N° d'ordre : 1709

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

MAYEUR Nelly

ETUDE DES EXTREMES DE CERTAINES SUITES ET PROCESSUS STATIONNAIRES 1-DEPENDANTS

Soutenue le 23 Janvier 1996 devant le Jury :

Rapporteurs : J. BRETAGNOLLE, Université de Paris-Sud
P. DOUKHAN, Université de Cergy-Pontoise
Examinateurs : G. HAIMAN, Université de Lille I
B. MASSÉ, Université du Littoral, Dunkerque
V. NEVZOROV, Université de S[t] Petersbourg
M.C. VIANO, Université de Lille I

Je tiens à remercier :

Monsieur Jean Bretagnolle, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse et d'en être le rapporteur.

Monsieur Paul Doukhan, rapporteur de cette thèse. Je les remercie également pour leurs remarques et leurs conseils.

Madame Marie-Claude Viano, Monsieur Bruno Massé et Monsieur Valery Nevzorov pour m'avoir fait l'honneur d'être membre du jury.

Mon directeur de thèse, Monsieur George Haiman, pour ses conseils, sa patience et ses encouragements.

Le personnel du secrétariat scientifique, en particulier Madame Arlette Lengaigne ainsi que le personnel de l'imprimerie.

Les membres du laboratoire de Probabilité et Statistique, notamment Charles Suquet qui n'a pas hésité à répondre à mes questions, Caroline, Marie-Françoise et Lhassan.

Enfin, ma famille, notamment mes parents, mes amis et Maxime pour sa générosité.

Chapitre 1

Introduction générale

Ce travail consiste en l'étude des extrêmes de suites strictement stationnaires de variables aléatoires réelles (v.a.r.) 1-dépendantes. Notre point de départ est un résultat de Haiman (1987), cité ci-après, qui fournit un encadrement de la probabilité pour que le maximum partiel d'une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes reste en dessous d'un seuil. Nous rappellons les deux définitions suivantes

Définition 1.1 On dit que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est *strictement stationnaire* ssi pour tout n, h, $i_1, \ldots, i_n$ entiers, les distributions des vecteurs $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ et $(X_{i_1+h}, \ldots, X_{i_n+h})$ sont les mêmes.

Définition 1.2 Soit $m \geq 1$, un entier. On dit que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. *m-dépendantes* ssi pour tout n, l, $i_1 < \ldots < i_n < j_1 < \ldots < j_l$, entiers, les vecteurs $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ et $(X_{j_1}, \ldots, X_{j_n})$ sont indépendants dès que $j_1 - i_n > m$.

Le résultat de départ est alors le

Théorème 1.1 *(Haiman, 1987)*
Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes à valeurs dans (a, b). Il existe $a < u_0 < b$ et une fonction $\mu(u)$, $0 < \mu(u) < 1$ définie pour u vérifiant $u_0 < P(X_1 > u) < b$ et telle que

$$\max_{n\geq 1}\left|\frac{P\{\max(X_1, \ldots, X_n) \leq u\}}{\mu^n(u)} - 1\right| \leq KP\{X_1 > u, X_2 > u\},$$

où K est une constante positive, et

$$\mu(u) = 1 - P\{X_1 \leq u, X_2 > u\} + O((P(X_1 > u))^2),$$

la fonction $O(x)$, vérifiant

$$|O(x)| \leq C\, x, \quad C > 0.$$

Remarquons que l'étude exclusive du cas 1-dépendant n'est pas une véritable restriction puisque, si on considère une suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de v.a.r. m-dépendantes, alors, la suite $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ définie par

$$Y_k = \max(X_{(k-1)m+1}, \ldots, X_{km})$$

est 1-dépendante. En appliquant le théorème 1.1 à cette suite, on obtient alors un résultat semblable dans le cas m-dépendant qui est le

Théorème 1.2 *(Haiman, 1987)*
Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite strictement stationnaire de v.a.r. m-dépendantes à valeurs dans (a, b). Il existe $a < u_0 < b$ et une fonction $\mu(u)$, $0 < \mu(u) < 1$ définie pour u vérifiant $u_0 < mP(X_1 > u) < b$ et telle que

$$\max_{n\geq 1} \left| \frac{P\{\max(X_1, \ldots, X_n) \leq u\}}{\mu^n(u)} - 1 \right| \leq K\, m^2 \sup_{1<i\leq m} P\{X_1 > u, X_i > u\},$$

où K est une constante positive, et

$$\mu(u) = 1 - P\{\max(X_1, \ldots, X_{m-1}) \leq u, X_m > u\} + \frac{1}{m} O((mP(X_1 > u))^2),$$

la fonction $O(x)$, vérifiant

$$|O(x)| \leq C\, x, \quad C > 0, \quad \textit{constante indépendante de } m.$$

La thèse comporte trois parties, chacune possédant une introduction ; la troisième partie est indépendante des deux premières.

Au chapitre 2, nous reprenons la démonstration du théorème 1.1, afin d'en donner une version améliorée, ceci en calculant les constantes qui interviennent, à savoir u_0, K et C. Nous obtenons alors le

Théorème 1.3 *Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes, de fonction de répartition (f.d.r.) $F(x) = P(X_1 \leq x)$, continue.*
On pose $\alpha = \min\{u; F(u) > 0\}$ et $\omega = \max\{u; F(u) < 1\}$.
Il existe $u_0 < \omega$ vérifiant $P(X_1 > u_0) = 0{,}083$ et une fonction $\mu(u)$, $0 < \mu(u) < 1$ définie pour $u_0 \leq u < \omega$ telle que

$$\max_{n\geq 1} \left| \frac{P\{\max(X_1, \ldots, X_n) \leq u\}}{\mu^n(u)} - 1 + P\{X_1 > u, X_2 > u\} \right| \leq 345\, P^2(X_1 > u),$$

où $\mu(u)$ vérifie

$$|\mu(u) - (1 - P(X_1 > u) + P\{X_1 > u, X_2 > u\})| \leq 35,25P^2(X_1 > u).$$

Au chapitre 3, nous utilisons cette version améliorée pour donner un résultat du même type pour des processus (temps continu) strictement stationnaires 1-dépendants à trajectoires continues. Nous rappelons la définition

Définition 1.3 Un processus $\{Y_s,\ s \geq 0\}$ est dit *m-dépendant* ssi pour tout $t > 0$, les tribus $\sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$ et $\sigma(Y_s, s > t + m)$ sont indépendantes.

Remarquons que par un changement d'origine dans le temps, on peut ramener un processus m-dépendant à un processus 1-dépendant.
Puis, nous appliquons ce résultat au processus

$$Y_t = W(t+1) - W(t),\ \ t \geq 0,$$

où $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, $W(0) = 0$ est le processus de Wiener.

Ainsi, nous utilisons le théorème 1.3 pour donner une estimation fine de la probabilité

$$P\{\max_{0\leq s\leq t} Y_s \leq u\},$$

quand u tend vers l'infini.

Dans Haiman (1987), le théorème 1.2 est également à l'origine de la démonstration d'un principe d'invariance pour des suites strictement stationnaires de v.a.r. m-dépendantes, qui vérifient l'hypothèse **H** suivante, que nous appellerons hypothèse d'indépendance locale

H : il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $1 < i \leq m$,

$$\limsup_{Z\to b} \left\{ \sup_{\substack{Z\leq v<w<b \\ Z<u<b}} \frac{P\{X_1 > u,\ v < X_i \leq w\}}{(P\{X_1 > u\})^\beta P\{v < X_1 \leq w\}} \right\} < +\infty.$$

Le principe d'invariance est alors le suivant

Théorème 1.4 *Sous* **H**, *on peut construire, sur le même espace de probabilité que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite $\{\hat{X}_n\}_{n\geq 1}$ de v.a.r. indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.), de même loi marginale que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ et telle que presque sûrement (p.s.), il existe deux variables aléatoires entières N et Q, telles que p.s., pour $n \geq N$,*

$$T_n = \hat{T}_{n-Q} \ \text{ et } \ \theta_n = \hat{\theta}_{n-Q},$$

où $\{(\hat{T}_n, \hat{\theta}_n)\}_n$ est la suite des records de $\{\hat{X}_n\}_{n\geq 1}$.

Nous rappelons que la suite $\{(T_n, \theta_n)\}_{n\geq 1}$ des records d'une suite de v.a.r. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est définie par

Définition 1.4

$$T_1 = \inf\{k \geq 1; X_k > \theta_0\}, \quad \theta_1 = X_{T_1},$$

et, pour $n \geq 1$

$$T_{n+1} = \inf\{k \geq T_n; X_k > \theta_n\}, \quad \theta_{n+1} = X_{T_{n+1}},$$

où $\theta_0 < \max\{x;\ P\{X_1 \leq x\} < 1\}$, *est donné.*

Au chapitre 4, nous rappelons quelques résultats utiles sur les records et temps de records dans le cas de v.a.r. i.i.d.. Puis, nous étudions des exemples de suites strictement stationnaires de v.a.r. 1-dépendantes qui vérifient l'hypothèse **H**, et d'autres suites qui ne la vérifient pas. Enfin, dans ce dernier cas, sous des hypothèses plus faibles, nous établissons un principe d'invariance en utilisant des techniques semblables à celles qui contribuent à la démonstration du théorème 1.4.

Chapitre 2

Etude des extrêmes d'une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes.

2.1 Introduction.

Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes. Comme nous l'avons précisé en introduction générale, notre point de départ est le résultat suivant

Théorème 2.1 *(Haiman, 1987)*
Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes à valeurs dans (a,b). Il existe $a < u_0 < b$ et une fonction $\mu(u)$, $0 < \mu(u) < 1$ définie pour u vérifiant $u_0 < P(X_1 > u) < b$ et telle que

$$\max_{n\geq 1}\left|\frac{P\{\max(X_1,\ldots,X_n)\leq u\}}{\mu^n(u)} - 1\right| \leq KP\{X_1 > u, X_2 > u\},$$

où K est une constante positive, et

$$\mu(u) = 1 - P\{X_1 \leq u, X_2 > u\} + O((P(X_1 > u))^2),$$

la fonction $O(x)$, vérifiant

$$|O(x)| \leq C\, x, \quad C > 0.$$

Dans ce chapitre, nous donnons une version améliorée de ce théorème, en reprenant la démonstration initiale, et en insistant sur l'aspect numérique, afin de donner une valeur aux constantes citées dans ce théorème, à savoir u_0, K et C.
Nous obtenons alors le résultat suivant

Théorème 2.2 *Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes, de fonction de répartition $F(x) = P(X_1 \leq x)$, continue.*
On pose $\alpha = \min\{u; F(u) > 0\}$ et $\omega = \max\{u; F(u) < 1\}$.
Il existe $u_0 < \omega$ vérifiant $P(X_1 > u_0) = 0{,}083$ et une fonction $\mu(u)$, $0 < \mu(u) < 1$ définie pour $u_0 \leq u < \omega$ telle que

$$\max_{n\geq 1}\left|\frac{P\{\max(X_1,\ldots,X_n)\leq u\}}{\mu^n(u)} - 1 + P\{X_1 > u, X_2 > u\}\right| \leq 345\ P^2(X_1 > u), \qquad (2.1)$$

où $\mu(u)$ vérifie

$$|\mu(u) - (1 - P(X_1 > u) + P\{X_1 > u, X_2 > u\})| \leq 35{,}25 P^2(X_1 > u). \qquad (2.2)$$

2.2 Démonstration du théorème 2.2.

La démonstration de ce théorème se fait en reprenant pas à pas celle du théorème 1, dans Haiman (1987), pour donner un majorant des constantes apparaissant dans cette démonstration.
On pose pour tout $\alpha < x < \omega$, et pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} q_n(x) &= P\{\max(X_1, \ldots, X_n) \leq x\}, \quad n \geq 1, \quad q_0(x) = 1 \\ p_n(x) &= P\{\min(X_1, \ldots, X_n) > x\}, \quad n \geq 1, \quad p_0(x) = 1, \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$C_x(z) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k p_{k-1}(x) z^k.$$

On remarque que :

1) Pour tout $n \geq 0$ et tout $x \geq 0$,

$$p_n(x) \leq (\sqrt{p_1(x)})^n. \tag{2.4}$$

2) La série $C_x(z)$ est définie pour tout z complexe tel que $|z| < (\sqrt{p_1(x)})^{-\frac{1}{2}}$.

Nous démontrons tout d'abord le

Lemme 2.1 *Pour tout x tel que $p_1(x) \in]0; 0,083]$, la série $C_x(z)$ admet, à l'intérieur du disque $|z| \leq 1 + \sqrt{p_1(x)}$, un seul zéro réel $\lambda(x)$, d'ordre 1, vérifiant :*

$$|\lambda(x) - (1 + p_1(x) - p_2(x))| \leq 25,2026 p_1^2(x). \tag{2.5}$$

Preuve : Comme nous l'avons déjà précisé, ce résultat a été démontré dans (Haiman, 1987) ; il manquait toutefois la valeur de la constante $K = 25,2026$. Nous rappellerons donc brièvement les résultats déjà établis dans (Haiman, 1987).
La démonstration du lemme 2.1 se fait en plusieurs étapes.
(Remarque : pour simplifier les écritures, nous écrirons p_i au lieu de $p_i(x)$, $i \geq 0$.)

a) Il faut d'abord que le disque $|z| = 1 + \sqrt{p_1}$ soit dans le disque de convergence de la série C_x, soit : $1 + \sqrt{p_1} < (\sqrt{p_1(x)})^{-\frac{1}{2}}$, ce qui donne après calculs : $p_1 \in]0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}[$.

b) Soit z tel que $|z| < (\sqrt{p_1(x)})^{-\frac{1}{2}}$, alors, d'après Haiman(1987),

$$\left|C_x'(z) + 1\right| \leq p_1 \left[2|z| + \frac{|z|^2 (3 - 2|z|\sqrt{p_1})}{(1 - |z|\sqrt{p_1})^2}\right]. \tag{2.6}$$

c) Montrons maintenant que C_x admet un zéro réel sur le segment $[1; 1+\sqrt{p_1}]$.
Pour $u \in [0;1]$,

$$C_x(u) = (1-u) + (p_1 u^2 - p_2 u^3) + \sum_{k=4}^{+\infty} (p_{k-1} u^k - p_k u^{k+1})$$

et, comme $p_k < p_{k-1}$, pour tout $u \in [0;1]$, $C_x(u) > 0$.
En particulier, $C_x(1) > 0$.
Par ailleurs,

$$C_x(u) = 1 - u + p_1 u^2 - \left[\sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k}\ u^{2k+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k+1}\ u^{2k+2} \right].$$

Comme $p_{2k} > p_{2k+1}$,

$$C_x(u) \leq 1 - u + p_1 u^2 + (u-1) \sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k+1}\ u^{2k+1}.$$

En remplaçant u par $1+\sqrt{p_1}$ et en utilisant (2.4), on arrive à

$$C_x(1+\sqrt{p_1}) \leq \frac{\sqrt{p_1}}{1 - p_1(1+\sqrt{p_1})^2} \left\{ (1+\sqrt{p_1})^3 (\sqrt{p_1} - p_1^2) - 1 \right\}.$$

En étudiant le terme entre accolades, nous obtenons, pour $p_1 \in]0; 0,1548]$,

$$C_x(1+\sqrt{p_1}) < 0.$$

Donc, pour $p_1 \in]0; 0,1548]$, $C_x(1) > 0$ et $C_x(1+\sqrt{p_1}) < 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in [1; 1+\sqrt{p_1}]$ tel que $C_x(\lambda) = 0$. Par ailleurs, si $u \in [1; 1+\sqrt{p_1}]$, en appliquant (2.6), on obtient

$$C_x'(u) \leq -1 + p_1(1+\sqrt{p_1})[2 + \frac{(1+\sqrt{p_1})(3 - 2\sqrt{p_1}(1+\sqrt{p_1}))}{(1 - \sqrt{p_1}(1+\sqrt{p_1}))^2}].$$

Le terme de droite de cette inégalité est une fonction de p_1 ; l'étude du signe de cette fonction, pour $p_1 \in [0; 0,1548]$, nous permet de conclure que, pour $p_1 \in [0; 0,083]$ et $u \in [1; 1+\sqrt{p_1}]$,

$$C_x'(u) < 0. \tag{2.7}$$

En conclusion, pour $p_1 \in]0; 0,083]$, C_x admet une seule racine réelle $\lambda(x)$, d'ordre 1,dans le disque $|z| \leq 1 + \sqrt{p_1}$; plus précisément, $\lambda \in]1; 1 + \sqrt{p_1}[$.

d) Démontrons (2.5).

D'après le théorème des accroissements finis, $\exists u \in]1; 1 + \sqrt{p_1}[$ tel que

$$C_x(\lambda) - C_x(1) = (\lambda - 1)C_x'(u).$$

D'où,

$$\lambda - (1 + p_1 - p_2) = \frac{(p_1 - p_2)C_x'(u) + C_x(1)}{-C_x'(u)}.$$

Or,

$$C_x(1) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k p_{k-1},$$

et

$$C_x'(u) = -1 + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k k p_{k-1} u^{k-1}.$$

Ainsi,

$$\lambda - (1 + p_1 - p_2) = A(u)(B(u))^{-1} \tag{2.8}$$

avec

$$\begin{aligned} A(u) &= \sum_{k=4}^{+\infty} (-1)^k p_{k-1} + (p_1 - p_2) \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k k p_{k-1} u^{k-1}, \\ B(u) &= 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k k p_{k-1} u^{k-1}, \end{aligned}$$

et, $u \in]1; 1 + \sqrt{p_1}[$. Nous allons donner une majoration de $A(u)$ et de $1 - B(u)$.

