THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

SPECIALITE: MATHEMATIQUES

présentée par

FREDERIC HAN

Codimension du schéma des multisauteuses d'un 4- ou 5-instanton

Soutenue le 24 janvier 1996

JURY

Président: L.GRUSON, Professeur, Université de Lille1
Rapporteurs: J.LE POTIER, Professeur, Université de Paris7
G.TRAUTMANN, Professeur, Université de Kaiserslautern
Membre: J.D'ALMEIDA, Professeur, université de Lille 1

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements à tous les membres du jury, pour leur lecture attentive et leurs remarques, et tout particulièrement à mon directeur de thèse Laurent Gruson, pour toute sa disponibilité et pour toute l'aide qu'il m'a apportée.

Codimension du schéma des multisauteuses d'un 4- ou 5-instanton

FREDERIC HAN

Table des matières

Introduction

On appelle n-instanton un fibré algébrique E au dessus de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$, qui est stable (i.e. $h^0E = 0$) et tel que l'on ait de plus $h^1E(-2) = 0$. La condition de stabilité est nécessaire pour définir l'espace des modules I_n de ces fibrés, et la condition "instanton" est en fait assez naturelle puisque d'une part $h^1E(-2)$ mod 2 est un invariant topologique (invariant d'Atiyah-Rees), et que d'autre part elle impose aux sections propres de E(k) (pour k$\geq$2) de s'annuler sur une courbe C telle que $h^0\mathcal{O}_C = 1$. (On a en effet selon [Ba-Hu] lemme 4, $h^1(E(l)) = 0$ pour $l \leq -2$).

On sait grâce à une description de son espace tangent que toutes les composantes irréductibles de I_n sont de dimension$\geq 8n-3$. En fait pour n$\leq$ 4, I_n est irréductible (Cf [H], [E-S], [Ba2]) et lisse (Cf [LeP]). De plus I_n est rationnelle pour n$\leq$ 3 alors qu'on ne connait que l'unirationnalité pour n=4 (Cf [T2]), et que pour n$\geq$ 5 l'irréductibilité de I_n ne semble pas être connue.

On s'intéresse ici à la construction faite dans [E-S] pour n=3. On dit d'une droite L de $\mathbb{P}_3$ qu'elle est multisauteuse si E restreint à L est isomorphe à: $\mathcal{O}_L(k)\oplus \mathcal{O}_L(-k)$ où $k > 1$. Leur méthode consiste alors à construire un morphisme de I_n sur l'espace des modules des θ caractéristiques associées à des réseaux de quadriques de $\mathbb{P}_{n-1}$ (qui est irréductible), et ensuite de montrer que la fibre générique est aussi irréductible. Ce morphisme s'explicite en étudiant les droites sauteuses passant par un point donné de $\mathbb{P}_3$, mais le point de départ de cette construction est de prouver qu'il existe un point de $\mathbb{P}_3$ par lequel ne passent pas de droites multisauteuses, ce qui revient à montrer que la codimension des multisauteuses de E dans la grassmannienne G des droites de $\mathbb{P}_3$ est 3 pour tous les instantons. Le problème est que cette codimension n'est connue pour $c_2 > 3$ que pour l'instanton générique de la composante irréductible de I_n contenant les fibrés de t'Hooft. ([B-H])

Le but de ce travail est de trouver cette codimension pour n=4 et 5(3.3.3). On va procéder pour celà par l'absurde. En effet on espère que cet excès de droites multisauteuses va se répercuter dans le comportement de E vis à vis de ses restrictions aux plans, car le problème d'une majoration de la dimension dans $\mathbb{P}_3^\vee$ de l'ensemble des plans non stables à d'abord été étudié par Barth (Cf [Ba1]) en 1977, puis récemment étendu par Coandǎ (Cf [Co]). Ces résultats nous seront essentiels puisque non seulement ce sont eux qui permettront systématiquement de conclure, mais aussi parce que de nombreuses preuves proviennent de celles apportées par Coandǎ.

Remarque *Le schéma M des droites multisauteuses de E n'a pas de composantes de dimension 3.*

Sinon, le β-plan générique contiendrait une courbe de multisauteuses, et serait donc non stable. (Pour $c_2 \leq 5$, il n'y a qu'un nombre fini de multisauteuses dans un même plan stable. Cf 1.1.4). Selon [Ba1] et [Co], E serait alors un fibré de corrélation nulle.

On procède maintenant par l'absurde. On se donne donc un instanton E tel que n=4 ou 5 et que le schéma de ses droites multisauteuses contienne un sous-schéma de dimension 2. Si $\Im$ est le plus grand sous faisceau de $\mathcal{O}_M$ de dimension$\leq$ 1, on note S le sous schéma donné par la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{I} \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow 0$$

C'est le trop grand nombre de droites de $\mathbb{P}_5$ trisécantes au schéma des multisauteuses M qui apportera la contradiction attendue .

L'objet du §1 est de faire le lien entre les trisécantes à S et les plans sauteurs de E (i.e: plans semi-stables non stables). Il s'agit plus particulièrement de montrer que ce lien subsiste pour tout sous-schéma de S de dimension nulle et de longueur 3 qui est dans une droite incluse dans G. Il faut pour cela réduire n à 4 ou 5, et s'assurer que ces trisécantes ne passent pas par des droites sauteuses d'ordre supérieur strictement à 2.

On montre donc au §2 que E ne peut pas avoir de droites 5-sauteuses (modulo l'existence de S) (2.1.1) puis, que S ne peut pas contenir de droites 4-sauteuses (2.2.5). On y montrera enfin qu'elle ne peut pas contenir une courbe de droites exactement trisauteuses (2.2.1), ce qui constitue la difficulté essentielle du résultat voulu pour $c_2 = 5$.

Le §3 consistera en l'étude des trisécantes à S et des problèmes apportés par les éventuelles singularités de S et les droites trisauteuses isolées sur S pour aboutir au cas où S ne possède pas du tout de trisécante, que l'on résoudra grâce à l'appendice 5.1, en montrant l'existence d'une courbe résiduelle.

Au §4 on montrera comment la construction de [E-S] permet de retrouver l'irréductibilité et la lissité de I_4 grâce au 3.3.3

Le §5 est un appendice où l'on ne se limite plus à n=4 ou 5. On calcule au §5.1 la classe résiduelle d'une surface irréductible de bisauteuses localement intersection complète, et au §5.2 on étudie la courbe des bisauteuses d'un instanton sous les hypothèses attendues par la structure déterminantielle de ce schéma.

Notations

On note p et q les projections de la variété d'incidence (points/droites) vers $\mathbb{P}_3$ et G. On pose $\tau = p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)$ et $\sigma = q^*\mathcal{O}_G(1)$. On appelle α et β plans, les 2-plans de G qui sont constitués respectivement des droites passant par un point de $\mathbb{P}_3$, et des droites incluses dans un plan de $\mathbb{P}_3$. On notera enfin $\mathbb{P}(F) = Proj(Sym F^\vee)$.

1 Propriétés de S lorsque $c_2 \leq 5$

1.1 Relation entre trisécantes à S et plans sauteurs

On s'intéresse ici aux droites d de $\mathbb{P}_5$ qui rencontrent M en longueur supérieure ou égale à 3. Ces droites sont alors incluses dans G, et on identifie d au pinceau plan de droites de $\mathbb{P}_3$ associé. On note h le β-plan contenant d, et H le plan de $\mathbb{P}_3$ associé. $R^2 q_*$ étant nul, on a un isomorphisme entre la restriction de $R^1 q_* p^* E$ à h, et $R^1 q_* p^* E_H$, où E_H désigne la restriction de E à H, ainsi qu'entre $R^1 q_* p^* E_H$

restreint à une droite de $h^\vee$ et le faisceau obtenu par la même construction en éclatant le point de H associé.(On notera donc encore p et q les projections sur H et $\mathbb{P}_1$ dans ce cas).

Proposition 1.1.1 *Pour $c_2 \leq 5$, un plan H associé à une droite d de $\mathbb{P}_5$ coupant M en longueur supérieure à 3 et qui ne contient que des droites au plus bisauteuse, n'est pas un plan stable*

On suppose que H est stable, et on éclate ce plan au point D, centre du pinceau représentant d. On a la résolution de la variété d'incidence F:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{h\times H}(-\tau-\sigma) \longrightarrow \mathcal{O}_{h\times H} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{H}} \longrightarrow 0$$

qui tensorisée par p^*E_H donne en lui appliquant le foncteur q_* :

$$0 \to q_*p^*E_H \to H^1E_H(-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \longrightarrow H^1E_H\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \to R^1q_*p^*E_H \to 0$$

La longueur induite par le schéma des multisauteuses dans d est donnée par $c_1(R^1q_*p^*E_H)$, qui est supérieur à 3 par hypothèse. On remarque que $q_*p^*E_H$ est un fibré de rang $h^1E_H - h^1E_H(-1) = 2$ au dessus de $\mathbb{P}_1$. Il se scinde donc en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-a)\bigoplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-b)$ où a et b sont strictement positifs tels que $a+b = h^1E_H(-1) - c_1(R^1q_*p^*E_H)$. Comme $h^1E_H(-1)$ vaut c_2, on obtient déjà une contradiction pour $c_2 = 4$.

Pour $c_2 = 5$, on a forcément $a = b = 1$, c'est à dire que $h^0[q_*p^*E_H(\sigma)]$ qui vaut $h^0(\Im_D\otimes E_H(1))$ est égal à 2. Ces 2 sections s_1 et s_2 de $E_H(1)$ sont donc liées sur la conique $Z_{s_1\wedge s_2}$ qui doit être singulière en D puisque ce point est dans le premier idéal de Fitting de l'application $2\mathcal{O}_H \longrightarrow E_H(1)$. Lorsque $Z_{s_1\wedge s_2}$ est constitué de 2 droites distinctes d_1 et d_2, on a la suite exacte suivante car les 2 sections sont nulles en D:

$$0 \longrightarrow 2\mathcal{O}_H \xrightarrow{(s_1,s_2)} E_H(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{d_1}(a)\oplus\mathcal{O}_{d_2}(b) \longrightarrow 0$$

Le calcul des caractéristiques d'Euler-Poincaré donne $a+b=-3$, c'est à dire que l'un des deux est plus petit que -2, et donc que l'une des 2 droites est au moins trisauteuse, ce qui est impossible puisque d n'en contient pas par hypothèse.

Il en est de même lorsque $Z_{s_1\wedge s_2}$ est une droite d_1 double. On a alors la suite exacte:

$$0 \longrightarrow 2\mathcal{O}_H \xrightarrow{(s_1,s_2)} E_H(1) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{L}$ est un faisceau de rang 1 sur la structure double de d_1 dans H qui n'est pas localement libre en M. On a la suite exacte de liaison:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{d_1}(a) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_{d_1}(b) \longrightarrow 0$$

On a encore $a+b=-3$, ce qui implique que l'on ait soit $h^0\mathcal{O}_{d_1}(b) < h^1\mathcal{O}_{d_1}(a)$, soit $h^1\mathcal{O}_{d_1}(b) \neq 0$, c'est à dire que dans les 2 cas $R^1q_*p^*\mathcal{L}_{(d_1)}$ n'est pas nul, et donc que d_1 est une trisauteuse.

Il est clair que ce résultat n'est plus valable dans un plan sauteur, par exemple la section de E_H dans un tel plan pourrait contenir un point isolé sur d et un schéma de longueur 3 sur une courbe lisse transverse à la droite d. Cependant cette situation n'arrive qu'un nombre fini de fois.

Lemme 1.1.2 *Un β−plan associé à un plan sauteur ne contient qu'un nombre fini de droites de $\mathbb{P}_5$ trisécantes au schéma des multisauteuses en des droites bisauteuses*

On rappelle que si l'on a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow E_H(k) \longrightarrow \Im_Z(2k) \longrightarrow 0$$

alors la résolution de la variété d'incidence $I \subset H^\vee \times H$ donne un isomorphisme entre $R^1q_*p^*E_H$ et $R^1q_*p^*\Im_Z(k)$ pour $k=1$ ou 2, c'est à dire entre les bisauteuses de H et les k+2-sécantes à Z.

Si H est un plan sauteur, on note $\Im_Z$ l'idéal du lieu d'annulation Z de la section de E_H. Il suffit de montrer que pour tout N disjoint de Z tel que $\mathrm{N}^\vee$ ne contienne pas de droites au moins trisauteuses, alors $\mathrm{N}^\vee$ n'est pas trisécante au support de $R^1q_*p^*E$. Comme la restriction de ce faisceau à h est isomorphe à $R^1q_*p^*\Im_Z$, on va étudier les bisécantes à Z dans $\mathrm{N}^\vee$. On éclate H au point N, et on a la suite exacte:

$$0 \to q_*p^*\Im_Z \to H^1\Im_Z(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \longrightarrow H^1\Im_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \to R^1q_*p^*\Im_Z \to 0$$

où $q_*p^*\Im_Z$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-a)$ où a est strictement positif, et doit être égal à $c_2 - c_1(R^1q_*p^*\Im_Z)$. C'est à dire que pour $c_2 \leq 5$, si $\mathrm{N}^\vee$ est une trisécante au schéma des multisauteuses, on a $a \leq 2$. Si a vaut 1, Z serait inclus dans une droite qui serait alors une c_2-sauteuse.Si $a=2$, alors Z serait sur une conique singulière en N car $h^0(\Im_N^{\otimes k} \otimes \Im_Z(k)) = h^0[q_*p^*\Im_Z(k\sigma)]$. Si cette conique n'était pas une droite double, l'une au moins des 2 droites serait trisécante à Z, car Z est disjoint de N. On note alors t le support réduit de cette droite double, et on rappelle que t est une droite exactement bisécante à Z (i.e bisauteuse de E). Le schéma Z possède alors forcément une composante de longueur$\geq$ 3 qui n'est pas dans la droite t doublée. En effet, si Z possède 2 composantes connexes, elles doivent être sur des courbes lisses transverses à t et l'intersection de ces composantes avec la droite t doublée est de longueur au plus 4. Lorsque Z est connexe, soit il contient 2 fois le diviseur exceptionnel, par exemple $(xy, y^3+x^3+x^2)$ où t a pour équation $y=0$, soit il est sur une courbe lisse tangente à t, par exemple $(x^5, y-x^2)$. On regarde le premier cas dans l'éclaté du plan en ce point. Mais l'image réciproque de Z est alors constituée de 2 fois le diviseur exceptionnel et d'un point qui ne peut pas être sur le transformé strict de t car elle doit être bisécante à Z, ce schéma n'est donc pas dans l'image réciproque de la droite double. Dans le second cas, la droite t doublée coupe la courbe lisse contenant Z en longueur 4, elle ne peut donc pas contenir Z.

L'étude globale des bisauteuses dans un plan n'est malheureusement pas si simple, cependant, les résultats précédents nous donnent quelques informations:

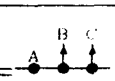
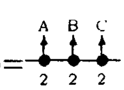
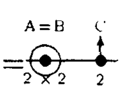
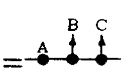
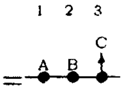
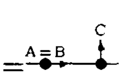
Remarque 1.1.3 *Dans un β–plan stable h, pour $c_2 \leq 5$, soit le schéma des multisauteuses est connexe, soit toutes ses composantes connexes sont localement sur des courbes lisses*

On remarque d'abord que H ne possède qu'un nombre fini de multisauteuses. En effet, pour $c_2 \leq 5$ $E_H(1)$ a une section qui s'annule en un schéma Z de longueur inférieure ou égale à 6. S'il existait une infinité de trisécantes à Z, alors dans l'éclaté de H en ce point $p^*E(\tau - 3x)$ aurait une section (où $x = \tau - \sigma$ est la classe du diviseur exceptionnel) ce qui est impossible puisque ce fibré a un c_2 négatif.

On conclut alors en remarquant que si le support de $R^1 q_* p^* E_H$ possède un point épaissi dans toutes les directions, comme il ne possède pas de trisécantes selon le 1.1.1, il doit être connexe.

On peut en fait donner, par exemple dans un plan stable H, les principaux exemples de calcul de la multiplicité d'une bisauteuse dans un pinceau plan en éclatant H au centre du pinceau. Lorsque ce point est dans le lieu d'annulation Z d'une section de $E_H(1)$ on se ramène à un problème de bisécantes ou 1-sécantes selon le nombre de fois que p*Z contient le diviseur exceptionnel.

