

50376
1996
83

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de LILLE I

Spécialité : Électronique

présentée par
Laurent NIVANEN

pour obtenir le diplôme de
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de LILLE I

**Étude de l'interaction entre une onde
électromagnétique et un milieu fractal déterministe**

soutenue le 7 février 1996 devant la Commission d'Examen :

<i>Président</i>	M. Georges SALMER
<i>Rapporteurs</i>	M. Philippe GÉLIN M. Jean-Louis GREFFE
<i>Examineurs</i>	M. Alain CHAPOTON M. Frédéric HÉLIDORE M. Alain Le MÉHAUTÉ M. Olivier de WITTE

SCD LILLE 1

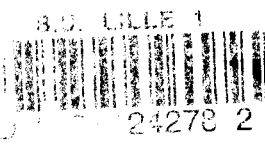


D 030 297384 5

616

33

evit ma mouez Laurence



Trugarekaat

Plijet on bet da labourat e-pad tri ble get Aotrou Lan Ar Meheut. Disket am eus getoñ ur mod nevez da sellout d'ar bed. Ne vez c'hoazh kavet ger ebet er yezh brezhoneg evit "fractal" met an dra-se ne bado ket. Mont a ra mat-tre ar meizad-se get Breizh. N'eo ket souezhus ma vez bet choajet al liesañ an aod Breizh evit skouer stumm "fractal". An aotoù broioù keltiek arall, Bro-Skos, Iwerzhon, Kembre, Kernev, Man, zo heñvel doc'h aot Breizh. Setu aze ul liamm kreñv etreze. Sonjet e vez gellet ema ar skiant nevez-mañ el un trec'h ag ar stumm kromm keltiek dirak al linenn didro, arouez a ved ar Romaned (sellit-ta d'o hentoù). Marteze ema hor bed en e donkan tost tre a vod-sonjañ ar Gelted.

"Me zo ganet e kreiz ar mor", en deus skrivet Yann-Ber Kalloc'h. Me zo me ganet e kreiz an douar, douar Breizh. Desavet on bet war ar maezioù e-barzh un endro plijus. Neuze em eus c'hoant amañ da drugarekaat ma zud. Da gentañ ema an desenn-mañ o labour dezhe. Raet o deus din kalz a draoù met marse da gentañ-tout ar c'houst evit labour. Labouret o deus douar ha graet war-dro loened evit ma c'hellhe o bugale ober studioù ha deskiñ ur micher. Ra ma vehint amañ trugarekaet.

Remerciements

M. Georges Salmer a accepté de présider le jury de cette thèse. Qu'il trouve ici l'expression de mes sentiments respectueux.

Je tiens à remercier MM. Philippe Gélin et Jean-Louis Greffe d'avoir accepté la charge de rapporteur de ce travail.

M. Alain Chapoton m'a apporté son aide précieuse dans le suivi administratif de cette thèse. Qu'il soit ici chaleureusement remercié.

Cette étude a été réalisée avec le concours de la DRET. Je remercie donc mes interlocuteurs dans ce travail Mme Parturlanne et M. Priou.

Je remercie ici M. Olivier de Witte qui a bien voulu faire partie du jury de thèse et accorder ainsi un peu de son temps que je sais précieux à la lecture de ce manuscrit.

A travers M. Frédéric Héliodore qui a accepté de faire partie du jury, ce sont tous les collègues du laboratoire onde-matière d'Alcatel Alsthom Recherche (Marcoussis) que je tiens à remercier. J'ai passé parmi eux deux années enrichissantes. Je tiens en particulier à remercier Denis Cottevielle et Frédéric Cariou pour leur apport déterminant dans les expériences et Vincent Dionnet pour son aide dans les aspects informatiques.

Je remercie profondément l'ensemble du personnel de l'Institut Supérieur des Matériaux du Mans (ISMANS) qui m'a fourni un environnement d'étude favorable, en particulier François Tsobnang qui m'a apporté un concours précieux dans la rédaction de ce travail. Je n'oublie pas les élèves de l'ISMANS dont j'ai apprécié les encouragements.

Enfin, je ne puis achever ces remerciements sans accorder une place à part à Alain Le Méhauté. C'est lui qui a donné l'impulsion à ce travail et en a assuré le suivi pendant trois ans. J'ai beaucoup appris à ses côtés, en particulier que la technique et l'ingénierie sont les plus efficaces moteurs du travail scientifique.

Résumé

Ce rapport traite de l'interaction entre une onde électromagnétique et un milieu de structure fractale. L'électromagnétisme est aujourd'hui bien maîtrisé en milieu homogène. Il n'en est pas de même en milieu hétérogène où on observe fréquemment de fortes absorptions.

La géométrie fractale est un outil porté à l'attention des scientifiques depuis une vingtaine d'années. Elle permet de décrire de façon satisfaisante les milieux hétérogènes. Or, du point de vue des phénomènes physiques, les milieux hétérogènes étudiés ne présentent qu'un caractère fractal statistique approché. Nous avons isolé ce caractère en parvenant à fabriquer des objets fractals de structure entièrement déterministe.

Les expériences ont porté pour les systèmes plans sur la diffraction par des trous fractals et pour les systèmes volumiques sur la propagation des ondes. A deux dimensions, il n'a pas été possible de déceler d'absorption aussi bien sur le plan théorique (théorie de la diffraction de Fraunhofer étendue aux ouvertures fractales) qu'expérimental. En revanche nous avons pu observer une forte absorption par des objets fractals déterministes, alors que le matériau sous sa forme homogène est peu absorbant. Cette absorption peut être décrite par de nouveaux invariants, équivalents en milieu hétérogène aux paramètres constitutifs habituels.

Mots clés : milieux hétérogènes, objets fractals déterministes, théorie des groupes, diffraction de Fraunhofer, propagation d'ondes, absorption.

Abstract

Here we deal with interaction between interaction between an electromagnetic wave and a fractal medium. If electromagnetism is well-known in homogeneous media, it is surely not the case in heterogeneous media where high absorptions are frequently observed.

Fractal geometry has been raising much attention to the scientists during the last twenty years. It gives a good description of heterogeneous media. The physical studies of fractal media generally concern the case of stochastic fractal forms. On the opposite we have tried to raise the fractal character of heterogeneous media by conceiving and building deterministic fractal objects.

We have considered two kinds of experiments. The first one is diffraction through fractal holes. Fraunhofer diffraction theory has been applied to the case of fractal aperture. No absorption can be detected, neither in theory or in experience. On the opposite, a strong absorption has been observed for deterministic spatial fractal objects. This absorption can be described by a set of new invariants that generalize the usual constitutive parameters.

Keywords : heterogeneous media, deterministic fractal objects, group theory, Fraunhofer diffraction, absorption.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
I ÉLECTROMAGNÉTISME	4
I-A) Milieu homogène	7
I-A-1) Historique de l'électromagnétisme	7
I-A-1-a) Les débuts	7
I-A-1-b) La distinction entre électricité et magnétisme	8
I-A-1-c) Le retour de la conception unifiée	9
I-A-1-d) L'interprétation par le champ	10
I-A-1-e) L'unification de Maxwell	12
I-A-1-f) La confirmation	14
I-A-2) Les équations de Maxwell	17
I-A-2-a) Contenu général habituel d'un problème électromagnétique	17
I-A-2-b) Caractère de la théorie	19
I-A-3) Le régime stationnaire en milieu homogène	20
I-A-3-a) Électrostatique du vide	20
I-A-3-b) Électrostatique des diélectriques	21
I-A-3-c) Magnétostatique du vide	23
I-A-3-d) Magnétostatique des milieux magnétiques	25
I-A-4) La notion de propagation	28
I-A-4-a) Point de vue qualitatif	28
I-A-4-b) Point de vue quantitatif	29
I-A-4-c) Propagation d'ondes	31
I-A-4-d) Les paramètres Z et γ	32
I-B) Le milieu hétérogène	35
I-B-1) Observations expérimentales	35
I-B-2) Les théories électromagnétiques en milieu hétérogène	36
I-B-2-a) les théories de milieu effectif	37
I-B-2-b) la théorie de la percolation	38
I-B-2-c) la théorie d'agrégats	39
I-B-3) La démarche d'étude employée	41

II LES OBJETS FRACTALS	44
II-A) Présentation de la géométrie fractale	45
II-A-1) Des débuts dans l'indifférence	45
II-A-1-a) L'époque des monstres.....	45
II-A-1-b) La notion de dimension	48
II-A-1-c) Le désintéret	50
II-A-2) Une montée en puissance	52
II-A-2-a) Les formes fractales dans la nature.....	52
II-A-2-b) Les phénomènes physiques	55
II-A-2-c) Extension du concept de dimension	56
II-B) Avancées dans la paramétrisation	59
II-B-1) Classification des constructions déterministes d'objets fractals autosimilaires	59
II-B-1-a) Objets fractals creux.....	59
II-B-1-b) Objets fractals construits par croissance	61
II-B-1-c) Construction par éclatement.....	63
II-B-2) Multiplicité des formes fractales issues d'un même générateur	68
II-B-2-a) Cas des formes planes construites par croissance	68
II-B-2-b) Règles grammaticales régissant les suites de configurations....	71
II-B-2-c) Description de la courbe fractale à tout ordre d'itération	73
II-B-2-d) Conditions de chevauchement	77
II-B-2-e) Cas de dégénérescence.....	79
II-B-3) Théorie des groupes et combinatoire des formes fractales 83	
II-B-3-a) Définition de fonctions de comptage.....	83
II-B-3-b) Présentation de certains groupes ponctuels de symétrie utiles ..	84
II-B-3-c) Cas des formes creuses	85
II-B-3-d) Cas des formes par croissance	97
II-B-3-e) Généralisation dans l'espace.....	102
II-B-4) Paramétrisation d'ensembles fractals à l'aide des coordonnées homogènes	104
II-B-4-a) Cas de l'ensemble de Cantor.....	105
II-B-4-b) Paramétrage p-adique à l'aide des coordonnées homogènes ..	105
II-B-4-c) Cas des objets fractals générés par creusement par homothéties pures	109
II-B-4-d) Généralisation à d'autres cas de construction par creusement. .	112

III MILIEU FRACTAL ET ÉLECTROMAGNÉTISME	120
III-A) Étude du point de vue électromagnétique d'objets bidimensionnels : diffraction sur des trous fractals	121
III-A-1) Présentation du problème	121
III-A-2) Expression générale de l'amplitude de l'onde diffractée . . .	122
III-A-3) Cas de l'ouverture triangulaire	124
III-A-4) Cas de l'ouverture polygonale	125
III-A-4-a) Cas d'un point du maillage intérieur au polygone	125
III-A-4-b) Cas d'un point du maillage appartenant à la frontière du polygone .	126
III-A-5) Application au cas des objets fractals	129
III-A-5-a) Cas d'un ensemble d'ouvertures identiques.....	129
III-A-5-b) Cas des ouvertures fractales construites par creusement	130
III-A-6) Quelques conséquences	132
III-A-6-a) Le théorème de Babinet	132
III-A-6-b) Ouverture rectangulaire.	132
III-A-6-c) Ouverture triangulaire.....	133
III-A-6-d) Formes fractales creuses (Tamis de Serpinski).....	134
III-A-7) Résultats expérimentaux	137
III-B) La propagation en milieu hétérogène	140
III-B-1) Électromagnétisme et formes différentielles	141
III-B-1-a) Les p-formes.	141
III-B-1-b) Les produits extérieurs	142
III-B-1-c) Les formes différentielles.....	143
III-B-1-d) Application à l'électromagnétisme.....	144
III-B-2) Présentation géométrique des équations de Maxwell . . .	150
III-B-2-a) Diagrammes électromagnétiques	150
III-B-2-b) L'opérateur de Hodge	151
III-B-2-c) Conditions de généralisation en milieu fractal.....	153
III-B-3) Approche topologique de la propagation	156
III-B-2-a) Propagation en milieu homogène.	156
III-B-2-b) Propagation en milieu fractal	157

IV RÉALISATION D'OBJETS FRACTALS ET EXPÉRIENCES. . .	161
IV-A) Codes de génération des objets fractals	162
IV-A-1) Distinction formes par creusement / par croissance.	162
IV-A-2) Propriétés	163
IV-A-3) Algorithme général.	168
IV-A-4) Spécificités de chaque type d'objet	169
IV-A-4-a) Objets plans construits par croissance	169
IV-A-4-b) Objets 3D construits par croissance.	170
IV-A-4-c) Objets construits par creusement.	170
IV-A-5) Caractéristiques des codes liées aux nécessités de fabrication	171
IV-A-5-a) Contraintes générales.	171
IV-A-5-b) Objets construits par creusement.	173
IV-A-5-c) Objets construits par croissance	176
IV-A-6) Amélioration et extension du domaine d'application des codes	178
IV-A-6-a) L'optimisation des fichiers STL	178
IV-A-6-b) Extension du domaine d'application des codes	180
IV-B) Fabrication d'objets fractals par stéréolithographie	183
IV-B-1) Description du procédé.	183
IV-B-2) Caractéristiques des pièces	185
IV-B-3) Les applications.	187
IV-B-4) Application aux objets fractals.	188
IV-C) Expériences électromagnétiques sur les objets fractals déterministes	189
IV-C-1) Résultats d'expériences	189
IV-C-2) Expériences complémentaires.	195

CONCLUSION ET PERSPECTIVES 196

Annexe I : Mesures de propagation dans des matériaux composites. 198

Annexe II : Démonstration par récurrence de la formule (2-50) 208

Annexe III : Démonstration par récurrence de la formule (2-61). 210

Annexe IV : Diffraction à travers une ouverture triangulaire 214

Annexe V : Contribution d'un point intérieur du maillage à l'amplitude de l'onde diffractée à travers une ouverture polygonale. 220

Annexe VI : Calcul de la réflectivité de la résine époxy sous forme homogène
..... 222

Index des figures..... 224

Index des tableaux..... 232

Références bibliographiques..... 233

INTRODUCTION

Introduction

Le présent mémoire traite de l'interaction entre une onde électromagnétique et un milieu présentant une structure particulière dite fractale.

L'intérêt des scientifiques pour les structures fractales n'a fait que croître depuis une vingtaine d'années, à la suite des travaux de B. Mandelbrot. Elles consistent en des structures fragmentées, irrégulières, qui ne peuvent en aucun cas être lissées ou appréhendées par des ensembles géométriques classiques.

A côté d'études mathématiques basées avant tout sur la théorie de la mesure, des études physiques ont été engagées lorsqu'on s'est aperçu que les ensembles fractals pouvaient fournir une bonne modélisation de diverses structures hétérogènes rencontrées dans la Nature.

La contribution de cette thèse relève du domaine de l'interaction des ondes électromagnétiques avec des objets fractals construits de manière entièrement déterministe. La démarche employée se différencie assez nettement des schémas de pensée suivis habituellement.

Les expériences menées jusqu'à présent ont été effectuées sur des matériaux composites matrice + additif, dont la distribution en additifs présente un caractère fractal de type stochastique. Au contraire, nous nous sommes attachés à fabriquer des objets fractals de structure complètement déterministe, ce qui a pu se faire grâce à la technique de stéréolithographie. Cette situation permet d'isoler les propriétés physiques liées au caractère purement fractal des objets. Les comportements expérimentaux observés n'étant pas descriptibles par les théories habituelles, nous avons été amenés à définir de nouveaux invariants valables en milieu hétérogène, franchissant ainsi une première étape de l'analyse de la propagation des ondes dans de tels matériaux.

La structure du mémoire répond au chemin intellectuel suivi.

La première partie est consacrée à une présentation de l'électromagnétisme classique à partir des équations de Maxwell. La notion fondamentale de propagation est introduite ainsi que la manière dont ce phénomène est couramment abordé.

La seconde partie est consacrée à une présentation des objets fractals. Nous ferons ressortir toute la fécondité de ce concept qui a permis de porter un regard nouveau sur toute une série de structures ou de phénomènes jusqu'alors ignorés. Notre travail d'étude sur les objets fractals a consisté à s'affranchir de l'outil habituel que constitue la théorie de la mesure pour envisager la génération des objets fractals sous l'angle purement géométrique. Nous avons constaté qu'il existait un lien fort entre les choix offerts à chaque étape de génération de l'objet fractal et les groupes de symétrie des formes géométriques mises en cause dans le processus. Ce résultat doit être considéré comme un résultat central pour comprendre les processus de dissipation lors de la propagation dans l'ordre des échelles.

La troisième partie aborde les phénomènes physiques qui ont pour support un milieu fractal. Nous avons d'abord considéré une situation simple à deux dimensions, à savoir le phénomène de diffraction à travers une plaque percée d'un trou fractal. Pour la première fois, nous avons pu résoudre analytiquement le problème posé dans le cadre de la théorie de la diffraction de Fraunhofer. Les figures de diffraction obtenues par la théorie sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. L'inconvénient de cette théorie est de ne tenir compte que de la géométrie de la plaque supposée d'épaisseur nulle et de ne pas intégrer ses caractéristiques physiques liées à la propagation. En conséquence, elle est incapable de prédire toute absorption éventuelle par le bord d'une plaque.

Pour passer au cas des objets tridimensionnels, reprenant et développant les idées émises par d'autres, nous avons présenté le phénomène de propagation sous un angle neuf, à savoir celui d'une trajectoire géodésique sur une variété. Le caractère fractal du milieu étudié se traduit dans ce nouveau cadre par une modification de la variété considérée.

Il n'existe pas à l'état naturel d'objets fractals de structure complètement déterministe. Les étapes de fabrication de tels objets sont précisées dans la quatrième partie. Leur conception se fait sur ordinateur à l'aide de codes de génération que nous avons mis au point. A partir de cette définition géométrique, ils sont fabriqués grâce à la stéréolithographie, procédé qui permet d'accéder à une palette très large de géométries.

Les premiers résultats expérimentaux en réflexion électromagnétique sur les matériaux de structure fractale déterministe sont ensuite présentés. Ils indiquent une absorption élevée (-12 dB) sur une large bande de fréquence pour un matériau présentant au départ de faibles pertes locales. Ce sont là des résultats encourageants car ils ouvrent la porte à de nombreuses nouvelles expériences sur de nouvelles configurations géométriques.

PREMIÈRE PARTIE :

ÉLECTROMAGNÉTISME

I ÉLECTROMAGNÉTISME

On s'accorde aujourd'hui à distinguer quatre interactions fondamentales [1]. Ces interactions s'exercent au niveau élémentaire entre deux particules par l'échange d'une troisième, un boson virtuel caractéristique, encore appelé "médiateur" de l'interaction. Malgré leur caractère "élémentaire", elles présentent des effets perceptibles à l'échelle macroscopique.

Chaque interaction est caractérisée par deux paramètres importants :

- une constante α sans dimension dite constante de structure. Elle traduit l'intensité de l'interaction.

- sa portée d , c'est-à-dire la distance au delà de laquelle elle ne se fait plus sentir. Cette portée est inversement proportionnelle à la masse du boson virtuel de l'interaction. On a la relation : $d = h/(mc)$.

On recense par ordre chronologique de découverte :

- l'interaction gravitationnelle, de portée infinie. Le boson intermédiaire associé est le graviton, de masse nulle, qui n'a pas encore été détecté. Elle n'intervient que pour les particules massives, et de manière attractive. Sa constante de structure est donnée par $\alpha_G = \frac{G m_p^2}{\hbar c} \approx 5,9 \cdot 10^{-39}$.

A cause de cette faible valeur de α , l'interaction gravitationnelle se manifeste essentiellement à l'échelle macroscopique : chute des corps, mouvement des planètes. On peut au contraire négliger son influence au niveau de la physique des particules.

- l'interaction électromagnétique, de portée également infinie. Elle est véhiculée par le photon, particule de masse nulle au repos. Sa constante de structure dite ici "fine", vaut $\alpha_E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$.

Sa portée infinie et son intensité non négligeable lui font jouer un rôle aussi bien au niveau macroscopique que microscopique. A notre échelle, elle assure la cohésion de la matière, elle pilote les réactions chimiques. Elle explique également la conduction dans les matériaux et la magnétostatique. Cette interaction est cependant incapable d'expliquer la cohésion interne des atomes. Son effet répulsif sur les particules de même charge entraînerait l'éclatement du noyau par perte de ses protons.

- l'interaction forte ($\alpha \approx 10$) répond au problème posé ci-dessus. Les protons et les neutrons qui s'assemblent pour former le noyau sont eux-mêmes des particules composites constituées de plusieurs quarks. L'interaction forte lie les quarks entre eux. Elle est essentielle à l'échelle de la physique atomique et subatomique et partage les particules élémentaires en deux groupes, les hadrons qui y sont sensibles et les leptons qui n'y sont pas.

Elle est véhiculée par plusieurs mésons Π de masses différentes. Le traitement de cette interaction n'en est que plus difficile. En effet, la relation entre portée et masse du boson implique des comportements différents suivant les distances entre particules. Malgré tout, l'interaction reste de portée finie et n'intervient plus au delà de quelques Angströms.

La constante de structure vaut $\alpha_F = \frac{g^2}{\hbar c} \approx 14,5$, où g est la constante de couplage de Yukawa analogue ici de la charge électrique e . g apparaît dans le potentiel d'interaction qui prend la forme asymptotique $V(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r}$ dans la région $1F < r < 3F$. Sa portée est de l'ordre de quelques Fermis (F). Dans le noyau, c'est cette interaction qui prédomine.

- l'interaction faible ($\alpha \approx 10^{-5}$). Sa portée est très courte, de l'ordre du centième de Fermi. Elle est à l'origine des phénomènes de radioactivité. Elle s'exerce sur des particules légères (leptons) telles que l'électron, le neutrino et leurs antiparticules. Ses bosons intermédiaires sont appelés W^+ , W^- et Z_0 de masses supérieures à 10Gev.

Chacune des interactions décrites ci-dessus a donné naissance à "sa théorie". C'est pourquoi les physiciens cherchent une théorie unitaire qui réduirait toutes ces interactions à différentes manifestations d'une seule et même interaction.

La voie suivie jusqu'à ce jour a été de formuler les théories relatives à chaque interaction dans le cadre mathématique dit des théories de jauge. Ces théories sont fondées sur le concept de symétrie. On est parvenu dans ce cadre à une unification des interactions faible et électromagnétique. Ainsi la mise en évidence de l'interaction électrofaible constitue le premier pas vers l'unification.

C'est la gravitation qui présente le caractère irréductible le plus marqué. Elle se distingue profondément des autres interactions par le fait que la symétrie sur laquelle elle est fondée n'est pas une symétrie interne des particules, mais une symétrie spatio-temporelle, qui est l'invariance vis-à-vis d'un changement de coordonnées.

Eu égard aux progrès accomplis par les physiciens des particules au cours de ces dernières décennies, il peut paraître étonnant de s'intéresser encore à l'électromagnétisme. Cependant, nous allons voir que si cette théorie a permis de rendre compte de beaucoup de propriétés de la matière homogène, son application au cas des matériaux hétérogènes pose des problèmes dont le contenu fondamental est loin d'être neutre au regard des questions de symétrie. Avant d'examiner la problématique liée à l'étude des matériaux hétérogènes, il est intéressant de faire un panorama de la théorie électromagnétique en milieu homogène, aussi bien d'un point de vue opérationnel que d'un point de vue historique.

I-A) Milieu homogène

Le terme d'électromagnétisme appartient au langage scientifique depuis la seconde moitié du siècle dernier. Comme l'indique ce nom, les techniciens étaient auparavant confrontés à deux séries de phénomènes distincts énoncés sous les vocables d'"électricité" et de "magnétisme". Pour bien cadrer le sujet, il semble instructif de fournir les grandes lignes de la genèse [2,3] de la théorie électromagnétique.

I-A-1) Historique de l'électromagnétisme

Bien que les phénomènes d'origine électromagnétique accompagnent l'homme depuis le début de son histoire (la foudre), il a fallu des millénaires pour en donner une interprétation satisfaisante.

I-A-1-a) Les débuts

Les plus anciennes traces d'activité humaine liée à un phénomène électrique autre que la foudre semblent remonter à la civilisation mésopotamienne. En 1936, on a découvert près de Ctésiphon, à une cinquantaine kilomètres de Bagdad, une jarre de terre fermée par un disque et un cylindre en cuivre surmontée d'une baguette et d'un câble en fer. Elle a pu être datée de 2500 ans avant J.-C. La jarre était remplie de sulfate de cuivre arrosé d'un acide. L'Américain Willard Gray a affirmé qu'il s'agissait d'une pile électrique.

Les autres rares manifestations datant de l'Antiquité nous viennent des Grecs. D'une part, ils avaient remarqué qu'en frottant un morceau d'ambre, on pouvait soulever de petits morceaux de papyrus. D'autre part, certains écrits font référence à des pierres capables d'attirer le fer. Il en existait une énorme près de la cité de Magnésia en Asie Mineure, d'où le nom d'aimant. Les Anciens considéraient l'attraction de l'ambre et celle du fer comme deux phénomènes similaires.

I-A-1-b) La distinction entre électricité et magnétisme

Les progrès suivants survinrent au cours du XVI^{ème} siècle. A partir du nom grec "elektron" signifiant ambre, William Gilbert (1540-1603) introduit en 1600 dans son livre "De magnete" le terme d'électricité désignant la propriété pour un matériau d'attirer comme l'ambre. Il insista sur la différence entre l'attraction régulière de l'aimant et celle désordonnée due à l'ambre. De plus, il montra qu'un aimant naturel n'exige aucune excitation pour activer ses propriétés magnétiques alors qu'il faut frotter l'ambre ou le verre. On lui doit également la formulation de l'hypothèse selon laquelle la Terre serait un grand aimant.

Après Gilbert, aucune avancée véritablement significative ne fut réalisée au cours des siècles suivants. On peut signaler la distinction établie entre isolants et conducteurs par Stephen Gray (1666-1736). Le Français Charles Du Fay (1698-1739) établit l'existence de deux sortes d'électricité qu'il nomma "vitrée" et "résineuse". On y reconnaît nos charges positives et négatives. Il nota que les électricités de même nature s'attirent et que celles de nature différente se repoussent. L'Américain Benjamin Franklin (1706-1790) mit à jour le principe de conservation de la charge. D'après lui, tout corps contient des quantités égales d'électricité positive et négative qui se neutralisent dans des conditions normales. L'électrisation devient la séparation des deux électricités. Il était difficile à l'époque de démêler l'écheveau des phénomènes : la charge peut être transmise d'un conducteur isolé à un autre par un fil conducteur ou par induction, en approchant le corps à charger du corps chargé. De plus les expériences étaient difficilement reproductibles : une variation du degré d'humidité de l'air peut faire passer une ficelle de l'état conducteur à l'état isolant.

Malgré tout, l'accumulation de connaissances permit d'établir une loi quantitative de l'attraction et de la répulsion. Charles Augustin Coulomb (1736-1806) découvrit la loi de la force entre deux charges vers 1780. Coulomb mesura également les forces attractives et répulsives entre pôles magnétiques. Cependant, les deux phénomènes continuaient d'être considérés comme distincts. C'est la vue mécaniste, alors en vigueur, qui en fournissait l'interprétation. Dans ce cadre, on postulait l'existence de fluides électriques positifs et négatifs d'une part, de fluides magnétiques d'autre part. L'aimant apparaissait comme un dipôle magnétique.

L'invention de la pile va offrir la possibilité de transformer de l'énergie chimique en énergie électrique, mais surtout d'accéder expérimentalement à tous les phénomènes liés au courant électrique continu.

I-A-1-c) Le retour de la conception unifiée

Au début du XIX^{ème} siècle, c'est un progrès technique immense qui va ouvrir tout un nouveau champ de recherche : la mise au point par Alessandro Volta (1745-1827) de la pile qui porte son nom. Ayant observé que les conducteurs métalliques présentaient différents potentiels, il eut l'idée de combiner plusieurs conducteurs de telle façon que les différences de potentiel générées à chaque contact s'ajoutent.

La pile électrique générait un courant électrique continu d'une intensité plus forte de plusieurs ordres de grandeur que celle obtenue avec des machines électrostatiques.

C'est à partir d'une cellule voltaïque que Christian Ørsted (1777-1851), physicien danois, découvrit au début de l'année 1820, un lien entre électricité et magnétisme. Ayant placé une aiguille de boussole près d'un long fil parcouru par un courant, il observa une déviation de l'aiguille.

Ayant été informé des résultats de son collègue danois, le physicien français André-Marie Ampère (1775-1836) les examina et recommença l'expérience à l'aide d'un dispositif permettant de s'affranchir du champ magnétique terrestre [4]. Il constata que l'effet observé était celui d'une force agissant perpendiculairement au fil conducteur. Or le point de vue mécaniste de l'époque n'autorisait l'existence que de forces agissant le long de la ligne reliant les deux particules concernées et dépendant de la distance entre ces particules (loi de Newton, loi de Coulomb). L'expérience d'Ampère mettait à mal la pertinence de ce point de vue dans le cas des fluides magnétiques. Un nouveau coup de grâce lui sera porté un demi-siècle plus tard par Rowland qui montra que la force subie par une particule soumise à un champ magnétique est dépendante de sa vitesse et non de sa distance à un point quelconque. Il reste que l'apport d'Ampère est d'avoir montré que les charges en mouvement donnent naissance à des phénomènes

magnétiques qu'il a quantifiés. Il a déterminé la force exercée entre deux fils traversés par des courants. On lui doit également d'avoir formulé l'hypothèse selon laquelle le magnétisme est dû à l'existence dans chaque molécule d'une boucle de courant permanente. L'aimantation est alors due à l'orientation de toutes les molécules sous l'action d'un champ extérieur.

L'expérience duale de la précédente fut réalisée par Michael Faraday (1791-1867) en 1831, lorsqu'il montra l'existence des courants induits. Un barreau aimanté qu'on approche d'un solénoïde fait apparaître un courant transitoire dans celui-ci. Ainsi une action magnétique donne naissance à un courant électrique. Il avait eu l'intuition de ce phénomène bien avant de l'observer et obtenu un résultat négatif dans le cas stationnaire. Il appliqua ces résultats à la mise au point d'une dynamo primitive et jeta les bases de l'industrie électrique. A un politicien qui lui demandait à quoi servaient ses découvertes, il répondit : "À présent, je ne sais pas, mais un jour viendra où vous pourrez prélever des taxes dessus". Ce fut loin d'être le seul apport de cet expérimentateur hautement prolifique et inspiré. Il énonça les lois de l'électrolyse et montra l'unité des différentes manifestations de l'électricité (machine électrostatique, pile voltaïque, induction). Il montra en 1835 que l'électricité se trouve entièrement répartie à la surface d'un conducteur, introduisit le concept de polarisation d'un diélectrique.

Le lien entre phénomènes électriques et magnétiques était établi dans les deux sens. Il restait à établir une théorie complète. Ceci n'a pu se faire que grâce à l'émergence du concept de champ.

I-A-1-d) L'interprétation par le champ

L'idée de champ, apparue initialement comme une façon commode d'aborder les problèmes de mouvement, s'est avérée par la suite d'une extraordinaire fécondité [5,6]. Nous allons l'introduire par un exemple simple. Considérons deux charges ponctuelles q_1 et q_2 situées respectivement en A et B à une distance r l'une de l'autre (figure 1).

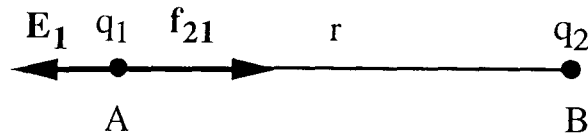


Figure 1-1 : Introduction de la notion de champ. La charge q_1 est supposée négative.

La force exercée par la charge 2 sur la charge 1 s'écrit d'après la loi de Coulomb:

$$\mathbf{f}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{u}}{r^2} \quad (1-1)$$

On peut mettre cette relation sous la forme :

$$\mathbf{f}_{21} = q_1 \mathbf{E}_1 \quad (1-2)$$

Cette relation lie la force subie par la particule, caractérisée par sa charge et une quantité vectorielle \mathbf{E}_1 appelée champ électrique. \mathbf{E}_1 présente des propriétés particulières :

\mathbf{E}_1 permet de déterminer la force subie par toute charge située en A. Dans ce cas, on voit que \mathbf{E}_1 persistera même s'il n'y a aucune charge en A. \mathbf{E}_1 est donc une grandeur liée au point A et non à la matière s'y trouvant.

Si on se place en un autre point A', la loi de force permet de définir un champ en A', différent du champ en A.

Un champ peut ainsi être défini en tout point et à tout instant et représenter une action éventuelle sur une particule de charge quelconque. Dans le cas présent, il s'agit d'un champ vectoriel.

On peut pour un phénomène élémentaire déterminer les lignes de champ. On peut visualiser celles du champ magnétique grâce à de la limaille de fer. Mais les lignes de champ n'étaient bien souvent qu'une donnée qualitative. Elles ne permettaient pas de donner les forces dues à la combinaison de deux ensembles de charge. En revanche, le champ électrique, par son caractère vectoriel et son

additivité, répond au problème posé.

Le concept de champ ouvre surtout la voie à la résolution d'un problème qui apparut de plus en plus crucial le long du XIX^{ème} siècle. Les forces coulombiennes et newtoniennes sont des interactions instantanées à distance, bien que Newton lui-même ait exprimé des doutes sur la validité de cette notion. Mais il n'en a pas tenu compte. C'est Einstein qui le premier la formalise. Ce point de vue paraîtra de moins en moins tenable. Le champ défini en tout point et continu autorise la transmission d'une interaction de proche en proche.

I-A-1-e) L'unification de Maxwell

La contribution de Maxwell est essentielle à plusieurs égards. Il traduit en termes de champ les expériences réalisées par ses prédécesseurs. Ainsi l'expérience d'Ørsted devient : la variation d'un champ électrique s'accompagne d'un champ magnétique. De la même façon, celle de Faraday se traduit par : la variation d'un champ magnétique s'accompagne d'un champ électrique.

De la même façon, il a perçu l'intérêt de l'utilisation des opérateurs différentiels gradient, divergence et rotationnel. On connaissait alors les lois de l'électrostatique :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1-4)$$

et celles de la magnétostatique :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1-5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1-6)$$

qu'on a écrites ci-dessus dans le cas du vide. L'étude de la matière polarisée électriquement ou magnétiquement se ramène à des équations du même type.

Maxwell a cherché à modifier ces équations pour qu'elles soient capables d'intégrer les phénomènes mis en évidence par Ørsted et Faraday.

Faraday avait énoncé la "règle du flux" qui lie le flux du vecteur champ magnétique à travers une surface S s'appuyant sur une courbe fermée fixe Γ à la circulation du champ \mathbf{E} sur Γ et montré sa généralité.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1-7)$$

Maxwell écrit cette équation sous la forme :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-8)$$

Les deux formulations sont liées par le théorème de Stokes qui stipule que la circulation d'un champ vectoriel suffisamment régulier le long d'une courbe fermée C est égale au flux du rotationnel de ce champ à travers une surface S quelconque s'appuyant sur C . Par ailleurs, Maxwell utilisa l'équation du champ magnétique des courants constants $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$. Il remarqua qu'en prenant la divergence de cette égalité, on obtient $\text{div } \mathbf{j} = 0$, ce qui signifie que le flux total du courant sortant d'une surface fermée est nul. Ceci ne peut être vrai en général, car des charges peuvent être déplacées d'un endroit à un autre. On décrit ce fait par l'équation de conservation de la charge sous sa forme locale, dite encore équation de continuité :

$$\text{div } \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1-9)$$

qui sert en fait à définir \mathbf{j} . Maxwell proposa d'éviter cette difficulté en ajoutant un terme à l'équation de \mathbf{B} :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1-10)$$

La forme du terme additionnel est justifiée par le fait que si on écrit la divergence de la nouvelle égalité, on obtient :

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{E})}{\partial t} \quad (1-11)$$

La formule ci-dessus combinée à la formule (3) permet de retrouver l'équation de continuité (9).

De fait, Maxwell n'a pas écrit les équations données ci-dessus sous cette forme. Les grandeurs \mathbf{E} et \mathbf{B} n'étaient pas à cette époque exprimées dans ce qui est devenu le Système International d'Unités. Les constantes ε_0 et μ_0 relatives au vide n'apparaissaient pas telles quelles dans les équations. Notre intention est en premier lieu de décrire ici la démarche de Maxwell dans ce qu'elle a de plus significatif, à savoir la construction d'un édifice cohérent par manipulation des équations. C'est pourquoi nous ne respecterons pas à la lettre les expressions utilisées à l'époque.

Le simple fait d'ajouter le terme additionnel à l'équation (6) allait par combinaison des équations (8) et (10) offrir l'opportunité d'exprimer la propagation du champ électromagnétique. Nous reviendrons plus précisément sur cette notion par la suite. Maxwell montra que la vitesse de propagation d'une telle perturbation $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ avait une valeur très proche de la vitesse de la lumière c dans le vide mesurée par Fizeau quelques années auparavant.