Comme $p_{2k+1} \geq p_{2k+2}$,

$$0 \leq \sum_{k=4}^{+\infty} (-1)^k p_{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k+2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k+1},$$

et,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k+1} = p_3 + \sum_{k=2}^{+\infty} p_{2k+1} \leq p_1^2 + \sum_{k=2}^{+\infty} (\sqrt{p_1})^{2k+1}.$$

Finalement,

$$0 \leq \sum_{k=4}^{+\infty}(-1)^k p_{k-1} \leq p_1^2[1 + \frac{\sqrt{p_1}}{1-p_1}]. \tag{2.9}$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k k p_{k-1} u^{k-1} = 2p_1 u - 3p_2 u^2 + S_1,$$

avec

$$S_1 = \sum_{k=4}^{+\infty}(-1)^k k p_{k-1} u^{k-1}.$$

Alors, en utilisant (2.4), et le fait que $u \in]1; 1+\sqrt{p_1}[$,

$$|S_1| \leq p_1^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{p_1})^3 \frac{4 - 3\sqrt{p_1}(1+\sqrt{p_1})}{(1-\sqrt{p_1}(1+\sqrt{p_1}))^2}. \tag{2.10}$$

De plus,

$$\left|2p_1 u - 3p_2 u^2\right| \leq p_1(1+\sqrt{p_1})(5+3\sqrt{p_1}). \tag{2.11}$$

En combinant (2.9)-(2.11), on obtient :

$$\begin{aligned} |A(u)| \leq p_1^2[1 + \frac{\sqrt{p_1}}{1-p_1} &+ (1+\sqrt{p_1})(5+3\sqrt{p_1}) \\ &+ \sqrt{p_1}(1+\sqrt{p_1})^3 \frac{4-3\sqrt{p_1}(1+\sqrt{p_1})}{(1-\sqrt{p_1}(1+\sqrt{p_1}))^2}]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Pour $B(u)$, remarquons tout d'abord que, d'après (2.7), $B(u) \geq 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 1 - B(u) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+2)p_{2k+1}u^{2k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+3)p_{2k+2}u^{2k+2} \\ &\leq 2p_1 u + \sum_{k=1}^{+\infty}(2k+2)p_{2k+1}u^{2k+1}. \end{aligned}$$

En appliquant (2.4), on arrive à

$$1 - B(u) \leq \frac{2p_1(1+\sqrt{p_1})[1+\sqrt{p_1}(1-\sqrt{p_1})(1+\sqrt{p_1})^2(2-p_1(1+\sqrt{p_1})^2)]}{[1-p_1(1+\sqrt{p_1})^2]^2}. \tag{2.13}$$

En combinant (2.8), (2.12) et (2.13) et, sachant que $p_1 \in [0; 0,083]$, nous obtenons

$$|\lambda - (1 + p_1 - p_2)| \leq 25,2026 p_1^2,$$

ce qui donne (2.5). ■

Lemme 2.2 *(Haiman,1987) Soit $D_x(z) = (C_x(z))^{-1}$, et soient $\{d_n(x)\}_{n\geq 0}$, les coefficients de la série associée à $D_x(z)$.*
Alors, pour tout $\alpha < x < \omega$,

$$d_0(x) = 1 \text{ et, } \forall\ n \geq 0,\ q_n(x) = d_{n+1}(x). \tag{2.14}$$

Preuve :
a) Posons :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= p_n \\ \alpha_k &= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_k \leq x, X_{k+1} > x, \ldots, X_n > x\}\ ,\ 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Par la 1-dépendance et la stationnarité, on a

$$\alpha_k = q_{k-1}p_{n-k} - \alpha_{k-1},\ \text{ et, }\ \alpha_n = q_n.$$

De cette relation, on déduit :

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}q_{k-1}p_{n-k} + (-1)^n\alpha_0.$$

Soit

$$q_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}q_{k-1}p_{n-k} + (-1)^n p_n. \tag{2.15}$$

b) Les coefficients $d_n(x)$ sont définis par :

$$\Big(\sum_{n\geq 0}(-1)^n p_{n-1}z^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} d_n(x)z^n\Big) = 1,\ \text{ (avec } p_{-1} = 1).$$

De cette relation, on déduit

$$d_0(x) = 1$$

et, $\forall n \geq 1$,

$$\sum_{k+j=n}(-1)^k p_{k-1}d_j = 0. \tag{2.16}$$

En utilisant (2.15) et (2.16), il est facile de montrer par récurrence le résultat cherché. ∎

Démonstration du théorème 2.2 :

a) On pose

$$\mu(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \ ,$$

où λ est défini par le lemme 2.1. Alors

$$|\mu - (1 - p_1 + p_2)| \leq p_1^2 \frac{K+1}{0,917 - K(0,083)^2}, \quad \text{où } K = 25,2026 \ ,$$

ce qui donne (2.2).

b) De plus, d'après le lemme 2.1, pour tout x tel que $p_1 \in]0; 0,083]$, il existe une fonction $R_x(z) \neq 0$, définie pour tout z réel, tel que $|z| \leq 1 + \sqrt{p_1(x)}$, et vérifiant : $\forall |z| \leq 1 + \sqrt{p_1(x)}$,

$$D_x(z) = \frac{1}{R_x(z)(1 - \frac{z}{\lambda(x)})} \ . \tag{2.17}$$

Alors, d'après Haiman (1987), si l'on pose :

$$R_x(z) = \sum_{n \geq 0} r_n z^n$$
$$S_x(z) = \frac{1}{R_x(z)} - 1 = \sum_{n \geq 1} s_n z^n,$$

nous avons $r_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$r_n = \frac{1}{\lambda^n}[1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k p_{k-1} \lambda^k], \tag{2.18}$$

puis

$$\begin{aligned} s_1 &= -r_1 \\ s_2 &= r_1^2 - r_2 \\ s_3 &= -r_1^3 + 2r_1 r_2 - r_3, \end{aligned} \tag{2.19}$$

et, $\forall n \geq 1$,

$$|s_n| \leq p_1^{\frac{n}{2}} g(1+g)^{n-1} \tag{2.20}$$

où

$$g = \frac{\lambda(1-\lambda p_1)}{1-\lambda^2 p_1}. \tag{2.21}$$

c) En utilisant le lemme 2.2, on obtient :

$$\frac{q_n}{\mu^n} - 1 = (\frac{1}{\lambda} - 1) + \sum_{k=0}^{n} \lambda^k s_{k+1}. \tag{2.22}$$

- En combinant (2.18), (2.19) et (2.22), nous avons :

$$\frac{q_1}{\mu} - 1 = \lambda s_2 = -1 + \lambda(1-p_1),$$

puis (2.5) conduit à

$$\left|\frac{q_1}{\mu} - 1 + p_2\right| \leq 26,2026 p_1^2.$$

- De la même façon, pour $n = 2$, (2.18), (2.19) et (2.22) donnent :

$$\frac{q_2}{\mu^2} - 1 = \lambda^2(1 - 2p_1 + p_2) - 1$$

puis avec (2.5)

$$\left|\frac{q_2}{\mu^2} - 1 + p_2\right| \leq 58,965 p_1^2. \tag{2.23}$$

- Généralisons : pour $n \geq 3$

$$\frac{q_n}{\mu^n} - 1 = \frac{q_2}{\mu^2} - 1 + \sum_{p=3}^{n} \lambda^p s_{p+1}. \tag{2.24}$$

D'après (2.20),

$$\sum_{p=3}^{n} \lambda^p |s_{p+1}| \leq p_1^2 \frac{g\lambda^3(1+g)^3}{1-\lambda\sqrt{p_1}(1+g)} \leq 285,988 p_1^2.$$

D'après (2.5) et, compte tenu du fait que $p_1 \in]0; 0,083]$,

$$|\lambda| \leq 1,083 + K(0,083)^2, \text{ où } K = 25,2026.$$

On pose donc

$$\gamma = 1,083 + K(0,083)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} g &\le \frac{\gamma}{1-0,083\gamma^2} \\ 1+g &\le 1+\frac{\gamma}{1-0,083\gamma^2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$1-\lambda\sqrt{p_1}(1+g)=\frac{1-\lambda\sqrt{p_1}-\lambda^2\sqrt{p_1}(1+\sqrt{p_1})+2\lambda^3p_1\sqrt{p_1}}{1-\lambda^2p_1},$$

ce qui donne

$$1-\lambda\sqrt{p_1}(1+g)\ge 1-\gamma\sqrt{0,083}-\gamma^2\sqrt{0,083}(1+\sqrt{0,083})+0,166\gamma^3\sqrt{0,083}.$$

En combinant ces majorations, pour $n\ge 3$,

$$\left|\frac{q_n}{\mu_n}-1+p_2\right|\le 345p_1^2.$$

En conclusion, pour tout $n\ge 1$,

$$\left|\frac{q_n}{\mu^n}-1+p_2\right|\le 345p_1^2.$$

Nous obtenons donc (2.1). ∎

Dans le chapitre suivant, nous allons appliquer le théorème 2.2 à des processus strictement stationnaires 1-dépendants, puis aux accroissements du processus de Wiener.

Chapitre 3

Application à des processus strictement stationnaires 1-dépendants.

3.1 Introduction.

Dans cette partie, nous allons établir un résultat similaire à celui du théorème 2.2 démontré au chapitre 2 dans le cas continu.

En effet, si $\{Y_s\}_{s\geq 0}$ est un processus strictement stationnaire 1-dépendant à trajectoires continues, alors, la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ définie par

$$X_n = \max_{n-1\leq s\leq n} Y_s, \quad n \geq 1,$$

est une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes ; nous pouvons donc lui appliquer le théorème 2.2 pour obtenir le théorème 3.1 qui suit.

Par analogie avec les notations (2.3), on pose, pour des réels u et $t > 0$,

$$\begin{aligned} P_u(t) &= P\{\max_{0\leq s\leq t} Y_s \leq u\} \\ Q_u(t) &= 1 - P_u(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

et

$$\Pi(u) = 2P_u(1) - P_u(2), \tag{3.2}$$

qui correspond au terme $1 - P\{X_1 > u, X_2 > u\}$ dans (2.1). Nous avons alors le

Théorème 3.1 *Il existe une fonction $\mathcal{M}(u)$ définie pour $u \geq u_0$, où u_0 vérifie $Q_{u_0}(1) = 0,083$, telle que*

(i) pour tout $n \geq 3$, on a

$$P_u(n) = (\mathcal{M}(u))^n \Pi(u)(1 + O_{1,n}(Q_u^2(1))), \quad u \geq u_0, \tag{3.3}$$

avec

$$|O_{1,n}(x)| \leq 377\,|x|\,.$$

(ii) Soit v_0 vérifiant $Q_{v_0}^2(1,5) \leq 10^{-5}$. Alors, pour tout $n \geq 2$ et $0 < \theta < 1$, on a, pour $u \geq v_0$,

$$P_u(n+\theta) = (\mathcal{M}(u))^{n+\theta} \Pi(u)(1 + O(Q_u^2(1,5)), \tag{3.4}$$

avec

$$|O(x)| \leq 1136\,|x|\,.$$

De plus, nous avons

$$|\mathcal{M}(u) - (1 - P_u(1) + P_u(2))| \leq 35,25 Q_u^2(1). \tag{3.5}$$

Remarque 3.1 Avec ce théorème, il est facile de vérifier que , pour tout $h > 2$ fixé,

$$Q_u(h) = (h-1)Q_u(2) - (h-2)Q_u(1) + O(Q_u^2(1,5)), \quad u \to +\infty.$$

Puis, en deuxième lieu, nous allons appliquer le théorème 3.1 au processus

$$Y_t = W(t+1) - W(t), \quad t \geq 0, \tag{3.6}$$

où $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, $W(0) = 0$ est le processus de Wiener. On peut alors vérifier que $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ est un processus strictement stationnaire centré gaussien de fonction de covariance

$$r(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{si } |\tau| < 1 \\ 0 & \text{si } |\tau| \geq 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

et, qu'il est 1-dépendant.

En posant

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{3.8}$$

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} g(x)\,dx, \tag{3.9}$$

et

$$\Psi(u) = 1 - \Phi(u), \tag{3.10}$$

nous obtenons alors le

Théorème 3.2 *Les résultats du théorème 3.1 restent vrais pour le processus $\{Y_t\}_{t\geq 0}$, avec de plus $u_0 \geq 2,4$, et*

$$|\mathcal{M}(u) - (1 - ug(u))| \leq 65u^2g^2(u), \tag{3.11}$$

$$|\Pi(u) - (1 - 2\Psi(u))| \leq 0,66u^2g^2(u), \tag{3.12}$$

$$Q_u^2(1) \leq 1,82u^2g^2(u), \tag{3.13}$$

et, pour $u \geq v_0 = 3,7$, on a

$$Q_u^2(1,5) \leq Q_u^2(2) \leq 4,61u^2g^2(u). \tag{3.14}$$

Remarque 3.2 Le résultat du théorème 3.2 conduit à une approximation plus fine que le

Lemme 3.1 *(Révész, 1982)*
Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $u_0(\varepsilon) > 0$ et $T_0 = T_0(\varepsilon) > 0$ tels que, si $u > u_0$ et $T > T_0$, alors

$$\begin{aligned}
\exp\left\{-25\frac{T}{\sqrt{2\pi}}ue^{-\frac{u^2}{2}}\right\} &\leq P\{\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq 1}(W(t+s)-W(t))\leq u\} \\
&\leq P\{\sup_{0\leq t\leq T}(W(t+1)-W(t))\leq u\} \\
&\leq \exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{T}{\sqrt{2\pi}}ue^{-\frac{u^2}{2}}\right\}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.3 Dans [26], Eastwood et Steinebach remarquent qu'une expression explicite de la distribution exacte de

$$\sup_{0\leq t\leq T}(W(t+1)-W(t))$$

est inconnue, et ils présentent des tables de valeurs pour $P_u(1)$ par les méthodes de Monte-Carlo. En fait, nous allons voir qu'il est possible de donner une expression explicite de $P_u(1)$ et $P_u(2)$ grâce aux formules de Shepp. Par contre, avec les théorèmes 3.1 et 3.2, pour $T > 2$ fixé, on peut déterminer $K(T)$ et $w(T) \geq v_0$, tels que, pour $u \geq w(T)$, on ait

$$\left|P_u(T)-(1-ug(u))^T(1-2\Psi(u))\right| \leq K(T)u^2g^2(u). \tag{3.15}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on peut déterminer $w'(\varepsilon)$ tel que, pour $u \geq w'$, le premier terme dans (3.15) soit inférieur à ε, ce qui pourrait nous donner une estimation de $P_u(T)$ sans avoir recours aux simulations.

Remarque 3.4 Soit $\{Y_t\}_{t\geq 0}$, un processus gaussien strictement stationnaire (d'espérance nulle et de variance égale à 1) ayant une fonction de covariance qui vérifie, pour un α et une constante $C > 0$,

$$r(\tau) = 1 - C\,|\tau|^\alpha + o(|\tau|^\alpha), \text{ quand } \tau \to 0. \tag{3.16}$$

Alors, d'après Leadbetter, Lindgren et Rootzén (voir [14], p.232), si $h > 0$ est tel que pour $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{\varepsilon\leq t\leq h} r(t) < 1,$$

alors

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{Q_u(h)}{u^{2/\alpha}g(u)/u}=hC^{1/\alpha}H_\alpha \tag{3.17}$$

où H_α est une constante qui ne dépend que de α.
Le processus $Y_t = W(t+1)-W(t)$ vérifie (3.16) avec $C=\alpha=1$, et, d'après (3.15), $H_1=1$. Par ailleurs, d'après (3.17),

$$Q_u(h)=hug(u)+o(ug(u)),\ \ u\to+\infty, \tag{3.18}$$

tandis que (3.15) combiné avec

$$0\le\frac{g(u)}{u}(1-\frac{1}{u^2})\le\Psi(u)\le\frac{g(u)}{u},\ \ u\ge1, \tag{3.19}$$

conduit à

$$Q_u(h)=hug(u)+2\frac{g(u)}{u}+O(u^2g^2(u)),\ \ u\to+\infty, \tag{3.20}$$

ce qui est plus précis que (3.18). De plus, avec (3.20), on peut voir que la vitesse de convergence dans (3.18) peut être assez lente. En effet, si u_n est tel que $u_ng(u_n)=\frac{1}{n}$, on a

$$Q_{u_n}(h)=\frac{h}{n}+\frac{1}{n\log n}+O(\frac{1}{n^2})\ \text{quand}\ n\to+\infty. \tag{3.21}$$

Remarque 3.5 Pour tout τ, soit $\{u_n(\tau)\}_{n\ge n_0(\tau)}$ vérifiant $u_ng(u_n)=\frac{\tau}{n}$, $\ u_{n_0}>2,4$. Alors, les théorèmes 3.1 et 3.2 nous permettent de déterminer une constante universelle $K>0$ telle que

$$\left|P_{u_n}(n)-\mathrm{e}^{-\tau}\right|\le K\frac{\tau^2}{n},\ \ n\ge n_0. \tag{3.22}$$

De plus, comme $Y_t=W(t+1)-W(t)$ est un cas particulier de processus gaussien strictement stationnaire non différentiable, on sait que (voir [14], p.233)

$$\lim_{T\to+\infty}P\left\{\frac{M_T-a_T}{b_T}<x\right\}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}, \tag{3.23}$$

avec

$$M_T=\max_{0\le s\le T}Y_s$$

et

$$a_T=(2\log T)^{1/2},$$

$$b_T = (2\log T)^{1/2} + \frac{1}{(2\log T)^{1/2}} + \frac{1}{(2\log T)^{1/2}}\left(\frac{\log_2 T}{2} + \log\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right).$$

Ainsi, les théorèmes 3.1 et 3.2 peuvent être utilisés pour évaluer la vitesse de convergence dans (3.23) pour ce processus particulier.

Remarque 3.6 Le théorème 3.1 implique que

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1}\log P_u(n) = \mathcal{M}(u), \quad u \geq u_0.$$

Ceci répond en particulier à la question de Shepp (1971), p.951 à propos de l'existence de la limite ci-dessus pour le processus $Y_t = W(t+1) - W(t)$.

D'autres articles classiques qui traitent de l'estimation de $P_u(T)$ pour $Y_t = W(t+1) - W(t)$ sont Shepp (1966), Jamison (1970) et Ortega et Wschebor (1984).

3.2 Démonstation du théorème 3.1.

Soit

$$X_n = \max_{n-1\leq s\leq n} Y_s, \quad n \geq 1. \tag{3.24}$$

Alors, $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes. Et, (3.3) et (3.5) sont une conséquence immédiate de (2.1), p. 8, en prenant $\mathcal{M}(u) = \mu(u)$ et $\Pi(u) = 1 - P\{X_1 > u, X_2 > u\}$.

