$ .*

**8.7. Remarque.** Grâce aux caractères  $\chi$  et  $\eta$ , l'action de  $G$  sur  $\mathcal{O}$  se relève sur  $\tilde{Q}$ , et donc  $G$  agit sur  $\Gamma(\tilde{Q})$ . Cette action de  $G$  sur  $\Gamma(\tilde{Q}) \cong C_{\chi,\eta}^\infty(G)$  se traduit par  $U$ . L'existence des caractères  $\chi$  et  $\eta$  garantit l'intégration de la représentation infinitésimale  $T$  en une représentation de  $G$ .

## 9. Conclusion.

La modification du caractère  $\Delta : G_{\mu_0} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $g_0 \mapsto \Delta(g_0) = |\det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}}(g_0)|^{1/2}$  par le caractère  $\eta : G_{\mu_0} \rightarrow \mathbb{C}^*$  tel que:  $\eta^2 = \det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}} = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}})^{-1}$ , nous a permis de quantifier  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes au lieu des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités. L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$  construit par cette quantification est l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_{\chi,\eta}^\infty(G)$  telles que:

- (i)  $\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = (-i\langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}} Z) \varphi$ .
- (ii)  $\int_{G/D} |\varphi|^2 d\mu_{G,D} < \infty$ .

Cette quantification associe à  $\mathcal{O}$  une représentation unitaire  $U$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$  donnée par  $(U(g)\varphi)(g') = \varphi(g^{-1}g')$ .

Si  $\chi$  ou  $\eta$  ne se prolongent pas à  $D$ , alors la méthode des orbites modifiée ne s'applique pas. Donc, les conditions pour quantifier  $\mathcal{O}$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes sont plus faibles que les hypothèses de la méthode des orbites.

Plaçons nous maintenant dans le cas où  $\chi$  et  $\eta$  s'étendent à  $D$ , et comparons la représentation  $(\mathcal{H}_{\tilde{Q}}, U)$  à celle construite par la méthode des orbites modifiée. En intégrant sur  $D_0$  la condition (i) écrite pour les éléments  $Z$  de  $\mathfrak{d}$  et en utilisant que  $D = G_{\mu_0} \cdot D_0$ , on obtient la quasi-invariance de  $\varphi$  par  $D$ :

$$\varphi(gd) = \chi(d)^{-1} \eta(d)^{-1} \varphi(g), g \in G, d \in D.$$

**9.1. Conclusion.** *Si  $\chi$  et  $\eta$  se prolongent à  $D$ , alors la représentation  $(\mathcal{H}_{\tilde{Q}}, U)$  de  $G$  associée à  $\mathcal{O}$  par la quantification géométrique par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes est la même que celle construite par la méthode des orbites modifiée.*

## CHAPITRE IV. QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE D'UN SOUS FIBRÉ SYMPLECTIQUE DE $T^*(G/D)$ .

On se fixe un élément  $\mu_0$  de  $\mathfrak{g}^*$ , et on se place dans le cadre de la méthode des orbites, à savoir la donnée d'une polarisation  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  au point  $\mu_0$  et l'existence d'un caractère unitaire  $\chi$  de  $D$  tel que  $d_e \chi = i\mu_0|_{\mathfrak{d}}$ . Une modification du cotangent  $T^*(G/D)$  signifie que sa 2-forme canonique  $d\theta_{G/D}$  est modifiée par  $d\theta_{G/D} + pr^*\beta$ , où  $pr$  est la projection canonique de  $T^*(G/D)$  sur  $G/D$  et  $\beta$  est une 2-forme fermée sur  $G/D$ . Dans ([DET]), les auteurs ont construit un sous fibré symplectique  $F$ , à l'aide de  $\mu_0$  et de  $\mathfrak{h}$ , d'un cotangent modifié  $T^*(G/D)$ . Le groupe de Lie  $G$  agit sur  $F$ , et cette action symplectique admet une application moment  $J : F \rightarrow \mathfrak{g}^*$  équivariante. Dans ce même travail, les auteurs ont montré que l'application moment  $J$  est un symplectomorphisme entre  $F$  et  $\mathcal{O}$  si et seulement si  $\mathfrak{h}$  vérifie la condition de Pukanszky. Ils ont montré aussi que si  $\mathfrak{h}$  est réelle, non nécessairement satisfaisant la condition de Pukanszky, la quantification géométrique du cotangent modifié  $T^*(G/D)$  ( $= F$  dans ce cas) donne la représentation  $\text{Ind}_D^G \chi$  de  $G$ . Dans l'autre cas extrême où  $\mathfrak{h}$  est purement complexe, la condition de Pukanszky est toujours satisfaite, et le lien entre la quantification géométrique de  $F \cong \mathcal{O}$  et la méthode des orbites a été établi dans le chapitre précédent. Ce qui motive les questions suivantes pour une polarisation  $\mathfrak{h}$  intermédiaire entre ces deux cas extrêmes:

*Si  $\mathfrak{h}$  ne vérifie pas la condition de Pukanszky, ce sous fibré symplectique  $F$  est-il quantifiable? Cette quantification (si elle existe) donne t-elle une représentation de  $G$  au lieu de  $\mathfrak{g}$ ? Eventuellement, comparer cette représentation à celle construite par la méthode des orbites.*

Nous donnons des réponses complètes à ces questions dont les grandes lignes sont les suivantes. L'existence du caractère  $\chi$  de  $D$  nous permet de construire un fibré préquantique  $L$  sur  $F$ , sur lequel l'action de  $G$  sur  $F$  se relève en une action qui préserve la connexion sur  $L$ . A partir de  $\mathfrak{h}$ , on définit une polarisation  $\mathcal{F}$  sur  $F$  qui est  $G$ -invariante. En quantifiant  $F$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités, on obtient l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{hol}$  de la représentation  $\text{Hol}_D^G \chi$  de  $G$ . Grâce à la  $G$ -invariance de  $\mathcal{F}$ , nous pouvons quantifier l'application moment  $J$  de  $F$ , et cette quantification donne une représentation unitaire de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_{hol}$ . Cette représentation s'intègre en la représentation  $\text{Hol}_D^G \chi$  de  $G$ . La modification de la représentation  $\text{Hol}_D^G \chi$  par Duflo s'obtient en quantifiant  $F$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes au lieu des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités.

On garde les notations de la quantification géométrique utilisées dans le chapitre précédent, et on suit les mêmes étapes de cette procédure.

## 1. Définition et structure symplectique de $F$ .

On note  $d\theta_G$  la 2-forme symplectique canonique de  $T^*G$ . On identifie  $T^*G$  avec  $G \times \mathfrak{g}^*$  où l'on interprète les éléments de  $\mathfrak{g}^*$  comme les 1-formes invariantes à gauche sur  $G$ . Dans cette identification,  $\theta_G$  et  $d\theta_G$  sont données par ([A-M]):

$$(\theta_G)_{(g,\mu)}(X_g^\ell, \rho) = \langle \mu, X \rangle, g \in G, X \in \mathfrak{g}, \mu, \rho \in \mathfrak{g}^*.$$

$$(d\theta_G)_{(g,\mu)}((X_g^\ell, \rho), (Y_g^\ell, \sigma)) = \rho(Y) - \sigma(X) - \mu([X, Y]), g \in G, X, Y \in \mathfrak{g}, \mu, \rho, \sigma \in \mathfrak{g}^*.$$

Le sous groupe  $D$  de  $G$  agit à droite sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  par:

$$(g, \mu) \cdot d = (gd, \text{Coad}_G(d^{-1})\mu).$$

Cette action est bien définie grâce à l'invariance de  $\mu_0 + \mathfrak{e}^0$  sous l'action coadjointe  $\text{Coad}_G$  de  $D$  (voir lemme II.1.2). Pour alléger les notations, l'écriture  $g \cdot \mu$  désignera par la suite l'élément  $\text{Coad}_G(g)\mu$  de  $\mathfrak{g}^*$ ,  $g \in G$  et  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ . Pour tout élément  $X$  de  $\mathfrak{d}$ , on note  $X_{G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)}$  le champ fondamental sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  de générateur infinitésimal  $X$ :

$$X_{G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)}|_{(g,\mu)} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(g, \mu) \cdot \exp(tX) = (X^\ell|_g, -X \cdot \mu).$$

Soit  $\theta$  la restriction de  $\theta_G$  au sous espace  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  de  $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$ .

### 1.1. Lemme.

- (i)  $\theta$  (et donc  $d\theta$ ) est invariante sous l'action de  $D$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ .
- (ii) La distribution noyau de  $d\theta$  est donnée par  $\{X_{G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)} \mid X \in \mathfrak{d}\}$ .

*Preuve.* Soient  $(g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ ,  $d \in D$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , et  $\rho \in \mathfrak{e}^0$ . On a:

$$\begin{aligned} \theta_{(gd, d^{-1} \cdot \mu)}(R_{d*}X^\ell|_g, d^{-1} \cdot \rho) &= \theta_{(gd, d^{-1} \cdot \mu)}((\text{Ad}(d^{-1})X)^\ell|_{gd}, d^{-1} \cdot \rho) \\ &= \langle d^{-1} \cdot \mu, \text{Ad}(d^{-1})X \rangle = \langle \mu, X \rangle \\ &= \theta_{(g,\mu)}(X^\ell|_g, \rho). \end{aligned}$$

Donc,  $\theta$  est invariante sous l'action de  $D$ , ce qui entraîne aussi l'invariance de  $d\theta$  par  $D$ . Soient  $X \in \mathfrak{g}$ , et  $\rho \in \mathfrak{e}^0$  fixés. Supposons qu'en tout point  $(g, \mu)$  de  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ , et que pour tout élément  $Y \in \mathfrak{g}$ , et  $\sigma \in \mathfrak{e}^0$ , on a:  $(d\theta)_{(g,\mu)}((X_g^\ell, \rho), (Y_g^\ell, \sigma)) = 0$ . Ou encore,  $\rho(Y) - \sigma(X) - \mu([X, Y]) = 0$ . En prenant  $Y = 0$  et  $\sigma$  quelconque dans  $\mathfrak{e}^0$ , on constate que  $X$  doit être nécessairement dans  $\mathfrak{e}$ . Si  $\sigma = 0$  et  $Y$  est arbitraire dans  $\mathfrak{g}$ , on doit avoir  $\rho(Y) = \mu([X, Y]) = -(X \cdot \mu)(Y)$ , et donc  $\rho = -X \cdot \mu$ . Comme  $\rho \in \mathfrak{e}^0$  et  $\mu \in \mu_0 + \mathfrak{e}^0$ , alors

pour tout  $Y \in \mathfrak{e}$  on a  $\mu_0([X, Y]) = \mu([X, Y]) = \rho(Y) = 0$ . Comme  $\mathfrak{e}^\perp = \mathfrak{d}$  pour  $\mu_0$  (voir lemme II.1.2), alors  $X \in \mathfrak{d}$ . D'où la propriété (ii).  $\blacksquare$

L'espace quotient  $F = (G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))/D$  pour l'action ci-dessus de  $D$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  est une variété lisse (voir [DET]). On note  $\pi : G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \rightarrow F$  la projection canonique de  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  sur  $F$ . Comme conséquence du lemme précédent, la forme  $d\theta$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  se projette en une 2-forme symplectique  $\omega$  sur  $F$ :

$$\begin{aligned} \omega_{\pi(g, \mu)}(\pi_*(X_g^\ell, \rho), \pi_*(Y_g^\ell, \sigma)) &= \rho(Y) - \sigma(Y) - \mu([X, Y]) \\ &= (g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0), X, Y \in \mathfrak{g}, \rho, \sigma \in \mathfrak{e}^0. \end{aligned}$$

L'action de  $G$  sur  $T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$  donnée par  $g \cdot (g', \mu) = (gg', \mu)$  se restreint évidemment sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ , et induit une action sur  $F$ :  $g \cdot \pi(g', \mu) = \pi(gg', \mu)$ . On désigne par  $X_F$  le champ fondamental sur  $F$  de générateur  $X \in \mathfrak{g}$  pour cette action à gauche de  $G$  sur  $F$ :

$$X_F|_{\pi(g, \mu)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(-tX) \cdot \pi(g, \mu) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp(-tX)g, \mu).$$

Notons que  $X_F$  est  $\pi_*(X^r, 0)$  qu'on notera tout simplement  $\pi_*X^r$  par la suite. L'action de  $G$  sur  $F$  préserve la 2-forme symplectique  $\omega$  et admet une application moment  $J : F \rightarrow \mathfrak{g}^*$ ,  $\pi(g, \mu) \mapsto g \cdot \mu$ , qui est Coad-équivariante. Vu comme application  $J : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(F)$ , ce  $J$  s'écrit:  $X \mapsto J_X : \pi(g, \mu) \mapsto \langle J(\pi(g, \mu)), X \rangle = \langle g \cdot \mu, X \rangle$ . L'application  $J$  devient maintenant un morphisme d'algèbres de Lie, où  $C^\infty(F)$  est muni de sa structure d'algèbre de Lie (algèbre de Poisson) induite par la structure symplectique de  $F$ .

## 2. Préquantification de $F$ .

**2.1. Proposition.** *Si la forme  $i\mu_0$  sur  $\mathfrak{d}$  se relève en un caractère unitaire  $\chi$  de  $D$ , alors il existe un fibré préquantique  $L$  au dessus de  $F$ , sur lequel l'action de  $G$  sur  $F$  se relève en une action qui préserve sa connexion.*

*Preuve.* Soit  $L$  le fibré en ligne complexe au dessus de  $F$  associé au fibré principal  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \xrightarrow{\pi} F$ , de groupe structural  $D$ , par le caractère  $\chi : D \rightarrow \mathbb{T}^1 \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$ . Autrement dit:  $L = (G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \times \mathbb{C})/D$ , où l'action à droite de  $D$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \times \mathbb{C}$  est donnée par:

$$(g, \mu, z) \cdot d = (gd, d^{-1} \cdot \mu, \chi(d)^{-1} z), \quad g \in G, d \in D, \mu \in \mu_0 + \mathfrak{e}^0, z \in \mathbb{C}.$$

La classe d'équivalence d'un élément  $(g, \mu, z)$  de  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \times \mathbb{C}$ , modulo cette action de  $D$ , sera notée  $[g, \mu, z]$  par la suite. On désigne par  $L^*$  le fibré principal sur  $F$  dont  $L$  est le fibré en ligne complexe associé par la représentation identité de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}$ :  $L^* = (G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \times \mathbb{C}^*)/D$ , l'action de  $D$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \times \mathbb{C}^*$  étant la restriction

de celle de  $D$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \times \mathbf{C}$ . La 1-forme complexe  $\tilde{\alpha} = \theta + dz/iz$ ,  $z$  étant une coordonnée sur  $\mathbf{C}^*$ , est une 1-forme de connexion sur le fibré trivial  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \times \mathbf{C}^*$  au dessus de  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0)$ , et qui est évidemment de courbure  $d\theta$ . L'invariance de  $\theta$  sous l'action de  $D$ , et de  $dz/iz$  par multiplication de  $z$  par un élément de  $\mathbf{C}^*$  (en particulier, par  $\chi(d)^{-1}$ ,  $d \in D$ ) entraîne l'invariance de  $\tilde{\alpha}$  sous l'action de  $D$ . On vérifie que la contraction de  $\tilde{\alpha}$  avec les champs fondamentaux  $X_{G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \times \mathbf{C}^*}$ ,  $X \in \mathfrak{d}$ , est nulle grâce au fait que  $(d_e \chi)(X) = i\langle \mu_0, X \rangle$ . En vertu de ces deux propriétés de  $\tilde{\alpha}$ , on en conclut que  $\tilde{\alpha}$  se projette en une 1-forme de connexion  $\alpha$  sur le fibré principal  $L^*$  au dessus de  $F$ . Le fait que  $\alpha$  est de courbure la 2-forme  $\omega$  sur  $F$  découle de la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} (G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \times \mathbf{C}^*, \tilde{\alpha}) & \longrightarrow & (G \times (\mu_0 + \epsilon^0), d\theta) \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ ((G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \times \mathbf{C}^*)/D, \alpha) & \longrightarrow & (F, \omega). \end{array}$$

Ensuite, la connexion  $\nabla$  sur  $L$  associée à la 1-forme de connexion  $\alpha$  sur  $L^*$  est de courbure  $i\omega$ . La structure hermitienne sur  $L$  compatible avec  $\nabla$  provient de l'unitarité du caractère  $\chi$  sur  $D$ . Ce qui achève la première assertion de cette proposition.

