

50376
1996
506
Exclu du
piet.

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

spécialité : ELECTRONIQUE

par

Frédéric LABARRE

**ETUDE THEORIQUE DE LA PROPAGATION ET DU
COUPLAGE EN HAUTES FREQUENCES DES ONDES
ELECTROMAGNETIQUES SUR DES LIGNES DE
TRANSMISSION AERIENNES OU ENTERREES**

Soutenance prévue le 2 mai 1996 - Manuscrit provisoire

MM.	J.Ch. BOLOMEY	Rapporteur
	J. FONTAINE	Rapporteur
	P. DEGAUQUE	Directeur de thèse

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

spécialité : ELECTRONIQUE

par

Frédéric LABARRE



**ETUDE THEORIQUE DE LA PROPAGATION ET DU
COUPLAGE EN HAUTES FREQUENCES DES ONDES
ELECTROMAGNETIQUES SUR DES LIGNES DE
TRANSMISSION AERIENNES OU ENTERREES**

Soutenance prévue le 2 mai 1996 - Manuscrit provisoire

MM.	J.Ch. BOLOMEY	Rapporteur
	J. FONTAINE	Rapporteur
	P. DEGAUQUE	Directeur de thèse

SOMMAIRE

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
<hr/> CHAPITRE UN : Rayonnement d'un ensemble de lignes situées parallèlement à l'interface séparant deux demi-milieux <hr/>	
INTRODUCTION	4
I. Rayonnement d'un dipôle électrique horizontal	
<i>I.1. Potentiel vecteur de Hertz d'un dipôle électrique dans un milieu homogène</i>	5
<i>I.2. Potentiel de Hertz d'un dipôle électrique horizontal en présence d'un interface</i>	7
II. Champ électrique rayonné par un courant circulant sur un conducteur parallèle à l'interface.	11
<i>II.1. Composante longitudinale E_z rayonnée par un câble de section droite quelconque ou proche de l'interface</i>	11
<i>II.2. Calcul de la composante électrique E_x rayonnée par un conducteur cylindrique dans l'approximation des fils minces</i>	12
<i>II.3. Calcul de la composante magnétique H_θ rayonnée par le conducteur dans l'approximation des fils minces</i>	15
III. Prise en compte d'une gaine de matériau diélectrique autour du conducteur	16
<i>III.1. Impédance de surface dans le cas d'une gaine diélectrique</i>	16
<i>III.2. Principe de modélisation de la gaine diélectrique</i>	19
IV. Généralisation à un ensemble de lignes cylindriques et parallèles à un interface séparant deux demi-milieux	20
<i>IV.1. Application des conditions de continuité</i>	20
<i>IV.2. Calcul du courant</i>	21
CONCLUSION	23

CHAPITRE DEUX : Application de la théorie des antennes à un faisceau de lignes pour deux types d'excitation - Modes de propagation et courant induit.

INTRODUCTION	24
I. Représentation modale du courant se propageant sur un ensemble de lignes parallèles à l'interface	
<i>I.1. Obtention de l'équation modale</i>	25
<i>I.2. Remarque sur la méthode numérique de recherche des pôles</i>	28
<i>I.3. Etude des modes de propagation d'une ligne aérienne gainée</i>	29
<i>I.4. Etude des modes de propagation d'un bifilaire aérien non gainé</i>	30
<i>I.5. Etude des modes de propagation d'une ligne gainée et enterrée</i>	32
II. Courant induit par une onde plane sur un réseau de lignes parallèles à l'interface dans l'hypothèse des fils minces	33
<i>II.1. Calcul du courant</i>	33
<i>II.2. Effets de la gaine diélectrique sur une ligne aérienne</i>	34
<i>II.3. Courant induit sur un câble enterré</i>	36
<i>II.4. Réponse temporelle d'une ligne à l'IEMN</i>	36
III. Courant induit par une onde plane sur un câble de section droite quelconque ou proche de l'interface	37
<i>III.1. Résolution par la méthode des moments</i>	37
<i>III.2. Calcul de la matrice impédance</i>	39
<i>III.3. Distribution sur un conducteur cylindrique</i>	41
III.3.1. Câble aérien	41
III.3.2. Câble enterré	43
<i>III.4. Distribution de courant sur un câble cylindrique proche de l'interface</i>	44
III.4.1. Câble aérien	44
III.4.2. Câble enterré	44
<i>III.5. Courant induit sur un câble rectangulaire</i>	45
III.5.1. Polarisation transverse électrique	46
III.5.2. Polarisation transverse magnétique	47
CONCLUSION	48

CHAPITRE TROIS : Calcul des paramètres linéiques de la théorie des lignes de transmission d'un faisceau multiconducteur

INTRODUCTION	49
I. Paramètres linéiques d'un câble aérien obtenus à partir de ceux du câble coaxial	
<i>I.1. Impédance et admittance d'une ligne coaxiale</i>	50
<i>I.2. Paramètres secondaires de la ligne</i>	52
II. Définition des paramètres linéiques à partir de la théorie des antennes	53
<i>II.1. Ligne conductrice en présence d'un interface</i>	53
II.1.1. Ligne de longueur infinie isolée dans un espace homogène	53
II.1.2. Influence de l'interface séparant deux demi-milieux	56
II.1.3. Concept d'impédance et d'admittance	58
<i>II.2. Prise en compte d'une gaine diélectrique</i>	60
II.2.1. Champ électrique rayonné par un conducteur entouré d'une gaine diélectrique et situé au-dessus du sol	60
II.2.2. Recherche de la notion d'impédance et d'admittance	62
<i>II.3. Généralisation à un faisceau multifilaire</i>	65
II.3.1. Conducteurs non-gainés	65
II.3.2. Conducteurs entourés d'une gaine diélectrique	67
CONCLUSION	70

**CHAPITRE QUATRE : Comparaison de la théorie des lignes de transmission
et de la théorie des antennes au sujet des modes de propagation et du courant
induit**

INTRODUCTION	71
I. Théorie des lignes de transmission	
<i>I.1. Résolution de l'équation différentielle pour une ligne monofilaire</i>	72
I.1.1. Equations des télégraphistes	72
I.1.2. Remarque sur la référence de potentiel	74
<i>I.2. Extension à un faisceau de câbles</i>	75
II. Phénomènes de propagation des courants sur le faisceau	78
<i>II.1. Résolution pour une excitation par un générateur localisé</i>	78
<i>II.2. Modes de propagation et paramètres linéiques d'une ligne monoconducteur</i>	79
II.2.1. Modes de propagation d'une ligne aérienne	79
II.2.2. Paramètres linéiques d'une ligne aérienne	83
II.2.3. Configuration de la ligne enterrée	84
<i>II.3. Modes de propagation et matrices modales des paramètres linéiques d'une ligne multifilaire</i>	85
II.3.1. Définition des matrices modales	85
II.3.2. Modes de propagation sur une ligne bifilaire	88
III. Résolution de l'équation différentielle pour une illumination par une onde plane	89
<i>III.1. Ligne de longueur infinie</i>	90
III.1.1. Câble aérien parfaitement conducteur	92
III.1.2. Câble gainé	93
III.1.3. Modélisation d'un câble proche de l'interface par la théorie des lignes	94
<i>III.2. Perspective d'une méthode s'appliquant sur des lignes de longueur finie</i>	96
CONCLUSION	101
CONCLUSION GENERALE	102
BIBLIOGRAPHIE	103
ANNEXES	108

**INTRODUCTION
GENERALE**

INTRODUCTION GENERALE

L'utilisation de plus en plus importante de l'électronique bas niveau dans les circuits de commande ou de contrôle pose le problème de vulnérabilité des installations aux agressions électromagnétiques.

Ces signaux perturbateurs sont très souvent véhiculés par les lignes de transmission ou de transport d'énergie. C'est pour cette raison que l'on cherche à comprendre les principes de couplage entre les ondes électromagnétiques et les câbles ainsi que les phénomènes de propagation des courants induits.

Les structures sont complexes et variées ce qui multiplierait le coût des expérimentations in situ. Le recours à la modélisation permet de rechercher et d'optimiser les dispositifs de protection dans de meilleures conditions.

L'étude du couplage entre une structure filaire et une onde électromagnétique perturbatrice et, plus particulièrement, le calcul du courant induit sur un câble ou un faisceau de câbles placés parallèlement à la surface du sol, a fait l'objet de nombreux travaux. Cependant, la menace envisagée due à des sources de rayonnement, soit issues de l'activité industrielle soit volontaires, était telle qu'une approche basses fréquences, typiquement jusque 30 MHz voire 100 MHz, était parfaitement justifiée.

Dans le cas du couplage avec un câble aérien par exemple, cela se traduit par l'apparition d'un courant induit déterminé approximativement à l'aide de la théorie modale grâce à l'introduction d'hypothèses simplificatrices. En particulier la plupart des auteurs suppose qu'un seul mode se propage, la configuration de la carte de champ dans un plan transverse étant quasi-TEM.

Cependant, l'apparition de sources de puissance à plus haute fréquence et, de façon corollaire, la sensibilité de plus en plus grande des composants électroniques aux agressions électromagnétiques font apparaître la nécessité d'étendre ces études aux gammes des hautes fréquences, c'est à dire lorsque la distance entre le câble et la surface du sol devient de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.

Pour les applications envisagées dans le cadre de ce travail concernant les câbles d'énergie ou de télécommunication, la longueur de ceux-ci sera très grande vis à vis de la longueur d'onde et une méthode numérique directe basée sur un formalisme intégral pour déterminer le courant sur la structure sera extrêmement coûteuse à mettre en oeuvre.

Nous avons donc essayé de montrer quelles étaient les possibilités d'étendre la théorie des lignes de transmission et de voir de plus quelle était l'influence d'autres paramètres tels que la présence d'une gaine diélectrique sur le conducteur, la proximité du câble par rapport à la surface du sol qui rompt la symétrie de révolution cylindrique du courant sur le fil...

Pour cela, nous exposons dans un premier chapitre la théorie des antennes basée sur l'étude du rayonnement du dipôle électrique et nous indiquons le moyen de prendre en compte l'interface air-sol. Nous soulignons aussi le fait que deux voies s'ouvrent à nous quant à l'application de cette théorie : une voie qui approfondit le développement analytique moyennant certaines hypothèses et une autre plus générale mais qui fait appel au calcul numérique. Au sein de la démarche analytique, nous incorporons enfin la possibilité d'inclure la présence d'une gaine en matériau diélectrique autour des câbles.

La mise en pratique de la théorie précédente est présentée dans le second chapitre où nous envisageons deux types d'excitation du faisceau de câbles placés parallèlement à la surface du sol. La première est celle due à un générateur localisé ce qui nous permet d'appréhender les phénomènes de propagation des courants sur les conducteurs. La seconde est celle due à une onde plane, ceci afin de quantifier le couplage de l'onde avec les câbles. Comme nous l'avons signalé précédemment et si nous n'envisageons par exemple qu'un seul câble placé parallèlement à la surface du sol, l'effet de proximité du sol peut jouer un rôle important sur la distribution du courant dans le plan transversal du conducteur et donc sur la constante de propagation le long du câble. Ce problème peut être résolu de deux façons. Tout d'abord, on peut arbitrairement décomposer un câble de rayon donné en un grand nombre de câbles très fins, donc de rayon beaucoup plus petit que le précédent. En utilisant l'approche du couplage entre une onde et un faisceau multifilaire, on en déduit la distribution du courant sur chacun des fils donc l'allure de la distribution sur le câble réel. Une deuxième possibilité consiste à trouver un formalisme intégral qui donne la distribution du courant dans le plan transverse. Dans ce cas, l'équation intégrale dans ce plan sera résolu en appliquant la méthode des moments. Une comparaison des résultats obtenus à l'aide de ces deux méthodes est présentée et une étude paramétrique est effectuée en fonction de la hauteur du câble au-dessus du sol.

Les deux chapitres suivants sont relatifs à la mise en oeuvre de la théorie des lignes de transmission.

La principale difficulté est de trouver des paramètres linéiques représentatifs de la structure. Ce point fait l'objet du troisième chapitre. Nous nous sommes plus particulièrement attachés à deux formulations en indiquant leur moyen mais aussi leurs conditions d'obtention. La première est obtenue à partir de l'étude du câble coaxial. Bien qu'elle ne soit que très approchée, elle est fréquemment utilisée dans les codes de calcul usuels ce qui nous a amené à étudier en détail son domaine de validité. La seconde est dérivée de la théorie des antennes et son application peut s'avérer délicate. La possibilité d'étendre cette formulation à de nombreuses configurations lui donne cependant un intérêt évident.

Dans le quatrième chapitre, nous comparons les résultats donnés par une théorie exacte et ceux donnés par la théorie des lignes. Nous reprenons les deux excitations envisagées auparavant et nous soulignons les principales différences au niveau de la propagation et du couplage pour diverses configurations. Afin d'affiner les résultats obtenus par la théorie des lignes de transmission, nous présentons un processus itératif pour le calcul des paramètres linéiques. En dernier lieu, nous introduisons une alternative de modélisation de structures géométriquement complexes par la théorie des lignes de transmission que nous comparons à la méthode des moments.

En conclusion, cette étude permet de connaître les principales différences entre deux techniques de modélisation ainsi que leurs conséquences en hautes fréquences. Nous rappelons cependant qu'elle n'a été développée que pour des lignes de longueur infinie. Nous avons toutefois indiqué comment l'étendre au cas de lignes de longueur finie lors du dernier chapitre.

CHAPITRE UN

**Rayonnement d'un ensemble de lignes
situées parallèlement à l'interface
séparant deux demi-milieux**

INTRODUCTION

Le but de ce premier chapitre est l'étude en hautes fréquences d'un ensemble de lignes horizontales situées parallèlement à une interface séparant deux demi-milieux par une théorie rigoureuse basée sur l'étude du rayonnement du dipôle électrique horizontal.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à un seul conducteur en présence de l'interface séparant ces deux milieux et nous suivons une démarche originale développée par Olsen et Chang. Le conducteur est supposé constitué d'une multitude de dipôles électriques et la composante longitudinale E_z rayonnée par un courant se propageant sur ce conducteur est calculée en sommant les rayonnements des dipôles. Nous développons analytiquement ce calcul dans le cas du conducteur cylindrique.

Dans un second temps et dans cette dernière configuration, nous indiquons une méthode générale afin de pouvoir tenir compte de la plupart des paramètres physiques associés au conducteur (conductivité finie, présence d'une gaine de matériau diélectrique...). Cette méthode restreint malheureusement l'étude à des lignes de longueur infinie.

Enfin, nous généralisons la théorie des antennes à un faisceau multifilaire. Nous soulignons le fait qu'aucune hypothèse hormis une perméabilité magnétique identique n'a été faite sur la nature des deux milieux, ce qui nous permet de l'appliquer à un faisceau de lignes enterrées.

I. Rayonnement d'un dipôle électrique horizontal

I.1. Potentiel vecteur de Hertz d'un dipôle électrique dans un milieu homogène

Nous présentons rapidement la démarche permettant de calculer le rayonnement d'un dipôle électrique situé dans un milieu homogène et infini lorsque l'on suppose un régime sinusoïdal établi de la forme $e^{j\omega t}$. Ces principaux résultats se trouvent dans [1]. D'une manière générale, les champs rayonnés par un dipôle électrique peuvent se calculer à partir du potentiel vecteur de Hertz par

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{rot rot } \vec{\Pi} \\ \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\text{rot } \vec{\Pi} \end{cases} \quad (\text{I-1})$$

Celui-ci doit résoudre l'équation de propagation de Helmholtz :

$$(\Delta - \gamma^2)\vec{\Pi} = \frac{-I\delta}{(\sigma + j\omega\epsilon)s} \quad (\text{I-2})$$

où s est la section du dipôle et δ est une fonction qui vaut 1 lorsque l'on se situe à l'intérieur du dipôle et 0 à l'extérieur de celui-ci. Nous sommes dans un espace homogène caractérisé par une constante de propagation γ intrinsèque et donnée par $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$ où μ , σ , ϵ représentent respectivement la perméabilité magnétique, la conductivité et la permittivité électrique du milieu.

Nous pouvons introduire la fonction de Green qui vérifie l'équation de propagation sans second membre. Celle-ci doit être de symétrie sphérique et elle peut être donnée par [2]:

$$G(r) = \frac{e^{-\gamma r}}{r} \quad (\text{I-3})$$

Nous appliquons le théorème de Green à $\vec{\Pi}$ et à $G(r)$ sur le volume et la surface sur la figure n°1. Nous sommes obligés d'introduire un sous-volume V_1 qui permet de contourner la singularité de la fonction de Green à l'origine. Nous supposons que ce sous-volume est infinitésimal.

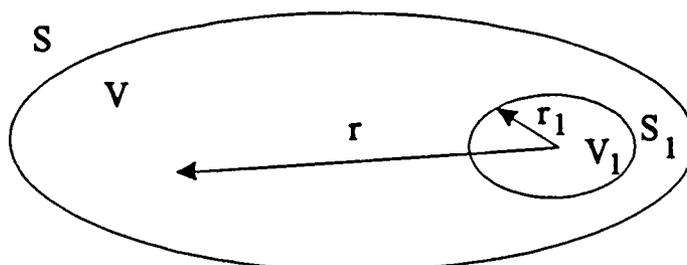


Figure n°1 : Définition du volume d'application du théorème de Green

Par conséquent, d'après le théorème de Green :

$$\iiint_{v-v_1} (G \Delta \bar{\Pi} - \bar{\Pi} \Delta G) dv = \iint_s (G \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial n} - \bar{\Pi} \frac{\partial G}{\partial n}) ds + \iint_{s_1} (G \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial n} - \bar{\Pi} \frac{\partial G}{\partial n}) ds \quad (I-4)$$

Nous pouvons en déduire alors le potentiel-vecteur de Hertz par :

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{v-v_1} (G \frac{I \delta}{(\sigma + j\omega \epsilon) s}) dv + \frac{1}{4\pi} \iint_s (G \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial n} - \bar{\Pi} \frac{\partial G}{\partial n}) ds \quad (I-5)$$

Si toutes les antennes sont situées à l'intérieur du volume ($v-v_1$) alors l'intégrale de surface est nulle. De plus, s'il n'existe pas de déphasage de la densité de courant sur l'antenne et si la longueur de celle-ci reste petite, nous obtenons finalement :

$$\bar{\Pi} = \frac{j\omega \mu}{4\pi \gamma^2} I \frac{e^{-\gamma r}}{r} \quad (I-6)$$

Nous ne désirons pas garder le potentiel-vecteur de Hertz sous la forme (I-6) car la présence d'un interface dans la suite de l'étude va venir briser la symétrie sphérique. Nous pouvons utiliser la représentation intégrale de la fonction de Green, soit encore [3]:

$$\bar{\Pi} = - \frac{j\omega \mu \gamma_0}{8\pi \gamma^2} I \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi \sqrt{x^2 + y^2}) e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta \quad (I-7)$$

avec $\xi = \sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - \eta^2}$. Le dipôle est orienté selon l'axe Oz (Figure n°2). La fonction $H_0^{(2)}$ est la fonction de Hankel de seconde espèce et d'ordre 0 et γ_0 est la constante de propagation d'une onde dans le vide soit $\gamma_0 = j\omega \sqrt{\mu \epsilon_0}$. La partie imaginaire de ξ doit être définie négative afin d'assurer la convergence de la fonction de Hankel $H_0^{(2)}$ pour un point situé à l'infini.

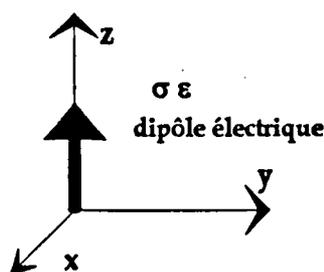


Figure n°2: Définition du repère cartésien (Oxyz)

Nous pouvons définir une transformée de Fourier qui permet de passer de l'espace cartésien (x,y,z) à un espace (x,y,η) par la relation ci-dessous :

$$g(x,y,z) = \text{TF}[G(x,y,\eta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,\eta) e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta$$

$$G(x,y,\eta) = \text{TF}^{-1}[g(x,y,z)] = \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y,z) e^{\gamma_0 \eta z} dz$$
(1-8)

La variable η représente une constante de propagation normalisée par rapport à la constante de propagation γ_0 d'une onde dans le vide. Nous transformons ainsi l'axe Oz de notre espace spatial en un axe gradué en constantes de propagation normalisées et représentatives des différents modes susceptibles de se propager dans cette direction. Cette transformée de Fourier peut être étendue aux trois dimensions de l'espace cartésien (x,y,z) .

$$g(x,y,z) = \text{TF}[G(v,\lambda,\eta)] = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(v,\lambda,\eta) e^{-\gamma_0(vx+\lambda y+\eta z)} dv d\lambda d\eta$$

$$G(v,\lambda,\eta) = \text{TF}^{-1}[g(x,y,z)] = \left(\frac{-j\gamma_0}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(x,y,z) e^{\gamma_0(vx+\lambda y+\eta z)} dx dy dz$$
(I-9)

I.2. Potentiel de Hertz d'un dipôle électrique horizontal en présence d'un interface

Nous allons suivre maintenant la démarche qui a été exposée par Banos [4] et qui permet de prendre en compte la présence de l'interface air-sol. Cette démarche est la source d'un long développement débuté par Wait [5] et approfondie par Olsen et Chang [6]. Nous supposons que le dipôle électrique se trouve dans un demi-milieu caractérisé par une conductivité σ_1 et une permittivité relative ϵ_{r1} . Il est placé horizontalement au-dessus d'un autre milieu caractérisé par σ_2 et ϵ_{r2} . Nous supposerons que la perméabilité μ des deux milieux est identique. Nous définissons un système de coordonnées cylindriques que nous indiquons sur la figure n°3.

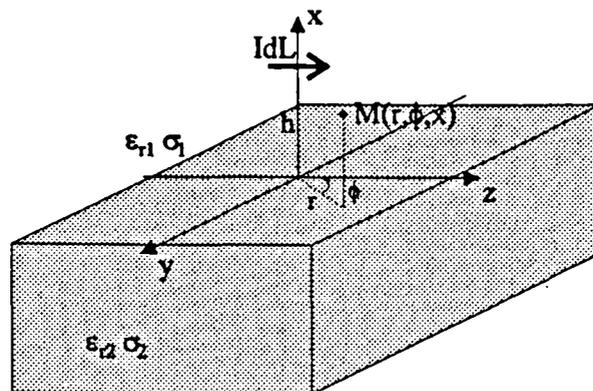


Figure n°3 : Définition du système de coordonnées pour le dipôle électrique horizontal

Pour calculer le potentiel-vecteur de Hertz en présence d'un demi-milieu, nous aurons à appliquer les conditions de continuité sur l'interface. Cette surface étant plane, nous ne pouvons pas rester dans un système cylindrique. C'est pourquoi nous calculons la transformée de Fourier à deux dimensions de la fonction de Green qui permet de passer d'un espace (x,y,z) à un espace (x,λ,η) . En utilisant la forme intégrale de la fonction de Hankel donnée dans [3], nous obtenons aisément :

$$\Pi_{z_1} = \frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma_1^2} I dl \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\gamma_0 u_1 (x-h)}}{u_1} e^{-\gamma_0(\eta z + \lambda y)} d\lambda d\eta \quad (I-10)$$

$$\text{avec } u_1 = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2} + \eta^2}$$

La partie réelle de u_1 doit être définie positive afin d'assurer la convergence de l'intégrale lorsque x tend vers l'infini. De plus, Π_{z_1} est la composante selon l'axe (Oz) du potentiel primaire du dipôle électrique orienté selon (Oz). Le potentiel vecteur $\vec{\Pi}_1$ dans le milieu 1 se compose d'une manière générale de deux composantes Π_{x_1} et Π_{z_1} . Cette dernière composante selon l'axe (Oz), est la somme du potentiel primaire et d'un potentiel secondaire traduisant la présence du sol qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Pi_{z_1} = \frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma_1^2} I dl \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda,\eta) e^{j\gamma_0 u_1 (x-h)} e^{-\gamma_0(\eta z + \lambda y)} d\lambda d\eta \quad (I-11)$$

Dans le milieu 2, nous n'avons qu'un potentiel secondaire car il n'existe pas de source. Le potentiel peut se mettre de façon analogue sous la forme :

$$\Pi_{z_2} = \frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma_2^2} I dl \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\lambda,\eta) e^{-j\gamma_0(u_1 h + u_2 x)} e^{-\gamma_0(\eta z + \lambda y)} d\lambda d\eta \quad (I-12)$$

$$\text{avec } u_2 = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_0^2} + \eta^2}$$

Les composantes selon l'axe (Ox) peuvent aussi s'écrire

$$\Pi_{x_1} = \frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma_1^2} I dl \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -\gamma_0 \eta g_1(\lambda,\eta) e^{-j\gamma_0 u_1 (x-h)} e^{-\gamma_0(\eta z + \lambda y)} d\lambda d\eta \quad (I-13)$$

$$\Pi_{x_2} = \frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma_2^2} I dl \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -\gamma_0 \eta g_2(\lambda,\eta) e^{j\gamma_0(u_1 h - u_2 x)} e^{-\gamma_0(\eta z + \lambda y)} d\lambda d\eta \quad (I-14)$$

Les fonctions f_1 , f_2 , g_1 , g_2 sont déterminées en appliquant les conditions de continuité à l'interface air-sol et en supposant que le potentiel est une solution à

variables séparées de l'équation d'onde. Ces conditions de continuité s'expriment par :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{z2} = E_{z1} \quad H_{z2} = H_{z1} \\ E_{y2} = E_{y1} \quad H_{y2} = H_{y1} \end{array} \right\}_{x=0} \quad (\text{I-15})$$

Les conditions se simplifient et peuvent s'exprimer à partir des potentiels vecteurs de Hertz [7]. En définissant les intégrales suivantes:

$$G_{11} = \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\gamma_0 u_1(x-h)}}{u_1} e^{-\gamma_0(\eta z + \lambda y)} d\lambda d\eta \quad (\text{I-16})$$

$$G_{12} = \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\gamma_0 u_1(x+h)}}{u_1} e^{-\gamma_0(\eta z + \lambda y)} d\lambda d\eta \quad (\text{I-17})$$

$$U_{11} = \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{j\gamma_0 u_1(x+h)}}{u_1 + u_2} e^{-\gamma_0(\eta z + \lambda y)} d\lambda d\eta \quad (\text{I-18})$$

$$V_{11} = \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{j\gamma_0 u_1(x-h)}}{\gamma_2^2 u_1 + \gamma_1^2 u_2} e^{-\gamma_0(\eta z + \lambda y)} d\lambda d\eta \quad (\text{I-19})$$

Nous obtenons enfin le potentiel vecteur de Hertz dans l'air [4]:

$$\bar{\Pi}_1 = \frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma_1^2} I dl [(G_{11} - G_{12} + U_{11}) \bar{z} + (\gamma_1^2 V_{11} - U_{11}) \bar{x}] \quad (\text{I-20})$$

En passant dans le repère cylindrique attaché au dipôle (voir figure n°3), la composante radiale du champ électrique rayonnée dans le milieu 1 par le dipôle de longueur dl et parcouru par un courant I se calcule par :

$$\bar{E}_r = \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \bar{\Pi}_1) - \gamma_1^2 \cos(\phi) \bar{\Pi}_z \quad (\text{I-21})$$

Nous remplaçons le potentiel-vecteur de Hertz par son expression (I-20) et nous obtenons pour la composante E_r

$$E_{r1} = \frac{j\omega\mu}{4\pi\gamma_1^2} I dl \cos(\phi) \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (G_{11} - G_{12} - \gamma_1^2 V_{11}) - \gamma_1^2 (G_{11} - G_{12} + U_{11}) \right] \quad (\text{I-22})$$

Nous désirons également connaître la composante longitudinale E_z du champ électrique rayonné par le dipôle. Pour cela, nous calculons la composante E_z en prenant pour valeur de l'angle ϕ 0 degré. En reconnaissant la forme intégrale de la

fonction de Hankel dans les fonctions G_{11} et G_{12} nous obtenons finalement :

$$E_{z_1}(x, y, z) = \frac{Z_0 \gamma_0^2}{8\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\xi_1^2}{n_1^2} \left[H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 \sqrt{y^2 + (x-h)^2}) - H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 \sqrt{y^2 + (x+h)^2}) \right] + P(x, y, \eta) - Q(x, y, \eta) \right\} e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta \quad (I-23)$$

où Z_0 est l'impédance d'onde dans le vide, $n_1 = \gamma_1/\gamma_0$, $n_2 = \gamma_2/\gamma_0$ et

$$P(x, y, \eta) = \frac{2j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\gamma_0 u_1 (x+h)}}{u_1 + u_2} e^{-\gamma_0 \lambda y} d\lambda \quad (I-24)$$

$$Q(x, y, \eta) = \frac{2j\eta^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\gamma_0 u_1 (x+h)}}{u_1 n_2^2 + u_2 n_1^2} e^{-\gamma_0 \lambda y} d\lambda \quad (I-25)$$

Nous pouvons voir que la composante longitudinale du champ électrique rayonné par le dipôle au-dessus du sol est la somme du rayonnement de ce même dipôle dans un milieu homogène (milieu 1)- ceci est traduit par la présence de la première fonction de Hankel - et du rayonnement d'un dipôle image, symétrique du précédent par rapport à l'interface - phénomène traduit par la deuxième fonction de Hankel.

Les intégrales de Sommerfeld P et Q traduisent la présence de l'interface. Si nous remplaçons le demi-milieu par un plan de masse, il suffit de faire tendre la conductivité du demi-milieu 2 vers l'infini. Ceci aurait pour conséquence d'annuler les intégrales de Sommerfeld. On peut trouver dans la référence [6] des approximations de P et Q. L'intégration numérique de ce genre d'intégrales a souvent fait l'objet d'études particulières notamment pour le cas d'un dipôle vertical au-dessus d'un sol de conductivité finie [8] où un terme sous forme de fonction de Bessel J_0 apparaît et complique quelque peu l'allure des fonctions à intégrer. Il existe aussi d'autres méthodes qui consiste à déformer le contour d'intégration [4].

Pour notre part, le calcul de ces intégrales se fait numériquement. Nous avons mis en oeuvre un algorithme de Gauss-Romberg qui nous a paru bien adapté et plus rapide qu'un algorithme de Simpson. De plus, étant donné la puissance des calculateurs modernes, l'utilisation d'un algorithme d'accélération de convergence [9] ne s'est pas révélée nécessaire.

II. Champ électrique rayonné par un courant circulant sur un conducteur parallèle à l'interface.

II.1. Composante longitudinale E_z rayonnée par un câble de section droite quelconque ou proche de l'interface

Nous désirons calculer la composante longitudinale du champ électrique rayonné par un câble de section droite quelconque ou proche de l'interface. La composante longitudinale du champ électrique rayonné par un dipôle électrique horizontal au-dessus du sol a été donnée par la formule (I-22). Si le dipôle se situe en (x_0, y_0, z_0) , nous avons

$$\begin{aligned} dE_z(x, y, z) &= \frac{Z_0 \gamma_0^2}{8\pi} I(x_0, y_0, z_0) dl \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\xi_1^2}{n_1^2} \left[H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 \sqrt{(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 \sqrt{(y-y_0)^2 + (x+x_0)^2}) \right] + P(x_0, y_0, \eta) - Q(x_0, y_0, \eta) \right\} e^{-\gamma_0 \eta (z-z_0)} d\eta \quad (I-25) \\ &= \frac{Z_0 \gamma_0^2}{8\pi} I(x_0, y_0, z_0) dl \int_{-\infty}^{+\infty} M^E(x, y, x_0, y_0, \eta) e^{-\gamma_0 \eta (z-z_0)} d\eta \end{aligned}$$

où M^E est la quantité figurant entre les crochets de l'équation (I-25).

Nous introduisons la notion de filament de courant. Un filament de courant est constitué d'une multitude de dipôles mis bout à bout sur toute la longueur $2L$ du câble. Par conséquent, le champ électrique E_z rayonné par ce filament de courant en un point d'abscisse z est donné par

$$E_z(x, y, z) = \int_{-L}^{+L} dE_z(x, y, z, z_0) dz_0 \quad (I-26)$$

Etant donnée sa définition, un filament est une ligne de courant représentée par un point dans le plan xOy , on peut donc le placer très proche de l'interface.

Pour calculer le champ diffracté par un câble de section droite quelconque proche de l'interface selon la figure n°4, nous supposons que celui-ci est constitué d'un ensemble de filaments de courant parallèles à l'axe Oz et placés de façon à reproduire la géométrie du câble. Notre étude pour ce genre de configuration ne comprend que le cas d'une ligne parfaitement conductrice, l'épaisseur de peau est donc nulle. C'est pourquoi le courant est réparti à la périphérie du câble. Les filaments de courant sont localisés uniquement sur le contour C et vont représenter les densités de courant sur le câble.

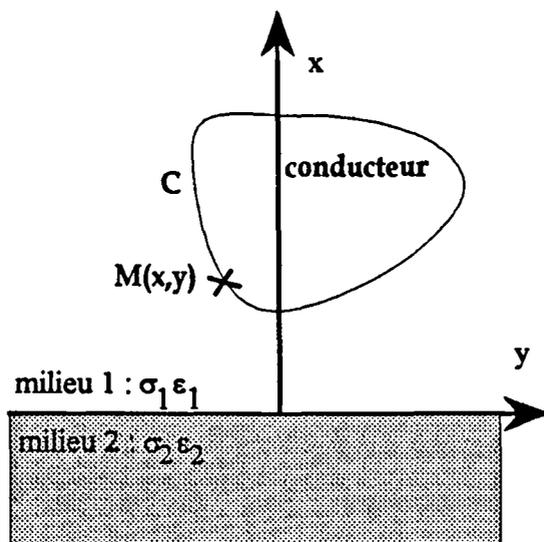


Figure n°4 : câble conducteur de section droite quelconque

Pour une ligne de longueur infinie, la composante longitudinale du champ électrique rayonné par le courant à la surface de ce câble se met sous la forme :

$$E_z(x, y, z) = \int_{c-L}^{+L} \int_C dE_z(x, y, z) dz_0 dc \quad (I-27)$$

où le point $M(x,y)$ parcourt C . Nous pouvons voir que le champ électrique est le résultat d'une double intégration sur le contour C et sur la longueur $2L$ du conducteur. La possibilité d'employer cette formule analytiquement semble a priori exclue. En revanche, cette formule intégrale se prête assez bien à l'application de méthodes numériques.

Nous avons souligné que le filament de courant peut se trouver très proche de l'interface étant donné que le courant est par définition axial. Ceci nous permet d'envisager l'étude des câbles très proches de l'interface. Bien que cette configuration soit répandue physiquement, très peu d'études se portent sur ce sujet.

II.2. Calcul de la composante électrique E_z rayonnée par un conducteur cylindrique dans l'approximation des fils minces

Nous nous penchons sur l'étude du conducteur cylindrique en présence de l'interface. Nous désirons intégrer analytiquement l'équation (I-27) lorsque le contour C représente un cercle parfait. En toute rigueur, le courant se propageant sur cette ligne comporte des composantes azimutales dont il faut tenir compte. La complexité engendrée par des courants non axiaux a été soulignée dans le cas d'une ligne isolée dans un espace homogène [10]. Une étude se basant sur une

démarche identique à la nôtre a été introduite pour la ligne en présence d'un interface [11]. L'auteur tient compte de variations azimutales du courant en introduisant des champs électriques et magnétiques d'ordre supérieur calculés à partir de l'ordre zéro que nous présentons dans ce chapitre.

Quant à nous, nous ne soulèverons pas cette difficulté supplémentaire dans notre développement analytique et nous introduirons l'approximation des fils minces. Elle consiste à dire que le courant est uniformément réparti à la surface du câble et qu'il ne subit pas de variation azimutale. Elle est valable si le rayon est faible vis à vis de la longueur d'onde et de la hauteur par rapport à l'interface. La validité de cette hypothèse a été étudiée dans un cas particulier d'excitation dans la référence citée précédemment.

Pour calculer la composante longitudinale du champ électrique rayonné par un conducteur cylindrique, nous découpons d'abord celui-ci en tronçons de longueur dl sur sa longueur et nous supposons que chaque tronçon est constitué dans un plan de section droite, par une somme de dipôles élémentaires mis côte à côte et situés à sa surface. Chaque dipôle est parcouru par un élément de courant de même intensité qui est donné par $Id\theta/2\pi$. Le champ rayonné par un tronçon est la somme des champs créés par chacun des dipôles. Nous intégrons l'ensemble des rayonnements sur la circonférence. Par conséquent :

$$dE_z(x,y,z) = \int_{-\pi}^{+\pi} dE_z(x,y,z,\theta)d\theta \tag{I-28}$$

Pour connaître $dE_z(x,y,z,\theta)$, nous nous aidons de la figure suivante :

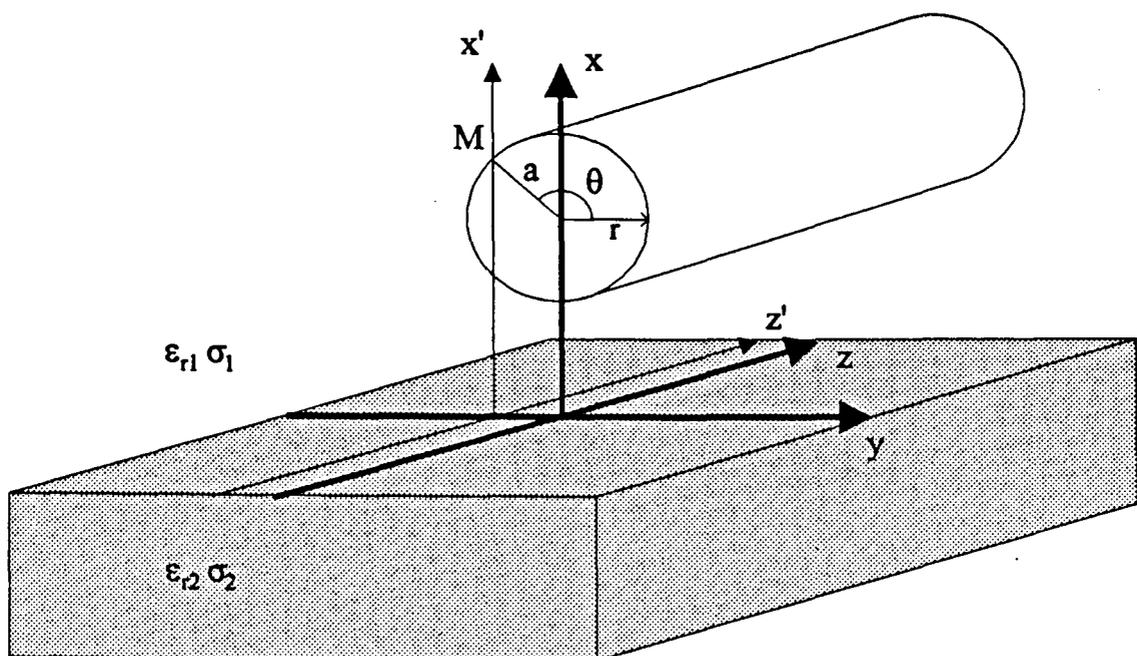


Figure n°5 : Prise en compte du rayon d'un tronçon

En utilisant la forme intégrale de la fonction de Hankel, il apparaît alors un terme commun [12] qui est la représentation intégrale de la fonction de Bessel J_0 .

$$dE_z(x, y, z) = \frac{Z_0 \gamma_0^2}{8\pi} I(x_0, y_0, z_0) dl \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(-j\gamma_0 \xi_1 a) \left\{ \frac{\xi_1^2}{n_1^2} [H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 \sqrt{(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2}) - H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 \sqrt{(y-y_0)^2 + (x+x_0)^2})] + P(x_0, y_0, \eta) - Q(x_0, y_0, \eta) \right\} e^{-\gamma_0 \eta (z-z_0)} d\eta \quad (I-29)$$

Nous venons de calculer la composante longitudinale du champ électrique à proximité du tronçon de câble de rayon a . Le câble dans toute sa longueur est constitué d'une juxtaposition de tronçons qui rayonnent. Ces tronçons vont interagir pour donner une distribution de courant sur la longueur que nous ne connaissons pas a priori et que nous devons calculer.

Ce câble de longueur $2L$ et parcouru par un courant $I(z)$ va donc rayonner une composante longitudinale du champ électrique qui peut se calculer par :

$$E_z(x, y, z) = \int_{-L}^{+L} dE_z(x, y, z, z') dz' \quad (I-30)$$

où $dE_z(x, y, z, z')$ est le champ rayonné par un tronçon.

Les conditions de continuité que nous aurons à appliquer par la suite s'expriment généralement par l'annulation de la composante E_z du champ électrique à la surface du conducteur. Dans le cas du fil de rayon a , le problème se pose quant au point d'application de ces conditions. Une solution approchée qui rentre dans le cadre de l'approximation des fils minces a été donnée par [13] et consiste à assurer la nullité de la valeur moyenne sur la circonférence de la section de la composante totale du champ électrique tangentiel. Nous serons donc amené à calculer la contribution du champ rayonné par le fil soit :

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} E_z(x, y, z) d\theta \right]_{(\sqrt{x^2+y^2}=a)} \quad (I-31)$$

Nous obtenons un calcul quasiment analogue à celui de la prise en compte du rayon qui s'est traduit par l'équation (I-28). Nous trouvons finalement:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} E_z(x, y, z) d\theta = \frac{Z_0 \gamma_0^2}{8\pi} \int_{-L}^{+L} I(z') N^E(x, y, z-z') dz' \quad (I-32)$$

avec

$$N^E(x, y, z-z') = \int_{-\infty}^{+\infty} M^E(x, y, \eta) e^{-\gamma_0 \eta (z-z')} d\eta \quad (I-33)$$

Nous avons défini une transformée de Fourier qui permet de passer de l'espace cartésien (x,y,z) en un espace (x,y,η) des constantes de propagation selon Oz. Nous pouvons voir que la fonction $M^E(x,y,\eta)$ est la transformée de la fonction $N^E(x,y,z-z')$ dans cet espace et elle est donnée par

$$M^E(x,y,\eta) = J_0(j\gamma_0\xi_1 a) \left\{ \frac{\xi_1^2}{n_1^2} \left[H_0^{(2)}(-j\gamma_0\xi_1 \sqrt{(x-h)^2 + y^2}) - H_0^{(2)}(-j\gamma_0\xi_1 \sqrt{(x+h)^2 + y^2}) \right] \right. \\ \left. J_0(j\gamma_0\xi_1 a) \right] + J_0(j\gamma_0\xi_1 a) [P(x,y,\eta) - Q(x,y,\eta)] \} \quad (I-34)$$

Si le rayon est faible vis à vis de la longueur d'onde, la fonction de Bessel J_0 pourrait être remplacée par son développement limité au premier ordre et qui est équivalent à l'unité. C'est une simplification grossière de l'approximation des fils minces qui limite davantage son domaine de validité et que nous n'utiliserons pas.

II.3. Calcul de la composante magnétique H_θ rayonnée par le conducteur dans l'approximation des fils minces

Nous allons calculer la valeur moyenne de la composante H_θ rayonnée par le conducteur lorsque celui-ci est parcouru par un courant $I(z)$ à partir de la valeur moyenne de la composante électrique E_z .

En raison de notre hypothèse des fils minces, pour calculer la composante magnétique H_θ , nous admettons qu'il existe une symétrie de révolution selon Oz autour du câble. Dans ce cas les champs électriques et magnétiques sont donnés à partir du potentiel-vecteur de Hertz par (I-1). Le potentiel vecteur Π ne dépend pas de θ et il est orienté selon la direction de propagation. Dans le repère cylindrique attaché au câble (figure n°5), les champs E_z et H_θ sont donnés par

$$\begin{cases} E_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right] \\ H_\theta = -(\sigma + j\omega\epsilon) \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \end{cases} \quad (I-35)$$

Or Π_z satisfait l'équation de propagation de Helmholtz en cylindrique. Nous avons alors :

$$E_z = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} - \gamma^2 \Pi_z \quad (I-36)$$

Nous déduisons la valeur moyenne de la composante azimutale du champ

magnétique rayonnée par le courant circulant dans le conducteur à partir de celle du champ électrique à partir des équations (I-35) et (I-36) et nous obtenons :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_{\theta}(x, y, z) d\theta = \frac{-j\gamma_1^2}{8\pi} \int_{-L}^{+L} I(z') N^H(x, y, z - z') dz' \quad (I-37)$$

La composante magnétique se met sous la même forme que la composante électrique à la condition de définir une fonction N^H qui est donnée par la relation suivante

$$N^H(x, y, z - z') = \int_{-\infty}^{+\infty} M^H(x, y, \eta) e^{-\gamma_0 \eta (z - z')} d\eta \quad (I-38)$$

Comme pour le calcul de la composante électrique, la fonction M^H est la transformée de Fourier de la fonction N^H . Elle se met sous la forme suivante :

$$M^H(x, y, \eta) = J_0(-j\gamma_0 \xi_1 a) \left\{ \frac{\xi_1}{n_1^2} H_1^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 \sqrt{(x-h)^2 + y^2}) + J_1(-j\gamma_0 \xi_1 a) \right. \\ \left. \left[-\frac{\xi_1}{n_1^2} H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 \sqrt{(x+h)^2 + y^2}) + \frac{P(x, y, \eta) - Q(x, y, \eta)}{\xi_1} \right] \right\} \quad (I-39)$$

La fonction $H_1^{(2)}$ est la fonction de Hankel de seconde espèce et du premier ordre. Les termes P et Q sont les intégrales de Sommerfeld définies précédemment.

III. Prise en compte d'une gaine de matériau diélectrique autour du conducteur

III.1. Impédance de surface dans le cas d'une gaine diélectrique

Nous désirons incorporer la possibilité de tenir compte dans notre modèle de la présence d'une gaine diélectrique autour de chaque conducteur.

Pour cela, nous introduisons la notion d'impédance de surface [14] [15] au niveau d'un conducteur par le rapport des composantes électriques longitudinales et magnétiques azimutales à la surface externe de la gaine. Nous rappelons que le conducteur est parfaitement cylindrique. La définition de Wait est donnée par :

$$Z_s = \left[\frac{E_z}{2\pi r H_{\theta}} \right]_{(r=b)} \quad (I-40)$$

Les conditions de continuité impliquent que l'impédance de surface se conserve de part et d'autre de l'enveloppe externe de la gaine diélectrique. Elle peut être appliquée quand les champs sont localement uniformes [16].

Cette impédance de surface peut se calculer à partir de la ligne de longueur infinie recouverte d'une couche de matériau diélectrique de permittivité relative ϵ_{rd} et isolée dans un milieu homogène et en supposant un mode de propagation unique. Soit la figure suivante :

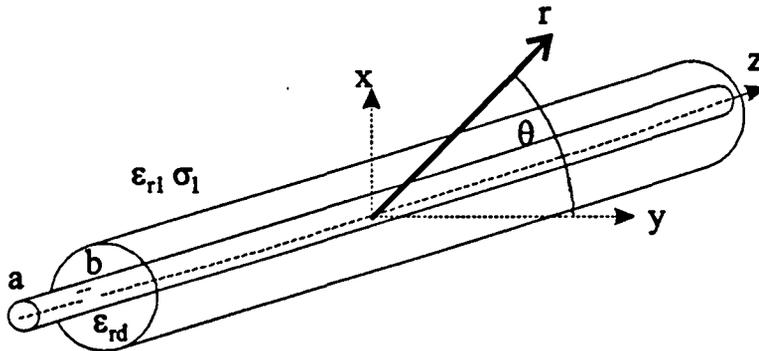


Figure n°6 : Coordonnées cylindriques attachées au câble

On montre aisément [17] dans le cas où le courant est de la forme $I(z) = e^{-\gamma_0 z + j\omega t}$ et en appliquant les conditions de continuité des champs électriques et magnétiques aux interfaces en $r=a$ et $r=b$, que les champs dans le diélectrique sont donnés par :

$$E_z(r, \eta) = \frac{j\gamma_0^2 \xi_d^2}{4\omega\epsilon_d} I(\eta) [J_0(j\gamma_0 \xi_d a) Y_0(j\gamma_0 \xi_d r) - J_0(j\gamma_0 \xi_d r) Y_0(j\gamma_0 \xi_d a)] \quad (I-41)$$

$$H_{\theta}(r, \eta) = \frac{j\gamma_0 \xi_d}{4} I(\eta) [J_0(j\gamma_0 \xi_d a) Y_1(j\gamma_0 \xi_d r) - J_1(j\gamma_0 \xi_d r) Y_0(j\gamma_0 \xi_d a)] \quad (I-42)$$

avec

$$\xi_d = \sqrt{(\gamma_d/\gamma_0)^2 - \eta^2} \text{ et } \gamma_d = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_{rd}}$$

Nous pouvons alors déduire l'impédance de surface du diélectrique associée à une constante de propagation normalisée par

$$Z_s(\eta) = \frac{1}{2\pi b} \frac{E_{zd}(b, \eta)}{H_{\theta d}(b, \eta)} = \frac{1}{2\pi b} \frac{\gamma_0 \xi_d J_0(j\gamma_0 \xi_d b) Y_0(j\gamma_0 \xi_d a) - J_0(j\gamma_0 \xi_d a) Y_0(j\gamma_0 \xi_d b)}{\omega\epsilon_d [J_0(j\gamma_0 \xi_d a) Y_1(j\gamma_0 \xi_d b) - J_1(j\gamma_0 \xi_d b) Y_0(j\gamma_0 \xi_d a)]} \quad (I-43)$$

J_1 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre un et Y_0, Y_1 sont les fonctions de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro et d'ordre un.

Cette impédance de surface dépend de la permittivité du matériau qui la compose, de l'épaisseur mais aussi de la constante de propagation normalisée du

courant qui circule sur le conducteur interne. Nous avons défini l'impédance de surface dans l'espace des constantes (x,y,η) pour une valeur unique de η .

Les conditions de continuité seront appliquées dans l'espace spatial (x,y,z) afin de tenir compte intrinséquement de tous les modes, il est nécessaire d'étendre la notion d'impédance de surface à cet espace. Cette extension nous astreint à ne considérer que des lignes de longueur infinie afin de pouvoir utiliser les propriétés des transformées de Fourier et des produits de convolution. La notion d'impédance de surface est alors donnée dans l'espace (x,y,z) et à l'interface séparant la gaine du conducteur par

$$\left[E_z(x,y,z) = j\gamma_0 r \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Z}_s(z-z') H_0(x,y,z') dz' \right]_{r=b} \quad (I-44)$$

où

$$\tilde{Z}_s(z-z') = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_s(\eta) e^{-\gamma_0 \eta (z-z')} d\eta \quad (I-45)$$

L'impédance de surface $Z_s(\eta)$ dans l'espace (x,y,η) se transforme en un opérateur de convolution dans l'espace (x,y,z) [13]. Cette quantité $\tilde{Z}_s(z-z')$ ne correspond pas dans le cas général, c'est à dire si plusieurs modes se propagent sur la ligne, à l'impédance de surface $Z_s(z)$ à une abscisse quelconque z . En effet, celle-ci serait donnée, par définition, par l'expression suivante:

$$Z_s(z) = \frac{E_z(b,z)}{2\pi b H_0(b,z)} \quad (I-46)$$

Les champs électriques et magnétiques sont constitués par la somme de toutes les composantes modales qui peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$E_z(b,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(b,\eta) e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta \quad (I-47)$$

$$H_0(b,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(b,\eta) e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta \quad (I-48)$$

D'où

$$Z_s(z) = \frac{E_z(b,z)}{2\pi b H_0(b,z)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Z_s(\eta) H_0(b,\eta) e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta}{2\pi b \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(b,\eta) e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta} \quad (I-49)$$

Cette expression ne peut se simplifier d'avantage car elle dépend de $H_0(b, \eta)$, c'est à dire de l'amplitude de chacun des modes existants. Or cette amplitude est fonction des conditions d'excitation Il est donc logique que l'impédance de surface $Z_s(z)$ ne puisse être déterminée dans cette étape de calcul.

III.2. Principe de modélisation de la gaine diélectrique

Pour le fil conducteur entouré par une gaine diélectrique, nous calculons les champs électriques et magnétiques dans l'air. Les expressions (I-32) du champ électrique et (I-37) du champ magnétique ne changent pas. Les conditions de continuité sont alors appliquées en $r=b$ où nous imposons la relation (I-50) pour ces deux composantes.

$$\left[E_z(x, y, z) = j\gamma_0 r \int_{-\infty}^{+\infty} Z_s(z-z') H_0(x, y, z') dz' \right]_{r=b} \quad (I-50)$$

Nous rappelons que cette dernière relation peut être appliquée quand les champs sont localement uniformes et que la présence du sol ne modifie pas le rapport E_z/H_0 à la surface du diélectrique. Pour cela, nous supposons que l'épaisseur de la gaine est petite devant la hauteur du câble. Si le câble est soumis à un champ externe E_z^{ext} , nous obtenons

$$\left[E_z(x, y, z) + E_z^{ext}(x, y, z) = j\gamma_0 r \int_{-\infty}^{+\infty} Z_s(z-z') H_0(x, y, z') dz' \right]_{r=b} \quad (I-51)$$

En fait, nous avons indiqué précédemment que nous appliquons les conditions de continuité en prenant la valeur moyenne des champs sur le contour du conducteur d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[E_z(x, y, z) + E_z^{ext}(x, y, z) = j\gamma_0 r \int_{-\infty}^{+\infty} Z_s(z-z') H_0(x, y, z') dz' \right]_{r=b} d\theta \quad (I-52)$$

Elle se transpose dans l'espace (x, y, η) par

$$E_z(x, y, \eta) + E_z^{ext}(x, y, \eta) = 2\pi b Z_s(\eta) H_0(\eta) \quad (I-53)$$

où $Z_s(\eta)$ est calculée par le rapport (I-43).

IV. Généralisation à un ensemble de lignes cylindriques et parallèles à un interface séparant deux demi-milieux

IV.1. Application des conditions de continuité

Nous généralisons la démarche que nous avons présentée pour le conducteur unique et cylindrique dans les paragraphes II-2 et III. L'étude d'un faisceau multifilaire où les conducteurs n'ont pas une section parfaitement circulaire semble très difficile à réaliser et elle ne représente pas grand intérêt pratique.

Une ligne bifilaire au-dessus d'un plan de masse et excitée par un dipôle électrique vertical a fait l'objet d'une étude dans la référence [18]. Mise à part le type d'excitation, nos travaux sont une extension de cette démarche à N conducteurs et en tenant compte d'un sol de conductivité finie.

Nous considérons maintenant un faisceau de N lignes situées parallèlement à l'interface. Pour que l'on puisse toujours supposer le courant uniformément réparti et purement axial sur chaque conducteur, nous devons ajouter l'hypothèse que les rayons sont petits devant l'espacement entre conducteurs. La géométrie du problème est indiquée ci-dessous :

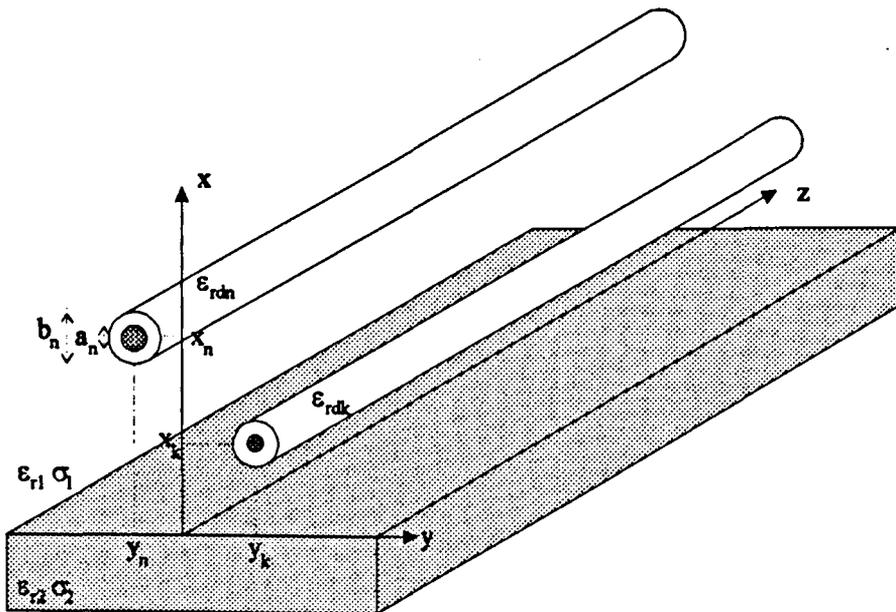


Figure n°7 : Géométrie du faisceau de câbles

Le conducteur k de rayon interne a_k se trouve à une hauteur x_k et en y_k . Il peut être muni d'une gaine diélectrique de rayon externe b_k et de permittivité relative ϵ_{rk} . Les valeurs moyennes des composantes longitudinales et azimutales des champs électriques et magnétiques rayonnées par ce conducteur k en un point

(x, y, z) sont données par les équations (I-32) et (I-37). En appliquant les conditions de continuité sur chaque conducteur, nous trouvons la relation matricielle suivante

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} E_{z_n}(x_k, y_k, z) d\theta - \frac{j\gamma_0 b_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{nk}(z-z') H_{0n}(x_k, y_k, z') dz' d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} E_z^{\text{ext}}(x_k, y_k, z) d\theta = 0 \quad (\text{I-54})$$

pour $k = 1 \dots N$

où $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} E_z^{\text{ext}}(x_k, y_k, z) d\theta$ est la valeur moyenne de la composante longitudinale du champ externe sur le conducteur k . Transposons cette relation dans l'espace (x, y, η) :

$$\sum_{n=1}^N E_{z_n}(x_k, y_k, \eta) - 2\pi b_k Z_k(\eta) H_{0n}(x_k, y_k, \eta) + E_z^{\text{ext}}(x_k, y_k, \eta) = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{I-55})$$

où $Z_k(\eta)$ est l'impédance de surface qui prend en compte la présence d'un matériau diélectrique autour de ce conducteur. S'il n'existe pas de gaine ($b_k = a_k$) et que la ligne est parfaitement conductrice alors la composante totale du champ électrique tangentiel doit s'annuler à la surface de ce conducteur ($Z_s = 0$). Dans le cas de lignes non parfaitement conductrices, l'impédance de surface peut aussi traduire les pertes dues au matériau électrique constituant le conducteur central (aluminium ou acier pour les lignes d'énergie par exemple). Son expression peut se trouver dans la référence [19]. C'est aussi un moyen d'incorporer une tresse faisant office de blindage [14].

