

N° d'ordre: 1745

THESE DE DOCTORAT

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le Grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE

par

Siamak Kazemzadeh Hannani



**Calcul d'écoulements laminaires et turbulents
par une méthode d'éléments finis:
Influence de la formulation**

Soutenue le 10 juin 1996

devant la Commission d'examen

Membres du Jury :

Président	: Mr. ,	Merlen A., Professeur à l'USTL
Rapporteurs	: Mrs.,	Dhatt G., Professeur à l'INSA de Rouen. Pironneau O., Professeur à l'Université Paris VI & INRIA.
Membres	: Mrs.,	Monnier J.C. Ingénieur de recherche à l'IMFL-ONERA. Pot G., Chef du groupe de recherche au LNH-EDF. Stanislas M., Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, (Directeur de thèse). Vandromme D., Professeur à l'INSA de Rouen.



A

Ramesh et Kia

Je dédie cette thèse à mon fils Kia,
et surtout à mon épouse Ramesh.

Elle a su faire preuve d'une patience
infinie et me soutenir par ses encouragements
répétés tout au long de la réalisation de ce
travail.

Je dédie également cette
thèse à mes parents, surtout à
ma mère qui nous a quitté
quelques jours avant
la soutenance.



Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique de Lille, plus précisément à l'Ecole Centrale de Lille. Je remercie Monsieur Caignaert, Directeur du LML, et Monsieur Gentina, Directeur de l'Ecole Centrale de Lille, de m'avoir accueilli au sein de leurs établissements. Cette thèse a été financée par une bourse octroyée par le ministère des affaires étrangères de France. Je voudrais adresser mes remerciements aux personnes compétentes.

Mes remerciements vont également aux membres du jury: Monsieur Merlen, Professeur à l'USTL, Monsieur Dhatt, Professeur à l'INSA de Rouen, Monsieur Pironneau Professeur à l'Université Paris VI et à l'INRIA, Monsieur Monnier, Ingénieur de Recherche à l'IMFL, Monsieur Pot, Chef du groupe de recherche au LNH-EDF, et Monsieur Vandronmme, Professeur à l'INSA de Rouen.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Stanislas, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche, pour ses nombreux conseils et pour l'intérêt qu'il n'a jamais cessé de témoigner pour ce travail.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur Dupont, Maître de Conférences à l'Ecole Centrale de Lille, pour les aides diverses qu'il a été amené à me fournir.

Enfin, je ne saurais oublier toutes les personnes travaillant à l'Ecole Centrale de Lille qui ont contribué de diverses manières au bon déroulement de cette thèse.

Table des matières

Notations principales	7
Introduction Générale	11
I Ecoulements Laminaires	17
1 Equations de Convection-Diffusion	19
1.1 Introduction	19
1.2 Le problème modèle	20
1.3 Le décentrement et la méthode des éléments finis	23
1.4 Initiation aux formulations stables d'élément finis SUPG et GLS	24
1.4.1 La méthode de Galerkin	25
1.4.2 La méthode "upwind" de décentrement simple	26
1.4.3 Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG)	26
1.4.4 Galerkin/Least-Squares (GLS)	31
1.5 Exemples numériques	32
1.5.1 Convection dans une direction non-parallèle au maillage	33
1.5.2 Couche limite thermique	34
1.6 Récapitulatif et Conclusion	35
2 Equations de Navier-Stokes	37
2.1 Introduction	37
2.2 La méthode de Galerkin	38
2.2.1 Le problème de Stokes	38
2.2.2 Les pressions falsifiées	42
2.2.3 Les équations de Navier-Stokes	44
2.2.4 Quelques points sur les conditions aux frontières	45
2.2.5 La méthode de pénalisation	47
2.2.6 L'instabilité due aux termes convectifs	50
2.3 Les formulations stables	50
2.3.1 La formulation SUPG	50
2.3.2 La formulation GLS	52
2.4 Sur la précision de la solution de pression de la formulation GLS	58

2.5	Une technique pour améliorer la prédiction de la formulation GLS . . .	61
2.6	Expériences numériques	62
2.6.1	Les écoulements de Stokes	63
2.6.2	Les écoulements de Navier-Stokes	65
2.7	Conclusion	73

II Ecoulements Turbulents 77

3 Modélisation 79

3.1	Introduction	79
3.2	Equations de transport de la turbulence en fluide incompressible . . .	82
3.2.1	Equations de quantité de mouvement	82
3.2.2	Equations pour l'énergie cinétique moyenne	83
3.2.3	Equations de transport pour les tensions de Reynolds	84
3.2.4	Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente	86
3.2.5	Equation de transport du taux de dissipation	87
3.3	Le problème de fermeture	88
3.3.1	Le modèle de longueur de mélange	89
3.3.2	Le modèle à une équation de transport	90
3.3.3	Le modèle à deux équations de transport	92
3.3.4	Quelques mots sur les inconvénients du modèle $k - \epsilon$	94
3.3.5	Les modèles $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds	97
3.4	Discrétisation des équations de transport	102
3.5	Récapitulatif	106

4 Application 107

4.1	Les écoulements de Couette-Poiseuille	107
4.1.1	Introduction	107
4.1.2	Ecoulement de Poiseuille pur	109
4.1.3	Ecoulement de type Poiseuille	113
4.1.4	Ecoulement de type intermédiaire	116
4.1.5	Ecoulement de type Couette	118
4.1.6	Gradient de pression	119
4.1.7	Etablissement de l'énergie turbulente	120
4.1.8	Conclusion	124
4.2	La marche descendante	125
4.2.1	Introduction	125
4.2.2	Influence des conditions d'entrée	127
4.2.3	Influence de la formulation	129
4.2.4	Comparaison avec l'expérience	130
4.2.5	Conclusion	131
4.3	L'écoulement sur une bosse	132
4.4	Récapitulatif	134

Conclusion Générale	135
Références bibliographiques	143
Annexe	157
Liste des figures	163

Notations principales

Alphabet Latin

C_h, C, c :	Constantes positive.
C_1, C_2 :	Constantes positive.
e_i :	Vecteur de base
\mathbf{f} :	Terme source (forces massiques à distance).
h :	Dimension d'un élément (e.g. diamètre du cercle qui l'entoure).
h_m :	Hauteur de la marche descendante.
h_{max} :	Hauteur maximale de la bosse.
H :	Hauteur du canal.
k :	Energie cinétique turbulente.
l :	Longueur caractéristique.
l_m :	Longueur de mélange.
L :	Longueur de la paroi mobile.
\mathbf{n} :	Vecteur unitaire normal à Γ orientée vers l'extérieur de Ω .
n_{sd} :	Nombre de dimension de l'espace.
Pe :	Nombre de Peclet
Pe^h :	Nombre de Peclet dans chaque élément (basé sur la vitesse, la hauteur h de l'éléments et le coefficient de diffusion).
p :	Pression statique instantanée, pour les écoulements laminaires: pression statique.
p' :	Fluctuation de pression.
p_a :	Pression atmosphérique.
\bar{p} :	Pression moyenne.
p^* :	$\bar{p} + 2/3k$
Re^h :	Nombre de Reynolds local (basé sur la vitesse, la hauteur h de l'élément et la viscosité cinématique).
\mathcal{R} :	Domaine des nombres réels.
Re_{max} :	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse maximale. ($Re_{max} = u_{max}H/\nu$).
Re_q :	Nombre de Reynolds basé sur la vitesse de débit. ($Re_q = u_qH/\nu$).
R_t :	Nombre de Reynolds turbulent ($R_t = k^2/\nu\epsilon$).
R_k :	Nombre de Reynolds turbulent ($R_k = k^{1/2}y/\nu$).
R_τ :	Nombre de Reynolds turbulent ($R_\tau = \tau y/\nu$).
S_{ij} :	$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$, Tenseur taux de déformation.
t :	Temps.
\mathbf{u} :	Vecteur vitesse instantanée, pour les écoulements laminaires: vecteur vitesse .
u_i :	Composante de la vitesse instantanée dans la direction i

	$(u_1 = u, u_2 = v).$
\bar{u}_i :	Composante de la vitesse moyenne dans la direction i .
u_q :	Vitesse de débit.
u'_i :	Composante de la vitesse fluctuante dans la direction i ($u'_1 = u', u'_2 = v', u'_3 = w'$).
$\overline{u'_i u'_j}$:	Corrélation double de vitesse.
$\overline{u'^2}$:	(également $\overline{v'^2}$ et $\overline{w'^2}$) Corrélations normales de vitesse.
$\overline{u'v'}$:	Corrélation croisées de vitesse.
u_{ref} :	Vitesse de référence définie au centre du canal d'entrée pour l'écoulement sur une marche descendante.
u_0 :	Vitesse de référence définie au centre du canal d'entrée pour l'écoulement sur une bosse.
u_τ :	Vitesse de frottement.
u_{τ_1} :	Vitesse de frottement en $y = 0$.
u_{τ_2} :	Vitesse de frottement en $y = H$.
u_w :	Vitesse de la paroi mobile.
w :	Hauteur du canal d'entrée pour l'écoulement sur une marche descendante.
\mathbf{x} :	($x_i, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), Coordonnées spatiales dans Ω .
y^+ :	Distance pariétale adimensionnée ($y^+ = yu_\tau/\nu$).

Alphabet Grec

α :	Paramètre de stabilisation.
δ :	Epaisseur de couche limite.
δ_{ij} :	Symbole de Kronecker.
ϵ :	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.
$\epsilon(\mathbf{u})$:	Le tenseur taux de déformation.
$\tilde{\epsilon}$:	$\epsilon - D$.
Γ :	Frontières du domaine.
Γ_g :	Frontières avec les conditions Dirichlet.
Γ_h :	Frontières avec les conditions Neumann.
ϕ^h :	Fonction de forme (fonction de pondération) pour \mathbf{u} .
Ω :	Un domaine borné de \mathfrak{R}^{nsd} .
Ω^e :	Le domaine d'un élément.
μ :	Viscosité dynamique du fluide.
μ_t :	Viscosité dynamique turbulente.
ν :	Viscosité cinématique du fluide.
ν_t :	Viscosité cinématique turbulente.
ρ :	Masse volumique du fluide.
σ :	Tenseur des contraintes en régime laminaire, ($\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\epsilon(\mathbf{u})$).
ψ^h :	Fonction de forme (fonction de pondération) pour p .
τ_{ij} :	Tenseur des contraintes totales en régime turbulent, ($\tau = \sigma - \overline{\rho u'_i u'_j}$)

Les opérateurs

$$\begin{aligned} u_{,i} &: \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ u_{,ii} &: \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \\ \nabla p &: \text{Gradient de } p \text{ (} p_{,i} \text{)} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &: \text{Divergence de } \mathbf{u} \text{ (} u_{,i,i} \text{)}. \end{aligned}$$

Espaces fonctionnels

$$\mathbf{S}_u^h = \{\mathbf{u}^h \mid \mathbf{u}^h \in (\mathbf{H}^{1h})^{n_{sd}}, \mathbf{u}^h = \mathbf{g}^h \text{ sur } \Gamma_g\},$$

$$\mathbf{V}_v^h = \{\mathbf{v}^h \mid \mathbf{v}^h \in (\mathbf{H}^{1h})^{n_{sd}}, \mathbf{v}^h = 0 \text{ sur } \Gamma_g\}$$

où

$$\mathbf{H}^{1h} = \{\phi^h \mid \phi^h \in Q^k, \forall \Omega^e \in \mathcal{E}\}$$

$\mathbf{H}^{1h} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ dénote l'espace d'éléments finis de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. $\mathbf{H}^1(\Omega)$ est l'espace de Hilbert dans lequel les fonctions et leurs dérivées premières sont de carrée sommable. \mathbf{S}_u^h est l'espace de fonctions de forme, et \mathbf{V}_v^h est l'espace de fonctions-test. Les fonctions de base ϕ^h sont définies continues par morceaux (C^0) dans \mathcal{E} . Q^k représente les polynômes de degré k , $k \geq 1$.

$$L^2_0(\Omega) = \{\psi^h \mid \psi^h \in Q^l, \forall \Omega^e \in \mathcal{E}\}$$

L^2_0 est l'espace des fonctions de carrée sommable. Les fonctions de base ψ^h sont définies continues (C^0) ou discontinues par morceaux (C^{-1}) dans \mathcal{E} . Q^l représente les polynômes de degré $k > l \geq 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $\| \cdot \|_0$ la norme dans $L^2(\Omega)$. Également, $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ et $\| \cdot \|_{0,e}$ dénotent respectivement le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega^e)$. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|_0$ s'écrivent sous la forme suivante:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u v d\Omega$$

$$\| v \|_0 = \left(\int_{\Omega} v^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

C^k est l'espace des fonctions réelles qui sont k fois dérivables.

$\mathbf{B} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ dénote une forme bilinéaire.

\mathcal{E} représente une discrétisation aux éléments finis de Ω en des sous-domaines Ω^e , $e = 1, 2, \dots, n_{el}$, où n_{el} est le nombre d'éléments.

Introduction Générale

Position du problème

Aujourd'hui, l'étude et la prédiction des écoulements des fluides (laminaires ou turbulents) par des méthodes numériques s'effectuent de plus en plus couramment. En effet, ces méthodes se présentent comme un outil d'investigation performant et réaliste. La méthode des éléments finis est l'une de ces techniques numériques. Elle est très efficace pour traiter des configurations complexes. Les maillages non-structurés peuvent être facilement construits par cette méthode. Elle permet également de mailler d'une manière adaptative. Depuis le début des années 70, un nombre croissant de codes commerciaux (industriel), basés sur cette méthode, ont été introduits dans le domaine de la Mécanique du solide. En revanche en Mécanique des fluides la situation est un peu différente. Les équations du mouvement régissant les écoulements laminaires et turbulents (e.g. les équations de Navier-Stokes) ont certaines propriétés qui rendent leur traitement difficile, non-seulement par la méthode classique des éléments finis mais également par d'autres méthodes comme les méthodes de volumes finis ou de différences finies. La non-linéarité et l'instabilité des équations, la présence de zones de fort gradient dans l'écoulement nécessitent des schémas numériques appropriés. Le temps de calcul nécessaire peut également devenir très importants en raison des non-linéarités. Par exemple, un modeste problème 2D en Mécanique des fluides peut consommer autant de temps de calcul qu'un très gros problème 3D en Mécanique du solide. Les méthodes conventionnelles d'éléments finis aboutissent à un système d'équations qui nécessite des temps de calcul importants. C'est la raison principale pour laquelle la méthode des éléments finis est restée pendant des années dans l'ombre des méthodes numériques moins générales mais plus économiques comme les méthodes de type volume finis. L'absence de schémas appropriés pour traiter la non-linéarité et l'instabilité à l'époque où le calcul des écoulements des fluides devenait chose courante est une autre raison. Il a fallu du temps et du travail pour que la méthode des éléments finis grandisse et mûrisse.

Le problème de la turbulence est étudié sur le plan théorique depuis plus de 100 ans. On postule que les équations de Navier-Stokes régissent aussi bien les écoulements laminaires que les écoulements turbulents. L'une des caractéristiques fondamentales des écoulements turbulents est l'existence en leur sein de structure de taille très diverses. Elle s'échelonne depuis les microéchelles de Kolmogorov associées aux structures dissipatives et occupant dans l'espace spectral la zone des hautes fréquences jusqu'aux macroéchelles porteuse d'énergie, caractérisées par leur basse fréquence. Un traitement "direct" des équations de Navier-Stokes nécessite donc une discrétisation spatiale et temporelle dans laquelle la taille des mailles doit être plus fine que ces microstructures afin que le calcul puisse prendre en compte les effets de cet enchevêtrement complexe. A l'heure actuelle la simulation numérique

"directe" de la turbulence est limitée aux écoulements à Reynolds peu élevé et dans des configurations simples, en raison de coût de calcul. Elle contribue plus particulièrement à la compréhension de divers phénomènes turbulents.

Dans l'industrie, on ne s'intéresse pas en général aux détails des mouvements fluctuants. Seul, les effets de la turbulence sur les comportements moyens sont importants. Pour simuler les macroéchelles on peut recourir à un traitement statistique par lequel les équations instantanées sont moyennées temporellement. Les équations résultantes décrivent donc le mouvement en terme de valeurs moyennes de vitesse, pression, température etc... Néanmoins, le traitement statistique conduit à une perte d'information. En effet, il aboutit à un système d'équations comportant plus inconnues que d'équations. Se pose alors un problème de la fermeture. La perte d'information doit être réintroduite par des modélisations. Il existe un très grand nombre de modèles, du plus simple (plus économique) au plus sophistiqué (plus coûteux). Le "bon" modèle est avant tout un compromis.

En résumé, la prédiction des écoulements turbulents dans des configurations industrielles rencontre deux difficultés majeures. La première est liée au fait que le recours aux modélisations introduit naturellement des erreurs dans le calcul. Le choix du modèle devient alors important. La deuxième difficulté trouve son origine dans le caractère des équations de Navier-Stokes. Le traitement de ces équations (en régime laminaire ou turbulent) peut rencontrer des instabilités. En effet, des précautions doivent être prises pour la discrétisation du terme de pression (surtout dans le cas incompressible) et de convection. Une bonne partie de l'énergie doit alors être consacrée au traitement numérique approprié des équations de Navier-Stokes afin de préserver à la fois la précision et la stabilité. Ceci n'est pas une tâche facile et constitue en partie l'objet de cette thèse.

Objectif du présent travail

Ce travail a pour objectif le développement d'un code de calcul d'éléments finis permettant la prédiction des écoulements laminaires et turbulents. On a choisit de se limiter dans ce travail aux écoulements bi-dimensionnels et incompressibles. Pour le cas des écoulements turbulents nous utilisons un modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds.

Un code de calcul "idéal" doit satisfaire les trois critères de robustesse, de précision et de généralité. Il est important qu'un code de calcul fournisse une solution précise. Par exemple la formulation ne doit pas introduire trop de diffusion artificielle ou numérique. Il est également préférable que le code soit assez général. Si l'écoulement contient des régions compressible et incompressible il est avantageux que le code soit capable de tenir compte de ces conditions. Malheureusement les deux propriétés de précision et généralité ne sont pas tout à fait compatibles avec la

robustesse. Les codes qui sont généraux et basés sur les méthodes mathématiques rigoureuses ne sont pas très souvent stables. Les calculs avec ces codes ne sont pas économiques. En revanche, les codes stables, robustes et flexibles comme les codes de type industriel utilisent très souvent des schémas de discrétisation ou des modèles de turbulence très simples. Ils sacrifient la précision et la généralité à la robustesse. Aujourd'hui on essaie d'augmenter la robustesse à l'aide des méthodes d'accélération de convergence comme par exemple les méthodes multigrilles. Ces méthodes s'avèrent très prometteuse concernant l'économie et la convergence. Dans le cadre de ce travail, nous traitons particulièrement l'influence de la formulation sur la précision.

La première partie de ce travail est concentrée sur l'étude de la précision et la validation de différentes formulations d'éléments finis en étudiant un certain nombre d'écoulements en régime laminaire. En résumé, différentes formulations sont soumises à des tests plus au moins exhaustifs afin d'étudier leurs performances. Il nous semble primordial de pouvoir cerner les limitations et le comportement des schémas numériques. Le choix et la programmation d'une méthode de résolution ne sont que les premières étapes dans l'exploitation d'un code d'écoulement turbulent. Il est ensuite important de pouvoir distinguer les écarts d'origine numérique de ceux dus à la modélisation.

La première partie comprend deux chapitres. Dans le premier chapitre nous traitons les équations de type convection-diffusion. L'analyse numérique de ces équations est un sujet qui est traité depuis trois décennies. Le défi est de trouver une méthode qui assure de la façon la plus idéale la précision et la stabilité. Nous nous intéressons dans cette thèse aux formulations stables d'éléments finis de SUPG et GLS. Nous préférons ces formulations pour les raisons suivantes: Elles sont simples, faciles à comprendre et faciles à mettre en oeuvre. De plus, elles sont mathématiquement rigoureuses et possèdent une généralité inhérente.

Le deuxième chapitre est consacré aux formulations des équations de Navier-Stokes. Nous traitons d'abord les difficultés associées à la discrétisation du terme de pression. L'extension des formulations SUPG et GLS aux équations de Navier-Stokes est ensuite étudiée. Compte tenu de la diversité des formulations proposées dans la littérature et des travaux effectués nous nous contentons très souvent de citer seulement les difficultés et leurs remèdes en renvoyant le lecteur à la bibliographie. Les démonstrations mathématiques complètes (théorie, estimation d'erreur, stabilité) ne seront pas étudiées ici en détail. En résumé, cette thèse ne traite pas les aspects mathématiques de différentes formulations d'éléments finis. Elle ne traite pas non plus toutes les méthodes existantes dans la littérature. Elle essaie plutôt de présenter et d'étudier le comportement d'une famille de formulations stables d'éléments finis introduite dans les années 80 et complétée depuis. Bien-entendu en cours de toute étude, des nouvelles observations ou interprétations sont naturelles. Les aspects

mathématiques des formulations de SUPG et GLS ont été étudiés en détail dans la littérature. Cependant, l'expérience numérique avec ces formulations reste encore limitée et leur comportement ne sont pas élucidé dans des cas généraux. Nous allons mettre l'accent sur l'évaluation du comportement de ces formulations et sur l'intérêt qu'elles peuvent apporter pour la précision de la solution. Certains paragraphes des deux premiers chapitres sont cependant consacrés aux sujets classiques et connus pour des raisons de continuité et de clarté de l'exposé.

Dans la deuxième partie nous traitons les écoulements turbulents. Après une bibliographie limitée nous présentons le modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds. Le choix du modèle de turbulence est loin d'être évident. Ce travail est notre première expérience concernant la simulation des écoulements turbulents par une méthode d'éléments finis. Nous nous sommes donc limités à un modèle $k - \epsilon$. Dans notre laboratoire, dans une étude parallèle à ce travail, les modèles au second ordre ont été traités avec une méthode de volumes finis. Le modèle $k - \epsilon$ semble être un bon compromis entre la précision (généralité) et le coût du calcul. Habituellement pour des nombres de Reynolds élevés les régions pariétales sont modélisées par des fonctions de paroi. Ces fonctions évitent de mailler les zones de fort gradient adjacentes à la paroi, ce qui réduit le nombre de point de maillage. Cependant, pour certains écoulements (e.g. écoulement avec des zones de recollement) la couche de paroi devient d'épaisseur infinie et par conséquent rend les fonctions de paroi impraticables. Le code développé dans cette thèse est destiné en partie à traiter les écoulements de Couette-Poiseuille à très bas nombre de Reynolds. Ces écoulements sont réalisés expérimentalement dans notre laboratoire et les résultats constituent une base de donnée assez complète. Le traitement correct de ces écoulements n'est possible qu'avec des modèles à bas nombre de Reynolds. Nous utiliserons donc un modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds.

Aujourd'hui, l'utilisation des modèles de turbulence avec la méthode des éléments finis n'est pas une démarche originale par elle-même (bien qu'elle ne soit pas aussi étendue que pour les méthodes de type volumes finis). L'école française a été le pionnier. La recherche est initiée en début des années 80 et depuis elle a fait de progrès importants. Les centres de recherche de l'INRIA et de l'EDF sont parmi les plus reconnus aussi bien dans le hexagone que sur le plan mondial. Ce problème (avec la méthode des éléments finis) est traité moins systématiquement par l'école anglo-saxonne. La recherche à l'INRIA est concentrée plus particulièrement sur les aspects mathématiques des modèles de turbulence comme par exemple la stabilité et positivité du modèle $k - \epsilon$. L'EDF a développé des codes de calcul industriels basés sur divers modèles de turbulence avec ou sans fonctions de paroi. Bien entendu, on ne peut pas se limiter à ces deux centres de recherche. Les laboratoires de type universitaire ou académique ont également contribué à l'étude et à la prédiction de l'écoulement turbulent avec la méthode des éléments finis (e.g. l'Université de Compiègne et l'EC-Lyon). Ce qui différencie cette étude des autres travaux n'est pas

la mise en oeuvre d'un code de calcul d'éléments finis. Nous donnons en revanche la primauté à la validation du modèle et à l'évaluation des résultats.

Le modèle $k - \epsilon$ se résume en deux équations de transport pour k (énergie turbulente) et ϵ (la dissipation). Ces équations contiennent des termes source, puit, de convection et de diffusion. Malheureusement le traitement numérique de ces équations n'est pas stable dans toutes les conditions. Récemment la stabilité et la positivité des équations de transport pour k et pour ϵ ont été le sujet de recherche détaillée. Cependant, cet aspect n'est pas traité dans cette thèse. Nous espérons aborder la stabilité du modèle $k - \epsilon$ dans un autre travail.

Dans le dernier chapitre nous étudions trois écoulements de référence en régime turbulent. Ce sont les écoulements de Couette-Poiseuille, l'écoulement sur une marche descendante et l'écoulement sur une bosse. Ces écoulements font partie de la base de donnée d'ERCOFTAC. Ils ont été le sujet de validation des modèles de turbulence. Les écoulements de Couette-Poiseuille sont réalisés expérimentalement à bas Re (e.g. $Re = 5000 - 10000$). Dans le cadre du présent travail, ces écoulements nous permettront de tester la performance des modèles $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds dans des configurations simples. Ces expériences permettent également (en dehors du contexte de ce travail) la validation des simulations numériques directes. Les écoulements de Couette-Poiseuille font ici l'objet d'une attention particulière puisque la compréhension et l'étude de ces écoulements est l'un des axes principaux de notre laboratoire. L'écoulement sur la marche descendante nous permettra de tester le modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds pour les écoulements avec des régions de recirculation. Finalement, l'écoulement sur la bosse nous permettra d'illustrer l'importance du choix de la formulation pour les écoulements dans des domaines non-rectangulaires.

Partie I
Ecoulements Laminaires

Chapitre 1

Equations de Convection-Diffusion

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre on s'intéressera uniquement à la résolution des équations de convection-diffusion. Le traitement numérique de ces équations par les méthodes classiques d'éléments finis (Galerkin) rencontre une difficulté majeure: une instabilité numérique apparaît qui trouve son origine dans le terme convectif. Ce problème se rencontre également par les méthodes de différences finies ou de volumes finis. La discrétisation du terme convectif par la méthode de Galerkin (parfois appelée Bubnov-Galerkin, voir e.g. Michell et Wait, 1977) produit un système d'équations non-symétrique qui sont découplées d'un noeud à l'autre. Dans ce cas, si le terme diffusif est très petit devant le terme convection, la solution peut devenir instable dans les zones de fort gradient (couche limite, couche de mélange, et onde de choc). Par "instabilité", on entend soit l'apparition d'oscillations dans la solution obtenue par une méthode d'inversion directe, soit le manque de convergence lors de l'utilisation d'une méthode itérative.

Un remède traditionnel à ce problème consiste à ajouter une diffusion artificielle afin de stabiliser le schéma numérique. Cependant, dans le cas général (multi-dimensionnel, instationnaire, et avec le terme source) l'adjonction d'une diffusion artificielle n'est pas évidente et des précautions doivent être prises pour préserver la précision du schéma numérique. Dans cette thèse, une famille de formulations stables aux éléments finis est expérimentée. Ces formulations, appelées SUPG et GLS, sont présentées dans ce chapitre.

Les formulations stables de SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin) ou SDM (Streamline Diffusion Method) ont été introduites et étudiées au début des années 80 par Hughes et ses collègues à Stanford et Johnson et son équipe à Göteborg (pour les références voir plus loin). Ces formulations consistent à ajouter à la formulation de Galerkin des termes auxiliaires. Ces termes, qui stabilisent la formulation dépendent du résidu des équations à résoudre. Par conséquent, ils permettent d'obtenir un schéma numérique stable et consistant sans dégradation de précision. Johnson et Navert (1980) ont étudié l'aspect mathématique de ces

formulations. Les extensions de ces formulations aux équations de Navier-Stokes ont été effectuées dans les années 80 (Brooks et Hughes, 1982). Johnson et al (1984) ont proposé la version instationnaire de la formulations SDM appelée "Space-Time Streamline Diffusion Method". Dans cette formulation, le temps est également discrétisé par la méthode des éléments finis. Cette formulation a été exploitée plus tard au début des années 90. Johnson (1989) puis Hansbo (1992) ont proposé une modification de la formulation précédente appelée "Characteristic Streamline Diffusion (CSD) Method" dans laquelle les éléments d'espace-temps s'orientent dans les directions des caractéristiques. Selon Johnson (1992) la formulation CSD présente tous les avantages des méthodes eulériennes et lagrangiennes. Elle est très utile pour résoudre les problèmes avec des frontières mobiles (ou libre). Pour un résumé exhaustif des formulations de type SUPG et SDM on pourra se référer à Johnson (1992) et aux références citées dans cet article. Dans cette thèse on s'intéressera uniquement aux problèmes stationnaires, avec des frontières fixes et des solutions sans discontinuité.

Dans ce chapitre on mettra, d'abord, en évidence les difficultés rencontrées lors de la résolution des problèmes de convection-diffusion et on expliquera l'origine de l'instabilité. Ensuite on étudiera quelques remèdes traditionnels et l'on notera leurs imperfections. Puis, on traitera les méthodes plus récentes comme SUPG et GLS. Finalement, on présentera les performances de différentes méthodes à l'aide d'exemples numériques.

1.2 Le problème modèle

Considérons le problème modèle mono-dimensionnel, linéaire, stationnaire, de convection-diffusion, et sans le terme source suivant:

$$-\nu \frac{d^2 u}{dx^2} + a \frac{du}{dx} = 0 \quad \Omega(0 \leq x \leq L) \quad (1.1)$$

$$u(x=0) = u_0 \quad u(x=L) = u_L \quad (1.2)$$

où ν est le coefficient de diffusion, a la vitesse et u par exemple la température.

En discrétisant avec les éléments les plus simples, c'est-à-dire, les éléments linéaires uniformément distribués dans le domaine $0 \leq x \leq L$, avec $x_{i+1} - x_i = h$, $0 \leq i \leq n$, $(n+1)h = L$, on obtient,

$$-\frac{\nu}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{a}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = 0 \quad (1.3)$$

On expliquera la méthodologie au paragraphe 1.4.

Remarque: Dans ce cas précis (problème mono-dimensionnel, stationnaire, le terme source absent et les éléments linéaires et uniformes), les méthodes de différences finies ou de volumes finis aboutissent au même système d'équations discrètes (1.3).

En utilisant la définition du nombre de Peclet, $Pe_h = \frac{ah}{2\nu}$, et en suivant Raviart (1981) la solution analytique de (1.3) s'écrit:

$$u_i = A + BC^i \quad (1.4)$$

où

$$A = -\frac{C^{n+1}}{1 - C^{n+1}}, \quad B = \frac{1}{1 - C^{n+1}}, \quad C = \frac{1 + Pe_h}{1 - Pe_h}$$

On constate que la solution u_i oscille pour $Pe_h > 1$. On note également que les oscillations s'accroissent avec i jusqu'à l'explosion de la solution dans des zones de fort gradient. La solution analytique (1.4) est obtenue explicitement. On peut trouver également les valeurs de u_i en appliquant une méthode d'inversion directe aux équations (1.3). Les valeurs de u_i bien entendu oscilleront. Les oscillations proviennent du fait que le système d'équations (1.3) a des valeurs propres qui sont proportionnelles à ν . Elles tendent vers zéro quand $\nu \rightarrow 0$ (Pironneau, 1989). En revanche, dans le cas d'une méthode itérative la convergence n'est jamais atteinte pour $Pe_h > 1$ car les coefficients du système d'équations (1.3) ne satisfont pas la condition de Scarborough (1955). Selon ce dernier, la condition suffisante pour la convergence de la méthode itérative de Gauss-Seidel s'écrit:

$$\frac{\sum |d_{ij}|}{|d_{ii}|} = \begin{cases} \leq 1 & \forall i \\ < 1 & \text{pour au moins une équation} \end{cases} \quad (1.5)$$

où d_{ij} sont les coefficients du système des équations linéaires.

Pour un coefficient de diffusion ν et une vitesse a donnée, la condition $Pe_h > 1$, impose de raffiner le maillage. Autrement dit, on est limité par les moyens de calcul. D'après le diagnostic ci-dessus, on constate que l'origine de l'instabilité est le fait que les valeurs des coefficients diagonaux du système d'équations sont trop petites. L'un des remèdes est donc de trouver un schéma qui rende les termes diagonaux de grandeur comparable aux coefficients issus du terme convectif afin d'essayer de se rapprocher de la condition de Scarborough. Il faut cependant être conscient du fait que les termes diagonaux proviennent du terme de diffusion de l'équation et qu'une modification quelconque perturberait la diffusion physique.

Un remède classique pour éviter les oscillations, dans le cadre des différences finies, consiste à effectuer une discrétisation décentrée du terme convectif: $\frac{du}{dx} =$

$\frac{1}{h}(u_i - u_{i-1})$, et donc à coupler les noeuds adjacents. Le système d'équations s'écrit dans ce cas:

$$-\left(\frac{\nu}{h^2} + \frac{a}{2h}\right)(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{a}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = 0 \quad (1.6)$$

Autrement dit, la différence décentrée permet d'ajouter aux termes diagonaux une diffusion numérique $ah/2$. Ce procédé stabilise le schéma itératif ou évite la manifestation des oscillations. Il aboutit cependant à une solution trop diffusive. La diffusion numérique est de l'ordre de h , donc le schéma décentré est précis au premier ordre (Roache, 1972). Pour faire disparaître l'influence de cette diffusion supplémentaire, des maillages très fins sont indispensables. Encore la limitation des moyens de calcul!

Dans la littérature anglo-saxonne, le schéma (1.6) et ses versions d'ordre supérieur sont dénommé "upwind". Le schéma (1.6) a apparemment été d'abord suggéré par Courant (1955) et plus tard indépendamment par Spalding (1967). Le décentrement mono-dimensionnel du premier ordre (1.6) est parfois appelé "méthode de diffusion artificielle (numérique)".

L'une des premières tentatives pour améliorer la précision du schéma upwind est due à Spalding (1972). Il propose une méthode hybride qui consiste à effectuer une discrétisation décentrée du terme convectif pour les zones de fort gradient et à alterner avec une discrétisation centrée pour les zones où la diffusion est dominante. Ce schéma appelé "hybrid" s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) & Pe_h \leq 1 \\ \frac{du}{dx} &= \frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}) & Pe_h > 1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ce schéma hybride (1.7) est la version approchée de la méthode exponentielle (Spalding, 1972) dans laquelle la diffusion numérique, ν^h , prend la valeur suivante:

$$\nu^h = \frac{\xi ah}{2} \quad (1.8)$$

où

$$\xi = \cot(Pe_h) - \frac{1}{Pe_h} \quad (1.9)$$

Ce schéma exponentiel (1.8) fournit la solution exacte du problème modèle (1.1). Comme le calcul d'une fonction exponentielle est coûteux, le schéma hybride la remplace. Pour $Pe_h > 10$, les schémas hybride et exponentiel sont équivalents.

Malheureusement, les schémas (1.6) et (1.7) ou (1.8) ne peuvent pas être généralisés sans difficulté ou sans dégradation de précision aux problèmes multi-dimensionnels, instationnaires, et avec terme source. Il a été démontré que la généralisation du schéma "upwind" classique aux problèmes bi-dimensionnels (de Vahl Davis-Mallinson, 1976) produit une viscosité numérique transversale "crosswind" qui dégrade la précision. Cette diffusion se présente sous la forme suivante:

$$\nu_{fausse} = \frac{a\Delta x\Delta y \sin 2\theta}{4(\Delta y \sin^3 \theta + \Delta x \cos^3 \theta)} \quad (1.10)$$

où θ est l'angle entre le vecteur vitesse et la maille. On constate que pour éliminer la diffusion transversale le vecteur vitesse doit s'aligner avec la maille. A l'aide d'un exemple numérique, l'effet néfaste de la diffusion transversale sera explicité plus loin (voir paragraphe 1.5.1).

Bien entendu, depuis deux décennies, de nombreux chercheurs ont traité ce problème et ont proposé des schémas plus précis que les schémas classiques de décentrement. Les schémas QUICK (Leonard, 1979), TVD (Van Leer, 1979), et FCT (Boris et Book, 1973) sont parmi les plus connus. Pour les versions plus récentes des méthodes TVD et FCT, on pourra se référer à Deconinck et al (1992) et à Barth (1992). Dans cette thèse, on se limitera aux méthodes conventionnelles d'éléments finis.

1.3 Le décentrement et la méthode des éléments finis

C'est Zienkiewicz (1976) qui, le premier, a abordé le problème du traitement des équations de convection-diffusion par la méthode des éléments finis. Lors du congrès de MAFELAP en 1975, il a brièvement proposé l'un des premiers schémas stables d'éléments finis. Il a étudié le cas mono-dimensionnel en utilisant des éléments linéaires et a préconisé l'étude de l'extension de cette formulation aux problèmes multi-dimensionnels et l'analyse de ses conséquences vis à vis de la précision et de la consistance. Aussitôt après ce congrès, Christie et al. (1976) pour le cas mono-dimensionnel, Heinrich et al. (1977) pour le cas bi-dimensionnel et Heinrich et Zienkiewicz (1977) en utilisant des éléments quadratiques, ont proposé des schémas stables pour l'équation de convection-diffusion, stationnaire et sans terme source. Ces auteurs ont utilisé une formulation de Petrov-Galerkin dans laquelle l'espace des fonctions de forme est différent de celui des fonctions-test (contrairement à la formulation de Bubnov-Galerkin où les fonctions-test et les fonctions de forme sont identiques). Les fonctions-test sont choisies égales aux fonctions de forme plus des termes asymétriques de degré supérieur à celui des fonctions de forme, Fig.(1.1a-1.1b). L'idée est de donner plus de poids au noeud amont. En faisant intervenir les modifications de façon contrôlée (optimale), ces schémas, comme leurs équivalents en différences finies (schéma exponentiel), fournissent la solution exacte du problème

(1.1).

De façon indépendante, Hughes (1978) a proposé un autre schéma stable qui consiste en "une formule de quadrature décentrée" (un point de Gauss au lieu de deux dans le cas des éléments linéaires) pour intégrer le terme convectif. Cette méthode, bien qu'elle soit moins compliquée que les schémas précédents et qu'elle puisse donner la solution exacte du problème (1.1), est limitée aux éléments linéaires.

Malheureusement, la généralisation aux problèmes multi-dimensionnels n'est pas évidente et la diffusion artificielle transversale (crosswind diffusion) se manifeste comme pour la méthode des différences finies. De plus, ces méthodes sont précises au premier ordre (basées sur un problème modifié) et la généralisation aux problèmes, soit instationnaires, soit avec terme source ne serait pas consistante. Malgré la vaste exploitation de ces méthodes dans différents codes industriels ou académiques, elles ont été accusées d'être "belles" et lisses mais "approximatives" et extrêmement diffusives (Leonard, 1979, Gresho et Lee, 1981).

1.4 Initiation aux formulations stables d'éléments finis SUPG et GLS

Considérons les équations multi-dimensionnelles de convection-diffusion avec terme source suivantes:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \Omega \subset \mathfrak{R}^{n_{sd}} \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \nu \geq 0 \quad (1.12)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Gamma \quad (1.13)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathfrak{R}^{n_{sd}}$ ($n_{sd} \leq 3$) de frontière Γ . \mathfrak{R} est le domaine des nombres réels et n_{sd} le nombre de dimension de l'espace. Pour faciliter l'exposé, on a fait l'hypothèse que \mathbf{a} satisfait la condition d'incompressibilité (1.12), et que les conditions aux frontières sont de Dirichlet (1.13).

Supposons que \mathcal{E} représente une discrétisation aux éléments finis de Ω en des sous-domaines Ω^e , $e = 1, 2, \dots, n_{el}$, où n_{el} est le nombre d'éléments. On définit les espaces de fonctions suivants:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{u}}^h = \{\mathbf{u}^h \mid \mathbf{u}^h \in (\mathbf{H}^{1h})^{n_{sd}}, \mathbf{u}^h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\},$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{v}}^h = \{\mathbf{v}^h \mid \mathbf{v}^h \in (\mathbf{H}^{1h})^{n_{sd}}, \mathbf{v}^h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\}$$

où

$$\mathbf{H}^{1h} = \{\phi^h \mid \phi^h \in Q^k, \forall \Omega^e \in \mathcal{E}\}$$

$\mathbf{H}^{1h} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ dénote l'espace d'éléments finis de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. $\mathbf{H}^1(\Omega)$ représente l'espace de Hilbert dans lequel les fonctions et leurs dérivées premières sont de carré sommable. \mathbf{S}_u^h est l'espace des fonctions de forme, et \mathbf{V}_v^h l'espace des fonctions-test. Les fonctions de base ϕ^h sont définies continues par morceau (C^0) dans \mathcal{E} . Q^k représente les polynômes de degré k , $k \geq 1$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $\| \cdot \|_0$ la norme dans $L^2(\Omega)$. Egalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ et $\| \cdot \|_{0,e}$ dénotent respectivement le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega^e)$. Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|_0$ s'écrivent sous la forme suivante:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv d\Omega$$

$$\| v \|_0 = \left(\int_{\Omega} v^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.4.1 La méthode de Galerkin

Commençons par la formulation de Galerkin qui consiste à trouver $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}^h$ tel que

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) = \mathbf{L}(\mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \quad (1.14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) = \int_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^h \mathbf{v}^h + \nabla \mathbf{v}^h \cdot \nu \nabla \mathbf{u}^h) d\Omega \quad (1.15)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}^h) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^h \mathbf{f} d\Omega \quad (1.16)$$

Selon la méthode des résidus pondérés la formulation (1.14-1.16) est obtenue de la manière suivante:

Les équations (1.11) sont intégrées en les multipliant par les fonctions-test \mathbf{v} . Pour élargir l'espace des fonctions de forme et des fonction-test, une intégration par partie (théorème de Gauss) du terme diffusion est effectuée. La forme matricielle de la formulation (1.14-1.16) s'écrit:

$$[\mathbf{N} + \mathbf{K}] (\mathbf{U}) = [\mathbf{F}] \quad (1.17)$$

où \mathbf{N} provient du terme de convection, \mathbf{K} du terme de diffusion, et \mathbf{F} du terme source. \mathbf{U} identifie les valeurs de \mathbf{u} aux noeuds de la discrétisation (maillage). Pour la présentation explicite de chaque terme, on pourra se référer à l'annexe A1.

La stabilité s'obtient de la façon suivante. On remplace \mathbf{v} par \mathbf{u} dans l'équation (1.15), puis on effectue une intégration par partie du terme de convection. Soit, $\langle \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \nabla \cdot \mathbf{a}, \mathbf{u}^2/2 \rangle = 0$. Les intégrales sur les frontières sont nulles, car

on a choisi des conditions aux frontières de type Dirichlet (1.13). La condition de stabilité s'écrit:

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) = \nu \|\nabla \mathbf{v}^h\|_0^2 \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (1.18)$$

On constate que ce schéma n'est pas très stable. On ne peut pas compter sur la diffusion car elle peut prendre des valeurs trop petites.

1.4.2 La méthode "upwind" de décentrement simple

Nous avons vu au paragraphe 1.2 que la simple généralisation du schéma mono-dimensionnel décentré (ou diffusion artificielle) aux problèmes multi-dimensionnels est décevante. Reprenons tout d'abord le schéma classique de diffusion artificielle qui s'écrit:

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v}^h \cdot \nu_n \nabla \mathbf{u}^h) d\Omega = \mathbf{L}(\mathbf{v}^h) \quad (1.19)$$

où ν_n est le coefficient de diffusion artificielle (numérique). Pour le cas mono-dimensionnel $\nu_n = ah/2$ (voir éq. 1.6). On constate que le terme ajouté est de même forme que le terme de diffusion physique. Ce terme produit une diffusion isotrope qui pollue la solution partout.

Le remède à cette situation est logiquement une méthode de nature multi-dimensionnelle. Hughes et Brooks (1979) et indépendamment Kelly et al. (1980) ont proposé de modifier les équations originales (1.11) en ajoutant la diffusion numérique de coefficient suivant:

$$\nu_n = \nu_{ij} = \nu_n^h \frac{a_i a_j}{|a|^2} \quad (1.20)$$

Le produit $a_i a_j$ garantit que la diffusion numérique (la diffusion artificielle nécessaire pour stabiliser la méthode) reste uniquement dans la direction du vecteur vitesse. Cette méthode est intitulé subséquemment "Streamline Upwinding". On note que ce schéma ne peut toujours pas prendre en compte le terme source ou instationnaire car la formulation est basée sur l'équation modifiée et donc n'est pas consistante.

1.4.3 Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG)

Au début des années 80, Brooks et Hughes (1982), et indépendamment Johnson et Navert (1980) ont noté que le schéma "Streamline Upwind" peut s'introduire naturellement au sein de la méthode des éléments finis tout en préservant la consistance. Ce schéma, qui utilise une formulation de Petrov-Galerkin, consiste à perturber les fonctions-test par leurs dérivées (voir Fig. 1.1c) de la façon suivante:

$$\mathbf{w}^h = \mathbf{v}^h + \alpha \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h \quad (1.21)$$

où α est un temps caractéristique à définir.

Maintenant, en suivant Franca et al. (1992) la formulation SUPG du problème (1.11) s'écrit:

$$\mathbf{B}_{SUPG}(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) = \mathbf{B}(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) + \sum_e \int_{\Omega_e} \alpha (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h) (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{u}^h) d\Omega_e \quad (1.22)$$

$$\mathbf{L}_{SUPG}(\mathbf{v}^h) = \mathbf{L}(\mathbf{v}^h) + \sum_e \int_{\Omega_e} \alpha (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h) (\mathbf{f}) d\Omega_e \quad (1.23)$$

soit:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) + \sum_e \int_{\Omega_e} \alpha (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h) (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{u}^h) d\Omega \\ = \mathbf{L}(\mathbf{v}^h) + \sum_e \int_{\Omega_e} \alpha (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h) (\mathbf{f}) d\Omega_e \end{aligned} \quad (1.24)$$

Pour clarifier le rôle que joue le paramètre α dans la stabilité et la convergence de la méthode SUPG, on procède de la manière suivante:

Dans ce qui suit, on prend $\nu = cte$ pour faciliter l'exposé. Pour le moment considérons les relations suivantes dont le rôle sera défini un peu plus loin:

$$\alpha = \frac{h}{2 |\mathbf{a}(\mathbf{x})|_r} \xi(\mathbf{P}e^h(\mathbf{x})) \quad (1.25)$$

$$\mathbf{P}e^h(\mathbf{x}) = \frac{m_h |\mathbf{a}(\mathbf{x})|_r h}{2\nu} \quad (1.26)$$

$$\xi(\mathbf{P}e^h(\mathbf{x})) = \begin{cases} \mathbf{P}e^h(\mathbf{x}) & 0 \leq \mathbf{P}e^h(\mathbf{x}) < 1 \\ 1 & \mathbf{P}e^h(\mathbf{x}) \geq 1 \end{cases} \quad (1.27)$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x})|_r = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_{sd}} |a_i(\mathbf{x})|^r |^{\frac{1}{r}} & 1 \leq r < \infty \\ \max_{i=1, n_{sd}} |a_i(\mathbf{x})| & r = \infty \end{cases} \quad (1.28)$$

$$m_h = \min\{1/3, 2C_h\} \quad (1.29)$$

$$C_h \left(\sum_e h^2 \|\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}^h\|_{0,e}^2 \right) \leq \|\nabla \mathbf{v}^h\|_0^2 \quad \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \quad (1.30)$$

Notons que le produit $\alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h)(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) = \alpha a_i v_{,i}^h a_j u_{,j}^h = \alpha a_i a_j v_{,i}^h u_{,j}^h$ est équivalent à l'adjonction d'un terme de diffusion numérique de coefficient $\nu_{ij} = \nu_n^h \frac{a_i a_j}{|a|^2}$ (éq.1.20).

Pour le cas mono-dimensionnel $\alpha a_i a_j = \frac{h |a(\mathbf{x})|_r}{2} \xi(\mathbf{P}e^h(\mathbf{x}))$, correspond à la diffusion optimale du schéma exponentiel (1.8). La fonction $\xi(\mathbf{P}e^h(\mathbf{x}))$ est l'approximation asymptotique de la relation (1.9). Dans les relations (1.25), (1.26) et (1.30), $h = \max_{1 \leq e \leq n_{el}}(h^e)$ où h^e est le diamètre du cercle qui entoure chaque élément. Pour $m = 1/3$, et des éléments linéaires uniformément distribués, la formulation (1.24) peut fournir la solution exacte du problème (1.1). Pour des éléments biquadratiques la valeur de m doit être déterminée par la stabilité de la formulation (1.24). La relation (1.30) est l'estimation inverse de l'opérateur de Laplace (Ciarlet, 1978). C_h est une constante positive. Elle dépend des fonctions d'interpolation. $C_h = \infty$ pour les éléments bilinéaires rectangulaires, car $(\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}^h = 0)$. Pour les éléments biquadratiques, $C_h = 1/24$ (Franca et al., 1992).

Lemme 1: La stabilité de la formulation (1.24) s'écrit:

$$\mathbf{B}_{SUPG}(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) \geq \frac{1}{2} (\nu \|\nabla \mathbf{v}^h\|_0^2 + \|\alpha^{1/2}(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h)\|_0^2) \geq 0 \quad (1.31)$$

Démonstration:

D'abord on démontre que le paramètre de stabilisation α est borné.

En utilisant (1.29) on obtient soit:

$$m_h = 1/3 \Rightarrow m_h \leq 2c_h \quad (1.32)$$

soit

$$m_h = 2c_h \quad (1.33)$$

Donc, dans les deux cas on trouve:

$$\frac{m_h}{4c_h} \leq \frac{1}{2} \quad (1.34)$$

Ensuite à l'aide de (1.27) on obtient soit:

$$\frac{\xi(\mathbf{P}e^h(\mathbf{x}))}{\mathbf{P}e^h(\mathbf{x})} = 1 \quad (1.35)$$

soit:

$$\frac{\xi(\mathbf{P}e^h(\mathbf{x}))}{\mathbf{P}e^h(\mathbf{x})} = \frac{1}{\mathbf{P}e^h(\mathbf{x})} \leq 1 \quad (1.36)$$

Dans les deux cas, il résulte que

$$\alpha = \frac{h}{2 |\mathbf{a}(\mathbf{x})|_r} \xi(\mathbf{P}\mathbf{e}^h(\mathbf{x})) = \frac{m_h h^2 \xi(\mathbf{P}\mathbf{e}^h(\mathbf{x}))}{4\nu \mathbf{P}\mathbf{e}^h(\mathbf{x}))} \leq \frac{m_h h^2}{4\nu} \quad (1.37)$$

Maintenant, la stabilité de la formulation (1.24) s'écrit:

$$\mathbf{B}_{SUPG}(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) = \mathbf{B}(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) + \sum_e \int_{\Omega_e} \alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h) (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h) d\Omega_e \quad (1.38)$$

$$\mathbf{B}_{SUPG}(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) = \langle \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h \rangle + \langle \nabla \mathbf{v}^h, \nu \nabla \mathbf{v}^h \rangle + \langle \alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h), \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h \rangle - \sum_e \langle \alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h), \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h \rangle_e \quad (1.39)$$

En intégrant par partie le premier terme du membre droite et en utilisant $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$:

$$\mathbf{B}_{SUPG}(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) = 0 + \nu \|\nabla \mathbf{v}^h\|_0^2 + \|\alpha^{1/2}(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h)\|_0^2 - \sum_e \langle \alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h), \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}^h \rangle_e \quad (1.40)$$

$$\mathbf{B}_{SUPG}(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) \geq \nu \|\nabla \mathbf{v}^h\|_0^2 + \|\alpha^{1/2}(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h)\|_0^2 - \frac{1}{2} \|\alpha^{1/2}(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h)\|_0^2 - \frac{1}{2} \sum_e \|\alpha^{1/2} \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}^h\|_{0,e}^2 \quad (1.41)$$

A l'aide de (1.30) et (1.37)

$$\mathbf{B}_{SUPG}(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) \geq \frac{3\nu}{4} \|\nabla \mathbf{v}^h\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\alpha^{1/2}(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h)\|_0^2 \quad (1.42)$$

Récapitulons. Pour les éléments linéaires, pour tous $\alpha > C$, où C est une constante supérieure à zéro et pas trop petite, la formulation (1.24) est stable. Si on prend des valeurs trop petites de α on retombera sur la formulation de Galerkin standard et on perdra la stabilité. Si α est trop grand, on aura une formulation très diffusive. Pour définir la gamme des valeurs de α on se base sur un problème mono-dimensionnel sans terme source. Dans ce cas on constate que les relations (1.25-1.27) fournissent des valeurs optimales. On généralise alors ce résultat aux problèmes multi-dimensionnels en prenant la norme du vecteur vitesse définie par la relation (1.28). Pour des éléments d'ordre supérieur à 1, la borne supérieure de α est limitée par la stabilité de la formulation SUPG. Une théorie pour déterminer la valeur optimale du paramètre de stabilisation, dans le cas général, n'est pas encore connue. SUPG est une formulation basée sur le résidu. Donc, pour les régions où la résolution est bonne (maillages fins), quelque soit α , le résidu sera très petit.

Remarque 1: Les relation (1.25-1.30) servent également pour obtenir une estimation de l'erreur. Ceci est un peu fastidieux et on présentera ici uniquement le résultat (voir Franca et al., 1992):

$$\nu \|\nabla \mathbf{e}_h\|_0^2 + \|\alpha^{1/2}(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{e}_h)\|_0^2 \leq \sum_e h^{2k} |\mathbf{u}|_{k+1,e}^2 (\mathbf{H}(\mathbf{P}\mathbf{e} - 1) h \sup |a|_r + \mathbf{H}(1 - \mathbf{P}\mathbf{e}_e))_e$$

où $\mathbf{e}_h = \mathbf{u}_h - \mathbf{u}$. \mathbf{u} est la solution exacte et \mathbf{H} est la fonction de Heaviside.

L'estimation d'erreur dans L^2 est faite par Navert (1982). Pour $\mathbf{Pe} \gg 1$ (le cas dominé par la convection) on a:

$$\| \mathbf{e}_h \|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{k+1/2})$$

L'expérience numérique (voir Ibid et également Deconick et al, 1994) montre que si la solution est suffisamment lisse, l'erreur dans L^2 pourra être optimale (i.e. $\mathcal{O}(h^{k+1})$).

Pour $\mathbf{Pe} \ll 1$ (i.e. le cas dominé par la diffusion)

$$\| \mathbf{e}_h \|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{k+1})$$

Donc, la formulation SUPG est sûrement plus précise que le schéma de diffusion artificielle qui est précis à l'ordre k .

Remarque 2: Les termes sous le signe somme dans (1.24) comprennent le résidu de l'équation (1.11) pour chaque élément qui s'annulent si on remplace \mathbf{u}^h par \mathbf{u} la solution exacte du problème (1.11). Donc, cette formulation est consistante.

Remarque 3: Deconick et al.(1994) ont appliqué une formulation aux volumes finis à l'équation hyperbolique de $(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0)$ sur un maillage non-structuré en utilisant le schéma de Lax-Wendroff (Flecher, page 282, 1988). Ils ont conclu que la formulation SUPG pour cette équation coïncide (pour les éléments linéaires) en forme avec leur formulation. La relation (1.25) est l'équivalent du pas de temps du schéma instationnaire de Lax-Wendroff. Il faut noter que cette équivalence n'est plus valable quand le terme de diffusion est présent. On pourra également se référer aux travaux de Zienkiewicz et Wu (1991) pour l'équivalence entre la formulation Taylor-Galerkin et SUPG.

Remarque 4: SUPG n'est pas une "panacée" et dans le voisinage des discontinuités de timides oscillations (sur et sous-estimation) se manifestent (voir l'exemple 1.5.1). Contrairement à la formulation de Galerkin, ces oscillations ne se propagent pas dans tout le domaine et restent locales. Ces oscillations sont dues au fait que la formulation SUPG contrôle le terme convection uniquement suivant les lignes de courant. Hughes et al. (1986a) ont ajouté un terme auxiliaire de la forme suivante pour capturer les discontinuités.

$$\mathbf{w}^h = \mathbf{v}^h + \alpha_1 \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h + \alpha_2 \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \nabla \mathbf{v}^h \quad (1.43)$$

où

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \begin{cases} \frac{(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^h)}{|\nabla \mathbf{u}^h|^2} \nabla \mathbf{u}^h & \nabla \mathbf{u}^h \neq 0 \\ 0 & \nabla \mathbf{u}^h = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

Ce schéma est non-linéaire bien que le problème (1.11) ne le soit pas. Ce schéma serait très utile pour les écoulements compressibles comportant des ondes chocs.

1.4.4 Galerkin/Least-Squares (GLS)

Hughes et al (1989) ont noté que si l'on prend le résidu du problème (1.11), qu'on le minimise par la méthode des moindres carrés (Least-Squares) et qu'on l'ajoute à la formulation de Galerkin, on obtient la formulation stable suivante:

$$\mathbf{B}_{GLS}(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) = \mathbf{B}(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) + \sum_e \int_{\Omega_e} \alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h) \times (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{u}^h) d\Omega_e \quad (1.45)$$

$$\mathbf{L}_{GLS}(\mathbf{v}^h) = \mathbf{L}(\mathbf{v}^h) + \sum_e \int_{\Omega_e} \alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h)(\mathbf{f}) d\Omega_e \quad (1.46)$$

soit:

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}^h, \mathbf{u}^h) + \sum_e \int_{\Omega_e} \alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h)(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{u}^h) d\Omega_e = \mathbf{L}(\mathbf{v}^h) + \sum_e \int_{\Omega_e} \alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h - \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h)(\mathbf{f}) d\Omega_e \quad (1.47)$$

Remarque 1: Cette formulation est totalement consistante car la solution exacte \mathbf{u} satisfait la formulation (1.47). La forme matricielle et la définition explicite des termes sous le signe somme sont présentées à l'annexe A2.

Remarque 2: Pour les éléments linéaires ou pour $\mathbf{Pe}^h \gg 1$, $\nu \ll 1$, les termes diffusifs $(\nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h)$, $(\nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{u}^h)$ s'annulent ou sont négligeables et les formulations GLS et SUPG coïncident. Pourtant, la formulation GLS est plus rigoureuse mathématiquement que la méthode SUPG et son idée est plus claire.

Remarque 3: La stabilité de GLS s'écrit (Hughes et al., 1989).

$$\mathbf{B}_{GLS}(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) = \nu \|\nabla \mathbf{v}^h\|_0^2 + \|\alpha^{1/2} \mathcal{L}(\mathbf{v}^h)\|_0^2 \geq 0$$

Donc, l'estimation inverse de (1.30) n'est pas nécessaire pour prouver la stabilité de la formulation GLS. Cependant, les relations (1.25-1.30) peuvent servir pour établir l'estimation d'erreur. La convergence de GLS est du même ordre que SUPG (Hughes et al, 1989).

Remarque 4: Franca et al. (1992) ont proposé une autre version de GLS en changeant le signe du terme $\nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h$, dénommée la formulation "Minus". Cette formulation est très sensible à la variation de α . Des valeurs particulières de α sont nécessaires pour contrôler (borner) le terme $-\alpha(\nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h)(\nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h)$.

En effet, dans ce cas, les fonctions-test s'écrivent:

$$\mathbf{w}^h = \mathbf{v}^h + \alpha(\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h + \nabla \cdot \nu \nabla \mathbf{v}^h)$$

Le changement de signe a été étudié car cette formulation pour le problème de Stokes améliore la stabilité du schéma numérique (chapitre 2).

Remarque 5: Brezzi et al.(1992) (également Simo et al, 1995) ont appliqué la formulation de Galerkin en ajoutant les fonctions de bulle à l'intérieur des éléments. Ils ont conclu que cette formulation coïncide en forme avec la formulation SUPG et "minus". Les fonctions de bulles sont les polynômes qui s'annulent aux frontières de chaque élément. Elles sont non-nulles seulement à l'intérieur de chaque élément. En revanche, la formulation GLS n'est pas équivalente en forme avec la formulation Galerkin+les fonctions de bulle. On pourra se référer à la remarque 9 du paragraphe 2.3.2 pour une démonstration.

1.5 Exemples numériques

Dans ce paragraphe on étudie, à l'aide de deux exemples numériques, le comportement des formulations SUPG, GLS et la formulation "minus". Ces deux exemples sont :

1. La convection dans une direction non-parallèle au maillage.
2. La couche limite thermique.

Ces deux exemples sont également étudiés afin de valider les codes qui sont développés pour les équations de Navier-Stokes (chapitre 2).

1.5.1 Convection dans une direction non-parallèle au maillage

Le problème est défini sur la figure (1.2). L'écoulement est uni-directionnel avec une vitesse constante, $|\mathbf{a}| = 1$. Le vecteur vitesse fait un angle $\theta = 45^\circ$ avec le maillage. Le coefficient de diffusion ν est pris égal à 10^{-6} (soit $Pe = 10^6$). Cet écoulement est purement convectif. Une discontinuité existe à la frontière d'entrée, en $y = 0.2$, qui se propage dans le domaine. Physiquement on peut supposer que deux écoulements uniformes à température différente se mélangent. u indique ici la température. A la sortie la condition de Dirichlet, $u = 0$, est choisie pour créer une couche limite difficile à capturer. Le maillage choisi est uniforme et comprend 20×20 éléments bilinéaires Q1, ou 10×10 éléments biquadratiques Q2.

Les résultats numériques sont présentés sur les figures (1.3a) à (1.3e). On constate que la méthode de Galerkin est complètement instable (Fig. 1.3a) et la solution ne ressemble pas du tout à la solution exacte de la figure (1.3b). La solution obtenue par la méthode classique de diffusion artificielle est très lisse mais également très diffusive (Fig. 1.3c) en raison de la diffusion transversale définie par l'équation (1.10). Dans ce cas, les formulations GLS et "minus" avec des éléments Q1 donnent les mêmes résultats que SUPG car le terme diffusif est très petit (Fig 1.3d). Pour ce problème, la solution avec des éléments Q2 est plus lisse que la solution avec des éléments Q1 (Fig. 1.3e). Pour quantifier les résultats, on définit l'écart de la solution numérique à la solution exacte de la façon suivante:

$$\text{écart} = \sum_{i=1, j=1}^{n_x, n_y} \frac{|u(i, j) - u_{ex}(i, j)|}{n_x \times n_y} \%$$

où n_x et n_y sont les nombres des noeuds suivant les axes x et y respectivement. $u_{ex}(i, j)$ est la solution exacte, $u(i, j)$ la solution numérique. Le calcul effectué pour les formulations de diffusion artificielle, SUPG(Q1Q1) et SUPG(Q2Q2) montre les écarts de 16.0%, 3.0% et 4.7% respectivement. Le problème étudié étant linéaire, les systèmes d'équations sont calculés une fois par la méthode d'inversion directe frontale (Hood, 1976). Le temps de calcul et la taille de mémoire nécessaire pour les différentes formulations sont pratiquement les mêmes. Les éléments Q2 sont un peu plus coûteux. Une comparaison quantitative concernant le temps de calcul et la taille de mémoire sera présentée au chapitre 2 pour les équations de Navier-Stokes.

On constate que de timides oscillations persistent près des zones de forts gradients. Néanmoins, elles ne polluent pas toute la solution. Ces résultats sont en parfaite concordance qualitativement avec les résultats de Franca et al. (1992). Comme cela est mentionné au paragraphe 1.4.3 (éq.1.43) on peut éliminer ces faibles oscillations de la solution en ajoutant des fonctions-test auxiliaires (Hughes et al., 1986a). On n'a pas étudié cette formulation car, dans cette thèse, on s'est limité aux écoulements incompressibles sans discontinuité. Il faut cependant noter que dans certaines conditions (e.g. pour les équations de transport de la turbulence) les valeurs négatives ne sont pas physiquement permises. Par conséquent, les faibles

entre la station $x = 0.5$ et $x = 0.55$. Ces oscillations sont dues à la condition de Dirichlet imposé à la frontière de la sortie.

1.6 Récapitulatif et Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que la discrétisation centrée du terme de convection par la méthode des éléments finis classique n'est pas stable ou autrement dit n'est pas assez diffusif. L'un des remèdes à cette situation est de trouver un schéma plus diffusif que le schéma centré. Plusieurs formulations ont été proposées dans la littérature dont les formulations stables SUPG et GLS. Ces formulations ont des propriétés intéressantes:

1. Elles sont consistantes et relativement précises.
2. Elles sont multi-dimensionnelle par nature.
3. Ce sont des formulations conventionnelles d'éléments finis. Donc, elle peuvent profiter des avantages inhérents à la méthodes des éléments finis. Par exemple, leur extension aux maillages non-structurés est immédiate.
4. Leur version instationnaire (Hansbo, 1992) ont des propriétés similaires à la formulation caractéristique ou lagrangienne. L'extension aux problèmes avec des frontières mobiles est possible (Ibid).
5. Elles sont valables pour les écoulements compressibles et incompressibles (Hughes et al, 1986b, également Hauke et Hughes, 1994).

Ces propriétés nous a amené à choisir ces formulations pour étudier les problèmes de convection-diffusion et ultérieurement les équations de Navier-Stokes. Dans ce chapitre les comportements des formulations SUPG et GLS ont été étudiés à l'aide d'exemples classiques. Ces exemples ont également servi à valider nos codes de calcul.

Chapitre 2

Equations de Navier-Stokes

2.1 Introduction

Ce deuxième chapitre s'intéresse plus particulièrement à la simulation des équations de Navier-Stokes dans le cas incompressible et laminaire. On étudiera uniquement la formulation vitesse-pression. Les formulations fonction de courant et fonction de courant-vorticité ne seront pas traitées ici. La formulation fonction de courant souffre de plusieurs inconvénients: a) elle aboutit à une équation différentielle d'ordre 4 qui nécessite des éléments sophistiqués. b) elle nécessite un traitement à posteriori pour déterminer les champs de vitesse et de pression. Dans la formulation fonction de courant-vorticité, les conditions aux frontières pour la vorticité ne sont pas aisément imposables et cette formulation manque de généralité dans le cas 3-D.

Ce qui différencie les équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles et incompressibles est le fait qu'il n'y a pas d'équation explicite pour la pression dans le second cas. La pression est déterminée implicitement par la condition d'incompressibilité. Cette propriété a plusieurs inconvénients:

- La discrétisation du terme de pression doit respecter une condition de compatibilité appelée condition de B-B (Babuska,1973, Brezzi,1974), afin de préserver une solution stable pour la pression. Par exemple les éléments vitesse-pression du même ordre sont interdits.
- Les méthodes itératives et les schémas instationnaires purement explicites ne sont pas aisément applicables.
- Différents codes de calcul seront nécessaires pour des écoulements qui contiennent des régions compressibles et incompressibles.

Ces limitations ont motivé les chercheurs depuis une dizaine d'années à introduire des formulations qui passent outre la condition de B-B. Citons quelques titres d'article qui expliquent clairement les objectifs: "Incompressibility without tears", Zienkiewicz et Wu (1991), " An algorithm for all seasons", Zienkiewicz et al (1990) " A Unified formulation to compressible and incompressible flows", Hauke et Hughes

(1994).

Dans les paragraphes qui suivent, les difficultés (instabilités) rencontrées avec la méthode classique de Galerkin seront notées et les origines d'instabilité seront clarifiées. On commencera la démonstration par la formulation de Galerkin des équations de Stokes. On étudiera le comportement du terme pression. Ensuite, la méthode de Galerkin (formulation mixte et méthode de pénalisation) sera appliquée aux équations de Navier-Stokes, les conditions aux frontières "appropriées" seront expliquées, et finalement les instabilités dues aux termes convectifs seront rappelées. Puis, on présentera différentes formulations stables d'éléments finis telle que la formulation SUPG et la formulation GLS (Galerkin/Least-squares).

Dans la dernière partie de ce chapitre une comparaison entre différentes formulations sera faite en étudiant des exemples numériques (voir la conclusion pour le résumé de cette comparaison).

2.2 La méthode de Galerkin

2.2.1 Le problème de Stokes

Considérons les équations de quantité de mouvement et la condition d'incompressibilité suivantes pour un écoulement assez lent de sorte que l'on puisse négliger les termes convectifs.

$$-2\mu\nabla\cdot\epsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \Omega \subset \mathfrak{R}^{n_{sd}} \quad (2.1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \Omega \subset \mathfrak{R}^{n_{sd}} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \Gamma_g \quad (2.3)$$

$$\sigma\mathbf{n} = \mathbf{h} \quad \Gamma_h \quad (2.4)$$

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) \quad (2.5)$$

$$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) \quad (2.6)$$

où Ω est un domaine borné de $\mathfrak{R}^{n_{sd}}$ ($n_{sd} \leq 3$) de frontière Γ . \mathfrak{R} est le domaine des nombres réels et n_{sd} le nombre de dimension de l'espace. \mathbf{u} est le vecteur vitesse ($\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}_i$, où $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, sont les vecteurs de base), p la pression, μ la

viscosité dynamique, et \mathbf{f} les forces massiques à distance. $\epsilon(\mathbf{u})$ est le tenseur taux de déformation, $\nabla \mathbf{u} = e_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} e_j$ et $\nabla \mathbf{u}^T = e_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} e_j$. σ est le tenseur des contraintes. $\Gamma_g \cup \Gamma_h = \Gamma$, pour $\Gamma_h = \emptyset$, on pose $\int \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$, pour satisfaire la conservation globale de la masse. \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à Γ . \mathbf{I} est la matrice d'identité.

Supposons que \mathcal{E} soit une discrétisation d'éléments finis de Ω dans des sous-domaines Ω^e , $e = 1, 2, \dots, n_{el}$, où n_{el} est le nombre des éléments.

Pour la variable vitesse on définit les espaces de fonctions suivants :

$$\mathbf{S}_u^h = \{\mathbf{u}^h \mid \mathbf{u}^h \in (\mathbf{H}^{1h})^{n_{sd}}, \mathbf{u}^h = \mathbf{g}^h \text{ sur } \Gamma_g\},$$

$$\mathbf{V}_v^h = \{\mathbf{v}^h \mid \mathbf{v}^h \in (\mathbf{H}^{1h})^{n_{sd}}, \mathbf{v}^h = 0 \text{ sur } \Gamma_g\}$$

où

$$\mathbf{H}^{1h} = \{\phi^h \mid \phi^h \in Q^k, \forall \Omega^e \in \mathcal{E}\}$$

$\mathbf{H}^{1h} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ dénote l'espace d'éléments finis de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. $\mathbf{H}^1(\Omega)$ est l'espace de Hilbert dans lequel les fonctions et leurs dérivées premières sont de carrée sommable. \mathbf{S}_u^h est l'espace de fonctions de forme, et \mathbf{V}_v^h est l'espace de fonctions-test. Les fonctions de base ϕ^h sont définies continues par morceaux (C^0) dans \mathcal{E} . Q^k représente les polynômes de degré k , $k \geq 1$.

Pour la pression on définit également les espaces de fonctions-test et de forme ci-dessous :

$$\mathbf{S}_p^h = \mathbf{V}_q^h = \{q^h \mid q^h \in L^2_0(\Omega)\}$$

où

$$L^2_0(\Omega) = \{\psi^h \mid \psi^h \in Q^l, \forall \Omega^e \in \mathcal{E}\}$$

L^2_0 est l'espace des fonctions de carrée sommable. Les fonctions de base ψ^h sont définies continues (C^0) ou discontinues par morceaux (C^{-1}) dans \mathcal{E} . Q^l représente les polynômes de degré $k > l \geq 0$.

La raison pour laquelle les espaces de fonctions de vitesse et de pression diffèrent, sera clarifiée plus loin. De toute façon, la pression apparaît dans les équations (2.1) par une dérivée d'ordre inférieure à celle de la vitesse, donc l'espace des fonctions-test de pression peut être plus large (fonctions de base continues ou discontinues).

La formulation classique de Galerkin consiste à trouver $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}_u^h$, $p^h \in \mathbf{S}_p^h$ tel que:

$$\mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle \quad \forall \mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_v^h \times \mathbf{V}_q^h \quad (2.7)$$

$$\mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \langle \epsilon(\mathbf{v}), 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle \quad (2.8)$$

$$\mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} \quad (2.9)$$

Selon la méthode des résidus pondérés la formulation (2.8-2.9) est obtenue de la manière suivante:

Les équations de quantité de mouvement sont multipliées par les fonctions-test \mathbf{v} . Pour élargir l'espace des fonctions de forme et des fonctions-test de vitesse, une intégration par parties (théorème de Gauss) du terme de diffusion est effectuée. Traditionnellement le terme de pression est également intégré. Ceci non-seulement élargit l'espace des fonctions de forme de pression, mais aussi rend le système d'équations matricielle symétrique. On y reviendra plus loin. L'intégration par partie s'effectue de la façon suivante:

$$- \langle \mathbf{v}, 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}) \rangle + \langle p, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle = \langle \epsilon(\mathbf{v}), 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle - \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} \quad (2.10)$$

où \mathbf{h} est défini en (2.4).

Grâce à cette procédure, les dérivées des équations (2.1) sont affaiblies (e.g. $\mathbf{v} \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \rightarrow \nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{u}$). Ceci permet d'élargir l'espace des fonctions de base de vitesse-pression. Pour les fonctions de base, continues par morceaux pour la vitesse et continues ou discontinues par morceaux, pour la pression, l'intégration reste faisable.

De manière équivalente l'équation de continuité est multipliée par les fonctions-test $q \in \mathbf{V}_q^h$. Comme cela est mentionné dans l'introduction de ce chapitre, la pression est une variable implicite qui s'ajuste pour que la continuité soit satisfaite. Du point de vue de l'analyse variationnelle, on peut démontrer que la pression est un multiplicateur de Lagrange qui se manifeste pour satisfaire la condition de continuité. En effet la minimisation de la fonctionnelle suivante aboutira aux équations de Stokes (2.1-2.2), (voir e.g. Oden et Carey 1983):

$$I(\mathbf{u}, \beta) = \langle \epsilon(\mathbf{u}), 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) \rangle + \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, \beta \rangle$$

pour $p = -\beta$, où β est le multiplicateur de Lagrange.

La forme matricielle de la formulation (2.8-2.9) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_g \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

où \mathbf{K} provient du terme diffusion, \mathbf{C} du terme pression, \mathbf{C}^T de l'équation de continuité, \mathbf{F}_g des conditions aux frontières, et \mathbf{F} du terme source et des conditions aux frontières. \mathbf{U} et \mathbf{P} identifient respectivement les valeurs de vitesse et pression aux noeuds de discrétisation (maillage). Pour la présentation explicite de chaque terme, on pourra se référer à l'annexe A3.

On note que, dans le cas général, le système d'équations (2.11) n'est pas défini positif en raison des termes diagonaux nuls qui proviennent de l'équation d'incompressibilité. Taylor et Hood (1973) ont démontré (à l'aide d'une expérience numérique) que l'implantation de fonctions d'interpolations (fonctions de base) vitesse-pression du même ordre donne une solution de pression qui oscille, bien que la solution de vitesse reste stable. Sani et al. (1981) ont étudié ce problème et ont conclu que l'instabilité est due à la singularité de la forme matricielle (2.11) qui se produit pour certaines combinaisons des éléments vitesse-pression. Pour obtenir une solution stable, les fonctions d'interpolation de vitesse et de pression doivent satisfaire la condition de compatibilité suivante, appelée B-B (Babuska, 1971, Brezzi, 1974):

$$\sup \frac{\langle \nabla \cdot \mathbf{v}, q \rangle}{\|\mathbf{v}\|_0} \geq c \|q\|_0 \quad \forall \mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_v^h \times \mathbf{V}_q^h \quad (2.12)$$

où c est une constante positive. Pourtant la vérification explicite de (2.12) pour différents type d'éléments vitesse-pression est très fastidieuse. De nombreux auteurs ont proposé des méthodes ou des versions plus simples de la condition (2.12) (voir Zienkiewicz et al, 1986, et Dhatt et Hubert, 1986).

A notre tour, nous suivrons dans le reste de ce paragraphe et le paragraphe suivant le travail de Sani et al (1981) afin d'essayer de clarifier la cause d'instabilité. On utilisera des exemples simples. Pour les cas généraux, on pourra se référer à Sani et al (1981).

Considérons le maillage défini sur la figure 2.1 qui comprend des éléments $Q1P0$ (figure 2.3a). Pour ce type d'élément, les fonctions d'interpolation de vitesse sont linéaires (bilinéaire en 2-D) et la pression est considérée constante dans chaque élément (les fonctions de base sont $\psi^h = 1$, ou $q = 1$).

Les n_{el} équations de continuité s'écrivent:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle_e = \int_e \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega_e = 0 \quad e = 1, 2, \dots, n_{el} \quad (2.13)$$

L'addition de ces n_{el} équations de continuité donne la conservation globale de la masse:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

En utilisant le théorème de Gauss il résulte de (2.14):

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^h d\Gamma = 0 \quad (2.15)$$

Pour la configuration de la figure 2.1 on obtient:

$$(u_4 - u_1)h_1 + (u_8 - u_5)(h_1 + h_2) + (u_{12} - u_9)h_2 + (v_9 - v_1)l_1 + (v_{10} - v_2)(l_1 + l_2) + (v_{11} - v_3)(l_2 + l_3) + (v_{12} - v_4)l_3 = 0 \quad (2.16)$$

La relation (2.16) est en effet la conservation globale de la masse imposée par les composantes normales de vitesse aux frontières.

On conclut:

- Si les conditions aux frontières pour la vitesse ne sont pas de type Dirichlet, (en d'autre terme, si la conservation globale de la masse n'est pas imposée par les conditions aux frontières, $\Gamma_h \neq \emptyset$) l'équation (2.16) est nécessaire. Elle garantit la conservation globale de la masse.
- Si les conditions aux frontières pour la vitesse sont toutes du type Dirichlet (elles satisfont évidemment la conservation globale de la masse) alors, l'équation (2.16) qui tient compte uniquement des noeuds aux frontières, donnera un pivot nul. Le système d'équations aura une valeur propre nulle. Etant donné que nous avons autant équations de continuité que de noeuds de pression, il faut spécifier une pression pour pouvoir éliminer le pivot nul. La valeur de cette pression est arbitraire et fixera le niveau de pression hydrostatique dans l'écoulement (voir plus loin pour une explication complémentaire). Il faut noter qu'avec un arrangement des noeuds, on peut transférer le pivot nul sur la dernière équation. L'erreur de troncature ou la solution approchée de la conservation globale de la masse produirait (selon la machine) un pivot non-nul, mais très petit, qui fixera automatiquement la pression arbitraire.

Remarque 1: Pour le premier cas, le niveau de pression peut être fixé par la conditions aux frontières de Neumann (2.4). Ceci sera étudié plus loin.

Remarque 2: Pour l'équivalence en volumes finis (schéma SIMPLE) on pourra se référer à Patankar (1980).

2.2.2 Les pressions falsifiées

Maintenant une question se pose: Existe-t-il, à l'exception du cas de la pression hydrostatique, d'autres cas pour lesquels les n_e équations de continuité peut être ajoutées linéairement et dont le résultat impose une contrainte sur les noeuds aux frontières? Considérons la configuration présentée sur la figure 2.2 et sans perdre de généralité posons provisoirement $u_j = v_j = 0, j = 1, 2, \dots, 8$.

Les quatre équations de continuité pour les quatre éléments a, b, c et d s'écrivent:

$$\mathbf{C}^T \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On constate qu'il existe deux vecteurs indépendants \mathbf{P} tel que $\mathbf{C}\mathbf{P} = \mathbf{0}$ où $\mathbf{P}^T \mathbf{C}^T = \mathbf{0}$. Ces deux vecteurs sont:

$$\mathbf{P}_H = \alpha(1, 1, 1, 1)^T$$

et

$$\mathbf{P}_F = \beta(1, -1, 1, -1)^T$$

où α et β sont des constantes arbitraires. En multipliant ces vecteurs par les équations de continuité $\mathbf{C}^T \mathbf{U} = 0$ donne $\mathbf{P}^T \mathbf{C}^T \mathbf{U} = 0$. En conséquence, les vitesses intérieures u_0 et v_0 seront éliminées et on aura une équation qui relie les vitesses aux frontières.

Maintenant en prenant en compte les vitesses aux frontières, on obtient respectivement, les deux équations suivantes:

$$\mathbf{P}_H^T \mathbf{C}^T \mathbf{U} = (u_2 + 2u_1 + u_8) - (u_4 + 2u_5 + u_6) + (v_2 + 2v_3 + v_4) - (v_8 + 2v_7 + v_6) \quad (2.17)$$

ce qui est en fait la conservation globale de la masse dictée par les composantes normales de vitesse aux frontières et

$$\mathbf{P}_F^T \mathbf{C}^T \mathbf{U} = (u_2 - 2u_3 + u_4) - (u_8 - 2u_7 + u_6) + (v_8 - 2v_1 + v_2) - (v_4 - 2v_5 + v_6) \quad (2.18)$$

ce qui impose une autre contrainte aux frontières entre les composantes tangentielles.

Maintenant on conclut :

- Si les conditions aux frontières n'imposent pas une conservation de la masse à priori (e.g. écoulement non-confiné, $\Gamma_h = \emptyset$) les deux équations implicites de conservation de la masse (eq. 2.17 et 2.18) imposées par la discrétisation sont nécessaires. Il n'existe pas de valeur propre nulle ou une solution falsifiée de pression.
- Si les conditions aux frontières satisfont l'une des équations implicites (eq. 2.17 ou 2.18) et ne violent pas l'autre, le système est consistant mais sur-spécifié. Il existe une équation de continuité surabondante. Selon laquelle des équations est satisfaite par les conditions aux frontières il existe, soit une pression hydrostatique, soit une pression falsifiée. Dans chaque cas, il existe une valeur propre nulle qui peut être supprimée en éliminant l'équation correspondante. Si la pression est falsifiée, la pression oscillera et devra être filtrée (Lee et al 1979).
- Si les conditions aux frontières satisfont en même temps les deux conditions implicites (eqs 2.17 et 2.18), le système est consistant mais sur-spécifié. Dans ce cas, il existe deux équations de continuité surabondantes et donc deux valeurs propres nulles. Pour résoudre le système d'équations, deux pressions doivent être spécifiées pour éliminer les singularités. La solution de pression oscillera et doit être filtrée (Ibid).
- Finalement, si les conditions aux frontières violent l'une des équations (eqs. 2.17 ou 2.18), le système n'est pas consistant et aucune solution n'existe.

Pour les éléments irréguliers non-rectangulaires l'analyse ci-dessus est également valable (Sani et al., 1981). Cette analyse a été démontrée pour les éléments $Q1P0$. La singularité ou le mal-conditionnement de matrice des coefficients est à l'origine d'instabilité d'autres combinaisons des éléments vitesse-pression, y compris l'interpolation du même ordre.

La limitation ci-dessus a motivée les chercheurs à implanter plusieurs combinaisons des éléments isoparamétriques rectangulaires ou triangulaires vitesse-pression pour obtenir les solutions stables de vitesse et pression. Certaines de ces combinaisons sont largement utilisées et expérimentées dans la littérature et les points suivants sont plus ou moins acceptés par la plupart des chercheurs.

- Les éléments $Q1P0$ (figure 2.3a) contiennent une pression falsifiée qui doit être filtrée. La continuité est satisfaite localement dans chaque élément ainsi que globalement dans le domaine. La méthode de pénalisation (voir plus loin) est exploitable. Cette combinaison est limitée aux côtés rectilignes. Elle paraît être la combinaison la plus économique.
- Les éléments $Q2SQ1$ (figure 2.3b) semble être plus précis que les éléments $Q1P0$. Huyakorn et al. (1979) ont démontré que cette combinaison pourrait provoquer des oscillations de la solution de pression dues à l'insuffisance des noeuds de vitesse. La continuité est satisfaite dans le sens faible (Résidu pondéré) dans chaque élément.
- Les éléments $Q2Q1$ (figure 2.3c) sont la combinaison enrichie du cas précédent. Ils satisfont la condition de Babuska-Brezzi. Ils sont plus précis que les éléments $Q2SQ1$. Leur défaut est que la continuité dans chaque élément n'est pas très précisément satisfaite. Ils sont sensiblement plus coûteux que les éléments $Q2SQ1$.

- Les éléments $Q2Q1D$ (figure 2.3d) sont une des combinaisons préférées dans la littérature. La méthode de pénalisation est exploitable. Cependant, une pression falsifiée existe, elle doit être filtrée.
- Les éléments $Q2P1$ (figure 2.3e) sont une autre combinaison préférée dans la littérature. Ils satisfont la condition de Babuska-Brezzi. La méthode de pénalisation est également exploitable.

Remarque: Les performances des versions 3D des éléments ci-dessus sont peu connues. Pour les éléments triangulaires on pourra se référer à Pironneau (1989) et Cuvelier et al. (1988).

2.2.3 Les équations de Navier-Stokes

Considérons les équations de Navier-Stokes suivantes:

$$\rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \Omega \subset \mathcal{R}^{n_{sd}} \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Omega \subset \mathcal{R}^{n_{sd}} \quad (2.20)$$

où ρ est la masse volumique. Les conditions aux frontières et les autres notations sont définies au paragraphe 2.2.1.

La formulation de Galerkin des équations de Navier-Stokes consiste à trouver $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}_u^h$, $p^h \in \mathbf{S}_p^h$ tel que:

$$\mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle \quad \forall \mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_v^h \times \mathbf{V}_q^h \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle &= \langle \rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ &+ \langle 2\mu \epsilon(\mathbf{u}), \epsilon(\mathbf{v}) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} \quad (2.23)$$

où le terme convectif est également multiplié par les fonctions-test \mathbf{v} . La forme matricielle de la formulation (2.22-2.23) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{N}(\mathbf{U}) & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_g \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

où $\mathbf{N}(\mathbf{U})$ provient du terme convectif. La forme matricielle est non-symétrique et non-linéaire. Les autres matrices sont définies aux paragraphes 2.2.1. Pour la présentation explicite de chaque terme, on pourra se référer à l'annexe A3.

2.2.4 Quelques points sur les conditions aux frontières

Le sujet des conditions aux frontières n'est pas encore clair. Il existe différentes façons de les imposer qui varient selon la formulation et l'auteur. En ce qui concerne les conditions à l'entrée, aux parois solides (stationnaire ou mobile) et sur les axes de symétrie, les désaccords ne sont pas très importants ou significatifs. A l'entrée, les profils sont connus (analytiquement ou expérimentalement), aux parois solides les conditions de non-glissement sont imposées et sur les axes de symétries $u_n = 0$, $\partial u_s / \partial n = 0$ où n et s sont respectivement les directions normale et tangentielle à la frontière. Les conditions aux frontières pour la pression et les conditions à la sortie pour la vitesse posent plus de problèmes. Dans les paragraphes suivants on va essayer d'expliquer brièvement les points essentiels.

2.2.4.1 Conditions aux frontières pour la pression

Les équations de Navier-Stokes dans la forme continue n'impose aucune condition aux limites de Dirichlet sur la pression. On a vu au paragraphe 2.2.1 que les équations discrètes consistantes pour un écoulement confiné ($\Gamma_h = \emptyset$, $\int \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$) contiennent une valeur propre nulle qui peut être éliminée en rejetant une équation de continuité. Cette équation est en fait l'équation (en ajoutant linéairement toutes les équations discrètes de continuité) qui satisfait la conservation globale de la masse. Pour éliminer cette équation, il faut fixer une pression (un noeud) qui prescrira la pression hydrostatique. Pour le cas où d'autres valeurs propres nulles de pression (pression falsifiée) existent, on pourra se référer au paragraphe 2.2.2. Le cas des écoulements non-confinés ($\Gamma_h \neq \emptyset$) sera traité au paragraphe suivant.

2.2.4.2 Conditions aux frontières à la sortie

Les frontières de sortie sont souvent la conséquence de troncature du domaine à un endroit où l'on espère que, soit la solution ne change plus, soit ces effets sur la solution dans les régions loin de la sortie ne sont pas significatif. Dans le contexte des éléments finis, deux types de conditions aux frontières sont la conséquence naturelle de la formulation faible. La première condition a déjà été obtenue au paragraphe 2.2.1, éq. (2.10), et elle est rappelée ci-dessous:

$$\langle \mathbf{v}, \sigma \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_h} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_{\Gamma_h} \quad (2.25)$$

où

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2\mu\epsilon(\mathbf{u}) \quad (2.26)$$

En 2-D et pour des coordonnées cartésiennes, les intégrales sur les frontières (2.25) pour les deux équations de quantité de mouvement s'écrivent:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \{ (-p + \sigma_{xx})n_x + \sigma_{xy}n_y \} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \{ (-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x})n_x + \mu (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})n_y \} d\Gamma \quad (2.27)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \{ \sigma_{xy}n_x + (-p + \sigma_{yy})n_y \} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \{ \mu (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})n_x + (-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y})n_y \} d\Gamma \quad (2.28)$$

La deuxième condition s'obtient de la façon suivante. D'abord, on simplifie le terme $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})$ de l'équation (2.1) en utilisant l'équation de continuité:

$$\begin{aligned} 2\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}) &= \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \\ &= e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (e_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} e_k + e_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} e_k) \\ &= u_{k,ii} e_k + u_{j,jk} e_k = \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ensuite, on applique la formulation faible (Galerkin) aux termes de diffusion et de pression et on obtient l'équation sur les frontières suivante:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{Tn} \rangle_{\Gamma_h} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle_{\Gamma_h} \quad (2.30)$$

où

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu \nabla \mathbf{u} \quad (2.31)$$

En 2-D et pour des coordonnées cartésiennes, les intégrales sur les frontières (2.30) pour les deux équations de quantité de mouvement s'écrivent:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \{ (-p + \mu \frac{\partial u}{\partial x})n_x + \mu \frac{\partial u}{\partial y} n_y \} d\Gamma \quad (2.32)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \{ \mu \frac{\partial v}{\partial x} n_x + (-p + \mu \frac{\partial v}{\partial y})n_y \} d\Gamma \quad (2.33)$$

La première condition (éq. 2.25) est très utilisée en mécanique du solide dans la mesure où elle indique le vecteur contrainte sur les frontières. En mécanique des fluides les valeurs de \mathbf{h} ne sont pas connues a priori à la sortie, dans la plupart des problèmes réels. La pratique traditionnelle est de supposer que le fluide sort sans contrainte (e.g. $\mathbf{h} = 0$). Pour un écoulement où $\mu \ll 1$ les termes diffusifs sont négligeables et les conditions aux frontières (2.25) et (2.30) traduiront l'imposition d'une pression nulle à la sortie dans le sens faible (moyen). Il faut noter que pour un écoulement établi, la contrainte tangentielle n'est pas nulle ($\sigma_{xy} \neq 0$). Donc, la relation (2.25), avec $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, n'est pas consistante, si l'écoulement est établi à la sortie. La relation (2.30) qui imposera $\partial v / \partial x = 0$ sera plus utile. Une autre

solution consiste à imposer $v = 0$ à la frontière de sortie. Cette méthode génère parfois un gradient fort à la sortie qui peut entraîner des oscillations. Dans le contexte des volumes finis ou des différences finies, la situation est différente. Par exemple le schéma SIMPLE de Patankar (1980) traite les conditions à la frontière de la façon suivante: Etant donné que les équations sont découplées, la continuité n'est pas satisfaite à chaque itération. Donc, à chaque itération, il faut corriger les vitesses à la sortie pour satisfaire la conservation de la masse. Par conséquent à la convergence, on pose un problème Dirichlet. La pression est connue à une constante près (Ibid). En ce qui concerne la vitesse, on impose $\partial u / \partial n = 0$ et $\partial v / \partial n = 0$. Ces conditions aux frontières sont complètement consistantes pour un écoulement établi.

Récemment, suite au travail de Pironneau (1986), Conca et al. (1995) ont présenté une nouvelle formulation des équations de Navier-Stokes qui permet d'imposer la pression ou sa dérivée normale et la vorticité sur différentes parties de la frontière. L'imposition de la pression aux frontières est très importante, pour par exemple, le cas d'un embranchement de canalisation. Pour pouvoir contrôler la quantité du fluide qui s'écoule dans chaque branche, il faut imposer une pression différente à la sortie de chaque tuyère. Conca et al. (1995) ont expérimenté leur formulation avec succès en étudiant des exemples numériques.

2.2.5 La méthode de pénalisation

Nous avons vu au paragraphe 2.2.2 que le terme de pression impose une difficulté du point de vue du choix des éléments de vitesse-pression et de la satisfaction de la condition de continuité. Une technique qui élimine provisoirement ce problème est la méthode de pénalisation. Dans cette méthode, on fait l'hypothèse suivante:

$$\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} = -p \quad \lambda \gg 1 \quad (2.34)$$

où λ est une constante suffisamment grande.

La formulation de Galerkin des équations de Navier-Stokes (2.19-2.20)   l'aide d'une méthode de pénalisation consiste à trouver $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}_u^h$, $p^h \in \mathbf{S}_p^h$ tel que:

$$\mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle \quad \forall \mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_v^h \times \mathbf{V}_q^h \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle &= \langle \rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ &+ \langle 2\mu \epsilon(\mathbf{u}), \epsilon(\mathbf{v}) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle \\ &- \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle - 1/\lambda \langle p, q \rangle \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} \quad (2.37)$$

Pour $\lambda \rightarrow \infty$ la solution de (\mathbf{u}, p) convergera vers la solution des équations (2.22-2.23), (Temam, 1979). En pratique λ peut être prescrit à l'aide de la relation suivante (Hughes et al, 1979),

$$\lambda = c(\text{Max}\{\nu, \nu Re\}) \quad (2.38)$$

où ν est la viscosité cinématique et $Re = \frac{v_m d}{\nu}$ le nombre de Reynolds; v_m et d sont respectivement la vitesse et la longueur caractéristique. c est une constante qui dépend de la précision de la machine.

Grâce à la relation (2.34) les termes nuls des équations (2.24) sont remplacés par $-1/\lambda \langle p, q \rangle$. Pour bénéficier d'avantage de la méthode de pénalisation, la technique suivante est utilisée. Pour la pression, des éléments discontinus sont choisis (e.g. les éléments $Q1P0$, voir fig. 2.3a). Ceci permet d'éliminer les noeuds de pression (remplacée en fonction de la vitesse à l'aide de la relation 2.34) de chaque éléments. Le terme de pression est donc éliminé du système des équations avant l'assemblage des équations globales. Par conséquent, le nombre d'inconnus, est réduit et la résolution est moins coûteuse. Les éléments $Q1P0$ et $Q2Q1D$ sont parmi les combinaisons les plus utilisés dans la littérature. La condition de compatibilité de Babuska-Brezzi (2.12) doit être vérifiée pour les combinaisons des éléments vitesse-pression afin d'obtenir une solution de pression lisse. Cependant, les éléments $Q1P0$ et $Q2Q1D$ ne vérifient pas cette condition. Dhatt et Hubert (1986) ont proposé et testé plusieurs éléments vitesse-pression 2D et 3D qui vérifient la condition de Babuska-Brezzi et qui sont exploitables avec une méthode de pénalisation. La méthode (2.35-2.37) est appelée "formulation consistante" pour la différencier d'une autre technique d'application de la méthode de pénalisation. Dans la deuxième méthode, le terme de pression dans l'équation (2.19) est remplacé par l'équation (2.34) et la formulation de Galerkin est appliquée (Zienkiewicz, 1979, Hughes et al, 1979). Cette formulation consiste à trouver $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}_u^h$, $p^h \in \mathbf{S}_p^h$ tel que:

$$\mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle \quad \forall \mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_v^h \times \mathbf{V}_q^h \quad (2.39)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q) = \langle \rho(\nabla \mathbf{u}).\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad (2.40)$$

$$+ \langle 2\mu \epsilon(\mathbf{u}), \epsilon(\mathbf{v}) \rangle + \lambda \langle \nabla.\mathbf{v}, \nabla.\mathbf{u} \rangle$$

$$\mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} \quad (2.41)$$

La forme matricielle s'écrit:

$$[\mathbf{K} + \mathbf{N}(\mathbf{U}) + \lambda \mathbf{G}] (\mathbf{U}) = [\mathbf{F}] \quad (2.42)$$

Pour $\lambda \rightarrow \infty$ on aura $[\mathbf{G}]\mathbf{U} = 0$. On constate, donc, que $\mathbf{U} \rightarrow 0$ sauf si \mathbf{G} est singulière. La singularité de \mathbf{G} peut être créée par une intégration sélective de Gauss (e.g. 1 point de Gauss au lieu de 2 pour les éléments bilinéaires). On peut se référer à Zienkiewicz (1979) et Hughes et al. (1979) pour en savoir plus. Engelman et al. (1982) ont démontré que l'intégration réduite équivaut à utiliser les éléments $Q2Q1D$ et $Q1P0$. Les points d'intégration de Gauss coïncident avec les points de pression dans ces éléments. Ils ont également démontré que cette équivalence n'est valable que pour les éléments rectangulaires. Pour les éléments non-rectangulaires la formulation consistante (2.36) est en général plus précise que la formulation (2.40).

La pression est calculée à partir du champ de vitesse, grâce à la relation (2.34). Ce calcul n'est pas coûteux et peut être considéré comme un traitement. Malheureusement dans le cas général la solution de pression oscille, car le calcul de la pression dépend des erreurs de calcul de la continuité dans chaque élément. La solution de pression doit être filtrée (Lee et al., 1979). Une autre technique, un peu plus coûteuse, consiste à dériver une équation de Poisson pour la pression. La formulation de Galerkin de cette équation s'écrit (Sohn et Heinrich, 1990):

$$\langle \nabla w, \nabla p \rangle = - \langle \nabla w, \rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla w, \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle \quad \forall w \in \mathbf{V}_q^h \quad (2.43)$$

Les dérivées premières de \mathbf{u} sont discontinues aux noeuds, pour les fonctions d'interpolation continues par morceaux. Donc pour pouvoir estimer (calculer) les dérivées secondes (e.g. les termes $\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}$), il faut lisser les valeurs des dérivées premières aux noeuds par la méthode des moindres carrés suivante (voir le paragraphe 2.5 pour explication supplémentaire):

$$\mathbf{J} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 d\Omega \quad (2.44)$$

Les inconvénients des méthodes de pénalisation sont essentiellement liées à la difficulté de les utiliser avec les méthodes instationnaires explicites et les méthodes de résolution itérative à cause du paramètre λ . De plus, pour les problèmes avec des termes sources importants (e.g. convection naturelle) λ doit être très grand, ce qui entraîne la singularité du système d'équations. En tout cas, pour les problèmes qui nous concernent dans cette thèse, et pour les méthodes utilisées (résolution directe, schéma stationnaire), la méthode de pénalisation peut être très efficace.

2.2.6 L'instabilité due aux termes convectifs

Mise à part le terme de pression, comme on l'a vu au chapitre 1, une deuxième source d'instabilité existe dans le traitement des équations de Navier-Stokes. Elle est liée au caractère de convection-diffusion des équations. En effet, lorsque le terme diffusif est très petit devant le terme convectif, la solution peut devenir instable. Ce problème a été abordé au chapitre 1 où une famille de formulations stables pour les équations de convection-diffusion telles que les formulations SUPG et GLS a été présentée. Dans les paragraphes suivants on étend ces formulations aux équations de Navier-Stokes.

2.3 Les formulations stables

2.3.1 La formulation SUPG

Nous avons vu au paragraphe 1.4.3 que les équations de convection-diffusion peuvent être stabilisées, sans dégradation de précision, en modifiant les fonctions-test par leurs dérivées. L'extension de cette formulation appelée la formulation "Streamline Upwind Petrov-Galerkin" (SUPG) consiste à trouver $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}_u^h$, $p^h \in \mathbf{S}_p^h$ tel que (Brooks et Hughes, 1980 et 1982):

$$\mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle \quad \forall \mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_v^h \times \mathbf{V}_q^h \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle &= \langle \rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle 2\mu \epsilon(\mathbf{u}), \epsilon(\mathbf{v}) \rangle - \\ &\langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle + \\ &\sum_e \langle \rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{Re}^h(\mathbf{x}))((\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}) \rangle_e$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle &= \langle \rho \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} + \sum_e \langle \rho \mathbf{f}, \\ &\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{Re}^h(\mathbf{x}))((\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}) \rangle_e \end{aligned} \quad (2.47)$$

où

$$\alpha = \frac{h}{2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_r} \xi(\mathbf{Re}^h(\mathbf{x})) \quad (2.48)$$

$$\mathbf{Re}^h(\mathbf{x}) = \frac{m_h |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_r h}{2\nu} \quad (2.49)$$

$$\xi(\mathbf{Re}^h(\mathbf{x})) = \begin{cases} \mathbf{Re}^h(\mathbf{x}) & 0 \leq \mathbf{Re}^h(\mathbf{x}) < 1 \\ 1 & \mathbf{Re}^h(\mathbf{x}) \geq 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x})|_r = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n_{sd}} |u_i(\mathbf{x})|^r \right)^{\frac{1}{r}} & 1 \leq r < \infty \\ \max_{i=1, n_{sd}} |u_i(\mathbf{x})| & r = \infty \end{cases} \quad (2.51)$$

$$m_h = \min\{1/3, 2C_h\} \quad (2.52)$$

$$C_h \left(\sum_e h^2 \|\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}^h\|_{0,e}^2 \right) \leq \|\nabla \mathbf{v}^h\|_0^2 \quad \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h \quad (2.53)$$

Remarque 1: Pour $p = q = 0$ la formulation (2.46) coïncide avec la formulation présentée au paragraphe 1.4.3 pour les équations de convection-diffusion. Pour les éléments $Q1P0$, le terme de pression et le terme de diffusion sous le signe somme s'annulent et la stabilisation s'obtient par le terme $\alpha \langle \rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \rangle$. Ce produit stabilise (contrôle) le terme de convection suivant les lignes de courant.

Remarque 2: Pour les éléments d'ordre supérieur, l'extension est immédiate du point de vue de l'implantation. Le terme de diffusion sous le signe somme est souvent négligeable pour $Re \gg 1$. Mais, le terme $\alpha \langle \nabla p, (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \rangle$ est en général difficile à borner (Johnson et Saranen, 1986) et pose certaine question mathématique. C'est la raison pour laquelle cette formulation est souvent utilisée avec des éléments $Q1P0$. La version simplifiée de la formulation SUPG consiste à éliminer le terme de pression sous le signe somme. Cette formulation nommée SU (streamline-upwinding) est très utilisée dans la littérature (surtout sa version en volumes finis) ainsi que dans certains codes commerciaux tels que FLOTRAN et FIDAP. L'extension de cette formulation aux éléments d'ordre supérieur est immédiate. Le terme de pression ne pose plus de problème. En revanche, l'absence de terme de pression dans le résidu entraînera au moins théoriquement, une perte de précision. Ce point sera expérimenté un peu plus loin à l'aide des problèmes de référence.

Remarque 3: La méthode de pénalisation peut être obtenue en remplaçant le terme $-\langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle$ par $\lambda \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle$ et en éliminant le terme $-\langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle$ dans l'équation (2.46).

2.3.2 La formulation GLS

Nous avons vu au paragraphe 2.2.2 qu'une bonne partie de l'énergie et du temps doivent être consacré au traitement du terme pression pour pouvoir satisfaire la condition de Babuska-Brezzi. Hughes et al (1986c) ont noté que le terme de pression peut être stabilisé de la même manière que le terme convectif, en modifiant les fonctions-test de pression de la façon suivante:

$$w = q + \frac{\alpha h^2}{2\mu} \nabla q \quad (2.54)$$

On pose :

$$\mathbf{S}_p^h = \mathbf{V}_q^h = \{q^h \mid q^h \in \mathbf{H}^{1h}\}$$

On aborde premièrement le traitement des équations de Stokes. Ensuite, on traitera les équations des Navier-Stokes. La formulation variationnelle des équations (2.1-2.2) consiste à trouver $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}_u^h$, $p^h \in \mathbf{S}_p^h$ tel que:

$$\mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle \quad \forall \mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_v^h \times \mathbf{V}_q^h \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle &= \langle 2\mu \epsilon(\mathbf{v}), \epsilon(\mathbf{v}) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle \\ &+ \sum_e \langle \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}), \frac{\alpha h^2}{2\mu} (-\nabla q) \rangle_e \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{F} \langle \mathbf{v}, q \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + (\mathbf{h}, \mathbf{v})_{\Gamma_h} + \langle \mathbf{f}, \frac{\alpha h^2}{2\mu} (-\nabla q) \rangle_e \quad (2.57)$$

Remarque 1: Cette formulation appartient à la famille des formulations Petrov-Galerkin, car les fonctions-test et de forme sont différentes. Johnson et Saranen (1986) ont indépendamment proposé cette formulation pour les équations de Navier-Stokes.

Remarque 2: Les termes sous le signe somme comprennent le résidu de l'équation (2.1) dans chaque élément, qui s'annule si on remplace (\mathbf{u}^h, p^h) par (\mathbf{u}, p) la solution exacte du problème (2.1). Cette formulation est donc consistante.

Remarque 3: Le terme de pression est stabilisé par le produit $\langle \nabla q, \frac{\alpha h^2}{2\mu} (-\nabla q) \rangle$. Ceci permet de passer outre la condition de Babuska-Brezzi. En général n'importe quelle fonction de forme de vitesse peut se combiner avec n'importe quelle fonction de forme de pression sans déstabiliser le terme de pression.

Remarque 4: Pour les éléments bilinéaires le terme de diffusion sous le signe somme s'annule. Ceci conduit à une modification de l'équation de continuité par le terme de Laplace $\frac{\alpha h^2}{2\mu} \nabla^2 p$. Cette modification a été, d'abord, proposée par Brezzi et Pitkäranta (1984).

Remarque 5: Une théorie pour déterminer la gamme optimale de paramètre de stabilisation α n'est pas encore connue. Hughes et al (1986) ont expérimenté plusieurs valeurs de α (e.g. $\alpha = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5$ et 1.0) et des éléments de vitesse-pression bilinéaires ($Q1Q1$) et biquadratiques ($Q2Q2$). Pour le problème de la cavité entraînée (voir paragraphe 2.6.1.3), la solution de pression oscille pour $\alpha < 0.01$.

Remarque 6: Zienkiewicz et Wu (1991) ont démontré que la formulation stationnaire (2.55-2.57) peut s'obtenir aussi avec les méthodes instationnaires. Autrement dit, la formulation (2.55-2.57) est la solution convergée (en temps) de certaines formulations instationnaires (e.g. la méthode instationnaire proposée par Kawahara et Ohmiya (1984), qui permet l'utilisation d'éléments de vitesse-pression du même ordre) et le paramètre α est l'équivalent du pas de temps δT . Le pas de temps doit être déterminé par le critère de stabilité du schéma instationnaire.

La forme matricielle de la formulation (2.55-2.57) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T + \mathbf{L} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^q \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

où \mathbf{L} et \mathbf{M} proviennent respectivement du terme $\langle -2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}), \frac{\alpha h^2}{2\mu} (-\nabla q) \rangle$ et du terme $\langle \nabla p, \frac{\alpha h^2}{2\mu} (-\nabla q) \rangle$. \mathbf{F}^q provient du terme $\langle \mathbf{f}, \frac{\alpha h^2}{2\mu} (-\nabla q) \rangle$ et des conditions aux frontières. Les autres termes sont définis au paragraphe 2.2.1 (éq. 2.11). Pour la forme explicite de chaque terme on pourra se référer à l'annexe A3.

On constate que la forme matricielle n'est pas symétrique bien que les équations de Stokes le soient. Hughes et Franca (1987) ont proposé une version symétrique de la formulation (2.55-2.57) appelée subséquentement la formulation GLS (Galerkin/Least-Squares). Cette formulation consiste à trouver $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}_u^h$, $p^h \in \mathbf{S}_p^h$ tel que (Franca et al, 1992):

$$\mathbf{B}_\pm \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \mathbf{F}_\pm \langle \mathbf{v}, q \rangle \quad \forall \mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_v^h \times \mathbf{V}_q^h \quad (2.59)$$

$$\mathbf{B}_\pm \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \langle 2\mu \epsilon(\mathbf{u}), \epsilon(\mathbf{v}) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle$$

$$+\sum_e \langle \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}), \quad (2.60)$$

$$\frac{\alpha h^2}{2\mu} (-\nabla q \pm 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v})) \rangle_e$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\pm \langle \mathbf{v}, q \rangle &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + (\mathbf{h}, \mathbf{v})_{\Gamma_h} \\ &+ \langle \mathbf{f}, \frac{\alpha h^2}{2\mu} (-\nabla q \pm 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v})) \rangle_e \end{aligned} \quad (2.61)$$

Remarque 7: La formulation GLS, en terme exact, est la version $\mathbf{B}_+ \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle$. On voit que cette formulation s'obtient en prenant le résidu des équations de Stokes (2.1), en le minimisant par les moindres carrés et en l'ajoutant à la formulation classique de Galerkin. Pour les éléments bilinéaires les formulations (2.55-2.57) et (2.60-2.61) sont équivalentes.

Remarque 8: Douglas et Wang (1989) ont proposé la formulation $\mathbf{B}_- \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle$ en changeant le signe du terme diffusion. La formulation négative est plus stable que la formulation positive. La gamme du paramètre α est plus large. Les valeurs spécifiques de α ne sont pas nécessaires pour établir la stabilité de la formulation "minus" Cependant, pour l'estimation de l'erreur, le paramètre α doit être spécifié. Pour en savoir plus, on pourra se référer à Franca et Frey (1992).

Remarque 9: Pierre (1988) a démontré que la formulation GLS (2.60-2.61) est équivalente en forme avec la formulation Galerkin+fonction (virtuelle) de bulle. En suivant Franca et Frey (1992), on décompose \mathbf{u}^h en:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{u}_1 + \sum_{\Omega_e} \mathbf{u}_b \phi \quad (2.62)$$

où ϕ est la fonction de bulle avec la définition suivante:

$$\int \phi d\Omega_e = C_1 h^2 \quad (2.63)$$

$$\| \nabla \phi \|_{0,e} = C_2 \quad (2.64)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives. Notons que ϕ est non-nulle seulement à l'intérieur de Ω_e . \mathbf{u}_b est la valeur de \mathbf{u} associée à la fonction ϕ . On procède alors de la manière suivante:

D'abord, on prend $\mathbf{v} = \phi \mathbf{e}_i$ et on substitue (2.62) dans la formulation de Galerkin des équations de Stokes (e.g. éqs. 2.8-2.9).

Pour le noeud associé à la fonction de bulle on obtient:

$$\langle (-2\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u}_1) + \nabla p - \mathbf{f}), \phi \mathbf{e}_i \rangle + \sum_e \langle 2\mu\epsilon(\phi \mathbf{u}_b), \epsilon(\phi \mathbf{e}_i) \rangle_e = 0 \quad (2.65)$$

Le deuxième terme de (2.65) s'écrit:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon(\phi \mathbf{u}_b), \epsilon(\phi \mathbf{e}_i) \rangle_e &= \mathbf{u}_b \cdot \left\{ \int (\nabla \phi \cdot \nabla \phi \mathbf{e}_i + (\nabla \phi \times \nabla \phi) \mathbf{e}_i) d\Omega_e \right\} \\ &= \left\{ \int (\nabla \phi \cdot \nabla \phi \mathbf{I} + (\nabla \phi \times \nabla \phi) \mathbf{e}_i) \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{e}_i d\Omega_e \right\} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (2.66)$$

L'équation (2.65) devient alors:

$$2\mu \mathbf{A} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{e}_i = - \langle (-2\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u}_1) + \nabla p - \mathbf{f}), \phi \mathbf{e}_i \rangle \quad (2.67)$$

Si on suppose que les termes sous l'intégrale sont constants par morceaux, on obtient:

$$\mathbf{u}_b = -\frac{1}{2\mu} \mathbf{A}^{-1} (-2\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u}_1) + \nabla p - \mathbf{f}) |_{\Omega_e} \int \phi d\Omega_e \quad (2.68)$$

Puis, on multiplie (2.1) par \mathbf{v}_1 et on condense (élimine) le noeud associé à la fonction de bulle,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \langle \mathbf{u}_1^h, p^h; \mathbf{v}_1, q \rangle &= \langle 2\mu\epsilon(\mathbf{u}_1), \epsilon(\mathbf{v}_1) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_1, p \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_1, q \rangle \\ &\quad - \sum_e \langle 2\mu\nabla.\epsilon(\phi \mathbf{u}_b), \mathbf{v}_1 \rangle_e \\ &\quad - \sum_e \langle \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}_b), q \rangle_e \end{aligned} \quad (2.69)$$

En intégrant par partie les termes sous le signe somme on obtient:

$$\langle \nabla \cdot \epsilon(\phi \mathbf{u}_b), \mathbf{v}_1 \rangle_e = \mathbf{u}_b \langle \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v}_1), \phi \rangle_e \quad (2.70)$$

$$- \langle \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}_b), q \rangle_e = \mathbf{u}_b \langle \nabla q, \phi \rangle_e \quad (2.71)$$

En remplaçant (2.70) et (2.71) dans (2.69) et à l'aide de (2.68) on trouve:

$$\mathbf{B} \langle \mathbf{u}_1^h, p^h; \mathbf{v}_1, q \rangle = \langle 2\mu\epsilon(\mathbf{u}_1), \epsilon(\mathbf{v}_1) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_1, p \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_1, q \rangle$$

$$\begin{aligned}
& + \sum \frac{1}{2\mu} \mathbf{A}^{-1} \langle 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v}_1) - \nabla q, \phi \rangle \quad (2.72) \\
& \times (-2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}_1) + \nabla p - \mathbf{f}) |_{\Omega_e} \int \phi d\Omega_e
\end{aligned}$$

Si on suppose que les termes sous l'intégrale sont constants par morceaux, (2.72) s'écrit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \langle \mathbf{u}_1^h, p^h; \mathbf{v}_1, q \rangle & = \langle 2\mu \epsilon(\mathbf{u}_1), \epsilon(\mathbf{v}_1) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_1, p \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_1, q \rangle \\
& + \sum \frac{1}{2\mu} \mathbf{A}^{-1} (2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v}_1) - \nabla q) |_{\Omega_e} \quad (2.73) \\
& \times (-2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}_1) + \nabla p - \mathbf{f}) |_{\Omega_e} \left(\int \phi d\Omega_e \right)^2
\end{aligned}$$

soit à l'aide de (2.63) et (2.64):

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \langle \mathbf{u}_1^h, p^h; \mathbf{v}_1, q \rangle & = \langle 2\mu \epsilon(\mathbf{u}_1), \epsilon(\mathbf{v}_1) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}_1, p \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_1, q \rangle \\
& + \sum \frac{C_1 C_2}{2\mu} h^2 \mathbf{A}^{-1} \langle 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v}_1) - \nabla q, \\
& -2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}_1) + \nabla p - \mathbf{f} \rangle_e \quad (2.74)
\end{aligned}$$

On note que la forme bilinéaire (2.74) est équivalente en forme avec la formulation \mathbf{GLS}_+ (2.60). Pour obtenir la formulation \mathbf{GLS}_- on peut modifier les fonctions de pondération dans (2.74) par un terme auxiliaire ($\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_1 - \alpha_1 \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v}_1)$) où

$$\alpha_1 = 4 \frac{C_1 C_2}{2\mu} h^2 \mathbf{A}^{-1}$$

La modification $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v}_1)$ équivaut à ajouter le terme $4\mu \mathbf{u}_b \nabla \cdot \epsilon(\phi \mathbf{u}_b)$ dans la formulation de Galerkin de (2.69). La formulation Galerkin+fonctions de bulle peut également être appliquée aux équations de convection-diffusion (voir paragraphe 1.4.4) pour retrouver la formulation \mathbf{GLS}_- . Néanmoins, contrairement aux équations de Stokes, l'introduction du terme $2\nu \mathbf{u}_b \nabla^2 \phi$ donne la version \mathbf{GLS}_+ . Pour ce cas, nous avons cité au paragraphe 1.4.4 que \mathbf{GLS}_+ est plus stable que \mathbf{GLS}_- .

Maintenant on peut étendre la formulation GLS aux équations de Navier-Stokes. Cette formulation consiste à trouver $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}_u^h$, $p^h \in \mathbf{S}_p^h$ tel que (Franca et Frey, 1992):

$$\mathbf{B}_\pm \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle = \mathbf{F}_\pm \langle \mathbf{v}, q \rangle \quad \forall \mathbf{v}, q \in \mathbf{V}_v^h \times \mathbf{V}_q^h \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\pm \langle \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}, q \rangle &= \langle \rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle 2\mu \epsilon(\mathbf{u}), \epsilon(\mathbf{v}) \rangle - \langle \nabla \cdot \mathbf{v}, p \rangle \\ &\quad - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}, q \rangle + \sum_e \langle \rho(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u}), \\ &\quad \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{Re}^h(\mathbf{x}))((\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - \nabla q \pm 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v})) \rangle_e \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{F}_\pm \langle \mathbf{v}, q \rangle = \langle \rho \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_h} + \sum_e \langle \rho \mathbf{f}, \quad (2.77)$$

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{Re}^h(\mathbf{x}))((\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - \nabla q \pm 2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{v})) \rangle_e$$

où le paramètre de stabilisation α est défini à l'aide des relations (2.48-2.53).

Remarque 10: On constate que le terme sous le signe somme est en fait le résidu des équations de Navier-Stokes minimisé par les moindres carrés (au moins pour la version \mathbf{B}_+). Donc, la solution exacte du problème satisfait la formulation GLS de (2.75-2.77).

Remarque 11: Si on élimine provisoirement le terme de pression $p = q = 0$, pour les équations de convection-diffusion qui restent, la formulation (2.75-2.77) coïncide avec la formulation GLS présentée au paragraphe 1.4.4 du chapitre 1. Pour les éléments bilinéaires la formulation (2.75-2.77) coïncide avec la formulation SUPG (voir paragraphe 1.4.3).

Remarque 12: Si on élimine provisoirement le terme de convection: $(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$ et $(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = 0$, pour les équations de Stokes qui restent, la formulation (2.75-2.77) coïncide avec la formulation (2.59-2.61).

La forme matricielle de la formulation (2.76-2.77) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\alpha^v(\mathbf{u}) + \mathbf{K} + \mathbf{K}_\alpha^v & \mathbf{C} + \mathbf{C}_\alpha^v \\ \mathbf{C}^t + \mathbf{N}_\alpha^q(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_\alpha^q & \mathbf{C}_\alpha^q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} + \mathbf{F}_\alpha^v \\ \mathbf{F}_\alpha^q \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

où \mathbf{N} , \mathbf{K} , et \mathbf{C} proviennent respectivement des termes de convection, diffusion, et pression (équation de continuité). Les vecteurs de \mathbf{F} proviennent des forces à distance. L'indice α identifie les termes de stabilisation, et les indices supérieurs v et q différencient les termes produits par les fonctions-test de vitesse et les fonctions-test de pression, respectivement.

2.4 Sur la précision de la solution de pression de la formulation GLS

Nous allons voir dans ce paragraphe que la formulation GLS avec les éléments bilinéaires rencontre un problème de consistance. En effet, pour les éléments bilinéaires rectangulaires le terme de diffusion $2\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u})$ sous le signe somme s'annule, ce qui entraîne une dégradation de précision près des frontières. La dégradation de la précision est parfois attribuée au fait que l'application de cette formulation aux équations de Stokes impose une condition aux frontières de type $\partial p/\partial n = 0$ (Idelshons et al., 1995). Cette condition aux frontières n'est pas compatible avec la condition aux frontières de Neumann pour la pression de forme $\mathbf{n} \cdot (-2\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u}) + \nabla p - \mathbf{f}) = 0$. Pour aborder ce sujet, reprenons l'équation consistante de Poisson pour la pression suivante:

$$\nabla^2 p = -\rho\nabla.(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) + \mu\nabla.(\nabla^2\mathbf{u}) + \rho\nabla.\mathbf{f} \quad (2.79)$$

Ensuite, appliquons la formulation de Galerkin à cette équation pour obtenir:

$$\begin{aligned} \langle \rho(\nabla\mathbf{u}).\mathbf{u} + \nabla p - 2\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u}), \nabla q \rangle &= \langle \rho\mathbf{f}, \nabla q \rangle + \\ &\langle \mathbf{n} \cdot (\rho(\nabla\mathbf{u}).\mathbf{u} + \nabla p - 2\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{f}), q \rangle_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Maintenant comparons l'équation précédente à la formulation GLS de (2.76-2.77). On note que dans la formulation (2.76-2.77) l'équation (2.80) est multipliée par le coefficient de stabilisation α et l'intégrale aux frontières est absente. Une question se pose alors. Est-ce nous avons raison d'éliminer l'intégrale aux frontières? Pour répondre à la question on peut citer d'abord Gresho et Sani (1987) " toutes les formulations consistantes des équations de Navier-Stokes (quantité de mouvement et continuité) impliquent automatiquement l'équation de Poisson:

$$\nabla^2 p = -\rho\nabla.(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) + \mu\nabla.(\nabla^2\mathbf{u}) + \rho\nabla.\mathbf{f}$$

et la condition aux frontières de Neumann: $\mathbf{n} \cdot (\rho(\nabla\mathbf{u}).\mathbf{u} + \nabla p - 2\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{f}) = 0$ ".

Donc, l'élimination du terme intégral ne conduit pas à une dégradation de précision, car cette intégrale est construite implicitement (automatiquement) par les combinaisons de l'équation de continuité et des équations de quantité de mouvement sur les frontières. Malgré la consistance formelle de la formulation (2.75-2.77), en pratique, le calcul du terme $\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u})$ n'est pas fait avec précision. Le calcul précis de ce terme nécessite des éléments C^1 (les dérivées secondes des fonctions-test doivent être de carré sommable). Par exemple, pour les éléments bilinéaires rectangulaires (C^0) le terme $\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u})$ s'annule et ne peut pas être estimé directement. Par contre, pour les éléments biquadratiques le terme de diffusion est estimable. C'est la raison pour laquelle la solution de pression pour ces éléments est souvent de

qualité supérieure à celle fournie par les éléments bilinéaires (voir le paragraphe 2.6).

Droux et Hughes (1994) dans une tentative pour améliorer la précision des éléments bilinéaires ont modifié la formulation de GLS (2.56) en ajoutant le terme suivant:

$$\sum_e \langle \mathbf{n} \cdot (\nabla p - 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})), \frac{\alpha h^2}{2\mu} q \rangle_{\Gamma_e \cap \Gamma} \quad (2.81)$$

où Γ_e dénote les frontières de chaque élément.

On note que le terme sous le signe somme est le résidu des équations de Stokes. Par conséquent, la modification ne perturbe pas la consistance de la formulation GLS. Droux et Hughes ont appliqué cette modification à plusieurs cas-test dans le cas de l'écoulement de Stokes. La modification (2.81) améliore la qualité de la solution (voir plus loin).

Nous allons d'abord essayer de démontrer que la modification (2.81) peut également être obtenue à partir de la formulation Galerkin+fonctions (virtuelle) de bulle.

On décompose \mathbf{u}^h en:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{u}_1 + \sum_{\Gamma_e \cap \Gamma} \mathbf{u}_b \psi \quad (2.82)$$

où ψ est la fonction de bulle définie sur la frontière $\Gamma_e \cap \Gamma$. \mathbf{u}_b est la valeur de \mathbf{u} associée à la fonction ψ . On substitue (2.82) dans la formulation Galerkin de (2.8-2.9). Puis, on procède de la façon suivante:

Pour le noeud associé à la fonction de bulle on obtient:

$$\langle -2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})_1 + \nabla p - \mathbf{f}, \psi \rangle_{\Omega_e \cap \Gamma} + \mu \mathbf{u}_b \langle \nabla \psi, \nabla \psi \rangle_{\Omega_e \cap \Gamma} = 0 \quad (2.83)$$

et on trouve la valeur de \mathbf{u}_b :

$$\mathbf{u}_b = - \frac{\langle -2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})_1 + \nabla p - \mathbf{f}, \psi \rangle_{\Omega_e \cap \Gamma}}{\mu \|\nabla \psi\|_{\Omega_e \cap \Gamma}^2} \quad (2.84)$$

Puis, on multiplie (2.1-2.2) par \mathbf{v}_1 et on condense (élimine) le noeud associé à la fonction de bulle,

$$\begin{aligned} \langle -2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})_1 + \nabla p - \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle & - \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_1, q \rangle - \mu \sum \langle 2\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_b \psi), \mathbf{v}_1 \rangle \\ & - \sum \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_b \psi, q \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Pour les éléments linéaires le troisième terme de l'équation (2.85) est négligeable. Le quatrième terme peut être simplifié en utilisant une intégration par partie et la définition locale de ψ sur Γ_e . On trouve:

$$- \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_b \psi, q \rangle_{\Omega_e \cap \Gamma} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_b \langle \psi, q \rangle_{\Gamma} + \mathbf{u}_b \langle \nabla q, \psi \rangle_{\Omega_e \cap \Gamma} \quad (2.86)$$

On remplace (2.84) dans (2.86) et le quatrième terme de (2.85) devient alors,

$$\begin{aligned} - \sum \frac{\langle -2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})_1 + \nabla p - \mathbf{f}, \psi \rangle_{\Omega_e \cap \Gamma}}{\mu \|\nabla \psi\|_{\Omega_e \cap \Gamma}^2} \langle \psi, \nabla q \rangle_{\Omega_e \cap \Gamma} \\ + \sum \frac{\langle -2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})_1 + \nabla p - \mathbf{f}, \psi \rangle_{\Omega_e \cap \Gamma}}{\mu \|\nabla \psi\|_{\Omega_e \cap \Gamma}^2} \langle \mathbf{n} \cdot \psi, q \rangle_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Si on suppose que les termes sous l'intégrale sont constants par morceaux, l'intégrale aux frontières devient:

$$C \sum \langle \mathbf{n} \cdot (-2\mu \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})_1 + \nabla p - \mathbf{f}), \psi q \rangle_{\Gamma} \quad (2.88)$$

où C est une constante positive. On note que l'intégrale aux frontières (2.88) est équivalente en forme à la relation (2.81). Le premier terme de la relation (2.87) est équivalent en forme à la modification GLS classique (voir éqs. 2.55-5.57 et la remarque 9 du paragraphe 2.3.2).

Notons que l'intégrale (2.81) est en fait la condition aux frontières de Neumann pour la pression. Elle peut être obtenue en projetant les équations de Stokes sur la normale extérieure aux frontières. Ce terme, s'il est calculé avec précision, doit tendre vers zéro. Pour les éléments bilinéaires rectangulaires le terme $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})$ s'annule. Ce terme ne peut pas être estimé directement. Par conséquent, l'intégrale aux frontières ne sera pas zéro. Le terme $\langle \mathbf{n} \cdot \nabla p, q \rangle_{\Gamma}$ contribue avec le terme $\langle \nabla p, \nabla q \rangle$ de la formulation classique GLS à éliminer la contribution normale de $\langle \nabla p, \nabla q \rangle$ aux frontières. Ceci évite l'imposition de $\partial p / \partial n = 0$ aux frontières et améliore la précision de la solution de pression.