L'action de  $G$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \times \mathbf{C}$  donnée par  $g \cdot (g', \mu, z) = (gg', \mu, z)$  commute avec celle de  $D$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \times \mathbf{C}$ . L'application  $\Phi : G \times L \rightarrow L$ ,  $\Phi(g)([g', \mu, z]) = [gg', \mu, z]$ , est bien une action de  $G$  sur  $L$  qui est, par construction, un relèvement de l'action de  $G$  sur  $F$ . Grâce à l'invariance de  $\theta$  sous l'action de  $G$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0)$ , on obtient l'invariance de la 1-forme de connexion  $\tilde{\alpha}$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \times \mathbf{C}^*$  sous l'action de  $G$ , ce qui entraîne l'invariance de  $\alpha$  sur  $L^*$  pour l'action induite de  $G$  sur  $L^*$ . D'ou le résultat. ■

Tout le long de ce chapitre, on se fixe ce fibré préquantique  $(L, \nabla)$  au dessus de  $F$  construit à partir du caractère  $\chi$  sur  $D$ . Par construction de  $L$ , l'espace des sections  $\Gamma(L)$  s'identifie avec l'ensemble

$$C_\chi^\infty(G \times (\mu_0 + \epsilon^0)) = \{\varphi \in C^\infty(G \times (\mu_0 + \epsilon^0)) \mid \varphi((g, \mu) \cdot d) = \chi(d)^{-1} \varphi(g, \mu) \\ (g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \epsilon^0), d \in D\}.$$

Rappelons que cette identification est donnée par:  $s(\pi(g, \mu)) = [g, \mu, \varphi(g, \mu)]$ ,  $s \in \Gamma(L)$ . L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_L$  construit par la préquantification géométrique,  $\mathcal{H}_L = \{s \in \Gamma(L) \mid \int_F (s, s) \epsilon_\omega < \infty\}$ , se réalise ici par:

$$\mathcal{H}_L = \{\varphi \in C_\chi^\infty(G \times (\mu_0 + \epsilon^0)) \mid \int_F |\varphi|^2 \epsilon_\omega < \infty\},$$

muni du produit hermitien  $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_F \bar{\varphi} \psi \epsilon_\omega$ ,  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_L$ . Il est à noter que  $\bar{\varphi} \psi$  est bien une fonction sur  $F$  grâce à l'unitarité de  $\chi$ .

Ensuite, la préquantification géométrique de  $F$  associe à chaque fonction  $f \in C^\infty(F)$  un opérateur  $\mathcal{Q}(f)$  sur  $\mathcal{H}_L$  donné par:

$$\mathcal{Q}(f)s = -i\nabla_{\xi_f}s + fs, \quad s \in \mathcal{H}_L.$$

En spécifiant cette correspondance aux fonctions particulières  $f = J_X$  sur  $F$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , on obtient une représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_L$  donnée par:  $T(X) = i\mathcal{Q}(J_X)$ . Comme  $J$  est une application moment sur  $F$ , alors  $\xi_{J_X} = X_F$ , et cette représentation  $T$  s'écrit:

$$T(X)s = \nabla_{X_F}s + iJ_Xs, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad s \in \mathcal{H}_L.$$

Dans l'identification  $\Gamma(L) \cong C_X^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ , la connexion  $\nabla$  sur les champs fondamentaux  $X_F$  est décrite comme suit.

**2.2. Proposition.** *Si  $s$  est une section de  $L$  représentée par une fonction  $\varphi \in C_X^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ , alors la section  $\nabla_{X_F}s$  de  $L$  est représentée par la fonction  $X^r\varphi + i\theta(X^r)\varphi \in C_X^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ . Bien entendu, l'écriture  $X^r$  désigne le champ  $(X^r, 0)$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ .*

*Preuve.* On a vu dans le premier paragraphe que le champ fondamental  $X_F$  sur  $F$  est  $\pi_*X^r$ . La démonstration de cette proposition utilise les mêmes techniques que celle pour une orbite coadjointe (voir preuve de la proposition III.2.7), où l'on avait  $X_{\mathcal{O}} = \pi_*X^r$  avec  $\pi : G \rightarrow \mathcal{O}$ . ■

**2.3. Corollaire.** *La représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_L$  est donnée par:  $T(X)\varphi = X^r\varphi$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}_L$ .*

*Preuve.* Soit  $s$  une section de  $L$  représentée par une fonction  $\varphi \in C_X^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ . Grâce à la proposition précédente, la section  $T(X)s$  de  $L$  est représentée par la fonction  $X^r\varphi + i\theta(X^r)\varphi + i\pi^*(J_X)\varphi$ . Soit  $(g, \mu)$  un élément de  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ . On a:

$$\begin{aligned} \theta_{(g, \mu)}(X_g^r, 0) &= \theta_{(g, \mu)}(-(\text{Ad}(g^{-1})X)^\ell|_g, 0) = -\langle \mu, \text{Ad}(g^{-1})X \rangle \\ &= -\langle g \cdot \mu, X \rangle = -J_X(\pi(g, \mu)). \end{aligned}$$

Autrement dit,  $\theta(X^r) + \pi^*(J_X) = 0$ , et le résultat en découle immédiatement. ■

On a vu dans la proposition 2.1 que l'action de  $G$  sur  $F$  se relève en une action sur  $L$ , et donc  $G$  agit sur  $\Gamma(L)$ . Cette action se traduit dans l'identification  $\Gamma(L) \cong C_X^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$  par:

$$(2.4) \quad (U(g)\varphi)(g', \mu) = \varphi(g^{-1}g', \mu), \quad g, g' \in G, \quad \varphi \in C_X^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)).$$

Comme  $\omega$  (et donc  $\varepsilon_\omega$ ) est invariante à gauche sous l'action de  $G$ , alors  $U(g)$  est un opérateur isométrique de  $\mathcal{H}_L$ . Il s'ensuit que  $U$  est une représentation unitaire de  $G$  dans  $\mathcal{H}_L$ . La représentation infinitésimale associée n'est rien d'autre que la représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_L$  construite par la préquantification géométrique de  $F$ . On a donc établi le résultat suivant.

**2.5. Proposition.** *La représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_L$ , obtenue par la préquantification géométrique de  $F$ , s'intègre en la représentation  $U$  de  $G$  donnée par l'expression 2.4.*

Les éléments de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_L$  sont des fonctions sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  et non pas sur  $G$  comme dans le cas des représentations induites. Ce résultat n'est pas suprenant car on n'a pas encore fait intervenir la polarisation  $\mathfrak{h}$  (fixée) au point  $\mu_0$ . A partir de  $\mathfrak{h}$ , on va construire une polarisation géométrique  $\mathcal{F}$  sur  $F$ , et ce pour réduire l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_L$ . Tel est l'objet du paragraphe suivant.

### 3. Polarisation géométrique $\mathcal{F}$ et son fibré des repères sur $F$ .

Soit  $(g, \mu)$  un élément de  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ . On pose:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{(g, \mu)} = (\ell_{g_*} \mathfrak{h}) \times (\mathfrak{e}^0)^{\mathbb{C}} \subset (T_{(g, \mu)} G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))^{\mathbb{C}} \cong (T_g G)^{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{e}^0)^{\mathbb{C}}.$$

C'est une distribution sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  qui est invariante sous l'action à gauche de  $G$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  donnée par:  $g \cdot (g', \mu) = (gg', \mu)$ . Cette distribution  $\tilde{\mathcal{F}}$  possède les propriétés suivantes.

#### 3.1. Proposition.

- (i)  $\tilde{\mathcal{F}}$  et  $\tilde{\mathcal{F}} + \overline{\tilde{\mathcal{F}}}$  sont involutives.
- (ii)  $\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{F}} \cap \overline{\tilde{\mathcal{F}}})$  est constante.
- (iii)  $\tilde{\mathcal{F}}$  est isotrope pour la 2-forme  $d\theta$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ .
- (iv)  $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{\mathcal{F}} - \dim D = \frac{1}{2} \dim F$ .

*Preuve.* La propriété (i) découle du fait que  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$  sont des sous algèbres de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . Comme  $\tilde{\mathcal{F}}$  est  $G$ -invariante (et donc  $\overline{\tilde{\mathcal{F}}}$  aussi), alors  $\tilde{\mathcal{F}} \cap \overline{\tilde{\mathcal{F}}}$  est  $G$ -invariante, ce qui entraîne que  $\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{F}} \cap \overline{\tilde{\mathcal{F}}})$  est constante, d'où l'assertion (ii). Soient  $(g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{h}$ , et  $\rho, \sigma \in (\mathfrak{e}^0)^{\mathbb{C}}$ .

$$\begin{aligned} (d\theta)_{(g, \mu)}((X_g^\ell, \rho), (Y_g^\ell, \sigma)) &= \rho(Y) - \sigma(X) - \mu([X, Y]) \\ &= -\mu([X, Y]) \quad \text{car } \rho, \sigma \in (\mathfrak{e}^0)^{\mathbb{C}} \text{ et } X, Y \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{e}^{\mathbb{C}} \\ &= -\mu_0([X, Y]) \quad \text{car } \mu \in (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \text{ et } [X, Y] \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{e}^{\mathbb{C}} \\ &= 0 \quad \text{d'après l'isotropie de } \mathfrak{h} \text{ pour } \mu_0 \end{aligned}$$

D'où l'isotropie de  $\tilde{\mathcal{F}}$  pour  $d\theta$ . En écrivant que  $\dim \mathfrak{e} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} - \dim \mathfrak{d}$ , on obtient d'une part  $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{\mathcal{F}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{e}^0 = \dim \mathfrak{g} - \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{d}$ . D'autre part, on obtient  $\dim F = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{e}^0 - \dim \mathfrak{d} = 2(\dim \mathfrak{g} - \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h})$ . D'où l'assertion (iv). ■

Une telle distribution  $\tilde{\mathcal{F}}$  est appelée une prépolarisation géométrique ([Wo]), cette terminologie est justifiée par le fait suivant.

**3.2. Corollaire.** *La prépolarisation  $\tilde{\mathcal{F}}$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  se projette par  $\pi$  en une polarisation  $\mathcal{F}$  sur  $F$ .*

*Preuve.* On pose:  $\mathcal{F}_{\pi(g,\mu)} = \pi_* \tilde{\mathcal{F}}_{(g,\mu)}$ ,  $(g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ . On vérifie que:

$$\pi_*(X_{gd}^\ell, \rho) = \pi_*((\text{Ad}(d)X)_g^\ell, d \cdot \rho), \quad X \in \mathfrak{h}, \quad d \in D, \quad \rho \in \mathfrak{e}^0.$$

Grâce à l'invariance de  $\mathfrak{h}$  sous l'action adjointe  $\text{Ad}_G$  de  $D$  (car  $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{h}$ ), et l'invariance de  $\mathfrak{e}^0$  sous l'action coadjointe  $\text{Coad}_G$  de  $D$  (Lemme II.1.2), alors  $\mathcal{F}$  est bien définie. Le corollaire est ensuite une conséquence immédiate de la proposition précédente. En particulier, les propriétés (iii) et (iv) impliquent que  $\mathcal{F}$  est lagrangienne pour la 2-forme  $\omega$  sur  $F$ . ■

**3.3. Remarque.** Comme l'action de  $G$  sur  $F$  est induite par celle de  $G$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ , et  $\tilde{\mathcal{F}}$  est  $G$ -invariante sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ , alors  $\mathcal{F}$  est  $G$ -invariante pour cette action induite de  $G$  sur  $F$ .

On s'intéresse maintenant au fibré des repères de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $F$ . Pour cela, on se fixe une base  $(s_1, \dots, s_r, X_1, \dots, X_k, Z_1, \dots, Z_p, \overline{Z}_1, \dots, \overline{Z}_p, Y_1, \dots, Y_k)$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , telle que:  $(s_1, \dots, s_r)$  soit une base réelle de  $\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$ ,  $(s_1, \dots, s_r, X_1, \dots, X_k)$  une base réelle de  $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ , et  $(s_1, \dots, s_r, X_1, \dots, X_k, Z_1, \dots, Z_p)$  une base de  $\mathfrak{h}$ . Les  $Y_i$  sont choisis réels. On notera en particulier  $Y_i^* \in \mathfrak{e}^0 \subset \mathfrak{g}^*$  le vecteur dual de  $Y_i$  dans cette base de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . Les éléments  $Y_1^*, \dots, Y_k^*$  forment une base de  $\mathfrak{e}^0$ . Pour tout élément  $(g, \mu)$  de  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ , la famille  $(\pi_*(Z_i^\ell|_g, 0), \pi_*(0, Y_j^*))$  est une base de  $\mathcal{F}_{\pi(g,\mu)}$ . En fait, pour tout élément  $X$  de  $\mathfrak{d}$ ,  $\pi_*(X^\ell|_g, -X \cdot \mu) = 0$ , et donc  $\pi_*(X^\ell|_g, 0) = \pi_*(0, X \cdot \mu)$  est une combinaison linéaire des  $\pi_*(0, Y_j^*)$  car  $X \cdot \mu \in \mathfrak{e}^0$ .

Afin de décrire explicitement le fibré  $\mathcal{RF}$  des repères de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $F$ , faisons les préliminaires suivants. Soit  $d \in D$  (et donc  $\text{Ad}(d)Z_i \in \mathfrak{h}$ ,  $1 \leq i \leq p$ ). En écrivant  $\pi_*((\text{Ad}(d)Z_i)^\ell, 0)$ ,  $i$  fixé, dans la base canonique de  $\mathcal{F}_{\pi(g,\mu)}$ , on obtient une matrice  $M(d)$  donnée par:

$$\pi_*((\text{Ad}(d)Z_i)^\ell, 0) = (\text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}}(d))_{ai} \cdot \pi_*(Z_a^\ell|_g, 0) + (M(d))_{bi} \cdot \pi_*(0, Y_b^*).$$

On note  $\text{Coad}_{\mathfrak{e}^0}(d)$  la matrice de la restriction de  $\text{Coad}_G(d)$  à  $\mathfrak{e}^0$ , on rappelle que  $D$  laisse stable  $\mathfrak{e}^0$  sous l'action coadjointe de  $G$ . On vérifie sans peine que

$$(3.4) \quad M(dd') = \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}}(d) \cdot M(d') + M(d) \cdot \text{Coad}_{\mathfrak{e}^0}(d'), \quad d, d' \in D.$$

Identifions le groupe des automorphismes de  $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$  écrits dans sa base canonique  $X_1, \dots, X_k, Z_1, \dots, Z_p$  (modulo  $\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$ ) avec  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $n = k + p$ . On considère l'application  $\tilde{\Delta}$  suivante:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} : D &\longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ d &\longmapsto \begin{pmatrix} \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}}(d) & M(d) \\ 0 & \text{Coad}_{\mathfrak{e}^0}(d) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété (3.4) de  $M$ , et comme  $\text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}\mathbf{C}}$ ,  $\text{Coad}_{\mathfrak{e}^0}$  sont des morphismes de  $D$ , on constate que  $\tilde{\Delta}$  est en fait un morphisme de  $D$  dans  $GL(n, \mathbf{C})$ , et on a:

**3.5. Proposition.** *Le fibré  $\mathcal{RF}$  est le  $GL(n, \mathbf{C})$  fibré principal associé au fibré principal  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \rightarrow F$ , de groupe structural  $D$ , par le morphisme  $\tilde{\Delta}$*

*Preuve.* On a une projection naturelle de  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \times GL(n, \mathbf{C})$  sur  $\mathcal{RF}$  donnée par:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \times GL(n, \mathbf{C}) &\longrightarrow \mathcal{RF} \\ (g, \mu, A) &\longmapsto (R_1, \dots, R_n) : \text{repère de } \mathcal{F} \text{ au point } \pi(g, \mu) \end{aligned}$$

où  $R_j = \pi_*(Z_i^\ell|_g, 0)A_{ij} + \pi_*(0, Y_q^*)A_{qj}$  (convention de sommation). Comme la famille  $(\pi_*(Z_i^\ell|_g, 0), \pi_*(0, Y_j^*))$  est une base de  $\mathcal{F}_{\pi(g, \mu)}$ , alors l'application  $\tilde{\pi}$  est surjective. Supposons que le repère  $(R_1, \dots, R_n)$  au point  $\pi(g, \mu) (= \pi(gd, d^{-1} \cdot \mu), d \in D)$  est aussi associé à  $(gd, d^{-1} \cdot \mu, \hat{A})$ , où  $\hat{A} \in GL(n, \mathbf{C})$ . On a d'une part:

$$\begin{aligned} \pi_*(Z_i^\ell|_{gd}, 0) &= (T_{(gd, d^{-1} \cdot \mu)\pi})(Z_i^\ell|_{gd}, 0) \\ &= (T_{(g, \mu)\pi})((\text{Ad}(d)Z_i)^\ell|_g, 0) \\ &= (\text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}\mathbf{C}}(d))_{ai} \cdot \pi_*(Z_a^\ell|_g, 0) + (M(d))_{bi} \cdot \pi_*(0, Y_b^*) \end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \pi_*(0, Y_j^*) &= (T_{(gd, d^{-1} \cdot \mu)\pi})(0, Y_j^*) \\ &= (T_{(g, \mu)\pi})(0, d \cdot Y_j^*) \\ &= (\text{Coad}_{\mathfrak{e}^0}(d))_{\gamma j} \pi_*(0, Y_\gamma^*) \end{aligned}$$

En intégrant ces calculs dans l'égalité  $\tilde{\pi}(g, \mu, A) = \tilde{\pi}(gd, d^{-1} \cdot \mu, \hat{A})$ , on obtient:

$$A = \begin{pmatrix} \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}\mathbf{C}}(d) & M(d) \\ 0 & \text{Coad}_{\mathfrak{e}^0}(d) \end{pmatrix} \cdot \hat{A} = \tilde{\Delta}(d) \cdot \hat{A}$$

Ou encore,  $\hat{A} = \tilde{\Delta}(d)^{-1} \cdot A$ . On en conclut que  $\mathcal{RF} \cong (G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \times GL(n, \mathbf{C}))/D$ , où l'action à droite de  $D$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \times GL(n, \mathbf{C})$  est donnée par:

$$(g, \mu, A) \cdot d = (gd, d^{-1} \cdot \mu, \tilde{\Delta}(d)^{-1} \cdot A).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

#### 4. Quantification par $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités.

On note toujours  $B$  le fibré en ligne complexe au dessus de  $F$  associé à  $\mathcal{RF}$  par le morphisme  $A \mapsto |\det A|^{1/2}$  de  $GL(n, \mathbf{C})$  dans  $\mathbb{R}_+^* \subset \text{Aut}(\mathbf{C})$ .