Il apparaissait alors clairement que :

- la lumière est une onde électromagnétique particulière.
- toutes les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide à cette vitesse c .

I-A-1-f) La confirmation

Heinrich Hertz (1857-1894) [8] fut le premier à apporter une confirmation éclatante à la théorie de Maxwell. Il découvrit les oscillations électromagnétiques de haute fréquence et mit au point le dispositif qu'on appelle encore le "résonateur de Hertz". Il vérifia que les ondes qu'il détectait se propageaient bien à la vitesse c . Il pensa que ses expériences étaient des preuves concluantes de la théorie de Maxwell, mais ne semblait pas avoir prévu leur importance pratique pour les télécommunications.

Les travaux de Maxwell furent prolongés par le physicien néerlandais Hendrik Lorentz (1853-1928) qui élaborait une théorie véritablement microscopique de l'électromagnétisme. Jusqu'alors on entendait par champ en un point une moyenne d'une certaine fonction dans un volume contenant typiquement de quelques milliers à quelques millions d'atomes. Lorentz étendit la définition de ces champs en faisant des moyennes sur des volumes de taille caractéristique inférieure à celle de l'atome, mais bien supérieure à celle du noyau (afin de ne considérer que des phénomènes électromagnétiques). Les équations microscopiques de Lorentz permettent de retrouver celles de Maxwell, elles sont par ailleurs à la base de la théorie classique [9] de la supraconductivité.

La théorie de Maxwell a en outre été un des facteurs scientifiques responsables de l'abandon de la relativité galiléenne. Dans la théorie de la relativité restreinte mise au point par Albert Einstein (1879-1955), le changement de coordonnées entre deux référentiels animés d'une vitesse relative uniforme v ne se fait plus par l'intermédiaire de la transformation galiléenne :

$$x' = x - vt \quad t' = t \quad (1-12)$$

mais par celle de Poincaré-Lorentz :

$$x' = \gamma(x - vt) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad \text{où } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1-13)$$

Il se trouve que les composantes du champ électromagnétique \mathbf{E} et \mathbf{B} définies dans deux référentiels différents $R(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et $R'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ en mouvement uniforme de vitesse $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ l'un par rapport à l'autre sont elles aussi liées par la transformation de Poincaré-Lorentz.

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1-14)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}\right) \quad (1-15)$$

Arrêtons là l'histoire de l'électromagnétisme. La prochaine étape est l'ère quantique, marquée par la recherche d'unification des interactions fondamentales que nous avons déjà évoquée en début de chapitre. La suite va nous conduire à examiner plus attentivement le caractère des équations de Maxwell et certains types de solutions de ces équations.

I-A-2) Les équations de Maxwell

La résolution des équations de Maxwell a permis de rendre compte d'un nombre de phénomènes considérable. Sans en faire ici un inventaire exhaustif, il est intéressant de discuter la forme des équations et celle de leurs solutions dans divers cas de complexité croissante.

I-A-2-a) Contenu général habituel d'un problème électromagnétique

Considérons un milieu homogène et isotrope. Le problème électromagnétique consiste à déterminer les champ électrique et magnétique liés par les équations de Maxwell. Pour cela, on dispose en général d'autres relations résultant de la nature du matériau, ainsi que de conditions initiales ou aux limites, telles qu'une distribution de charge ou de courant à un instant donné.

Les grandeurs à déterminer sont quatre quantités que pour l'instant nous nommons vecteurs de l'espace E_3 . Elles vérifient les quatre équations de Maxwell que nous avons exposées plus haut dans le cas du vide et que nous réécrivons ici :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1-16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1-18)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-19)$$

Dans ces équations, on rencontre les vecteurs :

- \mathbf{E} , vecteur champ électrique
- \mathbf{D} , appelé en général vecteur déplacement électrique
- \mathbf{H} , vecteur champ magnétique, aimantation ou excitation magnétique suivant les auteurs
- \mathbf{B} , vecteur induction magnétique, qu'on rencontre aussi sous l'appellation de

champ magnétique.

Les vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{H} , que nous préciserons plus loin, ont été introduits pour rendre compte des propriétés de polarisation électrique et magnétique de la matière.

Cette confusion dans les appellations a pour origine le fait que \mathbf{B} a d'abord été introduit pour expliquer les expériences d'Ørsted et de Faraday. La distinction entre \mathbf{B} et \mathbf{H} n'est apparue qu'ultérieurement. \mathbf{B} a cependant pu conserver son appellation originelle de champ, en particulier après l'application des principes de la relativité restreinte à l'électromagnétisme. Cette discipline connue sous le nom d'électromagnétisme relativiste a montré le couplage existant entre les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} (cf. I-A-1-f).

La présentation des grandeurs ci-dessus en termes de vecteurs de l'espace euclidien E_3 fera l'objet d'une discussion ultérieure. Ces quantités sont déterminées à partir de ce qu'on appelle des sources de champ. Il s'agit d'une part de la densité de charge ρ (scalaire) et de la densité de courant \mathbf{j} (vectorielle) supposées connues dans des régions plus ou moins étendues de l'espace et du temps. On a vu par ailleurs que ρ et \mathbf{j} étaient liés par l'équation de continuité et ne pouvaient donc être choisis arbitrairement.

D'autres relations lient les grandeurs vectorielles à déterminer : ce sont les relations constitutives dites d'État du matériau, caractérisées par les grandeurs ϵ (permittivité électrique) et μ (perméabilité magnétique).

Ces grandeurs sont des grandeurs tensorielles définies dans les matériaux dits parfaits. Cette notion sera précisée par la suite. Elles peuvent se réduire à des grandeurs scalaires dans certains cas particuliers

Ces grandeurs sont caractéristiques des matériaux homogènes indépendamment de toute forme choisie pour ρ ou \mathbf{j} , indépendamment même de tout type de solution trouvée pour \mathbf{E} ou \mathbf{B} . Elles ne dépendent que de la nature et des propriétés intrinsèques du matériau considéré, à condition qu'il ait un certain niveau d'homogénéité.

On peut ajouter une autre relation constitutive valable dans le cas des matériaux conducteurs. Ici \mathbf{j} n'est plus prédéterminé, mais lié au champ électrique par un paramètre tensoriel σ (scalaire dans le cas homogène isotrope) nommé conductivité du matériau.

I-A-2-b) Caractère de la théorie

L'observation attentive des équations de Maxwell montre qu'elles sont linéaires et phénoménologiques. Avant d'examiner quelques solutions, il est intéressant de faire ressortir les conséquences pratiques de ces deux propriétés.

La linéarité des équations simplifie le calcul des champs \mathbf{E} ou \mathbf{B} engendrés par une distribution complexe de charge et de courant. Pour ce faire, il suffit de décomposer la distribution initiale en plusieurs distributions plus simples. On calcule ensuite les champs \mathbf{E}_i et \mathbf{B}_i dus à chacune de ces distributions. Enfin, on obtient le champ total en sommant les différents champs $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$; $\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i$.

Les contributions venant de chaque distribution de charge ou de courant sont donc indépendantes. Cette propriété a conféré à la théorie de Maxwell une puissance de résolution considérable. On peut souvent trouver des solutions à un problème donné en s'inspirant directement des solutions obtenues dans un cas particulier. En opérant ainsi de proche en proche, on peut résoudre des problèmes complexes.

La théorie de Maxwell est par ailleurs phénoménologique. Elle est liée aux propriétés du matériau uniquement par trois paramètres ϵ , μ , σ . La façon dont ces paramètres sont déterminés à partir des paramètres physiques propres du matériau n'intervient pas. Cette dernière démarche relève d'autres domaines de la physique, par exemple de celui de la physique du solide. Il en est résulté une grande adaptabilité de la théorie de Maxwell face à toutes les avancées réalisées en physique microscopique de la matière.

Ces deux propriétés de la théorie de Maxwell ont permis de rendre compte à la fois des phénomènes statiques connus à l'époque et de prévoir l'existence de phénomènes de propagation.

I-A-3) Le régime stationnaire en milieu homogène

Nous allons commencer par présenter quelques solutions des équations de Maxwell en régime stationnaire. Dans ces conditions, les équations de Maxwell prennent dans le vide la forme :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1-20)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1-21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1-22)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1-23)$$

On constate que les équations relatives à \mathbf{E} et \mathbf{B} se découplent. Nous allons considérer deux types de problèmes distincts. Le premier est la détermination du champ électrique à partir d'une distribution donnée de charges (électrostatique). Le second est la détermination du champ magnétique à partir d'une distribution donnée de courant (magnétostatique).

I-A-3-a) Électrostatique du vide

Considérons un domaine borné Ω fermé par une surface S présentant une charge volumique ρ . Ici on recherche \mathbf{E} à l'extérieur de Ω . Son rotationnel étant nul, il existe une fonction V telle que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} V(\mathbf{r}) \quad (1-24)$$

On dit que le champ \mathbf{E} dérive d'un potentiel scalaire V . En substituant dans (20), on constate que V vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (1-25)$$

On montre que V s'exprime alors en fonction de la densité de charges :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{R} \quad (1-26)$$

où dv' est l'élément de volume centré sur le point $M'(OM'=\mathbf{r}')$ et $R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$.

On en déduit \mathbf{E} par :

$$E(\mathbf{r}) = -grad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{u}_M}{R^2} dv' \quad (1-27)$$

où \mathbf{u}_M est le vecteur unitaire de $M'M$. Une hypothèse peu restrictive sur ρ (continuité par morceaux) [10] permet même d'assurer la convergence de l'intégrale et donc l'existence du potentiel à l'intérieur du domaine Ω .

La présentation ci-dessus est trompeuse dans sa simplicité car les intégrales intervenant ici sont en général très difficiles à calculer rigoureusement et on ne peut alors y parvenir que par des méthodes numériques.

I-A-3-b) Électrostatique des diélectriques

L'étape suivante consiste à savoir si ce potentiel et ce champ sont modifiés par la présence dans le voisinage de la zone chargée, d'un corps isolant (ou diélectrique) non chargé. Dans le calcul du potentiel électrique $V(\mathbf{r})$, on fait l'hypothèse que chaque élément de volume du diélectrique se comporte comme un dipôle électrostatique de moment dipolaire $d\mathbf{M}'=\mathbf{P}(M')dv'$. \mathbf{P} est la polarisation électrique au point M' . Rappelons qu'un dipôle électrostatique est constitué de deux charges ponctuelles infiniment proches. Un dipôle de moment dipolaire \mathbf{M} crée en M le potentiel :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{M} \cdot \mathbf{u}_M}{R^2} \quad (1-28)$$

Par intégration et en utilisant la formule de Green-Ostrogradsky, on obtient pour le potentiel dû à la polarisation du diélectrique :

$$V_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}}{R} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{-div \mathbf{P} dv'}{R} \quad (1-29)$$

Le terme volumique est égal au potentiel qui serait créé en électrostatique du vide par une distribution fictive de charge, de densité :

$$\rho' = -\text{div}\mathbf{P} \quad (1-30)$$

De la même façon que précédemment, l'expression du potentiel reste valable à l'intérieur du diélectrique. On a alors en tout point d'un diélectrique la relation :

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\rho_v + \rho'}{\epsilon_0} \quad (1-31)$$

où ρ_v représente la densité de charge volumique vraie.

En regroupant (30) et (31), on obtient :

$$\text{div}(\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v$$

ou, si l'on pose :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1-32)$$

on obtient la relation (16). \mathbf{D} désigne le déplacement électrique.

Il est possible de préciser la relation $\mathbf{P}(\mathbf{E})$. Excepté dans le cas des corps ferroélectriques qui possèdent une polarisation permanente indépendante de \mathbf{E} , on écrit à température ordinaire et pour des champs peu élevés une relation linéaire entre \mathbf{E} et \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E} \quad (1-33)$$

Cette relation signifie que dans le développement de Taylor de \mathbf{P} en fonction de \mathbf{E} au voisinage d'un champ électrique donné, le terme du premier ordre est prépondérant. Dans le cadre de l'approximation du milieu parfait, χ est le tenseur de susceptibilité électrique. Dans les milieux isotropes, χ devient un scalaire. On écrit alors :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} \quad (1-34)$$

ϵ et ϵ_r sont respectivement appelés permittivité et permittivité relative au vide du diélectrique.

Ainsi, dans un milieu linéaire homogène et isotrope, les lois générales de

l'électrostatique résultent des lois de l' "électrostatique dans le vide". Il suffit de remplacer ϵ_0 par ϵ .

I-A-3-c) Magnétostatique du vide

Considérons un domaine borné Ω fermé par une surface S présentant en chaque point un vecteur densité de courant \mathbf{j} . Ici on recherche \mathbf{B} à l'extérieur de Ω . La divergence de \mathbf{B} étant nulle (18), on démontre que \mathbf{B} dérive d'un champ vectoriel \mathbf{A} appelé "potentiel vecteur" vérifiant :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (1-35)$$

En réinjectant dans (23), on obtient :

$$\text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1-36)$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien.

\mathbf{A} n'est pas unique mais déterminé à un gradient près, ce qui ne modifie pas la valeur de \mathbf{B} par (35). On peut le choisir de telle sorte que, par exemple $\text{div } \mathbf{A} = 0$. On dit qu'on effectue un choix de jauge. La jauge ci-dessus est appelée la jauge de Coulomb. On déduit :

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (1-37)$$

Il apparaît ici que chaque composante de \mathbf{A} vérifie une équation de Poisson. On obtient donc le potentiel vecteur pour une densité de courant volumique donnée :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(M')}{R} dv' \quad (1-38)$$

\mathbf{B} se déduit alors de \mathbf{A} par (35) :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{j}(M')}{R} \right) dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \left(\text{grad}_M \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{j}(M') + \frac{1}{R} \text{rot}_M (\mathbf{j}(M')) \right) dv' \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{-\mathbf{u}_M}{R^2} \wedge \mathbf{j}(M') dv' \quad (1-39)$$

où \mathbf{u}_M est le vecteur unitaire de $M'M$.

Un cas particulier important est celui où le champ est dû à des courants parcourant des circuits filiformes.

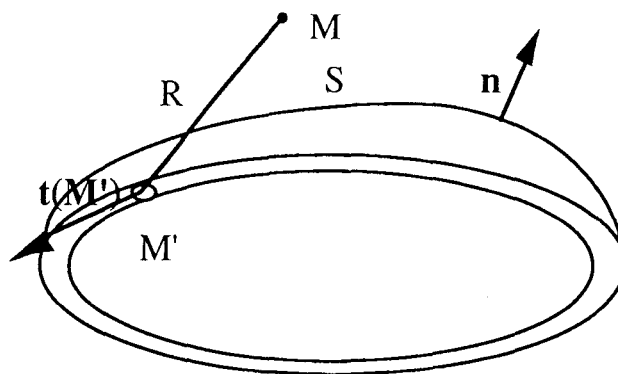


Figure 1-2 : circuit filiforme

Soit C un tel circuit et S une surface s'appuyant sur C. On a dans ce cas :
 $\mathbf{j}(M') dv' = I \mathbf{t}(M') dl'$

où \mathbf{t} est le vecteur unitaire tangent à C orienté par le courant.

L'intégrale d'espace définissant \mathbf{A} et \mathbf{B} est alors curviligne et

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{t}(M')}{R} dl' \quad (1-40)$$

Le champ magnétique s'écrit alors :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{t}(M') \wedge \mathbf{u}_M}{R^2} dl' \quad (1-41)$$

Cette relation constitue la loi de Biot et Savart.

Nous allons utiliser dans la suite le concept de dipôle magnétique ou boucle de courant. Il s'agit d'un circuit plan d'aire S de dimensions petites par rapport à

la distance d'observation R. A partir de (39), on obtient :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S \mathbf{n} \wedge \text{grad}_{M'} \left(\frac{1}{R} \right) dS' \quad (1-42)$$

où \mathbf{n} est vecteur normal à S orienté par le courant, soit en négligeant les variations du gradient sur S :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0 I S}{4\pi} \mathbf{n} \wedge \text{grad}_{M'} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M} \wedge \text{grad}_{M'} \left(\frac{1}{R} \right) \quad (1-43)$$

où $\mathbf{M} = IS\mathbf{n}$ est ici le moment magnétique du circuit.

Ce concept de boucle de courant intervient notamment dans l'interprétation des propriétés de la matière aimantée.

I-A-3-d) Magnétostatique des milieux magnétiques

La matière n'est pas neutre du point de vue magnétique. Ses propriétés sont interprétées à partir de celles des atomes et des molécules qui, par suite du mouvement des électrons, peuvent être assimilés à des boucles de courant. Ces boucles créent des moments magnétiques, permanents (paramagnétisme) ou dépendant du champ extérieur (diamagnétisme). Pour décrire le comportement de la matière, on suppose que vis-à-vis du calcul du potentiel vecteur, tout élément de volume dv' entourant M' se comporte comme une boucle de courant de moment $d\mathbf{M} = \mathbf{P}(M')dv'$. \mathbf{P} est appelé le vecteur densité d'aimantation.

Dans ce cas, la matière située dans un volume Ω borné par une surface S créée, en un point M extérieur à S, le potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}_p(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \mathbf{P}(M') \wedge \text{grad}_{M'} \left(\frac{1}{R} \right) dv' \quad (1-44)$$

Or :

$$\text{grad}_{M'} \left(\frac{1}{R} \right) \wedge \mathbf{P} = \text{rot}_{M'} \left(\frac{\mathbf{P}}{R} \right) - \frac{1}{R} \text{rot}_{M'} (\mathbf{P}) \quad (1-45)$$

donc après la transformation de la seconde intégrale en intégrale de surface :

$$\mathbf{A}_p(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} \text{rot}_M(\mathbf{P}) dv - \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{P}}{R} dS \quad (1-46)$$

Le potentiel dû à l'aimantation est égal au potentiel qui serait créé en magnétostatique du vide par une distribution fictive de courants de densité :

$$\mathbf{j}' = -\text{rot } \mathbf{P}. \quad (1-47)$$

L'expression du potentiel reste valable à l'intérieur de la matière aimantée. On a alors d'après (23) en tout point de la matière aimantée :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}' + \mathbf{j}_v) \quad (1-48)$$

où \mathbf{j}_v désigne le courant vrai d'aimantation. En regroupant (47) et (48), on obtient :

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P} \right) = \mathbf{j}_v \quad (1-49)$$

Si on pose :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P} \quad (1-50)$$

on obtient la relation :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_v \quad (1-51)$$

qui est l'analogie de la relation (16) en électrostatique.

Par analogie avec le cas de l'électrostatique des diélectriques, il est possible d'introduire la relation entre \mathbf{B} et \mathbf{P} .

En magnétostatique, on utilise plus traditionnellement la relation entre \mathbf{P} et \mathbf{H} pour définir le tenseur χ des susceptibilités. Dans le cas d'un matériau parfait, on a :

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{H} \quad (1-52)$$

En milieu linéaire homogène et isotrope, χ devient un scalaire et on a :

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \quad (1-53)$$

On définit également les perméabilités relative au vide $\mu_r = 1 + \chi$ et absolue $\mu = \mu_r \mu_0$. Pour traiter un cas autre que le vide, il suffit donc formellement de remplacer dans les différentes expressions ϵ_0 par ϵ et μ_0 par μ . Dans un milieu matériel, la dernière relation de Maxwell (10) s'écrit alors :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1-54)$$

Lorsque ϵ ne dépend pas du temps et μ ne dépend pas de l'espace, on retrouve l'égalité (19).

Ainsi les grandeurs \mathbf{D} et \mathbf{H} définies de manière ad hoc, pour rendre compte des propriétés de la matière isolante et aimantée, vont acquérir peu à peu un statut dual de celui de \mathbf{E} et \mathbf{B} . Les relations (1-34) et (1-53) sont de type causal ; elles seront mieux perçues dans la présentation différentielle de l'électromagnétisme.

On peut remarquer que, dans tout ce qui précède, nous n'avons considéré que des phénomènes volumiques. Des contributions surfaciques aux potentiels scalaire et vecteur apparaissent bien dans (29) et (46). Nous les avons négligés par la suite car ils n'apportent rien de plus au fait essentiel que constituait la mise en exergue des vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{H} . De la même façon, nous n'avons pas envisagé les relations de passage entre deux milieux qui font intervenir des densités de charge et de courant surfaciques. Il est possible de donner une présentation unifiée de tous ces phénomènes volumiques et surfaciques à l'aide de la théorie des distributions [11,12].

Les équations de l'électrostatique (20,21) et de la magnétostatique permettaient certes de rendre compte à l'époque de Maxwell d'une bonne part des faits expérimentaux, mais n'autorisaient aucune explication de phénomènes présentant des champs électriques et magnétique simultanément variables.

Le simple fait d'inclure le terme $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ dans la dernière équation de Maxwell pour que cette dernière soit compatible avec l'équation de continuité allait permettre d'une part d'interpréter d'une nouvelle façon les expériences d'Ørsted et de Faraday, et d'autre part d'appréhender de manière théorique le phénomène de propagation d'ondes, observé plus tard par Hertz.

I-A-4) La notion de propagation

I-A-4-a) Point de vue qualitatif

La résolution des équations de Maxwell conduit à des solutions présentant un caractère d'onde qui se propage. Avant de les examiner, nous allons essayer de montrer la notion de propagation à partir d'un raisonnement simple dû à Feynman [3].

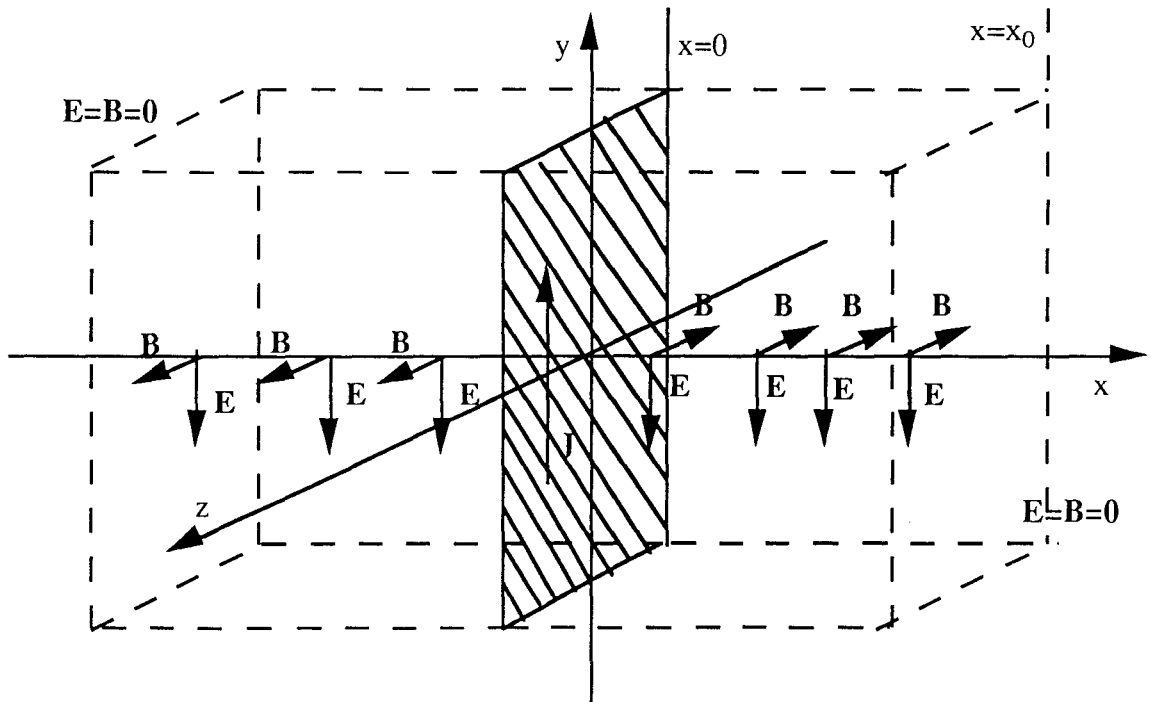


Figure I-3 : illustration des phénomènes propagatifs. Création de champs \mathbf{E} et \mathbf{B} couplés par mouvement d'un plan de charges.

Considérons un plan ($x=0$) chargé au repos. Si on le déplace brusquement dans le sens des y positifs, d'après l'équation de continuité (9), il va apparaître dans ce plan un courant surfacique \mathbf{J} . Ces charges en mouvement créent alors un champ magnétique \mathbf{B} au voisinage du plan qui se déplace (D'après le théorème d'Ampère : $\mathbf{B} = \mathbf{J}/2\epsilon_0 c^2$). Nous avons donc pendant un court instant, un champ magnétique variable. D'après la relation de Faraday (8), il se crée alors un champ électrique \mathbf{E} au voisinage de la région de variation du champ \mathbf{B} . Le processus est enclenché. Dès que les deux champs sont non nuls, ils vont mutuellement s'entretenir.

En effet, supposons que \mathbf{B} disparaisse. Alors toujours d'après la loi de Faraday, cette variation temporelle de \mathbf{B} entraîne la production d'un champ \mathbf{E} . Si ce champ électrique tente de disparaître, il crée dans le voisinage d'après la quatrième équation de Maxwell un champ magnétique \mathbf{B} . C'est ainsi que les deux champs sont désormais couplés. Les plans $x=\pm cte$ séparant la région de champ non nul de celles de champ nul vont s'éloigner progressivement du plan $x=0$.

I-A-4-b) Point de vue quantitatif

Nous allons montrer dans le cas simple du vide l'existence possible de phénomènes propagatifs. Les équations de Maxwell prennent dans le vide la forme suivante :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1-54)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-55)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1-56)$$

On a successivement par application de l'opérateur rotationnel aux membres de (55) et (56) :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{B})}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1-57)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{E})}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (1-58)$$

or on a la relation entre opérateurs :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{div} \operatorname{grad} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta \quad (1-59)$$

Il en résulte d'après (54), (57) et (58) :

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1-60)$$

$$\Delta \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1-61)$$

\mathbf{E} et \mathbf{B} vérifient la même équation vectorielle. Considérons par exemple le cas du champ électrique. (54) se décompose en trois équations du type

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1-62)$$

On déduit par une analyse dimensionnelle que $\mu_0 \epsilon_0$ est homogène à l'inverse du carré d'une vitesse. Cette vitesse est égale à la célérité c de la lumière dans le vide, soit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Pour simplifier encore, nous allons

rechercher des solutions ne dépendant que d'une seule variable d'espace, par exemple x . Nous avons alors :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (1-63)$$

où E désigne maintenant l'une des composantes du champ \mathbf{E} .

Montrons qu'il existe des solutions du type $E(x,t)=f(\alpha)$ avec $\alpha=x+\beta ct$.

On a :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = f'(\alpha) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = f''(\alpha) \quad (1-64)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \beta c f'(\alpha) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = (\beta c)^2 f''(\alpha) \quad (1-65)$$

et (63) s'écrit alors :

$$f''(\alpha)(1 - \beta^2) = 0 \quad (1-66)$$

Il n'existe de solution non triviale de cette forme que pour $\beta = \pm 1$, soit une solution générale du type :

$$E(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (1-67)$$

Il s'agit bien d'un phénomène de propagation. En effet, on voit que le premier terme de la solution, décrit par la fonction f_1 , reste constant à condition que $x - ct = \text{cte}$, soit $dx - c dt = 0$. Le phénomène décrit par f_1 se déplace donc dans les sens des x croissants avec la vitesse définie par $\frac{dx}{dt} = +c$. Celui décrit par f_2 se propage dans les sens des x décroissants à une vitesse $\frac{dx}{dt} = -c$.

La vitesse c introduite par un raisonnement dimensionnel représente bien une vitesse de propagation.

I-A-4-c) Propagation d'ondes

Dans ce qui suit, nous allons restreindre l'étude à un type particulier de fonction f_1 et f_2 . On suppose que ces deux fonctions sont périodiques. Il en résulte qu'elles sont décomposables en série de Fourier. La linéarité des équations de Maxwell nous autorise à considérer séparément chaque solution. Dans le cadre imposé par les équations de Maxwell, il est possible de rechercher des solutions variant sinusoïdalement avec le temps. Il est alors commode de travailler dans l'espace des vecteurs complexes que nous allons présenter.

Considérons une grandeur vectorielle \mathbf{F} variant sinusoïdalement avec le temps :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1-68)$$

On peut donner une autre écriture de \mathbf{F} , à savoir \mathcal{F} qui est un vecteur complexe tel que :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathcal{F}(\mathbf{r})\}e^{i\omega t}$$

Ce vecteur est donné par :

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{r})e^{i\varphi_0} \quad (1-69)$$

Cette écriture est commode car elle permet de s'affranchir des dépendances temporelles. De plus, on accède aisément aux paramètres caractéristiques de \mathbf{F} . L'amplitude de \mathbf{F} est donnée par le module de \mathcal{F} et la phase de \mathbf{F} est donnée par la phase de \mathcal{F} .

Le fait de travailler dans un nouvel espace ne modifie pas le comportement des opérateurs spatiaux. En revanche, la dérivation temporelle est remplacée par la multiplication par le facteur $i\omega$.

Nous allons montrer qu'avec ces hypothèses, il est possible de décrire la propagation uniquement par deux paramètres, que nous allons expliciter.

I-A-4-d) Les paramètres Z et γ

Nous envisageons ici un milieu conducteur (de conductivité σ) non chargé. A l'aide de la notation complexe, nous pouvons mettre les équations de Maxwell sous la forme :

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 0 \quad (1-70)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0 \quad (1-71)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -i\omega\mu \mathcal{H} \quad (1-72)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \sigma \mathcal{E} + i\omega\epsilon \mathcal{E} \quad (1-73)$$

Nous travaillons ici par commodité avec les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} au lieu de \mathbf{E} et \mathbf{B} . La relation entre opérateurs (59) reste valable dans le cas des vecteurs complexes. On a alors

$$\Delta \mathcal{E} - i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon) \mathcal{E} = \mathbf{0} \quad (1-74)$$

$$\Delta \mathcal{H} - i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon) \mathcal{H} = \mathbf{0} \quad (1-75)$$

Nous recherchons une solution sous forme d'onde plane. Nous choisissons un repère tel que l'axe Ox soit confondu avec la direction de propagation. On a :

$$\mathcal{E}(x) e^{j\omega t} = \mathbf{E} e^{j(\omega t - kx)} \quad (1-76)$$

et une relation analogue pour \mathcal{H} .

Cette relation n'est valable que si

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{d^2 \mathcal{E}}{dx^2} = (-ik)^2 \mathcal{E} = i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon) \mathcal{E} \quad (1-77)$$

et de même pour \mathcal{H} . Ceci n'est valable que si le vecteur d'onde complexe vérifie :

$$k^2 = -i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)$$

Il est possible d'avoir d'autres informations sur les champs. La relation (70) nous indique que

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} = -ik \mathcal{E}_x = 0 \quad (1-78)$$

\mathcal{E}_x ne dépend pas de x . Puisque nous ne considérons pas les phénomènes permanents, on a nécessairement $\mathcal{E}_x=0$.

Nous voyons que dans ce cas le champ électrique est transversal. Il est alors possible de choisir pour axe Oy la direction du vecteur constant \mathbf{E}_0 . On déduit

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_y \quad (1-79)$$

La relation de Faraday projetée sur les trois axes donne

$$\begin{cases} -i\omega\mu \mathcal{H}_x = \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = 0 \\ -i\omega\mu \mathcal{H}_y = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = 0 \\ -i\omega\mu \mathcal{H}_z = \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} \end{cases} \quad (1-80)$$

La seule composante de \mathcal{H} variant avec le temps, donc la seule susceptible de se propager, est \mathcal{H}_z . On a la relation entre \mathcal{H}_z et \mathcal{E}_y .

$$-i\omega\mu \mathcal{H}_z = -ik\mathcal{E}_y \quad (1-81)$$

Le rapport $Z=\mathcal{E}_y/\mathcal{H}_z=\omega\mu/k$ possède les dimensions d'une résistance. On l'appelle l'impédance complexe du milieu. Nous avons maintenant une connaissance parfaite des champs complexes et réels.

Si on pose $k=\alpha+i\beta$ avec α et β réels, on a

$$\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{E}_y(x,t) = \mathbf{E}_{0y} \exp(-|\beta|x) \cos(\omega t - |\alpha|x) \quad (1-82)$$

$$\mathbf{H}(x,t) = \mathbf{H}_z(x,t) = |k|/(\mu\omega) \mathbf{E}_{0y} \exp(-|\beta|x) \cos(\omega t - |\alpha|x - \varphi) \quad (1-83)$$

$$\text{où } \varphi = \arg(k) = \arctan(|\beta|/|\alpha|) \quad (1-84)$$

Il est donc possible de décrire complètement la propagation à l'aide des deux paramètres k et Z . On utilisera plutôt le couple Z et γ où $\gamma=ik$. Z est l'impédance complexe du milieu et γ est la constante de propagation du milieu. Ces grandeurs s'expriment en fonction des paramètres caractéristiques et de la pulsation :

$$\begin{cases} Z = (i\omega\mu)^{1/2} (\sigma + i\omega\varepsilon)^{-1/2} \\ \gamma = (i\omega\mu)^{1/2} (\sigma + i\omega\varepsilon)^{1/2} \end{cases} \quad (1-85)$$

Il est à noter que les milieux non absorbants correspondent au cas d'un paramètre σ nul. Les paramètres Z et γ sont alors réels. En revanche, les milieux absorbants correspondent à des paramètres de propagation à partie imaginaire non nulle.

Dans la présentation de la propagation en milieu hétérogène, nous analyserons le comportement des paramètres Z et γ attachés à la matière plutôt que celui des champs électrique et magnétique attachés au comportement.

I-B) Le milieu hétérogène

Contraintes par la réalité expérimentale et les besoins d'applications, des études d'électromagnétisme en milieu hétérogène ont évidemment été menées depuis bien longtemps. Tout d'abord les matériaux homogènes dans la nature constituent l'exception par rapport aux matériaux hétérogènes. Le matériau homogène n'est le plus souvent que le résultat du travail de purification mené par l'Homme. D'autre part, après cette première étape, l'évolution des matériaux employés dans l'industrie s'est faite dans le sens d'une complexification, donnant lieu à la mise au point de matériaux à plusieurs constituants (composites, alliages).

I-B-1) Observations expérimentales

Les études électromagnétiques ont été menées sur des matériaux possédant un type particulier d'hétérogénéité. Ce sont en général des matériaux à plusieurs constituants qui s'imbriquent de manière irrégulière. A titre d'exemple, on a fabriqué des matériaux composites comprenant une matrice diélectrique dans laquelle sont incluses de petites régions conductrices. En revanche, on a rarement étudié les matériaux ne comprenant qu'un constituant dont la distribution de matière dans l'espace présente un caractère fortement hétérogène.

Du point de vue des caractéristiques électromagnétiques, on observe expérimentalement sur ces matériaux hétérogènes entre autres une forte absorption de l'onde, supérieure à celle de la matrice seule ou de l'inclusion conductrice seule.

Cette forte absorption ne peut pas être expliquée à l'aide des formules (85). Ceci est vrai surtout lorsque les paramètres caractéristiques des constituants (ϵ , μ , σ) diffèrent fortement les uns des autres. C'est pour faire face à ce problème que plusieurs théories ont été développées. Elles ont pour objet de généraliser les expressions précédentes et de rendre compte des comportements observés.

I-B-2) Les théories électromagnétiques en milieu hétérogène

Pratiquement, plusieurs théories ont été mises au point pour interpréter la forte absorption observée. On rencontre d'une part les théories dites de milieu effectif qui consistent à définir pour le milieu hétérogène des phénoménologies caractéristiques (ϵ , μ , σ) et à les exprimer en fonction des mêmes paramètres des constituants pondérés de manière ad hoc. D'autres théories plus récentes sont fondées sur le concept de percolation et d'agrégat fractal. Sans entrer complètement dans les détails (le chapitre II sera précisément consacré à l'étude des formes fractales), il est nécessaire de présenter brièvement ces modèles.

La démarche commune suivie dans toutes ces théories consiste à conférer à l'ensemble du matériau des propriétés semblables à celles observées habituellement sur des matériaux homogènes. Ceci se fait au moyen d'une théorie dite d'homogénéisation qui dans un certain nombre de cas est fondée mathématiquement. On étend donc au matériau hétérogène la définition des paramètres caractéristiques (dits alors "équivalents", ϵ_e , μ_e , σ_e) appliquée aux matériaux homogènes.

Cette interprétation des nouveaux comportements par une théorie valable dans le cas homogène se fait au prix de deux extensions importantes. D'une part, les paramètres caractéristiques sont supposés complexes et non plus uniquement réels. D'autre part on leur confère une dépendance en fonction de la fréquence de l'onde se propageant dans le matériau. On effectue donc les transformations suivantes

$$\begin{cases} \epsilon \rightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \\ \mu \rightarrow \mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega) \end{cases} \quad (1-86)$$

où ϵ' , ϵ'' , μ' , μ'' sont des fonctions à valeurs réelles.