IV.2. Calcul du courant

La relation (I-32) reliant la distribution de courant au champ électrique rayonné s'écrit dans l'espace (x, y, η) par

$$E_m(x_k, y_k, \eta) = \frac{Z_0 \gamma_0}{-4j} M_n^E(x_k, y_k, \eta) I_n(\eta) \quad (\text{I-56})$$

où $I_n(\eta)$ est la transformée de Fourier dans l'espace (x, y, η) de la distribution $I(z)$ du courant sur le câble n . De même, nous avons pour la composante magnétique à partir de (I-37) :

$$H_{0n}(x_k, y_k, \eta) = \frac{\gamma_1^2}{4\gamma_0} M_n^H(x_k, y_k, \eta) I_n(\eta) \quad (\text{I-57})$$

En remplaçant dans la relation matricielle (I-55) les champs électriques et magnétiques rayonnés par le conducteur, nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^N \frac{Z_0 \gamma_0}{-4j} I_n(\eta) \left[M_{kn}^E - \frac{2\pi b_k Z_k(\eta)}{Z_0} M_{kn}^H \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2} \right] = -E_z^{\text{ext}}(x_k, y_k, \eta) \quad (\text{I-58})$$

pour $k = 1, 2, \dots, N$

où $M_{kn}^E = M_n^E(x_k, y_k, \eta)$ et $M_{kn}^H = M_n^H(x_k, y_k, \eta)$. On peut résoudre ce système matriciel en utilisant les formules de Cramer. Le courant sur le conducteur m s'écrit sous la forme d'un rapport de deux déterminants :

$$I_m(\eta) = \frac{-4j}{Z_0 \gamma_0} \frac{\begin{vmatrix} M_{11}^E - \frac{2\pi b_1 Z_1(\eta)}{Z_0} M_{11}^H \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2} & \dots & E_z^{\text{ext}}(x_1, y_1, \eta) & \dots & M_{1N}^E \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1}^E & \dots & E_z^{\text{ext}}(x_N, y_N, \eta) & \dots & M_{NN}^E - \frac{2\pi b_N Z_N(\eta)}{Z_0} M_{NN}^H \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M_{11}^E - \frac{2\pi b_1 Z_1(\eta)}{Z_0} M_{11}^H \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2} & \dots & M_{1N}^E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1}^E & \dots & M_{NN}^E - \frac{2\pi b_N Z_N(\eta)}{Z_0} M_{NN}^H \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2} \end{vmatrix}} \quad (\text{I-59})$$

Soit dans l'espace (x, y, z)

$$I_m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_m(\eta) e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta = \frac{-4j}{Z_0 \gamma_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|E_k(\eta)|}{|M_{kn}(\eta)|} e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta \quad (\text{I-60})$$

où $|M_{kn}(\eta)|$ est le déterminant se trouvant au dénominateur de l'expression (I-59) et $|E_k(\eta)|$ est celui se trouvant au numérateur. ce dernier se calcule à partir de la matrice formée des termes de $[M_{kn}(\eta)]$ exceptée la colonne d'indice m qui a été remplacée par celle de l'excitation $[E_k(\eta)]$.

Finalement la distribution du courant sur la longueur du câble m (selon l'axe Oz) est obtenue par la relation (I-60) en fonction de l'excitation. Cependant, celle-ci doit être exprimée dans l'espace (x, y, η) au moyen de la transformée de Fourier.

L'application de cette démarche pour différentes excitations est développée dans le chapitre suivant.

CONCLUSION

La théorie que nous venons d'exposer n'a fait l'objet que d'une hypothèse se résumant à considérer le courant uniformément réparti sur la circonférence du conducteur. Elle nous servira de référence par la suite face à celle des lignes de transmission.

Nous nous sommes attachés à pouvoir prendre en compte le maximum de paramètres physiques caractérisant un faisceau multiconducteur ainsi que le milieu dans lequel on le place. Malheureusement, l'introduction de toutes ces possibilités dans le modèle nous restreint à l'étude de lignes de longueur infinie et parfaitement rectilignes. L'application de cette étude trouve sa justification dans le cas de lignes électriques très longues (ligne de transport d'énergie, de télécommunication) exemptes de discontinuités où les phénomènes de rayonnements sont négligeables. Il faut toutefois souligner pour ce type de lignes que l'effet de chaînette n'a pas été pris en compte. Une étude sur ce dernier sujet a été menée par la théorie des lignes de transmission [39]. Nous signalons aussi que le cas d'intersection entre les câbles a été développé par une approche identique à la nôtre dans la référence [40].

En revanche, quasiment aucune approximation n'a été faite concernant le milieu dans lequel se trouve le faisceau. Ceci nous permet la caractérisation de lignes enterrées qui pose encore problème à l'heure actuelle.

L'application de cette théorie fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE DEUX

**Application de la théorie des antennes à
un faisceau de lignes pour deux types
d'excitation**

Modes de propagation et courant induit

INTRODUCTION

Le but de ce second chapitre est l'application de la théorie des antennes que nous venons d'exposer à notre faisceau de lignes horizontales situées parallèlement à l'interface. Nous considérons deux types d'excitation.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux phénomènes de propagation du courant sur le réseau de câbles. Pour cela, nous étudions le cas où chaque ligne est excitée localement par un générateur de tension. L'obtention d'une équation modale est dérivée de l'application des conditions de continuité à la surface des conducteurs. La résolution de cette équation nous a permis de souligner les aspects hautes fréquences de différentes configurations de lignes en ce qui concerne plus particulièrement l'atténuation et la vitesse de phase de tous les modes guidés.

Nous calculons ensuite le courant induit sur un faisceau de longueur infinie par une onde plane d'incidence et de polarisation quelconques. Encore une fois, l'application des conditions de continuité mène à la formule du courant induit. Deux méthodes sont mises en oeuvre. La première est l'application de l'hypothèse des fils minces où le courant est calculé analytiquement. La seconde où nous développons la méthode numérique des moments permet de vérifier l'hypothèse précédente.

Ces résultats nous serviront de référence pour l'étude menée par la théorie des lignes de transmission dans le quatrième chapitre.

I. Représentation modale du courant se propageant sur un ensemble de lignes parallèles à l'interface

I.1. Obtention de l'équation modale

Le courant se propageant sur chaque conducteur dépendra étroitement du type d'excitation choisie. Le problème général de l'excitation par une distribution arbitraire de sources peut se trouver dans la référence [13]. Le cas d'une excitation par un dipôle électrique vertical a été étudié aussi dans [20]. Nous nous intéresserons à l'excitation par un générateur localisé de tension. En effet, cette configuration correspond très bien au cas des lignes de transmission où le courant est produit par un générateur en entrée.

Nous allons maintenant montrer que le courant peut se décomposer en modes de propagation et chercher les constantes de propagation de ces modes. Nous supposons donc qu'un générateur de tension existe en $z=z_0$ sur chacune des lignes et qu'il délivre une tension $E_0(k)$ sur le conducteur k . En appliquant les conditions de continuité à la surface de chaque câble, nous avons vu (cf. chapitre Un - §IV) que le courant sur le câble s'écrivait :

$$I_m(z) = \frac{-4j}{Z_0 \gamma_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|E_k(\eta)|}{|M_{kn}(\eta)|} e^{-\gamma_0 \eta z} d\eta \quad (\text{II-1})$$

Les générateurs de tension sur chaque câble sont modélisés par la relation (II-2) dans l'espace (x,y,z) .

$$E_k(z) = E_{0k} \delta(z - z_0) \quad (\text{II-2})$$

Ce qui se traduit par l'expression (II-3) dans l'espace (x,y,η) .

$$E_k(z) = \frac{-j\gamma_0}{2\pi} E_{0k} e^{-\gamma_0 \eta z_0} \quad (\text{II-3})$$

Nous en déduisons le courant sur le câble m :

$$I_m(z) = \frac{2}{Z_0 \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|E_{0k}|}{|M_{kn}(\eta)|} e^{-\gamma_0 \eta (z - z_0)} d\eta \quad (\text{II-4})$$

Nous pouvons voir que le courant se compose en une somme de modes caractérisés par des constantes de propagation normalisées par rapport à celle d'une onde dans le vide. Parmi ces modes, nous distinguons les modes guidés dont les constantes de propagation correspondent aux pôles de l'intégrale du

courant et les modes rayonnés pour les valeurs continues de η . De nombreux travaux ont été menés sur la résolution de l'équation modale pour divers types de configuration [21] [22]. Dans le cas monofilaire, deux pôles ont été mis en évidence [23] et le courant est calculé en déformant le contour d'intégration dans le plan complexe en prenant celui indiqué sur la figure ci-dessous.

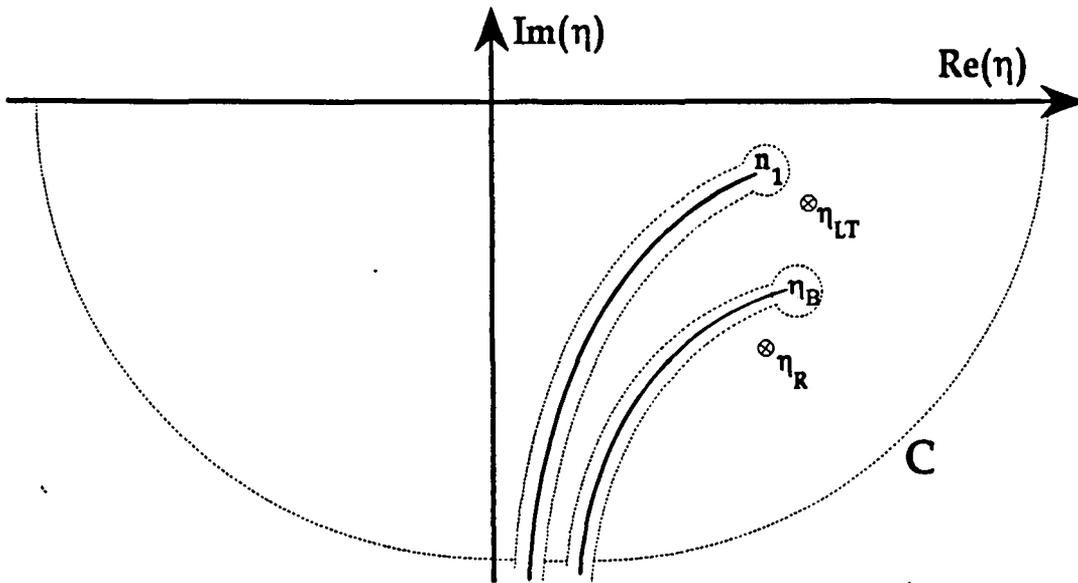


Figure n°8 : Contour d'intégration dans le plan complexe

Le contour prend en compte deux branches de coupure. La première est due à la singularité de la fonction de Hankel sur l'axe réel négatif et à l'origine. Ce dernier point correspond dans le plan complexe de la variable η au point n_1 et la branche de coupure est définie par

$$\begin{cases} \text{Re}(\xi_1) \leq 0 \\ \text{Im}(\xi_1) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-5})$$

La seconde est directement liée à la fonction $Q(x,y,\eta)$. Sous certaines hypothèses, l'intégrale de cette fonction peut être calculée analytiquement et on montre [6] alors la présence d'un pôle en η_B qui est donné par

$$\eta_B = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_0 \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \quad (\text{II-6})$$

Nous rappelons que γ_0 est la constante de propagation d'une onde dans le vide et qui nous sert uniquement à normaliser les constantes de propagation des modes guidés. La constante de propagation γ_1 est celle du demi-milieu où se trouve les câbles, milieu que l'on peut caractériser par une conductivité σ_1 qui nous permet

de considérer le cas de câbles enterrés. La branche de coupure associée à ce pôle est donnée par

$$\text{Arg}\left[\sqrt{\eta_B^2 - \eta^2}\right] = 0 \quad (\text{II-7})$$

Le courant est alors la somme de quatre termes : les deux résidus des pôles qui correspondent aux modes guidés et la contribution de l'intégration des deux branches de coupure. L'importance de la contribution des branches de coupure vis à vis des modes guidés ainsi qu'une étude complète des caractéristiques de ces modes peuvent être trouvées dans [12]. Ce genre d'approche peut être généralisée à N conducteurs.

Pour notre part, nous ne nous intéresserons qu'aux modes guidés. En effet, nous rappelons que notre étude s'applique à des lignes électriquement longues et parfaitement rectilignes. La contribution des modes rayonnés est donc supposée faible au niveau du courant total. De plus, le but de notre comparaison de cette théorie avec la théorie des lignes de transmission n'est pas de prouver que le rayonnement est faible mais de trouver des paramètres linéiques qui traduisent correctement les effets dus à des demi-milieux dissipatifs sur les constantes de propagation ou sur les courants induits.

La résolution en basses fréquences de l'équation modale a mis en évidence l'existence d'un mode dont la carte des champs était plus concentrée entre le conducteur et l'interface d'où l'appellation *attaché à la structure* [24]. Olsen et al. ont montré toutefois qu'en hautes fréquences un mode caractérisé par une carte de champs plus répartie au niveau de l'interface séparant les deux milieux pouvait exister. La propagation s'apparente à celle d'une *onde de surface* [23] [12]. L'existence de ce mode est fortement influencée par l'annulation du dénominateur de l'intégrale de $Q(x,y,\eta)$ et sa constante de propagation se situe aux alentours de η_B . Ces modes pouvaient passer continûment d'un type à l'autre de propagation en fonction de la géométrie de la ligne (hauteur, rayon) et des constantes physiques des deux milieux.

On peut trouver dans la littérature une autre dénomination de ces modes respectivement par *mode ligne de transmission* et *mode rapide*. Bien que cette nouvelle dénomination ne lève pas l'ambiguïté sur la reconnaissance du type de propagation, c'est celle que nous utiliserons par la suite.

De plus, nous rappelons que dans la représentation utilisée pour les constantes de propagation, l'atténuation est directement proportionnelle à la valeur absolue de la partie imaginaire et la vitesse de phase est inversement proportionnelle à la partie réelle. Une onde se propageant dans le vide sans

atténuation correspondra au point 1 sur l'axe réel. Si la partie réelle de η est inférieure à 1, cela correspond à une onde se propageant avec une vitesse de phase supérieure à celle de la lumière.

1.2. Remarque sur la méthode numérique de recherche des pôles

L'équation modale d'inconnue η se décompose en deux équations non-linéaires qui sont données par

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(|M_{kn}(\eta)|) = 0 \\ \operatorname{Im}(|M_{kn}(\eta)|) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-8})$$

Nous sommes confrontés à la résolution d'un système non-linéaire qui est souvent menée par des méthodes itératives. La plus courante est celle de Newton-Raphson qui consiste à faire un développement en série de Taylor limité à l'ordre un pour chacune des équations du système non-linéaire à partir d'un point initial donné et considéré comme une approximation de la solution. La résolution du système linéaire résultant permet de déterminer une nouvelle approximation de la solution. Cette méthode, lorsqu'elle est convergente, a une convergence quadratique. Malheureusement elle diverge parfois et c'est là son principal défaut. Lorsque le point de départ n'est pas suffisamment proche de la solution ou lorsque des irrégularités dans la fonction se présentent au voisinage de cette solution, la méthode ne peut être utilisée.

Aussi pour pallier ces inconvénients, nous avons utilisé un processus basé sur une méthode d'optimisation. Cette méthode ne s'applique pas directement au système mais à une norme ϕ déduite de ce système par la relation (II-9). La solution du système est déterminée en recherchant le minimum absolu de cette norme.

$$\phi = \operatorname{Re}^2(|M_{kn}(\eta)|) + \operatorname{Im}^2(|M_{kn}(\eta)|) \quad (\text{II-9})$$

L'optimisation de ϕ s'est en réalité faite en combinant la méthode de la plus grande pente pour l'optimisation combinée à celle de Newton-Raphson. L'avantage de la méthode de la plus grande pente est qu'elle ne peut pas diverger. La combinaison allie ainsi la sûreté de convergence à la rapidité de la méthode de Newton. Les détails de la méthode de Vignes sont exposés dans la référence [25]. Cependant, le problème majeur de traiter une norme plutôt que le système non-linéaire est la possibilité de déterminer un minimum local non-nul de la norme. De plus, la difficulté d'un processus itératif est de trouver toutes les solutions puisque celles-ci dépendent intimement du point de départ. Un résultat intéressant serait de connaître à l'avance le nombre de solutions dans un espace donné du plan complexe de la variable η .

Nous allons indiquer une méthode que nous n'avons pas mise en oeuvre mais qu'il serait intéressant d'introduire par la suite. D'après [26], nous avons

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{|M_{kn}(\eta)|} \frac{\partial}{\partial \eta} |M_{kn}(\eta)| d\eta = N - P \quad (\text{II-10})$$

où N désigne le nombre de zéros intérieurs à C et P le nombre de pôles. C est un contour fermé situé dans le plan complexe ne passant pas par un zéro et sur lequel la fonction $|M_{kn}(\eta)|$ est régulière. Cette équation est encore égale à

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \left[\text{Arg}(|M_{kn}(\eta)|) \right]_C \quad (\text{II-11})$$

Il suffit de compter le nombre de fois où l'argument du déterminant change de 2π lorsque η parcourt le contour C pour connaître le nombre de zéros diminués du nombre de pôles. Cette méthode est principalement utilisée en SEM (Singularity Expansion Method) où la recherche des pôles et des zéros est primordiale [27] [28].

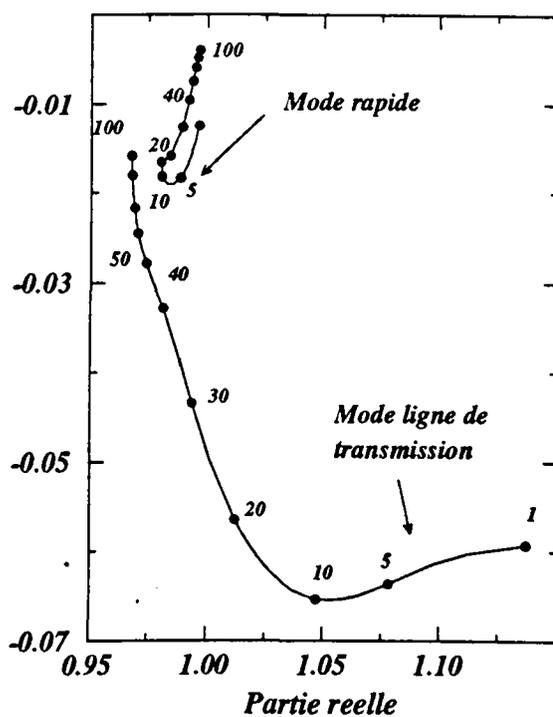
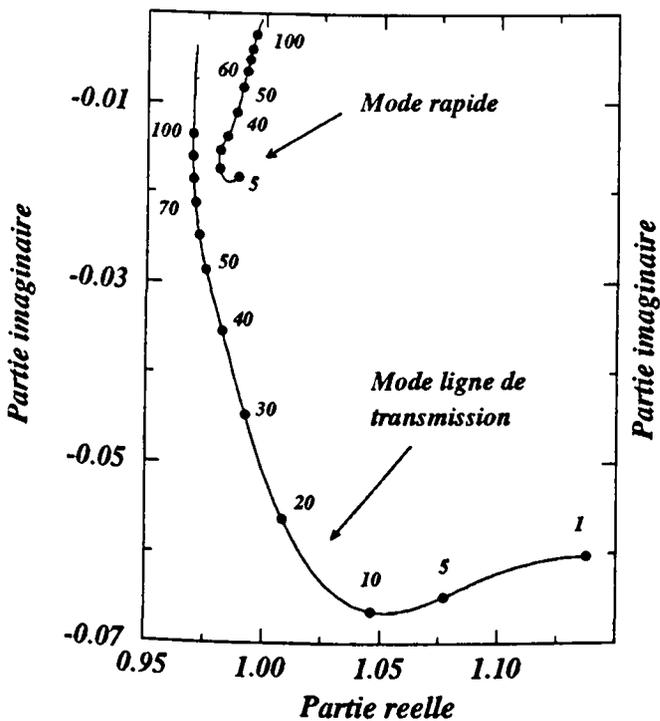
1.3. Etude des modes de propagation d'une ligne aérienne gainée

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux modes guidés susceptibles d'exister sur un câble aérien muni d'une gaine en présence du sol. Nous avons représenté sur la planche n°1 les constantes de propagation normalisées en partie imaginaire et en partie réelle pour différentes valeurs de permittivité de la gaine diélectrique et ce en fonction de la fréquence. Les valeurs sont indiquées en MHz. La structure considérée est un câble de 1 m de haut avec un rayon de 1,5 cm et une gaine de 5 mm d'épaisseur. Le demi-milieu inférieur est caractérisé par un conductivité de 10^{-2} S/m et une permittivité relative de 10, le demi-milieu supérieur par $\sigma_1 = 0$ et $\epsilon_{r1} = 1$, ce qui représente l'air que nous supposons sans pertes.

Pour un câble nu (figure en haut et à gauche), nous retrouvons les deux modes évoqués précédemment. En basses fréquences, le mode rapide est nettement moins atténué que le mode ligne de transmission et sa vitesse de phase est plus rapide que celle de la lumière d'où son nom. Par contre en hautes fréquences, la différence est moins flagrante et la distinction entre les deux types de modes est plus difficile, la vitesse du mode ligne de transmission devenant elle aussi plus grande que celle de la lumière à partir de 30 MHz. D'une manière générale les caractéristiques du mode rapide changent peu en fonction de la fréquence.

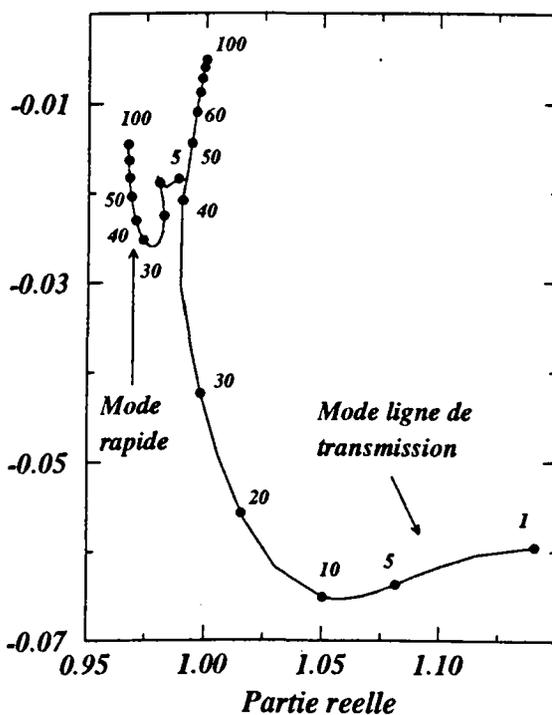
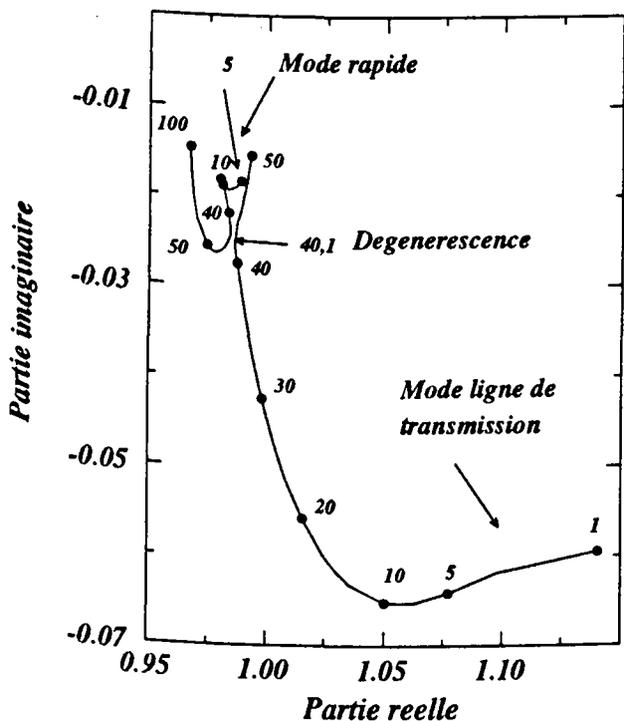
permittivite de la gaine = 1

permittivite de la gaine = 1,05



permittivite de la gaine = 1,14

permittivite de la gaine = 1,15



Si nous plaçons une gaine diélectrique autour du conducteur, nous ne trouvons toujours que deux modes guidés. Nous pouvons remarquer que la présence d'une gaine de très faible permittivité ($\epsilon_{rd}=1,05$, figure du haut et à droite) ne va apporter aucune modification significative.

Cependant, nous avons mis en évidence un phénomène de dégénérescence entre les deux modes qui intervient pour une permittivité relative de 1,14 et à une fréquence de 40,1 MHz (figure du bas à gauche). A partir de cette fréquence, il est extrêmement difficile de reconnaître les deux modes. Ce phénomène de dégénérescence a été remarqué la première fois par Olsen [23]. Nous avons souligné lors d'une précédente étude que cette dégénérescence intervient de plus en plus tôt en fréquence au fur et à mesure que la hauteur augmente mais que la permittivité relative de la gaine reste proche de l'unité.

En revanche, si la permittivité de la gaine augmente, la distinction entre les deux modes devient plus aisée car la vitesse de phase du mode rapide reste toujours plus élevée que celle du second mode, celle-ci diminuant sensiblement lorsque la fréquence augmente. Le mode ligne de transmission est très influencé par la présence d'une gaine diélectrique au contraire du mode rapide.

1.4. Etude des modes de propagation d'un bifilaire aérien non gainé

Nous nous sommes ensuite intéressés aux modes supplémentaires que pouvait créer la présence d'un autre conducteur de même rayon et à la même hauteur. Pour cela nous avons considéré le cas de deux conducteurs sans gaine diélectrique et nous avons recherché la variation des modes en fonction de l'espacement entre les deux câbles pour une fréquence fixe de 50 MHz. Les résultats sont indiqués sur la planche n°2.

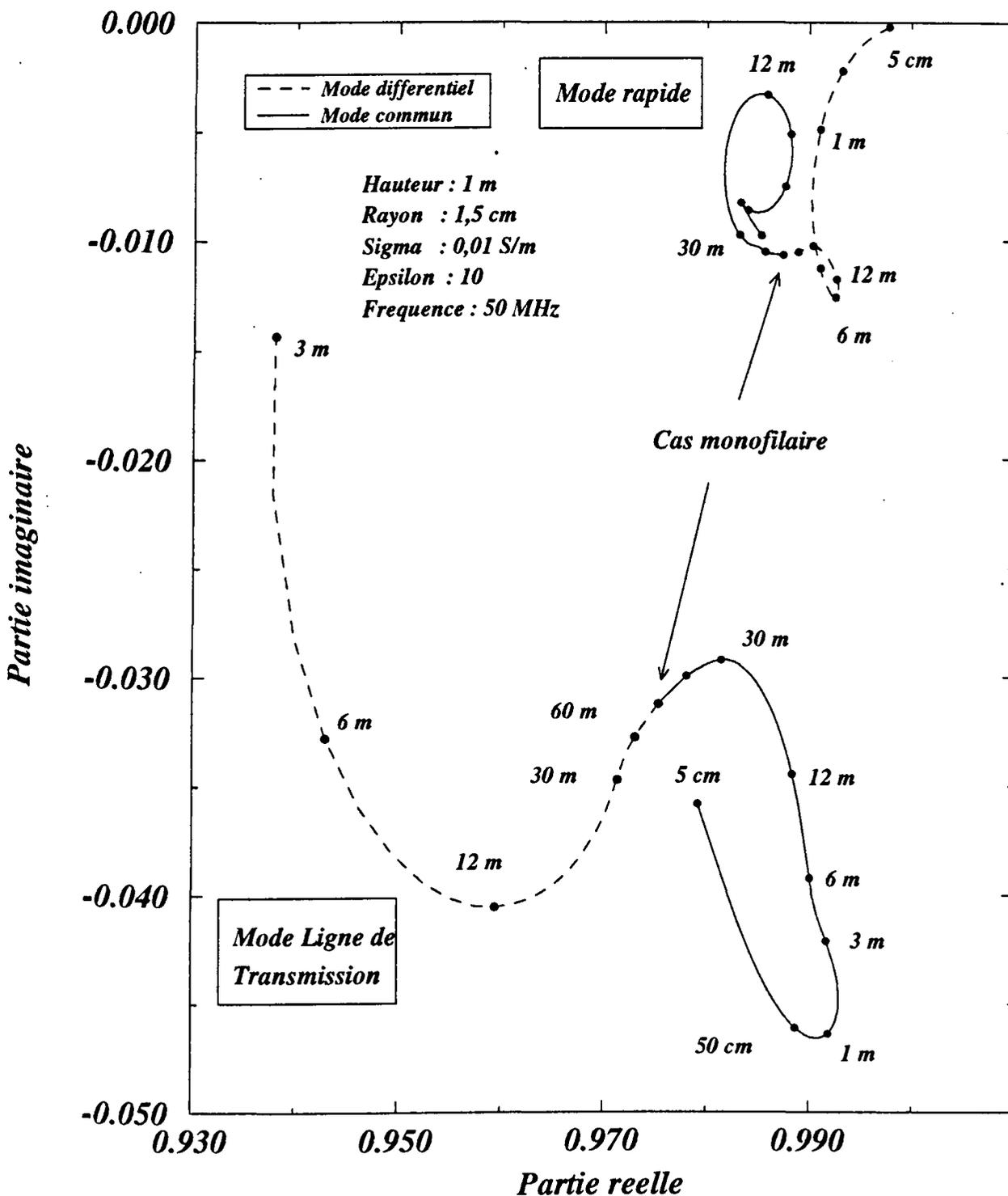
Dans la configuration étudiée, l'équation modale se factorise pour se mettre sous la forme (II-12) et quatre modes ont alors été trouvés

$$[M_{11}(\eta) - M_{12}(\eta)] [M_{11}(\eta) + M_{12}(\eta)] = 0 \quad (\text{II-12})$$

Les constantes de propagation des deux premiers modes annulant le premier terme entre crochets sont appelées de type différentiel et les deux autres annulant le second terme entre crochets de type commun.

Premièrement, lorsque l'écartement entre les deux câbles est très important ($>10\lambda$), nous retrouvons les deux constantes de propagation des modes ligne de

Constantes reduites de propagation sur un bifilaire en fonction de l'espacement



transmission et mode rapide du cas monofilaire indiqué sur la planche. C'est ce qui nous a permis de reconnaître les modes ligne de transmission et rapide.

Deuxièmement, au fur et à mesure que l'espacement diminue, l'atténuation du mode ligne de transmission de type commun augmente jusqu'à ce que la distance séparant les deux conducteurs soit égale à la hauteur pour diminuer ensuite et tendre de nouveau vers la constante de propagation d'une ligne seule lorsque l'espacement devient très faible.

Pour des écartements très importants, il peut exister un mode ligne de transmission de type différentiel. Son atténuation diminue avec l'écartement mais elle reste supérieure à celle du mode rapide de type commun. Toutefois si les deux conducteurs se rapprochent à moins d'une demie longueur d'onde, il n'est plus possible de trouver la constante de propagation associée à ce mode. Nous pouvons donc supposer que celui-ci n'existe plus.

D'une manière générale, l'atténuation des deux modes communs et différentiels rattachés à la propagation de type onde de surface est inférieure à celle des modes rattachés à la propagation de type ligne de transmission même dans le cas différentiel. Par contre, il est intéressant de noter que pour des espacements supérieurs à la longueur d'onde (6 m), le mode rapide commun possède une atténuation plus faible que le mode rapide différentiel, tendance qui s'inverse lorsque l'écartement diminue. Dans ce dernier cas, la constante de propagation du mode rapide différentiel tend vers celle d'une onde dans l'air.

On peut se poser la question à savoir si tous les modes existent réellement. En raison des problèmes évoqués sur les méthodes de résolution des systèmes non-linéaires, une des solutions trouvées peut n'être qu'un artefact de la méthode numérique. L'unique moyen de le savoir serait de mettre en oeuvre la méthode utilisée en SEM que nous avons rapidement présentée.

Pour notre part, nous précisons que le test d'arrêt de l'algorithme a été fixé à 10^{-8} et que la valeur de la norme ϕ au départ même pour un point proche de la solution était couramment supérieur à 10^5 . Si on envisage d'augmenter le nombre de conducteurs, nous pensons qu'il est impératif de connaître le nombre de solutions à trouver dès le départ.

Une étude des modes de propagation sur une ligne de transport d'énergie plus complexe (ligne constituée de 7 conducteurs) peut être trouvée dans [29]. Malheureusement, cette étude est en basses fréquences (50 kHz à 450 kHz) et la présence des modes rapides n'y figure pas.

1.5. Etude des modes de propagation d'une ligne gainée et enterrée

L'étude des modes guidés se propageant sur un câble enterré se fait souvent en supposant la profondeur importante. On minimise ainsi le rôle de l'interface [21] et on ne trouve alors qu'un mode unique. Cette hypothèse ne doit surtout pas être poursuivie pour de faibles profondeurs car dans ce cas la résolution de l'équation modale indique encore une fois la présence de deux modes guidés.

Les modes de propagation du courant se propageant sur une ligne enterrée sont représentés sur la planche n°3 en fonction de la profondeur du câble pour une fréquence de 100 MHz.

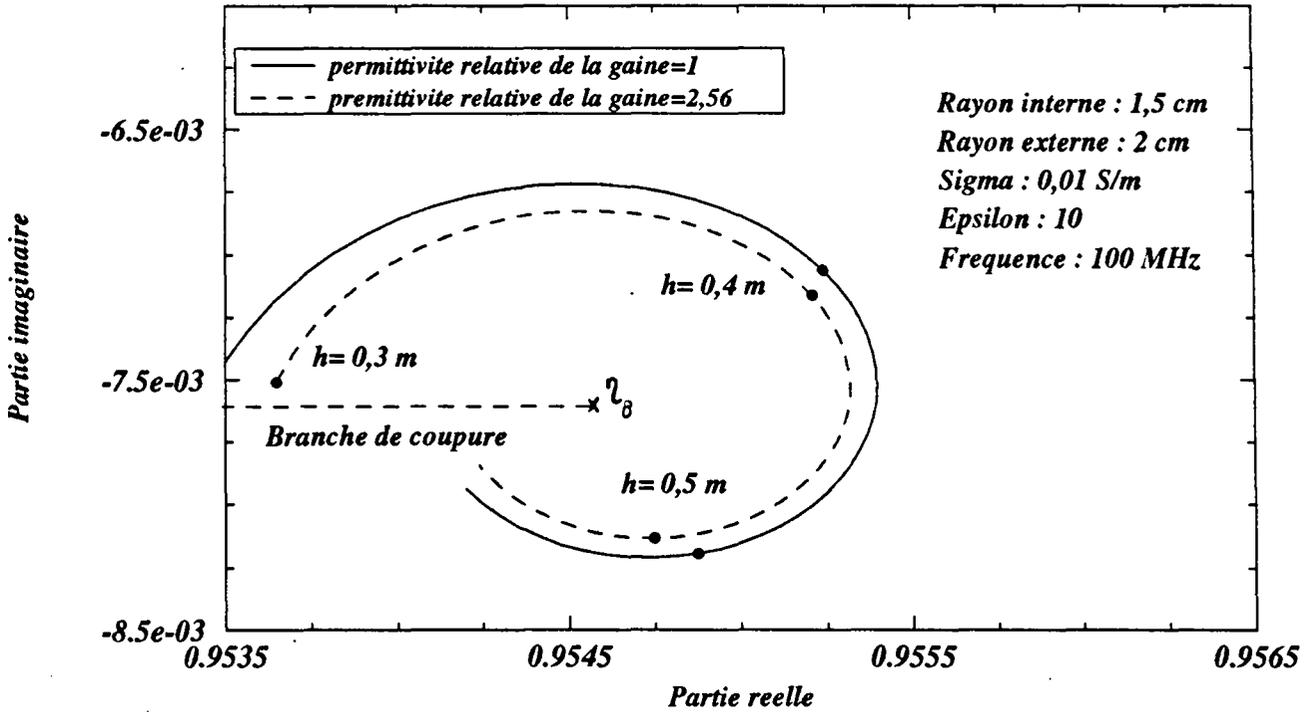
Sur la figure du haut, nous avons représenté l'évolution du mode rapide en fonction de la profondeur pour deux valeurs de permittivité de la gaine diélectrique. Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que le mode rapide possède une atténuation très faible et une vitesse de phase proche de celle d'une onde dans l'air.

Ce mode peut devenir primordial en hautes fréquences mais il n'existe que pour des profondeurs faibles de câbles. En effet, pour la configuration étudiée, il n'existe que pour des profondeurs de 0,3 m à 0,6 m. Au-delà de ces limites, le mode n'existe plus car il disparaît dans la branche de coupure due à la présence de η_B . En revanche, la présence de ce mode est relativement peu influencée par la gaine diélectrique. La courbe en pointillés représente la variation du mode rapide lorsque la permittivité relative de la gaine est égale à 2,56 et la courbe en trait fin ce même mode pour une permittivité égale à l'unité ce qui revient à simuler un câble se trouvant dans une cavité. Le lieu représentant la constante de propagation lorsque la profondeur varie se concentre autour de η_B lorsque la permittivité de la gaine augmente.

Les variations du mode ligne de transmission en fonction de la profondeur et de la permittivité de la gaine diélectrique sont représentées sur la figure du bas et à droite de la même planche. Si la permittivité de la gaine est équivalente à celle du demi-milieu environnant (permittivité égale à 10) nous pouvons voir que l'atténuation diminue lorsque la profondeur augmente. On peut penser que les champs se concentrent alors plus au niveau de la gaine et sont moins influencés par la présence de l'interface. Si la permittivité de la gaine diminue et équivaut à 5, la constante de propagation s'enroule en fonction de la profondeur. Ce phénomène s'accroît lorsque la permittivité relative devient plus faible mais le mode ligne de transmission peut alors disparaître pour différentes profondeurs dans la branche de coupure relative au point n_1 .

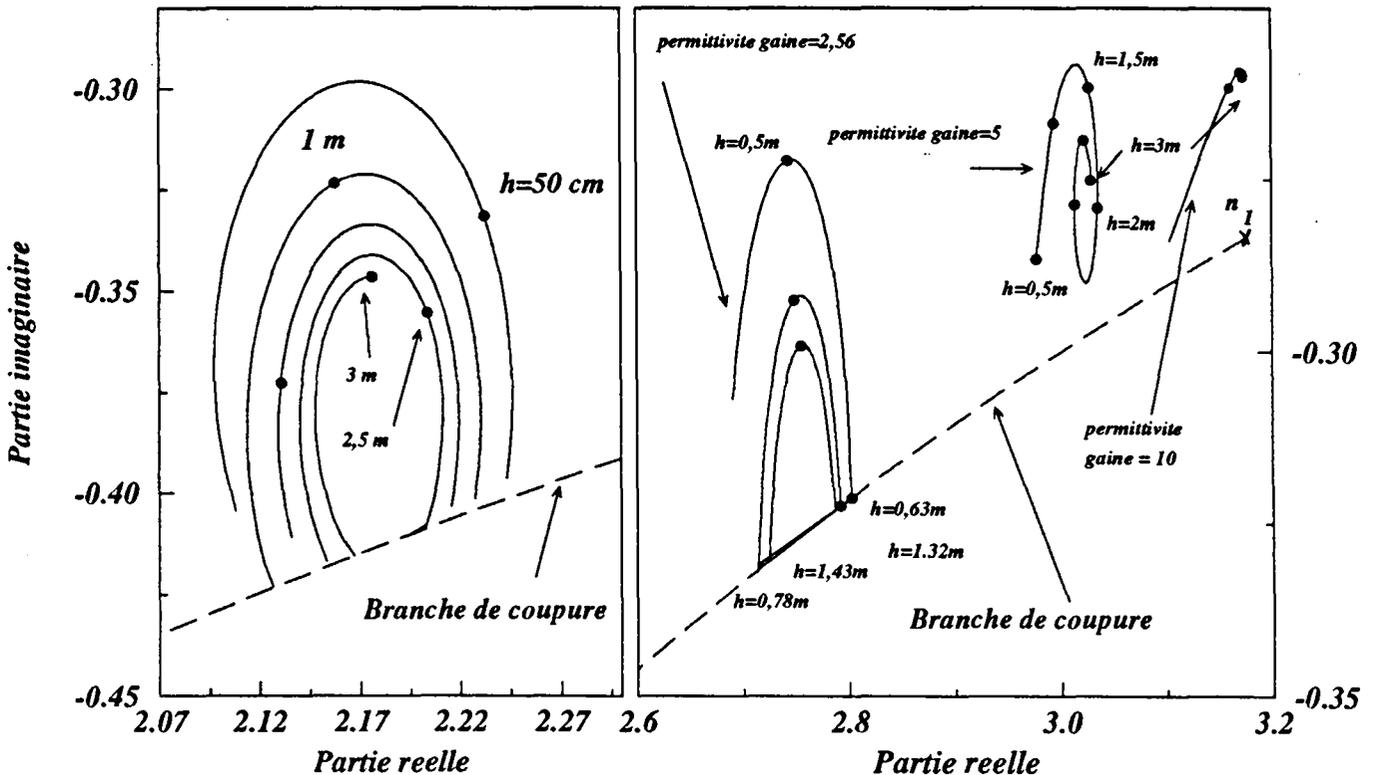
Constantes reduites de propagation sur un cable enterre

Mode rapide



Permittivite de la gaine = 1

Mode Ligne de transmission



La première branche de coupure due à la singularité de la fonction de Hankel et qui commence au point n_1 prend ici toute son importance. En effet, si dans le cas des câbles aériens, elle n'intervient pas, pour des câbles enterrés, il ne faut surtout pas la négliger. Ceci est visible pour une permittivité relative de la gaine égale à 2,56 où le mode ligne de transmission n'existe plus pour des profondeurs comprises entre 63 cm et 78 cm ainsi qu'entre 1,32 m et 1,43 m.

Pour mettre en avant cette variation, nous avons tracé sur la figure du bas à droite la constante de propagation pour une gaine de permittivité relative égale à 1, ce qui correspond au cas du câble placé dans une cavité enterrée. La cavité est de faible diamètre vis à vis du conducteur. Nous retrouvons le fait que la constante s'enroule et converge vers une valeur qui est reliée à la permittivité de la gaine et ceci au fur et à mesure que la profondeur augmente. On peut expliquer le fait que l'atténuation augmente alors que la permittivité diminue en subodorant que les champs sont plus étendus dans le sol lorsque la gaine est de faible permittivité. Le mode n'existe plus là encore pour des profondeurs comprises entre 63 cm et 79 cm, entre 1,32 m et 1,43 m, puis entre 1,99 m et 2,06 m et enfin entre 2,67 m et 2,68 m.

En remarque, on peut simuler un câble se trouvant dans une cavité enterrée par cette méthode en imposant une gaine diélectrique de permittivité relative égale à l'unité. Il est toutefois nécessaire de garder un rayon externe de la gaine - donc le rayon de la cavité - faible vis à vis de la profondeur pour respecter la notion d'impédance de surface.

II. Courant induit par une onde plane sur un réseau de lignes parallèles à l'interface dans l'hypothèse des fils minces

II.1. Calcul du courant

Nous cherchons le courant induit sur chaque câble supposé cylindrique lorsque notre faisceau de longueur infinie est illuminé par une onde plane. Cette onde plane est paramétrée par sa polarisation, son azimut et son incidence. Elle se propage selon l'axe Oz avec une constante Γ et elle peut se mettre sous la forme

$$E_z(x_k, y_k, z) = E_{0k} e^{-\Gamma z} \quad (\text{II-13})$$

où E_{0k} désigne la composante longitudinale du champ électrique qui s'applique sur le conducteur k et qui tient compte du champ incident et du champ réfléchi

par l'interface (voir annexe A). Dans l'espace (x, y, η) , l'excitation est calculée en appliquant la transformée de Fourier. Soit

$$E_z(x_k, y_k, \eta) = \frac{-j\gamma_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{0k} e^{(\gamma_0 \eta - \Gamma)z} dz = E_{0k} \delta\left(\eta - \frac{\Gamma}{\gamma_0}\right) \quad (\text{II-14})$$

où δ est la fonction de Dirac. Nous déduisons de la relation précédente et de l'équation (II-1), le courant sur le câble m :

$$I_m(z) = \frac{-4j}{Z_0 \gamma_0} \frac{|E_{0k}|}{\left| M_{kn}\left(\frac{\Gamma}{\gamma_0}\right) \right|} e^{-\Gamma z} \quad (\text{II-15})$$

Les matrices $[M_{kn}(\eta)]$ et $[E_{0k}]$ ont été définies précédemment dans le cas de l'excitation localisée. Nous nous apercevons que le courant se propage avec la même constante de propagation que celle de l'onde qui l'a créé. Nous ne pouvons plus le décomposer en modes guidés et modes rayonnés. Ceci est le résultat direct du choix de lignes de longueur infinie. Ce résultat a été déjà indiqué dans une étude monofilaire et basses fréquences où la ligne était constituée d'un conducteur parfait [30].

En remarque, nous pouvons montrer [17] que si on considère une infinité de générateurs se trouvant sur les lignes et en introduisant un déphasage entre tous ces générateurs de manière à reproduire une onde plane, la sommation des modes guidés et rayonnés pour chaque générateur converge vers la solution en onde plane. A partir de cette remarque, dans le cas d'antennes très longues mais non infinies, nous pouvons penser que le courant créé par une onde plane sera proche du résultat trouvé pour des lignes infinies à la condition de ne pas se trouver proche des discontinuités donc des bords. Pour connaître le courant aux extrémités de chaque antenne, l'emploi d'une méthode numérique devient alors nécessaire. Le problème de réflexion du courant sur une ligne de longueur finie ou semi-infinie peut être résolu par une méthode de Wiener-Hopf à la condition que le point d'application ne soit pas proche des bords. Ce dernier point a été développé dans [31].

II.2. Effets de la gaine diélectrique sur une ligne aérienne

Nous cherchons tout d'abord à montrer que la gaine diélectrique peut jouer un rôle prépondérant en hautes fréquences sur le niveau du courant induit par une onde plane. Pour cela, nous considérons une antenne aérienne située à 1 m du sol et avec un rayon de 1,5 cm.

Elle est recouverte d'une couche de 5 mm d'épaisseur de matériau diélectrique de permittivité relative égale à 2,56. Le sol a une conductivité de 10^{-2} S/m et une permittivité relative de 10. L'onde incidente est une onde plane polarisée transverse magnétique de 1 V/m et d'azimut nul. Elle se propage donc dans la même direction que l'antenne. La polarisation est indiquée sur la figure n°9.

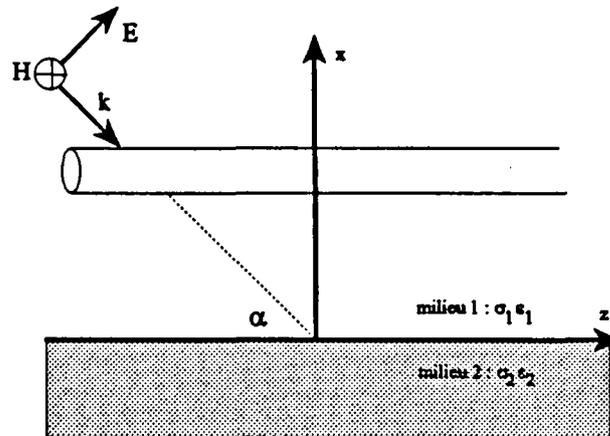


Figure n°9 : Polarisation transverse magnétique

Nous avons indiqué sur la planche n°4 - figure du haut - le courant induit en fonction de l'angle d'incidence de l'onde pour différentes fréquences. Ce courant est comparé à celui trouvé dans le cas où l'antenne est non gainée.

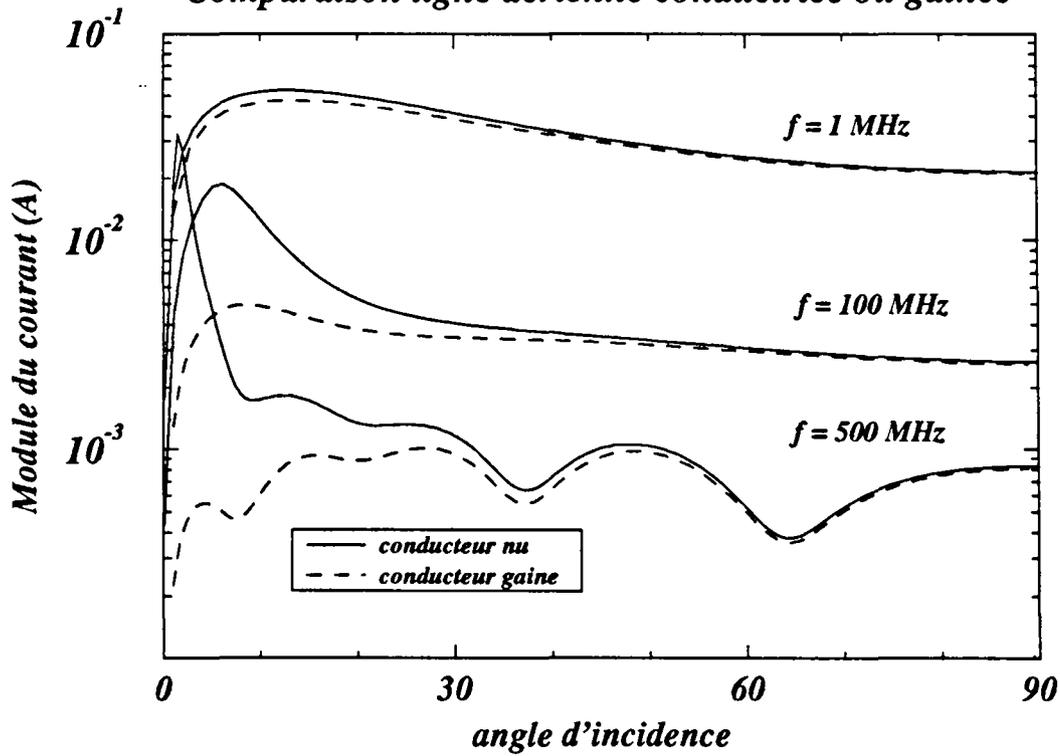
En premier lieu pour le câble nu (trait continu), nous pouvons remarquer qu'en hautes fréquences le courant passe par un maximum pour une incidence rasante. Ce maximum sera d'autant plus prononcé que la fréquence sera élevée (courbes à 100 MHz et 500 MHz). Par contre, en basses fréquences, le courant dépend peu de l'angle d'incidence et reste quasiment constant. Ceci est visible notamment à 1 MHz.

Si nous nous intéressons au courant induit sur le câble gainé (trait pointillé), nous nous apercevons que la gaine joue un rôle prépondérant en hautes fréquences et pour de faibles angles d'incidence. Elle a pour effet de diminuer très fortement le courant et d'empêcher l'apparition du maximum du courant localisé en incidence rasante. Par contre, elle n'a que peu d'influence en basses fréquences ou pour des angles supérieurs à 20 degrés.

Pour une onde polarisée transverse électrique, on peut montrer que le courant ne possède pas de maximum pour des incidences rasantes, ce dernier s'obtenant pour une illumination simultanée (90 degrés). C'est pourquoi la gaine diélectrique ne joue pas un grand rôle dans ce type de configuration.

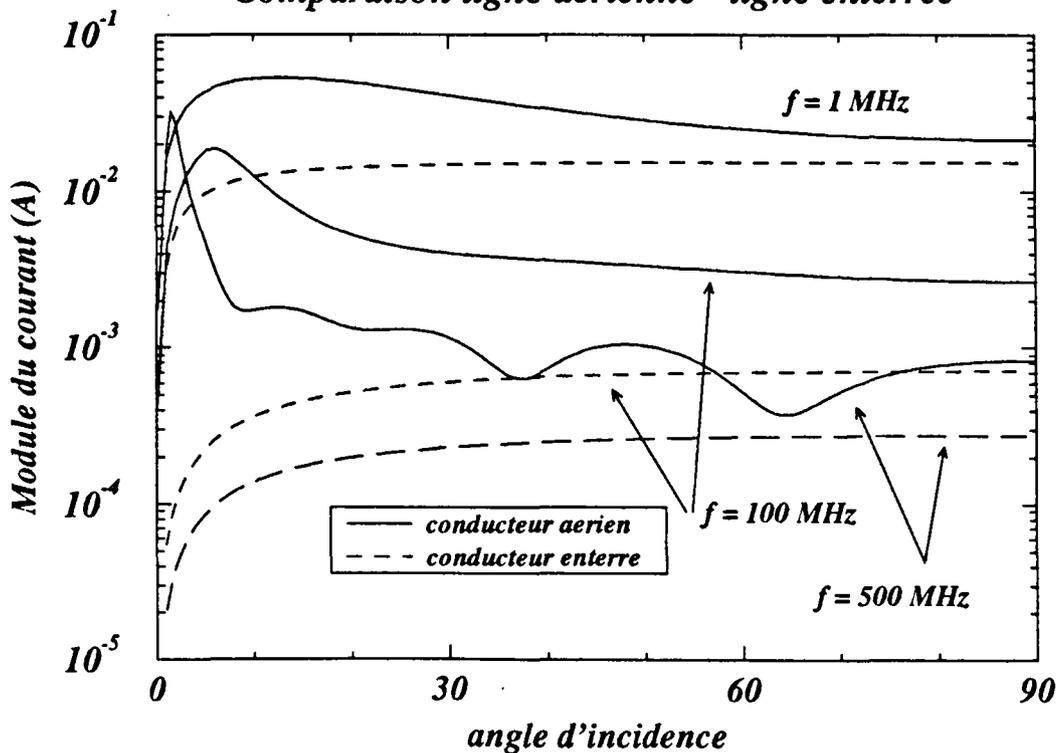
Courant induit par une onde plane

Comparaison ligne aeriene conductrice ou gainee



Hauteur : 1 m
 Rayon : 1,5 cm
 Sigma : 0,01 S/m
 Epsilon : 10
 E0 : 1 V/m
 Azimut : 0 degre
 Polar : 0 degre

Comparaison ligne aeriene - ligne enterree



Rayon gaine : 2 cm
 Epsilon : 2,56

II.3. Courant induit sur un câble enterré

Nous nous sommes intéressés au courant induit par une onde plane sur le même type de câble mais cette fois-ci enterré dans le sol. Nous échangeons les paramètres physiques de nos deux milieux et nous supposons que l'onde plane provient du milieu inférieur. L'onde s'appliquant sur notre antenne est donc l'onde transmise au travers l'interface en $x=0$. Le calcul de la transmission d'une onde au travers plusieurs milieux peut se trouver dans [32]. Les résultats sont indiqués sur la planche n°4 - figure du bas. La gaine diélectrique recouvrant le conducteur enterré a une permittivité relative de 2,56 et une épaisseur de 5 mm.

Nous pouvons voir que pour un câble enterré à une profondeur de 1 mètre (courbes en traits discontinus), les niveaux de courant sont beaucoup plus faibles que pour un câble aérien. Ceci provient essentiellement de l'atténuation du champ transmis, celle-ci augmentant avec la fréquence. Nous pouvons nous rendre compte qu'il n'existe plus de maximum de courant induit pour des incidences rasantes. De plus, le courant est quasiment indépendant de l'angle d'incidence de l'onde plane si celui-ci est supérieur à 30 degrés.

II.4. Réponse temporelle d'une ligne à l'IEMN

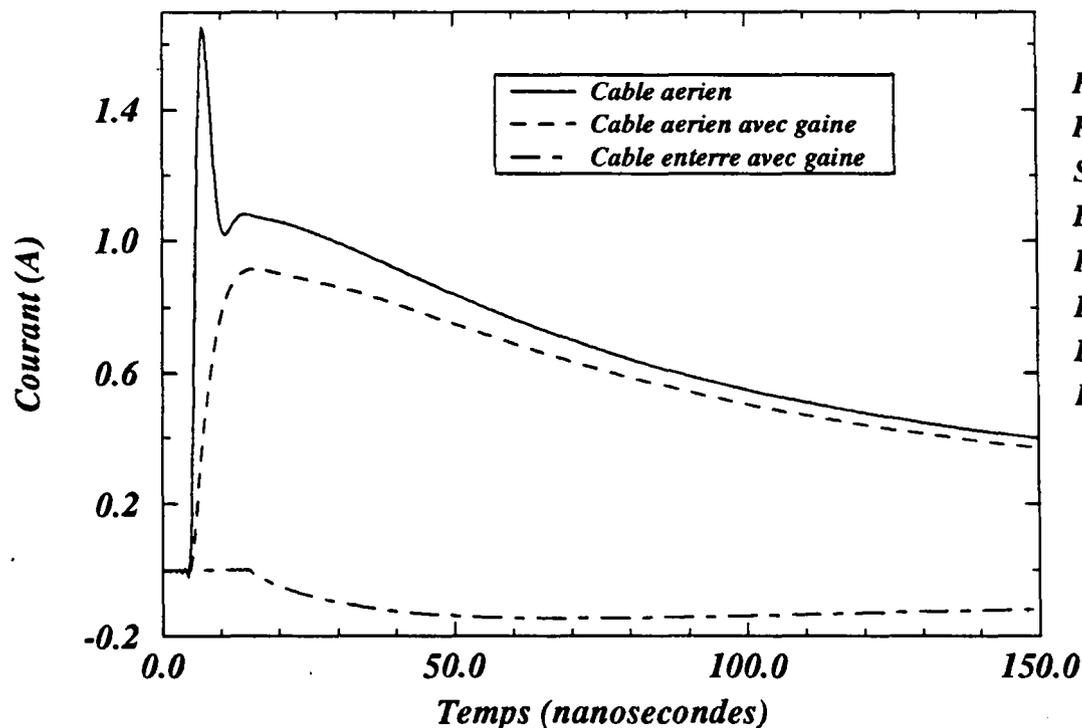
Nous nous sommes intéressés à la réponse temporelle du courant induit par une IEMN sur une ligne aérienne gainée ou non et sur une ligne enterrée et gainée. Les résultats sont données sur la planche n°5 - figure du haut.

