

50376  
1996  
466

# THÈSE

présentée par

Yue-Feng WAN

pour obtenir le grade de Docteur  
de l'Université des Sciences et Technologies de Lille

Spécialité : Productique, Automatique et  
Informatique Industrielle



Un opérateur hyperbolique pour la détection de contours  
dans les images numériques.

Soutenue le 12 Décembre 1996

Pierre VIDAL	Président de Jury
Michael RUDKO	Rapporteur
Bernard DUBUISSON	Rapporteur
Mohammed BENJELLOUN	Examineur
François CABESTAING	Co-directeur de recherche
Jack-Gérard POSTAIRE	Co-Directeur de recherche

Thèse préparée au Centre d'Automatique de Lille

# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Centre d'Automatique de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Pierre VIDAL pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire. Je le remercie d'avoir bien voulu accepter la présidence de mon jury de thèse.

C'est en grande partie grâce à Monsieur le Professeur Jack-Gérard POSTAIRE que cette étude a abouti. Ses conseils, ses constants encouragements et sa grande disponibilité m'ont permis de mener à bien ce travail. Qu'il trouve en ces quelques mots l'expression de mes remerciements les plus sincères.

Que Monsieur le Professeur Michael RUDKO trouve ici mes plus vifs remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux et pour ses conseils avisés. Je lui suis très reconnaissant d'avoir bien voulu juger mon mémoire et participer à mon jury.

Je remercie également Monsieur le Professeur Bernard DUBUISSON, de l'Université de Technologie de Compiègne, directeur du Laboratoire HEUDIASIC, d'avoir accepté de juger mon travail.

Je tiens à remercier Monsieur François CABESTAING, Maître de Conférences à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, pour l'aide et les encouragements qu'il m'a apportés durant mes travaux et lors de la rédaction de ce mémoire.

Je remercie enfin toute l'équipe de chercheurs de l'équipe Image et Décision du Centre d'Automatique de Lille pour leur présence amicale et le soutien qu'ils m'ont apporté.

# Introduction

Les contours réels présents dans une scène tridimensionnelle peuvent être définis de façon simple et non ambiguë : Ils sont situés sur les frontières des objets, au niveau desquelles ils représentent des modifications locales importantes des propriétés matérielles et géométriques [Dav75, Mar80a, Tor86]. Par contre, la définition du terme *contour* est moins aisée lorsqu'on ne travaille plus sur une scène réelle mais sur une image, qui n'est autre qu'une projection plane de l'information lumineuse initiale.

Lors de la prise de vue, certains paramètres du système optique peuvent modifier l'information visuelle soit en éliminant des discontinuités, soit en en faisant apparaître de nouvelles. Par exemple, si deux objets constitués de matériaux différents, donc séparés par un contour, ont des surfaces dotées de propriétés optiques similaires, il n'existera pas forcément de discontinuité visible entre leurs projections dans l'image. Inversement, des discontinuités peuvent être créées par le processus de formation de l'image, comme c'est souvent le cas pour les ombres.

Le système visuel humain, qui nous permet d'interpréter de façon très précise le contenu d'une scène à partir de deux images, utilise très largement la notion de contour. Bien souvent, nous percevons directement les contours réels de la scène, soit en reconstituant des discontinuités qui ne sont pas visibles dans l'image, soit en ignorant les discontinuités non significatives. Instinctivement, nous savons distinguer un objet de son ombre (*cf.* figure I.1(a)), ou reconstituer des contours fictifs qui n'existent plus dans les images (*cf.* figure I.1(b)).

Dans un système de vision artificielle, les procédures de traitement et d'analyse des images visent en général à reconstituer au mieux le contenu de la scène observée à partir des images issues du système de prise de vue. Dans ce contexte, la détection des contours a toujours été considérée comme une phase primordiale dans le processus d'ana-



(a) Ombres

(b) Contours fictifs

**Figure I.1** : Détection de contours par le système visuel humain

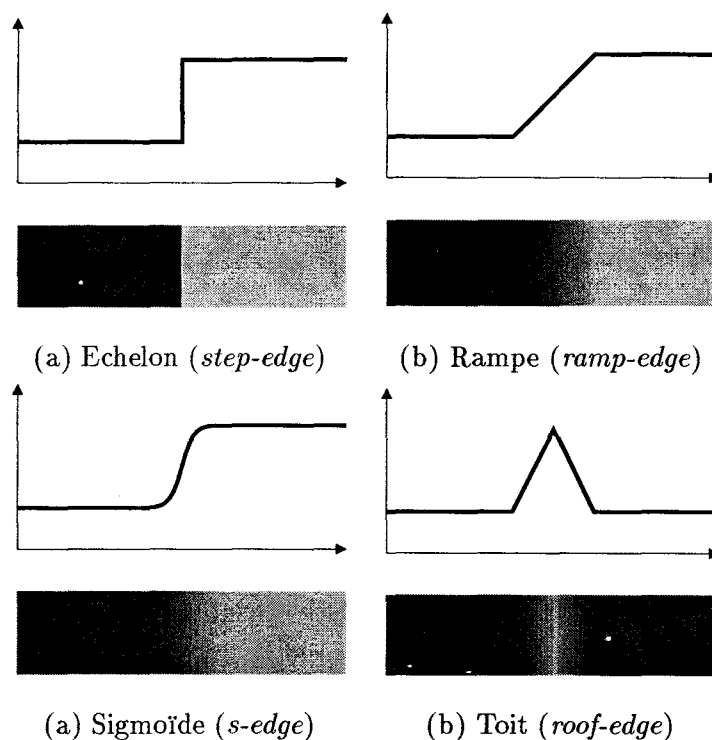
lyse d'images. Malheureusement, les possibilités offertes par les systèmes actuels de vision artificielle restent sans commune mesure avec celle du système visuel humain, dans lequel la compréhension d'une scène fait intervenir non seulement le contenu de l'image, mais aussi une multitude de connaissances concernant sa structure.

La grande majorité des méthodes de détection de contours implantées dans les systèmes de vision artificielle utilisent uniquement les données de l'image. Dans ce cas, la détection de contour constitue une phase de pré-traitement de l'information contenue dans l'image et peut être, à juste titre, qualifiée de traitement de bas niveau selon la classification proposée par Poggio [Pog87]. Les traitements de plus haut niveau, réalisés après la détection de contours doivent vérifier la pertinence des contours détectés, ou éventuellement reconstituer les portions de contour qui n'ont pas été mises en évidence.

Si on se place dans ce cadre, un contour est défini comme une transition plus ou moins brutale apparaissant dans la fonction niveau de gris qui définit l'image. En général, la transition n'apparaît clairement en un point que dans la direction orthogonale à l'orientation du contour. On peut caractériser de façon plus précise le type de contour présent dans l'image en analysant la variation du niveau de gris dans la direction où apparaît cette transition.

Plusieurs profils ont été proposés dans la littérature pour modéliser les transitions [Dav75, AP79]. On trouve tout d'abord le profil de type échelon (*cf.* figure I.2(a)), caractérisant un contour idéal pour lequel la discontinuité est brutale. Un contour peut aussi être caractérisé par une variation plus graduelle du niveau de gris selon un profil en rampe

(cf. figure I.2(b)) ou défini par une fonction sigmoïde (cf. figure I.2(c)). Enfin, un profil d'image en forme de toit (cf. figure I.2(d)), caractéristique d'une ligne, peut aussi être considéré comme indiquant la présence d'un contour.



**Figure I.2** : Différents profils de niveaux de gris d'un contour image

Une multitude de méthodes de détection ont ainsi été proposées pour s'adapter aux différents modèles utilisés pour caractériser une discontinuité, c'est à dire une variation locale significative du niveau de gris. Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous passerons en revue les principales approches décrites dans la littérature. Nous considérerons que le processus de détection de contour peut être décomposé en deux phases successives. Durant la première phase, un traitement de bas niveau est appliqué à l'image afin de mettre en évidence les pixels susceptibles d'appartenir aux contours (*edge enhancement*). Ensuite, un algorithme de plus haut niveau extrait de l'image un certain nombre de primitives (segments, points multiples ...) modélisant des portions de contours.

L'efficacité des procédures de détection de contours dépendra plus ou moins directement des performances de l'opérateur utilisé [HS92]. La comparaison et l'évaluation des détecteurs de contours sur des images réelles est un problème difficile [Har85], le protocole de comparaison faisant toujours intervenir des critères subjectifs. Dans le deuxième chapitre, nous présenterons différentes approches permettant de quantifier les performances

---

d'une méthode de détection de contours. Nous décrirons également les procédures utilisées par certains auteurs pour définir un filtre optimal vis à vis d'un ou plusieurs critères mathématiques.

Dans le troisième chapitre, nous décrirons un nouvel opérateur dont la réponse impulsionnelle est une fonction sinus hyperbolique amortie. Nous présenterons également les filtres de lissage et de dérivée seconde associés. Nous montrerons, en nous basant sur les critères de performance définis par Canny, que ce filtre est au moins aussi performant que les autres filtres similaires décrits précédemment dans la littérature.

Le quatrième chapitre sera consacré à la description d'une procédure de calcul de la réponse des filtres hyperboliques sur un signal discret, basée sur l'utilisation de traitements récursifs. Cette méthode est tout d'abord décrite dans le cas mono-dimensionnel, puis étendue au cas des images numériques par le biais de filtres séparables.

Dans le cinquième chapitre, nous présenterons quelques résultats obtenus lors du traitement de données réelles par le filtre hyperbolique. Les performances du filtre hyperbolique seront comparées à celles des filtres définis par Deriche et Shen & Castan, à la fois sur des signaux monodimensionnels et sur des images.

# Chapitre 1

## La détection de contours dans une image

Comme nous l'avons vu précédemment, la détection de contour dans une image se ramène à la mise en évidence de discontinuités plus ou moins franches dans le profil des niveaux de gris.

Selon L.S. Davis [Dav75], le processus de détection de contours peut être mené de deux façons différentes, en utilisant soit une approche parallèle, soit une approche séquentielle.

Une solution parallèle au problème de détection de contours signifie qu'un point de l'image est considéré comme appartenant à un contour lorsque la valeur de son niveau de gris et les valeurs du niveau de gris d'un certain nombre de ses voisins vérifient un ensemble de conditions. La décision prise concernant un point ne dépend pas d'une décision préalable prise sur un autre point de l'image. Ainsi, l'opération de détection de contour peut être menée simultanément dans différentes régions de l'image.

Inversement, dans le cas d'une solution séquentielle, le résultat en un point dépend des décisions prises pour les points précédemment étudiés. En général, les méthodes séquentielles comportent trois phases. Dans la première, un point de l'image est initialement marqué en tant que point de contour. Ensuite, grâce à une ou plusieurs conditions de propagation, d'autres points de l'image sont sélectionnés. Enfin, un critère d'arrêt permet de mettre un terme au processus.

Le processus de détection de contours peut également être décrit en utilisant la classification des procédures d'analyse d'image définie par Poggio : traitements de bas niveau,

de niveau intermédiaire et de haut niveau [PVY88].

Ainsi, on trouve tout d'abord une phase de traitement bas niveau qui, à partir du contenu de l'image initiale, fournit une nouvelle image dans laquelle les points de contour sont plus facilement détectables. Cette phase de traitement fait ressortir les points de contour (*edge enhancement*) soit en leur affectant une valeur particulière, soit en les différenciant de leurs voisins immédiats.

Ensuite, un ou plusieurs traitements de niveau intermédiaire appliqués sur l'image de contours permettent d'en extraire des primitives de plus haut niveau, comme des segments de droite ou des courbes plus complexes. Dans cette phase de traitement, on fait intervenir des connaissances plus précises sur la structure des contours, ou sur le contenu de l'image initiale.

Dans cette partie du mémoire, nous passons en revue les principales méthodes de détection de contours décrites dans la littérature. Tout d'abord nous décrivons les traitements de bas niveau permettant de rehausser les points de contour présents dans une image. Ensuite nous présentons quelques procédures permettant d'extraire des primitives plus riches de l'image de contours.

## 1.1 Réhaussement des contours

Durant cette première phase du processus de détection, les traitements appliqués à l'image visent à calculer, en chaque point, un ou plusieurs critères dont les valeurs permettront de différencier les points du contour de ceux situés dans des régions homogènes.

Puisque les contours se situent au niveau des variations plus ou moins franches de la luminosité, il est naturel d'utiliser des traitements basés sur des opérations différentielles portant de la fonction niveau de gris : au point de transition, la dérivée première de cette fonction passe par un maximum et la dérivée seconde passe par un zéro.

En termes de traitement de signal, l'opération de différentiation est un filtrage passe haut, qui réhausse l'amplitude des composantes de haute fréquence spatiale contenues dans l'image. Cette propriété des opérateurs différentiels constitue un inconvénient majeur lorsque les images traitées sont bruitées, l'énergie du bruit étant répartie dans une gamme étendue de fréquences spatiales.



Un autre inconvénient des opérateurs de différentiation apparaît lorsque les images traitées sont numériques, donc échantillonnées spatialement. Le calcul des dérivées première ou seconde d'une fonction ne pose pas de problème particulier lorsqu'elle est définie sur un espace dont la structure est continue. Par contre, lorsque l'espace est discrétisé, l'opération de dérivation est remplacée par une approximation de la pente de la fonction déterminée à partir de différences finies [Dav75, BC82, PVY88].

Lorsque la détection des contours est réalisée sur des images numériques bruitées, ces deux inconvénients se combinent et l'estimation des dérivées de l'image demande certaines précautions. Pour rendre l'opération de différentiation plus robuste vis à vis du bruit, on est amené à utiliser les techniques de régularisation [TA77, BPT88, PVY88, LP88] qui apportent une solution élégante aux problèmes mal-posés (*ill-posed problems*).

Quand il s'agit d'estimer les dérivées successives d'un signal numérique, Tikhonov a montré que le procédé de régularisation pouvait se résumer à prétraiter le signal avec un filtre de lissage avant d'évaluer les différences finies [TA77]. Le filtre de lissage doit éliminer du signal les hautes fréquences spatiales qui sont en partie dues au bruit.

Dans cette section, nous présentons tout d'abord quelques méthodes de lissage de l'image numérique, puis nous décrivons les principales approches permettant d'estimer les dérivées de la fonction niveau de gris.

### 1.1.1 Lissage de l'image

Nous considérerons qu'une image est définie par l'ensemble des valeurs de la fonction  $I(x, y)$ , définie pour les valeurs entières des paramètres  $x$  et  $y$ . La valeur  $I(x, y)$ , niveau de gris du pixel de coordonnées  $(x, y)$  de l'image, est fonction de la luminosité du point de la scène qui s'est trouvé projeté à cette position dans l'image. L'opération de lissage, appliquée sur cette image, fournit une autre image  $J(x, y)$ , dans laquelle les composantes de hautes fréquences spatiales ont été atténuées.

Cette atténuation des hautes fréquences entraîne une diminution du niveau de bruit, mais également une modification du contenu informationnel utile. Les transitions qui définissent les contours se trouvant modifiées durant la phase de lissage, il faut définir un compromis entre l'élimination du bruit et la préservation du profil des transitions.

1.1.1.1 Opérateurs linéaires

Les opérateurs de filtrage linéaire fournissent, à partir des données de l'image numérique initiale, une nouvelle image dont la valeur  $J(x, y)$  au pixel  $(x, y)$  a été déterminée par une combinaison linéaire des valeurs  $I(x, y)$  pour le pixel  $(x, y)$  et ses voisins. Cette opération est souvent définie en tant que convolution de l'image initiale avec un filtre numérique bidimensionnel défini par sa réponse impulsionnelle  $f(i, j)$  :

$$J(x, y) = (f * I)(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(-i, -j) \cdot I(x + i, y + j) \tag{1.1}$$

Lorsque l'étendue de la réponse impulsionnelle  $f(i, j)$  du filtre linéaire est finie, donc que seulement un nombre limité de coefficients sont non nuls, on a coutume de représenter les coefficients de la combinaison linéaire sous la forme d'un masque bidimensionnel :

$$[M] = \begin{bmatrix} f(n, m) & f(n, m - 1) & \cdots & f(n, -m + 1) & f(n, -m) \\ f(n - 1, m) & f(n - 1, m - 1) & \cdots & f(n - 1, -m + 1) & f(n - 1, -m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f(-n + 1, m) & f(-n + 1, m - 1) & \cdots & f(-n + 1, -m + 1) & f(-n + 1, -m) \\ f(-n, m) & f(-n, m - 1) & \cdots & f(-n, -m + 1) & f(-n, -m) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

où  $n$  et  $m$  représentent les limites d'évolution des indices  $i$  et  $j$ . Le masque, centré sur  $(0, 0)$ , est défini par  $(2n + 1)(2m + 1)$  coefficients.

L'effet des opérateurs linéaires de lissage sur l'image peut être décrit de la façon suivante. On suppose que l'image bruitée  $I(x, y)$  est constituée d'une image utile  $I_u(x, y)$  et d'une image de bruit  $I_\zeta(x, y)$ . La valeur du niveau de gris en un pixel de l'image filtrée est donnée par :

$$J(x, y) = ([M] * I)(x, y) = ([M] * I_u)(x, y) + ([M] * I_\zeta)(x, y) \ , \tag{1.3}$$

le premier terme définissant la réponse du filtre de lissage appliqué à l'image utile, alors que le deuxième représente la réponse au bruit seul.

Lorsque les niveaux de gris de l'image de bruit sont les réalisations d'un processus Gaussien stationnaire de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , ils sont deux à deux non corrélés. On peut alors montrer que le terme dû au bruit dans l'image lissée  $J(x, y)$  résulte également d'un processus Gaussien, dont la variance dépend des coefficients de

la convolution  $[M]$ . Lorsque ces coefficients sont choisis de façon judicieuse, on arrive à diminuer de façon notable la variance du bruit dans l'image lissée.

L'inconvénient de la procédure de lissage est qu'elle modifie également l'information utile  $I_u(x, y)$  et ce principalement au niveau des contours. Une image lissée par un filtre linéaire semble floue, puisque le phénomène de défocalisation dans un système optique est l'équivalent d'un filtrage spatial de type passe-bas.

Différents masques permettant de lisser une image par une opération de convolution ont été décrits dans la littérature.

### 1.1.1.2 Filtre moyeneur

Le filtre moyeneur, qui affecte à chaque point de l'image lissée une valeur correspondant à la moyenne locale des niveaux de gris, peut être décrit par le masque :

$$\frac{1}{(2n+1)(2m+1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (1.4)$$

Puisque les échantillons du bruit sont combinés linéairement avec des coefficients tous identiques, on peut montrer que la variance du bruit dans l'image lissée se trouve atténuée d'un facteur égal au nombre de coefficients, à savoir  $(2n+1)(2m+1)$ .

Le filtre moyeneur, qui présente la particularité d'être séparable, est intéressant en termes de complexité algorithmique. La séparabilité est une caractéristique d'un filtre multidimensionnel qui autorise à le considérer comme une combinaison de filtres monodimensionnels appliqués successivement sur les données. Dans le cas des images, un filtre séparable  $[M]$  résulte de la combinaison de deux filtres monodimensionnels  $[M_x]$  et  $[M_y]$ , le premier agissant sur les lignes de l'image initiale  $I(x, y)$  et le second sur les colonnes de l'image intermédiaire  $([M_x] * I)(x, y)$ , ou inversement :

$$\begin{aligned} J(x, y) &= ([M] * I)(x, y) \\ &= ([M_y] * [M_x] * I)(x, y) \\ &= ([M_x] * [M_y] * I)(x, y) , \end{aligned}$$

avec :

$$[M_x] = \begin{bmatrix} f_x(m) & f_x(m-1) & \cdots & f_x(-m+1) & f_x(-m) \end{bmatrix}$$

$$[M_y] = \begin{bmatrix} f_y(n) & f_y(n-1) & \cdots & f_y(-n+1) & f_y(-n) \end{bmatrix}^T .$$

Il suffit alors de  $n + m + 2$  multiplications pour calculer la réponse du filtre en un point, alors que  $(n + 1)(m + 1)$  multiplications sont nécessaires dans le cas d'un filtre non séparable.

### 1.1.1.3 Lissage Gaussien

Le filtre de lissage Gaussien est défini par des coefficients  $f(i, j)$  donnés par l'expression :

$$f(i, j) = k.e^{-\frac{i^2+j^2}{\sigma^2}} , \quad (1.5)$$

dans laquelle  $\sigma^2$  définit l'étendue du filtre,  $k$  étant une constante de normalisation choisie de telle sorte que la somme de tous les coefficients soit égale à l'unité. Ce filtre de réponse impulsionnelle infinie est en pratique limité en étendue en négligeant les coefficients situés en dessous d'un certain seuil.

Le filtre de lissage Gaussien est séparable et présente la particularité d'être isotrope : la valeur d'un coefficient de convolution ne dépend que de la distance entre le pixel sur lequel il agit et le centre du voisinage. Le filtre Gaussien bénéficie d'un nombre important d'autres propriétés [LB86a, LB86b, Bas94].

### 1.1.1.4 Filtres optimaux

D'autres filtres isotropes ont été décrits dans la littérature [TP86]. Leurs spécifications reposent soit sur des contraintes de limitation de la bande passante du signal image dans le domaine fréquentiel, soit sur la limitation de l'étendue de la convolution dans le domaine spatial. La réponse impulsionnelle de ces filtres est définie à partir de la réponse d'un filtre monodimensionnel en utilisant l'isotropie. Leurs propriétés dépendent principalement des caractéristiques des fonctions orthogonales utilisées pour les construire (fonctions de Bessel, de Gabor, polynômes d'Hermites).

Certains auteurs se sont attachés à définir des procédures de lissage linéaire qui réalisent un compromis optimal entre l'élimination du bruit et la conservation des informations

définissant les contours. Ces opérateurs de lissage sont en général associés à un filtre assurant la détection des contours. Ils seront décrits de façon plus précise dans le chapitre 2 de ce mémoire.

### 1.1.2 Méthodes de lissage non linéaires

Le principal inconvénient des méthodes de lissage linéaires vient du fait que l'action d'un filtre sur les données de l'image dépend uniquement de ses caractéristiques fréquentielles. En effet, la convolution dans le domaine spatial entre un filtre et un signal est équivalente à une simple multiplication de leurs transformées de Fourier dans le domaine fréquentiel.

Lorsque le bruit présent dans les images est blanc, il peut être atténué de façon efficace en lissant l'image par un filtrage linéaire. Par contre, quand le bruit est issu d'une distribution de type Poissonienne ou binaire, les filtres linéaires ne sont pas les plus efficaces.

#### 1.1.2.1 Méthodes linéaires modifiées

De nombreuses méthodes de lissage non linéaires ont été déduites de l'opération de convolution. La non linéarité de la méthode est obtenue soit en modifiant une des phases du calcul de la combinaison linéaire des niveaux de gris, soit en ajustant les coefficients du masque de convolution en fonction de certaines caractéristiques du voisinage du pixel en cours de traitement.

La méthode proposée par Mac Donnell consiste à moyenner les valeurs des pixels du voisinage qui vérifient un critère de validité [McD81]. Par exemple, on peut ne prendre en compte dans la moyenne que les pixels dont le niveau de gris est situé dans un intervalle  $[Min, Max]$ . Pratiquement, le calcul est mené en affectant un coefficient nul dans la combinaison à tous les pixels qui ne satisfont pas le critère de validité.

Wang & Vagnucci ont décrit une méthode de filtrage non linéaire bien adaptée à la détection de contours. Le masque utilisé pour moyenner les niveaux de gris des pixels est déterminé en fonction d'une première estimation du gradient local de l'image, ce qui permet de lisser de façon moins brutale les voisinages pouvant contenir un contour.

Un autre procédé de lissage a été décrit par Nagao & Matsuyama qui utilisent plusieurs

masques directionnels [NM79].

### 1.1.2.2 Opérateurs morphologiques

La morphologie mathématique, qui s'est développée vers la fin des années 70, constitue un outil utilisant des concepts issus de la théorie des ensembles [Gol69, Mat75, Ser82]. Les opérations sont basées sur des combinaisons ensemblistes réalisées entre les pixels de l'image et une ou plusieurs formes géométriques, considérées comme des ensembles et appelées éléments structurants. Les opérations morphologiques, qui étaient initialement adaptées au traitement d'images binaires, ont été ultérieurement généralisées pour les images en niveaux de gris [Ste86, GD88].

Les deux opérations de base de la morphologie mathématique sont la dilatation et l'érosion. Si on considère que l'élément structurant est défini par une matrice  $B(i, j)$ , l'image dilatée  $J_d(x, y)$  d'une image  $I(x, y)$  est définie par :

$$J_d(x, y) = \max_{i,j} (I(x - i, y - j) + B(i, j)) \quad , \quad (1.6)$$

alors que l'érosion  $J_e(x, y)$  de cette même image est définie par :

$$J_e(x, y) = \min_{i,j} (I(x + i, y + j) + B(i, j)) \quad . \quad (1.7)$$

Le lissage morphologique d'une image est réalisé par une succession de dilatations et d'érosions de l'image, utilisant des éléments structurants appropriés. Cette méthode de lissage est très efficace pour filtrer les images dégradées par du bruit de distribution binaire, de type poivre et sel, par exemple.

### 1.1.2.3 Filtres de rang, filtre médian

Les filtres de rang constituent une classe d'opérateurs non linéaires parfaitement adaptés au problème du lissage des images bruitées [AM87]. Leur principe est extrêmement simple : les valeurs de niveau de gris des  $n$  pixels d'un voisinage de l'image sont regroupées dans une liste qui est triée par ordre croissant. La valeur de rang  $k$  dans cette liste ( $1 \leq k \leq n$ ) est affectée comme niveau de gris au pixel choisi comme centre du voisinage.

Le filtre médian constitue un cas particulier de filtre de rang, la valeur conservée étant la médiane de la liste ( $k \approx n/2$ ). Les opérations morphologiques de dilatation et d'érosion

avec un élément structurant plat (défini par des niveaux nuls) sont équivalentes aux filtres de rang 1 et  $n$  [MS87a, MS87b].

Le filtre médian est très efficace pour éliminer du bruit de distribution binaire, dont les réalisations dans l'image modifient de façon significative la valeur du niveau de gris du pixel affecté, ce qui la repousse vers l'une des extrémités de la liste triée. Si le médian est estimé sur des voisinages de faibles dimensions, le profil des contours présents dans l'image est très peu déformé par cette opération de lissage [AM87, HN85].

### 1.1.3 Opérateurs similaires à une dérivée première

La plupart des techniques anciennes de détection de contours utilisent des opérateurs spatiaux qui répondent à des variations locales de l'intensité. Les discontinuités brutales peuvent être détectées en marquant les points de l'image correspondant à des valeurs élevées d'un estimateur des dérivées spatiales de l'image [Rob65, Pre70].

En fait, toutes les méthodes similaires à ce calcul de la dérivée première visent à faire apparaître un maximum local dans l'image traitée qui permet de marquer la position du contour. Un nombre important d'opérateurs de ce type ont été décrits dans la littérature.

#### 1.1.3.1 Opérateurs linéaires directionnels

La méthode la plus simple pour obtenir une estimation de la dérivée d'un signal discret monodimensionnel  $s(i)$  est de soustraire deux échantillons successifs de ce signal :

$$s'(i) \approx s(i + 1) - s(i) . \quad (1.8)$$

L'opération de dérivation est alors équivalente à la convolution du signal avec un masque comportant deux coefficients :

$$[M_d] = [-1 \ 1] . \quad (1.9)$$

Cette estimation, qui n'utilise que deux valeurs du signal, est peu précise lorsque du bruit est superposé aux données utiles. La sensibilité au bruit est diminuée si on utilise un plus grand nombre d'échantillons, dont les valeurs sont combinées linéairement en utilisant des coefficients adéquats.

Les coefficients utilisés dans la convolution peuvent être déterminés par analyse de la décomposition en série de Taylor de la fonction définissant le signal [PVY88]. Si on

désire estimer la dérivée grâce à  $2n + 1$  échantillons du signal, on montre simplement que les coefficients sont les solutions de  $2n$  équations linéaires obtenues à partir de la décomposition en série. En utilisant trois échantillons, on estime la dérivée du signal par :

$$s'(i) = s(i + 1) - s(i - 1) , \quad (1.10)$$

alors que :

$$s'(i) = s(i - 2) - 8s(i - 1) + 8s(i + 1) - s(i + 2) \quad (1.11)$$

permet d'évaluer la dérivée avec 5 échantillons du signal.