On remarque qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer la même transformation pour σ car dans l'expression des paramètres de propagation Z et γ (85), l'évolution de σ peut désormais, si on autorise l'existence de paramètres complexes, être incorporée dans celle de ϵ . Nous discuterons dans la suite les implications de ces hypothèses et leur validité.

I-B-2-a) les théories de milieu effectif

Ces théories consistent, pour déterminer les paramètres définis par extension ci-dessus aux milieux hétérogènes, à les exprimer en fonction des paramètres des constituants. La prise de moyenne effectuée est alors guidée par des considérations physiques [13-14].

On rencontre en particulier dans la littérature la théorie de Looyenga-Landau-Lifschitz valable dans le cas où la permittivité de l'inclusion est supposée proche de celle de la matrice [15-16]. En moyennant sur un grand volume et en effectuant un développement par rapport à la différence des permittivités $\Delta\epsilon$, on démontre que :

$$\epsilon_e^{1/3} = \langle \epsilon^{1/3} \rangle \quad (1-87)$$

soit pour une concentration relative d'inclusions p (ϵ_i) dans une matrice diélectrique (ϵ_m) :

$$\epsilon_e^{1/3} = p\epsilon_i^{1/3} + (1-p)\epsilon_m^{1/3} \quad (1-88)$$

Cette formule n'est valable que pour des inclusions diélectriques.

Pour des faibles concentrations, on utilise la théorie développée par Clausius-Mossotti [17], généralisée par Maxwell-Garnett [18-19]. Elle tient compte des effets de dipôles entre inclusions. On effectue ici un développement en p , ce qui fournit :

$$\epsilon_e = \epsilon_i \left(1 + 3p \frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_m + 2\epsilon_i} \right) \quad (1-89)$$

Ces théories présentent des domaines de validité bien précis et limités (faible concentration en inclusion, faible écart de propriétés entre matrice et inclusions). Mais aucune des relations citées n'est valable pour des concentrations en inclusions élevées [20,21,22]. En effet, pour une concentration élevée en inclusions, plusieurs inclusions peuvent fusionner pour former des amas de diverses tailles. Le comportement électromagnétique de ces amas n'est absolument pas prédit par les théories de milieu effectif. Nous

allons voir que la théorie de la percolation permet d'envisager le cas de concentrations élevées en inclusions.

I-B-2-b) la théorie de la percolation

Une autre modélisation du comportement électromagnétique des milieux hétérogènes est fondée sur la théorie de la percolation. Le modèle théorique introduit par Broadbent et Hammersley [23] suppose que le milieu comporte deux constituants A et B distribués sur des sites formant un réseau périodique par exemple carré ou cubique. Initialement tous les sites sont occupés par A. Progressivement de plus en plus de sites vont être occupés par B qui se disposent au hasard sur le réseau. Lorsque la concentration relative p en B augmente, les B au départ isolés vont se retrouver regroupés en amas de taille de plus en plus élevée.

La théorie prédit l'existence d'une concentration p_c , dite "seuil de percolation", pour laquelle il se forme un amas de taille infinie, en fait un amas joignant une extrémité du milieu à l'autre. Au voisinage de ce seuil, tous les paramètres géométriques et physiques décrivant le milieu auront, d'après la théorie de la percolation, un comportement en loi de puissance de $(p-p_c)$.

Au-delà du seuil de percolation, il existe à la fois des amas finis et un amas infini. La probabilité P_∞ pour un site d'être sur l'amas infini et le rayon de giration moyen ξ de tous les amas finis varient respectivement comme :

$$\begin{cases} P_\infty(p) \propto (p - p_c)^\beta \\ \xi(p) \propto (p - p_c)^{-\nu} \end{cases} \quad (1-90)$$

Si A est un diélectrique et B un conducteur, le milieu devient conducteur au-delà du seuil de percolation [24]. On observe des comportements non plus linéaires comme dans les théories de milieu effectif, mais en loi de puissance :

$$\begin{cases} \sigma_e(p) \propto (p - p_c)^t \\ \epsilon_e(p) \propto (p - p_c)^{-s} \end{cases} \quad (1-91)$$

La théorie a permis de considérer plusieurs cas de mélange : diélectrique - conducteur, bon conducteur - mauvais conducteur. Dans tous les cas on a mis en évidence pour σ_e et ϵ_e des comportements en loi de puissance avec des exposants ne dépendant que de t et de s [25,26,27]. Même si cette théorie permet d'aborder les systèmes à forte concentration en inclusion, elle ne peut décrire que le comportement du milieu à basse fréquence.

C'est pour répondre à ce cette interrogation qu'a été établie par T. Robin et B. Souillard [28] la théorie dite d'agrégats fractals que nous allons présenter brièvement ici.

I-B-2-c) la théorie d'agrégats

Il s'agit d'une théorie basée sur une description microscopique du composite. Si on considère deux inclusions, celles-ci peuvent être ou bien en contact électrique, ou trop séparées pour permettre le passage d'un courant. Dans ce dernier cas le matériau se comporte comme un isolant. Dans le premier cas, il n'est plus possible de négliger les effets d'agrégats.

Les quantités physiques relatives à un agrégat dépendent de sa taille et de la longueur d'onde. On détermine par sommation probabiliste sur les agrégats les propriétés globales du milieu.

Les grandeurs sont supposées avoir une variation monodimensionnelle. Pour un champ appliqué E_0 , de pulsation ω , le courant $j(x)$ dans l'agrégat vérifie une équation d'antenne généralisée où interviennent les expressions de l'inductance $L(x)$, de la capacité $C(x)$ et de la résistance entre 0 et x . Ces agrégats sont supposés de structure fractale. Nous verrons dans le chapitre suivant de quoi il s'agit plus précisément. Ceci implique que la variation de L , C et R en fonction de x et \mathfrak{R} , rayon de l'agrégat, se fait selon des lois de puissance.

La résolution de l'équation d'antenne généralisée conduit à la mise en évidence de plusieurs régimes correspondant à différents comportements électromagnétiques. Cette distinction oblige à définir de nouveaux paramètres tels que la longueur de corrélation du courant δ . Le passage d'un régime à un autre résulte du rapport relatif et de l'ordre de grandeur des quatre paramètres

δ , ξ (longueur de corrélation du milieu), λ (longueur d'onde du rayonnement), λ_p (profondeur de pénétration de l'onde dans le composite).

Cette théorie permet de retrouver les résultats à basse fréquence prédits par la théorie de la percolation et de prédire l'existence de nouveaux régimes prenant en compte les effets magnétiques. On observera cependant que l'augmentation de pertinence expérimentale est obtenue au prix d'une augmentation très notable du nombre de paramètres, augmentation due au caractère microscopique de l'analyse.

I-B-3) La démarche d'étude employée

La démarche que nous avons suivie est tout autre. Elle a comme point de départ des mesures expérimentales effectuées sur des composites. En 1989, une nouvelle expression des paramètres de propagation a été proposée [29,30] qui limite le nombre de paramètres :

$$\begin{cases} Z(\omega) = \frac{(a_1 + i\omega k_1)^\alpha}{(a_2 + i\omega k_2)^\beta} \\ \gamma(\omega) = (a_1 + i\omega k_1)^\alpha (a_2 + i\omega k_2)^\beta \end{cases} \quad (1-92)$$

On a pu vérifier sur une large gamme de fréquences (cf. résultats expérimentaux donnés en annexe I) la pertinence de cette expression dans laquelle les grandeurs nouvelles définies ici a_1 , a_2 , k_1 , k_2 ne sont plus dépendantes de la fréquence comme il est généralement admis en milieu hétérogène mais redeviennent des invariants du comportement. En effet, les constantes k_1 et k_2 y apparaissent comme des invariants au même titre que ϵ et μ en milieu homogène. D'autre part, α et β ne sont plus nécessairement, comme dans le cas homogène, égaux à $1/2$, mais surtout ne sont plus forcément égaux entre eux. Ils sont liés à la distribution des inclusions dans des matrices diélectriques (analyse effectuée avec des inclusions de Nickel).

Même si ces expressions ne paraissent pas bouleverser l'interprétation des phénomènes (elles pourraient être considérées simplement comme un nouveau lissage des courbes $Z(\omega)$ et $\gamma(\omega)$), le fait d'introduire des puissances différentes dans l'expression de ces paramètres oblige à reconsidérer complètement la nature des phénomènes d'absorption.

En effet, les paramètres a_1 et a_2 gardent la même signification qu'en milieu homogène. Ils représentent des pertes locales électriques et magnétiques. En l'absence de ces pertes locales, l'expression (92) prend la forme :

$$\begin{cases} Z(\omega) = (i\omega k_1)^\alpha (i\omega k_2)^{-\beta} = i^{\alpha-\beta} (\omega k_1)^\alpha (\omega k_2)^{-\beta} \\ \gamma(\omega) = (i\omega k_1)^\alpha (i\omega k_2)^\beta = i^{\alpha+\beta} (\omega k_1)^\alpha (\omega k_2)^\beta \end{cases} \quad (1-93)$$

On constate alors que pour des valeurs α et β quelconques, les paramètres de propagation peuvent prendre des valeurs complexes. Le matériau présente donc un nouveau régime d'absorption totalement indépendant des pertes locales habituelles. Pour interpréter ce nouveau régime, il faut alors reconsidérer les paramètres de propagation.

Dans les expressions habituelles rencontrées en milieu homogène, le facteur $1/2$ provient des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 vérifiées par le champ électromagnétique, elles mêmes déduites des équations de Maxwell. Les expressions (92) nous obligent à revenir sur l'expression de ces équations en milieu hétérogène. Les équations de Maxwell doivent être généralisées.

Cette généralisation sera opérée en revenant aux fondements différentiels de l'électromagnétisme, qui permettent de retrouver les équations de Maxwell à partir d'un nombre très limité d'hypothèses. La généralisation sera effectuée par application d'opérateurs d'ordre non entier aux variables classiques.

Sur le plan de l'ingénierie, nous avons adopté une démarche géométrique. L'objectif est d'aboutir à la réalisation de matériaux à hétérogénéité contrôlée. Lorsqu'on considère des matériaux composites, on ne peut définir qu'une composition moyenne en chaque constituant. Il est impossible de maîtriser complètement la géométrie locale ou globale puisqu'on ne peut faire varier que le taux de charge.

Une hétérogénéité parfaitement contrôlée paraît à première vue impossible à atteindre. En effet, un matériau homogène est caractérisé géométriquement par un petit nombre de paramètres (extension spatiale ou équations des plans ou des surfaces gauches qui le délimitent). Au contraire, un matériau hétérogène exige de gérer une quantité d'information bien plus élevée. Dans le cas le plus simple d'un composite à inclusions sphériques, il faut connaître pour chaque inclusion le rayon de la sphère et les trois coordonnées de son centre.

Le problème peut être simplifié s'il existe des relations particulières entre les coordonnées des centres. Les relations les plus simples sont celles de périodicité car il suffit alors de se donner un point de départ et une loi de transformation à itérer pour obtenir l'ensemble des coordonnées désirées. Toutefois, dans le cas de la modélisation d'un matériau hétérogène, ces

relations doivent être autres que périodiques spatialement car alors on peut facilement se ramener au cas du matériau homogène (le matériau est dit homogénéisable). La "périodicité" la plus simple à employer reste la périodicité d'échelle. Les matériaux présentant cette propriété sont qualifiés de fractals. Ils sont pour leur part représentatifs des matériaux hétérogènes en particulier au sens de la percolation. Nous avons par conséquent envisagé la fabrication de ces matériaux. Ce sont bien des matériaux hétérogènes mais ce sont les matériaux hétérogènes les plus "simples" à concevoir. Il n'est nécessaire pour les décrire complètement que de disposer d'un nombre très limité de paramètres, d'où leur intérêt.

De plus nous verrons dans le chapitre II que les relations liant les grandeurs physiques décrivant les objets fractals (masse, extension) font intervenir des lois de puissance avec des exposants non entiers. Ceci est à mettre en lien direct avec les exposants α et β rencontrés plus haut dans les expressions des paramètres de propagation.

Arrivés à ce stade, nous avons tenté d'évaluer les modifications de comportement électromagnétique engendrées par le passage du milieu homogène au milieu hétérogène dans les diverses théories. Nous avons pu donner un aperçu des théories existantes et constater que même si elles étaient capables de retrouver dans les domaines de fréquences considérés les comportements observés, elles étaient toutes fondées sur le même type de démarche. Le caractère hétérogène est pris en compte de manière statistique. Même si le caractère fractal des distributions de matière est pris en compte [28], il n'y a pas de modification du cadre formel fourni par la théorie maxwellienne en milieu homogène.

Notre démarche sera tout autre. Nous allons montrer que le fait de travailler en milieu hétérogène n'a pas uniquement une influence sur la matière occupant l'espace, mais revient à modifier la métrique même de cet espace, et donc de remettre en cause les fondements mêmes de la théorie maxwellienne, rejoignant ainsi le point de vue de Laurent Nottale sur le sujet. L'analyse géométrique nous conduira à envisager le phénomène de propagation comme la circulation sur des géodésiques d'un espace modifié qui ne sera plus euclidien comme l'analyse précédente le laissait voir, mais hyperbolique.

Pour ce faire, il est nécessaire avant tout de fournir une présentation de la géométrie fractale. C'est ce qui va être effectué dans le chapitre qui suit.

DEUXIÈME PARTIE :

LES OBJETS FRACTALS

II LES OBJETS FRACTALS

Nous allons consacrer cette partie à un sujet né de l'imagination des mathématiciens et dont le rôle est des plus importants dans la physique actuelle : la géométrie fractale. Après avoir appelé la genèse de cette géométrie, nous verrons comment elle permet d'aborder avec un oeil neuf une série de phénomènes qui jusqu'ici avaient échappé à la connaissance ou à l'intérêt des scientifiques. Nous verrons par la suite, semble-t-il pour l'une des toutes premières fois, le puissant outil que constitue la théorie des groupes dans l'étude des objets fractals déterministes.

II-A) Présentation de la géométrie fractale

Au cours des dernières années, la géométrie fractale a fait une entrée remarquée dans l'univers des physiciens. Comme tout concept nouveau qui oblige à modifier les habitudes de pensée et de travail, elle a mis du temps à être reconnue. Même si elle ne peut prétendre résoudre à elle seule tous les problèmes en suspens en physique, elle peut donner un éclairage nouveau sur de nombreux sujets restés jusqu'alors sans explication satisfaisante.

II-A-1) Des débuts dans l'indifférence

Le terme fractal a été introduit par Benoît Mandelbrot au cours des années 70. Mais l'étude des objets fractals elle-même est plus ancienne, à savoir la seconde moitié du XIX^{ème} siècle. Les premières idées sur ces objets bizarres sont nées de l'imagination des mathématiciens.

En géométrie, le XIX^{ème} siècle est une période fertile en rebondissements et remises en cause. Nikolaï Lobachevski (1793-1856) et Janos Bolyai (1802-1860) ont montré indépendamment, à la suite des travaux de Carl-Friedrich Gauss (1777-1855), qu'il était possible de construire une géométrie cohérente qui ne vérifie pas le cinquième postulat d'Euclide (le fameux postulat qui indique que par tout point du plan, il passe une droite unique parallèle à une droite donnée) [31]. Il s'agit de la géométrie hyperbolique. En 1848, Bernhard Riemann (1826-1866), fera pièce à ce postulat d'une autre façon en créant la géométrie elliptique. Désormais, on ne craindrait plus de remettre en cause les fondements mêmes de la géométrie euclidienne, qui avait pourtant fait autorité pendant deux millénaires.

II-A-1-a) L'époque des monstres

A partir de là, les mathématiciens envisagent d'autres généralisations possibles. Dans une lettre adressée à Dedekind en 1877 [32], Georg Cantor (1845-1918) s'interroge sur la signification du concept de dimension. Il pense avoir démontré qu'un carré ne contient pas plus de points que ses côtés, allant contre l'intuition qu'il faut deux nombres pour repérer la position d'un point

sur une surface et seulement un sur une ligne. Il cherche à "montrer que les surfaces, les volumes et même les variétés continues à p dimensions peuvent être mis en correspondance univoque avec des courbes continues, donc avec des variétés à une dimension".

Un peu plus tard, en 1890, Giuseppe Peano (1858-1932) satisfait partiellement la requête de Cantor en construisant des suites de lignes brisées remplissant un carré de façon de plus en plus serrée de telle sorte que tout point du carré soit aussi proche de la courbe limite qu'on le désire [33]. Entre temps (1884), Cantor était parvenu à créer un ensemble intermédiaire entre le point et la droite. Un peu plus tard (1904), Helge Von Koch (1870-1924) créa lui une courbe très irrégulière qui porte aujourd'hui son nom [34-35]. Repliée sur elle-même, elle a la propriété de délimiter une aire finie tandis que son périmètre est infini.

Ces avancées en géométrie ont eu leur pendant en analyse fonctionnelle. Cette époque a constitué une période de formalisation et d'axiomatisation des propriétés de continuité et de dérivabilité des fonctions réelles ou complexes. C'est ainsi que Weierstrass a été amené à introduire la fonction qui porte encore son nom [30] :

$$W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v^{-nH} \cos(v^n x) \quad (2-1)$$

Nous l'avons représentée sur la figure ci-après pour plusieurs valeurs du paramètre H . La non dérivabilité se manifeste par une irrégularité prononcée. Les courbes ne peuvent être lissées à aucune échelle. On constate que H est un bon indicateur de l'irrégularité de la courbe.

Ainsi la géométrie qu'on n'appelait pas encore fractale s'est d'abord révélée sous la forme de monstres mathématiques que beaucoup craignaient d'appréhender, à commencer par leurs créateurs. C'est pour cette raison que le sujet est tombé petit à petit dans l'oubli. Les travaux effectués contenaient en germe les concepts caractéristiques de la géométrie fractale qui allaient réapparaître à la fin du XX^{ème} siècle : celui de forme rugueuse, irrégulière, d'invariance par homothétie interne, encore appelée autosimilarité.

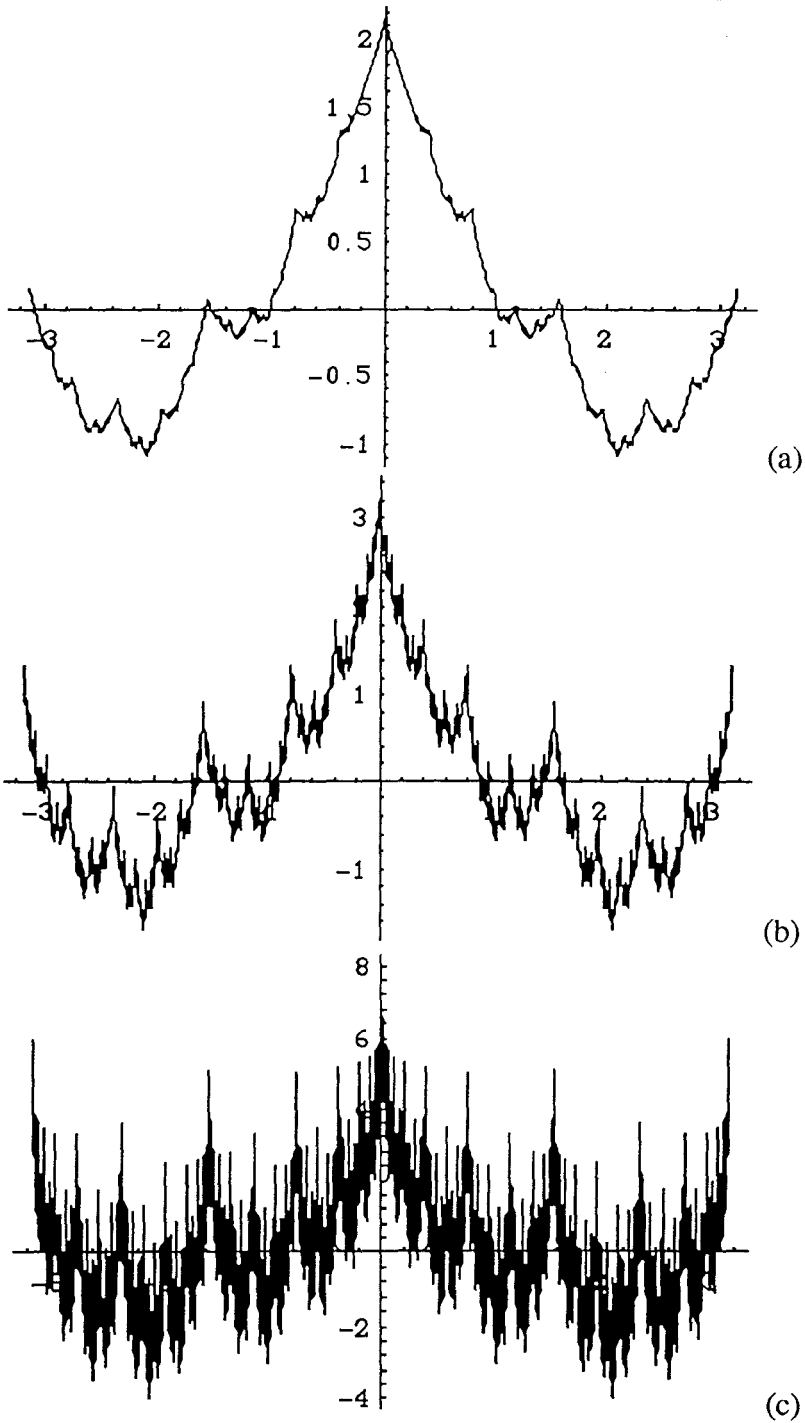


Figure 2-1 : représentation de la fonction de Weierstrass pour $\nu=2$ et plusieurs valeurs de H
(a) $H=0.9$; (b) $H=0.5$; (c) $H=0.1$

II-A-1-b) La notion de dimension

Le pas suivant est réalisé par Hausdorff, aidé de Besicovitch, qui en 1919 généralise à des dimensions non entières le concept de dimension entière commun en géométrie euclidienne [36]. Pour ce faire, ils partent du constat qu'un objet de dimension n entière définit un contenu à partir d'une mesure.

Prenons l'exemple d'une ligne courbe rectifiable Γ quelconque. On mesure sa longueur à l'aide d'une règle de longueur λ . Pour chaque valeur de λ , il faut mettre bout à bout N_λ règles pour recouvrir la courbe Γ .

La longueur mesurée est $L_\lambda = N_\lambda \lambda$. La rectifiabilité de la courbe nous assure que L_λ converge vers une valeur L lorsque λ tend vers 0. On a :

$$N_\lambda \approx \frac{L}{\lambda} \quad (2-2)$$
$$\lambda \rightarrow 0$$

On peut tenir le même raisonnement pour une portion de plan dont on mesure la surface à l'aide d'un carré de côté λ . N_λ est alors le nombre de carrés permettant de recouvrir cette portion de plan de surface S . Nous aurons alors

$$N_\lambda \approx \frac{S}{\lambda^2} \quad (2-3)$$
$$\lambda \rightarrow 0$$

Considérons maintenant la courbe de Von Koch. On la construit en remplaçant à chaque itération un segment de longueur L par 4 segments de longueur $L/3$ disposés comme sur la figure 2.

Par construction même la courbe de Von Koch va présenter la propriété d'invariance d'échelle. De plus la courbe fractale est très fragmentée. Elle est non différentiable en une infinité de points. En effet, si on considère la courbe à un ordre d'itération fini, les points correspondant à un changement de direction de la courbe ne voient pas leur tangente "à gauche" et "à droite" modifiée par la construction fractale. La courbe de Von Koch admet donc en

tout point une tangente à gauche et une tangente à droite. Mais ces tangentes ne coïncident pas en une infinité de points.

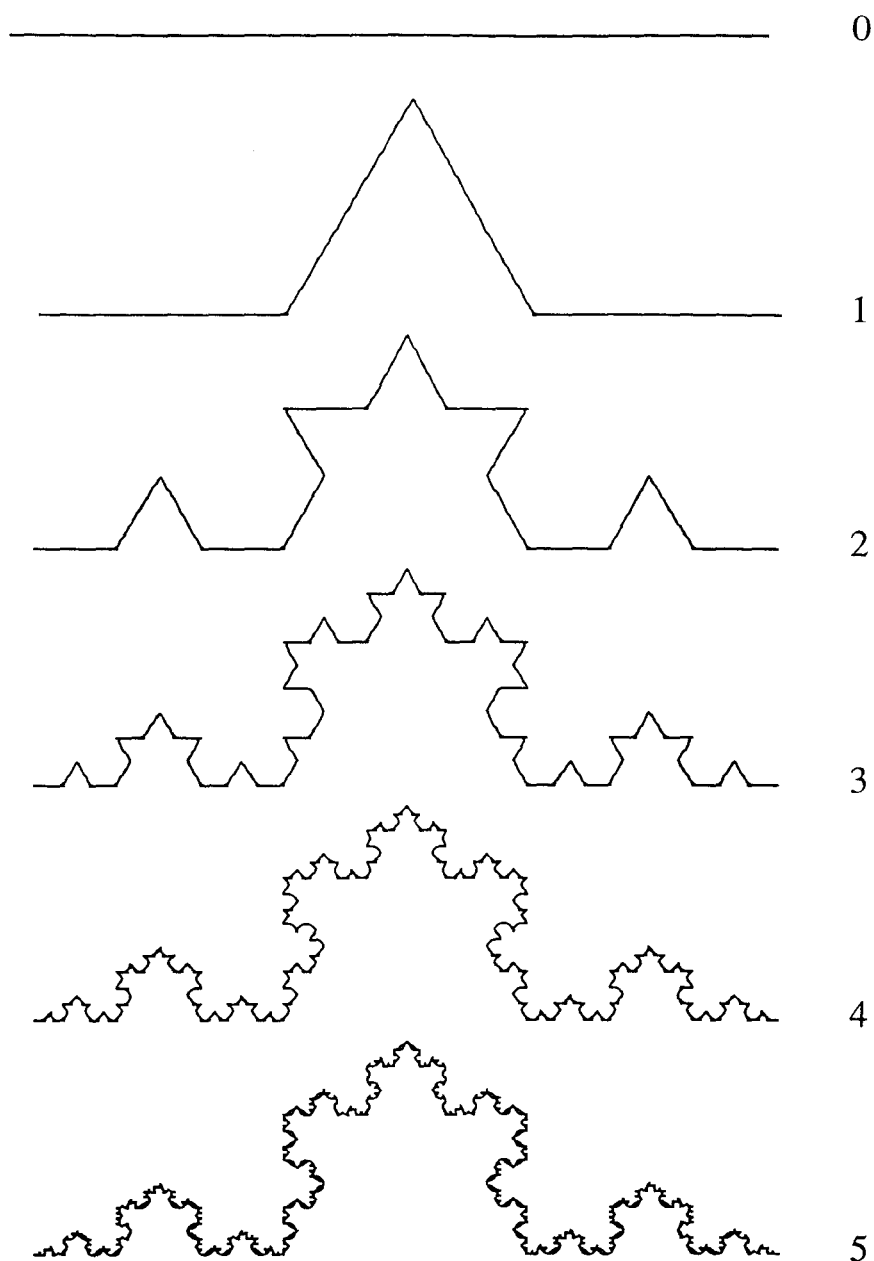


Figure 2-2 : Courbe de Von Koch construite aux ordres 0 à 5. La longueur de la courbe est multipliée par $4/3$ à chaque itération.

Soit n l'ordre d'itération de construction de la courbe. On choisit comme jauge un segment de longueur $\lambda = \frac{1}{3^n}$. Il faut alors $N_\lambda = 4^n$ segments pour recouvrir la courbe. Sa longueur est de $L_n = N_\lambda \lambda = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Elle diverge lorsque n tend vers l'infini.

Hausdorff a montré qu'alors il existe un réel D tel que le produit $N_\lambda \lambda^D$ reste fini lorsque la jauge λ tend vers 0. De plus il a montré que pour toutes les valeurs de $d < D$, le produit $N_\lambda \lambda^d$ diverge alors que pour $d > D$ il tend vers 0. Il en résulte que :

$$C = \lim_{\lambda \rightarrow 0} N_\lambda \lambda^D \quad (2-4)$$

peut être alors interprété comme le vrai contenu de la courbe de Von Koch dans un espace de dimension D . D est appelée dimension fractale de la courbe.

D'autre part, on peut exprimer la longueur de la courbe $L_\lambda = N_\lambda \lambda$ qui devient équivalente à $C \lambda^{1-D}$ lorsque λ tend vers 0. D étant strictement supérieur à 1, on retrouve le fait que la courbe limite est de longueur infinie.

Cette définition s'étend aux cas de "poussières" tel l'ensemble de Cantor de dimension fractale comprise entre 0 et 1 et au cas d'objets spatiaux de dimension comprise entre 2 et 3.

La dimension fractale permet de mesurer ainsi la façon dont un objet remplit l'espace dans lequel il est situé, mais également son irrégularité interne. Plus la dimension fractale est proche de la dimension topologique de l'espace, plus l'objet est étendu et fragmenté. Hausdorff a mis au point un outil d'une grande valeur qui sera développé par la suite. Malheureusement, ses travaux ne recueillirent pas de véritable écho.

II-A-1-c) Le désintérêt

A la même époque, deux mathématiciens Gaston Julia (1893-1978) et Pierre Fatou (1878-1929) développèrent la théorie d'une famille de fonctions itérées du plan complexe $z_{n+1} = z_n^2 + c$, où c est un paramètre complexe [37]. Mais ils ne disposaient pas d'outils capables d'illustrer le caractère fractal des objets qu'ils étudiaient.

Après ces premiers travaux, l'attention sur ces formes géométriques étranges retomba. Par la suite on peut signaler les travaux de Richardson [38]

qui montra que la mesure de la longueur d'une côte L varie énormément avec la jauge de mesure λ . Il mit en évidence des lois approchées du type $L \approx \lambda^\alpha$, mais n'alla pas jusqu'à interpréter la puissance non entière α comme une dimension.

Après un demi-siècle d'oubli, l'étude de ces formes irrégulières refit surface sous la plume d'un géomètre qui disposait alors d'outils informatiques permettant de visualiser la complexité que ses prédécesseurs n'avaient souvent fait qu'entrevoir. Ce mathématicien s'appelait B. Mandelbrot.

II-A-2) Une montée en puissance

Jusqu'aux années 70, aucun intérêt scientifique pour les formes pathologiques évoquées plus haut n'était apparu. Il fallut que Benoît Mandelbrot regroupe ces formes d'une grande variété sous une appellation commune et montre que, loin de constituer des objets mathématiques purs, ceux-ci présentaient un lien très fort avec une multitude de formes et de phénomènes naturels non encore explorés ou bien mal compris, pour que l'intérêt renaisse.

II-A-2-a) Les formes fractales dans la nature

Les travaux de Mandelbrot publiés en 1975 ont permis progressivement d'éveiller l'intérêt général et de sortir la discipline de l'ornière scientifique qu'elle occupait depuis un demi-siècle. Il a commencé par désigner les objets présentés comme une liste hétéroclite sous un vocable approprié. A partir du terme latin "fractus" signifiant "irrégulier ou brisé", il a créé le substantif "fractale" et l'adjectif "fractal" pour désigner au sens large toute forme présentant à la fois un aspect irrégulier, fragmenté, et des propriétés d'invariance par dilatation. Il a systématisé l'étude mathématique de ces objets en créant ce qu'on appelle désormais la géométrie fractale [39-40].

Les deux propriétés sont importantes. L'aspect irrégulier signifie, comme on l'a vu dans divers exemples, l'incommensurabilité des contenus de dimension différente. Une courbe fractale plane est de longueur infinie mais délimite une portion de plan de surface finie. De même, une forme fractale spatiale est de volume fini mais sa surface est infinie. Une telle combinaison de divergence et de caractère borné suggère le fait que les fractales peuvent constituer une réponse à certains problèmes d'optimisation sous contrainte, ou même d'optimisation de grandeurs contradictoires [41].

D'autre part la propriété d'invariance d'échelle n'est pas l'apanage de la géométrie fractale. Une simple ligne droite possède cette propriété de manière exacte. Toute courbe rectifiable la possède également, mais cette fois de manière locale et approchée. Ceci ne saurait suffire à considérer ces formes comme des fractales. La différence réside dans le fait qu'une ligne droite est

invariante par dilatation de n'importe quel rapport. Au contraire une forme fractale est invariante par dilatation d'un nombre limité de rapports permis : les puissances successives du plus grand facteur d'échelle $\rho < 1$ [41]. Dans ce nouveau contexte, la véritable signification de l'autosimilarité est que, dans l'espace des dilatations, les objets présentent un comportement périodique et non stationnaire.

Néanmoins ce seul fait se serait avéré insuffisant pour susciter quelque intérêt parmi les scientifiques. Mandelbrot est parvenu à éveiller l'attention en montrant que les objets fractals ne sont pas uniquement une curiosité mathématique, mais que la nature en fourmille, et ceci sous de nombreuses formes.

Un arbre par exemple possède une structure d'objet fractal. Il comprend un tronc qui donne naissance à quelques grosses branches. Sur celles-ci viennent se greffer d'autres branches plus petites, puis sur ces dernières d'autres branches plus petites encore, et ce phénomène se reproduit jusqu'à l'échelle des brindilles. Un arbre possède donc bien les deux propriétés caractéristiques des objets fractals présentées plus haut, par exemple dans le cas de la courbe de Von Koch, à savoir un aspect irrégulier, fragmenté d'une part, et la propriété d'invariance d'échelle d'autre part. Bien entendu, ces propriétés ne sont pas vérifiées rigoureusement. Une branche peut être ramifiée à des échelles successives par trois, quatre ou cinq branches de taille inférieure. De la même façon, le rapport entre les longueurs des branches successives (le rapport d'homothétie interne) n'est en général pas constant. Mais le fait que les propriétés constitutives des objets fractals ne soient vérifiées que de manière approchée n'est aucunement déterminant. Au contraire, il illustre la puissance du concept d'objet fractal, qui permet d'englober toute une série de formes qu'on ne pourrait qualifier de fractales au sens strict.

La croissance géométrique d'un arbre ne s'effectue pas de manière totalement déterministe, mais une part importante du processus est gouvernée par des lois statistiques. D'autre part, la propriété d'invariance d'échelle ne se manifeste jamais complètement dans la nature, mais toujours entre deux ordres de grandeur plus ou moins éloignés. Le caractère fractal est toujours limité macroscopiquement par la taille de l'objet considéré et microscopiquement par les atomes qui le composent.

On s'est alors rendu compte que les formes qui apparaissaient auparavant comme pathologiques constituaient en vérité la règle dans la nature. Non seulement les lignes droites et surfaces planes sont rares (cristaux), mais même les courbes rectifiables et les surfaces lisses, archétype des mathématiques pour l'ingénieur, le sont. La géométrie fractale s'est avérée suffisamment souple pour pouvoir incorporer en son sein une multitude de formes et de phénomènes physiques. C'est ainsi qu'ont été mis au point des concepts plus généraux tels que ceux de formes multifractales (le facteur d'homothétie interne n'est plus uniforme mais dépend de l'endroit où on se situe sur l'objet) ou de fractales autoaffines (le facteur d'homothétie interne dépend alors de la direction de visée sur l'objet). Il est possible de réaliser des courbes dont la dimension fractale varie avec l'abscisse curviligne [41]. De plus, il est possible d'introduire des processus stochastiques dans les codes de génération fractale [30-39-42] et d'obtenir ainsi des formes encore plus proches de la réalité qu'avec des algorithmes totalement déterministes.

On peut alors fournir un inventaire bien loin d'être exhaustif de formes naturelles macroscopiques de caractère fractal : l'aspect des côtes, les reliefs montagneux, la distribution des cratères de la Lune [39]. Aujourd'hui on est à même de reconstituer à partir d'algorithmes itérés des paysages ou reliefs fictifs de même aspect que des paysages réels [43]. La distribution des galaxies dans l'univers peut aussi être supposée de nature fractale. Elle présente des structures d'aspects similaires dans une grande plage d'échelles. Notre galaxie, la Voie Lactée appartient ainsi à un groupe d'une vingtaine de galaxies appelé Groupe local de dimension 2Mpc [44]. Ces groupes de galaxies appartiennent eux-mêmes à des ensembles plus grands, appelés amas de taille environ 10Mpc. Les amas sont eux-mêmes regroupés en superamas de structure en général filamenteuse de dimension typique 40Mpc. Au-delà, l'étude de la distribution des superamas semble indiquer l'existence d'hyperamas de taille environ 100Mpc. Il semble s'agir du dernier niveau d'organisation car aux échelles supérieures au milliard d'années-lumière, l'Univers paraît être uniforme. La distribution des galaxies est donc hautement hiérarchisée. Le fait de l'assimiler à une structure fractale permet entre autres de fournir une réponse élégante au paradoxe d'Olbers [44-45], qui stipule qu'avec une distribution uniforme des corps célestes, il en existerait un dans toute direction d'observation (pour un univers infini), et donc le ciel serait aussi brillant la nuit que le jour. La meilleure réponse au paradoxe est la finitude de la vitesse de la lumière qui implique qu'on ne soit capable de voir qu'une partie des étoiles de l'Univers. Mais le paradoxe disparaît également lorsqu'on fait l'hypothèse d'une

distribution fractale des galaxies puisqu'alors la plupart des directions de visée n'intersecte aucune étoile.