On note  un schéma du type (x^2, y^2), où les flèches désignent des schémas de longueur k sur une courbe lisse tangente à la direction indiquée

Z	$N^\vee$	$A^\vee$	$B^\vee$	$C^\vee$
a= 	1	2	1	1
b=  ou b'= 	2	2	2	2
c= 	1	2	1	1
d=  ou d'= 	1	1	1	1

Proposition 1.1.4 *Un plan H contenant une infinité de droites bisauteuses est sauteur. Dans ce cas, $R^1q_*p^*E$ induit dans le β-plan associé à H un schéma qui contient une droite réduite munie d'éventuels points immergés.*
Pour $c_2 = 5$, un tel pinceau contient alors une droite trisauteuse.
Pour $c_2 = 4$ la droite réduite est munie de 4 points immergés.

Selon la remarque 1.1.3, H ne peut pas être stable. La section de E_H doit donc contenir 2 fois le diviseur exceptionnel, et le résiduel est vide pour $c_2 = 4$ et de longueur 1 pour $c_2 = 5$. La droite contenant le point que l'on éclate et le résiduel est alors une trisauteuse.

On peut obtenir une étude plus détaillée du schéma induit dans ce β-plan par $R^1q_*p^*E$.

Par exemple, pour $c_2 = 4$ la section s de E_H s'annule en Z_s d'idéal $\mathfrak{I}$ qui est l'intersection complète de 2 coniques singulières en un même point. On remonte alors la résolution de $\mathfrak{I}$ sur la variété d'incidence points/droites de $\mathbb{P}_2$ notée I, puis on projette cette suite exacte courte sur $\mathbb{P}_2^\vee$ pour obtenir la suite exacte:

$$R^1q_*\mathcal{O}_I(-4\tau) \longrightarrow 2R^1q_*\mathcal{O}_I(-2\tau) \longrightarrow R^1q_*p^*\mathfrak{I} \longrightarrow 0$$

qui donne par dualité relative:

$$q_*\mathcal{O}_I(2\tau+\sigma)^\vee \longrightarrow 2\mathcal{O}_I(-\sigma) \longrightarrow R^1q_*p^*\mathfrak{I} \longrightarrow 0$$

Comme $I = \mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}_2^\vee}(2)^\vee)$ où: $0 \to \Omega_{\mathbb{P}_2^\vee}(2) \to 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(2) \to 0$, on a:

$q_*\mathcal{O}_I(k\tau) = Sym_k(\Omega_{\mathbb{P}_2^\vee}(2))$, et on s'est ramené à l'étude du lieu de dégénérescence d'une application: $2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee} \longrightarrow Sym_2(\Omega_{\mathbb{P}_2^\vee}(2))$. Ce lieu contient une droite réduite car par un point P général dans le plan sauteur il ne passe pas de conique singulière en P contenant les zéros de la section sauteuse s (i.e: $h^1(q_*p^*\mathfrak{I}_{Z_s}) = 0$, ce qui est aussi valable pour $c_2 = 5$). Comme le résiduel a la bonne codimension, sa classe se calcule par la méthode de l'appendice 5.1 qui est ici simplifiée par le fait que l'excès soit un divideur de Cartier. Ce lieu est donc donné par:

$$c_2(Sym_2(\Omega_{\mathbb{P}_2^\vee}(2))) - h.c_1(Sym_2(\Omega_{\mathbb{P}_2^\vee}(2))) + h^2 = 4h^2$$

où h est la classe d'un hyperplan de $\mathbb{P}_2^\vee$. Il semble alors clair que ce lieu résiduel soit constitué des 2 droites d et d' constituant les 2 coniques doubles contenant Z_s. En effet le support de $R^1q_*p^*E$ n'a pas de trisécantes dans ce $\mathbb{P}_2^\vee$, et il a pour seules bisécantes les droites de $\mathbb{P}_2^\vee$ qui passent par d ou d', car $q_*p^*\mathfrak{I}_{Z_s} = \mathcal{O}_{P^\vee}(-a)$ où $a \geq 3$ sauf si $P \in d \cup d'$ où $a = 2$. C'est à dire que l'idéal des bisauteuses dans $\mathbb{P}_2^\vee$ est du type $(y^2, yx^2(x-1)^2)$.

1.2 Quelques résultats préliminaires

Dans la section précédente, on a étudié le lien entre trisécantes à S et plans sauteurs. On remarque alors que certaines singularités de S, (notamment lorsque S n'est pas localement intersection complète), font apparaitre naturellement des fibrés qui ont une droite dans $\mathbb{P}_3^\vee$ de plans sauteurs. On constate alors que de tels fibrés existent, par exemple lorsqu'un instanton possède une c_2-sauteuse ils sont tous de ce type (Cf [S]).

Il est clair qu'une bonne connaissance de ces fibrés apporterait de grandes simplifications dans la suite, mais l'exemple suivant montre que ces fibrés ne sont pas encore tous connus.

Exemple 1.2.1 *Il existe des 4-instantons tels que tout plan passant par une bisauteuse donnée soit sauteur.*

On peut construire un tel fibré en se donnant une courbe elliptique C et 2 faisceaux inversibles de degré 2, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sur C, tels que $(\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L}')^{\otimes 4} = \mathcal{O}_C$ et que 4 soit le plus petit entier ayant cette propriété.

On note alors $S \xrightarrow{\pi} C$ la surface réglée $Proj(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}')$ et $\overline{S}$ la surface quartique image de S dans $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(H^0\mathcal{L} \oplus H^0\mathcal{L}')$. On considère alors le diviseur

$D = \pi^*\mathcal{L}^{\vee\otimes 4} \otimes \mathcal{O}_S(4)$. Le système linéaire $\mid D \mid$ est de dimension: $h^0(\mathcal{L}^{\vee\otimes 4} \otimes Sym_4(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}')) - 1$ qui vaut 1 grâce à la relation entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$. On considère alors le fibré E définit par la suite exacte:

$$0 \longrightarrow E(-2) \longrightarrow 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3} \longrightarrow \phi_*(\pi^*\mathcal{L}^{\vee\otimes 4} \otimes \mathcal{O}_S(4)) \longrightarrow 0$$

Où ϕ est le morphisme de S dans $\mathbb{P}_3$, et où la dimension de $\mid D \mid$ montre que E est un instanton.

On note s et s' les uniques sections de $\pi^*\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_S(1)$ et de $\pi^*\mathcal{L}'^\vee \otimes \mathcal{O}_S(1)$. Le système linéaire $\mid D \mid$ est alors constitué des courbes d'équations $\lambda s^4 + \mu s'^4$, dont l'élément générique est une courbe elliptique lisse de degré 8 section de $E(2)$. De plus lorsque λ ou μ est nul, on obtient un élément de $\mid D \mid$ qui munit la droite double de $\overline{S}$ associée à s ou s' d'une structure multiple. Tous les plans passant par ces droites (notées d et d') sont alors sauteurs, et comme toutes les génératrices de $\overline{S}$ sont quadrisécantes à ces sections de $E(2)$, ces droites sont bisauteuses. La section sauteuse dans un plan contenant d ou d' est alors du type $(y^2, x(x-1))$ où $y = 0$ est l'équation de d ou d'. Les droites d et d' sont alors exactement bisauteuses, et ces sections induisent dans le diviseur excéptionnel de l'éclaté de $\mathbb{P}_3$ en d ou d' une courbe de bidegré $(2, 2)$.

On remarque que l'on peut montrer que lorsque $\Im_\delta^k \otimes E(k)$ a une section et que δ est au moins sauteuse, alors cette section est ensemblistement égale à δ. En effet, dans l'éclaté de $\mathbb{P}_3$ en δ, la restriction de la section de $p^*E(k\sigma)$ au diviseur exceptionnel est une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1}(k, a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1}(k, -a)$, où δ est

a-sauteuse. Comme a est strictement positif, cette section est en fait une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1}(k,a)$, elle ne possède donc pas de points isolés ni immergés. La section de $p^*E(k\sigma)$ ne possède donc pas de composantes irréductibles qui rencontrent le diviseur exceptionnel, mais comme la section de $\Im_\delta^k\otimes E(k)$ doit être connexe dans $\mathbb{P}_3$, elle est ensemblistement égale à δ.

La difficulté à classer de tels fibrés vient alors du fait que la section de $p^*E(k\sigma)$ puisse être multiple et ne pas être incluse dans le diviseur exceptionnel, ce qui est le cas dans l'exemple précédent car un diviseur de bidegré (k,a) dans le diviseur exceptionnel a pour classe dans l'anneau de Chow de $\widetilde{\mathbb{P}_3}$: $k\tau^2+(a-k)\tau\sigma$, alors que la section de $p^*E(k\sigma)$ a pour classe $c_2\tau^2$.

Corollaire 1.2.2 *Pour toute valeur de c_2, s'il existe une droite δ, au moins sauteuse pour un instanton E, telle que $\Im_\delta^k\otimes E(k)$ ait une section, alors k divise c_2, cette section est irréductible, et δ est exactement k-sauteuse.*

Il ne s'agit donc pas ici d'étudier toutes ces familles, mais on aura cependant besoin du lemme suivant:

Lemme 1.2.3 *Pour $c_2=4$, s'il existe une droite d, au plus bisauteuse, telle que tous les plans contenant d soient sauteurs, alors $\Im_d^{\otimes 2}\otimes E(2)$ possède une section*

On éclate $\mathbb{P}_3$ le long de la droite q, et on note p' et q' les projections de $\widetilde{\mathbb{P}_3}$ sur $\mathbb{P}_3$ et $\mathbb{P}_1$. On note $\tau=p'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)$, $\sigma=q'^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)$ et $x=\mathbb{P}_1\times$q le diviseur exceptionnel. La classe de x est $\tau-\sigma$. On a alors la suite exacte:

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3\times\mathbb{P}_1}(-\tau-\sigma)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3\times\mathbb{P}_1}\longrightarrow\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{P}_3}}\longrightarrow 0$$

qui tensorisée par $p'^*E(\tau)$ donne en appliquant le foncteur q'_* la suite exacte suivante puisque $h^0E(1)=0$ selon le 1.2.5:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & q'_*p'^*E(\tau) \arrow[r] & H^1E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^1E(1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \arrow[r] & R^1q'_*p'^*E(\tau) \arrow[r] & 0 \\ & & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

Le faisceau $R^1q'_*p'^*E(\tau)$ est en fait localement libre de rang 1 au dessus de $\mathbb{P}_1$ car tous les plans contenant q sont sauteurs et $c_2=4$. D'autre part, la résolution de x dans $\widetilde{\mathbb{P}_3}$ donne la suite exacte:

$$0\to p'^*E(\sigma)\to p'^*E(\tau)\to p'^*E_x(\tau)\to 0$$

Comme $p'^*E_x(\tau) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times q}(0, -a+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1 \times q}(0, a+1)$ avec $a \leq 2$, on obtient la surjection: $R^1 q'_* p'^* E(\sigma) \to R^1 q'_* p'^* E(\tau) \to 0$ qui montre que: $R^1 q'_* p'^* E(\tau) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(b)$ avec $b \geq 1$ car $H^1 E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$ se surjecte sur $R^1 q'_* p'^* E$. Comme $h^1(K)$ est nul, on en déduit que $h^1(q'_* p'^* E(\tau)) \leq 2$ et, comme il est localement libre de rang 3, que $h^0(q'_* p'^* E(\tau + \sigma)) \neq 0$. On a donc une section de $\Im_d \otimes E(2)$ dont la restriction à un plan quelconque contenant d doit être proportionelle à la section sauteuse car ses zéros ne sont pas sur une droite, puisque d n'est pas c_2-sauteuse. Dans tout plan contenant d, la section de $\Im_d \otimes E(2)$ contient alors une conique qui ne peut être que 2 fois d, ce qui donne bien une section de $\Im_d^{\otimes 2} \otimes E(2)$.

Exemple 1.2.4 *Il existe des fibrés E tels que* $h^1 E(-2) \bmod 2 = 1$, $c_2 = 4$ *ayant une congruence de bisauteuses*

Il suffit de considérer 2 droites gauches toutes les 2 munies d'une structure quadruple par l'intersection complète de 2 quadriques singulières le long de ces droites. On obtient alors 2 quartiques elliptiques disjointes dont la réunion est une section de E(2), où E est un fibré de deuxième classe de Chern 4 et tel que $h^1 E(-2) \bmod 2 = 1$ selon [C]. Il est alors clair que toute droite qui rencontre les 2 droites de départ est une quadrisécante à cette section. On a donc une congruence (1,1) de bisauteuses.

Lemme 1.2.5 *Pour tout c_2 les fibrés de t'Hooft (ie tels que $h^0 E(1) \neq 0$) ont leur multisauteuses en codimension 3.*

NB: En déformant au voisinage d'un tel fibré, Brun et Hirschowitz (Cf [B-H]) ont montré un résultat plus fort sur un ouvert de I_n. On remarque cependant que ces fibrés, dont l'élément général tordu par 1 possède une section constituée de n+1 droites disjointes (Cf [H]), ont toujours une droite trisauteuse (i.e une quadrisécante à la section). Ils ne sont donc pas dans le domaine d'application de leur résultat.

Soit s une section de E(1), et Z_s son schéma d'annulation. Les droites k+2-sauteuses ont même schéma que les k+3-sécantes à Z_s pour $k \in \mathbb{N}$. Le résultat est alors évident si les droites constituant Z_s sont réduites. Dans le cas contraire, une famille à 2 paramètres de trisécantes peut provenir de 2 types de situations:

a) Il existe une droite d telle que Z_s restreint à d ait une congruence de bisécantes qui recoupent une autre droite d' de Z_s. Cette congruence est alors ensemblistement incluse dans les bisécantes à d et d', et donc pour tout plan H contenant d', les droites passant par d∩H sont des bisécantes à Z_s en ce point. La droite d serait alors munie d'une structure quadruple qui serait double dans les plans contenant d, ce qui est impossible puisque ces plans seraient instables.

b) Il existe une droite d telle que Z_s restreint à d (noté $Z_{s,d}$) ait une famille à 2 paramètres de trisécantes qui ne peuvent pas être dans un même plan semi-stable. Tout plan contenant d est sauteur (puisque la restriction de s à ce plan est divisible par l'équation de d), et doit contenir un pinceau de bisauteuses de sommet sur d, ce qui implique que d est une droite au moins bisauteuse. On entre alors en contradiction avec le 1.2.2 car s est une section de $\Im_d \otimes E(1)$.

1.3 Etude de S au voisinage d'une droite 3 ou 4-sauteuse

Lemme 1.3.1 *Les droites au moins trisauteuses d'un 4 ou 5-instanton sont de dimension* ≤ 1.

En effet, si E possède une congruence de trisauteuses de bidegré (α, β), α et β sont inférieurs à 2 car pour $c_2 \leq 5$ un plan contenant 2 droites trisauteuses ne peut pas être stable. Les congruences (1,0),(0,1),(1,1) contenant des droites, il suffit alors de remarquer qu'un sous-schéma ponctuel de $\mathbb{P}_2$ localement intersection complète ne peut pas avoir un pinceau de trisécantes s'il est de degré inférieur à 8.

On rappelle que l'étude des schéma de droites k+1-sauteuses pour c_2 donné dans un plan sauteur est la même que celle des droites k-sauteuses dans un plan stable pour $c_2 - 1$. On remarque de plus que, pour k=0 ou 1, $R^1q_*p^*E(k+1)$ induit une structure réduite sur une droite k+3-sauteuse dans un plan stable pour $c_2 \leq 5$. On déduit donc du 3.3.1:

Lemme 1.3.2 *$R^1q_*p^*E(1)$ induit dans tout β-plan ne contenant pas de quadrisauteuses un schéma de longueur$\leq c_2 - 3$*
$R^1q_*p^*E(2)$ induit dans tout β-plan ne contenant pas de 5-sauteuses un schéma réduit

Proposition 1.3.3 *Pour $c_2 = 4$, toute droite t, 3 ou 4-sauteuse de S, est incluse dans une courbe de droites au moins trisauteuses de S. Il en est de même pour $c_2 = 5$ si t est quadrisauteuse, et aussi lorsque t n'est que trisauteuse si l'on suppose en plus que S_{red} ne possède pas de points où son espace tangent de Zariski est de dimension 4.*

On commence par le cas où t est une trisauteuse, et on note S_{red} la surface réduite ensemblistement égale à S, et R l'anneau local de G en une droite trisauteuse t de S. Selon [G-P], on a les résolutions locales suivantes:

$$R^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}} R^2 \longrightarrow R^1q_*p^*E_{(t)} \longrightarrow 0 \text{ et}$$
$$R^5 \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}} R \longrightarrow R^1q_*p^*E(1)_{(t)} \longrightarrow 0$$

On note $\overline{u}_i$ les restrictions des u_i à S_{red}, M_1 la restriction de $R^1q_*p^*E_{(t)}$ à S_{red}, $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de S_{red} en t, et on pose $\Im = (\overline{u}_0, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4)$.