Soient p, $q \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p/q < 1/2$ et posons $h = p/q$.
On peut alors remarquer que pour tout h, la suite

$$X_n^{(h)} = \max\{Y_s; (n-1)(1+h) \leq s \leq n(1+h)\}, \quad n \geq 1 \tag{3.25}$$

est 1-dépendante ($X_n^{(0)} = X_n$). Ainsi, en appliquant le théorème 2.2 et en appelant $\mu_h(u)$ et $\Pi_h(u) = 1 - P\{X_1^{(h)} > u, X_2^{(h)} > u\}$, les éléments correspondants de (2.1), nous obtenons, pour tout entier $r \geq 1$,

$$P_u(rq(1+\frac{p}{q})) = \mu_h^{rq}\Pi_h(u)(1 + O_1(Q^2)) = \mu^{rq(1+\frac{p}{q})}\Pi(u)(1 + O_2(Q^2)), \tag{3.26}$$

où les fonctions O_i, i=1,2, dépendent respectivement de rq et $rq(1+\frac{p}{q})$, $Q = Q_u(1,5)$ et $|O_i(x)| \leq 377\,|x|$, i=1,2. (Remarquons que, puisque $Q_u(1,5) \geq Q_u(1+h)$, si v_0 est tel que

$Q_{v_0}(1,5) \leq 0,083$, alors $\mu_h(u)$ est définie pour $u \geq v_0$.)
Considérons maintenant $P_u(rq(1+\frac{p}{q}))/P_u(q(1+\frac{p}{q}))$; de (3.26), nous déduisons

$$\mu_h^{(r-1)q}(1+O_3(Q^2)) = \mu^{(r-1)q(1+\frac{p}{q})}(1+O_4(Q^2)), \tag{3.27}$$

puis

$$(\frac{\mu_h}{\mu^{1+h}})^{(r-1)} = (1+O_5(Q^2)), \tag{3.28}$$

où O_5 ne dépend que de r et

$$|O_5(x)| \leq K\,|x|\,, \quad K \text{ constante universelle.}$$

Puisque le terme de droite dans (3.28) est borné, nous aurons nécessairement

$$\mu_h = \mu^{1+h}. \tag{3.29}$$

Ainsi, avec (3.26), nous déduisons

$$\Pi_h(u) = \Pi(u)\frac{1+O_2(Q^2)}{1+O_1(Q^2)}\ . \tag{3.30}$$

Pour être cohérent, il faut que $1+O_1(Q^2) > 0$. Or, $1+O_1(Q^2) \geq 1 - 377\,Q_u^2(1,5)$, donc, il suffit que $Q_u^2(1,5) < 1/377$, ce qui conduit à une nouvelle restriction pour $Q_u(1,5)$, à savoir :
si v_0 est tel que $Q_{v_0}(1,5) \leq 5,15.10^{-2}$, alors, pour tout $u \geq v_0$, $Q_u^2(1,5) < 1/377$.
D'autre part, comme $\{Y_s\}$ est un processus à trajectoires continues, pour démontrer (3.4), il suffit de le montrer pour tout rationnel θ.
Soit donc θ, un rationnel, $0 < \theta < 1$, et posons $h = \theta/n$, $n \geq 2$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} P_u(n+\theta) &= P_u(n(1+h)) = \mu_h^n \Pi_h(u)(1+O_n(Q^2)) \\ &= \mu^{n+\theta}\Pi(u)\frac{1+O_2(Q^2)}{1+O_1(Q^2)}(1+O_n(Q^2)) \end{aligned}$$

avec

$$|O_n(x)| \leq \frac{345}{1-0,083}\,|x| \leq 377\,|x|\,.$$

Enfin, pour arriver au résultat final, il faut écrire le terme de droite dans l'expression de $P_u(n+\theta)$ sous une forme plus simplifiée. Une majoration brutale conduirait à des constantes de l'ordre du million, ce qui est peu intéressant. Ceci explique pourquoi nous avons ajouté une nouvelle contrainte pour $Q_{v_0}(1,5)$ afin d'avoir des constantes cohérentes et pour obtenir enfin (3.4). ∎

3.3 Démonstration du théorème 3.2.

Pour démontrer le théorème 3.2, nous allons tout d'abord montrer quelques résultats préliminaires. On considère donc le processus $\{Y_s\}$ définit par

$$Y_s = W(s+1) - W(s),$$

où $\{W(t), t \geq 0\}$, $W(0) = 0$ est le processus de Wiener.

Pour $x < u$ et $T > 0$ (u étant un réel fixé), on pose

$$P_u(T|x) = P\{\max_{0 \leq s \leq T} Y_s < u | Y_0 = x\}, \tag{3.31}$$

et

$$P_u(T) = P\{\max_{0 \leq s \leq T} Y_s \leq u\} = \int_{-\infty}^{u} P_u(T|x) g(x)\, dx \ , \tag{3.32}$$

où

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{3.33}$$

Nous utilisons tout d'abord les résultats de Shepp qui suivent, pour donner des expressions explicites de $P_u(1)$ et $P_u(2)$.

Théorème 3.3 *(Shepp, 1966)*
Pour tout $0 \leq T \leq 1$,

$$P_u(T|x) = \Phi\left[\frac{u - x(1-T)}{\sqrt{T(2-T)}}\right] - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2 - x^2)} \Phi\left[\frac{x - u(1-T)}{\sqrt{T(2-T)}}\right], \tag{3.34}$$

où

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} g(u)\, du. \tag{3.35}$$

Théorème 3.4 *(Shepp, 1971)*
Pour tout entier $n \geq 1$,

$$P_u(n|x) = \frac{1}{g(x)} \int_D \cdots \int \mathit{det}\ \ g(y_i - y_{j+1} + u)\, dy_2 ... dy_{n+1}, \tag{3.36}$$

avec

$$D = \{u - x < y_2 < ... < y_{n+1}\}, \ \ 0 \leq i, j \leq n, \ \ y_0 = 0, \ \ y_1 = u - x,$$

et

$$\det\ g(y_i - y_{j+1} + u) = \begin{vmatrix} g(y_0 - y_1 + u) & \dots & g(y_0 - y_{n+1} + u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(y_n - y_1 + u) & \dots & g(y_n - y_{n+1} + u) \end{vmatrix}$$

Remarque 3.7 Comme le fait remarquer Shepp dans [24], p.951, pour T grand, l'expression (3.36) est peu maniable et, apparemment , ne convient pas pour des manipulations numériques ou des estimations asymptotiques. Ce même article contient une formule explicite pour $P_u(T)$, semblable à (3.36), lorsque $T = n + \theta,\ n \geq 1,\ 0 < \theta < 1$. Slepian (1961) fut le premier à trouver une formule explicite pour $P_u(T),\ 0 \leq T \leq 1$, de la forme

$$-\frac{d}{dT}P_u(T|x) = \frac{u-x}{T\sqrt{2\pi T(2-T)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x(1-T)-u)^2}{T(2-T)}\right\}.$$

3.3.1 Expressions de $P_u(1)$ et $P_u(2)$.

Proposition 3.1 *Nous avons*

$$P_u(1) = 1 - gu - 2\Psi + gu\Psi - g^2 + \Psi^2, \tag{3.37}$$

où

$$\Psi = \Psi(u) = \int_u^{+\infty} g(v)\,dv = 1 - \Phi(u). \tag{3.38}$$

Preuve : En combinant (3.32) et (3.34) pour $T = n = 1$, on obtient

$$P_u(1) = \Phi^2(u) - g(u)\int_{-\infty}^{u} \Phi(x)dx\ ,$$

puis, en faisant une intégration par parties

$$\hat{\Phi}(u) = \int_{-\infty}^{u} \Phi(x)\,dx = u\Phi(u) + g(u)\ , \tag{3.39}$$

ainsi

$$P_u(1) = \Phi^2(u) - ug(u)\Phi(u) - g^2(u)\ ,$$

ce qui, combiné avec (3.38) donne (3.37). ∎

Remarque 3.8 En utilisant les tables des fonctions g et Φ et (3.37), on déduit que pour $u \geq 2,4$, alors $Q_u(1) \leq 0,083$.

Proposition 3.2 *Nous avons*

$$P_u(2) = 1 - 2gu - 2\Psi + \frac{g^2u^2}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}g^2u + 4gu\Psi - g^2 + A(u) + B(u) + C(u), \qquad (3.40)$$

où

$$\begin{aligned}
A(u) &= -\Psi(u\sqrt{2}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv + 2\Psi^2, \\
B(u) &= \frac{1}{2}(g^3u - g^2u^2\Psi) - g^2\Psi + 2(g^2\Psi - gu\Psi^2) \\
&\quad - \int_u^{+\infty} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv - \Psi^3,
\end{aligned}$$

et

$$C(u) = u^2g^2\left\{\frac{1}{u}\int_{-\infty}^{u} \mathrm{e}^{-(u-y)^2}\Psi(y)\,dy - \frac{\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{3}}}{2u^2}(1 - \Psi(\frac{u}{\sqrt{3}}))\right\}.$$

Preuve : En appliquant (3.32) et (3.36) à $T = n = 2$, on obtient

$$P_u(2) = \int_{-\infty}^{u} [\int_D \int \det g(y_i - y_{j+1} + u)\,dy_2\,dy_3]\,dx, \qquad (3.41)$$

avec

$$D = \{u - x < y_2 < y_3\}, \;\; 0 \leq i,j \leq 2, \;\; y_0 = 0, \;\; y_1 = u - x.$$

En développant le déterminant dans (3.41), on a

$$\begin{aligned}
P_u(2) &= \int_{-\infty}^{u} g(x)[\int_{u-x}^{+\infty} g(2u-x-y_2)\int_{y_2}^{+\infty} g(u+y_2-y_3)\,dy_3\,dy_2]\,dx \\
&- g(u)\int_{-\infty}^{u}[\int_{u-x}^{+\infty} g(u-y_2)\int_{y_2}^{+\infty} g(u+y_2-y_3)\,dy_3\,dy_2]\,dx \\
&+ g^2(u)\int_{-\infty}^{u}[\int_{u-x}^{+\infty}\int_{y_2}^{+\infty} g(u-y_3)\,dy_3\,dy_2]\,dx \\
&- \int_{-\infty}^{u}[\int_{u-x}^{+\infty} g(x+y_2)g(2u-x-y_2)\int_{y_2}^{+\infty} g(u-y_3)\,dy_3\,dy_2]\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{-\infty}^{u} [\int_{u-x}^{+\infty} g(u-y_2)g(x+y_2) \int_{y_2}^{+\infty} g(2u-x-y_3)\, dy_3\, dy_2]\, dx \\
&- g(u) \int_{-\infty}^{u} g(x) [\int_{u-x}^{+\infty} \int_{y_2}^{+\infty} g(2u-x-y_3)\, dy_3\, dy_2]\, dx.
\end{aligned}
$$

En faisant des changements de variables dans ces intégrales, cette dernière expression devient

$$
P_u(2) = \Phi(u)P_u(1) - I + J + K, \tag{3.42}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{u} \left[\int_{0}^{+\infty} \varphi(u^2+x^2)\, \Phi(u-z)\, dz \right] dx \\
J &= \int_{-\infty}^{u} \left[\int_{0}^{+\infty} \Phi(u-z)\, \varphi\{(u+z)^2+(x-z)^2\}\, dz \right] dx \\
K &= \int_{-\infty}^{u} \left[\int_{0}^{+\infty} \Phi(x-z)\, [\varphi(2u^2) - \varphi\{(u-z)^2+(u+z)^2\}]\, dz \right] dx
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

et

$$
\varphi(v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v}{2}}.
$$

Exprimons chaque terme séparément.

- Expression de I.

Il est facile de voir que

$$
I = \varphi(u^2) \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} [\int_{-\infty}^{u} \Phi(v)\, dv]\, dx.
$$

En combinant avec (3.39),

$$
I = \frac{u e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-u^2}}{2\pi} - \Psi(u) \left[\frac{2u e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-u^2}}{2\pi} \right] + \frac{u e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Psi^2(u).
$$

Soit

$$
I = gu + g^2 - 2gu\Psi - g^2\Psi + gu\Psi^2. \tag{3.44}
$$

– Expression de J.

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{u} \Phi^2(v) g(2u-v)\,dv \\ &= \int_{-\infty}^{u} g(2u-v)\,dv - 2\int_{-\infty}^{u} \Psi(v)g(2u-v)\,dv + \int_{-\infty}^{u} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv. \quad (3.45) \end{aligned}$$

Par un changement de variable,

$$\int_{-\infty}^{u} g(2u-v)\,dv = \Psi(u). \tag{3.46}$$

En faisant une intégration par parties,

$$\int_{-\infty}^{u} \Psi(v)g(2u-v)\,dv = \Psi^2(u) + \int_{\mathbb{R}} \Psi(2u-v)g(v)\,dv - \int_{-\infty}^{u} \Psi(2u-v)g(v)\,dv.$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(2u-v)g(v)\,dv = P(Z_1 + Z_2 > 2u),$$

où Z_1 et Z_2 sont des v.a.r. i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(2u-v)g(v)\,dv = \Psi(u\sqrt{2}).$$

Par ailleurs, en effectuant un changement de variables,

$$\int_{-\infty}^{u} \Psi(2u-v)g(v)\,dv = \int_{-\infty}^{u} g(2u-y)\Psi(y)\,dy,$$

qui est égale à l'intégrale précédente, d'où

$$2\int_{-\infty}^{u} \Psi(v)g(2u-v)\,dv = \Psi^2(u) + \Psi(u\sqrt{2}). \tag{3.47}$$

En combinant avec (3.45)-(3.47),

$$J = \Psi - \Psi(u\sqrt{2}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv - \Psi^2 - \int_{u}^{+\infty} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv. \tag{3.48}$$

– Expression de K.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2\pi}e^{-u^2}\int_0^{+\infty}(1-e^{-z^2})[\int_{-\infty}^{u}\Phi(x-z)\,dx]\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-u^2}\int_0^{+\infty}\hat{\Phi}(u-z)\,dz-\frac{1}{2\pi}e^{-u^2}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\hat{\Phi}(u-z)\,dz. \end{aligned} \tag{3.49}$$

1) En faisant un changement de variable, puis en utilisant (3.39),

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\hat{\Phi}(u-z)\,dz &= \frac{1}{2}(1+u^2)\Phi(u)+\frac{1}{2}ug(u) \\ &= \frac{1}{2}(1+u^2)+\frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}-\frac{1}{2}(1+u^2)\Psi(u). \end{aligned} \tag{3.50}$$

2) Posons $K_1=\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\hat{\Phi}(u-z)\,dz$ et $\hat{\Psi}(u)=\int_u^{+\infty}\Psi(v)\,dv$.
Alors,

$$\hat{\Psi}(u)=-u\Psi(u)+g(u)=\hat{\Phi}(u)-u, \tag{3.51}$$

ainsi

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{+\infty}(u-z)e^{-z^2}\,dz+\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\hat{\Psi}(u-z)\,dz \\ &= u\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{1}{2}+\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\hat{\Psi}(u-z)\,dz. \end{aligned}$$

En utilisant (3.51) et en faisant une intégration par parties, on arrive à

$$K_1=u\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Psi(u)+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{u^2}{3}}\Phi(\frac{u}{\sqrt{3}})-u\int_{-\infty}^{u}e^{-(u-y)^2}\Psi(y)\,dy, \tag{3.52}$$

puis en combinant (3.49), (3.50) et (3.52),

$$\begin{aligned} K &= \frac{u^2g^2}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}g^2u+g^2+\frac{g^3u}{2}-\frac{g^2u^2\Psi}{2}-g^2\Psi \\ &+ u^2g^2\left\{\frac{1}{u}\int_{-\infty}^{u}e^{-(u-y)^2}\Psi(y)\,dy-\frac{\sqrt{3}e^{-\frac{u^2}{3}}}{2u^2}(1-\Psi(\frac{u}{\sqrt{3}}))\right\}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

En combinant (3.42)-(3.44), (3.48) et (3.53), on obtient (3.40). ■

3.3.2 Démonstration du théorème 3.2.

En préliminaire, nous allons donner un encadrement des termes A, B et C qui apparaissent dans la proposition 3.2. On rappelle que

$$\begin{aligned} A(u) &= -\Psi(u\sqrt{2}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv + 2\Psi^2, \\ B(u) &= \frac{1}{2}(g^3u - g^2u^2\Psi) - g^2\Psi + 2(g^2\Psi - gu\Psi^2) \\ &\quad - \int_{u}^{+\infty} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv - \Psi^3, \end{aligned}$$

et

$$C(u) = u^2g^2\left\{\frac{1}{u}\int_{-\infty}^{u} e^{-(u-y)^2}\Psi(y)\,dy - \frac{\sqrt{3}e^{-\frac{u^2}{3}}}{2u^2}(1-\Psi(\frac{u}{\sqrt{3}}))\right\}.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv = P\{Z_1+Z_3>2u; Z_2+Z_3>2u\},$$

où Z_1, Z_2 et Z_3 sont des v.a.r. indépendantes, de loi normale centrée réduite. Ainsi,

$$0 \le \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv \le \Psi(u\sqrt{2}).$$

Par ailleurs, nous avons

$$0 \le \int_{u}^{+\infty} \Psi^2(v)g(2u-v)\,dv \le \Psi(u)\Psi(u\sqrt{2}),$$

et

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Psi \le \int_{-\infty}^{u} e^{-(u-y)^2}\Psi(y)\,dy \le \sqrt{\pi}\Psi(\frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{3}}).$$

Ainsi, en combinant avec (3.19), nous arrivons à

$$2\frac{g^2}{u^2}(1-\frac{1}{u^2})^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{u}g^2 \le \quad A \quad \le 2\Psi^2 \le 2\frac{g^2}{u^2}, \tag{3.54}$$

$$-\frac{g^3}{u}[1+\frac{\sqrt{\pi}}{u}+\frac{2}{u^2}] \le \quad B \quad \le \frac{g^3}{u}[-\frac{1}{2}+\frac{3}{u^2}+\frac{1}{u^4}-\frac{3}{u^6}+\frac{1}{u^8}], \tag{3.55}$$

et

$$g^3[\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{3}{2u}-\frac{\sqrt{\pi}}{2u^2}-\frac{9}{2u^3}-\frac{\sqrt{3}e^{-u^2/3}}{2}g^2]\leq C\leq\frac{3g^3}{2u}. \tag{3.56}$$

Démonstration de (3.13).

D'après (3.37),

$$Q_u(1)=1-P_u(1)=gu\left\{1+\frac{2\Psi}{gu}-\Psi+\frac{g}{u}+\frac{\Psi^2}{gu}\right\},$$

qui, combiné avec (3.19), conduit à

$$|Q_u(1)|\leq ug\left\{(1+\frac{2}{u^2})+\frac{g}{u^5}(2-\frac{1}{u^2})\right\},$$

ce qui donne (3.13).

Démonstration de (3.11).

En combinant (3.37) et (3.40), on obtient

$$1-P_u(1)+P_u(2)-(1-ug)=\frac{u^2g^2}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}g^2u+3gu\Psi-\Psi^2+A+B+C.$$

On combine avec (3.54)-(3.56), (3.5) et (3.13), ainsi

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}(u)-(1-ug)|\leq u^2g^2\Bigg\{&(35,25C_3^2+\frac{1}{2})-\frac{\sqrt{\pi}}{2u}+\frac{3}{u^2}\\&+\frac{1}{u^4}+\frac{g}{u^3}(1+\frac{3}{u^2}+\frac{1}{u^4}-\frac{3}{u^6}+\frac{1}{u^8})\Bigg\},\end{aligned}$$

où C_3^2 est la constante qui apparait dans (3.13). Ainsi, nous obtenons (3.11).

Démonstration de (3.12).

En combinant (3.2), (3.37) et (3.40),

$$\Pi(u)-(1-2\Psi)=-\frac{1}{2}u^2g^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}ug^2-2ug\Psi-g^2+2\Psi^2-A-B-C,$$

puis, avec (3.19)

$$|\Pi(u)-(1-2\Psi)|\leq u^2g^2\left\{(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2u}+\frac{3}{u^2})+\frac{g}{u^3}(1+\frac{3}{u^2}+\frac{1}{u^4}-\frac{3}{u^6}+\frac{1}{u^8})\right\},$$

ce qui donne (3.12).