Nous ne rappelons pas le phénomène physique générateur de l'IEMN qui est désormais classique. En effet la protection vis à vis de l'IEMN est devenue un standard des études CEM tant dans les domaines militaires que civils. Parmi la littérature qui traite de ce sujet, nous ne référencerons que [33]. Nous avons choisi une forme biexponentielle avec pour paramètres temporels $\alpha=4.10^7 \text{ s}^{-1}$ et $\beta=4,76.10^9 \text{ s}^{-1}$. Le champ électrique est normalisé à 100 V/m.

La réponse en courant de la ligne a été calculée pour une incidence rasante et une onde transverse magnétique d'azimut nul, ce qui correspond au cas pire. L'angle d'incidence est de 5 degrés. Nous pouvons voir que l'IEMN peut générer un fort courant avec un temps de montée très court sur un câble parfaitement conducteur mais que la présence de la gaine diminue fortement le niveau ainsi que le temps de montée. Le temps de relaxation reste sensiblement le même. Sur une ligne enterrée et gainée, le courant induit est beaucoup plus faible (de l'ordre de 0,15 A) et l'apparition de l'impulsion est retardée par rapport au câble aérien.

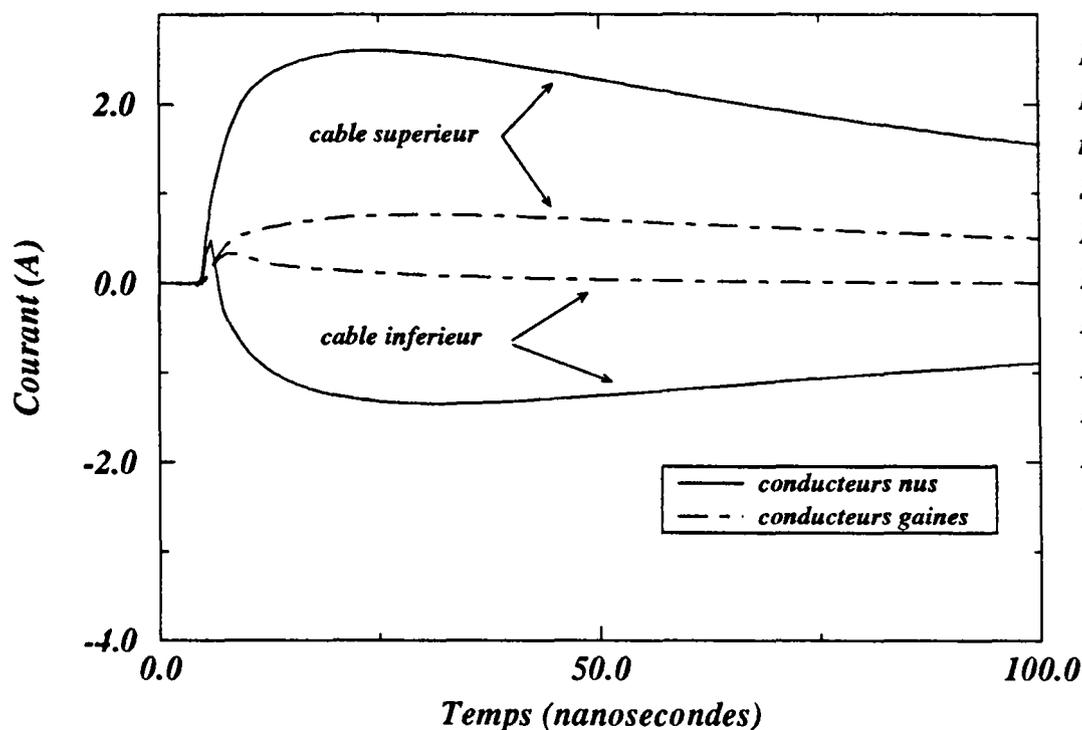
Reponse temporelle du courant induit par une IEMN

Sur un cable unique



Hauteur : 1 m
 Rayon : 1,5 cm
 Sigma sol : 0,01 S/m
 Epsilon sol : 10
 Rayon gaine : 2 cm
 Epsilon gaine : 2,56
 E0 : 100 V/m
 Incidence : 5 degres

Sur une ligne bifilaire superposee aerienne



Hauteur H : 1 m
 Hauteur B : 0,5 m
 rayons : 1,5 cm
 Sigma sol : 0,01 S/m
 Epsilon sol : 10
 Rayons gaine : 2 cm
 Epsilon gaine : 2,56
 E0 : 100 V/m
 Incidence : 5 degres
 Azimut : 0 degre
 Polarisation : 0 degre

Le même type de résultat est obtenu pour une ligne bifilaire où les câbles sont placés l'un au-dessus de l'autre. Nous avons indiqué sur la planche n°5 - figure du bas, le courant induit sur les deux conducteurs par l'IEMN précédente. Les courbes en trait continu correspondent aux câbles parfaitement conducteurs et celles en pointillés aux câbles entourés d'une gaine diélectrique. Dans un premier temps si les deux lignes sont parfaitement conductrices, le courant induit sur le câble placé à 1 mètre de hauteur est plus important que dans le cas du câble seul (voir figure du haut). La réponse temporelle en courant sur le câble placé à égale distance entre le sol et la ligne supérieure tend dans un premier temps, c'est à dire vers 5,5 ns, vers celle du câble seul mais elle est alors influencée par le rayonnement dû au conducteur supérieur qui devient prépondérant et qui induit un fort niveau.

La gaine peut là encore revêtir une grande importance. Nous avons indiqué les nouvelles réponses du courant induit sur des lignes gainées (courbes en pointillés) et nous pouvons observer que les courants induits sur les deux câbles sont fortement amoindris. De plus, l'impulsion sur le câble inférieur reste positive et s'annule beaucoup plus rapidement.

III. Courant induit par une onde plane sur un câble de section droite quelconque ou proche de l'interface

III.1. Résolution par la méthode des moments

Nous avons vu dans le premier chapitre que la composante E_z diffractée par un câble de section droite quelconque se composait de la somme des rayonnements des filaments de courant se trouvant à sa surface. Nous désirons calculer le courant induit sur ce type de câble lorsqu'il est soumis à une illumination par une onde plane. En appliquant les conditions de continuité du champ électrique à la surface du conducteur, nous obtenons l'équation intégrale en champ électrique suivante:

$$\left[\frac{Z_0 \gamma_0^2}{8\pi} \int_{c=-\infty}^{+\infty} I(x_0, y_0, z_0) \int_{-\infty}^{+\infty} M(x, y, x_0, y_0, \eta) e^{-\gamma_0 \eta (z - z_0)} d\eta dz_0 dc = -E_0(x, y) e^{-\Gamma z} \right] \quad (\text{II-16})$$

où le terme de gauche est la composante diffractée par le câble (cf chapitre Un §II.1) et le terme de droite est la composante longitudinale de l'onde plane (cf annexe A).

La multiplicité des intégrales ne nous permet pas d'appliquer une méthode numérique directement, c'est pourquoi nous revenons dans l'espace (x, y, η) pour obtenir une équation plus simple donnée par la relation (II-17) où Γ est la constante de propagation de l'onde plane (cf annexe A).

$$\frac{Z_0 \gamma_0}{-4j} \int_C I(x_0, y_0, \eta) M(x, y, x_0, y_0, \eta) dc = -E_0(x, y) \delta(\gamma_0 \eta - \Gamma) \quad (II-17)$$

Nous appliquons la méthode des moments afin de résoudre cette équation. La méthode des moments est une solution numérique basée sur la formulation d'une équation intégrale qui est largement employée en électromagnétisme. Son principe qui est rappelé dans l'annexe B a été exposée par Harrington [34]. On l'applique souvent pour connaître la distribution de courant le long d'un câble de longueur finie.

L'originalité de l'application présente est de la mettre en oeuvre pour connaître la distribution du courant sur la circonférence du conducteur. Une démarche similaire a été présentée dans [35] et [36] où les deux demi-milieux sont supposés purement diélectriques.

La technique de résolution de l'équation intégrale comme celle ci-dessus est standard. Elle consiste à la discrétiser et à la réduire en un système d'équations linéaires. Cette discrétisation se fait au moyen de fonctions bases pour les inconnues et de fonctions tests pour l'équation intégrale. Il existe plusieurs types de fonctions bases et tests [37]. Pour notre part, nous avons mis en oeuvre la méthode dite « point-segment » où le courant est discrétisé par

$$I(x_0, y_0, \eta) = \sum_{n=1}^N I_n(\eta) P_n(x, y) \quad (II-18)$$

avec

$$\begin{cases} P_n(x, y) = 1 & \text{si } (x, y) \in \Delta C_n \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (II-19)$$

Le contour du câble C est partitionné en N segments C_n de longueur v_n . En projetant sur les fonctions test, le système matriciel à résoudre est le suivant:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N I(x_n, y_n, \eta) \int_{C_n} M(x_m, y_m, x_n, y_n, \Gamma/\gamma_0) dc_n \\ = \frac{4j}{Z_0 \gamma_0} E_0(x_m, y_m) \quad m = 1 \rightarrow N \end{aligned} \quad (II-20)$$

Nous pouvons voir que la relation précédente peut se mettre sous la forme $[I] [Z]=[V]$. C'est pourquoi la matrice constituée des termes intégraux de $M(x,y,\eta)$ est souvent appelée matrice impédance que nous noterons $[L_{mn}]$.

Nous sommes en mesure de connaître le module et la phase du courant induit sur toute la structure mais il nous manque le terme de propagation de ce courant car nous sommes dans l'espace (x,y,η) . Utilisons les formules de Cramer pour résoudre le système linéaire (II-20), nous avons :

$$I(x_k, y_k, \eta) = \frac{4j}{Z_0 \gamma_0} \frac{|E_k|}{|L_{mn}|} \delta(\gamma_0 \eta - \Gamma) \quad (\text{II-21})$$

où $|L_{mn}|$ est le déterminant de la matrice impédance et $|E_{0k}|$ est le déterminant de la matrice formée à partir de la matrice $[L_{mn}]$ exceptée la colonne k qui est remplacée par la colonne excitation $[E_{0k}]$. Nous pouvons retrouver la constante de propagation du courant en revenant dans l'espace (x,y,z) et nous obtenons alors pour le courant longitudinal total :

$$I(z) = \sum_{n=1}^N I(x_n, y_n, z) = \frac{4j e^{-\Gamma z}}{Z_0 \gamma_0 |L_{mn}|} \sum_{n=1}^N |E_n| \quad (\text{II-22})$$

Nous retrouvons donc le fait que le courant total possède la même constante de propagation que celle du champ exciteur. Ce résultat est en accord avec l'étude du conducteur cylindrique dans l'approximation des fils minces.

III.2. Calcul de la matrice impédance

Si le principal avantage de la méthode des moments est le nombre restreint d'inconnues, celles-ci se situant uniquement sur la structure et non pas dans l'espace environnant, les limitations se situent souvent au niveau de la prise en compte d'inhomogénéités. De plus, elle demande localement un développement analytique de la singularité des fonctions de Green au point source.

Ces difficultés résident dans le fait de calculer la matrice impédance donc d'intégrer la fonction M sur le sous-contour C_n . Pour cela, nous nous aidons de la figure n°10 où nous avons

$$\begin{cases} D_1 = \|\bar{\rho}_m - \bar{\rho}_n - v\bar{t}\| \\ D_2 = \|\bar{\rho}_m - \bar{\rho}_n - v\bar{t} + 2[(\bar{\rho}_n + v\bar{t}) \cdot \bar{x}]\bar{x}\| \end{cases} \quad (\text{II-23})$$

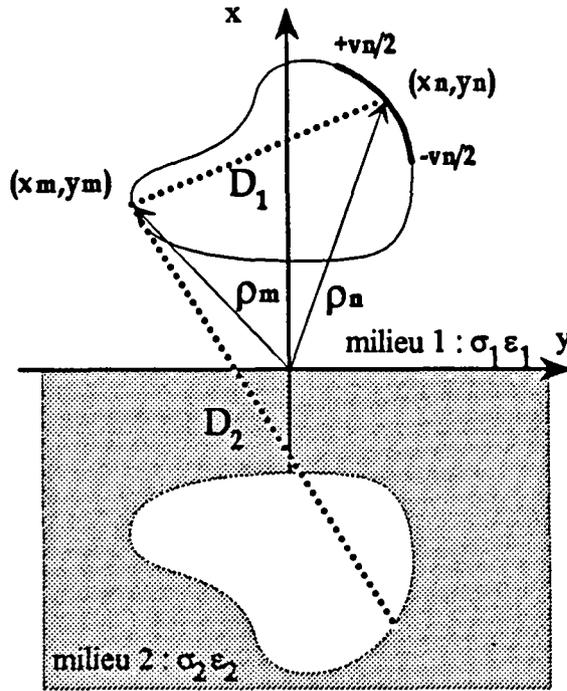


Figure n°10 : Distances intervenant dans le calcul de la matrice impédance

et où t_n est le vecteur unité le long de C_n que nous assimilerons au vecteur tangent au contour du câble au point (x_n, y_n) . La distance D_1 correspond à la distance entre le point (x_n, y_n) et le point (x_m, y_m) et la distance D_2 à celle qui sépare le point (x_n, y_n) à l'image du point (x_m, y_m) par rapport à l'axe Oy qui symbolise la surface de séparation des demi-milieux. Les termes à calculer sont donnés à partir de (I-25) par

$$\int_{C_n} M(x_m, y_m, x_n, y_n, \eta) dc_n = \int_{-v_n/2}^{+v_n/2} \left\{ \frac{\xi_1^2}{n_1^2} [H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 D_1) - H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 D_2)] + \frac{2j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\gamma_0 u_1 (x_m + x_n + v t_m) - \gamma_0 \lambda (y_m - y_n - v t_m)}}{u_1 + u_2} d\lambda - \eta^2 \frac{2j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\gamma_0 u_1 (x_m + x_n + v t_m) - \gamma_0 \lambda (y_m - y_n - v t_m)}}{n_2^2 u_1 + n_1^2 u_2} d\lambda \right\} dv \quad (\text{II-24})$$

Nous pouvons voir que dans le cas où $\rho_n = \rho_m$, le problème se pose de calculer l'intégrale étant donnée la singularité des fonctions de Hankel à l'origine. Nous devons pallier cette difficulté en calculant analytiquement une partie de l'intégrale ci-dessus composée par la première fonction de Hankel.

Soit

$$\int_{-v_a/2}^{+v/2} \frac{\xi_1^2}{n_1^2} H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 D_1) dv = \int_0^{+v/2} \frac{\xi_1^2}{n_1^2} H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 v) dv - \int_0^{-v/2} \frac{\xi_1^2}{n_1^2} H_0^{(2)}(j\gamma_0 \xi_1 v) dv \quad (\text{II-25})$$

Si la longueur du sous-contour C_n est petite, nous pouvons remplacer la fonction de Hankel par son développement limité, c'est à dire :

$$H_0^{(2)}(z) = 1 - \frac{2j}{\pi} \text{Ln}(0,89053 z) \quad (\text{II-26})$$

De plus

$$\int \text{Ln}(x) dx = x \text{Ln}(x) - x \quad (\text{II-27})$$

Nous obtenons finalement :

$$\int_{-v_a/2}^{+v/2} \frac{\xi_1^2}{n_1^2} H_0^{(2)}(-j\gamma_0 \xi_1 D_1) dv = \frac{\xi_1^2}{n_1^2} v_a \left\{ 1 + \frac{2j}{\pi} \left[1 - \text{Ln}(-0,89053 j\gamma_0 \xi_1 \frac{v_a}{2}) \right] \right\} \quad (\text{II-28})$$

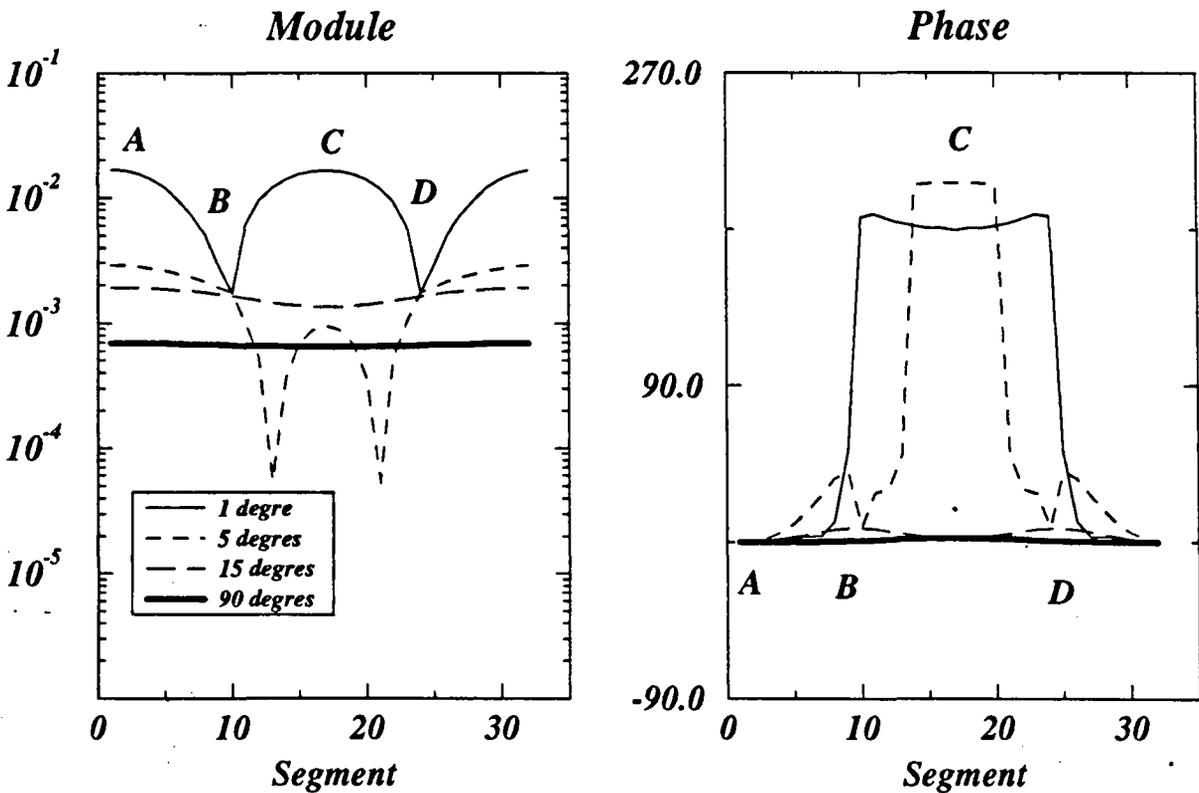
Nous sommes désormais en mesure de calculer tous les termes de la matrice impédance et nous arrivons à un système linéaire qui peut être résolu par un algorithme numérique de Gauss-Jordan. Le courant total est obtenu par l'intégration de toutes les densités de courant sur le contour C. Or nous rappelons que le conducteur est supposé parfait, le courant se situera donc uniquement à la surface, il n'est donc pas nécessaire de discrétiser l'intérieur du câble d'où un gain de temps calcul appréciable.

III.3. Distribution sur un conducteur cylindrique

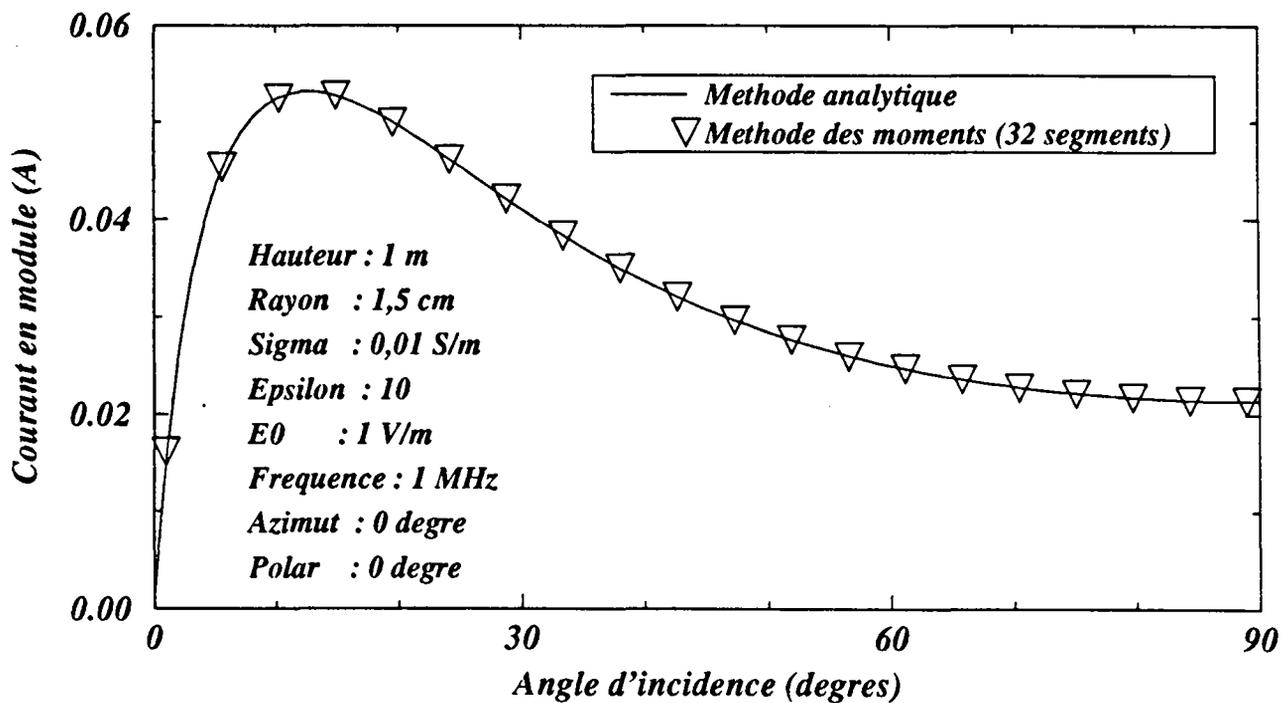
III.3.1. Câble aérien

Afin de valider l'approche que nous venons de présenter, le courant induit sur un câble cylindrique par une onde plane a été représenté sur les planches n°6 et n°7. Ce câble est situé à 1 m de hauteur et possède un rayon de 1,5 cm. Ces caractéristiques nous permettent d'appliquer la théorie analytique dans l'approximation des fils minces. Sur la partie supérieure des planches n°6 et 7, nous avons représenté la distribution du courant en module à gauche et en phase à droite pour différents angles d'incidence.

Distribution du courant sur un cable cylindrique



Courant total sur la structure



La discrétisation du câble par la méthode des moments s'est faite en 32 segments. Pour faciliter la lecture des courbes, nous définissons quatre points particuliers à la surface du câble par les lettres A, B, C et D :

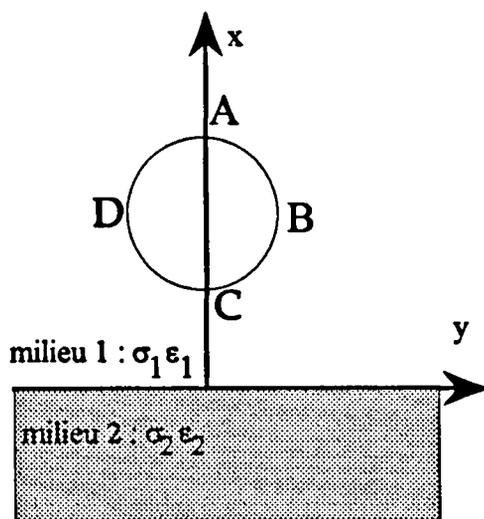


Figure n°11 : Définition de quatre points sur le conducteur

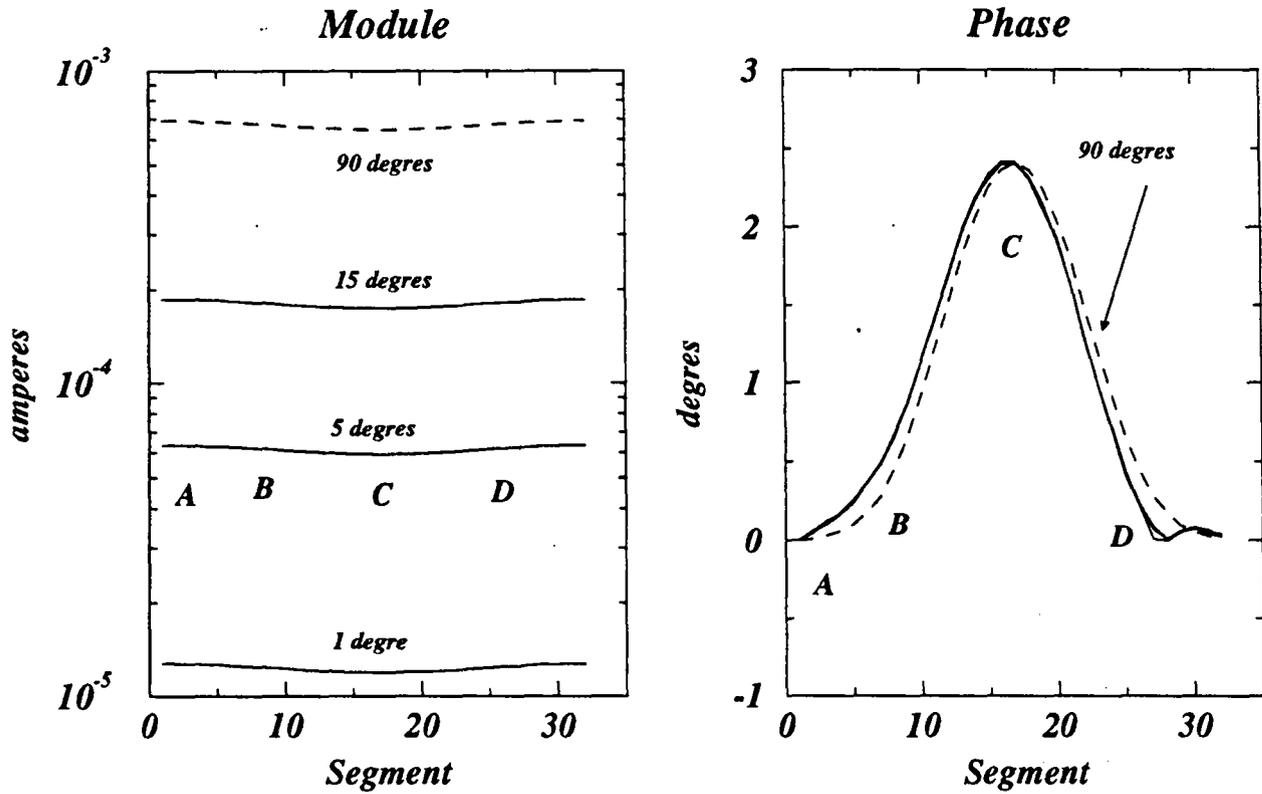
L'onde incidente est caractérisée par un champ électrique de 1 V/m pour une fréquence de 1 MHz.

Sur la planche n°6, l'onde se propage selon l'axe du câble (azimut nul) et est polarisée transverse magnétique (angle de polarisation nul). Cette polarisation correspond à la figure n°9. Nous pouvons nous apercevoir que pour des incidences supérieures à 15 degrés, le courant est uniformément réparti tant en module qu'en phase. Pour une illumination simultanée (90 degrés) le courant est constant sur toute la périphérie de la ligne et il n'existe pas de déphasage. L'approximation des fils minces est donc tout à fait justifiée dans ce cas.

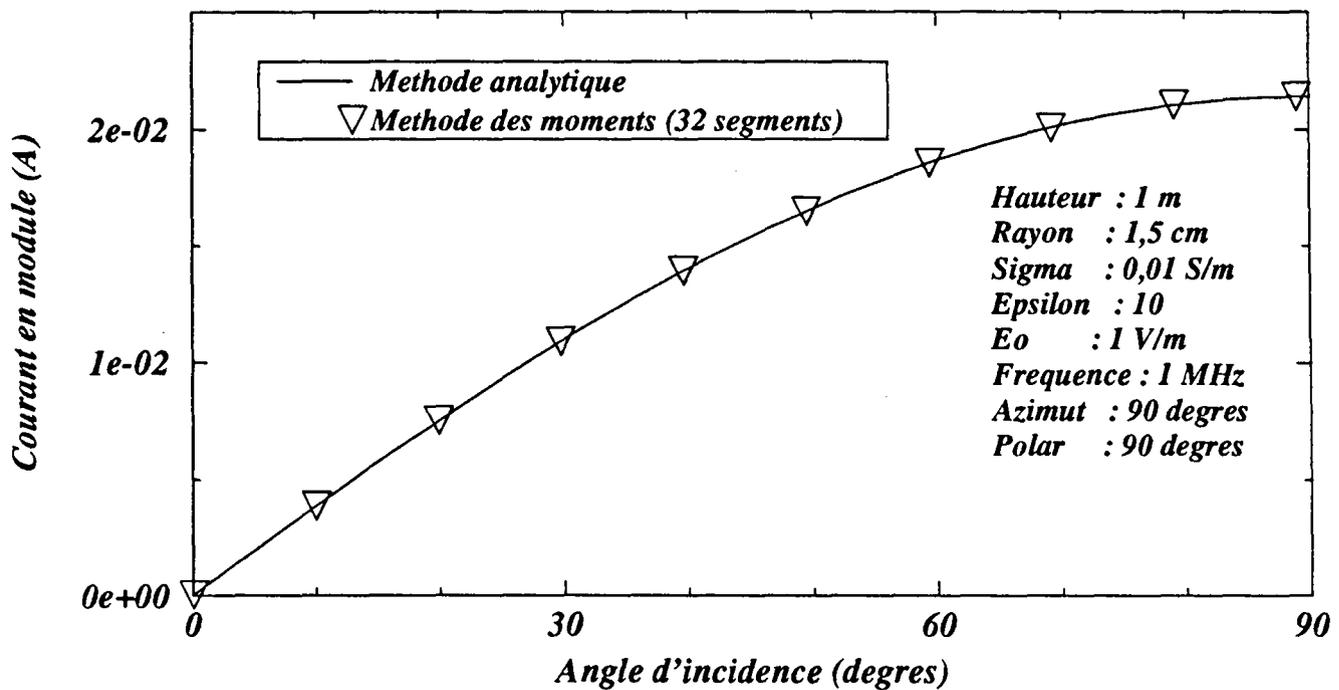
En revanche pour des angles d'incidence plus faibles, nous pouvons voir que le courant connaît une variation en fonction de la position sur le pourtour du câble. Pour un angle de 1 degré, le courant est maximum sur le dessus (point A) ainsi que sur le dessous (point C) mais il existe un déphasage de 180 degrés entre ces deux points. Le courant est minimum sur les côtés aux points B et D. Pour un angle de 5 degrés, nous pouvons voir que le courant tend à s'uniformiser. En effet, les lieux où les densités de courant sont minimales se rapprochent du point C. Le courant en ce point n'égale plus en module le courant au point A. Les densités maximales s'étalent sur le dessus.

Nous avons intégré toutes ces densités de courant afin de calculer le courant total sur la structure. Nous comparons ce résultat (triangles) à celui donné par la méthode analytique sur la figure du bas. Les deux méthodes concordent parfaitement bien que l'approximation des fils minces ne soit plus justifiable pour les incidences rasantes car le courant n'est plus uniformément réparti.

Distribution du courant sur un câble cylindrique



Courant total sur la structure



Dans le cas d'une onde se propageant perpendiculairement à l'axe du câble (azimut de 90 degrés) avec un champ électrique parallèle au câble (angle de polarisation de 90 degrés) ce qui correspond à la figure n°12, les densités de courant sont réparties beaucoup plus uniformément sur le contour du câble quelque soit l'angle d'incidence de l'onde. Ce résultat est visible sur la planche n°7. Le déphasage qui peut exister entre les différentes densités de courant n'excède pas 3 degrés. Là encore, la méthode des moments et la méthode analytique convergent vers la même solution.

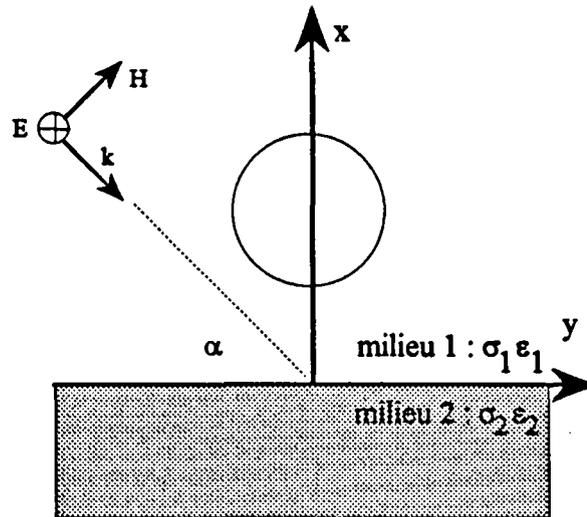


Figure n°12 : Polarisation transverse électrique avec un azimut de 90 degrés

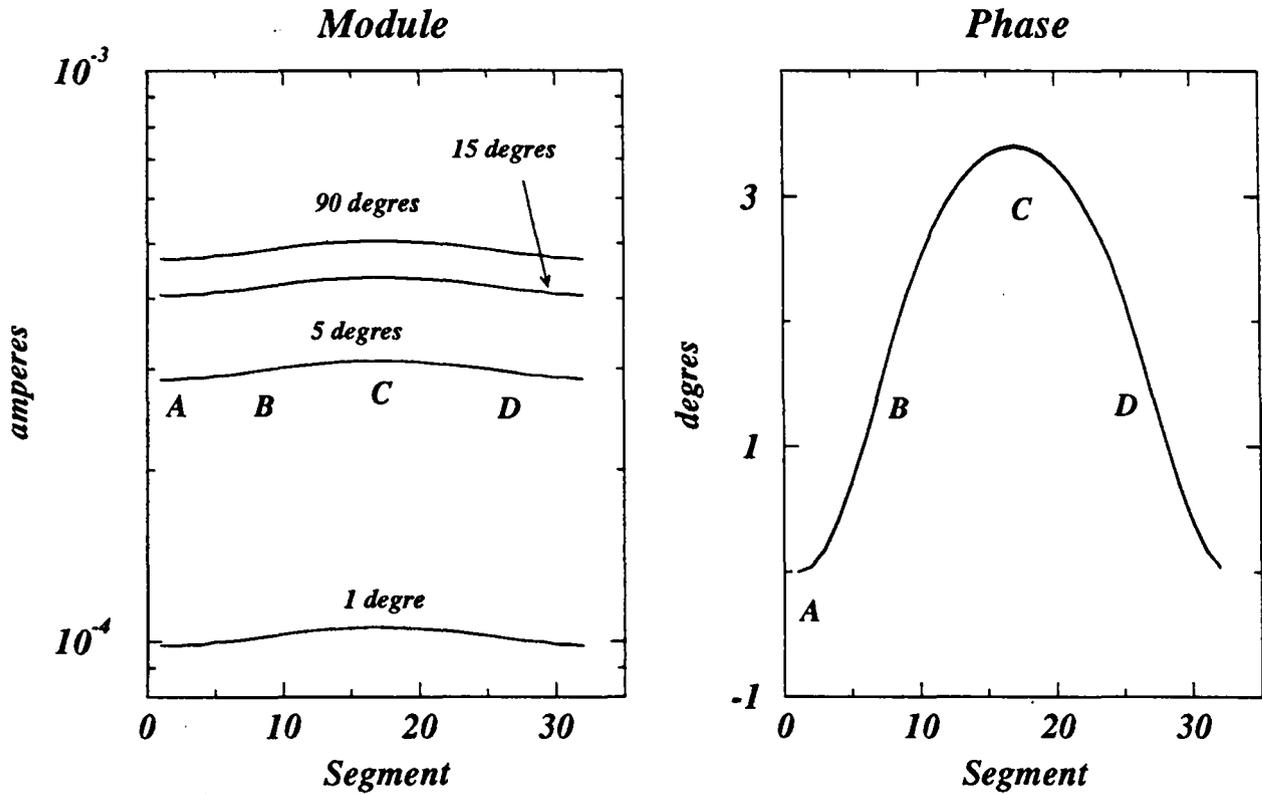
Nous avons montré dans [38] que la distribution s'uniformisait lorsque la fréquence augmentait en étudiant le même problème mais à une fréquence de 500 MHz. Ceci s'explique par le fait que l'influence du demi-milieu inférieur se fait moins ressentir lorsque le rapport h/λ augmente.

III.3.2. Câble enterré

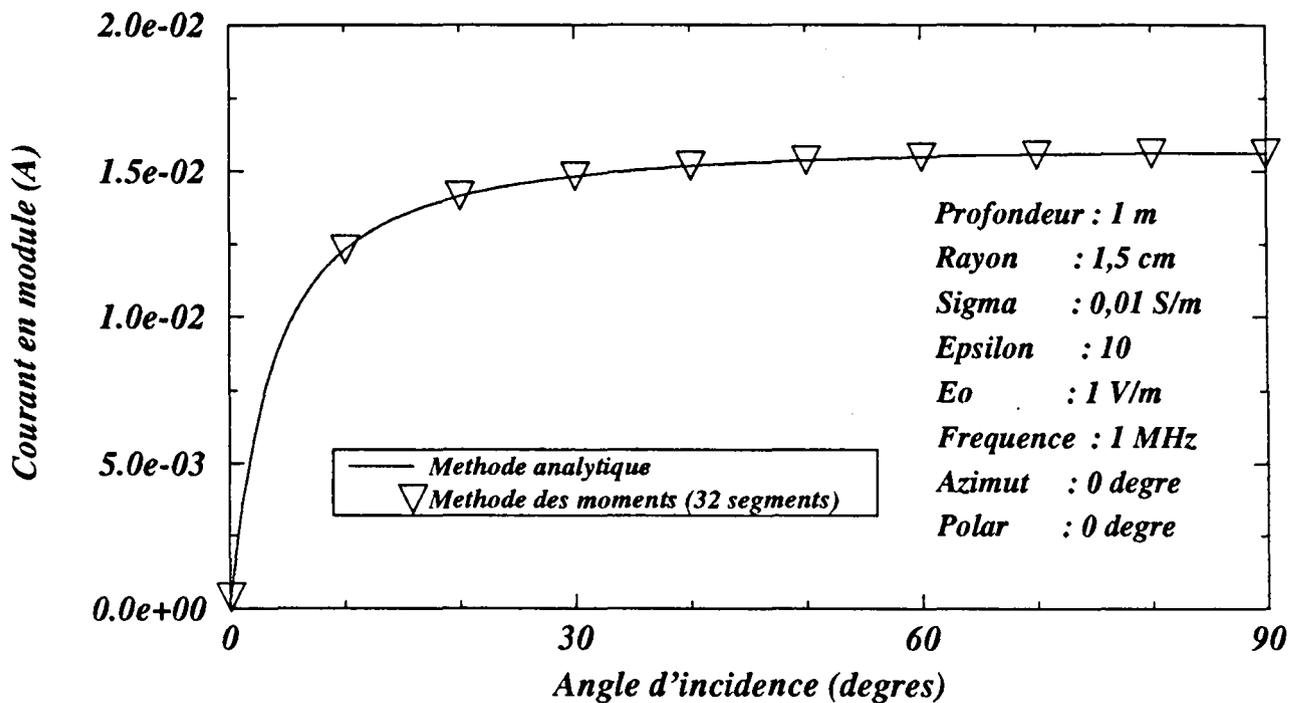
La répartition du courant sur un conducteur enterré a été indiquée sur la planche n°8. Nous rappelons que nous ne pouvons pas prendre en compte la présence d'une gaine autour du conducteur par la méthode des moments. Nous avons repris le cas de la planche n°6 avec une profondeur de 1 m. L'onde se propage selon l'axe du câble et est polarisée transverse magnétique. L'onde excitatrice est l'onde transmise au travers l'interface (voir annexe A).

Nous pouvons voir que le courant est uniformément réparti et que la réponse en courant total sur la structure calculée à partir de la méthode des moments concorde parfaitement avec celle calculée par la méthode analytique. En effet, dans ce cas, l'hypothèse des fils minces est justifiée. Nous pouvons noter aussi que la distribution de courant ne varie pas en fonction de l'angle d'incidence excepté le module du courant qui augmente en fonction de ce dernier paramètre.

Distribution du courant sur un cable cylindrique



Courant total sur la structure



La méthode analytique sera toujours applicable à ce type de problème, c'est à dire à un câble enterré éloigné de l'interface.

III.4. Distribution de courant sur un câble cylindrique proche de l'interface

III.4.1. Câble aérien

Le conducteur est maintenant placé de telle façon que son espacement avec la surface du sol (5 mm) soit inférieur à son rayon (1,5 cm). Les résultats sont indiqués sur la planche n°9 où nous calculons le courant par la méthode des moments lorsque l'onde est transverse magnétique et se propage dans l'axe du câble (voir figure n°9). La discrétisation du périmètre s'est faite en 64 segments.

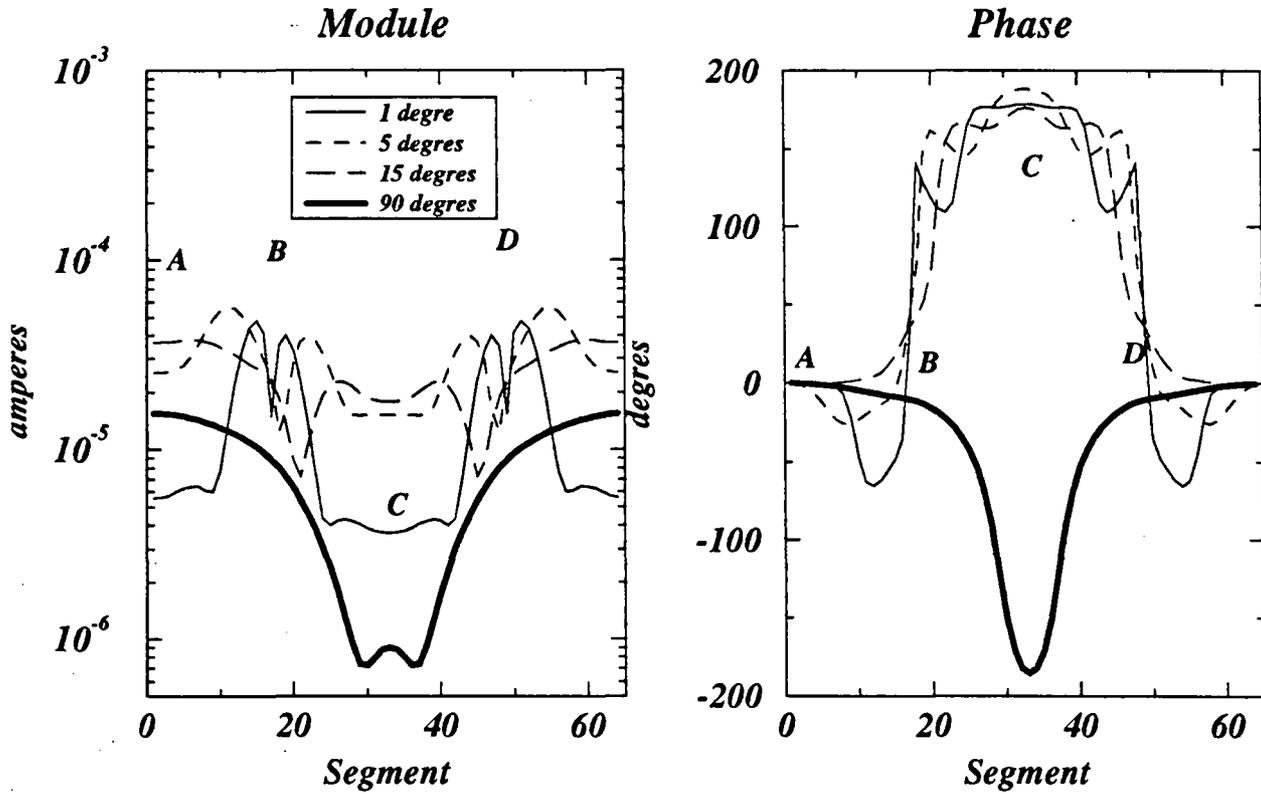
Pour une fréquence de 500 MHz, nous pouvons voir que la distribution du courant ne s'uniformise plus comme pour les câbles aériens et éloignés de l'interface. Le rapport h/λ est maintenant trop petit pour observer ce phénomène. Il est intéressant de noter que pour une incidence de 1 degré, le maximum du courant se situe autour des côtés soit des points B et D. Par contre, en ces deux points précis, la densité de courant diminue fortement créant ainsi deux lobes de densités maximales. Cette répartition particulière disparaît peu à peu avec l'incidence. Nous la distinguons encore pour un angle de 10 degrés mais ces lobes n'existent plus dès 15 degrés. Pour une illumination simultanée, le maximum de courant se trouve sur le dessus au point A et minimum en dessous au point C. De plus un déphasage de 180 degrés existe entre ces deux points.

Nous savons dorénavant que l'hypothèse des fils minces n'est pas vérifiée pour un conducteur si proche de l'interface. Cette conclusion est visible si l'on regarde le courant total sur la structure. Il apparaît en effet un maximum de courant induit pour des incidences rasantes prédit par la méthode numérique (triangles) alors que la méthode analytique minimise fortement le niveau induit. En revanche, le courant induit par une illumination simultanée peut être calculé par la méthode analytique car l'écart entre les deux résultats deviennent très faibles pour des angles supérieurs à 30 degrés.

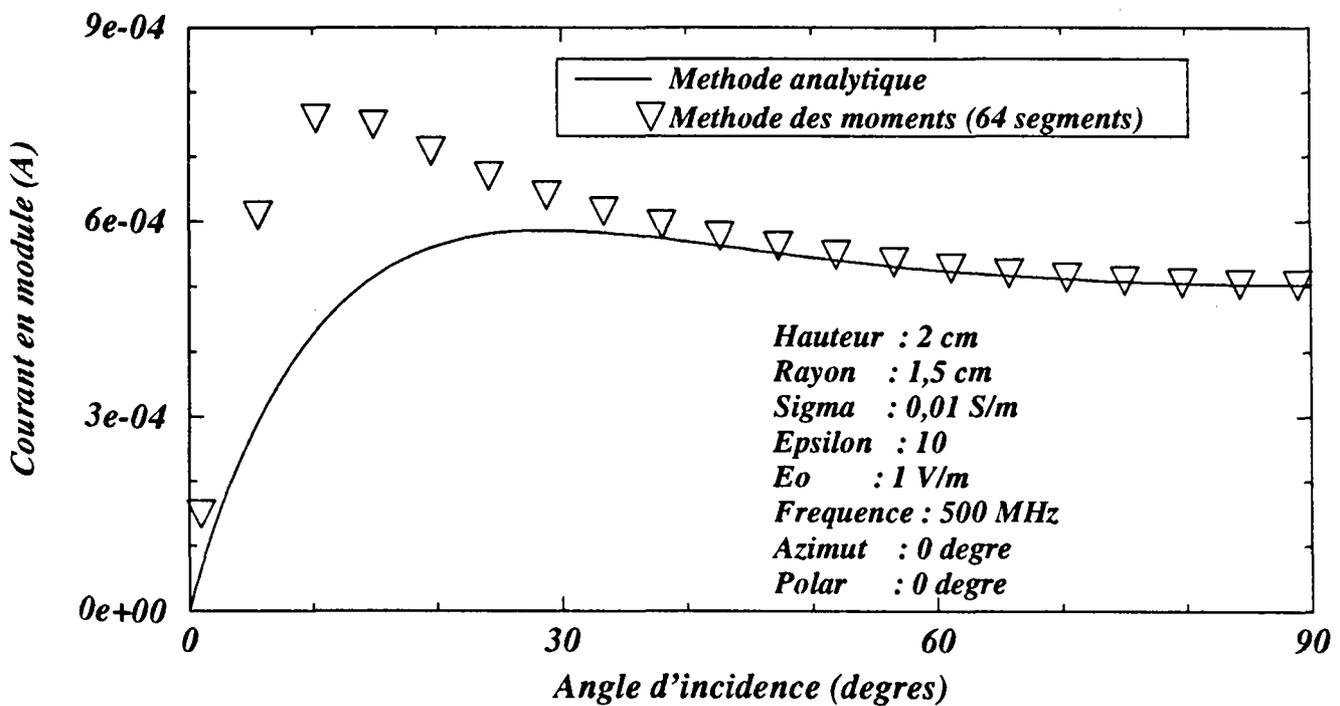
III.4.2. Câble enterré

La planche n°10 représente le même cas que celui indiqué ci-dessus où les demi-milieux ont été permutés. Nous obtenons ainsi le cas du câble enterré et proche de l'interface excité par la même onde plane de 1 V/m et à 500 MHz qui est transmise au travers l'interface.

Distribution du courant sur un cable cylindrique



Courant total sur la structure



La conclusion apportée au câble enterré mais à une profondeur importante reste toujours valable: la distribution du courant ne varie pas en fonction de l'angle d'incidence excepté le niveau qui augmente avec l'incidence. En revanche, la répartition du courant est moins uniforme que dans ce dernier cas. Le maximum de courant se trouve en dessous du câble (point C) et il est déphasé d'environ 135 degrés avec la densité de courant se trouvant au point A.

Une conclusion importante est mise en évidence pour le courant total: la méthode analytique ne donne plus un bon résultat même pour une incidence normale en hautes fréquences.

III.5. Courant induit sur un câble rectangulaire

Nous nous sommes intéressés au conducteur de section rectangulaire. Physiquement, on peut penser à un guide d'onde rectangulaire. Le guide étudié a une section de 6 cm sur 4 cm. La disposition est indiquée sur la figure n°13. La discrétisation de ce guide s'est faite en 60 segments.

Nous ne considérons que le conducteur aérien soumis à une illumination par une onde plane. Le sol est paramétré par une conductivité de 10^{-2} S/m et une permittivité relative de 10. Le demi-milieu supérieur est supposé sans pertes ($\sigma=0$) et de permittivité relative égale à 1.

L'onde excitatrice est caractérisée par un champ électrique de 1 V/m et une fréquence de 500 MHz. Nous présentons la répartition des densités de courant pour deux polarisations sur la planche n°11.

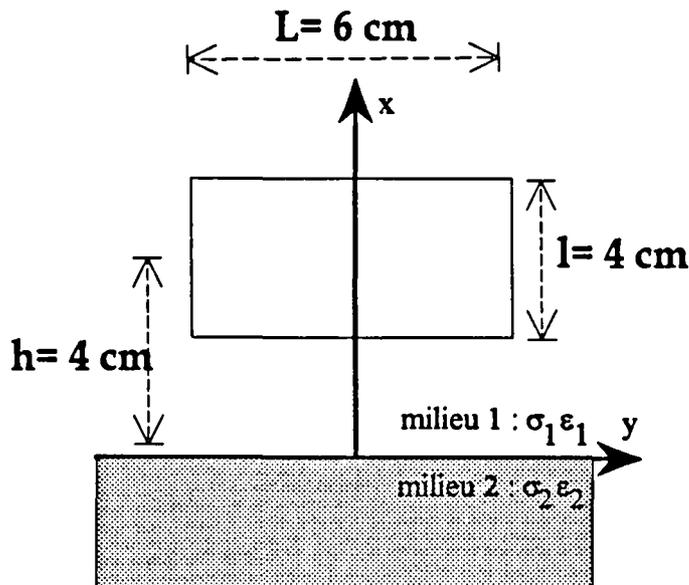
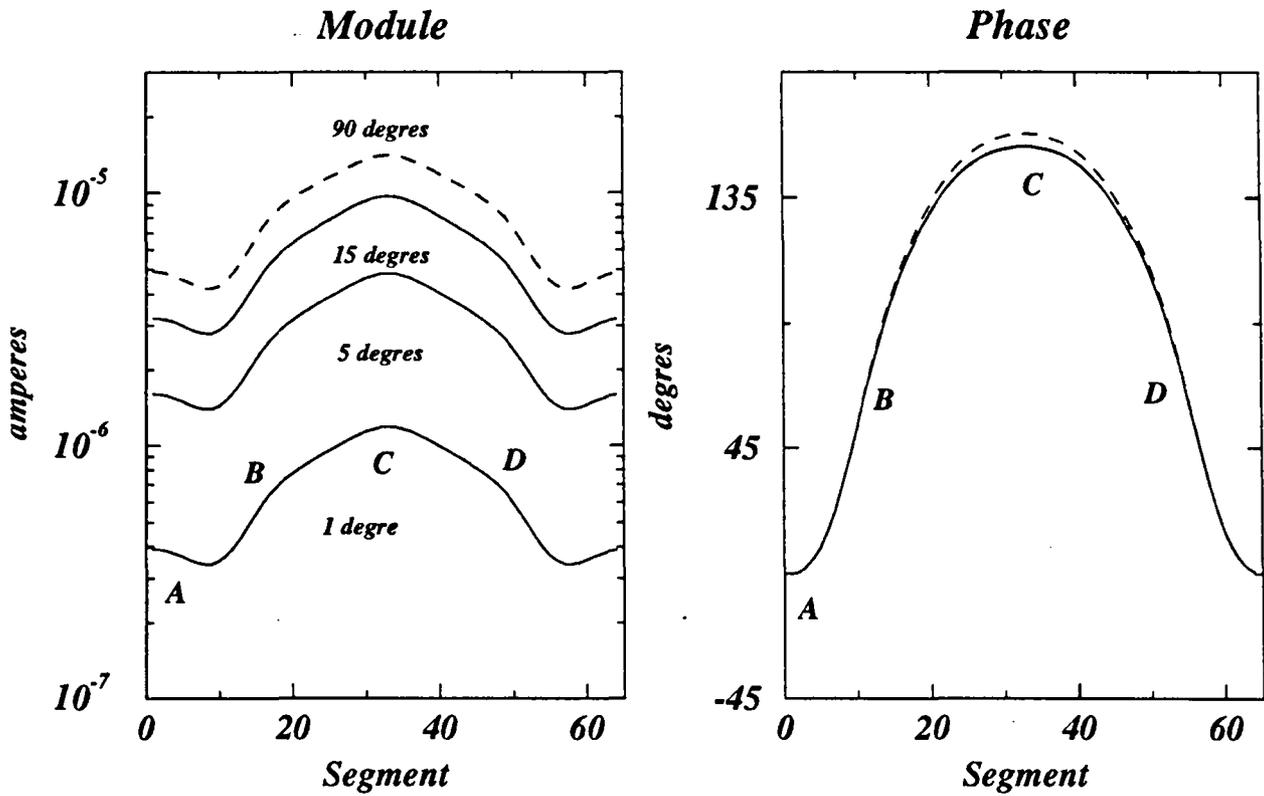
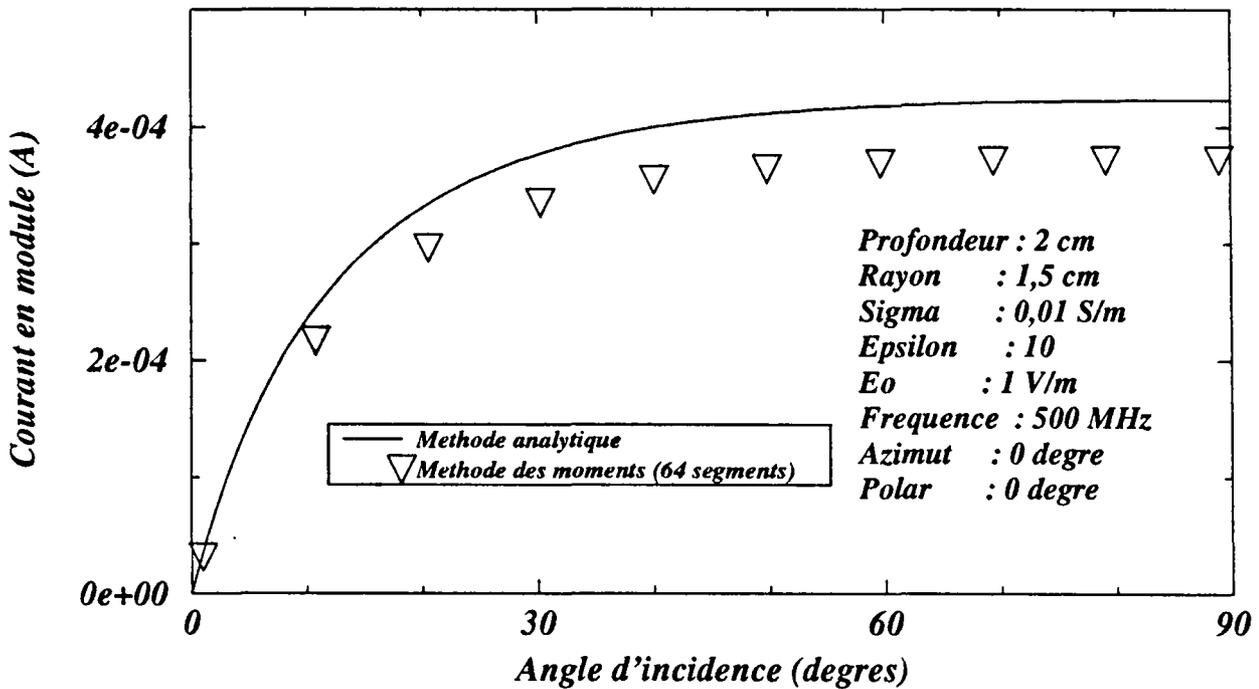


Figure n°13 : Conducteur rectangulaire proche de l'interface.

Distribution du courant sur un cable cylindrique



Courant total sur la structure



III.5.1. Polarisation transverse électrique

La première est une polarisation transverse électrique avec une onde se propageant perpendiculairement au guide. Elle est exposée sur la figure n°14.

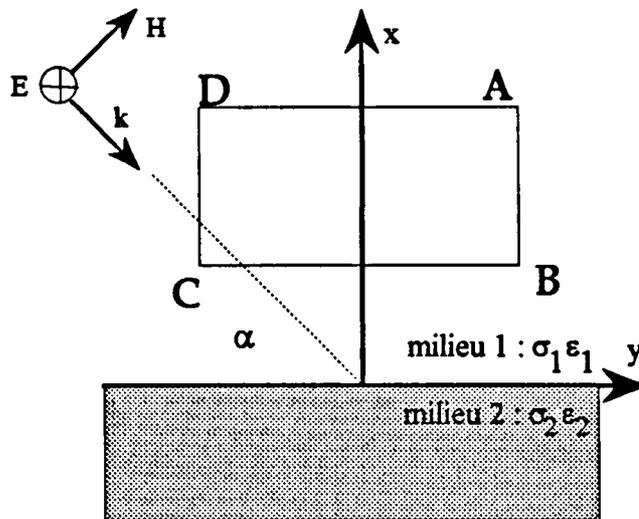


Figure n°14 : Polarisation transverse électrique.