Les coefficients de la convolution peuvent également être déterminés en interpolant le signal par des fonctions particulières, puis en déduisant la dérivée du signal discret de celle de la fonction continue interpolante. Les fonctions interpolantes les plus souvent utilisées sont les splines cubiques [Sch64, PVY88].

D'autres filtres directionnels dont la réponse impulsionnelle est infinie, dérivant d'une méthode d'optimisation, seront décrits en détails dans le chapitre 2 de ce mémoire.

### 1.1.3.2 Estimation du gradient

Dans le cas des images, le calcul des dérivées spatiales peut être réalisé selon plusieurs directions. Théoriquement, puisque la dérivée en un point de l'image selon une direction arbitraire peut être déduite des dérivées partielles selon les directions  $x$  et  $y$ , il suffit simplement d'évaluer ces deux dernières.

Le vecteur gradient en un point de l'image a comme coordonnées les dérivées partielles du niveau de gris selon les deux directions  $x$  et  $y$ . La mise en évidence d'un contour en un point de l'image peut se faire par simple analyse de ce vecteur : si son amplitude est importante, c'est que le niveau de gris varie de façon significative dans le voisinage. Dans ce cas, le vecteur gradient est orthogonal à la direction du contour.

En deux dimensions, le calcul des dérivées par une méthode de différences finies correspond également à une opération de convolution. Les premiers opérateurs de détection de contours décrits dans la littérature sont basés sur une convolution. On peut citer les opérateurs de Roberts [Rob65] défini sur un voisinage  $2 \times 2$ , ou ceux de Prewitt [Pre70] et de Sobel utilisant un voisinage  $3 \times 3$  (*cf.* figure 1.1).

Ces opérateurs fournissent une estimation de la dérivée directionnelle de l'image selon l'un des axes, une simple rotation des masques permettant de calculer la dérivée dans la



$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{Roberts} & \text{Prewitt} & \text{Sobel}
 \end{array}$$

**Figure 1.1** : Filtres de dérivée première par convolution

direction orthogonale. L'amplitude  $G$  et l'orientation  $\Theta$  du vecteur gradient sont ensuite déterminées d'après les valeurs des deux dérivées directionnelles  $G_x$  et  $G_y$ , selon :

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}, \quad \Theta = \arctan \frac{G_y}{G_x}. \quad (1.12)$$

L'amplitude du vecteur est parfois estimée par le maximum ou la moyenne des valeurs absolues des composantes  $G_x$  et  $G_y$ .

Lorsque l'image est bruitée, on détermine souvent plus de deux dérivées directionnelles afin de diminuer l'influence des perturbations sur le résultat de la détection. La détermination d'une approximation du gradient peut ainsi être réalisée en utilisant des opérateurs de type *template-matching* qui sont constitués d'une série de masques représentant une approximation discrète de contours idéaux [MH80, Mar80, Kir71].

La série de masques est obtenue par rotation d'un masque de référence réagissant à une orientation particulière du contour. La direction du gradient est ensuite définie par le masque fournissant la réponse maximale, cette dernière étant retenue comme amplitude. La figure 1.2 présente différents masques décrits dans la littérature [Pre70, Kir71]. Tous ces masques sont utilisés selon 8 directions.

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{Compass} & \text{Kirsch} & \text{3 niveaux} & \text{5 niveaux}
 \end{array}$$

**Figure 1.2** : Masques d'estimation du gradient par *template matching*

### 1.1.3.3 Evaluation des moments

Une autre méthode de détection de contours est basée sur une analogie simple avec la physique : lorsqu'un solide est de densité homogène, son centre de gravité est situé au

même point que son centre géométrique. Par contre si le corps n'est pas homogène, le centre de gravité se déporte vers la partie de densité la plus importante.

Dans le cas des images, la densité est remplacée par le niveau de gris des pixels. Le calcul du centre de 'gravité' d'un voisinage de l'image, ou celui de ses moments d'ordre supérieur, donne une indication quant à l'homogénéité des niveaux de gris.

Le calcul des coordonnées du centre de gravité d'un voisinage de taille  $(2n+1).(2m+1)$  centré sur le pixel  $(x, y)$  :

$$\begin{aligned} x_g &= \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-m}^m i.I(x+i, y+j) \\ y_g &= \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-m}^m j.I(x+i, y+j) \end{aligned} \quad (1.13)$$

se résume en fait à deux simples convolutions avec les masques  $[M_x]$  et  $[M_y]$  donnés par :

$$[M_x] = \begin{bmatrix} -n & -n+1 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n & -n+1 & \cdots & n-1 & n \end{bmatrix} \quad [M_y] = \begin{bmatrix} -m & \cdots & -m \\ -m+1 & \cdots & -m+1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m-1 & \cdots & m-1 \\ m & \cdots & m \end{bmatrix} \quad . \quad (1.14)$$

L'opérateur PMO (*Pixel Mass Operator*) définit l'amplitude du contour détecté comme la distance entre le centre de gravité et le centre géométrique du voisinage [MG81]. Les opérateurs STLM (*Simple Two Level Model*) et TLM (*Two Level Model*) estiment l'amplitude en utilisant les moments d'ordre 2 [SR82].

### 1.1.3.4 Opérateurs statistiques

Kundu & Mitra ont développé un opérateur basé sur l'analyse de la répartition statistique des niveaux de gris des pixels dans un voisinage [KM87]. Lorsque l'histogramme des niveaux de gris calculé sur le voisinage est bimodal, le voisinage contient un contour, alors qu'un histogramme unimodal est caractéristique d'une zone homogène de l'image. Cette méthode s'inspire fortement des travaux de Mascarenhas, qui avait décrit une approche similaire basée sur un test d'hypothèse [MP78].

Les opérateurs CVM développés par van der Heijden sont basés sur la définition d'un modèle d'image dans lequel les informations sont décrites en termes de covariance conditionnelle [vdH95]. La détection est basée sur l'évaluation de la réponse de plusieurs filtres

linéaires appliqués aux données de l'image, chaque filtre réagissant à des variations particulières du profil de niveau de gris. Les sorties de ces filtres sont ensuite élevées au carré et combinées linéairement pour fournir le résultat de détection. Selon l'auteur, cette méthode présente plusieurs avantages par rapport aux méthodes linéaires : Le signal peut comporter plusieurs discontinuités proches les unes des autres et le bruit superposé aux informations est atténué même s'il n'est pas blanc.

### 1.1.3.5 Autres méthodes non linéaires

Toutes les méthodes linéaires basées sur l'évaluation de la dérivée première de l'image souffrent d'un inconvénient majeur : l'amplitude de la dérivée dépend autant de l'étendue de la transition que de la différence de niveau de gris existant entre les deux zones homogènes bordant le contour. Ainsi, un contour de profil en forme d'échelon mais de faible contraste peut fournir localement une réponse du même ordre de grandeur qu'un contour plus étendu et de contraste plus élevé.

Rosenfeld a proposé deux solutions pour résoudre ce problème [RT71, RL72]. L'estimation des dérivées directionnelles est réalisée en chaque point de l'image par soustraction de deux valeurs moyennes du niveau de gris calculées sur deux voisinages situés de part et d'autre du point. Ce calcul est réalisé pour plusieurs tailles de voisinage. Une première version du détecteur de contour utilise le produit de toutes les estimations de la dérivée calculées pour les différentes dimensions du voisinage. L'amplitude de la détection n'est importante que si toutes les estimations fournissent un résultat significatif. Rosenfeld a décrit une autre méthode, qui consiste à conserver comme estimateur de la dérivée le maximum des résultats fournis par les différents masques.

Plus récemment, Neuvo a proposé une méthode combinant des opérateurs linéaires et un filtre médian (LMH : Linear Median Hybrid) [HN85, NHD86]. Les dérivées directionnelles sont calculées en chaque point grâce à plusieurs masques de convolution. Les différents résultats sont ensuite filtrés par un médian.

La détection de contours peut également être basée sur l'utilisation des opérateurs morphologiques en niveaux de gris, qui permettent un traitement des images bruitées de manière très efficace [LHS87]. L'amplitude du contour est déterminée en soustrayant l'image dilatée ou érodée de l'image initiale. L'utilisation de ces filtres reste cependant

limitée à des images simples, représentant des objets sur un fond relativement uniforme.

### 1.1.4 Opérateurs similaires à une dérivée seconde

Pour une fonction définie sur un espace continu, un passage par zéro de la dérivée seconde en un point est caractéristique de la présence d'un extrémum local de la pente en ce point. Ainsi, la détection de contours peut être réalisée en utilisant les passages par zéro d'une estimation de la dérivée seconde de l'image [MH80, Mar80, Hil81, Har84].

L'estimation des dérivées secondes d'une image numérique peut être réalisée, comme pour les dérivées premières, par le biais de méthodes de différences finies. Les méthodes proposées dans la littérature reposent sur des principes de calcul similaires à ceux utilisés pour l'estimation des dérivées premières.

#### 1.1.4.1 Estimation du Laplacien

Le Laplacien  $\nabla^2 f$  d'une fonction  $f$  des deux variables réelles  $x$  et  $y$  est défini par :

$$\nabla^2 f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f , \quad (1.15)$$

$\frac{\partial}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial}{\partial y^2}$  désignant les dérivées partielles du deuxième ordre par rapport à  $x$  et  $y$ .

Lorsqu'on estime le Laplacien d'une image numérique, le calcul des dérivées partielles se résume à une simple opération de convolution. Si les calculs sont réalisés sur une image lissée, ce qui permet de diminuer la sensibilité au bruit de la méthode, le Laplacien  $L(I(x, y))$  de l'image initiale  $I(x, y)$  est évalué en utilisant successivement deux opérations de convolution :

$$L(I(x, y)) = \nabla^2 * (L * I(x, y)) = (\nabla^2 * L) * I(x, y) . \quad (1.16)$$

Dans cette expression,  $\nabla^2 * (.)$  désigne l'opérateur de convolution estimant la somme des deux dérivées secondes de l'image et  $L * (.)$  est l'opérateur de convolution assurant le lissage de l'image.

Cette relation a été utilisée par de nombreux auteurs afin de définir les coefficients de la convolution définissant l'opérateur Laplacien : ces coefficients sont obtenus en déterminant les dérivées secondes de la réponse impulsionnelle du filtre de lissage  $L$ . On peut également montrer que la soustraction des réponses de deux filtres de lissage appliqués à l'image constitue une bonne approximation du Laplacien.

Le filtre le plus souvent décrit dans la littérature est le Laplacien d'une fonction Gaussienne, ou LoG (*Laplacian of Gaussian*), dont la réponse impulsionnelle est définie par échantillonnage de la fonction :

$$\nabla^2 G(x, y) = A \left( 1 - k \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}} , \quad (1.17)$$

$\sigma$  permet de régler l'étendue efficace du filtre, la constante  $k$  est ajustée de telle sorte que la réponse à un signal constant soit nulle [MH80, Mar80].

### 1.1.4.2 Dérivée seconde directionnelle

Haralick a montré que l'estimation précise de la position d'un contour peut être réalisée en utilisant le passage par zéro de la dérivée seconde de l'image calculée selon la direction du gradient. Si  $\theta$  désigne la direction du gradient de l'image au point de coordonnées  $(x, y)$ , la dérivée seconde directionnelle  $f''_{\theta}$  peut se calculer en fonction des dérivées partielles du second ordre selon les directions  $x$  et  $y$ , sous la forme :

$$f''_{\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \theta . \quad (1.18)$$

Pratiquement, le calcul est réalisé en deux étapes [Har84]. Le gradient est calculé en chaque point de l'image, et sa direction est estimée en utilisant l'expression de l'équation (1.12). Ensuite, la dérivée seconde directionnelle est estimée par une convolution dont les coefficients sont définis par l'équation (1.18).

## 1.2 Les post-traitements

Toutes les méthodes de réhaussement des contours décrites précédemment ne définissent pas explicitement la position des points de contour, mais seulement un indice ou une probabilité de présence d'un contour. La phase de reconstitution des contours réels, qui est basée sur l'analyse de l'image réhaussée, doit permettre d'aboutir à une description du contenu de l'image par des primitives géométriques riches, comme les segments de droite ou les portions de courbes.

Une prise de décision ponctuelle, basée sur la simple analyse des valeurs associées aux pixels de l'image réhaussée, par exemple en utilisant une binarisation, ne constitue pas une méthode d'analyse fiable. Une interprétation efficace des indices contenus dans les

critères, l'un concernant la continuité, l'autre évaluant la finesse du contour, qui sont considérés comme essentiels dans la formation de contours de qualité.

Différents détecteurs ont été comparés selon ces deux critères, en utilisant des images synthétiques contenant soit un contour vertical, soit une série de contours circulaires concentriques. Ces images sont dégradées par addition de bruit Gaussien dont la variance est ajustée pour contrôler le rapport signal sur bruit.

Cette expérimentation montre principalement que la taille du voisinage d'image utilisé pour déterminer l'image de contour, c'est à dire la taille du masque pour une convolution, est un facteur ayant une grande influence sur la qualité de la détection. Les opérateurs utilisant un voisinage de taille importante fournissent en général des contours continus et cohérents.

#### 2.1.4 Travaux de Peli & Malah

D'autres mesures, tant quantitatives que qualitatives, ont été proposées par Peli & Malah pour comparer les performances des détecteurs de contours [PM82]. Parmi les mesures quantitatives retenues par les auteurs, on trouve par exemple le pourcentage de pixels marqués en dehors du contour réel, qui fournit une indication de l'effet de brouillage créé par le détecteur (*smearing effect*).

Mais l'apport principal de cette étude réside dans la définition de mesures qualitatives, qui peuvent être utilisées pour comparer les détecteurs sans nécessiter l'utilisation d'images bruitées. Les critères définis sont au nombre de trois :

- Type de contour. (P) Parfait, (D) Discontinu, (PD) Parfait mais Discontinu au niveau des points critiques comme les coins ou les intersections.
- Epaisseur du contour. Simple (constitué d'un seul pixel) ou Double (deux pixels d'épaisseur).
- Distorsion. Décalage entre le contour réel et le contour détecté inhérent à la méthode de détection.

La comparaison des différents détecteurs est réalisée sur des images contenant un carré ou un disque, dont le profil des contours est en échelon (*cf.* figure I.2(a)) ou en rampe

(cf. figure I.2(b)), en présence de bruit binaire ou Gaussien. En conclusion de cette étude, les auteurs constatent, comme l'on fait Kitchen & Rosenfeld, que les mesures quantitatives ne permettent pas, à elles seules, de définir les performances d'une méthode de détection de contours.

### 2.1.5 Travaux de Bryant & Bouldin

Toutes les techniques mentionnées ci-dessus nécessitent de connaître a priori la position réelle du contour, puisqu'elles sont basées sur la quantification des disparités entre le contour idéal et celui qui est détecté. Afin d'évaluer les performances du détecteur sur des images non synthétiques, une approche différente a été proposée par Bryant & Bouldin [BB79].

Les auteurs utilisent des images de scènes réelles, à savoir des photographies aériennes, sur lesquelles ils appliquent le détecteur de contour testé. Le seuil de binarisation est choisi de façon à conserver un nombre identique de pixels marqués pour tous les détecteurs testés. Les images binaires sont ensuite comparées en utilisant deux méthodes différentes.

Une première méthode de classement, qualifiée d'absolue (*absolute grading*), consiste à comparer les images de contour avec une image de référence déterminée manuellement par l'opérateur. La comparaison est réalisée en déterminant la corrélation entre les images, la valeur de cette corrélation permettant simplement de classer les méthodes par efficacité croissante.

Une deuxième méthode d'analyse, qualifiée de relative (*relative grading*) a également été proposée. Elle consiste à comparer entre elles les différentes images de détection, prises deux par deux. Ensuite, une note est attribuée à chaque détecteur, d'autant plus élevée que l'image qu'il fournit est similaire à celles obtenues par les autres méthodes. Cette approche est intéressante, car elle ne nécessite pas de connaissances à priori sur les contours présents dans la scène. Par contre, une méthode peut se trouver dévalorisée par rapport aux autres même si elle est la seule à fournir un résultat correct.

## 2.2 Analyse de la réponse indicielle

Dans un cadre correspondant plus précisément au travail présenté dans ce mémoire, certains chercheurs ont développé des critères mathématiques afin d'estimer les performances des détecteurs de contours. Les procédures associées à ces critères visent à améliorer les contours en définissant le filtre qui optimise le critère de qualité correspondant.

Modestino et Fries [MF77] ont proposé, en 1977, une procédure pour détecter les contours dans les images bruitées utilisant le filtrage de Wiener [Wie49], qui tend à minimiser l'erreur quadratique à la sortie du filtre. Cette approche a également été décrite par Boie *et coll.* [BCR86] Shanmugam, Dickey et Green [SDG79] ont discuté de l'utilisation optimale de l'énergie du signal contenue dans un voisinage des contours détectés grâce à un filtre linéaire bidimensionnel approché par le Laplacien d'une fonction Gaussienne.

Cependant, Canny [Can83, Can86] fut le premier à spécifier à la fois la qualité de la détection et la précision de la localisation du contour sous une forme mathématique.

De nombreux auteurs ont utilisé une approche similaire à celle de Canny, qui suppose que la détection de contours est basée sur une opération de convolution monodimensionnelle. Les performances du filtre de convolution sont analysées selon un certain nombre de critères évalués à partir de sa réponse indicielle  $f(x)$ .

L'opération de convolution est réalisée sur un signal d'entrée  $s_i(x)$ , qui est la superposition d'un signal représentant un profil de contour idéal  $s(x)$  et d'un bruit blanc Gaussien  $\zeta(x)$  de moyenne nulle et de variance  $E(\zeta^2(x)) = n_0^2$  :

$$s_i(x) = s(x) + \zeta(x) . \quad (2.3)$$

### 2.2.1 Critères de Canny

Canny a proposé plusieurs critères permettant de formaliser les notions de bonne détection et de bonne localisation du contour détecté [Can83, Can86]. Il montre qu'il existe un principe d'incertitude reliant ces deux critères, et qu'il n'est pas possible de les améliorer simultanément pour un même filtre. Il faut alors faire intervenir un troisième critère pour permettre la définition d'un détecteur optimal.



### 2.2.1.1 Critère de détection

Le critère de bonne détection est défini par Canny de la façon suivante : sur un signal bruité, les probabilités de détection manquée, correspondant au cas où un point de contour réel n'est pas marqué, et de fausse détection, correspondant au cas où un point est marqué alors que le contour n'existe pas, doivent être les plus faibles possible. Puisque ces deux probabilités dépendent directement des performances du filtre vis à vis du bruit, Canny propose d'utiliser comme critère de détection le facteur de bruit du filtre. Lorsque le rapport signal sur bruit en entrée du filtre est connu, l'évaluation de son facteur de bruit se ramène à celle du rapport signal sur bruit en sortie.

Canny considère que le filtre, de réponse impulsionnelle limitée à l'intervalle  $[-W, W]$ , est appliqué sur un signal  $s_i(x)$  constitué par superposition (cf. équation (2.3)) d'un profil parfait  $s(x)$  dans lequel le contour est situé en  $x = 0$  et d'un bruit blanc Gaussien  $\zeta(x)$  de moyenne nulle et de variance  $E(\zeta^2(x)) = n_0^2$ . Dans ces conditions, la réponse au signal non bruité en zéro est donnée par :

$$H_s(0) = \int_{-W}^{+W} s(-x) \cdot f(x) \cdot dx \quad , \quad (2.4)$$

et la réponse, en moyenne quadratique, au bruit seul est donnée par :

$$H_\zeta = n_0 \cdot \sqrt{\int_{-W}^{+W} f^2(x) \cdot dx} \quad . \quad (2.5)$$

Le critère de détection, ou rapport signal sur bruit en sortie, est alors défini par le rapport de ces deux quantités :

$$RSB_{can} = \frac{|H_s(0)|}{H_\zeta} = \frac{\left| \int_{-W}^{+W} s(-x) \cdot f(x) \cdot dx \right|}{n_0 \cdot \sqrt{\int_{-W}^{+W} f^2(x) \cdot dx}} \quad . \quad (2.6)$$

### 2.2.1.2 Critère de localisation

Le critère de localisation défini par Canny repose sur l'évaluation de la distance moyenne entre la position marquée par le maximum du signal de sortie et celle du contour réel. Puisque le critère doit être maximal lorsque la localisation est bonne, il est défini comme l'inverse de cette distance.

En notant  $H_s(x)$  la réponse au contour seul et  $H_\zeta(x)$  la réponse au bruit seul, la présence d'un maximum en  $x_0$  dans la réponse totale implique que sa dérivée en ce point

est nulle. On a donc, en  $x_0$  :

$$H'_s(x_0) + H'_\zeta(x_0) = 0 \quad . \quad (2.7)$$

Le développement limité au premier ordre en 0 de la réponse au signal seul permet de définir une relation entre  $x_0$  et la dérivée seconde de la réponse au signal seul en 0, selon l'expression :

$$H'_s(x_0) \approx H_s(0) + H''_s(0).x_0 \quad . \quad (2.8)$$

En combinant les équations (2.7) et (2.8), on trouve ensuite une relation reliant  $x_0$  à la dérivée de la réponse au bruit seul en  $x_0$  :

$$H''_s(0).x_0 \approx -H'_\zeta(x_0) \quad . \quad (2.9)$$

La distance en moyenne quadratique entre le contour détecté et le contour réel est enfin déterminée en évaluant l'espérance mathématique de  $x_0^2$ . Le critère de localisation est alors donné par :

$$LOC_{can} = \frac{1}{\sqrt{E(x_0^2)}} = \frac{\left| \int_{-W}^{+W} s'(-x).f'(x).dx \right|}{n_0 \cdot \sqrt{\int_{-W}^{+W} f'^2(x).dx}} \quad . \quad (2.10)$$

### 2.2.1.3 Critère de réponses multiples

En considérant que le problème de la détection de contours se ramène à celui de la recherche d'un maximum dans la réponse, un filtre idéal devrait mettre en évidence un maximum unique à proximité du contour réel. Cependant, lorsque le signal initial est bruité, la réponse du filtre contient non seulement le maximum dû au signal, mais également un certain nombre de maxima locaux dûs au bruit. Le troisième critère défini par Canny permet de quantifier le "nombre" de maxima présents dans la réponse. Il est basé sur l'évaluation de la distance moyenne entre deux maxima adjacents de la réponse.

En remarquant que cette distance moyenne entre deux maxima successifs est le double de la distance entre deux passages par zéro de la dérivée de la réponse, on peut l'estimer par l'expression suivante :

$$MUL_{can} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\int_{-W}^{+W} f'^2(x).dx}{\int_{-W}^{+W} f''^2(x).dx}} \quad . \quad (2.11)$$

Canny utilise ce critère pour déterminer le nombre  $N$  de maxima contenus dans la réponse limitée à l'intervalle  $[-W, W]$  :

$$N = \frac{2W}{MUL_{C_{an}}} = \frac{W}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\int_{-W}^{+W} f''^2(x).dx}{\int_{-W}^{+W} f'^2(x).dx}} . \quad (2.12)$$

Il faut noter que l'étendue  $W$  du filtre intervient dans cette expression de  $N$ , ce qui ne permet pas de généraliser ce critère au cas des filtres de réponse impulsionnelle infinie.

### 2.2.2 Critère de Tagarre & de Figueiredo

Tagarre & de Figueiredo opposent deux objections à la formulation du critère de localisation proposé par Canny [TdF90, TdF94]. Tout d'abord, le critère de localisation ne tient compte que du maximum de la réponse situé au plus près de la position réelle du contour, alors que les autres maxima pourraient intervenir dans le calcul de la distance moyenne  $x_0$  (cf. équation (2.10)).

Ils critiquent également le raisonnement de Canny lui permettant de déterminer la distance moyenne  $x_0$  : la variance de la dérivée du bruit en  $x_0$  ne peut être estimée que lorsque le point  $x_0$  reste le même pour chaque réalisation du processus Gaussien. L'estimation de cette variance ne peut donc pas être utilisée pour déterminer  $x_0$  lui-même. Cette deuxième objection a donné lieu à une intense discussion entre différents auteurs [SB91b, SB91a, GK92, SB94, TdF94, KG94].

Pour définir un autre critère de localisation, Tagarre & de Figueiredo étudient la répartition des maxima dans la réponse du filtre au signal bruité. Un filtre permettant de localiser précisément le contour doit fournir une réponse contenant une densité de maxima importante à proximité du contour réel et diminuant rapidement lorsqu'on s'en éloigne.

Lorsque le contour est un échelon, Tagarre & de Figueiredo montrent que la densité de maxima  $\mu(x)$  en un point  $x$  est définie par l'expression suivante :

$$\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_{\zeta'}''(0)}{R_{\zeta'}'(0)}} e^{-f^2(x)/2\sigma_{\zeta'}^2} , \quad (2.13)$$

$R_{\zeta'}$  étant la fonction d'autocorrélation de la dérivée du bruit  $\zeta$ ,  $R_{\zeta'}''$  la dérivée seconde de cette autocorrélation, et  $\sigma_{\zeta'}^2$  la variance du bruit. Le maximum de densité  $\mu_{max}$  étant situé en 0, la densité relative peut se définir par :

$$\mu_{rel}(x) = \frac{\mu(x)}{\mu_{max}} = e^{-f^2(x)/2\sigma_{\zeta'}^2} . \quad (2.14)$$

Le critère de localisation proposé est proportionnel à l'étendue moyenne de la diminution de densité des maxima aux alentours du contour, définie par :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot (1 - \mu_{rel}(x)) \cdot dx \quad . \quad (2.15)$$

En supposant que le rapport signal sur bruit en entrée est faible, puis en normalisant l'expression pour que la variance du bruit n'intervienne plus, on peut définir le critère de localisation de Tagarre & de Figueiredo par :

$$LOC_{tag} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f^2(x) \cdot dx}{2\pi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) \cdot dx} \quad . \quad (2.16)$$

### 2.2.3 Critère de Sarkar & Boyer

Sarkar et Boyer [SB91b, SB91a, SB94] pensent que la première objection de Tagarre & de Figueiredo n'est pas justifiée puisque Canny tient compte des réponses incorrectes dans son troisième critère.

Ils suivent donc la même approche que Canny, mais proposent toutefois de modifier le critère de réponses multiples en y introduisant un terme tenant compte directement de l'étendue du filtre. Pour un filtre de réponse impulsionnelle infinie, ils définissent une étendue efficace  $\bar{W}$  de la façon suivante :

$$\bar{W} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f^2(x) \cdot dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) \cdot dx}} \quad . \quad (2.17)$$

Cette expression est à rapprocher de celle qui permet de définir la bande passante efficace, en terme de puissance, d'un filtre dans le domaine fréquentiel, donnée par :

$$BP_{rms} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \cdot f^2(\omega) \cdot d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\omega) \cdot d\omega}} \quad , \quad (2.18)$$

qui a été également définie par Torre et Poggio dans [TP86].

Le critère de réponses multiples défini par Canny (*cf.* équation (2.11)) est ensuite généralisé pour un filtre de longueur infinie (par extension à l'infini des bornes d'intégration), puis divisé par l'étendue efficace du filtre. On aboutit finalement à l'expression :

$$MUL_{sar} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) \cdot dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) \cdot dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) \cdot dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f^2(x) \cdot dx}} \quad . \quad (2.19)$$

### 2.2.4 Critère de Koplowitz & Greco

Dans l'expression du critère de localisation de Canny (*cf.* équation (2.10)), la distance moyenne entre le contour détecté et le vrai contour est une approximation de l'écart-type de la position  $x_0$  du maximum de la réponse du filtre. Koplowitz & Greco [GK92, KG94] mettent en évidence le fait que  $x_0$  est déterminé grâce à une équation faisant intervenir une fonction dont il est le paramètre (*cf.* équation (2.9)).