**4.1. Proposition.**  $B$  est le fibré en ligne complexe associé au fibré principal  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \xrightarrow{\pi} F$ , de groupe structural  $D$ , par le morphisme  $\Delta_{D,G}^{-1/2} : D \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .

*Preuve.* En vertu de la réalisation de  $\mathcal{RF}$  (voir la proposition 3.5), le fibré en ligne complexe  $B$  est associé au fibré principal  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \xrightarrow{\pi} F$  par le morphisme  $d \mapsto |\det \tilde{\Delta}(d)|^{1/2}$  de  $D$  dans  $\mathbb{R}_+^* \subset \text{Aut}(\mathbb{C})$ . La proposition découle ensuite du lemme suivant.  $\blacksquare$

**4.2. Lemme.** Pour tout élément  $d$  de  $D$ , on a  $|\det \tilde{\Delta}(d)| = \Delta_{D,G}^{-1}(d)$ .

*Preuve.* On a  $\det \tilde{\Delta}(d) = \det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}\mathfrak{C}}(d) \cdot \det \text{Coad}_{\epsilon^0}(d)$ ,  $d \in D$ . En écrivant la matrice  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}\mathfrak{C}}(d^{-1})$  dans la base canonique de  $\mathfrak{g}\mathfrak{C}$ , et en utilisant le fait que  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}\mathfrak{C}}(d^{-1})$  laisse stable les sous espaces  $\mathfrak{d}\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{h}$  et  $\bar{\mathfrak{h}}$  de  $\mathfrak{g}\mathfrak{C}$ , on constate que la matrice de  $\text{Coad}_{\epsilon^0}(d)$  relativement à la base  $(Y_1^*, \dots, Y_k^*)$  de  $(\epsilon^0)^{\mathfrak{C}}$  est exactement la transposée de la matrice  $\text{Ad}_{\mathfrak{g}\mathfrak{C}/\epsilon^{\mathfrak{C}}}(d^{-1})$  écrite dans la base  $(Y_1, \dots, Y_k)$  (modulo  $\epsilon^{\mathfrak{C}}$ ) de  $\mathfrak{g}\mathfrak{C}/\epsilon^{\mathfrak{C}}$ . On en conclut que  $\det \text{Coad}_{\epsilon^0}(d) = \det \text{Ad}_{\mathfrak{g}\mathfrak{C}/\epsilon^{\mathfrak{C}}}(d^{-1}) = \det \text{Ad}_{\mathfrak{g}\mathfrak{C}/\mathfrak{d}\mathfrak{C}}(d^{-1})$  (voir lemme II.1.5 pour cette dernière égalité). Donc,  $\det \tilde{\Delta}(d) = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}\mathfrak{C}/\mathfrak{d}\mathfrak{C}}(d))^{-1} \cdot \det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{d}\mathfrak{C}}(d) = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}\mathfrak{C}/\mathfrak{h}}(d))^{-1}$ . Par passage aux modules,  $|\det \tilde{\Delta}(d)| = \Delta_{D,G}^{-1}(d)$ , d'où le lemme.  $\blacksquare$

D'après la réalisation de  $B$  dans la proposition précédente, l'espace  $\Gamma(B)$  des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités sur  $F$  est en bijection avec l'ensemble  $C_{\Delta_{D,G}^{-1/2}}^{\infty}(G \times (\mu_0 + \epsilon^0))$  des fonctions lisses  $\varphi : G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \rightarrow \mathbb{C}$ , telles que:

$$\varphi((g, \mu) \cdot d) = \Delta_{D,G}^{-1/2}(d)\varphi(g, \mu), (g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \epsilon^0), d \in D.$$

Cette identification entre une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité  $\nu : \mathcal{RF} \rightarrow \mathbb{C}$  (vérifiant  $\nu(R \cdot A) = |\det A|^{-\frac{1}{2}}\nu(R)$ ,  $R \in \mathcal{RF}$ ,  $A \in GL(n, \mathbb{C})$ ) et une fonction  $\varphi \in C_{\Delta_{D,G}^{-1/2}}^{\infty}(G \times (\mu_0 + \epsilon^0))$  est donnée par:

$$\varphi(g, \mu) = \nu(\pi(g, \mu), \pi_*((Z_i^{\ell}|_g)_{i=1}^p, 0), \pi_*(0, (Y_j^*)_{j=1}^k)), (g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \epsilon^0).$$

L'étape suivante maintenant est de décrire les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités sur  $F$  constantes le long de  $\mathcal{F}$ , pour la connexion  $\nabla$  sur  $B$  construite par la quantification géométrique, en termes de cette identification de  $\Gamma(B)$  avec  $C_{\Delta_{D,G}^{-1/2}}^{\infty}(G \times (\mu_0 + \epsilon^0))$ .

**4.3. Théorème.** L'espace des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$  est en bijection avec l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_{\Delta_{D,G}^{-1/2}}^{\infty}(G)$  qui vérifient la propriété suivante:

$$\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^{\ell}\varphi = \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}\mathfrak{C}/\epsilon^{\mathfrak{C}}}(Z) \cdot \varphi.$$

*Preuve.* Les détails de la démonstration seront donnés en Appendice II. L'idée de cette démonstration est la suivante. Soit  $\nu$  est une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité sur  $F$  représentée par une

$\varphi \in C_{\Delta_{D,G}^{-1/2}}^{\infty}(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ . Nous montrerons que la condition « $\nu$  est constante le long de  $\mathcal{F}$ » s'exprime par les deux conditions suivantes sur  $\varphi$ :

- (i)  $\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = \frac{1}{2} \text{tracc ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{e}}(Z) \cdot \varphi$ .
- (ii)  $\varphi$  est constante le long  $\mathfrak{e}^0$ .

Grâce à la propriété (ii), on identifie  $\varphi$  avec une fonction sur  $G$  qu'on note encore  $\varphi$ . Cette fonction  $\varphi$  sur  $G$  est bien évidemment un élément de  $C_{\Delta_{D,G}^{-1/2}}^{\infty}(G)$ , et satisfait la propriété (i). ■

Pour quantifier l'application moment  $J$  sur  $F$ , on aura besoin d'exprimer la dérivée de Lie des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités sur  $F$  (qui n'est définie que pour les champs qui préservent  $\mathcal{F}$ ) suivant les champs fondamentaux  $X_F$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , de l'action de  $G$  sur  $F$ .

**4.4. Proposition.** *Soit  $\nu$  une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité sur  $F$  représentée par une fonction  $\varphi \in C_{\Delta_{D,G}^{-1/2}}^{\infty}(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ . Alors  $\mathcal{L}_{X_F} \nu$  est la  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité représentée par la fonction  $X^r \varphi \in C_{\Delta_{D,G}^{-1/2}}^{\infty}(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ .*

*Preuve.* Le flot de  $X_F$  sur  $F$  est  $\Phi_t = \Phi(\exp(-tX))$ , où  $\Phi$  est l'action à gauche de  $G$  sur  $F$ :  $\Phi(g)(\pi(g', \mu)) = \pi(gg', \mu)$ . Donc,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_F} \nu)(\pi(g, \mu), \pi_*(Z_i^\ell|_g, 0)_{i=1}^p, \pi_*(0, Y_j^*)_{j=1}^k) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(\Phi_t(\pi(g, \mu)), \Phi_{t*} \pi_*(Z_i^\ell|_g, 0)_{i=1}^p, \Phi_{t*} \pi_*(0, Y_j^*)_{j=1}^k) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \nu(\pi(\exp(-tX)g, \mu), \pi_*(Z_i^\ell|_{\exp(-tX)g}, 0)_{i=1}^p, \pi_*(0, Y_j^*)_{j=1}^k) \\ &= \frac{d}{dt} \varphi(\exp(-tX)g, \mu) = (X^r \varphi)(g, \mu). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Le fibré en ligne complexe  $Q = L \otimes B$  est le fibré quantique au dessus de  $F$ . On avait construit les fibrés  $L$  et  $B$  comme étant les fibrés en ligne complexe associés au fibré principal  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \xrightarrow{\pi} F$ , de groupe structural  $D$ , par les caractères  $\chi$  et  $\Delta_{D,G}^{-1/2}$ , respectivement. Il s'ensuit que  $Q$  est le fibré en ligne complexe associé au fibré principal  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \xrightarrow{\pi} F$  par le caractère  $\chi \cdot \Delta_{D,G}^{-1/2}$ . Comme d'habitude pour les fibrés associés, l'espace  $\Gamma(Q)$  s'identifie avec l'ensemble  $C_{\chi \cdot \Delta_{D,G}^{-1/2}}^{\infty}(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$  des fonctions lisses  $\varphi : G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \rightarrow \mathbb{C}$ , vérifiant la propriété suivante:

$$\varphi((g, \mu) \cdot d) = \chi(d)^{-1} \Delta_{D,G}^{-1/2}(d) \varphi(g, \mu), \quad (g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0), d \in D.$$

Pour déterminer les sections de  $Q$  constantes le long de  $\mathcal{F}$  pour la connexion  $\nabla$  somme des connexions sur  $L$  et  $B$ , il nous reste à chercher les sections de  $L$  constantes le long de  $\mathcal{F}$ . Les sections de  $B$  constantes le long de  $\mathcal{F}$  ont été décrites dans le théorème 4.3.

**4.5. Proposition.** *L'espace des sections de  $L$  constantes le long de  $\mathcal{F}$  est donné par l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_X^\infty(G)$ , telles que  $\forall Z \in \mathfrak{h}, Z^\ell \varphi = -i\langle \mu_0, Z \rangle \varphi$ .*

*Preuve.* L'idée de la démonstration est la suivante. Nous montrerons en Appendice II qu'une section  $s$  de  $L$  représentée par une fonction  $\varphi \in C_X^\infty(G \times (\mu_0 + \epsilon^0))$  est constante le long de  $\mathcal{F}$  si et seulement si  $\varphi$  vérifie les propriétés suivantes:

- (i)  $\forall Z \in \mathfrak{h}, Z^\ell \varphi = -i\langle \mu_0, Z \rangle \varphi$ .
- (ii)  $\varphi$  est constante le long de  $\epsilon^0$ .

Ainsi,  $\varphi$  s'identifie avec une fonction sur  $G$  notée encore  $\varphi$  qui est un élément de  $C_X^\infty(G)$  satisfaisant la condition (ii). ■

Comme conséquence de la description des sections de  $L$  et  $B$  qui sont constantes le long de  $\mathcal{F}$ , on obtient.

**4.6. Théorème.** *L'espace des sections de  $Q$  constantes le long de  $\mathcal{F}$  s'identifie avec l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_{X \cdot \Delta_{D,G}}^{\infty - 1/2}(G)$  vérifiant:*

$$\forall Z \in \mathfrak{h}, Z^\ell \varphi = (-i\langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}} Z) \cdot \varphi.$$

Afin de décrire l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_Q$  construit par la quantification géométrique à partir des sections de  $Q$  constantes le long de  $\mathcal{F}$ , examinons dans un premier temps l'espace des feuilles  $F/D$  du feuilletage  $\mathcal{D}$  partie réelle de  $\mathcal{F}$ . Le feuilletage  $\mathcal{D}$  est la projection par  $\pi$  du feuilletage  $\tilde{\mathcal{D}}$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0)$  défini par:  $\tilde{\mathcal{D}}_{(g,\mu)} = \ell_{g*} \mathfrak{d} \times \epsilon^0$ . Une feuille de  $\tilde{\mathcal{D}}$  passant par un point  $(g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \epsilon^0)$  est  $D_0 \times (\mu_0 + \epsilon^0)$ , ce qui entraîne que l'espace des feuilles de  $\tilde{\mathcal{D}}$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0)$  s'identifie avec  $G/D_0$ . Il en découle que  $F/D \cong G/D$ . Donc,  $\mathcal{H}_Q = \{\psi \in \Gamma(Q) \mid (\forall \xi \in \mathcal{F}, \nabla_\xi \psi = 0) \text{ et } \int_{G/D} (\psi, \psi) < \infty\}$ ; son produit hermitien étant donné par:  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{G/D} (\psi_1, \psi_2)$ . On cherche à écrire ce produit hermitien dans l'identification des sections  $\psi_i$  ( $i=1, 2$ ) de  $Q$  avec des fonctions  $\varphi_i \in C_{X \cdot \Delta_{D,G}}^{\infty - 1/2}(G)$  vérifiant la propriété du théorème 4.6. Comme pour le cas de  $\mathcal{O}$  (voir appendice I), on montre que la 1-densité  $(\psi_1, \psi_2)$  sur  $G/D$  est, à un facteur positif près, la projection de  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 |\tilde{\alpha}|$ , où  $\tilde{\alpha}$  est la contraction de la  $2n$ -forme  $\pi^* \epsilon_\omega = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!} (d\theta)^n$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0)$  avec les champs de vecteurs  $Y_1^*, \dots, Y_k^*$ . On fait remarquer que  $\tilde{\alpha}$  peut être considérée comme une forme différentielle sur  $G$  puisqu'elle est obtenue par contraction avec les champs  $Y_1^*, \dots, Y_k^*$ . On a vu que  $d\theta$  est invariante sous l'action de  $G$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0)$  donnée par:  $g \cdot (g', \mu) = (gg', \mu)$ . Il s'ensuit que la  $(2n - k)$ -forme  $\tilde{\alpha}$  sur  $G$  est invariante à gauche sous l'action de  $G$ . Cette forme est non nulle du fait que les feuilles de la distribution caractéristique de  $d\theta$  sur  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0)$  sont les orbites de  $D_0$ , et les champs de vecteurs  $Y_1^*, \dots, Y_k^*$  ne sont pas

tangents à ces orbites. On pose  $d\mu_G = (s_1^*)^\ell \wedge \cdots \wedge (s_r^*)^\ell \wedge \cdots \wedge (X_1^*)^\ell \wedge \cdots \wedge (X_k^*)^\ell \wedge (d\theta)^n$ . Ce  $d\mu_G$  est une mesure de Haar à gauche sur  $G$  dont la contraction avec les champs de vecteurs  $s_1^\ell, \dots, s_r^\ell, X_1^\ell, \dots, X_k^\ell$  est la  $(2n - k)$ -forme  $\tilde{\alpha}$ . On en conclut que la mesure sur  $G/D$  donnée par la quantification géométrique est la même que celle construite par la méthode des orbites à partir de deux fonctions  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{X \cdot \Delta_{D,G}}^{\infty, -1/2}(G)$ , à savoir  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 d\mu_{G,D}$  (voir chapitre II). On a donc établi le résultat suivant.

**4.7. Proposition.** *L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_Q$  obtenue par la quantification géométrique de  $F$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités est le sous espace des fonctions  $\varphi \in C_{X \cdot \Delta_{D,G}}^{\infty, -1/2}(G)$ , telles que:*

- (i)  $\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = (-i\langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{e}} Z) \varphi$ .
- (ii)  $\int_{G/D} |\varphi|^2 d\mu_{G,D} < \infty$ .

Le produit hermitien sur  $\mathcal{H}_Q$  étant donné par  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{G/D} \overline{\varphi_1} \varphi_2 d\mu_{G,D}$ .

**4.8. Remarque.**  $\mathcal{H}_Q$  est l'espace  $\mathcal{H}_{hol}$  de la représentation induite holomorphe  $\text{Hol}_d^G \chi$ .

Après avoir déterminé l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_Q$  donné par la quantification géométrique de  $F$ , on examine maintenant la représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_Q$  donnée par:  $T(X) = iQ(J_X)$ , où  $Q(f)$  désigne toujours l'opérateur sur  $\mathcal{H}_Q$  associé à une fonction  $f \in C^\infty(F)$  préservant  $\mathcal{F}$ . Son expression a été donnée dans (III.3.3).