Selon [G-P](proposition2.2), on a un isomorphisme entre les $\mathcal{O}_{S_{red},(t)}$-modules: $Sym_4 M_1$ et $\Im$. Donc l'éclaté de S_{red} en $\Im$ est isomorphe à celui de S_{red} en M_1 (qui est un $\mathcal{O}_{S,(t)}$-module de rang 1). On va montrer, par l'absurde, que les les $\overline{u}_i$ sont liés. On suppose donc les $\overline{u}_i$ linéairements indépendants (sur $\mathbb{C}$) dans $\Im/\Im\mathcal{M}$. Ceci implique que $\Im \neq \mathcal{M}$ car $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ est au plus de dimension 4. On peut donc supposer que 2 d'entre eux sont dans $\mathcal{M}^2$. On note k la dimension de $T_t S_{red}$, on va alors montrer que $k-1$ des $\overline{u}_i$ ne peuvent pas être dans $\mathcal{M} - \mathcal{M}^2$. On note J_l l'idéal engendré par les $\overline{u}_i$ qui ne sont pas dans $\mathcal{M}^l$. On remarque que $(\Im \cap \mathcal{M}^2)/(\Im\mathcal{M})$ est inclu dans $\mathcal{M}^2/(\Im\mathcal{M})$ qui est un quotient de $\mathcal{M}^2/(J_2\mathcal{M})$ qui vaut $x^2\mathbb{C}[x]$ où $x \in \mathcal{M} - \mathcal{M}^2$ si $k-1$ des $\overline{u}_i$ ne sont pas dans $\mathcal{M}^2$. C'est à dire que si $k-1$ des $\overline{u}_i$ ne sont pas dans $\mathcal{M}^2$, les 2 éléments de $\Im \cap \mathcal{M}^2$ seraient liés modulo $\Im\mathcal{M}$, ce qui contredirait l'hypothèse. Il existe donc au plus $k-2$ des $\overline{u}_i$ qui ne sont pas dans $\mathcal{M}^2$. Il existe donc toujours un 2-plan inclus dans $T_t S_{red}$ donné par ces $k-2$ éléments de $\mathcal{M}$. Le schéma induit par $\Im$ dans ce plan est alors épaissi dans toutes les directions de ce plan. Il existerait alors des droites de ce plan coupant ce schéma en longueur au moins 2 et incluses dans G, ce qui contredirait que pour $c_2 = 4$ une trisauteuse est réduite dans un β-plan.

Si $\dim T_t S_{red} \leq 3$ et que l'un des $\overline{u}_i$ n'est pas dans $\mathcal{M}^2$, alors $\mathcal{M}^2/(J_2\mathcal{M})$ vaut $(x^2, xy, y^2)\mathbb{C}[x,y]$ où x et y sont dans $\mathcal{M} - \mathcal{M}^2$. Si l des autres $\overline{u}_i$ ne sont pas dans $\mathcal{M}^3$, alors les $4-l$ autres sont liés dans $\mathcal{M}^3/(\Im\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^3)$ car c'est un quotient de $\mathcal{M}^3/(J_3\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^3)$ vaut si $l=1$ $(xy, y^2)\mathbb{C}[y]$ ou bien $(x^2, y^2)\mathbb{C}$, si $l=2$ $(xy)\mathbb{C}$ ou bien $(y)\mathbb{C}[y]$, et (0) si $l=3$. On en déduit que 4 des $\overline{u}_i$ sont dans $\mathcal{M}^3$ ce qui donnerait un plan inclus dans $T_t S_{red}$ tel que le schéma induit par $\Im$ dans ce plan serait triple dans toutes les directions. Il existerait alors une droite incluse dans G contenant une trisauteuse triple, ce qui est impossible pour $c_2 = 5$. Les $\overline{u}_i$ sont alors tous dans $\mathcal{M}^2$ et il existerait des β-plans où tout pinceau de sommet sur t serait bisécant en t au schéma des trisauteuses, ce qui est impossible pour $c_2 = 5$. (On rappelle le lien entre l'étude des bisauteuses dans un plan stable et celle des trisauteuses d'un plan sauteur).

Les $\overline{u}_i$ sont donc liés, et M_1 est engendré par 2 éléments (e_0, e_1) (indépendants si t est une trisauteuse isolée sur S) qui sont solutions d'une équation de degré 4 modulo $M_1^{\otimes 5}$. En effet, on a l'egalité modulo $\Im^2 \overline{u}_i = (-1)^i e_0^{4-i}.e_1^i$ car le produit

$$\begin{pmatrix} \overline{u}_0 & \overline{u}_1 & \overline{u}_2 & \overline{u}_3 & \overline{u}_4 \\ e_0 & e_1 & & & \\ & e_0 & e_1 & & \\ & & e_0 & e_1 & \\ & & & e_0 & e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u}_0 \\ \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3 \\ \overline{u}_4 \end{pmatrix} \text{ est nul modulo } \Im^2 \subset M_1^{\otimes 5}.$$

On en déduit que $Proj(\bigoplus_i M_1^{\otimes i}/\mathcal{M}M_1^{\otimes i})$ qui est l'image réciproque de $\mathcal{M}$ dans le diviseur exceptionnel n'est pas une courbe. $\Im$ n'est donc pas l'idéal d'un point isolé de S_{red}.

Il en est de même lorsque t est une quadrisauteuse. Au voisinage de t on a:

$$R^5 \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix}} R^3 \longrightarrow R^1q_*p^*E_{(t)} \longrightarrow 0 \text{ et}$$

$$R^6 \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix}} R^2 \longrightarrow R^1q_*p^*E(1)_{(t)} \longrightarrow 0$$

$$R^7 \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix}} R \longrightarrow R^1q_*p^*E(2)_{(t)} \longrightarrow 0$$

On peut alors faire exactement le même raisonnement en remarquant que $R^1q_*p^*E(2)$ induit dans tout β-plan un schéma réduit pour $c_2 = 4$ ou 5. ce qui montre que les $\overline{u_i}$ sont liés. On note $\Im$ le premier idéal de Fitting de $\begin{pmatrix} \overline{u_0} & \overline{u_1} & \overline{u_2} & \overline{u_3} & \overline{u_4} \\ \overline{u_1} & \overline{u_2} & \overline{u_3} & \overline{u_4} & \overline{u_5} \\ \overline{u_2} & \overline{u_3} & \overline{u_4} & \overline{u_5} & \overline{u_6} \end{pmatrix}$, qui est aussi l'idéal des trisauteuses sur S. On a alors l'isomorphisme entre Sym_4M_1 et $\Im$ où $M_1 = R^1q_*p^*E_{(t)} \otimes \mathcal{O}_{S_{red}}$.

On note ϵ_0, ϵ_1 les générateurs (que l'on a du choisir pour trouver ces matrices) de $R^1q_*p^*E(1)_{(t)} \otimes \mathcal{O}_{S_{red}}$. On rappelle (cf [G-P]) que ceux de M_1 sont en fait $\epsilon_0^2, \epsilon_0\epsilon_1, \epsilon_1^2$.

En remarquant que modulo $\Im^2 \overline{u_i} = (-1)^i\epsilon_0^{6-i}\epsilon_1^i$ car le produit est nul modulo $\Im^2$, on obtient bien la deuxième relation entre les générateurs de M_1 (NB: si $R^1q_*p^*E(1)_{(t)} \otimes \mathcal{O}_{S_{red}}$ a pour support un point isolé, ϵ_0 et ϵ_1 sont indépendants). Mais ces relations montrent que le diviseur exceptionnel de l'éclaté de S_{red} en $\Im$ ne peut pas être une courbe.

2 Absence de n-sauteuses sur S pour n≥3

2.1 Droites c_2−sauteuses

Remarque 2.1.1 *Pour $c_2 \leq 5$, si E possède une droite d sauteuse d'ordre c_2, alors ses multisauteuses sont en codimension 3.*

En effet, il découle directement de la propriété instanton que ce fibré n'a que des plans semi-stables. On remarque que tout plan H semistable contenant une c_2-sauteuse ne contient pas d'autre droites multisauteuses, car le lieu d'annulation Z de la section de $E_H(1)$ ou de E_H est inclus dans d puisque d le coupe en longueur $d^0 Z$, et que les multisauteuses de H sont au moins bisécantes à Z. Mais l'ensemble des droites de $\mathbb{P}_3$ rencontrant d est une hypersurface de G, qui couperait donc S le long d'une courbe. En prenant sur cette courbe un point distinct de d, on construirait un plan instable.

On suppose donc dans toute la suite que E ne possède pas de droites sauteuses d'ordre c_2.

Proposition 2.1.2 *Pour c_2=5 S contient au plus un nombre fini de quadrisauteuses.*

On suppose donc ici qu'il existe une droite quadrisauteuse q qui appartienne à S. L'ensemble des droites de $\mathbb{P}_3$ qui rencontrent q est une hypersurface de G, il existe donc une courbe passant par q et tracée sur S de droites multisauteuses qui rencontrent q. D'autre part, pour c_2=5 un plan contenant q et une droite bisauteuse ne peut pas être stable. Comme tout plan contenant q contient un nombre fini de bisauteuses (Cf 1.1.4), la famille à 1 paramètre de bisauteuses qui coupent q ne peut pas avoir une composante plane, ce qui montre que tout plan contenant q est sauteur. Comme ces plans décrivent un schéma de dimension 2 de $\mathbb{P}_3^\vee$, on déduirait de [Co] que E serait soit un fibré de t'Hooft spécial ce qui contredirait le 1.2.5, soit un élément de la "big family" de Barth-Hulek (Cf [Ba-Hu]), ce qui contredirait la propriété instanton.

2.2 Trisauteuses

D'après le 1.3.3, il ne reste que le cas où S contient une courbe de trisauteuse. On suppose d'abord que cette courbe ne contient pas de droites quadrisauteuses.

Proposition 2.2.1 *Un 4 ou 5-instanton tel que $h^0 E(1) = 0$ ne possède pas de courbe de droites exactement trisauteuses.*
NB(Pour $c_2 = 4$ on n'utilisera pas ici l'existence de S).

Soit Γ une courbe irréductible de droites trisauteuses. On note Σ la surface réglée obtenue par cette courbe, et $\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\pi} \Sigma$ sa normalisation.

Pour $c_2 = 4$, deux droites trisauteuses ne peuvent pas être sécantes selon 1.3.2. Selon [Co], cette courbe est donc un système de génératrices d'une quadrique Q de $\mathbb{P}_3$, ou les tangentes à une cubique gauche, mais dans les 2 cas $\tilde{\Sigma} \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. On applique alors la méthode utilisée dans [Co]. Le fibré E n'ayant pas de quadrisauteuses, on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}(-A,3) \longrightarrow \pi^* E_\Sigma \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}(A,-3) \longrightarrow 0$$

qui donne: $c_2(\pi^* E_\Sigma) = d.c_2 = 2a3$ (où $d = 2$ ou 4), ce qui est impossible. (où a est le degré de A dans $\mathrm{Num}(\Sigma)$).

Pour $c_2 = 5$, on montre de la même façon que l'on a encore une telle suite exacte, avec $\tilde{\Sigma} = \mathbb{P}_{\tilde{\Gamma}}(F^\vee)$, où F est un fibré de rang 2 possédant une section (on note $\mathcal{L}$ son conoyau) et tel que $h^0 F(l) = 0$ lorsque l est un faisceau inversible de degré négatif. La surjection de F sur $\mathcal{L}$ donne une section C_0 de Γ dans $\tilde{\Sigma}$. On note $\epsilon = -\deg(F)$. La forme d'intersection dans $Num\tilde{\Sigma}$ est donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\epsilon \end{pmatrix}$ dans la base (f, C_0). (où f est la classe d'une fibre). On a donc la relation:$5d = 6a + 9e$, qui montre que d est divisible par 3. Comme il ne peut pas y avoir plus de 2 trisauteuses dans un même plan, la surface réglée duale $\tilde{\Sigma}^\vee$ est sans points triples, ce qui se traduit selon [K] par:

$[(d-2)(d-3)-6g](d-4) = 0$ (*) puisque $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\Sigma}^\vee$ ont même degré et genre. Donc lorsque d=3, on peut procéder comme dans [Co] car on a: g=0.et $\tilde{\Sigma} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1))$, ce qui implique e=1, et a=1. On a alors
$\pi^* \mathcal{O}_\Sigma(1) \underset{Num}{\sim} \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}(2,1)$ et, $h^2(\pi^* E_\Sigma(-2)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-a+4+2g-2-e) \otimes Sym_3 F)$

ce qui entraine $h^2 E_\Sigma(-2) \geq 1$ grâce à la suite exacte:

$$0 \longrightarrow E_\Sigma(-2) \longrightarrow \pi_* \pi^* E_\Sigma(-2) \longrightarrow E_\Sigma(-2) \otimes \omega_{C'} \longrightarrow 0$$

où C' est de dimension ≤ 1. La résolution de Σ dans $\mathbb{P}_3$ tensorisée par E donne alors: $h^3 E(-5) \geq 1$, ce qui entraine $h^0 E(1) \geq 1$, ce qui est contraire aux l'hypothèses. On en déduit que d est divisible par 3 et d≥ 6.

Lemme 2.2.2 *Une génératrice générale de Σ ne rencontre pas de points de multiplicité supérieure ou égale à 3*

Dans le cas contraire, on pourrait trouver un point p de Σ par lequel il passe au moins 3 génératrices de Σ distinctes. Lorsqu'on éclate $\mathbb{P}_3$ en p, ces 3 droites donnent 3 points triples de la pentique des droites sauteuses dans le diviseur exceptionnel. La formule du genre montre que cette pentique doit être réductible, et les que 3 points doivent être alignés, ce qui contredit le fait qu'un plan ne puisse pas contenir plus de 2 droites trisauteuses.

Lemme 2.2.3 *La génératrice générique de Σ ne rencontre que des composantes réduites du lieu double de Σ*

Supposons que ce lieu possède une composante non réduite qui rencontre toute génératrice de Σ. Alors un point de cette composante correspond à un point du lieu double p où les 2 plans tangents à Σ sont confondus. Ce plan est donc celui qui contient les 2 génératrices passant par p. D'autre part, le nombre de points pinces de Σ n'est pas nul car 2d+4(g-1) ne s'annule pas pour d divisible par 3 et d solution de (*). Soit p' un point pince de Σ, alors il existe une génératrice d de Σ, passant par p', telle que le plan tangent à Σ soit constant le long de d.(On le note H). Il est alors clair que le vecteur tangent à Γ en d est dans h (le β-plan associé à H). On a donc $long(\Gamma \cap h_{\{d\}}) \geq 2$. Il suffit maintenant d'utiliser que d coupe le lieu double en un point non réduit p, et donc que $H=T_p\Sigma$ contient une autre génératrice, ce qui donne $long(\Gamma \cap h) \geq 3$, ce qui est impossible.

On peut donc supposer que la génératrice générique rencontre le lieu double en des points réduits de celui ci.

Lemme 2.2.4 *Une génératrice générique de Σ en rencontre au moins 4 autres distinctes*

Il faut pour celà montrer qu'une génératrice générique de Σ coupe le lieu double en au moins 4 points distincts, il ne reste donc plus selon le 2.2.3 que le cas où la génératrice générique de Σ est tangente à une courbe incluse dans le lieu double de Σ, c'est à dire le cas où Σ est une surface développable. Le cas du cône étant évident, on note C l'arête de rebroussement de Σ.

Pour un point général p de C, le plan H_p osculateur à C en p doit être égal au plan tangent à Σ en un point quelconque de la génératrice d_p qui est tangente à C en p. De plus, la tangente à Γ en d_p est constituée du pinceau des droites de H_p qui contiennent p, elle est donc incluse dans le β-plan associé à H_p.

On constate alors que pour tout point p' de C différent de p, les plans H_p et $H_{p'}$ doivent être différents car $R^1 q_* p^* E(\tau)$ induit dans tout β-plan un schéma de longueur inférieure ou égale à 2. Ceci se traduit par le fait que la surface duale $\Sigma^{\vee}$ est une développable d'arête de rebroussement $C^{\vee}$ lisse. On projette $C^{\vee}$ sur $\mathbb{P}_2$ par un point n'appartenant pas à $\Sigma^{\vee}$. Le degré de Γ est alors égal à celui de la courbe duale de cette projection, qui est selon les formules de Plücker: $d = 2(\deg C^{\vee} - 1) + 2g$, puisque cette projection ne possède pas de cusp. On en déduit que le cas $d = 6, g = 2$ est impossible, c'est à dire que si Σ est développable, on a $d \geq 9$. Pour t général dans Γ, le contact entre T_tG et Γ ne peut pas être d'ordre supérieure ou égal à 6, sinon le plan osculateur à Γ en t serait inclu dans G et il existerait un β-plan coupant Γ en longueur au moins 3. Comme ce contact est toujours pair (Cf [Co] lemme6). $T_tG \cap \Gamma - \{t\}$ est constitué de d-4 points distincts car t n'est pas en générale bitangente à C puisque Γ est réduite. Lorsque Σ est développable, une de ses génératrices génériques en rencontre alors au moins 5 autres distinctes.