Il faut noter que pour les noeuds qui se trouvent aux coins des frontières, la modification (2.81) perturbe à la fois la contribution normale et tangentielle du terme $\langle \nabla p, \nabla q \rangle$ ce qui, entraîne soit, des singularités dans le système d'équations (e.g. pour les angles droits), soit un système mal-conditionné. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas réussi à appliquer cette modification aux équations de Navier-Stokes. Droux et Hughes (1994) n'ont pas abordé ce sujet dans leur article, ils ont apparemment rencontré le même problème. Au paragraphe 2.5 nous présentons une autre technique pour améliorer la prédiction de la formulation GLS pour les éléments bilinéaires.

2.5 Une technique pour améliorer la prédiction de la formulation GLS

La constatation ci-dessus nous a amené à développer un algorithme pour estimer le terme de diffusion sous le signe somme de la formulation GLS classique de (2.76-77). Nous proposons, ici, d'estimer le terme de diffusion avec la technique des moindres carrés. Nous allons montrer que l'estimation du terme $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})$ peut améliorer la précision de la solution de pression pour les écoulements de Stokes ainsi que de Navier-Stokes. On définit l'interpolation bilinéaire ci-dessous pour les dérivées premières de la vitesse:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_i N^i d(ux)_i \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_i N^i d(uy)_i \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sum_i N^i d(vx)_i \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sum_i N^i d(vy)_i \quad (2.92)$$

où $d(ux)_i, d(uy)_i, d(vx)_i$ and $d(vy)_i$ sont les valeurs des dérivées premières aux noeuds. N^i est la fonction d'interpolation standard bilinéaire.

Le filtrage aux moindres carrés de la dérivée première de u par rapport à x se calcule en minimisant la fonctionnelle suivante:

$$J = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dy = \int \left(\sum_j N^j d(ux)_j - \sum_j \frac{\partial N^j}{\partial x} u_j \right)^2 dx dy \quad (2.93)$$

et également pour d'autre dérivée de la vitesse. L'équation d'Euler de la fonctionnelle (2.93) s'écrit:

$$\frac{\partial J}{\partial d(ux)_i} = 2 \int N^i \left(\sum_j N^j d(ux)_j - \sum_j \frac{\partial N^j}{\partial x} u_j \right) dx dy = 0 \quad (2.94)$$

qui aboutit à un système d'équations de la forme $\mathbf{M}d(\mathbf{u}\mathbf{x}) = \mathbf{F}$. \mathbf{M} est la matrice de masse standard. Elle est la même pour toutes les autres dérivées de \mathbf{u} . Elle doit être construite et inversée une fois pour chaque problème. Notons qu'en utilisant cette technique le schéma numérique devient non-linéaire même si le problème de Stokes ne l'est pas. Le problème de Navier-Stokes devient un peu plus non-linéaire.

Finalement, la dérivée seconde de u par rapport à x s'obtient par

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_i \frac{\partial N^i}{\partial x} (dux)_i \quad (2.95)$$

et de la même manière pour d'autres dérivées de u .

2.6 Expériences numériques

L'aspect mathématique des formulations GLS a été étudié par Hughes et Franca (1987), Hansbo et Szepessy (1990), Franca et al. (1992). Cependant, l'expérience numérique avec ces formulations reste encore limitée et le comportement de la formulation GLS n'est pas connu dans des cas généraux et pour des nombres de Reynolds assez élevés. De plus, il n'est pas évident que ces formulations apportent des avantages notables par rapport aux formulations classiques. Dans ce paragraphe nous avons essayé de comparer plusieurs formulations d'éléments finis afin d'étudier la robustesse (la stabilité et la précision) des formulations GLS. Les formulations étudiées ici sont:

1. Formulation Bubnov-Galerkin avec la méthode de pénalisation pour la pression. Pour cette formulation des éléments bilinéaires quadrilatéraux de vitesse et des éléments constants de pression sont utilisés. La formulation est abrégée, ici, BGP(Q1P0).
2. Formulation SUPG (Q1P0) avec la méthode de pénalisation pour la pression.
3. Formulation Galerkin/Least-Squares utilisant des éléments Q1Q1 abrégée GLS(Q1Q1).
4. Formulation Bubnov-Galerkin utilisant des éléments biquadratiques (serendipity, Q2S) pour la vitesse et des éléments bilinéaires pour la pression abrégée BG(Q2SQ1).
5. Formulations SUPG et SU utilisant des éléments biquadratiques (serendipity, Q2S et lagrangien Q2) pour la vitesse et des éléments bilinéaires pour la pression, abrégées, respectivement SUPG(Q2SQ1), SU(Q2SQ1), SUPG(Q2Q1) et SU(Q2Q1).
6. Formulation Galerkin/Least-Squares utilisant des éléments Q2SQ2S, abrégée GLS(Q2SQ2S). Nous considérons uniquement la version *GLS*₋.
7. Formulation Bubnov-Galerkin utilisant des éléments biquadratiques (lagrangien, Q2) pour la vitesse et des éléments bilinéaires pour la pression abrégée BG(Q2Q1).

Ces formulations seront évoquées selon le type de problème. Les formulations et les éléments utilisés pour chaque cas-test sont synthétisés dans les tableaux suivants:

Écoulements de Stokes

Écoulement	Viscosité dynamique*	Formulation	Élément
Poiseuille pur	0.5	GLS GLS+terme intégral GLS+estimation du terme de diffusion Galerkin standard	Q1Q1, Q2SQ2S Q1Q1 Q1Q1 Q2SQ1, Q2Q1
Cas-test II	1.0	GLS GLS+terme intégral GLS+estimation du terme de diffusion	Q1Q1 Q1Q1 Q1Q1
Cavité	1.0	GLS GLS+estimation du terme de diffusion	Q1Q1 Q1Q1

* viscosité dynamique adimensionnée

Écoulements de Navier-Stokes

Écoulement	Reynolds	Formulation	Élément
Double marche	200	Galerkin standard SUPG GLS	Q1P0 Q1P0, Q2SQ1 Q1Q1, Q2SQ2S
Marche descendante	400- 1200	Galerkin standard SUPG GLS	Q1P0, Q2SQ1 Q1P0, Q2SQ1 Q1Q1, Q2SQ2S
Cavité	400- 10000	Galerkin standard SU SUPG GLS GLS+estimation du terme de diffusion	Q1P0, Q2SQ1, Q2Q1 Q2SQ1, Q2Q1 Q1P0, Q2SQ1, Q2Q1 Q1Q1, Q2SQ2S Q1Q1

2.6.1 Les écoulements de Stokes

Les deux premiers exemples présentés dans ce paragraphe ont des solutions exactes qui faciliteront la comparaison. Le troisième exemple est intéressant en raison de la présence de singularités aux coins supérieurs du domaine. La solution de pression de ce problème n'est pas lisse aux coins supérieurs.

2.6.1.1 L'écoulement de Poiseuille:

Le domaine Ω est le rectangle $0 < x < 1.0$, $-1.0 < y < 1.0$. La solution exacte de ce problème pour $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, $\rho = 0$ et $\mu = 0.5$ s'écrit:

$$u = 1 - y^2, v = 0, \text{ et } p = 1 - x.$$

Dans un premier temps, le domaine est discrétisé avec 16 éléments bilinéaires uniformément distribués (figure 2.4). Un maillage très grossier est choisi pour accentuer les différences. Nous avons calculé cet écoulement avec la formulation GLS classique, GLS+le terme intégral aux frontières, et GLS classique+estimation de $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})$.

Sur la figure 2.5 les isobares sont présentées pour $\alpha = 0.1$. L'adjonction du terme intégral aux frontières fournit la solution exacte du problème (pour tout α). En imposant $p=1.0$ à $x = 0.0, y = 0.0$, la pression minimale à $x = 1.0, y = 0.0$ pour les trois formulations ci-dessus est égale à 0.161, 0.0, et -0.049 , respectivement. Notons l'amélioration de la solution de pression grâce à l'estimation du terme de diffusion. Le champ de vitesse est en général en bonne concordance avec la solution exacte.

Dans un second temps, le calcul est effectué avec 4 éléments biquadratiques lagrangiens et serendipity (figure 2.6). Pour retrouver le maillage des éléments serendipity il suffit d'éliminer les noeuds qui se situent au centre de gravité de chaque élément lagrangien. Le calcul effectué démontre que les formulations BG(Q2Q1) et GLS(Q2SQ2S) fournissent la solution exacte du problème (figure 2.5a). Pourtant, la formulation BG(Q2SQ1) donne une solution de pression fautive. Les valeurs de p aux noeuds 1, 2, et 3 (voir la figure 2.6b) sont respectivement égales à 1.0, -5.9, et -2.5. On constate l'influence notable des noeuds supplémentaires des éléments lagrangiens sur la précision de la solution de pression. La solution de vitesse est en parfaite concordance avec la solution exacte pour les deux types d'éléments (lagrangien et serendipity). Les éléments Q1Q1 avec la formulation GLS ne donnent pas une solution de pression aussi précise que les éléments serendipity près des frontières. Il semble que la condition aux frontières de Neumann pour la pression n'est pas très bien satisfaite avec les éléments Q1Q1. L'estimation du terme $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})$ améliore la précision, mais pas autant que les éléments biquadratiques lagrangiens utilisés avec la formulation classique de Galerkin. En conclusion, le champ de pression est la solution approchée de l'équation de Poisson avec des conditions aux frontières difficile de Neumann (difficile à cause de la présence des dérivées secondes de la vitesse). Il semble que le noeud supplémentaire des éléments lagrangiens (également le noeud virtuel de bulle) améliore surtout la précision du calcul des conditions aux frontières de Neumann et par conséquent de la pression, elle même.

2.6.1.2 Une deuxième cas-test:

Le domaine Ω est le rectangle $-1.0 < x < 1.0, -1.0 < y < 1.0$ discrétisé par 400 éléments bilinéaires uniformément distribués. La solution exacte de ce problème pour $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, $\rho = 0$ et $\mu = 1.0$ s'écrit:

$$u = 1 - y^3, v = 1 - x^3, \text{ et } p = -6xy.$$

Pour $\alpha = 0.1$, on obtient les isobares présentés sur la figure 2.7 Comme pour l'exemple précédent l'adjonction du terme intégral aux frontières fournit la solution exacte du problème. Pourtant, il faut mentionner qu'à cause de la présence des singularités aux coins du domaine, l'inversion des équations n'est possible que si l'on impose aux coins les valeurs de pression exacte comme conditions aux frontières de type Dirichlet. L'estimation du terme $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})$ améliore également la précision sans entraîner de singularité. Les valeurs de pression calculées avec la formulation GLS aux coins sont ± 5.23 , tandis que la formulation GLS+estimation de $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})$ donne ± 5.70 . En effet, nous obtenons la solution exacte sauf pour les quatre noeuds aux coins du domaine.

2.6.1.3 Cavité entraînée en écoulement de Stokes:

Le domaine Ω est $0 < x < 1.0, 0 < y < 1.0$. On impose $u = 1, v = 0$ sur $\Gamma_1 = \{(x, 1) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ et $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur les autres côtés de la cavité (voir la figure 2.26 plus loin). On effectue le calcul avec 576 éléments bilinéaires uniformément distribués. On prend $\mu = 1.0$.

Sur la figure 2.8 les isobares sont présentés pour $\alpha = 0.5$. Pour la méthode GLS classique les valeurs de pression aux coins supérieurs sont ± 26 . L'estimation de $\nabla \cdot \epsilon(\mathbf{u})$ améliore la solution de pression. Les valeurs de la pression aux coins supérieurs sont ± 40 pour cette technique. La solution exacte de pression tend vers l'infini aux coins.

2.6.2 Les écoulements de Navier-Stokes

2.6.2.1 La double marche:

Le problème est défini sur la figure 2.9a. Un écoulement laminaire en passant sur l'obstacle (une double marche) décolle en amont de la marche puis recolle sur la paroi inférieure en aval de l'obstacle. Ce problème est difficile à résoudre numériquement en raison de la présence d'une paroi verticale en amont de la marche sur laquelle l'écoulement arrive perpendiculairement. Ce problème n'a été étudié en détail (à notre connaissance) ni expérimentalement ni numériquement. Par exemple un calcul de référence pour être comparé aux différents calculs numériques n'existe pas. Nous

utiliserons donc le calcul de Hansbo (1989) effectué avec la méthode SDM (streamline diffusion method), appelée ici GLS, qui utilise des éléments vitesse-pression linéaires (triangulaire en 2-D) du même ordre pour deux types de maillage: grossier et raffiné. Le maillage grossier est présenté sur la figure 2.9b. Pour construire le maillage de Hansbo il faut retracer la première diagonale de chaque quadrilatère. Le calcul est effectué pour $Re=200$ basé sur la vitesse d'entrée (uniforme $u = 1$) et la hauteur du canal. On note que la longueur du canal en aval de la marche choisie par Hansbo n'est pas suffisamment grande (elle n'est pas beaucoup plus grande que la longueur de recollement). Les conditions aux frontières libres ($\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$) ne sont pas compatibles avec une section où il existe une zone de recirculation. Toutefois, faute d'une solution de référence, on se contentera de mettre l'accent sur une comparaison qualitative plutôt que quantitative. Dans les paragraphes suivants (2.6.2.2 et 2.6.2.3) des comparaisons quantitatives seront effectuées.

Sur la figure 2.10 les vecteurs vitesses obtenus par la formulation BGP(Q1P0) sont présentés pour $Re=200$ et pour différents maillages. On constate les oscillations produites en amont de la marche ainsi que l'influence du raffinement de maillage. Cette formulation utilise une discrétisation centrée du terme de convection (voir paragraphe 1.4.1), elle est donc instable. Un maillage extrêmement raffiné près de la paroi verticale est nécessaire pour éviter les oscillations. Sur les figures 2.11-2.16 les vecteurs vitesse et les isobares sont présentés pour le calcul avec les formulations SUPG(Q1P0) et GLS(Q1Q1). Il n'existe pas d'oscillation dans la solution de vitesse. La solution de pression converge au fur et à mesure vers une solution indépendante du maillage. Notons la présence d'oscillations de la solution de pression obtenue avec la formulation SUPG(Q1P0) dans la région aval de la marche pour le cas du maillage le plus grossier (figure 2.11b). Il semble que le nombre des noeuds de pression et de vitesse dans la région col de l'écoulement ne soit pas suffisant. Ce symptôme (l'oscillation de la solution pour des éléments constants de pression) est également expérimenté par Huyakorn et al. (1979) pour l'écoulement sur une marche descendante.

La solution de Hansbo (1989) est présentée sur les figures 2.17-2.18. On note que les solutions obtenues avec la formulation GLS(Q1Q1) sont en bonne concordance avec les solutions de Hansbo(1989) pour les deux maillages utilisés (grossier et raffiné). De plus, il n'existe pas d'oscillations dans la solution de pression même pour le maillage grossier. Si on compare la solution convergée de la pression aux précédentes solutions obtenues sur les maillages grossiers, on note que la solution de SUPG sur le maillage 11×6 est moins précise que la solution de GLS (figure 2.11). On voit qu'aux coins d'entrée les isobares de la solution de GLS(Q1Q1) ne sont pas aussi bien prédites que par la solution SUPG(Q1P0). Notons que le même increment de pression est utilisé pour tracer les isobares des figures 2.11-2.16. Par conséquent, le gradient de pression à l'entrée est moins fort pour la formulation GLS(Q1Q1). L'annulation du terme de diffusion sous le signe somme de l'équation (2.76) est à

l'origine de la dégradation de précision près de l'entrée. Ce point est exploré au paragraphe 2.6.1.1 pour le cas de l'écoulement de Poiseuille.

Finalement, notons l'apparition de la deuxième zone de recirculation en amont de la paroi verticale pour le cas du maillage raffiné (voir les vecteurs vitesse). Dans les années 70 certains auteurs (e.g. Gresho 1981) préféraient les méthodes classiques (e.g. formulation Galerkin standard) aux méthodes de "upwinding". Selon Gresho les oscillations dans un écoulement avertissent le numéricien du fait que le maillage utilisé n'est pas suffisamment raffiné pour pouvoir capturer les zones de fort gradient. Donc, il suffit de raffiner le maillage dans les zones de fort gradient (à l'aide de l'expérience numérique) pour trouver une solution précise. En revanche les méthodes stables en fournissant une solution lisse trompent le numéricien sur la précision de la solution. Autrement dit une solution lisse pour un problème difficile ne traduit pas forcément la précision. Ce raisonnement bien qu'il ait des éléments de vérité semble être très dur, puisqu'on s'intéresse très souvent seulement au comportement global de la solution plutôt qu'à une solution absolument précise.

Nous avons également effectué le calcul avec 60 éléments biquadratiques (serendipity). Sur la figure 2.19a on présente la solution de pression obtenue avec la formulation SUPG(Q2SQ1). On note que la solution de pression oscille en aval de la marche bien que la solution de vitesse reste stable et physique (non-présentée). Notons également les oscillations de la solution de pression générées à l'entrée. Le nombre de noeuds de vitesse est insuffisant par rapport au nombre de noeuds de pression, à l'entrée et dans la zone col, pour satisfaire la condition d'incompressibilité. Comme la pression est implicitement déterminée par la condition d'incompressibilité, le résultat aboutit à une solution moins précise pour la pression. Huyakorn et al. (1979) ont démontré que l'utilisation des éléments Q2Q1 (figure 2.3c) améliore d'une manière significative la précision de la solution de pression. Ce type d'éléments dispose d'un noeud supplémentaire au centre de gravité par rapport aux éléments serendipity (figures 2.3b et 2.3c). Ce symptôme (le meilleur comportement des éléments Q2Q1 par rapport aux éléments Q2SQ1) s'est également manifesté pour l'écoulement de Poiseuille pur étudié au paragraphe 2.6.1.1.

Nous avons démontré au paragraphe 2.3.2 que la formulation GLS est équivalente en forme à la formulation Galerkin+fonctions de bulle. Par conséquent, Il semble que c'est le noeud associé à la fonction de bulle qui augmente implicitement (artificiellement) le nombre des noeuds de vitesse tout en permettant l'utilisation des fonctions d'interpolation du même ordre de vitesse-pression. Sur la figure 2.19b la solution de la formulation GLS(Q2SQ2S) est présentée. On note que les isobares sont en bonne concordance avec la solution des éléments bilinéaires, bien que les éléments biquadratiques (serendipity) fournissent une solution plus précise et lisse que les éléments bilinéaires. Ce point est exploré au paragraphe 2.6.1.

2.6.2.2 La marche descendante

Ce problème a été étudié en détail expérimentalement par Armaly et al. (1983) pour les régimes laminaires et turbulents. Les résultats expérimentaux servent à la validation des codes de calcul et à l'estimation de la précision des méthodes numériques. Sur la figure 2.20 on trouvera les données géométriques et les conditions aux frontières retenues pour le calcul. Un écoulement laminaire pleinement développé décolle en passant sur la marche descendante, puis il recolte à une distance x_1 de la marche. L'observation expérimentale montre que pour un nombre de Reynolds suffisamment grand l'écoulement peut également décoller sur la paroi supérieure de la marche. Sur les parois, la condition de non-glissement est imposée. À la sortie, on suppose que l'écoulement sort sans contrainte. Les données doivent être considérées comme adimensionnées. Le calcul est effectué pour $Re=400, 600, 800$ et 1200 , où Re est basé sur la vitesse débitante et la hauteur du canal d'entrée. La hauteur du canal de sortie vaut deux fois la hauteur de la marche. Des maillages lâches ont été utilisés pour discrétiser le domaine afin de détecter la présence de diffusion numérique. Ils sont constitués respectivement de 30×30 éléments bilinéaires et de 15×15 éléments de serendipity. Les maillages sont légèrement raffinés dans la direction x près de l'entrée.

Concernant la prédiction des profils de vitesse et de la longueur de recollement, jusqu'à $Re=800$, les différentes formulations fournissent pratiquement les mêmes résultats (à 1% de près). Ceci confirme l'absence de diffusion transversale dans les formulations SUPG et GLS par rapport aux formulations standards (Galerkin) de BGP(Q1P0) et BG(Q2SQ1). Les longueurs x_1 , x_2 , et x_3 sont comparées avec les résultats expérimentaux et également avec les résultats de référence de Gartling (1990) dans les tableaux 2.1 et 2.2. Gartling a utilisé des maillages différents et a fait varier la longueur du canal afin d'obtenir une solution indépendante du maillage et également en vue d'étudier l'influence des conditions aux frontières à la sortie. Traditionnellement, la longueur de recollement x_1 est utilisée comme un paramètre crucial pour la comparaison. Les méthodes qui introduisent de la diffusion numérique sous-estiment cette longueur. On note que la longueur de recollement est bien prédite jusqu'à $Re=600$. Au-dessus de $Re=600$, Armaly et al. (1983) ont observé que l'écoulement devient 3-D. Une bonne concordance existe entre notre solution et la solution de Gartling obtenue avec 30000 éléments biquadratiques et une longueur du canal de 30 fois la hauteur. Armaly et al (1983) ont calculé ce problème avec la méthode des volumes finis en employant la méthode de diffusion artificielle (voir chapitre 1) et pour un maillage comparable à celui de la présente étude. Leur calcul sous-estime la longueur de recollement de plus de 50% par rapport au résultat expérimental. De Mulder et Benocci (1991) ont également étudié ce problème avec une méthode TVD, pour $Re=800$. Ils trouvent une longueur de recollement de 4.95 qui est de 30% inférieure au résultat expérimental.

Les figures 2.21 et 2.22 présentent les vecteurs vitesse et les isobares pour $Re=800$, en utilisant les formulations GLS(Q2SQ2S) et GLS(Q1Q1). Notons que les incréments des isobares ne sont pas identiques. Donc, pour les mêmes nombres d'isobares les solutions des deux formulations sont en bonne concordance. Toutes les autres formulations donnent plus au moins les mêmes champs de vitesse et de pression. Le calcul a également été effectué pour $Re=1200$ afin de mettre en évidence la stabilité des différentes formulations dans le cas où le terme de convection est dominant. Pour $Re=1200$, les formulations BGP(Q1P0) et BG(Q2SQ1) donnent des oscillations, tandis que les formulations stables de SUPG et GLS fournissent des solutions lisses. Les figures 2.23 et 2.24 présentent les vecteurs vitesse et les isobares en utilisant les formulations GLS(Q1Q1) et GLS(Q2SQ2S). On note que la solution avec les éléments bilinéaires est moins lisse que celle obtenue avec les éléments serendipity.

Sur la figure 2.25 la variation de pression obtenue par Gartling sur la paroi inférieure est présentée. Toutes les formulations, à l'exception de BG(Q2SQ1), reproduisent les mêmes profils de pression à 2% près. Dans le tableau 2.3 les valeurs de la pression sont présentés pour trois points sur la paroi inférieure. On note que les solutions des formulations standards ne sont pas en très bonne concordance avec la solution de référence de Gartling. Nous avons vu au paragraphe précédent que les éléments Q2SQ1 ne prédisent pas la pression suffisamment bien en raison de l'insuffisance des noeuds de vitesse.

2.6.2.3 La cavité entraînée

Le problème de la cavité entraînée sert depuis plus de 20 ans à valider les codes de calcul et à étudier de nouvelles formulations. Le problème est défini sur la figure 2.26. Ce problème n'a pas été encore étudié expérimentalement. Cependant, il existe une solution numérique très précise qui sert de référence. Cette solution a été obtenue par Ghia et al (1982). Ils ont utilisé une formulation aux différences finies centrées avec la méthode multigrille et un maillage très raffiné pour atteindre une solution indépendante du maillage. Le problème de la cavité est intéressant à étudier en raison de la présence de plusieurs régions de recirculation et également de l'existence de points de singularité aux coins supérieurs de la cavité. Nous avons effectué le calcul pour ce problème en utilisant les différentes formulations et différents maillages. Les maillages utilisés pour les formulations BGP(Q1P0), SUPG(Q1P0) et GLS(Q1Q1) sont de 30×30 , 32×32 , 45×45 , 80×80 éléments uniformément distribués, et 80×80 éléments non-uniformément distribués suivant la direction y . Pour les formulations BG(Q2SQ1) et GLS(Q2SQ2S) les maillages sont de 16×16 , 40×40 éléments et 40×40 éléments non-uniformément distribués, respectivement.

Dans un premier temps, les formulations GLS sont testées pour $Re=400$. Les

résultats sont comparés aux résultats de Tezduyar (1992), et Franca et Frey (1992). Ces auteurs ont étudié le problème de la cavité avec la formulation GLS pour $Re=400$ et avec des maillages comparables à cette étude. Sur les figures 2.27a et 2.27b la composante horizontale de vitesse (u) et le profil de pression au centre de la cavité sont présentés. Les résultats de cette étude sont en parfaite concordance avec ceux de Tezduyar et al. (1992). En revanche, les résultats de Franca et Frey (1992) semblent être moins bons. Sur les figures 2.27a et 2.27b les résultats obtenus par les autres formulations sont présentés pour comparaison. Il n'existe pas de différences notables entre les formulations GLS(Q2SQ2S) et BG(Q2SQ1) pour $Re=400$, puisque pour le maillage utilisé (16×16) le terme de convection n'est pas dominant et le rôle de modification des moindres carrés n'est pas important. Cependant, la solution obtenue avec la formulation SUPG semble être moins précise que la solution de la formulation GLS(Q1Q1). Cette différence sera explorée par la suite.

Les figures 2.28a-c présentent les profils de la composante horizontale de vitesse (u) pour différents maillages et pour $Re=1000$. On constate que la solution des formulations BGP(Q1P0) et GLS(Q1Q1) convergent relativement rapidement vers la solution de référence (Ghia et al, 1982), tandis que la formulation de SUPG(Q1P0) ne converge pas vers cette solution même pour le maillage comprenant 160×160 éléments uniformément distribués. La différence entre la formulation SUPG et GLS trouve son origine plus particulièrement dans le traitement du terme de pression. Dans la formulation GLS(Q1Q1), ce terme se retrouve dans le résidu des équations de Navier-Stokes grâce aux éléments bilinéaires Q1Q1, tandis que dans la formulation SUPG(Q1P0) le terme de pression s'annule en raison de l'utilisation des éléments de pression constants (voir éq. 2.46). On peut donc conclure que l'absence du terme de pression dans le résidu des équations de Navier-Stokes pour la formulation SUPG conduit à une solution plus diffusive ou dissipative que la formulation de GLS(Q1Q1). La présence des points de singularités aux coins supérieurs de la cavité ou la présence des régions où la pression varie fortement nécessite de discrétiser la pression avec plus de précision par rapport aux autres termes dans le résidu des équations de Navier-Stokes.

Sur la figure 2.29a les formulations SUPG(Q1P0), GLS(Q1Q1), GLS(Q2SQ2S) sont comparées pour $Re=5000$ et pour les maillages constitués respectivement de 32×32 et 16×16 éléments Q1 et Q2S. Comme pour le cas précédent, la formulation SUPG fournit une solution plus diffusive que les autres formulations étudiées ici. La solution de la formulation GLS(Q2SQ2S) est plus précise en raison de l'utilisation d'éléments d'ordre supérieur pour un maillage de résolution comparable. Sur la figure 2.29b les différentes formulations sont comparées pour des maillages raffinés (constitués respectivement de 80×80 et 40×40 éléments Q1 et Q2S). Les solutions des formulations GLS convergent vers les solutions des formulations Galerkin correspondantes (les formulations BGP(Q1P0) et BG(Q2SQ1)) tandis que la formulation GLS(Q2SQ2S) produit des profils de vitesse plus précis par rapport à la solution de

référence. Comme pour le cas $Re=1000$, la solution de SUPG(Q1P0) fournit une solution trop diffusive pour le maillage utilisé.

Sur la figure 2.29c les profils de pression au centre de la cavité sont présentés. On note que la formulation GLS(Q2SQ2S) produit une solution aussi précise que la formulation Bubnov-Galerkin (Q2SQ1). La stabilisation du terme de pression ne dégrade pas la précision de la solution. Le profil de pression obtenu avec la formulation GLS(Q2SQ2S) est plus précis que celui obtenu avec la formulation GLS(Q1Q1). La solution de la formulation SUPG est sous-estimée par rapport à la solution d'autre formulation et elle est très imprécise. Notons que le manque de précision ne peut pas être attribué à la méthode de pénalisation, car le profil de pression obtenu par la formulation BGP(Q1P0) est en bonne concordance avec d'autres formulations. La sous-estimation ou l'excès de dissipation se manifeste quand la formulation SUPG est implantée. Pour la méthode de pénalisation, la pression est calculée à l'aide de l'équation de Poisson (2.43). Nous avons également effectué le calcul avec la formulation SUPG en utilisant des éléments Q2SQ1 (formulation SUPG(Q2SQ1)) et nous avons comparé les résultats à une formulation inconsistante de SUPG (formulation SU(Q2SQ1)) dans laquelle le terme de pression est négligé dans le résidu des équations de quantité de mouvement (figure 2.30a). On voit que l'absence du terme de pression conduit à une solution extrêmement diffusive. Il faut noter que ce comportement n'est pas imputable à la condition de Babuska-Brezzi. En effet, nous avons répété le calcul avec des éléments Q2Q1 qui satisfont cette condition. Les résultats sont comparés sur la figure 2.30b. On constate le même comportement que celui des éléments Q2SQ1. De plus, on peut remarquer que lorsque la formulation SUPG est appliquée d'une manière consistante, elle fournit une solution sensiblement plus précise que la formulation standard de Galerkin. Bien que l'extension de la formulation SUPG aux éléments d'ordre supérieur soit immédiate du point de vue de l'implantation, le terme $\alpha < \nabla p, (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} >$ (voir éq. 2.46) est en général difficile à borner (Johnson et Saranen, 1986) et pose certaines questions mathématiques. Pour les exemples traités dans cette thèse, on n'a pas rencontré d'anomalies provenant de ce terme.

Sur les figures 2.31-2.32 les champs des vecteurs vitesse sont présentés pour les différentes formulations et pour des nombres de Reynolds de 5000 et 10000. A l'exception des formulations BGP(Q1P0) et BG(Q2SQ1) qui donnent des oscillations dans le coin supérieur droit pour un nombre de Reynolds supérieur à 3200, toutes les autres formulations fournissent des champs de vitesse sans oscillation. Dans tous les cas, les vecteurs vitesse obtenus par la formulation SUPG(Q1P0) sont plus petits et l'intensité des régions de recirculation est moins importante. Bien que la solution SUPG semble très diffusive, la formulation reproduit relativement correctement tous les détails de l'écoulement, même pour $Re=10000$, malgré un maillage de 32×32 éléments bilinéaires qui semble très lâche.

Sur les figures 2.33-2.34 les isobares sont présentés pour différents nombres de Reynolds en effectuant le calcul avec les formulations GLS(Q1Q1) et GLS(Q2SQ2S). Pour les nombres de Reynolds étudiés ici et les maillages utilisés, les isobares produites par la formulation GLS(Q2SQ2S) sont plus lisses que celles obtenues par la formulation GLS(Q1Q1). La formulation GLS(Q1Q1) ne résoud pas suffisamment bien les singularités aux coins supérieurs de la cavité. Ceci est dû au fait que le terme de diffusion, $2\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u})$, sous le signe somme de l'équation (2.76) s'annule pour les éléments bilinéaires (voir les paragraphes précédents pour une explication supplémentaire).

Pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés le terme $\mu\nabla.\epsilon(\mathbf{u})$ devient très petit et l'estimation de ce terme n'a pas beaucoup d'influence sur la précision. En revanche, pour des nombres de Reynolds modérés, la technique des moindres carrés présentée au paragraphe 2.5 peut être très efficace. Il faut mentionner que cette technique peut être appliquée aux équations de Navier-Stokes sans aucune modification. Pourtant, le schéma numérique devient sensiblement plus non-linéaire.

Nous avons effectué le calcul pour $Re=400$ et 1000 et pour un maillage uniforme de 32×32 éléments bilinéaires. Les résultats sont comparés sur les figures 2.35 et 2.36. On voit que pour les nombres de Reynolds étudiés ici, la solution de pression s'améliore quand le terme $\nabla.\epsilon(\mathbf{u})$ est estimé. La solution de vitesse reste pratiquement inchangée, bien qu'elle montre une tendance vers une meilleure précision. Les valeurs de pression calculées aux coins supérieurs pour la formulation GLS classique sont $(-1.33 \times 10^{-3}, 0.52)$ et $(2.89 \times 10^{-2}, 0.385)$ pour $Re=400$ et 1000 , respectivement. L'estimation de $\nabla.\epsilon(\mathbf{u})$ donne respectivement, $(-3.53 \times 10^{-2}, 0.56)$ et $(1.8 \times 10^{-2}, 0.40)$. Aucune itération supplémentaire n'a été nécessaire pour atteindre la convergence par rapport à la formulation GLS classique utilisant un schéma itératif du type Picard.

En ce qui concerne le temps de calcul, la formulation SUPG(Q1P0) est la plus économique en raison de l'élimination du terme de pression. Les deux formulations GLS(Q1Q1) et GLS(Q2SQ2S) pour le même maillage utilisent pratiquement le même temps cpu pour l'inversion du système d'équations par la méthode Frontale (voir Hood, 1976). Pour le maillage 32×32 (ou 16×16 pour les éléments serendipity) le temps cpu nécessaire pour atteindre la convergence après 13 itérations est respectivement de 81, 230, et 237 secondes pour les formulations SUPG(Q1P0), GLS(Q1Q1), et GLS(Q2SQ2S). Entre 60% et 70% du temps cpu est consacré à l'assemblage et l'inversion du système d'équations. Le calcul est effectué sur une station travail HP-715 (50 MHz). Le temps nécessaire pour l'inversion et l'assemblage du système d'équations est pratiquement proportionnel au nombre d'inconnues. Par conséquent les éléments Q1Q1 (3267 inconnues) consomment un peu plus que les éléments Q2SQ2S (2499 inconnues). Pourtant, le calcul des coefficients des équations avec les éléments Q2SQ2S est plus coûteux. Résultat, les deux formulations utilisent

pratiquement le même temps cpu. La place mémoire nécessaire pour les formulations SUPG(Q1P0), GLS(Q1Q1) et GLS(Q2SQ2S) est respectivement de 160, 340, et 280 koctets. Finalement, pour une précision donnée la formulation GLS(Q2SQ2S) est plus économique. Sur la figure 2.37 la solution de GLS(Q2SQ2S) avec 16×16 éléments biquadratiques (serendipity) correspond approximativement à la solution de GLS(Q1Q1) et à la solution de SUPG(Q1P0) avec 45×45 et 80×80 éléments bilinéaires, respectivement.

Les nombres d'itération nécessaires pour atteindre la convergence avec une critère de tolérance de 10^{-6} sont présentés dans les tableaux 2.4 et 2.5. Pour les nombres de Reynolds élevés la solution convergée à un nombre de Reynolds inférieur a été utilisé pour initialiser les calculs. Par exemple la solution pour $Re=10000$ est initialisée avec la solution convergée à $Re=400$. Ensuite, le nombre de Reynolds est augmenté par un pas de 200. Aucune tentative n'a été effectuée pour optimiser ou contrôler automatiquement le pas d'augmentation du nombre de Reynolds. On constate que les termes non-linéaires ajoutés par les formulations SUPG et GLS n'augmentent pas le nombre d'itérations nécessaire.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons traité la formulation de Galerkin et les formulations stables des éléments finis des équations de Navier-Stokes. La méthode de pénalisation est également présentée. Cette méthode est moins coûteuse en raison de l'élimination du terme de pression avant l'assemblage des équations globales. Deux difficultés principales résident dans le traitement numérique des équations de Navier-Stokes par la méthode des éléments finis classique (également par d'autre méthode de discrétisation telle que la méthode des volumes finis). La première provient du terme de convection. Nous avons présenté dans ce chapitre l'extension de la formulation SUPG (Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin) aux équations de Navier-Stokes. Cette formulation stabilise le terme de convection en ajoutant à la formulation Galerkin des termes auxiliaires qui dépendent du résidu des équations à résoudre. Le terme de pression est à l'origine de la deuxième difficulté (instabilité). La discrétisation du terme de pression doit respecter la condition de compatibilité de Babuska-Brezzi afin de préserver une solution stable de pression. Par exemple les éléments vitesse-pression du même ordre sont interdits. La formulation Petrov-Galerkin peut être appliquée aux équations de Navier-Stokes afin de stabiliser le terme de pression, en principe de la même manière que pour le terme de convection. La stabilisation permet de passer outre la condition de Babuska-Brezzi. La formulation GLS (Galerkin/Least-Squares) appartient à la famille des formulations de Petrov-Galerkin. Elle s'obtient en prenant le résidu des équations de Navier-Stokes, en le minimisant par les moindres carrés et en l'ajoutant à la formulation Galerkin. Nous avons présenté dans ce chapitre différentes versions de la formulation GLS telle que les formulations

"plus" et "moins". Nous avons démontré que ces formulations sont équivalentes en forme avec la formulation Galerkin+fonction de bulle.

La formulation GLS avec les éléments linéaires (triangulaires) et bilinéaires rencontre un problème de consistance car le terme de diffusion dans la partie des moindres carrés de la formulation s'annule. Ceci peut entraîner une dégradation de précision de la solution de pression près des frontières. La dégradation de la précision est parfois attribuée dans la littérature au fait que cette formulation impose une condition aux frontières de Neumann de type homogène sur la pression. Un remède à ce défaut proposé dans la littérature consiste à ajouter un terme intégral aux frontières pour supprimer cette condition aux frontières. Nous avons observé que cette intégrale aux frontières peut être également dérivée à partir des fonctions de bulle. En comparant la formulation GLS et la formulation Galerkin de l'équation de Poisson pour la pression nous avons démontré que la précision de la solution de pression peut être améliorée si le terme de diffusion est estimé par une technique des moindres carrés.

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre nous avons étudié la précision et le comportement de la formulation Galerkin et des formulations stables de SUPG et GLS à l'aide des problèmes de référence. Le comportement des différentes formulations dépend fortement du type de problème et du maillage utilisé. Ceci est prévisible dans la mesure où, pour les problèmes avec des solutions lisses, les imprécisions dues à l'inconsistance auront des effets néfastes négligeables. En résumé, nous pouvons conclure que:

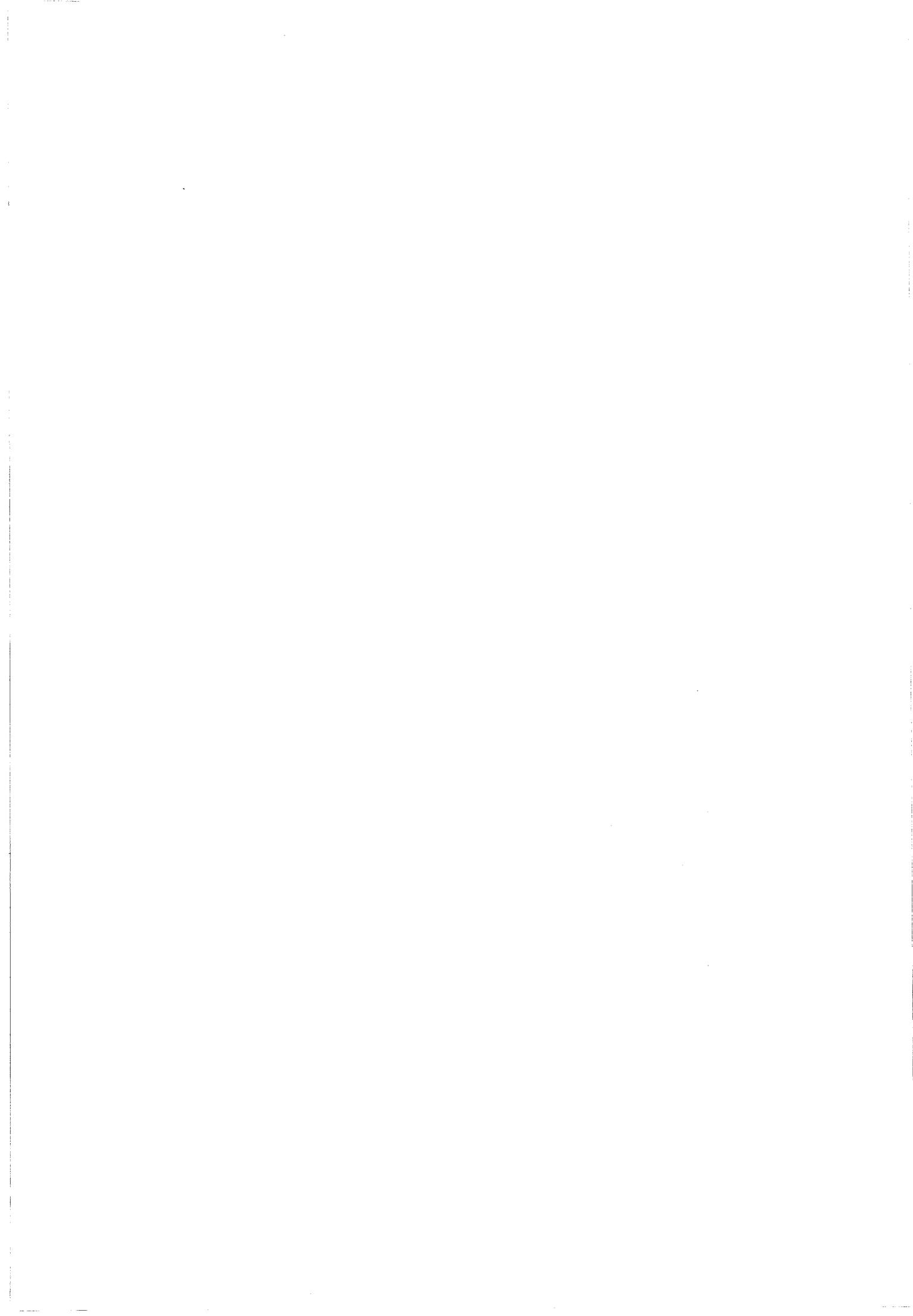
La formulation SUPG avec des éléments bilinéaires pour la vitesse et des éléments constants pour la pression présente un avantage indéniable au niveau du temps de calcul si elle est conjuguée avec la méthode de pénalisation. Concernant les deux écoulements sur la marche descendante et sur la double marche, la précision des champs de vitesse et de pression obtenus avec la formulation SUPG(Q1P0) sont tout à fait satisfaisante. Ces solutions sont en bonne concordance avec celles obtenues avec d'autres formulations, à savoir la formulation classique de Galerkin et les formulations Galerkin/Least-Squares, pour les maillages réalistes. Pourtant, pour l'écoulement sur la double marche, la solution de pression avec des éléments Q1P0 a présenté des oscillations dans la région en aval du col pour le maillage le plus grossier. Ces oscillations se sont également manifestées avec la formulation SUPG(Q2SQ1). Pour l'écoulement de Poiseuille pur nous avons démontré que les oscillations du champ de pression trouvent leur origine dans l'insuffisance des noeuds de vitesse. En effet pour l'écoulement de Poiseuille pur les éléments Q2Q1, qui dispose d'un noeud supplémentaire au centre de gravité, produisent une solution de pression lisse et précise. Nous avons mis en évidence le problème de consistance de la formulation SUPG(Q1P0) pour l'écoulement dans une cavité entraînée. La solution de vitesse obtenue avec cette formulation ne converge pas vers la solution de

référence en raffinant successivement le maillage. Le même symptôme s'est manifesté en utilisant les formulations inconsistantes de SUPG(Q2SQ1) et SUPG(Q2Q1) dans lesquelles le terme de pression est négligé dans le résidu des équations de quantité de mouvement. Nous avons noté que l'absence du terme de pression conduit à une solution extrêmement diffusive. Par conséquent, la stabilisation du terme de convection à la manière des méthodes de "upwinding" classiques (qui consistent à ajouter une diffusion numérique dans les équations de transport) pourraient rencontrer des dégradations de précision pour les problèmes où la solution de pression n'est pas lisse.

Les calculs ont démontré que les formulations GLS(Q1Q1) et (Q2SQ2S) stabilisent le terme de pression et de convection sans dégradation de précision. Nous avons démontré à l'aide des écoulements simples avec des solutions exactes que le calcul précis du terme de diffusion joue un rôle important dans la précision de la solution de pression. Nous avons estimé ce terme par une technique des moindres carrés. La précision de la solution de pression s'est effectivement améliorée pour les éléments bilinéaires. La formulation GLS avec des éléments Q2SQ2S a présenté le meilleur comportement concernant la stabilité et la précision des solutions de vitesse et de pression. Pour un maillage donné les deux formulations GLS(Q1Q1) et GLS(Q2SQ2S) consomment pratiquement le même temps de calcul. Pour le problème de la cavité, pour une précision donnée la formulation GLS avec des éléments Q2SQ2S est la plus économique.

Tous les calculs ont été effectués avec les schémas itératifs de Picard et de Newton-Raphson. Le système d'équations linéaire est calculé avec la méthode d'inversion directe Frontale. Toutes les formulations se comportent plus au moins de la même façon concernant le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence. Pour les nombres de Reynolds élevés la solution convergés à un nombre de Reynolds inférieur a été utilisé pour initialiser les calculs. Le temps de calcul, le nombre d'itération et la place mémoire nécessaire sont comparés au paragraphe 2.6.2.3 pour le cas de l'écoulement dans une cavité.

Partie II
Ecoulements Turbulents



Chapitre 3

Modélisation

3.1 Introduction

Dans la partie précédente nous avons étudié la simulation des écoulements laminaires. Dans ce chapitre on s'intéresse plus particulièrement aux écoulements turbulents. Il n'existe pas de théorie générale de la turbulence. Dans un écoulement laminaire, la turbulence se manifeste en raison de l'augmentation du nombre de Reynolds ou par l'influence de forces ou d'agitations extérieures. Le mécanisme de la transition du régime laminaire en régime turbulent n'est pas complètement éclairci à l'heure actuelle. La turbulence n'étant pas une propriété intrinsèque du fluide, elle est caractérisée par un certain nombre de propriétés de l'écoulement. L'état turbulent est une condition irrégulière de l'écoulement dans laquelle les diverses grandeurs caractéristiques présentent des variations aléatoires dans le temps et dans l'espace, mais les valeurs moyennes statistiques convergent. Le mouvement turbulent présente des fluctuations tridimensionnelles et instationnaires du rotationnel de la vitesse. L'écoulement est à la fois diffusif et dissipatif du fait de la présence de forts gradients de vitesse instationnaire. Le point de vue classique sur la turbulence est basé sur l'observation, l'intuition, l'analyse dimensionnelle, des hypothèses et des théories partielles et incomplètes (non-démontré formellement). Selon le point de vue classique, la turbulence est un mouvement tourbillonnaire. Pour un nombre de Reynolds suffisamment élevé, le mouvement présente un spectre étendu de dimension de tourbillons et un spectre correspondant en fréquence. Les plus gros tourbillons (fréquence basse) sont déterminés par les conditions aux limites de l'écoulement et leur dimension est de l'ordre de grandeur du domaine occupé par l'écoulement. Les plus petits tourbillons (haute fréquence) sont déterminés par les forces visqueuses. La largeur du spectre augmente avec le nombre de Reynolds. Les gros tourbillons interagissent avec le mouvement moyen car leurs échelles sont du même ordre de grandeur. Ils extraient de l'énergie cinétique de ce mouvement moyen. Cette quantité d'énergie est transmise aux petites échelles (petits tourbillons). Elle y est ensuite dissipée. La dissipation de cette énergie ne peut pas se faire au niveau des grandes échelles car les forces visqueuses y sont négligeables devant les forces d'inertie. Par conséquent, bien que la dissipation soit un processus visqueux dont les

petits tourbillons sont le siège, le taux de dissipation d'énergie est déterminé par les grandes échelles. La viscosité du fluide ne détermine pas le taux de dissipation, mais l'échelle à laquelle cette dissipation se produit. Les structures turbulentes peuvent être considérées comme des éléments tourbillonnaires qui s'étirent les uns les autres. Cet allongement des éléments tourbillonnaires produit le passage de l'énergie des gros tourbillons à des échelles de plus en plus petites jusqu'à ce que les forces visqueuses deviennent actives et dissipent l'énergie (échelles de Kolmogorov). C'est la cascade d'énergie.

Du fait de l'interaction avec l'écoulement moyen, les gros tourbillons dépendent fortement des conditions aux limites du problème. Le mouvement moyen présente souvent des directions privilégiées qui sont imposées aux mouvements turbulents à grande échelle. Ces gros tourbillons peuvent alors être fortement anisotropes. Durant le processus de cascade, la dépendance directionnelle diminue. Lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment grand pour que la zone des gros tourbillons et celle des petits tourbillons dissipatifs soient bien distinctes dans le spectre, cette dépendance directionnelle est presque totalement perdue: c'est la tendance à l'isotropie locale de la microturbulence. Les petites structures sont universelle et plus facile à modéliser tandis que les grosses structures sont très aléatoires et difficiles à modéliser.

Dans la première partie de cette thèse nous avons étudié la simulation des écoulements laminares à l'aide des équations de Navier-Stokes. On peut se demander si le calcul des équations de Navier-Stokes peut également fournir le champ turbulent aléatoire. En effet la résolution instationnaire des équations de Navier-Stokes peut donner une solution turbulente. Il faut noter que l'unicité de la solution des équations de Navier-Stokes n'est effectivement démontrée que pour des écoulements 2-D. La solution numérique des équations de Navier-Stokes dans le cas turbulent s'appelle dans la littérature la simulation numérique directe (DNS). "Directe" est ajouté pour la distinguer d'une autre simulation où les équations de Navier-Stokes sont manipulées (filtrées) avant d'être résolues. En principe et sur le plan numérique, la simulation n'est pas différente de la simulation des écoulements laminares sauf qu'elle est forcément instationnaire. La taille des mailles et le pas de temps doivent être très petits. De plus des conditions initiales ou aux limites spécifiques (e.g. les conditions aux limites périodiques) sont parfois nécessaires pour initialiser le calcul. Pour la simulation directe il faut que la taille de maille soit inférieure à l'échelle des petits tourbillons (échelles de Kolmogorov). Cependant, au delà de Mach 15, l'échelle de Kolmogorov devient du même ordre de grandeur que l'échelle d'agitation moléculaire et donc les équations de Navier-Stokes ne sont pas valables. La DNS est non-seulement très coûteuse mais nécessite également un traitement a posteriori complexe pour déterminer les diverses variables fluctuantes et moyennes. De plus la précision est aussi importante pour la simulation des écoulements turbulents que pour les écoulements laminares car la présence de diffusion numérique ou d'une imprécision quelconque mettra en défaut le résultat

et le coût dépensé sera perdu. A l'heure actuelle deux facteurs principaux limitent l'application de la simulation directe des écoulements turbulents dans l'industrie. Premièrement, la puissance informatique nécessaire n'est pas disponible pour les configurations complexes. Deuxièmement, des équipes de recherche compétentes doivent être formées pour l'analyse des résultats. Pour le moment la simulation numérique directe contribue à la compréhension des processus fondamentaux qui se produisent dans un écoulement turbulent. Deux cas sont largement étudiés par la DNS. Ce sont les écoulements de canal plan (e.g. Poiseuille pur, Kim et al. 1987, et Couette-Poiseuille, Kuroda et al., 1993) et la couche limite sur plaque plane, Spalart (1988).

Pour diminuer la puissance informatique nécessaire, il existe une technique qui consiste à calculer l'écoulement à partir des équations de Navier-Stokes sur un maillage plus lâche et à modéliser les mouvements d'échelle inférieure à la dimension de la maille. Il s'agit donc d'une simulation numérique des grosses structures turbulentes (LES). Celles qui seraient les plus difficiles à modéliser. Depuis les travaux de Deardorff (1970) de nombreux auteurs ont contribué au développement de la méthode LES. On peut distinguer plus particulièrement les travaux de l'équipe de W.C. Reynolds et Ferziger et leurs collaborateurs à Stanford (cf. Moin et Kim, 1982), et les travaux de Schumann et al. en Allemagne (cf. Schumann, 1975). Finalement, il faut noter la contribution significative de l'Institut de Mécanique de Grenoble (cf. Lesieur, Comte, et Metais, 1992) au développement de la méthode LES. Cette équipe a montré grâce à la méthode LES, l'existence numérique des structures cohérentes dans des couches de mélange.

Nous nous intéressons dans cette thèse à une troisième approche qui consiste à introduire des moyennes statistiques. La décomposition d'une grandeur instantanée de l'écoulement turbulent en une partie macroscopique et une partie fluctuante permet de développer un traitement statistique des équations du mouvement par l'emploi d'opérations de moyenne (à savoir moyenne temporelle, moyenne spatiale, moyenne statistique ou moyenne d'ensemble). Ce traitement appliqué aux équations de Navier-Stokes conduit à une perte d'information (fait apparaître des termes inconnus supplémentaire) qu'il faudra réintroduire par des modélisations: c'est le problème de fermeture. On distingue essentiellement dans l'approche statistique, les fermetures en un point basées sur une hiérarchie des moments en un point et les fermetures en deux points ou modèles spectraux basés sur une hiérarchie des moments en deux points distincts (ou leurs transformées de Fourier, les tenseurs spectraux). La première méthode a été largement utilisée pour le calcul des écoulements cisailés inhomogène rencontrés dans les situations réelles. La deuxième méthode est pratiquement limitée à la turbulence homogène isotrope et anisotrope (Schiestel, 1993).

En ce qui concerne la première méthode, de nombreux modèles de turbulence ont

été construits et proposés au fil des années, qui permettent (selon la complexité des modèles) le calcul des distributions de vitesse moyennes, de température moyenne, de l'énergie turbulente et des diverses corrélations de vitesses fluctuantes. Ce sont les modèles de longueur de mélange et les modèles à équations de transport. Ces modèles sont basés sur la fermeture en un point et sur l'hypothèse d'échelle unique. Dans le modèle à échelle unique il y a une hypothèse sous-jacente d'équilibre spectral. En effet toutes les structures turbulentes sont caractérisées à partir d'une seule échelle de longueur l . Les modèles multi-échelles permettent de s'affranchir de l'hypothèse d'équilibre spectral (Schiestel, 1993). Le domaine d'application de chaque modèle est bien-entendu plus ou moins limité selon le degré de généralité des hypothèses introduites.

Dans cette thèse on s'intéresse uniquement aux modèles en un point et à échelle unique, plus particulièrement aux modèles à deux équations de transport pour l'énergie turbulente et la dissipation.

3.2 Equations de transport de la turbulence en fluide incompressible

Dans ce paragraphe on va présenter les équations de transport de la turbulence en fluide incompressible. Ces équations ont deux objets principaux: (a) essayer d'expliquer ou de décrire plus au moins grossièrement les différents phénomènes physiques produits dans un écoulement turbulent, (b) permettre de résoudre approximativement l'écoulement turbulent. Nous verrons par la suite que ces équations sont ouvertes dans la mesure où le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. En effet chaque nouvelle équation fait apparaître de nouvelles inconnues. Les hiérarchies d'équations restent ouverte car à l'inverse de l'écoulement laminaire où il existe une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations (par l'intermédiaire de la viscosité du fluide), pour l'écoulement turbulent cette loi est absente. (Rappelons que la turbulence n'est pas une propriété du fluide). Dans le paragraphe 3.3 on tentera de fermer les équations de transport de la turbulence grâce à la modélisation.

3.2.1 Equations de quantité de mouvement

Considérons les équations de Navier-Stokes suivantes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (3.2)$$

où

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \quad (3.3)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4)$$

L'étude statistique de la turbulence du fluide a commencé depuis les travaux de O.C. Reynolds à la fin du siècle passé. Il a proposé de décomposer toute grandeur instantanée en une partie moyenne et une partie fluctuante:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad p = \bar{p} + p'$$

où \bar{u}_i et \bar{p} sont respectivement la vitesse et la pression moyenne. u'_i et p' sont la vitesse et la pression fluctuante.

L'utilisation de cette décomposition permet, après avoir effectué un moyennage temporel des équations de Navier-Stokes, d'obtenir les équations de Reynolds:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.5)$$

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (3.6)$$

où

$$\tau_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (3.7)$$

Les grandeurs à déterminer sont des moyennes temporelles. Nous remarquons que la non linéarité introduit des termes supplémentaires, à savoir les corrélations vitesse-vitesse fluctuante $\overline{u'_i u'_j}$, appelées tensions ou contraintes de Reynolds. Ces corrélations jouent un rôle diffusif vis à vis de la quantité de mouvement moyenne, bien qu'elles soient d'origine convective. Ces six inconnues supplémentaires sont les composantes d'un tenseur symétrique, le tenseur de Reynolds.

3.2.2 Equations pour l'énergie cinétique moyenne

L'équation de l'énergie cinétique moyenne s'obtient en multipliant l'équation (3.6) par \bar{u}_i .

$$\frac{1}{2} \rho \bar{u}_j \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{u}_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\tau_{ij} \bar{u}_i)}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \rho f_i \bar{u}_i \quad (3.8)$$

Le terme de dissipation dans l'équation (3.8) s'écrit à l'aide de (3.4) et (3.7):

$$-\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -(2\mu \bar{S}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -2\mu \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.9)$$

Le premier terme du membre de droite de (3.9) représente la dissipation visqueuse de l'énergie moyenne en chaleur. Le deuxième terme traduit la dissipation de l'énergie moyenne par le mouvement turbulent. A l'aide d'une étude d'ordre de grandeur, on peut démontrer que la dissipation visqueuse de l'énergie moyenne est négligeable devant la dissipation accomplie par le mouvement turbulent. La quantité d'énergie du mouvement moyen injectée dans le mouvement turbulent est déterminée par les grandes échelles. Dans le paragraphe 3.2.4 on montrera que cette quantité d'énergie apparaît comme un terme de production dans les équations de l'énergie turbulente.

3.2.3 Equations de transport pour les tensions de Reynolds

En utilisant la décomposition de Reynolds dans les équations de quantité de mouvement, il est possible d'établir les équations de transport pour les contraintes de Reynolds. On multiplie l'équation de quantité de mouvement de u_i par u'_j , puis on applique l'opération de moyennage temporelle. Ensuite, on refait l'opération en multipliant l'équation de quantité de mouvement de u_j par u'_i . On additionne les deux résultats et, après réarrangement, on obtient (voir Stanislas, 1981 pour la dérivation):

$$\begin{aligned} \overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} &= - \left[\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right] \\ (a) & \qquad \qquad \qquad (b) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\overline{u'_i u'_j u'_k} - \frac{p'}{\rho} (\delta_{ik} u'_j + \delta_{jk} u'_i) \right] \\ & \qquad \qquad \qquad (c) \qquad \qquad \qquad (d) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \overline{\nu u'_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \overline{\nu u'_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right] \\ & \qquad \qquad \qquad (e) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$+ \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \left[2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} - \nu \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right) \right]$$

(f) (g)

L'interprétation physique suivante peut être donnée aux différents termes:

- (a): convection des tensions par l'écoulement moyen
- (b): production par interaction entre le champ turbulent et l'écoulement moyen
- (c): diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse
- (d): diffusion turbulente due aux fluctuations de pression
- (e): diffusion visqueuse
- (f): redistribution de l'énergie cinétique turbulente entre les corrélations de vitesses (retour à l'isotropie pour les corrélations normales)
- (g): dissipation visqueuse

Remarque 1: Les termes de dissipation visqueuse et de diffusion visqueuse peuvent être simplifiés à l'aide de l'équation de continuité. Nous évitons cette simplification. La raison sera citée un peu plus loin.

Remarque 2: Pour un écoulement homogène et isotrope le terme de dissipation visqueuse peut être simplifié (voir Launder, 1984). Dans ce cas, le terme (g) s'écrit:

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} \quad (3.11)$$

où

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad (3.12)$$

ϵ est appelé taux de dissipation isotrope et homogène de la corrélation $\overline{u'_i u'_j}$.

3.2.4 Equation de transport de l'énergie cinétique turbulente

L'utilisation de la décomposition de Reynolds permet aussi de scinder l'énergie cinétique totale de l'écoulement en l'énergie cinétique moyenne plus l'énergie cinétique turbulente, notée k :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (3.13)$$

Il est possible de formuler une équation de transport pour l'énergie turbulente par contraction des indices dans l'équation (3.10). On obtient:

$$\begin{aligned} \overline{u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = & - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} + \frac{\overline{p u'_k}}{\rho} \right] \\ (a') & \qquad (b') \qquad (c') \qquad (d') \\ & + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u'_i \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)} \right] - \overline{\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

(e') (f')

où les différents termes ont la signification physique suivante:

- (a') : convection par l'écoulement moyen
- (b') : production d'énergie turbulente par l'écoulement moyen. Ce terme exprime le transfert d'énergie de l'écoulement moyen vers le mouvement turbulent.
- (c') : diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse
- (d') : diffusion turbulente due aux fluctuations de pression
- (e') : diffusion visqueuse
- (f') : dissipation de l'énergie turbulente en chaleur

Remarque 1: Lors de la contraction d'indice dans l'équation (3.10) le terme de redistribution disparaît.

Remarque 2: On note que le terme (f') est équivalent en forme avec le premier terme du membre droite de la relation (3.9), à savoir le terme de dissipation visqueuse de l'énergie moyenne. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas simplifié les termes (e) et (g) de l'équation (3.10). Cependant, pour le cas de la turbulence homogène (e.g. $\frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i \partial x_j} = 0$), les termes (e') et (f') de l'équation (3.14) peuvent être réarrangés pour donner:

$$\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u'_i \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right)} \right] - \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right) = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2} - \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \quad (3.15)$$

La première partie du membre de droite représente la diffusion visqueuse de l'énergie turbulente. Le deuxième terme est équivalent en forme avec le taux de dissipation de la turbulence homogène et isotrope, bien qu'il soit dérivé avec seulement l'hypothèse de la turbulence homogène.

Remarque 3: Dans un écoulement cisailé homogène où toutes les valeurs moyennes, à l'exception de la vitesse \bar{u}_i , sont indépendantes de la position, l'équation (3.14) s'écrit:

$$-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) signifie que pour un écoulement cisailé homogène, la production d'énergie turbulente est en équilibre local avec le taux de dissipation. Si on considère une seule longueur caractéristique et une seule vitesse caractéristique dans l'équation (3.16), à l'aide d'une étude d'ordre de grandeur, on peut montrer que le terme dissipatif est négligeable devant le terme production. Donc, pour équilibrer la production et la dissipation dans la relation (3.16), il faut que le processus de dissipation se produise à travers des structures plus petites que celles du mouvement moyen ou des grosses structures. Ce sont les échelles de Kolmogorov.

3.2.5 Equation de transport du taux de dissipation

Une dernière équation de transport est généralement utilisée dans les différents modèles de turbulence. Elle se déduit également des équations de Navier-Stokes. Il s'agit de l'équation de transport pour le taux de dissipation ϵ . Dans la littérature (voir Launder, 1984) la dérivation de cette équation est attribuée à Davidov (1961).

$$\overline{u_k} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = \underbrace{- 2\nu \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{(a'')} - \underbrace{2\nu \overline{u'_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k}}_{(b'')}$$

$$\begin{aligned}
& - 2\nu \underbrace{\left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right]}_{(c'')} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\underbrace{u'_k \epsilon'}_{(d'')} + 2 \underbrace{\frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}_{(e'')} - \underbrace{\nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k}}_{(f'')} \right] \quad (3.17) \\
& - 2\nu^2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)^2}_{(g'')}
\end{aligned}$$

La signification des différents termes est la suivante:

- (a'') : convection par l'écoulement moyen
- (b'') : production par l'écoulement moyen
- (c'') : production par le mouvement turbulent
- (d'') : diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse
- (e'') : diffusion turbulente due aux fluctuations de pression
- (f'') : diffusion moléculaire
- (g'') : dissipation visqueuse de la dissipation

3.3 Le problème de fermeture

Nous avons vu dans le paragraphe 3.2 que le procédé de décomposition et de moyennage des équations de Navier-Stokes aboutit à une hiérarchie d'équations ouvertes. Pour fermer le système d'équations il faut faire appel aux hypothèses de modélisation. Dans cette thèse on s'intéresse au modèle en un point et à échelle unique. Ces modèles sont classés selon le nombre d'équations de transport à résoudre. Ce sont:

- (1) modèles à zero équation de transport (modèle de longueur de mélange)
- (2) modèles à une équation de transport (modèle $k - l$)
- (3) modèles à deux équations de transport (modèle $k - \epsilon$)
- (4) modèles aux tensions de Reynolds (modèle RSM)

Dans cette thèse on s'intéresse plus particulièrement au modèle à deux équations de transport $k - \epsilon$. Ce modèle est présenté dans le paragraphe 3.3.3. Pour des raisons de clarté de l'exposé on a préféré présenter le modèle de longueur de mélange et le modèle à une équation de transport avant d'étudier le modèle $k - \epsilon$.

3.3.1 Le modèle de longueur de mélange

Boussinesq (1877) par analogie avec l'écoulement laminaire a proposé une loi de comportement pour les tensions de Reynolds. Pour un écoulement cisailé en couche mince cette relation s'écrit:

$$\tau = -\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (3.18)$$

ou u' et v' sont les vitesses fluctuantes suivant x et y , respectivement. μ_t est la viscosité turbulente à définir. Elle est considérée isotrope, scalaire, mais fonction de l'espace.

Prandtl (1925) par analogie avec la théorie cinétique des gaz a proposé de calculer μ_t par la relation suivante:

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (3.19)$$

où l_m s'appelle la longueur de mélange. Elle est proportionnelle à l'épaisseur de la couche de mélange (l'échelle des gros tourbillons) ou à la distance de paroi. En théorie cinétique des gaz, le libre parcours moyen des molécules peut être supposé petit devant les dimensions de l'écoulement. Par contre en turbulence, le rapport $\frac{l_m}{L}$ reste de l'ordre de l'unité. L est la dimension du domaine occupé par l'écoulement. Bien-entendu l_m dépend de type d'écoulement. Différentes expressions pour déterminer cette longueur sont proposées dans la littérature (à titre d'exemple, Nikuradse, 1932, Prandtl, 1945 et Reichardt, 1959).

L'inconvénient du modèle de longueur de mélange est le fait que la viscosité turbulente s'annule en même temps que $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ et que l_m est fortement dépendant du type d'écoulement. De plus, pour certains écoulements, une expression analytique pour l_m n'est pas envisageable (e.g. écoulements avec des zones de recirculation). L'avantage de ce modèle trouve son origine dans sa simplicité et son réalisme. Pour une expérience donnée la valeur exacte de μ_t peut être introduite dans le calcul. Le calcul turbulent peut s'effectuer à l'aide d'un code laminaire avec peu de modification.

Remarque: Si on suppose que v' est du même ordre de grandeur que u' , la loi de comportement (3.18) avec la relation (3.19) traduit l'utilisation d'une échelle de vitesse u et une échelle de longueur l_m dans les équations du mouvement (3.6), soit: $\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{u'}{l_m}$. Ce choix n'est effectivement applicable qu'aux écoulements avec une seule échelle de vitesse et une seule échelle de longueur.

3.3.2 Le modèle à une équation de transport

Prandtl (1942) a proposé de déterminer l'échelle caractéristique de vitesse u' à l'aide de l'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence. En effet on suppose $u'^2 \sim k$. Dans ce cas, la viscosité turbulente (3.19) s'écrit:

$$\mu_t = \rho C_\mu k^{1/2} l \quad (3.20)$$

où l est la longueur caractéristique à définir pour chaque type d'écoulement.

L'équation de transport pour k (équation 3.14) contient des termes inconnus qui doivent être modélisés. Dans la suite nous présentons la méthode de modélisation de l'équation de transport pour k proposée par Prandtl.

Pour le terme de diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse et de pression, par analogie avec le transfert de chaleur et à l'aide de l'hypothèse de diffusion par gradient, la relation suivante est proposée:

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_k} + \frac{\overline{p}}{\rho} u'_k \right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] \quad (3.21)$$

On prend $\sigma_k = 1$. Il est supposé que l'énergie cinétique turbulente diffuse de la même manière que la quantité de mouvement.

Pour le terme de dissipation, on suppose un équilibre spectral entre la dissipation et la production, soit $\epsilon \sim u_\epsilon^3 / l_\epsilon \sim u^3 / l \sim k^{3/2} / l$ où u_ϵ et l_ϵ sont la vitesse caractéristique et la longueur caractéristique des petits tourbillons. Les définitions appropriées des échelles de Kolmogorov sont: $u_\epsilon \sim (\nu \epsilon)^{1/4}$ et $l_\epsilon \sim (\nu^3 / \epsilon)^{1/4}$. Par conséquent l'équation de transport pour k s'écrit:

$$\overline{u'_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2} - C_\epsilon \frac{k^{3/2}}{l} \quad (3.22)$$

où

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \overline{S}_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3.23)$$

Le terme $\frac{2}{3} k \delta_{ij}$ est ajouté dans la loi de comportement de Boussinesq pour qu'en contractant les indices on ait $\overline{u'_i u'_i} = 2k$.

Pour déterminer les constantes C_μ et C_ϵ on fait appel à des expériences de référence. Pour la zone logarithmique de la couche limite à cisaillement constant près d'une paroi ($\tau \sim cte$ et $\tau / \rho k \sim 0.3$), on suppose que:

$$P = \epsilon \quad (3.24)$$

où

$$P = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad (3.25)$$

et

$$\epsilon = C_\epsilon \frac{k^{3/2}}{l} \quad (3.26)$$

soit:

$$P = \nu_t \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \frac{\tau^2}{\rho^2 \nu_t} = \frac{\tau^2}{\rho^2 C_\mu k^{1/2} l} = \epsilon = C_\epsilon \frac{k^{3/2}}{l} \quad (3.27)$$

$$\frac{\tau^2}{\rho^2 k^2} = C_\mu C_\epsilon \quad (3.28)$$

$$C_\mu C_\epsilon = 0.09 \quad (3.29)$$

Pour trouver les valeurs de C_μ et C_ϵ on procède de la manière suivante:

$$\mu_t = \rho l^2 \frac{d\bar{u}}{dy} = \sqrt{\tau \rho} l = C_\mu \rho k^{1/2} l \quad (3.30)$$

On déduit:

$$C_\mu = (C_\mu C_\epsilon)^{1/4} \quad (3.31)$$

soit:

$$C_\mu = 0.548 \quad (3.32)$$

$$C_\epsilon = 0.164 \quad (3.33)$$

Remarque 1: Le modèle de longueur de mélange est un cas simplifié du modèle $k-l$. Pour la région en équilibre local on peut écrire: $k \sim \tau/\rho \sim \overline{u'v'}$. On en déduit $-\overline{u'v'} \frac{d\bar{u}}{dy} \sim \frac{\overline{u'v'}^{3/2}}{l}$, soit $-\overline{u'v'} \sim l^2 \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{d\bar{u}}{dy} \sim \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy}$.

Remarque 2: L'avantage du modèle $k-l$ sur le modèle de longueur de mélange, est que la viscosité turbulente ne s'annule pas en même endroit que $\frac{d\bar{u}}{dy}$. De plus l'influence des conditions en amont est envisageable par l'application des conditions aux frontières sur k .

3.3.3 Le modèle à deux équations de transport

La longueur caractéristique l dans la définition (3.20) et l'équation (3.22) limite l'application du modèle $k - l$ car l dépend fortement du type de l'écoulement. L'hypothèse de l'équilibre spectral permet de substituer à l la dissipation ϵ pour laquelle une équation de transport peut être modélisée. On procède de la manière suivante:

$$P = \epsilon \quad (3.34)$$

soit:

$$-\frac{\tau d\bar{u}}{\rho dy} = \epsilon \quad (3.35)$$

pour la zone logarithmique ($\tau \sim \rho k$):

$$-\frac{\tau d\bar{u}}{\rho dy} \sim \frac{\tau^2}{\rho^2 k^2} \epsilon \quad (3.36)$$

soit:

$$\tau \sim \rho \frac{k^2 d\bar{u}}{\epsilon dy} \quad (3.37)$$

on déduit:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.38)$$

Si on répète la procédure (3.24-3.29) avec la relation (3.38) on trouve

$$C_\mu = 0.09 \quad (3.39)$$

L'analyse par ordre de grandeur de l'équation (3.17), à grand nombre de Reynolds turbulent, démontre (voir Launder, 1984) que cette équation est dominée par le terme de production et par le terme de dissipation visqueuse. C'est à dire que le seul facteur qui influence effectivement le niveau de ϵ est la différence entre les termes (c'') et (g''). Il est donc sans espoir de modéliser cette équation puisque le taux de variation de ϵ est bloqué (contrôlé) par les corrélations non-mesurables gérées par le mouvement des petites échelles. On note que l'équation de transport pour k (eq. 3.22) ne modélise que le mouvement turbulent à grande échelle. Donc, on abandonne l'équation (3.17) et on propose l'équation de transport suivante pour le taux de dissipation. Cette équation est obtenue par intuition, analyse dimensionnelle, et analogie (voir Launder, 1984).

$$\overline{u_k} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon P}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.40)$$

L'équation pour ϵ doit contenir au moins un terme source et un terme puit. Le terme puit est nécessaire pour que la dissipation décroisse assez rapidement dans un écoulement homogène derrière une grille. Sinon k devient négatif. Le terme source est nécessaire pour que, si le niveau de k augmente, la dissipation augmente également. La forme des termes source et puit est proposée par Davidov (1961).

Le terme de diffusion est proposé par analogie avec l'équation de transport pour k , basé sur l'hypothèse de diffusion par gradient avec une viscosité isotrope.

La décroissance de la turbulence derrière grille permet de fixer la valeur de $C_{\epsilon 2}$. On a donc,

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.41)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = -\epsilon \quad (3.42)$$

La solution des équations s'écrit:

$$k = t^{\frac{-1}{C_{\epsilon 2}-1}} \quad (3.43)$$

Les mesures de la décroissance derrière une grille fournissent la gamme de variation de $C_{\epsilon 2}$. Elle varie selon le degré d'anisotropie et le nombre de Reynolds.

$$C_{\epsilon 2} \sim 1.8 - 2.0 \quad (3.44)$$

Basée sur le taux d'élargissement d'un jet plan, d'un jet circulaire et de la couche de mélange on trouve

$$C_{\epsilon 1} \sim C_{\epsilon 2} - 0.47 \quad (3.45)$$

La zone logarithmique de la couche limite turbulente fournit la valeur de σ_ϵ . On suppose avec approximation que $P = \epsilon$ et $\frac{D\epsilon}{Dt} = 0$. Pour la zone logarithmique

l'expérience montre que $l_m = \kappa y$ où $\kappa \sim 0.4$ est la constante de Von-Karman. Alors, on simplifie l'équation (3.40) en:

$$C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\epsilon \sqrt{C_\mu}} \quad (3.46)$$

et on trouve:

$$\sigma_\epsilon \sim 1.3 \quad (3.47)$$

Cette valeur est déterminé par optimisation en faisant appel au plusieurs expériences de référence.

Remarque : Il existe d'autres modèles à deux équations de transport. Ces modèles se distinguent par le choix de la seconde grandeur caractéristique, soit $Z \sim k^m l^n$. Ce sont les modèles $k - \omega$, Kolmogorov, (1942), $k - kl$, Rotta (1968), et $k - k/l^2$, Spalding (1969). ω est la fréquence. L'emploi de ces modèles aboutit à une équation de la forme de (3.46). Pour ces modèles l'équation (3.46) fournit des valeurs de σ_ϵ qui varient fortement en fonction de y (Spalding, 1977). Il semble que le modèle $k - \epsilon$ a été proposé initialement par Harlow et Nakayama (1968). La forme (3.40) est apparue dans le travail de Launder et Spalding (1972).

3.3.4 Quelques mots sur les inconvénients du modèle $k - \epsilon$

Nous avons vu que dans le modèle $k - \epsilon$ les tensions de Reynolds sont reliées linéairement aux taux de déformation par l'intermédiaire de l'hypothèse de Boussinesq suivante:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3.48)$$

Cette définition provoque certains défauts et imprécisions que nous allons présenter ci-dessous. Nous suivons ici la présentation de Speziale (1987).

Considérons le cas d'un écoulement par droites parallèles établi. La relation (3.48) prédit:

$$\overline{u'_1 u'_1} = \overline{u'_2 u'_2} = \overline{u'_3 u'_3} = \frac{2}{3} k \quad (3.49)$$

- On constate que le modèle $k - \epsilon$ fournit des tensions de Reynolds isotropes. Ceci est absolument en désaccord avec les évidences expérimentales.
- Les expériences mettent en évidence des mouvements secondaires dans des canaux non-circulaires. On peut démontrer que pour que le mouvement secondaire existe, on doit avoir $\overline{u'_1 u'_1} - \overline{u'_2 u'_2} \neq 0$, où les indices 1 et 2 présentent les directions transversales (voir Speziale, 1987). Par conséquent, le modèle $k - \epsilon$ n'est pas capable de fournir le mouvement secondaire.
- Un écoulement avec des zones de recirculation est un autre exemple où le modèle $k - \epsilon$ rencontre un défaut. Considérons le champ de vitesse arbitraire suivant:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_1(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + \bar{u}_2(x_1, x_2)\mathbf{e}_2 \quad (3.50)$$

La relation (3.48) produit

$$\overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2} = 2\overline{u'_3 u'_3} \quad (3.51)$$

Ce qui n'est pas en général vrai.

Ces imprécisions ne sont pas significatives pour des écoulements turbulents en couche mince, car les tensions normales n'interviennent pas dans le calcul de la vitesse moyenne. En revanche, pour les écoulements avec des zones de recirculation les tensions normales jouent un rôle important dans le calcul du champ moyen à travers des termes $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$. x et y sont respectivement les directions longitudinale et transversale.

- Les régions de stagnation et de recollement (déformation compressive forte) révèlent un autre défaut du modèle $k - \epsilon$. Considérons la production de l'énergie turbulente (pour le cas d'un écoulement 2-D):

$$P = -\overline{u'_1 u'_1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} - \overline{u'_2 u'_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} - \overline{u'_1 u'_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.52)$$

En tenant compte de l'équation de continuité pour un écoulement incompressible, les deux premiers termes du membre droite s'équilibrent. La production d'énergie turbulente dépend principalement du troisième terme. En revanche, l'application de la relation Boussinesq dans la relation (3.52) produit des termes quadratiques qui s'additionnent. Par conséquent, le modèle $k-\epsilon$ fournit des niveaux d'énergie turbulente exagérés.

Pour palier partiellement à ces défauts, Speziale (1987), à l'aide d'un développement asymptotique, a introduit un modèle $k-\epsilon$ non-linéaire. Le modèle est une extension quadratique du modèle linéaire. Le développement asymptotique est soumis à certaines contraintes telle que l'invariance dimensionnelle et tensorielle, et la réalisabilité. Pour en savoir plus on pourra se référer à Speziale (1991). Les tensions de Reynolds du modèle non-linéaire s'écrivent:

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - 2C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \bar{S}_{ij} - 4C_D C_\mu^2 \frac{k^3}{\epsilon^2} \times (\dot{\bar{S}}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\bar{S}}_{kk}\delta_{ij} + \bar{S}_{ik}\bar{S}_{kj} - \frac{1}{3}\bar{S}_{kl}\bar{S}_{kl}\delta_{ij}) \quad (3.53)$$

où

$$\dot{\bar{S}}_{ij} = \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \bar{S}_{kj} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \bar{S}_{ki} \quad (3.54)$$

$C_D = 1.68$ et $\dot{\bar{S}}_{ij}$ est la dérivé Oldroyde de \bar{S}_{ij} par définition. L'expérience de Laufer (1950) pour un écoulement de Poiseuille pur est utilisée pour fixer la valeur de C_D dans la région d'équilibre local. Le modèle est encore en cours de développement. Il n'a pas encore été complètement testé pour les problèmes de référence.

Les modèles à deux équations de transport $k-\epsilon$ linéaire et non-linéaire sont largement utilisés dans l'industrie pour prédire les écoulements réels. Dans certaines situations, ils arrivent à un bon compromis entre précision et économie.

Pour palier les défauts du modèle $k-\epsilon$, le modèle au second ordre (modèle aux tensions de Reynolds) se présente comme un candidat potentiel. Ce modèle dispense de l'utilisation de l'hypothèse de Boussinesq, puisqu'il est basé sur la résolution des équations de transport des tensions de Reynolds. Les termes de dissipation, redistribution et diffusion doivent être modélisés. La modélisation introduit naturellement des erreurs, mais le fait que le terme de production des tensions de Reynolds ne nécessite aucune modélisation, présente un avantage certain. Le niveau des tensions de Reynolds est fortement dépendant du terme de production. Cependant, les modèles au second ordre sont loins d'être considérés comme une panacée. La difficulté principale réside dans le traitement du terme de pression (le terme de redistribution de l'énergie turbulente). Ce terme n'intervient pas dans le modèle $k-\epsilon$ car la contraction de la redistribution de l'énergie s'annule. Malgré la généralité

supérieure du modèle aux tensions de Reynolds par rapport au modèle à deux équations, le modèle au second ordre rencontre certains problèmes numériques. Le calcul avec ce modèle devient très instables surtout pour des écoulements fortement convectifs. De plus, le coût de calcul est très élevé. Il est très difficile d'obtenir une solution indépendante du maillage à la fois pour le champ moyen et pour les grandeurs turbulentes. Il n'est pas certain qu'en dépensant par exemple deux fois plus, on obtienne une solution d'une précision nettement supérieure par rapport à un modèle à deux équations de transport. En tout cas, les recherches se poursuivent dans le domaine de l'analyse numérique pour trouver des algorithmes ou des formulations plus stables et plus économiques (voir Lien et Leschziner, 1994).

3.3.5 Les modèles $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds

Le modèle $k - \epsilon$ sous la forme (3.22) et (3.40) n'est pas applicable dans des zones proches d'une paroi (zone pariétale) et aux endroits où le nombre de Reynolds turbulent $Re_t = k^2/\nu\epsilon$ devient faible. Deux solutions sont possibles pour étendre le modèle jusqu'à paroi. La première consiste à utiliser des fonctions de paroi. Ces fonctions utilisent les lois universelles de la zone interne de la couche limite pour prescrire, dans la zone logarithmique pleinement turbulente, des valeurs des grandeurs moyennes et turbulentes. Ceci permet de sauter le domaine pariétal où Re_t est faible. Cette zone s'étend jusqu'à une distance en $y^+ = u_\tau y/\nu$ de l'ordre de $y^+ \sim 50$. Cette méthode évite également de mailler les zones de fort gradient adjacentes à la paroi, ce qui réduit le nombre de point de maillage. Pourtant, dans les écoulements où u_τ s'annule à la paroi (e.g. les écoulements de Couette-Poiseuille et les écoulement avec des zones de recollement), l'une des couches de paroi devient d'épaisseur infinie et par conséquent rend les fonctions de paroi inutilisables.

Il existe une deuxième approche qui consiste à modifier les équations de transport pour k et pour ϵ afin qu'elles prennent en compte l'effet de la paroi sur la turbulence. Dans cette approche la région pariétale est également maillée. L'adaptation des équations se traduit par l'apparition de termes supplémentaires et de fonctions d'amortissement. Le système d'équations devient:

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}} \quad (3.55)$$

$$\overline{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P - D - \tilde{\epsilon} \quad (3.56)$$

$$\overline{u}_k \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\tilde{\epsilon} P}{k} - C_{\epsilon 2} f \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E \quad (3.57)$$

où

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + D \quad (3.58)$$

Patel et al. (1985) ont critiqué les différents modèles à bas nombre de Reynolds. Ces modèles diffèrent par la définition des termes E et D et les fonctions d'amortissement. Monnier (1989) a également étudié plusieurs modèles à bas nombre de Reynolds dont le modèle de Launder et Sharma (1974), le modèle de Lam-Bremhorst (1981) et le modèle de Chien (1982). En résumé, le modèle de Jones et Launder (1973) et le modèle de Chien sont les modèles les plus caractéristiques des divers modèles à bas nombre de Reynolds. Par conséquent, on présentera ici seulement ces deux modèles. Le modèle de Jones-Launder et celui de Chien sont introduits avant que les résultats des simulations numériques directes ne soit disponibles. Ces modèles sont donc largement empiriques. Récemment, Rodi et Mansour (1993) ont utilisé des résultats des simulations numériques directes effectuées pour des écoulements de Poiseuille pur à $Re_\tau = 180$ et 395 pour modifier les anciens modèles. On présentera également brièvement la version modifiée du modèle de Rodi et Mansour réalisée par Michelassi et Rodi (1993).

Le terme D:

Dans les zones pariétales, à l'aide d'un développement de Taylor et en tenant compte de l'équation de continuité, les fluctuations u' , v' et w' s'écrivent:

$$u' = a_u y + b_u y^2 + \dots \quad (3.59)$$

$$v' = b_v y^2 + \dots \quad (3.60)$$

$$w' = a_w y + b_w y^2 + \dots \quad (3.61)$$

A l'aide des définitions (3.12) et (3.13), l'énergie turbulente et la dissipation s'écrivent:

$$k = a_k y^2 + b_k y^3 + \dots \quad (3.62)$$

$$\epsilon = 2a_k + 4b_k y + \dots \quad (3.63)$$

On constate que la valeur de ϵ est non-nulle à la paroi, ce qui est en accord avec les mesures et la simulation numérique directe. A l'aide de (3.62) et (3.63), la condition à la paroi la plus appropriée pour ϵ s'écrit (Hanjalic et Launder, 1976):

$$\epsilon_{paroi} = 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)_{paroi}^2 \quad (3.64)$$

où y est la direction normale à la paroi. Cependant, il n'est pas très commode d'appliquer la condition (3.64), car elle dépend de la solution de k . Ceci peut entraîner une instabilité et rendre la convergence des solutions de k et de ϵ plus difficile. Jones et Launder (1973) ont proposé de modifier l'équation de transport pour k avec le terme

$$\text{Jones-Launder} \quad D = 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \quad (3.65)$$

et d'imposer $\tilde{\epsilon} = \epsilon - D = 0$ à la paroi. Chien (1982) pose

$$\text{Chien} \quad D = 2\nu \frac{k}{y^2} \quad (3.66)$$

dans son modèle. A l'aide des relations (3.62) et (3.63), on constate que le terme D de Chien diffère de $2b_k y$ avec la valeur de ϵ à la paroi. Cependant, il est plus facile de discrétiser le terme D de Chien que celui de Launder et Jones par une méthode des éléments finis. Certains auteurs (e.g. Lam-Bremhorst, 1981) ont proposé d'imposer $\frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 0$ à la paroi, ce qui est en désaccord avec la simulation numérique directe.

Michelassi et Rodi en modifiant le modèle de Rodi-Mansour proposent

$$\text{Michelassi et Rodi} \quad D = 2\tilde{\epsilon} \times \exp(-0.095 Re_k) \quad (3.67)$$

où $Re_k = y\sqrt{k}/\nu$. Michelassi et Rodi n'ont pas justifié physiquement ce terme. Pour reproduire la solution de ϵ de la DNS pour $y^+ < 15$, le terme D est modifié (voir également le terme E de Rodi-Mansour ci-dessous).

Le terme E:

Jones et Launder (1973) ont introduit

$$\text{Jones-Launder} \quad E = 2\nu\nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2 \quad (3.68)$$

Ils indiquent ne pouvoir donner de justification physique quant à la forme de ce terme, mais constatent qu'il permet de prédire correctement les pics pariétaux d'énergie turbulente mesurée par Laufer (1950). Plus tard, Hanjalic et Launder (1976) ont justifié ce terme par l'application de l'hypothèse de diffusion par gradient au terme (b'') de l'équation (3.17). Pour équilibrer le terme de diffusion visqueuse au voisinage de la paroi dans l'équation de transport pour $\tilde{\epsilon}$, Chien introduit

$$\text{Chien} \quad E = -2\nu \frac{\tilde{\epsilon}}{y^2} \exp(-0.5y^+) \quad (3.69)$$

Le terme E de Chien entraîne une variation quadratique de $\tilde{\epsilon}$ près des parois. Grâce à la fonction d'amortissement dans E , ce terme n'est effectif que dans la sous couche visqueuse. Il est plus facile de discrétiser le terme E de Chien avec une méthode des éléments finis. Le terme E de Jones-Launder dépend de la deuxième dérivé de la vitesse. Des éléments sophistiqués ou des traitements à postériori seront nécessaires pour traiter ce terme. Les modèles de Jones-Launder et de Chien sont largement empiriques. Rodi et Mansour ont comparé le comportement de ces modèles au résultat des simulations numériques directes obtenus pour un écoulement de Poiseuille pur à $Re_\tau = 395$ (basé sur la demi hauteur du canal et la vitesse de frottement). Ces modèles ne prédisent pas correctement la variation de ϵ tout près des parois. Basé sur le résultat des DNS, Rodi et Mansour proposent:

$$\text{Rodi et Mansour} \quad E = 1.2\nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2 + 0.0075\nu \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (3.70)$$

Le premier terme correspond à celui proposé par Jones-Launder. Il est toujours positif. Le deuxième terme de E rend une production par l'écoulement moyen négative (dans l'équation pour ϵ , le terme b" de 3.17) près des parois, ce qui est observé par la DNS.

Les fonctions f et f_μ :

La fonction f est introduite principalement pour modifier le terme puit de ϵ dans les régions de Re_t faible. Les mesures de la décroissance derrière une grille montrent que l'exposant de l'équation (3.43) s'atténue lorsque le nombre de Reynolds turbulent diminue. Chien et Jones-Launder adoptent la fonction d'amortissement suivante:

$$f = 1.0 - 0.22 \exp(-Re_t/6)^2 \quad (3.71)$$

Cette fonction tend asymptotiquement vers 1 pour $Re_t > 15$. Sa région d'influence est limitée à la sous-couche visqueuse.

Jones et Launder indiquent que la valeur de ν_t au voisinage de la paroi doit dépendre des valeur locales de k et de $\tilde{\epsilon}$. Ils utilisent Re_t comme paramètre de leur fonction f_μ . Elle s'écrit:

$$\text{Jones-Launder} \quad f_\mu = \exp\left(-\frac{3.4}{\left(1 + \frac{Re_t}{50}\right)^2}\right) \quad (3.72)$$

Près des parois, Chien pense que ν_t est directement liée à y^+ , aussi construit-il sa fonction à partir de cette grandeur. Elle s'écrit:

$$\text{Chien} \quad f_\mu = 1.0 - \exp(-0.0115y^+) \quad (3.73)$$

Rodi et Mansour retiennent y^+ dans la définition de f_μ . En se basant sur les résultats de la DNS, ils proposent:

$$\text{Rodi-Mansour} \quad f_\mu = 1.0 - \exp(-2.10^{-4}y^+ - 6.10^{-4}y^{+2} + 2.510^{-7}y^{+3}) \quad (3.74)$$

Les constantes des modèles:

Les constantes des modèles sont présentées dans le tableau suivant:

modèle	c_μ	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
Jones-Launder	0.09	1.44	1.9	1.0	1.3
Chien	0.09	1.35	1.8	1.0	1.3
Rodi-Mansour	0.09	1.44	1.9	1.3	1.3

Rodi-Mansour pose $\sigma_k = 1.3$ pour améliorer la prédiction de k au centre du canal pour l'écoulement de Poiseuille pur.

Remarque 1: Monnier (1989) a étudié les performances du modèle de Launder-Sharma et du modèle de Chien pour prédire les écoulements de Poiseuille pur. Le modèle de Launder-Sharma ne diffère pas du modèle de Jones-Launder. Les constantes sont simplement réoptimisées. Michelassi et Rodi ont également appliqué leur modèle à un écoulement de Poiseuille pur. Les travaux de Monnier et Michelassi-Rodi montrent que:

Le modèle de Jones-Launder sous-estime le pic pariétal d'énergie turbulente. Ceci est imputable à la définition de f_μ et au terme E . Le modèle de Chien prédit très bien le pic pariétal de k , mais le niveau de k au centre du canal reste sur-estimé. Ceci est imputable encore à la définition de f_μ qui tend trop lentement vers 1 loin des parois. Les modèles de Jones-Launder et de Chien ne prédisent pas correctement le comportement de ϵ près des parois à cause du terme E . Le modèle de Rodi-Mansour est conçu pour prédire le bon comportement de ϵ et il y réussit. Le pic pariétal de k et le niveau de k au centre du canal sont aussi correctement prédits avec le modèle de Rodi-Mansour. La bonne prédiction de k au centre du canal est obtenue grâce à $\sigma_k = 1.3$ (voir le chapitre d'application pour des explications supplémentaires).

Remarque 2: Pour réduire le coût de calcul certains auteurs (e.g. Patel et Chen, 1989 et Mohammadi et Pironneau, 1994) proposent d'utiliser un modèle $k-l$ adapté pour les zones pariétales. La solution du modèle $k-l$ doit être raccordée à la solution du modèle $k-\epsilon$ à une certaine distance y^+ . La longueur l doit être définie seulement dans la région pariétale. Pour capturer la variation de ϵ près de paroi, des maillages très raffinés sont nécessaires. L'utilisation d'un modèle $k-l$ réduit le nombre des points nécessaires dans les régions pariétales.

3.4 Discrétisation des équations de transport

Dans ce paragraphe la formulation par la méthode des éléments finis des équations de Reynolds et des équations de transport pour k et pour ϵ est présentée. Pour des coordonnées cartésiennes, les équations de Reynolds s'écrivent:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\nu_{eff} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu_{eff} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) + \frac{\partial \nu_{eff}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \nu_{eff}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (3.75)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\nu_{eff} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu_{eff} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) + \frac{\partial \nu_{eff}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \nu_{eff}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.77)$$

où

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_t \quad (3.78)$$

$$p^* = \bar{p} + \frac{2}{3}k \quad (3.79)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\bar{\epsilon}} \quad (3.80)$$

On note que pour les écoulements laminaires ($\mu_{eff} = cte$) les deux derniers termes du membre de droite des équations (3.75) et (3.76) s'annulent. Par ailleurs, si on néglige la variation spatiale de ν_{eff} dans chaque éléments (en sacrifiant la précision), ces deux termes s'annulent. Les équations (3.75) et (3.76) sont calculés en conjonction avec le modèle $k-\epsilon$ à bas nombre de Reynolds (modèle de Chien) suivant:

$$\overline{u_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P - D - \tilde{\epsilon} \quad (3.81)$$

$$\overline{u_k} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\tilde{\epsilon} P}{k} - C_{\epsilon 2} f \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E \quad (3.82)$$

où

$$P = -\overline{u'_1 u'_1} \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_1} - \overline{u'_2 u'_2} \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_2} - \overline{u'_1 u'_2} \left(\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.83)$$

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.84)$$

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.85)$$

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} + D \quad (3.86)$$

$$D = 2\nu \frac{k}{y^2} \quad (3.87)$$

$$E = -2\nu \frac{\tilde{\epsilon}}{y^2} \exp(-0.5y^+) \quad (3.88)$$

$$f = 1.0 - 0.22 \exp(-Re_t/6)^2 \quad (3.89)$$

$$f_\mu = 1.0 - \exp(-0.0115y^+) \quad (3.90)$$

avec

c_μ	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.35	1.8	1.0	1.3

Les équations de transport (3.75-3.77) et (3.81-3.82) sont équivalentes en forme avec les équations de Navier-Stokes à l'exception des termes sources et puits. La formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes avec une viscosité laminaire est traitée au chapitre 2 et les formes matricielles sont présentées en annexes A1-A3. Dans ce paragraphe nous présentons seulement la formulation des termes sources et puits. Nous tenons compte également de la variation spatiale de la viscosité effective $\nu_{eff} = \nu_t + \nu$.

Définissons les interpolations ci-dessous pour ν_t , k et $\tilde{\epsilon}$:

$$\nu_t^e = \sum_{a=1}^{n_{ee}} \phi_a^e \nu_a \quad (3.91)$$

$$k^e = \sum_{a=1}^{n_{ee}} \phi_a^e k_a \quad (3.92)$$

$$\tilde{\epsilon}^e = \sum_{a=1}^{n_{ee}} \phi_a^e \tilde{\epsilon}_a \quad (3.93)$$

où ϕ_a^e est la fonction d'interpolation associée au noeud a de chaque élément. ν_a , k_a et $\tilde{\epsilon}_a$ sont les valeurs de ν_t^e , k^e et de $\tilde{\epsilon}^e$ au noeud, respectivement. n_{ee} est le nombre total des noeuds de chaque élément.

On suppose que la relation (3.80) est également valable entre les valeurs aux noeuds. On écrit:

$$\nu_a = C_\mu \frac{k_a^2}{\epsilon_a} \quad (3.94)$$

On transforme le terme puit de l'équation pour k à l'aide de (3.80):

$$\tilde{\epsilon} = C_\mu \frac{k^2}{\nu_t} = C_\mu \frac{k^i k^{i+1}}{\nu_t} \quad (3.95)$$

où k^i et k^{i+1} sont les valeurs de k à l'itération i et $i+1$, respectivement. La fraction $\frac{k^i}{\nu_t}$ est calculée au centre de chaque élément à l'aide des relations (3.91) et (3.92). Le terme k^{i+1} est traité de la manière standard. Cette manipulation du terme puit de l'équation pour k améliore la stabilité du schéma itératif (voir Patankar, 1980).

Nous traitons le terme puit de l'équation de ϵ de la façon suivante:

$$C_{\epsilon 2} f \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} = C_{\epsilon 2} f \frac{\tilde{\epsilon}^i \tilde{\epsilon}^{i+1}}{k^i} \quad (3.96)$$

où ϵ^i et k^i sont calculés au centre de chaque élément à l'aide des relations (3.92) et

(3.93).

Les termes de production des équations pour k et pour ϵ sont également calculés au centre de chaque élément.

En ce qui concerne le terme de convection et de pression dans les équations de Reynolds les formulations SUPG et GLS peuvent être appliquées sans modification importante sauf que la définition du paramètre de stabilisation α doit être modifiée de la façon suivante:

$$\alpha = \frac{h}{2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_r} \xi(\text{Re}^h(\mathbf{x})) \quad (3.97)$$

$$\text{Re}^h(\mathbf{x}) = \frac{m_h \rho |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_r h}{4\mu_{eff}} \quad (3.98)$$

Voir le chapitre 2 pour la notation.

Pour stabiliser le terme convectif des équations de transport pour k et pour ϵ les formulations SUPG et SU peuvent être appliquées en tenant compte des relations (3.97) et (3.98) (voir le chapitre 2 pour explication).

Algorithme itératif

Pour une initialisation des valeurs de $\bar{\mathbf{u}}$, k et ϵ

- Calculer les équations de Navier-Stokes par une méthode de Newton-Raphson ou de Picard.
- Calculer l'équation pour k par une méthode de Picard.
- Calculer l'équation pour ϵ par une méthode de Picard.
- Calculer ν_t à partir des nouvelles valeurs de k et ϵ .

$$\bullet \begin{cases} \text{si } \frac{1}{N} \left(\sum \frac{|\phi^{i+1} - \phi^i|^2}{|\phi_{max}^{i+1}|^2} \right)^{1/2} \leq 1.0e^{-6} & \text{stop,} \\ \text{sinon} & \text{continuer l'itération} \end{cases}$$

où ϕ^i est la valeur de $\bar{\mathbf{u}}$, k et ϵ à l'itération i . N est le nombre total des noeuds. Pour initialiser le calcul nous utilisons les profils d'un écoulement de Poiseuille pur turbulent. L'utilisation d'un modèle $k-l$ pendant quelques premières itérations peut éviter la divergence de l'équation pour ϵ . On utilise un facteur de sous-relaxation de $\alpha' = 0.8$ pour les itérations sur k et ϵ , pour les problèmes traités dans cette thèse.

3.5 Récapitulatif

Dans ce chapitre nous avons présenté très brièvement différents modèles de turbulence en mettant l'accent sur le modèle $k - \epsilon$. Ce modèle, malgré certains défauts, reproduit de manière satisfaisante les écoulements de type industriels. Aujourd'hui, grâce au développement réalisé dans le domaine de l'analyse numérique et grâce à l'apparition des ordinateurs de plus en plus puissants, le modèle aux tensions de Reynolds se présente comme un candidat potentiel pour remplacer le modèle $k - \epsilon$. Dans cette étude, nous avons préféré implémenter un modèle $k - \epsilon$ dans nos codes d'éléments finis pour des raisons de coût de calcul. Les modèles aux tensions de Reynolds ont été le sujet d'études parallèles dans notre laboratoire (voir Deldicque, 1995).

Pour traiter la région pariétale, parmi les différents modèles proposés dans la littérature, nous avons implémenté le modèle de Chien comme modèle de base. Il est plus facile de discrétiser ce modèle avec une méthode des éléments finis. Les modèles de type Jones-Launder contiennent un terme qui dépend de la deuxième dérivée de la vitesse. De plus, les travaux de Monnier (1989) et Rodi-Mansour (1993) montrent que le modèle de Chien prédit globalement mieux que le modèle de Jones-Launder. Le nouveau modèle de Rodi-Mansour bien qu'il soit basé sur les résultats des simulations numériques directes et qu'il puisse reproduire la variation de ϵ près de paroi, ne sera pas exploité ici dans son intégralité. Ce modèle contient aussi un terme qui dépend de la deuxième dérivée de la vitesse. Nous allons sacrifier la précision de la solution de ϵ pour $y^+ < 15$ à la facilité de mise en oeuvre.

Chapitre 4

Application

4.1 Les écoulements de Couette-Poiseuille

4.1.1 Introduction

Les modélisations présentées au chapitre précédent sont destinées à être implémentées dans des codes de calcul qui permettent la détermination numérique de l'écoulement. Il est essentiel de mettre en oeuvre pour cela des méthodes de résolution numérique de grande précision ne présentant pas de viscosité numérique excessive. Dans la première partie de cette thèse nous avons étudié plusieurs formulations d'éléments finis tel que les formulations SUPG et GLS. Nous avons validé nos codes en étudiant des problèmes de référence pour les écoulements laminaires. Comme suite logique il semble alors essentiel de valider également nos codes pour les écoulements turbulents. Cependant, la situation pour les écoulements turbulents est un peu différente. Dans ce cas de figure, une solution indépendante du maillage ne peut pas être considérée comme une solution de référence, car le raffinement du maillage n'élimine que les imprécisions dues à la discrétisation des équations de transport. Il est donc nécessaire pour assurer une validation du code et du modèle de disposer de résultats expérimentaux suffisamment détaillés et fiables. Pour essayer de contribuer à cette objectif, c'est-à-dire de disposer d'expérience de référence présentant à la fois des conditions aux frontières bien définies, de géométrie simple, et suffisamment complexe du point de vue de la turbulence, une installation a été définie et réalisée à l'I.M.F.L. (figures 4.1 et 4.2). Dans un premier tronçon cette installation permet de réaliser un écoulement turbulent de Poiseuille pur entre deux parois parallèles fixes. La station 1 sert comme condition à l'entrée si l'on désire effectuer le calcul bi-dimensionnel. Dans la deuxième partie du canal où la paroi inférieure est mobile (dans le sens de l'écoulement), on obtient des écoulements de Couette-Poiseuille. Des sondages de vitesse moyenne et des tensions de Reynolds sont effectués dans ces deux zones par anémométrie à fil chaud. Pour plus de détail on pourra se référer à Corenflos (1993) et à Deldicque (1995).

Les écoulements de Couette-Poiseuille en régime turbulent se scindent en trois catégories (figure 4.3):

- Les écoulements de type Poiseuille dont le profil de vitesse moyenne présente un maximum décalé vers la paroi mobile (dans le cas d'un gradient de pression favorable).
- Les écoulement de type intermédiaire dont le profil de vitesse moyenne présente un gradient proche de zéro à la paroi.
- Les écoulements de type Couette dont le profil de vitesse moyenne présente un point d'inflexion, mais qui ne se situe pas sur l'axe de symétrie du canal comme c'est le cas pour les écoulements symétriques de Couette pur.

Ces écoulements présentent sur le plan fondamental l'avantage d'isoler certains phénomènes turbulents tout en conservant une simplicité géométrique. Autrement dit ils sont des représentations simplifiées mais réalistes des situations rencontrées dans l'industrie. On peut citer les problèmes de lubrification hydrodynamique et ceux qui surviennent dans les cellules d'électro-déposition (Monnier, 1989 et Vanhée, 1991). Pour une bibliographie exhaustive sur les écoulements de Couette-Poiseuille, on pourra se référer à Deldicque (1995).

Les expériences de Corenflos (1993) s'inscrivent dans une suite de travaux menés depuis presque dix ans sur les écoulements de Couette-Poiseuille. Ces travaux ont aboutit jusqu'à maintenant à quatre thèse de Doctorat. Monnier (1989) a étudié la simulation de ces écoulements par une méthode de volumes finis avec un modèle de longueur de mélange, un modèle $k-l$, et un modèle $k-\epsilon$. Cette étude est limitée aux écoulements établis mono-dimensionnels. A l'époque, on disposait uniquement des résultats expérimentaux d'El-Telbany et Reynolds (1980) réalisés pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 50000 – 100000. Monnier a mis en évidence des écarts considérables entre la prédiction numérique et les résultats expérimentaux. Il a testé plusieurs modèles $k-\epsilon$ dont les modèles de Chien (1982) de Launder-Sharma (1974) et de Lam-Bremhorst (1981). Il a conclut que le modèle de Chien prédit globalement mieux que les deux autres modèles. De plus le modèle de Chien s'est avéré plus robuste. Vanhée (1991) a poursuivi le travail de Monnier en remplaçant le modèle $k-\epsilon$ par plusieurs modèles aux tensions de Reynolds. Les écarts entre les expériences et les prédictions numériques persistent même en utilisant les modèles aux tensions de Reynolds. Les différents modèles au premier et au second ordre ne reproduisent pas le saut d'énergie turbulente mis en évidence par El-Telbany et Reynolds lors du passage d'un écoulement de type Couette à un écoulement de type Poiseuille. Monnier puis Vanhée ont attribué cette différence de niveau d'énergie soit à un problème d'établissement des écoulements, soit au défaut de l'hypothèse de l'équilibre local pour les écoulements de type Couette. Ces questions ouvertes à cette époque ont motivé l'entreprise d'une étude expérimentale détaillée pour connaître à la fois l'origine des écarts et comprendre mieux la physique des écoulements de Couette-Poiseuille. Cette étude a donné lieu à la thèse de Corenflos (1993). Il a étudié expérimentalement les écoulements de Poiseuille, de type Poiseuille, de type

intermédiaire, et de type Couette pour des nombres de Reynolds voisin de 5000, basés sur la hauteur du canal et la vitesse débitante. Corenflos n'a pas mis en évidence l'existence d'un saut d'énergie turbulente lors du passage d'un écoulement de type Poiseuille à un écoulement de type Couette. Deldicque (1995) a continué les travaux de Corenflos en doublant le nombre de Reynolds. A ce nombre de Reynolds ($Re = 10000$), les écoulements de type intermédiaire et type Couette présentent un défaut d'établissement. Les mêmes écoulements à un nombre de Reynolds moitié semblent établis, selon Deldicque. Les expériences à $Re=5000$ et 10000 ont été confrontées aux résultats des simulations numériques directes. Un très bon accord existait entre les expériences effectuées à l'I.M.F.L. et les simulations numériques directes. Deldicque a également continué les travaux de Vahnée en effectuant les calculs mono-dimensionnels avec plusieurs modèles de turbulence au second ordre. Au contraire des comparaisons faites pour les expériences d'El-Telbany, une bonne concordance entre les expériences de l'I.M.F.L. et la prédiction numérique sont constatées. En s'appuyant sur le calcul mono-dimensionnel établi, Deldicque a montré que certains essais d'El-Telbany et Reynolds semblent affectés par des problèmes d'établissement. Ce défaut pourrait être à l'origine de saut d'énergie turbulente mis en évidence par El-Telbany et Reynolds. Pour une synthèse sur l'influence du nombre de Reynolds, on pourra se référer à Deldicque (1995).

Dans ce chapitre, nous allons effectuer les calculs bi-dimensionnels des écoulements de Couette-Poiseuille à $Re = 5000$ et 10000 par les méthodes d'éléments finis développées et présentées dans la première partie de cette thèse et d'un modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds. Nous allons prendre comme modèle de base le modèle de Chien. Compte tenu des travaux de Monnier, on sait que le modèle de Chien donne de bons résultats pour les nombres de Reynolds modérés (e.g. Re de l'ordre de 50000). De plus ce modèle rencontre moins de difficultés de convergence. Pour ce modèle, la fonction d'amortissement f_μ est basée sur $Re_\tau = u_\tau y / \nu$. Les modèles qui utilisent des fonctions d'amortissement basées sur $Re_t = kv^2 / \epsilon$ sont en général moins stables. Bien-entendu la définition $Re_t = kv^2 / \epsilon$ est plus facile à programmer que celle du modèle de Chien. Par exemple pour le modèle de Chien la définition de la distance y à la paroi reste arbitraire pour les écoulements dissymétriques.

4.1.2 Ecoulement de Poiseuille pur

Pour valider nos codes de calcul il nous est apparu essentiel d'effectuer dans un premier temps des calculs mono-dimensionnels pour un écoulement établi de Poiseuille pur. Si on suppose l'écoulement établi et par droites parallèles, les équations du mouvement se simplifient en l'équation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{2u_\tau^2}{H} \quad (4.1)$$

Dans cette situation le gradient de pression n'est pas déterminé implicitement par l'équation de continuité (voir le chapitre 2), car elle s'élimine ($v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$). Par conséquent le gradient de pression apparaît comme inconnu dans l'équation (4.1). Il doit être imposé en faisant appel aux résultats expérimentaux. Ceci est un peu paradoxal car le gradient de pression est une fonction du frottement aux parois et par conséquent une fonction du profil de vitesse. En fait, le gradient de pression (le frottement) est généralement une conséquence du modèle. Si un modèle prédit mal le profil de vitesse près des parois il prédira mal le gradient de pression. Si le gradient de pression est imposé approximativement, le profil et le frottement seront mal prédits. C'est le cas pour les expériences de Couette-Poiseuille servant de référence ici, car le gradient de pression et le frottement n'ont pas été mesurés avec une grande précision. Il est alors plus judicieux d'imposer la conservation du débit. Les résultats obtenus par cette méthode sont très proches de ceux fournis par un calcul 2-D.

Le calcul est effectué pour $Re = 5000$ et 10000 . Deux types d'éléments bilinéaires et biquadratiques sont utilisés dans le code d'éléments finis. Pour les éléments bilinéaires deux maillages constitués de 180 et 100 éléments sont choisis pour une étude d'influence du maillage. Pour les éléments biquadratiques le maillage est constitué de 50 éléments. Pour tous les maillages et les deux nombres de Reynolds 5000 et 10000, le premier point du maillage se trouve à $y^+ \sim 0.5$ et 1.0 , respectivement. Des calculs préalables sont effectués pour tester l'influence du maillage et du type d'éléments. Les résultats sont également comparés aux résultats d'un code de volumes finis avec un maillage comparable. Ce code a été développé par Monnier (1989). Les résultats (non-présentés) se superposent parfaitement (à moins de 1% près). Cette comparaison valide le code d'éléments finis. Elle garantit également que 100 éléments bilinéaires sont suffisants pour l'obtention d'une solution indépendante du maillage suivant la direction y . Dans ce qui suit (dans ce paragraphe uniquement) la solution de la présente étude peut être considérée comme une solution indépendante du maillage, indépendante du type d'éléments (bilinéaire ou biquadratique) et de la méthode de discrétisation (volume finis, éléments finis).

Sur les figures 4.4a et 4.4b les profils de vitesse et de l'énergie turbulente sont présentés pour $Re=10000$ en utilisant le modèle de Chien-local. "Local" est ajouté pour souligner que la fonction f_μ est calculé à partir de la vitesse de frottement u_τ locale. La raison de cette définition et de ce choix sera expliquée plus loin. En résumé, la définition locale est intéressante et peut-être nécessaire pour les écoulements où la vitesse de frottement s'annule à la paroi. Sur les figures 4.4a et 4.4b les résultats sont également comparés aux résultats obtenus par Deldicque (1995). Ce dernier a utilisé le modèle aux tensions de Reynolds de Hanjalic (voir Jakirlic et al., 1993). Sur la figure ce modèle est présenté sous le légende RSM. En ce

qui concerne le profil de vitesse, la prédiction du modèle de Chien est globalement aussi bonne que celle du modèle aux tensions de Reynolds. Le modèle de Chien sur-estime l'énergie turbulente au centre du canal. Le pic pariétal de k se situe à $y^+ = 22$, tandis que le modèle RSM le prédit à $y^+ = 19$. Selon Deldicque la prédiction du modèle RSM (la position de ce pic) est plus en accord avec la simulation numérique directe. En revanche, la valeur du pic pariétal de k est mieux prédite par le modèle de Chien que par le modèle RSM. Tout près des parois, le pic d'énergie turbulente expérimental est sur-estimé par rapport aux prédictions numériques. Ceci est imputable à l'imprécision des mesures due à l'influence de la taille du sonde dans les régions pariétales (voir Corenflos, 1993 et Deldicque, 1995 pour en savoir plus).

Sur les figures 4.5a et 4.5b les profils de vitesse et d'énergie turbulente sont présentés pour $Re=5000$ en utilisant le modèle $k - \epsilon$ Chien-local. A l'exception de la région centrale de l'écoulement, le modèle prédit assez bien les profils de vitesse et d'énergie turbulente par rapport aux résultats expérimentaux. On constate une sur-estimation du maximum de vitesse et également du niveau d'énergie turbulente au centre. Sur les mêmes figures, les résultats de la simulation numérique directe de Kuroda et al. (1993) sont présentés. Les résultats sont également comparés aux résultats obtenus par Deldicque (1995) à l'aide du modèle aux tensions de Reynolds. On note que les prédictions du modèle $k - \epsilon$ de Chien ne sont pas aussi bonnes que celles du modèle RSM. Pour expliquer le défaut du modèle Chien-local pour $Re=5000$, on a effectué le calcul en utilisant le frottement à la paroi (non-local) dans la définition de la fonction f_μ . Sur la figure 4.6 on constate que le modèle Chien-non-local prédit un peu mieux le profil de l'énergie turbulente au centre du canal. Par conséquent, le principal défaut du modèle de Chien trouve son origine dans la définition de f_μ . Nos calculs ont montré que pour le modèle de Chien, la valeur de f_μ ne devient jamais égale à 1 dans la région d'équilibre local (pour des très faibles nombres de Reynolds). Ceci conduit à une sous-estimation de C_μ et donc de la viscosité turbulente dans la région centrale du canal. La sous-estimation de la viscosité turbulente produit un profil de vitesse moyenne plus gonflé (plus "laminaire") au centre. Le terme de production de k modélisé à l'aide de l'hypothèse de Boussinesq contient des termes qui dépendent du gradient de vitesse moyenne au carré. En conséquence, le niveau de k au centre est sur-estimé. Si on utilise la définition locale de la vitesse de frottement pour calculer f_μ , le défaut se manifeste encore plus car les valeurs locales sont inférieures à la valeur à la paroi et donc la sous-estimation de la viscosité turbulente s'accroît. Pour palier ce problème la fonction f_μ proposée par Chien peut être remplacée par la définition suivante:

$$f_\mu = 1 - \exp(-2 \times 10^{-4}y^+ - 6 \times 10^{-4}y^{+2} + 2.5 \times 10^{-4}y^{+3}) \quad (4.2)$$

Cette définition est proposée par Rodi et Mansour (1993) sur la base des résultats de DNS à $Re=5000$ et 10000 . Le résultat obtenu avec la relation (4.2) est présenté sur la figure 4.6. Les légendes Rodi-Mansour local et Rodi-Mansour non-local traduisent l'utilisation de u_τ locale et non-locale dans la définition (4.2), respectivement. On constate que le modèle Rodi-Mansour non-local prédit mieux le profil de l'énergie turbulente (comparer avec la solution de Deldicque sur la figure 4.5b). Rodi et Mansour ont également proposé de poser $\sigma_k = 1.3$ (au lieu de $\sigma_k = 1$, la valeur standard) pour pouvoir améliorer la prédiction du profil de k au centre du canal. Cette modification est réalisée dans nos calculs. Le résultat est présenté sous le légende Rodi-Mansour non-locale- $\sigma_k=1.3$ sur la figure 4.6. Le profil de l'énergie turbulente s'approche effectivement du résultat expérimental. On constate également que le pic pariétal de k se situe maintenant à $y^+ \sim 19$, et ce en accord avec la DNS et RSM. En effet un $\sigma_k = 1.3$ diminue le taux de transfert d'énergie turbulente des parois vers le centre du canal en réduisant le coefficient de diffusion de k . La même tendance est constatée pour $Re=10000$ (non-présenté). Rappelons que Rodi et Mansour ont également modifié les définitions des termes E et D des équations de transport pour k et pour ϵ . Cette modification améliore uniquement la prédiction de la dissipation pour $y^+ < 10$. Elle n'a pas d'influence sur les profils de vitesse et d'énergie turbulente dans la région $y^+ > 50$. Gilbert et Kleiser (1991) ont étudié le bilan de l'énergie turbulente issu d'une simulation numérique directe à $Re=5000$. Il ont conclu que la valeur de σ_k peut avec une bonne approximation être considérée égale à 1. Par conséquent, la modification sur σ_k ne peut pas être justifiée. Deng et Piquet (1991) ont calculé la fonction de f_μ à partir de la relation suivante:

$$f_\mu = -\frac{\overline{\epsilon u'v'}}{C_\mu k^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} \quad (4.3)$$

pour les écoulements de Poiseuille pur et de couche limite sur plaque plane à différents nombres de Reynolds. Les valeurs de $\overline{u'v'}$, k et de ϵ sont issues des résultats des simulations numériques directes. Ce calcul a prouvé qu'une définition universelle de f_μ n'est pas évidente pour une gamme assez importante de nombre de Reynolds et pour des types d'écoulement différents. Pour des nombres de Reynolds élevés (e.g. $Re > 10000$) la région pariétale est très petite devant la région logarithmique. Donc, la variation de f_μ dans cette région n'a pas d'influence notable sur la solution.

On conclut donc dans ce paragraphe que pour des très faibles nombres de Reynolds la définition des fonctions d'amortissement est très importante, car dans ce cas la zone d'influence des parois occupe une grande partie de la hauteur du canal. Nous verrons par la suite que la définition de f_μ pour des écoulements dissymétriques de Couette-Poiseuille est encore moins évidente. Les profils de vitesse et de l'énergie turbulente varient considérablement en fonction de la définition de f_μ . Pour des nombres de Reynolds plus élevés (e.g. $Re = 10000$) cette dépendance diminue.

Dans les paragraphes suivants on va appliquer le modèle $k - \epsilon$ de Chien aux

écoulements de type Poiseuille, de type intermédiaire et de type Couette. On choisira comme modèle de base la définition locale de f_μ car pour ces écoulements la vitesse de frottement devient nulle ou très petite en cours d'établissement. La définition non-locale rencontre une singularité. Ensuite, la définition de f_μ sera modifiée selon problème. Puis, les résultats seront comparés aux résultats expérimentaux.

4.1.3 Ecoulement de type Poiseuille

Les conditions aux frontières sont présentées sur la figure 4.7. On pose respectivement $\frac{u_w}{u_q} = 0.79$ et $\frac{u_w}{u_q} = 0.75$ pour $Re = 5000$ et 10000 , où u_w est la vitesse de la paroi mobile et u_q la vitesse débitante. Les profils de \bar{u} , k , et ϵ imposés à l'entrée sont issus d'un calcul mono-dimensionnel de l'écoulement de Poiseuille pur établi. Comme on l'a vu au paragraphe précédent, une différence non-négligeable existe au centre du canal entre les profils expérimental et numérique de l'énergie turbulente (pour les faibles nombres de Reynolds). De plus le profil expérimental n'est pas très précis dans la région pariétale. Dans un premier temps, on a tenté d'utiliser les résultats expérimentaux comme condition d'entrée. Cependant, cette approche provoque de faibles oscillations de l'énergie turbulente dans la partie située en amont de la paroi mobile avant de converger vers la solution numérique. Par conséquent, on a préféré utiliser les conditions d'entrée numériques et rester fidèle au modèle turbulent tout au long de l'établissement, y compris la condition à l'entrée.

Dans un premier temps nous avons effectué le calcul avec différents maillages et avec différentes longueurs L de la paroi mobile. Les maillages constitués de 50×100 et 80×100 éléments bilinéaires sont utilisés pour des longueurs L de 40, 90, et 120 fois la hauteur du canal. Sur la figure 4.8 le maillage constitué de 80×100 éléments est présenté. On a également fait varier la répartition des points suivant l'axe x . La répartition des mailles suivant l'axe y correspond au maillage utilisé pour le cas mono-dimensionnel. Le calcul avec le maillage 80×100 et la longueur L de 90 fois la hauteur du canal peut être considéré avec suffisamment de précision à la fois indépendant du maillage et des conditions à la frontière de sortie.

Dans un premier temps, la formulation standard de Galerkin BGP(Q1PO) avec la méthode de pénalisation est choisie pour étudier cet écoulement (voir chapitre 2 pour l'explication des différentes formulations étudiées). On se rappelle que cette formulation produit une discrétisation centrée du terme de convection. Cependant, puisqu'il n'existe pas de gradient fort dans la direction perpendiculaire au vecteur vitesse, cette formulation peut donner une solution lisse. La discontinuité à la paroi mobile génère tout de même de légères oscillations qui s'amortissent très rapidement. Dans un deuxième temps le calcul est effectué en utilisant la formulation GLS-(Q2SQ2S) avec 40×50 éléments biquadratiques (serendipity) pour la vitesse, la pression, l'énergie turbulente et la dissipation. Bien-entendu, avec cette formulation

la discontinuité à la paroi mobile est mieux capturée. Les calculs avec la formulation GLS(Q2SQ2S) et BGP(Q1P0) à l'exception de la région juste après la discontinuité sont en très bonne concordance. On conclut donc que les solutions obtenues pour l'écoulement de type Poiseuille sont indépendantes du maillage et du type de la formulation. Le point important à souligner concerne l'utilisation de la formulation Galerkin/Least-Squares GLS(Q2SQ2S) pour les écoulements turbulents. On se rappelle que cette formulation stabilise les termes de convection et de pression en ajoutant des termes supplémentaires à la formulation de Galerkin standard. Ces termes sont multipliés par le coefficient de stabilisation α qui est calculé à partir de la relation

$$\alpha = \frac{h}{2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_r} \xi(\mathbf{Re}^h(\mathbf{x})) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{Re}^h(\mathbf{x}) = \frac{m_h \rho |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_r h}{4\mu_{eff}} \quad (4.5)$$

où $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$, et μ_t est la viscosité turbulente (voir le chapitre 2 pour la notation). Jusqu'à maintenant, les expériences numériques existants dans la littérature sont limitées aux écoulements laminaires (viscosité constante). Le présent calcul montre que l'utilisation d'une viscosité variable (viscosité turbulente) dans la relation (4.5) ne détériore ni la stabilité de la pression ni sa précision et ce en accord avec la théorie. La solution de pression est comparée avec le résultat expérimental un peu plus loin. Les temps de calcul nécessaires pour atteindre la convergence pour les deux formulations de BGP(Q1P0) et GLS(Q2SQ2S) sont respectivement d'environ 5 et 12 heures (voir l'annexe B pour l'explication de l'algorithme itératif). Les calculs sont effectués sur une station de travail HP-715 (50 MHz).

Pour les écoulements dissymétriques à très faibles nombres de Reynolds la définition de f_μ est un peu délicate dans la mesure où la distance y des parois ne peut pas être définie à priori de façon symétrique. Dans un premier temps, nous avons supposé que la distance à la paroi y la plus proche doit être utilisée dans la définition de f_μ .

Sur la figure 4.9 on présente l'établissement de la vitesse moyenne pour $Re = 10000$ obtenu avec le modèle Chien-local. On constate une bonne concordance entre le modèle numérique et les résultats expérimentaux. Les écarts existants ne sont imputables qu'à la définition de f_μ . Pour les stations intermédiaires $x = 1.855$ et $x = 2.255$ une modification de f_μ permettrait d'améliorer encore les prédictions. On note qu'entre $x = 2.955$, (dernière station expérimentale), et $x = 4.4$, (dernière station numérique), le profil de vitesse moyenne se modifie très légèrement. Par conséquent, on peut supposer avec une bonne approximation que le profil de vitesse moyenne est établi à $x = 2.955$, et ce en accord avec l'expérience.

Sur la figure 4.10a les profils d'énergie turbulente sont présentés. On note que le profil du modèle Chien-local à la station $x = 2.955$, dans la partie centrale du canal, est sur-estimé par rapport au profil expérimental. Le même type d'écart a été observé pour l'écoulement de Poiseuille pur. On note également que le profil de k entre la dernière station expérimentale et la dernière station numérique évolue de manière significative sur une grande partie de la hauteur du canal ($0.15 < y/H < 0.75$). Donc, l'écoulement à la dernière station expérimentale est loin d'être établi numériquement. A titre de vérification, le calcul mono-dimensionnel a été effectué (voir le paragraphe sur l'écoulement de type intermédiaire pour en savoir plus) et le résultat comparé au calcul bi-dimensionnel à la station $x = 4.4$. Les deux profils (non-présentés) se superposent parfaitement, ce qui valide la précision du calcul bi-dimensionnel près de la sortie. Le profil obtenu par Deldicque avec le modèle RSM est également présenté sur la figure 4.10a. Notons que le profil de ce modèle doit être comparé au profil du modèle $k - \epsilon$ à $x = 4.4$, puisque le calcul avec RSM est effectué pour un écoulement établi. Les écarts constatés entre les modèles $k - \epsilon$ et RSM pour l'écoulement de Poiseuille pur persistent pour l'écoulement de type Poiseuille. Sur la figure 4.10b on présente l'évolution du profil de k entre les stations $x = 2.76$ et $x = 3.31$. On voit que l'évolution se fait très lentement. Il serait très difficile de déterminer expérimentalement la variation de k entre les deux dernières stations expérimentales. L'établissement de k pour l'ensemble des écoulements de type Poiseuille, type intermédiaire, et type Couette sera étudié plus loin.

