

THESE

Présentée à

L'Université des Sciences et Technologies de LILLE

en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Spécialité

Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

GILLES DELMAIRE

Agrégé de Physique Appliquée

COMPARAISON DES METHODES D'IDENTIFICATION
PARAMETRIQUE ET DE L'ESPACE DE PARITE POUR LA
DETECTION ET LA LOCALISATION DE DEFAILLANCES
DANS LES SYSTEMES AUTOMATISES.

Soutenue le 22 Janvier 1996 devant le jury d'examen

Président : J-P RICHARD, Professeur à l'Ecole Centrale de LILLE

Rapporteurs : M. GUGLIELMI, Directeur du Laboratoire d'Automatique de Nantes,

M. DAROUACH, Professeur à l'IUT de Longwy,

Examineurs : M. LABARRERE, Adjoint Scientifique au Directeur, CERT-ONERA.

J-C TRIGEASSOU, Professeur à l'ESIP de Poitiers,

J-P CASSAR, Co-directeur de thèse,

M. STAROSWIECKI, Co-directeur de thèse.



Remerciements

L'accomplissement d'un doctorat et le travail qui conduit à la rédaction du mémoire ne se font jamais seuls, il faut souvent s'imprégner des précieux conseils de ses aînés, aussi leur dois-je au minimum de sincères et chaleureux remerciements.

Je remercie vivement Monsieur Staroswiecki pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe Analyse et Surveillance des Processus Industriels Complexes du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille et aussi d'avoir accepté de diriger mon travail de thèse.

Ma reconnaissance va aussi à un autre pilier de ce travail, Monsieur J-P Cassar pour son aide précieuse et le suivi qu'il a pu effectuer malgré un emploi du temps parfois très chargé.

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer à l'examen de ce travail,

En particulier Messieurs Guglielmi et Darouach qui ont accepté d'en être les rapporteurs et pour les conseils ainsi que les remarques qu'ils ont pu effectuer dans la mise au point de ce mémoire.

Messieurs Labarrère, Richard et Trigeassou pour l'intérêt qu'ils ont ensemble porté à ce travail.

Sans chercher à citer toutes les personnes, j'ai voulu souligner le caractère chaleureux de l'ambiance de travail qui a accompagné cette préparation, mes remerciements s'adressent à tous ceux qui ont contribué à la réussite de ces travaux :

- le personnel scientifique et technique du LAIL
 - le personnel de l'AREMI
 - le service reprographie de l'Ecole Universitaire D'Ingénieurs de Lille.
-

Sommaire

GLOSSAIRE DES SYMBOLES UTILISES.....	1
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE 1 : PRINCIPES GENERAUX DE LA SURVEILLANCE DES SYSTEMES INDUSTRIELS.	3
INTRODUCTION.....	3
I - LES MODULES DE LA SURVEILLANCE	4
<i>I - 1 Le Pré-traitement</i>	<i>4</i>
<i>I - 2 La génération d'indicateurs de défaut</i>	<i>6</i>
<i>I - 3 La décision</i>	<i>6</i>
I - 3.1 Les moyens	6
I - 3.2 La détection	7
I - 3.3 La localisation	8
<i>I - 4 Le diagnostic</i>	<i>9</i>
<i>I - 5 Conclusion.....</i>	<i>9</i>
II - LES DEFAILLANCES ET LES PERTURBATIONS	10
<i>II - 1 Définitions [Bru90] [Cas94].....</i>	<i>10</i>
<i>II - 2 Les défauts selon leurs origines.....</i>	<i>10</i>
II - 2.1 Les défaillances processus	10
II - 2.2 Les défaillances actionneurs.....	11
II - 2.3 Les défaillances capteurs.....	11
<i>II - 3 Le niveau de gravité.....</i>	<i>12</i>
II - 3.1 Défaut ponctuel	12
II - 3.2 Défaut naissant.....	12

II - 3.3 Défaut déclaré	12
II - 3.4 Défaut catastrophique.....	12
II - 4 <i>La modélisation des défaillances</i>	13
II - 4.1 Notre centre d'intérêt	13
II 4 - 2 Les différents modèles de fautes.	13
II 4 - 3 Les autres influences et leur modélisation	15
II - 5 <i>Le cahier des charges de la surveillance</i>	16
II - 6 <i>Propriétés du système de surveillance</i>	17
III - LES OUTILS DE GENERATION D'INDICATEURS DE DEFAUT	17
III - 1 <i>La redondance matérielle [Pot77] [Cho80] [Eva70]</i>	17
III - 2 <i>Les méthodes d'apprentissage</i>	18
III - 3 <i>Les méthodes de redondance analytique</i>	18
III - 3.1 Estimation d'état	19
III - 3.2 Espace de parité	20
III - 3.3 Estimation paramétrique [Ise84] [Rau85] [Spr92]	20
IV - LES PROBLEMES GENERAUX DE L'IDENTIFICATION.....	20
IV - 1 <i>Méthodologie générale du diagnostic fondé sur l'identification paramétrique</i>	20
IV -1.1 Diagnostic dans l'espace des paramètres physiques.....	22
IV - 1.2 Diagnostic dans l'espace des paramètres analytiques.....	25
IV - 2 <i>Comparaison entre temps discret et temps continu</i>	25
IV - 2.1 Les avantages des méthodes continues.....	25
IV - 2.2 Les inconvénients des méthodes continues	25
IV - 2.3 Les avantages des méthodes à temps discret	26
IV - 2.4 Les inconvénients des méthodes discrètes.....	26
IV - 3 <i>Hypothèses générales sur les défaillances</i>	26
IV - 4 <i>Illustration de l'identifiabilité et isolabilité des coefficients physiques</i>	30
IV - 4.1 Problème de l'identifiabilité	30
IV - 4.2 Identifiabilité locale	31
IV -3.3 Localisation logique	31
V - CONCLUSION	33

CHAPITRE 2 : LA COMPARAISON DE LA PROJECTION DANS L'ESPACE DE PARITE ET DE L'ESTIMATION DE PARAMETRES DANS LE CAS DES SYSTEMES MONOVARIABLES.....	34
INTRODUCTION.....	34
I - MODELISATIONS.....	34
<i>I.- 1 Le modèle d'état.....</i>	<i>34</i>
<i>I - 2 Modélisation des défaillances.....</i>	<i>35</i>
II - L'ESPACE DE PARITE	39
<i>II . 1 Principe</i>	<i>40</i>
<i>II - 2 Le cas monovariable.....</i>	<i>42</i>
II -2.1 Représentation entrée-sortie.....	42
II -2.2 Expression du résidu de parité	45
<i>II -3 Présentation d'un exemple de simulation.....</i>	<i>47</i>
II -3.1 Le processus	47
II -3.2 Les défaillances.....	49
I -3.3 Les résidus de parité.....	50
III - LES TECHNIQUES D'ESTIMATION SISO	53
<i>III -1 Principes généraux.....</i>	<i>53</i>
<i>III -2 Les moindres carrés simples.....</i>	<i>55</i>
III -2.1 La méthode.....	55
III -2.2 Propriétés statistiques	56
III - 2.3 Les moindres carrés pondérés.....	59
II.- 2.4 Simulation	60
<i>III -3 Les moindres carrés généralisés</i>	<i>64</i>
III -3.1 Introduction.....	64
III -3.2 La technique.....	64
III -3.3 La convergence	66
<i>III - 4 Les variables instrumentales</i>	<i>67</i>
III -4.1 Principe	67
III -4.2 La méthode.....	68
III -4.3 Choix d'instruments.....	69
IV - COMPARAISON MONOVARIABLE ESPACE DE PARITE ET IDENTIFICATION.....	70
<i>IV -1 Comparaison stochastique avec les moindres carrés.....</i>	<i>70</i>

IV -1.1 Comparaison théorique.....	70
IV -1.2 Interprétation	72
IV -1.3 Simulation	75
<i>IV - 2 Comparaison avec les moindres carrés généralisés.....</i>	<i>80</i>
IV -2.1 Comparaison théorique.....	80
IV -2.2 Interprétation statistique	82
IV -2.3 Simulation	83
<i>IV -3 Comparaison avec les variables instrumentales</i>	<i>85</i>
IV -3.1 Comparaison théorique.....	85
IV -3.2 Interprétation	86
V - CONCLUSION	87

CHAPITRE 3 : LA COMPARAISON MULTIVARIABLE DE L'ESPACE DE PARITE ET DE L'ESTIMATION PARAMETRIQUE.88

INTRODUCTION.....	88
I - LES MODELES	89
<i>I - 1 La représentation par la matrice de transfert.....</i>	<i>89</i>
I -1.1 Le modèle nominal	89
<i>I - 2 Représentation à base de matrice de réponse impulsionnelle</i>	<i>91</i>
<i>I - 3 Relations entrées-sorties</i>	<i>91</i>
<i>I - 4 La représentation dans l'espace d'état.....</i>	<i>92</i>
<i>I - 5 Le modèle de surveillance. Unification.....</i>	<i>92</i>
I - 5.1 Modèles entrées-sorties	93
I - 5.2 Le modèle d'état	94
II L'ESPACE DE PARITE MULTIVARIABLE	95
<i>II - 1 Spécifications de la génération des résidus.....</i>	<i>95</i>
<i>II - 2 Les résidus structurés</i>	<i>95</i>
II - 2.1 Le découplage parfait	96
II -2.2 Le découplage approximatif.....	97
<i>II - 3 Résidus directionnels [Ger93a] [Ger93b].....</i>	<i>99</i>
<i>II - 4 Les horizons d'observation particuliers</i>	<i>102</i>
III L'IDENTIFICATION MULTIVARIABLE.....	106
<i>III - 1 Les problèmes généraux</i>	<i>106</i>

III - 2 Une structure particulière	107
III -2.1 Obtention des relations entrées-sorties	107
III -2.2 Estimation paramétrique	109
II - 2.3 Estimation par approche globale	110
III - 3 Utilisation d'une forme canonique d'observabilité.....	113
III - 3.1 Recherche d'une représentation adaptée [Gui75]	113
III -3.2 Approche géométrique.....	115
III - 3.3 Utilisation pour l'identification	120
IV - COMPARAISON.....	121
IV - 1 La structure diagonale capteur.....	122
IV - 2 Approche globale.....	123
IV - 3 La forme canonique	124
V - CONCLUSION	127
CHAPITRE 4 : ILLUSTRATION DE LA COMPARAISON DES RESIDUS.	128
INTRODUCTION.....	128
I - HYPOTHESES DE DEFAILLANCES PARAMETRIQUES	128
I - 1 Identification	128
I - 2 Résidus de parité.....	129
II - HYPOTHESE DE DEFAILLANCES ADDITIVES INDEPENDANTES.....	133
II - 1 Résidus de Parité.	133
II - 2 Résidus d'identification	134
III - SIMULATION.....	135
III - 1 Présentation du modèle initial.....	135
III - 2 La forme canonique	135
III - 2.1 Changement d'état	135
III - 2.2 Position des pôles et des zéros	136
III - 2.3 Le bruit sur les sorties	137
III - 2.4 Les entrées de commande	137
III - 2.5 Les défaillances.....	138
III - 3 Résidus de parité	139
III - 4 Résidus d'identification	141
IV - CONCLUSION	144

CONCLUSION GENERALE.....145

PERSPECTIVES146

ANNEXE.....

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Glossaire des symboles utilisés

\underline{x}	: vecteur d'état
p ou n	: dimension du vecteur d'état
y	: vecteur de mesure
m	: dimension du vecteur de mesure
\underline{u}	: vecteur de commande
r	: dimension du vecteur de commande
$OBS[t]$: matrice d'observabilité sur une fenêtre de taille t
COM_t	: matrice de commande sur une fenêtre de taille t
\underline{d}	: vecteur de défaillances
E, F	: matrice d'influence des fautes
\underline{d}_a	: vecteur de défaillances additives indépendantes
E_a, F_a	: matrice d'influence des fautes additives indépendantes
\underline{d}_m	: vecteur de défaillances multiplicatives
E_m, F_m	: matrice d'influence des fautes multiplicatives
\underline{f}	: vecteur de perturbations
G, H	: matrice d'influence des perturbations
\underline{f}_a	: vecteur de perturbations additives indépendantes
G_a, H_a	: matrice d'influence des perturbations additives indépendantes
\underline{f}_m	: vecteur de perturbations multiplicatives
E_m, F_m	: matrice d'influence des perturbations multiplicatives
\underline{p}	: vecteur de paramètres physiques
$\underline{\theta}$: vecteur de paramètres analytiques
$2t + 1$: dimension du vecteur de paramètres analytiques
$\underline{\theta}'$: vecteur de paramètres analytiques réel
$\underline{\theta}^*$: vecteur de paramètres analytiques nominal
$\hat{\underline{\theta}}_q$: vecteur des paramètres sur une fenêtre de taille q

$2t+1$: dimension du vecteur $\hat{\underline{\theta}}_q$
$\hat{\underline{\theta}}_q^{VI}$: vecteur des paramètres estimés par les variables instrumentales
$\zeta(k, \underline{\theta})$: instruments de la méthode des variables instrumentales
$e(k, \underline{\theta})$: erreur de prédiction
$e_F(k, \underline{\theta})$: erreur de prédiction filtrée
\underline{z}	: vecteur des entrées-sorties (dimension : $2t+1$)
Z_q	: matrice des entrées-sorties sur une fenêtre de taille q
$V_q(\underline{\theta}, Z_q)$: fonction de coût sur une fenêtre de taille q
v'	: bruit réel sur l'équation de la mesure
v	: bruit sur l'équation du modèle
η	: bruit sur l'équation d'état
ε	: bruit sur l'équation de mesure
\underline{y}_a	: vecteur de mesure filtré par C_a
\underline{u}_a	: vecteur de commande filtré par C_a
Z_a	: matrice des entrées-sorties filtrées
W	: matrice de projection
\underline{w}	: vecteur de projection (nominal)
\underline{w}'	: vecteur de projection réel
$\underline{\rho}$: vecteur des résidus d'identification
$\underline{\rho}^{VI}$: résidus d'identification issus des variables instrumentales
\underline{r}	: vecteur des résidus de parité
$E(r)$: espérance mathématique de la grandeur r
γ	: bruit ramené sur la sortie
$\underline{v}(k)$: bruit blanc
$s(i,j)$: sensibilité du résidu i à la panne j
$\sigma(r_i)$: sensibilité globale dans l'ensemble I_i^+
$\rho(r_i)$: sensibilité globale dans l'ensemble I_i^-
O_s	: espace d'observabilité d'ordre s
O_s^j	: espace d'observabilité d'ordre s du capteur j
n_j	: ordre structurel
$d(z)$: polynôme caractéristique de A

$L(\underline{\theta}_g, \underline{\lambda})$: opérateur lagrangien
T	: matrice de changement d'état
A_{ii}	: matrice d'état du sous-système i
\underline{c}_i^t	: matrice de mesure (vecteur ligne) du sous-système i
B_i	: matrice définie à partir de la matrice de commande
OBS_i	: matrice d'observabilité du sous-système i
Z_i	: matrice des entrées-sorties du sous-système i
$\underline{\theta}_g$: vecteur de paramètres grand
$\underline{\theta}_m$: vecteur de paramètres minimum
Γ	: matrice de structure reliant $\underline{\theta}_g$ à $\underline{\theta}_m$
M	: matrice de contrainte déduite de Γ
$\Omega^c(z)$: Transformée en z de la vitesse angulaire échantillonnée
$U^c(z)$: Transformée en z de la tension échantillonnée

Introduction générale

Au cours des décennies, l'évolution des technologies (passage du mécanique à l'électrique, de l'analogique au numérique) a permis une amélioration des équipements industriels. L'intégration de calculateurs a favorisé le développement d'algorithmes très puissants spécialisés dans la commande mais aussi dans le traitement numérique des données. Cette évolution s'est traduite par une augmentation de la complexité de ces installations qui s'accompagne parallèlement d'une diminution de leur fiabilité.

Aussi les exigences de sécurité et les surcoûts occasionnés par des défaillances ont montré la nécessité d'implanter à un niveau supérieur un système permettant de surveiller le bon fonctionnement de l'installation.

Ce système doit valider les données issues des capteurs dans une base de données validée et enrichie disponible pour les couches inférieures. Dans les cas sérieux, il doit intervenir de façon autonome et sans erreur sur le système et le cas échéant déclencher un arrêt du système.

Ces algorithmes de surveillance comportent trois fonctionnalités essentielles : la détection, la localisation, le diagnostic. Pour aboutir à de telles décisions, ces algorithmes doivent utiliser un ensemble d'indicateurs de défaut qui sont générés à partir des informations disponibles sur le système.

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire aux méthodes de génération d'indicateurs de défaut qui utilisent un modèle de comportement du système.

L'objectif de cette thèse est double :

- établir une comparaison entre deux types de méthodes très souvent utilisées pour la génération d'indicateurs de défauts : les méthodes dites d'Espace de Parité et celles de l'estimation paramétrique.

- montrer que, malgré les liens évidents entre les méthodes, l'examen des deux types d'indicateurs de défauts permet d'obtenir une information plus précise par rapport aux types de défaillances rencontrés.

L'articulation du mémoire en est largement inspirée.

Le premier chapitre vise à introduire les notions principales relatives à la surveillance et s'attache aussi à préciser le cadre du travail. Nous y présentons les différents modules de la surveillance et y introduisons les problèmes généraux relatif à l'identification des systèmes.

Dans le second chapitre, les méthodes de l'espace de parité et quelques méthodes d'identification paramétrique sont comparées dans le cadre des modèles linéaires échantillonnés. Des interprétations géométriques et statistiques y sont proposées.

Le chapitre III concerne l'extension de la comparaison des techniques de l'Espace de Parité et estimation paramétrique dans le cadre des systèmes linéaires multivariables : la problématique y est différente puisque le choix de relations entrées-sorties adéquates s'avère une étape importante de la démarche. A ce niveau, un parallèle avec une démarche d'optimisation d'indicateurs de défauts est effectuée. Les relations de comparaison obtenues permettent une interprétation similaire au chapitre précédent.

Le chapitre IV est consacré aux caractéristiques des indicateurs de défaut en réponse à deux types de défaillances : les défaillances additives indépendantes et les défaillances multiplicatives. Un exemple de simulation permet d'illustrer les notions introduites dans les chapitres précédents et de comprendre la complémentarité des deux types de méthodes.

Chapitre 1 : Principes généraux de la surveillance des systèmes industriels.

Introduction

Dans leur recherche d'une plus grande disponibilité et d'une meilleure sécurité de fonctionnement de leurs installations, les exploitants font de plus en plus appel à des systèmes automatisés de détection d'anomalies. Ces anomalies peuvent altérer, et plus encore empêcher, le bon fonctionnement des installations et de ce fait occasionner des surcoûts prohibitifs pour l'entreprise. Il est donc préférable de recourir à un système de diagnostic qui permettra de procéder à une intervention précoce .

Comme nous allons le voir, le diagnostic est une tâche complexe qui requiert des informations de plusieurs types. Il dispose dans tous les cas d'un ensemble de mesures directement issues du processus qui donnent une image de son état. Ces informations en elles-mêmes ne sont pas suffisantes, elles doivent être confrontées à une connaissance a priori du système :

- soit sous forme de modèles (modèles de connaissance, modèles de comportement),
- soit des connaissances expertes ou structurelles sur le processus physique dérivées d'une expérience accumulée sur ce même processus.

Cette étape est le passage obligé pour formaliser de façon théorique les notions de comportements normaux et anormaux.

Ce chapitre est consacré aux notions fondamentales de la surveillance des processus industriels. Nous décrirons d'abord les modules propres à la surveillance (les étapes de la démarche) ainsi que les défaillances que l'on répertorie en fonction de certaines de leurs caractéristiques. Par la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement au module de génération des indicateurs de défaut pour donner un bref aperçu de l'état de l'art. Nous nous concentrerons enfin sur une méthode de génération particulière ' l'identification' et nous nous attacherons à présenter, dans l'optique du diagnostic, les problèmes généraux relatifs à ce domaine.

I - Les modules de la surveillance

Les étapes de la démarche de diagnostic d'une installation sont résumés sur la figure 1. Elles sont complètement indépendantes de la technique de surveillance choisie. Nous allons énumérer leurs fonctions et citer les domaines scientifiques auxquelles elles recourent [Hom92].

I - 1 Le Pré-traitement

La première question que le concepteur doit se poser concerne l'élaboration du système de surveillance. Il doit répondre à la question suivante :

Quels sont les capteurs à implanter pour assurer une surveillance optimale, optimal étant défini au sens de la satisfaction d'un cahier des charges de surveillance ? Les objectifs de ce cahier des charges sont d'assurer la conduite, la sécurité, la maintenabilité et la surveillance du système automatisé. Le problème est donc de savoir quels sont les signaux importants à collecter pour répondre au cahier des charges de surveillance. Nous montrons sur un exemple simple à la fin de ce chapitre l'importance de ce choix pour le diagnostic.

Dans un premier temps, le module de pré-traitement acquiert l'ensemble des signaux issus des capteurs. Dans un deuxième temps, il met en forme ces données par des algorithmes de traitement de signal relativement simples ou de normalisation de données. Cet ensemble de données constitue la base de données brutes que la surveillance devra valider et enrichir.

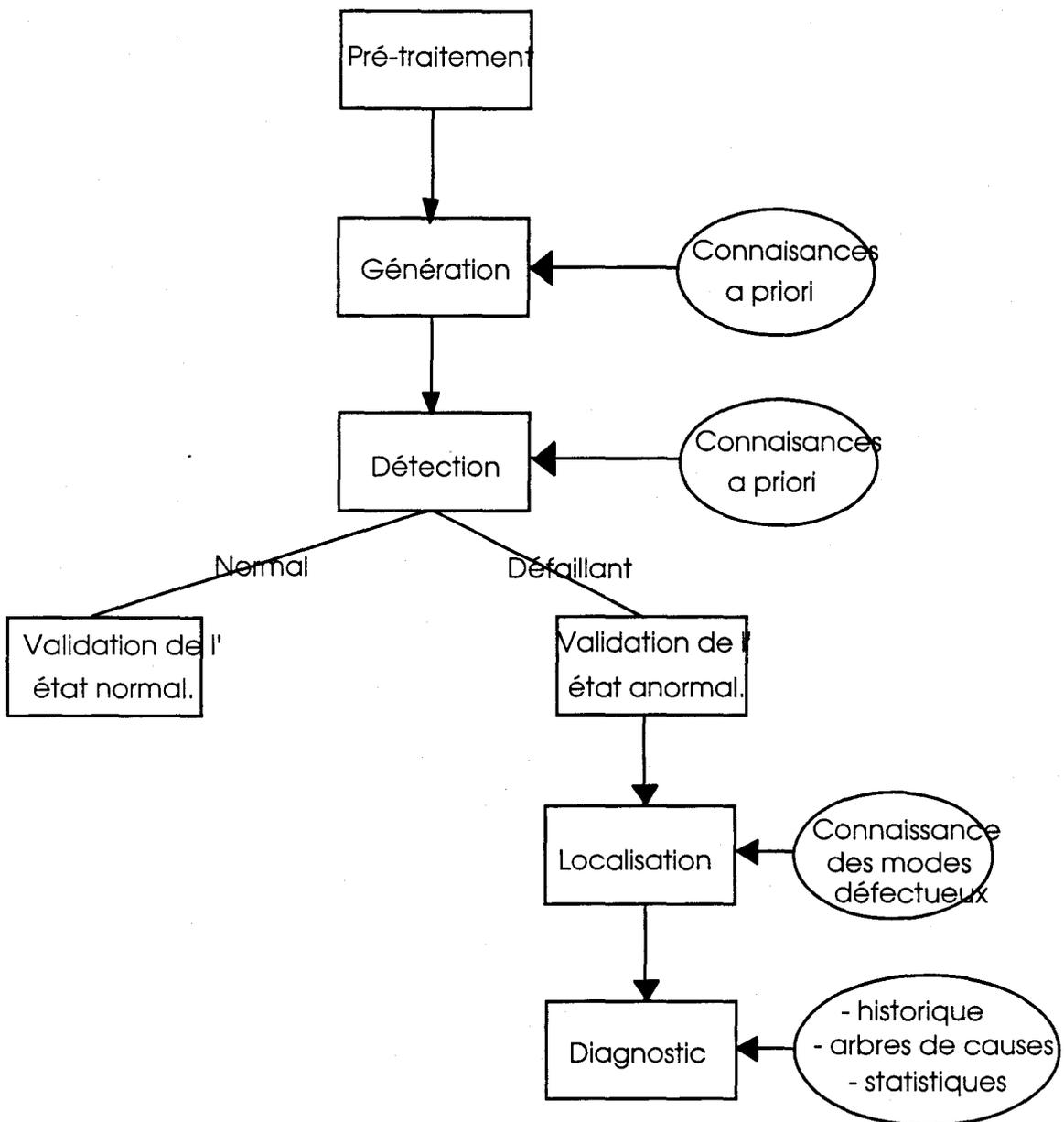


Figure 1 : Les étapes du diagnostic

I - 2 La génération d'indicateurs de défaut

Le deuxième module concerne la génération d'indicateurs de défaut. La technique de génération dépendra fortement du type de connaissance a priori dont on dispose sur le système.

L'indicateur de défauts encore appelé résidu permet de différencier par sa valeur numérique un fonctionnement normal d'un comportement défectueux. Ces résidus ont des valeurs nulles dans le cas idéal où le modèle représente exactement le système. Dans des conditions réelles et en l'absence de défaillance, ils évoluent dans un voisinage de zéro. Une défaillance se traduira par un écart significatif des résidus avec leurs valeurs nominales.

On distinguera les méthodes de redondance matérielle, les méthodes de redondance analytique utilisant un modèle mathématique du système. Lorsqu'on ne dispose pas de modèle, des méthodes d'apprentissage reposant sur la reconnaissance des formes ont été développées. Les méthodes de redondance analytique seront expliquées en détail dans la suite de ce chapitre et mon apport se situera dans le domaine de la génération.

Des algorithmes de détection et de localisation qui font appel à la théorie de la décision seront appliquées au vecteur des résidus pour décider ou non de l'occurrence d'une défaillance.

I - 3 La décision

La phase de décision effectue un choix parmi différentes hypothèses. Elle permet de décider d'après les valeurs temporelles des résidus si le système est déclaré défaillant ou non et de trouver l'élément défaillant. Dans un premier temps, nous présentons les trois types de méthodes qui sont à notre disposition, puis nous nous intéressons à leur application dans le cadre de la détection et de la localisation de défaillances.

I - 3.1 Les moyens

Le système physique, de par son environnement et ses conditions de fonctionnement est soumis à un certain nombre de perturbations aléatoires. De plus, la connaissance du processus physique, sur laquelle se fonde la génération des résidus comporte un certain nombre d'imprécisions. Les indicateurs issus de la phase de génération seront considérées comme des variables aléatoires dont la valeur moyenne est fonction du mode de fonctionnement. On recense trois grands types de stratégies de décision :

- les méthodes snapshot ou à un coup.

Elles testent de façon indépendante le vecteur des résidus à chaque instant. Dans cette classe, on distingue les méthodes de test des résidus pris individuellement (seuils) et les méthodes géométriques appliquées de façon globale au vecteur d'indication de défauts. Ces dernières sont basées sur des critères géométriques d'appartenance à des régions. Le problème est de décider de l'appartenance du vecteur des résidus à une de ces régions. L'utilisation de ces méthodes exige parfois le filtrage temporel des alarmes.

- Les méthodes de tests classiques

Ce sont des tests statistiques dérivés de la théorie de la décision appliqués aux indicateurs de défauts. Les tests optimaux pour différents critères conduisent à des tests classiques sur le rapport de vraisemblance dont le calcul inclut des modèles probabilistes des observations (Lemme de Wald, Lemme de Neyman-Pearson). Ils considèrent un ensemble d'observations fixes et il faut décider à l'issue de ces mesures de l'hypothèse la plus probable. La mise en oeuvre de cette méthode impose la conception d'indicateurs de défauts indépendants.

- Les tests séquentiels diffèrent des précédents dans le sens où le nombre d'observations est un nombre aléatoire. Dans ce cas, on préfère reporter la décision plutôt que de prendre une décision erronée. Ceci introduit un domaine supplémentaire qui correspond à une région de non décision [Bass88], [Bass93]. Ces tests séquentiels s'appliquent aussi sur le rapport de vraisemblance et généralement de façon cumulative (Méthode de la somme cumulée). Ces méthodes paraissent plus robustes que les tests classiques. Comme ces derniers, elles exigent toutefois pour la mise en oeuvre l'indépendance des indicateurs de défauts.

I - 3.2 La détection

La détection n'est finalement qu'un problème de décision particulier. En effet, le problème de la détection réside dans le choix entre l'hypothèse du fonctionnement normal (H_0) et celle du fonctionnement défaillant (H_1). La détection de défaillances se présente donc comme la résolution d'un problème de décision à deux hypothèses. Toutefois, de mauvaises décisions peuvent se produire :

Les fausses alarmes auront pour conséquences des arrêts inutiles de l'unité de production ce qui entraînera une baisse de productivité. De plus, un système qui déclenche inutilement n'a plus la confiance de l'opérateur. Celui-ci ne tiendra plus compte des alarmes même lorsqu'elles seront justifiées.

Une non détection ou une détection trop tardive peut avoir des conséquences fâcheuses sur le processus physique, son environnement ainsi que sur les opérateurs.

Les tests de détection doivent donc si possible tenir compte de ces deux critères afin d'améliorer la fiabilité du système de surveillance.

I - 3.3 La localisation

Après avoir détecté un fonctionnement anormal, il faut être capable de localiser l'élément défectueux (capteur, actionneur, processus), d'évaluer son importance et de chercher sa cause éventuelle. Par ailleurs, une localisation incorrecte peut conduire à des actions inadaptées à l'état réel du système ou à sous-estimer une situation potentiellement dangereuse.

Dans le cas de systèmes physiques complexes ou peu instrumentés, il ne sera pas toujours possible de localiser précisément chaque élément défaillant et la localisation indique alors le sous-système dans lequel se manifeste la défaillance.

Le problème de la localisation se pose donc comme un choix entre les différentes causes de panne (n hypothèses). Elle fait donc appel aux méthodes préalablement citées.

Parmi elles, nous avons choisi de présenter une méthode de reconnaissance logique : le principe est d'effectuer un test individuel des indicateurs de défauts (seuils) et d'examiner en théorie quels sont les résidus influencés sous l'hypothèse de chaque défaillance. Ces influences théoriques et réelles sont ensuite comparées.

Imaginons pour fixer les idées que nous disposions de deux indicateurs de défaut pour trois pannes possibles dont l'influence sur ces derniers peut être résumée dans le tableau structurel :

	panne p ₁	panne p ₂	panne p ₃
Indicateurs			
r ₁	1	1	0
r ₂	0	1	1

Figure 2 : tableau structurel

Légende : 1 panne influente, 0 panne sans influence.

Une colonne du tableau est appelée signature théorique de la panne correspondante. La signature réelle est le vecteur binaire qui indique si le système est dans son état normal ou

non. La signature réelle est ensuite comparée aux signatures théoriques de chaque panne et on attribue la panne à la signature théorique la plus proche.

Des méthodes globales sur la position géométrique du vecteur des résidus sont aussi développées pour la localisation.

I - 4 Le diagnostic

Le diagnostic de la défaillance est une opération classique qui caractérise la défaillance par type et degré de sévérité. En fonction des règles préétablies, les symptômes de la défaillance vont permettre de trouver le type et la cause de la panne.

Il est cependant utile de noter que le diagnostic peut dépendre du niveau de connaissance physique que l'on a du système [Mil87], [Sta94a]. On peut avoir identifié que l'anomalie se situait au niveau de la valeur de la résistance de la bobine, par correspondance, on prétendra qu'il s'agit d'une défaillance au niveau de la bobine. Un diagnostic plus précis serait d'affirmer que la panne provient d'un court-circuit dans une partie du bobinage. Dans ce cas, on pourra avoir recours aux arbres de causes.

I - 5 Conclusion

Nous avons donc introduit les différents modules de la démarche de surveillance. Ces étapes doivent être bien entendu complétées par des algorithmes de réaction pour pouvoir être utilisées.

Une fois la défaillance diagnostiquée, il revient à l'utilisateur ou au système de supervision de décider de remettre en état de fonctionnement normal soit par maintenance, soit par compensation du défaut ou si possible par reconfiguration du système. Les deux dernières situations constituent un fonctionnement dégradé.

Les stratégies de la réaction sont de deux types : l'une consiste à traiter le défaut (aspect maintenance); l'autre considère le défaut sans essayer d'intervenir (accommodation de pannes). La reconfiguration a pour objet, sous sa forme la plus simple, la correction des défauts par leur compensation si cela est possible et la modification des lois et stratégies de commande dans les cas complexes. Dans tous les cas, cette action ne peut être menée que lorsque le niveau de gravité estimé du défaut ne porte aucun préjudice à la sécurité du personnel d'exploitation et à celui de l'installation. C'est une façon de rendre les systèmes tolérants aux fautes.

II - Les défaillances et les perturbations

Après avoir décrit la méthodologie générale du diagnostic, nous allons décrire les défaillances puisqu'elles constituent notre centre d'intérêt. Nous proposons dans un premier temps quelques définitions puis nous recensons les différentes défaillances selon leurs origines, leur gravité, leur comportement temporel. Enfin, nous présenterons une classification des défaillances et des perturbations : celle-ci trouvera son application dans la définition des modèles mathématiques que nous utilisons.

II - 1 Définitions [Bru90] [Cas94]

Un système est dit en fonctionnement normal si son comportement appartient à un ensemble de comportements nominaux pour lequel il a été conçu.

Une défaillance se caractérise comme une modification suffisante des caractéristiques d'un système ou d'un de ses composants pour qu'une fonction ne puisse plus être correctement remplie. Par exemple, le fait qu'un capteur soit dérégulé peut conduire la fonction de régulation à ne plus pouvoir tenir les spécifications de précision.

Elle se distingue de la panne dans la mesure où il n'y a pas arrêt de la fonction mais seulement dysfonctionnement.

Une perturbation est une action extérieure non contrôlée agissant sur le système.

II - 2 Les défauts selon leurs origines

On en recense trois types [Spr92] : les défaillances capteurs, les défaillances actionneurs et les défaillances des processus.

II - 2.1 Les défaillances processus

Les défaillances peuvent provenir du processus : ses éléments sont sujets à des vieillissements ou à des évolutions de comportement ou à des ruptures. On s'intéresse plutôt à des évolutions de comportement qui, on l'espère, seront les signes précurseurs d'un dysfonctionnement plus grave. Cependant, il faut les distinguer des perturbations qui agissent sur le système.

II - 2.2 Les défaillances actionneurs

L'actionneur module la puissance fournie par une source en fonction d'un signal de commande. Ce signal est élaboré soit par un opérateur (mécanisme en boucle ouverte), soit par une loi de commande en boucle fermée [Sta94b]. L'énergie fournie au système permet les transformations de son état. Il constitue donc un élément important du système automatisé dont la fonctionnalité est de permettre les actions du procédé. Une défaillance de celui-ci empêche alors le système d'atteindre ses objectifs. L'actionneur est aussi un système physique; il peut donc subir les mêmes types de défaillances que le processus.

II - 2.3 Les défaillances capteurs

Avant de s'intéresser aux défaillances des capteurs, il convient de connaître leurs caractéristiques et les erreurs qui peuvent intervenir pour mieux les différencier.

Le capteur a pour mission de fournir une image d'une grandeur physique. Elle est souvent entachée d'erreurs dues aux imperfections de la chaîne de mesure. Il faut donc distinguer la valeur vraie de la valeur mesurée.

Le capteur se caractérise [Geh94] par des critères de sûreté de fonctionnement (fiabilité, maintenabilité), des critères d'utilisation (sensibilité, étendue de mesure), et des critères métrologiques (fidélité, justesse, précision).

On distingue trois grandes catégories d'erreurs de mesure :

Les erreurs aléatoires sont d'amplitude aléatoire mais bornées. Elles sont liées aux limites physiques de la mesure (bruits de fond, perturbations électromagnétiques).

L'erreur systématique introduit, pour une valeur donnée de la grandeur à mesurer, un décalage entre la valeur vraie et la valeur mesurée. Elle est soit constante (biais), soit à variation lente par rapport à la durée de mesure (défaillance = dérive du zéro), soit fonction de la mesure (défaillance = erreur d'échelle).

L'erreur accidentelle est caractérisé par une amplitude, un signe et une apparition aléatoires. Certaines de ses causes peuvent être déterminées mais leurs influences sur la grandeur mesurée restent souvent inconnues.

Si les deux dernières catégories d'erreurs se manifestent de façon trop fréquente, elles seront considérées comme des défaillances sérieuses.

II - 3 Le niveau de gravité

Un défaillance sera aussi caractérisée par le niveau de gravité lié au stade auquel elle est détectée. Dans le livre de Brunet [Bru90], la défaillance s'appelle défaut. Dans la suite du mémoire, on n'utilisera que les termes de défaillance et de faute.

II - 3.1 Défaut ponctuel

Il est de type fugitif en amplitude et de brève durée. Il donne lieu à des incohérences dues à la manifestation instantanée d'un défaut. Il se caractérise par une modification ponctuelle des caractéristiques du système. Il agit donc de façon transitoire.

Ses origines sont le plus souvent localisées au niveau des systèmes de collecte et de transport des mesures et données. Elles sont souvent dues aux parasites électromagnétiques.

II - 3.2 Défaut naissant

Il apparaît de manière progressive, d'amplitude en valeur absolue grandissante et se manifeste sous la forme d'une dérive lente des caractéristiques du système. Les dérives sont souvent dues aux vieillissements des instruments de mesure, des actionneurs ou des composants du système. La fonction du système reste cependant assurée.

Lorsque le défaut est naissant, il est possible d'envisager une maintenance préventive qui a l'avantage d'être moins coûteuse du fait de la précocité de l'intervention.

II - 3.3 Défaut déclaré

Il apparaît de façon brutale et se manifeste par un écart significatif qui modifie le fonctionnement de manière préjudiciable. Il peut avoir plusieurs origines :

- une panne de capteur ou d'actionneur auquel cas l'organe en question ne répond plus aux excitations du phénomène physique auquel il est soumis et délivre constamment à sa sortie une valeur fixe.

- un état d'encrassement ou mauvais étalonnage d'un capteur.

- une déformation de la plage de mesure d'un capteur.

- un état détérioré d'un composant.

Ce défaut empêche le système d'assurer ses fonctions obligeant ainsi à une maintenance. Cependant, cette intervention ne nécessite pas l'arrêt complet du système.

II - 3.4 Défaut catastrophique

Il entraîne un arrêt du fonctionnement de l'installation qui est déclenché par le système

de sécurité. Une intervention trop tardive entraînerait une destruction qui serait catastrophique en termes de production.

Cette classification est intéressante puisqu'un défaut passe généralement par les différentes phases décrites qui annoncent une évolution plus ou moins rapide vers une défaillance plus grave d'un élément. Détecter un défaut naissant est une manière préventive d'éviter un arrêt d'urgence.

II - 4 La modélisation des défaillances

Tout d'abord, nous présentons le cadre dans lequel notre étude sera applicable.

II - 4.1 Notre centre d'intérêt

Nous allons restreindre le cadre de notre étude. Nous poserons comme première hypothèse que le processus ne subit pas au même instant plusieurs défaillances. Ceci nous évite de considérer les cas de compensations de fautes sur la sortie.

Nous limiterons notre étude aux défaillances qui laissent le système linéaire par rapport aux commandes. Plus précisément, nous nous restreignons aux défaillances processus d'évolution assez lentes pour que le modèle en cours garde la même structure et sensiblement la même valeur des paramètres sur la fenêtre d'observation considérée. Nous illustrerons cette restriction dans le paragraphe suivant. Les défaillances brutales (ruptures), souvent non linéaires ne seront donc pas envisagées. On imaginera que la rupture est passée par une phase de défaillance lentement évolutive que l'on aura détectée et isolée au préalable.

II 4 - 2 Les différents modèles de fautes.

Les fautes sont le résultat de défaillances affectant le système [Bru90] [Afn84] [Afn88]. Leurs effets ne peuvent être perçus qu'à travers l'observation de variables mesurées. Certaines variables du système ont alors des trajectoires différentes des trajectoires nominales. Si l'examen des variables mesurées ne permet pas de déceler une défaillance, elle est non détectable. Dans le cas contraire, elle est dite détectable.

On a l'habitude de considérer deux ensembles de fautes suivant les modèles qu'on peut en faire [Ger93a] : les fautes additives et les fautes multiplicatives.

a) les fautes additives

Les fautes sont dites additives si leurs effets sur les variables mesurées se modélisent sous une forme additive.

Le schéma ci-dessous propose une classification des défaillances additives selon leur localisation. Le premier représente un schéma de fautes additives sur l'entrée. On peut aussi modéliser des fautes additives sur la sortie.

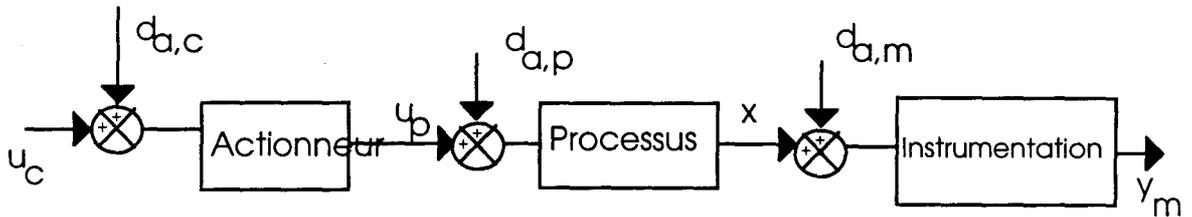


Figure 2a : Fautes additives en entrée.

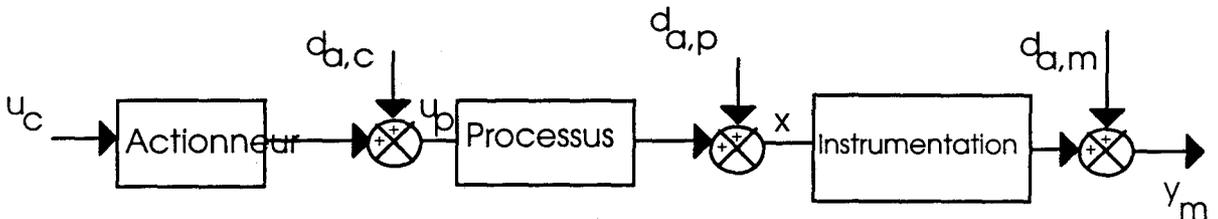


Figure 2b : Fautes additives en sortie.

Légende : types de fautes

- $d_{a,c}$: faute additive modélisant une défaillance actionneur.
- $d_{a,p}$: faute additive modélisant une défaillance du processus.
- $d_{a,m}$: faute additive modélisant une défaillance de l'instrumentation.

Exemple 1 : un biais ou une dérive d'un capteur est représenté par un modèle de faute additive sur la sortie. L'écart ne dépend que de la défaillance elle-même : $\delta y = f(d_{a,m})$

Exemple 2 : L'effet d'une défaillance dans la transmission de la commande conduit à un modèle de faute additive de l'actionneur en entrée (car il ne reçoit pas ce qu'il aurait du recevoir).

Remarque : Une faute additive en entrée donne un résultat qui ne dépend pas de la commande dans le cas de systèmes linéaires (principe de séparation) mais qui dépend de la commande dans le cas d'un système non linéaire.

b) Les fautes multiplicatives

Les fautes multiplicatives sont celles qui affectent les paramètres du modèle du système.

Par exemple, une défaillance définie comme la variation d'un des paramètres de la fonction de transfert conduit à une faute multiplicative : l'effet sur la sortie du système dépend de l'évolution des commandes et de la défaillance : $\delta y = f(d_m, u)$

De la même façon, une erreur d'échelle pour un capteur peut se modéliser par une faute multiplicative.

Dans le cas de modèles linéaires, Gertler [Ger94] a montré que les fautes multiplicatives peuvent aussi se modéliser sous une forme additive. Les fautes multiplicatives appartiennent donc aussi à la classe des fautes additives. Elles présentent cependant des caractéristiques particulières. Les fautes multiplicatives sont les effets sur les sorties qui dépendent de l'évolution des entrées.

Dans le cadre des modèles linéaires, il est possible de proposer une autre classification des défaillances qui examine la corrélation temporelle de la faute à l'entrée.

On distinguera les défaillances conduisant à des fautes additives non corrélées à l'entrée (fautes additives indépendantes) et celles conduisant à des fautes additives corrélées à l'entrée (fautes multiplicatives). Les premières ne peuvent être décrites que par un modèle additif alors que les secondes conduisent à un modèle soit additif soit multiplicatif.

II 4 - 3 Les autres influences et leur modélisation

Parmi les autres influences, on distingue l'effet des perturbations et l'effet des erreurs de modélisation.

Les perturbations seront dites additives indépendantes si leurs effets sur les sorties sont indépendants de l'évolution des entrées de commande.

Il peut dans certains cas se produire une confusion entre l'effet d'une perturbation indépendante additive et une faute additive indépendante. Nous verrons dans le paragraphe suivant que la définition du cahier des charges permet de répondre en partie à ce problème.

Remarque : Perturbations et fautes additives sont représentées par des modèles identiques. Seule la sémantique en est différente. C'est le rôle du cahier des charges de définir ce qui sera considéré comme défaillance et ce qui sera considéré comme perturbation.

Les erreurs de modélisation conduisent à des effets sur les sorties qui dépendent de l'évolution des entrées de commande. Leurs influences sont donc du même type que celles des

défaillances multiplicatives. La définition du cahier des charges permet aussi de répondre à cette ambiguïté.

II - 5 Le cahier des charges de la surveillance

Nous avons présenté toutes les influences que peut subir un système. Une fois recensées ces influences, le cahier des charges est élaboré d'après la définition du fonctionnement normal du système : il permet de séparer l'ensemble des défaillances que l'on désire surveiller des autres influences. On regroupe :

- 1 - Les défaillances auxquelles on veut être sensible.
- 2 - Les autres influences dans lesquelles on peut citer :
 - les défaillances auxquelles on ne s'intéresse pas.
 - les perturbations.
 - les erreurs de modélisation.

Le système de surveillance (en particulier les indicateurs de défaut, le système de décision) doit être sensible aux défaillances du groupe 1 et être robuste vis à vis des influences du groupe 2.

Remarque 1 : Suite à la définition du cahier des charges, on peut tenter de lever l'ambiguïté entre perturbation additive indépendante et faute additive indépendante. Prenons par exemple le cas d'un moteur soumis à un couple perturbateur. L'action de celui-ci sur la sortie se modélise naturellement par une influence de type additive indépendante.

Si la surveillance du couple perturbateur définie par le cahier des charges ne présente pas d'intérêt pour le fonctionnement du système, alors le couple perturbateur est une perturbation additive indépendante.

Si le cahier des charges a maintenant défini le couple perturbateur en dehors d'une plage de valeurs comme une anomalie à surveiller, le couple perturbateur est une défaillance additive indépendante.