**4.9. Proposition.** *La représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_Q$  obtenue par la quantification géométrique de  $F$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités est donnée par:  $T(X)\varphi = X^r \varphi$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}_Q$ .*

*Preuve.* Sur un ouvert  $U$  de  $F$ , un élément  $\psi$  de  $\mathcal{H}_Q$  s'écrit comme  $\psi = s \otimes \nu$ , où  $s$  et  $\nu$  sont des sections de  $L$  et  $B$ , respectivement, au dessus de  $U$ . Soient  $\varphi_1 \in C_X^\infty(\pi^{-1}(U))$  et  $\varphi_2 \in C_{\Delta_{D,G}}^{\infty, -1/2}(\pi^{-1}(U))$  des fonctions représentant  $s$  et  $\nu$  respectivement, et donc  $s \otimes \nu$  est représentée par la fonction  $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \in C_{X \cdot \Delta_{D,G}}^{\infty, -1/2}(\pi^{-1}(U))$ . En vertu des propositions 2.2 et 4.4, la section  $Q(J_X)(s \otimes \nu) = (-i\nabla_{X_\sigma} s + f s) \otimes \nu - i s \otimes \mathcal{L}_{X_\sigma} \nu$  de  $Q$  au dessus de  $U$  est représentée par la fonction  $\widehat{\varphi} = (-i(X^r \varphi_1 + i\theta(X^r)\varphi_1) + \pi^*(J_X)\varphi_1) \cdot \varphi_2 + \varphi_1 \cdot X^r \varphi_2$  sur  $\pi^{-1}(U)$ . Comme  $\pi^*(J_X) + \theta(X^r) = 0$  (voir preuve de la proposition 2.2), alors  $\widehat{\varphi} = -iX^r(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$ , et donc  $T(X)(s \otimes \nu)$  est représentée par la fonction  $X^r(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$ . D'où le résultat. ■

On constate que la représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_Q = \mathcal{H}_{hol}$  obtenue est la représentation infinitésimale associée à la représentation  $\text{Hol}_D^G \chi = (\mathcal{H}_{hol}, U)$  de  $G$  donnée par la méthode des orbites:

$$(U(g)\varphi)(g') = \varphi(g^{-1}g'), \quad g, g' \in G, \quad \varphi \in \mathcal{H}_{hol}.$$

On a donc montré le résultat suivant

**4.10. Corollaire.** *La quantification géométrique de  $F$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités et la méthode des orbites donnent la même représentation  $\text{Hol}_D^G \chi$  de  $G$ .*

**4.11. Remarque.** L'existence du caractère  $\chi$  de  $D$  nous a permis de relever l'action de  $G$  sur  $F$  en une action sur  $L$ , et comme  $\mathcal{F}$  est  $G$ -invariante alors  $G$  agit aussi sur  $B$  et par suite  $G$  agit sur  $Q = L \otimes B$ . La représentation  $U$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}_Q$  donnée par la quantification géométrique n'est rien d'autre que l'action de  $G$  sur  $\Gamma(Q)$ .

L'étape suivante est d'étudier l'effet de la modification des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités par les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes (si elles existent) sur ce résultat. C'est l'objet du paragraphe suivant.

## 5. Quantification par $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes.

Commençons tout d'abord par donner une condition suffisante d'existence d'un fibré des métarepères  $\mathcal{MF}$  au dessus de  $F$ . On désigne toujours par  $\tilde{\Delta} : D \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$  le morphisme par lequel est associé le fibré  $\mathcal{RF}$  au fibré principal à gauche  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \xrightarrow{\pi} F$  (voir proposition 3.5).

**5.1. Proposition.** *Supposons qu'il existe un caractère  $\eta : D \rightarrow \mathbf{C}^*$  tel que  $\eta(d)^2 = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(d))^{-1}$  pour tout  $d \in D$ . Alors, le  $ML(n, \mathbf{C})$ -fibré principal  $\mathcal{MF}$  associé au fibré principal  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \xrightarrow{\pi} F$  par le morphisme:*

$$\begin{aligned} \hat{\eta} : D &\longrightarrow ML(n, \mathbf{C}) \\ d &\longmapsto (\tilde{\Delta}(d), \eta(d)) \end{aligned}$$

*est un fibré des métarepères de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $F$ .*

*Preuve.* Dans la preuve du lemme 4.2, on a vu que  $\det \tilde{\Delta}(d) = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(d))^{-1}$ ,  $d \in D$ . Donc, le morphisme  $\hat{\eta}$  est bien défini. Par construction, le fibré principal  $\mathcal{MF}$  considéré satisfait toutes les propriétés d'un fibré des métarepères de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $F$ . ■

Le fibré en ligne  $\tilde{B}$  associé au fibré principal  $\mathcal{MF}$  par le morphisme  $\lambda : ML(n, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^*$ ,  $(A, z) \mapsto z$  (bien sûr  $z^2 = \det A$ ), est donné par:

**5.2. Corollaire.**  *$\tilde{B}$  est le fibré en ligne complexe associé au fibré principal à gauche  $G \times (\mu_0 + \epsilon^0) \xrightarrow{\pi} F$  par le caractère  $\eta$ .*

*Preuve.* C'est une conséquence de la définition de  $\tilde{B}$  et de la proposition ci-dessus. ■

**5.3. Remarque.** Comme  $(\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(g_0))^{-1} = \det \text{Ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}}(g_0)$ ,  $g_0 \in G_{\mu_0}$ , alors  $\eta$  est un prolongement du caractère (qu'on avait noté aussi  $\eta$ ) qui a été utilisé pour la quantification par  $\frac{1}{2}$ -formes de l'orbite coadjointe  $\mathcal{O}$  de  $\mu_0$ .

Par construction de  $\tilde{B}$ , l'espace  $\Gamma(\tilde{B})$  des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes sur  $F$  s'identifie avec l'ensemble  $C_\eta^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$  des fonctions lisses  $\varphi : G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \rightarrow \mathbf{C}$ , telles que:

$$\varphi((g, \mu) \cdot d) = \eta(d)^{-1} \varphi(g, \mu), \quad (g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0), \quad d \in D.$$

**5.4. Proposition.** *L'espace des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes sur  $F$ ,  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$ , s'identifie avec le sous espace des  $\varphi \in C_\eta^\infty(G)$  vérifiant  $\forall Z \in \mathfrak{h}, Z^\ell \varphi = (\frac{1}{2} \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}\mathbf{C}/\mathfrak{h}} Z) \cdot \varphi$ .*

*Preuve.* La démonstration est similaire à celle pour les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités sur  $F$  (on remplace le caractère  $\Delta_{D,G}^{-1/2}$  par  $\eta$ ). ■

Le fibré en ligne complexe  $\tilde{Q} = L \otimes \tilde{B}$  est le fibré quantique par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes au dessus de  $F$ . D'après les réalisations de  $L$  et  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{Q}$  est le fibré en ligne complexe associé au fibré principal  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \xrightarrow{\pi} F$  par le caractère  $\chi \cdot \eta : D \rightarrow \mathbf{C}^*$ . Il s'ensuit que l'espace  $\Gamma(\tilde{Q})$  des sections de  $\tilde{Q}$  est en bijection avec l'ensemble  $C_{\chi \cdot \eta}^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$  des fonctions lisses  $\varphi : G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \rightarrow \mathbf{C}$  telles que:

$$\varphi((g, \mu) \cdot d) = (\chi \cdot \eta)(d)^{-1} \varphi(g, \mu), \quad (g, \mu) \in G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0), \quad d \in D.$$

Dans cette identification, les sections de  $\tilde{Q}$  qui sont constantes le long de  $\mathcal{F}$  pour la connexion  $\nabla$  sur  $\tilde{Q}$ , sont données par la proposition suivante.

**5.5. Proposition.** *L'espace des sections de  $\tilde{Q}$ ,  $\nabla$ -constantes le long de  $\mathcal{F}$ , est en bijection avec l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_{\chi \cdot \eta}^\infty(G)$  telles que:*

$$\forall Z \in \mathfrak{h}, Z^\ell \varphi = (-i \langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}\mathbf{C}/\mathfrak{h}} Z) \varphi.$$

*Preuve.* C'est une conséquence de la description des sections de  $L$  et  $B$  constantes le long de  $\mathcal{F}$ . ■

Examinons maintenant le produit hermitien sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$  construit par la quantification géométrique en termes de la description ci-dessus des sections de  $\tilde{Q}$  constantes le long de  $\mathcal{F}$ . Soient  $\psi_1, \psi_2$  deux sections de  $\tilde{Q}$  constantes le long de  $\mathcal{F}$  représentées respectivement par des fonctions  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{\chi \cdot \eta}^\infty(G)$ . Par une analyse similaire au cas des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités, on obtient l'égalité (à un facteur positif près) de la 1-densité  $(\psi_1, \psi_2)$  sur  $G/D$ , et la mesure  $\overline{\varphi_1} \varphi_2 d\mu_{G,D}$  construite par la méthode des orbites. Le produit hermitien sur  $\mathcal{H}_{\tilde{Q}}$  est donc donné par:  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{G/D} \overline{\varphi_1} \varphi_2 d\mu_{G,D}$ . On a donc établi le résultat suivant.

**5.6. Théorème.** *L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_{\bar{\mathcal{O}}}$  construit par la quantification géométrique de  $F$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes est l'ensemble des fonctions  $\varphi \in C_{\chi, \eta}^{\infty}(G)$ , telles que:*

- (i)  $\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^{\ell} \varphi = (-i\langle \mu_0, Z \rangle + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}} Z) \varphi.$
- (ii)  $\int_{G/D} \overline{\varphi_1} \varphi_2 d\mu_{G,D} < \infty.$

La dernière étape de la quantification géométrique de  $F$  est de donner la représentation  $T : X \mapsto iQ(J_X)$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_{\bar{\mathcal{O}}}$ .

**5.7. Proposition.** *La représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_{\bar{\mathcal{O}}}$  est donnée par:  $T(X)\varphi = X^r \varphi$ ,  $X \in \mathfrak{g}$  et  $\varphi \in \mathcal{H}_{\bar{\mathcal{O}}}$ .*

*Preuve.* La démonstration est similaire à celle des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités (voir preuve de la proposition 4.9).

La représentation  $T$  de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathcal{H}_{\bar{\mathcal{O}}} = \mathcal{H}'_{hol}$  s'intègre en la représentation modifiée de  $\text{Hol}_D^G \chi$  par Duflo (voir chapitre II). On a donc montré le résultat suivant.

**5.8. Corollaire.** *La quantification géométrique de  $F$  par  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -formes donne la représentation de  $G$  modifiée de  $\text{Hol}_D^G \chi$  par Duflo.*

## 6. Conclusion.

Nous avons montré que l'existence des caractères  $\chi$  et  $\eta$  sur  $G_{\mu_0}$  sont suffisantes pour la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$ . Si ces caractères se prolongent à  $D$  sans que la condition de Pukanszky sur  $\mathfrak{h}$  soit satisfaite, la quantification géométrique de  $\mathcal{O}$  et de  $F$  donne la même représentation de  $G$ , à savoir  $\text{Hol}_D^G \chi$  en les quantifiant par demi-densités et sa modifiée par Duflo si on les quantifie par demi-formes. Si ces deux variétés symplectiques  $\mathcal{O}$  et  $F$ , à priori différentes, qui sont de même dimension donnent la même représentation de  $G$ , l'étude d'un lien topologique entre  $\mathcal{O}$  et  $F$  serait utile. Nous pensons que cela permettra de mieux comprendre la condition de Pukanszky.

Nous sommes persuadés que l'existence d'un caractère unitaire  $\chi$  sur  $D$  tel que  $d_e \chi = i\mu_0|_{\mathfrak{d}}$  est aussi nécessaire pour l'existence d'un fibré préquantique  $L$  au dessus de  $F$ , sur lequel l'action de  $G$  se relève en une action qui préserve la connexion sur  $L$ . Nos résultats permettent d'établir l'équivalence entre la méthode des orbites et la quantification géométrique de  $F$  lorsque  $\mathfrak{h}$  ne vérifie pas la condition de Pukanszky.

## CHAPITRE V. APPENDICE I

Cet appendice regroupe des démonstrations «longues» de quelques résultats cités dans le chapitre III. Il contient aussi certaines définitions qu'on a préféré donner ici puisqu'elles sont directement liées aux démonstrations. Les notations sont celles du chapitre III.

### 1. Connexion partielle sur les $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités.

**1.1. Définition.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique muni d'une polarisation géométrique  $\mathcal{F}$ . On définit une connexion  $\nabla$  sur les  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités  $\nu$  sur  $M$  suivant les champs de vecteurs  $\xi$  (sur  $M$ ) à valeurs dans  $\mathcal{E}^{\mathbb{C}} = \mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}}$  comme suit. Soient  $x_0 \in M$ ,  $U$  un voisinage de  $x_0$ , et  $(\eta_i)_{i=1}^n$  des champs de vecteurs qui engendrent  $\mathcal{F}$  sur  $U$  tels que  $(\eta_i)_{i=1}^k$  soient des champs hamiltoniens (réels) qui engendrent  $\mathcal{D}^{\mathbb{C}} = \mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{F}}$ . La valeur de  $\nabla_{\xi}\nu$  sur le repère  $(\eta_i|_{x_0})_{i=1}^n$  au point  $x_0$  est donnée par:

$$(\nabla_{\xi}\nu)(x_0, (\eta_i|_{x_0})_{i=1}^n) = |\varepsilon_{\omega, k}((\eta_i|_{x_0})_{i=k+1}^n, (\overline{\eta}_i|_{x_0})_{i=k+1}^n)|^{-\frac{1}{4}} \cdot \xi|_{x_0} \left( \nu(x, (\eta_i|_x)_{i=1}^n) \cdot |\varepsilon_{\omega, k}((\eta_i|_x)_{i=k+1}^n, (\overline{\eta}_i|_x)_{i=k+1}^n)|^{\frac{1}{4}} \right)$$

où  $\varepsilon_{\omega, k} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)}}{(n-k)!} \omega^{n-k}$ .

### 1.2. Remarques.

- Cette connexion est définie uniquement pour les champs de sur  $M$  à valeurs dans  $\mathcal{E}^{\mathbb{C}}$ .
- Le facteur de correction  $|\varepsilon_{\omega, k}|^{\frac{1}{4}}$  est indispensable pour que  $\nabla_{\xi}\nu$  soit une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité bien définie.

Notre but ici est d'expliciter cette connexion  $\nabla$  dans le cas où  $M = \mathcal{O}$  muni de la polarisation géométrique  $\mathcal{F}$  fixée dans le chapitre III.

On a vu qu'en chaque point  $g$  de  $G$ ,  $(\pi_* Z_i^{\ell}|_g)_{i=1}^n$  est une base de  $\mathcal{F}_{\pi(g)}$  sur  $\mathcal{O}$ . Mais les champs invariants à gauche sur  $G$  ne se projettent pas sur  $\mathcal{O}$ : il faut qu'ils soient invariants sous l'action à droite de  $G_{\mu_0}$ . Afin d'expliciter la connexion  $\nabla$  dans notre situation, on commence tout d'abord par construire des champs de vecteurs sur  $U$  qui engendrent  $\mathcal{F}$  (sur  $U$ ). Pour cela, on se fixe une section lisse  $\sigma : U \rightarrow G$  de  $G$  au dessus de  $U$ , et on note  $\delta : \pi^{-1}(U) \rightarrow G_{\mu_0}$  l'application donnée par:  $g = (\sigma \circ \pi(g)) \cdot \delta(g)$ .

Etant donné un élément  $X$  de  $\mathfrak{g}$ , on définit un champ de vecteurs  $\tilde{X}$  sur  $\pi^{-1}(U)$  par:

$$\tilde{X}_g = (\text{Ad}_{\delta(g)^{-1}} X)^{\ell}|_g, \quad g \in \pi^{-1}(U).$$

On vérifie que  $\tilde{X}_{gg_0} = R_{g_0*} \tilde{X}_g$ ,  $g_0 \in G_{\mu_0}$ ; cela découle du fait que  $\delta(gg_0) = \delta(g)g_0$  pour  $g_0 \in G_{\mu_0}$ . Par conséquent, le champ de vecteurs  $\tilde{X}$  sur  $\pi^{-1}(U)$  se projette en un champ  $\hat{X}$  sur  $U$ :

$$\hat{X}_{\pi(g)} = \pi_* \tilde{X}_g, \quad g \in \pi^{-1}(U).$$

Notons que si  $X$  est un élément de  $\mathfrak{g}_{\mu_0}$  alors le champ  $\hat{X}$  sur  $U$  est nul. On fait remarquer aussi que  $\omega_{\pi(g)}(\hat{X}|_{\pi(g)}, \hat{Y}|_{\pi(g)}) = -\mu_0([X, Y])$ ,  $g \in \pi^{-1}(U)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . On étend par linéarité la définition des champs  $\hat{X}$  aux éléments  $X \in \mathfrak{g}^{\mathcal{C}}$ . Dorénavant, cette opération sera toujours sous-entendue. Comme  $\mathcal{F}_{\pi(g)} = \{\pi_* X^\ell|_g \mid X \in \mathfrak{h}\}$ , et  $\tilde{X}_{\sigma(x)} = X_{\sigma(x)}^\ell$  (car  $\delta(\sigma(x)) = e$ ), pour tout  $x \in U$ , alors  $\mathcal{F}_x = \{\hat{X}_x \mid X \in \mathfrak{h}\}$ . Rappelons que dans le chapitre III, on a fixé une base  $(s_1, \dots, s_r, Z_1, \dots, Z_n)$  de  $\mathfrak{h}$  telle que  $(s_1, \dots, s_r)$  soit une base réelle de  $\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathcal{C}}$ , et  $(s_1, \dots, s_r, Z_1, \dots, Z_n)$  une base réelle de  $\mathfrak{d}^{\mathcal{C}}$ . Ce choix nous donne une base  $(\widehat{Z}_i)_{i=1}^n$  de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ . Les champs  $(\widehat{Z}_i)_{i=1}^k$  forment une base de  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  sur  $U$ , et  $((\widehat{Z}_i)_{i=1}^n, (\widehat{Z}_i)_{i=k+1}^n)$  est une base de  $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$  sur  $U$ .