Mandelbrot a également su tirer parti des possibilités techniques offertes par son époque. Il est parvenu à générer et à visualiser sur écran d'ordinateur les ensembles définis et étudiés avant lui par Julia. Les calculs ne pouvaient être effectués à la main et ces représentations ne pouvaient être obtenues au début du siècle. La diffusion de ces images a certainement beaucoup fait pour populariser les théories fractales.

II-A-2-b) Les phénomènes physiques

Les structures fractales apparaissent également au cours de processus physiques pas uniquement d'ordre biologique. Par exemple l'agrégation de colloïdes donne lieu à l'obtention de motifs de structure fractale. Cette croissance d'agrégats a été interprétée dès 1981 par Witten et Sanders à l'aide du modèle dit DLA (Diffusion Limited Aggregation) [46]. Le processus décrit par ce modèle consiste étape par étape à fixer sur un amas existant une particule soumise à une diffusion brownienne, après un nombre de chutes réglable. L'agrégation fait entrer dans le processus une nouvelle particule libre.

Des modèles généralisés où l'amas lui-même peut se déplacer et se coller à d'autres amas illustre mieux le caractère fractal du processus. Des motifs de petite taille peuvent alors s'associer pour former des motifs plus gros, qui eux mêmes vont se regrouper et ainsi de suite [47,48].

D'autres phénomènes donnent également lieu à des structures géométriques fractales, tels que le claquage diélectrique, la circulation du pétrole dans les roches poreuses. Le caractère fractal est observé dans des phénomènes a priori si différents qu'il existe un lien physique fort entre toutes ces manifestations. Tous ces processus présentent un caractère irréversible fortement marqué. L'aspect fractal que peuvent prendre les formes mises en jeu semble être la réponse adéquate à des processus irréversibles marqués par la dissipation d'énergie. Ces contraintes physiques exercées impliquent un changement radical, non de la structure microscopique, mais de la métrique macroscopique des formes.

II-A-2-c) Extension du concept de dimension

Au fur et à mesure que la connaissance des objets fractals s'élargissait, il a fallu mettre au point des outils adaptés pour les caractériser. Les algorithmes mis au point pour déterminer la dimension de Hausdorff-Besicovitch ne donnent pas toujours de résultat satisfaisant dans des cas généraux. C'est pourquoi d'autres méthodes ont été mises en oeuvre, donnant une précision variable [49,50].

Ces méthodes ne fournissent pas la dimension de Hausdorff mais d'autres dimensions définies indépendamment. On rencontre ainsi la dimension de Minkovski-Bouligand définie à partir d'un recouvrement de la forme fractale par une saucisse d'épaisseur décroissante. Un recouvrement effectué avec des boules disjointes conduit à obtenir la dimension dite d'empilement [30]. Pour des formes naturelles présentant un caractère fractal approché, ces dimensions sont en général différentes. Elles coïncident dans le cas de formes déterministes autosimilaires par construction.

Considérer la dimension fractale ne suffit en général pas, et ceci pour plusieurs raisons. La dimension fractale ne fournit qu'une information moyenne sur la forme fractale. Nous verrons par la suite que deux formes de même dimension fractale peuvent avoir un aspect très différent. C'est pourquoi on a défini d'autres paramètres comme la dimension d'étalement ou la lacunarité afin de caractériser la distribution de matière et la connectivité d'une forme fractale [43]. La seconde raison est que la dimension fractale caractérise la frontière de l'objet. Les processus physiques peuvent dépendre du contenu de l'objet qui est représenté par la dimension dite de masse Δ_M [30].

Elle est définie comme suit. Si λ est le rayon d'une boule centré sur l'objet, la masse sera mesurée de la manière suivante :

$$M \approx \lambda^{\Delta_M} \quad (2-5)$$

Or le contenu géométrique de l'objet dans un espace de dimension topologique d est donné par :

$$C \approx \lambda^d \quad (2-6)$$

La densité relative de l'objet par rapport à son support est donc

$$M/C \approx \lambda^{-\zeta} \quad (2-7)$$

avec $\zeta = d - \Delta_M$. ζ est appelé la codimension. Elle est associée à des propriétés intensives de l'objet et caractérise l'interaction de la forme fractale avec son environnement.

On a donc pu assister au cours de ces dernières années à une transformation profonde de notre appréhension de la nature hétérogène, irrégulière. La géométrie fractale a permis de réaliser que ce sont bien les formes irrégulières, rugueuses qui constituent la règle et les formes lisses et droites l'exception. Même si ce fait était admis pour les formes naturelles, ce n'était pas le cas pour les objets physiques ou les formes mathématiques. Jusqu'ici on pensait avoir le droit de linéariser n'importe quelle forme ou n'importe quelle équation pour faire ressortir un comportement valable dans un domaine limite. On réalise aujourd'hui combien une telle démarche est dangereuse car elle consiste au bout du compte à briser l'invariance d'échelle qui peut exister et donc interdire la mise en évidence d'effets macroscopiques dont on verra qu'ils peuvent être importants.

Les monstres mathématiques créés au tournant de ce siècle illustrent le fait que c'est désormais la ligne droite qui doit être vue comme l'exception. C'est bien parce que jusqu'à présent on a considéré des objets suffisamment réguliers (continus, différentiables) qu'on s'imaginait que les formes ne vérifiant pas ces propriétés ne jouaient aucun rôle en mathématiques ou en physique. A ce titre, la géométrie fractale ne se limite pas à des objets mais bien à des espaces qui semblent constituer aujourd'hui une nouvelle généralisation des géométries euclidienne ou riemanniennes. Les formes fractales ne seraient dans ce cadre qu'une manifestation de la non-différentiabilité de la nature. Se placer en espace fractal revient à s'affranchir de l'hypothèse de Gauss qui consiste à ne considérer que des espaces hyperboliques et elliptiques localement euclidiens [41].

Au cours du travail que nous avons effectué, nous avons été guidés par un souci constant de bien maîtriser la génération d'objets fractals. C'est ainsi que nous allons montrer dans ce qui suit qu'il peut exister pour les premiers ordres d'itération un choix de construction de formes fractales à partir d'un même élément de base et que les caractéristiques de ce choix sont liées aux

Deuxième partie : les objets fractals

groupes de symétrie des formes considérées. Nous entrons là dans un domaine inconnu dont ce travail constitue la première exploration. Cette exploration sera facilitée par notre volonté de créer physiquement des formes fractales.

II-B) Avancées dans la paramétrisation

Notre souci constant a été de contrôler parfaitement la géométrie et la structure des objets réalisés. C'est pourquoi nous n'avons envisagé que la génération d'objets fractals déterministes. L'étude entreprise nous a conduits à envisager trois types d'objets fractals ainsi qu'à montrer le rôle décisif de la théorie des groupes dans la génération de ces formes. Certaines tentatives de paramétrisation de ces objets ont été opérées.

II-B-1) Classification des constructions déterministes d'objets fractals autosimilaires

Il est possible dans un espace de dimension d de générer des objets à partir de deux types d'initiateur. Cet initiateur peut être de dimension topologique égale à d : on parle alors de construction par creusement. Il peut aussi être de dimension topologique strictement inférieure à d : il s'agit alors d'une construction par croissance.

Dans ce qui suit, nous allons présenter successivement les deux types de construction, ainsi qu'un troisième type qui permettra de créer un lien entre les deux premiers.

II-B-1-a) Objets fractals creux

Le principe de construction de ces objets est le suivant : on part d'un polygone quelconque du plan appelé forme d'ordre 0. On découpe à l'intérieur de ce polygone p polygones qui sont les images du polygone initial par des homothéties de rapport ρ composées ou non à des rotations. La forme ainsi obtenue est dite d'ordre 1, ou générateur. On applique à l'ordre suivant la même procédure à chacun des polygones créés et ainsi de suite. Cette méthode peut être nommée "par creusement" car à chaque itération, on retire une partie (surface dans le plan) de la forme déjà construite. On remarque que la construction fractale est directe puisqu'on agit immédiatement sur des portions de surface. La dimension fractale de la figure obtenue est donnée par la formule :

$$D = \frac{\ln p}{\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)} \quad (2-8)$$

Nous fournissons un exemple de cette construction. A chaque itération, on remplace un pentagone régulier par six pentagones placés dans les coins et au centre du pentagone dont ils sont issus. La dimension de cette forme est

$$D = \frac{\ln 6}{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} \cong 1.86. \text{ Sur la figure 3 on a représenté le mode de construction,}$$

ainsi que les formes obtenues aux ordres 1, 2 et 3.

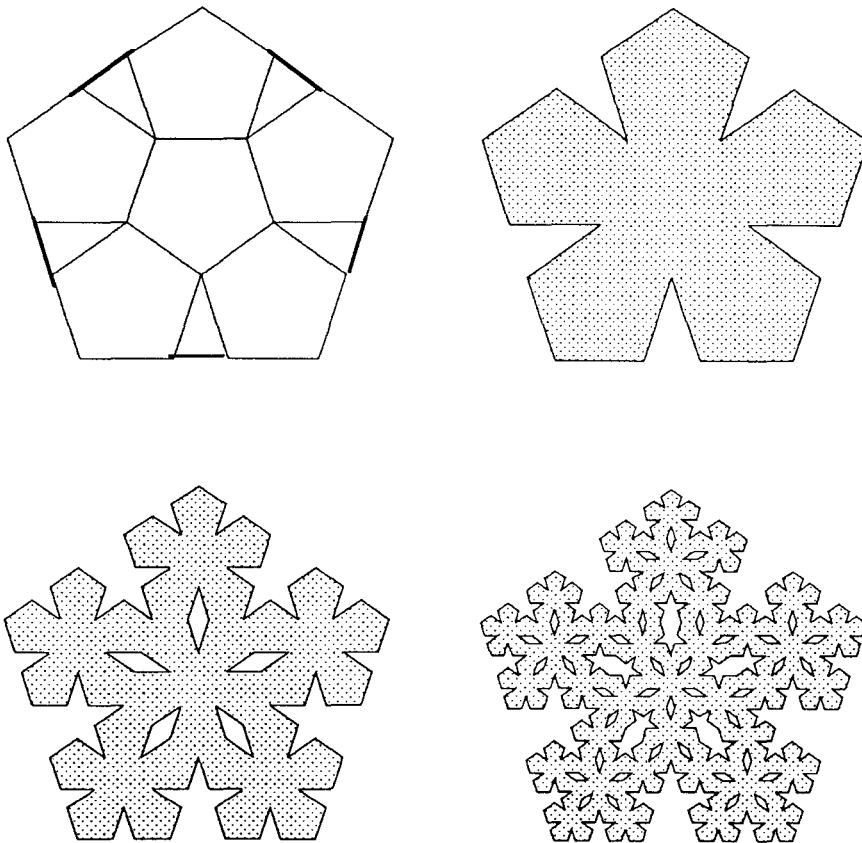


Figure 2-3 : forme fractale construite par creusement.

L'objet obtenu à l'ordre d'itération infini (l'objet fractal) possède une surface nulle. En effet, si S_n désigne la surface de l'objet construit à l'ordre n , on obtient aisément une relation de récurrence sur S_n en considérant que l'objet d'ordre $n+1$ est composé de p objets d'ordre n homothétiques dans un rapport ρ , donc :

$$S_{n+1} = p\rho^2 S_n \quad (2-9)$$

Or la construction fractale se fait de telle sorte que $p\rho^2 < 1$ car on retire "de la matière" à l'objet bidimensionnel à chaque itération. On a par exemple dans le cas présent $p\rho^2 = 6 \cdot \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^2 = 21 - 9\sqrt{5} \cong 0,875 < 1$.

Il en résulte que l'objet final est de surface nulle, mais n'est pas vide. En effet, il contient les sommets de tous les pentagones intervenant dans la construction. L'objet fractal construit par creusement n'a pas d'existence solide. Il n'est qu'une poussière, un squelette de mesure nulle, si on parle de mesure classique sur l'espace dans lequel est construit l'objet.

Ce qui a été vu ici dans le cas bidimensionnel reste valable dans l'espace. Il suffit pour cela de remplacer les termes "polygone" par "polyèdre", "surface" par "volume".

On peut citer l'exemple de l'éponge de Menger, construite itérativement de la manière suivante :

- on part d'un cube qu'on divise en 27 cubes,
- on retire 7 des cubes, à savoir le cube central et les six cubes situés aux centres des faces du cube initial.

On obtient l'objet représenté sur la figure 4. Lorsque l'ordre d'itération augmente, le volume de l'objet tend vers 0. Il tend à disparaître, même si la charpente de l'objet demeure : les arêtes de tous les cubes apparaissant à tout ordre d'itération appartiennent à l'objet.

Il existe aussi des objets fractals déterministes dont la mesure ne devient pas nulle lorsque l'ordre d'itération tend vers l'infini. Nous allons les examiner dans le paragraphe suivant.

II-B-1-b) Objets fractals construits par croissance

Le type de construction est ici bien différent. Nous allons d'abord le définir dans le plan. Contrairement au cas précédent, on agit maintenant directement sur des segments et non sur des surfaces. Ceci nécessite la donnée de deux éléments :

- Un segment encore appelé forme d'ordre 0 qui sera le support de la figure construite. On le pose par convention de longueur 1.
- Une application f qui à chaque segment associe un ensemble de p segments de longueur ρ formant une ligne brisée telle que les extrémités de cette ligne coïncident avec les extrémités du segment initial. On obtient la forme dite d'ordre 1, encore appelée forme de base.

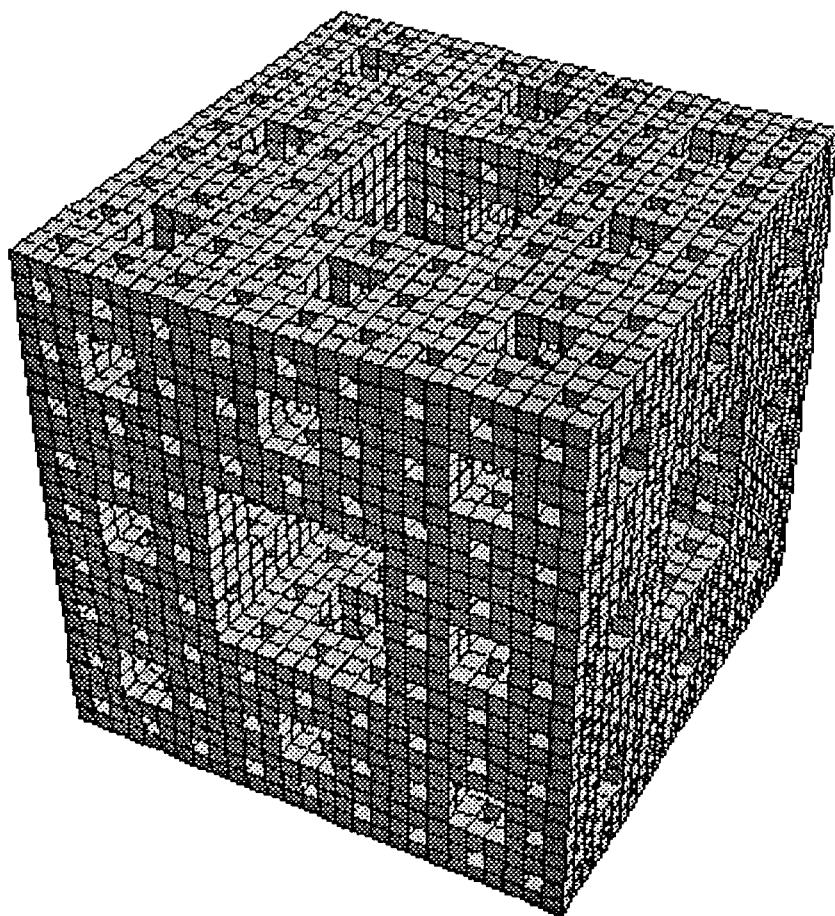


Figure 2-4 : éponge de Menger. C'est une généralisation en dimension 3 du tapis de Sierpinski.

Aux ordres suivants, on applique la même procédure à chacun des segments existants. Une forme d'ordre 2 sera par exemple composée de p formes de base. Un choix *ad hoc* de la forme de base et du générateur permet à l'ensemble généré de tendre vers une forme connexe à caractère fractal lorsque l'ordre d'itération tend vers l'infini.

La forme générée à l'ordre n est une ligne brisée dont les segments sont tous de longueur ρ^n . Pour obtenir une surface, nous devons mettre plusieurs

formes d'ordre n bout à bout, ce qui revient à former au départ un polygone dont chaque côté sera considéré comme une forme d'ordre 0 indépendante. On choisit en général un polygone régulier. On a présenté ci-dessous l'exemple du flocon de Von Koch. Sur la figure 5 on a décrit le mode de construction et sur la figure 6 la forme totale aux ordres 0, 1 et 3.



Figure 2-5 : à tout ordre d'itération, remplacement de chaque segment de longueur 1 par $p=4$ segments de longueur $1/3$.

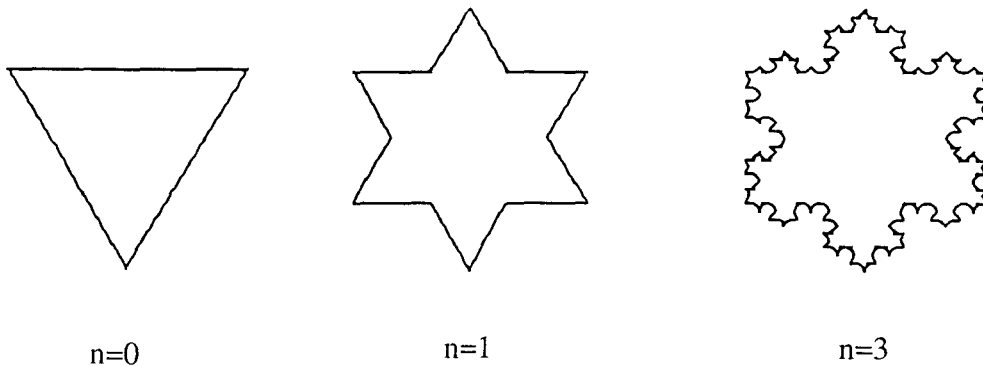


Figure 2-6 : flocon de Von Koch généré à partir d'un triangle équilatéral comme initiateur.

II-B-1-c) Construction par éclatement

Les deux types examinés précédemment ne constituent pas à eux seuls l'ensemble des constructions déterministes d'objets fractals autosimilaires. Nous fournissons ici une construction qui représente une généralisation de la construction par creusement. Le principe est à l'initialisation le même (on opère sur des objets de même dimension topologique que l'espace considéré). Cependant on supprime la condition selon laquelle les répliques de l'initiateur constituant la forme discrète d'ordre 1 sont toutes incluses dans l'initiateur. La forme va ainsi pouvoir sortir du périmètre autorisé lors de la construction par creusement. C'est pourquoi cette construction est appelée construction par éclatement.

Nous allons d'abord présenter ce type de construction sur un exemple simple. L'itération consiste à remplacer le carré ABCD par les deux carrés EFGA et HIBG.

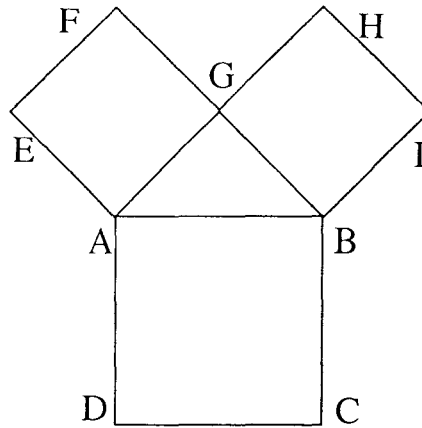


Figure 2-7 : génération d'une forme plane par éclatement.

Les formes d'ordre 5 et 6 sont représentées sur les figures 8a et 8b respectivement. On obtient ici une forme morcelée, dont le caractère fractal n'est pas évident *de visu*. Bien qu'elle soit composée de carrés, cette forme tend vers une poussière dans le plan. De plus, un calcul de la dimension selon la formule (8) donne avec $p=2$ et $\rho = 1/\sqrt{2}$

$$D = \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{2})} = 2.$$

Ce résultat semble aberrant car l'objet ne remplit pas du tout le plan comme il devait le faire lorsque $D=2$. Ceci s'explique par le fait que la surface de l'objet construit à l'ordre n (somme des surfaces des carrés) est bien égale à la surface du carré de départ. Simplement, ce carré de départ s'est morcelé et répandu dans le voisinage. C'est parce qu'on a permis à la forme d'ordre 1 de s'étendre au delà du périmètre de l'initiateur que la forme s'est ainsi étalée dans le plan. Dans ce cas, la relation précédente donnant la dimension fractale n'est plus pertinente.

Une autre propriété intéressante de la construction par éclatement est qu'il est possible d'associer à la forme fractale initiale F_1 une nouvelle forme fractale F_2 en considérant la réunion des formes F_1 construites à tout ordre d'itération. Les formes obtenues dans le cas ci-dessus sont représentées sur la figure 9.

Il est à noter que cette nouvelle construction présente un lien avec la construction par croissance. En effet, si on ne considère que les générateurs, il est parfois possible d'associer à un générateur "par éclatement" un générateur "par croissance". Une condition suffisante est que le générateur "par éclatement"

soit connexe et qu'on puisse extraire un chemin en forme de ligne brisée sur ce générateur en prenant un des côtés de chaque polygone, à la condition que chaque côté soit l'image d'un seul et même côté du polygone initial par les p opérations définissant la génération. Ces conditions sont illustrées sur la figure 10. Dans ce cas le problème de détermination de la dimension est résolu car on peut se ramener au cas par croissance.

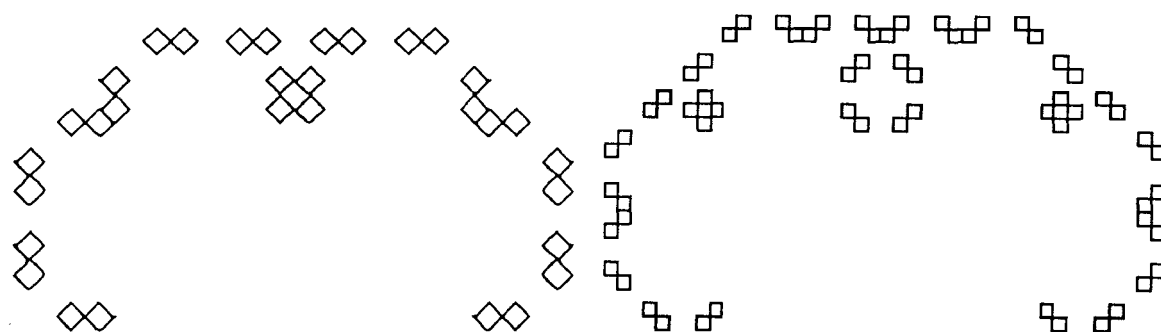


Figure 2-8 : formes obtenues aux ordres 5 et 6 à partir du générateur représenté en figure 7.

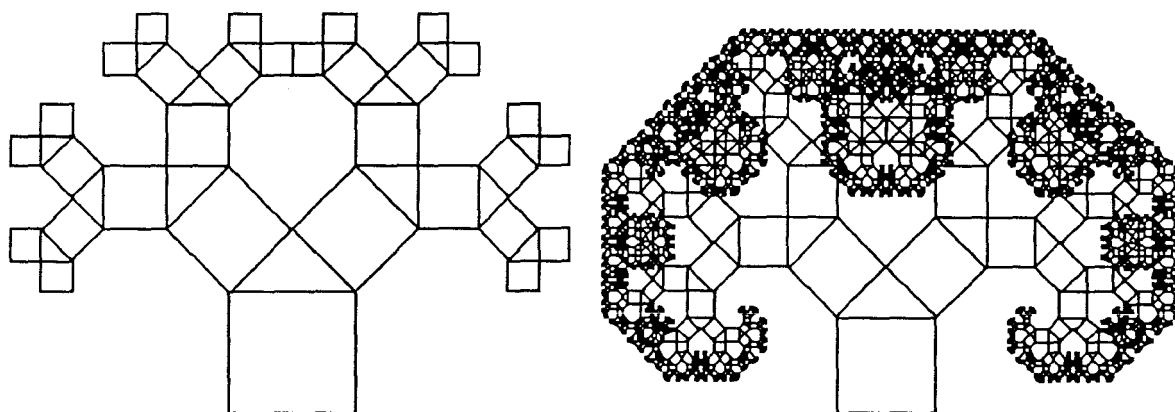


Figure 2-9 : formes obtenues par réunion des formes d'ordre 0 à n générées dans l'exemple de la figure 7. Ici on a $n=4$ et $n=10$ respectivement.

Considérons le générateur de construction par éclatement représenté sur la figure 10a. On remplace le carré ABCD par deux carrés identiques AEBF et EBFA. On lui associe le générateur de type croissance représenté sur la figure 10b. Dans ce cas, la construction consiste à remplacer le segment [AB] par les segments [AE] et [EB]. La condition de construction mentionnée plus haut, à savoir que les segments [AE] et [EB] formant la ligne brisée sont les images d'un même côté du polygone initial ([AB] dans ce cas), est bien vérifiée.

Les formes d'ordre 10 résultantes sont représentées sur les figures 11a et 11b. On observe une très forte analogie entre les deux ensembles. En effet pour

constituer la forme de la figure 11b, on ne conserve qu'un côté de chaque carré composant la figure 11a. On peut affirmer que l'une représente le squelette de l'autre.

Il demeure donc possible, sous certaines conditions de connectivité du générateur, d'associer à toute forme construite par éclatement une forme construite par croissance. La croissance vient bien du fait qu'on peut "sortir de l'initiateur".

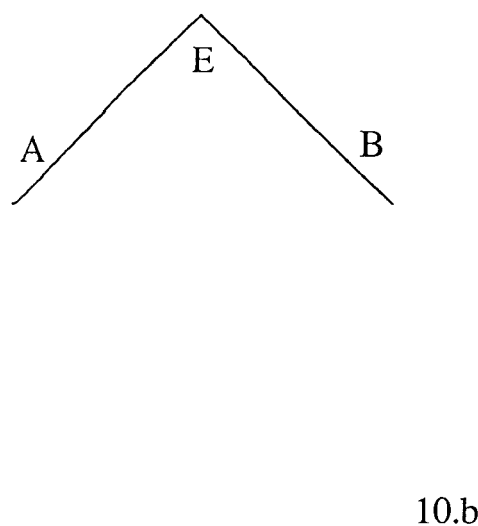
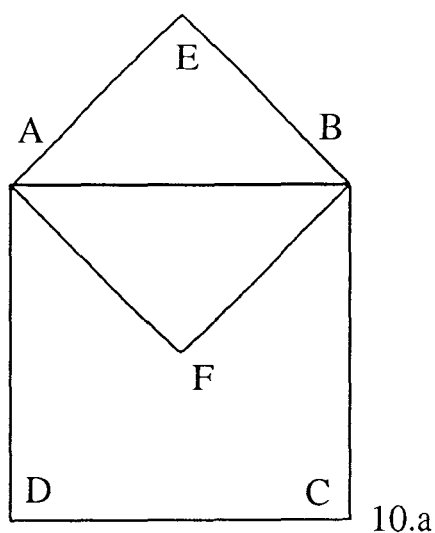


Figure 2-10 : illustration par les générateurs de la correspondance entre construction par croissance (a) et par éclatement (b).

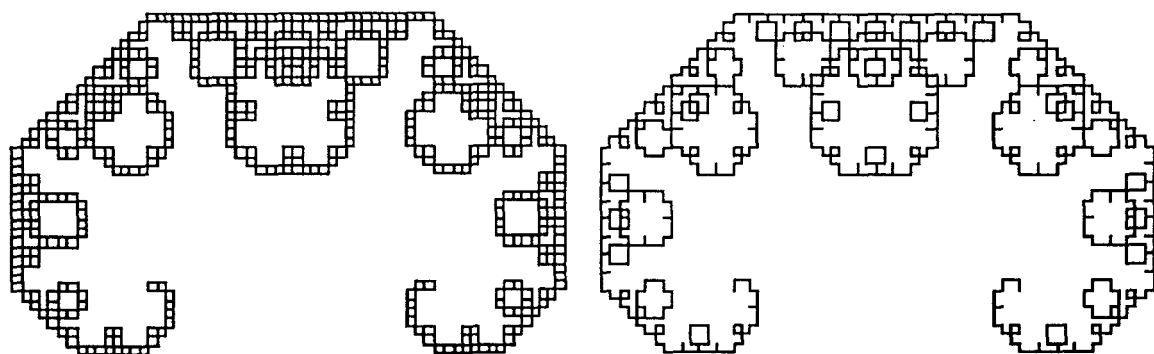


Figure 2-11 : illustration par les formes itérées de la correspondance entre construction par croissance et par éclatement.

Notons que réciproquement, il est possible de transformer une forme construite par croissance en une forme construite par éclatement. Ceci se fait en associant à l'initiateur et à chaque segment du générateur un polygone dont l'un des côtés appartient à la forme considérée. On constate que dans ce cas, il y a

plusieurs solutions. On peut en effet décider du nombre de côtés du polygone, et de quel côté du générateur il se trouve. On donne sur la figure 12 l'exemple d'une forme éclatée apparentée au flocon de Von Koch et sur la figure 13 la forme d'ordre 4.

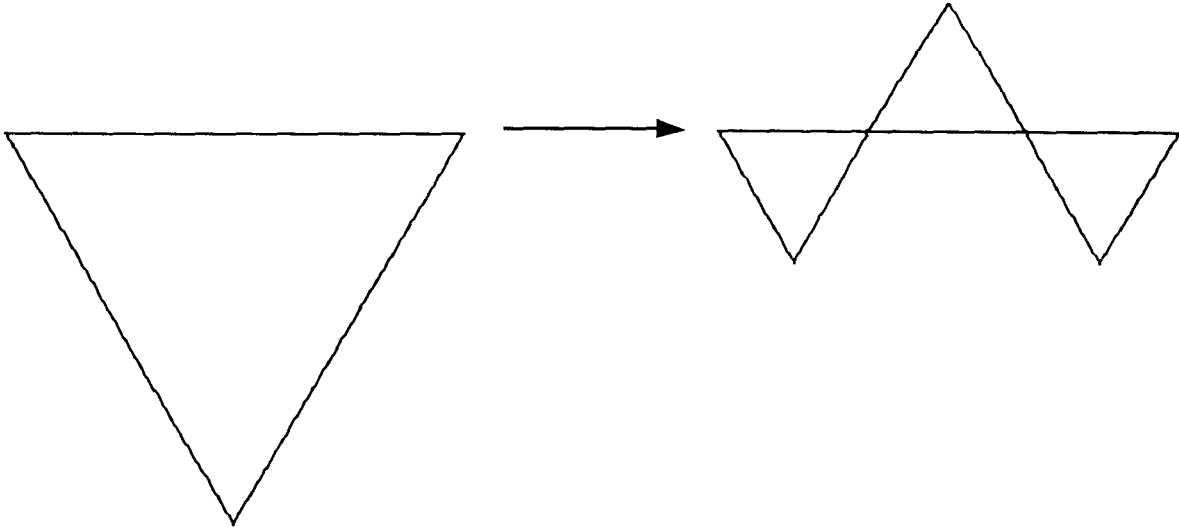


Figure 2-12 : génération du flocon de Von Koch par construction par éclatement.
Chaque triangle est remplacé par trois triangles

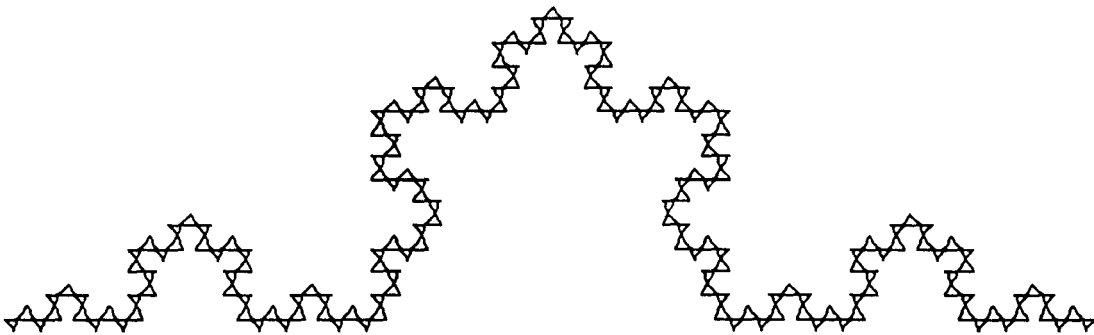


Figure 2-13 : flocon de Von Koch obtenu par éclatement

On peut conclure cette présentation en rappelant l'existence de trois types de construction d'objets fractals plans ou spatiaux. L'un des intérêts de la construction par éclatement est de lier de façon continue la construction par creusement et la construction par croissance. Il nous faut examiner à présent non plus les méthodes mais les résultats des constructions en essayant de répondre à la question suivante : quel type d'information un objet fractal construit à un ordre d'itération donné contient-il?

II-B-2) Multiplicité des formes fractales issues d'un même générateur

La génération d'objets fractals, tout en étant le résultat d'une procédure automatique et déterministe, présente des aspects complexes. Nous considérons ici le nombre de formes constructibles à partir d'un initiateur et d'un générateur donné. Nous allons voir que ce nombre, qui augmente en fonction de l'ordre d'itération est souvent égal à l'unité, mais peut être plus élevé. Ce nouveau paramètre n'est pas sans intérêt car il donne une "mesure" des choix de construction autorisés de l'objet à chaque ordre d'itération. Il est donc lié à la complexité intrinsèque de l'objet.

Dans la suite nous allons d'abord examiner le cas des formes construites par croissance. Il est plus simple à étudier car dans ce cas, tous les initiateurs sont des segments.

II-B-2-a) Cas des formes planes construites par croissance

On considère la forme de Peano (de dimension fractale 2) représentée aux ordres 1 et 2 sur la figure 14 (la forme d'ordre 0 est le segment $[AB]$). Lorsque nous parcourons le trajet ACDEFB, nous observons que les portions de la forme d'ordre 2 comprises entre C et D, D et E, F et B sont bien déduites de celle d'ordre 1 comprise entre A et B par des homothéties composées avec des rotations d'angles respectifs les angles que font les vecteurs \mathbf{CD} , \mathbf{DE} et \mathbf{FB} avec le vecteur \mathbf{AB} . En revanche, les portions comprises entre A et C, E et F ne sont déduites du générateur que par des homothéties composées avec des rotations ainsi que des symétries centrales de centres respectifs les milieux de $[AC]$ et $[EF]$. On voit donc que dans le passage de la forme d'ordre 1 à celle d'ordre 2, une série de choix quant à l'image de chaque segment doit être effectuée.

Afin de préciser les caractéristiques de ces choix, on définit D_1 , médiatrice des deux points extrêmes du générateur, D_2 joignant ces deux points et le point O d'intersection des droites D_1 et D_2 (cf. figure 15). Au cours de l'itération chaque segment de la forme à l'ordre n est remplacé par le générateur à la seule condition que les deux extrémités du segment coïncident

avec celles du générateur. Ces deux points étant fixés il existe alors deux possibilités pour placer le générateur (de part et d'autre de D_2).

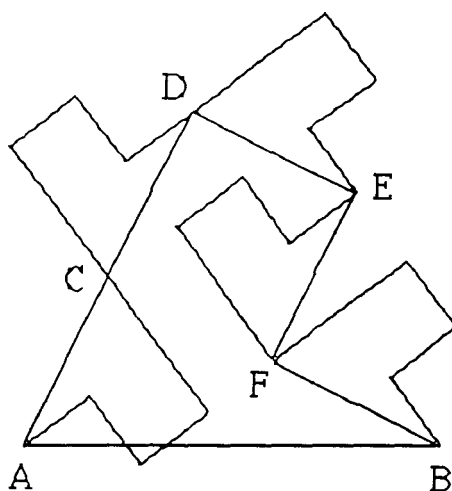


Figure 2-14 : la forme de Peano aux ordres d'itération 1 et 2.

Mais on peut également inverser l'ordre des extrémités. Cela fait donc en tout quatre possibilités, quatre formes homothétiques du générateur, mais d'orientations distinctes, que nous avons désignées symboliquement par les quatre lettres a, b, c, d :

- a est une forme choisie arbitrairement,
- b est la forme symétrique de a par rapport à D_1 ,
- c est la forme symétrique de a par rapport à O,
- d est la forme symétrique de a par rapport à D_2 .