En résumé, une faute additive indépendante sur le processus peut être vue comme une perturbation dont la valeur en fonctionnement normal doit être bornée. Il revient donc au concepteur du système de surveillance de définir ce que fonctionnement normal signifie par rapport au système étudié.

Remarque 2 : Dans certains cas, il n'est pas possible d'obtenir un découplage parfait des perturbations. Leurs effets doivent alors être minimisés de sorte à ne pas produire de variation significative sur les indicateurs de défauts.

II - 6 Propriétés du système de surveillance

Nous allons donner deux définitions relatives à la caractérisation du système de surveillance.

Une défaillance est dite détectable si ses effets peuvent être perçus à travers l'examen des indicateurs de défaut. Dans le cas contraire, elle est non détectable.

Une défaillance est dite localisable si ses effets sur les indicateurs de défaut permettent de la distinguer des autres défaillances.

Dans le cas de défaillances non localisables, il existe des classes d'équivalence de défaillances qui produisent les mêmes fautes. Le système de surveillance pourra simplement déduire que la défaillance appartient à une classe d'équivalence.

La qualité du système de surveillance est donnée par :

- l'ensemble des défaillances détectables.
- les cardinaux des classes d'équivalence.

III - Les outils de génération d'indicateurs de défaut

Nous allons présenter les trois grandes classes de méthodes qui permettent de générer des indicateurs de défaut. Elles reposent toutes sur une redondance d'informations disponibles sur le système.

III - 1 La redondance matérielle [Pot77] [Cho80] [Eva70]

Il s'agit d'une méthode souvent utilisée pour la surveillance des capteurs. Le principe est de mesurer une même grandeur physique à l'aide de plusieurs capteurs identiques.

En fonctionnement normal, les capteurs indiquent aux bruits et imprécisions de mesure près, la même valeur. En revanche, en cas de défaillance de l'un d'entre eux, les valeurs indiquées seront différentes.

La détection de défaillances simples nécessite une duplication de capteurs. Par contre, si l'on entreprend de localiser la panne, on procédera à un vote majoritaire et un minimum de trois capteurs sera requis.

Cette méthode (fiable pour les pannes simples tout en étant peu complexe) est très largement utilisée dans l'industrie. Toutefois, elle se révèle très coûteuse et alourdit considérablement les installations déjà très complexes. De plus, pour des raisons

architecturales et matérielles, la redondance des capteurs n'est pas toujours utilisable.

III - 2 Les méthodes d'apprentissage

Les méthodes d'apprentissage consistent en une analyse de données permettant d'extraire l'information utile caractérisant les paramètres principaux du système. On s'intéresse ici au problème d'explication [Pom91] où les modes de fonctionnement (variables à expliquer) sont qualitatives et les variables explicatives sont quantitatives. Dans ce cadre, on peut utiliser une méthode d'analyse de données classique (Analyse factorielle discriminante ou décisionnelle) ou une méthode de reconnaissance de forme [Dub90].

Ces méthodes d'explication sont très utilisées pour des systèmes qui ne peuvent pas être décrits par un modèle de comportement. Le diagnostic médical en est un exemple.

A partir d'un ensemble de patients, une correspondance avec le type de maladie peut être établie grâce à l'observation de certaines caractéristiques. En fonction de certains symptômes, la maladie peut être déterminée grâce à l'apprentissage effectué.

La phase terminale consiste à décider, en ligne, de l'appartenance du système à l'une des classes à l'aide de la cartographie établie ou à créer une classe supplémentaire correspondant à un nouveau mode [Dub90].

On peut reprocher à cette méthode la difficulté d'établir une base de données de modes défailants, en particulier pour les installations industrielles.

III - 3 Les méthodes de redondance analytique

La connaissance de modèles de comportement reliant certaines variables mesurées apporte un supplément d'informations appelé redondance analytique; la vérification de la cohérence de ces informations est réalisée grâce à des indicateurs de défaut appelés résidus. Ils permettent de juger du fonctionnement du processus.

Le système peut être divisé en deux parties :

- La partie opérative décrivant le processus seul. Sa dynamique peut avoir pour modèle

un ensemble d'équations différentielles par rapport au temps continu et un ensemble d'équations aux différences dans le cas de variables échantillonnées dans le temps. La plupart des résultats que nous présentons se situent dans le cadre des systèmes linéaires ou linéarisés.

Dans ce cas, les équations du modèle peuvent s'exprimer sous des formes temporelles (le modèle d'état, les relations entrées sorties), ou bien dans le domaine fréquentiel avec l'utilisation de la transformée de Laplace ou de la transformée en z (fonction ou matrice de transfert). Nous utiliserons plus fréquemment les modèles d'état et les relations entrées-sorties.

- Le modèle de la partie instrumentale qui décrit la collecte d'informations. Ses équations font intervenir certaines variables internes qui apparaissent dans le modèle d'état et un ensemble de paramètres physiques propres aux capteurs. Les dynamiques respectives des mesures et du processus sont en général bien distinctes si bien que le modèle de la partie instrumentale n'introduit pas d'états supplémentaires propres aux capteurs.

La détection et localisation de défaillances utilisera l'ensemble du modèle.

Trois grandes classes de méthodes peuvent être distinguées : les méthodes d'estimation de signaux, les méthodes de l'espace de parité, les techniques d'estimation paramétrique. Les deux premières supposent le modèle connu et en vérifient la cohérence. La dernière approche compare les paramètres du modèle estimé avec leurs valeurs attendues.

III - 3.1 Estimation d'état

A l'aide de filtres de Kalman [Wil76], d'observateurs de Luenberger [Lue71], [Mag91], [Wün90] ou de filtres détecteurs de défauts [Bea71], [Jon73], le vecteur des variables d'état est estimé. On peut donc comparer la sortie réelle avec la sortie estimée au travers de ce que l'on appelle un résidu. Les degrés de liberté dans la construction d'observateurs (placement de pôles) ou des filtres détecteurs de défauts permettent de répondre à certains éléments du cahier des charges de surveillance. Si le système est supposé parfaitement linéaire et ne possède pas plusieurs points de fonctionnement linéarisables, les sauts sur le vecteur d'état conduisent alors à des décisions de défaillances.

III - 3.2 Espace de parité

L'équation de la mesure est écrite sur une fenêtre temporelle grâce à l'équation d'état. Elle est ensuite projetée dans l'Espace de Parité pour éliminer les variables internes non mesurées ([Cho80] [Cho84] [Ham86] [Pat91] [Fra91]). Ces équations ne font apparaître que des entrées-sorties et sont uniquement vérifiées en fonctionnement normal : ce sont des relations de redondance analytiques (RRA).

Il faut remarquer que les modèles de conduite ou de connaissance peuvent être utilisés pour la génération des RRA. Ces relations sont testables en temps réel et un écart significatif de ces résidus par rapport à zéro traduit la présence d'une défaillance.

III - 3.3 Estimation paramétrique [Ise84] [Rau85] [Spr92]

On connaît un modèle paramétrique décrivant le comportement du système, ainsi que la valeur de ses paramètres en fonctionnement normal. Les informations issues du système sont utilisées pour identifier les paramètres caractérisant le fonctionnement réel; ceux-ci sont comparés aux paramètres théoriques. Tout écart est révélateur d'une défaillance.

Les modèles utilisés sont soit de « type boîte noire » soit des modèles de connaissance. Cette classe de méthodes est l'objet principal de ce mémoire.

IV - Les problèmes généraux de l'identification

L'objet de ce paragraphe est de présenter d'abord la méthodologie générale du diagnostic par identification paramétrique. Nous discuterons ensuite des avantages et inconvénients du modèle discret et du modèle continu. Enfin, sur un exemple, nous présenterons des concepts liés à l'estimation de paramètres en général.

IV - 1 Méthodologie générale du diagnostic fondé sur l'identification paramétrique

Cette approche repose essentiellement sur deux éléments [Hom92] :

- avoir un modèle d'observation (modèle de connaissance ou de représentation en vue de l'estimation paramétrique) avec une structure donnée.

- avoir dans la mesure du possible les relations reliant les paramètres du modèle aux paramètres physiques p .

On appellera $\underline{\theta}$ le vecteur des paramètres du modèle et on supposera que les relations entre les paramètres du modèle et les coefficients physiques sont représentés par :

$$\underline{\theta} = f(p)$$

Lorsque il existe une bijection entre l'espace des paramètres du modèle et l'espace des paramètres physiques, ces derniers sont dits identifiables.

Remarque : il n'est pas certain que le système garde la structure du modèle d'observation en présence de défaillances. Cependant, les approches d'estimation conservent cette hypothèse.

La figure suivante illustre les différents niveaux de diagnostic [Hom92] : elle décrit le passage de l'espace des observations (fautes) à l'ensemble des composants physiques (défaillances). Le diagnostic est si possible exprimé dans l'ensemble des composants physiques. Sinon, on se limite à un diagnostic des paramètres du modèle.

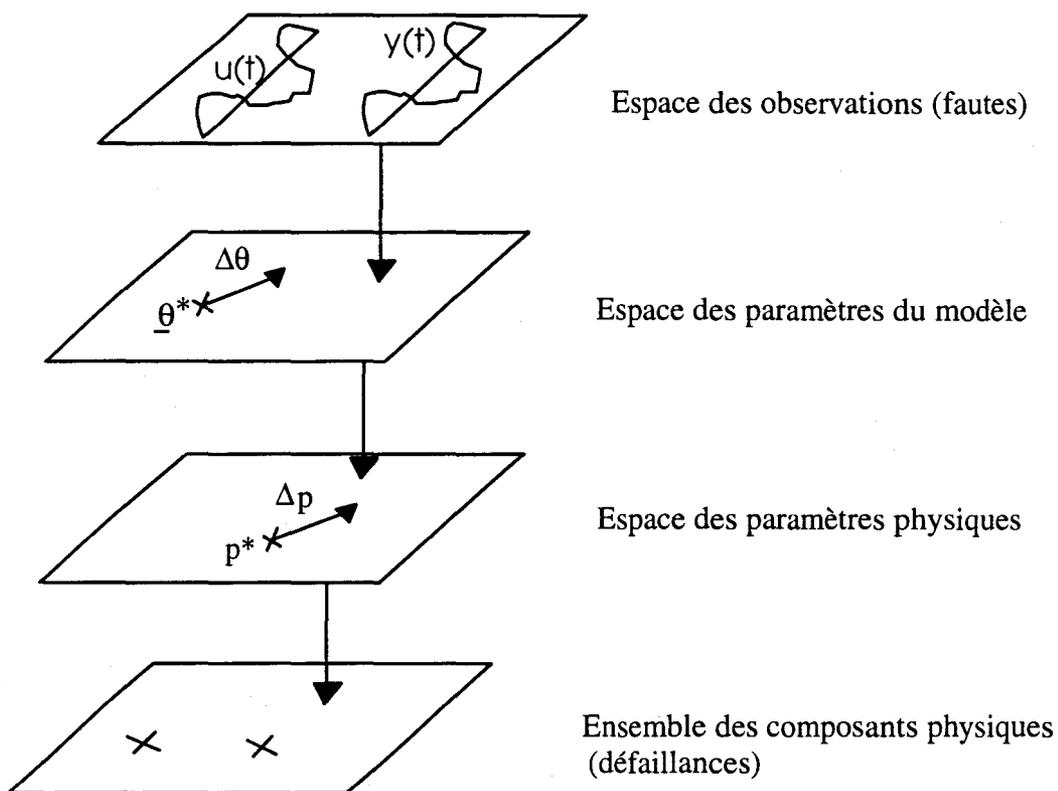


Figure 3 : différents niveaux de diagnostic

IV -1.1 Diagnostic dans l'espace des paramètres physiques.

Cette méthode repose sur le calcul des paramètres physiques qui est fondamental pour le diagnostic physique du système. En effet, si des dérives lentes ou des défauts brusques apparaissent dans le système, ils seront la conséquence des modifications des paramètres physiques qui conduisent à des modifications des paramètres analytiques. Cependant, alors qu'un défaut affecte en général un paramètre physique, il influence habituellement sur un ensemble de paramètres analytiques d'où une impossibilité de localisation. La condition de bijectivité de la relation $\underline{\theta} = f(p)$ est donc essentielle.

a) Cas où la relation $\theta = f(p)$ est bijective

Dans la littérature [Ise84], une démarche de diagnostic est proposée lorsque la relation $\theta = f(p)$ est bijective. Ses étapes sont les suivantes :

(1) Etablissement par modélisation d'un modèle mathématique qui est linéaire par rapport à certains paramètres dits analytiques que l'on nomme $\underline{\theta}$.

(2) Détermination de la relation $\underline{\theta} = f(p)$ ainsi que son inverse autour du point de fonctionnement, $p = f^{-1}(\underline{\theta})$

(3) Estimation du vecteur des paramètres $\hat{\underline{\theta}}$ à partir des signaux entrées-sorties.

(4) Calcul des coefficients physiques estimés : $\hat{p} = f^{-1}(\hat{\underline{\theta}})$

(5) Détermination des variations des coefficients physiques Δp autour du point nominal p^* .

(6) Détection des défauts par des méthodes statistiques de décision.

(7) Localisation des défauts.

La méthodologie de diagnostic utilise les connaissances a priori de la façon suivante :

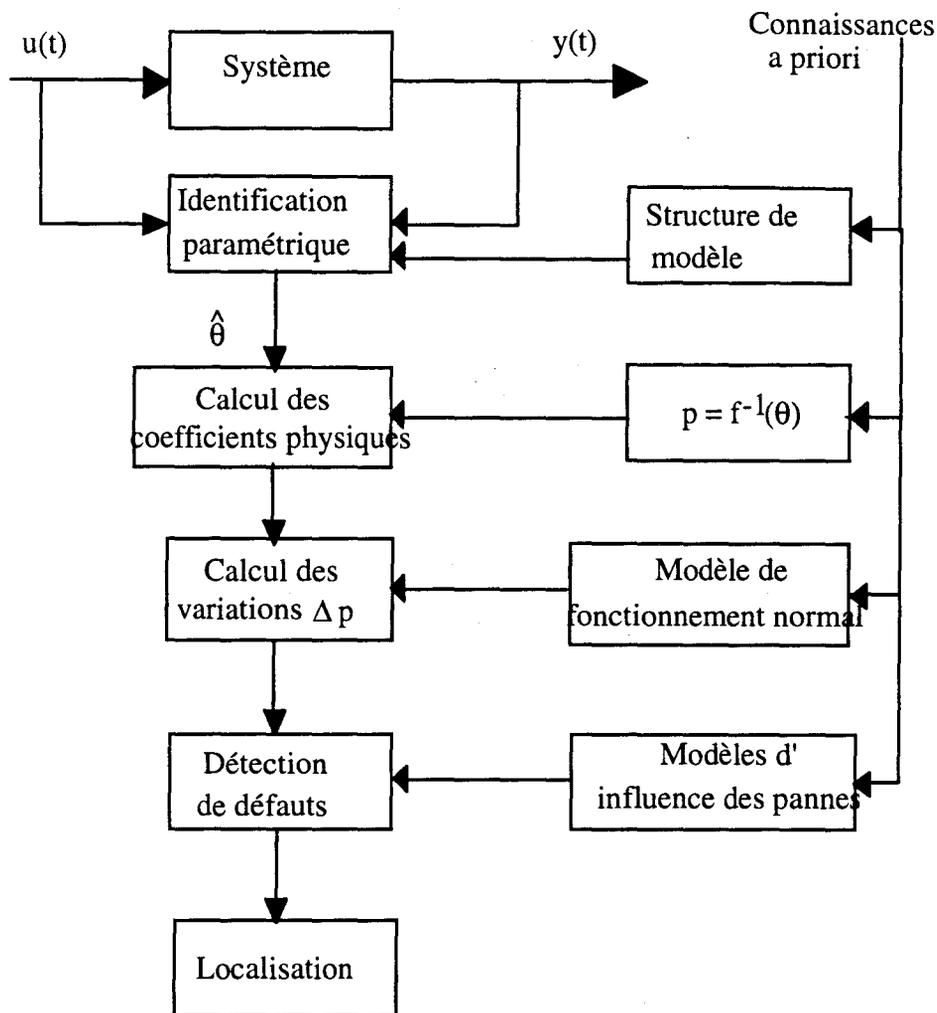


Figure 4 : méthodologie de diagnostic lorsque $\underline{\theta} = f(\underline{p})$ est bijective.

L'intérêt de l'identifiabilité des paramètres physiques est d'assurer la localisation des défaillances paramétriques.

Si l'on rencontre un problème de calculabilité de la solution, on peut utiliser une approche locale qui tente de trouver une solution au voisinage des paramètres nominaux.

b) Cas non bijectif

Dans ce cas, les paramètres physiques ne sont pas identifiables. Le diagnostic dans l'espace des paramètres physiques ne pourra être réalisé qu'au prix d'hypothèses simplificatrices.

Lorsque le nombre de paramètres physiques est supérieur au nombre de paramètres analytiques, on peut essayer d'effectuer une reconnaissance logique dont un exemple est donné dans le paragraphe IV - 4. Elle repose sur l'hypothèse (réaliste) que plusieurs défaillances paramétriques ne se produisent pas en même temps.

Si le nombre de paramètres physiques est égal au nombre de paramètres analytiques, alors deux cas se présentent :

Si il n'existe pas de solution, il faut sans doute remettre en cause la relation $\underline{\theta} = f(\underline{p})$.

Si il existe plusieurs solutions (l'application f est non injective), alors on propose par la suite une approche locale qui permet de résoudre le problème au voisinage des paramètres nominaux.

IV - 1.2 Diagnostic dans l'espace des paramètres analytiques.

L'approche précédente trouve sa limite dans la calculabilité de la variation des paramètres physiques. Le diagnostic se limite alors au calcul de la variation des coefficients du modèle.

IV - 2 Comparaison entre temps discret et temps continu

Dans cette section, nous discuterons des avantages et des inconvénients de la modélisation en temps continu ou en temps échantillonné. Les arguments qui sont proposés sont évoqués dans [Ise84], [Coi93].

La difficulté réside dans le fait que les processus sont essentiellement continus tandis que les calculateurs travaillent en échantillonné (à des instants périodiques).

IV - 2.1 Les avantages des méthodes continues

Les lois de la physique étant essentiellement continues, le modèle de la physique sera généralement développé en temps continu. La modélisation par équations différentielles fait apparaître les coefficients analytiques sous une forme simple des coefficients physiques.

Sous l'hypothèse de l'identifiabilité des coefficients physiques, l'expression analytique de l'inverse $\underline{p} = f^{-1}(\underline{\theta})$ est généralement plus simple en temps continu qu'en temps échantillonné. La localisation des défaillances est donc plus aisée.

Ainsi, la modélisation en temps continu facilite le diagnostic des paramètres physiques.

IV - 2.2 Les inconvénients des méthodes continues

La mise en oeuvre des techniques d'identification continues est facilitée par la

connaissance des dérivées successives des signaux d'entrée et de sortie. Toutefois, cette condition est rarement remplie. Par ailleurs, les signaux de sortie sont généralement bruités et la mesure de ces signaux n'est en général disponible qu'aux instants d'échantillonnage. Le problème est donc de reconstituer des dérivées à partir des signaux bruités échantillonnés.

La façon la plus simple est de procéder à une différentiation numérique par l'équation aux différences retardées. Une autre solution [Tri94] consiste à utiliser les techniques d'interpolation (polynôme du troisième degré, Newton). Toutefois, cette approximation limite l'ordre du processus à surveiller (2 ou 3 maximum).

L'utilisation de filtres à variables d'état ou des Moments partiels [Tri94] permet de contourner ce problème puisque ces méthodes appliquent à l'équation différentielle un filtre linéaire qui présente deux avantages : il fait disparaître l'influence des dérivées et minimise l'influence du bruit.

IV - 2.3 Les avantages des méthodes à temps discret

Les méthodes numériques se sont développées avec les capacités des calculateurs. Les méthodes récursives permettent une identification en ligne et les algorithmes à temps discret sont plus fiables que les méthodes à temps continu [Coi93] et permettent une poursuite des paramètres analytiques. Nous nous placerons dans ce mémoire dans le cadre des méthodes à temps discret bien qu'elles soient assez peu développées pour le diagnostic des paramètres physiques.

IV - 2.4 Les inconvénients des méthodes discrètes

Les lois de la physique étant continues, le modèle discret fait apparaître un certain nombre de paramètres analytiques qui dépendent des paramètres physiques et de la période d'échantillonnage.

La dépendance des paramètres analytiques par rapport aux paramètres physiques est une relation compliquée : la localisation physique de la défaillance devient une tâche complexe.

IV - 3 Hypothèses générales sur les défaillances

Nous considérons maintenant un exemple simple de faute multiplicative intervenant sur un système du premier ordre ; cet exemple permet d'illustrer les restrictions concernant l'utilisation des algorithmes d'identification.

Supposons qu'à $t = 0$ apparaisse une faute paramétrique sur un système du premier

ordre. Nous avons choisi une forme particulière à cette défaillance : la constante de temps de valeur nominale a_0 se met à croître de façon linéaire avec une pente μ à partir de $t = 0$.

$$y(t) + (a_0 + \mu t)y'(t) = e(t) \quad \text{pour } t > 0$$

$$y(t) + a_0 y'(t) = e(t) \quad \text{pour } t < 0$$

où y est la sortie et e l'entrée du système.

Imaginons que l'entrée soit un échelon unitaire de Heavyside, soit $e(t) = 1$ pour $t > 0$.

Il est aisé de trouver la solution générale de l'équation :

$$y(t) = 1 - \left[\frac{\lambda}{a_0 + \mu \cdot t} \right]^{1/\mu} \quad a_0 \text{ supposé quelconque.}$$

Supposons que $y(0) = 0$

alors $\lambda = a_0$

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu} \ln \left| 1 + \frac{\mu}{a_0} t \right|}$$

La forme de la réponse temporelle paramétrée en fonction de μ est donnée lorsque $a_0 > 0$ puis $a_0 < 0$:

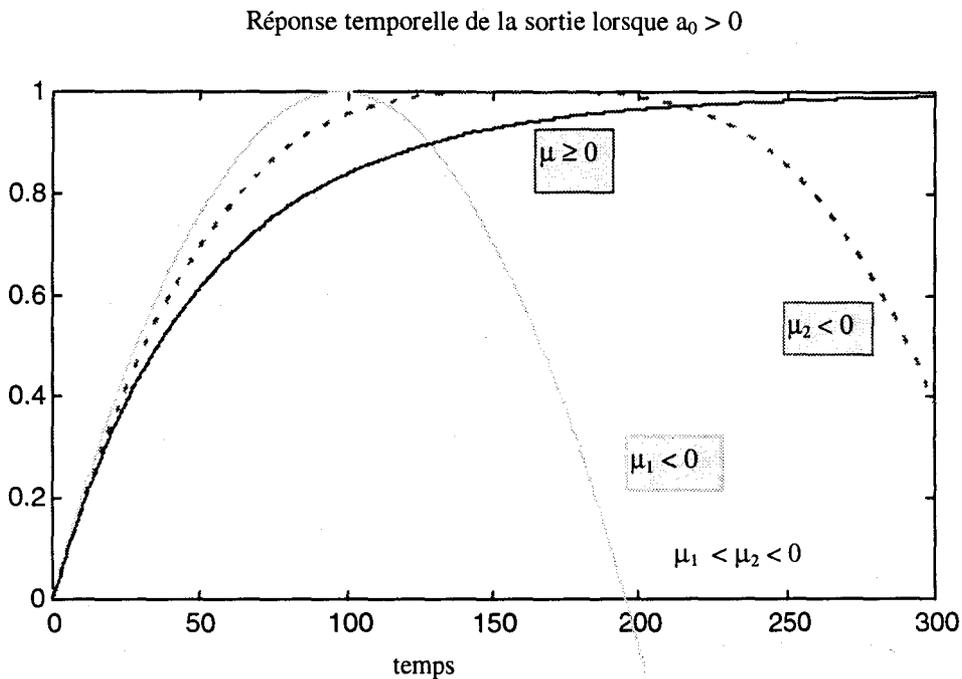


Figure 5 : réponse temporelle de la sortie lorsque $a_0 > 0$

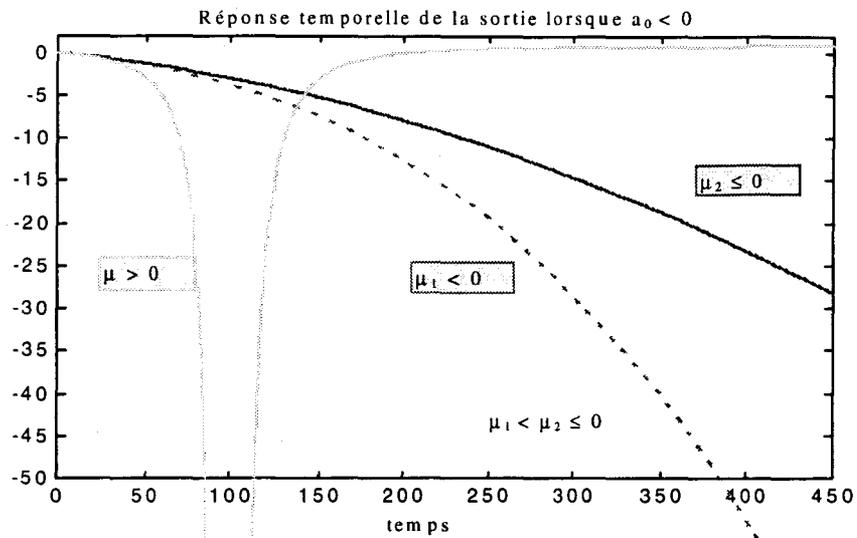


Figure 6 : réponse temporelle de la sortie lorsque $a_0 < 0$

Remarque : Le cas $a_0 > 0$ et $\mu < 0$ peut conduire à des comportements instables très éloignés du comportement nominal attendu. Le maximum de ces réponses temporelles est obtenu lorsque la sortie vaut 1. A partir de ce moment, la 'constante de temps' ($a_0 + \mu t$) devient négative et le système devient instable.

Nous allons résumer sous forme de tableau la comparaison des formes des signaux et de leurs écarts par rapport au comportement nominal.

Caractéristiques	Forme du signal défaillant	Écarts par rapport au comportement nominal
$a_0 > 0$ et $\mu > 0$	Similaire au signal nominal (réponse indicielle d'un premier ordre stable)	Écart s'estompant dans le temps
$a_0 > 0$ et $\mu < 0$	Forme différente du signal nominal	Écart divergent
$a_0 < 0$ et $\mu < 0$	Similaire au signal nominal (réponse indicielle d'un premier ordre instable)	Écart divergent
$a_0 < 0$ et $\mu > 0$	Forme différente du signal nominal	Écart divergent

Signalons que les conditions de détection sont meilleures dans le cas d'écarts

divergents. Seul le cas $a_0 > 0$ et $\mu > 0$ ne donne pas de meilleures conditions en laissant écouler le temps.

Ces réponses temporelles s'assimilent à la réponse d'un premier ordre uniquement de façon locale. On peut donc se contenter d'examiner cette réponse temporelle lorsque :

$$\left| \frac{\mu}{a_0} t \right| \ll 1 \text{ sur la fenêtre d'observation considérée } [0; \delta] \text{ (c'est à dire bien avant$$

l'extremum si a_0 et μ sont de signes différents). En effet, le développement limité au premier ordre de cette réponse donne alors :

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{1}{a_0} t}$$

Si nous pratiquons une identification du paramètre défaillant en le supposant constant et que cette hypothèse n'est pas réalisée, la valeur obtenue sera mauvaise et correspondra à une sorte de constante de temps moyenne du système sur la fenêtre considérée. C'est pourquoi les défaillances de dynamique rapide ne peuvent pas être prises en compte. Le type de modèle de faute influe sur la qualité du résultat. Nous pouvons essayer d'exprimer la dynamique maximum de la défaillance. La condition préalablement citée peut être reprise :

$$\left| \frac{\mu}{a_0} \right| \delta \ll 1 \text{ donc } |\mu| \ll \frac{a_0}{\delta}$$

Cette dernière condition situe la dynamique des défaillances que l'on peut surveiller par un algorithme d'identification par rapport à la fenêtre d'observation et la constante de temps initiale du système.

Remarque 1 : Le fait que a_0 et μ soient de signes distincts n'empêche pas l'identification sous les conditions préalablement citées.

Remarque 2 : Le rôle de la surveillance est de détecter suffisamment rapidement ces écarts. La défaillance aura donc normalement été détectée avant d'atteindre la limite entre le comportement instable et stable (l'extremum de la réponse temporelle).

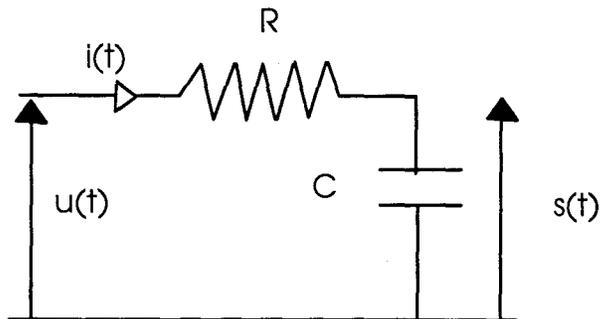
Ceci justifie la considération de défaillances à évolution lente pour une pratique correcte de l'identification des paramètres. Le cadre que nous avons donné à notre travail trouve donc sur cet exemple sa validation.

IV - 4 Illustration de l'identifiabilité et isolabilité des coefficients physiques

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à un exemple très simple pour illustrer les problèmes de l'identifiabilité. Dans un second temps, nous introduirons des notions moins exigeantes que l'identifiabilité.

IV - 4.1 Problème de l'identifiabilité

Considérons pour fixer les idées un circuit électrique très simple : le circuit RC série.



Dans le cas où la capacité n'est pas chargée initialement, il peut être décrit par sa fonction de transfert qui est dérivée des équations physiques :

$$u(t) = R i(t) + s(t)$$

$$i(t) = C \frac{ds}{dt}$$

On obtient grâce à la transformée de Laplace :

$$\frac{S(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + RCp}, \quad \theta_1 = RC \quad (1)$$

$$\frac{I(p)}{U(p)} = \frac{Cp}{1 + RCp} \quad \underline{\theta}_2^t = [C; RC] \quad (2)$$

Le choix des variables mesurées (s, u) conduit à une relation (1) qui lie les deux paramètres physiques dans un seul paramètre analytique. Il n'est donc pas possible de déterminer les grandeurs R et C . En considérant le couple (i, u), il est maintenant possible grâce à (2) d'estimer les deux grandeurs physiques R et C . Le choix des variables est donc déterminant pour assurer l'identifiabilité des paramètres physiques.

La question essentielle dans ce choix est de savoir quels sont les paramètres physiques calculables à partir des paramètres analytiques. Cependant, il n'existe pas à présent de méthode générale pour résoudre ce problème.

IV - 4.2 Identifiabilité locale

Lorsque la solution au système d'équations $\underline{\theta} = f(\underline{p})$ existe mais qu'elle n'est pas unique ou que son expression analytique n'est pas connue, on peut tenter de trouver des solutions au voisinage des paramètres physiques nominaux. Le principe est donc de se placer dans une hypothèse optimiste qui correspond au choix de la solution la plus proche des paramètres physiques nominaux.

Considérons la relation : $\underline{\theta} = f(\underline{p})$.

Cette relation peut s'exprimer au voisinage des paramètres nominaux \underline{p}^* , $\underline{\theta}^*$:

$$\underline{\theta} - \underline{\theta}^* = J_{\underline{\theta}^*}(\underline{p}^*) \Delta \underline{p} + o(\underline{p} - \underline{p}^*)$$

Cette relation est un développement limité de la relation vectorielle précédente au voisinage des paramètres physiques nominaux. Elle fait apparaître la matrice jacobienne qui est définie par son terme général :

$$J_{\underline{\theta}^*}(\underline{p}^*)_{j,i} = \left[\frac{d\theta_j}{dp_i} \right]_{\underline{p}^*}$$

Si cette matrice est régulière en \underline{p}^* , on dispose d'une bijectivité locale. Une condition nécessaire mais non suffisante est que le nombre de paramètres analytiques soit supérieur ou égal au nombre de paramètres physiques.

Dans le cas où il y a égalité du nombre de paramètres et que cette matrice est régulière, on peut obtenir une estimation de la variation des paramètres physiques :

$$\underline{p} - \underline{p}^* = [J_{\underline{\theta}^*}(\underline{p}^*)]^{-1} (\underline{\theta} - \underline{\theta}^*)$$

Cette estimation est uniquement valable pour les faibles variations des paramètres analytiques. Si la variation obtenue sous cette hypothèse est importante, on adopte une procédure récursive qui approche le paramètre physique réel.

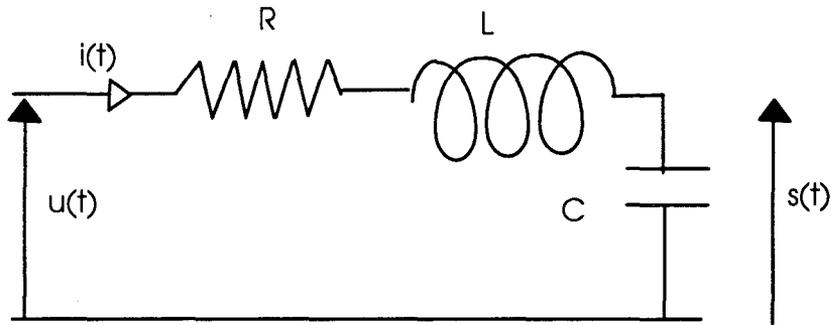
IV -3.3 Localisation logique

La valeur exacte du paramètre physique n'est pas nécessaire pour la localisation : Il importe simplement de connaître quel est le paramètre physique en défaut. On ne cherche donc pas à inverser la relation $\underline{\theta} = f(\underline{p})$. Cette méthode repose sur l'hypothèse importante que plusieurs défaillances ne se produisent pas en même temps.

Pour cela, on utilise la structure des relations reliant les paramètres analytiques aux paramètres physiques. La structure de la défaillance en terme de paramètres analytiques

permet une reconnaissance logique du paramètre physique en défaut.

Pour illustrer cette approche, considérons l'exemple du circuit RLC série :



La fonction de transfert qui lie la tension du condensateur à la tension globale est la suivante :

$$\frac{S(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + RC \cdot p + LC \cdot p^2}$$

Elle fait apparaître trois paramètres physiques et deux paramètres analytiques : $\theta_1 = RC$ et $\theta_2 = LC$.

La relation $\underline{\theta} = f(p)$ n'est pas inversible par rapport aux paramètres physiques.

Le tableau d'incidence de la structure s'écrit :

	L	R	C
θ_1	0	1	1
θ_2	1	0	1

Les colonnes de ce tableau constituent les signatures théoriques des défaillances physiques. Comme elles sont différentes, les écarts sur les paramètres physiques pourront être localisés à partir des écarts constatés sur les paramètres analytiques.

Lorsque les différentes signatures par rapport aux défauts sur les paramètres physiques sont distinctes, on parlera d'une identifiabilité structurelle.

V - Conclusion

Nous avons présenté un bref aperçu des démarches possibles de surveillance. Nous avons mis l'accent sur les méthodes pour lesquelles le modèle constitue la référence du fonctionnement normal du système.

Nous avons aussi présenté et classifié les défaillances en fonction de leur degré d'évolution. Dans cette introduction, nous avons émis l'hypothèse qui sera conservée tout au long de ce travail que les défaillances n'affectent pas la structure paramétrique du modèle analytique. Nous avons d'autre part justifié que notre étude se limite à la surveillance des défaillances lentement variables par rapport à la dynamique du système.

Enfin, nous avons décrit des problèmes propres à la surveillance des paramètres physiques par identification paramétrique.

Le cadre général étant posé, nous pouvons maintenant aborder maintenant la présentation des méthodes de surveillance et leur comparaison dans le cas de modèles dynamiques linéaires.

Chapitre 2 : La comparaison de la projection dans l'Espace de parité et de l'estimation de paramètres dans le cas des systèmes monovariants.

Introduction

Comme nous avons pu nous en rendre compte dans le chapitre précédent, la phase de génération des indicateurs de défauts est primordiale puisqu'elle conditionne la qualité de la détection, de la localisation et du diagnostic de défaillances. Parmi les méthodes de surveillance introduites précédemment, deux des méthodes ont particulièrement suscité un intérêt lors de ces dernières années : les méthodes fondées sur l'estimation d'état à l'aide d'observateurs et les méthodes basées sur la projection orthogonale à l'espace d'état dites Espace de Parité ([Cho80] [Cho84] [Ham86] [Pat91] [Fra91]). De nombreux travaux ([Wün90] [Din90] [Cho80] [Mag91] [Coc93]) ont comparé ces deux méthodes et montré leur équivalence à un filtre près. C'est dans cette optique que nous avons voulu étendre la comparaison aux techniques générales d'estimation de paramètres.

Les techniques d'estimation de paramètres sont très différentes dans le cas monovariante et multivariante ce qui justifie que nous traitons dans le chapitre II le cas monovariante et dans le chapitre III le cas multivariante. Par contre, l'Espace de Parité se développe de la même manière dans les deux cas. Nous en ferons donc la présentation générale multivariante. Nous réduirons ensuite sa formulation au cas monovariante.

Sur la base de ces formulations monovariantes, nous proposons ensuite une comparaison entre les indicateurs obtenus pour trois méthodes d'estimation dans le cas monovariante. Une interprétation géométrique puis statistique de ces résultats est développée et un même exemple illustre chaque étape de notre démarche.

I - Modélisations.

I.- 1 Le modèle d'état

Le système que nous envisageons est supposé dynamique, linéaire (ou linéarisable)

autour d'un point de fonctionnement) et stationnaire. Classiquement un tel système peut être modélisé dans l'espace d'état par le système d'équations déterministes suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{x}(0) &= \underline{x}_0 \\ \underline{x}(k+1) &= A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) \end{aligned} \quad (1)$$

$$y(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) \quad (2)$$

où $\underline{x}(k)$ désigne le vecteur des variables d'état de dimension p à l'instant k .

$\underline{u}(k)$ représente le vecteur des entrées connues (commandes) à l'instant k de dimension r .

$y(k)$ désigne le vecteur des mesures à l'instant k de dimension l .

A, B, C, D sont des matrices réelles à coefficients constants de dimensions appropriées. A est la matrice d'état, B la matrice de commande et C la matrice de mesure, D est la matrice d'influence directe de l'entrée sur la sortie.

Remarque : Nous nous sommes restreints au cas des systèmes linéaires à temps discret. Les résultats de nos développements peuvent tout à fait se transposer au cas continu.

I - 2 Modélisation des défaillances

Le système présenté ci-dessus correspond au cas idéal d'un système complètement linéaire sans incertitudes de modèle et de mesure, sans perturbations extérieures et sans défaillances. Cependant, ce cas, bien entendu, n'est pas tout à fait réaliste. Pour évaluer dans des conditions réalistes les défaillances, il faut tenir compte des perturbations et des bruits. Toutes ces imperfections peuvent se résumer selon le schéma suivant :

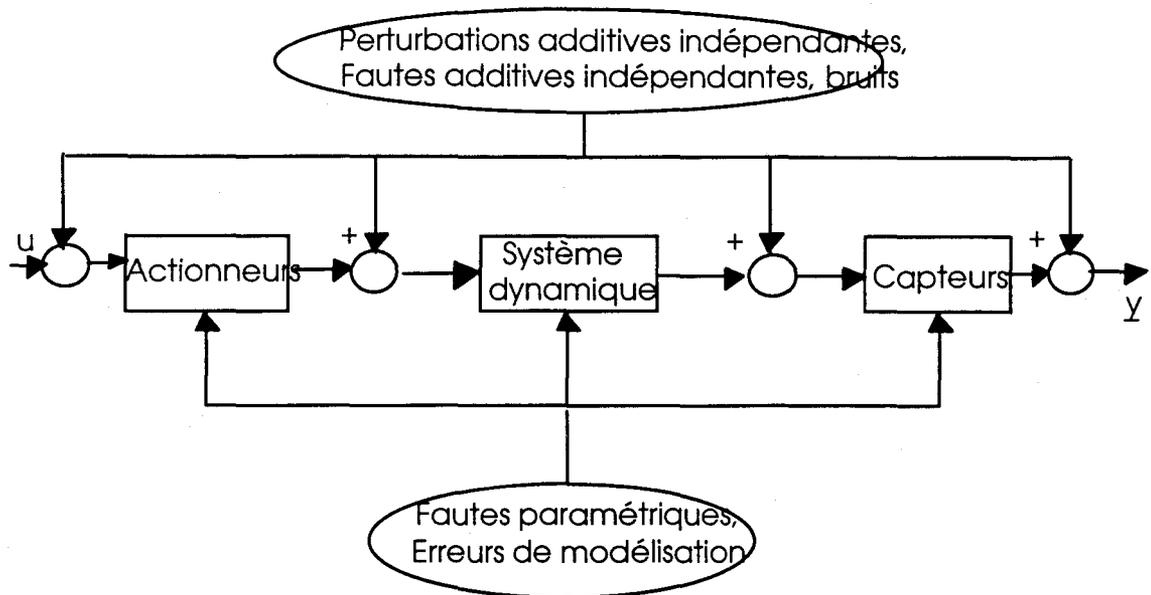


Figure 1 : Influence des imperfections

Nous distinguons dans ce schéma deux catégories de comportement [Ger93] :

- les effets additifs qui englobent les défaillances et les perturbations additives indépendantes. En ce qui concerne les défaillances, ce sont essentiellement les biais et les dérives des capteurs et des actionneurs. Elles interviennent comme des entrées non mesurées qui viennent s'ajouter aux variables connues ou internes.

- les effets multiplicatifs qui agissent sur les paramètres internes du système. Elles regroupent les erreurs de modélisation et les fautes multiplicatives.

Nous envisageons maintenant les deux types de défaillances successivement et dans chaque cas, nous proposons un modèle de comportement du système.

- Pour le cas des défaillances additives indépendantes, il suffit de considérer les défaillances, et les perturbations comme des entrées au même titre que les commandes. Dans les perturbations, on distingue les perturbations déterministes et les perturbations aléatoires.

Le modèle du système s'exprime alors dans ce cas :

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) + E_a \underline{d}_a(k) + G_a \underline{f}_a(k) + \underline{\eta}(k)$$

$$y(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) + F_a \underline{d}_a(k) + H_a \underline{f}_a(k) + \varepsilon(k)$$

où $\underline{d}_a(k)$ désigne le vecteur des défaillances additives indépendantes,

$\underline{f}_a(k)$ désigne le vecteur des perturbations additives indépendantes déterministes,

$\underline{\eta}(k)$ le bruit sur l'état qui représente une perturbation aléatoire,

ainsi que $\epsilon(k)$ le bruit sur la sortie.

E_a, G_a, F_a, H_a représentent les différentes matrices d'influence de ces imperfections.

- Envisageons maintenant le cas des défaillances multiplicatives selon le schéma précédent. Nous supposons donc que le système défaillant reste linéaire selon la même structure mais avec des matrices (A, B, C, D) différentes. Nous supposons par ailleurs que les mêmes perturbations agissent sur le système. Le modèle du système s'écrit donc :

$$\underline{x}(k+1) = A' \underline{x}(k) + B' \underline{u}(k) + G_a \underline{f}_a(k) + \underline{\eta}(k) \quad (3)$$

$$y(k) = C' \underline{x}(k) + D' \underline{u}(k) + H_a \underline{f}_a(k) + \epsilon(k) \quad (4)$$

A', B', C', D' représentant les matrices réelles du système linéaire et considérons les différences $A' - A = \delta A + \Delta A$, $B' - B = \delta B + \Delta B$, $C' - C = \delta C + \Delta C$, $D' - D = \delta D + \Delta D$

δX concerne l'erreur de modélisation et ΔX concerne la défaillance processus. Le modèle du système peut ainsi se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) + (\delta A + \Delta A) \underline{x}(k) + (\delta B + \Delta B) \underline{u}(k) + G_a \underline{f}_a(k) + \underline{\eta}(k)$$

$$y(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) + (\delta C + \Delta C) \underline{x}(k) + (\delta D + \Delta D) \underline{u}(k) + H_a \underline{f}_a(k) + \epsilon(k)$$

Après avoir regroupé les différents termes, le modèle de surveillance peut se résumer sous une forme classique qui fait apparaître les perturbations multiplicatives et les défaillances multiplicatives :

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) + G_a \underline{f}_a(k) + E_m \underline{d}_m(k) + G_m \underline{f}_m(k) + \underline{\eta}(k)$$

$$y(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) + H_a \underline{f}_a(k) + F_m \underline{d}_m(k) + H_m \underline{f}_m(k) + \epsilon(k)$$

avec $G_m \underline{f}_m(k)$ et $H_m \underline{f}_m(k)$ représentant les erreurs de modélisation, elles se définissent de la façon suivante :

$$G_m \underline{f}_m(k) = \delta A \underline{x}(k) + \delta B \underline{u}(k)$$

$$H_m \underline{f}_m(k) = \delta C \underline{x}(k) + \delta D \underline{u}(k)$$

$E_m \underline{d}_m(k)$ et $F_m \underline{d}_m(k)$ désignent l'influence des défaillances multiplicatives qui s'expriment : $E_m \underline{d}_m(k) = \Delta A \underline{x}(k) + \Delta B \underline{u}(k)$

$$F_m \underline{d}_m(k) = \Delta C \underline{x}(k) + \Delta D \underline{u}(k)$$

Une fois défini un ensemble fini de défaillances multiplicatives, les matrices E_m F_m sont des matrices de structure qui se calculent aisément. Il en est de même des matrices G_m et H_m .

Cette expression peut encore être simplifiée en considérant un vecteur de perturbations étendu :

$\underline{f}(k) = \begin{pmatrix} \underline{f}_m(k) \\ \underline{f}_a(k) \end{pmatrix}$ qui fait intervenir des matrices d'influence de perturbation :

$$G = [G_m \ G_a] \text{ et } H = [H_m \ H_a]$$

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) + E_m \underline{d}_m(k) + G \underline{f}(k) + \underline{\eta}(k)$$

$$y(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) + F_m \underline{d}_m(k) + H \underline{f}(k) + \varepsilon(k)$$

Les deux types de défaillances se regroupent sous un formalisme unifié qui fait apparaître un vecteur de défaillances étendu : $\underline{d}(k) = \begin{pmatrix} \underline{d}_a(k) \\ \underline{d}_m(k) \end{pmatrix}$ qui considère globalement les défaillances additives indépendantes et multiplicatives :

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) + E \underline{d}(k) + G \underline{f}(k) + \underline{\eta}(k) \quad (5)$$

$$y(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) + F \underline{d}(k) + H \underline{f}(k) + \varepsilon(k) \quad (6)$$

avec $E = [E_a \ E_m]$ et $F = [F_a \ F_m]$

Ce modèle est le modèle général adopté par la communauté de surveillance pour un système linéaire.

Cette modélisation paraît attractive dans le sens où elle résume le fonctionnement du système dans n'importe quel mode. Remarquons pourtant que cette notation est celle d'un système linéaire par rapport aux entrées inconnues et aux défaillances, cependant, le système n'est en général pas linéaire par rapport à ces dernières (en particulier les défaillances multiplicatives).