Ce problème peut être contourné en modifiant légèrement le raisonnement de Canny. Le développement limité autour de 0 n'est plus réalisé uniquement sur la réponse au signal (*cf.* équation (2.8)), mais sur la réponse totale :

$$H'(x_0) \approx H'(0) + H''(0).x_0 \quad . \quad (2.20)$$

En combinant cette égalité avec celle de l'équation (2.7), on obtient ensuite :

$$H'(x_0) \approx H'_\zeta(0) + (H''_s(0) + H''_\zeta(0)).x_0 \quad , \quad (2.21)$$

et puisque la dérivée de la réponse totale en  $x_0$  est nulle, on aboutit à l'expression de  $x_0$  suivante :

$$x_0 \approx -\frac{H'_\zeta(0)}{H''_\zeta(0) + H''_s(0)} \quad . \quad (2.22)$$

Il faut noter deux différences principales entre cette expression de  $x_0$  et celle proposée par Canny (*cf.* équation (2.10)). Tout d'abord, le numérateur  $H'_\zeta(x_0)$  est remplacé par  $H'_\zeta(0)$  qui est une distribution Gaussienne de variance :

$$E(H'_\zeta(x_0)) = n_0^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x).dx \quad . \quad (2.23)$$

Ensuite le dénominateur comporte le terme  $H''_\zeta(0)$  qui ne peut être négligé, comme l'a fait Canny, que lorsque le niveau de bruit est faible par rapport à l'amplitude du contour.

### 2.2.5 Critère de Shen & Castan

D'une façon similaire à celle de Canny, Shen & Castan ont défini un critère permettant de quantifier les performances d'un détecteur de contours en termes de détection [SC86, CZS89, SC92]. Ils utilisent la réponse impulsionnelle d'étendue infinie  $f(x)$  du filtre de lissage associé au détecteur de contours pour déterminer ce critère. La réponse

impulsionnelle du détecteur de contours est donnée par la dérivée première de la réponse impulsionnelle du filtre de lissage  $l(x)$ .

Dans la réponse  $s_o(x)$  à un signal bruité  $s_i(x)$ , donnée par :

$$s_o(x) = l(x) * s_i(x) = l(x) * s(x) + l(x) * \zeta(x) , \quad (2.24)$$

le premier terme est la réponse du filtre au signal d'entrée non bruité, et le second la réponse du filtre au bruit seul.

Pour déterminer l'énergie du contour dans le signal de sortie, Shen & Castan utilisent la dérivée de la réponse du filtre, qui équivaut à la réponse du détecteur de contours appliqué au signal. Cette dérivée est donnée par l'expression :

$$\frac{d}{dx}s_o(x) = \frac{d}{dx}(l(x) * s_i(x)) = l(x) * \frac{d}{dx}s_i(x) , \quad (2.25)$$

qui devient, lorsque le signal d'entrée est un échelon d'amplitude  $A$  :

$$\frac{d}{dx}s_o(x) = l(x) * A.\delta(x) = A.l(x) . \quad (2.26)$$

L'énergie du contour est déduite de la valeur de la réponse en 0, position du contour dans le signa :

$$E_s(0) = A^2.l^2(0) . \quad (2.27)$$

L'énergie du bruit présent dans le signal  $s'_o(x)$  définissant le contour peut être mesurée par l'espérance mathématique  $E_{\zeta}$ , donnée par l'expression :

$$E_{\zeta'} = E(\zeta(x).l'^2(x)) , \quad (2.28)$$

qui se simplifie puisque le bruit est blanc en :

$$E_{\zeta'} = E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x-u).l'^2(u).du\right) = n_0^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} l'^2(x).dx . \quad (2.29)$$

Ensuite, puisque la position du contour est définie par le passage par zéro de la dérivée seconde  $s''_o(x)$  du signal de sortie, l'énergie du bruit doit également être minimale dans ce signal. Cette énergie est donnée par l'espérance mathématique :

$$E_{\zeta''} = n_0^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} l''^2(x).dx . \quad (2.30)$$

Le critère de détection, défini afin de maximiser la réponse au contour tout en minimisant les énergies du bruit dans les dérivées du signal de sortie, est déterminé en utilisant les équations (2.27), (2.29) et (2.30) :

$$RSB_{she} = \frac{E_s(0)}{E_{\zeta'}E_{\zeta''}} = \frac{l^2(0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} l^2(x).dx \int_{-\infty}^{+\infty} l''^2(x).dx} . \quad (2.31)$$

## 2.3 Définition de filtres optimaux

De nombreuses études présentées dans la littérature visent à définir un opérateur de détection de contours doté de performances optimales. Hueckel a été le premier à définir un critère mathématique permettant d'aboutir à la définition de détecteurs optimaux [Hue71]. Son approche a consisté à rechercher le meilleur ajustement, au sens des moindres carrés, entre un modèle de contour en échelon et la fonction image. La position du modèle, lorsqu'il s'ajuste au mieux sur la surface, indique la position du contour recherché. L'ajustement d'un modèle sur l'image a aussi été utilisé afin d'estimer les dérivées directionnelles d'après les coefficients qui définissent l'ajustement du gabarit [MR81, Har84, Bro78, Hum79, Nev77, MR81, NB86, HSZ87].

Griffith [Gri73a, Gri73b], en utilisant une approche probabiliste, et Chow [CK72], en analysant l'histogramme des niveaux de gris dans un voisinage du contour, ont défini des conditions garantissant l'optimalité d'un détecteur de contours.

Les critères présentés dans la section précédente ont en général été utilisés par leurs auteurs afin de définir des détecteurs optimaux. Canny a réduit la procédure de définition d'un détecteur optimal à la recherche d'une fonction  $f(x)$  maximisant le produit des deux premiers critères sous une contrainte qui limite la distance entre des réponses adjacentes [Can83, Can86]. Il montre que la réponse impulsionnelle du détecteur pour des contours de type échelon peut être approchée par la dérivée première d'une fonction Gaussienne.

Afin d'améliorer les résultats obtenus par Canny, Deriche [Der90] a proposé une famille de filtres basés sur la fonction exponentielle qui peuvent être utilisés pour lisser les images ou pour calculer leurs dérivées première ou seconde. Tout comme le filtre de Canny, le détecteur de Deriche est conçu afin de présenter un indice de performance optimal en termes de détection et de localisation des contours, tout en satisfaisant la contrainte de réponses multiples.

Cette même approche, consistant à rechercher un filtre optimal maximisant un ou plusieurs critères, a été utilisée par de nombreux auteurs. Le filtre optimal obtenu dépend à la fois du choix du ou des critères de performances, et de celui de la procédure d'optimisation.

### 2.3.1 Filtre optimal de Canny

La recherche de la fonction  $f(x)$  permettant de maximiser simultanément les critères de détection (*cf.* équation (2.6)) et de localisation (*cf.* équation (2.10)) en réponse à un contour  $s_i(x)$  amène tout simplement à la solution triviale :

$$f(x) = s(-x) \quad , \quad (2.32)$$

qui définit un filtre dont la réponse impulsionnelle est identique au profil de contour qu'on souhaite détecter. Dans le cas d'un contour de type échelon, le filtre idéal selon ces deux critères serait donc l'opérateur de DOB (Difference of Boxes) [RT71, Bin81, McD81]. Cependant, dans la réponse de ce filtre à un signal bruité, on constate l'apparition de nombreux maxima locaux dûs au bruit. C'est pourquoi Canny a choisi de faire intervenir un troisième critère permettant de quantifier l'apparition des ces maxima non significatifs.

Puisqu'il est en général impossible de définir de façon analytique le filtre optimal permettant de maximiser les deux premiers critères en respectant la contrainte de réponses multiples, Canny a proposé deux approches particulières. La première consiste à rechercher une solution par optimisation numérique. La seconde approche vise à définir un filtre optimal de façon analytique lorsque le contour à détecter est un échelon.

Dans les deux cas, la procédure de recherche d'une solution optimale se base sur la maximisation du produit des deux critères, détection et localisation, le critère de réponses multiples étant utilisé en tant que contrainte supplémentaire permettant de minimiser le nombre de maxima non significatifs apparaissant dans la réponse.

Dans le cas d'un contour de type échelon, Canny montre que la fonction  $f$  doit vérifier l'équation :

$$2.f(x) - 2.\lambda_1.f''(x) + 2.\lambda_2.f''''(x) + \lambda_3 = 0 \quad , \quad (2.33)$$

avec :

$$\Delta = \lambda_2 - \lambda_1^2/4 > 0 \quad . \quad (2.34)$$

La solution générale de cette équation, dans l'intervalle  $[0, W]$  est donnée par :

$$f(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin \omega x + a_2 e^{\alpha x} \cos \omega x + a_3 e^{-\alpha x} \sin \omega x + a_4 e^{-\alpha x} \cos \omega x \quad , \quad (2.35)$$

en respectant les conditions aux limites :

$$f(0) = 0, f(W) = 0, f'(0) = S, f'(W) = 0 \quad , \quad (2.36)$$



où  $S$  est une constante, égale à la pente de la fonction  $f(x)$  en  $x = 0$ .

Le détecteur optimal peut alors être défini en recherchant les quatre coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$  de l'équation (2.35). Canny a montré que la dérivée première d'une fonction Gaussienne est très proche de la réponse impulsionnelle du détecteur optimal. Il propose donc d'utiliser le filtre :

$$f_{can}(x) = x.e^{-\alpha^2 x^2} , \quad (2.37)$$

qui avait déjà été proposé par d'autres auteurs [Mac70, FD75, HM86].

Une étude précise de ce filtre a été réalisée par Lunscher & Beddoes [LB86a, LB86b]. Ce filtre est également optimal selon un autre critère, basé sur l'analyse stochastique du nombre de passages par zéro de la dérivée de la réponse [TdF90].

### 2.3.2 Filtre optimal de Deriche

Deriche a utilisé une méthode d'optimisation similaire à celle de Canny afin de définir un filtre de réponse impulsionnelle infinie [Der87, Der90]. La modification proposée, qui consiste à étendre à l'infini les bornes d'intégration dans l'expression des critères de performance, amène à une solution optimale similaire à celle de Canny (*cf.* équation (2.35)), mais devant satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$f(0) = 0, f(+\infty) = 0, f'(0) = S, f'(+\infty) = 0 . \quad (2.38)$$

Dans ce cas, la fonction  $f$  optimale est une sinusoïde amortie, étendue par antisymétrie aux valeurs  $x$  négatives, donnée par l'expression :

$$f_{der1}(x) = -e^{-\alpha|x|} . \sin \omega x , \quad (2.39)$$

avec  $\alpha$  et  $\omega$  positifs.

En analysant le produit des critères de détection (*cf.* équation (2.6)) et de localisation (*cf.* équation (2.10)), Deriche montre que le filtre défini par l'équation (2.39) est plus performant que celui défini par la dérivée d'une Gaussienne (*cf.* équation (2.37)). Les performances du détecteur de contours tendant vers un maximum lorsque le paramètre  $\omega$  tend vers zéro, Deriche propose d'utiliser le filtre dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$f_{der2}(x) = -x.e^{-\alpha|x|} , \quad (2.40)$$

qui ne dépend plus que d'un seul paramètre.

Un atout majeur du filtre  $f_{der2}$  réside dans son implantation récursive, dont le principe sera évoqué dans le chapitre 4 de ce mémoire, qui permet de l'utiliser efficacement pour la détection de contours dans les images numériques.

### 2.3.3 Filtre optimal de Tagarre & de Figueiredo

Afin de définir le filtre permettant de maximiser leur critère de localisation (cf. équation (2.16)), Tagarre & de Figueiredo montrent que ce critère peut s'exprimer sous la forme :

$$LOC_{tag} = \frac{W_s^2}{W_f^2} = \frac{W_s^4}{W_s^2 \cdot W_f^2} , \quad (2.41)$$

avec :

$$W_s^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f^2(x) \cdot dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) \cdot dx} , \quad (2.42)$$

et :

$$W_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \cdot f_\omega^2(\omega) \cdot d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega^2(\omega) \cdot d\omega} , \quad (2.43)$$

$f_\omega$  désignant la transformée de Fourier de  $f$ .

$W_s$  est l'étendue spatiale efficace de la fonction  $f$ , alors que  $W_f$  est son étendue efficace dans le domaine fréquentiel. En utilisant les résultats de Torre & Poggio [TP86], on montre alors simplement que la maximisation du critère est réalisée pour un filtre dont la réponse impulsionnelle est la dérivée première d'une Gaussienne.

### 2.3.4 Filtre optimal de Shen & Castan

Puisque le contour est localisé au niveau du passage par zéro de la dérivée seconde de la réponse au filtre de lissage, le point  $x_0$  définit la position du contour s'il vérifie :

$$s_o(x_0^-) \cdot s_o(x_0^+) \leq 0 , \quad (2.44)$$

dans laquelle  $x_0^-$  et  $x_0^+$  sont définis par :

$$x_0^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x_0 - \epsilon) \quad (2.45)$$

et :

$$x_0^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x_0 + \epsilon) . \quad (2.46)$$

Shen & Castan montrent que cette condition se simplifie si la dérivée de la réponse impulsionnelle  $l(x)$  du filtre est continue. Dans ce cas, on retombe sur le critère de localisation défini par Canny et il existe forcément une erreur de localisation du contour lorsque le signal d'entrée est bruité [CZS89, SC92].

Par contre, si on autorise une discontinuité de  $l'(x)$  en zéro, cette fonction doit simplement vérifier les conditions :

$$|l'(0^+)| = |l'(0^-)|, l'(0^+) > 0, l'(0^-) < 0 . \quad (2.47)$$

En rajoutant une contrainte sur la stabilité du processus de filtrage (dérivées successives de  $l(x)$  nulles en l'infini), Shen & Castan montrent que la fonction  $l(x)$  maximisant leur critère de détection (cf. équation (2.31)) en respectant la condition donnée en (2.47) vérifie l'équation différentielle :

$$\lambda.l''''(x) - l''(x) = 0 , \quad (2.48)$$

dont la solution générale est donnée par :

$$l(x) = c.e^{-\alpha|x|} . \quad (2.49)$$

Le filtre de détection de contours correspondant, dont la réponse impulsionnelle est la dérivée de  $l(x)$ , est donc défini par :

$$f(x) = l'(x) = \text{sign}(x)e^{-\alpha|x|} , \quad (2.50)$$

dans laquelle la fonction sign fournit le signe de la variable  $x$  (-1, 0 ou +1).

### 2.3.5 Filtre optimal de Sarkar & Boyer

En utilisant une approche similaire à celle de Canny, Sarkar & Boyer ont défini un filtre optimal, dont la réponse impulsionnelle permet de maximiser le produit des critères de détection (cf. équation (2.6)) et de localisation (cf. équation (2.10)), tout en respectant une contrainte concernant le critère de réponses multiples modifié (cf. équation (2.19)) [SB91b, SB91a, SB94].

Ils montrent que ce filtre, défini par optimisation numérique, est bien approché par la fonction :

$$f_{sar} = \text{sign}(x)e^{-\alpha|x|}(\cos(\Phi) - \cos(\beta\alpha|x| + \Phi)) , \quad (2.51)$$

avec  $\alpha > 0$ ,  $\beta = 1.201$  et  $\Phi = 0.771$ .

En pratique, cet opérateur peut être implanté de façon récursive en utilisant une équation de récurrence du troisième ordre. Les auteurs ont montré que ce filtre a des performances très proches de celles du filtre de Canny.

### 2.3.6 Filtre optimal de Spacek

La méthode d'optimisation utilisée par Spacek [Spa86a, Spa86b] se base sur la maximisation simultanée des trois critères définis par Canny.

De cette façon, l'équation différentielle fournissant la solution générale du problème d'optimalité se trouve simplifiée. Pourtant, la forme générale de la solution est plus complexe que celle fournie par le procédé d'optimisation de Canny, et elle dépend de six paramètres.

La méthode d'optimisation utilisée par Spacek a été critiquée par différents auteurs [PK91, SB91b, SB91a] car elle implique la maximisation du produit de critères reliés entre eux par plusieurs principes d'incertitude. Ainsi, un maximum dans le produit peut se produire pour des valeurs très faibles d'un ou deux termes du produit lorsque le troisième prend des valeurs importantes.

### 2.3.7 Filtre optimal de Petrou & Kittler

Lorsque l'on traite des images réelles contenant un contour, le profil de niveaux de gris au niveau de ce contour se présente rarement sous la forme d'un échelon parfait. Petrou & Kittler [PK91] ont présenté une étude dans laquelle ils recherchent un filtre de convolution permettant de détecter des contours définis par un profil en 'S' :

$$s(x) = \begin{cases} e^{sx} & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-sx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Les critères de performances retenus sont ceux définis par Canny, dont l'expression peut se simplifier en considérant le profil de contour défini en (2.52).

Le critère de détection (*cf.* équation (2.6)) devient donc :

$$\Sigma = \frac{\int_{-w}^0 f(x)(1 - e^{sx})dx}{\sqrt{\int_{-w}^0 f^2(x)dx}}, \quad (2.53)$$

le critère de localisation (cf. équation (2.10)) est donné par :

$$\Lambda = \frac{s^2 \int_{-W}^0 f(x)e^{sx} dx}{\sqrt{\int_{-W}^0 f'^2(x) dx}} . \quad (2.54)$$

Le critère de réponses multiples n'est pas modifié puisqu'il ne fait pas intervenir le profil du contour (cf. équation (2.11)).

Afin de définir un filtre optimal, Petrou & Kittler ont choisi de maximiser le produit des trois critères (comme l'a fait Spacek dans le cas d'un contour en échelon). Ils obtiennent un filtre optimal dont les caractéristiques sont définies par sept paramètres réels :

$$f_{pet}(x) = e^{\alpha x}(k_1 \sin \alpha x + k_2 \cos \alpha x) + \quad (2.55)$$

$$e^{-\alpha x}(k_3 \sin \alpha x + k_3 \cos \alpha x) + k_5 + k_6 e^{sx} . \quad (2.56)$$

### 2.3.8 Filtre optimal de Bourennane *et coll.*

En utilisant les mêmes critères de Petrou & Kittler et la méthode d'optimisation de Canny plutôt que celle de Spacek, puis en étendant à l'infini les bornes d'intégration dans les critères, Bourennane *et coll.* ont obtenu [BPT93], pour des profils de contours en 'S' (cf. équation (2.52)), un filtre optimal défini par :

$$f_{bou}(x) = k.e^{-\alpha x} \sin \omega x + e^{-\alpha x} \cos \omega x - e^{sx} , \quad (2.57)$$

dans laquelle  $k$ ,  $\alpha$  et  $\omega$  sont des constantes réelles positives, et  $s$  est le coefficient de pente du contour en 'S' (cf. équation (2.52)).

## 2.4 Conclusion

Afin de définir un détecteur optimal, Canny maximise le produit des critères de détection et de localisation, sous la contrainte du critère de réponses multiples. Spacek a choisi d'optimiser le produit des trois critères définis par Canny. Le principal inconvénient de ces solutions apparait lorsque l'un des facteurs du produit tend vers l'infini, ce qui est le cas avec le détecteur de Shen & Castan. Dans ce cas, en supposant que les autres critères ne sont pas strictement égaux à zéro, le produit tend lui aussi vers l'infini, ce qui est excellent en termes d'optimisation, même si la probabilité de ne plus détecter les contours et de marquer des points en dehors des contours devient élevée.

On constate également que chaque étude a permis d'aboutir à une nouvelle définition d'un filtre optimal, qui dépend donc non seulement des critères de performance utilisés, mais également de la méthode d'optimisation retenue pour les maximiser.

# Chapitre 3

## La famille d'opérateurs hyperboliques

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les critères de performances ne permettent pas à eux seuls de définir un filtre optimal. Le choix de la procédure d'optimisation a une influence significative sur les propriétés du filtre optimal. En utilisant les mêmes critères de performances que Canny, Deriche a obtenu une famille de filtres optimaux dont les caractéristiques sont assez différentes de celles du filtre défini par Canny.

Dans ce chapitre, nous décrivons un filtre dont la réponse impulsionnelle a la forme d'une fonction sinus hyperbolique amortie. Ce filtre a été très récemment décrit dans la littérature par d'autres auteurs [ML95, Pai96], qui ont mené des travaux similaires aux nôtres [WPC95e, WPC95b, WPC95c, WCB95, WPC95d, WPC95a, WPC96].

Ce détecteur de contours ne résulte pas d'une procédure d'optimisation visant à le rendre efficace selon un ou plusieurs critères. Cependant, nous avons comparé ses performances avec celles des autres filtres décrits dans la littérature, en nous basant sur les critères de détection et de localisation définis par Canny et le critère de réponses multiples modifié par Sarkar & Boyer.

## 3.1 Les opérateurs hyperboliques

### 3.1.1 Le détecteur de contours

Le détecteur de contours proposé est basé sur une fonction sinus hyperbolique amortie, dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$f_{hyp}(x) = e^{-\alpha|x|} \cdot \sinh(\beta x) = e^{-\alpha|x|} \cdot \left( \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \right) , \quad (3.1)$$

avec  $0 < \beta < \alpha$ .

Cette expression est similaire à celle du filtre proposé par Deriche [Der87, Der90], la fonction sinus standard (cf. équation (2.39)) ayant été remplacée par une fonction sinus hyperbolique. On peut noter que la fonction  $f_{hyp}$  est solution de l'équation différentielle déterminée par Canny lors de son processus d'optimisation (cf. équation (2.33)) si on n'impose pas de condition sur le signe du discriminant (cf. équation (2.34)).

Cet opérateur peut être normalisé selon l'expression :

$$\underline{f}_{hyp}(x) = C_d \cdot f_{hyp}(x) = C_d \cdot e^{-\alpha|x|} \cdot \sinh(\beta x) , \quad (3.2)$$

en sélectionnant le paramètre  $C_d$  de telle sorte que la réponse du filtre à un contour de type échelon unité soit égale à un au niveau de la position du contour. Cette contrainte nécessite que :

$$C_d = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} . \quad (3.3)$$

Il faut noter que la réponse du filtre est nulle lorsque le signal est constant, puisque la réponse impulsionnelle est antisymétrique.

La modification des deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  permet d'ajuster de façon simple l'aspect de la réponse impulsionnelle. Si on désigne par  $m$  le rapport  $\alpha/\beta$ , on montre aisément que, par un changement d'échelle sur l'axe des  $x$ , la réponse impulsionnelle se ramène à :

$$\bar{f}_{hyp}(x) = (1 - m^2) \cdot e^{-m|x|} \cdot \sinh(x) \quad (3.4)$$

La figure (3.1) montre l'aspect de la réponse impulsionnelle du filtre de détection de contours pour différentes valeurs du coefficient d'aspect  $m$ .

L'étendue efficace (cf. équation (2.17)) du filtre hyperbolique est donnée par :

$$W_{hyp} = \sqrt{\frac{\beta^4 - 3\beta^2\alpha^2 + 6\alpha^2}{2\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)^2}} , \quad (3.5)$$



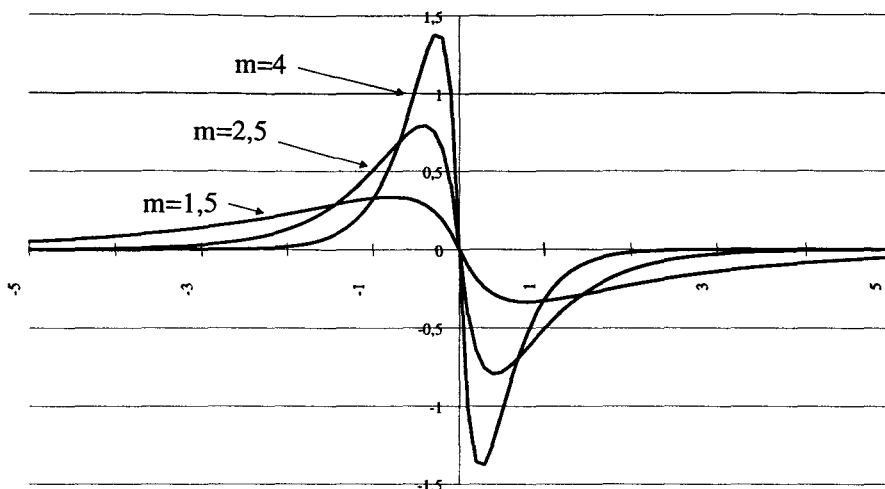


Figure 3.1 : Réponse impulsionnelle du filtre hyperbolique de détection de contours

qui peut également s'exprimer en fonction du paramètre d'aspect  $m$  selon :

$$W_{hyp} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1 - 3m^2 + 6m^4}{2(1 - m^2)^2}} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Le filtre de lissage

Le lissage d'une image, permettant d'éliminer au mieux le bruit superposé aux informations utiles, est un procédé couramment employé dans les traitements de bas niveau.

On détermine simplement la réponse impulsionnelle de l'opérateur de lissage, lorsqu'on connaît celle de l'estimateur de dérivée première, par simple intégration de l'opération de convolution. Dans le cas de l'opérateur hyperbolique (cf. équation (3.1)), le filtre de lissage est défini par la réponse impulsionnelle suivante :

$$s_{hyp}(x) = \frac{e^{-(\alpha+\beta)|x|}}{2(\alpha + \beta)} + \frac{e^{(\beta-\alpha)|x|}}{2(\beta - \alpha)} \quad (3.7)$$

Ce filtre de lissage peut être normalisé de telle sorte que sa réponse à un signal d'amplitude unité soit elle-même d'amplitude unité. Le coefficient de normalisation  $C_s$  du filtre normalisé :

$$\underline{s}_{hyp}(x) = C_s \cdot s_{hyp}(x) = C_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)|x|}}{2(\alpha + \beta)} + \frac{e^{(\beta-\alpha)|x|}}{2(\beta - \alpha)} \right) \quad (3.8)$$

est donné par :

$$C_s = -\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{4\alpha\beta} \quad (3.9)$$

Comme pour le détecteur de contours, l'allure de la réponse impulsionnelle est contrôlée par le coefficient d'aspect  $m = \alpha/\beta$ , le filtre de lissage se ramenant par changement d'échelle à :

$$\bar{s}_{hyp}(x) = -\frac{(m^2 - 1)^2}{8m} \cdot \left( \frac{e^{-(m+1)|x|}}{m + 1} + \frac{e^{(1-m)|x|}}{1 - m} \right) \quad (3.10)$$

La figure (3.2) présente les réponses impulsionnelles du filtre de lissage hyperbolique pour plusieurs valeurs du coefficient d'aspect  $m$ .

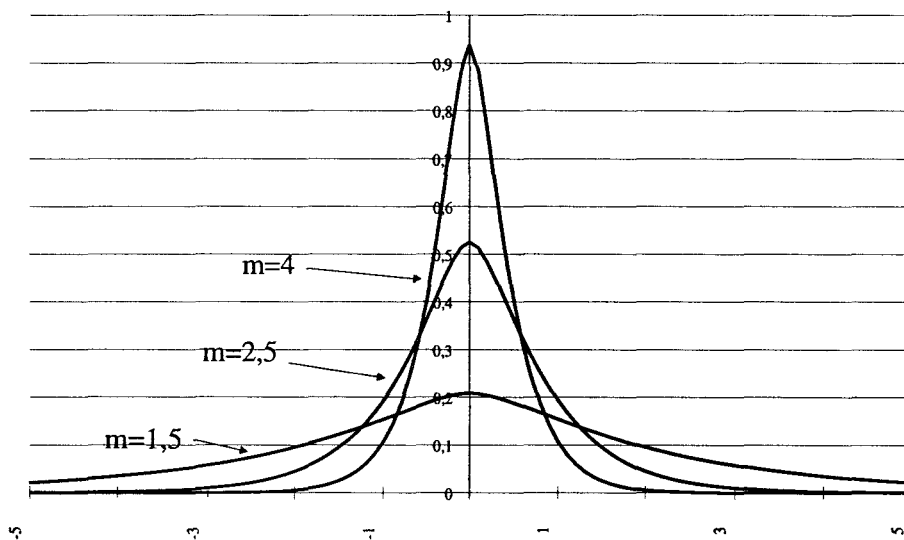


Figure 3.2 : Réponse impulsionnelle du filtre hyperbolique de lissage

### 3.1.3 Le filtre de dérivée seconde

D'après les propriétés de dérivation du produit de convolution, la dérivée seconde d'un signal peut être approchée en convoluant ce signal avec la première dérivée de la réponse impulsionnelle du filtre de détection de contours. Pour le détecteur hyperbolique, cette dérivée est donnée par :

$$l_{hyp}(x) = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot e^{-(\alpha+\beta)|x|} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot e^{(\beta-\alpha)|x|} \quad (3.11)$$

Il faut noter que cet opérateur fournit une réponse nulle sur des signaux constants sans qu'il soit besoin de le normaliser. Ainsi :

$$\underline{l}_{hyp}(x) = l_{hyp}(x) \quad (3.12)$$

L'allure de la réponse impulsionnelle est également contrôlée par le coefficient d'aspect  $m = \alpha/\beta$ , le filtre de dérivée seconde se ramenant à :

$$\bar{l}_{hyp}(x) = \frac{m+1}{2} \cdot e^{-(m+1)|x|} + \frac{1-m}{2} \cdot e^{(1-m)|x|} . \quad (3.13)$$

La figure (3.3) présente les réponses impulsionnelles du filtre hyperbolique de dérivée seconde pour quelques valeurs du coefficient d'aspect  $m$ .

