

Jan 2000 1/6

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
en Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

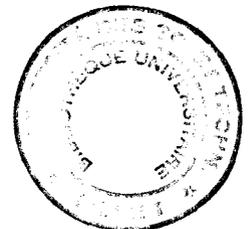
Philippe KUBIAK

ANALYSE SYMBOLIQUE DES SYSTEMES PHYSIQUES MODELISES PAR BOND GRAPH ET COMPORTANT DES ELEMENTS MULTIPORTS

Soutenue le vendredi 13 Décembre 1996 devant le jury d'examen

M. P. BORNE, Professeur à l'E.C. Lille	: Président
M. J. LEFEVRE, Professeur à l'U.M.D.S. Londres	: Rapporteur
M. S. SCAVARDA, Professeur à l'I.N.S.A. Lyon	: Rapporteur
M. J.Ph. CASSAR, Professeur à l'I.A.A.Lille	: Examineur
M. G. GISSINGER, Professeur à l'E.S.S.A.I. Mulhouse	: Examineur
Mme G. DAUPHIN-TANGUY, Professeur à l'E.C. Lille	: Examineur, Directeur de thèse
M. A. AZMANI, Maître de Conférences à l'E.C. Lille	: Examineur, Co-directeur

Thèse réalisée au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille
(L.A.I.L. U.R.A. C.N.R.S. D 1440)
Ecole Centrale de Lille (anciennement I.D.N.)



*A mon Epouse
A la mémoire de ma Mère
A mon Père et mon Frère
A ma famille*

Avant Propos

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (L.A.I.L. U.R.A. C.N.R.S. D 1440) à l'Ecole Centrale de Lille sous la direction de Madame le Professeur G. DAUPHIN-TANGUY et de Monsieur A. AZMANI, Maître de conférences à l'Ecole Centrale de Lille

Nous sommes très redevable envers Monsieur le Professeur P. BORNE, Directeur scientifique de l'Ecole Centrale de Lille, pour son dynamisme et sa motivation pour la recherche qu'il a su parfaitement nous communiquer. Nous sommes très honoré qu'il ait accepté de présider notre jury de thèse et nous l'en remercions.

Nous tenons tout particulièrement, à exprimer notre reconnaissance à Madame le Professeur G. DAUPHIN-TANGUY, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille et Directeur du L.A.I.L. ainsi qu'à Monsieur A. AZMANI, Maître de conférences à l'Ecole Centrale de Lille, pour leur confiance, leur sincérité et la qualité de leurs rapports humains. Qu'ils trouvent ici notre profonde gratitude et reçoivent nos remerciements pour leurs précieux conseils qui ont contribué à la réussite de nos travaux.

Nous sommes redevable à Messieurs J. LEFEVRE, Professeur en charge du M&Cal Lab (Modelling and Computed Aided Learning Laboratory) à Londres et S. SCAVARDA, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées (I.N.S.A.) de Lyon pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'examiner ce travail et d'être les rapporteurs de cette thèse.

Nous tenons à remercier Messieurs J.Ph. CASSAR, Professeur d'Automatique à l'Institut Agro-Alimentaire de Lille (I.A.A.L.) et G. GISSINGER, Professeur à l'E.S.S.A.I. de Mulhouse, pour l'honneur qu'il nous font en participant à notre jury.

Nous tenons enfin à adresser une pensée amicale aux membres du L.A.I.L., au personnel de l'Ecole Centrale de Lille et plus spécialement à certains membres des équipes

Bond Graph, Commande et Evaluation de Performances (*David, François, Hervé, Janette, Jean-Marc, les Laurent, Moncef, Pascal, Régis, Stéphane et Wajdi*) pour leur sympathie et la bonne ambiance qu'ils entretiennent.

Enfin, nous remercions très sincèrement Monsieur M. VANGREVENINGE pour la reprographie de ce mémoire.

Sommaire

Introduction	17
---------------------------	----

Chapitre I: La méthodologie bond graph: rappels et précisions

Introduction	23
1. La modélisation par bond graph	23
1.1. Notion de Causalité	24
1.2. Notions de relation causale et de chemin causal	25
1.3. Gain d'un chemin causal et d'une boucle causale. Règle de Mason	27
2. Problématique	28
3. Etude topologique	33
Conclusion	41

Chapitre II: Détermination formelle de la matrice de transfert associée à un bond graph comportant des éléments multiports

Introduction	45
1. Position du problème	45
1.1. Présence d'un élément multiport	45
1.2. Définitions	48
2. Gains des chemins causaux et des boucles causales dans un MP-BG	50
2.1. Gains des chemins causaux	50
2.1.1. Chemins causaux dissociés du MP (chemins causaux C0)	50
2.1.2. Chemins causaux impliquant le MP (chemins causaux C1, C2 et C1-2)	51
2.1.2.1 Contribution du MP dans le gain d'un chemin causal	51
a) Chemin causaux C1	52
b) Chemin causaux C2	53
c) Chemin causaux C1-2	55
2.1.2.2. Gain des chemins causaux C1, C2 et C1-2	58
2.2. Gains des boucles causales	58
2.2.1. Boucles causales dissociées du MP (boucles causales C0)	58
2.2.2. Boucles causales impliquant le MP (boucles causales C1, C2 et C1-2)	59

3. Etude des bond graphs comportant un seul MP à branches non connectées	60
3.1. Calcul du dénominateur de la matrice de transfert.....	60
a) Etude de $\Delta_2(s)$	65
b) Etude de $\Delta_1(s)$	68
c) Etude de $\Delta_3(s)$	69
3.2. Calcul des numérateurs de la matrice de transfert.....	72
3.2.1. Transmittance C0.....	73
3.2.2. Transmittance C1.....	73
3.2.3. Transmittance C2.....	74
4. Etude des bond graphs comportant un seul MP à branches connectées.....	74
4.1. Détermination du dénominateur de la matrice de transfert.....	74
4.1.1. Contribution des boucles causales C2 dans la détermination de $\delta_2(s)$	76
4.1.1.1. Classification des boucles causales C2	76
a) Boucles C2 n'impliquant pas le bouclage du MP sur lui-même	77
b) Boucles C2 impliquant le bouclage du MP sur lui-même	77
4.1.1.2. Contribution des boucles causales C2T2 à coefficients diagonaux dans la détermination de $\delta_2(s)$	78
4.1.1.3. Contribution d'une boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux associée à une boucle causale C2T1.....	82
4.1.2. Contribution des boucles causales C1 dans la détermination de $\delta_1(s)$	90
4.1.2.1. Contribution des boucles causales C1T2 dans la détermination de $\delta_1(s)$	90
4.1.3. Contribution des boucles causales C1-2 dans la détermination de $\delta_{1-2}(s)$	93
4.1.3.1. Contribution des boucles causales C1-2 issues de boucles causales C1T2 dans la composition de $\delta_{1-2}(s)$	93
4.1.4. Conclusion.....	99
4.2. Détermination des numérateurs de la matrice de transfert.....	100
4.2.1. Transmittance C0	100
4.2.2. Transmittance C2.....	100
4.2.3. Transmittance C1	105
4.2.4. Transmittance C1-2.....	107
4.3. Conclusion.....	112

5. Etude des bond graphs comportant plusieurs MP	113
5.1. Définitions	113
5.2. Détermination du dénominateur de la matrice de transfert	115
5.3. Détermination des numérateurs de la matrice de transfert	115
Conclusion.....	116

ChapitreIII: Détermination formelle de l'équation d'état associée à un bond graph comportant des éléments multiports

Introduction	121
1. Bond graph comportant un élément dynamique MP avec causalité unique.....	125
1.1. Détermination de la matrice A^R	125
1.1.1. Causalité intégrale.....	126
1.1.2. Causalité dérivée.....	130
1.2. Détermination de la matrice $[A^d]^{-1}$	130
1.2.1. Causalité intégrale.....	131
1.2.2. Causalité dérivée.....	136
1.3. Détermination des matrices de commande, d'observation et de transmission.....	139
2. Bond graph comportant un élément résistif MP	141
2.1. Détermination de la matrice A^R	141
2.2 Détermination de la matrice $[A^d]^{-1}$	143
2.3. Détermination des matrices de commande, d'observation et de transmission.....	144
3. Bond graph comportant un élément dynamique MP avec causalité mixte.....	144
3.1. Détermination de la matrice A^R	146
3.2. Détermination de la matrice $[A^d]^{-1}$	148
3.3. Détermination des matrices de commande, d'observation et de transmission.....	150
Conclusion	150

Chapitre IV: Méthodes de décomposition des éléments multiports

Introduction	155
1. Méthodes existantes.....	155
1.1. Méthode canonique directe.....	155
1.2. Méthode canonique congruente.....	158
1.3. Méthode récurrente.....	164
1.3.1. Détails de la méthode	164
1.3.2. Algorithme de détermination des coefficients pour la méthode récurrente....	173
1.3.2.1. Élément multiport de dimension 3.....	173
1.3.2.2. Élément multiport de dimension 4	175
1.3.2.3. Élément multiport de dimension m.....	179
Conclusion	181
Conclusion	183
Annexes	187
Bibliographie	295

Introduction

Toute étude d'un système dynamique nécessite une étape essentielle: celle de la modélisation. Basés sur la méthodologie bond graph, de récents travaux, menés au sein de l'équipe bond graph du L.A.I.L., ont permis de dégager des méthodes de calcul permettant de déterminer formellement les modèles mathématiques associés au modèle bond graph (équation d'état, matrice de transfert dans le cas linéaire) du système étudié. Ils ont également permis de développer certains algorithmes qui depuis ont été utilisés dans le cadre du projet ARCHER (logiciel d'aide à la modélisation et à l'analyse des systèmes physiques modélisés par bond graph).

Ces résultats s'appliquent aux bond graphs constitués uniquement d'éléments 1-port.

Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une contribution à l'étude des systèmes physiques modélisés par bond graph et comportant des éléments multiports. Plusieurs objectifs nous sont fixés. Il s'agit d'établir des méthodes de détermination formelle et automatique de la matrice de transfert ainsi que de l'équation d'état.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré tout d'abord à certains rappels importants concernant la méthodologie bond graph. Ensuite, une extension de la définition de boucle causale est proposée. Une règle heuristique de simplification de l'application de la règle de Mason dans le cas des bond graphs 1-port, est enfin présentée.

Le deuxième chapitre traite de la détermination formelle de la matrice de transfert. Les modèles bond graphs ne comportant qu'un seul élément multiport à branches non connectées, puis connectées et enfin comportant plusieurs éléments multiports y sont abordés. Les résultats obtenus constituent une extension de la règle de Mason jusqu'à présent utilisée dans le cas 1-port.

La détermination formelle des matrices intervenant dans l'équation d'état fait l'objet du troisième chapitre. Basée sur de récents travaux menés au sein de notre équipe, cette étude se développe successivement sur les éléments multiports dynamiques à causalité unique puis sur

les éléments multiports résistifs et enfin sur les éléments multiports dynamiques à causalité mixte.

Nous proposons dans le quatrième et dernier chapitre, une nouvelle méthode de décomposition des éléments multiports. Cette méthode nommée méthode récurrente, permet de décomposer un élément multiports de dimension m en un élément multiports de dimension $(m-1)$ associé à un élément 1-port, pour aboutir en m étapes, en m éléments 1-port.

CHAPITRE I

LA METHODOLOGIE BOND GRAPH: RAPPELS ET PRECISIONS.

INTRODUCTION

Le besoin d'une théorie de modélisation unifiée pour tous les domaines de la physique s'est fait ressentir depuis quelques dizaines d'années. Le développement historique de plusieurs propositions pour résoudre ce problème est donné dans [Evan, Dixhoorn 1974]. L'une d'elle est l'approche bond graph. Ce langage a été formulé pour la première fois par Paynter au début des années soixantes [Paynter 1961], formalisé par Karnopp et Rosenberg [Karnopp, Rosenberg 1974, 1983 et 1990], Thoma [Thoma 1975 et 1990], Breedveld [Breedveld 1984], et a été développé, élargi à de nouveaux domaines physiques et appliqué par un nombre croissant de personnes, comme en témoignent les bibliographies [Gebben 1979], [Bos, Breedveld 1985].

Le but de ce chapitre est dans un premier temps, de rappeler brièvement les principales notions de la théorie bond graph et plus particulièrement la notion de causalité. Nous étudierons ensuite deux modèles bond graphs équivalents d'un même système. Afin de résoudre les quelques problèmes qui auront été mis en évidence, nous apporterons certaines précisions nécessaires sur quelques définitions et développerons certaines propositions permettant de faciliter les diverses étapes de la modélisation par bond graph.

1. La modélisation par bond graph

La modélisation par bond graph permet une représentation graphique des systèmes physiques à travers un formalisme de type réseau [Paynter 1961], [Kronenberg 1963]. Elle s'appuie pour cela dans un plan hiérarchique sur l'hypothèse dite de réticulation, permettant de séparer le système physique en un ensemble de sous systèmes élémentaires.

Ces représentations graphiques de type réseau ont pour origines les graphes [Berge 1983], les graphes linéaires pour les circuits [Trent 1954] ou les graphes structurels des mécanismes [Crossley 1965]. Le bond graph constitue un outil de modélisation unifié à tous les domaines de la physique permettant par conséquent de faciliter considérablement l'étude des systèmes composés, multidomains.

La notion de bond graph ne constitue qu'une étape d'abstraction supplémentaire de ces graphes où l'on a unifié les différents domaines physiques [Breedveld 1984], [Oster et Perelson 1974].

Pour plus de détails sur la modélisation bond graph, le lecteur pourra se reporter à l'annexe A1.1. et à la bibliographie correspondante.

1.1. Notion de Causalité

La méthode bond graph permet de définir la structure de calcul, grâce à une mise en évidence des relations de cause à effet au sein même du système [Paynter 1961]. Ceci est réalisé par l'adjonction d'une information supplémentaire sur les liens de puissance : la causalité.

Lorsque deux sous systèmes A et B sont couplés, tels que A transmet la puissance $P=ef$ à B, deux cas sont possibles:

A applique à B un effort e , qui réagit en envoyant un flux f (figure 1.1.a.)

A applique à B un flux f , qui répond par un effort e .(figure 1.1.b.)



figure 1.1. : Les deux cas d'affectations possibles de la causalité.

Le trait causal est placé par convention près de l'élément pour lequel l'effort est une donnée, le flux étant alors une donnée pour l'élément opposé. La figure 1.2. montre donc trois manières de représenter une des deux causalités possibles (ici flux entrant - effort sortant) pour une résistance. Dans les trois cas, les deux variables de puissance e et f sont bien déterminées comme étant entrée et sortie d'un bloc opératoire caractérisant l'élément.

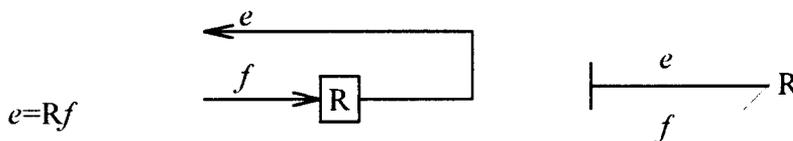


figure 1.2. : Causalité sur un élément R .

Le tableau suivant récapitule des causalités possibles des éléments bond graphs.

L'ajout de la causalité sur le bond graph permet d'organiser les calculs afin d'obtenir facilement matrice de transfert et équation d'état. La causalité va aussi permettre d'étudier directement sur le bond graph, par simple critère graphique et sans calcul, les propriétés structurelles du système. Tous ces résultats sont obtenus à partir du parcours du bond graph suivant des chemins privilégiés, appelés chemins causaux, indépendamment de l'orientation de la puissance dans les liens.

Causalité obligatoire	Se \longrightarrow	Sf \longrightarrow
Causalité intégrale	\longrightarrow C	\longrightarrow I
Causalité dérivée	\longrightarrow C	\longrightarrow I
Causalité arbitraire	\longrightarrow R	\longrightarrow R
Causalité restreinte	$\begin{array}{c} m \\ \longrightarrow TF \longrightarrow \\ r \\ \longrightarrow GY \longrightarrow \\ \text{T} \\ \\ \longrightarrow 0 \longrightarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} m \\ \longrightarrow TF \longrightarrow \\ r \\ \longrightarrow GY \longrightarrow \\ \text{T} \\ \\ \longrightarrow 1 \longrightarrow \end{array}$

tableau 1.1. : Causalités des éléments bond graph.

1.2. Notions de relation causale et de chemin causal.

Définition 1.1.:

Une relation causale directe dans une structure de jonction bond graph est une alternance de liens de puissance, de jonctions 0 et 1, et d'éléments TF et GY telle que:

- pour le bond graph acausal, la séquence forme une chaîne simple.
- tous les noeuds dans la séquence ont une causalité complète et correcte.
- deux liens de la relation causale ont en un même noeud, des affectations causales opposées.

Ainsi il existe dans le modèle de la figure1.3., une relation causale directe entre l'élément I_1 et la résistance R_1 empruntant les liens 1-2-3-4.

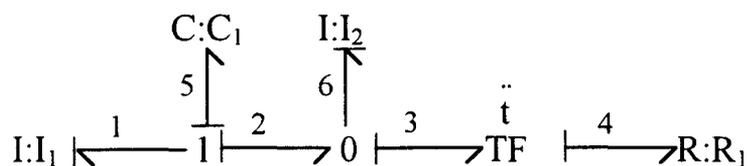


figure1.3. : Relation causale entre I et R.

Définition 1.2.:

Une relation causale dans une structure de jonction bond graph est une alternance de liens de puissance et de noeuds (jonctions 0 et 1, et d'éléments quelconques) telle que:

- a) pour le bond graph acausal, la séquence forme une chaîne simple.
- b) tous les noeuds dans la séquence ont une causalité complète et correcte.
- c) deux liens de la relation causale ont en un même noeud, des affectations causales opposées.

Définition 1.3.:

Un chemin causal direct est défini par une relation causale directe entre deux éléments de l'ensemble $E=\{C, I, Se, Sf, De, Df\}$.

Plusieurs catégories de chemins causaux sont répertoriés. Les chemins causaux simples ont la particularité de parcourir tous les liens les composant suivant la même variable (figure 1.6.).

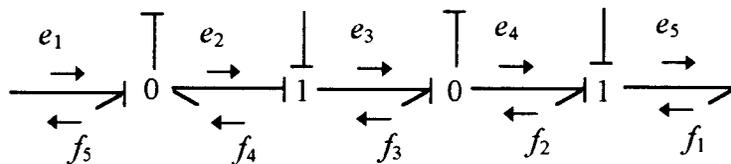


figure1.4. : Chemins causaux simples

(chemin 1 suivant la variable e et chemin 2 suivant la variable f)

Un chemin causal est dit mixte [Azmani 1991] (figure 1.5.) si les liens le constituant sont parcourus suivant les deux types de variables.

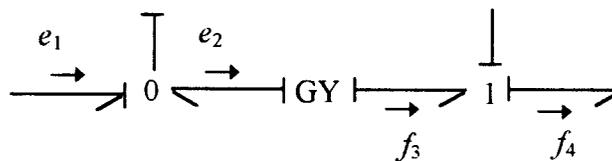


figure1.5. : Chemin causal mixte

Certains chemins causaux mixtes sont indirects lorsqu'ils traversent des éléments dynamiques et/ou dissipatifs (figure 1.6.).

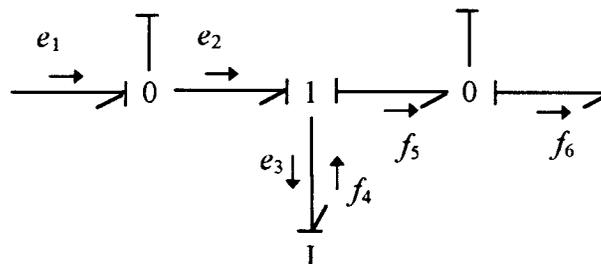


figure 1.6. : Chemin causal indirect

Pour ce type de chemin causal, la fonction caractéristique de l'élément 1-port I ainsi parcouru, appelée gain de l'élément et notée $\frac{1}{I_s}$ dans le cas linéaire (mais peut exister aussi en non-linéaire), est comme nous le rappellerons dans le prochain chapitre, l'une des composantes permettant de calculer le gain total du chemin.

Définition 1.4.:

Une boucle causale est un chemin causal fermé entre deux éléments de {R, I, C} partant de la sortie d'un port et revenant à l'entrée de ce port sans parcourir le même lien en suivant la même variable plus d'une fois.

Ainsi il existe dans le modèle de la figure 1.3., une boucle causale entre l'élément I et la résistance R empruntant les liens 1-2-3-4-4-3-2-1.

Définition 1.5.:

Deux chemins causaux sont disjoints s'ils ne possèdent en commun aucun élément, aucune jonction ni aucun lien de puissance parcouru en suivant la même variable.

Cette notion très importante est utilisée dans l'application de la règle de Mason (voir chapitre II) et permet de déterminer la matrice de transfert.

Ainsi il existe dans le modèle de la figure 1.7., deux boucles causales disjointes. D'une part, la boucle entre l'inductance I₁ et le condensateur C₁ empruntant les liens 1-5-5-1 et d'autre part la boucle entre la résistance R₁ et l'inductance I₂ empruntant les liens 4-3-6-6-3-4.

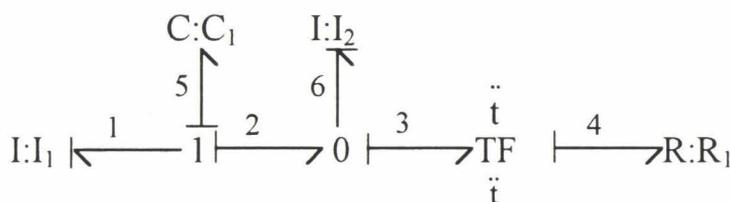


figure1.7.

1.3. Gain d'un chemin causal et d'une boucle causale. Règle de Mason.

Le gain d'un chemin causal se calcule par [Brown 1972]:

$$T = (-1)^{(n_0+n_1)} \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right) \tag{1.1.}$$

où:

- n_0 et n_1 représentent le nombre total de changements d'orientation des liens, respectivement aux jonctions 0 quand la variable flux est suivie et aux jonctions 1 quand il s'agit de la variable effort.

- m_j ; $\frac{1}{m_j}$ et r_k ; $\frac{1}{r_k}$ sont les modules des éléments TF et GY rencontrés dans le chemin causal, compte tenu de la causalité qui leur est affectée.

- \prod_g représente le produit des gains des éléments traversés lorsque le chemin causal est indirect.

Lorsque ce chemin causal est direct ou simplement mixte, ce terme vaut 1.

Le gain d'une boucle causale est obtenu par l'expression suivante:

$$B = (-1)^{(n_0+n_1)} \cdot \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right) \quad (1.2.)$$

Les notations utilisées conservent la même signification que précédemment.

Le dénominateur $\Delta(s)$ de la matrice de transfert d'un bond graph se détermine à l'aide de la règle de Mason. Cette règle s'exprime par la relation suivante:

$$\Delta(s) = 1 - \sum B_i + \sum B_i B_j - \sum B_i B_j B_k + \sum \dots \quad (1.3.)$$

où:

- B_i ($i=1,2,\dots$) sont les gains des boucles causales répertoriées dans le bond graph.
- $B_i B_j$, $B_i B_j B_k$, ... sont les produits respectivement 2 à 2, 3 à 3, ... des gains de toutes ces boucles lorsqu'elles sont disjointes entre elles.

2. Problématique

Le dénominateur $\Delta(s)$ de la matrice de transfert d'un bond graph associé à un système physique peut se déterminer à l'aide de la règle de Mason [Brown 1972]. Ce système physique peut dans certains cas, admettre plusieurs modèles bond graph (principe d'équivalence). C'est le cas du système constitué par le quart de suspension de véhicule dont les deux modèles bond graphs équivalents sont présentés par les figures suivantes.

L'application de la règle de Mason aux modèles bond graphs représentant le quart de la suspension ne permet pas de retrouver la même fonction de transfert pour les deux modèles équivalents. L'équivalence des deux modèles étant indiscutable, nous allons voir comment

élargir la définition donnée par F.T. Brown afin de résoudre le problème que nous allons maintenant mettre en évidence.

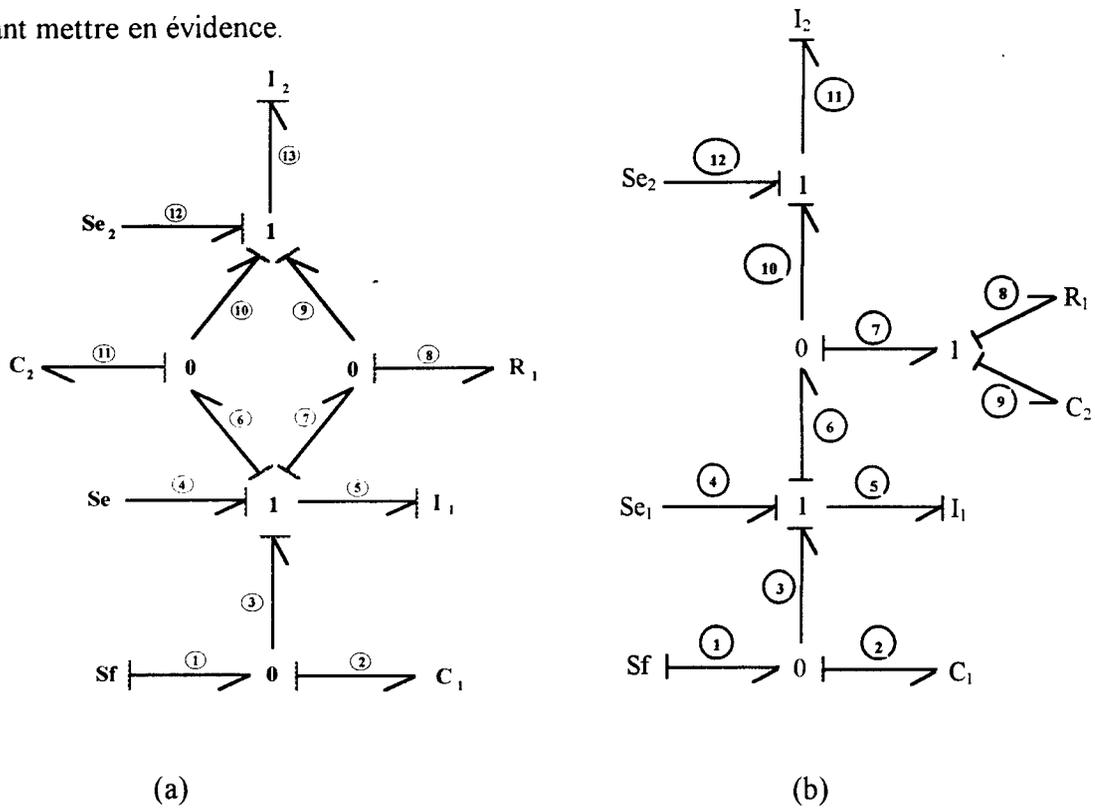


figure1.8. : Chemin causal mixte

Un bilan des différentes boucles causales présentes dans chacune des deux figures peut être effectué. Le tableau 1.2. présente cet inventaire pour chacune des figures:

Eléments impliqués	Figure 1.8.a.		Figure 1.8.b.	
	Parcours causal	Gain de la boucle	Parcours causal	Gain de la boucle
R ₁ et I ₂	(8-9-13-13-9-8)	$B_{a1} = -\frac{R_1}{I_2 s}$	(8-7-10-11-11-10-7-8)	$B_{b1} = -\frac{R_1}{I_2 s}$
R ₁ et I ₁	(8-7-5-5-7-8)	$B_{a2} = -\frac{R_1}{I_1 s}$	(8-7-6-5-5-6-7-8)	$B_{b2} = -\frac{R_1}{I_1 s}$
C ₁ et I ₁	(5-3-2-2-3-5)	$B_{a3} = -\frac{1}{I_1 C_1 s^2}$	(5-3-2-2-3-5)	$B_{b3} = -\frac{1}{I_1 C_1 s^2}$
C ₂ et I ₁	(5-6-11-11-6-5)	$B_{a4} = -\frac{1}{I_1 C_2 s^2}$	(9-7-6-5-5-6-7-9)	$B_{b4} = -\frac{1}{I_1 C_2 s^2}$
C ₂ et I ₂	(11-10-13-13-10-11)	$B_{a5} = -\frac{1}{I_2 C_2 s^2}$	(9-7-10-11-11-10-7-9)	$B_{b5} = -\frac{1}{I_2 C_2 s^2}$

tableau 1.2

Nous constatons un même nombre de boucles causales quel que soit le schéma.

L'application de la règle de Mason pour chacun des deux modèles conduit aux résultats suivants:

- Dénominateur de la matrice de transfert du modèle bond-graph de la figure 1.8.a.:

$$\Delta_a(s) = 1 - [B_{a1} + B_{a2} + B_{a3} + B_{a4} + B_{a5}] + [B_{a1}B_{a3} + B_{a1}B_{a4} + B_{a2}B_{a5} + B_{a3}B_{a5}] \quad (1.4.)$$

$$\Delta_a(s) = 1 + \left[\frac{R_1}{I_2 s} + \frac{R_1}{I_1 s} + \frac{1}{I_1 C_1 s^2} + \frac{1}{I_1 C_2 s^2} + \frac{1}{I_2 C_2 s^2} \right] + \left[\frac{R_1}{I_1 I_2 C_1 s^3} + \frac{R_1}{I_1 I_2 C_2 s^3} + \frac{R_1}{I_1 I_2 C_2 s^3} + \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2 s^4} \right]$$

d'où:

$$\Delta_a(s) = 1 + \left[\frac{R_1}{I_2 s} + \frac{R_1}{I_1 s} + \frac{1}{I_1 C_1 s^2} + \frac{1}{I_1 C_2 s^2} + \frac{1}{I_2 C_2 s^2} \right] + \left[\frac{R_1}{I_1 I_2 C_1 s^3} + \frac{2R_1}{I_1 I_2 C_2 s^3} + \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2 s^4} \right] \quad (1.5.)$$

- Dénominateur de la matrice de transfert du modèle bond-graph de la figure 1.8.b.:

$$\Delta_b(s) = 1 - [B_{b1} + B_{b2} + B_{b3} + B_{b4} + B_{b5}] + [B_{b2}B_{b3} + B_{b3}B_{b5}]$$

$$\Delta_b(s) = 1 + \left[\frac{R_1}{I_2 s} + \frac{R_1}{I_1 s} + \frac{1}{I_1 C_1 s^2} + \frac{1}{I_1 C_2 s^2} + \frac{1}{I_2 C_2 s^2} \right] + \left[\frac{R_1}{I_1 I_2 C_1 s^3} + \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2 s^4} \right] \quad (1.6.)$$

Problème : Le terme $\frac{2R_1}{I_1 I_2 C_2 s^3}$ composant le dénominateur $\Delta_a(s)$ différencie les dénominateurs des systèmes pourtant équivalents. Pour résoudre ce problème, considérons les graphes de fluence associés aux deux modèles bond graphs équivalents présentés figures suivantes:

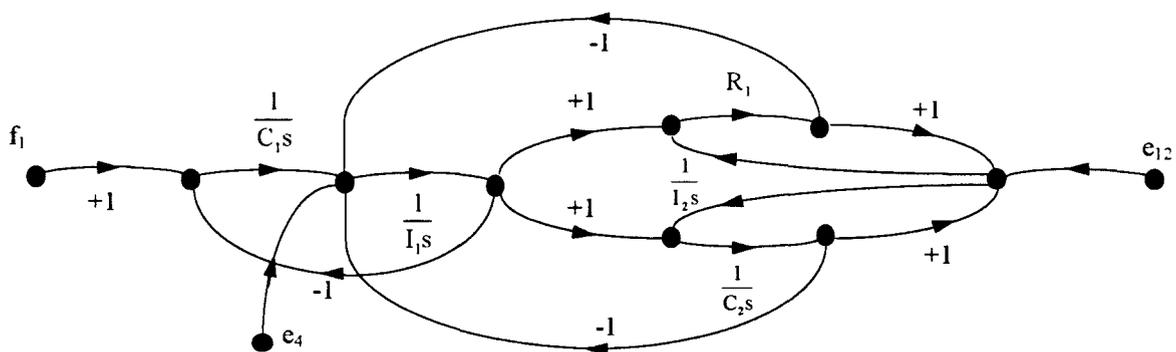


figure 1.9 .: graphe de fluence associé au modèle de la figure 1.8.a.

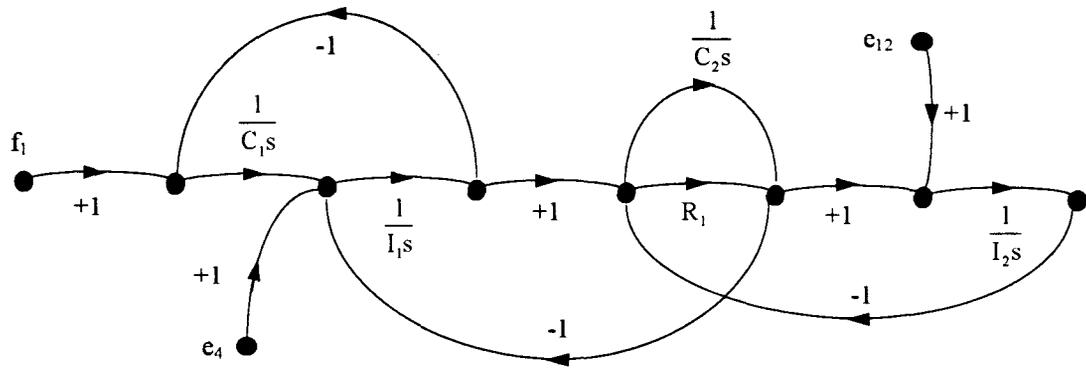


figure 1.10 .: graphe de fluence associé au modèle de la figure 1.8.b.

On peut vérifier aisément l'équivalence des deux modèles.

Le graphe de fluence (figure 1.9) associé au modèle de la figure 1.8 a, fait apparaître une boucle entre I1, R1, C1 et I2. Cette boucle correspond à la maille formée à partir de la relation causale fermée liant ces éléments. Cette maille correspond à la boucle topologique faisant intervenir une relation causale entre les éléments formant cette boucle.

D'après les travaux de F.T. Brown [Brown 1972], l'application de la règle de Mason sur les bond-graphs ne fait pas apparaître cette boucle.

La définition d'une boucle causale ne fait intervenir que les liaisons entre un élément et lui même ou entre deux éléments. Ces derniers sont de type I, C ou R.

Une boucle traverse au plus une fois, un lien, en suivant la même variable effort ou flux. Ces boucles ne doivent pas non plus passer par un ou plusieurs éléments intermédiaires.

C'est ce dernier point qui est mis en cause par l'équivalence précédemment citée.

Notons que F.T. Brown a introduit la notion de « bout de maille » pour la boucle particulière formée à partir d'un élément et lui même (figure 1.11).

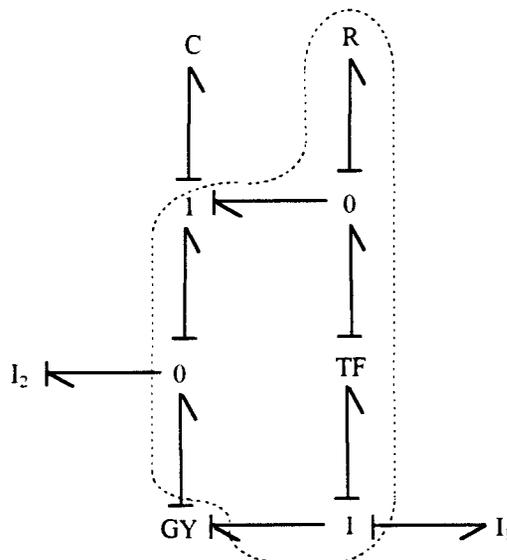


figure 1.11 .: exemple de bout de maille ou boucle causale entre un élément et lui même.

Ce type de boucle fait obligatoirement intervenir des jonctions GY.

Pour remédier au problème d'équivalence entre les modèles des figures 8.a et 8.b, il devient nécessaire de prendre en compte les boucles topologiques formées implicitement à partir des éléments formant une maille.

Ainsi, nous complétons la définition d'une boucle causale par :

Définition 1.6.:

Une boucle causale est un chemin causal fermé, entre un ou **plusieurs** éléments, ne passant pas par le même lien ou par la même jonction en suivant la même variable plus d'une fois.

L'application de cette définition au modèle de la figure 1.8.a., fait apparaître deux nouvelles boucles :

$$B_{S1} = \frac{R_1}{I_1 I_2 C_2 S^3} (5-6-11-11-10-13-13-9-8-8-7-5) \text{ (Sens 1)}$$

$$B_{S2} = \frac{R_1}{I_1 I_2 C_2 S^3} (5-7-8-8-9-13-13-10-11-11-6-5) \text{ (Sens 2)}$$

Les figure 1.12. et 1.13. montrent ces deux boucles :

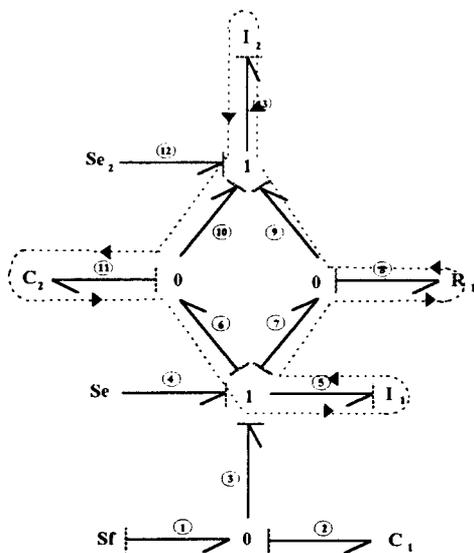


figure 1.12.

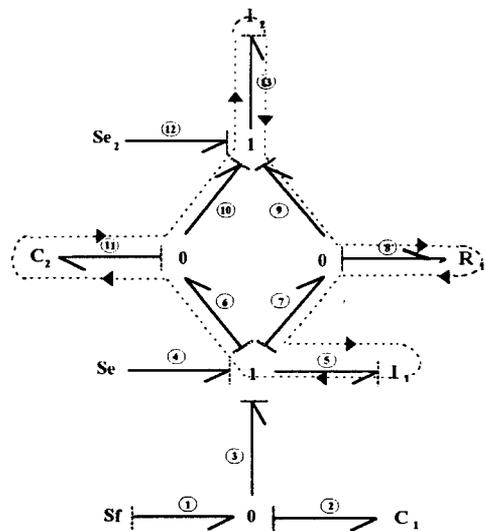


figure 1.13.

illustrations des deux nouvelles boucles causales formées par la maille R1, I1, C1 et I2.

En tenant compte des gains de ces deux nouvelles boucles dans l'application de la règle de Mason au modèle bond-graph de la figure 1.8.a, l'expression (1.5.) devient:

$$\Delta_a(s) = 1 - [B_{a1} + B_{a2} + B_{a3} + B_{a4} + B_{a5} + B_{s1} + B_{s2}] + [B_{a1}B_{a3} + B_{a1}B_{a4} + B_{a2}B_{a5} + B_{a3}B_{a5}]$$

soit :

$$\Delta(s) = 1 + \left[\frac{R_1}{I_2 s} + \frac{R_1}{I_1 s} + \frac{1}{I_1 C_1 s^2} + \frac{1}{I_1 C_2 s^2} + \frac{1}{I_2 C_2 s^2} - \frac{R_1}{I_1 I_2 C_2 s^3} - \frac{R_1}{I_1 I_2 C_2 s^3} \right] + \left[\frac{R_1}{I_1 I_2 C_1 s^3} + \frac{R_1}{I_1 I_2 C_2 s^3} + \frac{R_1}{I_1 I_2 C_2 s^3} + \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2 s^4} \right]$$

d'où:

$$\Delta(s) = 1 + \left[\frac{R_1}{I_2 s} + \frac{R_1}{I_1 s} + \frac{1}{I_1 C_1 s^2} + \frac{1}{I_1 C_2 s^2} + \frac{1}{I_2 C_2 s^2} \right] + \left[\frac{R_1}{I_1 I_2 C_1 s^3} + \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2 s^4} \right] \quad (1.7.)$$

L'expression (1.7.) est maintenant identique à l'expression (1.6.). Les gains B_{s1} et B_{s2} ont permis d'annuler le terme $\frac{2R_1}{I_1 I_2 C_2 s^3}$.

Remarque: Un "cycle topologique" ou « maille », est un ensemble de liens de puissance qui permettent de partir d'un élément et d'y revenir causalement tout en ne parcourant certains liens que suivant l'effort ou le flux.

La présence de cycles topologiques engendre un accroissement du nombre total de boucles causales. Nous tenterons d'établir ci-après, les conditions d'annulation de certains gains de boucles et nous définirons alors un critère permettant de réduire, dans certains cas, ce nombre total de boucles causales.

3. Etude topologique

En l'absence de cycle topologique, toute boucle causale entre deux éléments E_1 et E_2 ayant des gains positifs, possède un gain négatif. En effet, dans le parcours causal d'une boucle, il existe toujours un nombre impair de jonctions J_i où un changement de sens intervient entre les liens de puissance (figure 1.14.a. et 1.14.b.).



figure 1.14.a.



figure 1.14.b.

Cela est dû à la convention de représentation du transfert de puissance qui est supposée fournie à l'élément R, C ou I.

Quelle que soit la configuration causale de la boucle, la valeur de $(-1)^{(n_0+n_1)}$ obtenue lors du parcours causal de E_1 vers E_2 sera différente de celle obtenue de E_2 vers E_1 . Le signe définitif sera donc toujours négatif.

Lorsqu'il existe un cycle topologique entre ces deux éléments (figure 1.15.), un minimum de quatre jonctions J_i ($J_i \in \{0;1\}$) apparaissent dont au moins 2 portent un changement de sens de puissance au niveau des liens (les jonctions J_1 et J_2 ici). En effet, d'après les propos tenus précédemment, ces jonctions J_i où surviennent des changements de sens sont toujours en nombre impair dans chacune des branches existantes entre E_1 et E_2 . Ces branches (au nombre de deux) entraînent donc un nombre total pair de jonctions J_i où surviennent des changements de sens au niveau des liens. Quatre boucles causales existent.

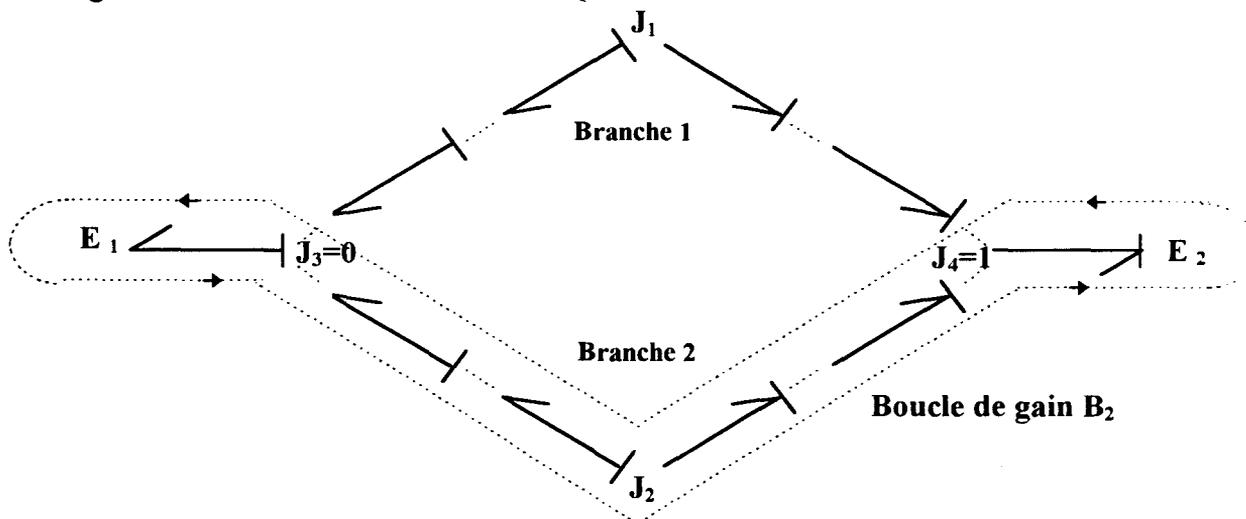


figure 1.15.

Les gains B_2 (passant par J_2 - voir figure) et B_1 (passant par J_1) des deux premières boucles sont négatifs. Ces boucles parcourent chacune, suivant l'effort et le flux, l'une des deux jonctions J_i ($i=1$ ou $i=2$) où intervient le changement d'orientation des liens de puissance (nous considérons ici qu'il n'existe qu'un seul changement de sens des liens de puissance dans chaque branche du cycle).

Les deux dernières boucles causales de gains B_{s1} et B_{s2} parcourent l'ensemble du cycle (Sens 1 ou Sens 2 de la figure 1.16.). Pour chaque jonction J_i , la valeur de $(-1)^{(n_0+n_1)}$ obtenue lors de son parcours dans l'un des sens, est différente de celle obtenue dans l'autre sens. Le nombre pair de ces jonctions où surviennent des changements d'orientation au niveau

des liens, implique (comme le montre le tableau suivant) que ces deux boucles causales ont des gains égaux ($B_{S1} = B_{S2}$).

	Sens 1	Sens 2
$J_1=0$ $J_2=0$	$(-1)^{(n_0+n_1)_1} = +1$ $(-1)^{(n_0+n_1)_2} = -1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_1} = -1$ $(-1)^{(n_0+n_1)_2} = +1$
	$(-1)^{(n_0+n_1)_{cycle}} = -1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_{cycle}} = -1$
$J_1=0$ $J_2=1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_1} = +1$ $(-1)^{(n_0+n_1)_2} = +1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_1} = -1$ $(-1)^{(n_0+n_1)_2} = -1$
	$(-1)^{(n_0+n_1)_{cycle}} = +1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_{cycle}} = +1$
$J_1=1$ $J_2=0$	$(-1)^{(n_0+n_1)_1} = -1$ $(-1)^{(n_0+n_1)_2} = -1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_1} = +1$ $(-1)^{(n_0+n_1)_2} = +1$
	$(-1)^{(n_0+n_1)_{cycle}} = +1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_{cycle}} = +1$
$J_1=1$ $J_2=1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_1} = -1$ $(-1)^{(n_0+n_1)_2} = +1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_1} = +1$ $(-1)^{(n_0+n_1)_2} = -1$
	$(-1)^{(n_0+n_1)_{cycle}} = -1$	$(-1)^{(n_0+n_1)_{cycle}} = -1$

$(-1)^{(n_0+n_1)_i}$ obtenu à la jonction J_i

$$(-1)^{(n_0+n_1)_{cycle}} = (-1)^{(n_0+n_1)_1} \times (-1)^{(n_0+n_1)_2}$$

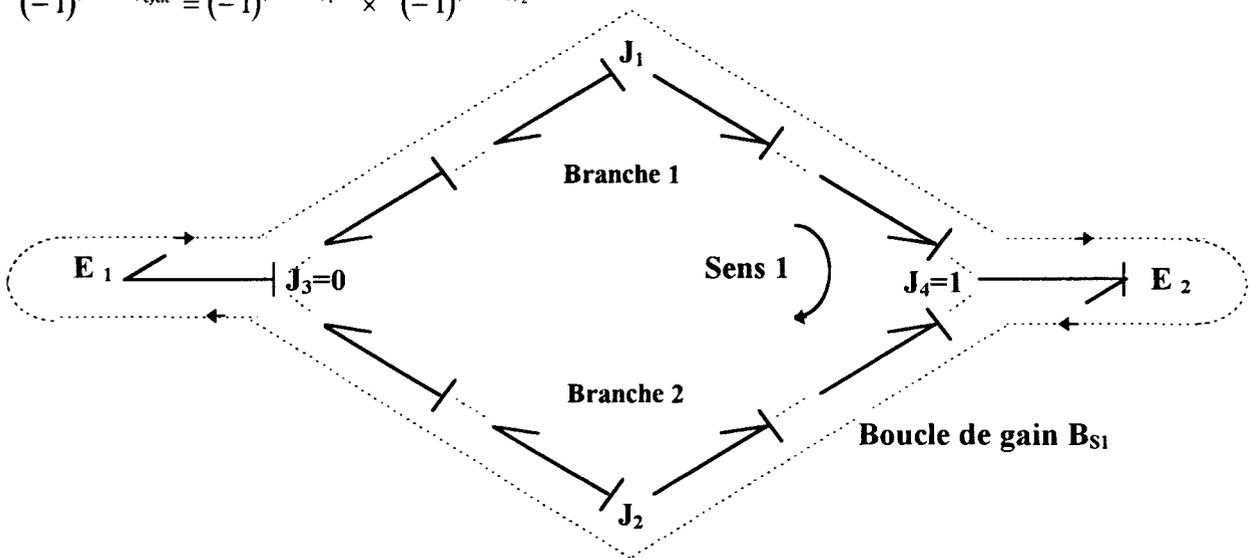


figure 1.16.

Si les deux branches sont dépourvues d'éléments TF et GY ou si le produit des modules de ces éléments situés dans l'une des deux branches est égal à celui des modules de autres éléments situés dans l'autre branches, ces quatre gains sont égaux en valeur absolue.

La règle de Mason implique entre autres termes l'apparition des 4 gains de boucles:

$$\Delta(s) = \dots - \left[\underbrace{B_1 + B_2 + B_{s_1} + B_{s_2} + \dots}_{T} \right] + \dots$$

Lorsque B_{s_1} et B_{s_2} sont de signe négatif, il vient $T=4B_{s_1}$.

Lorsque B_{s_1} et B_{s_2} sont de signe positif, il vient $T=0$.

Ce résultat est dû au nombre pair de branches constituant le cycle. En d'autres termes, ce résultat ne vaut que si le nombre d'éléments situés autour du cycle est pair.

Considérons maintenant un bond graph constitué d'un cycle composé de quatre branches (autour duquel quatre éléments sont disposés). $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ et $\text{Card } \mathcal{E} = 4$.

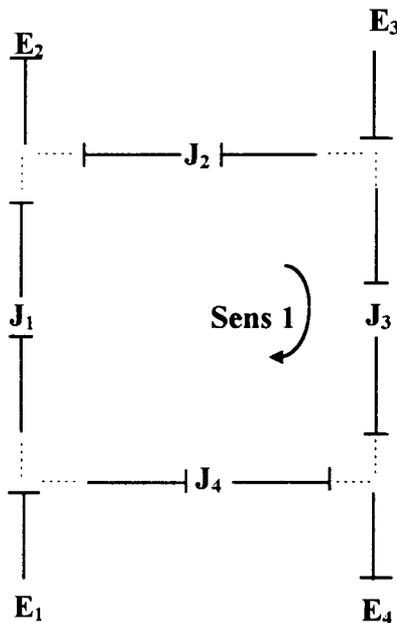


figure 1.17.

Les gains B_{s_1} et B_{s_2} des deux boucles causales parcourant l'ensemble du cycle impliquent cette fois, les gains des quatre éléments E_1, E_2, E_3 et E_4 . Nous avons vu que ces deux gains étaient toujours égaux et par conséquent, toujours de même signe.

Autour de ce cycle, quatre autres boucles causales existent (E_1 avec E_2 de gain B_1 , E_1 avec E_4 de gain B_2 , E_2 avec E_3 de gain B_3 et E_3 avec E_4 de gain B_4). Les boucles causales de gains B_1 et B_4 sont disjointes. Il en est de même pour les boucles de gains B_2 et B_3 . Deux double produits interviennent donc dans l'application de la règle de Mason. Ces deux double produits font chacun intervenir les gains des quatre éléments situés autour du cycle. Chaque gain de boucle étant négatif, ces deux double produits sont positifs.

La règle de Mason implique donc entre autres:

$$\Delta(s) = \dots - [B_{S1} + B_{S2} + \dots] + [B_1 B_4 + B_2 B_3 + \dots] - \dots$$

Si le signe des gains B_{S1} et B_{S2} est positif, les quatre termes énumérés ci-dessus s'annulent.

Ces différents résultats nous amènent aux propositions suivantes:

Proposition 1.1.:

Lorsque le nombre n_c d'éléments situés autour d'un cycle (ou le nombre de branches composant le cycle) est pair, les valeurs absolues des deux gains de boucles causales parcourant l'ensemble du cycle (sens 1 et sens 2) sont donc toujours égales aux valeurs absolues des deux produits de $\frac{n_c}{2}$ gains de boucles causales disjointes entre elles situées autour de ce cycle et le composant.

Proposition 1.2.:

Si les gains des deux boucles causales parcourant un cycle constitué d'un nombre d'éléments n_c pairs sont positifs, alors dans l'application de la règle de Mason, ces deux gains et ceux des deux produits de $\frac{n_c}{2}$ gains de boucles causales disjointes entre elles situées autour de ce cycle et le composant, s'annulent.

Considérons maintenant un cycle composé de 6 branches (figure 1.18.). $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ et $\text{Card } \mathcal{E} = 6$.

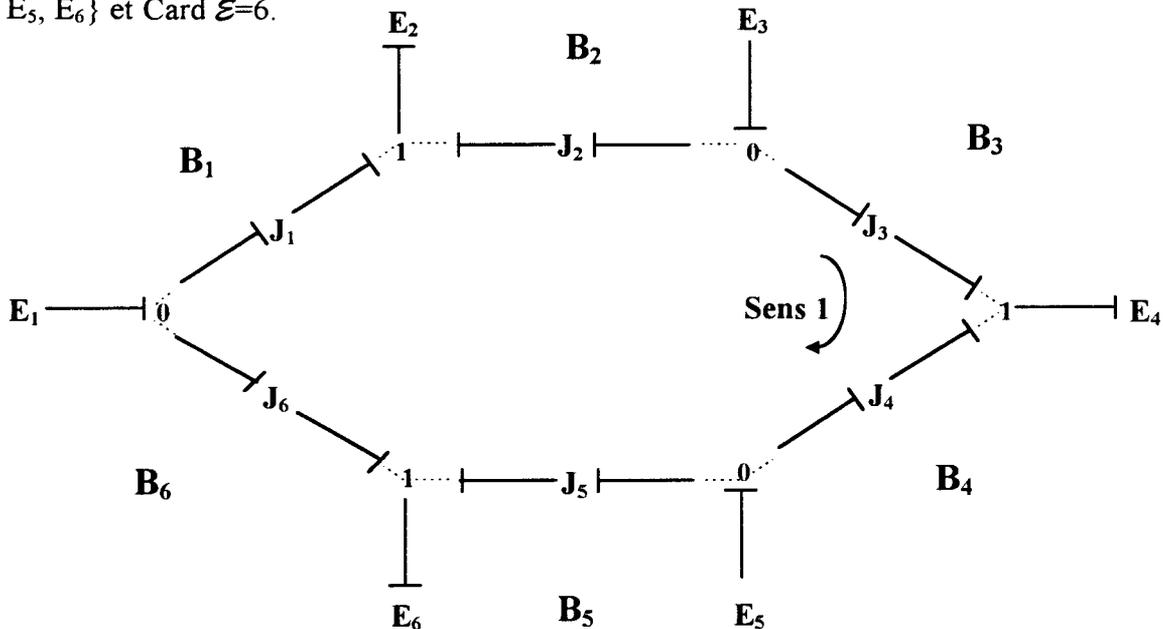


figure 1.18.

Les gains des deux boucles causales parcourant l'ensemble du cycle, notés B_{S_1} et B_{S_2} , font donc intervenir les gains des 6 éléments de ce cycle. Six boucles causales existent autour de ce cycle de gains B_i comme présente la figure 1.18.. Il existe dans ce cas, deux triple produits de gains de boucles causales disjointes. Ces deux termes ($B_1B_3B_5$ et $B_2B_4B_6$) font également intervenir les gains des six éléments.

En fonction du signe de B_{S_1} et B_{S_2} , ces quatre termes B_{S_1} et B_{S_2} , $B_1B_3B_5$ et $B_2B_4B_6$ s'annuleront ou produiront $4B_{S_1}$.

Lorsque le nombre n_e est impair, le nombre de branches est également impair. Les figures suivantes présentent quelques situations de ce genre.

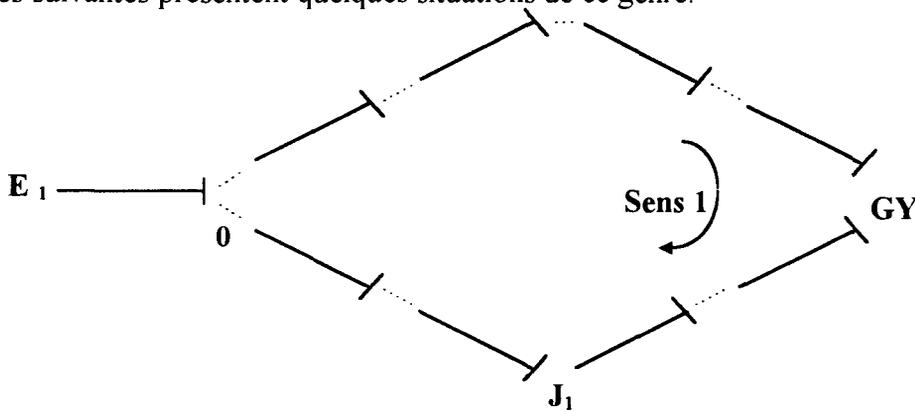


figure 1.19.

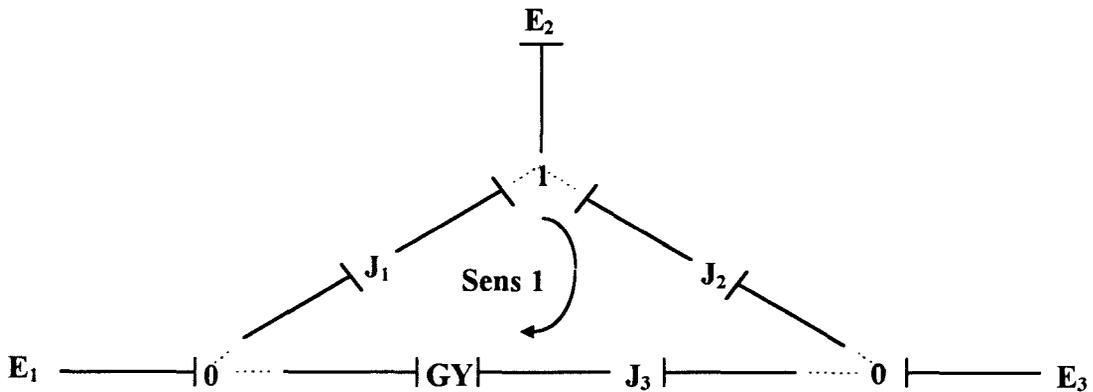


figure 1.20 .

Le gain B_{S_1} du chemin causal fermé reliant l'élément E_1 de la figure 1.19. à lui même et empruntant le sens 1 est de signe opposé au gain B_{S_2} du chemin causal emprunté suivant le sens 2. Ces deux gains s'annulent donc dans l'application de la règle de Mason. Cette situation correspond à celle présentée dans [Brown 1972] et appelée alors "mesh" (ou "maille" en français). Dans ce cas, $\mathcal{E} = \{E_1\}$ et $\text{Card } \mathcal{E} = 1$.

Concernant la figure 1.20., trois branches composent le cycle. Le signe du gain B_{s_1} de la boucle causale parcourant ce cycle dans le sens 1 et passant par les trois éléments E_1 , E_2 et E_3 ($\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$ et $\text{Card } \mathcal{E} = 3$) varie en fonction du signe de $(-1)^{(n_0+n_1)_i}$ obtenu à chaque jonction J_i .

Si ces trois valeurs $(-1)^{(n_0+n_1)_i}$ sont identiques, le signe du gain B_{s_1} de cette boucle est opposé à celui de B_{s_2} , gain de la boucle parcourant le cycle dans le sens 2. La somme de ces deux gains dans la règle de Mason s'annule donc.

Si ces trois valeurs $(-1)^{(n_0+n_1)_i}$ diffèrent (deux valeurs positives et une négative ou le contraire), le signe du gain B_{s_1} de la boucle suivant le sens 1 est toujours opposé à B_{s_2} , celui de la boucle parcourant le cycle dans le sens 2. La somme de ces deux gains dans la règle de Mason s'annule également.

Tous ces résultats nous amènent aux propositions suivantes:

Proposition 1.3.:

Lorsque le nombre n_c d'éléments situés autour d'un cycle (ou le nombre de branches le composant) est impair, la somme des deux gains de boucles causales parcourant l'ensemble du cycle (sens 1 et sens 2) est toujours nulle.

L'heuristique mise en place grâce aux trois précédentes propositions permet par une simple étude de cycle, de ne plus tenir compte de certains termes dans l'application de la règle de Mason. Il en résulte donc une simplification des calculs.

Cette heuristique facilement programmable prend toute son importance dans l'étude de modèles bond graphs présentant des boucles causales totalement disjointes du cycle ou des cycles ou encore pour des modèles bond graphs présentant plusieurs cycles disjointes entre eux.

Les quelques modèles présentés ci-après reflètent ces diverses situations. Considérons tout d'abord la figure 1.21.:

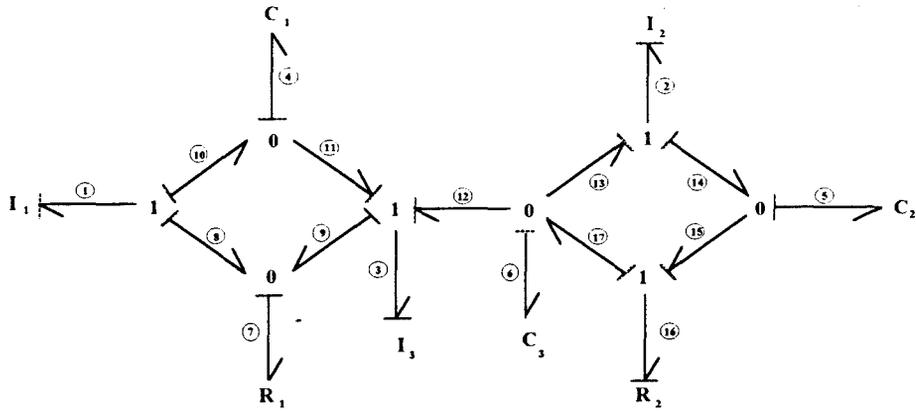


figure 1.21.

Chaque cycle est composé de 4 branches. L'heuristique énoncée précédemment est vérifiée pour le cycle de droite car les deux gains B_{S1}^d et B_{S2}^d des deux boucles causales parcourant ce cycle sont positifs:

$$B_{S1}^d = + \frac{1}{R_2 C_2 C_3 I_2 s^3} (6 - 13 - 2 - 2 - 14 - 5 - 5 - 15 - 16 - 16 - 17 - 6)$$

$$B_{S2}^d = + \frac{1}{R_2 C_2 C_3 I_2 s^3} (6 - 17 - 16 - 16 - 15 - 5 - 5 - 14 - 2 - 2 - 13 - 6)$$

Sur ce cycle, les quatre boucles causales ont pour gains:

$$B_1^d = - \frac{1}{C_3 I_2 s^2}, B_2^d = - \frac{1}{C_2 I_2 s^2}, B_3^d = - \frac{1}{R_2 C_2 s} \text{ et } B_4^d = - \frac{1}{C_3 R_2 s}$$

Le terme $- B_{S1}^d - B_{S2}^d + B_1^d B_3^d + B_2^d B_4^d$ issu de la règle de Mason s'annule donc.

Tous les termes de cette expression sont disjoints des six boucles causales situées sur l'autre cycle qui ont pour gains:

$$B_{S1}^g = + \frac{R_1}{C_1 I_3 I_1 s^3} (1 - 10 - 4 - 4 - 11 - 3 - 3 - 9 - 7 - 7 - 8 - 1)$$

$$B_{S2}^g = + \frac{R_1}{C_1 I_3 I_1 s^3} (1 - 8 - 7 - 7 - 9 - 3 - 3 - 11 - 4 - 4 - 10 - 1)$$

$$B_1^g = - \frac{1}{C_1 I_1 s^2}, B_2^g = - \frac{1}{C_1 I_3 s^2}, B_3^g = - \frac{R_1}{I_3 s} \text{ et } B_4^g = - \frac{R_1}{I_1 s}$$

Certaines de ces boucles causales sont disjointes entre elles. Les termes $B_1^g B_3^g$ et $B_2^g B_4^g$ apparaissent lors de l'application de la règle de Mason.

L'annulation du terme $-B_{S1}^d - B_{S2}^d + B_1^d B_3^d + B_2^d B_4^d$ engendre donc celle de nombreux autres termes du fait de l'apparition de double et triple produits lors de l'application de la règle de Mason. Ces termes sont résumés par l'expression suivante:

$$\left[-B_{S1}^d - B_{S2}^d + B_1^d B_3^d + B_2^d B_4^d \right] \cdot \left[-B_{S1}^g - B_{S2}^g - B_1^g - B_2^g - B_3^g - B_4^g + B_1^g B_3^g + B_2^g B_4^g \right]$$

L'heuristique permet donc finalement pour ce modèle de réduire le nombre de termes apparaissant lors de l'application de la règle de Mason. Cette simplification non négligeable (36 termes disparaissent) peut être encore plus significative pour des modèles constitués de nombreux cycles. Le modèle bond graph de la figure suivante comporte 6 cycles (1 cycle à 8 éléments, 3 cycles à 4 éléments et 2 cycles à 6 éléments):

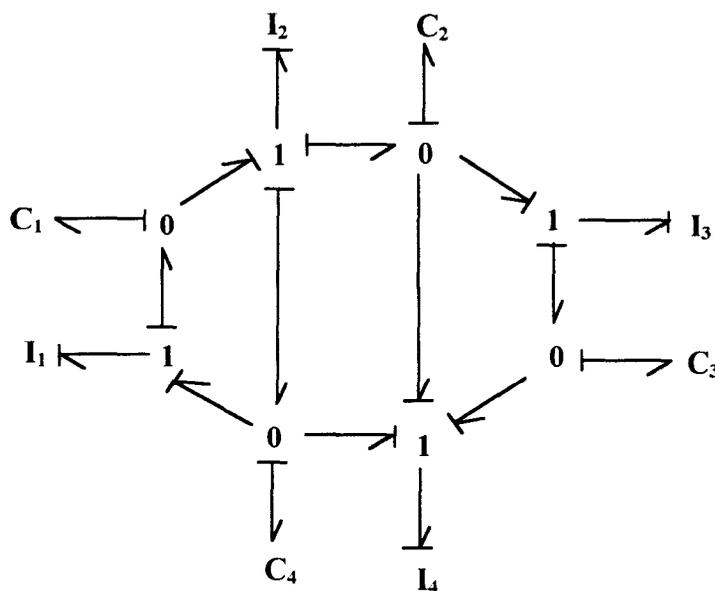


figure 1.22.

L'application de l'heuristique occasionne ici une simplification de 60 termes. Les détails sont fournis en annexe A2.

CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à des rappels et à l'introduction de nouvelles définitions et propositions.

Dans un premier temps nous avons rappelé certaines notions de causalité. Nous avons ensuite mis en évidence la présence de boucles causales pouvant impliquer plus de deux éléments et avons procédé à un élargissement de la définition de la boucle causale jusqu'alors utilisée.

Nous avons ensuite dans un dernier temps, énoncé une règle permettant de simplifier considérablement les calculs de la matrice de transfert.

CHAPITRE II

DETERMINATION FORMELLE DE LA MATRICE DE TRANSFERT ASSOCIEE A UN BOND GRAPH COMPORTANT DES ELEMENTS MULTIPORTS

INTRODUCTION

L'écriture formelle de la matrice de transfert d'un système physique demeure l'une des étapes importantes dans le processus de modélisation. La règle de MASON constitue le principal outil permettant d'atteindre ce but lorsque les systèmes sont modélisés à l'aide de bond graphs 1-port. Cette méthode repose essentiellement sur le parcours bond graph et constitue la base des travaux qui sont présentés dans ce chapitre.

Le but de ce chapitre est d'établir une règle équivalente, essentiellement graphique s'appliquant aux modèles bond graphs comportant des éléments multiports (notés MP). Nous pourrions considérer cette dernière comme une extension de la règle de Mason.

Après avoir fixé le contexte de nos travaux, nous nous attachons à introduire de nouvelles définitions sur les chemins causaux et boucles causales présents dans de tels modèles ainsi que sur leurs gains. Les expressions permettant de connaître formellement le dénominateur puis les différents numérateurs de la matrice de transfert d'un système ne possédant qu'un seul MP sont alors établies. Une généralisation de ces résultats aux bond graphs comportant plusieurs MP est enfin établie. Une mise en oeuvre des résultats énoncés est systématiquement présentée.

1. Position du problème

1.1. Présence d'un élément multiport

Dans le cas où un modèle bond graph ne possède que des éléments 1-port, seuls les chemins causaux indirects traversent un ou plusieurs éléments de type I, C ou R (voir figure 1.6.: passage par un élément I). La traversée d'un tel élément est toujours identique. Elle ne présente pas d'autre choix de part la nature de l'élément. Lorsque le sens du parcours est celui présenté figure 1.8., il est en effet incontournable de suivre successivement les variables effort (e_i) puis flux (f_i)

Cette situation est différente lorsque l'élément ainsi parcouru s'avère être un MP. Reprenons la figure 1.6. et remplaçons l'élément I 1-port par un élément multiport M (figure 2.1.).

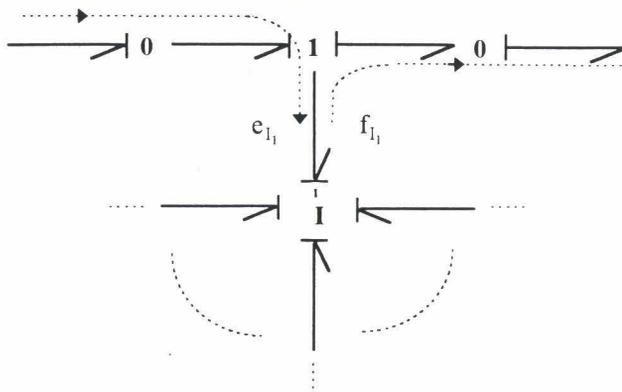


figure 2.1. : Présence d'un MP de dimension m , $X_i \in \{R,I,C\}$

Pour traverser le MP, nous pouvons rencontrer plusieurs situations. Sur la figure 2.1., après avoir parcouru le lien indicé 1 du MP suivant l'effort e_{1_1} , plusieurs choix sont possibles parmi lesquels:

- un retour immédiat suivant le flux f_{1_1} (figure 2.2.). Dans ce cas, le MP est simplement touché. Cette situation s'apparente à celle rencontrée figure 1.8.

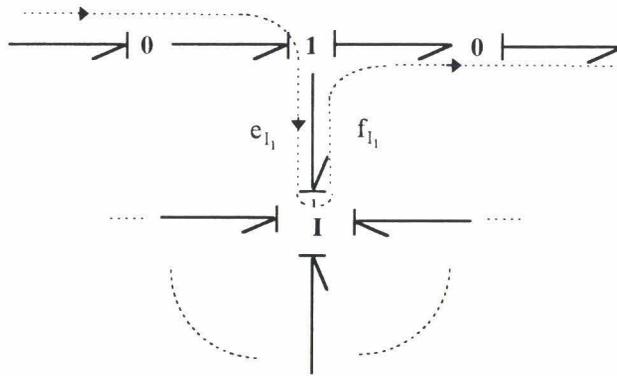


figure 2.2.

- le parcours d'un autre lien du MP (le lien indicé 2 par exemple). Celui-ci est successivement parcouru suivant le flux (f_{1_2}) puis, suivant l'effort (e_{1_2}). Entre ces deux passages, un élément X_2 est également parcouru. Le lien indicé 1 est finalement parcouru suivant le flux (f_{1_1}).

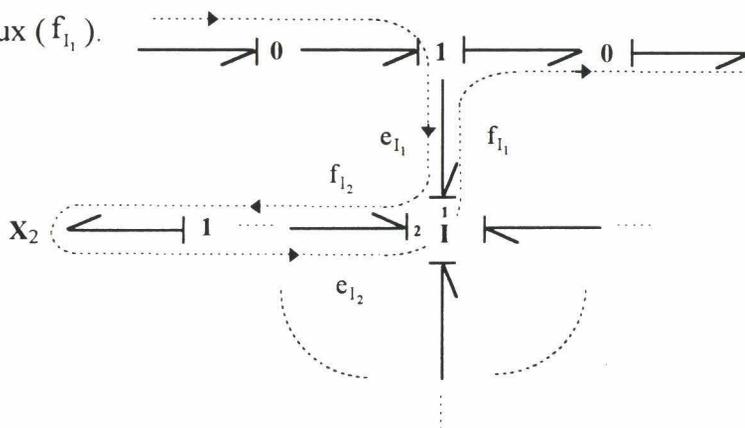


figure 2.3.

Cette méthode de parcours peut être généralisée à plusieurs liens parcourus successivement:

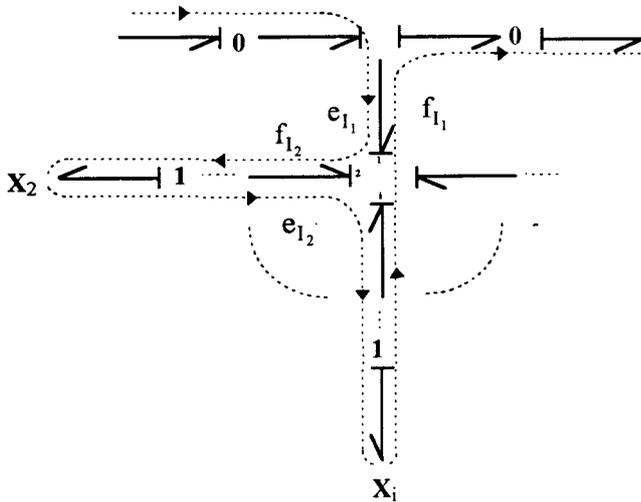


figure 2.4.a.

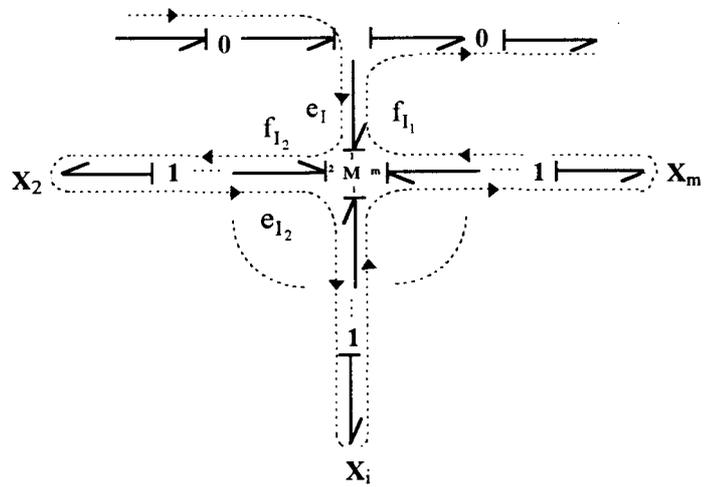


figure 2.4.b.

Il peut arriver également que les branches d'un MP soient, autrement que par l'intermédiaire du MP, causalement liées. Dans ce cas, après le parcours d'un second lien du MP (le lien indicé 2 par exemple suivant le flux f_{i_2}), un troisième lien du MP (le lien indicé i par exemple) peut être parcouru suivant l'effort e_{i_1} avant de traverser le MP et de parcourir finalement le lien indicé 1 suivant f_{i_1} (figure 2.5.).

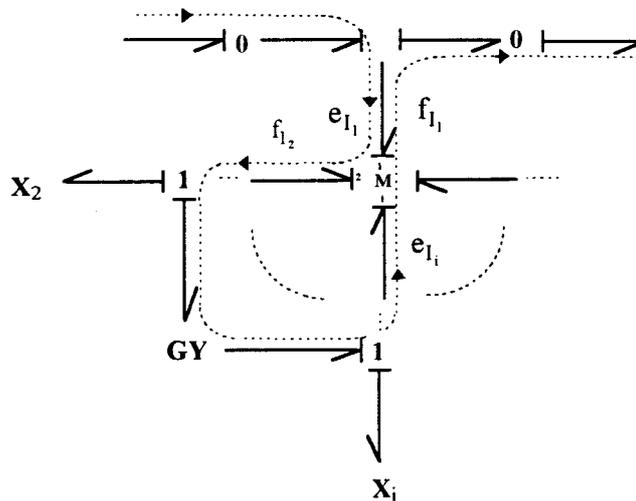


figure 2.5.

Nous constatons que les liens indicés 2 et i ne sont parcourus qu'une seule fois dans chacun des cas. Cette situation peut être généralisée à plusieurs liens.

La combinaison des situations précédentes peut engendrer d'autres situations (figures 2.6.):

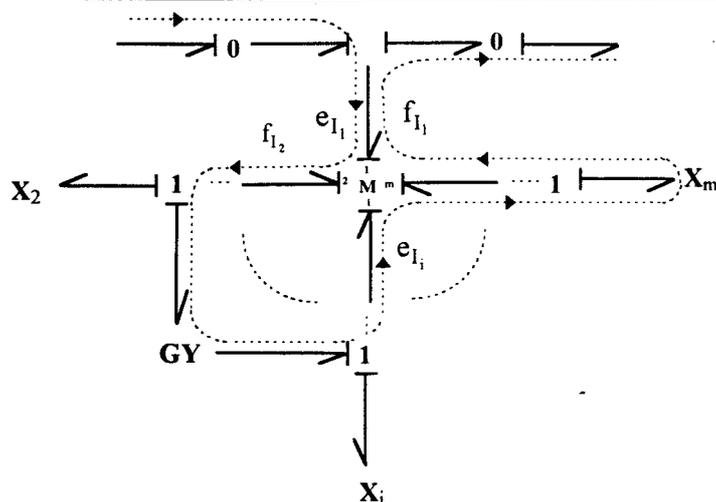


figure 2.6.a.