A cet effet, prenons l'exemple simple d'un système non influencé par les perturbations et décrit par :

$$\underline{x}(k+1) = A^0 \underline{x}(k) + B^0 \underline{u}(k)$$

$$y(k) = C^0 \underline{x}(k) + D^0 \underline{u}(k)$$

Considérons maintenant une défaillance qui l'amène à se comporter selon le modèle suivant :

$$\underline{x}(k+1) = A^1 \underline{x}(k) + B^1 \underline{u}(k)$$

$$y(k) = C^1 \underline{x}(k) + D^1 \underline{u}(k)$$

Ce système est visiblement un système linéaire par rapport à la commande. La question que l'on se pose est la suivante : ce système est-il linéaire par rapport à ses défaillances ?

Partons du même état initial et appliquons la commande $\underline{u}(k) \neq \underline{0}$.

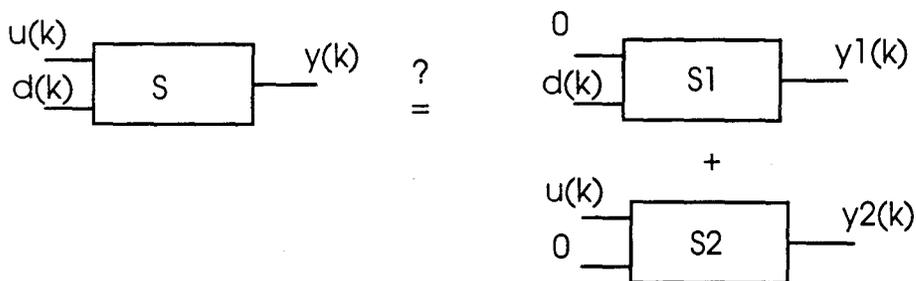


Figure 2 : Le théorème de superposition

Le système peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{x}(k+1) = A^o \underline{x}(k) + B^o \underline{u}(k) + E \underline{d}(k)$$

$$y(k) = C^o \underline{x}(k) + D^o \underline{u}(k) + F \underline{d}(k) \text{ avec } E \underline{d}(k) = \Delta A \underline{x}(k) + \Delta B \underline{u}(k)$$

$$\text{et } F \underline{d}(k) = \Delta C \underline{x}(k) + \Delta D \underline{u}(k)$$

La question de la linéarité se pose par rapport au théorème de superposition. Imaginons maintenant une faute sur D. Ceci implique que le système dans les conditions S1 voit sa sortie évoluer comme si il n'y avait pas de faute ($F \underline{d}(k) = \Delta D \underline{u}(k) = \underline{0}$) et pas de commande : il subit donc l'influence des conditions initiales. Par ailleurs, S2 évolue normalement dans le cas non défaillant. L'addition des sorties de S1 et de S2 fournirait une sortie nominale en présence de panne.

De l'autre côté, le système S voit sa sortie différer de sa valeur nominale ($F \underline{d}(k) = \Delta D \underline{u}(k) \neq \underline{0}$).

Ceci montre bien que le théorème de superposition n'est pas vérifié et que le système n'est pas linéaire par rapport à la défaillance multiplicative. Donc, la représentation (5) (6) est très pratique pour les fautes additives indépendantes, mais elle est à manipuler avec prudence dans le cas de fautes multiplicatives.

Ces deux modèles ((3) (4) et (5) (6)) serviront de base pour nos futurs développements.

II - L'Espace de Parité

Une fois introduits les modèles sur lesquels nous allons nous appuyer, nous pouvons maintenant présenter une des méthodes de surveillance à base de modèles linéaires : l'Espace de Parité sera développé dans le cas général multivariable puisqu'il ne diffère pas du cas monovariante.

II. 1 Principe

Nous supposons donc que le vecteur de mesure est de dimension m et que les modèles présentés restent valables dans le cas multivariante. L'approche de l'Espace de Parité reprend donc l'un des modèles développés ci-dessus. Nous nous plaçons dans le cadre du modèle général non perturbé ($G, H = 0$) en l'absence de bruit sur l'état sachant que le principe de la méthode reste valable pour un autre modèle.

Le principe de cette méthode est de projeter l'équation de la mesure sur une fenêtre de longueur donnée de façon à éliminer les variables internes inconnues. Les relations ainsi obtenues ne contiennent alors plus que les variables connues et peuvent être utilisées pour la surveillance du système.

Ecrivons donc dans un premier temps l'équation de la mesure sur une fenêtre de longueur fixée s :

$$\underline{y}(k;k+s) = \text{OBS}[s] \underline{x}(k) + \text{COM}_s(A,B,C,D) \underline{u}(k;k+s) \\ + \text{COM}_s(A,E,C,F) \underline{d}(k;k+s) + \underline{\varepsilon}(k;k+s)$$

où $\text{OBS}[s]$ est la matrice d'observabilité d'ordre s et $\text{COM}_s(A,B,C,D)$ est la matrice de commande. Leurs expressions sont données par :

$$\text{OBS}[s] = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\text{COM}_s(A,B,C,D) = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{s-1}B & \dots & \dots & \dots & CB & D \end{bmatrix}$$

Le calcul de $\text{COM}_s(A,E,C,F)$ est réalisé de la même manière que celui de $\text{COM}_s(A,B,C,D)$.

Les méthodes de l'Espace de Parité éliminent l'état du système, variable inconnue, de la relation précédente grâce à un mécanisme de projection.

Soit \underline{w} un vecteur de projection. Multiplier à gauche par \underline{w}^t l'égalité précédente donne :

$$\underline{w}^t \underline{y}(k;k+s) = \underline{w}^t \text{OBS}[s] \underline{x}(k) + \underline{w}^t \text{COM}_s(A,B,C,D) \underline{u}(k;k+s) \\ + \underline{w}^t \text{COM}_s(A,E,C,F) \underline{d}(k;k+s) + \underline{w}^t \underline{\varepsilon}(k;k+s)$$

Si \underline{w} appartient au noyau de $\text{OBS}^t[s]$, l'état du système est éliminé de cette relation. Le noyau

est différent de l'ensemble vide si l'horizon d'observation est tel que :

$$s(m+1) > \text{rang OBS}[s].$$

Dans ce cas, le nombre de relations linéairement indépendantes est égal à la dimension de ce noyau soit : $m(s+1) - \text{rang OBS}[s]$

Cette relation devient alors :

$$\begin{aligned} \underline{w}^t \underline{y}(k;k+s) - \underline{w}^t \text{COM}_s(A,B,C,D) \underline{u}(k;k+s) \\ = \underline{w}^t \text{COM}_s(A,E,C,F) \underline{d}(k;k+s) + \underline{w}^t \underline{\varepsilon}(k;k+s) \end{aligned} \quad (7)$$

En l'absence de perturbations (déterministes et aléatoires) et de défaillances, la relation (7) s'écrit sous la forme :

$$\underline{w}^t \underline{y}(k;k+s) - \underline{w}^t \text{COM}_s(A,B,C,D) \underline{u}(k;k+s) = 0$$

Cette relation ne fait intervenir que les variables mesurées ou disponible sur le système sur l'horizon $[k;k+s]$. C'est une Relation de Redondance Analytique (RRA).

En présence de défaillances et de bruits, cette relation fournit un résidu dont la valeur est calculée par (6) :

$$r(k+s) = \underline{w}^t \underline{y}(k;k+s) - \underline{w}^t \text{COM}_s(A,B,C,D) \underline{u}(k;k+s) \quad (8)$$

et dont la forme d'évaluation établit le lien entre la valeur du résidu et les erreurs, les défaillances et les bruits :

$$r(k+s) = \underline{w}^t [\text{COM}_s(A,E,C,F) \underline{d}(k;k+s) + \underline{\varepsilon}(k;k+s)] \quad (9)$$

Remarque : Cette dernière relation représente effectivement bien la forme d'évaluation du résidu dans le cas de fautes additives indépendantes, mais elle ne la représente pas dans le cas de défaillance multiplicatives. En effet, cette relation s'apparente à une forme d'évaluation mais dans le vecteur de défaillances multiplicatives, elle contient encore les états du système aux différents instants si bien qu'elle n'explique pas la dynamique de la défaillance et du bruit. Nous illustrerons cette remarque dans le cas monovariante.

Il existe $(m(s+1) - \text{rang OBS}[s])$ vecteurs de projection linéairement indépendants. Ils peuvent être rassemblés dans une matrice W et fourniront autant de résidus de parité indépendants. Par définition, en fonctionnement normal, cet ensemble de résidus est proche de 0 tandis qu'il s'en écarte en fonctionnement défaillant.

Remarques :

- Un cas particulier de la redondance dynamique est celui de la redondance statique. Elle intervient lorsque la matrice de mesure n'est pas de rang plein ligne ($\text{rang } C < m$). Cela

signifie qu'une combinaison particulière des mesures au même instant s'annule sous l'hypothèse d'un fonctionnement normal des capteurs. Dans le même ordre d'idée, la redondance physique de capteurs est un cas particulier de la redondance statique puisque plusieurs lignes de la matrice de mesure sont alors identiques.

- Les résidus de parité que nous venons de présenter sont dits d'ordre s car ils se réfèrent à une fenêtre temporelle de largeur s .

- Une base de résidus de l'Espace de Parité peut être sélectionnée par le choix convenable d'une base de vecteurs de projection. La sensibilité par rapport à certaines défaillances et la robustesse par rapport aux perturbations sont des critères qui permettent de guider le choix de cette base. En utilisant les degrés de liberté fournis par l'Espace de Parité, une démarche d'optimisation de ces critères permet d'obtenir un compromis entre sensibilité et robustesse. Les procédures d'optimisation seront développées dans le chapitre 3.

- L'augmentation de l'ordre des résidus peut être bénéfique pour la localisation de certaines défaillances; l'ordre des résidus doit résulter d'un compromis entre un temps de détection trop long et une bonne sensibilité aux défaillances [Coc93].

II - 2 Le cas monovariante

II -2.1 Représentation entrée-sortie

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons à un système mono-entrée mono-sortie.

Le but de ce paragraphe est de montrer que, sous l'hypothèse du fonctionnement normal, le modèle d'état du système est équivalent à sa relation dynamique entrée-sortie. Pour cela, nous développerons donc les résultats de l'Espace de Parité dans le cas monovariante.

A cet effet, considérons le modèle nominal du système sous la forme d'un modèle d'état dans le cas $r = 1$ (1 mesure, 1 commande). Dans ce cas, les vecteurs de mesure et de commande deviennent des scalaires ainsi que la matrice D . Par ailleurs, les coefficients des matrices d'état sont supposés connus soit par une phase d'identification préalable soit par une phase de modélisation physique. Ils seront appelés coefficients du modèle nominal.

Dans le cas où une confusion est possible, nous distinguerons les valeurs réelles des variables notées avec le symbole " ' ", les valeurs nominales avec " * ", les valeurs estimées avec " ^ ", et les valeurs mesurées sans aucun symbole.

De plus, par souci de concision, nous appellerons t le rang de la matrice d'observabilité

d'ordre (p-1) :

$$\text{rang}(\text{OBS}[p-1]) = t \quad (t \leq p)$$

Si $t = p$, le système est dit observable : l'ensemble des mesures permet de reconstituer complètement l'état du système.

Si $t < p$, le système n'est pas complètement observable : seule une partie de l'état du système peut être estimée à partir des mesures. Mathématiquement, cela signifie que les vecteurs de la famille CA^i sont dépendants.

Dans ce cas, il existe un nombre N inférieur ou égal à p tel que :

$$CA^N = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i CA^i \quad (10)$$

Il s'ensuit que CA^{N+1} est aussi une combinaison linéaire des CA^i $0 \leq i \leq N-1$. Ainsi, il apparaît que le rang de la matrice d'observabilité d'ordre $p-1$ est égal au nombre N :

$$t = \min \{N, N \text{ tel que (10) soit vraie}\}.$$

Cela exprime aussi le fait que (C, CA, \dots, CA^{t-1}) est donc une famille libre. L'écriture de l'expression (10) sous une autre forme fait apparaître la matrice d'observabilité d'ordre t :

$$(-\alpha_0; \dots; -\alpha_{t-1}; 1) \cdot \text{OBS}[t] = 0$$

Le vecteur $(-\alpha_0; \dots; -\alpha_{t-1}; 1)$ représente donc un vecteur de projection orthogonal à la matrice d'observabilité d'ordre t . Il appartient au noyau de cette matrice.

La dimension de cet espace dépend du rang de la matrice d'observabilité ainsi que de l'horizon considéré. Nous allons discuter l'existence de cet espace.

Pour s [ordre de la matrice d'observabilité] $\geq t-1$, le rang de la matrice d'observabilité d'ordre s est t . Comme nous considérons un système SISO (Single Input Single Output), aucune relation de parité ne peut être trouvée si la longueur de la fenêtre d'observation est plus faible que t . Dans le cas où s est égal à t , la dimension de l'espace de parité est 1 et la relation de parité obtenue résulte directement de la relation (7) :

$$\underline{w}^t \underline{y}(k;k+t) - \underline{w}^t \text{COM}_t(A,B,C,D) \underline{u}(k;k+t) = \underline{w}^t \underline{e}(k;k+t) + \underline{w}^t \text{COM}_t(A,E,C,F) \underline{d}(k;k+t)$$

En fonctionnement défaillant, elle contiendra une composante déterministe provenant du dysfonctionnement ou du dérèglement d'une partie du système.

Le vecteur de projection obtenu appartient à l'Espace de Parité et s'écrit sous la forme :

$\underline{w}^t = (-\underline{a}^{*t}; 1)$ avec $\underline{a}^{*t} = (\alpha_0; \dots; \alpha_{t-1})$. Sachant que la dimension de cet espace pour un horizon t est 1, ce vecteur peut être considéré comme une base de l'espace de parité d'ordre t .

D'autre part, la matrice de commande est invariante par rapport à n'importe quel changement de base de l'espace d'état (matrice de transition régulière). Nous utilisons ce résultat pour en déduire la forme des relations entrées-sorties.

La relation de parité ne dépend plus que du choix du vecteur de projection. Des considérations précédentes, il découle que la structure du vecteur de projection peut être imposée (normalisée) :

$\underline{w}^t = (-\underline{a}^{*t}; 1)$ ainsi que le produit :

$$\underline{w}^t \cdot \text{COM}_t(A, B, C, D) = \underline{b}^{*t}$$

Le modèle nominal entrée-sortie (sans défaillance) s'exprime alors sous une forme invariante :

$$y(k+t) = \underline{a}^{*t} \cdot y(k; k+t-1) + \underline{b}^{*t} \underline{u}(k; k+t) + \underline{w}^t \underline{g}(k; k+t) \quad (11)$$

qui est un modèle ARMAX d'ordre t. L'ordre de la forme ARMAX est égal au rang de la matrice d'observabilité d'ordre (p-1). Dans le cas d'un système observable et commandable, la description entrée-sortie est d'ordre maximum p.

Nous supposons pour la suite que le système est observable et commandable mais nous conserverons une écriture générale du modèle ARMAX sous une forme d'ordre t.

La réunion du vecteur d'entrée et de sortie permet d'introduire un vecteur de paramètres analytiques nominaux $\underline{\theta}^*$ qui est défini comme :

$$\underline{\theta}^* = [\underline{a}^{*t}; \underline{b}^{*t}]^t.$$

Une forme condensée de cette expression est obtenue en utilisant cette dernière notation :

$$y(k+t) = \underline{z}^t(k; k+t) \underline{\theta}^* + \underline{w}^t \underline{g}(k; k+t) \quad (12)$$

où $\underline{z}^t(k; k+t) = [y^t(k; k+t-1); u^t(k; k+t)]$ est le vecteur des variables connues sur une fenêtre [k; k+t].

Le second terme de (12) est une variable aléatoire qui résulte des erreurs de mesure.

Cette dernière expression constitue le modèle nominal du système. De nombreux travaux sur l'identification s'appuient sur cette représentation ([Ise84], [Tri94], [Lju88]). Bien entendu, nous serons amenés à surveiller les écarts par rapport à ce modèle nominal. Pour cela, nous allons supposer que les défaillances conservent la même structure générale du modèle. Ceci peut se justifier par le fait qu'on se limite à l'étude des défaillances lentes et que l'on exclut de notre étude les pannes brutales (détection de ruptures [Bas88]). Nous supposons aussi que le système reste observable et commandable même en présence de défaillances.

II -2.2 Expression du résidu de parité

Nous allons donner la forme de calcul et d'évaluation du résidu sous l'hypothèse de fautes additives indépendantes d'une part et de fautes multiplicatives d'autre part. Nous allons nous rendre compte que la forme d'évaluation diffère complètement dans les deux cas.

La présentation générale de l'Espace de Parité nous permet d'appliquer les résultats au cas du système monovariante. Lorsque la largeur de la fenêtre d'observation s est égale à t , on obtient l'expression générale de la forme de calcul du résidu :

$$r(k+t) = \underline{w}^t \underline{y}(k;k+t) - \underline{w}^t \text{COM}_t(A,B,C,D) \underline{u}(k;k+t)$$

Connaissant les propriétés des vecteurs de projection, il en résulte une expression simplifiée propre au cas monovariante :

$$r(k+t) = \underline{y}(k+t) - \underline{z}^t(k;k+t) \underline{\theta}^* \quad (13)$$

Elle apparaît comme la différence entre la sortie mesurée et la sortie estimée à partir du modèle nominal.

La forme d'évaluation dans le cas des fautes additives indépendantes est donnée par :

$$r(k+t) = \underline{w}^t \underline{g}(k;k+t) + \underline{w}^t \text{COM}_t(A,E,C,F) \underline{d}_a(k;k+t) \quad (14)$$

Essayons maintenant de donner la forme d'évaluation dans le cadre des fautes multiplicatives. Nous disposons de la relation d'évaluation issue de la présentation unifiée de l'espace de parité :

$$r(k+t) = \underline{w}^t \underline{g}(k;k+t) + \underline{w}^t \text{COM}_t(A,E,C,F) \underline{d}_m(k;k+t)$$

D'après la remarque faite à ce sujet, cette relation donne l'illusion d'une forme d'évaluation mais elle contient encore implicitement le vecteur d'état issu de \underline{d}_m . Il convient donc de procéder de manière différente.

En considérant les matrices A' , B' , C' , D' issues du processus réel (modèle (3) (4)), la même étude que dans le paragraphe précédent aboutit à la définition d'un vecteur de projection dans l'espace de parité \underline{w}' associé au couple (A', C') sur le même horizon et d'un vecteur de paramètres $\underline{\theta}'$ associé aux matrices A' , B' , C' , D' . Comme A' , B' , C' , D' sont considérées comme proches de « A , B , C , D » en fonctionnement normal, les dimensions des vecteurs $(\underline{w}', \underline{\theta}')$ sont respectivement égales à celles des vecteurs $(\underline{w}, \underline{\theta})$. Dans le cas d'un fonctionnement défaillant, les écarts entre les deux modèles seront plus importants. Conformément à la discussion du chapitre 1, nous supposons que :

- les matrices A' , B' , C' , D' sont constantes sur la fenêtre d'observation.
- le rang de la matrice d'observabilité d'ordre t reste inchangé.

Par conséquent, les vecteurs $(\underline{w}, \underline{\theta})$ gardent la même dimension.

De façon similaire à la démarche menée ci-dessus, la relation s'écrit alors :

$$y(k+t) = \underline{z}^t(k;k+t) \underline{\theta}' + \underline{w}'^t \underline{\varepsilon}(k;k+t) \quad (15)$$

où $\underline{\theta}'$ désigne le vecteur des paramètres réels et le second terme est un bruit aléatoire corrélé représentant les effets de l'imprécision des capteurs.

Les origines des déviations des résidus peuvent être expliquées en remplaçant la sortie réelle (15) dans la forme de calcul du résidu (13). Elles sont données par :

$$r(k+t) = \underline{z}^t(k;k+t) (\underline{\theta}' - \underline{\theta}^*) + \underline{w}'^t \underline{\varepsilon}(k;k+t) \quad (16)$$

Cette forme d'évaluation peut être unifiée pour les deux cas en utilisant le vecteur de projection réel \underline{w}' :

$\|\underline{w}' - \underline{w}\|$ est faible pour les fautes additives indépendantes en présence d'erreurs de modélisation.

En présence de fautes multiplicatives, \underline{w}' est déterminé grâce à la valeur des paramètres réels.

$$r(k+t) = \underline{z}^t(k;k+t) (\underline{\theta}' - \underline{\theta}^*) + \underline{w}'^t \underline{\varepsilon}(k;k+t) + \underline{w}'^t \text{COM}_t(A', E, C', F) \underline{d}_a(k;k+t) \quad (17)$$

Il faut noter qu'une défaillance multiplicative modifie la dynamique du bruit par rapport au cas du fonctionnement normal. Par contre, les fautes additives indépendantes laissent la dynamique du bruit invariante. Il en serait de même des perturbations additives indépendantes : l'influence dynamique des perturbations additives indépendantes dépend de la défaillance multiplicative.

Dans des conditions normales de fonctionnement, le premier terme symbolise l'effet d'une connaissance approximative du processus, le second représente l'effet des erreurs de mesure. Une faute quant à elle se distingue soit par une déviation des paramètres réels du processus (premier terme) soit par un terme additionnel (dernier terme) dû aux fautes capteurs ou aux fautes actionneurs.

Cette dernière expression fait bien apparaître les fautes multiplicatives d'une part et les fautes additives indépendantes d'autre part. Toutefois, on peut lui reprocher de ne pas séparer les perturbations multiplicatives des fautes multiplicatives. La forme d'évaluation montre donc comment les résidus sont influencés par les différents types de défaillance.

II -3 Présentation d'un exemple de simulation

II -3.1 Le processus

Nous allons développer la simulation d'un système à état continu du second ordre. On en dispose d'un modèle échantillonné, défini par ses paramètres analytiques. Le modèle du processus réel est donnée par un modèle d'état sous forme compagne verticale :

$$\underline{x}(k+1) = A_v \underline{x}(k) + B_v \underline{u}(k)$$

$$y(k) = C_v \underline{x}(k) + D_v \underline{u}(k)$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$\text{où } A_v = \begin{bmatrix} 1.4 & 1 \\ -0.74 & 0 \end{bmatrix}, B_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_v = [1 \ 0] \text{ et } D_v = 0.$$

Ce modèle d'état conduit à une représentation équivalente entrée-sortie sous la forme :

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1)$$

$$\text{où } a_1 = 1.4, a_2 = -0.74, b_1 = 1.$$

On peut résumer le système en disant qu'il s'agit d'un système du second ordre dont les pôles sont situés comme suit :

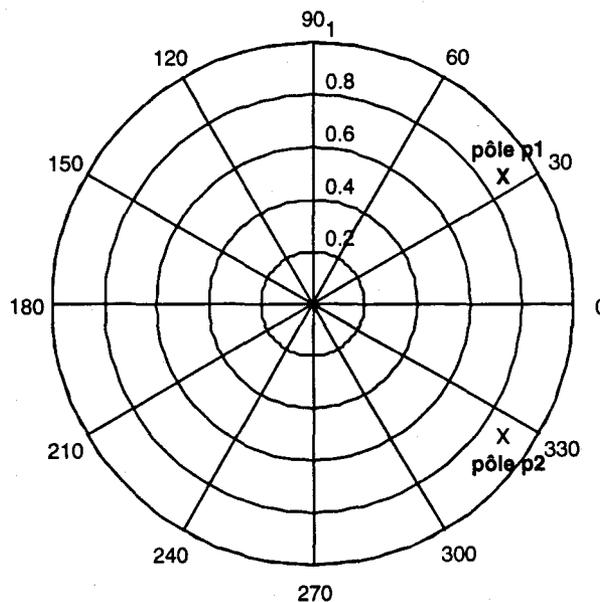


Figure 3 : La position des pôles

Remarque : Ce processus a été défini par rapport à ses paramètres analytiques. Il ne sera donc possible de détecter qu'un écart de ceux-ci par rapport à leurs valeurs nominales. Si l'on désire surveiller les paramètres physiques, il faudra établir la fonction vectorielle qui relie les paramètres physiques aux paramètres analytiques :

$$\underline{\theta} = f(\underline{p}), \quad \underline{p} \text{ désignant le vecteur des paramètres physiques.}$$

Par ailleurs, nous imposons au système des conditions initiales nulles :

$$y(0) = y(1) = y(2) = 0.$$

De plus, le processus est commandé par une entrée en créneaux. Le modèle nominal a été choisi différent du modèle du processus réel pour se placer dans des conditions de détection réalistes. Nous supposons que ces erreurs de modélisation sont figées au cours du temps. Ces écarts sont proposés ci-dessous :

$$a_1^* = 1.41, a_2^* = -0.74, b_1^* = 1.01.$$

Enfin, un bruit blanc de moyenne nulle avec une densité de probabilité uniforme sur un intervalle centré autour de 0 $([-0.025; 0.025])$ est superposé aux mesures. Pour se faire une idée de l'influence du bruit, nous représentons l'écart absolu entre la sortie déterministe et la sortie bruitée.

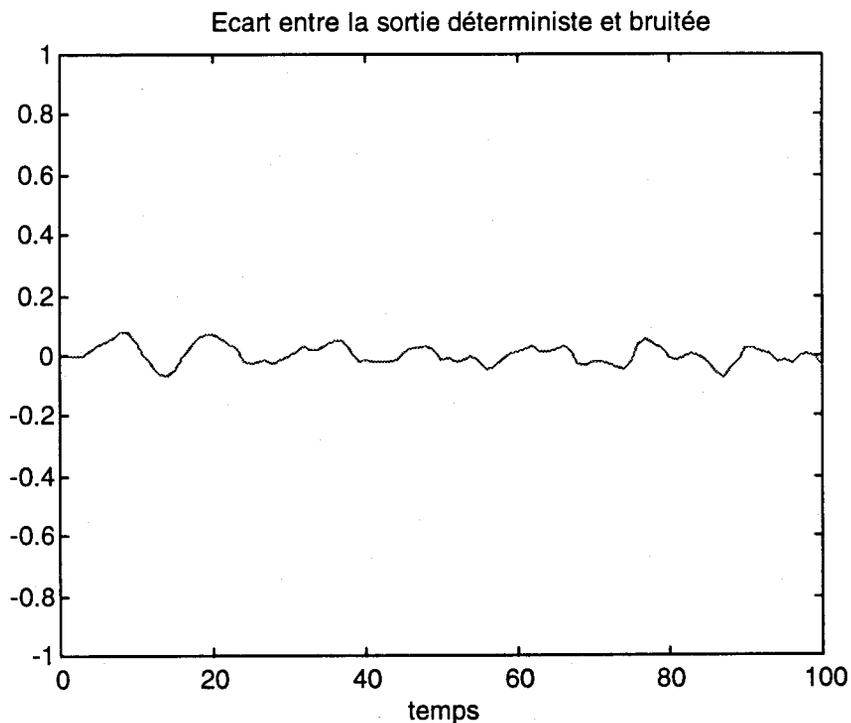


Figure 4 : Ecart entre la sortie déterministe et la sortie bruitée.

II -3.2 Les défaillances

Nous avons distingué deux types de défaillances que nous avons simulées : les défaillances paramétriques et les défaillances additives indépendantes.

Dans la catégorie des défaillances additives indépendantes, nous avons simulé un biais sur le capteur de sortie. En ce qui concerne les défaillances paramétriques, nous avons adopté une déviation sur le paramètre a_2 qui apparaît à deux instants distincts puis s'estompe. La forme de la défaillance du paramètre est donnée figure 6 . Nous avons aussi joint la trajectoire des pôles de la fonction de transfert dans le cas de la défaillance paramétrique. Nous constatons que le système reste stable.

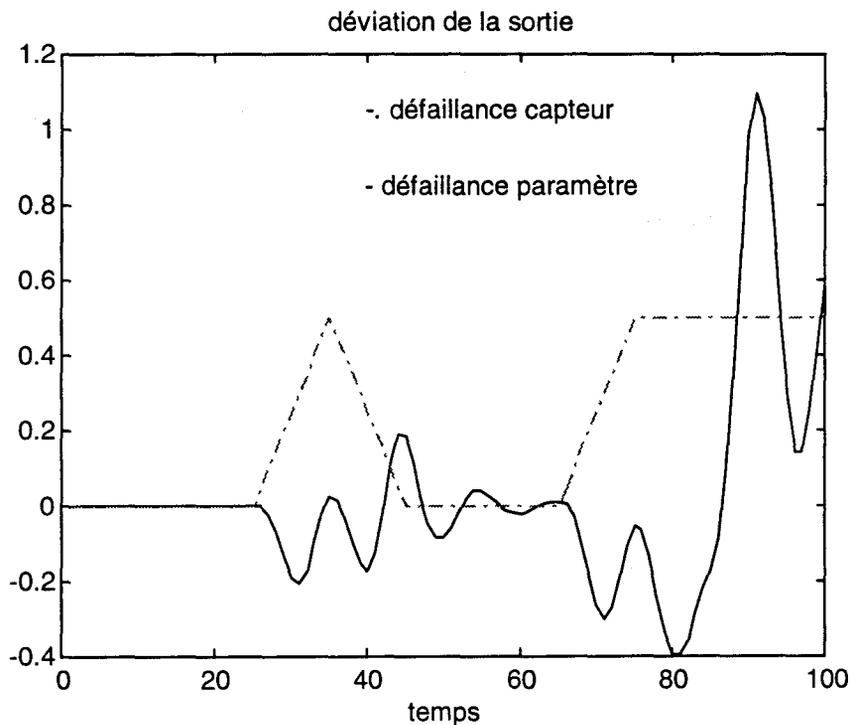


Figure 5 : les écarts par rapport à la sortie nominale (sans bruit).

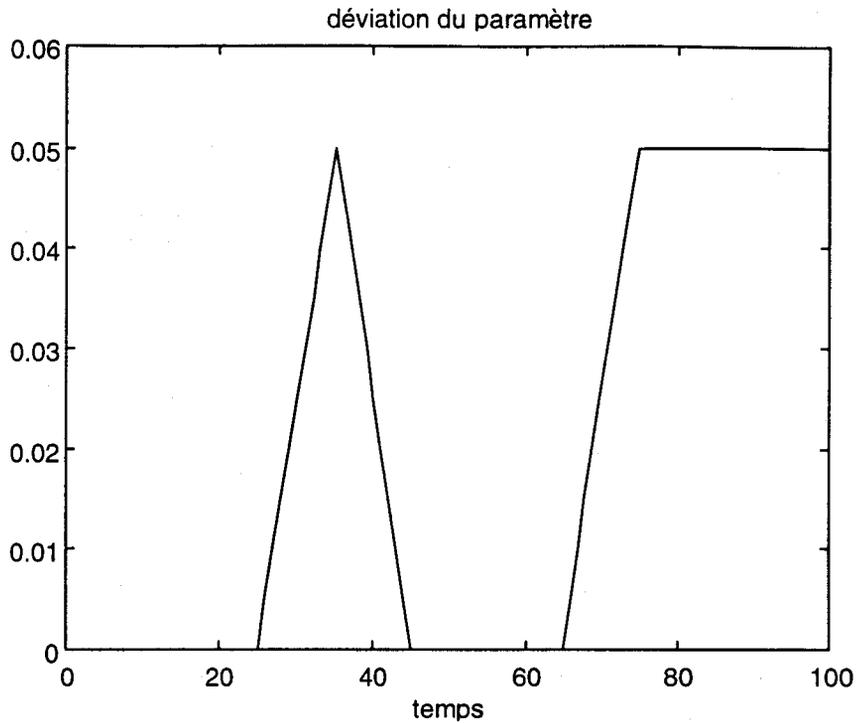


Figure 6 : la déviation du paramètre
Trajectoire de la position des pôles

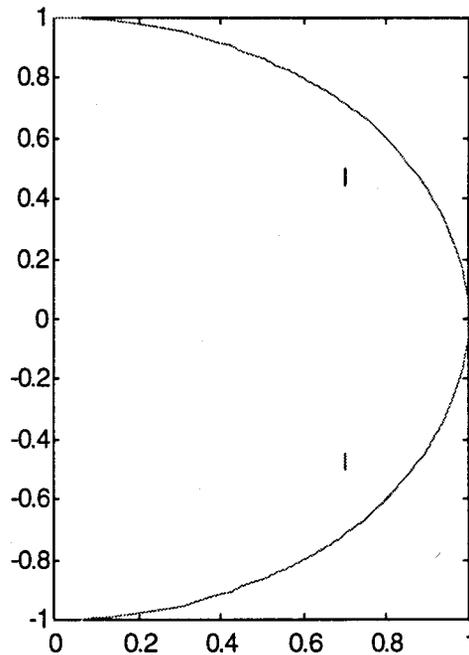


Figure 7 : La trajectoire de la position des pôles.

I -3.3 Les résidus de parité

On se propose de montrer l'évolution de la sortie en présence des défaillances précédemment définies.

La figure 8 compare l'évolution de la sortie lors d'une défaillance processus avec celle en fonctionnement normal.

La suivante représente la sortie en présence d'une défaillance capteur comparée à celle issue du modèle nominal.

Il convient d'examiner les indicateurs de défaut qui permettent de décider de l'occurrence d'une faute. L'évolution du résidu de parité est représentée sur la figure 10 sous les deux hypothèses de défaillances .

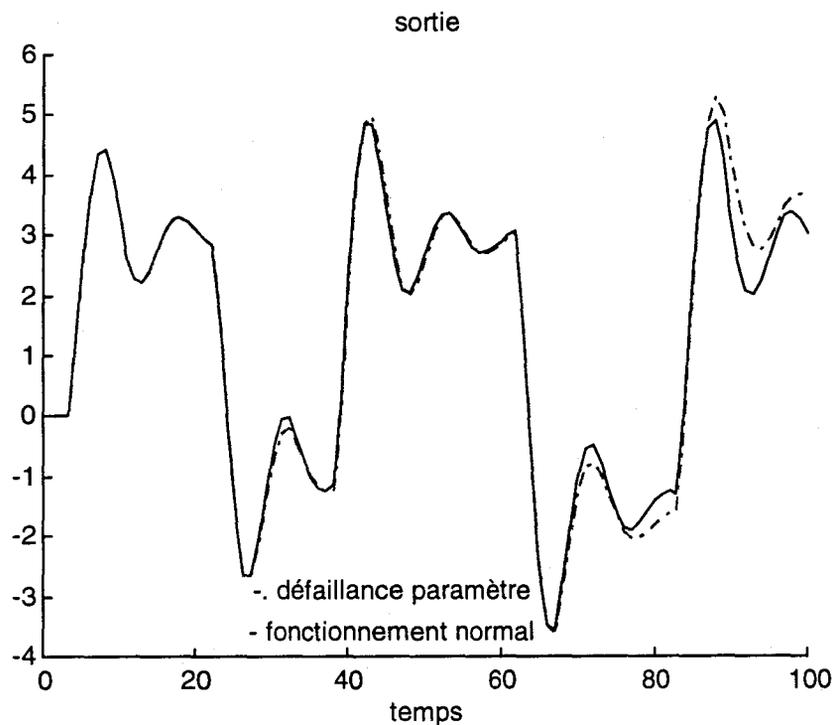


Figure 8 : La sortie

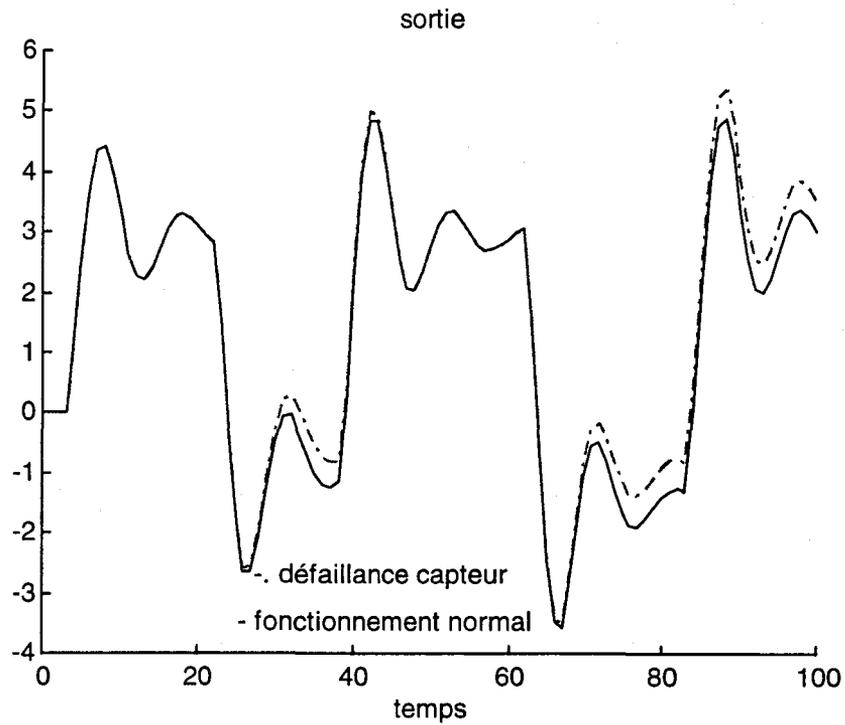


Figure 9 : la sortie

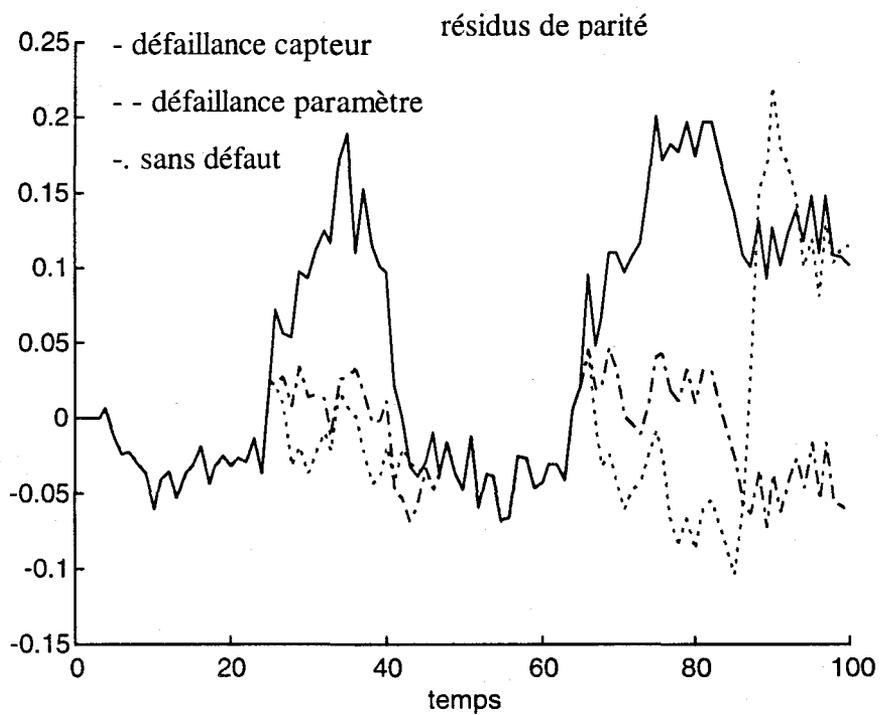


Figure 10 : Le résidu de Parité

Commentaire : On observe assez facilement la forme de la défaillance capteur sur le résidu de parité. Ce type de résidu est très sensible pour les défaillances capteurs (fautes additives indépendantes) mais ne présente pas une aussi bonne sensibilité à la défaillance paramètre. Par ailleurs, l'expression (17) montre que les erreurs de modélisation apparaissent sous forme d'un écart dans les résidus dont la valeur dépend de la commande. En fonctionnement normal sur cet exemple, on retrouve sensiblement la forme du signal d'entrée dans l'évolution du résidu. Une analyse plus fine et détaillée sera proposée dans le chapitre IV.

III - Les techniques d'estimation SISO

Dans ce paragraphe, nous supposons qu'un ensemble de modèles a été sélectionné et il a été paramétré selon une structure de modèle et grâce à un vecteur de paramètres $\underline{\theta}$. La recherche du meilleur modèle dans cet ensemble devient alors un problème de détermination ou d'estimation de $\underline{\theta}$. Dans un premier temps, nous montrerons l'importance du choix d'un critère qui permet de mesurer l'écart entre deux modèles et de déboucher sur les différentes méthodes existant dans la littérature. Nous nous limiterons cependant à la présentation de quelques méthodes principales. Nous examinerons leurs avantages et leurs inconvénients, en particulier dans le domaine statistique.

III -1 Principes généraux

Nous recherchons un critère qui permette d'évaluer la capacité des modèles à décrire les données observées. Il est implicite que l'essence d'un modèle réside dans sa capacité de prédiction, et ainsi nous jugerons ses performances dans ce sens.

Définissons donc l'erreur de prédiction pour un paramètre $\underline{\theta}$ par

$$e(k, \underline{\theta}) = y(k) - \hat{y}(k / \underline{\theta})$$

$\hat{y}(k / \underline{\theta})$ désigne la prédiction à l'instant k pour le modèle donné en supposant les mesures antérieures connues.

Un bon modèle est donc celui qui est performant en prédiction, c'est-à-dire qui donne des erreurs de prédiction faibles par rapport aux données observées.

Le problème est donc de qualifier ce que «faible» signifie. A ce niveau, plusieurs

approches sont possibles : la première consiste à demander que $e(k, \hat{\underline{\theta}})$ ne soit pas corrélé avec une séquence de données sur une fenêtre de taille q . Cela impose que certaines projections de $\underline{e}([k; k+q], \hat{\underline{\theta}})$ soient nulles et nous développerons cette technique dans le cas des variables instrumentales. La seconde est d'utiliser une norme scalaire qui mesure la taille du vecteur $\underline{e}([k; k+q], \hat{\underline{\theta}})$.

Pour l'instant, nous allons nous intéresser aux méthodes utilisant une norme de l'erreur de prédiction. Une mesure du vecteur \underline{e} peut être réalisée par n'importe quelle norme de \mathbb{R}^N , qu'elle soit quadratique ou non. Par souci de généralité, supposons que l'erreur de prédiction soit filtrée par un filtre stable $L(q)$.

$$e_F(k, \underline{\theta}) = L(q) e(k, \underline{\theta}) \quad 1 \leq k \leq N$$

En utilisant la norme suivante :

$$\| \underline{e}_F(1; N) \| = 1/N \sum_{k=1}^N l(e_F(k, \underline{\theta})) = V_N(\underline{\theta})$$

où l est une fonction scalaire positive. Le vecteur des paramètres estimés $\hat{\underline{\theta}}$ est obtenu par la minimisation de ce critère :

$$\hat{\underline{\theta}} = \operatorname{argmin} V_N(\underline{\theta})$$

Sous cette dénomination sont regroupées tout un ensemble de techniques appelées méthodes d'erreurs de prédiction généralisées [Lju88]. Certaines techniques sont issues de choix particulier du filtre L et de la fonction l . L'effet de L est généralement interprété fréquemment : les bruits hautes fréquences non essentiels à la modélisation peuvent être supprimés. L agit donc comme une pondération fréquentielle.

Si l est choisie comme la fonction $l(e) = \frac{1}{2} e^2$, on obtient une norme quadratique.

Des questions de robustesse à l'encontre de données erronées peuvent nous amener à choisir d'autres normes et on peut même envisager de paramétrer la norme sous la forme $l(e, \underline{\theta})$. Il se peut aussi que des mesures à des instants différents aient des degrés de fiabilité différents. Dans ce cas, nous pouvons être motivés par des choix de normes non stationnaires.

Nous allons maintenant présenter quelques techniques particulières.

III -2 Les moindres carrés simples

III -2.1 La méthode

Cette technique repose sur une prédiction de la sortie (à 1 pas) qui est linéaire par rapport aux paramètres :

$$\hat{y}(k / \underline{\theta}) = \underline{z}^t(k-t;k) \underline{\theta}$$

$\underline{z}^t(k-t;k)$ est le vecteur de régression ou de variables connues. L' expression (12) définit la dimension de ce vecteur. Rappelons que les termes entre parenthèses désignent la fenêtre temporelle relative à ce vecteur d'entrées-sorties. La dimension de ce dernier est donc de $2.t + 1$, c'est également la dimension du vecteur de paramètres $\underline{\theta}$.

L'erreur de prédiction devient alors :

$$e(k, \underline{\theta}) = y(k) - \underline{z}^t(k-t;k) \underline{\theta}$$

et le critère développé ci-dessus résultant du choix du filtre $L(q) = 1$ et de la norme utilisant la fonction $l(e) = \frac{1}{2} e^2$ s'exprime :

$$V_q(\underline{\theta}) = 1/q \sum_{i=0}^q 1/2 * [y(k+i) - \underline{z}^t(k+i-t;k+i) \cdot \underline{\theta}]^2$$

Vectoriellement, ce critère s'écrit :

$$V_q(\underline{\theta}, Z_q) = 1/2q * \| \underline{y}(k;k+q) - Z_q \underline{\theta} \|^2$$

où $\underline{y}(k;k+q)$ est le vecteur des mesures sur une fenêtre de largeur q et Z_q la matrice des

entrées-sorties définie par :
$$Z_q = \begin{bmatrix} \underline{z}^t(k-t;k) \\ \dots\dots\dots \\ \underline{z}^t(k+q-t;k+q) \end{bmatrix}$$

La dérivation de cette fonction par rapport aux paramètres nous donne le minimum du critère obtenu en $\hat{\underline{\theta}}_q$:

$$\frac{\partial V(\underline{\theta}_q, Z_q)}{\partial \underline{\theta}} = 1/2q * [-2 Z_q^t \underline{y}(k;k+q) + 2 Z_q^t Z_q \hat{\underline{\theta}}_q] = \underline{0}$$

Dans le cas où la matrice $Z_q^t Z_q$ est régulière, nous obtenons la solution classique des moindres carrés simples :

$$\hat{\underline{\theta}}_q(k+q) = (Z_q^t Z_q)^{-1} Z_q^t \underline{y}(k;k+q) \tag{18}$$

On peut aussi écrire le résultat sous forme de sommes indicées :

$$\hat{\underline{\theta}}_q(k+q) = [1/q \sum_{l=0}^q z(k-t+l; k+l).z^t(k-t+l; k+l)]^{-1} [1/q \sum_{l=0}^q z(k-t+l; k+l). \underline{y}(k-t+l; k+l)]$$

Il s'agit effectivement d'un minimum car :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \underline{\theta}^2} = 2. Z_q^t Z_q \text{ est une matrice symétrique définie positive ou nulle.}$$

Remarque : - la discussion sur la singularité de la matrice $Z_q^t Z_q$ sera entreprise dans le paragraphe concernant les propriétés statistiques de l'estimation.

- l'estimation mise sous la forme sommes indicée ci-dessus apparaît identique au résultat de la méthode de corrélation introduite par Najim [Naj88]; elle change simplement dans son implémentation numérique.

III -2.2 Propriétés statistiques

Afin d'analyser les propriétés statistiques de l'algorithme, il convient de faire appel à deux définitions qui permettent d'évaluer la qualité de l'estimateur. Elles expriment les deux propriétés essentielles d'une estimation que sont le biais et la consistance [Söd74].

Le biais : un estimateur $\hat{\underline{\theta}}_q$ est dit biaisé si l'espérance mathématique $E(\hat{\underline{\theta}}_q - \underline{\theta}')$ est différente de zéro.

où $\underline{\theta}'$ désigne le vecteur des paramètres vrai.