Sur la figure 4.11 l'établissement de la vitesse moyenne est présenté pour $Re=5000$. En accord avec ce que nous avons vu pour l'écoulement de Poiseuille pur, les profils de vitesse tout au long d'établissement sont un peu plus gonflés au centre et moins près des parois que les profils expérimentaux. Ceci n'est imputable qu'à la définition de f_μ . A la station $x = 2.955$ les profils numérique et expérimental se superposent bien dans la partie inférieure du canal (voir également la figure 4.12a). Il semble que le modèle soit bien adapté à prédire la partie inférieure. La partie supérieure se comporte comme un écoulement de Poiseuille pur. Donc, le modèle "Chien-local" sous-estime la viscosité turbulente et la prédiction n'est pas très bonne. Les profils de k sont comparés sur la figure 4.12b. Comme pour $Re=10000$, le profil de k à la dernière station expérimentale, dans la région centrale, est sur-estimé par rapport au profil expérimental. En accord avec le cas $Re=10000$, les profils de k évoluent entre $x = 2.955$ et $x = 4.4$. Sur la figure 4.12b une augmentation rapide du niveau de k peut être constatée entre $0.2 < y/H < 0.25$. Ce comportement est partiellement imputable au fait que le terme de production de k dépend du gradient de vitesse au carré. Notons que dans cette région le profil de vitesse moyenne change de pente. L'utilisation de la vitesse de frottement locale pour le calcul de f_μ peut être aussi à l'origine de l'augmentation rapide du niveau de k dans cette région.

Sur les figures 4.12a et 4.12b les résultats de Deldicque avec le modèle RSM et les résultats de DNS de Kuroda sont présentés. Il semble que ni le modèle RSM

ni la DNS ne sont capables de fournir des profils qui se superposent parfaitement à l'expérience. Rappelons que les mesures ne sont pas bonnes près des parois en raison de la tailles des sondes. On note que le pic pariétal de k prédit avec le modèle Chien-local est un peu éloigné de la paroi par rapport aux résultats de RSM et DNS. Le même comportement a été constaté pour l'écoulement de Poiseuille pur.

Pour tester la sensibilité des résultats à la définition de f_μ , le calcul pour $Re=5000$, est répété avec la fonction f_μ de Rodi-Mansour et avec un $\sigma_k = 1.3$. Le résultat est présenté sur les figure 4.13a et 4.13b. On constate que, comme pour le cas de l'écoulement de Poiseuille pur, cette modification améliore la prédiction de \bar{u} . La partie supérieure se rapproche de l'expérience. Le profil de k à l'exception de la région près de la paroi mobile est en bonne concordance avec l'expérience.

Nous avons mentionné en début de ce paragraphe que la distance y à la paroi la plus proche est utilisée pour calculer la fonction f_μ . Pour prendre en compte la dissymétrie de l'écoulement, cette distance est ensuite calculée de la manière suivante:

$$\begin{cases} y^+ = \frac{u_{\tau_2} \times (H-y)}{\nu}, & \text{si } du/dy < 0 \\ y^+ = \frac{u_{\tau_1} \times (y)}{\nu}, & \text{si } du/dy > 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

où u_{τ_2} et u_{τ_1} sont les vitesses de frottement correspondant aux parois fixe (supérieure) et mobile (inférieure), respectivement. On note que cette définition améliore l'allure du profil de vitesse dans la partie supérieure du canal (figure 4.13a, modèle dissymétrique) car u_{τ_2} est supérieure à la valeur locale. En revanche la précision du profil de vitesse entre $0.2 < y/H < 0.5$ se détériore complètement. Le modèle avec la définition (4.6) sur-estime la viscosité turbulente dans cette région. Le profil de k avec cette modification présente le même comportement que le profil de vitesse (figure 4.13b): Près de la paroi fixe la position du pic de k s'améliore. Le profil numérique est proche du profil expérimental sur une grande partie de la hauteur tandis qu'entre $0.1 < y/H < 0.25$ un écart apparaît. Cet écart trouve son origine dans la sur-estimation de la viscosité turbulente entre $0.1 < y/H < 0.25$. En fait, la définition de f_μ devient très importante et difficile à faire dans cette région. Ceci indique clairement la difficulté de réaliser une modélisation correcte à faible nombre de Reynolds.

4.1.4 Ecoulement de type intermédiaire

Comme pour le cas de l'écoulement de type Poiseuille, le calcul est d'abord testé sur différents maillages et avec deux formulations BGP(Q1P0) et GLS(Q2SQ2S). Les résultats à l'exception, de la région tout près de $x' = 0$ sont parfaitement indépendants du maillage et indépendants de la formulation. Les conditions aux

frontières sont similaires au cas de l'écoulement de type Poiseuille. On pose respectivement $\frac{u_w}{u_q} = 1.224$ et $\frac{u_w}{u_q} = 1.165$ pour $Re = 5000$ et 10000 .

Sur la figure 4.14 l'établissement de la vitesse moyenne est présenté pour $Re=5000$ obtenu avec le modèle Chien-local. Une bonne concordance existe entre les profils expérimentaux et numériques. On observe ici le même type d'écart constaté pour l'écoulement de type Poiseuille (à savoir le dégonflement des profils près des parois et le gonflement au centre). Sur la figure 4.15a les profils de k sont présentés. Des écarts importants existent entre les profils numériques et le profil expérimental en ce qui concerne la pente des courbes. Comme pour l'écoulement de type Poiseuille, le profil de k montre une grande variation entre la dernière station expérimentale et la dernière station numérique. Sur la même figure le résultat de Deldicque obtenu avec le modèle RSM est présenté. En cas de doute sur l'établissement des résultats expérimentaux, la comparaison de RSM avec l'expérience n'est pas facile, puisque le profil de RSM est obtenu pour un écoulement établi. Les écarts existant entre le profil des modèles $k - \epsilon$ et RSM ont déjà été observés pour les écoulements de type Poiseuille et de Poiseuille pur (à savoir la sur-estimation de k par le modèle $k - \epsilon$ par rapport au modèle RSM et les différentes distances y^+ pour le pic de k près de la paroi fixe). Sur la figure 4.15b les profils de vitesse sont comparés. On constate que le modèle de RSM ne reproduit pas un écoulement de type intermédiaire, mais un écoulement de type Couette. C'est la raison pour laquelle la production de k (et donc le niveau de k) est sur-estimée dans la région $0 < y/H < 0.1$ par le modèle de RSM (figures 4.15a et 4.15b).

La modification faite pour le cas de l'écoulement de type Poiseuille concernant la fonction d'amortissement f_μ est répétée ici. Sur la figure 4.16a on constate que la modification de Rodi-Mansour améliore le profil de k dans la partie haute et le dégrade dans la partie basse. Le profil de vitesse se détériore sauf près de la paroi mobile. L'utilisation de la distance dissymétrique donne une parfaite superposition des courbes de k . En revanche, le profil de vitesse (figure 4.16b) se comporte comme le profil du modèle RSM (comparer avec la figure 4.15b). Une fois de plus, il semble très difficile de définir une fonction d'amortissement physiquement correcte et universelle qui prédise à la fois le profil de vitesse et le profil de k .

Sur la figure 4.17 l'établissement de l'écoulement de type intermédiaire pour $Re=10000$ est présenté. On observe des comportements similaires au cas de $Re=5000$. Les profils de k sont présentés sur la figure 4.18a. On note que le profil du modèle de Chien est curieusement en très bon accord avec l'expérience. Les différences entre les stations $x = 2.955$ et $x = 4.4$ révèlent une fois de plus le défaut d'établissement à $x = 2.955$. La figure 4.18b présente les profils de vitesse des modèles. On voit que le modèle RSM prédit un écoulement de type Couette au lieu du type intermédiaire. Des différences similaires aux cas précédents existent entre le profil du modèle de Chien et du modèle RSM.

Pour s'assurer que la dernière station numérique présente véritablement les profils établis et que les profils ne sont pas influencés par les conditions à la sortie, des calculs mono-dimensionnels ont été effectués. Comme nous avons indiqué précédemment, l'imposition du gradient de pression expérimental dans l'équation (4.1) ne conserve pas en général le débit de l'écoulement en raison de (a) l'imprécision de mesure de la vitesse de frottement (voir Deldicque, 1995), (b) l'incapacité du modèle à prédire le gradient de pression expérimental. Deux types de calcul sont effectués. Le premier est réalisé avec le gradient de pression expérimental (appelé ici calcul non-consistant), le deuxième en itérant sur le gradient de pression afin d'obtenir le débit expérimental (appelé ici calcul consistant). Sur les figures 4.19a et 4.19b les profils de vitesse et de k sont comparés. Le calcul est effectué avec la définition dissymétrique de f_μ . On note que l'imposition du gradient de pression ne conserve pas le débit. De plus, des écarts considérables existent entre le profil du calcul non-consistant et consistant. Sur la même figure le résultat du calcul bi-dimensionnel est présenté. Le calcul mono-dimensionnel consistant et le calcul bi-dimensionnel sont en excellente concordance.

4.1.5 Ecoulement de type Couette

Comme pour les deux cas précédents, le calcul est d'abord testé sur différents maillages et avec deux formulations BGP(Q1P0) et GLS(Q2SQ2S). Les résultats à l'exception de la région tout près de $x' = 0$ sont parfaitement indépendants du maillage et indépendants de la formulation. Les conditions aux frontières sont similaires au cas de l'écoulement de type Poiseuille. On pose $\frac{u_w}{u_q} = 1.49$ pour $Re = 5000$.

Sur la figure 4.20 l'établissement de la vitesse moyenne est présenté pour $Re=5000$. On note que l'écoulement calculé est loin d'être établi à la dernière station expérimentale. Sur la figure 4.21a le profil de k est présenté. Des différences significatives existent entre les deux profils à $x = 2.955$ et $x = 4.4$. De plus dans la partie inférieure du canal la prédiction à $x = 2.955$ est nettement moins bonne par rapport à l'expérience que pour les deux cas précédents. Les écarts entre les prédictions et les mesures proviennent partiellement du fait que les deux écoulements numérique et expérimental s'établissent probablement différemment surtout pour le cas du type Couette. La paroi mobile se déplace plus rapidement pour l'écoulement de type Couette que pour le type intermédiaire. Le modèle RSM se comporte bien. En revanche, il ne prédit pas aussi bien que le modèle de Chien le profil de vitesse (figure 4.21b).

4.1.6 Gradient de pression

Sur la figure 4.22 les gradients de pression longitudinaux à la paroi supérieure sont présentés pour les écoulements de type Poiseuille et de type intermédiaire. Les courbes expérimentales sont linéaires par morceaux. Ceci est dû à la procédure utilisée pour relever le gradient de pression le long de la veine (voir Corenflos 1993, et Deldicque, 1995). On constate sur cette figure que le gradient de pression est presque instantanément constant dès l'arrivée de l'écoulement sur la paroi mobile. Ceci est étonnant dans la mesure où la vitesse moyenne et l'énergie turbulente manifestent de grandes variations en aval de la jonction paroi fixe-paroi mobile. On note également que la pente des courbes expérimentales se modifie une deuxième fois à environ $x/L = 110$. Le canal à paroi mobile est prolongé par un tronçon à paroi fixe de 0.5 m de longueur. En effet, l'écoulement redevient symétrique et la pente du gradient de pression correspond à celui de l'écoulement de Poiseuille pur. Sur la figure les résultats obtenus avec la formulation Galerkin/Least-Squares GLS(Q2SQ2S) sont présentés. Les pressions aux parois supérieure et inférieure coïncident. Il existe une légère différence entre la pression aux parois supérieure et inférieure dans la région $dp/dx > 0$ (voir la petite figure insérée dans la figure 4.22). En tenant compte de l'imprécision de mesure, il existe un très bon accord entre la prédiction numérique et l'expérience. Le saut de pression à la jonction paroi fixe-paroi mobile est également bien prédit numériquement. Ces résultats présentent deux points essentiels. Premièrement la formulation GLS(Q2SQ2S) est validée. Deuxièmement, le résultat confirme l'applicabilité de cette formulation aux écoulements avec une viscosité variable.

Pour expliquer le saut de pression il est utile d'étudier l'évolution du frottement aux parois supérieure et inférieure. Sur la figure 4.23 l'évolution du frottement τ_2 à la paroi supérieure est présentée pour les trois écoulements et $Re=5000$. La figure 4.24 présente l'établissement du frottement τ_1 à la paroi inférieure. On constate que la mise en mouvement de la paroi inférieure (à $x = 1.69m$) est accompagnée d'une variation très importante de τ_1 avec un changement de signe. La contrainte τ_2 varie également mais de façon nettement moins significative et en conservant son signe. La pression sur la paroi inférieure diminue avant la jonction en raison de l'accélération du fluide sur la paroi mobile. En revanche, dans la partie supérieure le fluide décélère pour conserver le débit. La décélération est accompagnée d'une augmentation de pression. Après la jonction la valeur absolue de τ_1 diminue rapidement en liaison avec un gradient de pression positif sur la paroi mobile. A la paroi supérieure la contrainte augmente avec un gradient de pression qui reste positif. A partir de $x/H \sim 60$ le gradient de pression est identique sur les deux parois et on observe une phase d'établissement lent des deux contraintes pariétales. Cette phase d'établissement est d'autant plus longue que la vitesse de paroi augmente. Pour l'écoulement de type Couette une deuxième région d'accélération et décélération existe ($x'/H \sim 50 - 80$). Elle trouve son origine plus particulièrement dans l'établissement des grandeurs

turbulentes k et ϵ (voir la suite).

Une longueur de paroi mobile de 70–90 fois la hauteur du canal semble adéquate pour assurer l'établissement numérique de la vitesse de frottement pour les écoulements de type Poiseuille et type intermédiaire. L'écoulement de type Couette ne sera pas complètement établi si la longueur de la paroi mobile est plus courte que 100 fois la hauteur du canal. On présente les évolutions de la vitesse de frottement à la paroi supérieure pour $Re=5000$ et 10000 sur la figure 4.25. On note que l'établissement dépend plus particulièrement de la vitesse de la paroi mobile. Il semble que le nombre de Reynolds basé sur la vitesse débitante n'a pas d'influence notable sur l'établissement. L'énergie turbulente montre la même tendance. Nous avons observé dans les paragraphes précédents que l'évolution du profil de k entre la dernière station expérimentale et la dernière station numérique ne change pas d'une façon notable avec le nombre de Reynolds débitant. Elle est plutôt une fonction du type d'écoulement (fonction de la vitesse de paroi mobile). Deldicque (1995) en s'appuyant sur le calcul mono-dimensionnel effectué à l'aide d'un modèle RSM constate que l'établissement de k est une fonction de ce nombre de Reynolds. Un allongement de l'installation expérimentale ainsi que des calculs bi-dimensionnels réalisés par les modèles RSM seraient souhaitables afin d'élucider ce point.

4.1.7 Etablissement de l'énergie turbulente

L'établissement des tensions de Reynolds u'^2 et v'^2 pour les écoulements de Couette-Poiseuille à $Re = 5000$ a été mesuré par Ottavy (1994). Cependant, la corrélation w'^2 n'a été déterminée qu'aux deux dernières stations. Pour estimer l'énergie turbulente k aux stations intermédiaires ($x = 1.855$ m et $x = 2.255$ m) on supposera donc que

$$v'^2 \sim w'^2 \quad (4.7)$$

et

$$k_{exp} = \frac{\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{2} \sim \frac{\overline{u'^2 + 2 \times v'^2}}{2} \quad (4.8)$$

Sur la figure 4.26 les trois corrélations normales mesurées sont présentées à la dernière station expérimentale pour $Re=5000$ et pour l'écoulement de type Poiseuille. On constate une anisotropie franche entre les différentes corrélations normales sur une grande partie de la hauteur du canal. Par conséquent, les relations (4.7) et (4.8) doivent être utilisées avec précaution. Sur la figure 4.27a les profils de k à $x = 1.855$ m et $x = 2.255$ m obtenus avec le modèle "Chien-local" sont comparés à l'expérience. La surestimation de k dans la partie centrale du canal trouve son origine en partie dans l'approximation faite par les relations (4.7) et (4.8). Ces relations sous-estiment l'énergie turbulente car elles sous-estiment la corrélation w'^2 . On note tout de même

que le calcul reproduit assez fidèlement l'allure du profil de k expérimental ainsi que la forme de son évolution. Le même type d'écart déjà constaté à la dernière station expérimentale entre le calcul et l'expérience peut être noté ici près des parois fixe et mobile (voir le paragraphe précédent pour l'explication). Sur les figures 4.27b et 4.27c les profils de k à $x = 1.855$ m et $x = 2.255$ m sont comparés à l'expérience pour les écoulements de type intermédiaire et de type Couette. Le même type d'écart avec la même origine est constaté. Les comparaisons faites sur les figures 4.27 montrent que le désaccord entre le calcul et la mesure se présente plus particulièrement sur le niveau de l'énergie turbulente.

Sur les figures 4.28, 4.29 et 4.30 l'établissement de k pour les écoulements de type Poiseuille, de type intermédiaire et type Couette à $Re=5000$ est présenté. On note que l'établissement de k se fait principalement en deux temps. On voit que jusqu'à une distance de l'ordre de 2.4 m (correspondant au profil $N^0 = 53$) les effets des parois sont peu ressentis au centre du canal. Les pics pariétaux de k s'atténuent en raison de la diminution du frottement dans les régions suffisamment loin de la discontinuité. On constate qu'après cette distance ($x \sim 2.4$ m) le niveau de k s'accroît sur la majeure partie du canal jusqu'à l'établissement complet qui dépend visiblement de u_q/u_w . C'est l'apparition du deuxième temps caractéristique de l'établissement. Corenflos (1993) et Deldicque (1995) ont également constaté un établissement en deux temps de k dans leurs expériences. L'écoulement de type Couette (figure 4.30b) présente une particularité dans la deuxième phase: le niveau d'énergie turbulente augmente jusqu'à $x \sim 3.7$ m ($N^0 = 75$), puis décroît pour se stabiliser en $x = 5$ m. Nous avons effectué le calcul avec une longueur de la paroi mobile différente. La diminution de k se produit toujours à la même station (même abscisse x). Donc, on ne peut pas attribuer ce comportement à la condition à la frontière de sortie ou à la longueur de la paroi mobile. Ce phénomène ne peut pas être confirmé ou infirmer par les expériences de Corenflos et Deldicque puisque les mesures s'arrêtent à $x = 2.955$ m. Pour l'écoulement de type Couette, Deldicque note qu'il ne peut conclure à l'établissement complet de la corrélation normale, celle-ci évoluant encore après $x = 2.855$ m. Corenflos fait la même constatation pour l'écoulement de type intermédiaire.

Pour élucider un peu l'établissement de k il est intéressant d'étudier les bilans des termes de l'équation de transport pour k . Sur les figures 4.31, 4.32 et 4.33 ces bilans sont présentés à différentes stations pour les trois écoulements de type Poiseuille, type intermédiaire et type Couette. L'équation pour k s'écrit:

$$\text{Convection-Production+Dissipation-Diffusion}=0$$

Type Poiseuille A l'entrée (figure 4.31a) le terme de convection est négligeable et l'équation pour k dans les zones (1) et (3) s'équilibre de façon classique par les termes de production, dissipation et diffusion. Dans la zone (2) l'équation est équilibrée

par les termes de dissipation et diffusion. On constate que la région d'équilibre de production et de dissipation ($P = \epsilon$) est très petite. Elle se présente dans les zones (1) et (3). Rappelons que pour $Re = 5000$ la région pariétale est très importante. Immédiatement en aval de la jonction paroi fixe-mobile (à $x \sim 1.7$ m, figure 4.31b) le terme de production près de la paroi mobile s'atténue en raison de la diminution du frottement (voir les figures 4.23 et 4.24). En revanche, le terme de convection devient non-nul et présente un pic significatif à proximité de la paroi. Dans cette zone, que nous appelons la zone (4), tous les termes semblent être importants. Les zones (1) et (2) ne subissent aucune modification, sauf que les niveaux de production et de dissipation diminuent légèrement. En s'éloignant de l'entrée ($x = 2.3$ m), le terme de convection s'affaiblit. Son pic s'écarte de la paroi et s'étale en un plateau. Le premier temps caractéristique s'achève. Les trois zones (1), (2) et (3) ressemblent à celles de la station $x = 1.455$ m. Cependant, une nouvelle zone apparaît (zone 5) où la convection et la production équilibrent la dissipation. Les deux termes de production et dissipation dans les zones (3) sont affaiblis en raison de la diminution du frottement à la paroi mobile. Entre la station $x = 2.3$ m et $x = 3.1$ m le terme de convection tend vers zéro. Pendant ce deuxième temps caractéristique, l'influence de la paroi supérieure devient importante. En effet, en l'absence de convection, la production et la dissipation ont le temps de se modifier et de s'adapter aux nouvelles conditions aux limites. Ce deuxième temps caractéristique est contrôlé par la diffusion puisqu'elle est de l'ordre de grandeur des termes de production et dissipation. En $x = 3.1$ m, les trois zones (1), (2) et (3) ressemblent à celle de la station $x = 1.455$ m. Donc on peut considérer l'écoulement de type Poiseuille comme un écoulement de Poiseuille pur dissymétrique dans la mesure où les phénomènes présents pour l'écoulement de Poiseuille pur existent également pour l'écoulement de type Poiseuille. Notons tout de même que, dans la partie inférieure, la zone production=dissipation est quasiment absente en $x = 3.1$ m. Corenflos (1993), puis Deldicque (1995) ont constaté une région de production négative dans la partie inférieure du canal. Elle occupe seulement 5% de la hauteur totale du canal. Le modèle $k - \epsilon$ n'est pas capable de reproduire cette région à cause de l'hypothèse de Boussinesq.

Type intermédiaire Nous présentons dans ce paragraphe seulement les points de différence entre les deux écoulements de type intermédiaire et de type Poiseuille. On note d'abord l'apparition d'un deuxième pic de production en $x = 1.7$ m à $y/h \sim 0.05$, en raison de l'augmentation soudaine du frottement (avec changement de signe) due à la discontinuité. Le premier pic est simplement celui de production en $x = 1.455$ m qui est convecté puis diffusé vers la paroi supérieure. En $x = 2.3$ m une nouvelle zone (5') se manifeste dans laquelle la convection est équilibrée seulement par la dissipation. Notons l'existence de deux zones où diffusion=dissipation et la disparition de la zone (3). La convection ne s'annule pas complètement en $x = 3.1$ m. Elle est équilibrée par la diffusion dans la partie $0 < y/h < 0.1$. Elle change également de signe. L'annulation du terme de convection à l'établissement complet

changera la zone (6) en zone de dissipation=diffusion (voir la figure 4.35d un peu plus loin pour la station établie). On observe que pour ce type d'écoulement, les processus turbulents sont très différents du côté de la paroi mobile.

Type Couette Ce type d'écoulement se comporte en $x = 1.7$ m de la même façon que l'écoulement de type intermédiaire. Le deuxième pic de production est cependant plus prononcé en raison d'une augmentation plus importante du frottement négatif à la discontinuité. Néanmoins, ce deuxième pic ne s'annule pas comme pour le cas de l'écoulement de type intermédiaire en $x = 2.3$ m et $x = 3.1$ m. On note le changement de signe du terme de convection en $x = 3.1$ m (voir également l'augmentation du niveau de k sur la figure 4.30b). A l'établissement complet (lorsque le terme de convection et par conséquent le terme de diffusion sont négligeables dans la partie centrale) l'écoulement de type Couette s'approche de l'écoulement de Couette pur dans la partie centrale (zone d'équilibre local, zone 6). Nous avons effectué le calcul mono-dimensionnel d'un écoulement de Couette pur dont le bilan est présenté sur la figure 4.34. On observe les zones 1 et 3 et la zone d'équilibre local.

Finalement, nous comparons sur la figure 4.35 le bilan de l'équation de transport pour k pour l'écoulement de type intermédiaire à celui issu de la simulation numérique directe de Kuroda et al. (1993). Le terme de diffusion de la DNS est la somme des termes de diffusion visqueuse, diffusion par les fluctuations de pression et diffusion turbulente. Il existe globalement une bonne concordance entre la prédiction obtenue par le modèle $k - \epsilon$ et la DNS. Cependant un écart se manifeste entre le bilan de deux méthodes à proximité immédiate des parois. Nous avons indiqué au chapitre 3 que les termes auxiliaires de certains modèles à bas nombre de Reynolds (y compris le modèle de Chien) sont empiriques. Ils ne prédisent pas la bonne variation de ϵ à la paroi (noter la pente de ϵ à la paroi supérieure).

En résumé, le bilan de l'équation pour k révèle l'apparition de divers phénomènes turbulents en cours de l'établissement des écoulements Couette-Poiseuille. Habituellement, les constantes des modèles de turbulence (y compris le modèle $k - \epsilon$) sont déterminées en faisant appel aux écoulements simples dans des situations particulières (e.g. écoulement établi, zone logarithmique, équilibre local entre production et dissipation). On constate que pour les écoulements de Couette-Poiseuille (établis ou non-établis) ces hypothèses sont difficilement justifiables. C'est la raison principale de la mauvaise prédiction des modèles de turbulence pour les écoulements hors région d'équilibre local. Les écoulements de Couette-Poiseuille s'avèrent donc très utiles pour développer et tester les modèles de turbulence grâce à leur complexité physique ainsi qu'à leur simplicité géométrique.

4.1.8 Conclusion

Nous avons appliqué le modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds de Chien aux écoulements de Poiseuille pur, de type Poiseuille, de type intermédiaire, et de type Couette à deux nombres de Reynolds 5000 et 10000. La prédiction des écoulements à très bas nombre de Reynolds n'est pas facile car la zone pariétale occupe une grande partie de la hauteur du canal. Les définitions des fonctions d'amortissement deviennent plus importantes, surtout la définition de f_μ qui contrôle le niveau de la viscosité turbulente dans la région pariétale. La fonction f_μ du modèle de Chien est basée sur la distance des parois et la vitesse de frottement à la paroi. Cette définition rencontre deux difficultés. Premièrement, pour les écoulements dissymétriques à très bas nombre de Reynolds la définition de y n'est pas évidente. Deuxièmement, pour les écoulements où la vitesse de frottement s'annule à la paroi (e.g. l'écoulement de type intermédiaire) cette fonction n'est pas applicable. Un remède à cette situation est d'utiliser la définition locale de la vitesse de frottement. Dans un premier temps nous avons calculé l'écoulement de Poiseuille pur avec les définitions locale et non locale de f_μ . Les calculs nous ont montré que la définition locale sous-estime la viscosité turbulente au centre du canal puisqu'avec la définition locale la fonction f_μ tend très lentement vers 1 au centre. La sous-estimation de la viscosité turbulente entraîne le gonflement du profil de vitesse et la sur-estimation du niveau de k au centre du canal. Puis, nous avons remplacé la fonction f_μ de Chien par celle proposée par Rodi-Mansour basée sur la DNS. La prédiction s'est effectivement améliorée.

L'application du modèle Chien-local à trois écoulements de type Poiseuille, de type intermédiaire, et type Couette reproduit les tendances constatées pour l'écoulement de Poiseuille pur. Il reproduit assez fidèlement l'allure des profils de vitesse de ces trois écoulements. La reproduction numérique (même la réalisation expérimentale) de l'écoulement de type intermédiaire est difficile puisqu'un léger défaut d'estimation du gradient de vitesse à la paroi mobile reproduit un écoulement de type Poiseuille ou de type Couette. Pour tester la sensibilité des résultats à la définition de f_μ , la proposition de Rodi-Mansour avec $\sigma_k = 1.3$, puis une définition non-symétrique de la fonction d'amortissement ont été adoptées. Ces modifications améliorent la prédiction du niveau de k , mais détériorent paradoxalement la prédiction de la vitesse moyenne. Il semble que pour reproduire parfaitement les profils expérimentaux des fonctions d'amortissement bien calées à l'expérience soient nécessaires. Une confrontation des bilans des équations de transport pour k et pour ϵ avec ceux issus des simulations numériques directes semble plus judicieuse pour modifier ces deux équations ainsi que leurs fonctions d'amortissement. Cependant, compte-tenu de la diversité des phénomènes se produisant près de la paroi mobile, l'universalité de ces modifications semble difficilement réalisables. Le recours aux modèles à trois équations de transport ($k - \epsilon - v'$) pourra être une démarche plus prometteuse.

Ces résultats mettent en évidence très clairement les inconvénients du modèle

basé sur l'hypothèse de Boussinesq à prédire un ensemble varié d'écoulements symétriques et dissymétriques de Couette-Poiseuille à très bas nombre de Reynolds. Le modèle au second ordre (e.g. le modèle de Hanjalic) qui semble prédire correctement le profil de k n'est pas épargné par cette difficulté puisque les profils de vitesse moyenne ne sont pas aussi bons que les profils de k .

Les calculs bi-dimensionnels effectués avec le modèle $k - \epsilon$ mettent en évidence l'établissement en deux temps de l'énergie turbulente, et ce en accord avec les expériences réalisées par Corenflos (1993) et Deldicque (1995). Les résultats numériques montrent qu'à la dernière station expérimentale aucun des trois écoulements de type Poiseuille, de type intermédiaire et de type Couette ne sont pas établis numériquement. Une évolution relativement lente des profils a été constatée après cette station. Le calcul a montré que la longueur d'établissement pour un Re_q donné est une fonction de la vitesse de la paroi mobile. Plus la vitesse de bande est forte et plus cette distance est grande, et ce en accord avec Deldicque (1995). En revanche, le nombre de Reynolds basé sur la vitesse débitante (Re_q) n'a pas d'influence notable sur l'établissement. Un allongement de l'installation expérimentale ainsi que des calculs bi-dimensionnels réalisés par d'autres modèles de turbulence seraient souhaitables afin de confirmer ou d'infirmes ces résultats.

Le bilan de l'équation pour k a été étudié afin d'essayer élucider l'établissement des écoulements de Couette-Poiseuille. Cet étude a mis en évidence la diversité des phénomènes qui se produisent au cours de l'établissement de k , à savoir les zones d'équilibre de diffusion-dissipation, convection-dissipation, production-dissipation et diffusion-production-dissipation. Ces écoulements s'avèrent très utiles pour développer et tester les modèles de turbulence grâce à leur complexité physique ainsi qu'à leur simplicité géométrique.

Les écoulements de Couette-Poiseuille ont également servi à valider nos codes d'éléments finis. Les résultats obtenus avec les deux formulations BGP(Q1PO) et GLS(Q2SQ2S) sont en bonne concordance. Le gradient de pression calculé avec la formulation GLS est en bon accord avec les résultats expérimentaux. Ceci valide la formulation GLS pour les écoulements turbulents.

4.2 La marche descendante

4.2.1 Introduction

L'écoulement sur une marche descendante (figure 4.36a) fait partie des problèmes de référence qui ont été traités au congrès de Stanford (1981). Ce congrès avait pour but la comparaison des performances des modèles de turbulence sur un certain

nombre d'écoulements de référence. Nallasamy (1987) a présenté le résumé des travaux effectués par les participants concernant l'écoulement sur la marche descendante. La longueur de recollement x_r est un paramètre crucial pour faire la comparaison avec l'expérience. La mauvaise prédiction de cette longueur dégrade considérablement la précision du coefficient de pression (voir plus loin) et du coefficient de transfert de chaleur. La valeur expérimentale de la longueur de recollement (x_r) est de 7 ± 0.5 fois la hauteur de la marche. Nallasamy a observé une grande dispersion des résultats de différents auteurs en ce qui concerne la prédiction de cette longueur. Il a noté également que les calculs avec un modèle $k - \epsilon$ et des fonctions de paroi sous-estiment cette distance de plus de 20%. Nallasamy a évoqué l'influence de plusieurs paramètres pour expliquer la dispersion des résultats et la sous-estimation de x_r . Il les a imputé à la présence de diffusion artificielle (numérique), aux conditions aux frontières d'entrée, et à la sur-estimation de la viscosité turbulente par le modèle $k - \epsilon$ dans la région de recirculation. La raison de la dispersion des résultats et le rôle de chaque paramètre n'a pas pu être étudié en détail, probablement parce que tous les auteurs n'ont pas communiqué leur conditions aux frontières d'entrée. Il faut également noter que les auteurs n'ont pas fait une étude de l'influence du maillage. La plupart des participants au congrès de Stanford (1981) ont utilisé une méthode de volumes finis pour effectuer le calcul de la marche descendante. Pendant les années 80 les numériciens ont également étudié ce problème par la méthode des éléments finis. Parmi de nombreux auteurs, on peut citer les travaux de Bettes et Haroutunian (1985), Brison et al (1985) et Autret (1986) effectués avec le modèle $k - \epsilon$ et les fonctions de paroi. Les solutions obtenues par ces auteurs ont démontré une fois de plus la sous-estimation de la longueur x_r et la dispersion des résultats. Betts et Haroutunian ont utilisé une formulation de Galerkin standard en ajoutant une diffusion artificielle suivant les lignes de courant (à la manière de Gresho et al., 1984). Ils ont imposé des conditions aux frontières d'entrée proches de l'expérience à $x = 0$, au lieu de $x/h_m = -3$, ce qui est recommandé par les expérimentateurs (h_m est la hauteur de la marche). Betts et Haroutunian ont trouvé une longueur de recollement de 6.23 fois la hauteur de la marche, ce qui est seulement à 11% du résultat expérimental. Brison et al. ont traité ce problème avec une méthode des éléments finis en ajoutant une diffusion numérique suivant les lignes de courant à la manière de Brooks et Hughes (1979). Ces auteurs ont supposé un écoulement de Poiseuille pur établi à $x=0$ (les profils n'ont pas été communiqués). Ils ont trouvé $x_r/h_m = 5.3$, ce qui est extrêmement sous-estimée par rapport à la valeur expérimentale. Autret a également imposé les profils d'un écoulement établi (expérience de Comte-Bellot, 1965) à $x=0$ et trouva $x_r/h_m = 5.22$ avec une formulation de Galerkin standard.

Récemment Pelletier et al. (1994) ont étudié ce problème avec un modèle $k - \epsilon$ et des fonctions de paroi. Ils ont raffiné le maillage d'une manière adaptative et ont trouvé une longueur de recollement de 6.2 fois la hauteur de la marche avec un maillage constitué d'environ 9000 points. Pelletier et al. n'ont pas indiqué les

conditions d'entrée. Ils les ont imposé à $x/h_m = -4.0$. Thangam et Speziale (1992) ont calculé cet écoulement avec des maillages raffinés (environ 12000 points) et une méthode de type volumes finis. A l'aide d'un modèle $k-\epsilon$ et en utilisant les fonctions de paroi en trois couches, ces auteurs ont obtenu $x_r/h_m = 6.25$. Les fonctions de paroi standard ont fourni une longueur de recollement de 6.0 fois la hauteur de la marche. Thangam et Speziale n'ont pas précisé leur conditions d'entrée. Ils les ont posé à $x/h_m = -4.0$. Grâce aux travaux de Pelletier et Speziale, on constate que la sous-estimation de x_r et la dispersion des résultats trouvent partiellement leurs origines dans le fait que les calculs réalisés auparavant n'était pas indépendant du maillage. L'effet de la diffusion numérique pour les maillages lâches est bien-entendu plus néfaste que pour les maillages raffinés.

Dans ce paragraphe nous allons présenter le calcul avec les formulations SUPG et GLS et à l'aide d'un modèle $k-\epsilon$ à bas nombre de Reynolds (modèle de Chien). Des calculs préalables ont été effectués pour examiner l'influence des conditions aux frontières d'entrée et la formulation choisie. Dans ce qui suit nous allons d'abord présenter ces tests, ensuite la comparaison avec l'expérience sera étudiée.

4.2.2 Influence des conditions d'entrée

Parmi de nombreux chercheurs, Kim et al. (1980) ont étudié expérimentalement l'écoulement sur la marche descendante à $Re_{max} = 42000$ (basé sur la vitesse maximum dans le canal d'entrée et la hauteur de la marche). Ces mesures ont été complétées plus tard par Westphal et al. (1984). Les résultats de ces derniers sont comparés dans cette thèse à la prédiction numérique. On trouvera sur la figure 4.36a les données géométriques et les conditions aux limites retenues pour le calcul. Les conditions de sortie sans contrainte sont imposées à une distance de 30 fois la hauteur de la marche pour minimiser l'influence de la sortie. La spécification des conditions d'entrée sur les variables k et ϵ pose un problème majeur puisque d'une part les corrélations normales de v' et w' n'ont pas été mesurées et d'autre part la dissipation n'est pas pour l'instant accessible expérimentalement. Dans un premier temps nous avons imposé les profils issus d'un calcul de l'écoulement de Poiseuille pur établi (voir figures 4.37a, 4.37c et 4.37d) à $x=0$. Sur cette figure la vitesse u_{ref} est la vitesse expérimentale à ($y' = w/2$, $x/h_m = -3.0$). Les profils du calcul mono-dimensionnel de l'écoulement de Poiseuille pur ne sont pas en concordance avec les profils expérimentaux. Des conditions d'entrée plus proches de la réalité expérimentale seront étudiées plus loin. Deux maillages constitués de 50×150 et de 100×150 éléments bilinéaires pour les deux composante de vitesse, l'énergie turbulente et la dissipation sont utilisés pour tester l'influence du maillage. La figure 4.36b présente le maillage le plus lâche. Au pire, le premier point se situe respectivement à $y^+ = 1.9$ et $y^+ = 2.78$ des parois haute et basse. Les résultats présentés dans ce paragraphe sont tous obtenus avec les formulations suivantes: Pour

les équations de Reynolds la formulation SUPG(Q1P0) est appliquée. Le terme de pression est traité avec la méthode de pénalisation. Les équations de transport pour k et pour ϵ sont traitées avec la formulation SU(Q1). Rappelons que cette formulation diffère de la formulation SUPG. Dans la formulation SU le terme de convection est stabilisé en ajoutant de la diffusion numérique suivant les lignes de courant à la manière de Brooks et Hughes (1979). La formulation SUPG est une formulation consistante où tous les termes de l'équation de transport, y compris les termes source et puit, sont multipliés par les fonctions de pondération de Petrov-Galerkin (voir les chapitres 1 et 2). Le calcul avec ces deux maillages et les conditions d'entrée d'un écoulement établi a fourni respectivement des longueurs de recollement de 6.02 et 6.04 fois la hauteur de la marche. Par conséquent, l'indépendance de la solution vis à vis du maillage peut être assurée, car en doublant le maillage la longueur x_r se modifie seulement de $\sim 0.3\%$.

Pour étudier l'influence des conditions d'entrée, nous avons arbitrairement divisé les valeurs de k et ϵ à l'entrée respectivement par un facteur de 2 et 4. La viscosité turbulente à l'entrée reste inchangée par cette modification. La calcul avec ces conditions d'entrée a fourni une longueur de recollement de 6.15 fois la hauteur de la marche. Il faut mentionner qu'avec cette modification l'écoulement est modifié uniquement dans la région $\sim x/h_m < 6$. L'influence de cette modification se limite à la zone de recirculation. La division successive de k et de ϵ par des facteurs croissants entraîne l'augmentation de la longueur x_r . Cependant la convergence du système d'équations discrètes devient de plus en plus difficile. Nous avons également modifié la viscosité turbulente à l'entrée en divisant l'énergie turbulente et la dissipation par le même facteur. Une division par 2 a fourni une longueur de recollement de 6.35 fois la hauteur de la marche (au lieu de 6.04 pour les conditions nominales). La valeur expérimentale de 7 est atteinte pour une division par 16 de k et ϵ .

On conclut donc que si le calcul est initié par les mêmes échelles de longueur (même viscosité turbulente) mais avec des niveaux de k et ϵ moins forts, la longueur x_r sera rallongé. En effet, on constate que ϵ devient rapidement indépendant de la condition d'entrée (non-présenté), tandis que le niveau de k dans la région de recirculation est influencé par cette condition. Par conséquent, le niveau de la viscosité turbulente diminue dans cette région, ce qui rallonge la longueur de recollement. ϵ est peu sensible à la condition d'entrée, peut-être en raison de la présence de termes source et puit importants. Par ailleurs, la réduction d'échelle de longueur initiale (division de k et ϵ par le même facteur) rallonge la distance x_r d'une façon significative.

Westphal a fourni les profils de l'écoulement en amont de la marche à deux stations $x/h_m = -3$ et $x/h_m = -0.75$. L'écoulement correspond à deux couches limites turbulentes équivalente sur les parois haute et basse, séparées par une zone de vitesse uniforme. Les profils de $\sqrt{u'^2}$ et \bar{u} sont présentés sur les figures 4.37a

et 4.37b. Sur la figure (4.37b) les vitesses fluctuantes ($\sqrt{u'^2}$) des expériences de Westphal et al. (1984) et Klebanoff (1953) sont comparés. Elles sont en bonne accord. En l'absence de mesure des corrélations normales v'^2 et w'^2 , le profil de l'énergie turbulente mesuré par Klebanoff est imposé à l'entrée (figure 4.37c). Le profil d'entrée de dissipation est estimé de la façon suivante:

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{k} l_m$$

$$\tilde{\epsilon} = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\nu_t}$$

où l_m est la longueur de mélange proposée par Wolfstein (1969). Les figures 4.37c, 4.37d et 4.37e comparent les profils de k , ϵ , et ν_t obtenus par cette méthode. On note que leurs niveaux sont inférieurs aux valeurs provenant du calcul mono-dimensionnel établi. Le calcul avec ces conditions d'entrée a donné $x_r/h_m = 6.22$ et 6.24 pour les deux maillages précédents. Sur la figure 4.38 les iso-vitesses $\bar{u} = 0$ obtenues à l'aide des deux maillages sont présentées. Les deux courbes se superposent parfaitement. Ces valeurs sont en bonne concordance avec les calculs de Pelletier et al. et les résultats de Thangam et Speziale. Notons que les nombres de points nécessaires pour les deux maillages (7500 et 15000 points) sont comparables à ceux utilisés par Pelletier (9000 points) et Thangam-Speziale (12000 points).

4.2.3 Influence de la formulation

Pour tester la sensibilité des résultats à la formulation utilisée, la formulation SUPG(Q1P0) a été remplacée par la formulation GLS(Q1Q1). L'utilisation des éléments bilinéaires pour la pression et des conditions d'entrée de Klebanoff a fourni une longueur de recollement de 6.24 fois la hauteur de la marche pour le maillage moins raffiné. Donc, on peut conclure que l'augmentation de l'ordre d'interpolation de la pression n'améliore que très peu la précision du calcul. Sur les figures 4.39a et 4.39b les isobares $p^* = \bar{p} + 2/3k$ (voir l'annexe B) obtenues avec les formulations SUPG(Q1P0) et GLS(Q1Q1) sont présentées. Pour la formulation SUPG le champ de p^* est calculé en utilisant l'équation de Poisson pour la pression (voir le chapitre 2). Il faut mentionner que cette équation doit être utilisée en tenant compte de la variation de la viscosité turbulente en espace. On note sur les figures 4.39a et 4.39b que les champs de p^* obtenus par les deux méthodes sont en très bonne concordance. Dans un deuxième temps les équations de transport pour k et pour ϵ ont été traitées par la formulation SUPG: les termes source et puit ont également été multipliés par les fonctions de pondération de Petrov-Galerkin. Les résultats ont montré une très légère modification du champ turbulent. Donc, l'élimination des termes source et puit dans le résidu des équations ne dégrade pas la précision du calcul pour le maillage utilisé. Dans la littérature, les termes de convection des équations de transport de turbulence sont très souvent traités avec des schémas de

diffusion artificielle du premier ordre. Il est généralement supposé que la solution de ces équations est peu sensible au terme de convection en raison de la présence des termes source et puit assez importants (Lien et Leschziner 1993).

4.2.4 Comparaison avec l'expérience

Pour être plus cohérent avec la réalité expérimentale, les conditions aux frontières d'entrée (celles estimées à l'aide de l'expérience de Klebanoff) sont imposées à $x/h_m = -3.0$. Le calcul dans ce cas de figure a fourni une longueur de recollement de 6.0 fois la hauteur de la marche. Pour expliquer la diminution de la longueur x_r ($6.22 \rightarrow 6.0$), les variations longitudinales de k et de ϵ à $y/h_m = 1.0$ sont tracées (figures 4.40a et 4.40b). Les niveaux de k et de ϵ prédits juste en aval du coin d'entrée sont nettement supérieurs à ceux obtenus auparavant en imposant les conditions d'entrée à $x = 0$. Les écarts diminuent très rapidement. Pourtant, cette différence de niveau conduit à une sur-estimation de la viscosité turbulente et donc à une sous-estimation de x_r . On conclut que le comportement du modèle de turbulence au point de singularité d'entrée joue un rôle non-négligeable dans la prédiction de x_r . La sensibilité des solutions aux valeurs des constantes du modèle et également à la définition de la fonction d'amortissement f_μ ont été testées. Le modèle $k - \epsilon$ de Chien avec $C_1 = 1.44$ et $C_2 = 1.92$ augmente la longueur de recollement seulement de $\sim 0.2\%$. L'utilisation des vitesses de frottement locale ou non-locale dans la définition de f_μ n'a pas modifié la solution. Rappelons que l'expérience est réalisée à $Re > 40000$ et l'épaisseur de la région pariétale n'est pas importante par rapport à la hauteur du canal.

Sur la figure 4.41a les profils de vitesse moyenne sont comparés à l'expérience en différentes stations dans la région de recirculation. Les écarts entre prédiction et mesure s'atténuent en s'éloignant de la marche. Le profil numérique est en bonne concordance avec l'expérience à la station située juste après le point de recollement. Sur la figure 4.41b on trouvera la comparaison faite pour la région de rétablissement. Notons que les profils expérimentaux ne satisfont pas très bien à la conservation de la masse. En effet différents types de sonde ont été utilisés pour mesurer la vitesse dans les deux régions de recirculation et de rétablissement. Dans la région de recirculation les expérimentateurs ont utilisé l'anémométrie à fil pulsé, tandis que l'anémométrie à fil chaud simple est utilisé dans la région de rétablissement. Pourtant, ces imprécisions ne peuvent pas justifier les écarts entre la prédiction et les mesures concernant la différence de pentes de courbes. L'écoulement dans la partie inférieure du canal ressemble à un écoulement de couche-limite sur plaque plane avec $\frac{dp}{dx} \sim 0$. Westphal estime à 100 fois la hauteur de la marche la longueur nécessaire pour que les profils dans cette région aient exactement les propriétés d'un profil de couche limite "normale" (e.g. les mêmes constantes universelles du profil logarithmique et le même facteur de forme). Chien (1982) a montré que son modèle

reproduit très bien le profil expérimental de couche limite. Par conséquent, les écarts ne peuvent pas être imputés au modèle de turbulence concernant la prédiction des profils de type couche limite. Sur la figure 4.42 l'évolution longitudinale de k est présentée. Ce profil est comparé à l'évolution de la corrélation u'^2 provenant des mesures. On note qu'entre $x/h_m = 8$ et $x/h_m = 12$ le profil expérimental subit une variation soudaine qui n'est pas reproduite par le calcul. Il semble alors que le calcul et les mesures ne représentent pas de la même façon le changement qui se produit entre les deux régions de recirculation et de rétablissement.

Sur la figure 4.43 le profil de l'énergie turbulente est également présenté. En l'absence de mesures de v' et w' , on a supposé que

$$k_{exp} = \frac{3}{2} \overline{u'^2}$$

On note qu'en s'éloignant de la marche il existe une bonne concordance entre les prédictions et les mesures.

On trouvera sur la figure 4.44 les variations du coefficient de pression

$$C_p = \frac{\bar{p} - p_{ref}}{1/2 \rho \bar{u}_{ref}^2}$$

sur les parois supérieure et inférieure. p_{ref} est la pression de référence (à $x = 0$, $y = H$). Il existe une bonne concordance entre les résultats de deux formulations SUPG(Q1P0) et GLS(Q1Q1).

4.2.5 Conclusion

Le calcul de l'écoulement sur une marche descendante est effectué par un modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds (modèle de Chien). L'influence des conditions aux frontières d'entrée et de la formulation d'éléments finis sont examinées.

Les calculs effectués avec les deux formulations SUPG(Q1P0) et GLS(Q1Q1) ont fourni des solutions identiques. Les deux formulations ont également fourni des champs de pression similaires. L'indépendance de ces solutions vis à vis du maillage a été assurée en utilisant des maillages consistés respectivement de 50×150 et 100×150 éléments bilinéaires.

Concernant les conditions d'entrée, on peut conclure que si le calcul est initié par les mêmes échelles de longueur (même viscosité turbulente) mais avec des niveaux de k et ϵ moins forts, la longueur de recollement sera rallongé. Par ailleurs, la réduction d'échelle de longueur initiale rallonge cette distance d'une façon significative.

Le calcul avec des conditions d'entrée proches de la réalité expérimentale a mis en évidence la sous-estimation de la longueur de recollement par rapport à la valeur expérimentale de plus de 14%. Il faut mentionner que la valeur de ϵ à l'entrée reste tout de même estimée. Donc, une incertitude subsiste concernant l'échelle de longueur initiale. L'imposition des conditions d'entrée à $x = 0$ (au lieu de $x/h_m = -3$) a fourni une longueur de recollement qui est à environ 11% du résultat expérimental.

Il ressort de ces résultats que le modèle à bas nombre de Reynolds de Chien n'améliore pas d'une manière significative la prédiction de la longueur de recollement par rapport à un calcul effectué avec les fonctions de paroi. La tendance observée à sous-estimer exagérément cette longueur par les fonctions de paroi trouve son origine dans le fait que les calculs avec ces modèles s'effectuent habituellement avec des maillages lâches. La manière dont le coin d'entrée est pris en compte par le modèle à bas nombre de Reynolds et les fonctions de paroi peut être aussi un facteur déterminant. Il n'existe pas à notre connaissance de méthode physiquement bien définie pour modéliser le coin d'entrée. On peut avancer l'idée que le calcul avec des fonctions de paroi ne sera pas toujours beaucoup plus économique que celui avec un modèle à bas nombre de Reynolds. Dans certains cas de figure, pour trouver une solution indépendante du maillage les deux méthodes semblent nécessiter des nombres de points du même ordre de grandeur.

4.3 L'écoulement sur une bosse

L'écoulement sur une bosse (figure 4.45) fait partie de la base de donnée d'ERCO-FTAC. L'expérience est réalisée par Almeida et al.(1993). Cet écoulement est intéressant en raison de la présence d'une zone de fort gradient compressif en amont de la bosse. La géométrie de la bosse nécessite des éléments non-uniformes et non-rectangulaires qui peuvent influencer la précision de la solution. Les conditions aux frontières sont présentées sur la figure 4.45. Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse maximum au centre du canal d'entrée ($u_0 = 2.147 \text{ m/s}$), la hauteur du canal ($H=0.17\text{m}$) et la viscosité cinématique de l'eau ($1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) est de ~ 300000 . Le maillage d'éléments finis est présenté sur la figure 4.46. Il est constitué de 88×100 éléments bilinéaires. Au pire, le premier point du maillage se situe à $y^+ \sim 3$. Nous avons effectué le calcul avec les deux formulations SUPG(Q1P0) et GLS(Q1Q1) et à l'aide du modèle à bas nombre de Reynolds de Chien. Dans la suite nous comparons les résultats obtenus par ces deux formulations à l'expérience.

Sur les figures 4.47 et 4.48 on présente les vecteurs vitesse obtenus par les formulations SUPG(Q1P0) et GLS(Q1Q1). On observe la zone de recirculation

en aval de la bosse et les deux points de décollement et de recollement. Dans l'expérience, ces points se situent respectivement à $x/h_{max} = 0.43$ et $x/h_{max} = 4.82$. On constate que le point de décollement prédit par les deux formulations se situe à environ $x/h_{max} = 0.43$. La formulation GLS(Q1Q1) situe le point de recollement à environ 4.8 et ce en accord avec l'expérience tandis que la formulation SUPG(Q1P0) le place à $x/h_{max} \sim 5.5$. En examinant de plus près les champs de vitesse (voir les figures 4.49 et 4.50), on note que la formulation SUPG(Q1P0) rencontre des difficultés à prédire correctement la solution de vitesse, particulièrement dans la zone $0 < |x/h_{max}| < 0.4$. Comme nous l'avons indiqué au chapitre 2 l'utilisation de la méthode de pénalisation (combinée par l'intégration réduite) avec des éléments Q1P0 non-rectangulaires conduit à une formulation dite non-consistante. On note ici que cette formulation rencontre des dégradations de précision assez importantes. Les variations de pression sur les parois haute et basse sont présentés sur la figure 4.51. On constate des oscillations générées par la formulation SUPG(Q1P0) entre $0.5 < x/h_{max} < 1.0$. On observe également un changement de pente de pression à proximité de $x/h_{max} \sim 0$ dans la solution de la formulation GLS(Q1Q1) dû à un décollement local du fluide.

Sur la figure 4.52 on présente la composante horizontale de vitesse moyenne et le profil d'énergie turbulente à l'entrée. Ces profils sont obtenus à l'aide d'un calcul mono-dimensionnel établi. Les profils numériques et expérimentaux sont en bon accord. Sur les figure 4.53-4.59 les profils de \bar{u} , \bar{v} et k sont comparés à l'expérience en différentes stations. On note d'abord que la solution de la formulation GLS est plus proche de l'expérience que la solution de SUPG. On observe cependant que la prédiction de vitesse n'est pas en très bon accord avec l'expérience. Ce défaut est particulièrement lié à l'incapacité du modèle $k - \epsilon$ à prédire correctement l'énergie turbulente dans des zones de fort gradient compressif (voir la suite). Notons par ailleurs que comme pour le cas de l'écoulement sur la marche descendante le calcul montre un rétablissement lent par rapport à l'expérience (voir la figure 4.59a).

Maintenant nous comparons les profils de k . En l'absence de mesure de w'^2 , on a supposé que

$$k_{exp} = \frac{\overline{w'^2} + 2\overline{v'^2}}{2}$$

On note qu'en s'approchant de la bosse le niveau de k devient de plus en plus sur-estimé. Ce comportement trouve son origine dans le fait que le terme de production de k dépend des termes quadratiques qui s'additionnent à cause de l'hypothèse de Boussinesq (voir le chapitre 3, éq. 3.52). On constate également l'apparition d'un deuxième pic de k en raison de l'augmentation du frottement sur la bosse. Le deuxième pic ne peut pas être confirmé par l'expérience en raison de l'insuffisance des mesures. La prédiction de k reste tout de même correcte en aval de la bosse, surtout dans la partie supérieure du canal, où elle est excellente.

Cet écoulement est traité récemment pendant un "WORKSHOP" organisé par ERCOFTAC à Karlsruhe. Les résultats des participants obtenues par d'autres modèles $k-\epsilon$ à bas nombre de Reynolds (figure 4.60-4.61) sont en bonne concordance qualitative avec le résultat de la présente étude. Les modèles au second ordre, bien qu'ils prédisent un niveau correct de k en amont de bosse, ne présente pas un avantage certain concernant la prédiction de la région aval (figure 4.62-4.63). On constate qu'il existe des différences notables entre les résultats expérimentaux et l'ensemble des prédictions numériques effectuées par de nombreuses équipes de recherche. Almeida et al. (1993) affirme que l'écoulement reste 2-D malgré un rapport de hauteur-largeur du canal expérimental proche de 1. Nous restons cependant prudents vis à vis de ce point.

4.4 Récapitulatif

Dans ce chapitre nous avons effectué le calcul pour les écoulements de Couette-Poiseuille, l'écoulement sur une marche descendante et l'écoulement sur une bosse. Les écoulements de Couette-Poiseuille sont réalisés à bas nombre de Reynolds dans des configurations simples rectangulaires. En résumé, ces écoulements ont permis de valider notre code de calcul d'éléments finis. Les calculs ont mis en évidence les inconvénients des modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq à prédire un ensemble varié d'écoulements symétriques et dissymétriques de Couette-Poiseuille à très bas nombre de Reynolds. Ces écoulements s'avèrent très utiles pour développer les modèles de turbulence grâce à leur complexité physique, tout en conservant une simplicité géométrique. Pour une conclusion détaillée on pourra se référer au paragraphe 4.1.8.

Les écoulements sur la marche descendante et sur la bosse sont réalisés à grand nombre de Reynolds (respectivement à $Re \sim 40000$ et à $Re \sim 300000$). Pour la marche descendante, le calcul avec un modèle $k-\epsilon$ à bas nombre de Reynolds a sous-estimé la longueur de recollement de plus de 10 à 15%. Les conditions d'entrée peuvent jouer un rôle important dans la prédiction de l'écoulement. Leurs influences sur le point de recollement sont étudiées. Cependant, l'absence de mesure de ϵ ne permet pas de quantifier leur rôle. Pour une analyse plus détaillée on pourra se référer au paragraphe 4.2.5.

Finalement, pour l'écoulement sur la bosse nous avons mis en évidence le problème de consistance des éléments Q1P0 lorsqu'ils sont utilisés avec la méthode de pénalisation. L'inaptitude du modèle $k-\epsilon$ à prédire l'énergie turbulente dans des zones de compression forte a été illustrée. Cependant, certaines questions persistent concernant la fiabilité des résultats expérimentaux. Elles empêchent de dégager le comportement global du modèle $k-\epsilon$ pour l'écoulement sur une bosse d'une manière détaillée.

Conclusion Générale

Un code de calcul d'éléments finis a été développé dans le cadre de ce travail pour la prédiction des écoulements laminaires et turbulents dans le cas incompressible. Le code comprend plusieurs formulations et différentes combinaisons des éléments vitesse-pression (à savoir les éléments Q1P0, Q2SQ1, Q2Q1, Q1Q1, Q2SQ2S). Les formulations étudiées sont la formulation standard de Galerkin et les formulations stables d'éléments finis SUPG et GLS. La méthode de pénalisation est également traitée. En résumé la formulation SUPG (Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin) stabilise le terme de convection en ajoutant à la formulation de Galerkin des termes auxiliaires qui dépendent du résidu des équations à résoudre. La formulation GLS (Galerkin/Least-Squares) appartient à la famille des formulations de Petrov-Galerkin. Elle s'obtient en prenant le résidu des équations de Navier-Stokes, en le minimisant par les moindres carrés et en l'ajoutant à la formulation de Galerkin. Elle stabilise à la fois le terme de convection et le terme de pression. Ces formulations sont formellement consistantes car la solution exacte du problème les satisfait. Par conséquent, elles doivent permettre, au moins théoriquement, de stabiliser la formulation de Galerkin standard sans dégradation de précision. Ces formulations présentent également un avantage au niveau de la mise en oeuvre (maillage non-structuré, raffinement adaptatif) puisqu'elles bénéficient de la généralité inhérente à la méthode des éléments finis conventionnelle.

La formulation GLS avec les éléments linéaires (bilinéaires en 2-D) rencontre cependant un problème de consistance car le terme de diffusion dans la partie des moindres carrés de la formulation s'annule. Ceci peut entraîner une dégradation de précision de la solution de pression près des frontières. La dégradation de la précision est parfois attribuée dans la littérature au fait que cette formulation impose une condition aux frontières de Neumann de type homogène sur la pression. Un remède à ce défaut proposé dans la littérature consiste à ajouter un terme intégral aux frontières pour supprimer cette condition aux frontières. Nous avons observé que cette intégrale aux frontières peut être également dérivée à partir des fonctions de bulle. En comparant la formulation GLS et la formulation de Galerkin de l'équation de Poisson pour la pression nous avons démontré que la précision de la solution de pression peut être améliorée si le terme de diffusion dans le résidu est estimé par une technique des moindres carrés.

La première partie de cette thèse a été largement consacrée à la validation et à l'étude du comportement des formulations stables d'éléments finis SUPG et GLS pour les écoulements en régime laminaire. Nous avons validé nos codes sur des exemples classiques ou académiques. Ces exemples (surtout ceux du chapitre 1) ont également servi à déboguer nos codes pour minimiser l'introduction de toutes sortes d'erreurs de programmation. Nous considérons la validation de prime importance.

Notre but ultime dans cette thèse est la prédiction d'écoulements turbulents avec des modèles de turbulence. Il faut donc pouvoir distinguer les erreurs numériques de celles provenant de la modélisation. Dans le dernier paragraphe du chapitre 2 nous avons étudié la précision et le comportement de la formulation Galerkin et des formulations stables de SUPG et GLS à l'aide de problèmes de référence en utilisant différents maillages. En résumé, nous pouvons conclure que:

La formulation SUPG avec des éléments bilinéaires pour la vitesse et des éléments constants pour la pression présente un avantage indéniable au niveau du temps de calcul si elle est conjuguée avec la méthode de pénalisation. Cependant, cette formulation montre une grande sensibilité au type d'écoulement et au maillage utilisé. Le problème de consistance de cette formulation est à l'origine de ce comportement puisque pour les éléments Q1P0 le terme de pression dans le résidu n'est pas estimable. Concernant les deux écoulements sur la marche descendante et sur la double marche, la précision des champs de vitesse et de pression obtenus avec la formulation SUPG(Q1P0) est tout à fait satisfaisante. Ces solutions sont en bonne concordance avec celles obtenues avec d'autres formulations, à savoir la formulation classique de Galerkin et les formulations Galerkin/Least-Squares, pour des maillages réalistes. En revanche, nous avons mis en évidence le problème de consistance de la formulation SUPG(Q1P0) pour l'écoulement dans une cavité entraînée. La solution de vitesse obtenue avec cette formulation ne converge pas vers la solution de référence en raffinant successivement le maillage. Le même symptôme s'est manifesté en utilisant les formulations inconsistantes de SUPG(Q2SQ1) et SUPG(Q2Q1) dans lesquelles le terme de pression est négligé dans le résidu des équations de quantité de mouvement. Nous avons noté que l'absence du terme de pression conduit à une solution extrêmement diffusive. Par conséquent, la stabilisation du terme de convection à la manière des méthodes de "upwinding" classiques (qui consistent à ajouter une diffusion numérique dans les équations de transport) pourraient rencontrer des dégradations de précision pour les problèmes où la solution de pression n'est pas lisse. Ce résultat montre également que la qualité de la solution de pression peut influencer considérablement la solution de vitesse.

Les calculs ont démontré que les formulations GLS(Q1Q1) et (Q2SQ2S) stabilisent le terme de pression et de convection sans dégradation importante de précision. La solution de ces formulations converge relativement rapidement vers une solution indépendante du maillage. De plus, la qualité de la solution n'est pas très sensible au type d'écoulement. Nous avons attribué la meilleure solution de pression des formulations GLS par rapport à celle obtenue avec la formulation BG(Q2SQ1) au rôle des fonctions de bulle. Pour l'écoulement de Poiseuille pur (écoulement de Stokes) nous avons démontré que les oscillations du champ de pression obtenues avec les éléments Q2SQ1 trouvent leur origine dans l'insuffisance des noeuds de vitesse. En effet pour cet écoulement les éléments Q2Q1, qui dispose d'un noeud supplémentaire au centre de gravité, produisent une solution de pression lisse et

précise. La formulation GLS présente un avantage par rapport à la formulation SUPG pour stabiliser les équations de Navier-Stokes dans la mesure où elle prend en compte à la fois les termes de convection et de pression. En revanche, certaines questions mathématiques et numériques persistent concernant le traitement du terme de pression par la formulation SUPG.

Nous avons démontré à l'aide d'écoulements simples avec des solutions exactes que le calcul précis du terme de diffusion joue un rôle important dans la précision de la solution de pression des formulations GLS. Nous avons estimé ce terme par une technique des moindres carrés. La précision de la solution de pression s'est effectivement améliorée pour les éléments bilinéaires. La formulation GLS avec des éléments Q2SQ2S a présenté le meilleur comportement concernant la stabilité et la précision des solutions de vitesse et de pression. Ce résultat ne peut cependant pas être généralisé et exploité sans réserve dans tous les cas. Il est suggéré dans la littérature que les éléments linéaires se comportent mieux que les éléments d'ordre supérieurs pour résoudre les discontinuités. De plus, pour l'extension aux écoulements 3-D, les éléments vitesse-pression trilineaires semblent plus prometteurs grâce à leur simplicité de programmation.

Dans la deuxième partie nous avons traité des écoulements turbulents. Parmi différents modèles de turbulence, nous nous sommes limités à évaluer le comportement d'un modèle $k - \epsilon$. La région pariétale est également modélisée par un modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds. Habituellement ces régions sont traitées avec des fonctions de paroi. Nous nous sommes intéressés à un modèle à bas nombre de Reynolds pour deux raisons principales. Premièrement, nous avons voulu étudier le gain éventuel apporté par ces modèles. Deuxièmement nous avons fixé comme objectif d'étudier les écoulements de Couette-Poiseuille à très bas nombre de Reynolds. Le traitement correct de ces écoulements n'est possible qu'avec ce type de modèle. Le modèle de Chien a été choisi comme modèle de base pour des raisons de simplicité de mise en oeuvre et pour sa robustesse, en dépit de son incapacité à reproduire correctement la variation de ϵ près des parois.

Nous avançons ici comme conclusion que les écarts entre les résultats expérimentaux et ceux issus du calcul proviennent principalement de trois origines différentes. Ce sont respectivement l'influence de la formulation ou du maillage, l'inaptitude du modèle à reproduire une expérience donnée et la précision des mesures. Les erreurs d'origine numérique peuvent être réduites en effectuant le calcul avec des maillages raffinés et des formulations de grande précision. Cependant, on ne peut pas blâmer seulement le schéma numérique pour les écarts. Les diverses hypothèses simplificatrices inhérentes aux modèles de turbulence sont aussi responsables. Dans la plupart des cas les mesures ne sont pas complètes. Les conditions d'entrée ne sont pas détaillées. Par exemple, la spécification de ϵ à l'entrée n'est pas évidente. Ce paramètre n'est pas à l'heure actuelle accessible expérimentalement. Il doit être

estimé. De plus, toutes les grandeurs ne sont pas en général mesurées systématiquement. On peut également reprocher la précision des mesures. Il n'est parfois pas certain qu'un écoulement déclaré 2-D le reste dans tout le domaine. Par conséquent, pour comparer avec confiance le calcul et l'expérience et critiquer rigoureusement les résultats et éventuellement améliorer le modèle, il serait souhaitable que les mesures soient détaillées et qu'elle soient confirmées par différents expérimentateurs.

Nous avons effectué le calcul pour les écoulements de Couette-Poiseuille, l'écoulement sur une marche descendante et l'écoulement sur une bosse. Les écoulements de Couette-Poiseuille sont réalisés à bas nombre de Reynolds dans des configurations simples et rectangulaires. Les conditions d'entrée sont bien définies. Les résultats expérimentaux sont confirmés et critiqués au fil des années par plusieurs doctorants. Nous les estimons donc assez fiables pour critiquer un modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds.

Les écoulements de Couette-Poiseuille ont servi à valider nos codes d'éléments finis. Les résultats obtenus avec les deux formulations BGP(Q1PO) et GLS(Q2SQ2S) sont en bonne concordance. Le gradient de pression calculé avec la formulation GLS est en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Ceci valide la formulation de GLS pour les écoulements turbulents.

Nous avons appliqué le modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds de Chien aux écoulements de Poiseuille pur, de type Poiseuille, de type intermédiaire, et de type Couette à deux nombres de Reynolds 5000 et 10000. La prédiction des écoulements à très bas nombre de Reynolds n'est pas facile car la zone pariétale occupe une grande partie de la hauteur du canal. Les définitions des fonctions d'amortissement deviennent plus importantes, surtout la définition de f_μ qui contrôle le niveau de la viscosité turbulente dans la région pariétale. Les profils de vitesse fournis par le modèle de Chien sont en bonne concordance avec l'expérience. En revanche, les prédictions numériques sur-estiment les profils de k par rapport à l'expérience. Nous avons démontré que la fonction d'amortissement f_μ est à l'origine de ce défaut. Pour tester la sensibilité des résultats, la définition de f_μ a ensuite été modifiée. Ces modifications améliorent la prédiction du niveau de k , mais détériore paradoxalement la prédiction de la vitesse moyenne. Il semble alors que, pour reproduire parfaitement les profils expérimentaux, des fonctions d'amortissement bien calées à l'expérience soient nécessaires. Une confrontation des bilans des équations de transport pour k et pour ϵ avec ceux issus des simulations numériques directes semble plus judicieuse pour modifier ces deux équations ainsi que leurs fonctions d'amortissement. Cependant, compte tenu de la diversité des phénomènes se produisant près de la paroi mobile, l'universalité de ces modifications semble difficilement réalisable. Le recours aux modèles à trois équations de transport ($k - \epsilon - v'$) pourra être une démarche plus prometteuse. Ces résultats mettent en évidence très clairement les inconvénients du modèle basé sur l'hypothèse de Boussinesq à

prédire un ensemble varié d'écoulements symétriques et dissymétriques de Couette-Poiseuille à très bas nombre de Reynolds. Les modèles au second ordre qui semble prédire correctement le profil de k ne sont pas épargnés par cette difficulté puisque les profils de la vitesse moyenne ne sont pas aussi bons que ceux de k .

Mis à part des confrontations des résultats numériques et expérimentaux, nous avons essayé d'apporter de nouvelles informations sur la structure des écoulements de Couette-Poiseuille. Les calculs bi-dimensionnels effectués avec le modèle $k - \epsilon$ mettent en évidence l'établissement en deux temps de l'énergie turbulente, et ce en accord avec les expériences réalisées par Corenflos (1993) et Deldicque (1995). Les résultats numériques montrent qu'à la dernière station expérimentale aucun des trois écoulements de type Poiseuille, de type intermédiaire et de type Couette n'est établi numériquement. Une évolution relativement lente des profils a été constatée après cette station. Le calcul a montré que la longueur d'établissement pour un Re_q donné est une fonction de la vitesse de la paroi mobile. Plus la vitesse de bande est forte et plus cette distance est grande, et ce en accord avec l'expérience. En revanche, le nombre de Reynolds basé sur la vitesse débitante (Re_q) n'a pas d'influence notable sur l'établissement. Un allongement de l'installation expérimentale ainsi que des calculs bi-dimensionnels réalisés par d'autres modèles de turbulence seraient souhaitables afin de confirmer ou d'infirmer ces résultats.

Le bilan de l'équation pour k a été étudié afin d'essayer élucider l'établissement des écoulements de Couette-Poiseuille. Cet étude a mis en évidence la diversité et la complexité des phénomènes qui se produisent au cours de l'établissement de k , à savoir les zones d'équilibre de diffusion-dissipation, convection-dissipation, production-dissipation et diffusion-production-dissipation. Ces phénomènes rendent la modélisation à bas nombre de Reynolds un véritable défi. Les écoulements de Couette-Poiseuille s'avèrent un cas de référence redoutable pour développer et tester les modèles de turbulence.

Pour tester l'influence de la formulation et également les performances du modèle $k - \epsilon$ de Chien à grand nombre de Reynolds, les deux écoulements sur une marche descendante et sur une bosse ont ensuite été étudiés. Concernant l'écoulement sur la marche, l'influence des conditions aux frontières d'entrée et de la formulation d'éléments finis a été examinée. Les calculs effectués avec les deux formulations de SUPG(Q1P0) et GLS(Q1Q1) ont fourni des solutions identiques. Les deux formulations ont également fourni des champs de pression similaires. L'indépendance de ces solutions vis à vis du maillage a été assurée.

Nous avons montré que la longueur de recollement est une fonction des conditions d'entrée. En résumé, si le calcul est initié par les mêmes échelles de longueur (même viscosité turbulente) mais avec des niveaux de k et ϵ moins forts, la longueur de recollement sera rallongé. Par ailleurs, la réduction d'échelle de longueur initiale

rallonge cette distance d'une façon significative. Cependant, la région de rétablissement est peu sensible à la modification des conditions d'entrée. Les termes source et puit des équations de transport pour k et ϵ semble être à l'origine de ce comportement.

Le calcul avec des conditions aux frontières proches de la réalité expérimentale a mis en évidence la sous-estimation de la longueur de recollement par rapport à la valeur expérimentale de plus de 10 – 15%. Il faut mentionner que la valeur de ϵ à l'entrée reste tout de même estimée. Donc, une incertitude subsiste concernant l'échelle de longueur initiale. Si on considère les résultats expérimentaux fiables, il semble que les conditions d'entrée jouent un rôle mineur dans la sous-estimation de la longueur de recollement. La sous-estimation trouve particulièrement son origine dans l'incapacité du modèle $k - \epsilon$ linéaire à prédire correctement les régions de recirculation. Il ressort de ces résultats que le modèle à bas nombre de Reynolds de Chien n'améliore pas d'une manière significative la prédiction de la longueur de recollement par rapport à un calcul effectué avec les fonctions de paroi. Les résultats existants dans la littérature obtenus avec les fonctions de paroi ont été pris comme référence. La tendance observée à sous-estimer exagérément cette longueur par les fonctions de paroi est imputable au fait que les calculs avec ces modèles s'effectuent habituellement avec des maillages lâches. La manière dont le coin d'entrée est pris en compte par le modèle à bas nombre de Reynolds et les fonctions de paroi peut être aussi un facteur déterminant. Il n'existe pas à notre connaissance de méthode physiquement bien définie pour modéliser le coin d'entrée. On peut avancer l'idée que le calcul avec les fonctions de paroi ne sera pas toujours beaucoup plus économique que celui avec un modèle à bas nombre de Reynolds. Dans certains cas de figure pour trouver une solution indépendante du maillage les deux méthodes semblent nécessiter des nombres de points du même ordre de grandeur.

Finalement, pour l'écoulement sur la bosse nous avons mis en évidence le problème de consistance des éléments Q1P0 lorsqu'ils sont utilisés avec la méthode de pénalisation. Cette formulation sur-estime la position du point de recollement. En revanche, la formulation GLS(Q1Q1) se comporte correctement. L'inaptitude du modèle $k - \epsilon$ à prédire l'énergie turbulente dans des zones de compression forte a été illustrée. Cependant, certaines questions persistent concernant la fiabilité des résultats expérimentaux. Elles empêchent de dégager le comportement global du modèle $k - \epsilon$ pour l'écoulement sur une bosse d'une manière détaillée.

Perspective

Nous avons mis l'accent dans cette thèse sur la précision de différentes formulations d'éléments finis. En conséquence, les aspects d'économie et de robustesse de nos codes d'éléments finis n'ont pas été approfondis au mieux. Nous avons utilisé les méthodes itératives classiques telle que la méthode de linéarisation de Newton-Raphson et la méthode de Picard. Les calculs avec ces méthodes convergent en

général assez mal. Le coût de calcul devient donc important. Il est par conséquent indispensable d'améliorer nos codes au niveau des schémas de résolution des équations, si on envisage de confronter les écoulements 3-D avec des modèles de turbulence sophistiqués. La programmation parallèle associée à une méthode de décomposition du domaine peut être une piste d'investigation intéressante.

Nous pensons que la formulation GLS avec des éléments vitesse-pression linéaires (trilinéaires en 3D) du même ordre est un bon candidat pour développer un code 3-D. Cette formulation nous attire car: Elle est à la fois simple et générale. Elle fournit des solutions de vitesse et de pression de bonnes qualités. Cependant, le choix du paramètre de stabilisation doit être étudié davantage.

L'étude de la stabilité du modèle $k - \epsilon$ est un autre point que nous devons considérer dans nos futurs travaux. Les équations de transport pour k et pour ϵ ont une forme mathématique complexe (surtout les termes source et puit). Ces équations se présentent comme un défi passionnant pour être étudié par les méthodes d'éléments finis.

La modélisation des écoulements de Couette-Poiseuille mérite également d'être poursuivie. On doit pouvoir améliorer le modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds de Chien et le doter de fonctions d'amortissement qui soient validées par les simulations numériques directes où l'expérience. Les termes auxiliaires des équations pour k et pour ϵ doivent également être réexaminés. Finalement, le recours au modèle au second ordre semble être une autre voie d'investigation indispensable.

Références bibliographiques

- Almeida G.P., Duao D.F.G. et Heitor M.V., "Wake flow behind two-dimensional model hills", *Exp. Thermal and Fluids Science*, 7, 87 (1993)
- Armaly, B.F., Durst F., Pereira J.C.F. et Schönung B., " Experimental and theoretical investigation of backward facing step flow", *J. Fluid Mech.* 127 (1983) 473-496
- Autret A., "Calculs d'écoulements turbulents par une méthode aux éléments finis", Thèse de Doctorat, Note CEA-N2474, Centre d'étude nucléaire de Cadarache, Mars (1986)
- Babuška I., " Error bounds for finite element method ", *Numerische mathematik*, 16, (1971) 322-333
- Barth T.J., " Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for Euler and Navier-Stokes equations", AGARD report 787, Special course on unstructured grid methods for advection dominated flows, North Atlantic Treaty Organisation, (1992) 6,1-6,61
- Bercovier M. et Engleman M., " A finite element method for incompressible viscous fluid flows ", *J. Comp. Phys.* 30 (1979) 181-201
- Betts P.L. et Haroutunian, " $k - \epsilon$ modelling of turbulent flow over a backward facing step by a finite element method: Comparison with finite volume solutions and experiment", *Numerical methods in laminar and turbulent flows*, C.Taylor, M.D. Olson; P.M. Gresho et W.G. Habashi, Eds., Pineridge Press (1985) 574-585
- Boussinesq J., "Essais sur la théorie des eaux courantes", *Memoire présentée à l'académie des sciences de Paris*, Tome 29 (1877) 1-680
- Boris J.P., Book D.L., "Flux corrected transport I: SHASTA, a fluid transport algorithm that works", *J. Comp. Phys.* 11 (1973) 8-69
- Brison J.F., Buffat M., Jeandel D. et Serres E., " Finite element simulation of turbulent flows, using a two-equation model", *Numerical methods in laminar and turbulent flows*, C.Taylor, M.D. Olson; P.M. Gresho et W.G. Habashi, Eds., Pineridge Press (1985) 563-573
- Brezzi F., " On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrange multipliers ", *Rev. française Automatique Informatique Recherche Opérationnelle*, Ser. Rouge Anal. Numér. 8, R-2 (1974) 129-151

- Brezzi F. et Pitkäranta J., " On the stabilisation of finite element approximations of the Stokes equations", in *Efficient Solutions of Elliptic Systems: Proceedings of a GAMM-seminar Kiel, Vieweg (1984) 11-19*
- Brezzi F., Bristeau M.O., Franca L.P., Mallet M. et Rogé G., "A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 96 (1992) 117-129
- Brooks A.N. et Hughes T.J.R., " Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin methods for advection dominated flows, Proceeding of the third International conference on Finite element Methods in Fluids Flow, Banff, Canada (1980)
- Brooks A.N. et Hughes T.J.R., "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 32 (1982) 199-259
- Christie I., Griffilth O.F., Mitchell A.R. et Zienkiewicz O.C., " Finite element methods for second order differential equation with significant first order derivatives", *Int. J. Num. Methods in Engrg.* 10 (1976) 1389-1396
- Ciarlet P.G., *The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, (1978)*
- Chien K.Y., " Prediction of channel and boundary layer flows with a low Reynolds number turbulence model", *AIAA J.*, 20 (1982) 33-38
- Conca C., Pares C., Pironneau O. et Thiriet M., " Navier-Stokes equations with imposed pressure and velocity fluxes", *Int. J. Num. Methods in Fluids* 20 (1995) 267-287
- Compte-Bellot G., "Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles" *Publication Scientifique et Technique du Ministère de l'aire N° 419 (1965)*
- Corenflos K., " Etude expérimentale d'écoulements de Couette-Poiseuille turbulent à faible nombre de Reynolds", *Thèse de Doctorat, n° 1013, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres et Artois, Villeneuve d'Ascq, France, Mars (1993)*
- Courant R., Issacson E., et Rees M., "On the solution of the non-linear hyperbolic differential equations by finite differences ", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 5 (1952) 243-
- Cuvelier C., Segal A. et van Steenhoven A.A., " Finite element methods and Navier-Stokes equations, D. Reidal Publishing Company, Dordrecht (1988)

- Davidov B.I., Soviet Physics Doklady 6 (1961) 10-
- Deadroff J.W., " A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers", J.F.M., 41 2 (1970) 453-
- Deng G.B., Piquet J., " $k - \epsilon$ turbulence model for low Reynolds number wall-bounded shear flow", Eight Symposium on turbulent shear flows Technical University of Munich, Munich, Germany (1991) 26.2.1-26.2.6
- Deconinck H., Struijs R., Bourgois G., Paillère H. et Roe R.L., " Multidimensional upwind methods for unstructured grids, AGARD report 787, Special course on unstructured grid methods for advection dominated flows, North Atlantic Treaty Organisation, (1992) 4,1-4,17
- Deconinck H., Struijs R., Bourgois G. et Roe R.L., " Compact advection schemes on unstructured grids", Selected special topics from previous VKI lectures series, High resolution (Upwind and TVD) methods for the compressible flow equations, von Karman, Belgium (1994)
- Deldicque A., " Etude de l'influence du nombre de Reynolds sur des écoulements turbulents de Couette-Poiseuille à l'aide d'une approche expérimentale et d'une modélisation aux contraintes de Reynolds", Thèse de Doctorat, n° 1313, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres et Artois, Villeneuve d'Ascq, France, November (1995)
- de Mulder T.F.O. et Benocci C., " Wiggle free solution of the incompressible Navier-Stokes equations on a collocated mesh", von Karman Technical notes 179 (1991)
- de Val Davis G. et Mallinson G.D., Computer and Fluids 4 (1976) 29-43
- Dhatt G. et Hubert G., " A study of penalty finite element for incompressible laminar flows", Int. J. Num. Methods in Fluids 6 (1986) 1-19
- Douglas J. et Wang J., " An absolutely stabilized finite element method for the stokes problem", Math. Comp. 52 (1989) 495-508
- Droux J.J. et Hughes T.J.R., " A boundary integral modification of the Galerkin Least Squares formulation for the Stokes problem", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 113 (1994) 173-182
- El Telbany M.M.M. et Reynolds A.J., "Turbulence in plane channel flows", J.F.M., 111, (1981) 283-318
- Engelman M.S., Sani R.L., Gresho P.M. et Bercovier M., "Consistent vs. reduced integration penalty method for incompressible media using several old and new elements", Int. J. Num. Methods in Fluids 2 (1982) 25-42

- Flecher C.A.J., "Computational techniques for fluid dynamics", Vol 1, Springer Verlag (1988)
- Franca L.P., Frey S.L. et Hughes T.J.R., "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 95 (1992) 253-276
- Franca L.P., Frey S.L., "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 99 (1992) 209-23
- Gartling D.K., "A test problem for outflow boundary conditions-Flow over a backward-facing step", *Int. J. Num. Methods in Fluids* 11 (1990) 953-967
- Gilbert N., Kleiser L., "Turbulence model testing with the aid of direct numerical simulation results", Eight Symposium on turbulent shear flows Technical University of Munich, Munich, Germany (1991) 26.1.1-26.1.6
- Ghia U., Ghia K.N. et Shin C.T., "High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and the multigrid method", *J. Comp. Phys.* 48 (1982) 387-411
- Girault V. et Raviart P.A., "Finite Element Methods for Navier-Stokes equations, Springer series S.C.M., 5 (1986)
- Gresho P.M. et Lee R.L., "Don't suppress the wiggles-They're telling you something", *Comput. Fluids* 9, (1981) 223-253
- Gresho P.M. et Sani R.L., "On pressure boundary condition for the incompressible Navier-Stokes equations", *Int. J. Num. Methods in Fluids* 7 (1987) 1111-1145
- Gresho P.M., Chan S.T., Lee R.L. et Upson C.D., "A modified finite element method for solving the time dependent incompressible Navier-Stokes equations", *Int. J. Num. Methods in Fluids* 4 (1984) 557-619
- Hanjalic K. et Launder B.E., "Contribution towards a Reynolds stress closure for low Reynolds number turbulence", *J.F.M.* 74 (1976) 593-610
- Hansbo P., "Adaptivity and streamline diffusion procedures in the finite element method", Research Report 89:2, Dept of Structural Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden (1989)
- Hansbo P. et Szepessy A., "A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 84 (1990) 175-192
- Hansbo P., "The characteristic streamline diffusion method for convection-diffusion problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 96 (1992) 239-253

- Harlow F.H. et Nakayama P.I., " Transport of turbulence energy decay rate", Los Alamos Sci LAB, University of California , Rep:LA3854 (1968)
- Hauke G. et Hughes T.J.R., " A unified approach to compressible and incompressible flows", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 113 (1994) 389-395
- Heinrich J.C., Huyakorn P.S., Mitchell A.R. et Zienkiewicz O.C., " An 'upwind' finite element scheme for two-dimensional convective transport equations", Int. J. Num. Methods in Engrg. 11 (1977) 131-143
- Heinrich J.C. et Zienkiewicz O.C., "Quadratic finite element schemes for two-dimensional convective-transport problem", Int. J. Num. Methods in Engrg. 11 (1977) 1831-1844
- Hood P., " Frontal solution program for unsymmetric matrices", Int. J. Num. Methods in Engrg. 10 (1976) 379-399
- Hughes T.J.R., " A simple scheme for developing 'upwind' finite elements ", Int. J. Num. Methods in Engrg. 12 (1978) 1359-1365
- Hughes T.J.R et Brooks A.N., " A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion, in AMD Vol. 34, Finite element Methods for convection dominated flows ", Hughes T.J.R. (ed), ASME, NewYork, (1979) 19-35
- Hughes T.J.R., Liu W.K. et Brooks A., " Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty formulation ", J. Comp. Phys. 30 (1979) 1-60
- Hughes T.J.R., Franca L.P. et Mallet M., " A new finite element formulation for computational fluid dynamics: I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 54 (1986b) 223-234
- Hughes T.J.R., Mallet M. et Mizukami A., " A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II beyond SUPG ", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 54 (1986a) 341-355
- Hughes T.J.R., Franca L.P. et Balestra M., " A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V Circumventing the Babuska-Brezzi condition ", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 59 (1986c) 85-99
- Hughes T.J.R. et Franca L.P., " A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces ", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 65 (1987) 85-96

- Hughes T.J.R., Franca L.P. et Hulbert G.M., "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII The Galerkin/Least-squares method for advective-diffusive equations", *Comput. Method Appl. Mech. Engrg.* 73 (1989) 173-189
- Huyakorn P.S., Taylor C., Lee R.L. et Gresho P.M., "A comparison of various mixed interpolation finite elements in the velocity pressure formulations of the Navier-Stokes equations", *Computer and Fluids* 6 (1978) 25-35
- Idelsohn S., Storti M. et Nigro N., "Stability analysis of mixed finite element formulations with special mention of equal order interpolations", *Int. J. Num. Methods Fluids* 20 (1995) 1003-1022
- Jakirlic S., Hanjalic K. et Durst F., "Computation of accelerating 3-D turbulent boundary layers by a second moment closure", *Refind flow modelling and turbulence measurements* (1993) 57-64
- Johnson C. et Nävert U., "An analysis of some finite element methods for advection-diffusion problems", *Research Report 80.01R*, Dept of Computer Sciences, Chalmers University of Technology and the University of Göteborg, Sweden (1980)
- Johnson C., Nävert U., Pitkäranta J., "Finite element methods for linear hyperbolic problems", *Comput. Method Appl. Mech. Engrg.* 45 (1984) 285-312
- Johnson C. et Saranen J., "Streamline Diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations", *Math. Comp.* 47 (1986) 1-18
- Johnson C., "The characteristic streamline diffusion finite element method", *Matematica Aplicada e Computacional*, 10, Proceeding from Conf. on Innovative Finite Element Methods, Rio de Janeiro, (1989)
- Johnson C., "Finite element methods for fluids problems", AGARD report 787, Special course on unstructured grid methods for advection dominated flows, North Atlantic Treaty Organisation, (1992) 1,1-1,47
- Jones W.P. et Launder B.E., "The calculation of low-Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence", *Int J. Heat Mass Transfer* 16 (1973) 1119-1130
- Kawahara M. et Ohmiya K., "Finite element analysis of density flow using the velocity correction method", *Int. J. Num. Methods Fluids.* 5 (1981) 981-993
- Kelly D.W., Nakazawa S., et Zienkiewicz O.C., "A note on upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convective diffusion problems", *Int. J. Num. Methods in Engrg.* 15 (1980) 1705-1711

- Kim L., Moin P. et Moser R., "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number", J.F.M., 177 (1987) 133-136
- Kim J., Kline S.L. et Johnston J.P., "Investigation of a reattaching turbulent shear layer; Flow over a backward-facing step", Journal of Fluid Engineering, Vol 102, No.3 (1980) 302-308
- Klebanoff P.S., "Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient", NACA, Report No 2454 (1953)
- Kolmogorov A.N., "Equations of turbulent motion of an incompressible fluid" Akad. Nauk. SSR Ser. Phys. 6 56 (1942)
- Kuroda A., Kasagi N. et Hirata M., "Direct numerical simulation of turbulent plane Couette-Poiseuille flows: Effect of mean shear on the wall turbulence structures", Ninth symposium on turbulent shear flows, Kyoto, Japan August (1993) 8.4.1-8.4.6
- Lam C.K.G. et Bremhorst K.A., "Modified form of the $k - \epsilon$ model for predicting wall turbulence", J. of Fluid Engineering, 103 (1981) 456-460
- Laufer J., "Some recent measurements in a two-dimensional turbulent channel", J. of Aeronautical Science, 17 (1950) 277-287
- Launder B.E. et Spalding D.B., "The numerical computation of turbulent flows", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3 (1972) 269-289
- Launder B.E. et Sharma B.I., "Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation near a spinning disc", Letters in Heat and Mass Transfer, 1 (1974) 131-138
- Launder B.E., "Second-moment closure: Methodology and Practice", Turbulence models and their applications, CEA-EDF Ecole d'analyse numérique, Edition Eyrolles, vol2 (1984) 1-143
- Leonard B.P., "A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 19 (1979) 59-98
- Lee R., Gresho P.M. et Sani R.L., "Smoothing techniques for certain primitive variable solutions of the Navier-stokes equations", Int. J. Num. Methods in Engrg. 14 (1979) 1785-1804
- Lesieur M., Comte P. et Metais O., "Direct numerical simulations of turbulence", Computational Methods in Applied Sciences, Hirsh Ch., Périaux J. et Onate E. Eds. Elsevier (1992) 37-43

- Lien F.S. et Leschziner M.A., "Approximation of turbulence convection in complexe flows with a TVD-muscle scheme", Refined flow modelling and turbulence measurements, Proceeding of the 5th international symposium, Paris (1993) 183-190
- Lien F.S. et Leschziner M.A., " A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm at all speeds incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 1: Computational implementation", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 114 (1994) 123-148
- Michelassi V. et Rodi W., " Testing a low Reynolds number $k - \epsilon$ turbulence model based on direct simulation data", Engineering notes, AIAA J., 31 9 (1993) 1720-1723
- Michel A.R. et Wait R., "The finite element method in partial differential equations", John Wiley, Chichester (1977)
- Mohammadi B. et Pironneau O., " Analysis of the k-epsilon turbulence model", John Wiley, Masson (1994)
- Moin P. et Kim J., " Numerical investigation of turbulent channel flow", J.F.M., 118 (1982) 341-377
- Monnier J.C., "Hydrodynamics des écoulements turbulents dans les cellules d'électrodéposition", Thèse de doctorat, n° 358, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres et Artois, Villeneuve d'Ascq, France, Mai (1989)
- Nallasamy M., "Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows: A review", Comput and Fluids, 15 2 (1987) 151-194
- Nävert U. "A finite element method for convection-diffusion problems and Navier-Stokes equations", Thesis, Department of Computer Science, Chalmers University of Technology, Sweden (1982)
- Nikuradse J., "Gesetzmässigkeiten der turbulenten stromung in Glatten Rohren", Forshg Arb Ing Wes No 356 (1932)
- Oden J.T. et Carey G.P., "Finite elements: Mathematical Aspects", Vol IV, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. (1983)
- Ottavy A., "Communication privée (1994), Thèse de Docotrat à paraître, USTL
- Patankar S.V., "Numerical Heat Transfer", Mc Graw Hill (1980)
- Patel V.G., Rodi W et Scheurer G., " Trubulence models for near-wall and low-Reynolds number flows: A review", AIAA J., 23 (1985) 1308-1319

- Patel C. et Chen H.C., "Near-Wall turbulence models for complexe flows including separation", AIAA J. 29 6 (1989)
- Pelletier D., Garon A. et Illinca F., "Adaptive finite element algorithms for the $k - \epsilon$ models", Advances in Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, ASME'94, FED-VOL200, Eds., Dhaubhadel M.N., Habashi W.G. et Engelman M.S., (1994) 59-68
- Pierre R., "C approximations for the computation of incompressible flows", Comput. Method Appl. Mech. Engrg. 68 (1988) 205-227
- Pironneau O., "Conditions aux limites sur la pression pour les équations de Stokes et de Navier-stokes", C.R. Acad. Sci. Paris, 303, série I (1986) 403-406
- Pironneau O., "Finite element methods for fluids", John Wiley, Masson (1989)
- Prandtl L., "Bemerkeugen zur theorie der freien turbulenz", ZAMM 5 (1925) 136-139
- Prandtl L., "Über die ausgebildete turbulenz", ZAMM 22 (1942) 241-243
- Prandtl L., "Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete turbulenz" Nachrichten von de Akad der Wissenschaften Gottingen (1945) 6-19
- Raviart P.A., "Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides" CEA-EDF INRIA, Ecole d'été d'analyse numérique Edition Eyrolles, Paris (1981)
- Reichardt H., "Gesetzmässigkeiten der geraldinigen turbulenten Couettestromung", Goettingen No 22 (1959)
- Roache P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Press, Albuquerque, N. M. (1972)
- Rodi W. et Mansour N.N., "Low Reynolds number $k - \epsilon$ modeling with the aid of direct simulation data", J.F.M., 250 (1993) 509-529
- Rotta J.C., "Über eine methode zur Berechnung turbulenter scherstromungen" Aerodynamische Versuchsanstalt Gottingen Report 36 A14 (1968)
- Sani R.L., Gresho P.M., Lee R.L. et Griffiths D.F., "The cause and cure(!) of the spurious pressures generated by certain FEM solutions of the incompressible Navier-Stokes equations: Part 1, " Int. J. Num. Methods Fluids. 1 1 (1981) 17-43, Part 2 1 2 (1981) 171-204
- Scarborough J.B., "Numerical Mathematical Analysis, 4th edition, John Hopkins Press, Baltimore (1958)

- Simo J.C., Armero F. et Taylor C., " Stable and time-dissipative finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations in advection dominated flows", Int. J. Num. Methods in Engrg. 38 (1995) 1475-1506
- Schiestel R., " Modélisation des écoulements turbulents", Traité des nouvelles technologie, Hermès (1993)
- Schumann U., "Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channel and annuli", J. Comp. Phys. 18 (1975) 376-404
- Spalding, D.B., "Notes on the solution of the Navier-Stokes equations for steady two-dimensionnal turbulent flow by finite difference techniques", Imperial College, Mech. Eng. Dept. Report SF/TN/5 (1967)
- Spalding, D.B., " The prediction of two dimensional steady turbulent flows", Imperial College, Mech. Eng. Dept. Report EFT/TN/A/16 (1969)
- Spalding, D.B., " A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives", Int. J. Num. Methods in Engrg. 4 (1972) 551-559
- Spalding, D.B., "Turbulence models" 3rd edition, Imperial College, Mech. Eng. Dept. Report HTS/76/17 (1977)
- Spalart P.R., "Direct numerical simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$ ", J.F.M. 187 (1988) 61-98
- Speziale C.S., " On nonlinear $k - l$ and $k - \epsilon$ models of turbulence", J.F.M., 178 (1987) 459-475
- Speziale C.S., " Analytical methods for the development of Reynolds-Stress closures in turbulence", Ann. Rev. Fluid Mech. (1991) 107-157
- Sohn J.L. et Heinrich J.C., "A Poisson equation formulation for pressure calculations in penalty finite element models for viscous incompressible flows", Int. J. Num. Methods in Fluids. 30 (1990) 349-361
- Stanislas M. "Thèse de Doctorat" (1981), USTL
- Taylor C. and Hood P., " A numerical solution of the Navier-Stokes equations using FEM technique ", Comp. and Fluids. 1 (1973) 73-100
- Thangam S. et Spezail C.G., "Turbulent flow past a backward-facing step: A critical evaluation of two-equation models", AIAA J., 30 5 (1992) 1314-1320
- Temam R., " Navier-Stokes Equations ", North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1979)

- Tezduyar T.E., Mittal S., Ray S.E. et Shih R., "Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 95 (1992) 221-242
- Vanhée L., "Contribution à l'étude du comportement hydrodynamique des cellules d'électrodéposition", Thèse de Doctorat, n° 814, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres et Artois, Villeneuve d'Ascq, France, Novembre (1991)
- van Leer B., "Towards the ultimate conservative difference scheme V, a second order sequel to Gudunov's method", *J. Comput Phys.* 32 (1979) 101-136
- Westphal R.V., Johnston J.P. et Eaton J.K., " Experimental study of flow reattachment in single-sided sudden expansion", NASA Contractor Report 3765, Stanford University, Stanford, California (1984)
- Wolfstein M. "The velocity and temperature distribution in one-dimensionnal flow with turbulence augmentation and pressure gradient", *Int J. Heat Mass Transfer*, 12 (1969) 301-318
- Zienkiewicz O.C., Gallagher R.L. et Hood P., " Newtonian and Non-Newtonian viscous incompressible flow. Temperature induced flows. Finite element solution.", *The mathematics of finite elements and applications II (MAFELAP 1975)*, Edited by J. R. Whiteman, Academic Press, London (1976) 235-267
- Zienkiewicz O.C., " New paths for the finite element method", *The mathematics of finite elements and applications II (MAFELAP 1978)*, Edited by J. R. Whiteman, Academic Press, London (1979) 187-216
- Zienkiewicz O.C., Qu S., Taylor R.L., Nakazawa S., "The patch test for mixed formulations", *Int. J. Num. Methods in Engrg.* 23 (1986) 1873-1883
- Zienkiewicz O.C., Szmelter J., Peraire J., " Compressible and incompressible flow; An Algorithm for all seasons", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 78 (1990) 105-121
- Zienkiewicz O.C., Wu J., " Incompressibility without tears-How to avoid restrictions of mixed formulation", *Int. J. Num. Methods in Engrg.* 32 (1991) 1189-1203

Annexes

Annexe A

Annexe A1:

La forme matricielle de la formulation Galerkin des équations 1.11-1.13 s'écrit:

$$[\mathbf{N} + \mathbf{K}] (\mathbf{U}) = [\mathbf{F}]$$

Pour faciliter l'exposé, choisissons une variable scalaire u dans les équations 1.11. Supposons que $\mathbf{A}_{e=1}^{nel}$ est l'opérateur d'assemblage qui positionne les contributions de chaque élément dans la matrice globale. Soit:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^{nel}(\mathbf{k}^e), \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}_{e=1}^{nel}(\mathbf{n}^e), \quad \mathbf{F} = \mathbf{A}_{e=1}^{nel}(\mathbf{f}^e)$$

où

$$\mathbf{k}^e = [k_{ab}^e], \quad \mathbf{n}^e = [n_{ab}^e], \quad \mathbf{f}^e = [f_a^e]$$

$$k_{ab}^e = \nu \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{n_{sd}} (\phi_{a,k}^e \phi_{b,k}^e) d\Omega$$

$$n_{ab}^e = \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{n_{sd}} a_k (\phi_a^e \phi_{b,k}^e) d\Omega$$

$$f_a^e = \int_{\Omega_e} (\phi_a^e f) d\Omega$$

$$1 \leq a, b \leq n_{ee}$$

où n_{ee} est le nombre total de noeuds de chaque élément. a et b sont le numéro des noeuds dans chaque élément. ϕ_a^e est la fonction de base associée au noeud a de chaque élément.

Annexe A2:

La forme matricielle de la formulation GLS des équations 1.11-1.13 s'écrit:

$$(\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}) + \mathbf{K} + \mathbf{K}_\alpha)\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\alpha$$

où les matrices $\mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u})$ et \mathbf{K}_α et le vecteur \mathbf{F}_α sont définis:

$$\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{A}_{e=1}^{nel}(\mathbf{k}_\alpha^e), \quad \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{A}_{e=1}^{nel}(\mathbf{n}_\alpha^e), \quad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{A}_{e=1}^{nel}(\mathbf{f}_\alpha^e)$$

$$\mathbf{k}_\alpha^e = [(kt)_{ab}^e], \quad \mathbf{n}_\alpha^e = [(nt)_{ab}^e], \quad \mathbf{F}_\alpha^e = [(ft)_a^e]$$

$$(kt)_{ab}^e = \alpha(\nu)^2 \int_{\Omega_e} \sum_{m=1}^{n_{sd}} \sum_{k=1}^{n_{sd}} (\phi_{a,kk}^e \phi_{b,mm}^e) d\Omega$$

$$(nt)_{ab}^e = \alpha \int_{\Omega_e} \sum_{m=1}^{n_{sd}} \sum_{k=1}^{n_{sd}} a_k \phi_{a,k}^e a_m \phi_{b,m}^e d\Omega - \alpha \nu \int_{\Omega_e} \sum_{m=1}^{n_{sd}} \sum_{k=1}^{n_{sd}} a_k \phi_{a,k}^e \phi_{b,mm}^e d\Omega$$

$$- \alpha \nu \int_{\Omega_e} \sum_{m=1}^{n_{sd}} \sum_{k=1}^{n_{sd}} \phi_{a,mm}^e a_k \phi_{b,k}^e d\Omega$$

$$(ft)_a^e = \alpha \int_{\Omega_e} \left(\sum_{m=1}^{n_{sd}} a_m \phi_{a,m}^e \right) f d\Omega$$

Annexe A3:

La forme matricielle de la formulation Galerkin des équations de Stokes (2.1-2.6) s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_g \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}(\mathbf{k}^e), \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}(\mathbf{c}^e), \quad \mathbf{F} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}(\mathbf{f}^e), \quad \mathbf{F}_g = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}(\mathbf{f}_g^e)$$

où

$$\mathbf{k}^e = [k_{pq}^e], \quad \mathbf{c}^e = [c_{pb}^e], \quad \mathbf{f}^e = [f_p^e], \quad \mathbf{f}_g^e = [(fg)_{\bar{a}}^e]$$

$$k_{pq}^e = \mathbf{e}_i^t \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_a^e \mathbf{D} \mathbf{B}_b^e d\Omega \mathbf{e}_j, \quad c_{pb}^e = - \int_{\Omega_e} \phi_{a,i}^e \psi_b^e d\Omega$$

$$f_p^e = \int_{\Omega_e} \phi_a^e f_i d\Omega + \int_{\Gamma_h^e} \phi_a^e h_i d\Gamma - \sum_{q=1}^{n_{ee}} k_{pq}^e g_q^e, \quad \Gamma_h^e = \Gamma_h \cap \Gamma^e$$

$$(fg)_{\bar{a}}^e = - \sum_{p=1}^{n_{ee}} c_{p\bar{a}}^e g_p^e$$

$$g_q^e = \begin{cases} g_i(\mathbf{x}_b^e), & \text{si } (\mathbf{x}_b^e) \in \Gamma_g, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

$$1 \leq p, q \leq n_{ee} = n_{en} \cdot n_{sd}, \quad p = n_{sd}(a-1) + i, \quad q = n_{sd}(b-1) + j$$

$$1 \leq i, j \leq n_{sd}, \quad 1 \leq a, b \leq n_{en}, \quad 1 \leq \bar{a}, \bar{b} \leq \bar{n}_{en}$$

où:

n_{en} = le nombre de noeuds de vitesse dans chaque élément.

\bar{n}_{en} = le nombre de noeuds de pression dans chaque élément.

n_{ee} = le nombre de degrés de liberté de vitesse pour chaque élément.

p, q = le numéro de l'équation locale de vitesse.

a, b = le numéro des noeuds de vitesse dans chaque élément.

\bar{a}, \bar{b} = le numéro des noeuds de pression dans chaque élément.

ϕ_a^e = la fonction de base associée au noeud a de vitesse.

$\psi_{\bar{a}}^e$ = la fonction de base associée au noeud \bar{a} de pression.

En 2-D, et pour les coordonnées cartésienne, la matrice \mathbf{B} et le vecteur \mathbf{D} s'écrivent:

$$\mathbf{B}_a^e = \begin{bmatrix} \phi_{a,1}^e & 0 \\ 0 & \phi_{a,2}^e \\ \phi_{a,2}^e & \phi_{a,1}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mu \text{diag}(2, 2, 1), \quad \text{pour } n_{sd} = 2$$

Pour les équations de Navier-Stokes de 2.19-2.20 la contribution du terme de convection s'écrit en 2-D:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}(\mathbf{n}^e), \quad \mathbf{n}^e = [n_{pq}^e]$$

$$[n_{pq}^e] = \begin{bmatrix} n_{ab}^e & 0 \\ 0 & n_{ab}^e \end{bmatrix}$$

$$n_{ab}^e = \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^2 u_k (\phi_a^e \phi_{b,k}^e) d\Omega$$

Les modifications GLS de (2.58) s'écrivent :

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}(\mathbf{l}^e), \quad \mathbf{M} = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}(\mathbf{m}^e), \quad \mathbf{F}^q = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}}(\mathbf{f}^{qe})$$

$$\mathbf{l}^e = [l_{\bar{a}q}^e], \quad \mathbf{m}^e = [m_{\bar{a}b}^e], \quad \mathbf{f}^{qe} = [f_{\bar{a}}^{qe}]$$

$$l_{\bar{a}q}^e = \frac{\alpha h^2}{2} \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{n_{sd}} (\psi_{\bar{a},j}^e \phi_{b,kk}^e + \psi_{\bar{a},k}^e \phi_{b,jk}^e) d\Omega$$

$$m_{\bar{a}\bar{b}}^e = \frac{\alpha h^2}{2\mu} \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{n_{sd}} (\psi_{\bar{a},k}^e \psi_{\bar{b},k}^e) d\Omega$$

$$f_{\bar{a}}^{qe} = \frac{\alpha h^2}{2\mu} \int_{\Omega_e} \sum_{k=1}^{n_{sd}} (\psi_{\bar{a},k}^e f_k^e) d\Omega - \sum_{p=1}^{n_{ee}} c_{p\bar{a}}^e g_p^e - \sum_{q=1}^{n_{ee}} l_{\bar{a}q}^e g_q^e$$

Figures

Liste des figures

- Fig. 1.1: Fonction de forme
Fig. 1.2: Convection dans une direction non-parallèle au maillage
Fig. 1.3: Solutions du problème de la convection dans une direction non-parallèle au maillage
Fig. 1.4: Couche limite thermique
Fig. 1.5: Les profils de u en différentes stations
Fig. 2.1: un maillage d'éléments finis pour exemple
Fig. 2.2: un deuxième maillage d'éléments finis d'exemple
Fig. 2.3: Quelques combinaisons des éléments vitesse-pression
Fig. 2.4: Maillage construit par les éléments Q1Q1 pour l'écoulement de Poiseuille pur
Fig. 2.5: Champ de pression pour l'écoulement de Poiseuille pur
Fig. 2.6: Maillage construit par les éléments quadratiques
Fig. 2.7: Champ de pression
Fig. 2.8: Champ de pression pour la cavité
Fig. 2.9a: Ecoulement sur une double marche
Fig. 2.9b: Maillage aux éléments finis pour l'écoulement sur une double marche
Fig. 2.10: Vecteurs vitesse, formulation BGP(Q1P0)
Fig. 2.11: Champ de vitesse et pression pour l'écoulement sur une double marche, formulation SUPG(Q1P0), maillage 11*6 points
Fig. 2.12: Champ de vitesse et pression pour l'écoulement sur une double marche, formulation GLS(Q1Q1), maillage 11*6 points
Fig. 2.13: Champ de vitesse et pression pour l'écoulement sur une double marche, formulation SUPG(Q1P0), maillage 41*21 points
Fig. 2.14: Champ de vitesse et pression pour l'écoulement sur une double marche, formulation GLS(Q1Q1), maillage 41*21 points
Fig. 2.15: Champ de vitesse et pression pour l'écoulement sur une double marche, formulation SUPG(Q1P0), maillage 41*41 points
Fig. 2.16: Champ de vitesse et pression pour l'écoulement sur une double marche, formulation GLS(Q1Q1), maillage 41*41 points
Fig. 2.17: Champ de vitesse et pression pour l'écoulement sur une double marche, Hansbo (1989), maillage lâche
Fig. 2.18: Champ de vitesse et pression pour l'écoulement sur une double marche, Hansbo (1989), maillage raffiné
Fig. 2.19a: Champ de pression pour l'écoulement sur une double marche, formulation SUPG(Q2SQ1)
Fig. 2.19b: Champ de pression pour l'écoulement sur une double marche, formulation GLS(Q2Q2S)
Fig. 2.20: Ecoulement sur une marche descendante, conditions aux frontières
Fig. 2.21: Champs de pression et vitesse, formulation GLS(Q1Q1),

- Re=800, écoulement sur une marche descendante
- Fig. 2.22 : Champs de pression et vitesse, formulation GLS(Q2SQ2S),
Re=800, écoulement sur une marche descendante
- Fig. 2.23 : Champs de pression et vitesse, formulation GLS(Q1Q1),
Re=1200, écoulement sur une marche descendante
- Fig. 2.24 : Champs de pression et vitesse, formulation GLS(Q2SQ2S),
Re=1200, écoulement sur une marche descendante
- Fig. 2.25 : Variation de pression sur la paroi inférieure
- Fig. 2.26 : Domaine et conditions aux frontières,
problème de cavité
- Fig. 2.27 : Composante horizontale de vitesse et la pression
au centre de la cavité, Re=400
- Fig. 2.28 : Composante horizontale de vitesse, influence du raffinement
du maillage, Re=1000
- Fig. 2.29 : Comparaison entre différentes formulations, Re=5000,
(a) composante horizontale de vitesse, maillage lâche
(b) composante horizontale de vitesse, maillage raffiné
(c) champ de pression
- Fig. 2.30 : Comparaison entre formulation SU et SUPG
- Fig. 2.31 : Vecteurs vitesse, Re=5000, maillage lâche
- Fig. 2.32 : Vecteurs vitesse, Re=10000, maillage lâche
- Fig. 2.33 : Isobares, Re=5000, maillage lâche,
formulations GLS(Q1Q1) et GLS(Q2SQ2S)
- Fig. 2.34 : Isobares, Re=10000, maillage lâche,
formulations GLS(Q1Q1) et GLS(Q2SQ2S)
- Fig. 2.35 : Isobares, Re=400, maillage lâche,
formulation GLS(Q1Q1) et
formulation GLS(Q1Q1) + estimation du terme de diffusion
- Fig. 2.36 : Isobares, Re=1000, maillage lâche,
formulation GLS(Q1Q1) et
formulation GLS(Q1Q1) + estimation du terme de diffusion
- Fig. 2.37 : Comparaison entre différentes formulations pour une précision donnée
- Fig 4.1 : Schéma de l'installation expérimentale
- Fig 4.2 : Référentiel et déplacements
- Fig 4.3 : Ecoulement de Couette-Poiseuille
- Fig 4.4 : Profil de vitesse et d'énergie turbulente,
écoulement de Poiseuille pur Re=10000
- Fig 4.5 : Profil de vitesse et d'énergie turbulente,
écoulement de Poiseuille pur Re=5000
- Fig 4.6 : Prédiction de l'énergie turbulente pour l'écoulement de Poiseuille pur,
influence de fonction d'amortissement, Re=5000
- Fig 4.7 : Domaine et conditions aux frontières
- Fig 4.8 : Maillage d'éléments finis pour les écoulements de

Couette-Poiseuille

- Fig 4.9: Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=10000$
- Fig 4.10: Profil d'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=10000$
- Fig 4.11: Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=5000$
- Fig 4.12: Profils de la vitesse moyenne et de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=5000$
- Fig 4.13: Profils de la vitesse moyenne et de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille, avec différents modèles $Re=5000$
- Fig 4.14: Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$
- Fig 4.15: Profils de la vitesse moyenne et de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$
- Fig 4.16: Profils de la vitesse moyenne et de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire, avec différents modèles $Re=5000$
- Fig 4.17: Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=10000$
- Fig 4.18: Profils de la vitesse moyenne et de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=10000$
- Fig 4.19: Comparaison des calculs mono et bi-dimensionnels
- Fig 4.20: Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type Couette, $Re=5000$
- Fig 4.21: Profils de la vitesse moyenne et de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Couette, $Re=5000$
- Fig 4.22: Evolution de la pression statique pour les écoulements de type Poiseuille et intermédiaire
- Fig 4.23: Evolution du frottement à la paroi supérieure, $Re=5000$
- Fig 4.24: Evolution du frottement à la paroi inférieure, $Re=5000$
- Fig 4.25: Evolution de la vitesse de frottement à la paroi supérieure, $Re=5000$ et 10000
- Fig 4.26: Profils des corrélations normales pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=5000$
- Fig 4.27: Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille, comparaison avec l'expérience.
- Fig 4.28: Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille
- Fig 4.29: Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire
- Fig 4.30: Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Couette
- Fig 4.31: Bilan des termes de l'équation pour k , type Poiseuille
- Fig 4.32: Bilan des termes de l'équation pour k , type intermédiaire
- Fig 4.33: Bilan des termes de l'équation pour k , type Couette
- Fig 4.34: Bilan des termes de l'équation pour k , Couette pur

- Fig 4.35 : Bilan des termes de l'équation pour k , type intermédiaire, comparaison avec la DNS
- Fig 4.36a : Ecoulement sur une marche descendante: géométrie et conditions aux frontières
- Fig 4.36b : Maillage constitué de 50×150 éléments bilinéaires
- Fig 4.37 : Conditions d'entrée
- Fig 4.38 : Iso-vitesse $\bar{u} = 0$ obtenue à l'aide des deux maillages.
- Fig 4.39 : Isobares P^* obtenus avec les formulations SUPG(Q1P0) et GLS(Q1Q1)
- Fig 4.40 : Evolution longitudinale de k et de ϵ
- Fig 4.41 : Evolution de la vitesse moyenne en différentes stations
- Fig 4.42 : Evolution longitudinale de la corrélation normale
- Fig 4.43 : Evolution de l'énergie turbulente en différentes stations
- Fig 4.44 : Variation du coefficient de pression sur les parois haute et basse
- Fig 4.45 : Ecoulement sur une bosse, domaine de calcul et condition aux frontières
- Fig 4.46 : Maillage d'éléments finis pour l'écoulement sur une bosse
- Fig 4.47 : Champ de vitesse, formulation SUPG(Q1P0)
- Fig 4.48 : Champ de vitesse, formulation GLS(Q1Q1)
- Fig 4.49 : Champ de vitesse, formulation SUPG(Q1P0)
- Fig 4.50 : Champ de vitesse, formulation GLS(QQ1Q1)
- Fig 4.51 : Evolution de pression sur les parois haute et basse
- Fig 4.52 : Profil d'entrée de vitesse et d'énergie turbulente
- Fig 4.53 : $x/h = -1.78$, (a) vitesse moyenne horizontale
(b) vitesse moyenne verticale (c) énergie turbulente
- Fig 4.54 : $x/h = -0.71$, (a) vitesse moyenne horizontale
(b) vitesse moyenne verticale (c) énergie turbulente
- Fig 4.55 : $x/h = 0$, (a) vitesse moyenne horizontale
(b) vitesse moyenne verticale (c) énergie turbulente
- Fig 4.56 : $x/h = 1.07$, (a) vitesse moyenne horizontale
(b) vitesse moyenne verticale (c) énergie turbulente
- Fig 4.57 : $x/h = 3.21$, (a) vitesse moyenne horizontale
(b) vitesse moyenne verticale (c) énergie turbulente
- Fig 4.58 : $x/h = 4.79$, (a) vitesse moyenne horizontale
(b) vitesse moyenne verticale (c) énergie turbulente
- Fig 4.59 : $x/h = 6.61$, (a) vitesse moyenne horizontale
(b) vitesse moyenne verticale (c) énergie turbulente
- Fig 4.60 : $x/h = -0.71$, résultats des différents modèles $k - \epsilon$
(issus du "Workshop" d'ERCOFTAC)
- Fig 4.61 : $x/h = 3.21$, résultats des différents modèles $k - \epsilon$
(issus du "Workshop" d'ERCOFTAC)
- Fig 4.62 : $x/h = -0.71$, résultats des différents modèles au second ordre
(issus du "Workshop" d'ERCOFTAC)

Fig 4.63: $x/h=3.21$, résultats des différents modèles au second ordre
(issus du "Workshop" d'ERCOFTAC)



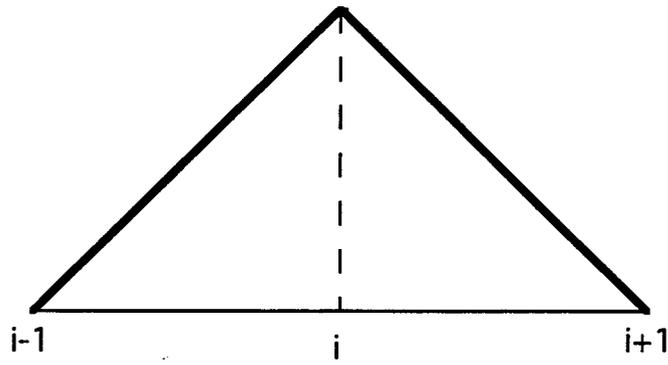


Fig.1.1a Fonctions de forme de Galerkin

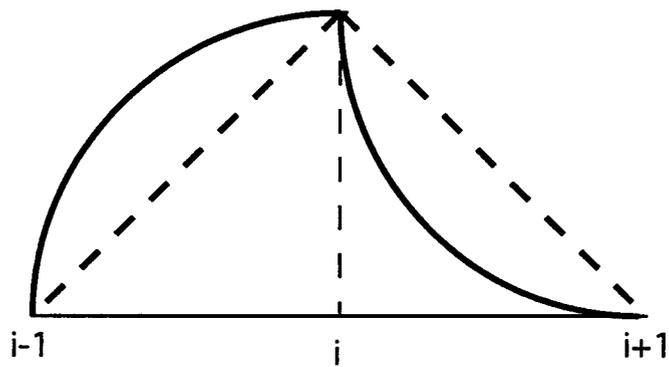


Fig.1.1b Fonctions de forme de Petrov-Galerkin

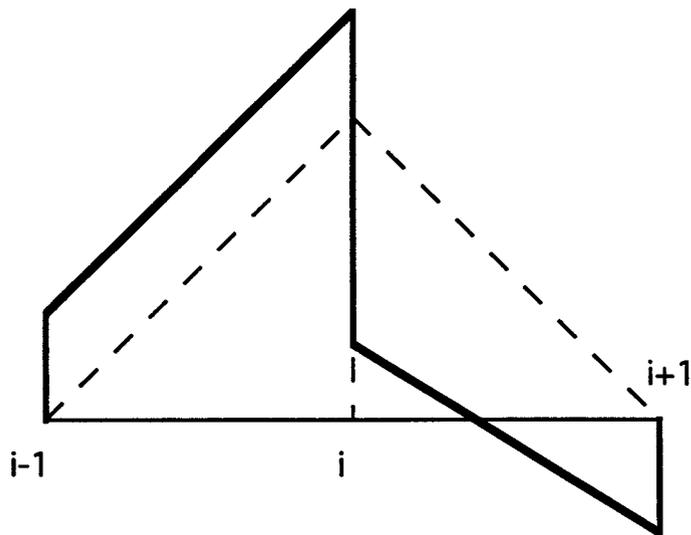
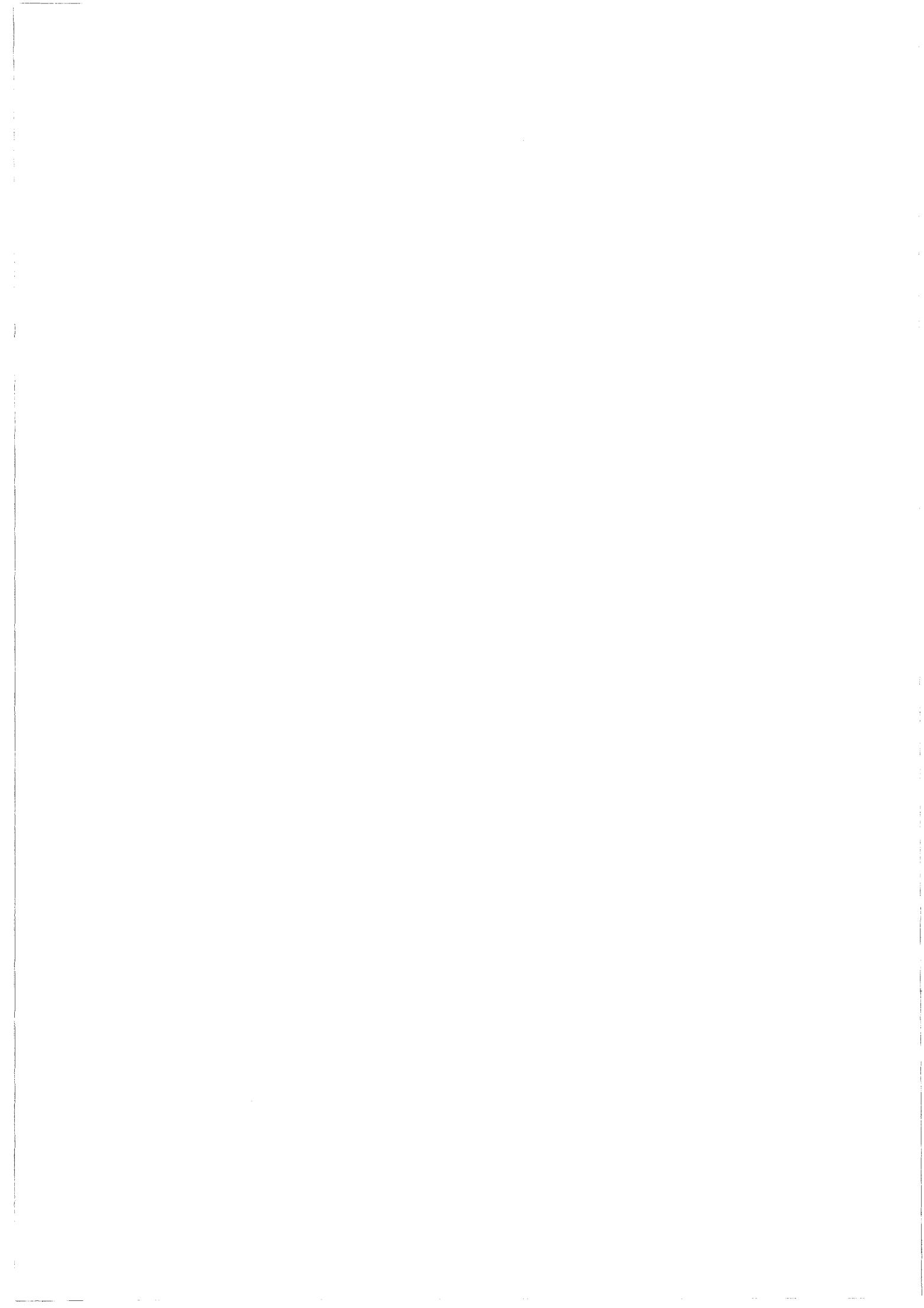
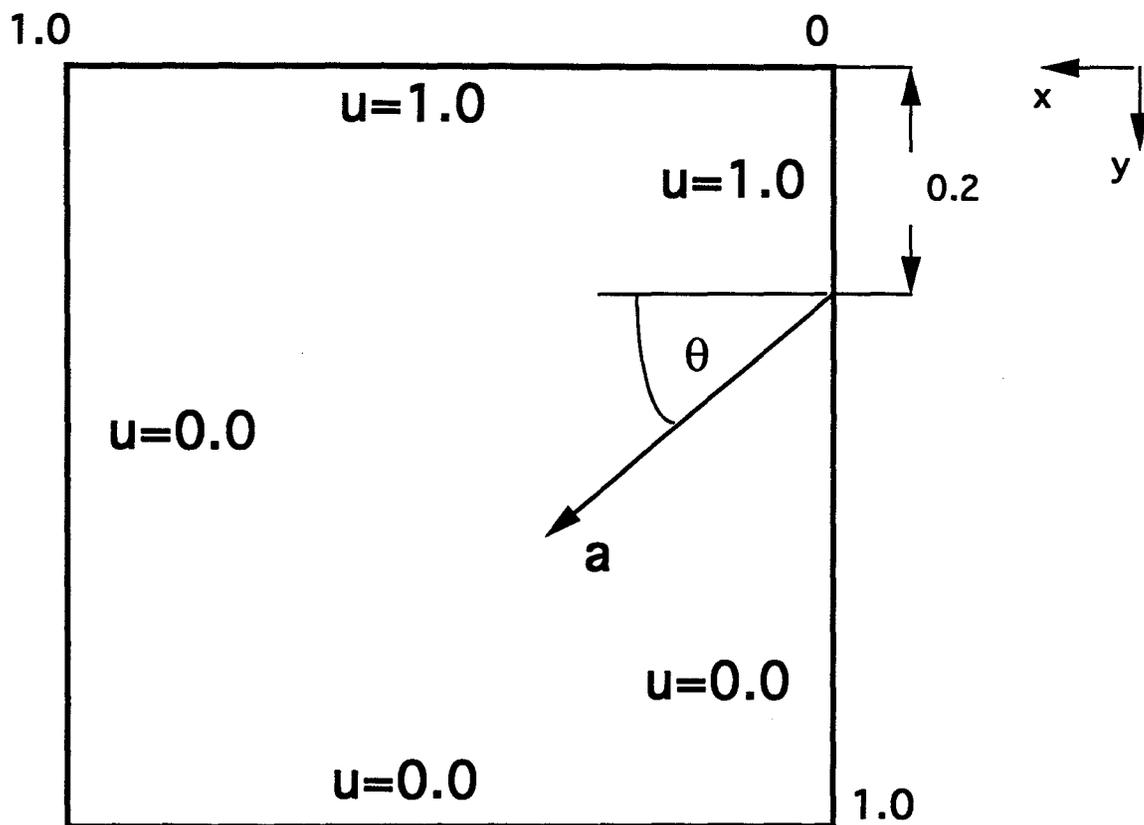
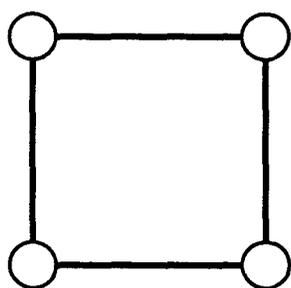