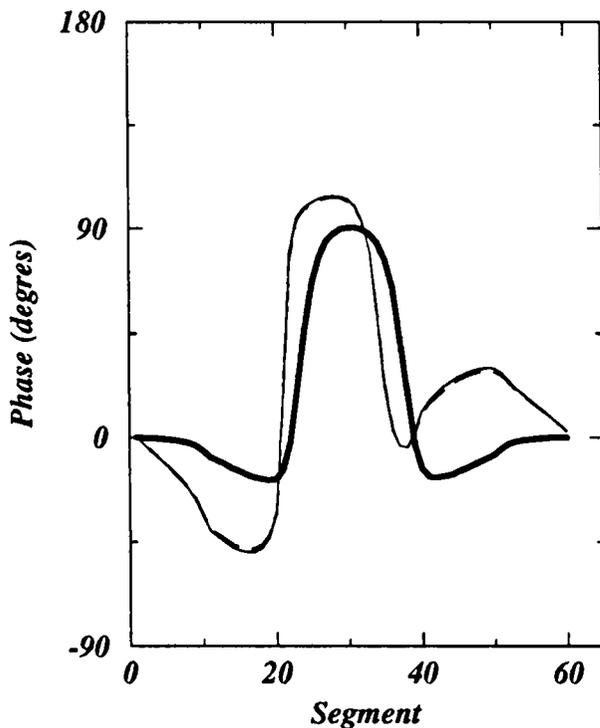
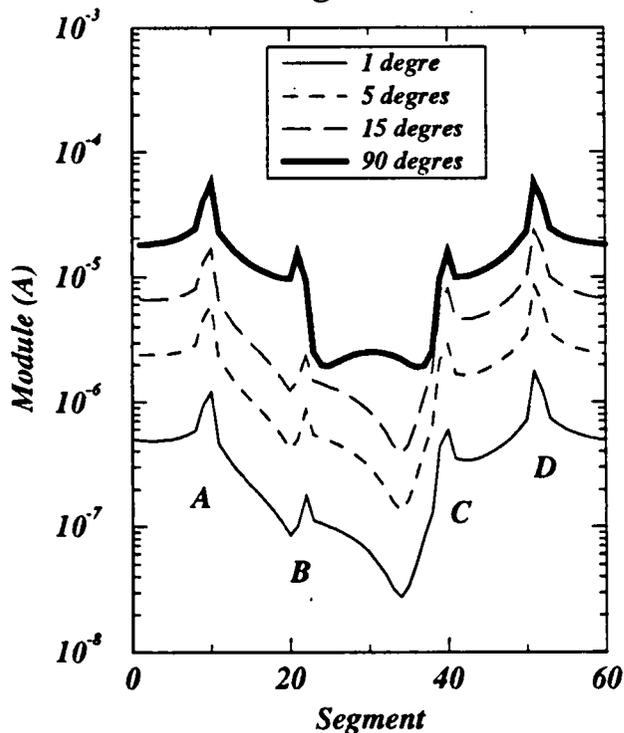
La distribution de courant induit par la polarisation transverse électrique est représentée sur la partie supérieure de la planche n°11. Nous pouvons tout d'abord nous apercevoir que le courant se situe essentiellement sur les coins du guide.

Pour un angle d'incidence de 1 degré, le courant maximum est localisé sur le coin supérieur gauche D qui est directement attaqué par l'onde. Le niveau de courant induit sur le coin supérieur droit au point A est sensiblement inférieur. Nous assistons à un effet de masquage sur le côté vertical (AB) opposé à l'excitation où le courant est plus faible que sur le côté (CD). Le minimum du courant induit se trouve sur le dessous du guide (BC). Si l'élévation augmente, le niveau de courant induit varie dans la même proportion. Mais dans le même temps, la dissymétrie de la distribution engendrée par l'excitation s'atténue. En effet pour une illumination simultanée, le courant est symétrique sur le conducteur. En revanche, le courant induit sur la face cachée est très faible.

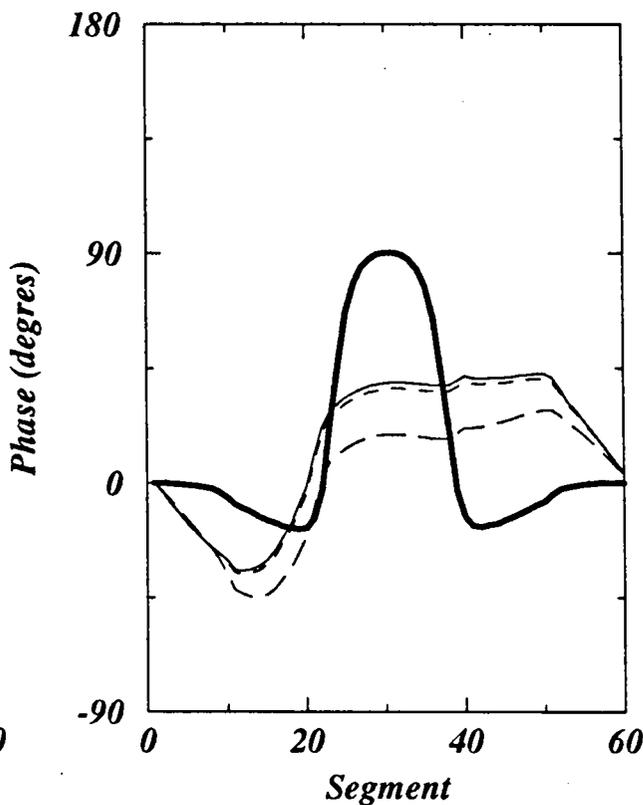
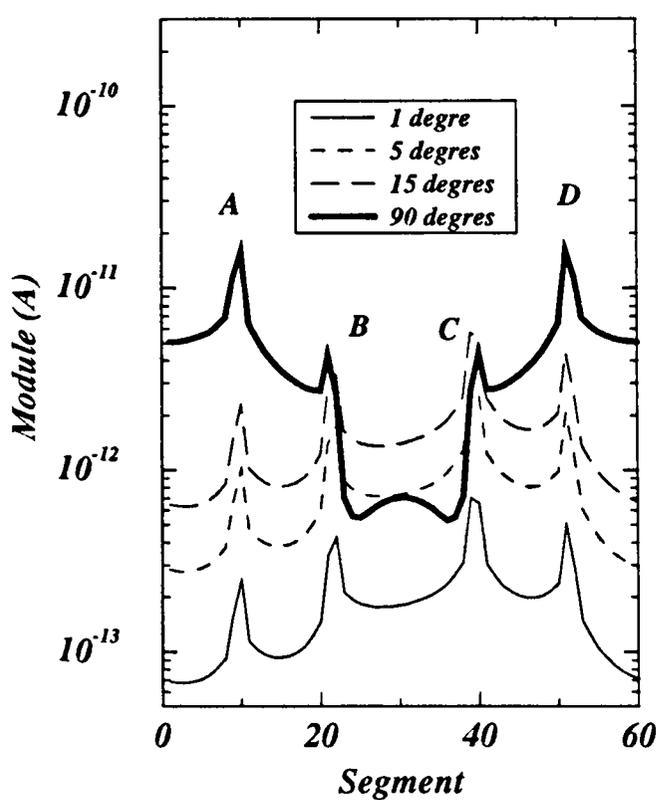
Le déphasage entre les densités de courant est relié à la notion de faces. Le déphasage pour des incidences rasantes entre la face supérieure et la face inférieure est de l'ordre de 90 degrés ainsi que le déphasage entre les faces verticales. Pour l'incidence normale, le déphasage entre les faces supérieures ne change pas mais il n'existe plus de déphasage entre les faces verticales.

Distribution de courant sur un guide rectangulaire

Polarisation=90 degrés et Azimut=90 degrés



Polarisation=0 degré et Azimut=90 degrés



III.5.2. Polarisation transverse magnétique

Le cas de l'onde polarisée transverse magnétique et se propageant toujours perpendiculairement au conducteur (figure n°15) a été étudié.

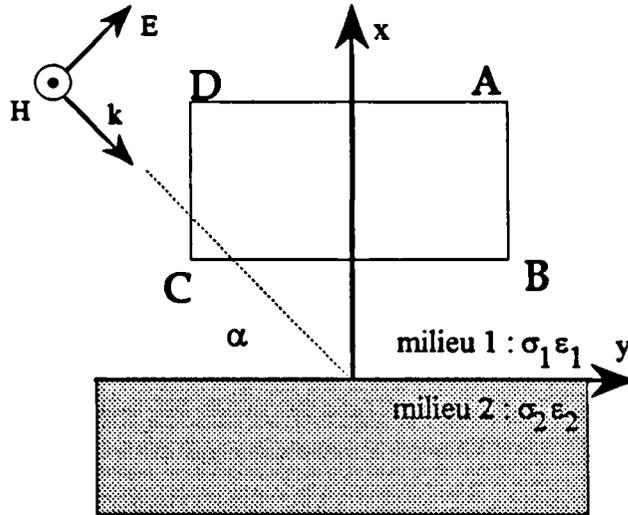


Figure n°15 : Polarisation transverse magnétique.

Dans cette configuration, le courant longitudinal est nul physiquement. Ceci se voit sur les niveaux des densités de courant qui sont extrêmement faibles comparés à la précédente excitation. Si les maximums de courant se trouvent toujours sur les coins du conducteur, la répartition a par contre changé.

Le courant est cette fois plus important sur la face inférieure (BC) que sur la face supérieure (AD) pour des incidences rasantes. De plus, les densités de courant localisées sur les faces BC et CD étant en phase, le point A est en quadrature de phase avec les trois autres coins. Le déphasage entre les densités varie linéairement sur les faces AD et AB.

Nous retrouvons la même distribution de courant pour une illumination simultanée que pour l'excitation transverse électrique avec toutefois un niveau nettement moindre. Nous retrouvons le critère de symétrie qui s'expliquent par le fait que les dimensions du guide sont inférieures à la longueur d'onde.

CONCLUSION

Quelques configurations géométriques de lignes ont été étudiées par la théorie des antennes.

Ceci nous a permis de caractériser premièrement les phénomènes de propagation qui pouvaient exister sur un ensemble de lignes en présence d'une interface. En hautes fréquences nous trouvons de manière générale deux types de propagation : une onde attachée à la structure dont les champs sont plus concentrés entre les conducteurs et le sol [12] et une onde de surface. Les champs de ce dernier mode sont plus répartis au niveau de l'interface séparant les deux demi-milieux. L'atténuation correspondante est beaucoup plus faible et dépend peu de la fréquence. L'importance de ce mode peut devenir primordiale car on peut montrer que ces deux modes peuvent être excités indépendamment l'un de l'autre [13]. Nous avons montré pour notre part qu'une onde de surface pouvait exister pour de multiples configurations de lignes. La présence d'une gaine, d'autres conducteurs ou même dans le cas de lignes enterrées, tout ceci n'exclut pas son existence.

Dans un second temps, cette théorie a été mise en oeuvre afin de calculer le courant induit par une onde plane. Mise à part l'hypothèse des fils minces, une restriction au niveau de la longueur des antennes a dû être faite. Nous ne considérons en effet que des lignes de longueur infinie. Nous avons montré dans ce cas particulier que le courant s'obtenait de manière explicite. Un résultat très intéressant a pu être mis en évidence dans le cas où l'onde est polarisée transverse magnétique. Il s'agit de la diminution sur les niveaux de courant induit que peut entraîner la présence d'une gaine en matériau diélectrique autour des conducteurs. En effet, nous avons souligné le fait que cet effet intervient pour de faibles angles d'incidence mais qu'il était négligeable pour des illuminations simultanées. Le cas de lignes enterrées a enfin été abordé et la possibilité d'application de cette méthode pour ce genre de problèmes a été démontrée.

En troisième partie, la méthode des moments nous a servi à vérifier la validité de l'hypothèse des fils minces. Nous avons vu qu'elle n'est pas toujours justifiée pour des configurations où elle est couramment utilisée. La répartition du courant dépend en effet beaucoup plus de l'angle d'incidence de l'onde que de sa fréquence. Nous montrons finalement que cette méthode numérique peut s'appliquer à des conducteurs plus complexes.

CHAPITRE TROIS

**Calcul des paramètres linéiques de la
théorie des lignes de transmission d'un
faisceau multiconducteur**

INTRODUCTION

Nous désirons appliquer la théorie des lignes de transmission aux différentes configurations rencontrées au cours des deux premiers chapitres.

Succinctement, cette théorie consiste à schématiser la ligne de transmission formée par les conducteurs par des cellules élémentaires représentées par des constantes réparties Z et Y . Cette association de cellules provoque une variation exponentielle du courant se propageant sur la structure.

Lorsque le demi-milieu inférieur est de conductivité élevée, il est considéré comme un conducteur à part entière comme les autres câbles et souvent pris d'ailleurs comme conducteur de référence. Dans ce cas, les paramètres linéiques Z et Y peuvent être associés à des éléments physiques simples tels que l'impédance et la capacité électrostatique.

Si le demi-milieu inférieur est de faible conductivité, de nombreuses difficultés apparaissent quant à l'application de la théorie des lignes. La première est de définir la référence de potentiel, ce point délicat sera exposé dans le chapitre quatre. La seconde difficulté est de trouver une définition des paramètres linéiques qui tiennent compte des pertes dans le sol et c'est ce qui fait l'objet de ce troisième chapitre.

Nous indiquons pour commencer une démarche qui a été introduite par Vance et qui permet de calculer l'impédance et l'admittance présentées par une ligne unique et aérienne située au-dessus du sol.

Ensuite nous présentons une définition plus générale qui peut s'appliquer à des structures plus complexes et qui est obtenue à partir de la théorie des antennes.

Nous comparons enfin cette dernière définition des paramètres linéiques à celle de Vance dans le cas d'une ligne aérienne parfaitement conductrice et placée au-dessus du sol.

I. Paramètres linéiques d'un câble aérien obtenus à partir de ceux du câble coaxial

Les paramètres linéiques d'une ligne coaxiale se définissent aisément en raison de la symétrie de révolution de la structure. Lorsque le conducteur externe est de faible conductivité, on peut encore obtenir des formules relativement simples pour l'impédance et l'admittance. C'est pourquoi, il est tentant d'assimiler la ligne au-dessus d'un demi-milieu plan par la structure coaxiale qui est représentée sur la figure n°16. Cette démarche est celle de Vance [41] et elle est couramment utilisée dans la communauté scientifique.

Il est possible de raffiner ce modèle en introduisant les paramètres d'une ligne coaxiale excentrée. Cette procédure a principalement été développée par King [42] et reprise par la suite par [43]. Nous ne nous intéresserons qu'à la première méthode car les paramètres obtenus s'expriment au travers de fonctions usuelles ce qui entraîne une très grande facilité de mise en oeuvre.

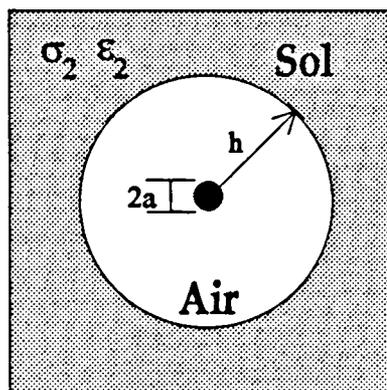


Figure n°16: Ligne coaxiale centrée

I.1. Impédance et admittance d'une ligne coaxiale

Dans le cas de la ligne coaxiale centrée, les paramètres linéiques qui prennent en compte un conducteur externe de faible conductivité se trouvent dans [41]. L'impédance linéique se compose de trois termes. Le premier correspond à la self L associée au champ magnétique. L'impédance correspondante est donnée par

$$Z = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) \approx \frac{j\omega\mu}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{2h}{a}\right) \quad (\text{III-1})$$

Le second terme est l'impédance interne du sol. Ce terme se calcule par

$$Z_s = \frac{-j\gamma_2 H_0^{(1)}(j\gamma_2 2h)}{4\pi h \sigma_2 H_1^{(1)}(j\gamma_2 2h)} \quad (\text{III-2})$$

Les fonctions $H_0^{(1)}$ et $H_1^{(1)}$ sont les fonctions de Hankel de première espèce d'ordre zéro et d'ordre 1. Sous couvert de certaines conditions, l'impédance interne peut se simplifier considérablement. En effet si la profondeur de pénétration $\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma_2}$ dans le sol est petite devant $2h$ tout en gardant $\sigma_2 \gg \omega \epsilon_2$, elle peut être approximée par

$$Z_s \approx \frac{1+j}{4\pi h \sigma_2 \delta} \quad (\text{III-3})$$

Si maintenant la profondeur de pénétration est largement supérieure à $2h$, elle se réduit à

$$Z_s = \frac{\omega \mu}{8} + j\omega \frac{\mu}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\gamma_0 h}\right) \quad (\text{III-4})$$

Cette dernière simplification représente l'approximation basses fréquences de l'impédance interne du sol. Elle est souvent utilisée à la place de (III-2).

Le dernier terme constituant l'impédance linéique est l'impédance interne du conducteur aérien qui permet de tenir compte des pertes dues à une conductivité finie du matériau.

$$Z_i = \frac{\gamma_f}{2\pi a \sigma_f} \frac{I_0(\gamma_f a)}{I_1(\gamma_f a)} \quad (\text{III-5})$$

où σ_f est la conductivité du conducteur et $\gamma_f = \sqrt{j\omega \mu \sigma_f}$. Dans le cas de lignes d'énergie ou de télécommunication, les pertes dues au sol dominent la réponse en courant. L'impédance interne du conducteur aérien est donc souvent négligée.

L'admittance se compose de la capacité linéique C qui se calcule par

$$Y_s = j\omega \frac{2\pi \epsilon_0}{\cosh^{-1}(h/a)} \approx j\omega \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Ln}(2h/a)} \quad (\text{III-6})$$

L'admittance du sol est approximée par

$$Y_s = \frac{\gamma_2^2}{Z_s} \quad (\text{III-7})$$

Dans la majorité des articles, cette admittance est aussi négligée. Les pertes du sol sont alors uniquement traduites par l'impédance linéique. Ce principe se retrouve aussi lorsque la ligne aérienne est assimilée à une ligne coaxiale excentrée [43].

Nous avons représenté sur la planche n°12 l'impédance interne du sol Z_g où nous l'avons décomposée sous la forme $Z_g=R_g+j\omega L_g$. Nous comparons les résultats calculés à partir de la formule (III-2) (courbe en trait continu) avec ceux calculés par les approximations (III-3) et (III-4) en fonction de la fréquence. La configuration de la ligne est un câble aérien à 1 m de hauteur avec un sol caractérisé par une conductivité de 10^{-2} S/m et une permittivité relative de 10.

Une bonne concordance entre le développement limité qui correspond à la formule (III-4) et la formule complète est visible jusqu'à une fréquence de l'ordre de 1 MHz. En revanche, le résultat obtenu avec la relation (III-3) ne converge pas sur toute la bande de fréquence envisagée. Ceci s'explique par le fait que la première condition d'application de cette relation, c'est à dire $\delta \gg 2h$ implique que la fréquence soit supérieure à 100 MHz alors que la seconde condition $\sigma_2 \gg \omega \epsilon_2$ nécessite une fréquence inférieure à 18 MHz. Nous soulignons ici le domaine très restreint de cette approximation.

Le calcul numérique de la formule complète (III-2) n'exige pas un temps calcul exorbitant. Au vue de cette dernière remarque, nous préconisons l'emploi systématique de la formule (III-2) pour l'évaluation de l'impédance interne du sol par les expressions de Vance.

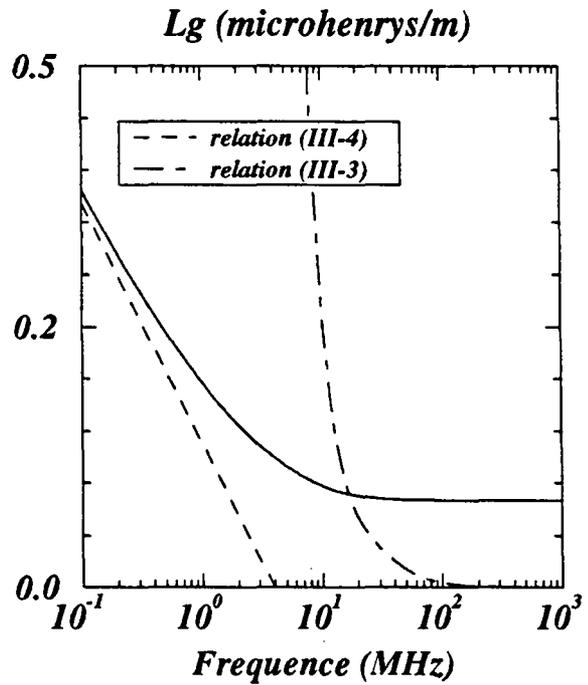
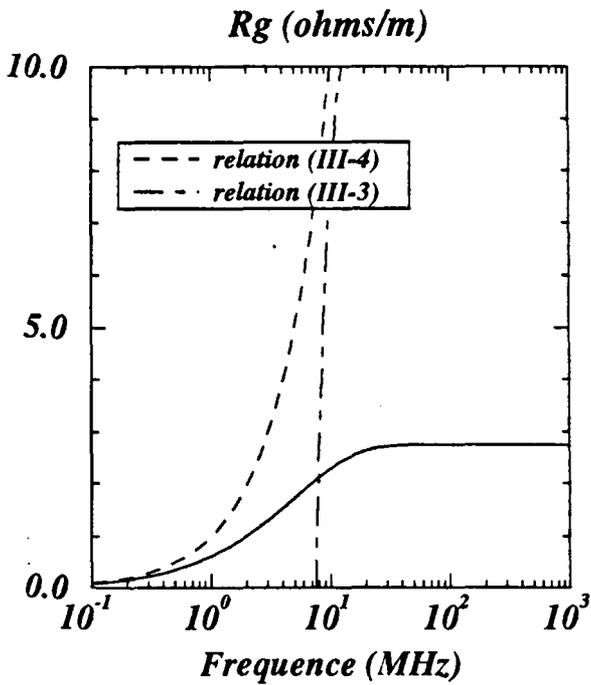
I.2. Paramètres secondaires de la ligne

Les paramètres secondaires de la ligne sont constitués par la constante de propagation γ_p et l'impédance caractéristique Z_c . On peut les calculer à partir des paramètres primaires mais Vance en donne des formules approchées ce qui permet une analyse directe. Nous les indiquons ci-dessous

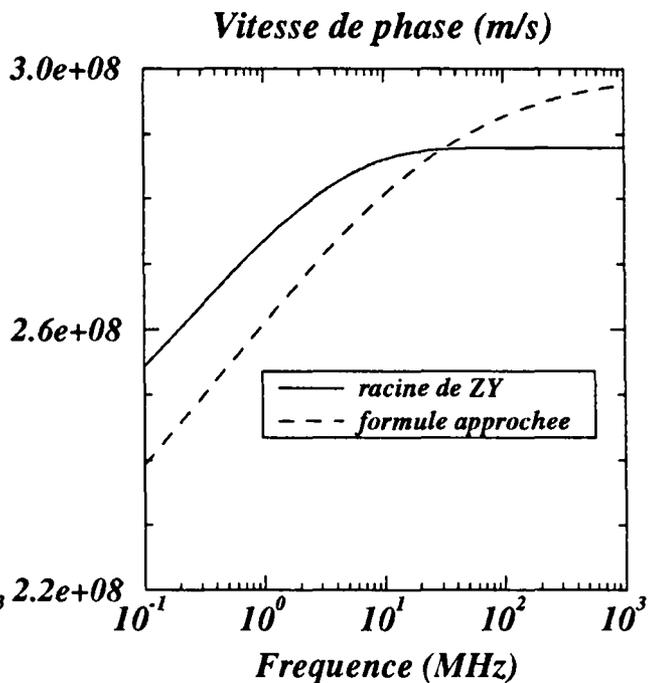
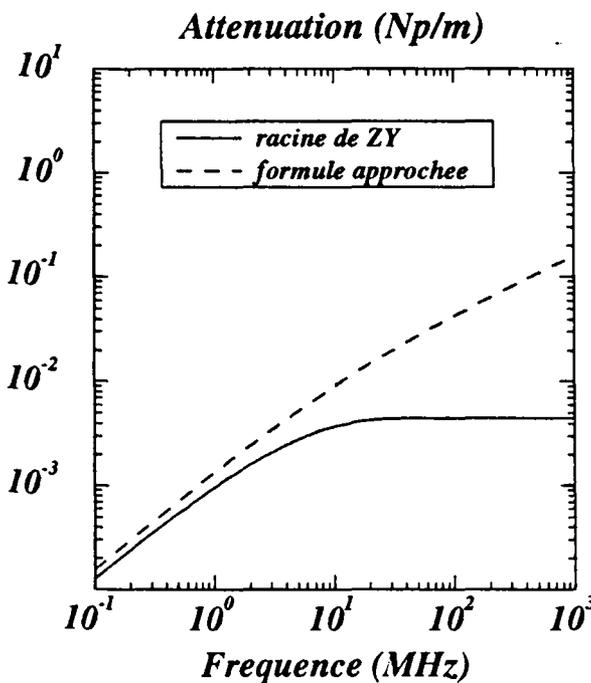
$$\gamma_p \approx j\omega\sqrt{LC} \left\{ 1 + \frac{1}{2\text{Ln}\left(\frac{2h}{a}\right)} \left[\text{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{j\omega\tau_h}}{\sqrt{j\omega\tau_h}}\right) + \frac{1}{\sqrt{j\omega\tau_s}} \right] \right\} \quad (\text{III-8})$$

$$Z_c \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left\{ 1 + \frac{1}{2\text{Ln}\left(\frac{2h}{a}\right)} \left[\text{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{j\omega\tau_h}}{\sqrt{j\omega\tau_h}}\right) + \frac{1}{\sqrt{j\omega\tau_s}} \right] \right\} \quad (\text{III-9})$$

Impedance Interne du sol



Constante de propagation



avec $\tau_h = \mu\sigma_2 h^2$, $\tau_a = \mu\sigma_0 a^2$, $\sqrt{LC} = 1/c$ et $\sqrt{L/C} = 60\text{Ln}(2h/a)$. Si le matériau constituant le câble est parfaitement conducteur ainsi que le sol alors nous retrouvons les formules classiques de l'impédance caractéristique $Z_0 = 60\text{Ln}(2h/a)$ et de la constante de propagation $\gamma_p = j\omega / c$.

Toujours sur la planche n°12, l'atténuation et la vitesse de phase constituant la constante de propagation sont calculées à partir de l'expression (III-8) (courbe en tirés) et à partir de \sqrt{ZY} où l'admittance ne comprend que le terme capacitif de la ligne (trait continu).

En basses fréquences, les deux approches prédisent la même atténuation jusque 10 MHz tandis que la vitesse de phase obtenue par l'expression (III-8) est légèrement moindre. Au-delà de 10 MHz, l'atténuation calculée directement par les paramètres linéiques reste constante alors que celle donnée par la formule approchée augmente quasiment linéairement en fonction de la fréquence. Une conclusion identique peut être énoncée pour la vitesse de phase.

II. Définition des paramètres linéiques à partir de la théorie des antennes

Nous allons montrer qu'il est possible de définir la notion d'impédance et d'admittance à partir de la théorie des antennes. Nous allons suivre une démarche similaire à celle du chapitre Un mais en supposant que le courant se propageant sur le câble ne comporte qu'un seul mode guidé. Cette dernière hypothèse est la condition intrinsèque de la théorie des lignes de transmission.

Ce procédé a pour base de départ un article de Wait [5] et a fait l'objet de très nombreuses études par la suite [19].

II.1. Ligne conductrice en présence d'une interface

II.1.1. Ligne de longueur infinie isolée dans un espace homogène

Considérons tout d'abord un fil conducteur de longueur infinie isolé dans un espace homogène (figure n°17) sur lequel nous supposons que le courant longitudinal se propage sous la forme

$$I(z) = I_m e^{-\Gamma z + j\omega t} \quad (\text{III-10})$$

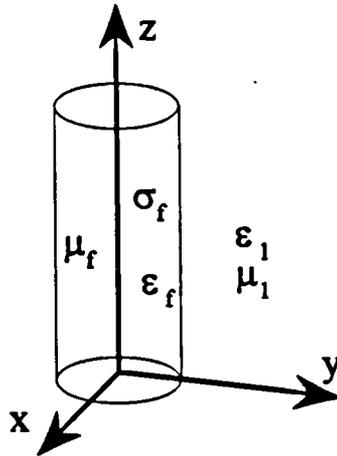


Figure n°17: Ligne de longueur infinie isolée dans un espace homogène

Les champs magnétique et électrique s'expriment en fonction du potentiel de Hertz par la relation (I-1) que nous rappelons ci-dessous

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{rot rot } \vec{\Pi} \\ \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\text{rot } \vec{\Pi} \end{cases} \quad (\text{I-1})$$

Nous devons résoudre l'équation d'onde $\Delta\Pi - \gamma_i^2\Pi = 0$ dans les deux milieux, avec $\gamma_i^2 = j\omega\mu_i(\sigma_i + j\omega\epsilon_i)$. En raison de la symétrie de révolution autour de l'axe Oz, l'onde est TM soit $H_z = 0$ et le potentiel-vecteur de Hertz Π est donc orienté selon Oz dans la direction de propagation. Nous voulons avoir $\Pi = \Pi_{0m} e^{-\Gamma z + j\omega t}$, l'équation d'onde en coordonnées cylindriques devient:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_{0m}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{0m}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi_{0m}}{\partial r^2} - (\gamma_i^2 - \Gamma^2) \Pi_{0m} = 0 \quad (\text{III-11})$$

Si nous supposons que le potentiel-vecteur est une solution à variables séparées de l'équation (III-10) de la forme $\Pi_{0m} = f(\theta)g(r)$, nous obtenons un système de deux équations différentielles distinctes. Nous ne nous intéressons qu'à l'onde principale et aux solutions physiquement acceptables (les potentiels sont nuls à l'infini), le potentiel-vecteur de Hertz s'exprime dans l'air par

$$\Pi_1 = B_0 K_0(\gamma_1 \xi_1 r) e^{-\Gamma z + j\omega t} \quad (\text{III-12})$$

et dans le fil :

$$\Pi_f = A_0 I_0(\gamma_f \xi_f r) e^{-\Gamma z + j\omega t} \quad (\text{III-13})$$

avec $\xi_1 = \sqrt{1 - \Gamma^2 / \gamma_1^2}$ et $\xi_r = \sqrt{1 - \Gamma^2 / \gamma_r^2}$. I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et K_0 est la fonction de Kelvin d'ordre zéro. Faisons intervenir la source du champ électromagnétique dans le terme A_0 . Soit j_z la densité de courant électrique à l'intérieur du conducteur, nous avons :

$$j_z = \sigma_r E_z = -\gamma_r^2 \xi_r^2 \sigma_r \Pi_r \quad (\text{III-14})$$

Or le courant total s'exprime par

$$I_m = \int_0^{2\pi} \int_0^a j_z r dr d\theta = 2\pi \int_0^a j_z r dr \quad (\text{III-15})$$

En remplaçant j_z par son expression, nous obtenons l'inconnue A_0 et nous pouvons en déduire la composante longitudinale du champ électrique à l'intérieur de la ligne. On peut introduire l'impédance superficielle du fil Z_f associée à la constante de propagation Γ sur ce fil par la relation suivante

$$Z_f = \frac{\gamma_r \xi_r I_0(\gamma_r \xi_r a)}{2\pi a \sigma_r I_1(\gamma_r \xi_r a)} \quad (\text{III-16})$$

On vérifie facilement que si la conductivité du fil tend vers l'infini, ξ_r tend vers l'unité et Z_f prend la valeur de Z_i de Vance définie par la relation (III-5). La composante longitudinale du champ électrique à la surface du conducteur s'exprime par

$$[E_z^f]_{r=a} = Z_f I_m \quad (\text{III-17})$$

Dans le cas où $|\gamma_r \xi_r a| \gg 1$, elle peut se simplifier et se mettre sous la forme suivante

$$Z_f \approx \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma_r}} \quad (\text{III-18})$$

Pour connaître la composante longitudinale dans l'air due au courant se propageant dans la ligne, il est nécessaire de connaître l'inconnue B_0 . Dans ce but, nous pouvons dire que la composante tangentielle H_θ se conserve à la traversée de la surface de séparation du fil, soit :

$$H_{\theta_1} = H_{\theta_r} \Rightarrow \left[(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} = \sigma_r \frac{\partial \Pi_r}{\partial r} \right]_{r=a} \quad (\text{III-19})$$

Finalement, nous trouvons pour le potentiel vecteur de Hertz dans l'air :

$$\Pi_1 = \frac{j\omega\mu I_m}{2\pi\gamma_1^2} K_0(\gamma_1 \xi_1 r) e^{-\Gamma z + j\omega t} \quad (\text{III-20})$$

De plus, la présence d'un interface plan situé en $x=0$ nous oblige à exprimer la fonction de Bessel K_0 sous sa forme intégrale afin de faciliter le passage en coordonnées cartésiennes. Par conséquent

$$\Pi_{p1} = \frac{j\omega\mu I_{0m}}{4\pi\gamma_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x-h)u_1}}{u_1} e^{j\lambda y} d\lambda e^{-\Gamma z + j\omega t} \quad \text{avec } u_1 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_1^2 - \Gamma^2} \quad (\text{III-21})$$

II.1.2. Influence de l'interface séparant deux demi-milieux

Nous introduisons un sol réel à l'interface $x=0$ selon la figure n°18.

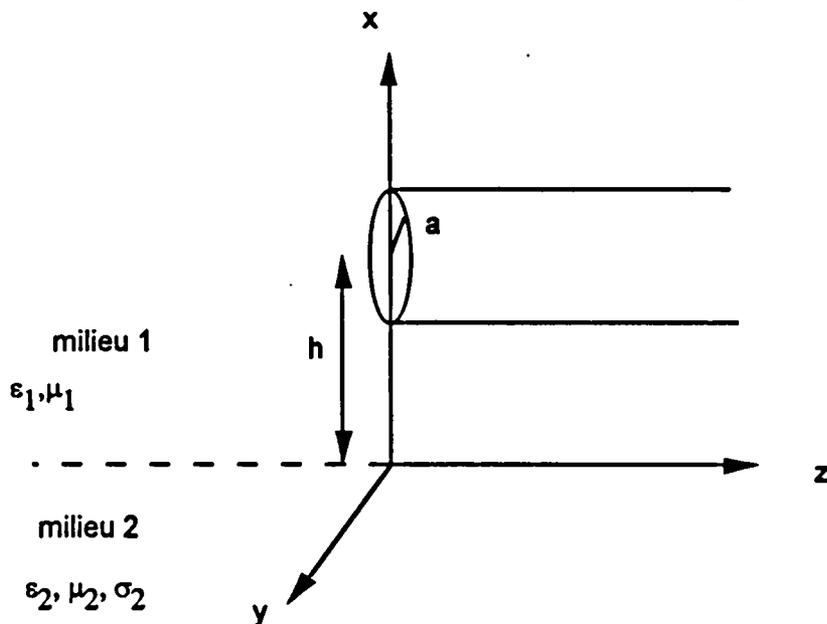


Figure n°18: Présence d'un interface en $x=0$

Nous n'avons pas de symétrie de révolution cylindrique, l'onde ne peut donc pas être uniquement TM. Il existe un couplage entre les ondes TE et TM, ce qui oblige à introduire un potentiel vecteur de Hertz magnétique orienté également selon Oz noté Π^* . Ainsi Π décrit un mode TM et Π^* un mode TE. Les champs s'expriment par :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Rot Rot}(\Pi.z) - j\omega\mu \text{Rot}(\Pi^*.z) \\ \vec{H} &= (\sigma + j\omega\epsilon) \text{Rot}(\Pi.z) + \text{Rot Rot}(\Pi^*.z) \end{aligned} \quad (\text{III-22})$$

Nous décomposons ces potentiels vecteurs de la manière suivante :

$$\text{- air : } \Pi_1 = \Pi_{p1} + \Pi_{s1}$$

$$\Pi_1^* = \Pi_{s1}^*$$

$$\text{- sol : } \Pi_2 = \Pi_{s2}$$

$$\Pi_2^* = \Pi_{s2}^*$$

où Π_p est le potentiel primaire créé par les sources électriques et Π_s le potentiel secondaire dû à la présence de l'interface. Dans le sol, le potentiel est secondaire car il n'existe aucune source. De plus, le potentiel vecteur de Hertz dans l'air Π_1 lorsque le fil est isolé dans l'espace est égal au potentiel vecteur primaire lorsque le conducteur est en présence de l'interface air-sol. Les potentiels secondaires peuvent être calculés à partir de Π_{p1} . Nous désirons les avoir sous la forme suivante dans l'air :

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{s1} &= \frac{j\omega\mu I_m}{4\pi\gamma_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) \frac{e^{-(x+h)u_1}}{u_1} e^{j\lambda y} d\lambda \\ \Pi_{s1}^* &= \frac{j\omega\mu I_m}{4\pi\gamma_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\lambda) \frac{e^{-(x+h)u_1}}{u_1} e^{j\lambda y} d\lambda \end{aligned} \right\} e^{-\Gamma z} \quad (\text{III-23})$$

dans le sol :

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{s2} &= \frac{j\omega\mu I_m}{4\pi\gamma_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\lambda) \frac{e^{-hu_1} e^{xu_2}}{u_1} e^{j\lambda y} d\lambda \\ \Pi_{s2}^* &= \frac{j\omega\mu I_m}{4\pi\gamma_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\lambda) \frac{e^{-hu_1} e^{xu_2}}{u_1} e^{j\lambda y} d\lambda \end{aligned} \right\} e^{-\Gamma z} \quad (\text{III-24})$$

avec $u_2^2 = \lambda^2 + \gamma_2^2 - \Gamma^2$. $R(\lambda)$ est le coefficient de réflexion en mode TM à la surface du sol et $M(\lambda)$ celui en mode TE. $T(\lambda)$ est le coefficient de transmission en mode TM à la surface du sol et $N(\lambda)$ celui en mode TE. Ces coefficients se déterminent en appliquant les conditions aux limites à la surface de séparation des deux demi-milieux ($x=0$). Or nous désirons connaître uniquement E_{z1} , donc seul $R(\lambda)$ est à calculer. Les conditions aux limites nous donnent un système de quatre équations à quatre inconnues ($R(\lambda)$, $M(\lambda)$, $T(\lambda)$, $N(\lambda)$) et en résolvant ce système, nous trouvons [5] [19]

$$R(\lambda) = -1 - \frac{2\gamma_1^2 u_1}{\gamma_1^2 \epsilon_1^2} \left[\frac{-1}{u_1 + u_2} + \frac{\Gamma^2}{u_1 \gamma_2^2 + u_2 \gamma_1^2} \right] \quad (\text{III-25})$$

La détermination de $R(\lambda)$ nous donne directement l'expression de Π_{s1} donc de Π_1 . Par conséquent, la composante longitudinale du champ électrique produit par le courant sur le conducteur est donné par

$$E_z = -\frac{j\omega\mu I_m}{2\pi} \xi_1^2 [K_0(\gamma_1 \xi_1 r') - K_0(\gamma_1 \xi_1 r'')] - \frac{j\omega\mu I_m}{2\pi} \Gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x+h)u_1}}{u_1 \gamma_2^2 + \gamma_1^2 u_2} e^{j\lambda y} d\lambda + \frac{j\omega\mu I_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x+h)u_1}}{u_1 + u_2} e^{j\lambda y} d\lambda \quad (\text{III-26})$$

avec $r' = \sqrt{(x-h)^2 + y^2}$ et $r'' = \sqrt{(x+h)^2 + y^2}$.

Nous retrouvons le fait que le champ produit par une ligne infinie située au-dessus du sol se compose de la somme du champ rayonné par cette même ligne isolée dans l'espace et du champ engendré par une ligne image située de manière symétrique par rapport à l'interface, le tout pondéré par deux autres termes intégraux qui traduisent la nature physique du demi-milieu inférieur.

En remarque, si nous tenons compte désormais non plus d'un seul mode guidé mais d'une infinité de modes caractérisés par une constante de propagation normalisée par rapport à celle d'une onde dans le vide, nous pouvons montrer en transformant les fonctions de Kelvin en fonctions de Hankel que l'on retrouve la formule (I-30) du chapitre Un exprimée dans l'espace (x, y, η) .

II.1.3. Concept d'impédance et d'admittance

Le concept d'impédances et d'admittances représentatives de la ligne se définit en appliquant les conditions de continuité du champ électrique à la surface du conducteur. En $x=h$ et $y=a$, la composante E_z se met sous la forme suivante

$$[E_z]_{x=h, y=a} = \left\{ -Z(\Gamma) + \frac{\Gamma^2}{Y(\Gamma)} \right\} I_m e^{-\Gamma z} \quad (\text{III-27})$$

où nous avons posé

$$Z(\Gamma) = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \left[K_0(\gamma_1 \xi_1 r') - K_0(\gamma_1 \xi_1 r'') + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2hu_1} e^{j\lambda a}}{u_1 + u_2} d\lambda \right]$$

$$Y(\Gamma) = 2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left[K_0(\gamma_1 \xi_1 r') - K_0(\gamma_1 \xi_1 r'') + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_1^2 e^{-2hu_1} e^{j\lambda a}}{u_1 \gamma_2^2 + \gamma_1^2 u_2} d\lambda \right]^{-1} \quad (\text{III-28})$$

où $r' = a$ et $r'' = \sqrt{4h^2 + a^2} \approx 2h$. Z et Y s'apparentent donc respectivement à une impédance et une admittance linéique de la structure constituée par le conducteur

immergé dans le demi-milieu supérieur (indice 1) et parallèle à la surface du demi-milieu inférieur (indice 2).

Toutefois nous pouvons observer une différence primordiale entre les paramètres linéiques que nous venons de donner avec ceux de Vance. En effet, ces paramètres linéiques dépendent de la constante de propagation Γ du courant alors que ceux de Vance ne sont liés qu'à la géométrie de la ligne.

A ce stade, de nombreux auteurs [19] introduisent une approximation qui permet de trouver des paramètres explicites. Il s'agit de l'approximation quasi-TEM qui consiste à calculer les paramètres Z et Y en assimilant Γ à la constante de propagation γ_1 du demi-milieu supérieur. Ce procédé de perturbation est une correction du premier ordre [44] au mode initialement trouvé par Carson [24] en basses fréquences dès 1926. En remplaçant la fonction de Kelvin par son développement limité, nous trouvons les paramètres linéiques de l'approximation quasi-TEM:

$$Z(\gamma_1) = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \left[\text{Ln}\left(\frac{2h}{a}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2h|\lambda|} e^{j\lambda a}}{|\lambda| + \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2 - \gamma_1^2}} e^{j\lambda a} d\lambda \right]$$

$$Y(\gamma_1) = 2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left[\text{Ln}\left(\frac{2h}{a}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2h|\lambda|} e^{j\lambda a}}{\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} |\lambda| + \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2 - \gamma_1^2}} d\lambda \right]^{-1} \quad (\text{III-29})$$

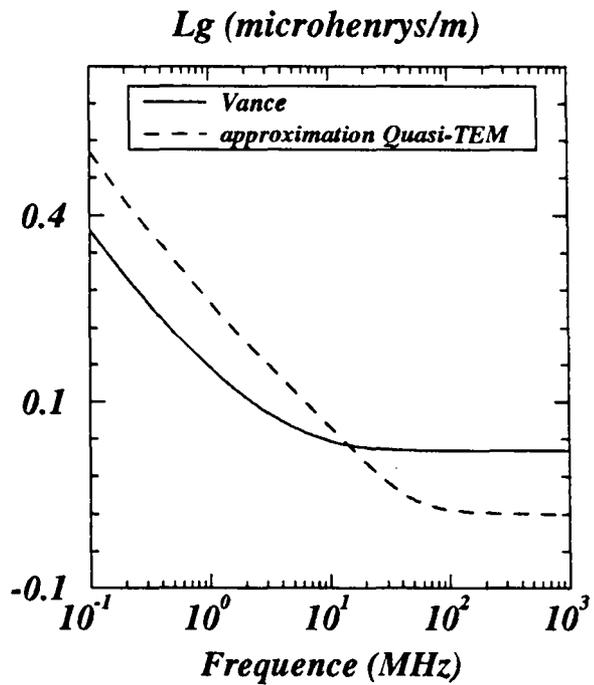
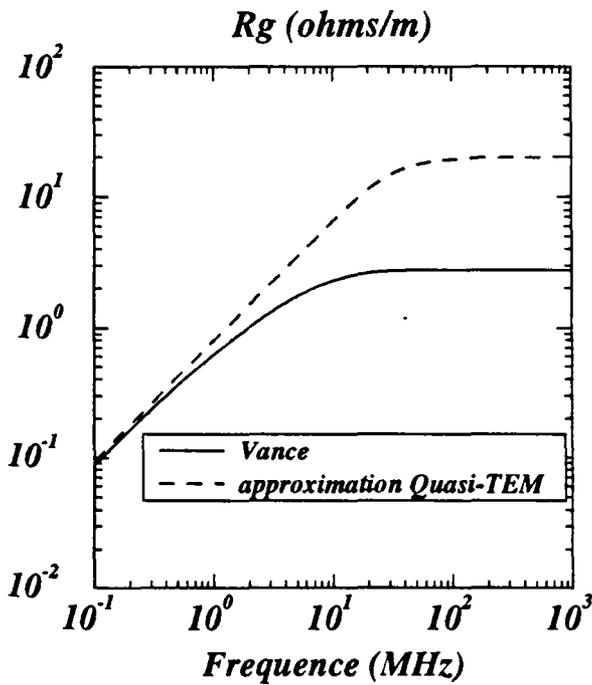
Nous nous apercevons que l'impédance linéique se compose de deux termes. Nous retrouvons le terme selfique lié au champ magnétique que nous avons rencontré dans les formules de Vance. Le second traduit les pertes dues au demi-milieu inférieur. L'impédance interne du sol est représentée ici par une forme intégrale.

De la même façon, nous retrouvons le terme capacitif pour l'admittance qui est identique à celui de Vance et une admittance interne du sol encore sous forme intégrale.

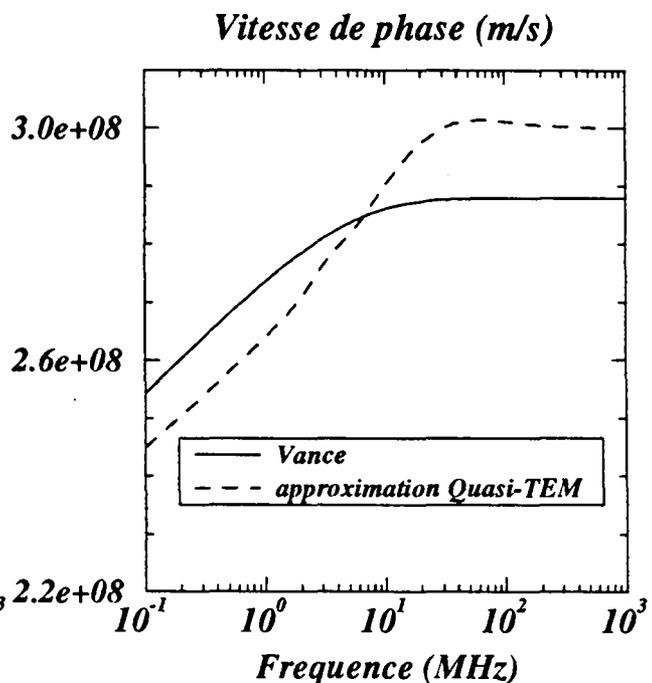
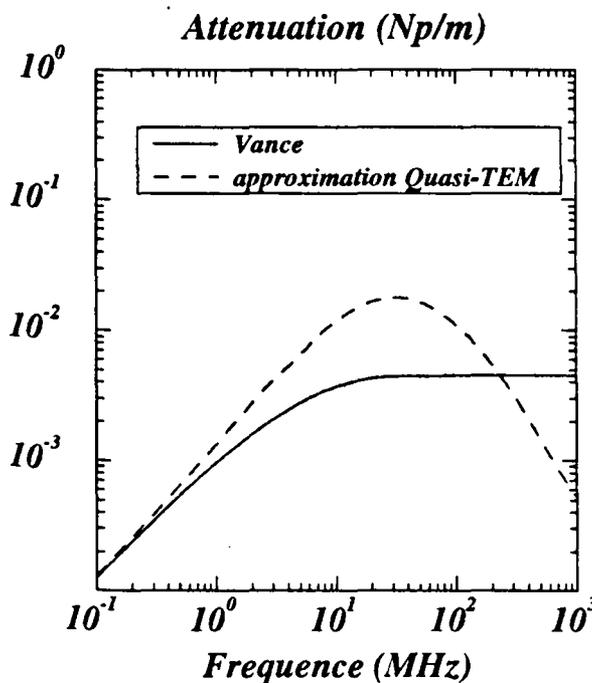
Nous pouvons comparer directement les deux formulations de l'impédance interne du sol. Cette comparaison porte sur la configuration d'un câble aérien situé à 1 m du sol caractérisé par une conductivité de 10^{-2} S/m et une permittivité relative de 10. Les résultats se trouvent sur la planche n°13.

Nous remarquons que la résistance R_g calculée par les expressions de Vance est sous-estimée en hautes fréquences par rapport à l'approximation quasi-TEM.

Impedance Interne du sol



Constante de propagation



Les valeurs de la self L_g sont différentes selon le formalisme employé. En basses fréquences, les formules de Vance ont tendance à la sous-estimer et à la surestimer dans la bande supérieure de fréquences.

Nous comparons toujours sur la planche n°13 -figures du bas- la constante de propagation selon (III-30) calculée avec les deux définitions des paramètres en fonction de la fréquence pour la même configuration de ligne.

$$\gamma_p = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta \quad (\text{III-30})$$

Si en basses fréquences les deux méthodes convergent vers la même solution, un écart très important apparaît en hautes fréquences. En effet, nous pouvons nous apercevoir que l'approximation quasi-TEM donne une atténuation qui diminue à partir de 30 MHz pour une vitesse de phase égale à celle d'une onde dans l'air. Les expressions de Vance ne traduisent pas un tel phénomène.

En remarque, si nous comparons maintenant l'atténuation calculée par l'approximation quasi-TEM de la planche n°13 à celle obtenue par la formule (III-8) sur la planche n°12, l'écart est faible jusque 30 MHz environ. Il est donc préférable d'utiliser cette dernière expression plutôt que celle calculée par la racine du produit ZY de Vance. Nous préconisons pour notre part de calculer l'admittance linéique de la ligne par $Y = \gamma_p^2 / Z$ où γ_p est obtenue par (III-8).

De plus, les paramètres linéiques Z et Y dépendent dans les formules (III-28) de la constante de propagation du courant sur le fil qui sont elles-mêmes fonction de l'excitation de la structure. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes limités dans ce chapitre aux approximations de Vance et quasi-TEM qui supposent que cette constante est indépendante de l'excitation.

II.2. Prise en compte d'une gaine diélectrique

II.2.1. Champ électrique rayonné par un conducteur entouré d'une gaine diélectrique et situé au-dessus du sol

Nous avons vu que le potentiel primaire se calcule à partir de la ligne isolée dans un espace homogène et les potentiels secondaires s'en déduisent en appliquant les conditions de continuité au niveau de l'interface. Lorsque la ligne n'est pas recouverte d'une gaine diélectrique, nous avons trouvé un potentiel primaire qui s'exprime par :

$$\Pi_1 = \frac{j\omega\mu I_m}{2\pi\gamma_1^2} K_0(\gamma_1 \xi_1 r) e^{-\Gamma z + j\omega t} \quad (\text{III-20})$$

Dans le cas d'une ligne recouverte d'une couche de matériau diélectrique, le potentiel vecteur de Hertz primaire peut s'écrire sous la forme de l'expression (III-31) en supposant que $|\gamma_1 \xi_1 b| \ll 1$, ce qui revient à considérer le diamètre externe de la gaine petit devant la longueur d'onde.

$$\Pi_1 = \frac{j\omega\mu I_m}{2\pi\gamma_1^2} \frac{b}{a} \left[\frac{J_0(j\gamma_d \xi_d a) Y_1(j\gamma_d \xi_d b) - J_1(j\gamma_d \xi_d b) Y_0(j\gamma_d \xi_d a)}{J_0(j\gamma_d \xi_d a) Y_1(j\gamma_d \xi_d a) - J_1(j\gamma_d \xi_d a) Y_0(j\gamma_d \xi_d a)} \right] K_0(\gamma_1 \xi_1 r) e^{-\Gamma z + j\omega t} \quad (\text{III-31})$$

où $\gamma_d = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_d}$, $\xi_d = \sqrt{1 - \Gamma^2/\gamma_d^2}$. L'équation (III-31) est obtenue à partir du chapitre Un où nous avons calculé l'impédance de surface due à la présence de la gaine diélectrique en ne prenant en compte qu'un seul mode guidé caractérisé par Γ . En posant

$$\tau = \frac{b}{a} \left[\frac{J_0(j\gamma_d \xi_d a) Y_1(j\gamma_d \xi_d b) - J_1(j\gamma_d \xi_d b) Y_0(j\gamma_d \xi_d a)}{J_0(j\gamma_d \xi_d a) Y_1(j\gamma_d \xi_d a) - J_1(j\gamma_d \xi_d a) Y_0(j\gamma_d \xi_d a)} \right] \quad (\text{III-32})$$

qui ne dépend que des paramètres physiques et géométriques de la gaine, nous retrouvons une formule analogue à (III-20). Les calculs exposés précédemment et qui permettaient de trouver la composante longitudinale du champ électrique produit par un courant $I = I_m e^{-\Gamma z + j\omega t}$ restent inchangés. En effet, le coefficient de réflexion $R(\lambda)$ ne change pas.

Connaissant alors le potentiel vecteur secondaire dans l'air, donc le potentiel vecteur total Π_1 , nous en déduisons directement la composante longitudinale du champ électrique dû à un courant circulant sur une ligne recouverte de diélectrique et située au-dessus d'un sol :

$$E_z = -\frac{j\omega\mu I_m}{2\pi} \tau \xi_1^2 \left[K_0(\gamma_1 \xi_1 r') - K_0(\gamma_1 \xi_1 r'') \right] - \frac{j\omega\mu I_m}{2\pi} \tau \Gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x+h)u_1}}{u_1 \gamma_2^2 + \gamma_1^2 u_2} e^{j\lambda y} d\lambda + \frac{j\omega\mu I_m}{2\pi} \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(x+h)u_1}}{u_1 + u_2} e^{j\lambda y} d\lambda \quad (\text{III-33})$$

avec la définition (III-32) de τ . En raison de l'isolation du conducteur par une couche diélectrique, la définition des paramètres linéiques et plus particulièrement de l'admittance ne peut plus se faire aussi aisément qu'auparavant.

II.2.2. Recherche de la notion d'impédance et d'admittance

Nous suivons maintenant une démarche extraite de [45] qui permet de rétablir la notion d'impédance d'admittance de la ligne. Nous définissons un potentiel vecteur \bar{A} et un potentiel scalaire ϕ par [1]:

$$\bar{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} = j\omega\mu\epsilon\bar{\Pi} \quad (\text{III-34})$$

$$\phi = -\text{div}(\bar{\Pi}) \quad (\text{III-35})$$

Nous avons alors d'après les équations de Maxwell:

$$\vec{E} = -j\omega\bar{A} - \text{grad}(\phi) \quad (\text{III-36})$$

En appliquant les conditions de continuité en champ électrique à la surface du conducteur en $r=a$, nous avons

$$-j\omega A_z - \text{grad}(\phi_c) = E_{zr} \quad (\text{III-37})$$

où E_{zr} est donné par l'équation (III-17) et les potentiels vecteurs et scalaires A_z et ϕ_c sont déterminés à la surface du conducteur. Nous définissons alors :

$$Z_d = \frac{j\omega A_z}{I} \quad (\text{III-38})$$

$$Y_d = -\frac{1}{\phi_c} \frac{\partial I}{\partial z} = \frac{-\Gamma^2 I}{\text{grad}(\phi_c)} = \frac{-\Gamma^2 I}{\text{grad}(\phi_1) - \text{grad}(\phi_d)} \quad (\text{III-39})$$

Or d'après [45], le potentiel scalaire à la surface du conducteur ($r=a$) lorsque la ligne est recouverte par une gaine est égal au potentiel scalaire noté ϕ_1 sur le conducteur lorsque le conducteur n'est pas isolé moins le potentiel scalaire noté ϕ_d dans le diélectrique et calculé en $r=b$.

Si nous supposons que la composante E_{zd} du champ électrique ne dérive que du potentiel scalaire, nous avons :

$$\begin{aligned} E_{z_d}(z, b) &= \frac{-\gamma_d \xi_d}{\omega \epsilon_d} \frac{I}{2\pi a} \left[\frac{J_0(j\gamma_d \xi_d b) Y_0(j\gamma_d \xi_d a) - J_0(j\gamma_d \xi_d a) Y_0(j\gamma_d \xi_d b)}{J_0(j\gamma_d \xi_d a) Y_1(j\gamma_d \xi_d a) - J_1(j\gamma_d \xi_d a) Y_0(j\gamma_d \xi_d a)} \right] \\ &= -\text{grad}(\phi_d) \end{aligned} \quad (\text{III-40})$$

Les paramètres sont donnés finalement par les formules ci-dessous :

$$Z_d(\Gamma) = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \left[K_0(\gamma_1 \xi_1 r') - K_0(\gamma_1 \xi_1 r'') + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2hu_1}}{u_1 + u_2} e^{j\lambda a} d\lambda \right] \quad (\text{III-41})$$

$$Y_d(\Gamma) = \frac{2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}{\tau} \left[K_0(\gamma_1 \xi_1 r') - K_0(\gamma_1 \xi_1 r'') + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_1^2 e^{-2hu_1}}{u_1 \gamma_2^2 + \gamma_1^2 u_2} e^{j\lambda a} d\lambda + \left(\frac{\gamma_1}{\Gamma} \right)^2 \frac{\xi_d^2 \pi}{2\tau} (Y_0(j\gamma_d \xi_d a) J_0(j\gamma_d \xi_d b) - J_0(j\gamma_d \xi_d a) Y_0(j\gamma_d \xi_d b)) \right]^{-1} \quad (\text{III-42})$$

Z_d et Y_d dépendent de la constante de propagation Γ du courant qui circule dans le fil. Dans le cas où la permittivité relative du diélectrique constituant la gaine équivaut à celle du demi-milieu 1 ou si l'épaisseur de la gaine est nulle, nous retrouvons les expressions de (III-28).