Pour son utilité par la suite, donnons l'expression du crochet de deux champs de vecteurs  $\hat{X}$  et  $\hat{Y}$  sur  $U$ ,  $X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathcal{C}}$ . Pour cela, calculons tout d'abord le crochet de  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sur  $\pi^{-1}(U)$ . Pour tout élément  $g$  de  $\pi^{-1}(U)$ , on définit une application  $D_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mu_0}$  par:

$$D_g(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \delta(g) \delta(g \exp tX)^{-1}, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Par un calcul direct, on obtient:

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}]|_g &= [\widetilde{[X, Y]}]|_g + (\text{Ad}_{\delta(g)^{-1}} [D_g(\text{Ad}_{\delta(g)^{-1}} X), Y])^\ell|_g \\ &\quad - (\text{Ad}_{\delta(g)^{-1}} [D_g(\text{Ad}_{\delta(g)^{-1}} Y), X])^\ell|_g. \end{aligned}$$

Donc, le crochet  $[\hat{X}, \hat{Y}]$  est donné par:

$$[\hat{X}, \hat{Y}]_x = [\widetilde{[X, Y]}]_x + ([D_{\sigma(x)} X, Y]^\wedge)_x - ([D_{\sigma(x)} Y, X]^\wedge)_x, \quad x \in U.$$

On voit bien que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}}$  sont involutives grâce au fait que  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$  sont des algèbres de Lie. Comme  $\omega(\hat{X}, \hat{Y}) = -\mu_0([X, Y])$ ,  $X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathcal{C}}$ , alors  $\mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{h}$  entraîne que  $\mathcal{F}$  est lagrangienne pour  $\omega$ .

Dans la définition de  $\nabla$ , les  $k$ -premiers champs de vecteurs de la base locale de  $\mathcal{F}$  doivent être hamiltoniens. Ce qui n'est pas le cas pour les champs  $(\widehat{Z}_i)_{i=1}^k$  sur  $U$ . Comme  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  est un feuilletage réel sur  $\mathcal{O}$ , alors il existe des champs de vecteurs hamiltoniens  $(\eta_i)_{i=1}^k$  qui engendrent  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  sur  $U$ , tels que:  $\eta_i|_{x_0} = \widehat{Z}_i|_{x_0}$ ,  $1 \leq i \leq k$ . En écrivant ces champs de vecteurs  $\eta_i$  dans la base locale  $(\widehat{Z}_i)_{i=1}^k$  de  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ , on obtient une matrice  $A(x) \in GL(k, \mathbb{R})$ ,  $x \in U$ , donnée par:  $\eta_j|_x = A_{ij}(x) \widehat{Z}_i|_x$ , avec  $A(x_0) = id$ . D'où:

$$((\eta_i|_x)_{i=1}^k, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=k+1}^n) = (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n \cdot \hat{A}(x)$$

où  $\widehat{A}(x) = \begin{pmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$ ,  $I_{n-k}$  étant la matrice identité d'ordre  $n - k$ . Comme  $\nu$  est une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité, alors on a:

$$\begin{aligned} \nu(x, (\eta_i|_x)_{i=1}^k, (\widehat{Z}_j|_x)_{j=k+1}^n) &= |\det \widehat{A}(x)|^{-\frac{1}{2}} \nu(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n) \\ &= |\det A(x)|^{-\frac{1}{2}} \nu(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n). \end{aligned}$$

La fonction  $|\varepsilon_{\omega, k}|^{\frac{1}{4}}$  sur  $U$  qui apparaît dans l'expression de  $\nabla$  est constante ici puisque  $\omega(\widehat{X}, \widehat{Y}) = -\mu_0([X, Y])$  est une constante sur  $U$  pour tout  $X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . Il en découle que si  $\widehat{W}$  ( $W \in \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ ) est un élément de la base de  $\mathcal{E}^{\mathbb{C}}$  sur  $U$ , alors on a:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\widehat{W}} \nu)(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n) &= \widehat{W}|_{x_0} \nu(x, (\eta_i|_x)_{i=1}^k, (\widehat{Z}_j|_x)_{j=k+1}^n) \\ &= -\frac{1}{2} \text{trace}(\widehat{W}|_{x_0} A(x)) \cdot \nu(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n) + \widehat{W}|_{x_0} \nu(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n). \end{aligned}$$

**1.3. Lemme.** Il existe des vecteurs  $Y_1, \dots, Y_k$ , de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  tels que:

- (i)  $(s_1, \dots, s_r, Z_1, \dots, Z_n, \overline{Z_{k+1}}, \dots, \overline{Z_n}, Y_1, \dots, Y_k)$  soit une base de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ .
- (ii)  $\mu_0([Z_i, Y_j]) = \delta_{ij}$  (symbole de Kronecker),  $1 \leq i, j \leq k$ .

Cette base étant choisie, on a:  $\text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}} W = \sum_{i=1}^k \mu_0([Z_i, [W, Y_i]])$ ,  $W \in \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ .

*Preuve.* Soient  $T_1, \dots, T_k$  des vecteurs de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , tels que:  $(s_1, \dots, s_r, Z_1, \dots, Z_n, \overline{Z_{k+1}}, \dots, \overline{Z_n}, T_1, \dots, T_k)$  soit une base de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ . On considère le sous espace vectoriel  $V$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$  engendré par les vecteurs  $Z_1, \dots, Z_k, T_1, \dots, T_k$  (modulo  $\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$ ). En utilisant le fait que  $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$  et  $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$  sont orthogonaux pour  $\mu_0$ , on vérifie que  $V$  est un sous espace symplectique de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$ . Comme les vecteurs  $(Z_i)_{i=1}^k$  sont isotropes pour  $\mu_0$ , alors ils engendrent un sous espace lagrangien de  $V$ . Par conséquent, il existe des vecteurs  $Y_1, \dots, Y_k$  de  $V$  tels que  $(Z_1, \dots, Z_k, Y_1, \dots, Y_k)$  soit une base de  $V$ , et  $\mu_0([Z_i, Y_j]) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ .

Les vecteurs  $Y_1, \dots, Y_k$  (modulo  $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ ) forment une base de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ . En écrivant  $\text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}} W$  ( $W \in \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ ) dans cette base, et en utilisant la dualité pour  $\mu_0$  entre les vecteurs  $Z_i$  et  $Y_j$ , on obtient:  $\text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}} W = \sum_{i=1}^k \mu_0([Z_i, [W, Y_i]])$ . ■

**1.4. Lemme.**  $\text{trace } \widehat{W}|_{x_0} A(x) = \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}} (W + D_{\sigma(x_0)} W)$ .

*Preuve.* Comme le champ  $\eta_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , est localement hamiltonien, alors on a en particulier:  $d(i(\eta_j)\omega)(\widehat{W}, \widehat{Y}_q) \equiv 0$  sur  $U$ . Soit  $x \in U$ , on a:

$$d(i(\eta_j)\omega)(\widehat{W}, \widehat{Y}_q)(x) = \widehat{W}|_x(\omega(\eta_j, \widehat{Y}_q)) - \widehat{Y}_q|_x(\omega(\eta_j, \widehat{W})) - \omega_x(\eta_j|_x, [\widehat{W}, \widehat{Y}_q]|_x).$$

Or,  $\omega_x(\eta_j|_x, \widehat{Y}_q|_x) = \omega_x(A_{ij}(x)\widehat{Z}_i|_x, \widehat{Y}_q|_x) = -A_{ij}(x)\mu_0([Z_i, Y_q]) = -A_{qj}(x)$ , et de même  $\omega_x(\eta_j|_x, \widehat{W}|_x) = 0$  car  $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$  et  $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$  sont orthogonaux pour  $\mu_0$ . D'autre part, en écrivant que:

$[\widehat{X}, \widehat{Y}]_x = [\widehat{X}, \widehat{Y}]_x + ([D_{\sigma(x)}X, \widehat{Y}])_x - ([D_{\sigma(x)}Y, \widehat{X}])_x$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \omega_x(\eta_j|_x, [\widehat{W}, \widehat{Y}_q]|_x) \\ &= -A_{ij}(x) \cdot (\mu_0([Z_i, [W, Y_q]]) + \mu_0([Z_i, [D_{\sigma(x)}W, Y_q]]) - \mu_0([Z_i, [D_{\sigma(x)}Y_q, W]])) \\ &= -A_{ij}(x) \cdot (\mu_0([Z_i, [W, Y_q]]) + \mu_0([Z_i, [D_{\sigma(x)}W, Y_q]])) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'orthogonalité de  $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$  et  $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$  pour  $\mu_0$ , au dernier passage dans ces égalités. Donc,  $d(i(\eta_j)\omega)(\widehat{W}|_x, \widehat{Y}_q|_x) = 0$  entraîne que  $\widehat{W}|_x A_{qj} = A_{qj}(x) \cdot \mu_0([Z_i, [W + D_{\sigma(x)}W, Y_q]])$ . En utilisant le fait que  $A(x_0) = id$  et le lemme précédent, on obtient:

$$\begin{aligned} \text{trace } \widehat{W}|_{x_0} A(x) &= \sum_{q=1}^k \widehat{W}|_{x_0} A_{qq}(x) \\ &= \sum_{q=1}^k A_{qq}(x_0) \cdot \mu_0([Z_q, [W + D_{\sigma(x_0)}W, Y_q]]) \\ &= \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(W + D_{\sigma(x_0)}W) \end{aligned}$$

■

On a donc montré le résultat suivant.

**1.5. Proposition.** *Pour tout  $W$  dans  $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ , la valeur de  $\nabla_{\widehat{W}}\nu$  sur le repère  $(\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n$  de  $\mathcal{F}$  au point  $x_0$  est donnée par:*

$$\begin{aligned} (\nabla_{\widehat{W}}\nu)(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n) \\ &= -\frac{1}{2} \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(W + D_{\sigma(x_0)}W) \cdot \nu(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n) + \widehat{W}|_{x_0} \nu(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n). \end{aligned}$$

## 2. Démonstration du théorème III.4.4.

Soit  $\nu$  une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité sur  $\mathcal{O}$ . Le but du théorème (III.4.4) est d'exprimer la condition « $\nu$  est  $\nabla$ -constante le long de  $\mathcal{F}$ » en termes de l'identification de  $\nu$  avec une fonction  $\varphi \in C_{\Delta}^{\infty}(G)$  donnée par:  $\varphi(g) = \nu(\pi(g), (\pi_*Z_i^g|_g)_{i=1}^n)$ ,  $g \in G$ . Localement sur  $U$ , cette identification s'écrit:  $\varphi(\sigma(x)) = \nu(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n)$ ,  $x \in U$ . Soit  $Z \in \mathfrak{h}$ . D'après la proposition ci-dessus, on a:

$$(\nabla_{\widehat{Z}}\nu)(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n) = -\frac{1}{2} \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(Z + D_{\sigma(x_0)}Z) \cdot \varphi(\sigma(x_0)) + \widehat{Z}|_{x_0} \varphi(\sigma(x_0)).$$

**2.1. Lemme.**  $\forall Z \in \mathfrak{g} : \widehat{Z}|_{x_0} \varphi(\sigma(x)) = Z^\ell|_{\sigma(x_0)} \varphi + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(D_{\sigma(x_0)}Z) \cdot \varphi(\sigma(x_0))$ .

*Preuve.* Par définition de  $\widehat{Z}$ , on a:

$$\widehat{Z}|_{x_0} \varphi(\sigma(x)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi((\sigma \circ \pi)(\sigma(x_0) \exp(tZ))).$$

Or,  $(\sigma \circ \pi)(\sigma(x_0) \exp(tZ)) = (\sigma(x_0) \exp(tZ)) \cdot \delta(\sigma(x_0) \exp(tZ))^{-1}$ . Puisque  $\delta(\sigma(x_0) \exp(tZ))$  est un élément de  $G_{\mu_0}$ , et  $\varphi \in C^\infty_\Delta(G)$ , alors on a:

$$\begin{aligned} \varphi((\sigma \circ \pi)(\sigma(x_0) \exp(tZ))) &= \Delta(\delta(\sigma(x_0) \exp(tZ))) \cdot \varphi(\sigma(x_0) \exp(tZ)) \\ &= \Delta_{D,G} \left( \delta(\sigma(x_0) \exp(tZ)) \right)^{-1/2} \cdot \varphi(\sigma(x_0) \exp(tZ)). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité résulte du fait que  $\Delta$  est la restriction de  $\Delta_{D,G}$  à  $G_{\mu_0}$  (voir remarque III.4.3). En utilisant le fait que la différentielle de  $\Delta_{D,G}$  en l'identité  $e$  de  $G$  est «trace  $\text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}$ », et  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \delta(\sigma(x_0) \exp(tZ)) = -D_{\sigma(x_0)}Z$  (N. B:  $\delta(\sigma(x)) = e$ ,  $x \in U$ ), on obtient:

$$\widehat{Z}|_{x_0} \varphi(\sigma(x)) = Z^\ell|_{\sigma(x_0)} \varphi + \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(D_{\sigma(x_0)}Z) \cdot \varphi(\sigma(x_0)).$$

■

Par linéarité, on a la même expression pour  $Z$  dans  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , et donc en particulier pour  $Z \in \mathfrak{h}$ . En définitive, on a:

$$(\nabla_{\widehat{Z}} \nu)(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n) = Z^\ell|_{\sigma(x_0)} \varphi - \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(Z) \cdot \varphi(\sigma(x_0)).$$

On en conclut que  $\nabla_{\widehat{Z}} \nu|_U = 0$  si et seulement si  $(Z^\ell \varphi - \frac{1}{2}(\text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}} Z) \cdot \varphi)|_{\sigma(U)} = 0$ . Cette équivalence dépend du choix de  $\sigma$  à partir de laquelle on a construit une base de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ . La condition « $\nu$  est constante le long de  $\mathcal{F}$ » s'exprime par: pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{O}$ , et pour tout élément  $\xi$  de la base de  $\mathcal{F}$  sur  $U$  on a  $\nabla_\xi \nu = 0$ . Cette condition est bien évidemment indépendante de tout choix de section de  $G$  au dessus de  $U$ . On en conclut:

$$\langle \nu|_U \text{ est constante le long de } \mathcal{F} \rangle \iff \forall Z \in \mathfrak{h} : (Z^\ell \varphi - \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(Z) \cdot \varphi)|_{\pi^{-1}(U)} = 0.$$

En écrivant l'équivalence ci-dessus pour un recouvrement de  $\mathcal{O}$  par des ouverts  $U_i$ ,  $i \in I$ , on obtient le résultat. ■

### 3. Démonstration du théorème III.3.4.

Soit  $s$  une section de  $L$  représentée par une fonction  $\varphi \in C^\infty_\chi(G)$ . On cherche à exprimer la condition « $s$  est constante le long de  $\mathcal{F}$ » par une propriété équivalente satisfaite par  $\varphi$ .

Dans la proposition III.2.7, nous avons montré que la section  $\nabla_{X_{\mathcal{O}}} s$  de  $L$  correspond à la fonction  $X^r \varphi + i\mu_0^\ell(X^r)\varphi \in C_X^\infty(G)$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ . Le problème ici est que les champs fondamentaux  $X_{\mathcal{O}}$  ne sont pas dans  $\mathcal{F}$ , même si  $X \in \mathfrak{h}$ . Pour cela, on va chercher la fonction  $\psi \in C_X^\infty(\pi^{-1}(U))$  correspondante à  $(\nabla_{\widehat{Z}} s)|_U \in \Gamma_U(L)$ , où  $\widehat{Z}$  ( $Z \in \mathfrak{h}$ ) est un élément de la base de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ . Bien entendu, le choix d'une section est fixé, et les champs  $\widehat{Z}$  sur  $U$  sont définis comme dans le cas des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités. La démarche pour déterminer  $\psi$  est identique à celle de la démonstration de la proposition III.2.7, où l'on a cherché la fonction correspondante à  $\nabla_{X_{\mathcal{O}}} s$ . En gardant les mêmes notations, on vérifie que le relevé horizontal de  $\widehat{Z} = \pi_* \widetilde{Z}$  sur  $\tau^{-1}(U) \subset L^*$  ( $\tau : L^* \rightarrow \mathcal{O}$ ), pour la 1-forme de connexion  $\alpha$  sur  $L^*$ , est  $\widetilde{\pi}_*(\widetilde{Z} - \mu_0^\ell(\widetilde{Z})\frac{\partial}{\partial \theta})$ . Il s'ensuit que la fonction  $\psi$  est donnée par  $\psi = \widetilde{Z}\varphi + i\mu_0^\ell(\widetilde{Z})\varphi$  (se reporter à la preuve de la proposition III.2.7).

### 3.1. Lemme.

- (i)  $\mu_0^\ell(\widetilde{Z}) = \langle \mu_0, Z \rangle$ .
- (ii)  $\forall g \in \pi^{-1}(U) : \widetilde{Z}_g \varphi = \chi(\delta(g))^{-1} \cdot Z_{\sigma(\pi(g))}^\ell \varphi$ .