Fig.1.1c Fonctions de forme de SUPG

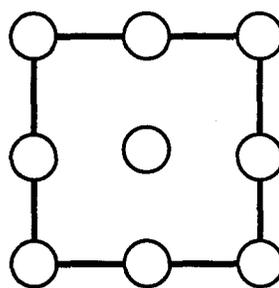




Maillage 20*20 Q1
10*10 Q2



Q1



Q2

$$\theta = 45^\circ$$

$$\nu = 10^{-6}$$

$$|a| = 1.0$$

$$Pe = 10^6$$

Figure 1.2 Convection dans une direction non-parallèle au maillage



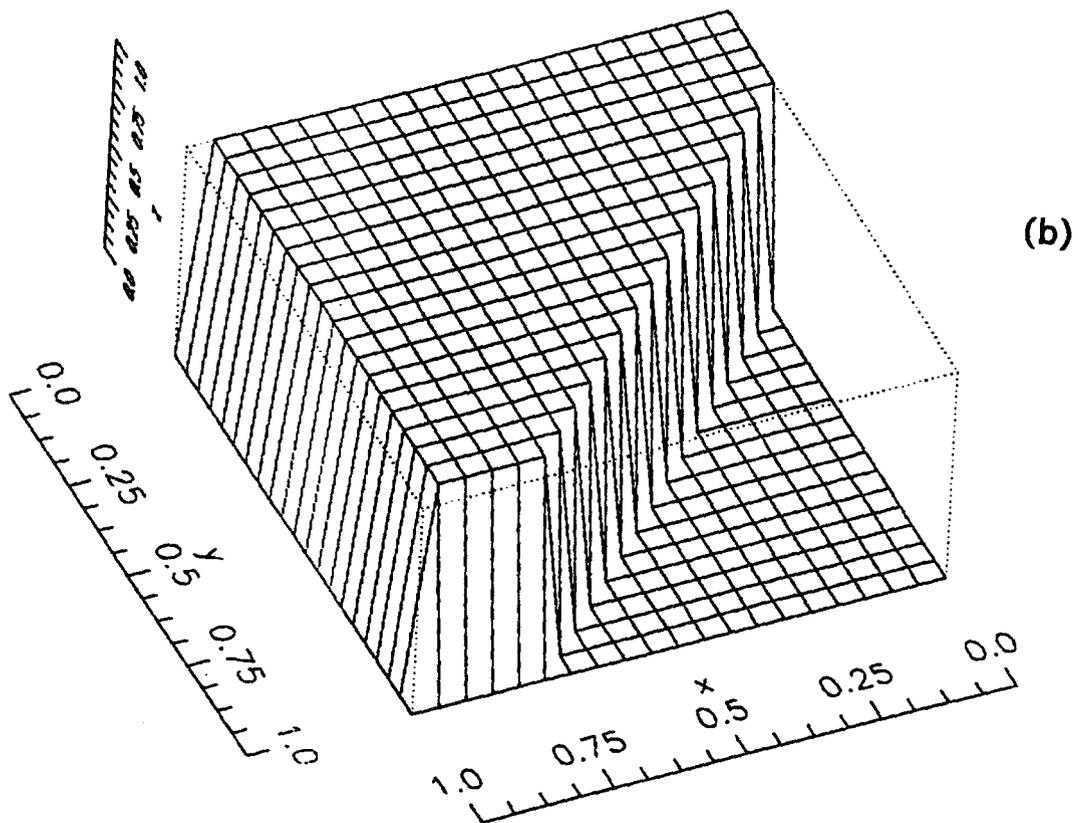
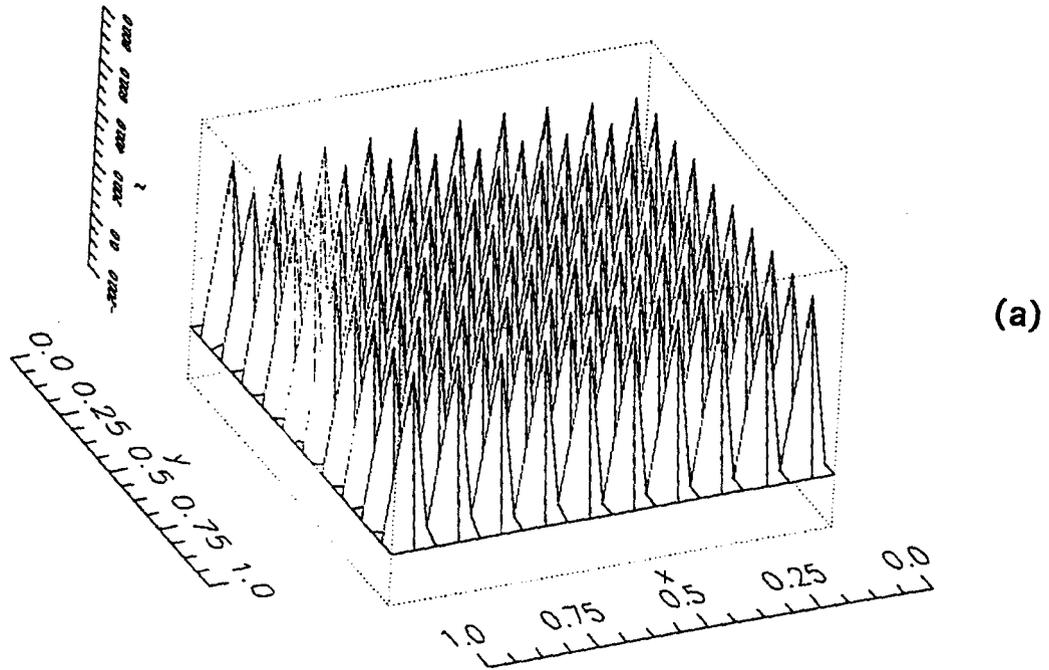
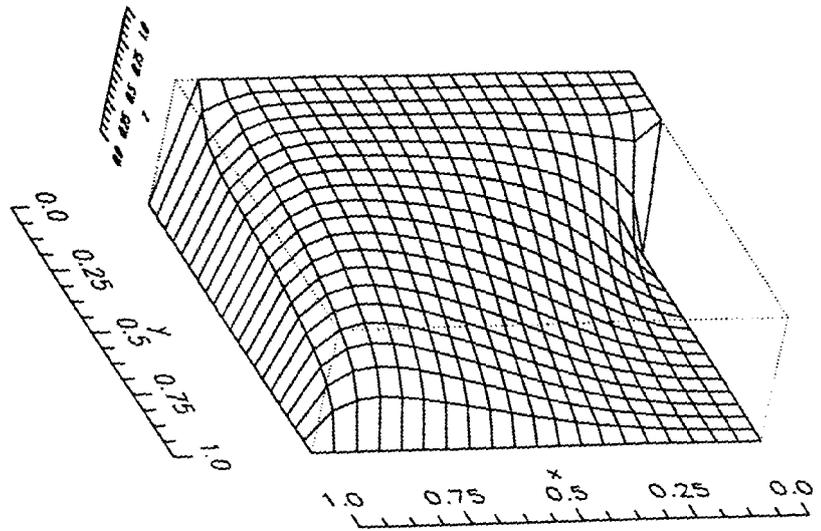
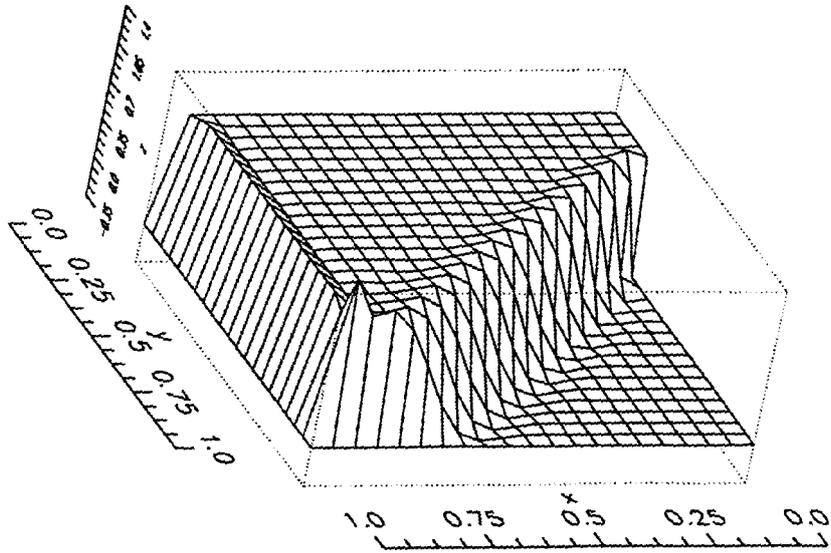


Figure 1.3 (a) formulation Galerkin (b) solution exacte

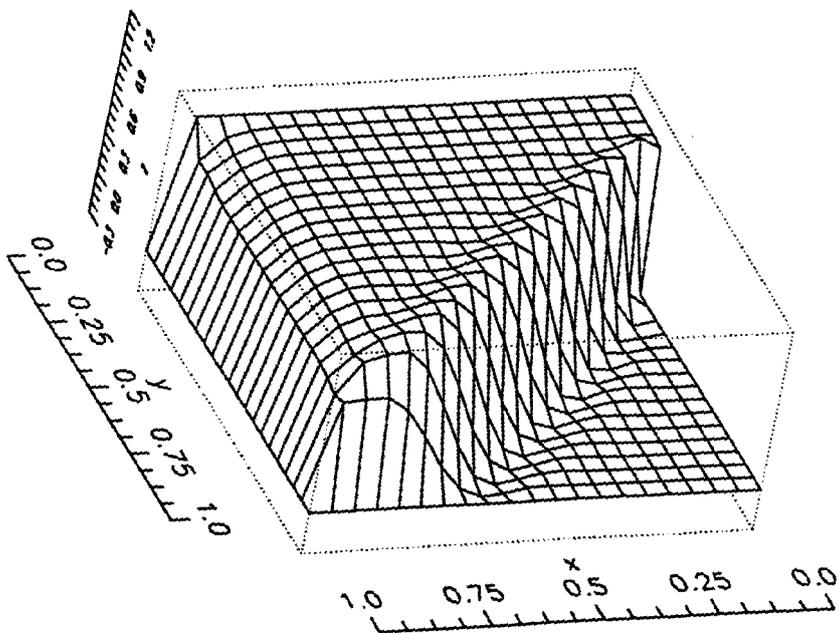




(c)



(d)



(e)

Figure 1.3 suite, (c) diffusion artificielle, (d) SUPG(Q1) (e) SUPG(Q2)



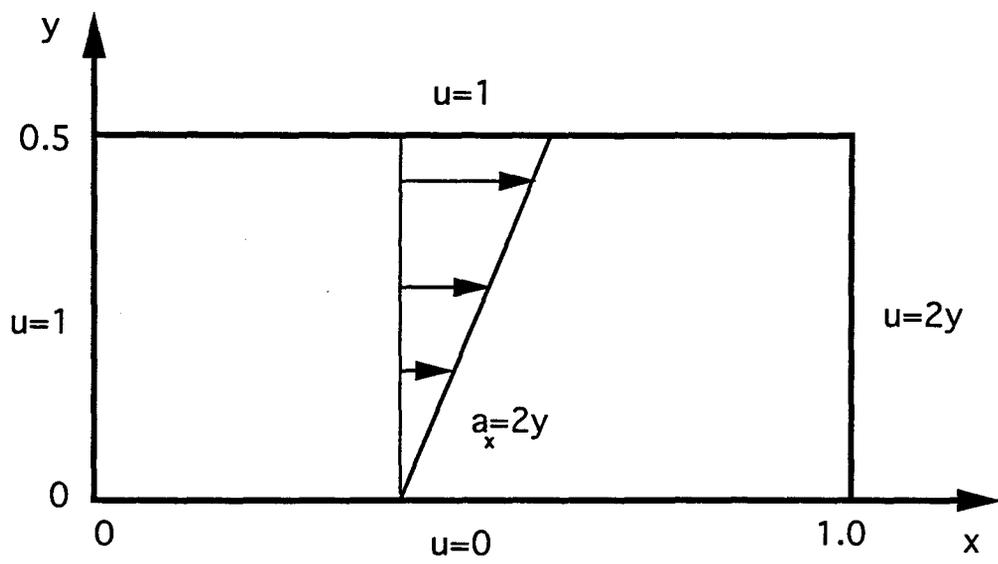
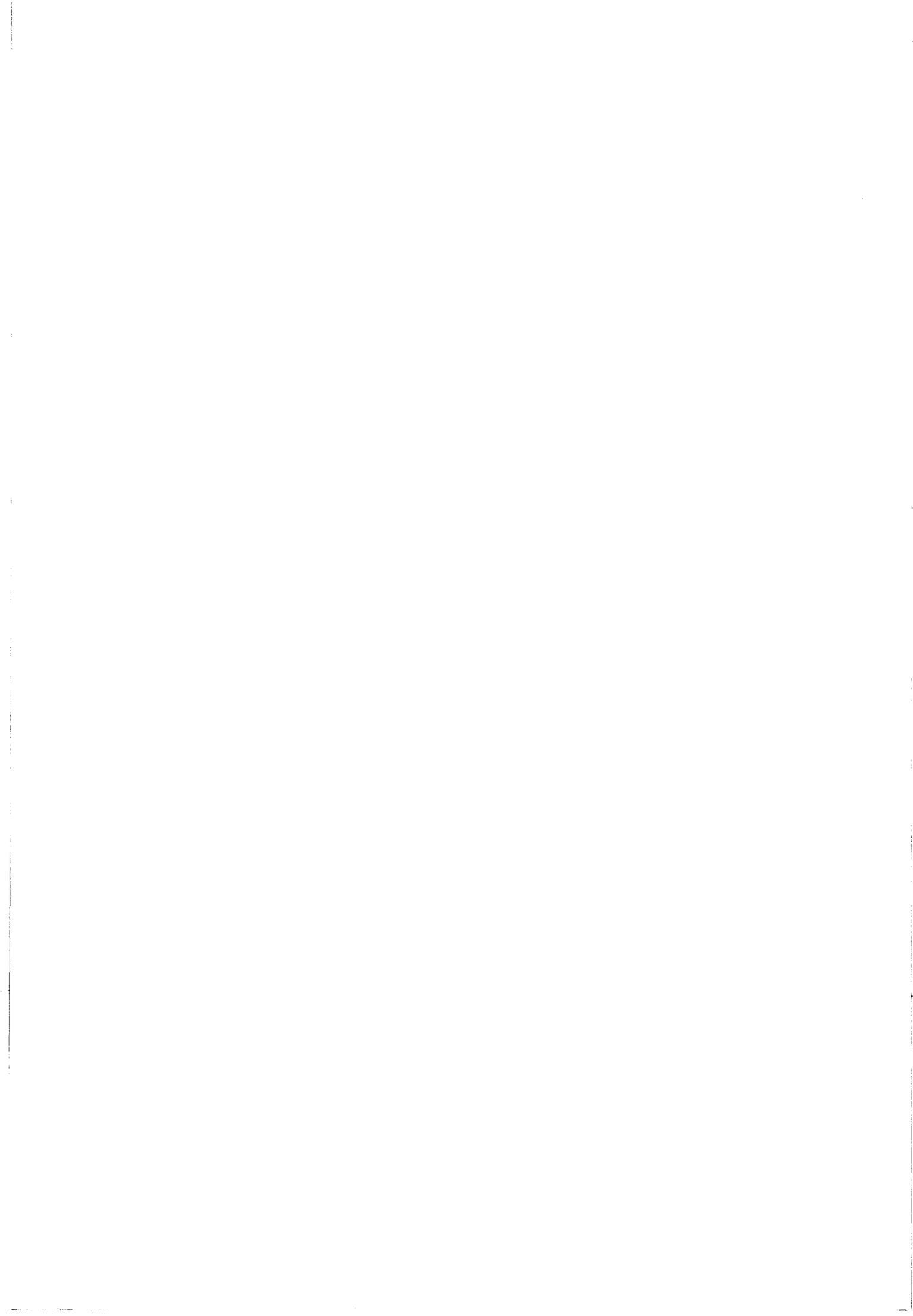


Figure 1.4 Couche limite thermique



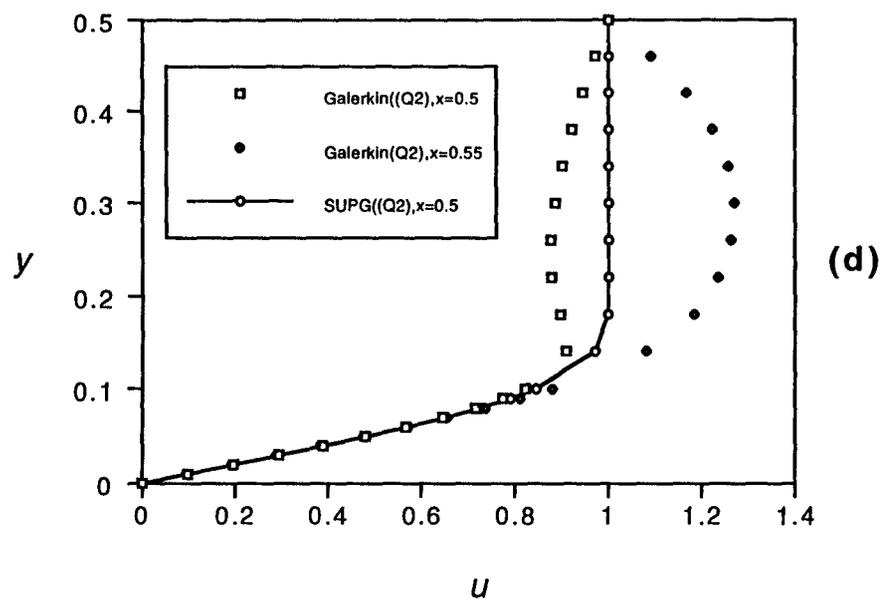
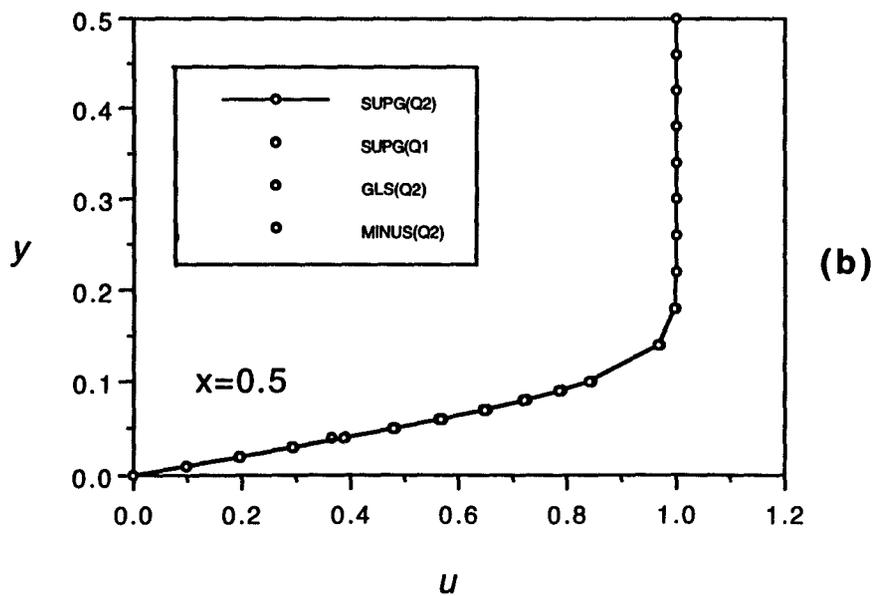
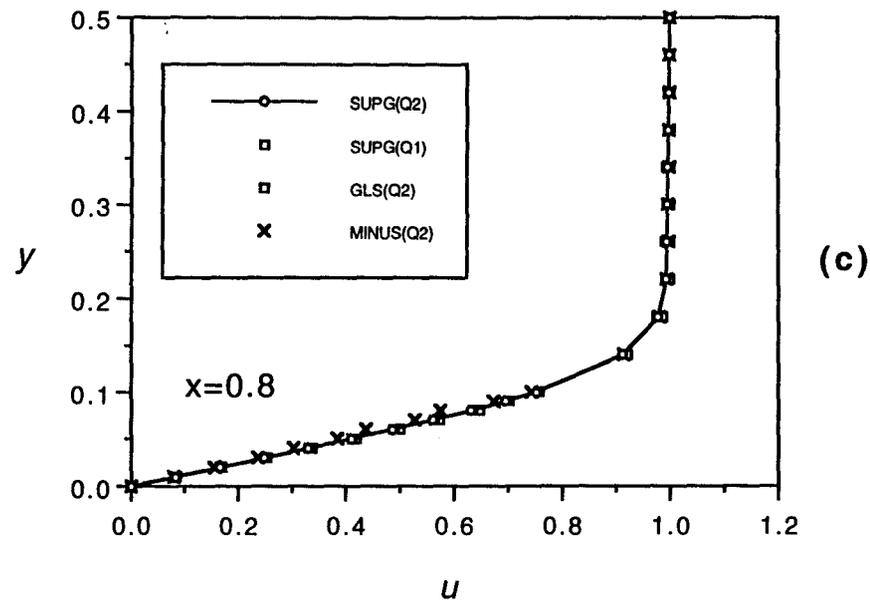
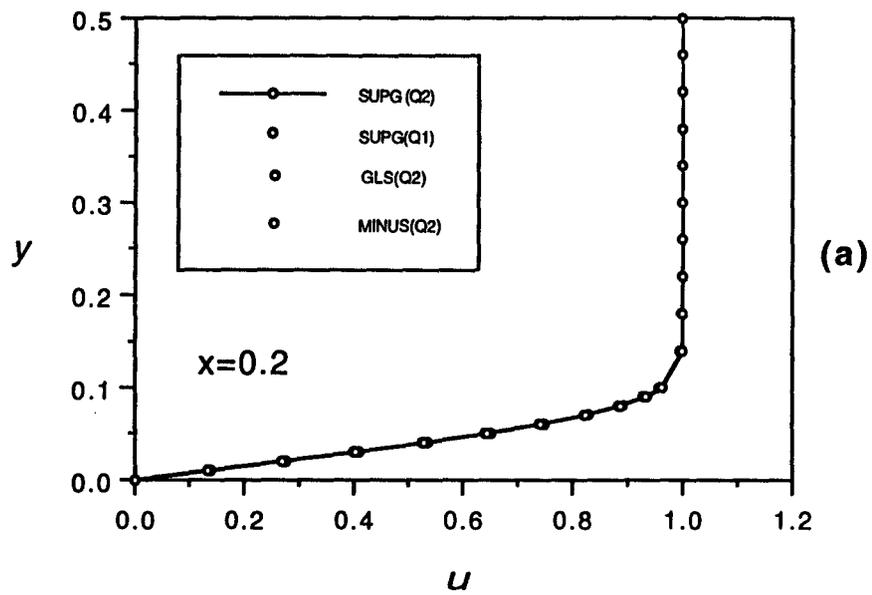
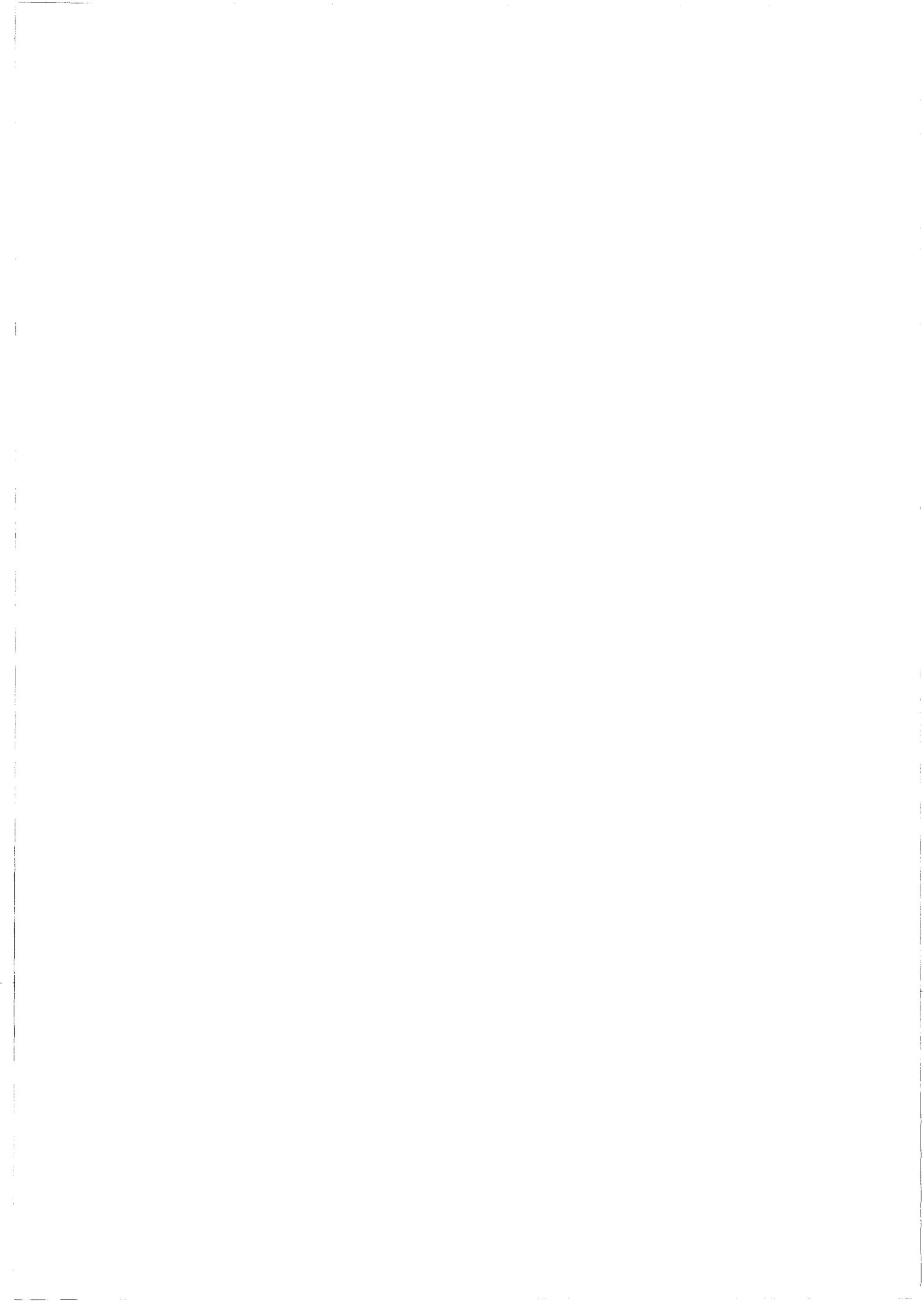


Figure 1.5 les profils de u en différentes stations



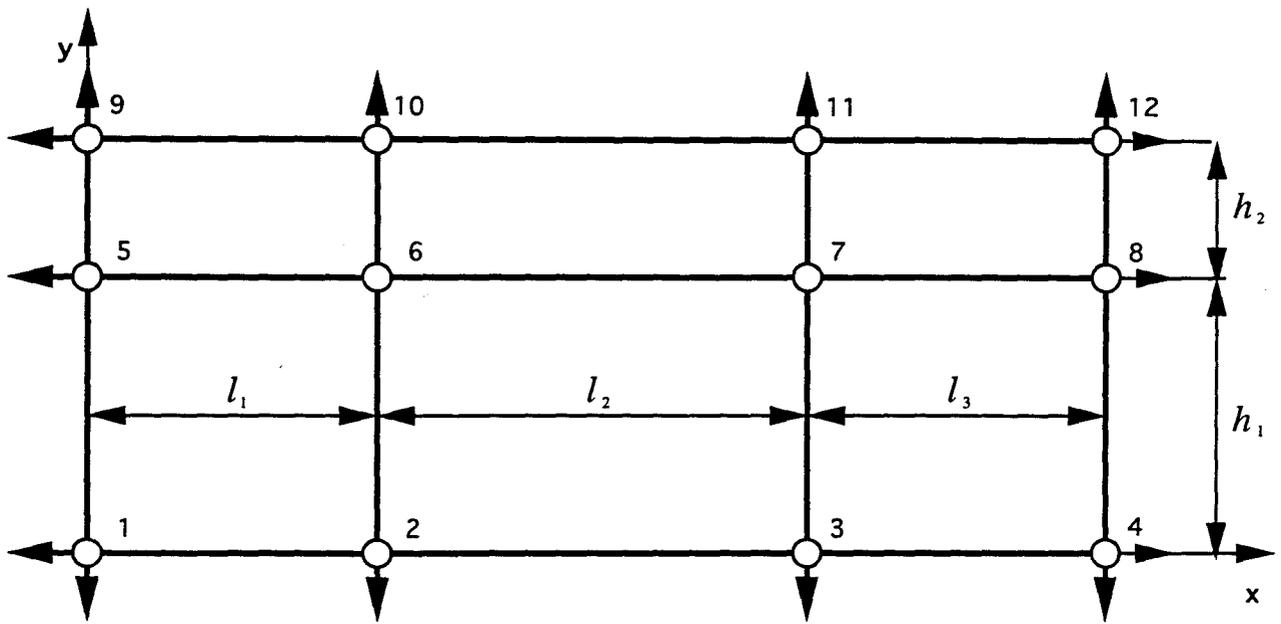


Figure 2.1 un maillage construit par les éléments Q1P0 pour exemple

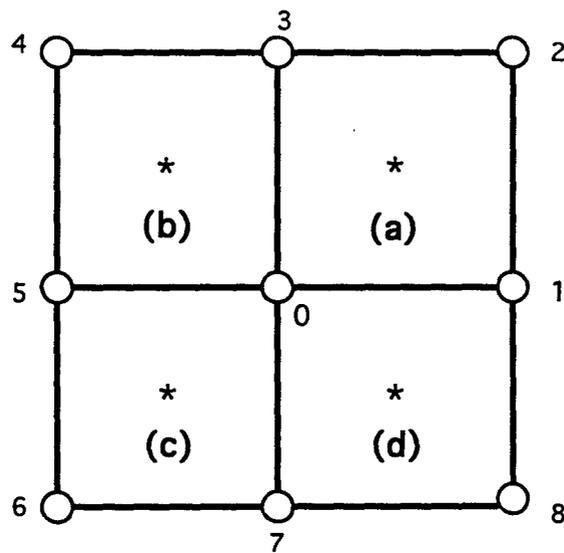
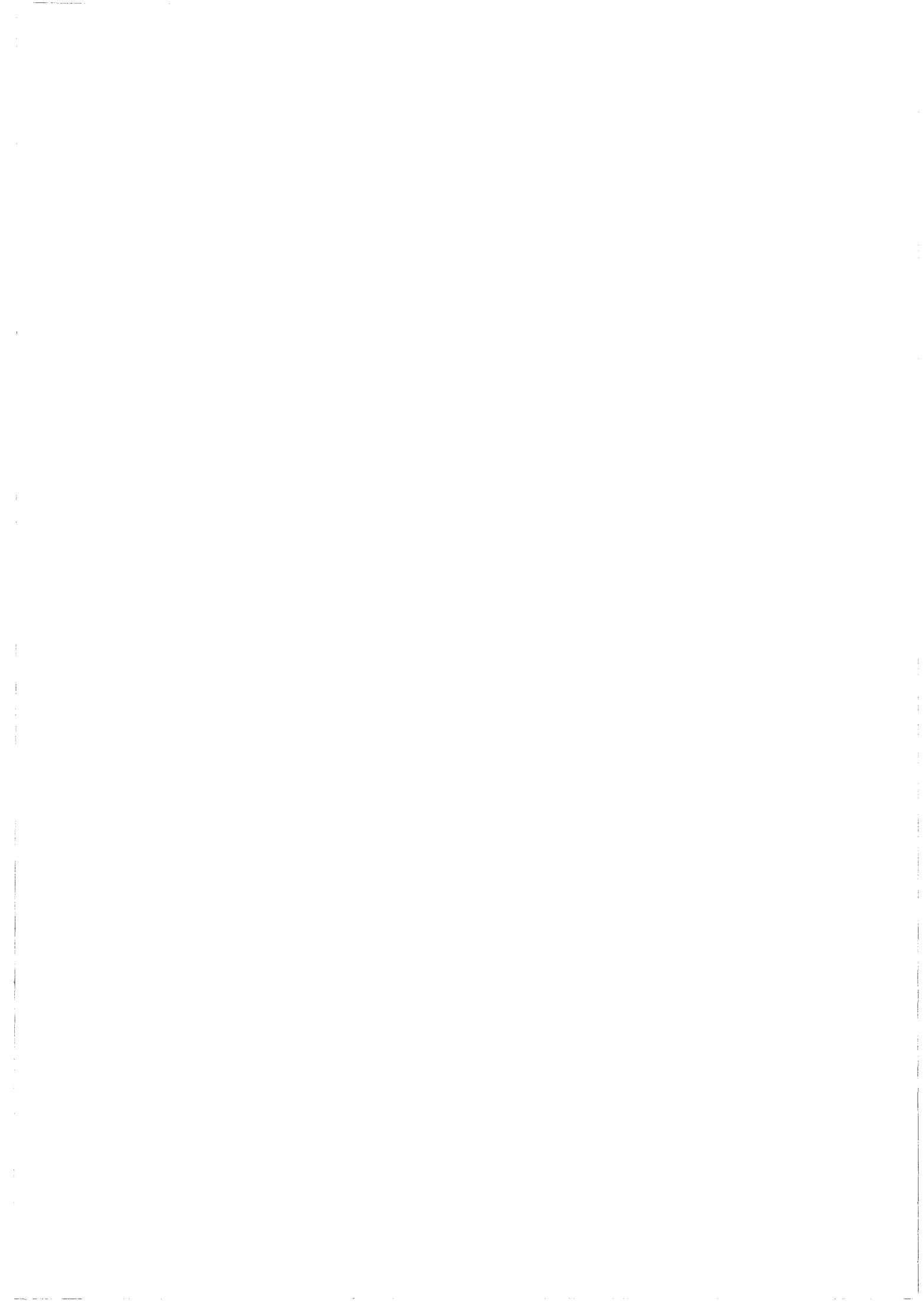
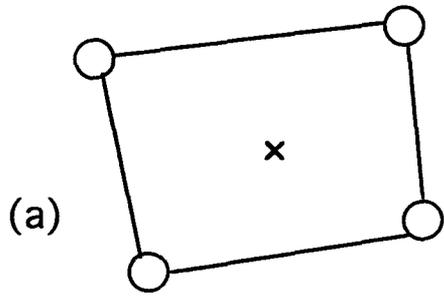
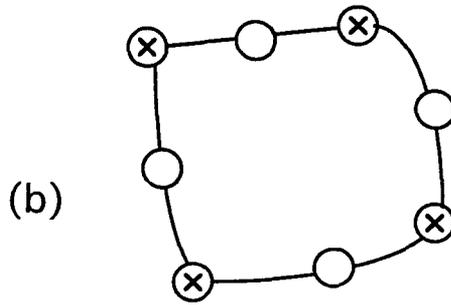


Figure 2.2 un deuxième maillage d'exemple



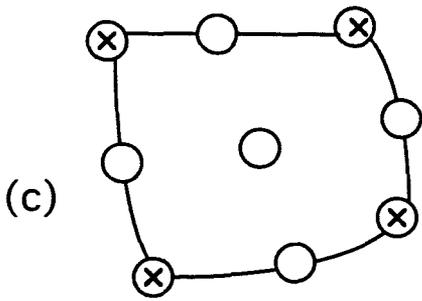


Q1P0

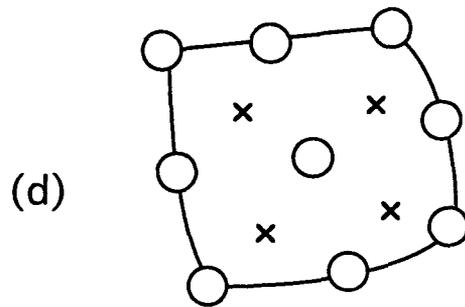


Q2SQ1

○ point vitesse
x point pression



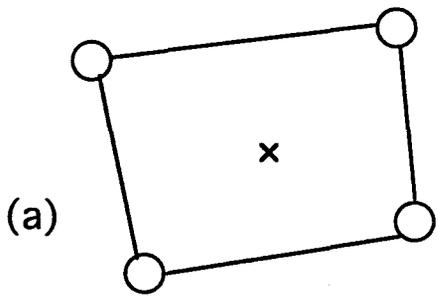
Q2Q1



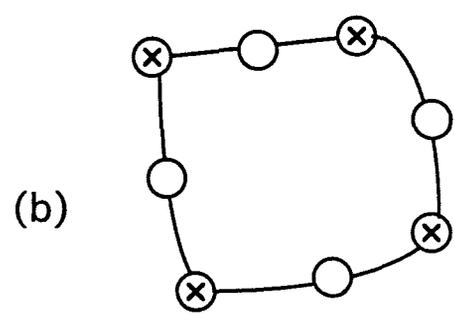
Q2Q1d

Figure 2.3 Quelques combinaison des éléments vitesse-pression



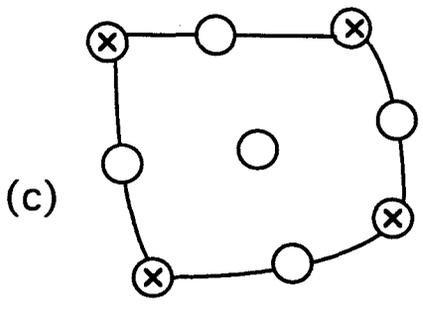


Q1P0

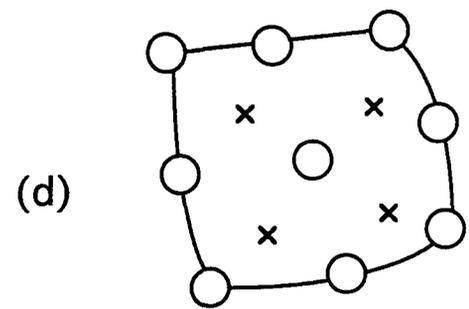


Q2SQ1

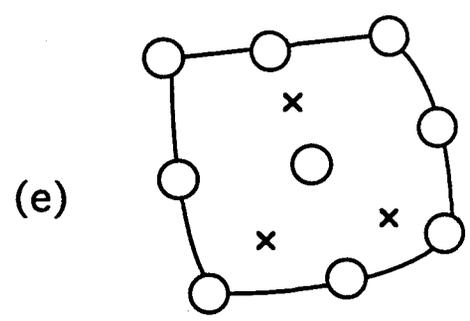
○ point vitesse
x point pression



Q2Q1

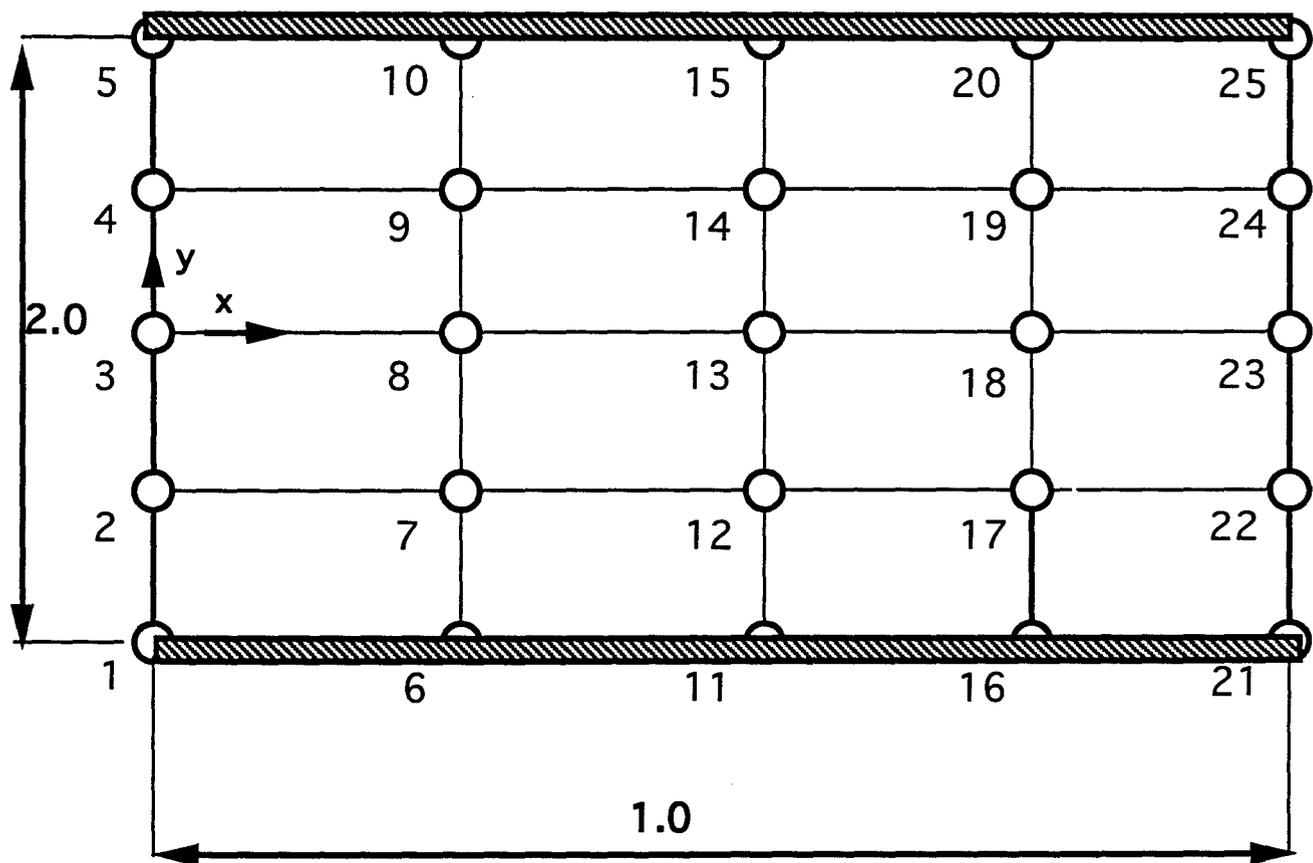


Q2Q1d



Q2P1

Figure 2.3 Quelques combinaisons des éléments vitesse-pression



le sens de l'écoulement



$$u = 1 - y^2$$

$$p = 1 - x$$

Figure 2.4 Maillage construit par les éléments Q1Q1 pour l'écoulement de Poiseuille pur



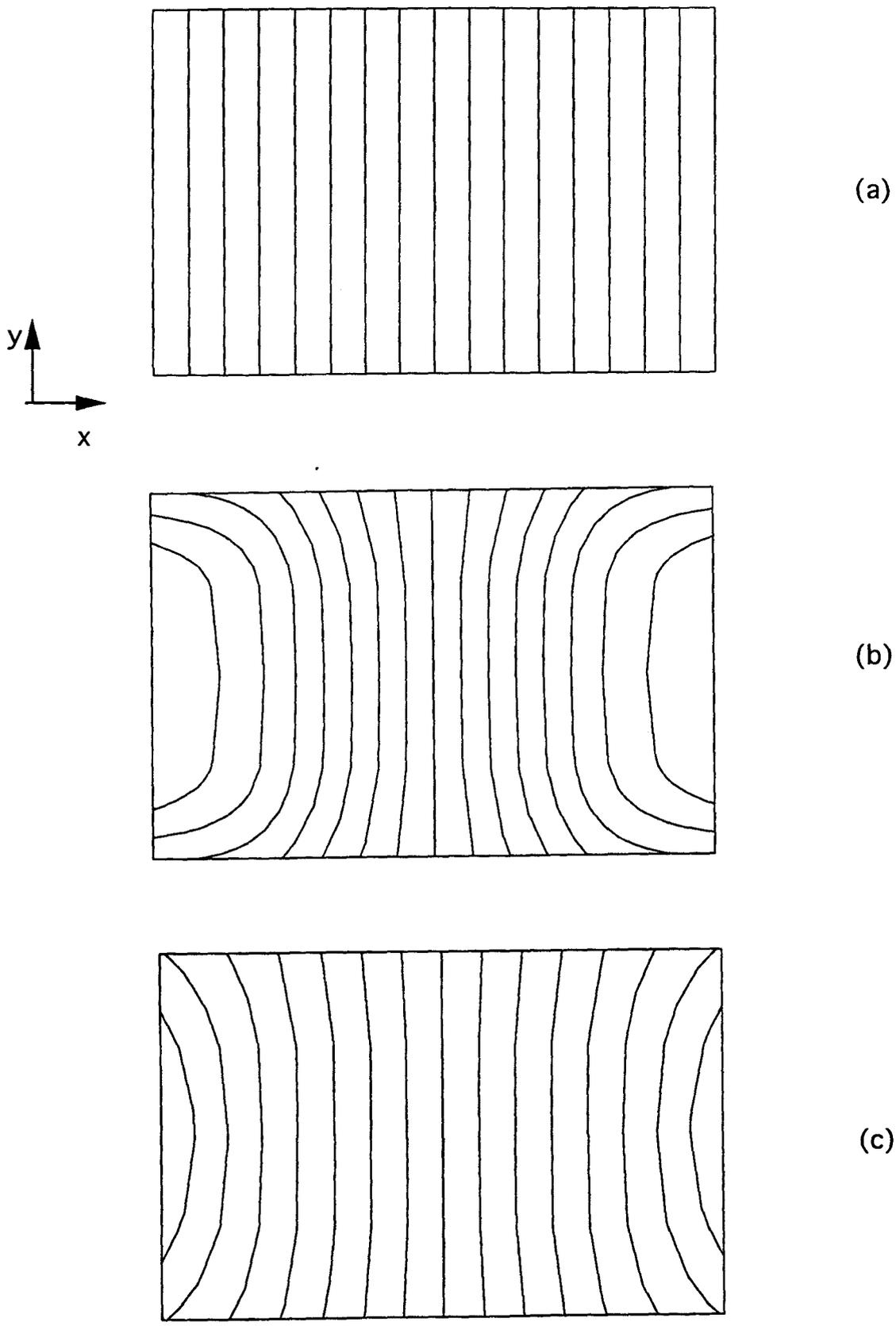


Figure 2.5 Champ de pression pour l'écoulement de Poiseuille pur
 (a) solution exacte, également solution obtenue avec les formulations GLS(Q1Q1)+terme intégral, GLS(Q2SQ2S) et BG(Q2Q1) (b) solution de GLS(Q1Q1) classique (c) solution de GLS(Q1Q1)+estimation du terme de diffusion



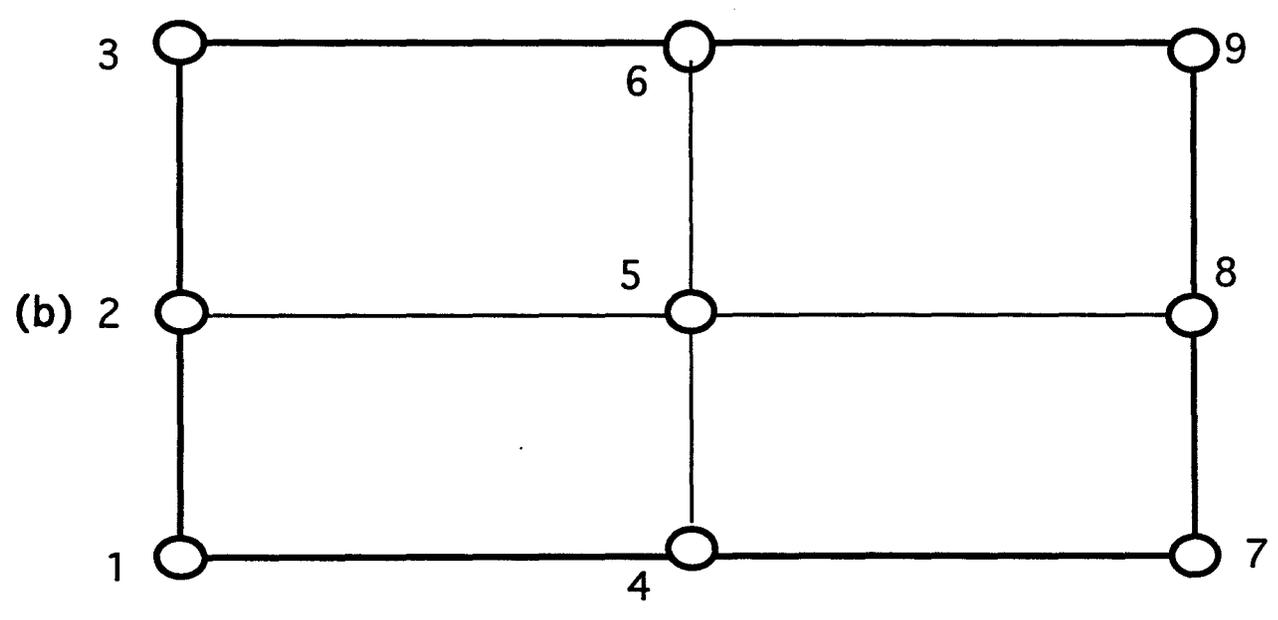
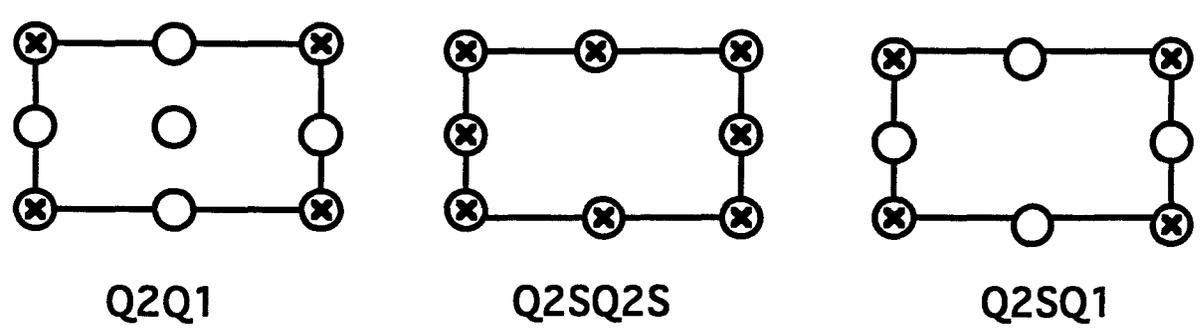
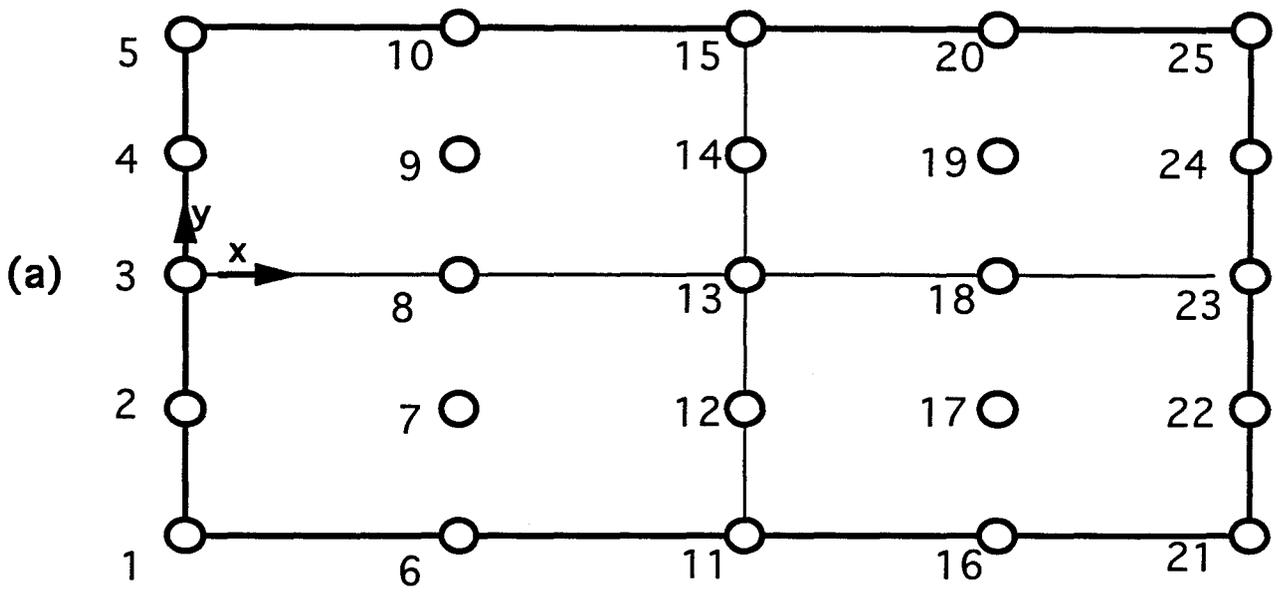
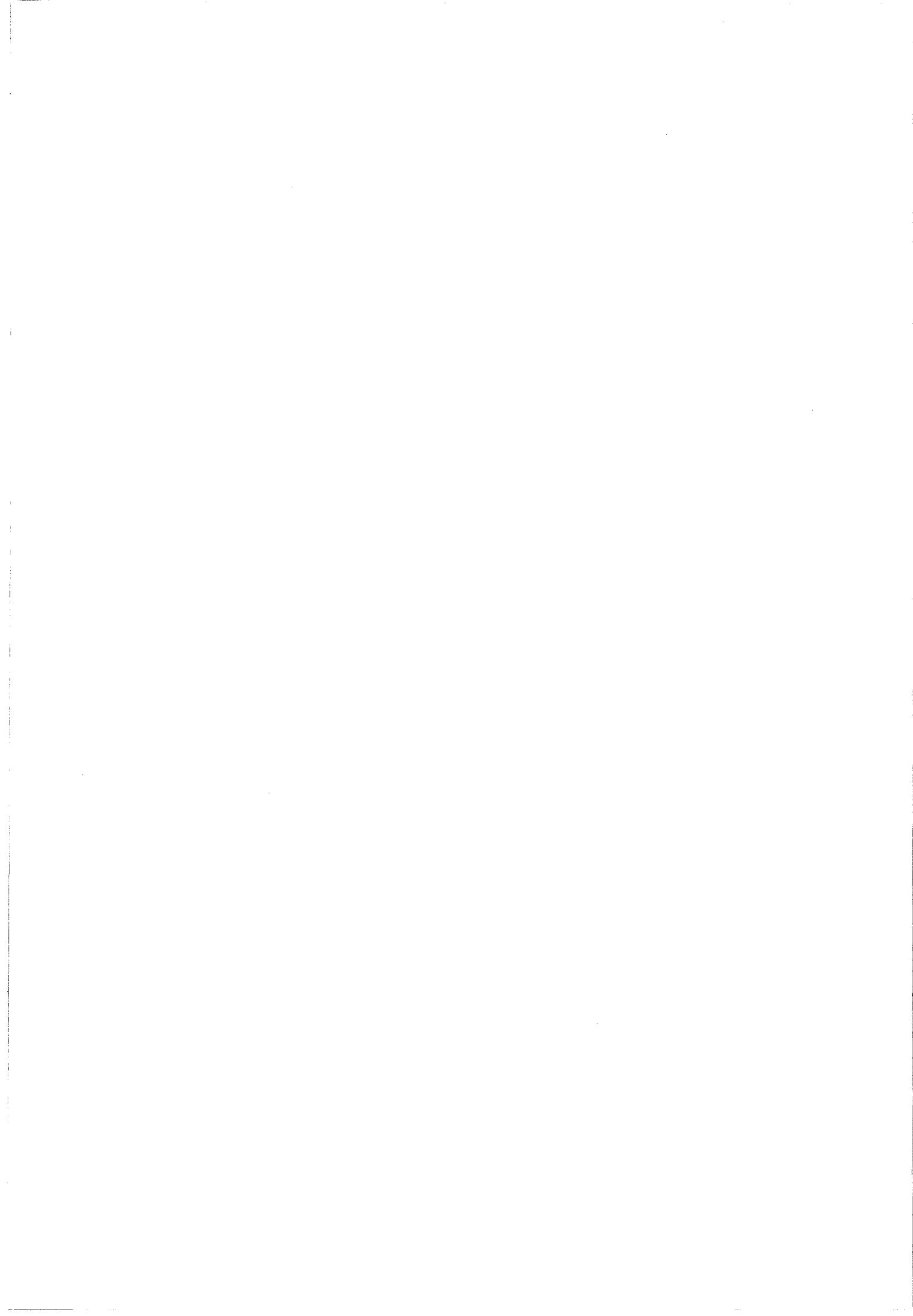


Figure 2.6 Maillage construit par les éléments quadratiques
(a) noeuds de vitesse, (b) noeuds de pression



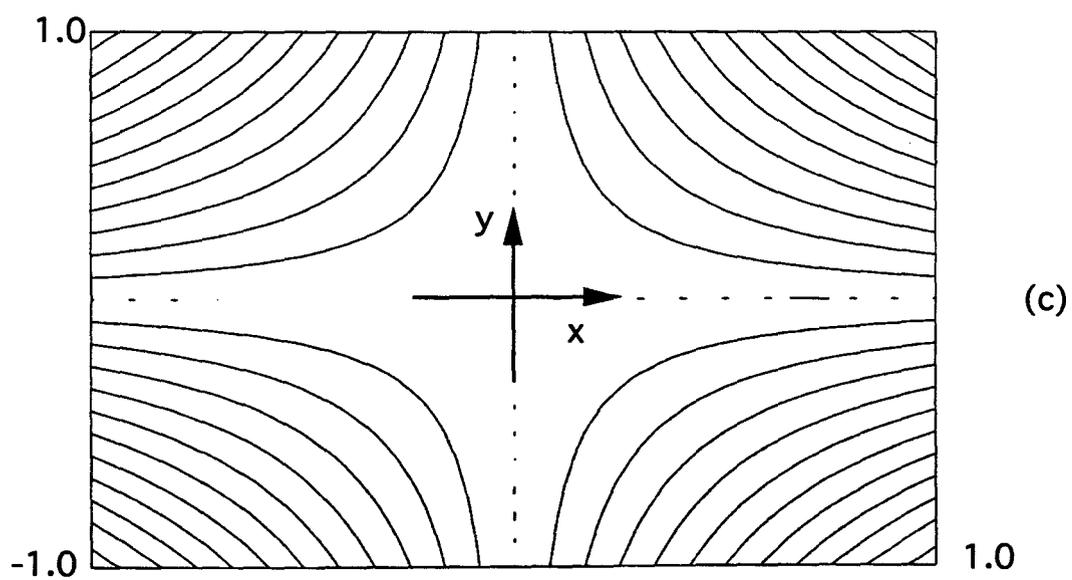
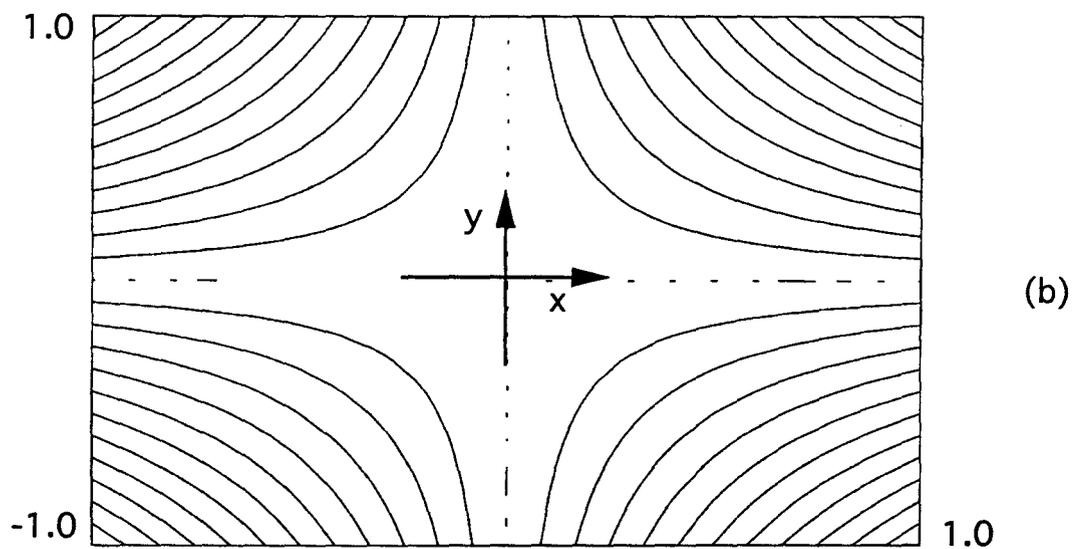
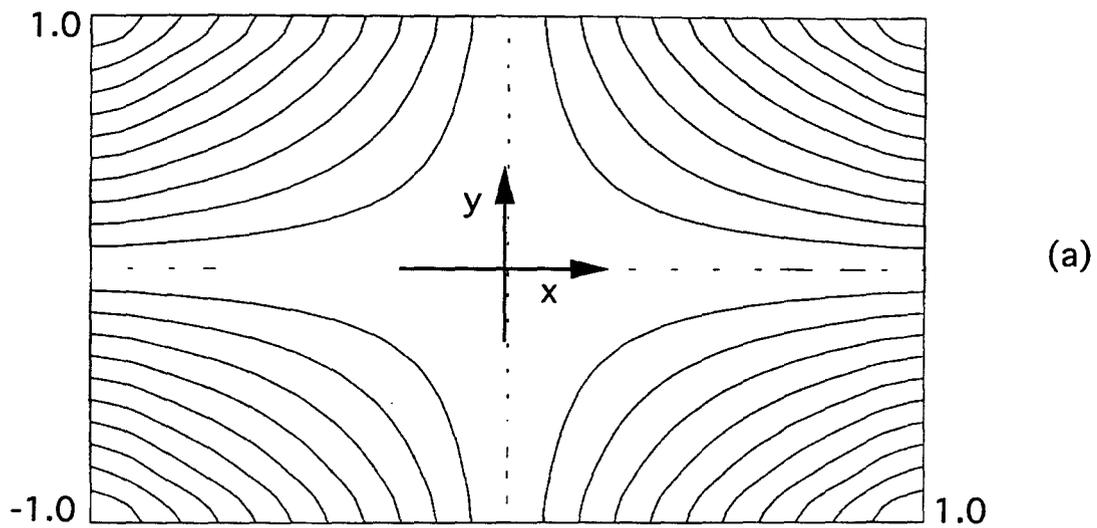
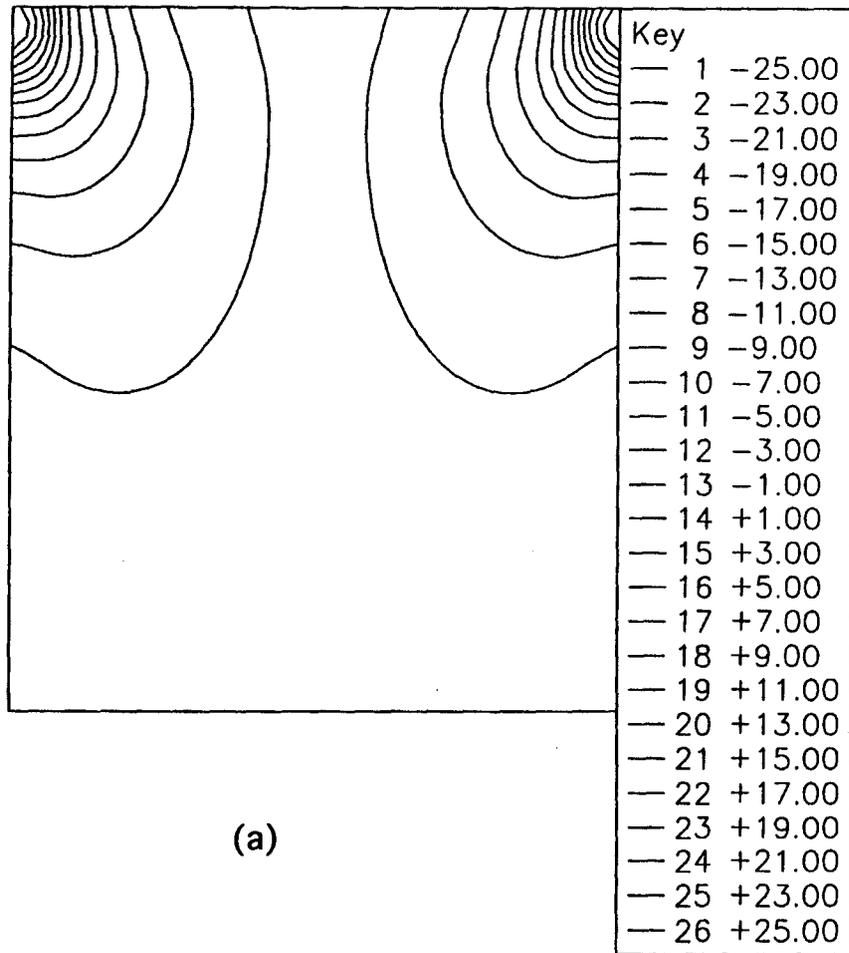
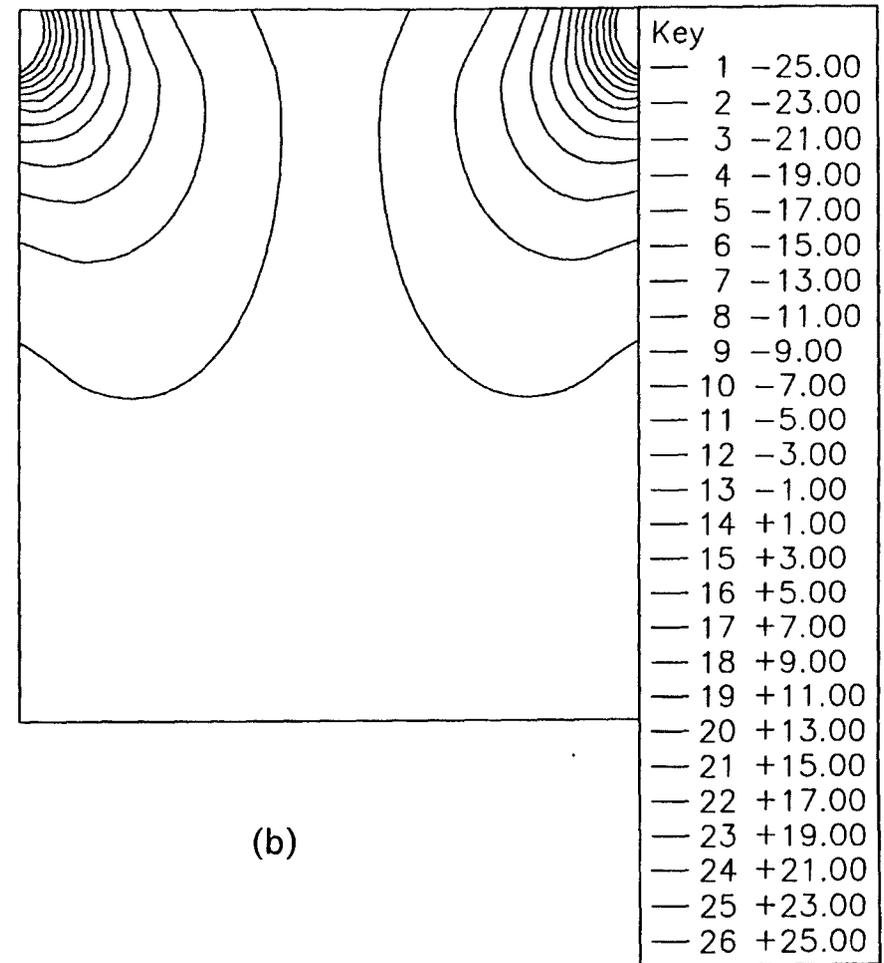


Figure 2.7 Le champ de pression, (a) formulation GLS(Q1Q1),
 (b) formulation GLS(Q1Q1)+terme intégral,
 (c) formulation GLS(Q1Q1)+estimation du terme de diffusion





(a)



(b)

Figure 2.8 Champ de pression pour la cavité,
 (a) formulation GLS(Q1Q1) classique, (b) formulation GLS(Q1Q1)+
 estimation du terme de diffusion



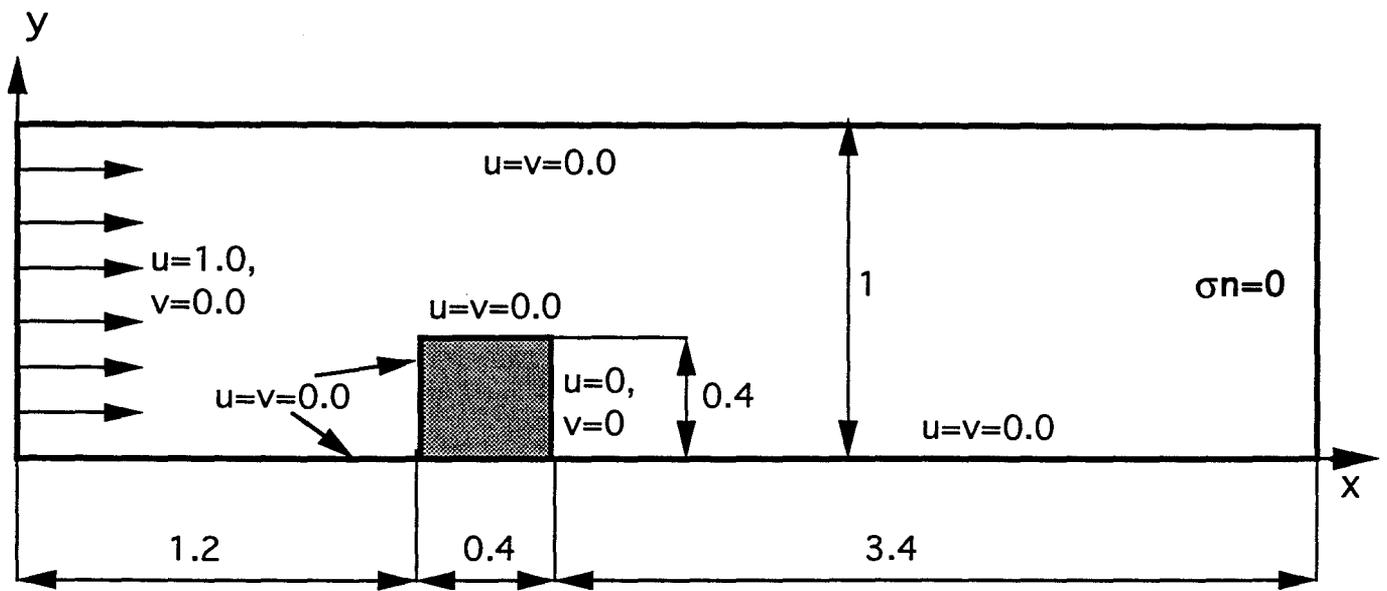


Figure 2.9a Ecoulement sur une double marche

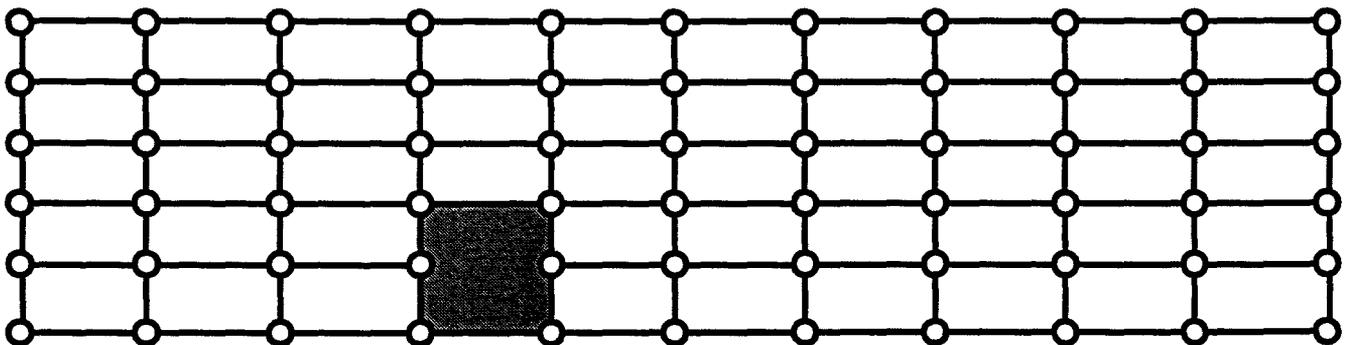
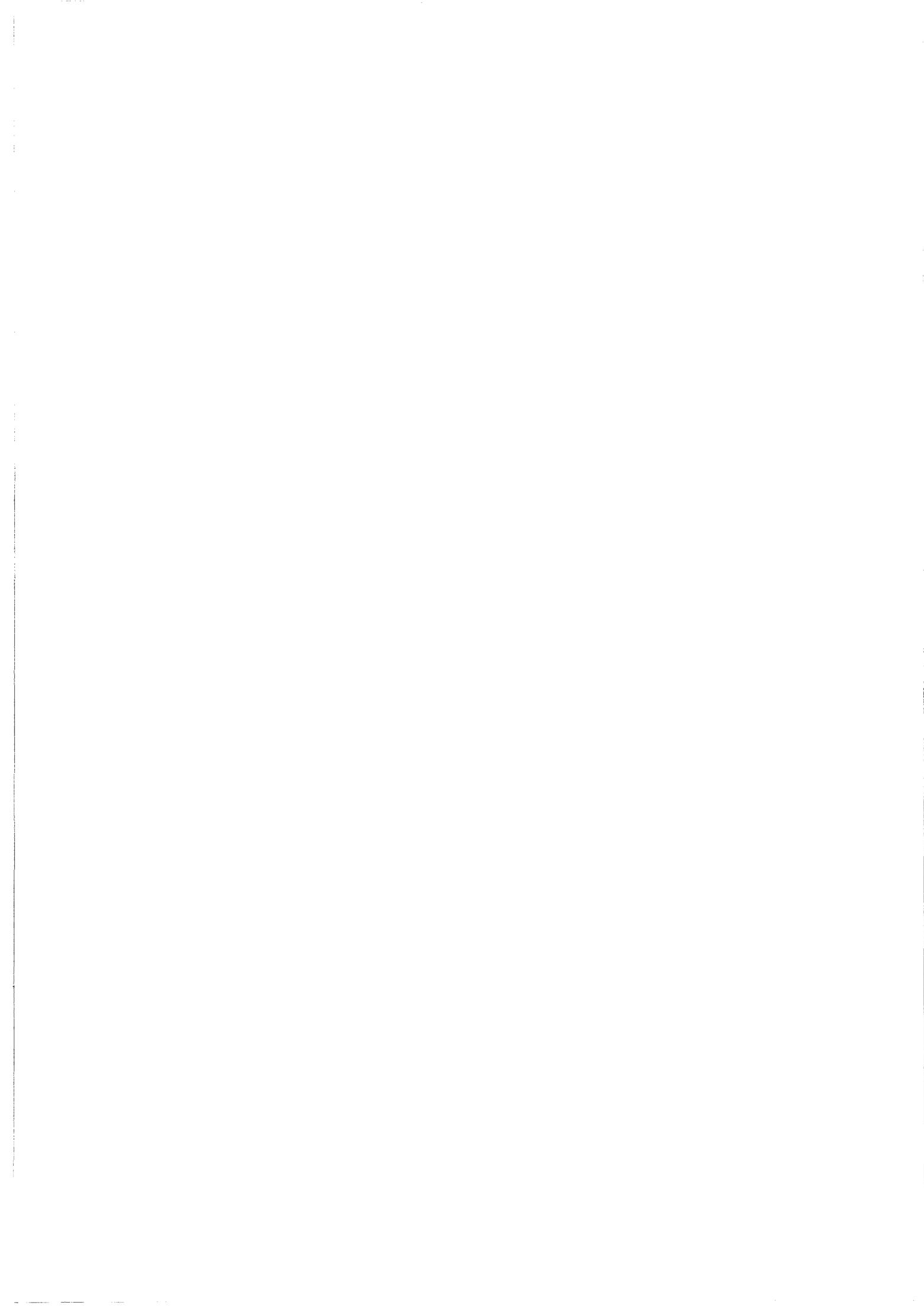
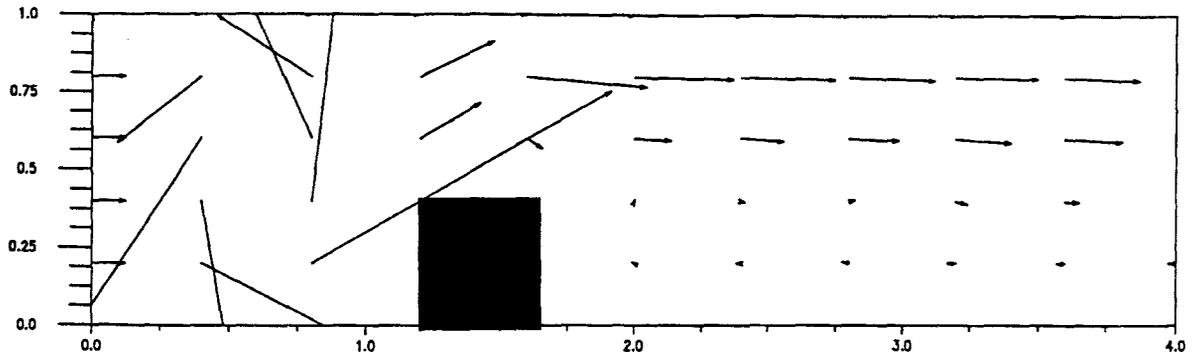
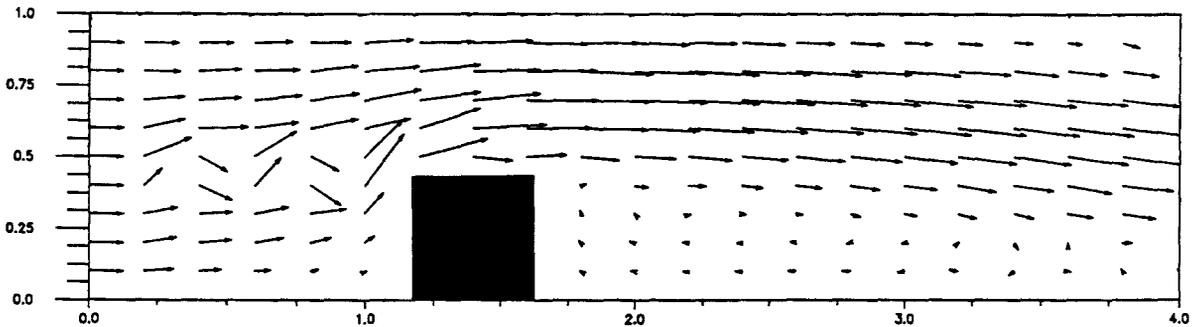


Figure 2.9b Le maillage aux éléments finis

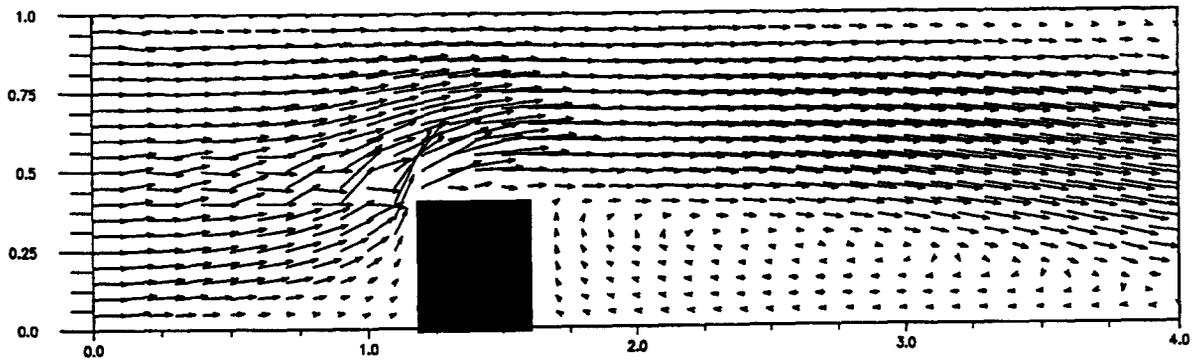




(a)

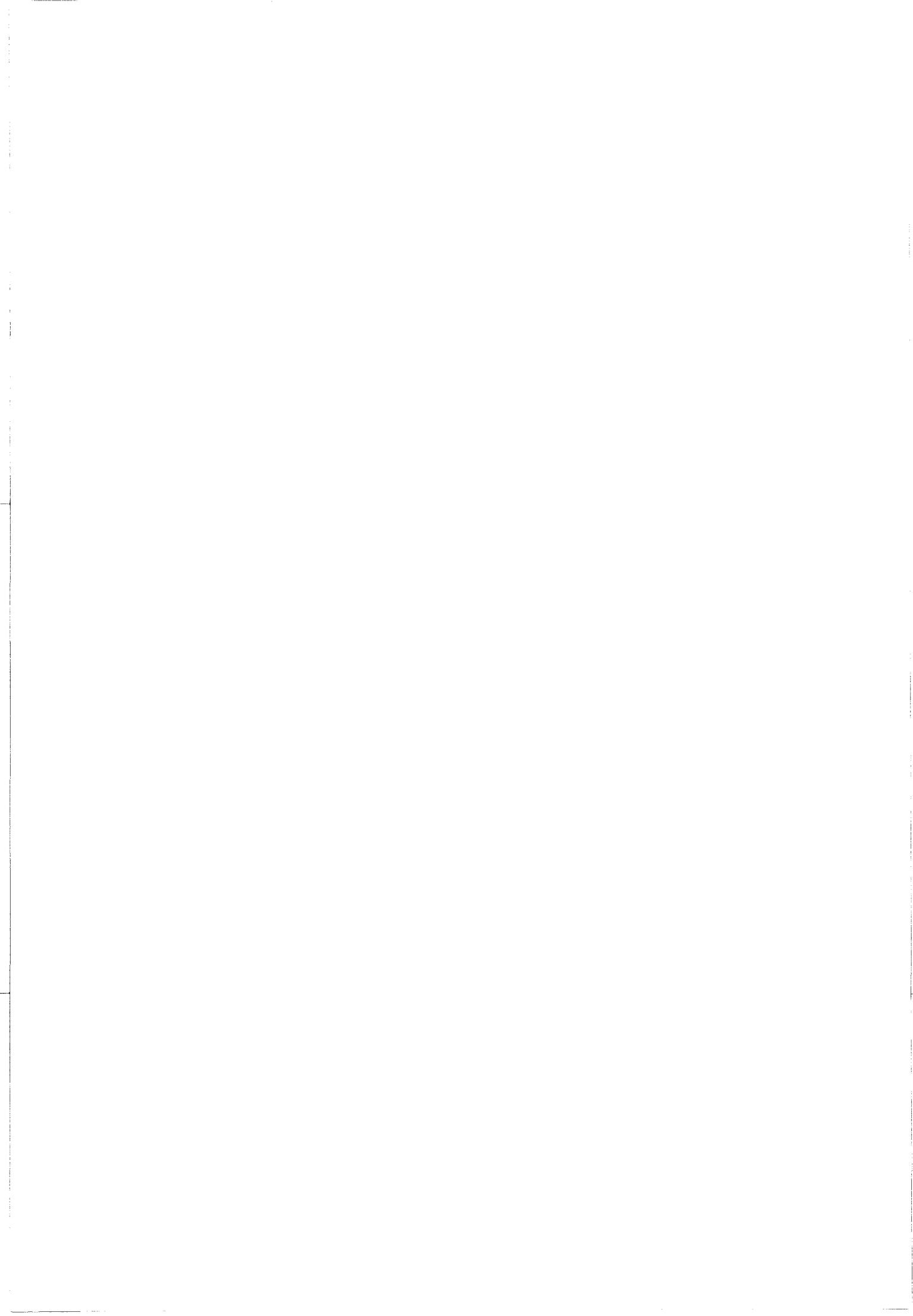


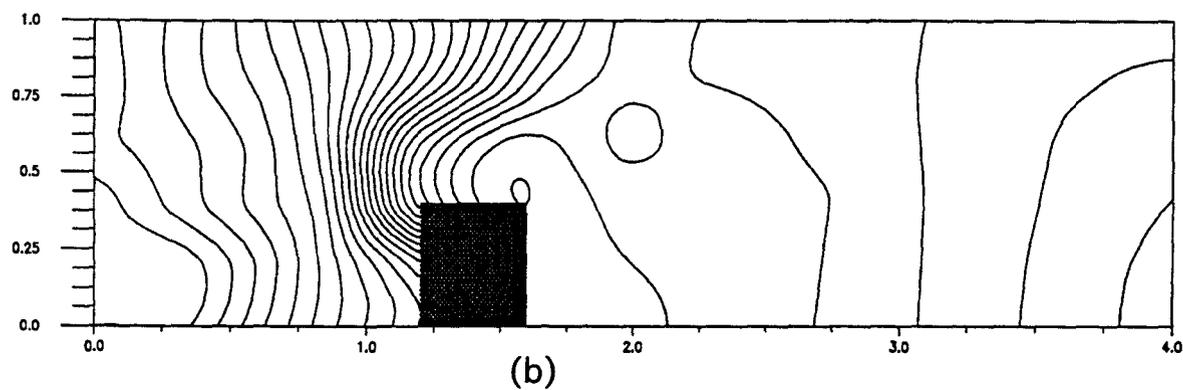
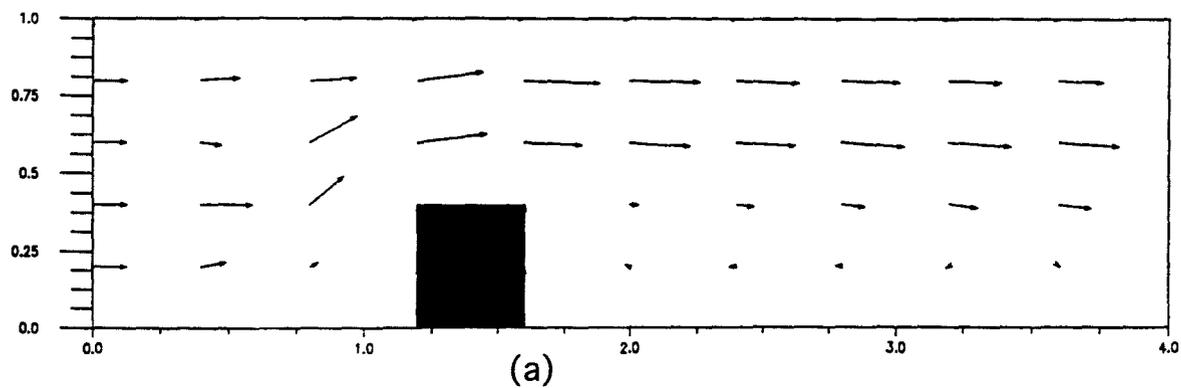
(b)



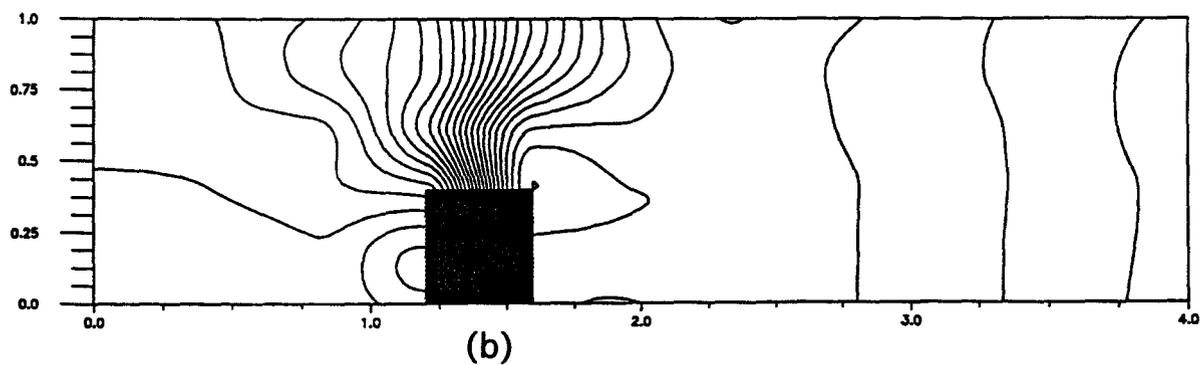
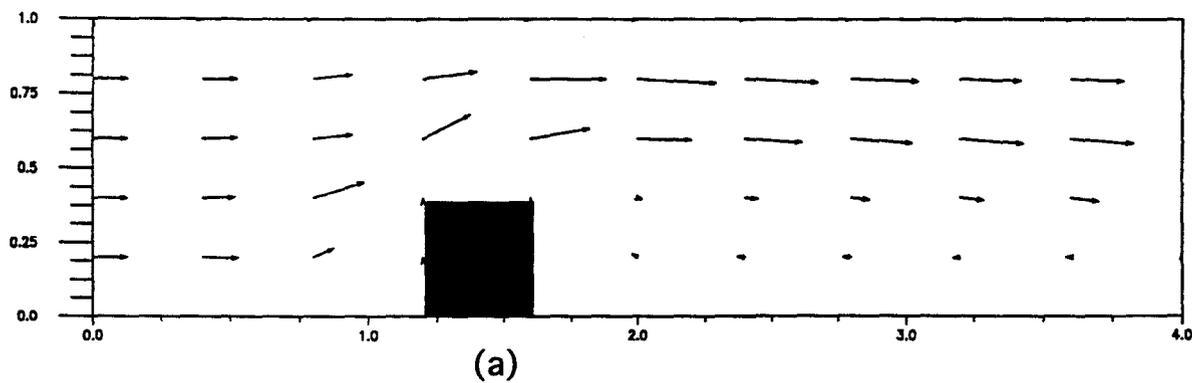
(c)

Figure 2.10 Vecteurs vitesse, formulation BGP(Q1P0), a) 11*6 points, (b) 21*11 points (c) 41*21 points





**Figure 2.11 Formulation SUPG(Q1P0), 11*6 points,
(a) vecteurs vitesse (b) isobares**



**Figure 2.12 Formulation GLS(Q1Q1), 11*6 points,
(a) vecteurs vitesse (b) isobares**



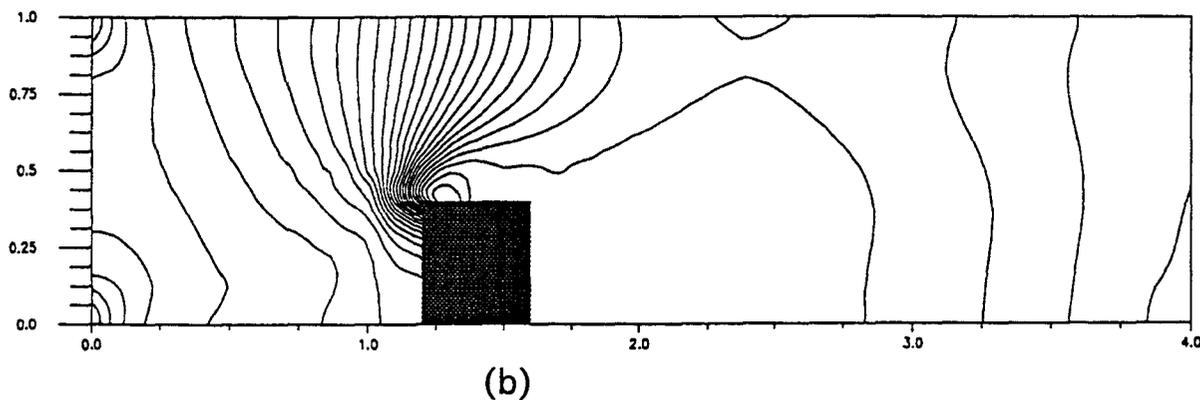
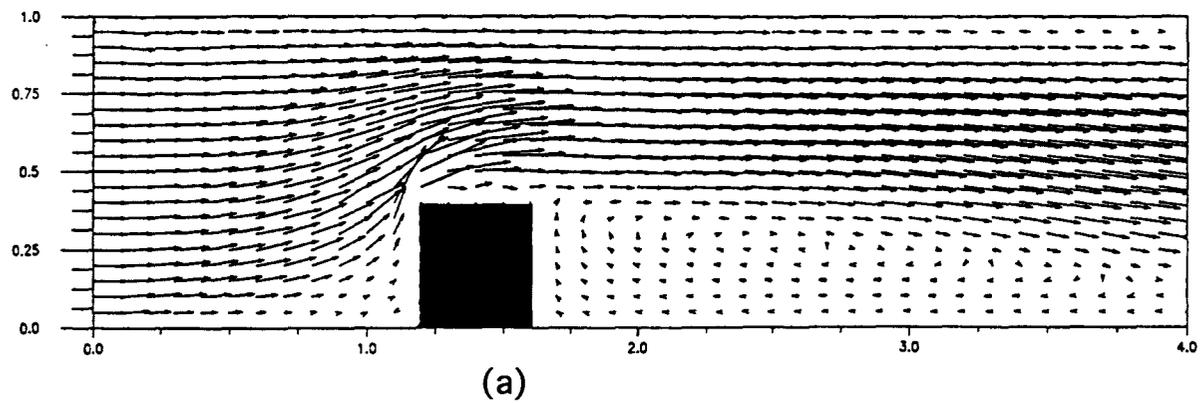


Figure 2.13 Formulation SUPG(Q1P0), 41*21 points
 (a) vecteurs vitesse, (b) isobares

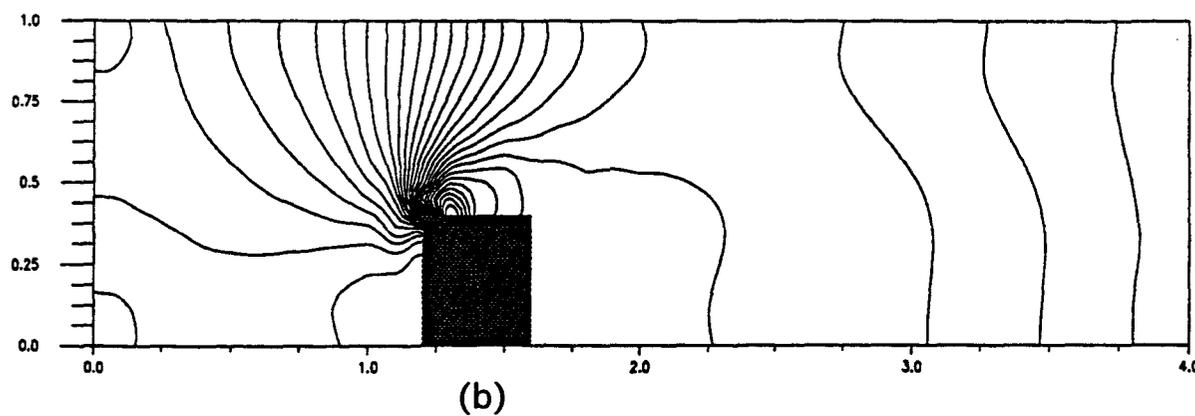
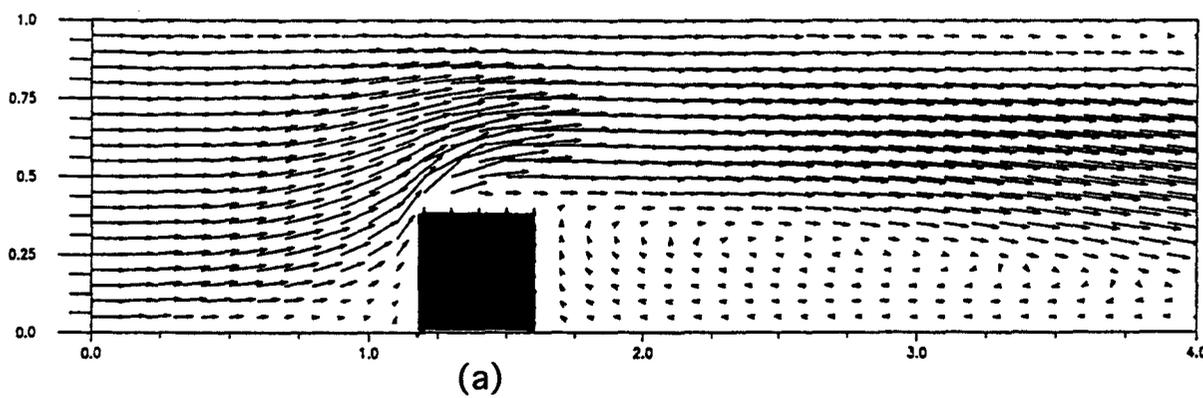
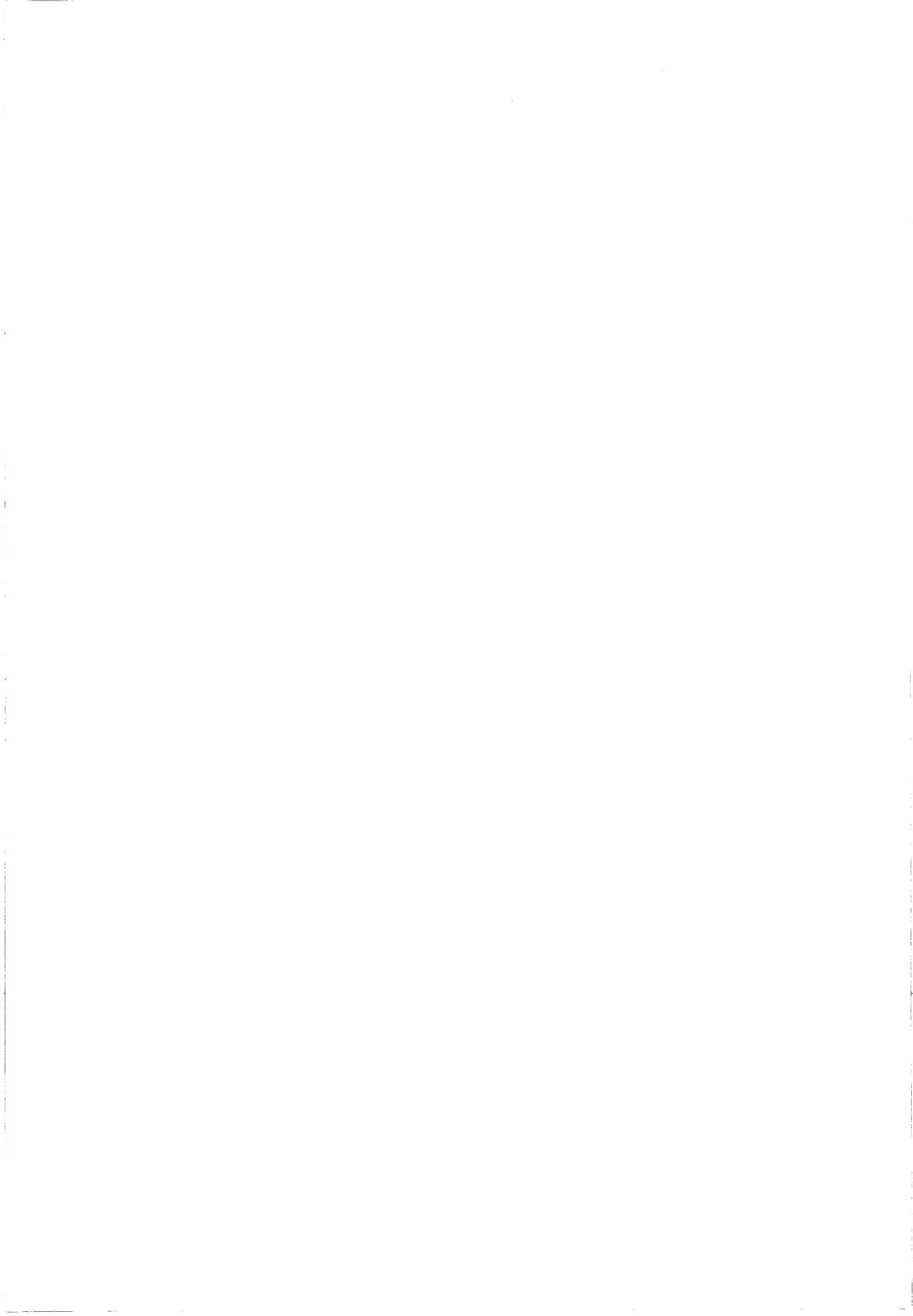
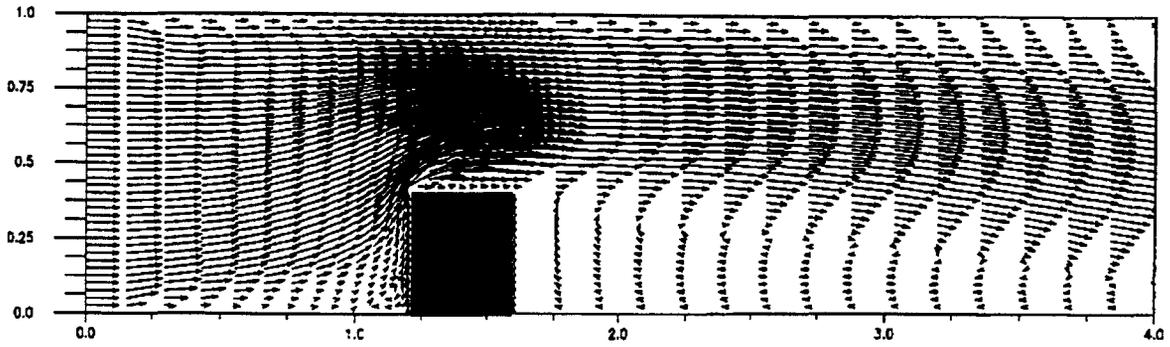
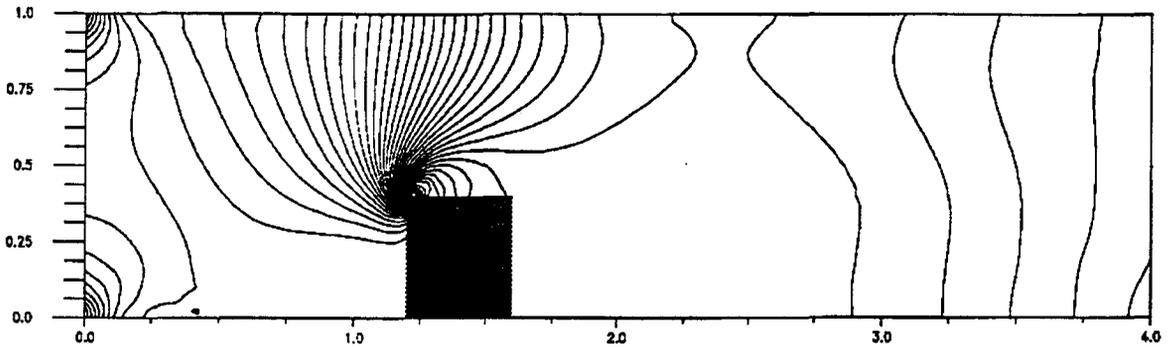


Figure 2.14 Formulation GLS(Q1Q1), 41*21 points
 (a) vecteurs vitesse, (b) isobares



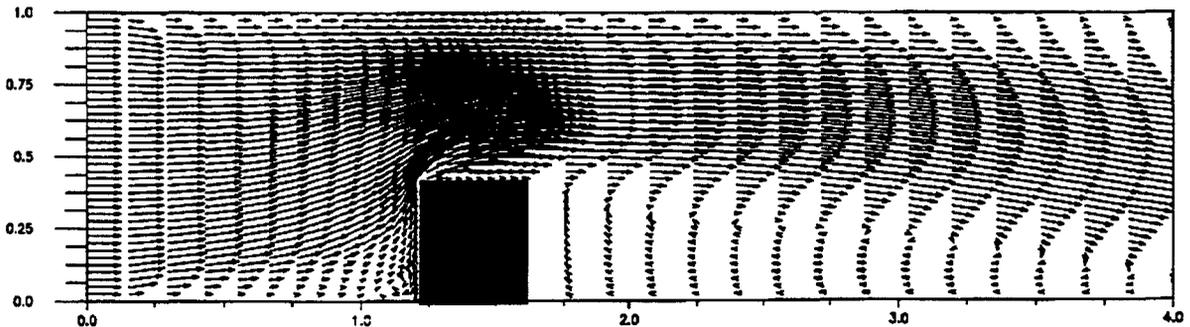


(a)

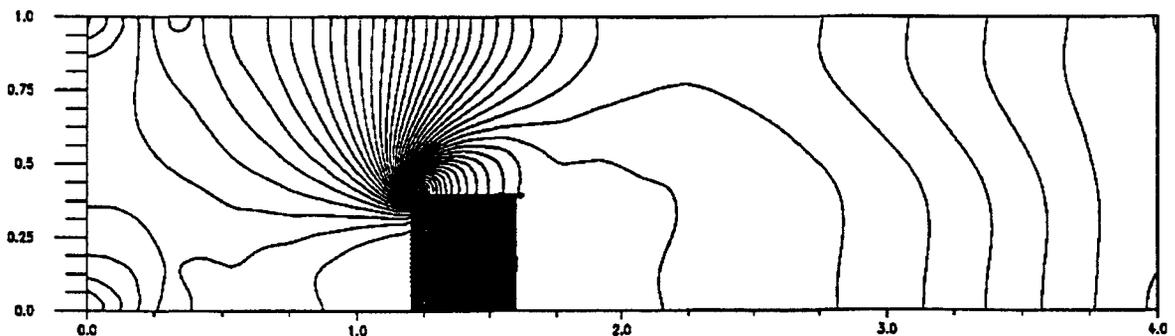


(b)

**Figure 2.15 Formulation SUPG(Q1P0), 41*41 points
non-uniforme,
(a) vecteurs vitesse (b) isobares**



(a)



(b)

**Figure 2.16 Formulation GLS(Q1Q1), 41*41 points
non-uniforme,
(a) vecteurs vitesse (b) isobares**

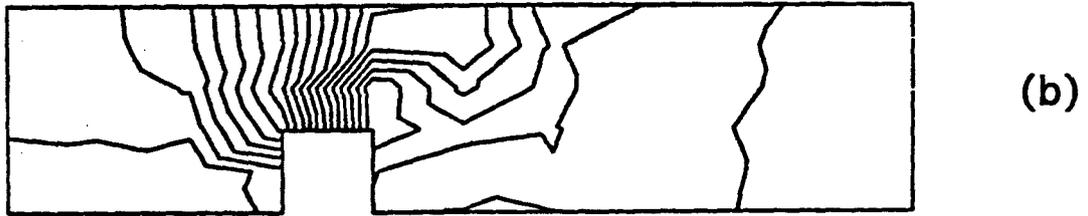
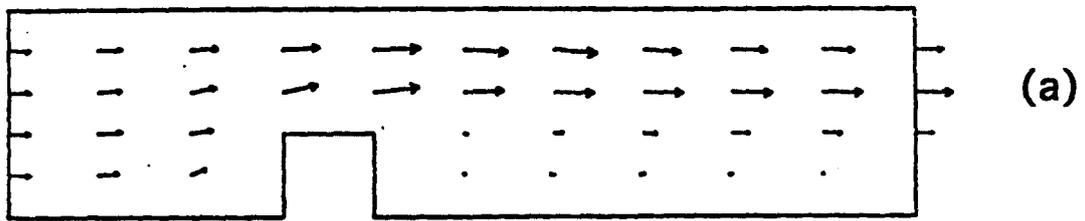


Figure 2.17 (a) vecteurs vitesse, (b) isobares, maillage lâche (Hansbo, 1989)

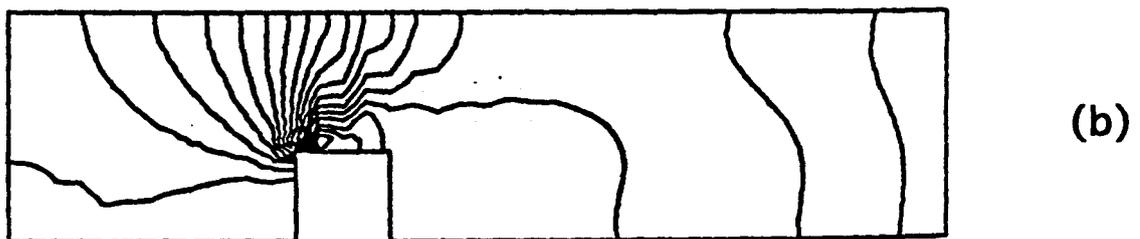
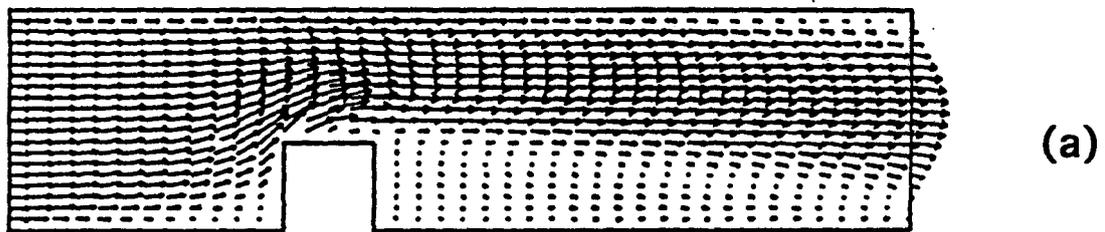
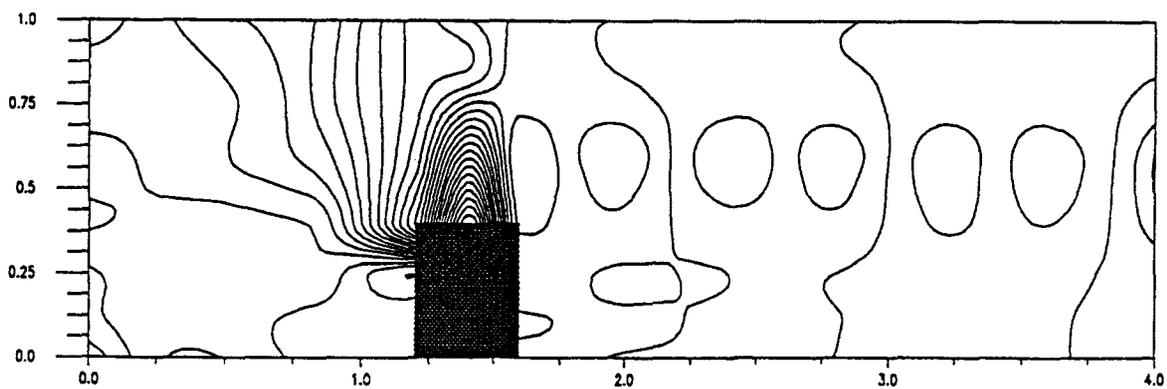
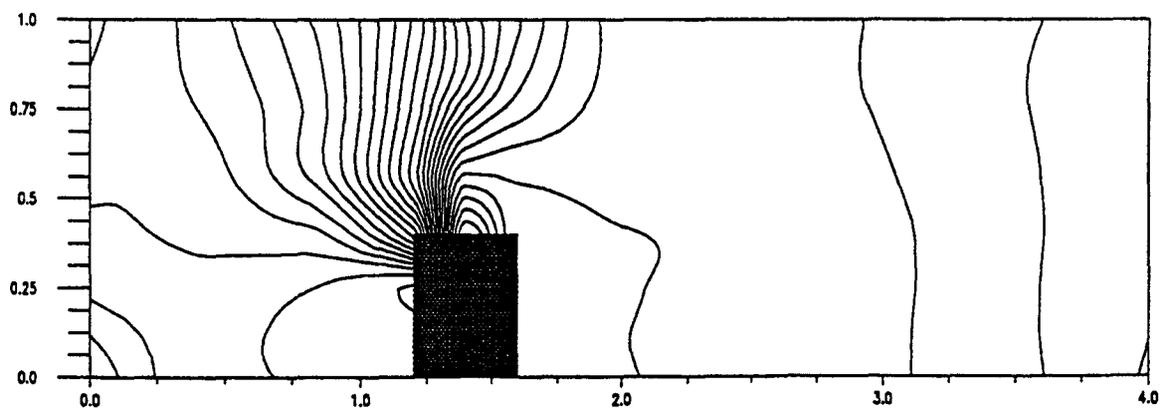


Figure 2.18 (a) vecteur vitesse, (b) isobares, maillage raffiné (Hansbo, 1989)





**Figure 2.19a Formulation SUPG(Q2SQ1),
isobares, 60 éléments**



**Figure 2.19b Formulation GLS(Q2SQ2S),
isobares, 60 éléments**



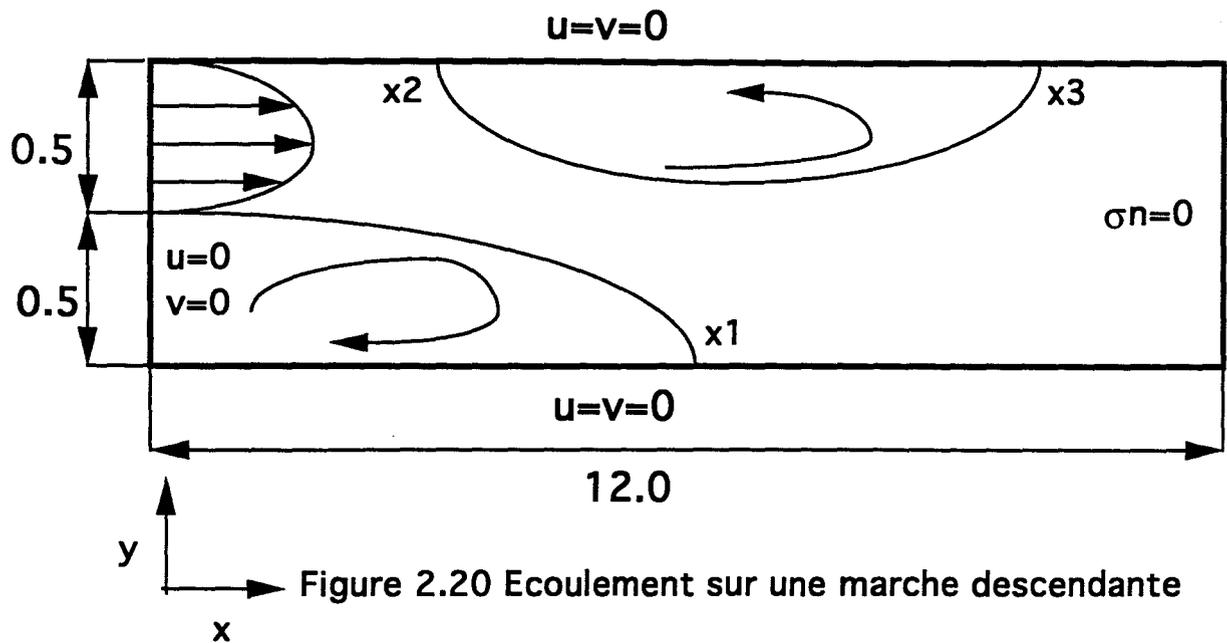


Tableau 2.1

Re	Résultat de la présente étude *			Armaly et al. (1983)		
	x1	x2	x3	x1	x2	x3
400	4.2	—	—	4.2	—	—
600	5.3	4.6	7.8	5.5	4.7	7.5
800	6.0	5.2	10.1	7.1	5.5	9.5

* les différentes formulations fournissent pratiquement les mêmes résultats (à 1% près)

Re	Gartling (1990)		
800	x1	x2	x3
	6.10	4.85	10.48

Tableau 2.2



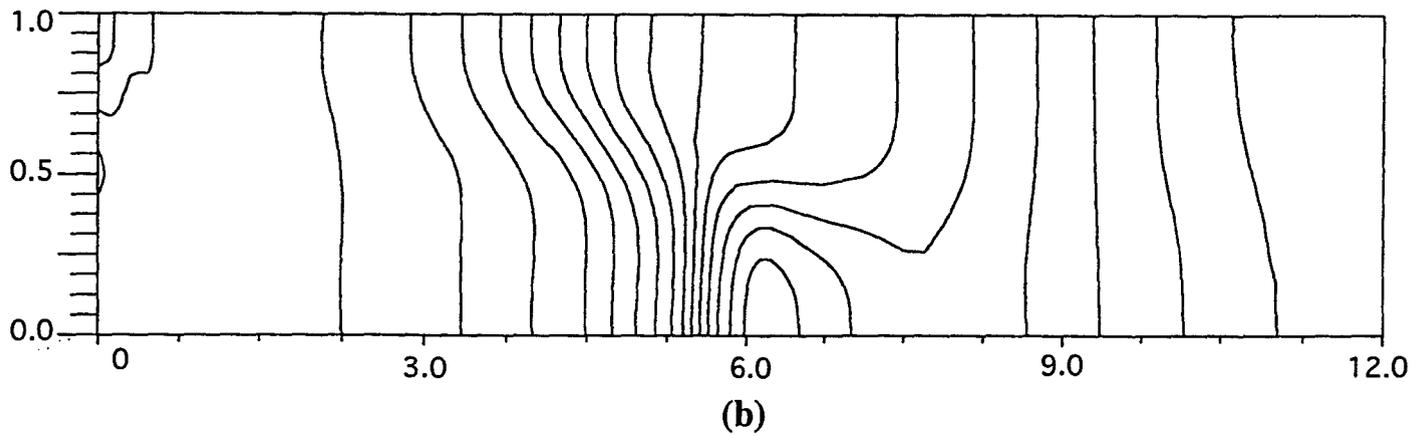
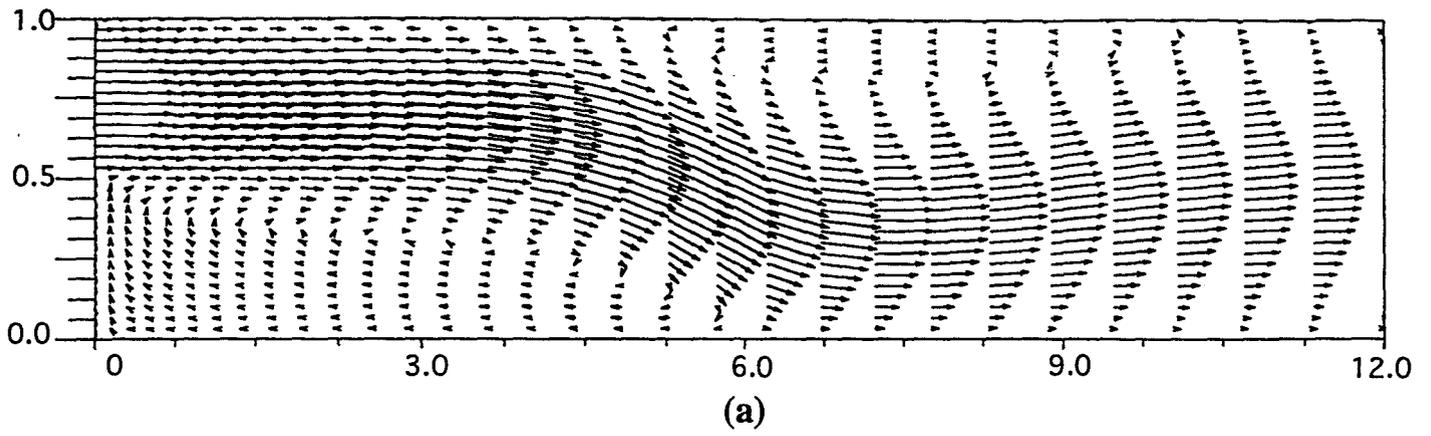


Figure 2.21 Formulation GLS(Q1Q1), $Re=800$, (a) vecteurs vitesse, (b) isobares

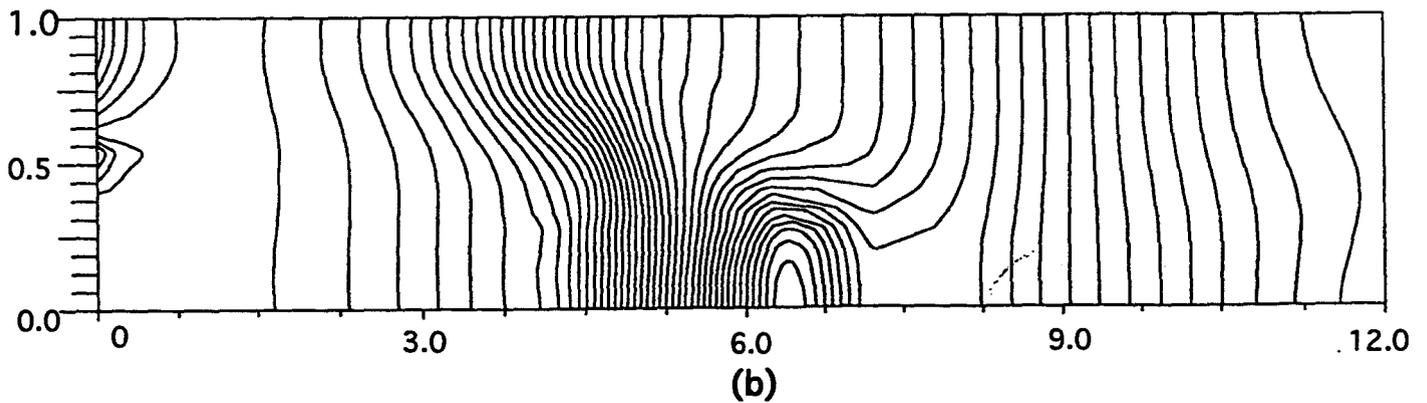
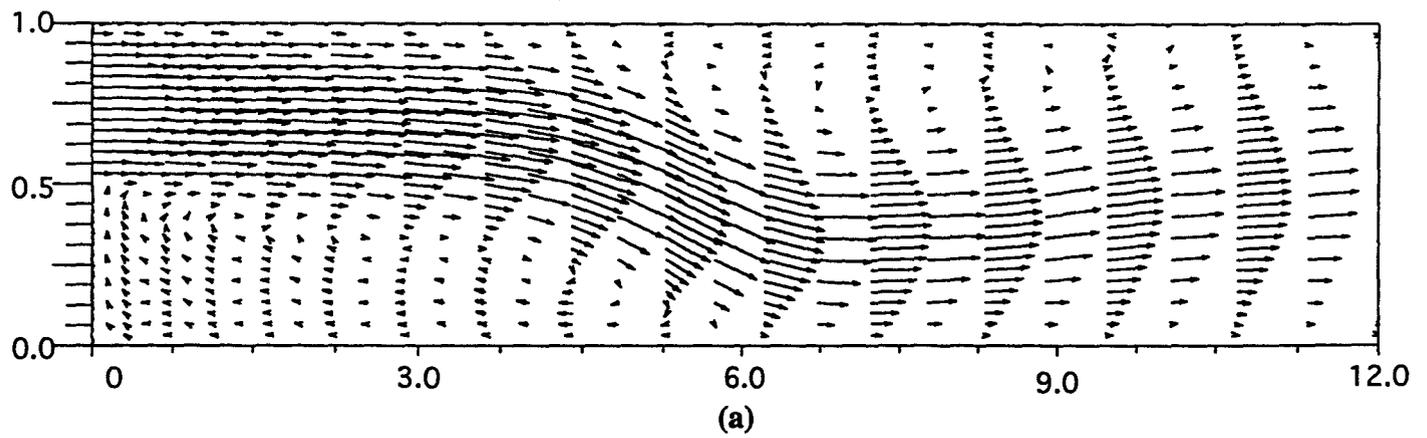
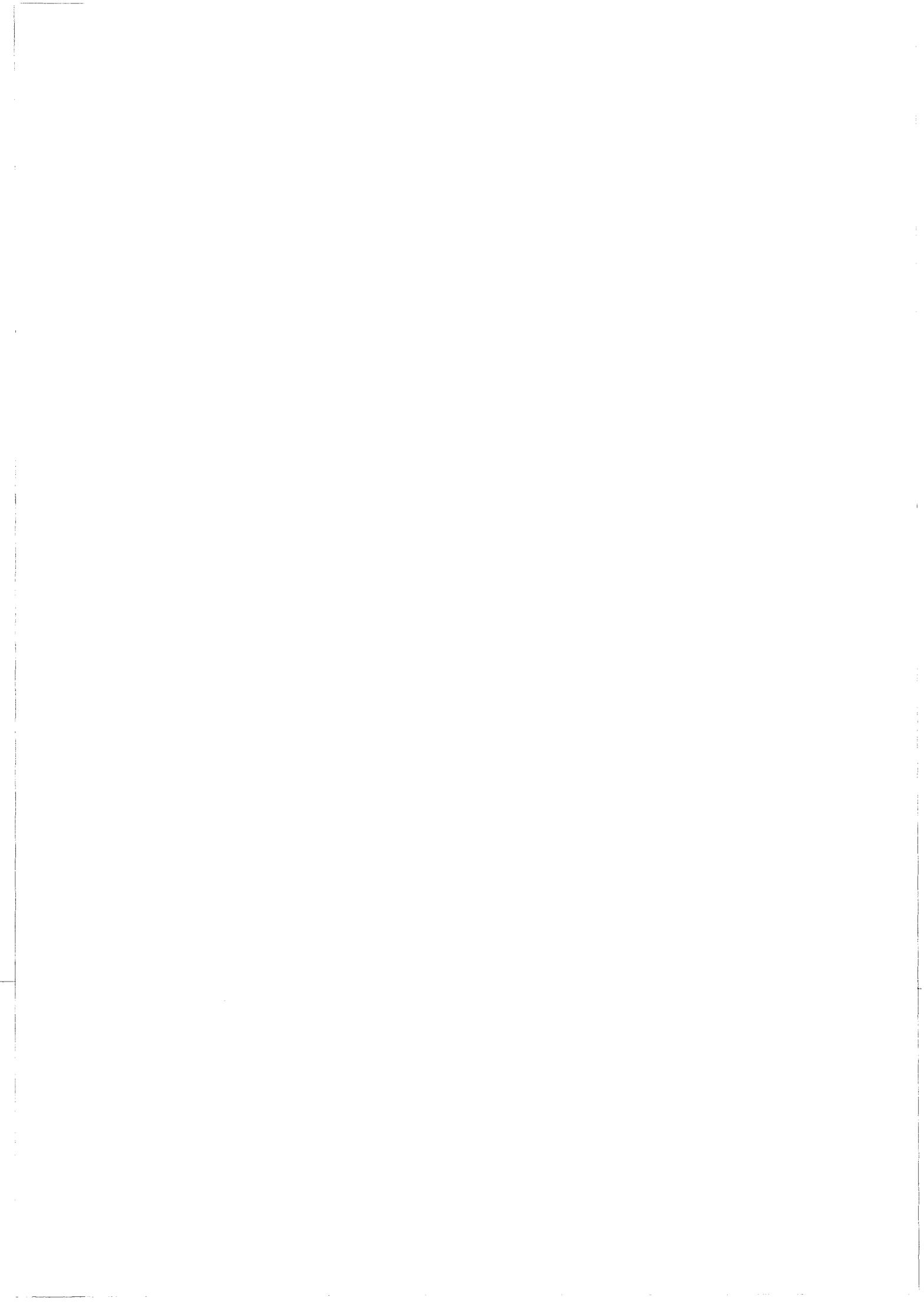


Figure 2.22 Formulation GLS(Q2SQ2S), $Re=800$, (a) vecteurs vitesse, (b) isobares