Il ne reste plus qu'à constater que dans le cas où Σ n'est pas développable, pour tout t dans un ouvert dense de Γ, l'intersection de T_tG avec $\Gamma - \{t\}$, est de longueur $d^o\Gamma - 2$, et elle est constituée selon le 2.2.3 de points distincts. Il existe donc au moins 4 plans sauteurs distincts contenant la droite associée à t. (Un plan contenant 2 droites trisauteuses distinctes est sauteur, et il ne peut pas y avoir 3 trisauteuses dans un même plan).

E ne possédant pas une famille à 2 paramètres de plans sauteurs, on suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de plans sauteurs contenant t, pour t général dans Γ. On éclate $\mathbb{P}_3$ le long de la droite t, et on note p' et q' les projections sur $\mathbb{P}_3$ et $\mathbb{P}_1$. On a alors la suite exacte:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & q'_*p'^*E(\tau) \arrow[r] & H^1E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^1E(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \arrow[r] & R^1q'_*p'^*E(\tau) \arrow[r] & 0 \\
& & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On a: h^1E=8. h^1E(1)=7. et $R^1q'_*p'^*E(\tau)$ n'est pas localement libre et il est de rang un car dans un plan stable contenant une droite trisauteuse, les 6 points nuls d'une section de E(1) restreint à ce plan sont toujours sur une unique conique. (la droite n'est pas 5 sauteuse). Le faisceau $q'_*p'^*E(\tau)$ est donc localement libre de rang 2. De plus, $h^0(q'_*p'^*E(\tau)) = 0$, $h^1(K) = 0$, $h^1(q'_*p'^*E(\tau)) = h^0(K)$, et $h^0(R^1q'_*p'^*E(\tau)) = 7 - h^1(q'_*p'^*E(\tau))$

Si $h^1(q'_*p'^*E(\tau))$ vaut 0 ou 1 alors $q'_*p'^*E(\tau) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1 \textit{ ou } -2)$. Donc $[q'_*p'^*E(\tau)](1)$ aurait une section, et donc $\Im_t \otimes E(2)$ aussi. Ceci n'étant possible pour t générique que si $h^0E(2) \geq 2$, les sections de E(2) seraient alors sur une quartique. contenant toutes les trisauteuses puisqu'elles lui sont des 5-sécantes, ce qui contredit $d^o\Sigma \geq 6$.

On a donc $h^0(R^1q'_*p'^*E(\tau)) \leq 5$. D'autre part, $R^2q'_*p'^*E(\tau)$ est nul selon Grauert, ce qui donne par changement de base:

$\forall y \in \mathbb{P}_1$, $R^1q'_*p'^*E(\tau)_{\{y\}} \simeq H^1E_Y(1)$ où Y est le plan associée à y. On a donc la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{k \textit{ fois}} \mathbb{C} \longrightarrow R^1q'_*p'^*E(\tau) \longrightarrow R^1q'_*p'^*E(\tau)^{\vee\vee} \longrightarrow 0$$

où k≥4 est le nombre de plans sauteurs passant par t. Comme $R^1q'_*p'^*E(1)^{\vee\vee} \simeq O_{\mathbb{P}_1}(l)$ où l≥0, on en déduit que l=0. k=4. On a donc $d^o\Gamma = 6$ ce qui impose avec la formule du lieu triple de $\Sigma^\vee$: g=2. On obtient aussi $h^0(R^1q'_*p'^*E(1)) = 5$, et $q'_*p'^*E(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2)$, ce qui donne: $h^0(\Im_t^2 \otimes E(3)) \geq 2$.

On note s et s' deux sections de $\Im_t^2 \otimes E(3)$. Ces sections sont liées sur une surface de degré 6 qui contient les 4 plans sauteurs H_i contenant t car les restrictions de s et s' à l'un des H_i contiennent t^2 et $E_{H_i}(1)$ ne peut pas avoir une section indépendante de la section sauteuse sinon cette section serait sur une droite qui serait alors 5-sauteuse. On note alors Q la quadrique incluse dans $Z_{s\wedge s'}$. On remarque que dans un plan général contenant t, les sections s et s' induisent 2 sections de $E_H(1)$ (en les divisant par t^2) qui sont donc liées sur une conique qui n'est autre que $Q \cap H$. (NB: cette conique doit contenir t puisqu'elle lui est 4-sécante).

On suppose maintenant que Γ est incluse dans S. La courbe $T_tG \cap S$ est alors constituée de droites multisauteuses qui rencontrent t, et c'est une section hyperplane de S. On va identifier cette courbe en la coupant par un plan général contenant t. Il faut d'abord remarquer qu'aucune composantes irréductible de $T_tG \cap S$ n'est incluse dans un plan contenant t. Si c'était le cas, ce plan serait forcément sauteur selon le 1.1.4, il s'agirait donc de l'un des H_i, car on a montré qu'il n'existait pas plus de 4 plans sauteurs contenant t, et comme les H_i contiennent 2 droites trisauteuses, il ne peuvent posséder qu'un nombre fini de droites multisauteuses selon le 1.1.4. D'autre part, on constate que dans un plan H général contenant t, les seules multisauteuses possibles sont au moins trisécantes à toute section de $E_H(1)$. il s'agit donc de t et de la droite d_H telle que $t \cup d_H = Q \cap H$. La droite d_H étant toujours incluse dans la quadrique Q, on en déduit que $T_tG \cap S$ est un système de génératrices de Q, et donc que $d^oS = 2$. Elle ne pourrait alors pas contenir une coube de degré 6 et de genre 2 puisque $h^0\mathcal{O}_\Gamma(1) = 5$.

On peut maintenant montrer comment étendre ceci lorsque Γ contient des quadrisauteuses.

Proposition 2.2.5 *La surface S ne contient pas de quadrisauteuses*

En effet, si S contenait une quadrisauteuse q, selon le 1.3.3 il existerait une courbe Γ que l'on peut supposer irréductible de droites au moins trisauteuses passant par q. On note Σ la surface réglée associée à Γ.

On remarque que $\chi(E(2)) = 0$, c'est à dire que puisque E possède une quadrisauteuse, $h^1E(2) \neq 0$ et donc $E(2)$ possède une section s nulle sur une courbe Z_s de degré 9. De plus les droites trisauteuses sont 5-sécantes à Z_s.

Selon l'étude précédente, on se limite au cas où $d^o\Gamma \leq 6$, puisque dans les autres cas toutes les génératrices de Γ seraient des droites de plans sauteurs. On remarque d'abord que Γ ne peut pas être une conique. Il est alors étonnant de constater que ce cas est délicat à cause de l'exemple suivant:

Exemple 2.2.6 *Une courbe lisse de bidegré (1,5) dans une surface quadrique Q, réunie avec une cubique gauche non incluse dans Q et coupant la sextique en 2 points est une section de $E(2)$ où E est un 5-instanton possédant une courbe de degré 2 de trisauteuses contenant 4 quadrisauteuses.*

En effet, cette courbe est connexe, localement intersection complète et de faisceau canonique trivial. De plus tout un système de génératrices de cette quadrique est 5-sécante à cette courbe, et les 4 points d'intersection de la quadrique avec la cubique qui ne sont pas déjà sur la courbe de bidegré (1,5) donnent des quadrisauteuses.

Pour éliminer ce phénomène, il faut donc abolument utiliser l'existence de S. La restriction de E à cette quadrique donne la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Q(-a,3) \longrightarrow E_Q \longrightarrow \mathcal{O}_Q(a,-3) \longrightarrow \mathbb{C}^n \longrightarrow 0$$

qui donne 10=6a+n, où n est le nombre de quadrisauteuses sur Γ. On aurait a=0 ou 1, et l'on aurait $h^0E_Q(2) \geq 12$ ce qui vaut aussi $h^2E_Q(-4)$. La suite exacte:

$$H^2E(-4) \longrightarrow H^2E_Q(-4) \longrightarrow H^3E(-6)$$

obtenue par la résolution de Q tordue par $E(-4)$ montre que $h^0E(2) \geq 4$.

On rappelle que modulo l'existence de S, tous les plans contenant une quadrisauteuse q sont sauteurs. On peut extraire de ces 4 sections 2 sections (s_1, s_2) liées sur 2 plans distincts H_1 et H_2 contenant q. En effet, dans un plan contenant q, la section sauteuse est sur une unique conique, c'est à dire que 3 des 4 section de E(2) ont une restriction à ce plan multiple de la section sauteuse. On peut extraire de ces 3 sections les 2 sections voulues en choisissant un autre plan.

La quartique $Z_{s_1 \wedge s_2}$ contient aussi Q puisque toutes ses génératrices lui sont au moins 5-sécantes, il s'agit donc de $Q \cup H_1 \cup H_2$. On peut alors considérer une autre quadrisauteuse de Q car n$\geq$ 4. Comme elle est 6-sécante à Z_{s_1} elle doit rencontrer une composante de Z_{s_1} incluse dans $H_1 \cup H_2$ car elle est dans le même système linéaire que des trisauteuses qui elles ne sont que 5-sécantes à Z_{s_1}. Cette $2^{ième}$ quadrisauteuse doit donc couper q ce qui est impossible.

Pour les autres degrés de Γ, la situation est plus simple. En effet, aucune génératrice de Σ ne peut rencontrer q. C'est à dire que, si Σ a un lieu double, il coupe q en un point pince (i.e: q est une torsale). On trouve une droite L incluse dans G coupant Γ en longueur au moins 2 en q. Le support du faisceau $R^1q_*p^*E(\tau)_L$ contient donc le point représentant q doublé. Ce faisceau ne peut donc pas être égal à sa restriction au point q, et comme cette restriction est déjà de longueur 2, c'est que long$(R^1q_*p^*E(\tau)_L) \geq 3$ ce qui est impossible au voisinage d'une quadrisauteuse. Il s'agit en effet pour $c_2 = 5$ du même problème que celui de la longueur de $R^1q_*p^*E$ dans un pinceau inclus dans un plan stable au voisinage d'une trisauteuse pour $c_2 = 4$, car le plan contenant q est sauteur. (1.1.1)

On en déduit alors immédiatement:

Corollaire 2.2.7 *Pour $c_2 = 5$, la surface S_{red} est de degré divisible par 4.*

En effet, toute courbe intègre de degré d constituée de droites exactement bisauteuses donne alors une surface réglée telle que $5d = 4a + 4\epsilon$ avec les notations précédentes, et on vient de montrer qu'il existait une section hyperplane de S_{red} sans 3,4, ou 5- sauteuses

3 Etude des trisécantes à S

On appellera trisécante de type i, une droite de $\mathbb{P}_5$ qui coupe la surface en i composantes connexes distinctes(ou plus pour i=3). On remarque qu'une trisécante à S de type 3 est encore une trisécante à S_{red} de type 3, et qu'une trisécante à S_{red} reste toujours une trisécante à S.

3.1 Famille à 2 paramètres de trisécantes, applications

Remarque 3.1.1 *Si S_{red} possède une trisécante de type 2 ou 3 elle en possède une famille à 2 paramètres. Il en est de même lorsqu'elle possède une trisécante quelconque si elle est de plus localement Cohen-Macaulay.*

On rappelle pour cela le point de vue de [LeBa1]: On note $\mathrm{Hilb}^3_c\mathbb{P}_5$,et $\mathrm{Hilb}^3_c S_{red}$ les schémas de Hilbert des triplets de $\mathbb{P}_5$ et S_{red} qui sont localement sur des courbes lisses de $\mathbb{P}_5$, et $\mathrm{Al}^3\mathbb{P}_5$ le sous schéma de $\mathrm{Hilb}^3_c\mathbb{P}_5$ constitué des triplets qui sont sur une droite réduite de $\mathbb{P}_5$.

Comme $\mathrm{Hilb}^3_c\mathbb{P}_5$ et $\mathrm{Al}^3\mathbb{P}_5$ sont de dimension 15 et 11, et que $\mathrm{Hilb}^3_c\mathbb{P}_5$ est irréductible et lisse, il suffit de montrer qu'un élément aligné de Hilb^3S est dans une composante irréductible de dimension supérieure ou égale à 6 de Hilb^3S, pour que toutes les composantes irréductibles de $\mathrm{Hilb}^3_c S\cap\mathrm{Al}^3\mathbb{P}_5$ soient de dimension supérieure ou égale à 2.

a) On étudie d'abord le cas où S_{red} est localement Cohen-Macaulay. Pour cela on rappelle qu'un élément aligné μ de Hilb^3S_{red} est inclus dans l'intersection complète d'un β-plan avec S. On note μ' l'intersection complète du β-plan avec S. Le sous-schéma μ' étant donné par 2 générateurs dans S_{red}, son faisceau normal $N_{\mu',S_{red}}$ est localement libre, et on a: $h^1(N_{\mu',S_{red}}) = 0$ ce qui montre que μ' est un point lisse de $\mathrm{Hilb}^{\beta_{red}}S_{red}$. Comme $h^0(N_{\mu',S_{red}})$ est égal à la somme des longueurs des composantes connexes de μ' multipliées par le rang de $N_{\mu',S_{red}}$ en ces points qui vaut 2, on a $h^0(N_{\mu',S_{red}}) = 2\beta_{red}$, qui est la dimension de l'espace tangent de Zariski à $\mathrm{Hilb}^{\beta_{red}}S_{red}$ en μ'.(Cf [G] §5). On en déduit donc que μ' est dans une composante irréductible H de $\mathrm{Hilb}^{\beta_{red}}S_{red}$ de dimension $2\beta_{red}$. Il reste alors à étudier le cas $\beta_{red} = 4$ selon le 3.3.1. Le β-plan général coupe S_{red} en β_{red} points distincts puisqu'elle est réduite et localement de Cohen-Macaulay. Le triplet aligné de μ' est donc dans $\overline{\mathrm{Hilb}^3_{\neq}S_{red}}$.

On en déduit donc que μ est toujours dans une composante irréductible de dimension≥ 6, et donc que S_{red} possède toujours une famille à 2 paramètres de triplets alignés.

b) On suppose maintenant que S est quelconque mais que S_{red} possède une trisécante de type 2 ou 3. Si d est une trisécante de type 3 le résultat est évident puisque S_{red} est réduite. On suppose donc que d est une trisécante de type 2. Il suffit alors de démontrer qu'une composante connexe de $d\cap S_{red}$ non réduite contient un élément de $\mathrm{Hilb}^2 S_{red}$ qui est dans une composante irréductible de dimension 4. On va en fait montrer que si on considère une droite d de $\mathbb{P}_5$ qui contient un schéma de longueur 2 réduit à un point p de S_{red}, elle en contient un qui est dans $\overline{\mathrm{Hilb}^2_{\neq} S}_{red}$.

On remarque immédiatement que d est incluse dans $T_p S$ l'espace tangent à S en p. Le résultat est donc évident lorsque S est lisse en p. De plus, comme S est incluse dans G on a: $T_p S_{red} \subset T_p G = \mathbb{C}^4$. On note D le point de $\mathbb{P}(T_p S_{red})$ associé à d, et C la courbe $\mathbb{P}(C_p S_{red})$ (qui est naturellement incluse dans $\mathbb{P}(T_p S_{red})$, où $C_p S_{red}$ est le cône tangent à S_{red} en p). On éclate $\mathbb{P}_5$ en p, et on note $\widetilde{S_{red}}$ le transformé propre de S_{red}. La surface S_{red} étant réduite, on veut montrer qu'il existe une famille à 2 paramètres de bisécantes à C en des schémas de $\overline{\mathrm{Hilb}^2_{\neq} \tilde{S}_{red}}$.

Ceci est évident lorsque C est réduite, alors que si elle ne l'est pas, c'est que pour tout point p_0 de C, l'espace tangent à $\widetilde{S_{red}}$ en p_0 est inclus dans le diviseur exceptionnel ou alors que C est incluse dans le lieu singulier de $\tilde{S}_{red}$. On note A_{p_0} le schéma constitué des éléments de $\overline{\mathrm{Hilb}^2_{\neq} \tilde{S}_{red}}$ qui ont un support égal à p_0. Il est clair que A_{p_0} est de dimension supérieure ou égale à 1. et qu'il est de dimension 1 si et seulement si $\tilde{S}_{red}$ est lisse en p_0. Dans ce cas, si de plus C n'est pas réduite, les éléments de A_{p_0} sont tous inclus dans le diviseur exceptionnel E. On constate donc que, si C n'est pas réduite, $\dim A_{p_0} \cap E \geq 1$. Comme les éléments de $A_{p_0} \cap E$ sont dans $\mathrm{Hilb}^2 C$, car C n'est autre que la trace de $\tilde{S}_{red}$ sur E, on obtient encore une famille à 2 paramètres de bisécantes à C en des éléments de $\overline{\mathrm{Hilb}^2_{\neq} \tilde{S}_{red}}$ lorsque l'on déplace p_0 le long de C. On remarquera pour ce qui suit que $\dim A_{p_0} \cap E \leq 2$ puisque ses éléments sont dans $\mathbb{P}(T_p S_{red}) \subset \mathbb{P}_3)$, et que $\dim A_{p_0} \leq 3$ car ses éléments dont dans $T_{p_0} \tilde{G}$.