Ces quatre formes relatives à la forme de Peano sont représentées sur la figure 15. Il existe donc pour un générateur donné non dégénéré, 4^p configurations distinctes (4 choix pour chacun des p segments). *Le générateur (ou forme à l'ordre 1) n'est pas suffisant pour définir la forme fractale. En revanche, la forme à l'ordre 2 détermine complètement la forme de la courbe à tout ordre d'itération supérieur.* Cette remarque est d'importance car elle explique que le traitement de tout objet fractal ne peut se limiter à l'étude d'un générateur. Une forme construite à partir d'un générateur de p segments est représentable à l'ordre n par une suite s_n de p^{n-1} lettres (un alphabet). Cette propriété n'est vraie que dans le cas des formes du plan construites par croissance. Il s'agit du seul cas où on peut regrouper les informations décrivant complètement un objet fractal dans une liste ordonnée. Par exemple,

la forme de Peano ci-dessus est associée à la suite $s_1=a$ à l'ordre 1, à la suite $s_2=caaca$ à l'ordre 2. On appelle "configuration" la suite s_2 .

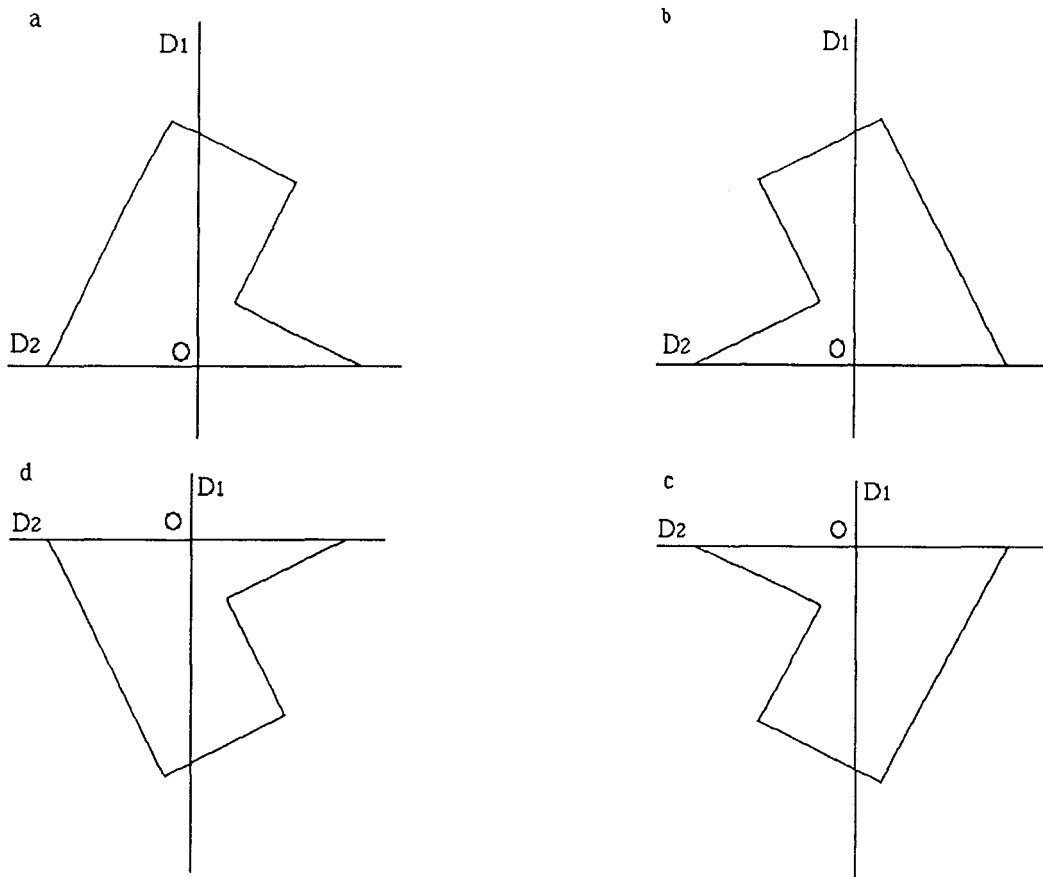


Figure 2-15 : les quatre configurations abcd associées à un générateur.

Nous constatons que deux configurations distinctes issues d'un même générateur peuvent mener à deux courbes complètement différentes, même si elles ont la même dimension fractale. D'après le générateur de la figure 15 sont dessinées deux courbes de Peano différentes. Elles sont représentées sur la figure 16 (configuration caaca) et 17 (configuration dbbdb).

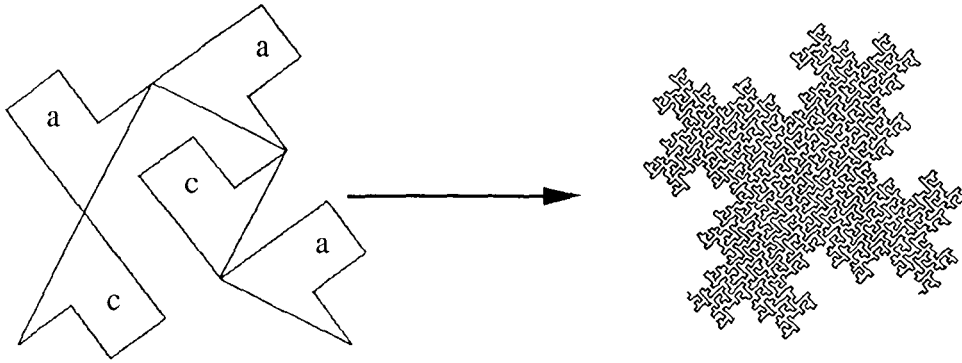


Figure 2-16 : gauche : générateur et forme d'ordre 2 associés à la configuration caaca ; droite : forme d'ordre 5. A l'ordre infini, on a une courbe de Peano : la courbe recouvre complètement une certaine région du plan.

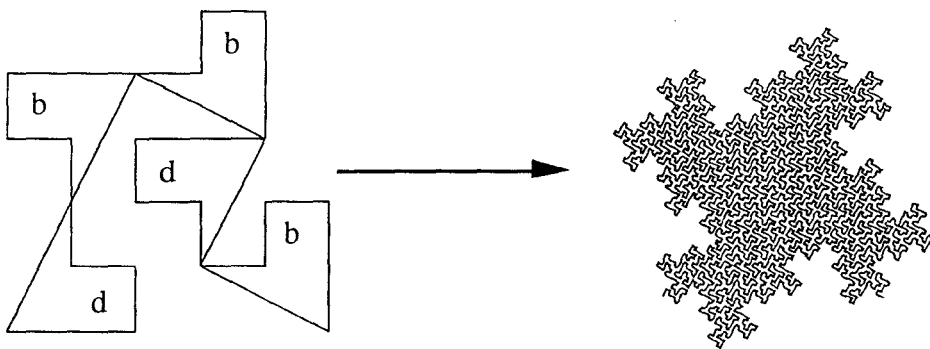


Figure 2-17 : gauche : le même générateur que sur la figure 16 et la forme d'ordre 2 associée à la configuration dbbdb ; droite : forme d'ordre 5 correspondante, différente de la forme d'ordre 5 de la figure 16.

II-B-2-b) Règles grammaticales régissant les suites de configurations

Il apparaît naturel que la détermination des termes de s_n soit soumise à des contraintes de croissance, c'est-à-dire à des règles définissant l'alphabet. Nous allons exposer ces règles dans le cas de la configuration définie par la relation $g(a)=acb=s_2$, en considérant un générateur de trois segments (cf. figure 18). g est l'application équivalente à f définie précédemment, mais appliquée à l'ensemble symbolique des configurations et non au plan.

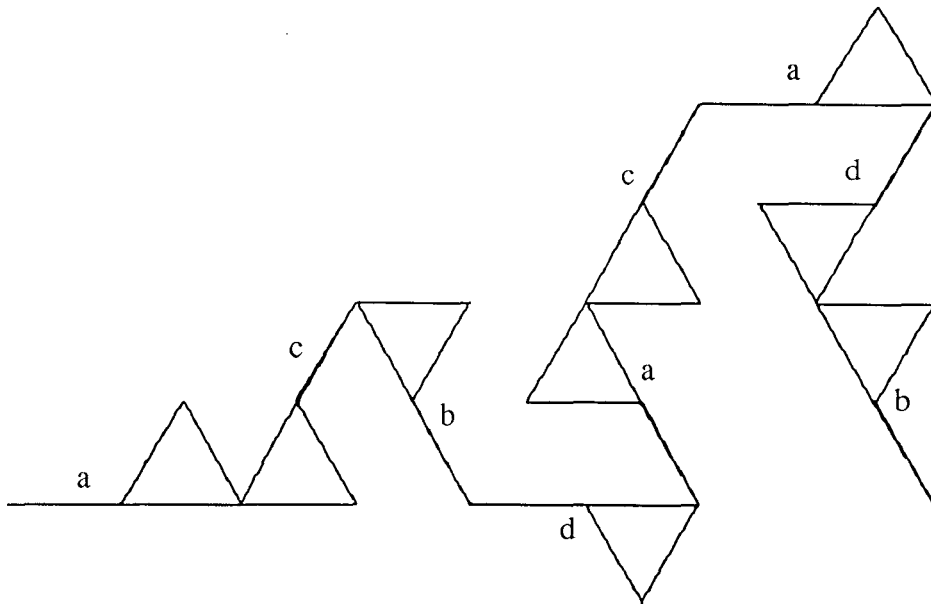


Figure 2-18 : suite de configurations sur une forme d'ordre 2.

A l'ordre 3, il faut pour déterminer la suite de configurations s_3 savoir que vont devenir les motifs c et d de la même façon qu'on a vu que a donnait la suite $s_2 = acb$. On a $s_3 = g(a)g(c)g(b) = acb g(c) g(b)$. Le problème consiste à déterminer $g(b)$, $g(c)$ et $g(d)$ connaissant $g(a)$.

Pour trouver l'image de d, on conserve la suite s_2 et on applique à chacun de ses termes la transformation $a \rightarrow d, d \rightarrow a, b \rightarrow c, c \rightarrow b$. Par exemple, ici $g(d) = dbc$. Ceci revient à prendre l'image de chaque configuration par la symétrie d'axe D_2 .

Pour trouver l'image de b, on inverse l'ordre de la suite s_2 et on prend l'image de chaque configuration par la symétrie d'axe D_1 , définie par les relations $a \rightarrow b, b \rightarrow a, c \rightarrow d, d \rightarrow c$. Ici, la suite inversée de s_2 est bca et $g(b) = adb$.

Pour trouver l'image de c, on inverse l'ordre de la suite s_2 et on prend l'image de chaque configuration par la symétrie de centre O, définie par les relations $a \rightarrow c, c \rightarrow a, b \rightarrow d, d \rightarrow b$. Ici, la suite inversée de s_2 est bca et $g(c) = dac$.

A partir d'une relation constitutive $a \rightarrow acb$, nous avons décrit entièrement l'évolution de chaque motif :

$$a \rightarrow a c b \quad b \rightarrow a d b \quad c \rightarrow d a c \quad d \rightarrow d b c$$

Il a fallu d'abord inverser s_2 pour déterminer l'image de b ou c . En effet, sur a et d le motif est parcouru dans le même sens que le segment initial qui représente la forme d'ordre 0 (de l'extrémité gauche vers l'extrémité droite sur les figures 15a et 15d). Sur b et c en revanche, les deux points extrêmes sont inversés et le motif est parcouru en sens inverse du sens précédent (cf. figures 15a et 15d). Il faut donc quand on en cherche l'image la remettre dans le bon sens.

A l'ordre 3 on aura donc $s_3=acb dac adb$ (cf. figure 18).

II-B-2-c) Description de la courbe fractale à tout ordre d'itération

Nous expliquons maintenant dans ce chapitre comment obtenir une description complète d'une courbe fractale construite à un ordre d'itération quelconque, connaissant le générateur et la suite de configurations. Il faut pour cela connaître toutes les extrémités des segments composant la ligne brisée fractale. Or une forme fractale dont le générateur contient p segments possédera à l'ordre d'itération n $m=p^n$ segments ou $m+1$ points, $A_{n,0}, A_{n,1}, \dots, A_{n,m}$. Nous utiliserons la notation complexe très pratique en la circonstance.

Certaines paramétrisations des courbes fractales planes ont déjà été tentées [41,51,52]. Quel que soit l'ordre d'itération, les affixes des points extrêmes sont $ZA_{n,0}=0$ et $ZA_{n,m}=1$. Chaque segment de la courbe possède la même longueur ρ^n et peut être orienté. Il est donc possible de le représenter par $\omega_{n,q}$ avec $q \in [1,m]$, $\omega_{n,q}$ étant l'angle entre le segment et l'axe des abscisses. L'affixe du q -ième segment est alors donné par :

$$ZA_{n,q} = \rho^n \sum_{k=1}^q e^{i\omega_{n,k}} \quad (2-10)$$

Il s'agit maintenant de déterminer complètement la suite $(\omega_{n,k})_{(k=1, \dots, q)}$. Le générateur (la forme d'ordre 1) est décrit par la suite $s_1=(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_p)$. Chaque configuration peut être associée à une suite d'angles par les règles :

$$\begin{cases} a \rightarrow (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_p) \\ b \rightarrow (-\theta_p, -\theta_{p-1}, \dots, -\theta_{p-i+1}, \dots, -\theta_1) \\ c \rightarrow (\theta_p, \theta_{p-1}, \dots, \theta_{p-i+1}, \dots, \theta_1) \\ d \rightarrow (-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_i, \dots, -\theta_p) \end{cases} \quad (2-11)$$

La façon dont on obtient les images de b, c et d à partir de celle de a est similaire à celle utilisée précédemment pour l'alphabet. Nous emploierons pour les suites d'angles, la notation σ . Faire une symétrie par rapport à D_1 ($a \rightarrow b$) consiste à inverser les angles dans la suite et à changer leur signe. Faire une symétrie par rapport à O ($a \rightarrow c$) consiste à inverser les angles dans la suite. Faire une symétrie par rapport à D_2 ($a \rightarrow d$) consiste à changer le signe des angles dans la suite.

Considérons par exemple le générateur décrit par la suite $(0, \pi/3, -\pi/3)$ ou plutôt $(0, 1, -1)$ et la configuration acb déjà étudiée plus haut. σ_2 possède neuf termes. Les trois premiers sont $(0, 1, -1)$ (a) ; les trois suivants sont $(-1, 1, 0)$ (c) ajoutés à l'angle $\pi/3$ (ou 1 ici) car on applique une rotation d'angle $\pi/3$ à toute la configuration a. Par conséquent, ces termes sont $(0, 2, 1)$ car $(0, 2, 1) = (-1, 1, 0) + (1, 1, 1)$. $(1, 1, 1)$ représente l'angle fait par le segment d'appui du motif élémentaire avec l'horizontale ($\pi/3$, cf. figure 18). Les trois derniers sont $(1, -1, 0)$ (b) ajoutés à l'angle $-\pi/3$ (ou -1 ici) à cause de la rotation plane appliquée à la configuration b. Les trois derniers termes sont donc $(0, -2, -1)$. $(0, -2, -1) = (1, -1, 0) + (-1, -1, -1)$. En fin de compte, on a $\sigma_2 = (0, 1, -1, 0, 2, 1, 0, -2, -1)$.

$(0, 1, -1) \rightarrow (0, 1, -1, 0, 2, 1, 0, -2, -1)$ est la traduction exacte et complète de $a \rightarrow acb$. $\sigma_3 = (0, 1, -1, 0, 2, 1, 0, -2, -1, 0, -1, 1, 2, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 1, -1, -2, -3, -1, 0, -2, -1)$ est de la même façon la liste d'angles de la courbe d'ordre 3.

La méthode est générale et est mieux décrite par un formalisme matriciel. La suite σ_n est donnée par :

Deuxième partie : les objets fractals

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_p) \\ \sigma_2 = \left(\sum_{i=1}^p a_{2,i,1} \theta_i, \sum_{i=1}^p a_{2,i,2} \theta_i, \dots, \sum_{i=1}^p a_{2,i,j} \theta_i, \dots, \sum_{i=1}^p a_{2,i,p^2} \theta_i \right) \\ \dots \\ \sigma_n = \left(\sum_{i=1}^p a_{n,i,1} \theta_i, \sum_{i=1}^p a_{n,i,2} \theta_i, \dots, \sum_{i=1}^p a_{n,i,j} \theta_i, \dots, \sum_{i=1}^p a_{n,i,p^n} \theta_i \right) \end{array} \right. \quad (2-12)$$

On voit apparaître ici les matrices : $A_n = \begin{pmatrix} a_{n,1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,1,p^n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & a_{n,i,j} & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n,p,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,p,p^n} \end{pmatrix}$

$$A_n \in M_{p,p^n}.$$

Nous illustrons cette méthode des matrices par l'exemple d'un générateur à 4 segments avec la configuration abcd. La matrice A_1 associée à σ_1 est :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il résulte de la méthode précédente (inversion de l'ordre des termes dans les cas b et c, changement de signe dans les cas b et d) que :

$$\sigma_2 = (2\theta_1, \theta_1 + \theta_2, \theta_1 + \theta_3, \theta_1 + \theta_4, \theta_2 - \theta_4, \theta_2 - \theta_3, 0, \theta_2 - \theta_1, \theta_3 + \theta_4, 2\theta_3, \theta_2 + \theta_3, \theta_1 + \theta_3, \theta_4 - \theta_1, \theta_4 - \theta_2, \theta_4 - \theta_3, 0)$$

A_2 va prendre la forme :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La façon dont on obtient A_2 à partir de A_1 est formellement la même que celle dont on obtient σ_2 à partir de σ_1 . Elle est donnée ci-dessous.

Considérons la matrice $L = (l_{i,j})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq r}$ et soit C l'application de M_{p,p^n} dans M_{p,p^n} définie par :

$C(L) = (l'_{i,j})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq r}$ avec $\forall i,j, l'_{i,j} = l_{i,p^n-j+1}$. Cette application inverse les colonnes de L .

Nous définissons également les matrices $B_{n,k} = (b_{k,i,j})$ de M_{p,p^n} avec $b_{k,i,j} = \delta_{i,k}$.

Dans l'exemple proposé, $A_1 \in M_{4,4}$; on peut mettre $A_2 \in M_{4,16}$ sous la forme $A_2 = (A_{2,1} A_{2,2} A_{2,3} A_{2,4})$ où $A_{2,1}, A_{2,2}, A_{2,3}, A_{2,4} \in M_{4,4}$ avec :

$$A_{2,1} = A_1 + B_{1,1}, A_{2,2} = -C(A_1) + B_{1,2}, A_{2,3} = C(A_1) + B_{1,3}, A_{2,4} = -A_1 + B_{1,4}.$$

Les matrices $B_{n,k}$ représentent les rotations à appliquer à chaque configuration.

Plus généralement, dès que nous connaissons A_n , A_{n+1} est composée de p matrices $A_{n+1,j} \in M_{p,p^n}$; $A_{n+1} = (A_{n+1,1}, \dots, A_{n+1,j}, \dots, A_{n+1,p})$. Considérons le j -ième terme de la suite de lettres définissant la configuration.

Si cette lettre est :

- a, alors $A_{n+1,j} = A_{n,j} + B_{n,j}$,
- b, alors $A_{n+1,j} = -C(A_{n,j}) + B_{n,j}$,
- c, alors $A_{n+1,j} = C(A_{n,j}) + B_{n,j}$,
- d, alors $A_{n+1,j} = -A_{n,j} + B_{n,j}$.

La suite σ_n est donnée par $\sigma_n = \sigma_1 A_n$, relation valable au sens du produit matriciel.

La méthode mise au point ici va nous permettre de résoudre dans certains cas le problème suivant : "étant donné un générateur caractérisé par une suite d'angles et une configuration, la courbe obtenue par itération est-elle une courbe fractale?" On entend par là le fait de savoir si la ligne brisée revient sur elle-même ou contient des points doubles. Cette question est

d'importance car en cas de réponse négative, on ne peut pourra réaliser d'objet fractal présentant cette frontière pour bord.

II-B-2-d) Conditions de chevauchement

Le travail effectué ci-dessus va nous permettre de répondre en partie au problème posé. Nous avons mis en évidence deux types bien distincts de chevauchement.

Le premier est appelé chevauchement angulaire. Il survient lorsque la valeur absolue de la différence entre deux angles consécutifs devient supérieure à π . Ceci ne change rien pour les deux segments concernés, mais l'intersection va alors se produire avec un segment contigu.

Ce cas est représenté sur la figure 19. On considère le générateur à trois segments défini par les trois angles $(0, \theta, -\theta)$ et la configuration aaa. Les deux branches de la courbe (entre A et C et entre C et D) se chevauchent car lorsque l'ordre d'itération n augmente, l'angle du segment de droite reste égal à θ tandis que celui du segment de gauche vaut $-(n-1)\theta$, donc tend vers moins l'infini quel que soit θ . Les deux branches de la courbe se chevauchent à leurs extrémités. Le même phénomène survient au point D.

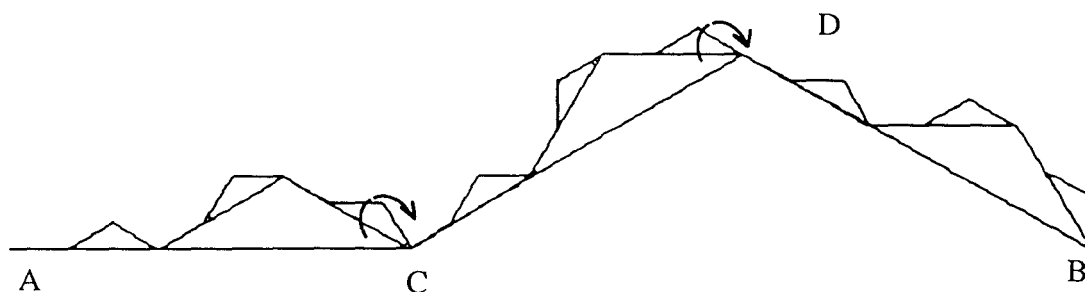


Figure 2-19 : le chevauchement angulaire survient au voisinage des points C et D.

Le second type est appelé chevauchement spatial. Des branches différentes de la courbe se chevauchent, mais pas à leurs extrémités. Un exemple est donné en figure 20. Dans ce cas, les conditions de chevauchement sont difficiles à extraire car deux suites de points (une sur chaque branche) convergent vers la même limite et dans la plupart des cas, il est difficile d'explicitier les deux suites.

Le problème du chevauchement angulaire est moins ardu et soluble dans tous les cas. A partir de la méthode ci-dessus, nous pouvons déterminer les angles intéressants. Il n'est pas nécessaire de connaître les p^n angles mais uniquement ceux définis par les segments aboutissant aux $(p-1)$ sommets intermédiaires du générateur autres que les points extrêmes (les points C et D dans le cas de la figure 19). Pour la configuration aaa, nous pouvons écrire la suite d'angles des quatre premiers ordres d'itération, en ne conservant que les angles utiles :

$$\begin{cases} (\theta, \varphi, \psi) \\ (2\theta, \dots, \theta + \psi, \theta + \varphi, \dots, \varphi + \psi, \theta + \psi, \dots, 2\psi) \\ (3\theta, \dots, \theta + 2\psi, 2\theta + \varphi, \dots, \varphi + 2\psi, 2\theta + \psi, \dots, 3\psi) \\ (4\theta, \dots, \theta + 3\psi, 3\theta + \varphi, \dots, \varphi + 3\psi, 3\theta + \psi, \dots, 4\psi) \end{cases} \quad (2-13)$$

Si n désigne l'ordre d'itération, la différence des angles aux points intermédiaires est :

$$\begin{cases} \alpha = \varphi - \theta + (n-1)(\theta - \psi) \\ \beta = \psi - \varphi + (n-1)(\theta - \psi) \end{cases} \quad (2-14)$$

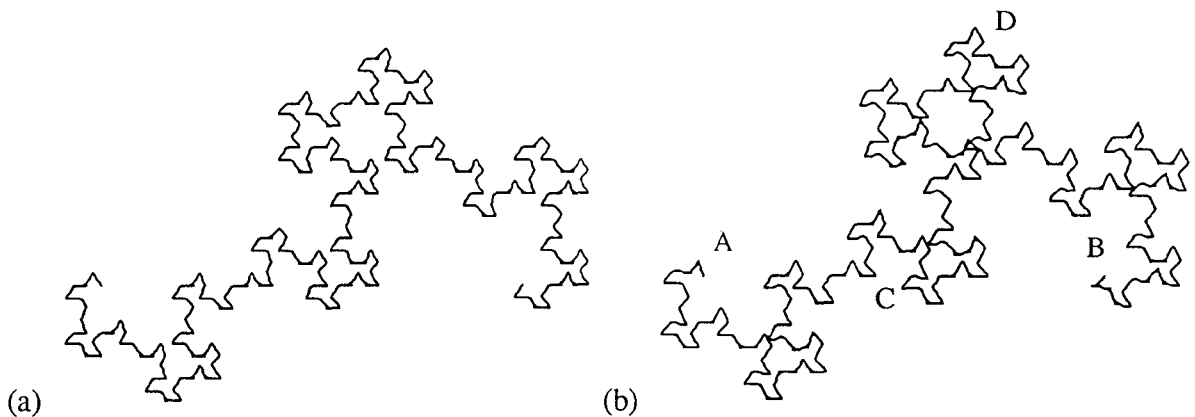


Figure 2-20 : deux courbes fractales de configuration caa, le générateur étant défini par la suite d'angles $(0, \theta, -\theta)$; (a) $\theta=60^\circ$, la courbe n'a pas de points doubles. (b) $\theta>60^\circ$, des points doubles apparaissent au milieu des branches issues des deux segments [CD] et [DB] du générateur.

Pour tout n , l'absence de chevauchement implique que $|\alpha|$ et $|\beta|$ doivent être inférieurs à π , donc $\theta=\psi$. De plus, on a également $|\varphi - \theta| < \pi$, mais cette condition est toujours vérifiée. Ceci prouve que, dans l'exemple présenté, il y a un chevauchement angulaire pour tout θ non nul.

Dans le plan, il a été possible de caractériser entièrement une forme par croissance par une suite de p lettres appelée configuration qui traduit le passage du générateur à la forme d'ordre 2. Nous avons ensuite donné les lois permettant de déterminer la suite de p^{n-1} lettres de la forme d'ordre n . Nous allons voir dans la suite que plusieurs configurations peuvent donner naissance à une seule et même forme géométrique. Il y a donc un facteur de dégénérescence. Ce phénomène sera observé dans tous les cas de construction.

II-B-2-e) Cas de dégénérescence

La fourniture d'un initiateur et d'un générateur associé ne suffit pas toujours à définir la forme fractale à tout ordre d'itération. Ceci est vérifié à la fois pour les formes "creuses" et pour les formes "construites par croissance" (cf. figures 21 et 22).

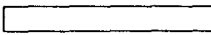



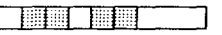





				n=0
				n=1
				n=2
				n=3

Figure 2-21 : multiplicité des formes fractales. La forme est obtenue en divisant un ruban en trois parties égales et en n'en conservant que deux. A l'ordre 2, plusieurs choix sont possibles quant à l'orientation des parties conservées.

Dans le premier cas (figure 21), le générateur peut engendrer deux formes d'ordre 2. En revanche, chacune de ces dernières ne fournit qu'une forme fractale à tout ordre supérieur. Nous disons que les formes sont séparées à l'ordre 2. Dans le second cas (figure 22), le générateur A_1 fournit plusieurs formes d'ordre 2, dont certaines ($A_{2,1}, A_{2,2}$) donnent une seule forme d'ordre 3 et d'autres ($A_{2,3}$) en donnent plusieurs. Toutes les formes constructibles sont apparues de manière différenciée, soit à l'ordre 2, soit à l'ordre 3. On dit qu'elles sont séparées.


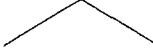


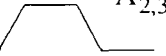
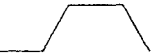
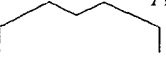
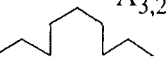
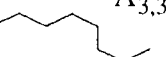
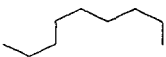
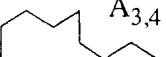
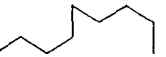
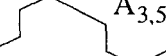
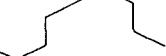

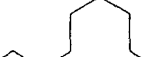
				A_0	$n=0$
				A_1	$n=1$
 $A_{2,1}$	 $A_{2,2}$	 $A_{2,3}$			$n=2$
 $A_{3,1}$	 $A_{3,2}$	 $A_{3,3}$			$n=3$
		 $A_{3,4}$			
		 $A_{3,5}$			
		 $A_{3,6}$			

Figure 2-22 : construction par croissance dans le plan. Un segment est remplacé par deux segments liés entre eux. A l'ordre 3, on a obtenu toutes les formes possibles.

On perçoit sur cet exemple simple le rôle tenu par les éléments de symétrie du générateur. Lorsque le générateur possède comme sur la figure 22 un axe de symétrie, certaines configurations s'identifient (on a ici $a \equiv c$ et $b \equiv d$). La forme $A_{2,1}$ admet pour configuration au choix aa , ab , ba ou bb . Le générateur peut aussi avoir le centre de symétrie O défini en figure 15. On a alors les relations ($a \equiv c$ et $b \equiv d$). En revanche, il ne peut avoir pour axe de symétrie la droite D_2 car dans ce cas le générateur formerait une ligne brisée fermée, un cas que nous ne considérerons pas. Nous allons montrer que dans les cas de dégénérescence, le nombre de configurations est inférieur à $4P$. Soit le générateur ayant pour suite d'angles $(\pi/3, -\pi/3)$. A l'ordre 2, il n'y a que deux choix pour chaque segment (figure 22).

Il n'existe que $2^2=4$ formes d'ordre 2. Il subsiste cependant une incertitude car une forme d'ordre 2 peut fournir plus d'une forme d'ordre 3. Dans l'exemple donné, deux des quatre formes d'ordre 2 ($A_{2,1}, A_{2,2}$) ont un axe de symétrie identique à celui du générateur ; elles fournissent chacune une forme d'ordre 3. Lorsque la forme d'ordre 2 ne possède pas d'élément de symétrie ($A_{2,3}$), elle peut donner naissance à deux formes d'ordre 3 différentes par segment (de $A_{3,3}$ à $A_{3,6}$), mais ces huit formes peuvent être

Deuxième partie : les objets fractals

associées deux par deux car celles dont les configurations sont opposées (par exemple ad et da) sont symétriques l'une de l'autre par symétrie de même axe que le générateur. Ceci conduit à $8/2+2=6$ formes vraiment distinctes. Soit u_p ce nombre exact de formes. Son expression est :

$$\begin{cases} p = 2k & : u_{2k} = 2^k + 2^{4k-1} - 2^{3k-1} \\ p = 2k + 1 & : u_{2k+1} = 2^{k+1} + 2^{4k+1} - 2^{3k+1} \end{cases} \quad (2-15)$$

La démonstration de ces égalités est immédiate. Si $p=2k$, nous avons deux choix par segments. Les formes d'ordre 2 symétriques sont déterminées par les k premiers termes, nous pouvons donc obtenir 2^k formes d'ordre 2 symétriques. De plus chaque forme d'ordre 2 est associée à $2^p=2^{2k}$ configurations car nous avons deux choix pour chaque lettre. Par exemple, aaa est équivalent à aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb. Il en résulte que parmi les 4^p configurations, $2^k \cdot 2^{2k} = 2^{3k}$ sont symétriques à l'ordre 2, et $4^p - 2^{3k} = 2^{4k} - 2^{3k}$ ne le sont pas. D'après la remarque précédente sur les formes d'ordre 3 non symétriques, nous obtenons finalement :

$$u_{2k} = 2^k + \frac{2^{4k} - 2^{3k}}{2} = 2^k + 2^{4k-1} - 2^{3k-1} \quad (2-16)$$

La preuve est similaire dans le cas $p=2k+1$.

Les travaux présentés ci-dessus nous conduisent à mettre en exergue ici une notion d'information contenue dans l'objet fractal. On constate sur les exemples fournis plus haut deux types de résultats. Lorsque le générateur ne possède pas d'élément de symétrie, il est susceptible de donner naissance à 4^p formes d'ordre 2. Mais alors chaque forme ne va donner naissance qu'à une forme unique à tout ordre supérieur. Toute l'information relative à la génération se trouve donc localisée dans le passage de l'ordre 1 à l'ordre 2. Au contraire, lorsque le générateur possède un élément de symétrie, il peut donner naissance à 4^p formes d'ordre 2. Parmi ces formes certaines sont susceptibles de donner naissance à plusieurs formes d'ordre 3. Il peut donc y avoir un choix à effectuer à deux niveaux. L'information inscrite dans l'objet fractal apparaît en partie dans le passage de l'ordre 1 à l'ordre 2 et en partie dans le passage de l'ordre 2 à l'ordre 3.

Deuxième partie : les objets fractals

Nous sommes parvenus ici à caractériser complètement du point de vue des configurations les courbes fractales planes construites par croissance. Cette étude ne peut être étendue simplement au cas des objets construits par creusement et à celui des objets tridimensionnels. C'est la théorie des groupes qui va permettre de faire un pas supplémentaire dans la compréhension de la génération fractale, et de retrouver les résultats déjà acquis.

II-B-3) Théorie des groupes et combinatoire des formes fractales

Nous allons maintenant établir le lien qui existe entre la construction d'objets fractals plans et la théorie des groupes. Nous avons constaté dans les exemples précédents qu'un initiateur et un générateur donnés peuvent donner naissance à une multitude de formes fractales. Pour désigner deux formes fractales construites à deux ordres consécutifs, nous emploierons dans la suite les vocables ici adéquats de "père" et "fils".

II-B-3-a) Définition de fonctions de comptage

Afin de préciser les caractéristiques de la construction fractale, nous définissons deux séries de nombres u_n et v_n :

- u_n est défini comme le nombre de toutes les formes différentes que nous pouvons construire à l'ordre n ,

- si parmi ces u_n formes, nous pouvons extraire certains sous-ensembles disjoints ayant la propriété suivante :

étant donné un élément d'un de ces sous-ensembles, il existe un groupe composé d'isométries ponctuelles telles qu'en appliquant toutes les isométries de ce groupe à cet élément, on décrit exactement tous les éléments de ce sous-ensemble. Le nombre de ces sous-ensembles est appelé v_n .

Les sous-ensembles sont disjoints car, si une forme F appartenait à deux ensembles différents A_1 et A_2 relatifs aux groupes G_1 et G_2 , alors il existerait une application du groupe produit $G_1 \times G_2$ permettant de passer d'un élément de A_1 à un élément de A_2 . F appartiendrait à un ensemble plus grand A dont le groupe associé serait $G_1 \times G_2$.

Par exemple nous avons dans le cas de la figure 21 :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 4 \text{ pour } n \geq 2 \end{cases} \quad u_n = v_n \text{ pour chaque } n.$$

Et pour le cas de la figure 22 :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 4 \\ u_n = 10 \text{ pour } n \geq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 3 \\ v_n = 6 \text{ pour } n \geq 3 \end{cases}$$

La différence entre u_n et v_n résulte du fait que deux des $u_2=4$ formes sont déduites l'une de l'autre par symétrie d'axe vertical. De la même façon, huit des $u_3=10$ formes sont déduites l'une de l'autre par cette même symétrie. Toutes les formes fournies ici sont numérotées d'après cette classification.

II-B-3-b) Présentation de certains groupes ponctuels de symétrie utiles

Soit une certaine forme géométrique définie comme un ensemble de points du plan. L'ensemble des isométries ponctuelles laissant cette forme globalement invariante constitue un groupe.

-Si cette forme ne possède pas d'élément de symétrie, alors son groupe ponctuel de symétrie associé est $C_1 = \{i\}$ où i représente l'application identité.

-Si cette forme ne possède qu'un axe de symétrie, alors son groupe ponctuel de symétrie associé est $D_1 = \{i, s\}$. s est appelé le générateur de D_1 . On veillera particulièrement dans la suite à ne pas confondre les générateurs d'un groupe, à savoir l'ensemble des éléments qui par composition, permettent d'obtenir tous les éléments de ce groupe, et d'autre part une forme géométrique appelée générateur qui désigne la forme d'ordre 1 dans la construction d'un objet fractal.

-Si cette forme est invariante par rotation r_k d'angle $2\pi/k$ et ne possède pas d'axe de symétrie, alors son groupe ponctuel de symétrie associé est $C_k = \{i, r_k, r_k^2, \dots, r_k^{k-1}\}$. r_k est appelé le générateur de C_k . r_k^j est une rotation d'angle $2\pi j/k$ est de même centre que celui de r_k .

-Si cette forme est invariante par rotation r_k d'angle $2\pi/k$ et possède k axes de symétrie passant chacun par le centre de rotation, alors son groupe ponctuel de symétrie associé est $D_k = \{i, r_k, r_k^2, \dots, r_k^{k-1}, s, sr_k, sr_k^2, \dots, sr_k^{k-1}\}$. D_k possède deux générateurs : r_k et s .