Nous pouvons de nouveau calculer ces paramètres linéiques dans le cadre de l'approximation quasi-TEM afin de pouvoir analyser directement l'effet de la gaine. Les fonctions de Kelvin sont remplacées par leur développement limité dans le calcul de $Z_d(\gamma_1)$ et $Y_d(\gamma_1)$ pour donner

$$Z_d(\gamma_1) = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \left[\text{Ln}\left(\frac{2h}{a}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2h|\lambda|} e^{j\lambda a}}{|\lambda| + \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2 - \gamma_1^2}} d\lambda \right] \quad (\text{III-43})$$

$$Y_d(\gamma_1) = \frac{2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}{\tau} \left[\text{Ln}\left(\frac{2h}{b}\right) + \int_{-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}^{+\infty} \frac{e^{-2h|\lambda|} e^{j\lambda a}}{|\lambda| + \sqrt{\lambda^2 + \gamma_2^2 - \gamma_1^2}} d\lambda + \frac{1}{\epsilon_r} \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) \right]^{-1} \quad (\text{III-44})$$

Nous pouvons aussi simplifier le facteur τ en remplaçant les fonctions de Bessel par leur développement limité. Nous pouvons alors remarquer à partir de l'équation (III-45) que pour une épaisseur de la gaine faible devant la longueur d'onde, on peut remplacer τ par l'unité. Par exemple si on se place à 100 MHz avec un rayon interne $a=1,5$ cm et externe $b=2$ cm, en prenant une permittivité relative de la gaine égale à 10, on trouve $\tau=1,0086+j0,01$. Sous cette hypothèse, il apparaît que l'expression (III-43) de l'impédance linéique ne comporte aucun paramètre relatif à la gaine. L'impédance garde donc la même expression que dans le cas du conducteur nu.

En revanche, l'admittance est fortement influencée par la présence de la gaine. En effet, le terme capacitif se compose premièrement de la capacité présentée par la surface externe de la gaine et la surface de séparation des deux demi-milieux et deuxièmement d'une capacité présentée par la surface du conducteur et la surface externe de la gaine.

$$\tau = \frac{2 - \gamma_d^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r_d}}\right) b^2 \operatorname{Ln} \left[0,89 j \gamma_d \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r_d}}\right) a} \right]}{2 - \gamma_d^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r_d}}\right) a^2 \operatorname{Ln} \left[0,89 j \gamma_d \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r_d}}\right) a} \right]} \quad (\text{III-45})$$

Nous avons représenté sur la planche n°14 la variation de l'admittance linéique calculée dans le cadre de l'approximation quasi-TEM en fonction de l'épaisseur de la gaine diélectrique. Nous avons décomposé cette admittance en un terme de conductance G_d et un terme capacitif C_d sous la forme $Y_d = G_d + j\omega C_d$. La ligne étudiée est constituée d'un câble gainé et aérien situé à 1 m de hauteur au-dessus du sol de conductivité 10^{-2} S/m et de permittivité relative de 10. Nous considérons deux gaines, l'une a une épaisseur de 5 mm et l'autre 1 cm. Toutes deux possèdent la même permittivité relative de 2,56.

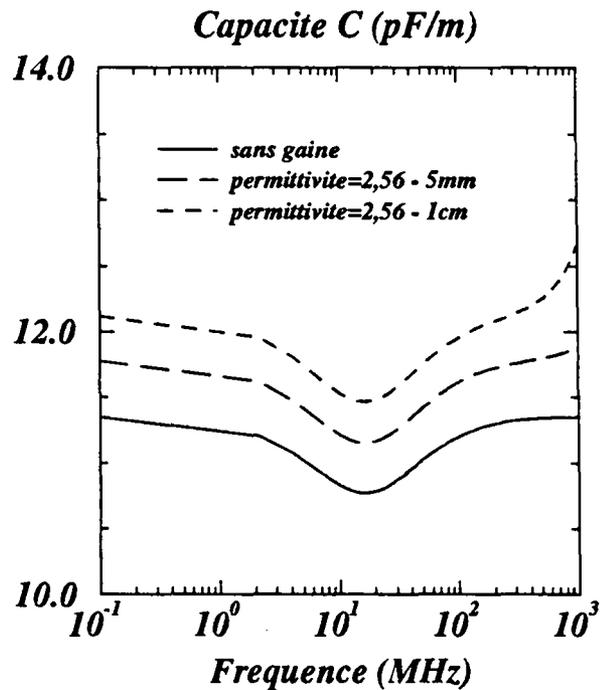
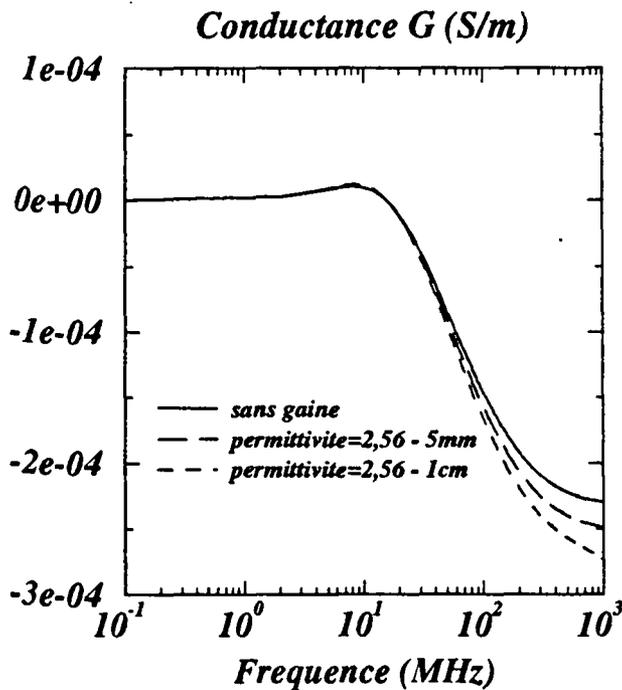
La conductance G présentée par la ligne qui ne dépend pas de la gaine excepté en hautes fréquences présente un comportement singulier à partir de 20 MHz où elle devient négative. Ceci apporte un éclaircissement sur le fait que l'atténuation diminuait en hautes fréquences alors que la résistance linéique augmentait. Ce phénomène particulier sera explicité dans le chapitre quatre. La capacité augmente proportionnellement à l'épaisseur de la gaine.

Nous comparons maintenant la constante de phase et nous remarquons dans un premier temps que la présence de la gaine diminue sensiblement la vitesse de phase. Cette tendance sera d'autant plus marquée que l'épaisseur sera importante.

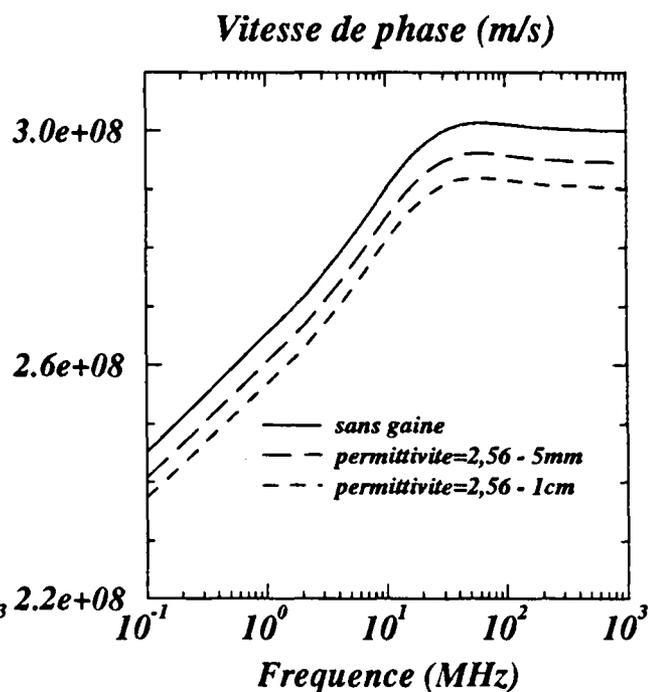
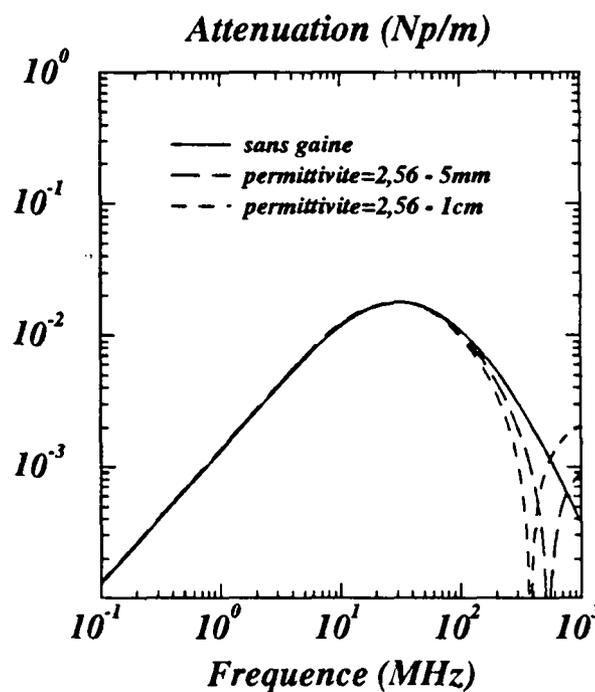
Par contre, de nouveau un comportement remarquable apparaît au niveau de l'atténuation. En effet la présence de la gaine peut impliquer une atténuation presque nulle à une fréquence précise qui se décale vers le bas du spectre lorsque l'épaisseur de gaine augmente.

En fait, il faut remarquer que nous n'avons pas tenu compte des pertes qui pouvaient exister au niveau du conducteur car elles apparaissaient négligeables vis à vis de celles dues à la conductivité finie du sol. Mais à cette fréquence où l'atténuation devient très faible, c'est à dire vers 400 ou 500 MHz selon la gaine, les pertes dues à un conducteur non-parfait prennent alors une importance particulière.

Admittance lineique Y



Constante de propagation



Nous précisons que ce phénomène a été mis en évidence expérimentalement par un procédé décrit dans la référence [45] et présenté sur la planche n°15. Sur la figure n°12 de cette planche, nous pouvons voir que le dispositif expérimental se compose d'un conducteur placé à une hauteur de 5 m et de 2,3 mm de diamètre. Il est entouré par une gaine diélectrique de permittivité relative égale à 2,31 et de diamètre externe de 8,4 mm. L'auteur introduit des pertes dans le diélectrique au moyen d'une tangente de pertes valant $5 \cdot 10^{-4}$. La ligne est excitée à l'origine par un cornet et on étudie l'atténuation de l'onde se propageant sur une distance de 220 m. Les résultats expérimentaux sont indiqués sur la figure n°11 de cette planche où nous pouvons remarquer que l'atténuation diminue très rapidement à partir de 20 MHz jusque le minimum se trouvant à 100 MHz. Le type d'onde qui domine en basses fréquences et que l'auteur nomme Carson-Pollaczek correspond à notre mode ligne de transmission et celle de Sommerfeld-Goubau au mode rapide. En hautes fréquences, la propagation est dominée par l'onde de surface que Goubau a mis en évidence [46].

Nous avons superposé l'atténuation calculée à partir des expressions (III-43) et (III-44) des paramètres linéiques et notée approximation quasi-TEM sur la planche. Nous pouvons remarquer que la variation de celle-ci s'approche de celle obtenue par l'expérimentation jusque 60 MHz. Les écarts sont expliqués par le fait que nous n'avons pas tenu compte des pertes ni du conducteur ni de la gaine. En revanche, nous retrouvons une atténuation quasiment nulle pour des fréquences de l'ordre de 100 MHz et 600 MHz qui ne traduit aucun phénomène physique. *L'introduction de l'approximation quasi-TEM dans le calcul des paramètres linéiques d'un câble gainé et placé au-dessus d'un sol de faible conductivité peut entraîner une estimation complètement fautive de l'atténuation.* Nous avons comparé aussi l'atténuation calculée à partir des paramètres de Vance donc en négligeant la présence de la gaine et nous nous apercevons qu'elle correspond à celle de l'onde de Carson-Pollaczek qui n'est plus valable à partir de 20 MHz.

II.3. Généralisation à un faisceau multifilaire

II.3.1. Conducteurs non-gainés

Les formules donnant l'impédance et l'admittance d'un câble situé au-dessus du sol peuvent être établies pour un ensemble de N conducteurs si l'espacement entre les conducteurs ainsi que la hauteur de chacun d'eux soient suffisamment grands vis à vis de leur rayon respectif pour que le courant soit uniformément réparti à leur surface. De plus l'espacement entre les conducteurs doit être faible vis à vis de la longueur d'onde.

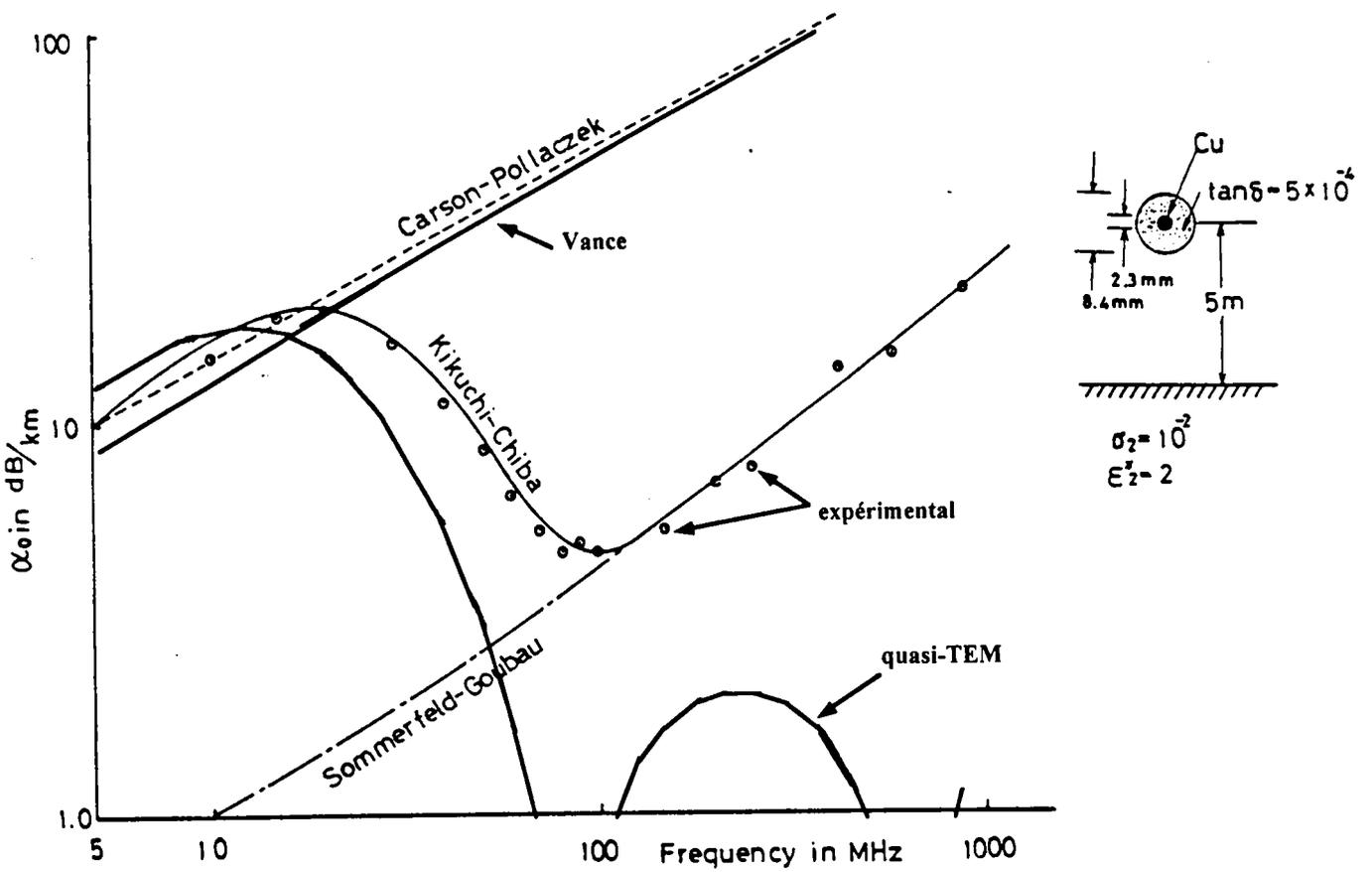


Fig. 11. Attenuation constant of the G line above ground. Ground return transmission line mode is transformed into surface-wave transmission line mode by elevation of frequency with a rise in degree of electromagnetic field concentration.

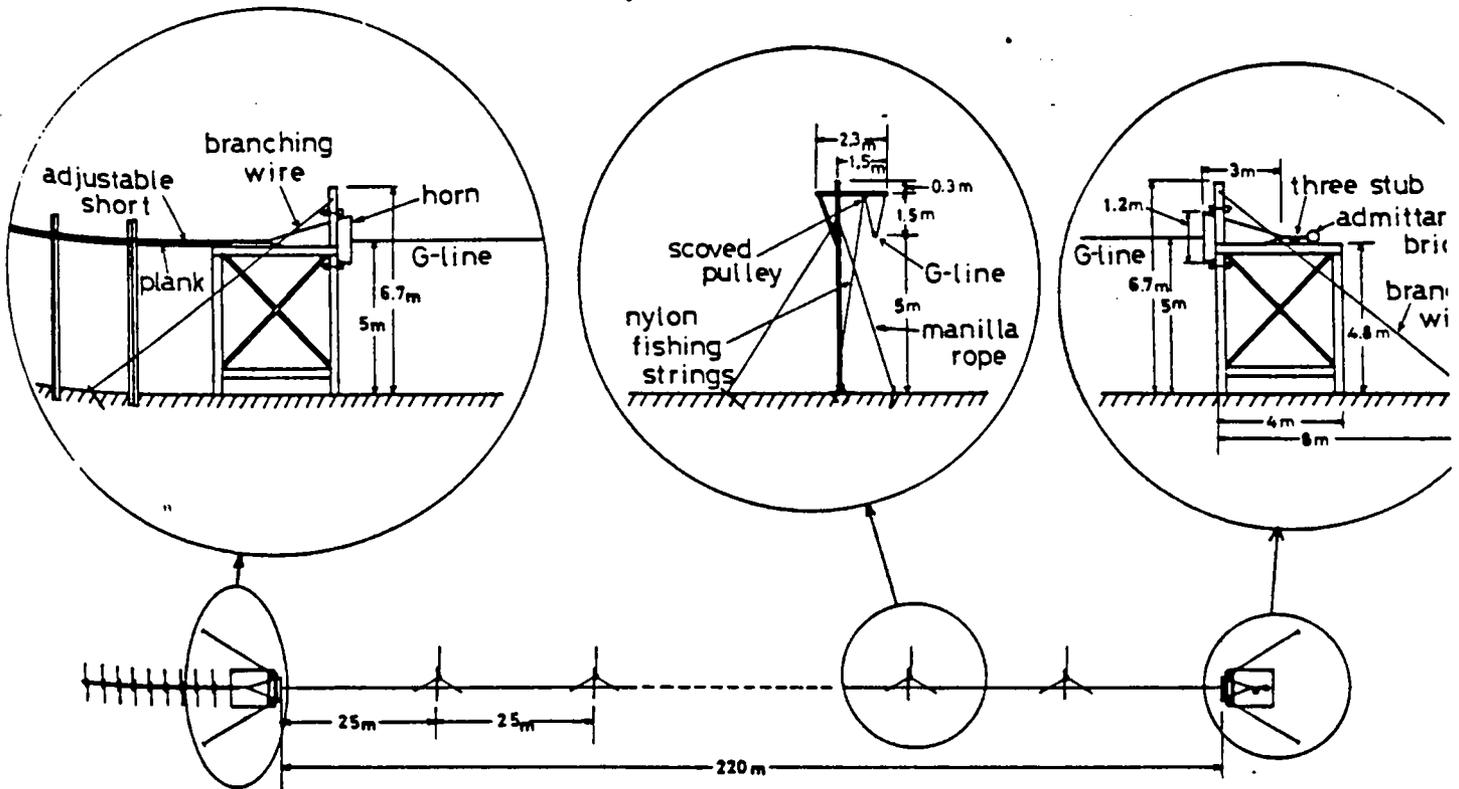


Fig. 12. Experimental installation.

Le calcul des matrices impédances et admittances nécessite toutefois la même hypothèse sur le courant que dans le cas monofilaire. Nous le supposons constitué d'un mode guidé unique. Par conséquent, le courant sur le conducteur k est de la forme

$$I_k(z) = I_k e^{-\Gamma z}$$

En définissant les expressions ci-dessous où les distances D_1^{kn} et D_2^{kn} sont présentées sur la figure n°19, nous appliquons les conditions de continuité à la surface de chaque conducteur.

$$Z_{kn}(\Gamma) = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \left[K_0(\gamma_1 \xi_1 D_1^{kn}) - K_0(\gamma_1 \xi_1 D_2^{kn}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u_1(x_k+x_n)}}{u_1 + u_2} e^{j\lambda(y_k - y_n - a_n)} d\lambda \right] \quad (\text{III-46})$$

$$Y_{kn}(\Gamma) = 2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left[K_0(\gamma_1 \xi_1 D_1^{kn}) - K_0(\gamma_1 \xi_1 D_2^{kn}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_1^2 e^{-u_1(x_k+x_n)}}{u_1 \gamma_2^2 + \gamma_1^2 u_2} e^{j\lambda(y_k - y_n - a_n)} d\lambda \right]^{-1} \quad (\text{III-47})$$

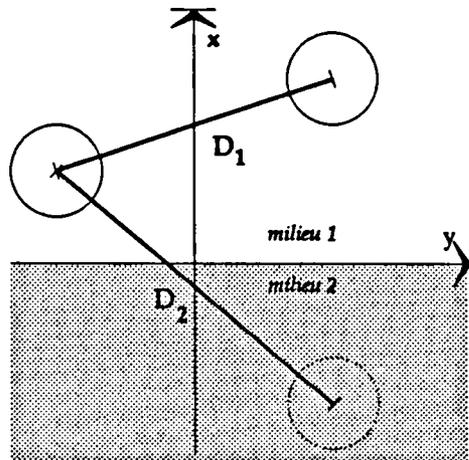


Figure n°19: Faisceau multiconducteur - Définition des distances D_1 et D_2

Nous obtenons alors une relation matricielle qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} E_{z1} \\ \vdots \\ E_{zN} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Z_{11}(\Gamma) & \cdots & Z_{1N}(\Gamma) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(\Gamma) & \cdots & Z_{NN}(\Gamma) \end{bmatrix} + \Gamma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{11}(\Gamma)} & \cdots & \frac{1}{Y_{1N}(\Gamma)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{Y_{N1}(\Gamma)} & \cdots & \frac{1}{Y_{NN}(\Gamma)} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} e^{-\Gamma z} = \begin{bmatrix} Z_{11} I_1 \\ \vdots \\ Z_{1N} I_N \end{bmatrix} e^{-\Gamma z}$$

(III-48)

Nous pouvons nous apercevoir que cette relation est identique à celle trouvée dans l'étude monofilaire. Nous définissons alors les matrices impédances et admittances par les expressions (III-49) et (III-50).

$$[Z(\Gamma)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(\Gamma) + Z_{f1} & \cdots & Z_{1N}(\Gamma) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(\Gamma) & \cdots & Z_{NN}(\Gamma) + Z_{fN} \end{bmatrix} \quad (\text{III-49})$$

$$[\tilde{Y}(\Gamma)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{11}(\Gamma)} & \cdots & \frac{1}{Y_{1N}(\Gamma)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{Y_{N1}(\Gamma)} & \cdots & \frac{1}{Y_{NN}(\Gamma)} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{III-50})$$

La matrice impédance contient sur la diagonale un terme supplémentaire Z_f qui tient compte des pertes dans les conducteurs. Si nous négligeons ces pertes, la matrice impédance s'exprime simplement à partir des termes (III-46).

En revanche, nous pouvons voir que la matrice admittance est créée en prenant l'inverse de la matrice constituée de l'inverse des termes calculés par la formule (III-47). Nous pouvons remarquer que nous retrouvons dans le cas monofilaire les expressions précédemment établies. Il est important de souligner que ces matrices dépendent toujours de la constante de propagation du courant.

Nous pouvons introduire de nouveau l'approximation Quasi-TEM. Il suffit pour cela de calculer les termes de (III-49) et (III-50) en utilisant γ_1 la constante de propagation intrinsèque du demi-milieu supérieur. De nombreux travaux [19] [39] [47] ont utilisé l'approximation quasi-TEM pour calculer les matrices des paramètres linéiques dans le cas de conducteurs non gainés.

II.3.2. Conducteurs entourés d'une gaine diélectrique

Pour prendre en compte une gaine diélectrique autour des conducteurs, les termes (III-46) et (III-47) sont remplacés par les termes suivants :

$$Z_{kn}(\Gamma) = \frac{j\omega\mu}{2\pi} \tau_n \left[K_0(\gamma_1 \xi_1 D_1^{kn}) - K_0(\gamma_1 \xi_1 D_2^{kn}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u_1(x_k+x_n)}}{u_1+u_2} e^{j\lambda(y_k-y_n-a_n)} d\lambda \right] + \frac{\gamma_{fn} \xi_{fn}}{2\pi a_n \sigma_{fn}} \frac{I_0(\gamma_{fn} \xi_{fn} a_n)}{I_1(\gamma_{fn} \xi_{fn} a_n)} \quad (\text{III-51})$$

$$Y_{kn}(\Gamma) = \frac{2\pi(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}{\tau_n} \left[K_0(\gamma_1 \xi_1 D_1^{kn}) - K_0(\gamma_1 \xi_1 D_2^{kn}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_1^2 e^{-u_1(x_k+x_n)}}{u_1\gamma_2^2 + \gamma_1^2 u_2} e^{j\lambda(y_k-y_n-a_n)} d\lambda \right] + \frac{\gamma_1^2 \xi_{dn}^2 \pi}{\Gamma^2 2\tau_n} \left[Y_0(j\gamma_{dn} \xi_{dn} a_n) J_0(j\gamma_{dn} \xi_{dn} b_n) - J_0(j\gamma_{dn} \xi_{dn} a_n) Y_0(j\gamma_{dn} \xi_{dn} b_n) \right]^{-1} \quad (\text{III-52})$$

où on peut reconnaître dans le terme de la seconde ligne l'expression (III-16) de l'impédance interne.

Nous comparons maintenant les valeurs des inductances et des capacités calculées par les formules (III-51) et (III-52) dans le cadre de l'approximation quasi-TEM à des valeurs mesurées et extraites de [48] pour une ligne bifilaire gainée et située au-dessus d'un plan de masse à une fréquence de 500KHz. La configuration est rappelée sur la figure n°20.

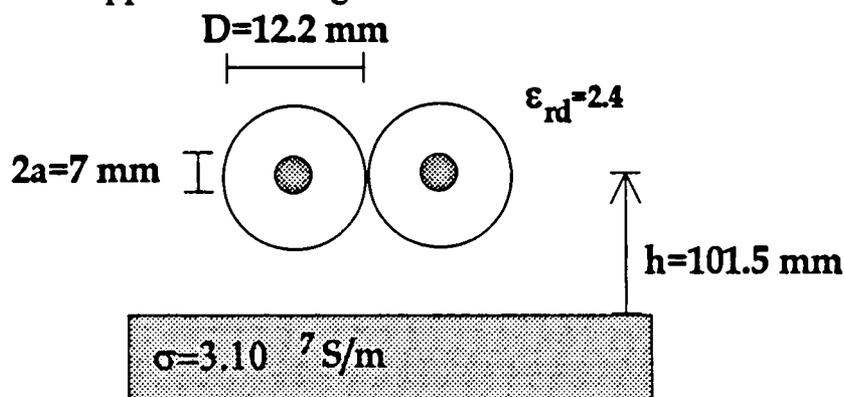


Figure n°20: Ligne bifilaire gainée au-dessus d'un plan de masse

La permittivité de l'air est fixée à 1,18 d'après l'auteur afin de tenir compte du milieu environnant et notamment de l'influence des supports maintenant les câbles. Cette valeur a été obtenue à partir de la connaissance de la vitesse de propagation sur un conducteur unique et non-gainé dans les mêmes conditions. Les résultats sont récapitulés dans le tableau n°1.

	Mesure	Calcul
L_{11} (nH/m)	845.8	813
L_{12} (nH/m)	584.8	563
C_{11} (pF/m)	37.6	31.6
C_{12} (pF/m)	-28.7	-21

Tableau n°1: Comparaison des valeurs de L et C pour une ligne bifilaire gainée

La permittivité relative de la gaine a été fixée à 4. L'écart entre la valeur mesurée et la valeur calculée n'excède pas 4 % pour l'inductance mais avoisine les 25 % pour la capacité. Ceci provient du fait que la théorie se base sur une répartition uniforme du courant sur les conducteurs, ce qui sous-entend un espacement entre les conducteurs important par rapport aux diamètres de ceux-ci. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans cette configuration, toutefois les ordres de grandeur sont

respectés. Nous soulignons aussi le fait que les valeurs calculées par l'expression (III-50) correspondent directement aux coefficients électrostatiques.

D'autre part, ce genre de mesures pour un sol de conductivité faible est difficilement envisageable.

CONCLUSION

Nous venons de présenter le calcul des paramètres linéiques d'un faisceau de câbles localisés dans un demi-milieu supérieur et placés parallèlement à la surface du demi-milieu inférieur. Ces deux milieux peuvent être dissipatifs et les câbles entourés d'une gaine diélectrique.

Ces paramètres linéiques sont obtenus à partir de la théorie des antennes en supposant un seul mode guidé et nous avons vu qu'ils dépendent de la constante de propagation du courant sur les conducteurs. Nous avons alors introduit l'approximation quasi-TEM qui suppose dans un premier temps que cette constante de propagation est identique à la constante intrinsèque du milieu où se trouvent les câbles.

Nous avons ensuite comparé le résultat donné par cette approximation à celui dérivé des expressions de Vance. Un écart entre les deux approches a été mis en évidence principalement au sujet de l'atténuation du courant en hautes fréquences.

L'extension aux câbles gainés du calcul des paramètres linéiques a enfin été confronté à des résultats de mesure. Si une concordance étroite a pu être observée sur les impédances linéiques, une différence sensible est apparue sur les capacités linéiques. Nous rappelons alors la difficulté de mesurer ces derniers paramètres qui sont fortement influencés par le milieu environnant ainsi que l'hypothèse de l'uniformité de la distribution du courant sur chaque conducteur qui est nécessaire à notre démarche.

CHAPITRE QUATRE

**Comparaison de la théorie des lignes de
transmission et de la théorie des
antennes au sujet des modes de
propagation et du courant induit**

INTRODUCTION

Dans ce dernier chapitre, nous comparons la théorie des lignes de transmission à la théorie des antennes que nous avons vue au cours des deux premiers chapitres.

Cette comparaison se porte sur les phénomènes de propagation lorsqu'un faisceau de câbles est localement excité par des générateurs ou sur le courant induit lorsqu'il est illuminé par une onde plane. Cette comparaison n'est possible que pour un faisceau de longueur infinie.

Dans un premier temps, le mode guidé obtenu à partir des paramètres linéiques calculés dans le troisième chapitre est confronté à ceux que nous avons trouvés par la théorie des antennes. Cette confrontation est réalisée pour de multiples configurations de lignes.

Dans une seconde partie, cette confrontation est poursuivie lorsque les câbles sont illuminés par une onde plane. Nous examinons les écarts entre le courant induit calculé par la théorie des lignes et celui calculé par la théorie des antennes en fonction de l'angle d'incidence de l'onde. Nous traduisons ces écarts dans le domaine temporel en étudiant la réponse en courant d'une ligne à une IEMN.

De plus, nous présentons une possibilité de modéliser un câble de section droite quelconque ou proche de l'interface par la théorie des lignes couplées que nous comparons à la méthode des moments du second chapitre.

Finalement, nous ouvrons une perspective qui permettrait d'appliquer les modifications que nous avons introduites précédemment aux cas des lignes de longueurs finies.

I. Théorie des lignes de transmission

I.1. Résolution de l'équation différentielle pour une ligne monofilaire

I.1.1. Equations des télégraphistes

La théorie des lignes de transmission suppose une variation exponentielle du courant qui est obtenue en résolvant une équation différentielle. Cette équation différentielle est directement dérivée des équations de Maxwell et nous présentons cette démarche dans le cas canonique du conducteur situé au-dessus d'un plan de masse. On obtient l'équation des télégraphistes à partir de l'intégration l'équation de Maxwell (IV-1) [33] sur le contour défini sur la figure n°21.

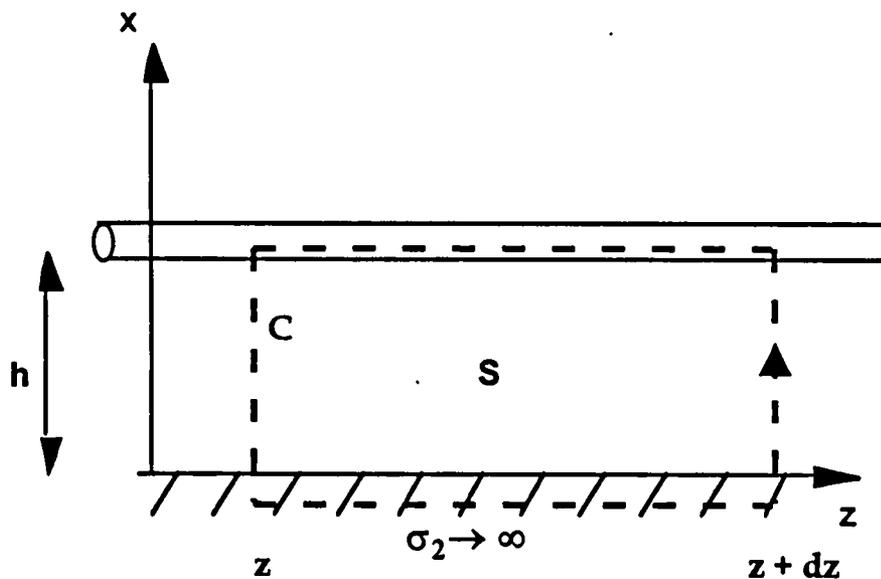


Figure n°21 : Contour d'intégration des équations de Maxwell

$$\text{Rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B} \quad (\text{IV-1})$$

soit

$$\iint_S \text{Rot}(\vec{E}) \cdot \vec{ds} = -j\omega \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{IV-2})$$

d'après le théorème de Stokes. Si le conducteur et l'interface ont une conductivité infinie alors le champ électrique à la surface du câble ou du plan de masse est nul et le calcul de la circulation du champ électrique sur le contour C se limite aux deux portions colinéaires à l'axe Ox.

La théorie des lignes nécessite la définition d'une différence de potentiel entre les surfaces du câble et du conducteur de retour qui est ici le plan de masse. Dans le cas où le conducteur de retour n'est pas un plan de masse mais le sol de conductivité finie, la référence de potentiel n'est pas imposée et nous aborderons ce dernier point délicat par la suite.

La tension peut être introduite de différentes façons, soit à partir du champ total, soit à partir du champ diffracté. La première approche a l'avantage d'introduire un terme source magnétique qu'il est plus facile de mesurer en basses fréquences mais masque le couplage par la composante E_z d'où une certaine confusion. Zeddani [49] a montré que ces deux approches étaient parfaitement identiques.

Nous reprenons ici la définition du potentiel (IV-3) qui ne tient compte que du champ engendré par le courant circulant sur la ligne. Cette définition a pour principal avantage de séparer les termes sources des paramètres (tension, courant) de la ligne. De plus, en l'absence de champ externe excitateur, la tension V_d garde encore toute sa notion.

$$V^d(z) = -\int_0^h E_x^d(x,z) dx \quad (IV-3)$$

Nous séparons donc dans l'équation (IV-2) le champ externe qui est la somme des champs incidents et réfléchis du champ diffracté. En divisant l'équation précédente par Δz puis en prenant la limite lorsque Δz vers 0, nous obtenons finalement:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \int_0^h E_x^{i+r} dx - \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h E_x^d dx = j\omega \int_0^h B_y^{i+r} dx + j\omega \int_0^h B_y^d dx \quad (IV-4)$$

De plus, si le courant est de la forme $I_m e^{-\Gamma z + j\omega t}$ alors le champ B_y^d est proportionnel à $I(z)$ et nous introduisons le premier paramètre linéique qui est l'impédance Z par

$$j\omega \int_0^h B_y^d(x,z) dx = j\omega L I(z) = Z I(z) \quad (IV-5)$$

Nous obtenons alors la première équation des télégraphistes :

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} + Z I(z) = E_z^{i+r}(h) \quad (IV-6)$$

La deuxième équation différentielle reliant le courant et la tension s'obtient en écrivant la continuité du courant

$$I(z + \Delta z) + \frac{\partial q}{\partial t} \Delta z = I(z) \quad (\text{IV-7})$$

Nous sommes en régime harmonique et nous prenons la limite de l'équation ci-dessus lorsque Δz tend vers zéro en rappelant l'expression de la capacité $q=CV$, nous obtenons finalement avec $Y=j\omega C$:

$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} + YV^d(z) = 0 \quad (\text{IV-8})$$

Nous nous apercevons qu'il n'y a pas de terme source qui intervient dans le second membre. Ceci est dû à notre définition du potentiel transverse. Z et Y représentent l'impédance et l'admittance de la ligne. Des équations des télégraphistes, nous pouvons déduire l'équation différentielle dont le courant est solution :

$$\frac{\partial^2 I(z)}{\partial z^2} - ZYI(z) = -YE_z^{i+r}(h, z) \quad (\text{IV-9})$$

La solution générale de l'équation différentielle du courant est obtenue par la méthode de variation des constantes et peut s'écrire sous la forme :

$$I(z) = [A + p(z)]e^{-\sqrt{ZY}z} + [B + q(z)]e^{\sqrt{ZY}z} \quad (\text{IV-10})$$

avec $p(z) = \frac{1}{2Z_c} \int_0^z e^{\sqrt{ZY}u} E_z^{i+r}(u) du$ et $q(z) = -\frac{1}{2Z_c} \int_L^z e^{-\sqrt{ZY}u} E_z^{i+r}(u) du$. Les constantes A et B se calculent à partir des charges en extrémité de la ligne.

I.1.2. Remarque sur la référence de potentiel

L'obtention de l'équation différentielle (IV-10) n'est pas influencée par la référence de potentiel choisie et elle est donc encore valable lorsque le conducteur de retour n'est pas un plan de masse. En revanche, l'application des conditions de charge aux extrémités de la ligne semble nous contraindre à définir la référence de potentiel.

Nous rappelons que nous désirons appliquer la théorie des lignes de transmission aussi bien à une ligne aérienne qu'à une ligne enterrée et nous avons

d'ailleurs calculer les paramètres linéiques Z et Y dans le chapitre Trois en ce sens. Nous choisirons comme référence de potentiel l'interface entre les deux demi-milieux. Toujours dans le cas de la ligne enterrée, deux types de configurations sont couramment employées [50]. Nous les avons indiquées sur la figure n°22.

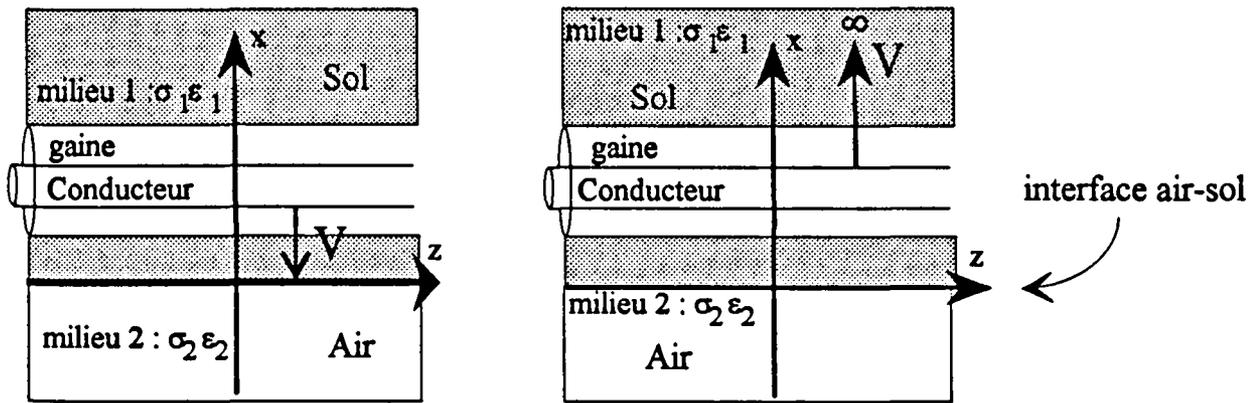


Figure n°22 : Deux définitions de la référence de potentiel pour une ligne enterrée

La première ne nous semble pas appropriée car elle nous oblige à considérer exclusivement un conducteur enterré et gainé. Dans la seconde configuration, les conditions de charge s'exprimeront difficilement. Nous indiquons notre configuration dans le cas de la ligne enterrée sur la figure n°23.

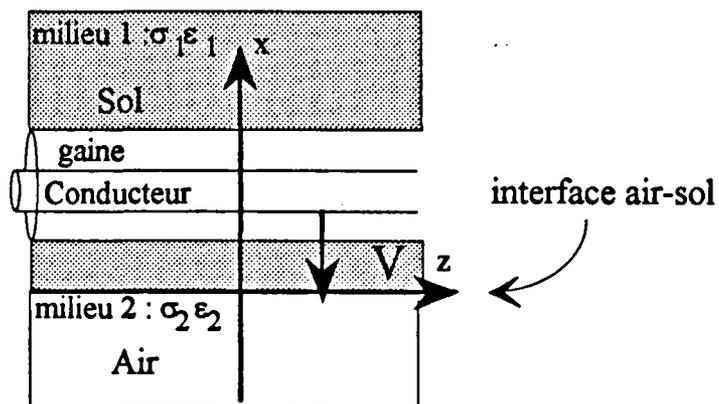


Figure n°23 : Définition de notre référence de potentiel

1.2. Extension à un faisceau de câbles

Nous pouvons généraliser la démarche précédente à un ensemble de N conducteurs rectilignes et parallèles à l'interface air-sol comme le montre la figure n°24. Un conducteur k est caractérisé par son rayon r_k et sa hauteur x_k par rapport au plan de référence. Il peut être connecté à ses extrémités par des impédances Z_{0k} et Z_{Lk} en $z=0$ et $z=L$. Nous définissons toujours les tensions $V_k(z)$ référencées par rapport à l'interface air-sol ($x=0$).

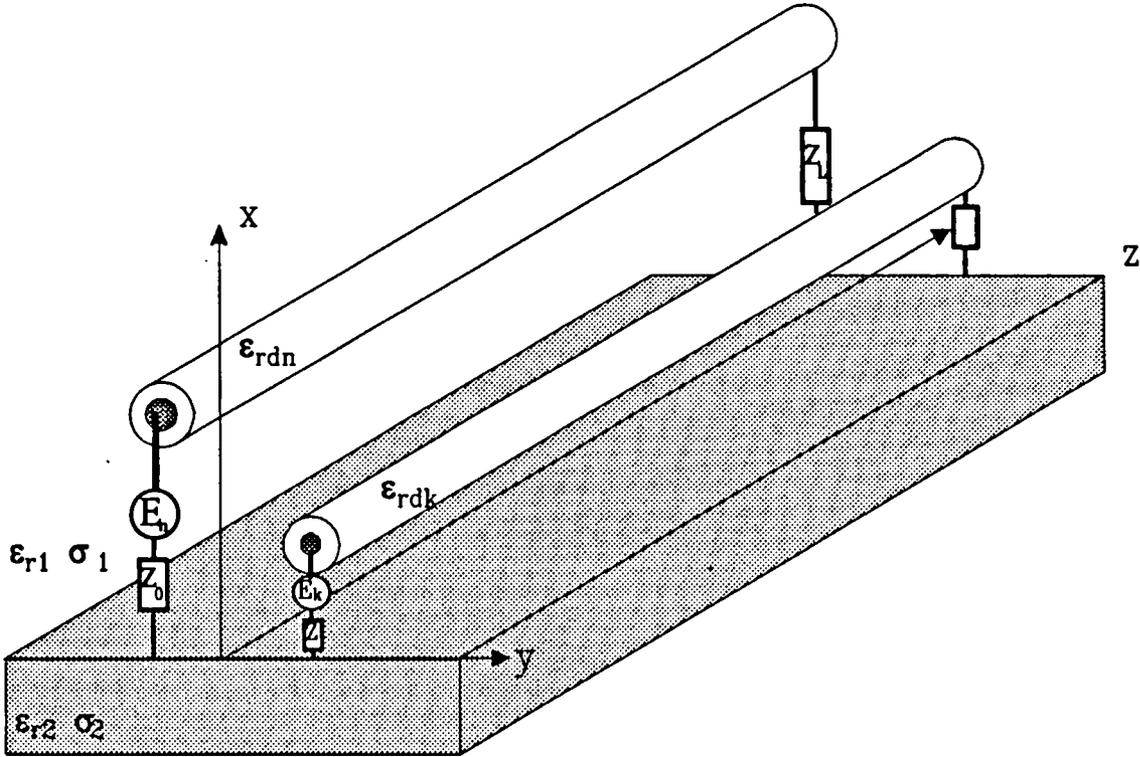


Figure n°24 : Configuration géométrique du faisceau de câbles

La théorie des lignes couplées nous permet de relier les tensions ainsi définies aux courants I_k circulant sur chaque conducteur par le système matriciel suivant :

$$\begin{cases} -\left[\frac{dV}{dz}\right] + [Z][I] = [E_z^{ext}] \\ \left[\frac{dI}{dz}\right] + [Y][V] = [0] \end{cases} \quad (IV-11)$$

où $[V]$, $[I]$ et $[E_z^{ext}]$ sont les matrices colonnes des tensions, courants et champs électriques externes, le champ électrique dans le cas d'une onde plane s'appliquant sur chaque conducteur étant la somme du champ incident de l'onde et du champ réfléchi par le sol. Nous pouvons obtenir une équation différentielle matricielle du second ordre en courant.

$$\left[\frac{d^2 I}{dz^2}\right] - [Y][Z][I] = -[Y][E_z^{ext}] \quad (IV-12)$$

Lorsque le sol ainsi que les câbles sont parfaitement conducteurs, le produit $[Y][Z]$ est diagonal, chaque terme valant γ_1^2 où γ_1 est la constante de propagation de l'onde dans l'air. Dans ce cas, les modes induits sur les

conducteurs se propagent à la même vitesse. Par contre, si le milieu est hétérogène (sol de faible conductivité, présence de gaines diélectriques ...) le produit n'est plus diagonal et nous devons avoir recours au formalisme modal pour résoudre l'équation différentielle. Dans ce cas, on montre que le produit $[Y][Z]$ peut se diagonaliser grâce à la transformation linéaire introduite par les matrices de passage $[T]$ formées par les vecteurs propres de la matrice $[YZ]$ soit

$$[\Gamma^2] = [T]^{-1}[Y][Z][T] \quad (\text{IV-13})$$

où $[\Gamma^2]$ est la matrice diagonale constituée des différentes constantes de propagation au carré associées à chaque mode. L'équation différentielle se met dans la base propre sous la forme

$$\left[\frac{d^2 i}{dz^2} \right] - [\Gamma^2][i] = -[T]^{-1}[Y][E_z^{\text{ext}}] \quad (\text{IV-14})$$

avec $[i] = [T]^{-1}[I]$. Nous obtenons un système différentiel diagonal qui se résout aisément notamment lorsque le champ externe est celui d'une onde plane, c'est à dire si :

$$[E_z^{\text{ext}}] = [e^{-\Gamma_0 z}][E_z^{i+r}] \quad (\text{IV-15})$$

où Γ_0 est la constante de propagation de l'onde selon l'axe Oz (voir annexe A2). Les matrices $[e^{-\Gamma_0 z}]$ et $[E_z^{i+r}]$ sont respectivement une matrice diagonale et une matrice colonne. Dans ce cas, la solution est donnée par

$$[i] = [e^{-\Gamma z}][A] + [e^{\Gamma z}][B] + [\Gamma^2 - \Gamma_0^2]^{-1}[T]^{-1}[Y][e^{-\Gamma_0 z}][E_z^{i+r}] \quad (\text{IV-16})$$

Les matrices $[e^{-\Gamma z}]$ et $[e^{\Gamma z}]$ sont des matrices diagonales dont un élément k correspond à $e^{-\Gamma_k z}$ et $e^{\Gamma_k z}$, Γ_k étant la constante de propagation associée au mode propre k . Les matrices colonnes $[A]$ et $[B]$ sont obtenues en appliquant les conditions de charges dans la base initiale.

$$\begin{cases} [I] = [T][e^{-\Gamma z}][A] + [T][e^{\Gamma z}][B] + [T][\Gamma^2 - \Gamma_0^2]^{-1}[T]^{-1}[Y][e^{-\Gamma_0 z}][E_z^{i+r}] \\ [V] = -[Y]^{-1}\left[\frac{dI}{dz}\right] \end{cases} \quad (\text{IV-17})$$

Et nous appliquons les conditions de charges suivantes :

$$\begin{cases} [V(0)] = \left[\int_0^b E_x^{i+r}(x,0) dx \right] - [Z_0][I(0)] + [E_g(0)] \\ [V(L)] = \left[\int_0^b E_x^{i+r}(x,L) dx \right] + [Z_L][I(L)] + [E_g(L)] \end{cases} \quad (IV-18)$$

où les matrices colonnes $[E_g(0)]$ et $[E_g(L)]$ sont les vecteurs composés des générateurs appliqués à l'entrée et à la sortie des lignes. Nous obtenons un système linéaire de $2N$ équations que l'on résoud numériquement pour obtenir les N inconnues de $[A]$ et les N inconnues de $[B]$. De plus, il est important de noter que pour connaître les courants $[I]$ circulant sur les conducteurs, nous devons disposer des matrices impédances $[Z]$ et admittances $[Y]$.

II. Phénomènes de propagation des courants sur le faisceau

II.1. Résolution pour une excitation par un générateur localisé

La méthode de résolution peut être appliquée dans le cas où le faisceau de câbles est uniquement excité par des générateur localisés. Les courants sur chacun des conducteur sont donnés par les relations suivantes

$$\begin{cases} [I] = [T][e^{-\Gamma z}][A] + [T][e^{\Gamma z}][B] \\ [V] = -[Y]^{-1} \left[\frac{dI}{dz} \right] \end{cases} \quad (IV-19)$$

Les conditions de charges se résument à

$$\begin{cases} [V(0)] = [E_g(0)] - [Z_0][I(0)] \\ [V(L)] = [E_g(L)] + [Z_L][I(L)] \end{cases} \quad (IV-20)$$

A partir de l'équation (IV-19) nous pouvons voir que les courants sur les conducteurs se composent d'ondes progressives et d'ondes régressives. Sur un faisceau de longueur infinie ou refermé à chaque extrémité sur sa matrice de charge adaptée, seules les ondes progressives subsistent. Par conséquent les courants se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1} & \cdots & T_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 e^{-\Gamma_1 z} \\ \vdots \\ a_N e^{-\Gamma_N z} \end{bmatrix} \quad (IV-21)$$

Le courant circulant sur chaque conducteur est la somme de N modes de propagation caractérisés par leur constante de propagation. Dans le cas d'un conducteur unique, le courant se compose d'un seul mode de propagation caractérisé par une constante de propagation γ_p .

Nous pouvons d'ores et déjà comparé avec le résultat donné par la théorie des antennes qui prédisait une somme de modes guidés et rayonnés. Tout d'abord, La théorie des lignes de transmission va donc négligé le rayonnement. Diverses études [8] ont été menées afin de connaître la conséquence de cette dernière remarque. D'autre part, une conclusion plus intéressante apparaît. En effet, nous avons trouvé deux modes guidés par la théorie des antennes en hautes fréquences. Il va donc exister une contradiction à ce niveau entre la théorie des lignes et la théorie des antennes.

Pour quantifier les conséquences de cette dernière conclusion, nous allons comparer les modes de propagation de la théorie des antennes à ceux de la théorie des lignes dans diverses configurations.

II.2. Modes de propagation et paramètres linéiques d'une ligne monoconducteur

II.2.1. Modes de propagation d'une ligne aérienne

La constante de propagation de la théorie des lignes est donnée par l'équation (III-30) où les paramètres linéiques ont été présentés dans le chapitre Trois par l'expression (III-28). Ces paramètres dépendent de la constante de propagation du courant se propageant sur la ligne. Nous aboutissons alors à l'équation implicite (IV-22) mis en avant par Wait [5] ou encore par [51]. Ces derniers auteurs ont mené une comparaison identique à la nôtre dans le domaine basses fréquences. En outre, ils définissent des termes correctifs pour la self et la capacité qui sont dus à la présence du sol.

$$\gamma_p = \sqrt{Z(\gamma_p)Y(\gamma_p)} = \alpha + j\beta \quad (\text{IV-22})$$

En comparant avec l'expression (III-27) qui donne la composante longitudinale du champ électrique produit par le courant, nous nous apercevons que résoudre cette équation implicite correspond à annuler la composante E_z à la surface du conducteur donc à appliquer la condition de continuité en champ électrique. Etant donné que le calcul de la composante longitudinale électrique s'est faite à partir de la théorie des antennes, l'équation (IV-22) est rigoureusement identique à l'équation modale du second chapitre. Connaissant les

constantes de propagation du courant, la question se pose quant à celle que nous devons utiliser pour calculer les paramètres linéiques. Si en basses fréquences, on peut subodorer que le mode *ligne de transmission* répond à la question, en hautes fréquences, la question demeure en suspend. Une possibilité de réponse est d'appliquer l'approximation quasi-TEM.

Afin de valider cette procédure, nous comparons l'atténuation et la vitesse de phase du mode de propagation de la théorie des lignes à celles des deux modes guidés ligne de transmission (TA-LT) et rapide (TA-Rapide) de la théorie des antennes pour une ligne aérienne parfaitement conductrice sur la planche n°16.

La constante de la théorie des lignes est calculée à partir des paramètres linéiques de l'approximation quasi-TEM donnés par l'expression (III-29) (TLignes-QT 1^{er} ordre). Nous nous apercevons qu'en basses fréquences, la constante de propagation est très proche de celle du mode *ligne de transmission* jusque 10 MHz pour un câble situé à 1 mètre de hauteur. En hautes fréquences, elle tend vers celle du mode *rapide* mais avec un écart important au niveau de l'atténuation.