*Preuve.* Soit  $g \in \pi^{-1}(U)$ . On a:

$$\begin{aligned} \mu_0^\ell(\widetilde{Z})|_g &= \langle \mu_0, \text{Ad}_{\delta(g)^{-1}} Z \rangle \\ &= \langle \delta(g) \cdot \mu_0, Z \rangle = \langle \mu_0, Z \rangle. \end{aligned}$$

La dernière égalité découle du fait que  $\delta(g) \in G_{\mu_0}$ . L'assertion (ii) s'obtient par un calcul direct où on utilise le fait que  $\varphi \in C_X^\infty(G)$ , et  $g = (\sigma(\pi(g))) \cdot \delta(g)$ . ■

On fait remarquer aussi que  $\varphi(g) = \varphi(\sigma(\pi(g))) \cdot \delta(g) = \chi(\delta(g))^{-1} \varphi(\sigma(\pi(g)))$ . Donc,  $(\nabla_{\widehat{Z}} s)|_U = 0$  si et seulement si  $(Z^\ell \varphi + i \langle \mu_0, Z \rangle \varphi)|_{\sigma(U)} = 0$ . En utilisant des arguments analogues à ceux dans la démonstration du théorème III.4.4 (pour ce passage), on obtient l'équivalence suivante:

$$\text{«} s \text{ est constante le long de } \mathcal{F} \text{»} \iff (\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = -i \langle \mu_0, Z \rangle \varphi).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

## 4. Démonstration du lemme III.5.5.

**4.1. Définition.** Soient deux sections de  $Q$  de la forme  $s_i \otimes \nu_i$  ( $i=1, 2$ ) qui sont constantes le long de  $\mathcal{F}$ . Soit  $P : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\mathcal{D}$  la projection canonique de  $\mathcal{O}$  sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$ . On définit une 1-densité  $(s_1 \otimes \nu_1, s_2 \otimes \nu_2)$  sur  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$  par la procédure suivante.

Soient  $m \in \mathcal{O}$  et  $(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$  une base de  $(T_m \mathcal{O})^{\mathbb{C}}$  telle que:  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$  soit une base de  $\mathcal{D}^{\mathbb{C}} = \mathcal{F}_m \cap \overline{\mathcal{F}_m}$ , et  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  une base de  $\mathcal{F}_m$ . La valeur de  $(s_1 \otimes \nu_1, s_2 \otimes \nu_2)$  sur

le repère  $P_*(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n) \in (T_{P(m)}\mathcal{O}/\mathcal{D})^{\mathbb{C}}$  au point  $P(m)$  de  $\mathcal{O}/\mathcal{D}$  est donnée par:

$$(s_1 \otimes \nu_1, s_2 \otimes \nu_2)(P(m), P_*(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)) = (s_1, s_2)(m) \cdot \overline{\nu_1(m, \xi_1, \dots, \xi_n)} \cdot \nu_2(m, \xi_1, \dots, \xi_n) \cdot |\varepsilon_{\omega, k}(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n, \overline{\xi_{k+1}}, \dots, \overline{\xi_n})|^{\frac{1}{2}} \cdot |\varepsilon_{\omega}(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)|.$$

**4.2. Remarque.** Bien que l'écriture  $\psi = s \otimes \nu$  d'une section de  $Q$  n'est pas toujours possible, cette 1-densité est définie pour toutes les sections de  $Q$ , constantes le long de  $\mathcal{F}$ , puisque la notion d'une 1-densité est locale, et la décomposition  $\psi = s \otimes \nu$  est valable localement.

On note toujours  $(s_1, \dots, s_r, Z_1, \dots, Z_n, \overline{Z_{k+1}}, \dots, \overline{Z_n}, Y_1, \dots, Y_k)$  la base fixée de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , et  $g \in G$  tel que  $\pi(g) = m$ . Alors,  $((\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n, (\pi_* \overline{Z}_i^\ell|_g)_{i=1}^k, \pi_* Y_i^\ell|_g)_{i=1}^k)$  est une base de  $(T_{\pi(g)}\mathcal{O})^{\mathbb{C}}$  telle que:  $(\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^k$  est une base de  $\mathcal{D}_{\pi(g)}$ , et  $(\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n$  est une base de  $\mathcal{F}_{\pi(g)}$ . En notant  $p = P \circ \pi : G \rightarrow G/D$ , on a:

$$\begin{aligned} & (s_1 \otimes \nu_1, s_2 \otimes \nu_2)(p(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=k+1}^n, (\pi_* \overline{Z}_i^\ell|_g)_{i=k+1}^n, (\pi_* Y_i^\ell|_g)_{i=1}^k) \\ &= (s_1, s_2)(\pi(g)) \cdot \overline{\nu_1(\pi(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n)} \cdot \nu_2(\pi(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n) \cdot \\ & \cdot |\varepsilon_{\omega, k}((\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n, (\pi_* \overline{Z}_i^\ell|_g)_{i=k+1}^n)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\alpha((Z_i^\ell|_g)_{i=k+1}^n, \overline{Z}_i^\ell|_g)_{i=k+1}^n, (Y_i^\ell|_g)_{i=1}^k)| \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est la contraction de  $\pi^* \varepsilon_{\omega} = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!} (d\mu_0^\ell)^n$  avec les champs de vecteurs  $(Z_i^\ell)_{i=1}^k$  sur  $G$ . La fonction  $|\varepsilon_{\omega, k}|^{\frac{1}{2}}$  sur  $\mathcal{O}$  est constante  $c$  parce que

$$\forall g \in G, \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \omega_{\pi(g)}(\pi_* X^\ell|_g, \pi_* Y^\ell|_g) = -\mu_0([X, Y]).$$

Si  $\varphi_i$  désigne l'élément de  $C_X^\infty(G)$  qui correspond à la section  $s_i$  dans l'identification  $\Gamma(L) \cong C_X^\infty(G)$ , et  $\psi_i$  est l'élément de  $C_\Delta^\infty(G)$  correspondant à la section  $\nu_i \in \Gamma(B) \cong C_\Delta^\infty(G)$ ,  $i=1, 2$ , alors on a:

$$\begin{aligned} (s_1, s_2)(\pi(g)) \cdot \overline{\nu_1(\pi(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n)} \cdot \nu_2(\pi(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n) &= \overline{\varphi_1(g)} \cdot \varphi_2(g) \cdot \overline{\psi_1(g)} \cdot \psi_2(g) \\ &= \overline{(\varphi_1 \cdot \psi_1)(g)} \cdot (\varphi_2 \cdot \psi_2)(g). \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi = \varphi_1 \cdot \psi_1 \in C_{\sqrt{\Delta}}^\infty(G)$  (resp  $\psi = \varphi_2 \cdot \psi_2$ ) représente la section  $s_1 \otimes \nu_1$  (resp  $s_2 \otimes \nu_2$ ) de  $Q$  dans l'identification  $\Gamma(Q) \cong C_{\sqrt{\Delta}}^\infty(G)$ . Ainsi, on a:

$$\begin{aligned} & (s_1 \otimes \nu_1, s_2 \otimes \nu_2)(p(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=k+1}^n, (\pi_* \overline{Z}_i^\ell|_g)_{i=k+1}^n, (\pi_* Y_i^\ell|_g)_{i=1}^k) \\ &= c \cdot \overline{\varphi(g)} \cdot \psi(g) \cdot |\alpha((Z_i^\ell|_g)_{i=k+1}^n, \overline{Z}_i^\ell|_g)_{i=k+1}^n, (Y_i^\ell|_g)_{i=1}^k)|. \end{aligned}$$

Donc, la 1-densité  $(s_1 \otimes \nu_1, s_2 \otimes \nu_2)$  sur  $\mathcal{O}/D \cong G/D$  est, à facteur positif près, la projection par  $p$  de  $\overline{\varphi}\psi|\alpha|$  (définie sur  $G$ ) sur  $G/D$ . Le résultat de la quantification géométrique concernant le fait que  $\overline{\varphi}\psi|\alpha|$  soit bien une 1-densité ( $\equiv$  mesure) sur  $G/D$ , peut être retrouvé directement à partir des propriétés de  $\varphi$  et  $\psi$  comme suit.

En écrivant que  $\varphi$  et  $\psi$  sont des éléments de  $C_{\chi \cdot \Delta}^\infty(G)$ , on obtient l'invariance de  $\overline{\varphi}\psi|\alpha|$  sous l'action à droite de  $G_{\mu_0}$  sur  $G$ . Grâce à la quasi-invariance infinitésimale de  $\varphi$  et  $\psi$  écrite pour les éléments  $\mathfrak{d}$ , on vérifie que  $\mathcal{L}_{Z^t}(\overline{\varphi}\psi|\alpha) = 0, \forall Z \in \mathfrak{d}$ . Donc,  $\overline{\varphi}\psi|\alpha|$  définit, par projection par  $p$ , une mesure sur  $G/D$  que nous notons  $\overline{\varphi}\psi d\tilde{\mu}_{G,D}$ . ■

### 5. Démonstration du théorème III.7.9.

Soient  $(s_1, \dots, s_r, Z_1, \dots, Z_n)$  la base fixée de  $\mathfrak{h}$ , et  $Y_1, \dots, Y_n$  des vecteurs de  $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$  tels que  $(s_1, \dots, s_r, Z_1, \dots, Z_n, Y_1, \dots, Y_n)$  soit une base de  $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$  et  $\mu_0([Z_i, Y_j]) = \delta_{ij}$ . De tels  $Y_i$  existent puisque l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbf{C}}$  est symplectique et  $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbf{C}}$  est lagrangien dans  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbf{C}}$ . Cette base de  $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$  sera fixée dans tout ce qui suit. Afin de démontrer le théorème III.7.9, on procédera par les étapes suivantes comme pour le cas des  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densités.

On se fixe une section  $\sigma : U \rightarrow G$  de  $G$  au dessus d'un ouvert  $U$  de  $\mathcal{O}$ , et on considère la base  $(\widehat{Z}_1, \dots, \widehat{Z}_n)$  de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ , construite à partir de  $\sigma$  comme auparavant. Par le choix de cette base, on identifie un repère  $R(x)$  de  $\mathcal{F}$  au point  $x \in U$  avec une matrice  $A(x) \in GL(n, \mathbf{C})$  donnée par:  $R_j|_x = \widehat{Z}_i|_x A_{ij}(x), 1 \leq j \leq n$ . Dans cette identification, un métarepère  $\widetilde{R}(x) \in ML(n, \mathbf{C})$  qui se projette sur  $R(x)$  s'écrit sous la forme  $\widetilde{R}(x) = (R(x), \lambda(A))$ . Soit  $\tilde{\nu}$  une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -forme sur  $\mathcal{O}$ , et  $x_0 \in U$ . Calculons la valeur au point  $x_0$  de la connexion  $\nabla$  sur  $\tilde{\nu}$  suivant un champ  $\widehat{Z}$  de la base de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ . Pour cela, il suffit de la déterminer sur le métarepère (canonique)  $((\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1)$  de  $\mathcal{F}$  au point  $x_0$ . Par définition de  $\nabla$ , on a:

$$(\nabla_{\widehat{Z}} \tilde{\nu})(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1) = \widehat{Z}|_{x_0} \tilde{\nu}(x, \widetilde{R}(x)),$$

où  $\widetilde{R} : U \rightarrow \mathcal{MF}$  est un métarepère localement hamiltonien, tel que:  $\widetilde{R}(x_0) = ((\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1)$ . Par définition, le métarepère  $\widetilde{R}(x), x \in U$ , se projette sur un repère localement hamiltonien  $R(x)$  tel que  $R(x_0) = (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n$ . En écrivant le repère  $R(x)$  dans la base  $(\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n$ , on obtient une matrice  $A(x) \in GL(n, \mathbf{C})$  telle que:  $R(x) = (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n \cdot A(x)$ , avec  $A(x_0) = id$ . Le métarepère  $\widetilde{R}(x)$  s'écrit donc:  $\widetilde{R}(x) = ((\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n \cdot A(x), \lambda(A(x)))$ . Comme  $\tilde{\nu}$  est une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -forme sur  $\mathcal{O}$ , alors on a:

$$\tilde{\nu}(x, \widetilde{R}(x)) = \lambda(A(x))^{-1} \cdot \tilde{\nu}(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n, 1).$$

D'où:

$$(\nabla_{\widehat{Z}} \tilde{\nu})(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1) = -\frac{1}{2} \text{trace}(\widehat{Z}|_{x_0} A(x_0)) \cdot \tilde{\nu}(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1) + \widehat{Z}|_{x_0} \tilde{\nu}(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1).$$

**5.1. Lemme.** *Pour tout élément  $Z$  de  $\mathfrak{h}$ , on a:*

- (i)  $\text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}} Z = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_0([Z_i, [Z, Y_i]])$ .
- (ii)  $\text{trace } \widehat{Z}|_{x_0} A(x) = \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(Z + D_{\sigma(x_0)}Z)$ .

*Preuve.* Pour l'affirmation (i), on écrit  $\text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}} Z$  dans la base  $(Y_1, \dots, Y_n)$  (modulo  $\mathfrak{h}$ ) de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}$ , et on utilise l'isotropie de  $\mathfrak{h}$  pour  $\mu_0$ , et la dualité entre les  $Z_i$  et les  $Y_j$ . La démonstration de (ii) est similaire à celle du lemme 1.4: on écrit que:  $d(i(B_j)\omega)(\widehat{Z}_p, \widehat{Y}_q)$  est identiquement nulle sur  $U$  et on utilise la propriété (i). ■

Grâce à la propriété (ii) de ce lemme, on a:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\widehat{Z}} \tilde{\nu})(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1) &= -\frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(Z + D_{\sigma(x_0)}Z) \cdot \tilde{\nu}(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1) + \\ &\quad + \widehat{Z}|_{x_0} \tilde{\nu}(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^n, 1). \end{aligned}$$

Soit  $\varphi \in C_n^\infty(G)$  une fonction qui représente  $\tilde{\nu}$ :  $\varphi(g) = \tilde{\nu}(\pi(g), (\pi_* Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n, 1)$ ,  $g \in G$ . Localement sur  $U$ , on a:  $\varphi(\sigma(x)) = \tilde{\nu}(x, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1)$ ,  $x \in U$ . Dans cette identification, on a

$$(\nabla_{\widehat{Z}} \tilde{\nu})(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1) = -\frac{1}{2} (\text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(Z + D_{\sigma(x_0)}Z)) \cdot \varphi(\sigma(x_0)) + \widehat{Z}|_{x_0} \varphi(\sigma(x)).$$

Un calcul similaire à celui dans la preuve du lemme 2.1 donne

$$\widehat{Z}|_{x_0} \varphi(\sigma(x)) = Z^\ell|_{\sigma(x_0)} \varphi + \frac{1}{2} (\text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(D_{\sigma(x_0)}Z)) \varphi.$$

D'où,

$$(\nabla_{\widehat{Z}} \tilde{\nu})(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^n, 1) = Z^\ell|_{\sigma(x_0)} \varphi - \frac{1}{2} (\text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(Z)) \cdot \varphi(\sigma(x_0)).$$

On a donc montré l'équivalence suivante:

$$(\nabla_{\widehat{Z}} \tilde{\nu})|_U = 0 \iff (Z^\ell \varphi - \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(Z) \cdot \varphi)|_{\sigma(U)} = 0.$$

Par les mêmes arguments utilisés dans la démonstration du théorème III.4.4 (pour ce passage), on obtient l'équivalence entre la condition « $\nu$  est constante le long de  $\mathcal{F}$ » et la condition suivante sur  $\varphi$ :

$$\forall Z \in \mathfrak{h} : Z^\ell \varphi = \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(Z) \cdot \varphi.$$

D'où le résultat. ■



## VI. APPENDICE II

Dans cet appendice, nous donnons des démonstrations techniques de certains résultats cités dans le chapitre IV. Aussi, nous conservons les notations de ce chapitre.

On note toujours  $(s_1, \dots, s_r, X_1, \dots, X_k, Z_1, \dots, Z_p, \overline{Z}_1, \dots, \overline{Z}_p, Y_1, \dots, Y_k)$  la base de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  qui a été fixée dans le chapitre IV, telle que  $(s_1, \dots, s_r)$  soit une base réelle de  $\mathfrak{g}_{\mu_0}^{\mathbb{C}}$ ,  $(s_1, \dots, s_r, X_1, \dots, X_k)$  une base réelle de  $\mathfrak{d}^{\mathbb{C}}$ ,  $(s_1, \dots, s_r, X_1, \dots, X_k, Z_1, \dots, Z_p)$ ,  $k+p = n$ , est une base de  $\mathfrak{h}$ ; les vecteurs  $Y_j$  étant choisis réels. Bien évidemment, la famille  $(s_1, \dots, s_r, X_1, \dots, X_k, Z_1, \dots, Z_p, \overline{Z}_1, \dots, \overline{Z}_p)$  est une base de  $\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ , et les éléments  $Y_1^*, \dots, Y_k^*$  de la base duale de celle de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  forment une base de  $\mathfrak{e}^0$ .