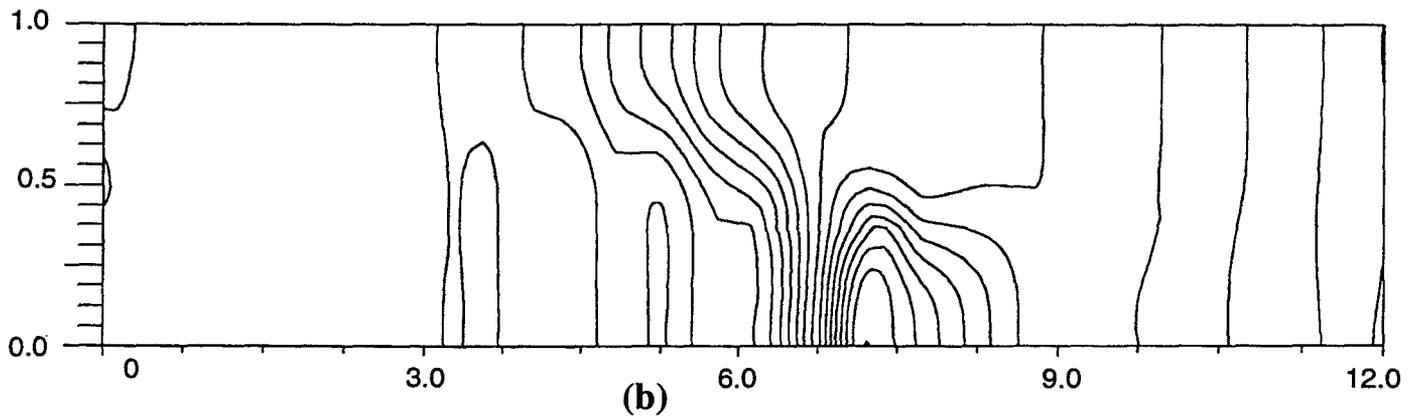
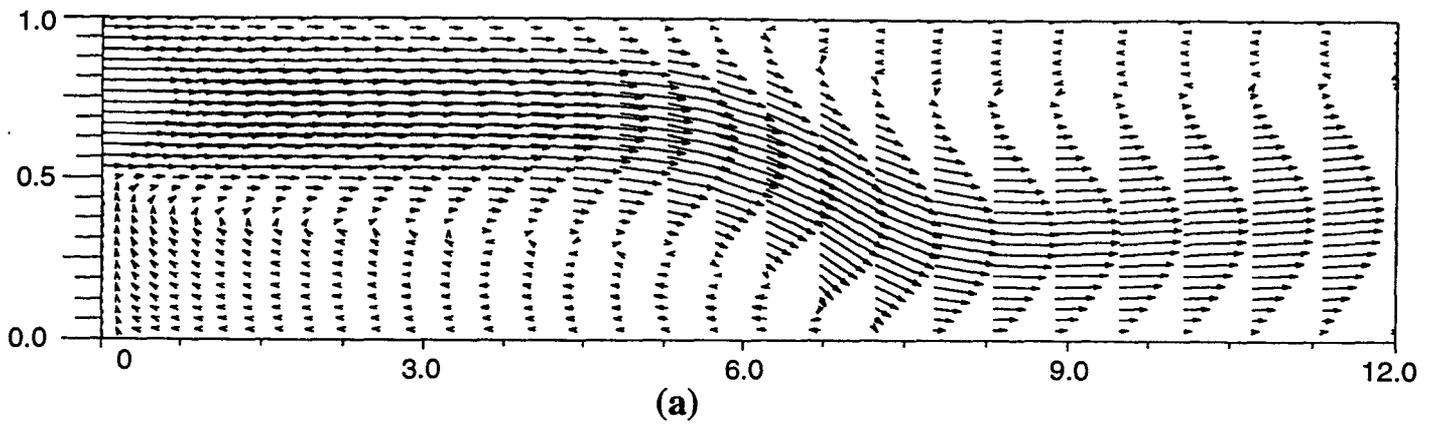


Figure 2.23 Formulation GLS(Q1Q1), $Re=1200$, (a) vecteurs vitesse, (b) isobares

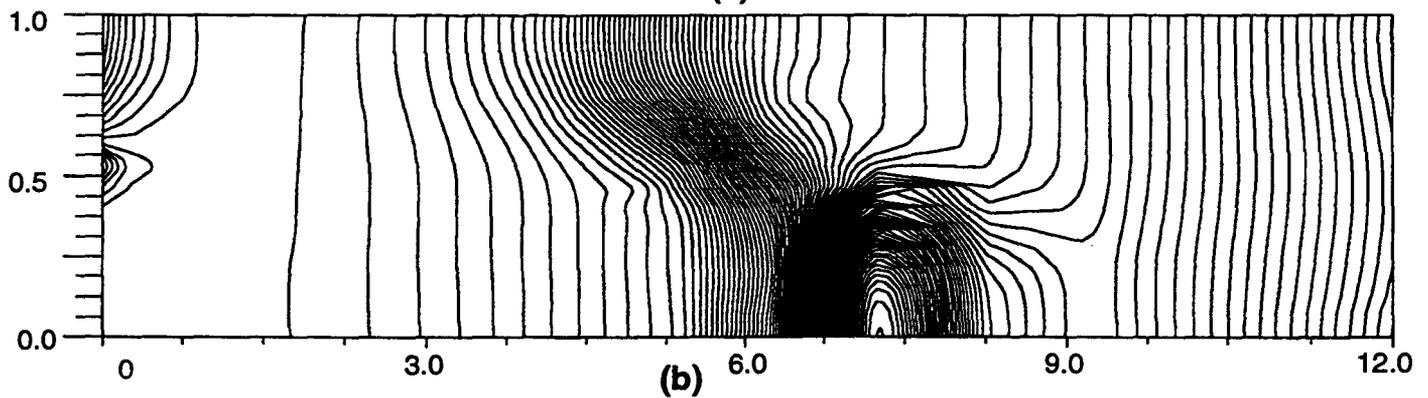
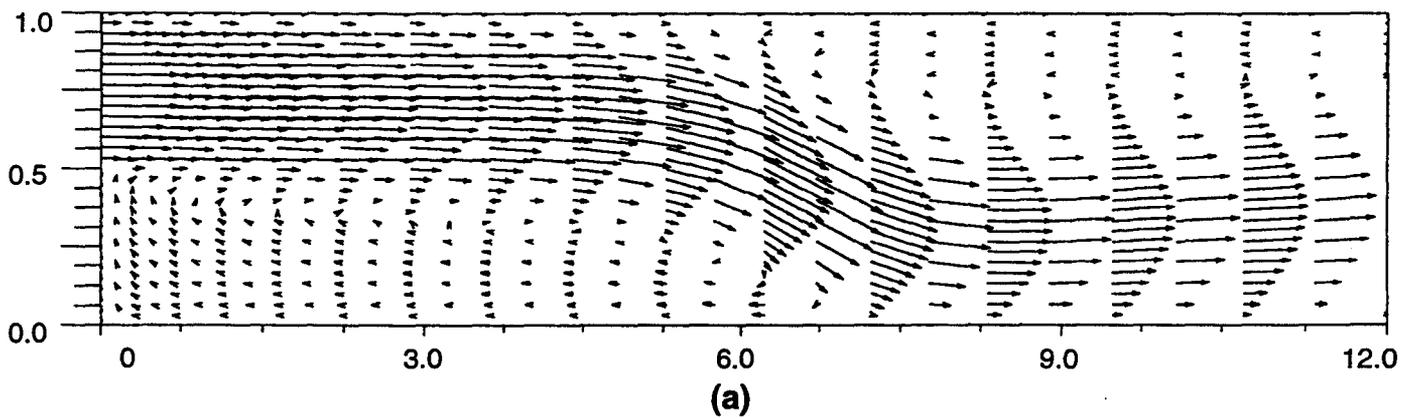


Figure 2.24 Formulation GLS(Q2SQ2S), $Re=1200$, (a) vecteurs vitesse, (b) isobares



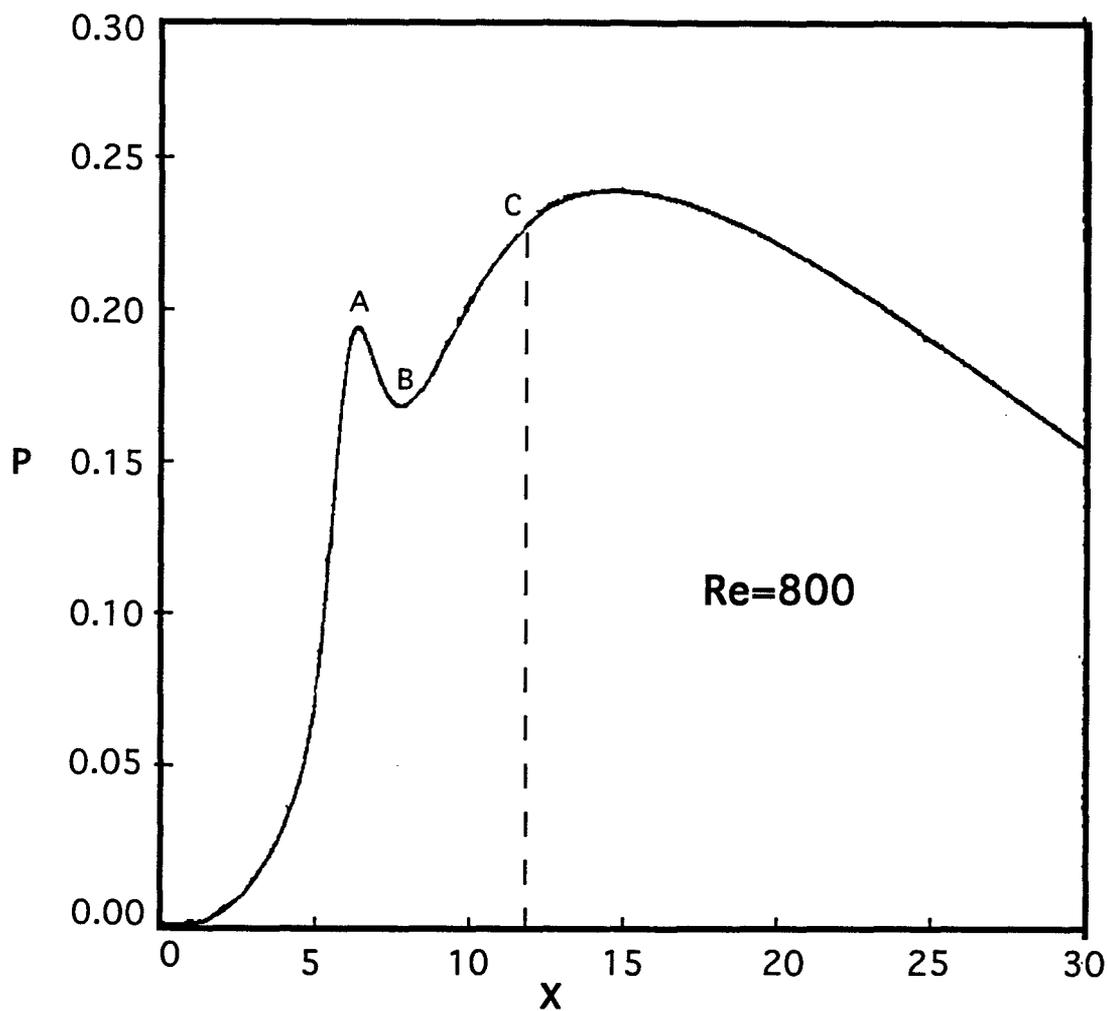


Fig. 2.25 Variation de pression sur la paroi inférieure,
(Gartling ,1990)

Tableau 2.3

Point	X	Pression pour Re=800					
		Gartling (1990)	GLS(Q1 Q1)	GLS(Q2S Q2S)	BG(Q2S Q1)	BGP(Q1 P0)	SUPG(Q1 P0)
A	6.2	0.196	0.194	0.196	0.207	0.181	0.185
B	7.6	0.168	0.164	0.165	0.136	0.167	0.167
C	12.0	0.230	0.224	0.228	0.200	0.220	0.220



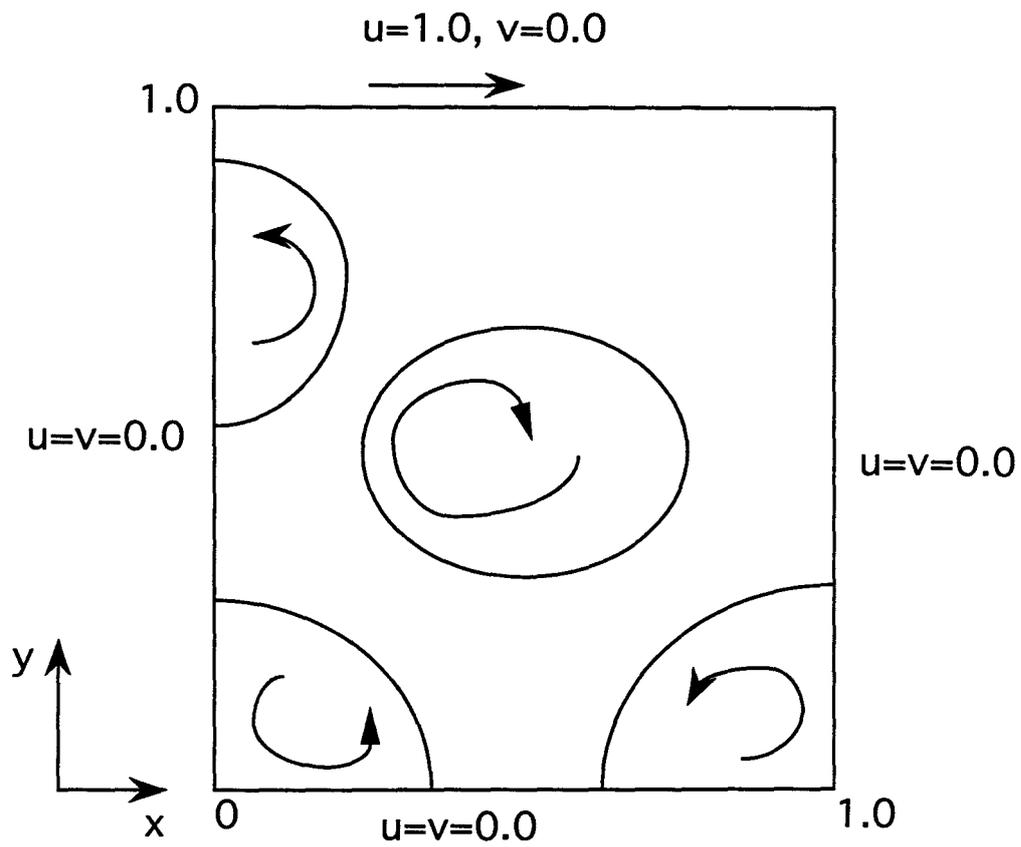
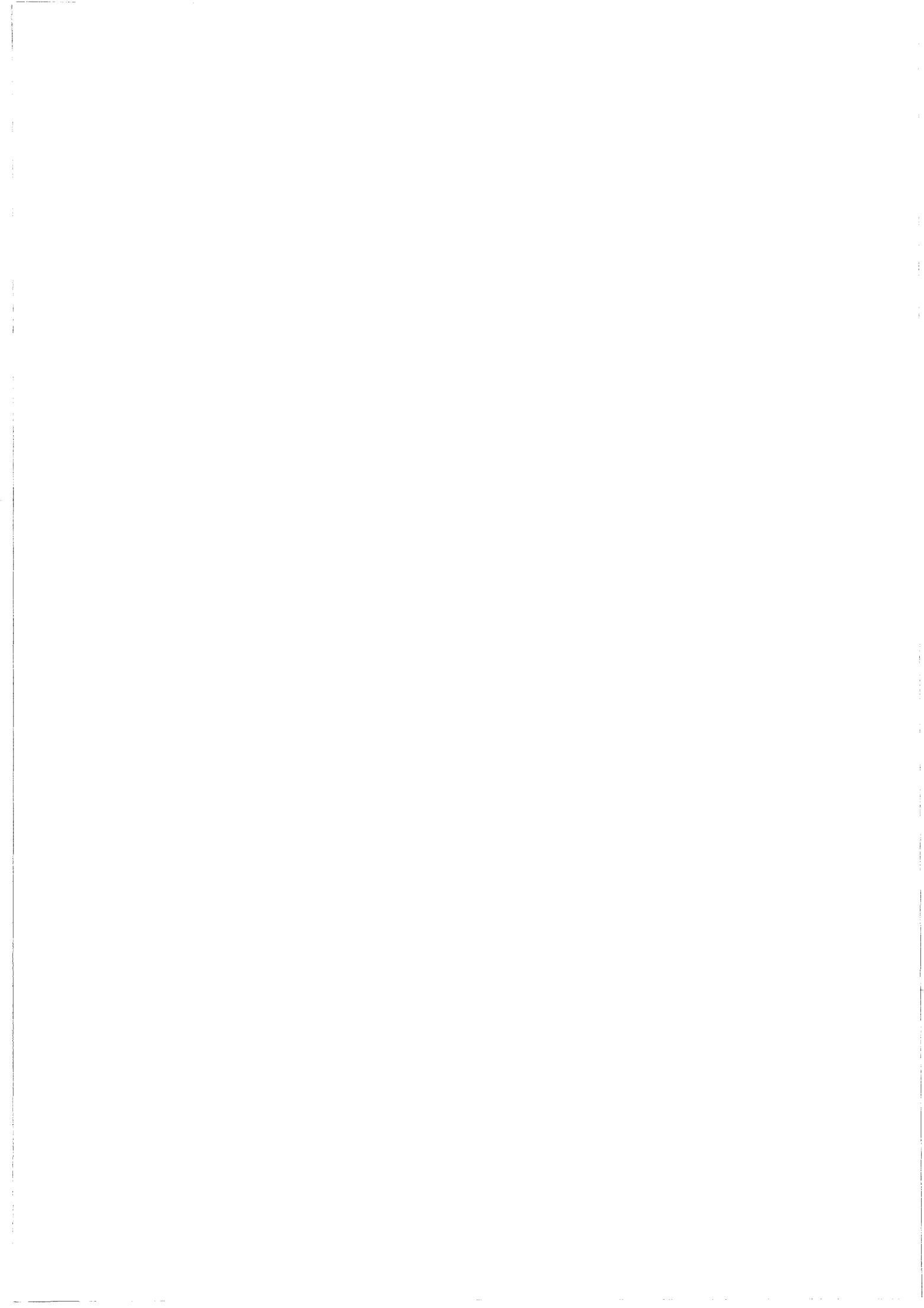


Figure 2.26 Domaine et conditions aux frontières, problème de cavité



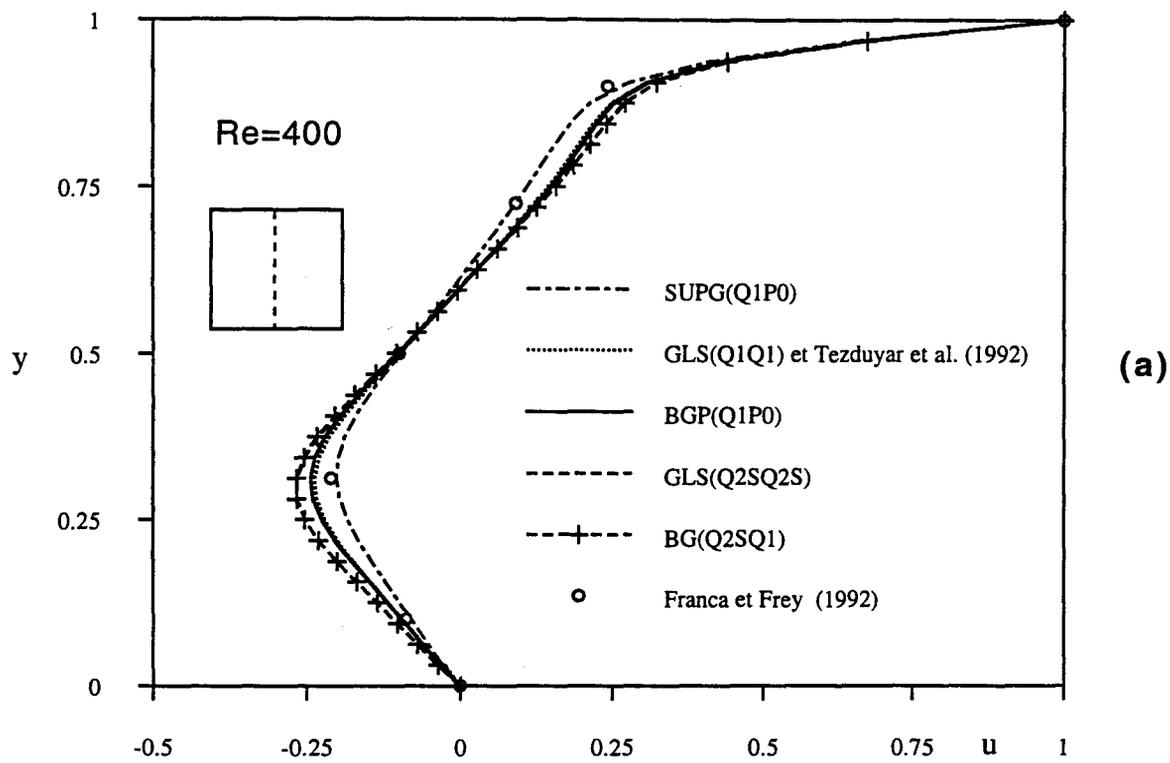


Figure 2.27a Composante horizontale de vitesse au centre de la cavité

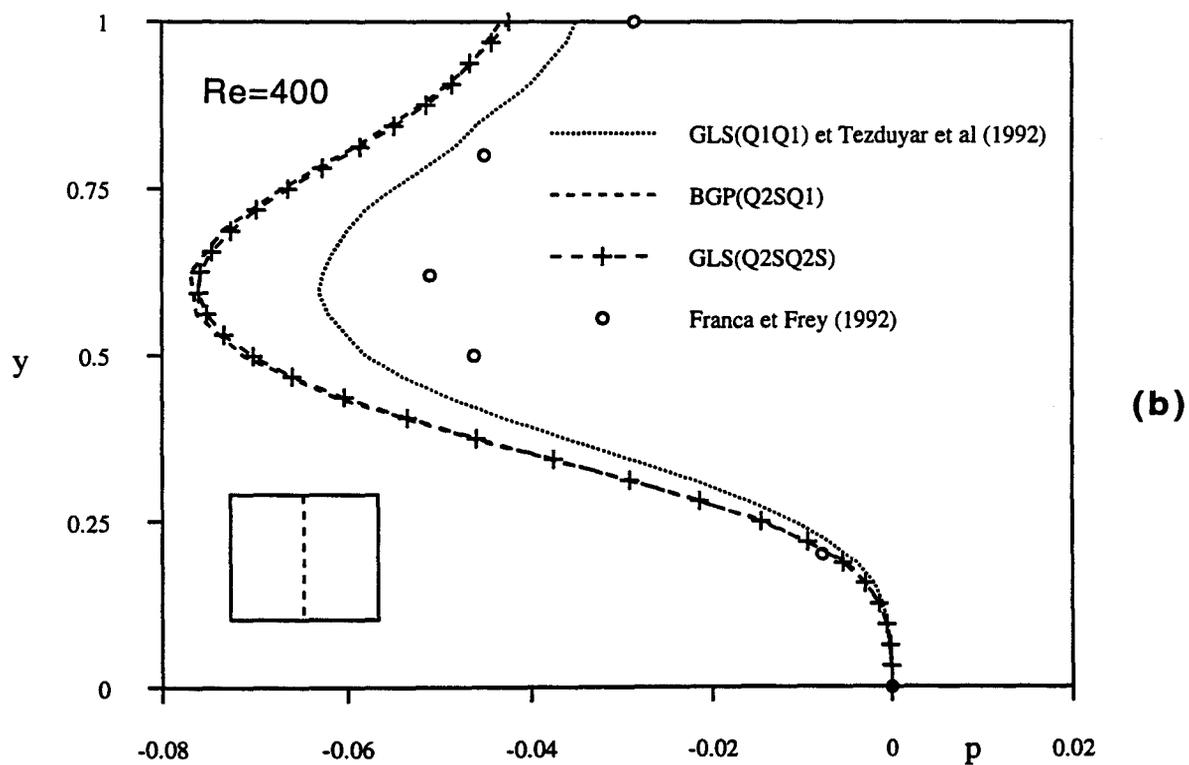


Figure 2.27b Variation de la pression au centre de la cavité



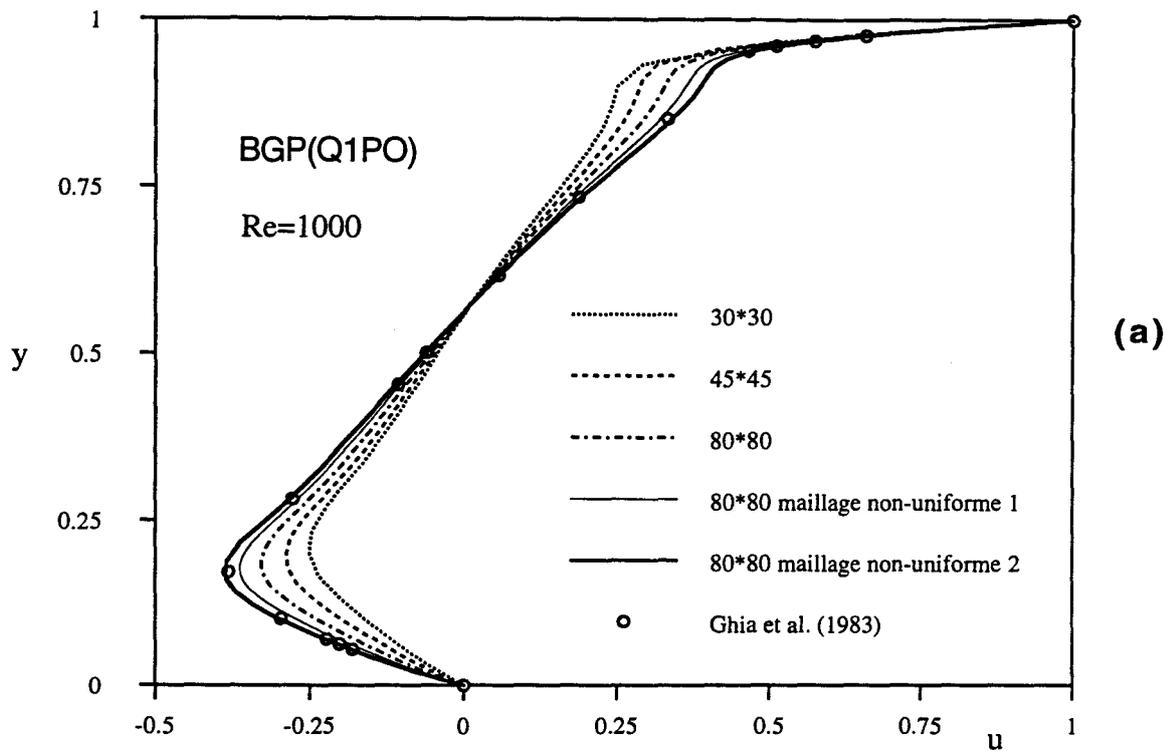


Figure 2.28a Formulation BGP(Q1P0), composante horizontale de vitesse, Re=1000, influence du raffinement du maillage

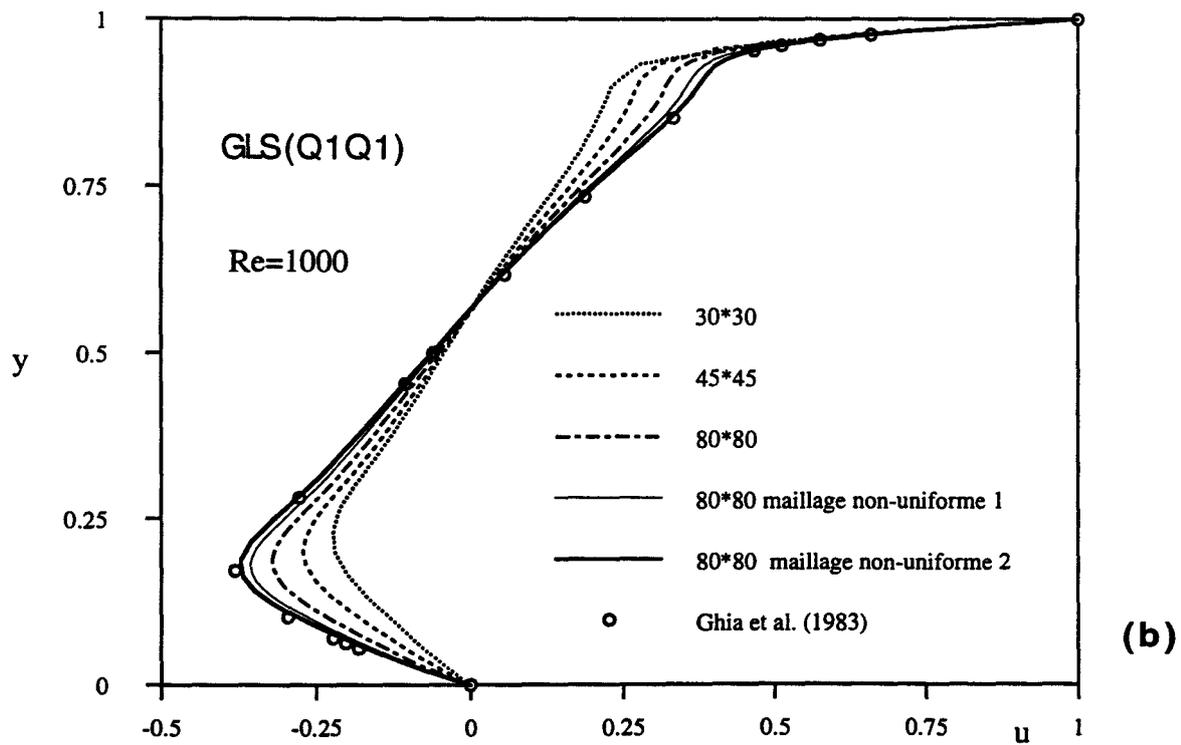


Figure 2.28b Formulation GLS(Q1Q1), composante horizontale de vitesse, Re=1000, influence du raffinement du maillage



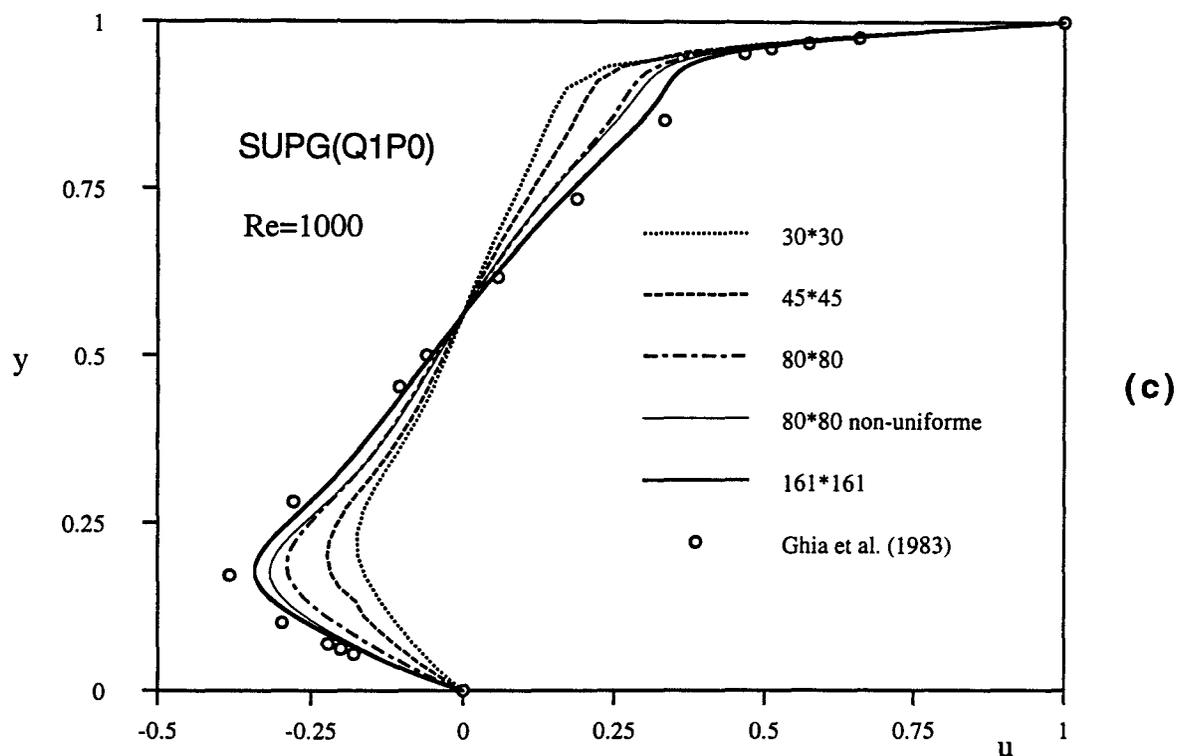


Figure 2.28c Formulation SUPG(Q1P0), composante horizontale de vitesse, $Re=1000$, influence du raffinement du maillage

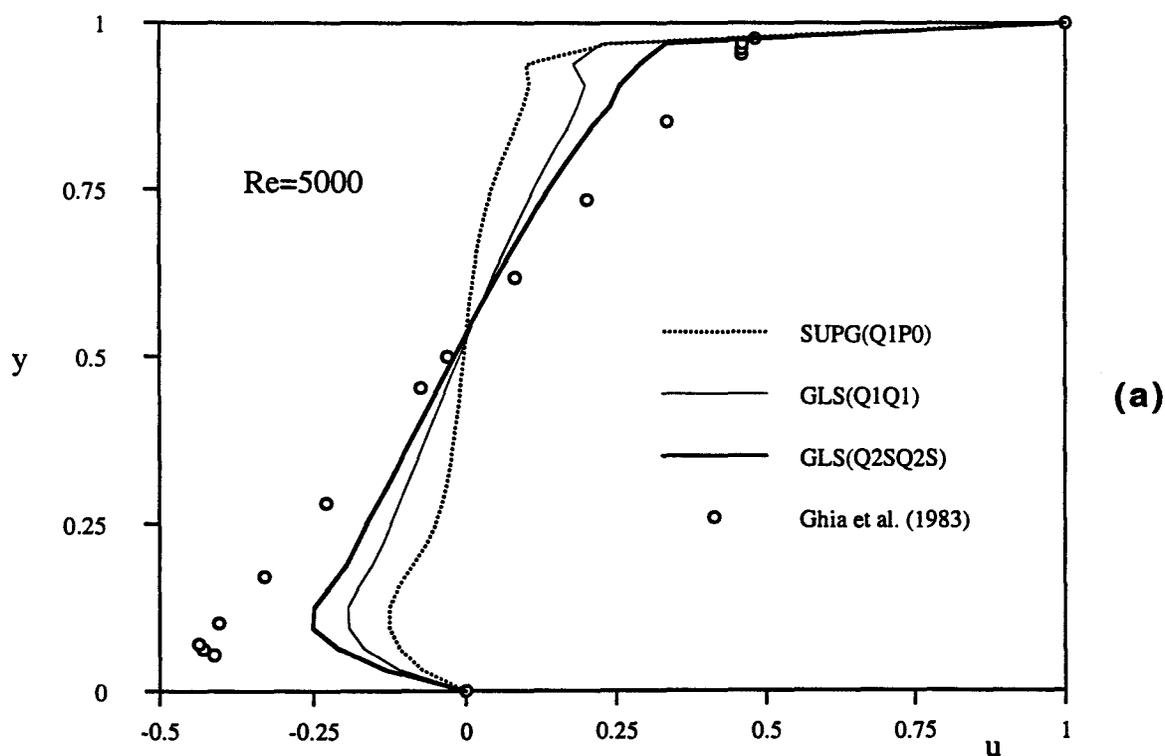


Figure 2.29a composante horizontale de vitesse, $Re=5000$, maillage lâche, comparaison entre différentes formulations



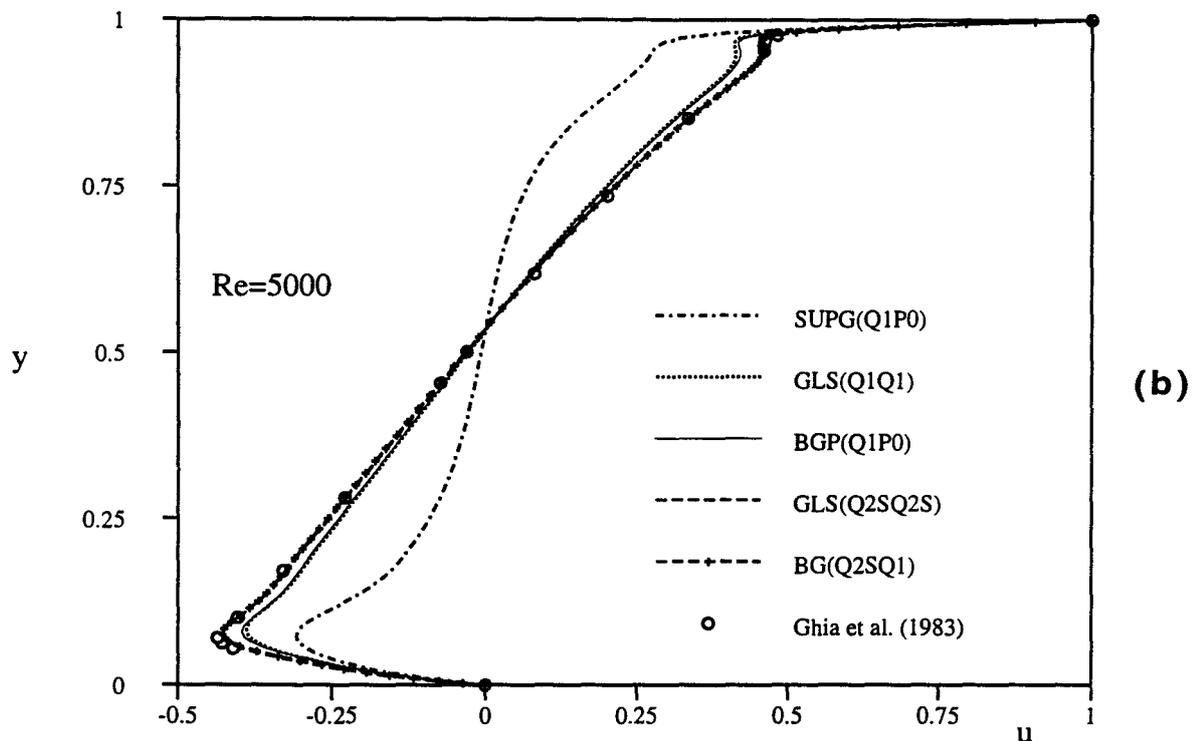


Figure 2.29b Composante horizontale de vitesse, Re=5000, maillage raffiné, comparaison entre différentes formulations

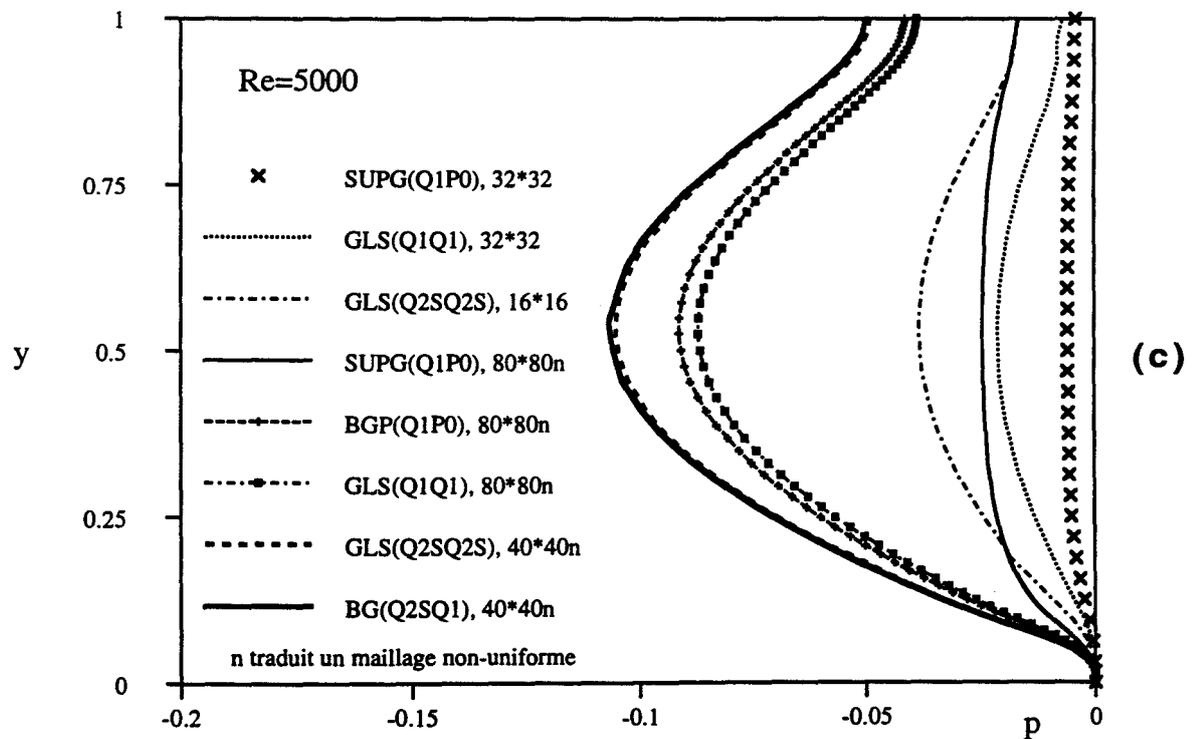
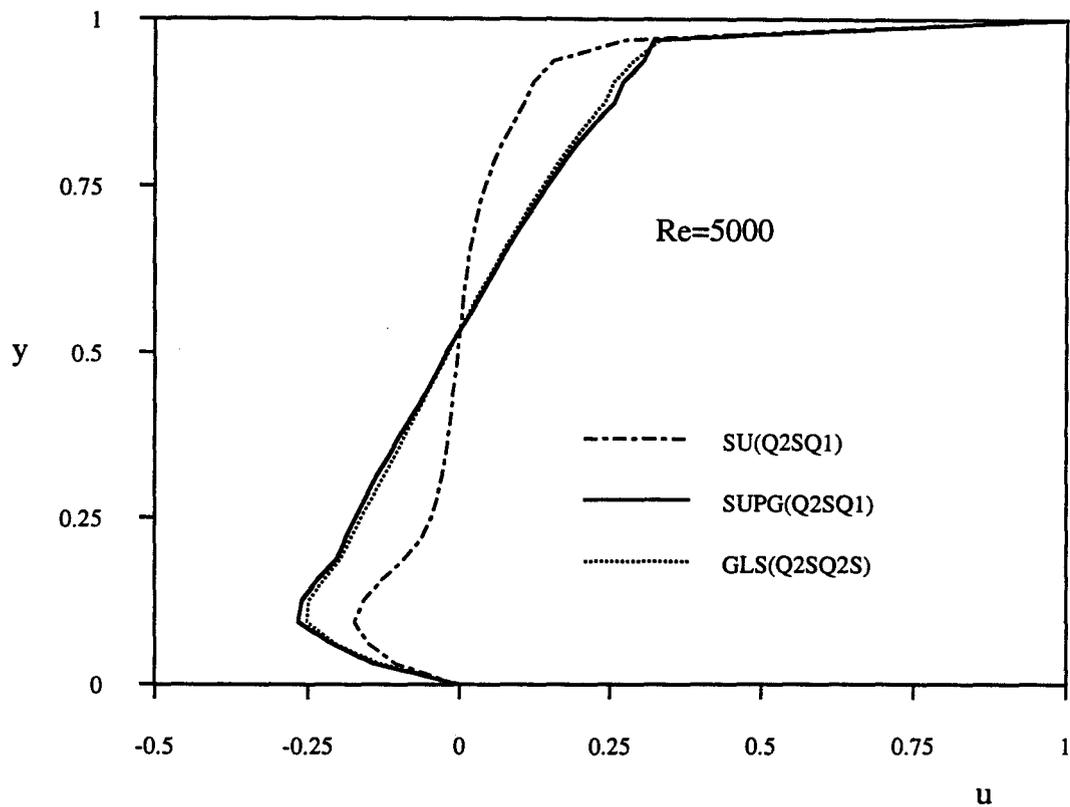
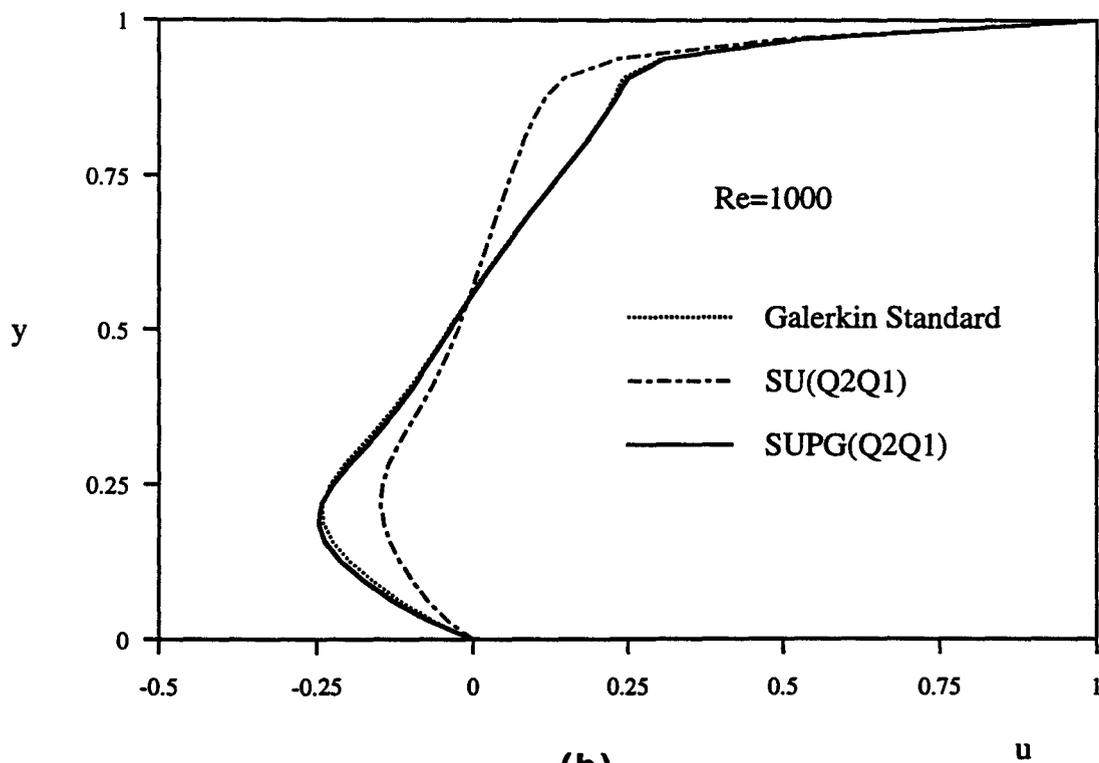


Figure 2.29c Profils de pression au centre de la cavité, Re=5000, comparaison entre différentes formulations



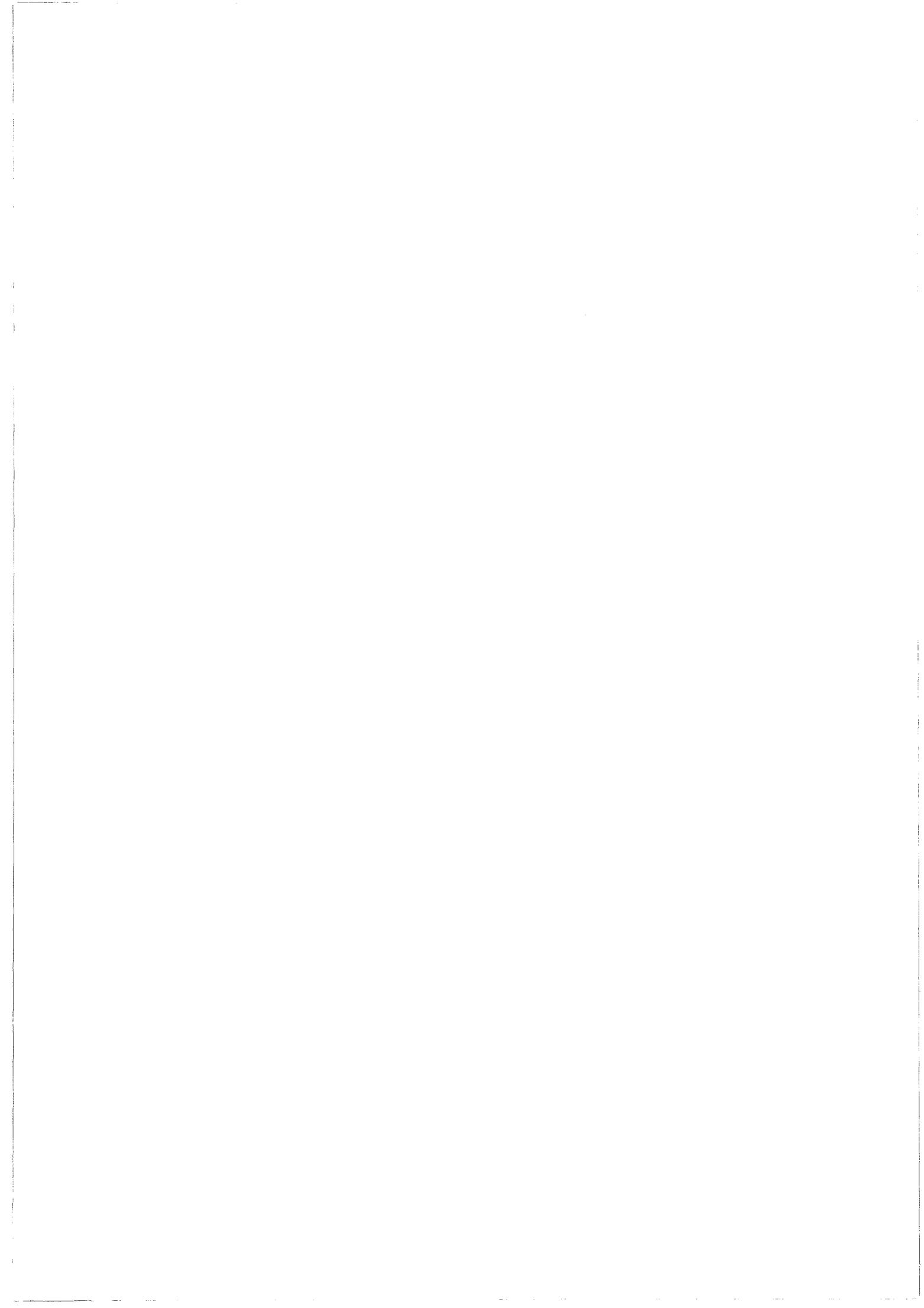


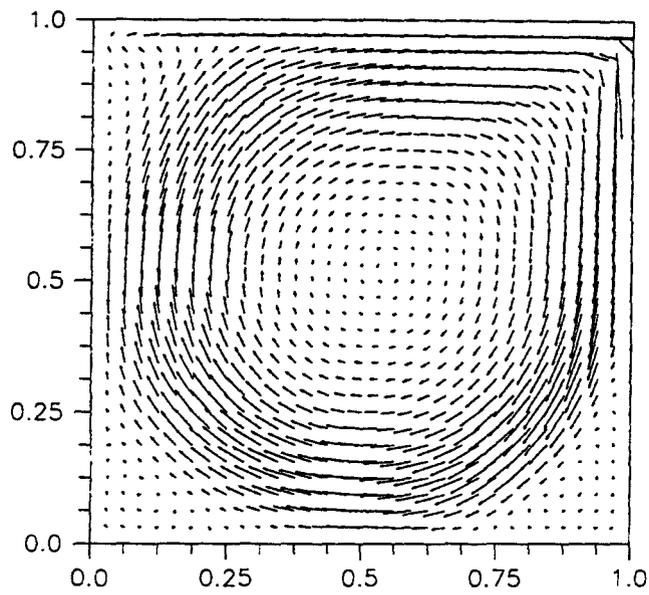
(a)



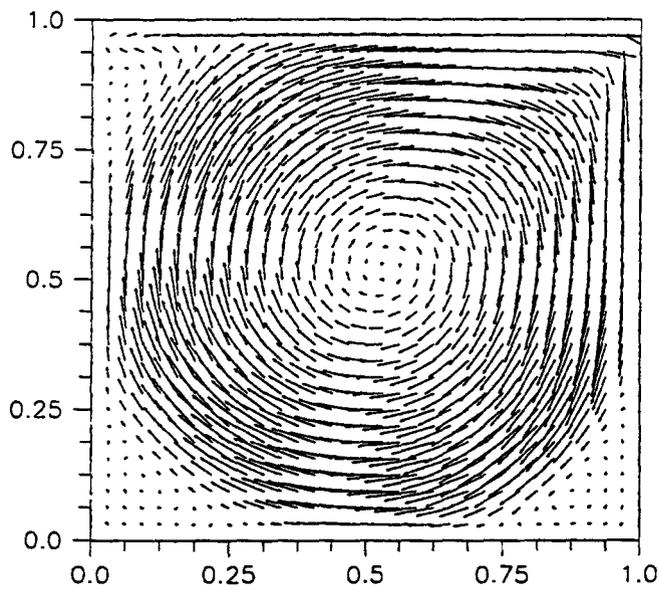
(b)

Figure 2.30 Composante horizontale de vitesse, maillage lâche, comparaison entre les formulations SU et SUPG.

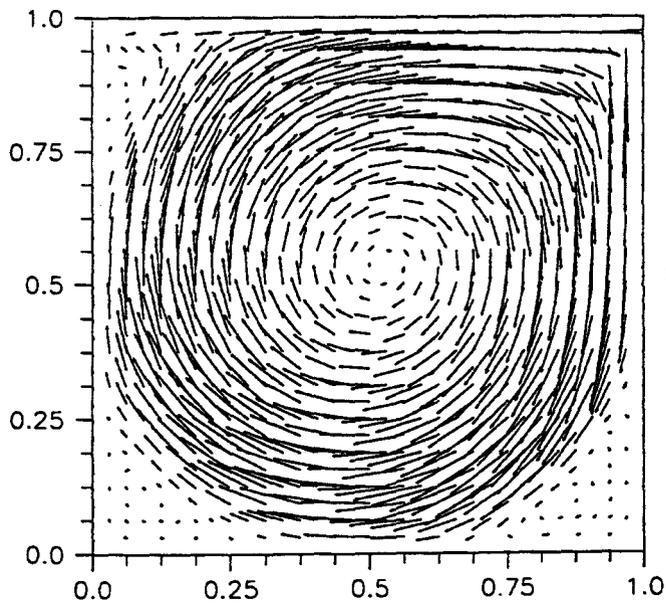




(a) formulation SUPG(Q1P0)



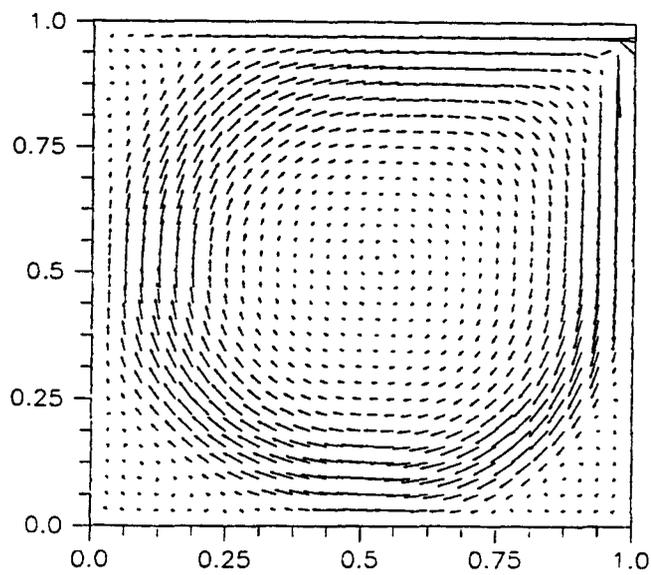
(b) formulation GLS(Q1Q1)



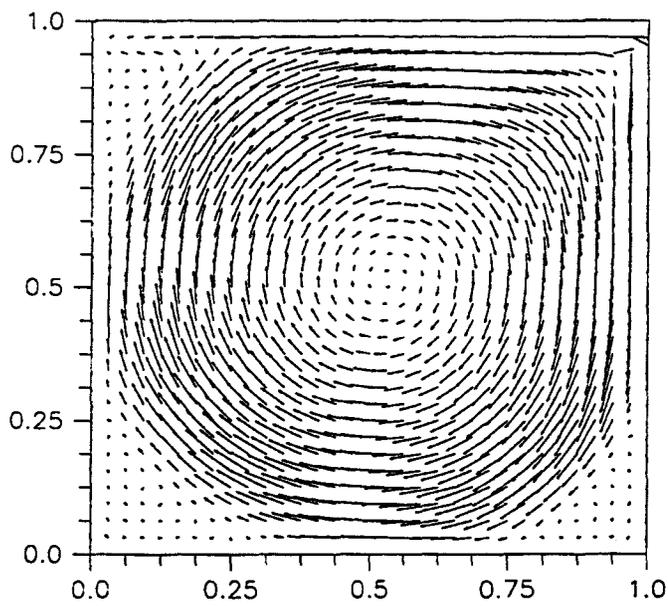
(c) formulation GLS(Q2SQ2S)

Figure 2.31 vecteurs vitesse, $Re=5000$, maillage lâche

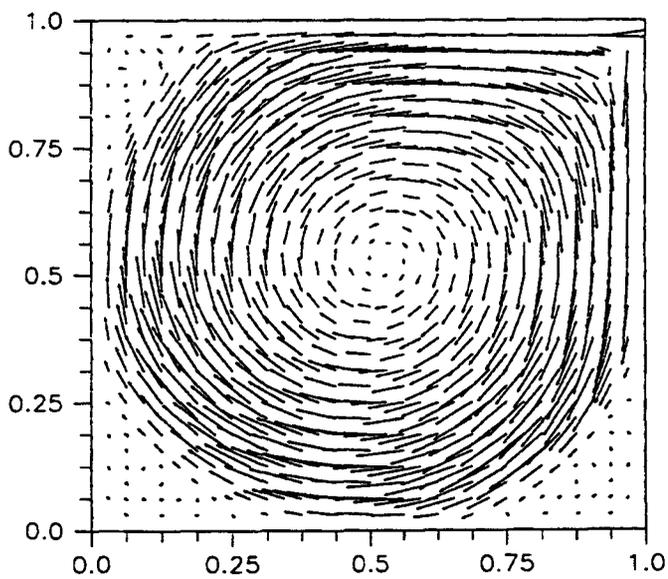




(a) formulation SUPG(Q1P0)

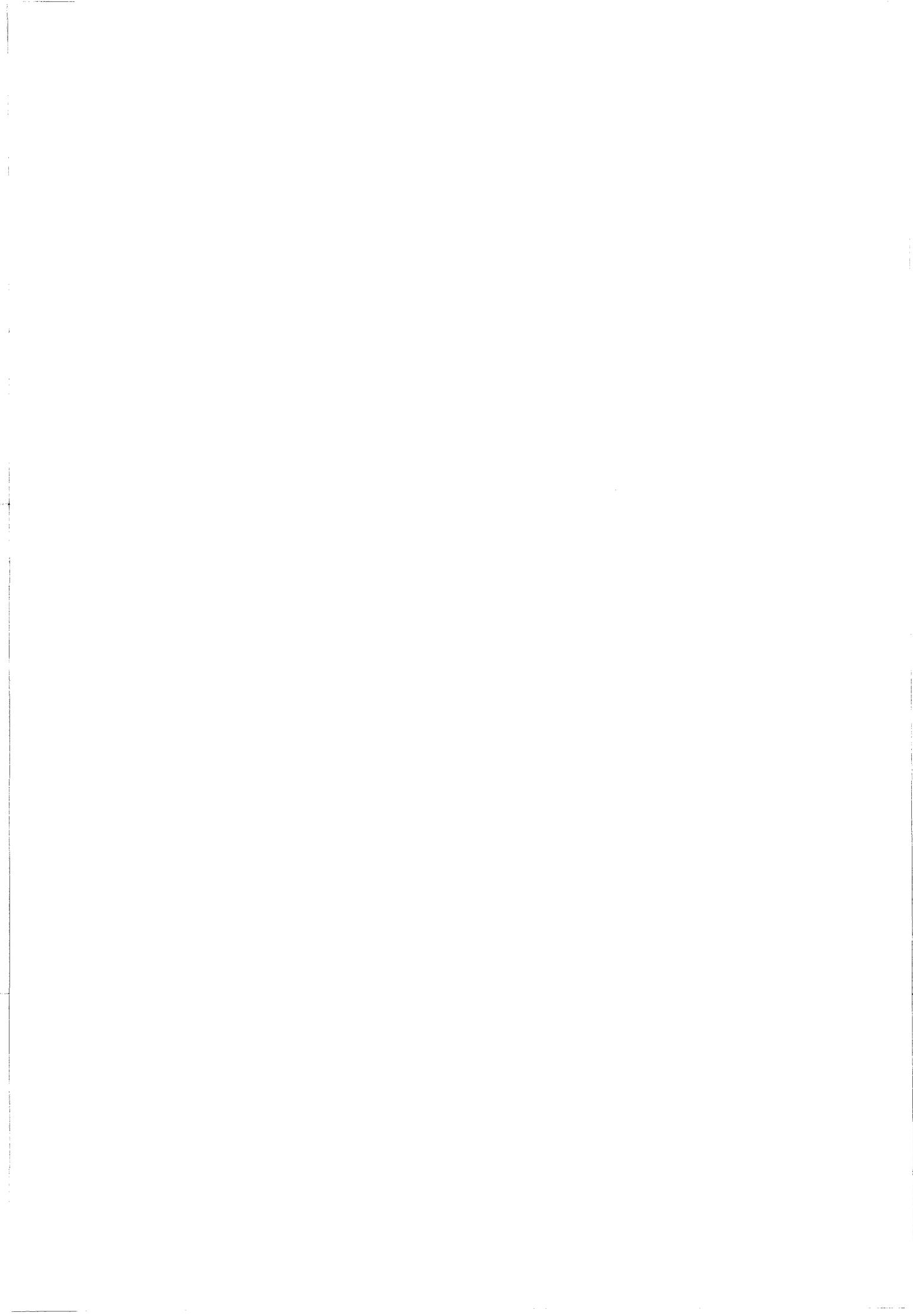


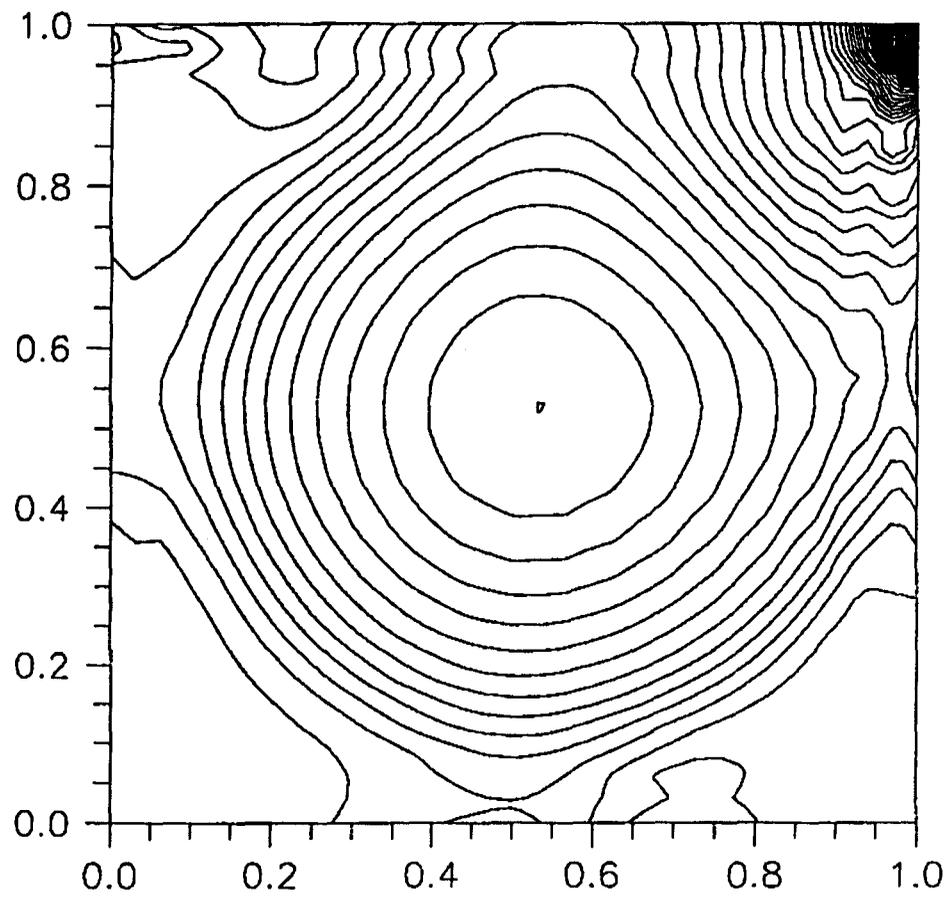
(b) formulation GLS(Q1Q1)



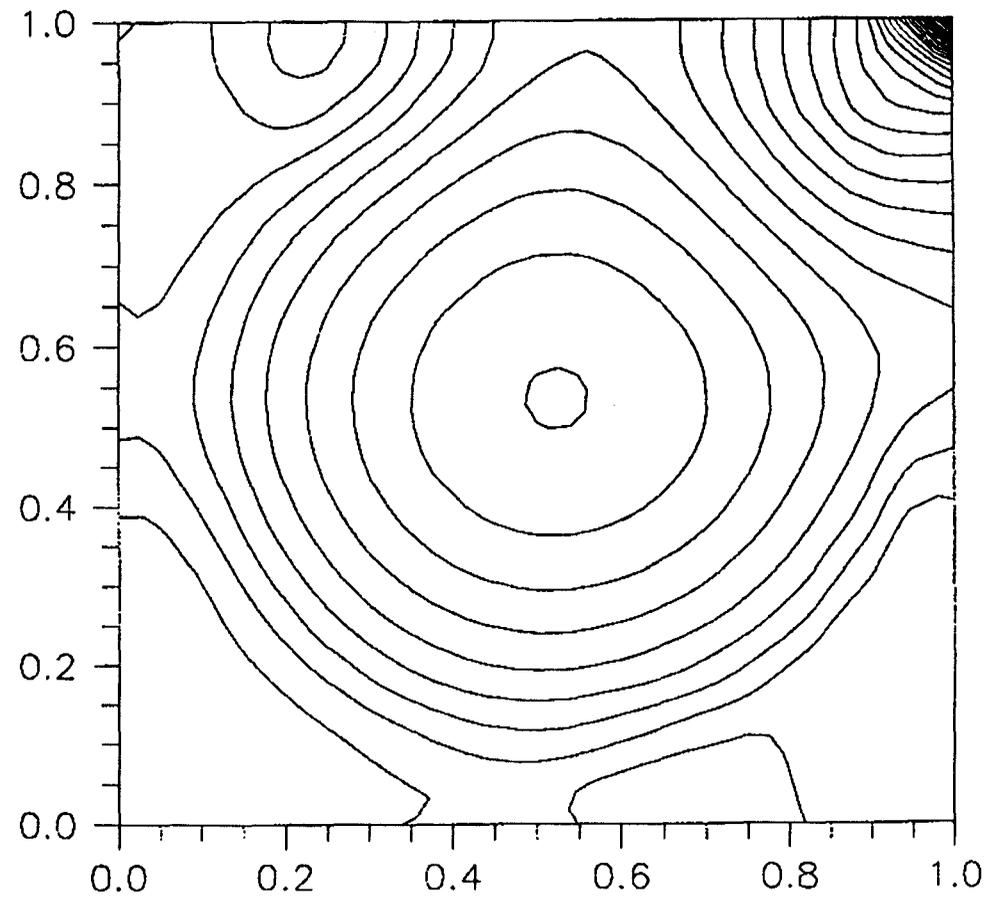
(c) formulation GLS(Q2SQ2S)

Figure 2.32 vecteurs vitesse, $Re=10000$, maillage lâche





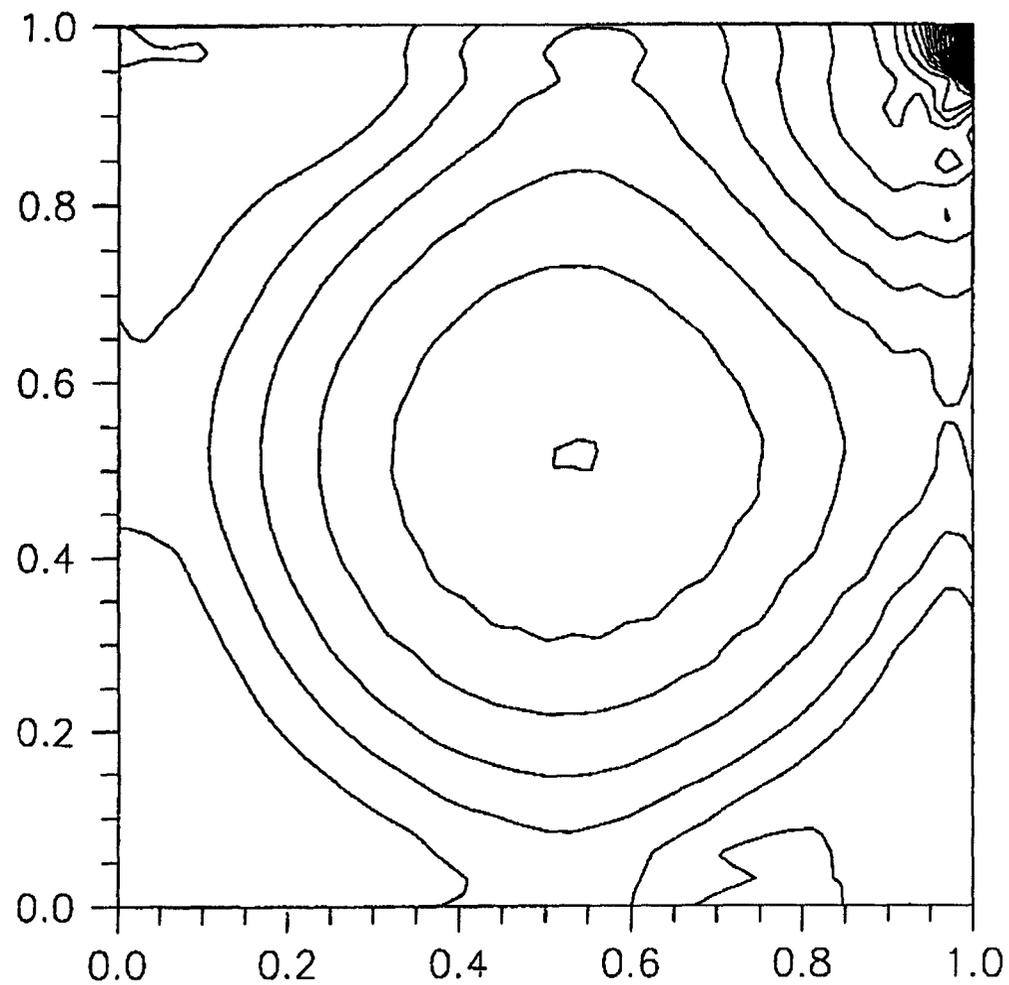
(a)



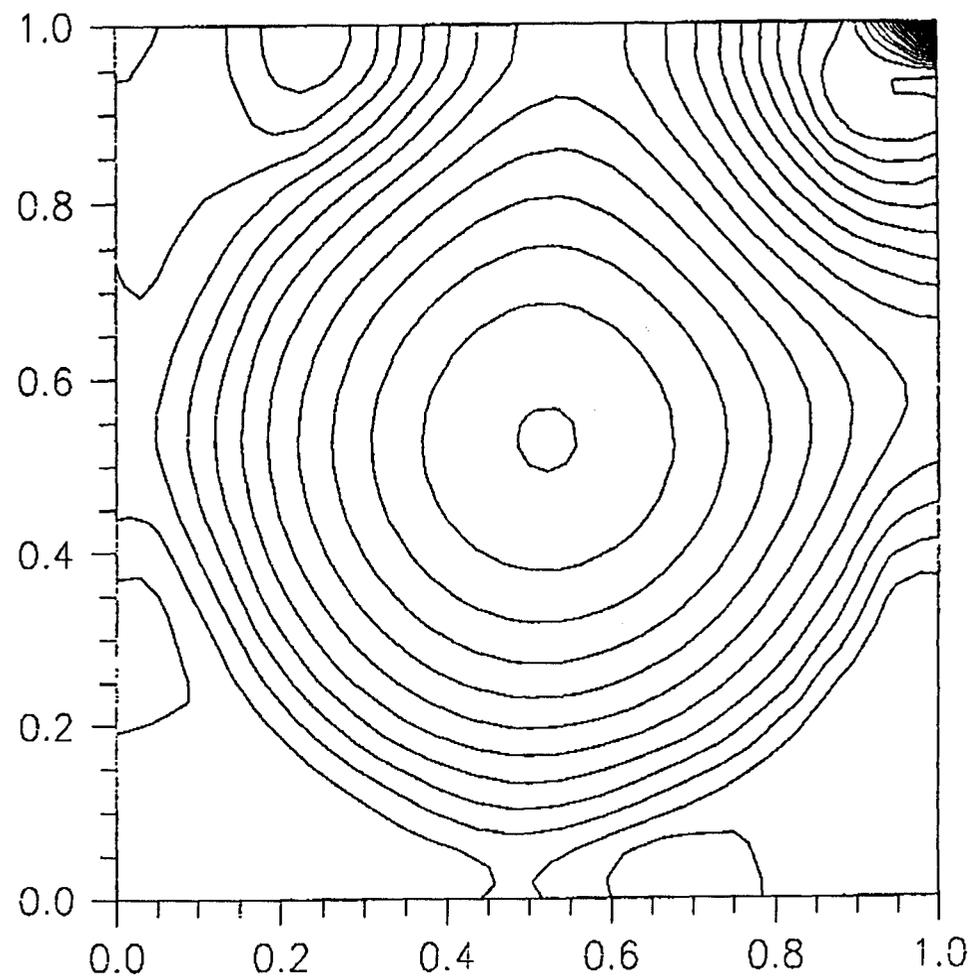
(b)

Figure 2.33 isobares, (a) formulation GLS(Q1Q1), (b) formulation GLS(Q2SQ2S), $Re=5000$, maillage lâche



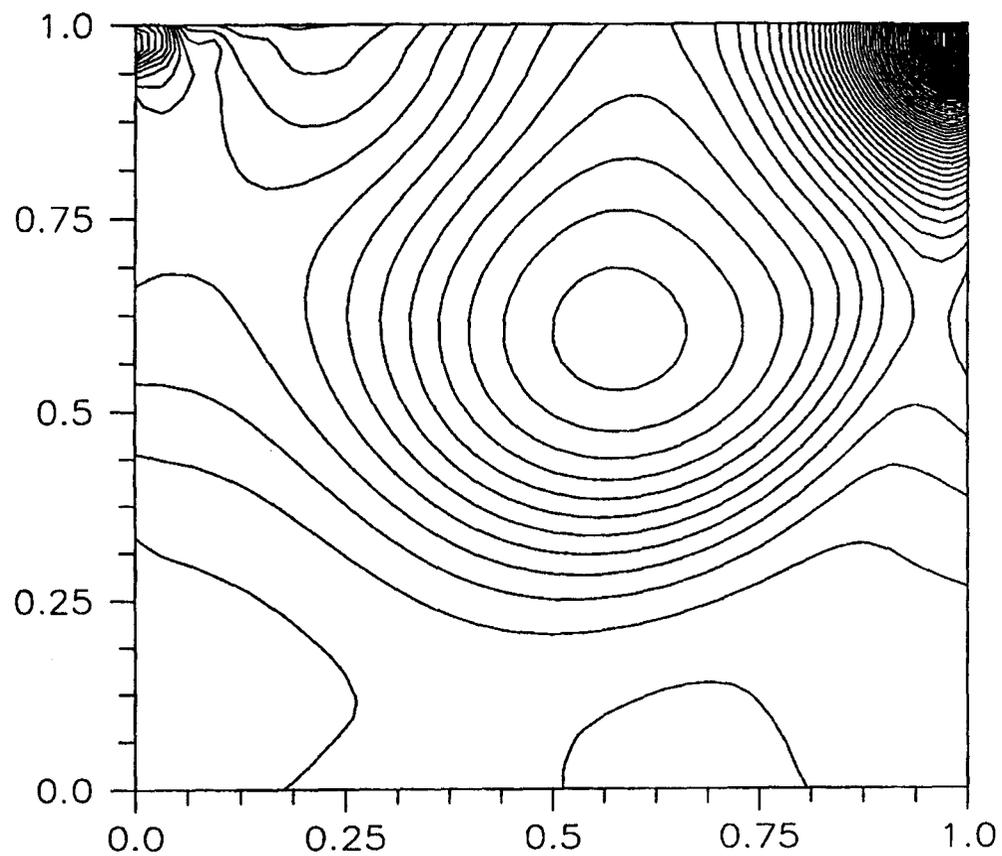


(a)

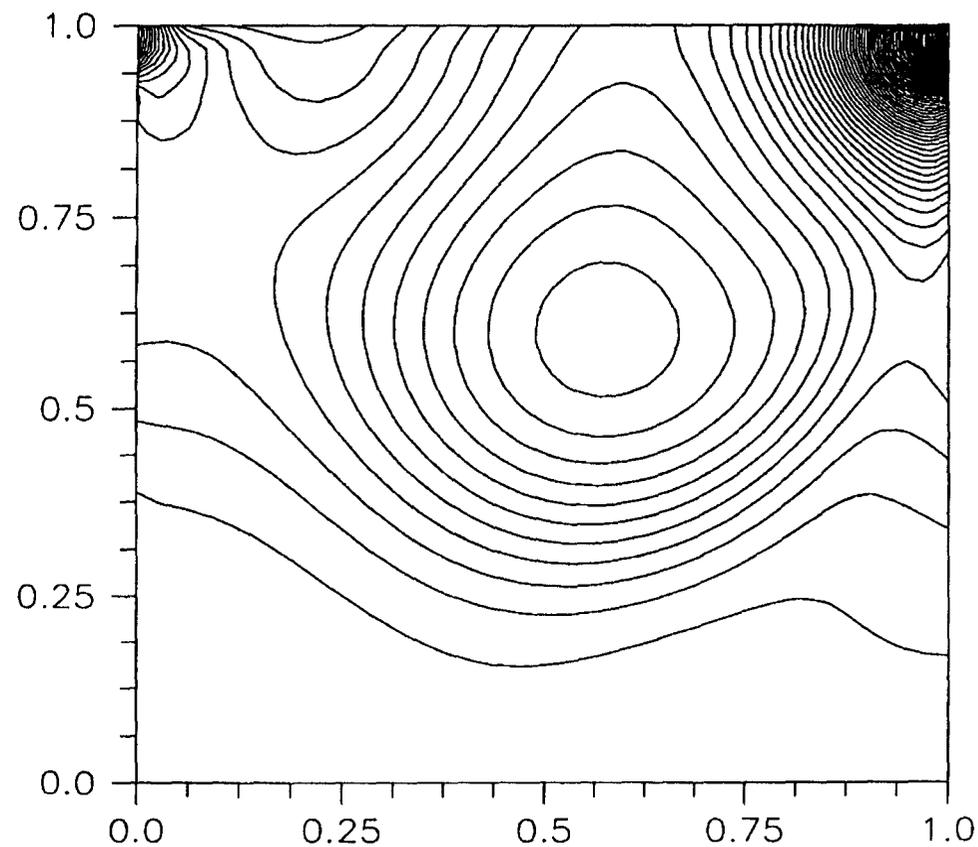


(b)

Figure 2.34 isobares, (a) formulation GLS(Q1Q1), (b) formulation GLS(Q2SQ2S), $Re=10000$, maillage lâche



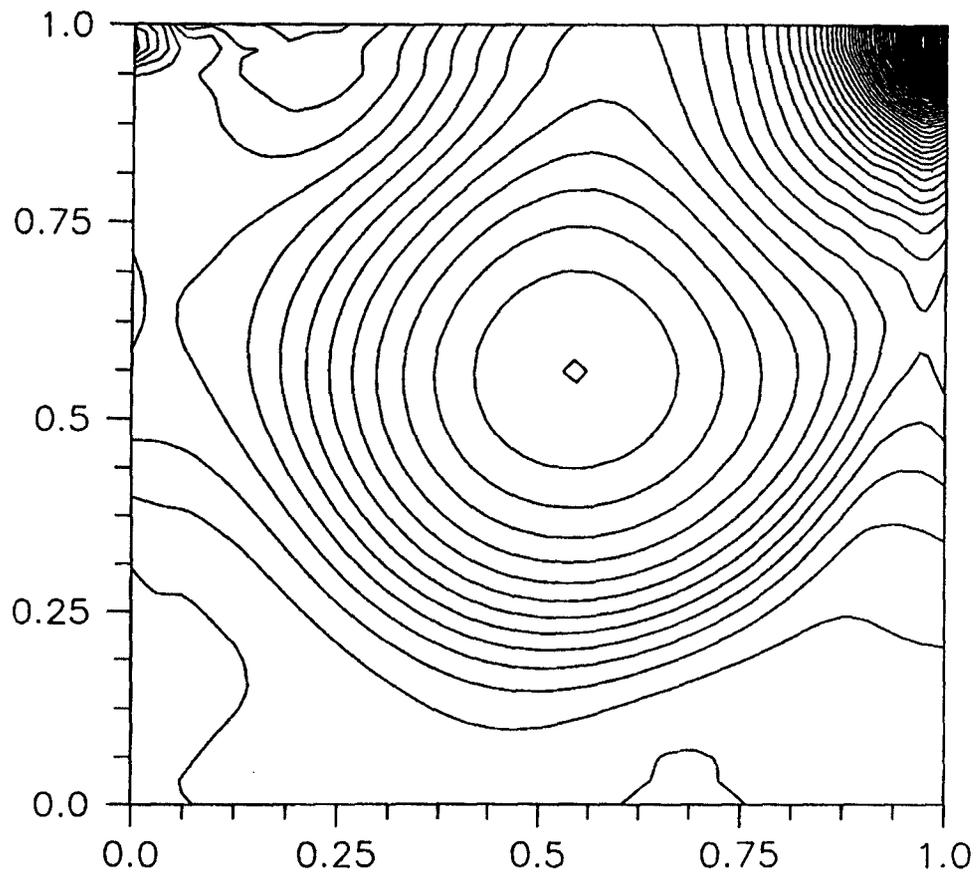
(a)



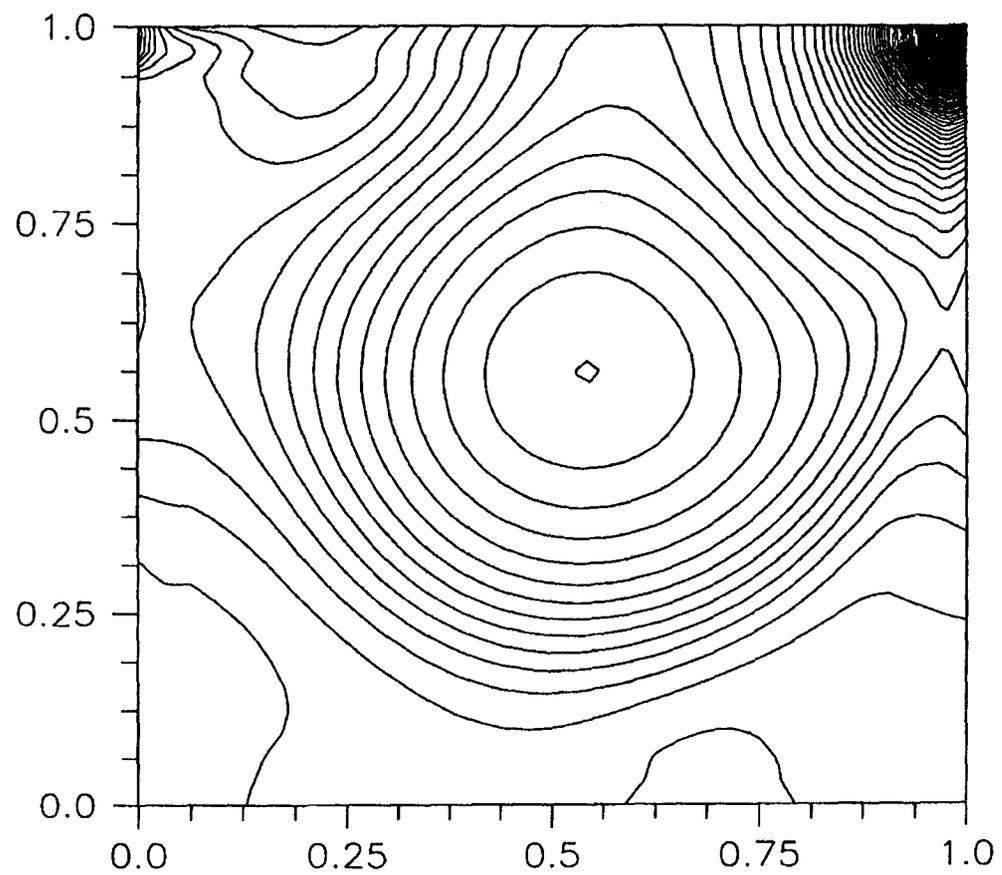
(b)

Figure 2.35 isobares, (a) formulation GLS(Q1Q1), (b) formulation GLS(Q1Q1)+estimation du terme de diffusion, Re=400, maillage lâche



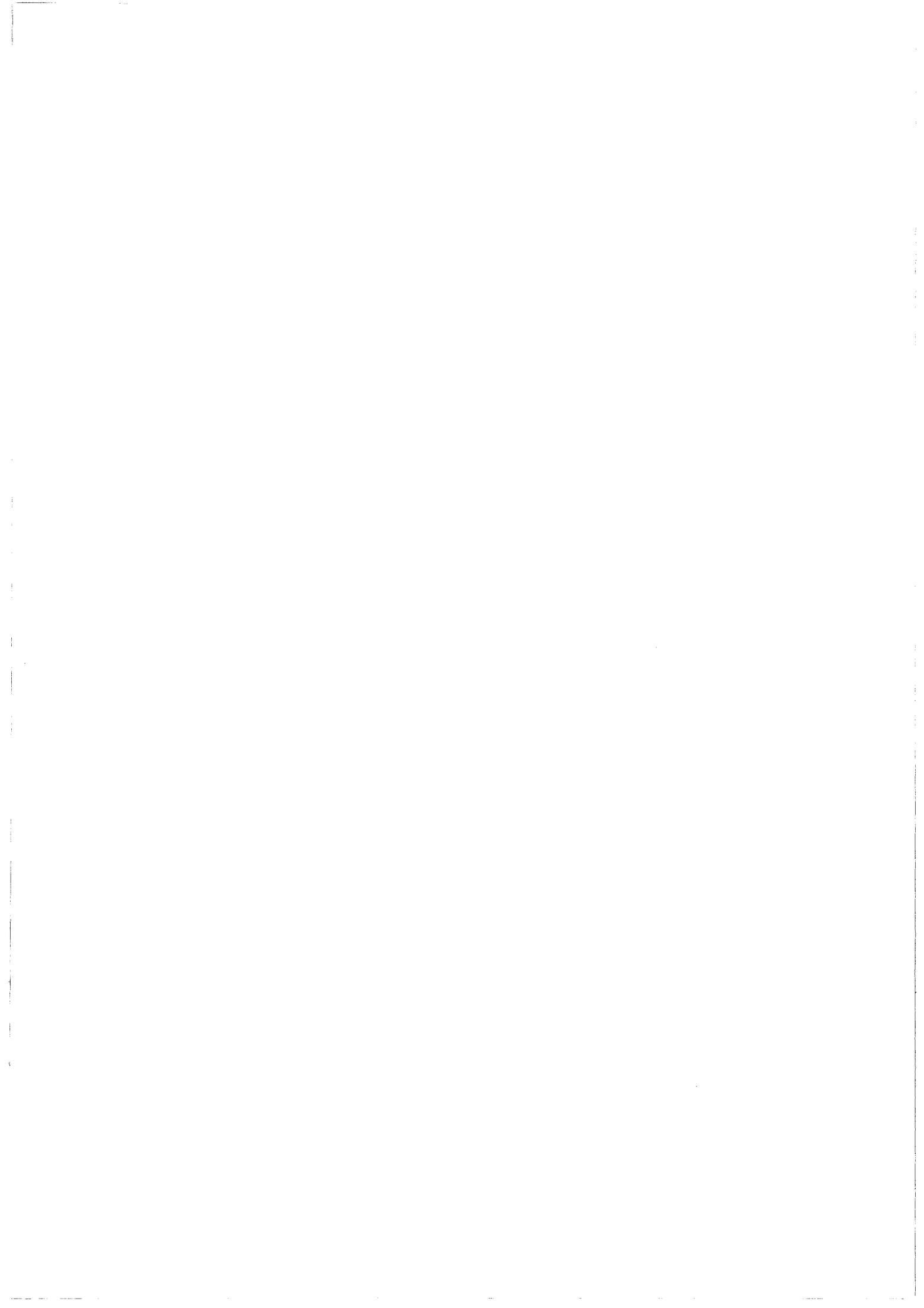


(a)



(b)

Figure 2.36 isobares, (a) formulation GLS(Q1Q1), (b) formulation GLS(Q1Q1)+estimation du terme de diffusion, Re=1000, maillage lâche



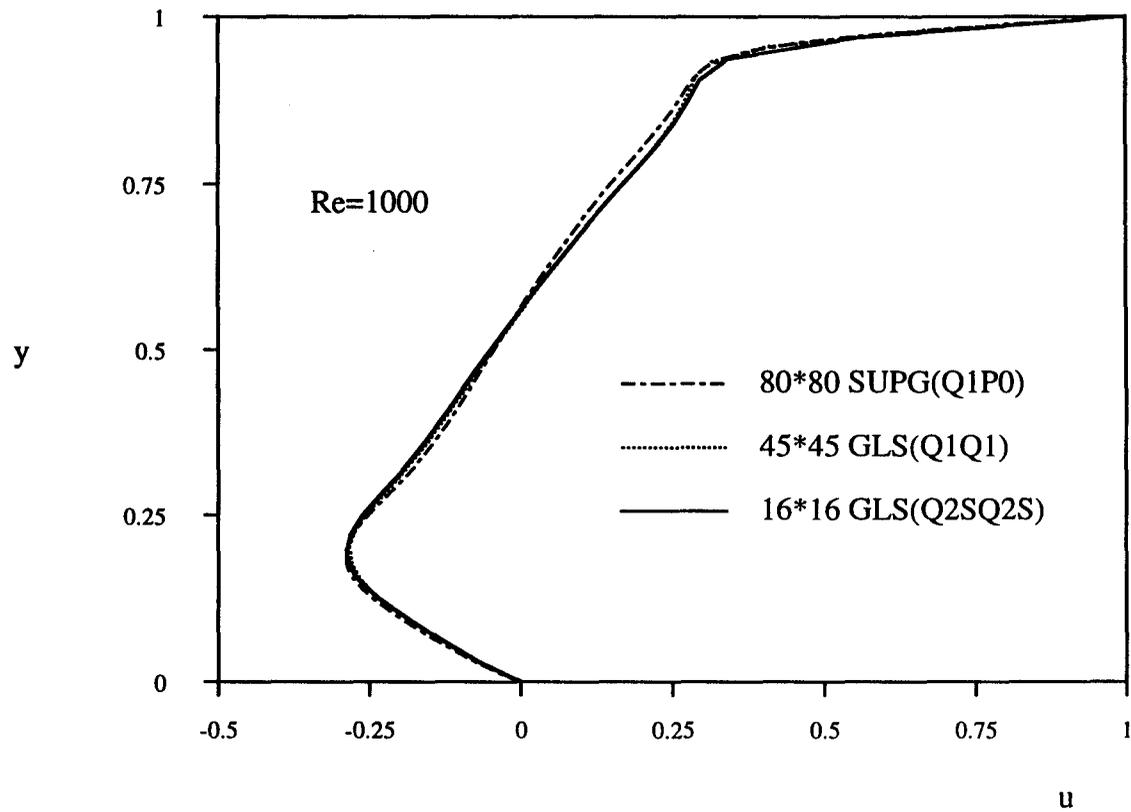


Figure 2.37 Comparaison entre différentes formulations pour une précision donnée

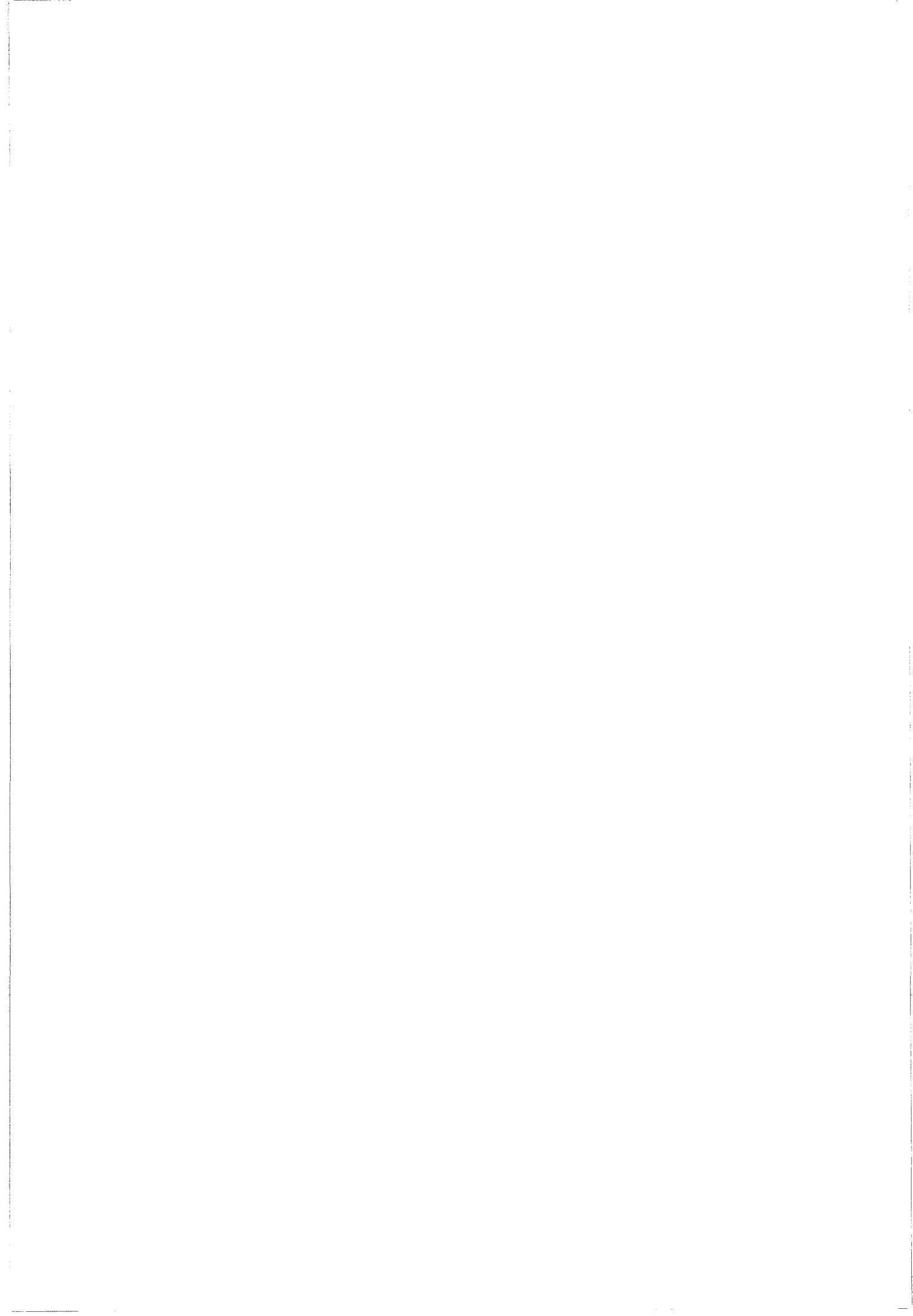


Tableau 2.4 Nombre d'itération nécessaire pour atteindre la convergence (méthode de Newton Raphson)

Formulation	Maillage	Re			
		400	1000	5000	10000
SUPG(Q1P0)	32*32	7	15	52	83
GLS(Q1Q1)	32*32	8	17	49	80
BG(Q2SQ1)	16*16	7	14	—	—
GLS(Q2SQ2S)	16*16	7	14	39	74

Tableau 2.5 Nombre d'itération nécessaire pour atteindre la convergence (méthode de Picard)

Formulation	Maillage	Re	
		400	1000
SUPG(Q1P0)	32*32	16	28
GLS(Q1Q1)	32*32	15	28
BG(Q2SQ1)	16*16	13	27
GLS(Q2SQ2S)	16*16	13	30



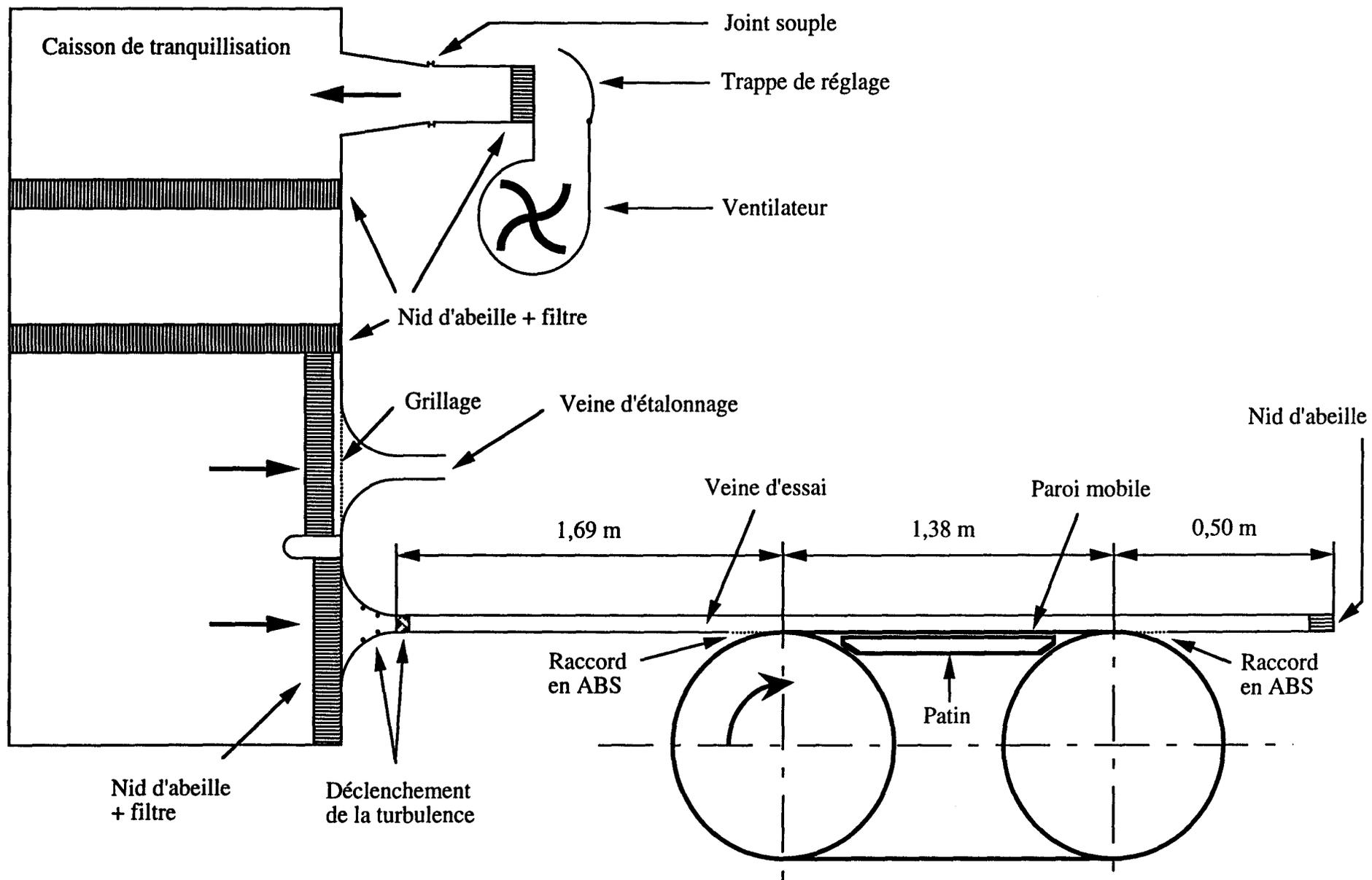


Figure 4.1: Schéma de l'installation (Corenflos, 1993)



Stations:	Abscisses:
1	1,455 m
2	1,855 m
3	1,955 m
4	2,155 m
5	2,255 m
6	2,555 m
7	2,655 m
8	2,855 m
9	2,955 m

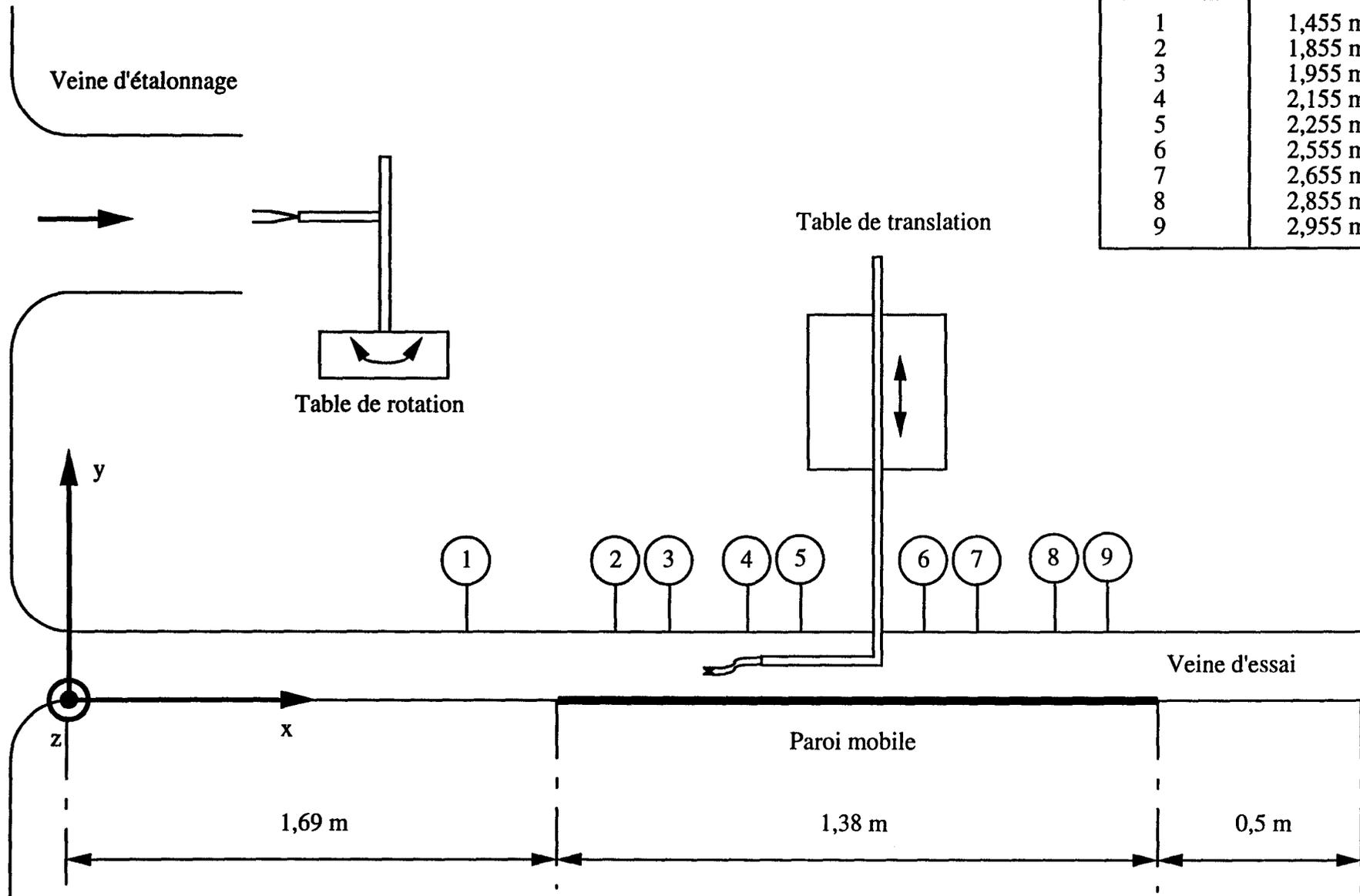
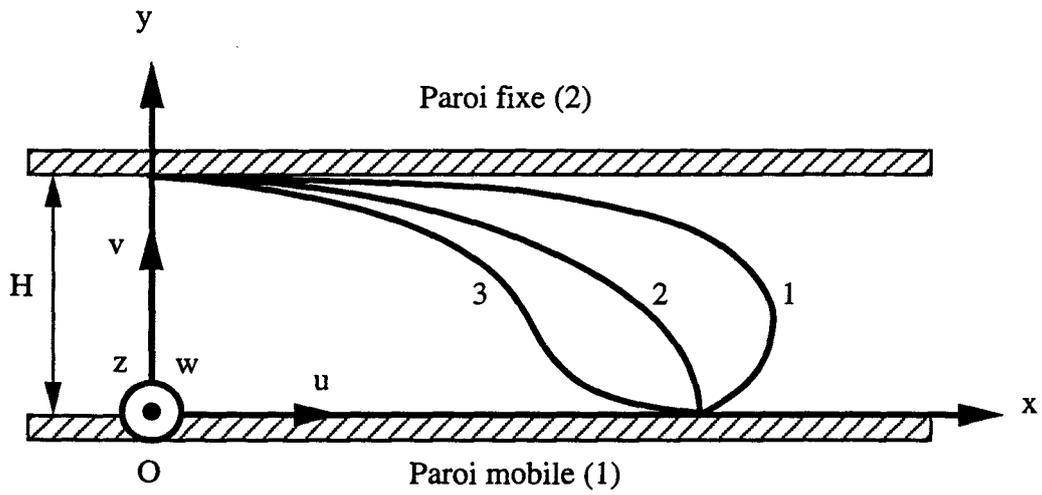


Figure 4.2 : Référentiel et déplacements (Deldicque 1995)





1: Type Poiseuille

2: Type intermédiaire

3: Type Couette

Figure 4.3: Ecoulements de Couette-Poiseuille



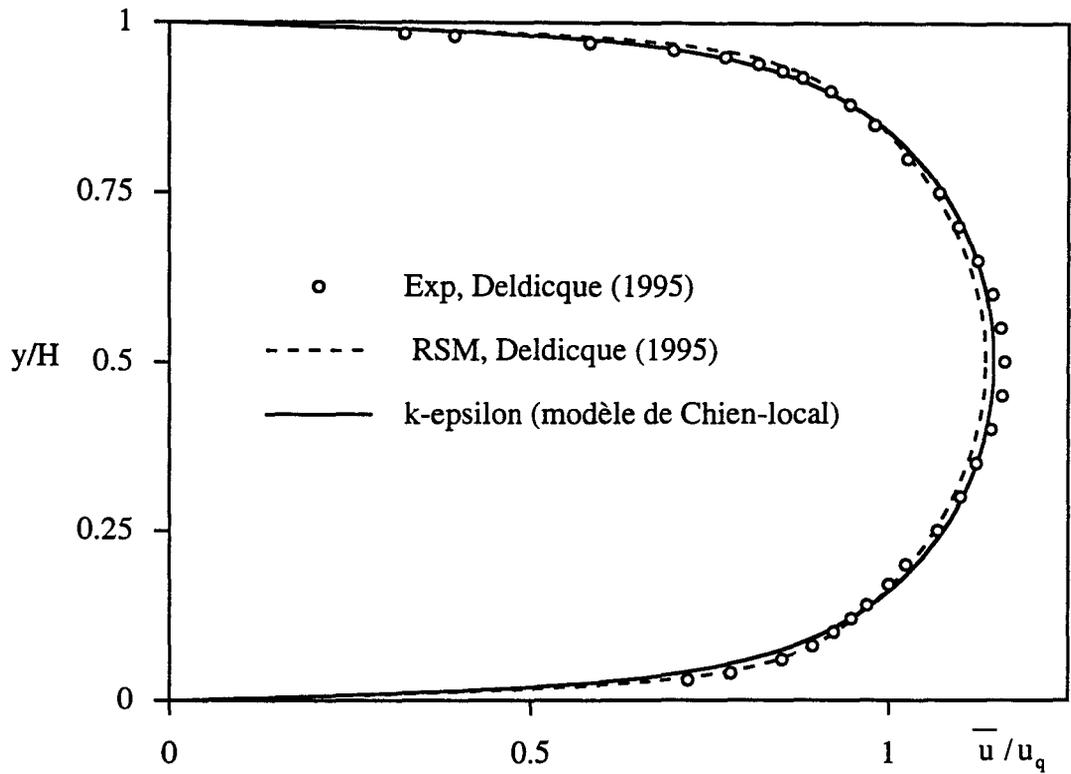


Figure 4.4a Profil de vitesse moyenne pour l'écoulement de Poiseuille pur, $Re=10000$

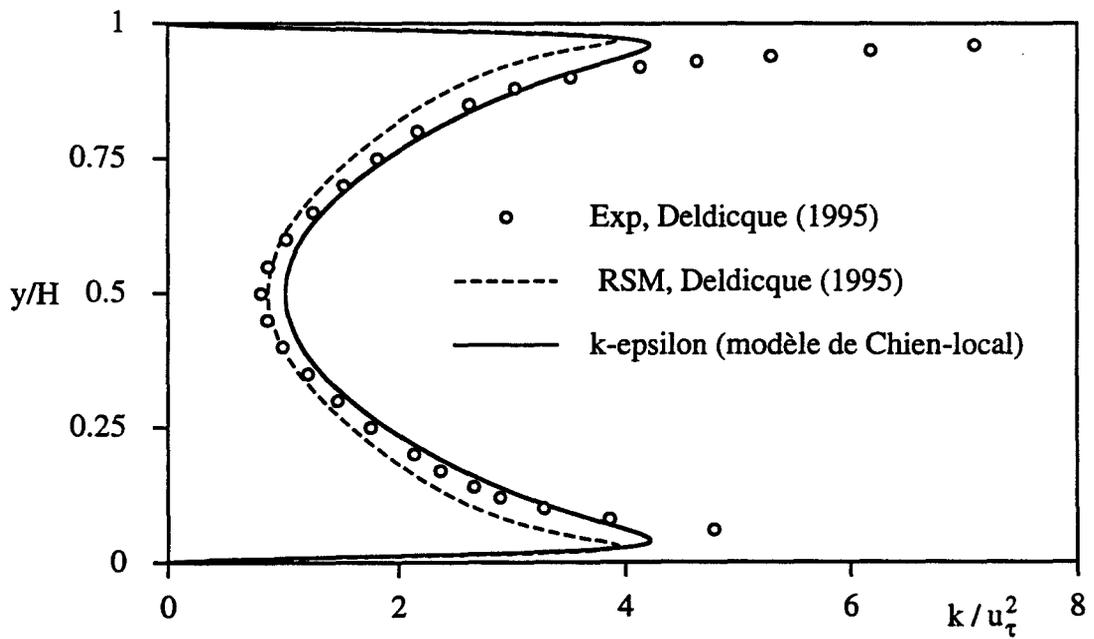
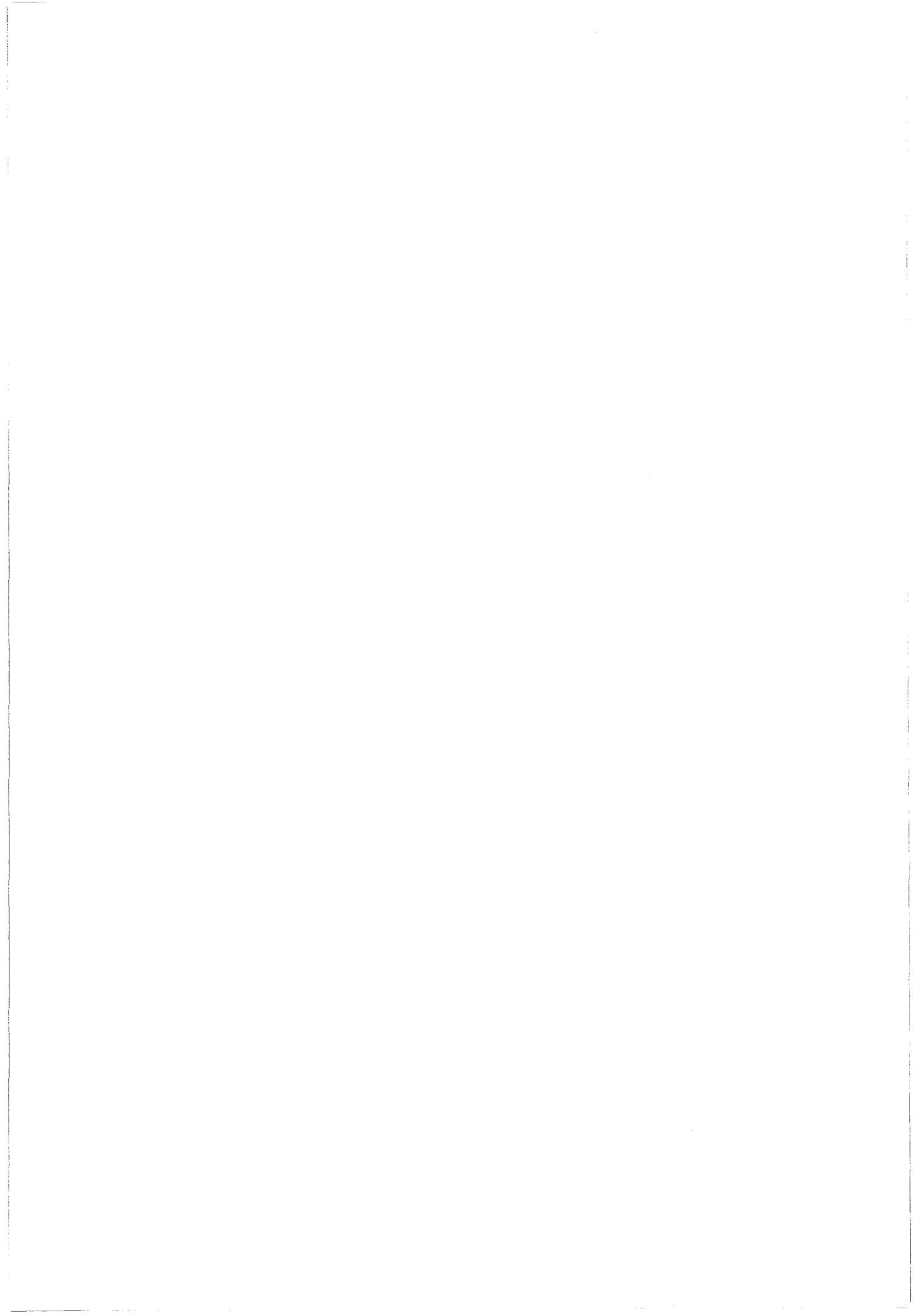


Figure 4.4b Profil de l'énergie turbulente pour l'écoulement de Poiseuille pur, $Re=10000$



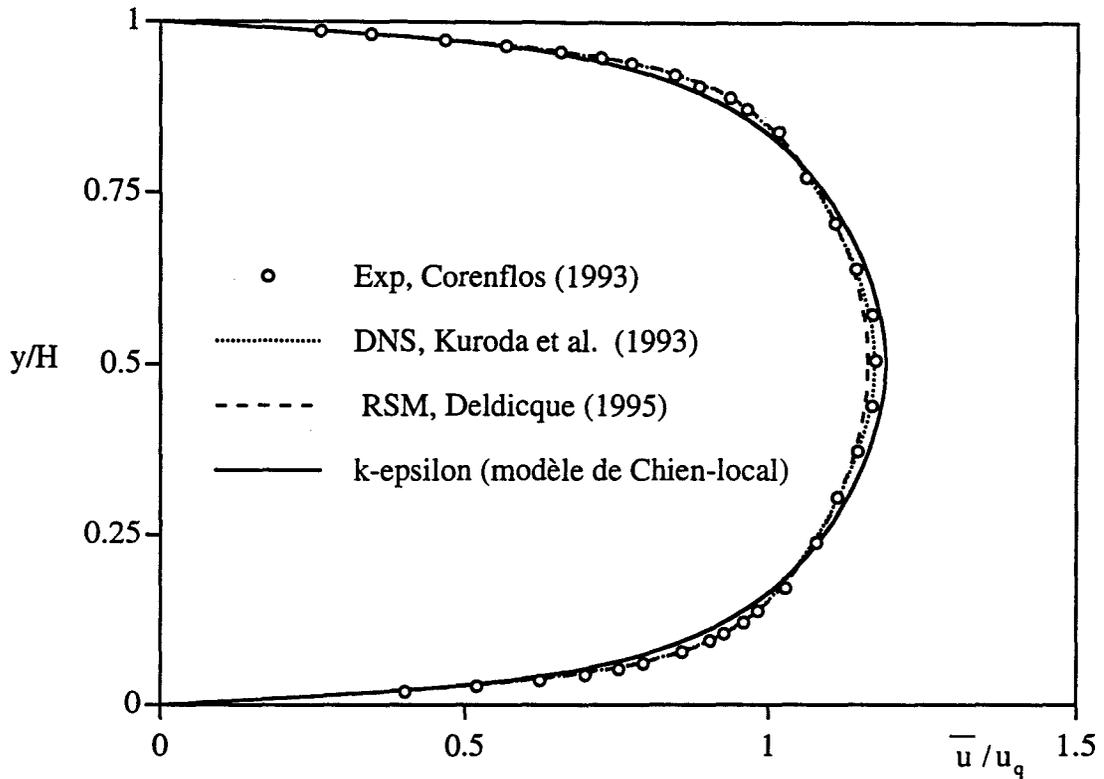


Figure 4.5a : Prédiction de la vitesse moyenne pour l'écoulement de Poiseuille pur à $Re=5000$

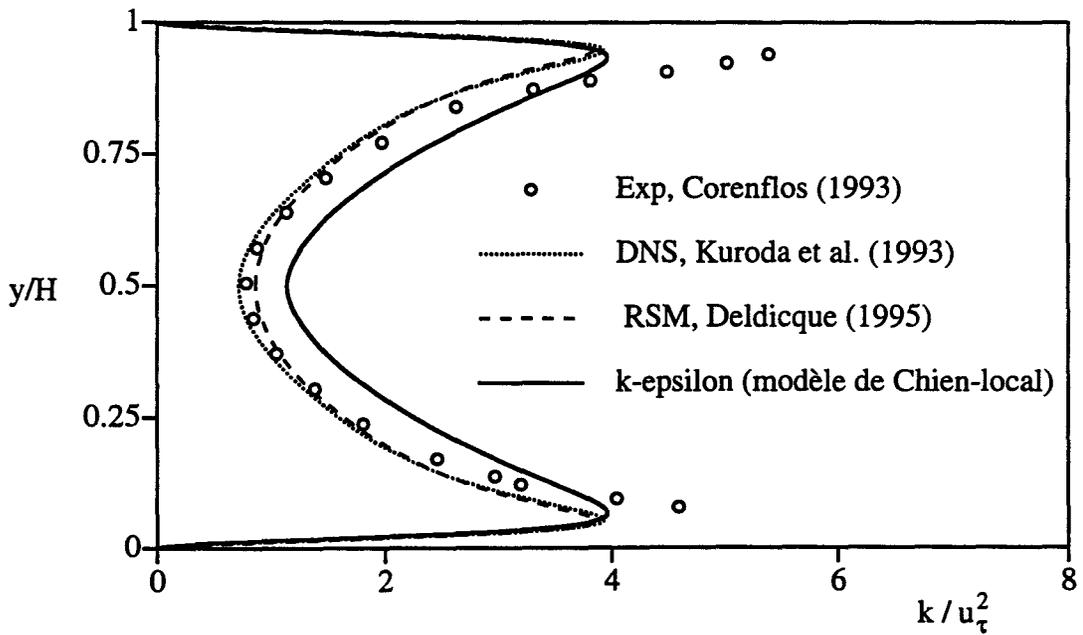
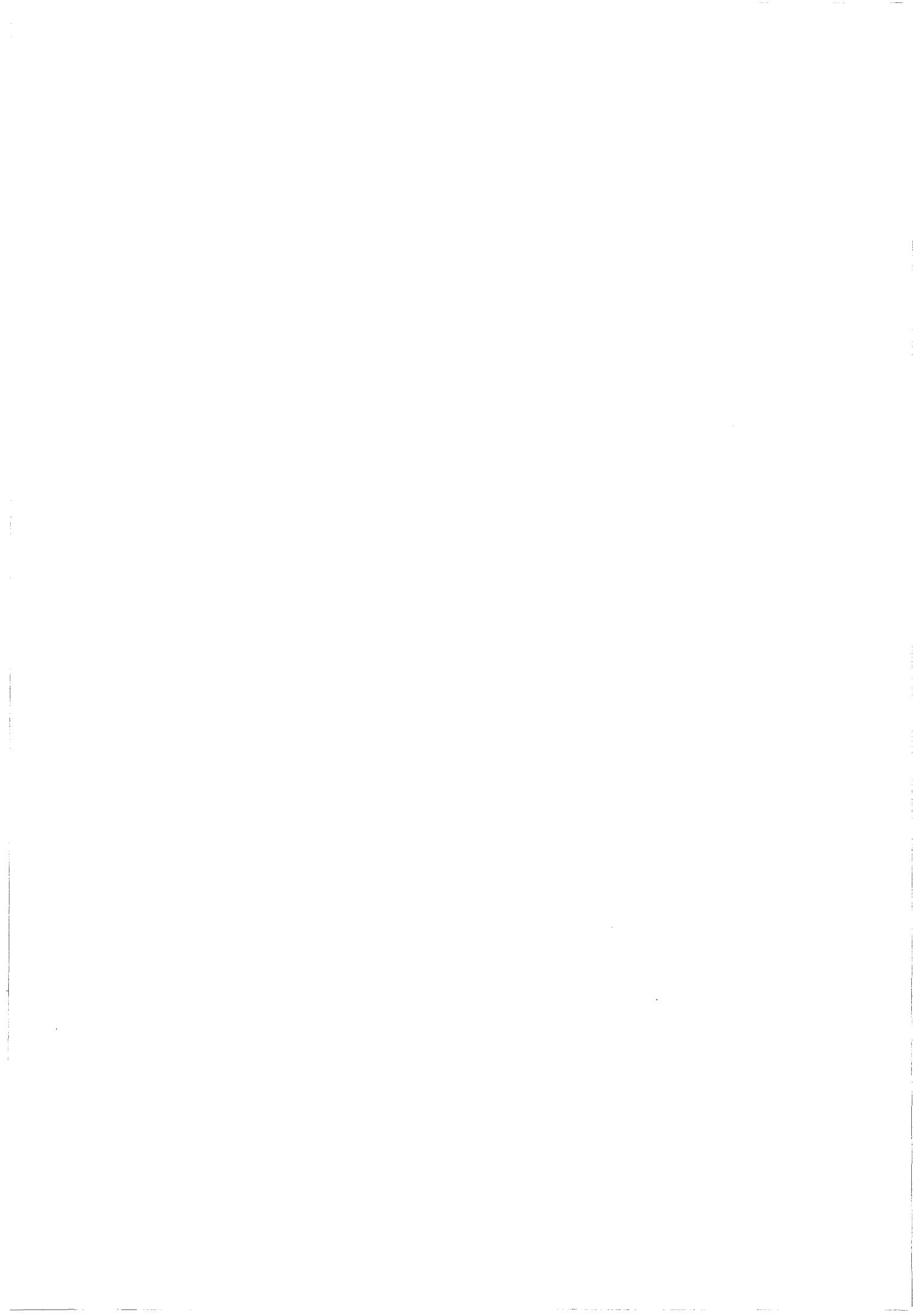


Figure 4.5b : Prédiction de l'énergie turbulente pour l'écoulement de Poiseuille pur à $Re=5000$



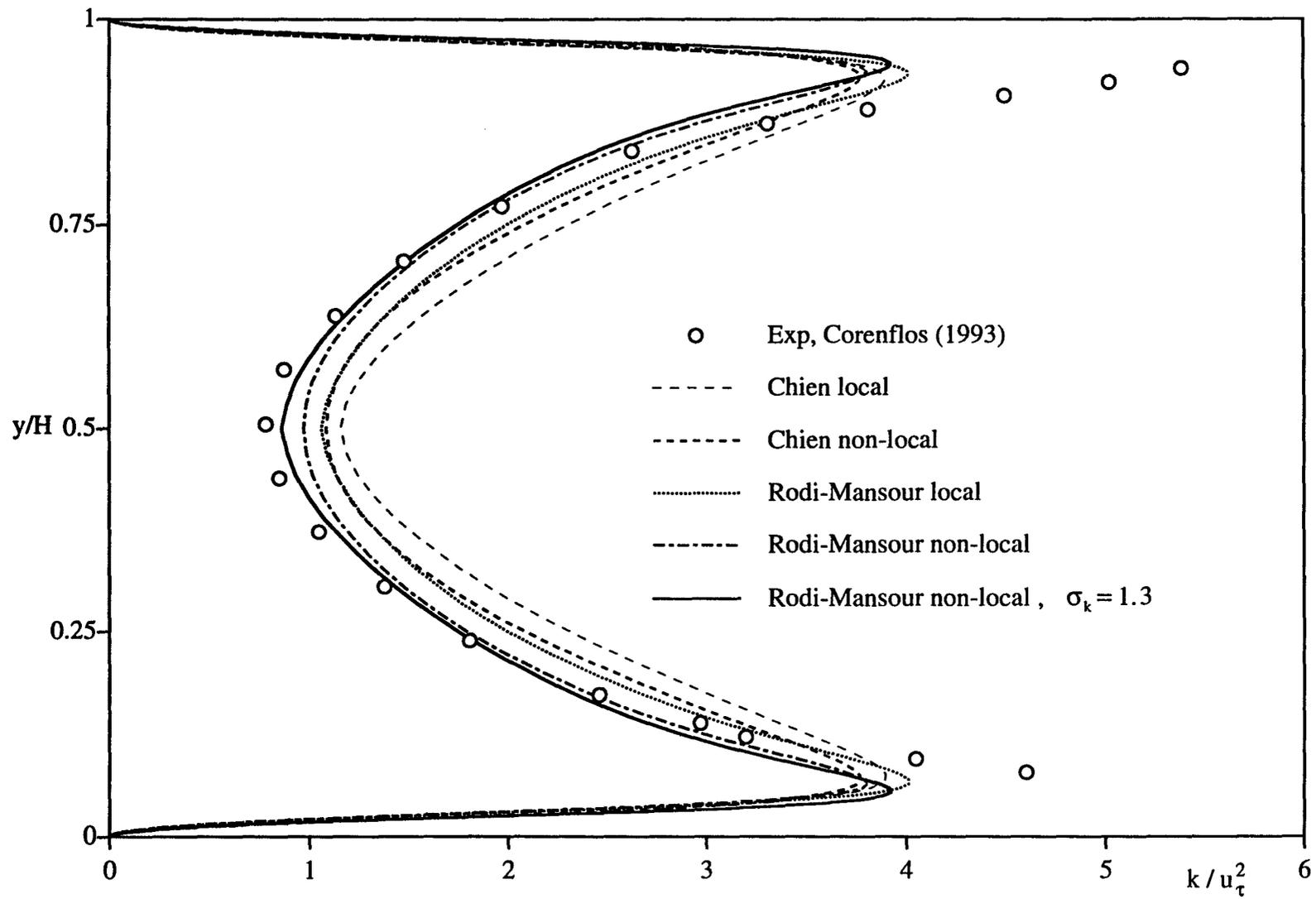


Figure 4.6 Prédiction de l'énergie turbulente pour l'écoulement de Poiseuille pur, $Re=5000$