Afin de diminuer l'écart que nous venons de remarquer, nous avons introduit une méthode itérative de calcul de la constante de propagation de la théorie des lignes avec pour départ celle de l'approximation quasi-TEM. Elle consiste à réintroduire la constante de propagation calculée à partir des paramètres linéiques de l'approximation quasi-TEM dans le calcul des paramètres linéiques de l'expression (III-28) et de recalculer une nouvelle constante de propagation. Ce processus peut se répéter indéfiniment et nous avons représenté son principe par l'organigramme ci-dessous:

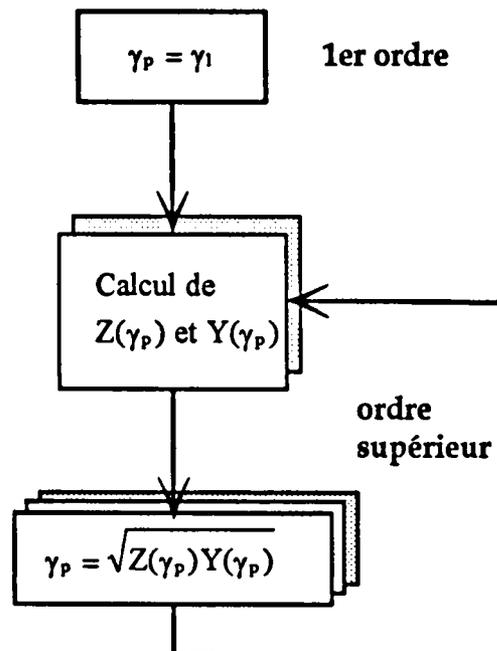
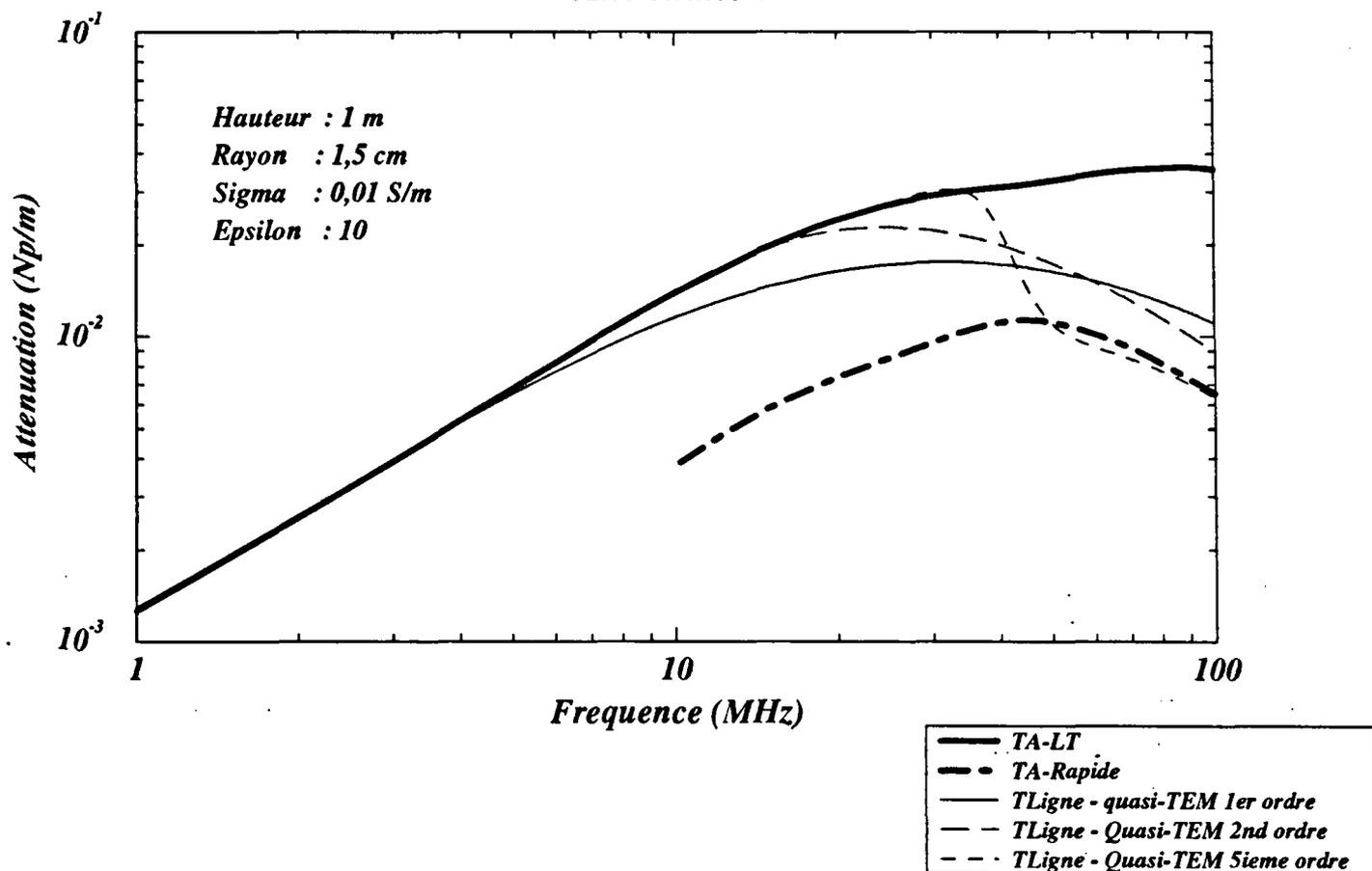


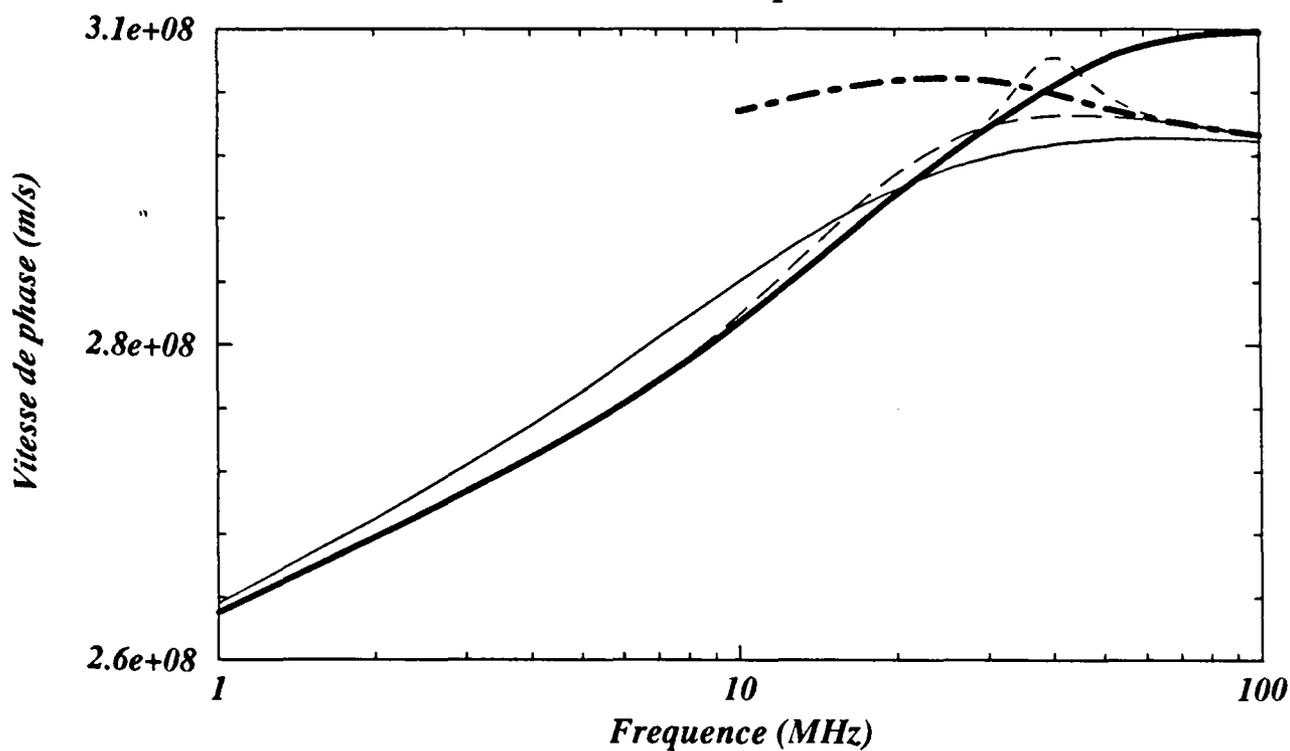
Tableau n°2 : Organigramme du processus itératif

Constante de propagation sur une ligne conductrice

Attenuation



Vitesse de phase



Les constantes de propagation du second (lignes-QT 2nd ordre) et du cinquième ordre (QT-5^{ième} ordre) obtenues par ce processus sont indiquées sur la planche n°16. Le second ordre permet d'améliorer l'écart en basses fréquences au niveau de la vitesse de phase. Le cinquième ordre converge parfaitement jusque 35 MHz vers le mode *ligne de transmission* et vers celui du mode *rapide* dès 45 MHz. Entre ces deux fréquences, nous assistons à une transition entre la propagation d'une onde où les champs sont répartis entre le conducteur et le sol à une propagation d'une onde de surface où les champs sont localisés à l'interface air-sol.

Nous appliquons le même procédé que celui indiqué dans le paragraphe précédent aux expressions (III-41) et (III-42) des paramètres linéiques représentatifs d'une ligne gainée. Nous considérons une ligne aérienne entourée d'une gaine de 5 mm d'épaisseur et de permittivité diélectrique relative égale à 2,56. Les constantes de propagation de la théorie des antennes et de la théorie des lignes sont indiquées sur la planche n°17.

Nous avons cherché à mettre en évidence le fait que malgré un ordre d'itérations de 5 la constante de propagation de la théorie des lignes ne traduit pas l'existence du mode *rapide* mais converge sur toute la bande de fréquences vers le mode ligne de transmission. Ce phénomène apparaît pour des gaines de permittivité relative supérieure à celle qui génère la dégénérescence modale observée dans le second chapitre.

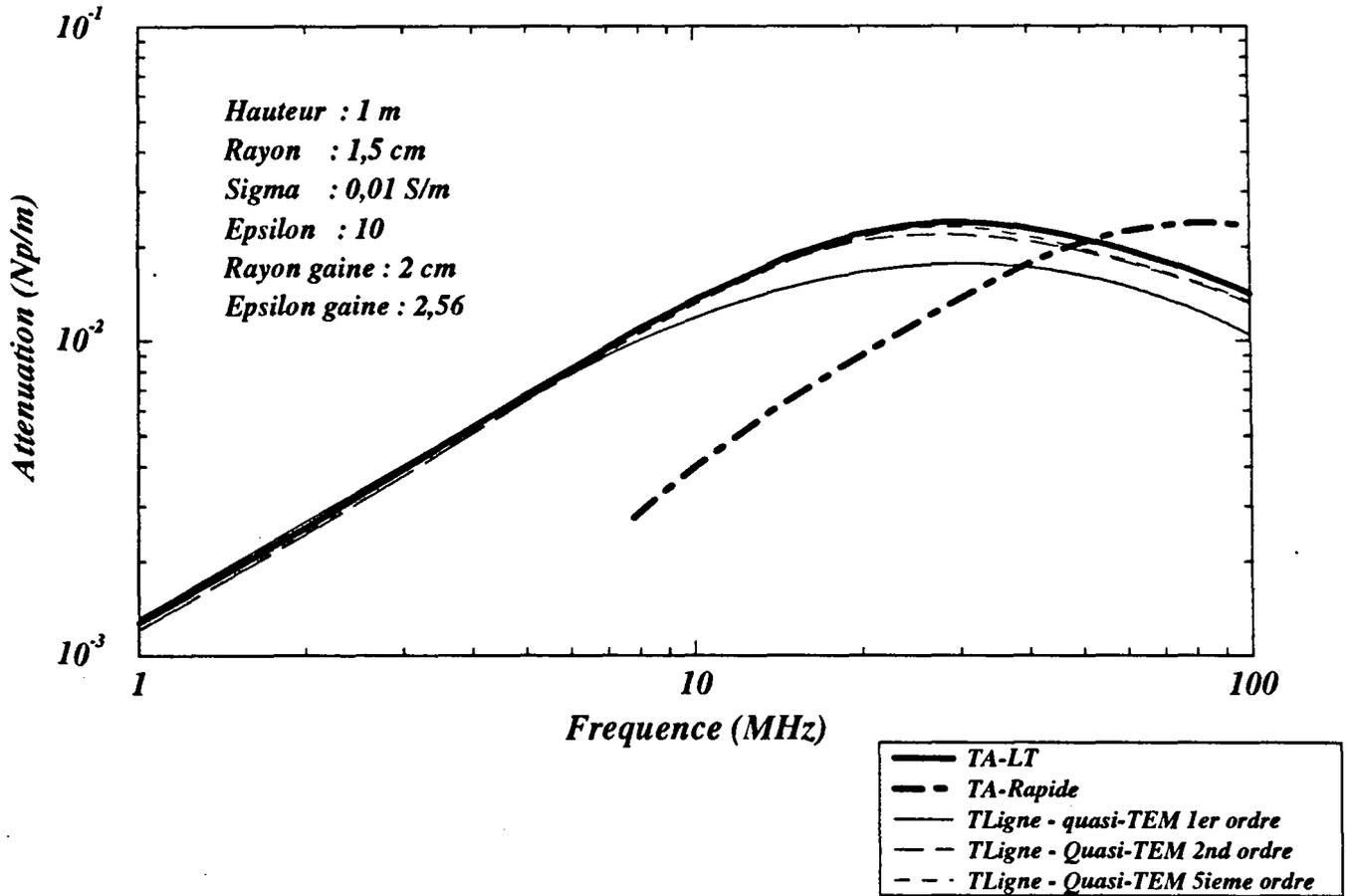
Sur la planche n°18, nous avons repris la ligne monofilaire de la référence [45] et décrite sur la planche n°15. Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'approximation quasi-TEM pour une ligne gainée pouvait conduire à des erreurs très importantes notamment au niveau de l'atténuation. Ces erreurs sont corrigées par le processus itératif où dès le second ordre l'atténuation obtenue est très proche de celle trouvée expérimentalement par Chiba. L'introduction du cinquième ordre n'améliore que très superficiellement ce résultat. *Une seule itération suffit pour permettre de connaître l'atténuation sur la ligne et pour traduire correctement les phénomènes physiques.*

Toujours sur la planche n°18, nous avons représenté les courants modaux des deux modes guidés en sortie du générateur délivrant une tension E_0 et placé en $z=z_0$. Ils sont calculés en appliquant le théorème des résidus soit

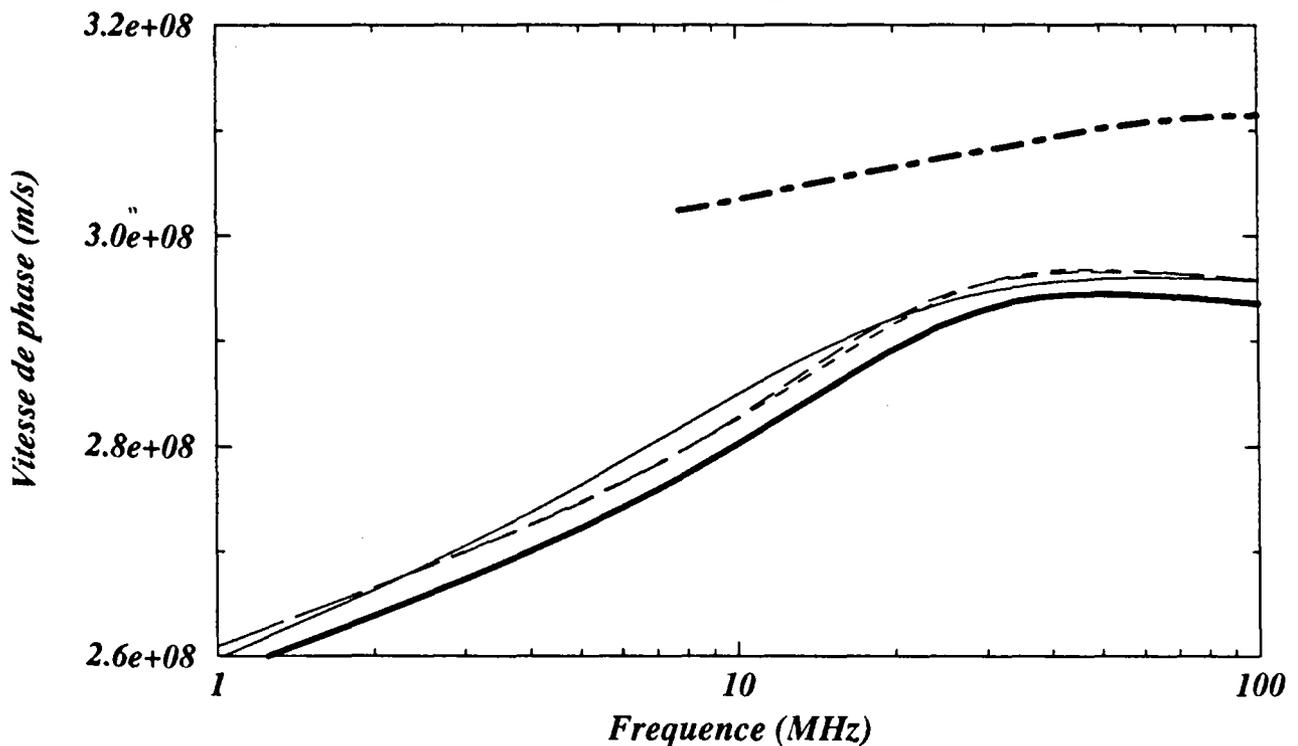
$$I_k^{LT} = \frac{4j E_0 e^{-\gamma_0 \eta_{LT}(z-z_0)}}{Z_0 \left[\frac{\partial M(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_{LT}}} \quad (IV-23)$$

Constante de propagation sur une ligne gainee

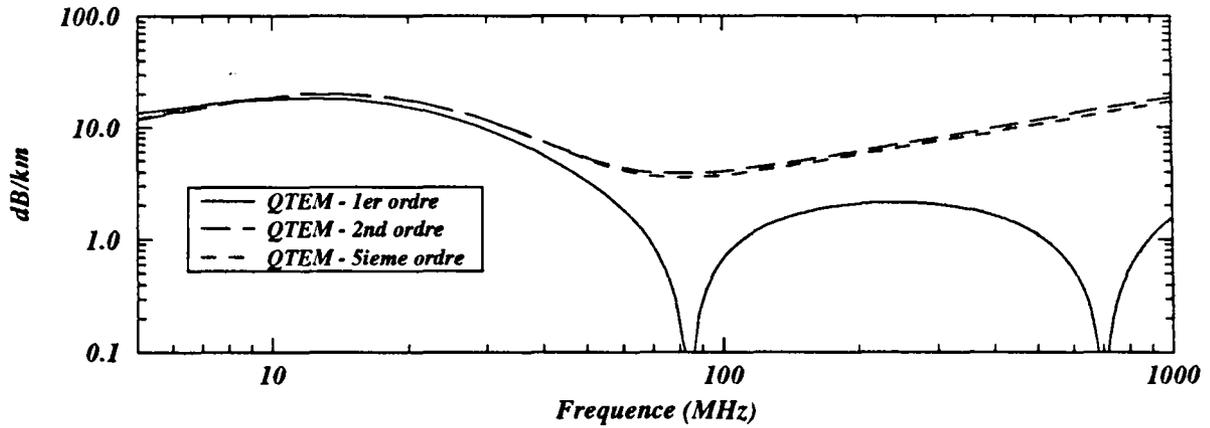
Attenuation



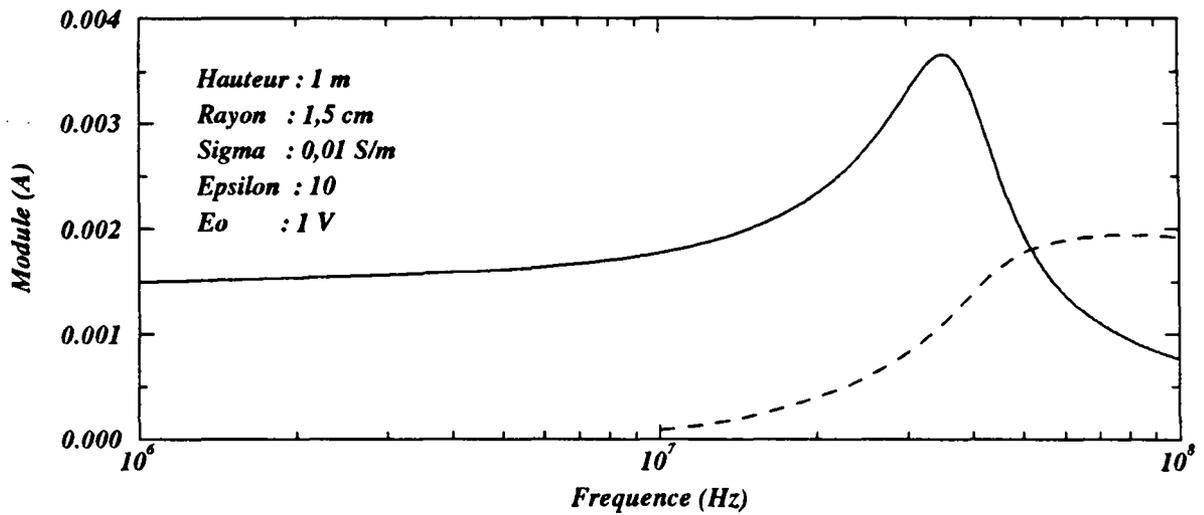
Vitesse de phase



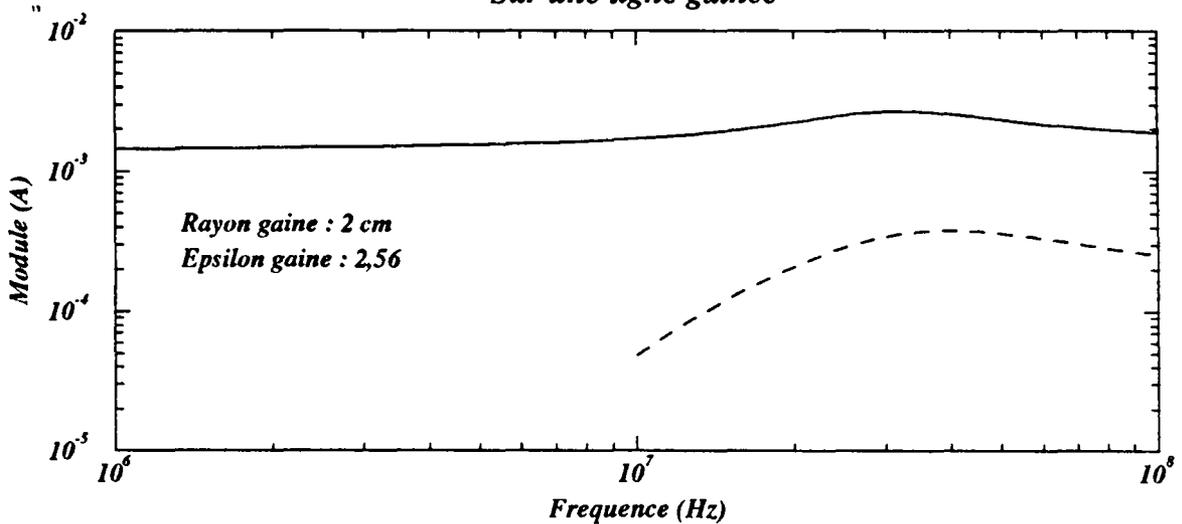
Atténuation sur la ligne présentée dans la référence 45



Courants modaux au niveau du generateur
Sur une ligne conductrice



Sur une ligne gainee



$$I_k^{\text{Rapide}} = \frac{4j E_0 e^{-\gamma_0 \eta_{\text{Rapide}}(z-z_0)}}{Z_0 \left[\frac{\partial M(\eta)}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_{\text{Rapide}}} \quad (\text{IV-24})$$

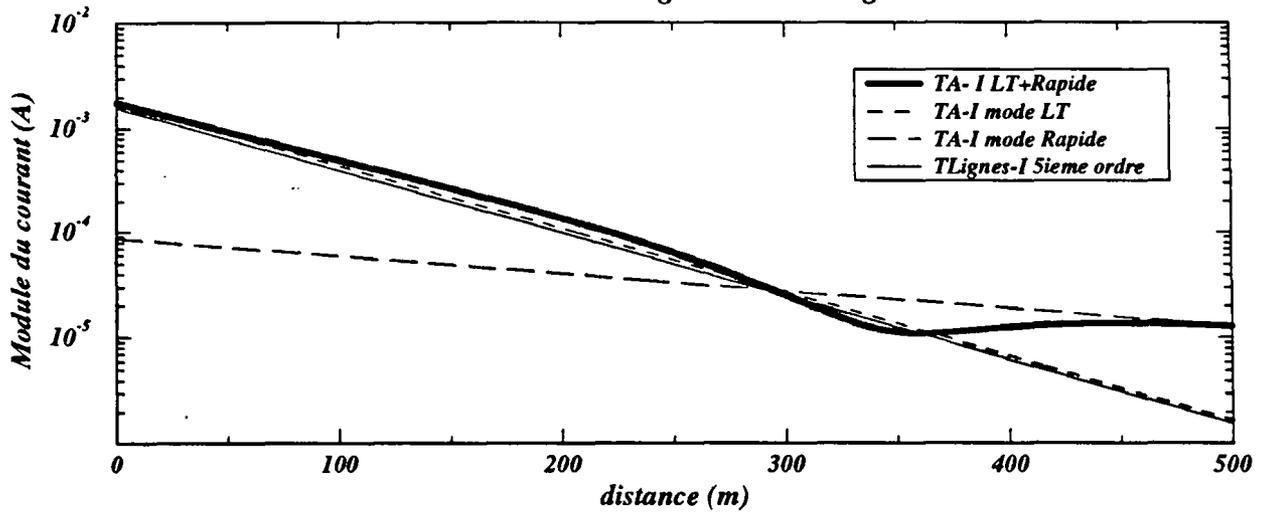
Sur la partie supérieure, nous avons tracé l'évolution des courants modaux qui correspondent à la configuration de la ligne conductrice en fonction de la fréquence. Nous pouvons observer qu'en basses fréquences le mode *ligne de transmission* est principalement excité au détriment du mode *rapide* jusque 40 MHz où la tendance s'inverse. La procédure itérative traduit donc le mode qui est excité de manière prépondérante même dans le cas de la ligne gainée qui se trouve sur la figure du bas. Le mode *rapide* est en effet dominé sur toute la bande de fréquences par le mode *ligne de transmission*.

Afin de connaître l'erreur commise au niveau de la distribution lorsque l'on considère un mode unique de propagation par la théorie des lignes de transmission vis à vis de la théorie des antennes qui en compte deux, nous avons tracé sur la planche n°19, la distribution du courant sur une ligne sans gaine à 10 MHz. Nous comparons le courant (TA-LT+rapide) calculé en sommant les deux courants modaux ligne de transmission (TA-mode LT) et rapide (TA-mode rapide) à celui calculé par la théorie des lignes (TLignes- 5^{ième} ordre) où les paramètres linéiques sont calculés par le processus itératif au cinquième ordre.

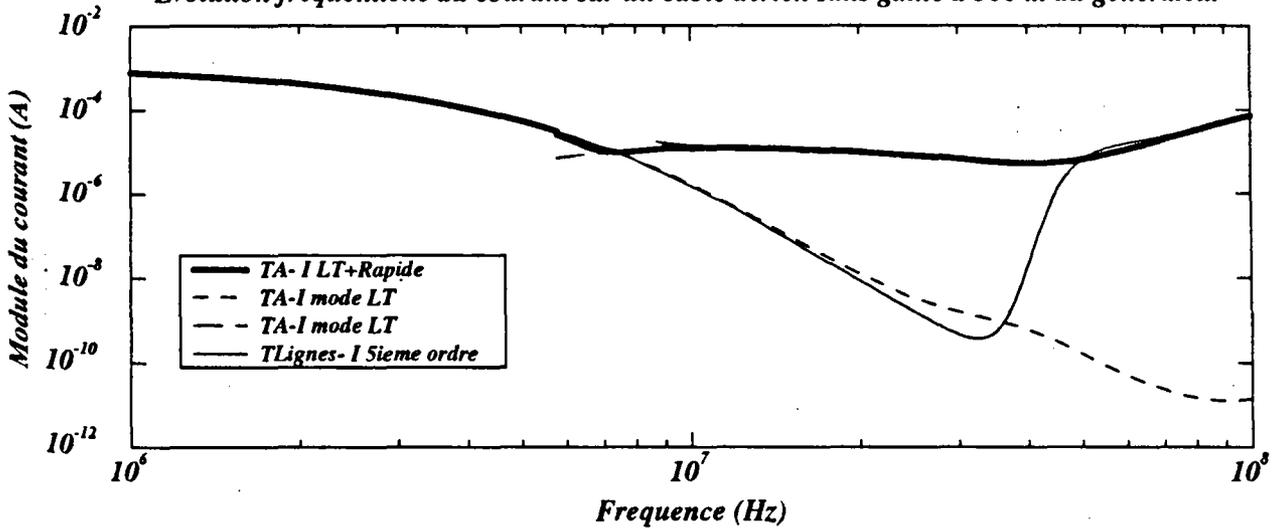
Nous pouvons remarquer que jusqu'à une distance de 350 m, le courant calculé par la théorie des lignes est très proche du courant total calculé par la théorie des antennes où le mode ligne de transmission domine. En revanche à partir de 400 m, le mode rapide de la théorie des antennes étant moins atténué, il devient prépondérant malgré le fait qu'il soit très peu excité au départ (cf. planche n°18). Dans ce cas, la théorie des lignes de transmission sous-estime considérablement le courant.

Nous avons tracé toujours sur la planche n°19-figure du milieu, le courant à 500 m du générateur en fonction de la fréquence sur le même câble que précédemment. En basses fréquences où le mode rapide n'existe pas ($f < 10$ MHz) la théorie des lignes donne un bon résultat puisque la constante de propagation de l'approximation quasi-TEM coïncide avec celle du mode ligne de transmission de la théorie des antennes. En revanche pour une plage de fréquence allant de 10 MHz à 40 MHz, le mode rapide domine le courant total et le processus itératif ne converge pas encore vers ce mode. C'est pourquoi le courant calculé par la théorie des lignes est erroné. Par contre pour des fréquences supérieures à 40 MHz, la constante de propagation du processus itératif converge vers le mode rapide et on peut de nouveau appliquer la théorie des lignes.

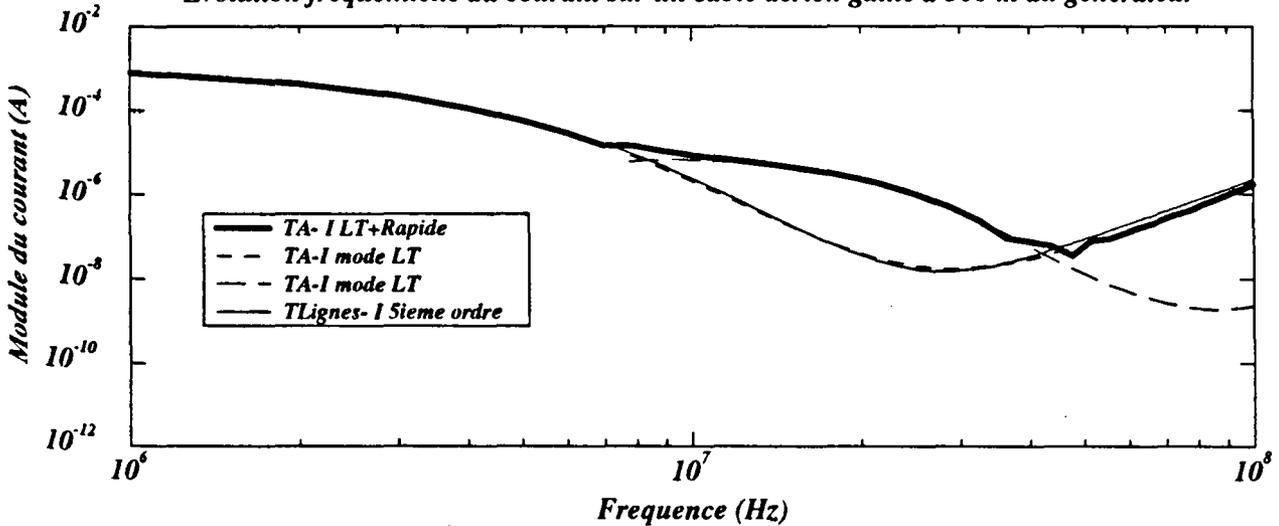
Distribution du courant le long du cable sans gaine a 10 MHz



Evolution frequentielle du courant sur un cable aerien sans gaine a 500 m du generateur



Evolution frequentielle du courant sur un cable aerien gaine a 500 m du generateur



Pour un câble gainé, on assiste au même principe, c'est à dire que le courant total de la théorie des antennes est dominé par le mode rapide de 9 MHz à 40 MHz et là encore la théorie des lignes ne fournit pas un bon résultat. Cependant, en hautes fréquences, le mode ligne de transmission de la théorie des antennes domine de nouveau le mode rapide et la théorie des lignes donne le même niveau de courant.

En conclusion, il existe une plage de fréquences sur laquelle la théorie des lignes de transmission ne donne pas un bon résultat pour une grande distance entre le point d'observation et le générateur. En revanche, elle peut s'appliquer en basses fréquences ($f < 9$ MHz) mais aussi en hautes fréquences ($f > 40$ MHz) quelque soit la distance séparant le générateur du point d'observation. Et dans la plage de fréquences intermédiaire (9- 40 MHz), elle peut s'appliquer pour des distances inférieures à 350 m.

II.2.2. Paramètres linéiques d'une ligne aérienne

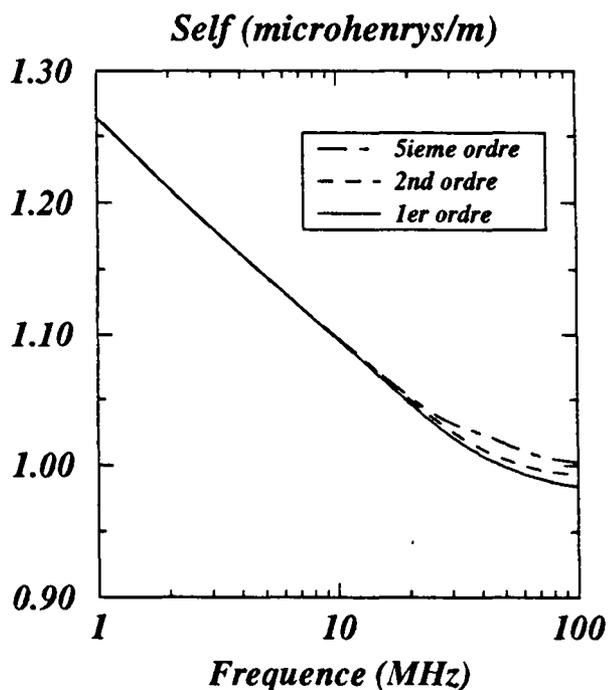
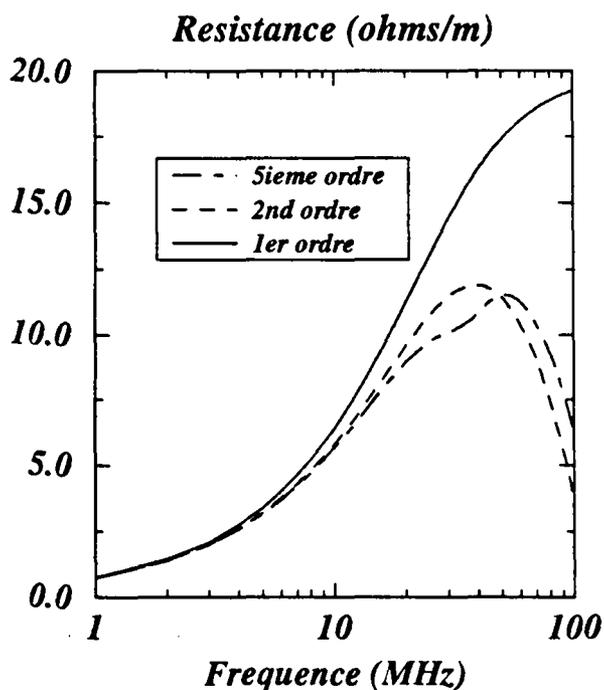
Nous avons représenté les paramètres linéiques déduits de ce processus pour la ligne conductrice sur la planche n°20 et pour la ligne gainée sur la planche n°21. Les courbes en trait continu correspondent aux paramètres linéiques de l'approximation quasi-TEM et celles en trait discontinu les paramètres linéiques d'ordre supérieur.

Pour la ligne parfaitement conductrice, la self ne change guère sur toute la bande de fréquences en fonction de l'ordre d'itération et la capacité garde une valeur autour de 11pF/m. Les termes de pertes (résistance et conductance) évoluent de façon très différente en fonction de l'ordre du processus itératif décrit sur le tableau n°2. La résistance est plus faible en hautes fréquences pour le cinquième ordre que pour l'approximation quasi-TEM et la conductance devient négative beaucoup plus tard ceci afin de traduire le changement de mode de propagation.

Sur la planche n°21, les paramètres de la ligne gainée sont représentés en fonction de la fréquence. De nouveau, la résistance et la conductance varient en fonction du nombre d'itérations. La différence entre le second ordre et le cinquième est néanmoins minime, ce qui démontre que le processus converge plus rapidement lorsqu'une gaine est présente.

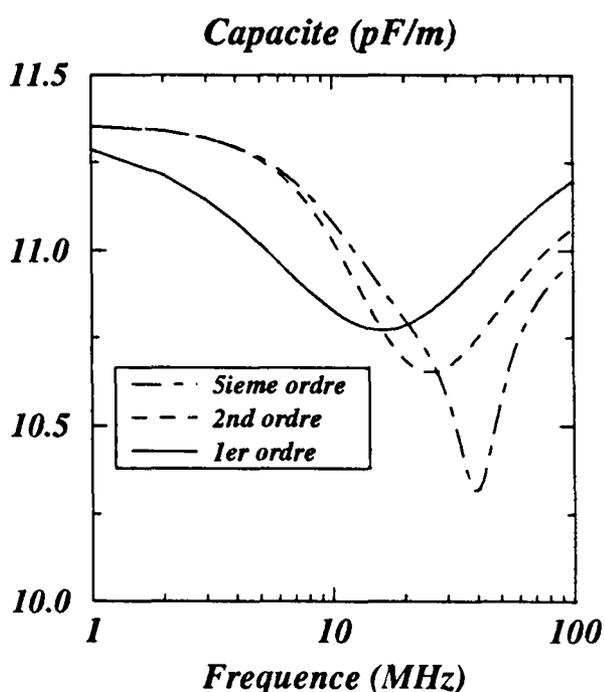
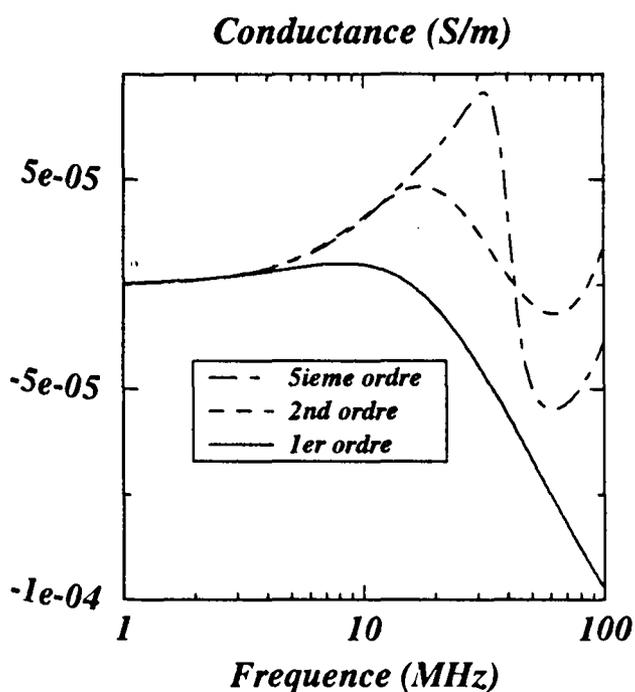
En comparant les paramètres linéiques de la ligne aérienne gainée à ceux de la ligne parfaitement conductrice, nous pouvons nous apercevoir que les conclusions quant au changement qu'entraîne la présence de la gaine sur les

Impedance Lineique

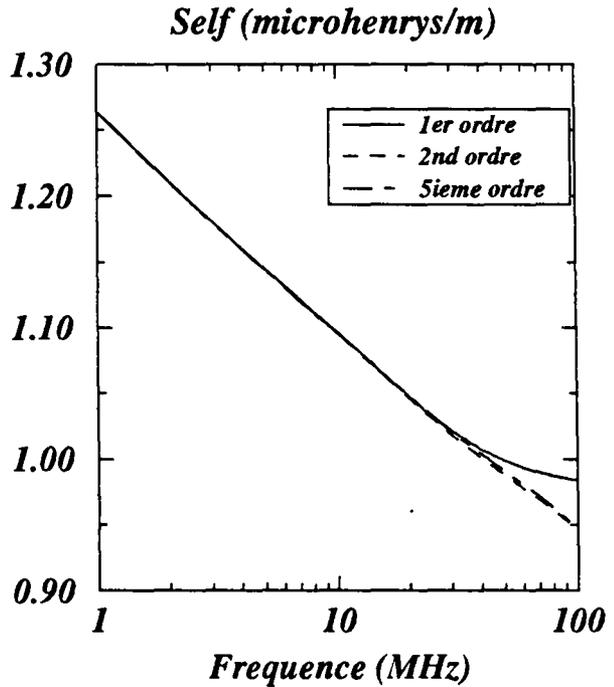
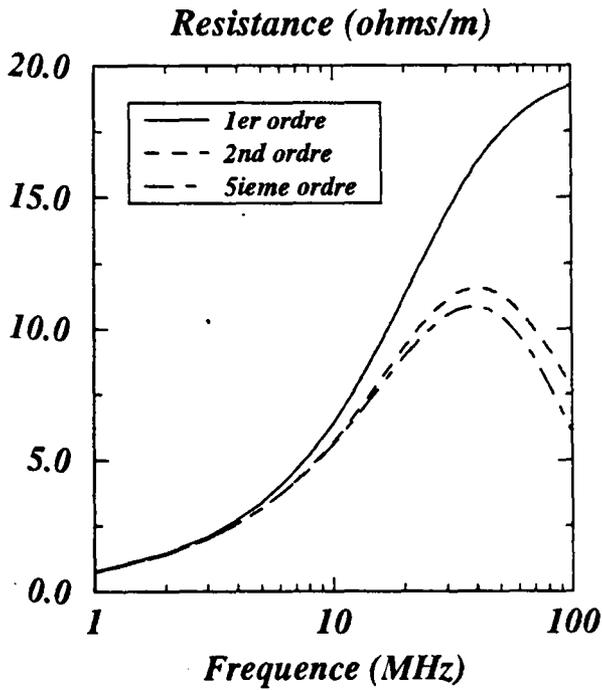


Hauteur : 1 m
 Rayon : 1,5 cm
 Sigma : 0,01 S/m
 Epsilon : 10

Admittance Lineique

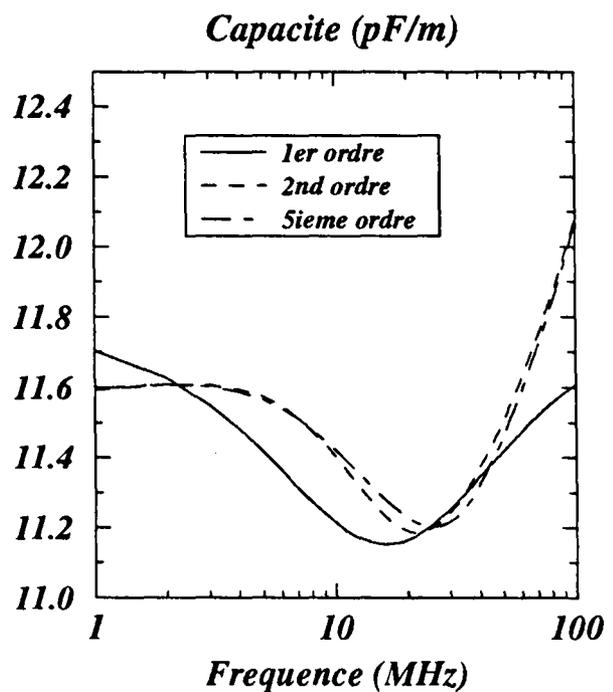
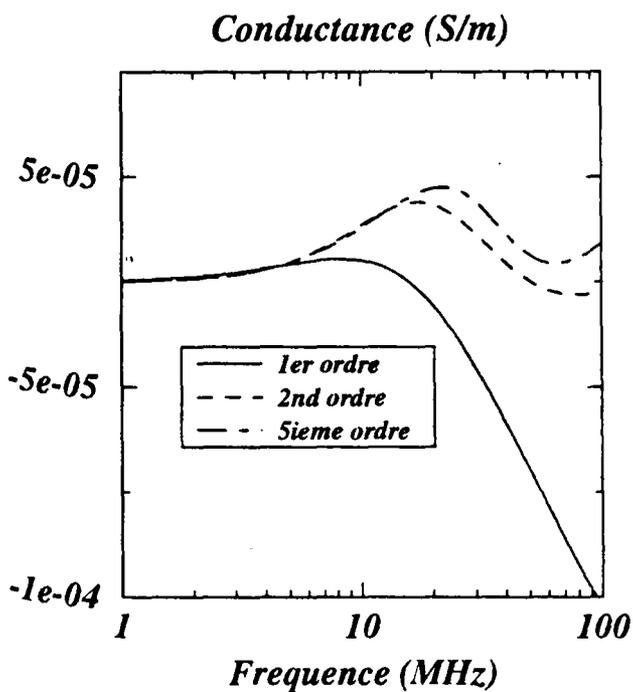


Impedance Lineique



Hauteur : 1 m
 Rayon : 1,5 cm
 Sigma : 0,01 S/m
 Epsilon : 10
 Rayon gaine : 2 cm
 Epsilon gaine : 2,56

Admittance Lineique



valeurs des paramètres restent valables pour des ordres d'itérations supérieurs. C'est à dire que la valeur de la capacité augmente avec la gaine alors que la valeur de la self demeure fixe. En résumé, le processus itératif n'entraîne pas une variation non physique des paramètres.

En fait, on pourrait aussi calculer les paramètres linéiques avec les constantes de propagation solutions de l'équation modale mais cela entraîne toujours la question du choix de la constante entre celle du mode rapide ou ligne de transmission. Ceci paraît d'autant plus difficile que ce choix va dépendre de deux paramètres : la fréquence et la distance séparant le point d'observation du générateur.

II.2.3. Configuration de la ligne enterrée

Nous nous intéressons maintenant au cas d'une ligne gainée et enterrée. Nous reprenons la même configuration de ligne mais en la plaçant à 1 mètre de profondeur. Les expressions (III-41) et (III-42) sont toujours valables. A cette profondeur, nous savons que le mode *rapide* n'existe pas car il disparaît dans la branche de coupure due à η_B . Seul le mode *ligne de transmission* subsiste nous avons tracé son atténuation ainsi que sa vitesse de phase (TA-LT) sur la planche n°22.

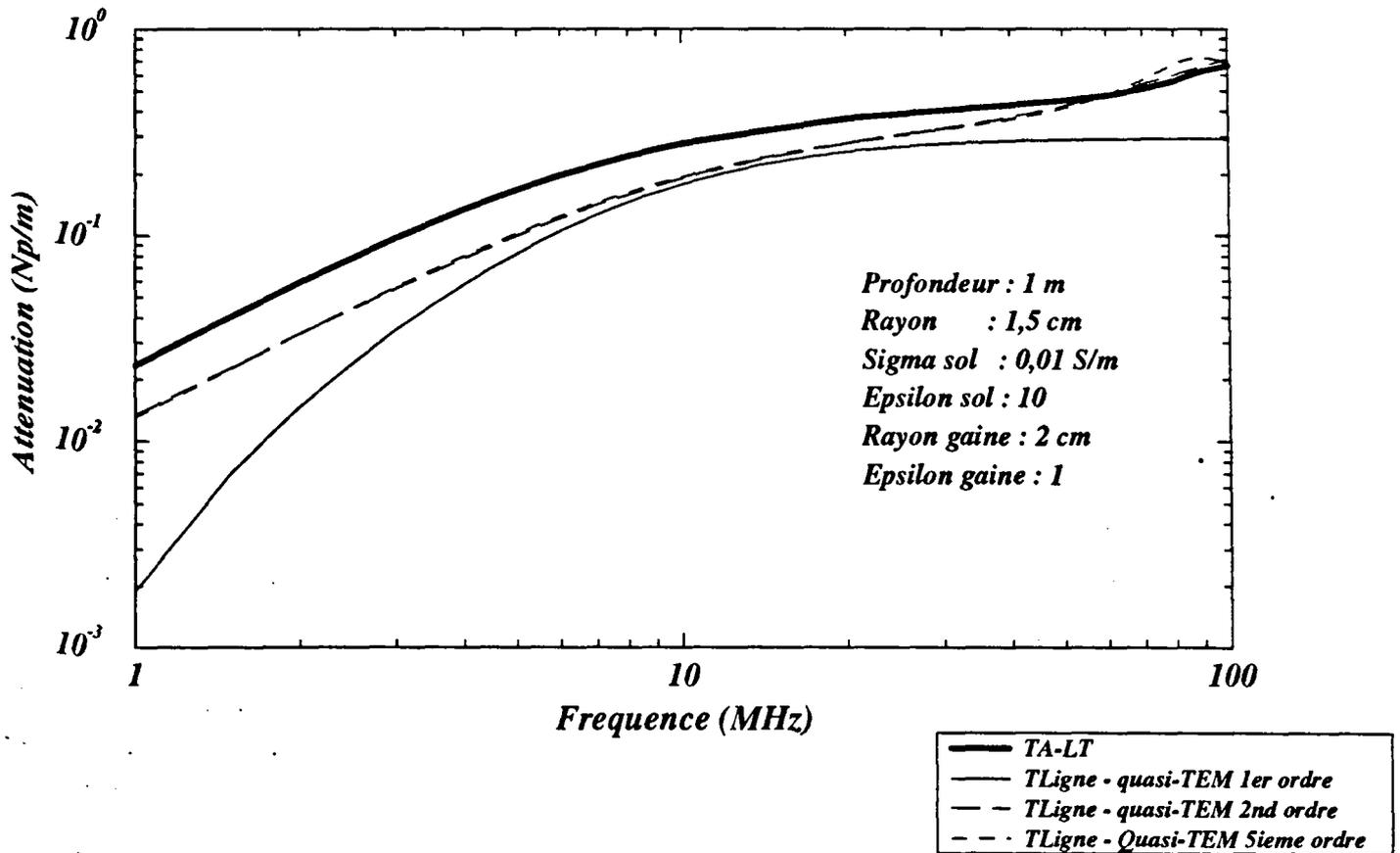
La schématisation de la ligne par les paramètres linéiques (TLignes - 1^{er} ordre) de l'approximation quasi-TEM donne une erreur importante pour l'atténuation en basses fréquences jusque 3 MHz et diverge aussi à partir de 50 MHz. Pour des ordres supérieurs d'itération (TLignes - 2nd et 5^{ième} ordre) l'écart en basses fréquences subsiste et l'amélioration n'intervient qu'en hautes fréquences. Nous pouvons observer une erreur pour la vitesse de phase que le processus d'itération ne parvient pas à réduire.

Les paramètres linéiques de la ligne enterrée et gainée sont représentés sur la planche n°23. La différence entre les paramètres de l'approximation du premier ordre et ceux des ordres suivants se reflète particulièrement sur l'impédance linéique où la valeur de la self diminue notablement. Cet écart de valeur pour la self entre le premier ordre et les suivants apparaît pour la première fois. En effet, pour la ligne aérienne, la self était le paramètre le plus stable en fonction du nombre d'itérations.

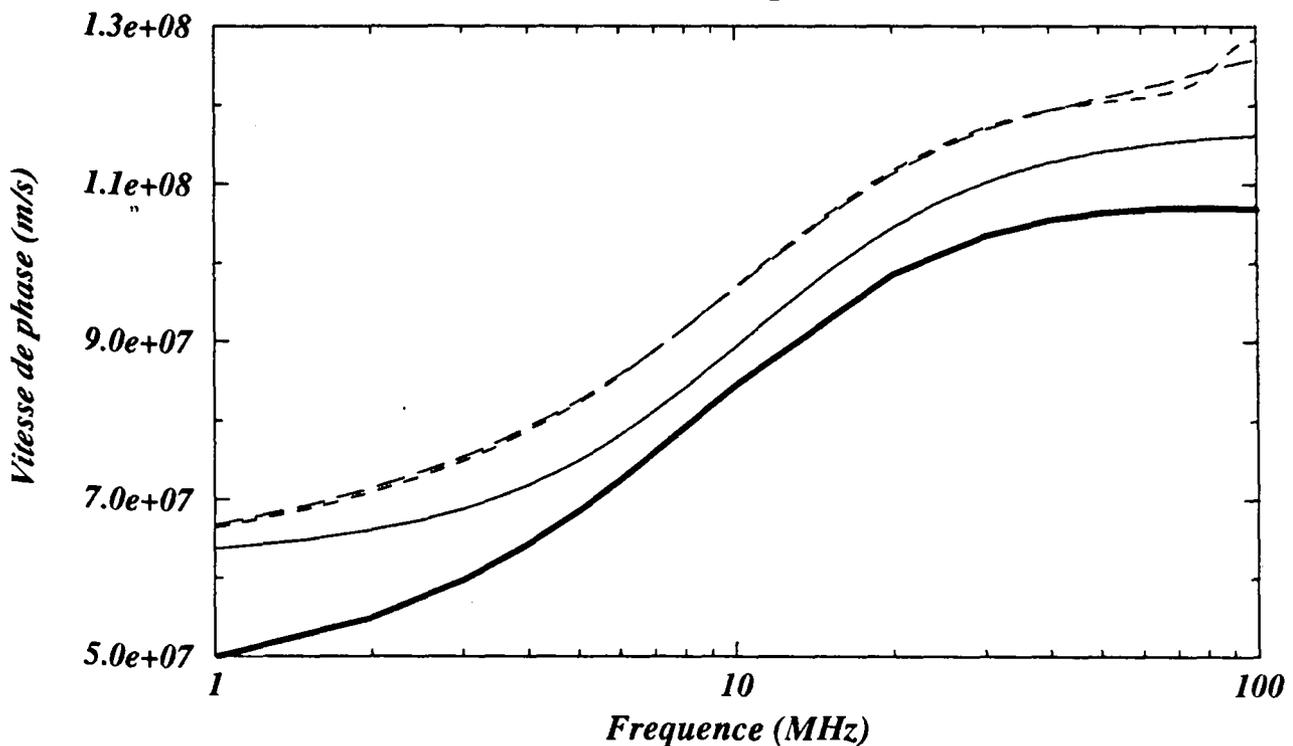
De plus, il ressort de l'étude des planches n°21 et n°23 que la capacité que présente une ligne enterrée et gainée est plus forte d'un facteur 20 que celle d'une même ligne mais aérienne. La self garde une valeur identique aux alentours de 1,2 μ H. Les résistances et conductances sont aussi beaucoup plus élevées, ce qui traduit une plus grande atténuation en ligne.

Constante de propagation sur une ligne enterree

Attenuation

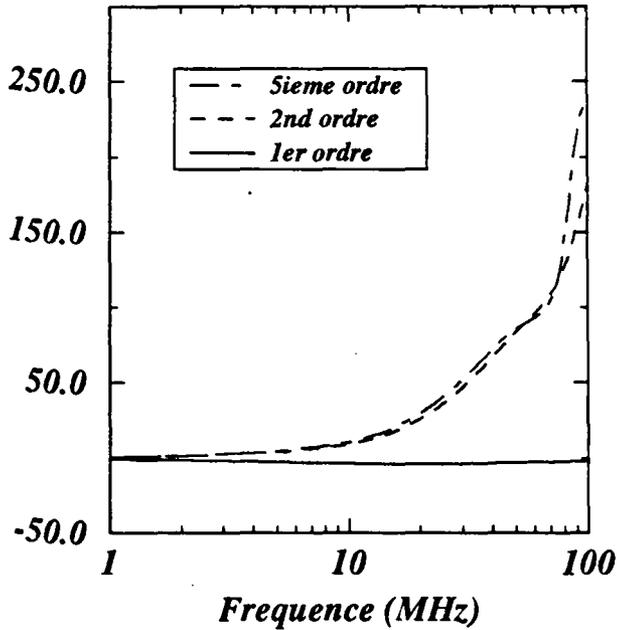


Vitesse de phase

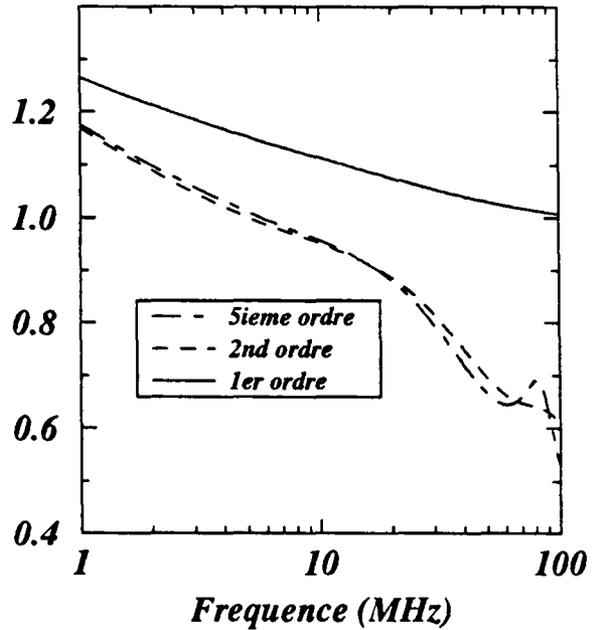


Impedance Lineique

Resistance (ohms/m)



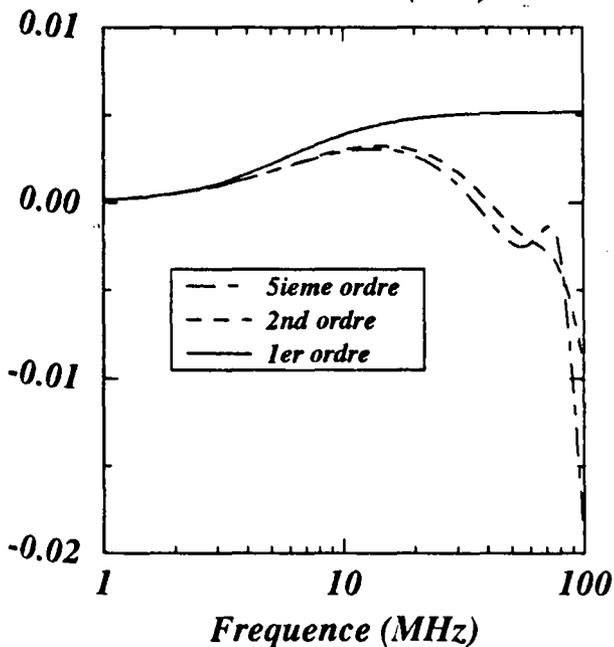
Self (microhenrys/m)



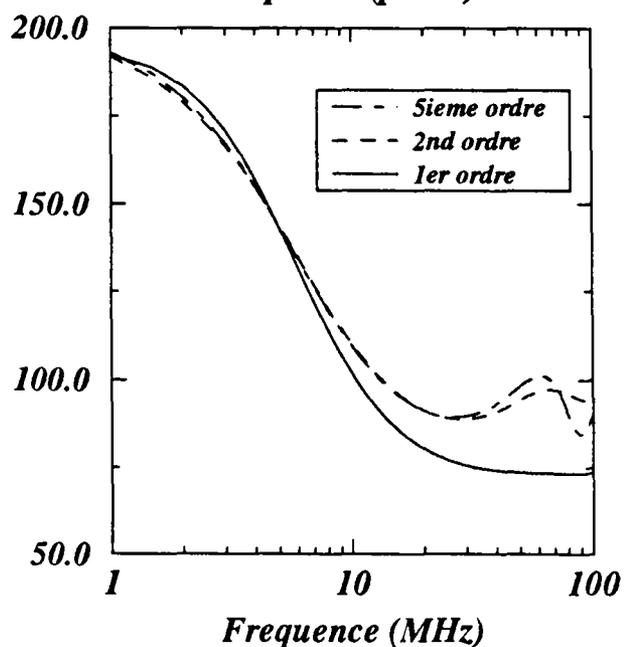
Profondeur : 1 m
 Rayon : 1,5 cm
 Sigma sol : 0,01 S/m
 Epsilon sol : 10
 Rayon gaine : 2 cm
 Epsilon gaine : 1

Admittance Lineique

Conductance (S/m)



Capacite (pF/m)



II.3. Modes de propagation et matrices modales des paramètres linéiques d'une ligne multifilaire

II.3.1. Définition des matrices modales

Nous désirons généraliser le processus que nous venons d'exposer à un faisceau de câbles. La difficulté principale auquel nous nous heurtons provient de la représentation modale de la ligne multifilaire. Si le milieu était homogène, il n'existerait qu'un mode guidé donc qu'une constante de propagation à partir de laquelle nous pourrions calculer les éléments constitutifs des matrices Z et Y. La procédure serait donc strictement identique à celle du conducteur unique.