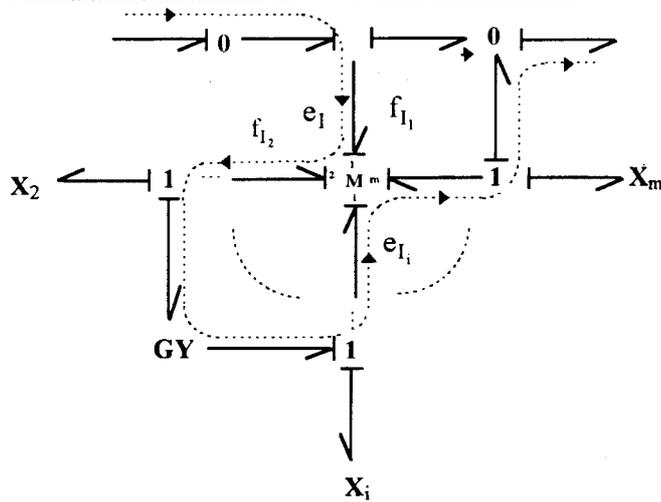


figure 2.6.b.

Nous notons donc que la présence de MP implique en matière de parcours de bond graphs, l'introduction de certaines notions jusqu'ici non définies dans les bond graphs 1-port.

Remarque: La traversée d'un MP est totalement indépendante de la causalité affectant ce MP. Tous les résultats de ce chapitre sont indépendants de la causalité affectant le MP

1.2. Définitions

Nous envisageons ici le cas où le bond graph ne comporte qu'un seul MP.

Définitions 2.1.:

1) Un chemin causal de classe 0 (noté chemin causal C0) est un chemin causal (simple, mixte ou indirect) qui n'implique pas le MP.

2) Un chemin causal de classe 1 (noté chemin causal C1) est un chemin causal indirect impliquant le MP et traversant **un ou plusieurs** de ses liens. Ces derniers ne sont parcourus que dans un seul sens (suivant effort ou flux) (figure 2.6.b.).

3) Un chemin causal de classe 2 (noté chemin causal C2) est un chemin causal indirect impliquant le MP et traversant **un ou plusieurs** de ses liens. Tous ces liens sont parcourus dans les deux sens (suivant effort et flux) (figures 2.2, 2.3. et 2.4.).

4) Un chemin causal de classe 1-2 (noté chemin causal C1-2) est un chemin causal indirect impliquant le MP et traversant **plusieurs** de ses liens. Certains de ces liens ne sont parcourus que dans un seul sens (suivant effort ou flux) alors que les autres le sont dans les deux sens (suivant effort et flux) (figures 2.5. et 2.6.a.).

Dans une même classe de chemin causal, nous pourrions distinguer, selon le nombre de liens parcourus du MP, différents types. La définition suivante va nous permettre de faire cette distinction.

Définition 2.2.:

Un chemin causal de type t (noté chemin causal T_t) ($1 \leq t \leq m = \dim M$) est un chemin causal impliquant t liens du MP.

Remarque: Lorsque le MP n'est pas l'élément de départ du chemin causal, si un lien de ce MP est parcouru sans que ce MP soit immédiatement traversé (un autre lien du MP est alors parcouru) ou touché (ce premier lien parcouru est alors parcouru dans le sens opposé) alors ce lien n'intervient pas dans la définition de la classe et du type du chemin causal considéré car son parcours n'engendre pas de contribution du MP dans le gain du chemin causal en question.

Dans ce cas, tous les chemins causaux C_0 sont donc de type 0 et tous les chemins causaux C_1 sont donc de type pair.

Tout comme nous avons défini de nouvelles classes de chemins causaux, nous proposons de la même manière de nouvelles définitions pour les boucles causales présentes dans un bond graph comportant un MP que nous noterons désormais MP-BG.

Définitions 2.3.:

1) Une boucle causale de classe 0 (notée boucle causale C_0) est un chemin causal direct fermé n'impliquant pas le MP, entre éléments 1-port de l'ensemble $\{R, C, I\}$ (figure 2.7.a.)

2) Une boucle causale de classe 1 (notée boucle causale C_1) est un chemin causal fermé impliquant le MP et parcourant **plusieurs** de ses liens. Tous ces liens ne sont parcourus que dans un seul sens (suivant effort ou flux) (figure 2.7.b.).

3) Une boucle causale de classe 2 (notée boucle causale C_2) est un chemin causal fermé impliquant le MP et parcourant **un ou plusieurs** de ses liens. Tous ces liens sont parcourus dans les deux sens (suivant effort et flux) (figure 2.7.a.).

4) Une boucle causale de classe 1-2 (notée boucle causale C_{1-2}) est un chemin causal fermé impliquant le MP et parcourant **plusieurs** de ses liens. Certains de ces liens ne sont parcourus que dans un seul sens (suivant effort ou flux) alors que les autres le sont dans les deux sens (suivant effort et flux) (figure 2.7.b.).

La notion de type évoquée à propos des chemins causaux s'applique également aux boucles causales.

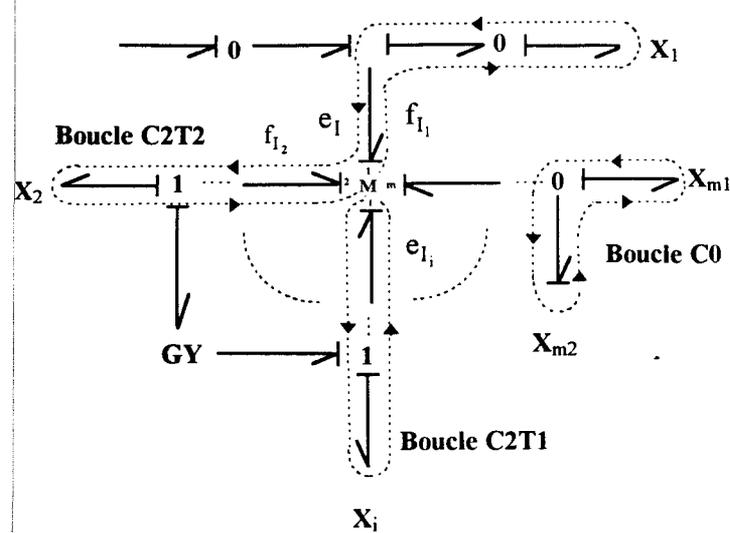


figure 2.7.a.

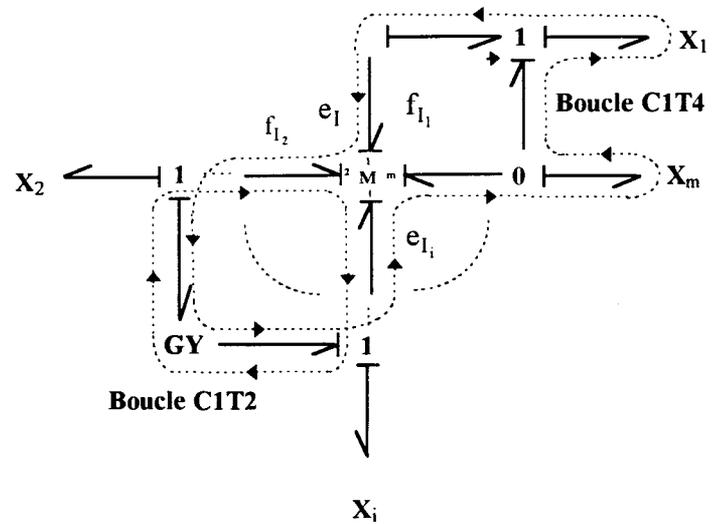


figure 2.7.b.

Remarque: Les définitions précédentes concernant les bond graphs ne comportant qu'un seul MP peuvent être étendues aux bond graphs comportant plusieurs MP. De nouvelles définitions concernant les chemins causaux et les boucles causales seront données dans une prochaine section.

2. Gains des chemins causaux et des boucles causales dans un MP-BG

Avant de présenter les principaux résultats, nous allons définir les expressions des gains des différentes catégories de chemins causaux et de boucles causales.

2.1. Gains des chemins causaux

Deux catégories de chemins causaux ont été définies précédemment:

- Les chemins causaux n'impliquant pas le MP (C0) (cas 1-port)
- Les chemins causaux parcourant le MP (C1, C2 ou C1-2).

2.1.1. Chemins causaux dissociés du MP (chemins causaux C0)

Le gain de ce type de chemin est celui énoncé pour les bond graphs ne comportant pas de MP. L'expression de ce genre de gain est la suivante (donnée au premier chapitre (1.1.)):

$$T = (-1)^{(n_0+n_1)} \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right) \quad (2.1.)$$

2.1.2. Chemins causaux impliquant le MP (chemins causaux C1, C2 et C1-2)

2.1.2.1 Contribution du MP dans le gain d'un chemin causal

Proposition 2.1.:

Soient i_e et $i_s \in \{1;2;\dots;m\}$, les indices des deux liens mis en jeu lors du passage d'un chemin causal par le MP. i_e constitue l'indice du lien d'entrée (parcouru avant le passage par le MP) tandis que i_s représente l'indice du lien de sortie (parcouru après ce passage).

Différents termes m_{jk} de la matrice caractéristique M du MP interviennent dans le calcul du gain du chemin causal tout comme intervient le gain de l'élément 1-port traversé par un chemin causal indirect.

Ces termes m_{jk} sont constants si le MP est un élément multiport R (noté MP-R) ou fonctions de s ou s^{-1} (s opérateur de Laplace) pour des éléments multiports I ou C (notés MP-I ou MP-C) en causalité dérivée, intégrale ou mixte.

L'ordre dans lequel les différents liens du MP sont parcourus doit être pris en compte. De manière générale, la contribution du MP dans le gain T_p d'un chemin causal P peut être exprimée par:

$$T_p = \prod_{p=1}^{n_T} m_{i_s^p i_e^p} = m_{i_1^1 i_e^1} \cdot m_{i_2^2 i_e^2} \cdot m_{i_3^3 i_e^3} \dots m_{i_{n_T}^{n_T} i_e^{n_T}} \tag{2.2.}$$

n_T constitue le nombre de traversées du MP par le chemin causal.

P est composé des indices des liens traversés du MP. Plus généralement, nous noterons P de cette façon: $P = \{i_1 i_2 i_3 \dots i_{q-1} i_q\}$. Dans ce cas, ce chemin causal traverse le MP de la façon suivante :

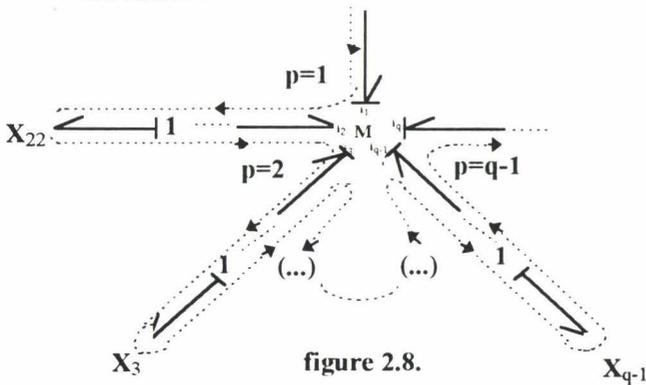


figure 2.8.

	avant le MP	après le MP
	i_e^p	i_s^p
Premier passage (p=1)	$i_e^1 = i_1$	$i_s^1 = i_2$
Second passage (p=2)	$i_e^2 = i_2$	$i_s^2 = i_3$
(...)	(...)	(...)
Dernier passage (p=q-1)	$i_e^{q-1} = i_{q-1}$	$i_s^{q-1} = i_q$

Le nombre n_T de traversées du MP vaut alors $[(\text{Card } P)-1]=q-1$.

L'expression (2.2.) donne: $T_p = \prod_{p=1}^{q-1} m_{i_s^p i_e^p} = m_{i_2 i_1} \cdot m_{i_3 i_2} \dots m_{i_q i_{q-1}}$

Lorsqu'il existe une relation causale entre 2 liens du MP autre que le MP lui-même, ces deux liens (les liens indicés 2 et 3 de la figure 2.9.) peuvent être parcourus successivement sans que le MP ne soit traversé. Dans ce cas, P sera noté $P = \{12\} \cup \{34\dots\} = P_1 \cup P_2$. Cette écriture de P concerne les chemins causaux C1 et C1-2. Le nombre n_T de traversées vaut dans ce cas $[(\text{Card } P_1) - 1] + [(\text{Card } P_2) - 1] = 1 + 1 = 2$.

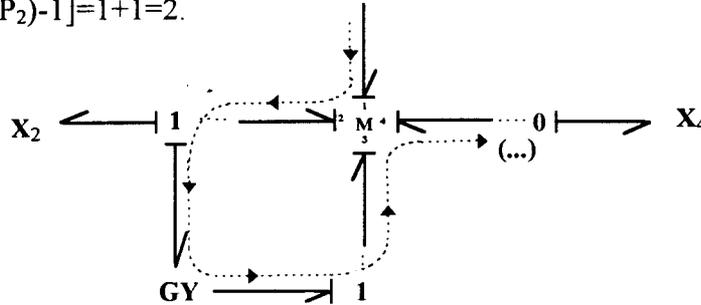


figure 2.9.

L'expression (2.2.) produit dans ce cas $T_P = \prod_{p=1}^2 m_{i_p i_p} = m_{i_2 i_1} \cdot m_{i_4 i_3}$

Comme nous venons de le voir, la contribution de MP dans le gain d'un chemin causal varie selon la classe du chemin. Différents cas doivent donc être distingués. Nous proposons de les énumérer maintenant.

a) Chemin causaux C1

Tous les liens du MP appartenant à un chemin causal C1 sont parcourus suivant effort ou flux.

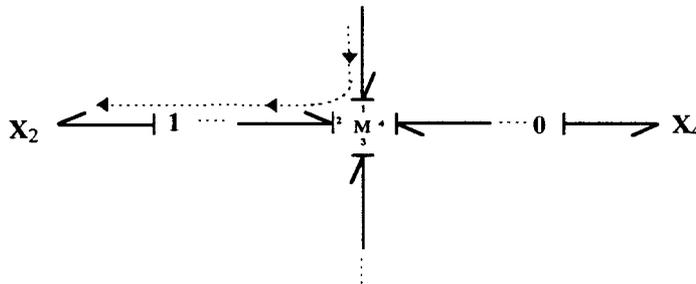


figure 2.10.a. : Chemin causal classe 1 type 2 (C1T2)

Seuls deux des liens du MP sont parcourus (figure 2.10.a.). Le lien d'entrée est indicé 1 (e=1) et le lien de sortie est indicé 2 (s=2). La figure 2.10.b. symbolise cette situation:

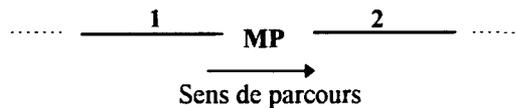


figure 2.10.b. : franchissement du MP de la figure 2.10.a.

L'ensemble P des liens utilisés du MP vaut $P=\{12\}$. La contribution du MP dans le gain de ce chemin causal, déduite de l'expression (2.2.), vaut donc $T_P = T_{\{12\}} = m_{21}$ (composante d'indice de ligne 2 et de colonne 1 de la matrice caractéristique M du MP).

Un autre chemin causal C1 a été étudié figure 2.9.. La figure 2.11. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

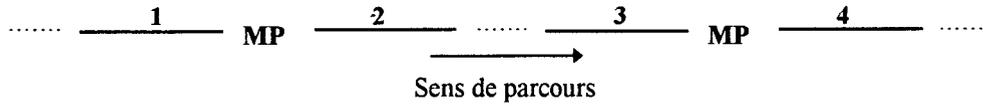


figure 2.11. : franchissement du MP de la figure 2.9.

La contribution du MP dans le gain de ce chemin causal, déduite de l'expression (2.2.), vaut donc $T_P = T_{\{12\} \cup \{34\}} = m_{21}$ (encore noté $T_{12-34} = m_{21} \cdot m_{32}$)

Les résultats présentés concernant ce chemin causal C1T4 sont tout à fait généralisables à tous les chemins causaux C1 quel que soit le type de ce chemin.

b) Chemin causaux C2

Tous les liens du MP appartenant à un chemin causal C2 sont parcourus suivant effort et flux. Les figures 2.12. présentent différents cas pouvant apparaître:

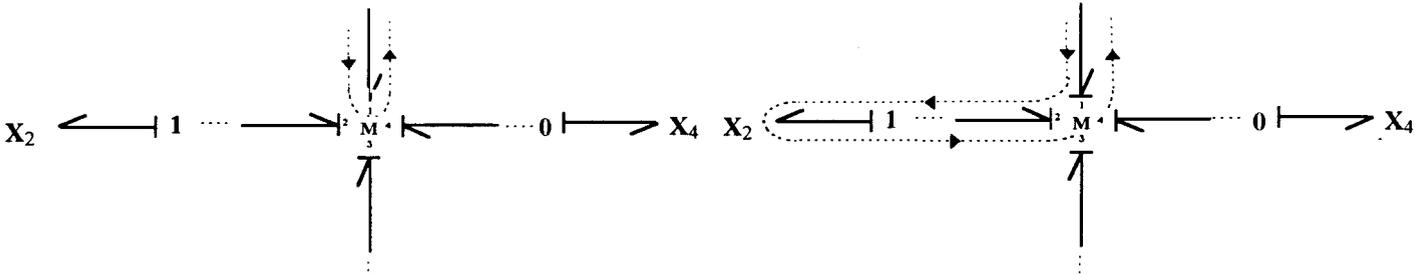


figure 2.12.a. : chemin causal C2T1

figure 2.12.b. : chemin causal C2T2

Sur la figure 2.12.a., un seul lien est concerné. Le MP n'est pas traversé mais simplement touché via son lien indicé 1. La figure 2.12.c. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

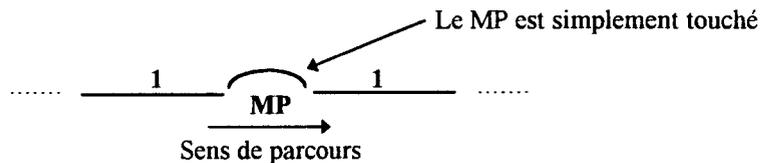


figure 2.12.c. : franchissement du MP de la figure 2.12.a.

La contribution du MP dans le gain de ce chemin causal, déduite de l'expression (2.2.), vaut donc $T_P = T_{\{11\}} = m_{11}$ (composante d'indice de ligne 1 et de colonne 1 de la matrice caractéristique M du MP).

Sur la figure 2.12.b., deux liens indicés 1 et 2 du MP sont parcourus. La figure 2.12.d. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

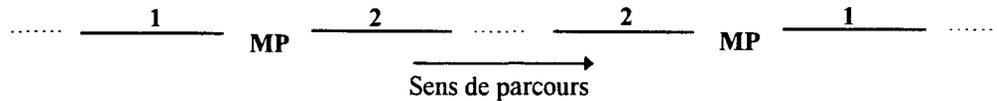


figure 2.12.d. : franchissement du MP de la figure 2.12.b.

La contribution du MP dans le gain de ce chemin causal, déduite de l'expression (2.2.), vaut donc $T_P = T_{\{12\}} = m_{21} m_{12}$.

Les précédents résultats peuvent être généralisés pour plus de deux liens parcourus:

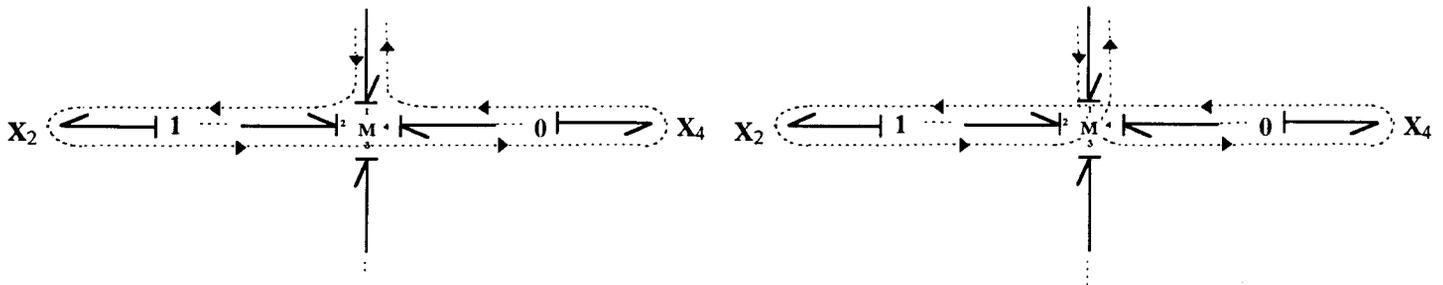


figure 2.13.a. : chemin causal C2T3

figure 2.13.b. : chemin causal C2T3

Sur les figures 2.13.a. et 2.13.b., trois liens indicés 1,2 et 4 sont parcourus.

• figure 2.13.a.: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,2,4 et 1. La figure 2.13.c. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

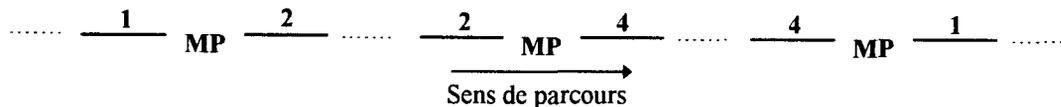


figure 2.13.c. : franchissement du MP de la figure 2.13.a.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut: $T_P = T_{\{124\}} = m_{21} \cdot m_{42} \cdot m_{14}$

• figure 2.13.b.: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,4,2 et 1. La figure 2.13.d. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

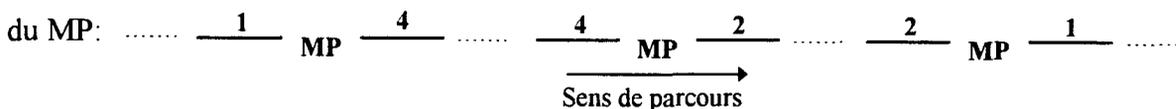


figure 2.13.d. : franchissement du MP de la figure 2.13.b.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut: $T_P = T_{\{142\}} = m_{41} \cdot m_{24} \cdot m_{12}$

Sur les figures 2.13.e. et 2.13.f., trois liens sont également concernés mais le MP est parfois simplement touché.

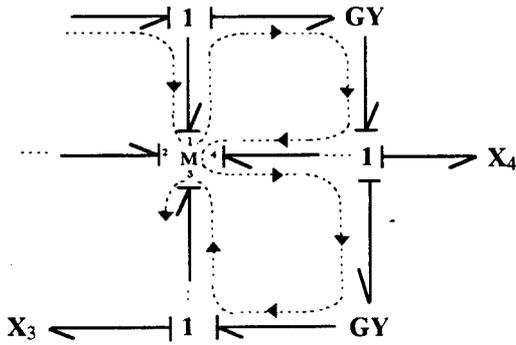


figure 2.13.e. : chemin causal C2T3

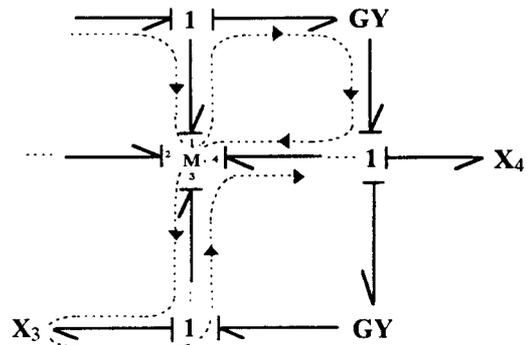


figure 2.13.f. : chemin causal C2T3

- figure 2.13.e.: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,4 et 3. Le MP est toujours simplement touché. La figure 2.13.g. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

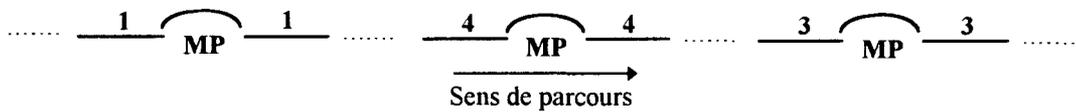


figure 2.13.g. : franchissement du MP de la figure 2.13.e.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut: $T_p = T_{\{11\} \cup \{44\} \cup \{33\}} = m_{11} \cdot m_{44} \cdot m_{33}$

- figure 2.13.f.: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,4,3 et 4. La figure 2.13.h. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

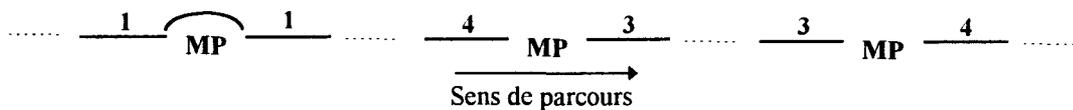


figure 2.13.h. : franchissement du MP de la figure 2.13.f.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut: $T_p = T_{\{11\} \cup \{434\}} = m_{11} \cdot m_{34} \cdot m_{43}$

c) Chemin causaux C1-2

Tous les liens du MP appartenant à un chemin causal C1-2 sont parcourus suivant (effort et flux) et suivant (effort ou flux). Les figures 2.14.a. et 2.14.b. présentent différents cas pouvant apparaître:

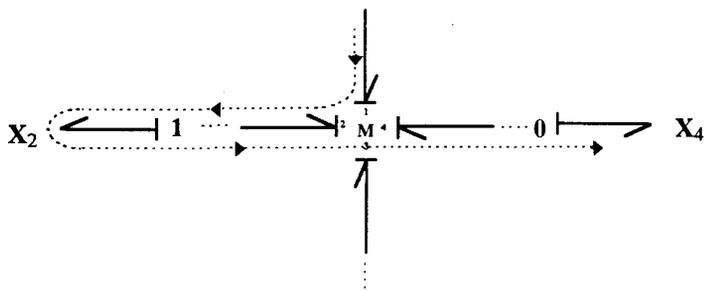


figure 2.14.a. : chemin causal C1-2T3

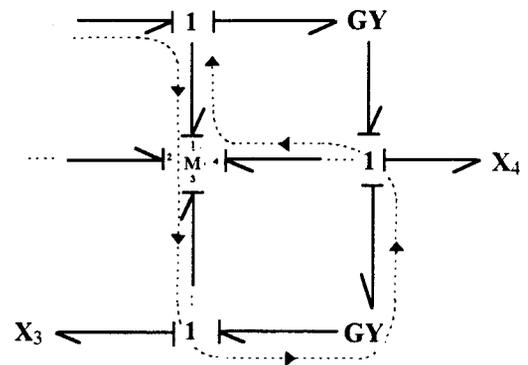


figure 2.14.b. : chemin causal C1-2T3

Sur les figures 2.14.a. et 2.14.b., trois liens sont parcourus.

- figure 2.14.a.: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,2 et 4. La figure 2.14.c. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

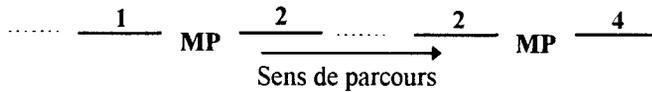


figure 2.14.c. : franchissement du MP de la figure 2.14.a.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut: $T_P = T_{\{124\}} = m_{21} \cdot m_{42}$

- figure 2.14.b.: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,3,4 et 1. La figure 2.14.d. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

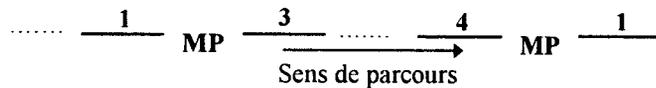


figure 2.14.d. : franchissement du MP de la figure 2.12.d.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut: $T_P = T_{\{134\} \cup \{41\}} = m_{31} \cdot m_{14}$

Les chemins causaux des figures 2.15.a. et 2.15.b. présentent également des chemins causaux C1-2:

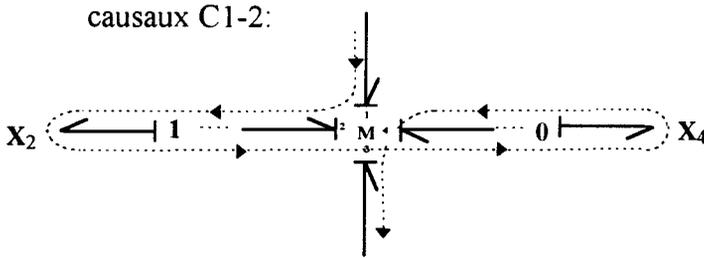


figure 2.15.a. : chemin causal C1-2T4

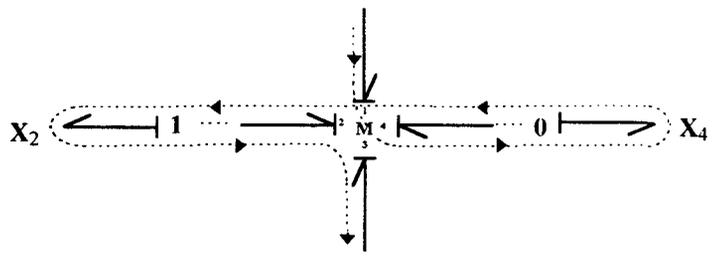


figure 2.15.b. : chemin causal C1-2T4

Sur les figures 2.15.a. et 2.15.b., quatre liens sont successivement parcourus.

- figure 2.15.a.: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,2,4 et 3. La figure 2.15.c. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

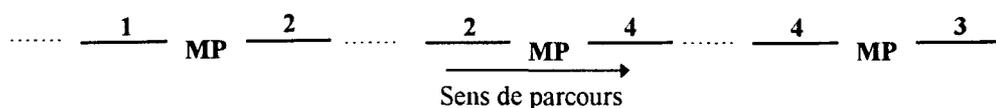


figure 2.15.c. : franchissement du MP de la figure 2.14.c.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut: $T_P = T_{\{1243\}} = m_{21} \cdot m_{42} \cdot m_{34}$

• figure 2.15.b.: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,4,2 et 3. La figure 2.15.d. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

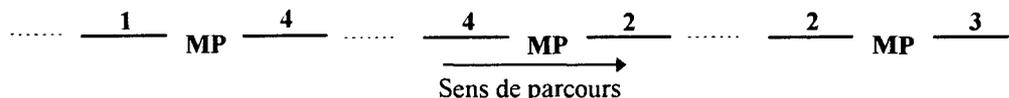


figure 2.15.d. : franchissement du MP de la figure 2.14.d.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut: $T_P = T_{\{1423\}} = m_{41} \cdot m_{24} \cdot m_{32}$

Les chemins causaux des figures 2.15.e. et 2.15.f. présentent également des chemins causaux C1-2:

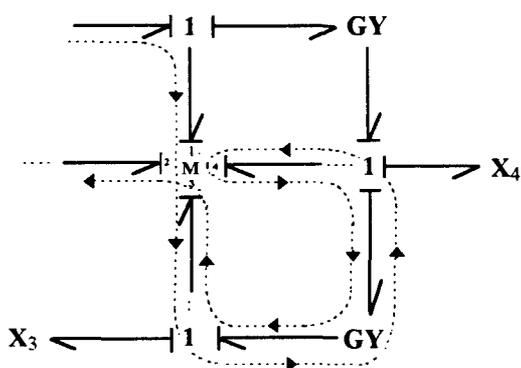


figure 2.15.e. : chemin causal C1-2T4

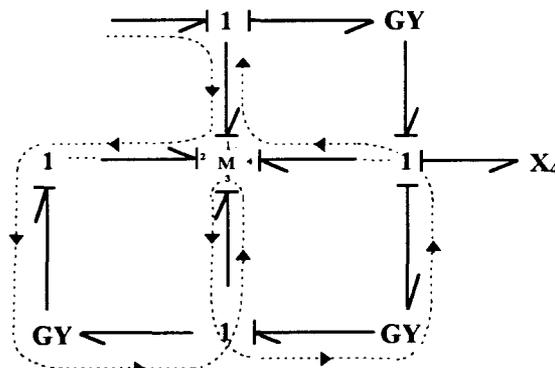


figure 2.15.f. : chemin causal C1-2T4

• figure 2.15.e.: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,3,4,3 et 2. La figure 2.15.g. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

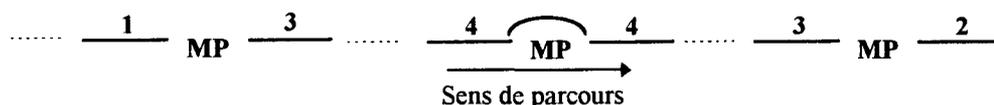


figure 2.15.g. : franchissement du MP de la figure 2.14.e.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut:

$$T_P = T_{\{13\} \cup \{44\} \cup \{32\}} = m_{31} \cdot m_{44} \cdot m_{23}$$

• figure 2.15.f: le chemin causal traverse successivement les liens indicés 1,2,3,4 et 1.
La figure 2.15.h. symbolise la situation rencontrée dans cette figure concernant le franchissement du MP:

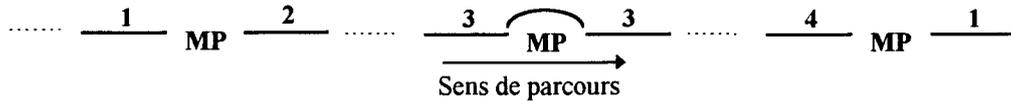


figure 2.15.h. : franchissement du MP de la figure 2.14.f.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal vaut:

$$T_P = T_{\{21\} \cup \{33\} \cup \{14\}} = m_{41} \cdot m_{24} \cdot m_{32}$$

2.1.2.2. Gain des chemins causaux C1, C2 et C1-2

Compte tenu des résultats obtenus ci-avant, nous proposons une extension de l'expression (2.1.) pour les MP-BG:

Proposition 2.2. :

Le gain d'un chemin causal C1, C2 ou C1-2 s'exprime par la relation suivante:

$$T = \left(\prod_{p=1}^{n_T} m_{i_a^p; i_b^p} \right)^* \cdot (-1)^{(n_0+n_1)} \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right)$$

* : contribution du MP dans le gain du chemin causal.

Nous écrivons donc:

$$T = (-1)^{(n_0+n_1)} \prod_{p=1}^{n_T} m_{i_a^p; i_b^p} \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right) \quad (2.3.)$$

• $\prod_{p=1}^{n_T} m_{i_a^p; i_b^p}$ dépend de la nature du chemin traversant le MP et s'exprime sous différentes

formes comme nous l'avons vu précédemment.

Remarque: Le résultat énoncé précédemment reste valable quelle que soit l'orientation de la puissance dans les liens du MP.

2.2. Gains des boucles causales

Tout comme pour les chemins causaux non fermés, les chemins causaux fermés (les boucles causales) se répartissent en deux catégories suivant leur situation par rapport au MP.

2.2.1. Boucles causales dissociées du MP (boucles causales C0)

Le gain d'une telle boucle causale demeure celui énoncé pour les bond graphs ne comportant pas de MP et s'exprime comme ci-après:

$$B = (-1)^{(n_0+n_1)} \cdot \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right)^2 \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right)^2 \quad (2.4)$$

Les notations utilisées conservent la même signification que précédemment.

2.2.2. Boucles causales impliquant le MP (boucles causales C1, C2 et C1-2))

Tout comme précédemment, nous proposons une généralisation de l'expression (2.4) aux gains des boucles causales impliquant le MP.

Proposition 2.3. :

Le gain d'une boucle causale parcourant le MP s'exprime par:

$$B = \left(\prod_{p=1}^{n_T} m_{i_p^+ i_p^-} \right)^* \cdot (-1)^{(n_0+n_1)} \cdot \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right)^2 \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right)^2$$

* : contribution du MP dans le gain du chemin causal.

Nous écrivons donc:

$$B = (-1)^{(n_0+n_1)} \cdot \prod_{p=1}^{n_T} m_{i_p^+ i_p^-} \cdot \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right)^2 \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right)^2 \quad (2.5)$$

Démonstration:

Une boucle causale étant un chemin causal fermé, la démonstration de cette expression est semblable à celle utilisée pour établir l'expression (2.3.) à partir de l'expression (2.1.).

Les notations sont les mêmes que celles employées précédemment.

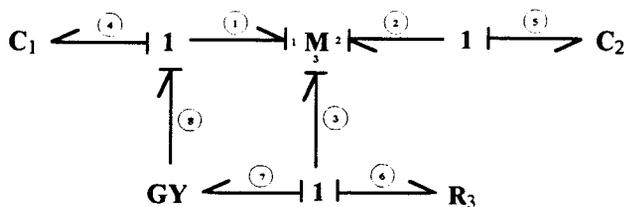
Définition 2.4.:

Deux boucles causales C1, C2 et/ou C1-2 sont considérées comme étant disjointes lorsqu'elles ne possèdent aucune jonction, aucun élément en commun (sauf le MP) ni aucun lien parcouru en suivant la même variable.

Exemple:

Afin d'appliquer les résultats précédents, considérons le bond graph de la figure 2.16..

Le MP est caractérisé par la relation suivante:



$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \text{ avec } M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

figure 2.16.

Plusieurs boucles causales apparaissent parmi lesquelles:

Classe Type	Éléments mis en jeu	Parcours causaux	Gains
C1T2	M	1-3-7-8	$B_1=(-1)^{(0+0)} \cdot r \cdot m_{31} = r \cdot m_{31}$
C2T1	M et C ₁	1-4-4-1	$B_2=(-1)^{(0+1)} \cdot m_{11} \cdot \frac{1}{C_1 s} = -\frac{m_{11}}{C_1 s}$
C2T2	M, C ₁ et C ₂	4-2-5-5-2-4	$B_3=(-1)^{(0+2)} \cdot m_{12} m_{21} \cdot \frac{1}{C_2 C_1 s^2} = \frac{m_{12} m_{21}}{C_1 C_2 s^2}$
C2T2	M	1-8-7-3-3-7-8-1	$B_4=(-1)^{(0+1)} \cdot r^2 m_{11} m_{33} = -r^2 m_{11} m_{33}$
C2T3	M, C ₁ , C ₂ et R ₃	4-1-2-5-5-2-3-6-6-3-1-4	$B_5=(-1)^{(0+3)} \cdot m_{21} m_{32} m_{13} \cdot \frac{1}{R_3 C_2 C_1 s^2} = \frac{m_{21} m_{32} m_{13}}{R_3 C_2 C_1 s^2}$
C1-2T3	M et C ₂	5-2-1-8-7-3-2-5	$B_6=(-1)^{(0+2)} \cdot m_{12} m_{23} \cdot \frac{r}{C_2 s} = \frac{r \cdot m_{12} m_{23}}{C_2 s}$

tableau 2.1. : Liste de quelques boucles causales de la figure 2.16.

Concernant l'étude de la matrice de transfert de ces systèmes, nous proposons de décomposer ce travail en plusieurs étapes. Nous proposons de traiter dans un premier temps les bond graphs ne comportant qu'un seul MP dont les branches ne sont pas connectées (voir bond graph de la figure 2.12.c.). L'étude des bond graphs ne comportant qu'un seul MP dont les branches sont connectées (voir bond graph de la figure 2.16.) sera abordée dans un second temps. Nous traiterons enfin le cas des bond graphs comportant plusieurs MP.

3. Etude des bond graphs comportant un seul MP à branches non connectées

Pour ce type de bond graph, il n'existe aucune boucle causale C1 ou C1-2. Toutes les boucles causales sont C0⁽¹⁾ ou C2Ti⁽²⁾ avec 1 ≤ i ≤ m.

3.1. Détermination du dénominateur de la matrice de transfert

Afin de généraliser la règle de Mason aux modèles comportant un MP, nous allons, à l'aide d'un exemple, souligner les différences qui peuvent apparaître dues à la présence de ce MP.

Considérons un bond graph comportant un MP de dimension m quelconque, dont les branches ne sont pas connectées et ne possédant pas d'élément du type {TF;GY} (figure 2.17.a.). Cette dernière restriction a pour but de simplifier ce qui sera exposé après. Elle ne nuit en aucun cas à la généralité de nos propos.

(1) boucles causales n'impliquant pas le MP

(2) boucles causales impliquant un ou plusieurs liens du MP. Ces liens sont parcourus suivant effort et flux.

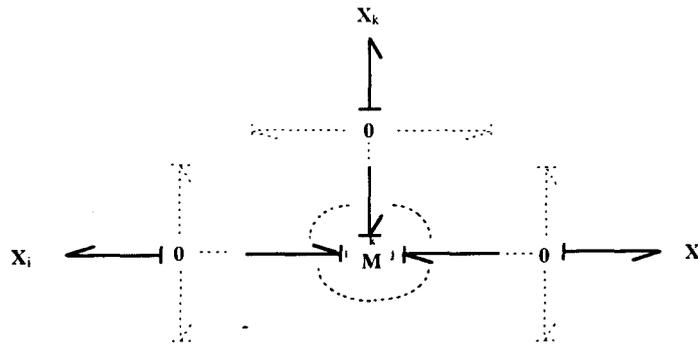


figure 2.17.a. : Bond graph comportant un MP à branches non connectées de dimension 3

Un bilan des différents gains de boucles causales, que nous appellerons boucles "élémentaires", doit dans un premier temps être dressé.

- s'il existe une (ou plusieurs) boucle causale C0 dans chacune des branches du MP, leur gain respectif B_i , pour $1 \leq i \leq m$, s'expriment par:

$$B_i = (-1)^{(n_0+n_1)_i} G_0(s) \quad (2.6.a.)$$

i représente l'indice de la branche dans laquelle se situe la boucle causale. Si plusieurs boucles causales C0 existent dans la branche i , nous les distinguerons par B_i^1, B_i^2, \dots

$G_0(s)$ représente le produit de gains d'éléments du type {R;I;C} intervenant dans la boucle. Ces gains sont répertoriés dans δ_0 qui est défini ci-après:

$$\delta_0 = \left\{ R; \frac{1}{R}; \frac{1}{Cs}; \frac{1}{Is}; Cs; Is \right\}$$

- s'il existe également une (ou plusieurs) boucle causale C2T1 dans chacune des branches du MP (relation causale fermée entre le MP et lui-même via un ou plusieurs autres éléments 1-port) alors leur gain respectif $B_{\{ii\}}$, pour $1 \leq i \leq m$, s'écrit de la façon suivante:

$$B_{\{ii\}} = (-1)^{(n_0+n_1)_{ii}} G_i(s) \cdot m_{ii} \quad (2.6.b.)$$

i représente l'indice de la branche dans laquelle se situe la boucle causale. La notation $B_{\{ii\}}$ rappelle que le lien indicé i du MP est parcouru dans les deux sens (effort et flux). Cette situation se traduit par la représentation suivante :

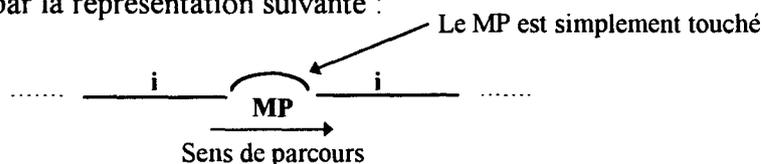


figure 2.17.b.

La contribution du MP dans ce gain vaut donc m_{ii} .

Si plusieurs boucles causales C2T1 existent dans la branche i, nous les distinguerons par $B_{\{ii\}}^1, B_{\{ii\}}^2, \dots$

$G_i(s)$ est le gain de l'élément 1-port ou le produit des gains des éléments 1-port, situé(s) dans la branche i et intervenant dans la boucle en question. $G_i(s)$ appartient à l'ensemble δ_0 ou s'obtient par produit de termes appartenant à δ_0 .

- l'existence de boucles C2T1 disjointes deux à deux (parce que situées dans des branches différentes: les branches i et j par exemple), engendre celle d'une boucle C2T2. Cette boucle possède un gain ($B_{\{ij\}} = B_{\{ji\}}$), pour $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$ et $i \neq j$, s'écrivant sous la forme suivante:

$$B_{\{ij\}} = (-1)^{(n_0+n_1)_{ij}} G'(s) \cdot m_{ij} \cdot m_{ji} \tag{2.6.c.}$$

La notation $B_{\{ij\}}$ rappelle que la première traversée du MP s'effectue du lien indicé i vers le lien indicé j et que la seconde s'effectue du lien indicé j vers le lien indicé i du MP. Les deux liens sont donc parcourus dans les deux sens (effort et flux). Cette situation se traduit par la représentation suivante :

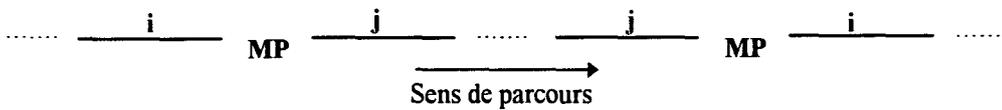


figure 2.17.c.

La contribution du MP dans ce gain vaut donc $m_{ij} m_{ji}$.

$G'(s)$ est le produit des gains des éléments 1-port intervenant dans cette boucle. $G'(s)$ est obtenu par produit d'éléments appartenant à δ_0 .

- l'existence de boucles C2T1 disjointes trois à trois (parce que situées dans trois branches différentes: les branches i, j et k par exemple), engendre celle de boucles C2T3, dont le gain sera noté $B_{\{ijk\}}$ pour $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m$ et $i \neq j \neq k$. Suivant l'ordre de parcours des 3 branches, deux boucles causales C2T3 existent. Le gain de la première vaut:

$$B_{\{ijk\}} = (-1)^{(n_0+n_1)_{ijk}} m_{ji} \cdot m_{kj} \cdot m_{ik} \cdot G''(s) \tag{2.6.d.}$$

Dans ce cas, les branches i, j, k puis i sont successivement parcourues. Le parcours des branches j, k, i puis j produit le gain $B_{\{jki\}}$. Le parcours des branches k, i, j puis k produit le gain $B_{\{kij\}}$. Ces trois parcours sont équivalents et peuvent être symbolisés par la même figure:

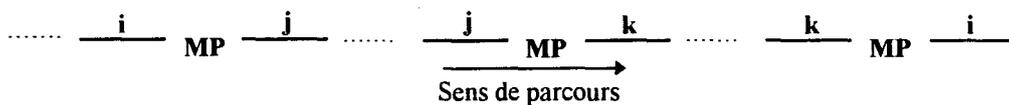


figure 2.17.d.

Ces trois gains sont donc égaux et représentent une seule et même boucle causale. La contribution du MP dans ce gain vaut donc $m_{ji} m_{kj} m_{ik}$.

$G''(s)$ constitue le produit des gains des éléments 1-port intervenant dans la boucle. $G''(s)$ est obtenu par produit d'éléments appartenant à δ_0 .

La seconde boucle C2T3 parcourt les trois liens dans le sens opposé et a pour gain:

$$B_{\{ikji\}} = B_{\{kjik\}} = B_{\{jikj\}} = (-1)^{(n_0+n_1)_{ikji}} \cdot m_{ki} \cdot m_{jk} \cdot m_{ij} \cdot G''(s) \quad (2.6.e.)$$

Dans ce second cas, les branches i,k,j (puis i) (ou encore k,j,i puis k ou encore j,i,k puis j) sont successivement parcourues.

La généralisation des précédents propos aux boucles causales C2Tn avec $1 \leq n \leq m$ est parfaitement possible. Nous pouvons ainsi déterminer exactement la liste des boucles causales présentes dans un bond graph comportant un MP à branches non connectées. Cette possibilité va nous permettre d'en étudier la matrice de transfert.

Proposition 2.4:

Le dénominateur $\Delta(s)$ de la matrice de transfert d'un bond graph comportant un seul MP à branches non connectées se détermine à l'aide de la règle de Mason. Cette règle s'exprime dans ce cas par la relation suivante:

$$\Delta(s) = 1 - \sum_i B_i + \sum_{i,j} B_i B_j - \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k + \sum \dots \quad (2.7.)$$

• B_i sont les gains des boucles (C0 ou C2Tn $1 \leq n \leq m$) répertoriées dans le bond graph. Les indices i,j et k représentent ici des indices de numérotation des différentes boucles causales élémentaires.

• $B_i B_j, B_i B_j B_k, \dots$ sont les produits respectivement 2 à 2, 3 à 3, ... des gains de toutes ces boucles lorsqu'elles sont disjointes entre elles.

Remarque:

Afin de simplifier l'écriture, nous remplacerons désormais $B_{\{iii\}}$ par B_{ii} .

L'application de la règle de MASON (2.7.) aux diverses boucles causales élémentaires pouvant apparaître figure 2.17.a. produit^(*):

(*) Les différents indices i,j,k... évoqués précédemment sont à présents remplacés par des indices numériques

$$\Delta(s) = 1 - [B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_{11} + B_{22} + B_{33} + \dots + B_{121} + B_{131} + B_{232} + \dots + B_{1231} + B_{1321} + \dots] +$$

$$\begin{aligned}
 & [B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3 + \dots + B_1 B_{22} + B_1 B_{33} + B_2 B_{11} + B_2 B_{33} + B_3 B_{11} + B_3 B_{22} + \dots \\
 & B_1 B_{232} + B_2 B_{131} + B_3 B_{121} + \dots + B_{11} B_{232} + B_{22} B_{131} + B_{33} B_{121} + \dots \\
 & + B_{11} B_{22} + B_{11} B_{33} + B_{22} B_{33} + \dots] - [B_1 B_2 B_3 + \dots + B_{11} B_{22} B_{33} + \dots \\
 & + B_1 B_{22} B_{33} + B_2 B_{11} B_{33} + B_3 B_{11} B_{22} + \dots + B_1 B_2 B_{33} + B_1 B_3 B_{22} + B_2 B_3 B_{11} + \dots]
 \end{aligned}$$

$\Delta(s)$ pourra encore être écrit sous la forme suivante:

$$\Delta(s) = \Delta_0(s) + \Delta_1(s) + \Delta_2(s) + \dots + \Delta_m(s) \quad (2.8.a.)$$

hypothèses:

Dans un but de simplicité, et sans nuire à la généralité de la démarche, nous admettons plusieurs hypothèses:

- Nous supposons que le MP est de dimension 3 ($m=3$) (3 branches non connectées). Les branches du MP sont indicées 1,2 et 3^(*).

- Nous supposons qu'un seul élément 1-port X_i par branche du MP, est en relation causale avec le MP lui-même. Par conséquent, le bond graph contient 3 boucles causales C2T1, 3 boucles causales C2T2 et 2 boucles causales C2T3

- Nous supposons qu'une seule boucle causale C0 est présente par branche du MP et qu'elle parcourt l'élément X_i .

Ces hypothèses reviennent à modifier la figure 2.17.a. qui devient:

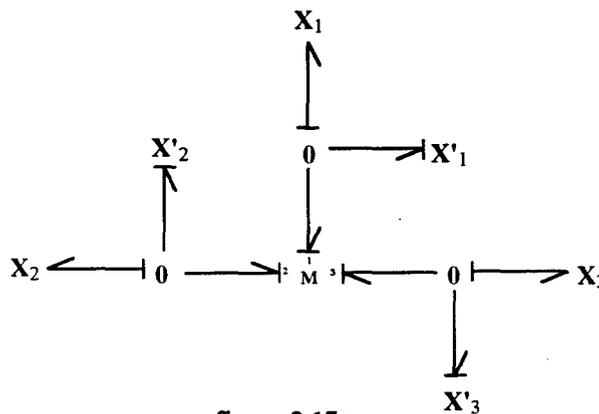


figure 2.17.e.

Ces hypothèses reviennent également à éliminer les pointillés dans l'expression de $\Delta(s)$. Seuls les termes exprimés explicitement demeurent donc.

Cette expression devient alors:

$$\Delta(s) = \Delta_0(s) + \Delta_1(s) + \Delta_2(s) + \Delta_3(s) \quad (2.8.b.)$$

avec:

(*) (d'où la numérotation précédente)

- $\Delta_0(s) = 1 - [B_1 + B_2 + B_3] + [B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3] - B_1 B_2 B_3$
- $\Delta_1(s) = -B_{11}[1 - (B_2 + B_3) + B_2 B_3] - B_{22}[1 - (B_1 + B_3) + B_1 B_3] - B_{33}[1 - (B_1 + B_2) + B_1 B_2]$
- $\Delta_2(s) = (B_{11} B_{22} - B_{121})[1 - B_3] + (B_{11} B_{33} - B_{131})[1 - B_2] + (B_{22} B_{33} - B_{232})[1 - B_1]$
- $\Delta_3(s) = -B_{1231} - B_{1321} + B_{11} B_{232} + B_{22} B_{131} + B_{33} B_{121} - B_{11} B_{22} B_{33}$

Cette décomposition permet de regrouper au sein des $\Delta_i(s)$ des termes de nature identique. Ainsi, $\Delta_0(s)$ n'est autre que le résultat de la règle de MASON appliquée à l'ensemble des boucles C0.

Examinons les autres termes en commençant plus particulièrement par $\Delta_2(s)$.

a) Etude de $\Delta_2(s)$

Conformément aux équations (2.6.b.) et (2.6.c.), le terme $(B_{11} B_{22} - B_{121})$ composant $\Delta_2(s)$ peut s'écrire:

$$(B_{11} B_{22} - B_{121}) = +\{[(-1)^{(n_0+n_1)_{11}} m_{11} G(X_1)] \cdot [(-1)^{(n_0+n_1)_{22}} m_{22} G(X_2)] - [(-1)^{(n_0+n_1)_{121}} m_{12} m_{21} G(X_1) G(X_2)]\}$$

soit:

$$(B_{11} B_{22} - B_{121}) = +\{[(-1)^{(n_0+n_1)_{11} + (n_0+n_1)_{22}} m_{11} m_{22} G(X_1) G(X_2)] - [(-1)^{(n_0+n_1)_{121}} m_{12} m_{21} G(X_1) G(X_2)]\} \quad (2.9.a.)$$

$(n_0 + n_1)_{11}$ est le terme représentant la somme des changements d'orientation des liens (aux jonctions 0 et 1 en suivant respectivement le flux et l'effort) dans la branche 1 (dans la branche 2 pour $(n_0 + n_1)_{22}$ et dans les branches 1 et 2 pour $(n_0 + n_1)_{121}$). L'opposition de sens des liens du MP lors du franchissement du MP (de la branche 1 vers la branche 2 et inversement) n'intervient pas dans ce calcul. Il est donc permis d'écrire:

$$(n_0 + n_1)_{11} + (n_0 + n_1)_{22} = (n_0 + n_1)_{121} \quad (2.9.b.)$$

L'équation (2.9.a.) s'écrit alors:

$$(B_{11} B_{22} - B_{121}) = +\{(-1)^{(n_0+n_1)_{121}} [m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}] G(X_1) G(X_2)\} \quad (2.9.c.)$$

De même pour les autres termes de $\Delta_2(s)$, nous pouvons écrire:

$$(B_{11} B_{33} - B_{131}) = +\{(-1)^{(n_0+n_1)_{131}} [m_{11} m_{33} - m_{13} m_{31}] G(X_1) G(X_3)\} \quad (2.9.d.)$$

$$(B_{22} B_{33} - B_{232}) = +\{(-1)^{(n_0+n_1)_{232}} [m_{22} m_{33} - m_{23} m_{32}] G(X_2) G(X_3)\} \quad (2.9.e.)$$

Les termes $(m_{ii} m_{jj} - m_{ij} m_{ji})$ apparaissent comme étant des sous-déterminants de la matrice M associée au MP. Ainsi $(m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21})$ est le déterminant de cette matrice M privée du couple [Ligne 3; Colonne 3].

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Ce terme sera noté $\det_{\{3\}}M$. Il vient donc:

$$\det_{\{3\}}M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

De même:

$$\det_{\{1\}}M = m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}$$

$$\det_{\{2\}}M = m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31}$$

Le terme $\det_{\{k\}}M$ signifie que le lien k et donc toute la branche k du MP ne sont pas parcourus par les deux boucles de gains respectifs B_{ii} et B_{jj} .

Notations:

Nous appellerons J l'ensemble des "indices de liens interdits" (car non parcourus) et \bar{J} son ensemble complémentaire composé des "indices de liens non interdits" (car parcourus).

Nous pouvons donc écrire $\det_J M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$ si $J = \{3\}$.

Le terme $G(X_i)G(X_j)$ est le produit des gains des éléments X_i et X_j mis en jeu par les boucles C2T1 de gain B_{ii} et B_{jj} et par la boucle C2T2 de gain B_{ij} .

Nous pouvons maintenant écrire:

$$\begin{aligned} \Delta_2(s) = & + \left\{ \left[(-1)^{(n_0+n_1)_{i21}} \cdot \det_{\{3\}}M \cdot G(X_1)G(X_2) \right] [1 - B_3] \right. \\ & + \left[(-1)^{(n_0+n_1)_{i31}} \cdot \det_{\{2\}}M \cdot G(X_1)G(X_3) \right] [1 - B_2] \\ & \left. + \left[(-1)^{(n_0+n_1)_{232}} \cdot \det_{\{1\}}M \cdot G(X_2)G(X_3) \right] [1 - B_1] \right\} \end{aligned} \quad (2.10.)$$

Chacun des termes $(-1)^{(n_0+n_1)_{ij}} \det_{\{k\}}M \cdot G(X_i)G(X_j) \cdot \underbrace{[1 - B_k]}_{\Delta^k}$ de $\Delta_2(s)$ s'interprète de

la façon suivante:

$$\bullet \quad (-1)^{(n_0+n_1)_{ij}} G(X_i)G(X_j) = (-1)^{(n_0+n_1)_i} G(X_i) \cdot (-1)^{(n_0+n_1)_j} G(X_j) = B_{ii}^* \cdot B_{jj}^* = B^j$$

avec $B_{ii}^* = \frac{B_{ii}}{m_{ii}}$ et $B_{jj}^* = \frac{B_{jj}}{m_{jj}}$ correspondant aux gains des deux boucles causales C2T1

reliant respectivement X_i et X_j au MP, mais sans tenir compte de la contribution du MP.

• $\Delta^k = [1 - B_k]$ est le déterminant de MASON appliqué sur la boucle causale C0 demeurant dans le bond graph lorsque les deux boucles de gains respectifs B_{ii} et B_{jj} ont été supprimés. Cette boucle causale de gain B_k se situe dans la branche k

L'expression (2.10.) peut encore s'écrire:

$$\Delta_2(s) = \sum_j \left[\det_J M \cdot [B^j] \cdot [\Delta^k(s)] \right] \quad (2.11.)$$

avec $B^{\bar{J}} = B_{ii}^* B_{jj}^*$ et $\bar{J} = \{i, j\}$, $J = \{k\}$ ($i \neq j$; $i \neq k$; $j \neq k$ et $i, j, k \in [1, 3]$)

Nous avons supposé précédemment la présence d'une unique boucle causale C2T1 dans chacune des branches du MP (voir *hypothèses*). Cette hypothèse implique dans l'expression (2.11.), l'unicité de la boucle de gain $B^{\bar{J}}$ (fig. 2.18.a.). Lorsque plusieurs boucles causales C2T1 existent au sein des branches du MP, nous noterons p le nombre de boucles causales de gains respectifs $B_h^{\bar{J}}$ ($1 < h \leq p$) formées par association de deux boucles causales C2T1 (fig. 2.18.b.). Pour J et \bar{J} fixés, ce nombre p est le résultat du produit du nombre des boucles causales C2T1 présentes dans chacune des branches parcourues (non interdites par J)

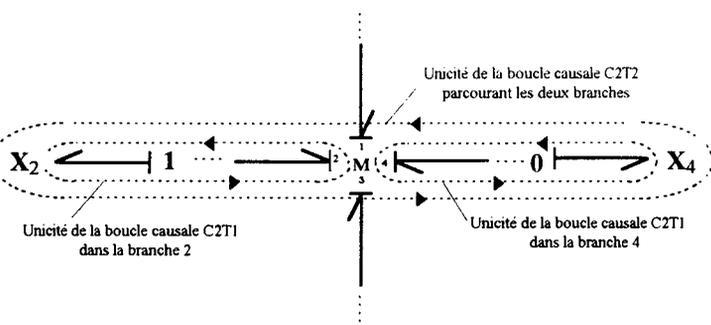


figure 2.18.a.

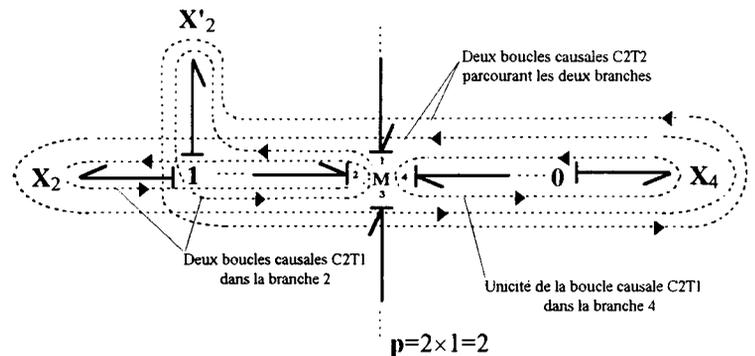


figure 2.18.b.

Nous avons également supposé précédemment la présence d'une unique boucle causale C0 dans chacune des branches du MP (voir *hypothèses*). Cette hypothèse implique dans l'expression (2.11.), l'écriture unique de Δ^k sous la forme $[1 - B_k]$ ($J = \{k\}$). Lorsque plusieurs boucles causales C0 existent au sein des différentes branches, contrairement à notre exemple, les boucles causales C0 disjointes de $B_h^{\bar{J}}$ peuvent être plusieurs. Dans ce cas, elles ne se situent plus uniquement au sein de la branche k mais peuvent également se situer au sein des branches parcourues par $B_h^{\bar{J}}$. La notation Δ^k (encore noté Δ^J) doit donc être abandonnée pour devenir simplement Δ_h (car ce déterminant dépend de $B_h^{\bar{J}}$).

L'expression (2.11.) se généralise donc et s'écrit maintenant:

$$\Delta_2(s) = \sum_J \left[\det_J M. \left[B_1^{\bar{J}} \Delta_1(s) + B_2^{\bar{J}} \Delta_2(s) + \dots + B_p^{\bar{J}} \Delta_p(s) \right] \right]$$

soit

$$\Delta_2(s) = \sum_J \left[\det_J M. \left[\sum_{h=1}^p \left[B_h^{\bar{J}} \right] \left[\Delta_h(s) \right] \right] \right] \quad (2.12.)$$

b) Etude de $\Delta_1(s)$

Les règles avancées pour obtenir la constitution du terme $\Delta_2(s)$ s'appliquent également aux termes $\Delta_1(s)$.

Nous avons:

$$\Delta_1(s) = -B_{11}[1-(B_2+B_3)+B_2B_3] - B_{22}[1-(B_1+B_3)+B_1B_3] - B_{33}[1-(B_1+B_2)+B_1B_2]$$

En utilisant les mêmes définitions et notations que précédemment, nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \Delta_1(s) = - & \left\{ (-1)^{(n_0+n_1)_{11}} m_{11} \cdot G(X_1) \cdot [1 - (B_2 + B_3) + B_2 B_3] \right. \\ & + (-1)^{(n_0+n_1)_{22}} m_{22} \cdot G(X_2) \cdot [1 - (B_1 + B_3) + B_1 B_3] \\ & \left. + (-1)^{(n_0+n_1)_{33}} m_{33} \cdot G(X_3) \cdot [1 - (B_1 + B_2) + B_1 B_2] \right\} \end{aligned} \quad (2.13.a.)$$

Pour chacun des termes de la dernière expression, une seule branche est parcourue (Card $\bar{J}=1$). Par conséquent, dans chacun des cas, deux branches ne le sont pas (Card $J=2$ et $J=\{j;k\}$). Tout comme précédemment, le terme $\det_{\bar{J}}M = \det_{\{j;k\}}M$ (couples [ligne j; colonne j] et [ligne k; colonne k] sont à supprimer dans M) peut être mis en évidence. En effet, pour $j=2$ et $k=3$, $\det_{\{2,3\}}M = m_{11}$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

L'expression (2.13.a.) devient donc:

$$\begin{aligned} \Delta_1(s) = - & \left\{ (-1)^{(n_0+n_1)_{11}} \cdot \det_{\{2,3\}}M \cdot G(X_1) \cdot \underbrace{[1 - (B_2 + B_3) + B_2 B_3]}_{\Delta^{2,3}} \right. \\ & + (-1)^{(n_0+n_1)_{22}} \cdot \det_{\{1,3\}}M \cdot G(X_2) \cdot \underbrace{[1 - (B_1 + B_3) + B_1 B_3]}_{\Delta^{1,3}} \\ & \left. + (-1)^{(n_0+n_1)_{33}} \cdot \det_{\{1,2\}}M \cdot G(X_3) \cdot \underbrace{[1 - (B_1 + B_2) + B_1 B_2]}_{\Delta^{1,2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.13.b.)$$

Graphiquement, chacun des termes $(-1)^{(n_0+n_1)_{ii}} \det_{\{j;k\}}M \cdot G(X_i) \cdot \Delta^{j;k}$ de $\Delta_1(s)$ s'interprète de la façon suivante:

- $J=\{j;k\}$ l'ensemble des indices de liens du MP interdits et $\bar{J}=\{i\}$ son complémentaire.
- $B^{\bar{J}} = (-1)^{(n_0+n_1)_{ii}} G(X_i) = B_{ii}^*$

• $\Delta^{j;k}$ (encore noté Δ^J) est donc le déterminant de MASON appliqué sur les boucles causales $C0$ disjointes de $B^{\bar{J}}$. Concernant notre exemple, ces boucles sont situées dans les branches j et k successivement répertoriées dans J .

L'expression (2.11.) établie pour $\Delta_2(s)$ peut également s'appliquer à $\Delta_1(s)$. Seul varie, l'ensemble J qui maintenant vaut $\{j;k\}$. Il vient donc:

$$\Delta_1(s) = - \sum_J \left[\det_J M. [B^{\bar{J}}] [\Delta^J(s)] \right] \quad (2.14.)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment (non unicité des boucles causales $C0$, $C2T1$... dans chaque branche), l'expression précédente devient:

$$\Delta_1(s) = - \sum_J \left[\det_J M. \left[\sum_{h=1}^p [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right] \right] \quad (2.15)$$

avec $B^{\bar{J}} = B_{ii}^*$ et $\bar{J} = \{i\}$, $J = \{j;k\}$ ($i \neq j$; $i \neq k$; $j \neq k$ et $i,j,k \in [1;3]$)

Remarque: Nous avons vu précédemment que le gain B_{ii} de la boucle causale $C2T1$ située dans la branche i pouvait s'écrire $(-1)^{(n_0+n_1)_{ii}} m_{ii} \cdot G(X_i) = (-1)^{(n_0+n_1)_{ii}} \cdot \det_{\{j;k\}} M \cdot G(X_i)$. Lors de notre analyse, ce terme a été symbolisé par $(-1)^{(n_0+n_1)_{ii}} \cdot \det_{\{2;3\}} M$. Or $\det_{\{2;3\}} M = \det_{\{3;2\}} M$. Un seul de ces deux termes doit donc apparaître lors de l'application du résultat (2.15) afin de ne pas doubler le traitement d'une boucle de gain B_{ii} et de conserver ainsi l'exactitude des résultats. Il faut donc émettre certaines restrictions sur les indices de l'ensemble J qui sont:

- $J = \{j_1; j_2; \dots; j_r\}$
- $q \in \mathbb{N}^*$ $j_q \in [1; m]$
- q et $q' \in \mathbb{N}^*$; Si $q < q'$ alors $j_q < j_{q'}$

Ainsi, $J = \{2;3\}$ est possible tandis que $J = \{3;2\}$ est impossible.

Ces restrictions concernent également l'ensemble \bar{J} complémentaire de J .

c) Etude de $\Delta_3(s)$

L'expression (2.8.b.) donnait:

$$\Delta_3(s) = -B_{1231} - B_{1321} + B_{11} B_{232} + B_{22} B_{131} + B_{33} B_{121} - B_{11} B_{22} B_{33}$$

Tout comme précédemment, nous pouvons écrire:

$$\Delta_3(s) = - \left[(-1)^{(n_0+n_1)_{1231}} \cdot m_{21} \cdot m_{32} \cdot m_{13} \cdot G(X_1)G(X_2)G(X_3) \right] \cdot [1] \\ - \left[(-1)^{(n_0+n_1)_{1231}} \cdot m_{31} \cdot m_{23} \cdot m_{12} \cdot G(X_1)G(X_2)G(X_3) \right] \cdot [1]$$

$$\begin{aligned}
 & + [(-1)^{(n_0+n_1)_{11}} \cdot m_{11} \cdot G(X_1)] \cdot [(-1)^{(n_0+n_1)_{232}} \cdot m_{23} \cdot m_{32} \cdot G(X_2) \cdot G(X_3)] \cdot [1] \\
 & + [(-1)^{(n_0+n_1)_{22}} \cdot m_{22} \cdot G(X_2)] \cdot [(-1)^{(n_0+n_1)_{131}} \cdot m_{13} \cdot m_{31} \cdot G(X_1) \cdot G(X_3)] \cdot [1] \\
 & + [(-1)^{(n_0+n_1)_{33}} \cdot m_{33} \cdot G(X_3)] \cdot [(-1)^{(n_0+n_1)_{121}} \cdot m_{12} \cdot m_{21} \cdot G(X_1) \cdot G(X_2)] \cdot [1] \\
 & - [(-1)^{(n_0+n_1)_{11}} \cdot m_{11} \cdot G(X_1)] \cdot [(-1)^{(n_0+n_1)_{22}} \cdot m_{22} \cdot G(X_2)] \cdot [(-1)^{(n_0+n_1)_{33}} \cdot m_{33} \cdot G(X_3)] \cdot [1]
 \end{aligned}$$

Notons que le terme [1] revenant à chaque ligne constitue le déterminant de Mason Δ^J appliqué aux boucles causales C0 disjointes des différentes boucles causales intervenant respectivement dans chacun des termes qui précède. Les trois éléments X_i interviennent à chaque ligne. Aucune boucle causale C0 n'est donc disjointe car chacune d'entre elle fait intervenir un terme X_i . Le déterminant de Mason vaut donc 1.

Tout comme précédemment, il est possible d'écrire:

$$\begin{aligned}
 (-1)^{(n_0+n_1)_{1231}} &= (-1)^{(n_0+n_1)_{1321}} = (-1)^{(n_0+n_1)_{11}} (-1)^{(n_0+n_1)_{232}} = (-1)^{(n_0+n_1)_{22}} (-1)^{(n_0+n_1)_{131}} \\
 &= (-1)^{(n_0+n_1)_{33}} (-1)^{(n_0+n_1)_{121}} = (-1)^{(n_0+n_1)_{11}} (-1)^{(n_0+n_1)_{22}} (-1)^{(n_0+n_1)_{33}}
 \end{aligned}$$

d'où:

$$\Delta_3(s) = - \left\{ (-1)^{(n_0+n_1)_{1231}} \cdot (m_{11} m_{22} m_{33} - m_{11} m_{23} m_{32} - m_{12} m_{21} m_{33} + m_{12} m_{23} m_{31} + m_{13} m_{21} m_{32} - m_{13} m_{31} m_{22}) \cdot G(X_1) \cdot G(X_2) \cdot G(X_3) \right\} \cdot [1]$$

soit

$$\Delta_3(s) = - \left\{ (-1)^{(n_0+n_1)_{1231}} \cdot \det_{\{j\}} M \cdot G(X_1) \cdot G(X_2) \cdot G(X_3) \right\} \cdot [1]$$

soit:

$$\Delta_3(s) = -\det_J M \left[[B^{\bar{J}}] [\Delta^J] \right] \quad (2.16.)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment (non unicité des boucles causales C0, C2T1... dans chaque branche), l'expression précédente devient:

$$\Delta_3(s) = - \left[\det_J M \left[\sum_{h=1}^p [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h] \right] \right] \quad (2.17.)$$

avec

- $J = \{ \}$, $\bar{J} = \{i; j; k\}$ $i \neq j; i \neq k; j \neq k$ et $i, j, k \in [1; 3]$.
- $\det_J M$ constitue le déterminant de la matrice M car aucune ligne ni colonne n'en a été supprimée ($\det_{\{j\}} M = \det M$).

- $B^{\bar{J}} = (-1)^{(n_0+n_1)_{ii}} G(X_i) \cdot (-1)^{(n_0+n_1)_{jj}} G(X_j) \cdot (-1)^{(n_0+n_1)_{kk}} G(X_k) = B_{ii}^* \cdot B_{jj}^* \cdot B_{kk}^*$

Remarque: Les termes $\Delta_i(s)$ sont identiques à un signe près. Chaque $\Delta_i(s)$ (pour i impair) est précédé d'un terme (-1) qui est engendré par la règle de Mason. Afin d'écrire semblablement les expressions (2.12.), (2.15.) et (2.17.) sous la forme (2.18.), une règle de détermination de l'exposant E doit être élaborée.

$$\Delta_i(s) = (-1)^E \left[\det_J M \left[\sum_{h=1}^p [B_h^{\bar{j}}] [\Delta_h] \right] \right] \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \quad (2.18.)$$

Les différents cas précédents sont résumés dans le tableau suivant:

$\Delta_i(s)$	J	\bar{J}	$B_h^{\bar{j}}$	$(-1)^E$
$\Delta_1(s)$	{j;k}	{i}	$B^{\bar{j}} = B_{ii}^*$	-1
$\Delta_2(s)$	{k}	{i;j}	$B^{\bar{j}} = B_{ii}^* B_{jj}^*$	+1
$\Delta_3(s)$	{}	{i;j;k}	$B^{\bar{j}} = B_{ii}^* B_{jj}^* B_{kk}^*$	-1

tableau 2.2.

E est le nombre n_h^* de boucles causales B^* composant $B_h^{\bar{j}}$. Pour la catégorie de bond graph étudiée ici, nous pouvons écrire $n_h^* = \text{Card } \bar{J} = m - \text{Card } J$.

Remarque:

Dans un cas plus général, J est donc défini par $J = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ avec $\forall q < q', j_q < j_{q'}$ et $j_q, j_{q'} \in [1; m]$. Si $r=0$ alors $J = \{ \}$. ($r = \text{Card } J$)

Si $r=m$, $J = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ et $\det_J M = 1$ (Aucune ligne ni colonne dans M)

Tous les résultats précédents peuvent être résumés en une expression générale donnée en proposition 2.5.:

Proposition 2.5.:

Suite à l'expression (2.8.b.), $\Delta(s)$, le dénominateur de la matrice de transfert du bond graph comportant un MP constitué de 3 branches non connectées (fig. 2.17.b.) peut être défini par:

$$\Delta(s) = \Delta_0(s) + \sum_{r=0}^2 \left\{ \sum_J \left[\det_J M \cdot \left[\sum_{h=1}^p (-1)^{n_h} [B_h^{\bar{j}}] [\Delta_h(s)] \right] \right] \right\} \quad (2.19.)$$

ou plus généralement, en incluant le terme $\Delta_0(s)$ associé aux boucles causales $C0$,

$$\Delta(s) = \sum_{r=0}^3 \left\{ \sum_J \left[\det_J M \cdot \left[\sum_{h=1}^p (-1)^{n_h} [B_h^{\bar{j}}] [\Delta_h(s)] \right] \right] \right\} \quad (2.20.)$$

avec $J = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ et $\forall q < q', j_q < j_{q'}$, $j_q, j_{q'} \in [1; 3]$ et $n_h^* = \text{Card } \bar{J}$

Ce résultat est tout à fait généralisable à un bond graph comportant un MP de dimension m quelconque dont les branches ne sont pas connectées. Dans ce cas, l'expression (2.20.) devient:

$$\Delta(s) = \sum_{r=0}^m \left\{ \sum_J \left[\det_J M. \left[\sum_{h=1}^p (-1)^{n_h} [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right] \right] \right\} \quad (2.21.)$$

avec $J = \{j_1; j_2; \dots; j_r\}$ et $\forall q < q'; j_q \leq j_{q'}; j_q, j_{q'} \in [1; m]$ et $n_h^* = \text{Card } \bar{J}$

Une mise en oeuvre de ce résultat est proposée en annexe B1.

Nous proposons maintenant de traiter les numérateurs de la matrice de transfert.

3.2. Détermination des numérateurs de la matrice de transfert

Toute transmittance entrée-sortie d'un système bond graph multivariable ne comportant que des éléments 1-port s'écrit:

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} = \frac{\sum_k T_k^{ij}(s) \Delta_k^{ij}(s)}{\Delta(s)} \quad (2.22.)$$

où:

- $\Delta(s)$ constitue le dénominateur commun des fonctions de transfert qui se calcule à l'aide de la règle de Mason.

- T_k^{ij} constituent les divers gains des chemins causaux (ou chaînes d'action) reliant l'une des entrées $U_j(s)$ du vecteur entrée $U(s)$ à l'une des sorties $Y_i(s)$ du vecteur sortie $Y(s)$.

- $\Delta_k^{ij}(s)$ se calcule comme $\Delta(s)$ mais ne s'applique qu'aux boucles causales disjointes du chemin causal de gain T_k considéré.

Dans le cas d'un bond graph comprenant un MP à branches non connectées, toutes les classes de chemins causaux entrée-sortie (ou chaînes d'action) existent (contrairement aux boucles causales pour lesquelles seules les classes C0 et C2 étaient présentes). Nous proposons de rassembler tous les chemins C1 et C1-2 en une seule catégorie. Ainsi, nous ne traiterons distinctement que trois catégories de chemins causaux (C0, C2 et (C1 et C1-2)). Selon la catégorie du chemin causal considéré, trois propositions seront avancées afin d'établir formellement le numérateur de la transmittance en question. Cette transmittance est alors dite de classe i si sa chaîne d'action est de classe i .

3.2.1. Transmittance C0

Les chemins entrée-sortie de cette classe de transmittance sont des chemins causaux C0. Les points de départ et d'arrivée se situent donc au sein d'une seule et même branche du MP. Ce dernier n'est jamais atteint. Il n'existe donc aucune différence pour le calcul du gain par rapport au cas d'un bond graph composé uniquement d'éléments 1-port. Afin d'écrire formellement le numérateur $N_0(s)$ de ce type de transmittance, nous utilisons donc une expression relativement identique à celle énoncée pour les bond graphs 1-port.

Proposition 2.6. :

Le numérateur $N_0(s)$ d'une transmittance C0 est défini par:

$$N_0(s) = \sum_k T_k \Delta_k(s) \quad (2.23.)$$

Seule la signification donnée à $\Delta_k(s)$ varie par rapport à celle avancée pour l'expression (2.17.). Ce terme se calculera dans ce cas à l'aide de l'expression (2.16.) vue précédemment. Il faut alors simplement éliminer au sein du bond graph, la totalité du chemin causal T_k considéré.