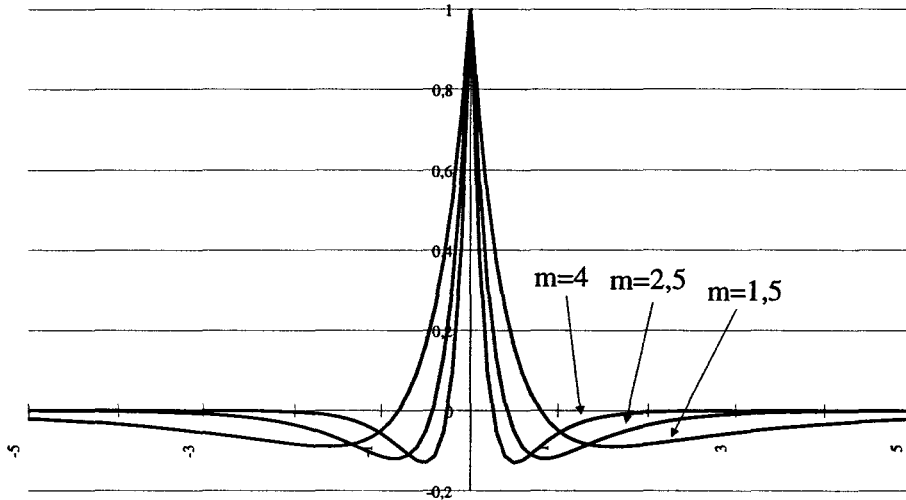


Figure 3.3 : Réponse impulsionnelle du filtre hyperbolique de dérivée seconde

## 3.2 Comparaison des performances

Les critères de performances, même s'ils ne sont pas utilisés, dans ce travail, pour déterminer un détecteur de contours optimal, permettent de quantifier certaines propriétés des filtres.

Nous avons retenu trois mesures de performances parmi toutes celles qui ont été décrites dans la littérature, afin de comparer le filtre hyperbolique avec d'autres filtres de réponse impulsionnelle infinie : La dérivée d'une Gaussienne (Canny), les filtres définis par Deriche et celui proposé par Shen & Castan.

La comparaison entre ces différents filtres a été réalisée pour un signal d'entrée constitué d'un échelon auquel a été superposé un bruit blanc.

### 3.2.1 Les critères de comparaison retenus

#### 3.2.1.1 Critère de détection de Canny

Ce critère, défini par Canny et d'autres auteurs par le facteur de bruit du filtre, permet de vérifier si le détecteur fournit un signal de sortie dans lequel le maximum créé par le contour reste détectable malgré le bruit.

Le critère de détection, défini initialement par Canny (*cf.* équation (2.6)) pour un filtre de réponse impulsionnelle finie, peut simplement être généralisé au cas des filtres de réponse impulsionnelle infinie [Der87, Der90]. Si le signal d'entrée est un échelon auquel on a additionné un bruit blanc Gaussien, le critère de détection normalisé peut être défini par :

$$\Sigma = \frac{\left| \int_{-\infty}^0 f(x) dx \right|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}} . \quad (3.14)$$

#### 3.2.1.2 Critère de localisation

Le critère de localisation indique la capacité du détecteur à extraire un contour de l'image bruitée qui soit situé aussi près que possible du contour réel. Le critère défini par Canny (*cf.* équation (2.10)) peut également être généralisé au cas des filtres de réponse impulsionnelle infinie par une simple extension des bornes d'intégration.

Pour un contour en échelon idéal, le critère de localisation devient :

$$\Lambda = \frac{|f'(0)|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}} . \quad (3.15)$$

#### 3.2.1.3 Critère de réponses multiples

Afin de minimiser le nombre de réponses multiples du filtre  $f(x)$  à un contour unique, Canny propose d'utiliser la distance moyenne entre les passages par zéro de sa dérivée  $f'(x)$ . Il déduit de cette distance moyenne son critère de réponses multiples dont l'expression est donnée par l'équation (2.11).

L'exploitation directe de ce critère n'est pas aisée lorsque le filtre a une réponse impulsionnelle infinie. En effet, la distance entre deux maxima dûs au bruit dépend des caractéristiques du filtre, mais aussi de l'étendue de sa réponse impulsionnelle. Sarkar & Boyer ont proposé une généralisation du critère de réponses multiples adaptée au cas des filtres d'étendue infinie, en faisant intervenir l'étendue efficace du filtre [SB91b, SB91a].

Le critère généralisé fournit alors une mesure de l'inverse du nombre de maxima non significatifs présents dans le signal de sortie dans un intervalle égal à l'étendue efficace du filtre. L'expression de ce critère est la suivante :

$$M = 2\pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx}} \cdot \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f^2(x) dx}} . \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Les filtres retenus pour la comparaison

Parmi tous les filtres présentés dans la littérature, nous avons retenu ceux qui se prêtent le mieux à une comparaison selon les trois critères précédemment définis. Nos critères de sélection sont les suivants :

- La réponse impulsionnelle du filtre est d'étendue infinie et peut être exprimée sous forme analytique.
- Les valeurs des critères de performances peuvent également être calculées pour le filtre de façon analytique.

#### 3.2.2.1 Le filtre de Canny

La procédure d'optimisation sous contrainte utilisée par Canny lui a permis de montrer que le filtre maximisant le produit  $\Sigma.\Lambda$ , tout en respectant la contrainte concernant les réponses multiples, a une réponse impulsionnelle relativement bien approchée par la dérivée d'une Gaussienne :

$$f_{can}(x) = C_{can} \cdot x \cdot e^{-\alpha^2 x^2} . \quad (3.17)$$

La constante  $C_{can}$  est choisie de telle sorte que la réponse à un échelon d'amplitude unité soit égale à un au point zéro :

$$C_{can} = -2\alpha^2 . \quad (3.18)$$

La réponse impulsionnelle de ce filtre est définie par un seul paramètre, qui permet de régler son étendue efficace, donnée par :

$$W_{can} = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{\alpha} . \quad (3.19)$$

La figure (3.4) présente l'allure de la réponse impulsionnelle pour plusieurs valeurs du paramètre  $\alpha$ .

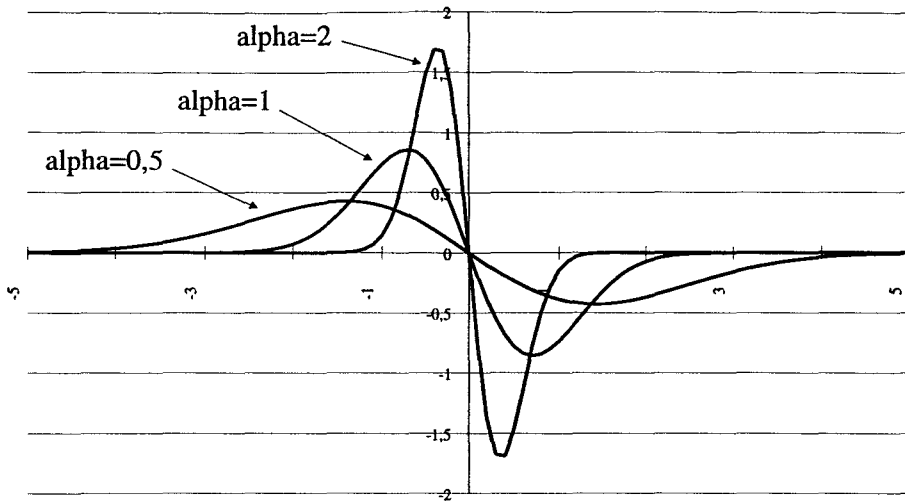


Figure 3.4 : Réponse impulsionnelle du filtre de Canny

### 3.2.2.2 Les filtres de Deriche

En utilisant les critères de Canny, Deriche a défini une famille de filtres de détection de contours dont la réponse impulsionnelle est une sinusoïde amortie :

$$f_{der1}(x) = C_{der1} \cdot e^{-\alpha|x|} \cdot \sin(\omega x) . \quad (3.20)$$

La constante  $C_{der1}$  est choisie de telle sorte que la réponse à un échelon d'amplitude unité soit égale à un au point zéro :

$$C_{der1} = -\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega} . \quad (3.21)$$

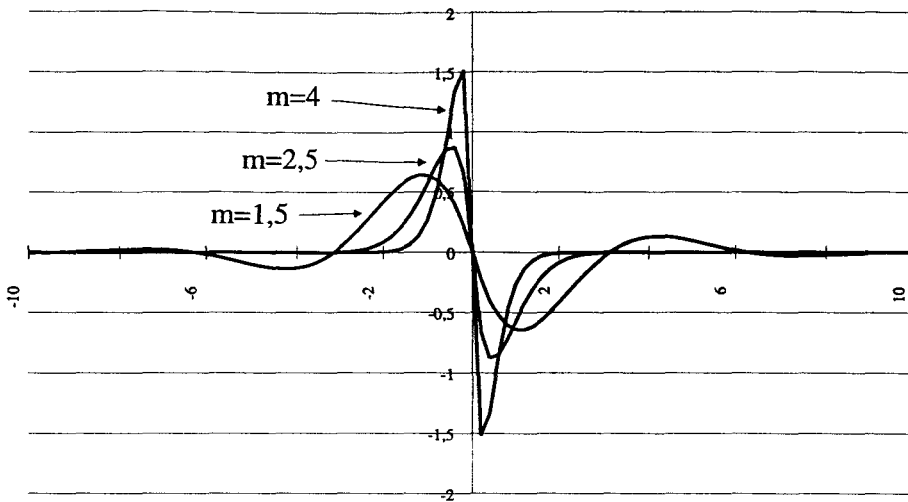
Cette famille de filtres, dont les caractéristiques sont définies par les paramètres  $\alpha$  et  $\omega$ , peut se ramener à une famille définie par un seul paramètre grâce à un simple changement d'échelle. Le paramètre d'aspect  $m$ , défini comme le rapport  $\alpha/\omega$ , permet alors de modifier l'allure de la fonction de transfert. La figure (3.5) présente les réponses impulsionnelles des filtres de Deriche pour différentes valeurs du paramètre d'aspect  $m$ .

L'étendue efficace du filtre, donnée par :

$$W_{der1} = \sqrt{\frac{\omega^4 + 3\omega^2\alpha^2 + 6\alpha^4}{2\alpha^2(\alpha^2 + \omega^2)^2}} , \quad (3.22)$$

peut s'exprimer en fonction du paramètre d'aspect  $m$  selon :

$$W_{der1} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1 + 3m^2 + 6m^4}{2(1 + m^2)^2}} . \quad (3.23)$$



**Figure 3.5 :** Réponses impulsionnelles des filtres de Deriche

Deriche a constaté que le filtre présentant les meilleures performances en termes de détection et de localisation du contour est obtenu en faisant tendre  $\omega$  vers zéro, ce qui correspond à faire tendre le paramètre d'aspect  $m$  vers l'infini. La réponse impulsionnelle est alors donnée par :

$$f_{der2}(x) = C_{der2} \cdot x \cdot e^{-\alpha|x|} . \quad (3.24)$$

La constante  $C_{der2}$ , qui sert à normaliser à un la réponse en zéro du filtre, est donnée par :

$$C_{der2} = -\alpha^2 . \quad (3.25)$$

La réponse impulsionnelle de ce filtre est présentée sur la figure (3.6) pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

L'étendue efficace du filtre simplifié  $W_{der2}$  est obtenue en faisant tendre le paramètre d'aspect  $m$  vers l'infini dans l'équation (3.23) :

$$W_{der2} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha} . \quad (3.26)$$

### 3.2.2.3 Le filtre de Shen & Castan

En suivant une approche relativement différente de celle de Canny, Shen & Castan ont montré que si on autorise une discontinuité d'ordre zéro dans la réponse impulsionnelle du filtre, le profil optimal pour la détection de contours est la fonction exponentielle. La réponse impulsionnelle devant être antisymétrique, ils proposent d'utiliser l'expression

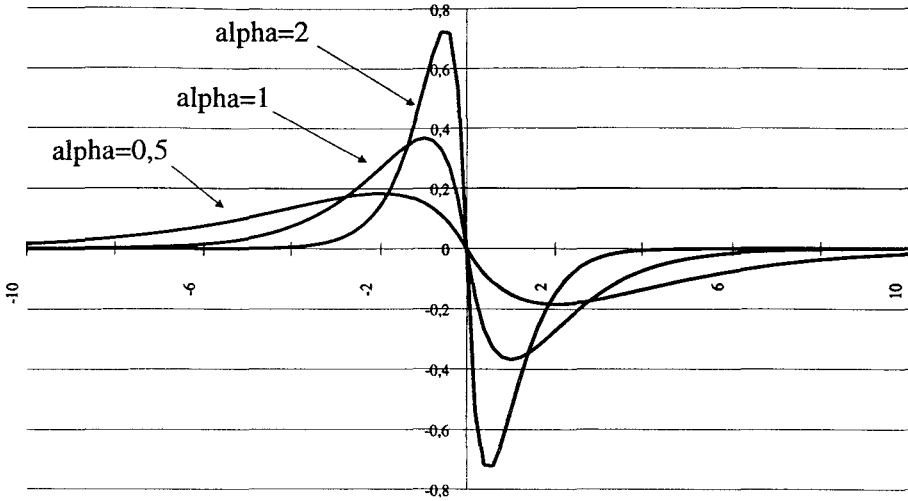


Figure 3.6 : Réponse impulsionnelle du filtre simplifié de Deriche

suivante :

$$f_{she}(x) = C_{she} \cdot \text{sign}(x) e^{-\alpha|x|} , \tag{3.27}$$

dans laquelle la fonction  $\text{sign}(x)$ , qui fournit le signe de la variable  $x$ , est définie par :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

La constante  $C_{she}$  est choisie de telle sorte que la réponse à un échelon d'amplitude unité soit égale à un au point zéro :

$$C_{she} = -\alpha^2 . \tag{3.29}$$

Le paramètre  $\alpha$  permet de régler l'étendue de la réponse impulsionnelle du filtre, comme le montre la figure (3.7).

L'étendue efficace  $W_{she}$  du filtre de Shen & Castan est donnée par :

$$W_{she} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \tag{3.30}$$

### 3.2.3 Résultats de la comparaison

Pour un contour de type échelon, les trois mesures de performances sont calculées très simplement. Le détail des calculs est présenté en annexe A. Le tableau 3.1 présente les résultats de cette évaluation par chacun des filtres.



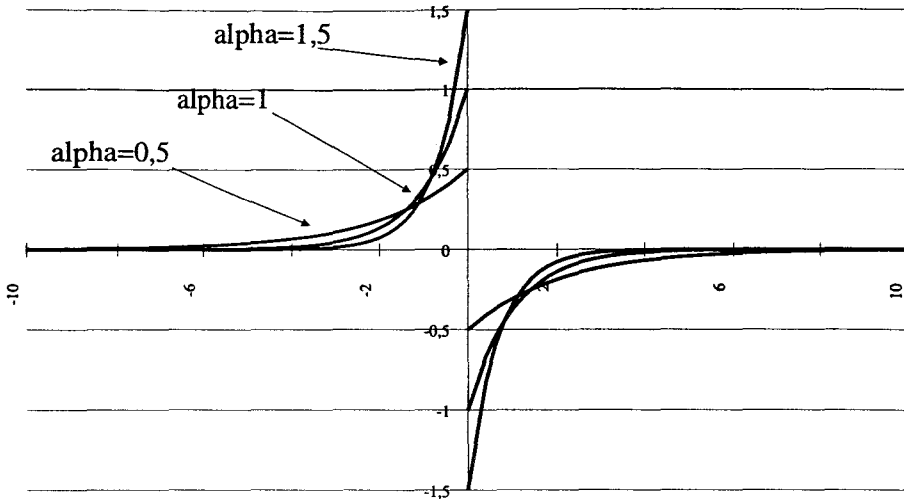


Figure 3.7 : Réponse impulsionnelle du filtre de Shen & Castan

Filtre	Equation	Détection $\Sigma$	Localisation $\Lambda$	Rép. multiples $M$
Canny	$x e^{-\alpha^2 x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$\sqrt{\alpha} \sqrt{\frac{32}{9\pi}}$	$2\pi \sqrt{\frac{4}{15}}$
Deriche (1)	$e^{-\alpha x } \sin \omega x$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2m}{m^2+1}}$	$\sqrt{\alpha} \sqrt{2}$	$2\pi \sqrt{\frac{2m^2(m^2+1)^2}{(5m^2+1)(6m^4+3m^2+1)}}$
Deriche (2)	$x e^{-\alpha x }$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{2}$	$\sqrt{\alpha} \sqrt{2}$	$\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$
Shen & Castan	$\text{sign}(x) e^{-\alpha x }$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	$\infty$	0
Hyperbolique	$e^{-\alpha x } \sinh \beta x$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{2m}{m^2-1}}$	$\sqrt{\alpha} \sqrt{2}$	$2\pi \sqrt{\frac{2m^2(m^2-1)^2}{(5m^2-1)(6m^4-3m^2+1)}}$

Table 3.1 : Mesures de performances des filtres comparés

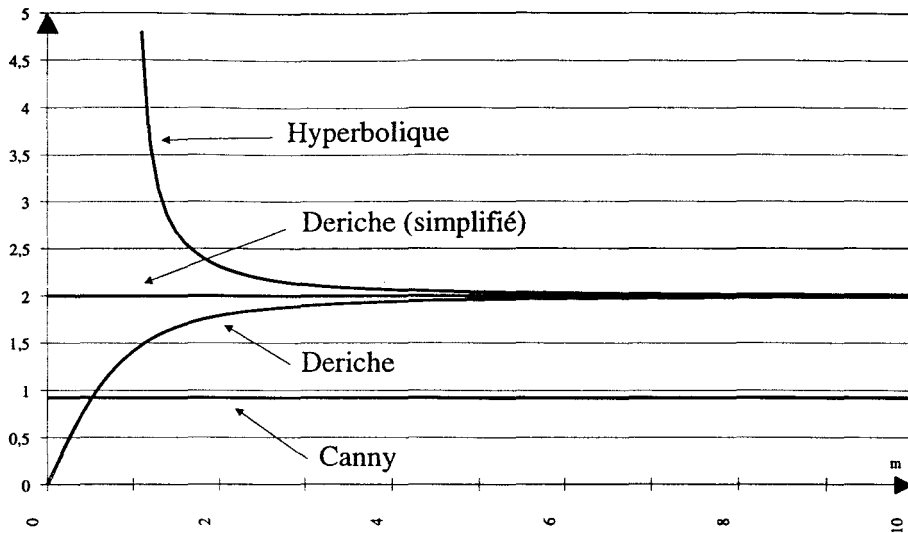
Nous avons exploité les résultats contenus dans ce tableau en analysant tout d'abord le produit  $\Sigma\Lambda$ , qui avait été retenu par Canny comme le paramètre principal de sa méthode d'optimisation.

Nous discuterons ensuite de l'influence du critère de réponses multiples sur la qualité de détection d'un contour.

### 3.2.3.1 Produit $\Sigma\Lambda$

La figure (3.8) présente l'évolution du produit des critères de localisation et de détection pour les différents filtres en fonction du paramètre d'aspect  $m$ . Le produit  $\Sigma\Lambda$  étant infini pour le filtre de Shen & Castan, il n'est pas représenté sur cette figure.

Pour le filtre de Canny et le filtre de Deriche simplifié, dont la réponse impulsionnelle est d'aspect constant, le produit  $\Sigma\Lambda$  ne peut pas être ajusté. On est en présence d'un

Figure 3.8 : Produit  $\Sigma\Lambda$  en fonction de  $m$ 

principe d'incertitude qui fait qu'une augmentation de la qualité de la détection entraîne une erreur plus importante sur la localisation du contour, et inversement.

Pour le filtre de Deriche, le produit  $\Sigma\Lambda$  tend vers une valeur maximale de 2 lorsque  $m$  tend vers l'infini, cas limite qui correspond à la version simplifiée du filtre. Comme le précisait Deriche, les performances en localisation et en détection de son filtre peuvent aisément être ajustées afin de devancer en efficacité le filtre de Canny.

Le filtre hyperbolique est caractérisé par un produit  $\Sigma\Lambda$  toujours supérieur à 2, et qui tend vers l'infini lorsque le facteur d'aspect  $m$  tend vers 1. Cela signifie qu'il est possible de choisir précisément les valeurs prises par les deux mesures de performances en ajustant les paramètres du filtre.

Si on exclut le filtre de Shen & Castan, dont les performances en termes de localisation du contour sont parfaites, on constate que le filtre hyperbolique est le seul autorisant une optimisation simultanée des critères de détection et de localisation.

### 3.2.3.2 Critère de réponses multiples

Sur la figure (3.9), nous avons représenté l'évolution du critère de réponses multiples pour les différents filtres en fonction du paramètre d'aspect  $m$ .

On constate aisément la supériorité du filtre de Canny concernant ce critère, la distance entre deux maxima dûs au bruit étant égale à plus de trois fois l'étendue efficace du filtre. On trouve ensuite les filtres de Deriche, puis le filtre hyperbolique. Enfin, avec un critère

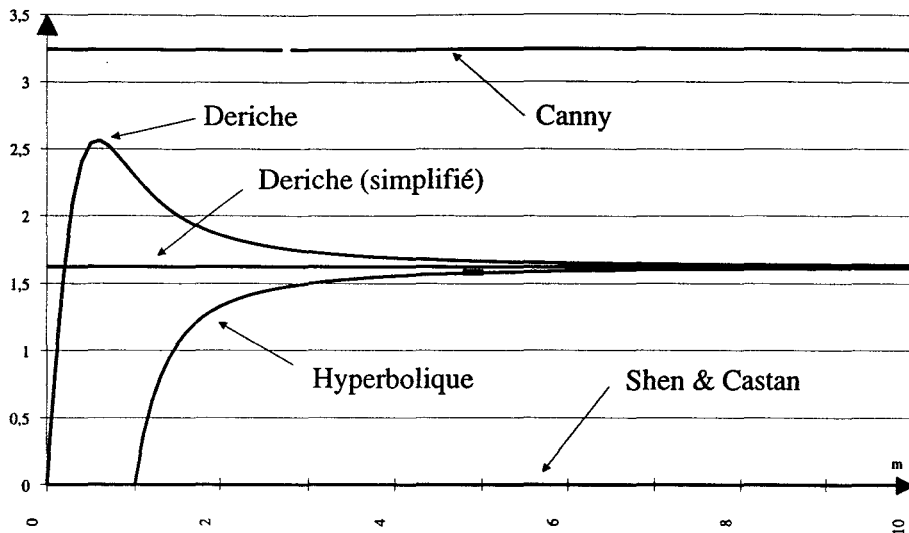


Figure 3.9 : Critère de réponses multiples en fonction de  $m$

de réponses multiples égal à zéro, le filtre de Shen & Castan.

Selon ce critère, on obtient un classement des filtres dans l'ordre inverse de celui obtenu en considérant les performances en localisation et en détection. On constate qu'il existe également un principe d'incertitude qui fait qu'en augmentant les performances en localisation et en détection, on rend le filtre plus sensible au bruit en ce qui concerne les réponses multiples.

### 3.2.3.3 Discussion

En se basant sur des critères purement mathématiques, il n'est pas possible de favoriser une mesure par rapport à une autre. Ainsi, toutes les procédures d'optimisation se heurtent aux principes d'incertitude reliant les mesures d'efficacité entre elles.

Lorsque les filtres sont utilisés en traitement d'images bidimensionnelles, et non plus sur des signaux continus monodimensionnels, les critères de détection et de localisation deviennent prépondérants par rapport au critère de réponses multiples. En effet, dans une image, un contour n'apparaît pas de façon isolée sur une seule ligne : il possède des caractéristiques de continuité qui simplifient la sélection des maxima significatifs parmi tous les maxima détectés. L'importance de la notion de continuité du contour a déjà été soulignée dans la littérature [KR81, PM82].

Lors de l'analyse de l'image réhaussée par filtrage, les segments de contour sont reconstitués en respectant un critère de connexité : un pixel est ajouté à la chaîne de contour

s'il est connexe à autre pixel appartenant à la chaîne déjà constituée. Ainsi, un détecteur de contours peut être considéré comme performant, en termes de réponses multiples, si la distance moyenne entre deux maxima dans l'image réhaussée est supérieure à deux fois la taille d'un pixel. Le critère de réponses multiples du filtre n'est donc pas nécessairement maximal, mais simplement supérieur à un certain seuil.

Pour le filtre de Canny et le filtre simplifié de Deriche, cette contrainte concernant les réponses multiples définit une limite supérieure pour la valeur du seul paramètre  $\alpha$  intervenant dans la définition de la réponse impulsionnelle.

Le filtre de Shen & Castan, parfait en ce qui concerne la localisation, et dont les performances en détection peuvent être aisément ajustées, est caractérisé par une distance moyenne entre des maxima dûs au bruit égale à zéro. Cela signifie qu'un maximum non significatif peut être détecté n'importe où dans l'image, même à proximité immédiate d'un contour réel, ce qui pose un problème lors de la phase de suivi.

Par contre, pour le filtre hyperbolique, la distance moyenne entre le contour et les maxima non significatifs peut être ajustée de telle sorte qu'un maximum erroné ne perturbe pas la procédure de suivi. Le choix des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  se réalise de façon à maximiser le produit  $\Sigma\Lambda$  tout en garantissant une distance moyenne entre les maxima supérieure à 2. Lorsque la valeur du paramètre  $\beta$  est fixée à la moitié de celle du paramètre  $\alpha$ , ce qui correspond à un facteur d'aspect de 2, la distance moyenne entre deux maxima de la sortie est très proche de la largeur efficace du filtre. On peut ensuite définir simplement la valeur de  $\alpha$ . Par exemple, si on choisit comme paramètres  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1/4$ , l'étendue efficace du filtre est d'environ 2 pixels et la distance moyenne entre deux maxima dûs au bruit est également de 2 pixels. Avec ces mêmes paramètres, on obtient un produit  $\Sigma\Lambda$  de 30% supérieur à celui obtenu avec la forme simplifiée du filtre de Deriche.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit une famille d'opérateurs de filtrage dont les réponses impulsionnelles sont basées sur une fonction sinus hyperbolique amortie.

Nous avons comparé analytiquement les performances de l'opérateur hyperbolique de

détection de contours avec celles de plusieurs autres opérateurs similaires décrits dans la littérature. L'opérateur hyperbolique s'avère au moins aussi performant que ces autres filtres.

# Chapitre 4

## Implantation récursive

Dans un système de vision, lorsqu'on utilise une méthode de détection de contours basée sur une convolution, le temps de calcul nécessaire au traitement d'une image est directement lié à la taille du voisinage sur lequel est menée l'opération de convolution. Si le traitement doit s'effectuer rapidement, le nombre d'opérations élémentaires à réaliser chaque seconde ne permet plus d'utiliser une structure standard d'ordinateur, fonctionnant de façon séquentielle.

Une solution à ce problème d'implantation consiste à utiliser une structure hardware spécifique, qui exploite le parallélisme spatial caractérisant l'opération de convolution [Hwa85, Pra87, Cha88]. Cependant, la difficulté de mise en oeuvre et le coût d'une telle solution font qu'on lui préfère souvent une diminution de la complexité de l'algorithme, donc une dégradation de ses performances.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode permettant d'implanter de façon récursive [Der90] le filtre hyperbolique décrit dans le chapitre précédent. Cette méthode récursive permet de calculer la réponse du filtre en utilisant un nombre minimum d'opérations élémentaires afin de rester compatible avec une architecture séquentielle.