La consistance : une estimation $\hat{\underline{\theta}}$ est consistante si $\hat{\underline{\theta}}_q \rightarrow \underline{\theta}'$ pour $q \rightarrow \infty$, q désignant la taille de la fenêtre d'observation.

Un estimateur idéal serait un estimateur sans biais sur une fenêtre de taille quelconque en présence de bruit quelconque. Malheureusement, dans ce cas, nous ne sommes en mesure de vérifier que les propriétés asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés (lorsque la taille de la fenêtre tend vers l'infini).

Pour l'étude de ces propriétés, supposons que les mesures soient entachées de bruit selon le processus stochastique suivant :

$$y(k) = \underline{z}^t(k-t;k) \underline{\theta}' + v'(k)$$

Supposons que $\{v'\}$ soit une séquence quasi-stationnaire.

Tout d'abord, définissons le caractère quasi-stationnaire d'un signal :

Définition : un signal s est dit quasi-stationnaire ssi

$$- \text{son espérance mathématique est bornée. } |E(s(t))| < C$$

$$- E(s(t).s(r)) = R_s(t,r), \quad |R_s(t,r)| < C$$

$$\text{et } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N R_s(t, t - \tau) = R_s(\tau)$$

Cette propriété de quasi-stationnarité est moins exigeante que la stationnarité au sens large.

L'estimateur des moindres carrés donne :

$$\hat{\underline{\theta}}_q = \underline{\theta}' + [1/q \sum_{l=0}^q z(k-t+l; k+l).z^t(k-t+l; k+l)]^{-1} \\ \cdot [1/q \sum_{l=0}^q z(k-t+l; k+l).\underline{v}'(k-t+l; k+l)]$$

Les propriétés attendues pour $\hat{\underline{\theta}}_q$ sont :

- Le biais de l'estimateur est nul ou sinon faible devant le résultat de l'estimation.
- il converge vers $\underline{\theta}'$ lorsque $q \rightarrow \infty$,

Notons déjà que si $v'(k)$ est faible comparé aux termes de Z_q , alors le terme résiduel est faible et ainsi $\hat{\underline{\theta}}_q$ est proche de $\underline{\theta}'$. Si $\{v'\}$ est une séquence quasi-stationnaire, $[1/q \sum_{l=0}^q z(k-t+l; k+l).z^t(k-t+l; k+l)] = R(q)$ converge et sa limite quand $q \rightarrow \infty$ est appelée R^* .

De même, $[1/q \sum_{l=0}^q z(k-t+l; k+l).\underline{v}'(k-t+l; k+l)]$ converge et h^* est définie comme sa limite.

Ainsi, $\hat{\underline{\theta}}_q \rightarrow \underline{\theta}' + (R^*)^{-1} h^*$ quand $q \rightarrow \infty$ et en supposant R^* régulière.

Assurer la consistance de $\hat{\underline{\theta}}_q$ impose deux conditions:

- Condition 1 : R^* n'est pas singulière (19)

Cette condition revient à la nécessité d'une excitation persistante. Excitation persistante veut dire que le spectre fréquentiel du signal d'entrée est assez riche pour exciter tous les modes du système. Nous présentons également la définition mathématique de la persistance d'excitation d'ordre n :

Définition : Soit $u(k)$ une séquence quasi-stationnaire, et soit la matrice $n \times n$ définie par

$$\bar{R}_n = \begin{bmatrix} R_u(0) & \dots & R_u(n-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ R_u(n-1) & \dots & R_u(0) \end{bmatrix} \text{ où } R_u \text{ désigne la matrice de 'covariance'.$$

Alors $u(k)$ est une excitation persistante d'ordre n ssi \bar{R}_n est non singulière.

- Condition 2 : $h^* = 0$. Ceci est vérifié si :

$\{v'(k)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes à moyenne nulle (bruit blanc). Alors $\{v'(k)\}$ est indépendant des événements antérieurs à $(k-1)$ et ainsi

$$E(z(k)v'(k)) = 0 \quad (20)$$

En général, quand on traite un processus ARMA d'ordre t , le vecteur des entrées sorties $z(k)$ contient $y(k')$ pour $k-t \leq k' \leq k-1$

Puisque $z(k)$ contient $y(k-1)$ qui lui-même contient $v'(k-1)$, la relation (14) n'est pas vérifiée si v' n'est pas un bruit blanc.

Quand les deux conditions (19) (20) ne sont pas vérifiées, l'estimation asymptotique se trouve donc biaisée.

Outre le biais, on peut s'intéresser à la variance de l'estimation $\hat{\theta}_q$ qui traduit l'intervalle de confiance dans lequel se situe le vrai vecteur de paramètres. Pour des raisons de complexité, nous ne sommes capables que de donner des propriétés asymptotiques de la variance. Wald [Wal43], puis Ljung [Lju76] ont proposé une démonstration de la convergence de l'estimation des moindres carrés dans un cadre probabiliste puis dans un cadre général. Il en ressort que la distribution de la variable $\sqrt{q}(\hat{\theta}_q - \theta')$ converge quand q tend vers l'infini vers une loi normale de moyenne nulle et de variance $\lambda'(R^*)^{-1}$.

$$L(\sqrt{q}(\hat{\theta}_q - \theta')) \sim N[0; \lambda'(R^*)^{-1}] \text{ pour } q \text{ suffisamment grand.} \quad (21)$$

où λ' est la variance du bruit v' ,

et R^* la matrice de covariance limite.

Ce résultat admet une interprétation naturelle : comme R^* est relié à la matrice Z , et que cette matrice représente le gradient de la prédiction par rapport aux paramètres, la précision asymptotique du paramètre dépend de la sensibilité de la précision par rapport au paramètre en question. En particulier, plus un paramètre agit sur une prédiction, plus sa détermination sera précise. Il est possible d'ailleurs de donner une approximation de la variance de l'estimation

dans le cas d'un nombre fini de mesures q [Lju88] :

$$P_q = \lambda_q (1/q \cdot Z_q^t \cdot Z_q)^{-1} \quad (22)$$

$$\text{avec } \lambda_q = 1/q \sum_{l=0}^q e^{2(k+l; \hat{\theta}_q)}$$

Cette approximation est importante car elle mesure la dispersion des estimations et définit l'efficacité de l'estimateur.

Dans l'expression de la distribution donnée par (21), la variance λ' du bruit v' est rarement connue si bien qu'en général elle doit être estimée. La formule (22) donne une approximation de la variance de l'estimation qui sera applicable pour des valeurs de q assez grandes.

Un indice de confiance [The86] relativement à l'estimation peut être donné en examinant le conditionnement de la matrice $(Z_q^t Z_q)$. Il se définit comme le rapport $\left| \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \right|$, μ désignant les valeurs singulières de la matrice Z_q .

Dans le cas où ce rapport est proche de 1, l'estimation sera bien conditionnée. Sinon, l'intervalle de confiance dans lequel se situe l'estimation est important. Une faible perturbation causera une dispersion importante du vecteur de paramètres estimés.

III - 2.3 Les moindres carrés pondérés.

Nous avons développé le cas où les différentes observations avaient le même poids. Si on affecte un poids différent à chaque erreur de prédiction, le critère devient :

$$V_q(\underline{\theta}, Z) = \sum_{l=0}^q \alpha_l [y(l) - z^t \underline{\theta}]^2$$

Vectoriellement, il s'écrit :

$$V_q(\underline{\theta}, Z) = [y(k;k+q) - Z_q \underline{\theta}]^t \cdot \Phi_q \cdot [y(k;k+q) - Z_q \underline{\theta}]$$

avec $\Phi_q = \text{diag} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$ et Z_q la matrice des entrées-sorties précédemment introduite.

Il est immédiat de vérifier que son minimum est obtenu pour :

$$\hat{\underline{\theta}}_q(k+q) = (Z_q^t \Phi_q Z_q)^{-1} Z_q^t \Phi_q y(k;k+q)$$

Cette démarche peut se généraliser à l'utilisation d'une matrice Φ_q uniquement symétrique définie positive qui garantit un critère positif. Pour interpréter l'effet de la pondération des mesures, on factorise la matrice selon la décomposition de Cholesky :

$$\Phi_q = L_q D_q L_q^t$$

avec L_q une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et D_q une matrice diagonale.

$$\text{En posant } \tilde{y}(k;k+q) = L_q y(k;k+q) \quad \text{et } \tilde{Z}_q = L_q Z_q$$

$$\text{le critère devient :} \quad V_q(\underline{\theta}, Z_q) = [\tilde{y}(k;k+q) - \tilde{Z}_q \underline{\theta}]^t \cdot D_q \cdot [\tilde{y}(k;k+q) - \tilde{Z}_q \underline{\theta}]$$

Ceci s'interprète comme un critère pondéré par la matrice diagonale D_q des observations \tilde{Y}_q et \tilde{Z}_q . L'estimateur des moindres carrés pondérés par une matrice symétrique revient donc au filtrage des mesures par L_q puis à une pondération du critère par une matrice diagonale D_q .

Si les propriétés statistiques des erreurs de mesure sont connues, elles peuvent être utilisées pour enrichir les connaissances à priori sur l'estimateur et par là réduire l'erreur d'estimation.

A cet effet, supposons connues quelques propriétés du bruit de mesure :

$$E(v'(k)) = 0$$

$$E[v'(k). v'(k)^t] = R(k)$$

où $R(k)$ est la matrice de covariance de l'erreur supposée connue définie positive. R peut être décomposée en : $R = P \cdot P^t$.

L'estimateur à minimum de variance [Naj88] utilise cette décomposition et fournit une estimation : $\hat{\theta}_q(k+q) = (Z^t R^{-1} Z)^{-1} Z^t R^{-1} y(k;k+q)$

Najim [Naj88] montre que l'estimateur à minimum de variance est un estimateur des moindres carrés pondérés dans le cas où $\Phi_q = R^{-1}$.

Remarque : des formes récursives de ces algorithmes sont développées dans la littérature [Bor92], [Naj88].

II.- 2.4 Simulation

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer la méthode des moindres carrés simples sur l'exemple de simulation que nous avons déjà présenté. Nous nous limiterons cependant au cas

du système en fonctionnement normal puisque l'étude des défaillances sera largement développée par la suite.

Dans notre exemple, trois paramètres sont à identifier. Les entrées-sorties sont utilisées sans prétraitement et nous leur appliquons directement une estimation des moindres carrés simples. Nous rappelons que la forme de l'entrée de commande qui est précisée sur les courbes d'écart type est un créneau non bruité et que le bruit intervenant dans l'exemple est un bruit sur la mesure. Ces propriétés ont été présentées dans le paragraphe II - 3.1.

Deux estimations des moindres carrés sont proposées, l'une sur une fenêtre d'amplitude 11, l'autre sur une fenêtre de taille 13. Dans un premier temps, on montre l'évolution des 3 paramètres accompagnés de l'estimation de l'écart type, puis celle d'un indice de confiance relatif aux deux fenêtres.

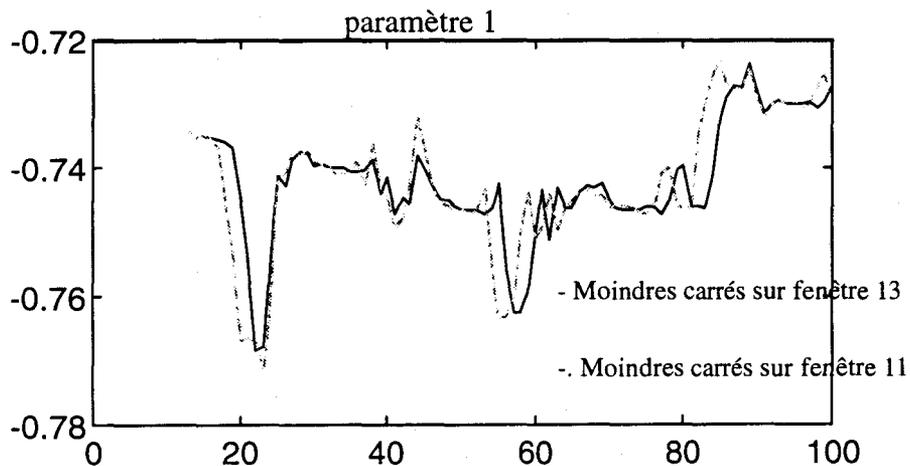


Figure 11 : Estimation du paramètre 1 : valeur nominale -0.74.

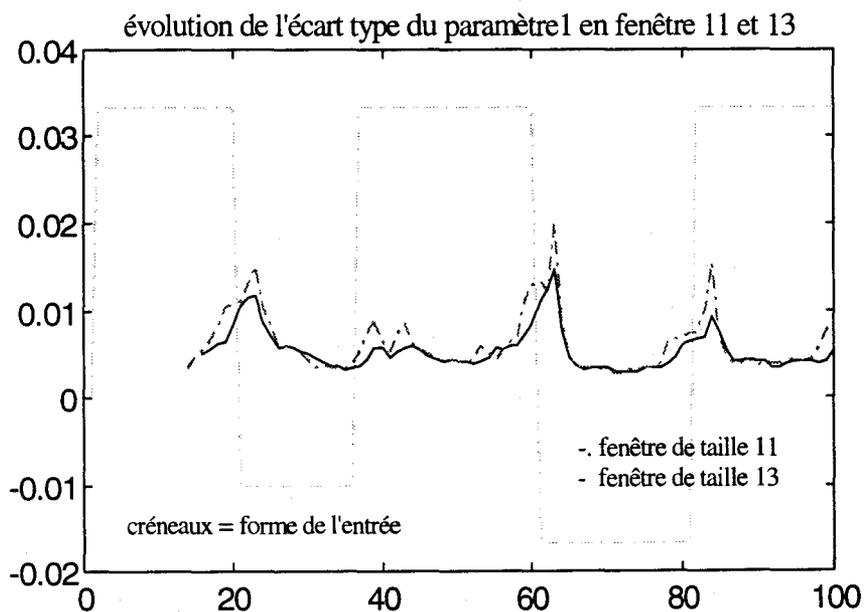


Figure 12 : Ecart type du paramètre 1

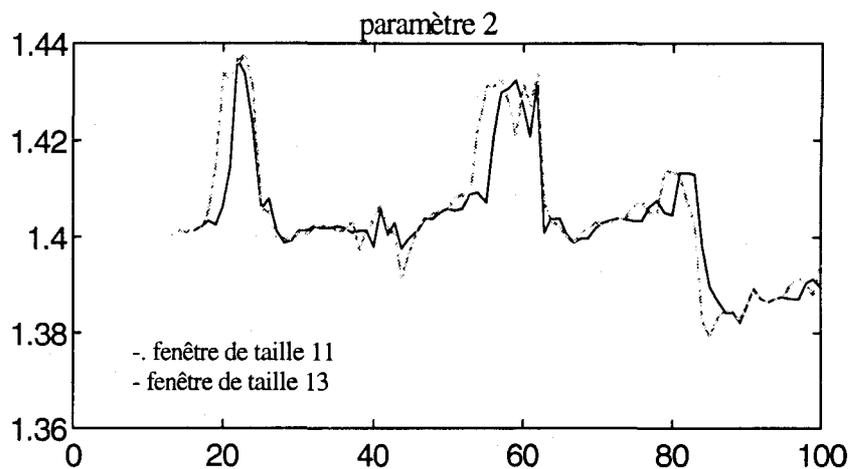


Figure 13 : Estimation du paramètre 2 : valeur nominale 1.41

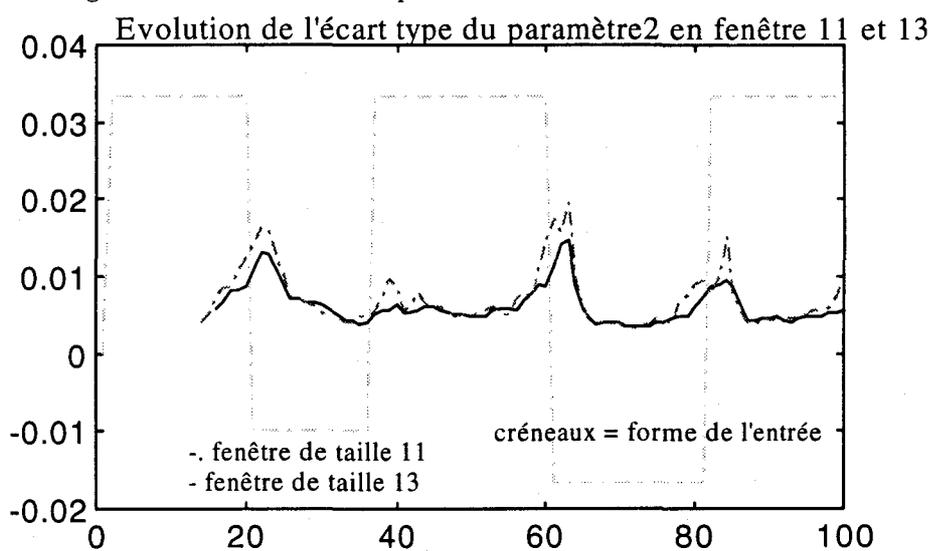


Figure 14 : Ecart type du paramètre 2

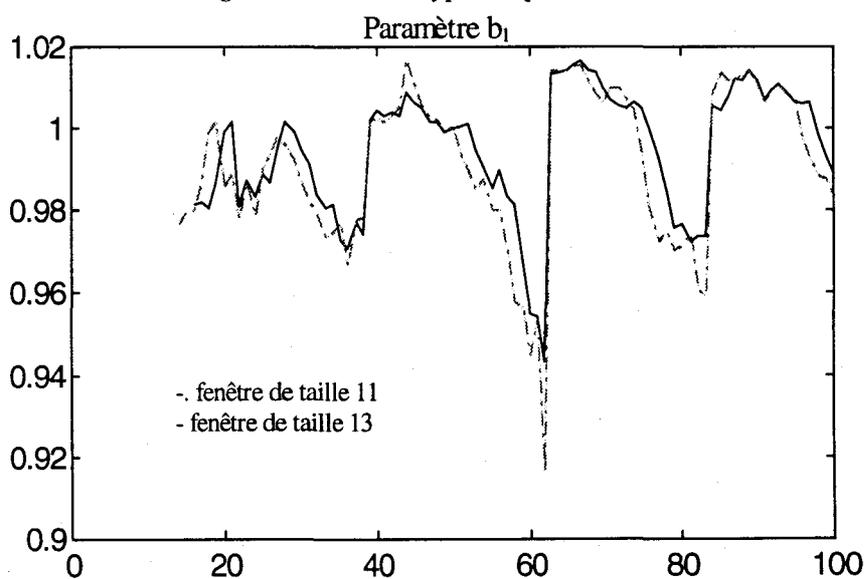


Figure 15 : Estimation du paramètre b_1 : valeur nominale 1.01

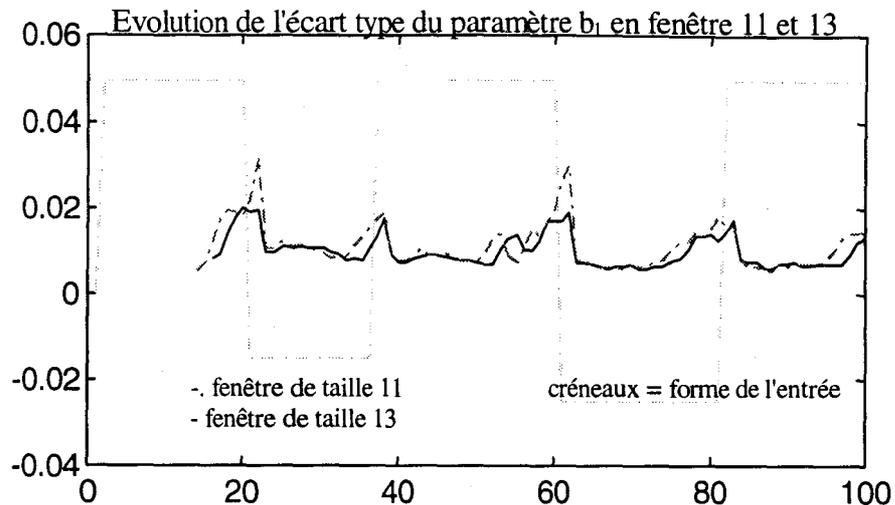


Figure 16 : Ecart type du paramètre b_1 .

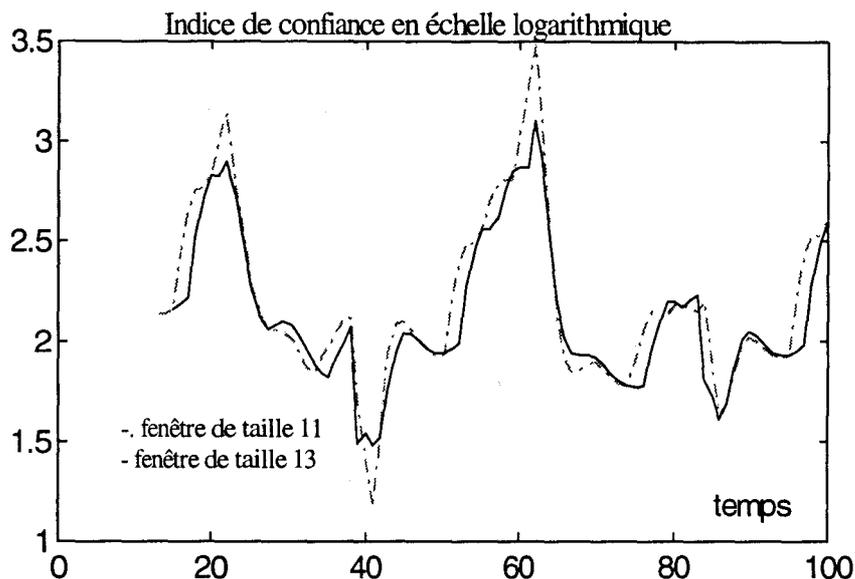


Figure 17 : Indice de confiance de l'estimation

On constate que l'estimation donne de meilleurs résultats pour une fenêtre plus large. En effet, l'estimation en fenêtre de taille 13 paraît beaucoup plus lissée que l'autre estimation. Ceci peut s'expliquer par une meilleure minimisation de l'influence des incertitudes et du bruit.

Par ailleurs, l'examen des courbes respectives de variance signale des augmentations progressives de l'écart type qui proviennent de la dégradation progressive des conditions d'estimation (insuffisance d'excitation du système) : la fenêtre d'observation utilise des mesures en régime quasi-permanent qui n'apportent pas suffisamment de renseignements sur le système. Ces mesures pauvres en informations coïncident avec la fin du créneau de l'entrée. Certains paramètres comme le paramètre b_1 dans l'exemple sont plus affectés par ces

mauvaises conditions.

L'analyse de la courbe d'indice de confiance (pour la présentation, cf paragraphe III - 2.2) permet de signaler la dégradation du conditionnement du système qui rend compte des déséquilibres d'estimation. On remarque cependant que les instants autour de $k = 40$ ne procurent pas de bonnes conditions d'estimation malgré un bon conditionnement du système.

III -3 Les moindres carrés généralisés

III -3.1 Introduction

La méthode des moindres carrés simples a beaucoup d'avantages, en particulier le minimum du critère est unique et facile à trouver. Cependant, son principal inconvénient réside dans le non respect de la propriété asymptotique de consistance.

Si dans l'équation aux différences, l'erreur d'équation n'est pas un bruit blanc, alors l'estimation des moindres carrés ne converge pas vers le vecteur de paramètres vrai. Pour pallier à ce problème, il est utile d'introduire un modèle du bruit sous la forme :

$$v'(t) = K(z^{-1}) e(t) \quad (23)$$

avec e un bruit blanc et K un filtre linéaire.

Le modèle global devient :

$$A(z^{-1}) y(t) = B(z^{-1}) u(t) + K(z^{-1}) e(t) \quad (24)$$

Pour obtenir une erreur d'équation blanche, on peut filtrer le modèle par le filtre inverse $K^{-1}(z^{-1})$ ce qui donne :

$$A(z^{-1}) y_a(t) = B(z^{-1}) u_a(t) + e(t)$$

$$\text{où } y_a(t) = K^{-1}(z^{-1}) y(t)$$

$$\text{et } u_a(t) = K^{-1}(z^{-1}) u(t)$$

Puisque e est blanc, la méthode des moindres carrés peut être appliquée sans problème. Finalement, cela revient à appliquer les moindres carrés simples à un ensemble de données filtrées. La difficulté réside dans la modélisation du bruit.

III -3.2 La technique

Le bruit v' est supposé être obtenu par un processus autorégressif d'ordre m . Son filtre générateur s'écrit sous la forme : $K(z^{-1}) = \frac{1}{C_a(z^{-1})}$ où C_a est un polynôme de degré m . Le

modèle se présente donc :

$$A(z^{-1}) y_a(k) = B(z^{-1}) u_a(k) + e(k)$$

où y_a , u_a sont relatives aux données filtrées par le filtre $C_a(z^{-1})$.

Le modèle ainsi développé est résumé dans le schéma ci-dessous :

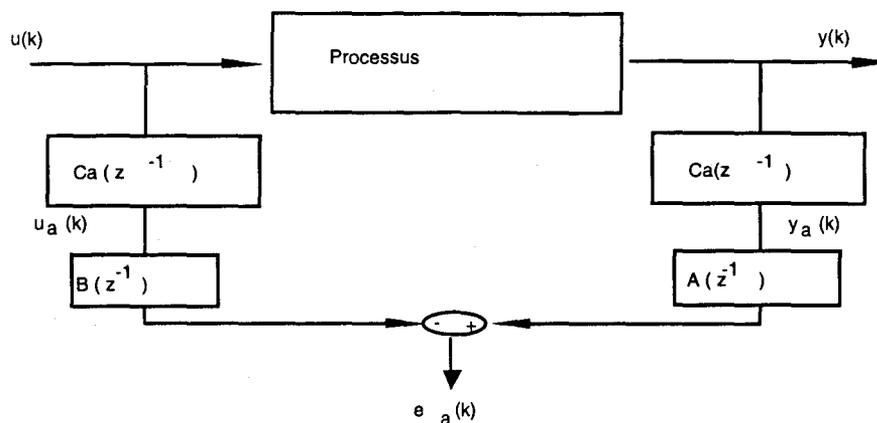


Figure 18 : la démarche générale

Cependant, le filtre C_a qui décorrèle le bruit avec les mesures est rarement connu si bien que l'on ne sait pas appliquer la méthode des moindres carrés de façon brute. L'idée proposée initialement par D. Clarke [Cla67] est d'estimer les paramètres du filtre de façon récursive et de faire converger ces paramètres estimés vers les paramètres du filtre réel. Cela revient donc à surdimensionner le vecteur des paramètres du modèle pour estimer en ligne le modèle du bruit. La procédure récursive la plus utilisée est la suivante :

- 1- appliquer l'algorithme des moindres carrés simples aux entrées-sorties.
- 2- calculer l'erreur d'estimation de la sortie.
- 3- estimer les coefficients du filtre C_a à partir de l'erreur de sortie.
- 4- filtrer les entrées-sorties.
- 5- appliquer les moindres carrés simples au nouveau jeu de données et retourner en 2.

Remarque : cette méthode existe sous une forme un peu différente : Les données [Naj88] [Bor92] sont filtrées par une série de filtres en cascade et d'ordre donné. Le nombre de filtres est incrémenté à chaque itération supplémentaire. Le problème de cette méthode est d'être coûteuse en mesures à chaque itération supplémentaire.

III -3.3 La convergence

La démonstration théorique des conditions de convergence de cet algorithme pose encore des problèmes.

Söderström [Söd74] a proposé une interprétation des moindres carrés généralisés sous la forme d'une minimisation d'une fonction de coût. Le bruit étant modélisé sous forme d'une autorégression, il montre en particulier que le critère $V_q(\underline{\theta}, Z)$ converge uniformément vers la limite $V(\underline{\theta})$ sur un compact de l'espace des paramètres ce qui assure la consistance de l'estimation.

Dans un deuxième temps, l'existence de minima est discutée en fonction de la valeur du rapport signal sur bruit et suivant certaines hypothèses :

- le signal d'entrée doit être une excitation persistante d'ordre donné ($2n+q$), avec n le degré maximum des polynômes $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ de la relation (24). Si cette condition n'est pas satisfaite, la fonction de coût peut avoir plusieurs minima locaux.

- l'hypothèse de commandabilité est essentielle. Dans le cas où le système n'est pas contrôlable, il existe des facteurs communs entre $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$. L'identification du système est rendue délicate par la présence d'un mode caché. Dans la pratique, la non contrôlabilité ne peut pas être détectée avant et cela pose des problèmes dans la convergence des algorithmes d'estimation vers le vecteur des paramètres vrais.

Le résultat principal est que pour une valeur suffisamment élevée du rapport signal sur bruit, la fonction de coût possède un minimum unique. Par contre, pour des rapports signal sur bruit suffisamment faibles, l'existence de plusieurs minima est démontrée. Il n'est pas facile alors sans connaissance à priori du processus réel de décider alors lequel des modèles est le meilleur ou le plus correct.

III - 4 Les variables instrumentales

III -4.1 Principe

Une façon différente (ou probabiliste) de considérer le problème est de raisonner ainsi : si l'erreur de prédiction $e(k, \underline{\theta})$ est corrélée avec la matrice des entrées-sorties Z^{k-1} , cela signifie qu'il y avait plus d'information utile sur la sortie dans Z^{k-1} que dans la prédiction. Ainsi, le prédicteur n'est pas idéal. Cela conduit à caractériser un bon modèle comme celui qui produit des erreurs de prédiction indépendantes des données passées. Le principe de cette technique est donc de décorréliser l'erreur de prédiction d'une séquence de données issues de Z^{k-1} .

Un test de la blancheur de l'erreur de prédiction n'est pas possible en pratique, par contre, nous pouvons choisir un ensemble d'instruments $\zeta(k)$ obtenus à partir des entrées-sorties Z^{k-1} et leur imposer de ne pas être corrélés avec l'erreur de prédiction. Ceci se traduit par :

$$1/q \sum_{i=0}^q \zeta(k+i) \alpha(e(k+i, \underline{\theta})) = 0$$

α désignant une fonction quelconque de l'erreur de prédiction.

Cette présentation peut être généralisée en utilisant l'erreur de prédiction filtrée e_F à la place de e . Les possibilités de choix de $\zeta(k)$ sont nombreuses, cependant il ne faut pas perdre de vue que le meilleur choix de $\zeta(k)$ dépend des propriétés du système et donc des paramètres. On peut ainsi proposer une démarche générale [Lju88] :

- choisir un filtre $L(z^{-1})$ $e_F(k, \underline{\theta}) = L(z^{-1}) e(k, \underline{\theta})$

- choisir une séquence de vecteurs de corrélation :

$$\zeta(k, \underline{\theta}) = \zeta(k, Z^{k-1}, \underline{\theta})$$

construite à partir des données passées et du vecteur de paramètres.

- choisir la fonction α (souvent $\alpha(e) = e$).

- calculer $\hat{\underline{\theta}}_q = \text{sol} \{f_q(\underline{\theta}, Z_q) = 0\}$

$$\text{avec } f_q(\underline{\theta}, Z_q) = 1/q \sum_{i=0}^q \zeta(k+i) \alpha(e_F(k+i, \underline{\theta}))$$

III -4.2 La méthode

Examinons plus en détail la technique des moindres carrés pour comprendre les différences avec les variables instrumentales.

La technique des moindres carrés utilise une prédiction de la forme :

$$\hat{y}(k / \underline{\theta}) = \underline{z}^t(k-t;k) \underline{\theta}$$

Le résultat des moindres carrés s'exprime comme :

$$\hat{\underline{\theta}}_q(k+q) = (\underline{Z}_q^t \underline{Z}_q)^{-1} \underline{Z}_q^t \underline{y}(k;k+q)$$

Cette solution peut aussi s'écrire :

$$\hat{\underline{\theta}}_q(k+q) = \text{sol} \left\{ \frac{1}{q} \sum_{i=0}^q \underline{z}(k+i-t;k+i) \cdot [y(k+i) - \underline{z}^t(k+i-t;k+i) \underline{\theta}] = 0 \right\}$$

La technique des moindres carrés correspond à celle des variables instrumentales dans le cas où les instruments valent $\zeta(k+i) = \underline{z}(k+i-t;k+i)$ et le filtre $L(z^{-1}) = 1$.

L'intérêt de cette technique réside dans le choix particulier du vecteur ζ qui permet d'obtenir une estimation consistante. Par analogie, la solution des variables instrumentales s'exprime dans le cas où $L = 1$:

$$\hat{\underline{\theta}}_q^{VI}(k+q) = \text{sol} \left\{ \frac{1}{q} \sum_{i=0}^q \zeta(k+i) \cdot [y(k+i) - \underline{z}^t(k+i-t;k+i) \underline{\theta}] = 0 \right\}$$

Les éléments ζ sont appelés instruments ou variables instrumentales.

Une forme plus explicite peut être obtenue grâce à l'écriture matricielle. Pour cela, multiplions l'erreur de prédiction par l'instrument ζ :

$$\zeta(k) y(k) = \zeta(k) [\underline{z}^t(k-t;k) \underline{\theta} + e(k)]$$

L'écriture de cette relation sur une fenêtre de taille q donne l'équation :

$$\underline{H}^t \underline{y}(k;k+q) - \underline{H}^t \underline{Z} \underline{\theta} = \underline{H}^t \underline{e}(k;k+q)$$

où \underline{H} désigne la matrice des instruments décalés.

La solution générale des variables instrumentales s'écrit aussi matriciellement :

$$\hat{\underline{\theta}}_q^{VI} = \text{sol} \{ \underline{H}^t \underline{e}(k;k+q) = 0 \}$$

Ceci permet d'établir l'expression générale de la solution des variables instrumentales :

$$\hat{\underline{\theta}}_q^{VI}(k+q) = (\underline{H}^t \underline{Z}_q)^{-1} \underline{H}^t \underline{y}(k;k+q) \quad (25)$$

sous l'hypothèse que la matrice $H^t Z_q$ soit régulière.

Nous allons montrer que sous certaines conditions sur les instruments, la technique des variables instrumentales est consistante.

Ecrivons le processus réel sous la forme :

$$y(k) = \underline{z}^t(k-t;k) \underline{\theta}' + v'(k)$$

Pour que l'estimateur soit consistant ($\hat{\theta}_q^{VI}$ tend vers $\underline{\theta}'$ quand q tend vers l'infini), il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} 1/q \sum_{t=0}^q \zeta(t). v'(t) = 0 \quad (26a)$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} 1/q \sum_{t=0}^q \zeta(t). z^t(t) \text{ soit régulière} \quad (26b)$$

Ces conditions expriment que les instruments doivent être corrélés avec les variables de régression mais non corrélés avec le bruit. La première condition (26a) est du même type que celle posée en (20) pour les moindres carrés simples.

III -4.3 Choix d'instruments

Supposons que le système soit décrit par un modèle ARX :

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1}) u(k) + v(k) \quad (27)$$

et que le processus réel suive le même modèle avec des matrices $A'(z^{-1})$ $B'(z^{-1})$ et v' .

Un idée naturelle consiste à générer des instruments de façon similaire à l'équation (27) indépendants du bruit v' au même instant.

Cela conduit à choisir :

$$\zeta(k) = K(z^{-1}) [x(k-1) \dots x(k-n_a) u(k-1) \dots u(k-n_b)]^t \quad (28)$$

où K est un filtre linéaire et x est généré à partir de l'entrée et du processus ARMA :

$$N(z^{-1}) x(k) = M(z^{-1}) u(k) \quad (29)$$

Les deux conditions de consistance (26) doivent être vérifiées :

- (26a) est immédiate par construction des instruments (indépendance) si l'entrée u est générée en boucle ouverte.

- Comme ζ et z sont obtenus à partir de la même séquence d'entrée (z contient en plus des termes dépendant du bruit), la condition de régularité (26b) est en général vérifiée.

Il s'avère que le choix idéal [Lju88] correspond à un instrument identique au modèle du système réel :

soit $N(z^{-1}) = A'(z^{-1})$

$$M(z^{-1}) = B'(z^{-1})$$

Ce choix d'instruments présente l'inconvénient majeur que $A'(z^{-1})$ et $B'(z^{-1})$ sont a priori inconnus. Pour y remédier, on peut mettre en oeuvre la méthode des moindres carrés sur le modèle de base (27). Cette méthode quoique biaisée offre une approximation optimale des matrices A' et B' . Il est alors aisé d'appliquer la méthode des variables instrumentales avec les instruments obtenus à l'aide de M et N .

Une autre approche [Lju88] consiste à créer des instruments qui dépendent des paramètres du système.

IV - Comparaison monovariante Espace de Parité et identification

Jusqu'à présent, nous nous sommes bornés à introduire les techniques de l'espace de parité et de l'estimation de paramètres en faisant apparaître quelques une de leurs propriétés importantes. Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux relations qui lient les indicateurs de défaut et essayer d'interpréter ces résultats tant au niveau géométrique que statistique.

IV-1 Comparaison stochastique avec les moindres carrés

IV -1.1 Comparaison théorique

Avant de se lancer dans la comparaison, nous allons introduire comme pour l'espace de parité la notion générale de résidu, c'est à dire une quantité pratiquement nulle en fonctionnement normal et différente de zéro en cas de panne.

Le résidu d'identification est le résultat de la comparaison entre le vecteur des paramètres estimés $\hat{\underline{\theta}}$ et celui des paramètres nominaux $\underline{\theta}^*$. On peut l'écrire :

$$\underline{\rho} = \hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta}^*$$

Cette quantité $\underline{\rho}$ correspond donc bien à la définition d'un résidu.

Remarque : Si $\underline{\theta}^*$ est obtenu par identification paramétrique selon la même méthode d'estimation, le vecteur résidu d'identification sera en moyenne nul en fonctionnement normal.

Sur la base de ces définitions, nous allons mener une comparaison entre les résidus d'identification et ceux de parité. Rappelons premièrement l'expression de l'erreur de prédiction.

$$e(k, \hat{\underline{\theta}}) = y(k) - \underline{z}^t(k-t;k) \hat{\underline{\theta}} \quad (30)$$

En remplaçant la sortie par son expression (15) dans l'équation (30), on en déduit :

$$e(k, \hat{\underline{\theta}}) = \underline{z}^t(k-t;k) [\underline{\theta}' - \hat{\underline{\theta}}] + \underline{w}'^t \underline{\varepsilon}(k-t;k)$$

Le premier terme représente l'effet sur la sortie de la différence entre le paramètre réel et le paramètre estimé. Le second traduit l'influence des bruits de mesure.

La relation (15) représente l'équation ARMAX du système réel. Effectivement, les paramètres d'influence du bruit pourraient être identifiés dans la procédure d'estimation. Dans un premier temps, on ne le fera pas et on considèrera uniquement les paramètres de la fonction de transfert. Dans un second temps, on les estimera grâce à la méthode des moindres carrés généralisés.

Par ailleurs, l'erreur de prédiction peut s'exprimer en fonction du résidu de parité en remplaçant la sortie par son expression déduite du résidu de parité (13) :

$$e(k, \hat{\underline{\theta}}) = r(k) + \underline{z}^t(k-t;k) \underline{\theta}^* - \underline{z}^t(k-t;k) \hat{\underline{\theta}}$$

Cette dernière relation fait apparaître le vecteur résidu d'identification :

$$e(k, \hat{\underline{\theta}}) = r(k) - \underline{z}^t(k-t;k) \underline{\rho} \quad (31)$$

L'erreur d'estimation est donc la somme du résidu de parité et d'un écart résultant du résidu d'identification. L'écriture de cette relation décalée q fois dans le temps conduit à la forme vectorielle :

$$\underline{e}(k;k+q, \hat{\underline{\theta}}) = \underline{r}(k;k+q) - \underline{Z} \underline{\rho}(k+q) \quad (32)$$

En appliquant la même procédure à (30), on obtient :

$$\underline{e}(k;k+q, \hat{\underline{\theta}}) = \underline{y}(k;k+q) - \underline{Z} \hat{\underline{\theta}}(k+q)$$

En remplaçant $\hat{\underline{\theta}}$ par son expression (18), on trouve :

$$\underline{e}(k;k+q, \hat{\underline{\theta}}) = [\underline{I} - \underline{Z} (\underline{Z}' \underline{Z})^{-1} \underline{Z}'] \underline{y}(k;k+q)$$

\underline{Z}' est orthogonale à gauche à la matrice $[\underline{I} - \underline{Z} (\underline{Z}' \underline{Z})^{-1} \underline{Z}']$, soit :

$$Z^t \underline{e}(k;k+q, \hat{\theta}) = 0$$

En multipliant à gauche (32) par Z^t , on obtient :

$$Z^t [\underline{r}(k;k+q) - Z \underline{\rho}(k+q)] = 0$$

Si on extrait le vecteur résidu d'identification de cette équation, on trouve [Del94a] [Del94b] :

$$\underline{\rho}(k+q) = (Z^t Z)^{-1} Z^t \underline{r}(k;k+q) \quad (33)$$

$(Z^t Z)^{-1} Z^t$ est la pseudo-inverse de Penrose de la matrice Z et est notée Z^+ .

IV -1.2 Interprétation

a) filtrage

La relation (33) exprime le lien entre les résidus d'identification et les résidus de parité successifs. Z^+ est obtenu par combinaison des commandes et des mesures sur une fenêtre d'observation. Cette matrice évolue aussi en fonction de l'intervalle de temps considéré. Ainsi, les résidus d'identification peuvent être considérés comme un filtrage non stationnaire des résidus de l'espace de parité .

Les paramètres de ce filtre dépendent des entrées et des sorties. Chaque composante du résidu d'identification est le résultat d'un processus MA à coefficients non stationnaires excité par le résidu de parité. L'ordre du processus lui-même est lié au nombre d'observations nécessaires pour identifier.

b) géométrique

Pour montrer que les résidus d'identification appartiennent à l'espace de parité, nous sommes conduits à exprimer les résidus d'identification sous une forme similaire à la forme de calcul des résidus de parité.

L'ordre de l'espace de parité à considérer est $t+q$ à cause du filtrage d'ordre q des résidus de parité. Pour s'en assurer, il suffit de regarder l'ensemble des mesures qui sont utilisés dans la phase d'identification. D'abord, nous rappelons la forme de calcul du résidu de parité d'ordre t :

$$\underline{r}(k+t) = \underline{w}^t \underline{y}(k;k+t) - \underline{w}^t \text{COM}_t(A,B,C,D) \underline{u}(k;k+t) \quad (34)$$

où \underline{w} est un vecteur de projection supposé connu. A partir de maintenant, nous

adopterons pour simplifier les notations COM_t au lieu de $COM_t(A,B,C,D)$.

Pour commencer, nous voulons prouver que le vecteur $\underline{r}(k;k+q)$ appartient à l'espace de parité d'ordre $t+q$. Il doit donc se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{r}(k;k+q) = W \underline{y}(k-t;k+q) - W COM_{t+q} \underline{u}(k-t;k+q) \quad (35)$$

La construction de $\underline{r}(k;k+q)$ par décalage temporel permet d'obtenir la forme de W par identification des termes faisant intervenir les mesures :

$$W = \begin{bmatrix} \underline{w}^t & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \underline{w}^t & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & \dots & & 0 & \underline{w}^t \end{bmatrix}$$

On peut constater par ailleurs que COM_{t+q} contient $(q+1)(t+1)$ lignes. On développe donc COM_{t+q} par blocs de $(t+1)$ lignes de la forme :

Pour le i ème bloc, $i \in \{0..q\}$,

$$\left[\text{OBS}[t]A^{i-1}B \quad \dots \quad \text{OBS}[t]B \quad COM_t \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right] \updownarrow (t+1) \text{ lignes}$$

En multipliant COM_{t+q} à gauche par la i ème ligne de W , on obtient :

$$[0; \dots; \underline{w}^t; 0; \dots; 0] COM_{t+q} = [\underline{w}^t \text{OBS}[t] A^{i-1}B ; \dots ; \underline{w}^t \text{OBS}[t]B; \underline{w}^t COM_t; 0; \dots; 0]$$

Comme $\underline{w}^t \cdot \text{OBS}[t] = 0$ par définition, la relation devient :

$$[0; \dots; \underline{w}^t; 0; \dots; 0] COM_{t+q} = [0; \dots; 0; \underline{w}^t \cdot COM_t; 0; \dots; 0]$$

Donc on vérifie que :

$$\forall i \in \{0..q\}, \underline{w}^t COM_t \underline{u}(k+i;k+i+t) = [0; \dots; \underline{w}^t; 0; \dots; 0] COM_{t+q} \underline{u}(k;k+t+q)$$

On déduit :

$$W \cdot COM_{t+q} \underline{u}(k;k+t+q) = \begin{bmatrix} \underline{w}^t COM_t \cdot u(k, k+t) \\ \underline{w}^t COM_t \cdot u(k+1, k+t+1) \\ \dots \\ \underline{w}^t COM_t \cdot u(k+q, k+t+q) \end{bmatrix}$$

Le deuxième terme peut aussi être obtenu en décalant les résidus dans l'expression (34). Ainsi, $\underline{r}(k;k+q)$ s'exprime bien sous la forme (35).

Nous voulons maintenant montrer que $\underline{r}(k;k+q)$ appartient à l'espace de parité d'ordre $t+q$.

Proposition : Les lignes de W constituent une base de l'espace de parité d'ordre $t+q$.

Preuve :

1) Elles sont linéairement indépendantes.

2) D'abord, nous savons déjà que $\underline{w}^t \cdot \text{OBS}[t] = 0$. De plus, la matrice d'observabilité $t+q$ peut être décomposée en faisant apparaître celle d'ordre t et ce quel que soit $i \in \{0..q\}$:

$$\text{OBS}[t+q] = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ \dots \\ C \cdot A^{i-1} \\ \left[\text{OBS}[t] \right] \cdot A^i \\ C \cdot A^{t+i+1} \\ \dots \\ C \cdot A^{t+q} \end{bmatrix}$$

Avec cette décomposition, il est facile de montrer que la i ème ligne de W est orthogonale à la matrice d'observabilité quel que soit i :

$$[0; \dots; \underline{w}^t; 0; \dots; 0] \cdot \text{OBS}[t+q] = 0$$

$$\text{Il en résulte que : } W \cdot \text{OBS}[t+q] = 0$$

Donc, elles appartiennent à l'espace de parité car :

$$W \cdot \text{OBS}[t+q] = 0$$

$$3) \dim \text{OBS}[t+q] = (t+q+1) \times p$$

Nous savons que le rang de la matrice d'observabilité est t (par définition cf II. -2), donc la dimension de l'espace orthogonal est $(q+1)$:

$$\dim \text{Ker OBS}[t+q] = q+1.$$

Ainsi, nous disposons d'une famille libre de $(q+1)$ vecteurs dans un espace de dimension $(q+1)$, donc les lignes de W forment une base de l'espace de parité d'ordre $t+q$.