3.2.2. Transmittance C1

Cette classe de transmittance est engendrée par l'existence de chemins causaux entrée-sortie C1 (voir fig. 2.9. et 2.10.a.) mais aussi par celle de chemins causaux entrée-sortie C1-2 (voir figures 2.14.) : les éléments associés à la source et au détecteur se situent dans deux branches différentes du MP.

Proposition 2.7.:

Le numérateur $N_1(s)$ d'une transmittance C1 est défini par:

$$N_1(s) = \sum_{r=0}^{m-2} \left\{ \sum_J \left[\det_{[i,o],J} M \cdot \left[\sum_{h=1}^p (-1)^{(\alpha)} [T_h^{\bar{j}}] [\Delta_h(s)] \right] \right] \right\} \quad (2.24.)$$

- $J = \{j_1, j_2, \dots, j_r\} \quad \forall q < q', j_q < j_{q'}, j_q, j_{q'} \in [1; m] \quad j_q, j_{q'} \neq i \text{ et } j_q, j_{q'} \neq o$

- p le nombre de chemins causaux de gain $T_h^{\bar{j}}$ entre la source et le détecteur ($1 \leq h \leq p$).

- $\det_{[i,o],J} M$ le déterminant de la matrice déduite de M après suppression de sa ligne i ,

de sa colonne o et des lignes et colonnes j_k ($j_k \in J$). Dans ce cas, la branche i contient la source et la branche o contient le détecteur.

- $T_h^{\bar{J}}$ le gain du $h^{i\text{ème}}$ chemin causal entre la source et le détecteur. Ce chemin peut être un chemin C1 ou C1-2. $T_h^{\bar{J}}$ ne tient pas compte de la contribution du MP (comme pour $B_h^{\bar{J}}$ (2.11.)).

- α le nombre d'indices j_k appartenant à \bar{J} et respectant $j_k < \text{Min}(i, 0)$ ou $j_k > \text{Max}(i, 0)$

Démonstration : voir annexe B2.

3.2.3. Transmittance C2

Ce type de transmittance est engendré par l'existence de chemins causaux C2. La source et le détecteur de ce chemin se situent dans ce cas au sein de la même branche (la branche i).

Proposition 2.8.:

Le numérateur $N_2(s)$ d'une transmittance C2 est défini par:

$$N_2(s) = \sum_{r=0}^{m-1} \left\{ \sum_{\bar{J}} \left[\det_{\bar{J}} M. \left[\sum_{h=1}^p (-1)^{(\beta)} [T_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right] \right] \right\} \quad (2.25.)$$

- $\beta = \text{Card } \bar{J} + 1$

- $\bar{J} = \{j_1, j_2, \dots, j_r\} \quad \forall q < q'; j_q < j_{q'} \quad j_q, j_{q'} \in [1; m] \quad j_q, j_{q'} \neq i$

- $T_h^{\bar{J}}$ le gain du $h^{i\text{ème}}$ chemin causal entre la source et le détecteur. Celui-ci constitue toujours dans ce cas un chemin causal C2. Le type t de ce chemin varie ($1 \leq t \leq m$). $T_h^{\bar{J}}$ ne tient pas compte de la contribution du MP (comme pour $B_h^{\bar{J}}$ (2.16.)).

Démonstration : voir annexe B3.

Une mise en œuvre des résultats précédents est proposée en annexe B1.

La présence d'un MP dans les modèles bond graphs engendre donc l'existence de nouvelles catégories de chemins causaux et de boucles causales. Lorsque le bond graph comporte un seul MP à branches indépendantes, les résultats précédents permettent de connaître l'expression formelle du dénominateur et des différents numérateurs de la matrice de transfert. Lorsque ces branches ne sont plus indépendantes et sont en relation causale, l'étude nous ayant permis d'énoncer ces résultats doit être complétée.

4. Etude des bond graphs comportant un seul MP à branches connectées

4.1. Détermination du dénominateur de la matrice de transfert

Dans le précédent paragraphe, nous avons restreint notre étude aux bond graphs ne comportant qu'un seul MP à branches non connectées (figure 2.19.). Nous proposons

maintenant d'étendre les résultats obtenus aux bond graphs ne comportant toujours qu'un seul MP mais dont les branches peuvent être connectées causalement (figure 2.20.). Tout comme lors du précédent paragraphe, dans un but de simplicité, et sans nuire à la généralité de la démarche, nous limiterons nos démonstrations à un MP de dimension 3. Considérons donc le bond graph de la figure 2.19.:

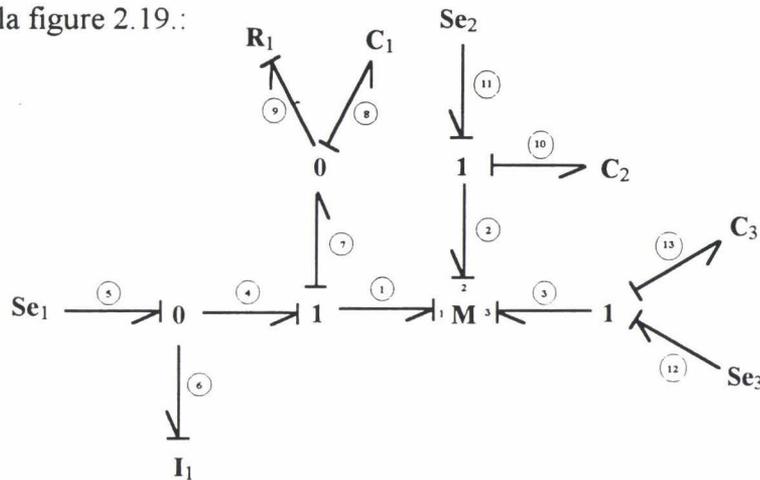


figure 2.19.: bond graph comportant un MP à branches non connectées de dimension 3

Pour montrer de façon claire, l'incidence d'une liaison causale entre les branches d'un MP (bouclage du MP sur lui-même), nous construisons la figure 2.20. à partir de la figure 2.19. en introduisant deux gyrateurs et le lien 18.

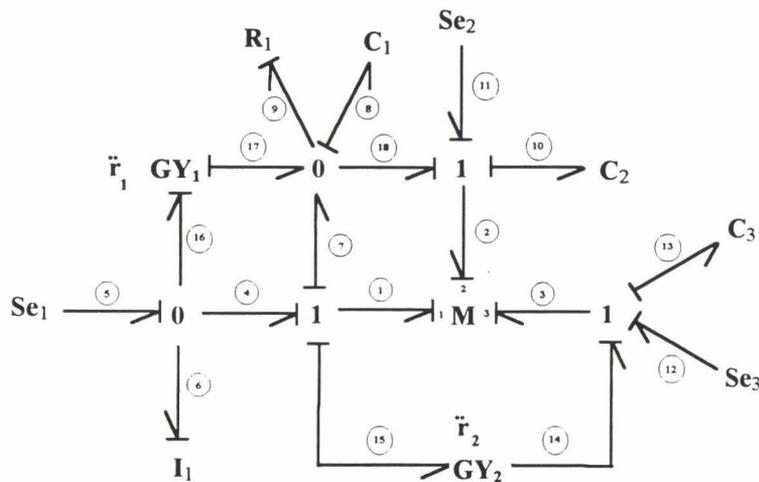


figure 2.20.: bond graph comportant un MP à branches connectées de dimension 3

Nous avons vu que le dénominateur de la matrice de transfert d'un système pouvant s'apparenter à celui représenté fig. 2.19., peut être obtenu formellement à l'aide de l'expression (2.21.). Nous noterons maintenant ce dénominateur $\delta(s)$ (jusqu'ici noté $\Delta(s)$). En effet, par souci de cohésion, le terme $\Delta(s)$ symbolise désormais le dénominateur de la matrice de transfert d'un système pouvant s'apparenter à celui représenté fig. 2.20. Ce terme $\Delta(s)$ se compose donc maintenant partiellement du terme $\delta(s)$.

Nous avons vu précédemment que seules des boucles causales C0 ou C2Tt ($1 \leq t \leq m$) composent $\delta(s)$.

Pour les classes de bond graphs telles que celle présentée fig. 2.20., il existe des boucles causales C1 et C1-2 mais également des boucles causales C2 de natures différentes de celles pouvant apparaître à la figure 2.19:

Chemin causal de la Boucle	1-3-14-15	2-1-7-8-8-18	2-1-15-14-3-2-10-10	1-15-14-3-3-14-15-1
Gain	$B_{13} = -r_2 m_{31}$ (C1T2)	$B_{21} = + \frac{m_{12}}{C_1 s}$ (C1T2)	$B_{21-32} = - \frac{r_2 m_{12} m_{23}}{C_2 s}$ (C1-2T3)	$B_{11-33} = -m_{11} m_{33} r_2^2$ (C2T2)

Nous proposons donc de décomposer le dénominateur commun $\Delta(s)$ de la matrice de transfert d'un modèle bond graph pouvant s'assimiler à celui de la figure 2.20. en 3 termes représentant la contribution d'une partie précisément définie de boucles causales dans l'application de la règle de Mason. Ces trois termes sont $\delta_1(s)$ pour la contribution des boucles causales C1, $\delta_2(s)$ pour la contribution des boucles causales C2 et $\delta_{1-2}(s)$ pour la contribution des boucles causales C1-2. Il vient donc:

$$\Delta(s) = \delta_1(s) + \delta_2(s) + \delta_{1-2}(s) \tag{2.26.}$$

Remarque: Nous avons vu que le dénominateur de la matrice de transfert d'un système pouvant s'apparenter à celui représenté fig. 2.19. (désormais noté $\delta(s)$) compose désormais $\Delta(s)$ (dénominateur de la matrice de transfert d'un système pouvant s'apparenter à celui représenté fig. 2.20.). Comme ce terme $\delta(s)$ n'est engendré que par des boucles causales C0 et C2 (pas de boucles causales C1 ni C1-2 dans les bond graphs s'apparentant à celui de la figure 2.19.), nous pouvons en déduire plus précisément que $\delta(s)$ compose partiellement le terme $\delta_2(s)$.

4.1.1. Contribution des boucles causales C2 pour la détermination de $\delta_2(s)$

4.1.1.1. Classification des boucles causales C2

Les boucles causales C2Tt ($1 \leq t \leq m$) peuvent être réparties en deux catégories:

- Les boucles C2 n'impliquant pas le bouclage du MP sur lui-même.
- Les boucles C2 impliquant le bouclage du MP sur lui-même.

a) Boucles C2 n'impliquant pas le bouclage du MP sur lui-même

Deux catégories de boucles peuvent être mises en évidence:

- les boucles causales C2T1 pour lesquelles la contribution du MP dans le gain vaut m_{ii} terme situé sur la diagonale de M (i étant l'indice du lien du MP mis en jeu).

exemple:

Chemin causal de la Boucle	2-10-10-2	1-7-8-8-7-1	3-13-13-3
Gain	$B_{22} = -\frac{m_{22}}{C_2 s}$	$B_{11} = -\frac{m_{11}}{C_1 s}$	$B_{33} = -\frac{m_{33}}{C_3 s}$

- les boucles causales C2Tt' ($2 \leq t' \leq m$) pour lesquelles la contribution du MP dans le gain vaut $m_{ij} m_{jk} \dots m_{ii}$ (t' termes, tous situés en dehors de la diagonale de M).

exemple:

Chemin causal de la Boucle	8-7-1-3-13-13-3-1-7-8	8-7-1-3-13-13-3-2-10-10-2-1-7-8
Gain	$B_{131} = +\frac{m_{13} m_{31}}{C_1 C_3 s^2}$ (C2T2)	$B_{1312} = -\frac{m_{31} m_{23} m_{12}}{C_1 C_2 C_3 s^3}$ (C2T3)

b) Boucles C2 impliquant le bouclage du MP sur lui-même

Ces boucles causales peuvent être classées en 2 catégories:

- les boucles causales C2Tt' ($2 \leq t' \leq m$) pour lesquelles la contribution du MP dans leur gain vaut $m_{ii} m_{jj} \dots m_{kk}$ (t' termes, tous situés sur la diagonale de M).

exemple:

Chemin causal de la Boucle	1-15-14-3-3-14-15-1
Gain	$B_{11-33} = -r_2^2 m_{11} m_{33}$ (C2T2)

Ces boucles causales seront appelées dans la suite, boucles causales "à coefficients diagonaux". Cette dénomination vaut donc pour $1 \leq t' \leq m$.

- les boucles causales C2Tt'' ($3 \leq t'' \leq m$) pour lesquelles la contribution du MP dans leur gain vaut $m_{ii} \dots m_{jj} m_{kl} m_{lr} \dots m_{qk}$. Une partie de ces termes se situe sur la diagonale de M.

exemple:

Chemin causal de la Boucle	1-15-14-3-2-10-10-2-3-14-15-1
Gain	$B_{11-323} = \frac{r_2^2 m_{11} m_{32} m_{23}}{C_2 s} \quad (C2T3)$

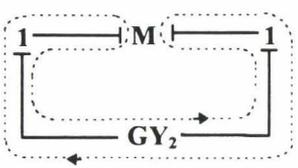
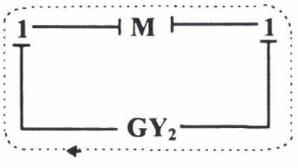
Le bouclage du MP sur lui-même fait donc apparaître de nouvelles boucles causales C2. L'étude des boucles causales C2 communes aux figures 2.19. et 2.20. peut être réalisée de manière similaire à celle effectuée précédemment et qui a conduit à l'expression (2.21.). Le déterminant, noté maintenant $\delta_2(s)$, ainsi obtenu est donné en annexe B4. Il est cependant incomplet car aucune des boucles C2 présentes dans la figure 2.20. et absentes de la figure 2.19. (les boucle causales C2 impliquant le bouclage du MP) n'est prise en compte. Nous proposons donc maintenant de considérer successivement ces différentes boucles causales C2 afin de compléter $\delta_2(s)$ et de modifier l'expression (2.21.).

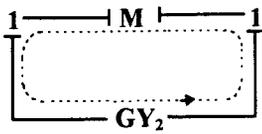
4.1.1.2. Contribution des boucles causales C2T2 à coefficients diagonaux dans la détermination de $\delta_2(s)$

Si une boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux de gain $B_{ii-jj} = m_{ii} m_{jj} B_{ii-jj}^*$ existe, alors deux boucles causales C1T2 disjointes entre elles et de gains B_{ij} et B_{ji} existent également. Ces deux boucles causales font respectivement intervenir dans leur gain les termes m_{ji} et m_{ij} .

exemple:

Sur la figure 2.20., la boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux de gain $B_{11-33} = -r_2^2 m_{11} m_{33}$ montre l'existence de deux boucles causales C1T2 de gain B_{13} et B_{31} .

	<p>1-15-14-3-3-14-15-1</p> <p>$B_{11-33} = -r_2^2 m_{11} m_{33} = m_{11} m_{33} B_{11-33}^*$</p>	<p>C2T2</p> <p>à coefficients diagonaux</p>
	<p>1-3-14-15</p> <p>$B_{13} = -r_2 m_{31} = m_{31} B_{13}^*$</p>	<p>C1T2</p>

	<p>3-1-15-14</p> $B_{31} = -r_2 m_{13} = m_{13} B_{31}^*$	<p>CIT2</p>
---	---	-------------

Dans ce cas, la règle de Mason implique entre autres: $1 - [B_{11-33} + \dots] + [B_{13} B_{31} + \dots] + \dots$
 ce qui conduit à des expressions telles que:

$$[B_{13} B_{31} - B_{11-33}] = r_2^2 [m_{11} m_{33} - m_{13} m_{31}] = r_2^2 \det_{\{2\}} M \text{ avec } J = \{2\} \text{ et } B_{11-33}^* = B_{13}^* B_{31}^* = -r_2^2 \quad (2.27.)$$

La mise en oeuvre de l'expression (2.21.) ne tient pas compte jusqu'à présent de ce nouveau terme. En effet, pour $r=1$, (soit $J = \{j_i\}$) et pour $j_i=2$, ($J = \{2\}$ et $\bar{J} = \{1,3\}$), l'expression (2.21.) produit (voir aussi annexe B4):

$$\delta_2(s) = \dots + \underbrace{\det_{\{2\}} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^{n_h} [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right\}}_{\delta_2^{(2)}(s)} + \dots \text{ avec } p = 1$$

avec: $\delta_2^{(2)}(s) = \det_{\{2\}} M \times \{a'\}$

et: $a' = (-1)^{n_1} [B_{11}^* B_{33}^*] [1] = (-1)^{n_1} B_1^{\bar{J}} \Delta_1(s)$

et: $B_{11}^* = \frac{B_{11}}{m_{11}} = -\frac{1}{C_1 s}$ et $B_{33}^* = \frac{B_{33}}{m_{33}} = -\frac{1}{C_3 s}$

Aucune boucle causale C0 n'est disjointe de $B_1^{\bar{J}}$ d'où $\Delta_1(s) = 1$.

Les précédentes lignes se déduisent des expressions suivantes issues de la règle de Mason:

$$\dots - [B_{131} + \dots] + [B_{11} B_{33} + \dots] + \dots$$

qui peut encore s'écrire: $\dots - [m_{31} m_{13} B_{131}^* + \dots] + (-1)^{n_1} [m_{11} B_{11}^* m_{33} B_{33}^* + \dots] + \dots$

avec $B_{131}^* = B_{11}^* B_{33}^* = B_1^{\bar{J}}$ et n_1^* pair

qui peut encore s'écrire: $\dots + (-1)^{n_1} B_1^{\bar{J}} (m_{11} m_{33} - m_{31} m_{13}) + \dots$

ou encore: $\dots + (-1)^{n_1} B_1^{\bar{J}} \det_{\{2\}} M + \dots$

n_1^* doit donc être pair. $n_1^* = \text{Card } \bar{J}$ satisfait ici cette condition car $\text{Card } \bar{J}$ représente le nombre de boucles $B^* C2$ intervenant dans $B_1^{\bar{J}}$ (ici $n_1^* = 2$).

L'expression (2.21.) doit donc désormais tenir compte de la présence éventuelle de boucles causales C2 à coefficients diagonaux engendrant des termes supplémentaires s'apparentant à l'expression (2.27.). Une modification de cette expression dans son écriture ou dans sa mise en œuvre doit donc intervenir. Dans le cas de la figure 2.20., cette expression doit maintenant produire:

$$\delta_2(s) = \dots + \underbrace{\det_{\{2\}} M \times \{a' + a''\}}_{\delta_2^2(s)} + \dots$$

avec:
$$a'' = (-1)^{n_2^*} \left[B_{11-33}^* \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] = (-1)^{n_2^*} B_2^{\bar{J}} \Delta_2(s) \quad \text{avec } B_{11-33}^* = \frac{B_{11-33}}{m_{11} m_{33}} = -r_2^2$$

La boucle causale C0 de gain $B_1^0 = -\frac{1}{R_1 C_1 s}$ est disjointe de $B_2^{\bar{J}}$ d'où $\Delta_2(s)$.

n_2^* doit dans ce cas être impair car dans la règle de Mason, il vient entre autres:

$$\dots - [B_{11-33} + \dots] + [B_{13} B_{31} + B_{11-33} B_1^0 + \dots] - [B_{31} B_{13} B_1^0 + \dots]$$

qui peut encore s'écrire:
$$\dots - B_{11-33} (1 - B_1^0) + B_{13} B_{31} (1 - B_1^0) + \dots$$

ou encore:
$$\dots + [-B_{11-33}^* m_{11} m_{33} + B_{13}^* B_{31}^* m_{13} m_{31}] (1 - B_1^0) + \dots$$

avec:
$$B_{11-33}^* = B_{13}^* B_{31}^*$$

d'où:
$$\dots + B_{11-33}^* \left[m_{13} m_{31} + (-1)^{n_2^*} m_{11} m_{33} \right] (1 - B_1^0) + \dots \quad \text{avec } n_2^* \text{ impair}$$

d'où:
$$\dots + (-1)^{n_2^*} B_{11-33}^* [m_{11} m_{33} - m_{13} m_{31}] (1 - B_1^0) + \dots$$

d'où:
$$\dots + (-1)^{n_2^*} B_2^{\bar{J}} \det_{\{2\}} M \times \Delta_2(s) + \dots$$

n_2^* qui doit donc être impair dans ce cas, ne peut donc plus être toujours assimilé à Card \bar{J} (qui vaut 2 ici) car le bouclage du MP sur lui-même, fait varier dans certains cas, le nombre n_h^* de boucles C2 de gain B^* intervenant dans $B^{\bar{J}}$. Pour a'' , on a une seule boucle C2 B^* qui compose $B^{\bar{J}}$ d'où $n_2^* = 1$.

Remarque: La (ou les) boucle permettant de connaître n_h^* sera celle dont la contribution du MP dans son gain ne fait intervenir que des termes diagonaux de M. Cette (ou ces) boucle est toujours C2. Le type varie.

Pour $r=1$ et $J=\{2\}$, on obtient donc finalement:

$$\delta_2^{\{2\}}(s) = \det_{\{2\}} M \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] + (-1)^1 \left[(-r_2^2) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\} \quad (2.28.)$$

Toutes les boucles causales C2T2 à coefficients diagonaux présentes dans un bond graph similaire à celui de la figure 2.20., peuvent donc être prises en compte par l'expression (2.21.) à condition de redéfinir simplement n_h^* comme ci-dessus. L'équivalence entre n_h^* et $\text{Card } \bar{J}$ n'est plus toujours vraie.

Le produit des gains des deux boucles causales C1T2 (issues de la boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux) est également considéré par l'expression (2.28.). Le terme $\delta_2(s)$ comporte donc désormais au niveau de sa composition, certains termes ne correspondant pas toujours à des gains ou à des produits de gains de boucles causales C2 uniquement.

Dans l'expression (2.21.), pour $r=1$ et $J=\{j_1\}$ avec $1 \leq j_1 \leq m$ ($m=3$), les conditions émises sur J permettent d'envisager toutes les boucles causales C2T2 à coefficients diagonaux présentes dans une figure similaire à celle de la figure 2.20.. La boucle causale de gain $B_{11,3}$ étant la seule nouveauté dans cette figure, les termes $\delta_2^{\{1\}}(s)$ et $\delta_2^{\{3\}}(s)$ ne subissent donc pas de modification due à cette cause par rapport à ceux obtenus à partir de la figure 2.19. et explicités en annexe B4. Par contre l'élément C_1 est directement relié au lien indicé 2 du MP. Le terme $\delta_2^{\{1\}}(s)$ varie donc tout de même. Il en est de même pour le terme $\delta_2^{\{1,3\}}(s)$ (voir annexe B5). Pour $J=\{j_1\}$ avec $1 \leq j_1 \leq 3$, nous résumons ces trois termes:

$$\text{Pour } J = \{2\}: \quad \delta_2^{\{2\}}(s) = \det_{\{2\}} M \left\{ \underbrace{(-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1]}_{a'} + \underbrace{(-1)^1 \left[(-r_2^2) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right]}_{a''} \right\} \quad (2.29.)$$

$$\text{Pour } J = \{1\}: \quad \delta_2^{\{1\}}(s) = \det_{\{1\}} M \left\{ \underbrace{(-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right]}_{b'} + \underbrace{(-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1]}_{b''} \right\} \quad (2.30.)$$

$$\text{Pour } J = \{3\}: \quad \delta_2^{\{3\}}(s) = \det_{\{3\}} M \left\{ \underbrace{(-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \right] [1]}_c \right\} \quad (2.31.)$$

Le tableau suivant permet de comprendre l'origine des différents termes précisés ci-dessus (sauf pour $\det_{\{2\}} M \times \{a'\}$ et pour $\det_{\{2\}} M \times \{a''\}$ issu de la boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux nouvellement apparue et étudiée ci-avant):

$\det_{\{1\}} M.b'$	$-\left[B_{232}\right] + \left[B_{22}B_{33} + B_{232}B_0^1\right] - \left[B_{22}B_{33}B_0^1\right] = \left[-\left(\frac{m_{23}m_{32}}{C_2C_3s^2}\right) + \left(-\frac{m_{22}}{C_2s}\right)\left(-\frac{m_{33}}{C_3s}\right)\right] \left[1 + \frac{1}{R_1C_1s}\right] =$ $\det_{\{1\}} M \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_2s}\right) \left(-\frac{1}{C_3s}\right) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1C_1s}\right] \right\}$
$\det_{\{1\}} M.b''$	$-\left[B_{232}'\right] + \left[B_{22}'B_{33}'\right] = -\left(\frac{m_{23}m_{32}}{C_1C_3s^2}\right) + \left(-\frac{m_{22}}{C_1s}\right)\left(-\frac{m_{33}}{C_3s}\right) = \det_{\{1\}} M \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1s}\right) \left(-\frac{1}{C_3s}\right) \right] [1] \right\}$
$\det_{\{3\}} M.c$	$-\left[B_{121}\right] + \left[B_{11}B_{22}\right] = -\left(\frac{m_{21}m_{12}}{C_1C_2s^2}\right) + \left(-\frac{m_{11}}{C_1s}\right)\left(-\frac{m_{22}}{C_2s}\right) = \det_{\{3\}} M \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1s}\right) \left(-\frac{1}{C_2s}\right) \right] [1] \right\}$

tableau 2.3.

L'étude de la contribution des boucles causales C2T2 à coefficients diagonaux est à présent terminée. Celles-ci n'interviennent seules, lors de la mise en œuvre de l'expression (2.21.), que lorsque $r=1$. Pour $r=2$ (respectivement $r=3$), seules les boucles causales C2T1 (respectivement C0) sont concernées (voir annexe B4). Pour $r=0$ ($J=\{ \}$), le terme $\delta_2^{\{ \}}(s)$ de l'annexe B4 doit à présent être complété. En effet, la boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux, nouvellement apparue, associée à d'autres boucles causales, intervient également dans ce cas (voir annexe B5). Toujours pour $r=0$, l'étude des boucles causales C2T3 à coefficients diagonaux doit également être abordée. Ces deux études vont être menées ci-après.

4.1.1.3. Contribution d'une boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux associée à une boucle causale C2T1

Lorsque $r=0$ ($J=\{ \}$ et $\bar{J} = \{1;2;3\}$), la boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux, de gain noté B_{11-33} , associée à la boucle causale C2T1 de gain noté B_{22} permet de parcourir tous les liens du MP dont les indices sont membres de \bar{J} suivant l'effort et le flux. Ces 2 boucles causales sont disjointes. La règle de Mason produit donc le terme $B_{11-33} B_{22}$ qui peut

encore être écrit:
$$B_{11-33} B_{22} = \left(-r_2^2 m_{11} m_{33}\right) \left(-\frac{m_{22}}{C_2s}\right) = m_{11} m_{22} m_{33} \left(-r_2^2\right) \left(-\frac{1}{C_2s}\right)$$

Nous appuyant sur ce critère, il nous est permis d'établir la liste des termes ne pouvant être considérés par l'étude de $\delta_2(s)$. Avant d'aborder l'étude de la contribution des boucles C2T3 à coefficients diagonaux dans $\delta_2(s)$, nous allons à présent mettre en évidence ces termes.

Concernant la figure 2.20., toutes les boucles causales C2Tt à coefficients diagonaux ($t \leq 2$) et toutes les boucle causales C2Tt' ($t' \leq 3$) qui en découlent peuvent donc être considérées par l'expression (2.21.). Quelques produits de gains pouvant être composés de gains de boucles causales C1 et/ou C1-2 peuvent également être considérés par cette expression. Les études présentées précédemment permettent de connaître très précisément la nature de tous les termes composant $\delta_2(s)$. Ainsi, nous pouvons exactement connaître les termes qui n'interviennent jamais dans $\delta_2(s)$. Ceux-ci permettront ensuite de construire $\delta_1(s)$ et $\delta_{1-2}(s)$.

Les contributions du MP dans les deux gains de boucles causales C1T2 B_{31} et B_{13} valent m_{13} et m_{31} . Lorsque le terme $\det_J M$ produit un seul terme de la matrice M (lorsque $\text{Card} J = m-1$), celui-ci est un terme diagonal ($m-1$ couples [ligne i; colonne i] différents sont supprimés dans la matrice M. Un seul terme diagonal subsiste et $\det_J M$ est égal à ce terme). Les termes m_{13} et m_{31} ne peuvent donc en aucun cas, être symbolisés par un terme noté $\det_J M$. Les deux gains B_{31} et B_{13} ne peuvent donc pas être considérés dans le calcul de $\delta_2(s)$. Ils interviendront donc ultérieurement ($\delta_1(s)$ ou $\delta_{1-2}(s)$).

Pour $r=0$, d'autres termes viennent se joindre à ces deux termes. En effet, les deux boucles causales C1-2T3 de gain B_{21-32} et B_{23-12} évoquées précédemment, n'interviennent dans la composition de $\delta_2(s)$ que parce qu'elles sont chacune disjointes de l'une des deux boucles causales C1T2 de gain B_{13} ou B_{31} (ligne 4 et 5 tableau 2.4.). Ces deux boucles causales C1-2T3 interviennent également individuellement dans l'application de la règle de Mason. Leur gain ne comportant chacun que deux termes de la matrice M ($B_{21-32} = -\frac{r_2 m_{12} m_{23}}{C_2 s}$ et

$B_{23-12} = -\frac{r_2 m_{32} m_{21}}{C_2 s}$), seul un terme $\det_J M$ avec $\text{Card} J = m-2$ peut permettre d'inclure ces 2

boucles causales dans la composition de $\delta_2(s)$ ($m-2$ couples [ligne i; colonne i] différents sont supprimés dans la matrice M. Quatre termes subsistent parmi lesquels deux termes diagonaux. Soient m_{ii} et m_{jj} ces termes. Il vient $\det_J M = m_{ii} m_{jj} - m_{ij} m_{ji}$).

Le premier terme de $\det J M$ est toujours dans ce cas le produit de deux termes diagonaux de la matrice M tandis que le second est le produit de deux termes symétriques de cette matrice. Ni $m_{12}m_{23}$, ni $m_{32}m_{21}$ ne peuvent donc être membre de $\det J M$ et donc de $\delta_2(s)$. Ces deux boucles causales vérifient effectivement les conditions précisées ci-avant car elles ne parcourent en aucun cas les liens indicés 1 et 3 dans les deux sens. Un raisonnement identique peut être tenu à propos des deux boucles causales C1-2T3 de gains B'_{21-32} et B'_{23-12} .

Parmi les quatre boucles causales évoquées ci-dessus (B_{13} , B_{31} , B_{21-32} et B_{23-12}), certaines peuvent être disjointes d'autres boucles. Il en résulte certains produits de gains intervenant dans l'application de la règle de Mason. Les produits $B_{13} B_{21-32}$ et $B_{31} B_{23-12}$ ont été étudiés précédemment. Dans chacun des deux cas, les 3 liens du MP étaient parcourus dans les deux sens. Cette condition n'est pas vérifiée par les boucles causales permettant de former les deux derniers produits de gains envisageables à ce niveau ($B_{13} B_{22}$, $B_{31} B_{22}$). Ces produits ne composent donc pas $\delta_2(s)$. Les contributions du MP dans ces deux produits sont en effet $m_{31}m_{22}$ et $m_{13}m_{22}$ qui ne peuvent pas appartenir, comme nous l'avons déjà vu, à $\det J M$ lorsque $\text{Card } J = m - 2$.

Toutes les boucles causales de gain B_{13} , B_{31} , B_{21-32} , B_{23-12} , $B_{13} B_{22}$ et $B_{31} B_{22}$ sont disjointes de la boucle causale C0 de gain B_1^0 . Le produit de chacun de ces gains avec B_1^0 n'intervient pas non plus dans $\delta_2(s)$.

D'autre part, bien que les liens indicés 1 et 2 du MP soient en relation causale, il n'existe pas de boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux dont le gain soit noté B_{11-22} . Néanmoins, deux boucles causales C1T2 sont présentes. Leurs gains respectifs sont notés B_{12} et B_{21} avec:

Chemin causal de la Boucle	1-2-18-8-8-7	2-1-7-8-8-18
Gain	$B_{12} = \frac{m_{21}}{C_1 s}$ (C1T2)	$B_{21} = \frac{m_{12}}{C_1 s}$ (C1T2)

Au même titre que B_{13} et B_{31} , ces deux gains ne peuvent entrer dans la constitution de $\delta_2(s)$. Ces deux boucles causales sont disjointes de la boucle causale C2T1 de gain

$B_{33} = -\frac{m_{33}}{C_3 s}$. Cette situation engendre l'existence de deux boucles causales C1-2T3

supplémentaires dont les gains sont:

Chemin causal de la Boucle	13-3-2-18-8-8-7-1-3-13	13-3-1-7-8-8-18-2-3-13
Gain	$B_{32-13} = -\frac{m_{31}m_{23}}{C_1C_3s^2} \quad (C1-2T3)$	$B_{31-23} = -\frac{m_{32}m_{13}}{C_1C_3s^2} \quad (C1-2T3)$

D'autres boucles causales C1-2T3 que celles de gain B_{32-13} et B_{31-23} existent. La présence ici des quatre boucles causales C1T2 favorise l'apparition de deux nouvelles boucles causales C1-2T3 non examinées jusqu'ici. Parmi ces quatre boucles, celles dont les gains sont B_{13} et B_{21} sont disjointes. Il en est de même pour les deux boucles causales dont les gains sont B_{31} et B_{12} .

- B_{13} (1-3-14-15) et B_{21} (2-1-7-8-8-18) font apparaître la boucle causale C1-2T3 dont le gain est noté B_{23-11} .

- B_{31} (3-1-15-14) et B_{12} (1-2-18-8-8-7) font apparaître la boucle causale C1-2T3 dont le gain est noté B_{32-11} .

Chemin causal de la Boucle	3-2-18-8-8-7-1-1-15-14	2-3-14-15-1-1-7-8-8-18
Gain	$B_{32-11} = \frac{r_2m_{23}m_{11}}{C_1s} \quad (C1-2T3)$	$B_{23-11} = -\frac{r_2m_{32}m_{11}}{C_1s} \quad (C1-2T3)$

Les gains B_{23-11} et B_{32-11} ainsi que les deux produits de gains $B_{13} B_{21}$ et $B_{31} B_{12}$ ne parcourent pas l'ensemble des trois liens du MP suivant l'effort et le flux. Ces quatre termes ne composent donc pas $\delta_2(s)$.

La situation présentée par l'association de deux boucles causales C1T2 disjointes et ne permettant pas de parcourir tous les liens du MP dans les deux sens, peut se généraliser à plusieurs produits de gains de boucles causales C1 uniquement, ou C1-2 uniquement, ou C1 et C1-2.

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des gains et des produits de gains ne pouvant intervenir dans $\delta_2(s)$:

Boucles C1	Boucles C1-2	Produits de gains
B_{13}	B_{23-12} et B'_{23-12}	$B_{13}B_{22}, B_{13}B_1^0, B_{23-12}B_1^0,$ $B_{13}B_{22}B_1^0$ et $B_{13}B'_{22}$
B_{31}	B_{21-32} et B'_{21-32}	$B_{31}B_{22}, B_{31}B_1^0, B_{21-32}B_1^0,$ $B_{31}B_{22}B_1^0$ et $B_{31}B'_{22}$
B_{12}	B_{32-13}	$B_{12}B_{33}$
B_{21}	B_{31-23}	$B_{21}B_{33}$
	B_{23-11}	$B_{13}B_{21}$
	B_{32-11}	$B_{31}B_{12}$

tableau 2.5.

Tous les termes ne pouvant composer $\delta_2(s)$ se répartissent donc en plusieurs catégories que nous pouvons définir de la façon suivante:

- Les gains de boucles causales C1
- Les gains de boucles causales C1-2
- Les produits de gains comportant au moins un gain de boucle causale répertorié dans les deux précédentes catégories. Au moins un lien du MP parmi ceux parcourus par les multiples boucles causales dont le gain compose le produit de gains, ne doit être parcouru que dans un seul sens (effort ou flux).

La composition finale de $\delta_2(s)$ concernant la figure 2.20., est donnée en annexe B5. Cependant, tous les résultats précédents concernant l'association d'une boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux et d'une boucle causale C2T1 peuvent être généralisés à un bond graph comportant un MP de dimension m quelconque. L'association d'une boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux et de deux autres boucles causales C2T1 ainsi que l'association de deux boucles causales C2T2 à coefficients diagonaux doivent être alors étudiées. La restriction de notre étude à un bond graph de dimension 3 ne permet pas de traiter ces différents cas ici. Cependant, ces différents cas sont présentés en annexe B6.

Lorsque toutes les branches du MP sont reliées entre elles, une boucle causale C2T3 à coefficients diagonaux peut apparaître. Tout comme pour les boucles causales C2T2 à

Nous appuyant sur ce critère, il nous est permis d'établir la liste des termes ne pouvant être considérés par l'étude de $\delta_2(s)$. Avant d'aborder l'étude de la contribution des boucles C2T3 à coefficients diagonaux dans $\delta_2(s)$, nous allons à présent mettre en évidence ces termes.

Concernant la figure 2.20., toutes les boucles causales C2Tt à coefficients diagonaux ($t \leq 2$) et toutes les boucles causales C2Tt' ($t' \leq 3$) qui en découlent peuvent donc être considérées par l'expression (2.21.). Quelques produits de gains pouvant être composés de gains de boucles causales C1 et/ou C1-2 peuvent également être considérés par cette expression. Les études présentées précédemment permettent de connaître très précisément la nature de tous les termes composant $\delta_2(s)$. Ainsi, nous pouvons exactement connaître les termes qui n'interviennent jamais dans $\delta_2(s)$. Ceux-ci permettront ensuite de construire $\delta_1(s)$ et $\delta_{1-2}(s)$.

Les contributions du MP dans les deux gains de boucles causales C1T2 B_{31} et B_{13} valent m_{13} et m_{31} . Lorsque le terme $\det_J M$ produit un seul terme de la matrice M (lorsque $\text{Card} J = m-1$), celui-ci est un terme diagonal ($m-1$ couples [ligne i; colonne i] différents sont supprimés dans la matrice M. Un seul terme diagonal subsiste et $\det_J M$ est égal à ce terme). Les termes m_{13} et m_{31} ne peuvent donc en aucun cas, être symbolisés par un terme noté $\det_J M$. Les deux gains B_{31} et B_{13} ne peuvent donc pas être considérés dans le calcul de $\delta_2(s)$. Ils interviendront donc ultérieurement ($\delta_1(s)$ ou $\delta_{1-2}(s)$).

Pour $r=0$, d'autres termes viennent se joindre à ces deux termes. En effet, les deux boucles causales C1-2T3 de gain B_{21-32} et B_{23-12} évoquées précédemment, n'interviennent dans la composition de $\delta_2(s)$ que parce qu'elles sont chacune disjointes de l'une des deux boucles causales C1T2 de gain B_{13} ou B_{31} (ligne 4 et 5 tableau 2.4.). Ces deux boucles causales C1-2T3 interviennent également individuellement dans l'application de la règle de Mason. Leur gain ne comportant chacun que deux termes de la matrice M ($B_{21-32} = -\frac{r_2 m_{12} m_{23}}{C_2 s}$ et

$B_{23-12} = -\frac{r_2 m_{32} m_{21}}{C_2 s}$), seul un terme $\det_J M$ avec $\text{Card} J = m-2$ peut permettre d'inclure ces 2

boucles causales dans la composition de $\delta_2(s)$ ($m-2$ couples [ligne i; colonne i] différents sont supprimés dans la matrice M. Quatre termes subsistent parmi lesquels deux termes diagonaux. Soient m_{ii} et m_{jj} ces termes. Il vient $\det_J M = m_{ii} m_{jj} - m_{ij} m_{ji}$).

Le premier terme de $\det J M$ est toujours dans ce cas le produit de deux termes diagonaux de la matrice M tandis que le second est le produit de deux termes symétriques de cette matrice. Ni $m_{12} m_{23}$, ni $m_{32} m_{21}$ ne peuvent donc être membre de $\det J M$ et donc de $\delta_2(s)$. Ces deux boucles causales vérifient effectivement les conditions précisées ci-avant car elles ne parcourent en aucun cas les liens indicés 1 et 3 dans les deux sens. Un raisonnement identique peut être tenu à propos des deux boucles causales C1-2T3 de gains B'_{21-32} et B'_{23-12} .

Parmi les quatre boucles causales évoquées ci-dessus (B_{13} , B_{31} , B_{21-32} et B_{23-12}), certaines peuvent être disjointes d'autres boucles. Il en résulte certains produits de gains intervenant dans l'application de la règle de Mason. Les produits $B_{13} B_{21-32}$ et $B_{31} B_{23-12}$ ont été étudiés précédemment. Dans chacun des deux cas, les 3 liens du MP étaient parcourus dans les deux sens. Cette condition n'est pas vérifiée par les boucles causales permettant de former les deux derniers produits de gains envisageables à ce niveau ($B_{13} B_{22}$, $B_{31} B_{22}$). Ces produits ne composent donc pas $\delta_2(s)$. Les contributions du MP dans ces deux produits sont en effet $m_{31} m_{22}$ et $m_{13} m_{22}$ qui ne peuvent pas appartenir, comme nous l'avons déjà vu, à $\det J M$ lorsque $\text{Card } J = m - 2$.

Toutes les boucles causales de gain B_{13} , B_{31} , B_{21-32} , B_{23-12} , $B_{13} B_{22}$ et $B_{31} B_{22}$ sont disjointes de la boucle causale C0 de gain B_1^0 . Le produit de chacun de ces gains avec B_1^0 n'intervient pas non plus dans $\delta_2(s)$.

D'autre part, bien que les liens indicés 1 et 2 du MP soient en relation causale, il n'existe pas de boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux dont le gain soit noté B_{11-22} . Néanmoins, deux boucles causales C1T2 sont présentes. Leurs gains respectifs sont notés B_{12} et B_{21} avec:

Chemin causal de la Boucle	1-2-18-8-8-7	2-1-7-8-8-18
Gain	$B_{12} = \frac{m_{21}}{C_1 s}$ (C1T2)	$B_{21} = \frac{m_{12}}{C_1 s}$ (C1T2)

Au même titre que B_{13} et B_{31} , ces deux gains ne peuvent entrer dans la constitution de $\delta_2(s)$. Ces deux boucles causales sont disjointes de la boucle causale C2T1 de gain $B_{33} = -\frac{m_{33}}{C_3 s}$. Cette situation engendre l'existence de deux boucles causales C1-2T3

supplémentaires dont les gains sont:

Chemin causal de la Boucle	13-3-2-18-8-8-7-1-3-13	13-3-1-7-8-8-18-2-3-13
Gain	$B_{32-13} = -\frac{m_{31}m_{23}}{C_1C_3s^2} \quad (C1-2T3)$	$B_{31-23} = -\frac{m_{32}m_{13}}{C_1C_3s^2} \quad (C1-2T3)$

D'autres boucles causales C1-2T3 que celles de gain B_{32-13} et B_{31-23} existent. La présence ici des quatre boucles causales C1T2 favorise l'apparition de deux nouvelles boucles causales C1-2T3 non examinées jusqu'ici. Parmi ces quatre boucles, celles dont les gains sont B_{13} et B_{21} sont disjointes. Il en est de même pour les deux boucles causales dont les gains sont B_{31} et B_{12} .

- B_{13} (1-3-14-15) et B_{21} (2-1-7-8-8-18) font apparaître la boucle causale C1-2T3 dont le gain est noté B_{23-11} .

- B_{31} (3-1-15-14) et B_{12} (1-2-18-8-8-7) font apparaître la boucle causale C1-2T3 dont le gain est noté B_{32-11} .

Chemin causal de la Boucle	3-2-18-8-8-7-1-1-15-14	2-3-14-15-1-1-7-8-8-18
Gain	$B_{32-11} = \frac{r_2 m_{23} m_{11}}{C_1 s} \quad (C1-2T3)$	$B_{23-11} = -\frac{r_2 m_{32} m_{11}}{C_1 s} \quad (C1-2T3)$

Les gains B_{23-11} et B_{32-11} ainsi que les deux produits de gains $B_{13} B_{21}$ et $B_{31} B_{12}$ ne parcourent pas l'ensemble des trois liens du MP suivant l'effort et le flux. Ces quatre termes ne composent donc pas $\delta_2(s)$.

La situation présentée par l'association de deux boucles causales C1T2 disjointes et ne permettant pas de parcourir tous les liens du MP dans les deux sens, peut se généraliser à plusieurs produits de gains de boucles causales C1 uniquement, ou C1-2 uniquement, ou C1 et C1-2.

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des gains et des produits de gains ne pouvant intervenir dans $\delta_2(s)$:

Boucles C1	Boucles C1-2	Produits de gains
B_{13}	B_{23-12} et B'_{23-12}	$B_{13}B_{22}, B_{13}B_1^0, B_{23-12}B_1^0,$ $B_{13}B_{22}B_1^0$ et $B_{13}B'_{22}$
B_{31}	B_{21-32} et B'_{21-32}	$B_{31}B_{22}, B_{31}B_1^0, B_{21-32}B_1^0,$ $B_{31}B_{22}B_1^0$ et $B_{31}B'_{22}$
B_{12}	B_{32-13}	$B_{12}B_{33}$
B_{21}	B_{31-23}	$B_{21}B_{33}$
	B_{23-11}	$B_{13}B_{21}$
	B_{32-11}	$B_{31}B_{12}$

tableau 2.5.

Tous les termes ne pouvant composer $\delta_2(s)$ se répartissent donc en plusieurs catégories que nous pouvons définir de la façon suivante:

- Les gains de boucles causales C1
- Les gains de boucles causales C1-2
- Les produits de gains comportant au moins un gain de boucle causale répertorié dans les deux précédentes catégories. Au moins un lien du MP parmi ceux parcourus par les multiples boucles causales dont le gain compose le produit de gains, ne doit être parcouru que dans un seul sens (effort ou flux).

La composition finale de $\delta_2(s)$ concernant la figure 2.20., est donnée en annexe B5. Cependant, tous les résultats précédents concernant l'association d'une boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux et d'une boucle causale C2T1 peuvent être généralisés à un bond graph comportant un MP de dimension m quelconque. L'association d'une boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux et de deux autres boucles causales C2T1 ainsi que l'association de deux boucles causales C2T2 à coefficients diagonaux doivent être alors étudiées. La restriction de notre étude à un bond graph de dimension 3 ne permet pas de traiter ces différents cas ici. Cependant, ces différents cas sont présentés en annexe B6.

Lorsque toutes les branches du MP sont reliées entre elles, une boucle causale C2T3 à coefficients diagonaux peut apparaître. Tout comme pour les boucles causales C2T2 à

coefficients diagonaux, il nous faut traiter la contribution de ce type de boucles. Cependant par souci de clarté dans cette présentation, nous avons choisi de présenter ce cas en annexe B7.

4.1.2. Contribution des boucles causales C1 pour la détermination de $\delta_1(s)$

Toutes les boucles causales C1 parcourent les liens du MP les composant suivant l'effort ou le flux. A ce titre, elle n'ont pu intégrer la composition de $\delta_2(s)$ et intégreront celle de $\delta_1(s)$. Toutes les boucles causales C1 sont de type pair (t_p) avec $t_p=2t'_p$ et $1 \leq t'_p \leq \mathcal{E}(\frac{m}{2})$ (\mathcal{E} =partie entière). Tout comme précédemment, nous noterons $\delta_1^{\{t'_p\}}(s)$ les membres de $\delta_1(s)$ engendrés directement par des boucles causales C1T t_p .

4.1.2.1. Contribution des boucles causales C1T2 pour la détermination de $\delta_1(s)$

Toutes les boucles causales C1T2 (figure 2.21.) ne comportent dans leurs gains qu'un seul terme de la matrice M. Ce terme ne peut en aucun cas être un terme diagonal et ne peut donc pas, comme nous l'avons déjà souligné, être symbolisé par $\det_J M$ ($\forall J$).

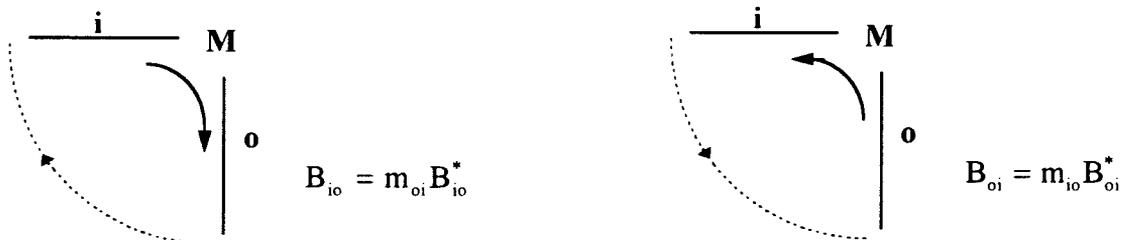


figure 2.21.

Afin de représenter ce terme, nous utiliserons la notation employée lors du traitement des numérateurs C1 et C1-2 du paragraphe précédent (voir expression 2.24.). Lorsque $\dim M=m$ et $\text{Card} J=r=m-2$, cette notation est la suivante:

$$\det_{[i;o]J} M = m_{oi} \quad (2.33.)$$

avec

$$\bullet J = \{j_1, j_2, \dots, j_r\} \quad \forall l < l'; j_l < j_{l'}; j_l, j_{l'} \in [1; m] \quad \forall k j_k \neq i, j_k \neq o \text{ et } i \neq o$$

Le terme m_{oi} est issu de la matrice M lorsque celle-ci a été privée des (m-2) couples [Ligne j_i ; Colonne j_i] ($j_i \in J$) mais aussi de sa ligne i et de sa colonne o. La matrice résultant de cette simplification est notée M_r . La matrice $M_{r,d}$ est de dimension d. Nous avons donc ici $M_{r1} = m_{oi}$. Ce raisonnement permet également de symboliser $\det_{[o;i]J} M = m_{io}$.

Les deux gains B_{oi} et B_{io} interviennent dans l'application de la règle de Mason et impliquent:

$$\dots - [B_{io} + B_{oi} + \dots] + \dots$$

qui peut encore s'écrire:

$$\dots + \det_{[i;o],J} M \left\{ (-1) [B_{io}^*] [1] \right\} + \det_{[o;i],J} M \left\{ (-1) [B_{oi}^*] [1] \right\} + \dots$$

Concernant la figure 2.20., le tableau 2.5. fait état de quatre boucles causales C1T2.

Ces quatre boucles causales ont pour gains: $B_{13} = -r_2 m_{31}$, $B_{31} = r_2 m_{13}$, $B_{12} = \frac{m_{21}}{C_1 s}$,

$B_{21} = \frac{m_{12}}{C_1 s}$. Les deux premières sont disjointes de la boucle causale C0. L'application de la

règle de Mason produit donc:

$$\dots - [B_{13} + B_{31} + B_{12} + B_{21} + \dots] + [B_{13} B_1^0 + B_{31} B_1^0 + \dots] + \dots$$

Tous ces termes peuvent être écrits en utilisant la notation précisée ci-dessus:

$$\underbrace{\det_{[1;2];\{3\}} M \cdot \left\{ (-1) \left[\frac{1}{C_1 s} \right] [1] \right\}}_{T_1} + \underbrace{\det_{[2;1];\{3\}} M \cdot \left\{ (-1) \left[\frac{1}{C_1 s} \right] [1] \right\}}_{T_2} + \dots$$

$$\underbrace{\det_{[1;3];\{2\}} M \cdot \left\{ (-1) \left[(-r_2) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\}}_{T_3} + \underbrace{\det_{[3;1];\{2\}} M \cdot \left\{ (-1) \left[(r_2) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\}}_{T_4}$$

(2.34.)

L'expression suivante permet de résumer l'ensemble de ces termes:

$$\delta_i^{(2)}(s) = \sum_j \det_{[i;o],J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1) [B_h^j] \cdot [\Delta_h(s)] \right\} \quad (2.35.)$$

avec:

- CardJ=m-2
- $i \neq 0$; $1 < i < m$; $1 < o < m$;
- $\forall j_k \in J \ j_k \neq i$; $j_k \neq o$
- b_2 le nombre de couples $[i;o]$ à considérer par cette expression.

Dans le cas de la figure 2.20., quand dans l'expression (2.35.), $i=2$ et $o=3$ ou $i=3$ et $o=2$, l'absence de boucles causales C1T2 parcourant les liens indicés 2 et 3 du MP entraîne que

les termes $T_5 = \det_{[2,3],J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1) [B_h^j] [\Delta_h(s)] \right\}$ et $T_6 = \det_{[3,2],J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1) [B_h^j] [\Delta_h(s)] \right\}$ sont

nuls.

Une méthode permettant de déterminer b_2 est présentée en annexe B8a.

Afin de définir une notation permettant de considérer toutes les boucles causales C1, il nous faut aborder l'étude des cas où le type de la boucle causale est supérieur à 2. Ces différentes boucles causales ne peuvent apparaître dans un bond graph comportant un MP de dimension 3 comme celui de la figure 2.20.. Par souci de clarté dans notre présentation, nous avons également choisi de présenter cette étude en annexe B8b.

De ce fait, le dénominateur $\Delta(s)$ de la matrice de transfert du modèle bond graph de la figure 2.20., s'écrit provisoirement:

$$\Delta(s) = \delta_2(s) + \delta_1(s) \quad \text{et} \quad \delta_1(s) = \delta_1^{(2)}(s) \quad \text{pour l'instant} \quad (2.36.)$$

L'annexe B8b montre que toutes les boucles causales C1 peuvent être considérées par le terme $\delta_1(s)$. L'expression générale de ce terme s'écrit:

$$\delta_1(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)} \left\{ \sum_J \det_{[i_1:o_1][i_2:o_2] \dots [i_c:o_c], J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\theta [B_h^j] \cdot [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \quad (2.37.)$$

avec:

- Card $J=m-2c$
- $\forall k, k'; i_k \neq i_{k'}; o_k \neq o_{k'}; i_k \neq o_{k'}; i_{k'} \neq o_k$.
- $\forall j_k \in J; \forall k' j_k \neq i_{k'}; j_k \neq o_{k'}$.
- b_{2c} le nombre de termes $\det_{[\parallel] \dots [\parallel]} M$ déterminable à l'aide des méthodes

proposées.

- θ dépendant des valeurs de $i_1, i_2, \dots, i_c, o_1, o_2, \dots, o_c$

Le critère permettant de déterminer automatiquement ($\forall c$) la parité souhaitée de θ est présenté en annexe B10.

L'expression (2.37.) permet donc de considérer toutes les boucles causales C1 et les produits de gains de boucles causales C1. Contrairement à $\delta_2(s)$, tous les liens du MP dont l'indice appartient à \bar{J} ne sont parcourus que dans un seul sens (effort ou flux). Il reste donc à traiter le cas où certains liens peuvent être parcourus dans un sens et d'autres dans les deux sens. C'est le cas des boucles causales C1-2 que nous allons traiter maintenant.

4.1.3. Contribution des boucles causales C1-2 dans la détermination de $\delta_{1-2}(s)$

Concernant $\delta_1(s)$, nous avons toujours Card J=m-2c. Les 2c liens concernés étaient toujours parcourus suivant une seule variable (effort ou flux). Si Card J=(m-2c)-1, un lien supplémentaire peut être parcouru mais cette fois suivant effort et flux. Il peut donc exister une boucle causale C1-2T(2c+1). Si Card J varie de (m-2c)-1 à 0, toutes les boucles causales C1-2 seront examinées.

4.1.3.1. Contribution des boucles causales C1-2 issues de boucles causales C1T2 dans la composition de $\delta_{1-2}(s)$

Considérons l'une des boucles causales C1T2 de la figure 2.21.. Si Card J=(m-2)-1 alors un lien supplémentaire (indiqué k) peut être parcouru suivant effort et flux par une boucle causale C2T1 de gain $B_{kk} = m_{kk} B_{kk}^*$ (figure 2.22.).

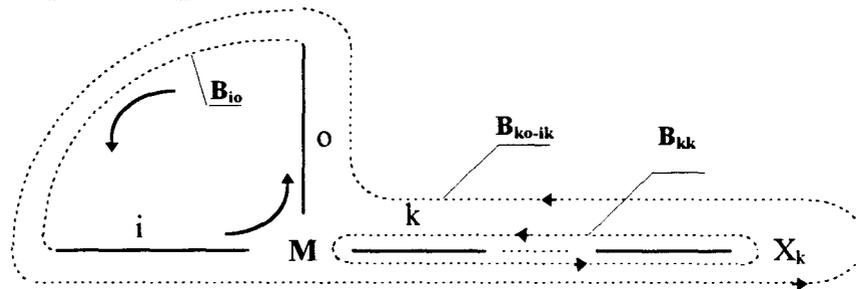


figure 2.22.

Ces deux boucles causales sont disjointes. Le terme $B_{io}B_{kk}$ intervient donc dans l'application de la règle de Mason. Les trois liens indicés i, o et k peuvent être également parcourus identiquement par la boucle causale C1-2T3 de gain B_{ko-ik} ($X_k \dots k-o \dots i-k \dots X_k$).

Il est possible de parcourir identiquement ces trois liens du MP en considérant une autre situation et une autre boucle causale C1-2T3 (figure 2.23.). Cette fois, une relation causale existe entre les liens i et k ainsi qu'entre les liens o et k (contrairement à la figure 2.22. où étaient concernés les liens i et o).

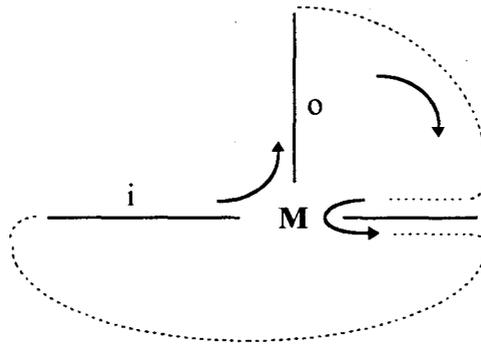


figure 2.23.

La boucle causale C1-2T3 de gain B_{io-kk} est issue des deux boucles causales C1T2 de gain B_{ik} et B_{ko} disjointes entre elles.

Concernant la figure 2.22., l'application de la règle de Mason implique:

$$\begin{aligned} & \dots - [B_{ko-ik} + \dots] + [B_{io} B_{kk} + \dots] + \dots \\ & = \dots - m_{ki} m_{ok} B_{ko-ik}^* + m_{oi} m_{kk} B_{io}^* B_{kk}^* + \dots \\ & = \dots - m_{ki} m_{ok} B_{ko-ik}^* + (-1)^{E_1} m_{oi} m_{kk} B_{io}^* B_{kk}^* + \dots \text{ avec } E_1 \text{ pair } (E_1 = n_1^* = 2 \text{ par exemple}) \end{aligned}$$

Or :

$$B_{ko-ik}^* = B_{io}^* B_{kk}^* = B_1^{\bar{J}} \text{ avec } \bar{J} = \{i; o; k\}$$

Le terme suivant apparaît:

$$(-1)^{E_1} [m_{oi} m_{kk} - m_{ki} m_{ok}] B_1^{\bar{J}} \quad (2.38.)$$

Concernant la figure 2.23., l'application de la règle de Mason implique:

$$\begin{aligned} & \dots - [B_{io-kk} + \dots] + [B_{ik} B_{ko} + \dots] + \dots \\ & = \dots - m_{oi} m_{kk} B_{io-kk}^* + m_{ki} m_{ok} B_{ik}^* B_{ko}^* + \dots \\ & = \dots + (-1)^{E_2} m_{oi} m_{kk} B_{io-kk}^* + m_{ki} m_{ok} B_{ik}^* B_{ko}^* + \dots \text{ avec } E_2 \text{ impair } (E_2 = n_2^* = 1 \text{ par exemple}) \end{aligned}$$

Or :

$$B_{io-kk}^* = B_{ik}^* B_{ko}^* = B_2^{\bar{J}} \text{ avec } \bar{J} = \{i; o; k\}$$

Le terme suivant apparaît:

$$(-1)^{E_2} [m_{oi} m_{kk} - m_{ki} m_{ok}] B_2^{\bar{J}} \quad (2.39.)$$

Dans les deux cas, le terme $[m_{oi} m_{kk} - m_{ki} m_{ok}]$ est présent. Il est le déterminant d'une matrice M_{r_2} issue de M lorsque celle ci a été privée de sa ligne i, de sa colonne o et des

Card $J=(m-2)-1=m-3$ couples [Ligne j_i ; Colonne j_i] ($j_i \in J, j_i \neq k; j_i \neq i; j_i \neq o$). Selon les valeurs de i, o et k , quatre matrices M_{r2}^α ($1 \leq \alpha \leq 4$) existent:

$$k < \text{Min}(i; o) \text{ ou } k > \text{Max}(i; o): \quad M_{r2}^1 \begin{bmatrix} m_{oi} & m_{ok} \\ m_{ki} & m_{kk} \end{bmatrix} \quad M_{r2}^2 \begin{bmatrix} m_{kk} & m_{ki} \\ m_{ok} & m_{oi} \end{bmatrix}$$

$$\text{Min}(i; o) < k < \text{Max}(i; o): \quad M_{r2}^3 \begin{bmatrix} m_{ok} & m_{oi} \\ m_{kk} & m_{ki} \end{bmatrix} \quad M_{r2}^4 \begin{bmatrix} m_{ki} & m_{kk} \\ m_{oi} & m_{ok} \end{bmatrix}$$

Le symbolisme utilisé pour $\delta_1(s)$ lorsque $c=1$ peut être conservé car nous avons:

$$\det_{[i;o]J} M = \pm [m_{oi} m_{kk} - m_{ki} m_{ok}]$$

avec Card $J=(m-2)-1$ et $\forall j_q \in J, j_q \neq i; j_q \neq o; j_q \neq k$

Pour ($1 \leq \alpha \leq 2$), on a: $\det_{[i;o]J} M = + [m_{oi} m_{kk} - m_{ki} m_{ok}]$. Dans ce cas, les expressions

2.38. et 2.39. peuvent être réécrites comme ci-après:

$$\det_{[i;o]J} M \left\{ (-1)^E [B^{\bar{J}}] \Delta(s) \right\} \quad (2.40.)$$

avec:

- $B^{\bar{J}} = B_1^{\bar{J}} = B_2^{\bar{J}}$, $E = E_1$ ou E_2 suivant l'expression concernée.
- $\Delta^R(s)$ le déterminant de Mason calculé à l'aide des boucles causales C_0 disjointes de

$B^{\bar{J}}$.

- $\bar{J} = \{i; o; k\}$

Pour ($3 \leq \alpha \leq 4$), on a: $\det_{[i;o]J} M = - [m_{oi} m_{kk} - m_{ki} m_{ok}]$. Dans ce cas, les expressions

2.38. et 2.39. peuvent être réécrites comme ci-après:

$$\det_{[i;o]J} M \left\{ (-1)^{(E+\gamma)} [B^{\bar{J}}] \Delta(s) \right\} \quad (2.41.)$$

avec:

- γ impair

Concernant la figure 2.22., nous avons considéré le terme $B_{io} B_{kk}$ plutôt que le terme

B_{iko} d'où $E_1 = n_1^* = 2$.

Concernant la figure 2.23., nous avons considéré le terme B_{io-kk} plutôt que le terme

$B_{ik} B_{ko}$ d'où $E_2 = n_2^* = 1$.

Afin de déterminer chaque fois la valeur de l'exposant E intervenant dans les expressions (2.40.) et (2.41.), nous nous sommes intéressés plus particulièrement au nombre de boucles causales dont les (ou la) contributions du MP dans leur gain forment le terme $m_{oi} m_{kk}$. Ce terme comporte le terme m_{oi} qui est la contribution du MP lorsqu'on le traverse du lien i vers le lien o.

Le traitement des boucles causales C1-2T3 permet donc de considérer certains produits de gains ne pouvant intervenir ni dans $\delta_2(s)$, ni dans $\delta_1(s)$ comme $B_{io} B_{kk}$ et $B_{ik} B_{ko}$.

Concernant la figure 2.20., le tableau 2.5. résume les différents termes ne pouvant intervenir dans $\delta_2(s)$. Les quatre boucles causales C1T2 composent $\delta_1(s)$ et ont été considérées précédemment par l'expression (2.34.). Nous avons dans cette expression Card $J=m-2=1$. Si Card $J=(m-2)-1=0$, cette expression permet de considérer les boucles causales C1-2T3:

Le terme T_1 de l'expression (2.34.) devient T_1' avec:

$$T_1' = \det_{[1,2]} \{ M \times \{ T_1'' \} \} = [m_{21} m_{33} - m_{31} m_{23}] \times \{ T_1'' \}$$

Ce terme permet de considérer les boucles causales C1-2T3 traversant le MP du lien 1 suivant e_1 vers le lien 2 suivant f_2 et parcourant le lien 3 suivant effort et flux. Afin de calculer le terme T_1'' , une seule boucle causale respectant ces conditions existe dans la figure 2.20.:

Chemin causal de la Boucle	3-2-18-8-8-7-1-3-13-13
Gain	$B_{32-13} = -\frac{m_{23} m_{31}}{C_1 C_3 s^2} = m_{23} m_{31} B_{32-13}^* \quad (C1T2)$

Les boucles causales C1T2 et C2T1 de gains B_{12} et B_{33} sont disjointes et parcourent identiquement tous les liens parcourus par la boucle causale de gain B_{32-13} . Nous avons:

$$\begin{aligned} & \dots - [B_{32-13} + \dots] - [B_{12} B_{33} + \dots] + \dots \\ & \dots - \left[-\frac{m_{23} m_{31}}{C_1 C_3 s^2} \right] + \left[\left(\frac{m_{21}}{C_1 s} \right) \left(-\frac{m_{33}}{C_3 s} \right) \right] + \dots \\ & \dots - [m_{21} m_{33} - m_{23} m_{31}] (-1)^{n_2} \left(\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$= \dots + \left[\det_{[1,2]\{ \}} M \right] \left\{ (-1)^{n_1^*} \left[\left(\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] \right\} + \dots$$

Le cas est similaire à celui présenté figure 2.22.. Pour déterminer l'exposant n_1^* , notre attention se porte donc sur le terme $B_{12}B_{33}$ qui permet de franchir directement le MP du lien 1 vers le lien 2. Nous avons donc $n_1^* = 2$. La dernière expression devient finalement:

$$T_1' = \det_{[1,2]\{ \}} M \underbrace{\left\{ (-1)^{n_1^*} [B_1^j] [\delta_1(s)] \right\}}_{T_1^*} \quad (2.42.)$$

avec:

- $B_2^j = B_{12}^* B_{33}^*$ et $B_{12}^* B_{33}^* = B_{32-13}^*$
- $n_1^* = 1$ car B_1^j est composée de 2 boucles B^* .
- $\delta_1(s) = 1$

L'exposant γ de l'expression (2.41.) n'intervient pas ici car l'indice k du lien parcouru suivant effort et flux vaut 3 et $k > \text{Max}(i;o)$ ($i=1$ et $o=2$).

Toujours pour $k=3$, les boucles causales évoquées ci-dessus parcourues dans le sens opposé implique dans l'application de la règle de Mason:

$$\dots - [B_{31-23} + \dots] + [B_{21} B_{33} + \dots] + \dots$$

qui donnera finalement (voir aussi exp (2.34.))

$$T_2' = \det_{[2,1]\{ \}} M \underbrace{\left\{ (-1)^{n_2^*} \left[\left(\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] \right\}}_{T_2^*} \text{ avec } n_2^* = 2 \quad (2.43.)$$

Dans le cas où i et $o \in \{2,3\}$ et $k=1$, l'application de la règle de Mason implique certains calculs précisés en annexe B11.

Tout comme pour les expressions (2.42.) et (2.43.), les résultats présentés en annexe B11 ne nécessitent pas l'intervention de γ car l'indice k de l'unique lien parcouru suivant l'effort et le flux vérifie chaque fois $k < \text{Min}(i;o)$ ou $k > \text{Max}(i;o)$. Cette condition n'est pas respectée pour les termes engendrés lorsque i et $o \in \{1,3\}$ et $k=2$ (voir annexe B12).

Tous les gains ou produits de gains du tableau 2.5. se rapportant à la figure 2.20. sont à présent traités.

$\delta_{1-2}(s)$ est obtenu en sommant les expressions (2.42.), (2.43.) et les expressions (B.11.1.), (B.11.2.), (B.12.1.) et (B.12.2.) des annexes B11 et B12. Nous pouvons donc écrire finalement:

$$\delta_{1-2}^3(s) = \sum_J \det_{[i;o]J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\varphi [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right\} \quad (2.44.)$$

avec:

- b_3 le nombre de couples $[i;o]$ permettant de traiter toutes les boucles de C1-2T3 lorsque $\text{Card } J = (m-2)-1$ ($=0$ ici).

- $\bar{J} = \{i;o;k\}$
- Seul le lien indicé k est parcouru suivant effort et flux.
- $\varphi = n^* + \gamma$ avec $\gamma = 1$ si $\text{Min}(i;o) < k < \text{Max}(i;o)$ et $\gamma = 0$ sinon.

De façon plus générale, toutes les boucles causales C1-2 issues d'une boucle causale C1T2 pourront être prises en compte par l'expression suivante:

$$\delta_{1-2}(s) = \sum_J \det_{[i;o]J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\varphi [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right\} \quad (2.45.)$$

avec:

- $b_{\text{Card}\bar{J}}$ le nombre de couples $[i;o]$ permettant de traiter toutes les boucles de C1-2Tt avec $t = \text{Card } \bar{J}$.

- $0 \leq \text{Card } J < m - 2$
- $\varphi = n^* + \gamma$ et γ le nombre d'indice $\bar{j}_i \in \bar{J}$ vérifiant $\text{Min}(i;o) < \bar{j}_i < \text{Max}(i;o)$

(démonstration en annexe B13).

Lorsqu'elles sont issues d'une boucle causale C1T4, d'autres boucles causales C1-2 peuvent exister dans un bond graph. Par souci de clarté dans notre présentation, nous avons également choisi de présenter cette étude en annexe B8c.

Les résultats obtenus dans cette annexe montrent que toutes les boucles causales C1-2 peuvent donc être considérées par $\delta_{1-2}(s)$ qui peut donc s'écrire:

$$\delta_{1-2}(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon \left(\frac{m}{2} \right)} \sum_{r=0}^{m-2c-1} \sum_J \det_{[i_1;o_1][i_2;o_2] \dots [i_c;o_c]J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\varphi [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right\} \quad (2.46.)$$

avec

- $\varphi = n^* + \theta' + \gamma$
- $\text{Card}\bar{J}$ le type des boucles causales de C1-2 concernées.
- $0 \leq \text{Card}J < m - 2c$
- $J = \{j_1; j_2; \dots; j_r\} \quad \forall j_i \in J \text{ et } \forall q, j_i \neq i_q; j_i \neq o_q; i_q \neq o_q$
- $\forall q, q' \quad i_q \neq i_{q'}; o_q \neq o_{q'}; i_q \neq o_{q'}$
- $b_{\text{Card}\bar{J}}$ le nombre de c-plets $[i_1; o_1] \dots [i_c; o_c]$ permettant de traiter toutes les boucles

causales C1-2Tt avec $t = \text{Card}\bar{J}$.

4.1.4. Conclusion

Le résultat précédent possède une composition similaire à celle du résultat (2.37.) qui peut encore s'écrire:

$$\delta_1(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon \binom{m}{2}} \sum_{r=m-2c}^{m-2c} \sum_J \det_{[i_1; o_1] \dots [i_c; o_c]} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^{\theta} [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right\}$$

avec

- $\text{Card}\bar{J} = 2c$
- $J = \{j_1; j_2; \dots; j_{m-2c}\}$
- $\theta = n_L + c$

Le résultat précédent et le résultat (2.46.) peuvent donc être rassemblés:

$$\delta_1(s) + \delta_{1-2}(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon \binom{m}{2}} \sum_{r=0}^{m-2c} \sum_J \det_{[i_1; o_1] \dots [i_c; o_c]} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^E [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right\} \quad (2.47.)$$

avec

- $0 \leq \text{Card}J \leq m - 2c ; 2c \leq \text{Card}\bar{J} \leq m$
- $\delta_3(s) = \delta_1(s)$ si $\text{Card}J = 2c$ et $\delta_3(s) = \delta_{1-2}(s)$ sinon.
- $E = \theta$ si $\text{Card}\bar{J} = 2c$ et $E = \varphi$ sinon.
- $b_{\text{Card}\bar{J}}$ le nombre de c-plets $[i_1; o_1] \dots [i_c; o_c]$ permettant de traiter toutes les boucles

causales C1Tt avec $t = \text{Card}\bar{J}$ si $\text{Card}J = 2c$ ou C1-2Tt sinon.

Nous posons $\det_{[i_1; o_1] \dots [i_c; o_c]} M = \det_J M$ pour $c=0$. L'expression (2.21.) peut être réécrite.:



$$\delta_2(s) = \sum_{c=0}^0 \sum_{r=0}^{m-2c} \sum_J \det_{[i_1:o_1][i_2:o_2] \dots [i_c:o_c]_J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^{n_h} [B_h^J] [\Delta_h(s)] \right\} \quad (2.48.)$$

En regroupant les expressions (2.47.) et (2.48.), l'expression du terme $\Delta(s)$ de l'expression (2.26.) sera complètement connu :

Proposition 2.9. :

Le dénominateur $\Delta(s)$ d'un système physique modélisé par bond graph comportant un seul MP à branches connectées s'exprime par la relation suivante:

$$\Delta(s) = \sum_{c=0}^{\varepsilon \left(\frac{m}{2} \right)} \sum_{r=0}^{m-2c} \left\{ \sum_J \det_{[i_1:o_1][i_2:o_2] \dots [i_c:o_c]_J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^E [B_h^J] [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \quad (2.49.)$$

avec

- $E = n_h^*$ si $c=0$, $E = \theta$ si $c \neq 0$ et $\text{Card } J = m-2c$, $E = \varphi$ si $c \neq 0$ et $0 \leq \text{Card } J < 2c$.

4.2. Détermination des numérateurs de la matrice de transfert

4.2.1. Transmittance C0

L'étude des bond graphs comportant un MP à branches connectées n'implique aucune conséquence sur la détermination d'une transmittance C0 car dans ce cas, tout chemin causal est disjoint du MP. L'expression (2.22.) conserve donc sa validité mais $\Delta_k(s)$ doit désormais être déterminé à l'aide de l'expression (2.49.)

4.2.2. Transmittance C2

L'étude des bond graphs ne comportant qu'un seul MP à branches indépendantes a montré que tout chemin causal impliquant le MP et reliant une source et un détecteur tous deux situés dans une même branche était un chemin causal C2Tt ($1 \leq t \leq m$). Concernant ce genre de chemin causal:

- lorsque $\text{Card } \bar{J} \geq 2$, nous avons souligné qu'il existait toujours autant de traversées du MP (au nombre de n_r) que de liens parcourus ($\text{Card } \bar{J}$). Nous pouvions donc écrire $(-1)^{(\text{Card } \bar{J} + 1)} = (-1)^{(n_r + 1)}$. Nous avons également souligné que toute contribution du MP dans le gain de ce genre de chemin causal était cyclique (voir annexe B3). Aucun terme diagonal de la matrice M_r issue de la matrice M par suppression des couples [ligne j_i ; colonne j_i] ($j_i \in J$) n'intervient dans cette contribution.

• lorsque $\text{Card}\bar{J}=1$, le MP n'est pas traversé mais simplement touché ($n_T=0$). Nous pouvons donc écrire dans ce cas $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)} = (-1)^{(n_T)}$. La contribution du MP dans le gain de ce genre de chemin causal est un terme diagonal de la matrice M_r . Tout comme pour les boucles causales, ce genre de chemin causal possède un gain appelé gain à coefficient diagonal.

Concernant l'étude des bond graphs à branches connectées, ces remarques doivent être complétées. Considérons la figure (2.24.):

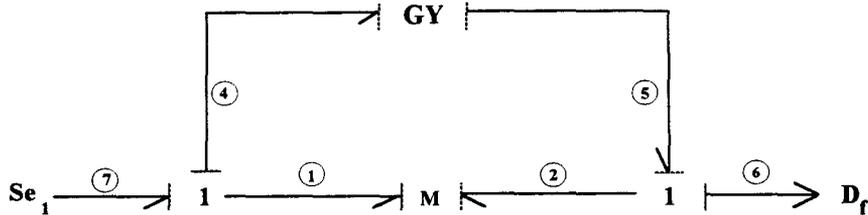


figure 2.24.

Deux chemins causaux reliant la source au détecteur existent:

• Le premier est un chemin causal C2T2 à coefficients diagonaux (7-1-1-4-5-2-2-6). Le gain de ce chemin est noté T_{11-22} . Nous pouvons écrire $T_{11-22} = T_{\{11\}\{22\}} T_1^{\{1;2\}} = m_{11} m_{22} T_1^{\{1;2\}}$ ($T_1^{\{1;2\}} = r$).

• Le second est un chemin causal C1T2 (7-1-2-6) dont le gain est noté T_{12} ($T_{12} = T_{\{12\}} T_2^{\{1;2\}} = m_{21} T_2^{\{1;2\}}$ et $T_2^{\{1;2\}} = 1$). Ce chemin est disjoint de la boucle causale C1T2 dont le gain est noté B_{21} (2-1-4-5) ($B_{21} = B_{\{21\}} B^{\{1;2\}} = m_{12} B^{\{1;2\}}$ et $B^{\{1;2\}} = r$).

Concernant ces deux chemins causaux, l'expression (2.22.) implique:

$$N(s) = T_{11-22} + T_{12} [1 - B_{21}] = m_{11} m_{22} T_1^{\{1;2\}} + m_{21} T_2^{\{1;2\}} [1 - m_{12} B^{\{1;2\}}]$$

Or $T_1^{\{1;2\}} = T_2^{\{1;2\}} B^{\{1;2\}}$. Nous obtenons donc:

$$N(s) = (m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}) T_1^{\{1;2\}} + m_{21} T_2^{\{1;2\}}$$

qui peut encore être écrit:

$$N(s) = \det_J M. T_1^{\{1;2\}} + m_{21} T_2^{\{1;2\}} \text{ avec ici } J = \{ \} \text{ car } \bar{J} = \{1;2\}$$

Nous n'étudierons ici que le terme $\det_J M. T_1^{\{1;2\}}$. Le second terme représente un chemin causal C1T2 et sera étudié ultérieurement.