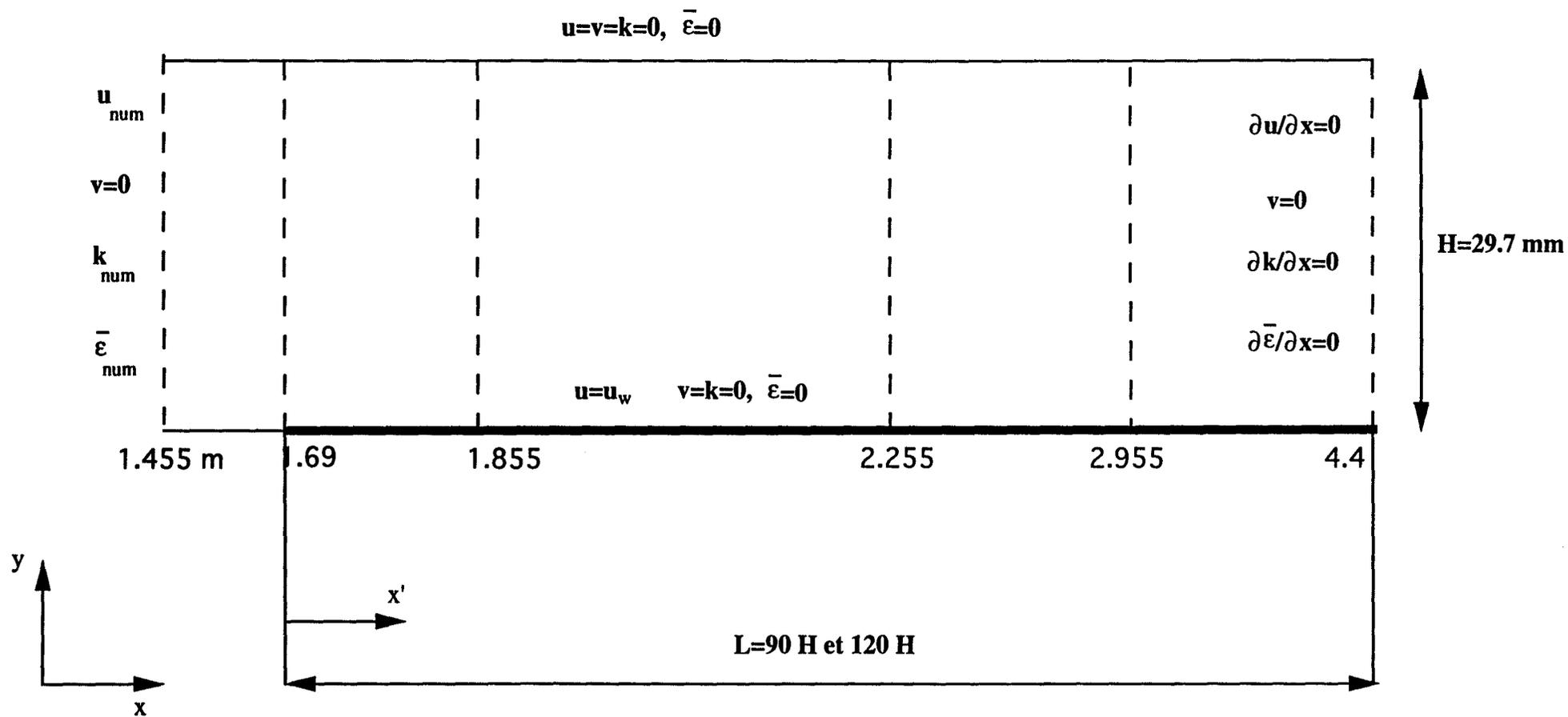
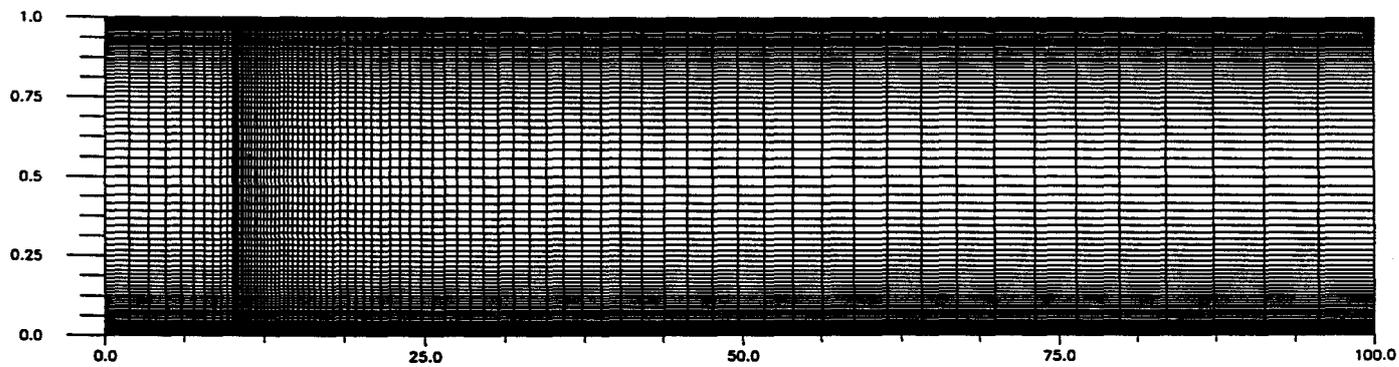
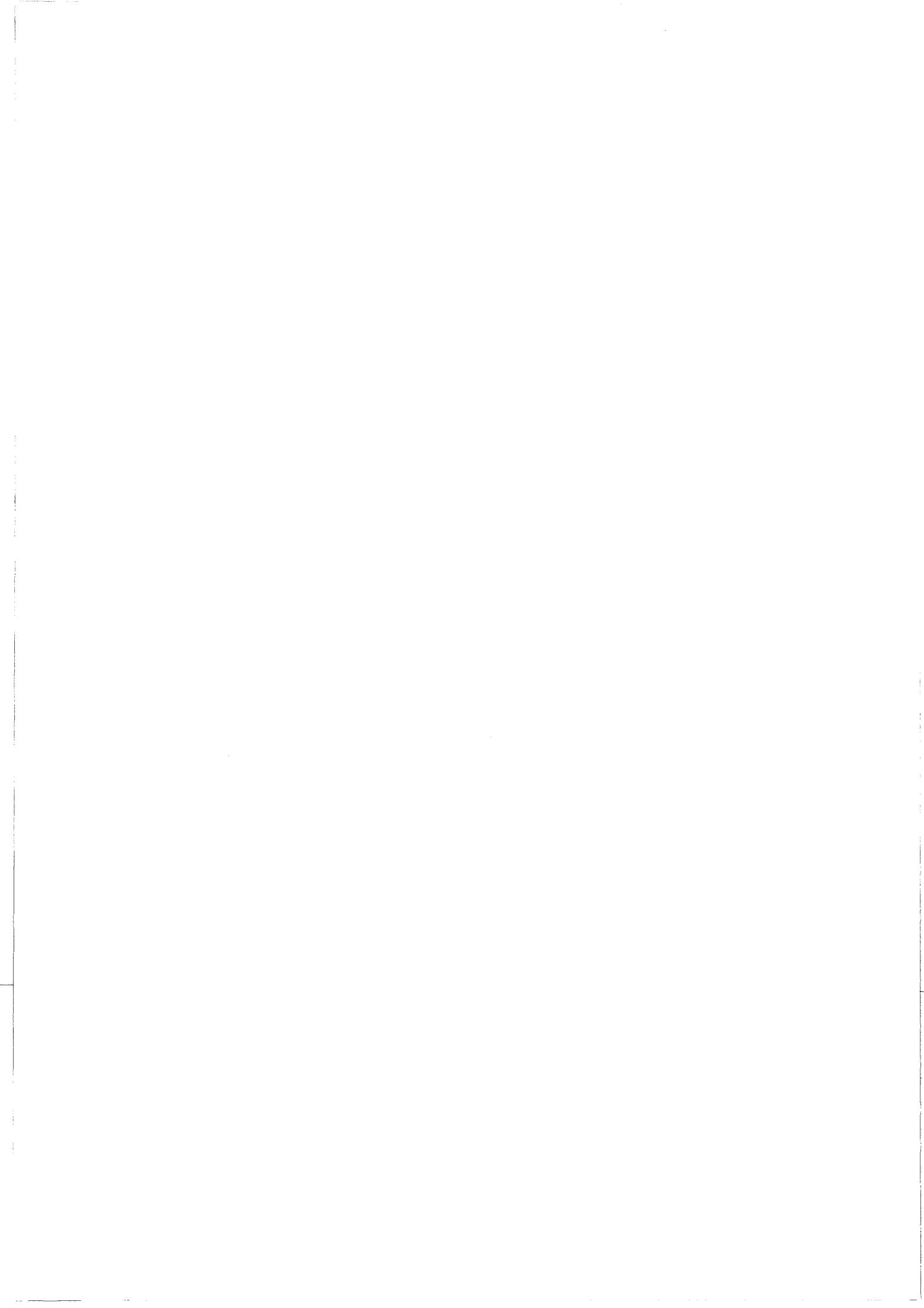


Figure 4.7 : Domaine et les conditions aux frontières



Figure 4.8 Ecoulements de Couette-Poiseuille, maillage constitué de 80*100 éléments bilinéaires





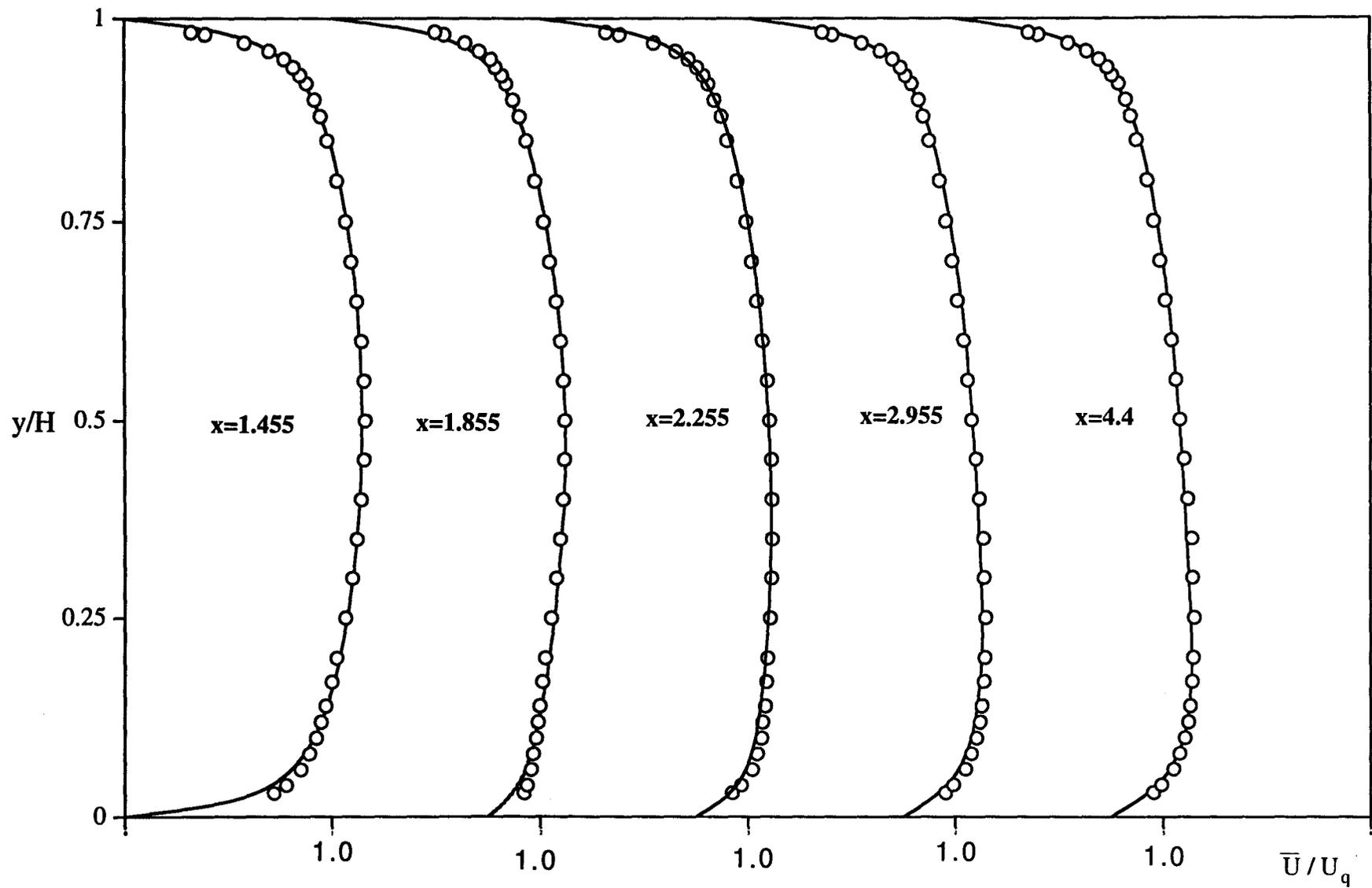


Figure 4.9 Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=10000$, modèle de Chien, le profil expérimental à $x=4.4$ correspond à celui à $x=2.955$

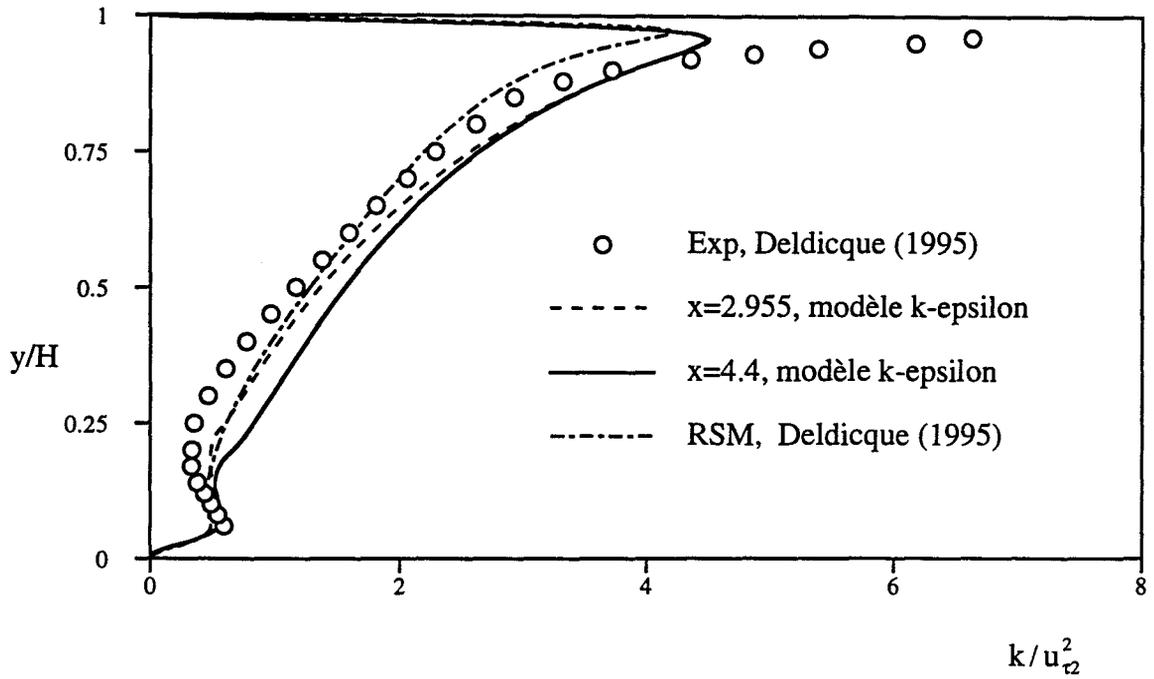


Figure 4.10a Profils de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=10000$

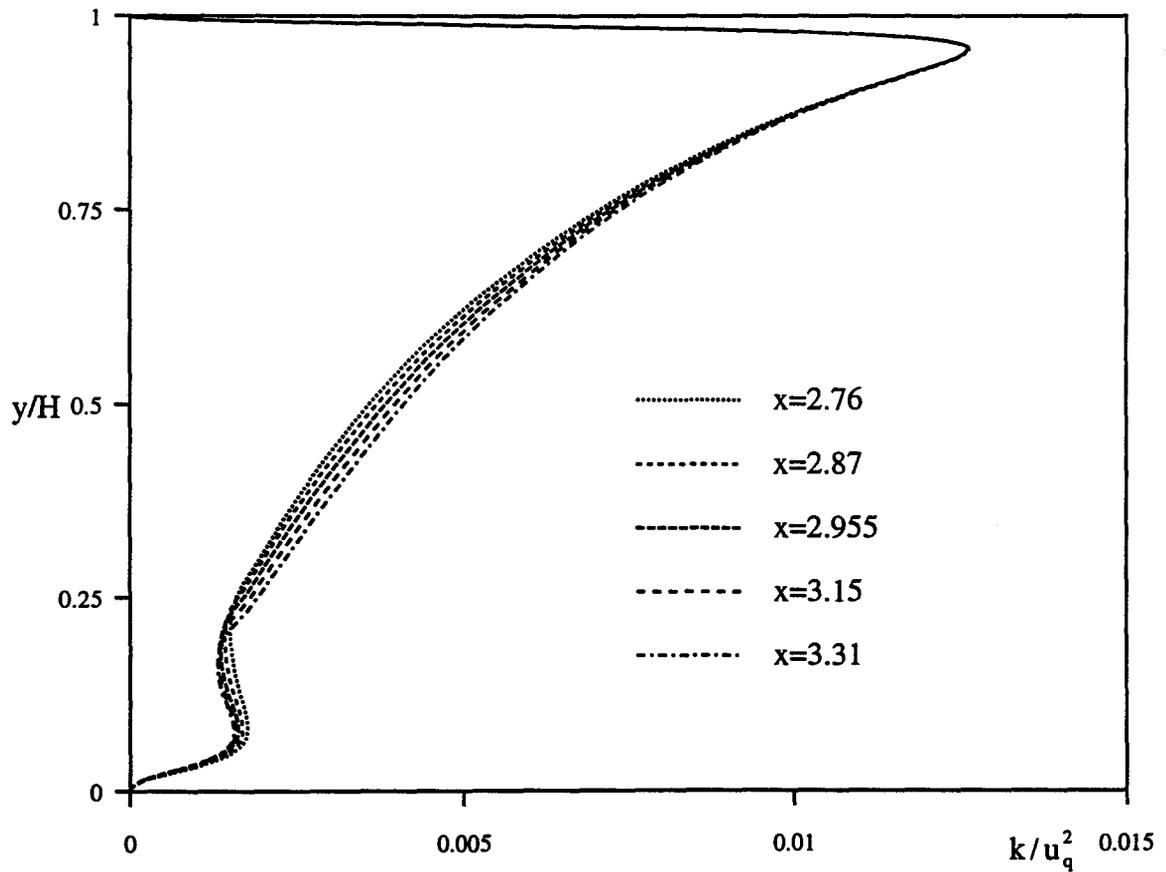


Figure 4.10b Evolution du profil de l'énergie turbulente en différentes stations près de la sortie, $Re=10000$, modèle de Chien



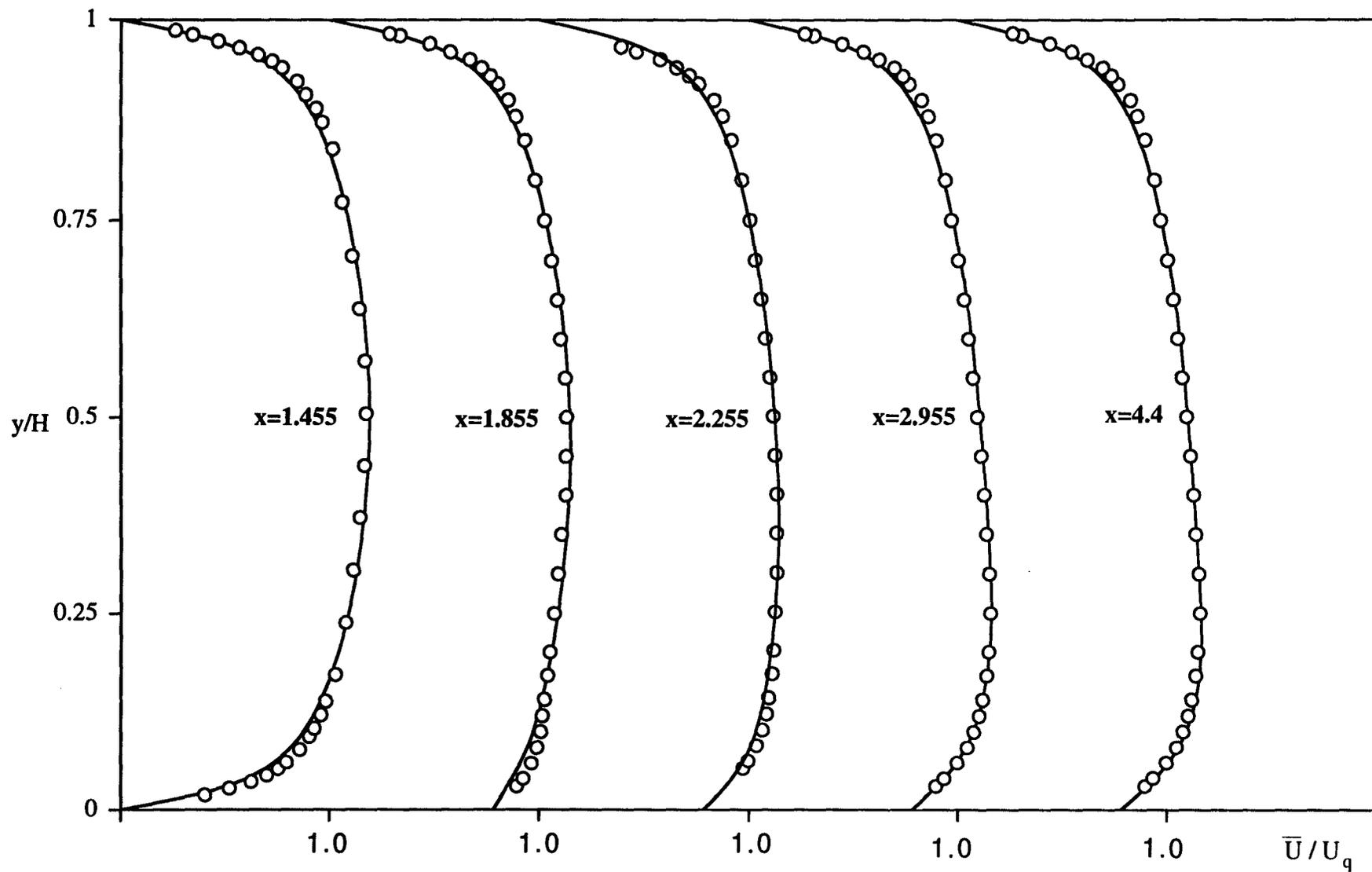


Figure 4.11 Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=5000$, modèle de Chien, le profil expérimental à $x=4.4$ correspond à celui à $x=2.955$



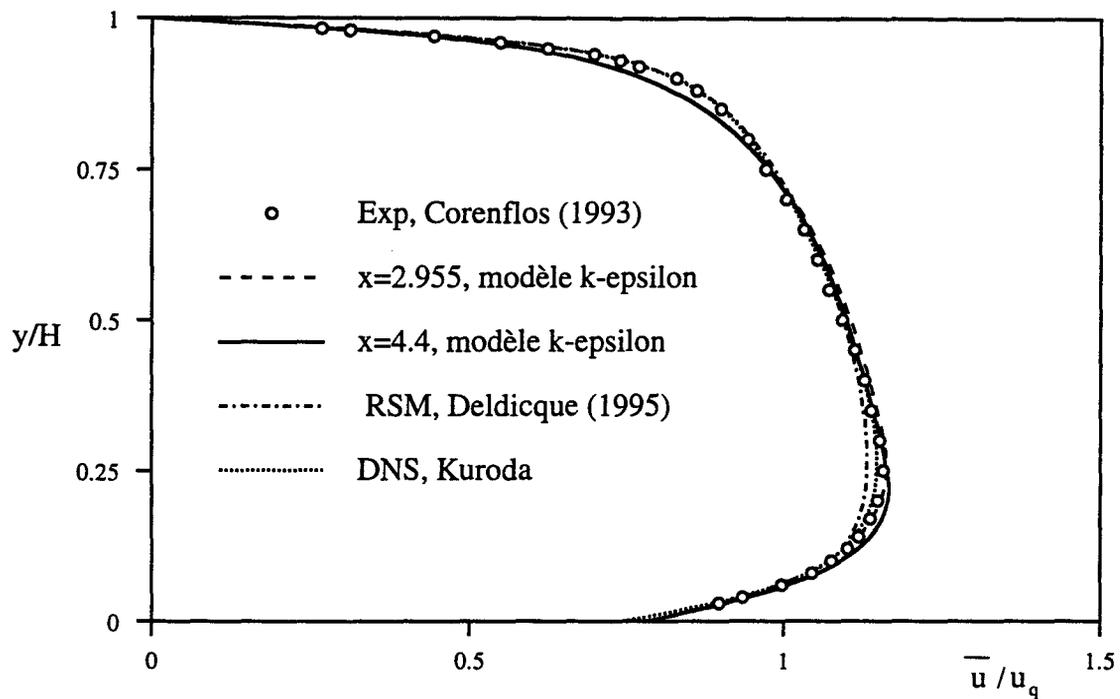


Figure 4.12a Profils de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=5000$

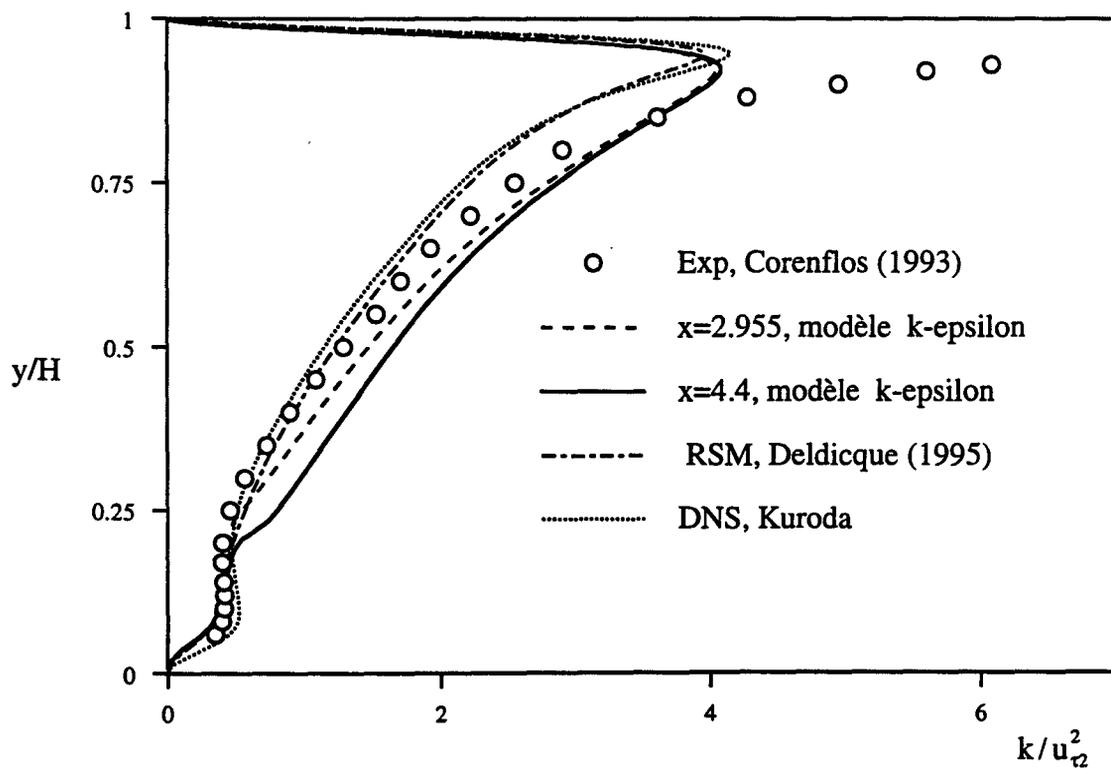


Figure 4.12b Profils de l'énergie turbulentes pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=5000$

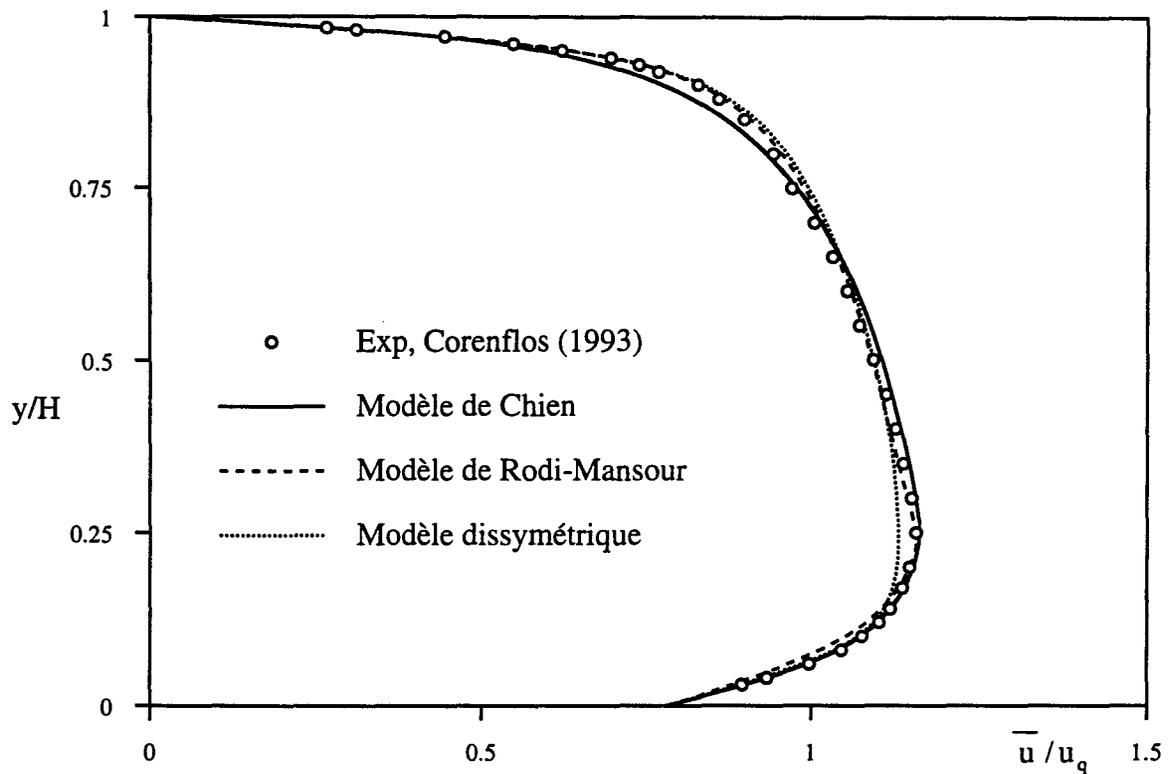


Figure 4.13a Profils de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type Poiseuille, avec différents modèles, $Re=5000$, $x=2.955$

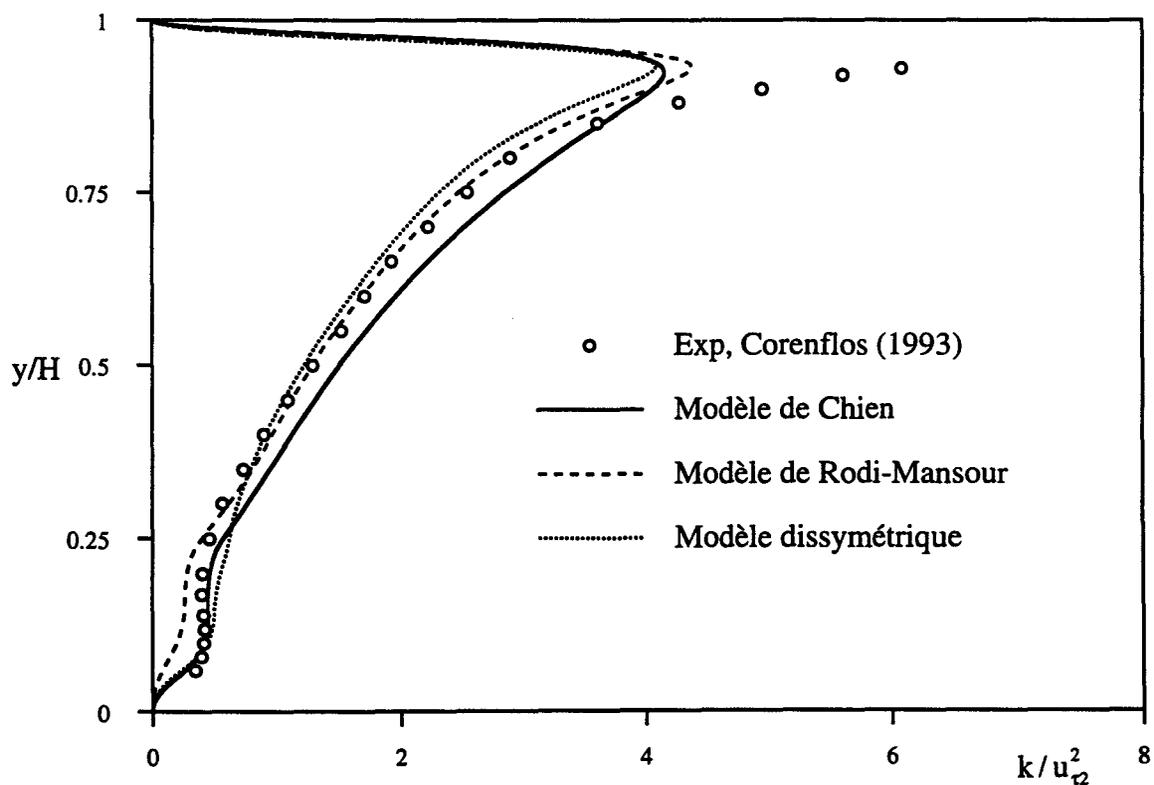


Figure 4.13b Profils de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille, avec différents modèles, $Re=5000$, $x=2.955$



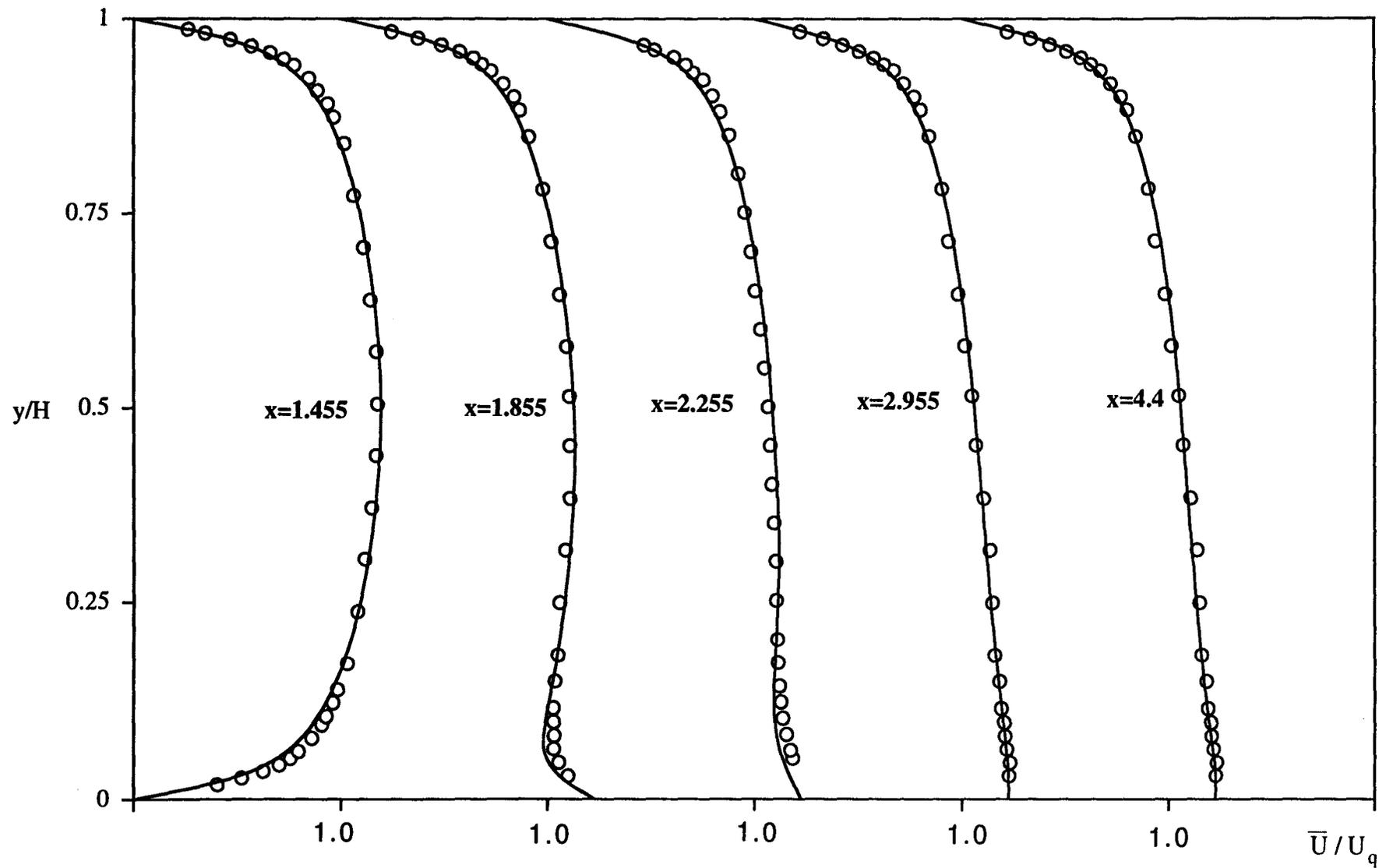
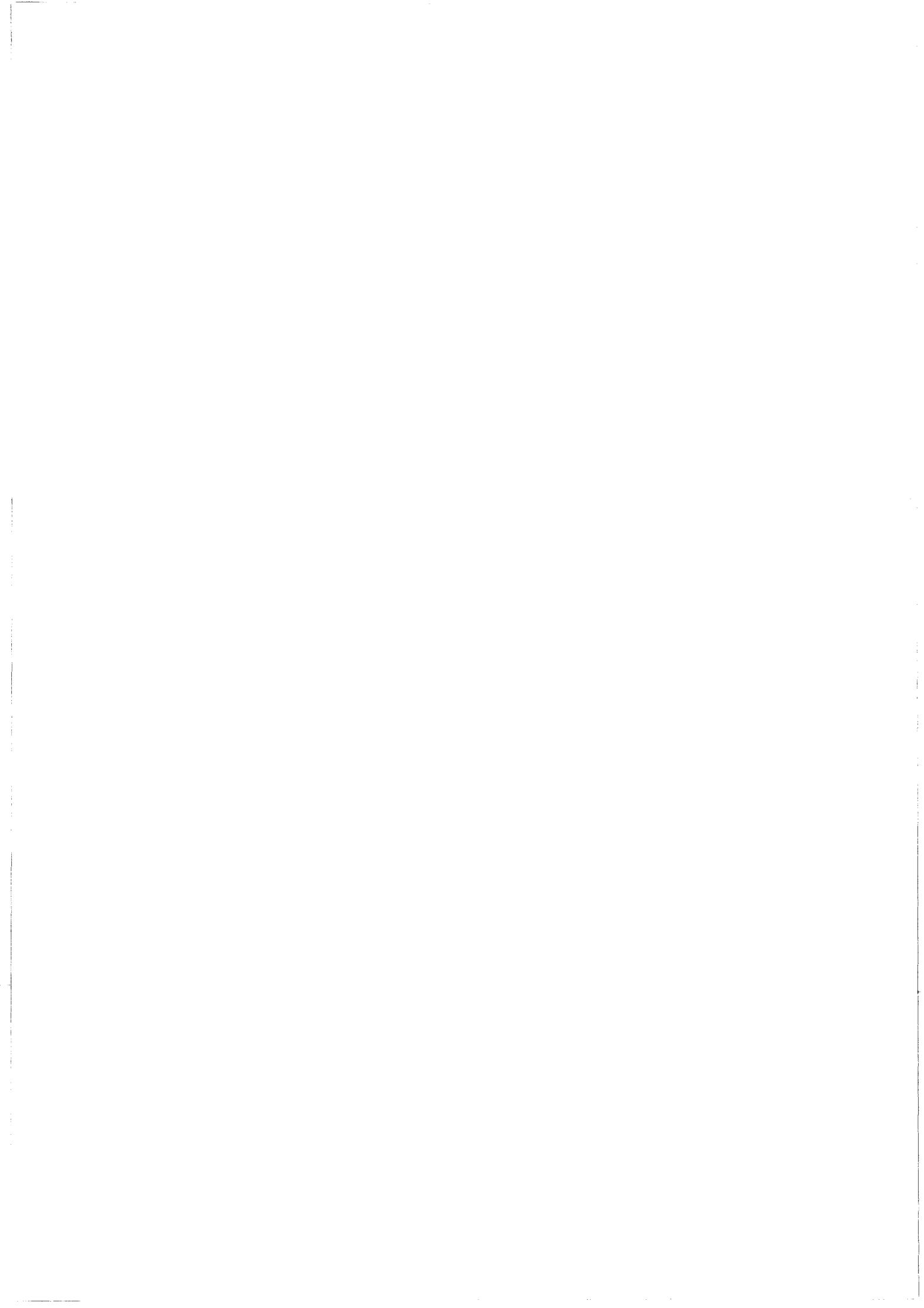


Figure 4.14 Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$, modèle de Chien, le profil expérimental à $x=4.4$ correspond a celui à $x=2.955$



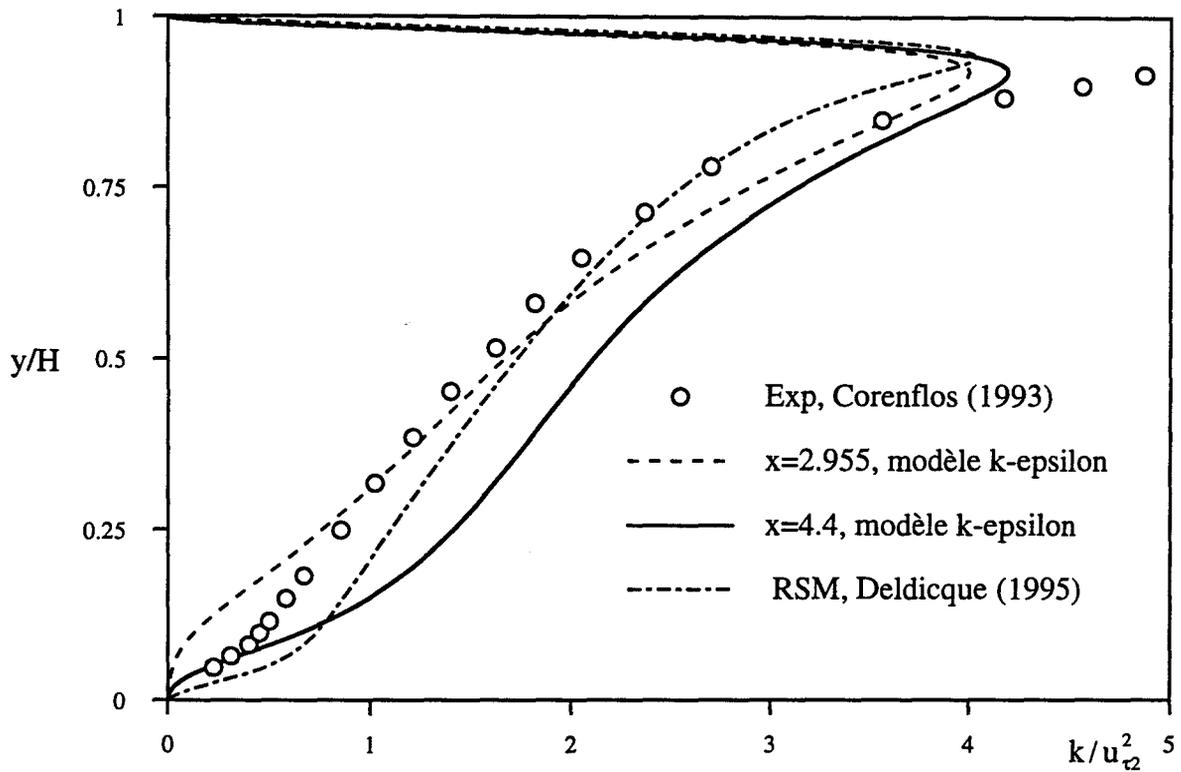


Figure 4.15a Profils de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$

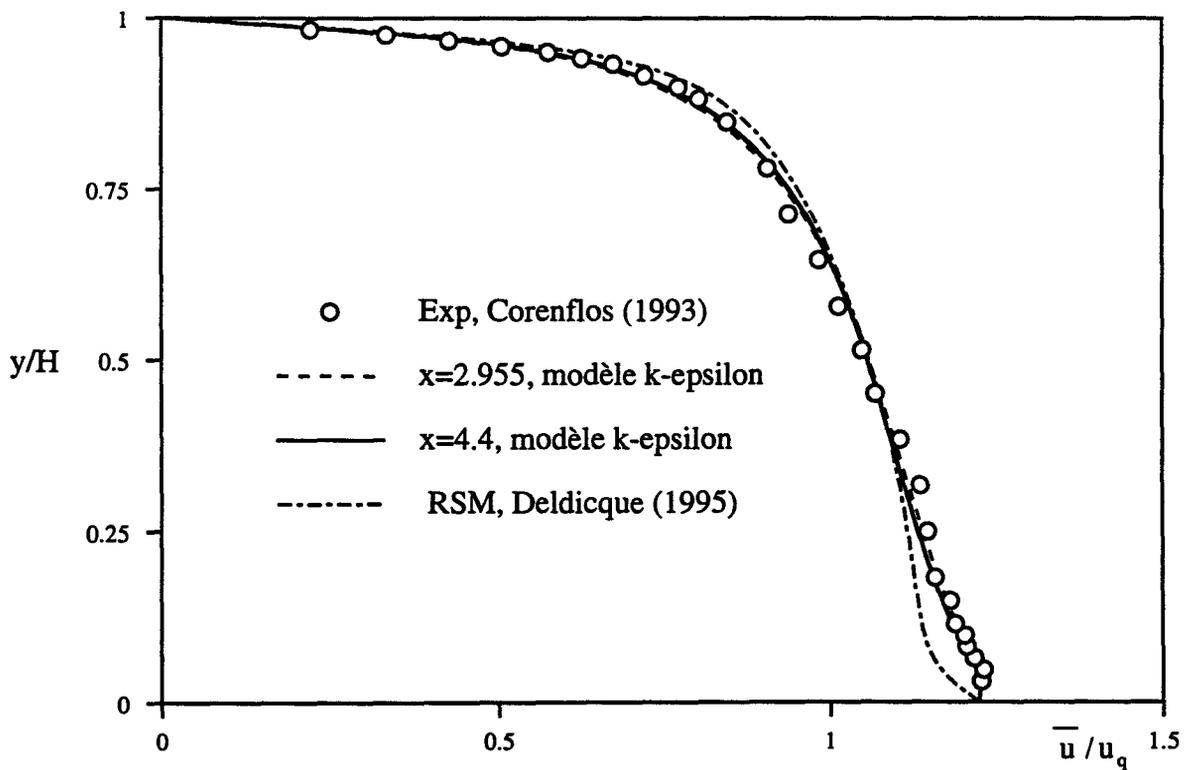
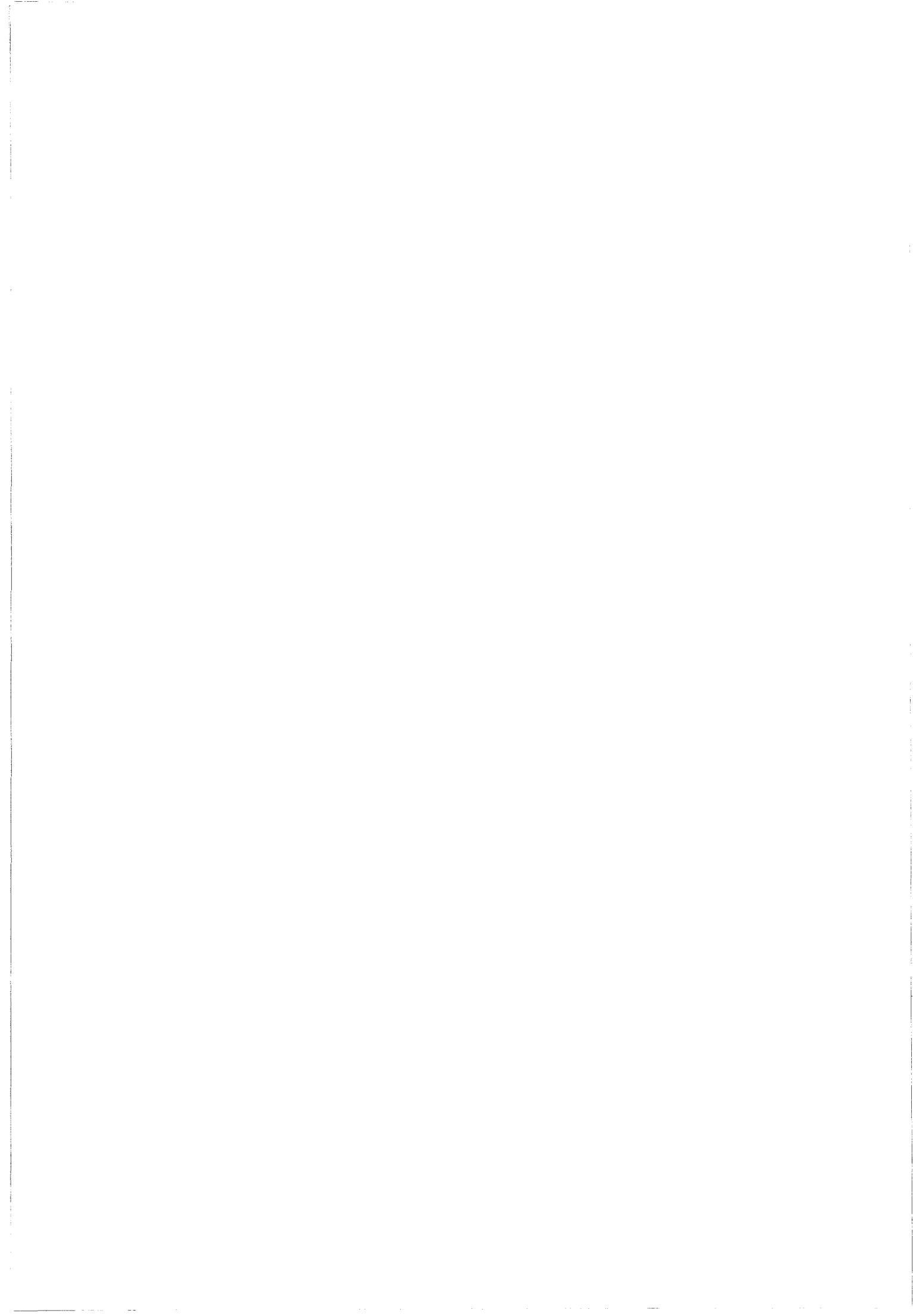


Figure 4.15b Profils de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$



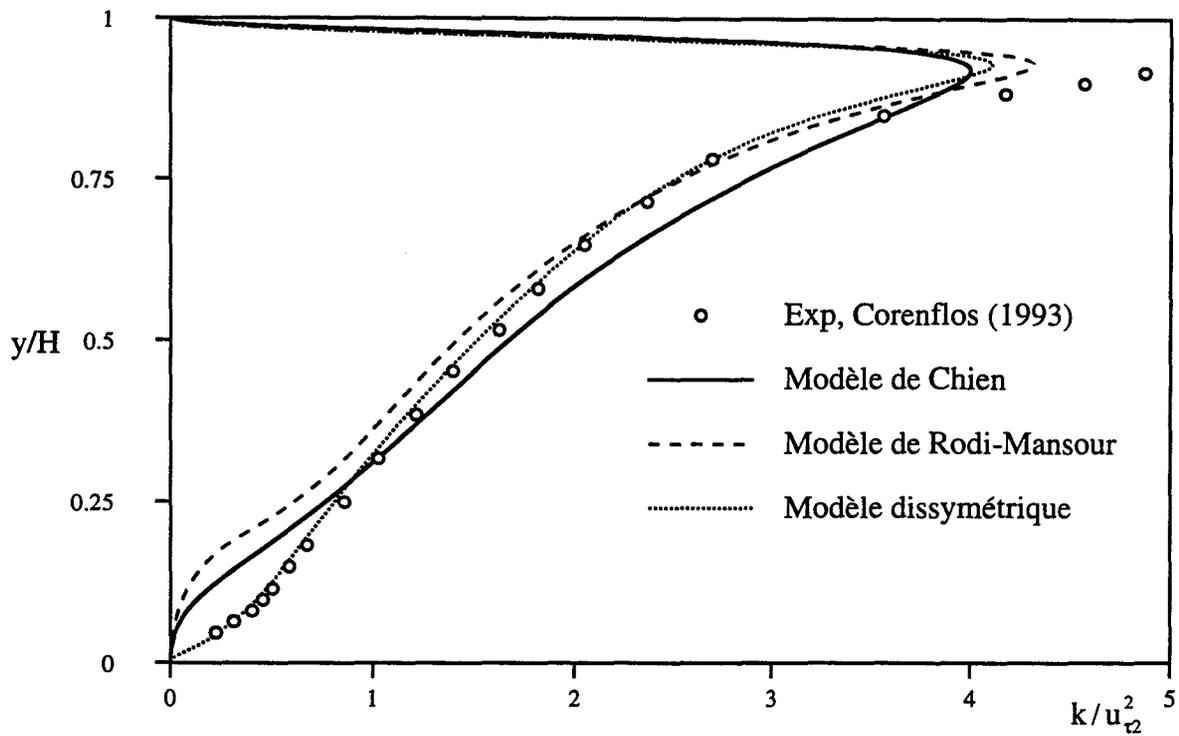


Figure 4.16a Profils de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire avec différents modèles, $Re=5000$, $x=2.955$

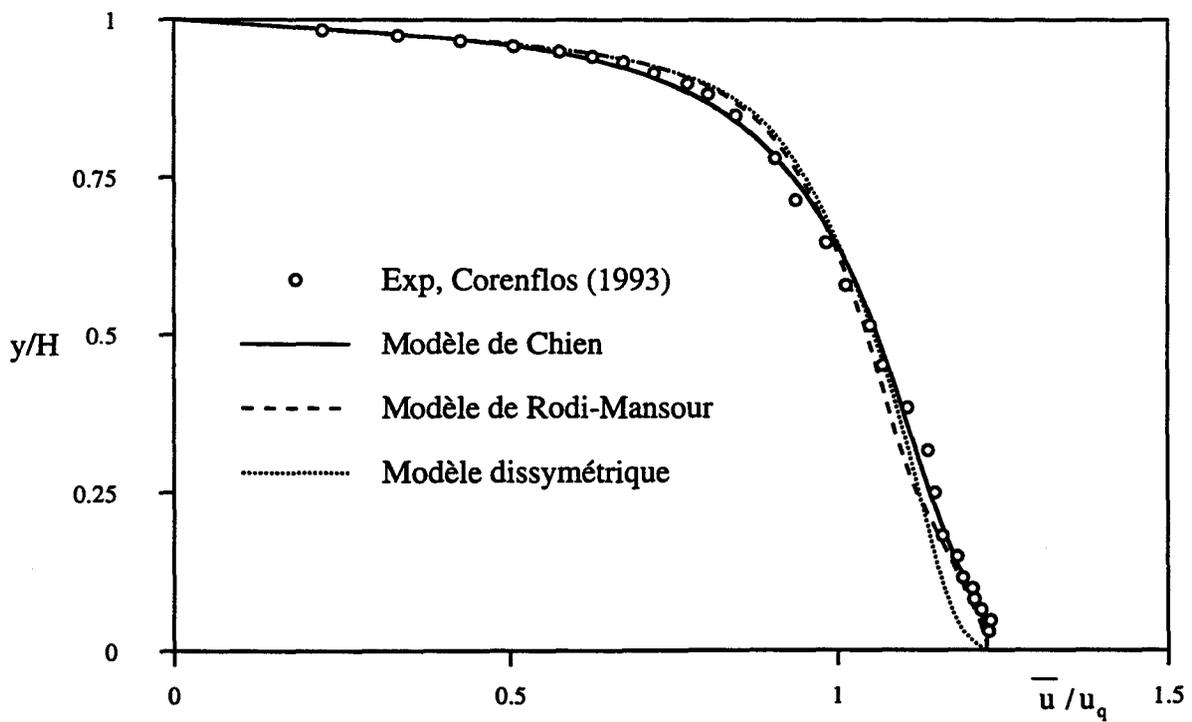


Figure 4.16b Profils de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type intermédiaire avec différents modèles, $Re=5000$, $x=2.955$



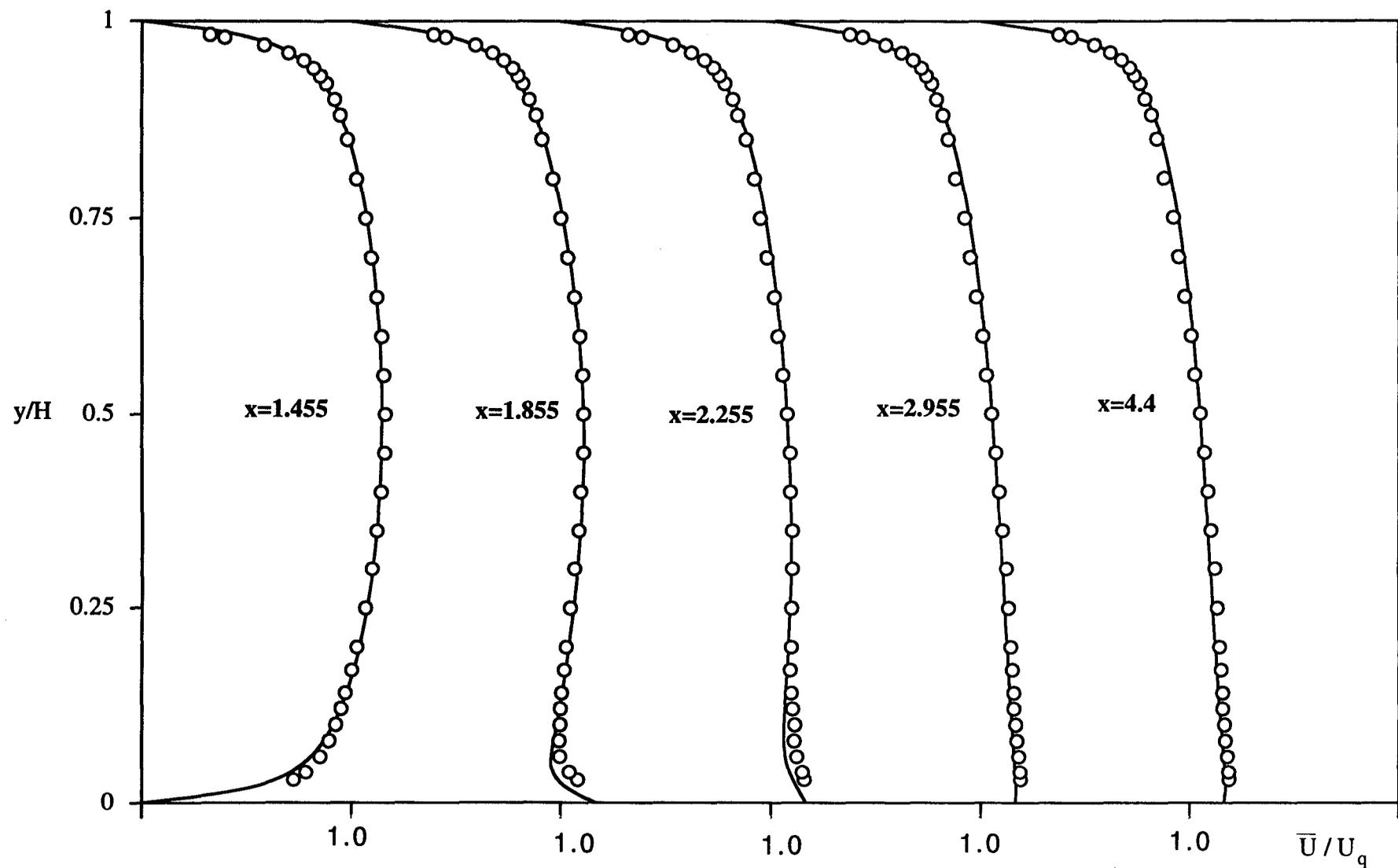
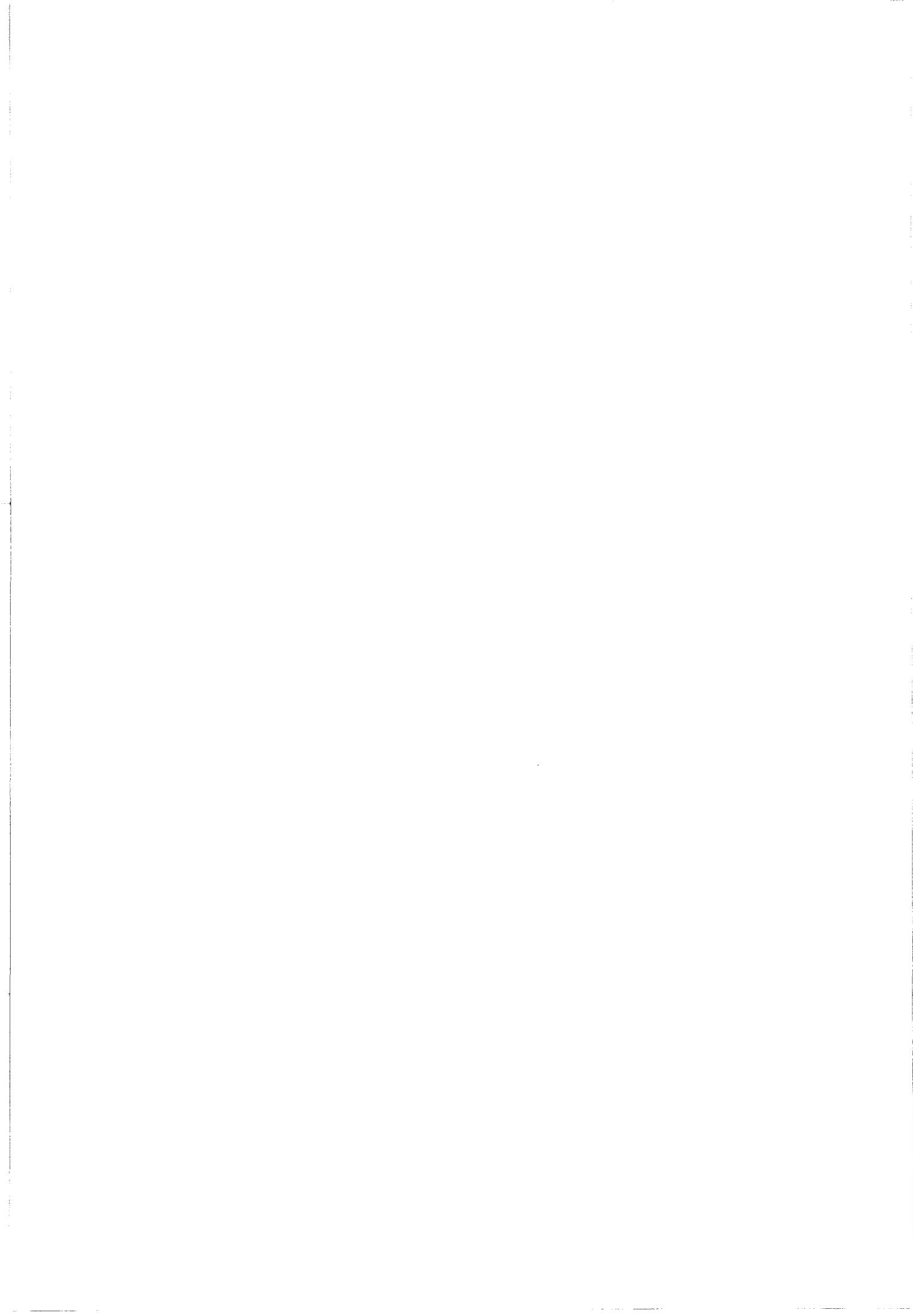


Figure 4.17 Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=10000$, modèle de Chien, le profil expérimental à $x=4.4$ correspond à celui à $x=2.955$



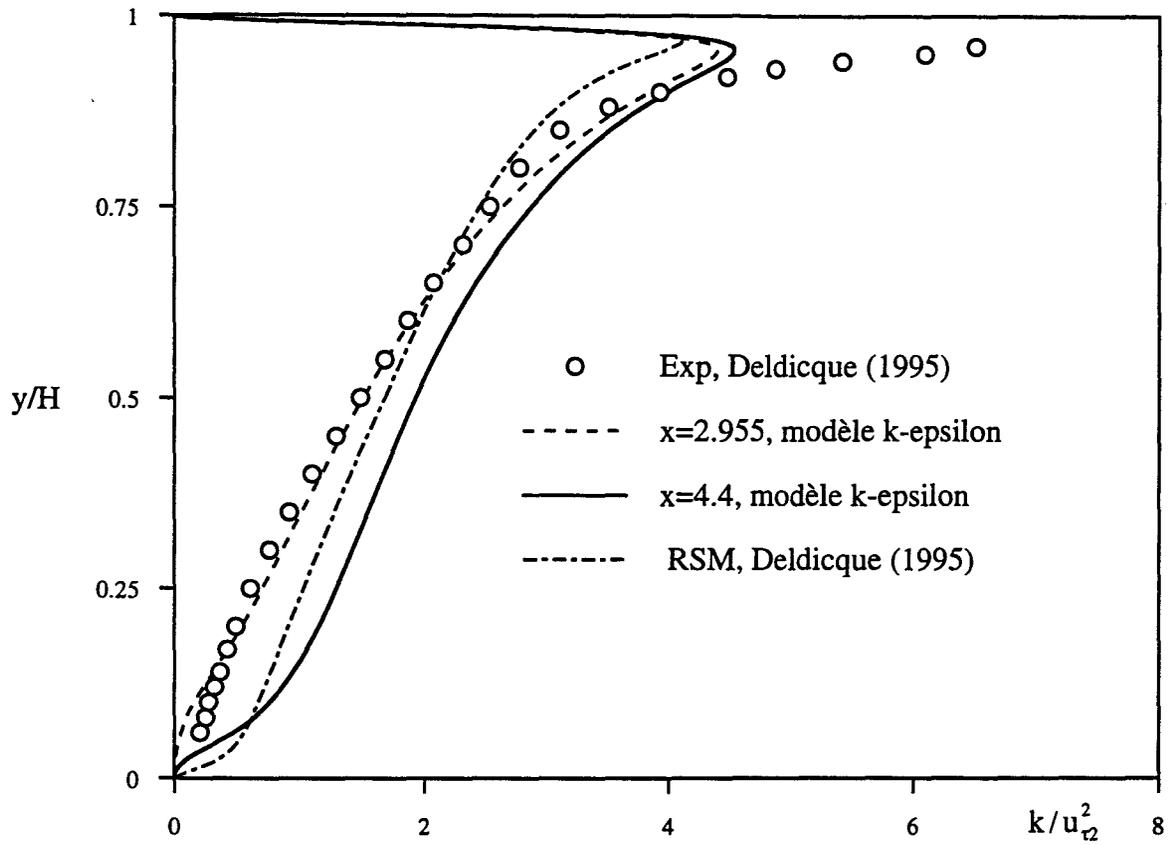


Figure 4.18a Profils de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=10000$

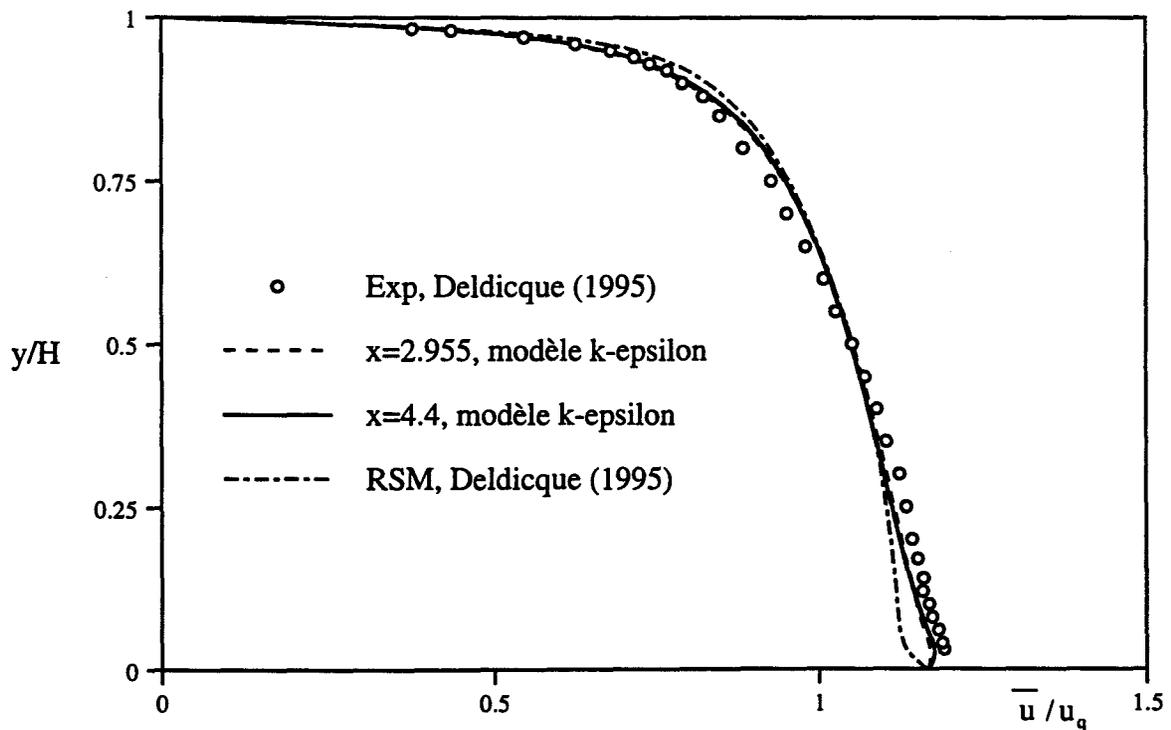


Figure 4.18b Profils de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=10000$



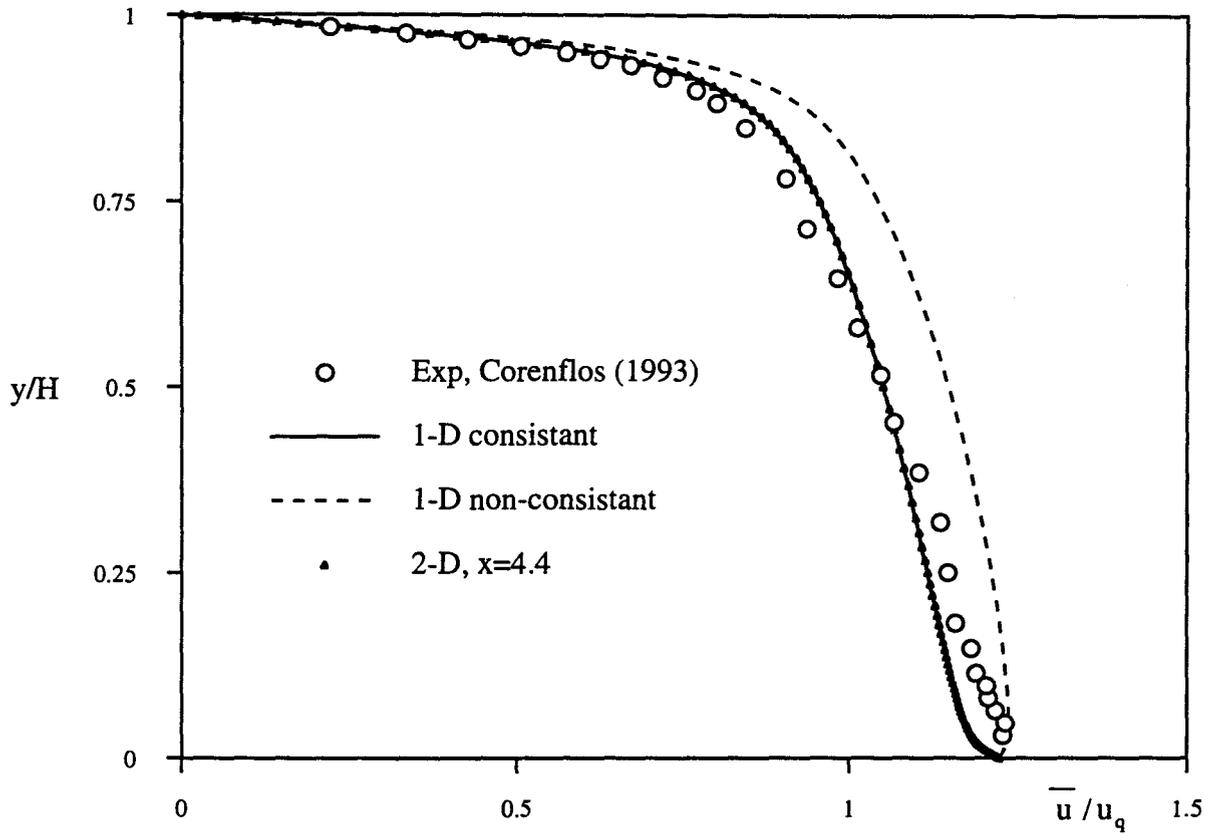


Figure 4.19a Comparaison des calculs mono et bi-dimensionnels, profil de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$

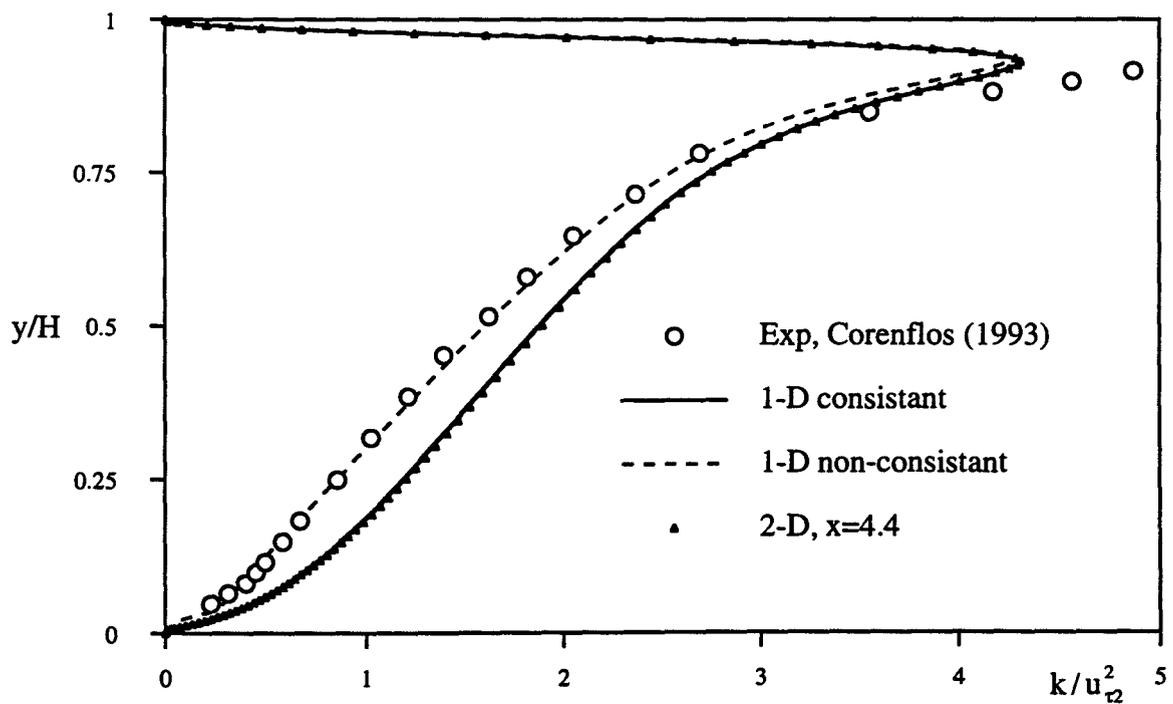


Figure 4.19b Comparaison des calculs mono et bi-dimensionnels, profil de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$



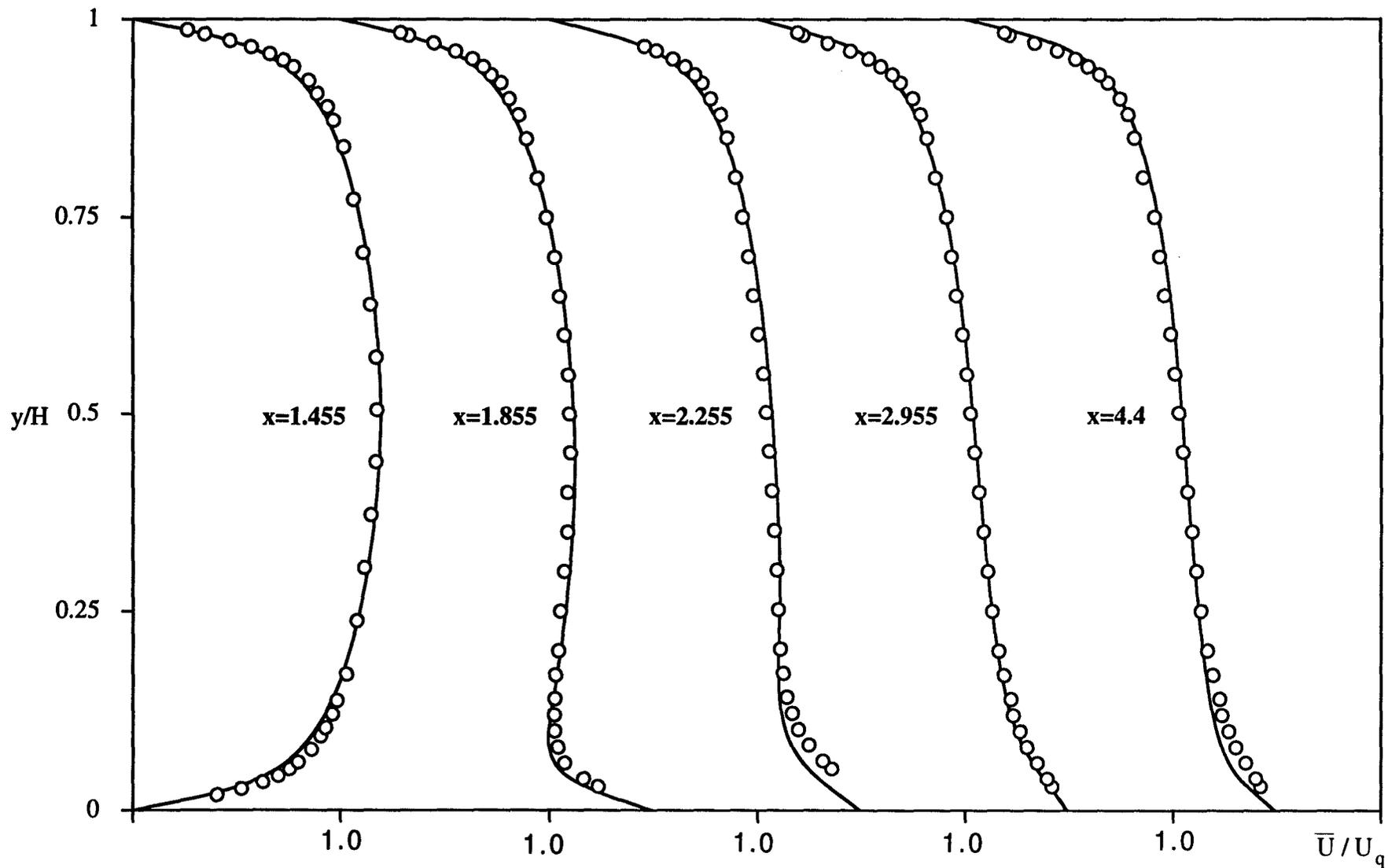


Figure 4.20 Etablissement de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type Couette, $Re=5000$, modèle de Chien, le profil expérimental à $x=4.4$ correspond à celui à $x=2.955$



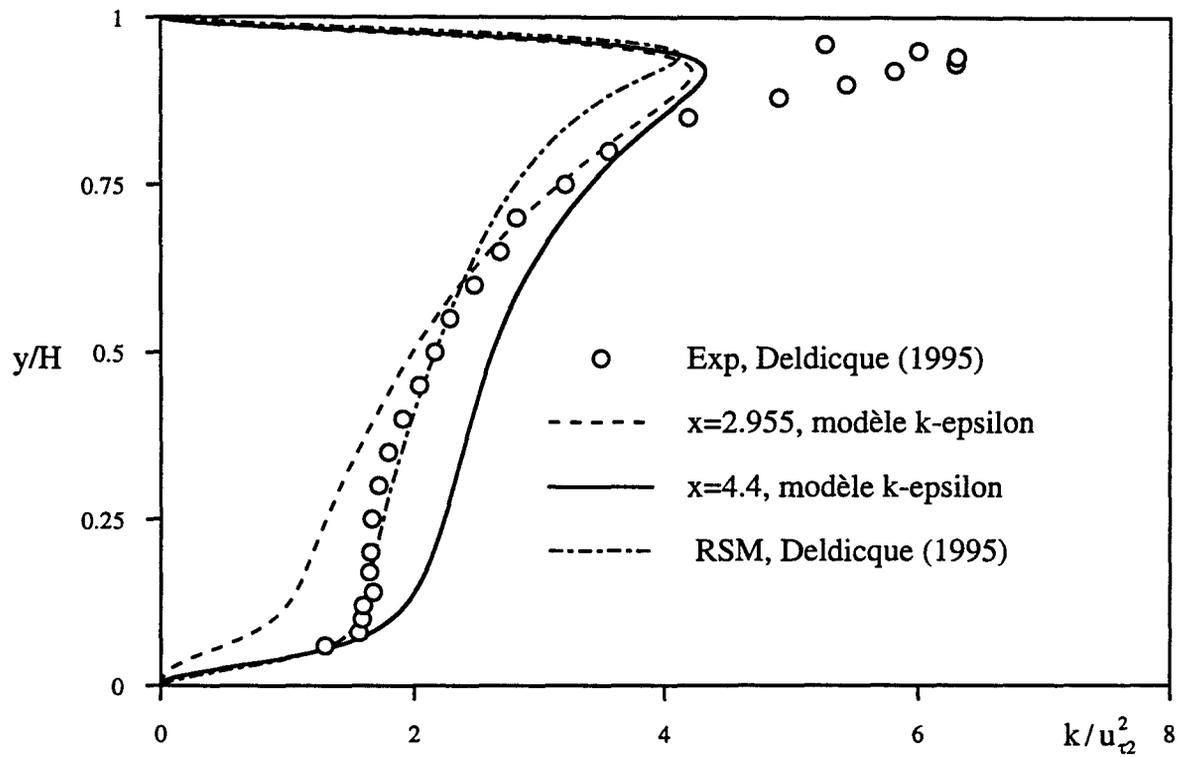


Figure 4.21a Profils de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Couette, $Re=5000$

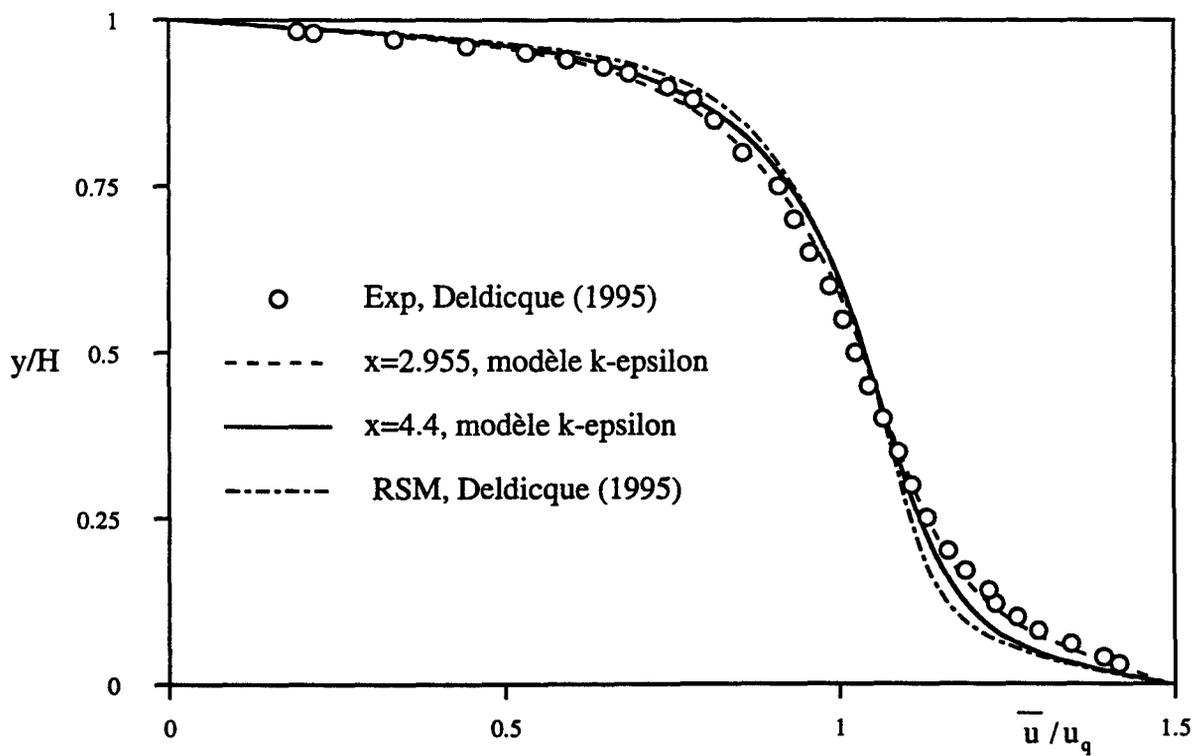


Figure 4.21b: Profils de la vitesse moyenne pour l'écoulement de type Couette, $Re=5000$

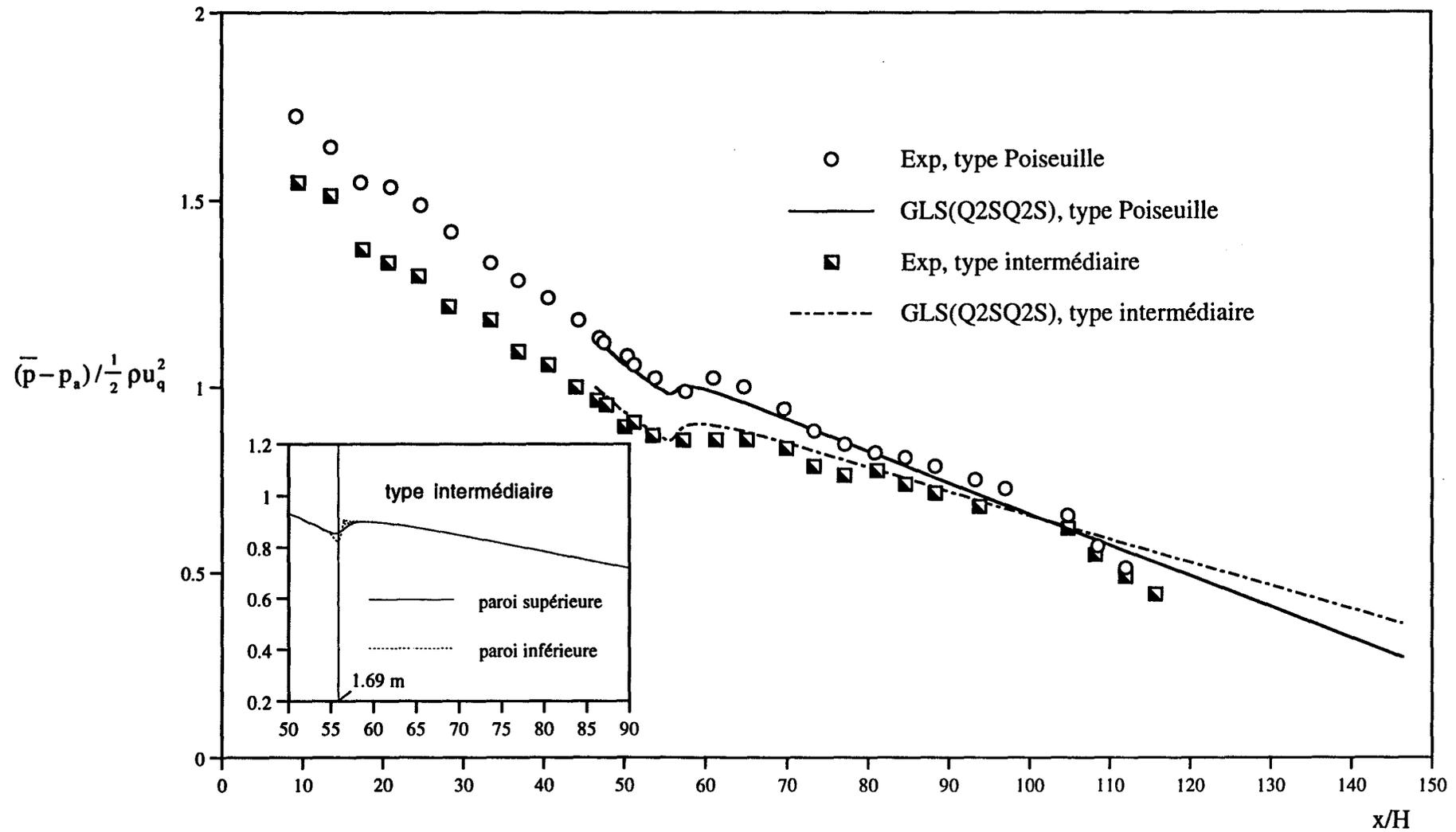


Figure 4.22 : Evolution de la pression statique pour les écoulements de type Poiseuille et intermédiaire, $Re=5000$



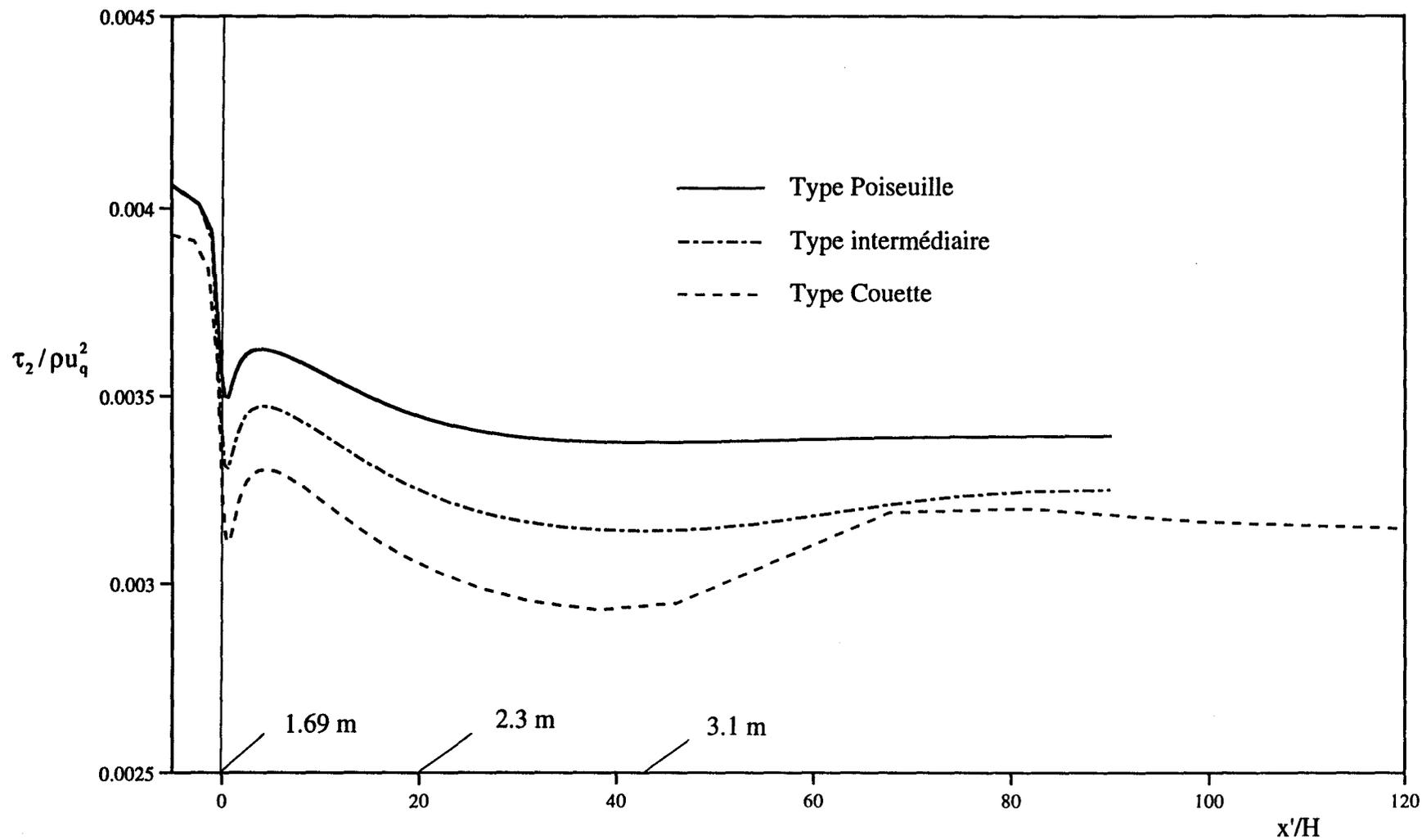
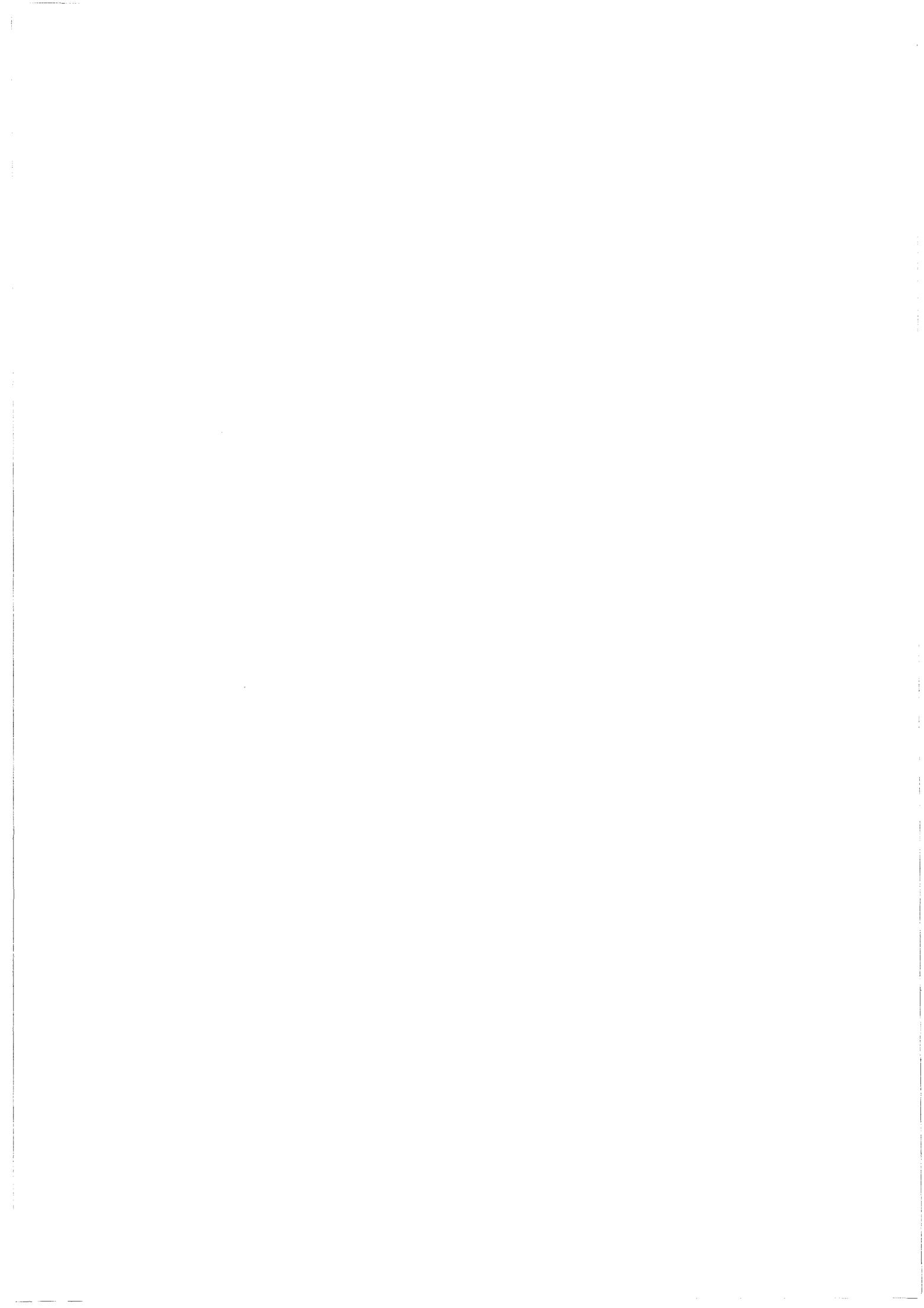


Figure 4.23 Evolution du frottement à la paroi supérieure, $Re=5000$



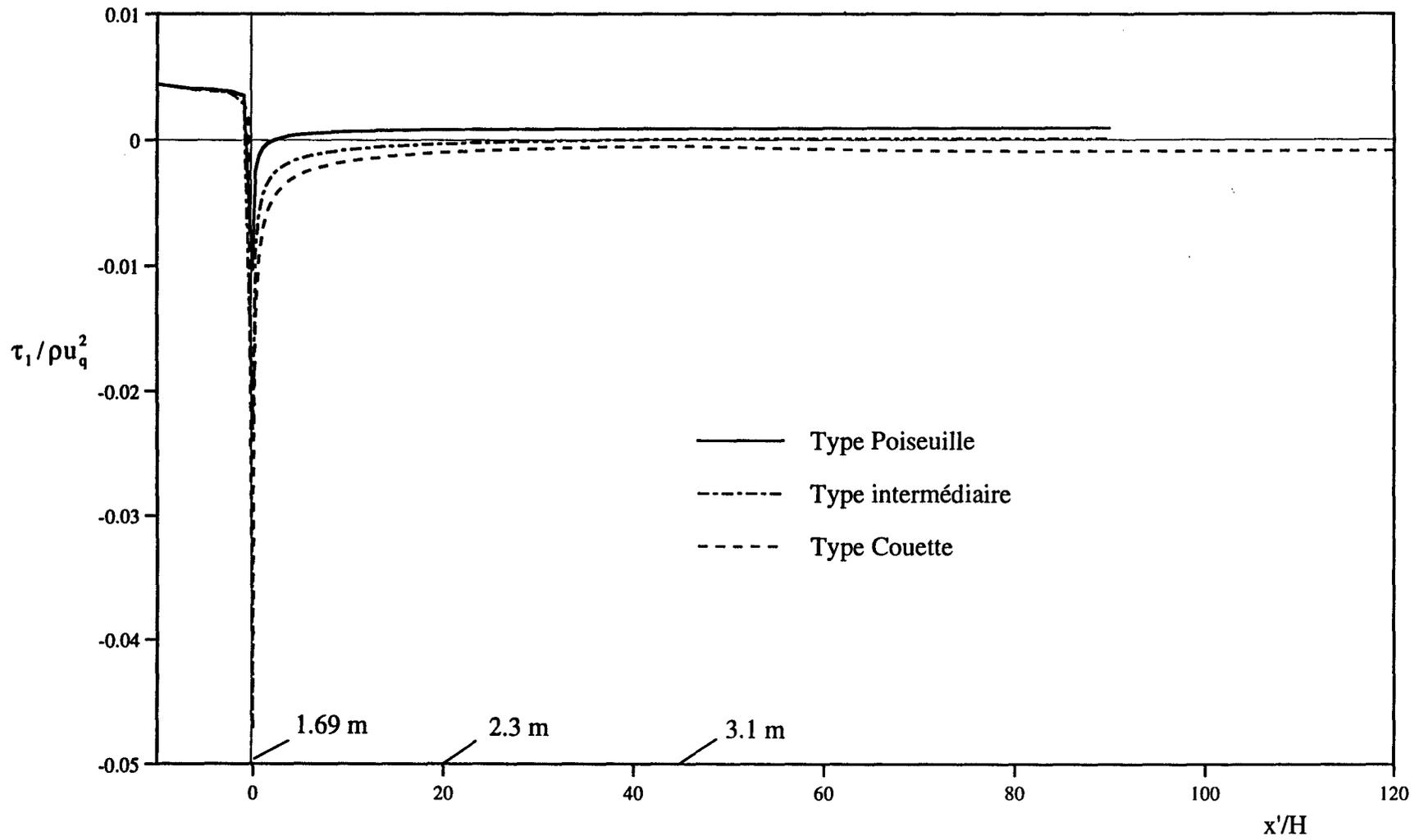
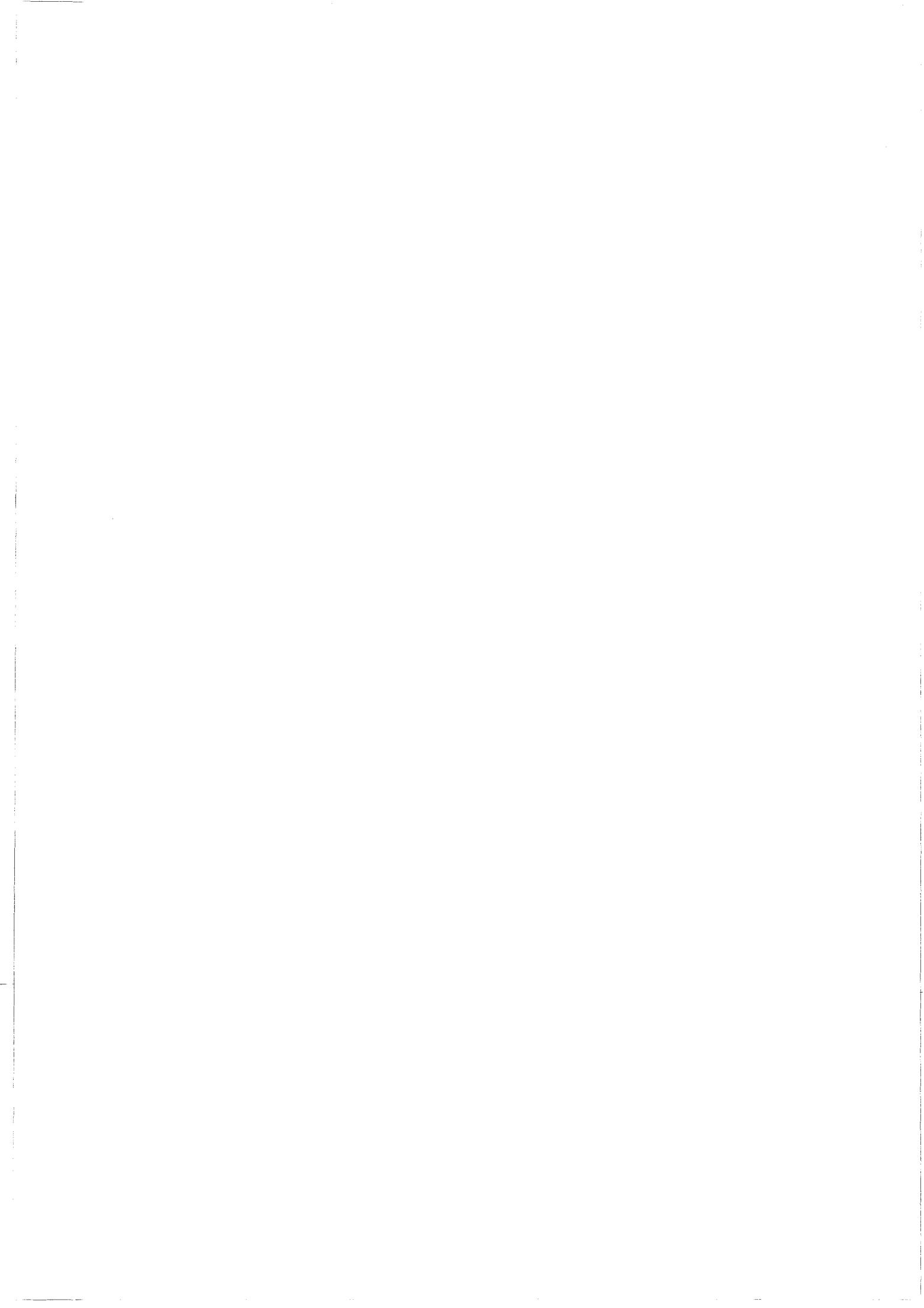


Figure 4.24 Evolution du frottement à la paroi inférieure, Re=5000



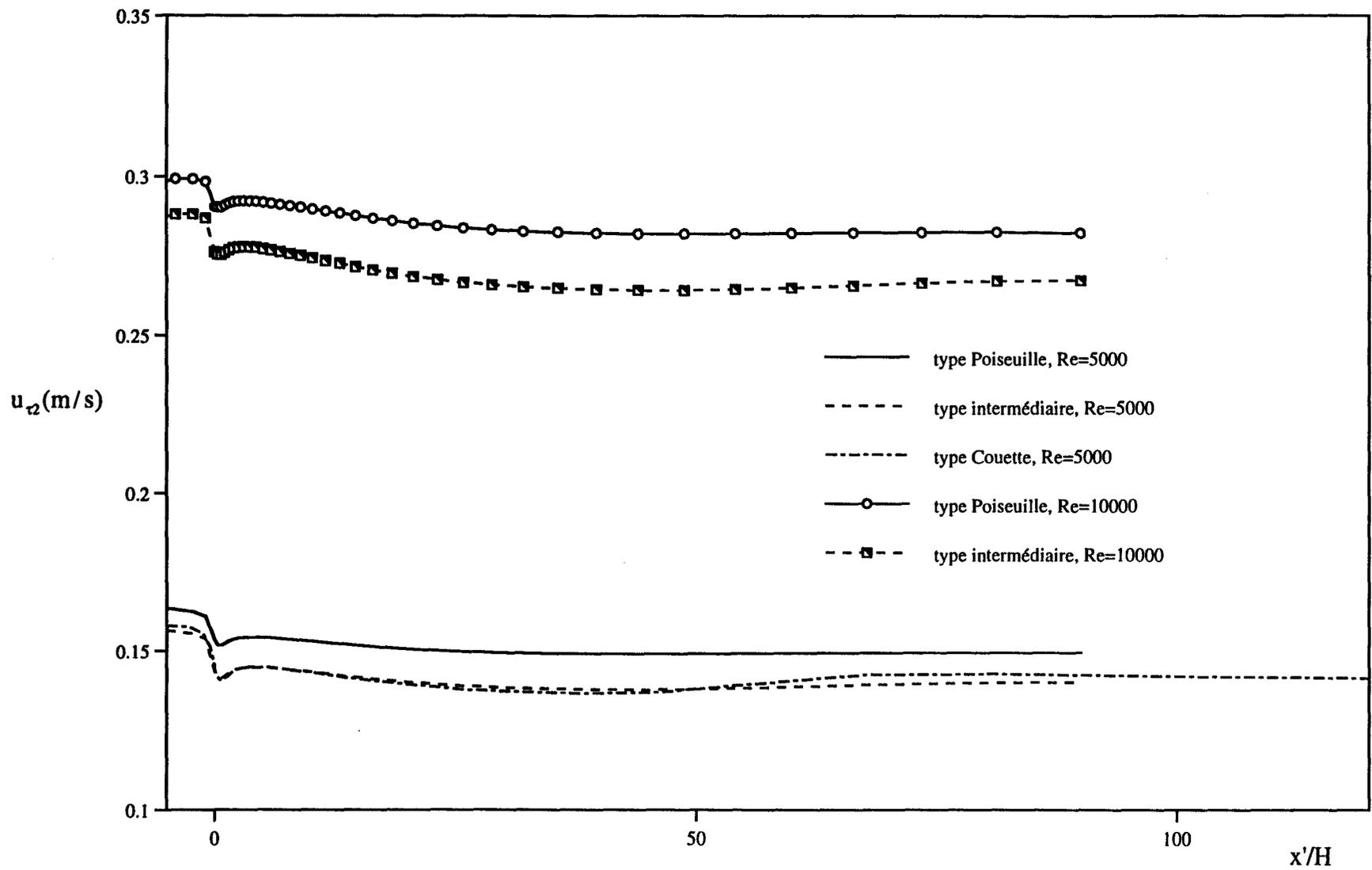


Figure 4.25 Evolution de la vitesse de frottement à la paroi supérieure pour $Re=5000$ et 10000



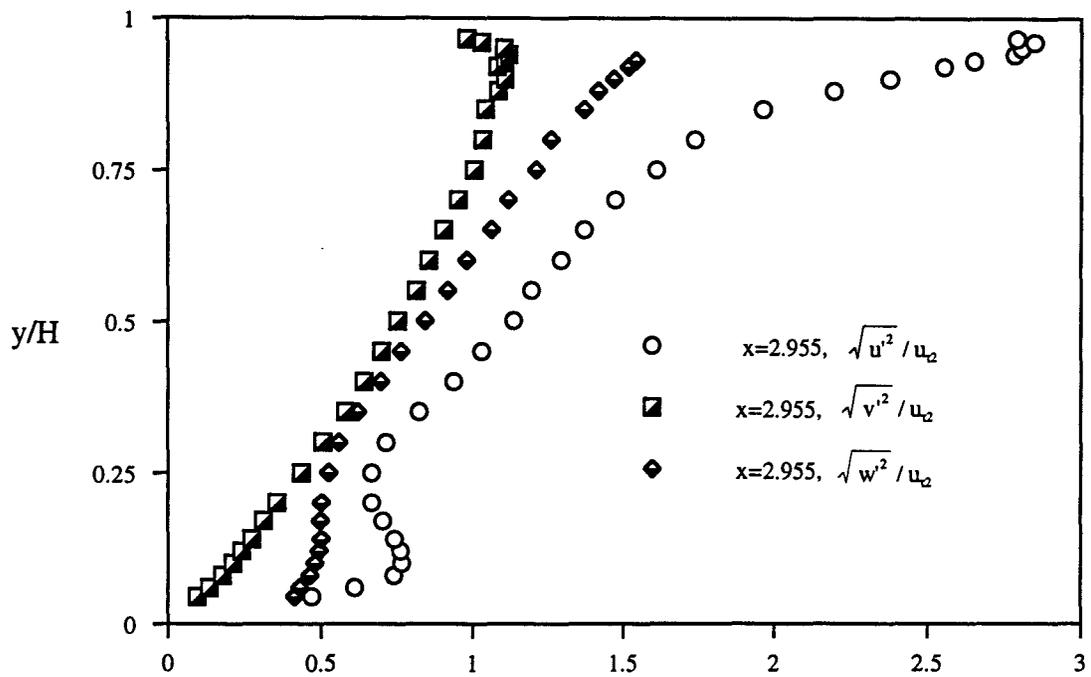


Figure 4.26 Profils des corrélations normales, $Re=5000$, écoulement de type Poiseuille, $x=2.955$ m

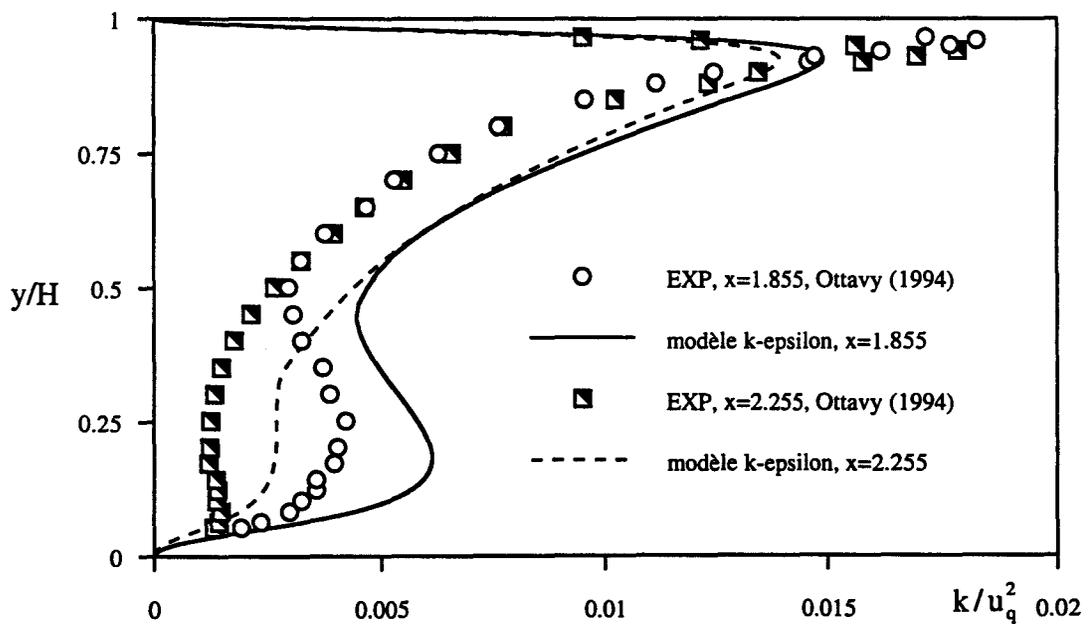


Figure 4.27a Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=5000$, comparaison avec l'expérience



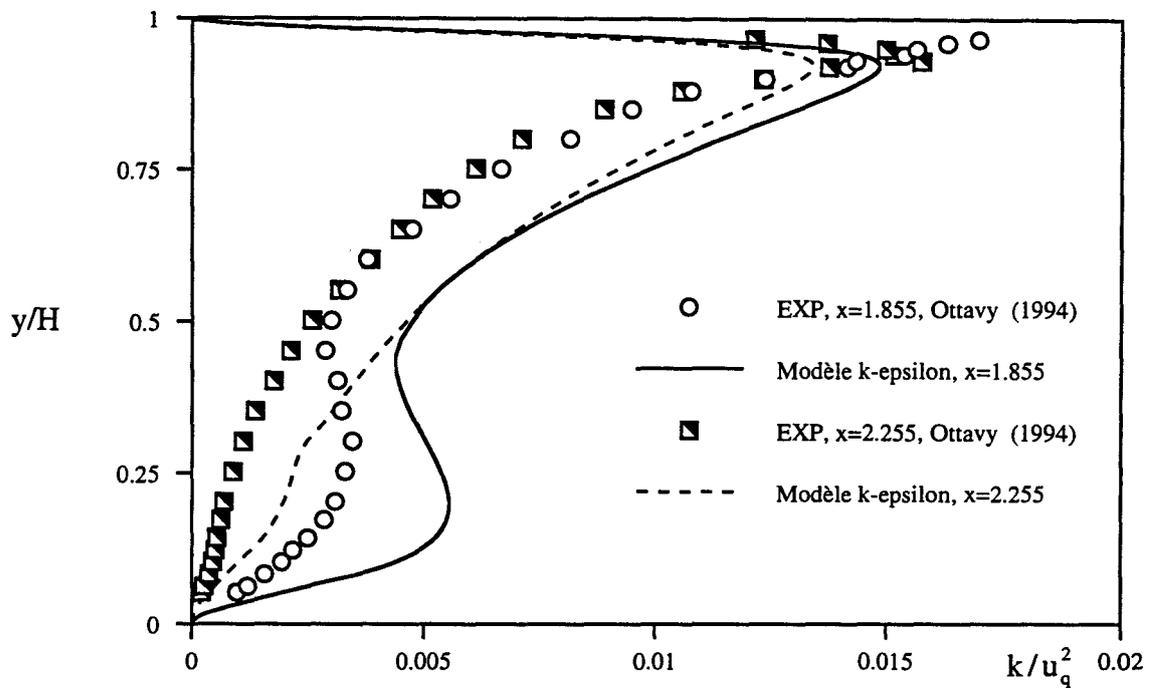


Figure 4.27b Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$, comparaison avec l'expérience

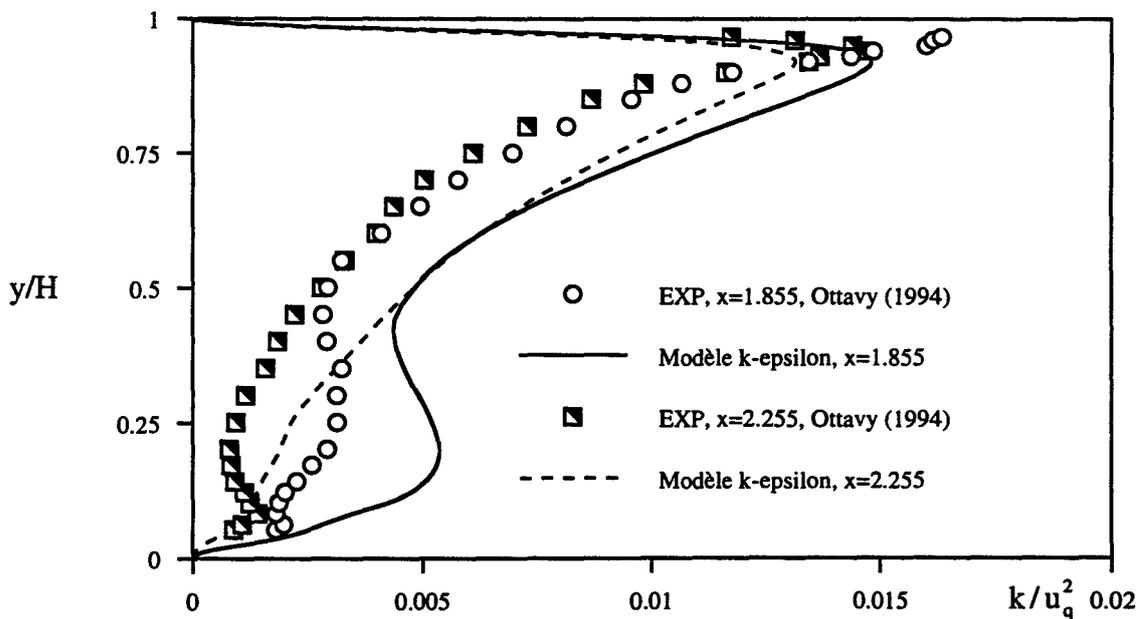
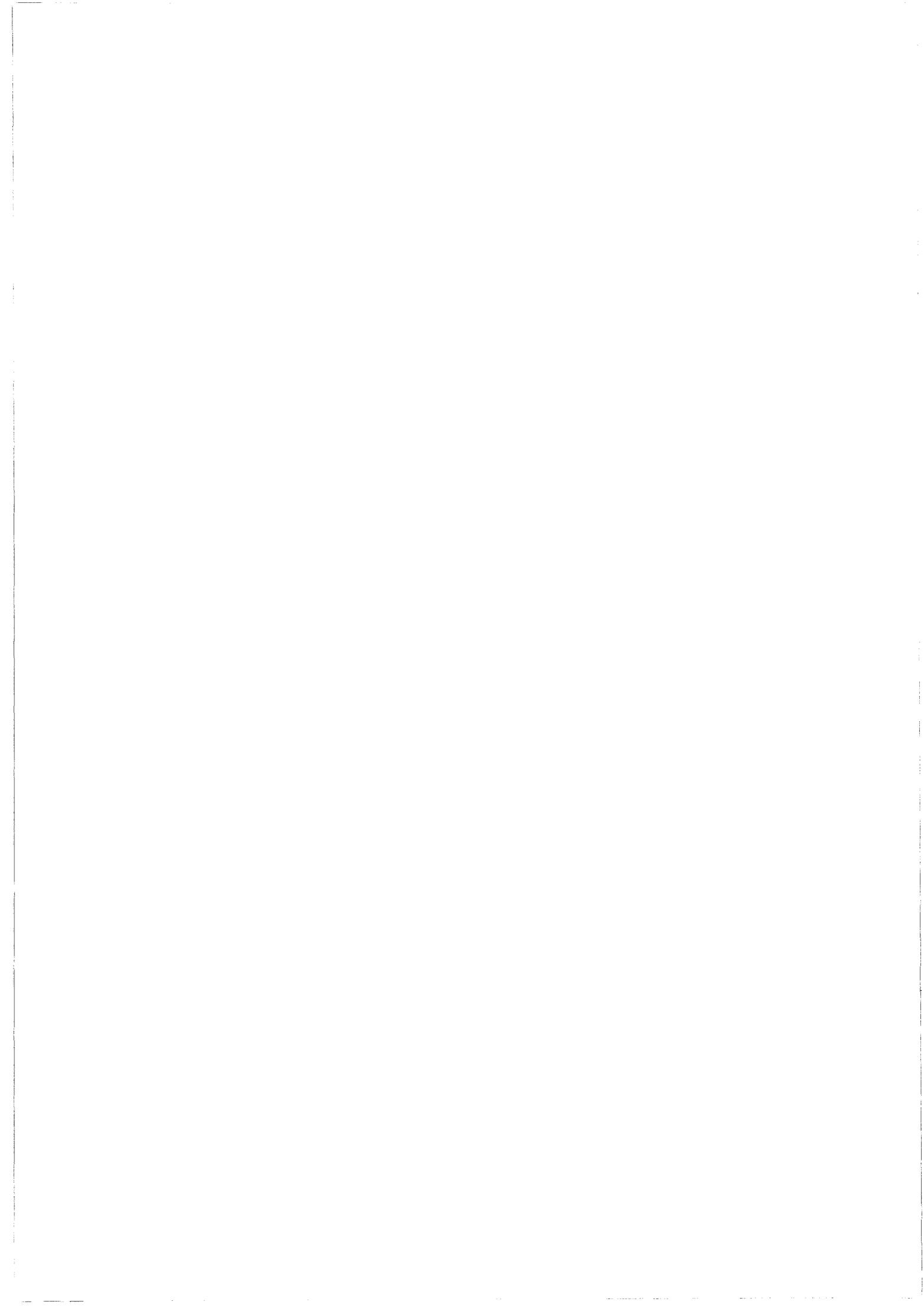


Figure 4.27c Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Couette, $Re=5000$, comparaison avec l'expérience



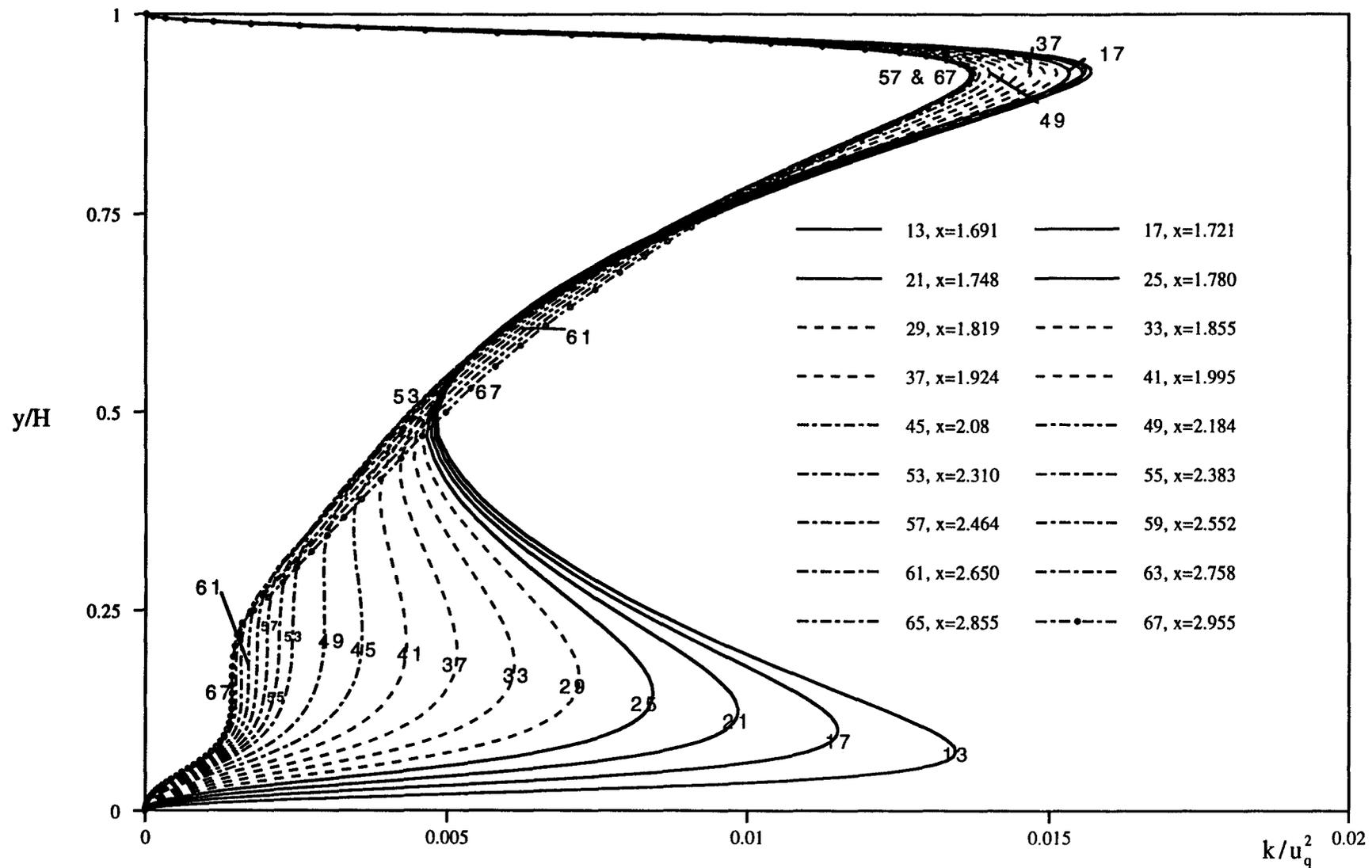


Figure 4.28a Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=5000$, modèle k-epsilon de Chien