En revanche, nous avons vu que sur une ligne multifilaire, le courant se propageant sur chaque conducteur est la combinaison de plusieurs modes de propagation. Quelle constante de propagation devons nous choisir pour le calcul de Z et Y ?

Pour tenter de répondre à cette question, supposons que les lignes sont adaptées et qu'il n'existe que des ondes progressives. Dans ce cas, la matrice des courants se met sous la forme (IV-21). Connaissant les courants, nous pouvons calculer les composantes longitudinales du champ électrique produit par chacun des modes et par chacun des conducteurs à partir de l'étude du chapitre Trois. La composante E_z produite par le conducteur k parcouru par un courant I formé de N modes de propagation et qui s'applique sur le conducteur j est en effet donnée par

$$E_{zj} = \sum_{m=1}^N \left[-Z_{jk}(\Gamma_m) + \frac{\Gamma_m^2}{Y_{jk}(\Gamma_m)} \right] T_{km} (a_m e^{-\Gamma_m z} + b_m e^{\Gamma_m z}) \quad (IV-25)$$

Nous appliquons les conditions de continuité du champ électrique à la surface de tous les conducteurs. Pour cela, nous devons sommer les composantes longitudinales rayonnées par chaque conducteur et générées par chaque mode du courant. Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{cases} E_{z1} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \left[-Z_{1k}(\Gamma_m) + \frac{\Gamma_m^2}{Y_{1k}(\Gamma_m)} \right] T_{km} (a_m e^{-\Gamma_m z} + b_m e^{\Gamma_m z}) = 0 \\ \vdots \\ E_{zN} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \left[-Z_{Nk}(\Gamma_m) + \frac{\Gamma_m^2}{Y_{Nk}(\Gamma_m)} \right] T_{km} (a_m e^{-\Gamma_m z} + b_m e^{\Gamma_m z}) = 0 \end{cases} \quad (IV-26)$$

Cette dernière relation peut s'exprimer sous forme matricielle. Dans ce cas, nous désirons obtenir une forme analogue à l'expression (III-27) afin de définir de nouveau une matrice impédance et une matrice admittance. Pour un faisceau multiconducteur, la relation (III-27) s'extrapole pour donner l'expression ci-dessous:

$$[E_z] = \{-[Z] + [\tilde{Y}]^{-1}[T][\Gamma^2][T]^{-1}\}[T]\{[e^{-\Gamma z}][A] + [e^{\Gamma z}][B]\} = 0 \quad (IV-27)$$

On montre aisément que l'on obtient l'expression (IV-27) à partir de la relation (IV-26) à la condition de définir la matrice impédance $[Z]$ et $[Y]$ par

$$[Z] = \left\{ \sum_{m=1}^N [Z(\Gamma_m)] \begin{bmatrix} 0 & \dots & T_{1m} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & T_{Nm} & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\} [T]^{-1} \quad (IV-28)$$

$$[Y]^{-1} = \left\{ \sum_{m=1}^N \Gamma_m^2 [\tilde{Y}(\Gamma_m)]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & T_{1m} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & T_{Nm} & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\} [\Gamma^2]^{-1} [T]^{-1} \quad (IV-29)$$

où les matrices $[Z(\Gamma_m)]$ et $[\tilde{Y}(\Gamma_m)]$ correspondent aux matrices modales impédances et admittances que l'on calcule par les expressions (III-49) et (III-50). Nous nous apercevons que les matrices globales $[Z]$ et $[Y]$ se composent à partir des matrices impédances et admittances modales. Ces matrices globales ne peuvent pas néanmoins être calculées directement. En effet, il faudrait pour cela connaître les constantes de propagation et les matrices de passage $[T]$ qui dans la théorie classique des lignes couplées se calculent en diagonalisant le produit des matrices $[Z]$ et $[Y]$.

" Nous proposons un processus itératif analogue à celui de la ligne monofilaire avec pour point de départ l'approximation quasi-TEM. La procédure employée est indiquée sous la forme de l'organigramme présenté dans le tableau n°3.

Au départ nous supposons que le courant sur chacun des conducteurs n'est constitué que d'un seul mode caractérisé par une constante de propagation égale à celle du demi-milieu supérieur. La diagonalisation du produit des deux matrices des paramètres linéiques permet de connaître les N constantes de propagation du second ordre. Ces constantes de propagation représentent les modes différentiels et le mode commun. A chaque mode est associé un vecteur

qui représente la répartition du courant sur les conducteurs. Tous ces vecteurs forment la matrice de passage [T] qui est obtenue lors de la diagonalisation.

Connaissant les constantes de propagation ainsi que la matrice de passage, nous pouvons calculer pour chaque mode les matrices impédances et admittances modales et reconstituer les matrices globales [Z] et [Y] que l'on peut de nouveau diagonaliser et ainsi de suite.

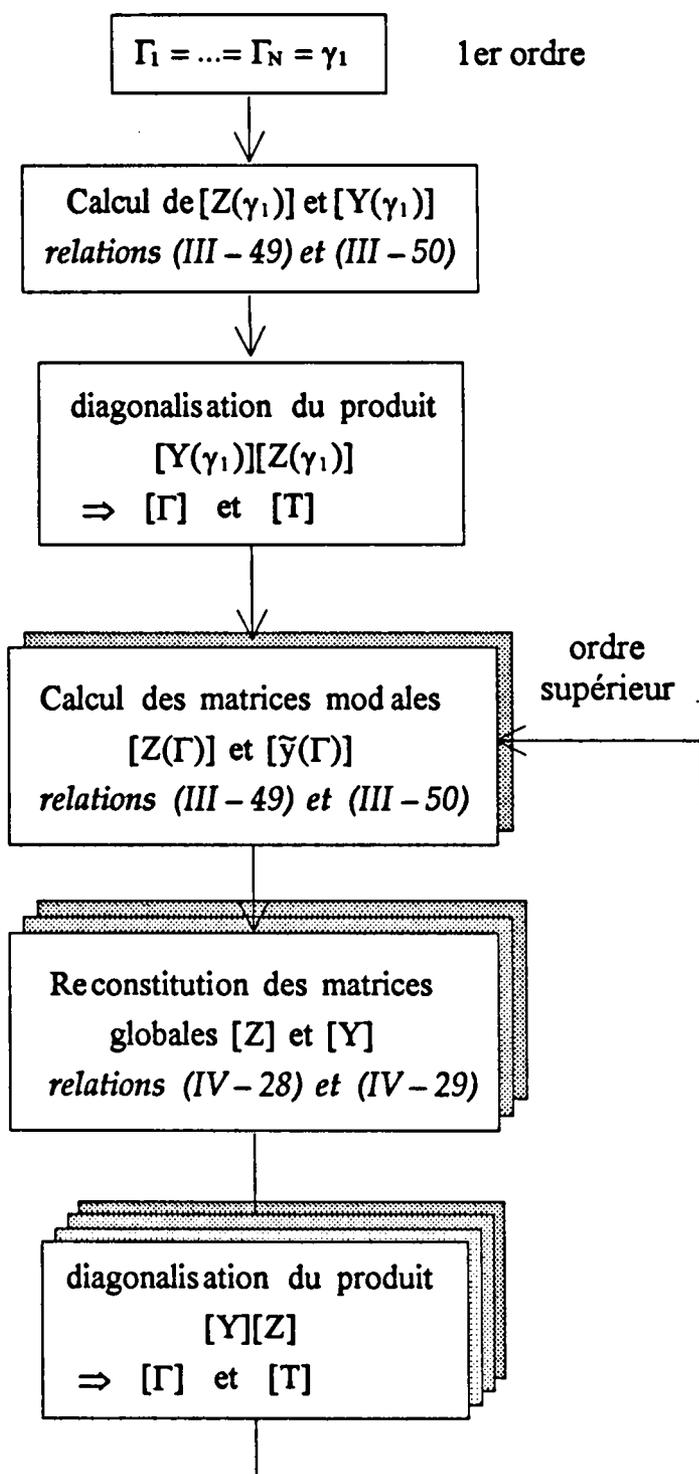


Tableau n°3 : Organigramme du processus itératif pour un faisceau multiconducteur

II.3.2. Modes de propagation sur une ligne bifilaire

Nous avons appliqué le procédé que nous venons de décrire à une ligne bifilaire et aérienne situé au-dessus du sol. Les deux conducteurs sont nus et placés à la même hauteur de 1 m, l'espacement entre eux étant fixé à 20 cm.

Nous avons vu qu'une ligne bifilaire pouvait supporter quatre modes de propagation : le mode *ligne de transmission* commun, le mode *rapide* commun, le mode *rapide* différentiel et le mode *ligne de transmission* différentiel. Nous savons aussi que l'écartement de 20 cm n'est pas suffisant pour permettre l'existence de ce dernier mode.

Nous comparons les constantes de propagation en atténuation et en phase de la théorie des lignes couplées à celles des trois modes que nous venons d'évoquer sur les planches n°24 et n°25.

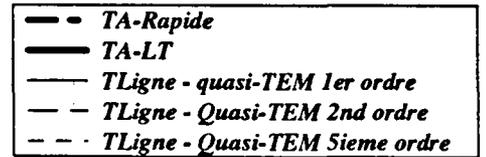
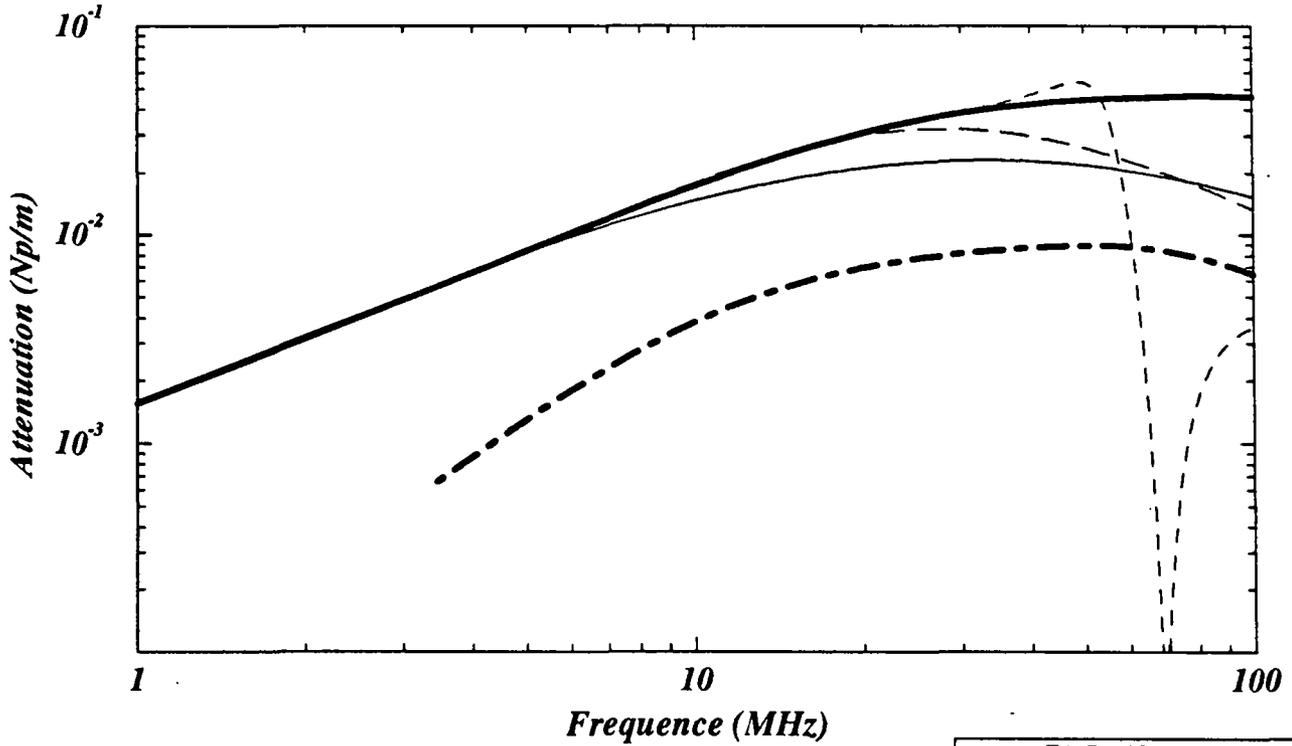
Sur la première de ces planches, nous comparons le mode commun calculé par le processus itératif que nous venons de présenter aux modes communs *ligne de transmission* (TA-LT) et *rapide* (TA-Rapide) de la théorie des antennes.

Il apparaît que le mode commun de la théorie des lignes calculé grâce à l'approximation quasi-TEM (TLignes -QT 1^{er} ordre) reste très proche du mode *ligne de transmission* jusque 10 MHz pour ensuite commencer à se rapprocher du mode *rapide*. L'amélioration apportée par une itération (second ordre) est faible. L'introduction du cinquième ordre permet à la théorie des lignes couplées de converger jusque 60 MHz avec le mode ligne de transmission. Mais nous assistons à un phénomène particulier aux alentours de 70 MHz où la constante converge brusquement vers celle du mode *rapide* différentiel (non représenté sur cette planche) pour finalement se rapprocher du mode *rapide* commun.

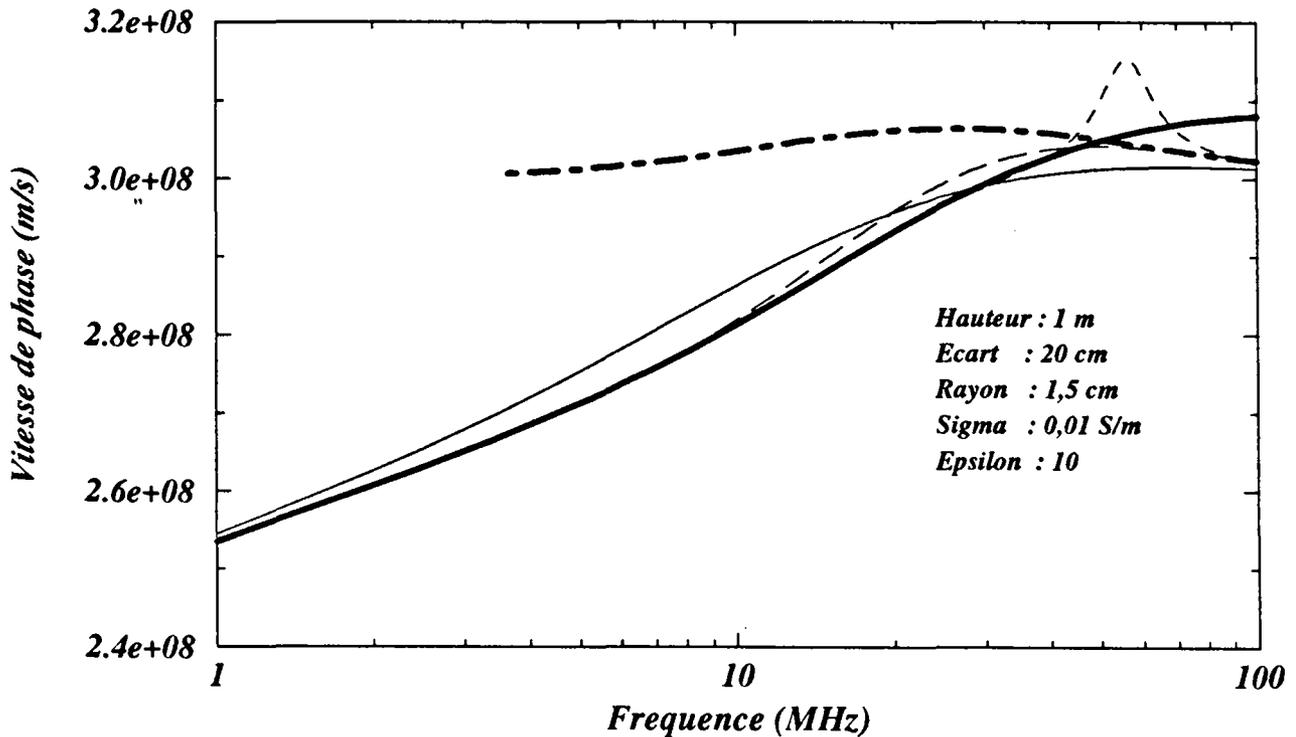
Sur la planche n°25, nous avons représenté les constantes de propagation du mode différentiel de la théorie des lignes couplées et du mode rapide différentiel. Nous nous apercevons qu'une parfaite concordance existe sur toute la plage de fréquences et quelque soit le nombre d'itérations.

La principale limitation de la théorie des lignes proviendra de l'unicité du mode commun et qui ne concorde pas avec les modes communs de la théorie des antennes sur certaines plages de fréquences. Les modes différentiels relativement peu influencés par la présence du sol ne seront pas sources d'erreurs au sein de la théorie des lignes couplées.

Constante de propagation du mode commun sur une ligne bifilaire
Attenuation

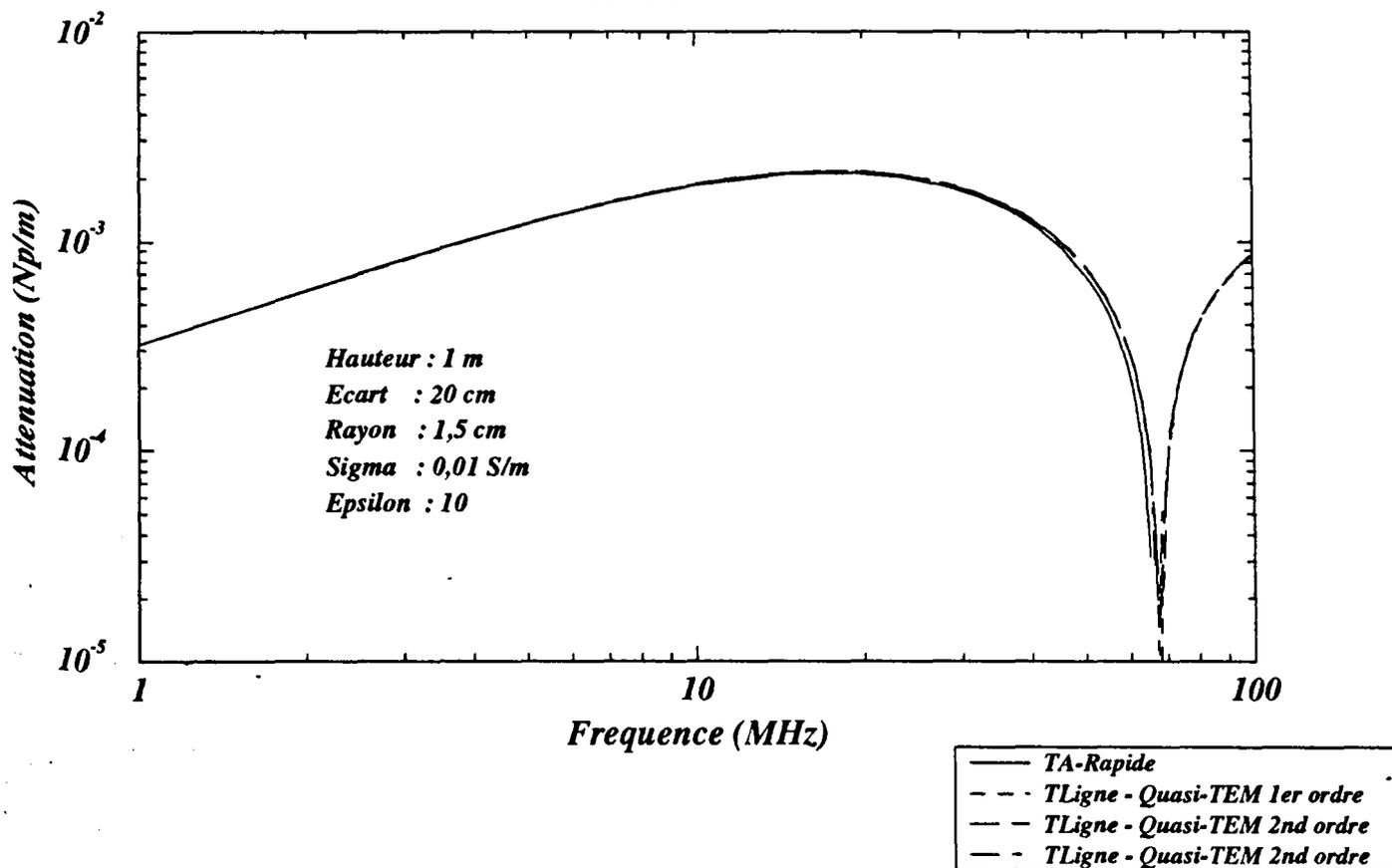


Vitesse de phase

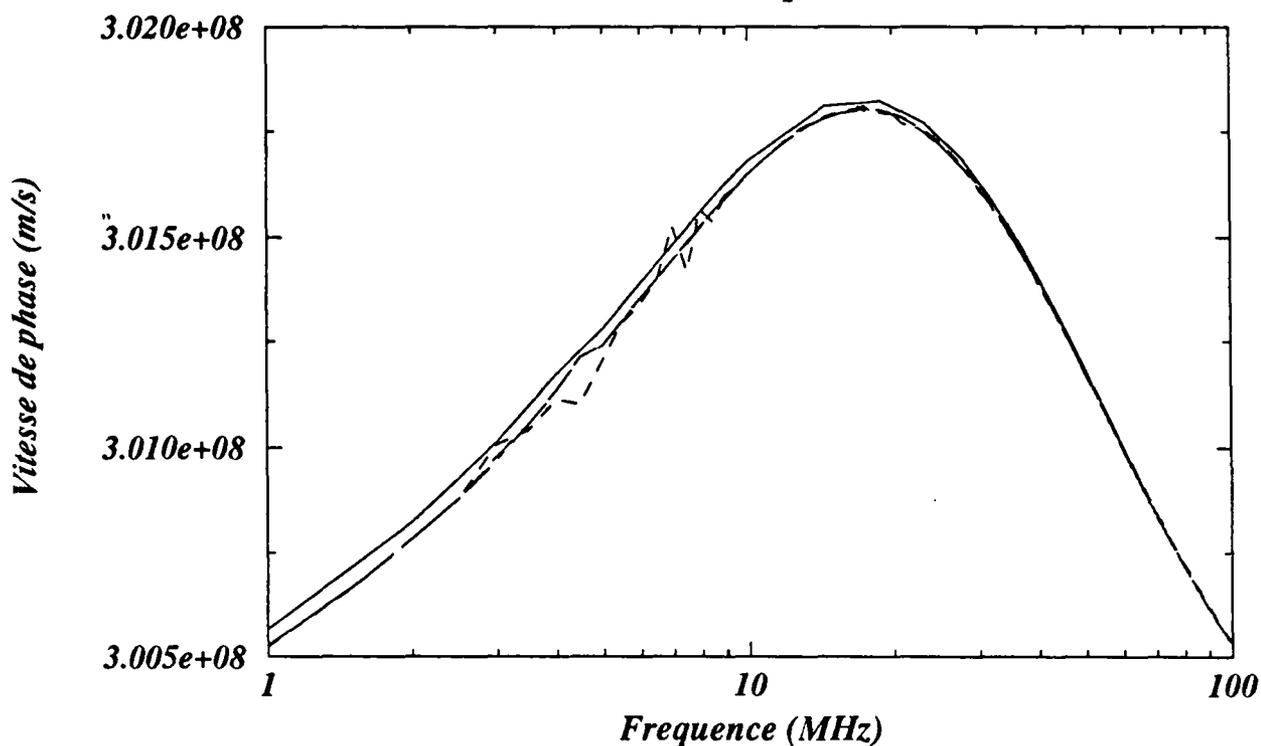


Hauteur : 1 m
 Ecart : 20 cm
 Rayon : 1,5 cm
 Sigma : 0,01 S/m
 Epsilon : 10

Constante de propagation du mode différentiel sur une ligne bifilaire
Atténuation



Vitesse de phase



Là encore, la procédure d'itérations peut être une solution pour améliorer la prédiction de l'atténuation et de la vitesse de phase des différents modes se propageant sur la ligne.

Il serait de nouveau intéressant d'étudier la distribution du courant le long des câbles et de comparer ce résultat avec celui donné par la théorie des antennes en sommant l'effet de tous les courants modaux. Malheureusement, nous attirons l'attention sur la complexité qu'entraîne le calcul de ces courants modaux et qui nous empêche de le faire. En effet, d'après les relations (IV-23) et (IV-24), il est nécessaire de calculer la dérivée de l'équation modale qui pour une ligne multifilaire s'obtient en calculant le déterminant d'une matrice. Sachant que cette dérivée se fait analytiquement, le calcul de la dérivée d'un déterminant est une opération trop compliquée et nous n'avons pas cherché à poursuivre ce calcul.

Les paramètres linéiques sont représentés sur les planches n°26 et n°27 en fonction de la fréquence et pour trois itérations différentes. Il apparaît que les paramètres Z_{11} et Z_{12} varient dans les mêmes proportions en fonction de la fréquences et du nombre d'itérations. La self L_{12} est toutefois plus faible que L_{11} . Pour les admittances, nous remarquons que la capacité C_{12} est moitié moindre que C_{11} et de signe opposé. Par contre l'évolution fréquentielle des conductances différent quelque peu en hautes fréquences en fonction de l'ordre d'itération, la conductance G_{12} restant positive pour un ordre d'itération supérieur à deux.

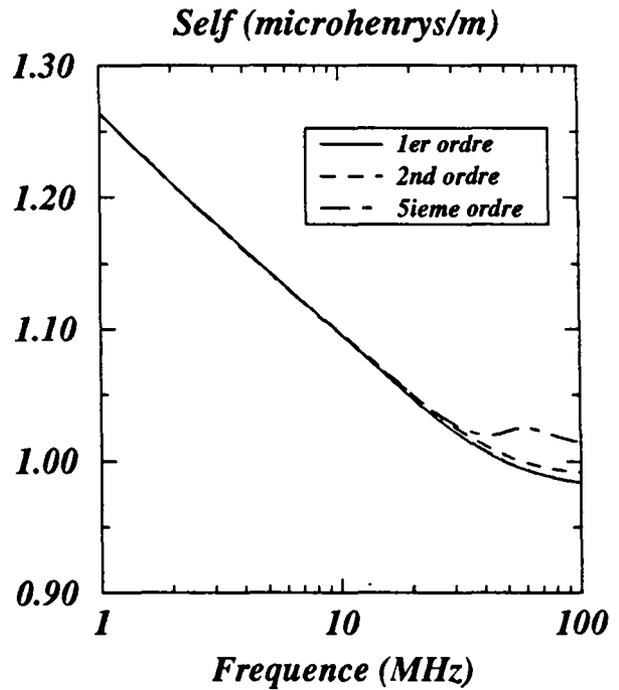
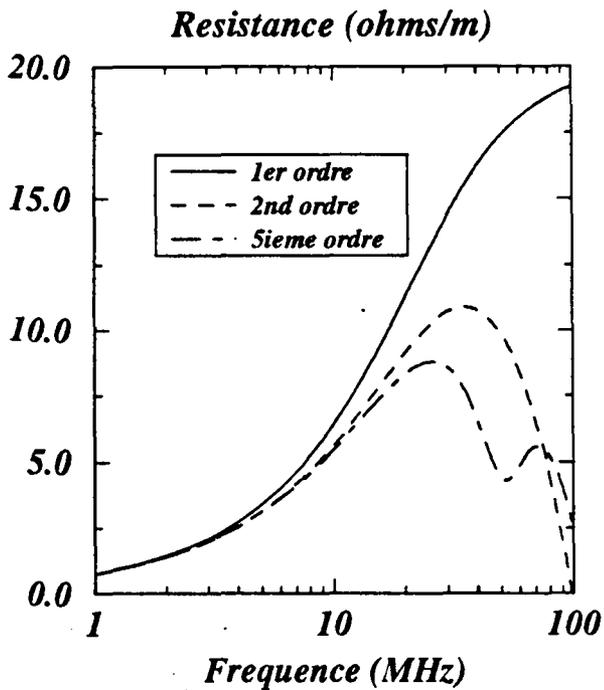
III. Résolution de l'équation différentielle pour une illumination par une onde plane

Si maintenant nous nous intéressons au cas de l'illumination de la ligne par une onde plane incidente, d'une manière générale, la composante électrique longitudinale peut se mettre sous la forme :

$$E_z^{\text{ext}}(x, y, z) = E_z^{i+r}(x, y) e^{-\Gamma_0 z} \quad (\text{IV-30})$$

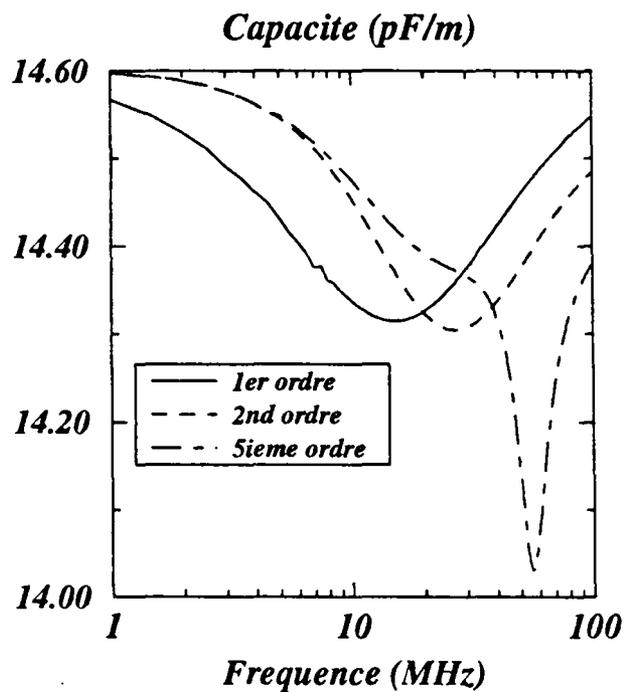
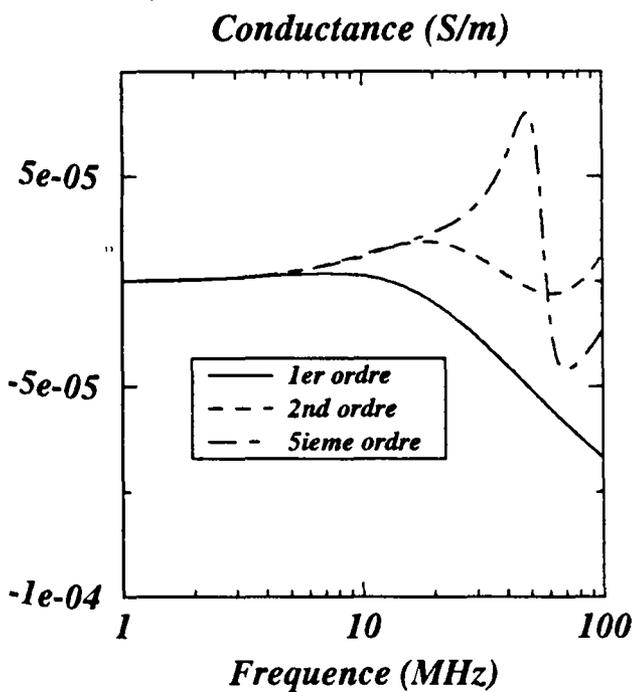
L'onde se propage selon l'axe Oz avec une constante de propagation Γ_0 qui tient compte de l'angle d'incidence mais aussi de l'angle d'azimut formé par la direction du câble et la direction de propagation de l'onde (cf. annexe A). Nous avons vu que le courant sur chaque ligne était donné par la relation (IV-17). Nous allons scinder notre étude du courant induit en deux parties afin de faciliter la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu.

Impedance Lineique Z_{11}

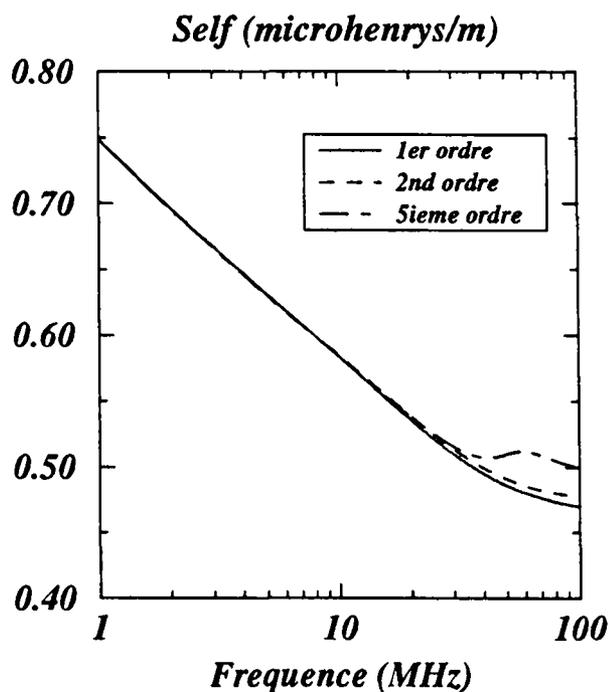
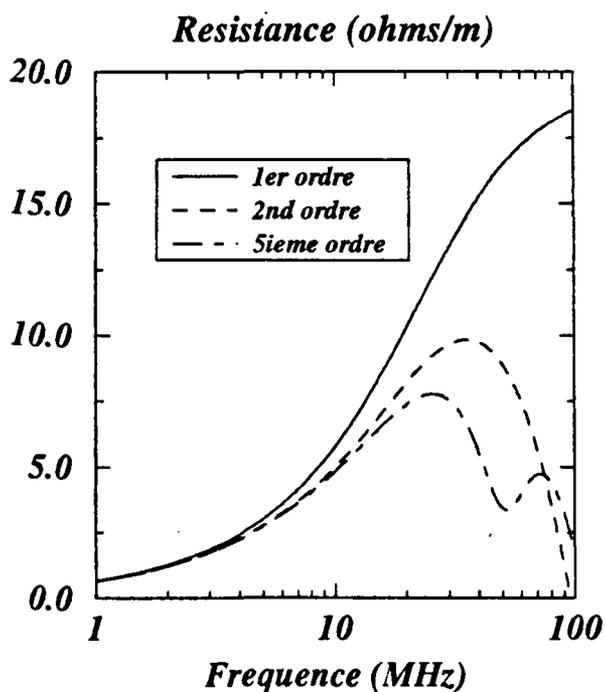


Hauteur : 1m
Ecart : 20 cm
Rayon : 1,5 cm
Sigma : 0,01 S/m
Epsilon : 10

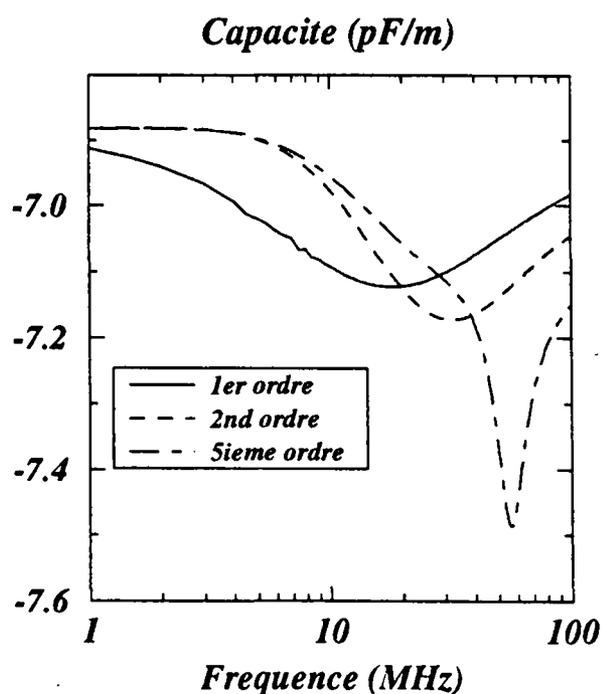
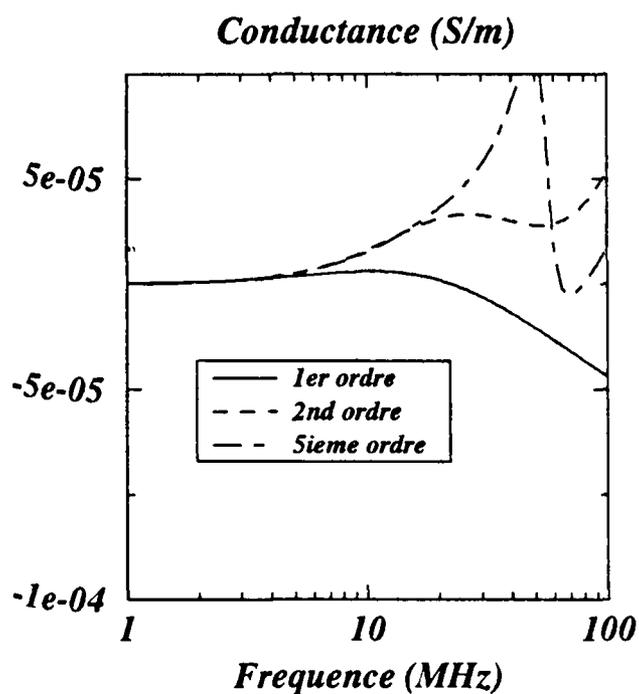
Admittance Lineique Y_{11}



Impedance Lineique Z12



Admittance Lineique Y12



III.1. Ligne de longueur infinie

Nous allons dans un premier temps considérer un faisceau de longueur infinie. Dans le cadre de cette hypothèse, les phénomènes de réflexion aux extrémités n'existent pas et l'expression (IV-17) du courant se simplifie pour donner

$$[I] = [T][\Gamma^2 - \Gamma_0^2]^{-1}[T]^{-1}[Y][e^{-\Gamma_0 z}][E_z^{i+r}] \quad (IV-31)$$

Nous pouvons énoncer la même remarque que celle qui a été faite dans la théorie des antennes, c'est à dire que le courant induit sur une ligne infinie se propage avec la même constante de propagation que le champ qui l'a créé. Les phénomènes de propagation propres à la ligne comme les modes différentiels par exemple n'existent pas. Cette configuration de la ligne de longueur infinie n'est pas représentative de tous les phénomènes physiques, son principal intérêt étant la possibilité de quantifier l'importance du couplage qui peut exister entre une onde et une ligne. Dans le cas d'un conducteur unique, cette condition peut s'écrire sous la forme (IV-32) à la condition de poser $ZY = \gamma_p^2$.

$$I(z) = \frac{E_z^{i+r}}{Z} \frac{\gamma_p^2}{(\gamma_p^2 - \Gamma_0^2)} e^{-\Gamma_0 z} \quad (IV-32)$$

La constante de propagation γ_p n'apparaît toutefois pas en terme de propagation. Il se pose toujours le problème du calcul des paramètres linéiques, à savoir avec quelle constante de propagation devons nous les calculer ?

Dans le cas de la ligne monoconducteur, si nous suivons la démarche indiquée dans le chapitre Trois, le champ électrique produit par un courant se propageant avec une constante Γ_0 se calcule par la relation (III-27) que nous rappelons ci-dessous

$$[E_{z_1}]_{x=b, y=a} = \left\{ -Z(\Gamma_0) + \frac{\Gamma_0^2}{Y(\Gamma_0)} \right\} I_m e^{-\Gamma_0 z} \quad (IV-33)$$

Nous pouvons observer que l'impédance et l'admittance se calculent à partir de la constante de propagation de l'onde plane. Les paramètres de la ligne vont donc dépendre du champ excitateur. Ce principe a été déjà introduit par Tesche [52].

De plus en appliquant les conditions de continuité du champ électrique à la surface du conducteur, on montre aisément que la relation (IV-33) peut se ramener à la relation plus classique (IV-32) à la condition de définir la constante γ_p par

$$\gamma_p = \sqrt{Z(\Gamma_0)Y(\Gamma_0)} \quad (\text{IV-34})$$

Ce faisant, la théorie des lignes mène à la même solution que la théorie des antennes puisque la relation (IV-33) en est extraite. La principale limitation de la théorie des lignes de transmission pour le calcul du courant induit par une onde plane provient de la définition des paramètres linéiques. En effet, dans la théorie plus classique, les paramètres linéiques ne dépendent que de la configuration géométrique de la ligne comme c'est le cas pour une ligne excitée localement par un générateur. Dans la littérature scientifique ces paramètres sont généralement les mêmes et sont calculés à partir de l'approximation quasi-TEM que nous avons déjà présentée.

Pour illustrer ce propos, nous avons représenté sur la planche n°28 les paramètres linéiques d'une ligne aérienne et parfaitement conductrice lorsqu'elle est soumise à une onde sous incidence rasante (5 degrés) et sous incidence normale (90 degrés). Ces paramètres sont comparés à ceux donnés par l'approximation quasi-TEM.

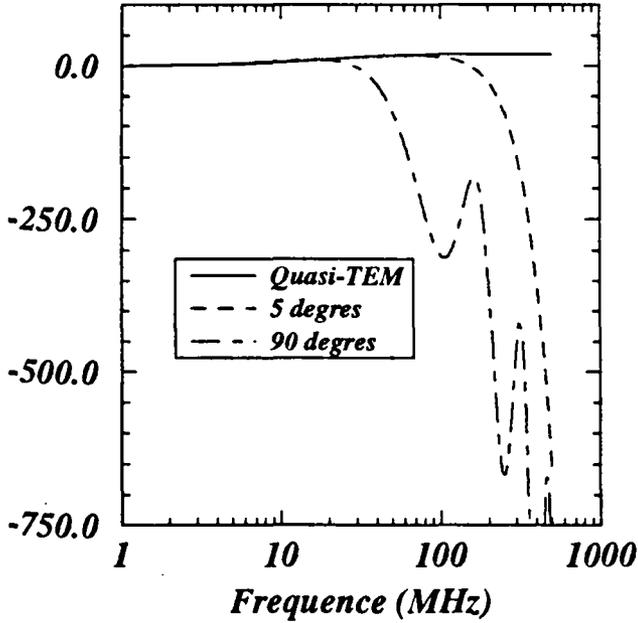
En basses fréquences, les trois formulations concordent parfaitement jusque 10 MHz. C'est la limite de validité de la théorie classique. En revanche, en hautes fréquences, les paramètres varient beaucoup en fonction de l'angle d'incidence de l'onde plane. Pour une illumination simultanée en particulier, les paramètres ne varient plus de manière habituelle et entrent en oscillations dès 100 MHz traduisant le couplage entre l'onde et le câble.

Pour une incidence rasante, les paramètres linéiques restent proches de ceux de l'approximation quasi-TEM jusque 200 MHz, la théorie des lignes classique peut donc s'appliquer plus haut en fréquence pour des ondes rasantes. Ce dernier point s'explique facilement par le fait que dans le cas d'une onde plane, la constante de propagation Γ_0 équivaut à $\gamma_1 \cos(\alpha)$ où α est l'angle d'incidence. Tant que le cosinus sera proche de l'unité, la théorie classique des lignes sera exploitable.

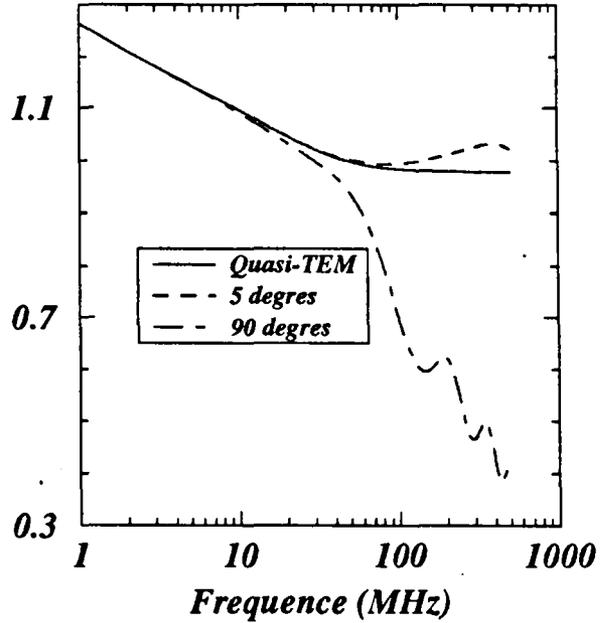
Si nous nous intéressons maintenant à un faisceau de N conducteurs, nous pouvons montrer que nous arrivons à la même conclusion, c'est à dire que les matrices impédances et admittances données par les relations (III-49) et (III-50) doivent en toute rigueur se calculer en introduisant la constante de propagation de l'onde plane incidente.

Impedance Lineique

Resistance (ohms/m)



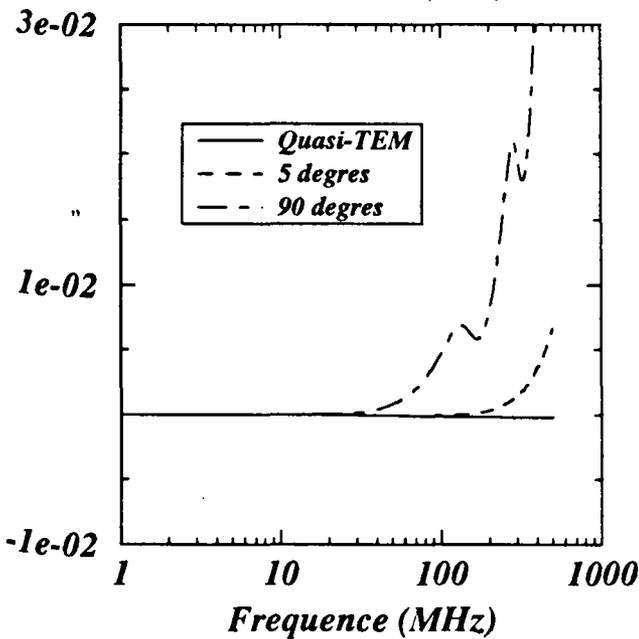
Self (microhenrys/m)



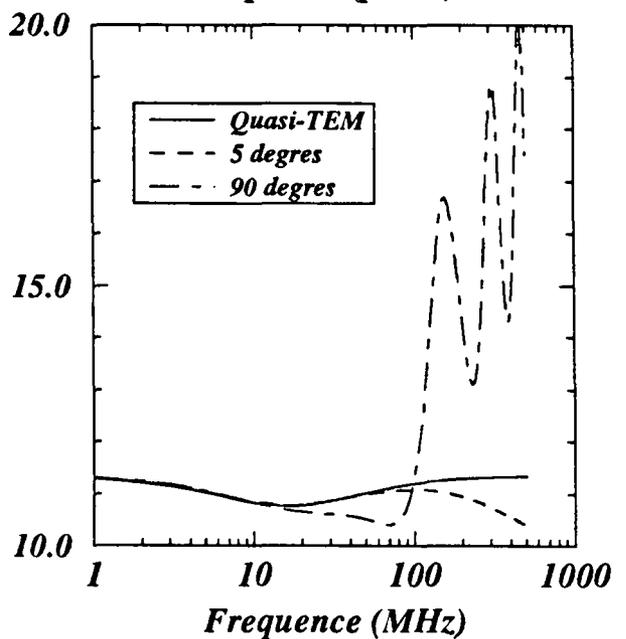
Hauteur : 1 m
 Rayon : 1,5 cm
 Sigma sol : 0,01 S/m
 Epsilon sol : 10

Admittance Lineique

Conductance (S/m)



Capacite (pF/m)



Nous nous sommes alors intéressés à comparer les écarts au niveau du courant induit par l'onde plane qu'engendrent les différentes méthodes de calcul des paramètres linéiques.

III.1.1. Câble aérien parfaitement conducteur

Nous considérons un conducteur placé à 1 mètre du sol et soumis à une onde plane se propageant dans le même axe que le câble. Nous comparons le résultat obtenu par la théorie des antennes et qui est équivalent à celui obtenu par la théorie des lignes qui utilise des paramètres variant avec la constante de propagation du champ excitateur à ceux obtenus par l'introduction des paramètres de l'approximation quasi-TEM ou ceux de Vance dans la théorie des lignes.

Sur la partie supérieure de la planche n°29, le module du courant induit en fonction de l'angle d'incidence de l'onde est indiqué pour trois fréquences.

La théorie des lignes converge vers la solution de la théorie des antennes en basses fréquences et notamment à 1 MHz quels que soient les paramètres mis en oeuvre. Les paramètres de Vance introduisent une erreur importante sur le niveau du courant induit dès 100 MHz pour les incidences rasantes. A 500 MHz, la théorie des lignes classique ne donne plus de bons résultats quel que soit l'angle d'incidence si l'on utilise les paramètres de Vance ou pour des angles d'incidence supérieurs à 10 degrés si l'on utilise ceux de l'approximation quasi-TEM.

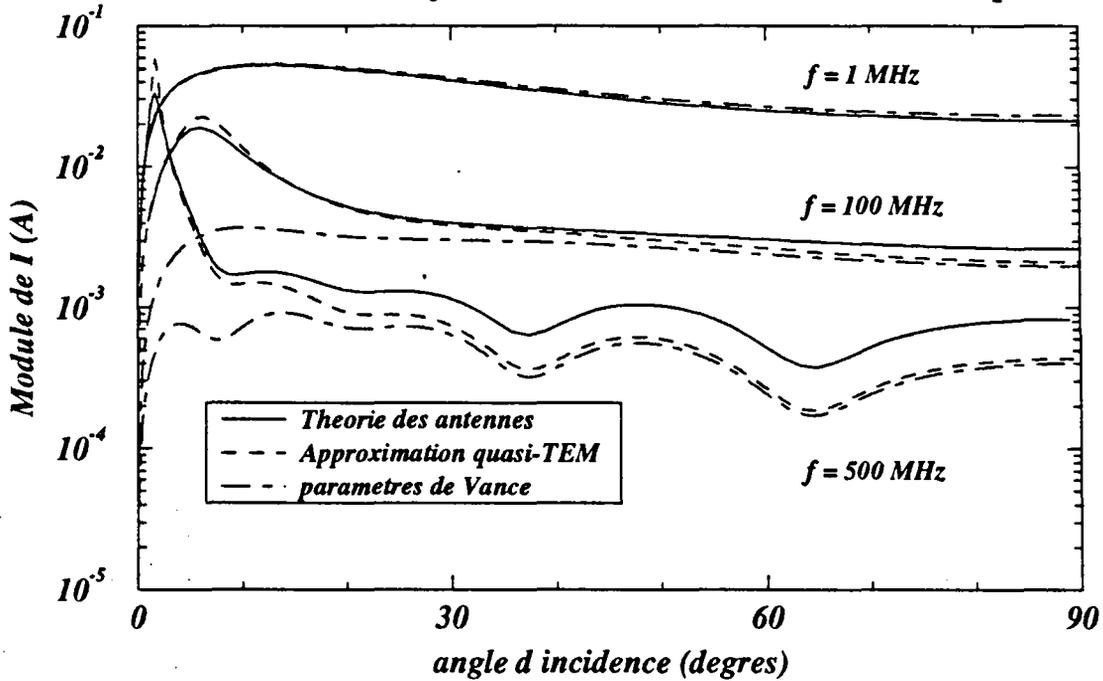
On retrouve directement la conclusion faite à propos des paramètres linéiques. Les paramètres linéiques de l'approximation quasi-TEM sont en effet très proches de ceux calculés pour une incidence de 5 degrés et on peut les utiliser pour obtenir le courant alors qu'ils diffèrent en hautes fréquences de ceux calculés pour une incidence normale. Dans ce cas l'approximation quasi-TEM mène à un résultat erroné.

Nous pouvons observer sur la partie inférieure de cette planche les conséquences de ces différences dans le domaine temporel. L'onde plane est sous incidence rasante (5 degrés) et générée par une IEMN ($\alpha=4.10^7 s^{-1}$, $\beta=4,76.10^9 s^{-1}$ et $A_0=100 V/m$).

La théorie des lignes qui utilise les paramètres de Vance entraîne une sous-estimation très importante tant en amplitude qu'en temps de montée. En revanche, cette même théorie avec les paramètres de l'approximation quasi-TEM donne une solution très proche de celle calculée par la théorie des antennes.

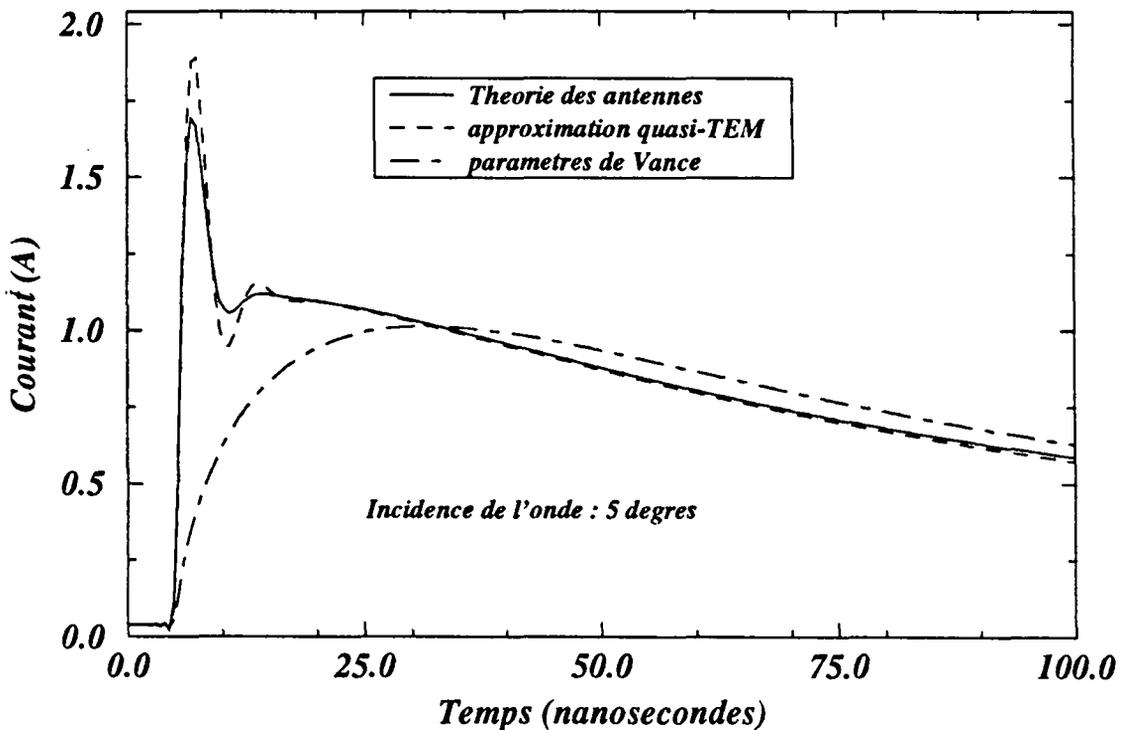
Courant induit sur une ligne monofilaire aeriene

Courant induit en fonction de l'incidence de l'onde plane



Hauteur : 1 m
 Rayon : 1,5 cm
 Sigma : 0,01 S/m
 Epsilon : 10
 Eo : 1 V/m
 Azimut : 0 degre
 Polar : 0 degre

Reponse temporelle du courant induit par une IEMN



III.1.2. Câble gainé

Dans le cas où la ligne est gainée, nous avons introduit une modification dans la méthode de calcul des paramètres linéiques qui ne permet pas de revenir aussi facilement que précédemment à la relation (IV-33) à partir de la relation (IV-32). C'est pourquoi, il est ici nécessaire de comparer le résultat donné par la théorie des antennes et celui donné par la théorie des lignes de transmission en utilisant la constante de propagation du champ externe pour le calcul des paramètres linéiques. Nous ajouterons aussi le cas où les paramètres sont calculés dans le cadre de l'approximation quasi-TEM.

La ligne monofilaire gainée et aérienne est considéré sur la planche n°30. Le courant calculé par les trois approches est indiqués pour deux fréquences de l'onde (1 MHz et 500 MHz). Si en basses fréquences, les trois approches concordent de manière satisfaisante, en hautes fréquences, le courant calculé par la théorie des lignes avec les paramètres de l'approximation quasi-TEM est sous-estimé pour des incidences supérieures à 20 degrés. Le fait de calculer les paramètres avec la constante de propagation du champ externe permet de corriger cet écart de niveau mais induit aussi une légère erreur pour des incidences rasantes. Notre formalisme qui permet de prendre en compte la gaine diélectrique autour du conducteur va entraîner une surestimation du courant induit pour des angles d'incidence inférieurs à 30 degrés.

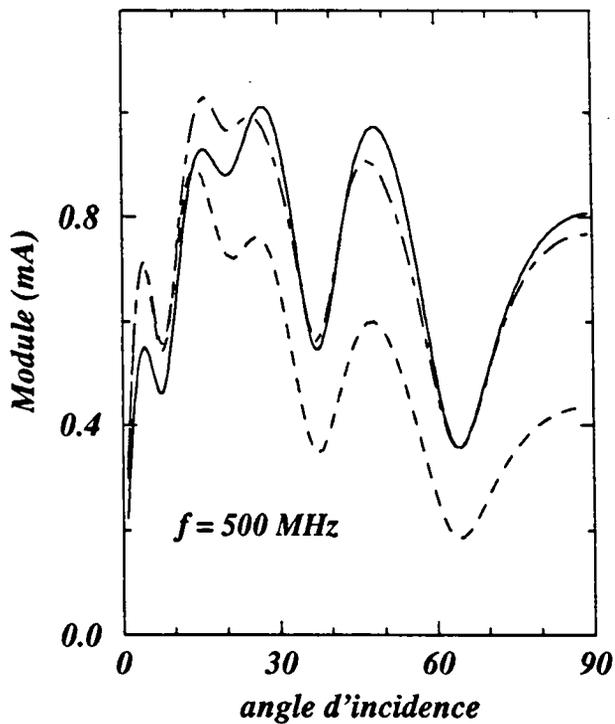
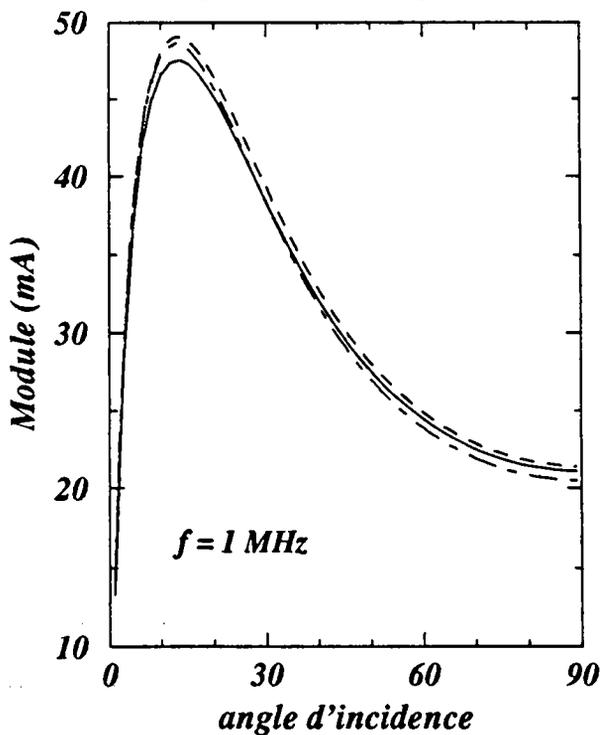
Toujours sur la planche n°30, nous pouvons nous apercevoir que la théorie des lignes de transmission peut s'appliquer en basses fréquences avec les deux définitions des paramètres pour une ligne enterrée et gainée. En revanche, en hautes fréquences, seule l'utilisation des paramètres qui varient avec l'angle d'incidence de l'onde plane permet à cette dernière théorie de converger vers le résultat de la théorie des antennes. L'utilisation des paramètres linéiques de l'approximation quasi-TEM conduit à un écart très important même pour de faibles angles d'incidence.