Contrairement aux bond graphs ne comportant qu'un seul MP à branches non connectées, le terme $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ ne fournit pas ici le signe affecté par $\det_J M$ au terme représentant la contribution du MP, dans le gain du chemin causal C2 à coefficients diagonaux parcourant les $\text{Card}\bar{J}$ liens dont les indices figurent dans \bar{J} . En effet, la contribution du MP dans le gain du chemin causal C2T2 vaut $m_{11}m_{22}$. Cette contribution est composée de tous les termes diagonaux de M_r (Ici, $M_r = M$ car $J = \{\}$) et $\det_J M = \det M_r$ affecte donc un signe positif à ce terme. Afin de conserver l'expression (2.24.), le critère permettant de déterminer la valeur de β doit donc être réexaminé.

Chaque fois que le MP est touché, il engendre un terme diagonal de M_r dans le gain du chemin causal considéré. Soit i , l'indice d'un des liens par lequel le MP est touché. Le terme m_{ii} intervient donc dans le gain du chemin causal considéré. Or, quelle que soit la ligne ou la colonne suivant laquelle est développé le déterminant de M_r (la ligne i par exemple), nous obtenons:

$$\det M_r = (-1)^{(i+1)} m_{i1} \det M_{r-1}^1 + (-1)^{(i+2)} m_{i2} \det M_{r-1}^2 + \dots +$$

$$(-1)^{(i+i-1)} m_{i,i-1} \det M_{r-1}^{i-1} + \underbrace{(-1)^{(i+i)} m_{ii} \det M_{r-1}^i}_{A} + \dots$$

avec:

- M_{r-1}^1 la matrice issue de la matrice M_r privée de sa ligne i et de sa colonne 1.
- M_{r-1}^2 la matrice issue de la matrice M_r privée de sa ligne i et de sa colonne 2
- M_{r-1}^i la matrice issue de la matrice M_r privée de sa ligne i et de sa colonne i

Le terme A peut encore s'écrire: $A = +m_{ii} \det M_{r-1}^i$

Un signe positif précède donc le terme m_{ii} . Si le chemin causal considéré est un chemin causal C2T1 alors la matrice M_{r-1}^i est un scalaire et vaut 1. Cette situation a été étudiée lors de la démonstration de l'expression (2.24.) (voir annexe B2). Dans ce cas, nous avons vu que les termes $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ et $(-1)^{(n_r)}$ pouvaient être confondus ($n_r=0$). Si le chemin causal considéré s'avère être un chemin causal C2Tt ($2 \leq t \leq m$) à coefficients diagonaux alors, nous pouvons prouver identiquement que le terme A s'écrira:

$$A = +m_{i_1 i_1} m_{i_2 i_2} m_{i_3 i_3} \dots m_{i_t i_t} \det M_{r-1}^i$$

Quel que soit le type t du chemin causal, le terme $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ ne permettra pas de conserver le signe positif ($t=\text{Card}\bar{J}$). Par contre, le chemin causal étant un chemin causal à coefficients diagonaux, il ne traverse donc jamais le MP d'où $n_T=0$. Le terme $(-1)^{n_T}$ sera donc à présent préféré au terme $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$.

Nous écrivons donc finalement:

$$N(s) = \det_J M \left\{ (-1)^{n_T} \left[T_1^{\{1,2\}} \right] \left[I \right] \right\} + \dots \tag{2.50.}$$

avec:

- $J = \{ \}$, $n_T = 0$ et $T_1^{\{1,2\}} = r$

Remarque: Nous constatons que tout numérateur d'une transmittance n'implique plus exclusivement des chemins causaux appartenant à une même classe. $N(s)$ se composera finalement ici d'un terme correspondant à un chemin causal C2 explicité ci-dessus et d'un second terme correspondant au chemin causal C1T2 évoqué ci-avant..

Nous avons donc jusqu'à présent rencontré deux catégories de chemins causaux C2. Les premiers étaient caractérisés par des contributions de MP cycliques tandis que les seconds étaient des chemins causaux à coefficients diagonaux. Une dernière catégorie de chemin causal C2 existe. La contribution du MP dans le gain d'un chemin causal appartenant à cette catégorie réunit les caractéristiques des deux précédentes catégories. Cette contribution regroupe donc des termes diagonaux et d'autres termes composant une contribution cyclique.

Considérons à ce sujet, la figure (2.25.):

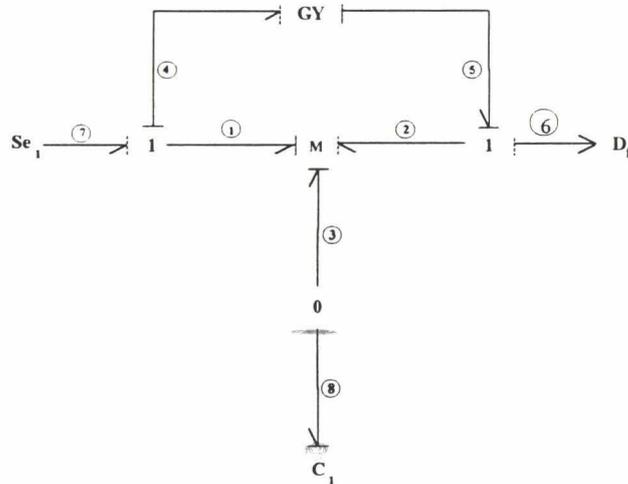


figure 2.25.

Trois nouveaux chemins causaux apparaissent par rapport à la figure 2.24.. Ceux-ci sont:

- Le chemin causal C2T3 de gain T_{131-22} (7-1-3-8-8-3-1-4-5-2-2-6)

$$T_{131-22} = T_{\{131\}\{22\}} T_1^{\{1;2;3\}} = m_{31} m_{13} m_{22} T_1^{\{1;2;3\}} = m_{31} m_{13} m_{22} \left[(-1)^{(1+0)} \left[\frac{r}{C_1 s} \right] \right]$$

- Le chemin causal C2T3 de gain T_{11-232} (7-1-1-4-5-2-3-8-8-3-2-6)

$$T_{11-232} = T_{\{11\}\{232\}} T_2^{\{1;2;3\}} = m_{11} m_{32} m_{23} T_2^{\{1;2;3\}} = m_{11} m_{32} m_{23} \left[(-1)^{(1+0)} \left[\frac{r}{C_1 s} \right] \right]$$

- Le chemin causal C1-2T3 de gain T_{132} (7-1-3-8-8-3-2-6)

$$T_{132} = T_{\{132\}} T_3^{\{1;2;3\}} = m_{31} m_{23} T_3^{\{1;2;3\}} = m_{31} m_{23} \left[(-1)^{(1+0)} \left[\frac{1}{C_1 s} \right] \right]$$

Ce chemin est disjoint de la boucle causale C1T2 de gain B_{21} (2-1-5-6)

Les 2 premiers chemins causaux sont à classer dans la troisième catégorie des chemins causaux C2. La contribution du MP dans leur gain comporte un terme diagonal de la matrice M et une contribution cyclique.

Pour ce genre de chemin causal C2, tout comme pour les chemins causaux C2 à contribution cyclique uniquement, le MP est traversé.

Comme nous l'avons vu, seules ces différentes traversées font apparaître dans les gains des chemins causaux en question, des contributions du MP susceptibles d'être précédée d'un signe négatif dans le calcul de $\det_j M$. Pour cette dernière catégorie de chemin causal C2, nous aurons donc $\beta = n_T + 1$ également (démonstration en annexe B 15).

Quelle que soit la catégorie de chemin causal C2 (à coefficients diagonaux, à contribution cyclique ou regroupant ces 2 caractéristiques), nous aurons donc $\beta = n_T$ si $n_T = 0$ ou $\beta = n_T + 1$ sinon ($n_T \neq 0$).

Concernant la figure 2.29., il vient entre autre:

$$\begin{aligned} N(s) = \det_{\{3\}} M &= \left\{ (-1)^{(0)} \left[T_1^{\{1;2\}} \right] \left[1 \right] \right\} (n_T = 0) \\ &+ \det_{\{ \}} M = \left\{ (-1)^{(2+1)} \left[T_1^{\{1;2;3\}} \right] \left[1 \right] \right\} (n_T = 2) \end{aligned} \quad (2.51.)$$

Remarque: Concernant les 2 chemins causaux C2T3 nous pouvons écrire:

$$T_1^{\{1,2,3\}} = T_2^{\{1,2,3\}}$$

T_{131-22} et T_{11-232} ne diffère que que par leur contribution du MP ($m_{31}m_{13}m_{22}$ pour T_{131-22} et $m_{11}m_{32}m_{23}$ pour T_{11-232}).

Or $\det_{\{ \}} M = \det M$ fait apparaître ces 2 termes. Nous avons en effet:

$$\det M = \dots - m_{11}m_{32}m_{23} + \dots - m_{13}m_{31}m_{22} + \dots$$

Le deuxième terme de l'expression (2.51.) englobe donc ces 2 chemins causaux.

Le chemin causal C1-2T3 de gain noté T_{132} est disjoint de la boucle causale de gain B_{21} ($B_{21} = m_{12}B_{21}^* = m_{12}r$). La règle de Mason implique donc:

$$\dots + T_{132}(1 - B_{21}) = \dots + T_{132} - T_{132}B_{21} + \dots$$

Le terme T_{132} de l'expression précédente étant le gain d'un chemin causal de C1-2, il sera traité ultérieurement.

Par contre, nous avons:

$$-T_{132}B_{21} = -m_{31}m_{23}m_{12}(T_3^{\{1,2,3\}}B_{21}^*) \text{ et } T_3^{\{1,2,3\}}B_{21}^* = T_1^{\{1,2,3\}}$$

Ce terme entre donc dans la composition de $N_2(s)$.

L'écriture de $N(s)$ de l'expression (2.50.) est incomplète car d'autres chemins causaux C1 et C1-2 existent entre e_7 et f_6 .

Lorsque certains chemins causaux liant deux variables telles que e_7 et f_6 sont C2 alors le numérateur $N(s)$ de cette transmittance se compose d'une partie notée $N_2(s)$ tenant compte de ces chemins causaux et celle-ci pourra être écrite à l'aide de l'expression suivante:

$$N_2(s) = \sum_{r=0}^m \left\{ \sum_J \det_J M. \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\beta [T_h^J] [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \quad (2.52.)$$

avec $\beta = n_T$ si $n_T = 0$ ou $\beta = n_T + 1$ sinon ($n_T \neq 0$).

4.2.3. Transmittance C1

L'étude des numérateurs de transmittance C1 est très similaire à l'étude du dénominateur $\delta_1(s)$ issu des boucle causales C1 et composant le dénominateur $\Delta(s)$ de cette transmittance. En effet, le terme $\det_{[i_1:o_1][i_2:o_2] \dots [i_r:o_r]} M$ (Card $J=m-2c$) se composant de la contribution du MP dans le gain $B_{i_1o_1-i_2o_2 \dots -i_r o_r}$ d'une boucle causale C1T(2c) se composera

• lorsque $\text{Card}\bar{J}=1$, le MP n'est pas traversé mais simplement touché ($n_T=0$). Nous pouvons donc écrire dans ce cas $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)} = (-1)^{(n_T)}$. La contribution du MP dans le gain de ce genre de chemin causal est un terme diagonal de la matrice M_r . Tout comme pour les boucles causales, ce genre de chemin causal possède un gain appelé gain à coefficient diagonal.

Concernant l'étude des bond graphs à branches connectées, ces remarques doivent être complétées. Considérons la figure (2.24.):

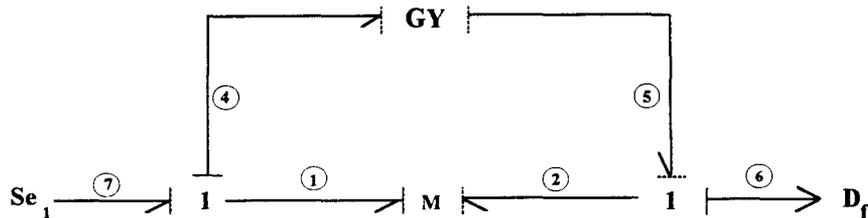


figure 2.24.

Deux chemins causaux reliant la source au détecteur existent:

• Le premier est un chemin causal C2T2 à coefficients diagonaux (7-1-1-4-5-2-2-6). Le gain de ce chemin est noté T_{11-22} . Nous pouvons écrire $T_{11-22} = T_{\{11\}\{22\}} T_1^{\{1;2\}} = m_{11} m_{22} T_1^{\{1;2\}}$ ($T_1^{\{1;2\}} = r$).

• Le second est un chemin causal C1T2 (7-1-2-6) dont le gain est noté T_{12} ($T_{12} = T_{\{12\}} T_2^{\{1;2\}} = m_{21} T_2^{\{1;2\}}$ et $T_2^{\{1;2\}} = 1$). Ce chemin est disjoint de la boucle causale C1T2 dont le gain est noté B_{21} (2-1-4-5) ($B_{21} = B_{\{21\}} B^{\{1;2\}} = m_{12} B^{\{1;2\}}$ et $B^{\{1;2\}} = r$).

Concernant ces deux chemins causaux, l'expression (2.22.) implique:

$$N(s) = T_{11-22} + T_{12} [1 - B_{21}] = m_{11} m_{22} T_1^{\{1;2\}} + m_{21} T_2^{\{1;2\}} [1 - m_{12} B^{\{1;2\}}]$$

Or $T_1^{\{1;2\}} = T_2^{\{1;2\}} B^{\{1;2\}}$. Nous obtenons donc:

$$N(s) = (m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}) T_1^{\{1;2\}} + m_{21} T_2^{\{1;2\}}$$

qui peut encore être écrit:

$$N(s) = \det_J M. T_1^{\{1;2\}} + m_{21} T_2^{\{1;2\}} \text{ avec ici } J = \{ \} \text{ car } \bar{J} = \{1;2\}$$

Nous n'étudierons ici que le terme $\det_J M. T_1^{\{1;2\}}$. Le second terme représentent un chemin causal C1T2 et sera étudié ultérieurement.

Contrairement aux bond graphs ne comportant qu'un seul MP à branches non connectées, le terme $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ ne fournit pas ici le signe affecté par $\det J_M$ au terme représentant la contribution du MP, dans le gain du chemin causal C2 à coefficients diagonaux parcourant les $\text{Card}\bar{J}$ liens dont les indices figurent dans \bar{J} . En effet, la contribution du MP dans le gain du chemin causal C2T2 vaut $m_{11}m_{22}$. Cette contribution est composée de tous les termes diagonaux de M_r (Ici, $M_r = M$ car $J = \{\}$) et $\det J_M = \det M_r$ affecte donc un signe positif à ce terme. Afin de conserver l'expression (2.24.), le critère permettant de déterminer la valeur de β doit donc être réexaminé.

Chaque fois que le MP est touché, il engendre un terme diagonal de M_r dans le gain du chemin causal considéré. Soit i , l'indice d'un des liens par lequel le MP est touché. Le terme m_{ii} intervient donc dans le gain du chemin causal considéré. Or, quelle que soit la ligne ou la colonne suivant laquelle est développé le déterminant de M_r (la ligne i par exemple), nous obtenons:

$$\det M_r = (-1)^{(i+1)} m_{i1} \det M_{r-1}^1 + (-1)^{(i+2)} m_{i2} \det M_{r-1}^2 + \dots +$$

$$(-1)^{(i+i-1)} m_{i,i-1} \det M_{r-1}^{i-1} + \underbrace{(-1)^{(i+i)} m_{ii} \det M_{r-1}^i}_{A} + \dots$$

avec:

- M_{r-1}^1 la matrice issue de la matrice M_r privée de sa ligne i et de sa colonne 1.
- M_{r-1}^2 la matrice issue de la matrice M_r privée de sa ligne i et de sa colonne 2
- M_{r-1}^i la matrice issue de la matrice M_r privée de sa ligne i et de sa colonne i

Le terme A peut encore s'écrire: $A = +m_{ii} \det M_{r-1}^i$

Un signe positif précède donc le terme m_{ii} . Si le chemin causal considéré est un chemin causal C2T1 alors la matrice M_{r-1}^1 est un scalaire et vaut 1. Cette situation a été étudiée lors de la démonstration de l'expression (2.24.) (voir annexe B2). Dans ce cas, nous avons vu que les termes $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ et $(-1)^{(n_r)}$ pouvaient être confondus ($n_r=0$). Si le chemin causal considéré s'avère être un chemin causal C2Tt ($2 \leq t \leq m$) à coefficients diagonaux alors, nous pouvons prouver identiquement que le terme A s'écrira:

$$A = +m_{i_1 i_1} m_{i_2 i_2} m_{i_3 i_3} \dots m_{i_r i_r} \det M_{r-1}^i$$

Quel que soit le type t du chemin causal, le terme $(-1)^{(\text{Card}\bar{J})}$ ne permettra pas de conserver le signe positif ($t=\text{Card}\bar{J}$). Par contre, le chemin causal étant un chemin causal à coefficients diagonaux, il ne traverse donc jamais le MP d'où $n_T=0$. Le terme $(-1)^{(n_T)}$ sera donc à présent préféré au terme $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$.

Nous écrirons donc finalement:

$$N(s) = \det_J M \left\{ (-1)^{(n_T)} [T_1^{(1;2)}] [1] \right\} + \dots \tag{2.50.}$$

avec:

- $J = \{ \}$, $n_T = 0$ et $T_1^{(1;2)} = r$

Remarque: Nous constatons que tout numérateur d'une transmittance n'implique plus exclusivement des chemins causaux appartenant à une même classe. $N(s)$ se composera finalement ici d'un terme correspondant à un chemin causal C2 explicité ci-dessus et d'un second terme correspondant au chemin causal C1T2 évoqué ci-avant..

Nous avons donc jusqu'à présent rencontré deux catégories de chemins causaux C2. Les premiers étaient caractérisés par des contributions de MP cycliques tandis que les seconds étaient des chemins causaux à coefficients diagonaux. Une dernière catégorie de chemin causal C2 existe. La contribution du MP dans le gain d'un chemin causal appartenant à cette catégorie réunit les caractéristiques des deux précédentes catégories. Cette contribution regroupe donc des termes diagonaux et d'autres termes composant une contribution cyclique.

Considérons à ce sujet, la figure (2.25.):

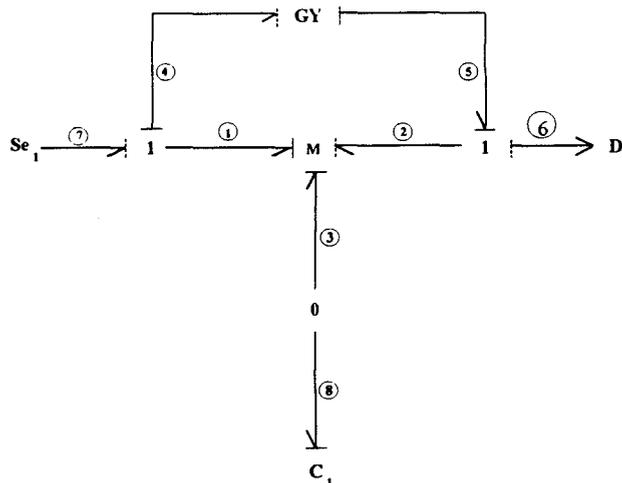


figure 2.25.

Trois nouveaux chemins causaux apparaissent par rapport à la figure 2.24.. Ceux-ci sont:

- Le chemin causal C2T3 de gain T_{131-22} (7-1-3-8-8-3-1-4-5-2-2-6)

$$T_{131-22} = T_{\{131\}\{22\}} T_1^{\{1;2;3\}} = m_{31} m_{13} m_{22} T_1^{\{1;2;3\}} = m_{31} m_{13} m_{22} \left[(-1)^{(1+0)} \left[\frac{r}{C_1 s} \right] \right]$$

- Le chemin causal C2T3 de gain T_{11-232} (7-1-1-4-5-2-3-8-8-3-2-6)

$$T_{11-232} = T_{\{11\}\{232\}} T_2^{\{1;2;3\}} = m_{11} m_{32} m_{23} T_2^{\{1;2;3\}} = m_{11} m_{32} m_{23} \left[(-1)^{(1+0)} \left[\frac{r}{C_1 s} \right] \right]$$

- Le chemin causal C1-2T3 de gain T_{132} (7-1-3-8-8-3-2-6)

$$T_{132} = T_{\{132\}} T_3^{\{1;2;3\}} = m_{31} m_{23} T_3^{\{1;2;3\}} = m_{31} m_{23} \left[(-1)^{(1+0)} \left[\frac{1}{C_1 s} \right] \right]$$

Ce chemin est disjoint de la boucle causale C1T2 de gain B_{21} (2-1-5-6)

Les 2 premiers chemins causaux sont à classer dans la troisième catégorie des chemins causaux C2. La contribution du MP dans leur gain comporte un terme diagonal de la matrice M et une contribution cyclique.

Pour ce genre de chemin causal C2, tout comme pour les chemins causaux C2 à contribution cyclique uniquement, le MP est traversé.

Comme nous l'avons vu, seules ces différentes traversées font apparaître dans les gains des chemins causaux en question, des contributions du MP susceptibles d'être précédée d'un signe négatif dans le calcul de $\det_s M$. Pour cette dernière catégorie de chemin causal C2, nous aurons donc $\beta = n_T + 1$ également (démonstration en annexe B 15).

Quelle que soit la catégorie de chemin causal C2 (à coefficients diagonaux, à contribution cyclique ou regroupant ces 2 caractéristiques), nous aurons donc $\beta = n_T$ si $n_T = 0$ ou $\beta = n_T + 1$ sinon ($n_T \neq 0$).

Concernant la figure 2.29., il vient entre autre:

$$N(s) = \det_{\{3\}} M = \left\{ (-1)^{(0)} \left[T_1^{\{1;2\}} \right] \left[1 \right] \right\} (n_T = 0) \tag{2.51.}$$

$$+ \det_{\{ \}} M = \left\{ (-1)^{(2+1)} \left[T_1^{\{1;2;3\}} \right] \left[1 \right] \right\} (n_T = 2)$$

Remarque: Concernant les 2 chemins causaux C2T3 nous pouvons écrire:

$$T_1^{\{1,2,3\}} = T_2^{\{1,2,3\}}$$

T_{131-22} et T_{11-232} ne diffère que que par leur contribution du MP ($m_{31}m_{13}m_{22}$ pour T_{131-22} et $m_{11}m_{32}m_{23}$ pour T_{11-232}).

Or $\det_{\{ \}} M = \det M$ fait apparaître ces 2 termes. Nous avons en effet:

$$\det M = \dots - m_{11}m_{32}m_{23} + \dots - m_{13}m_{31}m_{22} + \dots$$

Le deuxième terme de l'expression (2.51.) englobe donc ces 2 chemins causaux.

Le chemin causal C1-2T3 de gain noté T_{132} est disjoint de la boucle causale de gain B_{21} ($B_{21} = m_{12}B_{21}^* = m_{12}r$). La règle de Mason implique donc:

$$\dots + T_{132}(1 - B_{21}) = \dots + T_{132} - T_{132}B_{21} + \dots$$

Le terme T_{132} de l'expression précédente étant le gain d'un chemin causal de C1-2, il sera traité ultérieurement.

Par contre, nous avons:

$$-T_{132}B_{21} = -m_{31}m_{23}m_{12}(T_3^{\{1,2,3\}}B_{21}^*) \text{ et } T_3^{\{1,2,3\}}B_{21}^* = T_1^{\{1,2,3\}}$$

Ce terme entre donc dans la composition de $N_2(s)$.

L'écriture de $N(s)$ de l'expression (2.50.) est incomplète car d'autres chemins causaux C1 et C1-2 existent entre e_7 et f_6 .

Lorsque certains chemins causaux lient deux variables telles que e_7 et f_6 sont C2 alors le numérateur $N(s)$ de cette transmittance se compose d'une partie notée $N_2(s)$ tenant compte de ces chemins causaux et celle-ci pourra être écrite à l'aide de l'expression suivante:

$$N_2(s) = \sum_{r=0}^m \left\{ \sum_J \det_J M \cdot \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\beta [T_h^J] [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \quad (2.52.)$$

avec $\beta = n_T$ si $n_T = 0$ ou $\beta = n_T + 1$ sinon ($n_T \neq 0$).

4.2.3. Transmittance C1

L'étude des numérateurs de transmittance C1 est très similaire à l'étude du dénominateur $\delta_1(s)$ issu des boucle causales C1 et composant le dénominateur $\Delta(s)$ de cette transmittance. En effet, le terme $\det_{[i_1, o_1][i_2, o_2] \dots [i_c, o_c]} M$ (Card $J=m-2c$) se composant de la contribution du MP dans le gain $B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - \dots - i_c o_c}$ d'une boucle causale C1T(2c) se composera

également de celle du chemin causal C1T(2c) dont le gain sera noté $T_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - \dots - i_c o_c}$. Nous avons

effectivement:

$$T_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - \dots - i_c o_c} = m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} \dots m_{o_c i_c} T^{(i_1, i_2, i_3, \dots, i_c; o_1, o_2, o_3, \dots, o_c)}$$

$$\text{et } \det_{[i_1, o_1][i_2, o_2] \dots [i_c, o_c]} M = \dots + (-1)^E m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} \dots m_{o_c i_c} + \dots$$

Or suivant les valeurs de $i_1, i_2, \dots, i_c, o_1, o_2, \dots,$ et o_c , le signe affecté par $\det_{[i_1, o_1][i_2, o_2] \dots [i_c, o_c]} M$ au terme $m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} \dots m_{o_c i_c}$ diffère.

Nous avons vu précédemment dans l'étude de $\delta_1(s)$ que le critère $\theta' = n_L + c - 1$ donnait la parité convenable de E.

Lorsque certains chemins causaux liant deux variables sont C1 alors le numérateur N(s) de cette transmittance se compose d'une partie $N_1(s)$ tenant compte de ces chemins causaux. Ce terme $N_1(s)$ pourra être déterminé à l'aide de l'expression suivante:

$$N_1(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)} \left\{ \sum_J \det_{[i_1, o_1][i_2, o_2] \dots [i_c, o_c]} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^{\theta'} [T_h^J] [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \quad (2.53.)$$

avec:

- Card J=m-2c
- $\forall k, k'; i_k \neq i_{k'}; o_k \neq o_{k'}; i_k \neq o_{k'}; i_{k'} \neq o_k$.
- $\forall j_k \in J; \forall k' j_k \neq i_{k'}; j_k \neq o_{k'}$.
- $\theta' = n_L + c - 1$

Concernant la figure 2.25., l'expression (2.52.) n'explicitant que le terme $N_2(s)$ de N(s) doit être complétée du terme $N_1(s)$. Nous pouvons écrire:

$$N(s) = N_2(s) + N_1(s) + \dots \quad (2.54.)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } N_2(s) = & \det_{\{3\}} M \left\{ (-1)^{(0)} [T_1^{\{1,2\}}] [1] \right\} \quad (n_T = 0) \\ & + \det_{\{ \}} M \left\{ (-1)^{(2+1)} [T_1^{\{1,2;3\}}] [1] \right\} \quad (n_T = 2) \end{aligned} \quad (2.55.)$$

$$\text{et } N_1(s) = + \det_{[1,2]\{3\}} M \left\{ (-1)^{(\theta')} [T_2^{\{1,2\}}] [1] \right\}$$

avec concernant $N_1(s)$:

- $c=1$, $n_L = 0$ et $\theta' = n_L + c - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$
- $T_2^{\{1,2\}} = 1$ (7-1-2-6)
- $T_{12} = T_{\{12\}} T_2^{\{1,2\}} = m_{21} T_2^{\{1,2\}} = \det_{[1,2]\{3\}} M \cdot T_2^{\{1,2\}}$

4.2.4. Transmittance C1-2

Lorsque $0 \leq \text{Card}J < m - 2c$, des chemins causaux C1-2 peuvent exister entre la source et le détecteur. Tout comme pour les chemins causaux C2, il existe plusieurs catégories de chemins causaux C1-2 que l'on détermine en fonction de la contribution du MP dans leur gain.

- La première catégorie rassemble des chemins causaux C1-2 dont la contribution du MP dans le gain est semi-cyclique.

Le chemin causal de la figure 2.25. dont le gain est noté T_{132} est un chemin causal C1-2T3 à contribution semi-cyclique. En effet, la contribution du MP dans ce gain vaut $m_{31} m_{23}$. Cette contribution est semi-cyclique car contrairement aux chemins causaux C2 à contribution cyclique vus précédemment, il n'est pas possible d'aboutir à un terme diagonal. Nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} & m_{31} m_{23} \\ &= \underbrace{m_{23} m_{31}} \\ &= m_{21} \end{aligned}$$

Lorsque plusieurs liens du MP sont parcourus (tel le lien indicé 3 de la figure 2.25.) entre le lien atteint à partir de la source et le dernier lien du MP parcourus avant le détecteur, tout gain de chemin causal comporte une contribution semi-cyclique du MP.

Tous ces chemins causaux C1-2 sont issus d'un chemin causal C1T2. Afin de connaître dans ce cas, le signe affecté par le terme $\det_{[i,o]J} M$ au terme représentant la contribution du MP dans le gain du chemin causal en question, le critère α convient car la situation est identique à celle rencontrée pour les chemins causaux C1-2 dans les bond graphs comportant un MP à branches non connectées.

Concernant la figure 2.25., le gain T_{132} du chemin causal C1-2T3 comporte une contribution semi-cyclique.

L'expression (2.54.) s'écrit donc finalement:

$$N(s) = N_2(s) + N_1(s) + N_{1-2}(s) \tag{2.56.}$$

$$\text{avec } N_{1-2}(s) = + \det_{[1,2]\{\}} M \left\{ (-1)^{(\alpha)} \left[T_2^{\{1,2,3\}} \right] [1] \right\} \tag{2.57.}$$

avec concernant $N_1(s)$:

- $\alpha = 1$ car $3 > \text{Max}(i; o)$ ($3 > \text{Max}(1; 2)$)

- $T_2^{\{1,2,3\}} = -\frac{1}{C_1 s}$

Remarque:

$$\det_{[1,2]\{\}} M = m_{21} m_{33} - m_{31} m_{23}$$

$$\begin{aligned} (-1)^{(\alpha)} \det_{[1,2]\{\}} M \cdot T_2^{\{1,2,3\}} &= -(m_{21} m_{33} - m_{31} m_{23}) T_2^{\{1,2,3\}} \\ &= T_{132} - m_{21} m_{33} T_2^{\{1,2,3\}} \\ &= T_{132} - m_{21} m_{33} T_2^{\{1,2\}} B_1^{\{3\}} \\ &= T_{132} - T_{12} B_{33} \end{aligned}$$

et $B_1^{\{3\}} = -\frac{1}{C_1 s}$ et $T_2^{\{1,2\}} = 1$

• La deuxième catégorie rassemble des chemins causaux C1-2 dont la contribution du MP dans leur gain comporte toujours une partie semi-cyclique mais également un ou plusieurs termes diagonaux de la matrice M. Les figures suivantes présentent cette situation:

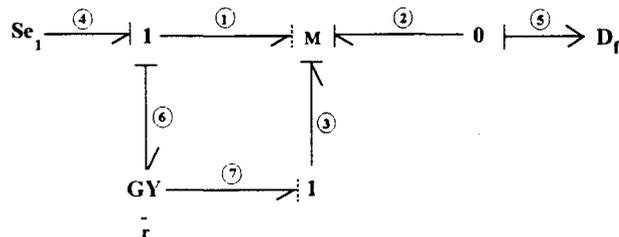


figure 2.26.

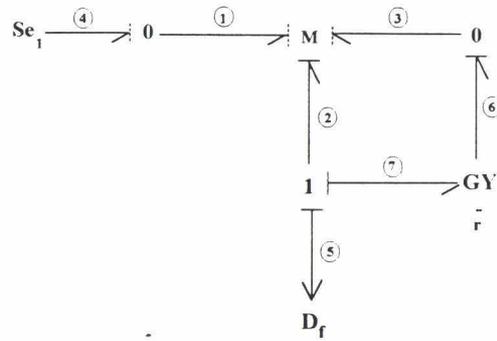


figure 2.27.

Concernant la figure 2.26.: le chemin causal C1-2T3 dont le gain noté T_{11-32} (4-1-1-6-7-3-2-5) comporte une contribution du MP égale à $m_{11}m_{23}$ et appartient à cette seconde catégorie de chemin causal C1-2. Le terme m_{23} représente la partie semi-cyclique. Le terme $\det_{[3,2]\{\}} M$ nous permettra de tenir compte de ce chemin.

Concernant la figure 2.27.: le chemin causal C1-2T3 dont le gain noté T_{13-22} (4-1-3-6-7-2-2-5) est similaire. La contribution du MP dans ce gain vaut $m_{31}m_{22}$. Le terme m_{31} représente la partie semi-cyclique. Le terme $\det_{[1,3]\{\}} M$ nous permettra de tenir compte de ce chemin.

Concernant cette seconde catégorie de chemin causal C1-2, le critère α ne peut plus être appliqué. Nous démontrons en annexe B.16. que le critère n_i peut le remplacer.

Pour la figure 2.26., il vient finalement:

$$N(s) = N_1(s) + N_{1-2}(s)$$

$$N_1(s) = \underbrace{+\det_{[1,2]\{3\}} M}_{m_{21}} = \left\{ (-1)^{(\theta')} [1][1] \right\} = m_{21} = T_{12} \quad (\theta' = 0)$$

$$N_{1-2}(s) = +\det_{[3,2]\{\}} M \left\{ (-1)^{(n_i)} [-r][1] \right\} \quad (n_i = 0)$$

$$= +(m_{11}m_{23} - m_{21}m_{13}) (-r)$$

$$= -r m_{11}m_{23} + r m_{21}m_{13}$$

$$N_{1-2}(s) = T_{11-32} - T_{12}B_{31}$$

$$\text{d'où: } N(s) = T_{11-32} + T_{12} [1 - B_{31}]$$

Pour la figure 2.27., il vient finalement:

$$N(s) = N_1(s) + N_{1-2}(s)$$

$$N_1(s) = \underbrace{+\det_{[1,2]\{3\}}}_{m_{21}} M = \left\{ (-1)^{(\theta')} [1][1] \right\} = m_{21} = T_{12} \quad (\theta' = 0)$$

$$N_{1-2}(s) = +\det_{[1,3]\{ \}} M \left\{ (-1)^{(n_i)} [-r][1] \right\} \quad (n_i = 1)$$

$$= (m_{21} m_{32} - m_{31} m_{22}) (-1) (-r)$$

$$= r \cdot m_{21} m_{32} - r \cdot m_{31} m_{22}$$

$$N_{1-2}(s) = -T_{12} B_{23} + T_{13-22}$$

$$\text{d'où: } N(s) = T_{13-22} + T_{12} [1 - B_{23}]$$

Lorsque $\dim M > 3$, des chemins causaux C1-2 appartenant à cette seconde catégorie mais dont la partie semi cyclique comporte plus d'un terme peuvent exister. La figure suivante présente cette situation:

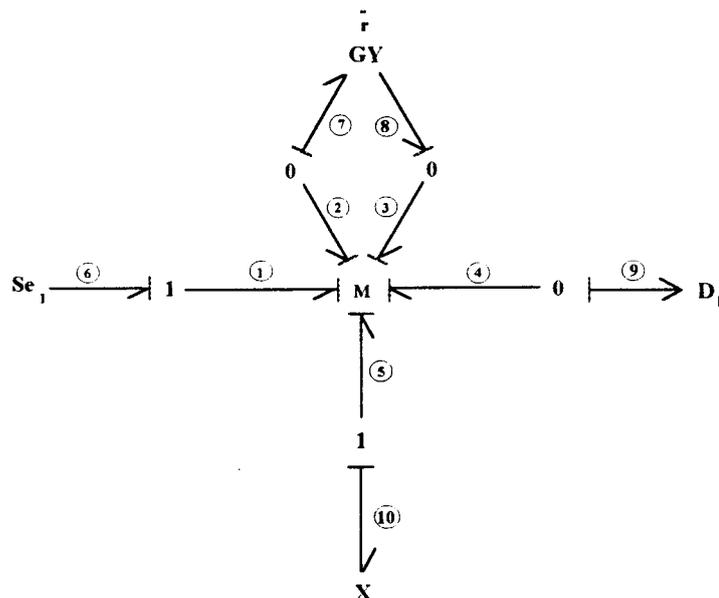


figure 2.28.

La contribution du MP dans le gain du chemin causal C1-2T5 (noté $T_{12-33-254}$ (6-1-2-7-8-3-3-8-7-2-5-10-10-5-4-9)) vaut $m_{21}m_{33}m_{52}m_{45}$ et se compose donc d'un terme diagonal de la matrice M ainsi que d'une partie semi-cyclique comportant 3 termes:

$$m_{21}m_{52}m_{45}$$

$$\underbrace{m_{52}m_{21}}m_{45}$$

$$m_{51}m_{45}$$

$$\underbrace{m_{45}m_{51}}$$

$$m_{41}$$

Le terme $\det_{[1,4]\{\}} M$ nous permettra de tenir compte de ce chemin causal.

Remarque: Toute composition semi-cyclique d'une contribution de MP dans le gain d'un chemin causal peut se réduire à un unique terme. Ainsi, comme nous venons de le montrer, partant des 3 termes $m_{21}m_{52}m_{45}$, nous aboutissons à l'unique terme m_{41} . Ce terme que nous notons plus généralement m_{oi} donne les deux indices i et o qui interviennent dans le terme $\det_{[i,o]J} M$ (Card $J < m-2$). Il s'agit donc ici de chemins causaux C1-2 issus de chemins causaux C1T2. Lorsque le chemin causal C1-2 considéré est issu d'un chemin causal C1T4, le terme $\det_{[i_1:o_1][i_2:o_2]J} M$ (Card $J < m-4$) permettra de considérer le chemin causal en question. Le gain de ce chemin causal se composera donc entre autres de 2 parties semi-cycliques. Ces deux parties pourront se réduire aux deux termes $m_{o_1i_1}$ et $m_{o_2i_2}$. Cette remarque reste valable pour tous les chemins causaux C1-2.

Les 2 critères (α et n_i) seront donc nécessaires ici. Le critère α n'était pas obligatoire pour les figures 2.26. et 2.27. car la contribution semi-cyclique du MP se résumait alors à un seul terme. Nous pouvions tout de même appliquer ce critère mais nous aurions obtenu $\alpha = 0$ d'où $\alpha + n_i = n_i$. Ce résultat s'applique aux figures 2.24. et 2.25. mais au sujet de n_i . En effet nous aurions pu appliquer les critères n_i et α mais dans ces situations, nous avons $n_i=0$ d'où $\alpha + n_i = \alpha$.

Pour tous les chemins causaux C1-2 issus de chemins causaux C1T2, les critères α et n_i sont donc requis afin de déterminer le signe affecté par le terme $\det_{[i,o]J} M$ (Card $J < m-2$) au terme représentant la contribution du MP dans le gain du chemin causal considéré.

Tout chemin causal C1-2 issu d'un chemin causal C1T2 pourra donc être écrit à l'aide de l'expression suivante:

$$N_{1-2}(s) = \sum_{r=0}^{m-2c-1} \left\{ \sum_J \det_{[i_1, o_1]_J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^E [T_h^{\bar{j}}] \cdot [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \quad (2.58.)$$

avec $E = \alpha + n_i$ et $0 \leq \text{Card } J < m-2c$

Lorsque le chemin causal C1-2 est issu d'un chemin causal C1 dont le type est au moins égal à 4, une étude complémentaire s'impose. Cette étude présentée en annexe B.17. montre que deux critères (θ' et $\bar{\alpha}$) supplémentaires sont nécessaires.

Ces critères sont également applicables pour des chemins causaux C1-2 issus de chemins causaux C1T2 ($\theta' = 0$ et $\bar{\alpha} = 0$ on a donc $\alpha + n_i + \theta' + \bar{\alpha} = \alpha + n_i$ dans ce cas).

Tout chemin causal C1-2 peut donc être écrit à l'aide de l'expression suivante:

$$N_{1-2}(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)} \left\{ \sum_{r=0}^{m-2c-1} \left\{ \sum_J \det_{[i_1, o_1][i_2, o_2] \dots [i_c, o_c]_J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^E [T_h^{\bar{j}}] \cdot [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \right\} \quad (2.59.)$$

avec $E = \alpha + n_i + \theta' + \bar{\alpha}$ et $0 \leq \text{Card } J < m-2c$

4.3. Conclusion

Dans un bond graph comportant un seul MP à branches connectées, le numérateur $N(s)$ d'une fonction de transfert peut regrouper, comme nous venons de le voir, plusieurs classes de chemins causaux. Tout comme pour le dénominateur de cette fonction de transfert, ce numérateur peut s'exprimer à l'aide d'une seule expression. En effet, l'expression (2.53.) peut être réécrite de la façon suivante:

$$N_1(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)} \left\{ \sum_{r=m-2c}^{m-2c} \left\{ \sum_J \det_{[i_1, o_1][i_2, o_2] \dots [i_c, o_c]_J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^{\theta'} [T_h^{\bar{j}}] \cdot [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \right\} \quad (2.60.)$$

Les expressions (2.59.) et (2.60.) peuvent être rassemblées. Nous obtenons:

$$N'(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)} \left\{ \sum_{r=0}^{m-2c} \left\{ \sum_J \det_{[i_1, o_1][i_2, o_2] \dots [i_c, o_c]_J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^E [T_h^{\bar{j}}] \cdot [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \right\} \quad (2.61.)$$

avec $E = \theta'$ si $r = \text{Card } J = m-2c$

avec $E = \alpha + n_i + \theta' + \bar{\alpha}$ et $0 \leq \text{Card } J < m-2c$

L'expression (2.52.) peut également être assemblée à cette dernière expression mais elle doit dans un premier temps être réécrite de la façon suivante:

$$N_2(s) = \sum_{c=0}^0 \left\{ \sum_{r=0}^{m-2c} \left\{ \sum_J \det_J M. \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^E [T_h^j] [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \right\} \quad (2.62.)$$

avec $E = \beta = n_T$ si $n_T = 0$ ou $E = \beta = n_T + 1$ sinon ($n_T \neq 0$).

Il est alors possible de regrouper toutes ces expressions.

Proposition 2.10. :

Le numérateur $N(s)$ d'un système physique modélisé par bond graph comportant un seul MP à branches connectées s'exprime par la relation suivante:

$$N(s) = \sum_{c=0}^{\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)} \left\{ \sum_{r=0}^{m-2c} \left\{ \sum_J \det_{[i_1, o_1][i_2, o_2] \dots [i_c, o_c] J} M. \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^E [T_h^j] [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \right\} \quad (2.63.)$$

avec:

- Pour $c=0$ et $\text{Card } J < m$, $E = \beta = n_T$ si $n_T = 0$ ou $E = \beta = n_T + 1$ sinon ($n_T \neq 0$).
- Pour $c \neq 0$ et $r = \text{Card } J = m - 2c$, $E = \theta'$
- Pour $c \neq 0$ et $0 \leq \text{Card } J < m - 2c$, $E = \alpha + n_i + \theta' + \bar{\alpha}$

Tout numérateur d'une fonction de transfert liant deux variables situées au sein d'un bond graph comportant un MP à branches connectées pourra donc être écrit à l'aide de cette expression.

Remarque : Pour $c=0$ et $\text{Card } J = m$, tous les liens du MP sont interdits. La composante $N_0(s)$ du numérateur $N(s)$ doit alors être calculée. Dans ce cas, on a:

$$\det_{[i_1, o_1][i_2, o_2] \dots [i_c, o_c] J} M = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^p (-1)^E [T_h^j] [\Delta_h(s)] = 0 \quad \text{d'où} \quad N(s) = N_0(s)$$

5. Etude des bond graphs comportant plusieurs MP

5.1. Définitions

Les définitions données au début de ce chapitre peuvent être généralisées au bond graph comportant plusieurs MP. La définition du type d'un chemin ou d'une boucle doit être ajustée. Il vient:

Définition 2.5.:

Un chemin causal (ou une boucle causale) de type $t_1-t_2-...-t_k$ est un chemin causal impliquant k MP. Pour le $i^{ème}$ MP, t_i liens sont parcourus par le chemin (ou la boucle).

La figure 2.29. montre un exemple de bond graph comportant trois MP. Le tableau 2.6. résume les différentes catégories de chemin causaux pouvant apparaître dans cette figure.

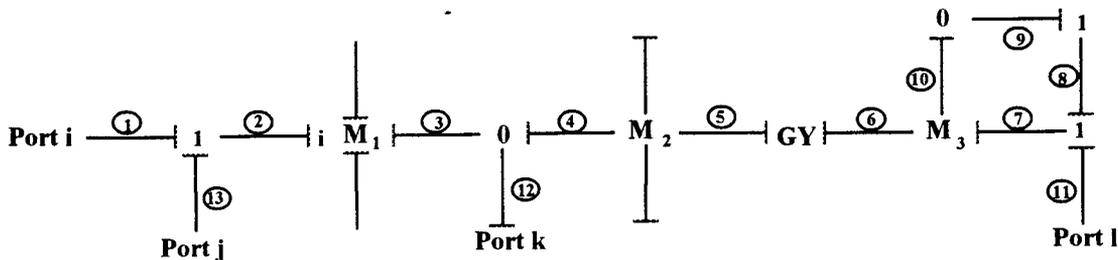


figure 2.29. : Bond graph comportant trois MP.

Classe Type	Éléments mis en jeu	Parcours causaux
C1 T2	M ₁	1-2-3
C1 T2-2	M ₁ et M ₂	1-2-3-4-5
C1 T2-2-2	M ₁ , M ₂ et M ₃	1-2-3-4-5-6-7-11
C1-2 T2-1	M ₁ et M ₂	1-2-3-4-4-12
C1-2 T2-2-3	M ₁ , M ₂ et M ₃	1-2-3-4-5-6-10-9-8-7-11

tableau 2.6.

Les différentes expressions des gains énoncées ci-avant peuvent être généralisées aux bond graphs comportant plusieurs MP. Concernant les chemins causaux, nous pouvons écrire:

Proposition 2.11. :

Le gain d'un chemin causal parcourant plusieurs MP s'exprime par la relation suivante:

$$T = (-1)^{(n_0+n_1)} \prod_{p_k=1}^{n_T^k} m_{i_s p_1, p_1} \cdot m_{i_s p_2, p_2} \dots m_{i_s p_k, p_k} \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right) \quad (2.64.)$$

avec $\prod_{p_k=1}^{n_k} m_{i_s^{p_1}; p_1} \cdot m_{i_s^{p_2}; p_2} \cdots m_{i_s^{p_k}; p_k}$ la contribution des différents MP parcourus par le chemin causal. (les différents termes m_{b_s, b_e}^k sont engendrés par chaque passage du chemin par le MP indicé k (MPk)).

Proposition 2.12. :

Le gain d'une boucle causale parcourant plusieurs MP s'exprime par la relation suivante:

$$B = (-1)^{(n_0+n_1)} \prod_{p_k=1}^{n_k} m_{i_s^{p_1}; p_1} \cdot m_{i_s^{p_2}; p_2} \cdots m_{i_s^{p_k}; p_k} \prod_g \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right)^2 \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right)^2 \quad (2.65.)$$

Les seules modification apportées aux définitions de début de chapitre portent sur les termes permettant de déterminer les contributions respectives (et donc la contribution totale) de chacun des MP. Logiquement, ce changement doit être répercuté dans l'étude menée précédemment concernant les bond graphs comportant un seul MP. Les principaux résultats obtenus précédemment peuvent donc être généralisés.

5.2. Détermination du dénominateur de la matrice de transfert

Proposition 2.13. :

Le dénominateur $\Delta(s)$ d'un système physique modélisé par bond graph comportant n MP s'exprime par la relation suivante:

$$\Delta(s) = \sum_{c_i=0}^{\varepsilon \left(\frac{\dim M_i}{2} \right)} \sum_{r_i=0}^{\dim M_i - 2c_i} \left\{ \sum_J \det_{[i_1; o_1][i_2; o_2] \dots [i_{c_i}; o_{c_i}]} J_1 M_1 \cdots \det_{[i_1; o_1][i_2; o_2] \dots [i_{c_n}; o_{c_n}]} J_n M_n \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^E [B_h^J][\Delta_h(s)] \right\} \right\} \quad (2.66.)$$

avec

- $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n$. Chaque E_i correspond à l'exposant E obtenu en fonction de la situation des boucles causales considérées par rapport au $i^{\text{ème}}$ MP. Chaque terme E_i s'obtient à l'aide des critères définis précédemment.

- $J_i = \{j_1; j_2; j_3; \dots; j_n\}$
- $\text{Card } J_i = \dim M_i - 2 * c_i$
- $1 \leq i \leq n$

5.3. Détermination des numérateurs de la matrice de transfert

Proposition 2.14. :

Le numérateur $N(s)$ d'un système physique modélisé par bond graph comportant plusieurs MP s'exprime par la relation suivante:

$$N(s) = \sum_{c_i=0}^{E \left(\frac{\dim M_i}{2} \right)} \left\{ \sum_{r_i=0}^{\dim M_i - 2c_i} \left\{ \sum_J \det_{[i_1; o_1] [i_2; o_2] \dots [i_{c_i}; o_{c_i}]} J_1 M_1 \dots \det_{[i_1; o_1] [i_2; o_2] \dots [i_n; o_n]} J_n M_n \cdot \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^E [T_h^j] \cdot [\Delta_h(s)] \right\} \right\} \right\} \quad (2.67.)$$

avec:

- $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n$. Chaque E_i correspond à l'exposant E obtenu en fonction de la situation des chemins causaux considérés par rapport au $i^{\text{ème}}$ MP. Chaque terme E_i s'obtient à l'aide des critères définis précédemment.

- $1 \leq i \leq n$

Conclusion

L'étude des bond graphs comportant un ou plusieurs éléments multiports nous a amené à définir de nouvelles catégories de chemins causaux et de boucles causales ainsi que de nouvelles expressions des gains correspondants. Le nombre de ces boucles et de ces chemins pouvant croître rapidement dans ce genre de modèles bond graph, l'application de la règle de Mason constitue alors une très longue et difficile étape vers la détermination formelle du dénominateur $\Delta(s)$ et des différents numérateurs $N_k(s)$ de la matrice de transfert. Certains gains et produits de gains pouvant être regroupés sous forme de déterminants réduits de la matrice caractérisant l'élément multiport considéré, nous avons mis en évidence des expressions plus compactes permettant de déterminer $\Delta(s)$ et $N(s)$. Ces méthodes, valables quelle que soit la causalité affectant les éléments multiports, reposent sur un parcours causal du bond graph et représentent donc une extension de la règle de Mason aux bond graphs constitués d'éléments multiports. En fonction du degré de difficulté du modèle bond graph étudié, la mise en œuvre de ces expressions peut s'avérer quelque peu complexe. Elle révèle donc la nécessité de recourir à un logiciel. Une étude algorithmique des divers résultats de ce chapitre a montré un caractère "systématique" du traitement. L'étape de la programmation sera donc prochainement entreprise dans le logiciel ARCHER.

CHAPITRE III

DETERMINATION FORMELLE DE L'EQUATION D'ETAT ASSOCIEE A UN

BOND GRAPH COMPORTANT DES ELEMENTS MULTIPORTSS

INTRODUCTION

Les travaux présentés dans ce chapitre sont basés sur les travaux concernant les bond graphs 1-port [Azmani (1991)].

Par souci de clarté, nous limiterons volontairement notre étude aux bond graphs ne comportant qu'un seul MP. Tous les résultats présentés dans ce chapitre peuvent en effet, être facilement généralisés aux bond graphs-comportant plusieurs MP.

Un bond graph peut se schématiser de la façon suivante [Karnopp, Rosenberg 1983], [Borne et al. 1992]:

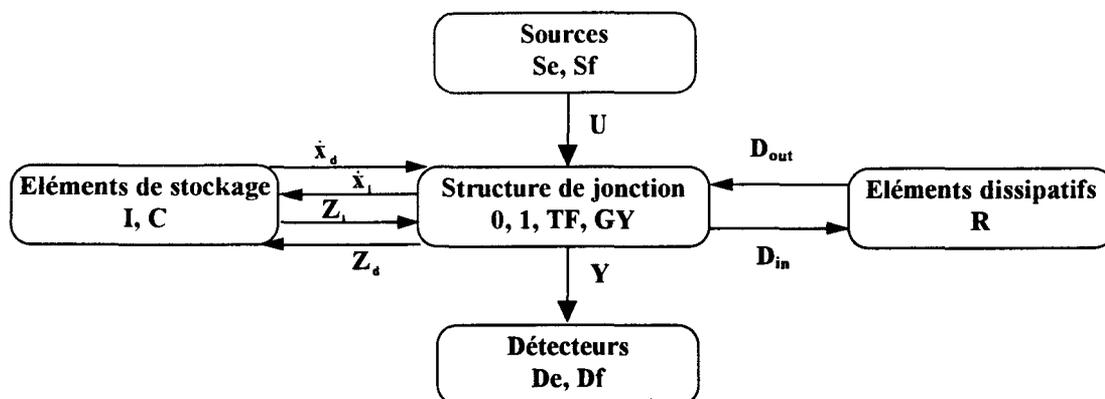


figure 3.1. : Décomposition du modèle bond graph en structure de jonction et quatre modules

où D_{in} et D_{out} regroupent les efforts et les flux respectivement entrants et sortants pour les éléments R ($D_{in} (r \times r)$, $D_{out} (r \times r)$ si r éléments dissipatifs dans le système), x_i et x_d sont les variables d'état p et q associées aux éléments I et C respectivement en causalité intégrale et dérivée ($x_i (n_i \times n_i)$ si n_i éléments dynamiques en causalité intégrale et $x_d (n_d \times n_d)$ si n_d éléments dynamiques en causalité dérivée), et Z_i et Z_d sont "les vecteurs d'état complémentaires", composés d'efforts et de flux ($Z_i (n_i \times n_i)$ et $Z_d (n_d \times n_d)$). Pour un système multivariable, nous avons également $U (m \times m)$ (si m entrées) et $Y (p \times p)$ (si p sorties).

Suivant que les éléments R, I et C sont linéaires ou non linéaires, tous ces vecteurs satisfont les relations suivantes, constitutives des éléments:

$$\bullet D_{out} = L \cdot D_{in} \text{ avec } L \begin{bmatrix} [R] & 0 \\ 0 & [G] \end{bmatrix}, \text{ ou } D_{out} = L(D_{in}),$$

où $[R]$ et $[G]$ sont respectivement les matrices carrées diagonales "résistive" et "conductive" du système (r éléments dissipatifs dans le système $\Rightarrow \dim R + \dim G = r_1 + r_2 = r$):

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & R_{r_1} \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & G_{r_2} \end{bmatrix}$$

• $Z_i = F_i \cdot x_i$ avec $F_i \begin{bmatrix} [I_i] & 0 \\ 0 & [C_i] \end{bmatrix}$, ou $Z_i = F_i(x_i)$

où $[I_i]$ et $[C_i]$ sont respectivement les matrices carrées diagonales "inductive intégrale" et "capacitive intégrale" du système (n_i éléments dynamiques en causalité intégrale dans le système $\Rightarrow \dim I_i + \dim C_i = i_i + i_c = n_i$):

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{I_{i_i}} \end{bmatrix} \text{ et } C_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{C_{i_c}} \end{bmatrix}$$

• $x_d = F_d^{-1} \cdot Z_d$ avec $F_d^{-1} \begin{bmatrix} [I_d] & 0 \\ 0 & [C_d] \end{bmatrix}$, ou $x_d = F_d^{-1}(Z_d)$

où $[I_d]$ et $[C_d]$ sont respectivement les matrices carrées diagonales "inductive dérivée" et "capacitive dérivée" du système (n_d éléments dynamiques en causalité dérivée dans le système $\Rightarrow \dim I_d + \dim C_d = d_i + d_c = n_d$):

$$I_d = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_{d_i} \end{bmatrix} \text{ et } C_d = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_{d_c} \end{bmatrix}$$

Dans le cas linéaire (et avec des éléments R, I et C simples), les matrices L, F_i et F_d sont diagonales.

La structure de jonction est caractérisée par la matrice S, construite à partir de la relation:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ Z_d \\ D_{in} \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_i \\ \dot{x}_d \\ D_{out} \\ U \end{bmatrix}$$

Dans le cas 1-port, cette matrice est composée uniquement de 0, -1, +1, m_i ou $\frac{1}{m_i}$

(modules constants ou variables des éléments TF), r_j ou $\frac{1}{r_j}$ (modules constants ou variables

des éléments GY), et caractérise l'architecture du système. Les matrices S_{11} et S_{33} sont antisymétriques et nous avons la relation:

$$S_{21} = -S_{12}^T$$

L'équation d'état dans le cas linéaire est déduite de cette expression en exprimant tous les vecteurs pour ne conserver que les variables d'état et le vecteur commande U sous la forme générale:

$$\dot{x}_i = A_1 x_i + A_2 \dot{x}_d + B_1 U$$

$$x_d = A_3 x_i + A_4 \dot{x}_d + B_2 U$$

$$Y = C x_i + D U$$

avec:

$$A_1 = (S_{11} + S_{13}(I_d - LS_{33})^{-1}LS_{31})F_i$$

$$A_2 = (S_{12} + S_{13}(I_d - LS_{33})^{-1}LS_{32})$$

$$A_3 = F_d^{-1}(S_{21} + S_{23}(I_d - LS_{33})^{-1}LS_{31})F_i$$

$$A_4 = F_d^{-1}(S_{22} + S_{23}(I_d - LS_{33})^{-1}LS_{32})$$

$$B_1 = S_{14} + S_{13}(I_d - LS_{33})^{-1}LS_{34}$$

$$B_2 = F_d^{-1}(S_{24} + S_{23}(I_d - LS_{33})^{-1}LS_{34})$$

$$C = [S_{41} + S_{43}[I - LS_{33}]^{-1}LS_{31}]F_i$$

$$D = S_{44} + S_{43}[I - LS_{33}]^{-1}LS_{34}$$

Dans le cas où aucun élément en causalité dérivée n'est directement en relation causale avec,

- un autre élément en causalité dérivée (S_{22} =matrice nulle, $\dim S_{22} = n_d \times n_d$)
- les entrées (S_{24} =matrice nulle, $\dim S_{24} = n_d \times m$)
- les sorties (S_{42} =matrice nulle, $\dim S_{42} = p \times n_d$)
- les éléments dissipatifs ($S_{32}=S_{23}$ =matrices nulles, $\dim S_{32} = r \times n_d$, $\dim S_{23} = n_d \times r$)

certaines des expressions précédentes deviennent:

$$A_2 = S_{12}$$

$$A_3 = F_d^{-1}(S_{21})F_i$$

$$A_4 = F_d^{-1}(S_{22})$$

$$B_2 = 0$$

Lorsque le bond graph ne comporte aucun élément en causalité dérivée (toutes les matrices S_{2i} et S_{i2} , $i=1..4$ sont nulles), il vient:

d'où:
$$A_2 = A_3 = A_4 = B_2 = 0$$

L' équation d'état du système se réduit donc dans ce cas, à l'expression suivante:

$$\dot{x}_i = A_1 x_i + B_1 U$$

$$Y = C x_i + D U$$

Lorsque le bond graph comporte certains éléments en causalité dérivée, nous devons écrire:

$$\dot{x}_i = S_{11} Z_i + S_{12} \dot{x}_d + S_{13} D_{out} + S_{14} U$$

avec:
$$D_{out} = (I - LS_{33})^{-1} [LS_{31} Z_i + LS_{34} U], \quad (I - LS_{33})^{-1} \text{ supposée inversible}$$

d'où:
$$\dot{x}_i = [S_{11} + S_{13}(I - LS_{33})^{-1} LS_{31}] Z_i + [S_{14} + S_{13}(I - LS_{33})^{-1} LS_{34}] U + S_{12} \dot{x}_d$$

or:
$$S_{12} \dot{x}_d = S_{12} F_d^{-1} S_{21} F_i \dot{x}_i$$

Il vient donc:

$$(I - S_{12} F_d^{-1} S_{21} F_i) \dot{x}_i = [S_{11} + S_{13}(I - LS_{33})^{-1} LS_{31}] F_i x_i + [S_{14} + S_{13}(I - LS_{33})^{-1} LS_{34}] U$$

$$\text{d'où: } \begin{cases} A^d \dot{x}_i = A^R x_i + B^R U \\ y = Cx_i + DU \end{cases} \quad (3.1.)$$

$$\text{d'où: } \dot{x}_i = \underbrace{[A^d]^{-1} A^R}_A x_i + \underbrace{[A^d]^{-1} B^R}_B U \quad (3.2.)$$

$$\text{avec: } [A^d]^{-1} = \frac{1}{\Delta^d} [A_{adj}^d] = [I - S_{12} F_d^{-1} S_{21} F_i]^{-1} \quad (3.3.)$$

$$A^R = A_i = [S_{11} + S_{13} (I - LS_{33})^{-1} LS_{31}] F_i \quad (3.4.)$$

$$B^R = [S_{14} + S_{13} (I - LS_{33})^{-1} LS_{34}] \quad (3.5.)$$

1. Bond graph comportant un élément dynamique MP avec causalité unique

Tous les liens du MP sont affectés d'une causalité identique. Nous étudions ci-après la détermination des matrices A^R et $[A^d]^{-1}$. Pour chacune, nous supposons dans un premier temps, une causalité unique intégrale sur le MP puis une causalité unique dérivée. L'étude des matrices de commande et d'observation est abordée en fin de paragraphe.

1.1. Détermination de la matrice A^R

L'expression permettant de déterminer les différents termes de cette matrice dans le cas de bond graph 1-port [Azmani 1991] est la suivante:

$$A_{ij}^R = \frac{\left[\sum_k G_{k_A} \delta_{k_A}^R \right]_{ij}}{\Delta^R} \quad (3.6.)$$

avec:

- Δ^R issu de l'application de la règle de Mason à toutes les boucles algébriques (impliquant uniquement des éléments dissipatifs R) situées dans le bond graph.
- G_{k_A} le gain du $k^{\text{ième}}$ chemin causal allant de l'élément associé à la variable x_i^j vers l'élément associé à la variable \dot{x}_i^i multiplié par le gain (sans tenir compte de l'opérateur s^{-1} de Laplace) de l'élément de départ (l'élément associé à la variable x_i^j). Ce chemin peut être indirect (traversant des éléments dissipatifs uniquement). Dans sa phase initiale, il est parcouru en suivant la variable Z_i^j .

- $\delta_{k_A}^R$ calculé tout comme Δ^R mais en ne tenant compte que des boucles algébriques disjointes du $k^{\text{ième}}$ chemin causal de gain G_{k_A} .

Remarque: En aucun cas, le chemin causal entre l'élément associé à la variable x_i^j et l'élément associé à la variable x_i^i de gain G_{k_A} ne peut franchir:

- un autre élément associé à une autre variable x_i^h appartenant au vecteur x_i car dans ce cas, le gain du chemin causal partant de l'élément associé à la variable x_i^j jusqu'à l'élément associé à la variable x_i^h donnerait A_{hj}^R .
- un élément en causalité dérivée associé à une autre variable x_d^i appartenant au vecteur x_d ; les seuls éléments pouvant intervenir dans un chemin causal indirect entre l'élément associé à la variable x_i^j et l'élément associé à la variable x_i^i étant des éléments dissipatifs.

1.1.1. MP en causalité intégrale

Tous les liens du MP sont supposés affectés d'une causalité intégrale. La matrice F n'est plus diagonale.

⇒ Si les deux éléments liés à x_i^j et x_i^i sont des éléments 1-port alors le calcul de A_{ii}^R s'effectue comme dans le cas d'un bond graph 1-port [Azmani 1991].

Considérons la figure suivante:

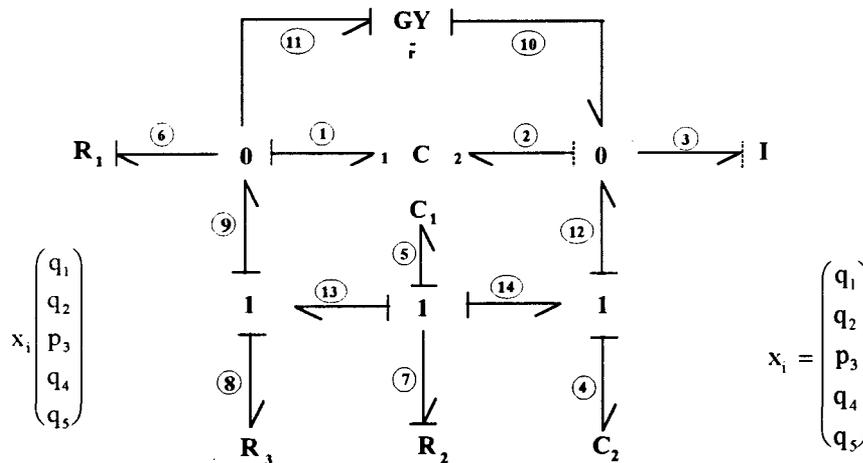


figure 3.2.

Le MP est un condensateur caractérisé par la relation suivante:

$$\begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ \vdots \\ e_m(s) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ \vdots \\ f_m(s) \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{12}^* & \dots & m_{1m}^* \\ m_{21}^* & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1}^* & \dots & \dots & m_{mm}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{s} & \frac{m_{12}}{s} & \dots & \frac{m_{1m}}{s} \\ \frac{m_{21}}{s} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{m_{m1}}{s} & \dots & \dots & \frac{m_{mm}}{s} \end{bmatrix} \text{ et } m=2 \text{ ici}$$

Tous les résultats présentés ci-après peuvent être généralisés à tout type d'élément dynamique multiport.

- Soient $\dot{x}_1^i = \dot{q}_4 = f_4$ et $x_1^j = q_5$, il vient dans ce cas:

$$A_{ij}^R = A_{45}^R = \frac{1}{\Delta^R} \left[-\frac{1}{C_1 R_2} \right] \cdot [\delta_1^R] \text{ avec } \begin{cases} \delta_1^R = 1 \\ \Delta^R = 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{cases}$$

Le seul chemin causal entre l'élément associé à la variable x_1^j (l'élément C_1) et celui associé à la variable \dot{x}_1^i (l'élément C_2) est indirect (5-7-7-14-4). Son gain vaut $-\frac{1}{R_2}$ et doit être multiplié par le gain de l'élément de départ $\left(\frac{1}{C_1}\right)$ (sans tenir compte de l'opérateur laplacien).

- Soient $\dot{x}_1^i = \dot{p}_3 = e_3$ et $x_1^j = q_5$, il vient dans ce cas $A_{ij}^R = A_{35}^R = 0$ car il n'existe aucun chemin causal entre l'élément C_1 associé à la variable x_1^j et l'élément I associé à la variable \dot{x}_1^i vérifiant les conditions imposées. Les chemins causaux suivants (5-7-7-14-12-2-2-3 ou 5-7-7-13-9-1-2-3) ne conviennent pas car ils franchissent tous deux une autre variable d'état que \dot{x}_1^i ($\dot{x}_1^h = \dot{x}_1^2 = \dot{q}_2 = f_2$, associée au second lien du MP pour le premier et $\dot{x}_1^h = \dot{x}_1^1 = \dot{q}_1 = f_1$, associée au premier lien du MP pour le second).

χ Lorsque les deux variables \dot{x}_1^i et x_1^j sont associées à des éléments 1-ports, le MP ne peut pas être impliqué dans la détermination des termes A_{ij}^R .

⇒ Si l'une des deux variables d'état est associée à l'un des liens du MP, le calcul de A_{ij}^R diffère:

- Soient $\dot{x}_1^i = \dot{q}_2 = f_2$ et $x_1^j = q_5$, il vient dans ce cas:

$$A_{ij}^R = A_{25}^R = \frac{1}{\Delta^R} \left[-\frac{1}{C_1 R_2} \right] \cdot [\delta_1^R] \text{ avec } \begin{cases} \delta_1^R = 1 \\ \Delta^R = 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{cases}$$

Le seul chemin causal entre l'élément C_1 associé à la variable x_1^j et le second lien du MP associé à la variable \dot{x}_1^i vérifiant les critères imposés ci-avant est indirect (5-7-7-14-12-2). Le chemin causal suivant (5-7-7-13-9-1-1-11-10-2) ne convient pas pour les mêmes raisons que précédemment.

- Soient $\dot{x}_1^i = \dot{q}_5 = f_5$ et $x_1^j = q_2$, il existe dans ce cas deux chemins causaux possibles:
 - ♦ Le premier (2-12-14-7-7-5) produit $G_{1_A} = T_1$ (C1T1)
 - ♦ Le second (1-9-13-7-7-5) produit $G_{2_A} = T_2$ (C1T1)

il vient dans ce cas:

$$A_{ij}^R = A_{52}^R = \frac{1}{\Delta^R} [T_1 \delta_1^R + T_2 \delta_2^R] = \frac{1}{\Delta^R} \left[\left(-\frac{m_{22}}{R_2} \right) \cdot (\delta_1^R) + \left(-\frac{m_{12}}{R_2} \right) \cdot (\delta_2^R) \right] \text{ avec } \begin{cases} \delta_1^R = \delta_2^R = 1 \\ \Delta^R = 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{cases}$$

Le premier de ces chemins causaux respectent les conditions énoncées ci-avant. Dans sa phase initiale, partant de l'élément multiport, il parcourt $Z_1^j = e_2$ d'où le terme m_{22} dans le gain T_1 . Partant du MP, il est également possible d'atteindre $\dot{x}_1^i = \dot{q}_5 = f_5$ en franchissant l'autre lien du MP (le lien indicé 1). Celui-ci est alors parcouru suivant e_1 qui n'est pas $\dot{x}_1^i = \dot{q}_1 = f_1$ et qui appartient à Z_i . Cette situation engendre le terme m_{12} (contribution du MP lorsqu'il est franchit du lien indicé 2 vers le lien indicé 1) dans le gain T_2 . En aucun cas une autre variable d'état que \dot{x}_1^i n'est parcourue.

× Lorsque la variable x_1^j est associée à un élément 1-port qui est élément de départ du chemin causal, le MP n'est alors jamais impliqué. Seul un de ses liens peut être parcouru suivant \dot{x}_1^i (aucune contribution du MP n'apparaît donc dans ce cas). Tous les chemins causaux sont donc C0. ×

Dans la situation inverse, (lorsque la variable x_1^j est associée à un lien du MP qui est l'élément de départ du chemin causal), il est possible de franchir n'importe lequel des liens de ce MP.

Remarque: Lorsque le MP est l'élément de départ, il peut exister des chemins causaux C1T1 (voir T_1 et T_2).

⇒ Analysons finalement maintenant le cas où les deux variables d'état x_i^j et \dot{x}_i^j sont associées à deux des liens du MP:

- Soient $\dot{x}_i^j = \dot{q}_2 = f_2$ et $x_i^j = q_1 = f_1$, il vient dans ce cas:

$$A_{ij}^R = A_{21}^R = \frac{1}{\Delta^R} [T_1 \delta_1^R + T_2 \delta_2^R + T_3 \delta_3^R] = \frac{1}{\Delta^R} \left[(r m_{11}) (\delta_1^R) + \left(-\frac{m_{11}}{R_2} \right) (\delta_2^R) + \left(-\frac{m_{21}}{R_2} \right) (\delta_3^R) \right]$$

$$\text{avec } \begin{cases} \delta_1^R = 1 + \frac{R_3}{R_2} \\ \delta_2^R = \delta_3^R = 1 \\ \Delta^R = 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} T_1 = G_{1_A} : 1-11-10-2 \text{ (C1T1)} \\ T_2 = G_{2_A} : 1-9-13-7-7-14-12-2 \text{ (C1T1)} \\ T_3 = G_{3_A} : 2-12-14-7-7-14-12-2 \text{ (C2T1)} \times \end{cases}$$

1-9-13-7-7-14-12-2 → m₁₁ m₂₁

Tout comme précédemment, dès lors que la variable x_i^j est associée à un lien du MP qui est l'élément de départ du chemin causal, tous les liens de ce MP peuvent être parcourus. Pour les deux premiers chemins, le lien indicé 1 est parcouru d'où le terme m_{11} dans les gains T_1 et T_2 . Le dernier chemin parcourt le lien indicé 2 d'où le terme m_{21} dans le gain T_3 (contribution du MP lorsqu'il est franchit du lien indicé 1 vers le lien indicé 2).

Remarque: Les chemins causaux de gains T_1 et T_2 sont C1T1 car le parcours final du lien indicé 2 suivant la variable f_2 n'engendre pas de contribution du MP dans les gains respectifs de ces chemins.

× Le MP n'est donc jamais impliqué lorsque l'élément de départ des différents chemins causaux est un élément 1-port. L'un de ses liens (celui indicé i et associé à \dot{x}_i^j) peut au maximum être parcouru suivant \dot{x}_i^j .

Lorsque l'élément de départ est le MP, tous ses différents liens peuvent être parcourus suivant l'effort dans notre cas.

Lorsqu'un MP constitue le modèle bond graph, tous les termes non diagonaux de la matrice A^R peuvent donc être déterminés à l'aide des méthodes présentées ci-avant. Celles-ci ne diffèrent pas des méthodes présentées pour les bond graphs 1-port [Azmani 1991] lorsque l'élément associé à la variable x_i^j est un élément 1-port. Le MP implique cependant certaines contraintes supplémentaires lorsqu'il est élément de départ des chemins causaux recherchés.

Lorsque $i=j$, les termes diagonaux de cette matrice s'obtiennent identiquement. Les chemins causaux recherchés sont dans ce cas des chemins causaux indirects (par des éléments dissipatifs uniquement) fermés liant l'élément associé à la variable \dot{x}_i^i à lui-même.

- Soient $\dot{x}_i^i = \dot{q}_1 = f_1$, il vient dans ce cas:

$$A_{ii}^R = A_{11}^R = \frac{1}{\Delta^R} [T_1 \delta_1^R + T_2 \delta_2^R + T_3 \delta_3^R] = \frac{1}{\Delta^R} \left[\left(-\frac{m_{11}}{R_1} \right) \cdot (\delta_1^R) + \left(-\frac{m_{11}}{R_2} \right) \cdot (\delta_2^R) + \left(-\frac{m_{21}}{R_2} \right) \cdot (\delta_3^R) \right]$$

$$\text{avec } \begin{cases} \delta_1^R = 1 + \frac{R_3}{R_2} \\ \delta_2^R = \delta_3^R = 1 \\ \Delta^R = 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} T_1 = G_{1_A} : 1-6-6-1 \text{ (C2T1)} \\ T_2 = G_{2_A} : 1-9-13-7-7-13-9-1 \text{ (C2T1)} \\ T_3 = G_{3_A} : 2-12-14-7-7-13-9-1 \text{ (C1T2)} \end{cases} \times$$

Pour les termes diagonaux, les chemins causaux recherchés sont donc fermés. Il s'agit donc de boucles causales. Lorsque la variable \dot{x}_i^i est associée à un lien du MP, ces boucles causales seront toujours C2T1 (T_1 et T_2) ou C1T2 (T_3). Lorsque la variable \dot{x}_i^i est associée à un élément 1-port, ces boucles causales sont C0.

Lorsque tous les liens du MP sont en causalité intégrale, les différents termes de la matrice A^R peuvent donc être obtenus de façon identique à celle proposée pour les bond graphs 1-port [Azmani 1991]. Quelques contraintes supplémentaires occasionnées par le MP doivent néanmoins être respectées.

1.1.2. MP en causalité dérivée

Tous les liens du MP sont affectés d'une causalité dérivée. La matrice F_d n'est plus diagonale.

Cette modification n'altère en aucun cas la détermination de Δ^R . Aucune variable \dot{x}_i^i ne pourra être associée à un lien du MP. Les différents termes A_{ij}^R seront donc obtenus comme dans le cas d'un bond graph uniquement 1-port.

1.2. Détermination de la matrice $[A^d]^{-1}$

L'expression permettant de déterminer les différents termes de cette matrice dans le cas de bond graph 1-port [Azmani 1991] est la suivante:

$$[A^d]_{ij}^{-1} = \frac{[A^d_{adj}]_{ij}}{\Delta^d} = \frac{\left[\sum_k [\Gamma_k^d] [\delta_k^d] \right]_{ij}}{\Delta^d} \quad (3.7.)$$

avec:

- Δ^d issu de l'application de la règle de Mason à toutes les boucles causales entre éléments dynamiques ayant des causalités opposées, situées dans le bond graph. Ces boucles sont appelées boucles causales intégrale-dérivée et sont notées boucles causales I-D. Les opérateurs de Laplace étant pris en compte, elles correspondent à des boucles causales d'ordre zéro définies dans [Breedveld 1984, 1988]

- Γ_k^d le gain du $k^{\text{ième}}$ chemin causal allant de l'élément associé à la variable \dot{x}_j vers l'élément associé à la variable \dot{x}_i passant par un élément dynamique en causalité dérivée.

- δ_k^d calculé tout comme Δ^d mais en ne tenant compte que des boucles I-D disjointes du $k^{\text{ième}}$ chemin causal de gain Γ_k^d .

Pour $i=j$, l'expression précédente devient:

$$[A^d]_{ii}^{-1} = \frac{[A^d_{adj}]_{ii}}{\Delta^d} = \frac{\Gamma_{ii}^d}{\Delta^d} \quad (3.8.)$$

avec:

- Γ_{ii}^d issu tout comme Δ^d de l'application de la règle de Mason à toutes les boucles causales I-D du bond graph exceptées celles parcourant la variable \dot{x}_i .