Nous présentons tout d'abord le procédé permettant de calculer la réponse du filtre pour un signal monodimensionnel, puis nous décrivons l'extension à deux dimensions de cette méthode de calcul.

## 4.1 Implantation récursive monodimensionnelle

### 4.1.1 Généralités

Soit  $x(n)$  un signal discret placé en entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle discrète  $f(i)$ . La réponse discrète  $y(n)$  du filtre, donnée par :

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-i)f(i) , \quad (4.1)$$

peut être considérée comme la superposition de deux réponses :

$$y(n) = y^+(n) + y^-(n) . \quad (4.2)$$

Le signal  $y^+(n)$  résulte de la convolution discrète d'un filtre causal  $f^+(i)$  avec le signal d'entrée  $x(n)$ .  $y^-(n)$  est la réponse d'un filtre anticausal  $f^-(i)$  à ce même signal d'entrée. Les filtres  $f^+(i)$  et  $f^-(i)$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$f^+(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$f^-(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quand la transformée en  $z$ ,  $F(z)$ , d'un filtre causal  $f(i)$  est une fraction rationnelle de la forme :

$$F(z) = \frac{\sum_{k=0}^l a_k \cdot z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^m b_k \cdot z^{-k}}, \text{ avec } 0 < l < m \quad (4.4)$$

la réponse  $y(n)$  de ce filtre au signal d'entrée  $x(n)$  peut être exprimée par l'équation de récurrence suivante :

$$y(n) = \sum_{k=0}^l a_k \cdot x(n-k) + \sum_{k=1}^m b_k \cdot y(n-k) . \quad (4.5)$$

Si les deux transformées en  $z$  des filtres  $f^+(i)$  et  $f^-(i)$ , notées respectivement  $F^+(z)$  et  $F^-(z)$ , sont des fractions rationnelles, leurs réponses  $y^+(n)$  et  $y^-(n)$  peuvent être calculées de façon récursive en utilisant des expressions similaires à l'équation (4.5) :

$$y^+(n) = \sum_{k=0}^{l^+} a_k^+ \cdot x(n-k) + \sum_{k=1}^{m^+} b_k^+ \cdot y^+(n-k) \quad (4.6)$$

$$y^-(n) = \sum_{k=0}^{l^-} a_k^- \cdot x(n+k) + \sum_{k=1}^{m^-} b_k^- \cdot y^-(n+k) .$$

Les paramètres  $a_k^+$  (resp.  $a_k^-$ ) désignent les coefficients du polynôme de degré  $l^+$  (resp.  $l^-$ ) constituant le numérateur de  $F^+(z)$  (resp.  $F^-(z)$ ), alors que les paramètres  $b_k^+$  (resp.  $b_k^-$ ) sont les coefficients de son dénominateur de degré  $m^+$  (resp.  $m^-$ ).

### 4.1.2 Détecteur de contours

Dans le cas discret, la réponse impulsionnelle du détecteur de contours :

$$\underline{d}(i) = K_d \cdot d(i) = K_d \cdot e^{-\alpha|i|} \cdot \sinh(\beta i) \quad (4.7)$$

devient :

$$\underline{d}(i) = \underline{d}^+(i) + \underline{d}^-(i) \quad , \quad (4.8)$$

avec :

$$\underline{d}^+(i) = \begin{cases} K_d \cdot (e^{(\beta-\alpha)i} - e^{-(\alpha+\beta)i}) & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\underline{d}^-(i) = \begin{cases} K_d \cdot (e^{(\alpha+\beta)i} - e^{(\alpha-\beta)i}) & \text{si } i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une réponse unité pour un signal d'entrée de type échelon unité est obtenue lorsqu'on utilise un coefficient de normalisation  $K_d$  égal à :

$$K_d = \frac{2(1 - e^{(\beta-\alpha)}) (1 - e^{-(\alpha+\beta)})}{e^{-(\alpha+\beta)} - e^{(\beta-\alpha)}} \quad . \quad (4.9)$$

Afin de calculer les transformées en  $z$  des séquences  $\underline{d}^+(i)$  et  $\underline{d}^-(i)$ , il faut noter, comme l'a fait Deriche dans [Der90], que lorsqu'on discrétise la fonction  $f(x) = e^{-\lambda|x|}$ , la séquence résultante  $f(i)$  peut être séparée en deux séquences  $f^+(i)$  et  $f^-(i)$  telles que :

$$f(i) = f^+(i) + f^-(i) \quad , \quad (4.10)$$

avec :

$$f^+(i) = \begin{cases} e^{-\lambda i} & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f^-(i) = \begin{cases} e^{\lambda i} & \text{si } i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



dont les transformées en  $z$  sont définies par :

$$\begin{aligned} F^+(z) &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda} \cdot z^{-1}} \\ F^-(z) &= \frac{e^{-\lambda} \cdot z}{1 - e^{-\lambda} \cdot z} . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ce résultat très connu nous amène aux expressions suivantes pour les transformées en  $z$  des séquences  $\underline{d}^+(i)$  et  $\underline{d}^-(i)$  :

$$\begin{aligned} \underline{D}^+(z) &= \frac{a_1^+ \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}} \\ \underline{D}^-(z) &= \frac{a_1^- \cdot z}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec :

$$a_1^+ = K_d \cdot (e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)}) \quad (4.13)$$

$$a_1^- = -K_d \cdot (e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)}) \quad (4.14)$$

$$b_1 = e^{(\beta-\alpha)} + e^{-(\alpha+\beta)} \quad (4.15)$$

$$b_2 = -e^{-2\alpha} . \quad (4.16)$$

où le coefficient  $K_d$  est donné par l'équation (4.9).

Des expressions de ces transformées en  $z$ , on peut déduire la réponse  $y(n)$  à l'entrée  $x(n)$  du filtre  $\underline{d}(i)$  :

$$y(n) = y^+(n) + y^-(n) \quad (4.17)$$

avec :

$$y^+(n) = a_1^+ \cdot x(n-1) + b_1 \cdot y^+(n-1) + b_2 \cdot y^+(n-2) \quad (4.18)$$

et :

$$y^-(n) = a_1^- \cdot x(n+1) + b_1 \cdot y^-(n+1) + b_2 \cdot y^-(n+2) . \quad (4.19)$$

Il faut noter que le calcul pratique doit être réalisé pour des valeurs de  $n$  croissantes dans le cas de l'équation (4.18), alors que les valeurs de  $n$  doivent être décroissantes pour l'équation (4.19).

En supposant maintenant que l'étendue du signal d'entrée  $x(n)$  est limitée à l'intervalle  $[1, \dots, N]$ , les équations précédentes restent valables si l'on suppose vérifiées les conditions

aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ y^+(-1) &= y^+(0) = 0 \\ x(N+1) &= 0 \\ y^-(N+1) &= y^-(N+2) = 0 . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Cette implantation récursive de la convolution discrète ne nécessite que 5 multiplications et 5 additions par point du signal d'entrée. La complexité de cette procédure peut être comparée aux  $N$  multiplications et  $N - 1$  additions nécessaires pour calculer de façon conventionnelle la réponse d'un filtre dont la réponse impulsionnelle comporte  $N$  coefficients non nuls.

### 4.1.3 Filtre de lissage

Pour un signal discret, le filtre de lissage :

$$\underline{s}(i) = K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)|i|}}{2(\alpha+\beta)} + \frac{e^{(\beta-\alpha)|i|}}{2(\beta-\alpha)} \right) \tag{4.21}$$

devient :

$$\underline{s}(i) = \underline{s}^+(i) + \underline{s}^-(i) , \tag{4.22}$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{s}^+(i) &= \begin{cases} K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)i}}{\alpha+\beta} + \frac{e^{(\beta-\alpha)i}}{\beta-\alpha} \right) & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \underline{s}^-(i) &= \begin{cases} K_s \cdot \left( \frac{e^{(\alpha+\beta)i}}{\alpha+\beta} + \frac{e^{(\alpha-\beta)i}}{\beta-\alpha} \right) & \text{si } i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Cet opérateur de lissage est normalisé en choisissant le paramètre  $K_s$  tel que :

$$K_s = - \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot (1 - e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)} + e^{-2\alpha})}{\beta \cdot (1 - e^{-2\alpha}) + \alpha \cdot (e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)})} \tag{4.23}$$

Cela nous amène aux transformées en  $z$  suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{S}^+(z) &= \frac{a_0^+ + a_1^+ \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}} \\ \underline{S}^-(z) &= \frac{a_1^- \cdot z + a_2^- \cdot z^2}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2} \end{aligned} \tag{4.24}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 a_0^+ &= \frac{2\beta K_s}{\beta^2 - \alpha^2} & (4.25) \\
 a_1^+ &= K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{\alpha - \beta} - \frac{e^{(\beta-\alpha)}}{\alpha + \beta} \right) \\
 a_1^- &= K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{\alpha + \beta} + \frac{e^{(\beta-\alpha)}}{\beta - \alpha} \right) \\
 a_2^- &= \frac{2\beta K_s}{\alpha^2 - \beta^2} e^{-2\alpha} ,
 \end{aligned}$$

les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  étant donnés par les équations (4.15) et (4.16), et le coefficient  $K_s$  par l'équation (4.23).

En utilisant ces transformées en  $z$ , le signal de sortie  $y(n)$  du filtre de lissage pour le signal d'entrée  $x(n)$  peut être mis sous la forme :

$$y(n) = y^+(n) + y^-(n) \quad (4.26)$$

avec :

$$y^+(n) = a_0^+ \cdot x(n) + a_1^+ \cdot x(n-1) + b_1 \cdot y^+(n-1) + b_2 \cdot y^+(n-2) \quad (4.27)$$

et :

$$y^-(n) = a_1^- \cdot x(n+1) + a_2^- \cdot x(n+2) + b_1 \cdot y^-(n+1) + b_2 \cdot y^-(n+2) . \quad (4.28)$$

Comme dans le cas du filtre de détection de contours, le calcul doit être réalisé pour des valeurs de  $n$  croissantes pour l'équation (4.27) et des valeurs de  $n$  décroissantes pour l'équation (4.28).

Si l'étendue du signal d'entrée est limitée à l'intervalle  $[1, \dots, N]$ , on suppose vérifiées les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 0, & (4.29) \\
 y^+(-1) &= y^+(0) = 0 \\
 x(N+1) &= x(N+2) = 0 \\
 y^-(N+1) &= y^-(N+2) = 0
 \end{aligned}$$

Les relations (4.26) à (4.28) définissent une procédure permettant de convoluer le signal d'entrée  $x(n)$  avec le filtre  $\underline{s}(i)$  avec seulement 8 multiplications et 7 additions pour chaque point.

### 4.1.4 Dérivée seconde

L'opérateur d'estimation de la dérivée seconde :

$$\underline{l}(i) = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot e^{-(\alpha+\beta)|i|} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot e^{(\beta-\alpha)|i|} \quad (4.30)$$

est implanté sous la forme discrète suivante :

$$\underline{l}(i) = \underline{l}^+(i) + \underline{l}^-(i) \quad , \quad (4.31)$$

avec :

$$\underline{l}^+(i) = \begin{cases} (\alpha + \beta) \cdot e^{-(\alpha+\beta)i} + K_l \cdot (\beta - \alpha) \cdot e^{(\beta-\alpha)i} & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\underline{l}^-(i) = \begin{cases} (\alpha + \beta) \cdot e^{(\alpha+\beta)i} + K_l \cdot (\beta - \alpha) \cdot e^{(\alpha-\beta)i} & \text{si } i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette expression, qui a été légèrement modifiée par rapport à la forme continue en pondérant l'un des deux termes par un coefficient  $K_l$ , permet d'obtenir une réponse nulle lorsque le filtre discret est appliqué sur un signal constant. Cette condition est respectée lorsque le coefficient  $K_l$  est donné par :

$$K_l = \frac{(\alpha + \beta) \cdot (1 + e^{-(\alpha+\beta)} - e^{(\beta-\alpha)} - e^{-2\alpha})}{(\alpha - \beta) \cdot (1 - e^{-(\alpha+\beta)} + e^{(\beta-\alpha)} - e^{-2\alpha})} \quad (4.32)$$

Les deux transformées en  $z$  associées à ce filtre sont données par :

$$\underline{L}^+(z) = \frac{a_0^+ + a_1^+ \cdot z^{-1}}{1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2}} \quad (4.33)$$

$$\underline{L}^-(z) = \frac{a_1^- \cdot z + a_2^- \cdot z^2}{1 - b_1 \cdot z - b_2 \cdot z^2}$$

avec :

$$a_0^+ = \alpha + \beta + K_l \cdot (\beta - \alpha) \quad (4.34)$$

$$a_1^+ = K_l \cdot (\alpha - \beta) \cdot e^{-(\alpha+\beta)} - (\alpha + \beta) \cdot e^{(\beta-\alpha)}$$

$$a_1^- = (\alpha + \beta) \cdot e^{-(\alpha+\beta)} + K_l \cdot (\beta - \alpha) \cdot e^{(\beta-\alpha)}$$

$$a_2^- = -(\alpha + \beta + K_l \cdot (\beta - \alpha)) \cdot e^{-2\alpha} \quad ,$$

les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  étant donnés par les équations (4.15) et (4.16).  $K_l$  est donné par l'équation (4.32).

Le signal de sortie  $y(n)$  du Laplacien est donné par :

$$y(n) = y^+(n) + y^-(n) \quad (4.35)$$

avec :

$$y^+(n) = a_0^+ . x(n) + a_1^+ . x(n - 1) + b_1 . y^+(n - 1) + b_2 . y^+(n - 2) \quad (4.36)$$

et :

$$y^-(n) = a_1^- . x(n + 1) + a_2^- . x(n + 2) + b_1 . y^-(n + 1) + b_2 . y^-(n + 2) . \quad (4.37)$$

Le calcul est réalisé en utilisant des valeurs de  $n$  croissantes pour l'équation (4.36) et des valeurs de  $n$  décroissantes pour l'équation (4.37).

Dans le cas d'un signal d'entrée limité à l'intervalle  $[1, \dots, N]$ , on applique les conditions aux limites suivantes :

$$x(0) = 0, \quad (4.38)$$

$$y^+(-1) = y^+(0) = 0$$

$$x(N + 1) = x(N + 2) = 0$$

$$y^-(N + 1) = y^-(N + 2) = 0 .$$

Les relations (4.35), (4.36) et (4.37) permettent de réaliser l'opération de convolution en utilisant seulement 8 multiplications et 7 additions pour chaque point du signal d'entrée.

## 4.2 Extension bidimensionnelle

Soit  $g(m, n)$ ,  $m \in [1 \dots M]$ ,  $n \in [1 \dots N]$ , une image numérique bidimensionnelle de taille  $M.N$ . Les filtres monodimensionnels présentés dans le chapitre précédent peuvent être généralisés pour permettre leur utilisation sur des images bidimensionnelles.

La généralisation à deux dimensions du filtre de lissage présenté dans le chapitre précédent est réalisée de façon séparable afin de simplifier l'implantation récursive du filtre correspondant. Cela nous amène au filtre 2-D de lissage suivant :

$$\underline{ss}(i, j) = \underline{s}(i) . \underline{s}(j) . \quad (4.39)$$

Une combinaison d'un filtre de lissage et d'un détecteur de contour peut être réalisée en convoluant l'image avec les filtres 2-D de dérivation suivants :

$$\underline{d}d_x(i, j) = \underline{d}(i) \cdot \underline{s}(j) , \quad (4.40)$$

$$\underline{d}d_y(i, j) = \underline{s}(i) \cdot \underline{d}(j) . \quad (4.41)$$

Chacun de ces filtres est le produit du détecteur de contours dans une direction (horizontale ou verticale) par le filtre de lissage dans l'autre direction.

Ces deux opérations de convolution fournissent deux images d'estimation des dérivées  $d_x(m, n)$  et  $d_y(m, n)$ . La direction du gradient  $\theta(m, n)$  et son amplitude  $A(m, n)$  sont ensuite estimées depuis les images  $d_x(m, n)$  et  $d_y(m, n)$  de manière classique :

$$\theta(m, n) = \sqrt{d_x^2(m, n) + d_y^2(m, n)} \quad (4.42)$$

$$A(m, n) = \text{arctg} \left( \frac{d_y(m, n)}{d_x(m, n)} \right) \quad (4.43)$$

D'une façon similaire, le Laplacien  $l(m, n)$  de l'image peut être estimé en convoluant l'image avec le filtre suivant :

$$\underline{l}l(i, j) = \underline{l}l_x(i, j) + \underline{l}l_y(i, j) \quad (4.44)$$

avec :

$$\underline{l}l_{xx}(i, j) = \underline{l}(i) \cdot \underline{s}(j) , \quad (4.45)$$

$$\underline{l}l_{yy}(i, j) = \underline{s}(i) \cdot \underline{l}(j) . \quad (4.46)$$

Le premier filtre directionnel  $\underline{l}l_x(i, j)$  est le produit d'un Laplacien dans la direction  $x$  avec un opérateur de lissage dans la direction  $y$ . Ces directions sont permutées pour le filtre  $\underline{l}l_y(i, j)$ . Les sorties de ces deux filtres directionnels sont additionnées pour fournir l'estimation du Laplacien 2-D.

### 4.2.1 La procédure générale de filtrage

Afin de convoluer une image initiale  $M.N$  avec l'un des filtres présentés dans le chapitre précédent, on réalise tout d'abord un filtrage dans la direction horizontale. Le résultat  $h(m, n)$  est obtenu de la façon suivante :

$$h(m, n) = h^+(m, n) + h^-(m, n) \quad (4.47)$$

avec :

$$\begin{aligned} h^+(m, n) &= a_{0x}^+ \cdot g(m, n) + a_{1x}^+ \cdot g(m, n-1) + \\ & \quad b_1 \cdot h^+(m, n-1) + b_2 \cdot h^+(m, n-2) \\ & \text{pour } m = 1, 2, \dots, M \text{ et } n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.48)$$

et :

$$\begin{aligned} h^-(m, n) &= a_{1x}^- \cdot g(m, n+1) + a_{2x}^- \cdot g(m, n+2) + \\ & \quad b_1 \cdot h^-(m, n+1) + b_2 \cdot h^-(m, n+2) \\ & \text{pour } m = 1, 2, \dots, M \text{ et } n = N, N-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (4.49)$$

On suppose satisfaites les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} g(m, 0) &= 0 \\ h^+(m, -1) &= h^+(m, 0) = 0 \\ g(m, N+1) &= g(m, N+2) = 0 \\ h^-(m, N+1) &= h^-(m, N+2) = 0 \\ & \text{pour } m \in [1 \dots M] \end{aligned} \quad (4.50)$$

Dans un second temps, on utilise le résultat intermédiaire  $h(m, n)$  en tant qu'image d'entrée d'un second filtre opérant dans la direction verticale. On obtient le résultat final  $r(m, n)$  sous la forme :

$$r(m, n) = r^+(m, n) + r^-(m, n) \quad (4.51)$$

avec :

$$\begin{aligned} r^+(m, n) &= a_{0y}^+ \cdot h(m, n) + a_{1y}^+ \cdot h(m-1, n) + \\ & \quad b_1 \cdot r^+(m-1, n) + b_2 \cdot r^+(m-2, n) \\ & \text{pour } n = 1, 2, \dots, N \text{ et } m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (4.52)$$

et :

$$\begin{aligned} r^-(m, n) &= a_{1y}^- \cdot h(m+1, n) + a_{2y}^- \cdot h(m+2, n) + \\ & \quad b_1 \cdot r^-(m+1, n) + b_2 \cdot r^-(m+2, n) \\ & \text{pour } n = 1, 2, \dots, N \text{ et } m = M, M-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

et avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 h(0, n) &= 0 \\
 r^+(-1, n) &= y^+(0, n) = 0 \\
 h(M+1, n) &= h(M+2, n) = 0 \\
 r^-(M+1, n) &= r^-(M+2, n) = 0 \\
 &\text{pour } n \in [1 \dots N] .
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, les opérations de convolution avec les filtres  $\underline{ss}(i, j)$ ,  $\underline{dd}_x(i, j)$ ,  $\underline{dd}_y(i, j)$  et  $\underline{ll}(i, j)$  peuvent simplement être réalisées en utilisant ces structures de traitement récursifs qui tiennent compte de la séparabilité.

### 4.2.2 Filtre de lissage

Afin de réaliser un lissage 2-D avec le filtre  $\underline{ss}(i, j)$  décrit par l'équation (4.39), on utilise les coefficients suivants dans les équations de récurrence (4.48), (4.49), (4.52) et (4.53) :

$$\begin{aligned}
 a_{1x}^+ &= a_{1y}^+ = K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{\alpha - \beta} - \frac{e^{(\beta-\alpha)}}{\alpha + \beta} \right) \\
 a_{0x}^+ &= a_{0y}^+ = \frac{2\beta K_s}{\beta^2 - \alpha^2} \\
 a_{1x}^- &= a_{1y}^- = K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{\alpha + \beta} + \frac{e^{(\beta-\alpha)}}{\beta - \alpha} \right) \\
 a_{2x}^- &= a_{2y}^- = \frac{2\beta K_s}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot e^{-2\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

### 4.2.3 Filtre de dérivée première

Le calcul récursif de l'estimation de la dérivée première d'une image selon la direction  $x$ , obtenue par le filtrage défini en (4.40), peut être réalisé en utilisant les coefficients suivants :

$$\begin{aligned}
 a_{1x}^+ &= K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{\alpha - \beta} - \frac{e^{(\beta-\alpha)}}{\alpha + \beta} \right) \\
 a_{0x}^+ &= \frac{2\beta K_s}{\beta^2 - \alpha^2} \\
 a_{1x}^- &= K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{\alpha + \beta} + \frac{e^{(\beta-\alpha)}}{\beta - \alpha} \right)
 \end{aligned} \tag{4.56}$$



$$\begin{aligned}
 a_{2x}^- &= \frac{2\beta K_s}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot e^{-2\alpha} \\
 a_{1y}^+ &= K_d \cdot (e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)}) \\
 a_{0y}^+ &= 0 \\
 a_{1y}^- &= -K_d \cdot (e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)}) \\
 a_{2y}^- &= 0 .
 \end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée première dans la direction  $y$ , utilisant le filtre défini par l'équation (4.41) se réalise de façon similaire en permutant les coefficients  $a_{0x}^+$ ,  $a_{1x}^+$ ,  $a_{1x}^-$  et  $a_{2x}^-$  avec les coefficients  $a_{0y}^+$ ,  $a_{1y}^+$ ,  $a_{1y}^-$  et  $a_{2y}^-$ .

#### 4.2.4 Filtre de dérivée seconde

Afin de calculer la réponse 2-D du filtre  $\underline{\underline{l}}(i, j)$  défini par l'équation (4.44), on utilise tout d'abord les coefficients suivants afin de calculer la réponse du filtre  $\underline{\underline{l}}_{xx}(i, j)$  décrit par l'équation (4.45) :

$$\begin{aligned}
 a_{1x}^+ &= K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{\alpha - \beta} - \frac{e^{(\beta-\alpha)}}{\alpha + \beta} \right) \\
 a_{0x}^+ &= \frac{2\beta K_s}{\beta^2 - \alpha^2} \\
 a_{1x}^- &= K_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{\alpha + \beta} + \frac{e^{(\beta-\alpha)}}{\beta - \alpha} \right) \\
 a_{2x}^- &= \frac{2\beta K_s}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot e^{-2\alpha} \\
 a_{1y}^+ &= K_l \cdot (\alpha - \beta) \cdot e^{-(\alpha+\beta)} - (\alpha + \beta) \cdot e^{(\beta-\alpha)} \\
 a_{0y}^+ &= \alpha + \beta + K_l \cdot (\beta - \alpha) \\
 a_{1y}^- &= (\alpha + \beta) \cdot e^{-(\alpha+\beta)} + K_l \cdot (\beta - \alpha) \cdot e^{(\beta-\alpha)} \\
 a_{2y}^- &= -(\alpha + \beta + K_l \cdot (\beta - \alpha)) \cdot e^{-2\alpha} .
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

La réponse à  $\underline{\underline{l}}_{yy}(i, j)$  de l'équation (4.46) est ensuite déterminée en permutant les coefficients  $a_{0x}^+$ ,  $a_{1x}^+$ ,  $a_{1x}^-$  et  $a_{2x}^-$  avec les coefficients  $a_{0y}^+$ ,  $a_{1y}^+$ ,  $a_{1y}^-$  et  $a_{2y}^-$ . Finalement, la réponse globale  $\underline{\underline{l}}(i, j)$  est obtenue en additionnant les réponses des filtres  $\underline{\underline{l}}_{xx}(i, j)$  et à  $\underline{\underline{l}}_{yy}(i, j)$  (cf. équation (4.44)).

Pour toutes ces implantations récursives, les autres coefficients sont donnés par :

$$b_1 = e^{(\beta-\alpha)} + e^{-(\alpha+\beta)} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= -e^{-2\alpha} \\
K_d &= \frac{2(1 - e^{(\beta-\alpha)})(1 - e^{-(\alpha+\beta)})}{e^{-(\alpha+\beta)} - e^{(\beta-\alpha)}} \\
K_s &= -\frac{(\alpha^2 - \beta^2).(1 - e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)} + e^{-2\alpha})}{\beta.(1 - e^{-2\alpha}) + \alpha.(e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)})} \\
K_l &= \frac{2(\alpha + \beta).(1 + e^{-(\alpha+\beta)} - e^{(\beta-\alpha)} - e^{-2\alpha})}{(\alpha - \beta).(1 - e^{-(\alpha+\beta)} + e^{(\beta-\alpha)} - e^{-2\alpha})} .
\end{aligned}$$

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une implantation récursive des filtres hyperboliques permettant leur utilisation sur des images numériques bidimensionnelles. L'opération de lissage 2D peut être réalisée en utilisant seulement 10 multiplications et 11 additions pour chaque pixel de l'image, et 26 multiplications et 25 additions suffisent pour estimer le gradient et le Laplacien en chaque point de l'image.

La complexité algorithmique reste constante quelle que soit l'étendue efficace du filtre, ce qui n'est pas le cas pour les implantations non récursives pour lesquelles le nombre de calculs est proportionnel à la taille du masque au carré. Il faut noter que les calculs doivent être réalisés avec une précision suffisante pour éviter de propager des erreurs d'arrondi [Der87].

# Chapitre 5

## Résultats expérimentaux

Dans le chapitre 3, nous avons comparé différents détecteurs de contours sur la base de l'évaluation de critères de performances calculés de manière analytique. Dans ce chapitre, nous présentons une comparaison des détecteurs de contours réalisée grâce à des résultats expérimentaux. Les opérateurs, implantés selon la technique récursive présentée au chapitre 4, ont été utilisés sur des signaux monodimensionnels, puis sur des images bidimensionnelles, synthétiques et réelles.

### 5.1 Comparaison dans le cas monodimensionnel

#### 5.1.1 Mode opératoire

Les performances du détecteur de contours proposé ont tout d'abord été évaluées sur un modèle monodimensionnel de contours avant son extension au cas bidimensionnel. Nous avons testé les détecteurs sur deux profils de contour : l'échelon unitaire qui permet de modéliser une variation brutale du niveau de gris de l'image et le profil de type sigmoïde pour simuler une variation plus progressive. Ces contours sont échantillonnés sur l'intervalle  $[-150, 150]$  au pas de 1. Ils sont représentés sur la figure 5.1.

Ces contours ont ensuite été dégradés par addition de bruit blanc Gaussien, de moyenne nulle et d'écart types  $\sigma = 1/25$  ou  $\sigma = 1/5$ . Le rapport signal sur bruit, défini comme le rapport de l'amplitude du contour, ici fixée à 1, sur l'écart type du bruit, est égal à 25 ou à 5. Les profils bruités sont représentés sur la figure 5.2.