Suite à ce résultat, il apparaît que les résidus d'identification s'expriment sous la forme suivante :

$$\underline{\rho}(k+q) = W'' [y(k-t;k+q) - \text{COM}_{t+q} \underline{u}(k-t;k+q)] \quad (36)$$

$$\text{avec } W'' = (Z^t Z)^{-1} Z^t W, \text{ et } W = \begin{bmatrix} w^t & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & w^t & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & \dots & & 0 & w^t \end{bmatrix}$$

Ainsi, les résidus d'identification peuvent être vus comme un ensemble de résidus de parité d'ordre $t+q$, car nous venons de trouver une matrice W'' qui appartient au noyau de la matrice d'observabilité. Cette matrice dépend des entrées-sorties si bien que les résidus d'identification appartiennent à l'espace de parité mais sont obtenus par une transformation non linéaire des résidus de parité.

Par ailleurs, aucun changement de base linéaire invariant dans le temps de l'espace de parité ne permet de structurer les résidus diagonalement par rapport aux paramètres. L'écriture du problème fournit un ensemble d'équations de contraintes qui ne peuvent être résolues quelle que soit la séquence d'entrée. L'identification constitue donc une transformation non linéaire qui le permet et fournit un ensemble de résidus avec une structure diagonale par rapport à ces paramètres.

IV -1.3 Simulation

Nous réutilisons le même exemple de simulation avec les mêmes conditions qu'au II-3. Notre objectif est de montrer le comportement des résidus d'identification en présence des défaillances dont nous avons proposé la forme et le type précédemment. Dans un deuxième temps, nous vérifions que grâce à un filtrage adéquat des résidus de parité, il est possible de retrouver de façon exacte les résidus des moindres carrés simples.

Trois résidus d'identification sont donc proposés puisqu'il est nécessaire d'identifier trois paramètres. Les figures proposent l'évolution de chaque résidu d'identification ainsi que leurs écarts types sous les trois hypothèses suivantes : fonctionnement normal, défaillance capteur, défaillance paramètre.

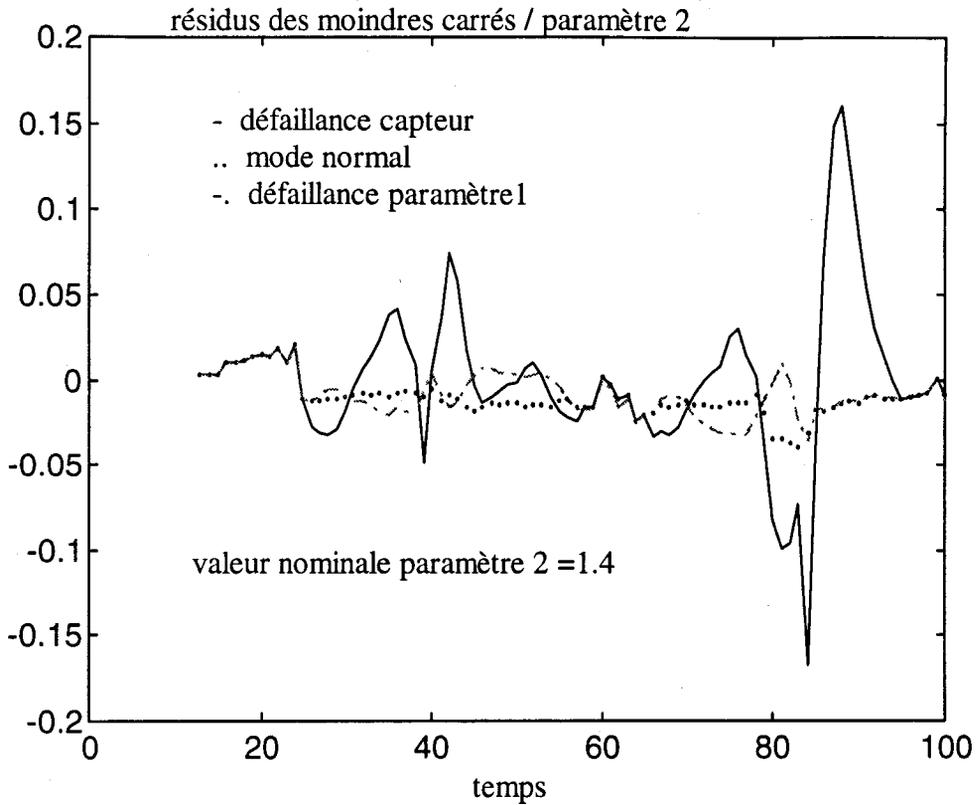


Figure 18 : Résidu d'identification relatif au paramètre 2
évolution de l'écart type du paramètre 2.

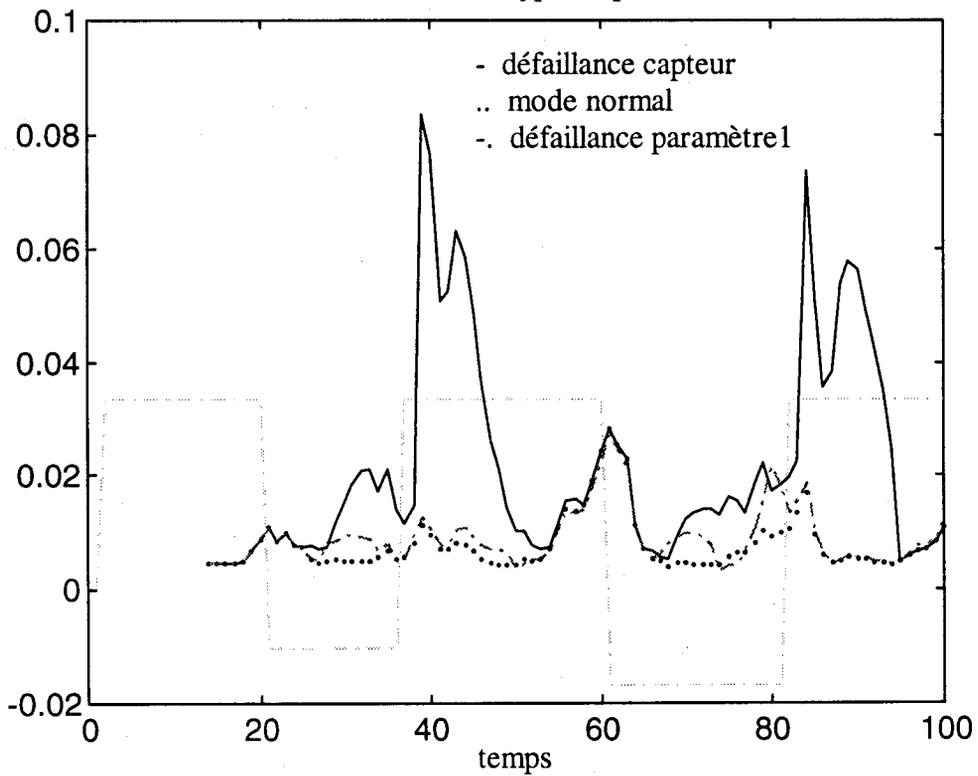


Figure 19 : évolution de l'écart type du paramètre 2

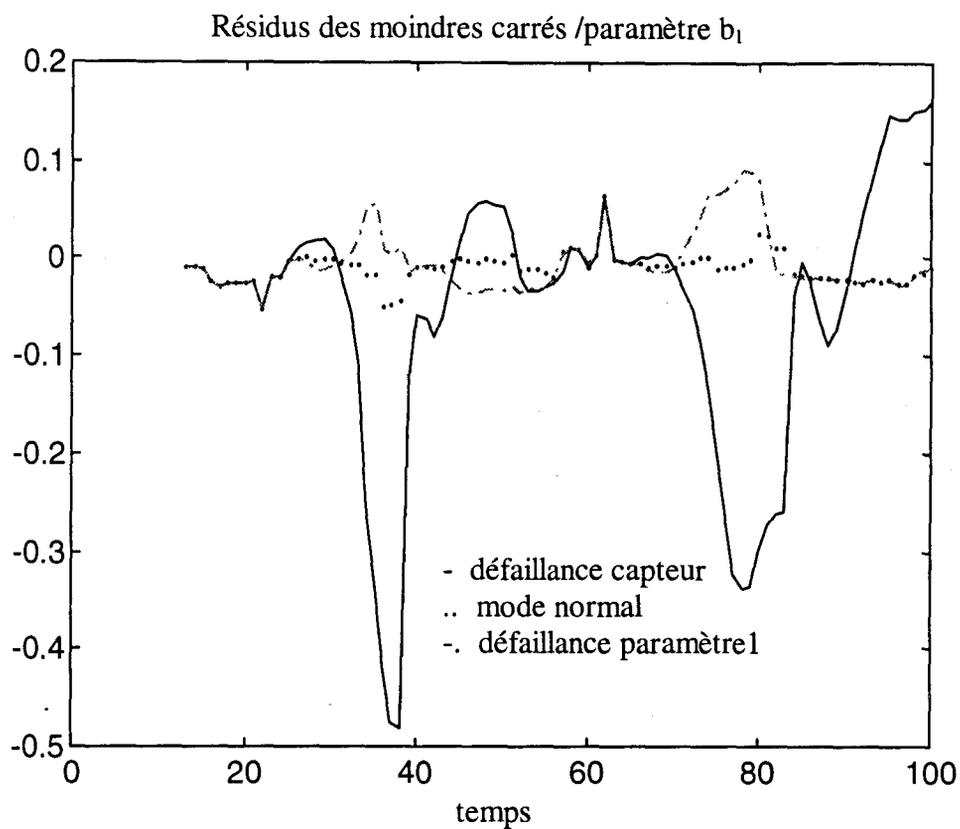


Figure 20 : Résidu d'identification relatif au paramètre b_1 .
évolution de l'écart type du paramètre b_1 .

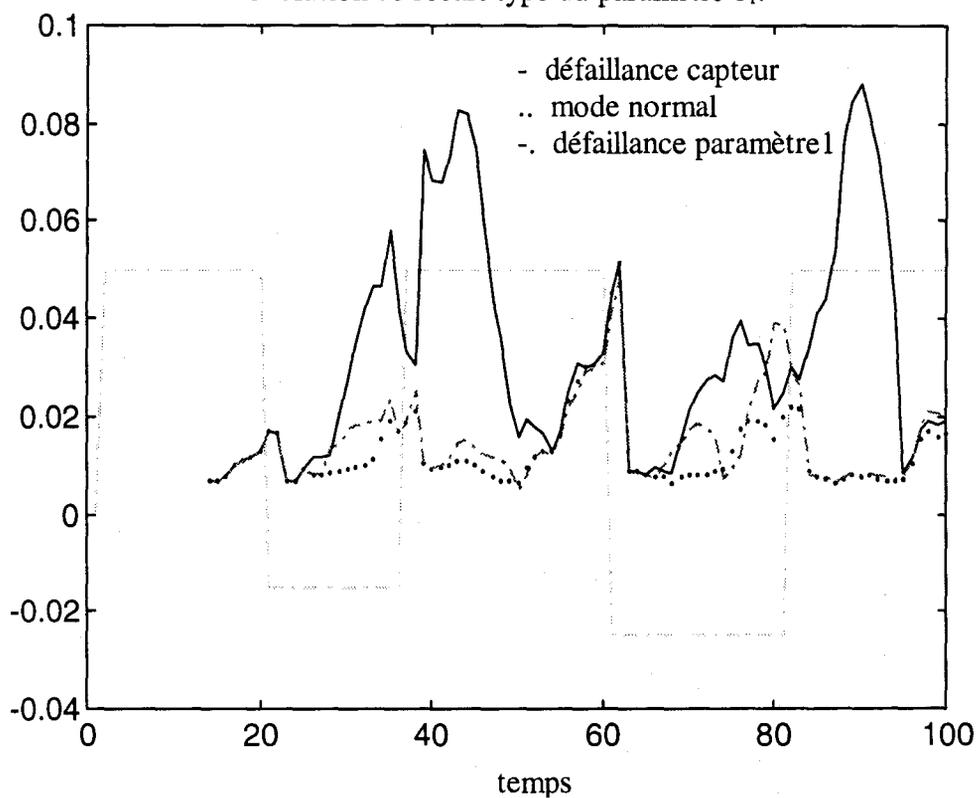


Figure 21 : évolution de l'écart type du paramètre b_1 .

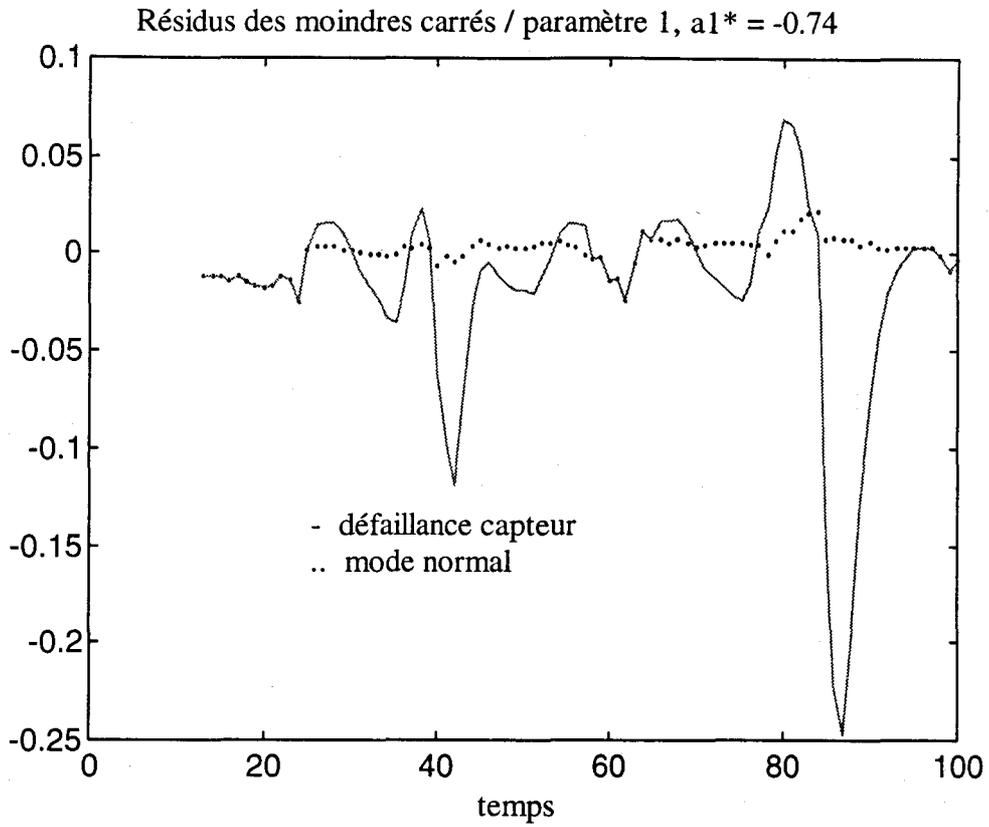


Figure 22 : évolution du résidu relatif au paramètre 1

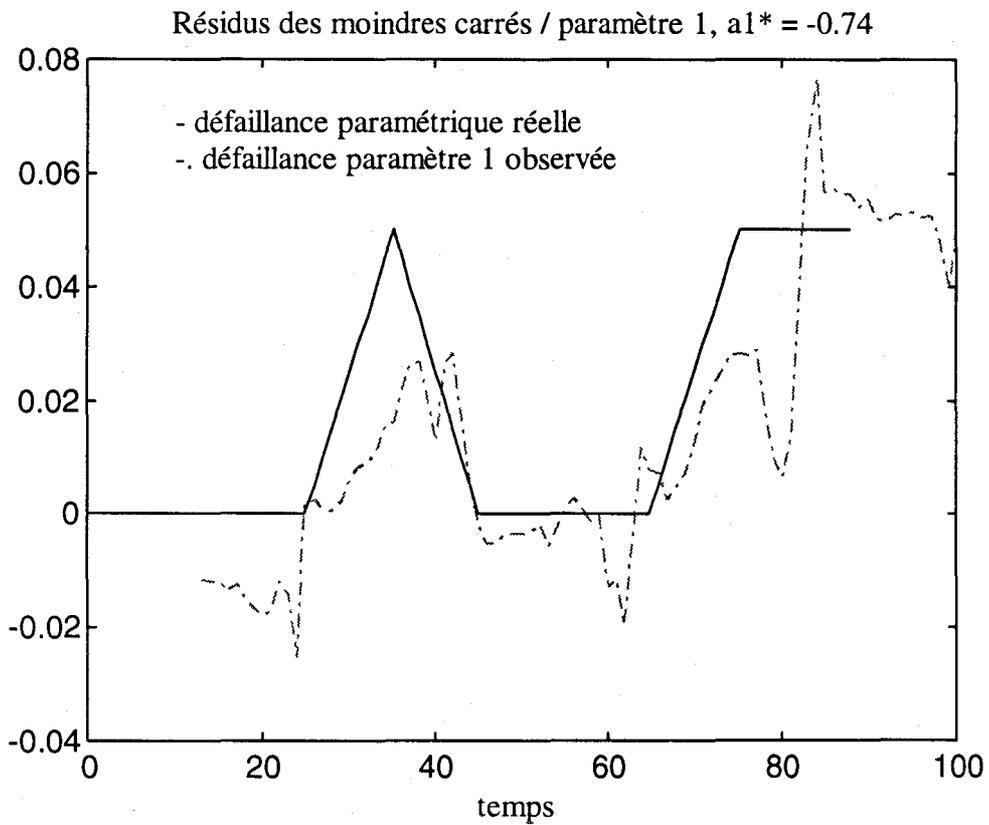


Figure 23 : évolution du résidu relatif au paramètre 1

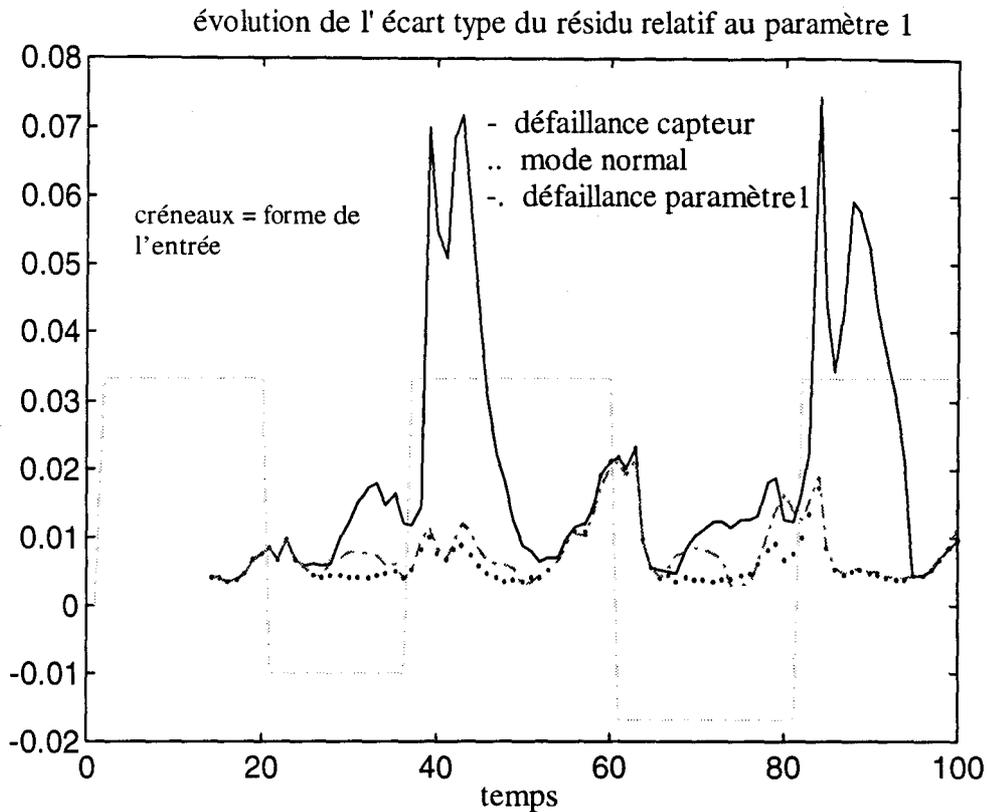


Figure 24 : évolution de l'écart type du résidu relatif au paramètre 1

On peut constater que l'on enregistre les mêmes problèmes de conditionnement des résidus des moindres carrés en mode normal qu'en mode défaillant. Il faut aussi convenir qu'un résidu d'identification pour surveiller une défaillance capteur n'est certainement pas idéal (cf figure 24). Pour ce qui concerne la défaillance paramètre, elle est entrevue par le résidu mais le résidu peut être entaché d'incertitudes à cause des mauvaises conditions d'expérimentation. On pourrait éventuellement limiter ce problème en augmentant la fenêtre d'observation mais on augmenterait considérablement le temps de détection.

Dans le cas de résidus d'identification en général, il faut assurer la persistance de l'excitation (des expériences riches en fréquences) pour avoir un bon résidu mais d'un autre côté, on ne contrôle pas l'entrée du système en surveillance donc on ne peut pas choisir nos expériences.

Par ailleurs, nous avons vérifié numériquement que les résidus des moindres carrés sont égaux aux résidus de parité filtrés dans tous les modes de fonctionnement que nous avons présenté. Ainsi, il apparaît que les résidus d'identification peuvent être générés soit par une combinaison non linéaire des résidus de parité soit par une estimation des moindres carrés.

IV - 2 Comparaison avec les moindres carrés généralisés

IV -2.1 Comparaison théorique

L'objet de ce paragraphe est de montrer le lien entre les résidus des moindres carrés généralisés et ceux de l'espace de parité.

Premièrement, comme les moindres carrés généralisés sont dérivés des moindres carrés simples, nous allons reprendre le résultat de la comparaison précédente pour l'appliquer aux moindres carrés généralisés.

Tout d'abord, remarquons que la méthode GLS (moindres carrés généralisés) n'est autre qu'une technique des moindres carrés simples appliquée à un ensemble de données filtrées issues d'un modèle ARMAX. Par conséquent, nous pouvons utiliser le résultat de la comparaison précédente pour les données filtrées.

$$\rho_a(k+q) = (Z_a^t Z_a)^{-1} Z_a^t r_a(k;k+q)$$

où l'indice a concerne les variables filtrées.

Grâce au schéma général de génération de résidus, il peut être aisément établi que les résidus de parité du modèle ARMAX filtré s'expriment comme les résidus de parité du modèle originel filtrés. Considérons le filtre sous la forme suivante :

$$1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_M z^{-M}$$

où M désigne l'ordre du filtre. Il s'ensuit que :

$$r_a(k;k+q) = C_a r(k-M;k+q)$$

où C_a est une matrice bande construite à partir des coefficients du filtre :

$$\underline{c}^t = (c_M; \dots; c_1; 1)$$

$$C_a = \begin{bmatrix} c^t & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c^t & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & \dots & & 0 & c^t \end{bmatrix}$$

Il suffit de reprendre l'expression géométrique des résidus de parité qui a été développée précédemment (aussi [Del94a]) :

$$r(k-M;k+q) = W [y(k-M-t;k+q) - COM_{t+M+q} u(k-M-t;k+q)]$$

Il découle de cette relation :

$$\rho_a(k+q) = (Z_a^t Z_a)^{-1} Z_a^t C_a W [y(k-t-M;k+q) - COM_{t+M+q} u(k-t-M;k+q)]$$

Z_a se réfère aux variables filtrées sur une fenêtre donnée $[k-M;k+q]$ si bien qu'elle peut

s'écrire :

$$Z_a[k-M;k+q] = C_a Z[k-M-t;k+q]$$

Dans la suite, nous omettrons la référence temporelle pour ces matrices. A l'aide de cette expression, les résidus d'identification se résument [Del95]:

$$\rho_a(k+q) = (Z^t \Phi Z)^{-1} Z^t \Phi r(k-M;k+q) \quad (37)$$

avec $\Phi = C_a^t C_a$.

Remarques : - On peut facilement montrer que les résidus des moindres carrés pondérés peuvent se mettre sous la même forme que les résidus d'identification des moindres carrés généralisés avec Φ la matrice symétrique de pondération. Φ^{-1} doit donc être considérée comme la matrice de covariance du bruit. Cependant, il faut remarquer que cette matrice est ici estimée par une technique des moindres carrés généralisés tandis qu'elle est supposée a priori connue dans une méthode pondérée.

- Φ représente l'inverse de la matrice de covariance de bruit sur l'erreur de prédiction. En effet, l'estimateur à minimum de variance [Naj88] fournit une expression similaire dans laquelle Φ représente l'inverse de la matrice de covariance du bruit.

- Les résultats sur l'estimation à minimum de variance (en particulier que Φ^{-1} est la matrice de covariance du bruit) indiquent que r_a est à minimum de variance.

En examinant l'expression des résidus, il apparaît que la matrice :

$(Z^t \Phi Z)^{-1} Z^t \Phi W$ est une matrice de projection qui est orthogonale à la matrice d'observabilité d'ordre $M+t+q$ car $W \cdot \text{OBS}[M+t+q] = 0$. Cette matrice dépend des entrées-sorties sur une fenêtre de largeur $[M+t+q]$. D'autre part, elle inclut aussi les coefficients du filtre qui représentent la dynamique du bruit et qui doivent être identifiés.

Finalement, le résultat principal est que les résidus des moindres carrés généralisés sont une combinaison non linéaire des résidus de l'espace de parité. Ils peuvent être vus comme un ensemble de résidus de parité non linéaires d'ordre $M+t+q$. Par ailleurs, l'intégration des paramètres d'influence du bruit dans le vecteur des paramètres à identifier permet en général d'éliminer le biais sur le vecteur des paramètres du système.

IV -2.2 Interprétation statistique

Nous allons proposer une étude de la valeur moyenne des résidus d'identification. Pour cela, supposons que $\mathbf{u}(k) = \mathbf{w}' \boldsymbol{\varepsilon}(k;k+t)$ soit un bruit à moyenne nulle. L'expression des résidus permet d'affirmer que leur valeur moyenne est proche de zéro si l'espérance du bruit de mesure est nulle et $\|\underline{\theta}^* - \underline{\theta}\|$ est négligeable.

D'abord, écrivons l'expression des résidus de parité :

$$\mathbf{r}(k;k+q) = \mathbf{Z} \Delta \underline{\theta} + \mathbf{u}(k;k+q)$$

où $\Delta \underline{\theta} = \underline{\theta}' - \underline{\theta}^*$

En multipliant à gauche par $(\mathbf{Z}^t \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^t$ le résultat de la comparaison des moindres carrés, il en ressort :

$$\underline{\rho}_{LS}(k+q) = \Delta \underline{\theta} + (\mathbf{Z}^t \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^t \mathbf{u}(k;k+q) \quad (38)$$

Considérant la valeur moyenne de ce résidu, il s'ensuit que : $E(\underline{\rho}) \neq \Delta \underline{\theta}$.

La raison essentielle à cela est que $\mathbf{u}(k)$ est généralement une séquence corrélée avec \mathbf{Z}^t qui cause un biais dans le résidu d'identification des moindres carrés. Une mauvaise connaissance a priori ou des erreurs de modélisation sur le processus peuvent aussi causer un biais dans le résidu.

C'est pour cette raison que $\mathbf{u}(k)$ est modélisée par un processus autorégressif dans une technique des moindres carrés généralisés :

$$\mathbf{u}(k) = \frac{1}{C_a(z^{-1})} \mathbf{v}(k) \quad (39)$$

où $\mathbf{v}(k)$ est une séquence blanche à moyenne nulle.

D'après le même mécanisme, les résidus des moindres carrés généralisés s'expriment :

$$\underline{\rho}_a(k+q) = \Delta \underline{\theta} + (\mathbf{Z}_a^t \mathbf{Z}_a)^{-1} \mathbf{Z}_a^t \boldsymbol{\varepsilon}_a(k;k+q)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_a$ représente la sortie du filtre C_a excité par $\mathbf{u}(k)$. Selon notre hypothèse, nous savons que :

$$C_a \mathbf{u}(k;k+q) = \boldsymbol{\varepsilon}_a(k;k+q) = \mathbf{v}(k;k+q)$$

et il s'ensuit que :

$$\underline{\rho}_a(k+q) = \Delta \underline{\theta} + (\mathbf{Z}_a^t \mathbf{Z}_a)^{-1} \mathbf{Z}_a^t \mathbf{v}(k;k+q)$$

Sachant que \mathbf{v} est une séquence blanche indépendante de \mathbf{Z} , l'espérance du résidu d'identification devient : $E(\underline{\rho}_a) = \Delta \underline{\theta}$.

Cette technique est donc considérée comme non biaisée par rapport aux erreurs de mesures. Ainsi, les propriétés statistiques de ces résidus sont plus agréables que celles des

moindres carrés simples pour l'étape de décision.

Remarque 1 : des résultats existent sur la covariance asymptotique pour un grand nombre de mesures. Aström et Eykhoff [Ast71] ont montré que la covariance des moindres carrés sous certaines hypothèses se met sous la forme :

$$\text{cov}(\hat{\rho}) = \sigma^2 (Z^t Z)^{-1}$$

où σ^2 est la variance de l'erreur de prédiction.

Cette matrice de covariance permet de définir les paramètres de la procédure de décision et d'en prévoir les performances en termes de détection.

Remarque 2 : Cependant, il peut exister plusieurs solutions aux moindres carrés généralisés qui dépendent du rapport signal sur bruit si bien que des estimations indésirables peuvent se produire [Söd74].

Remarque 3 : En surveillance, le résidu doit simplement détecter un changement. l'avantage de la méthode des moindres carrés généralisés est de minimiser la variance des résidus. De ce fait, les conditions de détection sont meilleures.

Remarque 4 : Si $\hat{\theta}^*$ est obtenu selon la même technique et dans les mêmes conditions que l'estimation, alors le résidu obtenu est sans biais. Par contre, s'il n'est pas obtenu par la même technique, le résidu devient biaisé ce qui peut perturber les conditions de détection.

IV -2.3 Simulation

Nous reprenons le même exemple de simulation avec comme supplément la modélisation dynamique du bruit par un processus autorégressif.

Le but de ce paragraphe est de montrer le comportement des résidus des moindres carrés généralisés face aux défaillances proposées et surtout de vérifier qu'ils peuvent être aussi obtenus par une combinaison des résidus de parité.

On propose donc trois résidus des moindres carrés généralisés correspondant aux trois paramètres. On distinguera d'un côté la défaillance paramètre et la déviation réelle, de l'autre la défaillance capteur et le mode normal.

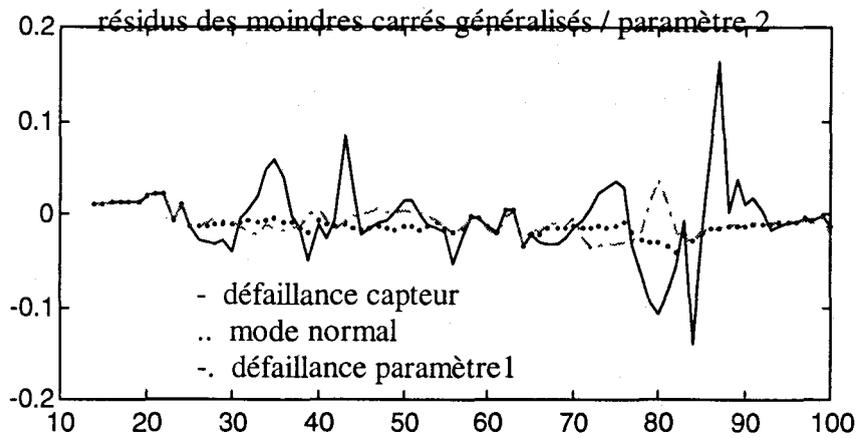


Figure 25 : Résidu d'identification MCG relatif au paramètre 2.
Résidus des moindres carrés généralisés / paramètre b_1 .

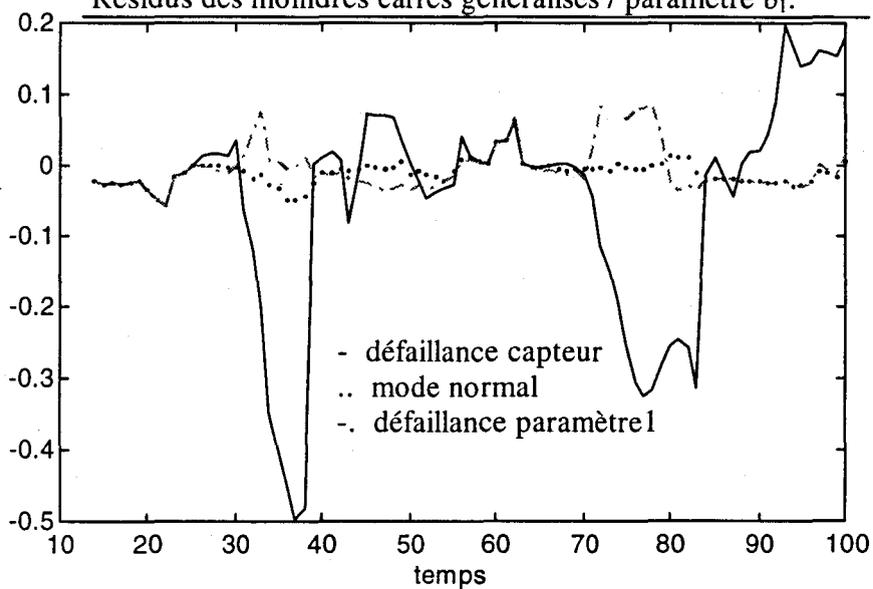


Figure 26 : Résidu des MCG relatif au paramètre b_1 .

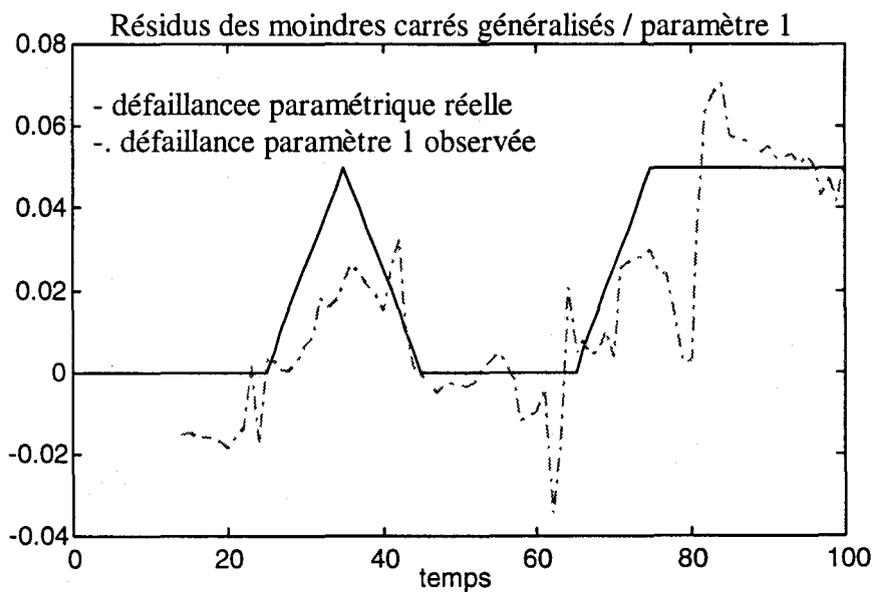


Figure 27 : Résidu des MCG relatif au paramètre 1

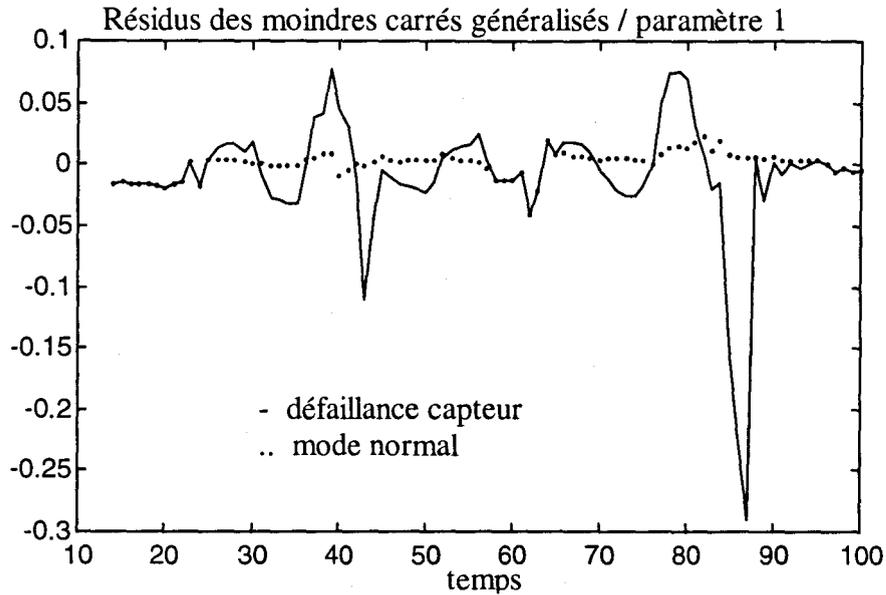


Figure 28 : Résidu des MCG relatif au paramètre 1

On vérifie dans un premier temps la relation numérique entre les résidus des moindres carrés généralisés et les résidus de parité.

Par ailleurs, ces résidus d'estimation donnent dans cet exemple des résultats similaires aux résidus des moindres carrés sur une fenêtre identique. Cependant on note toujours des incohérences dues à des mauvaises conditions d'expérimentation. Les courbes de l'évolution de l'écart type des résidus permettent de la même façon que précédemment de juger les conditions d'expérimentation. On pourra donc attribuer un écart dans les résidus soit aux mauvaises conditions d'utilisation soit à une défaillance du paramètre concerné.

Pour assurer la cohérence du résidu, il faudra veiller à maintenir le système suffisamment excité et sans doute aussi conserver l'évolution de la valeur du minimum du critère d'estimation qui donne une information sur la qualité de l'estimation. Ce minimum indique approximativement la variance de la sortie estimée et s'interprète donc comme la cohérence du modèle.

IV -3 Comparaison avec les variables instrumentales

IV -3.1 Comparaison théorique

Nous avons l'intention de comparer les variables instrumentales avec les résidus des moindres carrés. Dans cette optique, nous expliciterons le résidu des variables instrumentales en fonction du résidu de parité.

Rappelons pour l'instant l'expression de l'estimateur des variables instrumentales :

$$\hat{\underline{\Theta}}^{VI}(k+q) = (H^t Z)^{-1} H^t \underline{y}(k;k+q)$$

Grâce à l'expression des résidus de parité :

$$\underline{r}(k;k+q) = \underline{y}(k;k+q) - Z \underline{\theta}^*$$

nous pouvons déduire celle des mesures :

$$\underline{y}(k;k+q) = \underline{r}(k;k+q) + Z \underline{\theta}^*$$

Reportons cette dernière dans celle des variables instrumentales (25) et on trouve :

$$\hat{\underline{\Theta}}^{VI}(k+q) = (H^t Z)^{-1} H^t \underline{r}(k;k+q) + \underline{\theta}^*$$

En retranchant $\underline{\theta}^*$, on fait apparaître le résidu des variables instrumentales et ainsi il se déduit de l'expression des résidus de parité :

$$\underline{\rho}^{VI}(k+q) = (H^t Z)^{-1} H^t \underline{r}(k;k+q) \quad (40)$$

Cette dernière relation, du même type que (33) et (37), prouve le lien entre les résidus de parité et les variables instrumentales.

IV -3.2 Interprétation

Comme précédemment, cette relation correspond à un filtrage non linéaire des résidus de parité. Les caractéristiques de ce filtre sont globalement les mêmes que celles des moindres carrés. Le seul degré de liberté réside dans le choix d'instruments H et la meilleure solution correspond à des instruments non corrélés avec le bruit de mesure.

De la même façon, ces résidus sont des résidus de parité d'ordre $q+t$. En effet, il vient en utilisant la décomposition des résidus de parité que

$$\underline{\rho}^{VI}(k+q) = (H^t Z)^{-1} H^t W [\underline{y}(k-t;k+q) - \text{COM}_{t+q} \underline{u}(k-t;k+q)]$$

Par ailleurs, de façon identique aux moindres carrés généralisés, les variables instrumentales sont dites non biaisées (en fait, elles sont simplement consistantes) ce qui assure à leurs résidus de vérifier $E(\underline{\rho}^{VI}) = \Delta \underline{\theta}$ de façon asymptotique.

Ainsi cette méthode a des propriétés statistiques agréables comme les moindres carrés généralisés, elle a de plus l'avantage d'être d'une implémentation simple si les instruments sont construits à partir de la connaissance a priori du système (paramètres nominaux).

V - Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à plusieurs méthodes d'estimation monovariante et nous avons voulu montrer leur correspondance avec celle de l'Espace de Parité.

Le résultat de cette comparaison est que ces techniques découlent simplement d'un filtrage non linéaire particulier des résidus de parité et sont donc directement issues de l'espace de parité.

Ces résidus ont des comportements différents en termes statistiques, et le choix d'une de ces méthodes doit être guidé par les aspects de variance et de biais sur les résidus afin de pouvoir détecter des changements de valeurs des paramètres analytiques.

Une perspective intéressante serait de créer des structures de résidus d'identification autres que diagonale, qui permettraient d'envisager une meilleure détection et isolation des défaillances.

Chapitre 3 : La comparaison multivariable de l'Espace de Parité et de l'Estimation Paramétrique.

Introduction

Le chapitre précédent a insisté sur les liens qui pouvaient exister entre les méthodes de l'espace de parité et l'identification paramétrique dans le cas monovarié. De la même façon, ce chapitre établit les liens entre les deux techniques dans le cadre des systèmes multivariés. La difficulté de cette approche réside comme nous le verrons dans le choix des relations entrées-sorties pour les deux méthodes.

Nous présenterons d'abord les modèles utilisés par ces approches. Nous avons vu que les résidus répondaient de manière différente aux défaillances additives indépendantes et aux défaillances multiplicatives. L'estimation de paramètres résulte d'une démarche d'optimisation et fournit une structure diagonale par rapport aux paramètres. Nous présentons pour mettre en parallèle les deux démarches comment l'optimisation des résidus pour obtenir une structure particulière de défaillances additives indépendantes s'applique dans l'Espace de Parité.

D'autre part, la problématique de l'identification multivariable consiste essentiellement à rechercher des combinaisons linéaires des relations de redondance analytique de base qui procurent une structure intéressante en paramètres ou un nombre de paramètres minimum.

Les deux approches peuvent être vues comme la recherche d'une combinaison linéaire appropriée d'un ensemble de résidus de base en vue de l'obtention d'un cahier des charges donné.

Les relations entrées-sorties fournissent un ensemble de résidus de base. Elles peuvent être écrites sur un horizon temporel commun ou sur un horizon spécifique à chaque sortie. La deuxième formulation fait intervenir un ensemble de paramètres plus réduit.

L'identification des paramètres est réalisée en utilisant ces deux formulations. Dans le premier cas (horizon commun), nous développons deux méthodes, l'une sans imposer de

contraintes sur les paramètres, l'autre tenant compte des liens structurels entre ceux-ci. Dans le deuxième cas, le principal problème réside dans la recherche de formulations qui minimisent le nombre de paramètres.

La comparaison avec les résidus issus de l'Espace de parité est réalisée pour chaque méthode.

I - Les modèles

Les modèles que nous présentons dans cette section sont sensiblement les mêmes que ceux introduits dans le cas monovarié. Cependant, nous montrons que le choix de la structure influe fortement sur l'identification. En effet, la paramétrisation n'est pas unique dans le cas multivariable et dépend donc aussi des différentes formes de modèle que nous envisageons. Une étape importante consiste à choisir cette paramétrisation. On recense quatre grands types de modèles de systèmes dans le domaine de l'identification multivariable : la matrice de transfert, la matrice de réponse impulsionnelle, les équations aux différences entrées-sorties et la formulation en espace d'état.

I - 1 La représentation par la matrice de transfert

I -1.1 Le modèle nominal

On considère un système à r entrées et m sorties invariant dans le temps. Les sorties sont supposées être entachées de bruit additif. Le bruit est généralement supposé coloré généré comme la sortie d'un modèle linéaire multivariable avec des bruits blancs en entrées.

$$\underline{y}(k) = G(z) \underline{u}(k) + \underline{\gamma}(k)$$

$$\underline{\gamma}(k) = N(z) \underline{v}(k)$$

$G(z)$ et $N(z)$ sont des matrices respectivement $m.r$ et $m.p$ à spectres rationnels qui représentent la fonction de transfert du système et celle du bruit. Chaque élément de ces matrices $G_{ij}(z)$ et $N_{ij}(z)$ est une fonction rationnelle de l'opérateur d'avance z . Les paramètres structuraux indispensables pour caractériser la matrice de transfert sont les ordres du numérateur et du dénominateur de chaque élément de la matrice $G(z)$.

La matrice de transfert peut être mise sous une forme différente :

$$G(z) = z^{-\psi} \frac{1}{D(z)} H(z)$$

où ψ est le retard pur que l'on supposera connu a priori car difficilement identifiable. $D(z)$ est appelé le polynôme caractéristique du système et $H_{ij}(z)$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, r$ sont des polynômes en z . Les paramètres structuraux requis pour caractériser la matrice $G(z)$ sous cette forme sont le degré du polynôme $D(z)$ et les degrés des polynômes $H_{ij}(z)$. Ces derniers sont habituellement considérés comme égaux à l'ordre du système moins un dans un problème d'identification.

D'autres formes existent. En particulier, Abaza [Aba76] a proposé le développement suivant :

$$y_i(k) = \frac{B_{i1}(z)}{A_{i1}(z)} u_1(k) + \dots + \frac{B_{ir}(z)}{A_{ir}(z)} u_r(k) + \frac{D_{i1}(z)}{C_{i1}(z)} v_1(k) + \dots + \frac{D_{ip}(z)}{C_{ip}(z)} v_p(k)$$

$$\text{où } G_{ij}(z) = \frac{B_{ij}(z)}{A_{ij}(z)} \text{ et } N_{ij}(z) = \frac{D_{ij}(z)}{C_{ij}(z)}$$

La division de B_{ij} par A_{ij} et la substitution du bruit par une séquence ξ_i transforme l'équation en :

$$y_i(k) = v_{i1}(z^{-1}) u_1(k) + \dots + v_{ir}(z^{-1}) u_r(k) + \xi_i(k)$$

$\xi_i(k)$ est la partie aléatoire,

v_{ij} sont des polynômes de la variable de retard z^{-1} et de degrés infinis. En considérant L mesures successives et en tronquant l'équation après s termes, ceci donne :

$$y_i(k; k+L-1) = U_i(k) v_i + E_i(k)$$

avec $v_i = [v_{i1}^1 \dots v_{i1}^s \dots v_{ir}^1 \dots v_{ir}^s]$ et $Y_i(k) = [y_i(k) \dots y_i(k+L-1)]$

et $E_i(k) = [\xi_i(k) \dots \xi_i(k+L-1)]$

$$U_i(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) & \dots & u_1(k-s+1) & \dots & u_r(k) & \dots & u_r(k-s+1) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ u_1(k+L-1) & \dots & u_1(k+L-s) & \dots & u_r(k+L-1) & \dots & u_r(k+L-s) \end{bmatrix}$$

$U_i(k)$ est composé des entrées sur la fenêtre considérée et v_i correspondent aux paramètres à identifier.