1.2.1. MP en causalité intégrale

⇒ La règle de Mason permettant de déterminer le terme Δ^d doit à présent tenir compte des différentes boucles causales impliquant le MP. Les boucles causales liant uniquement des éléments 1-port et n'impliquant pas le MP seront appelées boucles causales I-D C0. (exemple fig. 3.3.: $B_1 = -\frac{C_3 s}{C_4 s} = -\frac{C_3}{C_4} (5-8-8-5)$). Lorsque le MP est en relation causale par l'un de ses liens en causalité intégrale avec un élément 1-port en causalité dérivée, une boucle causale I-D C2T1 existe. La figure suivante présente cette situation:

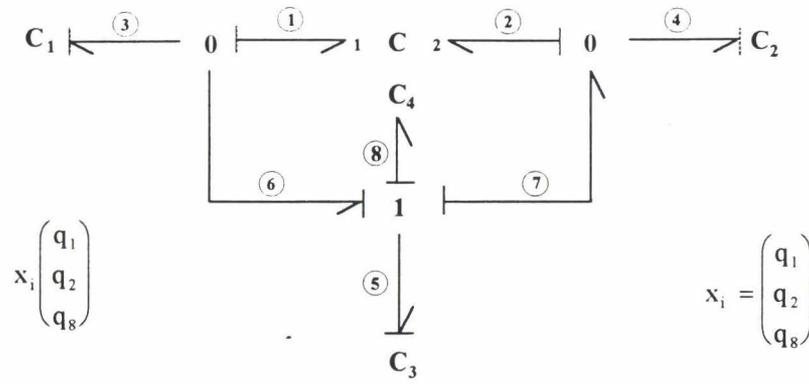


figure 3.3.

Quatre boucles causales I-D C2T1 existent et leurs gains sont les suivants:

$$B_{11} = -\frac{m_{11}}{s} C_1 s = -m_{11} C_1 (1-3-3-1) \quad B_{22} = -\frac{m_{22}}{s} C_2 s = -m_{22} C_2 (2-4-4-2)$$

$$B'_{11} = -\frac{m_{11}}{s} C_3 s = -m_{11} C_3 (1-6-5-5-6-1) \quad B'_{22} = -\frac{m_{22}}{s} C_3 s = -m_{22} C_3 (2-7-5-5-7-2)$$

Deux boucles causales I-D C1T2 existent également et leurs gains sont les suivants:

$$B_{12} = \frac{m_{21}}{s} C_3 s = m_{21} C_3 (2-7-5-5-6-1) \quad B_{21} = \frac{m_{12}}{s} C_3 s = m_{12} C_3 (2-1-6-5-5-7)$$

Le parcours d'une variable en causalité intégrale succède à celui d'une variable en causalité dérivée:

- $\dot{x}_i^1 = f_1$ puis $\dot{x}_d^3 = f_5$ pour B_{12} .
- $\dot{x}_i^2 = f_2$ puis $\dot{x}_d^3 = f_5$ pour B_{21} .

De la même façon, trois boucles causales I-D C2T2 existent et leurs gains sont les suivants:

$$B_{121} = \frac{m_{12} m_{21}}{s^2} C_1 C_2 s^2 = m_{12} m_{21} C_1 C_2 (2-4-4-2-1-3-3-1)$$

$$B'_{121} = \frac{m_{12} m_{21}}{s^2} C_2 C_3 s^2 = (2-4-4-2-1-6-5-5-6-1)$$

$$B''_{121} = \frac{m_{12} m_{21}}{s^2} C_1 C_3 s^2 = m_{12} m_{21} C_1 C_3 (2-7-5-5-7-2-1-3-3-1)$$

Le parcours alterné d'une variable en causalité intégrale et d'une variable en causalité dérivée est encore respectée:

- $\dot{x}_i^1 = f_1$ puis $\dot{x}_d^2 = f_4$ puis $\dot{x}_i^2 = f_2$ puis enfin $\dot{x}_d^3 = f_5$ pour B_{121} .
- $\dot{x}_i^1 = f_1$ puis $\dot{x}_d^2 = f_4$ puis $\dot{x}_i^2 = f_2$ puis enfin $\dot{x}_d^3 = f_5$ pour B'_{121} .

- $\dot{x}_1^1 = f_1$ puis $\dot{x}_d^3 = f_5$ puis $\dot{x}_1^2 = f_2$ puis enfin $\dot{x}_d^1 = f_3$ pour B''_{121} .

Remarque: Une nouveauté par rapport au bond graph 1-port apparaît donc à ce niveau. La définition de Γ_k^d doit donc être revue. Nous proposons la définition suivante

Définition 3.1.:

Γ_k^d constitue le gain du $k^{\text{ième}}$ chemin causal entre l'élément associé à la variable \dot{x}_i^j et l'élément associé à la variable \dot{x}_i^j passant par une ou plusieurs autres variables dynamiques en causalité dérivée ou intégrale. L'alternance entre variables intégrales et dérivées doit être respectée afin de conserver un chemin causal d'ordre 0 [Breedveld 1984, 1988].

L'application de la règle de Mason concernant les précédentes boucles causales engendre:

$$\begin{aligned} \Delta^d = 1 - & \left[B_1 + B_{11} + B_{22} + B'_{11} + B'_{22} + B_{12} + B_{21} + B_{121} + B'_{121} + B''_{121} \right] \\ & + \left[B_{11}B_{22} + B_{11}B'_{22} + B_{11}B_1 + B_1B_{22} + B_1B_{121} + B'_{11}B_{22} \right] \\ & - \left[B_{11}B_{22}B_1 \right] \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\begin{aligned} \Delta^d = 1 + \frac{C_3}{C_4} + m_{11} & \left[C_1 \left(1 + \frac{C_3}{C_4} \right) + C_3 \right] + m_{22} \left[C_2 \left(1 + \frac{C_3}{C_4} \right) + C_3 \right] \\ & + m_{11}m_{22} \left[C_1C_2 \left(1 + \frac{C_3}{C_4} \right) + C_1C_3 + C_2C_3 \right] \\ & - m_{12}m_{21} \left[C_1C_2 \left(1 + \frac{C_3}{C_4} \right) + C_1C_3 + C_2C_3 \right] \\ & - m_{12}C_3 - m_{21}C_3 \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut donc s'écrire à l'aide de l'expression (2.49.):

$$\begin{aligned} \Delta^d = \det_{\{1,2\}} M \underbrace{\left\{ 1 + \frac{C_3}{C_4} \right\}}_{\delta_0^d} \\ + \det_{\{1\}} M \left\{ (-1)^1 [-C_2] \left[1 + \frac{C_3}{C_4} \right] + (-1)^1 [-C_3] [1] \right\} \\ + \det_{\{2\}} M \left\{ (-1)^1 [-C_1] \left[1 + \frac{C_3}{C_4} \right] + (-1)^1 [-C_3] [1] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \det_{\{1\}} M \left\{ (-1)^2 [(-C_2)(-C_1)] \left[1 + \frac{C_3}{C_4} \right] + \right. \\
 & \quad \left. (-1)^2 [(-C_1)(-C_3)] [1] + (-1)^2 [(-C_2)(-C_3)] [1] \right\} \\
 & + \det_{[1,2]} M \left\{ (-1)^1 [C_3] [1] \right\} + \det_{[2,1]} M \left\{ (-1)^1 [C_3] [1] \right\}
 \end{aligned}$$

δ_0^d constitue le déterminant de Mason obtenu avec les boucles causales I-D C0 de la figure 3.3..

⇒ D'après les définitions données précédemment, les différents termes diagonaux (notés Γ_{ii}^d) de la matrice $[A^d]^{-1}$ se déterminent identiquement à Δ^d ; les boucles alors impliquées ne doivent cependant pas parcourir l'élément associé à la variable \dot{x}_i^1 .

Concernant la figure 3.3., il vient entre autres:

- $\Gamma_{11}^d = \Delta^d$ avec interdiction de parcourir $\dot{x}_1^1 = \dot{q}_1 = f_1$

Nous obtenons donc:
$$[A^d]_{11}^{-1} = \frac{\Gamma_{11}^d}{\Delta^d}$$

et:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^d &= \det_{\{1,2\}} M \left\{ \underbrace{1 + \frac{C_3}{C_4}}_{\delta_0^d} \right\} \\
 &+ \det_{\{1\}} M \left\{ (-1)^1 [-C_2] \left[1 + \frac{C_3}{C_4} \right] + (-1)^1 [-C_3] [1] \right\} \\
 &+ \det_{\{2\}} M \{0\} \left(\begin{array}{l} \text{Le lien indicé 1 du MP ne peut être parcouru que suivant} \\ e_1. \text{ Aucune boucle causale parcourant ce lien suivant } e_1 \\ \text{uniquement ne peut donc être retenue.} \end{array} \right) \\
 &+ \det_{\{ \}} M \{0\} \quad (\text{pour les mêmes raisons que ci - avant}) \\
 &+ \det_{[1,2]} M \{0\} \quad (\text{pour les mêmes raisons que ci - avant}) \\
 &+ \det_{[2,1]} M \left\{ (-1)^1 [C_3] [1] \right\}
 \end{aligned}$$

- $\Gamma_{33}^d = \Delta^d$ avec interdiction de parcourir $\dot{x}_3^3 = \dot{q}_8 = f_8$

Nous obtenons donc:
$$[A^d]_{33}^{-1} = \frac{\Gamma_{33}^d}{\Delta^d}$$

et:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{33}^d &= \det_{\{1,2\}} \underbrace{M\{1\}}_{\tilde{\delta}_0^d} \quad \tilde{\delta}_0^d = \delta_0^d \text{ privé de la boucle causale de gain } B_1 = -\frac{C_3}{C_4} \\
 &+ \det_{\{1\}} M\left\{(-1)^1[-C_2] \left[1 + \frac{C_3}{C_4}\right] + (-1)^1[-C_3][1]\right\} \\
 &+ \det_{\{2\}} M\{0\} \left(\begin{array}{l} \text{Le lien indicé 1 du MP ne peut être parcouru que suivant} \\ e_1. \text{ Aucune boucle causale parcourant ce lien suivant } e_1 \\ \text{uniquement ne peut donc être retenue.} \end{array} \right) \\
 &+ \det_{\{ \}} M\{0\} \quad (\text{pour les mêmes raisons que ci - avant}) \\
 &+ \det_{\{1,2\}} M\{0\} \quad (\text{pour les mêmes raisons que ci - avant}) \\
 &+ \det_{\{2,1\}} M\{(-1)^1[C_3][1]\}
 \end{aligned}$$

⇔ Concernant les termes hors diagonaux (notés Γ_{ij}^d) de la matrice $[A^d]^{-1}$, nous présentons ici en détail le calcul de deux d'entre eux:

L'expression permettant de calculer Γ_{12}^d est la suivante:

$$\Gamma_{12}^d = [A^d]_{12}^{-1} = \frac{[A_{adj}^d]_{12}}{\Delta^d} = \frac{\left[\sum_k [\Gamma_k^d][\delta_k^d] \right]_{12}}{\Delta^d}$$

avec:

- $[\Gamma_k^d]_{12}$ le gain du $k^{\text{ième}}$ chemin causal entre $\dot{x}_1^2 = \dot{q}_2 = f_2$ et $\dot{x}_1^1 = \dot{q}_1 = f_1$
- $[\delta_k^d]_{12}$ issu de l'application de la règle de Mason à l'ensemble des boucles causales I-D disjointes du $k^{\text{ième}}$ chemin causal.

Le premier chemin causal (2-1-3-3-1) traverse tout d'abord le MP en causalité intégrale de son lien indicé 2 vers son lien indicé 1. Cette situation engendre le terme m_{12} (contribution du MP lorsqu'il est franchit du lien indicé 2 vers le lien indicé 1). L'élément en causalité dérivée (C_1) est ensuite traversé puis le chemin causal se termine par le MP via son lien indicé 1. Son gain vaut T_1 vaut $-\frac{m_{12}}{s} C_{1s} = -m_{12} C_1$. Une seule boucle causale I-D est disjointe de ce chemin causal et son gain vaut B_1 ($\delta_1^d = 1 - B_1$).

Afin de déterminer Δ^d , nous utilisons toujours la même méthode que précédemment. Les liens du MP étant en causalité dérivée, les éléments 1-port recherchés sont en causalité intégrale. Nous obtenons donc:

$$\begin{aligned} \Delta^d = & \det_{\{1,2\}} M \left\{ \underbrace{1 + \frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_2} + \frac{C_3}{C_4}}_{\delta_0^d} \right\} \\ & + \det_{\{1\}} M \left\{ (-1)^1 \left[\left(-\frac{1}{C_2} \right) \right] \left[1 + \frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_4} \right] \right\} \\ & + \det_{\{2\}} M \left\{ (-1)^1 \left[\left(-\frac{1}{C_1} \right) \right] \left[1 + \frac{C_3}{C_2} + \frac{C_3}{C_4} \right] \right\} \\ & + \det_{\{ \}} M \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1} \right) \left(-\frac{1}{C_2} \right) \right] \left[1 + \frac{C_3}{C_4} \right] \right\} \\ & + \det_{\{1,2\}} M \left\{ (-1)^1 \left[\frac{C_3}{C_2 C_1} \right] [1] \right\} + \det_{\{2,1\}} M \left\{ (-1)^1 \left[\frac{C_3}{C_2 C_1} \right] [1] \right\} \end{aligned}$$

δ_0^d constitue le déterminant de Mason obtenu avec les boucles causales I-D C0 de la figure 3.4.

Aucune modification concernant la détermination des différents termes A_{ij}^d n'intervient. En effet, toutes les variables \dot{x}_i^1 étant associées à des éléments 1-port, le MP en causalité dérivée pourra être considéré comme un élément intermédiaire entre deux éléments 1-port en causalité intégrale. Cette situation existe pour le chemin causal entre $\dot{x}_1^2 = \dot{q}_4$ (élément C_2) et $\dot{x}_1^1 = \dot{q}_3$ (élément C_1) dont le gain est noté T_1 . Il vient en effet:

$$\Gamma_{12}^d = \frac{T_1 \delta_1^d + T_2 \delta_2^d}{\Delta^d}$$

avec:

$$\begin{aligned} \diamond T_1 &= -\frac{m_{12}}{C_2} (4-4-2-1-3) & \diamond \delta_1^d &= 1 + \frac{C_3}{C_4} \\ \diamond T_2 &= -\frac{C_3}{C_2} (4-4-7-5-5-6-3) & \diamond \delta_2^d &= 1 \end{aligned}$$

Remarque:

Si Δ^d peut désormais être écrit à l'aide de l'expression (2.49.) du fait de la présence du MP, il en est de même pour les différents Δ^R calculé ci-avant. Cependant, la nature même des MP étudiés dans ce paragraphe (éléments dynamiques multiports) n'introduit aucune boucle algébrique supplémentaire. Il n'existe en effet pas de boucle algébrique faisant intervenir le MP. Seul le terme interdisant le franchissement de tous les liens du MP sera non nul ($\det J M$ avec Card $J = \dim M = m$)

Concernant la figure 3.2., le terme Δ^R obtenu pourra être noté de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \Delta^R &= \det_{\{1,2\}} M \left\{ 1 + \frac{R_3}{R_2} \right\} \quad (\det_{\{1,2\}} M = 1) \\ &+ \det_{\{1\}} M \{0\} \\ &+ \det_{\{2\}} M \{0\} \\ &+ \det_{\{\}} M \{0\} \end{aligned}$$

Lorsque les éléments résistifs sont des éléments 1-ports, l'écriture standard 1-port de Δ^R peut être conservée. Néanmoins, cette notation est obligatoire en cas de présence d'un MP-R (voir deuxième paragraphe).

Remarque: Si les différents déterminants Δ^d et Δ^R peuvent maintenant être écrits à l'aide de l'expression (2.49.), il en est de même pour les différents chemins causaux évoqués précédemment qui pourront à leur tour être écrits, suivant leur nature, à l'aide de l'expression (2.63.).

Concernant la figure 3.2., le terme A_{21}^R peut se réécrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned} A_{21}^R &= D_1 + D_2 \\ D_1 &= \det_{\{2\}} M \left\{ (-1)^{n_{\tau_1}} \left[(r) \right] \left[1 + \frac{R_3}{R_2} \right] + (-1)^{n_{\tau_2}} \left[\left(-\frac{1}{R_2} \right) \right] [1] \right\} \quad (n_{\tau_1} = n_{\tau_2} = 0) \\ D_2 &= \det_{[1,2]\{\}} M \left\{ (-1)^{\theta'} \left[\left(-\frac{1}{R_2} \right) \right] [1] \right\} \quad (\theta' = 0) \end{aligned}$$

Ces deux termes sont issus de l'expression (2.63.) avec:

- ♦ pour D_1 : $c=0$, $0 \leq r \leq m-2c$ d'où $0 \leq r \leq 2$
- ♦ pour D_2 : $c=1$, $0 \leq r \leq m-2c$ d'où $r=0$

Concernant la figure 3.2., le terme Γ_{12}^d peut également se réécrire de la façon suivante:

$$\Gamma_{12}^d = D_1 + D_2$$

$$D_1 = \det_{\{1\}} M \left\{ (-1)^{n_{T_1}} [(C_3)] [1] \right\} \quad (n_{T_1} = 0)$$

$$D_2 = \det_{\{2,1\}} M \left\{ (-1)^{\theta_1} [(-C_3)] [1] + (-1)^{\theta_2} [(-C_1)] \left[1 + \frac{C_3}{C_4} \right] \right\} \quad (\theta_1 = \theta_2 = 0)$$

Tout terme A_{ij} de la matrice A présentée dans l'équation (3.2.), peut maintenant être déterminé par:

$$A_{ij} = \frac{1}{\Delta^R \Delta^d} \sum_{k=1}^n [A^d]_{ik}^{-1} A_{kj}^R \quad (3.9.)$$

En cas d'absence d'élément en causalité dérivée, il vient:

$$A_{ij} = \frac{1}{\Delta^R} A_{ij}^R \quad (3.10.)$$

Remarque: La matrice d'état A est différente pour les figures 3.2., 3.3. et 3.4.. Pour la figure 3.2., elle vaut A^R car l'absence d'élément 1-port en causalité dérivée implique $[A^d]^{-1} = Id$. L'absence d'élément résistif et de liaison directe entre les éléments en causalité intégrale sur les figures 3.3. et 3.4. implique $A^R = A =$ matrice nulle.

1.3. Détermination des matrices de commande, d'observation et de transmission directe

Les résultats concernant la matrice A^d permettent de déterminer les termes B_{ij} de la matrice de commande B (expression (3.2.)). Il suffit pour cela de connaître la matrice B^R (expression (3.5.)). Nous aurons finalement:

$$B_{ij} = \frac{1}{\Delta^R \Delta^d} \sum_{k=1}^n [A^d]_{ik}^{-1} B_{kj}^R \quad (3.11.)$$

Les différents termes de la matrice B^R seront obtenus à l'aide de la méthode proposée pour les bond graphs 1-port [Azmani 1991] à savoir:

$$B_{ij}^R = \frac{\left[\sum_k G_{k_B} \delta_{k_B}^R \right]_{ij}}{\Delta^R} \quad (3.12.)$$

avec:

- G_{k_b} le gain du $k^{\text{ième}}$ chemin causal allant de la $j^{\text{ième}}$ commande U_j du vecteur commande U (composé uniquement de sources d'effort et de flux) vers l'élément associé à la dérivée de la $i^{\text{ième}}$ variable d'état (\dot{x}_i^1). Ce chemin peut être indirect (traversant des éléments dissipatifs uniquement)

- $\delta_{k_b}^R$ calculé tout comme Δ^R mais en ne tenant compte que des boucles algébriques disjointes du $k^{\text{ième}}$ chemin causal de gain G_{k_b} .

La règle précisée pour la détermination de A^R reste valable. Il est interdit de parcourir un autre élément associé à une autre variable d'état \dot{x}_i^k entre U_j et \dot{x}_i^1 .

La variable de départ étant toujours liée à une source d'effort ou de flux (jamais à un lien du MP) le MP ne sera jamais impliqué et n'occasionnera donc pas de contribution dans le gain des chemins causaux recherchés (comme pour la matrice A^R lorsque l'élément de départ était un élément 1-port).

De la même façon, nous déterminerons les coefficients des matrices d'observation et de transmission directe (La matrice A^d n'intervient pas).

Chacun des termes de ces matrices sera donné par:

$$C_{ij} = \frac{\left[\sum_k G_{k_c} \delta_{k_c}^R \right]_{ij}}{\Delta^R} \quad (3.13.)$$

avec:

- G_{k_c} le gain du $k^{\text{ième}}$ chemin causal allant de l'élément associé à la $j^{\text{ième}}$ variable d'état x_j^1 vers l'élément associé à la $i^{\text{ième}}$ sortie y_i du vecteur de sortie Y . Ces chemins causaux peuvent être indirects (traversant des éléments dissipatifs uniquement)

- $\delta_{k_c}^R$ calculé tout comme Δ^R mais en ne tenant compte que des boucles algébriques disjointes du $k^{\text{ième}}$ chemin causal de gain G_{k_c} .

De même, les termes de la matrice de transmission directe s'exprime par:

$$D_{ij} = \frac{\left[\sum_k G_{k_D} \delta_{k_D}^R \right]_{ij}}{\Delta^R} \quad (3.14.)$$

avec:

- G_{k_D} le gain du $k^{\text{ième}}$ chemin causal allant de l'élément associé à la $j^{\text{ième}}$ commande U_j du vecteur commande U vers l'élément associé à la $i^{\text{ième}}$ sortie y_i du vecteur de sortie Y . Ce chemin peut être indirect (traversant des éléments dissipatifs uniquement)
- $\delta_{k_D}^R$ calculé tout comme Δ^R mais en ne tenant compte que des boucles algébriques disjointes du $k^{\text{ième}}$ chemin causal de gain G_{k_D} .

Dans le cas de la matrice C , si la variable x_i^j est associée à l'un des liens du MP alors chacun des liens de ce MP pourra être parcouru.

2. Bond graph comportant un élément résistif MP

Les liens du MP peuvent être affectés d'une causalité identique ou mixte. La matrice L n'est plus diagonale.

2.1. Détermination de la matrice A^R

L'une des principales modifications se situe au niveau de la détermination de Δ^R . En effet, la présence d'un élément dynamique MP permettait dans le paragraphe précédent de continuer à écrire Δ^R sous la forme 1-port. Nous avons vu qu'il était également possible d'adopter l'expression (2.62.) pour écrire Δ^R .

Dans le cas d'un élément multiport résistif (noté MP-R), cette écriture devient incontournable.

Considérons la figure suivante. Nous avons choisi d'affecter une causalité mixte au MP-R.

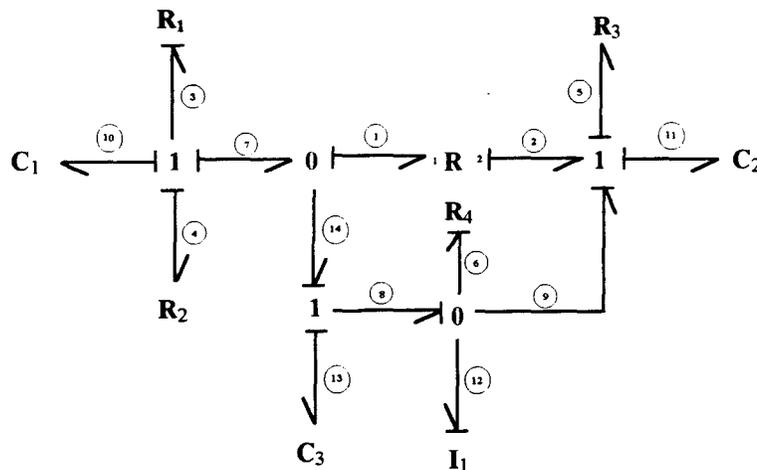


figure 3.5.

Une seule boucle algébrique disjointe du MP existe et son gain B_0^R vaut $-\frac{R_2}{R_1}$. Toutes

les autres boucles algébriques impliquent le MP-R:

• C2T1: $B_{11}^R = -\frac{m_{11}}{R_1} (1-7-3-3-7-1)$

$$B_{11}^{R'} = -\frac{m_{11}}{R_4} (1-14-8-6-6-8-14-1)$$

$$B_{22}^R = R_3 m_{22} (2-5-5-2)$$

• C2T2: $B_{121}^R = -\frac{m_{12} m_{21} R_3}{R_1} (1-2-5-5-2-1-7-3-3-7)$

$$B_{121}^{R'} = -\frac{m_{12} m_{21} R_3}{R_4} (1-2-5-5-2-1-14-8-6-6-8-14)$$

$$B_{11-22}^R = m_{11} m_{22} (1-14-8-9-2-2-9-8-14-1)$$

• C1T2: $B_{12}^R = -m_{21} (1-2-9-8-14)$

$$B_{21}^R = -m_{12} (2-1-14-8-9)$$

L'application de la règle de Mason à l'ensemble de ces boucles implique:

$$\begin{aligned} \Delta^R = & \det_{\{1,2\}} M \left\{ 1 + \frac{R_2}{R_1} \right\} \\ & + \det_{\{1\}} M \left\{ (-1)^1 [(R_3)] \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \right] \right\} \\ & + \det_{\{2\}} M \left\{ (-1)^1 \left[-\frac{1}{R_1} \right] [1] + (-1)^1 \left[-\frac{1}{R_4} \right] \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \right] \right\} \\ & + \det_{\{ \}} M \left\{ (-1)^2 \left[-\frac{1}{R_1} \right] (R_3) [1] + (-1)^2 \left[-\frac{1}{R_4} \right] (R_3) \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \right] + (-1)^1 [(1)] \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \right] \right\} \\ & + \det_{\{1,2\} \{ \}} M \left\{ (-1)^1 [(-1)] \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \right] \right\} \\ & + \det_{\{2,1\} \{ \}} M \left\{ (-1)^1 [(-1)] \left[1 + \frac{R_2}{R_1} \right] \right\} \end{aligned}$$

Aucune variable d'état n'étant associée au MP, tous les chemins causaux recherchés afin de déterminer les termes A_{ij}^R seront des chemins causaux entre deux éléments dynamiques 1-port en causalité intégrale. Ceux-ci pouvant être indirects (traversant des éléments dissipatifs uniquement), ils pourront impliquer le MP comme le montrent quelques exemples ci-après:

$$A_{13}^R = \frac{1}{\Delta^R} \{T_1 \delta_1^R + T_2 \delta_2^R\}$$

avec T_1 et T_2 les gains des deux chemins causaux allant de l'élément associé à la variable $x_i^3 = p_{12}$ (l'élément I_1) vers l'élément associé à la variable $\dot{x}_i^1 = \dot{q}_{10} = f_{10}$ (l'élément C_1).

Initialement le chemin causal part de l'élément I_1 suivant $Z_i^3 = f_{12}$

$$\diamond T_1 = \frac{m_{11}}{I_1 R_1} \text{ (12-8-14-1-1-7-3-3-10)} \quad \diamond \delta_1^R = 1$$

$$\diamond T_2 = -\frac{m_{12} m_{21} R_3}{I_1 R_1} \text{ (12-8-14-1-2-5-5-2-1-7-3-3-10)} \quad \diamond \delta_2^R = 1$$

$$A_{32}^R = \frac{1}{\Delta^R} \{T_1 \delta_1^R + T_2 \delta_2^R\}$$

avec T_1 et T_2 les gains des deux chemins causaux allant de l'élément associé à la variable $x_i^2 = q_{11}$ (l'élément C_2) vers l'élément associé à la variable $\dot{x}_i^3 = \dot{p}_{12} = e_{12}$ (l'élément I_1).

Initialement le chemin causal part de l'élément C_2 suivant $Z_i^2 = e_{11}$

$$\diamond T_1 = -\frac{m_{11} m_{22}}{C_2} \text{ (11-2-2-9-8-14-1-1-14-8-12)} \quad \diamond \delta_1^R = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$\diamond T_2 = \frac{m_{12}}{C_2} \text{ (11-2-1-14-8-12)} \quad \diamond \delta_2^R = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

2.2 Détermination de la matrice $[A^d]^{-1}$

Tout comme Δ^R pouvait être réduit à sa plus simple expression (son expression 1-port), lorsque le MP était un élément dynamique, c'est maintenant Δ^d qui peut être réduit à son expression 1-port. En effet, la présence d'un MP-R fait que tous les éléments dynamiques sont des éléments 1-port. Ni le MP, ni tout autre élément résistif n'intervient dans la détermination de Δ^d .

Concernant la détermination des différents termes de $[A^d]^{-1}$, la méthode ne varie pas. Celle-ci se basant sur une recherche de chemins causaux ne parcourant que des éléments dynamiques ne pourra en aucun cas impliquer le MP-R.

2.3. Détermination des matrices de commande, d'observation et de transmission

Tout comme pour la matrice A^R , le MP-R pourra être touché ou traversé par chacun des chemins causaux qui permettront de déterminer les différents coefficients des matrices B, C et D.

3. Bond graph comportant un élément dynamique MP avec causalité mixte

Considérons à titre d'exemple, l'élément dynamique multiport C en causalité mixte de la figure suivante:

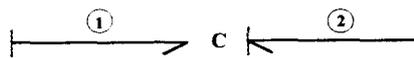


figure 3.6.

Cet élément est caractérisé par sa matrice M2 telle que: $\begin{pmatrix} e_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} = M2 \cdot \begin{pmatrix} f_1(s) \\ e_2(s) \end{pmatrix}$ avec

$$M2 = \begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{12}^* \\ m_{21}^* & m_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{s} & m_{12} \\ m_{21} & s \cdot m_{22} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons donc écrire:

$$\begin{cases} e_1(s) = \frac{m_{11}}{s} f_1(s) + m_{12} e_2(s) \\ f_2(s) = m_{21} f_1(s) + m_{22} s \cdot e_2(s) \end{cases} \quad (3.15.)$$

Afin de déterminer l'équation d'état d'un système comportant un élément multiport en causalité mixte, il est nécessaire dans un premier temps de s'intéresser à l'expression (3.15.). Celle-ci met directement en relation d'une part e_1 et e_2 donc Z_i et Z_d ($e_1 \in Z_i$ et $e_2 \in Z_d$) et d'autre part f_2 et f_1 donc \dot{x}_d et \dot{x}_i ($f_2 \in \dot{x}_d$ et $f_1 \in \dot{x}_i$). Aucune de ces relations ne pouvant être prise en compte par les matrices F_i ou F_d , celles-ci doivent obligatoirement figurer au sein de la matrice de structure.

Les termes diagonaux quant à eux, caractérisent d'une part, une relation entre e_1 et q_1 et d'autre part, une relation entre q_2 et e_2 (si on intègre la relation 3.15.). Ces termes peuvent donc toujours respectivement figurer dans les matrices F_i et F_d .

L'ensemble de ces relations nous incite à considérer l'élément multiport comme un élément de structure (valable également pour les MP dynamiques en causalité unique ou pour les MP-R) permettant de mettre en relation dans ce cas, d'une part, un élément 1-port en causalité intégrale et d'autre part, un élément 1-port en causalité dérivée.

Pour mettre en évidence cette décomposition, la figure 3.6. peut être modifiée. La matrice M2 étant généralement antisymétrique dans le cas d'un élément en causalité mixte, elle devient:

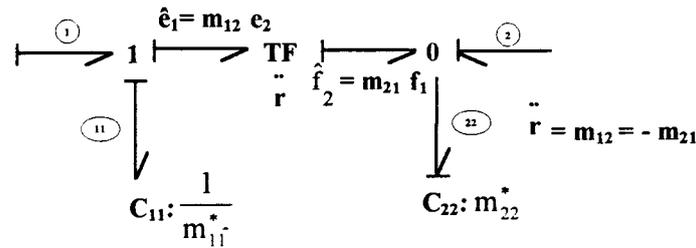


figure 3.7.

Cette figure constitue d'ailleurs le résultat présenté au chapitre IV concernant la décomposition d'un élément multiport à causalité mixte.

Considérons maintenant le bond graph de la figure suivante:

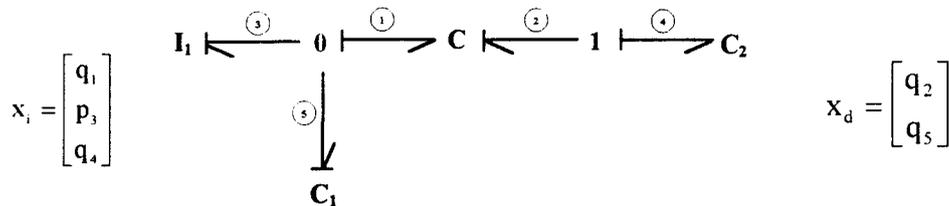


figure 3.8.

L'expression (3.15.) caractérise l'élément multiport. En remplaçant l'élément multiport par son bond graph équivalent (fig. 3.7.), nous obtenons la figure suivante:

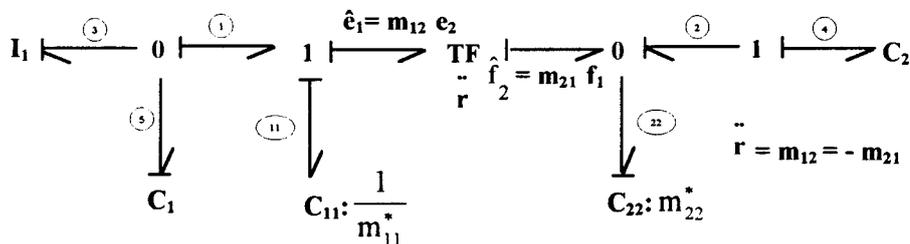


figure 3.9.

les vecteurs état deviennent:

$$x_i = \begin{bmatrix} q_{11} \\ p_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad x_d = \begin{bmatrix} q_{22} \\ q_5 \end{bmatrix}$$

Les relations suivantes peuvent alors être écrites:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^1 &= f_{11} = f_1 = -f_5 - f_3 = -\dot{x}_d^2 - Z_i^2 \\ \dot{x}_i^2 &= e_3 = e_1 = e_{11} + m_{12}e_2 = e_{11} - m_{12}e_4 = Z_i^1 - m_{12}Z_i^3 \\ \dot{x}_i^3 &= f_4 = f_2 = f_{22} + m_{21}f_1 = f_{22} + m_{21}(-f_5 - f_3) = \dot{x}_d^1 - m_{21}\dot{x}_d^2 - m_{21}Z_i^2 \\ Z_d^1 &= e_{22} = e_2 = -e_4 = -Z_i^3 \end{aligned}$$

$$Z_d^2 = e_5 = e_1 = Z_1^1 - m_{12} Z_1^3$$

d'où les matrices suivantes (S_{11} antisymétrique si $m_{12} = -m_{21}$):

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -m_{12} \\ 0 & -m_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -m_{21} \end{bmatrix} \quad S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -m_{12} \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \quad F_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{22}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix}$$

Il est alors possible d'utiliser les expressions (3.3.), (3.4.) et (3.5.) afin de déterminer les matrices A^R , $[A^d]^{-1}$ et B^R .

3.1. Détermination de la matrice A^R

L'expression (3.6.) peut être conservée. Les méthodes graphiques de détermination des termes de cette matrice peuvent l'être également. Quelques précisions doivent cependant être apportées. Ces précisions concernent les termes de la matrice qui impliquent au moins une variable associée à un lien en causalité intégrale du MP (les termes de la première ligne et de la première colonne dans le cas de la figure 3.8.) ou qui impliquent deux éléments 1-ports reliés causalement par le MP (les termes A_{ij}^R tels que $1 < i \leq 3$ et $1 < j \leq 3$ dans le cas de la figure 3.8.).

Nous proposons de traiter maintenant ces deux cas:

Remarque: L'absence d'élément 1-port résistif produit une annulation de tous les termes diagonaux de A^R et les termes Δ^R et δ^R sont alors égaux à 1.

- Au moins une variable associée à un lien en causalité intégrale du MP.

Concernant la figure 3.8., 4 termes de A^R sont concernés (A_{12}^R , A_{13}^R , A_{21}^R et A_{31}^R). Pour les deux premiers, nous recherchons des chemins causaux partant respectivement des éléments I_1 (associé à la variable $e_3 = \dot{x}_1^2$) et C_2 (associé à la variable $f_4 = \dot{x}_1^3$) et aboutissant au MP (suivant $f_1 = \dot{x}_1^1$). Il vient naturellement:

$$A_{12}^R = -\frac{1}{I_1} \quad (3-1) \quad \text{et} \quad A_{13}^R = 0$$

Remarque: Le seul chemin causal entre C_2 et le MP (via f_1) parcourt l'élément I_1 . Aucune autre variable en causalité intégrale n'étant autorisée lors de ce parcours, il vient $A_{13}^R = 0$. La

présence d'un élément résistif en parallèle sur I_1 (voir figures suivantes) aurait permis d'obtenir entre autre $A_{13}^R = \frac{m_{12}}{C_2 R}$ (4-2-8-7-1-6-6-1-11 fig. 3.10.b.) ou (4-2-1-6-6-1 fig. 3.10.a.). Dans ce cas, le MP peut donc être traversé car aucune autre variable appartenant à \dot{x}_i ou à \dot{x}_d n'est parcourue. Toujours en présence de l'élément résistif, nous aurions également obtenu $A_{11}^R = -\frac{m_{11}}{R}$ (11-1-6-6-1-11 fig. 3.10.b.) ou (1-6-6-1 fig. 3.10.a.) et $A_{33}^R = \frac{m_{12} m_{21}}{C_2 R}$ (4-2-8-7-1-6-6-1-7-8-2-4 fig. 3.10.b.) ou (4-2-1-6-6-1-2-4 fig. 3.10.a.). Pour A_{33}^R , les variables $\dot{x}_i^1 = f_{11}$ et $\dot{x}_d^1 = f_{22}$ ne sont pas parcourues sur la figure 3.10.b. alors que leurs variables correspondantes de la figure 3.10.a. le sont ($\dot{x}_i^1 = f_1$ et $\dot{x}_d^1 = f_2$) sur la figure 3.10.a.

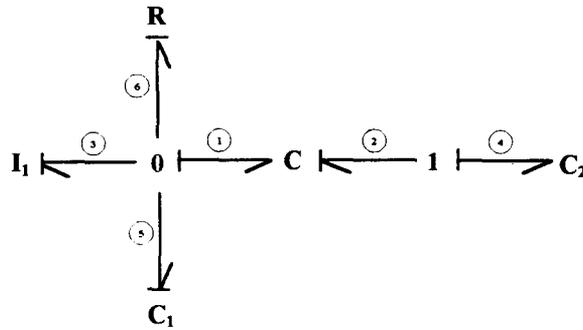


figure 3.10.a.

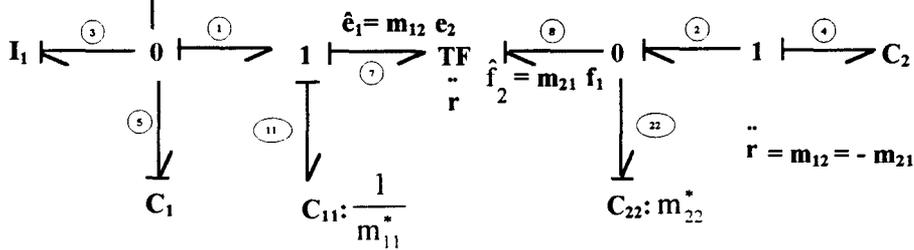


figure 3.10.b.

Cette constatation nous amène à la définition suivante:

Proposition 3.1.:

Dans le cas d'un MP en causalité mixte (fig. 3.6.), du fait de la structure apparaissant après décomposition de cet élément, tout chemin causal franchissant totalement cet élément multiport (quel que soit le sens) peut être retenu afin de calculer un terme de la matrice A^R .

Concernant la figure 3.8., les autres termes (A_{21}^R et A_{31}^R) valent:

$$A_{21}^R = m_{11} \quad (1-3)$$

Pour obtenir ce terme, nous recherchons le (ou les) chemin causal partant du MP via son lien en causalité intégrale (suivant $e_1=Z_1^1$) et aboutissant à l'élément (I_1) associé à la variable $e_3=\dot{x}_1^2$. Dans ce cas, un seul chemin causal existe.

$$A_{31}^R = 0$$

Nous recherchons le (ou les) chemin causal partant du MP via son lien en causalité intégrale (suivant $e_1=Z_1^1$) et aboutissant à l'élément (C_2) associé à la variable $f_4=\dot{x}_1^3$. Ce chemin ne doit pas parcourir d'autre variable en causalité intégrale. Il peut en revanche parcourir un élément résistif. Pour les mêmes raisons que précédemment, il n'existe pas de chemin causal respectant les conditions requises.

Dans le cas de la figure 3.10.a. (présence d'un élément résistif), ce terme A_{31}^R n'est pas nul. En effet, il existe un chemin causal partant du MP et aboutissant à l'élément C_2 (1-6-6-1-7-8-2-4). Ce chemin traverse le MP et il vient $A_{31}^R = -\frac{m_{11}m_{21}}{R}$.

Compte tenu des remarques précédentes, pour les termes A_{ij}^R tels que $1 < i \leq 3$ et $1 < j \leq 3$ issus de la figure 3.8., il vient:

$$A_{23}^R = -\frac{m_{12}}{C_2} \qquad A_{32}^R = -\frac{m_{21}}{I_1}$$

Dans le cas d'un MP en causalité mixte, les différents termes de la matrice A^R se déterminent donc comme dans le cas d'un MP en causalité unique. Il est seulement nécessaire de tenir compte de la proposition 3.1.

3.2. Détermination de la matrice $[A^d]^{-1}$

Tout comme pour la matrice A^R , les différents termes de la matrice $[A^d]^{-1}$ se déterminent comme ceux issus d'un bond graph comportant un élément dynamique en causalité unique. La proposition 3.1. doit cependant être prise en compte.

Considérons donc le bond graph de la figure suivante:

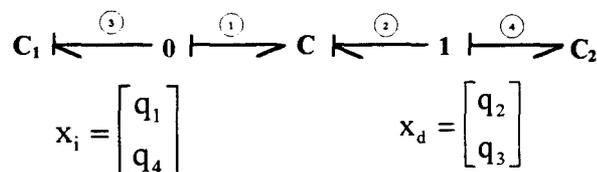


figure 3.11.

Deux boucles causales I-D C2T1 existent et leurs gains sont les suivants:

$$B_{11} = -m_{11}^* C_1 s = -\frac{m_{11}}{s} C_1 s = -m_{11} C_1 \quad (1-3-3-1)$$

$$B_{22} = -\frac{m_{22}^*}{C_2 s} = -\frac{m_{22} s}{C_2 s} = -\frac{m_{22}}{C_2} \quad (2-4-4-2)$$

Une seule boucle causale I-D C2T2 existe et son gain est le suivant:

$$B_{121} = \frac{m_{12} m_{21} C_1}{C_2} \quad (3-1-2-4-4-2-1-3)$$

L'application de la règle de Mason concernant les précédentes boucles causales engendre:

$$\Delta^d = 1 - [B_{11} + B_{22} + B_{121}] + [B_{11} B_{22}]$$

ce qui donne:

$$\Delta^d = 1 + m_{11} [C_1] + m_{22} \left[\frac{1}{C_2} \right] + m_{11} m_{22} \left[\frac{C_1}{C_2} \right] - m_{12} m_{21} \left[\frac{C_1}{C_2} \right]$$

Cette dernière expression peut donc s'écrire à l'aide de l'expression (2.49.):

$$\begin{aligned} \Delta^d &= \det_{\{1,2\}} M2 \cdot \underbrace{\{1\}}_{\delta_0^d} \\ &+ \det_{\{1\}} M2 \left\{ (-1)^1 \left[-\frac{1}{C_2 s} \right] \cdot [1] \right\} \\ &+ \det_{\{2\}} M2 \left\{ (-1)^1 [-C_1 s] \cdot [1] \right\} \\ &+ \det_{\{ \}} M2 \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_2 s} \right) (-C_1 s) \right] [1] \right\} \end{aligned}$$

δ_0^d constitue le déterminant de Mason obtenu avec les boucles causales I-D C0 de la figure 3.11.

⇒ D'après les définitions données précédemment, les différents termes diagonaux (notés Γ_{ii}^d) de la matrice $[A^d]^{-1}$ se déterminent de la même manière que Δ^d ; les boucles alors impliquées ne doivent cependant pas parcourir la variable \dot{x}_i^1 .

Concernant la figure 3.11., il vient entre autres:

- $\Gamma_{11}^d = \Delta^d$ avec interdiction de parcourir $\dot{x}_1^1 = \dot{q}_1 = f_1$

Nous obtenons donc:
$$\left[A^d \right]_{11}^{-1} = \frac{\Gamma_{11}^d}{\Delta^d}$$

et:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^d &= \det_{\{1,2\}} M2 \cdot \underbrace{\{1\}}_{\delta_0^d} \\ &+ \det_{\{1\}} M2 \left\{ (-1)^1 \left[-\frac{1}{C_2 s} \right] [1] \right\} \\ &+ \det_{\{2\}} M2 \{0\} \\ &- \frac{m_{12} m_{21} C_1}{C_2} \end{aligned}$$

- $\Gamma_{22}^d = \Delta^d$ avec interdiction de parcourir $\dot{x}_1^2 = \dot{q}_3 = f_3$

Nous obtenons donc:
$$\left[A^d \right]_{22}^{-1} = \frac{\Gamma_{22}^d}{\Delta^d}$$

$$\Gamma_{22}^d = \det_{\{1,2\}} M2 \cdot \underbrace{\{1\}}_{\delta_0^d}$$

et:
$$\begin{aligned} &+ \det_{\{1\}} M2 \cdot \left\{ (-1)^1 \left[-\frac{1}{C_2 s} \right] [1] \right\} \\ &+ \det_{\{2\}} M2 \cdot \{0\} \end{aligned}$$

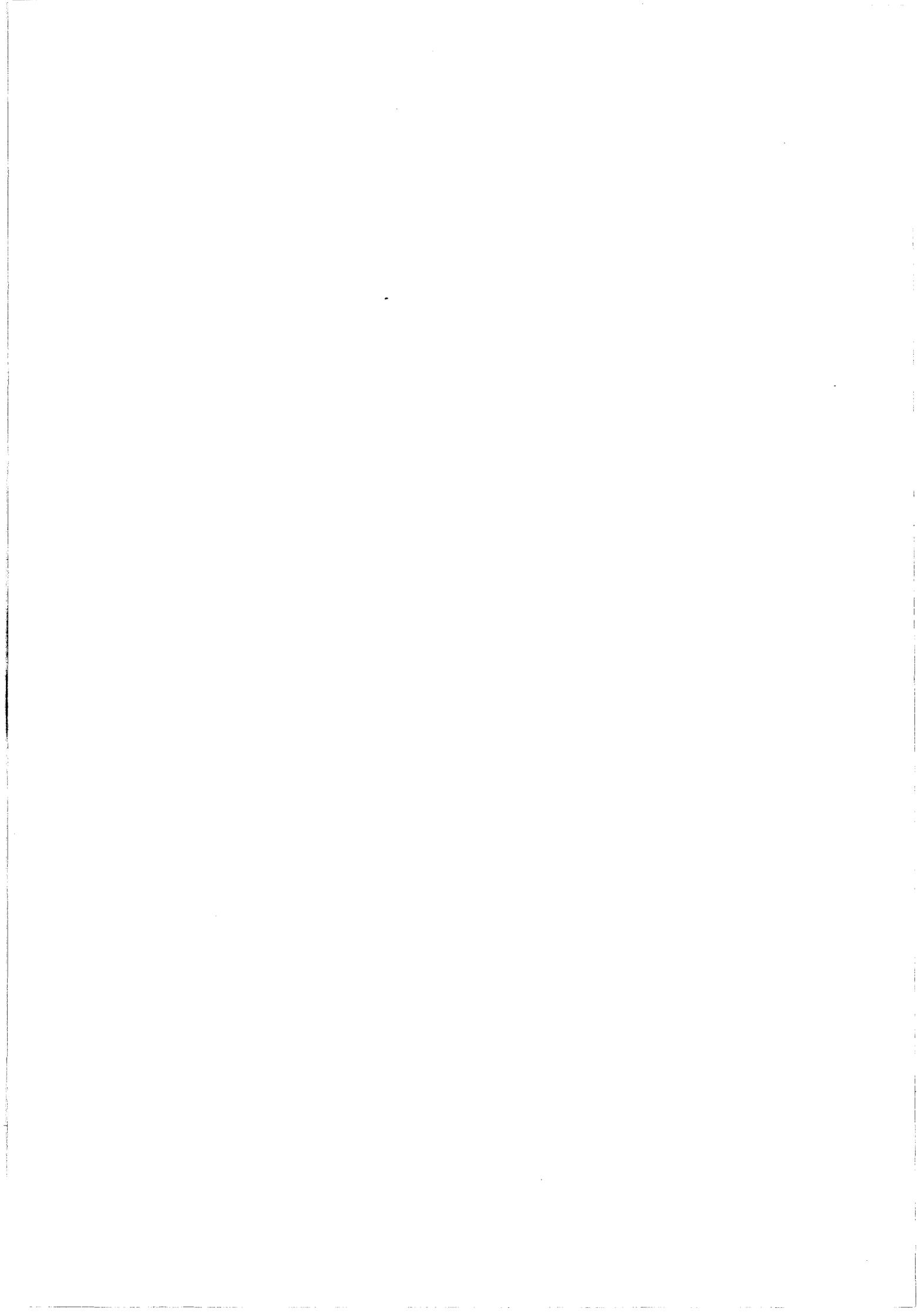
3.3. Détermination des matrices de commande, d'observation et de transmission

La détermination de ces matrices est également identique à celle présentée pour les éléments multiports dynamiques à causalité unique. Les remarques avancées précédemment sont cependant à respecter.

CONCLUSION

La détermination formelle de l'équation d'état d'un modèle bond graph constitué d'un ou plusieurs éléments multiports s'apparente fortement à celle concernant les modèles bond graphs 1-port. Nous avons successivement traité les éléments multiports dynamiques à causalité unique puis les éléments multiports résistifs et enfin les éléments multiports dynamiques à causalité mixte. L'élément multiport engendre cependant quelques modifications dans le parcours du modèle bond graph.





CHAPITRE IV

METHODES DE DECOMPOSITION DES ELEMENTS MULTIPORTS

INTRODUCTION

Différentes méthodes de décomposition d'un élément linéaire multiport dans un modèle bond graph ont déjà été étudiées. Dans le cadre de ce chapitre, nous proposons dans un premier temps, de rappeler brièvement ces méthodes. Nous proposerons ensuite une méthode nommée méthode récurrente permettant de décomposer successivement un élément multiport de dimension m en m éléments 1-port en utilisant de façon intermédiaire des éléments multiports de dimension comprise entre $m-1$ et 2. Cette présentation s'effectuera dans un premier temps sur un élément de dimension 3 puis sera généralisée à un élément multiport de dimension quelconque.

1. Méthodes existantes

Deux principales méthodes de décomposition d'un élément multiports ont été étudiées de façon très générale pour des éléments linéaires m -ports [Breedveld 1984] et d'une manière plus explicite pour des éléments linéaires deux-ports [Breedveld 1995] (méthodes canoniques directe et congruente). Nous proposons dans un premier temps, de les présenter et de les généraliser pour un élément trois-ports.

1.1. Méthode canonique directe

Considérons à titre d'exemple et sans perte de généralité les éléments capacitifs deux et trois-ports donnés figure 4.1. et 4.2., en causalité intégrale, ainsi que leurs matrices caractéristiques respectives $M2$ et $M3$.



figure 4.1. : Élément C deux-ports

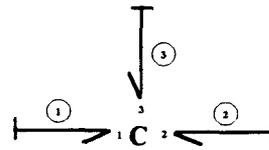


figure 4.2. : Élément C trois-ports

Les lois élémentaires qui caractérisent ces éléments s'écrivent:

$$\begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{pmatrix} = M2 \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \end{pmatrix} = M3 \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ f_3(s) \end{pmatrix} \quad \left(\frac{f(s)}{s} = q(s) \right) \quad (4.1.)$$

avec: $M2 = \begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{12}^* \\ m_{21}^* & m_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{s} & \frac{m_{12}}{s} \\ \frac{m_{21}}{s} & \frac{m_{22}}{s} \end{bmatrix}$ et $M3 = \begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{12}^* & m_{13}^* \\ m_{21}^* & m_{22}^* & m_{23}^* \\ m_{31}^* & m_{32}^* & m_{33}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{s} & \frac{m_{12}}{s} & \frac{m_{13}}{s} \\ \frac{m_{21}}{s} & \frac{m_{22}}{s} & \frac{m_{23}}{s} \\ \frac{m_{31}}{s} & \frac{m_{32}}{s} & \frac{m_{33}}{s} \end{bmatrix}$

La décomposition canonique directe d'un élément deux-ports [Breedveld 1984] peut être effectuée sous certaines conditions mathématiques qui sont:

$$\left. \begin{aligned} M2 &= M2^t \\ m_{ij} &\neq 0 \\ \left(m_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 m_{ij} \right) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \forall i \neq j / i, j \in \{1, 2\} \tag{4.2.}$$

Dans ce cas, le bond graph de la figure 4.1. devient:

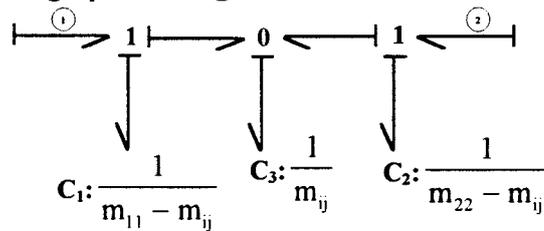


figure 4.3.1. : Décomposition d'un élément deux-ports en causalité unique intégrale

Cette décomposition peut être menée pareillement sur un élément MP en causalité unique dérivée. Le bond graph résultant de cette décomposition est alors le suivant:

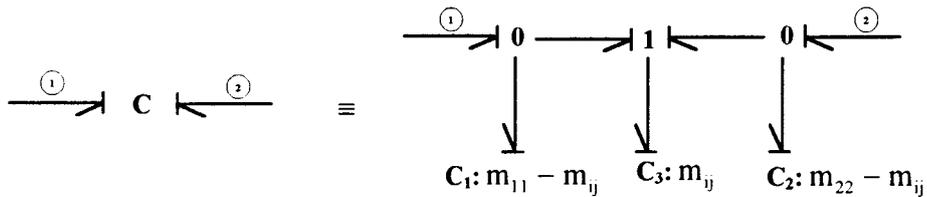


figure 4.3.2. : Décomposition d'un élément deux-ports en causalité unique dérivée

Les conditions mathématiques de l'expression (4.2.) peuvent être étendues à un élément multiports de dimension supérieure. Celles-ci deviennent:

$$\left. \begin{array}{l} M3 = M3^t \\ m_{ij} \neq 0 \\ \left(m_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 m_{ij} \right) \neq 0 \end{array} \right\} \forall i \neq j / i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (4.3.)$$

Dans ce cas, les équations issues de (4.1.) peuvent être réécrites de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= m_{11}q_1 + m_{12}q_2 + m_{13}q_3 \\
 \text{ou } e_1 &= (m_{11} - m_{12} - m_{13})q_1 + m_{12}(q_1 + q_2) + m_{13}(q_1 + q_3) \\
 \text{ou } e_1 &= e_{C_1} + e_{C_{12}} + e_{C_{13}}
 \end{aligned} \quad (4.4.)$$

De même:

$$\begin{aligned}
 e_2 &= m_{21}q_1 + m_{22}q_2 + m_{23}q_3 \\
 \text{ou } e_2 &= m_{21}(q_1 + q_2) + (m_{22} - m_{21} - m_{23})q_2 + m_{23}(q_2 + q_3) \\
 \text{ou } e_2 &= e_{C_{12}} + e_{C_2} + e_{C_{23}}
 \end{aligned} \quad (4.5.)$$

et encore:

$$\begin{aligned}
 e_3 &= m_{31}q_1 + m_{32}q_2 + m_{33}q_3 \\
 \text{ou } e_3 &= m_{31}(q_1 + q_3) + m_{32}(q_2 + q_3) + (m_{33} - m_{31} - m_{32})q_3 \\
 \text{ou } e_3 &= e_{C_{13}} + e_{C_{23}} + e_{C_3}
 \end{aligned} \quad (4.6.)$$

Les expressions (4.4.), (4.5.) et (4.6.) permettent ainsi de modifier le modèle bond graph de l'élément C trois-ports (figure 4.2.) de la façon suivante:

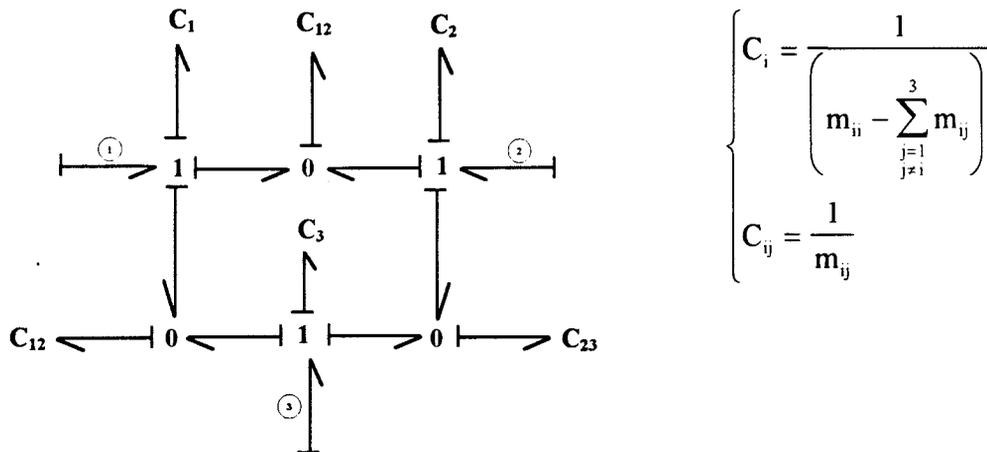


figure 4.4. : Décomposition d'un élément C trois-ports

De la même façon que pour l'élément deux-ports, il est possible de décomposer un élément trois-ports en causalité unique dérivée.

Cette méthode de décomposition possède deux inconvénients majeurs. Le premier est que la dimension du modèle bond graph obtenu ne correspond pas à celle du modèle initial (Nous passons ici d'un ordre 2 à un ordre 3 puis d'un ordre 3 à un ordre 6 et d'un ordre n à un ordre $[n+n(n+1)/2]$ en général). Le second est que suivant la valeur des différents termes m_{ij} , certaines valeurs de capacités peuvent être négatives et n'avoir, par conséquent, aucune signification physique.

1.2. Méthode canonique congruente

Une seconde méthode appelée "méthode canonique congruente" [Breedveld 1984] peut être appliquée sur les éléments multiports des figures 4.1. et 4.2..

A l'aide de l'expression (4.1.), la variable e_2 associée au port 2 de la figure 4.1. s'écrit:

$$e_2 = m_{21}q_1 + m_{22}q_2$$

qui peut encore s'écrire:

$$e_2 = e_{c_2} = m_{22} \left[q_2 + \underbrace{\frac{m_{21}}{m_{22}}}_{q_2} q_1 \right] = m_{22} q_{c_2}$$

d'où le bond graph présenté figure 4.5.:

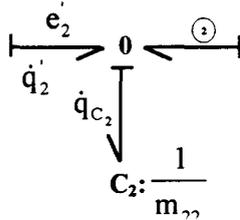


figure 4.5.

Nous pouvons également écrire:

$$e_1 = m_{11}q_1 + m_{12}q_2$$

ou encore:

$$e_1 = m_{11}q_1 + m_{12}q_{c_2} - \frac{m_{12}m_{21}}{m_{22}}q_1$$

ce qui donne:

$$e_1 = \underbrace{m_{12}q_{c_2}}_{e_1} + \underbrace{\frac{\det M2}{m_{22}}}_{e_{c_1}} q_1$$

d'où le bond graph présenté figure 4.6.:

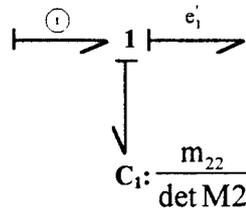


figure 4.6.

Comme $q_1' = q_1$, nous pouvons écrire $q_2' = \frac{m_{21}}{m_{22}} q_1' = \frac{m_{21}}{m_{22}} q_1$. Les figures 4.5. et 4.6.

peuvent donc se rassembler:

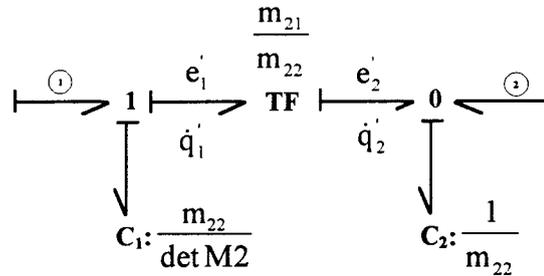


figure 4.7.1. : décomposition du élément C deux-ports en causalité unique intégrale

La figure précédente vérifie également l'égalité suivante:

$$e_1' = \frac{m_{21}}{m_{22}} e_2' = \frac{m_{21}}{m_{22}} e_{C_2} = \frac{m_{21}}{m_{22}} m_{22} q_{C_2} = m_{21} q_{C_2} = m_{12} q_{C_2} \text{ si } M2 = M2'$$

Plus généralement, la décomposition congruente d'un élément deux-ports nécessite les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} M2 &= M2' \\ \exists i / m_{ii} &\neq 0 \\ \det M2 &\neq 0 \end{aligned} \tag{4.7.}$$

Les précédents propos ont donc été établis pour $i=2$.

Tout comme pour la méthode canonique directe, il est possible d'utiliser cette méthode congruente sur un élément MP en causalité unique dérivée. Les conditions requises sont M2 symétrique et $m_{ii} \neq 0$ (avec $i=1$ ou 2 ($i=2$ ici)). Le bond graph résultant de cette décomposition est le suivant:

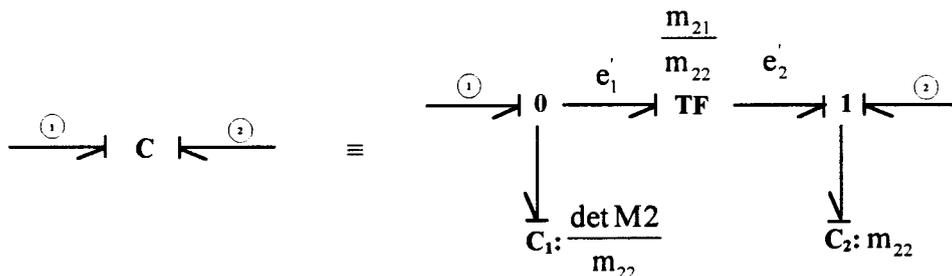


figure 4.7.2. : décomposition du élément C deux-ports en causalité unique dérivée

Cette méthode permet également de décomposer un élément deux-ports à causalité mixte. Les conditions mathématiques de faisabilité de cette décomposition varient cependant car la matrice M2 doit dans ce cas, être antisymétrique. Le bond graph résultant de cette méthode est le suivant:

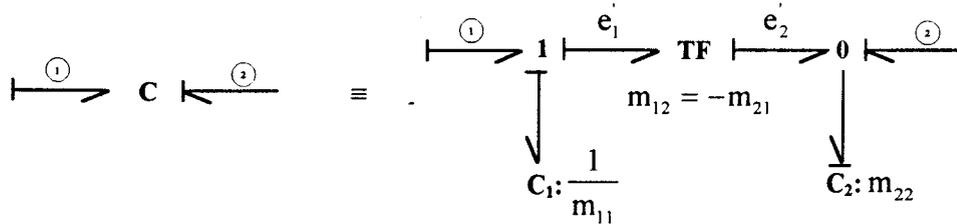


figure 4.7.3. : décomposition du élément C deux-ports en causalité mixte

Cette méthode de décomposition congruente peut être appliquée de la même façon que précédemment sur un élément trois-ports. Concernant la figure 4.2., il vient:

$$e_2 = m_{21}q_1 + m_{22}q_2 + m_{23}q_3$$

$$\text{soit: } e_2 = e_{C_2} = m_{22} \left[q_2 + \underbrace{\frac{m_{21}}{m_{22}}}_{q'} q_1 + \underbrace{\frac{m_{23}}{m_{22}}}_{q''} q_3 \right] = m_{22} q_{C_2} \quad (4.8.)$$

d'où le bond graph présenté figure 4.8.:

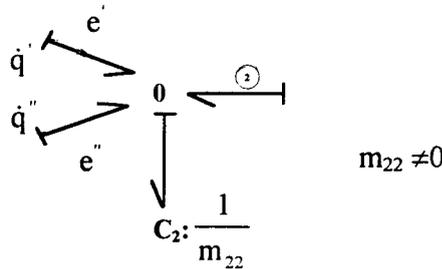


figure 4.8.

Il est également possible d'écrire:

$$e_1 = m_{11}q_1 + m_{12}q_2 + m_{13}q_3$$

$$\text{soit: } e_1 = m_{11}q_1 + m_{12}q_{C_2} + m_{13}q_3 - \frac{m_{12}m_{21}}{m_{22}}q_1 - \frac{m_{12}m_{23}}{m_{22}}q_3$$

$$\text{soit: } e_1 = m_{12}q_{C_2} + \frac{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}{m_{22}}q_1 + \frac{m_{13}m_{22} - m_{12}m_{23}}{m_{22}}q_3 \quad (4.9.)$$

Notons:

- $\det_{\{3\}} M3$, déterminant de la matrice issue de la matrice M3 privée de sa ligne 3 et de sa colonne 3 soit $\det_{\{3\}} M3 = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$

- $\det_{[3,1]\{\}} M3$, déterminant de la matrice issue de la matrice M3 privée de sa ligne 3 et de sa colonne 1. L'ensemble vide indique qu'aucun couple [ligne k, colonne k] ($k \neq 3$; $k \neq 1$) n'est préalablement à supprimer dans M3. Il vient donc: $\det_{[3,1]\{\}} M3 = m_{12}m_{23} - m_{13}m_{22}$

L'équation (4.9.) se réécrit alors:

$$e_1 = \underbrace{m_{12}q_{C_2}}_{e_1'} + \underbrace{\frac{\det_{\{3\}} M3}{m_{22}} q_1}_{e_{C_1}} - \underbrace{\frac{\det_{[3,1]\{\}} M3}{m_{22}} q_3}_{e_1''}$$

ce qui correspond au bond graph suivant:

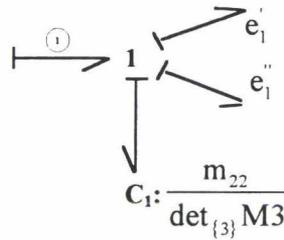


figure 4.9.

Nous pouvons procéder de la même façon pour e_3 :

$$e_3 = m_{31}q_1 + m_{32}q_{C_2} + m_{33}q_3 - \frac{m_{32}m_{21}}{m_{22}}q_1 - \frac{m_{32}m_{23}}{m_{22}}q_3$$

soit:
$$e_3 = m_{32}q_{C_2} + \frac{m_{31}m_{22} - m_{32}m_{21}}{m_{22}}q_1 + \frac{m_{33}m_{22} - m_{32}m_{23}}{m_{22}}q_3 \quad (4.10.)$$

ce qui donne, en notant:

- $\det_{\{1\}} M3 = m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}$
- $\det_{[1,3]\{\}} M3 = m_{21}m_{32} - m_{31}m_{22}$

l'expression suivante:

$$e_3 = \underbrace{m_{32}q_{C_2}}_{e_3'} - \underbrace{\frac{\det_{[1,3]\{\}} M3}{m_{22}} q_1}_{e_3} + \underbrace{\frac{\det_{\{1\}} M3}{m_{22}} q_3}_{e_{C_3}}$$

ce qui correspond au bond graph suivant:

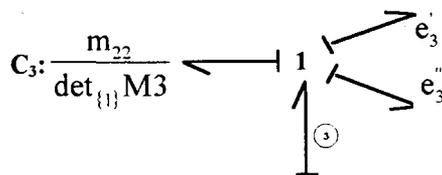


figure 4.10.

D'après les expressions (4.8.) et (4.9.), il vient:

$$q' = \frac{m_{21}}{m_{22}} q_1 = r_{12} q_1$$

$$\text{et } e_1' = m_{12} q_{C_2} = \frac{m_{12}}{m_{22}} m_{22} q_{C_2} = \frac{m_{12}}{m_{22}} e_{C_2} = r_{12} e_{C_2} \text{ si } m_{12} = m_{21}$$

d'où le bond graph présenté figure suivante:

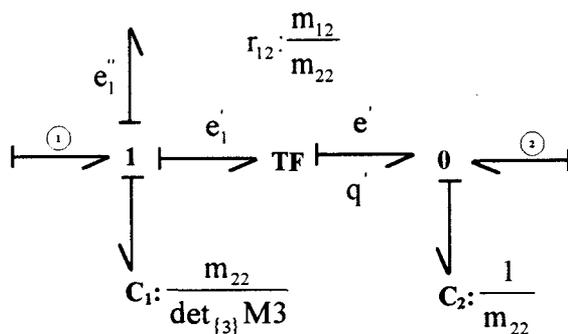


figure 4.11.

De même, d'après les expressions (4.8.) et (4.10.), nous avons:

$$q'' = \frac{m_{23}}{m_{22}} q_3 = r_{23} q_3$$

$$\text{et } e_3' = m_{32} q_{C_2} = \frac{m_{32}}{m_{22}} m_{22} q_{C_2} = \frac{m_{32}}{m_{22}} e_{C_2} = r_{23} e_{C_2} \text{ si } m_{23} = m_{32}$$

d'où le bond graph présenté figure suivante:

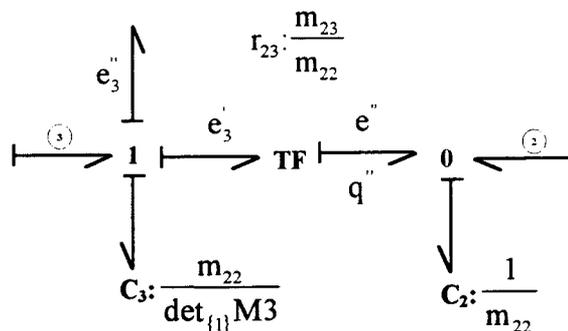


figure 4.12.

Les figures 4.11. et 4.12. peuvent être réunies et forment le bond graph suivant :

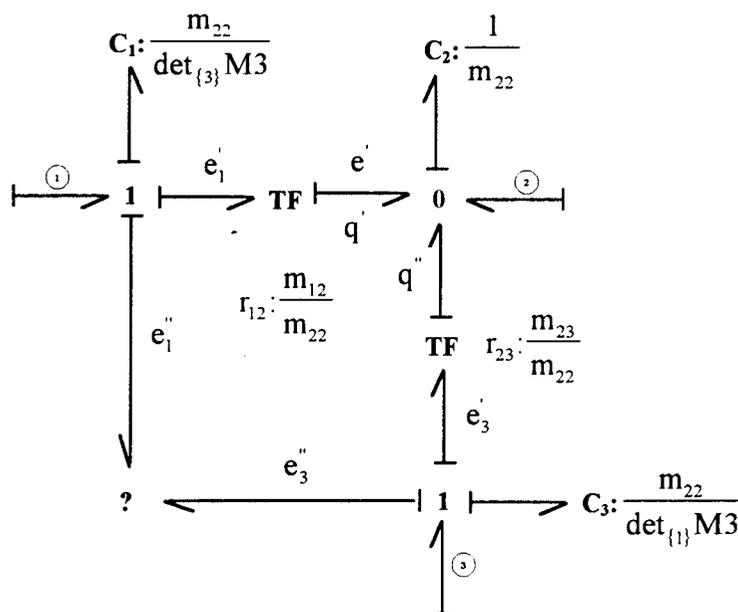


figure 4.13.

Nous avons:
$$e_1'' = \frac{m_{13}m_{22} - m_{12}m_{23}}{m_{22}} q_3 = -\frac{\det_{[3:1]\{\}} M}{m_{22}} q_3 = r' q_3$$

et
$$e_3'' = \frac{m_{31}m_{22} - m_{32}m_{21}}{m_{22}} q_1 = -\frac{\det_{[1:3]\{\}} M}{m_{22}} q_1 = r'' q_1$$

Si nous pouvons écrire $r' = -r''$, alors nous aurions:

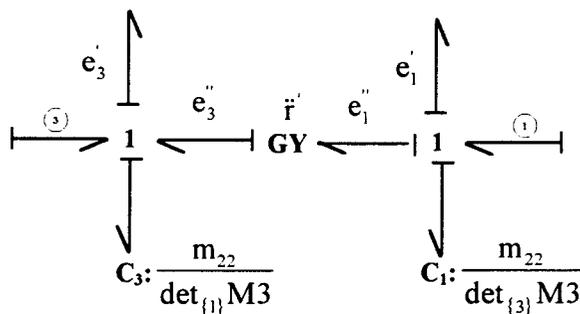


figure 4.14.

Or, si M3 est un matrice symétrique, il vient $r' = r''$.

En reproduisant les calculs de la méthode congruente effectués pour un élément de dimension 2, nous ne pouvons donc pas décomposer directement un multiport de dimension 3 en trois éléments 1-port. Nous proposons d'aborder le problème différemment en introduisant un élément multiport de dimension inférieure à celle de l'élément de départ.

1.3. Méthode récurrente

1.3.1. Détails de la méthode

Nous montrons dans ce paragraphe, qu'il est possible de décomposer un élément trois-ports, d'abord en un élément deux-ports associé à un élément un-port et ensuite, en trois éléments un-port [Kubiak 1995]. L'application de cette méthode est réalisable quand certaines conditions sur la matrice caractéristique de l'élément multiport sont vérifiées. L'expression formelle du paramètre de chaque élément un-port introduit peut être donnée automatiquement.

D'après les expressions (4.9.) et (4.10.), nous avons:

$$e_1 = e'_1 + \hat{e}_1 \text{ avec } \hat{e}_1 = \frac{\det_{\{3\}} M3}{m_{22}} q_1 - \frac{\det_{\{3,1\}} M3}{m_{22}} q_3 \quad (4.11.)$$

$$e_3 = e'_3 + \hat{e}_3 \text{ avec } \hat{e}_3 = \frac{\det_{\{1\}} M3}{m_{22}} q_3 - \frac{\det_{\{1,3\}} M3}{m_{22}} q_1 \quad (4.12.)$$

Proposition 4.1.:

Afin de tenir compte des relations mathématiques liant les entrées 1 et 3, nous proposons d'introduire un élément multiport de dimension 2 d'où le bond graph présenté figure 4.15.:

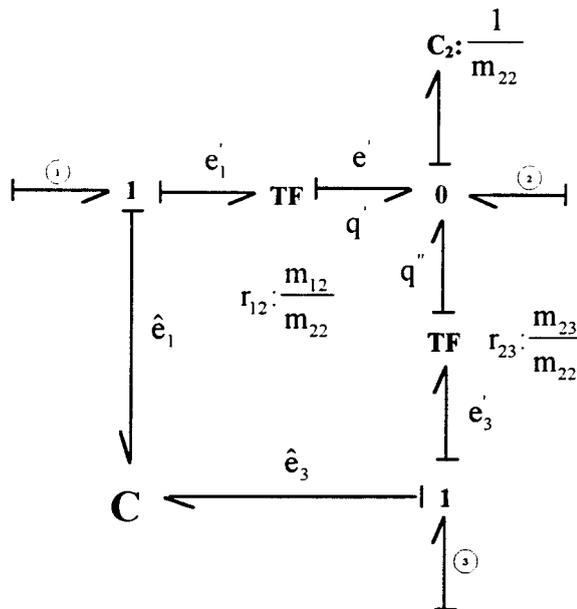


figure 4.15.

La matrice M2 caractérisant l'élément multiports de dimension 2 est la suivante:

$$M2 = \frac{1}{m_{22}} \begin{bmatrix} \det_{\{3\}} M3 & -\det_{\{3,1\}} M3 \\ -\det_{\{1,3\}} M3 & \det_{\{1\}} M3 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = M2 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (4.13.)$$

Les seules conditions requises depuis le début de cette décomposition sont donc:

$$\begin{cases} M3 = M3^t \\ m_{22} \neq 0 \end{cases} \quad (4.14.)$$

Nous noterons désormais la matrice M2 de la manière suivante:

$$M2 = \begin{bmatrix} m_{11}' & r' \\ -r'' & m_{22}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}' & m_{12}' \\ m_{21}' & m_{22}' \end{bmatrix}$$

Nous avons vu que la condition "M3 symétrique" permettait d'écrire $r' = r''$. La matrice M2 est donc également symétrique. La méthode congruente présentée ci-avant dans le cas d'un deux-ports, peut alors, sous certaines conditions mathématiques (voir expression (4.7.)), être réutilisée.

Nous avons choisi de démarrer la décomposition du trois-ports suivant sa deuxième entrée car nous avons supposé m_{22} non nul (figure 4.8.). Il aurait été possible de travailler identiquement sur l'une des deux autres entrées (si m_{11} ou $m_{33} \neq 0$).

Pour décomposer maintenant l'élément 2-ports, nous supposons par exemple $m_{22}' \neq 0$. Les expressions (4.11.) et (4.12.) peuvent être réécrites de la façon suivante:

$$\hat{e}_3 = m_{22}' \left[q_3 + \frac{m_{21}'}{m_{22}'} q_1 \right] = m_{22}' q_{C_3} = e_{C_3}$$

$$\hat{e}_1 = m_{11}' q_1 + m_{12}' \left(q_3 + \frac{m_{21}'}{m_{22}'} q_1 \right) - \frac{m_{12}' m_{21}'}{m_{22}'} q_1$$

$$\hat{e}_1 = m_{12}' q_{C_3} + \frac{\det M2}{m_{22}'} q_1 \quad \hat{e}_1 = \ddot{e}_1 + e_{C_1}$$

Les expressions précédentes nous permettent de déduire le bond graph présenté figure 4.16.:

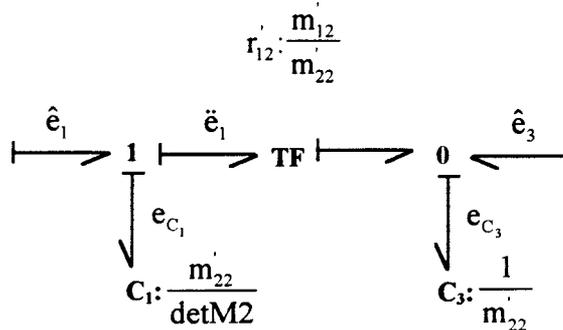


figure 4.16.