Démonstration de (3.14).

Tout d'abord, remarquons que

$$P_u(2) \geq 1 - 2gu - 2\Psi + \frac{g^2u^2}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}g^2u + 4gu\Psi - g^2 + A' + B' + C',$$

avec

$$\begin{aligned} A' &= -\Psi(u\sqrt{2}) + 2\Psi^2 \\ B' &= \frac{1}{2}(ug^3 - g^2u^2\Psi) + g^2\Psi - 2gu\Psi^2 - \Psi\Psi(u\sqrt{2}) - \Psi^3 \\ C' &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}ug^2\Psi - \frac{\sqrt{3}}{2}g^2 e^{-u^2/3}(1 - \Psi(u/\sqrt{3})). \end{aligned} \tag{3.57}$$

En utilisant les tables des fonctions g et Ψ, on a, pour $u \geq 3,7$, $Q_u(2) \leq 10^{-5}$.

De façon évidente, $|1 - P_u(1,5)| \leq |1 - P_u(2)|$. Pour $u \geq 3,7$,

$$\begin{aligned} |1 - P_u(2)| \leq ug\Big\{ & 2(1 + \frac{1}{u^2}) + ug(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2u} - \frac{3}{u^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{u^3} + \frac{2}{u^4} + \frac{4}{u^6} - \frac{2}{u^8}) \\ & - \frac{g^2}{u}(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{2u} - \frac{3\sqrt{\pi}}{2u^2} - \frac{13}{2u^3}) + \frac{\sqrt{3}e^{-u^2/3}}{2}\frac{g}{u}\Big\}, \end{aligned}$$

d'où (3.14). ■

Chapitre 4

Principe d'invariance pour certaines suites strictement stationnaires de v.a.r. 1-dépendantes.

4.1 Introduction.

Une méthode classique pour l'étude des extrêmes d'une suite de v.a.r. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est la recherche de suites $\{a_n\}_{n\geq 1}$ et $\{b_n\}_{n\geq 1}$ avec $b_n > 0$, et d'une fonction de répartition (f.d.r.) $H(x)$, non dégénérée telles que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{M_n - a_n}{b_n} < x\right\} = H(x),$$

où $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Dans le cas où $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. i.i.d., on sait qu'il existe trois types de telles lois $H(x)$, appelées lois limites extrêmes. Les livres de Galambos (1987) ou de Leadbetter, Lindgren et Rootzén (1988), contiennent les développements récents de cette théorie, avec ses extensions aux suites strictement stationnaires.

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à l'étude des extrêmes de suites strictement stationnaires de v.a.r. 1-dépendantes, en abordant le problème de manière différente. Tout d'abord, rappelons la définition suivante :

Définition 4.1 Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. On définit la suite *des records classiques* de $\{X_n\}_{n\geq 1}$, $\{(T_n, \theta_n)\}_{n\geq 1}$ par

$$\begin{aligned} &T_1 = 1, \quad \theta_1 = X_1 \\ &T_{n+1} = \inf\{k > T_n; X_k > \theta_n\}, \quad \theta_{n+1} = X_{T_{n+1}}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

On remarque que si $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, alors la dynamique de $\{M_n\}_{n\geq 1}$ est déterminée par celle des records de $\{X_n\}_{n\geq 1}$, car T_n est le n$^{\text{ème}}$ entier k tel que $M_k > M_{k-1}$, $k > 1$.

D'une façon plus générale, on peut définir la suite des records de la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ par

Définition 4.2

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf\{k \geq 1; X_k > \theta_0\}, \quad \theta_1 = X_{T_1} \\ T_{n+1} &= \inf\{k > T_n; X_k > \theta_n\}, \quad \theta_{n+1} = X_{T_{n+1}} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $\theta_0 < \max\{x; F(x) < 1\}$ est donné (seuil fixé).

Le résultat qui suit nous montre que le choix initial du seuil n'influe pas sur le comportement asymptotique des records :

Proposition 4.1 *(Haiman (1987))*
Soient $\{(T_n, \theta_n)\}_{n\geq 1}$ *et* $\{(\tilde{T}_n, \tilde{\theta}_n)\}_{n\geq 1}$ *définies respectivement par (4.1) et (4.2). Alors, p.s., il existe des entiers* $n_0(\theta_0, \omega)$ *et* $q(\theta_0, \omega)$ *tels que, pour tout* $n \geq n_0$, $T_n = \tilde{T}_{n-q}$ *et* $\theta_n = \tilde{\theta}_{n-q}$, *où* $\omega = \sup\{x; F(x) < 1\}$.

Dans un premier temps, nous allons rappeler quelques résultats utiles dans notre travail, qui concernent, d'une part les records de suites de v.a.r. i.i.d., d'autre part les records de suites strictement stationnaires de v.a.r. 1-dépendantes, vérifiant une certaine hypothèse, dite d'indépendance locale, pour donner enfin une généralisation, lorsque cette dernière hypothèse n'est pas satisfaite.

4.2 Quelques propriétés des records dans le cas i.i.d.

Dans ce paragraphe, considérons une suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$, de v.a.r. i.i.d., de f.d.r. $F(x) = P\{X_1 \leq x\}$, et soit $\{(T_n, \theta_n)\}_{n\geq 1}$, la suite des records de $\{X_n\}_{n\geq 1}$, définie par (4.1).
Les résultats suivants sont classiques et ne donnent que quelques propriétés essentielles des records $\{(T_n, \theta_n)\}_{n\geq 1}$ dans le cas i.i.d., propriétés dont nous aurons besoin dans la suite. Une synthèse de ces propriétés est faite dans Nevzorov (1987).

Proposition 4.2 *Si F est continue, la loi de $\{T_n\}_{n\geq 1}$ ne dépend pas de celle de X_1.*

Remarque 4.1 Ce résultat justifie le fait que, le plus souvent, on se contente d'étudier les records de suites de v.a.r. ayant une loi marginale uniformément distribuée sur l'intervalle $[0; 1]$.

Proposition 4.3 *La suite $\{T_n\}_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov telle que, pour tout $k > l \geq n-1$, $n \geq 2$, entiers,*

$$P\{T_n = k | T_{n-1} = l\} = \frac{l}{k(k-1)}.$$

On déduit alors que, pour tout $1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n$,

$$P\{T_2 = k_2, \ldots, T_n = k_n\} = ((k_2 - 1) \ldots (k_n - 1)k_n)^{-1},$$

ainsi

$$P\{T_2 = k\} = \frac{1}{k(k-1)}, \quad \text{d'où} \quad \mathbb{E}\,(T_2) = +\infty.$$

De même

$$P\{T_n = k\} = \sum_{1<k_2<\ldots<k_{n-1}<k} [(k_2-1)\ldots(k_{n-1}-1)(k-1)k]^{-1},$$

et

$$\mathbb{E}\,(T_n) = +\infty.$$

Remarque 4.2 Il en est de même pour $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$.

Proposition 4.4 *$\{(T_n, \theta_n)\}_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov telle que, pour $n \geq 1$, $1 < t_2 < \ldots < t_n, s \geq 1$, entiers, et pour des réels $u_1 < \ldots < u_{n+1}$, on ait :*

$$\begin{aligned} P\{T_{n+1} - T_n &= s; \theta_{n+1} < u_{n+1} | \theta_1 = u_1; T_2 = t_2, \theta_2 = u_2; \ldots; T_n = t_n, \theta_n = u_n\} \\ &= P\{T_{n+1} - T_n = s; \theta_{n+1} < u_{n+1} | \theta_n = u_n\} \\ &= (P\{X_1 \leq u_n\})^{s-1} P\{u_n < X_1 \leq u_{n+1}\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Proposition 4.5 *Si $N(n)$ représente le nombre d'instants de records dans $\{1,\ldots,n\}$ alors*

$$\mathbb{E}\,(N(n)) \sim \log n, \quad n \to +\infty.$$

Proposition 4.6 *Si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, alors, en posant :*

$$\begin{cases} Y_1 = & \theta_1 \\ Y_n = & \theta_n - \theta_{n-1},\ n \geq 2, \end{cases}$$

la suite $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. i.i.d. qui suivent également une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Il nous a semblé intéressant de détailler les démonstrations des propositions suivantes 4.7 et 4.8 (Haiman, 1987(a), p.454).

Proposition 4.7 *(i) Pour tout $0 < \alpha < 1$,*

$$P\{1 - F(\theta_n) \geq e^{-\alpha n} \ \ i.s.\} = 0. \tag{4.4}$$

(ii) Pour tout $\beta > 1$,

$$P\{1 - F(\theta_n) \leq e^{-\beta n} \ \ i.s.\} = 0. \tag{4.5}$$

Preuve : Soit $\{Y_n\}_{n\geq 1}$, la suite définie par : $Y_n = \ln(\frac{1}{1-F(X_n)})$.
Alors, la suite $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. i.i.d. $\mathcal{E}(1)$. D'après la proposition 4.6, si $\{\theta_n^y\}_{n\geq 1}$ est la suite des records de $\{Y_n\}_{n\geq 1}$, et si $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est définie par la relation :

$$\begin{cases} Z_1 = & \theta_1^y \\ Z_n = & \theta_n^y - \theta_{n-1}^y,\ n \geq 2, \end{cases}$$

alors, $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. i.i.d. $\mathcal{E}(1)$.
D'après la loi forte des grands nombres,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k = 1 \quad p.s.,$$

ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta_n^y}{n} = 1 \quad p.s.$$

Par ailleurs, il est facile de montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\theta_n^y = \ln(\frac{1}{1-F(\theta_n)}),$$

d'où

$$\lim_{n\to} \frac{1}{n}\ln(\frac{1}{1-F(\theta_n)}) = 1 \quad p.s.$$

Ceci signifie que, p.s.,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 : \forall n \geq N_0, \left|\frac{1}{n}\ln(\frac{1}{1-F(\theta_n)}) - 1\right| < \varepsilon.$$

Soit alors $0 < \alpha < 1$, alors $\exists\varepsilon > 0 : \alpha = 1 - \varepsilon$.
Ainsi, p.s., $\exists N_0 : \forall n \geq N_0, 1 - F(\theta_n) > e^{-\alpha n}$, ce qui donne (4.4).
De même, si $\beta > 1, \exists\varepsilon > 0 : \beta = 1 + \varepsilon$, et, on obtient de la même façon (4.5). ∎

Proposition 4.8 *Pour tout $\tau > 1$, on a :*

$$P\{T_{n+1} - T_n > \frac{\tau}{1-F(\theta_n)}\ln_2(\frac{1}{1-F(\theta_n)}) \ \ i.s.\} = 0, \tag{4.6}$$

où $\ln_2(x) = \ln(\ln x)$,
et, pour tout $0 < A < 1$,

$$P\{T_{n+1} - T_n < \frac{1}{[1 - F(\theta_n)]^A} \ i.s.\} = 0, \tag{4.7}$$

où $[x]$ *désigne la partie entière de* x.

Preuve : Pour $\tau > 1$, et $u \in]0;1[$, on pose : $\psi(u) = \frac{\tau}{1-u} \ln_2(\frac{1}{1-u})$,
et, $A_n = \{T_{n+1} - T_n > \psi(F(\theta_n))\}$.
Soit $\alpha \in]0;1[$; d'après la proposition 4.7, nous avons

$$P\{A_n \ i.s.\} = 0 \ \Leftrightarrow \ P\{B_n \ i.s.\} = 0,$$

où $B_n = \{A_n \cap (1 - F(\theta_n) \leq e^{-\alpha n})\}$.
Alors,

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \sum_{k \geq n} \int_{\{s/F(s) \geq 1-e^{-\alpha n}\}} P\{B_n | T_n = k; \theta_n = s\} \ dP_{(T_n,\theta_n)}(k,s) \\ &= \sum_{k \geq n} \int_{\{s/F(s) \geq 1-e^{-\alpha n}\}} (F(s))^{[\psi(s)]} \ dP_{(T_n,\theta_n)}(k,s) \\ &= \int_{\{s/F(s) \geq 1-e^{-\alpha n}\}} (F(s))^{[\psi(s)]} \ dP_{\theta_n}(s). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(B_n) \leq (1 - e^{-\alpha n})^{(\psi(1-e^{-\alpha n})-1)}.$$

Or,

$$u^{(\psi(u)-1)} \sim (\ln(\frac{1}{1-u}))^{-\tau} \ \ (u \to 1) \ ,$$

d'où, le terme de droite dans l'inégalité précédente est équivalent à $(\alpha n)^{-\tau}$,
quand $n \to +\infty$.
Comme $\tau > 1, \sum \frac{1}{n^\tau}$ converge ; on peut donc appliquer le lemme de Borel-Cantelli. D'où $P\{B_n \ i.s.\} = 0$, ce qui démontre (4.6). Pour démontrer (4.7), on utilise le même raisonnement, en considérant les événements

$$\mathcal{A}_n = \{T_{n+1} - T_n < \frac{1}{[1 - F(\theta_n)]^A}\},$$

et

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_n \cap \{1 - F(\theta_n) \leq e^{-\alpha n}\}, \text{ où } 0 < \alpha < 1.$$

Alors

$$P\{\mathcal{A}_n \ i.s.\} = 0 \ \Leftrightarrow \ P\{\mathcal{B}_n \ i.s.\} = 0.$$

On pose, pour $0 < u < 1$, $\phi(u) = \frac{1}{(1-u)^A}$.
Alors, $P(\mathcal{B}_n) \leq 1 - (1 - e^{-\alpha n})^{\phi(1-e^{-\alpha n})}$, ce dernier terme étant équivalent à $e^{-\alpha n(1-A)}$ quand $n \to +\infty$.
On peut à nouveau appliquer le lemme de Borel-Cantelli. ∎

4.3 Records de suites stationnaires de v.a.r. 1-dépendantes vérifiant une hypothèse "d'indépendance locale".

Dans cette partie, considérons une suite strictement stationnaire $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de v.a.r. 1-dépendantes, de f.d.r. marginale $F(x) = P\{X_1 \leq x\}$, vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\mathbf{H_1} : \ \exists \beta > 0 \ \text{tel que} \ \limsup_{u\to\omega} \left\{ \sup_{u<v<\omega} \frac{P\{X_1 > u | X_2 = v\}}{(P(X_1 > u))^\beta} \right\} < \infty \ ,$$

avec $\omega = \sup\{x; F(x) < 1\}$.
Nous avons alors le

Théorème 4.1 *(Haiman, 1987) Sous l'hypothèse $\mathbf{H_1}$, on peut construire sur le même espace de probabilité que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite $\{\hat{X}_n\}_{n\geq 1}$ de v.a.r. i.i.d. de même loi marginale que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ et telle qu'il existe deux v.a. à valeurs entières N et Q, telles que p.s. pour $n \geq N$, on a*

$$T_n = \hat{T}_{n-Q} \ \text{ et } \ \theta_n = \hat{\theta}_{n-Q},$$

où $\{(\hat{T}_n, \hat{\theta}_n)\}_{n\geq 1}$ représente la suite des records de la suite $\{\hat{X}_n\}_{n\geq 1}$.
Par suite, si $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $\hat{M}_n = \max(\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_n)$, alors p.s. $\exists N'$ tel que, pour $n \geq N'$,

$$M_n = \hat{M}_n.$$

Remarque 4.3 A la base, dans Haiman (1987), le théorème 4.1 avait été démontré sous l'hypothèse plus faible

H : il existe $\beta > 0$ tel que,

$$\limsup_{z \to \omega} \left\{ \sup_{\substack{z<v<w<\omega \\ z<u<\omega}} \frac{P\{X_1 > u,\, v < X_2 \le w\}}{(P\{X_1 > u\})^\beta P\{v < X_1 \le w\}} \right\} < +\infty.$$

Mais on voit aisément que l'on peut se ramener à l'hypothèse $\mathbf{H_1}$.

Par ailleurs, si on affaiblit $\mathbf{H_1}$ en prenant comme autre hypothèse

$$\mathbf{H}_1' : \ \exists \beta > 0 \ \text{tel que} \ \limsup_{u \to \omega} \left\{ \sup_{u<v<\omega} \frac{P\{X_1 > u | X_2 = v\}}{(-\log(P(X_1 > u))^{-2-\beta}} \right\} < \infty \ ,$$

les résultats du théorème 4.1 restent vrais.

Remarque 4.4 Comme il l'est montré dans (Haiman, 1987), le résultat du théorème 4.1 reste vrai pour des suites strictement stationnaires de v.a.r. m-dépendantes sous l'hypothèse plus générale :

H : il existe un $\beta > 0$ tel que, pour tout $1 < i \le m$,

$$\limsup_{z \to \omega} \left\{ \sup_{\substack{z<v<w<\omega \\ z<u<\omega}} \frac{P\{X_1 > u,\, v < X_i \le w\}}{(P\{X_1 > u\})^\beta P\{v < X_1 \le w\}} \right\} < +\infty.$$

Comme dans le cas 1-dépendant, on doit pouvoir également se ramener à l'hypothèse

$\mathbf{H_1}$: il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $1 < i \le m$

$$\limsup_{u \to \omega} \left\{ \sup_{u<v<\omega} \frac{P\{X_1 > u | X_i = v\}}{(P\{X_1 < u\})^\beta} \right\} < +\infty,$$

Nous ne rappelons pas la démonstration de ce théorème car nous en suivrons les grandes lignes dans la démonstration du théorème 4.2 ci-après. Cependant, nous noterons qu'elle est basée, en partie, sur le théorème 1.1 (dans le cas 1-dépendant) ou sur le théorème 1.2 (dans le cas plus général m-dépendant) que nous avons rappelés en introduction générale. Cette méthode de construction de la suite $\{\hat{X}_n\}_{n\ge0}$ a également été adaptée par Haiman (1987, b) pour les processus gaussiens strictement stationnaires, l'hypothèse **H** étant remplacée par l'hypothèse selon laquelle la fonction de covariance $\Gamma(n)$ ($\Gamma(0) = 1$) vérifie :

$$\sum_{n\ge1} |\Gamma(n)| < 1/2,$$

et, pour un certain $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{n \to +\infty} |\Gamma(n)|\, n^{4+\varepsilon} < \infty.$$

Puis, dans le cas multivarié dans Haiman (1992) où la suite strictement stationnaire de vecteurs aléatoires m-dépendants $\{\underline{X_n} = (X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(d)}),\ \ n \geq 1\}$, $d \geq 1$, vérifie cette fois l'hypothèse $\mathbf{H_d}$ suivante :

il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $2 \leq k \leq m$ et $1 \leq i, j \leq d$, et, pour $k = 1$, $1 \leq i < j \leq d$,

$$\limsup_{z \to b} \left\{ \sup_{\substack{z<v<w<b \\ z<u<b}} \frac{P\{X_1^{(i)} > u, v < X_k^{(i)} < w\}}{(-\ln(P(X_1^{(i)} > u)))^{-(1+d+\beta)} P\{v < X_1^{(i)} < w\}} \right\} < +\infty,$$

où $b = \sup\{x; P(X_1^{(i)} < u) < 1\}$,
ou encore pour une chaîne de Markov (voir Haiman, Kiki et Puri, 1994) $\{X_n\}_{n\geq 1}$, strictement stationnaire qui admet une densité de transition $f(x,y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant :

il existe un entier $s \geq 1$, deux constantes $0 < \eta < 1$ et $M > 1$, et une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue $g(y)$ tels que

$$\eta g(y) \leq f^s(x,y) \leq M\, g(y), \quad x,\ y\ \in \mathbb{R},$$

où $f^k(x,y)$ est défini par

$$f^k(x,y) = \int f^{k-1}(x,z) f(z,y)\, dz, \quad k \geq 1.$$

4.3.1 Exemples de suites vérifiant $\mathbf{H_1}$.

Nous allons ici donner des exemples de suites qui vérifient $\mathbf{H_1}$. Un des modèles les plus courants de suites strictement stationnaires de v.a.r. 1-dépendantes est une suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$, de la forme $X_n = f(\xi_n, \xi_{n+1})$, $n \geq 1$, où $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. i.i.d. à valeurs dans un ensemble $(\mathrm{E}, \mathcal{E})$, et $f : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}$ est mesurable. Mais, il existe d'autres exemples de suites strictement stationnaires 1-dépendantes, d'un modèle différent que ce dernier ; par exemple, les travaux de Matus (voir [16]) montrent qu'il existe une suite de Markov, strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendante qui n'admet pas la représentation précédente à savoir $X_n = f(\xi_n, \xi_{n+1})$. Ceci montre que le cas 1-dépendant est plus complexe qu'il n'y paraît.