Dans le chapitre IV, nous avons construit une polarisation  $\mathcal{F}$  sur  $F$  telle que pour tout élément  $(g, \mu)$  de  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ , la famille  $(\pi_*(Z_i^\ell|_g)_{i=1}^n, \pi_*(Y_j^*)_{j=1}^k)$  est une base de  $\mathcal{F}_{\pi(g, \mu)}$ . Nous commençons par expliciter une base locale de  $\mathcal{F}$  sur un ouvert  $U$  de  $F$ .

### 1. Une base locale de $\mathcal{F}$ .

Soit  $\sigma : U \rightarrow G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  une section lisse du fibré  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0) \xrightarrow{\pi} F$  au dessus de  $U$ . Cette section  $\sigma$  détermine une application  $\delta : \pi^{-1}(U) \rightarrow D$  par  $(g, \mu) = \sigma(\pi(g, \mu)) \cdot \delta(g, \mu)$ ; il s'agit ici de l'action de  $D$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ . En particulier,  $\delta(\sigma(x)) = e$  pour tout élément  $x$  de  $U$ . Soient  $X$  un élément de  $\mathfrak{g}$  et  $\xi$  un élément de  $\mathfrak{e}^0$ . On définit deux champs de vecteurs sur  $\pi^{-1}(U) \subset G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  par:

$$\tilde{X}_{(g, \mu)} = (\text{Ad}_{\delta(g, \mu)^{-1}} X)_g^\ell, \text{ et } \tilde{\xi}_{(g, \mu)} = \delta(g, \mu)^{-1} \cdot \xi, (g, \mu) \in \pi^{-1}(U).$$

Ici,  $d \cdot \xi$  désigne l'action  $\text{Coad}_G(d)\xi$ . Par définition de  $\delta$ , on a  $\delta(gd, d^{-1} \cdot \mu) = \delta(g, \mu)d$ ,  $(g, \mu) \in \pi^{-1}(U)$  et  $d \in D$ . Il en découle que  $\tilde{X}_{(gd, d^{-1} \cdot \mu)} = R_{d*} \tilde{X}_{(g, \mu)}$ , et  $\tilde{\xi}_{(gd, d^{-1} \cdot \mu)} = d^{-1} \cdot \tilde{\xi}_{(g, \mu)}$ . Donc, les champs de vecteurs  $\tilde{X}$  et  $\tilde{\xi}$  sur  $\pi^{-1}(U)$  se projettent en des champs de vecteurs  $\hat{X}$  et  $\hat{\xi}$  sur  $U$ :

$$\hat{X}_{\pi(g, \mu)} = \pi_* \tilde{X}_{(g, \mu)}, \text{ et } \hat{\xi}_{\pi(g, \mu)} = \pi_* \tilde{\xi}_{(g, \mu)}, (g, \mu) \in \pi^{-1}(U).$$

On fait remarquer que si  $X$  est un élément de  $\mathfrak{d}$ , alors  $\hat{X} = 0$ . Notons dans tout ce qui suit  $pr_1$  (resp.  $pr_2$ ) la projection de  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  sur  $G$  (resp.  $\mu_0 + \mathfrak{e}^0$ ). Pour tout élément  $x$  de  $U$ , on a  $\tilde{X}_{\sigma(x)} = X^\ell|_{pr_1(\sigma(x))}$ , et  $\tilde{\xi}_{\sigma(x)} = \xi$ ; ce qui entraîne  $\hat{X}_x = \pi_* X^\ell|_{pr_1(\sigma(x))}$ , et  $\hat{\xi}_x = \pi_* \xi$ . On en conclut que la famille  $((\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_x)_{j=1}^k)$  est une base de  $\mathcal{F}_x$ . Ou encore, les champs de vecteurs  $\widehat{Z}_1, \dots, \widehat{Z}_p, \widehat{Y}_1^*, \dots, \widehat{Y}_k^*$  est une base de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ . Les champs  $\widehat{Y}_1^*, \dots, \widehat{Y}_k^*$  sur  $U$  forment une base de  $\mathcal{D}^{\mathbb{C}}$ , et  $\widehat{Z}_1, \dots, \widehat{Z}_p, \widehat{Z}_1, \dots, \widehat{Z}_p, \widehat{Y}_1^*, \dots, \widehat{Y}_k^*$  est une base de  $\mathcal{E}^{\mathbb{C}}$  sur  $U$ . Pour leur intérêt dans la suite, calculons les différents crochets entre ces champs de vecteurs sur  $U$ .

• **Expression de  $[\widehat{X}, \widehat{Y}]$ ,  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .** Calculons tout d'abord  $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$  sur  $\pi^{-1}(U)$ . Soit  $(g, \mu) \in \pi^{-1}(U)$ . On vérifie que  $\widetilde{X}(\text{Ad}_{\delta(g, \mu)^{-1}}) = \text{Ad}_{\delta(g, \mu)^{-1}} \circ \text{ad}(D_{(g, \mu)}X)$ , où l'application  $D_{(g, \mu)} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{d}$  est donnée par:

$$D_{(g, \mu)}X = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \delta(g, \mu) \delta(g \delta(g, \mu) \exp tX \delta(g, \mu)^{-1}, \mu)^{-1}.$$

Par suite, on a:

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]|_{(g, \mu)} = \widehat{[X, Y]}|_{(g, \mu)} + (\text{Ad}_{\delta(g, \mu)^{-1}}[D_{(g, \mu)}X, Y])^\ell|_g - (\text{Ad}_{\delta(g, \mu)^{-1}}[D_{(g, \mu)}Y, X])^\ell|_g.$$

En utilisant le fait que  $\delta(\sigma(x)) = e$ ,  $x \in U$ , on obtient:

$$[\widehat{X}, \widehat{Y}]_x = \widehat{[X, Y]}_x + ([D_{\sigma(x)}X, Y]^\wedge)_x - [D_{\sigma(x)}Y, X]^\wedge)_x.$$

• **Expression de  $[\widehat{\xi}, \widehat{\eta}]$ ,  $\xi, \eta \in \mathfrak{e}^0$ .** Soit  $(g, \mu) \in \pi^{-1}(U)$ . On vérifie que

$$\widetilde{\xi}(\text{Coad}_{\delta(g, \mu)^{-1}}) = \text{Coad}(\delta(g, \mu)) \circ \text{coad}(D_{(g, \mu)}^* \xi),$$

où l'application  $D_{(g, \mu)}^* : \mathfrak{e}^0 \rightarrow \mathfrak{d}$  est donnée par  $D_{(g, \mu)}^* \xi = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \delta(g, \mu) \delta(g, \mu + t\delta(g, \mu) \cdot \xi)^{-1}$ .

Le crochet de  $\xi$  et  $\eta$ , en tant que champs constants sur  $\mathfrak{e}^0$ , est nul. Ce qui donne:

$$\begin{aligned} [\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}]|_{(g, \mu)} &= \widetilde{\xi}(\text{Coad}_{\delta(g, \mu)^{-1}})\eta - \widetilde{\eta}(\text{Coad}_{\delta(g, \mu)^{-1}})\xi \\ &= ((D_{(g, \mu)}^* \xi) \cdot \eta)^\sim|_{(g, \mu)} - ((D_{(g, \mu)}^* \eta) \cdot \xi)^\sim|_{(g, \mu)}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout élément  $x$  de  $U$ , on a:

$$[\widehat{\xi}, \widehat{\eta}]_x = ((D_{\sigma(x)}^* \xi) \cdot \eta)^\wedge|_x - ((D_{\sigma(x)}^* \eta) \cdot \xi)^\wedge|_x.$$

• **Expression de  $[\widehat{X}, \widehat{\xi}]$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , et  $\eta \in \mathfrak{e}^0$ .** Soit  $(g, \mu) \in \pi^{-1}(U)$ . On établit que  $\widetilde{X}(\text{Coad}_{\delta(g, \mu)^{-1}}) = \text{Coad}_{\delta(g, \mu)^{-1}} \circ \text{coad}(D_{(g, \mu)}X)$ , et  $\widetilde{\xi}(\text{Ad}_{\delta(g, \mu)^{-1}}) = \text{Ad}_{\delta(g, \mu)^{-1}} \circ \text{ad}(D_{(g, \mu)}^* \eta)$ . On obtient:

$$[\widetilde{X}, \widetilde{\xi}]|_{(g, \mu)} = ((D_{(g, \mu)}X) \cdot \xi)^\sim|_{(g, \mu)} - (\text{ad}(D_{(g, \mu)}^* \eta)X)^\sim|_{(g, \mu)}.$$

Ce qui implique:

$$[\widehat{X}, \widehat{\xi}]_x = ((D_{\sigma(x)}X) \cdot \xi)^\wedge|_x - [D_{\sigma(x)}^* \eta, X]^\wedge|_x.$$

## 2. L'expression explicite de $\nabla$ sur $B$ .

La définition de la connexion  $\nabla$  a été donnée dans l'appendice I (définition V.1.1). Il s'agit ici d'expliciter  $\nabla$  sur  $B$  dans la direction d'un champ  $\widehat{W}$  de la base de  $\mathcal{E}^C$  sur  $U$  de  $F$ . Soient  $\nu$  une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité sur  $F$ , et  $x_0$  un élément fixé de  $U$ . La valeur de  $\nabla_{\widehat{W}}\nu$  sur le repère  $((\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_{x_0})_{j=1}^k)$  de  $\mathcal{F}_{x_0}$  est donnée par:

$$(\nabla_{\widehat{W}}\nu)(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_{x_0})_{j=1}^k) = \widehat{W}|_{x_0}\nu(x, (\widehat{Z}_j|_x)_{j=1}^p, (B_j|_x)_{j=1}^k),$$

où  $(B_j)_{j=1}^k$  sont des champs localement hamiltoniens sur  $U$  qui engendrent  $\mathcal{D}^C = \mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{F}}$  tels que  $B_j|_{x_0} = Y_j^*|_{x_0}$ ,  $\forall 1 \leq j \leq k$ . Le facteur  $|\varepsilon_{w,k}(\widehat{Z}_1, \dots, \widehat{Z}_p, \widehat{Z}_1, \dots, \widehat{Z}_p)|^{\frac{1}{4}}$  (fonction sur  $U$ ) qui apparaît dans l'expression de  $\nabla$  est une constante car pour tout  $X, Y \in \mathfrak{e}^C$ , la fonction  $\omega(\widehat{X}, \widehat{Y})$  est constante sur  $U$ . En effet, pour tout  $x$  dans  $U$ , on a:

$$\omega_x(\widehat{X}_x, \widehat{Y}_x) = -pr_2(\sigma(x))([X, Y]) = -\mu_0([X, Y]);$$

la dernière égalité résulte du fait que  $pr_2(\sigma(x)) \in \mu_0 + \mathfrak{e}^0$  et  $[X, Y] \in \mathfrak{e}^C$ . En écrivant le repère  $(B_j|_x)_{j=1}^k$  de  $\mathcal{D}_x^C$  dans sa base canonique  $(\widehat{Y}_j^*|_x)_{j=1}^k$ , on obtient une matrice  $A(x) \in GL(k, \mathbb{R})$  telle que  $(B_j|_x)_{j=1}^k = (\widehat{Y}_j^*|_x)_{j=1}^k \cdot A(x)$ , et  $A(x_0) = id$ . Comme  $\nu$  est une  $\frac{1}{2}$ - $\mathcal{F}$ -densité alors on a:

$$\nu(x, (\widehat{Z}_j|_x)_{j=1}^p, (B_i|_x)_{i=1}^k) = |\det A(x)|^{-\frac{1}{2}} \nu(x, (\widehat{Z}_j|_x)_{j=1}^p, (\widehat{Y}_i^*|_x)_{i=1}^k).$$

Cela entraîne:

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\widehat{W}}\nu)(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_{x_0})_{j=1}^k) \\ &= -\frac{1}{2} \text{trace}(\widehat{W}|_{x_0} A(x)) \cdot \nu(x_0, (\widehat{Z}_j|_x)_{j=1}^p, (\widehat{Y}_i^*|_x)_{i=1}^k) + \widehat{W}|_{x_0}\nu(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_x)_{j=1}^k). \end{aligned}$$

Calculons «trace  $\widehat{W}|_{x_0} A(x)$ » pour  $\widehat{W}$  ( $W \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{e}^0$ ) un élément de la base de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ .

**2.1. Lemme.**  $\forall Z \in \mathfrak{h} : \text{trace } \widehat{Z}|_{x_0} A(x) = \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}^C/\mathfrak{e}^C}(Z + D_{\sigma(x_0)}Z)$ .

*Preuve.* Comme le repère  $(B_i)_{i=1}^k$  est localement hamiltonien sur  $U$ , alors on a en particulier:  $d(i(B_j)\omega)(\widehat{Z}, \widehat{Y}_q) \equiv 0$  sur  $U$ ,  $j$  et  $q$  étant fixés. Donc, pour tout élément  $x$  de  $U$ , on a:

$$\widehat{Z}|_x(\omega(B_j, \widehat{Y}_q)) - \widehat{Y}_q|_x(\omega(B_j, \widehat{Z})) - \omega|_x(B_j, [\widehat{Z}, \widehat{Y}_q]) = 0.$$

Or,  $(\omega(B_j, \widehat{Y}_q))(x) = A_{ij}(x)\omega|_x(\widehat{Y}_i^*|_x, \widehat{Y}_q|_x) = A_{ij}(x) \cdot Y_i^*(Y_q) = A_{ij}(x) \cdot \delta_{iq}$ . De même,  $(\omega(B_j, \widehat{Z}))(x) = A_{ij}(x) \cdot Y_i^*(Z) = 0$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \omega|_x(B_j|_x, [\widehat{Z}, \widehat{Y}_q]|_x) &= \omega|_x(B_j|_x, [\widehat{Z}, \widehat{Y}_q]|_x) + ([D_{\sigma(x)}Z, Y_q] \widehat{\phantom{Z}})_x - [D_{\sigma(x)}Y_q, Z] \widehat{\phantom{Z}}_x \\ &= A_{ij}(x) \cdot Y_i^*([Z, Y_q] + [D_{\sigma(x)}Z, Y_q] - [D_{\sigma(x)}Y_q, Z]) \\ &= A_{ij}(x) \cdot Y_i^*([Z + D_{\sigma(x)}Z, Y_q]). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découle du fait que  $[D_{\sigma(x)}Y_q, Z] \in \mathfrak{h}$  (car  $D_{\sigma(x)}Y_q \in \mathfrak{d}$ ), et  $Y_i^* \in \mathfrak{e}^0$ . En conclusion, on a  $\widehat{Z}|_x(A_{qj}(x)) = A_{qj}(x) \cdot Y_q^*([Z + D_{\sigma(x)}Z, Y_q])$ . Comme  $A(x_0) = id$ , alors  $\text{trace } \widehat{Z}|_{x_0}A(x) = \sum_{q=1}^k Y_q^*([Z + D_{\sigma(x)}Z, Y_q]) = -\sum_{q=1}^k \langle (D_{\sigma(x)}Z) \cdot Y_q^*, Y_q \rangle$ . Or,  $\langle (D_{\sigma(x)}Z) \cdot Y_q^*, Y_q \rangle$  est le  $q$ -ième terme de la diagonale de la matrice  $\text{coad}_{\mathfrak{e}^0}(D_{\sigma(x)}Z)$  relativement à la base  $(Y_q^*)_{q=1}^k$  de  $\mathfrak{e}^0$ . Cette matrice étant la transposée de la matrice  $-\text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(D_{\sigma(x)}Z)$  relativement à la base  $(Y_q)_{i=1}^k$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ , on en conclut:

$$\text{trace } \widehat{Z}|_{x_0}A(x) = \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(Z + D_{\sigma(x_0)}Z).$$

D'où le lemme. ■

**2.2. Lemme.**  $\forall \xi \in \mathfrak{e}^0 : \text{trace } \widehat{\xi}|_{x_0}A(x) = \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(D_{\sigma(x_0)}^*\xi)$ .

*Preuve.* Comme le repère  $B_j|_x = A_{ij}(x)\widehat{Y}_i^*$ ,  $1 \leq j \leq k$ , est localement hamiltonien sur  $U$ , alors on a en particulier:  $d(i(B_j)\omega)(\xi, \widehat{Y}_q) \equiv 0$  sur  $U$ ,  $j$  et  $q$  fixés. Soit  $x \in U$ , on a:

$$\widehat{\xi}|_x(\omega(B_j, \widehat{Y}_q)) - \widehat{Y}_q|_x(\omega(B_j, \widehat{\xi})) - \omega|_x(B_j, [\widehat{\xi}, \widehat{Y}_q]) = 0$$

Ou encore,

$$\widehat{\xi}|_x(A_{ij}(x)\omega(\widehat{Y}_i^*, \widehat{Y}_q)) - \widehat{Y}_q|_x(A_{ij}(x)\omega(\widehat{Y}_i^*, \widehat{\xi})) - A_{ij}(x)\omega|_x(\widehat{Y}_i^*|_x, [\widehat{\xi}, \widehat{Y}_q]|_x) = 0.$$

En écrivant que  $[\widehat{\xi}, \widehat{X}]_x = ([D_{\sigma(x)}^*\xi, X])_x - ((D_{\sigma(x)}X) \cdot \widehat{\xi})_x$  d'une part, et d'autre part  $\omega(\widehat{Y}_i^*, \widehat{Y}_q) = Y_i^*(Y_q) = \delta_{iq}$ , et  $\omega(\widehat{Y}_i^*, \eta) = 0$ , pour tout  $\eta \in \mathfrak{e}^0$  (N.B:  $(D_{\sigma(x)}Y_q) \cdot \xi \in \mathfrak{e}^0$ ), on obtient:  $\widehat{\xi}|_x(A_{qj}(x)) = A_{qj}(x) \cdot Y_q^*([D_{\sigma(x)}^*\xi, Y_q])$ . Comme  $A(x_0) = id$ , alors on a:

$$\begin{aligned} \text{trace}(\widehat{\xi}|_{x_0}A(x)) &= \sum_{q=1}^k Y_q^*([D_{\sigma(x)}^*\xi, Y_q]) \\ &= \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(D_{\sigma(x)}^*\xi). \end{aligned}$$

Pour cette dernière égalité, on pourra se reporter à la preuve du lemme précédent. D'où le résultat. ■

On a donc établi le résultat suivant.