I - 2 Représentation à base de matrice de réponse impulsionnelle

Considérons le système à temps discret pourvu de bruit additif. Il peut être décomposé en séries infinies :

$$y(k) = [D + J_0 z^{-1} + J_1 z^{-2} + \dots] u(k) + \underline{\varepsilon}(k)$$

où les matrices J_0, J_1, \dots sont appelées les paramètres de Markov du système nominal. Ces paramètres de Markov définissent la réponse impulsionnelle du système, ainsi il est possible de tronquer la série après s termes.

Ainsi, le système nominal peut être décrit par l'équation suivante :

$$y(k) = [D + J_0 z^{-1} + J_1 z^{-2} + \dots J_{s-1} z^{-s}] u(k) + \underline{\varepsilon}(k)$$

Le paramètre structurel indispensable pour caractériser le modèle sous cette forme est la valeur de s correspondant au nombre minimum de paramètres de Markov. Cette valeur est étroitement liée aux indices d'observabilité et de contrôlabilité du système. La détermination de ces indices permet d'en déduire une valeur réaliste de s .

Cette méthode est identique dans sa forme générale à celle développée par Abaza dont on a parlé dans le paragraphe précédent. Ce modèle sert de base pour l'identification des paramètres de Markov. Les sorties sont alors utilisées de façon indépendantes.

I - 3 Relations entrées-sorties

Le système considéré peut être représenté de façon équivalente par un modèle ARMAX autorégressif :

$$P(z^{-1}) y(k) = Q(z^{-1}) u(k) + N(z^{-1}) \underline{\varepsilon}(k)$$

$$\text{avec } P(z^{-1}) = P_0 + P_1 z^{-1} + \dots + P_{m_1} z^{-m_1}$$

$$Q(z^{-1}) = Q_0 + Q_1 z^{-1} + \dots + Q_{m_2} z^{-m_2}$$

$$N(z^{-1}) = I + N_1 z^{-1} + \dots + N_{m_3} z^{-m_3}$$

P_i, Q_i, N_i sont des matrices constantes de dimensions appropriées. Les paramètres m_1, m_2, m_3 sont les paramètres structuraux requis pour caractériser le système. Dans le cas où $N(z^{-1})$ est diagonale [Kas74], cela réduit considérablement la complexité du problème d'identification.

Par ailleurs, Guidorzi [Gui75] a développé un modèle de ce type dans le cas non bruité et il montre l'équivalence avec la formulation en espace d'état. Nous en donnerons une interprétation géométrique dans la suite de ce chapitre.

I - 4 La représentation dans l'espace d'état

Le modèle d'état peut être considéré sous la forme suivante :

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k)$$

$$\underline{y}(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) + \underline{\varepsilon}(k)$$

\underline{x} est le vecteur d'état de dimension n , \underline{u} le vecteur de commande de dimension r , \underline{y} le vecteur de mesure de dimension m , et A, B, C, D sont les matrices de dimensions appropriées.

Une représentation plus générale introduit un bruit d'état dans la formulation précédente :

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) + \underline{\eta}(k)$$

$$\underline{y}(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) + \underline{\varepsilon}(k)$$

où $\underline{\eta}(k)$ est le vecteur de bruit sur l'état, de dimension n . En utilisant la théorie des innovations, Tse et Anton [Tse72] ont montré que le modèle d'espace d'état précédent avec deux sources de bruit blanches $[\underline{\eta}(k), \underline{\varepsilon}(k)]$ peut être remplacé par une représentation équivalente avec une seule source de bruit blanc $\underline{v}(k)$. Elle s'écrit :

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) + G \underline{v}(k)$$

$$\underline{y}(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) + \underline{v}(k)$$

où G est le gain de Kalman en régime permanent du modèle à deux sources.

Il est bien connu que la représentation espace d'état n'est pas unique et que toute transformation régulière de l'état aboutit à des équations similaires. Du fait de cette non unicité, de nombreuses formes canoniques de la représentation d'état ont été proposées.

L'ordre n du système et les indices d'observabilité et de contrôlabilité constituent les paramètres structuraux du système. Leur détermination constitue un préalable à toute démarche d'identification paramétrique [Tse75] [Gui75].

I - 5 Le modèle de surveillance. Unification

Nous venons de recenser les différentes formes du modèle nominal. Cependant, il faut remarquer que ces modélisations même si elles sont équivalentes ne présentent pas tout à fait le même intérêt pour la surveillance. Afin de traiter des défaillances particulières, il est nécessaire de construire des modèles qui fassent apparaître l'influence de celles-ci. On les appellera modèles de surveillance et nous en donnerons deux formes fréquemment utilisées ([Ger93], [Cas93]).

I - 5.1 Modèles entrées-sorties

Une extension du modèle entrées-sorties nominal a été proposé par Gertler dans le cadre des défaillances additives indépendantes [Ger93b] :

$$P(z^{-1}) \underline{y}(k) = Q(z^{-1}) \underline{u}(k) + N(z^{-1}) \underline{\varepsilon}(k) + V(z^{-1}) \underline{d}_a(k)$$

avec $\underline{d}_a(k)$ le vecteur des défaillances additives indépendantes.

Les défaillances additives indépendantes viennent influencer de façon additive l'équation du modèle en fonctionnement nominal en se comportant comme des entrées quelconques indépendantes de toute autre commande.

Les défaillances multiplicatives constituent une autre catégorie de défaillances qui se distinguent des précédentes par leur comportement. Elles interviennent comme une évolution dans les coefficients des polynômes P et Q.

$$\Delta P \underline{y}(k) + P(z^{-1}) \underline{y}(k) = Q(z^{-1}) \underline{u}(k) + \Delta Q \underline{u}(k) + V(z^{-1}) \underline{d}_a(k) + N(z^{-1}) \underline{\varepsilon}(k) \quad (1)$$

Le comportement des deux types de défaillances est complètement différent et leur traitement s'avérera aussi distinct.

Gertler propose l'extension de ce modèle sous une forme différente en introduisant les notions suivantes :

Appelons $\underline{\theta}$ l'ensemble des paramètres permettant de calculer les éléments de P et Q,

$$\underline{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_v]$$

Gertler propose de linéariser ce modèle autour de la valeur nominale de ses paramètres pour se rapprocher de la forme additive.

On écrit :

$$Q_i(z^{-1}) = \frac{\partial Q(z^{-1}, \underline{\theta})}{\partial \theta_i} \quad R_i(z^{-1}) = \frac{\partial P(z^{-1}, \underline{\theta})}{\partial \theta_i}$$

$$\Delta Q = \sum_{j=1}^v Q_j(z^{-1}) \cdot \Delta \theta_j \quad \Delta P = \sum_{j=1}^v R_j(z^{-1}) \cdot \Delta \theta_j$$

Ces relations sont vraies au premier ordre dans un voisinage des paramètres nominaux et si la déviation temporelle est constante ou très lentement variable par rapport à la dynamique du système. Ceci fait apparaître le vecteur $\underline{E}(t)$ dont la jème composante est définie par :

$$e_j(k) = Q_j(z^{-1}) \underline{u}(k) - R_j(z^{-1}) \underline{y}(k)$$

$$\underline{E}(k) = [e_1(k), \dots, e_v(k)]$$

$$\Delta P \underline{y}(k) + P(z^{-1}) \underline{y}(k) = Q(z^{-1}) \underline{u}(k) + \Delta Q \underline{u}(k) + V(z^{-1}) \underline{d}_a(k) + N(z^{-1}) \underline{\varepsilon}(k) + \underline{E}(k) \Delta \underline{\theta} \quad (2)$$

Cette dernière expression indique comment la déviation des paramètres physiques de leur valeur nominale (représentée par un vecteur constant $\Delta\theta$) affecte la relation entrées-sorties. Il faut noter que le multiplicande de la déviation de paramètres est une matrice dépendant du temps tandis que pour les fautes additives indépendantes, il s'agissait d'une fonction de transfert constante.

Cette remarque est à la base de toutes les difficultés résultant de la considération simultanée des deux types de défaillances.

I - 5.2 Le modèle d'état

La représentation d'état généralisée conduit à la forme :

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k) + E \underline{d}(k) + G \underline{f}(k) + \underline{\eta}(k) \quad (3a)$$

$$\underline{y}(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k) + F \underline{d}(k) + H \underline{f}(k) + \underline{\varepsilon}(k) \quad (3b)$$

\underline{f} est le vecteur des perturbations et (G, H) le couple des matrices d'influence associées. \underline{d} représente le vecteur des fautes recensées agissant sur le système et (E, F) les matrices d'influence associées.

Dans le cas de fautes additives indépendantes, \underline{d} est une faute quelconque dépendant du temps mais indépendante des autres entrées du système et (G,H) sont les matrices d'influence réelles. Dans ce cas, la faute peut être considérée comme une entrée inconnue du système. La distinction entre perturbations et défaillances relève de la définition du cahier des charges de surveillance.

Dans le cas de fautes multiplicatives, l'expression du terme de défaillances (développée au chapitre II) s'écrit :

$$E \underline{d}(k) = \Delta A \underline{x}(k) + \Delta B \underline{u}(k)$$

$$F \underline{d}(k) = \Delta C \underline{x}(k) + \Delta D \underline{u}(k)$$

G, H sont des matrices de structure qui représentent l'incidence des différentes fautes.

Les fautes multiplicatives dépendent de l'état du système et de la valeur de ses commandes : le vecteur des fautes multiplicatives n'est donc plus un vecteur indépendant. Le système n'est pas linéaire par rapport aux défaillances et l'effet d'une défaillance dépend des commandes et de l'état du système.

Il est à noter enfin que les autres formes de modèles (réponse impulsionnelle) ne connaissent pas le même succès car l'unification avec le modèle de défaillances est plus délicate à réaliser.

II L'Espace de Parité multivariable

L'espace de Parité destiné aux systèmes multivariables ne diffère pas de celui appliqué aux systèmes monovariables. La différence essentielle est que l'on dispose d'un ensemble de résidus plus important. Cette remarque est primordiale pour la suite de cette section.

En effet, on considérera dans un premier temps un horizon identique pour tous les capteurs et on recensera le nombre de résidus pour lesquels les vecteurs de projection sont indépendants. Ces derniers formeront une base de l'Espace de parité.

II - 1 Spécifications de la génération des résidus

Nous nous sommes fixés comme objectif de comparer l'approche de l'espace de parité et celle de l'identification paramétrique. J'ai souhaité ne pas me limiter aux résidus de base et présenter les résidus réellement utilisés en surveillance. Dans cette optique, il est intéressant de détailler les spécifications du cahier des charges de surveillance et de trouver les résidus qui conviennent.

L'ensemble de résidus de base doit caractériser complètement le fonctionnement du système. Ils doivent être proches de zéro en fonctionnement normal et s'éloigner significativement de zéro pour les défaillances considérées. La difficulté est que cet ensemble de résidus est aussi influencé par les bruits de mesure, les erreurs de modélisation et les perturbations. Cette influence ne doit donc pas provoquer de fausses alarmes ni des mauvaises détections.

Dans cette optique, on peut être amené à optimiser les résidus pour les rendre sensibles par rapport aux défaillances et insensibles par rapport aux perturbations. On envisage même pour une meilleure localisation de la défaillance de générer des résidus sensibles uniquement à un sous-ensemble très restreint de défaillances.

On distingue dans la littérature deux grandes classes d'approches : les résidus structurés et les résidus directionnels.

II - 2 Les résidus structurés

La génération optimale de résidus est décomposée en deux étapes :

- la définition d'un ensemble de résidus de base.
- la recherche d'une combinaison optimale par rapport aux spécifications du cahier des

charges.

Pour chaque résidu r_i , deux ensembles vont définir sa structure :

- un ensemble I_i^+ d'événements auxquels le résidu doit être sensible.
- un ensemble I_i^- d'événements auxquels le résidu doit être insensible.

Il est évident pour des questions de robustesse que les influences non connues (erreurs de modélisation, perturbations) appartiennent à l'ensemble I_i^- car leur influence doit être nulle dans tous les résidus. Pour des raisons de localisation, on se propose d'obtenir des résidus dont la structure reste proche de l'idéal structurel défini par I_i^+ . Le chapitre I [reconnaissance logique] a permis de se rendre compte de l'importance de la structure des résidus pour une reconnaissance logique des défaillances.

Deux solutions relatives à la robustesse sont proposées : la recherche de solutions exactes dans un premier temps (découplage parfait) et la présentation de solutions approchées (découplage approximatif).

II - 2.1 Le découplage parfait

Cette séparation de spécifications de sensibilité se réalise en décomposant le vecteur de défaillances en deux ensembles $\underline{d} = [\underline{d}^+; \underline{d}^-]$.

Ceci suscite une décomposition identique dans les colonnes des matrices de commande de défaillances. Le i ème résidu de base s'écrit alors :

$$r_i(k+s) = \underline{w}_i^t [\text{COM}(E_i^+, F_i^+, s) \underline{d}^+(k;k+s) + \text{COM}(E_i^-, F_i^-, s) \underline{d}^-(k;k+s) + \text{COM}(G, H, s) \underline{f}(k;k+s)] \quad (4)$$

Les spécifications précisées ci-dessus imposent un ensemble de conditions pour le vecteur \underline{w}_i :

$$\underline{w}_i^t \cdot \text{COM}(E_i^-, F_i^-, s) = \underline{0} \quad (5a)$$

$$\underline{w}_i^t \cdot \text{COM}(G, H, s) = \underline{0} \quad (5b)$$

$$\underline{w}_i^t \cdot \text{COM}(E_i^+, F_i^+, s) \neq \underline{0} \quad (6)$$

Ceci est un ensemble d'équations linéaires que l'on doit résoudre. Toutefois, les conditions nécessaires permettant de vérifier les spécifications ci-dessus ont été discutées par Gertler [Ger89]. Il montre que si le vecteur de mesure est de dimension m , seulement $(m-1)$ perturbations (composantes de \underline{f}) pouvaient voir leur influence dynamique complètement annulée.

En effet, en supposant que $\text{OBS}[s]$ soit de rang plein colonne, la dimension de l'Espace de Parité est de $m(s+1)-n$. Pour annuler l'influence dynamique de k éléments de \underline{d} ou de \underline{f} ,

chaque vecteur ligne de la matrice de projection doit être orthogonale à $k(s+1)$ vecteurs colonnes. En les supposant indépendants, le sous-espace de l'espace de Parité qui leur est orthogonal est de rang $(s+1)(m-k)-n$. La solution de ce problème existe donc si la dimension est positive, c'est à dire si $m > k$ ou $k \leq m-1$.

Le découplage parfait peut être réalisé pour un nombre de perturbations ou de défaillances inférieures ou égal à $(m-1)$. Si cette condition est vérifiée, on peut réaliser un découplage par rapport à certaines défaillances et perturbations. Il faut enfin s'assurer que la structure désirée est bien obtenue, c'est à dire que l'influence des événements de I_i^+ est bien différente de 0.

L'influence de chaque élément \underline{d}_i , est donnée par les matrices $E_{i,l}^+$ et $F_{i,l}^+$ et il s'agit de vérifier que $\underline{w}_i^t \cdot \text{COM}(E_i^+, F_i^+, s) \neq 0$

Dans le cas contraire, le sous-espace engendré par la matrice $\text{COM}(E_i^+, F_i^+, s)$ est inclus dans celui engendré par $[\text{OBS}[s]; \text{COM}(E_i^-, F_i^-, s)]$. Il n'y a donc pas de solutions au problème du découplage parfait.

II -2.2 Le découplage approximatif

L'absence de solutions au problème du découplage parfait montrent que celui-ci est une contrainte trop forte. Dès lors, des solutions faisant appel à des procédures d'optimisation ont été proposées pour atteindre un compromis qui se rapproche au mieux de la structure théorique [Fra91], [Cas93].

Le résidu de parité peut s'écrire en séparant toutes les défaillances et le bruit :

$$r_i(k+s) = \underline{w}_i^t \cdot \left[\sum_j \text{COM}_{j^+} \underline{d}_{i,j}(k;k+s) + \sum_j \text{COM}_{j^-} \underline{d}_{i,j}(k;k+s) + \text{COM}(F_v, G_v, s) \underline{v}(k;k+s) \right]$$

On a donc fait apparaître l'influence de chaque terme pouvant affecter la valeur du résidu avec en supplément l'influence du bruit dans le dernier terme.

Pour poser le problème de l'optimisation, il est nécessaire d'introduire une définition de la sensibilité pour chaque défaillance ou perturbation sur le résidu numéro i :

La sensibilité du résidu se définit comme :

$$s(i;j) = \frac{\underline{w}_i^t \cdot \Phi_j^\# \cdot \underline{w}_i}{\underline{w}_i^t \cdot \Phi \cdot \underline{w}_i} \quad (7)$$

, j indiquant un numéro de défaillances ou perturbations

avec $\Phi_j^\# = \sum_j (\text{COM}_j^\# \cdot \underline{\delta}(k; k+s)) \cdot (\text{COM}_j^\# \cdot \underline{\delta}(k; k+s))^t$ avec $\delta = f$ ou d

et $\Phi = \text{COM}(F_v, G_v, s) \cdot \Sigma \cdot \text{COM}(F_v, G_v, s)^t$, Σ étant la variance du bruit.

Cette définition s'interprète comme la sensibilité d'un résidu par rapport à une défaillance normalisée par rapport au bruit. Cette sensibilité est calculée par rapport à des défaillances caractéristiques telle que l'entrée de défaillance en impulsion et l'entrée constante d'amplitude donnée.

Soit I_i^+ l'ensemble des numéros des défaillances qui devront affecter le résidu, I_i^- l'ensemble des numéros des défaillances et perturbations qui ne devront pas influencer les résidus.

La position du problème est la suivante :

Il s'agit de minimiser $s(i;j) \forall j \in I_i^-$,

et de maximiser $s(i;j) \forall j \in I_i^+$.

Pour pouvoir résoudre le problème, il faut se ramener à des critères de sensibilité et de robustesse globales. Parmi les différentes manières de les définir, nous avons choisi les moyennes ce qui donne :

$$\rho(r_i) = \frac{1}{\text{card}(I_i^-)} \cdot \sum_{j \in I_i^-} s(i; j)$$

$$\sigma(r_i) = \frac{1}{\text{card}(I_i^+)} \cdot \sum_{j \in I_i^+} s(i; j)$$

Ces sensibilités globales peuvent se résumer sous une expression plus compacte :

$$\rho(r_i) = \frac{\underline{w}_i^t \cdot \Phi^- \cdot \underline{w}_i}{\underline{w}_i^t \cdot \Phi \cdot \underline{w}_i}$$

$$\sigma(r_i) = \frac{\underline{w}_i^t \cdot \Phi^+ \cdot \underline{w}_i}{\underline{w}_i^t \cdot \Phi \cdot \underline{w}_i}$$

$$\text{avec } \Phi^- = \frac{1}{\text{card}(I_i^-)} \cdot \sum_{j \in I_i^-} \Phi_j^-$$

$$\text{et } \Phi^+ = \frac{1}{\text{card}(I_i^+)} \cdot \sum_{j \in I_i^+} \Phi_j^+$$

D'après les dernières expressions, le problème revient donc à minimiser ρ et maximiser σ sous la contrainte $\underline{w}_i^t \cdot \Phi \cdot \underline{w}_i = 1$.

Cet ensemble de solutions est le lieu des solutions Pareto optimales. Les solutions appartenant à ce lieu sont toutes équivalentes par rapport au problème posé. Des points particuliers de ce lieu ont été développées, en particulier Frank a utilisé le critère suivant

[Fra91] :

$$\min_{W_i \in P} \frac{w_i^f \cdot \Phi^- \cdot w_i}{w_i^f \cdot \Phi^+ \cdot w_i}$$

qui constitue sur le lieu le point de tangence avec une droite passant par l'origine.

Remarques :

- Cette approche introduit une sensibilité globale par rapport à un ensemble de défaillances et il n'est pas du tout tenu compte de l'importance relative des défaillances à l'intérieur d'un ensemble.

- Par ailleurs, un inconvénient majeur de cette approche est qu'elle suppose une forme donnée du vecteur de défaillances qui a priori n'est pas connu. On ne sait pas si dans le cas d'une défaillance de forme différente, l'optimum obtenu est adéquat. On pourrait même imaginer qu'une défaillance de dynamique différente aurait du être décelée et qu'elle ne l'est pas car elle affecte trop peu la valeur du résidu. L'optimisation devrait donc être réalisée indépendamment de l'allure de la défaillance sinon on s'oriente vers des résidus spécialisés pour chaque forme de défaillance.

- Enfin, ceci s'adresse uniquement à des défaillances additives indépendantes et en aucun cas, cette approche peut s'appliquer à des défaillances multiplicatives, ne serait-ce que parce que les sensibilités vont dépendre des entrées.

II - 3 Résidus directionnels [Ger93a] [Ger93b]

La recherche de résidus directionnels sera présentée dans le formalisme de la transformée en z tel qu'il a été développé par Gertler.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux défaillances additives indépendantes [Ger93b].

La forme d'évaluation des résidus de base peut s'exprimer par :

$$r_0(z) = V(z) \underline{d}_a(z).$$

Des résidus optimisés peuvent être recherchés par l'intermédiaire de la matrice polynomiale $W(z)$:

$$r(z) = W(z) V(z) \underline{d}_a(z) \tag{8}$$

L'objectif des résidus directionnels est que quelle que soit la dynamique de la

défaillance \underline{d}_{aj} , elle provoque une évolution de ce vecteur dans une direction Φ_j de l'espace R^m (avec un modèle présentant m relations entrées-sorties).

Dans le cas de fautes additives indépendantes, la condition de direction des défaillances se traduit par :

$$W(z) v_j(z) = \phi_j \sigma_j(z), \quad v_j(z) \text{ désignant la } j\text{ème colonne de la matrice } V(z).$$

$$\text{Soit pour l'ensemble des défaillances : } W(z) V(z) = \Phi \cdot \text{diag}[\sigma_1(z), \sigma_2(z), \dots, \sigma_u(z)]$$

Si le nombre de défaillances est égal au nombre de RRA ($u = m$) et $V(z)$ est de rang plein, alors on peut choisir $\Phi = I$ et des dynamiques de défaillances $\sigma(z)$ identiques, ce qui donne :

$$\underline{r}(z) = \sigma(z) \cdot \underline{d}_a(z) \tag{9}$$

Remarque : cette approche revient à des résidus structurés particuliers. Elle est un cas particulier du découplage parfait présenté précédemment dans le domaine temporel.

Pour pouvoir imposer un ensemble de résidus directionnels, Gertler montre qu'il faut garantir que $V(z)$ soit inversible. Cette condition impose que le rang de la matrice système

$$\Omega(z) \text{ par rapport à la défaillance soit supérieur à } n+u : \Omega(z) = \begin{bmatrix} zI - A & E \\ -C & F \end{bmatrix}$$



Dans le cas où $V(z)$ n'est pas de rang plein, seules μ directions indépendantes ($\mu = \text{rang } V(z)$) peuvent être obtenues pour μ défaillances.

Dans un deuxième temps, Gertler [Ger93a] présente une méthode de génération de résidus directionnels robustes aux perturbations et spécialisés aux fautes additives indépendantes puis aux fautes multiplicatives.

Le découplage parfait des résidus directionnels est envisagé dans les deux cas : $\underline{d}_a^+(t)$ et $\Delta\theta^+$ (μ défaillances). On désire donc obtenir un vecteur de résidus directionnels de la forme :

$$\underline{r}(k/\underline{d}_a^+) = \Phi_j c_j(z) \underline{d}_a^+ \quad \text{pour } j = 1, \dots, \mu$$

et dans le cas multiplicatif :

$$\underline{r}(k/\Delta\theta^+) = \Phi_j \cdot \Delta\theta^+ \quad \text{pour } j = 1, \dots, \mu$$

ce qui introduit des conditions du type pour le i ème résidu dans le cas additif:

$$\underline{w}_i^t(z) [V_-(z) V_{d+}(z)] = [0 \dots \dots 0 \phi_{i1} c_1(z) \dots \phi_{i\mu} c_\mu(z)] \tag{10}$$

Cette condition regroupe les conditions de découplage parfait développées précédemment (5) sous forme temporelle et spécifie en supplément les contraintes de direction pour les résidus. Les mêmes relations sont étendues au cas des défaillances

multiplicatives :

$$\underline{w}_i^t(k) [E.(k) E_+(k)] = [0.....0 \Phi_{i1}..... \Phi_{i\mu}] \quad (11)$$

Ces conditions traduisent une indépendance par rapport aux perturbations et une sensibilité à un ensemble de fautes donnée pour les deux types de défaillances. Ces contraintes pour défaillances multiplicatives conduisent à un calcul en ligne des vecteur de projection.

Les conditions de rang pour qu'un tel vecteur de projection puisse exister sont :

$$\text{rang } V.(z) \leq m - \mu \quad \text{respectivement} \quad \text{rang } E.(k) \leq m - \mu \quad (12)$$

$$\text{rang } [V.(z) V_{d+}(z)] = \text{rang } V.(z) + \mu \quad (13a)$$

$$\text{respectivement} \quad \text{rang } [E.(k) E_+(k)] = \text{rang } E.(k) + \mu \quad (13b)$$

Il propose ensuite deux techniques de découplage optimal des résidus directionnels dans le cas où ces conditions ne sont pas satisfaites, l'une utilisant une décomposition de la matrice de perturbation en valeurs singulières, l'autre reposant sur un indice de performance de moindres carrés à minimiser. Elles aboutissent aussi à un calcul en ligne des vecteurs de projection.

Remarques :

- L'apport de cet article vient de la considération globale de défaillances multiplicatives. La conception de résidus optimaux pour défaillances multiplicatives doit être réalisée en ligne, ce qui signifie que la projection des résidus de base dépend du temps et des commandes. Cette remarque rejoint étroitement la génération des résidus d'identification du chapitre II que nous avons décrit comme des projections dépendant du temps des résidus de base. Il a aussi le mérite d'intégrer un découplage par rapport à des perturbations multiplicatives qui représentent très bien en général les erreurs de modélisation.

- Cependant, on peut lui reprocher de considérer en bloc soit des défaillances multiplicatives et perturbations multiplicatives soit des défaillances et perturbations additives indépendantes. Il n'est pas du tout envisagé d'approches mixtes où défaillances et perturbations des deux types se côtoieraient. De plus, il faut avouer qu'on ne connaît pas le comportement des défaillances multiplicatives sur des résidus pour défaillances additives indépendantes et vice-versa.

- Enfin, il convient de remarquer que l'approche pour défaillances multiplicatives développée par Gertler est liée au voisinage des paramètres nominaux (cf. I - 5.1 linéarisation

du modèle) ce qui limite considérablement la portée de la solution donnée. Les résidus du chapitre II, en revanche, étaient utilisables quelle que soit la valeur des paramètres.

II - 4 Les horizons d'observation particuliers

Cette étude a deux motivations :

- Si on étudie l'espace de parité par rapport à un capteur, les conditions d'existence de ces résidus fournissent des horizons d'observabilité différents pour chaque capteur. Si on envisage maintenant un espace de parité par rapport à l'ensemble des capteurs, il est d'usage de considérer un horizon commun qui vaut le maximum des horizons d'observabilité de chaque capteur. On peut donc s'interroger sur l'utilité de cet horizon commun.

- La deuxième motivation est de dégager un certain nombre de propriétés liées à l'espace d'observabilité global.

Nous allons maintenant étudier l'hypothèse d'horizons d'observabilité distincts pour chaque capteur.

Tout d'abord, effectuons un bref rappel concernant le nombre de RRA indépendantes d'un système multivariable à horizon fixe. Leur nombre est de :

$$N(s) = m(s+1) - \text{rg OBS}[s]$$

Si on dispose d'un système observable, alors on sait qu'à l'ordre $n-1$, $\text{rang OBS}[n-1] = n$. Le nombre de RRA devient : $N = (m-1)n$.

Si le système n'est pas observable, alors $\text{rang OBS}[n-1] < n$ et $N > (m-1)n$.

La conclusion qui découle de ces résultats est qu'il y a plus de RRA dans le cas non observable que dans le cas observable au même ordre.

On peut aussi décider de faire apparaître les matrices d'observabilité de chaque capteur.

$$\text{Obs}_s^j = [(C_j)^t \dots (C_j A^s)^t]$$

$$\text{OBS}[s] = [(\text{Obs}_s^1)^t \dots (\text{Obs}_s^m)^t]$$

Soit O_s l'espace d'observabilité associé aux vecteurs lignes de la matrice $\text{OBS}[s]$,

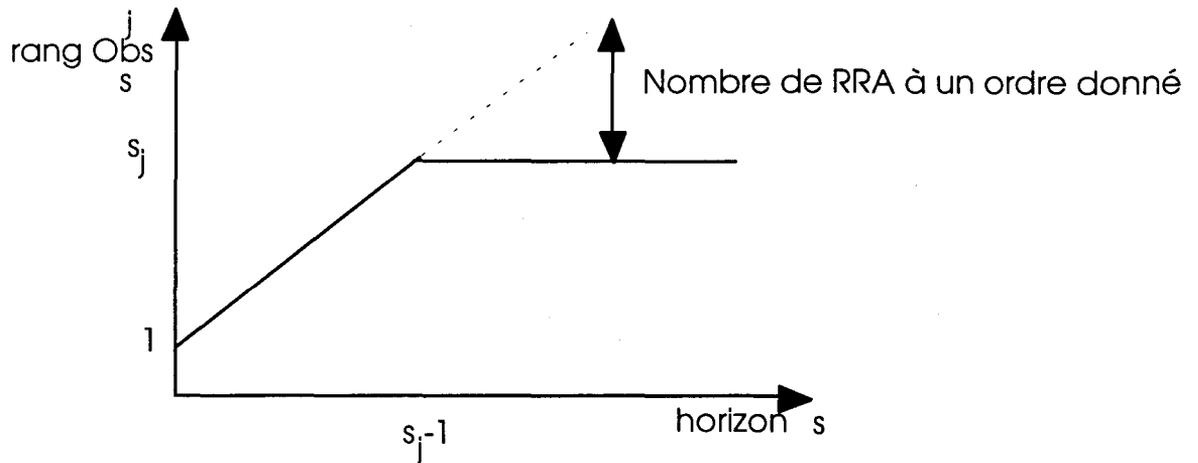
de même, O_s^j l'espace d'observabilité associé à la matrice Obs_s^j .

$$O_s = \sum_j O_s^j .$$

Par ailleurs, le théorème de Cayley Hamilton affirme l'existence pour tout j ($j = 1, \dots, m$) d'un ordre s_j tel que :

$$\begin{aligned} \text{rang Obs}_s^j &= 1+s && \text{pour } s < s_j \\ & s_j && \text{pour } s \geq s_j \end{aligned}$$

La matrice Obs_{s-1}^j de dimensions $(s_j; n)$ est la matrice d'observabilité du capteur j et de rang maximum. On peut donner une représentation du rang de la matrice d'observabilité d'un capteur en fonction de l'horizon particulier :



La différence entre le rang de Obs_s^j et la droite $(s+1)$ en pointillés vaut le nombre de RRA d'auto-redondance (ne faisant intervenir que ce capteur). Il existe donc un horizon particulier s_j pour chaque capteur qui permet de décrire la partie observable de l'espace d'état avec un seul capteur.

On se propose d'étudier l'existence d'intersection entre les espaces d'observabilité de chaque capteur.

Au rang 0, on suppose la proposition vraie : ceci signifie que les capteurs sont indépendants (pas de RRA statique).

Il existe une procédure qui conserve uniquement dans $OBS[n-1]$ les lignes indépendantes des précédentes en parcourant celles-ci dans le sens croissant. Une fois ces lignes éliminées, elle peut être réordonnée pour faire apparaître les séquences du type :

$$(C_j)^t (C_j A)^t \dots (C_j A^{n_j-1})^t$$

où le nombre n_j est relatif au capteur numéro j .

Par cette procédure, on construit donc une matrice de rang maximum formée de certaines lignes de la matrice d'observabilité.

$[n_1, \dots, n_m]$ sont appelés les indices structuraux du système.

Remarque : L'ensemble des travaux situent l'ordre structural comme une définition unique parce qu'il associe l'ordre de la suite $(1 \dots m)$ au modèle. Cela signifie que les capteurs sont numérotés une fois pour toutes par leur place dans la matrice C .

Si le système est observable, alors on construit une matrice carrée de rang n , ce qui

implique la relation pour les indices structuraux : $\sum_{i=1}^m n_i = n$

Si le système n'est pas observable, on a simplement l'inégalité suivante : $\sum_{i=1}^m n_i < n$.

On peut de plus s'interroger sur la relation qui existe entre les nombres s_j et les indices structuraux.

Lemme 1:

les indices structuraux vérifient la relation : $n_j \leq s_j$ (14)

Preuve : on sait que $O_{s_j-1}^j$ est l'espace d'observabilité de dimension maximum pour le capteur j , donc on en déduit que :

$$O_{n_j-1}^j \subset O_{s_j-1}^j$$

ceci signifie que : $n_j - 1 \leq s_j - 1$ soit :

$$n_j \leq s_j$$

Enonçons maintenant un deuxième lemme, corollaire du précédent.

Lemme 2 : Une condition nécessaire et suffisante pour que les espaces d'observabilité de chaque capteur soient distincts est que $n_j = s_j \forall j$.

Preuve de la condition nécessaire : Si les espaces d'observabilité sont distincts, alors

$$\bigcap_j O_{s_j-1}^j = \underline{0}$$

$$\text{or rang OBS} = \sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m s_i - \text{rang} \left\{ \bigcap_j O_{s_j-1}^j \right\}$$

On sait d'après l'hypothèse que $\text{rang} \left\{ \bigcap_j O_{s_j-1}^j \right\} = 0$

$$\text{donc : } \sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m s_i \quad \sum_{i=1}^m n_i - s_i = 0$$

La dernière somme est un ensemble de termes de même signe qui s'annule si tous les termes sont nuls, soit $n_j = s_j \forall j$.

Condition suffisante :

$$\text{Supposons que } n_j = s_j \forall j. \text{ rang OBS} = \sum_{i=1}^m n_i = \sum_{i=1}^m s_i - \text{rang} \left\{ \bigcap_j O_{s_j-1}^j \right\}$$

D'après l'hypothèse, on en déduit $\text{rang} \left\{ \bigcap_j O_{s_j-1}^j \right\} = 0$

donc les espaces d'observabilité de chaque capteur sont distincts.

Dans le cas observable, on vérifie donc que $\sum_{i=1}^m s_i \geq n$.

En multivariable, il existe donc des horizons particuliers $[n_1 \dots n_m]$ qui caractérisent complètement le couple (A,C) et qui sont invariants par changement d'état.

$OBS[n_1-1, \dots, n_m-1] = [(Obs_{n_1-1})^1 \dots (Obs_{n_m-1})^m]^t$ est de rang maximum (n si le système est observable). A ce rang, il n'existe pas de vecteur de projection et par conséquent pas de relation de redondance analytique.

Il existe une RRA dès lors que l'on incrémente l'un des indices de la matrice d'observabilité. Il existe donc n choix possibles d'horizons pour obtenir une RRA. Par exemple, l'incrémentement de n_1 fournit les horizons suivants : $[n_1, n_2-1, \dots, n_m-1]$.

Par analogie avec la discussion pour un capteur, on définit alors une sorte d'horizon généralisé pour les résidus faisant intervenir des horizons spécifiques : $H = \sum_{i=1}^m n_i + 1$

Le nombre de lignes de la matrice d'observabilité ainsi constituée est $\sum_{i=1}^m n_i + 1$. Son rang

vaut $\sum_{i=1}^m n_i$. Le nombre de RRA est donc $N = \sum_{i=1}^m n_i + 1 - \sum_{i=1}^m n_i = 1$

On se rend compte que l'incrémentement de n'importe quel indice fournit une seule RRA.

Si le système est observable, $H = n+1$ pour la première RRA.

Si le système n'est pas observable, $\sum_{i=1}^m n_i = v$,

et $H = v + 1 < n + 1$

L'horizon généralisé de la première RRA est plus faible dans le cas non observable.

Remarque : on peut s'interroger sur la capacité de surveiller par le biais d'un système non observable. Puisqu'une partie de l'état n'est pas accessible, on peut imaginer que les résidus ne sont pas sensibles aux défaillances liées à cet état. C'est aussi une autre façon de générer des résidus sensibles à certaines défaillances et robustes à d'autres.

III L'identification multivariable

Dans cette section, nous introduisons les principes fondamentaux de l'identification multivariable. Cependant, notre intention n'est pas de recenser toutes les méthodes d'identification multivariable. Dans un premier temps, nous présentons les grandes lignes du problème puis nous développons deux structures particulières dont l'une est dérivée des méthodes monovariées et l'autre fait appel à des notions d'horizons spécifiques.

III - 1 Les problèmes généraux

L'identification des systèmes consiste en fait en trois sous-problèmes :

- Le premier est la sélection de modèles qui s'accompagne en général de l'identification structurelle. Elle vise, par utilisation directe des entrées-sorties, à trouver un ensemble d'indices (indices structuraux) qui décrivent la structure (ce qui ne se limite pas à l'ordre du système). Il convient de noter à ce sujet que les modèles paramétriques donnent de grosses erreurs lorsque l'ordre ou la structure ne correspond pas au processus réel. On comprend donc l'importance de cette phase.

L'identification structurelle a été cependant peu développée. On peut citer dans ce cadre que Tsé et Weinert [Tse75] ont traité ce problème délicat en présence de bruit mais sur un modèle sans entrée de commande ensuite, Guidorzi [Gui75] a proposé une méthode d'identification structurelle en l'absence de bruit.

- Le second problème est l'identification paramétrique. Beaucoup d'auteurs ont envisagé ce problème que ce soit par le biais de formes canoniques [Gui75] ou pseudo-canoniques [Glo84]. L'avantage de ces formes particulières est qu'elles minimisent le nombre de paramètres à estimer [Sin79].

Il faut cependant mentionner que certaines approches considèrent l'état initial nul ce qui n'est pas toujours réaliste. D'autres approches intègrent l'état initial comme un paramètre à estimer [Hom92].

- Enfin, pour savoir si le modèle estimé est adéquat pour l'objectif final, un test de validation doit être réalisé sur le modèle estimé.

Notre travail se situe dans la phase d'estimation de paramètres. Pour cela, nous supposons connus a priori l'ensemble des paramètres structuraux. Nous n'aborderons donc pas la question de leur identification.

III - 2 Une structure particulière

Notre objectif est de générer un ensemble de relations entrées-sorties dérivées du modèle de comportement et ayant des propriétés particulières.

En monovariante, la sortie au dernier instant s'exprime sous une forme linéaire des paramètres analytiques. Par analogie, nous cherchons à étendre cette relation au vecteur des sorties par le biais d'un vecteur de paramètres généralisé.

III -2.1 Obtention des relations entrées-sorties

On considère donc un système observable et commandable représenté par un modèle d'état. Le passage à la matrice de transfert conserve uniquement la partie observable et commandable du système. Elle s'écrit :

$$\underline{Y}(z) = [C (z I - A)^{-1} B + D] \underline{U}(z)$$

Ces relations sont les transformées en z des RRA temporelles. Chaque terme de la matrice de transfert est une fraction rationnelle polynomiale en z . Cette matrice peut s'exprimer en fonction d'un dénominateur commun à tous ses termes.

$$\text{En effet, } (z I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(zI - A)} \cdot \text{adj}(zI - A)$$

$$\text{Soit } d(z) = \det(z I - A) \text{ et } \text{adj}(z I - A) = \tilde{A}$$

La relation vectorielle précédente peut alors s'écrire :

$$d(z) \underline{Y}(z) = [C \tilde{A} B + D d(z)] \underline{U}(z)$$

Elle se résume sous la forme générique : $d(z) \underline{Y}(z) = K(z) \underline{U}(z)$

avec $K(z) = [C \tilde{A} B + D d(z)]$ une matrice polynomiale.

Examinons maintenant quelques propriétés du polynôme caractéristique $d(z)$.

$$d(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

$$\text{- D'après la définition de } d(z), d(0) = (-1)^n \det A = a_0$$

- En considérant les termes de la diagonale de $(zI - A)$, il apparaît que $a_n = 1$.

La même approche peut être menée sans restriction à partir du modèle d'espace d'état. Cette fois, on utilise une technique de projection plus classique avec contraintes. Le but est d'exprimer l'ensemble des RRA sous la forme synthétique suivante :

$$\underline{y}(k) - L \underline{y}(k-n;k-1) - K \underline{u}(k-n;k) = \underline{0}$$

Cette condition se traduit à l'aide de la forme synthétique suivante :

$$[-L; I] \underline{y}(k-n;k) - K \underline{u}(k-n;k) = \underline{0}$$

L'utilisation de la forme générale de la sortie d'un modèle d'état :

$$\underline{y}(k-n;k) = \text{OBS}[n] \underline{x}(k-n) + \text{COM}(B) \underline{u}(k-n;k)$$

nous donne l'ensemble des relations vectorielles en multipliant à gauche par une matrice de projection W : $W \underline{y}(k-n;k) = W \text{OBS}[n] \underline{x}(k-n) + W \text{COM}(B) \underline{u}(k-n;k)$

Elles deviennent des RRA si W vérifie $W \text{OBS}[n] = 0$

ce qui induit leur forme générale : $W \underline{y}(k-n;k) = W \text{COM}(B) \underline{u}(k-n;k)$

En comparant avec l'objectif à atteindre, ceci impose à W la forme suivante :

$$W = [-L; I_m] \tag{15}$$

On sait par ailleurs que A est solution de son polynôme caractéristique :

$$a_0 I_m + a_1 A + \dots + A^n = 0$$

En multipliant par la matrice de mesure, on obtient :

$$a_0 C + \dots + a_{n-1} C A^{n-1} + C A^n = 0 \text{ qui peut aussi se mettre sous la forme :}$$

$$[a_0 I_m, \dots, a_{n-1} I_m, I_m]. \text{OBS}[n] = 0$$

La matrice de gauche de la dernière relation est donc une matrice de projection W qui vérifie la forme (15).

$$L \text{ s'exprime alors : } L = [-a_0 I_m; -a_1 I_m; \dots; -a_{n-1} I_m]$$

L'écriture des RRA se résume alors sous la forme unifiée suivante :

$$\underline{y}(k) = -a_{n-1} \underline{y}(k-1) - \dots - a_0 \underline{y}(k-n) + K \underline{u}(k-n;k) \tag{16}$$

L'avantage de ce modèle est qu'il est vectoriel et il offre autant de RRA que de capteurs. Ces relations sont dites à structure diagonale capteur dans le sens où prises séparément elles ne font intervenir qu'un seul capteur.

D'autre part, ces équations sous cette forme permettent une identification de paramètres et de plus peuvent fournir des résidus de l'espace de Parité.

Remarques :

- L'ordre de ces relations structurées dans le cas d'un horizon commun est n , cependant on pourrait sans doute trouver des relations d'ordre inférieur [horizons d'observation]. En effet, pour un horizon commun, l'ordre minimum de ces relations correspond à $\max_{j \in \{1..m\}} (s_j)$

qui est inférieur ou égal à n . Au rang n , on est donc certain d'obtenir des structures diagonales capteur.

- On peut obtenir des résidus à structure diagonale capteur en considérant un horizon particulier s_j pour chaque capteur.

- On a vu que si le système n'est pas observable, la même structure est obtenue pour des ordres inférieurs (horizon commun plus faible).

- Le nombre de paramètres qui apparaissent dans le modèle vectoriel est $(n+1)r + m + n + (m-1)n$ paramètres sont communs à l'ensemble des relations.

III -2.2 Estimation paramétrique

Le modèle vectoriel (16) peut être considéré comme m équations indépendantes. Dès lors, l'estimation paramétrique est réalisée équation par équation grâce à la technique des moindres carrés simples. Cette technique est simplement une extension de celle utilisée en monovariable.

Le modèle (16) fait alors apparaître m vecteurs de paramètres $\underline{\theta}_1 \dots \underline{\theta}_m$ de dimensions respectives $q_1 \dots q_m$ ($q_i \leq (n+1)r + m \forall i \in \{1 \dots m\}$).

$$y_1(k) = \underline{z}_1^t(k-n;k) \underline{\theta}_1$$

$$y_2(k) = \underline{z}_2^t(k-n;k) \underline{\theta}_2$$

.....

$$y_m(k) = \underline{z}_m^t(k-n;k) \underline{\theta}_m,$$

Soit sur un horizon d'observation q :

$$\underline{y}_1(k;k+q) = Z_1 \underline{\theta}_1$$

$$\underline{y}_2(k;k+q) = Z_2 \underline{\theta}_2$$

.....

$$\underline{y}_m(k;k+q) = Z_m \underline{\theta}_m$$

On dispose sous cette forme de m systèmes MISO indépendants. L'identification séparée de chaque relation donne :

$$\hat{\underline{\theta}}_i(k+q) = (Z_i^t Z_i)^{-1} Z_i^t \underline{y}(k;k+q) \quad (17)$$

Afin de mettre ces relations sous une forme matricielle globale pour l'identification,

définissons le vecteur étendu de paramètres $\underline{\theta} = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \\ \dots \\ \underline{\theta}_m \end{bmatrix}$

Grâce à cette définition, on aboutit à une écriture simplifiée :

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1(k; k+q) \\ \underline{y}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{y}_m(k; k+q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \\ \dots \\ \underline{\theta}_m \end{bmatrix} = Z \underline{\theta}$$

On obtient donc par estimation des moindres carrés simples l'estimation des paramètres :

$$\hat{\underline{\theta}}(k+q) = (Z^t Z)^{-1} Z^t \underline{y}(k; k+q) \quad (18)$$

Ce résultat exprimé sous une forme unifiée (18) est simplement le résultat de l'estimation de chaque équation indépendante (17).

Inconvénients :

- En examinant la structure des relations de départ, on s'aperçoit que certains pôles communs peuvent intervenir dans plusieurs équations ce qui entraîne une identification multiple de ces coefficients. Cette redondance d'information n'est pas forcément intéressante.

II - 2.3 Estimation par approche globale

Nous allons utiliser le modèle précédent de façon globale et introduire des contraintes d'égalité pour les coefficients identiques.

Les contraintes sur le vecteur des paramètres global peuvent s'écrire de façon unique une fois définie le vecteur minimum de paramètres $\underline{\theta}_m$:

$$\underline{\theta}_g = \Gamma \underline{\theta}_m \quad (19)$$

Γ de dimensions ([(n+1)r+n]m, (n+1)rm+n)

Γ est une matrice de structure qui ne contient que des 1 ou 0. Γ est de rang plein colonne car les éléments de $\underline{\theta}_m$ sont tous indépendants.

Le vecteur de paramètres minimum peut s'exprimer de manière non unique en fonction du vecteur de paramètres global $\underline{\theta}_g$:

$$\underline{\theta}_m = \Pi \underline{\theta}_g \quad (20)$$

Π de dimensions ((n+1)rm+n, [(n+1)r+n]m)

En remplaçant (20) dans (19), on obtient un ensemble de relations de contraintes :

$$(I - \Gamma.\Pi) \underline{\theta}_g = \underline{0} \quad (21)$$

L'ensemble de matrices de contraintes M' vérifiant la relation (21) est :

$$M' = (I - \Gamma.\Pi) \quad (22)$$

Du fait de la non unicité de Π , la matrice M' n'est pas définie de façon unique.

Dans cette matrice, il existe des lignes identiquement nulles que l'on va éliminer pour ne garder que les contraintes non triviales. Soit M cette nouvelle matrice (de rang plein ligne).