Nous exhibons maintenant quatre exemples de suites ayant ce modèle et qui vérifient $\mathbf{H_1}$.

Exemple 1.

Soit $\{Y_n\}_{n\geq 1}$, une suite de v.a.r. i.i.d., de loi marginale normale $\mathcal{N}(0,1)$. α et ξ étant des réels tels que $\alpha^2+\xi^2=1$, on pose

$$X_n = \alpha\, Y_n + \xi\, Y_{n+1},\quad n\geq 1.$$

Alors, si $\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) = \alpha\xi = \rho < 0$, la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ vérifie $\mathbf{H_1}$. Pour le montrer, posons

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

et

$$P\{X_1 > u\} = \Psi(u) = \int_u^{+\infty} g(x)\, dx.$$

Alors, nous savons que

$$\Psi(u) \sim \frac{g(u)}{u},\quad u \to +\infty. \tag{4.8}$$

Soient $u < v < \infty$. La densité conditionnelle de X_1 sachant $X_2 = v$ est donnée par

$$\begin{aligned} f^v_{X_1}(x) &= \frac{f_{(X_1,X_2)}(x,v)}{g(v)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\frac{(x-\rho v)^2}{(1-\rho^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\rho < 0$,

$$f^v_{X_1}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\frac{x^2}{(1-\rho^2)} \right\},$$

cette dernière quantité étant la densité d'une v.a.r. Z qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1-\rho^2)$. D'où

$$P\{X_1 > u | X_2 = v\} = \int_u^{+\infty} f^v_{X_1}(x)\, dx \leq P\{Z > u\},$$

et

$$P\{Z > u\} = \Psi\left(\frac{u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

Finalement, pour $\beta > 0$,

$$\frac{P\{X_1 > u | X_2 = v\}}{(P\{X_1 > u\})^\beta} \leq \Psi(\frac{u}{\sqrt{1-\rho^2}})/(\Psi(u))^\beta,$$

et d'après (4.8),

$$\Psi(\frac{u}{\sqrt{1-\rho^2}})/(\Psi(u))^\beta \sim u^{\beta-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2[\frac{1}{1-\rho^2}-\beta]\right\}.$$

Ainsi, pour tout $\beta > 0$ tel que $\beta < 1/(1-\rho^2)$, on a

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{P\{X_1 > u | X_2 = v\}}{(P\{X_1 > u\})^\beta},$$

ainsi $\mathbf{H_1}$ est satisfaite.

Exemples 2, 3 et 4.

Soit $\{U_n\}_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi marginale uniformément distribuée sur $[0;1]$.

Exemple 2 : $X_n = U_n + U_{n+1}$.
La loi de X_n est donnée par

$$P\{X_1 \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2/2 + 2x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Comme nous voulons vérifier l'hypothèse $\mathbf{H_1}$, dans la suite il suffit de ne considérer que des réels u et v tels que $1 \leq u \leq v \leq 2$, alors pour de tels réels, on a

$$\begin{aligned} P\{X_1 \leq u, X_2 \leq v\} &= (u-1) + u(v-u) - \frac{1}{2}(v-1)^2 + \frac{1}{2}(u-1)^2 \\ &+ uv(2-v) - \frac{1}{2}(u+v)[1-(v-1)^2] + \frac{1}{3}[1-(v-1)^3]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{P\{X_1 > u | X_2 = v\}}{(P(X_1 > u))^\beta} &= \frac{\frac{d}{dv}P\{X_1 > u, X_2 < v\}}{(P(X_1 > u))^\beta \frac{d}{dv}P\{X_2 < v\}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2+v) - u}{[2 + \frac{1}{2}u^2 - 2u]^\beta}. \end{aligned}$$

On pose $u = 2 - \varepsilon$ et $v = 2 - \eta$, $\varepsilon \geq \eta$, alors en remplaçant dans l'expression précédente, on obtient

$$(2^\beta)\frac{\varepsilon - \frac{1}{2}\eta}{\varepsilon^{2\beta}},$$

qui, pour $\beta = \frac{1}{2}$ donne une quantitié finie quand ε et η tendent vers 0, ainsi $\mathbf{H_1}$ est vérifiée.

Exemple 3 : $X_n = U_n \times U_{n+1}$.
La loi de X_n est donnée par

$$P\{X_1 \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x(1 - \ln x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Pour u et v tels que $0 \leq u \leq v \leq 1$, on a

$$P\{X_1 \leq u, X_2 \leq v\} = u + u[\ln(v) - \ln(u)] + u - uv.$$

Ainsi

$$\frac{P\{X_1 > u | X_2 = v\}}{(P(X_1 > u))^\beta} = \frac{-\ln(v) + u - \frac{u}{v}}{(1 - u + u\ln(u))^\beta(-\ln(v))}.$$

On pose $u = 1 - \varepsilon$ et $v = 1 - \eta$, $\varepsilon \geq \eta$, alors en remplaçant dans l'expression précédente, on obtient

$$\frac{(1-\eta)\ln(1-\eta) + \eta(1-\varepsilon)}{[\varepsilon + (1 - \varepsilon\ln(1-\varepsilon))]^\beta(1-\eta)\ln(1-\eta)},$$

qui est équivalent à

$$(2^\beta)\frac{\varepsilon - \frac{1}{2}\eta}{\varepsilon^{2\beta}}$$

et qui, pour $\beta = \frac{1}{2}$, donne une quantitié finie quand ε et η tendent vers 0, ainsi $\mathbf{H_1}$ est vérifiée.

Exemple 4 : $X_n = \inf(U_n, U_{n+1})$.
La loi de X_n est donnée par

$$P\{X_1 \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Pour u et v tels que $0 \leq u \leq v \leq 1$, on a

$$P\{X_1 \leq u, X_2 \leq v\} = u(1-u) + uv(2-v).$$

Ainsi

$$\frac{P\{X_1 > u | X_2 = v\}}{(P(X_1 > u))^\beta} = \frac{1 - v - u + uv}{(1 - 2u + u^2)^\beta (1 - v)} = \frac{1}{\varepsilon^{2\beta - 1}},$$

en posant $u = 1 - \varepsilon$ et $v = 1 - \eta$, $\varepsilon \geq \eta$, et, cette expression vaut 1 quand $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ainsi $\mathbf{H_1}$ est vérifiée.

4.3.2 Exemples de suites ne vérifiant ni $\mathbf{H_1}$, ni $\mathbf{H'_1}$.

Nous donnons ici des exemples de suites pour lesquelles le théorème 4.1 ne s'applique pas. D'après la remarque 4.3, il nous faut donc montrer que non seulement ces suites ne vérifient pas $\mathbf{H_1}$, mais aussi qu'elles ne vérifient pas $\mathbf{H'_1}$.

Exemple 5.

Soit $\{U_n\}_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi marginale $\mathcal{U}[0;1]$, et soit $X_n = \max(U_n, U_{n+1})$. Alors, la loi de X_n est donnée par

$$P\{X_1 \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \tag{4.9}$$

Pour des réels u et v tels que $0 \leq u \leq v \leq 1$, on a

$$P\{X_1 \leq u, X_2 \leq v\} = u^2 v. \tag{4.10}$$

Ainsi

$$\frac{P\{X_1 > u | X_2 = v\}}{(P(X_1 > u))^\beta} = \frac{2v - u^2}{(1 - u^2)^\beta (2v)} = \frac{1 + 2(\varepsilon - \eta) - \varepsilon^2}{2\varepsilon^\beta (2 - \varepsilon)^\beta (1 - \eta)},$$

en posant $u = 1 - \varepsilon$ et $v = 1 - \eta$, $\varepsilon \geq \eta$, et, cette expression tend vers $+\infty$ quand ε et η tendent vers 0, pour tout $\beta > 0$. Ainsi $\mathbf{H_1}$ n'est pas vérifiée, et $\mathbf{H'_1}$ non plus.

Exemple 6.

Soit $\{U_n\}_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi marginale $\mathcal{U}[0;1]$, et soit $X_n = \max(U_n, U_{n+1}^2)$. Alors, la loi de X_n est donnée par

$$P\{X_1 \leq x\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \tag{4.11}$$

Pour des réels u et v tels que $0 \leq u \leq v \leq 1$, on a

$$P\{X_1 \leq u, X_2 \leq v\} = u\sqrt{v}\min(\sqrt{u}, v). \tag{4.12}$$

Ainsi

$$\frac{P\{X_1 > u | X_2 = v\}}{(P(X_1 > u))^\beta} = \frac{3v - u\sqrt{u}}{(1 - u\sqrt{u})^\beta (3v)} \geq \frac{3u - u\sqrt{u}}{3(1 - u\sqrt{u})^\beta} ,$$

qui tend vers $+\infty$ quand u et v tendent vers 1, pour tout $\beta > 0$. Ainsi $\mathbf{H_1}$ n'est pas vérifiée, et $\mathbf{H}'_1$ non plus.

Exemple 7.

Soit $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r. i.i.d., de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et $\{J_n\}_{n\geq 1}$, une suite de v.a.r. i.i.d., de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$, indépendante de $\{Z_n\}_{n\geq 0}$.
On pose

$$X_n = \begin{cases} Z_n & \text{si } J_n = 0 \\ Z_{n-1} & \text{si } J_n = 1 \end{cases}$$

On peut facilement voir que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est stationnaire et 1-dépendante. De plus, pour tout $x \geq 0$,

$$P(X_1 \leq x) = F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} , \tag{4.13}$$

et, pour $x_1, x_2 \geq 0$, on a

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = (1-q)F(x_1)F(x_2) + q\psi(x_1, x_2) , \tag{4.14}$$

avec $q = p(1-p)$ et $\psi(x_1, x_2) = 1 - \mathrm{e}^{-\inf(x_1, x_2)}$.
Ainsi

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{P(X_1 > u, X_2 > u)}{P(X_1 > u)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{q\mathrm{e}^{-u} + (1-q)\mathrm{e}^{-2u}}{\mathrm{e}^{-u}} = q ,$$

et, comme l'hypothèse $\mathbf{H}'_1$ implique que

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{P\{X_1 > u, X_2 > u\}}{P\{X_1 > u\}} = 0,$$

on déduit que l'hypothèse $\mathbf{H}'_1$ n'est pas satisfaite.

Par ailleurs, il est facile de voir que :

- Les records $\{\theta_n\}_n$ de la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ ont même comportement que les records d'une suite de v.a.r. i.i.d. $\mathcal{E}(1)$ à savoir, d'après la proposition 4.6, que la suite $\{\theta_n - \theta_{n-1}\}_n$ est une suite de v.a.r. i.i.d. $\mathcal{E}(1)$.

- Si $\{T_n\}_{n\geq 1}$ représente la suite des temps de records de $\{X_n\}_{n\geq 1}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P\{T_{n+1} - T_n = k \ \ i.s.\} = 0$.

- Pour n assez grand, le nombre de records dans l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$ est approximativement le même que le nombre de records dans $(1-q)n$ v.a.r. i.i.d. $\mathcal{E}(1)$.

Exemple 8.

De même que précédemment, considérons $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r. i.i.d., de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, $\{J_n\}_{n\geq 1}$, une suite de v.a.r. i.i.d., de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$, et $\{V_n\}_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi uniforme $\mathcal{U}[0;1]$. On suppose de plus que les trois suites $\{Z_n\}_{n\geq 0}$, $\{J_n\}_{n\geq 1}$ et $\{V_n\}_{n\geq 1}$ sont mutuellement indépendantes.
On pose :

$$X_n = \begin{cases} Z_n & \text{si } J_n = 0 \\ Z_{n-1} + V_n & \text{si } J_n = 1 \end{cases}$$

Alors, $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une suite stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes, et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(X_1 > x, X_2 > x)}{P(X_1 > x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p(1-p)}{1+p(e-2)} > 0, \tag{4.15}$$

donc $\mathbf{H}_1'$ n'est pas satisfaite.

Démonstration de (4.15).

– Faisons quelques calculs préliminaires :

Si $Z \sim \mathcal{E}(1)$ et $V \sim \mathcal{U}[0;1]$, Z et V étant indépendantes, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{Z+V}(x) = P(Z+V \leq x) &= \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)[\inf(1,x) - \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{\inf(1,x)} - 1)] \\ &= \psi(x). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Alors, si $0 \leq y \leq x$,

$$P(Z \leq x, Z+V \leq y) = P(Z+V \leq y) = \psi(y),$$

et, si $0 < x < y$,

$$P(Z \leq x, Z+V \leq y) = \int_0^x P(Z+V \leq y | Z = z) \mathrm{e}^{-z}\, dz \ .$$

Nous obtenons alors

$$P(Z \leq x, Z+V \leq y) = \psi_2(x,y) = \begin{cases} \psi(y) & \text{si} \quad y \leq x \\ \mathrm{e}^{-x}(1-y+x) - (1-y) & \text{si} \quad 0 < x \leq y < 1 \\ 1 - \mathrm{e}^{(1-y)} + \mathrm{e}^{-x}(1-y+x) & \text{si} \quad 0 < y-1 \leq x, \\ & \qquad x \leq y \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad 0 < x < y-1. \end{cases} \tag{4.17}$$

Remarque 4.5 En fait, pour les hypothèses $\mathbf{H_1}$ et $\mathbf{H'_1}$, nous avons surtout besoin de

$$P(Z \leq x, Z+V \leq y)\psi_2(x,y) = 1 - \mathrm{e}^{(1-y)} + \mathrm{e}^{-x}(1-y+x) \text{ si } 0 < y-1 \leq x, \ \ x \leq y.$$

– Nous avons alors, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x) &= P(X_1 \leq x, J_1 = 0) + P(X_1 \leq x, J_1 = 1) \\ &= (1-p)F(x) + p\psi(x). \end{aligned} \tag{4.18}$$

(Nous rappelons que $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}, \ \ x \geq 0$.)
De la même façon, la distribution du couple (X_1, X_2) est donnée par

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \sum_{(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \in \{0,1\}^2} t(\varepsilon_i, \varepsilon_j), \tag{4.19}$$

où les termes

$$t(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2 | J_1 = \varepsilon_i, J_2 = \varepsilon_j) \times P(J_1 = \varepsilon_i, J_2 = \varepsilon_j)$$

sont donnés par le tableau suivant :

ε_i	ε_j	$t(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$
0	0	$(1-p)^2 F(x_1)F(x_2)$
0	1	$p(1-p)\psi_2(x_1, x_2)$
1	0	$p(1-p)\psi(x_1)F(x_2)$
1	1	$p^2\psi(x_1)\psi(x_2)$

(4.20)

En combinant (4.16)-(4.20), nous déduisons, pour $x \geq 1$,

$$P(X_1 > x) = e^{-x}(1 + p(e-2)),$$

et, comme

$$\begin{aligned} P(X_1 > x, X_2 > x) &= 1 - 2P(X_1 \leq x) + P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) \\ &= p(1-p)e^{-x} + e^{-2x}[(1+p(e-2))^2 - p(1-p)(e-1)], \quad (4.21) \end{aligned}$$

on déduit (4.15). ∎

Nous avons de plus le résultat suivant :

Proposition 4.9 *Soit $\{T_n\}_{n\geq 1}$, la suite des records de $\{X_n\}_{n\geq 1}$. Alors*

$$P\{T_{n+1} - T_n = 1 \;\; i.s.\} = 1.$$

Preuve : On note $\{(T_n^z, \theta_n^z)\}_n$, la suite des records de $\{Z_n\}_n$. Alors, on peut montrer, en utilisant la proposition 4.7 que

$$P\{T_{n+1}^z - T_n^z = 1 \;\; i.s.\} = 0.$$

On définit

$$A_n = \{J_{T_n^z} = 0, J_{T_n^z+1} = 1, J_{T_{n+1}^z} = 0, J_{T_{n+1}^z+1} = 1, \theta_{n+1}^z - \theta_n^z > 1\},$$

et, nous montrons tout d'abord que $P(A_n \;\; i.s.)$=1.

D'après ce qui précède, si $\bar{E} = \{T_{n+1}^z - T_n^z = 1 \;\; i.s.\}$, alors

$$P\{A_n \;\; i.s.\} = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; P\{E \cap A_n \;\; i.s.\} = 1.$$

Sur E, on peut définir la v.a. entière presque sûrement finie

$$n_0 = \max\{n; T_{n+1}^z - T_n^z = 1\}.$$

Egalement sur E, on définit la suite $\{K_n\}_{n\geq 1}$ de vecteurs aléatoires à valeur dans $\{0,1\}^4$ par

$$K_n = (J_{T_{n_0+2n-2}^z}; J_{T_{n_0+2n-2}^z+1}; J_{T_{n_0+2n-1}^z}; J_{T_{n_0+2n-1}^z+1}),$$

et, on pose

$$C_n = \{(K_n = (0,1,0,1)) \cap (\theta_{n_0+2n-1}^z - \theta_{n_0+2n-2}^z > 1)\}.$$

Alors, on peut montrer que les événements C_n sont indépendants, et

$$P(C_n) = \frac{1}{e} p^2 (1-p)^2.$$

Ainsi, en appliquant le lemme de Borel Cantelli,

$$P(C_n \quad i.s.) = 1.$$

De là, on déduit que $P\{A_n \quad i.s.\} = 1$. Or, sur $A = \{A_n \quad i.s.\}$, $X_{T^z_{n+1}} = \theta^z_{n+1}$ est un record pour la suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$: en effet, pour $k < T^z_{n+1}$,

- soit $X_k = Z_k < \theta^z_{n+1} = X_{T^z_{n+1}}$,
- soit $X_k = Z_{k-1} + V_k < \theta^z_n + 1 < \theta^z_{n+1}$.