Comme D appartient aussi à $\mathbb{P}(T_p S_{red})$, il existe une telle bisécante qui contient D. On note μ l'élément de $\overline{\mathrm{Hilb}^2_{\neq} \tilde{S}_{red}}$ qui est sur cette droite de $\mathbb{P}(T_p S_{red})$. et H le plan de $T_p S_{red}$ associé à cette droite. On note A_μ les éléments de $\overline{\mathrm{Hilb}^2_{\neq} \tilde{S}_{red}}$ qui ont même composante connexes que μ. (ie: A_μ est réduit à μ si μ n'est pas connexe ou à A_{p_0} si μ a pour seule composante connexe p_0). Comme $\overline{\mathrm{Hilb}^2_{\neq} \tilde{S}_{red}}$ est de dimension pure 4 et que $\dim A_\mu \cap E \leq 2$, il existe au moins une famille irréductible B de dimension 2 d'éléments de $\mathrm{Hilb}^2_{\neq} \tilde{S}_{red}$ qui coupe $A_\mu \cap E$ en un nombre fini de points, dont μ, et qui rencontre A_μ en dimension inférieure ou égale à 1. (On note $\mu_{\alpha,\beta}$ les éléments de $B - A_\mu$). On a alors des points $p_{\alpha,\beta}$, $p'_{\alpha,\beta}$ de S_{red} tels que le plan $(p, p_{\alpha,\beta}, p'_{\alpha,\beta})$ ait un nombre fini de valeurs d'adhérences (dont H) lorsque le support de μ tend vers p dans S_{red}. Comme les droites $(pp_{\alpha,\beta})$ et $(pp'_{\alpha,\beta})$ tendent vers un nombre fini de génératrices de $C_p S_{red}$ (celles représentées par le support de μ), les points $p_{\alpha,\beta}$ et $p'_{\alpha,\beta}$ varient en fait sur des courbes de S_{red}. On les note donc désormais p_α et p'_β, et Γ et Γ' les arcs qu'ils parcourent sur S_{red}. En choisissant une projection de Γ et Γ' sur H d'image 2 courbes différentes Γ_H et Γ'_H, on remarque alors que toute droite de H contenant p est adhérente aux projections sur H des cordes entre Γ et Γ' lorsque les 2 points sur Γ et Γ'

tendent vers p. Comme il existe une famille à 1 paramètre de telles droites et qu'il n'existe qu'un nombre fini de plans adhérents (dont H), on saura toujours extraire d'une suite de cordes entre Γ_H et Γ'_H qui converge vers d, une suite de cordes entre Γ et Γ' qui converge aussi vers d.

On peut alors conclure en considérant la correspondance d'incidence entre $\mathrm{Hilb}^3_c S_{red} \cap \mathrm{Al}^3 \mathbb{P}_5$ et le sous-schéma T de $G(1,\mathbb{P}_5)$ constitué des droites trisécantes, ou incluses dans S_{red}. En effet, il existe un voisinage dans T d'une droite trisécante d où chaque élément correspond à un nombre fini de points de $\mathrm{Hilb}^3_c S_{red} \cap \mathrm{Al}^3 \mathbb{P}_5$. La surface S_{red} possède alors au moins une famille à 2 paramètres de trisécantes.

On rappelle qu'une droite trisauteuse donne au plus une famille à 1 paramètre de trisécantes à S de type 2 puisque dans un plan contenant une trisauteuse il n'existe qu'un nombre fini de points sur cette droite et une autre multisauteuse. L'élément général d'une famille à 2 paramètres de trisécantes à S coupe donc cette surface en des droites exactement bisauteuses. Selon le 1.1.1 on peut associer à une telle trisécante à S un plan sauteur. De plus, un plan sauteur ne possède qu'un nombre fini d'antécédents par cette construction. On obtient donc ainsi une famille à 2 paramètres de plans sauteurs de E. Donc si S avait une trisécante, on pourrait conclure en utilisant [Co].

Corollaire 3.1.2 *Pour $c_2 = 4$ ou 5, la surface S_{red} ne possède pas de trisécantes de type 2 ou 3. Elle ne possède pas non plus de trisécantes de type 1 en des points où elle est de Cohen-Macaulay et qui représentent des droites exactement bisauteuses.*

3.2 Etude du cas où S est une surface réglée

On traite d'abord le cas $c_2 = 5$. Toute génératrice devant contenir une droite trisauteuse selon le 1.1.4, la surface S est alors un cône de sommet une trisauteuse t selon le 2.2.1. Elle est donc incluse dans le $\mathbb{P}_4$ obtenu par projectivisation de $T_t G$. Comme un plan contenant t ne contient qu'un seul pinceau de bisauteuses, la congruence S_{red} est alors de bidegré $(1,\beta)$. La majoration de β et le 2.2.7 montrent que S_{red} est de degré 4, et donc que $\beta = 3$. Ce cône donne dans le $\mathbb{P}_3$ à l'infini une courbe réduite de degré 4 incluse dans une quadrique lisse qui doit être de bidegré (1,3) pour cette quadrique. Cette courbe possède alors une infinité de trisécantes qui donnent des 2-plans contenant 3 génératrices du cône, ce qui donnerait des trisécantes à S_{red} de type 3.

On suppose donc maintenant que $c_2 = 4$ et que S est une surface réglée et que $\beta \leq 2$ (Cf 3.3.1). Le centre des pinceaux des droites incluses dans S décrit une courbe C de $\mathbb{P}_3$ qui doit être de degré 1 ou 2 (on munit C de sa structure réduite). En effet, un plan H général de $\mathbb{P}_3$ coupe C en des points distincts qui contiennent tous une droite de la congruence, et comme β est majoré par 2, si

C est de degré supérieur ou égal à 3 c'est que les droites de la congruence sont bisécantes à C. Dans ce cas C doit forcément contenir une droite telle que tout plan contenant cette droite d contienne une infinité de bisauteuses. On est alors dans la situation du 1.1.4, et selon le 1.2.3 $\Im_d^{\otimes 2} E(2)$ a une section munissant d d'une structure au moins quadruple. De plus le centre des pinceaux inclus dans les plans contenant d décrit les autres composantes de C, mais elles doivent être aussi munies par cette section de $\Im_d^{\otimes 2} E(2)$ d'une structure quadruple provenant de la section sauteuse. Comme cette section est de degré 8 on retrouve encore d°$C \leq 2$.

Lorsque d°C=1, c'est que S est un cône, et tout plan H contenant C contiendra une infinité de bisauteuses. Il s'agira donc selon le 1.1.4 d'un pinceau de bisauteuses dans H. dont le centre décrit une courbe C'. Selon le 1.2.3 $\Im_C^{\otimes 2} \cdot E(2)$ aura une section de degré 8 qui munit C et C' de structures au moins quadruples. On a alors forcément $d^\circ C'' = \alpha = 1$ et on déduit de la connexité de la section de E(2) (car $h^1 E(-2) = 0$) que C=C'. Mais on montre alors grâce au 1.2.3 que dans l'éclaté de $\mathbb{P}_3$ en C, le fibré $p^* E(2\sigma)$ aurait une section qui s'annule en une courbe tracée sur le diviseur exceptionnel de classe $4\tau^2$ dont la restriction à tout plan contenant C n'est autre que la section sauteuse de ce plan. La restriction de la section de $p^* E(2\sigma)$ au diviseur exceptionnel est une courbe de bidegré (2, 2) selon le 1.2.2, mais cette courbe n'est pas réduite car la section sauteuse de chaque plan contenant C est connexe. On en déduit que la section de $p^* E(2\sigma)$ munit une courbe (de classe τ^2 dans l'anneau de Chow de $\widetilde{\mathbb{P}_3}$) d'un structure quadruple épaissie 2 fois dans toutes les directions. Cette structure quadruple étant localement intersection complète, il ne peut en fait s'agir que d'un cas dégénéré de l'exemple 1.2.4, c'est à dire que e n'est pas un instanton.

Lorsque d°C=2, le plan contenant la conique C contiendra une infinité de bisauteuses qui formeront selon le 1.1.4 un pinceau de centre O. Comme les points de S sont des sécantes à C, il ne passera alors par un point p général dans le plan de C qu'une seule droite de la congruence. On aura donc $\alpha = 1$. Comme les congruences (1,1) on déjà toutes été éliminées (Cf [R]). il reste la congruence (1,2) constituée des droites qui coupent C et une droite d passant par C une seule fois. Cette droite d donnerait alors une droite de plans sauteurs. et on aurait selon le 1.2.3 une section de E(2) qui munirait d et C de structures au moins quadruples, ce qui est impossible puisqu'elle est de degré 8.

3.3 Etude du cas où S ne possède pas de trisécantes

On note (α,β) le bidegré de S, où α {resp β} est le nombre de droites appartenant à la congruence qui passent par un point général de $\mathbb{P}_3$ (α-plan),{resp dans un plan général de $\mathbb{P}_3$. (β-plan) }.

Lemme 3.3.1 *Si un instanton E a ses multisauteuses en dimension inférieure ou égale à 2 et que par un point P général de $\mathbb{P}_3$, $h^0(\mathfrak{I}_P^{\otimes c_2-4} \otimes E(c_2-4))$ est nul, alors on a $\alpha \leq 2c_2 - 6$.*
De même, si dans un plan H général $h^0(\mathfrak{I}_P^{\otimes k} \otimes E_H(k))$ est nul pour P général dans H et $0 \leq k \leq c_2 - 4$, alors $\beta \leq 2c_2 - 6$.

NB Les hypothèses précédentes sont toujours vérifiées pour $c_2 = 4$ ou 5 car dans un plan stable on a toujours $h^0 E_H(1) \leq 2$.

On commence par la majoration de α, en choisissant un α-plan p coupant S en longueur α. La construction standard associée à l'éclaté de $\mathbb{P}_3$ au point P donne la suite exacte au dessus du diviseur exceptionnel p:

$$0 \longrightarrow q_*p^*E \longrightarrow H^1E(-1) \otimes (\mathcal{O}_p \oplus \mathcal{O}_p(-1)) \longrightarrow H^1E \otimes \mathcal{O}_p \longrightarrow R^1q_*p^*E \longrightarrow 0$$

Le faisceau q_*p^*E est alors une seconde syzygie locale, son lieu singulier est donc de codimension au moins 3, c'est donc un fibré de rang 2 que l'on note F. On a $h^1E(-1) = c_2$ et $h^1E = 2c_2 - 2$. Le nombre α est alors donné par $\chi(R^1q_*p^*E)$ qui vaut $c_2 - 2 + \chi(F)$.

Comme E est stable, F n'a pas de sections, et comme F est localement libre de première classe de Chern $-c_2$, $\chi(F)$ vaut $-h^1F + h^0F(c_2-3)$. La restriction de cette suite à un $\mathbb{P}_1$ de p ne contenant pas de multisauteuses donne encore une injection de $F_{\mathbb{P}_1}$ dans $c_2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus c_2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)$. Le fibré $F_{\mathbb{P}_1}$ se décompose alors en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-b)$ où $a + b = c_2$ car la droite évite les multisauteuses. On peut majorer $h^0F_{\mathbb{P}_1}(c_2-3)$ par $c_2 - 4$ sauf lorsque $a = 0$ ou 1 (ce qui pourrait arriver si E avait par exemple une infinité de plans sauteurs), et dans ces cas $h^0F_{\mathbb{P}_1}(c_2-3) = c_2 - 2 - a$. Mais on remarque que si $a = 0$ ou 1, alors $h^1F \geq 2 - a$ car pour tout $c_2 \geq 2$, $h^0E(1)$ est majoré par 2, ce qui permet de supposer que P n'est pas dans le lieu d'annulation d'une telle section, et donc que $H^0F_{\mathbb{P}_1}(1)$ s'injecte dans H^1F.

Comme $h^0F(c_2-4)$ est nul par hypothèse on a toujours $h^0F(c_2-3) \leq h^0F_{\mathbb{P}_1}(c_2-3)$, et donc $\chi(F)$ est toujours majoré par c_2-4, ce qui donne $\alpha \leq 2c_2-6$.

Pour la majoration de β, on rappelle que le plan général est stable, et on en choisi un, nommé H, coupant les multisauteuses en un schéma de longueur β. On introduit cette fois la variété d'incidence $I \subset H^\vee \times H$ et la projection sur $H^\vee$ de la résolution de I tensorisée par p^*E_H donne la suite exacte:

$$0 \longrightarrow q_*p^*E_H \longrightarrow H^1E_H(-1) \otimes \mathcal{O}_{H^\vee}(-1) \longrightarrow H^1E_H \otimes \mathcal{O}_{H^\vee} \longrightarrow R^1q_*p^*E_H \longrightarrow 0$$

Cette fois $h^1E_H(-1) = c_2$ et $h^1E_H = c_2 - 2$, ce qui donne $\chi(R^1q_*p^*E_H) = c_2 - 2 + \chi(F)$ et $\chi(F) = -h^1F + h^0F(c_2-3)$ où F est ici le faisceau $q_*p^*E_H$ qui est encore localement libre de rang 2 et tel que $c_1F = -c_2$. On choisit un point P de H qui n'est ni sur une multisauteuse, ni sur une section de $E_H(1)$, ce qui est toujours possible car on a pour tout c_2, dans un plan stable: $h^0E_H(1) \leq 2$.

Comme la droite p de $H^\vee$ associée à P ne contient pas de multisauteuses, on a l'injection: $0 \longrightarrow F_{\mathbb{P}_1} \longrightarrow c_2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)$ et $F_{\mathbb{P}_1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-b)$ où $a+b = c_2$. Comme P n'est pas sur une section de $E_H(1)$, a et b valent au moins 2, et on a $h^0 F_{\mathbb{P}_1}(c_2-3) \leq c_2 - 4$. Comme $h^0 F_{\mathbb{P}_1}(k)$ est nul par hypothèse pour $0 \leq k \leq c_2 - 4$, tous les $h^0 F(k)$ seront égaux et donc nuls car H est stable.

Proposition 3.3.2 *La surface S_{red} est localement de Cohen-Macaulay*

On remarque d'abord que l'ensemble des points de S_{red} où l'espace tangent est de dimension 4 est fini. En effet, pour $c_2 = 4$ un tel point p donne une droite de plans sauteurs puisque toutes les droites incluses dans un β-plan contenant p sont au moins bisécantes à S en p.

Pour $c_2 = 5$, les trisauteuses sont en nombre fini, on peut donc supposer que p est une bisauteuse. Comme T_pS_{red} recoupe S_{red} en une courbe, et qu'il ne peut pas y avoir de trisécantes de type 2 ou 3, alors S_{red} devrait contenir une droite passant par p, et s'il existait une famille à 1 paramètres de tels points p elle serait réglée, ou alors p varierait le long d'une droite. Mais dans ce dernier cas elle ne serait pas réduite dans le β-plan la contenant (il serait dans l'intersection de tous les T_pS pour p décrivant cette droite), ce qui contredirait le 1.1.4.

D'autre part, si cet ensemble est non vide alors S_{red} n'est pas incluse dans $\mathbb{P}_4$ sinon elle aurait des trisécantes de type 2 ou serait un cône puisque ce $\mathbb{P}_4$ serait le projectifié de T_pS_{red}, et on pourrait conclure avec le 3.1.2 et le 3.2.

En un point où T_pS_{red} est de dimension inférieure ou égale à 3, S_{red} est localement intersection complète. On suppose donc qu'il existe des points où $\dim T_pS_{red} = 4$, ce qui implique que S_{red} n'est pas incluse dans $\mathbb{P}_4$. Comme la section hyperplane générale de S_{red} est localement intersection complète, et qu'elle ne possède pas de droites trisécantes il suffit d'adapter la formule de [LeBa2]. On remarque en effet que cette courbe Γ possède éventuellement des points où $\dim T_p\Gamma = 2$. Lorsque l'on projette cette courbe sur $\mathbb{P}_2$, l'image ne possèdera pas de points immergés aux projetés de ces singularités. Le nombre de points immergé est alors $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - h - g$ où h est le nombre de points doubles de Γ, et g son genre géométrique. L'absence de trisécantes donne donc: $(d-4)((d-2)(d-3)-6\pi) = 0$ où π est le genre arithmétique de Γ. Cette formule implique pour $d \neq 4$, que $d-1$ n'est pas divisible par 3, ce qui permet de montrer que Γ est localement intersection complète et de genre maximal dans $\mathbb{P}_4$. En effet, si on note ϵ le reste de la division de $d-1$ par 3, et $m = \left[\frac{d-1}{3}\right]$, alors $\frac{(d-2)(d-3)}{6} = \frac{\epsilon^2-3\epsilon+2}{6} + \frac{3m(m-1)}{2} + m\epsilon$ (ϵ étant toujours non nul). Le cône au dessus de Γ sera alors de Cohen-Macaulay, et donc celui au dessus de S aussi. Pour d=4, la liste de [S-D] montre que S est forcément localement intersection complète puisqu'elle n'est pas incluse dans $\mathbb{P}_4$.