Nous allons voir que les choix existant dans le passage d'une forme fractale à son successeur dépendent de la nature des groupes de symétrie des formes considérées.

II-B-3-c) Cas des formes creuses

Pour bien illustrer la démarche employée, nous allons considérer successivement des initiateurs possédant 0, 1 ou 2 éléments de symétrie. Pour chaque cas, nous allons dénombrer les formes réalisables en fonction de l'ordre d'itération. Nous verrons que le dénombrement est d'autant plus complexe que le nombre d'éléments de symétrie de l'initiateur augmente.

Initiateur de groupe ponctuel de symétrie C_1

Choisissons comme initiateur un triangle de groupe ponctuel de symétrie C_1 . Nous le divisons en $p_m=4$ triangles homothétiques de l'initiateur dans le rapport $\rho=1/2$. Appliquer le générateur g revient à conserver p triangles parmi les p_m . p étant donné, il existe donc $u_1(p) = C_{p_m}^p$ choix de générateur. De plus, nous supposons que dans le cas des formes creuses, le générateur relatif au cas $p=p_m$ coïncide exactement avec l'initiateur.

Dans ce cas, quel que soit le générateur possédant p triangles, il n'existe qu'une application envoyant l'initiateur sur le générateur. Par conséquent, la donnée du générateur détermine la forme fractale à tout ordre. De plus, nous avons $u_n(p)=v_n(p)$ pour tous p et n .

Les cas $p=0$ et $p=4$ sont triviaux et sans intérêt.

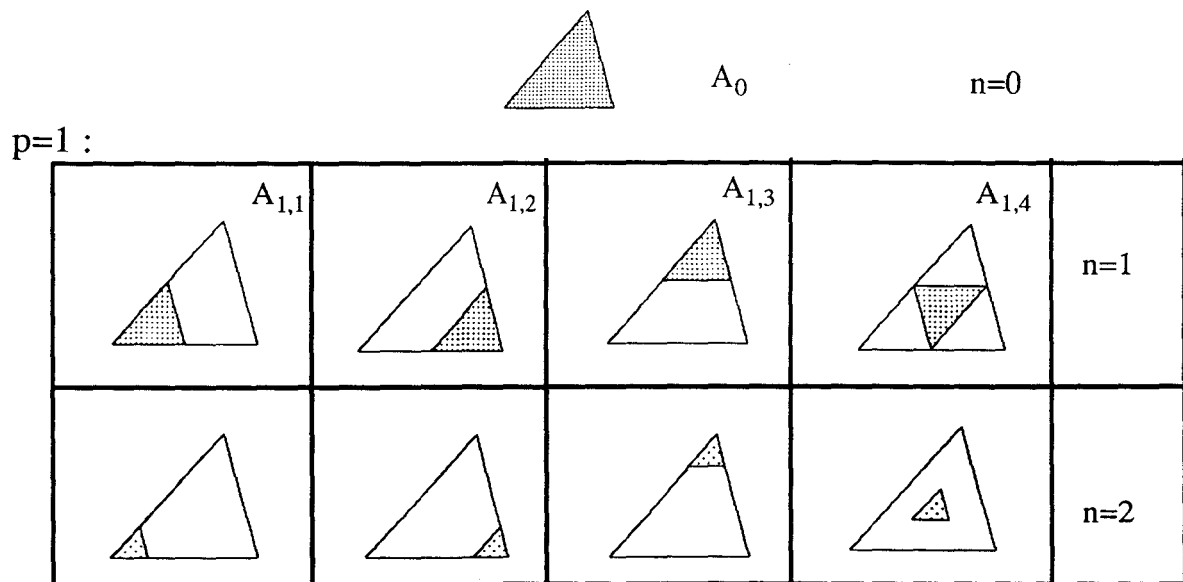


Figure 2-23 : formes fractales construites aux ordres d'itération 0, 1 et 2. Nous divisons un triangle en quatre homothétiques et conservons l'un d'entre eux. Le choix du générateur détermine complètement la forme fractale à tout ordre d'itération.

Deuxième partie : les objets fractals

$p=2$:

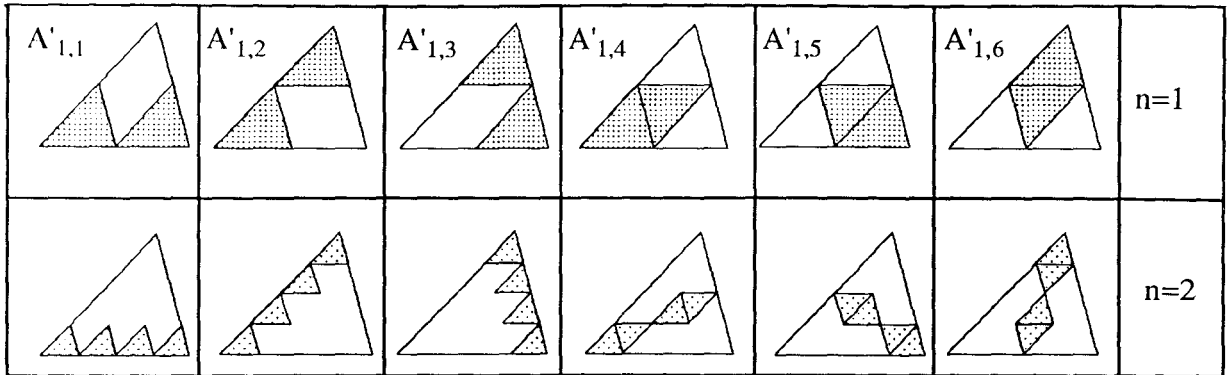


Figure 2-24 : l'initiateur est celui de la figure 23, deux triangles sont conservés. De nouveau, toutes les formes sont séparées à l'ordre d'itération 1.

$p=3$:

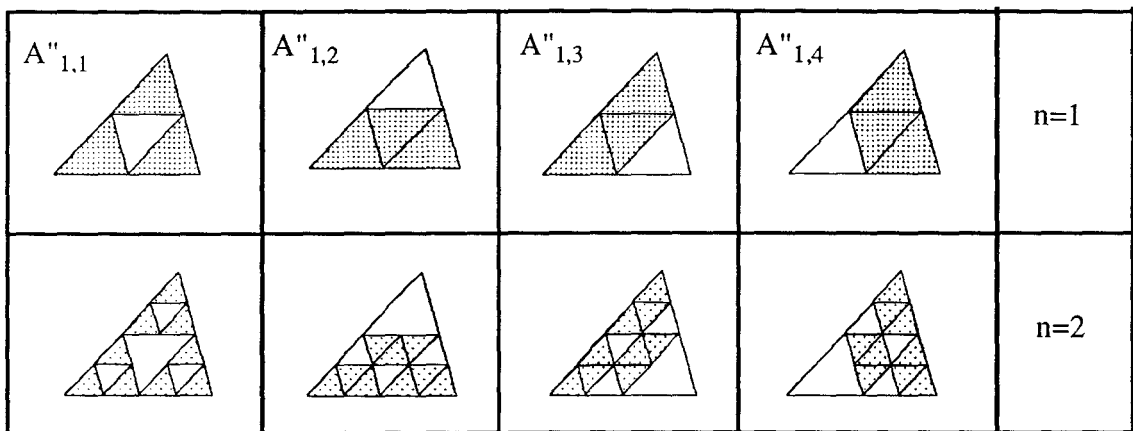


Figure 2-25 : l'initiateur est celui de la figure 23, deux triangles sont conservés. Ici encore, toutes les formes sont séparées à l'ordre d'itération 1.

Tous les résultats relatifs à cet initiateur sont fournis dans le tableau 1 :

p	$u_n(p) = v_n(p), n > 0$
0	1
1	4
2	6
3	4
4	1

Tableau 2-1 : dénombrement de formes fractales constructibles par division d'un triangle en $p_m=4$ triangles homothétiques, dont on conserve p à chaque itération.

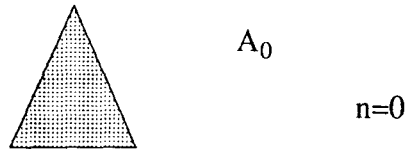
Le cas où l'initiateur ne possède pas d'élément de symétrie n'est pas très intéressant. En effet, les formes fractales sont déterminées à tout ordre d'itération une fois le générateur connu. Les cas où l'initiateur possède des éléments de symétrie sont moins triviaux et plus riches d'enseignements.

Initiateur dont le groupe ponctuel de symétrie possède un générateur

On considère ici le même générateur que précédemment toutefois, maintenant l'initiateur est un triangle isocèle possédant un axe de symétrie vertical. Le groupe ponctuel de symétrie de l'initiateur est D_1 , et ne possède qu'un générateur. Comme dans le cas précédent, l'initiateur possède $u_1(p) = C_p^{p^m}$ fils (générateurs), mais cette fois certains d'entre eux ont pour groupe ponctuel de symétrie D_1 , et d'autres C_1 . On peut associer ces derniers deux à deux par l'intermédiaire d'une symétrie d'axe vertical.

Par exemple, le cas $p=1$ est décrit sur la figure 26 :

$$u_1(1) = C_1^4 = 4 = 2(D_1) + 2(C_1) \tag{2-17}$$



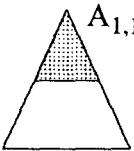
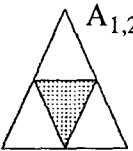

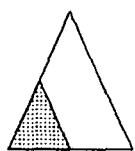
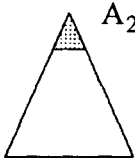
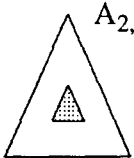
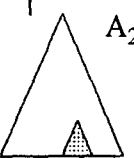
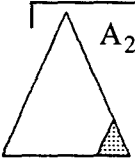
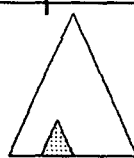
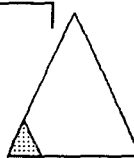
				n=1		
						n=2

Figure 2-26 : formes fractales construites aux ordres d'itération 0, 1, et 2. Le générateur est le même que celui de la figure 23 mais maintenant l'initiateur est un triangle isocèle. Certains générateurs fournissent plusieurs formes d'ordre 2.

Définissons la fonction N qui à un groupe associe son ordre. On a :

$$v_1(1) = \frac{2 * N(D_1) + 2 * N(C_1)}{N(D_1)} = \frac{2 * 2 + 2 * 1}{2} = 3 \quad (2-18)$$

Afin de déterminer $u_2(1)$, nous tenons compte du fait que chaque générateur de groupe D_1 ($A_{1,1}$, $A_{1,2}$) possède un fils et chaque générateur de groupe C_1 ($A_{1,3}$) possède deux fils.

$$u_2(1) = 2 \left(\frac{N(D_1)}{N(D_1)} \right)^1 + 2 \left(\frac{N(D_1)}{N(C_1)} \right)^1 = 2 * 1 + 2 * 2 = 6 \quad (2-19)$$

La démarche adoptée ici est générale. Considérons un générateur de groupe G_1 provenant d'un initiateur de groupe G_0 . L'initiateur possède toujours plus d'éléments de symétrie que le générateur. Pour chaque paire (G_0, G_1) , il existe donc un groupe G'_1 tel que $G_0 = G_1 \times G'_1$ au sens du produit de groupes. G'_1 est appelé le groupe quotient de G_0 et G_1 et est écrit G_0/G_1 . La génération fractale fournira $(N(G'_1))^p = (N(G_0/G_1))^p = \left(\frac{N(G_0)}{N(G_1)} \right)^p$ formes d'ordre 2. Ceci explique la formule donnée précédemment. Le nombre de fils ne dépend que du groupe de symétrie du père et du grand-père (par analogie).

Le dénombrement des formes d'ordre 2 suivant leur groupe ponctuel de symétrie est aussi à effectuer. Ici, $u_2(1) = 2(D_1) + 4(C_1)$. Et d'après le même raisonnement que précédemment (18) :

$$v_2(1) = \frac{2 * N(D_1) + 4 * N(C_1)}{N(D_1)} = \frac{2 * 2 + 4 * 1}{2} = 4 \quad (2-20)$$

Au-delà, chaque forme apparue à l'ordre d'itération 2 fournira un seul "fils".

En termes de théorie des groupes, l'explication est analogue à celle de l'ordre précédent. Considérons une forme d'ordre 2 de groupe G_2 dont le père possède un groupe G_1 . Il existe un groupe quotient G'_2 tel que $G_1 = G_2 \times G'_2$. La génération fractale fournira $(N(G'_2))^p = (N(G_1/G_2))^p = \left(\frac{N(G_1)}{N(G_2)} \right)^p$ formes d'ordre 3. Dans ce cas, toutes les $u_2(1)$ formes d'ordre 2 de groupe ponctuel de symétrie G_2 vérifient $G_1 = G_2$. Il en résulte que tous les groupes quotients G'_2

Deuxième partie : les objets fractals

sont égaux à C_1 et chaque forme d'ordre 2 fournira $(N(C_1))^P = 1$ fils, de même groupe de symétrie que son père.

Nous pouvons fournir une explication plus directe de la séparation des formes au second ordre d'itération en assimilant l'initiateur à trois points numérotés. Quand le groupe ponctuel de symétrie de l'initiateur est C_1 , alors il n'existe qu'une façon de placer ces points sur le générateur. Sur la figure 27, nous avons représenté les triangles légèrement détachés.

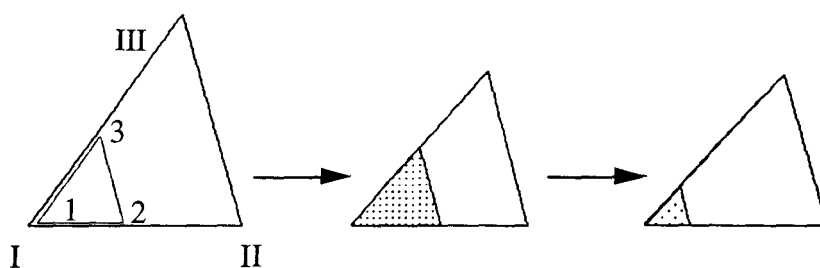


Figure 2-27 : représentation des triangles avec les points numérotés. Les chiffres romains sont dédiés à l'initiateur.

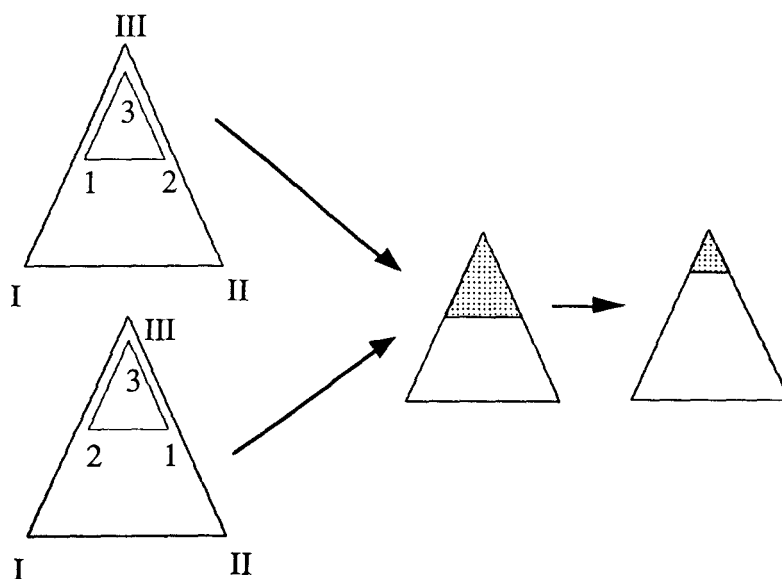


Figure 2-28 : l'inversion des points 1 et 2 ne change pas les formes fractales obtenues aux ordres d'itération supérieurs à 2.

Lorsque le groupe ponctuel de symétrie de l'initiateur ne possède qu'un générateur (D_1 ou $C_k, k > 2$), deux dispositions de points sont autorisées sur le générateur comme on le constate sur la figure 28. Si le groupe de la forme

d'ordre 1 est D_1 , alors les deux applications aboutissent à la même forme d'ordre 2.

En revanche si le groupe du générateur est C_1 , alors les deux applications conduisent au même générateur, mais à deux formes d'ordre 2 distinctes (cf. figure 29).

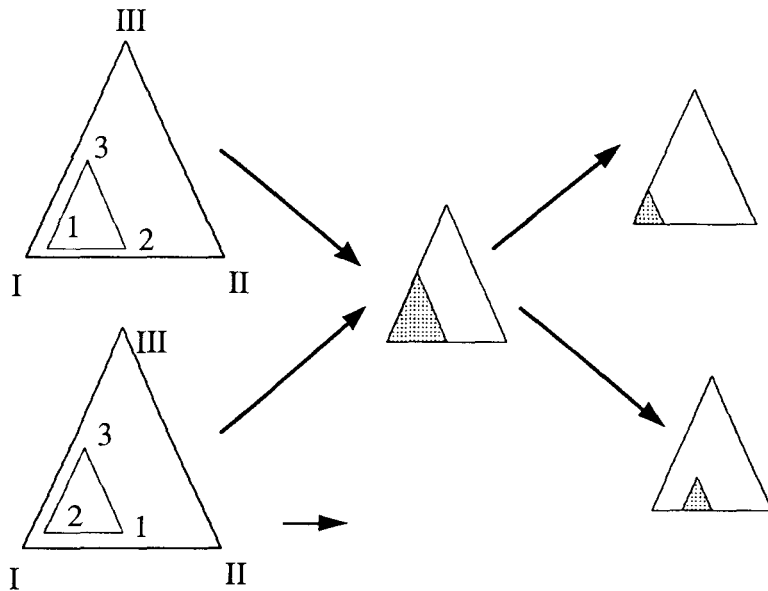


Figure 2-29 : l'inversion des points 1 et 2 ne modifie pas la forme d'ordre 2, mais les formes d'ordre supérieur. Contrairement au cas de la figure 24, l'axe de symétrie de l'initiateur n'échange pas les points 1 et 2.

Les cas $p=2$ et $p=3$ peuvent être traités de la même façon. Tous les résultats sont fournis dans le tableau 2.

p	ordre 1		ordre $n>1$	
	u_1	v_1	u_n	v_n
0	1	1	1	1
1	4	3	6	4
2	6	4	18	10
3	4	3	18	10
4	1	1	1	1

Tableau 2-2 : dénombrement des formes fractales constructibles par division d'un triangle isocèle en $p_m=4$ triangles homothétiques, dont on conserve p à chaque itération. Toutes les formes sont séparées à l'ordre d'itération 2.

On constate ici que la présence d'un élément de symétrie dans l'initiateur autorise l'existence de formes fractales identiques à l'ordre 1 mais distinctes aux ordres supérieurs.

Initiateur dont le groupe ponctuel de symétrie possède deux générateurs

L'initiateur est maintenant un triangle équilatéral. Son groupe ponctuel de symétrie est D_3 , et il possède deux générateurs s et r_3 . Comme dans les cas précédents, on a $u_1(p) = C_1^{p,m}$ générateurs, mais maintenant leur groupe ponctuel de symétrie est D_3 , D_1 ou C_1 .

Par exemple, pour $p=1$:

$$u_1(1) = C_1^4 = 4 = 1(D_3) + 3(D_1) \quad (2-21)$$

Par conséquent :

$$v_1(1) = \frac{1 * N(D_3) + 3 * N(D_1)}{N(D_3)} = \frac{1 * 6 + 3 * 2}{6} = 2 \quad (2-22)$$

Les formes correspondantes sont représentées sur la figure 30.

Il résulte de l'interprétation en termes de groupe quotient que chaque générateur $(A_{1,1})$ (resp. $A_{1,2}$) de groupe de symétrie D_3 (resp. D_1) fournira :

$$\left(\frac{N(G_0)}{N(D_3)} \right)^p = (N(G_0 / D_3))^p = (N(D_3 / D_3))^p = (N(C_1))^p = 1^1 = 1 \text{ forme}$$

$$\text{(resp. } \left(\frac{N(G_0)}{N(D_1)} \right)^p = (N(G_0 / D_1))^p = (N(D_3 / D_1))^p = (N(C_3))^p = 3^1 = 3 \text{ formes).}$$

A l'ordre d'itération 2, on aura donc

$$u_2(1) = 1 * (N(C_1))^1 + 3 * (N(C_3))^1 = 1 * 1 + 3 * 3 = 10 \quad (2-23)$$

Dans ce cas, certaines formes d'ordre 2 fournissent plusieurs formes d'ordre 3. Afin de dénombrer ces formes d'ordre 3, nous devons d'abord classer les formes d'ordre 2 selon leur groupe ponctuel de symétrie :

$$u_2(1) = 1(D_3) + 3(D_1) + 6(C_1)$$

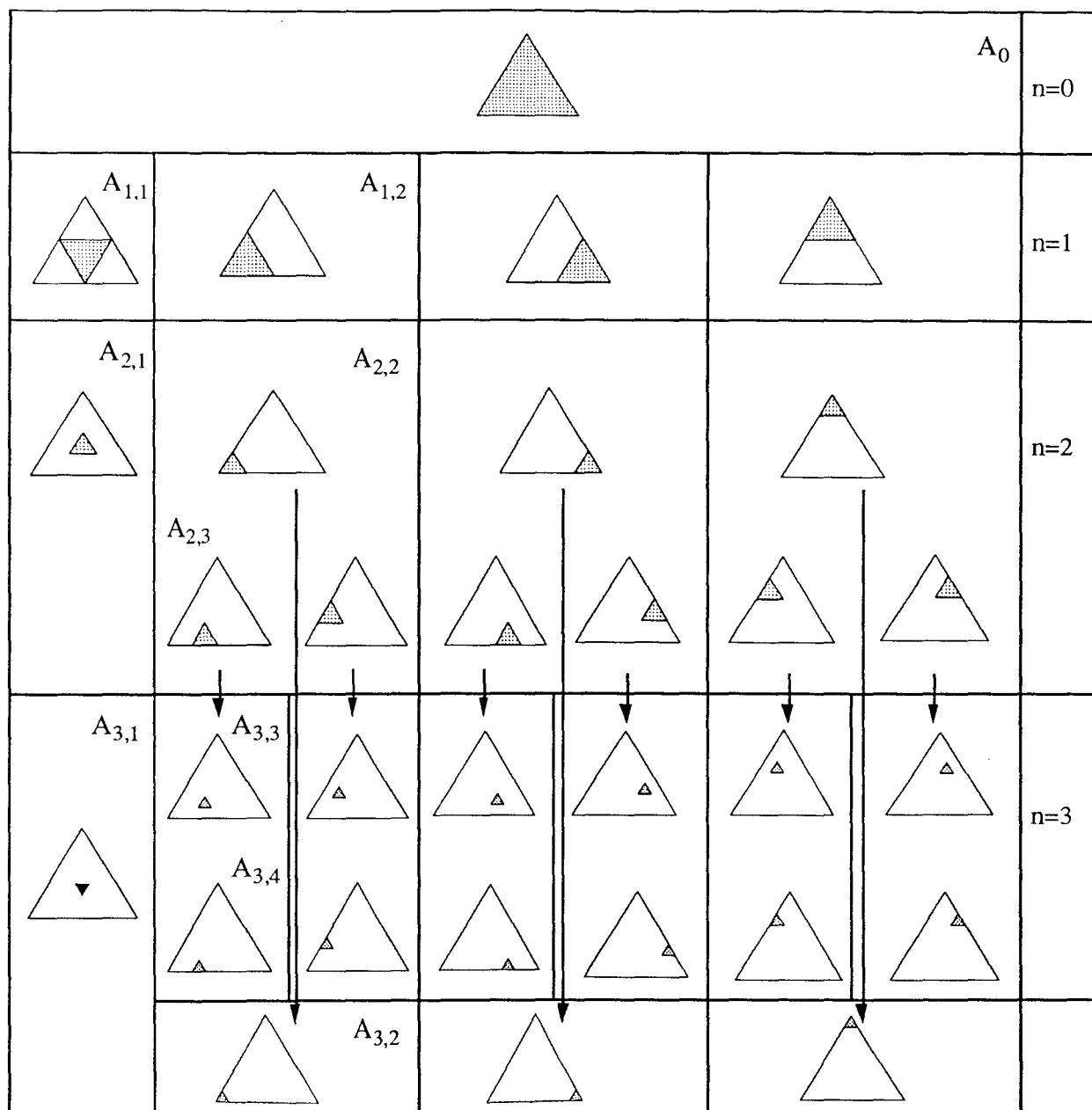


Figure 2-30 : formes fractales construites aux ordres d'itération 0, 1, 2 et 3. Le générateur est le même que sur la figure 3 mais maintenant l'initiateur est un triangle équilatéral. Certains générateurs fournissent plusieurs formes d'ordre 2 et certaines formes d'ordre 2 fournissent plusieurs formes d'ordre 3.

D'après la même relation que précédemment :

$$v_2(1) = \frac{1 * N(D_3) + 3 * N(D_1) + 6 * N(C_1)}{N(D_3)} = \frac{1 * 6 + 3 * 2 + 6 * 1}{6} = 3 \quad (2-24)$$

Contrairement aux cas précédents, les formes d'ordre 2 de groupe ponctuel de symétrie $G_2=C_1 (A_{2,3})$, dont le père possède un groupe $G_1=D_1 (A_{1,2})$ fourniront chacune $\left(\frac{N(G_1)}{N(G_2)}\right)^p = \left(\frac{N(D_1)}{N(C_1)}\right)^p = (N(D_1/C_1))^p = (N(D_1))^p = 2^1 = 2$ formes d'ordre 3. Les autres formes d'ordre 2 ($A_{2,1}, A_{2,2}$) possèdent le même groupe de symétrie que leur père. Chacune de ces formes fournira uniquement une forme d'ordre 3.

Par conséquent :

$$u_3(1) = 1 * \left(\frac{N(D_3)}{N(D_3)}\right)^1 + 3 * \left(\frac{N(D_1)}{N(D_1)}\right)^1 + 6 * \left(\frac{N(D_1)}{N(C_1)}\right)^1$$

$$u_3(1) = 1 * (N(C_1))^1 + 3 * (N(C_1))^1 + 6 * (N(D_1))^1$$

$$u_3(1) = 16 \tag{2-25}$$

$$u_2(1) = 1(D_3) + 3(D_1) + 12(C_1)$$

$$v_3(1) = \frac{1 * N(D_3) + 3 * N(D_1) + 12 * N(C_1)}{N(D_3)} = \frac{1 * 6 + 3 * 2 + 12 * 1}{6} = 4 \tag{2-26}$$

On peut interpréter comme précédemment la façon dont les formes se séparent à l'ordre d'itération 2, en assimilant l'initiateur à un ensemble de trois points, dont le groupe associé est D_3 . La façon dont les formes se séparent est liée au nombre de générateurs du groupe ponctuel de symétrie de l'initiateur. Sur la figure 31, nous observons que la séparation à l'ordre 2 correspond à la rotation r_3 , générateur du groupe quotient de l'initiateur par le générateur tandis que la séparation d'ordre 3 correspond à la symétrie axiale s (figure 32), qui est le générateur du groupe quotient du générateur par les formes d'ordre 2 concernées. Il y a séparation à l'ordre d'itération 2 uniquement si la forme d'ordre 1 n'est pas invariante sous r_3 . De la même façon, il y a séparation à l'ordre d'itération 3 uniquement si la forme d'ordre 2 n'est invariante sous aucune symétrie axiale de D_3 .

Il est intéressant de considérer l'ensemble des isométries planes qui ont un point fixe. Tous ses éléments s'expriment comme produit d'une ou de deux

symétries axiales. En ce qui concerne la construction fractale, nous constatons que la séparation survenant à l'ordre 2 correspond à la rotation, produit de deux symétries axiales, et la séparation survenant à l'ordre 3 correspond à la symétrie axiale. Ces éléments de symétrie engendrent le groupe quotient associé à chaque forme d'ordre 2 ou 3.

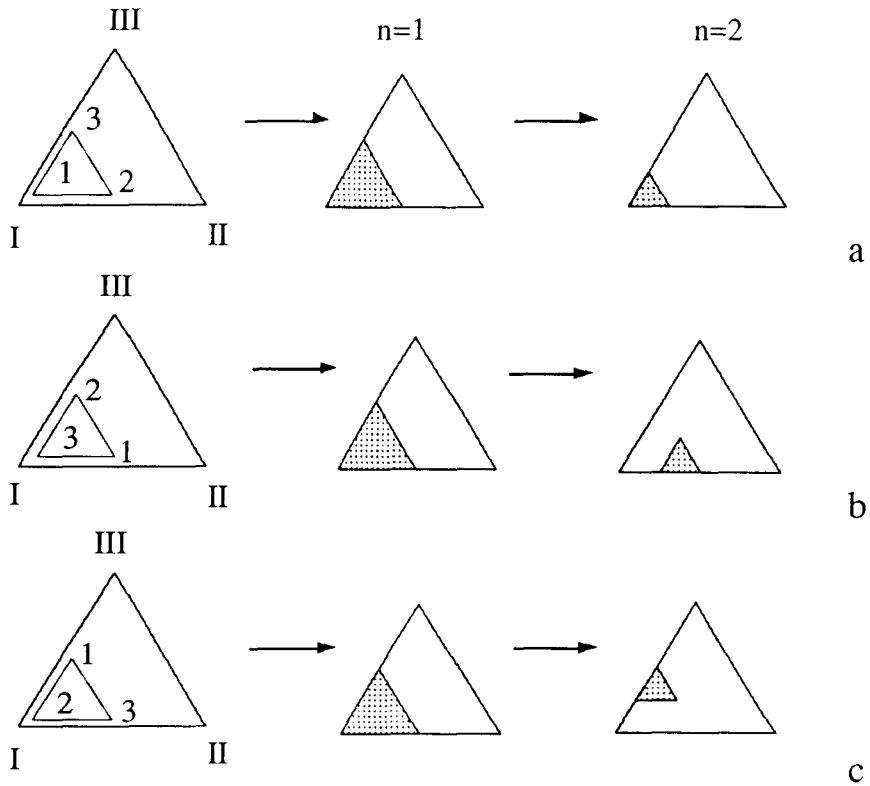


Figure 2-31 : la numérotation dépend de l'application affine associée au générateur :
 a : (I,II,III) \rightarrow (1,2,3) similitude,
 b : similitude composée avec une rotation d'angle $2\pi/3$,
 c : similitude composée avec une rotation d'angle $-2\pi/3$.

Deuxième partie : les objets fractals

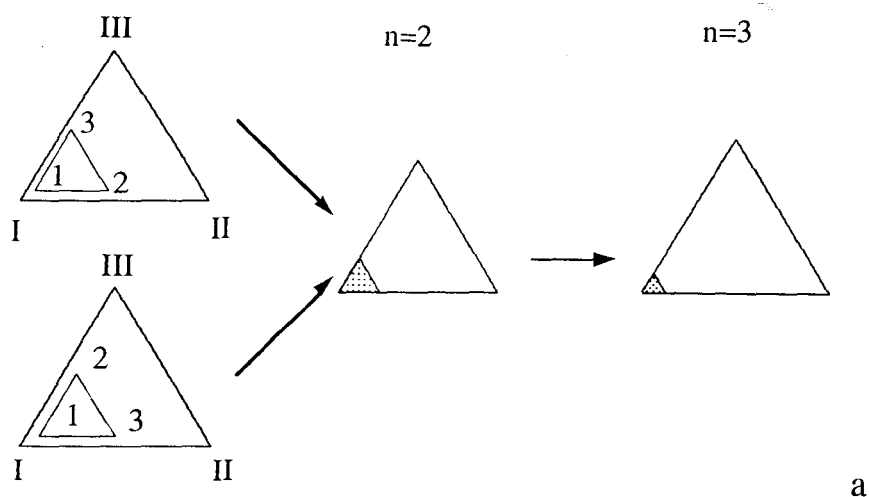
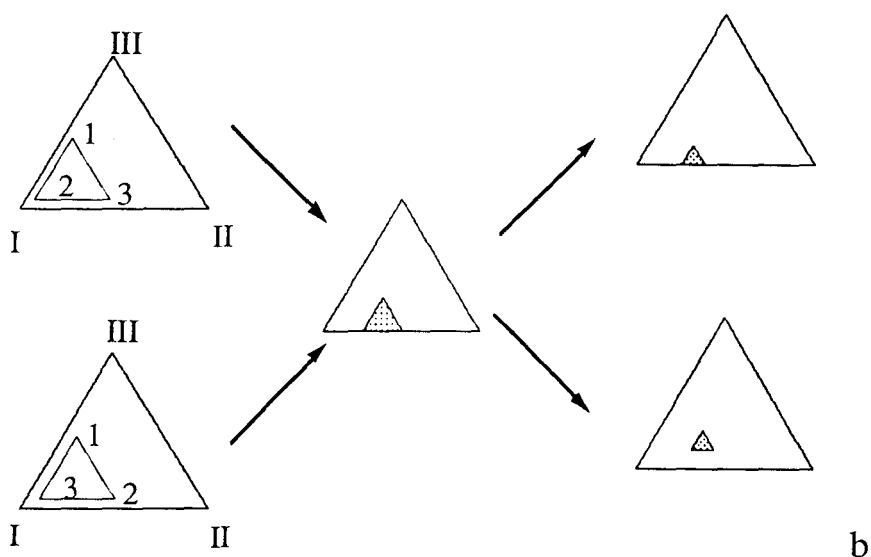


Figure 2-32 : lien entre la numérotation des points et la génération fractale :
 a : l'axe de symétrie entre 2 et 3 est le même que celui entre II et III.-> une forme d'ordre 3.
 b : l'axe de symétrie entre 2 et 3 n'est pas le même que celui entre II et III.-> deux formes d'ordre 3 (voir page suivante).



En appliquant la même méthode aux cas $p=2$ et $p=3$, on aboutit aux résultats fournis dans le tableau 3.

L'intervention des groupes quotients dans la génération fractale est en réalité très générale. Le nombre de formes fractales constructibles à partir d'une forme d'ordre quelconque ne dépend que du groupe quotient du groupe ponctuel de symétrie de son père par le sien. Sur la figure 33, l'ordre du groupe de chaque forme constructible est représenté en fonction de l'ordre d'itération pour les trois initiateurs présentés ci-dessus et pour $p=1$. Nous pouvons en tirer une meilleure compréhension de la génération fractale. Lorsque les groupes de symétrie de deux formes d'ordre d'itération consécutif sont identiques, on ne peut obtenir

p	ordre 1		ordre 2		ordre n>2	
	u1	v1	u2	v2	u _n	v _n
0	1	1	1	1	1	1
1	4	2	10	3	16	4
2	6	2	54	11	180	32
3	4	2	82	16	586	100
4	1	1	1	1	1	1

Tableau 2-3 : dénombrement des formes fractales constructibles par division d'un triangle équilatéral en $p_m=4$ triangles homothétiques, dont on conserve p à chaque itération. Toutes les formes sont séparées à l'ordre d'itération 3.