Donc, $X_{T^z_{n+1}}$ est un record pour $\{X_n\}_{n \geq 1}$; de plus on a

$$X_{T^z_{n+1}+1} = Z_{T^z_{n+1}} + V_{T^z_{n+1}+1} > Z_{T^z_{n+1}} = X_{T^z_{n+1}},$$

donc on a bien deux records consécutifs. ■

Remarque 4.6 On peut remarquer le caractère particulier de cette suite, puisque ce dernier résultat traduit une apparition de records successifs infiniment souvent.
Par contre, lorsque l'hypothèse **H** est satisfaite, le résultat de la proposition 4.9 n'est pas vérifié.
De plus, pour les autres exemples de suites qui ne vérifient pas **H**, il est également faux.

Exemple 9.

On prend une suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$ du même type que dans l'exemple 7, mais en choisissant la suite $\{V_n\}_{n \geq 1}$ i.i.d. telle que $V_1 \leq 0$, *p.s.*

Suite à l'étude de tous ces exemples, nous avons tenté d'établir un résultat général du même type que le théorème 4.1, pour des suites strictement stationnaires de v.a.r. qui ne vérifient pas l'hypothèse $\mathbf{H}'_1$, ce qui est le contenu de la partie suivante.

4.4 Suites stationnaires de v.a.r. 1-dépendantes sous "dépendance locale".

Comme nous l'avons déjà précisé, nous allons, dans cette partie, établir un résultat semblable au théorème 4.1. Pour celà, considérons une suite strictement stationnaire $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de v.a.r. 1-dépendantes, de f.d.r. $F(x) = P\{X_1 \leq x\}$.
On pose $\omega = \sup\{x; F(x) < 1\}$. Soit alors l'hypothèse $\mathbf{H_2}$:

(i) Il existe $u_0 \leq \omega$ tel que la fonction $u \mapsto P\{X_1 \leq u, X_2 > u\}$ soit décroissante pour $u \geq u_0$.

(ii) Pour tout $u \leq v$, $u \to \omega$,

$$P\{X_2 > u, \max(X_2, X_3) \in (v, v + dv)\} = \\ O(P\{X_1 \leq u, X_2 > u, \max(X_2, X_3) \in (v, v + dv)\}).$$

4.4.1 Remarques.

Une remarque sur l'hypothèse (i).

Ici, nous allons donner deux contre-exemples à l'hypothèse $\mathbf{H_2}$(i). Le premier nous a été communiqué par le Professeur Jean Bretagnolle, et le second, par le Professeur Valery Nevzorov, et nous leurs en sommes reconnaissants.

1. Premier contre-exemple.

On construit la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de la façon suivante : on décompose l'intervalle $]0;1]$, muni de la mesure de Lebesgue, en intervalles $J_k =]s_k; S_k]$ de longueur 2^{-k-1}, avec :

$$s_0 = 0, \quad s_{k+1} = S_k \quad \text{et} \quad S_k = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Puis, on partage chaque intervalle J_k en deux moitiés $I_k =]s_k; \mu_k]$ et $I'_k =]\mu_k; S_k]$ (μ_k est donc le milieu de J_k).

Soit f, la fonction définie par : pour t dans $]0;1]$, il existe $J(t) =]s; S]$; alors,

$$f(t) = \begin{cases} \mu & \text{si } t \in I \\ S & \text{si } t \in I' \end{cases}$$

On pose également $b = \mathbb{1}_{\cup_k I_k}$ et $b' = \mathbb{1}_{\cup_k I'_k}$. Alors, b+b'=1 et $\mathbb{E}(b) = \mathbb{E}(b') = 1/2$.
Soit $\{U_n\}_{n\geq 1}$, une suite de v.a.r. i.i.d. uniformément distribuées sur $]0;1]$. On définit alors la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ par

$$X_n = b'(U_{n-1})f(U_{n-1}) + b(U_{n-1})U_n,$$

ce qui signifie que, si U_{n-1} est dans un intervalle $I' =]\mu, S]$ alors, $X_n = S$, s'il est dans un intervalle I alors $X_n = U_n$.
La suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est bien strictement stationnaire et 1-dépendante. Il reste à montrer que la fonction $F(x) = x \mapsto P\{X_n \leq x, X_{n+1} > x\}$ n'est pas monotone. Pour simplifier les écritures, le calcul de $F(x)$ revient à celui de $P\{X \leq x < Y\}$ avec

$$\begin{cases} X & = b'(U)f(U) + b(U)V \\ Y & = b'(V)f(V) + b(V)W, \end{cases}$$

où U, V et W sont trois v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $]0;1]$.
Soit $x \in]0;1]$ et l'intervalle $]s;S]$ correspondant. Alors

$$\{X \leq x\} = \{b'(U) = 1, U \leq s\} \cup \{b(U) = 1;\ V \leq x\} = A \cup B,$$

et

$$\{Y > x\} = \{b'(V) = 1;\ V > \mu\} \cup \{b(V) = 1;\ W > x\} = C \cup D.$$

On a

- $P(B) = x/2$ et $P(D) = (1-x)/2$.
- $P(A) = P\{b'(U) = 1,\ U \leq s\}$, qui est la probabilité de la réunion des I'_k "jusqu'à" s, donc $P(A) = s/2$.
- De même, $P(C)$ est la probabilité de la réunion des I'_k à partir de μ, donc $P(C) = (1-s)/2$.

Par suite et par l'indépendance des v.a.r. U, V et W, on a

- $P(A \cap C) = s(1-s)/4$.
- $P(A \cap D) = s(1-x)/4$
- $P(B \cap C) = P\{b(U) = 1\}P\{\mu < V \leq x\} = (x-\mu)^+/2$
- $P(B \cap D) = \frac{1-x}{2}P\{V \leq x, b(V) = 1\} = \frac{1-x}{2}[\frac{s}{2} + \inf(\mu - s, x - s)]$.

Ainsi, sur $J =]s; S]$,

$$4F(x) = s(1-s) + 2(x-\mu)^+ + 2(1-x)[s + \inf(\mu - s, x - s)],$$

et, on montre que la dérivée de F est négative sur la première moitié de l'intervalle J et positive sur la seconde moitié. Ainsi, en rendant f continue, on peut rendre la fonction F absolument continue et non monotone.

2. Deuxième contre-exemple.

Dans le second exemple, on montre que l'inégalité

$$P\{X_1 \leq u, X_2 > u\} < P\{X_1 \leq v, X_2 > v\}, \quad u < v, \tag{4.22}$$

peut être vérifiée par certaines suites $u_n < v_n$ où u_n croit vers l'infini, lorsque la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est strictement stationnaire et 1-dépendante.
On remarque tout d'abord que

$$P\{X_1 \leq u, X_2 > u\} = P\{X_1 \leq u, X_2 > v\} + P\{X_1 \leq u, u < X_2 \leq v\}$$

et

$$P\{X_1 \leq v, X_2 > v\} = P\{X_1 \leq u, X_2 > v\} + P\{u < X_1 \leq v, X_2 > v\},$$

ainsi (4.22) est équivalente à

$$P\{X_1 \leq u, u < X_2 \leq v\} < P\{u < X_1 \leq v, X_2 > v\}, \tag{4.23}$$

et, en posant $u = u_n = 2n$ et $v = v_n = 2n + 1$, on arrive à

$$P\{X_1 \leq 2n, 2n < X_2 \leq 2n+1\} < P\{2n < X_1 \leq 2n+1, X_2 > 2n+1\}. \tag{4.24}$$

Nous construisons alors (X_1, X_2) de la façon suivante : soient Y, V et Z des v.a.r. de support $\mathbb{R}$; on pose alors

$$X_1 = \begin{cases} Y & \text{si } [V] = 2l+1,\ l \in \mathbb{Z} \\ V+1 & \text{si } [V] = 2l \end{cases}$$

et

$$X_2 = \begin{cases} V & \text{si } [Z] = 2l+1,\ l \in \mathbb{Z} \\ Z+1 & \text{si } [Z] = 2l. \end{cases}$$

Alors

$$P\{X_1 \leq 2n, 2n < X_2 \leq 2n+1\} = 0,$$

et

$$P\{2n < X_1 \leq 2n+1, X_2 > 2n+1\} \geq P\{[Y] = 2n, [V] = 2n+1, [Z] = 2n\},$$

avec, pour tout n,

$$P\{[Y] = 2n, [V] = 2n+1, [Z] = 2n\} = P\{[Y] = 2n\}P\{[V] = 2n+1\}P\{[Z] = 2n\} > 0,$$

ainsi (4.24) est satisfaite.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que les exemples 5 à 8 cités précédemment vérifient l'hypothèse $\mathbf{H_2}$.

Exemple 5 (voir p.45).

Pour $0 \leq u \leq 1$, en utilisant (4.9) et (4.10), on obtient

$$P\{X_1 \leq u, X_2 > u\} = u^2(1-u),$$

qui est décroissante sur $[\frac{2}{3}; 1]$. Donc $u_0 = \frac{2}{3}$ et (i) est vérifié.

Par ailleurs, pour des réels x_1, x_2 et x_3 tels que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$, on a

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3\} = x_1^2 x_2 x_3. \tag{4.25}$$

Pour vérifier (ii), il suffit de montrer que pour $u_0 \leq u \leq v \leq 1$,

$$\frac{d}{dv}P\{X_1 > u, \max(X_1, X_2) \leq v\} = O(\frac{d}{dv}P\{X_1 \leq u, X_2 > u, \max(X_2, X_3) \leq v\}).$$

Or, d'aprés (4.10),

$$\frac{d}{dv}P\{X_1 > u, \max(X_1, X_2) \leq v\} = \frac{d}{dv}(v^3 - u^2 v) = 3v^2 - u^2,$$

et, d'après (4.25),

$$\frac{d}{dv}P\{X_1 \leq u, X_2 > u, \max(X_2, X_3) \leq v\} = \frac{d}{dv}(u^2v^2 - u^3 v) = 2u^2 v - u^3.$$

Or, pour $\frac{2}{3} \leq u \leq 1$, on a

$$0 \leq \frac{3v^2 - u^2}{2u^2 v - u^3} \leq \frac{69}{8},$$

donc (ii) est vérifié. Par suite, $\mathbf{H_2}$ est satisfaite.

Exemple 6 (voir p.45).

Pour $0 \le u \le 1$, en utilisant (4.11) et (4.12), on obtient

$$P\{X_1 \le u, X_2 > u\} = u\sqrt{u}(1-u),$$

qui est décroissante sur $[\frac{3}{5}; 1]$. Donc $u_0 = \frac{3}{5}$ et (i) est vérifié.

Par ailleurs, pour des réels x_1, x_2 et x_3 tels que $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le 1$, on a

$$P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, X_3 \le x_3\} = x_1\sqrt{x_3}\min(\sqrt{x_1}, x_2)\min(x_3, \sqrt{x_2}). \tag{4.26}$$

Soit $u \le v \le 1$.

a) Si $v < \sqrt{u}$, alors d'après (4.12) et (4.26),

$$\frac{d}{dv}P\{X_1 > u, \max(X_1, X_2) \le v\} = \frac{d}{dv}(v^2\sqrt{v} - uv\sqrt{v}) = \frac{5}{2}v\sqrt{v} - \frac{3}{2}u\sqrt{v},$$

et,

$$\frac{d}{dv}P\{X_1 \le u, X_2 > u, \max(X_2, X_3) \le v\} = \frac{d}{dv}(uv^2\sqrt{v} - u^2v\sqrt{v}) = \frac{5}{2}uv\sqrt{v} - \frac{3}{2}u^2\sqrt{v}.$$

Ainsi, le rapport de ces deux quantités est égal à $1/u$ qui est majoré par $5/3$ pour $u \ge u_0$.

b) Si $v \ge \sqrt{u}$, on a cette fois

$$\frac{d}{dv}P\{X_1 > u, \max(X_1, X_2) \le v\} = \frac{d}{dv}(v^2\sqrt{v} - u\sqrt{u}\sqrt{v}) = \frac{5}{2}v\sqrt{v} - \frac{u\sqrt{u}}{2\sqrt{v}},$$

et

$$\frac{d}{dv}P\{X_1 \le u, X_2 > u, \max(X_2, X_3) \le v\} = \frac{d}{dv}(u\sqrt{u}(v^2\sqrt{v} - u\sqrt{v})) = u\sqrt{u}(\frac{3}{2}\sqrt{v} - \frac{u}{2\sqrt{v}}).$$

Le rapport de ces deux quantités est inférieur ou égal à

$$\frac{5-\sqrt{u}}{u(3-\sqrt{u})},$$

qui est une fonction décroissante de u, donc majorée pour $u \geq u_0$.
Donc, dans tous les cas, (ii) est vérifié. Par suite, $\mathbf{H_2}$ est satisfaite.

Exemple 7 (voir p.46).

Pour $0 \leq u \leq 1$, en utilisant (4.13) et (4.14), on obtient

$$P\{X_1 \leq u, X_2 > u\} = F(u)\mathrm{e}^{-u}(1-q) = (1-q)(\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-2u}),$$

qui est décroissante sur $[\ln(2); +\infty]$. Donc $u_0 = \ln(2)$ et (i) est vérifié.

Par ailleurs, pour des réels x_1, x_2 et x_3 tels que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3\} &= (1-2q)F(x_1)F(x_2)F(x_3) \\ &+ q[F(x_1)F(x_3) + F(x_2)F(x_1)]. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Pour $u_0 \leq u \leq v \leq 1$ d'aprés (4.14),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}P\{X_1 > u, \max(X_1, X_2) \leq v\} &= \frac{d}{dv}([F(v) - F(u)][(1-q)F(v) + q]) \\ &= \mathrm{e}^{-v}[1 + (1-q)(\mathrm{e}^{-u} - 2\mathrm{e}^{-v})], \end{aligned}$$

et, d'après (4.27),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}P\{X_1 \leq u, X_2 > u, \max(X_2, X_3) \leq v\} &= \frac{d}{dv}\{F(u)(F(v) - F(u))[(1-2q)F(v) + q]\} \\ &= F(u)\mathrm{e}^{-v}[(1-q) + (1-2q)(\mathrm{e}^{-u} - 2\mathrm{e}^{-v})]. \end{aligned}$$

Et, le rapport de ces deux quantités reste majoré lorsque u tend vers $+\infty$, donc (ii) est vérifié. Par suite, $\mathbf{H_2}$ est satisfaite.

Exemple 8 (voir p.47).

Pour $0 \leq u \leq 1$, en combinant (4.16)-(4.20), on obtient

$$P\{X_1 \leq u, X_2 > u\} = \mathrm{e}^{-u}[1 + p(e-3) + p^2] + \mathrm{e}^{-2u}[p(1-p)(e-1) - (1 + p(e-2))^2],$$

qui est décroissante pour u assez grand donc (i) est vérifié.

Par ailleurs, la distribution jointe de (X_1, X_2, X_3) est donnée par

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3) = \sum_{(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k) \in \{0,1\}^3} t(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k), \tag{4.28}$$

où les valeurs

$$t(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3 | J_1 = \varepsilon_i, J_2 = \varepsilon_j, J_3 = \varepsilon_k) \\ \times P(J_1 = \varepsilon_i, J_2 = \varepsilon_j, J_3 = \varepsilon_k)$$

sont données par le tableau suivant :

ε_i	ε_j	ε_k	$t(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k)$
0	0	0	$(1-p)^3 F(x_1)F(x_2)F(x_3)$
0	0	1	$p(1-p)^2 F(x_1)\psi_2(x_2, x_3)$
0	1	0	$p(1-p)^2 \psi_2(x_1, x_2)F(x_3)$
0	1	1	$p^2(1-p)\psi_2(x_1, x_2)\psi(x_3)$
1	0	0	$p(1-p)^2 \psi(x_1)F(x_2)F(x_3)$
1	0	1	$p^2(1-p)\psi(x_1)\psi_2(x_2, x_3)$
1	1	0	$p^2(1-p)\psi(x_1)\psi(x_2)F(x_3)$
1	1	1	$p^3\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)$

(4.29)

Alors, pour $u_0 \leq u \leq v$, d'une part, en combinant (4.16)-(4.20), on peut calculer

$$\frac{d}{dv} P\{X_1 > u, \max(X_1, X_2) \leq v\}$$

et, d'autre part, en combinant (4.28) et (4.29), on peut calculer

$$\frac{d}{dv} P\{X_1 \leq u, X_2 > u, \max(X_2, X_3) \leq v\},$$

et vérifier ainsi (ii). D'où $\mathbf{H_2}$ est satisfaite.

4.4.2 Définitions et Théorème.

Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes, qui vérifie $\mathbf{H_2}$.

Définition 4.3 *On pose, pour $u_0 \leq u \leq v$,*

$$F_u(v) = \frac{P\{X_1 \leq u, X_2 > u, \max(X_2, X_3) \leq v\}}{P\{X_1 \leq u, X_2 > u\}} \quad ,$$

et

$$\hat{F}_u(v) = \frac{P\{X_1 \leq u, X_2 > u\} - P\{X_1 \leq v, X_2 > v\}}{P\{X_1 \leq u, X_2 > u\}} \quad .$$

Alors, pour $u_0 \leq u \leq v$,

$$0 \leq F_u(v) - \hat{F}_u(v) = \frac{P\{X_1 > u, u < X_2 \leq v, X_3 > v\}}{P\{X_1 \leq u, X_2 > u\}}.$$

Remarque 4.7 On peut remarquer que la fonction F_u est toujours une fonction de répartition, tandis que $\hat{F}_u$ ne l'est que si l'hypothèse $\mathbf{H_2}(i)$ est vérifiée.

Soit $u \geq u_0$ fixé. On pose, pour $x \geq u$,

$$G_u(x) = \hat{F}_u^{-1}(F_u(x)).$$

Alors
- $G_u(u) = u$ et $G_u(\omega) = \omega$.
- G_u est une fonction croissante et, pour tout $x \geq u$, on a $G_u(x) \geq x$.