Cependant, en utilisant les relations (19) et (21), on déduit des propriétés de la matrice M :

$$M \Gamma = 0 \quad (23)$$

Les vecteurs lignes de M et les vecteurs colonnes de Γ définissent deux espaces supplémentaires et orthogonaux de l'espace paramétrique.

Le problème s'écrit comme une minimisation sous contraintes :

$$\min_{\underline{\theta}_g} \frac{1}{2} (\underline{Y} - Z \underline{\theta}_g)^t \cdot (\underline{Y} - Z \underline{\theta}_g) \text{ sous la contrainte } M \cdot \underline{\theta}_g = \underline{0}$$

où \underline{Y} désigne le vecteur des sorties sur une fenêtre de taille q .

Il se résout en utilisant le Lagrangien qui s'écrit :

$$L(\underline{\theta}_g, \underline{\lambda}) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Y} - Z \underline{\theta}_g)^t \cdot (\underline{Y} - Z \underline{\theta}_g) + \underline{\lambda}^t M \underline{\theta}_g$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à $\underline{\theta}_g$ et $\underline{\lambda}$ s'annule pour les paramètres optimaux.

$$-Z^t \underline{Y} + Z^t Z \hat{\underline{\theta}}_g + M^t \cdot \underline{\lambda} = \underline{0}$$

$$M \hat{\underline{\theta}}_g = \underline{0}$$

Ces relations peuvent se résumer sous forme vectorielle :

$$\begin{bmatrix} Z^t \cdot Z & M^t \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{\theta}}_g \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^t \underline{Y} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Une autre expression analytique du résultat suggérée par Darouach est décrite en Annexe.

La matrice de gauche est symétrique réelle donc son inverse si elle existe est aussi symétrique réelle. L'inverse si il existe est de la forme :

$$\begin{bmatrix} Z^t \cdot Z & M^t \\ M & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C & D^t \\ D' & E' \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{bmatrix} Z^t \cdot Z & M^t \\ M & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C & D^t \\ D' & E' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

On obtient alors les relations suivantes :

$$C' (Z^t Z) + D^t M = I \quad (25a)$$

$$M C' = 0 \quad (25b)$$

Nous n'écrivons pas les relations liant les autres matrices.

La structure de la matrice à inverser impose que C' est une matrice symétrique réelle.

Comme les vecteurs lignes de M et les vecteurs colonnes de Γ définissent deux espaces supplémentaires et orthogonaux de l'espace paramétrique, les vecteurs colonne de C' appartiennent à l'espace engendré par Γ :

$$C' = \Gamma B'$$

En utilisant la propriété de symétrie, il vient :

$$C'^t = B'^t \Gamma^t = C'$$

De ces deux dernières relations, il ressort la forme générale que doit prendre la matrice C' :

$$C' = \Gamma S \Gamma^t \text{ avec } S \text{ matrice symétrique réelle} \quad (26)$$

La recherche de l'inverse si il existe donne en utilisant (25a) :

$$\Gamma S \Gamma^t (Z^t Z) + D^t M = I$$

En multipliant (26) à droite par Γ , on trouve :

$$\Gamma S \Gamma^t (Z^t Z) \Gamma = \Gamma \quad (27)$$

En multipliant (27) à gauche par Γ^t :

$$\Gamma^t \Gamma S \Gamma^t (Z^t Z) \Gamma = \Gamma^t \Gamma \quad (28)$$

Comme Γ est de rang plein colonne, $\Gamma^t \Gamma$ est inversible. En multipliant (28) à gauche par l'inverse de cette matrice, on obtient la relation :

$$S \Gamma^t (Z^t Z) \Gamma = I \quad (29a)$$

En transposant cette dernière relation, la relation symétrique peut être obtenue :

$$\Gamma^t (Z^t Z) \Gamma S = I \quad (29b)$$

Ces deux relations permettent de conclure que S est inversible si et seulement si $\Gamma^t (Z^t Z) \Gamma$ est inversible. Cette condition d'existence a été comparée en Annexe à celle relative à la solution proposée par Darouach. J'y montre que ces deux conditions sont équivalentes.

La détermination de S est donc immédiate :

$$S = (\Gamma^t (Z^t Z) \Gamma)^{-1}$$

et la matrice C' s'écrit alors :

$$C' = \Gamma (\Gamma^t (Z^t Z) \Gamma)^{-1} \Gamma^t \quad (30)$$

De l'expression de C', nous pouvons en déduire l'expression des paramètres optimaux :

$$\hat{\underline{\theta}}_g = C' Z^t \underline{Y} = \Gamma (\Gamma^t Z^t Z \Gamma)^{-1} \Gamma^t Z^t \begin{bmatrix} \underline{y}_1(k; k+q) \\ \underline{y}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{y}_m(k; k+q) \end{bmatrix} \quad (31)$$

Du fait de l'unicité de la solution dans les mêmes conditions, l'expression analytique de la solution développée par Darouach (Annexe) et celle de ce paragraphe sont équivalentes.

En conclusion, en considérant un horizon global, on augmente artificiellement le nombre de paramètres à identifier. Une autre approche est de chercher une méthode qui donne un nombre minimal de paramètres à identifier.

III - 3 Utilisation d'une forme canonique d'observabilité

Le paragraphe précédent a mis en évidence certaines lacunes de la méthode d'identification adoptée vis à vis de la structure du modèle en considérant un horizon commun à chaque capteur. L'objet du développement est d'associer à chaque sortie l'horizon d'observation minimum. Celui-ci vise à élaborer une classe de modèles dont la représentation d'état est équivalente à sa représentation entrées-sorties. On pourra identifier les coefficients du modèle entrées-sorties et retourner au modèle d'état de façon biunivoque. D'autres méthodes d'identification peuvent être envisagées en particulier les méthodes d'identification par projection dans un sous espace [DeM95].

III - 3.1 Recherche d'une représentation adaptée [Gui75]

L'objectif est de trouver une représentation d'état adaptée aux contraintes que l'on s'est fixées.

On considère un modèle d'espace d'état quelconque :

$$\underline{x}^\circ(k+1) = A \underline{x}^\circ(k) + B \underline{u}(k)$$

$$\underline{y}(k) = C^\circ \underline{x}^\circ(k) + D^\circ \underline{u}(k)$$

$$A^\circ(n \times n), B^\circ(n \times r), C^\circ(m \times n)$$

$$C^o \text{ sera décomposée par blocs : } C^o = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^{\circ t} \\ \underline{c}_2^{\circ t} \\ \dots \\ \underline{c}_m^{\circ t} \end{bmatrix}$$

On cherche une matrice de passage destinée à un changement de coordonnées.

La matrice OBS[n] est décomposée de manière à faire apparaître les termes

$$T_i^k = \underline{c}_i^{\circ t} A^{\circ k}$$

On construit une matrice de passage T en ne gardant que les termes tels que $k < n_i$ (n_i ordre structurel associé au capteur $\underline{c}_i^{\circ t}$, cf II - 4). La matrice T s'écrit alors :

$$T = \begin{bmatrix} T_1^0 \\ \dots \\ T_m^0 \\ T_1^1 \\ \dots \\ T_m^1 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Dans le cas où le système est observable, la relation $\sum_{i=1}^m n_i = n$ assure que la matrice T

est carrée de rang plein et donc elle peut constituer une matrice de passage. Par changement d'état ($\underline{x}(k) = T \underline{x}^o(k)$), on obtient un modèle équivalent qui a la forme suivante :

$$\underline{x}(k+1) = A \underline{x}(k) + B \underline{u}(k)$$

$$\underline{y}(k) = C \underline{x}(k) + D \underline{u}(k)$$

avec $A = \{A_{ij}\}$ définie par blocs :

A_{ii} de dimensions ($n_i \times n_i$) possède la structure bloc-compagnon

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \dots & \dots & \\ & & 0 & 1 \\ a_{ii,1} & \dots & \dots & a_{ii,n_i} \end{bmatrix} \text{ et } A_{ij} \text{ (} n_i \times n_j \text{) } A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 \\ a_{ij,1} & \dots & a_{ij,n_j} & 0 \end{bmatrix}$$

et certaines composantes du nouvel état du système sont directement mesurées par un capteur. C vérifie :

$$C_{ij} = 1 \text{ si } j = 1 + \sum_{k < i} n_k$$

$C_{ij} = 0$ sinon.

La forme globale de la matrice C est donc $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, la place du 1 étant

relative aux ordres structuraux du système. La matrice B n'a pas de forme particulière.

L'intérêt de cette décomposition est que le système global a été décomposé en m sous-systèmes interconnectés, chacun de ces sous-systèmes étant complètement observable à partir de la jème composante de la sortie.

Dans son article [Gui75], Guidorzi établit l'équivalence entre le modèle d'état et la description entrées-sorties de la forme : $P(z) \underline{y}(k) = Q(z) \underline{u}(k)$

III -3.2 Approche géométrique

Dans cette partie, nous allons utiliser cette décomposition pour trouver une forme particulière de l'Espace de Parité faisant apparaître un vecteur de paramètres de taille minimum.

En supposant les indices structuraux connus, on recherche par une approche géométrique un ensemble de relations entrées-sorties.

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

En partant de la forme obtenue en II -3.1, C peut s'écrire :

$$C = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^t & 0 & \dots & 0 \\ & \underline{c}_2^t & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & \underline{c}_m^t \end{bmatrix}$$

$\underline{c}_i^t = [1 \ 0 \dots 0]$ de dimensions $(1 \times n_i)$ est relatif au ième sous-système. B est décomposé en $B^t = [B_1^t \dots B_m^t]$ avec B_i de dimensions $(n_i \times r)$.

En observant chaque sous-système sur un horizon égal à son ordre structurel, le ième

sous-système s'écrit :

$$\underline{x}_i(k+1) = A_{ii} \underline{x}_i(k) + \sum_{j=1 \neq i}^m A_{ij} \underline{x}_j(k) + B_i \underline{u}(k)$$

$$y_i(k) = \underline{c}_i^t \underline{x}_i(k) + \underline{d}_i^t \underline{u}(k)$$

Dans cette représentation, les états externes \underline{x}_j sont donc considérés comme de simples entrées du sous-système. Donc, en posant $OBS_{ii} = OBS(A_{ii}, \underline{c}_i^t, n_i)$, la i ème sortie s'écrit sur un horizon $[k; k+n_i]$:

$$\begin{aligned} \underline{y}(k; k+n_i) = OBS_{ii} \underline{x}_i(k) + \sum_{j=1 \neq i}^m COM(A_{ij}; A_{ii}; \underline{c}_i^t; n_i) \underline{x}_j(k; k+n_i) \\ + COM(B_i; A_{ii}; \underline{c}_i^t; \underline{d}_i^t; n_i) \underline{u}(k; k+n_i) \end{aligned} \quad (32)$$

Nous allons prouver que ces matrices ont des formes bien particulières.

Proposition 1 :

La matrice $COM(B_i; A_{ii}; \underline{c}_i^t; \underline{d}_i^t; n_i)$ se met sous la forme :

$$COM(B_i; A_{ii}; \underline{c}_i^t; \underline{d}_i^t; n_i) = \begin{bmatrix} \underline{d}_i^t & 0 & \dots & 0 \\ \underline{b}_{i,1}^t & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \underline{b}_{i,n_i}^t & \dots & \dots & \underline{b}_{i,1}^t & \underline{d}_i^t \end{bmatrix}$$

Proposition 2 :

$$COM(A_{ij}; A_{ii}; \underline{c}_i^t; n_i) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{a}_{ij}^t & & & 0 \end{bmatrix}$$

Preuve commune :

On montre aisément que : $\underline{c}_i^t A_{ii}^{j-1} = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$, le 1 étant à la j ème place.

Il en découle la propriété suivante pour n'importe quelle matrice X possédant n_i lignes :

$$\underline{c}_i^t A_{ii}^{j-1} X = j\text{ème ligne de la matrice X}$$

Ce résultat général appliqué à A_{ij} et à B_i se traduit par les quatre propriétés suivantes :

$$\underline{c}_i^t A_{ii}^{k-1} A_{ij} = \underline{0}^t \quad \forall k < n_i \quad (33a)$$

$$\underline{c}_i^t A_{ii}^{n_i-1} A_{ij} = \underline{a}_{ij}^t \text{ (dernière ligne de } A_{ij}), \underline{a}_{ij}^t \text{ de dimensions } (1; n_j) \quad (33b)$$

$$\underline{c}_i^t A_{ii}^{k-1} B_i = k \text{ ème ligne de } B_i = \underline{b}_{i,k}^t \quad \forall k < n_i \quad (33c)$$

$$\underline{c}_i^t A_{ii}^{n_i-1} B_i = \text{dernière ligne de } B_i = \underline{b}_{i,n_i}^t \quad (33d)$$

Preuve 1 : La matrice de commande s'écrit :

$$\text{COM}(B_i; A_{ii}; \underline{c}_i^t; \underline{d}_i^t; n_i) = \begin{bmatrix} \underline{d}_i^t & 0 & \dots & 0 \\ \underline{c}_i^t \cdot B_i & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \underline{c}_i^t \cdot A_{ii}^{n_i-1} \cdot B_i & \dots & \dots & \underline{c}_i^t \cdot B_i \quad \underline{d}_i^t \end{bmatrix}$$

En utilisant (33c) et (33d), on trouve la proposition 1:

$$\text{COM}(B_i; A_{ii}; \underline{c}_i^t; \underline{d}_i^t; n_i) = \begin{bmatrix} \underline{d}_i^t & 0 & \dots & 0 \\ \underline{b}_{i,1}^t & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \underline{b}_{i,n_i}^t & \dots & \dots & \underline{b}_{i,1}^t \quad \underline{d}_i^t \end{bmatrix}$$

Preuve 2 : La matrice d'influence des états externes s'exprime sous la forme d'une matrice de commande :

$$\text{COM}(A_{ij}; A_{ii}; \underline{c}_i^t; n_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \underline{c}_i^t \cdot A_{ij} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \underline{c}_i^t \cdot A_{ii}^{n_i-1} \cdot A_{ij} & \dots & \dots & \underline{c}_i^t \cdot A_{ij} \quad 0 \end{bmatrix}$$

L'utilisation des relations (33a) et (33b) donne la proposition 2 :

$$\text{COM}(A_{ij}; A_{ii}; \underline{c}_i^t; n_i) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots 0 \\ \dots & \cdot & \dots & \dots 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{a}_{ij}^t & 0 & \dots & \dots 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

La partie droite de cette dernière matrice est nulle. La confrontation de cette remarque et de la relation (32) impose que les états externes n'influent que par leur valeur initiale à l'instant k. Mathématiquement, ceci s'exprime :

$$\forall p \neq 0 \quad \underline{x}_j(k+p) \text{ n'intervient pas.}$$

On conserve donc la partie utile de $COM(A_{ij}; A_{ii}; C_i; n_i)$ que l'on nomme OBS_{ij} d'après la structure de la partie non nulle.

$$OBS_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \underline{a}_{ij}^t \end{bmatrix} \text{ de dimensions } (n_i; n_j) \quad (35)$$

L'écriture des sorties donne à partir de la relation (32) :

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(k; k+n_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{y}(k; k+n_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} OBS_{11} & \dots & OBS_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ OBS_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & OBS_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{x}_m(k) \end{bmatrix} + COM(B, D) u(k; k+n_M) \quad (36)$$

avec $n_M = \max_{i \in \{1; \dots; m\}}(n_i)$ désignant l'ordre structurel maximum.

$$OBS_{ii} = OBS(C_i; A_i; n_i) = \begin{bmatrix} I_{n_i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{a}_{ii}^t \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\text{et } COM(B, D) = \begin{bmatrix} COM(B_1; A_{11}; \underline{c}_1^t; \underline{d}_1^t) & 0_{(n_1+1); (n_M-n_1)r} \\ \dots & \dots \\ COM(B_m; A_{mm}; \underline{c}_m^t; \underline{d}_m^t) & 0_{(n_m+1); (n_M-n_m)r} \end{bmatrix},$$

la forme de $COM(B_i; A_{ii}; \underline{c}_i^t; \underline{d}_i^t; n_i)$ ayant été donnée ci-dessus.

En II -4.1, on a montré que la matrice OBS calculée sur des horizons de longueur n_i est inversible et donc de rang n . Dans l'expression (36), la matrice d'observabilité est calculée sur des horizons de longueur $n_i + 1$, et est de dimensions $(n + m; n)$. La dimension de l'Espace de Parité est donc m .

On cherche donc à trouver une matrice W de dimensions $(m, n + m)$ orthogonale à la matrice d'observabilité.

Décomposons \underline{w}_k^t (k -ème ligne de W) conformément aux m sous-systèmes :

$$\underline{w}_k^t = [\underline{w}_{k1}^t \dots \underline{w}_{km}^t]$$

La condition d'orthogonalité à la matrice d'observabilité s'exprime :

$$\sum_{i=1}^m \underline{w}_{ki}^t \text{OBS}_{ij} = \underline{0} \quad \forall j \in \{1 \dots m\} \quad (38)$$

D'après les conditions d'indépendance, on dispose de m degrés de libertés pour la recherche des vecteurs de projection. Donc, pour chaque vecteur de projection \underline{w}_k , on peut commencer par se fixer une condition supplémentaire. On adoptera la contrainte :

$$\underline{w}_{kk}^t \text{OBS}_{kk} = 0$$

OBS_{kk} correspond à la matrice d'observabilité pour le kème sous-système, donc \underline{w}_{kk}^t est un vecteur de projection pour le sous-système k à une sortie. Etant donné la forme de OBS_{kk} donnée en (37), le vecteur de projection peut être choisi de la façon suivante :

$$\underline{w}_{kk}^t = [-\underline{a}_{kk}^t; 1]$$

Les conditions d'orthogonalité se scindent en deux groupes de relations :

$$\sum_{i=1, i \neq k}^m \underline{w}_{ki}^t \text{OBS}_{ik} = \underline{0} \quad j=k \text{ (kème bloc ligne de OBS)} \quad (39a)$$

$$\sum_{i=1}^m \underline{w}_{ki}^t \text{OBS}_{ij} = \underline{0} \quad \forall j \in \{1 \dots m\}, j \neq k \quad (39b)$$

La forme de OBS_{ij} donnée en (35) impose que pour annuler chaque terme des sommes de (39a), la dernière composante de \underline{w}_{ki}^t doit être nulle : $\forall k \neq i \quad \underline{w}_{ki}^t = [\underline{\theta}_{ki}^t; 0]$

Propriété : Si pour $i \neq j$ et pour $k \neq i \quad \underline{w}_{ki}^t = [\underline{\theta}_{ki}^t; 0]$, alors $\underline{w}_{ki}^t \text{OBS}_{ij} = 0$

L'application de cette propriété dans (39b) donne :

$$\underline{w}_{kk}^t \text{OBS}_{kj} + \underline{w}_{kj}^t \text{OBS}_{jj} = 0 \quad \forall j \neq k \quad (40)$$

Les expressions respectives des vecteurs de w_{ki} permettent d'écrire (40) sous la forme :

$$[-\underline{a}_{kk}^t; 1] \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \underline{a}_{kj}^t \end{bmatrix} + [\underline{\theta}_{kj}^t; 0] \begin{bmatrix} \text{I}_{n_j} \\ \cdot \\ \underline{a}_{jj}^t \end{bmatrix} = 0$$

On obtient alors le résultat suivant :

$$\underline{a}_{kj}^t + \underline{\theta}_{kj}^t = \underline{0} \quad \text{ce qui impose :}$$

$$\underline{\theta}_{kj}^t = -\underline{a}_{kj}^t$$

Le kème vecteur de projection s'écrit donc par blocs :

$$\underline{w}_{kj}^t = [-\underline{a}_{kj}^t; 0] \quad \forall k \neq j \quad \text{et} \quad \underline{w}_{kk}^t = [-\underline{a}_{kk}^t; 1]$$

La matrice de projection peut donc s'exprimer sous forme globale :

$$W = \begin{bmatrix} -\underline{a}_{11}^t & 1 & -\underline{a}_{12}^t & 0 & \dots & \dots & -\underline{a}_{1m}^t & 0 \\ -\underline{a}_{21}^t & 0 & -\underline{a}_{22}^t & 1 & & & -\underline{a}_{2m}^t & 0 \\ \dots & & \dots & & & & \dots & \\ -\underline{a}_{m1}^t & 0 & -\underline{a}_{m2}^t & 0 & \dots & \dots & -\underline{a}_{m1}^t & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice de projection fait apparaître tous les coefficients de la matrice A mise sous forme canonique.

Remarque : Guidorzi a développé des relations entrées-sorties par une approche de transformée en z. Nous avons développé des relations par une approche de l'Espace de Parité. Les résultats obtenus sont équivalents.

En supplément, Guidorzi montre comment on peut trouver les coefficients de B à partir de la description polynomiale entrées-sorties. Cela prouve bien que dans ce cadre, il y a une équivalence complète entre la description entrées-sorties et la description d'espace d'état sous forme canonique.

Les RRA s'expriment :

$$W \begin{bmatrix} \underline{y}(k; k+n_1) \\ \vdots \\ \underline{y}(k; k+n_m) \end{bmatrix} - W \text{COM}(B) \underline{u}(k; k+n_M) = \underline{0}$$

III - 3.3 Utilisation pour l'identification

D'après la structure de W, on peut écrire une sortie en fonction des autres :

$$y_i(k+n_i) = \underline{a}_{ii}^t y_i(k; k+n_i-1) + \sum_{j \neq i}^m \underline{a}_{ij}^t y_j(k; k+n_j-1) + \underline{w}_i^t \text{COM}(B) \underline{u}(k; k+n_M) \quad \forall i \in \{1 \dots m\}$$

Cette description entrées-sorties est une forme adéquate pour l'identification indépendante des m sous-systèmes. Elle correspond à un horizon généralisé (défini en II - 4)

$$H = \sum_{i=1}^m n_i + m.$$

On retrouve bien conformément à l'étude sur les horizons spécifiques que l'on dispose

de m RRA. L'identification que nous réalisons correspond dans ce cas en une estimation de certains coefficients de la matrice W et $W \text{ COM}(B)$.

Sinha et Kwong [Sin79] montrent que cette forme canonique minimise le nombre de paramètres à estimer. Le nombre de paramètres à estimer dans chaque sous-système est :

$$N_i = n + \sum_{i=1}^m (n_{ij} - 1)$$

Remarques : en proposant cette méthode, Guidorzi voulait distribuer les capteurs également parmi les sous-systèmes. C'est sans doute une bonne solution si le rapport signal sur bruit de toutes les mesures est approximativement de même amplitude. Sinon, d'autres structures pourraient mieux convenir. Dans le cas d'une sortie presque sans bruit, Ackermann [Ack71] propose d'identifier le sous-système global observable à partir de cette sortie, ensuite prendre la deuxième meilleure mesure et ainsi de suite.

Considérons maintenant d'après les dernières expressions les vecteurs de paramètres pour chaque sous-système :

$$y_1(k+n_1) = z_1^t(k; k+n_M) \underline{\theta}_1$$

.....

$$y_m(k+n_m) = z_m^t(k; k+n_M) \underline{\theta}_m$$

z_i^t étant le vecteur des entrées-sorties qui intervient dans la ième relation.

Par rapport au paragraphe sur la structure particulière, on ne note ici aucun recouvrement entre le vecteur des paramètres $\underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m$.

Le ième vecteur de paramètres estimés s'écrit :

$$\hat{\underline{\theta}}_i(k+q) = (Z_i^t Z_i)^{-1} Z_i^t y_i(k+n_i; k+n_i+q)$$

Nous pouvons à présent procéder à une comparaison avec les résidus de parité de base.

IV - Comparaison

Nous avons pour l'instant présenté deux modèles sur lesquels nous avons appliqué une technique des moindres carrés simples. Nous allons maintenant exprimer les résidus de parité et d'identification dans les deux cas afin de mener la comparaison.

IV - 1 La structure diagonale capteur

Utilisons simplement l'expression (16) du modèle entrées-sorties. Le vecteur résidu de parité s'obtient immédiatement :

$$\underline{r}(k) = \underline{y}(k) - [-a_{n-1} \underline{y}(k-1) \dots \dots \dots -a_0 \underline{y}(k-n) + K \underline{u}(k-n;k)]$$

Le vecteur résidu de parité peut s'exprimer d'une autre manière en utilisant la définition du vecteur de paramètres généralisés.

$$\underline{r}(k) = \underline{y}(k) - \underline{z}^t(k-1;k-n) \underline{\theta}^*$$

$$\text{avec } \underline{z}^t(k-1;k-n) = \begin{bmatrix} \underline{z}_1^t(k-1;k-n) & & & \\ & \underline{z}_2^t(k-1;k-n) & & \\ & & \dots & \\ & & & \underline{z}_m^t(k-1;k-n) \end{bmatrix}$$

Dans un deuxième temps, nous voulons relier les résidus d'identification aux résidus de parité.

Nous connaissons l'expression de l'estimation des paramètres :

$$\hat{\underline{\theta}}(k+q) = (Z^t Z)^{-1} Z^t \begin{bmatrix} \underline{y}_1(k;k+q) \\ \underline{y}_2(k;k+q) \\ \dots \\ \underline{y}_m(k;k+q) \end{bmatrix}$$

qui fait apparaître la matrice Z définie par blocs : $Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Z_m \end{bmatrix}$

A ce stade, on peut écrire : $\underline{\theta}^* = (Z^t Z)^{-1} Z^t [Z \underline{\theta}^*]$ et le résidu d'identification devient :

$$\underline{\rho}(k+q) = (Z^t Z)^{-1} Z^t \begin{bmatrix} \underline{y}_1(k;k+q) \\ \underline{y}_2(k;k+q) \\ \dots \\ \underline{y}_m(k;k+q) \end{bmatrix} - Z \underline{\theta}^*$$

D'après l'écriture des résidus de parité :

$$\underline{\rho}(k+q) = (Z^t Z)^{-1} Z^t \begin{bmatrix} \underline{r}_1(k;k+q) \\ \underline{r}_2(k;k+q) \\ \dots \\ \underline{r}_m(k;k+q) \end{bmatrix}$$

En posant $\underline{\rho} = \begin{bmatrix} \underline{\rho}_1 \\ \underline{\rho}_2 \\ \dots \\ \underline{\rho}_m \end{bmatrix}$ et connaissant la structure de Z, il apparaît que :

$$\underline{\rho}_i(k+q) = (Z_i^t Z_i)^{-1} Z_i^t \underline{r}_i(k; k+q) \quad \forall i \in \{1; \dots; m\} \quad (41)$$

Les résidus d'identification sont donc combinaison linéaire des résidus de parité décalés. L'interprétation géométrique donnée dans le chapitre II peut être reconduite ici. On peut donc affirmer selon le même type de raisonnement que ce sont des résidus de parité d'ordre n+q.

L'avantage de ces résidus d'identification à structure diagonale capteur réside dans leur faculté de déceler des défaillances capteurs sur les résidus dépendants. En effet, si, parmi deux résidus identiques, l'un des deux est non nul, alors il est clair que le capteur relatif à ce résidu doit être mis en cause. Ces résidus peuvent donc isoler certaines défaillances capteurs.

IV - 2 Approche globale

L'écriture des résidus de parité sur une fenêtre de taille q ne change pas de la structure diagonale capteur :

$$\begin{bmatrix} \underline{r}_1(k; k+q) \\ \underline{r}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{r}_m(k; k+q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1(k; k+q) \\ \underline{y}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{y}_m(k; k+q) \end{bmatrix} - Z \underline{\theta}_g^*$$

Le vecteur des paramètres global nominal s'exprime de la même façon en fonction du vecteur des paramètres minimum :

$$\underline{\theta}_g^* = \Gamma \underline{\theta}_m^* \quad (42)$$

Les résidus de parité deviennent donc :

$$\begin{bmatrix} \underline{r}_1(k; k+q) \\ \underline{r}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{r}_m(k; k+q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1(k; k+q) \\ \underline{y}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{y}_m(k; k+q) \end{bmatrix} - Z \Gamma \underline{\theta}_m^* \quad (43)$$

L'expression du vecteur global de paramètres estimés a été donnée en (31) :

$$\hat{\underline{\theta}}_g = \Gamma (\Gamma^t Z^t Z \Gamma)^{-1} \Gamma^t Z^t \begin{bmatrix} \underline{y}_1(k; k+q) \\ \underline{y}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{y}_m(k; k+q) \end{bmatrix}$$

Le vecteur résidu d'identification global s'écrit donc :

$$\underline{\rho}_g(k+q) = \hat{\underline{\theta}}_g - \Gamma \underline{\theta}_m^* = \Gamma [(\Gamma^t Z^t Z \Gamma)^{-1} \Gamma^t Z^t \begin{bmatrix} \underline{y}_1(k; k+q) \\ \underline{y}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{y}_m(k; k+q) \end{bmatrix} - (\Gamma^t Z^t Z \Gamma)^{-1} \Gamma^t Z^t Z \Gamma \underline{\theta}_m^*]$$

En factorisant par $\Gamma (\Gamma^t Z^t Z \Gamma)^{-1} \Gamma^t Z^t$, on obtient une expression simplifiée des résidus d'identification :

$$\underline{\rho}_g(k+q) = \Gamma (\Gamma^t Z^t Z \Gamma)^{-1} \Gamma^t Z^t \left[\begin{bmatrix} \underline{y}_1(k; k+q) \\ \underline{y}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{y}_m(k; k+q) \end{bmatrix} - Z \Gamma \underline{\theta}_m^* \right]$$

Le vecteur entre crochets est le vecteur des résidus de parité décalés (43) soit :

$$\underline{\rho}_g(k+q) = \Gamma (\Gamma^t Z^t Z \Gamma)^{-1} \Gamma^t Z^t \begin{bmatrix} \underline{r}_1(k; k+q) \\ \underline{r}_2(k; k+q) \\ \dots \\ \underline{r}_m(k; k+q) \end{bmatrix} \quad (44)$$

Les résidus d'identification globaux sont de la même façon que précédemment des combinaisons linéaires particulières des résidus de parité. La matrice Γ sert à spécifier les liens entre certaines composantes du vecteur résidu d'identification global.

IV - 3 La forme canonique

Il s'agit à présent de relier les résidus de parité et les résidus issus de l'identification paramétrique par la forme canonique d'observabilité.

La démarche est similaire à celle du paragraphe précédent en dehors de la structure des relations entrées-sorties. Reprenons la forme entrées-sorties du modèle :

$$y_1(k+n_1) = \underline{z}_1^t(k;k+n_M) \underline{\theta}_1$$

.....

$$y_m(k+n_m) = \underline{z}_m^t(k;k+n_M) \underline{\theta}_m$$

Les résidus de parité s'expriment : $r_i(k+n_i) = y_i(k+n_i) - \underline{z}_i^t(k;k+n_M) \underline{\theta}_i^* \quad \forall i \in \{1; \dots; m\}$

avec $n_M = \max_{i \in \{1; \dots; m\}}(n_i)$

L'identification des sous-systèmes est réalisée de façon indépendante. Ainsi, on dispose pour un sous-système d'un résidu de parité et d'un vecteur de paramètres. De cette manière, on est ramené au cas monovarié :

Considérons le ième sous-système à des instants successifs :

$$r_i(k+n_i) = y_i(k+n_i) - \underline{z}_i^t(k;k+n_M) \underline{\theta}_i^*$$

.....

$$r_i(k+n_i+q) = y_i(k+n_i+q) - \underline{z}_i^t(k+q;k+n_M+q) \underline{\theta}_i^*$$

La concaténation vectorielle de ces relations donne :

$$\underline{r}_i(k+n_i;k+n_i+q) = \underline{y}_i(k+n_i;k+n_i+q) - \underline{Z}_i \underline{\theta}_i^*$$

L'écriture du résidu d'identification fournit la relation :

$$\underline{\rho}_i(k+n_M+q) = \hat{\underline{\theta}}_i(k+n_M+q) - \underline{\theta}_i^* = (\underline{Z}_i^t \underline{Z}_i)^{-1} \underline{Z}_i^t [\underline{y}_i(k+n_i;k+n_i+q) - \underline{Z}_i \underline{\theta}_i^*]$$

On en déduit pour le ième sous-système :

$$\underline{\rho}_i(k+n_M+q) = (\underline{Z}_i^t \underline{Z}_i)^{-1} \underline{Z}_i^t \underline{r}_i(k+n_M;k+n_M+q) \quad \forall i \in \{1; \dots; m\} \quad (45)$$

On constate que l'instant du résidu d'identification n'est pas le même que celui relatif aux mesures. Cela provient du fait que \underline{Z}_i contient des mesures d'autres capteurs qui sont plus récentes et cela influe sur le résidu d'identification.

On peut résumer sous une forme matricielle le résidu global d'identification :

$$\begin{bmatrix} \underline{\rho}_1(k+n_M+q) \\ \underline{\rho}_2(k+n_M+q) \\ \dots \\ \underline{\rho}_m(k+n_M+q) \end{bmatrix} = (\underline{Z}^t \underline{Z})^{-1} \underline{Z}^t \begin{bmatrix} \underline{r}_1(k+n_M;k+n_M+q) \\ \underline{r}_2(k+n_M;k+n_M+q) \\ \dots \\ \underline{r}_m(k+n_M;k+n_M+q) \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{Z}_m \end{bmatrix}$$

Ce vecteur résidu d'identification est aussi une combinaison non linéaire des résidus de parité décalés. La seule différence avec le cas monovarié est que l'on dispose de m résidus de parité de base au lieu d'un seul dans le cas monovarié.

En conclusion de cette comparaison, quelle que soit la forme du modèle utilisé, les résidus d'identification sont des combinaisons non linéaires des résidus de parité. Dans le cas multivariable, la recherche de relations entrées-sorties adéquates pour la surveillance s'avère être une étape importante de la démarche.

V - Conclusion

Nous avons voulu étendre aux systèmes multivariables la comparaison de résidus obtenus par identification et par la méthode de l'espace de parité.

Le problème en multivariable a d'abord consisté à regarder quel modèle de comportement on utilisait comme point de départ. La problématique de cette comparaison multivariable résidait ensuite dans le choix de relations entrées-sorties adéquates qui conduisent à la définition d'un vecteur de paramètres.

Le choix de relations entrées-sorties à horizon commun nous a permis de développer des relations à structure diagonale capteur. Ces relations peuvent être traitées de deux façons différentes :

Elle peuvent être considérées ligne par ligne ce qui engendre une suridentification de certains paramètres.

Une approche globale permet de tenir compte des liens structurels entre certains paramètres. De ce fait, la suridentification est réduite mais le nombre de paramètres n'est pas minimum.

Enfin, une approche à horizons spécifiques à chaque capteur permet de disposer d'un ensemble de paramètres plus réduit.

Quelle que soit la forme des relations entrées-sorties développées, nous avons trouvé que les résidus d'identification étaient des combinaisons non linéaires particulières des résidus de parité de base. Nous allons maintenant illustrer ces notions sur un exemple de simulation dans le chapitre suivant.

Chapitre 4 : Illustration de la comparaison des résidus.

Introduction

Les deux chapitres précédents ont mis en évidence les liens entre certaines méthodes d'identification et les méthodes de projection dans l'Espace de Parité. Ce chapitre reprend les concepts déjà présentés et tente de fournir un guide d'interprétation des différents résidus sous différentes hypothèses de défaillances.

Dans un premier temps, nous essayons donc de distinguer de façon théorique les comportements de chaque type de résidu en réponse à différents types de défaillances.

Ensuite, nous développons un exemple de simulation d'un système multivariable que nous étudions pour différentes configurations de défaillances.

I - Hypothèses de défaillances paramétriques

Nous nous plaçons dans le cas de défaillances paramétriques pour étudier le comportement des deux types de résidus.

I - 1 Identification

L'identification est une méthode convenable pour surveiller les paramètres analytiques d'un système. Cependant, plusieurs contraintes d'utilisation doivent être respectées. On doit veiller à ce que :

- les conditions d'excitation des modes du système soient suffisantes pour assurer une identification correcte des paramètres du système.

- le conditionnement du système soit suffisant ce qui assure une précision similaire pour l'identification de chaque paramètre.

Plusieurs outils sont à notre disposition pour tester ces conditions :

- les estimations des variances de chaque paramètre indiquent à l'opérateur la confiance accordée au résidu d'identification. Cette indication doit servir de point de départ pour la décision finale. Elle permet de bâtir une procédure de décision.

- de plus, l'indicateur de conditionnement permet de visualiser des déséquilibres dans la précision d'identification des paramètres. Si les conditions d'excitation fréquentielle ne sont pas respectées, un déséquilibre sera constaté.

Ainsi, l'isolation et la détection des paramètres analytiques en défaillance n'est réalisable grâce aux valeurs des résidus d'identification que sous certaines conditions d'expérimentation.

I - 2 Résidus de parité

Nous étudions l'effet de défaillances paramétriques sur le comportement des résidus de parité. Considérons les expressions des résidus de parité pour le cas d'un système multivariable (cf. chapitre III) :

$$\underline{r}(z) = d^*(z) \underline{y}(z) - K^*(z) \underline{u}(z)$$

Les sorties de ce système sont supposées posséder la même structure en fonctionnement défaillant paramétrique qu'en fonctionnement normal :

$$d(z) \underline{y}(z) = K(z) \underline{u}(z)$$

Les résidus de parité deviennent alors sous l'hypothèse de défaillance constante (Cf. Chapitre I, IV - 3):

$$\underline{r}(z) = \left[\frac{d^*(z)}{d(z)} K(z) - K^*(z) \right] \underline{u}(z)$$

Les résidus sont donc les sorties d'un filtre linéaire excité par les commandes dont les paramètres dépendent de $\underline{\theta}$ et $\underline{\theta}^*$. Il est clair, au regard de cette dernière expression, que certaines défaillances paramétriques se décèlent uniquement sur la dynamique des résidus (et non pas en régime permanent).

Remarque : Le calcul d'un indice de corrélation des résidus de parité par rapport aux entrées doit permettre de tester la pertinence de l'hypothèse de défaillance multiplicative.

En conclusion, la détection d'une défaillance paramétrique se produit généralement sur la période transitoire du résidu de parité. Il est assez fréquent que les résidus recouvrent une valeur nulle en régime permanent.

La localisation des paramètres analytiques est par contre plus délicate avec les résidus de parité de base. Il est en effet impossible de reconnaître en général le paramètre analytique en cause.

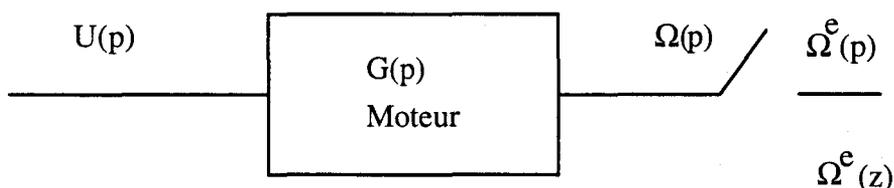
Dans cette optique, Gertler [Ger93] bâtit un ensemble de résidus directionnels en projetant les résidus de base. Il donne alors les contraintes que doivent respecter les vecteurs de projection. Ces derniers doivent être calculés en ligne car une solution indépendante du temps n'existe pas. Les résidus directionnels sont donc obtenus par un filtrage non stationnaire des résidus de base. Ces résidus permettent d'isoler un nombre limité de défaillances paramétriques analytiques.

La localisation physique est une entreprise encore plus difficile. Pour illustrer ce point de vue, nous allons nous appuyer sur l'exemple d'un moteur à courant continu.

La fonction de transfert du moteur à courant continu à vide se présente sous la forme suivante : $\Omega(p) = \frac{k_a}{(R_a + Lp)(Jp + f)} U(p)$

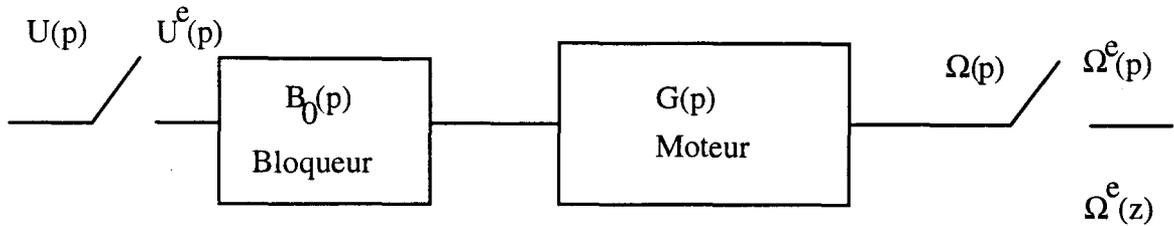
Le modèle nominal intervient sous la même forme avec des coefficients physiques nominaux (k_a^* , J^* , L^* , f^* , R_a^*).

Nous avons choisi de nous placer dans le cas discret et d'utiliser un modèle échantillonné du système. Pour cela, il nous faut introduire un échantillonneur en sortie du système :



$\Omega^e(z) = Z(U(p) \cdot G(p))$ où Z désigne l'opérateur de transformée en z.

Cette écriture ne permet pas l'utilisation d'une transmittance équivalente. Nous préférons donc le schéma suivant qui fait intervenir en entrée un couple échantillonneur bloqueur :



Ce schéma fait apparaître entre les deux grandeurs échantillonnées $\Omega^e(z)$ et $U^e(z)$ [Pour la suite, elles seront notées $\Omega(z)$ et $U(z)$] une fonction de transfert continue. Cette dernière peut être transformée en fonction de transfert discrétisée de la manière suivante :

Tout d'abord, la fonction de transfert du bloqueur d'ordre 0 est : $B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$

La fonction de transfert globale s'exprime donc :

$$H(z) = Z(B_0(p) \cdot G(p)) = Z\left(\frac{1 - e^{-Tp}}{p} G(p)\right)$$

En séparant en deux termes :

$$H(z) = Z\left(\frac{G(p)}{p}\right) - Z\left(e^{-Tp} \frac{G(p)}{p}\right)$$

En utilisant les propriétés de retard de la transformée en z,

$$H(z) = Z\left(\frac{G(p)}{p}\right) - z^{-1} Z\left(\frac{G(p)}{p}\right) = (1 - z^{-1}) Z\left(\frac{G(p)}{p}\right) \quad (1)$$

La décomposition $\frac{G(p)}{p}$ en éléments simples nous donne :

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{f}{J}} + \frac{c}{p + \frac{R_a}{L}}$$

$$\text{avec } a = \frac{k_a}{R_a \cdot f}, b = \frac{-k_a \cdot J}{f \cdot (R_a \cdot J - L \cdot f)}, c = \frac{k_a \cdot L}{R_a \cdot (R_a \cdot J - L \cdot f)}$$

L'utilisation de tables de transformées et de la relation (1) permet d'obtenir la fonction de transfert échantillonnée :

$$H(z) = \frac{\Omega(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \left[\frac{a}{1 - z^{-1}} + \frac{b}{1 - e^{-\frac{f}{J}T} \cdot z^{-1}} + \frac{c}{1 - e^{-\frac{R_a}{L}T} \cdot z^{-1}} \right] \quad (2)$$

La réduction de $H(z)$ au même dénominateur donne :

$$H(z) = \frac{a \cdot e^{-\left(\frac{f}{J} + \frac{R_a}{L}\right)T} \cdot z^{-2} + [-a \left(e^{-\frac{f}{J}T} + e^{-\frac{R_a}{L}T} \right) - b - c] z^{-1} + [a + b + c]}{(1 - e^{-\frac{f}{J}T} \cdot z^{-1})(1 - e^{-\frac{R_a}{L}T} \cdot z^{-1})} \quad (3)$$

Cette expression fait apparaître cinq paramètres analytiques dépendant de cinq paramètres physiques. Quand le système est en fonctionnement normal, ses paramètres analytiques prennent leurs valeurs nominales. L'expression du résidu de parité se calcule avec les valeurs nominales des paramètres physiques, soit :

$$r(z) = \Omega(z) - H^*(z) U(z) \quad (4)$$

Notre intention est de montrer que ces résidus de parité peuvent détecter les défaillances paramétriques constantes et de tester leurs facultés de localisation de la défaillance. Pour cela, nous allons exprimer la fonction de transfert sous l'hypothèse de différentes défaillances multiplicatives. Il faut bien préciser que le formalisme de la transformée en z garde un sens uniquement quand les paramètres physiques conservent une valeur constante sur l'intervalle d'étude.

Imaginons une défaillance constante depuis $t = 0$ sur le moment d'inertie J . La forme d'évaluation du résidu s'écrit en remplaçant la valeur de $\Omega(z)$ obtenue dans (2) dans (4):

$$r(z) = \left[(c - c^*) \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{R_a}{L}T} \cdot z^{-1}} + (1 - z^{-1}) \cdot \frac{b \cdot (1 - e^{-\frac{f}{J^*}T} \cdot z^{-1}) - b^* \cdot (1 - e^{-\frac{f}{J}T} \cdot z^{-1})}{(1 - e^{-\frac{f}{J}T} \cdot z^{-1})(1 - e^{-\frac{f}{J^*}T} \cdot z^{-1})} \right] U(z) \quad (5)$$

Une défaillance sur l'inductance statorique L donne une forme d'évaluation du résidu du même type :

$$r(z) = \left[(b - b^*) \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{f}{J}T} \cdot z^{-1}} + (1 - z^{-1}) \cdot \frac{c \cdot (1 - e^{-\frac{R_a}{L^*}T} \cdot z^{-1}) - c^* \cdot (1 - e^{-\frac{R_a}{L}T} \cdot z^{-1})}{(1 - e^{-\frac{R_a}{L}T} \cdot z^{-1})(1 - e^{-\frac{R_a}{L^*}T} \cdot z^{-1})} \right] U(z) \quad (6)$$

Les deux fonctions de transfert obtenues à partir de (5) et (6) sont de forme identique si bien qu'on est incapable d'attribuer la défaillance à l'un des deux paramètres physiques lorsqu'on observe le comportement du résidu de parité.

Calculons maintenant la valeur permanente du résidu sous ces deux hypothèses en réponse à une entrée en échelon d'amplitude 1:

$$\text{Pour le premier cas : } r(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) r(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \left[(b - b^*) \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-\frac{f}{J}T} \cdot z^{-1}} \right. \\ \left. + (1 - z^{-1}) \cdot \frac{c \cdot (1 - e^{-\frac{R_a}{L^*}T} \cdot z^{-1}) - c^* \cdot (1 - e^{-\frac{R_a}{L}T} \cdot z^{-1})}{(1 - e^{-\frac{R_a}{L}T} \cdot z^{-1})(1 - e^{-\frac{R_a}{L^*}T} \cdot z^{-1})} \right] \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

soit $r(\infty) = 0$.

La valeur finale du résidu dans le cas d'une défaillance sur l'inductance statorique donne le même résultat, soit $r(\infty) = 0$.

Ceci montre bien que ces résidus détectent les défaillances paramétriques physiques mais on est dans l'impossibilité (en tout cas en régime permanent) d'isoler le coefficient physique en cause avec des résidus de base. Pour localiser correctement la défaillance, il faudrait envisager une identification de la forme d'évaluation du résidu en régime transitoire.

Après ce bref aperçu des possibilités de chaque type de résidu pour les défaillances paramétriques, nous considérons maintenant le cas des défaillances additives indépendantes.