Les seules conditions requises depuis le début de cette seconde décomposition sont

donc:

$$\begin{cases} \det M2 \neq 0 \\ m'_{22} \neq 0 \end{cases}$$

Or $\det M2 = \frac{\det M3}{m_{22}}$ et $m'_{22} = \frac{\det_{\{1\}} M3}{m_{22}}$.

Les conditions requises depuis le début de la décomposition de l'élément 3-ports sont donc:

$$\begin{cases} M3 = M3^t \\ m_{22} \neq 0 \text{ et } m_{22} = \det_{\{1,3\}} M3 \\ \det_{\{1\}} M3 \neq 0 \\ \det M3 \neq 0 \end{cases} \quad (4.15.)$$

Il est ainsi possible de décomposer un élément 3-ports lorsque le déterminant de sa matrice caractéristique est non nul mais également lorsqu'il existe au moins un mineur d'ordre 2 et un mineur d'ordre 1 non nuls. Les mineurs successifs intéressés dépendent du premier port de l'élément 3-ports sur lequel nous choisissons d'introduire une jonction 0 (le port 2 ici).

En général, pour un élément 3-ports dont les ports sont indicés 1, 2 et 3, il faut:

$$\det M3 = \det_{\{1\}} M3 \neq 0 \quad (4.16.)$$

$$m_{ii} = \det_{\{j,k\}} M3 \neq 0 \text{ et } \left(\det_{\{j\}} M3 \text{ ou } \det_{\{k\}} M3 \right) \neq 0$$

avec $i, j \text{ et } k \in \{1,2,3\}$ et $i \neq j$; $i \neq k$; et $j \neq k$ (4.17)

L'association des figures 4.15. et 4.16. conduit au modèle bond graph définitif de la figure 4.17. correspondant à l'élément 3-ports décomposé.

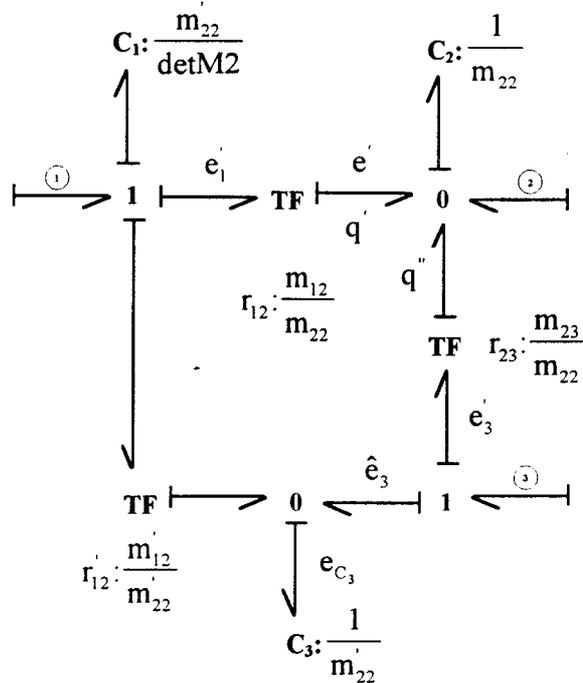


figure 4.17.

De la même façon que pour la méthode congruente concernant les éléments deux-ports, cette méthode de décomposition récurrente peut être également appliquée sur des éléments 3-ports à causalité unique dérivée ou à causalité mixte. Nous proposons maintenant de présenter rapidement ces résultats.

Dans le cas d'une causalité unique dérivée sur les liens du MP (fig. 4.18.), la première décomposition s'effectuant suivant le deuxième port du MP (on suppose $m_{22} \neq 0$), le bond graph résultant de cette première décomposition est donné figure 4.19.:

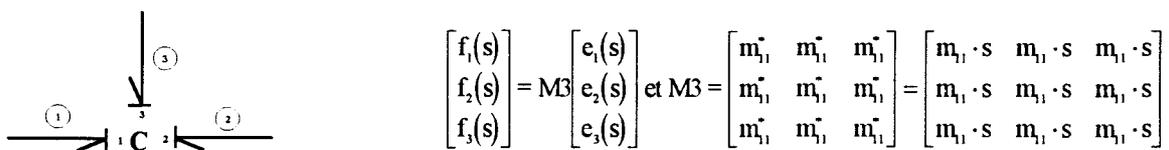


figure 4.18. : Élément C trois-ports en causalité unique dérivée

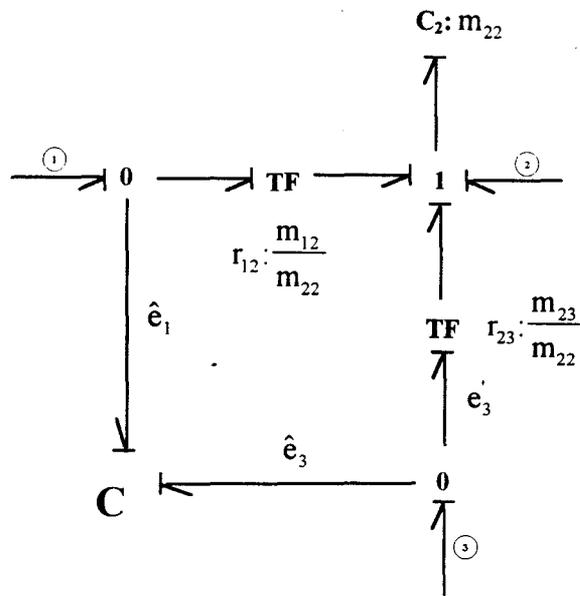


figure 4.19.

avec:
$$M2 = \begin{bmatrix} m'_{11} & r \\ r & m'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} \\ m'_{21} & m'_{22} \end{bmatrix}$$

et:
$$m'_{11} = \frac{1}{m_{22}} (m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}) = \frac{1}{m_{22}} \det_{\{3\}} M3$$

$$m'_{22} = \frac{1}{m_{22}} (m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}) = \frac{1}{m_{22}} \det_{\{1\}} M3$$

$$m'_{12} = -\frac{1}{m_{22}} (m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13}) = -\frac{\det_{[3,1]\{ \}} M3}{m_{22}}$$

$$m'_{21} = -\frac{1}{m_{22}} (m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) = -\frac{\det_{[1,3]\{ \}} M3}{m_{22}}$$

Les conditions nécessaires à cette première décomposition sont:

$$\begin{cases} M3 = M3^t \\ m_{22} \neq 0 \text{ et } m_{22} = \det_{\{1,3\}} M3 \end{cases} \quad (4.18)$$

Il est alors possible d'appliquer la décomposition congruente sur l'élément 2-ports présentée fig. 4.7.2.. Le bond graph final est présenté fig. 4.20.:

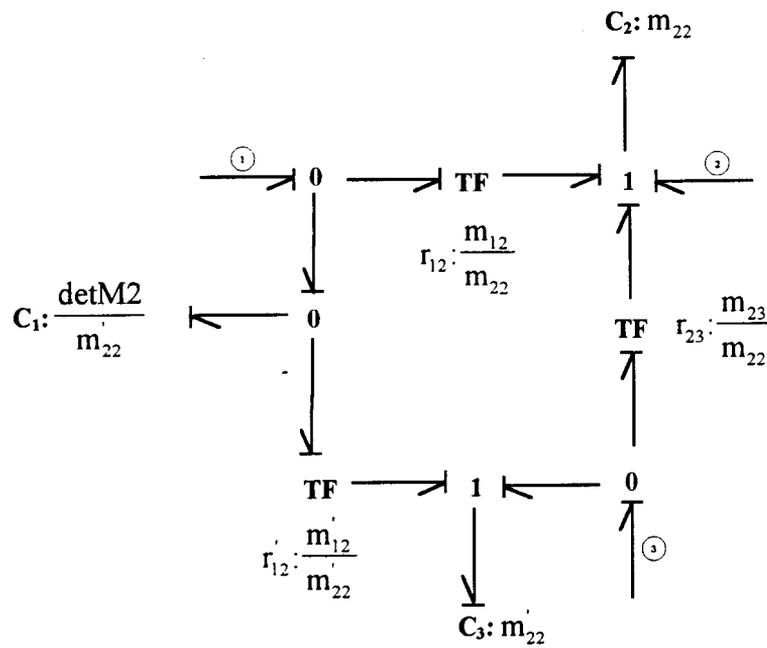


figure 4.20.

Les conditions finales nécessaires à cette première décomposition sont donc:

$$\begin{cases} M3 = M3^t \\ m_{22} \neq 0 \text{ et } m_{22} = \det_{\{1,3\}} M3 \\ m_{22} = \det_{\{1\}} M3 \neq 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Dans le cas d'une causalité mixte sur les liens du MP, deux cas peuvent apparaître (fig. 4.21.a. et 4.21.b.).

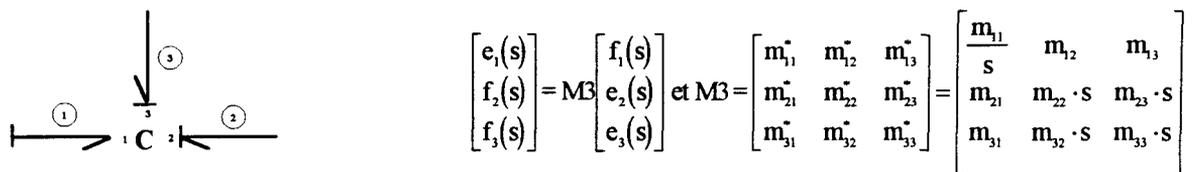


figure 4.21.a. : Élément C trois-ports en causalité mixte

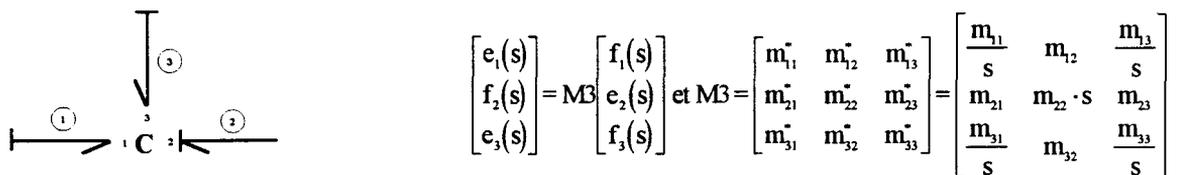


figure 4.21.b. : Élément C trois-ports en causalité mixte

Concernant la figure 4.21.a., la première décomposition s'effectue suivant le premier port de l'élément MP (le seul en causalité intégrale). Cette décomposition revient à effectuer deux décompositions congruentes sur des éléments deux-ports à causalité mixte (comme fig.

4.7.3.) situés pour le premier, entre le port 1 et le port 3 et pour le second, entre le port 1 et le port 2. Cette décomposition produit le bond graph suivant:

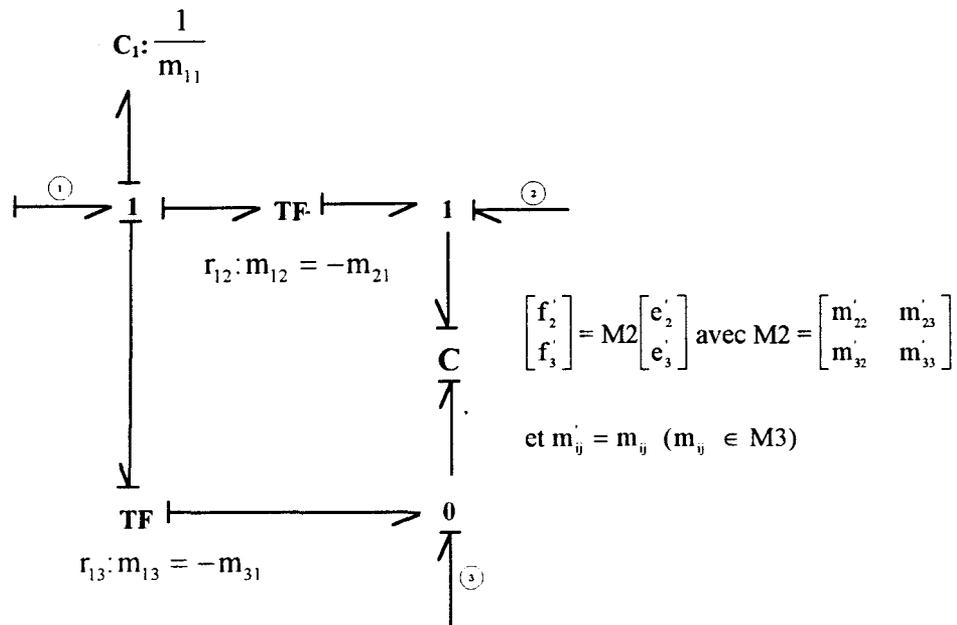


figure 4.22.

Cette décomposition impose les conditions suivantes:

$$\begin{cases} m_{12} = -m_{21} \\ m_{13} = -m_{31} \\ m_{11} \neq 0 \text{ et } m_{11} = \det_{\{2,3\}} M3 \end{cases} \quad (4.20)$$

Un élément deux-ports en causalité unique dérivée apparaît. La matrice caractéristique M2 de cet élément est précisée sur la figure 4.22. La décomposition congruente d'un élément deux-ports (fig. 4.7.2.) peut alors être effectuée sur cet élément. Les conditions requises sont M2 symétrique et $m'_{jj} \neq 0$ (avec cette fois, $j=2$ ou 3 ($j=2$ ici)). Le bond graph ainsi obtenu est le suivant:

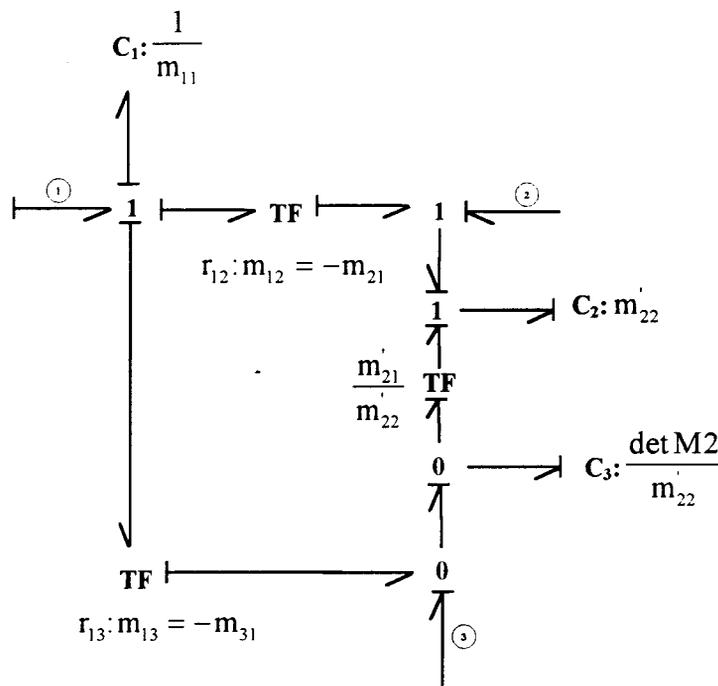


figure 4.23.

Finalement, toutes les conditions nécessaires à cette décomposition sont:

$$\begin{cases} m_{12} = -m_{21} \\ m_{13} = -m_{31} \\ m_{23} = m_{32} \\ m_{11} \neq 0 \text{ et } m_{11} = \det_{\{2,3\}} M3 \\ m_{22} \neq 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

La matrice M3 ne doit donc plus être symétrique ni antisymétrique dans ce cas. Il faut que les termes symétriques de M3 symbolisant la liaison entre d'une part le lien en causalité intégrale et d'autre part, ceux en causalité dérivée, soient de signe opposés. Il faut ensuite que les termes symétriques de M3 symbolisant la liaison entre les deux liens en causalité dérivée soit égaux, que le terme de M3 représentant le lien en causalité intégrale (m_{11}) soit non nul. Il faut finalement que l'un des termes de M3 représentant les liens en causalité dérivée (m_{22} ici) soit non nul.

Concernant la figure 4.21.b., la procédure présentée ci-avant peut être reproduite. La première étape est constituée de deux décompositions congruentes d'éléments deux-ports en causalité mixte (entre le lien 1 et le lien 2 d'une part et entre le lien 3 et le lien 2 d'autre part). Le bond graph qui en résulte est le suivant:

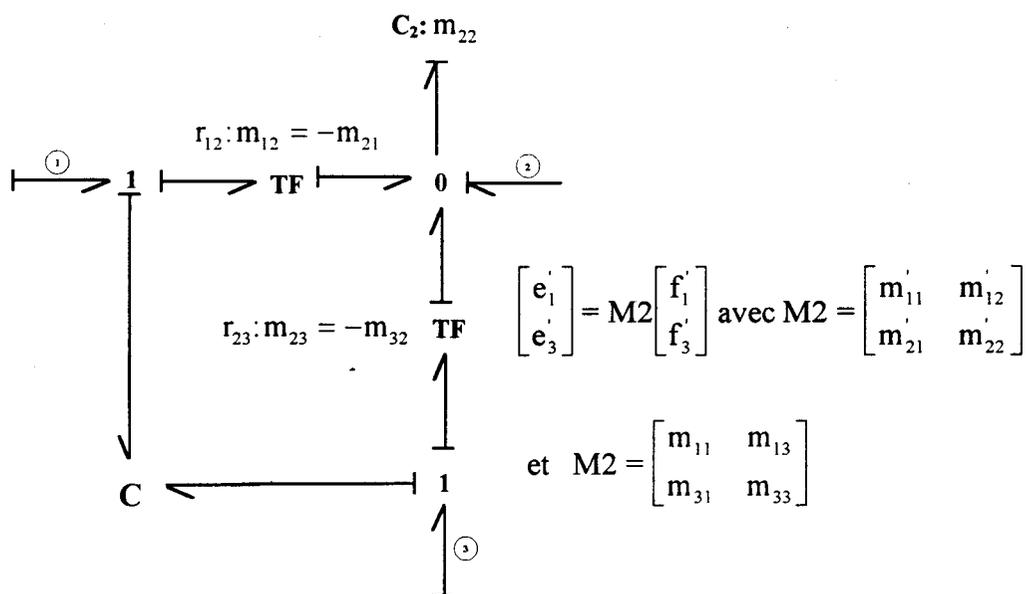


figure 4.24.

La seconde étape de cette décomposition est la décomposition d'un élément deux-ports en causalité unique intégrale (voir fig. 4.7.1.). Le bond graph ainsi obtenu est le suivant:

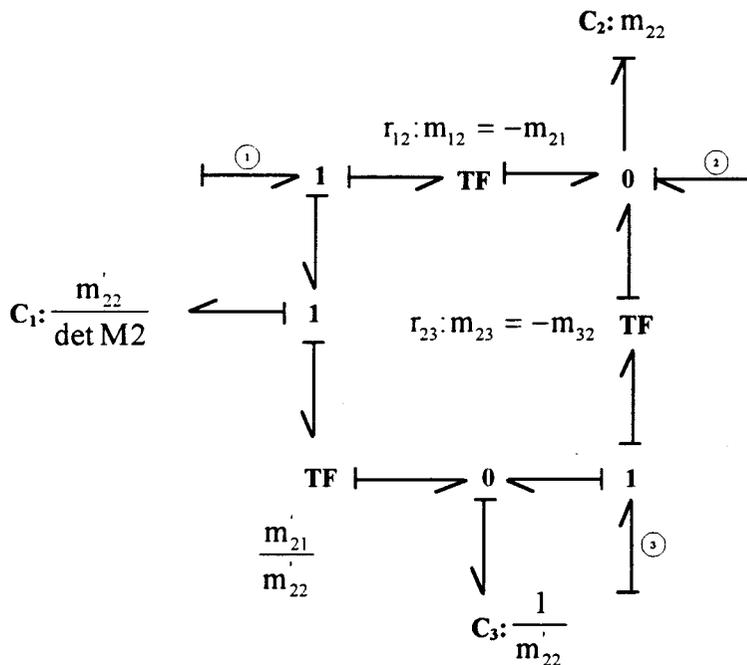


figure 4.25.

Finalement, toutes les conditions nécessaires à cette décomposition sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{12} = -m_{21} \\ m_{23} = -m_{32} \\ m_{31} = m_{12} \\ m_{11} \neq 0 \text{ et } m_{11} = \det_{\{2,3\}} M3 \\ m_{33} \neq 0 \text{ et } m_{33} = \det_{\{1,2\}} M3 \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Ces conditions peuvent être interprétées de façon très semblable à celles exprimées en (4.21.) concernant la figure 4.21. a.

La méthode de décomposition récurrente permet donc de décomposer successivement tout élément multiport de dimension 3, en un élément multiport de dimension 2 associé à un élément 1-port puis finalement en trois éléments 1-port. La dimension du système est conservée. Les conditions de faisabilité de cette décomposition sont diverses en fonction de la nature de la causalité du MP. Ces conditions peuvent être déterminées automatiquement. Les différentes valeurs des éléments des figures précédentes peuvent l'être également. Nous proposons maintenant un algorithme de détermination automatique de ces coefficients [Kubiak 1995]. Nous ne traiterons ci-après que le cas où la causalité est unique et intégrale sur les liens du MP (fig. 4.17.). Pour les autres cas de causalité, un algorithme similaire peut être mis en évidence.

1.3.2. Algorithme de détermination des coefficients pour la méthode récurrente

1.3.2.1. Élément multiports de dimension 3

Dans le paragraphe précédent, la première décomposition a été réalisée sur le deuxième port de l'élément, ce que nous schématisons en marquant la seconde ligne ainsi que la seconde colonne de la matrice M3 de pointillés (fig. 4.26. a.). Cette situation implique dans un premier temps, que chaque terme de M2 doit s'exprimer en fonction de $\frac{1}{m_{22}}$. Nous allons alors nous servir de ce marquage pour déterminer les termes composant M2 (fig. 4.26. b.). En effet, tous les termes non rayés de M3 forment une matrice de dimension inférieure à la dimension de M3. L'emplacement de ces termes non rayés par rapport aux lignes en pointillés va donc correspondre à l'emplacement des termes m_{ij} de M2 par rapport également à ces mêmes lignes en pointillés. Cette correspondance est uniquement géographique par rapport aux lignes en pointillés dans les différentes matrices. Aucune correspondance n'existe au niveau des valeurs.

$$M3 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

figure 4.26.a.

$$M2 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

figure 4.26.b.

Précédemment, nous avons obtenu:

$$m'_{11} = \frac{1}{m_{22}} (m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}) = \frac{1}{m_{22}} \det_{\{3\}} M3 \quad (4.23.)$$

$$m'_{22} = \frac{1}{m_{22}} (m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}) = \frac{1}{m_{22}} \det_{\{1\}} M3 \quad (4.24.)$$

$$m'_{12} = -\frac{1}{m_{22}} (m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13}) = -\frac{\det_{[3,1]\{ \}} M3}{m_{22}} \quad (4.25.)$$

$$m'_{21} = -\frac{1}{m_{22}} (m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) = -\frac{\det_{[1,3]\{ \}} M3}{m_{22}} \quad (4.26.)$$

Le terme m'_{11} est situé ligne 1 et colonne 1 de M2. Son expression (4.23.) peut être obtenue (au terme $\frac{1}{m_{22}}$ près) par calcul du déterminant de la matrice M3 privée de toutes ses lignes et colonnes sauf:

- la ligne 1 et la colonne 1 car le terme de M3, correspondant géographiquement par rapport aux lignes en pointillés à l'emplacement de m'_{11} dans M2 (le terme m_{11}) est situé ligne 1 et colonne 1 de M3.
- la ligne 2 et la colonne 2 car la ligne et la colonne en pointillés ne peuvent être détruites.

Seules la ligne 3 et la colonne 3 sont donc à supprimer (figure 4.26.c.)

$$M3 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

figure 4.26.c.

$$M3 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

figure 4.26.d.

De la même façon, nous pouvons retrouver l'expression de m'_{22} dont l'emplacement par rapport aux lignes en pointillés dans M2 correspond à celui du terme m_{33} de la figure 4.26.a..

Cette expression (4.24.) peut donc être obtenue (au terme $\frac{1}{m_{22}}$ près) par calcul du déterminant de la matrice M3 privée de toutes ses lignes et colonnes sauf:

- la ligne 3 et la colonne 3 car m_{33} est situé ligne 3 et colonne 3 de M3.
- la ligne 2 et la colonne 2 car la ligne et la colonne en pointillés ne peuvent être détruites.

Seules la ligne 3 et la colonne 3 sont donc à supprimer (figure 4.26.d.)

Les autres termes de M2 ((4.25.) et (4.26.)) peuvent être déterminés pareillement. Ainsi, les expressions de m_{12} (correspondant géographiquement dans M2 au terme m_{13} de M3) et de m_{21} (correspondant géographiquement dans M2 au terme m_{31} de M3) sont successivement donnés (au terme $\frac{1}{m_{22}}$ près) par le déterminant des matrices des figure 4.27.a.

et 4.27.b. (Dans ce cas, un signe négatif (voir annexe D1) doit précéder ces déterminants.

$$M3 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

figure 4.27.a.

$$M3 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

figure 4.27.b.

1.3.2.2. Élément multiports de dimension 4

Nous proposons maintenant d'appliquer la précédente procédure pour la décomposition d'un élément de dimension 4 de matrice M4.

$$M4 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

Nous supposons M4 symétrique et dans un premier temps $m_{22} \neq 0$ ($m_{22} = \det_{\{1,3,4\}} M4$ comme le montre la figure 4.28.a.). Tout comme précédemment, nous pouvons alors décomposer dans un premier temps le MP par son second port. Nous posons $k=2$.

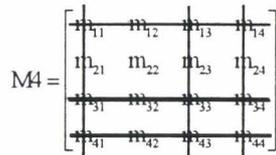


figure 4.28.a.

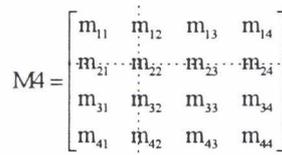


figure 4.28.b.

Comme précédemment, la matrice M4 doit être marquée sur sa seconde ligne et sa seconde colonne (figure 4.28.b.) et peut ainsi être assimilée, dans le même contexte que précédemment (position géographique mais pas en valeur), à la matrice M3, matrice caractérisant l'élément 3-ports résultant de cette première décomposition. Sans développer les calculs, nous pouvons étendre la précédente procédure pour chaque terme m'_{ij} de M3. Ces termes sont donnés par:

$$m'_{11} = \frac{1}{m_{22}} \det_{\{3,4\}} M4 \quad m'_{22} = \frac{1}{m_{22}} \det_{\{1,4\}} M4 \quad m'_{33} = \frac{1}{m_{22}} \det_{\{1,3\}} M4;$$

$$m'_{23} = \frac{1}{m_{22}} \det_{[4,3]\{1\}} M4 \quad (M4 \text{ privée de sa quatrième ligne et de sa troisième colonne}$$

ainsi que du couple [ligne 1; colonne 1])

$$m'_{32} = \det_{[3,4]\{1\}} M4$$

et par:

$$m'_{12} = -\frac{1}{m_{22}} \det_{[3,1]\{4\}} M4 \quad m'_{13} = -\frac{1}{m_{22}} \det_{[4,1]\{3\}} M4;$$

$$m'_{21} = -\frac{1}{m_{22}} \det_{[1,3]\{4\}} M4 \quad m'_{31} = -\frac{1}{m_{22}} \det_{[1,4]\{3\}} M4$$

Le modèle bond graph résultant de cette première décomposition est donné figure 4.29.:

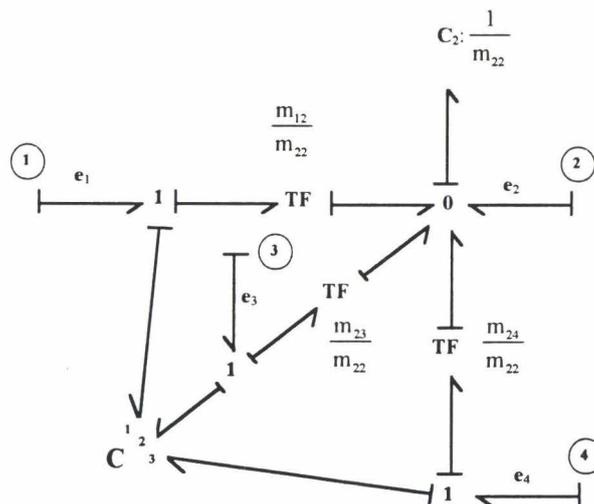
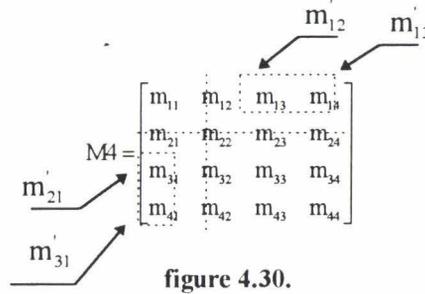


figure 4.29.

Comme précisé en annexe D1, certains termes (au nombre de quatre ici) de M3 sont précédés d'un signe négatif.

Dans notre cas, dans la matrice M4 privée de sa seconde ligne et de sa seconde colonne (assimilée à M3) (figure 4.28.b.), ces termes m'_{ij} de M3 se situent dans la partie supérieure droite et dans la partie inférieure gauche par rapport aux lignes en pointillés. (voir figure suivante):



Les termes m'_{ij} désignés ci-dessus respectent les conditions suivantes (avec $k=2$ ici k =indice de l'élément pivot):

$$\begin{cases} j < k \text{ et } i > k \\ \text{ou} \\ j > k \text{ et } i < k \end{cases} \quad (4.27.)$$

Les conditions mathématiques requises jusqu'à présent pour cette première décomposition sont:

$$\begin{cases} M4 = M4^t \\ m_{22} = \det_{\{1,3,4\}} M4 \neq 0 \end{cases} \quad (4.28.)$$

Nous pouvons vérifier que la condition "M4 symétrique" implique "M3 symétrique" aussi. Nous supposons désormais $m'_{33} \neq 0$ ($\det_{\{1,3\}} M4 \neq 0$). Une nouvelle décomposition du MP 3-ports peut alors être réalisée par son troisième port.. Nous posons cette fois $k=3$. Chaque terme m''_{ij} de M2 vaut alors:

$$\begin{aligned} m''_{11} &= \frac{1}{m'_{33}} \det_{\{2\}} M3 & m''_{22} &= \frac{1}{m'_{33}} \det_{\{1\}} M3 \\ m''_{12} &= \frac{1}{m'_{33}} \det_{\{2,1\}} M3 & m''_{21} &= \frac{1}{m'_{33}} \det_{\{1,2\}} M3 \end{aligned}$$

Remarque: Aucun des termes ci-dessus n'est précédé d'un signe négatif. En effet, cette seconde décomposition s'effectuant suivant le troisième port du MP ($k=3$), il est nécessaire

cette fois, de marquer par des lignes en pointillés sur la figure 4.28.b., la troisième ligne et la troisième colonne de la matrice M3 (figure 4.31.). Aucun termes de M3 ne vérifie les conditions (4.27.) dans ce cas. Les parties supérieure droite ou inférieure gauche par rapport aux pointillés n'existent effectivement pas.

$$M3 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

figure 4.31.

Le bond graph résultant de cette seconde décomposition est donné figure 4.32.:

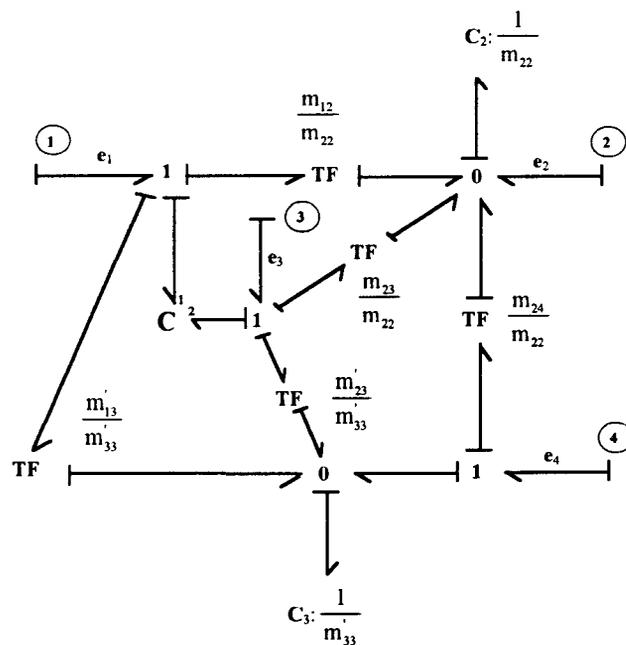


figure 4.32.

Les conditions mathématiques requises pour cette décomposition sont jusqu'à présent:

$$\begin{cases} M4 = M4^t \\ m_{22} = \det_{\{1,3,4\}} M4 \neq 0 \\ \det_{\{1,3\}} M4 \neq 0 \end{cases} \quad (4.29.)$$

La décomposition congruente peut maintenant être appliquée sur le MP 2-ports. Nous supposons $m_{22}'' = \frac{1}{m_{33}} \det_{\{1\}} M3 \neq 0$ ($\frac{1}{m_{33}} \det_{\{1\}} M3 = \det_{\{1\}} M4$). Le second port de ce MP 2-port est donc utilisé.

Les conditions mathématiques finales requises pour la décomposition totale sont:

$$\begin{cases} M4 = M4^t \\ m_{22} = \det_{\{1,3,4\}} M4 \neq 0 \\ \det_{\{1,3\}} M4 \neq 0 \\ \det_{\{1\}} M4 \neq 0 \end{cases} \quad (4.30.)$$

Le bond graph final est donné figure 4.33.:

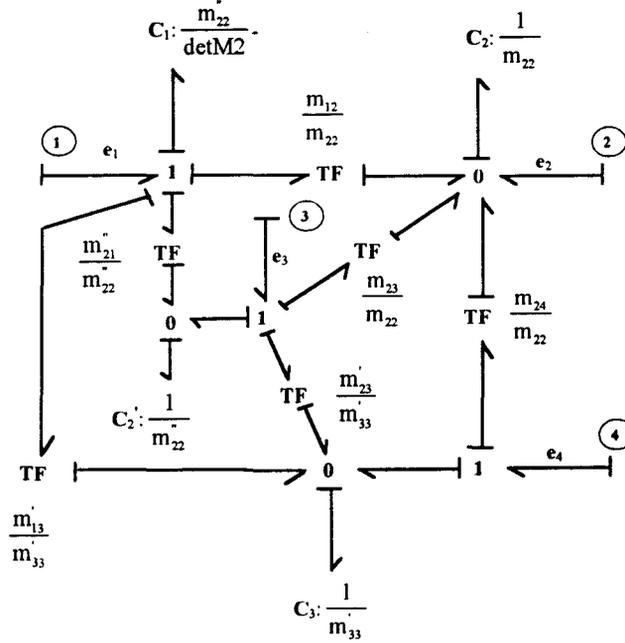


figure 4.33.

1.3.2.3. Élément multiport de dimension m

Nous proposons maintenant de généraliser la procédure pour un MP de dimension m.

Chaque élément m-port de matrice caractéristique M_m peut se décomposer en un MP de dimension (m-1) associé à un élément 1-port. Certaines conditions doivent cependant être respectées:

$$\begin{cases} Mm = Mm^t \\ m_{ii} = \det_{\{1,2,3,\dots,i-1,i+1,\dots,m\}} Mm \neq 0 \text{ (Card } J = m - 1) \end{cases} \quad (4.31.)$$

Dans ce cas, le modèle bond graph devient:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \det \underbrace{\{3,4,\dots,i-1,i+1,\dots,m\}}_J M_m \neq 0 \\
 \text{ou} \\
 \det \underbrace{\{2,4,\dots,i-1,i+1,\dots,m\}}_J M_m \neq 0 \\
 \text{ou} \\
 \det \underbrace{\{2,3,5,\dots,i-1,i+1,\dots,m\}}_J M_m \neq 0 \\
 \text{ou} \\
 \dots
 \end{array} \right. \quad (\text{Card } J = m - 3) \quad (4.33.)$$

Cette opération peut être reproduite jusqu'à ce que le m-port soit décomposé en m éléments 1-port.

Conclusion

La méthode récurrente de décomposition nous permet donc de décomposer un élément m-port en m éléments 1-port. Toutes les conditions mathématiques liées à l'application de cette méthode ainsi que toutes les valeurs des différents paramètres issus de la décomposition peuvent être déterminées automatiquement. La dimension du système physique est de plus conservée.

La connaissance 1-port concernant la détermination de la matrice de transfert, la détermination de l'équation d'état ou concernant encore l'analyse structurelle peut alors être réutilisée directement.

Le nombre de boucles causales apparaissant dans le bond graph décomposé est de plus, en général plus faible (bien qu'important tout de même) que celui apparaissant (au sens des définitions du chapitre II) dans le bond graph comportant le MP.

Conclusion

L'étude des systèmes physiques modélisés par bond graph comportant un ou plusieurs éléments multiports constitue un objectif important de par le nombre d'applications concernées. Ce travail nous a permis dans un premier temps, de mettre en évidence la nécessité d'étendre la définition de boucles causales ou encore de mailles, dans le cas 1-port. Cette précision ne s'applique que lorsque le modèle bond graph considéré se compose de "cycles topologiques". Dans ce cas, une règle heuristique a été proposée afin de réduire considérablement le nombre de termes devant apparaître lors de l'application de la règle de Mason qui devient dès lors moins complexe à mettre en oeuvre.

La détermination formelle et automatique de la matrice de transfert associée à un modèle bond graph composé d'éléments multiport nous a amené à proposer de nouvelles définitions de chemins causaux et de boucles causales caractérisés par leur classe, leur type et leur gain. La traversée de l'élément multiport implique effectivement une contribution de cet élément que nous avons déterminée. L'étude des modèles bond graphs comportant un seul élément multiport a d'abord été abordée. Cette étude nous a amené à proposer de nouvelles expressions du dénominateur et des différents numérateurs de la matrice de transfert. Ces résultats ont ensuite été étendus aux modèles bond graphs comportant un seul élément multiport dont les branches peuvent être connectées. Une généralisation de ces résultats a enfin été proposée pour les modèles bond graphs comportant plusieurs éléments multiports.

La totalité de ces résultats reposent, tout comme la règle de Mason, sur une analyse causale et un parcours graphique du modèle bond graph. Bien qu'assez complexes dans leurs écritures, leurs applications manuelles se révèlent plutôt simples et systématiques. Cependant, pour des modèles bond graphs de taille importante, cette mise en oeuvre peut tout de même paraître ardue. La prochaine implantation de ces résultats sous ARCHER permettra alors de résoudre ce problème.

La méthode de détermination formelle et automatique des matrices intervenant dans l'équation d'état pour les modèles bond graphs comportant des éléments multiports est une extension de celle développée pour les modèles bond graphs 1-port. Cependant, quelques

modifications importantes dans les définitions valables en 1-port sont à noter. Cette étude a porté tout d'abord sur les modèles bond graphs comportant des éléments multiports dynamiques à causalité unique. Dans ce cas, tous les termes de la matrice caractérisant l'élément multiport intègrent la matrice exprimant les lois constitutives des éléments dynamiques (F_i ou F_d suivant la nature de la causalité). Lorsque cet élément multiport est un élément résistif, ces mêmes termes intègrent alors la matrice L exprimant les lois associées aux éléments R . Lorsque l'élément multiport est un élément dynamique à causalité mixte, les termes diagonaux intègrent les matrices F_i ou F_d tandis que les termes non diagonaux peuvent être directement introduits au sein de la matrice de structure. Tous les termes des matrices de l'équation d'état peuvent de plus être écrits à l'aide du formalisme employé au chapitre précédent.

La méthode de décomposition récurrente permet sous certaines conditions mathématiques (symétrie ou antisymétrie de la matrice caractéristique de l'élément multiport) de décomposer tout élément multiport de dimension m en m éléments 1-port. Toutes les règles et propriétés connues pour les bond graphs 1-port peuvent alors être réutilisées. L'application de la règle de Mason est donc rendue possible tout comme celle de toutes les procédures proposées dans le cas 1-port pour l'analyse des propriétés structurelles du modèle bond graph. Cependant, le nombre de boucles causales étant alors relativement important, la durée des calculs peut cependant s'avérer plus longue que celle requise avec la méthode du chapitre II (indépendante des conditions évoquées ci-avant).

Les perspectives de travail que nous pensons développer prochainement sont:

- Une phase de mise en œuvre des méthodologies proposées dans ce mémoire sur des exemples concrets.
- La mise en forme algorithmique des résultats proposés afin d'en faciliter la programmation dans ARCHER.
- Le développement de nouvelles méthodes de décomposition moins restrictives au niveau des conditions mathématiques de faisabilité.
- Le traitement de la non-linéarité des éléments multiports.

- L'extension des procédures développées pour l'analyse structurelle des bond graphs 1-port aux bond graphs comportant des éléments multiports.

ANNEXES

Annexes A	189
Annexes B	199
Annexes C	287
Annexes D	289

Annexes A

Annexe A1	191
Annexe A2	195

Annexe A1 : Principes de la méthodologie bond graph

L'hypothèse de réticulation nous permet de décomposer un système en sous systèmes échangeant de la puissance entre eux. Cette puissance est transmise de manière à assurer la conservation de l'énergie, mais aussi sa continuité [Breedveld(1984)], [Paynter(1961)].

Considérons ainsi deux sous systèmes A et B interconnectés par une liaison physique. Le flux d'énergie entre A et B est représenté alors par un lien (bond) de puissance connectant les deux sous systèmes entre eux (figure A1.1.).

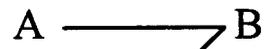


figure A1.1. : Transfert de puissance.

Le transfert de puissance à travers un lien est appelé flux d'énergie. Pour cela à chaque lien est associée une paire de variables physiques conjuguées, dont le produit donne la valeur de la puissance échangée par ce lien. Dans la théorie bond graph, ces variables de puissance ont reçu le nom d'effort (e) et de flux (f) (figure A1.2). On a alors $P=ef$.

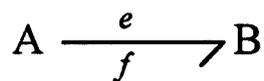


figure A1.2: Transfert de puissance et ses variables.

En résumé, on peut dire que si l'on a une représentation d'un système comme donné figure A1.2. alors on sait que:

Il existe un lien physique entre A et B

A transmet de la puissance à B

La puissance transmise est égale au produit entre e et f .

Aux variables de puissance e et f sont associées les variables d'énergie définies par:

$$p = \int e \cdot dt \text{ appelée "moment"}$$

$$q = \int f \cdot dt \text{ appelée "déplacement"}$$

Le tableau suivant présente les variables généralisées e , f , p et q dans différents domaines de la physique.

	Effort	Flux	Moment généralisé	Déplacement généralisé
	e	f	p	q
Translation	force	vitesse	moment	déplacement
Rotation	couple	vitesse angulaire	moment angulaire	angle
hydraulique	pression	débit volumique	impulsion	volume
Acoustique	pression	vitesse volumique	moment	volume
Electrique	tension	courant	flux magnétique	charge
chimique	potentiel chimique	flux molaire	_____	masse molaire
Thermo-dynamique	température	flux entropique	_____	entropie

figure A1.3. : Variables des puissance (e,f) et d'énergie (p,q).

Des composants en nombre très restreint permettent de modéliser les différents phénomènes intervenant dans chaque domaine de la physique de manière unifiée (figure A1.4.).

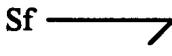
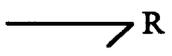
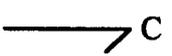
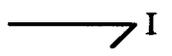
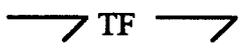
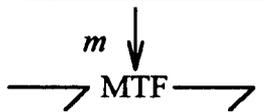
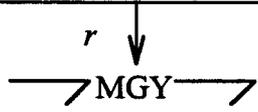
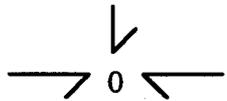
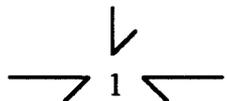
	Nom	relation élémentaire	exemple
	source d'effort	$e(t)$ donné	gravité source de tension source de pression
	source de flux	$f(t)$ donné	source de vitesse source de flux source de courant
	Résistance	$\phi(e, f) = 0$ $e = Rf$	amortisseur résistance électrique frottement
	Capacité	$\phi(e, q) = 0$	ressort compressibilité réservoir
	Inertie	$\phi(f, p) = 0$	masse inertie d'un fluide inductance
	Transformateur	$e_1 = m e_2$ $f_2 = m f_1$	système pignons piston pompe
	Gyrateur	$e_1 = r f_2$ $e_2 = r f_1$	
	Transformateur modulé	$e_1 = m(t) e_2$ $f_2 = m(t) f_1$	mécanisme cinématique
	Gyrateur modulé	$e_1 = r(t) f_2$ $e_2 = r(t) f_1$	moteur électrique pompe centrifuge
	Jonction 0	$e_1 = e_2 = \dots = e_n$ $\sum f = 0$	force identique connexion électrique parallèle
	Jonction 1	$f_1 = f_2 = \dots = f_n$ $\sum e = 0$	vitesse identique connexion électrique série

figure A1.4. : Composants bond graphs simples (1-port)

Annexe A2

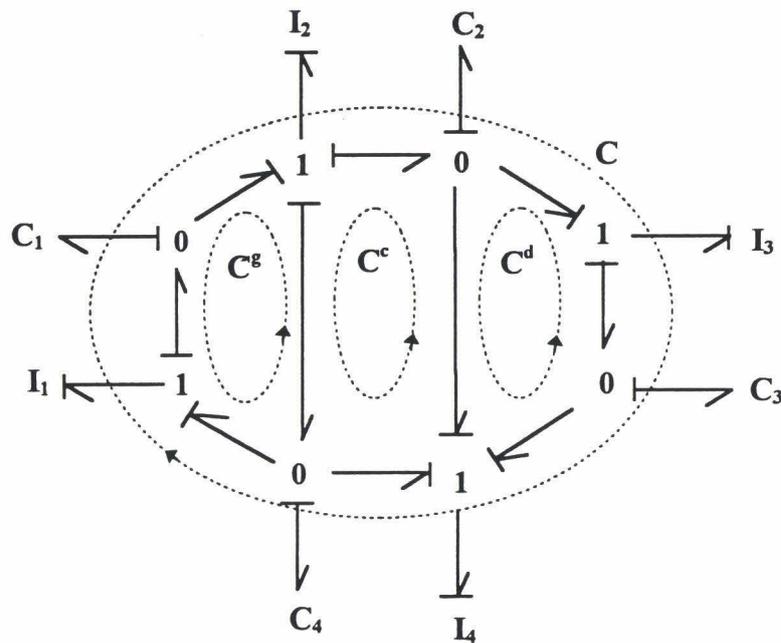


figure A2.1.: Reproduction de la figure 1.22.

Le modèle bond graph de la figure précédente comporte 6 cycles:

- 1 cycle à 8 éléments symbolisé par les pointillés (noté C).
- 3 cycles à 4 éléments symbolisés par les pointillés et nommés cycle droite (noté C^d), cycle centre (noté C^c) et cycle gauche (noté C^g).
- 2 cycles à 6 éléments non symbolisés par les pointillés: le premier (noté C^G) comporte les éléments I₁, C₁, I₂, C₂, I₄ et C₄. Le second (noté C^D) comporte les éléments I₂, C₂, I₃, C₃, I₄ et C₄.

Dans le cycle noté C^g comportant les éléments I₁, C₁, I₂ et C₄, les deux gains B_{S1}^g et B_{S2}^g des boucles causales parcourant le cycle complet, sont positifs. Soient $B_1^g = -\frac{1}{I_1 C_1 s^2}$,

$B_2^g = -\frac{1}{I_1 C_4 s^2}$, $B_3^g = -\frac{1}{I_2 C_4 s^2}$ et $B_4^g = -\frac{1}{I_2 C_1 s^2}$, d'après l'heuristique énoncé au premier

chapitre, il vient:

$$-B_{S1}^g - B_{S2}^g + B_1^g B_3^g + B_2^g B_4^g = 0 \quad (\text{A2.1.})$$

Toutes les boucles causales situées dans le cycle noté C^d de gains respectifs

$$B_{S1}^d = B_{S2}^d = -\frac{1}{I_3 I_4 C_2 C_3 s^4}, \quad B_1^d = -\frac{1}{I_3 C_3 s^2}, \quad B_2^d = -\frac{1}{I_3 C_2 s^2}, \quad B_3^d = -\frac{1}{I_4 C_2 s^2} \quad \text{et}$$

$B_4^d = -\frac{1}{I_4 C_3 s^2}$ sont disjointes des boucles causales énumérées dans l'expression A2.1.. Les boucles causales de gains respectifs B_1^d et B_3^d étant disjointes tout comme les boucles causales de gains respectifs B_2^d et B_4^d , dans l'application de la règle de Mason, le terme suivant s'annule:

$$\left[-B_{S1}^g - B_{S2}^g + B_1^g B_3^g + B_2^g B_4^g \right] \cdot \left[-B_{S1}^d - B_{S2}^d - B_1^d - B_2^d - B_3^d - B_4^d + B_1^d B_3^d + B_2^d B_4^d \right] = 0 \quad (A2.2.)$$

Dans le cycle noté C^c comportant les éléments I_2 , C_2 , I_4 et C_4 , les deux gains B_{S1}^c et B_{S2}^c des boucles causales parcourant le cycle complet, sont positifs. Soient $B_1^c = -\frac{1}{I_2 C_2 s^2}$,

$$B_2^c = -\frac{1}{I_2 C_4 s^2} \quad (B_2^c = B_3^c), \quad B_3^c = -\frac{1}{I_4 C_4 s^2} \quad \text{et} \quad B_4^c = -\frac{1}{I_4 C_2 s^2} \quad (B_4^c = B_3^c), \quad \text{d'après}$$

l'heuristique énoncé au premier chapitre, il vient:

$$-B_{S1}^c - B_{S2}^c + B_1^c B_3^c + B_2^c B_4^c = 0 \quad (A2.3.)$$

Les boucles causales de gains respectifs B_1^g et B_1^d sont disjointes des boucles causales énumérées dans l'expression A1.3.. Les boucles causales de gains respectifs B_1^g et B_1^d étant disjointes, dans l'application de la règle de Mason, le terme suivant s'annule:

$$\left[-B_{S1}^c - B_{S2}^c + B_1^c B_3^c + B_2^c B_4^c \right] \cdot \left[-B_1^g - B_1^d + B_1^g B_1^d \right] = 0 \quad (A2.4.)$$

Dans le cycle noté C^d comportant les éléments I_3 , C_3 , I_4 et C_2 , les deux gains B_{S1}^d et B_{S2}^d sont négatifs. L'heuristique ne s'applique pas pour ce cycle.

Dans le cycle noté C^g comportant les éléments I_1 , C_1 , I_2 , C_2 , I_4 et C_4 , les deux gains B_{S1}^g et B_{S2}^g des boucles causales parcourant le cycle complet, sont négatifs. L'heuristique ne s'applique pas non plus pour ce cycle.

Dans le cycle noté C^D comportant les éléments I_2 , C_2 , I_3 , C_3 , I_4 et C_4 , les deux gains B_{S1}^D et B_{S2}^D des boucles causales parcourant le cycle complet, sont positifs. Dans l'application de la règle de Mason, d'après l'heuristique énoncé au premier chapitre, le terme suivant s'annule:

$$-B_{S1}^D - B_{S2}^D + B_1^d B_1^c B_3^c + B_3^g B_2^d B_4^d = 0 \quad (A2.5.)$$

La boucle causale de gains B_1^g est disjointe des boucles causales énumérées dans l'expression A2.5.. Dans l'application de la règle de Mason, le terme suivant s'annule:

$$\left[-B_{s1}^D - B_{s2}^D + B_1^d B_1^c B_3^c + B_3^g B_2^d B_4^d \right] \cdot [-B_1^g] = 0 \quad (\text{A2.6.})$$

Dans le cycle noté C comportant les 8 éléments I₁, C₁, I₂, C₂, I₃, C₃, I₄ et C₄, les deux gains B_{s1} et B_{s2} des boucles causales parcourant le cycle complet, sont négatifs. L'heuristique ne s'applique pas non plus pour ce cycle.

Les expressions A2.1., A2.2., A2.3., A2.4., A2.5. et A2.6. permettent de dénombrer 60 termes qui s'annulent.

Annexes B

Annexe B1	201
Annexe B2	211
Annexe B3	219
Annexe B4	227
Annexe B5	231
Annexe B6	233
Annexe B7	243
Annexe B8a	249
Annexe B8b	253
Annexe B8c	263
Annexe B9	269
Annexe B10	273
Annexe B11	279
Annexe B12	281
Annexe B13	283



	Éléments mis en jeu	Parcours causaux	Gains
Boucle 1	R ₁₁ et I ₁	7-6-6-7	$B_1 = - \frac{R_{11}}{I_1 s}$
Boucle 2	R ₂ et I ₂	15-12-13-13-12-15	$B_2^1 = - \frac{R_2}{I_2 s}$
Boucle 3	C ₂ et I ₂	16-12-13-13-12-16	$B_2^2 = - \frac{1}{I_2 C_2 s^2}$
Boucle 4	R ₃ et C ₃	17-19-19-17	$B_3 = - \frac{1}{R_3 C_3 s}$

tableau B1.1. : Bilan des boucles causales C0

Toutes ces boucles sont disjointes entre elles à l'exception de B₂¹ et B₂².

Afin d'établir le dénominateur de la matrice de transfert d'un tel système, l'expression (2.21.) rapportée à notre exemple s'écrit tout comme les expressions (2.19.) et (2.20.):

$$\Delta(s) = \Delta_0(s) + \sum_{r=0}^2 \left\{ \sum_J \left[\det_J M. \left[\sum_{h=1}^p (-1)^{n_h} [B_h^J] [\Delta_h(s)] \right] \right] \right\} \quad (\text{B1.1.})$$

avec ici:

$$\Delta_0(s) = \left\{ 1 - [B_1 + B_2^1 + B_2^2 + B_3] + [B_1 B_2^1 + B_1 B_2^2 + B_1 B_3 + B_2^1 B_3 + B_2^2 B_3] - [B_1 B_2^1 B_3 + B_1 B_2^2 B_3] \right\} \quad (\text{B1.2.})$$

Le développement de l'expression (B1.1.) produit pour chaque valeur de r les résultats suivants:

• r=0:

Il vient J={ } (CardJ=0). Dans ce cas, nous avons $\det_{\{ \}} M = \det M$ ce qui signifie qu'aucune ligne ni aucune colonne n'est à supprimer de la matrice M. Aucune branche ne doit être évitée dans la recherche des boucles B_h^J. Concernant notre exemple, p=6 boucles B_h^J toutes composées de trois boucles causales B* C2T1, peuvent être mises en évidence (tableau B1.2.):

	éléments impliqués	chemin causal	$(-1)^{n_h} [B_h^j] [\Delta_h(s)]$
Boucle 5	R_{12}, C_2 et C_3	10-5-1-2-12-16-16-12-2- 3-17-17-3-1-5-10	$(-1)^{(3)} \left[(-R_{12}) \cdot \left(-\frac{1}{C_2 s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{C_3 s}\right) \right] [1 - B_1]$
Boucle 6	R_{12}, R_2 et C_3	10-5-1-2-12-15-15-12- 2-3-17-17-3-1-5-10	$(-1)^{(3)} \left[(-R_{12}) \cdot (-R_2) \cdot \left(-\frac{1}{C_3 s}\right) \right] [1 - B_1]$
Boucle 7	C_1, C_2 et C_3	9-5-1-2-12-16-16-12-2- 3-17-17-3-1-5-9	$(-1)^{(3)} \left[\left(-\frac{1}{C_1 s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{C_2 s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{C_3 s}\right) \right] [1 - B_1]$
Boucle 8	C_1, R_2 et C_3	9-5-1-2-12-15-15-12-2- 3-17-17-3-1-5-9	$(-1)^{(3)} \left[\left(-\frac{1}{C_1 s}\right) \cdot (-R_2) \cdot \left(-\frac{1}{C_3 s}\right) \right] [1 - B_1]$
Boucle 9	R_{11}, C_2 et C_3	7-4-1-2-12-16-16-12-2- 3-17-17-3-1-4-7	$(-1)^{(3)} \left[(-R_{11}) \cdot \left(-\frac{1}{C_2 s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{C_3 s}\right) \right] [1]$
Boucle 10	R_{11}, R_2 et C_3	7-4-1-2-12-15-15-12-2- 3-17-17-3-1-4-7	$(-1)^{(3)} \left[(-R_{11}) \cdot (-R_2) \cdot \left(-\frac{1}{C_3 s}\right) \right] [1]$

tableau B1.2. : Bilan des boucles causales B_h^j impliquant 3 branches

Il vient donc:

$$\sum_{h=1}^6 (-1)^{n_h} [B_h^j] [\Delta_h(s)] = \left[\frac{R_{12}}{C_2 C_3 s^2} + \frac{R_{12} R_2}{C_3 s} + \frac{1}{C_1 C_2 C_3 s^3} + \frac{R_2}{C_1 C_3 s^2} \right] [1 - B_1] + \left[\frac{R_{11}}{C_2 C_3 s^2} + \frac{R_{11} R_2}{C_3 s} \right] [1]$$

d'où:

$$\Delta_3(s) = \det M \cdot \left\{ \left[\frac{R_{12}}{C_2 C_3 s^2} + \frac{R_{12} R_2}{C_3 s} + \frac{1}{C_1 C_2 C_3 s^3} + \frac{R_2}{C_1 C_3 s^2} \right] [1 - B_1] + \left[\frac{R_{11} R_2}{C_3 s} + \frac{R_{11}}{C_2 C_3 s^2} \right] [1] \right\} \quad (B1.3.)$$

• $r=1$:

Il vient $J = \{j_1\}$ ($\text{Card} J = 1$). Le terme $\det_{\{j_1\}} M$ indique que le couple [Ligne j_1 ; Colonne j_1] doit être supprimé de la matrice M avant d'en calculer le déterminant. L'indice j_1 varie de 1 à 3 et implique l'existence de 3 sous-déterminants ($\det_{\{1\}} M, \det_{\{2\}} M$ et $\det_{\{3\}} M$) qui composeront $\Delta_2(s)$:

$$\Delta_2(s) = \Delta_2^1(s) + \Delta_2^2(s) + \Delta_2^3(s) \quad (B1.4.)$$

Pour $\det_{\{1\}} M = m_{22} m_{33} - m_{23} m_{32}$, deux boucles causales B_h^j ($p=2$), chacune composée de deux boucles causales $B^* C2T1$, peuvent être mises en évidence (tableau B1.3.):

	Eléments mis en jeu	Parcours causaux	$(-1)^{n_h} [B_h^j] \cdot [\Delta_h(s)]$
Boucle 11	C_2 et C_3	16-12-2-3-17-17-3-2-12-16	$(-1)^{(2)} \left[\left(-\frac{1}{C_2 s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{C_3 s}\right) \right] [1 - B_1]$
Boucle 12	R_2 et C_3	15-12-2-3-17-17-3-2-12-15	$(-1)^{(2)} \left[(-R_2) \cdot \left(-\frac{1}{C_3 s}\right) \right] [1 - B_1]$

tableau B1.3. : Bilan des boucles causales B_h^j impliquant les branches 2 et 3

d'où:

$$\Delta_2^1(s) = \det_{\{1\}} M \cdot \left\{ \left[\frac{1}{C_2 C_3 s^2} + \frac{R_2}{C_3 s} \right] \cdot [1 - B_1] \right\} \quad (B1.5.)$$

Pour $\det_{\{2\}} M = m_{11} m_{33} - m_{13} m_{31}$ et pour $\det_{\{3\}} M = m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}$, respectivement trois et six boucles causales B_h^j ($p=3$ puis $p=6$), chacune composée de deux boucles causales $B^* C2T1$, peuvent être mises en évidence. Nous pouvons donc écrire:

$$\Delta_2^2(s) = \det_{\{2\}} M \cdot \left\{ \left[\frac{1}{C_1 C_3 s^2} + \frac{R_{12}}{C_3 s} \right] \cdot [1 - (B_1 + B_2^1 + B_2^2) + (B_1 B_2^1 + B_1 B_2^2)] + \left[\frac{R_{11}}{C_3 s} \right] \cdot [1 - (B_2^1 + B_2^2)] \right\} \quad (B1.6.)$$

$$\Delta_2^3(s) = \det_{\{3\}} M \cdot \left\{ \left[\frac{1}{C_1 C_2 s^2} + \frac{R_2}{C_1 s} + \frac{R_{12}}{C_2 s} + R_{12} R_2 \right] \cdot [1 - (B_1 + B_3) + B_1 B_3] + \left[\frac{R_{11}}{C_2 s} + R_{11} R_2 \right] \cdot [1 - B_3] \right\} \quad (B1.7.)$$

Le terme $\Delta_2(s)$ de l'expression (B1.4.) est désormais connu intégralement. L'incrémentatation de r peut donc s'effectuer.

• $r=2$:

Il vient $J = \{j_1, j_2\}$ ($\text{Card} J = 2$). Le terme $\det_{\{i_1, i_2\}} M$ indique que les couples [Ligne j_1 ; Colonne j_1] et [Ligne j_2 ; Colonne j_2] doivent être supprimés de la matrice M avant d'en calculer le déterminant. Pour notre exemple, ce dernier se résumera dans ce cas à un simple terme m_{ii} . Les indices j_1 et j_2 varient de 1 à 3 mais les restrictions énoncées précédemment n'autorisent que certains couples $\{j_1, j_2\}$. Ceux-ci sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$ occasionnant donc l'existence de 3 sous-déterminants ($\det_{\{1, 2\}} M$, $\det_{\{1, 3\}} M$ et $\det_{\{2, 3\}} M$) qui entreront dans la composition de $\Delta_1(s)$ qui se décompose de la manière suivante:

$$\Delta_1(s) = \Delta_1^{1,2}(s) + \Delta_1^{1,3}(s) + \Delta_1^{2,3}(s) \quad (B1.8.)$$

Pour $\det_{\{1,2\}} M(= m_{33})$, $\det_{\{1,3\}} M(= m_{22})$ et $\det_{\{2,3\}} M(= m_{11})$, respectivement une, deux et trois boucles causales B_h^j existent (ces boucles causales sont toutes dans ce cas des boucles causales $B^* C2T1$). Nous pouvons donc écrire:

$$\Delta_1^{1,2}(s) = \det_{\{1,2\}} M. \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_3 s} \right] \cdot \left[1 - (B_1 + B_2^1 + B_2^2) + (B_1 B_2^1 + B_1 B_2^2) \right] \right\} \quad (B1.9.)$$

et

$$\Delta_1^{1,3}(s) = \det_{\{1,3\}} M. \left\{ (-1) \cdot \left[-\frac{1}{C_2 s} \right] \cdot \left[1 - (B_1 + B_3) + B_1 B_3 \right] + (-1) \cdot [-R_2] \cdot \left[1 - (B_1 + B_3) + B_1 B_3 \right] \right\} \quad (B1.10.)$$

et

$$\begin{aligned} D_1^{2,3}(s) = \det_{\{2,3\}} M. \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_1 s} \right] \cdot [\Delta_0(s)] + (-1) [-R_{12}] \cdot [\Delta_0(s)] + \right. \\ \left. + (-1) \cdot [-R_{11}] \cdot \left[1 - (B_2^1 + B_2^2 + B_3) + (B_2^1 B_3 + B_2^2 B_3) \right] \right\} \end{aligned} \quad (B1.11.)$$

L'expression formelle de $\Delta(s)$ s'établit en additionnant les résultats présentés aux équations (B1.2.), (B1.3.), (B1.5.), (B1.6.), (B1.7.), (B1.9.), (B1.10.) et (B1.11.).

L'expression (2.21.) permet donc d'écrire formellement et de façon automatique, le dénominateur de la matrice de transfert d'un système modélisé par bond graph lorsque celui-ci comporte un MP à branches indépendantes. Cette méthode repose sur le parcours causal du bond graph et se caractérise par une rapidité de calcul malgré le nombre parfois très important de boucles causales présentes dans le bond graph.

B1. 2. Calcul des numérateurs

B1. 2.1. Transmittance C0

Considérons la transmittance C0 suivante: $\frac{f_1}{Sf_1} = \frac{N_0(s)}{\Delta(s)} = G_0(s)$ (encore notée $\frac{f_6}{f_8}$ sur

la figure B1.1.).

Pour atteindre le flux dans l'élément $I_1 (f_1)$ à partir de Sf_1 , un chemin unique existe (8-7-7-6-6). Il est indirect (passe par l'élément R_{11}) et n'aborde pas le MP.

Le gain de ce chemin noté T_0 vaut d'après (2.1.):

$$T_0(s) = (-1)^{(0+0)} \cdot \frac{R_{11}}{I_1 s} = \frac{R_{11}}{I_1 s}$$

L'expression (2.23.) nous permettant d'obtenir le numérateur recherché $N_0(s)$ devient du fait de l'unicité de la chaîne d'action:

$$N_0(s) = T_0(s) \cdot \Delta_0(s)$$

où:

- $\Delta_0(s)$ est le résultat de l'expression (2.21.) appliquée au bond graph privé de l'ensemble de la chaîne d'action précitée (figure B1.2.).

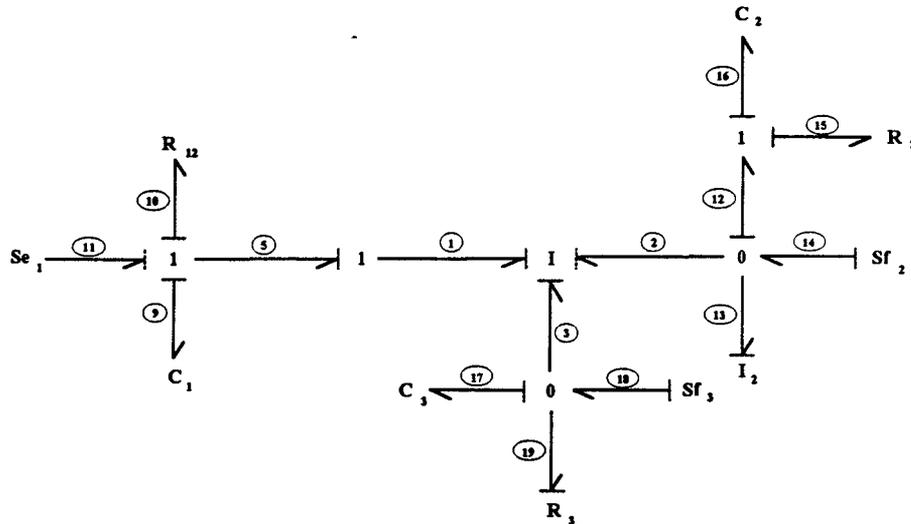


figure B1.2. : Bond graph réduit

Le polynôme $\Delta_0(s)$ se calcule donc de façon identique à celle employée pour connaître le dénominateur $\Delta(s)$ de la matrice de transfert mais l'application s'effectue sur le bond graph de la figure précédente. Toute présence des termes R_{11} ou I_1 dans la composition de $\Delta(s)$ disparaît donc. L'expression définitive de $\Delta_0(s)$ est la suivante.

$$\begin{aligned} \Delta_0(s) = & \det_{\{1,2,3\}} M. \left\{ 1 - [B_2^1 + B_2^2 + B_3] + [B_2^1 B_3 + B_2^2 B_3] \right\} \\ & + \det_{\{1,2\}} M. \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_3 s} \right] \cdot [1 - (B_2^1 + B_2^2)] \right\} \\ & + \det_{\{1,3\}} M. \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_2 s} - R_2 \right] \cdot [1 - B_3] \right\} \\ & + \det_{\{2,3\}} M. \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_1 s} - R_{12} \right] \cdot [1 - (B_2^1 + B_2^2 + B_3) + (B_2^1 B_3 + B_2^2 B_3)] \right\} \\ & + \det_{\{1\}} M. \left\{ \left[+\frac{1}{C_2 C_3 s^2} + \frac{R_2}{C_3 s} \right] [1] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \det_{\{2\}} M. \left\{ \left[+ \frac{1}{C_1 C_3 s^2} + \frac{R_{12}}{C_3 s} \right] \cdot [1 - (B_2^1 + B_2^2)] \right\} \\
& + \det_{\{3\}} M. \left\{ \left[+ \frac{1}{C_1 C_2 s^2} + \frac{R_2}{C_1 s} + \frac{R_{12}}{C_2 s} + R_{12} R_2 \right] \cdot [1 - B_3] \right\} \\
& + \det M. \left\{ (-1) \left[- \frac{R_{12}}{C_2 C_3 s^2} - \frac{R_{12} R_2}{C_3 s} - \frac{1}{C_1 C_2 C_3 s^3} - \frac{R_2}{C_1 C_3 s^2} \right] \cdot [1] \right\}
\end{aligned}$$

Connaître l'expression de ce type de numérateur ne constitue donc pas une difficulté majeure. Aux calculs des différents $\Delta_k(s)$ (pour k chaîne(s) d'action) s'ajoutent simplement les calculs de k gains de chemins causaux.

B1. 2.2. Transmittance C1

Considérons la transmittance C1 suivante: $\frac{f_{12}}{Se_1} = \frac{N_1(s)}{\Delta(s)} = G_1(s)$ (encore notée $\frac{f_{13}}{e_{11}}$ sur

la figure B1.1.). La branche indiquée 1 du MP contient la source ($i=1$) et la branche contenant le détecteur a pour indice 2 ($o=2$).

Quatre chemins causaux existent:

- Deux chemins causaux parcourant les branches 1 et 2 suivant (11-5-1-2-12-16-16-12-13-13) et (11-5-1-2-12-15-15-12-13-13) impliquent le terme $\det_{\{1,2\};\{3\}} M$.
- Deux chemins causaux parcourant toutes les branches suivant (11-5-1-3-17-17-3-2-12-16-16-12-13-13) et (11-5-1-3-17-17-3-2-12-15-15-12-13-13) impliquent le terme $\det_{\{1,2\};\{1\}} M$.

L'application de l'expression (2.24.) permettant d'établir ce genre de numérateur produit donc:

$$\begin{aligned}
N_1(s) = & \det_{\{1,2\};\{3\}} M. \left\{ (-1)^0 \cdot \left[- \frac{R_2}{I_2 s} - \frac{1}{I_2 C_2 s^2} \right] \cdot [1 - (B_1 + B_3) + (B_1 B_3)] \right\} \\
& + \det_{\{1,2\};\{1\}} M. \left\{ (-1)^1 \cdot \left[\frac{1}{C_3 C_2 I_2 s^3} + \frac{R_2}{C_3 I_2 s^2} \right] \cdot [1 - B_1] \right\}
\end{aligned}$$

De la même manière, nous pouvons déterminer $\frac{N'_1(s)}{\Delta(s)} = \frac{f_2}{e_{11}} = G'_1(s)$ avec:

$$N'_1(s) = \det_{\{1,2\};\{3\}} M. \{ (-1)^0 \cdot [1] \cdot [\Delta_0(s)] \}$$

$$+ \det_{\{1,2\};\{1\}} M \cdot \left\{ (-1)^1 \cdot \left[-\frac{1}{C_3 s} \right] \cdot \left[1 - (B_1 + B_2^1 + B_2^2) + (B_1 B_2^1 + B_1 B_2^2) \right] \right\}$$

ou encore $\frac{N'_1(s)}{\Delta(s)} = \frac{e_{17}}{e_{11}} = G'_1(s)$ avec:

$$N'_1(s) = \det_{\{1,3\};\{2\}} M \cdot \left\{ (-1)^0 \cdot \left[-\frac{1}{C_3 s} \right] \cdot \left[1 - (B_1 + B_2^1 + B_2^2) + B_1 B_2^1 + B_1 B_2^2 \right] \right\}$$

$$+ \det_{\{1,3\};\{1\}} M \cdot \left\{ (-1)^0 \cdot \left[\frac{R_2}{C_3 s} + \frac{1}{C_2 C_3 s^2} \right] \cdot \left[1 - B_1 \right] \right\}$$

B1. 2.3. Transmittance C2

Considérons la transmittance C2 suivante: $\frac{f_{I_1}}{Se_1} = \frac{N_2(s)}{\Delta(s)} = G_2(s)$ (encore notée $\frac{f_6}{e_{11}}$ sur

la figure B1.1.)). La source et le détecteur se situent dans la branche 1.

Plusieurs chemins causaux indirects (passant par R_{11}) existent:

- Le chemin causal suivant (11-5-1-1-4-7-7-6-6) implique le terme $\det_{\{2,3\}} M$.
- Les chemins causaux suivant (11-5-1-2-...-2-1-4-7-7-6-6) et (11-5-1-3-...-3-1-4-7-7-6-6) impliquent les termes $\det_{\{3\}} M$ et $\det_{\{2\}} M$.
- Le chemin causal suivant (11-5-1-2-...-2-3-...-3-1-4-7-7-6-6) ou (11-5-1-3-...-3-2-...-2-1-4-7-7-6-6) implique le terme $\det_{\{1\}} M$.

L'application de l'expression (2.25.) donne:

$$N_2(s) = \det_{\{2,3\}} M \cdot \left\{ \left[+ \frac{R_{11}}{I_1 s} \right] \cdot \left[1 - (B_2^1 + B_2^2 + B_3) + (B_2^1 B_3 + B_2^2 B_3) \right] \right\}$$

$$+ \det_{\{3\}} M \cdot \left\{ (-1) \left[-\frac{R_{11} R_2}{I_1 s} - \frac{R_{11}}{I_1 C_2 s^2} \right] \cdot \left[1 - B_3 \right] \right\}$$

$$+ \det_{\{2\}} M \cdot \left\{ (-1) \left[-\frac{R_{11}}{I_1 C_3 s^2} \right] \cdot \left[1 - (B_2^1 + B_2^2) \right] \right\}$$

$$+ \det M \cdot \left\{ \left[+ \frac{R_{11}}{I_1 C_2 C_3 s^3} + \frac{R_{11} R_2}{I_1 C_3 s} \right] \cdot \left[1 \right] \right\}$$

Annexe B2 : Démonstration du critère α

L'expression (2.24.) résulte de l'expression (2.22.). La méthode utilisée afin d'obtenir l'expression (2.24.) est identique à celle employée pour obtenir l'expression (2.21.). Les formes généralisées de ces expressions sont donc similaires. Nous ne reviendrons donc pas sur cette méthode mais nous nous attacherons ici plus particulièrement à justifier le critère permettant de calculer la valeur de l'exposant α .

Chaque chemin causal reliant la source au détecteur est un chemin causal C1T2 ou C1-2Tt ($2 \leq t \leq m$). La source est située dans la branche i et le détecteur se situe dans la branche o . Quel que soit le chemin causal, les deux liens indicés i et o du MP sont toujours parcourus ($i; o \in \bar{J}$ et $\text{Card} \bar{J} \geq 2$).

Nous supposons $i < o$.

• Considérons un MP ne possédant que deux branches ($\text{dim} M = 2$). Ses deux liens sont donc indicés i et o :

Nous avons donc $J = \{ \}$ ($r=0$) et $\bar{J} = \{i, o\}$. La contribution du MP (notée $T_{\{i, o\}}$) dans le gain du chemin causal (tout chemin causal dans ce cas est un chemin causal C1T2) vaut $+m_{oi}$ (2.2.). Ce terme correspond au déterminant $\det_{\{i, o\}, J} M$ de la matrice M lorsque les simplifications suivantes lui sont appliquées:

$$M = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{io} \\ m_{oi} & m_{oo} \end{bmatrix}$$

L'expression (2.24.) peut être réécrite:

$$N_1(s) = \det_{\{i, o\}, \{ \}} M \cdot \left[\sum_{h=1}^p (-1)^{(\alpha)} [T_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right]$$

$T_h^{\bar{J}}$ est le gain du $h^{\text{ième}}$ chemin causal entre l'entrée et la sortie. Ce gain ne tient pas compte de la contribution du MP.

$\Delta_h(s)$ est le résultat de l'application de la règle de Mason aux boucles causales C_0 disjointes du chemin causal dont le gain est noté $T_h^{\bar{J}}$.

Aucun indice j_k appartenant à \bar{J} ne respecte $j_k < \text{Min}(i, o)$ ou $j_k > \text{Max}(i, o)$. Il vient donc $\alpha = 0$. La règle énoncée produit donc dans ce cas une valeur α nulle qui permet d'attribuer à $N_1(s)$ le même signe que celui de $T_{\{i, o\}}$.

• Considérons maintenant un MP possédant trois branches (ses liens sont indicés i,o et k; dim M=3) L'expression (2.24.) devient:

$$N_1(s) = \sum_{r=0}^1 \left\{ \sum_J \left[\det_{[i;o];J} M \cdot \left[\sum_{h=1}^p (-1)^{(\alpha)} [T_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right] \right] \right\}$$

Pour r=1: J={k}, $\bar{J} = \{i; o\}$. La branche k n'est donc pas parcourue. $\det_{[i;o];\{k\}} M$ obtenu à partir de la matrice M en lui ôtant sa ligne i, sa colonne o et le couple [ligne k, colonne k], vaut $+m_{oi}$, qui correspond à la contribution du MP (notée $T_{\{io\}}$) dans chacun des gains de chemin causal envisageable à ce niveau.

$$M = \begin{bmatrix} m_{kk} & m_{ki} & m_{ko} \\ m_{ik} & m_{ii} & m_{io} \\ m_{ok} & m_{oi} & m_{oo} \end{bmatrix} \quad (k < i)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ik} & m_{io} \\ m_{ki} & m_{kk} & m_{ko} \\ m_{oi} & m_{ok} & m_{oo} \end{bmatrix} \quad (o > k > i)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{io} & m_{ik} \\ m_{oi} & m_{oo} & m_{ok} \\ m_{ki} & m_{ko} & m_{kk} \end{bmatrix} \quad (k > o)$$

Chaque terme $T_h^{\bar{J}}$ est dans ce cas, le gain d'un chemin causal C1T2 reliant la source au détecteur. $T_h^{\bar{J}}$ ne prend pas en compte la contribution du MP.

$\Delta_h(s)$ est le résultat de l'application de la règle de Mason aux boucles causales C0 disjointes du chemin causal considéré et de gain $T_h^{\bar{J}}$.

Aucun indice j_k appartenant à \bar{J} ne respecte $j_k < \text{Min}(i,o)$ ou $j_k > \text{Max}(i,o)$. Il vient donc tout comme précédemment $\alpha = 0$ qui permet d'attribuer le signe correct à $N_1(s)$.