Nous avons tracé sur la planche n°31, les réponses temporelles de ces deux lignes à une IEMN. Pour la ligne aérienne, nous avons choisi une incidence rasante et pour la ligne enterrée une illumination simultanée afin de calculer à chaque fois le courant maximum susceptible d'exister.

Nous pouvons tout d'abord observer pour la ligne aérienne le peu de différence entre la théorie des antennes et la théorie des lignes même lorsque nous employons les paramètres linéiques de l'approximation quasi-TEM. Le fait de calculer Z et Y avec la constante de propagation du champ externe n'améliore presque pas la réponse en courant.

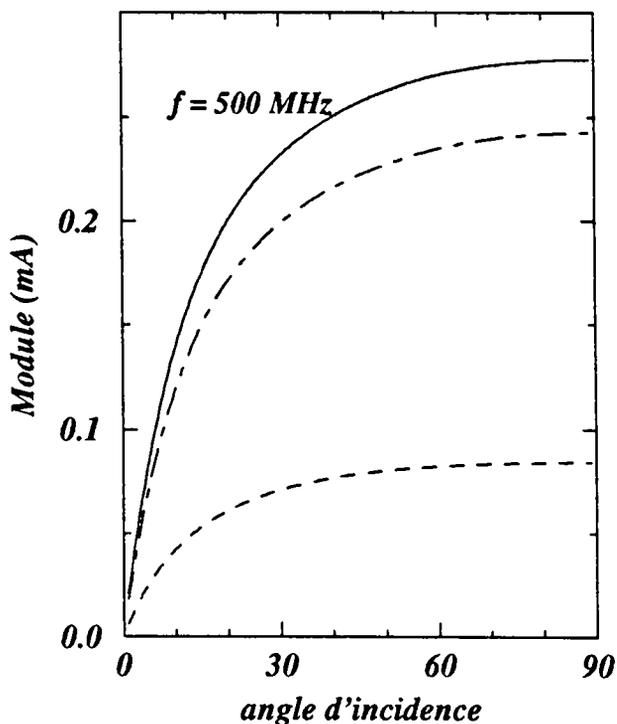
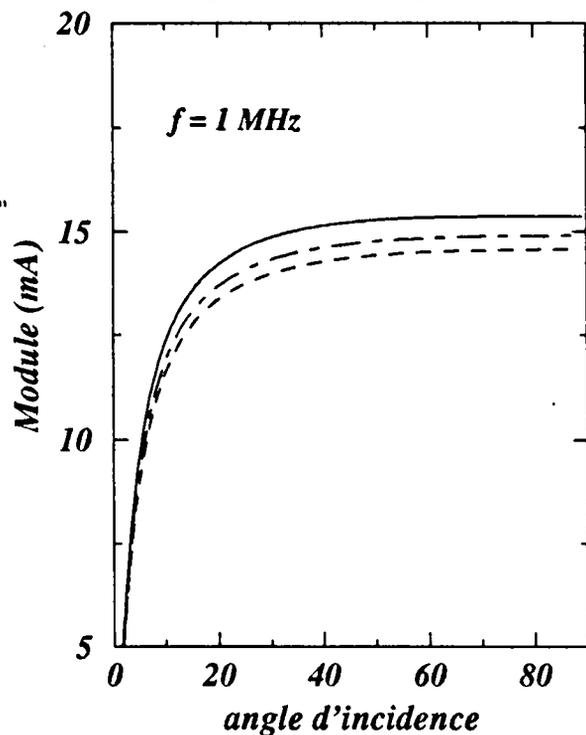
Courant induit par une onde plane

Ligne aeriene gaine



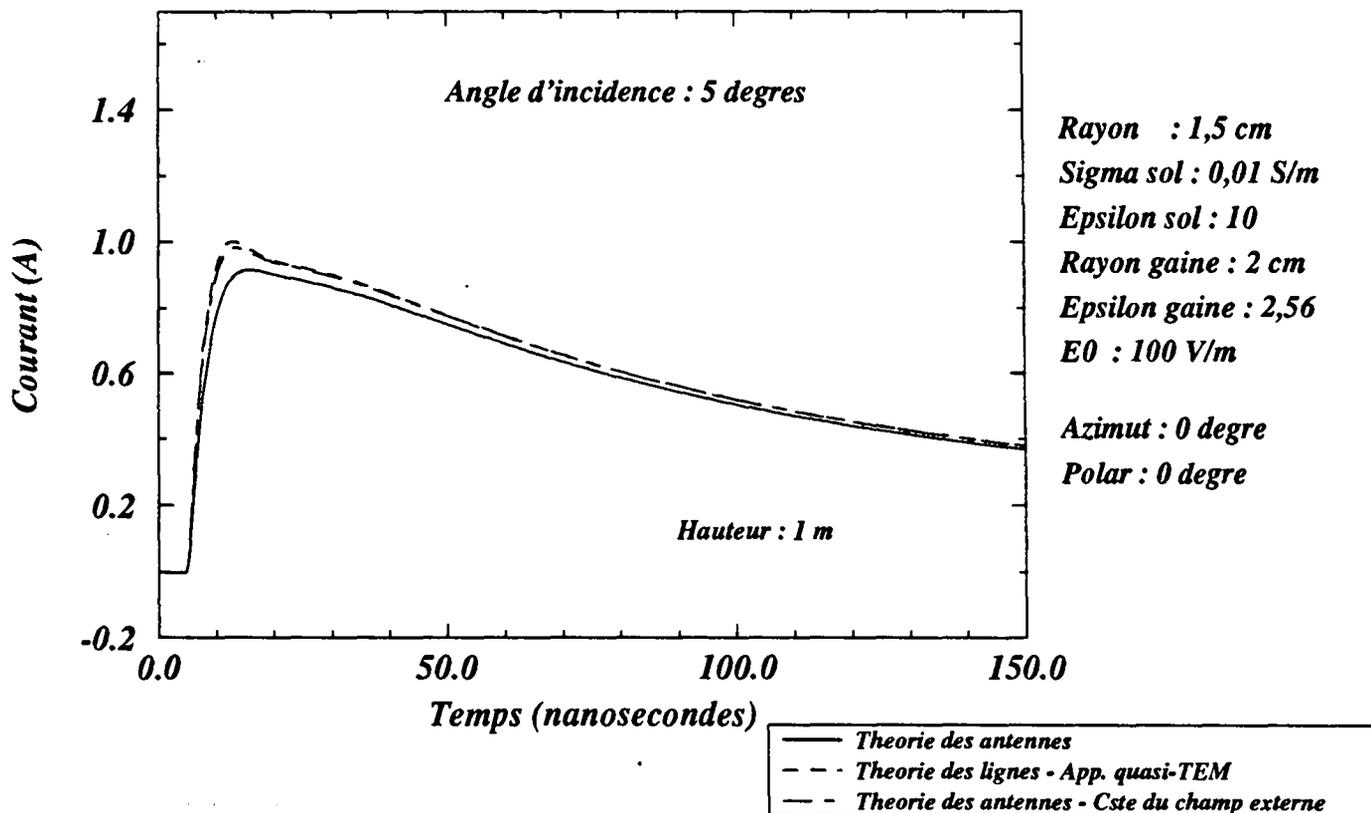
— Th. des antennes
 - - - Th. des lignes - App. quasi-TEM
 - · - Th. des lignes - Cste du champ externe

Ligne enterree gaine

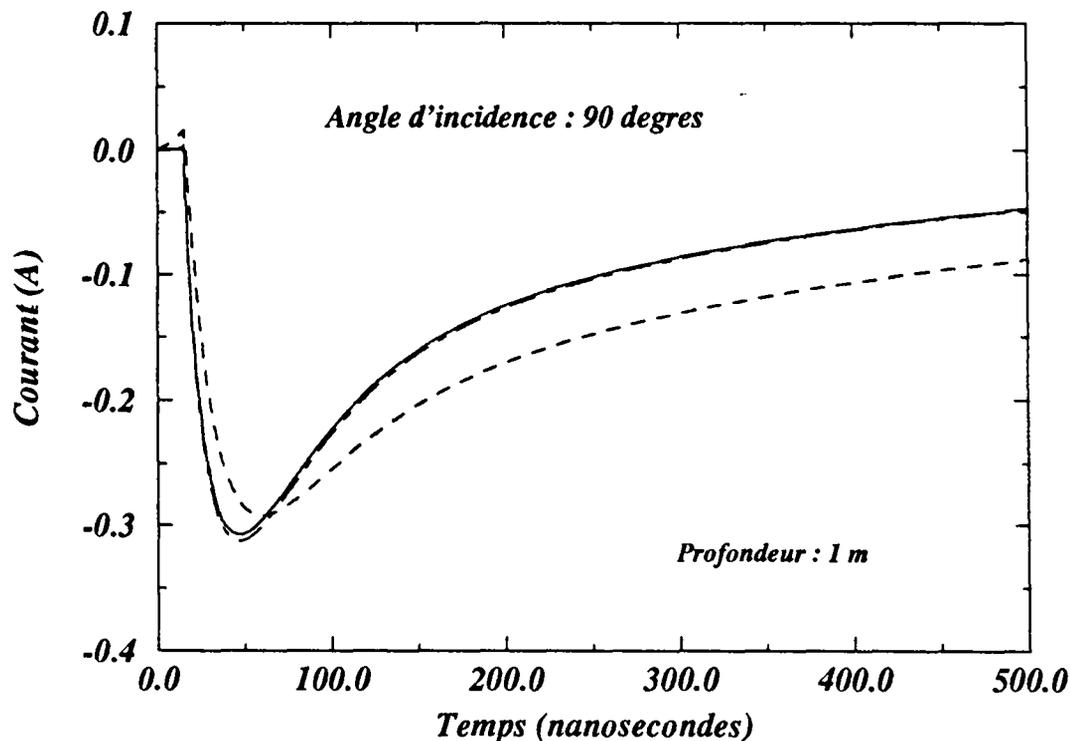


Reponse temporelle du courant induit par une IEMN

Sur un cable aerien et gaine



Sur un cable gaine et enterre



Il en va tout autrement pour la ligne enterrée où le courant calculé dans le cadre de l'approximation quasi-TEM ne concorde pas avec celui de la théorie des antennes. Néanmoins, le calcul des paramètres avec la constante de propagation du champ externe permet à la théorie des lignes de transmission de donner un résultat satisfaisant.

III.1.3. Modélisation d'un câble proche de l'interface par la théorie des lignes

La théorie des lignes couplées est largement utilisée dans la communauté scientifique pour calculer les courants induits sur un faisceau pour différents types d'ondes. Une des nombreuses applications est le calcul du courant induit par une IEMN sur des lignes de transport d'énergie [53] [54] [55].

Nous avons cherché à appliquer la théorie des lignes couplées à la modélisation du câble proche de l'interface que nous avons étudié dans le chapitre Deux par la méthode des moments. Le câble est supposé constitué par une somme de N petits conducteurs disposés de telle manière à reproduire le contour du câble comme il est indiqué sur la figure n°25.

Ce type de démarche a déjà fait l'objet d'une étude sur les goulottes et les chemins de câbles en basses fréquences [56] ou de la simulation d'un réflecteur cylindrique [57]. Nous désirons renouveler le même procédé mais en hautes fréquences avec la difficulté de calculer les matrices des paramètres linéiques que cela entraîne.

Le courant sur chaque conducteur est donné par la relation (IV-31) où le vecteur $[E_z^{i+r}]$ représente la composante longitudinale du champ électrique qui s'applique à la surface de chaque conducteur. Les paramètres linéiques sont calculés en introduisant la constante de propagation du champ externe dans les formules (III-49) et (III-50).

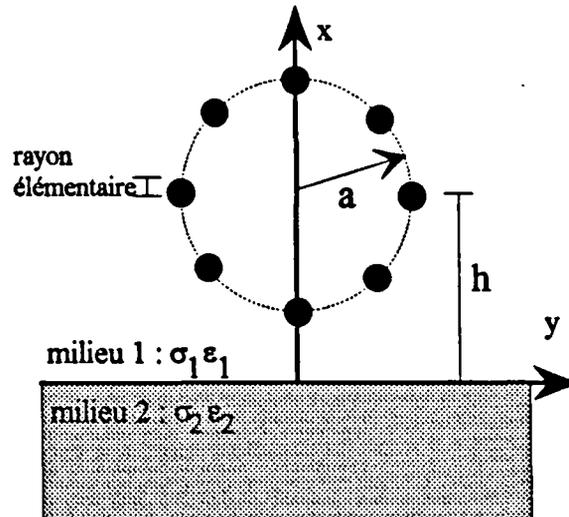


Figure n°25 : Modélisation d'un câble par N conducteurs.

Le courant total sur le câble modélisé est calculé en intégrant tous les courants sur chaque petit conducteur le long du périmètre du câble. Nous nous sommes intéressés au câble de 1,5 cm de rayon est placé à 2 cm du sol. Il a été modélisé par 8, 16 et 64 conducteurs de 0,01 mm de rayon. Le rayon élémentaire a été choisi afin de respecter la condition de proximité entre les conducteurs de la théorie des lignes.

Le courant induit en fonction de l'angle d'incidence de l'onde plane pour une fréquence de 500 MHz est représenté sur la planche n°32. Nous comparons les résultats de la modélisation à celui donné par la méthode des moments (triangles) qui est présentée dans l'annexe B et qui permet de résoudre l'équation intégrale obtenue dans le second chapitre.

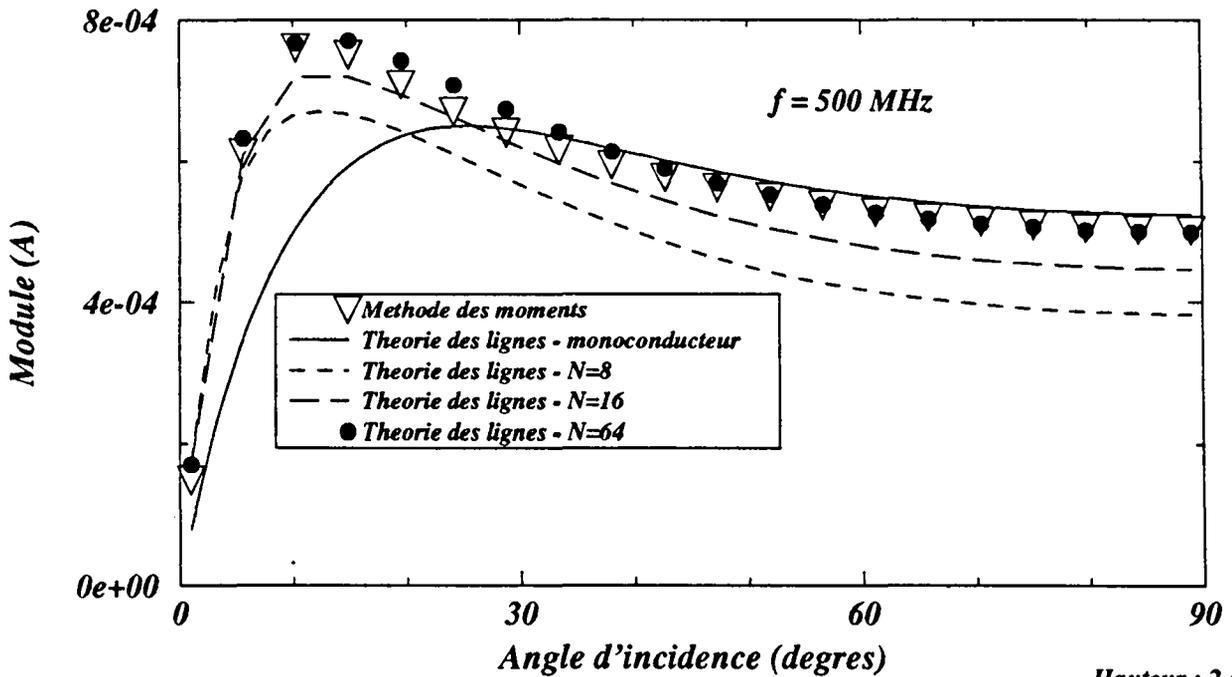
En premier lieu, nous pouvons voir que si nous appliquons brutalement la théorie monofilaire des lignes de transmission, l'erreur engendrée est conséquente notamment pour des angles inférieurs à 30 degrés. Pour des angles supérieurs, la courbe converge vers la réponse de la méthode des moments. La théorie monofilaire des lignes peut encore s'appliquer en hautes fréquences pour des câbles proches du sol si les incidences considérées sont proches de la normale.

Dans un second temps, la modélisation par 8 conducteurs se révèle assez peu performante car le maximum du courant pour un angle de l'ordre de 12 degrés n'est pas atteint et un écart important existe aussi pour une illumination simultanée. Ceci pourrait vraisemblablement être amélioré en augmentant le rayon élémentaire des conducteurs.

En augmentant le nombre de conducteurs à 16, le niveau du courant induit augmente aussi et se rapproche de celui de la méthode des moments. Finalement,

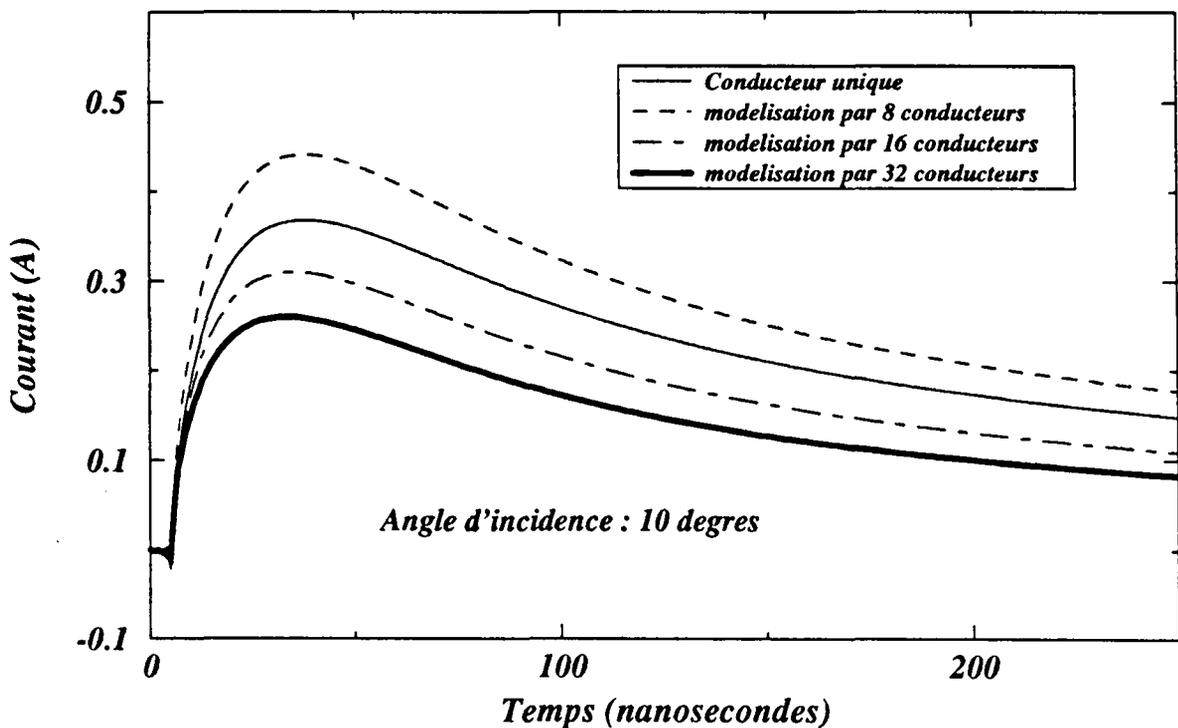
Modélisation d'un câble proche de l'interface

Courant induit par une onde plane



Hauteur : 2 cm
 Rayon : 1,5 cm
 Sigma : 0,01 S/m
 Epsilon : 10

Courant induit par une IEMN



en fixant le nombre de petits conducteurs à celui de la discrétisation (64) de la méthode des moments, nous obtenons un résultat très satisfaisant.

En fait, on peut montrer que dans le cas du faisceau de longueur infinie la théorie des lignes couplées peut être considérée comme une méthode des moments où les fonctions bases et tests sont des fonctions de Dirac. La singularité au point source est alors évitée en appliquant les fonctions tests à une certaine distance du point source, cette distance étant égale au rayon élémentaire. Malgré ce dernier point, la distribution du courant sur le contour du câble est proche de celle de la méthode des moments.

Nous désirons connaître la réponse à une IEMN d'un câble proche de l'interface. S'il paraissait difficilement envisageable d'obtenir cette réponse par la méthode des moments étant donné le temps-calcul nécessaire à un point de fréquence, la théorie des lignes couplées nous permet de calculer la réponse fréquentielle dans un laps de temps raisonnable. Nous avons discrétisé le câble en huit, seize et finalement trente-deux conducteurs et nous avons mis en oeuvre une transformée de Fourier discrète à la réponse fréquentielle. Les caractéristiques de l'IEMN sont celles de l'IEMN rapide présentée au second chapitre.

Nous pouvons voir toujours sur la planche n°31 qu'une trop faible discrétisation (huit conducteurs) entraîne une surestimation du courant induit. Si nous appliquons la théorie des lignes de transmission monofilaire en calculant les paramètres à partir de la constante du champ externe, le courant induit est là encore surestimé.

III.2. Perspective d'une méthode s'appliquant sur des lignes de longueur finie

Si nous nous intéressons maintenant au cas d'un faisceau multiconducteur de longueur finie et illuminée par une onde plane, nous allons assister aux effets conjugués des phénomènes de propagation et du couplage entre l'onde et les conducteurs. Les courants sur chaque conducteur sont exprimés par la relation (IV-17) que nous rappelons

$$[I] = [T][e^{-\Gamma z}][A] + [T][e^{\Gamma z}][B] + [T][\Gamma^2 - \Gamma_0^2]^{-1}[T]^{-1}[Y][e^{-\Gamma_0 z}][E_z^{i+r}] \quad (\text{IV-17})$$

Cette dernière relation peut se mettre sous une forme plus générale qui est présentée ci-dessous:

$$[I] = [T][e^{-\Gamma z}][A] + [T][e^{\Gamma z}][B] + [I_{\text{couplage}}] e^{-\Gamma_0 z} \quad (\text{IV-35})$$

Nous appliquons les conditions de continuité du champ électrique à la surface de chaque conducteur. De plus, les champs diffractés par chaque conducteur se compose de la somme des composantes dues à chaque mode de propagation. Le terme de couplage caractérisé par la constante Γ_0 est ici considéré comme un mode de propagation à part entière. La somme des composantes diffractées par chaque conducteur et chaque mode doit égaler la composante du champ électrique de l'onde plane. Par conséquent

$$\begin{cases} E_{z1}^{i+r} e^{-\Gamma_0 z} = E_{z1} \\ \vdots \\ E_{zN}^{i+r} e^{-\Gamma_0 z} = E_{zN} \end{cases} \quad (\text{IV-36})$$

où la matrice colonne du champ diffracté est donnée par l'expression ci-dessous

$$\begin{cases} E_{z1} = \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{m=1}^N \left[-Z_{1k}(\Gamma_m) + \frac{\Gamma_m^2}{Y_{1k}(\Gamma_m)} \right] T_{km} (a_m e^{-\Gamma_m z} + b_m e^{\Gamma_m z}) + \left[-Z_{1k}(\Gamma_0) + \frac{\Gamma_0^2}{Y_{1k}(\Gamma_0)} \right] I_k^{\text{couplage}} e^{-\Gamma_0 z} \right\} \\ \vdots \\ E_{zN} = \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{m=1}^N \left[-Z_{Nk}(\Gamma_m) + \frac{\Gamma_m^2}{Y_{Nk}(\Gamma_m)} \right] T_{km} (a_m e^{-\Gamma_m z} + b_m e^{\Gamma_m z}) + \left[-Z_{Nk}(\Gamma_0) + \frac{\Gamma_0^2}{Y_{Nk}(\Gamma_0)} \right] I_k^{\text{couplage}} e^{-\Gamma_0 z} \right\} \end{cases} \quad (\text{IV-37})$$

(IV-37)

Dans un but de simplification, nous revenons au cas de la ligne monofilaire. Le champ produit par le courant peut se calculer par la relation (IV-38) et en appliquant la condition de continuité du champ électrique à la surface du conducteur, nous obtenons une équation dont est solution la constante de propagation γ_p qui caractérise le mode guidé.

$$[E_{z1}]_{x=h} = \left[-Z(\gamma_p) + \frac{\gamma_p^2}{Y(\gamma_p)} \right] (I_1 e^{-\gamma_p z} + I_2 e^{\gamma_p z}) + \left[-Z(\Gamma_0) + \frac{\Gamma_0^2}{Y(\Gamma_0)} \right] I_3 e^{-\Gamma_0 z} \quad (\text{IV-38})$$

Cette équation est la suivante:

$$\left[-Z(\gamma_p) + \frac{\gamma_p^2}{Y(\gamma_p)} \right] [I_1 e^{-\gamma_p z} + I_2 e^{\gamma_p z}] + \left[-Z(\Gamma_0) + \frac{\Gamma_0^2}{Y(\Gamma_0)} \right] I_3 e^{-\Gamma_0 z} = E_z^{i+r} e^{-\Gamma_0 z} \quad (\text{IV-39})$$

La complexité de cette équation est soulignée par le fait que les termes I_1, I_2 et I_3 dépendent aussi de cette constante de propagation. Cependant en raison de la résolution de l'équation de base de la théorie des lignes de transmission qui est l'équation des télégraphistes, nous sommes amenés à supposer vérifiée l'équation (IV-22) que nous rappelons ci-dessous. En effet la constante de propagation γ_p est définie lors du passage des équations des télégraphistes à l'équation différentielle du courant comme étant la racine du produit ZY . Dans ce cas l'équation (IV-39) peut se ramener à vérifier les deux équations ci-dessous:

$$Z(\gamma_p)Y(\gamma_p) = \gamma_p^2 \quad (\text{IV-22})$$

$$Z(\Gamma_0) - \frac{\Gamma_0^2}{Y(\Gamma_0)} = Z(\gamma_p) - \frac{\gamma_p^2}{Y(\gamma_p)} \quad (\text{IV-40})$$

Cette dernière équation indique la limite d'application de la théorie des lignes pour le cas d'une illumination par une onde plane puisque, pour qu'elle soit vérifiée, il faut que les paramètres linéiques soient indépendants du champ qui s'applique sur le conducteur. Ceci permet en effet la résolution classique des équations des télégraphistes et donc de l'équation différentielle du courant. Le domaine de validité de la théorie des lignes a donc été mis en évidence lors de l'étude de la ligne de longueur infinie et pour notre câble à une hauteur de 1 m, cette limite était de l'ordre de 15 MHz. Pour des fréquences supérieures, l'impédance et l'admittance varient en fonction de l'angle d'incidence et dans ce cas, l'équation n'est plus vérifiée.

Par contre cette étude peut être abordée d'un autre point de vue. Nous proposons de décomposer notre problème en deux parties distinctes : une partie qui sera similaire au cas du câble localement excité et qui nous ramène à l'équation (IV-22) et une partie assimilable au cas de la ligne de longueur infinie. Revenons à notre faisceau multiconducteur, l'équation (IV-37) se scinde en deux parties qui sont d'une part l'équation (IV-26) que nous rappelons ici

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{z1} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \left[-Z_{1k}(\Gamma_m) + \frac{\Gamma_m^2}{Y_{1k}(\Gamma_m)} \right] T_{km} (a_m e^{-\Gamma_m z} + b_m e^{\Gamma_m z}) = 0 \\ \vdots \\ E_{zN} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \left[-Z_{Nk}(\Gamma_m) + \frac{\Gamma_m^2}{Y_{Nk}(\Gamma_m)} \right] T_{km} (a_m e^{-\Gamma_m z} + b_m e^{\Gamma_m z}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV-26})$$

et d'autre part



$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} Z_{11}(\Gamma_0) & \cdots & Z_{1N}(\Gamma_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(\Gamma_0) & \cdots & Z_{NN}(\Gamma_0) \end{array} \right] + \Gamma_0^2 \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{Y_{11}(\Gamma_0)} & \cdots & \frac{1}{Y_{1N}(\Gamma_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{Y_{N1}(\Gamma_0)} & \cdots & \frac{1}{Y_{NN}(\Gamma_0)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I_1^{\text{coup}} \\ \vdots \\ I_N^{\text{coup}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} E_{z1}^{i+r} \\ \vdots \\ E_{zN}^{i+r} \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (\text{IV-41})$$

Les matrices colonnes inconnues [A] et [B] sont obtenues en appliquant les conditions de charges aux extrémités du faisceau. Pour cela, les courants et les tensions transverses se calculent par les relations ci-dessous:

$$\left\{ \begin{array}{l} [I] = [T][e^{-\Gamma z}][A] + [T][e^{\Gamma z}][B] + \left[-[Z(\Gamma_0)] + \Gamma_0^2 [\tilde{y}(\Gamma_0)]^{-1} \right]^{-1} [e^{-\Gamma_0 z}][E_z^{i+r}] \\ [V] = -[Y]^{-1} \left[\frac{dI}{dz} \right] \end{array} \right. \quad (\text{IV-42})$$

La matrice [Y] est la matrice admittance globale composée à partir des matrices admittances modales (cf. équation IV-29). Nous pouvons observer que si nous adaptons notre faisceau, nous retrouvons le cas des conducteurs de longueur infinie où les paramètres linéiques sont calculés en tenant compte de la constante de propagation de l'onde plane. A contrario, si le faisceau est uniquement excité par des générateurs localisés en entrée, nous retrouvons l'étude sur les modes susceptibles de se propager.

Le changement introduit se situe au niveau du calcul du couplage de l'onde avec les câbles. Pour cela, nous calculons les paramètres linéiques avec pour constante de propagation celle de l'onde plane pour le calcul du couplage et avec le processus itératif pour le calcul des phénomènes de propagation. Nous utilisons donc deux couples de paramètres linéiques pour modéliser la ligne multifilaire. Cette modification devrait compenser le niveau du courant induit par l'onde plane en hautes fréquences lorsque l'angle d'incidence est supérieur à 30 degrés, phénomène observé pour la ligne de longueur infinie. Cette correction ne sera significative qu'avec des signaux dont le spectre est en très hautes fréquences. Nous avons observé que pour le cas de l'IEMN qui illumine le câble sous incidence normale, la réponse temporelle est peu affectée par cette correction sur une ligne de longueur infinie. De plus, si l'angle d'incidence est plus faible, nous avons montré que l'approximation quasi-TEM donnait un résultat satisfaisant même en hautes fréquences.

Cette démarche reste à valider en la comparant avec une autre méthode qui permet de connaître la distribution du courant sur la longueur du faisceau. Malheureusement, les méthodes numériques classiques telles que la méthode des moments, les différences finies ou les éléments finis ne sont pas appropriées à l'étude du courant sur des lignes de très grandes dimensions en hautes

fréquences. Nous signalerons cependant un article qui compare la théorie des lignes à la méthode des différences finies dans le domaine temporel [58].

CONCLUSION

Mises à part les différences fondamentales qui existent entre la théorie des lignes et la théorie des antennes comme les pertes dues au rayonnement ou le nombre de modes guidés susceptibles de se propager, nous avons montré que la limitation de la théorie des lignes de transmission provenait principalement de la définition des paramètres linéiques.

Dans un premier temps, nous avons introduit un processus itératif basé sur l'approximation quasi-TEM qui permet d'améliorer notablement le calcul des constantes de propagation des modes guidés. Nous avons fait ressortir pour une ligne monofilaire les plages de fréquences sur lesquelles la théorie des lignes ne pouvait pas être appliquée sous peine de ne pas trouver la bonne distribution du courant le long du câble. Ce processus itératif est applicable directement pour des lignes de longueur finie et conserve aux paramètres linéiques leur sens physique dans la mesure où ceux-ci gardent une évolution fréquentielle satisfaisante quel que soit l'ordre d'itérations.

Dans un second temps, nous avons montré que les paramètres linéiques d'un faisceau multiconducteur devaient en toute rigueur être calculés à partir de la constante de propagation de l'onde plane excitatrice. En tenant compte de cette remarque, nous avons réussi à mettre en évidence la limite d'application de la théorie classique des lignes de transmission pour une ligne conductrice aérienne. Par théorie classique, nous entendons celle qui utilise des paramètres uniquement liés à la géométrie du problème. En revanche, les nouveaux paramètres linéiques introduits permettent à la théorie des lignes de converger vers le résultat de la théorie des antennes en très hautes fréquences.

Les résultats que nous venons d'évoquer ont fait l'objet d'une communication [59].

Nous avons ensuite repris une méthode d'analyse d'un câble proche de l'interface en le modélisant par la théorie des lignes couplées et nous avons pu observer une très bonne concordance de cette méthode avec celle des moments.

Finalement, nous avons indiqué un moyen d'appliquer ces dernières conclusions au cas des lignes de longueur finie mais il reste encore à le valider par une étude plus approfondie.

**CONCLUSION
GENERALE**

CONCLUSION GENERALE

Le travail que nous venons d'exposer constitue une contribution à l'étude de la propagation et du couplage des ondes électromagnétiques avec des lignes multifilaires en présence d'un sol de faible conductivité.

Dans un premier temps, nous avons souligné les aspects hautes fréquences de ces deux phénomènes en mettant en oeuvre la théorie des antennes. Nous avons en effet mis en évidence la présence d'un mode guidé de propagation qui s'apparente à une onde de surface et qui peut devenir prépondérant. D'autre part, l'effet d'une gaine diélectrique a été mis en évidence. Celle-ci diminue fortement le niveau de courant induit par une onde d'incidence rasante. Par ailleurs, la comparaison entre la méthode analytique qui nécessite quelques approximations et la technique numérique donnant la distribution de courant à la surface d'un câble ouvre la voie à de nouvelles investigations.

Dans un second temps, nous avons introduit un raffinement dans le calcul des paramètres linéiques de la théorie des lignes de transmission qui permet de retranscrire les phénomènes observés auparavant. Nous avons aussi indiqué la possibilité de modéliser un conducteur de section droite quelconque en présence du sol par cette même théorie avec pour principal avantage un gain de temps-calcul considérable.

Les modifications introduites dans le calcul des paramètres linéiques n'étant validées que pour des lignes de longueur infinie, nous concluons sur la perspective que nous avons présentée afin d'étendre leur application au cas de lignes de longueur finie où les phénomènes de propagation et de couplage se combinent. Nous pensons qu'il serait intéressant de la confronter, et peut-être la valider, par une approche numérique.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **GABILLARD R.**, *"Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs"*
Cours de DEA - Université des Sciences et Technologies de Lille
- [2] **VAN BLADEL J.**, *Electromagnetic Fields*
Hemisphere Publishing Corporation, 1985.
- [3] **MAC LACHLAN N.W.**, *Bessel functions for engineers*
Clarendon Press, Oxford 1955.
- [4] **BANOS A.**, *Dipole radiation in the presence of a conducting half-space*
Pergamon Press, New-York 1966
- [5] **WAIT J.R.**, *"Theory of wave propagation along a thin wire parallel to an interface"*
Radio Science, vol. 7, n°6, pp 675-679, June 1972.
- [6] **CHANG D.C. and OLSEN R.G.**, *"Excitation of an infinite antenna above a dissipative earth"*
Radio Science, vol. 10, n°8-9, pp 823-831, Aug. - Sept. 1975.
- [7] **COLEMAN B.L.**, *"Propagation of electromagnetic disturbances along a thin wire in a stratified medium"*
Phil Mag, 41 (Ser. 7), pp 276-288, 1950.
- [8] **ZEDDAM A.**, *"Couplage d'une onde électromagnétique rayonnée par une décharge orageuse à un câble de télécommunications"*
Thèse de 3 ième cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1988
- [9] **GRAY-ATCHISON.**, *"An algorithm for the computation of the higher order G-transformation"*
SIAM J. Numer. Anal., vol 10, n°1, March 1973.
- [10] **PIRJOLA R.**, *"On the Current Induced within an Infinitely Long Circular Cylinder (or Wire) by an Electromagnetic Wave "*
IEEE Trans. EMC, vol EMC-18, pp 190-197, Nov. 1976.
- [11] **POGORZELSKI R.J. and CHANG D.C.**, *"On the validity of the thin wire approximation in the analysis of wave propagation along a wire over a ground "*
Radio Science, vol. 12, n°5, pp 699-707, Sept. - Oct. 1977.
- [12] **COURBET A.**, *"Recherche théorique et expérimentale sur la propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil parallèle à la surface du sol - Application à l'étude du sous-sol proche "*
Thèse de 3 ième cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1980

- [13] KUESTER E.F., CHANG D.C. and OLSEN R.G., "Modal theory of long horizontal wire structures above the earth, 1, Excitation" Radio Science, vol. 13, n°4, pp 605-613, July-Aug. 1978.
- [14] WAIT J.R., *Electromagnetic Wave Theory* John Wiley & Sons, 1987.
- [15] ROBERTS T.E., "Theory of the Single-Wire Transmission Line" J. of Applied Physics, vol 24, n°1, January 1953
- [16] COLLIN R.E., *Field Theory of Guided Waves* McGraw - Hill, 1960.
- [17] LABARRE F., "Etude théorique du couplage ondes-câbles en haute fréquence." Rapport d'avancement, Convention DGA/CEG - USTL, juin 1995
- [18] OLSEN R.G. and ABURWEIN A., "Current induced on a pair of wires above earth by a vertical electric dipole for grazing angles of incidence " Radio Science, vol. 15, n°4, pp 733-742, July - Aug. 1980.
- [19] SOIRON M., "Contribution à l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique sur une ligne multifilaire au-dessus d'un sol conducteur et en galerie souterraine " Thèse de 3 ième cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1973
- [20] OLSEN R.G. and USTA M.A., "The Excitation of Current on an Infinte Horizontal Wire Above Earth by a Vertical Electric Dipole " IEEE Trans. AP, pp 560-565, July 1977.
- [21] WAIT J.R., "Electromagnetic Wave Propagation Along a Buried Insulated Wire" Canadian Journal of Physics, vol 50, pp 2402-2409, 1972.
- [22] CHANG D.C. and WAIT J.R., "Extremely Low Frequency (ELF) Propagation Along a Horizontal Wire Located Above or Buried in the Earth" IEEE Trans. Communications, vol COM-22, n°4, pp 421-427, Apr. 1974.
- [23] OLSEN R.G., KUESTER E.F. and CHANG D.C., "Modal theory of long horizontal wire structures above the earth, 2, Properties of discrete modes" Radio Science, vol. 13, n°4, pp 615-623, July-Aug. 1978.
- [24] CARSON J.R., "Wave propagation in overhead wires with ground return" Bell Syst. Techn. J., n°5, pp 539-554, 1926.
- [25] VIGNES J., *Algorithmes numériques - Analyse et mise en oeuvre. 2) Equations et systèmes non-linéaires* Editions Technip - 1980.

- [26] **FAVARD J.**, *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique - Tome II: représentations, fonctions analytiques*
Gauthier-Villars, Paris 1960.
- [27] **FELSEN J.**, *Topics in Applied Physics - Transient Electromagnetic Fields*
Springer-Verlag, 1976
- [28] **BAUM C.E.**, "On the Use of Contour Integration for Finding Poles, Zeros, Saddles, and Other Function Values in the Singularity Expansion Method"
Mathematics Note 35, February 1974
- [29] **NAITO F., GOTO Y., NAGASAWA Y., SATO R., CHIBA R., MONMA M. and IWATA R.** "Modal analysis of the leakage fields on a multiconductor transmission line above ground"
Proceedings of International Symposium EMC, pp 940-944, Tokyo, 1984.
- [30] **OLSEN R.G. and CHANG D.C.**, "Current Induced by a Plane Wave on a Thin Infinite Wire Near the Earth "
IEEE Trans. AP, pp 586-588, July 1974.
- [31] **OLSEN R.G. and CHANG D.C.**, "Analysis of semi-infinte and finite thin-wire antennas above a dissipative earth "
Radio Science, vol. 11, n°11, pp 867-874, Nov. 1976.
- [32] **WAIT J.R.**, *Electromagnetic Wave Theory in Stratified Media*
Pergamon Press
- [33] **DEGAUQUE P. et HAMELIN J.**, *Compatibilité électromagnétique*
Dunod-Bordas, Paris 1990
- [34] **HARRINGTON R.F.**, *Field Computation by Moments Methods*
The MacMillan Company
- [35] **BUTLER C.M.**, "Current Induced on a Conducting Strip Which Resides on the Planar Interface Between Two Semi-Infinite Half-Spaces"
IEEE Trans. AP, vol Ap-32, n°3, pp 226-231, Mar. 1984.
- [36] **BUTLER C.M., XU X-B and GLISSON A.W.**, "Current Induced on a Conducting Cylinder Located Near the Planar Interface Between Two Semi-Infinite Half-Spaces"
IEEE Trans. AP, vol Ap-33, n°6, pp 616-624, June 1985.
- [37] **MORITA N., KUMAGAI N. and MAUTZ J.R.**, *Integral Equation Methods for Electromagnetics*
Artech House, 1990.

- [38] **LABARRE F.**, "*Etude théorique du couplage ondes-câbles en haute fréquence - Câble proche du sol.*"
Rapport d'avancement, Convention DGA/CEG - USTL, juin 1995
- [39] **RIFI M.**, "*Etude théorique de la propagation des ondes électromagnétiques sur les lignes de transport d'énergie aériennes pour une application à un système de transmission de données*"
Thèse de 3^{ème} cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1987
- [40] **YOUNG J.F. and WAIT J.R.**, "*Electromagnetic Response of Two Crossing, Infinitely Long, thin Wires*"
IEEE Trans. AP, vol. 39, n°6, pp 732-739, June 1991.
- [41] **VANCE E.F.**, *Coupling to Shielded Cables*
Wiley Interscience Publication, 1978.
- [42] **KING W.P., WU T.T. and SHEN L.C.**, "*The horizontal wire antenna over a conductong or dielectric half space : Current and admittance*"
Radio Science, vol. 9, n°7, pp 701-709, July 1974.
- [43] **CHEN K.C.**, "*Time Harmonic Solutions for a Long Horizontal Wire Over the Ground with Grazing Incidence*"
IEEE Trans. AP, vol. AP-33, n°3, pp 233-243, Mar. 1985.
- [44] **WAIT J.R.**, "*Tutorial Note on the General Transmission Line Theory for a Thin Wire Above the Ground*"
IEEE Trans. EMC, vol. 33, n°1, pp 65-67, Feb. 1991.
- [45] **CHIBA J.**, "*Studies in Overhead Wire-Goubau Line Above Ground*"
IEEE Trans on MTT, vol MTT-25, n°2, Feb. 1977.
- [46] **GOUBAU G.**, "*Surface waves and their application to transmission line*"
J. Appl. Phys., vol 21, pp 1119-1128, Nov 1950.
- [47] **KONE L.**, "*Conception d'outils numériques et de bancs de mesures permettant d'évaluer l'efficacité de blindage de câbles et connecteurs*"
Thèse de 3^{ème} cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1989
- [48] **POUDROUX C.**, "*Etude de l'incidence des paramètres primaires des lignes couplées sur la précision de prédiction de l'amplitude des parasites induits sur des torons multifilaires*"
Thèse de 3^{ème} cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1992
- [49] **ZEDDAM A.**, "*Couplage entre une onde électromagnétique et un câble aérien ou enterré: remarques sur les approches théoriques basées sur la méthode des lignes de transmission*"
Note Technique NT/LAA/ELR/465 du CNET, Lannion - avril 1985

- [50] ZEDDAM A. et DEGAUQUE P, "*Couplage d'une onde électromagnétique avec une ligne de télécommunications isolée et enterrée* "
Colloque CEM 85, D1-3, Clermond-Ferrand
- [51] FONTAINE J.M., UMBERT A., DJEBARI B. et HAMELIN J., "*Ground effects in the response of a single-wire transmission line illuminated by an E.M.P.*"
Proceedings of EMC Symposium, pp 109-114, Zurich, Mar. 1981.
- [52] TESCHE F.M., "*Comparison of the Transmission Line and Scattering Models for Computing the HEMP Response of Overhead Cables*"
IEEE Trans. EMC, vol. 34, n°2, pp 93-99, May 1992.
- [53] TESCHE F.M. and BARNES P.R., "*Development of a new high altitude electromagnetic pulse (HEMP) environment and resulting overhead line responses*"
Electromagnetics, vol. 8, pp 213-239, 1988.
- [54] CANAVERO F.G., DANIELE V. and GRAGLIA R.D., "*Spectral theory of transmission lines in presence of external electromagnetic sources*"
Electromagnetics, vol. 8, pp 125-157, 1988.
- [55] IANOZ M., NUCCI C.A. and TESCHE F.M., "*Transmission line theory for field-to transmission line coupling calculations*"
Electromagnetics, vol. 8, pp 171-211, 1988.
- [56] MACIEL D., "*Etude et modélisation des risques électromagnétiques supportés par des câbles de transmission d'informations contenus dans des chemins métalliques installés sur des sites industriels* "
Thèse de 3^{ième} cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1993
- [57] RAGHEB H.A. et HAMID M., "*Simulation of a Cylindrical Reflector by Conducting Circular Cylinders* "
IEEE Trans on AP, vol AP-35, n°3, March 1987.
- [58] HIGGINS D.F., O'DEAN D.E.M., SMITH K.S., "*Srem coupling to long buried lines - A comparison of transmission line and finite difference solutions* "
IEEE Trans on Nuclear Science, vol NS-29, n°6, December 1982.
- [59] LABARRE F. et DEGAUQUE P., "*Etude du courant sur un câble aérien recouvert d'une gaine diélectrique et en présence d'un sol de faible conductivité*"
Colloque CEM96, Lille - (accepté) - Septembre 1996.

ANNEXES

Annexe A

Propagation d'une onde plane

Nous présentons le calcul des composantes électriques et magnétiques qui nous intéressent dans les deux milieux. L'onde plane se propage dans le demi-milieu supérieur avec un angle d'incidence α et un angle d'azimut β qui sont indiqués sur la figure ci-dessous :

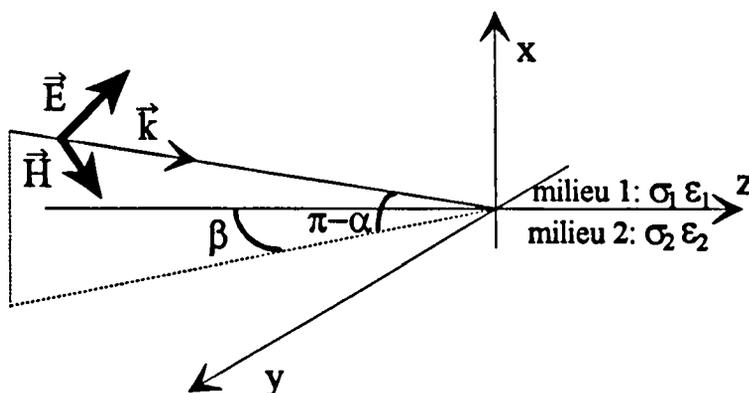


Figure n°A1 : définition des angles α et β

Elle peut se décomposer en une onde Transverse Electrique et Transverse Magnétique. Dans ce but, nous introduisons l'angle de polarisation p qui est indiqué sur la figure suivante.

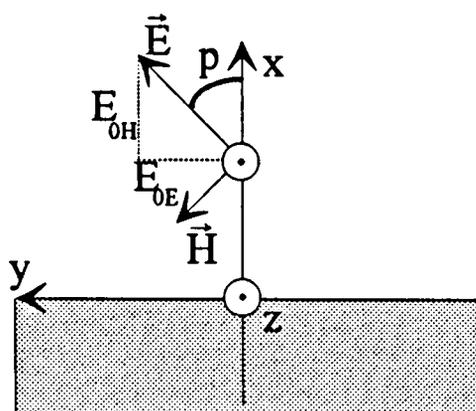


Figure n°A2 : angle de polarisation de l'onde

Les composantes électriques sont calculées par

$$\begin{cases} E_{0H} = \cos(p) E_0 \\ E_{0E} = \sin(p) E_0 \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

1) Onde TM

La composante magnétique d'une onde transverse magnétique est donnée par

$$H_y^i = H_0 \cos(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{\gamma_1 x \sin(\alpha)} \quad (\text{A-2})$$

On en déduit le champ réfléchi par

$$H_y^r = R_H H_0 \cos(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{-\gamma_1 x \sin(\alpha)} \quad (\text{A-3})$$

où R_H est le coefficient de réflexion de Fresnel :

$$R_H = \frac{n^2 \sin(\alpha) - \sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}{n^2 \sin(\alpha) + \sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}} \quad \text{et} \quad n = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

Le champ total s'écrit alors sous la forme

$$H_y^{i+r} = H_0 \cos(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{\gamma_1 x \sin(\alpha)} \left[1 + R_H e^{-2\gamma_1 x \sin(\alpha)} \right] \quad (\text{A-4})$$

Or, d'après Maxwell

$$\vec{\text{Rot}}(\mathbf{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{\mathbf{E}} \quad (\text{A-5})$$

d'où

$$\begin{cases} E_x^{i+r} = E_{0H} \cos(\alpha) \cos(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{\gamma_1 x \sin(\alpha)} \left[1 + R_H e^{-2\gamma_1 x \sin(\alpha)} \right] \\ E_x^{i+r} = E_{0H} \sin(\alpha) \cos(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{\gamma_1 x \sin(\alpha)} \left[1 - R_H e^{-2\gamma_1 x \sin(\alpha)} \right] \end{cases} \quad (\text{A-6})$$

Nous avons vu qu'il était nécessaire de calculer, pour la théorie des antennes, la valeur moyenne des composantes électriques et magnétiques autour de l'axe $x=h$ sur un contour de rayon a représentant le câble (cf. chapitre Un).

D'où, par exemple pour la composante longitudinale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} E_z^{i+r}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} E_{0H} \sin(\alpha) \cos(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{\gamma_1 [h + a \sin(\theta)] \sin(\alpha)} (1 - R_H e^{-2\gamma_1 [h + a \sin(\theta)] \sin(\alpha)}) d\theta \quad (\text{A-7})$$

or

$$J_0(\sqrt{z^2 - y^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{y \cos(\theta) + jz \sin(\theta)} d\theta \quad (\text{A-8})$$

soit finalement

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} E_z^{i+r}(\theta) d\theta = E_{0H} \sin(\alpha) \cos(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} \times e^{\gamma_1 h \sin(\alpha)} \left[J_0(j\gamma_1 a \sin(\alpha)) - J_0(-j\gamma_1 a \sin(\alpha)) R_H e^{-2\gamma_1 h \sin(\alpha)} \right] \quad (\text{A-9})$$

De même, en remarquant que

$$H_\theta^{i+r}(z) = -H_x^{i+r}(z) \sin(\theta) + H_y^{i+r}(z) \cos(\theta) \quad (\text{A-10})$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{r \sin(\theta)} \cos(\theta) d\theta = 0 \quad (\text{A-11})$$

On obtient la relation suivante pour la composante magnétique

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_\theta^{i+r}(\theta) d\theta = 0 \quad (\text{A-12})$$

Nous venons d'exprimer les composantes électriques et magnétiques du champ ambiant dans le demi-milieu supérieur ce qui nous sert à calculer le courant induit sur des lignes aériennes. Pour calculer le champ transmis dans le demi-milieu inférieur afin de calculer le courant induit sur des lignes enterrées, nous appliquons la démarche de Wait [Wait]. La composante H_y du champ magnétique incident peut s'écrire sous la forme suivante

$$H_y^i = H e^{-u_1 x - j\lambda z} \quad (\text{A-13})$$

où $\text{Re}(u_1) > 0$ et $u_1^2 = \lambda^2 + \gamma_1^2$. Pour cela, il suffit de poser $j\lambda = -\gamma_1 \cos(\alpha)$.

Le champ dans le milieu 2 s'exprime sous la même forme

$$H_y^T = T_H H_e^{-u_2 x - j\lambda z} \quad (\text{A-14})$$

où $u_2 = \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \cos^2(\alpha)}$ et $T_H = 1 + R_H$. Par conséquent, la composante longitudinale du champ électrique transmise au travers l'interface dans le milieu 2 est donné par

$$E_z^T = -\frac{\gamma_1 \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \cos^2(\alpha)}}{\gamma_2^2} T_H E_{0H} \cos(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{-x \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \cos^2(\alpha)}} \quad (\text{A-15})$$

2) Onde TE

Une onde transverse électrique peut être caractérisée par son champ électrique qui est donné par

$$E_z^i = E_{0E} \sin(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{\gamma_1 x \sin(\alpha)} \quad (\text{A-16})$$

Le champ réfléchi s'exprime par

$$E_z^r = R_E E_{0E} \sin(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{-\gamma_1 x \sin(\alpha)} \quad (\text{A-17})$$

avec

$$R_E = \frac{\sin(\alpha) - \sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}{\sin(\alpha) + \sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}$$

Par conséquent, nous en déduisons le champ total dans le milieu 1:

$$E_z^i = E_{0E} \sin(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{\gamma_1 x \sin(\alpha)} \left[1 + R_E e^{-2\gamma_1 x \sin(\alpha)} \right] \quad (\text{A-18})$$

Le champ transmis dans le demi-milieu inférieur est obtenu par une démarche identique à celle menée dans le cas de l'onde TM et nous trouvons finalement:

$$E_z^T = T_E E_{0E} \sin(\beta) e^{\gamma_1 [z \cos(\alpha) \cos(\beta) - y \cos(\alpha) \sin(\beta)]} e^{-x \sqrt{\gamma_2^2 - \gamma_1^2 \cos^2(\alpha)}} \quad (\text{A-19})$$

Annexe B

Résolution d'une équation intégrale par la méthode des moments

Nous allons résoudre une équation intégrale par la méthode des moments. Cette méthode a été mise en oeuvre dans le cadre de l'électromagnétisme en 1968 par Harrington et est depuis largement utilisée. Nous allons rappeler brièvement son principe qui consiste à transformer une équation intégrale en un système matriciel plus commode à résoudre.

3) Principe

L'équation intégrale peut se mettre sous la forme suivante:

$$L(f) = e \quad (B-1)$$

où L est un opérateur intégro-différentielle et linéaire, f est la fonction inconnue et e est la fonction excitatrice connue. On construit deux bases de fonctions :

$(b_1, b_2, b_3, \dots, b_N) \rightarrow$ fonction base

$(t_1, t_2, t_3, \dots, t_N) \rightarrow$ fonction test

et un produit scalaire $\langle h, g \rangle$ de la forme suivante :

$$\langle h, g \rangle = \int_D h(x).g(x)dx \quad (B-2)$$

où D est le domaine de définition de l'opérateur L . La fonction inconnue est projetée sur les fonctions base :

$$f = \sum_{n=1}^N \alpha_n b_n \quad (B-3)$$

Cette somme n'est qu'une approximation de la fonction et elle est d'autant plus précise que N est grand. Les inconnus sont maintenant les coefficients de pondération α_n . Ce qui nous donne :

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n L(b_n) = e \quad (B-4)$$

Cette dernière équation est projetée à son tour sur les fonctions test par l'intermédiaire du produit scalaire, ce qui mène à :

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \langle L(b_n), t_m \rangle = \langle e, t_m \rangle \quad (\text{B-5})$$

On obtient un système matriciel qui se met sous la forme :

$$[L_{mn}][\alpha_n] = [e_m] \quad (\text{B-6})$$

où $[\alpha_n]$ est la matrice colonne des coefficients inconnus, $[e_m]$ la matrice colonne d'excitation et $[L_{mn}]$ la matrice d'ordre $M \times N$, cette dernière matrice étant souvent appelée matrice impédance lorsque la méthode des moments est utilisée en électromagnétisme. Ce système matriciel admet des solutions si $M \geq N$.

4) Application et choix des fonctions base et test

Le choix des fonctions base et test est arbitraire, il en existe d'ailleurs un grand nombre mais la simplicité des calculs et la rapidité de convergence sont extrêmement liées aux fonctions choisies. Nous utiliserons pour notre part la méthode de collocation qui utilise des impulsions rectangulaires donnant un courant discontinu et la distribution de Dirac imposant les conditions de continuité du champ électrique en des points isolés. Cette dernière méthode est aussi appelée point-segment.

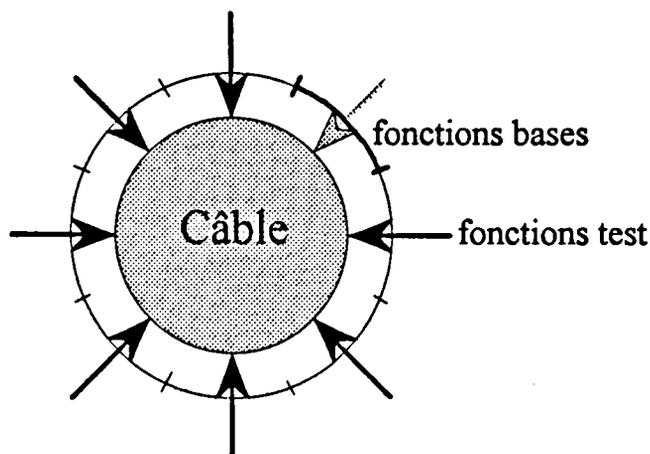


Figure n°B1 : définition des fonctions bases et tests

071376445