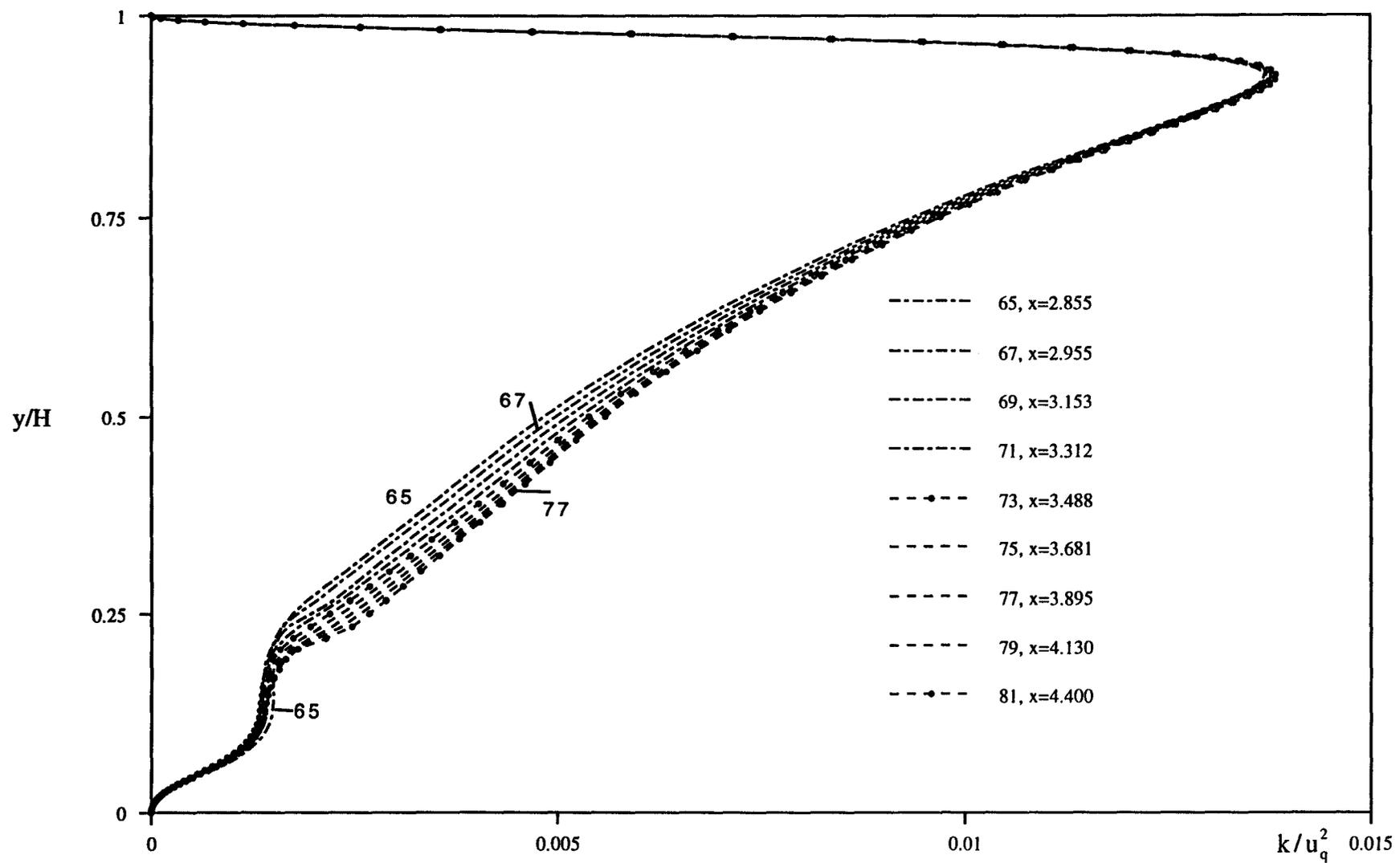
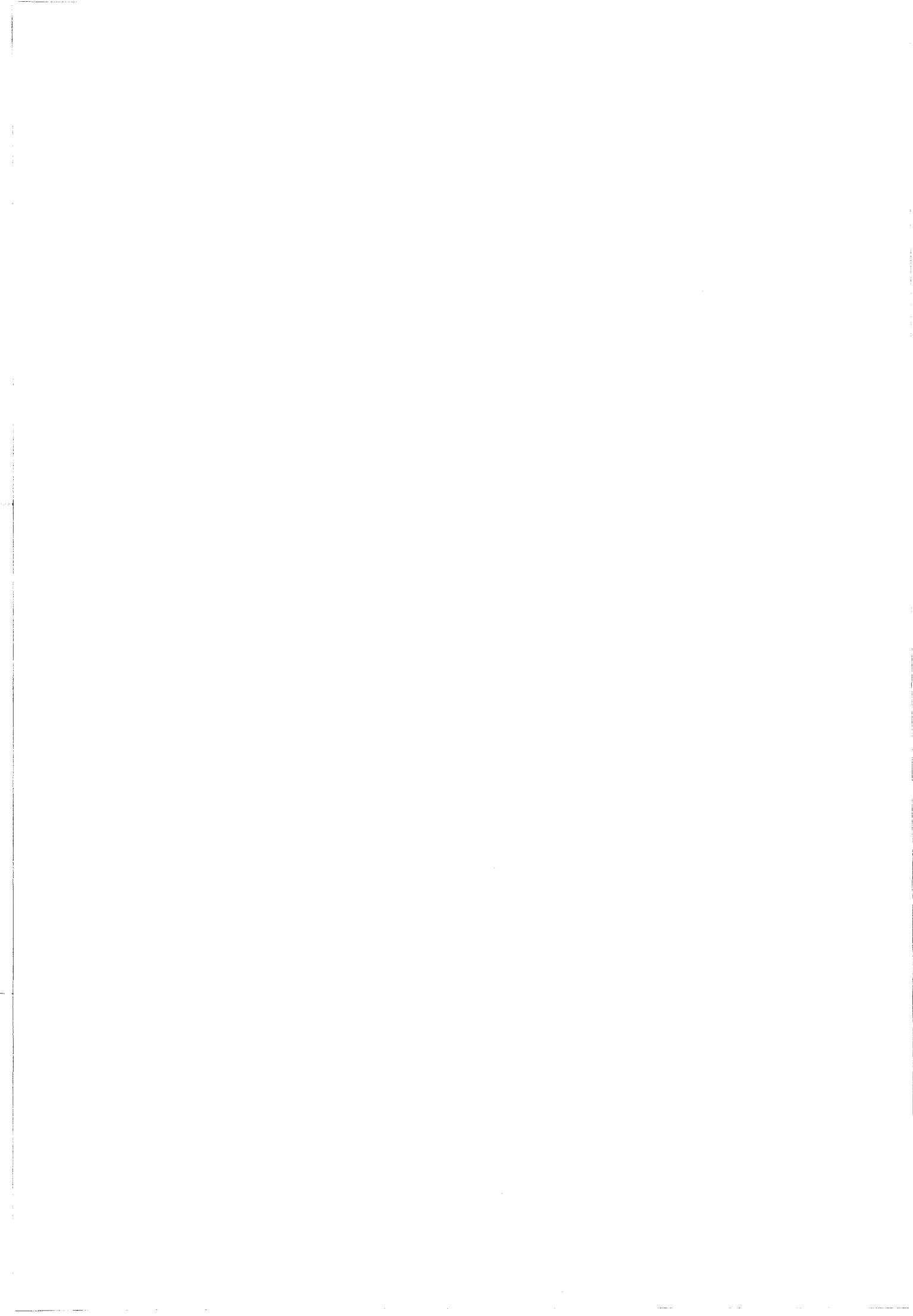


Figure 4.28b Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Poiseuille, $Re=5000$, modèle k-epsilon de Chien



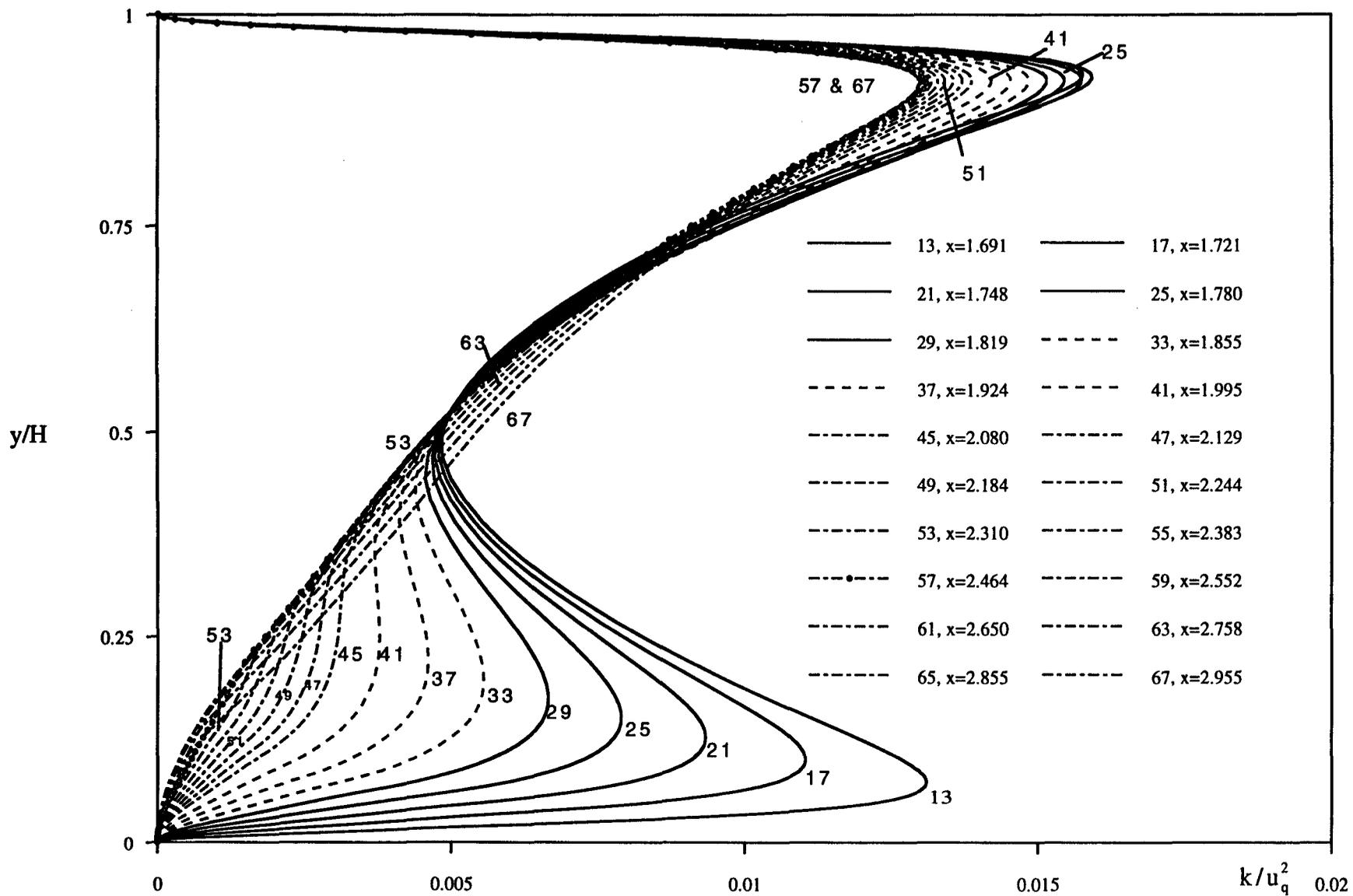
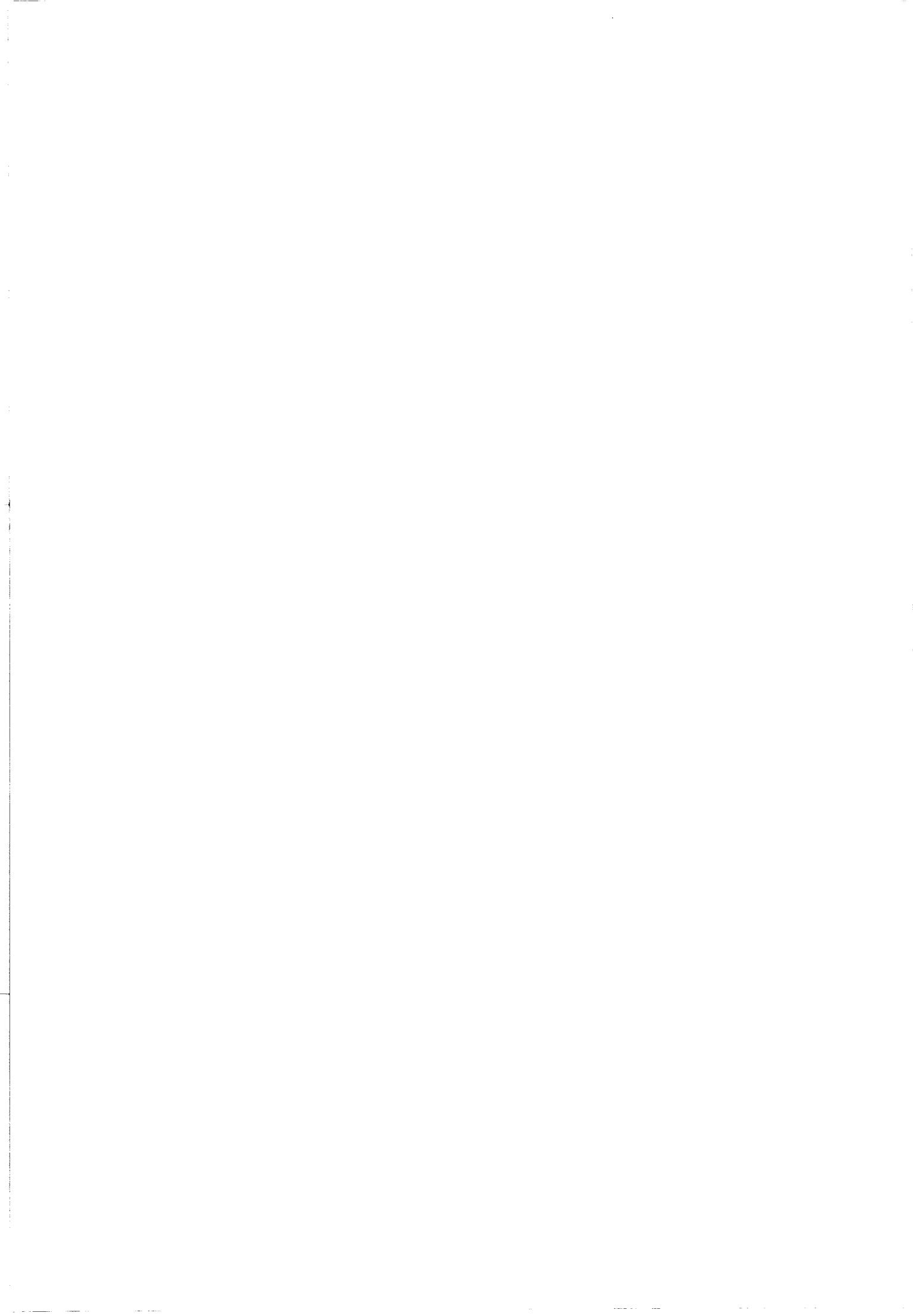


Figure 4.29a Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$, modèle k - ϵ de Chien



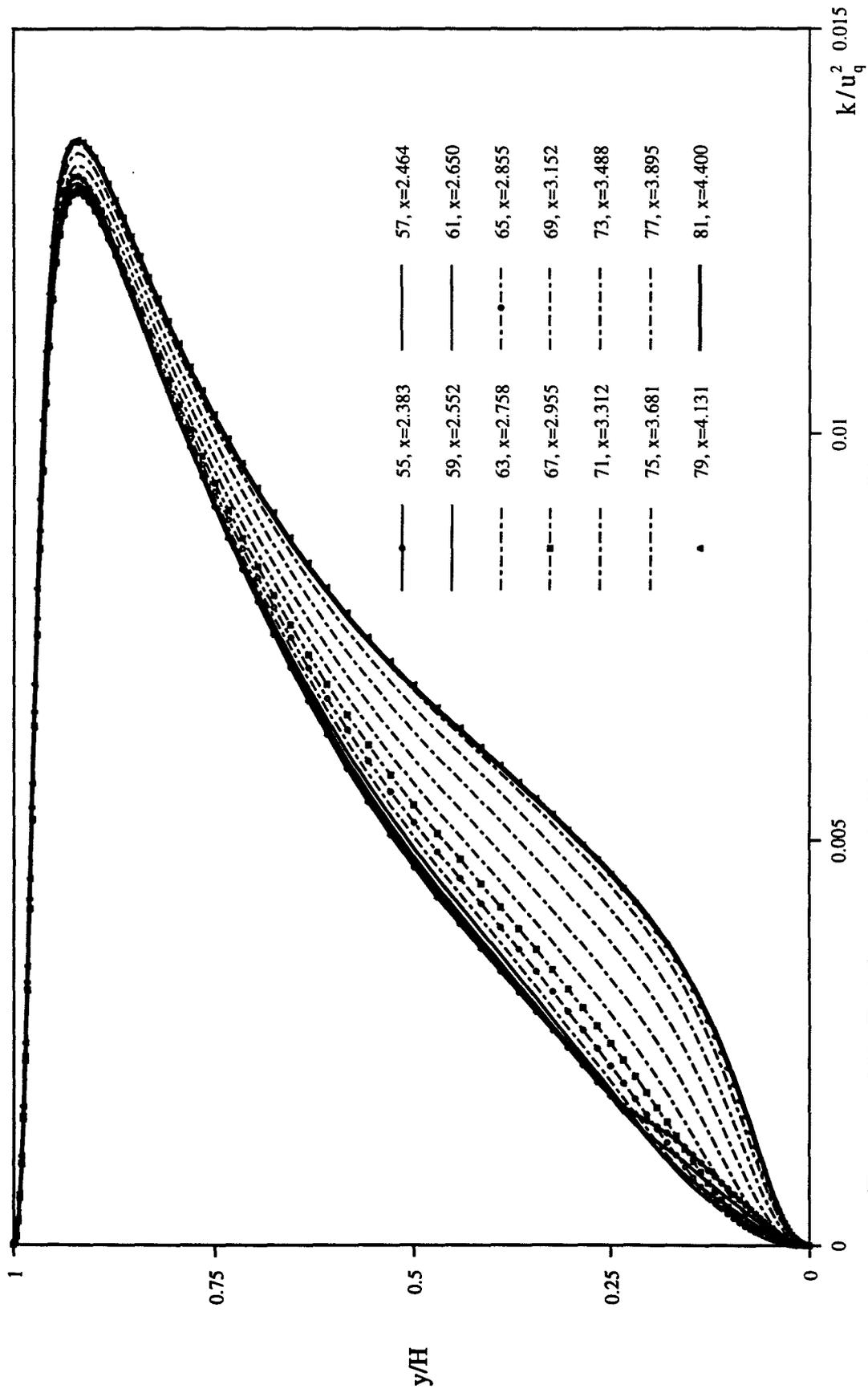


Figure 4.29b Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type intermédiaire, $Re=5000$, modèle k-epsilon de Chien



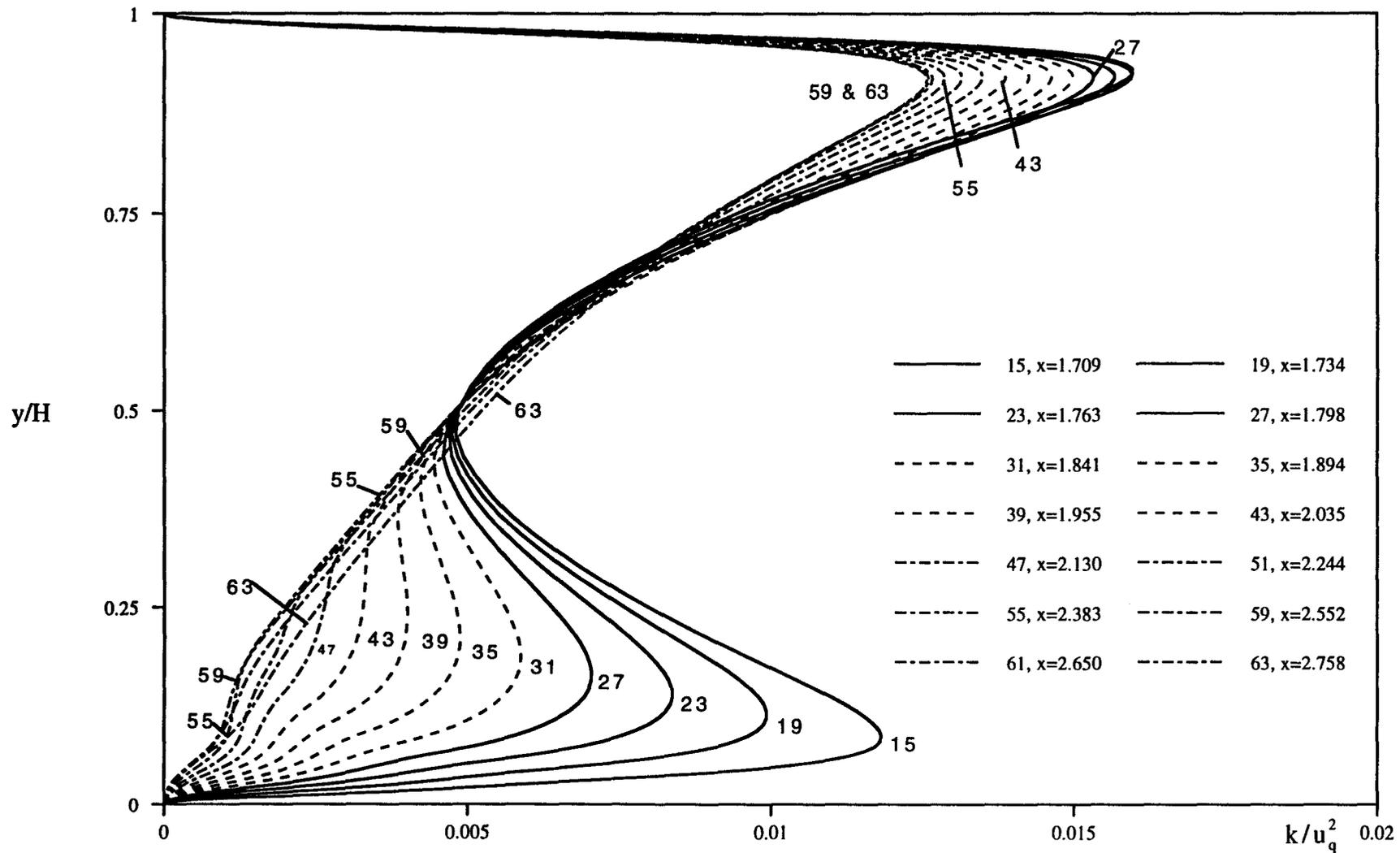
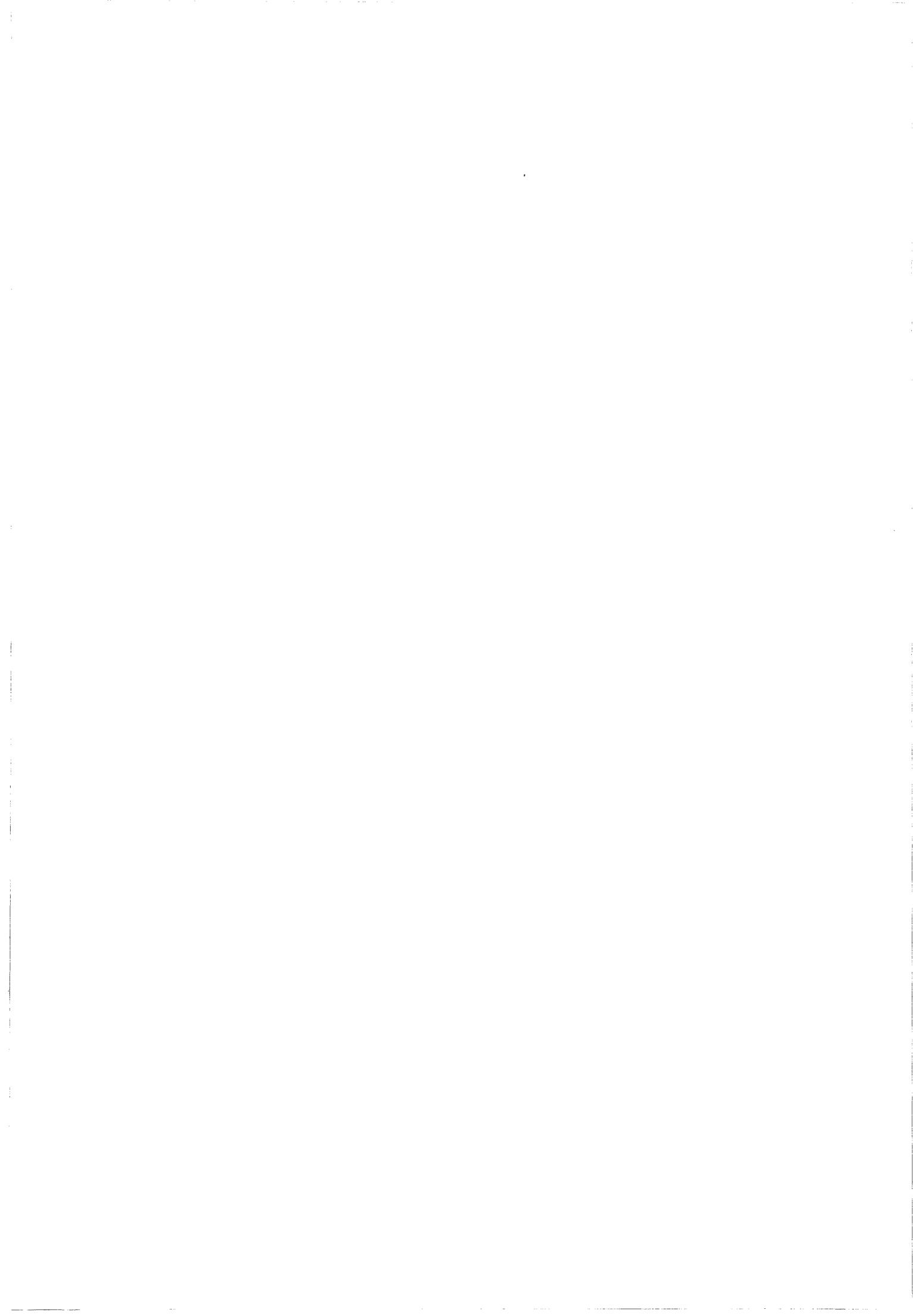


Figure 4.30a Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Couette, $Re=5000$, modèle k-epsilon de Chien



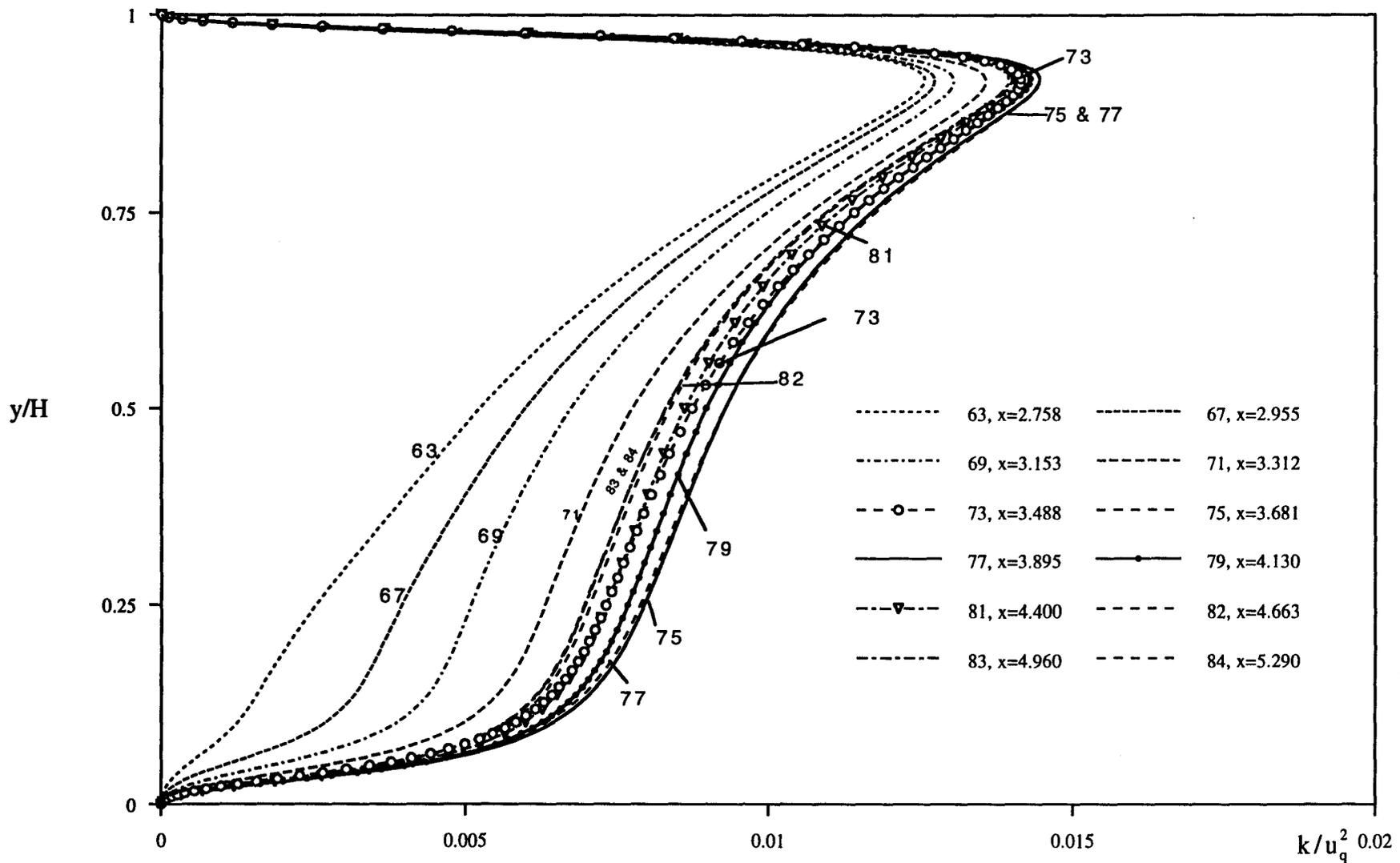
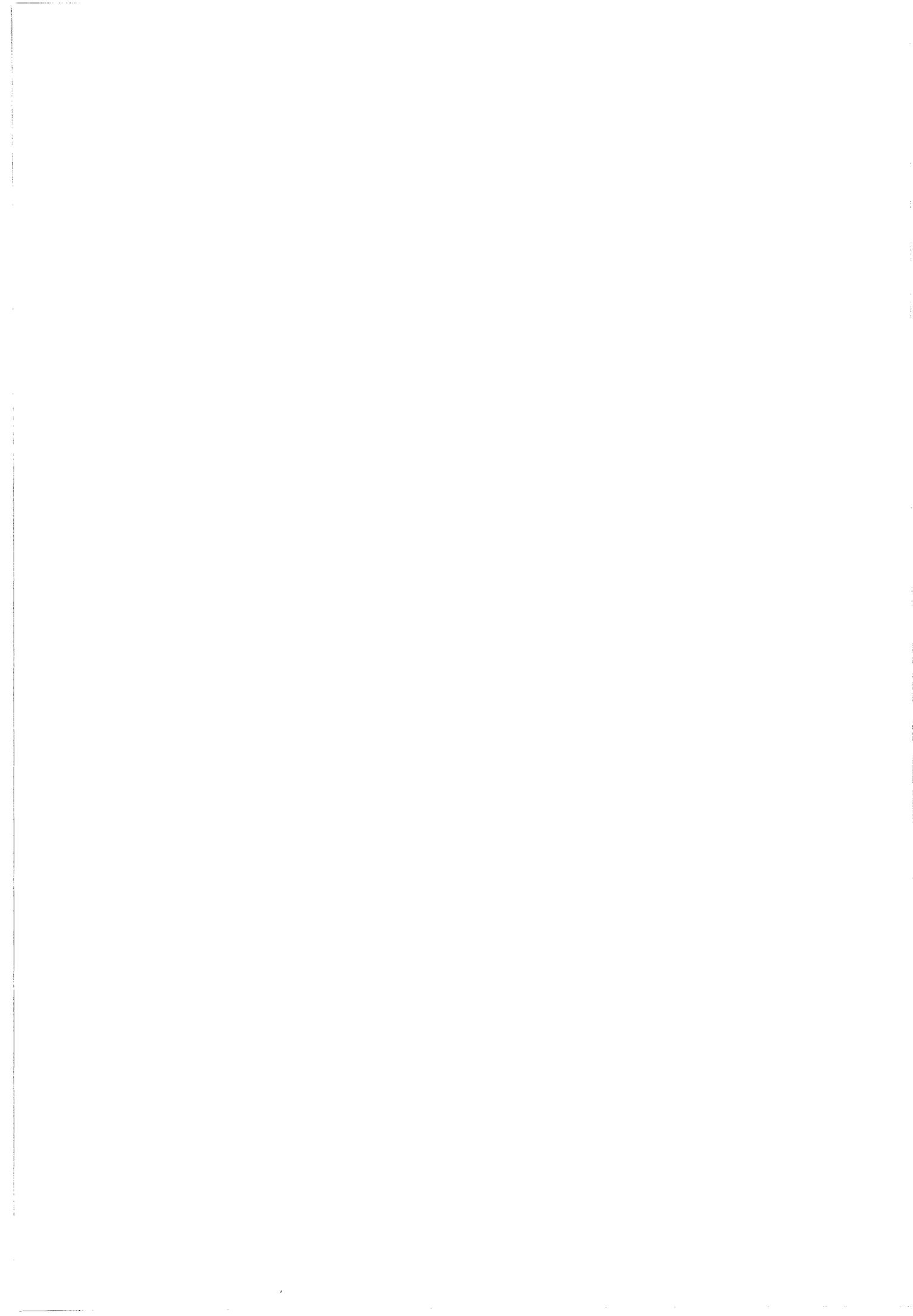


Figure 4.30b Etablissement de l'énergie turbulente pour l'écoulement de type Couette, $Re=5000$, modèle k-epsilon de Chien



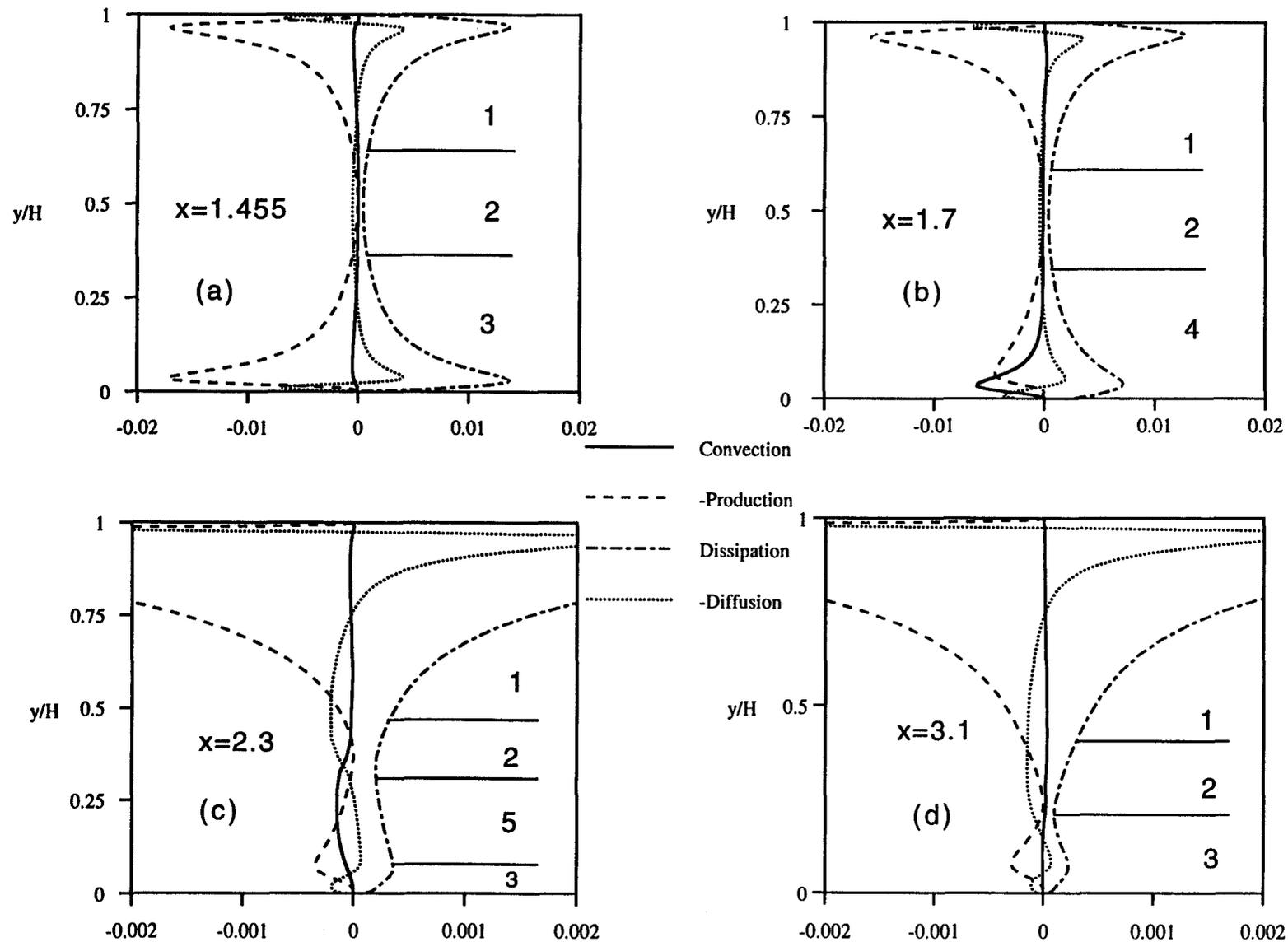
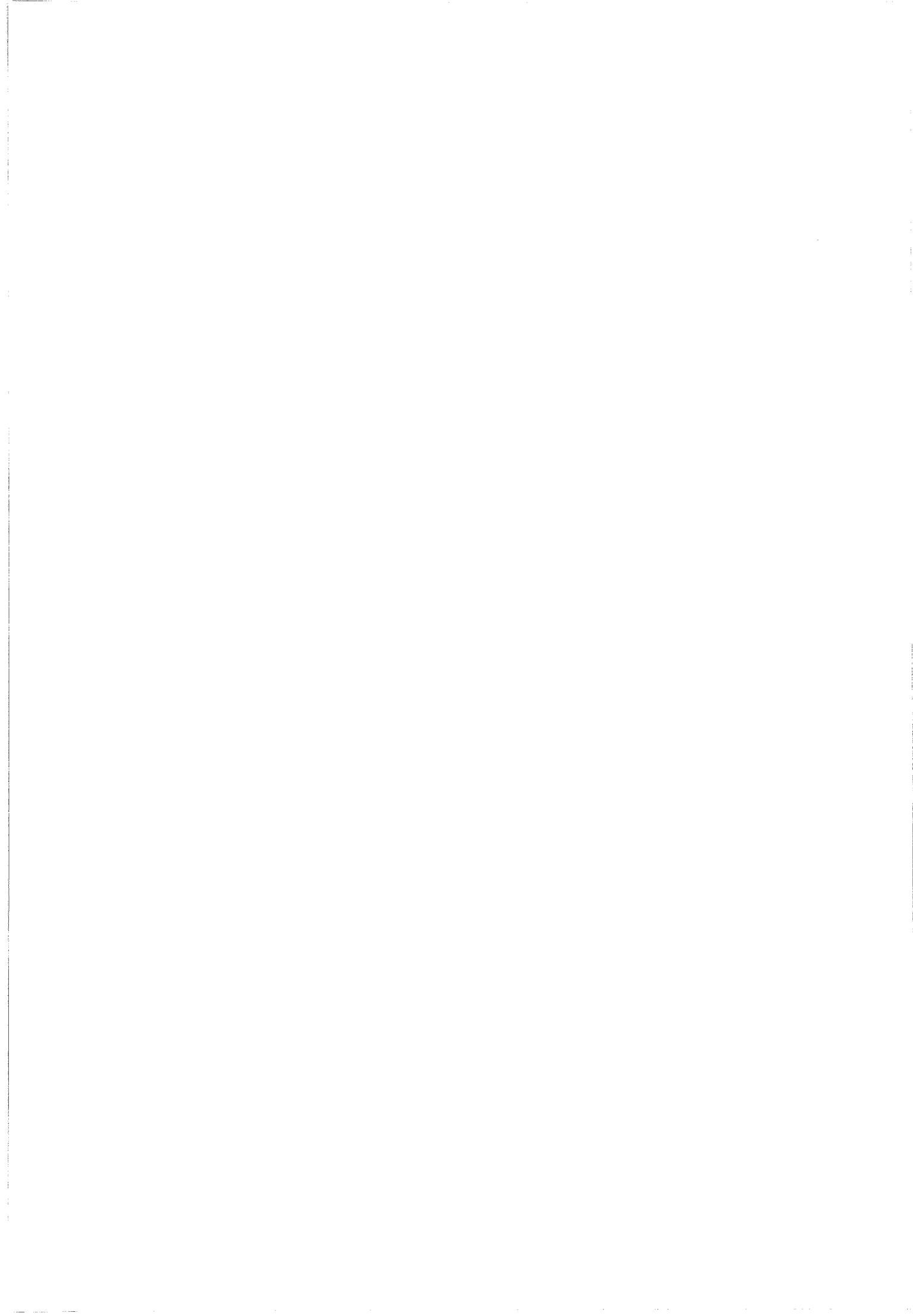


Figure 4.31 Bilan des termes de l'équation de transport pour k , type Poiseuille, valeurs adimensionnées par la vitesse débitante et la hauteur du canal



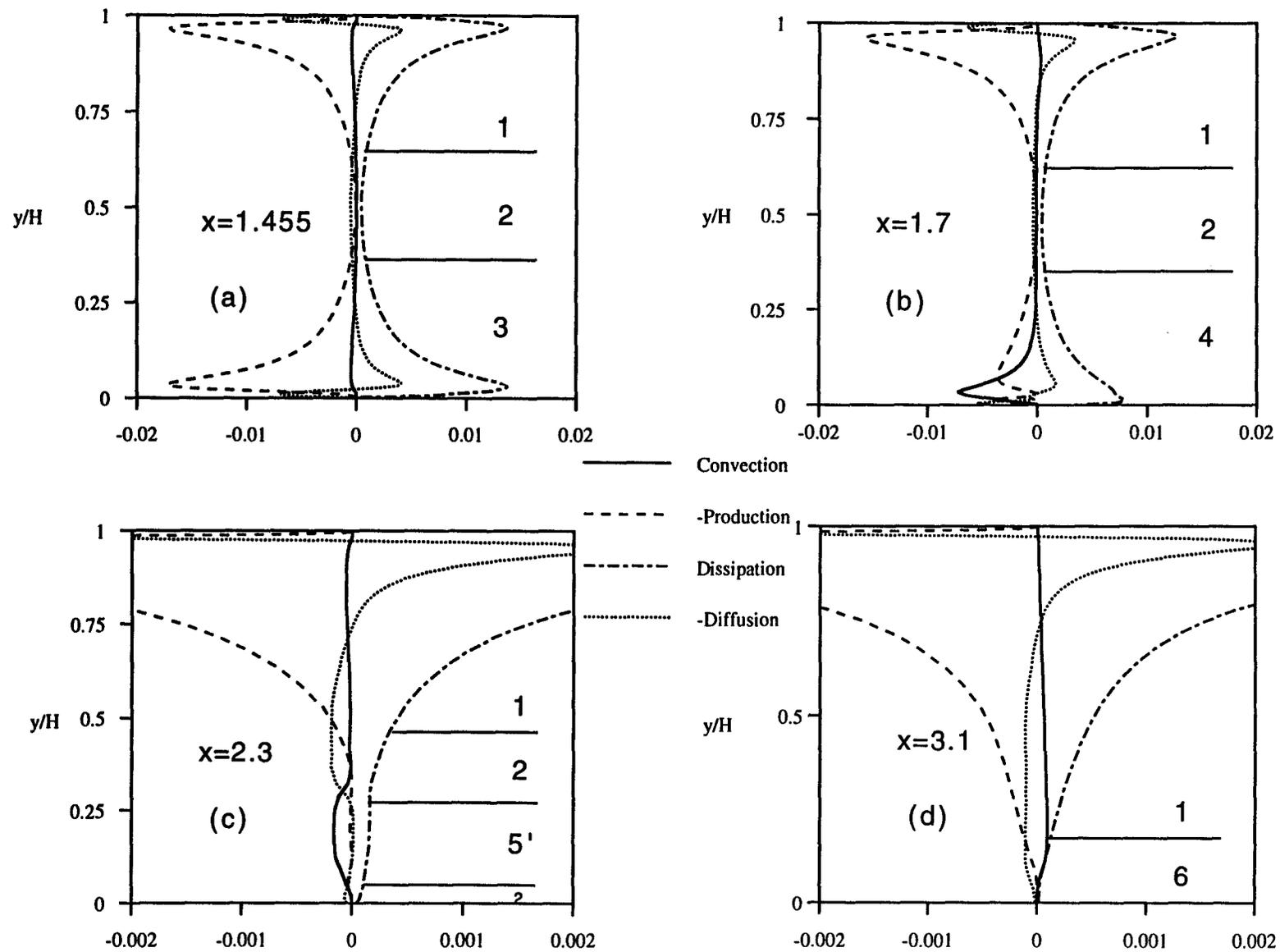
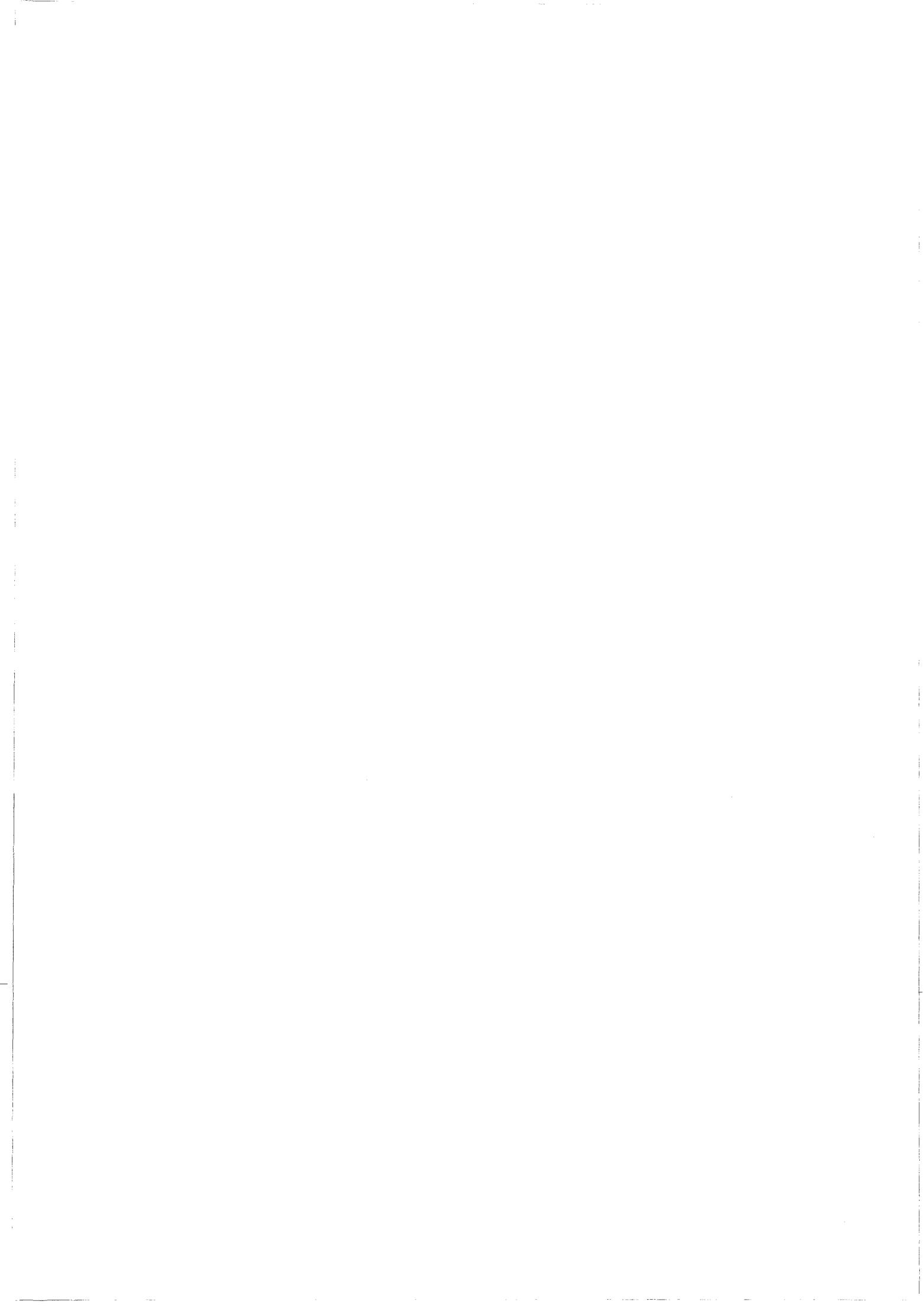


Figure 4.32 Bilan des termes de l'équation de transport pour k , type intermédiaire, valeurs adimensionnées par la vitesse débitante et la hauteur du canal



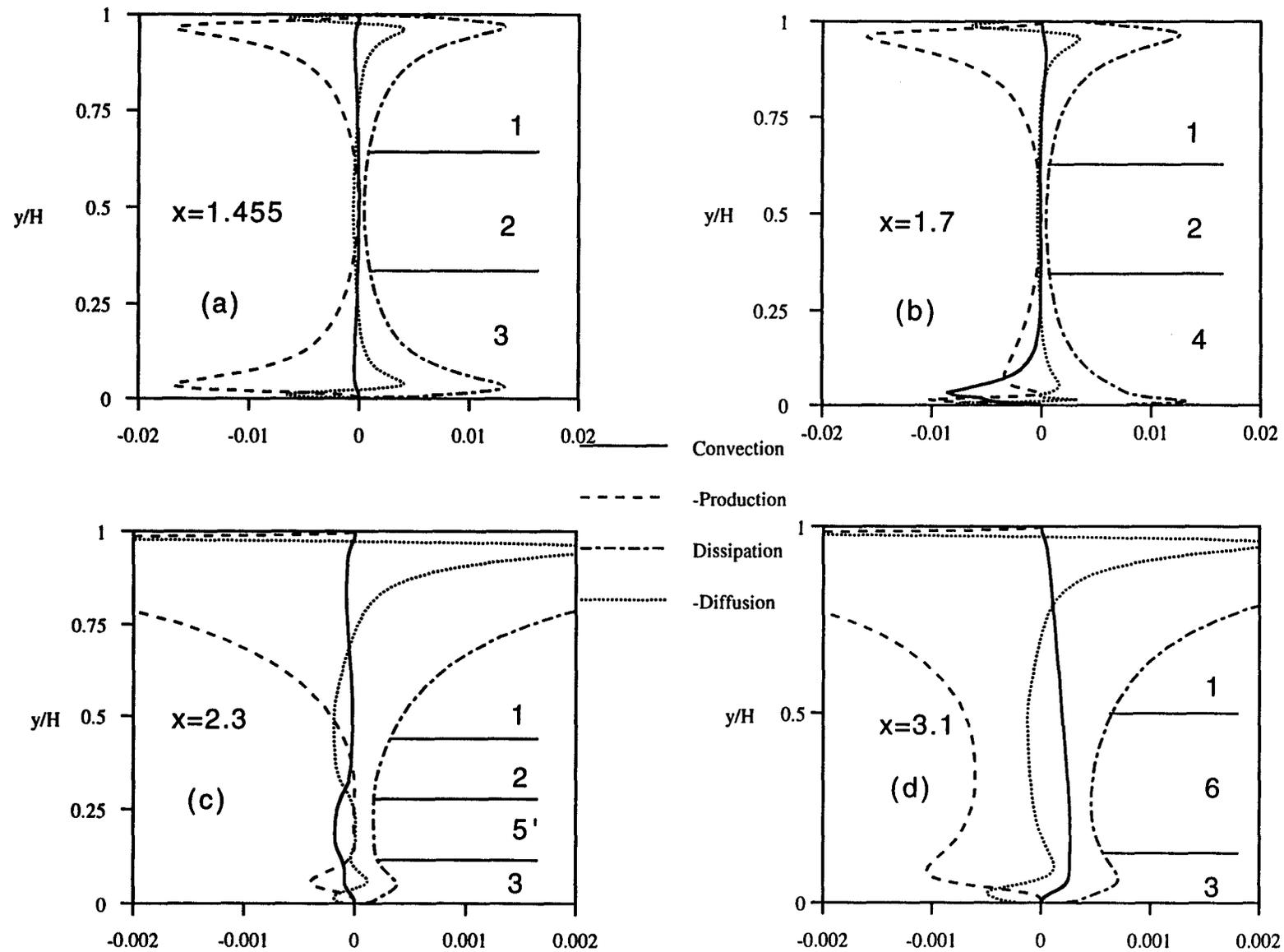


Figure 4.33 Bilan des termes de l'équation de transport pour k , type Couette
valeurs adimensionnées par la vitesse débitante et la hauteur du canal



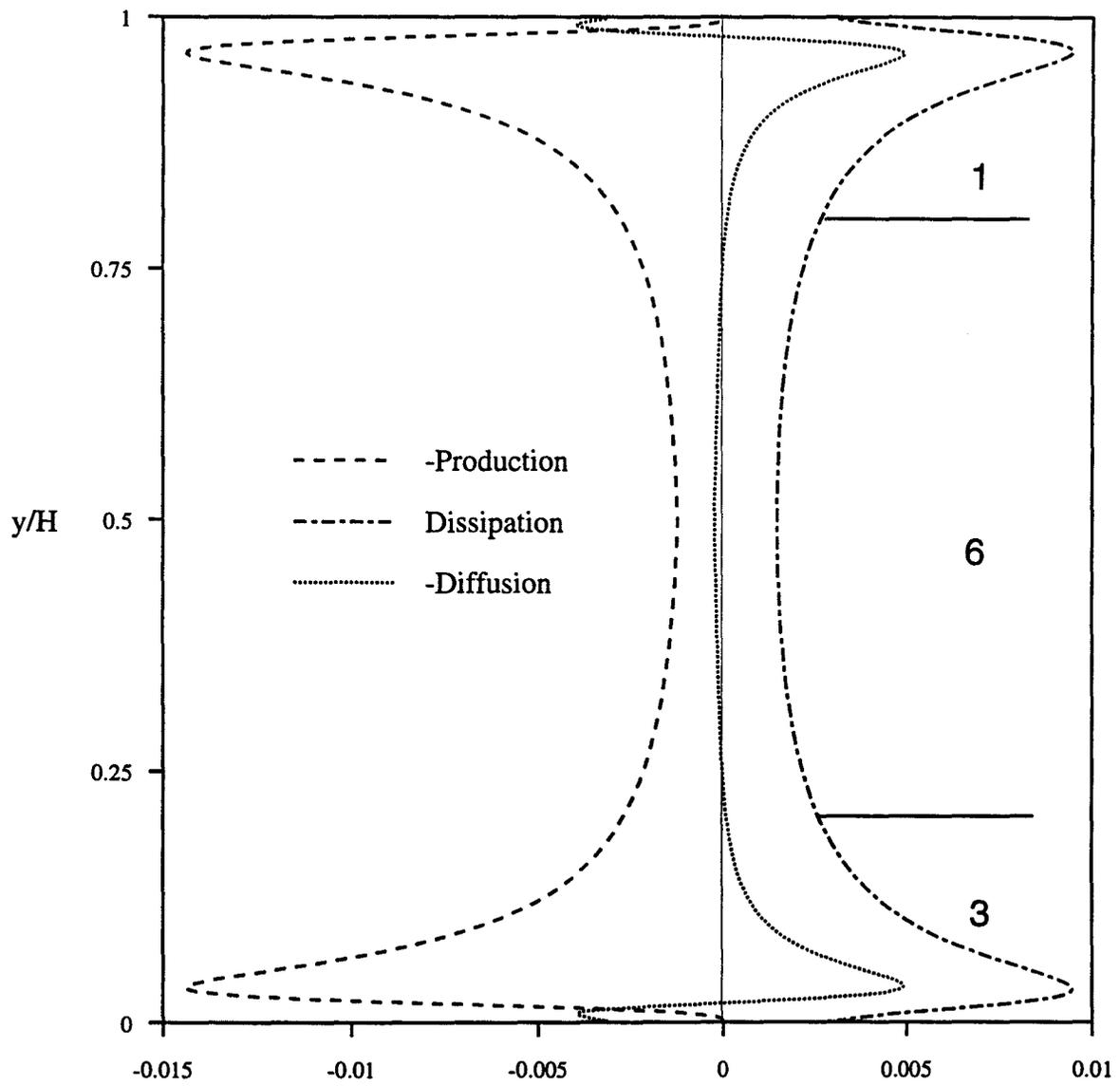
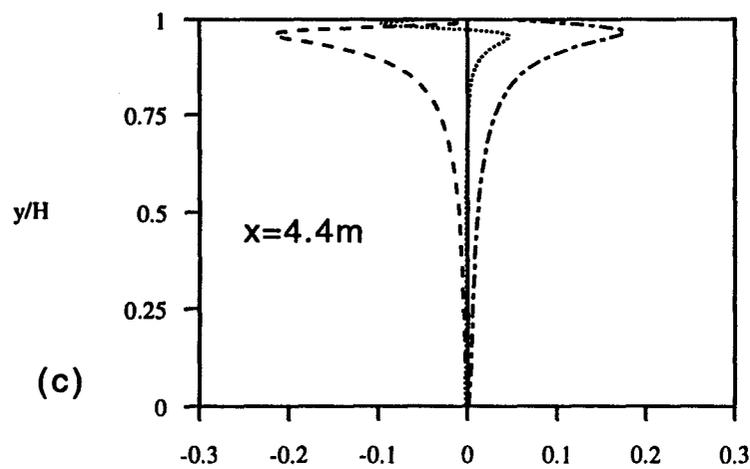
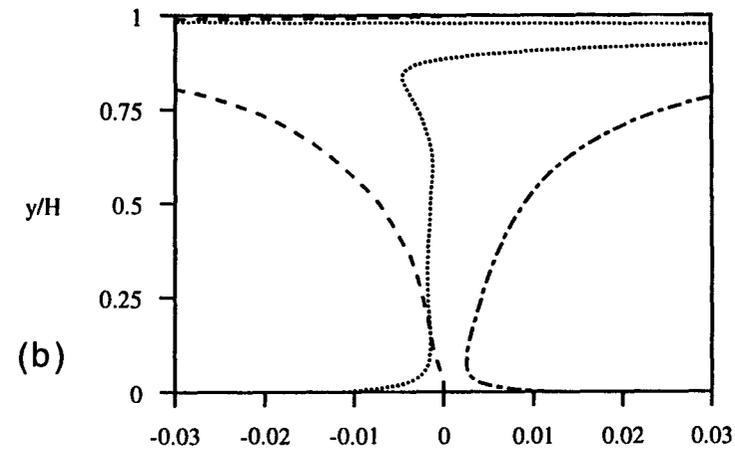
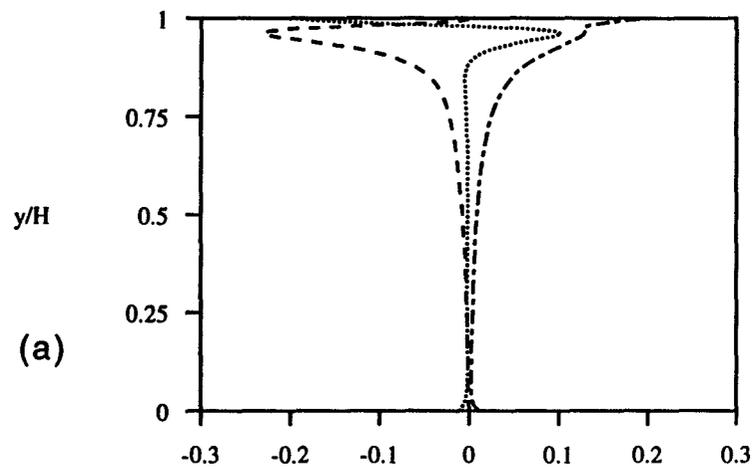


Figure 4.34 Bilan des termes de l'équation de transport pour k , écoulement de Couette pur, valeurs adimensionnées par la vitesse débitante et la hauteur du canal





— Convection
 - - - - - Production
 - · - · - · Dissipation
 ······ Diffusion

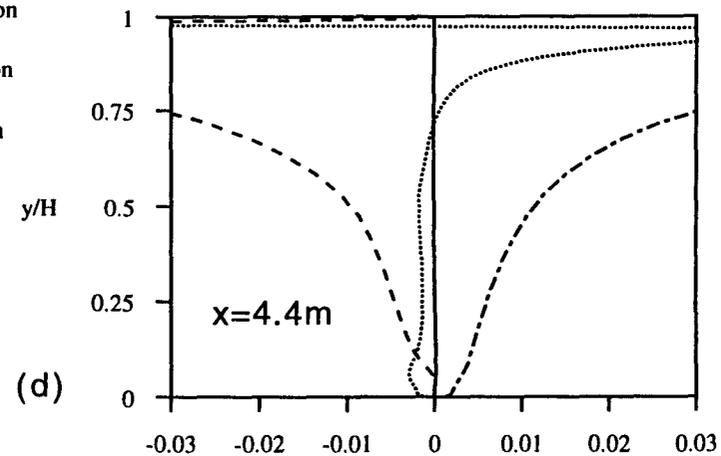


Figure 4.35 Bilan des termes de l'équation de transport pour k , (a) et (b) DNS de Kuroda et al. (1993), (c) et (d) modèle k -epsilon, valeurs adimensionnées par la vitesse de frottement de la paroi supérieure et la viscosité cinématique



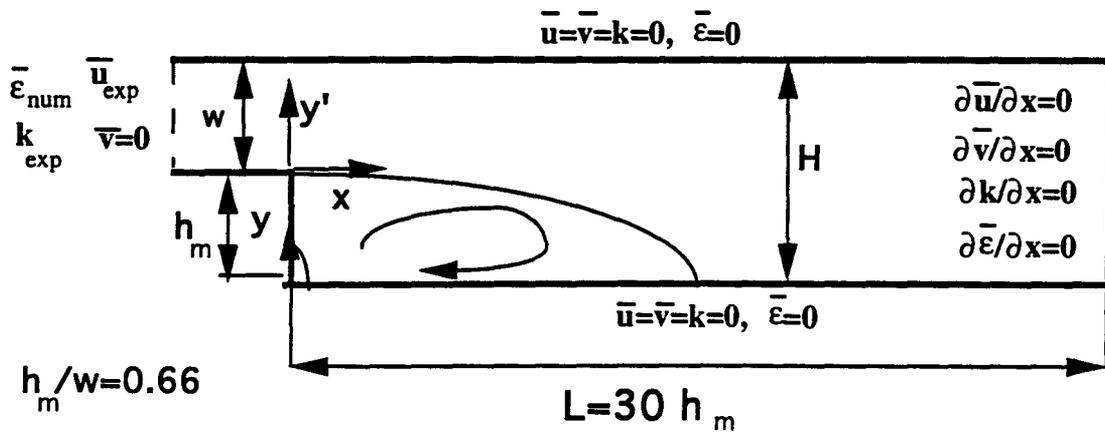


Figure 4.36a Ecoulement sur une marche descendante: géométrie et conditions aux frontières

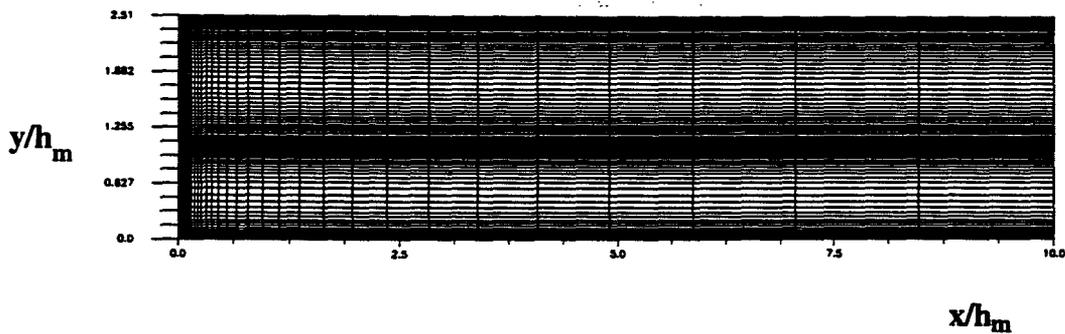
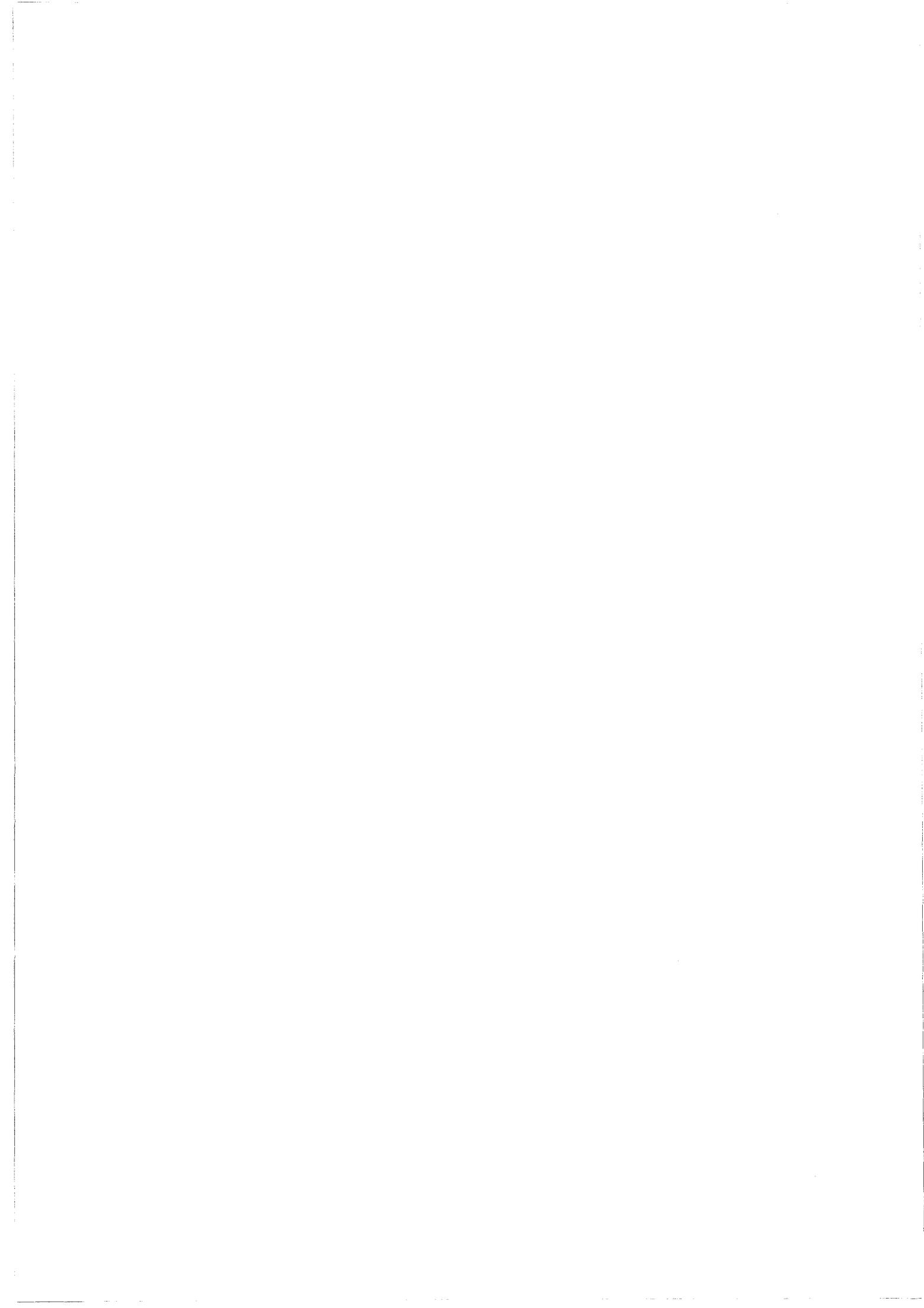


Figure 4.36b maillage constitué de 50*150 éléments bilinéaires, seul la région $0 < x/h_m \leq 10$ est présentée



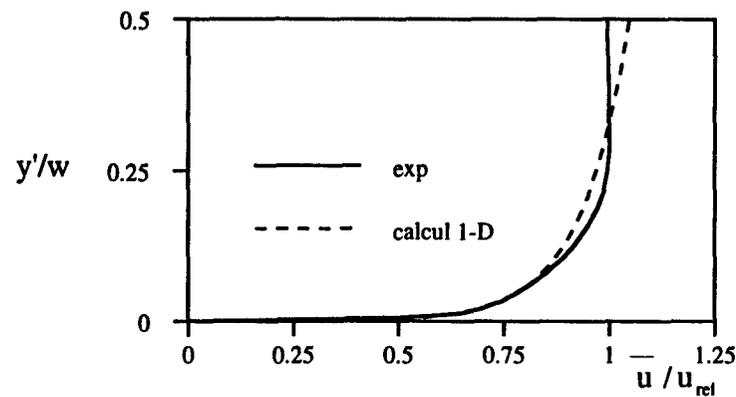


Figure 4.37a Profils de vitesse d'entrée

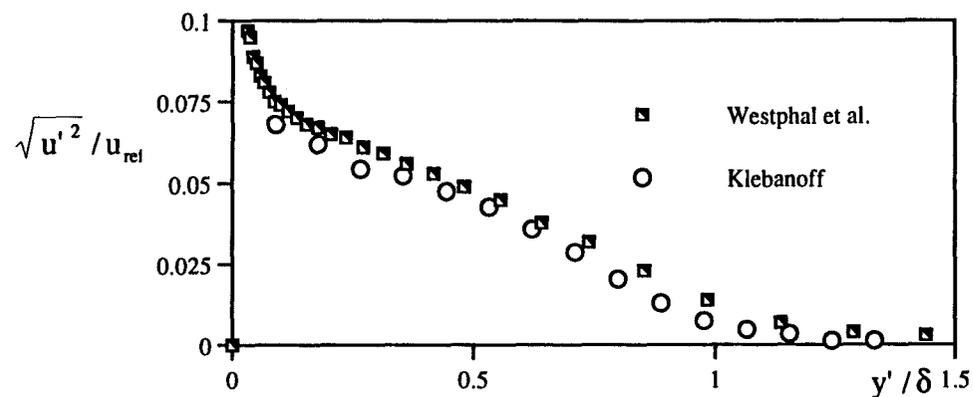


Figure 4.37b Profils de corrélation normale d'entrée

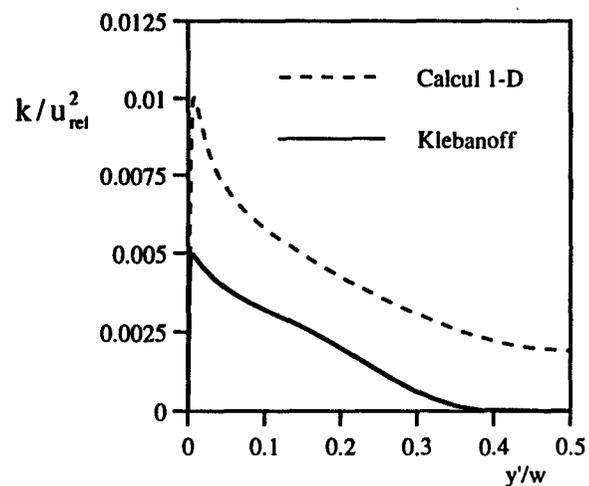


Figure 4.37c Profils d'entrée de k

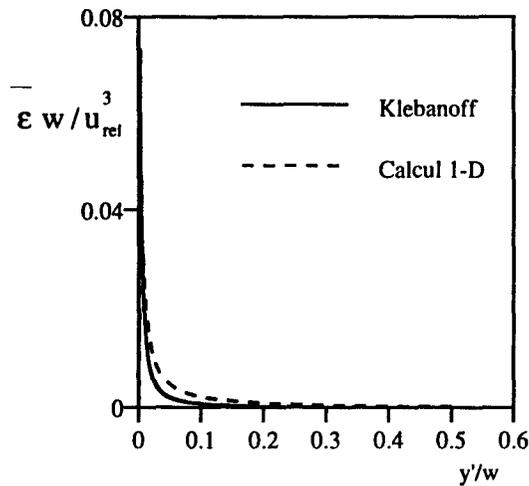


Figure 4.37d Profils d'entrée de epsilon

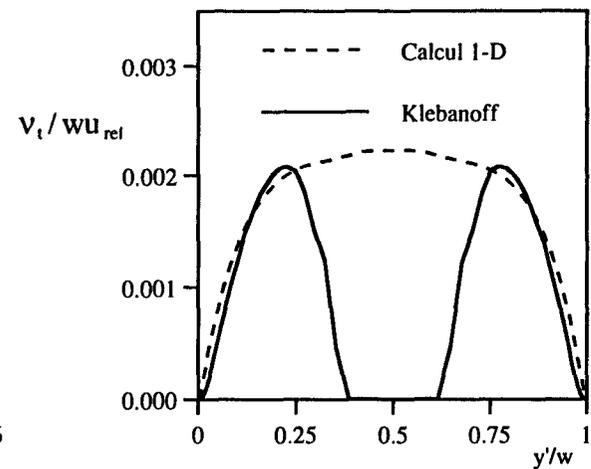


Figure 4.37e Profils d'entrée de la viscosité

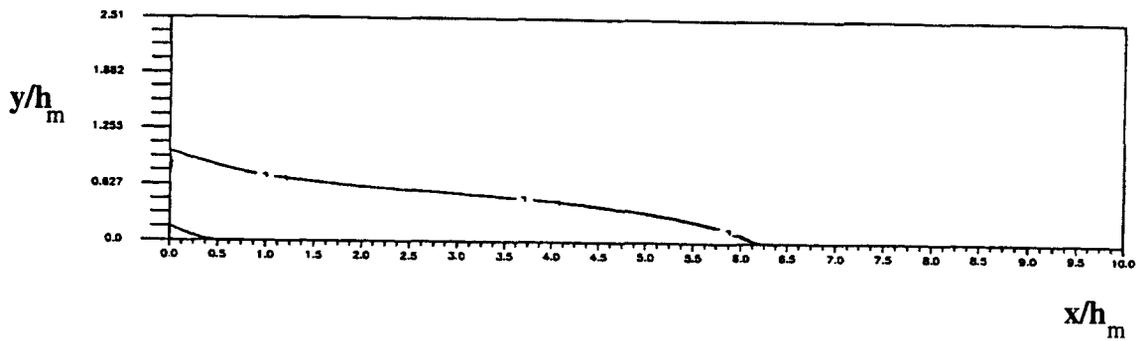
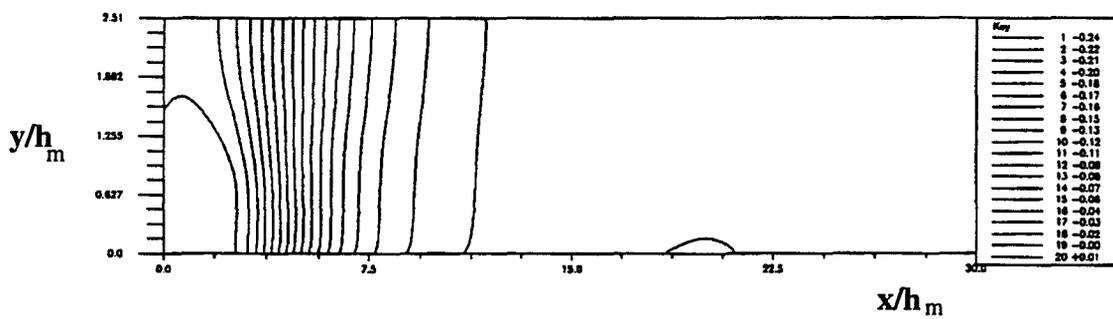
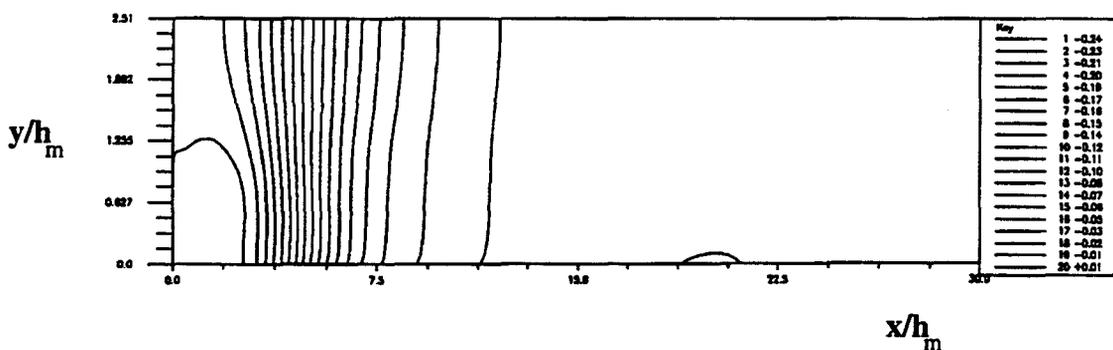


Figure 4.38 Iso-vitesse $\bar{u}=0$ obtenue à l'aide des deux maillages

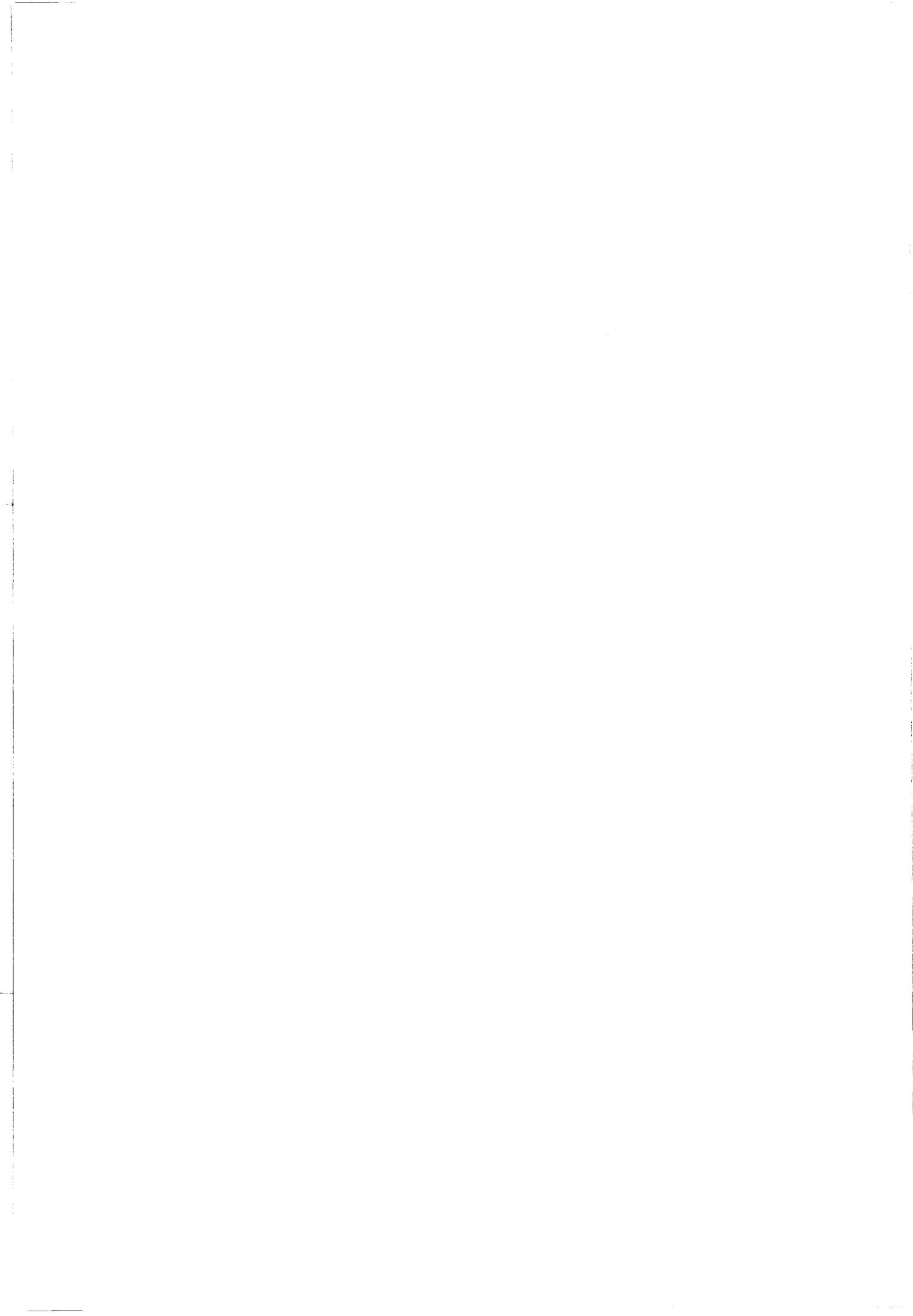


(a)



(b)

Figure 4.39 Isobares p^* , (a) formulation SUPG(Q1P0), (b) GLS(Q1Q1)



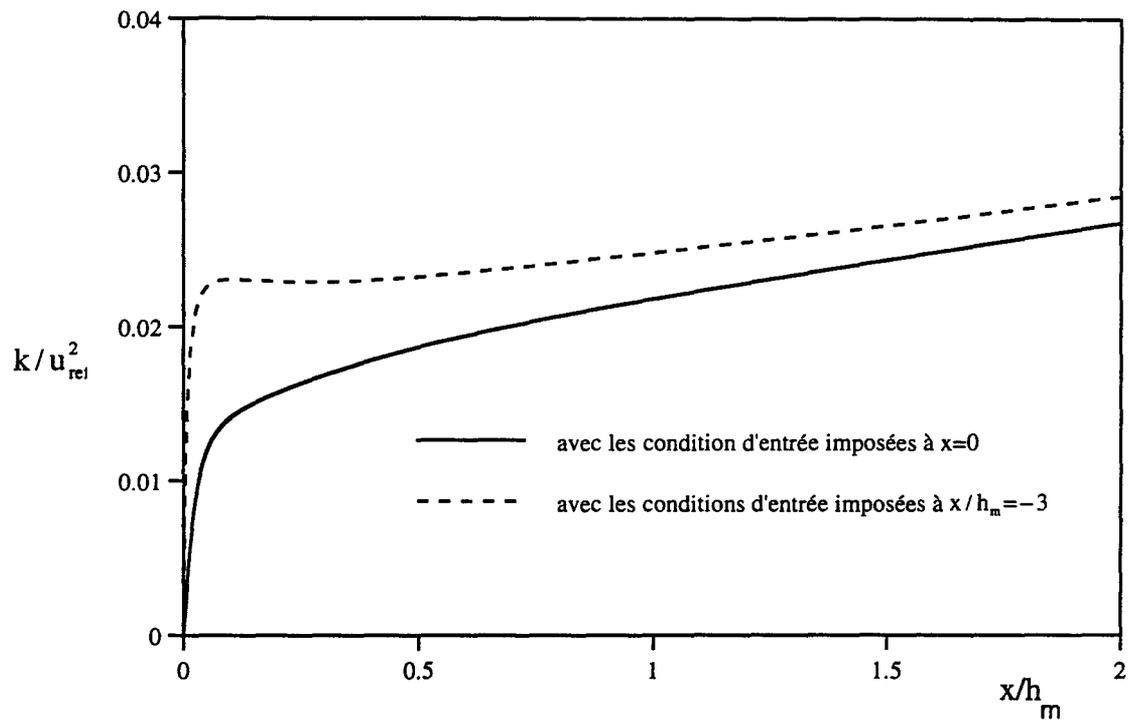


Figure 4.40a Evolution longitudinale de k ,
 $y/h_m = 1.0$

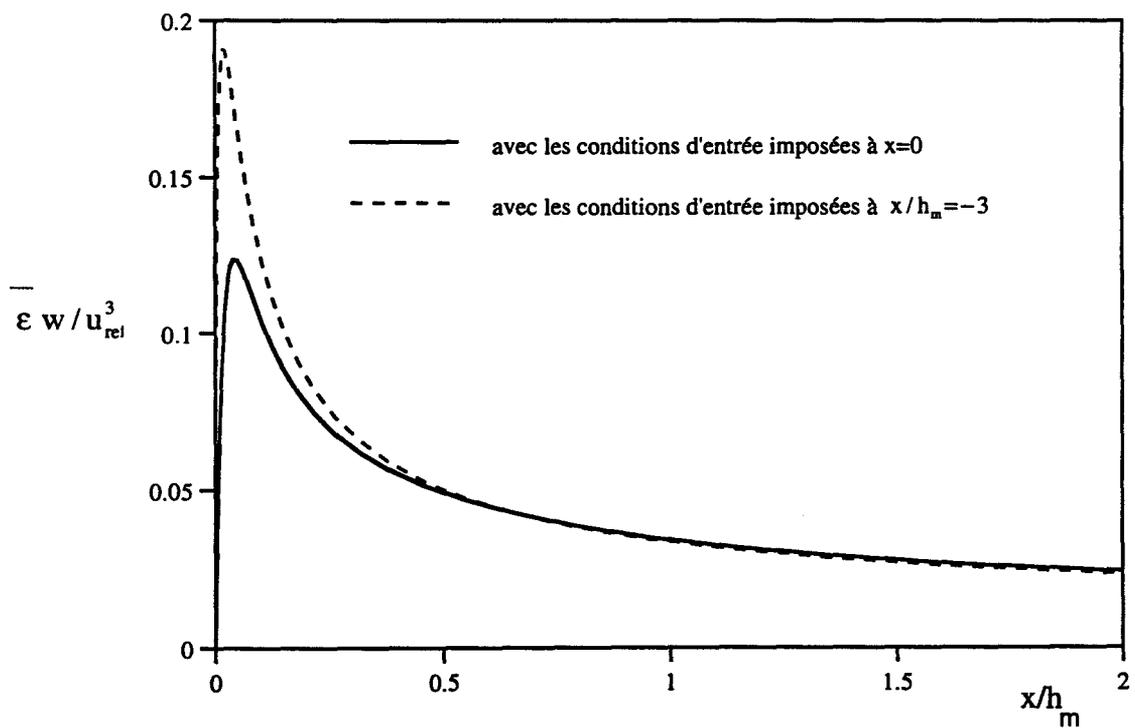


Figure 4.40b Evolution longitudinale de epsilon,
 $y/h_m = 1.0$



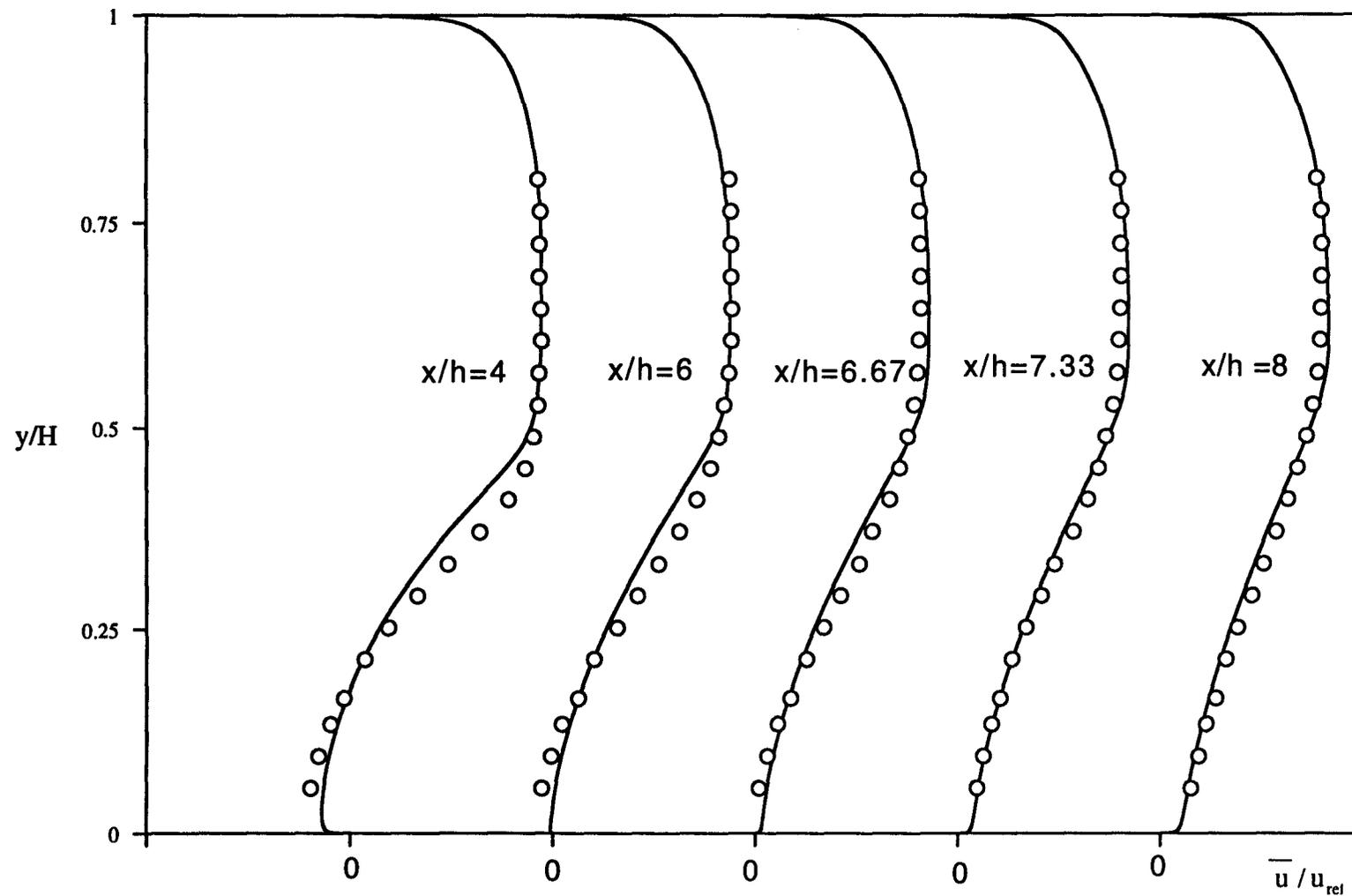


Figure 4.41a Evolution de la vitesse moyenne en différentes stations

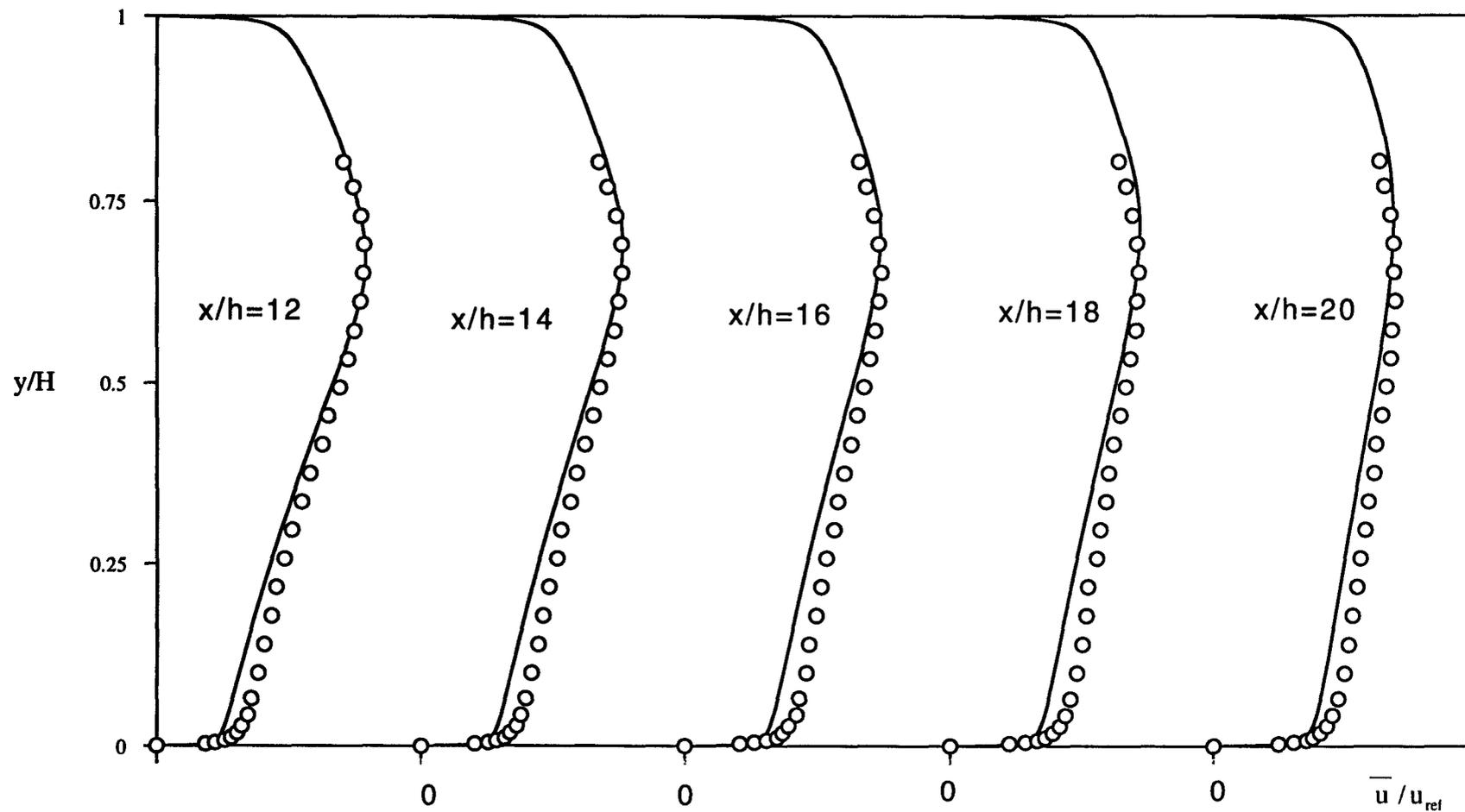


Figure 4.41b Evolution de la vitesse moyenne longitudinale en différentes stations

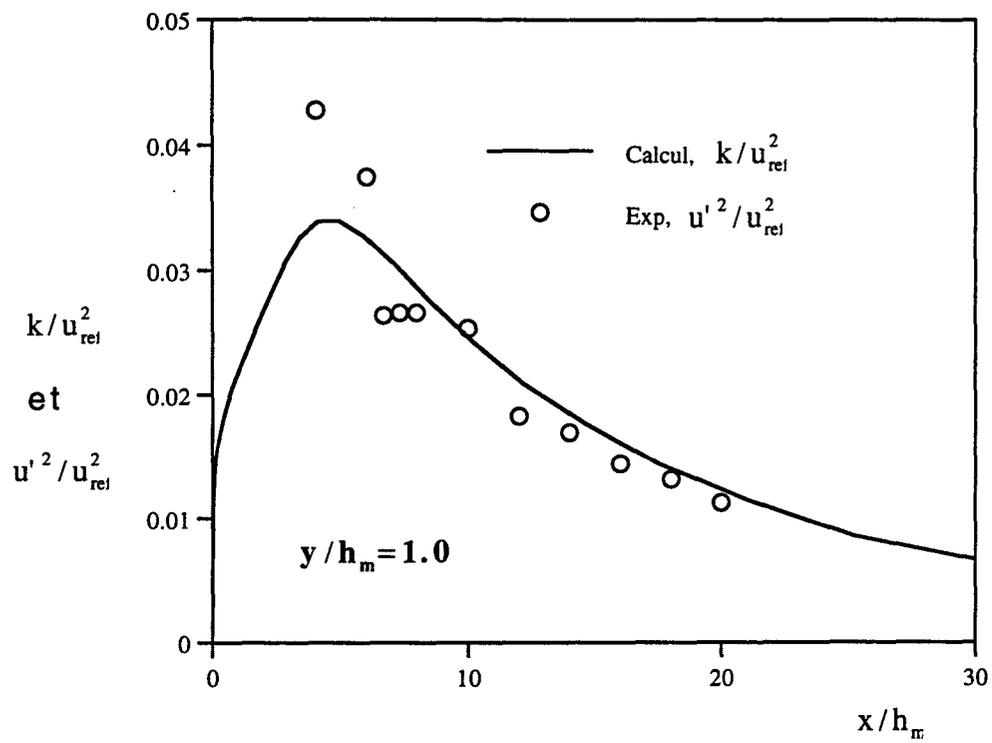
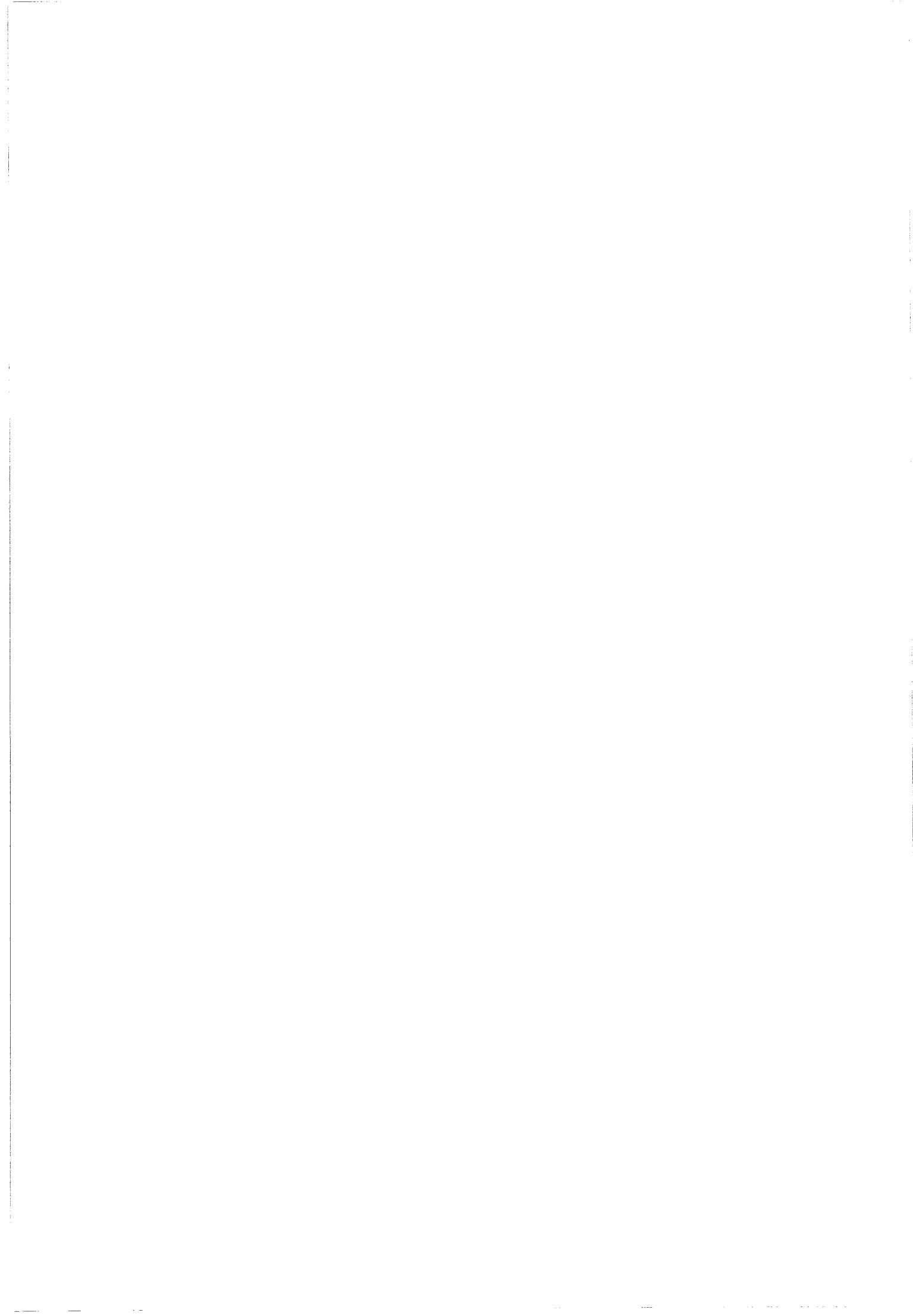


Figure 4.42 Evolution longitudinale d'énergie turbulente et de corrélation normale



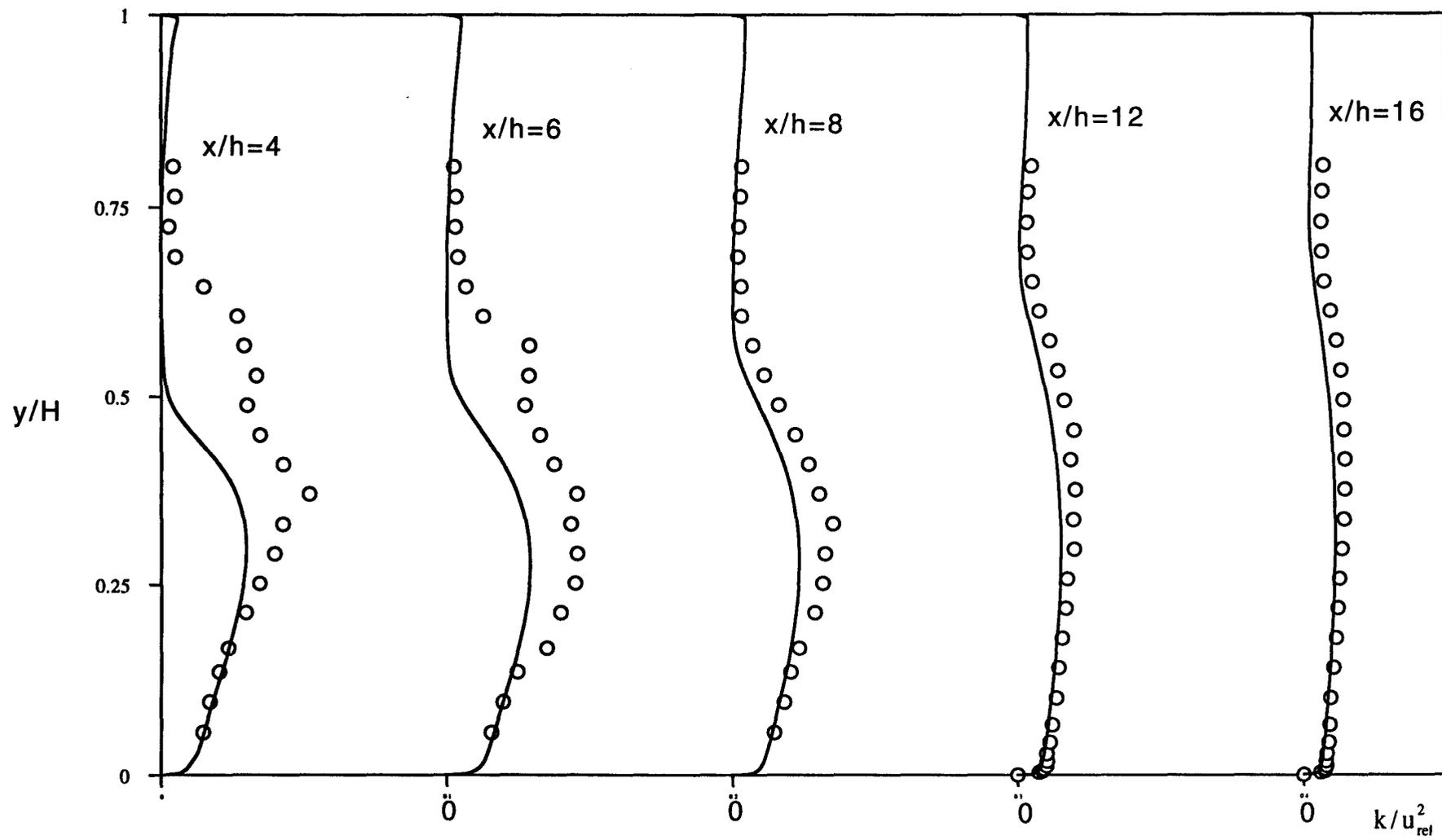
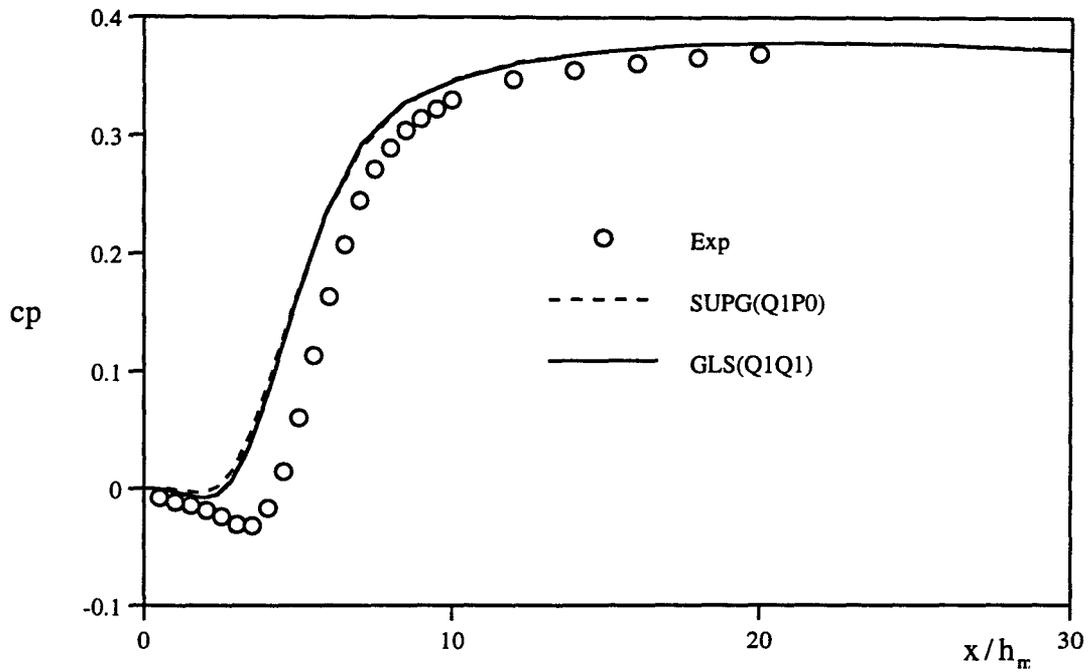
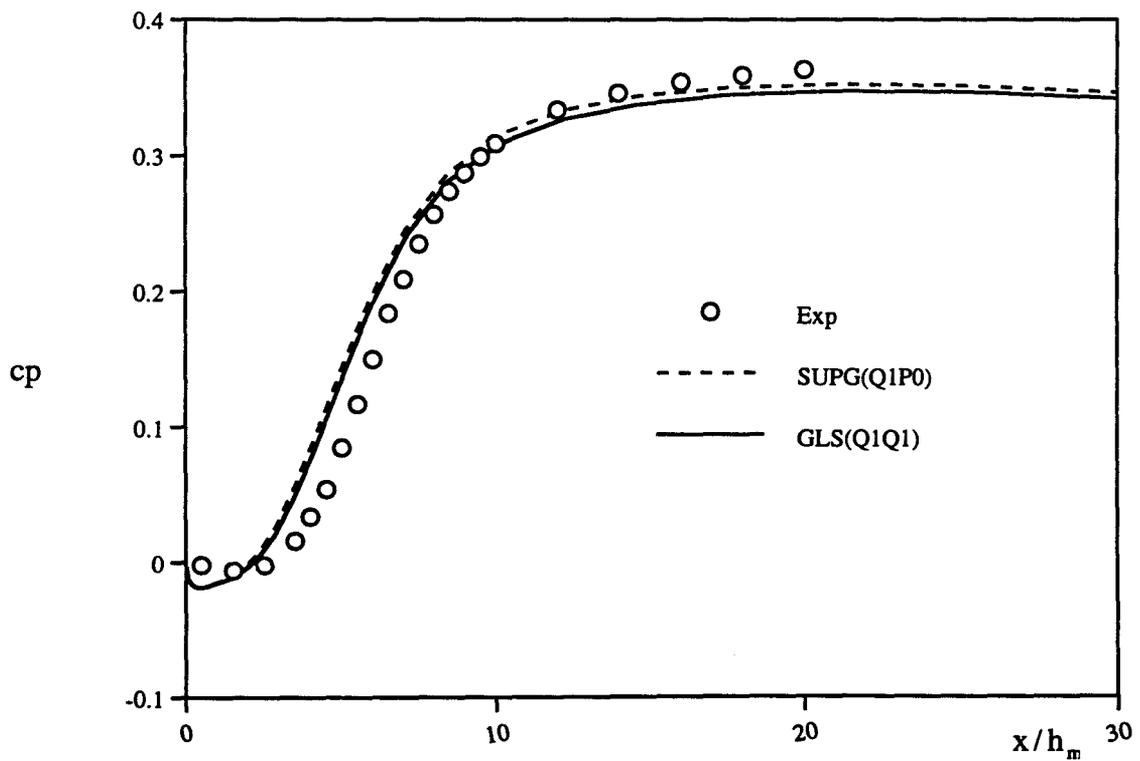


Figure 4.43 Evolution de l'énergie turbulente en différentes stations





(a)



(b)

Figure 4.44 Variation du coefficient de pression (a) paroi inférieure, (b) paroi supérieure



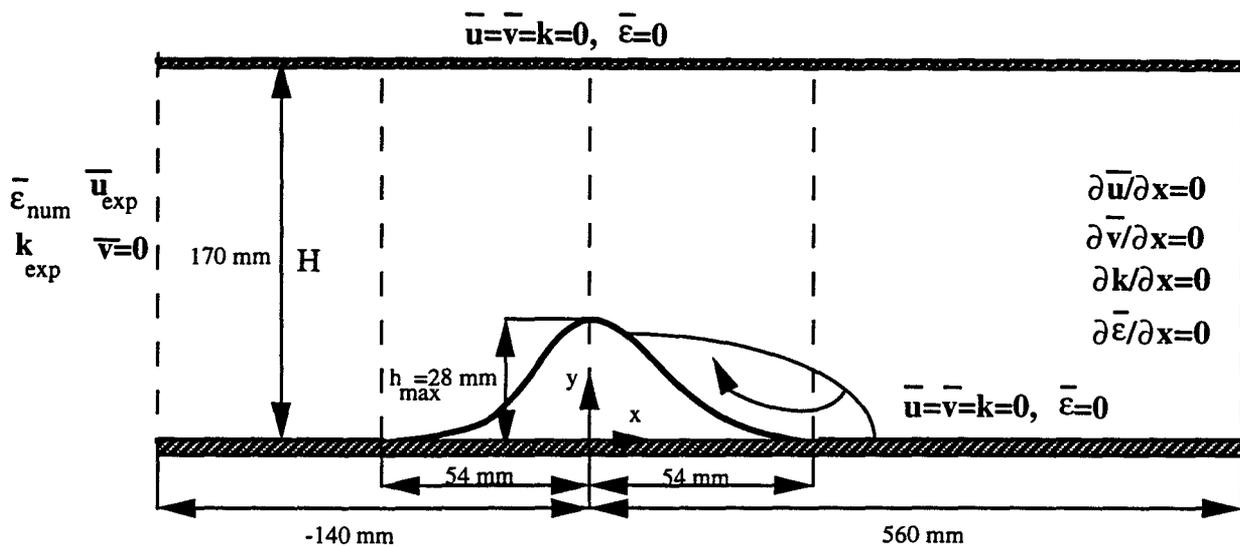


Figure 4.45 Ecoulement sur une bosse, domaine de calcul et conditions aux frontières

Profil de la bosse:

$$0 < x < 9, \quad h = 28 + 6.775070969851e-03 * x^2 - 2.12452777580e-03 * x^3$$

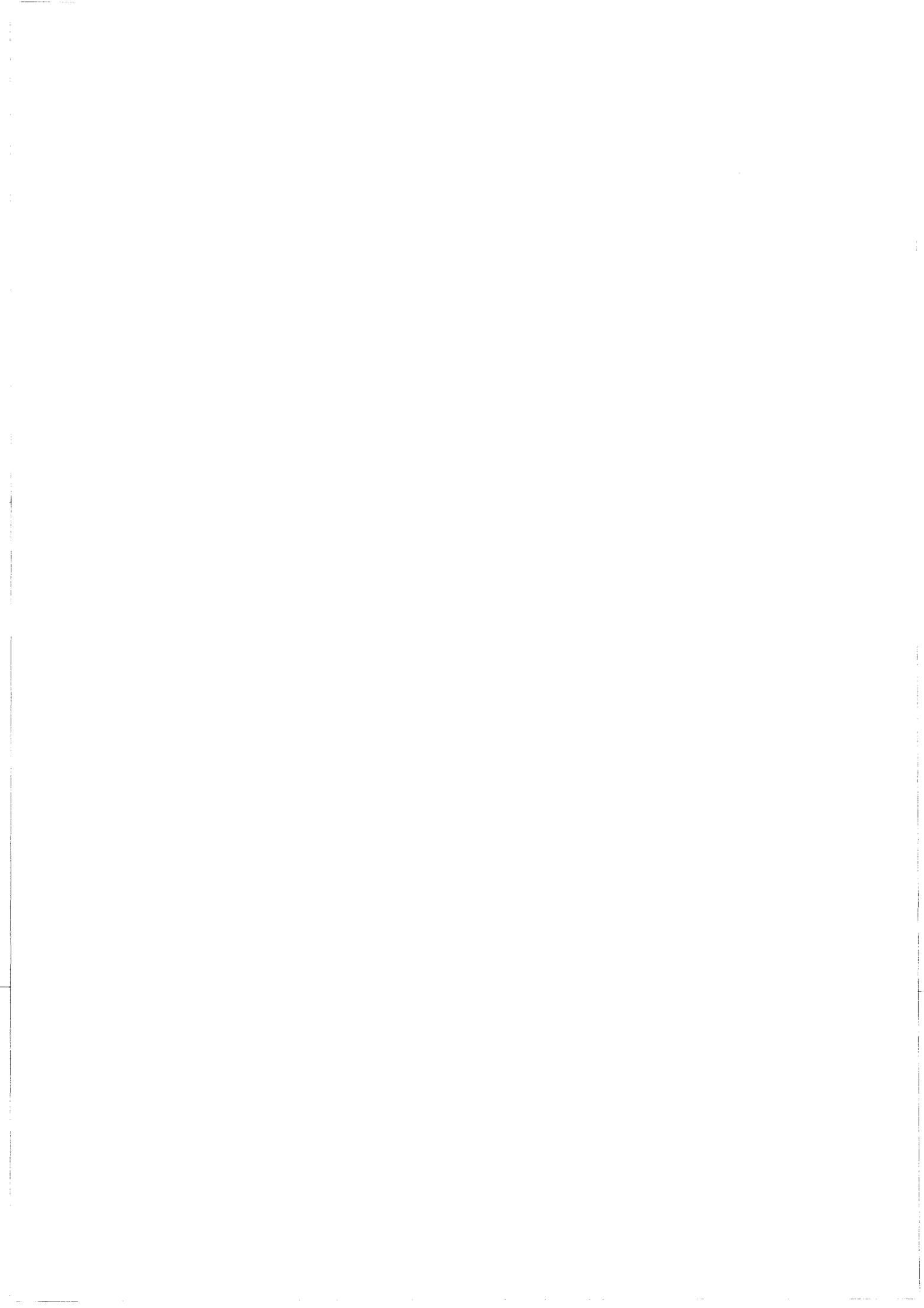
$$9 < x < 14, \quad h = 25.07355893131 + 9.754803562315e-01 * x - 1.016116352781e-01 * x^2 + 1.889794677828e-03 * x^3$$

$$14 < x < 20, \quad h = 25.79601052357 + 8.206693007457e-01 * x - 9.055370274339e-02 * x^2 + 1.626510569859e-03 * x^3$$

$$20 < x < 30, \quad h = 40.4635022819 - 1.379581654948 * x + 1.945884504128e-02 * x^2 - 2.070318932180e-04 * x^3$$

$$30 < x < 40, \quad h = 17.92461334664 + 8.743920332081e-01 * x - 5.567361123058e-02 * x^2 + 6.27773176483e-04 * x^3$$

$$40 < x < 54, \quad h = 56.39011190988 - 2.010520359035 * x + 1.644919857549e-02 * x^2 + 2.674976141766e-05 * x^3$$



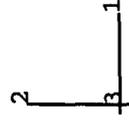
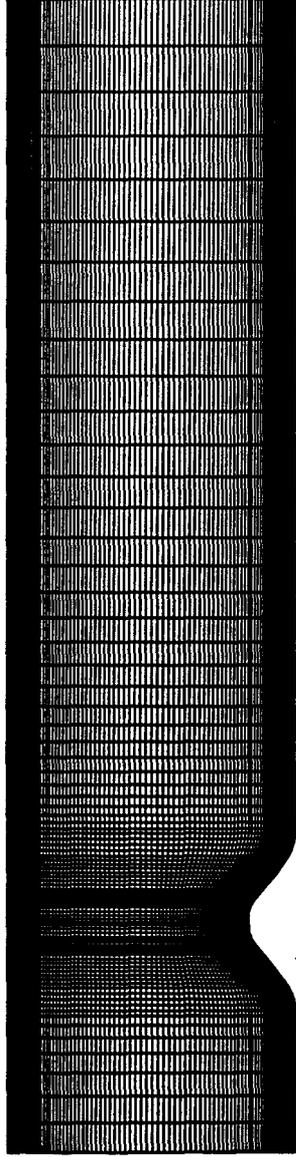
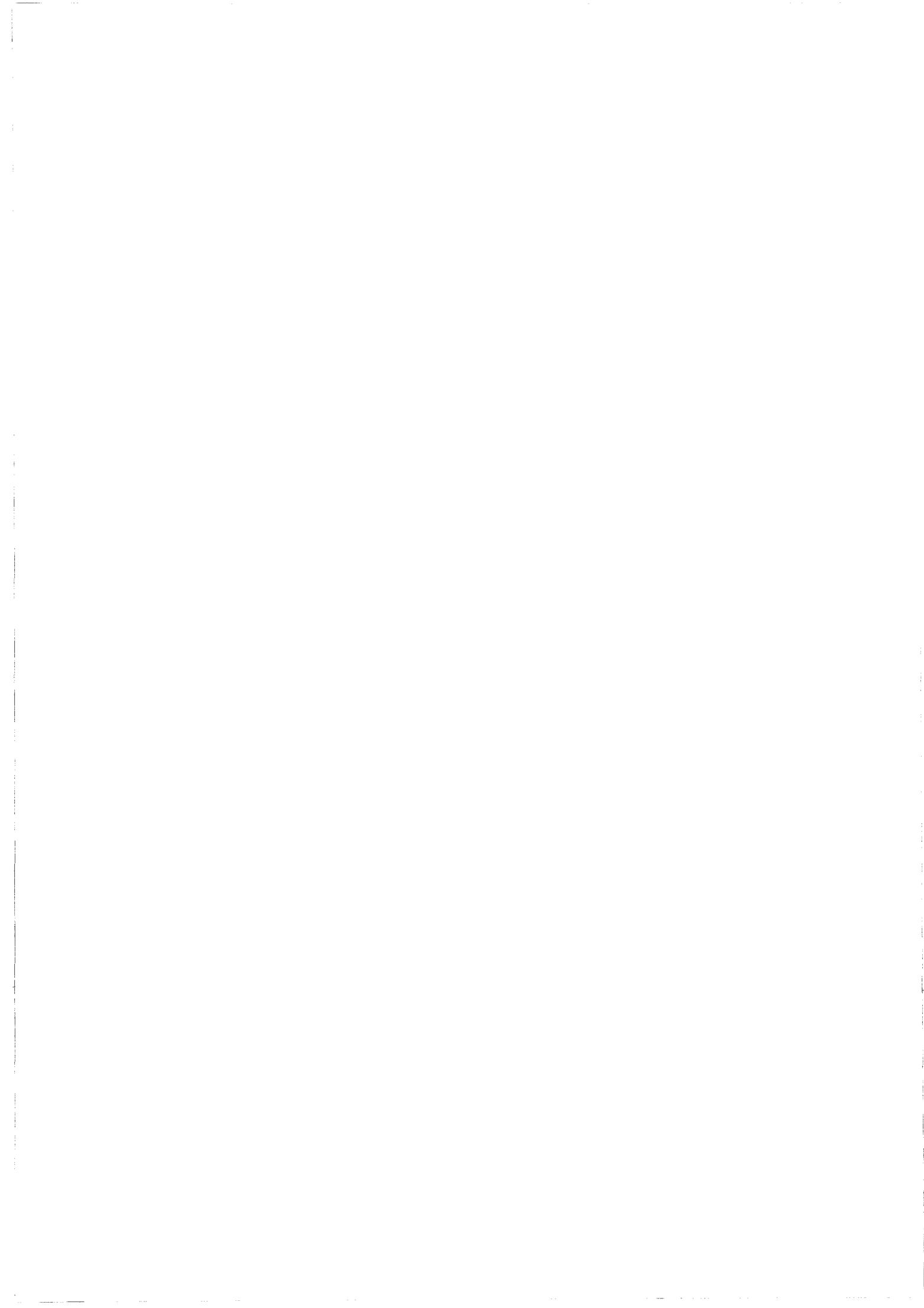


Figure 4.46 maillage constitué de 88*100 éléments bilinéaires



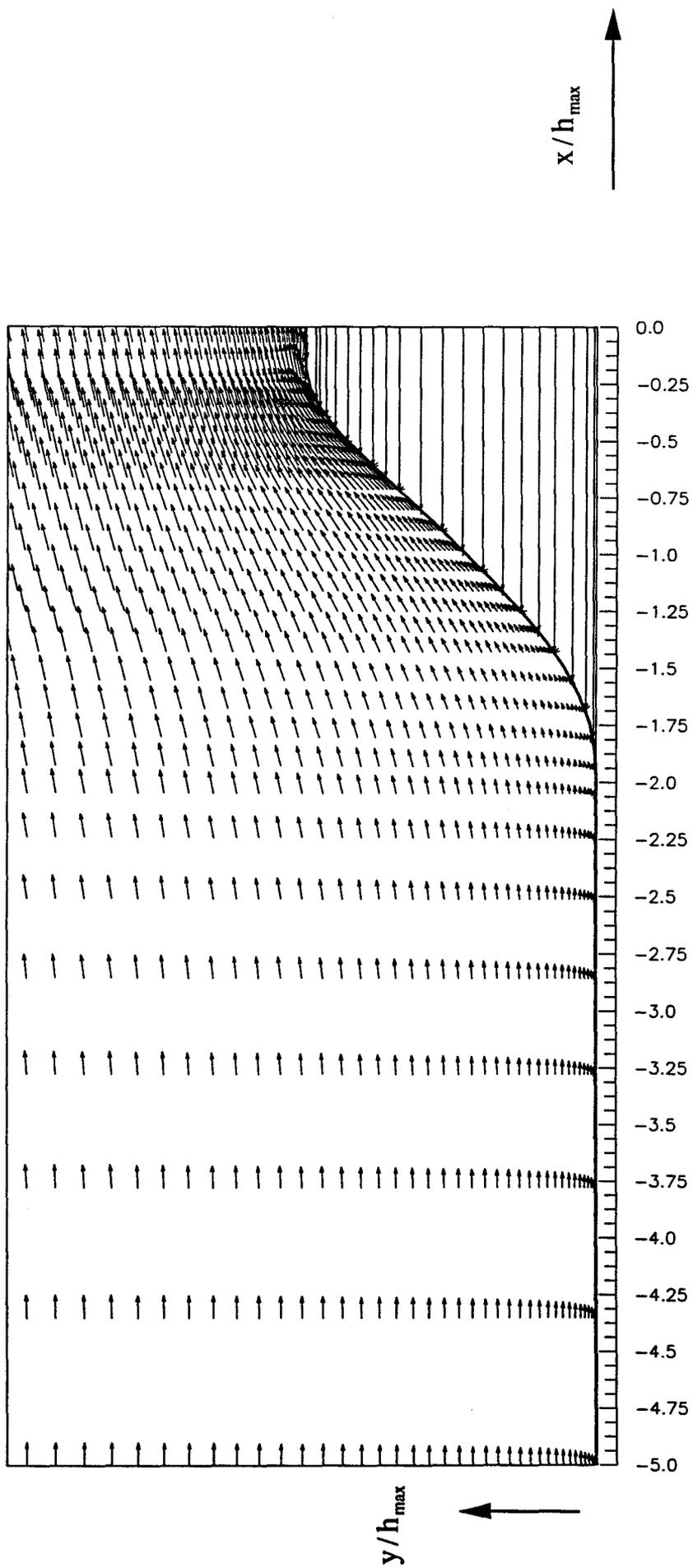


Figure 4.47a Champ de vitesse, Formulation SUPG(QIPO)