Pour r=0: J={ } et $\bar{J} = \{i; o; k\}$

La branche k est maintenant parcourue après la branche i et avant la branche o. $\det_{[i;o];\{k\}} M$ est obtenu à partir de la matrice M lorsque sa ligne i et sa colonne o ont été supprimées. La contribution du MP (notée $T_{\{iko\}}$) dans le gain (noté $T_h^{\bar{J}}$) de tout chemin causal vérifiant ces conditions vaut $T_{\{iko\}} = +m_{ki} \cdot m_{ok}$. Ce terme compose $\det_{[i;o];\{k\}} M$:

$$M = \begin{bmatrix} m_{kk} & m_{ki} & m_{ko} \\ m_{ik} & m_{ii} & m_{io} \\ m_{ok} & m_{oi} & m_{oo} \end{bmatrix} \quad (k < i)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ik} & m_{io} \\ m_{ki} & m_{kk} & m_{ko} \\ m_{oi} & m_{ok} & m_{oo} \end{bmatrix} \quad (o > k > i)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{io} & m_{ik} \\ m_{oi} & m_{oo} & m_{ok} \\ m_{ki} & m_{ko} & m_{kk} \end{bmatrix} \quad (k > o)$$

$$\det_{[i;o];\{k\}} M = m_{oi} \cdot m_{kk} - m_{ki} \cdot m_{ok} \quad \det_{[i;o];\{k\}} M = m_{ki} \cdot m_{ok} - m_{oi} \cdot m_{kk} \quad \det_{[i;o];\{k\}} M = m_{oi} \cdot m_{kk} - m_{ki} \cdot m_{ok}$$

Un second terme compose $\det_{[i;o];\{\}} M$. Il résulte du cas précédent ($r=1$). En effet, aucun chemin causal de gain $T_h^{\bar{J}}$ avec $\bar{J} = \{i; o\}$ ne parcourt le lien indicé k du MP. Tous ces chemins causaux sont disjoints de la boucle causale C2T1 située dans la branche k . Si aucun élément GY ni TF ne sont présents dans le bond graph, nous pouvons écrire:

$$B_{kk} = B_{\{kk\}} \cdot B^{\{k\}} = m_{kk} \cdot (-1)^{(n_0+n_1)k} G(X_k)$$

$B^{\{k\}}$ est un chemin causal fermé $T^{\{k\}}$ entre l'élément X_k situé au sein de la branche k et le MP. $B_{\{kk\}}$ est la contribution du MP dans cette boucle causale.

L'expression (2.17.) implique:

$$\begin{aligned} \sum_h T_h \Delta_h(s) &= \sum_h T_{\{io\}} T_h^{\{i;o\}} [1 - (B_{kk} + \dots) - \dots] + \sum_h T_{\{iko\}} T_h^{\{i;o;k\}} [1 - \dots] = \\ &= \sum_h T_{\{io\}} T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots] - \sum_h T_{\{io\}} T_h^{\{i;o\}} B_{kk} [1 - \dots] + \sum_h T_{\{iko\}} T_h^{\{i;o;k\}} [1 - \dots] = \\ &= \sum_h T_{\{io\}} T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots] - \sum_h m_{oi} T_h^{\{i;o\}} m_{kk} (-1)^{(n_0+n_1)k} G(X_k) [1 - \dots] + \sum_h m_{ki} m_{ok} T_h^{\{i;o;k\}} [1 - \dots] \end{aligned}$$

$T_h^{\bar{J}}$ est obtenu à l'aide de l'expression (2.1.): $T_h^{\bar{J}} = (-1)^{(n_0+n_1)g} \prod_g \dots$

$$\begin{aligned} T_h^{\{i;o\}} (-1)^{(n_0+n_1)k} G(X_k) &= T_h^{\{i;o;k\}} \Rightarrow \sum_h T_{\{io\}} T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots] - \sum_h m_{oi} m_{kk} T_h^{\{i;o;k\}} [1 - \dots] + \sum_h m_{ki} m_{ok} T_h^{\{i;o;k\}} [1 - \dots] \\ &= m_{oi} \sum_h T_h^{\{i;o\}} \Delta_h(s) + (m_{ki} m_{ok} - m_{oi} m_{kk}) \sum_h T_h^{\{i;o;k\}} \Delta_h(s) \end{aligned}$$

Le premier terme de la dernière expression a été étudié dans le cas précédent ($r=1$). Le second terme composant $\det_{[i;o];\{\}} M$ provient du second terme de l'expression précédente.

Nous obtenons finalement : $(m_{ki} m_{ok} - m_{oi} m_{kk}) \sum_h T_h^{\bar{J}} \Delta_h(s) = \det_{[i;o];\{\}} M \sum_h T_h^{\bar{J}} \Delta_h(s)$ avec $\bar{J} = \{i; o; k\}$

$\Delta_h(s)$ est obtenu à partir de boucles causales C0

Afin de conserver le signe correct, nous pouvons constater que le terme $(-1)^{(\alpha)}$ de l'expression (2.24.) doit être négatif quand $k < i$ et quand $k > o$. La règle est vérifiée ($\alpha = 1$) car seul un indice j_k appartenant à $\bar{J} = \{i; o; k\}$ satisfait $j_k < \text{Min}(i,o)$ ou $j_k > \text{Max}(i,o)$. Lorsque $o > k > i$, la règle se vérifie également ($\alpha = 0$).

• Considérons désormais un MP de dimension m . ($\text{dim}M=m$) Les liens du MP sont indicés i,o et j_1, \dots, j_{m-2} . Lorsque r varie, l'expression (2.24.) devient:

* Pour $r=m-2$: $J=\{j_1, \dots, j_{m-2}\}$ $j_k \neq i, j_k \neq o$, $\bar{J}=\{i;o\}$ ($r=\text{Card } J$)

Dans ce cas $\det_{\{i;o\}, J} M = +m_{oi}$

$(-1)^{(\alpha)}$ doit dans ce cas être positif. La règle proposée produit $\alpha = 0$ car aucun indice j_k appartenant à \bar{J} ($\bar{J}=\{i;o\}$) ne satisfait $j_k < \text{Min}(i,o)$ ou $j_k > \text{Max}(i,o)$.

* Pour $r=(m-2)-1$, nous pouvons prouver (comme pour $m=3$ et $r=0$) que la règle proposée détermine une valeur de α correcte.

Quelle que soit la dimension du MP, lorsqu'aucune branche ou simplement une branche est parcourue après le passage par le lien i et avant le passage par le lien o , la règle permettant de déterminer la valeur souhaitée de α et de ce fait, d'induire le signe souhaité dans l'expression (2.24.) est toujours vérifiée.

Supposons maintenant cette règle vérifiée lorsque $n-1$ branches (indiquées j_k) sont traversées. Pour $r=(m-2)-(n-1)$, $n-1$ branches sont parcourues après le passage par le lien i et avant le passage par le lien o ($\text{Card } \bar{J}=(n-1)+2$).

Tentons de vérifier au rang n , l'exactitude de la règle proposée.

* Pour $r=(m-2)-n$, n branches sont parcourues après le passage par le lien i et avant le passage par le lien o . Sans altérer la généralité du raisonnement, supposons $j_1 < j_2 < \dots < j_p < j_q < \dots < j_n$ et supposons ces branches parcourues dans l'ordre suivant:

$$i \xrightarrow{j_1 \ j_2 \ \dots \ j_p \ j_q \ \dots \ j_n} o \qquad \bar{J} = \{i; j_1; j_2; \dots; j_p; j_q; \dots; j_n; o\}$$

Si I indices j_k appartenant à \bar{J} vérifient $j_k < \text{Min}(i,o)$ ou $j_k > \text{Max}(i,o)$, nous avons deux possibilités:

- $\alpha = I$ et $(-1)^{(\alpha)} = (+1)$ si I possède une valeur nulle ou paire.
- $\alpha = I$ et $(-1)^{(\alpha)} = (-1)$ si I possède une valeur impaire.
- Si $I=0$, (aucun indice j_k appartenant à \bar{J} ne vérifie $j_k < \text{Min}(i,o)$ ou $j_k > \text{Max}(i,o)$), la matrice déduite de M se présente sous cette forme:

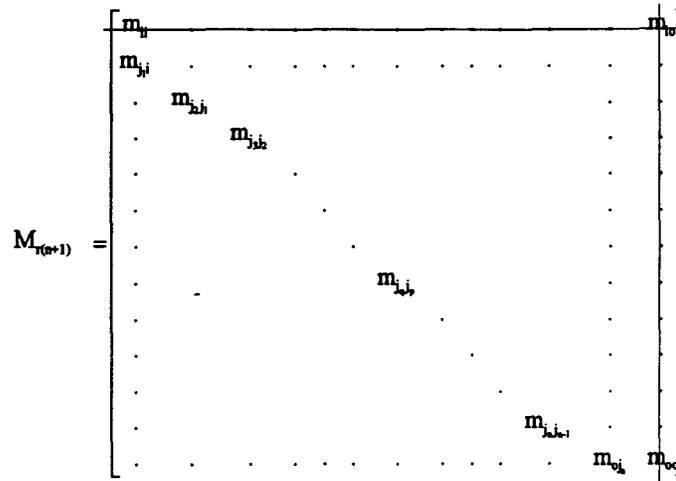


figure B2.1.

La contribution du MP (notée $T_{\{j_1 j_2 \dots j_p j_q \dots j_{n-1} j_n\}}$) dans le gain d'un chemin causal pouvant s'assimiler à celui décrit ci-avant vaut $m_{j_1 j_1} \cdot m_{j_2 j_2} \dots m_{j_p j_p} \dots m_{j_{n-1} j_{n-1}} \cdot m_{o_j n}$. Chaque membre de ce terme se situe sur la diagonale de $M_{r(n+1)}$. Le terme $\det M_{r(n+1)}$ engendre donc $+ m_{j_1 j_1} \cdot m_{j_2 j_2} \dots m_{j_p j_p} \dots m_{j_{n-1} j_{n-1}} \cdot m_{o_j n}$ ($\det_{[i;o]} M = \det M_{r(n+1)}$). Nous devons donc obtenir $(-1)^{\alpha} = (+1)$ et la règle de calcul de α produit $\alpha = 0$. Tout comme précédemment ($m=3$ et $r=0$), la valeur de α convient aux autres termes engendrés par $\det M_{r(n+1)}$. Nous ne détaillerons pas l'origine de tous ces termes mais cette vérification peut être effectuée sur l'un d'entre eux:

Le chemin causal précédent parcourt successivement les branches $j_1 j_2 \dots j_p j_q \dots j_{n-1} j_n$ et o. Le chemin causal parcourant successivement les branches $j_1 j_2 \dots j_p j_q \dots j_{n-1}$ et o n'implique pas la branche j_n . Il est donc disjoint de toute boucle causale C2T1 située au sein de la branche j_n . La contribution du MP dans le gain de cette boucle vaut $+m_{j_n j_n}$. La contribution du MP dans le gain du chemin causal précisé ci-dessus vaut $m_{j_1 j_1} \cdot m_{j_2 j_2} \dots m_{j_p j_p} \dots m_{o_j n-1}$.

La règle de Mason engendre donc:

$$\dots + m_{j_1 j_1} m_{j_2 j_2} \dots m_{o_j n-1} T^{\{j_1 j_2 \dots j_{n-1} o\}} \left[1 - (m_{j_n j_n} B^{(j_n)} + \dots) + \dots \right]$$

qui implique donc le terme suivant:

$$-m_{j_1 j_1} m_{j_2 j_2} \dots m_{o_j n-1} m_{j_n j_n} T^{\{j_1 j_2 \dots j_{n-1} o\}} B^{(j_n)}$$

$$= -m_{j_1 i} m_{j_2 j_1} \dots m_{j_q j_p} \dots m_{j_n j_{n-1}} m_{j_n j_n} T^{(i; j_1; j_2; \dots; j_{n-1}; j_n; 0)}$$

Comme le montre la figure B2.2., le déterminant de la matrice $M_{r(n+1)}$ fait apparaître le terme:

$$- m_{j_1 i} \cdot m_{j_2 j_1} \dots m_{j_q j_p} \dots m_{j_n j_{n-1}} \cdot m_{j_n j_n} \cdot$$

La valeur de α convient donc car $(-1)^\alpha \det M_{r(n+1)}$ conservera le signe de ce terme comme celui des autres.

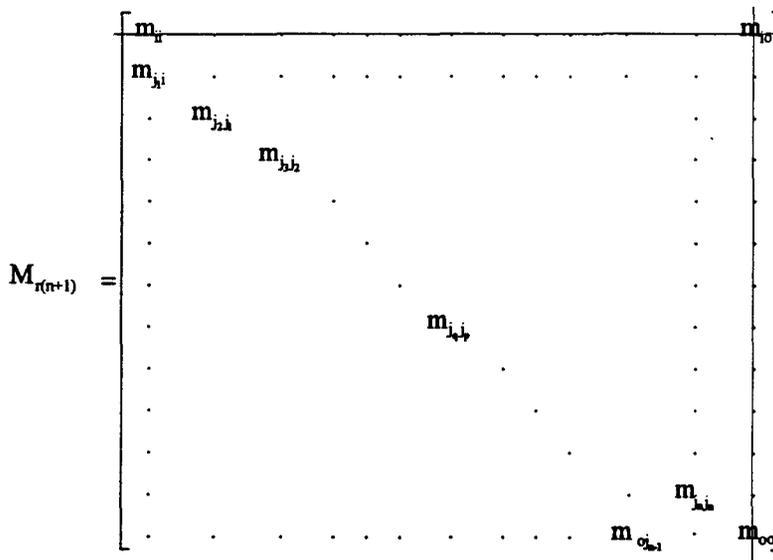


figure B2.2.

Si le sens de parcours des liens du MP s'avère être différent, un résultat identique est obtenu:

$$i \xrightarrow{j_2 \ j_1 \ \dots \ j_p \ j_q \ \dots \ j_n} o$$

La contribution du MP vaut dans ce cas $m_{j_2 i} \cdot m_{j_1 j_2} \dots m_{j_q j_p} \dots m_{j_n j_{n-1}} \cdot m_{j_n j_n}$. Le déterminant de la matrice $M_{r(n+1)}$ de la figure B2.1. fait également apparaître ce terme (figure B2.3.) qui lui aussi est affecté d'un signe +.

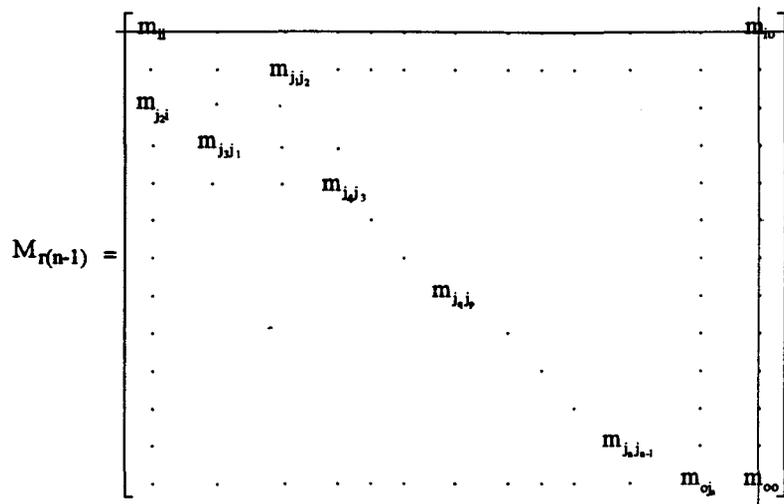


figure B2.3.

L'ordre de parcours des différents liens j_k n'a donc aucune influence sur le calcul de α .

- Si $I=1$, un seul indice j_k appartenant à \bar{J} vérifie $j_k < \text{Min}(i, o)$ ou $j_k > \text{Max}(i, o)$ d'où $\alpha=1$.

La matrice réduite issue de M se présente sous cette forme:

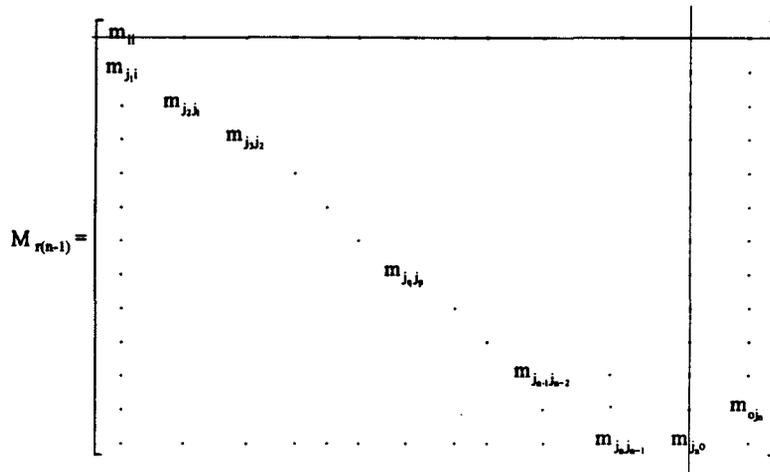


figure B2.4.

Cette matrice peut être retrouvée par permutation des colonnes j_n et j de la matrice $M_{r(n+1)}$ de la figure B2.1.. Le signe des membres du terme $\det_{[i;o],J} M = \det M_{r(n+1)}$ change. Nous avons donc maintenant $\det_{[i;o],J} M = -m_{j_1 i} \cdot m_{j_2 j_1} \dots m_{j_q j_p} \dots m_{j_n j_{n-1}} \cdot m_{o j_n} + \dots$

La valeur de $(-1)^{(\alpha)}$ est dans ce cas négative et permet de vérifier une fois encore la règle énoncée. Elle peut être ainsi vérifiée et étendue pour tout $I > 1$.

La règle de calcul de α est ainsi vérifiée pour tout n . Une démonstration similaire peut être écrite pour $o < i$.

Annexe B3 : Démonstration du critère β

Le but de cette partie est de justifier la valeur de l'exposant β valant $\text{Card}\bar{J}+1=n_T$ qui apparaît dans l'expression (2.25.).

Chaque chemin causal reliant la source au détecteur est un chemin causal C2Tt ($1 \leq t \leq m$). La source et le détecteur sont tous deux situés au sein de la branche i . Le lien i du MP est toujours parcouru d'où $i \in \bar{J}$ et $\text{Card}\bar{J} \geq 1$.

Considérons un MP ne possédant que deux branches ($\text{dim}M=2$). Ses deux liens sont donc indicés i et o :

- Pour $r=1$, $J=\{o\}$ et $\bar{J}=\{i\}$. Tout chemin causal reliant la source au détecteur est dans ce cas un chemin causal C2T1. La contribution du MP (notée $T_{\{ii\}}$) dans le gain d'un tel chemin causal vaut $+m_{ii}$. Ce terme est obtenu en calculant le déterminant de la matrice M lorsque celle-ci est privée du couple [ligne o , colonne o] comme présenté ci-après:

$$M = \begin{bmatrix} m_{ii} & m_{io} \\ m_{oi} & m_{oo} \end{bmatrix}$$

Tout chemin causal de ce genre est disjoint d'une boucle causale C2T1 localisée dans la branche o et dont le gain est noté B_{oo} . Si aucun élément GY ni TF n'est présent dans le bond graph, nous avons:

$$B_{oo} = B_{\{oo\}} \cdot B^{\{o\}} = m_{oo} \cdot (-1)^{(n_o+n_i)_o} G(X_o)$$

$B^{\{o\}}$ est le gain du chemin causal fermé entre l'élément X_o situé dans la branche o et le MP. $B_{\{oo\}}$ constitue la contribution du MP dans le gain total de cette boucle causale.

- Pour $r=0$, $J=\{i\}$ et $\bar{J}=\{i;o\}$. Le lien o du MP peut être parcouru. La contribution du MP (notée $T_{\{ioi\}}$) dans le gain d'un chemin causal (C2T2) parcourant les deux branches vaut $+m_{oi}m_{io}$ qui peut être obtenu directement par calcul du déterminant $\det_r M$ de la matrice M initiale ($J=\{i\}$ n'implique aucune simplification dans la matrice M).

L'expression (2.22.) implique:

$$\begin{aligned} \sum_h T_h \Delta_h(s) &= \sum_h T_{\{ii\}} T_h^{(i)} [1 - (B_{oo} + \dots) - \dots] + \sum_h T_{\{ioi\}} T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots] = \\ &= \sum_h T_{\{ii\}} T_h^{(i)} [1 - \dots] - \sum_h T_{\{ii\}} T_h^{(i)} B_{oo} [1 - \dots] + \sum_h T_{\{ioi\}} T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots] = \\ &= \sum_h T_{\{ii\}} T_h^{(i)} [1 - \dots] - \sum_h m_{ii} T_h^{(i)} \cdot m_{oo} (-1)^{(n_o+n_i)_o} G(X_o) [1 - \dots] + \sum_h m_{oi} m_{io} T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots] \end{aligned}$$

$T_h^{\bar{j}}$ peut être calculé à l'aide l'expression (2.1.)

Nous pouvons écrire finalement:

$$\sum_h m_{ii} T_h^{(i)} [1 - \dots] - \sum_h m_{ii} T_h^{(i)} \cdot m_{oo} (-1)^{(n_o+n_i)_o} G(X_o) [1 - \dots] + \sum_h m_{oi} m_{io} T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots]$$

Or,

$$\begin{aligned} T_h^{(i)} (-1)^{(n_o+n_i)_o} G(X_o) = T_h^{\{i;o\}} &\Rightarrow \sum_h m_{ii} T_h^{(i)} [1 - \dots] - \sum_h m_{ii} m_{oo} T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots] + \sum_h m_{oi} m_{io} T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots] \\ &= m_{ii} \sum_h T_h^{(i)} [1 - \dots] + (m_{oi} m_{io} - m_{ii} m_{oo}) \sum_h T_h^{\{i;o\}} [1 - \dots] = \\ &= \det_{\{o\}} M \sum_h T_h^{(i)} \Delta_h(s) + (-\det_{\{i\}} M) \sum_h T_h^{\{i;o\}} \Delta_h(s) \end{aligned}$$

Pour $r=1$ ($\text{Card}\bar{J}=1$), un seul lien du MP est parcouru. Le terme $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ de l'expression (2.25.) doit être positif afin de conserver le signe correct du premier terme de la dernière expression. La règle est donc vérifiée car: $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}=1$.

Pour $r=0$, toutes les branches sont traversées ($\text{Card}\bar{J}=2$). La dernière expression impose donc une valeur négative pour $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ ce qui est vérifié.

Quelle que soit la dimension du MP et quel que soit le nombre de liens parcourus après le premier passage par le lien i et avant le second, une démonstration identique peut être écrite:

Dès lors que le MP est traversé, il l'est au moins deux fois. Pour $\text{Card}\bar{J}=2$ ($\bar{J}=\{i;o\}$) seuls deux liens indicés i et o sont parcourus ce qui implique deux traversées du MP. La contribution du MP lors de la première traversée (du lien i vers le lien o) engendre le terme $+m_{oi}$. La seconde, effectuée dans le sens opposé engendre le terme $+m_{io}$ (figure B3.1.). La contribution du MP dans tout gain d'un chemin causal suivant ce parcours vaut donc $+m_{oi}m_{io}$.

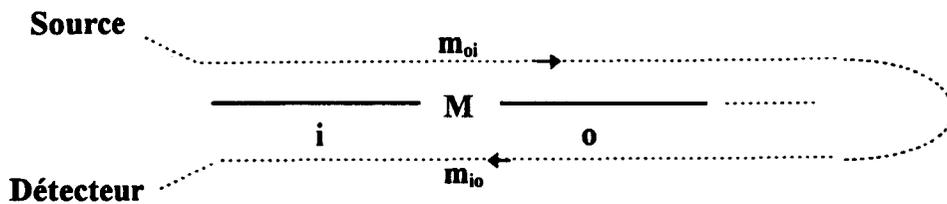


figure B3.1.

Or, dans ce cas $\det_j M = m_{oo}m_{ii} - m_{oi}m_{io}$. Un signe négatif doit donc être associé à ce terme afin de respecter l'expression (2.22.). Comme nous l'avons vu ci-avant, $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ fournit cette valeur.

Pour $\text{Card}\bar{J}=3$ et $\bar{J}=\{i;o;k\}$, il existe deux manières de parcourir les trois liens (figures B3.2. et B3.3.)

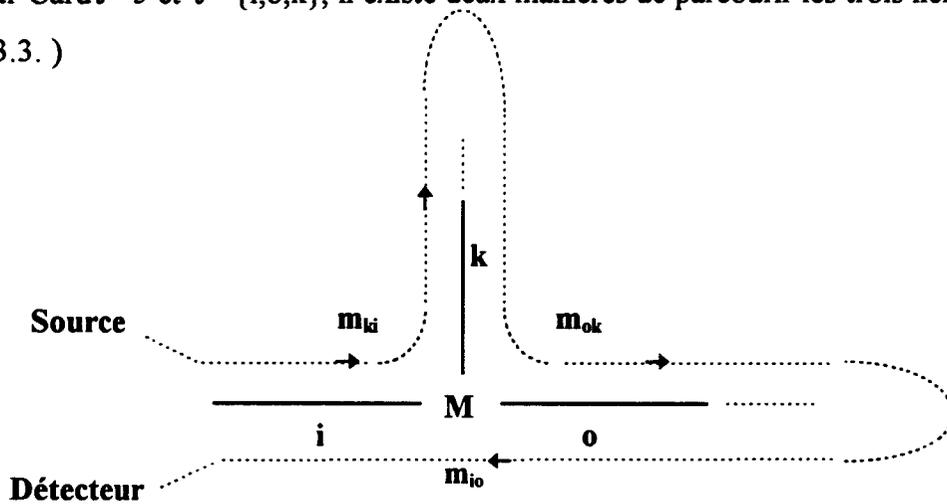


figure B3.2.

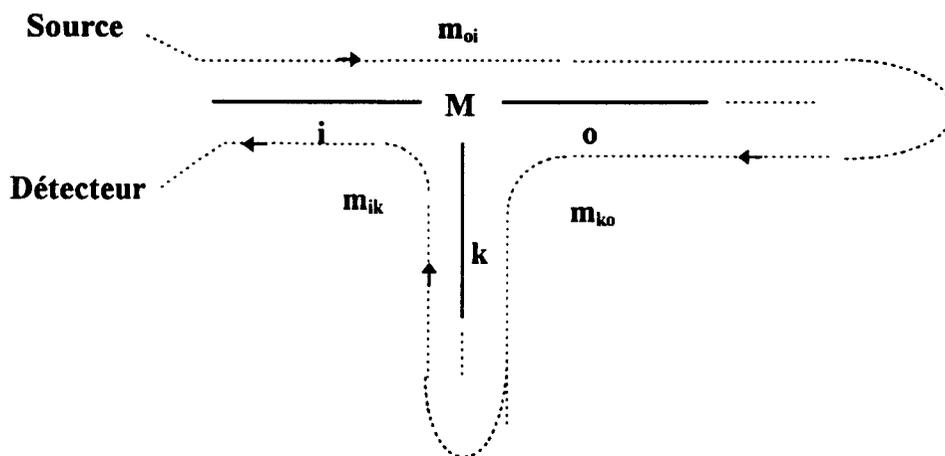


figure B3.3.

Dans ce cas, nous avons $\det_j M = \dots + m_{oi}m_{ko}m_{ik} + m_{ki}m_{ok}m_{io} + \dots$. $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ fournit ici une valeur positive qui permet de respecter l'expression (2.22.).

Remarque: Toute contribution du MP dans le gain d'un chemin causal se compose toujours de la façon suivante: $m_{oi}m_{jo}m_{kj}m_{lk} \dots m_{qp}m_{rq}m_{ir}$. Aucun terme diagonal de la matrice M n'intervient. Nous dirons qu'il existe une contribution cyclique du MP:

$$\begin{aligned}
 & m_{oi}m_{jo}m_{kj}m_{lk} \dots m_{qp}m_{rq}m_{ir} \\
 & = \underbrace{m_{oi}m_{ir}} m_{rq} m_{qp} \dots m_{lk} \underbrace{m_{kj}m_{jo}} \\
 & = \underbrace{m_{or}m_{rq}} m_{qp} \dots \underbrace{m_{lk}m_{ko}} \\
 & \quad (\dots) \\
 & = m_{oo}
 \end{aligned}$$

Lorsque $\text{Card}\bar{J}=2$ ou $\text{Card}\bar{J}=3$, le terme $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ fournit donc le signe affecté par $\det_j M$ au terme représentant la contribution du MP dans le gain du chemin causal C2 parcourant les $\text{Card}\bar{J}$ liens dont les indices figurent dans \bar{J} .

Vérifions cette propriété lorsque m liens sont parcourus.

Soit un MP de dimension m avec $m > m$. Supposons m pair et supposons ces m liens indicés \bar{j}_i de la façon suivante: $1, 2, 3, \dots, m$. La matrice M_m issue de la matrice M_m par suppression de $\text{Card}J$ couples [ligne j_i ; Colonne j_i] ($j_i \neq \bar{j}_i$ et $m = \text{Card}J + \text{Card}\bar{J}$) se présente sous cette forme:

$$M_m = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{1m} \\ m_{21} & m_{22} & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ m_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_{mm} \end{bmatrix}$$

Nous tentons de connaître le signe affecté par le déterminant de cette matrice aux différents termes le composant et pouvant s'assimiler à une contribution cyclique. Nous pouvons écrire:

$$\det M_m = (-1)^{(1+1)} m_{11} \det M_{m-1}^1 + (-1)^{(1+2)} m_{12} \det M_{m-1}^2 + \dots + (-1)^{(1+m)} m_{1m} \det M_{m-1}^m \quad (\text{B3.1.})$$

avec entre autres:

$$M_{m-1}^1 = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{2m} \\ m_{32} & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ m_{m2} & & & & & m_{mm} \end{bmatrix} \quad M_{m-1}^2 = \begin{bmatrix} m_{21} & m_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{2m} \\ m_{31} & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ m_{m1} & & & & & m_{mm} \end{bmatrix}$$

Intéressons nous plus particulièrement au terme $(-1)^{(1+2)} m_{12} \det M_{m-1}^2$ de l'expression (B3.1.). Nous pouvons écrire:

$$\det M_{m-1}^2 = \dots + (-1)^{(1+2)} m_{23} \det M_{m-2}^1 + (-1)^{(1+3)} m_{24} \det M_{m-2}^2 + \dots$$

Nous pouvons donc écrire:

$$(-1)^{(1+2)} m_{12} \det M_{m-1}^2 = \dots + \underbrace{(-1)^{(1+2)} m_{12} \cdot (-1)^{(1+2)} m_{23} \det M_{m-2}^1}_{A} + (-1)^{(1+2)} m_{12} \cdot (-1)^{(1+3)} m_{24} \det M_{m-2}^2 + \dots$$

avec entre autres:

$$M_{m-2}^1 = \begin{bmatrix} m_{31} & m_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{3m} \\ m_{41} & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ m_{m1} & & & & & m_{mm} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons ainsi réitérer l'opération et écrire:

$$A = \underbrace{(-1)^{(1+2)} \dots (-1)^{(1+2)}}_{m-3 \text{ fois}} m_{12} \cdot m_{23} \cdot m_{34} \dots m_{(m-3)(m-2)} \det M_3^1$$

avec:

$$M_3^1 = \begin{bmatrix} m_{(m-2)1} & m_{(m-2)(m-1)} & m_{(m-2)m} \\ m_{(m-1)1} & m_{(m-1)(m-1)} & m_{(m-1)m} \\ m_{m1} & m_{m(m-1)} & m_{mm} \end{bmatrix}$$

Or: $\det M_3^1 = \dots + (-1)^{(1+2)} m_{(m-2)(m-1)} \det M_2^1 + (-1)^{(1+3)} m_{(m-2)m} \det M_2^2$

et: $\det M_2^1 = \dots + (-1)^{(1+2)} m_{(m-1)m} \cdot m_{m1}$

et: $\det M_2^2 = (-1)^{(2+2)} m_{m(m-1)} m_{(m-1)1}$

Nous obtenons donc:

$$A = \underbrace{(-1)^{(1+2)} \dots (-1)^{(1+2)}}_{m-1 \text{ fois}} \underbrace{m_{12} \cdot m_{23} \cdot m_{34} \dots m_{(m-3)(m-2)} m_{(m-2)(m-1)} m_{(m-1)m} m_{m1}}_{A_1} +$$

$$\underbrace{(-1)^{(1+2)} \dots (-1)^{(1+2)}}_{m-3 \text{ fois}} (-1)^{(1+3)} (-1)^{(2+2)} \underbrace{m_{12} \cdot m_{23} \cdot m_{34} \dots m_{(m-3)(m-2)} m_{(m-2)m} m_{m(m-1)} m_{(m-1)1}}_{A_2}$$

Les termes A_1 et A_2 peuvent parfaitement s'assimiler à des contributions cycliques. Nous avons supposé m pair. Nous constatons donc que ces deux termes sont affectés d'un signe négatif par le calcul du déterminant de la matrice M_m . Notre raisonnement nous permet de conclure identiquement pour tous les termes de cette nature apparaissant dans le calcul de ce déterminant (termes issus des déterminants des matrices M_{m-1}^i pour $i \neq 2$). Le signe des termes recherchés dépend donc de la parité de m . Le terme $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)}$ fournit ce signe.

Remarque: $\text{Card}\bar{J}$ correspond donc au nombre de liens parcourus.

- Pour $\text{Card}\bar{J} \geq 2$, il est également le nombre de passages (de Traversées) du chemin causal par le MP noté n_τ ($n_\tau = \text{Card}\bar{J}$). Nous pouvons donc dans ce cas écrire

$$(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)} = (-1)^{(n_\tau+1)}$$

- Pour $\text{Card}\bar{J} = 1$, le MP n'est pas traversé mais simplement "touché". Dans ce cas, nous aurons $(-1)^{(\text{Card}\bar{J}+1)} = (-1)^{(n_\tau)}$.

Annexe B4 : expression de $\delta_2(s)$ concernant la figure 2.19.

La mise en œuvre de l'expression (2.21.) sur le bond graph de la figure 2.19. produit:

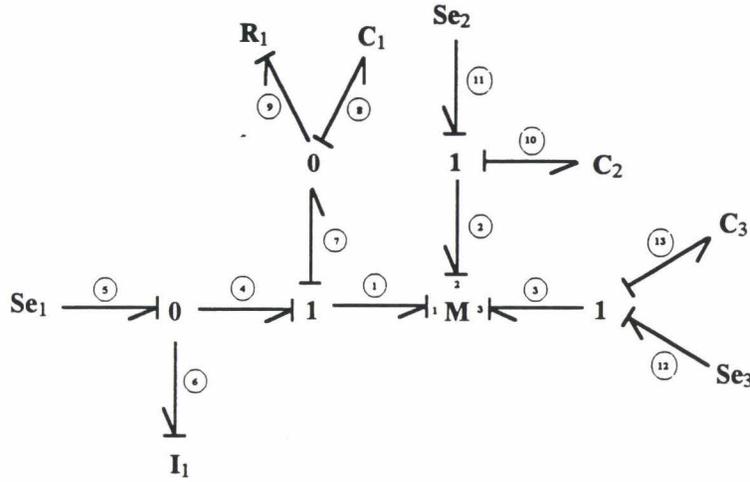


figure B4.1.: Réplique de la figure 2.19.

$$\begin{aligned} \delta_2(s) = & \det_{\{1,2,3\}} M \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right\} \\ & + \det_{\{1,2\}} M \cdot \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_3 s} \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\} \\ & + \det_{\{1,3\}} M \cdot \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_2 s} \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\} \\ & + \det_{\{2,3\}} M \cdot \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_1 s} \right] [1] \right\} \\ & + \det_{\{1\}} M \cdot \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\} \\ & + \det_{\{2\}} M \cdot \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] \right\} \\ & + \det_{\{3\}} M \cdot \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \right] [1] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \det M \left\{ (-1)^3 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] \right\}$$

L'origine de certains termes composant ce dénominateur est précisée ci-après:

$\det_{\{1,2\}} M.d'$	$-[B_{33}] + [B_{33} B_0^1] = -B_{33} [1 - B_0^1] = -\left(-\frac{m_{33}}{C_3 s} \right) [1 - B_0^1] = \det_{\{1,2\}} M \left\{ (-1)^1 \left[\left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\}$
$\det_{\{1,3\}} M.e'$	$-[B_{22}] + [B_{22} B_0^1] = -B_{22} [1 - B_0^1] = -\left(-\frac{m_{22}}{C_2 s} \right) [1 - B_0^1] = \det_{\{1,3\}} M \left\{ (-1)^1 \left[\left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\}$
$\det_{\{2,3\}} M.f'$	$-[B_{11}] = -\left(-\frac{m_{11}}{C_1 s} \right) = \det_{\{2,3\}} M \left\{ (-1)^1 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \right] [1] \right\}$

Annexe B5 : expression de $\delta_2(s)$ concernant la figure 2.20.

La mise en œuvre de l'expression (2.21.) sur le bond graph de la figure 2.20. produit:

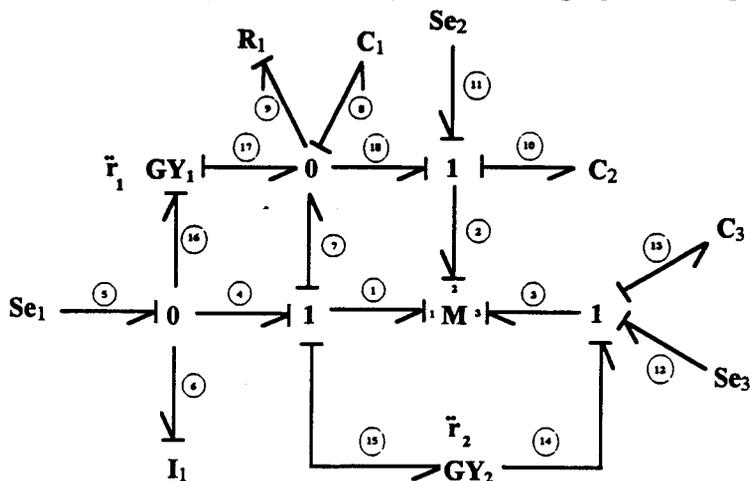


figure B5.1.: Réplique de la figure 2.20.

$$\begin{aligned}
 \delta_2(s) = & \det_{\{1,2,3\}} M. \left\{ 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right\} \\
 & + \det_{\{1,2\}} M. \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_3 s} \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\} \\
 & + \det_{\{1,3\}} M. \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_2 s} \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] + (-1) \left[-\frac{1}{C_1 s} \right] [1] \right\} \\
 & + \det_{\{2,3\}} M. \left\{ (-1) \left[-\frac{1}{C_1 s} \right] [1] \right\} \\
 & + \det_{\{1\}} M. \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] + (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] \right\} \\
 & + \det_{\{2\}} M. \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] + (-1)^1 \left[(-r_2^2) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] \right\} \\
 & + \det_{\{3\}} M. \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \right] [1] \right\} \\
 & + \det M. \left\{ (-1)^3 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] + (-1)^2 \left[(-r_2^2) \left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] + (-1)^2 \left[(-r_2^2) \left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \right] [1] \right\}
 \end{aligned}$$

Annexe B6

Etude de la contribution d'une boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux associée à deux boucles causales C2T1 ou à une autre boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux

Pour $m=4$ et $J=\{\}$ ou pour $m \geq 4$ et $\text{Card}J=m-4$, quatre liens (indiqués de 1 à 4) du MP sont concernés ($\bar{J}=\{1;2;3;4\}$). Deux d'entre eux sont reliés afin de former la boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux. Chacun des deux derniers peut alors intervenir dans l'une des deux boucles causales C2T1 (figure B6.1.). Ces deux derniers liens peuvent également être reliés et former une autre boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux (figure B6.2.).

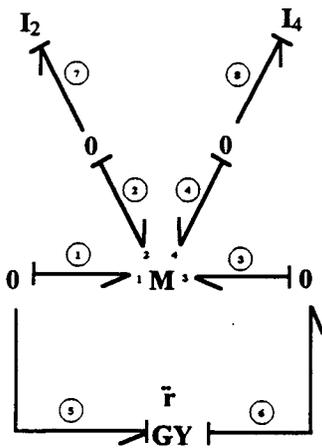


figure B6.1.

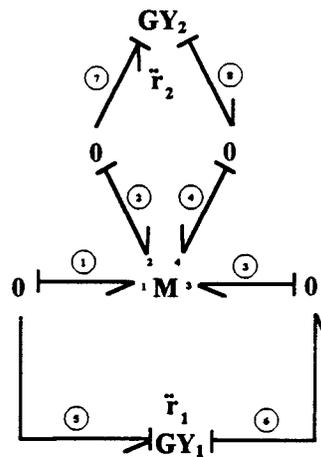


figure B6.2.

Dans le cas de la figure B6.1., nous aurions:

$$\delta_2^{\{\}}(s) = +\det_{\{\}} M \left\{ (-1)^3 \left[\left(-\frac{1}{I_2 s} \right) \left(-\frac{1}{I_4 s} \right) \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] \cdot [1] \right\} \tag{B6.1.}$$

Le tableau B6.1. permet de comprendre l'origine des multiples termes composant l'expression précédente.

	detM	Gains de boucles
1	$m_{11} m_{22} m_{33} m_{44}$	$B_{22} (2-7-7-2)$ $B_{11-22} (1-5-6-3-3-6-5-1)$ $B_{44} (4-8-8-4)$
2	$m_{11} m_{22} m_{33} m_{44}$	$B_{22} (2-7-7-2)$ $B_{20-11-34} (8-4-3-6-5-1-1-5-6-3-4-8)$
3	$m_{11} m_{22} m_{33} m_{44}$	B_{44} $B_{22-11-33} (7-2-3-6-5-1-1-5-6-3-2-7)$
4	$m_{11} m_{22} m_{33} m_{44}$	$B_{20-11-32} (7-2-4-8-8-4-3-6-5-1-1-5-6-3-2-7)$
5	$m_{11} m_{22} m_{33} m_{44}$	$B_{20-11-34} (8-4-2-7-7-2-3-6-5-1-1-5-6-3-4-8)$

6	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{11-23} $B_{24}(7-2-4-8-8-4-2-7)$
7	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{44} $B_{21-33-12}(7-2-1-5-6-3-3-6-5-1-2-7)$
8	m_1, m_2, m_3, m_4	$B_{21-30-12}(7-2-1-5-6-3-4-8-8-4-3-6-5-1-2-7)$
9	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{44} $B_{13}(1-3-6-5)$ $B_{21-22}(7-2-1-5-6-3-2-7)$
10	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{21-22} $B_{43-14}(8-4-3-6-5-1-4-8)$
11	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{13} $B_{41-34}(8-4-2-7-7-2-1-5-6-3-4-8)$
12	m_1, m_2, m_3, m_4	$B_{121-23-14}(8-4-2-7-7-2-1-5-6-3-3-6-5-1-4-8)$
13	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{44} $B_{31}(3-1-5-6)$ $B_{23-12}(7-2-3-6-5-1-2-7)$
14	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{31} $B_{20-12}(7-2-4-8-8-4-3-6-5-1-2-7)$
15	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{22} B_{44} B_{13} et B_{31}
16	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{22} B_{31} $B_{43-14}(8-4-3-6-5-1-4-8)$
17	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{24} B_{13} et B_{31}
18	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{31} $B_{423-14}(8-4-2-7-7-2-3-6-5-1-4-8)$
19	m_1, m_2, m_3, m_4	$B_{41-34}(8-4-1-5-6-3-4-8)$ $B_{23-12}(7-2-3-6-5-1-2-7)$
20	m_1, m_2, m_3, m_4	$B_{241-33-12}(7-2-4-8-8-4-1-5-6-3-3-6-5-1-2-7)$
21	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{22} B_{13} $B_{41-34}(8-4-1-5-6-3-4-8)$
22	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{22} $B_{41-33-14}(8-4-1-5-6-3-3-6-5-1-4-8)$
23	m_1, m_2, m_3, m_4	B_{13} $B_{241-32}(7-2-4-8-8-4-1-5-6-3-2-7)$
24	m_1, m_2, m_3, m_4	$B_{23-441-32}(7-2-3-6-5-1-4-8-8-4-1-5-6-3-2-7)$

tableau B6.1.

Les différents termes présentés dans ce tableau peuvent se regrouper en plusieurs catégories:

• Les deux boucles causales C2T1 de gain B_{22} et B_{44} ainsi que la boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux de gain B_{11-33} sont disjointes entre elles. Le produit $B_{11-33} B_{22} B_{44}$ fait apparaître le premier terme de l'expression (B6.1.) (ligne 1 tableau B6.1.). Cette boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux est également disjointe de la boucle causale C2T2 de gain $B_{242} = B_{424}$. Le produit des gains $B_{11-33} B_{242}$ est évoqué ligne 6 du tableau B6.1.. Les deux boucles causales C1T2 de gain B_{31} et B_{13} sont disjointes entre elles et sont toutes les deux disjointes des deux boucles causales C2T1 évoquées ci-dessus (B_{22} et B_{44}) mais aussi de la boucle causale C2T2 de gain B_{242} . Les produits $B_{31} B_{13} B_{22} B_{44}$ et $B_{31} B_{13} B_{242}$ interviennent lignes 17 et 15.

Remarque: chaque fois, les quatre liens sont parcourus suivant effort et flux. Cette caractéristique se généralise à chacun des gains ou produits de gains présentés ci-après.

• Quatre boucles causales C2T3 existent et leurs gains respectifs sont $B_{23-11-32}$, $B_{21-33-12}$, $B_{43-11-34}$ et $B_{41-33-14}$. Deux d'entre elles sont disjointes de la boucle causale C2T1 de gain B_{22} et les deux autres respectent cette condition vis à vis de la boucle causale C2T1 de gain B_{44} . Les quatre produits de gains suivants interviennent dans la règle de Mason:

- $B_{23-11-32} B_{44}$ (ligne 3)
- $B_{21-33-12} B_{44}$ (ligne 7)
- $B_{43-11-34} B_{22}$ (ligne 2)
- $B_{41-33-14} B_{22}$ (ligne 22)

• Six boucles causales C2T4 existent et leurs gains respectifs sont $B_{243-11-32}$, $B_{241-33-12}$, $B_{423-11-34}$, $B_{421-33-14}$, $B_{21-343-12}$ et $B_{23-141-32}$. Ces six gains interviennent individuellement dans la règle de Mason:

- $B_{243-11-32}$ (ligne 4)
- $B_{241-33-12}$ (ligne 20)
- $B_{423-11-34}$ (ligne 5)
- $B_{421-33-14}$ (ligne 12)
- $B_{21-343-12}$ (ligne 8)

- $B_{23-141-32}$ (ligne 24)

• Quatre boucles causales C1-2T3 existent et leurs gains respectifs sont B_{23-12} , B_{21-32} , B_{43-14} et B_{41-34} . Deux d'entre elles sont disjointes de la boucle causale C2T1 de gain B_{44} (B_{23-12} et B_{21-32}) tandis que les deux autres présentent cette caractéristique par rapport à la boucle causale C2T1 de gain B_{22} (B_{43-14} et B_{41-34}). Deux parmi ces quatre boucles causales C1-2T3 sont disjointes de la boucle causale C1T2 de gain B_{13} (B_{23-12} et B_{43-14}) alors que les deux autres présentent cette caractéristique vis à vis de la boucle causale C1T2 de gain B_{31} (B_{41-34} et B_{21-32}). Les quatre produits de gains suivants apparaissent dans la règle de Mason:

- $B_{23-12} B_{44} B_{31}$ (ligne 13)

- $B_{21-32} B_{44} B_{13}$ (ligne 9)

- $B_{43-14} B_{22} B_{31}$ (ligne 16)

- $B_{41-34} B_{22} B_{13}$ (ligne 21)

De plus les boucles causales de gain B_{23-12} et B_{41-34} sont disjointes tout comme le sont les boucles causales de gain B_{21-32} et B_{43-14} . Les deux produits $B_{23-12} B_{41-34}$ et $B_{21-32} B_{43-14}$ interviennent également dans l'application de la règle de Mason:

- $B_{23-12} B_{41-34}$ (ligne 19)

- $B_{21-32} B_{43-14}$ (ligne 10)

• Quatre boucles causales C1-2T4 existent également et leurs gains respectifs sont B_{243-12} , B_{241-32} , B_{423-14} et B_{421-34} . Deux d'entre elles sont disjointes de la boucle causale C1T2 de gain B_{13} (B_{241-32} et B_{421-34}) tandis que les deux autres présentent la même caractéristique vis à vis de la boucle causale C1T2 de gain B_{31} (B_{243-12} et B_{423-14}). Les quatre produits de gains suivants apparaissent dans la règle de Mason:

- $B_{241-32} B_{13}$ (ligne 23)

- $B_{243-12} B_{31}$ (ligne 14)

- $B_{421-34} B_{13}$ (ligne 11)

- $B_{423-14} B_{31}$ (ligne 18)

Concernant la figure B6.2., une analyse similaire peut être effectuée. Nous aurions dans ce cas:

$$\delta_2^{\{ \}}(s) = +\det_{\{ \}} M \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{r_1^2} \right) \left(-\frac{1}{r_2^2} \right) \right] \cdot [1] \right\} \quad (B6.2.)$$

Le tableau B6.2. permet de comprendre l'origine des multiples termes composant l'expression précédente.

	detM	Gains de boucles
1	$m_{11}m_{22}m_{33}m_{44}$	$B_{22-44} (2-7-8-4-4-8-7-2)$ $B_{11-33} (1-5-6-3-3-6-5-1)$
2	$m_{11}m_{22}m_{34}m_{43}$	$B_{34-22-43-11} (3-4-8-7-2-2-7-8-4-3-6-5-1-1-5-6)$
3	$m_{11}m_{22}m_{33}m_{44}$	$B_{33-44-22-11} (3-2-7-8-4-4-8-7-2-3-6-5-1-1-5-6)$
4	$m_{11}m_{22}m_{34}m_{43}$	$B_{33-43-11} (3-2-7-8-4-3-6-5-1-1-5-6)$ $B_{24} (2-4-8-7)$
5	$m_{11}m_{24}m_{33}m_{43}$	$B_{34-23-11} (3-4-8-7-2-3-6-5-1-1-5-6-3)$ $B_{43} (4-2-7-8)$
6	$m_{11}m_{24}m_{33}m_{43}$	B_{11-33} B_{43} et B_{24}
7	$m_{12}m_{21}m_{33}m_{44}$	$B_{12-44-21-33} (1-2-7-8-4-4-8-7-2-1-5-6-3-3-6-5)$
8	$m_{12}m_{21}m_{34}m_{43}$	$B_{12-43} (1-2-7-8-4-3-6-5)$ $B_{21-34} (2-1-5-6-3-4-8-7)$
9	$m_{12}m_{22}m_{31}m_{44}$	$B_{21-32-44} (2-1-5-6-3-2-7-8-4-4-8-7)$ $B_{13} (1-3-6-5)$
10	$m_{12}m_{22}m_{34}m_{41}$	$B_{21-32-43-14} (2-1-5-6-3-2-7-8-4-3-6-5-1-4-8-7)$
11	$m_{12}m_{24}m_{31}m_{43}$	B_{13} et B_{43} B_{21-34}
12	$m_{12}m_{24}m_{33}m_{41}$	B_{43} $B_{14-21-33} (1-4-8-7-2-1-5-6-3-3-6-5)$
13	$m_{12}m_{21}m_{32}m_{44}$	$B_{31} (3-1-5-6)$ $B_{22-12-44} (2-3-6-5-1-2-7-8-4-4-8-7)$
14	$m_{12}m_{21}m_{34}m_{43}$	B_{31} et B_{24} $B_{12-43} (1-2-7-8-4-3-6-5)$
15	$m_{12}m_{22}m_{31}m_{44}$	B_{13} et B_{31} et B_{22-44}
16	$m_{12}m_{22}m_{34}m_{41}$	B_{13} $B_{43-14-22} (4-3-6-5-1-4-8-7-2-2-7-8)$
17	$m_{12}m_{24}m_{31}m_{43}$	B_{13} et B_{31} et B_{24} et B_{43}
18	$m_{12}m_{24}m_{32}m_{41}$	B_{31} et B_{43} $B_{14-23} (1-4-8-7-2-3-6-5)$
19	$m_{12}m_{21}m_{32}m_{43}$	$B_{22-12-41-34} (2-3-6-5-1-2-7-8-4-1-5-6-3-4-8-7)$

20	$m_{14}m_{21}m_{33}m_{41}$	B_{24} et $B_{12-41-33}$ (1-2-7-8-4-1-5-6-3-3-6-5)
21	$m_{14}m_{22}m_{31}m_{41}$	B_{13} $B_{41-34-22}$ (4-1-5-6-3-4-8-7-2-2-7-8)
22	$m_{14}m_{22}m_{33}m_{41}$	$B_{14-22-41-33}$ (1-4-8-7-2-2-7-8-4-1-5-6-3-3-6-5)
23	$m_{14}m_{22}m_{31}m_{41}$	B_{13} et B_{24} B_{41-33} (4-1-5-6-3-2-7-8)
24	$m_{14}m_{22}m_{33}m_{41}$	B_{14-23} et B_{14-32}

tableau B6.2.

Les différents termes présentés dans ce tableau peuvent également se regrouper en plusieurs catégories:

- Les deux boucles causales C2T2 à coefficients diagonaux et de gain B_{11-33} et B_{22-44} sont disjointes entre elles. Le produit $B_{11-33} B_{22-44}$ fait apparaître le premier terme de l'expression (B6.2.) (ligne 1). Chacune de ces deux boucles causales laissent apparaître deux boucles causales C1T2 de gain B_{31} , B_{13} , B_{24} et B_{42} . Les produits suivants interviennent lors de l'application de la règle de Mason:

- $B_{11-33} B_{24} B_{42}$ (ligne 6)
- $B_{22-44} B_{31} B_{13}$ (ligne 15)

Ces quatre boucles causales C1T2 sont disjointes entre elles. Le produit $B_{24} B_{42} B_{31} B_{13}$ intervient à son tour :

- $B_{24} B_{42} B_{31} B_{13}$ (ligne 17)

- Quatre boucles causales C1T4 existent et leurs gains respectifs sont B_{12-43} , B_{21-34} , B_{23-14} et B_{41-32} . Certaines de ces boucles causales sont disjointes entre elles et font apparaître $B_{12-43} B_{21-34}$ et $B_{23-14} B_{41-32}$. Toutes sont disjointes de deux des quatre boucles causales C1T2. Les produits suivants composent l'expression (B6.2.):

- $B_{12-43} B_{21-34}$ (ligne 8)
- $B_{23-14} B_{41-32}$ (ligne 24)
- $B_{12-43} B_{24} B_{31}$ (ligne 14)
- $B_{21-34} B_{42} B_{13}$ (ligne 11)
- $B_{23-14} B_{31} B_{42}$ (ligne 18)

- $B_{41-32} B_{24} B_{13}$ (ligne 23)

• Huit boucles causales C1-2T4 existent et leurs gains respectifs sont $B_{32-43-11}$, $B_{34-23-11}$, $B_{21-32-44}$, $B_{23-12-44}$, $B_{41-34-22}$, $B_{43-14-22}$, $B_{14-21-33}$ et $B_{12-41-33}$. Chacune de ces boucles causales est disjointe d'une boucle causale C1T2. Huit produits de gains en sont déduits et composent donc l'expression (B6.2.):

- $B_{32-43-11} B_{24}$ (ligne 4)

- $B_{34-23-11} B_{42}$ (ligne 5)

- $B_{21-32-44} B_{13}$ (ligne 9)

- $B_{23-12-44} B_{31}$ (ligne 13)

- $B_{41-34-22} B_{13}$ (ligne 21)

- $B_{43-14-22} B_{31}$ (ligne 16)

- $B_{14-21-33} B_{42}$ (ligne 12)

- $B_{12-41-33} B_{24}$ (ligne 20)

• Six boucles causales C2T4 existent et leurs gains respectifs sont $B_{12-44-21-33}$, $B_{32-44-23-11}$, $B_{14-22-41-33}$, $B_{34-22-43-11}$, $B_{21-32-43-14}$ et $B_{23-12-41-34}$. Ces six gains composent également l'expression (B6.2.):

- $B_{12-44-21-33}$ (ligne 7)

- $B_{32-44-23-11}$ (ligne 3)

- $B_{14-22-41-33}$ (ligne 22)

- $B_{34-22-43-11}$ (ligne 2)

- $B_{21-32-43-14}$ (ligne 10)

- $B_{23-12-41-34}$ (ligne 19)

Comme nous l'avons vu précédemment, nombreuses sont les boucles causales n'étant pas de C2 à intervenir (dans les produits de gains uniquement) dans les tableaux B6.1. et B6.2..

Tout comme précédemment, nous pouvons déterminer de façon systématique les différents gains et produits de gains ne pouvant pas composer $\delta_2(s)$.

Les tableaux B6.3. et B6.4. regroupent l'ensemble de ces termes pour les figures B6.1. et B6.2..

Boucles C1	Boucles C1-2	Produits de gains
B_{13}	B_{23-12} B_{43-14}	$B_{23-12}B_{44}$ $B_{43-14}B_{22}$ $B_{13}B_{22}$
	B_{243-12} B_{423-14}	$B_{13}B_{44}$ $B_{13}B_{22}B_{44}$ $B_{13}B_{242}$
B_{31}	B_{21-32} B_{41-34}	$B_{21-32}B_{44}$ $B_{41-34}B_{22}$ $B_{31}B_{22}$
	B_{241-32} B_{421-34}	$B_{31}B_{44}$ $B_{31}B_{22}B_{44}$ $B_{31}B_{242}$

tableau B6.3.

Boucles C1	Boucles C1-2	Produits de gains
B_{13}	$B_{23-12-44}$ $B_{43-14-22}$	$B_{13}B_{22-44}$
B_{31}	$B_{21-32-44}$ $B_{41-34-22}$	$B_{31}B_{22-44}$
B_{24}	$B_{14-21-33}$ $B_{34-23-11}$	$B_{24}B_{11-33}$
B_{42}	$B_{12-41-33}$ $B_{32-43-11}$	$B_{42}B_{11-33}$
B_{14-23}	-	-
B_{41-32}	-	-
B_{12-43}	-	-
B_{21-34}	-	-
-	-	$B_{13}B_{24}$ $B_{13}B_{42}$ $B_{13}B_{21-34}$ $B_{13}B_{41-32}$ $B_{13}B_{31}B_{24}$ $B_{13}B_{31}B_{42}$ $B_{31}B_{12-43}$ $B_{31}B_{14-23}$ $B_{42}B_{14-23}$ $B_{42}B_{34-21}$ $B_{24}B_{43-12}$ $B_{24}B_{41-32}$ $B_{24}B_{31}$ $B_{42}B_{31}$ $B_{42}B_{24}B_{13}$ $B_{42}B_{24}B_{31}$

tableau B6.4.

Annexe B7

Pour montrer l'incidence d'une boucle causale C2T3 à coefficients diagonaux, nous construisons la figure B7.1. à partir de la figure 2.20. en introduisant le gyrateurs GY_3 .

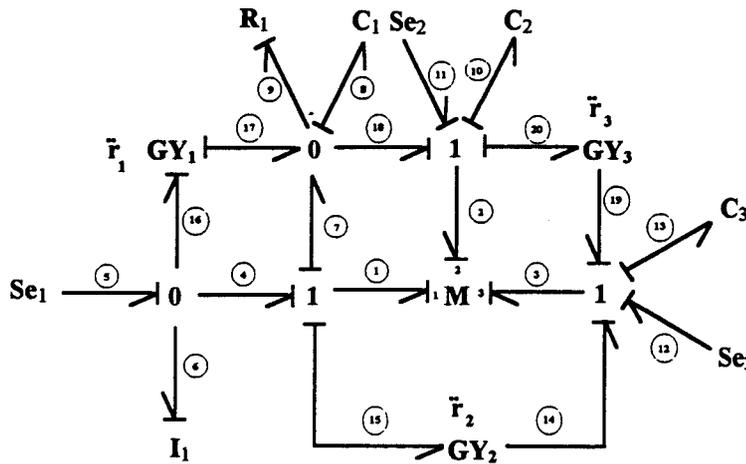


figure B7.1.

Deux boucles causales C2T3 à coefficients diagonaux apparaissent:

Chemin causal de la Boucle	2-20-19-3-3-14-15-1-1-7-8-8-18-2	2-18-8-8-7-1-1-15-14-3-3-19-20-2
Gain	$B_{11-22-33}^1 = -\frac{r_2 r_3}{C_1 s} m_{11} m_{22} m_{33}$	$B_{11-22-33}^2 = -\frac{r_2 r_3}{C_1 s} m_{11} m_{22} m_{33}$

Une autre boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux apparaît également:

Chemin causal de la Boucle	2-20-19-3-3-14-15-1-1-7-8-8-18-2
Gain	$B_{22-33} = -r_3^2 m_{22} m_{33}$

Ces nouvelles boucles causales C2 à coefficients diagonaux impliquent certaines modifications. Les termes $\delta_2^{(1)}(s)$ et $\delta_2^{(2)}(s)$ deviennent:

$$\delta_2^{(1)}(s) = + \det_{(1)} M \left\{ (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] + (-1)^2 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] + \right.$$

Terme résultant de la boucle causale C2T2 à coefficients diagonaux de gain $B_{11-22} = -r_3^2 m_{11} m_{22}$ et des deux boucles causales C2T1 disjointes de gain $B_{23} = -r_3 m_{32}$ (2-3-19-20) et $B_{32} = r_3 m_{23}$ (3-2-20-19). Ces trois boucles sont disjointes de la boucle C0 de gain $B_1^0 = -\frac{1}{R_1 C_1 s}$.

$$\underbrace{(-1)^1 \left[(-r_3^2) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right]}$$

$$\delta_2^{\{ \}}(s) = + \det M \left\{ (-1)^3 \left[\left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] + (-1)^2 \left[(-r_2^2) \left(-\frac{1}{C_2 s} \right) \right] \left[1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} \right] + \right. \\ \left. + (-1)^2 \left[(-r_2^2) \left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \right] [1] + (-1)^2 \left[(-r_3^2) \left(-\frac{1}{C_1 s} \right) \right] [1] \right\}$$

Terme résultant de la boucle C2T2 à coefficients diagonaux et des boucles C2T1 évoquées ci-dessus. Ces trois boucles sont disjointes de la boucle C2T1 de gain $B_{11} = -\frac{m_{11}}{C_1 s}$. D'autres boucles de nature diverses interviennent également dans la composition de ce terme.

$$\underbrace{+ (-1)^1 \left[\left(-\frac{r_2 r_3}{C_1 s} \right) \right] [1] + (-1)^1 \left[\left(-\frac{r_2 r_3}{C_1 s} \right) \right] [1]}$$

Termes résultants des deux boucles C2T3 à coefficients diagonaux. D'autres boucles de nature diverses interviennent également dans la composition de ces termes.

A ce niveau, le dénominateur $\Delta(s)$ du modèle bond graph associé à la figure B7.1. n'est pas connu intégralement. Toute l'étude menée dans la suite du chapitre 2 s'applique effectivement également à ce modèle. Cependant, certains termes supplémentaires apparaissent. Certains de ces termes sont précisés ci-après:

La boucle causale suivante constitue une nouveauté par rapport à la figure 2.20.:

Chemin causal de la Boucle	1-2-20-19-3-3-14-15
Gain	$B_{12-33} = -r_2 r_3 m_{21} m_{33} = m_{21} m_{33} B_{12-33}^*$ <p style="text-align: center;">(C1-2T3)</p>

Les boucles causales C1T2 de gains B_{32} et B_{13} sont disjointes et parcourent identiquement tous les liens parcourus par la boucle causale de gain B_{12-33} . Nous avons:

$$B_{12} B_{33} = \left(-\frac{m_{21}}{C_1 s} \right) \left(-\frac{m_{33}}{C_3 s} \right) = m_{21} m_{33} B_{12}^* B_{33}^*$$

Conformément aux propos tenus ci-avant, nous nous intéresserons plus particulièrement au terme B_{12-33} qui permet de franchir le MP du lien 1 vers le lien 2 directement plutôt qu'au terme $B_{32} B_{13}$. Nous avons donc $n_1^* = 1$.

La boucle causale C0 de gain B_1^0 est disjointe des boucles causales évoquées ci-avant. Les termes $B_{12-33} B_1^0$ et $B_{32} B_{13} B_1^0$ interviennent aussi dans l'application de la règle de Mason:

$$\begin{aligned} & \dots - [B_{12-33} + \dots] + [B_{32} B_{13} - B_{12-33} B_1^0 + \dots] - [B_{32} B_{13} B_1^0 + \dots] - \dots \\ & = \dots - B_{12-33} [1 - B_1^0] + B_{32} B_{13} [1 - B_1^0] + \dots \\ & = \dots + [-B_{12-33} + B_{32} B_{13}] [1 - B_1^0] + \dots \end{aligned}$$

qui devient:

$$\begin{aligned} & = \dots + [-(-r_2 r_3 m_{21} m_{33}) + (r_3 m_{23})(-r_2 m_{31})] [1 - B_1^0] + \dots \\ & = \dots + [m_{21} m_{33} - m_{23} m_{31}] (-1)^{n_1} (-r_2 r_3) [1 - B_1^0] + \dots \\ & = \dots + \left[\det_{\{1,2\}} M \right] \left\{ (-1)^{n_1} [B_1^j] [\delta_1(s)] \right\} + \dots \end{aligned}$$

avec:

- $B_1^j = B_{12-33}^*$ et $B_{12-33}^* = B_{32}^* B_{13}^*$

- $n_1^* = 1$ car nous ne considérons que le terme B_{12-33} donc par conséquent B_{12-33}^* .

Dans ce cas, seule cette boucle compose B_1^j .

- $\delta_1(s) = 1 - B_1^0$

d'où finalement:

$$T_1' = \det_{[1;2]\{\}} M \left\{ (-1)^{n_1^*} [(-r_2 r_3)] [1 - B_1^0] + (-1)^{n_1^*} \left[\left(\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] \right\}$$

La boucle causale suivante constitue également une nouveauté par rapport à la figure 2.20.:

Chemin causal de la Boucle	2-1-15-14-3-3-19-20
Gain	$B_{21-33} = -r_2 r_3 m_{12} m_{33} = m_{12} m_{33} B_{12-33}^*$ <p style="text-align: center;">(C1-2T3)</p>

Un calcul identique au précédent nous amène à écrire:

- $\dots - [B_{21-33} + \dots] + [B_{23} B_{31} - B_{21-33} B_1^0 + \dots] - [B_{23} B_{31} B_1^0 + \dots] + \dots$

qui donnera

$$\det_{[2;1]\{\}} M \left\{ (-1)^{n_1^*} [(-r_2 r_3)] [1 - B_1^0] \right\} \text{ avec } n_3^* = 1$$

d'où finalement:

$$T_2' = \det_{[2;1]\{\}} M \left\{ (-1)^{n_1^*} [(-r_2 r_3)] [1 - B_1^0] + (-1)^{n_1^*} \left[\left(\frac{1}{C_1 s} \right) \left(-\frac{1}{C_3 s} \right) \right] [1] \right\}$$

Annexe B8a : Détermination de b_2

Nous proposons ici, une méthode permettant de déterminer b_2 , le nombre de couples $[i;o]$ envisageables par l'expression (2.35.). Tous ces couples $[i;o]$ permettent de considérer toutes les boucles causales C1T2 d'un bond graph.

Soit un MP de dimension m . Partant du MP et traversant son lien indicé l_1 , nous tentons de le rejoindre causalement en traversant l'un de ses autres liens. Soit $\mathcal{L} = \{l_2; l_3; l_4\}$ (figure B8.1.) l'ensemble des indices l_i de lien permettant d'aboutir au MP à partir du lien l_1 ($l_i \neq l_1$). Il existe donc un chemin causal entre le lien l_1 et chacun des liens indicés l_2, l_3 et l_4 . Six boucles causales C1T2 existent et leurs gains sont notés: $B_{l_1 l_2}, B_{l_2 l_1}, B_{l_3 l_1}, B_{l_1 l_3}, B_{l_4 l_1}$ et $B_{l_1 l_4}$.

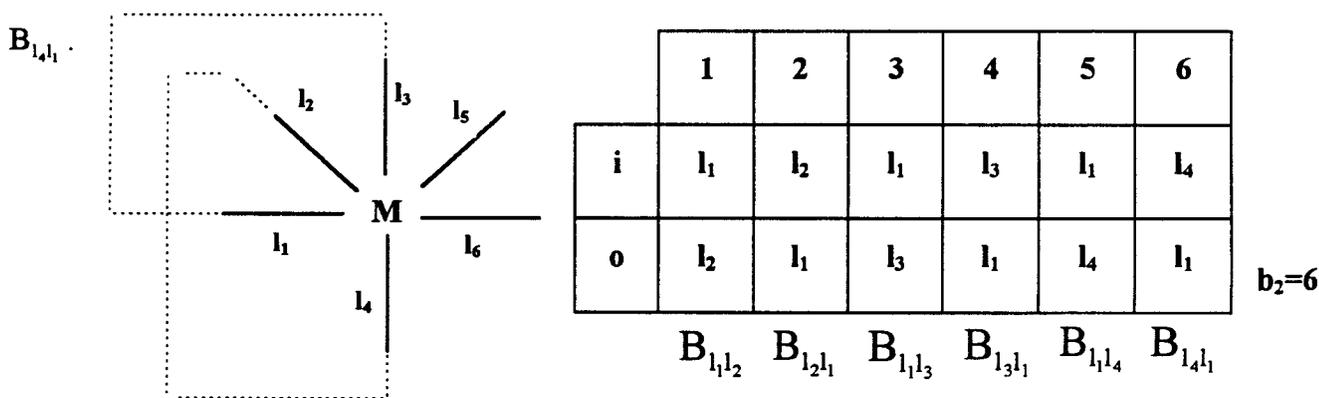


figure B8.1.

Il nous faut maintenant réitérer cette opération à partir du lien indicé l_2 . Afin de ne pas considérer deux fois certaines boucles, il nous faut désormais interdire le parcours du ou des liens déjà traités. Le lien l_1 ne peut donc plus être parcouru. En effet, s'il existe une relation causale entre les liens l_1 et l_2 , celle-ci a été considérée précédemment. Soit $\mathcal{L}=\{l_3; l_5\}$ l'ensemble des indices de liens en relation causale avec le lien indicé l_2 (figure B8.2.). Quatre nouvelles boucles C1T2 existent donc et le tableau précédent doit être complété et devient:

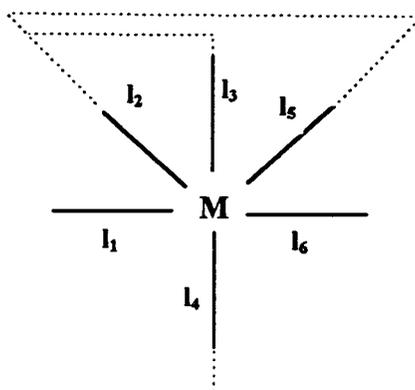


figure B8.2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
i	l_1	l_2	l_1	l_3	l_1	l_4	l_2	l_3	l_2	l_5	
o	l_2	l_1	l_3	l_1	l_4	l_1	l_3	l_2	l_5	l_2	$b_2=10$

$B_{l_2l_3}$ $B_{l_3l_2}$ $B_{l_2l_5}$ $B_{l_5l_2}$

tableau B8.2.

Cette opération est à renouveler dans l'ordre croissant des indices de liens du MP. Le tableau B8.2. sera successivement complété et fournira finalement les multiples couples [i;o] et par conséquent le nombre b_2 de boucles causales CIT2 présentes dans le bond graph.

Annexe B8b

Contribution des boucles causales C1Tt ($t > 2$) dans la détermination de $\delta_1(s)$ Contribution des boucles causales C1T4 dans la détermination de $\delta_1(s)$

Lorsque $\dim M \geq 4$, des boucles causales C1T4 peuvent exister. Ces boucles causales parcourent quatre liens du MP et traversent donc ce dernier à deux reprises (figure B8b.1.a.). La contribution du MP dans le gain d'une boucle causale C1T4 occasionne donc un double terme non diagonaux ($m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2}$ ici) de la matrice M. Les notations utilisées jusqu'à présent pour les boucles causales C1T2 ne permettent pas de reproduire ce terme. Celles-ci doivent donc être ajustées.

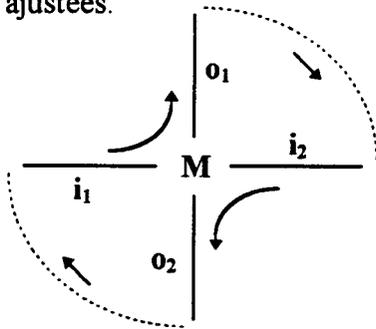


figure B8b.1.a.:
Boucle causale C1T4
de gain $B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}$

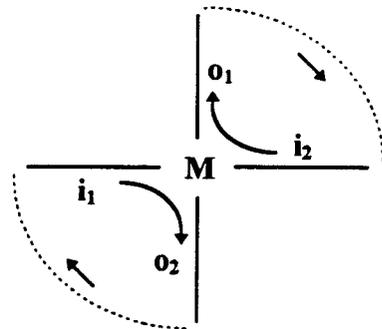


figure B8b.1.b.
2 boucles causales C1T2 de gains
 $B_{i_1 o_2}$ et $B_{i_2 o_1}$

Le terme $m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2}$ peut être membre d'un déterminant de matrice M_r lorsque cette matrice est de dimension 2 (M_{r2}). Cette matrice doit conserver les lignes o_1 et o_2 ainsi que les colonnes i_1 et i_2 de la matrice M. Suivant les valeurs de o_1 , o_2 , i_1 et i_2 , quatre matrices M_{r2} existent:

$$M_{r2}^1 \begin{bmatrix} m_{o_1 i_1} & m_{o_1 i_2} \\ m_{o_2 i_1} & m_{o_2 i_2} \end{bmatrix}$$

$$o_1 < o_2 \text{ et } i_1 < i_2$$

$$M_{r2}^2 \begin{bmatrix} m_{o_1 i_2} & m_{o_1 i_1} \\ m_{o_2 i_2} & m_{o_2 i_1} \end{bmatrix}$$

$$o_1 < o_2 \text{ et } i_1 > i_2$$

$$M_{r2}^3 \begin{bmatrix} m_{o_2 i_1} & m_{o_2 i_2} \\ m_{o_1 i_1} & m_{o_1 i_2} \end{bmatrix}$$

$$o_1 > o_2 \text{ et } i_1 < i_2$$

$$M_{r2}^4 \begin{bmatrix} m_{o_2 i_2} & m_{o_2 i_1} \\ m_{o_1 i_2} & m_{o_1 i_1} \end{bmatrix}$$

$$o_1 > o_2 \text{ et } i_1 > i_2$$

$$\bullet \quad i=1 \text{ ou } i=4: \det M_{r2}^i = m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} - m_{o_1 i_2} m_{o_2 i_1} \quad (\text{B8b.1.a.})$$

$$\bullet \quad i=2 \text{ ou } i=3: \det M_{r2}^i = -\left(m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} - m_{o_1 i_2} m_{o_2 i_1}\right) \quad (\text{B8b.1.b.})$$

Cette matrice M_{r2} est issue de la matrice M lorsque celle-ci est privée de ses $\text{Card}J=m-4$ couples [Ligne j_i ; Colonne j_i] ($j_i \in J$ et $\forall k, j_i \neq i_k$ et $j_i \neq o_k$), de ses lignes i_1 et i_2 ainsi que de ses colonnes o_1 et o_2 . Le déterminant de cette matrice M_{r2} peut donc être représenté à l'aide de notre convention mais celle-ci doit être étendue:

$$\det_{\left[\begin{smallmatrix} i_1, o_1 \\ i_2, o_2 \end{smallmatrix} \right]} M = \det M_{r2} \quad (\text{B8b.2.})$$

Les expressions (B8b.1.a.) et (B8b.1.b.) font apparaître deux termes. Le premier constitue le terme $m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2}$ recherché. Le second résulte du produit des gains des deux boucles causales C1T2, disjointes totalement entre elles, composant la boucle causale C1T4 (figure B8b.1.b.). Ces deux boucles ont pour gain:

$$B_{i_1 o_2} = m_{o_2 i_1} B_{i_1 o_2}^* \qquad B_{i_2 o_1} = m_{o_1 i_2} B_{i_2 o_1}^*$$

La règle de Mason engendre donc entre autres:

$$\dots - \left[B_{i_1 o_1 - i_2 o_2} + \dots \right] + \left[B_{i_1 o_2} B_{i_2 o_1} + \dots \right] + \dots$$

$$\text{et } B_{i_1 o_2} B_{i_2 o_1} - B_{i_1 o_1 - i_2 o_2} = m_{o_2 i_1} m_{o_1 i_2} B_{i_1 o_2}^* B_{i_2 o_1}^* - m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^*$$

Comme $B_{i_1 o_2}^* B_{i_2 o_1}^* = B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^*$, on a:

$$B_{i_1 o_2} B_{i_2 o_1} - B_{i_1 o_1 - i_2 o_2} = \left(m_{o_2 i_1} m_{o_1 i_2} - m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} \right) B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^* \quad (\text{B8b.3.})$$

L'expression (B8b.3.) peut s'écrire:

$$B_{i_1 o_2} B_{i_2 o_1} - B_{i_1 o_1 - i_2 o_2} = \det M_{r2} \left\{ (-1)^\theta \underbrace{\left[B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^* \right]}_{B_1^*} \underbrace{\left[1 \right]}_{\Delta_1(s)} \right\}$$

avec θ pair si i_1, i_2, o_1 et o_2 vérifient les conditions de l'expression (B8b.1.b.)

avec θ impair si i_1, i_2, o_1 et o_2 vérifient les conditions de l'expression (B8b.1.a.)