Pour trois valeurs de  $\alpha$ , à savoir  $\alpha = 3/2$ ,  $\alpha = 1$ , et  $\alpha = 1/2$ , nous avons comparé

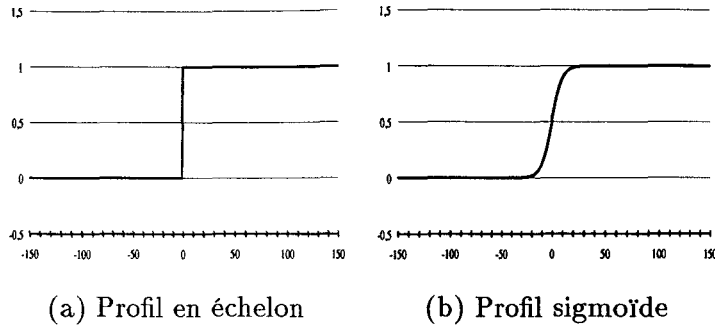
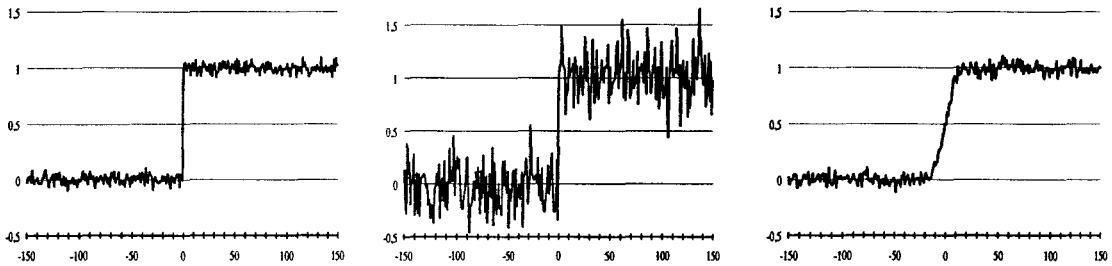


Figure 5.1 : Profils de contour utilisés



(a) Echelon +  $N(\sigma = 1/25)$  (b) Echelon +  $N(\sigma = 1/5)$  (c) Sigmoïde +  $N(\sigma = 1/25)$

Figure 5.2 : Profils bruités

les réponses des détecteurs de Shen & Castan, du second opérateur de Deriche, et de notre détecteur hyperbolique. Pour cette comparaison, le détecteur de Shen & Castan est normalisé selon l'expression :

$$f_s(x) = -\frac{1 - e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}} \cdot \text{sign}(x) \cdot e^{-\alpha|x|} \quad (5.1)$$

alors que celui de Deriche est recadré de la façon suivante :

$$f_{d2}(x) = -\frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}} \cdot x \cdot e^{-\alpha|x|} \quad (5.2)$$

Pour le détecteur hyperbolique, la valeur du coefficient  $\beta$  est fixée à la moitié de celle du coefficient  $\alpha$ , ce qui permet d'obtenir un compromis raisonnable entre les critères de localisation et détection du filtre et son critère de réponses multiples (*cf.* conclusion du chapitre 3).

### 5.1.2 Résultats pour un échelon peu bruité

Les résultats fournis par les différents détecteurs de contours testés, sur le profil de type échelon de rapport signal sur bruit égal à 25, sont présentés sur les figures 5.3, 5.4 et 5.5. Les réponses des opérateurs sont peu bruitées et le maximum local est parfaitement

visible au niveau de la position du contour. On vérifie aisément qu'une diminution du paramètre  $\alpha$  permet d'augmenter l'effet de lissage du filtre.

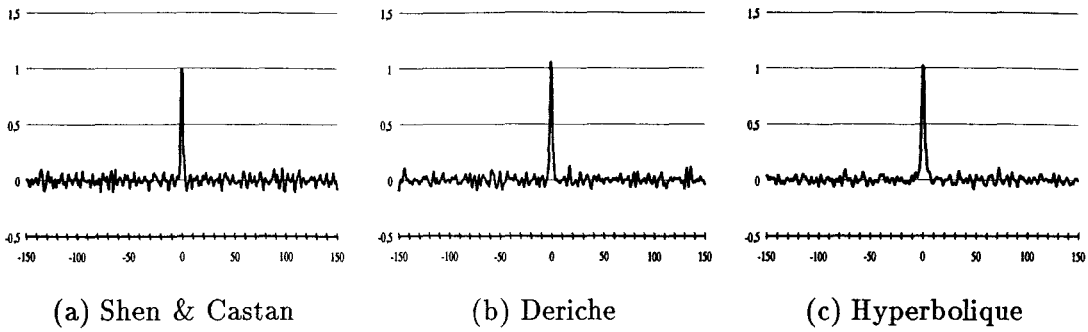


Figure 5.3 : Résultats pour  $\alpha = 3/2$

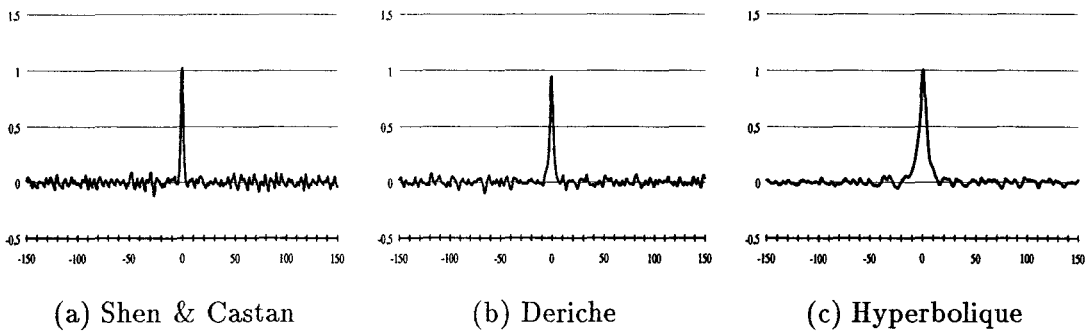


Figure 5.4 : Résultats pour  $\alpha = 1$

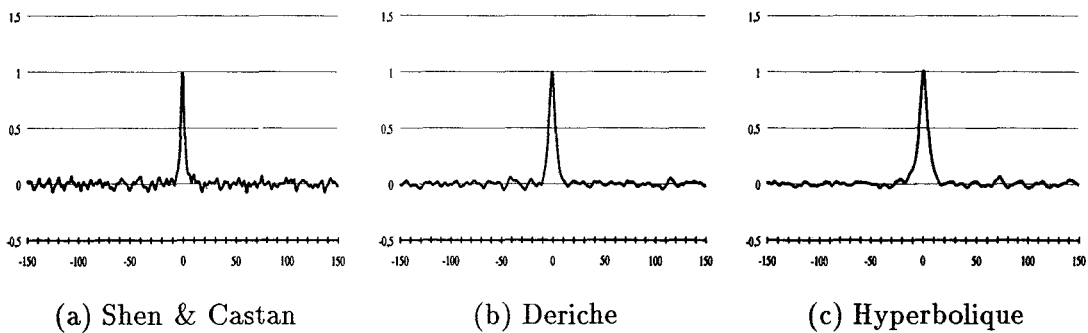


Figure 5.5 : Résultats pour  $\alpha = 1/2$

### 5.1.3 Résultats pour un échelon très bruité

#### 5.1.3.1 Résultats pour $\alpha = 3/2$

Les résultats fournis par les différents détecteurs de contours testés, avec  $\alpha = 3/2$ , sont présentés sur la figure 5.6. Les réponses des opérateurs sont très bruitées et de nombreux

pics incorrects tendent à cacher le maximum local apparaissant au niveau de la position du contour. Cependant, bien que les trois réponses au niveau de l'échelon soient d'amplitude comparables, c'est celle de notre filtre hyperbolique qui se démarque le mieux des pics parasites.

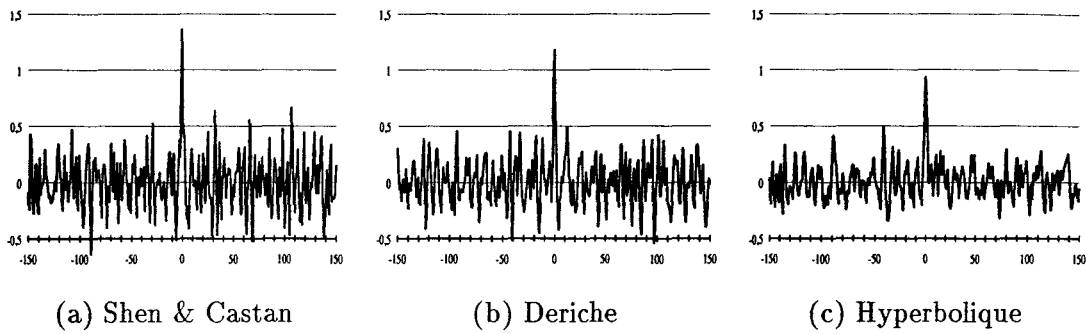


Figure 5.6 : Résultats pour  $\alpha = 3/2$

### 5.1.4 Résultats pour $\alpha = 1$

La figure 5.7 montre qu'une valeur de  $\alpha$  plus faible, maintenant fixée à 1, donne de meilleurs résultats pour les trois détecteurs. En particulier, le rapport des amplitudes entre le maximum de la réponse au niveau du contour et les pics incorrects est sensiblement amélioré. C'est avec le filtre hyperbolique que ce rapport est le plus favorable à l'extraction du contour.

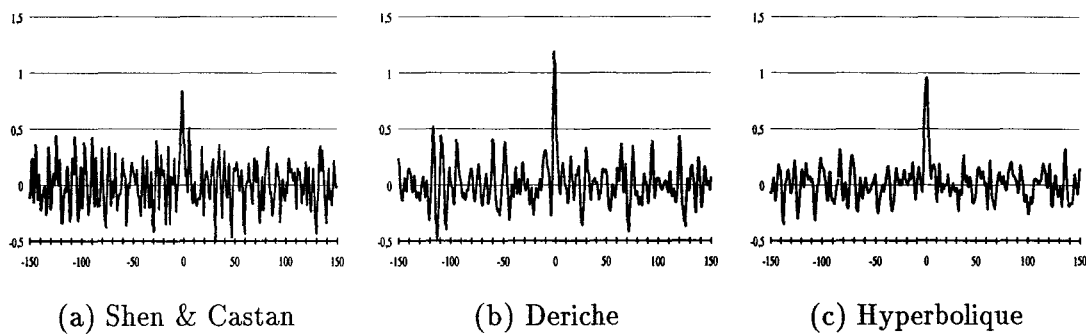


Figure 5.7 : Résultats pour  $\alpha = 1$

### 5.1.5 Résultats pour $\alpha = 1/2$

Finalement, les meilleures réponses sont obtenues pour  $\alpha = 1/2$  (cf. figure 5.8). Bien que le contour puisse être détecté sans ambiguïté dans chacune des réponses, la moins

bonne est celle du filtre de Shen & Castan. Le détecteur de Deriche se comporte de façon satisfaisante, mais la meilleure réponse est obtenue avec notre détecteur pour lequel  $\beta$  a été fixé, rappelons le, à la moitié de  $\alpha$ , c'est à dire  $1/4$ .

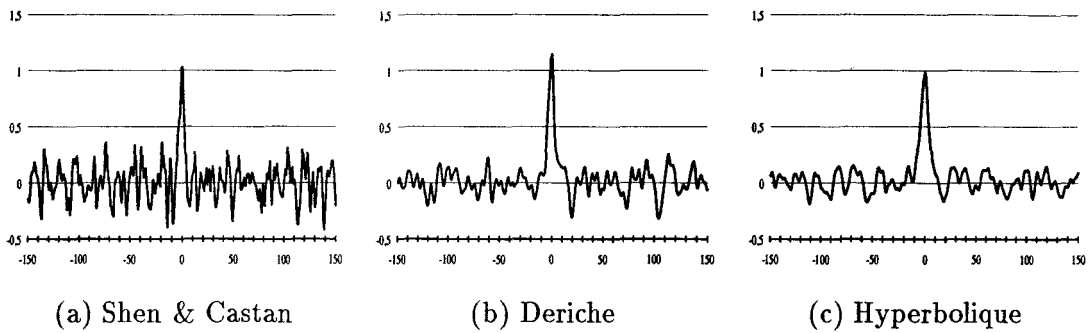


Figure 5.8 : Résultats pour  $\alpha = 1/2$

### 5.1.6 Résultats pour une sigmoïde

Les détecteurs ont été testés sur un contour de profil sigmoïde, qui permet de simuler une variation progressive du niveau de gris dans l'image. La sigmoïde est définie par l'équation :

$$s(x) = \frac{1}{1 + e^{-x/e}} \quad (5.3)$$

Pour nos tests, nous avons choisi une étendue  $e$  de la sigmoïde égale à 5. Un bruit blanc Gaussien de variance  $1/25$  a été ajouté au contour idéal. Les résultats sont présentés sur les figures 5.9, 5.10 et 5.11.

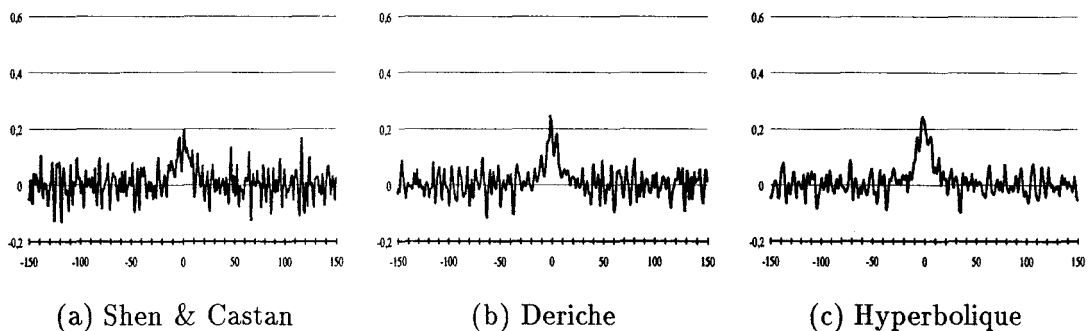
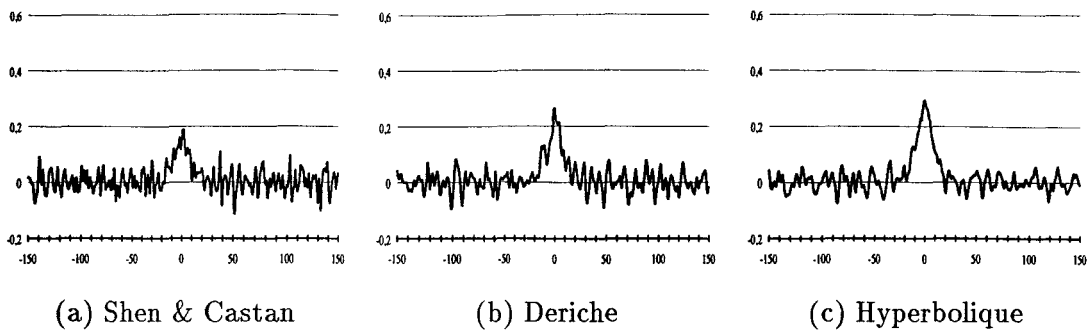
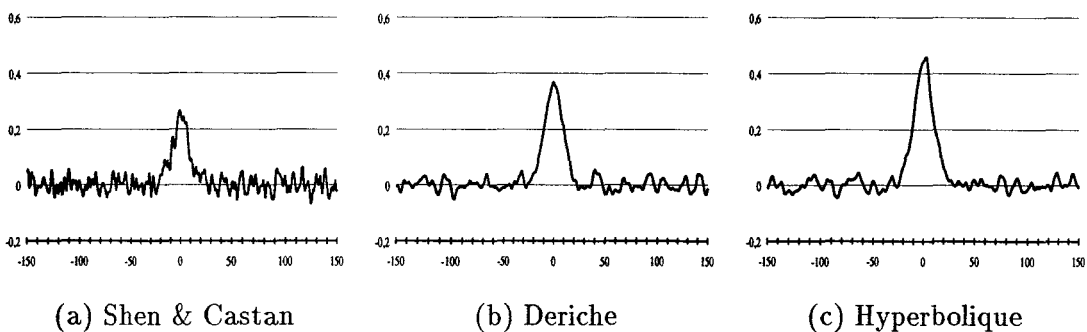


Figure 5.9 : Résultats pour  $\alpha = 3/2$

Pour  $\alpha = 3/2$ , les réponses fournies par les trois détecteurs sont très bruitées, et le contour est localisé de façon peu précise. On constate cependant la supériorité du détecteur hyperbolique.

Figure 5.10 : Résultats pour  $\alpha = 1$ 

Pour  $\alpha = 1$ , les réponses des détecteurs au niveau de la position du contour sont clairement marquées, l'information utile étant extraite du bruit. Le détecteur hyperbolique s'avère encore plus efficace que les deux autres filtres.

Figure 5.11 : Résultats pour  $\alpha = 1/2$ 

Pour  $\alpha = 1/2$ , les réponses sont correctes, l'effet de lissage des trois filtres étant plus prononcé. On constate que le filtre de Deriche est plus performant que celui de Shen & Castan, puisque la réponse au contour est exempte de perturbations dues au bruit. Avec ce jeu de paramètres, c'est encore le filtre hyperbolique qui fournit la réponse la plus claire au contour.

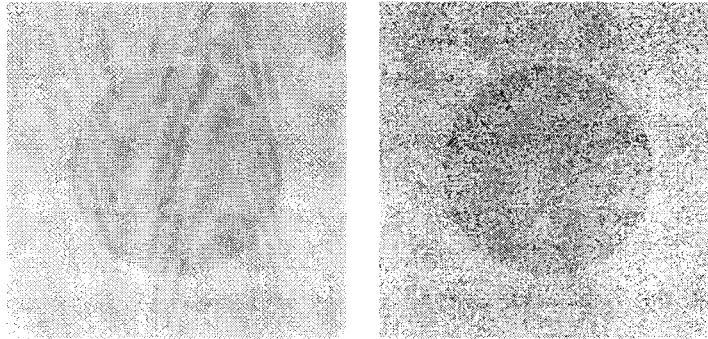
## 5.2 Comparaison sur une image de synthèse

### 5.2.1 Mode opératoire

Afin d'examiner les performances de l'opérateur, nous étudions son comportement sur une image de synthèse contenant un contour idéal délimitant un disque (*cf.* figure 5.12(a)). La différence de niveau de gris entre l'intérieur du disque et le fond a été fixée à 10, sur une échelle de niveaux de gris qui s'échelonne de 0 à 255. Un bruit blanc Gaussien d'écart type



10 sur cette échelle a ensuite été ajouté à l'image (*cf.* figure 5.12(b)). Le rapport signal sur bruit de cette image est donc de 1. Afin de tester l'efficacité relative de notre méthode de détection de contours, nous avons implanté, en plus du détecteur hyperbolique, les opérateurs de Shen & Castan et de Deriche.



(a) Image initiale

(b) Image bruitée

**Figure 5.12** : Image de synthèse

La même image a été utilisée comme entrée des trois détecteurs de contours. Les images de contours présentées ont toutes été obtenues en déterminant l'amplitude du gradient en chaque pixel de l'image. Le contraste des images résultat a été étendu afin d'occuper toute la gamme des niveaux de gris, entre 0 et 255, grâce à une transformation linéaire de l'échelle des niveaux de gris.

Les résultats présentés sur les figures 5.13 à 5.15 illustrent les performances du détecteur hyperbolique par rapport aux opérateurs de Shen & Castan et de Deriche. Les paramètres sont les mêmes que ceux utilisés dans le cas monodimensionnel.

### 5.2.2 Résultats pour $\alpha = 3/2$

Les sorties des trois détecteurs, pour  $\alpha = 3/2$ , sont présentées sur la figure 5.13. Sur l'image réelle, les résultats corroborent ceux du cas monodimensionnel. Il est évident, d'après ces images, que le détecteur de Shen & Castan est très sensible au bruit (*cf.* figure 5.13(a)). Pour ce réglage de  $\alpha$ , les performances du filtre hyperbolique (*cf.* figure 5.13(c)) sont meilleures que celles du filtre de Deriche (*cf.* figure 5.13(b)).

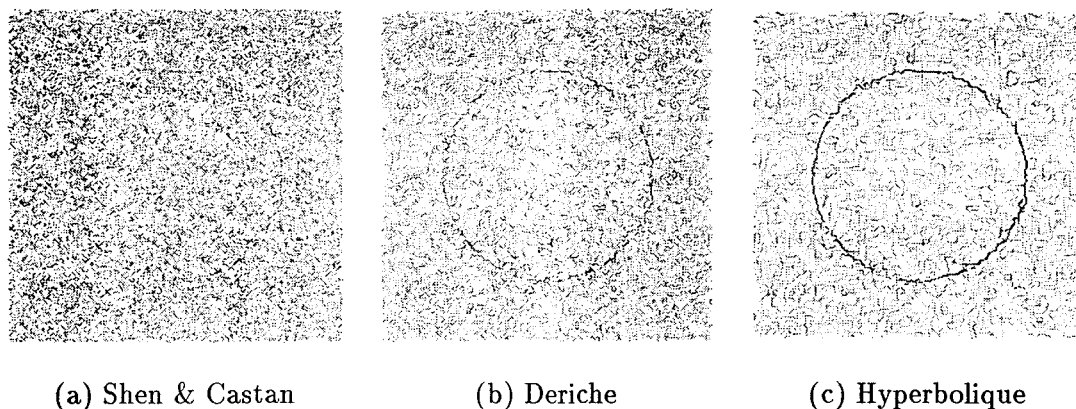


Figure 5.13 : Résultats pour  $\alpha = 3/2$

### 5.2.3 Résultats pour $\alpha = 1$

Pour une meilleure compréhension, nous fournissons les résultats obtenus avec les trois opérateurs pour  $\alpha = 1$  (*cf.* figure 5.14). Le filtre hyperbolique (*cf.* figure 5.14(c)) surpasse celui de Shen & Castan. Cependant, la différence entre les images fournies par le détecteur hyperbolique et celui de Deriche est moins sensible (*cf.* figures 5.14(b) et 5.14(c)).

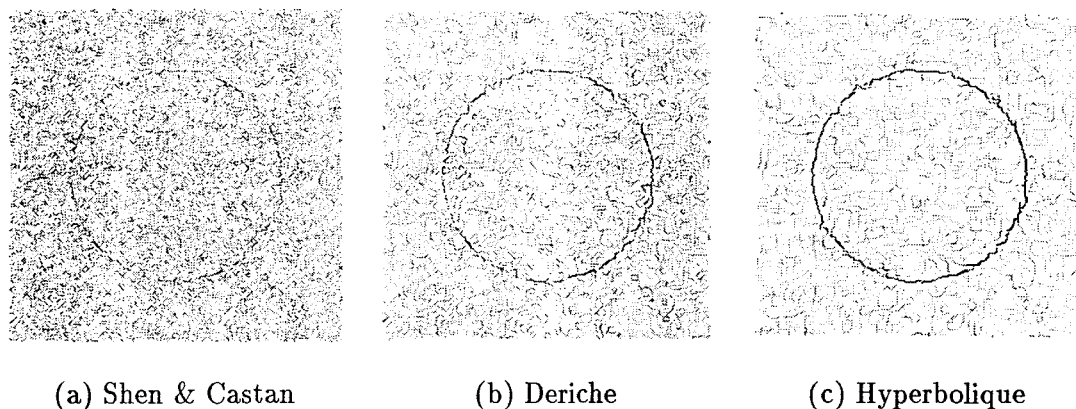


Figure 5.14 : Résultats pour  $\alpha = 1$

### 5.2.4 Résultats pour $\alpha = 1/2$

Nous avons également comparé les résultats fournis par les trois détecteurs pour  $\alpha = 1/2$  (*cf.* figure 5.15). Sur ces images, on constate aisément la supériorité du détecteur hyperbolique, qui fournit un contour qui se distingue nettement des contours parasites dûs au bruit.

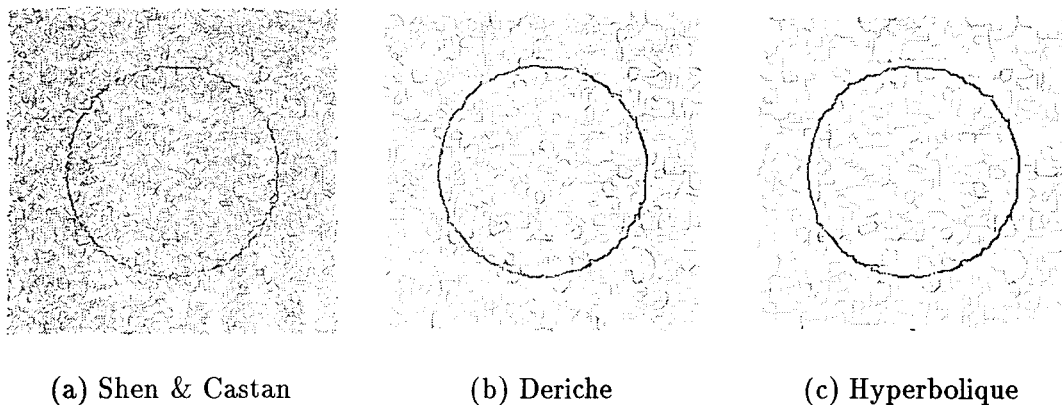


Figure 5.15 : Résultats pour  $\alpha = 1/2$

### 5.3 Comparaison sur une image réelle

La comparaison et l'évaluation des détecteurs de contours sur des images réelles est un problème difficile [PM82, Har85]. La même image a été utilisée comme entrée pour les trois détecteurs de contours testés (cf. figure 5.16).



Figure 5.16 : Image réelle

Les images de contours présentées ont toutes été obtenues selon la procédure décrite ci-après. Dans un premier temps, l'amplitude du gradient est calculée en chaque pixel de l'image. L'image de gradient est ensuite seuillée avec hystérésis, selon la méthode proposée par Canny [Can83]. Un pixel est tout d'abord marqué comme point de contour si l'amplitude du gradient à sa position est supérieure à un seuil haut. On étend ensuite le contour de façon itérative en lui connectant les pixels qui, situés dans la direction du

contour, ont une amplitude du gradient supérieure à un seuil bas. Tous les contours visualisés dans les images présentées sur les figures suivantes ont été extraits en utilisant un seuil haut de 10 et un seuil bas de 1, les niveaux de gris des images variant de 0 à 255.

### 5.3.1 Résultats pour $\alpha = 1/2$

Les sorties des trois détecteurs, pour  $\alpha = 3/2$ , sont présentées sur la figure 5.17. Sur l'image réelle, les résultats corroborent ceux du cas monodimensionnel. Il est évident, d'après ces images, que le détecteur de Shen & Castan est très sensible au bruit (*cf.* figure 5.17(a)). Pour ce réglage de  $\alpha$ , les performances du filtre hyperbolique (*cf.* figure 5.17(c)) sont meilleures que celles du filtre de Deriche (*cf.* figure 5.17(b)).

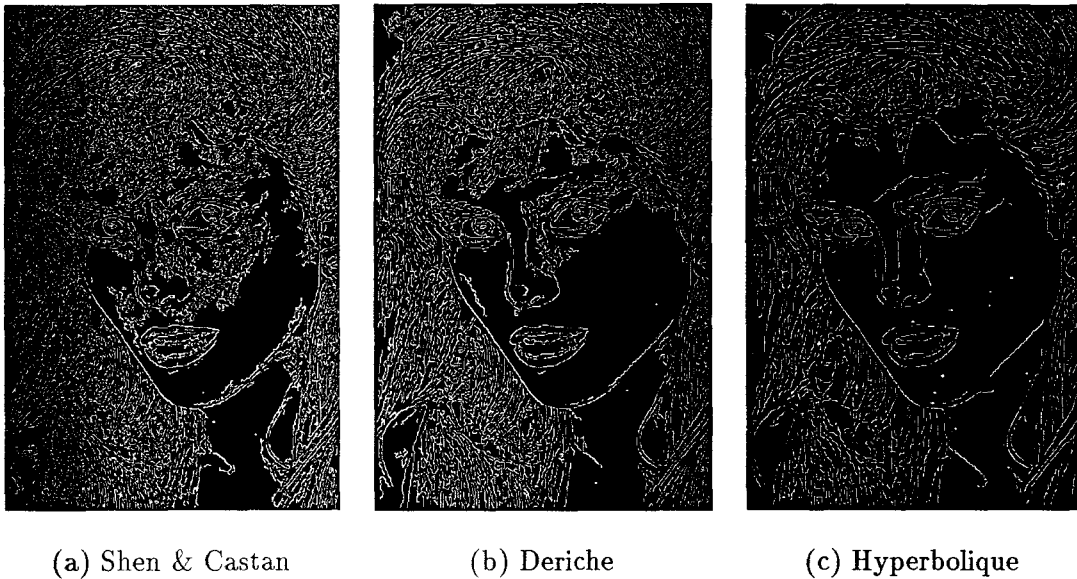


Figure 5.17 : Résultats pour  $\alpha = 3/2$

### 5.3.2 Résultats pour $\alpha = 1$

La figure 5.18 présente les résultats obtenus pour  $\alpha = 1$ . Le filtre hyperbolique (*cf.* figure 5.18(c)) surpasse celui de Shen & Castan à la fois en ce qui concerne la mise en évidence des structures significatives de l'image, et la continuité des contours détectés. Cependant, bien qu'on puisse remarquer une différence entre les images fournies par le détecteur hyperbolique et celui de Deriche dans le cas monodimensionnel, ils donnent sensiblement les mêmes résultats sur une image réelle (*cf.* figures 5.18(b) et 5.18(c)).