Définition 4.4 Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite de v.a.r. et $\mathcal{G} = \{G_u; u \geq u_0\}$. On définit la suite $\{(T_n^{\mathcal{G}}, \theta_n^{\mathcal{G}})\}_{n\geq 1}$ des *records de $\{X_n\}_{n\geq 1}$ relatifs à $\mathcal{G}$* par

$$\begin{aligned} T_1^{\mathcal{G}} &= \inf\{k \geq 1; X_k > u_0\}, \ \ \theta_1^{\mathcal{G}} = G_{u_0}(\max(X_{T_1^{\mathcal{G}}}, X_{T_1^{\mathcal{G}}+1})), \\ T_{n+1}^{\mathcal{G}} &= \inf\{k > T_n^{\mathcal{G}}; X_k > \theta_n^{\mathcal{G}}\}, \ \ \theta_{n+1}^{\mathcal{G}} = G_{\theta_n^{\mathcal{G}}}(\max(X_{T_{n+1}^{\mathcal{G}}}, X_{T_{n+1}^{\mathcal{G}}+1})), \ \ n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Remarque 4.8 Lorsque la fonction G_u coïncide avec la fonction identité, la suite des records relatifs à $\mathcal{G}$ coïncide avec la suite des records de la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$, définie par (4.2).

Définition 4.5 Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes. On définit la suite $\{(T_n^*, \theta_n^*)\}_{n\geq 1}$ des *2-blocs records de* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ par

$$\begin{aligned} T_1^* &= 1, \;\; \theta_1^* = \max(X_1, X_2), \\ T_{n+1}^* &= \inf\{k > T_n^*; X_k > \theta_n^*\}, \;\; \theta_{n+1}^* = \max(X_{T_{n+1}^*}, X_{T_{n+1}^*+1}), \;\; n \geq 1. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Remarque 4.9 La suite $\{T_n^{\mathcal{G}}\}_n$ est une sous suite de la suite des 2-blocs records de $\{X_n\}_{n\geq 1}$.

Théorème 4.2 *Sous* $\mathbf{H_2}$*, on peut construire sur un même espace de probabilité que* $\{X_n\}_{n\geq 1}$*, une suite* $\{\hat{X}_n\}_{n\geq 1}$ *de v.a.r. i.i.d. telle que pour* $u \geq u_0$*,*

$$P\{\hat{X}_1 \leq u\} = \hat{F}(u) = 1 - P\{X_1 \leq u, X_2 > u\},$$

et telle qu'il existe deux v.a. à valeurs entières N *et* Q *telles que p.s., pour* $n \geq N$*,*

$$T_n^{\mathcal{G}} = \hat{T}_{n-Q} \text{ et } \theta_n^{\mathcal{G}} = \hat{\theta}_{n-Q},$$

où $\{(\hat{T}_n, \hat{\theta}_n)\}_{n\geq 1}$ *est la suite des records classiques de* $\{\hat{X}_n\}_{n\geq 1}$.

Remarque 4.10 Comme la suite $\{T_n^{\mathcal{G}}\}_n$ est une sous suite de $\{T^*{}_n\}_{n\geq 1}$, nous pensons qu'asymptotiquement, la suite $\{T_n^{\mathcal{G}}\}_n$ est la même que la suite $\{T^*{}_n\}_{n\geq 1}$. De ce fait, le théorème 4.2 serait vrai pour les 2-blocs records.

4.4.3 Démonstration du Théorème 4.2.

La démonstration de ce théorème est semblable à celle du théorème 4.1 cité dans la partie 4.3, ce pour quoi nous n'en avions pas donné la démonstration.

Pour démontrer le théorème, nous faisons en fait la construction d'une suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\theta}_n)\}_{n\geq 1}$ vérifiant la propriété de Markov citée p.36, à savoir, pour des entiers $n \geq 1, 1 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n, s \geq 1$ et des réels $u_1 < \ldots < u_{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} P\{\hat{T}_{n+1} - \hat{T}_n &= s; \hat{\theta}_{n+1} < u_{n+1} | \hat{\theta}_1 = u_1; \hat{T}_2 = t_2, \hat{\theta}_2 = u_2; \ldots; \hat{T}_n = t_n, \hat{\theta}_n = u_n\} \\ &= P\{\hat{T}_{n+1} - \hat{T}_n = s; \hat{\theta}_{n+1} < u_{n+1} | \hat{\theta}_n = u_n\} \\ &= (P\{\hat{X}_1 \leq u_n\})^{s-1} P\{u_n < \hat{X}_1 \leq u_{n+1}\}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

et telle que, p.s., il existe des v.a. entières N et Q telles que, pour $n \geq N$,

$$\begin{cases} T_n^{\mathcal{G}} = \hat{T}_{n-Q} \\ \theta_n^{\mathcal{G}} = \hat{\theta}_{n-Q}. \end{cases}$$

On peut alors aisément construire une suite de v.a.r. i.i.d. $\{\hat{X}_n\}_{n\geq 1}$ de f.d.r. $\hat{F}$ et telle que $\{(\hat{T}_n, \hat{\theta}_n)\}_{n\geq 1}$ représente la suite des records de $\{\hat{X}_n\}_{n\geq 1}$.

- De façon similaire à la proposition 4.1, nous pouvons également affirmer que le choix des seuils initiaux n'influe pas sur le comportement asymptotique des suites $\{(T_n^{\mathcal{G}}, \theta_n^{\mathcal{G}})\}_{n\geq 1}$ et $\{(T_n^*, \theta_n^*)\}_{n\geq 1}$, à savoir

Proposition 4.10 *Soit $\{(\hat{T}_n^{\mathcal{G}}, \hat{\theta}_n^{\mathcal{G}})\}_{n\geq 1}$ et $\{(\hat{T}_n^*, \hat{\theta}_n^*)\}_{n\geq 1}$ définies respectivement par (4.30) et (4.31), mais avec des seuils différents. Alors p.s., il existe des entiers n', q', n^* et q^*, tels que pour $n \geq n'$,*

$$\hat{T}_{n-q'}^{\mathcal{G}} = T_n^{\mathcal{G}} \text{ et } \hat{\theta}_{n-q'}^{\mathcal{G}} = \theta_n^{\mathcal{G}} ,$$

et, pour $n \geq n^*$,

$$\hat{T}_{n-q^*}^* = T_n^* \text{ et } \hat{\theta}_{n-q^*}^* = \theta_n^* .$$

La démonstration du théorème se fait en plusieurs étapes. Un des résultats clé est le théorème 1.1 que nous avons cité en introduction générale, et, que nous rappelons ici :

Théorème 4.3 *(Haiman, 1987)*
Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$, une suite strictement stationnaire de v.a.r. 1-dépendantes à valeurs dans (a, b). Il existe $a < u_0 < b$ et une fonction $\mu(u)$, $0 < \mu(u) < 1$ définie pour u vérifiant $u_0 < mP(X_1 > u) < b$ et telle que

$$\max_{n\geq 1} \left| \frac{P\{\max(X_1, \ldots, X_n) \leq u\}}{\mu^n(u)} - 1 \right| \leq K\ P\{X_1 > u, X_2 > u\}, \tag{4.33}$$

où K est une constante positive, et

$$\mu(u) = 1 - P\{X_1 \leq u, X_2 > u\} + O((P(X_1 > u))^2), \tag{4.34}$$

la fonction $O(x)$, vérifiant

$$|O(x)| \leq C\ x.$$

Pour $\tau > 1$, fixé, on pose

$$\psi(u) = \frac{\tau}{1 - \hat{F}(u)} \ln_2(\frac{1}{1 - \hat{F}(u)}) , \quad u_0 < u < \omega, \tag{4.35}$$

et, pour $k \geq 1$, $u_0 < u < v < v + dv < \omega$, soit l'événement

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k(u, dv) = \{X_1 \leq u, \ldots, X_k \leq u, X_{k+1} > u, G_u(\max(X_{k+1}, X_{k+2})) \in (v; v + dv]\}.$$

Nous allons d'abord démontrer le

Lemme 4.1 *Il existe* $u_1 < \omega$ *tel que* $4 \leq [\psi(u_1)]$ *et une constante* $c > 0$ *tels que :*

$$\max_{\substack{u_1 \leq u < v < v+dv < \omega \\ 4 \leq k \leq [\psi(u)]}} \left| \frac{P(\mathcal{A}_k)}{(\hat{F}(u))^k [\hat{F}(v+dv) - \hat{F}(v)]} - 1 \right| \leq c(1 - \hat{F}(u)) \ln_2(\frac{1}{1 - \hat{F}(u)}). \quad (4.36)$$

Preuve :

– Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \hat{F}(v+dv) - \hat{F}(v) &= (1 - \hat{F}(u))[\hat{F}_u(v+dv) - \hat{F}_u(v)] \\ &= (1 - \hat{F}(u))[F_u(G_u^{-1}(v+dv)) - F_u(G_u^{-1}(v))] \\ &= P\{X_1 \leq u, X_2 > u, G_u(\max(X_2, X_3)) \in (v; v+dv]\} \\ &=: P\{\mathcal{F}\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

– Par la stationnarité et la 1-dépendance, on a, pour $k \geq 4$:

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{A}_k\} &= P\{X_1 \leq u, \ldots, X_{k-2} \leq u\} P\{\mathcal{F}\} \\ &- P\{X_1 \leq u, \ldots, X_{k-2} \leq u, X_{k-1} > u, \\ &\qquad X_k \leq u, X_{k+1} > u, G_u(\max(X_{k+1}, X_{k+2})) \in (v; v+dv]\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Toujours par la stationnarité et la 1-dépendance, le second terme dans (4.38) est égal à

$$O[P\{X_1 \leq u, \ldots, X_{k-3} \leq u\} P\{X_1 > u\} P\{\mathcal{E}\}]. \quad (4.39)$$

avec

$$P\{\mathcal{E}\} = P\{X_1 > u, G_u(\max(X_1, X_2)) \in (v; v+dv]\}.$$

D'après l'hypothèse $\mathbf{H_2}(ii)$, on a

$$P(X_1 > u) = O(1 - \hat{F}(u)), \ \ u \geq u_0,$$

et

$$P\{\mathcal{E}\} = O[P\{\mathcal{F}\}].$$

Par suite, en utilisant le théorème 4.3, pour tout $n \geq 1$, et $u \geq u_2$,

$$P\{\max(X_1, \ldots, X_n) \leq u\} = [\hat{F}(u)]^n [1 + O_1((1 - \hat{F}(u))^2)]^n [1 + O_2(1 - \hat{F}(u))], \quad (4.40)$$

avec

$$|O_i(x)| \leq K_i |x|, \ \ K_i \text{ constantes universelles } i = 1, 2.$$

En combinant (4.37)-(4.40), et compte tenu du fait que $(1+x)^k = 1 + kx + O(kx)$, quand x tend vers 0, on obtient (4.36). ■

Nous aurons également besoin du

Lemme 4.2 *(Haiman (1992)) Soit Y une v.a.r. à valeurs dans un ensemble mesurable $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$. Soit $\varphi \in \mathcal{F}$ et soit $\hat{P}$, une mesure de probabilité sur $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ telle que $0 < \hat{P}(\varphi) < 1$. On suppose que sur φ, la probabilité de distribution de Y, notée P_Y, admet une dérivée de Radom-Nikodym $\frac{dP_Y}{d\hat{P}}$ par rapport à $\hat{P}$ et telle que :*

$$\max_{y \in \varphi} \left| \frac{dP_Y}{d\hat{P}}(y) - 1 \right| (1 - \hat{P}(\varphi))^{-1} \leq q < 1. \tag{4.41}$$

Soit Q, une v.a. de Bernoulli indépendante de Y et telle que $P(Q = 0) = q$. Alors, il existe deux v.a.r. Y' et $\bar{Y}$, à valeurs respectivement dans $\mathcal{Y}$ et $\bar{\varphi}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de Y et Q, et telles que, si l'on pose :

$$\hat{Y} = \begin{cases} Y & si\ Q = 1\ \ et\ Y \in \varphi \\ \bar{Y} & si\ Q = 1\ \ et\ Y \in \bar{\varphi} \\ Y' & si\ Q = 0 \end{cases}$$

alors la probabilité de distribution de $\hat{Y}$ est $\hat{P}$.
($\bar{\varphi}$ est le complémentaire de φ.)

Construisons la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\theta}_n)\}_{n \geq 1}$ de façon récursive.

- Soit $\theta_0 = u_1$ défini dans le lemme 4.1, et, on définit $(\hat{T}_1, \hat{\theta}_1)$ indépendamment de $\{X_n\}_{n \geq 1}$. Puis, on suppose que, pour $1 \leq p \leq n$, $(\hat{T}_p, \hat{\theta}_p)$ ont été construits, et que les événements de la forme $\{(\hat{T}_1 = s_1, \hat{\theta}_1 \in \mathcal{A}_1), \ldots, (\hat{T}_n = s_n, \hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_n)\}$ (où $1 \leq s_1 < \ldots < s_n$ sont des entiers, et $\mathcal{A}_i, i = 1, n$, sont des Boréliens de $\mathbb{R}$) sont $\sigma\{X_1, \ldots, X_{s_n+1}\} \times \sigma'$ mesurables, où σ' est une σ-tribu indépendante de $\sigma\{X_n, n \geq 1\}$.

- Nous allons maintenant appliquer le lemme 4.2 en faisant les identifications suivantes :
$\rightarrow$ Soit $Y = Y_{s,r}$, $r \geq u_1$, une v.a. à valeurs dans $\mathcal{Y} = \mathbb{N} \times (r, \omega)$, et définie conditionnellement sachant que $\hat{T}_n = s, \hat{\theta}_n = r$ par

$$Y_{s,r} = (t, r'), t \geq 1, r' > r \ \text{ ssi}$$

$$X_{s+4} \leq r, .., X_{s+4+t-1} \leq r, X_{s+4+t} > r, G_u(\max(X_{s+4+t}, X_{s+5+t})) = r'$$

et

$$Y_{s,r} = (0, r'), r' > r, \quad \text{ssi } X_{s+4} > r, G_u(\max(X_{s+4}, X_{s+5})) = r'. \tag{4.42}$$

$\rightarrow$ Soit $\hat{P}$, la distribution de probabilité sur $\mathcal{Y}$, définie sachant que $(\hat{T}_n = s, \hat{\theta}_n = r)$ par

$$\hat{P}(t, dv) = (\hat{F}(r))^t [\hat{F}(v + dv) - \hat{F}(v)], t \geq 0, r < v < v + dv. \tag{4.43}$$

$\rightarrow$ Soit $\varphi = \varphi_r = \{(t, r') \in \mathcal{Y}; 4 \leq t \leq [\psi(r)]\}$.
Nous avons alors

$$\hat{P}(\bar{\varphi}) = 1 - (\hat{F}(r))^4 + (\hat{F}(r))^{[\psi(r)]+1} \geq (\hat{F}(r))^{[\psi(r)]+1},$$

et,

$$(\hat{F}(r))^{[\psi(r)]+1} \sim (\ln(\frac{1}{1 - \hat{F}(r)}))^{-\tau}, \ (r \rightarrow \omega) ,$$

ainsi, en utilisant (4.36), la 1-dépendance et la stationnarité, on peut montrer que (4.41) est satisfaite avec

$$q = q(\hat{\theta}_n) = c(1 - \hat{F}(\hat{\theta}_n))(\ln(\frac{1}{1 - \hat{F}(\hat{\theta}_n)}))^{\tau'} ,$$

pour des constantes $c > 0$ et $\tau' > \tau$.
$\rightarrow$ On pose $Q_{n+1} = Q$ où Q est la v.a. du lemme 4.2 (i.e. $P(Q_{n+1} = 0) = q(\hat{\theta}_n)$).
Soit L_{n+1}, une v.a. de Bernoulli telle que

$$P(L_{n+1} = 1) = (\hat{F}(\hat{\theta}_n))^3. \tag{4.44}$$

On suppose de plus que Q_{n+1} et L_{n+1} sont mutuellement indépendantes et ne dépendent de $\{X_n\}$ et $(\hat{T}_1, \hat{\theta}_1), \ldots, (\hat{T}_n, \hat{\theta}_n)$ que par $\hat{\theta}_n$.

- Soit $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2)$, un vecteur aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times (\hat{\theta}_n, \omega)$ tel que, pour $1 \leq t \leq 3$ et $v > \hat{\theta}_n$,

$$\begin{aligned} P\{\tilde{Y}_1 = t; \tilde{Y}_2 < v\} = \hat{F}^{t-1}(\hat{\theta}_n) \ & [\ \hat{F}(v) - \hat{F}(\hat{\theta}_n)] \\ & \times \ (P(L_{n+1} = 0))^{-1}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

- Nous définissons maintenant $(\hat{T}_{n+1}, \hat{\theta}_{n+1})$ comme suit :
Si $L_{n+1} = 0$, alors,

$$\hat{T}_{n+1} = \hat{T}_n + \tilde{Y}_1, \ \ \hat{\theta}_{n+1} = \tilde{Y}_2. \tag{4.46}$$

Si $L_{n+1} = 1$, alors,

$$\hat{T}_{n+1} = \hat{T}_n + 4 + \hat{Y}_1, \ \ \hat{\theta}_{n+1} = \hat{Y}_2, \tag{4.47}$$

où $(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) = \hat{Y}$ est le vecteur aléatoire défini par le lemme 4.2 en faisant les identifications appropriées.

- On peut aisément vérifier que $\{(\hat{T}_1, \hat{\theta}_1), \ldots, (\hat{T}_{n+1}, \hat{\theta}_{n+1})\}$ vérifie (4.32) et la condition de mesurabilité citée plus tôt en remplaçant n par $n+1$.

- La dernière étape de la démonstration consiste en montrer que p.s., il existe N et Q, v.a. entières telles que, p.s., pour $n \geq N$, on ait :

$$T_n^{\mathcal{G}} = \hat{T}_{n-Q} \text{ et } \theta_n^{\mathcal{G}} = \hat{\theta}_{n-Q}. \tag{4.48}$$

Remarquons que par (4.46) et (4.47), si

$$\begin{cases} L_{n+1} = 1 \\ \max(X_{\hat{T}_n+1}, \ldots, X_{\hat{T}_n+3}) \leq \hat{\theta}_n \\ Q_{n+1} = 1 \\ Y \in \varphi_{\hat{\theta}_n} \end{cases}$$

(on appellera $\mathcal{A}_n$ l'intersection de tous ces événements), alors

$$\begin{aligned} \hat{T}_{n+1} &= \inf\{k > \hat{T}_n; X_k > \hat{\theta}_n\} \\ \hat{\theta}_{n+1} &= G_{\hat{\theta}_n}(\max(X_{\hat{T}_{n+1}}, X_{\hat{T}_{n+1}+1})), \end{aligned} \tag{4.49}$$

ce qui donne les mêmes relations de récurrence que dans (4.30) qui définissent $\{(T_n^{\mathcal{G}}, \theta_n^{\mathcal{G}})\}_{n \geq 1}$.
Ainsi, pour montrer (4.49), il suffit de montrer que

$$P\{\mathcal{A}_n^c \;\; i.s.\} = 0. \tag{4.50}$$

Remarquons tout d'abord que pour $0 < \alpha < 1$,

$$P\{1 - \hat{F}(\hat{\theta}_n) > \mathrm{e}^{-\alpha n} \;\; i.s.\} = 0. \tag{4.51}$$

Démonstration de (4.50) :

Nous allons traiter chaque événement de $\mathcal{A}_n$ séparément.