On peut remarquer que même en bas degré une congruence peut être sans trisécantes et non localement intersection complète. Par exemple, $\mathbb{P}_2$ éclaté en

7 points plongé par $4L - 2E_1 - E_2 - \ldots - E_7$ donne une congruence (3,3) dont l'idéal a pour résolution (Cf [A-S]):

$$0 \longrightarrow 2\mathcal{O}_G(-3) \longrightarrow 3\mathcal{O}_G(-2) \longrightarrow \Im \longrightarrow 0$$

C'est à dire que toute trisécante serait incluse dans les 4 quadriques et donc dans la surface, et que si les 3 quadriques sont tangentes à G alors le cône tangent à la congruence est le cône de $\mathbb{P}_4$ au dessus d'une cubique gauche.

Proposition 3.3.3 *Pour c_2=4 ou 5 le schéma des multisauteuses de E est une courbe.*

Pour $c_2 = 4$, on vient donc en fait de montrer que S_{red} ne possède pas de trisécantes selon le 3.1.2 puisqu'elle est de Cohen-Macaulay et sans trisauteuses selon les 1.3.3 & 2.2.1.

Donc s'il existe un point p tel que $\dim T_pS_{red} = 4$, la projection de sommet p sur le $\mathbb{P}_4$ à l'infini a pour image une surface S', et contracte les d droites constituant $T_pS_{red} \cap S_{red}$. (On rappelle que S_{red} ne peut pas être incluse dans T_pS_{red} car ce n'est pas un cône Cf 3.2). Un 2 plan général de $\mathbb{P}_4$ se remonte par cette projection en un $\mathbb{P}_3$ contenant p et coupant T_pS_{red} en un 2 plan dans lequel S_{red} induit un schéma épaissi dans toutes les directions, il doit donc être de longueur$\geq$ 3, c'est à dire que d°S'$\leq$ 1, et que S_{red} serait incluse dans $\mathbb{P}_3$ ce qui contredit $\dim T_pS_{red} = 4$

La surface S_{red} est donc localement intersection complète. Comme les congruences $(\alpha, 1)$ sont réglées et éliminées de façon ensembliste au 3.2, on suppose que $\beta = 2$, et que S est réduite. Elle possède alors selon le 5.1.1 une courbe résiduelle. On trouve alors une famille à 2 paramètres de β-plans rencontrant cette courbe résiduelle dont l'élément générique coupe S proprement (puisqu'il doit être stable). Il doit donc contenir 3 bisauteuses (comptées avec multiplicités), ce qui est impossible pour $c_2 = 4$. Ceci est encore valable lorsque cette courbe résiduelle C est tracée sur S. En effet la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{L}$ est de support C donne par restriction à un β-plan général h qui rencontre C:

$$\mathcal{T}or_1(\mathcal{O}_S.\mathcal{O}_h) \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_h \longrightarrow \mathcal{O}_{M\cap h} \longrightarrow \mathcal{O}_{S\cap h} \longrightarrow 0$$

Comme h coupe S en dimension nulle, on a $\mathcal{T}or^1(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_h) = 0$, ce qui donne encore long$\mathcal{O}_{M\cap h} \geq 3$.

Pour $c_2 = 5$ et d=8, la section hyperplane de S_{red} est en fait canonique, et ne peut pas être trigonale (i.e: avoir un g_3^1) puisqu'elle n'a pas de trisécantes.

Il s'agit alors selon Riemann-Roch de l'intersection complète de 3 quadriques. La congruence S_{red} est donc un cas dégénéré de la K-3 de Kummer qui est de bidegré (4,4). La surface S est donc réduite selon le 3.3.1 et intersection complète. Il existe alors une courbe de bisauteuses résiduelle selon le 5.1.1. On trouve alors une famille à 2 paramètres de β-plans rencontrant cette courbe dont l'élément générique doit donc contenir 5 bisauteuses (comptées avec multiplicités), ce qui est impossible.

Les surfaces de degré 4 possibles sont selon [S-D] soit réglées, soit la Veronese, soit des surfaces de Del-Pezzo incluses dans $\mathbb{P}_4$. Mais si S_{red} est incluse dans $\mathbb{P}_4$, il n'existe pas de points où l'espace tangent est de dimension 4. On conclut dans tous les cas avec le 3.2 que tous les espaces tangents de Zariski à S_{red} sont de dimension au plus 3, ce qui implique que S_{red} ne possède pas de trisauteuses selon le 1.3.3 et donc pas de droites non plus selon le 1.1.4, ce qui écarte toute cette famille de Del-Pezzo de bidegré (2,2).

On élimine facilement la Veronese de bidegré (3,1) car elle rencontre certains β-plans en des coniques lisses, il ne reste donc plus que celle constituée par les bisécantes à une cubique lisse de $\mathbb{P}_3$. Cette surface ne contenant pas de droites trisauteuses selon le 1.3.3 ne doit contenir que des courbes de degré divisible par 4 (Cf 2.2.7), ce qui contredit la présence de coniques lisses sur S.

4 Applications aux espaces de modules

On rappelle ici la contruction faite dans [E-S] pour montrer de quelles façons les résultats précédents peuvent être utiles pour l'étude de I_n. On en déduira en particulier l'irréductibilité de I_4 (Cf [Ba2]).

On éclate $\mathbb{P}_3$ en un point N qui est inclus dans une famille à 1 paramètre de droites exactement 1-sauteuse pour un instanton E. On note U_N le sous schéma de I_n qui correspond aux instantons qui n'ont pas de multisauteuses passant par N et qui ont une droite contenant N qui n'est pas sauteuse. On a montré au 3.3.3 que les U_N formaient un recouvrement de I_n pour n=4 ou 5. On note $\mathbb{P}(V^\vee)$ le $\mathbb{P}_2$ exceptionnel et H un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n (qui jouera le rôle de $H^2E(-3)$). Un élément de U_N est alors caractérisé (au marquage près de $H^2E(-3)$) par les données suivantes:

$$\begin{cases} 1) & m \in V \otimes S_2H^\vee \\ 2) & \text{une surjection } 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)} \to \theta(2) \to 0 \text{ de noyau F} \\ 3) & \text{et une surjection } q^*F^\vee \to q^*\theta(\sigma+\tau) \to 0 \end{cases}$$

NB: l'élément m n'est en fait que la restriction à l'α-plan associé à N de l'élément de $\overset{2}{\Lambda}\, H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)) \otimes S_2H^\vee$ de rang 2n+2 de Tjurin. (Cf [T2] ou [LeP]).

On note P le groupe ${}^{GLH}/_{\pm Id}$. Il agit sur H de façon habituelle, et aussi sur les données précédentes grâce à la suite exacte:

$$0 \longrightarrow H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)} \xrightarrow{m} H^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1) \longrightarrow \theta(2) \longrightarrow 0$$

de plus 2 éléments de U_N sont isomorphes si et seulement si ils sont dans la même orbite pour cette action. On se réfèrera à [So] pour l'existence et les propriétés de l'espace des modules de ces théta caractéristiques. On note Θ le quotient $(V \otimes S_2H^\vee)^{ss}/P$ et Θ_0 l'ouvert dense de Θ constitué des classes d'isomorphie des θ-caractéristiques qui ont un support lisse, où l'on rappelle que la semistabilité (resp la stabilité) est définie par le fait que pour tout sous-espace vectoriel non nul L totalement isotrope pour le réseau quadratique, on ait: $\dim L + \dim L^\perp \leq \dim H$ (resp $< \dim H$). L'espace Θ est irréductible, de dimension $\frac{n(n+3)}{2}$, et normal à singularités rationnelles (Cf [So] théorème 0.5). Comme on a imposé à tout élément de U_N de possèder une droite non sauteuse passant par N, la théta caractéristique obtenue est toujours semi-stable, et c'est le morphisme de U_N dans Θ que l'on va étudier.

On remarque d'abord que la 2° donnée se globalise en une fibration triviale $G'' \to V \otimes S_2H^\vee \to 0$ où G'' est l'ouvert de la grassmanienne $G' = G\big(2, H^0(\theta(2))\big)$

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{P}\left(\overset{2}{\Lambda} H^0(\theta(2))\right) & \boldsymbol{P}\left(\overline{\overset{2}{\Lambda} H^0(\theta(2))}\right) \\
\cup & \cup \\
G'' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{G''} \arrow[d] \\
V \otimes S_2 H^\vee \arrow[r] & \Theta
\end{tikzcd}$$

constitué des paires de sections qui engendrent $\theta(2)$. Il est alors remarquable que cette fibration passe au quotient par P. En effet, si P n'agit pas sur le fibré trivial $H^0(\theta(2))$, en revanche il agit sur le fibré $\overset{2}{\Lambda}\ H^0(\theta(2))$ et de plus les équations de G' (i.e: $u \wedge u' = 0$) sont globalement invariantes par cette action. D'autre part un changement de base de H ne perturbe pas la condition que 2 sections de $\theta(2)$ aient des zéros disjoints. On note K le sous fibré tautologique de $\mathcal{O}_{G'} \otimes H^0(\theta(2))$, et on remarque que $\overset{2}{\Lambda}\ K$ passe aussi au quotient. (On notera dans la suite avec une barre les objets quotientés par P)

La 3^o donnée n'existe que sous une certaine condition identifiée dans [E-S] § 4.2 comme le lieu d'annulation d'un cobord $\delta : \mathcal{O}_{G''} \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_C(1)) \otimes \overset{2}{\Lambda}\ K^\vee$ provenant de la suite exacte:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}(V^\vee)} \boxtimes K \longrightarrow \theta(2) \boxtimes \mathcal{O}_{G''} \longrightarrow 0$$

qui restreinte à $C \times G''$ donne:

$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(1) \boxtimes \mathcal{O}_{G''} \longrightarrow F(\theta(2) \boxtimes \mathcal{O}_{G''}) \longrightarrow \mathcal{O}_C \boxtimes \overset{2}{\Lambda}\ K \longrightarrow 0$. (Où C est le support de θ)

On note Z_δ le lieu d'annulation de δ, alors, selon [E-S], U_N est un fibré projectif au dessus de $\overline{Z_\delta}$ de fibre $\mathbb{P}_4$.

On remarque (Cf [E-S] § 4.2) qu'au dessus de Θ_0, le fibré $\overline{\overset{2}{\Lambda}\ K}^\vee$ engendre $Pic\overline{G}''_{|\Theta_0}$ et donc que l'image de U_N contient Θ_0, elle est donc irréductible et normale de dimension $\frac{n(n+3)}{2}$. On note U^s_N les éléments de U_N qui ont une théta-caractéristique stable. On rappelle alors que selon [So], l'image de U^s_N est lisse. De plus, on peut montrer que pour $c_2 = 4$, les U^s_N recouvrent I_4 lorsque N décrit $\mathbb{P}_3$. On va pour celà cerner les théta non stables que l'on peut obtenir dans l'image d'un U_N. On prend donc un espace $L \subset H$ totalement isotrope pour m. On remarque que l'existence d'une quadrique non dégénérée dans le réseau impose que $\dim L \leq 2$. De plus, dans le cas où L est de dimension 1, la condition de stabilité provient directement de la condition $\alpha 2$ de [Ba3], qui a déjà été vérifiée dans [E-S] (§1.10). Il reste alors à identifier le cas où m possède un espace totalement isotrope de dimension 2. Si c'est le cas, on peut écrire toutes les quadriques du réseau sous la forme $\sum_{i=1}^{i=3} Y_i \begin{pmatrix} 0 & {}^T A_i \\ A_i & B_i \end{pmatrix}$ où A_i et B_i sont des matrices 2×2. Mais dans ce cas, le déterminant de cette matrice vaut $(\det(\sum_{i=1}^{i=3} Y_i A_i))^2$, ce qui montre que la quartique des droites sauteuses passant par N est une conique double. Ceci montre de plus que si cette conique est singulière, alors cette droite est une multisauteuse. On va donc montrer maintenant qu'il n'existe pas d'instanton tel que ceci arrive pour tout N de $\mathbb{P}_3$. En effet, s'il en existait un, alors l'hypersurface de ses droites sauteuses serait constituée d'une quadrique double. Cette quadrique donne alors un complexe quadratique de droites tel que les droites communes à 2 pinceaux, de même centre, de droites du complexe, soient des droites bisauteuses. Comme dans le cas où la quadrique est lisse et transverse à G ces droites forment déjà une congruence (il s'agit de la K-3 associée au complexe quadratique. Cf [G-H] chapitre 6), on trouve dans tous les cas une famille à 2 paramètre de multisauteuses, ce qui est exclu.

Il reste alors à étudier la fibre de ce morphisme de $U_N \to \Theta$, pour montrer que pour $c_2 = 4$ c'est une section hyperplane de la fibre $\overline{G}''_\theta$, où θ est dans l'image de U_N, donné par un élément m de $V \otimes S_2H^\vee$.

On travaille maintenant avec les fibres en m car elles sont identiques à celles au dessus de θ. On peut donner pour $c_2 = 4$ une interprétation géométrique de cette condition.

Lemme 4.0.4 *Si $h^0E(1) = 0$, alors pour $c_2 = 4$ par tout point P il passe une infinité de plans H tels que $E_H(1)$ ait une section nulle en P.*

On considère la correspondance d'incidence point plans $I \subset \mathbb{P}_3^\vee \times \mathbb{P}_3$, et on note Z le lieu de dégénérescence de l'évaluation: $q'^*q'_*p'^*E(\tau) \longrightarrow p'^*E(\tau)$ où p' et q' sont les projections sur $\mathbb{P}_3$ et $\mathbb{P}_3^\vee$, et où τ et σ sont les images réciproques de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3^\vee}(1)$. On remarque que $q'^*q'_*p'^*E(\tau)$ est de rang 2, car le plan général est stable et pour $c_2 \geq 4$ la section de $E_H(1)$ ne peut pas être sur 2 coniques. Donc Z est toujours de dimension 4 pour $c_2 = 4$.

Il s'agit de savoir si la classe de Z a une intersection non nulle avec τ^3 dans l'anneau de Chow de I, ce qui revient à montrer que $c_1(q'_*p'^*E(\tau))$ est non nul. La résolution de I tensorisée par $p'^*E(\tau)$ donne la suite exacte suivante puisque $h^0E(1) = 0$:

$$0 \longrightarrow q'_*p'^*E(\tau) \longrightarrow H^1E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3^\vee}(-1) \longrightarrow H^1E(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3^\vee} \longrightarrow R^1q'_*p'^*E(\tau) \longrightarrow 0$$

On remarque que pour un plan stable H, $h^1E_H(1) = c_2 - 6 + h^0E_H(1)$. Comme $h^0E_H(1) \leq 2$ pour $c_2 \geq 4$, le faisceau $R^1q'_*p'^*E(-4\tau)$ est nul pour $c_2 = 4$, et donc $c_1(q'_*p'^*E(\tau)) = 6$.

Le lieu singulier de $q'_*p'^*E(\tau)$ étant de codimension au moins 3, puisque c'est une seconde syzygie locale, on en déduit la classe de Z par un calcul de première classe de Chern pour $c_2 = 4$. Ce qui donne$[Z] = 2\tau + 6\sigma$. On a donc toujours $Z.\tau^3 \neq 0$.

Il faut maintenant interpréter comment la présence d'un tel plan impose des conditions aux 2 sections s_1 est s_2 de $\theta(2)$ provenant de E dans la construction de [E-S].

Lemme 4.0.5 *Pour $c_2 = 4$, le cobord δ_m n'est pas idendiquement nul sur G''_m.*

On considère un plan stable H tel que $\mathrm{E}_H(1)$ ait une section nulle en N que l'on note σ'. Soit p la droite du $\mathbb{P}_2$ exceptionnel provenant des droites de H contenant N. La restriction de la section σ' à p donne un espace H'_3 de dimension 3 dans $H^0(2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$ grâce à la suite exacte:

$$0 \longrightarrow 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \xrightarrow{.p} 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1) \longrightarrow 2\mathcal{O}_p(1) \longrightarrow 0$$

Comme σ'_p est en fait une section de $(q_* p^* E)_p(1)$ qui n'est autre que $F_p(1)$ où:

$$0 \longrightarrow F(1) \longrightarrow 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1) \xrightarrow{(s_1,s_2)} \theta(3) \longrightarrow 0$$

les section de H'_3 donnent en fait des sections de $\theta(3)$ nulles sur p. On suppose que $H^0(2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$,qui vaut aussi $H_2 \otimes V$ où $V = H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$), s'injecte dans $H^0(\theta(3))$ ce qui est toujours le cas dès que $h^0E(1) = 0$. On en déduit qu'il existe une section de $H_2 \otimes V$ qui s'annule sur p. Cette section s'écrit alors $\sigma.p$ où σ est une section de $\theta(2)$ qui n'est pas dans H_2 car σ'_p donne une section de $2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ qui ne provient pas d'une section de $2\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$. Comme $\sigma.p$ est une section de $\theta(3)$ qui est aussi dans $H_2 \otimes V$, on a si p n'est pas $c_2 - 1$-sécante à une section de H_2: $\sigma.p = s_1.p_1 + s_2.p_2$ où (s_1, s_2) est une base de H_2 et où p, q, q' ne sont pas concourantes.