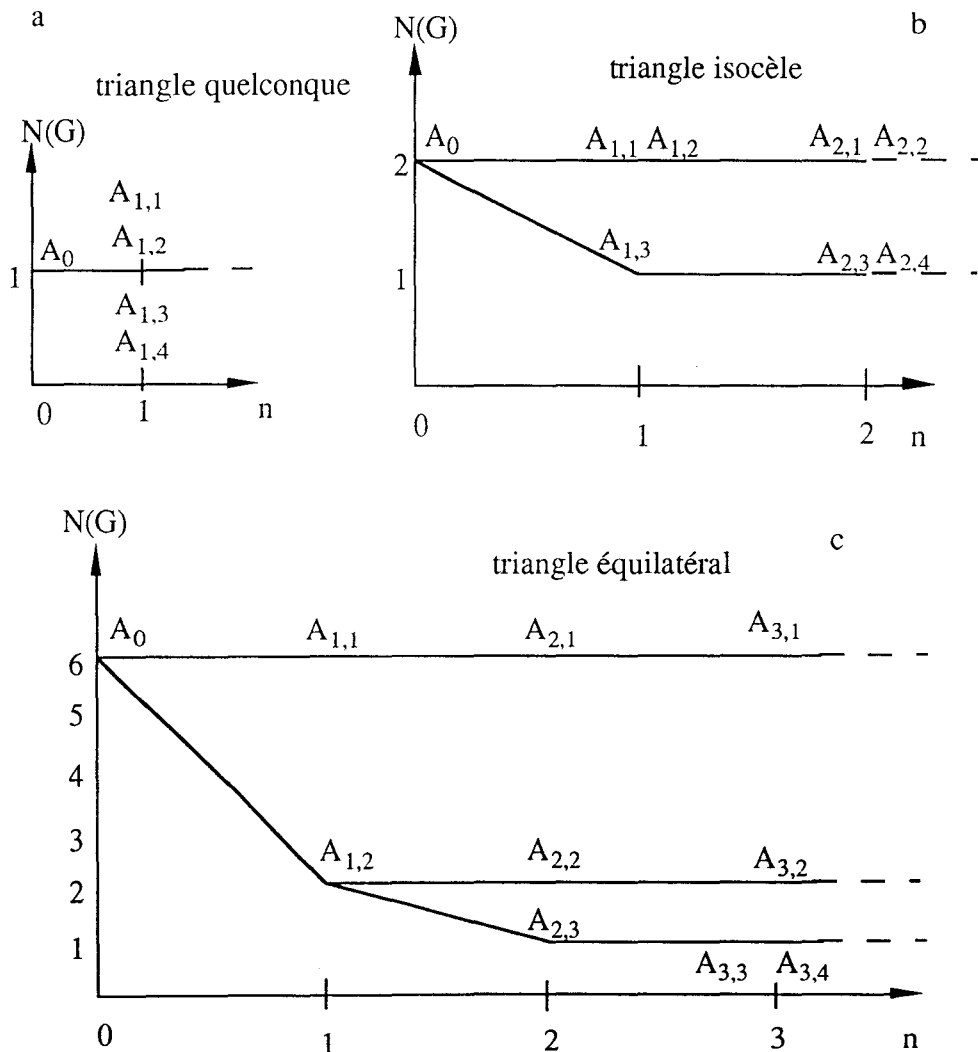


Figure 2-33 : ordre du groupe ponctuel de symétrie des formes fractales construites à divers ordres d'itération pour les trois cas d'initiateurs considérés ici :

- a : triangle quelconque
- b : triangle isocèle
- c : triangle équilatéral.

qu'une forme fractale, possédant à chaque ordre le même groupe de symétrie. En revanche, si l'ordre du groupe de symétrie diminue avec l'ordre d'itération sans être descendu à 1, nous pouvons générer plusieurs formes fractales. Mais chaque forme issue, possédant moins d'éléments de symétrie, ne sera susceptible que de fournir moins de formes aux ordres supérieurs.

La figure 33 indique que la suite des ordres devient constante très rapidement. Si elle possède deux termes consécutifs identiques, elle reste constante. Le nombre de générateurs du groupe de symétrie de l'initiateur valant dans le plan au plus deux, toutes les formes sont séparées dès l'ordre d'itération 3. Cette décroissance numérique correspond à une suite de groupes quotients du groupe de symétrie de l'initiateur, chacun étant groupe quotient du précédent.

On peut conclure dans le cas des formes creuses que :

- *l'introduction d'un élément de symétrie de l'initiateur peut faire augmenter considérablement le nombre de formes constructibles.*
- *le nombre de fils d'une forme fractale de groupe G_n dépend uniquement du groupe quotient de son groupe par celui de son père $G'_n = G_{n-1}/G_n$.*

De plus, on retrouve les propriétés de "localisation" d'information déjà mentionnées dans le cas des formes construites par croissance. Le fait que l'initiateur est maintenant choisi avec une plus grande liberté, alors qu'auparavant il s'agissait impérativement d'un segment offre une possibilité supplémentaire de "localisation". Suivant le générateur considéré, l'information peut être localisée dans le passage de l'ordre 0 à l'ordre 1. Il n'y a alors plus aucun choix aux ordres supérieurs. Pour certains générateurs, il peut subsister un choix entre l'ordre 1 et l'ordre 2, et même un choix entre l'ordre 2 et l'ordre 3. En revanche, dans tous les cas de formes planes, la forme finale est complètement déterminée à l'ordre 3. On comprendra d'après ce qui précède qu'il est possible d'élaborer une stratégie probabiliste en considérant la propagation dans l'ordre des échelles.

II-B-3-d) Cas des formes par croissance

Nous allons à présent examiner le cas des formes construites par croissance, à la lumière de la théorie des groupes. Ce cas peut être traité de manière analogue au cas précédent. La seule différence est que l'initiateur est un segment et le générateur est une ligne brisée. On en déduit que le groupe du

générateur ne peut être que D_1 , C_2 , ou C_1 . Le groupe ponctuel de symétrie de l'initiateur est $G_0=D_2$ dans tous les cas. Alors, le seul critère décisif pour la séparation est le groupe ponctuel de symétrie G_1 du générateur.

Soit p le nombre de segments du générateur et ρ le facteur d'échelle. Nous avons $u_1=v_1=1$. Le nombre de formes constructibles d'ordre 2 dépend de ce que devient chaque segment du générateur lors du passage à l'ordre 2.

$G_1=C_1$

On effectue le même dénombrement que précédemment :

$$u_2 = \left(\frac{N(G_0)}{N(G_1)} \right)^p = (N(G_0 / G_1))^p = (N(D_2 / C_1))^p = N(C_2)^p = 4^p \quad (2-27)$$

(quatre solutions pour chaque segment) (cf. figure 15). Chacune de ces u_2 formes possède un groupe ponctuel de symétrie C_1 , et n'engendrera donc qu'une seule forme d'ordre 3.

Il en résulte que nous avons $u_n=v_n=4^p$ pour tout n . Nous rejoignons bien les conclusions du paragraphe II-B-2-a) dans le cas des générateurs ne possédant pas d'élément de symétrie.

$G_1=D_1$ ou $G_1=C_2$

$$\text{Ici, } u_2 = \left(\frac{N(G_0)}{N(G_1)} \right)^p = \left(\frac{4}{2} \right)^p = 2^p.$$

Il nous faut maintenant déterminer le groupe de chaque forme d'ordre 2. La façon dont on dénombre les formes dépend de la parité de p .

*Cas $p=2k$, k entier.

Si $G_1=D_1$, alors on a : $u_2=2^p=\alpha_1(D_1)+\alpha_1(C_1)$, où $\alpha_n(G)$ est le nombre de formes d'ordre n parmi les u_n de groupe ponctuel de symétrie G . Les formes d'ordre 2 dont le groupe est D_1 sont déterminées uniquement par les images de k segments (cf. l'exemple de la figure 22). Deux choix sont possibles pour chaque segment, donc $\alpha_1(D_1)=2^k$. Nous déduisons $\alpha_1(C_1)=2^p-2^k$. Les $\alpha_1(C_1)$ formes

Deuxième partie : les objets fractals

non symétriques peuvent être associées deux par deux par symétrie axiale. On a alors :

$$v_2 = \frac{\alpha_1(D_1) * N(D_1) + \alpha_1(C_1) * N(C_1)}{N(D_1)}$$

$$v_2 = \frac{2^k * 2 + (2^p - 2^k) * 1}{2} = 2^{2k-1} + 2^k - 2^{k-1} \quad (2-28)$$

Chacune des $\alpha_1(D_1)$ formes (A_{2,1} et A_{2,2} sur la figure 22 par exemple) fournira un fils de groupe D₁ (resp. A_{3,1} et A_{3,2}) et chacune des $\alpha_1(C_1)$ formes (A_{2,3}) fournira 2^p fils de groupe C₁ (A_{3,3}, A_{3,4}, A_{3,5} et A_{3,6}) (deux pour chaque segment).

Par conséquent :

$$u_3 = \alpha_1(D_1) \left(\frac{N(D_1)}{N(D_1)} \right)^p + \alpha_1(C_1) \left(\frac{N(D_1)}{N(C_1)} \right)^p$$

$$u_3 = 2^k * 1 + (2^p - 2^k) * 2^p$$

$$u_3 = 2^{4k} - 2^{3k} + 2^k \quad (2-29)$$

Comme ci-dessus, nous avons ici :

$$u_3 = \alpha_2(D_1) + \alpha_2(C_1)$$

avec $\begin{cases} \alpha_2(D_1) = 2^k \\ \alpha_2(C_1) = 2^{4k} - 2^{3k} \end{cases}$

Et $v_3 = \frac{\alpha_2(D_1) * N(D_1) + \alpha_2(C_1) * N(C_1)}{N(D_1)}$

$$v_3 = \frac{2^k * 2 + (2^{4k} - 2^{3k}) * 1}{2} = 2^{4k-1} - 2^{3k-1} + 2^k \quad (2-30)$$

On retrouve bien la formule (15). Les conclusions sont les mêmes si G₁=C₂.

*Cas $p=2k+1$, k entier.

Le dénombrement est approximativement le même que dans le cas pair. Si $G_1=D_1$, alors u_2 s'écrit : $u_2=2^p=\alpha_1(D_1)+\alpha_1(C_1)$. $p=2k+1$, donc le $(k+1)$ -ème segment du générateur possède le même axe de symétrie que l'initiateur. Les formes d'ordre 2 de groupe D_1 sont déterminées uniquement par les images par le générateur des k segments "de gauche". Deux choix sont possibles pour chacun de ces k segments et deux choix pour le $(k+1)$ -ème segment, donc $\alpha_1(D_1)=2*2^k=2^{k+1}$. On déduit $\alpha_1(C_1)=2^{2k+1}-2^{k+1}$. Les $\alpha_1(C_1)$ formes non symétriques peuvent être associées deux par deux par symétrie axiale, donc :

$$v_2 = \frac{\alpha_1(D_1) * N(D_1) + \alpha_1(C_1) * N(C_1)}{N(D_1)}$$

$$v_2 = \frac{2^{k+1} * 2 + (2^{2k+1} - 2^{k+1}) * 1}{2} = 2^{2k} + 2^{k+1} - 2^k \quad (2-31)$$

Chacune des $\alpha_1(D_1)$ formes fournit une forme d'ordre 3 de groupe D_1 et chacune des $\alpha_1(C_1)$ formes fournit 2^p formes d'ordre 3 de groupe C_1 . (une pour chaque segment).

D'où :

$$u_3 = \alpha_1(D_1) \left(\frac{N(D_1)}{N(D_1)} \right)^p + \alpha_1(C_1) \left(\frac{N(D_1)}{N(C_1)} \right)^p$$

$$u_3 = 2^{k+1} * 1 + (2^p - 2^{k+1}) * 2^p$$

$$u_3 = 2^{4k+2} - 2^{3k+2} + 2^{k+1} \quad (2-32)$$

Comme ci-dessus, nous avons :

$$u_3 = \alpha_2(D_1) + \alpha_2(C_1)$$

avec maintenant $\begin{cases} \alpha_2(D_1) = 2^{k+1} \\ \alpha_2(C_1) = 2^{4k+2} - 2^{3k+2} \end{cases}$

$$\text{Et : } v_3 = \frac{\alpha_2(D_1) * N(D_1) + \alpha_2(C_1) * N(C_1)}{N(D_1)}$$

Deuxième partie : les objets fractals

$$v_3 = \frac{2^{k+2} * 2 + (2^{4k+2} - 2^{3k+2}) * 1}{2} = 2^{4k+1} - 2^{3k+1} + 2^{k+1} \quad (2-33)$$

Grâce à l'introduction de la théorie des groupes, nous retrouvons de manière très élégante les résultats du paragraphe II-B-2-e). Tous ces résultats sont rassemblés dans le tableau 4 :

p	G ₁ =C ₁	G ₁ =C ₂ or G ₁ =D ₁			
		ordre 2		ordre n>2	
	u _n =v _n	u ₂	v ₂	u _n	v _n
2	16	4	3	10	6
3	64	8	6	36	20
4	256	16	10	196	100
5	1024	32	20	776	392
6	4096	64	36	3592	1800

Tableau 2-4 : nombre de formes constructibles par croissance, étant donné l'initiateur et le générateur, en fonction de l'ordre d'itération. Le générateur est une ligne brisée composée de p segments.

Dans le tableau 4, nous notons que contrairement au cas des formes creuses, l'introduction d'un élément de symétrie dans l'initiateur entraîne une forte baisse du nombre de formes d'ordre 2. Ceci est dû au fait que dans le cas précédent, le générateur était toujours inclus dans l'initiateur. Ceci impliquait de nombreux choix pour chaque partie du générateur. Dans le cas des formes par croissance, deux formes d'ordre 2 différentes peuvent coïncider lorsqu'on introduit un élément de symétrie dans le générateur. Néanmoins, certains choix sont encore possibles dans le passage de la forme d'ordre 2 à celle d'ordre 3. Cette multiplicité permet de contrebalancer (seulement partiellement) la baisse du nombre de formes d'ordre 2. L'introduction d'un élément de symétrie dans le générateur n'a qu'une influence linéaire sur le nombre de formes fractales. Le rapport $r = \frac{u_3(\text{générateur de groupe } C_2 \text{ ou } D_1)}{u_3(\text{générateur de groupe } C_1)}$ tend vers 1/2 quand p tend vers +∞.

Comme dans le cas des formes creuses, nous pouvons interpréter les résultats à chaque ordre d'itération en termes de théorie des groupes. La seule

différence est que l'initiateur et le générateur sont maintenant fixés, ainsi que leur groupe ponctuel de symétrie. Le nombre de formes d'ordre 2 s'exprime par : $u_2(p) = (N(G'_1))^p = (N(G_0/G_1))^p = (4/N(G_1))^p$ où G'_1 est le groupe quotient du groupe ponctuel de symétrie de l'initiateur par celui du générateur.

*Si $G_1=C_1$, tous les formes d'ordre 2 possèdent un groupe ponctuel de symétrie $G_2=C_1$, et chaque forme d'ordre 2 fournira $u_3(p) = (N(G'_2))^p = (N(G_1/G_2))^p = (N(C_1))^p = 1^p = 1$ forme d'ordre 3.

*Si $G_1=D_1$ (resp. $G_1=C_2$), les formes d'ordre 2 possèdent un groupe ponctuel de symétrie $G_1=D_1$ ou $G_1=C_1$ (resp. $G_1=C_2$ or $G_1=C_1$). Si le groupe est D_1 ou C_2 , cette forme pourra engendrer $u_3(p) = (N(G'_2))^p = (N(G_1/G_2))^p = (N(C_1))^p = 1^p = 1$ forme d'ordre 3. Si le groupe est C_1 , nous aurons au total $u_3(p) = (N(G'_2))^p = (N(G_1/C_1))^p = 2^p$ formes d'ordre 3.

Pour tous les ordres supérieurs, le groupe quotient sera C_1 , donc toutes les formes fractales sont séparées à l'ordre d'itération 3.

II-B-3-e) Généralisation dans l'espace

Le même formalisme s'applique ici, même si certaines différences apparaissent. Dans le cas des constructions par croissance, il n'est plus possible de représenter une surface fractale par une suite de lettres. Ceci est dû au fait que les segments constituant le générateur plan peuvent être numérotés, ce qui n'est plus le cas du polygone constituant le générateur spatial.

D'autre part, le groupe de symétrie de l'initiateur dans l'espace peut contenir jusqu'à non plus 2 mais 3 générateurs. Étant donné que le groupe de symétrie perd au maximum un générateur par ordre d'itération, on peut concevoir l'existence de formes identiques jusqu'à l'ordre 3 et qui se séparent à l'ordre 4.

Deuxième partie : les objets fractals

Le nombre de générateurs du groupe de symétrie n'est pas seul en cause. Il doit également exister une suite de quatre groupes quotients dont le produit soit le groupe de symétrie de l'initiateur.

Ces considérations sur le dénombrement des formes fractales ne sont pas développées ici pour des raisons théoriques. Elles permettent de faire ressortir l'idée maîtresse qu'une forme fractale contient une certaine information distribuée non dans l'espace, mais dans l'ordre des échelles. L'idée de choix est très importante et doit être reliée au paramètre physique qu'est l'entropie. La croissance et l'évolution d'une structure fractale naturelle doit se faire selon des critères précis. Alors qu'il existe des degrés de liberté aux premiers ordres d'itération, ceux-ci disparaissent très vite. Les premiers choix effectués sont décisifs car ils déterminent l'entropie du système dans l'ordre des échelles. L'analyse menée ici illustre aussi le fait déjà bien établi que la dimension fractale ne peut à elle seule caractériser une forme.

Nous allons nous efforcer à présent de fournir une paramétrisation simple des objets fractals. Il s'agit en fait d'associer à un élément de R ou de R^2 un point de l'ensemble fractal. Il s'agit ici d'un nouveau moyen d'appréhender la géométrie fractale en la mettant en lien de façon discontinue avec la géométrie euclidienne classique. Ce sujet va également se trouver enrichi par la considération relative aux groupes de symétrie.

II-B-4) Paramétrisation d'ensembles fractals à l'aide des coordonnées homogènes

Nous présentons ici une paramétrisation simple de certaines classes d'objets fractals ou multifractals. L'utilisation de coordonnées homogènes simples ($n+1$ points de définition dans un espace de dimension n) ou généralisées permet de surmonter élégamment le problème de la description d'un objet possédant des propriétés d'invariance d'échelle. Chaque point de l'objet fractal est décrit par une suite infinie de vecteurs choisis dans un ensemble fini.

Nous présentons d'abord le cas des objets fractals construits par creusement pour lesquels les opérations de génération sont des homothéties simples. Il s'agit du seul cas pouvant être résolu en toute généralité.

Par la suite nous étendons la méthode au cas des objets construits par creusement mais dont l'itération comporte des homothéties composées avec des isométries. Le problème n'est soluble que lorsque l'initiateur comporte des éléments de symétrie.

Il est également possible d'envisager le cas des formes construites par croissance. Pour ce cas non plus, il n'existe pas de méthode générale. Cependant, aux conditions que les formes d'ordre 0 et 1 puissent être incluses dans un pavage périodique du plan ou de l'espace, il est possible de se ramener à la méthode précédente. On le fait en remplaçant l'initiateur par un polygone possédant un ou plusieurs éléments de symétrie supplémentaires.

La généralisation au cas multifractal est alors aisée mais d'un intérêt limité car on ne peut fournir que des formules de récurrence et non des séries faciles à utiliser.

Nous allons commencer par un exemple simple, l'ensemble de Cantor à une dimension. En reprenant le paramétrage p -adique déjà rencontré [30, 41, 53], nous allons montrer comment ce formalisme peut être généralisé au cas d'objets bi ou tridimensionnels.

II-B-4-a) Cas de l'ensemble de Cantor

On considère l'ensemble de Cantor classique. Pour le construire, on commence par appliquer le processus suivant (cf. figure 34) : on divise le segment initial en trois segments égaux, puis on élimine celui du milieu. On répète le processus sur chacun des segments nouvellement créés. On obtient à l'ordre d'itération infini un ensemble appelé "poussière de Cantor" de dimension fractale $\Delta = \frac{\ln 2}{\ln 3} \cong 0,63$.

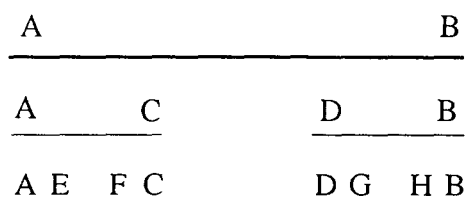


Figure 2-34 : ensemble de Cantor représenté aux premiers ordres d'itération

L'abscisse de chacun des points de cet ensemble dans un repère (A, AB) est donnée par :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \text{ avec } a_k = 0 \text{ ou } 2. \quad (2-34)$$

Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ représente donc un point de l'ensemble de Cantor. En faisant varier $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'ensemble des suites dont chaque terme ne peut prendre que la valeur 0 ou 2, on décrit exactement l'ensemble de Cantor. Nous allons proposer des écritures équivalentes à la formule (34) pour diverses classes d'objets fractals. En ne considérant que cet exemple, nous allons poser dans le paragraphe qui suit les jalons nécessaires à cette généralisation.

II-B-4-b) Paramétrage p-adique à l'aide des coordonnées homogènes

Nous nous proposons ici d'écrire la formule relative à chaque point de l'ensemble de Cantor sous une forme indépendante du repère choisi. Pour ce faire, nous utiliserons les coordonnées homogènes.

Soient A et B les extrémités du segment initial (cf. figure 34). Tout point M du segment [AB] est barycentre des points pondérés (A,x), (B,y) lorsqu'on a la relation suivante :

$$x\mathbf{MA}+y\mathbf{MB}=\mathbf{0} \quad (2-35)$$

M est donc représenté par un couple de coordonnées (x,y) ne dépendant d'aucun repère lié à la droite (AB). x et y peuvent vérifier une condition supplémentaire dite de normalisation du type $x+y=1$. Ils ont alors une interprétation géométrique directe $y=AM/AB$, $x=MB/AB$ (figure 35).

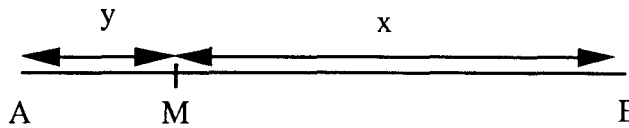


Figure 2-35 : les coefficients barycentriques ont une interprétation géométrique simple lorsque leur somme vaut 1.

Nous allons voir que les coordonnées homogènes permettent de mettre la relation (34) sous une forme plus générale.

Considérons le segment [AB], segment de départ de construction de l'ensemble de Cantor. Tout point de ce segment s'écrit (λ,μ) avec $\lambda>0$, $\mu>0$, $\lambda+\mu=1$. λ et μ représentent les coordonnées homogènes de M vis-à-vis des points A et B.

Sur la forme d'ordre 1, les points du premier segment [AC] s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\lambda)/3 \\ \mu/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda>0, \mu>0, \lambda+\mu=1. \quad (2-36)$$

x et y représentent les coordonnées homogènes de M vis-à-vis des points A et B tandis que λ et μ représentent les coordonnées homogènes de M vis-à-vis des points A et C (cf. figure 36).

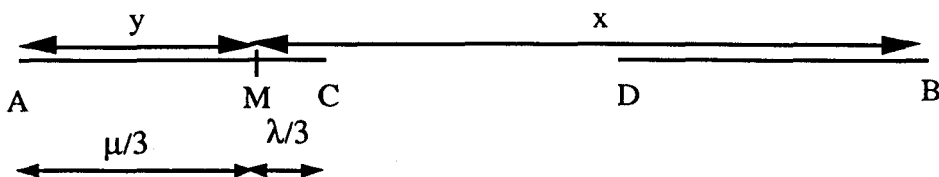


Figure 2-36 : relations entre les coordonnées homogènes à deux ordres d'itération consécutifs.

De même pour les points du deuxième segment [DB] on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/3 \\ (2+\mu)/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2-37)$$

avec $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$. Ici λ et μ représentent les coordonnées homogènes de M vis-à-vis des points D et B.

Le passage du segment d'ordre 0 à la forme d'ordre 1 se fait par l'application de deux homothéties de rapport 1/3 et de centres respectifs A et B.

Par rapport au point A, chaque partie du segment initial peut être décrite par un entier compris entre 0 et 2 : 0 pour [DB], 1 pour [CD], 2 pour [AC]

Par rapport au point B, il suffit d'inverser les coefficients : 0 pour [AC], 1 pour [CD], 2 pour [DB].

Il est remarquable que la forme construite à tout ordre supérieur soit descriptible par les mêmes couples que précédemment, moyennant une correction à chaque ordre. On a par exemple pour chaque segment de la forme d'ordre 2 :

$$\text{Segment [AE]} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2-38)$$

$$\text{Segment [FC]} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2-39)$$

$$\text{Segment [DG]} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2-40)$$

$$\text{Segment [HB]} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2-41)$$

(x,y) est le couple de coordonnées homogènes vis-à-vis des points A et B tandis que λ et μ représentent à chaque fois les coordonnées homogènes de M vis-à-vis des extrémités du segment d'ordre 2 contenant M.

On réécrit pour une forme d'ordre n cette expression sous une forme particulièrement synthétique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} V_k + \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (2-42)$$

où V_k peut prendre les valeurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Quand n tend vers l'infini, le dernier terme tend vers 0. Tout point de l'objet fractal a donc pour coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} V_k \quad (2-43)$$

On retrouve aisément la formule (34).

En effet, dans un repère (A, \mathbf{AB}) , la position du point M est repérée par X tel que :

$$\mathbf{AM} = X \mathbf{AB} \quad (2-44)$$

D'autre part, d'après (35), on a :

$$\mathbf{AM} = \frac{y}{x+y} \mathbf{AB} \quad (2-45)$$

$$\text{donc } X = \frac{y}{x+y} = y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} \quad (2-46)$$

où α_k vaut 0 ou 2.

Dans ce qui suit, nous allons généraliser cette écriture au cas de formes fractales planes. Nous examinerons une classe particulière d'objets construits par creusement.

II-B-4-c) Cas des objets fractals générés par creusement par homothéties pures

Considérons le cas d'un objet fractal plan ou même spatial. Deux hypothèses supplémentaires de construction sont nécessaires :

- il s'agit d'une construction par creusement,
- l'itération se fait en remplaçant un objet par p objets homothétiques de celui-ci dans un rapport d'échelle $\rho=1/q$. On suppose que chaque application est une *homothétie simple* : il n'est pas nécessaire de la composer avec une isométrie positive ou négative.

Il convient de bien séparer ce qui relève de l'initiateur (polygone à m côtés, polyèdre, mais parfois un ensemble plus compliqué) de ce qui relève de l'opération de génération, c'est à dire l'application des p homothéties à un objet quelconque.

Il nous faut choisir un système de coordonnées homogènes. Tous les systèmes sont utilisables a priori, mais tous ne sont pas équivalents du point de vue de la facilité d'utilisation. Si l'initiateur est un polygone de côtés P_1, P_2, \dots, P_m convexe, alors on prend comme système l'ensemble de ces points. En effet, si dans ce système, un point M a pour coordonnées homogènes $L=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, alors la condition suffisante (mais non nécessaire) d'appartenance du point M à l'initiateur (qui est ici une surface) s'écrit simplement :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \lambda_i \geq 0, \text{ et } : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad (2-47)$$

Cette condition se transpose aisément à tous les ordres d'itération supérieurs, comme on l'a vu dans le cas particulier ci-dessus. De plus, elle reste valable dans le cas des polygones convexes à m sommets.

L'hypothèse de convexité dans l'énoncé ci-dessus est essentielle. En effet, considérons le polygone non convexe le plus simple : le quadrilatère représenté sur la figure 37.

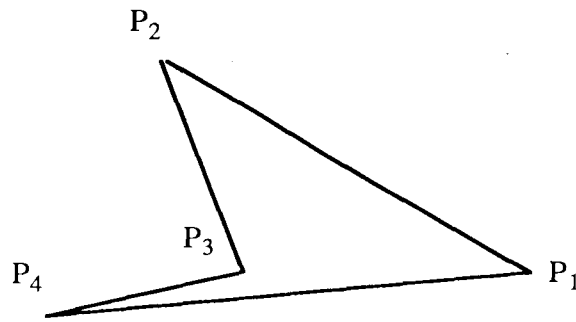


Figure 2-37 : pour un polygone non convexe, l'ensemble des points barycentres des sommets avec des coefficients positifs ne sera pas le polygone lui-même mais son enveloppe convexe.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont les coordonnées homogènes généralisées d'un point M vis-à-vis des points P_1, P_2, P_3, P_4 , alors la condition d'appartenance du point M au quadrilatère $P_1P_2P_3P_4$ ne peut être :

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \quad (2-48)$$

En effet, si le point M est à l'intérieur du triangle $P_2P_3P_4$, alors ses coordonnées homogènes vérifient :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0 \text{ et } \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \quad (2-49)$$

et les conditions (48) sont respectées, alors même que le point M n'appartient pas au quadrilatère $P_1P_2P_3P_4$.

En vérité, la condition (47) permet d'atteindre tous les points de l'enveloppe convexe d'un polygone, qui ne coïncide pas forcément avec ce polygone.

La génération fractale se traduit dans notre cas d'étude à chaque ordre d'itération par un remplacement d'une forme par p formes homothétiques. On appelle dans la suite A_1, A_2, \dots, A_p les centres des p homothéties définissant la construction fractale. Nous allons décrire chaque point M du plan par ses m coordonnées homogènes vis-à-vis des points P_1, P_2, \dots, P_m .

Il est alors commode d'identifier chaque vecteur à m composantes à un point du plan. $M_{i,j}$ est un point de l'ensemble construit à l'ordre i ($1 \leq j \leq p^i$). L'indice j permet d'identifier les homothéties successives ayant permis de construire ce point. $A_{i,k}$ est le centre d'homothétie relatif au k -ième ensemble construit à l'ordre i ($1 \leq k \leq p$), à partir d'un ensemble unique d'ordre $i-1$, à choisir parmi les points A_1, A_2, \dots, A_p . Le vrai centre d'homothétie dans le passage de la région d'ordre $i-1$ à la région d'ordre i est un point Ω_i . Ω_i est le

point obtenu après $i-1$ homothéties consécutives appliquées au point $A_{i,k}$. Il n'appartient pas, sauf cas exceptionnel, à l'ensemble des points A_1, A_2, \dots, A_p . Sur la figure 36 sont représentés, dans le cas du tamis de Sierpinski, les points définis ci-dessus.

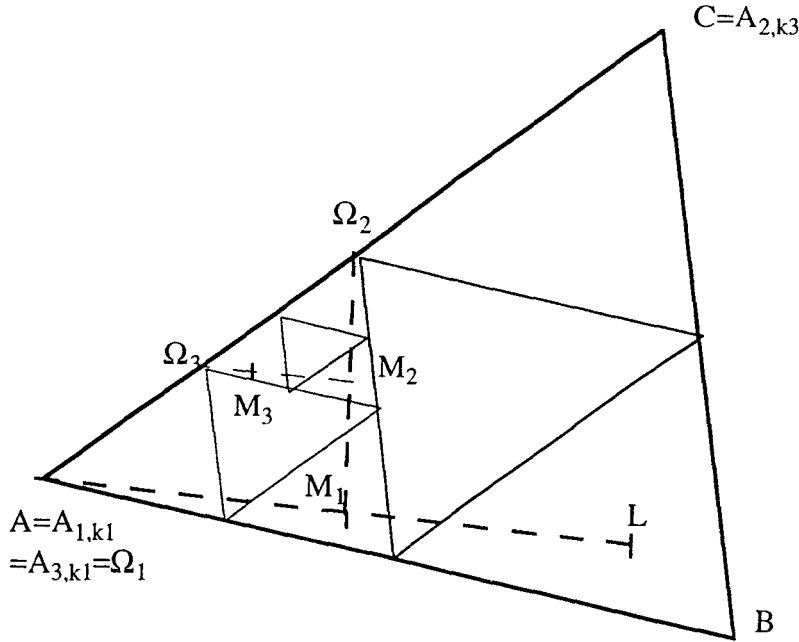


Figure 2-38 : le point L est envoyé successivement sur les points M_1, M_2, M_3 par des homothéties de centres respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, correspondant à des sommets du triangle initial A, C et A

Dans ce cas, chaque point de la forme fractale a pour coordonnées homogènes :

$$M_{n,j} = \sum_{i=1}^n \frac{q-1}{q^i} A_{i,k_i} + \frac{1}{q^n} L \quad (2-50)$$

où $q=1/p$ et k_1, \dots, k_n sont des entiers compris entre 0 et $p-1$. Ils proviennent de la décomposition unique de $j-1$ suivant les puissances entières de p :

$$j = \sum_{i=1}^n k_i p^{n-i} + 1 \quad (2-51)$$

La démonstration de cette formule est donnée en Annexe II.

II-B-4-d) Généralisation à d'autres cas de construction par creusement.

On considère toujours le cas des formes construites par creusement. On ne se restreint pas ici au cas où les applications géométriques définissant l'itération sont des homothéties, mais on autorise des homothéties composées avec des isométries du plan ou de l'espace.

Le procédé utilisé auparavant (emploi des coordonnées homogènes) ne peut pas s'appliquer en toute généralité dans ce cas pour une raison fondamentale :

Les opérations effectuées précédemment faisaient intervenir des objets mathématiques (points) possédant entre eux des relations générales, indépendantes du repère et même de l'espace choisi. Il n'apparaissait aucune notion de distance proprement dite, mais plutôt de rapport de distance. Il n'était question que de géométrie affine.

La combinaison des homothéties à des isométries conduit à prendre en compte la métrique. On ne peut plus mettre les relations entre un point antécédent et son image sous la forme linéaire (A2-2).

Il demeure néanmoins possible, dans certains cas, d'utiliser le traitement par coordonnées homogènes. On le constate sur l'exemple de la figure 38 modifié où au lieu de choisir comme initiateur un triangle quelconque on choisit un triangle isocèle ou équilatéral.

Dans le cas d'un triangle ABC équilatéral, on examine sur la figure 39 deux des images possibles de l'initiateur.

Tout d'abord, on choisit comme application une homothétie de centre A de rapport $1/2$. Dans un second temps, on commence par appliquer une rotation r de centre G, d'angle $2\pi/3$, puis l'homothétie précédente. Le triangle initial $A_1B_1C_1$ est modifié point par point mais n'est pas globalement modifié. La rotation d'un point de vue formel, ne fait que modifier l'ordre des points présentés. Il est donc possible d'exprimer les coordonnées d'un point de la forme d'ordre 1 à l'aide d'une formule équivalente à (A2-2), moyennant une permutation sur les coordonnées homogènes. Ceci est permis par le fait qu'un

triangle peut être décrit globalement par ses trois sommets sans aucune considération d'ordre.

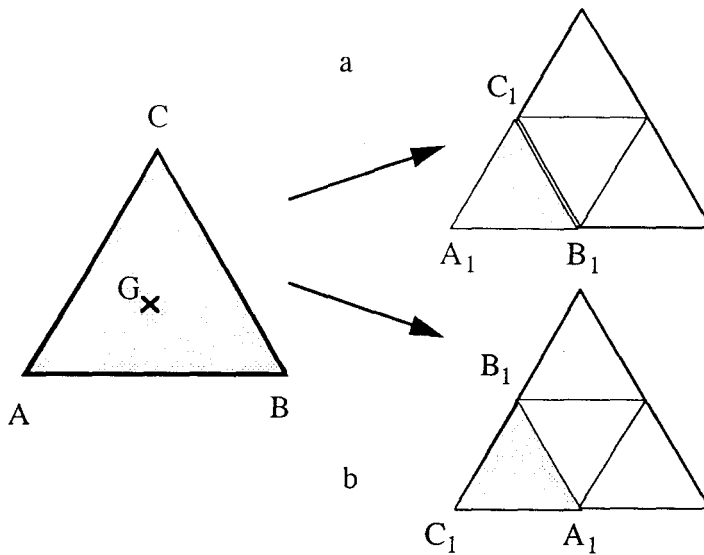


Figure 2-39 : a : génération par homothétie pure
b : génération par rotation d'angle $2\pi/3$ composée avec une homothétie

On a par exemple pour le premier cas de la figure 39 :

$$M_1 = \frac{q-1}{q} A + \frac{1}{q} L \quad (2-52)$$

où L est un point de l'initiateur et M_1 un point du triangle $A_1B_1C_1$.

On explicite cette relation avec des notations évidentes :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \frac{q-1}{q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{q} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (2-53)$$

A l'aide des mêmes notations, on peut donner les coordonnées homogènes d'un point M_1 pour le second cas de la figure 39 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \frac{q-1}{q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{q} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2-54)$$

Bien entendu, la relation (52) pourrait être conservée. Globalement, l'image du triangle ABC dans son ensemble n'est pas modifiée. Toutefois alors le point M_1 n'est plus l'image du point L. Pour retrouver cette relation antécédent-image, il faut partir de la relation (54). Elle peut être réécrite formellement :

$$M_1 = \frac{q-1}{q}A + \frac{1}{q}\tilde{r}(L) \quad (2-55)$$

où \tilde{r} est une permutation sur les coordonnées homogènes correspondant à la rotation r définie plus haut.

On peut considérer que la démarche poursuivie consistant à introduire des permutations sur les coordonnées homogènes pour tenir compte des rotations est inutile dans le cas du tapis de Sierpinski complet, mais ceci est uniquement dû au fait que la forme d'ordre 1 possède dans ce cas le même groupe de symétrie que l'initiateur. L'intérêt de cette démarche apparaît lorsqu'il y a perte d'éléments de symétrie lorsqu'on avance dans les ordres d'itération (cf. II-B-3).

Cette particularité du problème est générale. A chaque application définissant la construction d'une des p images de l'initiateur, ou encore à chacun des membres de son groupe ponctuel de symétrie, correspond une permutation sur les variables $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (cf. figure 38). Dans le cas du triangle équilatéral, ce groupe est $G_T = \{i, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, où s désigne par exemple la symétrie d'axe (GC).