S'il existe p boucles causales C1T4 (figure B8b.2.) franchissant les liens du MP indicés i_1, i_2, o_1 et o_2 identiquement à la boucle causale de gain $B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^*$, cette expression devient:

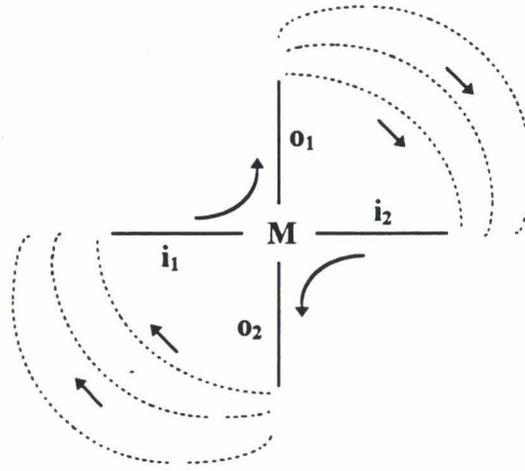


figure B8b.2.

$$\sum_{h=1}^p (B_{i_1 o_2}^h B_{i_2 o_1}^h - B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^h) = \det_{[i_1; o_1][i_2; o_2]_J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\theta [B_h^{\bar{j}}][1] \right\} \text{ avec } B_h^{\bar{j}} = B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^*(h)$$

Afin de considérer toutes les boucles causales C1T4, l'expression (2.35.) doit se généraliser:

$$\delta_1^{(4)}(s) = \sum_J \det_{[i_1; o_1][i_2; o_2]_J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\theta [B_h^{\bar{j}}][\Delta_h(s)] \right\} \tag{B8b.4.}$$

avec:

- $i_1 \neq i_2 \neq o_1 \neq o_2$
- $\forall j_k \in J; j_k \neq i_1; j_k \neq i_2; j_k \neq o_1; j_k \neq o_2$
- b_4 le nombre de doublet de couples $[i_1; o_1][i_2; o_2]$ à considérer par cette expression.

Tout comme b_2 , b_4 peut être déterminé facilement. Une méthode permettant de déterminer ce nombre est présentée en annexe B9.

Les expressions de $\delta_1^{(2)}(s)$ (2.35.) et de $\delta_1^{(4)}(s)$ (B8b.4.) permettent donc de considérer toutes les boucles causales C1T2 et C1T4 situées dans le bond graph. Ces deux expressions peuvent être rassemblées:

$$\delta_1^2(s) + \delta_1^4(s) = \sum_{c=1}^2 \left\{ \sum_J \det_{[i_1; o_1][i_2; o_2] \dots [i_c; o_c]_J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\theta [B_h^{\bar{j}}][\Delta_h(s)] \right\} \right\} \tag{B8b.5.}$$

avec:

$$\bullet \quad \theta = 1 \text{ si } c=1 \text{ sinon } \begin{cases} \theta \text{ pair si } \begin{cases} o_1 < o_2 \\ i_1 > i_2 \end{cases} \text{ ou si } \begin{cases} o_1 > o_2 \\ i_1 < i_2 \end{cases} \\ \theta \text{ impair si } \begin{cases} o_1 < o_2 \\ i_1 < i_2 \end{cases} \text{ ou si } \begin{cases} o_1 > o_2 \\ i_1 > i_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\bullet \quad \text{Card } J = m - 2c; J = \{j_1, j_2, \dots, j_{m-2c}\}$$

$$\bullet \quad \forall k, k'; i_k \neq i_{k'}; o_k \neq o_{k'}; i_k \neq o_{k'}; i_k \neq o_k'$$

$$\bullet \quad \forall j_k \in J; \forall k' j_k \neq i_{k'}; j_k \neq o_{k'}$$

$$\bullet \quad b_{2c} \text{ le nombre de termes } \det_{[\dots]} M \text{ déterminable à l'aide des méthodes}$$

proposées.

Les deux termes $\delta_1^{(2)}(s)$ et $\delta_1^{(4)}(s)$ composent partiellement $\delta_1(s)$ qui doit tenir également compte des boucles causales C1 dont le type est supérieur à 4 (C1Tt avec $6 < t$ et $t < \mathcal{E}(\frac{m}{2})$). Il vient:

$$\delta_1(s) = \delta_1^2(s) + \delta_1^4(s) + \sum_{i=3}^{\mathcal{E}(\frac{m}{2})} \delta_1^{2i}(s) = \sum_{i=1}^{\mathcal{E}(\frac{m}{2})} \delta_1^{2i}(s) = (\mathcal{E} = \text{partie entière}) \tag{B8b.6.}$$

Nous proposons donc d'aborder maintenant l'étude des boucles causales C1T6 dans la constitution de $\delta_1(s)$.

Contribution des boucles causales C1T6 dans la détermination de $\delta_1(s)$

Lorsque $\dim M \geq 6$, certaines boucles causales C1T6 peuvent également exister (figure 2.24.):

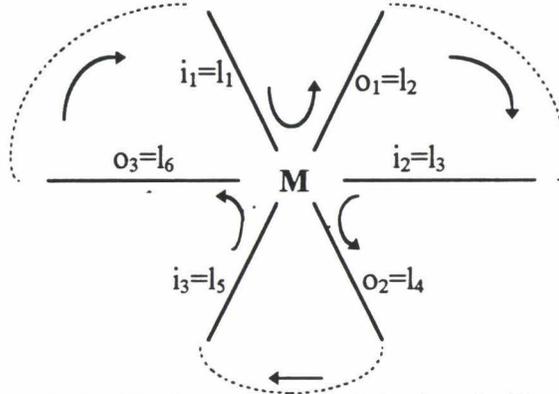


figure B8b.3. : Une boucle causale C1T6 de gain $B_{l_1 l_2 - l_3 l_4 - l_5 l_6}$

Nous référant à l'annexe B8a concernant la recherche des différentes boucles causales C1T2, le tableau suivant peut être dressé:

	1	2	3	4	5	6	
i	l_1	l_6	l_2	l_3	l_4	l_5	
o	l_6	l_1	l_3	l_2	l_5	l_4	$(b_2=6)$

tableau B8b.1.

De façon identique à celle présentée pour déterminer le tableau concernant les différentes boucles causales C1T4 (annexe B9), il est possible de déterminer les différents triplets de couples $[i_1; o_1][i_2; o_2][i_3; o_3]$ permettant de considérer les boucles C1T6:

	1	2	3	4	5	6	7	8	
i_1	l_1	l_1	l_1	l_1	l_6	l_6	l_6	l_6	
o_1	l_2	l_2	l_3	l_3	l_2	l_2	l_3	l_3	
i_2	l_3	l_3	l_2	l_2	l_3	l_3	l_2	l_2	
o_2	l_4	l_5	l_4	l_5	l_4	l_5	l_4	l_5	
i_3	l_5	l_4	l_5	l_4	l_5	l_4	l_5	l_4	$(b_6=8)$
o_3	l_6	l_6	l_6	l_6	l_1	l_1	l_1	l_1	

tableau B8b.2.

Remarque: Le tableau B8b.2. ne présente pas toutes les boucles causales C1T6 existant dans le bond graph de la figure B8b.3.. Ce tableau ne présente que les combinaisons $[i_1; o_1][i_2; o_2][i_3; o_3]$ envisageables lors de l'application des résultats que nous comptons établir. En effet, la colonne 1 de ce tableau fait apparaître le triplet de couples suivant:

$[l_1; l_2][l_3; l_4][l_5; l_6]$. Ce triplet caractérise la boucle causale C1T6 de gain $B_{l_1 l_2 - l_3 l_4 - l_5 l_6}$ mais caractérise aussi toute autre boucle C1T6 parcourant ces six liens du MP identiquement à la boucle causale de gain $B_{l_1 l_2 - l_3 l_4 - l_5 l_6}$. La boucle causale de gain $B_{l_1 l_4 - l_3 l_2 - l_5 l_6}$ respecte ces conditions.

Pour chaque triplet de couples, deux boucles causales C1T6 seront donc considérées. Il existe donc seize boucles causales C1T6 dans le bond graph de la figure B8b.3..

Toutes les boucles causales C1T6 seront donc considérées par les différents termes $\det_{[i_1; o_1][i_2; o_2][i_3; o_3]} M$ avec Card $J=m-6$. Dans le cas général, on a $\det_{[i_1; o_1][i_2; o_2][i_3; o_3]} M = \det M_{r_3}$ avec M_{r_3} issue de M lorsque celle-ci est privée de $m-6$ couples [Ligne j_i ; Colonne j_i] ($j_i \in J$ et $\forall k, j_i \neq i_k$ et $j_i \neq o_k$) ainsi que de ses trois lignes i_1, i_2 et i_3 et de ses trois colonnes o_1, o_2 et o_3 .

Selon les valeurs de i_1, i_2, i_3, o_1, o_2 et o_3 , plusieurs matrices M_{r_3} existent mais le terme $\det M_{r_3}$ fait toujours apparaître six termes qui sont:

- $m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3}$
- $m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_3} m_{o_3 i_2}$
- $m_{o_1 i_2} m_{o_2 i_1} m_{o_3 i_3}$
- $m_{o_1 i_2} m_{o_2 i_3} m_{o_3 i_1}$
- $m_{o_1 i_3} m_{o_2 i_1} m_{o_3 i_2}$
- $m_{o_1 i_3} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_1}$

et nous avons toujours:

$$\det M_{r_3} = \pm \left[m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} - m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_3} m_{o_3 i_2} - m_{o_1 i_2} m_{o_2 i_1} m_{o_3 i_3} + m_{o_1 i_2} m_{o_2 i_3} m_{o_3 i_1} \right. \\ \left. + m_{o_1 i_3} m_{o_2 i_1} m_{o_3 i_2} - m_{o_1 i_3} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_1} \right]$$

Le tableau suivant résume l'origine de ces six termes:

	termes de detM	Gains de boucles	Termes engendrés dans la règle de Mason
1	$m_{o_{i1}} m_{o_{j2}} m_{o_{j3}}$	$B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3}$ (C1T6)	$-m_{o_{i1}} m_{o_{j2}} m_{o_{j3}} B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3}^* = m_{o_{i1}} m_{o_{j2}} m_{o_{j3}} \{(-1)^\theta [B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3}^*][1]\}$
2	$m_{o_{i1}} m_{o_{j2}} m_{o_{j3}}$	$B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}$ (C1T4) $B_{i_3 o_3}$ (C1T2)	$m_{o_{i1}} m_{o_{j2}} m_{o_{j3}} B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^* B_{i_3 o_3}^* = -m_{o_{i1}} m_{o_{j2}} m_{o_{j3}} \{(-1)^\theta [B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^* B_{i_3 o_3}^*][1]\}$
3	$m_{o_{i2}} m_{o_{j1}} m_{o_{j3}}$	$B_{i_1 o_2 - i_3 o_3}$ (C1T4) $B_{i_2 o_1}$ (C1T2)	$m_{o_{i2}} m_{o_{j1}} m_{o_{j3}} B_{i_1 o_2 - i_3 o_3}^* B_{i_2 o_1}^* = -m_{o_{i2}} m_{o_{j1}} m_{o_{j3}} \{(-1)^\theta [B_{i_1 o_2 - i_3 o_3}^* B_{i_2 o_1}^*][1]\}$
4	$m_{o_{i2}} m_{o_{j1}} m_{o_{j3}}$	$B_{i_1 o_3}$ (C1T2) $B_{i_2 o_1}$ (C1T2) $B_{i_3 o_2}$ (C1T2)	$m_{o_{i2}} m_{o_{j1}} m_{o_{j3}} B_{i_1 o_3}^* B_{i_2 o_1}^* = -m_{o_{i2}} m_{o_{j1}} m_{o_{j3}} \{(-1)^\theta [B_{i_1 o_3}^* B_{i_2 o_1}^*][1]\}$
5	$m_{o_{i3}} m_{o_{j1}} m_{o_{j2}}$	$B_{i_1 o_2 - i_3 o_1 - i_2 o_3}$ (C1T6)	$-m_{o_{i3}} m_{o_{j1}} m_{o_{j2}} B_{i_1 o_2 - i_3 o_1 - i_2 o_3}^* = m_{o_{i3}} m_{o_{j1}} m_{o_{j2}} \{(-1)^\theta [B_{i_1 o_2 - i_3 o_1 - i_2 o_3}^*][1]\}$
6	$m_{o_{i3}} m_{o_{j2}} m_{o_{j1}}$	$B_{i_1 o_3}$ (C1T2) $B_{i_2 o_2 - i_3 o_1}$ (C1T4)	$m_{o_{i3}} m_{o_{j2}} m_{o_{j1}} B_{i_1 o_3}^* B_{i_2 o_2 - i_3 o_1}^* = -m_{o_{i3}} m_{o_{j2}} m_{o_{j1}} \{(-1)^\theta [B_{i_1 o_3}^* B_{i_2 o_2 - i_3 o_1}^*][1]\}$

tableau B8b.3.

Tout comme pour les boucles causales C1T4, le tableau précédant montre que le traitement des boucles causales de C1T6 implique la considération de produits de gains de boucles causales C1 uniquement dont le type est inférieur à 6.

Pour les boucles causales C1T4, le produit des 2 gains de boucles causales C1T2 (disjointes entre elles) composant la boucle causale C1T4 intervenait dans la composition des différents termes $\det_{[i_1; o_1][i_2; o_2]} M$ (Card J=m-4). Concernant les boucles causales C1T6, c'est le produit des trois gains de boucles C1T2 composant cette boucle causale C1T6, qui intervient dans $\det_{[i_1; o_1][i_2; o_2][i_3; o_3]} M$ (Card J=m-6). Les produits entre gains de boucles causales C1T2 et C1T4 interviennent également (lignes 2,3 et 6 du tableau précédant).

Comme nous l'avons vu précédemment, deux boucles causales C1T6 sont concernées dans chacun des termes $\det_{[i_1; o_1][i_2; o_2][i_3; o_3]} M$ (lignes 1 et 5).

Sachant que:

$$B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3}^* = B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^* B_{i_3 o_3}^* = B_{i_1 o_2 - i_3 o_3}^* B_{i_2 o_1}^* = B_{i_1 o_2 - i_3 o_3}^* B_{i_2 o_1}^* = B_{i_1 o_2 - i_3 o_1 - i_2 o_3}^* = B_{i_1 o_3}^* B_{i_2 o_2 - i_3 o_1}^*$$

l'application de la règle de Mason conduit à:

$$\det M_{r3} \{(-1)^\theta [B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3}^*][1]\} \tag{B8b.7.}$$

avec θ pair si $\det M_{r3} = -m_{o_{i1}} m_{o_{j2}} m_{o_{j3}} + m_{o_{i1}} m_{o_{j2}} m_{o_{j3}} - \dots$

avec θ impair si $\det M_{r3} = +m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} - m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_3} m_{o_3 i_2} + \dots$

L'expression (B8b.7.) peut encore s'écrire:

$$\det_{[i_1; o_1][i_2; o_2][i_3; o_3]J} M \left\{ (-1)^\theta [B_{i_1 o_1 i_2 o_2 i_3 o_3}^*][1] \right\}$$

Afin de considérer toutes les boucles causales C1T6 présentes dans le bond graph, cette expression devient:

$$\delta_1^{(6)}(s) = \sum_J \det_{[i_1; o_1][i_2; o_2][i_3; o_3]J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\theta [B_h^J][\Delta_h(s)] \right\}$$

Cette expression peut parfaitement s'intégrer à l'expression rassemblée (B8b.6.) de $\delta_1^{(2)}(s)$ et $\delta_1^{(4)}(s)$. Le raisonnement adopté pour les boucles causales C1T6 peut se généraliser à toutes les boucles causales C1. L'expression générale de $\delta_1(s)$ s'écrit donc:

$$\delta_1(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon\left(\frac{m}{2}\right)} \left\{ \sum_J \det_{[i_1; o_1][i_2; o_2] \dots [i_c; o_c]J} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\theta [B_h^J][\Delta_h(s)] \right\} \right\} \quad (\text{B8b.8.})$$

avec:

- Card $J=m-2c$
- $\forall k, k'; i_k \neq i_{k'}; o_k \neq o_{k'}; i_k \neq o_{k'}; i_{k'} \neq o_k$.
- $\forall j_k \in J; \forall k' j_k \neq i_{k'}; j_k \neq o_{k'}$.
- b_{2c} le nombre de termes $\det_{[\dots] J} M$ déterminable à l'aide des méthodes

proposées.

- θ dépendant des valeurs de $i_1, i_2, \dots, i_c, o_1, o_2, \dots, o_c$

Un critère permettant de déterminer automatiquement ($\forall c$) la parité souhaitée de θ s'impose donc. Ce critère est présenté en annexe B10

L'expression (B8b.8.) permet donc de considérer toutes les boucles causales C1 et les produits de gains de boucles causales C1. Contrairement à $\delta_2(s)$, tous les liens du MP dont l'indice appartient à \bar{J} ne sont parcourus que dans un seul sens (effort ou flux). Il reste donc à traiter le cas où certains liens peuvent être parcourus dans un sens et d'autres dans les deux sens.

Annexe B8c

Contribution des boucles causales C1-2Tt ($t \geq 5$) dans la détermination de $\delta_{1-2}(s)$

Contribution des boucles causales C1-2 issues de boucles causales de C1T4 dans la composition de $\delta_{1-2}(s)$

La figure B8b.1.a. représente une boucle causale C1T4 (Card $J=m-4$). Lorsque Card $J=(m-4)-1=m-5$, tout comme précédemment deux situations peuvent se présenter. (figure B8c.1.a. et B8c.1.b.)

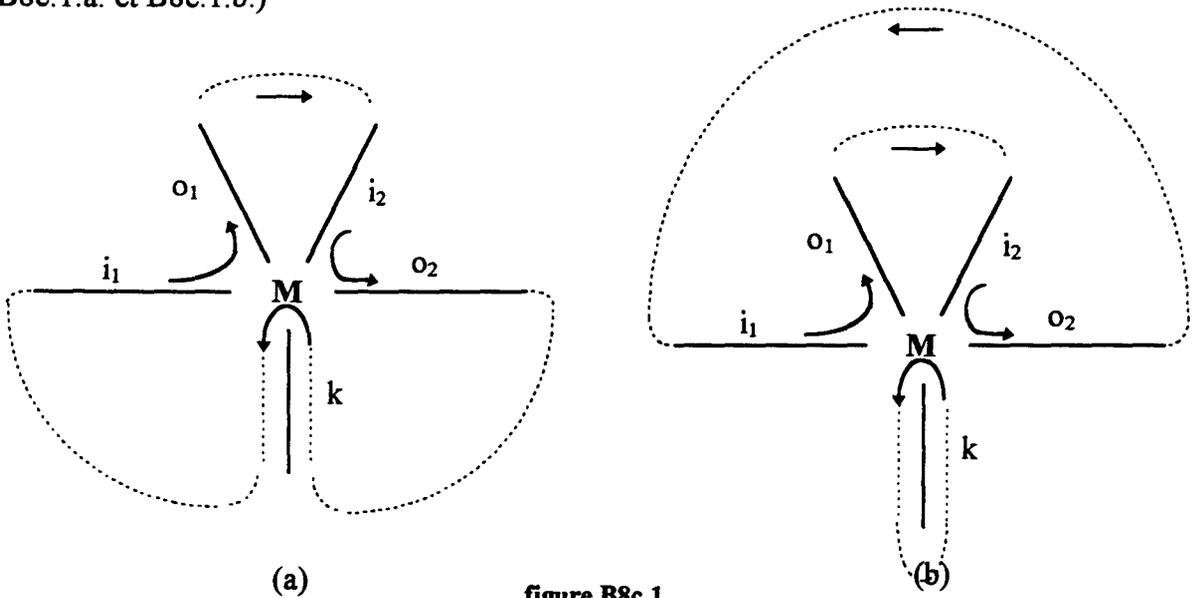


figure B8c.1.

Les notations de $\delta_1(s)$ peuvent être conservées. Ainsi, $\det_{[i_1; o_1][i_2; o_2]J} M$ va nous permettre de considérer les différents termes engendrés par les différentes situations. La matrice M privée de ses lignes i_1 et i_2 , de ses colonnes o_1 et o_2 ainsi que de ses Card $J=(m-4)-1$ couples [Ligne j_i ; Colonne j_i] ($j_i \neq k$) produit une matrice M_{r3} . Suivant i_1, i_2, o_1, o_2 et k , de multiples matrices existent.

Supposons $i_1 < i_2$ et $o_1 < o_2$: neuf matrices M_{r3}^α existent:

$$M_{r3}^1 \begin{bmatrix} m_{o_1 i_1} & m_{o_1 i_2} & m_{o_1 k} \\ m_{o_2 i_1} & m_{o_2 i_2} & m_{o_2 k} \\ m_{k i_1} & m_{k i_2} & m_{k k} \end{bmatrix} \quad M_{r3}^2 \begin{bmatrix} m_{o_1 k} & m_{o_1 i_1} & m_{o_1 i_2} \\ m_{o_2 k} & m_{o_2 i_1} & m_{o_2 i_2} \\ m_{k k} & m_{k i_1} & m_{k i_2} \end{bmatrix} \quad M_{r3}^3 \begin{bmatrix} m_{k k} & m_{k i_1} & m_{k i_2} \\ m_{o_1 k} & m_{o_1 i_1} & m_{o_1 i_2} \\ m_{o_2 k} & m_{o_2 i_1} & m_{o_2 i_2} \end{bmatrix}$$

$$M_{r3}^4 \begin{bmatrix} m_{ki_1} & m_{ki_2} & m_{kk} \\ m_{o_1i_1} & m_{o_1i_2} & m_{o_1k} \\ m_{o_2i_1} & m_{o_2i_2} & m_{o_2k} \end{bmatrix} \quad M_{r3}^5 \begin{bmatrix} m_{o_1i_1} & m_{o_1k} & m_{o_1i_2} \\ m_{ki_1} & m_{kk} & m_{ki_2} \\ m_{o_2i_1} & m_{o_2k} & m_{o_2i_2} \end{bmatrix}$$

$$1 \leq \alpha \leq 5 \quad \det M_{r3}^\alpha = +m_{o_1i_1} m_{o_2i_2} m_{kk} + \dots \quad (\text{B8c.1.})$$

$$M_{r3}^6 \begin{bmatrix} m_{o_1i_1} & m_{o_1i_2} & m_{o_1k} \\ m_{ki_1} & m_{ki_2} & m_{kk} \\ m_{o_2i_1} & m_{o_2i_2} & m_{o_2k} \end{bmatrix} \quad M_{r3}^7 \begin{bmatrix} m_{ki_1} & m_{kk} & m_{ki_2} \\ m_{o_1i_1} & m_{o_1k} & m_{o_1i_2} \\ m_{o_2i_1} & m_{o_2k} & m_{o_2i_2} \end{bmatrix}$$

$$M_{r3}^8 \begin{bmatrix} m_{o_1i_1} & m_{o_1k} & m_{o_1i_2} \\ m_{o_2i_1} & m_{o_2k} & m_{o_2i_2} \\ m_{ki_1} & m_{kk} & m_{ki_2} \end{bmatrix} \quad M_{r3}^9 \begin{bmatrix} m_{o_1k} & m_{o_1i_1} & m_{o_1i_2} \\ m_{kk} & m_{ki_1} & m_{ki_2} \\ m_{o_2k} & m_{o_2i_1} & m_{o_2i_2} \end{bmatrix}$$

$$6 \leq \alpha \leq 9 \quad \det M_{r3}^\alpha = -m_{o_1i_1} m_{o_2i_2} m_{kk} + \dots \quad (\text{B8c.2.})$$

Quelle que soit la matrice M_{r3}^α , le déterminant de cette matrice comporte toujours les six termes suivants:

$$\begin{aligned} t_1 &= m_{o_1i_1} m_{ki_2} m_{o_2k} & t_2 &= m_{o_1i_1} m_{o_2i_2} m_{kk} \\ t_3 &= m_{o_1i_2} m_{ki_1} m_{o_2k} & t_4 &= m_{o_1i_2} m_{kk} m_{o_2i_1} \\ t_5 &= m_{o_1k} m_{ki_1} m_{o_2i_2} & t_6 &= m_{o_1k} m_{ki_2} m_{o_2i_1} \end{aligned}$$

Le tableau B8c.1. présente pour chacune des figures, les gains ou produits de gains de boucles causales contribuant à l'apparition de ces différents termes:

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
fig. B8c.1.a.	$B_{i_1o_1-i_2k} B_{ko_2}$	$B_{i_1o_1-i_2o_2-kk}$	$B_{i_1k} B_{ko_2} B_{i_2o_1}$	$B_{i_2o_1} B_{i_1o_2-kk}$	$B_{ko_1-i_2o_2} B_{i_1k}$	$B_{ko_1-i_2k-i_1o_2}$
fig. B8c.1.b.	$B_{i_1o_1-i_2k-ko_2}$	$B_{i_1o_1-i_2o_2} B_{kk}$	$B_{ko_2-i_1k} B_{i_2o_1}$	$B_{i_1o_2} B_{kk} B_{i_2o_1}$	$B_{i_1ko_1-i_2o_2}$	$B_{i_1o_2} B_{ko_1-i_2k}$

tableau B8c.1.

Concernant la figure B8c.1.a., l'application de la règle de Mason implique:

$$\begin{aligned} &\dots - \left[B_{ko_1-i_2k-i_1o_2} + B_{i_1o_1-i_2o_2-kk} + \dots \right] + \left[B_{i_1o_1-i_2k} B_{ko_2} + B_{i_2o_1} B_{i_1o_2-kk} + B_{ko_1-i_2o_2} B_{i_1k} + \dots \right] - \left[B_{i_1k} B_{ko_2} B_{i_2o_1} + \dots \right] + \dots \\ &= \dots - m_{o_1k} m_{ki_2} m_{o_2i_1} B_{ko_1-i_2k-i_1o_2}^* - m_{o_1i_1} m_{o_2i_2} m_{kk} B_{i_1o_1-i_2o_2-kk}^* + m_{o_1i_1} m_{o_2k} m_{o_2k} B_{i_1o_1-i_2k}^* B_{ko_2}^* + \\ & m_{o_1i_2} m_{o_2i_1} m_{kk} B_{i_2o_1}^* B_{i_1o_2-kk}^* + m_{o_1k} m_{o_2i_2} m_{ki_1} B_{ko_1-i_2o_2}^* B_{i_1k}^* - m_{ki_1} m_{o_2k} m_{o_1i_2} B_{i_1k}^* B_{ko_2}^* B_{i_2o_1}^* \end{aligned}$$

$$= \dots + \underbrace{\left[-m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{kk} - m_{o_1 k} m_{k i_2} m_{o_2 i_1} + m_{o_1 i_1} m_{o_2 k} + m_{o_1 i_2} m_{o_2 i_1} m_{kk} + m_{o_1 k} m_{o_2 i_2} m_{k i_1} - m_{k i_1} m_{o_2 k} m_{o_1 i_2} \right]}_{\det M_{r3}^{\alpha}} \underbrace{\quad}_{D_a}$$

d'où: $D_a = (-1)^E \det M_{r3}^{\alpha} B^{\bar{J}}$

avec

- $B^{\bar{J}} = B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - kk}^* = B_{k o_1 - i_2 k - i_1 o_2}^* = B_{i_1 o_1 - i_2 k}^* B_{k o_2}^* = B_{i_2 o_1}^* B_{i_1 o_2 - kk}^* = B_{k o_1 - i_2 o_2}^* B_{i_1 k}^* = B_{i_1 k}^* B_{k o_2}^* B_{i_2 o_1}^*$
- E impair si $1 \leq \alpha \leq 5$ et E pair sinon (voir expression B8c.1. et B8c.2.)

Comme précédemment, nous privilégions l'étude de la ou des boucles causales permettant de franchir le MP directement de son lien i_1 vers son lien o_1 , de son lien i_2 vers son lien o_2 et de "toucher" celui-ci via son lien k . Il s'agit ici de la boucle causale C1-2T5 de gain $B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - kk}$. La dernière expression peut donc s'écrire:

$$D_a = \det_{\left[\begin{smallmatrix} i_1; o_1 \\ i_2; o_2 \end{smallmatrix} \right] J} M \left\{ (-1)^{\overline{(n^* + \gamma)}} [B^{\bar{J}}][\Delta(s)] \right\} \tag{B8c.3.}$$

avec

- $n^* = n_b^* = 1$ car dans ce cas $B^{\bar{J}} = B_a^{\bar{J}} = B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - kk}^*$
- Card $J = (m-4) - 1$
- $\bar{J} = \{i_1; o_1; i_2; o_2; k\}$
- $\forall j_i \in J$ et $\forall q, j_i \neq i_q; j_i \neq o_q; j_i \neq k$
- γ nul ou pair si $1 \leq \alpha \leq 5$ et γ impair si $6 \leq \alpha \leq 9$.

Concernant la figure B8c.1.b., cette expression peut être réécrite. Nous aurons cependant $n^* = n_b^* = 2$ car le produit de gains faisant apparaître le terme $m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{kk}$ fait intervenir deux boucles causales d'où $B_b^{\bar{J}} = B_{i_1 o_1 - i_2 o_2}^* B_{kk}^*$.

La définition du critère permettant de calculer γ (voir expression 2.45.) doit être ajustée. Nous avons désormais $\varphi = n^* + \gamma$ avec γ le nombre d'indice $\bar{j}_i \in \bar{J}$ vérifiant $\text{Min}(i_q; o_q) < \bar{j}_i < \text{Max}(i_q; o_q)$ pour $1 \leq q \leq c$ ($c=2$ ici). (démonstration annexe B14)

Nous avons donc:

- $\lambda = 0$ pour $\alpha = 1, \alpha = 3$ ou $\alpha = 5$

- $\lambda = 1$ pour $6 \leq \alpha \leq 9$
- $\lambda = 2$ pour $\alpha = 2$ ou $\alpha = 4$

Si $i_1 < i_2$ et $o_1 > o_2$, les neuf matrices M_{r3}^α définies précédemment deviennent:

$$\begin{aligned}
 M_{r3}^1 & \begin{bmatrix} m_{o_2i_1} & m_{o_2i_2} & m_{o_2k} \\ m_{o_1i_1} & m_{o_1i_2} & m_{o_1k} \\ m_{ki_1} & m_{ki_2} & m_{kk} \end{bmatrix} & M_{r3}^2 & \begin{bmatrix} m_{o_2k} & m_{o_2i_1} & m_{o_2i_2} \\ m_{o_1k} & m_{o_1i_1} & m_{o_1i_2} \\ m_{kk} & m_{ki_1} & m_{ki_2} \end{bmatrix} & M_{r3}^3 & \begin{bmatrix} m_{kk} & m_{ki_1} & m_{ki_2} \\ m_{o_2k} & m_{o_2i_1} & m_{o_2i_2} \\ m_{o_1k} & m_{o_1i_1} & m_{o_1i_2} \end{bmatrix} \\
 M_{r3}^4 & \begin{bmatrix} m_{ki_1} & m_{ki_2} & m_{kk} \\ m_{o_2i_1} & m_{o_2i_2} & m_{o_2k} \\ m_{o_1i_1} & m_{o_1i_2} & m_{o_1k} \end{bmatrix} & M_{r3}^5 & \begin{bmatrix} m_{o_2i_1} & m_{o_2k} & m_{o_2i_2} \\ m_{ki_1} & m_{kk} & m_{ki_2} \\ m_{o_1i_1} & m_{o_1k} & m_{o_1i_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$1 \leq \alpha \leq 5 \quad \det M_{r3}^\alpha = -m_{o_1i_1} m_{o_2i_2} m_{kk} + \dots \quad (\text{B8c.4.})$$

$$\begin{aligned}
 M_{r3}^6 & \begin{bmatrix} m_{o_2i_1} & m_{o_2i_2} & m_{o_2k} \\ m_{ki_1} & m_{ki_2} & m_{kk} \\ m_{o_1i_1} & m_{o_1i_2} & m_{o_1k} \end{bmatrix} & M_{r3}^7 & \begin{bmatrix} m_{ki_1} & m_{kk} & m_{ki_2} \\ m_{o_2i_1} & m_{o_2k} & m_{o_2i_2} \\ m_{o_1i_1} & m_{o_1k} & m_{o_1i_2} \end{bmatrix} \\
 M_{r3}^8 & \begin{bmatrix} m_{o_2i_1} & m_{o_2k} & m_{o_2i_2} \\ m_{o_1i_1} & m_{o_1k} & m_{o_1i_2} \\ m_{ki_1} & m_{kk} & m_{ki_2} \end{bmatrix} & M_{r3}^9 & \begin{bmatrix} m_{o_2k} & m_{o_2i_1} & m_{o_2i_2} \\ m_{kk} & m_{ki_1} & m_{ki_2} \\ m_{o_1k} & m_{o_1i_1} & m_{o_1i_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$6 \leq \alpha \leq 9 \quad \det M_{r3}^\alpha = +m_{o_1i_1} m_{o_2i_2} m_{kk} + \dots \quad (\text{B8c.5.})$$

$\forall M_{r3}^\alpha$ ($\alpha \neq 5$), la valeur de γ n'est pas modifiée. Pour $\alpha=5$, γ vaut désormais 2. Cette modification n'a aucune incidence car dans ce cas $(-1)^\gamma$ vaut toujours +1.

Néanmoins, pour $1 \leq \alpha \leq 5$ les expressions (B8c.1.) et (B8c.4.) sont opposées. Il en est de même pour les expressions (B8c.2.) et (B8c.5.) lorsque $6 \leq \alpha \leq 9$.

$\varphi = n^* + \gamma$ ne suffit pas et doit être complété d'un terme supplémentaire permettant de tenir compte des différentes valeurs de i_1 et o_1 . Nous aurons donc $\varphi = n^* + \gamma + \rho$ avec:

$$\begin{cases} \rho \text{ pair si } i_1 < i_2 \text{ et } o_1 < o_2 \\ \rho \text{ impair si } i_1 < i_2 \text{ et } o_1 > o_2 \end{cases} \quad (\text{B8c.6.})$$

L'expression précédente peut être étendue aux autres situations. Elle devient donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ pair si } \begin{cases} i_1 < i_2 \text{ et } o_1 < o_2 \\ i_1 > i_2 \text{ et } o_1 > o_2 \end{cases} \\ \rho \text{ impair si } \begin{cases} i_1 < i_2 \text{ et } o_1 > o_2 \\ i_1 > i_2 \text{ et } o_1 < o_2 \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{B8c.7.})$$

Le critère θ' présenté précédemment satisfait ces conditions. Il vient donc:

$$\varphi = n^* + \gamma + \theta' \text{ avec } \theta' = n_L + c - 1 \quad (\text{B8c.8.})$$

Pour les boucles causales C1-2 issues de boucles causales C1T2, ce critère convient parfaitement car dans ce cas $\theta = 0$ et ne modifie pas la parité de φ .

Les résultats précédemment obtenus sont tout à fait généralisables aux boucles causales C1-2 issues des boucles causales C1T4, dont le type varie de m-5 à 0. De la même façon, les boucles causales C1-2 issues de boucles causales C1T6, C1T8... occasionnent des résultats identiques. Toutes les boucles causales C1-2 peuvent donc être considérées par $\delta_{1-2}(s)$. D'autres termes entrent dans la composition de $\delta_{1-2}(s)$. Ces termes ont la particularité de parcourir certains liens dans les deux sens et d'autres suivant l'effort ou le flux seulement. $\delta_{1-2}(s)$ peut donc s'écrire:

$$\delta_{1-2}(s) = \sum_{c=1}^{\varepsilon \binom{m}{2}} \sum_{r=0}^{m-2c-1} \sum_J \det_{[i_1; o_1] [i_2; o_2] \dots [i_c; o_c]} M \left\{ \sum_{h=1}^p (-1)^\varphi [B_h^{\bar{J}}] [\Delta_h(s)] \right\} \quad (\text{B8c.9.})$$

avec

- $\varphi = n^* + \theta' + \gamma$
- $\text{Card } \bar{J}$ le type des boucles causales de C1-2 concernées.
- $0 \leq \text{Card } J < 2c$
- $J = \{j_1; j_2; \dots; j_r\} \quad \forall j_i \in J \text{ et } \forall q, j_i \neq i_q; j_i \neq o_q; i_q \neq o_q$
- $\forall q, q' \quad i_q \neq i_{q'}; o_q \neq o_{q'}; i_q \neq o_{q'}$
- $b_{\text{Card } \bar{J}}$ le nombre de c-plets $[i_1; o_1] [i_2; o_2] \dots [i_c; o_c]$ permettant de traiter toutes les boucles causales C1-2Tt avec $t = \text{Card } \bar{J}$.

Annexe B9 : Détermination de b_4

La détermination de b_2 (annexe B8) permet de construire le tableau complet des multiples couples $[i;o]$ à considérer. Ces différents couples représentent les différentes boucles causales C1T2 présentes dans le bond graph. Sachant qu'une boucle causale C1T4 est issue de deux boucles causales C1T2 disjointes, il suffit d'assembler deux couples $[i';o']$ et $[i'',o'']$ de ce tableau ($i' \neq o'$, $i' \neq o''$, $i' \neq i''$, $o' \neq o''$, $o' \neq i''$, $i'' \neq o''$) afin de former les différentes boucles causales C1T4 caractérisées par des couples notés finalement $[i_1;o_1][i_2;o_2]$.

exemple: la figure B9.1. résume les deux figures de l'annexe B8. L'étude de b_2 a permis d'établir le tableau suivant:

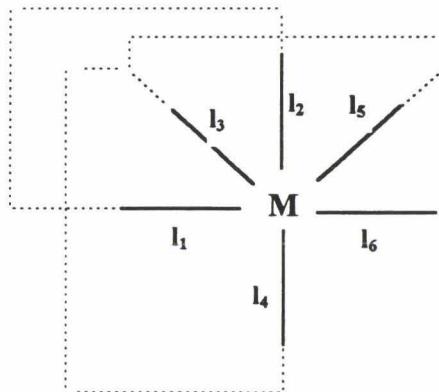


figure B9.1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	l_1	l_2	l_1	l_3	l_1	l_4	l_2	l_3	l_2	l_5
o	l_2	l_1	l_3	l_1	l_4	l_1	l_3	l_2	l_5	l_2

tableau B9.1.

Les deux boucles causales C1T2 de gains B_{l_1,l_3} ($[i';o']=[l_1;l_3]$) et B_{l_3,l_1} ($[i';o']=[l_3;l_1]$) sont toutes les deux disjointes des deux boucles causales C1T2 de gains B_{l_2,l_5} ($[i'';o'']=[l_2;l_5]$) et B_{l_1,l_2} ($[i'';o'']=[l_5;l_2]$). Quatre boucles causales C1T4 peuvent donc être dégagées (tableau B9.2.):

		1	2	3	4	
i_1	i'	l_1	l_1	l_3	l_3	
o_1	o''	l_2	l_5	l_2	l_5	
i_2	i''	l_5	l_2	l_5	l_2	
o_2	o'	l_3	l_3	l_1	l_1	$b_4=4$

$B_{l_1 l_2 - l_5 l_3}$ $B_{l_3 l_5 - l_2 l_1}$

tableau B9.2.

Cette situation est également celle des boucles de gains $B_{l_1 l_4}$ et $B_{l_4 l_1}$ vis à vis des boucles de gains $B_{l_2 l_5}$ et $B_{l_3 l_2}$ ainsi que vis à vis des boucles de gains $B_{l_2 l_3}$ et $B_{l_3 l_2}$. Le tableau B9.2. doit donc être complété et devient:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
i_1	i'	l_1	l_1	l_3	l_3	l_1	l_1	l_4	l_4	l_1	l_1	l_4	l_4	
o_1	o''	l_2	l_5	l_2	l_5	l_2	l_5	l_2	l_5	l_2	l_3	l_2	l_3	
i_2	i''	l_5	l_2	l_5	l_2	l_5	l_2	l_5	l_2	l_3	l_2	l_3	l_2	
o_2	o'	l_3	l_3	l_1	l_1	l_4	l_4	l_1	l_1	l_4	l_4	l_1	l_1	$b_4=$

tableau B9.3.

Il existe donc ici ,douze combinaisons $[i_1; o_1][i_2; o_2]$ différentes ($b_4=12$) permettant de symboliser toutes les boucles causales C1T4 existantes.

Annexe B10 : Critère de θ

Quel que soit le terme $\det_{[i_1;o_1][i_2;o_2][i_3;o_3] \dots [i_c;o_c]} M$ considéré, la boucle C1T(2c) de gain $B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3 \dots - i_c o_c}$ est automatiquement concernée. Ce gain de boucle est affecté d'un signe négatif dans l'application de la règle de Mason. Nous avons:

$$\dots - \left[B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3 \dots - i_c o_c} + \dots \right] + \dots$$

qui peut encore s'écrire

$$\dots - m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_c i_c} B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3 \dots - i_c o_c}^* + \dots$$

qui devient

$$- m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_c i_c} \left\{ (-1)^\theta \underbrace{\left[B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3 \dots - i_c o_c}^* \right]}_{B^j} \Delta(s) \right\}$$

et compose

$$\det_{[i_1;o_1][i_2;o_2][i_3;o_3] \dots [i_c;o_c]} M \left\{ (-1)^\theta \left[B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3 \dots - i_c o_c}^* \right] \right\}$$

avec θ pair si $\det_{[i_1;o_1][i_2;o_2][i_3;o_3] \dots [i_c;o_c]} M = -m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_c i_c} + \dots$

avec θ impair si $\det_{[i_1;o_1][i_2;o_2][i_3;o_3] \dots [i_c;o_c]} M = +m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_c i_c} - \dots$

Si $\det_{[i_1;o_1][i_2;o_2][i_3;o_3] \dots [i_c;o_c]} M = -m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_c i_c} + \dots$ alors il existe θ' impair

tel que $\det_{[i_1;o_1][i_2;o_2][i_3;o_3] \dots [i_c;o_c]} M = (-1)^{\theta'} m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_c i_c} + \dots$

Si $\det_{[i_1;o_1][i_2;o_2][i_3;o_3] \dots [i_c;o_c]} M = +m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_c i_c} + \dots$ alors il existe θ' pair tel

que $\det_{[i_1;o_1][i_2;o_2][i_3;o_3] \dots [i_c;o_c]} M = (-1)^{\theta'} m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_c i_c} + \dots$

Lorsque θ doit être pair, θ' est impair et lorsque θ doit être impair, θ' est pair.

Nous aurons donc $\theta = \theta' + 1$. L'incrémentation de θ' afin d'obtenir θ vient du fait que nous considérons toujours la boucle causale C1 dont le type est le plus élevé. Nous avons en fait $\theta = \theta' + n^*$ avec toujours $n^* = 1$.

$(-1)^{\theta'}$ représente donc le signe affecté au terme $m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_c i_c}$ par $\det_{[i_1;o_1][i_2;o_2][i_3;o_3] \dots [i_c;o_c]} M$. Ce terme est la contribution du MP dans le gain de la boucle causale C1T(2c) noté $B_{i_1 o_1 - i_2 o_2 - i_3 o_3 \dots - i_c o_c}$. Afin de connaître θ' , il suffit donc de parcourir la matrice

M_{rc} dans l'ordre de ses colonnes et pour chacune des colonnes, localiser la ligne où un terme $m_{o_k i_k}$ apparaît. Les colonnes de M_{rc} sont les colonnes $i_1, i_2, i_3, \dots, i_c$ de la matrice M . Parcourir M_{rc} dans l'ordre de ses colonnes revient à ordonner les indices de lignes i_k dans l'ordre croissant. Supposons $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_c$.

Pour le plus petit indice de ligne i_1 , il faut, dans la colonne i_1 de M qui constitue la première colonne de M_{rc} , localiser la ligne où se situe le terme $m_{o_1 i_1}$. Il faut en fait ordonner dans l'ordre croissant les indices de colonnes o_k de façon à connaître la place de l'indice o_1 dans ce classement. Supposons $o_3 < o_1 < o_2 < \dots < o_{c-1} < o_c$.

La matrice M_{rc} se présente donc comme ci-après:

$$M_{rc} = \begin{bmatrix} m_{o_3 i_1} & m_{o_3 i_2} & m_{o_3 i_3} & \dots & \dots & m_{o_3 i_c} \\ m_{o_1 i_1} & m_{o_1 i_2} & m_{o_1 i_3} & & & \cdot \\ m_{o_2 i_1} & m_{o_2 i_2} & m_{o_2 i_3} & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ m_{o_c i_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_{o_c i_c} \end{bmatrix}$$

L'indice de colonne o_1 se situe en deuxième position. La ligne o_1 de M constitue donc la deuxième ligne de M_{rc} . Nous avons donc:

$$\det M_{rc} = (-1)^{(2+1)} m_{o_1 i_1} \det_{[2;1]} M_{rc} + \dots$$

La matrice M_{rc} privée de sa deuxième ligne et de sa première colonne donne une matrice $M_{r(c-1)}$ dont la première colonne est la colonne i_2 de M constituant la deuxième colonne de M_{rc} .

Dans cette colonne, il faut localiser le terme $m_{o_2 i_2}$.

$$M_{r(c-1)} = \begin{bmatrix} m_{o_3 i_2} & m_{o_3 i_3} & \dots & \dots & m_{o_3 i_c} \\ m_{o_2 i_2} & m_{o_2 i_3} & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ m_{o_c i_2} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{o_c i_c} \end{bmatrix}$$

Celui-ci se situe à la deuxième ligne. Nous pouvons donc écrire

$$\det M_{rc} = (-1)^{(2+1)} m_{o_1 i_1} \cdot (-1)^{(2+1)} m_{o_2 i_2} \cdot \det_{[2;1]} M_{r(c-1)} + \dots$$

$$= (-1)^{(2+2+1+1)} m_{o_1 i_1} \cdot m_{o_2 i_2} \cdot \det M_{r(c-2)} + \dots$$

avec:

$$M_{r(c-1)} = \begin{bmatrix} m_{o_3 i_3} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{o_3 i_c} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{o_c i_3} & \cdot & \cdot & \cdot & m_{o_c i_c} \end{bmatrix}$$

Ainsi, il faut réitérer cette opération sur les (c-1) premières colonnes de M_{rc} pour avoir finalement:

$$\det M_{rc} = (-1)^{\overbrace{(2+2+\dots)}^{n_L} + \overbrace{(1+1+\dots+1)}^{c-1 \text{ fois}}} m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_{c-1} i_{c-1}} \det M_{r[c-(c-1)]} + \dots$$

avec $\det M_{r[c-(c-1)]} = \det M_r^1 = m_{o_c i_c}$

Il est alors possible d'écrire:

$$\det M_{rc} = (-1)^{\theta'} m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} m_{o_3 i_3} \dots m_{o_{c-1} i_{c-1}} m_{o_c i_c} + \dots \text{ avec } \theta' = n_L + c - 1 \quad (\text{B10.1.})$$

Nous avons donc $\theta' = n_L + (c-1)$ avec n_L la somme des numéros de ligne où se situent les différents termes $m_{o_k i_k}$ lorsque la matrice M_{rc} est parcourue sur ses (c-1) premières colonnes.

Dans ce cas: $\theta = \theta' + 1$ devient

$$\theta = n_L + c \quad (\text{B10.2.})$$

Application:

- $c=1$ permet de considérer les boucles causales C1T2. Dans ce cas, nous avons $\det_{[i;0]} M = \det M_{r1} = m_{o_i}$.

La matrice M_{r1} ne possède que $c=1$ colonne. Le critère permettant de calculer n_L s'appliquant sur les $c-1$ premières colonnes de M_{rc} , nous avons ici $n_L = 0$ d'où $\theta = n_L + c = 1$. Cela vérifie les conditions de l'expression (2.35.).

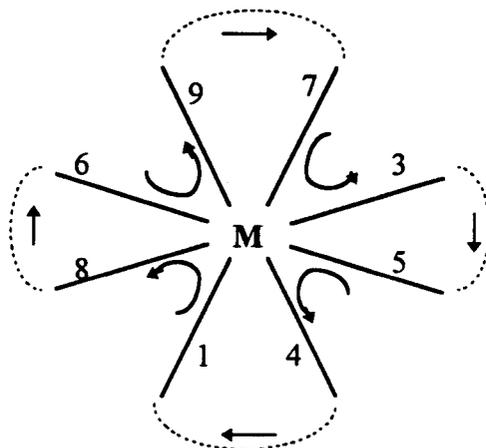
- $c=2$: $\det_{[i_1;0_1][i_2;0_2]} M = \det M_{r2} = \pm (m_{o_1 i_1} m_{o_2 i_2} - m_{o_1 i_2} m_{o_2 i_1})$

Uniquement sur la première colonne de M_{r2} ($c-1=1$), il faut identifier la ligne sur laquelle se situe un terme $m_{o_i i_k}$:

- Si $o_1 > o_2$ et $i_1 < i_2$, $M_{r2}^1 \begin{bmatrix} m_{o_1 i_1} & m_{o_1 i_2} \\ m_{o_2 i_1} & m_{o_2 i_2} \end{bmatrix}$. Dans ce cas, $n_L=1$ et $\theta = n_L+c=1+2=3$
- Si $o_1 < o_2$ et $i_1 < i_2$, $M_{r2}^3 \begin{bmatrix} m_{o_2 i_1} & m_{o_2 i_2} \\ m_{o_1 i_1} & m_{o_1 i_2} \end{bmatrix}$. Dans ce cas, $n_L=2$ et $\theta = n_L+c=2+2=4$
- Si $o_1 < o_2$ et $i_1 > i_2$, $M_{r2}^2 \begin{bmatrix} m_{o_1 i_2} & m_{o_1 i_1} \\ m_{o_2 i_2} & m_{o_2 i_1} \end{bmatrix}$. Dans ce cas, $n_L=2$ et $\theta = n_L+c=2+2=4$
- Si $o_1 > o_2$ et $i_1 > i_2$, $M_{r2}^4 \begin{bmatrix} m_{o_2 i_2} & m_{o_2 i_1} \\ m_{o_1 i_2} & m_{o_1 i_1} \end{bmatrix}$. Dans ce cas, $n_L=1$ et $\theta = n_L+c=1+2=3$

Pour $c=2$ et $\forall i_1, i_2, o_1$ et o_2 , la valeur calculée pour θ respecte les conditions de l'expression (2.40.).

• $c=4$: le terme $\det_{\{6,9\}[\{7,3\}][\{5,4\}][\{1,8\}]} M$ avec Card $J=m-8$ permettra entre autres de considérer la boucle causale C1T8 de gain $B_{69-73-54-18}$ représentée sur la figure suivante:



La contribution du MP dans ce gain vaut $m_{96} m_{37} m_{45} m_{81}$. La matrice M_{r4} issue de M après simplification est la suivante:

$$M_{r4} = \begin{bmatrix} m_{31} & m_{35} & m_{36} & m_{37} \\ m_{41} & m_{45} & m_{46} & m_{47} \\ m_{81} & m_{85} & m_{86} & m_{87} \\ m_{91} & m_{95} & m_{96} & m_{97} \end{bmatrix}$$

Le tableau suivant présente les indices de ligne et de colonne par ordre croissant:

	1	2	3	4
i	$i_4=1$	$i_3=5$	$i_1=6$	$i_2=7$
o	$o_2=3$	$o_3=4$	$o_4=8$	$o_1=9$

L'indice de ligne le plus faible est i_4 . Son indice de colonne associé o_4 est en troisième position: $n_L^1 = 3$. Le tableau précédent devient:

	1	2	3
i	$i_3=5$	$i_1=6$	$i_2=7$
o	$o_2=3$	$o_3=4$	$o_1=9$

L'indice de ligne le plus faible est cette fois i_3 . Son indice de colonne associé o_3 est en deuxième position: $n_L^2 = 2$. Le tableau précédent devient:

	1	2
i	$i_1=6$	$i_2=7$
o	$o_2=3$	$o_1=9$

L'indice de ligne le plus faible est maintenant i_1 . Son indice de colonne associé o_1 est en deuxième position: $n_L^3 = 2$.

Le calcul de n_L s'effectuant sur les (c-1) premières colonnes de M_{rc} , le calcul est à présent achevé et nous avons:

$$n_L = n_L^1 + n_L^2 + n_L^3 = 3 + 2 + 2 = 7$$

d'où: $\theta = n_L + c = 7 + 4 = 11$

θ est impair car $\det M_{r4} = +m_{81} m_{45} m_{96} m_{37} - \dots$

Le rôle du gain $B_{69-73-54-18}$ de la boucle causale de C1T8 dans l'application de la règle de Mason sera donc considéré par le terme suivant:

$$\det_{[6;9][7;3][5;4][1;8]} M = \left\{ (-1)^\theta [B_{69-73-54-18}^*][1] \right\}$$

Annexe B11 : i et o ∈ {2;3} et k=1,

Les termes T'_5 et T'_6 se rapportent aux termes T_5 et T_6 évoqués dans les conditions mathématiques de l'expression (2.35.).

$$\dots - [B_{23-11} + \dots] + [B_{13} B_{21} + \dots] + \dots$$

qui donnera:

$$\dots - \left[m_{32} \dot{m}_{11} \frac{r_2}{C_1 s} \right] + \left[(-r_2 m_{31}) \left(\frac{m_{12}}{C_1 s} \right) \right] + \dots$$

$$\dots + [m_{11} m_{32} - m_{31} m_{12}] (-1)^{n_5} \left(\frac{r_2}{C_1 s} \right) + \dots \text{ avec } n_5^* = 1$$

qui donnera:

$$T'_5 = \left[\det_{[2,3]\{\}} M \right] \underbrace{\left\{ (-1)^{n_5} \left[\underbrace{\left(\frac{r_2}{C_1 s} \right)}_{B_5^i} \right] \right\}}_{T_5^*} \left[\frac{1}{\delta_5} \right] + \dots \quad (\text{B11.1.})$$

Toujours pour k=1 et de la même façon que précédemment, la règle de Mason implique:

$$\dots - [B_{32-11} + \dots] + [B_{31} B_{12} + \dots] + \dots$$

qui donnera:

$$\dots - \left[m_{23} m_{11} \frac{r_2}{C_1 s} \right] + \left[(r_2 m_{13}) \left(\frac{m_{21}}{C_1 s} \right) \right] + \dots$$

$$\dots + [m_{11} m_{23} - m_{13} m_{21}] (-1)^{n_6} \left(\frac{r_2}{C_1 s} \right) + \dots \text{ avec } n_6^* = 1$$

qui donnera:

$$T'_6 = \left[\det_{[3,2]\{\}} M \right] \underbrace{\left\{ (-1)^{n_6} \left[\underbrace{\left(\frac{r_2}{C_1 s} \right)}_{B_6^i} \right] \right\}}_{T_6^*} \left[\frac{1}{\delta_6} \right] + \dots \quad (\text{B11.2.})$$

Annexe B12

Les termes T'_3 et T'_4 se rapportent aux termes T_3 et T_4 évoqués dans les conditions mathématiques de l'expression (2.34.).

$$\dots - [B_{23-12} + B'_{23-12} \dots] + [B_{13}B_{22} + B_{13}B'_{22} + B_{23-12}B_1^0 + \dots] - [B_{13}B_{22}B_1^0 \dots] + \dots$$

donne $\dots + [-B_{23-12} + B_{13}B_{22}] [1 - B_1^0] + [-B'_{23-12} + B_{13}B'_{22}] + \dots$

ce qui conduit à:

$$\dots + \left[- \left(-m_{32}m_{21} \frac{r_2}{C_2s} \right) + (r_2m_{31}) \left(-\frac{m_{22}}{C_2s} \right) \right] [1 - B_1^0] + \left[- \left(-m_{32}m_{21} \frac{r_2}{C_1s} \right) + (r_2m_{31}) \left(-\frac{m_{22}}{C_1s} \right) \right] + \dots$$

ou encore

$$\dots + \underbrace{\left[-m_{31}m_{22} + m_{32}m_{21} \right]}_{-\det_{\{1,3\}} M} (-1)^{n_3^*} \left[(r_2) \left(-\frac{1}{C_2s} \right) \right] [1 - B_1^0] + \underbrace{\left[-m_{31}m_{22} + m_{32}m_{21} \right]}_{-\det_{\{1,3\}} M} (-1)^{(n_3^*)'} \left[(r_2) \left(-\frac{1}{C_1s} \right) \right] [1] \dots$$

avec $n_3^* = (n_3^*)' = 2$

soit: $T'_3 = \left[\det_{\{1,3\}} M \right] \underbrace{\left\{ (-1)^{n_3^* + \gamma} \underbrace{\left[(r_2) \left(-\frac{1}{C_2s} \right) \right]}_{B_3^j} \underbrace{[1 - B_1^0]}_{\delta_3} + (-1)^{(n_3^*)' + \gamma} \underbrace{\left[(r_2) \left(-\frac{1}{C_1s} \right) \right]}_{(B_3^j)'} \underbrace{[1]}_{(\delta_3)'} \right\}}_{T_3} \quad (B12.1.)$

Toujours pour $k=2$, lorsque $i=3$ et $o=1$, l'application de la règle de Mason implique encore:

$$\dots - [B_{21-32} + B'_{21-32} \dots] + [B_{31}B_{22} + B_{31}B'_{22} + B_{21-32}B_1^0 + \dots] - [B_{31}B_{22}B_1^0 \dots] + \dots$$

donne $\dots + [-B_{21-32} + B_{31}B_{22}] [1 - B_1^0] + [-B'_{21-32} + B_{31}B'_{22}] + \dots$

soit:

$$T'_4 = \left[\det_{\{3,1\}} M \right] \underbrace{\left\{ (-1)^{n_4^* + \gamma} \underbrace{\left[(r_2) \left(-\frac{1}{C_2s} \right) \right]}_{B_4^j} \underbrace{[1 - B_1^0]}_{\delta_4} + (-1)^{(n_4^*)' + \gamma} \underbrace{\left[(r_2) \left(-\frac{1}{C_1s} \right) \right]}_{(B_4^j)'} \underbrace{[1]}_{(\delta_4)'} \right\}}_{T_4} \quad (B12.2.)$$

avec $n_4^* = (n_4^*)' = 2$ et $\gamma = 1$

Annexe B13

Nous avons montré que toute boucle causale C1-2T3 pouvait être considérée par l'expression (2.45.) pour laquelle nous avons déterminé $\varphi = n^* + \gamma$.

Le but de notre propos est ici de vérifier l'exactitude de ce critère φ lorsque plus d'un lien du MP peuvent être parcourus suivant effort et flux (boucles causales C1-2Tt $4 \leq t \leq m$).

Supposons $i < o$ et k l'indice du lien du MP parcouru suivant effort et flux. Concernant les boucles causales C1-2T3, nous avons vu que le terme $(-1)^\gamma$ fournissait le signe du terme issu de $\det_{[i;o]J} M$ et contenant le terme $+m_{oi}$. Ce terme était dans ce cas $+m_{oi}m_{kk}$. Nous pouvons vérifier ici ce résultat ($\gamma=1$ si $\text{Min}(i;o) < k < \text{Max}(i;o)$ et $\gamma=0$ sinon):

$$k < i < o \text{ et } \gamma = 0$$

$$M_{r2}^1 \begin{bmatrix} m_{kk} & m_{ki} \\ m_{ok} & m_{oi} \end{bmatrix}$$

$$\det_{[i;o]J} M = \det M_{r2}^1 = m_{oi}m_{kk} - m_{ok}m_{ki}$$

$$i < k < o \text{ et } \gamma = 1$$

$$M_{r2}^2 \begin{bmatrix} m_{ki} & m_{kk} \\ m_{oi} & m_{ok} \end{bmatrix}$$

$$\det_{[i;o]J} M = \det M_{r2}^2 = m_{ok}m_{ki} - m_{oi}m_{kk}$$

$$i < o < k \text{ et } \gamma = 0$$

$$M_{r2}^3 \begin{bmatrix} m_{oi} & m_{ok} \\ m_{ki} & m_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\det_{[i;o]J} M = \det M_{r2}^3 = m_{oi}m_{kk} - m_{ok}m_{ki}$$

Lorsque deux liens sont parcourus suivant effort et flux (liens indicés k_1 et k_2 avec $k_1 < k_2$), la validité du critère φ se confirme. Les différents cas possibles sont présentés ci-après:

$$k_1 < k_2 < i < o \text{ et } \gamma = 0$$

$$M_{r3}^1 \begin{bmatrix} m_{k_1 k_1} & m_{k_1 k_2} & m_{k_1 i} \\ m_{k_2 k_1} & m_{k_2 k_2} & m_{k_2 i} \\ m_{ok_1} & m_{ok_2} & m_{oi} \end{bmatrix}$$

$$\det_{[i;o]J} M = \det M_{r3}^1 = m_{oi}m_{k_2 k_2}m_{k_1 k_1} + \dots$$

$$k_1 < i < k_2 < o \text{ et } \gamma = 1$$

$$M_{r3}^2 \begin{bmatrix} m_{k_1 k_1} & m_{k_1 i} & m_{k_1 k_2} \\ m_{k_2 k_1} & m_{k_2 i} & m_{k_2 k_2} \\ m_{ok_1} & m_{oi} & m_{ok_2} \end{bmatrix}$$

$$\det_{[i;o]J} M = \det M_{r3}^2 = -m_{oi}m_{k_2 k_2}m_{k_1 k_1} + \dots$$

$$k_1 < i < o < k_2 \text{ et } \gamma = 0$$

$$M_{r3}^3 \begin{bmatrix} m_{k_1 k_1} & m_{k_1 i} & m_{k_1 k_2} \\ m_{o k_1} & m_{o i} & m_{o k_2} \\ m_{k_2 k_1} & m_{k_2 i} & m_{k_2 k_2} \end{bmatrix}$$

$$\det_{[i;o]J} M = \det M_{r3}^3 = m_{o i} m_{k_2 k_2} m_{k_1 k_1} + \dots$$

$$i < k_1 < o < k_2 \text{ et } \gamma = 1$$

$$M_{r3}^4 \begin{bmatrix} m_{k_1 i} & m_{k_1 k_1} & m_{k_1 k_2} \\ m_{o i} & m_{o k_1} & m_{o k_2} \\ m_{k_2 i} & m_{k_2 k_1} & m_{k_2 k_2} \end{bmatrix}$$

$$\det_{[i;o]J} M = \det M_{r3}^4 = -m_{o i} m_{k_2 k_2} m_{k_1 k_1} + \dots$$

$$i < o < k_1 < k_2 \text{ et } \gamma = 0$$

$$M_{r3}^5 \begin{bmatrix} m_{o i} & m_{o k_1} & m_{o k_2} \\ m_{k_1 i} & m_{k_1 k_1} & m_{k_1 k_2} \\ m_{k_2 i} & m_{k_2 k_1} & m_{k_2 k_2} \end{bmatrix}$$

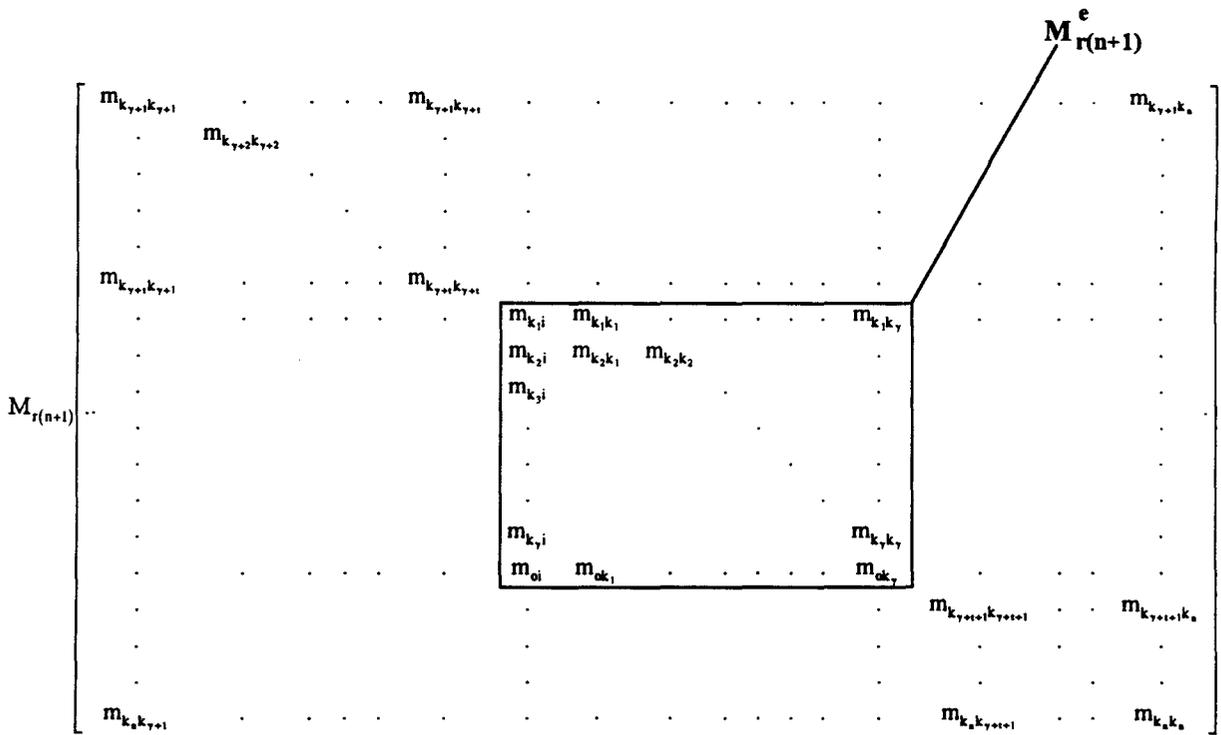
$$\det_{[i;o]J} M = \det M_{r3}^5 = m_{o i} m_{k_2 k_2} m_{k_1 k_1} + \dots$$

$$i < k_1 < k_2 < o \text{ et } \gamma = 2$$

$$M_{r3}^6 \begin{bmatrix} m_{k_1 i} & m_{k_1 k_1} & m_{k_1 k_2} \\ m_{k_2 i} & m_{k_2 k_1} & m_{k_2 k_2} \\ m_{o i} & m_{o k_1} & m_{o k_2} \end{bmatrix}$$

$$\det_{[i;o]J} M = \det M_{r3}^6 = m_{o i} m_{k_2 k_2} m_{k_1 k_1} + \dots$$

Lorsque n liens sont parcourus suivant effort et flux, l'étude concerne les boucles causales de C1-2T(n+2) issues d'une boucle causale CIT2. Soient γ le nombre d'indices $k_1, k_2, \dots, k_\gamma$ de ces liens vérifiant $\text{Min}(i;o) < k_i < \text{Max}(i;o)$ et $\bar{\gamma}$ le nombre d'indices $k_{\gamma+1}, k_{\gamma+2}, k_{\gamma+3}, \dots, k_n$ de ces liens ne vérifiant pas $\text{Min}(i;o) < k_i < \text{Max}(i;o)$. La matrice $M_{r(n+1)}$ se présente sous cette forme:



Tous les termes $m_{k_i k_j}$ avec $\gamma+1 \leq i \leq n$ se situent sur la diagonale de $M_{r(n+1)}$. Nous pouvons écrire:

$$\det M_{r(n+1)} = +m_{k_{\gamma+1}k_{\gamma+1}} m_{k_{\gamma+2}k_{\gamma+2}} \dots m_{k_n k_n} \det M_{r(n+1)}^c$$

Nous pouvons écrire:

$$\det M_{r(n+1)}^c = (-1)^\gamma m_{oi} \det M_{r(\gamma+1)}$$

avec:

$$M_{r(\gamma+1)} = \begin{bmatrix} m_{k_1 k_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_{k_1 k_\gamma} \\ \cdot & m_{k_2 k_2} & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ m_{k_\gamma k_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_{k_\gamma k_\gamma} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\det M_{r(n+1)} = (-1)^\gamma m_{oi} m_{k_1 k_1} m_{k_2 k_2} \dots m_{k_\gamma k_\gamma} m_{k_{\gamma+1} k_{\gamma+1}} m_{k_{\gamma+2} k_{\gamma+2}} \dots m_{k_n k_n} + \dots$$

avec γ le nombre d'indices k_i de liens vérifiant $\text{Min}(i;o) < k_i < \text{Max}(i;o)$.

Annexes C

Annexes D

Annexe D1.....291

Annexe D1

Dans le cas d'un élément multiports de dimension n, celui-ci est caractérisé par la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = M_n \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Nous supposons que la première décomposition de cet élément s'effectue suivant son $i^{\text{ème}}$ port ($1 < i < n$). Les différentes expressions mathématiques sont :

$$e_i = m_{ii} \left[\frac{m_{i1}}{m_{ii}} q_1 + \frac{m_{i2}}{m_{ii}} q_2 + \dots + q_i + \dots + \frac{m_{in}}{m_{ii}} q_n \right] = m_{ii} q_{C_i}$$

et:
$$e_1 = m_{11} q_1 + m_{12} q_2 + \dots + m_{1i} q_{C_i} + \dots + m_{1n} q_n - m_{1i} \left[\frac{m_{i1}}{m_{ii}} q_1 + \frac{m_{i2}}{m_{ii}} q_2 + \dots + \frac{m_{in}}{m_{ii}} q_n \right]$$

soit:
$$m_{ii} e_1 = (m_{11} m_{ii} - m_{1i} m_{i1}) q_1 + (m_{12} m_{ii} - m_{1i} m_{i2}) q_2 + \dots + (m_{1i} q_{C_i}) + \dots + (m_{1n} m_{ii} - m_{1i} m_{in}) q_n$$

soit:
$$m_{ii} e_1 = \underbrace{\det_{\{2,3,4,\dots,i-1,i+1,\dots,n\}}}_{t_{1,1}} M_n q_1 + \underbrace{\det_{\{2,1\}\{3,4,\dots,i-1,i+1,\dots,n\}}}_{t_{1,2}} M_n q_2 + \dots + (m_{1i} q_{C_i}) - \underbrace{\det_{\{i+1,1\}\{2,3,\dots,i-1,i+2,\dots,n\}}}_{t_{1,i+1}} M_n q_{i+1} \dots - \underbrace{\det_{\{n,1\}\{2,3,\dots,i-1,i+1,\dots,n-1\}}}_{t_{1,n}} M_n q_n$$

Un calcul identique sur les différentes variables e_j ($1 < j < i$) peut être mené. Pour les variables e_k ($i < k \leq n$), ce même calcul peut être répété. Pour $k=n$, il vient:

$$e_n = m_{n1} q_1 + m_{n2} q_2 + \dots + m_{ni} q_{C_i} + \dots + m_{nn} q_n - m_{ni} \left[\frac{m_{i1}}{m_{ii}} q_1 + \frac{m_{i2}}{m_{ii}} q_2 + \dots + \frac{m_{in}}{m_{ii}} q_n \right]$$

$$m_{ii} e_n = (m_{n1} m_{ii} - m_{ni} m_{i1}) q_1 + (m_{n2} m_{ii} - m_{ni} m_{i2}) q_2 + \dots + (m_{ni} q_{C_i}) + \dots + (m_{nn} m_{ii} - m_{ni} m_{in}) q_n$$

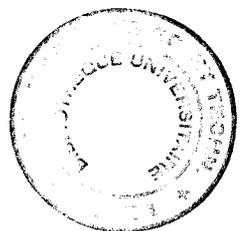
$$m_{ii} e_n = - \underbrace{\det_{\{1,n\}\{2,3,4,\dots,i-1,i+1,\dots,n-1\}}}_{t_{\kappa 1}} M_n q_1 - \underbrace{\det_{\{2,n\}\{1,3,4,\dots,i-1,i+1,\dots,n-1\}}}_{t_{\kappa 2}} M_n q_2 + \dots + - \underbrace{\det_{\{i-1,n\}\{1,2,3,\dots,i-2,i+1,\dots,n-1\}}}_{t_{\kappa i-1}} M_n q_{i-1} + (m_{ni} q_{C_i}) + \underbrace{\det_{\{i+1,n\}\{1,2,3,\dots,i-1,i+2,\dots,n-1\}}}_{t_{\kappa i+1}} M_n q_{i+1} \dots +$$

$$\det_{\substack{\{1,2,3,4,\dots,i-1,i+1,\dots,n-1\} \\ t_{\alpha\alpha}}} M_n q_n$$

Tous les termes de la matrice M_{n-1} caractérisant l'élément multiports de dimension $n-1$ obtenus, peuvent donc être déterminés par répétition des calculs précédents. Tous les termes précédés d'un signe négatif se situent dans les parties supérieure droite et inférieure gauche de la matrice.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{i-1} \\ e_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix} = M_{n-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{i-1} \\ q_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix}$$

$$M_{n-1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{1,i-1} & t_{1,i+1} & \cdot & \cdot & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{2,i-1} & t_{2,i+1} & \cdot & \cdot & t_{2,n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ t_{i-1,1} & t_{i-1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{i-1,i-1} & t_{i-1,i+1} & \cdot & \cdot & t_{i-1,n} \\ \hline t_{i+1,1} & t_{i+1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{i+1,i-1} & t_{i+1,i+1} & \cdot & \cdot & t_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{n,i-1} & t_{n,i+1} & \cdot & \cdot & t_{n,n} \end{array} \right]$$



Bibliographie

Azmani, A. [1991]

"Analyse qualitative d'un bond graph par les techniques de l'Intelligence Artificielle. Contribution à la conception et à la réalisation du logiciel d'aide à la modélisation ARCHER"

Thèse de Doctorat n° 836, Université des Sciences et Techniques de Lille, France

Azmani, A.; Dauphin-Tanguy G. [1992]

"ARCHER: a processor for computer aided modelling and analysis"

"Bond graphs for engineers" IMACS Transaction Elsevier pp.263-277 North Holland
Publisher

Berge, C; [1983]

"Graphes"

Ed. Bordas, Paris

Borne, P.; Dauphin-Tanguy, G.; Richard, J.P.; Rotella, F.; Zambettakis, I. [1992]

Modélisation et identification des processus.

Editions Technip

Bos, A.M.; Breedveld, P.C. [1985]

"1985 Update of the bond graph bibliography."

Journal Franklin Inst. Vol. 319, n° 1/2, pp 269-286

Breedveld, P.C. [1984]

"Essential Gyration and Equivalence Rules for 3-Port Junction Structure."

Journal of the Franklin Institute, 318 n°2, pp 77-89

Breedveld, P.C. [1984]

"Decomposition of multiport element in a revised multibond graph notation."

Journal of Franklin Institute, Vol. 318, N° 4, pp 253-273, Oct. 84

Breedveld, P.C. [1984]

"Physical Systems Theory in Terms of bond graphs"

Ph. D. Thesis, Univ. Of Twente, Enschede, Netherlands, 1984

Breedveld, P.C. [1985]

"Multibond Graph elements"

J. of the Franklin Inst., Vol. 319, pp 269-286 Jan./Fev. 1985

Breedveld, P.C. [1985]

"Fondamental of the bond graphs "

12th IMACS World Congress, Paris 1988

Breedveld, P.C. [1995]

"Exhaustive canonical decompositions of linear two-ports"

International Conference bond graph modeling and simulation (ICBGM'95), Vol. 27, N° 1, pp 11-16, Jan. 95

Brown, F.T. [1972]

"Direct Application of the Loop Rule to Bond Graphs."

Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, pp 253-261, septembre 1972.

Croosley, F.R.E. [1965]

"The permutation of kinematic chains of eight members or less from the graph-theoretic viewpoint"

Development in Theoretical and Applied Mechanics, Pergamon Press, Atlanta

Evans, F.J; Van Dixhoorn, J.J. [1972]

"Towards more physical structure in systems theory"

In Physical structure in systems theory, Academic Press, London and New York, 1974

Gebb, V.D.; [1979]

"Bond graph bibliography "

Journal Franklin Inst. Vol. 308, n° 3, pp 361-369

Karnopp, D.C ; Rosenberg, R.C. [1983]

"Systems Dynamics : a Unified Approach."

Mac Graw Hill

Kron, G. [1963]

"Diakoptics: the piecewise Solution of Large-Scale System""

Mac Donald, London

Kubiak, P.; Azmani, A.; Dauphin-Tanguy, G. [1995]

"Determination of input-output relations for bond graph model with a multiport element"
IEEE International Conference (SMC'95), Vol. 4, pp 3023-3028, Oct. 95

Kubiak, P.; Azmani, A.; Dauphin-Tanguy G. [1996]

"Proposition d'une methode recurrente de decomposition d'un element multiport pour les modeles bond graph. "
AGI'96, Tours E3I Juin 96, pp 151-154

Kubiak, P.; Azmani, A.; Dauphin-Tanguy G. [1996]

"Generalization of the recurrent decomposition method of a multiport element for bond graph models"
IEEE International Conference (SMC'96), Vol. 3, pp 1640-1645, Beijing China Oct. 96

Kubiak, P.; Azmani, A.; Dauphin-Tanguy G. [1996]

"Transfer matrix determination for bond graph models composed of a multiport element without connected branches"
Soumis au comité de lecture de la revue *"Mathematical Modelling of Systems"*
Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences
Vienne Autriche

Kubiak, P.; Azmani, A.; Dauphin-Tanguy G. [1996]

"Determination of transfer matrix for bond graph with a multiport element with connected branches"
Soumis au comité de lecture du congrès IFAC Gent April'97

Lefevre, J. [1993]

"Constrained Use of Modulated Energy-Storing Process with and without Internal Modulation in bond graphs"
IEEE International Conference (SMC'93), Vol. 1, pp 20-25, Le Touquet France Jul. 93

Lefevre, J. [1995]

"Why should we introduce Dynamic and Functional Nodes in bond graph ?"
IEEE International Conference (SMC'95), Vol. 4, pp 3017-3022, Vancouver, Oct. 95

Oster, G.F.; Perelson, A.S. [1974]

"Chemical Reaction Dynamics, Part 1: Geometrical Structure"

Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 55, pp 230-273

Paynter, M. [1961]

"Analysis and Design of Engineering Systems."

MIT Press

Rosenberg, R.C.; Karnopp, D.C. [1983]

"Introduction to physical system dynamics"

Series in mechanical engineering, Mc Graw-Hill

Tagina, M.; Cassar, J.P.; Dauphin-Tanguy, G., Staroswiecki, M. [1995]

"Bond graph models for direct generation of formal fault detection systems"

Systems Analysis Modelling Simulation

Thoma, J.U. [1975]

"Introduction to Bond Graphs and their Applications."

Pergamon Press

Thoma, J.U. [1991]

"Simulation by Bond Graphs."

Springer Verlag

Trent, H.M. [1954]

"Isomorphisms between oriented linear and lumped physical systems"

Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 27, n°3, pp 500-527