Pour $c_2 = 4$, il existe une infinité de telles droites p, on peut donc supposer que p n'est pas en général trisécante à une section de H_2, car les sections de $\theta(2)$ qui ont des trisécantes forment une hypersurface de $\mathbb{P}(H^0\theta(2))$ qui ne peut donc contenir toutes les droites provenant d'un instanton.

Le réseau de quadriques donne le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & H^\vee \otimes \overset{2}{\Lambda} V \arrow[r] \arrow[d] & H^\vee \otimes \overset{2}{\Lambda} V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \otimes V \arrow[r] \arrow[d] & H^\vee \otimes V \otimes V \arrow[r] \arrow[d] & H^0\theta(2) \otimes V \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \otimes V \arrow[r] \arrow[d] & H^\vee \otimes S_2 V \arrow[r] \arrow[d] & H^0\theta(3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On choisit ici une des bases du type (s_1, s_2) de H_2 et une base (p_1, p_2, p) de V. On remonte (s_1, s_2) en 2 éléments $h^1 = \sum_{i=1}^{3} h_i^1 \otimes p_i$ et $h^2 = \sum_{i=1}^{3} h_i^2 \otimes p_i$ (où $p_3 = p$). L'égalité $\sigma.p = s_1.p_1 + s_2.p_2$ dans $H^0\theta(3)$ se traduit dans $H^0\theta(2) \otimes V$ en: $s_1 \otimes p_1 + s_2 \otimes p_2 - \sigma \otimes p \in H^\vee \otimes \overset{2}{\Lambda} V$. On remonte cette condition dans $H^\vee \otimes V \otimes V$, ce qui impose qu'il existe des éléments $k^i = \sum_{j=1}^{j=3} k_j^i p_j$ de $H^\vee \otimes V$, qui sont aussi dans l'image de H, tels que: $h_1^1 + k_1^1 = 0$, $h_2^2 + k_2^2 = 0$, $h_1^2 + h_2^1 + k_2^1 + k_1^2 = 0$. Il existe donc des antécédents de s_1 et s_2 tels que $h_1^1 = h_2^2 = h_2^1 + h_1^2 = 0$.

Il s'agit maintenant de majorer le nombre paramètres (projectifs) des paires $\{s_1, s_2\}$ que l'on peut obtenir à partir de tels h^i. Il faut d'abord choisir p_1 et p_2, il restera alors au plus 7 paramètres pour le choix de h^1 et 3 pour celui de h^2. On remarque qu'il existe une infinité de choix de p_i qui donne le même s_i. En effet, il s'agit de choisir un relèvement de s_i dans $H^\vee \otimes V$ qui ait p_i pour conoyau. Les matrices (4,3) ayant un conoyau non trivial sont en codimension 2 dans $\mathbb{P}(H^\vee \otimes V)$. Elles coupent donc le $\mathbb{P}(H)$ antécédent de s_i en dimension 1.

La paire $\{s_1, s_2\}$ est donc donnée par au plus 12 paramètres. Pour trouver la dimension de $\ker \delta_m \cap G''_m$, il ne reste plus qu'à rappeler qu'il existe pour un 4-instanton donné une infinité de telles droites p, c'est à dire que l'on obtient une infinité de fois la droite $\mathbb{P}(H_2)$ par cette construction. On obtient alors $\dim(\ker \delta_m \cap G''_m) = 11$, et l'on remarque en reprenant le compte des paramètres que si l'on fixe s_1, il existe au plus une famille à 5 paramètres de droites passant par s_1 qui sont dans $\ker \delta_m$.

On remarque alors que $Z_{\delta_m, m}$ est singulier en $s \wedge s'$ si et seulement si l'espace tangent à G''_m en ce point est inclus dans l'hyperplan associé à δ_θ. Mais comme $T_{G''_\theta, u_0} = \{u \in \overset{2}{\Lambda} H^0(\theta(2)) \mid u \wedge u_0 = 0\}$, on en déduit que $Z_{\delta_m, m}$ est singulier en $s \wedge s'$ si et seulement si s et s' sont dans le noyau N_m de l'application linéaire antisymétrique $H^0(\theta(2)) \to H^0(\theta(2))^\vee$ associée à δ_m. Mais dire que s est dans le noyau de δ_m c'est dire que pour tout $s'' \in H^0(\theta(2))$, la droite $s \wedge s''$ provient d'un instanton E, ce qui est impossible (si $h^0 E(1) = 0$) selon ce qui précède. Comme les fibré de t'Hooft sont de dimension inférieure à toutes les composantes irréductibles de I_n et qu'ils y donnent des points lisses, on retrouve ainsi en faisant varier N les résultats de Barth et LePotier ([Ba2]&[LeP]), c'est à dire que I_4 est irréductible et lisse de dimension $4 + \dim\Theta + \dim Z_{\delta_\theta, \theta} = 29$, puisque les U_N forment un recouvrement de I_4.

5 Appendice: Quelques propriétés du schéma des multisauteuses d'un instanton

5.1 Classe résiduelle

Soit E un n-instanton possédant une famille à 2 paramètres de droites multisauteuses: S. On suppose ici que S est irréductible et que le schéma résiduel de S dans M n'ait pas de courbe tracée sur S. On suppose de plus que S_{red} est localement intersection complète.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(H^1E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{G}}) \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{S_{red}} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "f"] \\ S_{red} \arrow[r, "i"'] & G \end{tikzcd}$$

Pour définir et calculer la classe C dans l'anneau de Chow de G (gradué par la dimension), on se place dans $\widetilde{G}$. l'éclaté de G le long de S_{red}. On note $\widetilde{S_{red}}$ le diviseur exceptionel et x la classe de $\widetilde{S_{red}}$ dans $A_3\widetilde{G}$. On a:

$$A_k\widetilde{G} = (A_k\widetilde{S_{red}} \bigoplus A_k(G))/\alpha(A_kS_{red})$$

où $\forall y \in A_kS_{red}$, $\alpha(y) = (c_1(g^*N/\mathcal{O}_N(-1)) \cap g^*y, -i_*y)$. N étant le fibré normal de S_{red}.
On pose : $\zeta = c_1(j^*\mathcal{O}_{\widetilde{G}}(\widetilde{S_{red}}) = c_1(\mathcal{O}_N(-1))$.

La structure multiplicative de $A_*\widetilde{G}$ est donnée par les lois:
$\begin{cases} f^*\gamma.f^*\gamma' = f^*\gamma\gamma' \\ j_*\tilde{\sigma}.j_*\tilde{\sigma}' = j_*(\zeta\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}') \\ f^*\gamma.j_*\tilde{\sigma} = j_*((g^*i^*\gamma).\tilde{\sigma}) \end{cases}$ où $\gamma \in A_*G$ et $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}' \in A_*\widetilde{S_{red}}$. On a alors:
$x^2 = j_*\zeta = (g^*c_1N, -i_*[S_{red}])$. car $\zeta = -c_1(g^*N/\mathcal{O}_N(-1)) + g^*c_1N$ et de même:
$x^3 = j_*\zeta^2 = ((c_1N)^2 - c_2(N), -i_*(c_1(N)))$. avec

$$A_*\widetilde{S_{red}} = A_*S_{red}[\zeta]/(\zeta^2 - c_1(N)\zeta + c_2(N)).$$

On a la suite exacte: $H^1E(-1) \otimes Q^\vee \xrightarrow{\sigma} H^1E \otimes \mathcal{O}_G \to R^1q_*p^*E \to 0$ où Q est le quotient tautologique de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1))^\vee \otimes \mathcal{O}_G$. Selon [G-P] M est le lieu où le rang de σ est inférieur à 2n-2. On note U le sous-fibré universel de $\mathbb{P}(H^1E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{G}})$ et π la projection sur $\widetilde{G}$. Le lieu de dégénérescence de $f^*\sigma$ étant celui de $f^*\sigma^\vee$, on peut décrire $f^*[M]$ en fontion du schéma d'annulation Z_s d'une section s de $U^\vee \otimes \pi^*(H^1E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{G}})$ provenant de la suite exacte:

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \pi^*(H^1E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{G}}) \xrightarrow{\pi^*f^*\sigma^\vee} \pi^*(H^1E(-1) \otimes f^*Q^\vee)^\vee$$

En effet, $f^*M = \pi_*(Z_s)$. De plus s s'annule sur le diviseur $\pi^*\widetilde{S}$ et donne donc une section régulière s' de $U^\vee \otimes \pi^*(H^1E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{G}})(-mx)$ où $S = mS_{red}$ dans A_*G. On calcule donc cette classe comme dans [Fu] Ex 14.1.4:

$$Z_{s'} = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i c_{2n-i}(U^\vee \otimes \pi^*f^*F)(\pi^*mx)^i. \text{ où } F = H^1E(-1)^\vee \otimes Q.$$

Selon Josefiak-Lascoux-Pragacz, [Fu]Ex14.2.2. on a:

$$\pi_*(c_{2n-i}(U^\vee \otimes \pi^* f^* F)) = c_{2n-i-(2n-2)+1}(F - H^1 E^\vee \otimes \mathcal{O}_{\tilde{G}})) = c_{3-i}(F)$$

Le polynome de Chern de F étant:

$$c_Y(F) = 1 + (nt)Y + [\binom{n+1}{2}t^2 - nu]Y^2 + [2\binom{n+1}{3}tu]Y^3$$

où t est la classe de la section hyperplane de G et où u est représenté par les droites d'un plan. (On rapelle que l'anneau de Chow de G est engendré par t et u, et que l'on a les relations: $t^3 = 2tu$, $u^2 = t^2u$. On a de plus $c_2Q = t^2 - u$ et $[S] = \alpha(t^2 - u) + \beta u$)

On obtient:

$\pi_*(Z_{s'}) = \sum_{i=0}^{2n} c_{3-i}(F)(-mx)^i = \sum_{i=0}^{3} c_{3-i}(F)(-mx)^i.$

$= (m^3[c_2N-(c_1N)^2]+m^2(c_1N.n.i^*t)-m.i^*[\binom{n+1}{2}t^2-nu].2\binom{n+1}{3}tu-nm^2t.i_*[S_{red}]+ m^3i_*c_1N)$

Exemple 5.1.1 *Si S est une congruence lisse de bidegré (α,β), alors le lieu résiduel a pour classe:*

$\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-(n^2-7n+13)\beta-(n^2-5n+13)\alpha+(2\pi-2)(2n-12)-12\chi(\mathcal{O}_S)}{2}\overline{p}, [2\binom{n+1}{3} -(n-3)(\alpha+\beta)+2\pi-2]tu\right)$

où π est le genre de la section hyperplane de S, et $\overline{p}$ la classe d'un point de S.

On note $c_i\Omega$ les classes de Chern du fibré cotangent de S. et $\overline{p}$ la classe d'un point dans A_0S.

Lorsque C est une section hyperplane générique de S, le fibré normal de C est $N_C = N_{|C} \oplus \mathcal{O}_C(1)$. Comme $c_1N_C = c_1(\Omega_G^\vee)_{|C} + c_1(\omega_C) = 4(\alpha+\beta) + 2\pi - 2$. on a: $t.c_1N = [3(\alpha+\beta) + 2\pi - 2].\overline{p}$

D'autre part, $c_1N^2 - c_2N = [5(\alpha+\beta) + 8(\pi-1) + c_2\Omega].\overline{p}$. Ce qui donne le résultat en utilisant Hirzebruch-Riemann-Roch puis la relation suivante vérifiée par toute congruence lisse (Cf [A-S]):

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3(\alpha+\beta) + 4(2\pi - 2) + 2(c_1\Omega)^2 - 12\chi(\mathcal{O}_S)$$

On rappelle alors la liste des congruences lisses de degré inférieur ou égal à 9. (Cf [A-S]). où π, q, p_g sont respectivements le genre d'une section hyperplane. l'irrégularité. et le genre géométrique de la congruence. et où l'on marque d'une étoile celles qui vérifient la relation du 3.3.3: $(d-4)[(d-2)(d-3) - 6\pi] = 0$

$\{\alpha,\beta\}$	π	q	p_g	Description
$\{0,1\}$	0	0	0	$\mathbb{P}_2$
$\mathbf{\{1,1\}^*}$	**0**	**0**	**0**	$\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$
$\mathbf{\{1,2\}^*}$	**0**	**0**	**0**	Del Pezzo $\widetilde{\mathbb{P}_2}(...)$
$\mathbf{\{1,3\}^*}$	**0**	**0**	**0**	Veroneze
$\mathbf{\{2,2\}^*}$	**0**	**0**	**0**	Surface réglée normale rationnelle
$\mathbf{\{2,2\}^*}$	**1**	**0**	**0**	Del Pezzo $\widetilde{\mathbb{P}_2}(...)$
$\mathbf{\{2,3\}^*}$	**1**	**0**	**0**	Del Pezzo $\widetilde{\mathbb{P}_2}(...)$
$\{2,3\}$	2	0	0	Del Pezzo $\widetilde{\mathbb{P}_2}(...)$
$\{3,3\}$	1	1	0	$\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$
$\{3,3\}$	1	0	0	Del Pezzo $\widetilde{\mathbb{P}_2}(...)$
$\mathbf{\{3,3\}^*}$	**2**	**0**	**0**	Del Pezzo $\widetilde{\mathbb{P}_2}(...)$
$\{3,3\}$	4	0	1	K-3 intersection complète(1,2,3)
$\{3,4\}$	3	0	0	Del Pezzo $\widetilde{\mathbb{P}_2}(...)$
$\{3,4\}$	6	0	2	$S \xrightarrow{\text{fibration elliptique}} \mathbb{P}_1$
$\{2,6\}$	3	1	0	
$\{3,5\}$	4	0	0	Del Pezzo $(\widetilde{\mathbb{P}_2}(...))$
$\{4,4\}$	3	0	0	Del Pezzo $(\widetilde{\mathbb{P}_2}(...))$
$\{4,4\}$	4	0	0	Del Pezzo $(\widetilde{\mathbb{P}_2}(...))$
$\mathbf{\{4,4\}^*}$	**5**	**0**	**1**	K-3 intersection complète(2,2,2)
$\{4,4\}$	9	0	5	Type général (intersection complète(1,2,4))
$\{3,6\}$	5	0	0	Del Pezzo $(\widetilde{\mathbb{P}_2}(...))$
$\{4,5\}$	5	0	0	Del Pezzo $(\widetilde{\mathbb{P}_2}(...))$
$\{4,5\}$	6	0	1	
$\{4,5\}$	12	0	8	type général
$\{3,6\}$	4	1	0	fibré en conique au dessus d'une cubique plane lisse

5.2 Une théta-caractéristique sur la courbe des bisauteuses d'un n-instanton

On suppose ici que E est un fibré instanton de deuxième classe de Chern n, le but de cette partie est d'étudier le schéma des droites bisauteuses de E lorsqu'il vérifie les hypothèses attendues par la structure déterminantielle de la stratification des droites k-sauteuses.

On sait par exemple selon [B-H] que l'élément général de la composante irréductible contenant les fibrés de t'Hooft vérifie ces hypothèses.

Proposition 5.2.1 *Si un n-instanton ne possède pas de droites sauteuses d'ordre supérieur ou égal à 3 et que le lieu de ses droites bisauteuses est une courbe Γ dans G, alors on a:*

$$(R^1q_*p^*E)^{\otimes 4} = \mathcal{O}_\Gamma(n); \omega_\Gamma^o = (R^1q_*p^*E)^{\otimes 2}(n-4); (\omega_\Gamma^o)^{\otimes 2} = \mathcal{O}_\Gamma(3n-8)$$

Où ω_Γ^o est un faisceau dualisant sur Γ.