1. $\underline{P(L_{n+1} = 0 \;\; i.s.) = 0.}$

Soit $0 < \alpha < 1$. Alors, d'après (4.51),

$$P(L_{n+1} = 0 \;\; i.s.) = 0 \Leftrightarrow P\{(L_{n+1} = 0) \cap (1 - \hat{F}(\hat{\theta}_n) \leq \mathrm{e}^{-\alpha n}) \;\; i.s.\} = 0.$$

Posons

$$\mathcal{B}_n = (L_{n+1} = 0) \cap (1 - \hat{F}(\hat{\theta}_n) \leq \mathrm{e}^{-\alpha n}),$$

alors,

$$P(\mathcal{B}_n) = \int_{\{r/1-\hat{F}(r)\leq \mathrm{e}^{-\alpha n}\}} (1 - (\hat{F}(r))^3)\, dP_{\hat{\theta}_n}(r).$$

D'où,

$$P(\mathcal{B}_n) \leq 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\alpha n})^3 \leq cste\ \mathrm{e}^{-\alpha n},$$

qui est le terme général d'une série convergente ; on peut donc appliquer le lemme de Borel-Cantelli. Ainsi,

$$P(\mathcal{B}_n \ \ i.s.) = 0,$$

et, par suite

$$P(L_{n+1} = 0 \ \ i.s.) = 0. \tag{4.52}$$

2. $\underline{P(Q_{n+1} = 0 \ \ i.s.) = 0}$.

Nous rappelons que $P(Q_{n+1} = 0) = q(\hat{\theta}_n)$, avec

$$q(x) = c(1 - \hat{F}(x))(\ln(\frac{1}{1 - \hat{F}(x)}))^{\tau'} = q_1(\hat{F}(x)).$$

Soit $0 < \alpha < 1$ et

$$\mathcal{C}_n = (Q_{n+1} = 0) \cap (1 - \hat{F}(\hat{\theta}_n) \leq \mathrm{e}^{-\alpha n}).$$

De même que précédemment, il suffit de montrer que $P(\mathcal{C}_n \ \ i.s.) = 0$. Nous avons

$$P(\mathcal{C}_n) = \int_{\{r/1-\hat{F}(r)\leq \mathrm{e}^{-\alpha n}\}} q_1(\hat{F}(r))\, dP_{\hat{\theta}_n}(r).$$

La fonction q_1 est décroissante sur $[1-\mathrm{e}^{-\tau'}; 1[$; or, pour $n \geq N_0$, $1-\mathrm{e}^{-\tau'} \leq 1-\mathrm{e}^{-\alpha n} \leq \hat{F}(r)$, d'où, pour $n \geq N_0$,

$$P(\mathcal{C}_n) \leq cste\ \mathrm{e}^{-\alpha n}(\alpha n)^{\tau'},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, toujours avec le lemme de Borel-Cantelli,

$$P(\mathcal{C}_n \ \ i.s.) = 0,$$

puis

$$P(Q_{n+1} = 0 \ \ i.s.) = 0. \tag{4.53}$$

3. $\underline{P\{Y \notin \varphi_{\hat{\theta}_n} \ \ i.s.\} = 0}$.

Soit $0 < \alpha < 1$ et

$$\mathcal{D}_n = (Y \notin \varphi_{\hat{\theta}_n}) \cap (1 - \hat{F}(\hat{\theta}_n) \leq \mathrm{e}^{-\alpha n}).$$

Alors

$$P(\mathcal{D}_n) = \sum_{s \geq n} \int_{\{r/1-\hat{F}(r) \leq \mathrm{e}^{-\alpha n}\}} P\{Y \notin \varphi_{\hat{\theta}_n} | \hat{T}_n\} = s, \hat{\theta}_n = r\} \, dP_{(\hat{T}_n, \hat{\theta}_n)}(s, r).$$

Or

$$\begin{aligned} P\{Y \notin \varphi_{\hat{\theta}_n} | \hat{T}_n = s, \hat{\theta}_n = r\} &= 1 - P\{Y \in \varphi_{\hat{\theta}_n} | \hat{T}_n = s, \hat{\theta}_n = r\} \\ &= 1 - \int_{\varphi_r} dP_Y = \int_{\bar{\varphi}_r} d\hat{P} + \int_{\varphi_r} d\hat{P} - \int_{\varphi_r} \frac{dP_Y}{d\hat{P}} \, d\hat{P} \\ &\leq \hat{P}(\bar{\varphi}_r) + \int_{\varphi_r} \left| 1 - \frac{dP_Y}{d\hat{P}} \right| d\hat{P}. \end{aligned}$$

Or, nous avons vu que, sur φ_r,

$$\left| 1 - \frac{dP_Y}{d\hat{P}} \right| \leq q(r) \hat{P}(\bar{\varphi}_r).$$

On en déduit

$$P(\mathcal{D}_n) \leq \int_{\{r/1-\hat{F}(r) \leq \mathrm{e}^{-\alpha n}\}} \hat{P}(\bar{\varphi}_r)(1 + q(r)) \, dP_{\hat{\theta}_n}(r).$$

Or

$$\hat{P}(\bar{\varphi}_r) = 1 - (\hat{F}(r))^4 + (\hat{F}(r))^{[\psi(r)]+1},$$

et, si $1 - \hat{F}(r) \leq \mathrm{e}^{-\alpha n}$, alors

$$1 - (\hat{F}(r))^4 \leq cste \ \ \mathrm{e}^{-\alpha n}.$$

De plus

$$(\hat{F}(r))^{[\psi(r)]+1} \sim (-\ln(1 - \hat{F}(r)))^{-\tau} \ \ \text{quand} \ \ r \to \omega.$$

Donc, pour n assez grand, si $1 - \hat{F}(r) \leq \mathrm{e}^{-\alpha n}$,

$$\hat{P}(\bar{\varphi}_r) \leq cste \ \ (\mathrm{e}^{-\alpha n} + (\alpha n)^{-\tau}).$$

Par ailleurs, pour n assez grand, si $1 - \hat{F}(r) \leq e^{-\alpha n}$,

$$q(r) \leq cste \ e^{-\alpha n}(\alpha n)^{\tau'}.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$P(\mathcal{D}_n) \leq cste \ (e^{-\alpha n}(\alpha n) + (\alpha n)^{-\tau})(1 + e^{-\alpha n}(\alpha n)^{\tau'}),$$

qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit donc que

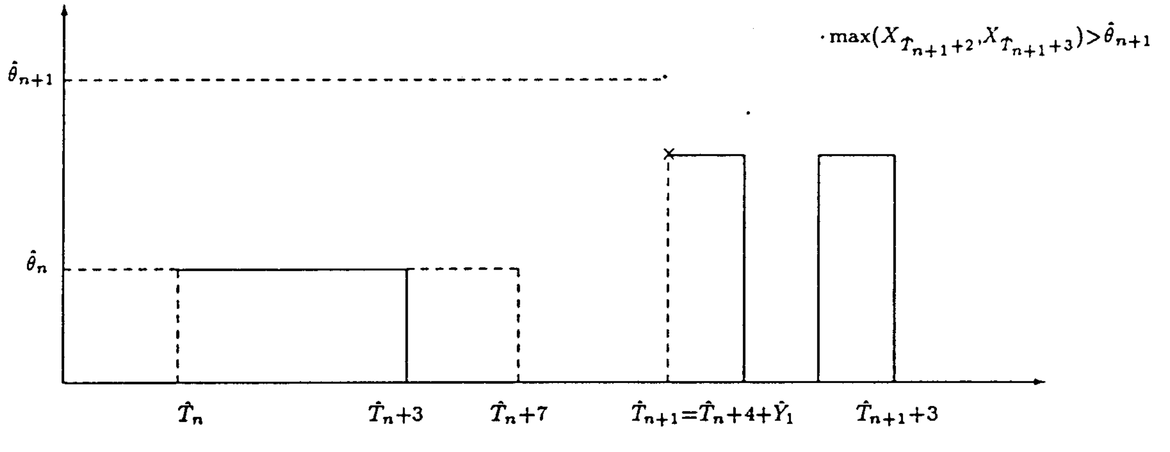
$$P\{Y \notin \varphi_{\hat{\theta}_n} \ i.s.\} = 0. \tag{4.54}$$

4. $\underline{P\{\max(X_{\hat{T}_n+1}, \ldots, X_{\hat{T}_n+3}) > \hat{\theta}_n \ i.s.\} = 0.}$

Posons

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n &= \{\max(X_{\hat{T}_n+1}, \ldots, X_{\hat{T}_n+3}) > \hat{\theta}_n\} \\
\mathcal{F}_n &= (Q_{n+1} = 1) \cap (L_{n+1} = 1) \cap (Y \in \varphi_{\hat{\theta}_n}) \cap (1 - \hat{F}(\hat{\theta}_n) \leq e^{-\alpha n}).
\end{aligned}$$

Alors, d'après (4.51), (4.52)-(4.54), pour montrer que $P\{\mathcal{E}_n \ i.s.\} = 0$, il est équivalent de montrer que $P\{\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n \ i.s.\} = 0$.
Décrivons ce dernier événement :



On voit donc que

$$P\{\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n\} = P\{\mathcal{F}_n \cap \max(X_{\hat{T}_{n+1}+2}, X_{\hat{T}_{n+1}+3}) > \hat{\theta}_{n+1}\}.$$

De plus, sur $\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n$,

$$\hat{\theta}_{n+1} \geq X_{\hat{T}_{n+1}} \geq \hat{\theta}_n.$$

D'où

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n\} &\leq P\{\mathcal{F}_n \cap \max(X_{\hat{T}_{n+1}+2}, X_{\hat{T}_{n+1}+3}) > \hat{\theta}_n\} \\ &\leq \sum_{s \geq n} \int_{r \in \Delta} \sum_{l=4}^{[\psi(r)]} P\{A_{r,s}\}\, dP_{(\hat{\theta}_n, \hat{T}_n)}(r,s) \end{aligned}$$

où

$$\Delta = \{r / 1 - \hat{F}(r) \leq \mathrm{e}^{-\alpha n}\},$$

et $A_{r,s}$ représente l'événement

$$\begin{aligned} \{X_{s+4} \leq r\ ,\ \ldots, X_{s+4+l-1} \leq r, X_{s+4+l} > r, \\ \max(X_{s+4+l+2}, X_{s+4+l+3}) > r, Q_{n+1} = 1, L_{n+1} = 1 | \hat{\theta}_n = r, \hat{T}_n = s\}. \end{aligned}$$

Or Q_{n+1} et L_{n+1} sont mutuellement indépendantes et ne dépendent de $\{X_n\}_n$, $(\hat{T}_1, \hat{\theta}_1), \ldots, (\hat{T}_n, \hat{\theta}_n)$ que par $\hat{\theta}_n$, d'où

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n\} \ &\leq\ \sum_{s} \int_{r \in \Delta} \sum_{l=4}^{[\psi(r)]} P\{B_{r,s}\} P\{Q_{n+1} = 1 | \hat{\theta}_n = r, \hat{T}_n = s\} \\ &\quad \times P\{L_{n+1} = 1 | \hat{\theta}_n = r, \hat{T}_n = s\}\, dP_{(\hat{\theta}_n, \hat{T}_n)}(r,s) \end{aligned}$$

où $B_{r,s}$ représente l'événement

$$\begin{aligned} \{X_{s+4} \leq r, \ldots, X_{s+4+l-1} \leq r\ ,\ X_{s+4+l} > r, \\ \max\ (X_{s+4+l+2}, X_{s+4+l+3}) > r | \hat{\theta}_n = r, \hat{T}_n = s\}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la stationnarité et en sommant sur s :

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n\} \leq \int_{r \in \Delta} \sum_{l=4}^{[\psi(r)]} P\{X_1 \leq r, \ldots, X_l \leq r, X_{l+1} > r, \\ \max(X_{l+3}, X_{l+4}) > r | \hat{\theta}_n = r\}\, dP_{\hat{\theta}_n}(r). \end{aligned}$$

Par la 1-dépendance et la stationnarité,

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n\} \ &\leq\ \int_{r \in \Delta} \sum_{l=4}^{[\psi(r)]} P\{X_1 \leq r, \ldots, X_l \leq r, X_{l+1} > r\} \\ &\quad \times P\{\max(X_1, X_2) > r\}\, dP_{\hat{\theta}_n}(r). \end{aligned}$$

Pour $l \in \{4, \ldots, [\psi(r)]\}$,

$$P\{X_1 \leq r, \ldots, X_l \leq r, X_{l+1} > r\} \leq 1 - \hat{F}(r),$$

et

$$P\{\max(X_1, X_2) > r\} \leq 2P\{X_1 > r\} = O(1 - \hat{F}(r)).$$

Ainsi

$$P\{\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n\} \leq cste \int_{r \in \Delta} (1 - \hat{F}(r))^2([\psi(r)] - 3)\, dP_{\hat{\theta}_n}(r),$$

puis

$$P\{\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n\} \leq cste \int_{r \in \Delta} (1 - \hat{F}(r)) \ln_2(\frac{1}{1 - \hat{F}(r)})\, dP_{\hat{\theta}_n}(r).$$

La fonction sous le signe intégrale est décroissante sur un intervalle (r_1, ω), d'où, pour n assez grand,

$$P\{\mathcal{E}_{n+1} \cap \mathcal{F}_n\} \leq cste\ \mathrm{e}^{-\alpha n} \ln(\alpha n),$$

qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc à nouveau appliquer le lemme de Borel-Cantelli. Ainsi

$$P\{\max(X_{\hat{T}_n+1}, \ldots, X_{\hat{T}_n+3}) > \hat{\theta}_n \ \ i.s.\} = 0. \tag{4.55}$$

Enfin, en combinant (4.52)-(4.55), on obtient (4.50). ∎

Bibliographie

[1] **Bretagnolle J. et Klopotowski A.** (1995) *Sur l'existence des suites de variables s à s indépendantes échangeables ou stationnaires.* Annales de l'institut Henri Poincaré, Vol. 31, N^o2, p.325-350.

[2] **Galambos J.** (1987) *The asymptotic theory of extreme order statistics.* Robert E.Krieger Publishing Company Malabar, FLorida.

[3] **Haiman G.** (1981) *Valeurs extrêmales de suites stationnaires de variables aléatoires m-dépendantes.* Annales de l'institut Henri Poincaré, Vol. 17, N^o3, p.309-330.

[4] **Haiman G.** (1987 a) *Etude des extrêmes d'une suite stationnaire m-dépendante avec une application relative aux accroissements du processus de Wiener.* Annales de l'institut Henri Poincaré, Vol. 23, N^o3, p.425-458.

[5] **Haiman G.** (1987 b) *Almost sure asymptotic behaviour of the record and record time sequences of a stationary gaussian process.* Mathematical Statistics and Probability Theory, vol. A (p.105-120).

[6] **Haiman G. and Puri M.L.** (1990 a) *A strong invariance principle concerning the J-upper statistics for stationary m-dependent sequences.* Journal of Statistical Planning and Inference, 25, p.43-51.

[7] **Haiman G.** (1992) *A strong invariance principle for the extremes of multivariate stationary m-dependent sequences.* Journal of Statistical Planning and Inference , 32, p.47-163.

[8] **Haiman G. and Puri M.L.** (1993) *A strong invariance principle concerning the J-upper order statistics for stationary Gaussian sequences.* Annals of Probability, Vol. 21, N^o1, p.86-135.

[9] **Haiman G., Kiki M. and Puri M.L.** (1994) *Extreme of Markov sequences.* Journal of Statistical Planning and Inference (sous presse)

[10] **Holst L. and Janson S.** (1990) *Poisson approximation using the Stein-Chen method and coupling : number of exceedances of Gaussian random variables.* Annals of Probability, Vol. 18, $N°2$, p.713-723.

[11] **Jamison B.** (1970) *Reciprocal processes : the stationnary Gaussian case.* Annals of Mathematical Statistics, Vol. 41, $N°5$, p.1624-1630.

[12] **Komlós, Major P. and Tusnády G.** (1975) *An approximation of partials sums of independent r.v.'s and the sample DF.I.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, Vol. 32, p.111-131.

[13] **Komlós, Major P. and Tusnády G.** (1976) *An approximation of partials sums of independent r.v.'s and the sample DF.I.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, Vol. 32, p.111-131.

[14] **Leadbetter M.R., Lindgren G. and Rootzén H.** (1983) *Extremes and related properties of random sequences and processes.* Springer-Verlag, New York Inc.

[15] **Leadbetter M.R., Lindgren G. and Rootzén H.** (1988) *Extremal theory for stochastic processes.* Annals of Probability., Vol. 16, $N°2$, p.431-478.

[16] **Matus F.** *On two-block-factor sequences and one-dependence.* Soumis au Journal of Statistical Planning and Inference.

[17] **Nieuwenhuis G.** (1992) *Central limit theorems for sequences with $m(n)$-dependent main part.* Journal of Statistical Planning and Inference, vol. 32, $N°2$, 229-241.

[18] **Nevzorov V.** (1987) *Records.* Theory Probab.Appl., Vol. 32, $N°2$, p.201-228.

[19] **Ortega J. and Wschebor M.** (1984) *On the increments of the Wiener process.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, Vol. 65, p.329-339.

[20] **Qualls C. and Watanabe H.**.(1972) *Asymptotic properties of Gaussian processes.* Annals of Mathematical Statistics, Vol. 43, $N°2$, p.580-596.

[21] **Rootzén H.** (1978) *Extremes of moving averages of stable processes.* Annals of Probability., Vol. 6, $N°5$, p.847-869.

[22] **Rootzén H.** (1986) *Extreme value theory for moving average processes.* Annals of Probability., Vol. 14, $N°2$, p.612-652.

[23] **Rootzén H.** (1987) *A ratio limit theorem for the tails of weighted sums.* Annals of Probability., Vol. 15, $N°2$, p.728-747.

[24] **Shepp L.A.** (1971) *First passage time for a particular Gaussian process.* Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, $N°3$, p.946-951.

[25] **Slepian D.** (1961) *First passage time for a particular Gaussian process.* Annals of Mathematical Statistics, Vol. 32, $N°5$, p.610-2.

[26] **Steinebach J. and Eastwood V.R.** (1995) *On extreme value asymptotics for increments of renewal process.* Journal of Statistical Planning and Inference, (45).

[27] **Watson G.S.** (1954) *Extreme values in samples from m-dependent stationary stochastic processes.* Annals of Mathematical Statistics, Vol. 25, p.798-800.

[28] **Smithies F.** (1965) *Integral equations.* Cambridge Univ. Press.