II - Hypothèse de défaillances additives indépendantes

Nous envisageons la présence d'une défaillance additive indépendante sur le système et nous étudions le comportement des deux types de résidus face à ce genre de défaillances.

II - 1 Résidus de Parité.

Pour cela, nous pouvons utiliser l'expression de la forme d'évaluation d'un résidu de parité donnée au chapitre II :

$$r(k+s) = \underline{w}^t [\text{COM}_S(A, E, C, F) \underline{d}_a(k; k+s) + \underline{g}(k; k+s)]$$

Ces résidus de parité détectent la présence d'une défaillance significative dans le régime transitoire en général. Il n'est pas sûr que l'on puisse localiser correctement la défaillance additive indépendante parmi l'ensemble des défaillances additives indépendantes envisagées sachant que certaines d'entre elles peuvent avoir des comportements similaires.

Dans certains cas, il peut être avantageux de filtrer ces résidus de base pour en obtenir un nouvel ensemble ayant des propriétés dynamiques particulières. Plusieurs stratégies sont possibles :

Gertler [Ger93b] a proposé des développements sur les résidus directionnels et Cassar [Cas93] a cherché à obtenir des résidus structurés.

En général, ces résidus filtrés s'avèrent intéressants pour répondre aux besoins de localisation de défaillances additives indépendantes.

Remarque : la pertinence de l'hypothèse de défaillance additive indépendante peut être testée par un indice de corrélation entre les résidus de parité et les entrées de commandes. En effet, sous cette hypothèse, la forme d'évaluation des résidus ne fait apparaître que les influences des défaillances additives indépendantes. Ainsi, un faible niveau de corrélation mettrait donc en évidence la présence d'une défaillance additive indépendante.

II - 2 Résidus d'identification

Nous n'avons pas encore examiné le comportement des résidus d'identification en réponse à une défaillance additive indépendante. Il pourrait aussi être intéressant de savoir distinguer une défaillance additive indépendante du bruit qui intervient sur le système.

Pour cela, nous utilisons l'expression des résidus d'identification en fonction des entrées-sorties donnée au chapitre II :

$$\rho(k+q) = W'' [y(k-t;k+q) - \text{COM}_{t+q} \underline{u}(k-t;k+q)]$$

$$\text{avec } W'' = (Z^t Z)^{-1} Z^t W, \text{ et } W = \begin{bmatrix} \underline{w}^t & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \underline{w}^t & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & \dots & & 0 & \underline{w}^t \end{bmatrix}$$

La substitution de l'équation de la mesure décalée dans le temps permet d'obtenir :

$$\rho(k+q) = (Z^t Z)^{-1} Z^t W [\text{COM}_S(A,E,C,F) \underline{d}_a(k;k+s) + \underline{\varepsilon}(k;k+s)]$$

Si $W \underline{\varepsilon}(k;k+s)$ est un bruit blanc, alors sa contribution à la valeur moyenne du résidu d'identification est nulle.

Dans tous les autres cas, le bruit influence la valeur moyenne des résidus d'identification.

La défaillance additive indépendante apporte aussi sa contribution par le terme :

$$E[(Z^t Z)^{-1} Z^t W \text{COM}_S(A,E,C,F) \underline{d}_a(k;k+s)]$$

Remarque : on note que la défaillance additive indépendante est présente dans la matrice Z et affecte donc les paramètres du filtre non linéaire.

Il est difficile de donner des caractéristiques générales de ces résidus en présence de défaillance additive indépendante du fait de l'expression non linéaire de cette influence.

On peut donc conclure en affirmant que les résidus d'identification seuls ne permettent pas de reconnaître si la défaillance est additive indépendante ou multiplicative.

Dans cette optique, il apparaît intéressant de disposer des deux types de résidus pour pouvoir décider dans les meilleures conditions.

III - Simulation

L'exemple que nous étudions est celui d'un système échantillonné modélisé dans l'espace d'état sous forme quelconque. Nous allons le mettre sous la forme canonique d'observabilité que nous avons développée dans le chapitre III.

III - 1 Présentation du modèle initial

On considère donc le système à deux entrées et deux sorties et quatre états. Les matrices de la description espace d'état sont données ci-dessous :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.6770 & -1.3032 & -0.8081 & -0.8110 \\ 0.1429 & 0.7617 & 1.0449 & 0.0197 \\ 0 & 0 & -0.1964 & 0.6214 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5077 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -0.8627 & 1.4102 \\ -0.6101 & -1.3840 \\ 0.1490 & -0.0067 \\ 0.4514 & 0.3947 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} -0.6362 & -0.6563 & 0.4051 & -0.0213 \\ 0.4735 & -0.0757 & 0.6519 & 0.5875 \end{bmatrix}$$

La matrice de transition directe est nulle.

III - 2 La forme canonique

III - 2.1 Changement d'état

Par la procédure que nous avons décrite au chapitre III, nous bâtissons la matrice de passage P qui permet d'effectuer le changement d'état.

$$P = \begin{bmatrix} -0.6362 & -0.5245 & 0.4735 & 0.3098 \\ -0.6563 & 0.3292 & -0.0757 & -0.6747 \\ 0.4051 & -0.2512 & 0.6519 & -0.5898 \\ -0.0213 & 0.7439 & 0.5875 & 0.3178 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons donc la forme canonique voulue grâce aux expressions du changement d'état :

$$A = P^{-1} A_0 P, B = P^{-1} B, C = C_0 P.$$

Les expressions numériques des matrices de la nouvelle modélisation d'état sont données ci-dessous :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.75 & 0.7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.5 & -0.7 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.55 & -0.9 \\ 0 & 1 \\ 0.2 & 1.5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ce modèle d'état est caractérisé par deux indices structuraux de valeurs :

$$n_1 = 2, n_2 = 2.$$

La somme de ces indices vaut 4, ce qui représente aussi l'ordre du système. Ceci permet de vérifier que le système est observable. Ces indices sont importants pour la description entrées-sorties du système (Cf. Chapitre III, paragraphe sur les horizons spécifiques).

Guidorzi [Gui75] a montré que cette forme canonique est équivalente à la description polynomiale entrées-sorties donnée par :

$$\begin{bmatrix} z^2 - 0.75z + 0.1 & z - 0.7 \\ 0.5z - 0.2 & z^2 - z + 0.7 \end{bmatrix} \underline{y}(k) = \begin{bmatrix} z - 0.2 & 0.1 \\ 0.7 & z + 0.5 \end{bmatrix} \underline{u}(k) \quad (7)$$

La simulation qui a été développée utilise maintenant le modèle d'état uniquement sous la forme canonique d'observabilité.

III - 2.2 Position des pôles et des zéros

La position des pôles et des zéros est résumée sur la figure suivante :

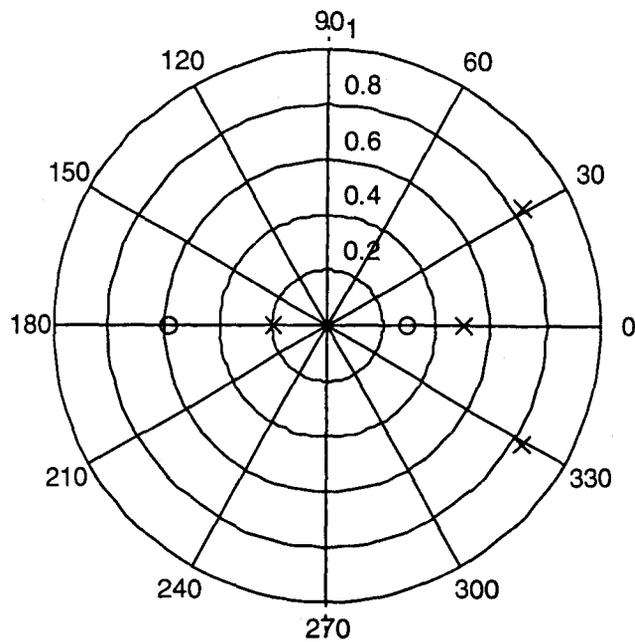


Figure 1 : La position des pôles et des zéros

III - 2.3 Le bruit sur les sorties

Un vecteur de bruit est superposé aux sorties : il est obtenu par le filtrage d'un vecteur de bruit gaussien de moyenne nulle et de matrice de variance la matrice identité. Ce filtrage est donné ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1(z) \\ \varepsilon_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.005}{z-0.7} & 0 \\ 0 & \frac{0.005}{z-0.8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \end{bmatrix},$$

v_1 et v_2 sont des bruits gaussiens de moyenne nulle et de variance 1.

III - 2.4 Les entrées de commande

Une entrée aléatoire gaussienne est une séquence riche en fréquence. Pour satisfaire à la condition de persistance d'excitation, nous avons donc choisi d'exciter le système par une somme de vecteurs d'entrées aléatoires normales. Un exemple de réalisation est donné par les figures suivantes :

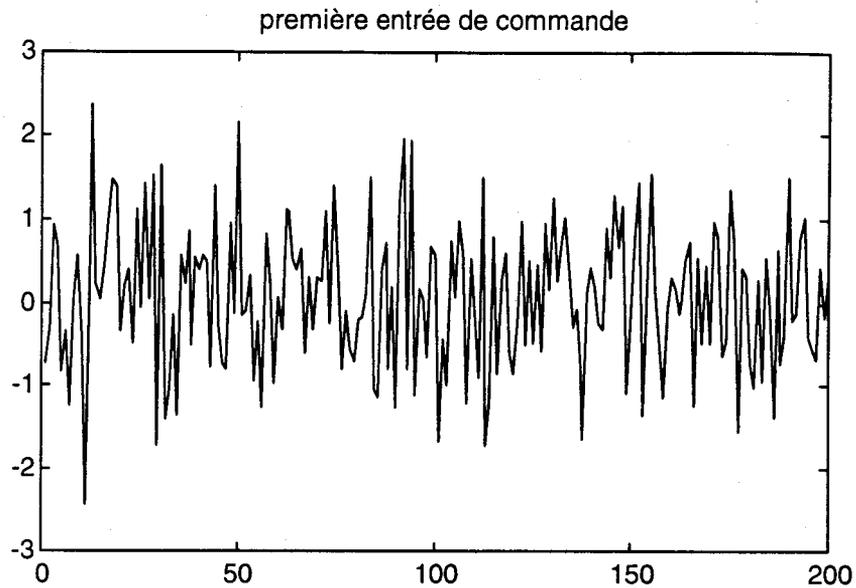


Figure 2 : La première entrée de commande

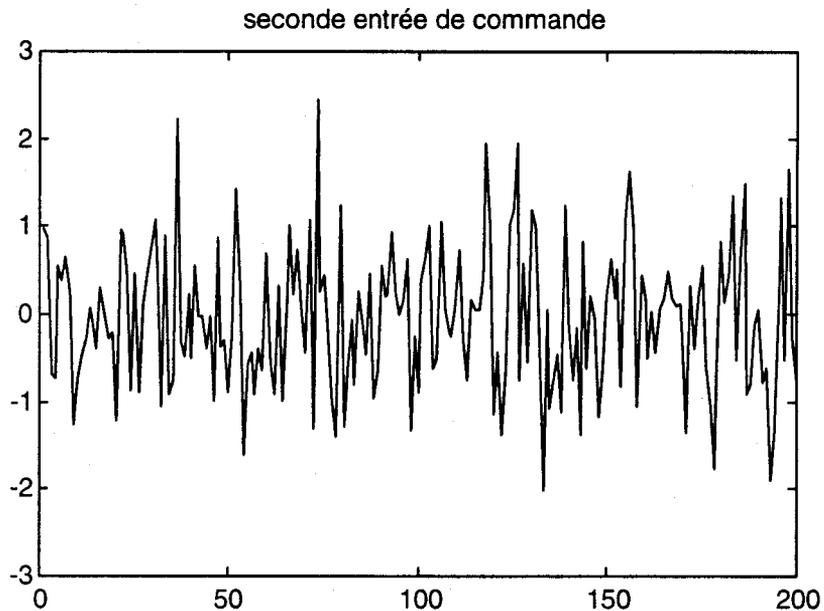


Figure 3 : La seconde entrée de commande

III - 2.5 Les défaillances

Deux types de défaillances ont été simulées : une défaillance paramétrique et une défaillance d'un capteur.

La défaillance paramétrique concerne le paramètre -0.1 de la matrice A . Elle a été choisie à dynamique lente par rapport à la dynamique du système pour éviter les problèmes d'identification décrits dans le chapitre I. L'évolution temporelle de ce paramètre est donnée ci-dessous :

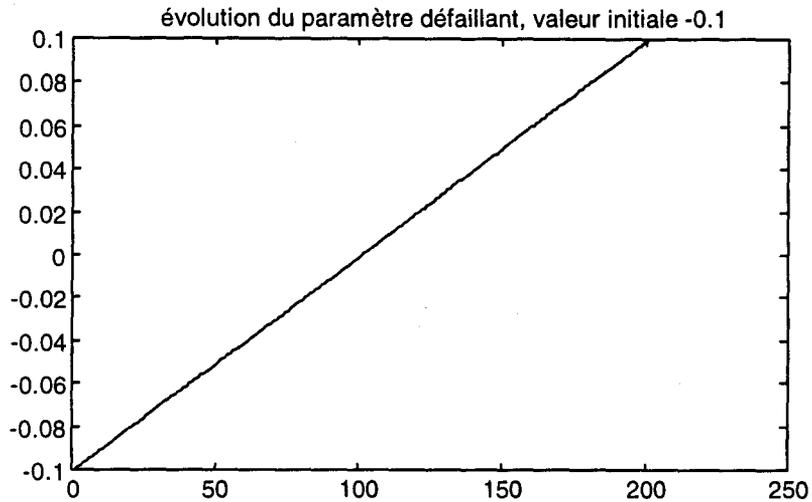


Figure 4 : La défaillance paramétrique.

La défaillance du capteur intervient sur la première sortie. Cette défaillance additive indépendante se produit dès l'instant 0 et a été choisie en forme de rampe :

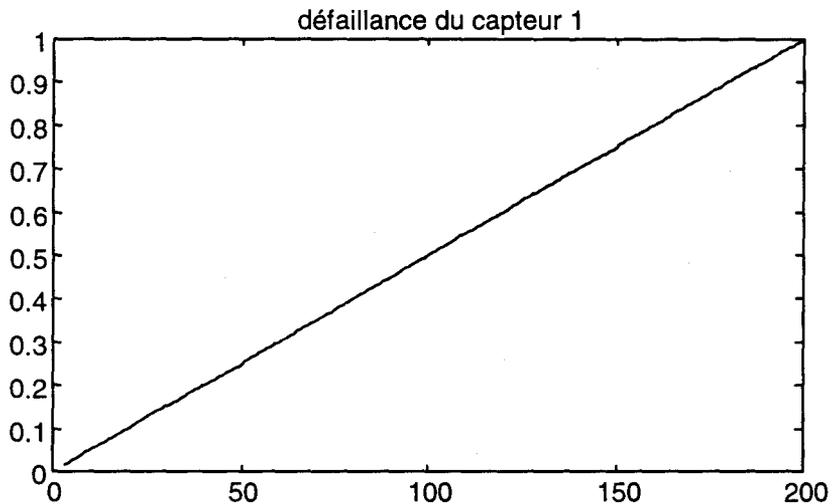


Figure 5 : La défaillance du capteur.

III - 3 Résidus de parité

Deux résidus de parité canoniques sont disponibles, ils sont dérivés de l'équation polynomiale (7).

Nous avons aussi développé parallèlement conformément à l'étude du chapitre III deux résidus à structure diagonale capteur. Bien entendu, ils sont d'ordre plus élevé que les résidus de parité canoniques.

Nous présentons donc l'évolution d'un résidu de parité canonique et d'un résidu de parité à structure diagonale capteur.

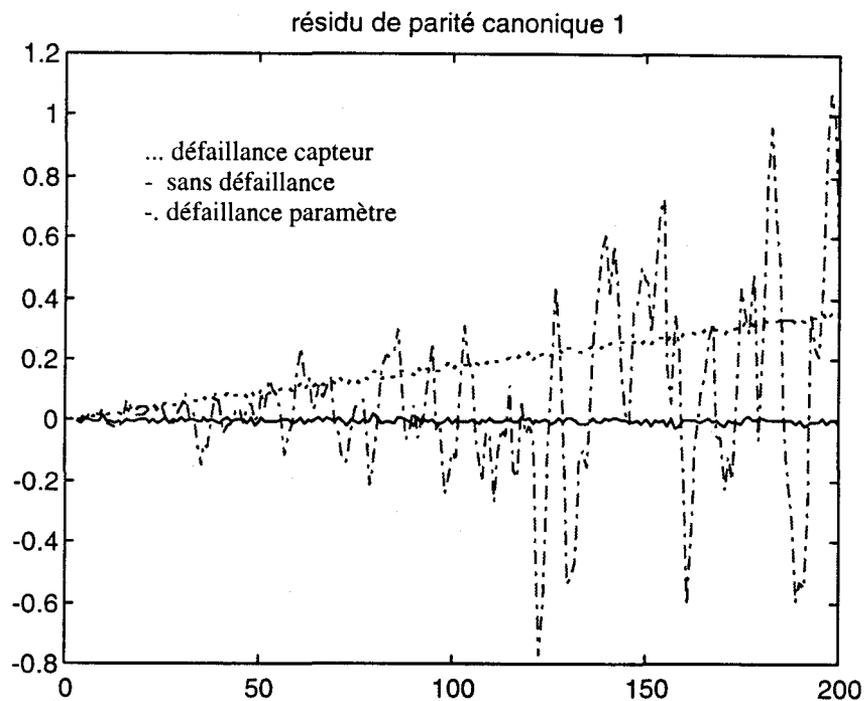


Figure 6 : Résidu de parité canonique.

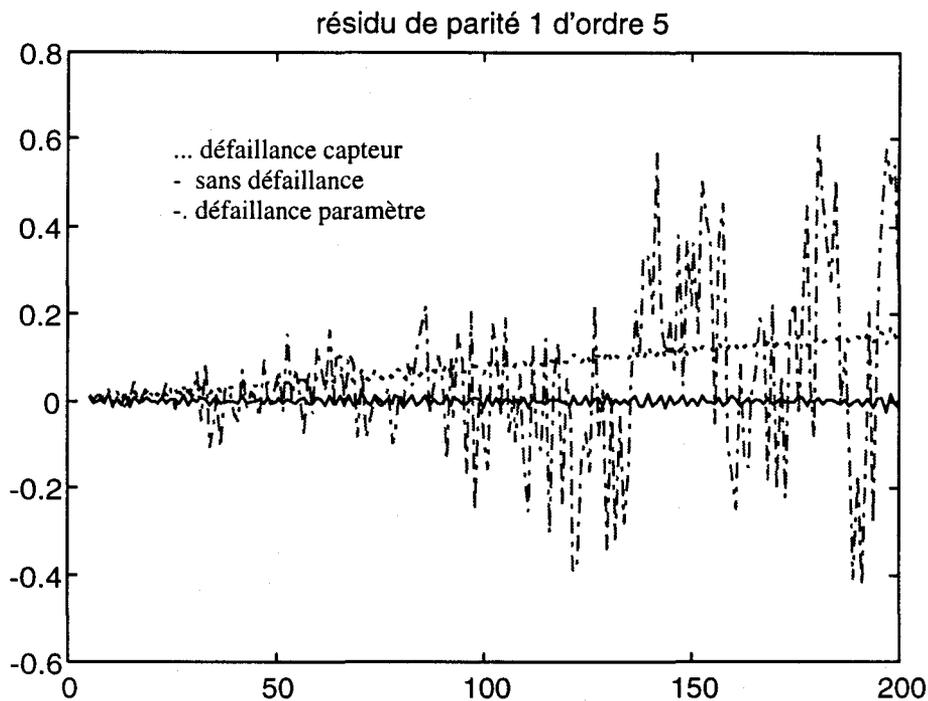


Figure 7 : Résidu de parité à structure diagonale capteur.

Les deux résidus présentés ci-dessus ont des comportements similaires en réponse aux deux défaillances que nous avons simulées.

En ce qui concerne la défaillance du capteur, on retrouve sur les deux types de résidus de parité une rampe qui signale la présence d'une défaillance. La défaillance paramétrique se traduit par une oscillation d'amplitude croissante des deux types de résidus de parité.

III - 4 Résidus d'identification

Sur la base de la relation (7), on dispose de deux sous-systèmes, chacun comportant sept paramètres. Nous nous intéresserons au premier sous-système puisque la défaillance paramétrique concerne uniquement ce dernier.

Nous présentons dans ce paragraphe l'évolution de deux résidus d'identification : l'un concerne le paramètre 0.75 de la matrice A, l'autre le paramètre -0.1. Le premier n'est théoriquement pas influencé par la défaillance paramétrique alors que le second l'est.

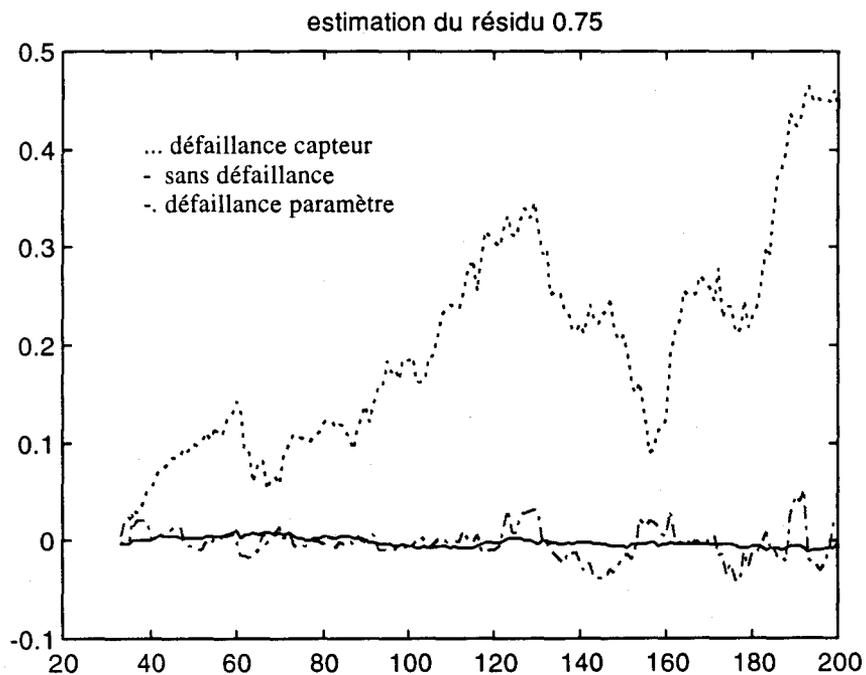


Figure 8 : Résidu d'identification relatif au paramètre nominal 0.75

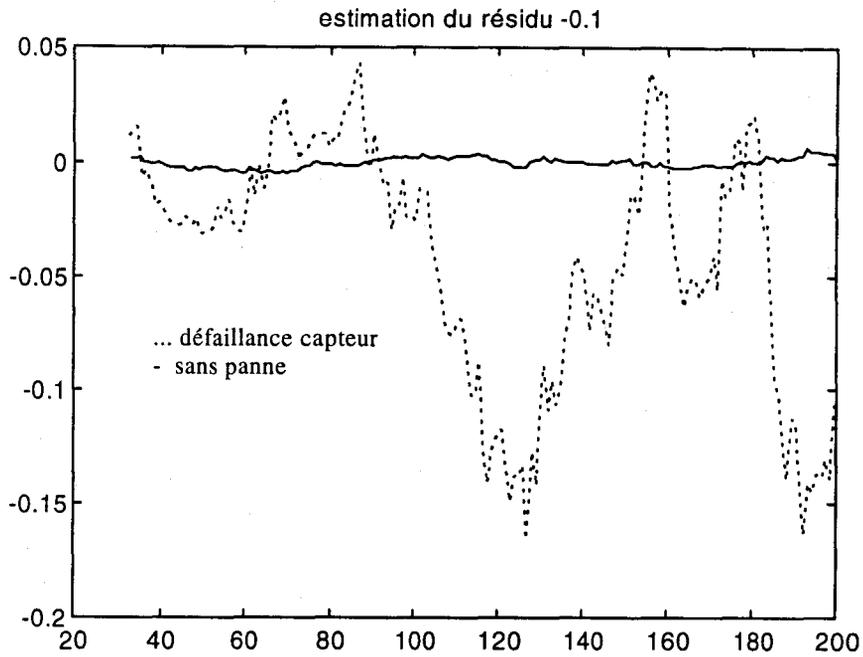


Figure 9 : Résidu d'identification relatif au paramètre nominal -0.1

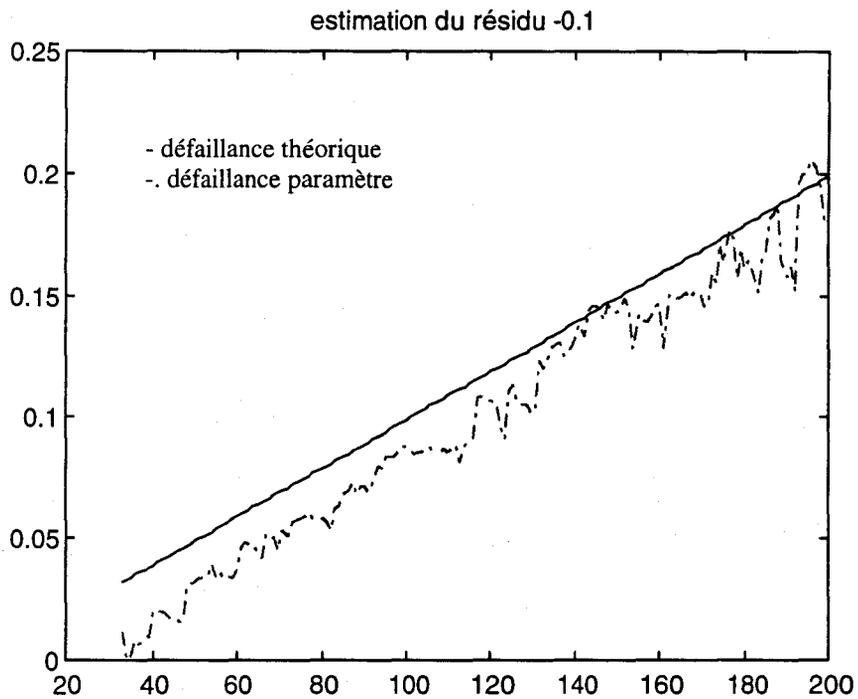


Figure 10 : Résidu d'identification relatif au paramètre nominal -0.1

Dans le cas de la défaillance paramétrique, on constate la croissance régulière du dernier résidu d'identification (figure 10), ce qui montre la présence d'une défaillance paramétrique d'amplitude croissante sur ce paramètre.

Dans le cas d'une défaillance d'un capteur, les deux résidus d'identification présentés deviennent plus perturbés ce qui signifie que le résultat de l'estimation est fortement dépendant des entrées. Avec des résidus d'identification seuls, on ne sait pas trop quoi décider. Dans ce cas, l'examen des résidus de parité permet une décision cohérente. Il apparaît donc que l'examen des deux types de résidus s'avère utile lorsque la localisation des deux types de défaillances est nécessaire.

Par ailleurs, on vérifie numériquement au cours de cet exemple que les résidus d'identification sont des combinaisons non linéaires des résidus de parité. Dans ce sens, l'interprétation monovariante du chapitre II vaut toujours.

Les résidus d'identification sont donc des résidus de parité non linéaires d'ordre plus élevé. Cette interprétation rejoint dans un sens la génération des résidus que propose Gertler à propos des défaillances paramétriques [Ger93a]. Il obtient des résidus à calculer en ligne et la matrice de projection qui en découle dépend du temps.

Dans cette optique, notre approche est bien meilleure car on dispose d'une expression analytique des résidus d'identification et notre méthode ne se limite pas à un voisinage des paramètres nominaux. Bien sûr, notre méthode présente un inconvénient majeur : il faut exciter suffisamment le système pour que les conditions de calcul soient correctes (conditionnement et persistance d'excitation).

IV - Conclusion

Ce chapitre, tourné vers la pratique, a permis de tester les comportements des résidus en réponse à différentes défaillances.

Nous avons pu nous rendre compte de l'exigence des conditions d'utilisation d'un algorithme d'estimation pour obtenir une précision convenable. Nous avons aussi constaté que les résidus de parité de base n'étaient pas suffisants pour une localisation physique des paramètres en défaut.

Ainsi, si des défaillances multiplicatives et additives indépendantes doivent être simultanément isolées, il est intéressant d'utiliser les deux types de résidus afin de se prémunir contre les décisions hasardeuses.

Conclusion générale

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons présenté les modules de base du système de surveillance en vue de l'obtention d'une base de données validée et enrichie.

Pour bâtir une décision, le système de surveillance utilise des indicateurs de défaut encore appelés résidus : ils doivent être proche de zéro en fonctionnement normal et s'en écartent en cas de défaillance.

Nous avons donc introduit les différentes méthodes de génération de ces indicateurs à base de modèles linéaires. Parmi ces dernières, nous nous sommes concentrés sur l'une d'entre elles : l'identification paramétrique. Nous avons montré sur un exemple que la dynamique des pannes devait être lente devant celle du système pour une identification paramétrique correcte. Nous avons aussi montré comment, à partir d'une estimation paramétrique, on pouvait effectuer un diagnostic du composant physique en défaut.

Dans le second chapitre, nous nous sommes intéressés à la comparaison de deux méthodes de génération : l'Espace de Parité et l'Estimation Paramétrique dans le cas des systèmes monovariabiles. Nous nous sommes en particulier focalisés sur quelques méthodes d'estimation paramétrique de base.

Le résultat général que nous avons obtenu est que les résidus d'identification de ces techniques peuvent être obtenus par un filtrage particulier des résidus de l'Espace de Parité. Ces résidus d'identification appartiennent donc à l'Espace de Parité.

Le chapitre III est une extension de cette comparaison dans le cadre des systèmes multivariabiles. La difficulté essentielle résidait en Espace de Parité comme en Identification dans le choix de relations entrées-sorties adéquates qui conduisent à la définition d'un vecteur de paramètres. Nous y avons développé plusieurs approches de relations entrées-sorties et dans chaque cas, nous avons comparé les deux types de résidus.

Quelle que soit la forme des relations entrées-sorties, nous avons trouvé que les résidus d'identification étaient des combinaisons non linéaires particulières des résidus de parité de base.

Le quatrième chapitre se veut une illustration des deux précédents avec l'introduction d'un exemple de simulation. Par rapport aux deux types de défaillances que l'on a distinguées dans ce mémoire, ce chapitre tente de fournir des caractéristiques de chaque type de résidus sous chacune des hypothèses.

Par rapport à cette classification de défaillances, il s'avère malgré tout intéressant de conserver les deux types de résidus pour obtenir une meilleure interprétation de la défaillance et diminuer les risques d'un mauvais diagnostic.

PERSPECTIVES

Comme nous l'avons fait dans le chapitre III, il serait sans doute intéressant de rechercher de nouvelles formes canoniques multivariées qui permettraient de répondre au problème de la surveillance de façon optimale par rapport à la précision des capteurs. Par ailleurs, d'autres techniques d'estimation pourraient être étudiées comme les techniques d'identification des matrices d'état développées par De Moor [DeM95].

Beaucoup de travaux existent pour l'optimisation des résidus dans le cas de défaillances additives indépendantes, quelques uns dans le cas de défaillances multiplicatives. Des approches de surveillance mixtes seraient à approfondir.

Dans le quatrième chapitre, nous avons tenté de donner certaines caractéristiques des résidus en réponse aux deux types de défaillances que nous avons envisagées. De nombreux travaux restent à effectuer en particulier sur le comportement statistique des résidus d'identification en réponse à des défaillances additives indépendantes.

Annexe

Cette annexe concerne la résolution de l'estimation par approche globale (Chapitre III). Elle a été suggérée par Darouach. Elle part de la résolution du système suivant :

$$\begin{bmatrix} Z^t \cdot Z & M^t \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{\theta}}_g \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^t \underline{Y} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

La multiplication à gauche de ce système d'équations par la matrice $\begin{bmatrix} I & M^t \\ 0 & I \end{bmatrix}$ donne

alors :

$$\begin{bmatrix} I & M^t \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^t \cdot Z & M^t \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{\theta}}_g \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & M^t \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^t \underline{Y} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(Z^t Z + M^t M) \hat{\underline{\theta}}_g + M^t \underline{\lambda} = Z^t \underline{Y} \quad (1)$$

$$M \hat{\underline{\theta}}_g = \underline{0} \quad (2)$$

L'expression (1) permet de calculer le vecteur des paramètres grands :

$$\hat{\underline{\theta}}_g = (Z^t Z + M^t M)^{-1} [Z^t \underline{Y} - M^t \underline{\lambda}]$$

Soit Ψ la matrice définie par : $\Psi = (Z^t Z + M^t M)^{-1}$

Nous examinerons plus tard la condition d'existence. Si on reporte cette dernière expression dans (2), on trouve :

$$M \Psi Z^t \underline{Y} - M \Psi M^t \underline{\lambda} = \underline{0}$$

Comme M est de rang plein ligne et Ψ est régulière, il résulte que $M \Psi M^t$ est aussi régulière. Il vient alors :

$$\underline{\lambda} = (M \Psi M^t)^{-1} M \Psi Z^t \underline{Y}$$

$$\hat{\underline{\theta}}_g = \Psi (I - M^t (M \Psi M^t)^{-1} M \Psi) Z^t \underline{Y}$$

La condition d'existence de cette solution est que la matrice Ψ soit régulière. La régularité de Ψ est équivalente à la régularité de la matrice $Z^t Z + M^t M$. Cette solution existe donc si la matrice $\begin{bmatrix} Z \\ M \end{bmatrix}$ est de rang plein colonne.

A présent, nous allons comparer les conditions d'existence des deux solutions proposées. Nous montrons en particulier qu'elles sont équivalentes.

$$\text{Problème : } \begin{bmatrix} Z \\ M \end{bmatrix} \text{ de rang plein colonne} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} Z \Gamma \text{ de rang plein colonne}$$

1) **Implication** : On suppose $\begin{bmatrix} Z \\ M \end{bmatrix}$ de rang plein colonne avec M de rang plein ligne et Γ

de rang plein colonne. Alors

$$\nexists \underline{\alpha} \neq \underline{0} / \begin{bmatrix} Z \\ M \end{bmatrix} \underline{\alpha} = \underline{0} \quad (a)$$

$$\nexists \underline{\beta} \neq \underline{0} / \Gamma \underline{\beta} = \underline{0} \quad (b)$$

Je raisonne par l'absurde et je suppose que : $\exists \underline{\gamma} \neq \underline{0} / Z \Gamma \underline{\gamma} = \underline{0}$

posons $\underline{\alpha} = \Gamma \underline{\gamma}$, on a alors : $Z \underline{\alpha} = \underline{0}$

$$M \underline{\alpha} = \underline{0} \quad \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$$

donc $\Gamma \underline{\gamma} = \underline{0}$

$\underline{\gamma} = \underline{0}$ d'après l'hypothèse (b).

cette dernière conclusion contredit notre hypothèse de départ.

2) Réciproque

$$\nexists \underline{\gamma} \neq \underline{0} / Z \Gamma \underline{\gamma} = \underline{0} \quad (c)$$

$$\nexists \underline{\beta} \neq \underline{0} / \Gamma \underline{\beta} = \underline{0} \quad (d)$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que : $\exists \underline{\alpha} \neq \underline{0} / \begin{bmatrix} Z \\ M \end{bmatrix} \underline{\alpha} = \underline{0}$

$M \underline{\alpha} = \underline{0}$ signifie que $\underline{\alpha} = \Gamma \underline{\gamma}$ car les vecteurs colonnes de Γ et les vecteurs lignes de M forment une base de l'espace des paramètres.

donc $Z \Gamma \underline{\gamma} = \underline{0}$

Ceci impose que $\gamma = 0$ d'après l'hypothèse (c).

Par conséquent $\underline{\alpha} = \Gamma \gamma = \underline{0}$

Le résultat $\underline{\alpha} = \underline{0}$ est absurde puisqu'il contredit notre hypothèse de départ.

Je viens donc de montrer que les deux conditions d'existence présentées dans les deux résolutions sont équivalentes. Par conséquent, les expressions analytiques de l'estimation issues de chacune des méthodes donnent le même résultat du fait de l'unicité de la solution.

Références bibliographiques

- [Aba76] Abaza B. A., « Multivariable Parameter Estimation using a two step Least Squares Estimator », *Electronic Letters* 13, p. 331-333.
- [Ack71] Ackermann J. E., R. S. Bucy, « Canonical minimal realization of a matrix of impulse response systems », *Information and Control*, vol 19, p. 224, 1971.
- [Afn84] Afnor, Norme X60-010, « Vocabulaire de maintenance et de gestion des biens durables », Juin 1984.
- [Afn88] Afnor, Norme X60-500, « Terminologie relative à la fiabilité, maintenabilité, disponibilité », Octobre 1988.
- [Ast71] Aström K. J., P. Eykhoff, « System Identification. A survey », *Automatica*, vol 7, p. 123-167, 1971.
- [Bas88] Basseville M., « Detecting changes in signals and Systems. A survey », *Automatica*, vol 24, p. 349-369, 1988.
- [Bas93] Basseville M., I. V. Nikiforov, « Detection of Abrupt Changes. Theory and Applications », Prentice Hall International, 1993.
- [Bea71] Beard R. V., « Failure Accommodation in Linear Systems through self-reorganization », Ph D dissertation, MIT, Dept Aeronautics Astronautics. Cambridge, 1971.
- [Bor92] Borne P., G. Dauphin-Tanguy, J-P Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, « Modélisation et Identification des Processus », Collection « Méthodes Pratiques de l'Ingénieur », Série 'Automatique', Ed Technip vol 2 & 3, t 1 & 2, 1992.
- [Bru90] Brunet J., D. Jaume, M. Labarrere, A. Rault, M. Vergé, « Détection et Diagnostic de Pannes. Approche par Modélisation », *Traité des Nouvelles Technologies, Série Diagnostic et Maintenance*, Hermès, 1990.
- [Cas93] Cassar J-P., M. Staroswiecki, V. Cocquemot, « Generation of Optimal Structured Residuals in the Parity Space », *IFAC 12 th World Congress*, Juillet 1993, Sydney, Australie.
- [Cas94] Cassar J-P., « Analyse et Surveillance des Processus Complexes », Habilitation à diriger des Recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille, 11 mai 1994.
- [Cho80] Chow E. Y., « Failure Detection System Design Methodology », Sc D. Thesis, Lab. Information and Decision System, MIT, Cambridge, MA, 1980.
- [Cho84] Chow E. Y., A. S. Willsky, « Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection System », *IEEE Trans on Automatic Control*, Vol AC- 29, n° 7, Juillet 1984.

- [Cla67] Clarke D. W., « Generalized Least Square Estimation of Parameters of a Dynamic Model », *1st IFAC Symposium on Identification in Automatic Control Systems*, Prague, 1967.
- [Coc93] Cocquempot V., « Surveillance des Processus Industriels Complexes. Génération et Optimisation des Relations de Redondance Analytiques », Thèse de Doctorat de l'Université de Lille, Février 1993.
- [Coi93] Coirault P., J-D. Gabano, J-P. Pinçon, J-C. Trigeassou, « Monitoring a DC Motor using Estimation and Binary Sequential Tests of Hypothesis », *Tooldiag 93*, Toulouse, France, 5-7 avril 1993.
- [Del94a] Delmaire G., J-P. Cassar, M. Staroswiecki, « Comparison of Identification and Parity Space Approaches for Failure Detection in Single Input Single Output Systems », *3rd IEEE CCA*, Glasgow, U K, 24-26 août 1994.
- [Del94b] Delmaire G., J-P. Cassar, M. Staroswiecki, « Identification and Parity Space Techniques for Failure Detection in SISO Systems including Modelling Errors », *33rd IEEE CDC*, Lake Buena Vista, Florida, USA, 14-16 décembre 1994.
- [Del95] Delmaire G., J-P. Cassar, M. Staroswiecki, « Comparison of Generalized Least Square Identification and Parity Space Techniques for FDI Purpose in S.I.S.O Systems », *ECC 95*, 5-8 septembre 1995, Rome.
- [DeM95] De Moor B., P. Van Overschee, « Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification », *ECC 95*, 5-8 septembre 1995, Rome.
- [Din90] Ding X., P. M. Frank, « Fault Detection and Identification via Frequency Domain Observation Approaches », *Proceedings of MIM-S2'90*, Bruxelles, Belgique, 3-7 Septembre 1990, p. IV A-1, 1 à 6.
- [Dub90] Dubuisson B., « Diagnostic et Reconnaissance des formes », Hermès, Paris 1990.
- [El-79] El-sherief H., N. K. Sinha, « Identification and Modelling for linear multivariable discrete-time Systems : A survey », *Journal of Cybernetics*, 9, p. 43-71, 1979.
- [Eva70] Evans F. A., J. C. Willcox, « Experimental Stardown Redundant Sensor Inertial Navigation Systems », *Journal of spacecrafts rockets*, vol 7, n°9, septembre 1970.
- [Fra91] Frank P. M., « Fault Diagnosis in dynamic Systems using Analytical and Knowledge based Redundancy. A survey and some new results », *Automatica*, vol -26 n°3, p. 459-474, 1991.
- [Geh94] Gehin A-L., « Analyse fonctionnelle et Modèle générique des Capteurs intelligents. Application à la Surveillance de l'Anesthésie », Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, janvier 1994.
- [Ger89] Gertler J., Q. Luo, « Robust Isolable Models for Failure Diagnosis », *Aiche Journal*, vol 35 n°11, Nov 1989, p.1856-1861.

- [Ger93a] Gertler J., M. M. Kunwer, « Optimal Residual Decoupling for Robust Fault Diagnosis », *Tooldiag 93*, Toulouse, France, 5-7 avril 1993.
- [Ger93b] Gertler J., R. Monajemy, « Generating Directional Residuals with Dynamic Parity Equations », *12th World Congress IFAC*, Sydney, Australie, 18-23 juillet 1993, vol 7, p. 505-510.
- [Ger94] Gertler J. J., « Modelling errors as unknown inputs », *Safeprocess 94, IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*, Espoo, Finland, 13-15 juin 1994.
- [Glo84] Glover K., G.O. Corrêa, « Pseudo-canonical forms, Identifiable Parametrizations and Simple Parameter Estimation for Linear Multivariable Systems : Parameter Estimation », *Automatica*, vol 20, n° 4, p. 443-452, 1984.
- [Gui75] Guidorzi R., « Canonical Structures in the Identification of Multivariable Systems », 1975, *Automatica*, 11, p. 361-374.
- [Ham86] Hamad M., « Validation des mesures et Détection des capteurs défectueux dans un système de contrôle-commande », Thèse de doctorat, Université de Lille1, 1986.
- [Hom92] Homssi L., « Outils de Modélisation Identification et Traitement du Signal pour le Diagnostic des Défauts dans les systèmes continus », Thèse de doctorat, 1992; INSA, Toulouse.
- [Ise84] Isermann R., « Process Fault Detection based on Modelling and Estimation methods. A survey », *Automatica*, vol 20 n°4, p. 387-404, 1984.
- [Jon73] Jones H. L., « Failure Detection in linear Systems », Ph D Thesis, MIT, Dept of Aeronautics, Cambridge, 1973.
- [Kas74] Kashyap R. L., R. E. Nasburg, « Parameter Estimation in multivariable stochastic difference equations », *IEEE Trans on Aut. Control*, 19, p. 784-797.
- [Lju76] Ljung L., « Consistency of the Least Square Identification method », *IEEE Trans. Automatic Control*, vol AC - 21, p. 779-781, 1976.
- [Lju88] Ljung L., « System identification. Theory for the user », Prentice Hall , Englewood Cliff, New Jersey, 1988.
- [Lue71] Luenberger D. G., « An introduction to observers », *IEEE Trans on Aut. Control*, vol AC-16, n° 6, décembre 1971.
- [Mag91] Magni J. F., P. Mouyon, « A generalized approach to Observers for Fault Diagnosis », *30 IEEE CDC*, Brighton, UK, 11-13 décembre 1991.
- [Mil87] Milne R., « Strategies for Diagnosis », *IEEE Trans SMC*, 17, p. 333-339, 1987.
- [Naj88] Najim M., « Modélisation et Identification en Traitement du Signal », Masson, Paris, 1988.

- [Pat91] Patton R. J., J. Chen, « A review of Parity Space Approaches to Fault Diagnosis », *Proc IFAC/IMACS Symposium Safeprocess 91*, Baden-Baden, vol-1, p. 238-255, 10-13 sept 1991.
- [Pom91] Pomorski D., « Apprentissage Automatique Symbolique et Numérique. Construction d'un ensemble de règles à partir des données », Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, décembre 1991.
- [Pot77] Potter J. E., M. C. Soman, « Thresholdless Redundancy Management with array of skewed instruments », *Electronic Flight Control System*, Agardograph 224, p.15-25, 1977.
- [Rau85] Rault A., D. Jaume, M. Vergé, « Méthode originale de Détection de Défauts sur Processus Industriels », *Revue APII n° 19*, p. 45-68, 1985.
- [Sin79] Sinha N. K., Y. H. Kwong, « Recursive Estimation of the Parameters of Linear Multivariable Systems », *Automatica*, vol 15, p. 471-475, 1979.
- [Söd74] Söderström T., « Convergence properties of the Generalized Least Squares Identification method », *Automatica*, vol 10, p. 617-626, 1974.
- [Spr92] Sprösser T., « Contribution à l'étude des méthodes de Détection de Défauts par Redondance Analytique », Thèse de doctorat, Université de Haute Alsace, 16 décembre 1992.
- [Sta94a] Staroswiecki M., J-P. Cassar, C. Féliot, « Functional , Structural and Behavioral Models for the Design of integrated automation Systems », *Mathmod Vienna, IMACS Symposium on Mathematical Modelling*, Vienne, Autriche, Février 1994.
- [Sta94] Staroswiecki M., M. Bayart, « Actionneurs Intelligents », Hermès, 1994.
- [The86] Théodor R., P. Lascaux, « Analyse Numérique Matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur », Tome 1, Masson, Paris, 1986.
- [Tri94] Trigeassou J.C., « Estimation Paramétrique de modèles continus pour le Diagnostic », Journées Sécurité, Surveillance, Supervision, 14 pages. Paris 17-18 novembre 1994.
- [Tse72] Tse E., J. Anton, « On the Identifiability of Parameters », *IEEE Trans on Aut Control*, 17, p. 637-646, 1972.
- [Tse75] Tse E., H. L. Weinert, « Structure determination and Parameter Identification for multivariable stochastic linear Systems », *IEEE Trans on Aut. Control*, 20, p. 603-613.
- [Wal43] Wald A., H. B. Mann, « On the statistical Treatment of linear stochastic Difference Equations », *Econometrica*, vol 11, p. 173-219, 1943.
- [Wil76] Wilky A. S., « A survey of Design methods for Failure Detection in dynamic Systems », *Automatica*, vol 12, p. 601-611, 1976.
- [Wün90] Wünnenberg J., « Observers based Fault Detection in dynamic Systems », Ph D Thesis, University of Duisburg, 1990.