(a) Shen &amp; Castan

(b) Deriche

(c) Hyperbolique

Figure 5.18 : Résultats pour  $\alpha = 1$ 

### 5.3.3 Résultats pour $\alpha = 3/2$

Enfin, nous avons comparé les trois détecteurs pour  $\alpha = 1/2$  (cf. figure 5.15). Nous sentons que le détecteur hyperbolique, dans une application qui nécessite la détection de structures significatives noyées dans une masse de contours diffus et dégradés par du bruit, est globalement le plus efficace, bien que son efficacité soit plus facile à mettre en évidence que dans le cas monodimensionnel. Cependant, en comparant de façon fine les images des figures 5.19(b) et 5.19(c), on peut noter que les contours fournis par le détecteur hyperbolique sont plus lisses et réguliers que ceux résultant du traitement par l'opérateur de Deriche.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit une méthode permettant d'implanter de façon efficace les traitements nécessaires au filtrage d'une image numérique par un des filtres hyperboliques. Puisque la réponse impulsionnelle de ces filtres peut se décomposer en deux termes dont les transformées en  $z$  sont des fractions rationnelles, nous avons montré que le calcul de leur réponse à un signal numérique peut être réalisé de façon exacte en utilisant deux équations récurrentes.

Ainsi, il suffit d'un nombre limité d'opérations élémentaires pour estimer la réponse du



(a) Shen &amp; Castan

(b) Deriche

(c) Hyperbolique

Figure 5.19 : Résultats pour  $\alpha = 1/2$ 

filtre en chaque point de l'image. Pourtant, il faut noter que l'algorithme récursif ne peut s'implanter de façon efficace que sur des ordinateurs fonctionnant en mode séquentiel, puisque le calcul réalisé pour un pixel utilise les résultats obtenus sur les pixels voisins.

# Conclusion

Dans ce mémoire, dédié à la détection de contours, nous avons proposé un nouvel opérateur linéaire dont la réponse impulsionnelle est une fonction sinus hyperbolique amortie.

Des outils analytiques ont été employés afin de démontrer les performances du détecteur de contours que nous proposons, en termes de détection, de localisation et de réponses multiples, dans le contexte de la détection de contours de type échelon. Les résultats analytiques démontrent que les performances globales de ce nouveau détecteur hyperbolique sont au moins égales à celles des opérateurs conventionnels.

L'efficacité en termes de traitement numérique a été un critère important que nous avons retenu lors de la création de notre algorithme récursif. L'implantation que nous utilisons a été réalisée en langage assembleur sur un ordinateur de type PC-486 à 33Mhz. Le temps de traitement est typiquement de 0,2 seconde sur une image 256 par 256 pixels.

Nous avons illustré les performances du détecteur de contours en utilisant des images synthétiques ainsi que des images réelles afin de fournir au lecteur des exemples du comportement de ce nouveau filtre qui donne de meilleurs résultats que d'autres procédures de détection de contour.

Il faut noter que les performances des détecteurs n'ont été comparées analytiquement que dans le cas continu, alors qu'il ont été réellement implantés en tant que filtres discrets. Aussi, nous travaillons sur la mise au point d'une méthode formelle de comparaison basée sur des critères définis dans le cas discret, qui s'avèrera certainement plus adaptée à ce genre d'étude.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>La détection de contours dans une image</b>	<b>7</b>
1.1	Réhaussement des contours . . . . .	8
1.1.1	Lissage de l'image . . . . .	9
1.1.1.1	Opérateurs linéaires . . . . .	10
1.1.1.2	Filtre moyenneur . . . . .	11
1.1.1.3	Lissage Gaussien . . . . .	12
1.1.1.4	Filtres optimaux . . . . .	12
1.1.2	Méthodes de lissage non linéaires . . . . .	13
1.1.2.1	Méthodes linéaires modifiées . . . . .	13
1.1.2.2	Opérateurs morphologiques . . . . .	14
1.1.2.3	Filtres de rang, filtre médian . . . . .	14
1.1.3	Opérateurs similaires à une dérivée première . . . . .	15
1.1.3.1	Opérateurs linéaires directionnels . . . . .	15
1.1.3.2	Estimation du gradient . . . . .	16
1.1.3.3	Evaluation des moments . . . . .	17
1.1.3.4	Opérateurs statistiques . . . . .	18
1.1.3.5	Autres méthodes non linéaires . . . . .	19
1.1.4	Opérateurs similaires à une dérivée seconde . . . . .	20
1.1.4.1	Estimation du Laplacien . . . . .	20
1.1.4.2	Dérivée seconde directionnelle . . . . .	21
1.2	Les post-traitements . . . . .	21
1.2.1	Seuillage par hystéresis . . . . .	22
1.2.1.1	Approche gradient . . . . .	22
1.2.1.2	Approche Laplacien . . . . .	23



1.2.2	Les contours actifs . . . . .	23
1.3	Conclusion . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Performances d'un détecteur de contours</b>	<b>26</b>
2.1	Mesures basées sur l'analyse du résultat . . . . .	27
2.1.1	Travaux de Fram & Deutsch . . . . .	28
2.1.2	Travaux d'Abdou & Pratt . . . . .	28
2.1.3	Travaux de Kitchen & Rosenfeld . . . . .	29
2.1.4	Travaux de Peli & Malah . . . . .	30
2.1.5	Travaux de Bryant & Bouldin . . . . .	31
2.2	Analyse de la réponse indicielle . . . . .	32
2.2.1	Critères de Canny . . . . .	32
2.2.1.1	Critère de détection . . . . .	33
2.2.1.2	Critère de localisation . . . . .	33
2.2.1.3	Critère de réponses multiples . . . . .	34
2.2.2	Critère de Tagarre & de Figueiredo . . . . .	35
2.2.3	Critère de Sarkar & Boyer . . . . .	36
2.2.4	Critère de Koplowitz & Greco . . . . .	37
2.2.5	Critère de Shen & Castan . . . . .	37
2.3	Définition de filtres optimaux . . . . .	39
2.3.1	Filtre optimal de Canny . . . . .	40
2.3.2	Filtre optimal de Deriche . . . . .	41
2.3.3	Filtre optimal de Tagarre & de Figueiredo . . . . .	42
2.3.4	Filtre optimal de Shen & Castan . . . . .	42
2.3.5	Filtre optimal de Sarkar & Boyer . . . . .	43
2.3.6	Filtre optimal de Spacek . . . . .	44
2.3.7	Filtre optimal de Petrou & Kittler . . . . .	44
2.3.8	Filtre optimal de Bourennane <i>et coll.</i> . . . . .	45
2.4	Conclusion . . . . .	45
<b>3</b>	<b>La famille d'opérateurs hyperboliques</b>	<b>47</b>
3.1	Les opérateurs hyperboliques . . . . .	48

3.1.1	Le détecteur de contours . . . . .	48
3.1.2	Le filtre de lissage . . . . .	49
3.1.3	Le filtre de dérivée seconde . . . . .	50
3.2	Comparaison des performances . . . . .	51
3.2.1	Les critères de comparaison retenus . . . . .	52
3.2.1.1	Critère de détection de Canny . . . . .	52
3.2.1.2	Critère de localisation . . . . .	52
3.2.1.3	Critère de réponses multiples . . . . .	52
3.2.2	Les filtres retenus pour la comparaison . . . . .	53
3.2.2.1	Le filtre de Canny . . . . .	53
3.2.2.2	Les filtres de Deriche . . . . .	54
3.2.2.3	Le filtre de Shen & Castan . . . . .	55
3.2.3	Résultats de la comparaison . . . . .	56
3.2.3.1	Produit $\Sigma\Lambda$ . . . . .	57
3.2.3.2	Critère de réponses multiples . . . . .	58
3.2.3.3	Discussion . . . . .	59
3.3	Conclusion . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Implantation récursive</b>	<b>62</b>
4.1	Implantation récursive monodimensionnelle . . . . .	63
4.1.1	Généralités . . . . .	63
4.1.2	Détecteur de contours . . . . .	64
4.1.3	Filtre de lissage . . . . .	66
4.1.4	Dérivée seconde . . . . .	68
4.2	Extension bidimensionnelle . . . . .	69
4.2.1	La procédure générale de filtrage . . . . .	70
4.2.2	Filtre de lissage . . . . .	72
4.2.3	Filtre de dérivée première . . . . .	72
4.2.4	Filtre de dérivée seconde . . . . .	73
4.3	Conclusion . . . . .	74

<b>5 Résultats expérimentaux</b>	<b>75</b>
5.1 Comparaison dans le cas monodimensionnel . . . . .	75
5.1.1 Mode opératoire . . . . .	75
5.1.2 Résultats pour un échelon peu bruité . . . . .	76
5.1.3 Résultats pour un échelon très bruité . . . . .	77
5.1.3.1 Résultats pour $\alpha = 3/2$ . . . . .	77
5.1.4 Résultats pour $\alpha = 1$ . . . . .	78
5.1.5 Résultats pour $\alpha = 1/2$ . . . . .	78
5.1.6 Résultats pour une sigmoïde . . . . .	79
5.2 Comparaison sur une image de synthèse . . . . .	80
5.2.1 Mode opératoire . . . . .	80
5.2.2 Résultats pour $\alpha = 3/2$ . . . . .	81
5.2.3 Résultats pour $\alpha = 1$ . . . . .	82
5.2.4 Résultats pour $\alpha = 1/2$ . . . . .	82
5.3 Comparaison sur une image réelle . . . . .	83
5.3.1 Résultats pour $\alpha = 1/2$ . . . . .	84
5.3.2 Résultats pour $\alpha = 1$ . . . . .	84
5.3.3 Résultats pour $\alpha = 3/2$ . . . . .	85
5.4 Conclusion . . . . .	85

<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>
----------------------	-----------

<b>Annexes</b>	<b>106</b>
----------------	------------

<b>A Normalisation des filtres hyperboliques</b>	<b>106</b>
A.1 Formules de base utilisées . . . . .	106
A.2 Normalisation des filtres continus . . . . .	106
A.2.1 Détecteur hyperbolique de contours . . . . .	106
A.2.2 Filtre hyperbolique de lissage . . . . .	107
A.3 Normalisation des filtres discrets . . . . .	107
A.3.1 Détecteur hyperbolique de contours . . . . .	107

---

A.3.2	Filtre hyperbolique de lissage . . . . .	108
A.3.3	Filtre hyperbolique de dérivée seconde . . . . .	108
<b>B</b>	<b>Calcul des mesures de performances</b>	<b>109</b>
B.1	Formules de base utilisées . . . . .	109
B.2	Les critères . . . . .	109
B.3	Filtre de Canny . . . . .	110
B.3.1	Valeurs et intégrales intervenant dans les critères . . . . .	110
B.3.2	Calcul des critères . . . . .	111
B.4	Filtre de Deriche . . . . .	111
B.4.1	Valeurs et intégrales intervenant dans les critères . . . . .	112
B.4.2	Calcul des critères pour le filtre général . . . . .	113
B.4.3	Calcul des critères pour le filtre simplifié . . . . .	113
B.5	Filtre hyperbolique . . . . .	113
B.5.1	Calcul des critères . . . . .	114
B.6	Filtre de Shen & Castan . . . . .	114
B.6.1	Prolongement par une fonction continue . . . . .	114
B.6.2	Valeurs et intégrales intervenant dans les critères . . . . .	116
B.6.3	Calcul des critères . . . . .	116
B.6.4	Commentaire . . . . .	117

# Liste des figures

I.1	Détection de contours par le système visuel humain . . . . .	4
I.2	Différents profils de niveaux de gris d'un contour image . . . . .	5
1.1	Filtres de dérivée première par convolution . . . . .	17
1.2	Masques d'estimation du gradient par <i>template matching</i> . . . . .	17
2.1	Profil des niveaux de gris sur une ligne d'une image . . . . .	27
2.2	Continuité du contour détecté . . . . .	29
3.1	Réponse impulsionnelle du filtre hyperbolique de détection de contours . . . . .	49
3.2	Réponse impulsionnelle du filtre hyperbolique de lissage . . . . .	50
3.3	Réponse impulsionnelle du filtre hyperbolique de dérivée seconde . . . . .	51
3.4	Réponse impulsionnelle du filtre de Canny . . . . .	54
3.5	Réponses impulsionnelles des filtres de Deriche . . . . .	55
3.6	Réponse impulsionnelle du filtre simplifié de Deriche . . . . .	56
3.7	Réponse impulsionnelle du filtre de Shen & Castan . . . . .	57
3.8	Produit $\Sigma\Lambda$ en fonction de $m$ . . . . .	58
3.9	Critère de réponses multiples en fonction de $m$ . . . . .	59
5.1	Profils de contour utilisés . . . . .	76
5.2	Profils bruités . . . . .	76
5.3	Résultats pour $\alpha = 3/2$ . . . . .	77
5.4	Résultats pour $\alpha = 1$ . . . . .	77
5.5	Résultats pour $\alpha = 1/2$ . . . . .	77
5.6	Résultats pour $\alpha = 3/2$ . . . . .	78
5.7	Résultats pour $\alpha = 1$ . . . . .	78

---

5.8	Résultats pour $\alpha = 1/2$ . . . . .	79
5.9	Résultats pour $\alpha = 3/2$ . . . . .	79
5.10	Résultats pour $\alpha = 1$ . . . . .	80
5.11	Résultats pour $\alpha = 1/2$ . . . . .	80
5.12	Image de synthèse . . . . .	81
5.13	Résultats pour $\alpha = 3/2$ . . . . .	82
5.14	Résultats pour $\alpha = 1$ . . . . .	82
5.15	Résultats pour $\alpha = 1/2$ . . . . .	83
5.16	Image réelle . . . . .	83
5.17	Résultats pour $\alpha = 3/2$ . . . . .	84
5.18	Résultats pour $\alpha = 1$ . . . . .	85
5.19	Résultats pour $\alpha = 1/2$ . . . . .	86

# Bibliographie

- [AM87] G.R. Arce et M.P. McLoughlin. Theoretical analysis of the max/median filter. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-35:60–69, 1987.
- [AP79] I.E. Abdou et W.K. Pratt. Quantitative design and evaluation of enhancement/thresholding edge detectors. *Proceedings of the IEEE*, 67(5):753–763, 1979.
- [AWJ90] A.A. Amini, T.E. Weymouth, et R.C. Jain. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-12(9), 1990.
- [Bas94] M. Basu. Gaussian derivative model for edge enhancement. *Pattern Recognition*, 27(11):1451–1461, 1994.
- [BB79] D.J. Bryant et D.W. Bouldin. Evaluation of edge operators using relative and absolute grading. In *Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Pattern Recognition and Image Processing*, pages 138–145, Chicago, IL, 1979.
- [BC82] D.H. Ballard et C.M. Brown. *Computer Vision*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1982.
- [BCR86] R.A. Boie, I.J. Cox, et Rehak. On optimum edge recognition using matched filters. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 100–108, Miami Beach, FL., 1986.
- [Bin81] T.O. Binford. Inferring surfaces from images. *Artificial Intelligence*, 17:205–244, 1981.

- [BPT88] M. Bertero, T. Poggio, et V. Torre. Ill-posed problems in the early vision. *Proceedings of the IEEE*, pages 869–889, 1988.
- [BPT93] E. Bourennane, M. Paindavoine, et F. Truchelet. Amélioration du filtre de canny deriche pour la détection de contours sous forme de rampe. *Traitement du Signal*, 10(8):297–309, 1993.
- [Bro78] M.J. Brooks. Rationalizing edge detectors. *Computer Graphics and Image Processing*, 8:277–285, 1978.
- [Can83] J. Canny. Finding edges and lines in images. Internal Report AI. TR. 720, MIT Artificial Intelligence Laboratory, Cambridge, 1983.
- [Can86] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(11):679–698, 1986.
- [CC93] L.D. Cohen et I. Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons for 2d and 3d images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-15(11):1131–1147, 1993.
- [CH53] R. Courant et D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume 1. New York : Wiley Interscience, 1953.
- [Cha88] J.M. Chassery. *Architectures et Images*. Cours, Equipe de Reconnaissance des Formes et Microscopie Quantitative, 1988.
- [CK72] C.K. Chow et T. Kaneko. Automatic boundary detection of the left ventricle from cineangiograms. *Computer Biomedical Research*, 5:388–410, 1972.
- [Coh91] L.D. Cohen. On active contour models and balloons. *Image Understanding*, 53(2), 1991.
- [CZS89] S. Castan, J. Zhao, et J. Shen. Une famille de détecteurs de contours basée sur le filtre exponentiel optimal. In *7<sup>ème</sup> Congrès AFCET-INRIA, Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle*, pages 23–36, 1989.
- [Dav75] L.S. Davis. A survey of edge detection techniques. *Computer Graphics and Image Processing*, 4:248–270, 1975.



- [DC88] R. Deriche et J.P. Cocquerez. An efficient method to build early image description. In *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition*, Rome, Italie, 1988.
- [Der87] R. Deriche. Using canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *International Journal on Computer Vision*, 1(2):167–187, 1987.
- [Der90] R. Deriche. Fast algorithms for low-level vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(1):78–87, 1990.
- [FD75] J.R. Fram et E.W. Deutsch. On the quantitative evaluation of edge detection schemes and their comparison with human performance. *IEEE Transactions on Computers*, C-24(6):616–628, 1975.
- [GD88] C.R. Giardina et E.R. Dougherty. *Morphological Methods in Image and Signal processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [GGCV95] D. Geiger, A. Gupta, L.A. Costa, et J. Vlontzos. Dynamic programming for detecting, tracking and matching deformable contours. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-17(3):294–302, 1995.
- [GK92] V. Greco et J. Koplowitz. On the edge location error for maximum and zero-crossing edge detectors. In *Proceedings of the SPIE, Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics II*, Boston, MA, 1992.
- [Gol69] M.J.E. Golay. Hexagonal parallel pattern transformation. *IEEE Transactions on Computers*, C-18:733–740, 1969.
- [Gri73a] A.K. Griffith. Edge detection in simple scenes using a priori information. *IEEE Transactions on Computers*, C-22:371–381, 1973.
- [Gri73b] A.K. Griffith. Mathematical models for automatic line detection. *Journal of the Association for Computing Machines*, 20:62–80, 1973.
- [Har84] R.M. Haralick. Digital step edges form zero crossing of second directional derivatives. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6(1):56–68, 1984.

- [Har85] R.M. Haralick. Author reply. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-7:127–129, 1985.
- [Hil81] E.C. Hildreth. The detection of intensity changes by computer and biological vision systems. *Computer Vision Graphics and Image Processing : Image Understanding*, 22:8–14, 1981.
- [HM86] A. Huertas et G. Medioni. Detection of intensity changes with sub-pixel accuracy using laplacian-gaussian masks. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8:651–664, 1986.
- [HN85] P. Heinonen et Y. Neuvo. FIR median filters with FIR substructures. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 49–53, 1985.
- [HS92] R.M. Haralick et L.G. Shapiro. *Computer and Robot Vision*, volume 1. Reading, Addison-Wesley, MA, 1992.
- [HSZ87] R.M. Haralick, S.R. Stenberg, et X. Zhuang. Image analysis using mathematical morphology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-9(4):532–550, 1987.
- [Hue71] M. Hueckel. An operator which locates edges in digitized pictures. *Journal of the Association on Computing Machines*, 18:113–125, 1971.
- [Hum79] R.A. Hummel. Feature detection using basis functions. *Computer Graphics and Image Processing*, 9:40–55, 1979.
- [Hwa85] K. Hwang. *Computer Architecture and Parallel Processing*. Mc Graw Hill, 1985.
- [KG94] J. Koplowitz et V. Greco. On the edge location error for local maximum and zero-crossing edge detectors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-16(12):1207–1212, 1994.
- [Kir71] R. Kirsch. Computer determination of the constituent structure of biological images. *Computer Biomedical Research*, 4(3):315–328, 1971.

- [KM87] A. Kundu et S.K. Mitra. A new algorithm for image edge extraction using a statistical classifier approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-9(4):569–577, 1987.
- [KR81] L. Kitchen et A. Rosenfeld. Edge evaluation using local edge coherence. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-11(9):597–605, 1981.
- [KWT87] M. Kass, A. Witkin, et D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 259–268, London, GB, 1987.
- [LB86a] W.H.H.J. Lunscher et M.P. Beddoes. Optimal edge detector design I : Parameter selection and noise effect. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(2):164–177, 1986.
- [LB86b] W.H.H.J. Lunscher et M.P. Beddoes. Optimal edge detector design II : Coefficient quantization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(2):178–187, 1986.
- [LHS87] J.S.J. Lee, R. Haralick, et L.G. Shapiro. Morphological edge detection. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, RA-3(2):142–155, 1987.
- [LP88] D. Lee et T. Pavlidis. One-dimensional regularisation with discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-10:822–829, 1988.
- [Mac70] I.D.G MacLeod. *On Finding Structures in Pictures*, pages 231–. New York Academic Press, 1970.
- [Mar76] A. Martelli. An application of heuristic search methods to edge and contour detection. *Communications of the Association for Computing Machines*, 19:73–83, 1976.
- [Mar80] D.C. Marr. Early processing of visual information. *Transactions of the Royal Society London B*, 275:187–217, 1980.
- [Mat75] G. Matheron. *Random Sets and Integral*. New York : Wiley, 1975.

- [McD81] M.J. McDonnell. Box filtering techniques. *Computer Graphics and Image Processing*, 17(3):65–70, 1981.
- [MDR91] O. Monga, R. Deriche, et J.M. Rocchisani. 3d edge detection using recursive filtering : Application to scanner images. *Computer Vision Graphics and Image Processing : Image Understanding*, 53(1):76–87, 1991.
- [MF77] J.W. Modestino et R.W. Fries. Edge detection in noisy images using recursive digital filtering. *Computer Graphics and Image Processing*, 6:409–433, 1977.
- [MG81] R. Machuca et A.L. Gilbert. Finding edges in noisy scenes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-3:101–111, 1981.
- [MH80] D.C. Marr et E. Hildreth. Theory of edge detection. *Proceedings of the Royal Society London B*, 207, 1980.
- [ML95] S.D. Ma et B.C. Li. Derivative computation by multiscale filter. In *Europe China Workshop on Geometric Modeling and Invariants*, Xi'an, China, 1995.
- [Mon71] U. Montanari. On the optimal detection of curves in noisy pictures. *Communications of the Association for Computing Machines*, 14:335–345, 1971.
- [MP78] N. Mascarenhas et L. Prado. Edge detection in images : A hypothesis testing approach. In *Proceedings of the IJPCR*, volume 14, pages 707–709, 1978.
- [MR81] D. Morgenthaler et A. Rosenfeld. Multidimensional edge detection by hyper-surface fitting. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-3:482–486, 1981.
- [MS87a] P. Maragos et R.W. Schafer. Morphological filters - part i : Their set-theoretical analysis and relations to linear shift-invariant filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-35(8):1153–1169, 1987.
- [MS87b] P. Maragos et R.W. Schafer. Morphological filters - part ii : Their relations to median, order-statistic, and stack filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-35(8):1170–1184, 1987.

- [NB86] V.S. Nalwa et T.O. Binford. On detecting edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(6):699–714, 1986.
- [Nev77] R. Nevatia. Evaluation of simplified hueckel edge-line detector. *Computer Graphics and Image Processing*, 6(6):582–588, 1977.
- [NHD86] Y. Neuvo, P. Heinson, et I. Defée. New types of edge detectors based on linear and median operators. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 702–704, Miami Beach, FL., 1986.
- [NM79] M. Nagao et T. Matsuyama. Edge preserving smoothing. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 9:394–407, 1979.
- [Pai96] Ph. Paillou. Detecting step edges in noisy sar images : A new linear operator. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, To be published, 1996.
- [PK91] M. Petrou et J. Kittler. Optimal edge detectors for ramp edges. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-13(5):483–491, 1991.
- [PM82] T. Peli et D. Malah. A study of edge detection algorithms. *Computer Graphics and Image Processing*, 20:1–21, 1982.
- [Pog87] T. Poggio. Computer vision. *Proceedings of the SPIE, Image Pattern Recognition*, 755:54–62, 1987.
- [Pra87] W.K. Pratt. Algorithmic based machine vision computing. In *Proceedings of the SPIE, Image Pattern Recognition : Algorithm Implementations, Techniques and Technology*, volume 755, pages 2–12, 1987.
- [Pre70] J.M.S. Prewitt. Object enhancement and extraction. *Picture Processing and Psychopictorics*, 1970.
- [PVY88] T. Poggio, H. Voorhees, et A. Yuille. A regularized solution to edge detection. *Complexity*, 4:106–123, 1988.

- [RdlT83] A. Rosenfeld et P. de la Torre. Histogram concavity analysis as an aid in threshold selection. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-13(3):231–235, 1983.
- [RL72] A. Rosenfeld et Y. Lee. Edge and curve detection, further experiments. *IEEE Transactions on Computers*, C-21:677–715, 1972.
- [Rob65] L.G. Roberts. Machine perception of three-dimensional solids. *Optical and Electro-optical Information Processing*, pages 159–197, 1965.
- [Rou91] N. Rougon. Kinematics of interface evolution with application to active contour models. Internal report, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris, Département Images, 1991.
- [RT71] A. Rosenfeld et M. Thurston. Edge and curve detection for visual scene analysis. *IEEE Transactions on Computers*, C-20(5):562–569, 1971.
- [SB91a] S. Sarkar et K. Boyer. On optimal infinite impulse response edge detection filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-13(11):1154–1171, 1991.
- [SB91b] S. Sarkar et K. Boyer. Optimal infinite impulse response zero-crossing based edge detector. *Computer Vision Graphics and Image Processing : Image Understanding*, 54(2), 1991.
- [SB94] S. Sarkar et K. Boyer. Comments on 'on optimal infinite impulse response edge detection filters'. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-16(1):106–108, 1994.
- [SC86] J. Shen et S. Castan. An optimal linear operator for edge detection. In *IEEE Conference on Vision and Pattern Recognition*, pages 109–114, Miami Beach, FL., 1986.
- [SC92] J. Shen et S. Castan. An optimal linear operator for step edge detection. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 54:112–133, 1992.
- [Sch64] I.J. Schoenberg. Spline functions and the problem of graduation. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 52:947–950, 1964.

- [SDG79] K.S. Shanmugam, F.M. Dickey, et J.A. Green. an optimal frequency domain filter for edge detection in digital pictures. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-1(1):37–49, 1979.
- [Ser82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, GB, 1982.
- [Spa86a] A. Spacek. *The Detection of Contours and their Visual Motion*. PhD thesis, University of Essex, 1986.
- [Spa86b] A. Spacek. Edge detection and motion detection. *Image Vision Computing*, 4:43–56, 1986.
- [SR82] R.E. Suciú et A.P. Reeves. A comparison of differential and moment based edge detectors. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 97–102, 1982.
- [Ste86] S.R. Sternberg. Gray-scale morphology. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 35:333–355, 1986.
- [TA77] A.N. Tikhonov et V.Y. Arsenin. *Solution of ill-posed problems*. Winston and Wiley, Washington, DC, 1977.
- [TdF90] H.D. Tagare et R.J.P. de Figueiredo. On the localization performance measure and optimal edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-12(12):1186–1190, 1990.
- [TdF94] H.D. Tagare et R.J.P. de Figueiredo. Reply to 'on the localization performance measure and optimal edge detection'. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-16(1):108–110, 1994.
- [TP86] V. Torre et T. Poggio. On localization performance measure and optimal edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(2):147–162, 1986.
- [vdH95] F. van der Heijden. Edge and line feature extraction based on covariance models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-17(1):16–33, 1995.