**2.3. Proposition.** Soient  $Z \in \mathfrak{h}$  et  $\xi \in \mathfrak{e}^0$ , on a:

$$\begin{aligned} &(\nabla_{\widehat{Z}\nu})(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_{x_0})_{j=1}^k) \\ &= -\frac{1}{2} \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(Z + D_{\sigma(x_0)}Z) \cdot \nu(x_0, (\widehat{Z}_j|_x)_{j=1}^p, (\widehat{Y}_i^*|_x)_{i=1}^k) + \\ &\quad + \widehat{Z}|_{x_0}\nu(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_x)_{j=1}^k) \\ &(\nabla_{\xi\nu})(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_{x_0})_{j=1}^k) \\ &= \frac{1}{2} \text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbb{C}}}(D_{\sigma(x_0)}^*\xi) \cdot \nu(x_0, (\widehat{Z}_j|_x)_{j=1}^p, (\widehat{Y}_i^*|_x)_{i=1}^k) + \\ &\quad + \widehat{\xi}|_{x_0}\nu(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_x)_{j=1}^k) \end{aligned}$$

### 3. Démonstration du théorème IV.4.3.

Soit  $\varphi \in C_{\Delta_{D,G}}^{\infty, -1/2}(G \times (\mu_0 + \epsilon^0))$  une fonction qui représente  $\nu$  dans l'identification  $\Gamma(B) \cong C_{\Delta_{D,G}}^{\infty, -1/2}(G \times (\mu_0 + \epsilon^0))$ . Localement sur  $U$ , cette identification s'écrit:

$$\varphi(\sigma(x)) = \nu(x, (\widehat{Z}_i|_x)_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_x)_{j=1}^k), \quad x \in U.$$

On cherche à exprimer la condition « $\nu$  est constante le long de  $\mathcal{F}$ » en termes de la fonction  $\varphi$ . On se fixe  $Z$  dans  $\mathfrak{h}$  et  $\xi \in \epsilon^0$ . Grâce à la proposition 2.3, on a:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\widehat{Z}}\nu)(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_{x_0})_{j=1}^k) \\ = -\frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(Z + D(\sigma(x_0))Z) \cdot \varphi(\sigma(x_0)) + \widehat{Z}|_{x_0}\varphi(\sigma(x_0)). \\ (\nabla_{\widehat{\xi}}\nu)(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_{x_0})_{j=1}^k) \\ = -\frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(D_{\sigma(x_0)}^*\xi) \cdot \varphi(\sigma(x_0)) + \widehat{\xi}|_{x_0}\varphi(\sigma(x_0)). \end{aligned}$$

**3.1. Lemme.**  $\forall Z \in \mathfrak{g} : \widehat{Z}|_{x_0}\varphi(\sigma(x)) = \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(D_{\sigma(x_0)}Z) \cdot \varphi(\sigma(x_0)) + Z^\ell|_{pr_1(\sigma(x_0))}\varphi$ .

*Preuve.* Comme  $\widehat{Z}|_{x_0} = \pi_* Z^\ell|_{pr_1(\sigma(x_0))}$ , alors on a:

$$\widehat{Z}|_{x_0}\varphi(\sigma(x)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi \circ \sigma)\left(\pi(pr_1(\sigma(x_0))\exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0)))\right).$$

Or,

$$\begin{aligned} \sigma\left(\pi(pr_1(\sigma(x_0))\exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0)))\right) \\ = \delta\left(pr_1(\sigma(x_0))\exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0))\right)^{-1} \cdot \left(pr_1(\sigma(x_0))\exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0))\right). \end{aligned}$$

Comme  $\varphi \in C_{\Delta_{D,G}}^{\infty, -1/2}(G \times (\mu_0 + \epsilon^0))$ , on a:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \sigma)\left(\pi(pr_1(\sigma(x_0))\exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0)))\right) \\ = \Delta_{D,G}\left(\delta(pr_1(\sigma(x_0))\exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0)))\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi\left(pr_1(\sigma(x_0))\exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0))\right). \end{aligned}$$

Ce qui entraîne:

$$\begin{aligned} \widehat{Z}|_{x_0}\varphi(\sigma(x)) \\ = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Delta_{D,G}\left(\delta(pr_1(\sigma(x_0))\exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0)))\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi\left(pr_1(\sigma(x_0))\exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0))\right) \\ = \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(D_{\sigma(x_0)}Z) \cdot \varphi(\sigma(x_0)) + Z^\ell|_{pr_1(\sigma(x_0))}\varphi. \end{aligned}$$

D'où le lemme. ■

**3.2. Lemme.**  $\widehat{\xi}|_{x_0}\varphi(\sigma(x)) = \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(D_{\sigma(x_0)}^*\xi)\varphi(\sigma(x_0)) + \xi|_{pr_2(\sigma(x_0))}\varphi.$

*Preuve.* En reprenant les calculs précédents pour  $\widehat{\xi}|_{x_0} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(pr_1(\sigma(x_0)), pr_2(\sigma(x_0)) + t\xi)$ , à la place de  $\widehat{Z}|_{x_0} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(pr_1(\sigma(x_0)) \exp(tZ), pr_2(\sigma(x_0)))$ , on obtient:

$$\begin{aligned} & \widehat{\xi}|_{x_0}\varphi(\sigma(x)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Delta_{D,G}(\delta(pr_1(\sigma(x_0)), pr_2(\sigma(x_0)) + t\xi))^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi(pr_1(\sigma(x_0)), pr_2(\sigma(x_0)) + t\xi) \\ &= \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(D_{\sigma(x_0)}^*\xi) \cdot \varphi(\sigma(x_0)) + \xi|_{pr_2(\sigma(x_0))}\varphi. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Comme conséquence de ces lemmes, on obtient:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\widehat{Z}\nu})(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_{x_0})_{j=1}^k) &= -\frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(Z) \cdot \varphi(\sigma(x_0)) + Z^\ell|_{pr_1(\sigma(x_0))}\varphi. \\ (\nabla_{\widehat{\xi}\nu})(x_0, (\widehat{Z}_i|_{x_0})_{i=1}^p, (\widehat{Y}_j^*|_{x_0})_{j=1}^k) &= \xi|_{pr_2(\sigma(x_0))}\varphi. \end{aligned}$$

Donc, la combinaison des conditions  $(\nabla_{\widehat{Z}\nu}) = 0$  et  $(\nabla_{\widehat{\xi}\nu}) = 0$  sur  $U$  est équivalente à:

$$Z^\ell|_{pr_1(\sigma(x_0))}\varphi = \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(Z) \cdot \varphi(\sigma(x_0)), \text{ et } \xi|_{pr_2(\sigma(x_0))} = 0.$$

Ou encore,  $(Z^\ell\varphi - \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(Z) \cdot \varphi)|_{\sigma(U)} = 0$ , et  $(\xi\varphi)|_{\sigma(U)} = 0$ . Rappelons que les champs  $\widehat{Z}$  et  $\widehat{\xi}$  sur  $U$  ont été construits à partir de la section  $\sigma : U \rightarrow G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ . La condition « $\nu$  est constante le long de  $\mathcal{F}$ » est équivalente à  $\nabla_X\nu = 0$  sur chaque ouvert  $U$  de  $\mathcal{F}$ , pour tout élément  $X$  de la base de  $\mathcal{F}$  sur  $U$ . Cette condition ne dépend pas du choix de section au dessus de  $U$ . On en conclut que « $\nu$  est constante le long de  $\mathcal{F}$ » si et seulement si sur chaque ouvert  $U$  de  $F$  on a:

- (i)  $\forall Z \in \mathfrak{h}, (Z^\ell\varphi - \frac{1}{2} \text{trace ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{c}}(Z) \cdot \varphi)|_{\pi^{-1}(U)} = 0.$
- (ii)  $\forall \xi \in \mathfrak{e}^0, (\xi\varphi)|_{\pi^{-1}(U)} = 0.$

Par le choix d'une partition de l'unité, on obtient ces deux propriétés de  $\varphi$  sur  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$  tout entier. La propriété (ii) exprime que  $\varphi$  ne dépend pas du second argument  $\mu$  dans  $G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0)$ . On identifie  $\varphi$  avec une fonction sur  $G$  qu'on note encore  $\varphi$ . Cette fonction  $\varphi$  sur  $G$  est bien un élément de  $C_{\Delta_{D,G}}^{\infty, -1/2}(G)$  qui satisfait la propriété (i) sur  $G$ . Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

#### 4. Démonstration du théorème IV.4.5

Soit  $s$  une section de  $L$  représentée par une fonction  $\varphi \in C_X^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ . Dans la proposition IV.2.2, on a vu que la section  $\nabla_{X^r}s$  ( $X \in \mathfrak{g}$ ) de  $L$  est représentée par la fonction  $X^r\varphi + i\theta(X^r)\varphi$ . Le champ fondamental  $X^\flat$  sur  $F$  étant  $\pi_*X^r$ . D'une manière similaire, on obtient une version locale de cette proposition pour les champs locaux  $\widehat{W} = \pi_*\widetilde{W}$  sur  $U$ , où  $W$  est un élément de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{e}^0$ .

**4.1. Proposition.** La section  $\nabla_{\widetilde{W}}s \in \Gamma_U(L)$  est représentée par la fonction  $\widetilde{W}\varphi + i\theta(\widetilde{W})\varphi \in C_\chi^\infty(\pi^{-1}(U))$ .

Pour  $W = Z \in \mathfrak{h}$ , on obtient:  $(\nabla_{\widetilde{Z}}s)|_U = 0$  si et seulement si  $(\widetilde{Z}\varphi + i\theta(\widetilde{Z})\varphi)|_{\pi^{-1}(U)} = 0$ .

**4.2. Lemme.**

(i)  $\theta(\widehat{Z}) = \langle \mu_0, Z \rangle$ .

(ii)  $\forall (g, \mu) \in \pi^{-1}(U) : \widehat{Z}|_{(g, \mu)}\varphi = \chi(\delta(g, \mu))^{-1}Z^\ell|_{\sigma(\pi(g))}\varphi$ .

*Preuve.* Par définition de  $\theta$  et  $\widehat{Z}$ , on a  $\theta(\widehat{Z})|_{(g, \mu)} = \langle \mu, \text{Ad}(\delta(g, \mu))Z \rangle = \langle \delta(g, \mu) \cdot \mu, Z \rangle$ . Comme  $\delta(g, \mu)^{-1} \cdot \mu \in \mu_0 + \mathfrak{e}^0$  (car  $\text{Coad}_G(d)$  laisse invariant  $\mu_0 + \mathfrak{e}^0$ ) et  $Z \in \mathfrak{h}$ , alors on a:  $\langle \delta(g, \mu)^{-1} \cdot \mu, Z \rangle = \langle \mu_0, Z \rangle$ . D'où l'assertion (i). La propriété (ii) s'obtient en utilisant le fait que  $\varphi \in C_\chi^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ , et la relation  $(g, \mu) = (\sigma(\pi(g, \mu))) \cdot \delta(g, \mu)$ . ■

Comme conséquence de ce lemme, on obtient l'équivalence suivante:

$$(\widetilde{Z}\varphi + i\theta(\widetilde{Z})\varphi)|_{\pi^{-1}(U)} = 0 \iff (Z^\ell\varphi + i\langle \mu_0, Z \rangle\varphi)|_{\sigma(U)} = 0.$$

Pour  $W = \xi \in \mathfrak{e}^0$ , on a:

**4.3. Lemme.**

(i)  $\theta(\widehat{\xi}) = 0$ .

(ii)  $\forall (g, \mu) \in \pi^{-1}(U) : \widehat{\xi}|_{(g, \mu)}\varphi = \chi(\delta(g, \mu))^{-1}\xi|_{\sigma(\pi(g))}\varphi$ .

*Preuve.* La première assertion est immédiate à partir de la définition de  $\theta$  et de  $\widehat{\xi}$ . On obtient la propriété (ii) par un calcul direct en utilisant  $\varphi \in C_\chi^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$ , et  $(g, \mu) = (\sigma(\pi(g, \mu))) \cdot \delta(g, \mu)$ . ■

Donc,  $(\widetilde{\xi}\varphi)|_{\pi^{-1}(U)} = 0$  si et seulement si  $(\xi\varphi)|_{\sigma(U)} = 0$ . Par les mêmes arguments que la démonstration du théorème IV.4.3 (pour ce passage), on en conclut que la condition « $s$  est constante le long de  $\mathcal{F}$ » si et seulement si  $\varphi \in C_\chi^\infty(G \times (\mu_0 + \mathfrak{e}^0))$  vérifie les deux propriétés suivantes:

(i)  $\forall Z \in \mathfrak{h}, Z^\ell\varphi = -i\langle \mu_0, Z \rangle\varphi$ .

(ii)  $\forall \xi \in \mathfrak{e}^0, \xi\varphi = 0$ .

Grâce à la propriété (ii) de  $\varphi$ , on identifie  $\varphi$  avec une fonction sur  $G$  qu'on note encore  $\varphi$ . Cette fonction  $\varphi$  sur  $G$  est bien un élément de  $C_\chi^\infty(G)$  qui vérifie la propriété (i). D'où le résultat. ■

## REFERENCES

- [A] R. Aminou, *Groupes de Lie-Poisson et bigèbres de Lie*, Thèse d'Université. Lille (1988).
- [A-KS] R. Aminou et Y. Kosmann-Schwarzbach, *Bigèbres de Lie, doubles et carrés*, Ann. Inst. Henri Poincaré Série A. **49** (4) (1988), 461–478.
- [A-M] R. Abraham & J. E. Marsden, *Foundations of mechanics*, 2nd rev. ed., Benjamin-Cumming, Reading, Massachussets, 1978.
- [Ben] M. Benayed, *Central extensions of Lie bialgebras and Poisson-Lie groups*, Journal of Geometry and Physics. **16** (1995), 301–304.
- [Ber] P. Bernat & al., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographies de la Soc. Math. de France, vol. No. 4, Dunod, Paris, 1972.
- [DET] C. Duval, J. Elhadad & G.M. Tuynman, *Pukansky's condition and symplectic induction*, J. Differential Geometry **36** (1992), 331–348.
- [Dr] V.G. Drinfel'd, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang Baxter equations*, Soviet Math. Dokl **27** N1 (1983), 68–71.
- [Du] M. Duflo, *Constructions de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, Harmonic and Group Representations (Figà Talamanca, ed.) (Proc. cours d'été du CIME, Cortona, 1980, ed.), Liguri Editore, Napoli, 1982.
- [G] A. Guichardet, *Theorie de Mackey et méthode des orbites selon M. Duflo*, Exposition. Math. **3** (1985), 303–346.
- [Ko] B. Kostant, *Quantization and unitary representations*, Lectures Notes in Math., vol. **170**, Springer-Verlag, 1970, pp. 87–208.
- [KS] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Poisson-Drinfel'd groups*, Publ. IRMA, Lille **5** N12 (1987).
- [L-R] P.B.A. Lecomte et C. Roger, *Modules et cohomologies des bigèbres de Lie*, C.R. Acad. Sci. Paris Série I **310** (1990), 405–410.
- [L-R] ———, *Modules et cohomologies des bigèbres de Lie (Note rectificative)*, C.R. Acad. Sci. Paris Série I **311** (1990), 893–894.
- [Lu-We] Jiang-Hua. Lu et Alan Weinstein, *Poisson Lie groups, Dressing transformations and Bruhat decompositions*, Journal of Differential Geometry. **31** (1990), 1237–1260.
- [So] J. M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1969.
- [STS] M.A. Semenov-Tian-Shansky, *Dressing transformations and Poisson group actions*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), 1237–1260.
- [SW] D. J. Simms & N. Woodhouse, *Lectures on geometric quantization*, Lectures notes in physics **53**, Springer, 1976.
- [T] G. Tuynman, *Geometric quantization*, Proceeding Seminar 1983–1985, Mathematical structures in field theories, Vol. 1, CWI Syllabus 8, Netherlands, 1985.

- [T-W] G.M.Tuynman and W.A.J.J.Wiegerinck, *Central extensions and physics*, Journal of Geometry and Physics. (1987), 207–258.
- [Wo] N. Woodhouse, *Geometric quantization*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon press, Oxford, 1980.
- [Weil] A. Weil, *Variétés kahlériennes*, Hermann, Paris, 1958.