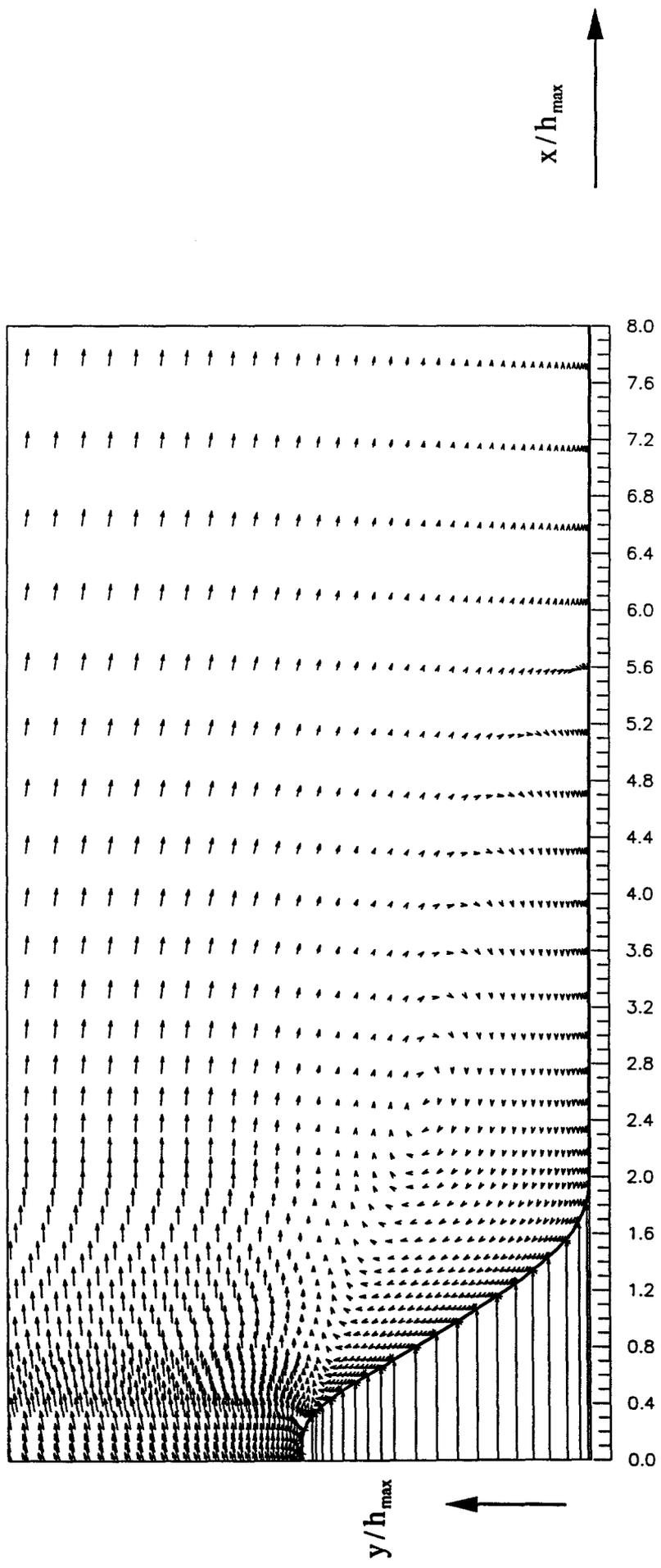


Figure 4.47b Champ de vitesse, Formulation SUPG(Q1P0)



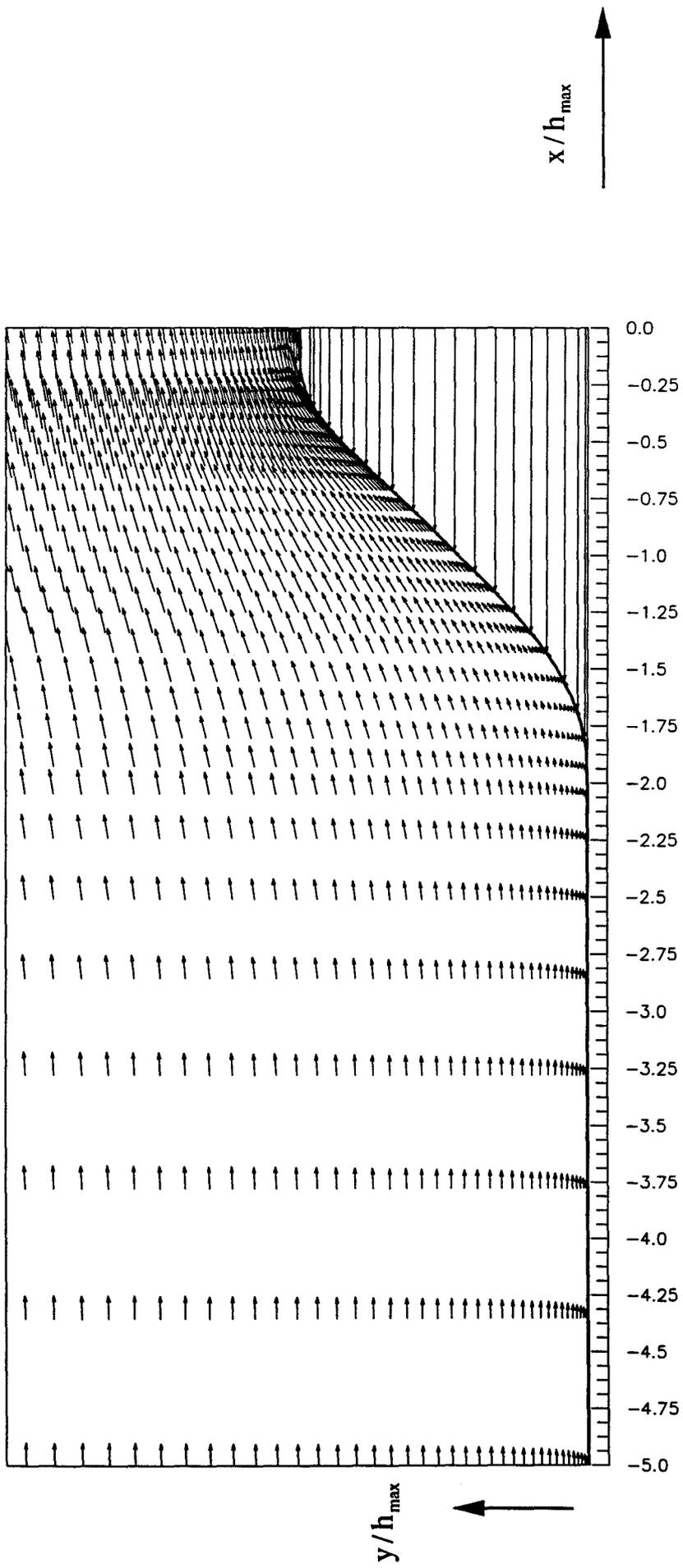


Figure 4.48a Champ de vitesse, Formulation GLS(QIQ1)



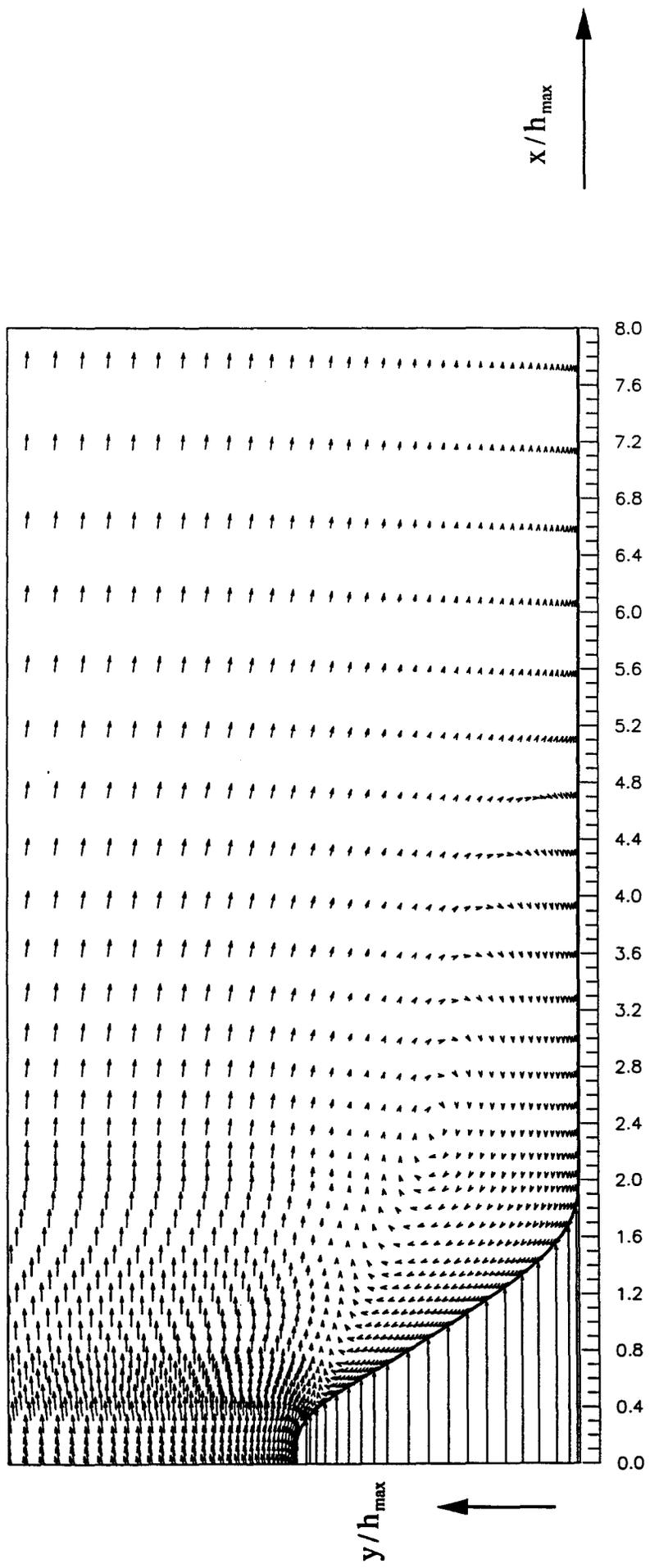
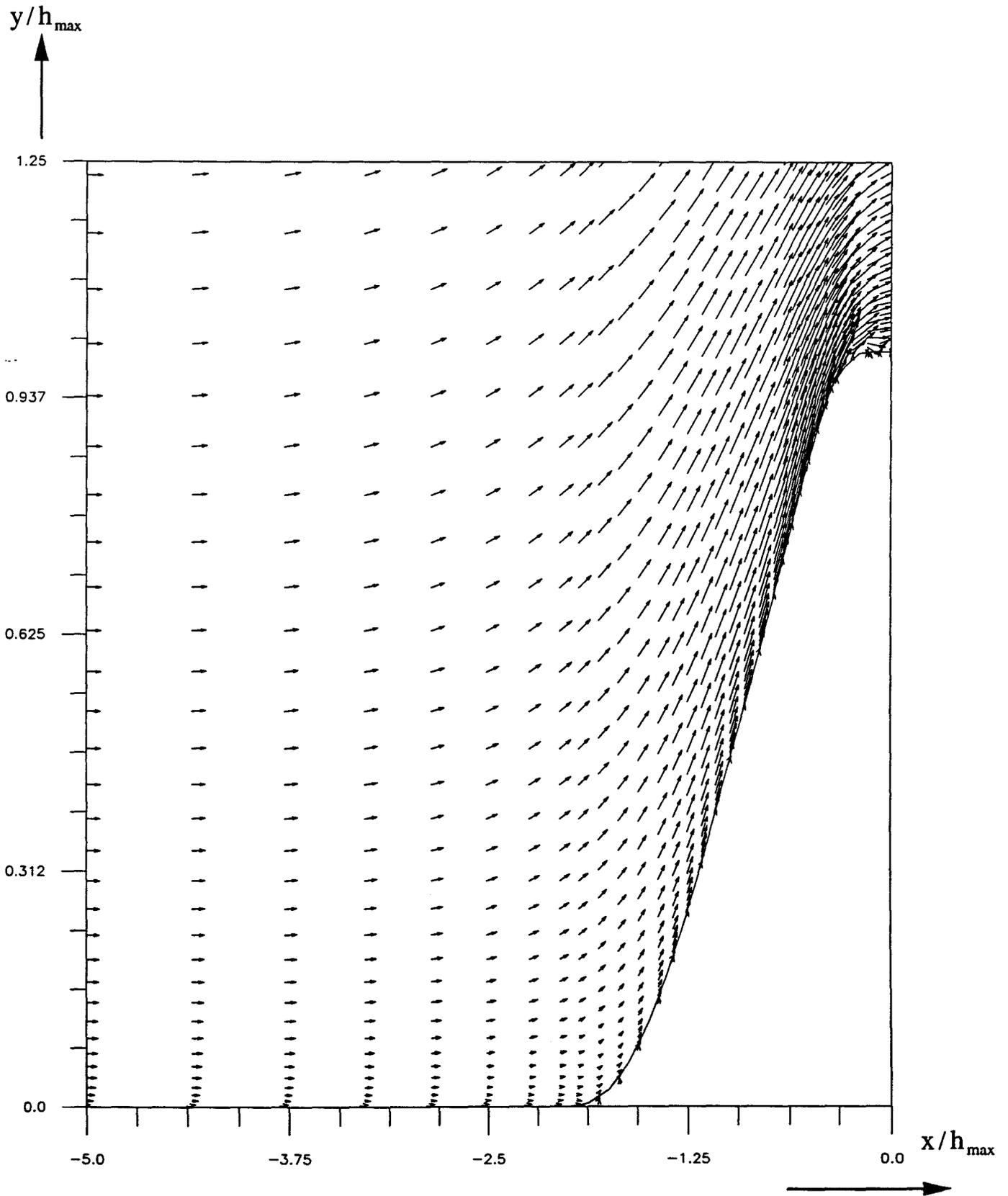


Figure 4.48b Champ de vitesse, Formulation GLS(Q1Q1)



Figure 4.49a Champ de vitesse, Formulation SUPG(Q1P0)



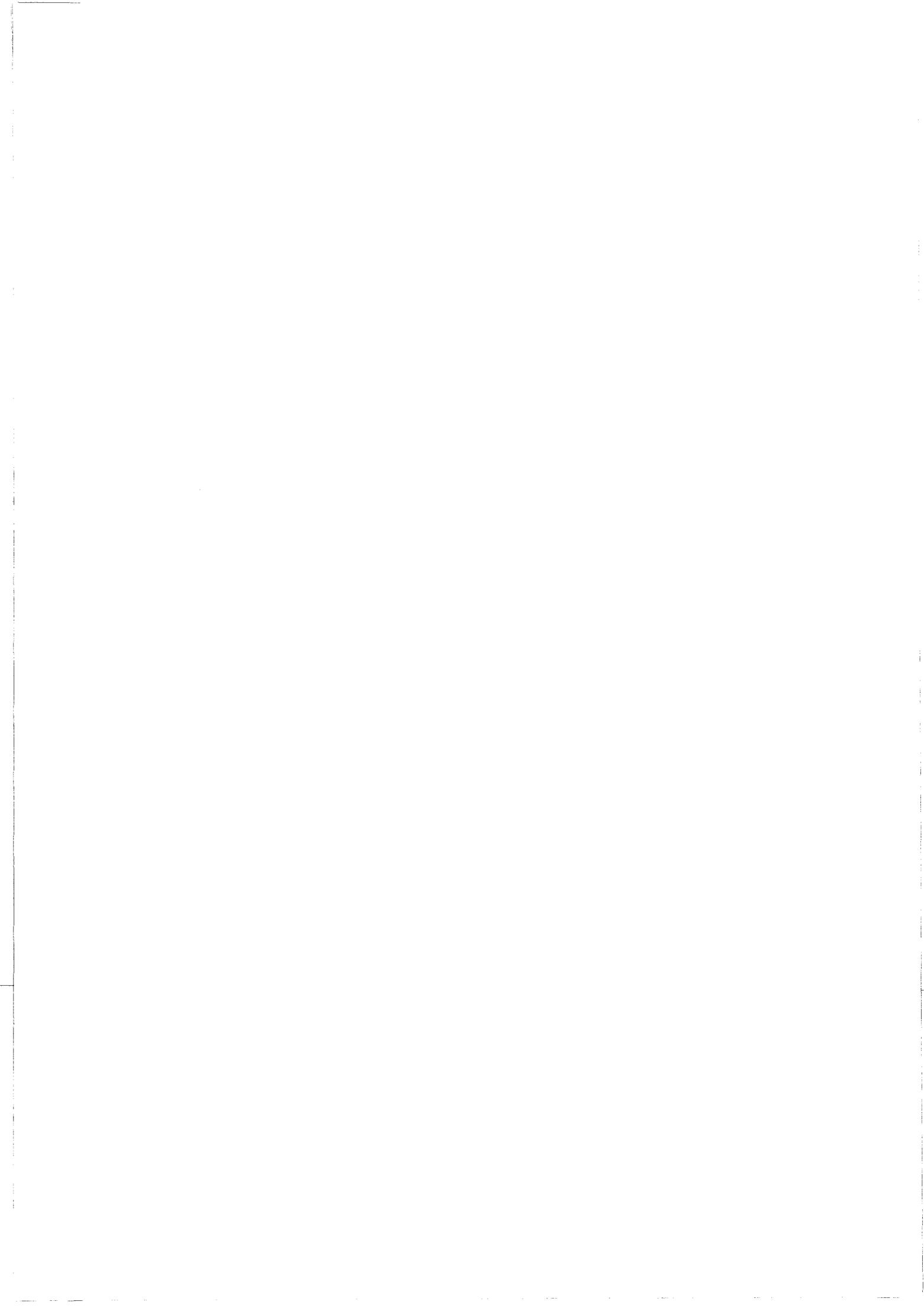
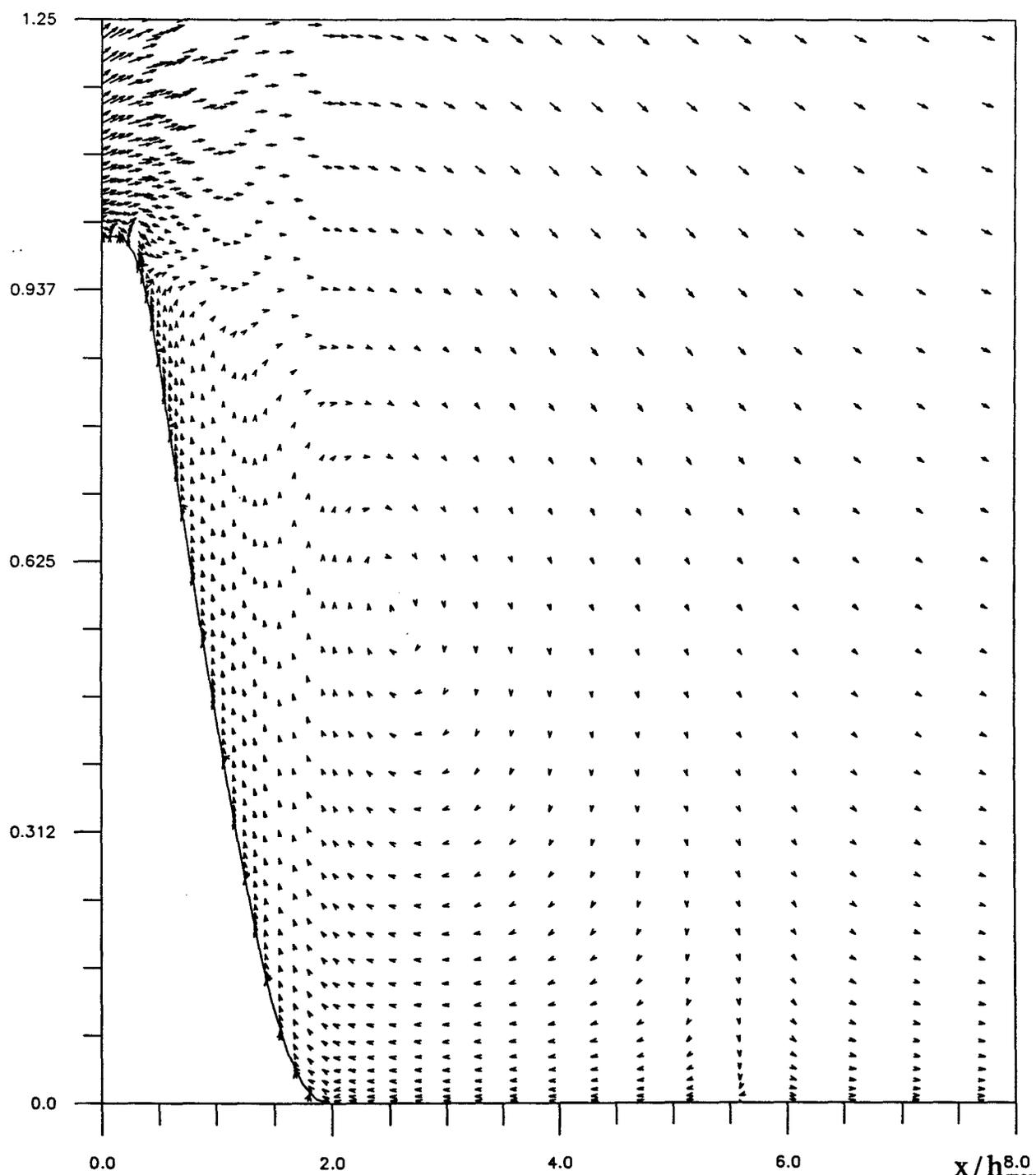


Figure 4.49b Champ de vitesse, Formulation SUPG(Q1P0)

y/h_{\max}



$x/h_{\max}^{8.0}$





Figure 4.50a Champ de vitesse, Formulation GLS(Q1Q1)

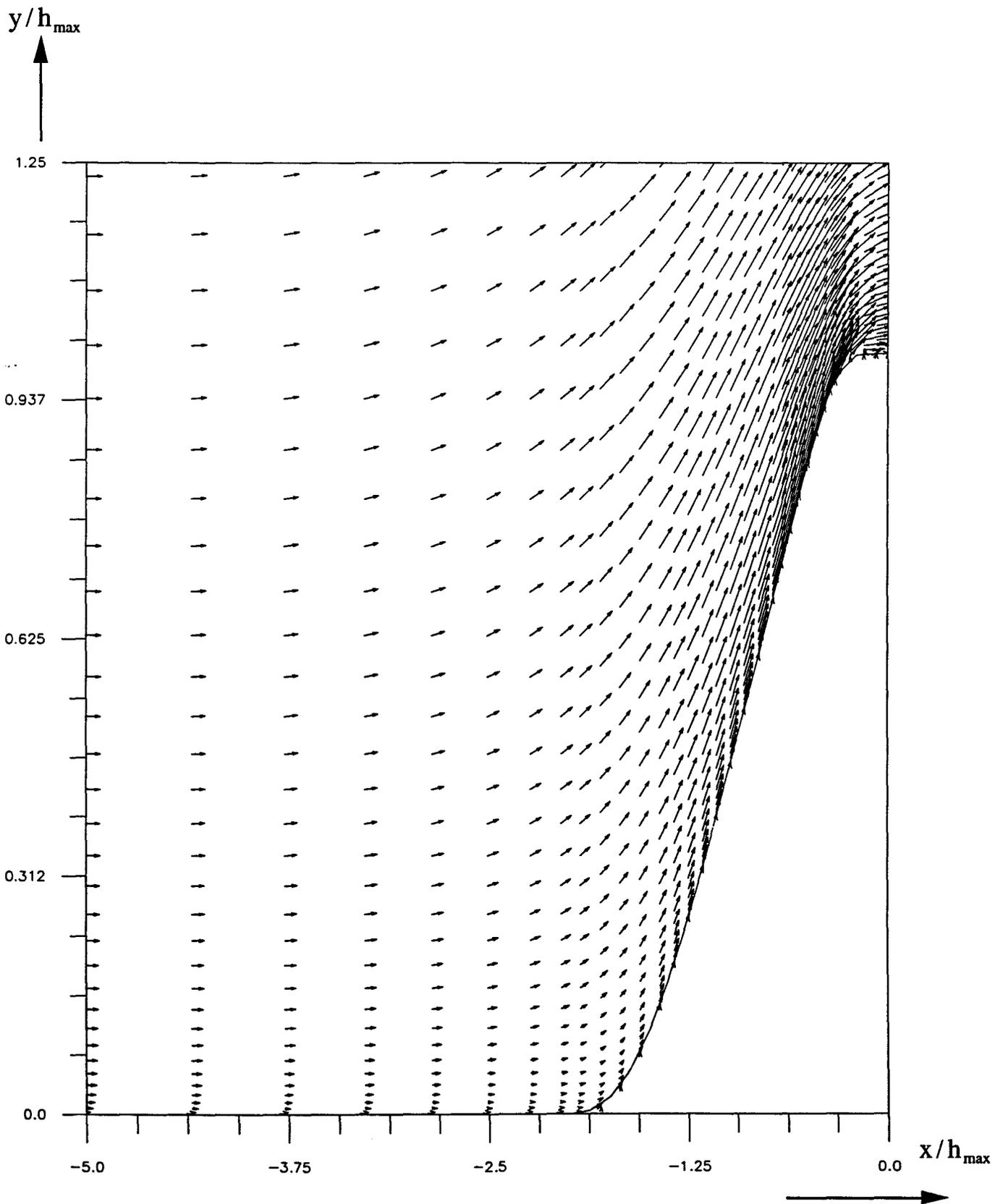
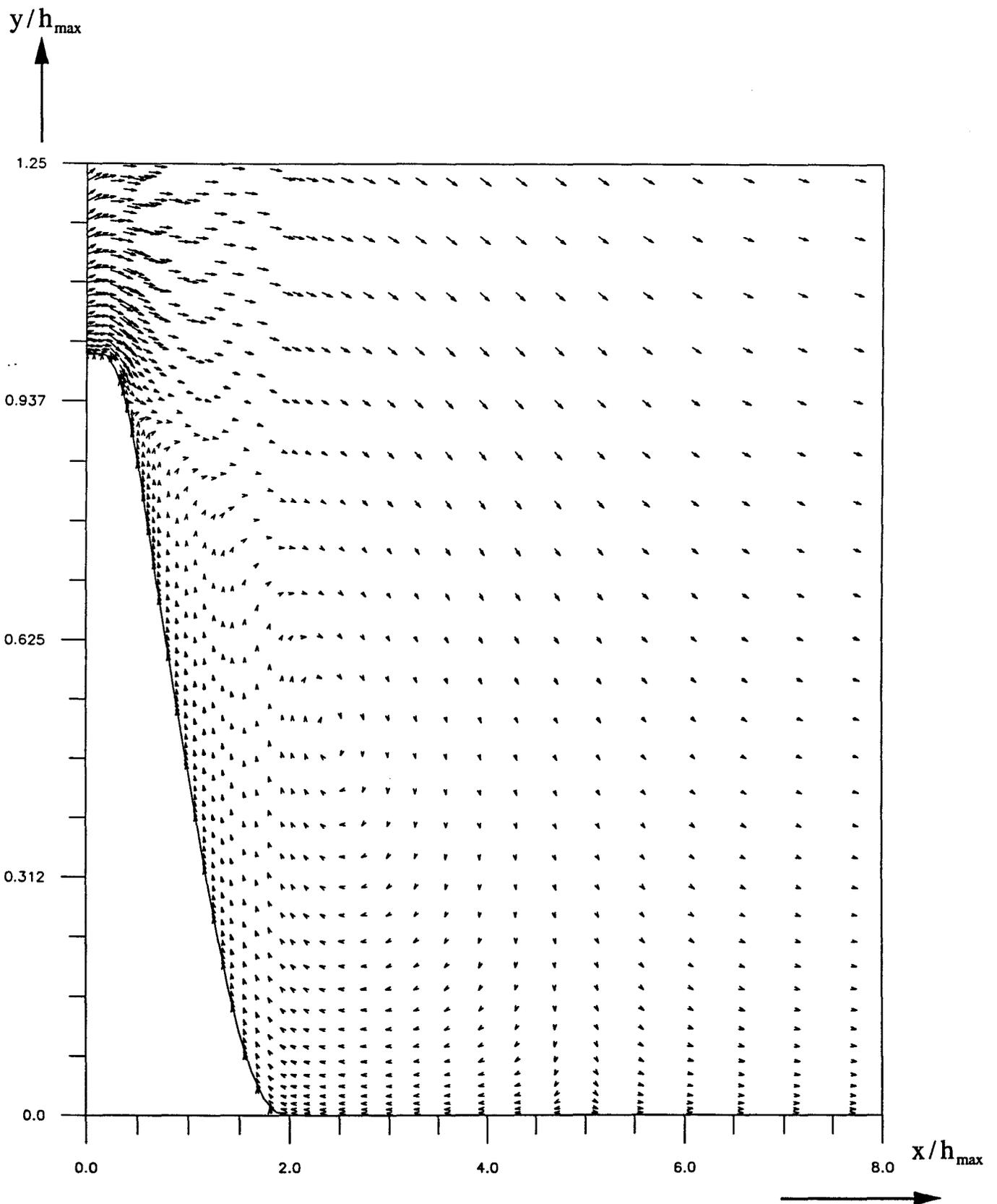




Figure 4.50b Champ de vitesse, Formulation GLS(Q1Q1)





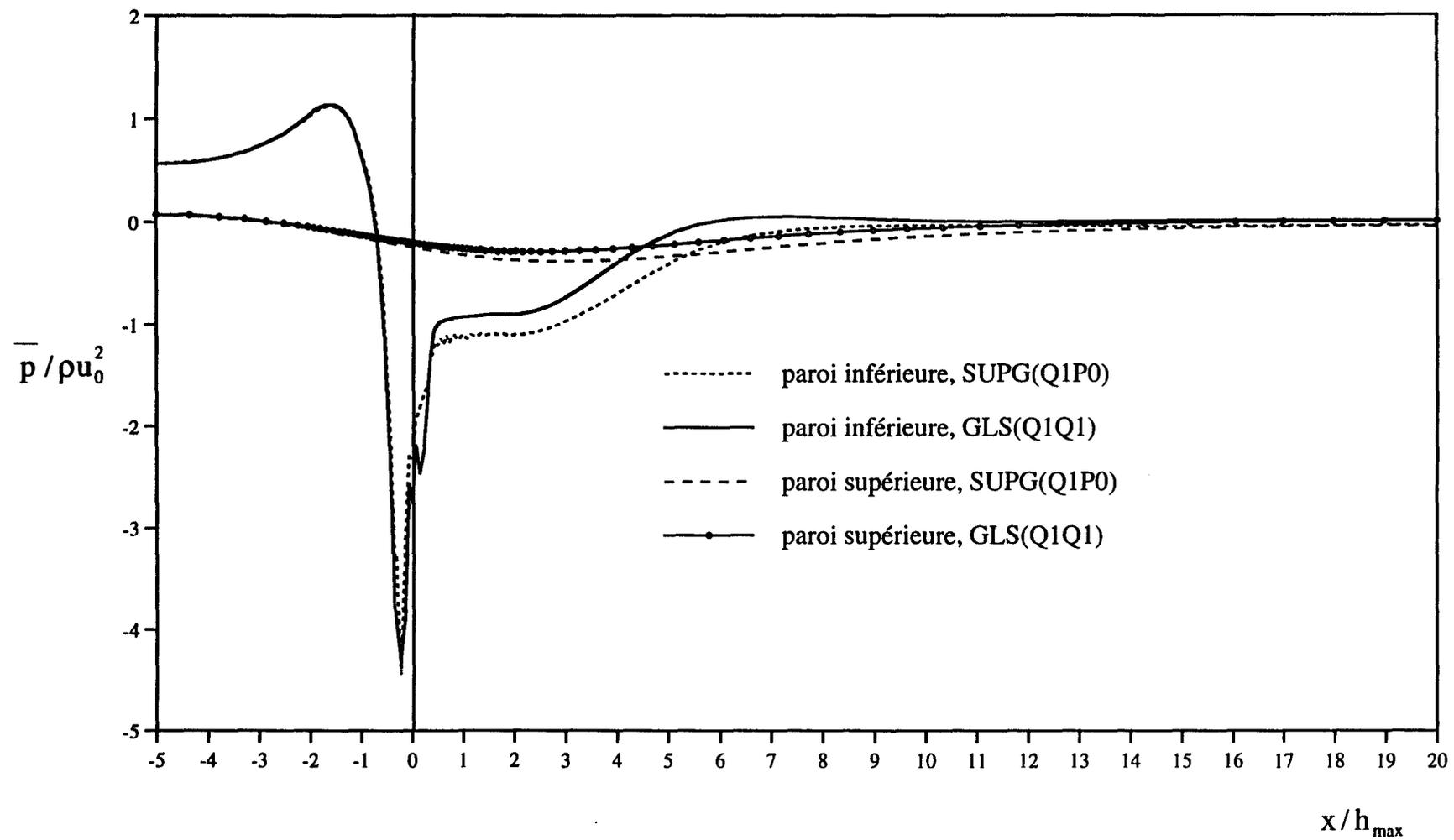
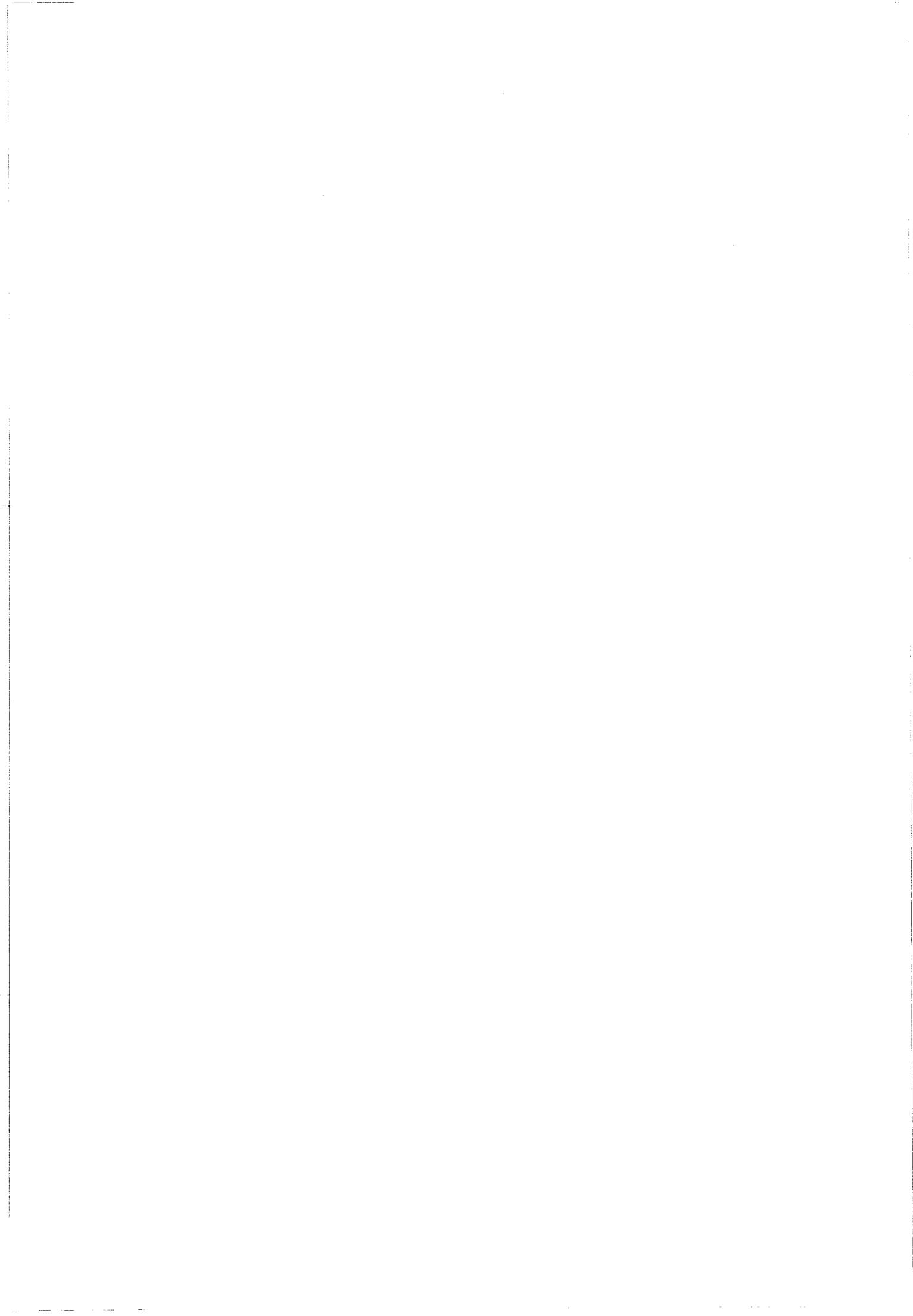


Figure 4.51 Evolution de pression sur les parois haute et basse



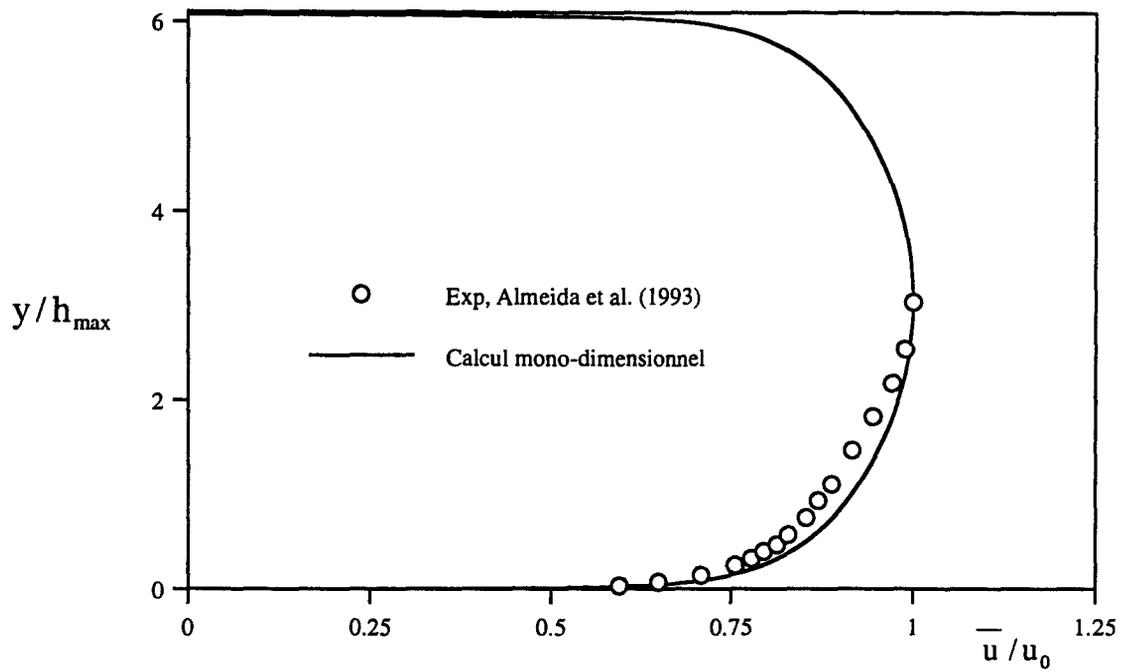


Figure 4.52a Profil de vitesse d'entrée

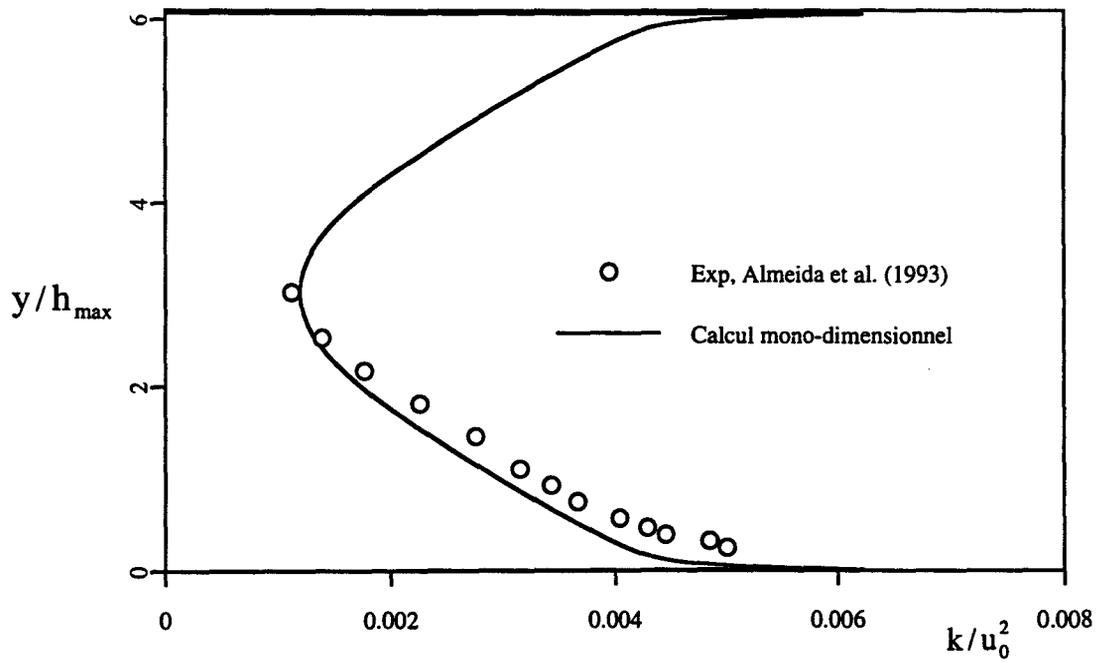
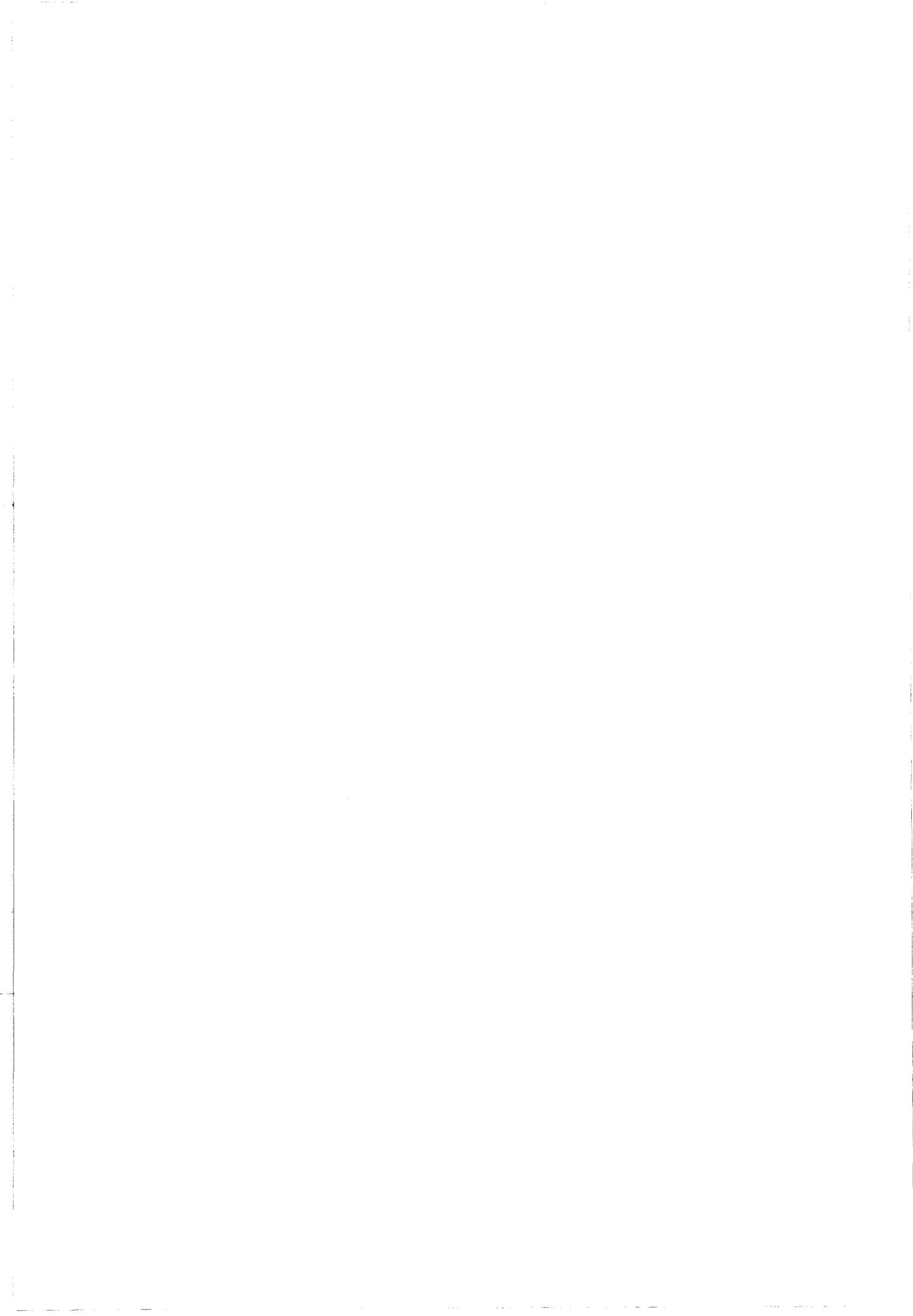


Figure 4.52b Profil d'énergie turbulente d'entrée



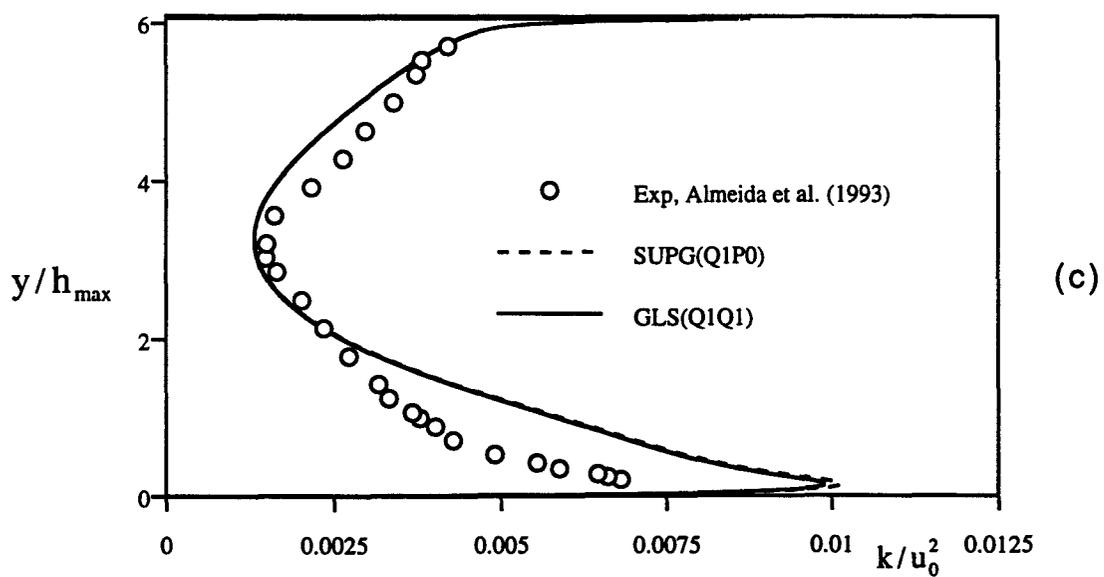
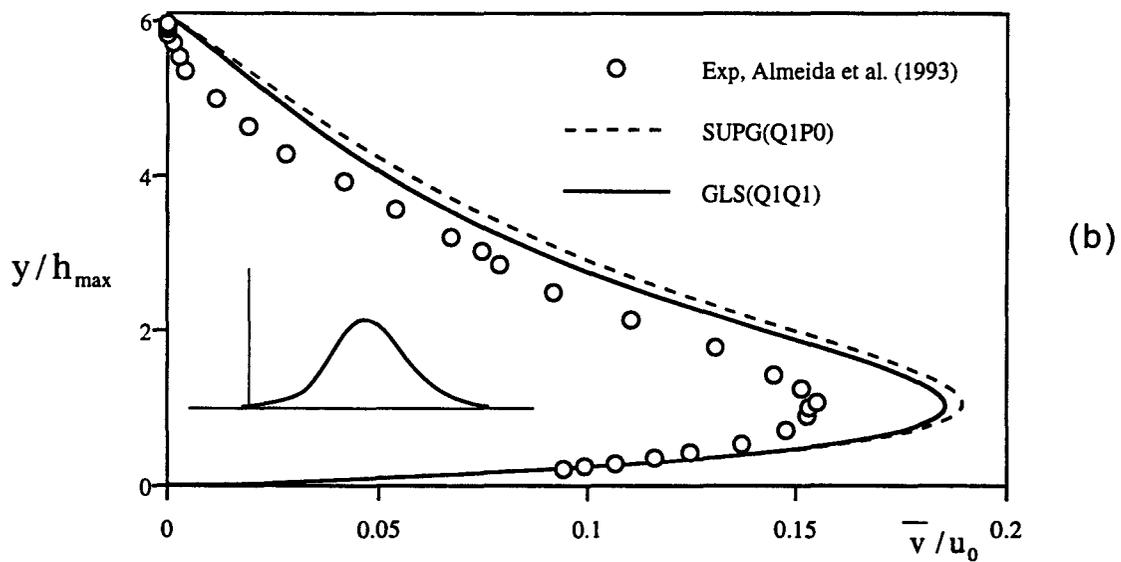
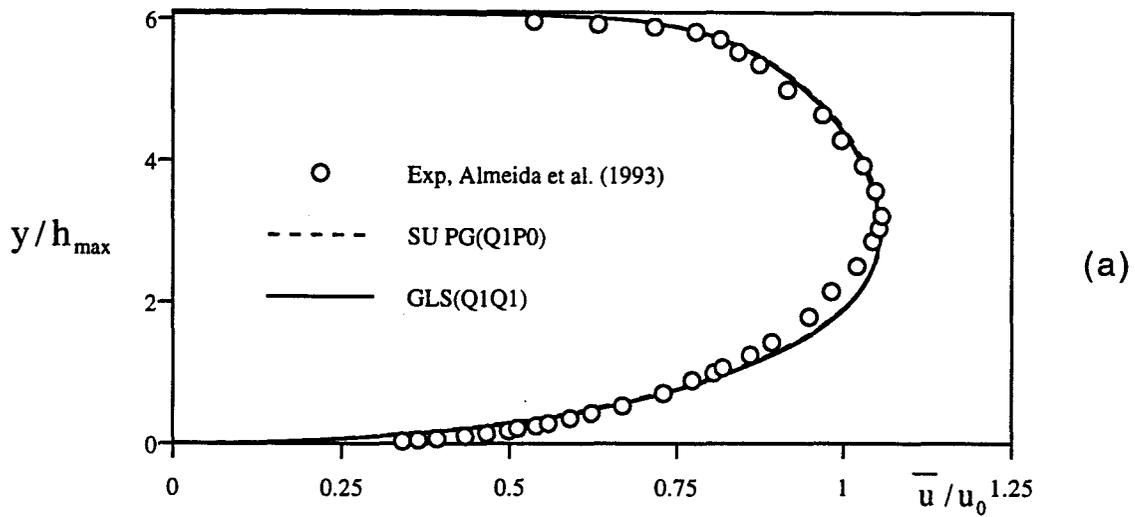


Figure 4.53 station $x/h=-1.78$, (a) vitesse moyenne horizontale, (b) vitesse moyenne verticale, (c) énergie turbulente

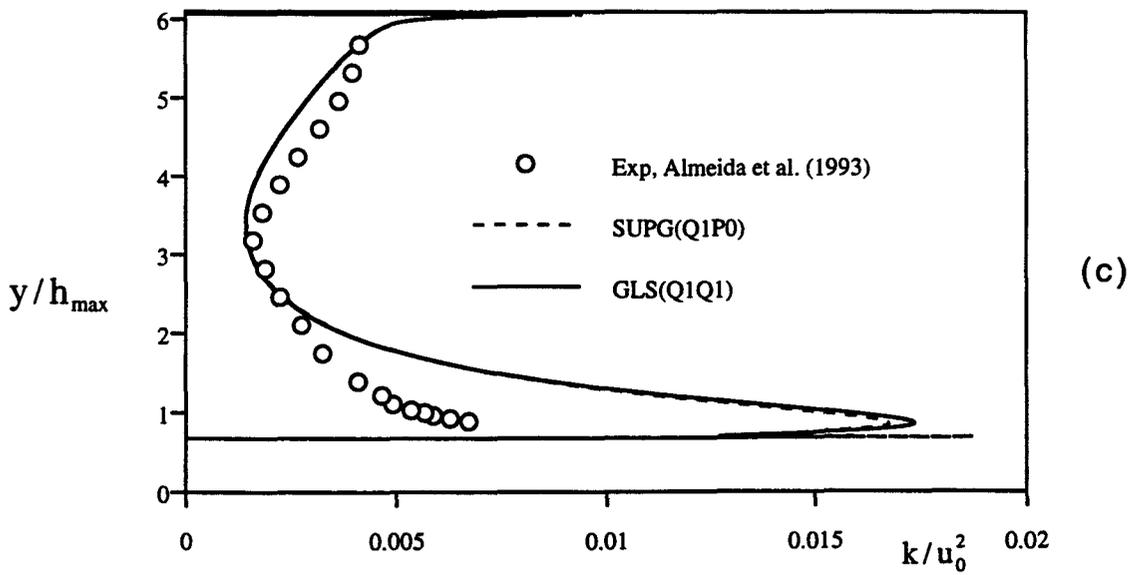
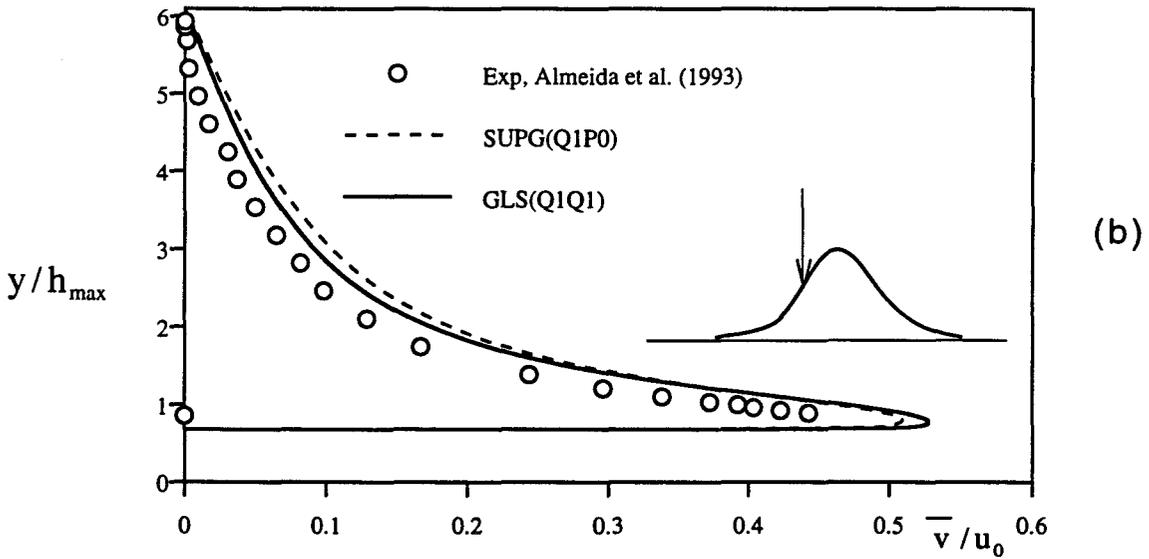
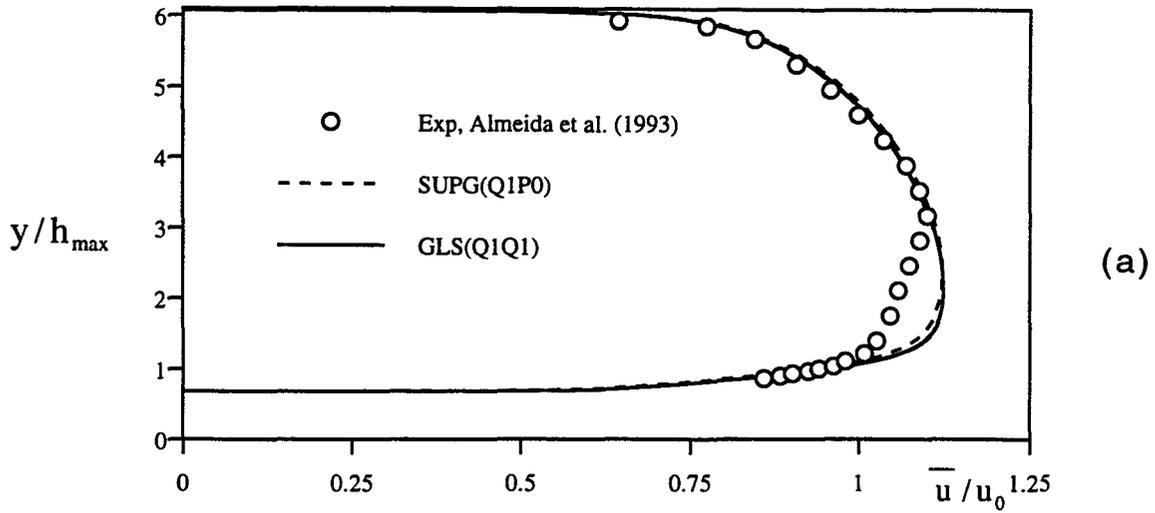


Figure 4.54 station $x/h=-0.71$, (a) vitesse moyenne horizontale, (b) vitesse moyenne verticale, (c) énergie turbulente

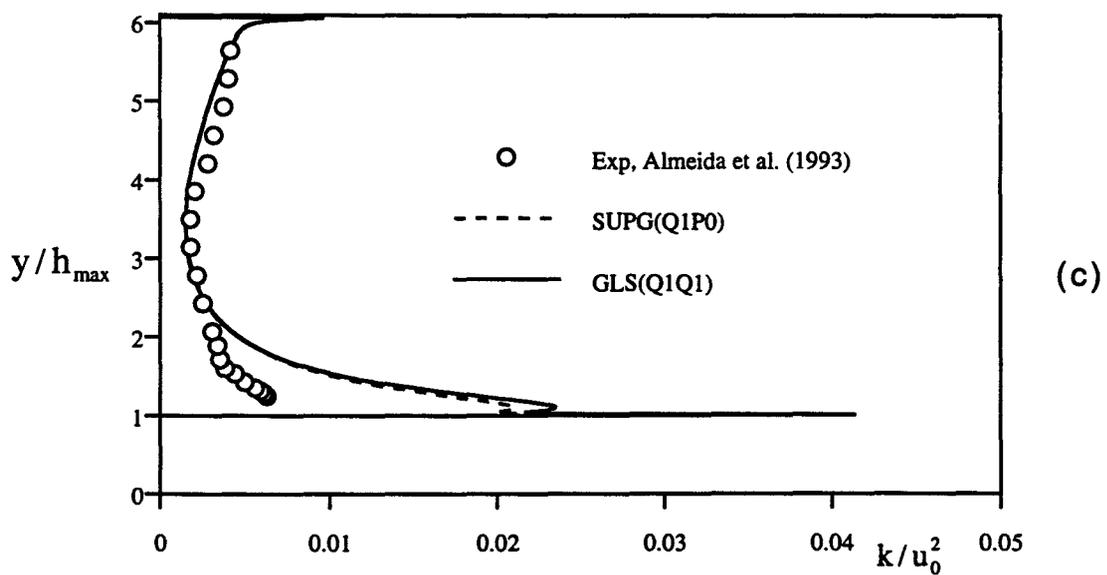
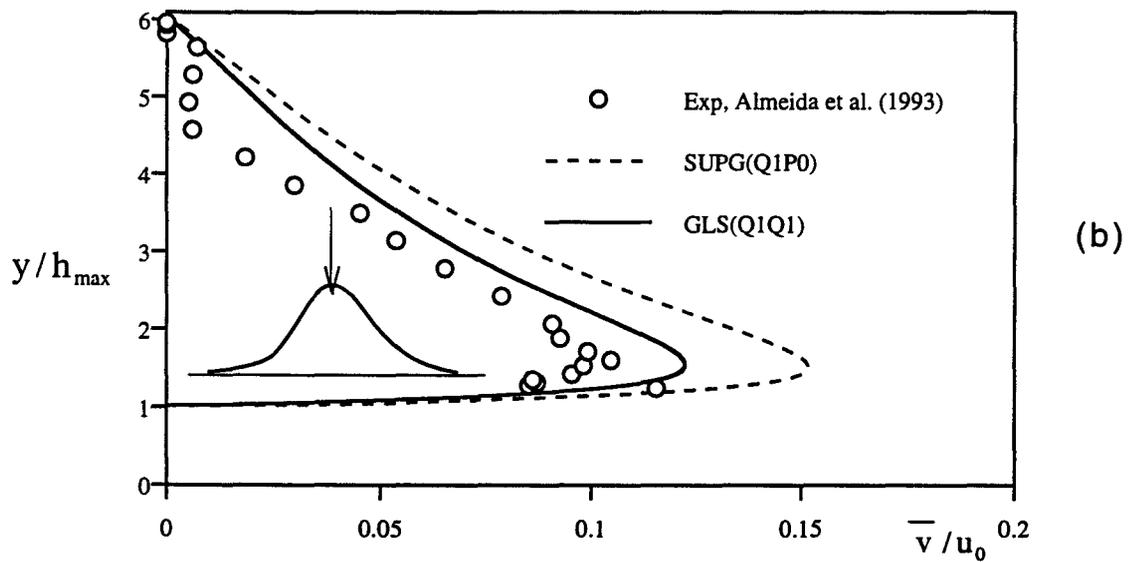
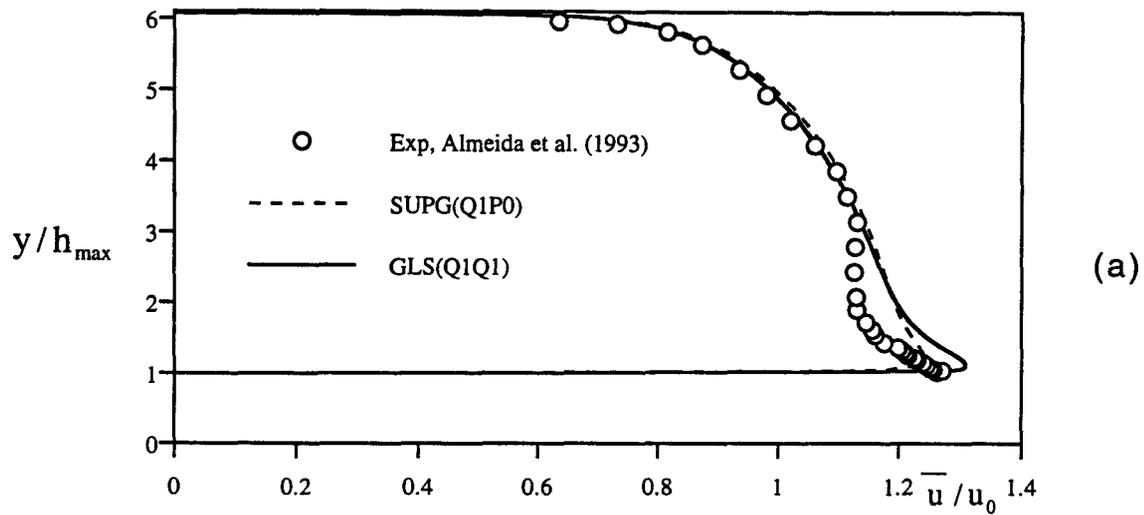


Figure 4.55 station $x/h=0.0$, (a) vitesse moyenne horizontale, (b) vitesse moyenne verticale, (c) énergie turbulente



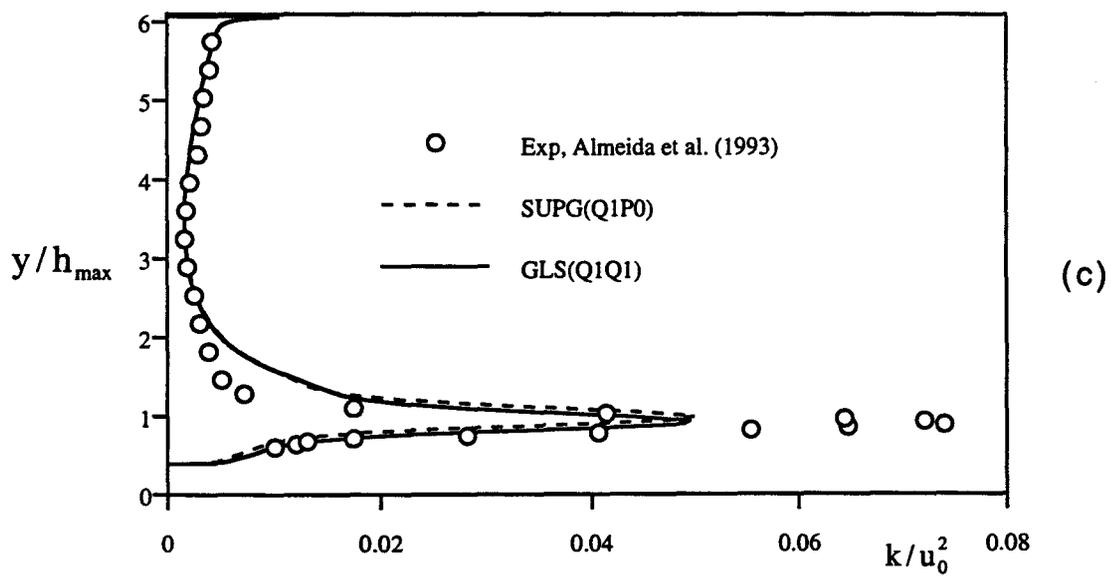
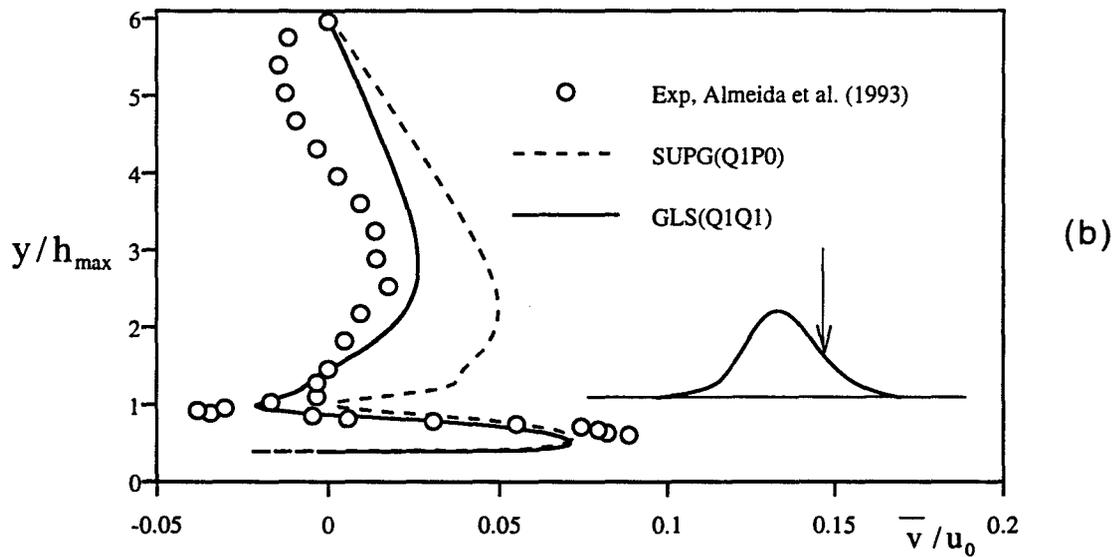
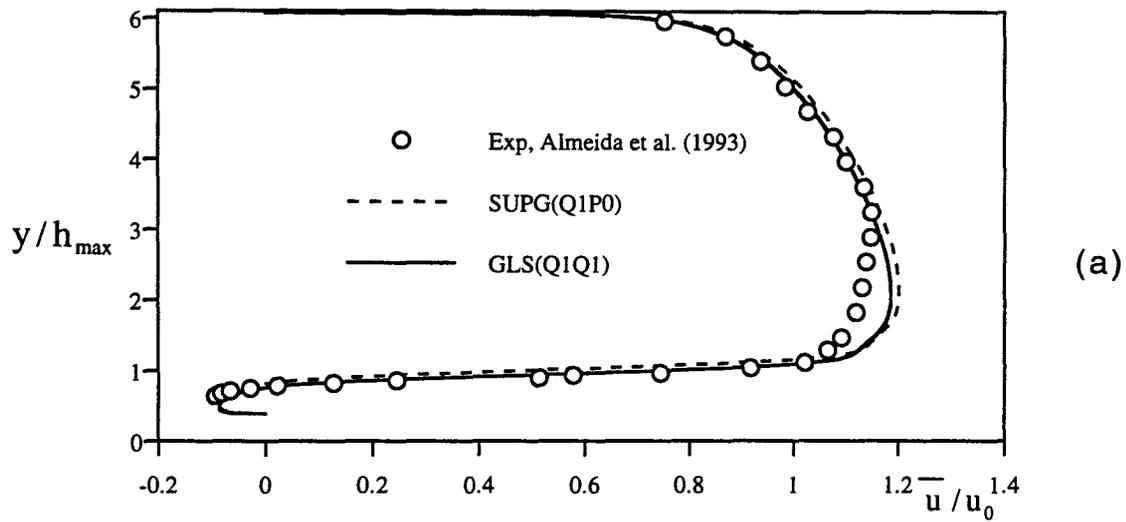
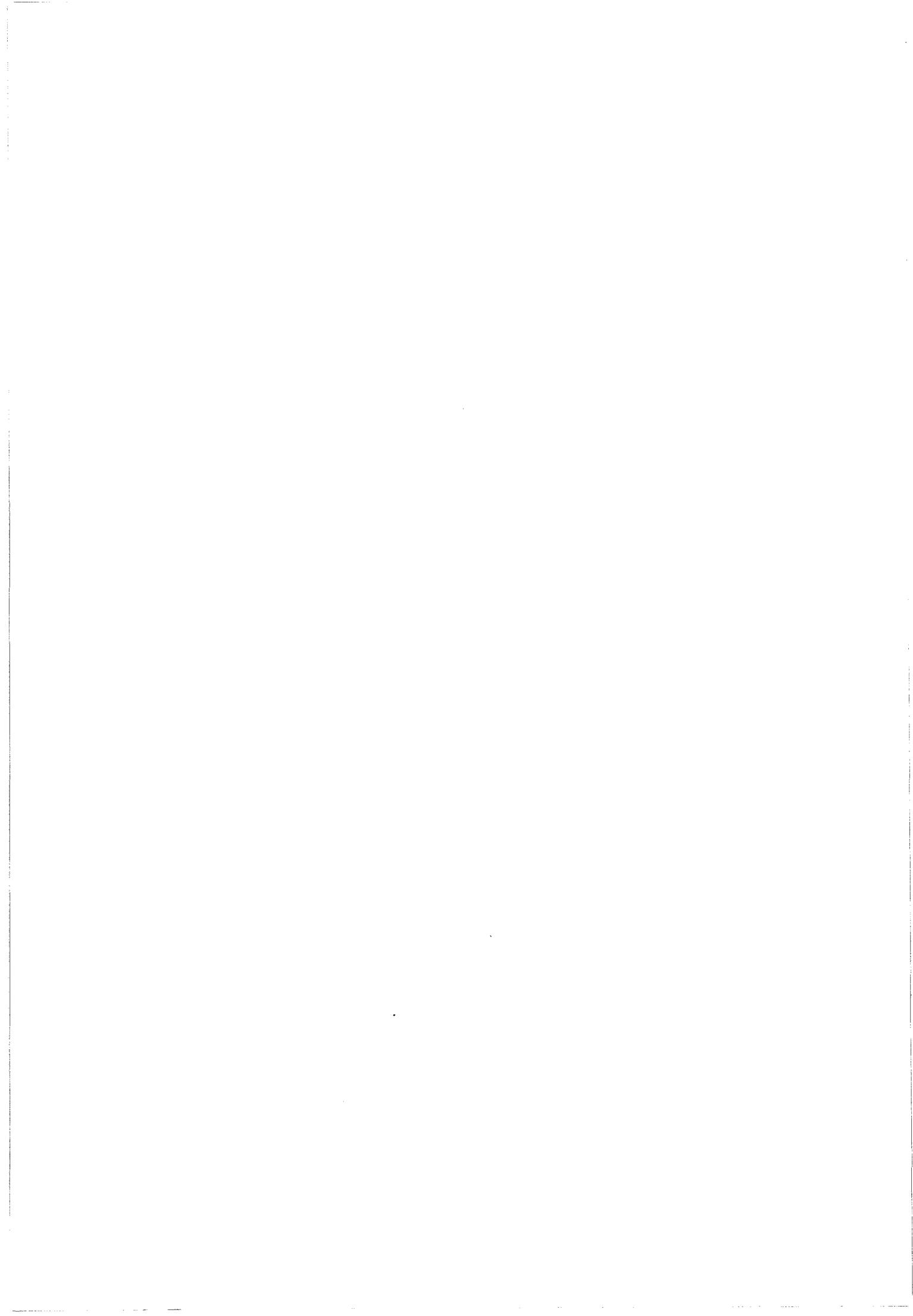


Figure 4.56 station $x/h=1.07$, (a) vitesse moyenne horizontale, (b) vitesse moyenne verticale, (c) énergie turbulente



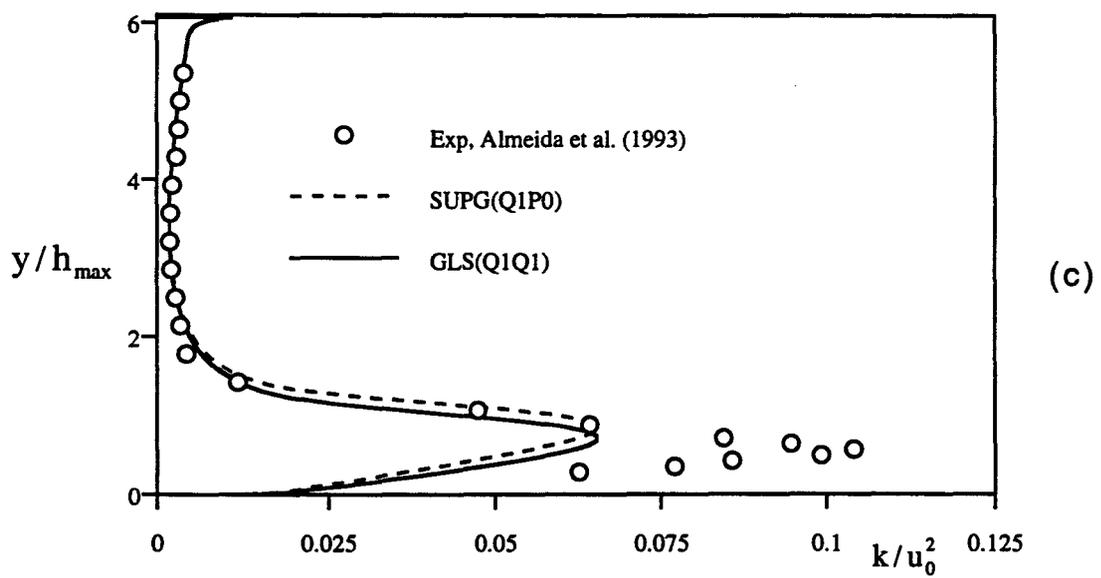
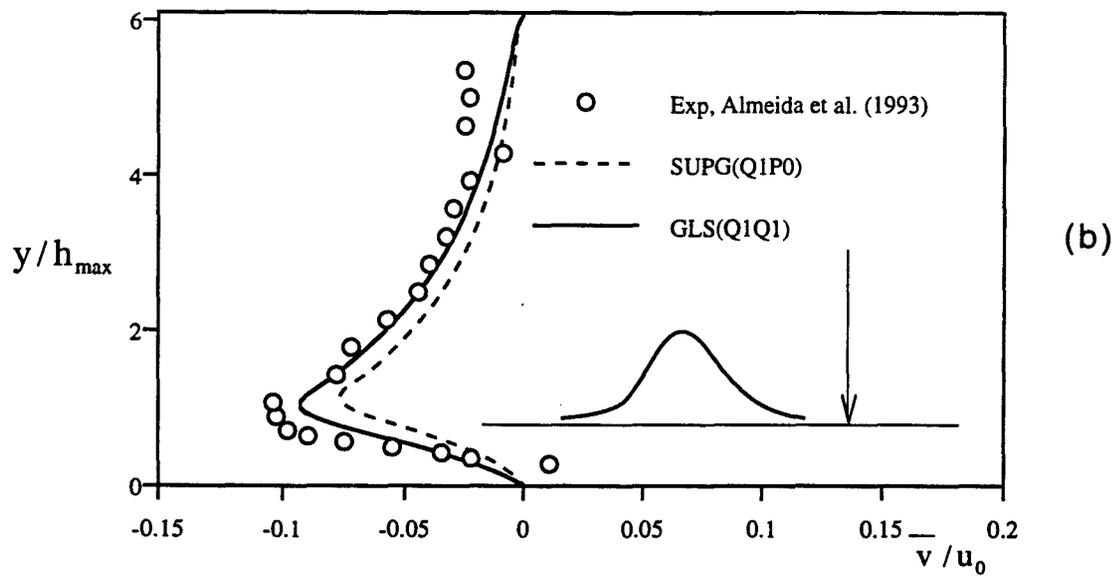
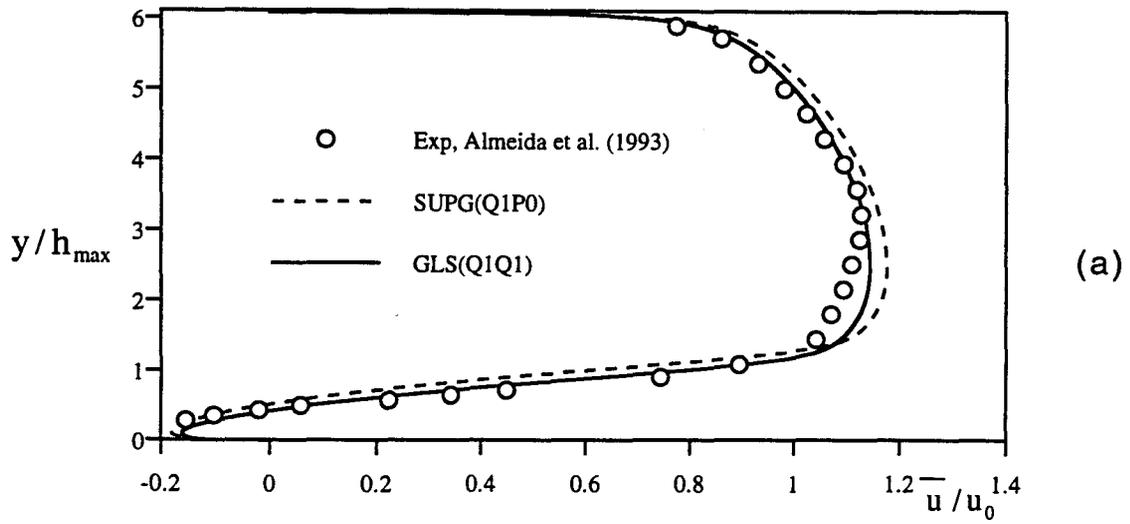


Figure 4.57 station $x/h=3.21$, (a) vitesse moyenne horizontale, (b) vitesse moyenne verticale, (c) énergie turbulente



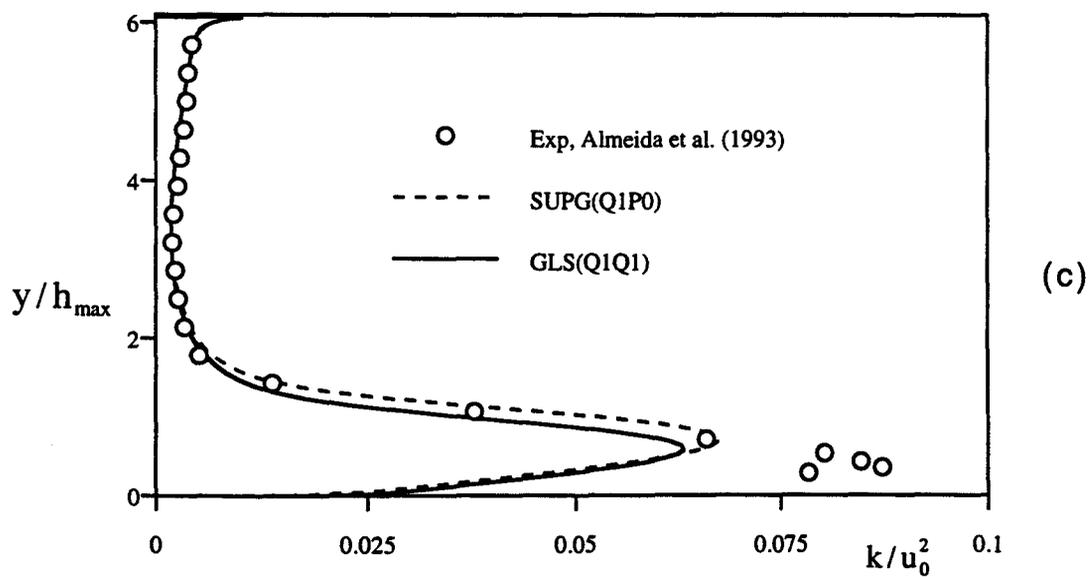
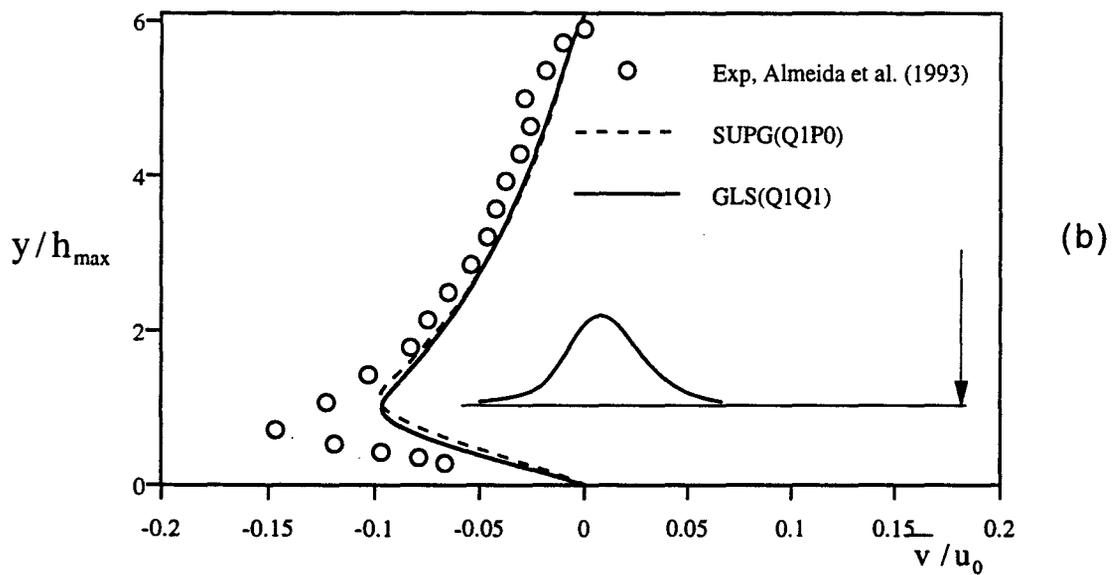
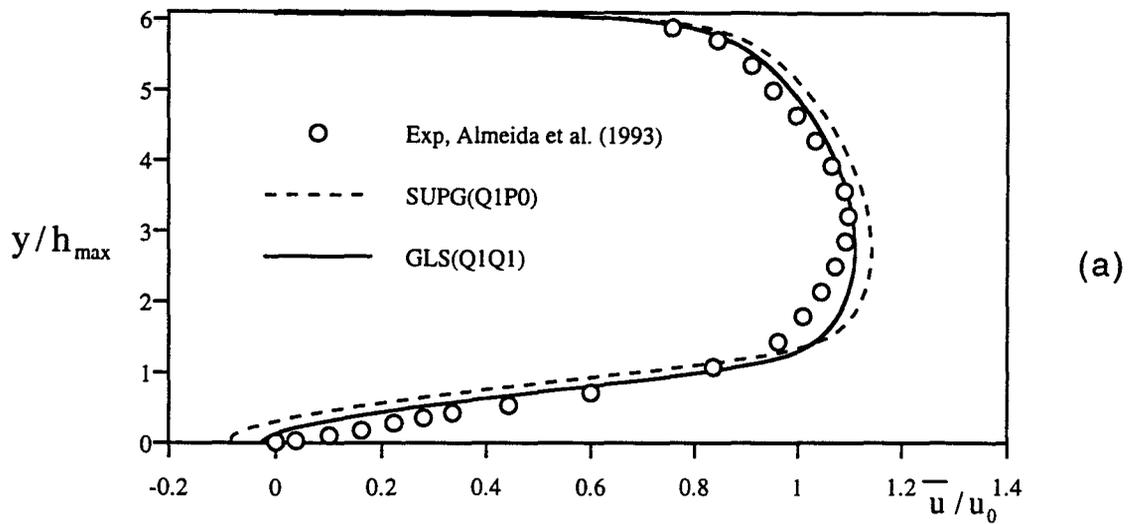
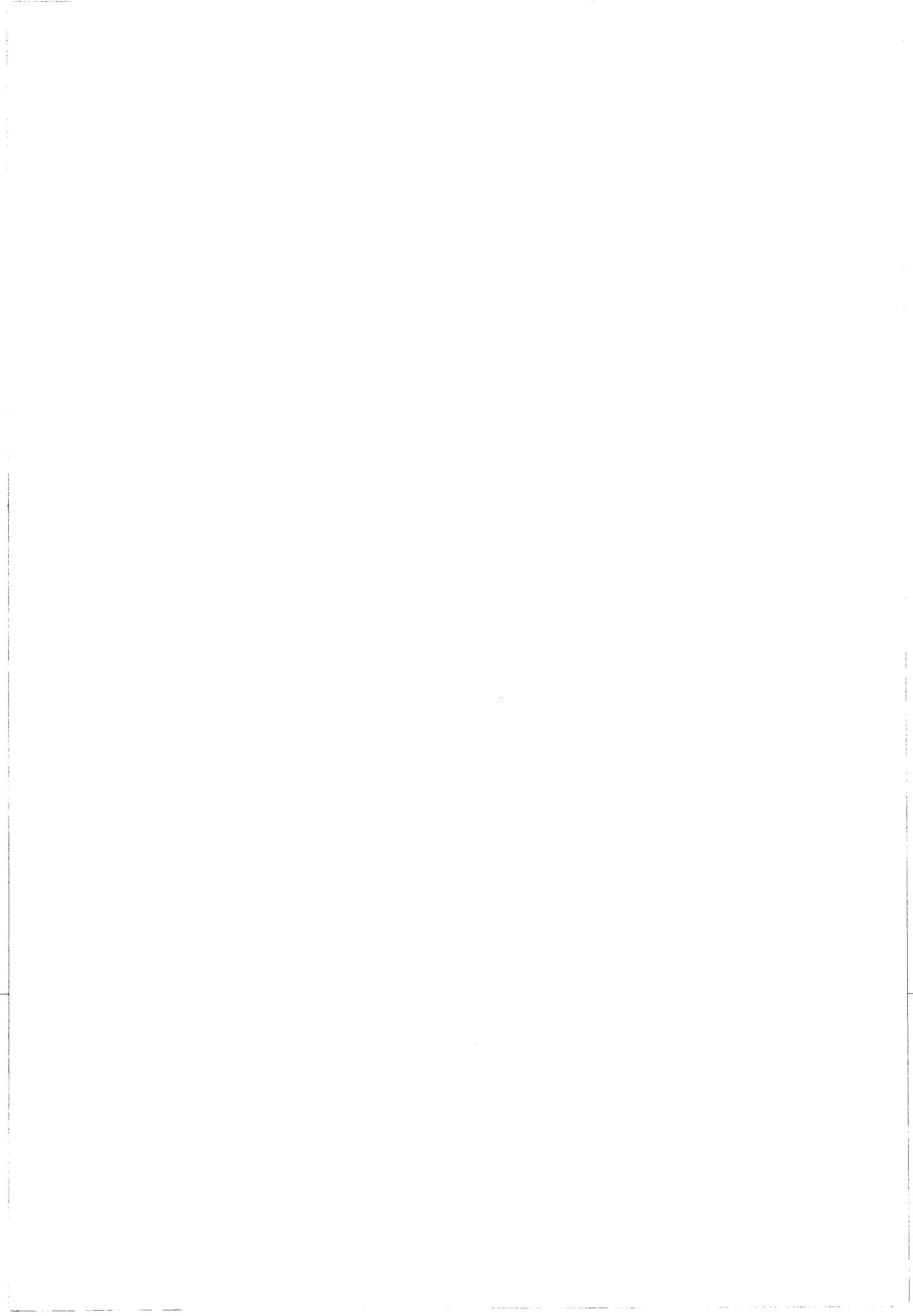


Figure 4.58 station $x/h=4.79$, (a) vitesse moyenne horizontale, (b) vitesse moyenne verticale, (c) énergie turbulente



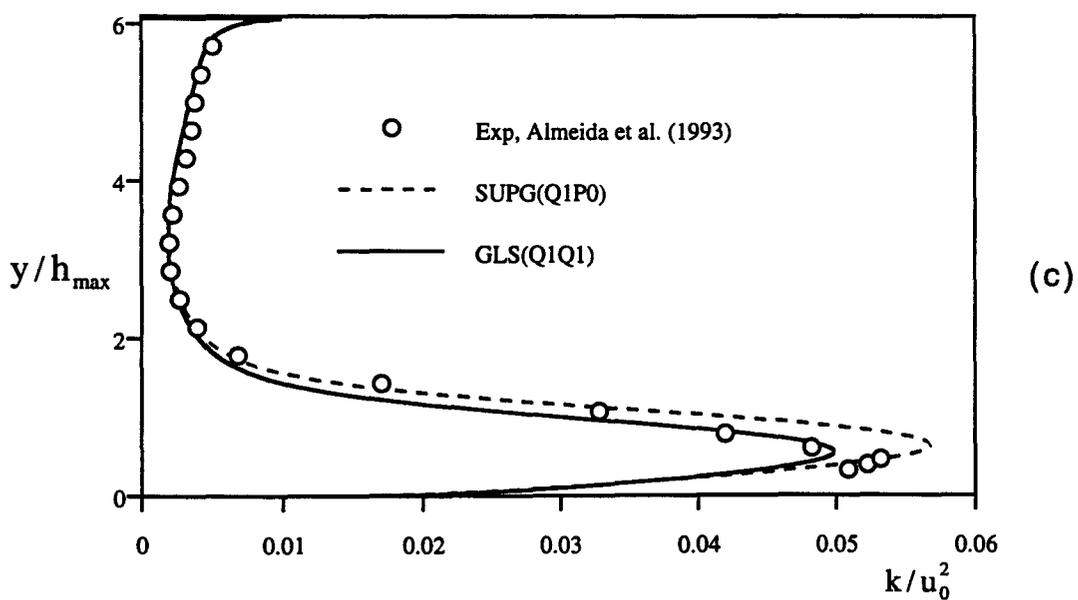
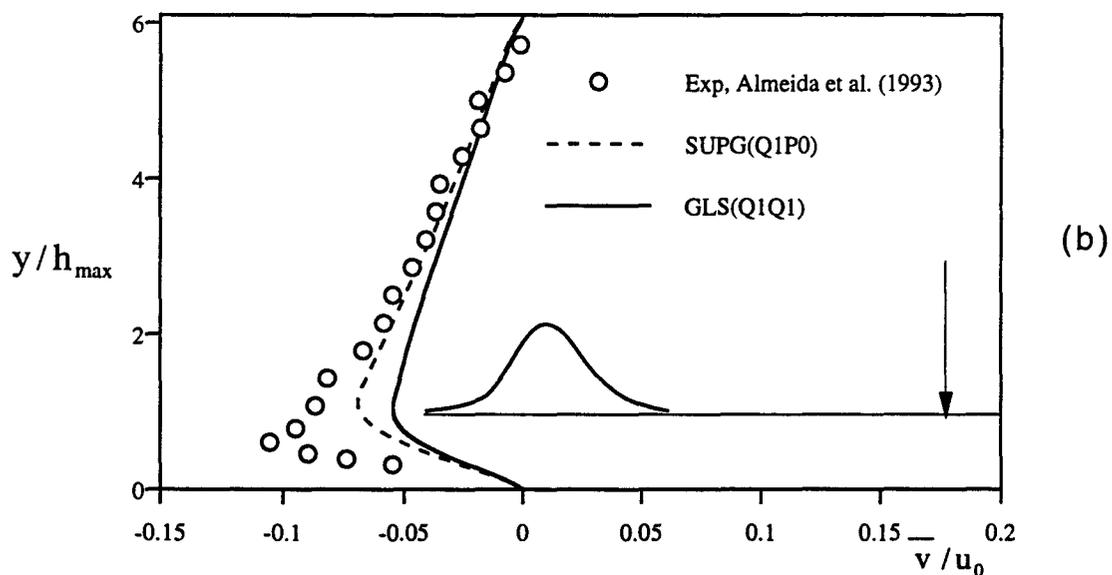
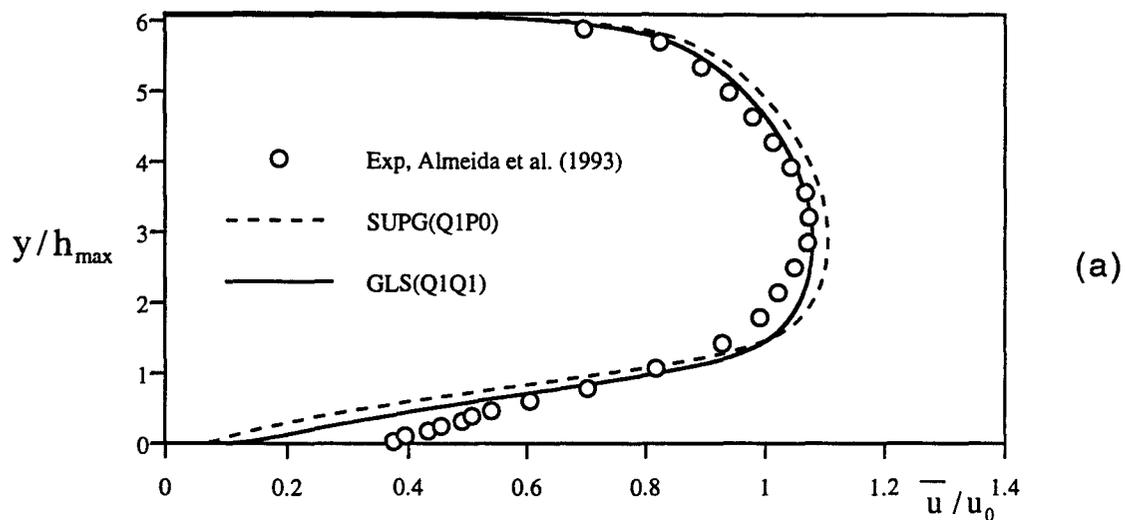


Figure 4.59 station $x/h=6.61$, (a) vitesse moyenne horizontale, (b) vitesse moyenne verticale, (c) énergie turbulente

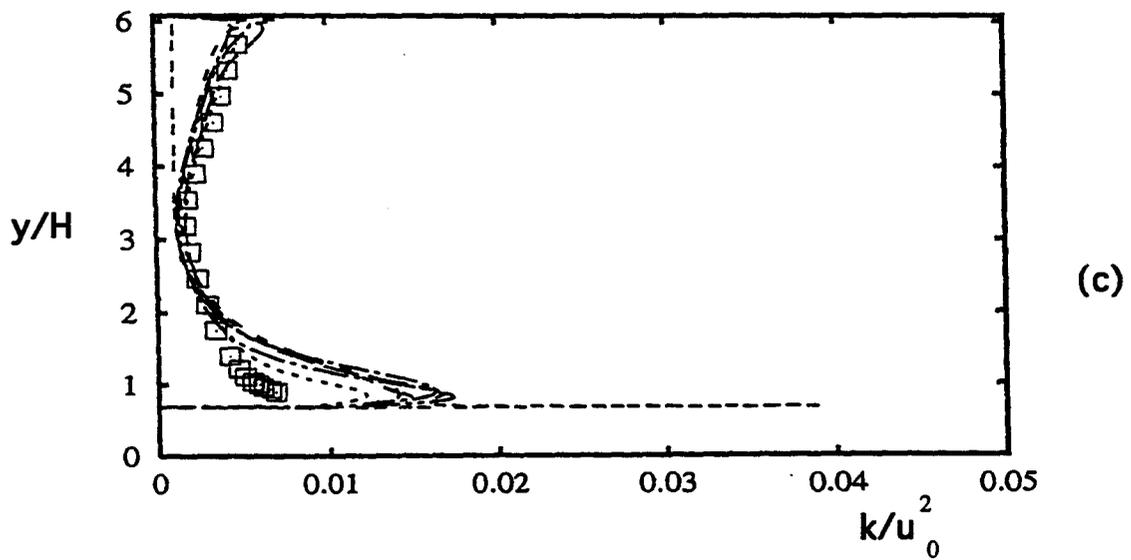
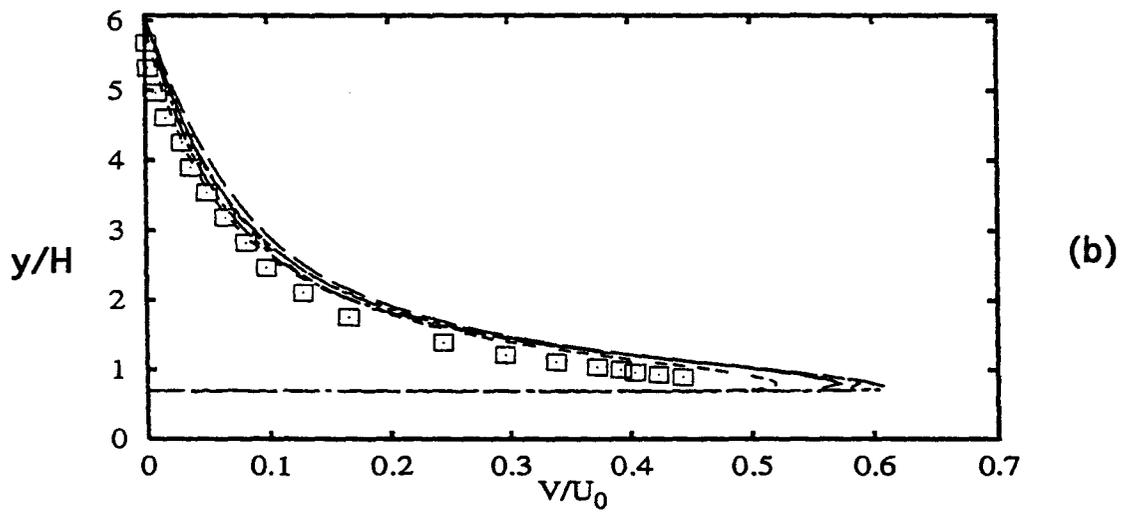
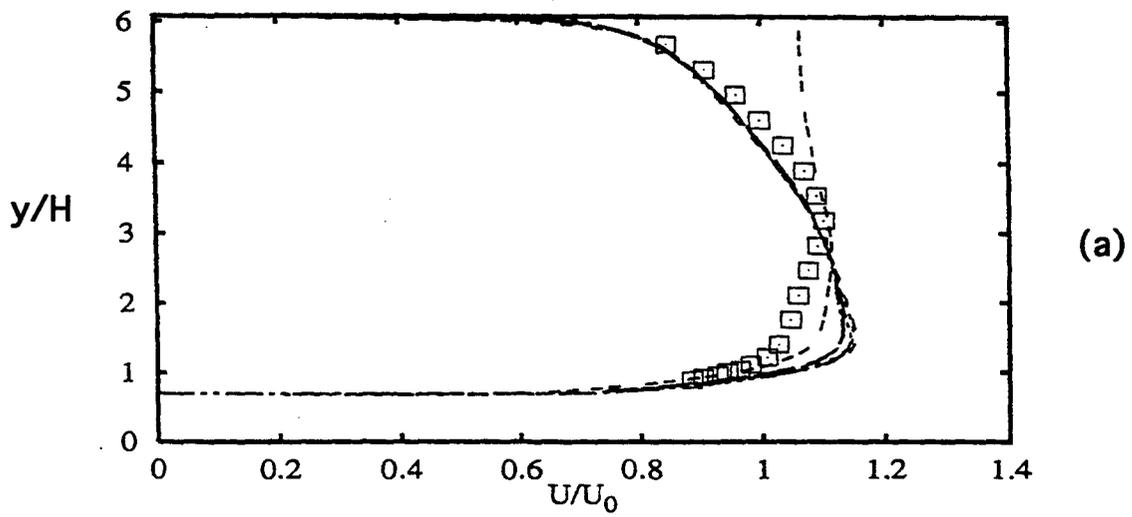
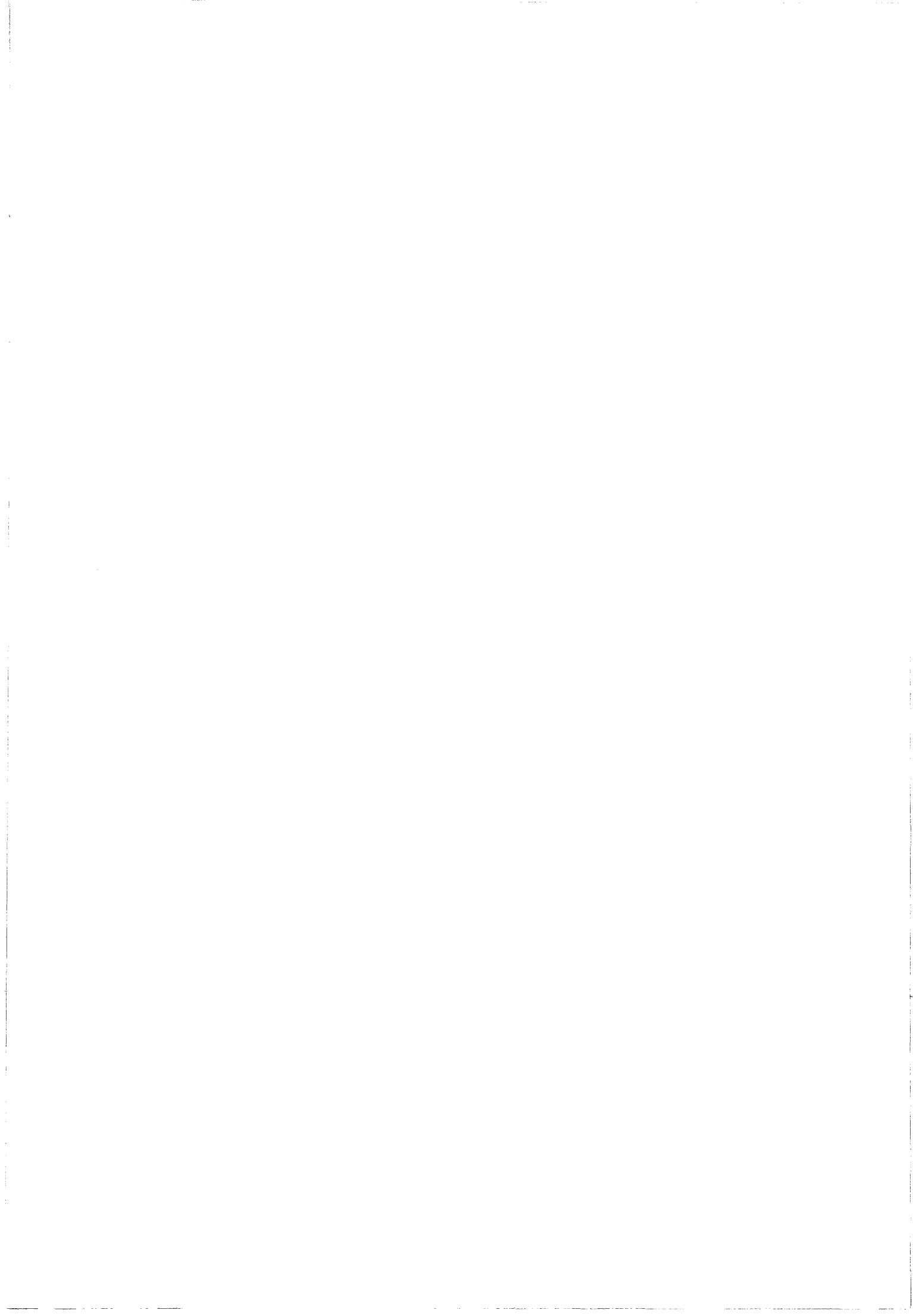


Figure 4.60 Résultats des différents modèles k-epsilon, $x/h=-0.71$
(issus du "Workshop" d'ERCOFTAC)



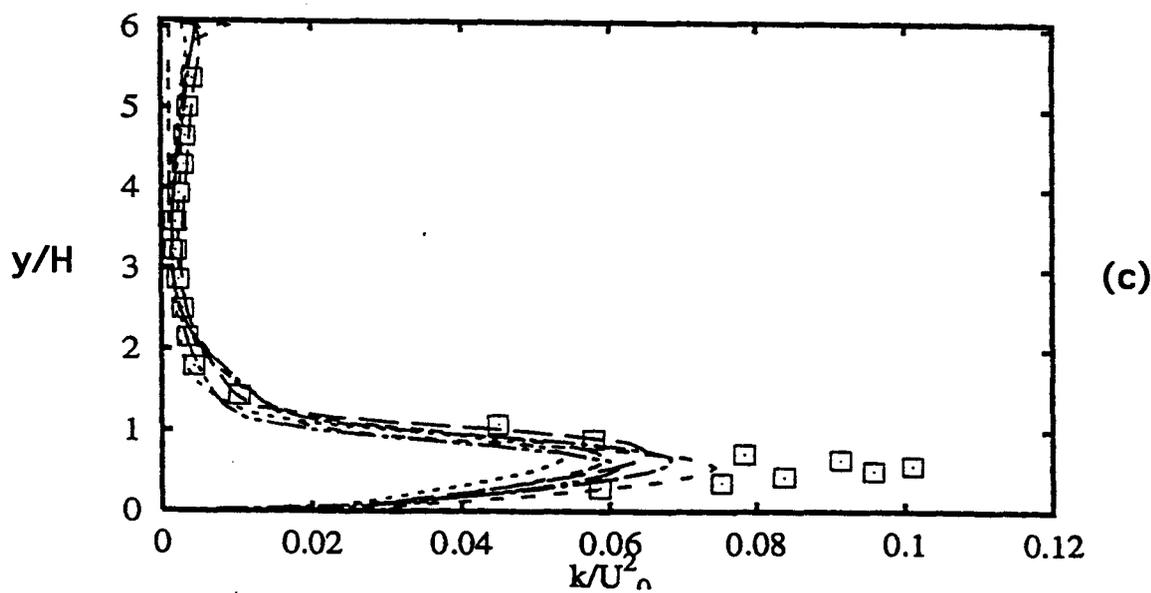
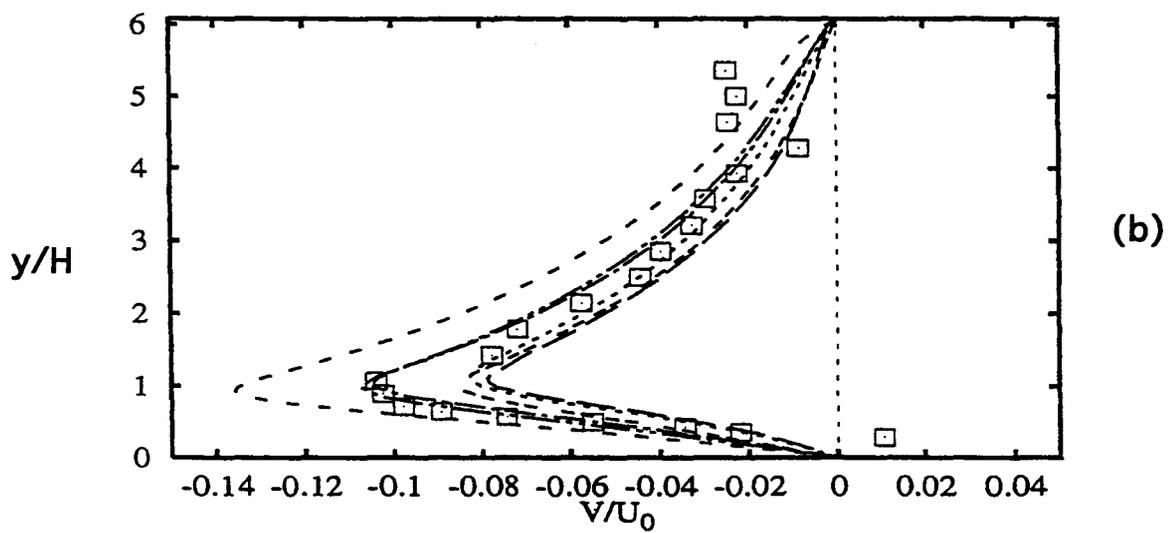
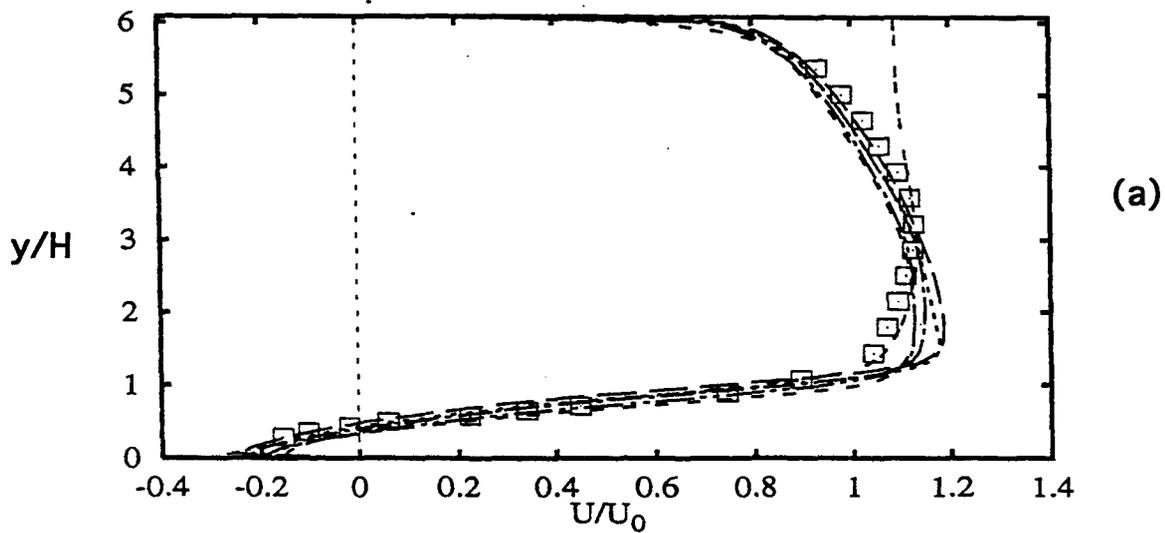
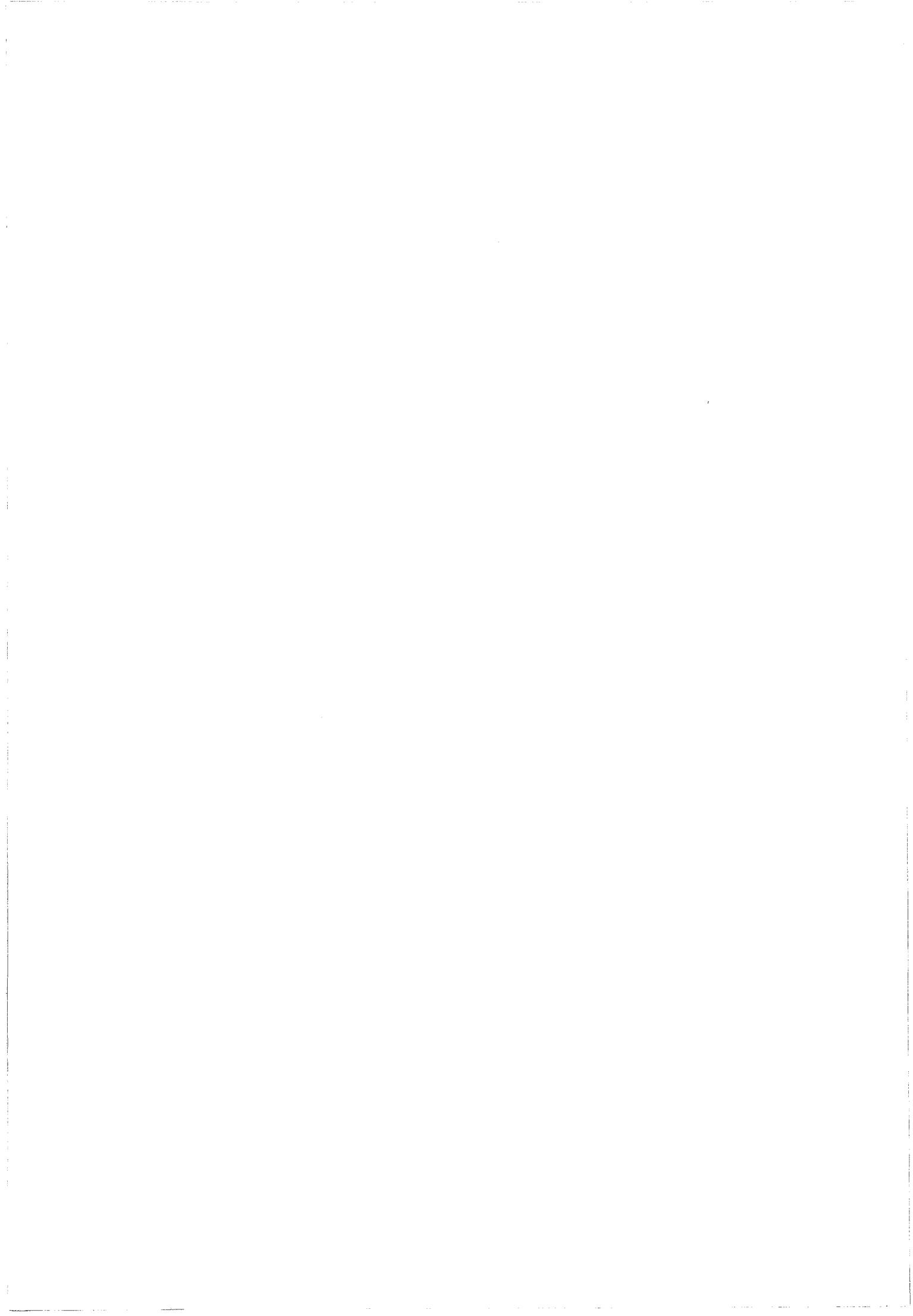


Figure 4.61 Résultats des différents modèles k-epsilon, $x/h=3.21$
(issus du "Workshop" d'ERCOFTAC)



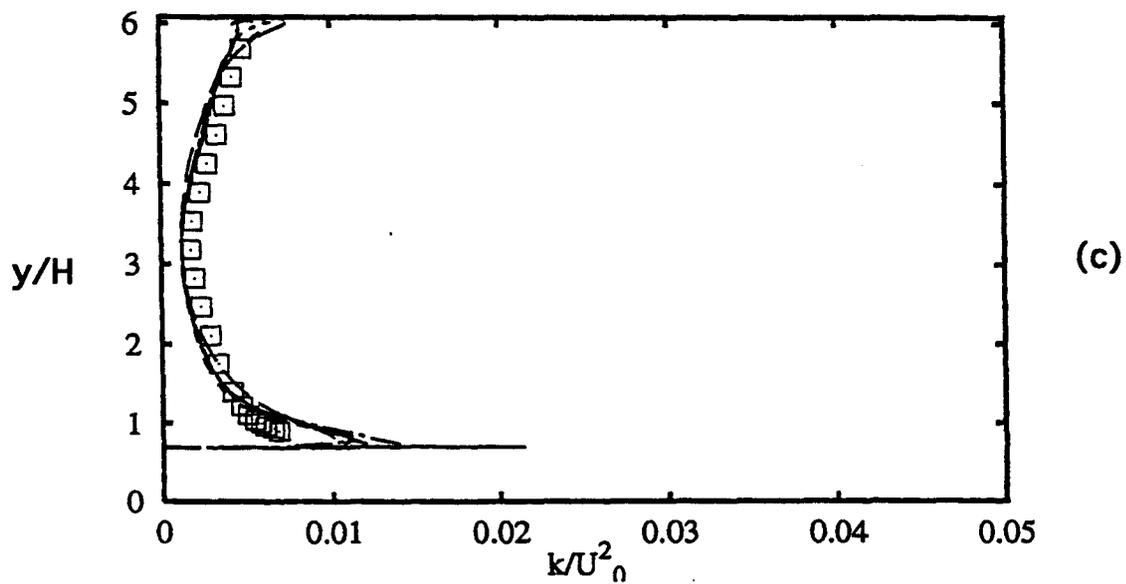
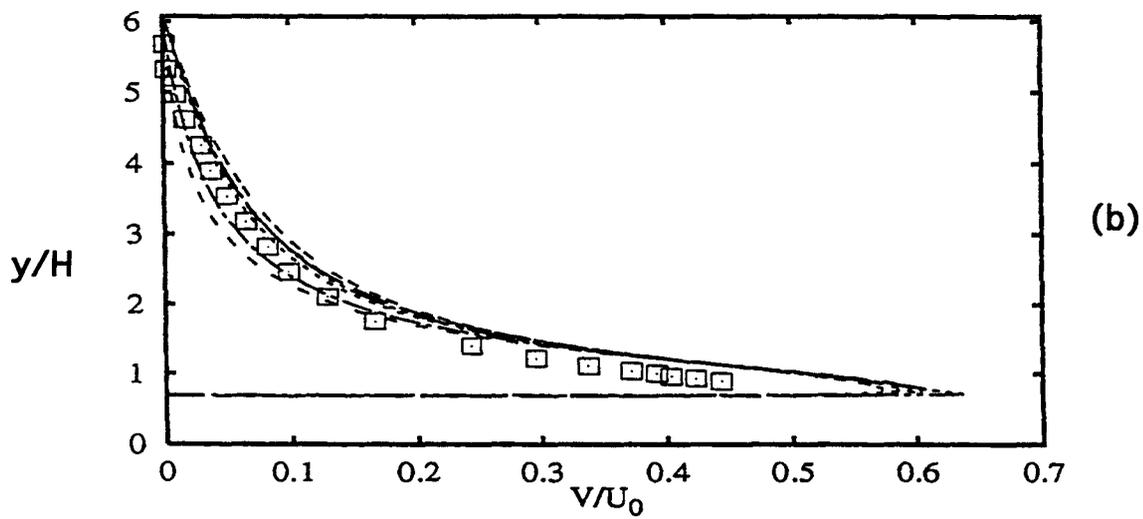
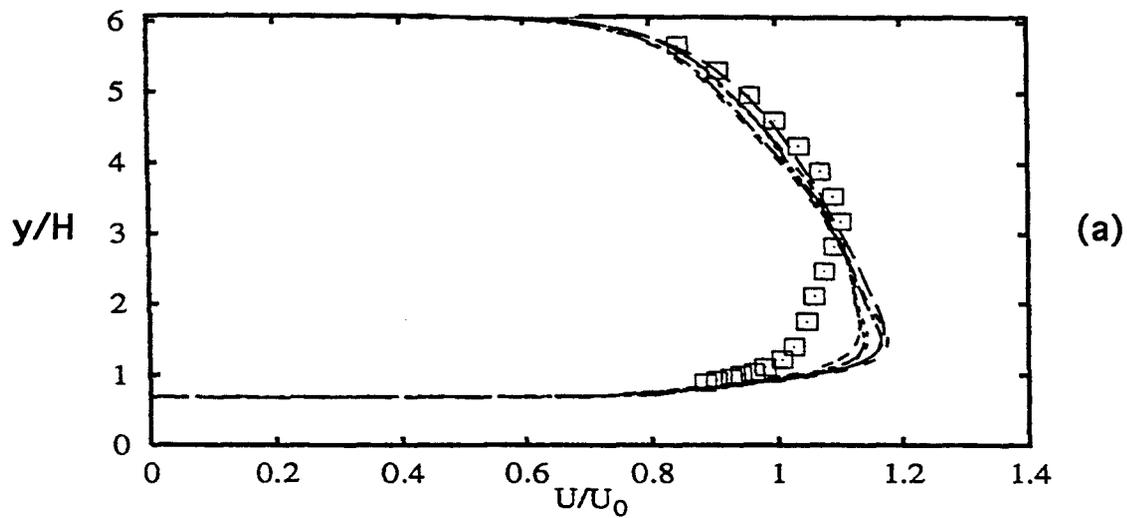


Figure 4.62 Résultats des différents modèles au second ordre, $x/h=-0.71$ (issus du "Workshop" d'ERCOFTAC)



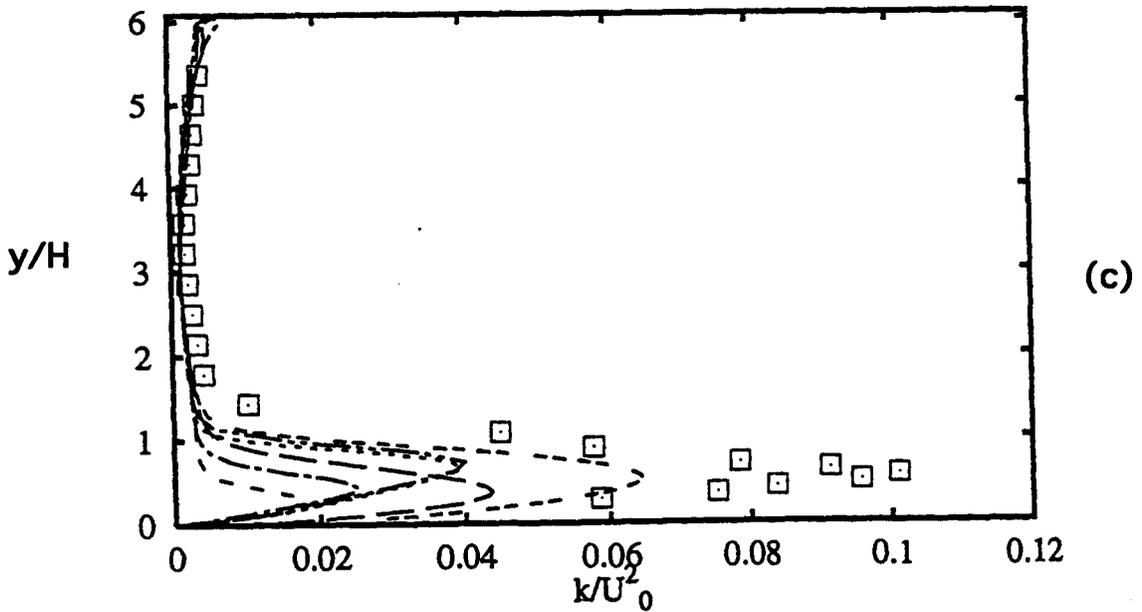
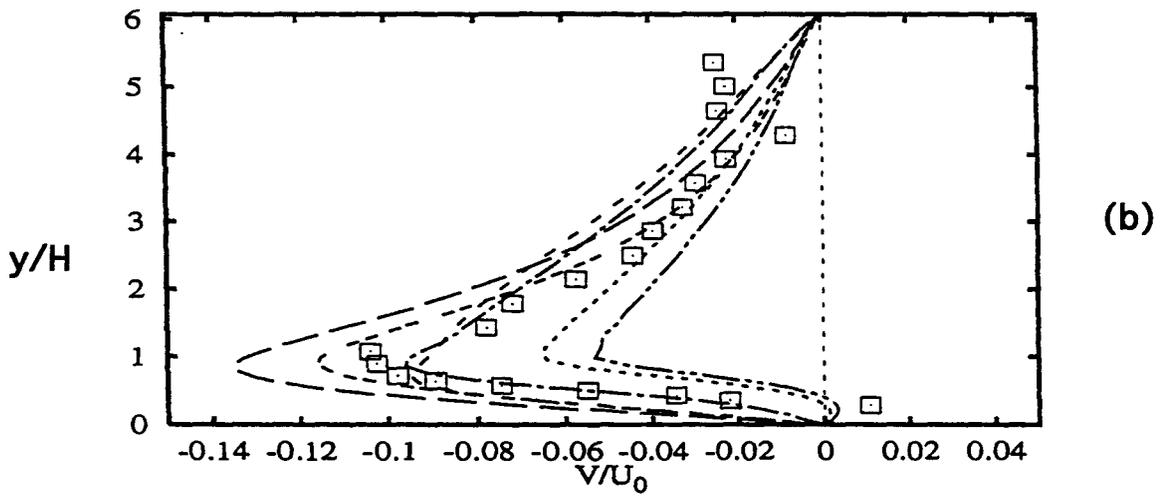
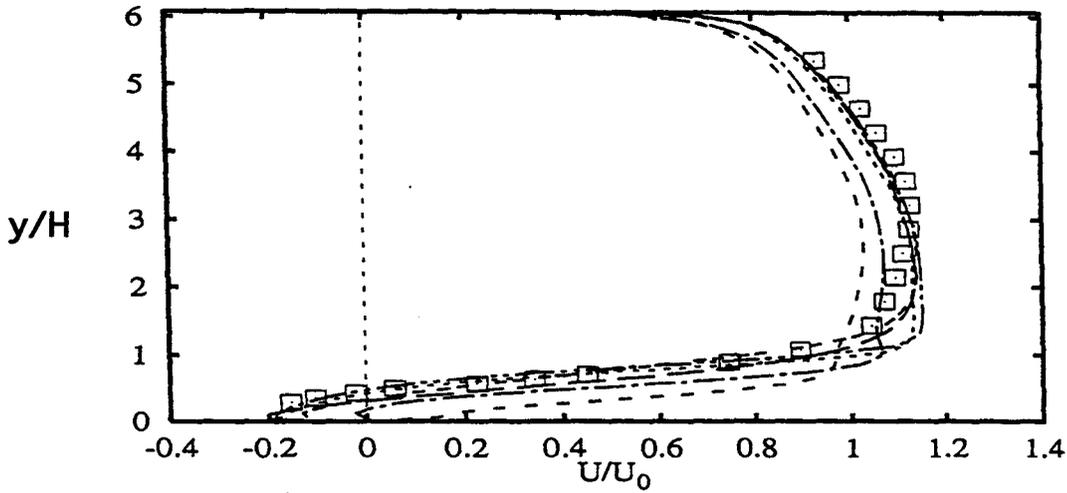


Figure 4.63 Résultats des différents modèles au second ordre, $x/h=3.21$ (issus du "Workshop" d'ERCOFTAC)