- [WCB95] Y.F. Wan, F. Cabestaing, et J.C. Burie. A new edge detector for obstacle detection with a linear stereo vision system. In *Intelligent Vehicle*, pages 454–459, Detroit, USA, 1995.
- [Wie49] A.P. Wiener. *Extrapolation and Smoothing of Stationary Time Series*. M.I.T. Press, Cambridge, 1949.
- [WPC95a] Y.F. Wan, J.G. Postaire, et F. Cabestaing. Fast recursive algorithms for new image boundary detection. *Software*, 193(3):14–20, 1995.
- [WPC95b] Y.F. Wan, J.G. Postaire, et F. Cabestaing. A new filter for edge detection. In *ICNNSP'95*, pages 443–448, Nanjing, China, 1995.
- [WPC95c] Y.F. Wan, J.G. Postaire, et F. Cabestaing. A new filter for edge detection. In *IASTED/IEEE International Conference on Signal and Image Processing*, pages 440–443, Las Vegas, USA, 1995.
- [WPC95d] Y.F. Wan, J.G. Postaire, et F. Cabestaing. A new laplacian filter for edge detection. In *95'CCC*, pages 127–138, Peking, China, 1995.
- [WPC95e] Y.F. Wan, J.G. Postaire, et F. Cabestaing. Un opérateur hyperbolique pour la détection de contours. In *Quinzième Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, pages 633–636, Juan les Pins, France, 1995.
- [WPC96] Y.F. Wan, J.G. Postaire, et F. Cabestaing. Image smoothing and edge detection. *Journal of Image Processing*, 1996.
- [WR79] J.S. Weszka et A. Rosenfeld. Histogram modification for threshold selection. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-9(1):38–52, 1979.
- [ZHR77] S.W. Zucker, R.A. Hummel, et A. Rosenfeld. An application of relaxation labeling to line and curve enhancement. *IEEE Transactions on Computers*, C-26:394–403, 1977.



# Annexes

# Annexe A

## Coefficients de normalisation des filtres hyperboliques

### A.1 Formules de base utilisées

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|n|} = \frac{1 + e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}$$

### A.2 Normalisation des filtres continus

#### A.2.1 Détecteur hyperbolique de contours

L'opérateur hyperbolique de détection de contours peut être normalisé selon l'expression :

$$\underline{f}_{hyp}(x) = C_d \cdot e^{-\alpha|x|} \cdot \sinh(\beta x)$$

en sélectionnant le paramètre  $C_d$  de telle sorte que la réponse du filtre à un contour de type échelon unité soit égale à un au niveau de la position du contour.

La réponse du détecteur au point  $x_e$  est donnée par :

$$y(x_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_e - x) \underline{f}_{hyp}(x) dx \ .$$

Ainsi, lorsqu'on évalue la réponse pour un échelon unité centré en  $x = 0$ , on obtient :

$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(-x) \underline{f}_{hyp}(x) dx = C_d \int_{-\infty}^0 e^{\alpha x} \sinh \beta x \cdot dx = C_d \frac{\beta}{\beta^2 - \alpha^2} .$$

Une réponse égale à 1 en zéro est donc obtenue pour :

$$C_d = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} .$$

## A.2.2 Filtre hyperbolique de lissage

L'opérateur hyperbolique de lissage a une réponse impulsionnelle donnée par :

$$\underline{s}_{hyp}(x) = C_s \cdot \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)|x|}}{2(\alpha + \beta)} + \frac{e^{(\beta-\alpha)|x|}}{2(\beta - \alpha)} \right) ,$$

dans laquelle  $C_s$  est la constante de normalisation.

La réponse au point  $x_e$  de ce filtre à un signal constant de valeur 1 est donnée par :

$$y(x_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{s}_{hyp}(x) dx = C_s \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)|x|}}{2(\alpha + \beta)} + \frac{e^{(\beta-\alpha)|x|}}{2(\beta - \alpha)} \right) dx = -\frac{4\alpha\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} .$$

Une réponse unitaire est donc obtenue en tout point pour :

$$C_s = -\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{4\alpha\beta} .$$

## A.3 Normalisation des filtres discrets

### A.3.1 Détecteur hyperbolique de contours

La réponse du filtre hyperbolique discrétisé à un signal  $G(n)$  au point  $n_e$  est donnée par :

$$y(n_e) = K_d \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(n_e - n) \underline{f}_{hyp}(n) .$$

Ainsi, la réponse en  $n_e = 0$  à un échelon unité discrétisé est donnée par :

$$y(0) = K_d \cdot \sum_{n=-\infty}^0 \underline{f}_{hyp}(n) = K_d \cdot \sum_{n=-\infty}^0 e^{\alpha n} \sinh \beta n = K_d \cdot \left( \frac{1}{2 - 2e^{-\alpha+\beta}} - \frac{1}{2 - 2e^{\beta-\alpha}} \right) .$$

Cette réponse est donc égale à 1 pour un coefficient de normalisation défini par :

$$K_d = \frac{2(1 - e^{\beta-\alpha})(1 - e^{-\alpha+\beta})}{e^{-\alpha+\beta} - e^{\beta-\alpha}} .$$

### A.3.2 Filtre hyperbolique de lissage

La réponse du filtre de lissage discrétisé à un signal constant de valeur 1 est donnée par :

$$\begin{aligned} y(n_e) &= K_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)|n|}}{2(\alpha+\beta)} + \frac{e^{(\beta-\alpha)|n|}}{2(\beta-\alpha)} \right) \\ &= K_s \cdot \left( \frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\beta-\alpha} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{e^{-(\alpha+\beta)n}}{2(\alpha+\beta)} + \frac{e^{(\beta-\alpha)n}}{2(\beta-\alpha)} \right) \right) . \end{aligned}$$

La réponse  $y(n_e)$  est alors normalisée à 1 lorsque le coefficient  $K_s$  est donné par :

$$K_s = - \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot (1 - e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)} + e^{-2\alpha})}{\beta \cdot (1 - e^{-2\alpha}) + \alpha \cdot (e^{(\beta-\alpha)} - e^{-(\alpha+\beta)})} .$$

### A.3.3 Filtre hyperbolique de dérivée seconde

L'opérateur d'estimation de la dérivée seconde :

$$\underline{l}(i) = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot e^{-(\alpha+\beta)|i|} + K_l \cdot \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot e^{(\beta-\alpha)|i|} \quad (\text{A.1})$$

fait intervenir le coefficient  $K_l$  pour qu'on puisse obtenir une réponse nulle lorsqu'on l'applique sur un signal constant. Cette réponse est donnée par :

$$y(n_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{l}(n) = \frac{(\alpha + \beta)(1 + e^{-(\alpha+\beta)})}{1 - e^{-(\alpha+\beta)}} + K_l \cdot \frac{(\beta - \alpha)(1 + e^{(\beta-\alpha)})}{1 - e^{(\beta-\alpha)}} .$$

Une réponse nulle à un signal constant est donc obtenue pour un coefficient  $K_l$  valant :

$$K_l = \frac{(\alpha + \beta) \cdot (1 + e^{-(\alpha+\beta)} - e^{(\beta-\alpha)} - e^{-2\alpha})}{(\alpha - \beta) \cdot (1 - e^{-(\alpha+\beta)} + e^{(\beta-\alpha)} - e^{-2\alpha})} .$$

# Annexe B

## Calcul des mesures de performances

### B.1 Formules de base utilisées

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$$
$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1.3.5\dots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\alpha^{2n+1}}$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \omega x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\alpha > 0)$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \omega x dx = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\alpha > 0)$$
$$\cos^2 \omega x = \frac{1 + \cos 2\omega x}{2}$$
$$\sin^2 \omega x = \frac{1 - \cos 2\omega x}{2}$$

### B.2 Les critères

Le critère de détection proposé par Canny est défini par :

$$\Sigma = \frac{\left| \int_{-\infty}^0 f(x) dx \right|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}}$$

Son critère de localisation est défini par :

$$\Lambda = \frac{|f'(0)|}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}}$$

Le critère de réponses multiples proposé par Sarkar & Boyer est défini par :

$$M = 2\pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx}} \cdot \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f^2(x) dx}} .$$

Pour chacun des filtres, nous commençons par déterminer la largeur efficace définie par :

$$W = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}} ,$$

puis la distance moyenne entre deux maxima de la réponse dûs au bruit :

$$D = 2\pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx}} ,$$

le critère de réponses multiples étant le rapport de ces deux grandeurs.

## B.3 Filtre de Canny

La réponse impulsionnelle du filtre de Canny est définie par la dérivée d'une fonction Gaussienne :

$$f_{can}(x) = x e^{-\alpha^2 x^2} .$$

### B.3.1 Valeurs et intégrales intervenant dans les critères

$$f'_{can}(x) = (1 - 2\alpha^2 x^2) e^{-\alpha^2 x^2} \quad (\text{B.1})$$

$$f''_{can}(x) = 2\alpha^2 (2\alpha^2 x^3 - 3x) e^{-\alpha^2 x^2} \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{-\infty}^0 f_{can}(x) dx = \int_{-\infty}^0 x e^{-\alpha^2 x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{can}^2(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha^2 x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{4\alpha^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{can}'^2(x) dx &= 2 \int_0^{+\infty} (1 - 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha^4 x^4) e^{-2\alpha^2 x^2} dx \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{4\alpha^2}{8\alpha^2} + \frac{12\alpha^4}{32\alpha^4} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^2}} \\ &= \frac{3}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{can}''(x) dx &= 8\alpha^2 \int_0^{+\infty} (4\alpha^4 x^6 - 12\alpha^2 x^4 + 9x^2) e^{-2\alpha^2 x^2} dx \\ &= \frac{15\alpha}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (B.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{can}^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-2\alpha^2 x^2} dx = \frac{3}{16\alpha^5} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (B.7)$$

### B.3.2 Calcul des critères

En utilisant (B.3) et (B.4), on détermine le critère de détection :

$$\Sigma_{can} = \frac{\frac{1}{2\alpha^2}}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} .$$

En utilisant (B.1) en  $x = 0$  et (B.5), on détermine le critère de localisation :

$$\Lambda_{can} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}} = \sqrt{\alpha} \sqrt[4]{\frac{32}{9\pi}} .$$

En utilisant (B.4) et (B.7), on détermine la largeur efficace :

$$W_{can} = \sqrt{\frac{\frac{3}{16\alpha^5} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{4\alpha^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{3}{4}} . \quad (B.8)$$

En utilisant (B.5), (B.6) et (B.8), on détermine le critère de réponses multiples :

$$M_{can} = 2\pi \frac{1}{\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{3}{4}}} \sqrt{\frac{\frac{3}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\frac{15\alpha}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{4}{15}} .$$

## B.4 Filtre de Deriche

La réponse impulsionnelle du filtre de Deriche est définie par une sinusoïde amortie :

$$f_{der1}(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \omega x ,$$

dont la limite quand  $\omega$  tend vers zéro est :

$$f_{der2}(x) = x.e^{-\alpha|x|} .$$

### B.4.1 Valeurs et intégrales intervenant dans les critères

$$f'_{der1}(x) = \begin{cases} \omega e^{\alpha x} \cos \omega x + \alpha e^{\alpha x} \sin \omega x & \text{si } x < 0 \\ \omega e^{-\alpha x} \cos \omega x - \alpha e^{-\alpha x} \sin \omega x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$f''_{der1}(x) = \begin{cases} (\alpha^2 - \omega^2)e^{\alpha x} \sin \omega x + 2\alpha\omega e^{\alpha x} \cos \omega x & \text{si } x < 0 \\ (\alpha^2 - \omega^2)e^{-\alpha x} \sin \omega x - 2\alpha\omega e^{-\alpha x} \cos \omega x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

$$\int_{-\infty}^0 f_{der1}(x)dx = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha x} \sin \omega x .dx = -\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{der1}^2(x)dx &= \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha x} \sin^2 \omega x .dx + \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha x} \sin^2 \omega x .dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha x} \sin^2 \omega x .dx = \int_0^{+\infty} (1 - \cos 2\omega x)e^{-2\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2(\omega^2 + \alpha^2)} = \frac{\omega^2}{2\alpha(\omega^2 + \alpha^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{der1}^2(x)dx &= \int_{-\infty}^0 (\omega e^{\alpha x} \cos \omega x + \alpha e^{\alpha x} \sin \omega x)^2 dx + \\ &\quad \int_0^{+\infty} (\omega e^{-\alpha x} \cos \omega x - \alpha e^{-\alpha x} \sin \omega x)^2 dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} (\omega e^{-\alpha x} \cos \omega x - \alpha e^{-\alpha x} \sin \omega x)^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} (\omega^2(1 + \cos 2\omega x) - 2\alpha\omega \sin 2\omega x + \alpha^2(1 - \cos 2\omega x))e^{-2\alpha x} dx \\ &= \frac{\alpha^2 + \omega^2}{2\alpha} + \frac{\alpha(\omega^2 - \alpha^2)}{2(\alpha^2 + \omega^2)} - \frac{2\alpha\omega^2}{2(\alpha^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{\omega^2}{2\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{der1}^{\prime\prime 2}(x)dx &= 2 \int_0^{+\infty} ((\alpha^2 - \omega^2) \sin \omega x - 2\alpha\omega \cos \omega x)^2 e^{-2\alpha x} dx \\ &= \frac{\omega^2(5\alpha^2 + \omega^2)}{2\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{der1}^2(x)dx &= 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha x} \sin^2 \omega x .dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{x(2\alpha+2i\omega)} dx + 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{x(2\alpha-2i\omega)} dx - 4 \int_0^{+\infty} x^2 e^{2\alpha x} dx \\ &= \frac{\omega^6 + 6\alpha^4\omega^2 + 3\alpha^2\omega^4}{4\alpha^3(\alpha^2 + \omega^2)^3} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$



### B.4.2 Calcul des critères pour le filtre général

En utilisant (B.11) et (B.12), on détermine le critère de détection :

$$\Sigma_{der1} = \frac{\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{2\alpha(\omega^2 + \alpha^2)}}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}} . \quad (\text{B.16})$$

En utilisant (B.9) en  $x = 0$  et (B.13), on détermine le critère de localisation :

$$\Lambda_{der1} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{2\alpha}}} = \sqrt{2\alpha} . \quad (\text{B.17})$$

En utilisant (B.12) et (B.15), on détermine la largeur efficace :

$$W_{der1} = \sqrt{\frac{\frac{\omega^6 + 6\alpha^4\omega^2 + 3\alpha^2\omega^4}{4\alpha^3(\alpha^2 + \omega^2)^3}}{\frac{\omega^2}{2\alpha(\omega^2 + \alpha^2)}}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega^4 + 3\omega^2\alpha^2 + 6\alpha^4}{2(\alpha^2 + \omega^2)^2}} . \quad (\text{B.18})$$

En utilisant (B.13), (B.14) et (B.18), on détermine le critère de réponses multiples :

$$M_{der1} = 2\pi \frac{1}{\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\omega^4 + 3\omega^2\alpha^2 + 6\alpha^4}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}}} \sqrt{\frac{\frac{\omega^2}{2\alpha}}{\frac{\omega^2(5\alpha^2 + \omega^2)}{2\alpha}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\alpha^2(\alpha^2 + \omega^2)^2}{(5\alpha^2 + \omega^2)(\omega^4 + 3\omega^2\alpha^2 + 6\alpha^4)}} . \quad (\text{B.19})$$

### B.4.3 Calcul des critères pour le filtre simplifié

Les critères sont obtenus en faisant tendre  $\omega$  vers zéro dans les équations (B.16), (B.17), (B.18) et (B.19) :

$$\Sigma_{der2} = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} .$$

$$\Lambda_{der2} = \sqrt{2\alpha} .$$

$$W_{der2} = \frac{\sqrt{3}}{\alpha} .$$

$$M_{der2} = \frac{2\pi}{\sqrt{15}} .$$

## B.5 Filtre hyperbolique

La réponse impulsionnelle du filtre hyperbolique est définie par une sinusoïde hyperbolique amortie :

$$f_{hyp}(x) = e^{-\alpha|x|} \sinh \beta x .$$

### B.5.1 Calcul des critères

Puisque :

$$\sinh \beta x = -i \sin i\beta x ,$$

dans laquelle  $i$  désigne la racine carrée de  $-1$ , les expressions des critères pour le filtre hyperbolique se déduisent de celles du filtre de Deriche, en remplaçant  $\omega$  par  $i\beta$  dans les équations (B.16), (B.17), (B.18) et (B.19) :

$$\begin{aligned} \Sigma_{hyp} &= \sqrt{\frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}} . \\ \Lambda_{hyp} &= \sqrt{2\alpha} . \\ W_{hyp} &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\beta^4 - 3\beta^2\alpha^2 + 6\alpha^4}{2(\alpha^2 - \beta^2)^2}} . \\ M_{hyp} &= 2\pi \sqrt{\frac{2\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)^2}{(5\alpha^2 - \beta^2)(\beta^4 - 3\beta^2\alpha^2 + 6\alpha^4)}} . \end{aligned}$$

## B.6 Filtre de Shen & Castan

La réponse impulsionnelle du filtre de Shen & Castan est définie par :

$$f_{she}(x) = \text{sign}(x)e^{-\alpha|x|} .$$

### B.6.1 Prolongement par une fonction continue

La réponse impulsionnelle du filtre de Shen & Castan est discontinue en zéro. Cela pose problème pour calculer les critères de localisation et de réponses multiples puisqu'il faut évaluer les dérivées première et seconde du filtre. Le problème peut être levé en réalisant les calculs sur une famille de fonctions  $f_\epsilon$ , deux fois dérivables en zéro et convergeant vers la fonction  $f_{she}$  lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro.

Il s'agit tout d'abord de définir l'expression générale des fonctions  $f_\epsilon$  qui satisfont ces critères. Le choix le plus simple consiste à remplacer la fonction entre  $-\epsilon$  et  $\epsilon$  par un polynôme  $P_\epsilon$  qui vérifie :

$$P_\epsilon(x) = -P_\epsilon(-x), P_\epsilon(\epsilon) = f_{she}(\epsilon), P'_\epsilon(\epsilon) = f'_{she}(\epsilon) \text{ et } P''_\epsilon(\epsilon) = f''_{she}(\epsilon) .$$

Sous ces conditions, la fonction  $f_\epsilon$  définie par :

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} P_\epsilon(x) & \text{si } |x| < \epsilon \\ f_{sh\epsilon}(x) & \text{si } |x| \geq \epsilon \end{cases},$$

est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $R$ , c'est à dire dérivable deux fois en tout point et de dérivée seconde continue.

La première condition impose de choisir un polynôme impair, ne comportant que des termes de puissances impaires :

$$P_\epsilon(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^{2k+1}, \quad (\text{B.20})$$

$n$  étant un entier positif. Les autres conditions conduisent au système :

$$\begin{cases} e^{-\alpha\epsilon} &= \sum_{k=0}^n a_k \cdot \epsilon^{2k+1} \\ -\alpha e^{-\alpha\epsilon} &= \sum_{k=0}^n (2k+1) a_k \cdot \epsilon^{2k} \\ \alpha^2 e^{-\alpha\epsilon} &= \sum_{k=0}^n (2k+1) 2k \cdot a_k \cdot \epsilon^{2k-1} \end{cases},$$

dont les inconnues sont les coefficients  $a_k$  du polynôme. Pour que ce système ait au moins une solution quel que soit  $\epsilon$ , il faut que  $n$  soit supérieur ou égal à 2. Il possède en fait une solution unique pour  $n = 2$ , quelle que soit la valeur de  $\epsilon$ .

Dans ce cas, les solutions sont données par les formules de Cramer :

$$\begin{aligned} a_0(\epsilon) &= \frac{1}{16\epsilon^6} \begin{vmatrix} e^{-\alpha\epsilon} & \epsilon^3 & \epsilon^5 \\ -\alpha e^{-\alpha\epsilon} & 3\epsilon^2 & 5\epsilon^4 \\ \alpha^2 e^{-\alpha\epsilon} & 6\epsilon & 20\epsilon^3 \end{vmatrix} = \frac{e^{-\alpha\epsilon}}{16\epsilon^2} \begin{vmatrix} 1 & \epsilon^2 & \epsilon^2 \\ -\alpha & 3\epsilon & 5\epsilon \\ \alpha^2 & 6 & 20 \end{vmatrix} \\ &= \frac{e^{-\alpha\epsilon}(30 + 114\alpha\epsilon - 2\alpha^2\epsilon^2 - 5\alpha^3\epsilon^3)}{16\epsilon}, \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} a_1(\epsilon) &= \frac{1}{16\epsilon^6} \begin{vmatrix} \epsilon & e^{-\alpha\epsilon} & \epsilon^5 \\ 1 & -\alpha e^{-\alpha\epsilon} & 5\epsilon^4 \\ 0 & \alpha^2 e^{-\alpha\epsilon} & 20\epsilon^3 \end{vmatrix} = \frac{e^{-\alpha\epsilon}}{16\epsilon^3} \begin{vmatrix} \epsilon & 1 & \epsilon^2 \\ 1 & -\alpha & 5\epsilon \\ 0 & \alpha^2 & 20 \end{vmatrix} = \frac{-e^{-\alpha\epsilon}(\alpha^2\epsilon^2 + 5(1 + \alpha\epsilon))}{4\epsilon^5}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} a_2(\epsilon) &= \frac{1}{16\epsilon^6} \begin{vmatrix} \epsilon & \epsilon^3 & e^{-\alpha\epsilon} \\ 1 & 3\epsilon^2 & -\alpha e^{-\alpha\epsilon} \\ 0 & 6\epsilon & \alpha^2 e^{-\alpha\epsilon} \end{vmatrix} = \frac{e^{-\alpha\epsilon}}{16\epsilon^5} \begin{vmatrix} \epsilon & \epsilon^2 & 1 \\ 1 & 3\epsilon & -\alpha \\ 0 & 6 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \frac{e^{-\alpha\epsilon}(\alpha^2\epsilon^2 + 3(1 + \alpha\epsilon))}{8\epsilon^5}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

### B.6.2 Valeurs et intégrales intervenant dans les critères

$$f'_\epsilon(x) = \begin{cases} a_0(\epsilon) + 3a_1(\epsilon)x^2 + 5a_2(\epsilon)x^4 & \text{si } 0 \leq x < \epsilon \\ -\alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq \epsilon \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

$$f''_\epsilon(x) = \begin{cases} 6a_1(\epsilon)x + 20a_2(\epsilon)x^3 & \text{si } 0 \leq x < \epsilon \\ \alpha^2 e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq \epsilon \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

$$\int_{-\infty}^0 f_{she}(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} \quad (\text{B.26})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{she}^2(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_\epsilon'^2(x) dx &= \int_0^\epsilon (a_0(\epsilon) + 3a_1(\epsilon)x^2 + 5a_2(\epsilon)x^4)^2 dx + \int_\epsilon^{+\infty} \alpha^2 e^{-2\alpha x} dx \\ &= a_0^2(\epsilon)\epsilon + 2a_0(\epsilon)a_1(\epsilon)\epsilon^3 + \frac{10a_0(\epsilon)a_2(\epsilon) + 9a_1^2(\epsilon)}{5}\epsilon^5 \\ &\quad + \frac{30}{7}a_1(\epsilon)a_2(\epsilon)\epsilon^7 + \frac{25}{9}a_2^2(\epsilon)\epsilon^9 + \frac{\alpha}{2}e^{-2\alpha\epsilon} \\ &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0^+}{\equiv} \frac{k'}{\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_\epsilon''^2(x) dx &= \int_0^\epsilon (6a_1(\epsilon)x + 20a_2(\epsilon)x^3)^2 dx + \int_\epsilon^{+\infty} \alpha^4 e^{-2\alpha x} dx \\ &= 12a_1^2(\epsilon)\epsilon^3 + 48a_1(\epsilon)a_2(\epsilon)\epsilon^5 + \frac{400}{7}a_2^2(\epsilon)\epsilon^7 + \frac{\alpha^3}{2}e^{-2\alpha\epsilon} \\ &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0^+}{\equiv} \frac{k''}{\epsilon^3} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{she}^2(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2\alpha x} dx = \frac{1}{2\alpha^3} \quad (\text{B.30})$$

### B.6.3 Calcul des critères

En utilisant (B.26) et (B.27), on détermine le critère de détection :

$$\Sigma_{she} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} .$$

En utilisant (B.24) en  $x = 0$  et (B.28), on détermine le critère de localisation pour  $f_\epsilon$  quand  $\epsilon$  tend vers zéro :

$$\Lambda_{she} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{15}{8\epsilon}}{\sqrt{\frac{k'}{\epsilon}}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{225}{64k'\epsilon}} = +\infty .$$

En utilisant (B.27) et (B.30), on détermine la largeur efficace :

$$W_{she} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2\alpha^3}}{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{2}} .$$

En utilisant (B.28) et (B.29) on détermine le critère de réponses multiples :

$$M_{she} = 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{k' \epsilon^3}{\epsilon k''}} = 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \sqrt{\frac{k'}{k''}} = 0 .$$

### B.6.4 Commentaire

Le calcul des intégrales des dérivées première et seconde élevées au carré a été effectué en utilisant une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  convergeant vers  $f_{she}$ . Cette méthode conduit à définir un critère de localisation infini, et un critère de réponses multiples nul.

Une autre approche consiste à utiliser l'intégrale de Lebesgue, en stipulant que la fonction  $f_{she}$  est dérivable deux fois partout sauf en 0. Sa dérivée est bornée presque partout, donc  $f_{she}'^2$  est Lebesgue-intégrable, et l'intégrale peut se calculer grâce aux intégrales de Riemann entre  $-\infty$  et zéro et entre zéro et  $+\infty$  :

$$\int_{\mathbb{R}} f_{she}'^2 d\mu = \int_{-\infty}^0 f_{she}'^2(x) dx + \int_0^{+\infty} f_{she}'^2(x) dx$$

Le même raisonnement est valable pour la dérivée seconde, et on trouve deux valeurs finies pour les intégrales intervenant dans les critères.

Puisque la limite d'une intégrale utilisant la famille de fonctions  $f_\epsilon$  n'est pas égale à l'intégrale de la limite  $f_{she}$ , la convergence n'est pas uniforme. Dans ce cas, nous pensons qu'il est préférable d'utiliser la réponse fournie par la limite de la suite  $f_\epsilon$ , qui décrit de façon plus réaliste l'évolution des critères quand on passe progressivement d'un filtre dont la réponse est continue à un filtre présentant une discontinuité comme celui de Shen & Castan [CH53].

## Résumé

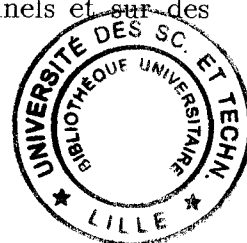
Dans ce mémoire, nous décrivons un nouvel opérateur permettant la détection de contours dans une image numérique.

La mise en évidence des contours est réalisée grâce à une opération de convolution de l'image avec un filtre dont la réponse impulsionnelle est une fonction sinus hyperbolique amortie.

Nous montrons, en nous basant sur les critères de performance définis par Canny, que ce filtre est au moins aussi performant que les autres filtres similaires décrits précédemment dans la littérature.

Une partie du mémoire est consacrée à la description d'une procédure de calcul de la réponse du filtre sur un signal discret, basée sur l'utilisation de traitements récursifs.

Nous présentons enfin quelques résultats obtenus lors du traitement de données réelles par l'opérateur hyperbolique, à la fois sur des signaux monodimensionnels et sur des images.



## Abstract

The problem addressed in this thesis is edge detection in digital pictures by means of spatial filtering.

Edges are detected by means of a convolution between the image and a linear filter. The impulsional response of this filter is a damped hyperbolic sine function.

We show, thanks to performance criteria defined by Canny, that the proposed filter is almost as efficient as other similar existing schemes.

In another part of this work, we describe the recursive implementation of the filtering process in the discrete case.

We also present several edge detection results, using real data, either monodimensional signals or digital pictures.