Ce résultat n'est en fait que l'analogue de la proposition 1.5 de [E-S]. On note K et Q les fibré tautologiques sur G tel que l'on ait la suite exacte:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1))^{\vee} \otimes \mathcal{O}_G \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

La variété d'incidence points/droites de $\mathbb{P}_3$ est donc F=$\mathbb{P}_G(Q^{\vee})$, et on a la suite exacte suivante où q est encore la projection de F sur G.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_F(-\tau) \longrightarrow q^*Q^{\vee} \longrightarrow (\omega_{F/G}(\tau))^{\vee} \longrightarrow 0$$

Il s'agit ici de faire une construction de Beilinson relative (au dessus de G). On a la résolution de la diagonale Δ de $F \underset{G}{\times} F$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_F(-\tau) \underset{G}{\boxtimes} \omega_{F/G}(\tau) \longrightarrow \mathcal{O}_{F \underset{G}{\times} F} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0$$

qui tensorisée par $p^*E(\tau) \underset{G}{\boxtimes} \mathcal{O}_F$ donne la suite spectrale suivante qui se termine en $E_2^{p,q}$, et qui aboutit à $p^*E(\tau)$ en degré 0 et à 0 ailleurs.

$$\begin{array}{cccc} & & q & \\ q^*(R^1q_*p^*E) \otimes \mathcal{O}_F(\sigma - \tau) & \longrightarrow & q^*(R^1q_*p^*E(\tau)) & \\ q^*q_*p^*E \otimes \mathcal{O}_F(\sigma - \tau) & \xrightarrow[d]{} & q^*q_*p^*E(\tau) & p \end{array}$$

Comme E ne possède pas de droites trisauteuses. $R^1q_*p^*E(\tau)$ est nul, et on en déduit la suite exacte: $0 \longrightarrow M \longrightarrow p^*E(\tau) \longrightarrow q^*(R^1q_*p^*E) \otimes \mathcal{O}_F(\sigma - \tau) \longrightarrow 0$

On note h et K la restriction de q et $q^*(R^1q_*p^*E) \otimes \mathcal{O}_F(\sigma - \tau)$ à $q^{-1}(\Gamma)$. Comme $R^1q_*p^*E$ est localement libre au dessus de Γ, on en déduit que $h_*K = R^1q_*p^*E \otimes h_*\mathcal{O}_F(\sigma - \tau)$ qui est nul. On a donc $h_*M_{|q^{-1}(\Gamma)} = h_*(p^*E(\tau)_{|q^{-1}(\Gamma)})$. D'autre part, comme K est localement libre au dessus de Γ et que $\overset{2}{\Lambda} E = 0$, on a $M_{|q^{-1}(\Gamma)} = K^\vee(2\tau)$ et donc $h_*(p^*E(\tau)_{|q^{-1}(\Gamma)}) = (R^1q_*p^*E)^\vee \otimes h_*\mathcal{O}_F(3\tau - \sigma)$. c'est à dire que $h_*(p^*E(\tau)_{|q^{-1}(\Gamma)}) \otimes R^1q_*p^*E = \mathcal{O}_G(-1) \otimes Sym_3Q_{|\Gamma}$. Comme $h_*(p^*E(\tau)_{|q^{-1}(\Gamma)})$ est localement libre de rang 4 au dessus de Γ, on obtient la relation: $(R^1q_*p^*E)^{\otimes 4} \otimes \det(h_*(p^*E(\tau)_{|q^{-1}(\Gamma)})) = \mathcal{O}_\Gamma(2)$. Mais en fait $q_*(p^*E(\tau))$ est localement libre au dessus de G par changement de base, ce qui montre que $\det(h_*(p^*E(\tau)_{|q^{-1}(\Gamma)})) = \mathcal{O}_\Gamma(2 - n)$ car $c_1(q_*(p^*E(\tau))) = 2 - n$ selon Riemann-Roch sur F. On en déduit donc:

$$(R^1q_*p^*E)^{\otimes 4} = \mathcal{O}_\Gamma(n)$$

D'autre part, on a la résolution suivante de $\mathcal{O}_F$ dans $G \times \mathbb{P}_3$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{G\times\mathbb{P}_3}(-\sigma - 2\tau) \longrightarrow Q^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-\tau) \longrightarrow \mathcal{O}_{G\times\mathbb{P}_3} \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow 0$$

qui tensorisée par p^*E donne grâce à la suite spectrale de Beilinson la suite exacte:

$$H^1(E(-1)) \otimes Q^\vee \xrightarrow{\phi} H^1(E) \otimes \mathcal{O}_G \longrightarrow R^1q_*p^*E \longrightarrow 0$$

On considère maintenant les complexes d'Eagon-Northcott (E_i) associés à φ. On note comme dans [G-P] M_i les modules résolus par les E_i, et puisque Γ est une courbe, on a: $M_0 = \mathcal{O}_\Gamma$, $M_1 = R^1q_*p^*E$, $M_i = Sym_iM_1$, et de plus:

$$\omega_\Gamma^\circ = M_2 \otimes \omega_G \otimes \det(H^1(E) \otimes \mathcal{O}_G) \otimes (H^1(E(-1)) \otimes Q^\vee)^\vee$$

Comme $\omega_G = \mathcal{O}_G(-4)$, et que $\det(H^1(E) \otimes \mathcal{O}_G) \otimes (H^1(E(-1)) \otimes Q^\vee)^\vee = \mathcal{O}_G(n)$ on obtient:

$$\omega_\Gamma^o = (R^1q_*p^*E)^{\otimes 2}(n-4) \text{ et donc } (\omega_\Gamma^o)^{\otimes 2} = \mathcal{O}_\Gamma(3n-8)$$

Remarque 5.2.2 *$\theta = (R^1q_*p^*E)\otimes\omega_\Gamma^o(2-n)$ est une théta caractérisque de Γ. Si $n = 2n'$, alors $\theta = (R^1q_*p^*E)(n'-2)$ en est une aussi.*

Proposition 5.2.3 *Si le schéma Γ des droites multisauteuses d'un n-instanton est une courbe dans G de droites exactement bisauteuses, alors on a:*

$$R^1q_*p^*E(-\tau)_{|\Gamma} \simeq (R^1q_*p^*E)\otimes Q_{|\Gamma}(-\sigma)$$

Si de plus Γ est une courbe lisse, alors le fibré normal à Γ dans G est:

$$N_{\Gamma,G} = Sym_2Q\otimes\omega_\Gamma(3-n)$$

Cette proposition est aussi une conséquence d'une contruction de Beilinson relative, mais où l'on tord cette fois la résolution de la diagonale par $p^*E \boxtimes_G \mathcal{O}_F$, ce qui donne la suite spectrale :

$$\begin{tikzcd} q^*(R^1q_*p^*E(-\tau))\otimes\mathcal{O}_F(\sigma-\tau) \arrow[r, "d"] & q^*(R^1q_*p^*E) \\ q^*(q_*p^*E(-\tau))\otimes\mathcal{O}_F(\sigma-\tau) \arrow[r, "d'"'] & q^*q_*p^*E \end{tikzcd}$$

qui aboutit à $p^*E \simeq N \oplus K$, où l'on note N le noyau de d, et K le conoyau de d'. On a alors les suites exactes:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & q^*(q_*p^*E(-\tau))\otimes\mathcal{O}_F(\sigma-\tau) \arrow[r] & q^*(q_*p^*E) \arrow[rr] \arrow[dr] & & p^*E \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \\ & & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow N(\tau-\sigma) \longrightarrow q^*(R^1q_*p^*E(-\tau)) \longrightarrow q^*(R^1q_*p^*E)(\tau-\sigma) \longrightarrow 0$$

On restreint la seconde suite à $q^{-1}\Gamma$ pour pouvoir appliquer la formule de projection à $q^*(R^1q_*p^*E(-\tau))_{|q^{-1}\Gamma}$ et à $q^*(R^1q_*p^*E)(\tau-\sigma)_{|q^{-1}\Gamma}$ car ils sont localement libres. On a alors la suite exacte:

$$R^1q_*p^*E(-\tau)_{|\Gamma} \longrightarrow R^1q_*p^*E\otimes q_*\mathcal{O}_\Gamma(\tau-\sigma) \longrightarrow R^1q_*N_{|q^{-1}\Gamma}(\tau-\sigma)$$

D'autre part, on déduit de la première suite restreinte à $q^{-1}\Gamma$que $R^1q_*K_{|\Gamma}(\tau)$ est nul, et donc que $R^1q_*N_{|q^{-1}\Gamma}(\tau) \simeq R^1q_*p^*E_\Gamma(\tau) = 0$ car E n'a pas de droites trisauteuses.

On obtient alors une surjection de $R^1q_*p^*E(-\tau)_{|\Gamma}$ vers $R^1q_*p^*E\otimes Q(-1)$ qui est un isomorphisme car ces 2 faisceaux sont localement libres de rang 2 au dessus de Γ.

D'autre part, Γ est donné par le 2° idéal de Fitting de l'application suivante:

$$H^2(E(-3)\otimes\mathcal{O}_G(-1)\xrightarrow{\phi}H^1(E(-1))\otimes\mathcal{O}_G\longrightarrow R^1q_*p^*E(-\tau)\longrightarrow 0$$

où ϕ est symétrique par rapport à la dualité de Serre. On suppose de plus que Γ est lisse et on note $\mathcal{L}_\Gamma$ le faisceau $R^1q_*p^*E(-1)$ restreint à Γ.

Il ne reste plus qu'à rappeller les résultats de Tjurin (Cf [T1]) qui décrivent le fibré normal:

On a vu qu'un instanton donnait une application de $\overset{2}{\Lambda} V$ dans $Sym_2H^\vee$ que l'on suppose injective. (Où $\mathbb{P}_3$=$\mathbb{P}(V)$ et $H = H^2E(-3)$). On regarde donc cet hyperéseau de quadriques $\mathbb{P}(\overset{2}{\Lambda} V) \subset \mathbb{P}(Sym_2H^\vee)$ et on note D_2 la surface représentant les quadriques du réseau de rang$\leq n-2$. (On a fait ici les hypothèses de régularité du lieu de dégénérescence, c'est à dire que G coupe transversalement la stratification de $\mathbb{P}(Sym_2H^\vee)$ par le rang). On obtient de la suite exacte:

$$0\to H\otimes\mathcal{O}_G(-1)\to H^\vee\otimes\mathcal{O}_G\xrightarrow{j}\mathcal{L}\to 0$$

une surjection $Sym_2H^\vee\otimes\mathcal{O}_\Gamma\xrightarrow{s_2 j_{|\Gamma}}Sym_2\mathcal{L}_\Gamma\to 0$ de noyau K. La fibre $\mathbb{P}(K_q)$ de $\mathbb{P}(K)$ au dessus d'un élément q de Γ n'est autre que les quadriques de $\mathbb{P}(H)$ qui contiennent le lieu singulier de q. Ceci n'est autre (Cf [T1] ou [T3]§2 lemme1.1) que l'espace tangent projectif en q au lieu des quadriques de rang$\leq n-2$. L'hypothèse de régularité du réseau ($\mathbb{P}(\overset{2}{\Lambda} V)$ est aussi transverse en q à ce lieu) impose donc à $\overset{2}{\Lambda} V\cap K_q$ d'être de dimension 3. L'injection de $(\overset{2}{\Lambda} V)\otimes\mathcal{O}_\Gamma$ dans $Sym_2H^*\otimes\mathcal{O}_\Gamma$ donne alors aussi une surjection:

$$0\longrightarrow K'\longrightarrow(\overset{2}{\Lambda} V)\otimes\mathcal{O}_\Gamma\longrightarrow Sym_2\mathcal{L}_\Gamma\longrightarrow 0$$

où $\mathbb{P}(K'_q)$, $q\in\Gamma$ est l'espace tangent projectif à D_2 en q. On a alors le diagramme commutatif de [T1] restreint à Γ:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & T_{D_2}(-1)_{|\Gamma} \arrow[r] \arrow[u] & T_{\mathbb{P}_5}(-1)_{|\Gamma} \arrow[r] \arrow[u] & N_{D_2,\mathbb{P}_5}(-1)_{|\Gamma} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[u] & \overset{2}{\Lambda} V\otimes\mathcal{O}_\Gamma \arrow[r] \arrow[u] & Sym_2\mathcal{L}_\Gamma \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_\Gamma(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}_\Gamma(-1) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

où la première flèche verticale est la suite exacte d'Euler relative au dessus de Γ, et la seconde celle de $\mathbb{P}(\overset{2}{\Lambda} V)$. Comme $\Gamma = D_2 \cap G$, on a $N_{\Gamma,G}(-1) \simeq N_{D_2,\mathbb{P}_5}(-1)_{|\Gamma}$, et on a donc $N_{\Gamma,G} \simeq Sym_2(R^1q_*p^*E(-\tau)_{|\Gamma}) \otimes \mathcal{O}_\Gamma(1)$, ce qui donne avec les résultats précédents:

$$N_{\Gamma,G} \simeq Sym_2 Q \otimes \omega_\Gamma(3-n)$$

Bibliographie

[A-S] E.Arrondo & I.Sols: *on congruences of lines in projective space*: SMF mémoire 50,Tome 120(1992) fascicule 3

[Ba1] W.Barth: *Some properties of stable rank-2 vector bundles on* $\mathbb{P}_n$. Math.Ann 226 (1977),125-150

[Ba2] W.Barth: *Irreductibility of the space of mathematical instanton bundles with Rank 2.* $c_2 = 4$. Math.Ann 258 (1981),81-106

[Ba3] W.Barth: *Moduli of vector bundles on the projective plane.* Inventiones math. 42(1977)63-91

[Ba-Hu] W.Barth & K.Hulek: *Monads and moduli of vector bundles.* Manuscr.math 25 (1978),323-347

[B-H] J.Brun & A.Hirschowitz: *Variété des droites sauteuses du fibré instanton général.* Comp.Math 53 (1984),325-336

[C] M.C.Chang: *Stable rank 2 bundles on* $\mathbb{P}_3$ *with* $c_1=0$, $c_2=4$, *nd* $\alpha=1$. Math.Z.184 (1983) 407-415

[Co] I.Coandă: *On Barth's restriction theorem.* J.Reine.Angew.Math 428(1992),97-110

[E-S] G.Ellingsrud & S.A.Stromme: *Stable rank-2 vector bundles on* $\mathbb{P}_3$ *with* $c_1=0$ *and* $c_2=3$. Math. Ann 255(1981)123-135

[F] W.Fulton: *Intersection theory.* Ergebnisse der Mathematik; Springer-Verlag 1984

[G-H] P.Griffiths & J.Harris: *Principles of algebraic geometry.* Wiley & Sons

[G] A.Grothendieck: *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV: Les schémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki 221(1961)

[G-P] L.Gruson & C.Peskine: *Courbes de l'espace projectif, variétés de sécantes.* Enumerative geometry and classical algebraic geometry. Nice(1981) Prog Math 24 Birkhäuser.Boston 1982

[H] R.Hartshorne: *Stable vector bundles of rank 2 on* $\mathbb{P}_3$; Math.Ann 238 (1978)229-280

[H-N] A.Hirschowitz & M.S.Narasimhan: *Fibrés de t'Hooft spéciaux et applications,* in Enumerative geometry and classical algebraic geometry, Prog.Math 24 (1982),143-161

[K] S.L.Kleiman: *The enumerative theory of singularities.* Real and complex singularities. Oslo 1976. P.Holm(ed.). Sijthoff and Noordhoff(1977).297-396

[LeBa1] P.Le Barz: *Formules pour les trisécantes des surfaces algébriques.* Ens.Math t.33 (1987),1-66

[LeBa2] P.Le Barz: *Formules multisécantes pour les courbes gauches quelconques.* Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry. Prog.Math 24 (1982),165-197

[LeP] J.Le Potier: *Sur l'espace des modules des fibrés de Yang et Mills.* Seminaire E.N.S (1980-1981) p.1. exp n°3. Prog.Math 37 (1983) 65-137.Birkhäuser.

[N-T] T.Nüßler & G.Trautmann: *Multiple Koszul structures on lines and instanton bundles.* Inter.J.Math Vol 5.No 3 (1994) 373-388.

[R] Z.Ran: *Surfaces of order 1 in Grassmannians.* J.Reine.Angew.Math.368 (1986) 119-126

[S] M.Skiti: *Sur une famille de fibrés instantons.* Preprint.

[So] C.Sorger: *Thêta-caractéristiques des courbes tracées sur une surface lisse.* J.reine angew.Math. 435(1993).83-118

[S-D] H.P.F.Swinnerton-Dyer: *An enumeration of all varieties of degree 4.* Amer.J.Math 95(1973)403-418

[T1] A.N.Tjurin: *The geometry of singularities of a generic quadratic form.* Math.USSR.Izvest. 17 (1981) No2,413-422

[T2] A.N.Tjurin: *On the superpositions of mathematical instantons.* In Artin, Tate, J.(eds) Arithmetic and geometry. Prog.Math 36 (1983) 433-450. Birkhäuser.

[T3] A.N.Tjurin: *On intersections of quadrics.* Russ.Math.Surveys 30:6(1975)51-105