Pour les six cas présentés, on donne la relation exacte antécédent-image avec les notations appropriées :

Si $g_1=i$, alors on a : $M_1 = \frac{q-1}{q}A + \frac{1}{q}L$

Si $g_1=r$, alors on a : $M_1 = \frac{q-1}{q}A + \frac{1}{q}\tilde{r}(L)$, où : $\tilde{r} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

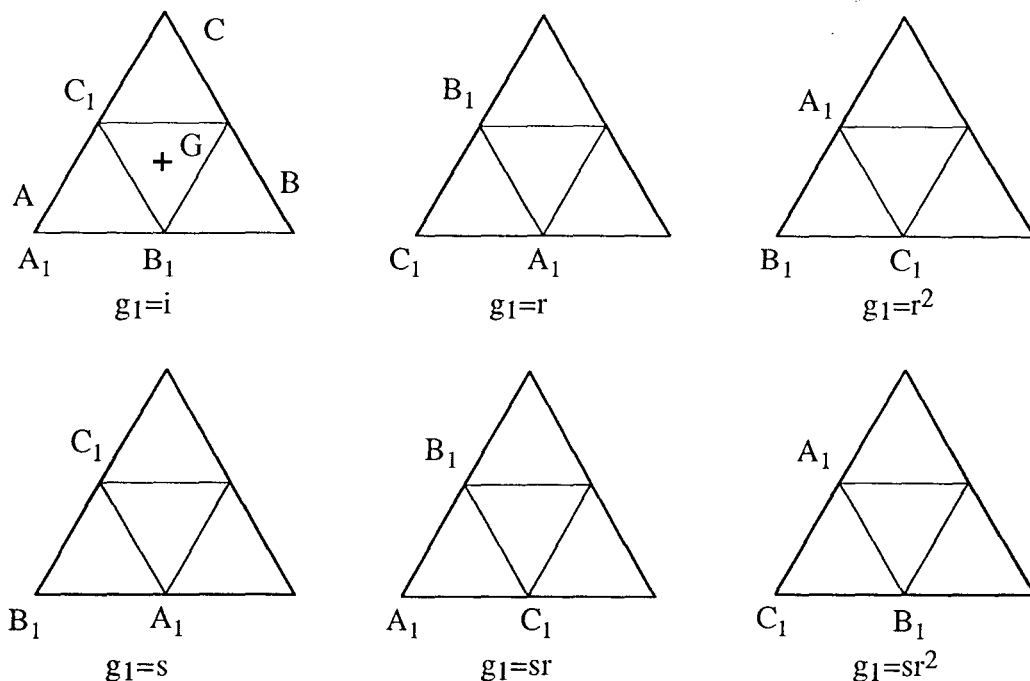


Figure 2-40 : images possibles du triangle ABC et isométries associées

$$\text{Si } g_1=r^2, \text{ alors on a : } M_1 = \frac{q-1}{q}A + \frac{1}{q}\tilde{r}^2(L), \text{ où : } \tilde{r}^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } g_1=s, \text{ alors on a : } M_1 = \frac{q-1}{q}A + \frac{1}{q}\tilde{s}(L), \text{ où : } \tilde{s} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } g_1=sr, \text{ alors on a : } M_1 = \frac{q-1}{q}A + \frac{1}{q}\tilde{s}\tilde{r}(L), \text{ où : } \tilde{s}\tilde{r} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } g_1=sr^2, \text{ alors on a : } M_1 = \frac{q-1}{q}A + \frac{1}{q}\tilde{s}\tilde{r}^2(L), \text{ où : } \tilde{s}\tilde{r}^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

On a généralisé la relation simple de définition de l'application géométrique (52) par la formule :

$$M_1 = \frac{q-1}{q}A + \frac{1}{q}\tilde{g}(L) \tag{2-56}$$

où \tilde{g} est un élément du groupe des permutations de trois éléments correspondant à une isométrie du groupe G_T .

Il existe un isomorphisme entre le groupe de symétrie de l'initiateur, muni de la loi de composition des isométries, et un sous-groupe du groupe des permutations de m variables. Dans le cas étudié ce sous-groupe coïncide avec le groupe des permutations de trois variables, mais ce n'est pas toujours le cas.

Conséquences :

A partir des relations du type (56), il est possible d'obtenir des formes généralisées de l'expression (50) donnant les coordonnées homogènes d'un point qui appartient à la forme d'ordre n , ou à la forme finale.

Il faut garder à l'esprit que l'isométrie intervenant dans (56) ne peut être choisie arbitrairement dans l'ensemble des éléments du groupe ponctuel de symétrie de l'initiateur. A chacun des p objets constituant la forme d'ordre 1, correspond une isométrie g_k , $k=1, \dots, p$. Les composées d'applications résultant du choix d'une isométrie à chaque itération appartiennent au sous-groupe de G engendré par les g_k .

Il convient de bien préciser les notations. A chacun des p objets constituant la forme d'ordre 1, correspond une isométrie g_k , $k=1, \dots, p$. Cependant, pour atteindre un des p^n objets élémentaires générés à l'ordre n , on applique à l'initiateur des homothéties successives composées à chaque itération avec une isométrie. On appelle f_1, f_2, \dots, f_n ces applications. Cela signifie donc qu'à chaque itération, l'isométrie f_i correspondante est à choisir dans l'ensemble de toutes les g_k . On pose de plus : $\lambda = \frac{q-1}{q}$, et : $\mu = \frac{1}{q}$.

On a entre les points $M_{n,j}$ et $M_{n-1,j'}$ (j et j' sont liés par (A2-6)) la relation suivante :

$$M_{n,j} = \lambda \Omega_n + \mu f_n(M_{n-1,j'}) \quad (2-57)$$

Il n'est pas possible d'obtenir d'expression aussi simple que celle (50) du cas affine pur. Ceci est dû au fait que Ω_n ne s'écrit pas simplement en fonction des points $A_{1,k1}, A_{2,k2}, \dots, A_{n,kn}$.

$M_{n,j}$ s'écrit comme somme de 2^n termes. Si on pose :

$$M_{n,j} = F_{\Omega_n} (M_{n-1,j'}) = \lambda \Omega_n + \mu f_n (M_{n-1,j'}) \quad (2-58)$$

alors on a :

$$\Omega_n = F_{\Omega_{n-1}} \circ F_{\Omega_{n-2}} \circ \dots \circ F_{\Omega_1} (A_{n,k_n}) \quad (2-59)$$

de même que :

$$M_{n,j} = F_{\Omega_n} \circ F_{\Omega_{n-1}} \circ \dots \circ F_{\Omega_1} (L) \quad (2-60)$$

On obtient la formule générale :

$$\begin{aligned} M_{n,j} = & \lambda^n A_{1,k_1} \\ & + \sum_{s=1}^{n-1} \left(\lambda^{n-s} \mu^s \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq n} f_{j_s} \circ f_{j_{s-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_n(j_1, j_2, \dots, j_s)} \right) \right) \\ & + \mu^n f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 (L) \end{aligned} \quad (2-61)$$

où la fonction h est définie par :

$$h_n(j_1, j_2, \dots, j_s) = \min \left(N^*_n - \{j_i\}_{i \in N^*_s} \right) \quad (2-62)$$

où N^*_k indique l'ensemble des entiers compris entre 1 et k .

Rappelons qu'en toute rigueur, le point générique intervenant dans (61) est $A_{h_n(j_1, j_2, \dots, j_s), k_{h_n(j_1, j_2, \dots, j_s)}}$. Nous l'écrirons dans la suite comme ci-dessus, à savoir $A_{h_n(j_1, j_2, \dots, j_s)}$, ce qui ne nuit en rien à la validité de la démonstration effectuée en annexe III.

La formule (61) n'est pas aussi facilement utilisable que la formule (50), tant du point de vue analytique que du point de vue informatique. Néanmoins, du fait de la structure de groupe sous-jacente, les composées d'isométries du type $f_{j_s} \circ f_{j_{s-1}} \dots \circ f_{j_1}$ sont toutes des éléments du sous-groupe de G engendré

par les g_k donc en nombre fini et la plupart du temps petit (6 dans l'exemple considéré).

Ceci achève notre étude géométrique des objets et de la génération fractale. Elle nous a permis de progresser dans l'appréhension de ces objets, trop souvent limitée à des considérations statistiques. Le chapitre suivant sera consacré à l'étude physique de ces objets, du point de vue de l'interaction avec les ondes.

TROISIÈME PARTIE :

**MILIEU FRACTAL ET
ÉLECTROMAGNÉTISME**

III MILIEU FRACTAL ET ÉLECTROMAGNÉTISME

L'ensemble des travaux effectués jusqu'ici nous a permis de mettre en lumière les liens existant entre la génération fractale et la notion d'information. Cette approche par la géométrie nous a permis de progresser dans la compréhension de la description des phénomènes propagatifs dans des milieux fractals. Nous allons présenter dans cette troisième partie les résultats obtenus.

Le cas des objets fractals plans sera étudié en premier lieu. Nous sommes parvenus à expliciter, pour toute plaque plane percée d'un trou fractal, la figure de diffraction obtenue. Ce calcul a été effectué dans le cadre de la théorie de la diffraction de Fraunhofer. L'accord avec les résultats expérimentaux est bon, comme nous le verrons sur quelques exemples.

En ce qui concerne les objets tridimensionnels, nous sommes obligés de prendre en compte l'aspect propagatif des phénomènes. Même si dans ce domaine les avancées ne sont pas encore significatives, nous allons rappeler les nouvelles tentatives d'appréhension de la propagation, fondées sur la topologie algébrique.

III-A) Étude du point de vue électromagnétique d'objets bidimensionnels : diffraction sur des trous fractals

Nous allons commencer par étudier le problème de l'interaction des milieux hétérogènes avec une onde électromagnétique dans le cas bidimensionnel. Il n'y a pas lieu ici de faire intervenir les phénomènes propagatifs. Nous nous limiterons donc à l'étude de la diffraction d'une onde incidente sur une plaque mince possédant un bord fractal.

III-A-1) Présentation du problème

La diffraction optique par des objets fractals a constitué un important sujet d'étude depuis une bonne dizaine années [54-58]. De ce point de vue, on a étudié aussi bien des formes fractales stochastiques que déterministes. Ces études ont été réalisées dans le cadre de plusieurs théories de la diffraction : celle de Fraunhofer que nous emploierons ici ou celle de Fresnel qui présente des hypothèses moins restrictives.

La diffraction par des ouvertures fractales est un sujet intéressant, d'un point de vue aussi bien académique que pratique. Elle constitue un moyen d'obtenir de l'information sur une forme fractale.

Les ouvertures fractales considérées à ce jour en diffraction n'étaient pas les plus générales : la poussière de Cantor [54], la courbe de Von Koch [58]. Toutes ces ouvertures étaient constituées de segments mis bout à bout ou non et d'épaisseur infiniment petite. Il était ainsi possible de décrire la structure fractale à l'aide d'un formalisme monodimensionnel. Dans celui-ci, l'objet fractal est décrit par une suite de positions sur une droite ou bien une suite d'angles.

Dans ce qui suit, nous allons présenter un formalisme complètement bidimensionnel. Il est capable d'appréhender toute forme fractale n'ayant pas de bords courbes. Sa frontière doit ne comporter que des segments de droite. Nous allons appliquer dans ce qui suit le formalisme de Fraunhofer.

III-A-2) Expression générale de l'amplitude de l'onde diffractée

L'expérience de diffraction est représentée sur la figure 1.

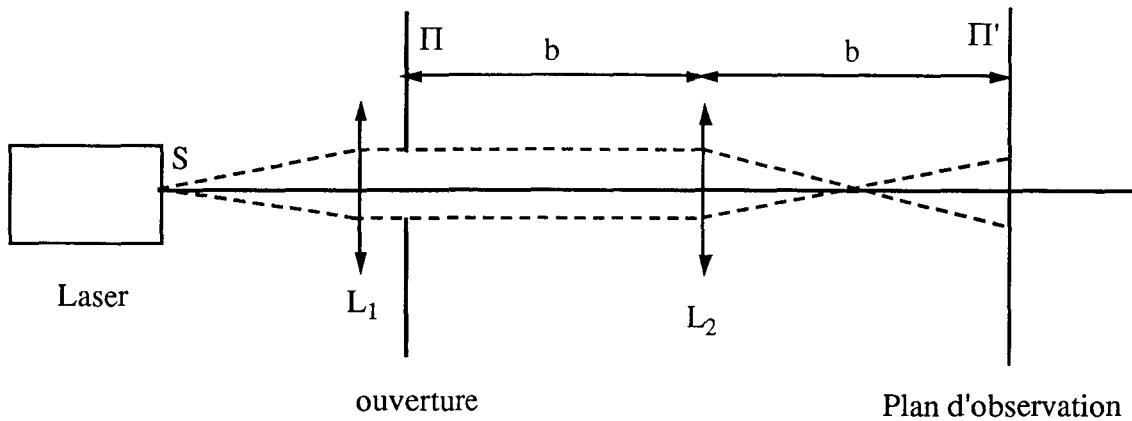


Figure 3-1 : système optique expérimental

Dans la suite du chapitre, nous considérons une ouverture de diamètre caractéristique D percée dans un écran Π .

Une source de lumière y envoie des vibrations monochromatiques de longueur d'onde λ . La lumière émergeant de l'ouverture est recueillie sur un écran Π' parallèle à Π . Notre objectif est de déterminer la vibration reçue en un point M de Π' . En théorie de Fraunhofer, l'amplitude de l'onde diffractée en M est donnée par :

$$U(M) = K \iint_S e^{\frac{-2\pi i}{\lambda b}(xX+yY)} dx dy \quad (3-1)$$

où X et Y désignent les coordonnées cartésiennes de M dans le plan d'observation Π' .

Cette théorie prend sa source dans le principe d'Huygens et le postulat de Fresnel. Ceci revient à supposer que tout point P de l'ouverture tracée dans Π est considéré comme une source dont l'amplitude et la phase sont précisément l'amplitude et la phase de la vibration produite en P par la source S . Les hypothèses de Fresnel ($\lambda \ll D$ et $\lambda \ll a, b$) consistent à se placer suffisamment loin de l'écran Π pour pouvoir assimiler les ondes sphériques secondaires à des ondes planes. Le régime est dit de Fraunhofer si toutes les ondes

secondaires issues de l'ouverture arrivent en phase au point d'observation M de Π' . La relation $b \gg \frac{2D^2}{\lambda}$ est alors vérifiée.

Si on effectue le changement de variables $\xi=X/(\lambda b)$ et $\eta=Y/(\lambda b)$, nous identifions l'expression (1) à la transformée de Fourier de la fonction caractéristique χ_S du domaine S :

$$\chi_S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in S \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin S \end{cases} \quad (3-2)$$

$$U(\xi, \eta) = K \iint_{-\infty}^{\infty} \chi_S(x, y) e^{-2\pi i(x\xi + y\eta)} dx dy \quad (3-3)$$

Dans la suite, nous allons déterminer l'amplitude (3) pour des ouvertures de complexité croissante.

III-A-3) Cas de l'ouverture triangulaire

Le cas de l'ouverture triangulaire est essentiel pour l'obtention d'une expression générale. Ceci est dû au fait que l'amplitude de l'onde diffractée est additive. Toute ouverture dont la frontière est une ligne brisée ou un ensemble de lignes brisées peut être pavée par un ensemble de triangles. Puisque l'amplitude est additive, l'amplitude totale est la somme des amplitudes de l'onde diffractée par chacun des triangles composant le pavage. Il est donc nécessaire de passer par le cas triangulaire.

Le calcul complet est long et fastidieux. Il est donné en annexe IV. Il conduit à l'expression de l'amplitude :

$$U(M) = \frac{2KS_{ABC}}{u^2} \left(\begin{array}{l} \frac{e^{-iuOA.OM}}{(OM.BA)(OM.AC)} \\ + \frac{e^{-iuOB.OM}}{(OM.CB)(OM.BA)} \\ + \frac{e^{-iuOC.OM}}{(OM.AC)(OM.CB)} \end{array} \right) \quad (3-4)$$

où S_{ABC} désigne la surface algébrique du triangle ABC et où $u=k/b$. Cette expression va s'avérer très pratique à utiliser. Ceci provient du fait que les sommets A, B, C et le centre O du repère y apparaissent explicitement. Elle garde donc la même forme quel que soit le repère du plan Π de centre O considéré.

III-A-4) Cas de l'ouverture polygonale

L'étape suivante consiste à déterminer la figure de diffraction d'une ouverture polygonale. Considérons un polygone (qui peut être convexe ou non) maillé par un ensemble de triangles. Soient A_i les noeuds de ce maillage. L'expression (4) d'une part, la propriété d'additivité des amplitudes d'autre part, montrent qu'on peut mettre l'amplitude totale sous la forme :

$$U(M) = \sum_i f_i(M) e^{-iuOA_i \cdot OM} \quad (3-5)$$

où f_i désigne une fonction de M paramétrée par les points A_k , $k=1, \dots, n$. $f_i(M)$ est appelée la contribution du point A_i , même si A_i apparaît dans chaque $f_j(M)$ tel que $A_i A_j$ soit un segment appartenant au maillage.

Les points du maillage sont de deux types : ils peuvent appartenir ou non à la frontière du polygone considéré (cf. fig. 2). Nous allons examiner successivement les deux possibilités.

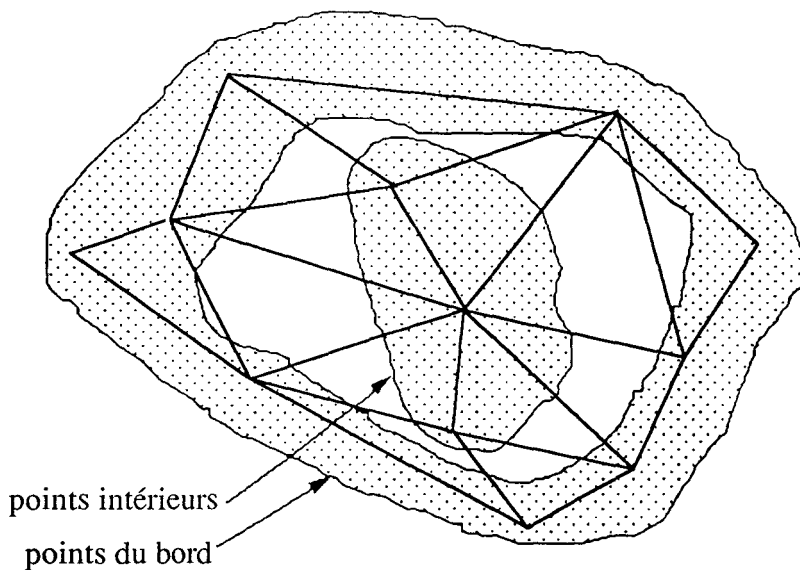


Figure 3-2 : les points du maillage sont divisés en deux types : ceux qui appartiennent à la frontière de l'ouverture et ceux qui ne lui appartiennent pas.

III-A-4-a) Cas d'un point du maillage intérieur au polygone.

Considérons un tel point P . Par hypothèse P est lié directement à n autres points du maillage A_0, A_1, \dots, A_{n-1} .

La contribution du point P à l'amplitude définie par l'expression (5) vaut :

$$f_P(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathbf{PA}_k \wedge \mathbf{PA}_{k+1}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{P} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{PA}_k \cdot \mathbf{OM})} \quad (3-6)$$

Nous avons posé $A_n = A_0$ pour faciliter l'écriture de la formule.

Le calcul complet effectué en annexe V montre que $f_P(M) = 0$. Cette propriété a pour conséquence importante le fait que la somme (5) ne doit plus être effectuée que sur les points du maillage appartenant à la frontière du polyèdre. Cependant, il n'est pas encore possible de conclure que les points du maillage intérieurs n'ont aucune influence sur le résultat final. En effet, un point intérieur peut appartenir à une arête du maillage dont l'autre extrémité Q appartient à la frontière du polygone et par conséquent apparaître dans $f_Q(M)$.

III-A-4-b) Cas d'un point du maillage appartenant à la frontière du polygone

Il s'agit maintenant de déterminer la contribution à (5) d'un point P appartenant à la frontière du polygone. Le résultat est immédiat si P est un sommet convexe appartenant à exactement deux arêtes du maillage (A_0P et A_1P). A_0 et A_1 sont alors eux aussi des points de la frontière et la contribution de P vaut :

$$f_P(M) = \frac{(\mathbf{PA}_0 \wedge \mathbf{PA}_1) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_1\mathbf{P} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{PA}_0 \cdot \mathbf{OM})} \quad (3-7)$$

Si maintenant nous supposons que P est lié à $n+1$ points A_0, A_1, \dots, A_n , la contribution de P est toujours donnée par (6). La démonstration est semblable à celle effectuée en annexe V. On obtient à partir de (A3-4) :

$$f_P(M) = \frac{1}{Y} \left(\frac{\cos(\theta_0)}{(\cos(\theta_0)X + \sin(\theta_0)Y)} - \frac{\cos(\theta_n)}{(\cos(\theta_n)X + \sin(\theta_n)Y)} \right) \quad (3-8)$$

Par réduction au même dénominateur, on obtient :

$$f_P(M) = -\frac{\sin(\theta_n - \theta_0)}{(\cos(\theta_n)X + \sin(\theta_n)Y)(\cos(\theta_0)X + \sin(\theta_0)Y)} \quad (3-9)$$

Les termes suivants apparaissent :

$$\begin{aligned} (\mathbf{PA}_0 \wedge \mathbf{PA}_n) \cdot \mathbf{e}_3 &= R_0 R_n \sin(\theta_n - \theta_0), \quad \mathbf{PA}_0 \cdot \mathbf{OM} = R_0 (\cos(\theta_0)X + \sin(\theta_0)Y) \\ \mathbf{A}_n \mathbf{P} \cdot \mathbf{OM} &= -R_n (\cos(\theta_n)X + \sin(\theta_n)Y) \end{aligned}$$

$$\text{On obtient finalement } f_P(M) = \frac{(\mathbf{PA}_0 \wedge \mathbf{PA}_n) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_n \mathbf{P} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{PA}_0 \cdot \mathbf{OM})} \quad (3-10)$$

Cette expression est identique au cas particulier (7). Nous concluons que la contribution de P ne dépend que de P et des deux sommets les plus proches situés sur la frontière du polygone.

La conclusion principale à tirer est que l'amplitude de l'onde diffractée ne dépend pas du tout des points intérieurs du maillage. Ceci signifie que tous les maillages sont équivalents de ce point de vue. Mieux même, il n'est plus nécessaire d'employer de maillage. Les seuls points apparaissant dans l'expression de l'amplitude sont les points de la frontière.

La diffraction de Fraunhofer, définie auparavant comme un phénomène de surface (cf. l'intégrale surfacique apparaissant dans (1)), apparaît maintenant comme un phénomène de bord. Cette remarque devrait inciter à considérer la diffraction comme une interaction entre le faisceau incident et le bord de l'ouverture.

Afin de fournir une expression complète de l'amplitude, il nous reste à vérifier que les points y apparaissant sont des vrais sommets du polygone, à savoir qu'ils correspondent à un changement de direction.

Pour cela, nous considérons cinq points consécutifs de la frontière A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 tels que A_3 appartient au segment $[A_2A_4]$. La contribution des points A_2, A_3, A_4 est alors :

$$U'(M) = \left(\begin{array}{l} \frac{(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \wedge \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu \mathbf{OA}_2 \cdot \mathbf{OM}} \\ \frac{(\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \wedge \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu \mathbf{OA}_3 \cdot \mathbf{OM}} \\ \frac{(\mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \wedge \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_3) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu \mathbf{OA}_4 \cdot \mathbf{OM}} \end{array} \right)$$

Nous avons $\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \wedge \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$. La contribution de \mathbf{A}_3 est donc zéro. De plus :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \lambda \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4 \\ \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_3 = \mu \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_2 \end{cases}$$

On déduit :

$$U'(M) = \left(\begin{array}{l} \frac{(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4 \wedge \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu \mathbf{OA}_2 \cdot \mathbf{OM}} \\ + \frac{(\mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \wedge \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu \mathbf{OA}_4 \cdot \mathbf{OM}} \end{array} \right)$$

Les contributions de \mathbf{A}_2 et \mathbf{A}_4 ne dépendent pas du tout de \mathbf{A}_3 . Ceci montre que les seules contributions sont celles des vrais sommets de la frontière.

Nous pouvons maintenant donner la formule générale :

$$U(M) = \frac{K}{u^2} \sum_{k=1}^n \frac{(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_{k+1} \wedge \mathbf{A}_k \mathbf{A}_{k-1}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_{k+1} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu \mathbf{OA}_k \cdot \mathbf{OM}} \quad (3-11)$$

où $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_n$ et $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{n+1}$.

III-A-5) Application au cas des objets fractals

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents au cas des ouvertures fractales. Dans le cas général, l'amplitude s'écrit comme une somme sur les sommets, et même si la formule (11) est suffisante pour graphiquement représenter la figure de diffraction, aucune simplification analytique n'est possible. Il existe deux cas où cette simplification est possible.

III-A-5-a) Cas d'un ensemble d'ouvertures identiques

Considérons une ouverture constituée de m polygones identiques. Nous supposons que chacun d'entre eux possède n sommets ($A_{i,0}=A_{i,n}$, $A_{i,1}=A_{i,n+1}$, $A_{i,2}$, ..., $A_{i,n-1}$) où $i=1,2,\dots,m$. Nous obtenons tous les polygones à partir du premier par des translations de vecteur :

$$\mathbf{A}_{1,1}\mathbf{A}_{i,1} = \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{A}_{i,2} = \dots = \mathbf{A}_{1,j}\mathbf{A}_{i,j} = \dots = \mathbf{v}_i$$

L'amplitude vaut :

$$U(M) = \frac{K}{u^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{(\mathbf{A}_{i,j}\mathbf{A}_{i,j+1} \wedge \mathbf{A}_{i,j}\mathbf{A}_{i,j-1}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_{i,j-1}\mathbf{A}_{i,j} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_{i,j}\mathbf{A}_{i,j+1} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu\mathbf{OA}_{i,j} \cdot \mathbf{OM}}$$

D'après les propriétés de translation du système, nous avons :

$$\forall i \in \{1, m\}, \forall j \in \{1, n\}, \begin{cases} \mathbf{A}_{i,j}\mathbf{A}_{i,j+1} = \mathbf{A}_{1,j}\mathbf{A}_{1,j+1} \\ \mathbf{A}_{i,j}\mathbf{A}_{i,j-1} = \mathbf{A}_{1,j}\mathbf{A}_{1,j-1} \end{cases}$$

De plus, on a pour tous i et j :

$$\mathbf{OA}_{i,j} = \mathbf{OA}_{1,j} + \mathbf{A}_{1,j}\mathbf{A}_{i,j} = \mathbf{OA}_{1,j} + \mathbf{v}_i$$

L'amplitude se met alors sous la forme d'un produit de deux facteurs $U(M)=H(M)F(M)$ avec :

$$\begin{cases} H(M) = \frac{K}{u^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{(\mathbf{A}_{1,j}\mathbf{A}_{1,j+1} \wedge \mathbf{A}_{1,j}\mathbf{A}_{1,j-1}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_{1,j-1}\mathbf{A}_{1,j} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_{1,j}\mathbf{A}_{1,j+1} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu\mathbf{OA}_{1,j} \cdot \mathbf{OM}} \right) \\ F(M) = \sum_{i=1}^m e^{-iuv_i \cdot \mathbf{OM}} \end{cases} \quad (3-12)$$

Cette expression convient pour toute ouverture composée de plusieurs ouvertures élémentaires identiques. Le caractère fractal possible de l'ouverture n'apparaît pas ici. *Le premier terme $H(M)$ est purement physique. Il représente l'amplitude d'une onde diffractée par une seule des ouvertures élémentaires, on l'appelle le facteur de forme. Le second terme $F(M)$ est purement géométrique et est appelé facteur de structure. Il est lié à la distribution des trous élémentaires dans le plan Π .* Nous allons donner dans ce qui suit un caractère fractal à cette distribution.

III-A-5-b) Cas des ouvertures fractales construites par creusement

Le cas des formes construites par creusement mérite d'être examiné attentivement. Nous ferons l'hypothèse supplémentaire que les applications de génération ne mettent pas en jeu des rotations, mais uniquement des isométries.

Soit une forme fractale plane construite à l'ordre d'itération k . Le polygone initial $A_0A_1\dots A_{n-1}$ de centre de gravité choisi en O . A l'ordre k , l'ouverture est composée de p^k polygones de côtés ρ^k fois les côtés du polygone initial.

D'après (12), nous savons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_k(M) = \frac{K}{u^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{(\mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j+1} \wedge \mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j-1}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{B}_{j-1} \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{B}_j \mathbf{B}_{j+1} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu \mathbf{OB}_j \cdot \mathbf{OM}} \right) \\ F_k(M) = \sum_{i=1}^{p^k} e^{-iu \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{OM}} \end{array} \right. \quad (3-13)$$

où $B_0B_1\dots B_{n-1}$ sont les images du polygone initial par l'homothétie de centre O et de rapport ρ^k et \mathbf{v}_i joint le point O au centre de gravité du i -ème des p^k polygones. Nous avons pour tout i et j : $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j = \rho^k \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j$ et $\mathbf{OB}_i = \rho^k \mathbf{OA}_i$. Il en résulte que :

$$H_k(M) = \frac{K}{u^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_{j+1} \wedge \mathbf{A}_j \mathbf{A}_{j-1}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_{j-1} \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_{j+1} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu \rho^k \mathbf{OA}_j \cdot \mathbf{OM}} \right) \quad (3-14)$$

Soit $(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_p)$ l'ensemble des vecteurs qui joignent le point O au centre de gravité du i -ème des polygones qui composent la forme d'ordre 1.

Nous avons alors :

$$F_1(M) = \sum_{i=1}^p e^{-iu\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{OM}}$$

$$F_2(M) = \sum_{i=1}^{p^2} e^{-iu(\mathbf{W}_{k_1} + \rho\mathbf{W}_{k_2}) \cdot \mathbf{OM}} \quad \text{où } k_1 \text{ et } k_2 \text{ proviennent de la décomposition de } i-1 \text{ en puissances de } p. \\ i=k_1p+k_2+1$$

Nous pouvons décomposer la somme $F_2(M)$ de p^2 termes en p sommes de p termes en considérant les p polygones construits à partir du k_1 -ième polygone de la forme d'ordre 1.

Pour k_1 fixé, k_2 varie entre 0 et $p-1$, donc on a :

$$F_2(M) = \sum_{i=1}^p e^{-iu\mathbf{W}_{k_1} \cdot \mathbf{OM}} \sum_{j=1}^p e^{-iu\rho\mathbf{W}_{k_2} \cdot \mathbf{OM}}, \quad \text{où } : j=i-k_1p.$$

Puisque k_1 varie également entre 0 et $p-1$, nous aboutissons à l'expression.

$$F_2(M) = \left(\sum_{i=1}^p e^{-iu\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{OM}} \right) \left(\sum_{i=1}^p e^{-iu\rho\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{OM}} \right) \quad (3-15)$$

Par récurrence sur k , on obtient l'expression générale donnant le facteur de structure :

$$F_k(M) = \prod_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^p e^{-iu\rho^{j-1}\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{OM}} \right) \quad (3-16)$$

Contrairement à la formule (12), le caractère fractal apparaît explicitement dans l'expression de l'amplitude de l'onde diffractée. De plus, ce caractère ne dépend pas du tout du facteur de forme, mais uniquement du facteur de structure. Ceci est en parfaite cohérence avec le fait que le facteur de structure est relié à la distribution des sites diffractants dans le plan Π' .

III-A-6) Quelques conséquences

Les formules démontrées plus haut vont nous permettre de représenter les figures de diffraction de beaucoup d'ouvertures. Nous commençons par vérifier que l'expression (11) coïncide dans les cas classiques avec les résultats connus. Par la suite seulement, nous en viendrons aux ouvertures fractales.

III-A-6-a) Le théorème de Babinet

Les expressions fournies plus haut nous permettent de retrouver les résultats du théorème de Babinet concernant les figures complémentaires. Considérons deux types d'ouvertures. La première est un écran percé d'une ouverture de forme un polygone à n côtés $A_0=A_n, A_1=A_{n+1}, A_2, \dots, A_{n-1}$. La seconde est composée uniquement d'un écran polygonal $A_0=A_n, A_1=A_{n+1}, A_2, \dots, A_{n-1}$. Les deux écrans sont complémentaires. Le théorème de Babinet nous indique que les deux situations conduisent à la même figure de diffraction [59]. D'après l'expression (11), nous déduisons immédiatement que $I_1(M)=I_2(M)$ dans le plan de diffraction. Nous retrouvons bien les conclusions du théorème de Babinet.

III-A-6-b) Ouverture rectangulaire

Soit une ouverture rectangulaire ABCD de côtés $2a$ et $2c$.

On obtient l'amplitude d'après (11) :

$$U(M) = \frac{K}{u^2} \left(\begin{array}{l} \frac{(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AD}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{DA} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu\mathbf{OA} \cdot \mathbf{OM}} \\ + \frac{(\mathbf{BC} \wedge \mathbf{BA}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{BC} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu\mathbf{OB} \cdot \mathbf{OM}} \\ + \frac{(\mathbf{CD} \wedge \mathbf{CB}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{BC} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{CD} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu\mathbf{OC} \cdot \mathbf{OM}} \\ + \frac{(\mathbf{CD} \wedge \mathbf{DA}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{DA} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{AB} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu\mathbf{OD} \cdot \mathbf{OM}} \end{array} \right) \quad (3-17)$$

Nous obtenons successivement :

$$U(M) = \frac{K}{u^2} \left(-\frac{e^{-iu(-aX-cY)}}{XY} + \frac{e^{-iu(aX-cY)}}{XY} - \frac{e^{-iu(aX+cY)}}{XY} + \frac{e^{-iu(-aX+cY)}}{XY} \right)$$

$$U(M) = -\frac{K}{u^2 XY} (e^{-iuaX} - e^{iuaX})(e^{iucY} - e^{-iucY})$$

$$U(M) = \frac{4K}{u^2 XY} \sin(uaX) \sin(ucY) = K' \frac{\sin(uaX) \sin(ucY)}{(uaX)(ucY)} \quad (3-18)$$

Il s'agit bien de l'expression classique en sinus cardinal

III-A-6-c) Ouverture triangulaire

Nous appliquons la relation (11) au cas triangulaire. Nous observons la figure de diffraction représentée en figure 3.

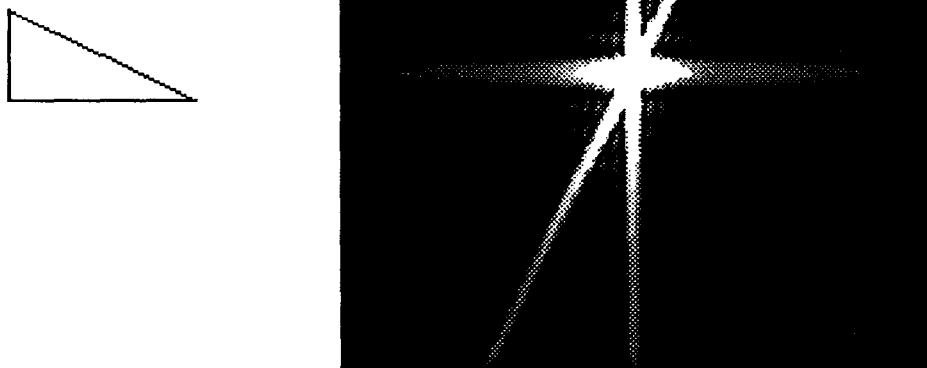


Figure 3-3 : une ouverture triangulaire et la figure de diffraction associée. Les échelles ne sont pas respectées.

Nous concluons que les pics les plus forts sont distribués dans trois directions. Ces directions ne sont pas celles des côtés du triangle, mais celles de ses hauteurs. Il est impossible de mettre ce fait en évidence à partir d'une ouverture rectangulaire, car les directions des côtés et leurs perpendiculaires sont globalement les mêmes.

III-A-6-d) Formes fractales creuses (Tamis de Serpinski)

L'amplitude de l'onde diffractée par l'ouverture d'ordre k est donnée par :

$$U_k(M) = \frac{K}{u^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_{j+1} \wedge \mathbf{A}_j \mathbf{A}_{j-1}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_{j-1} \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_{j+1} \cdot \mathbf{OM})} e^{-iu\rho^k \mathbf{OA}_j \cdot \mathbf{OM}} \right) \prod_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^p e^{-iu\rho^{j-1} \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{OM}} \right) \quad (3-19)$$

avec les notations données précédemment.

Ici on a $n=3$ et $p=3$. Le polygone initial est un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ de côté L et tel que $\mathbf{W}_i = \mathbf{OA}_i/2$.

Les figures de diffraction déduites de la théorie sont données sur la figure 4 pour des ordres d'itération allant de 0 à 5. Elles sont représentées dans une région de forme carrée définie par $2\pi Lx$ et $2\pi Ly$ variant de -150 à 150.

Il est possible de tirer plusieurs conclusions. Nous notons que l'intensité est maximale dans le pic central quel que soit l'ordre d'itération. Ceci est vrai même si, dans le cas présent, la hauteur du pic tend vers 0 comme $(pp^2)^{2k} = (9/16)^k$ lorsque k tend vers l'infini (en théorie de Fraunhofer, l'intensité du pic central est proportionnelle au carré de l'aire de l'ouverture).

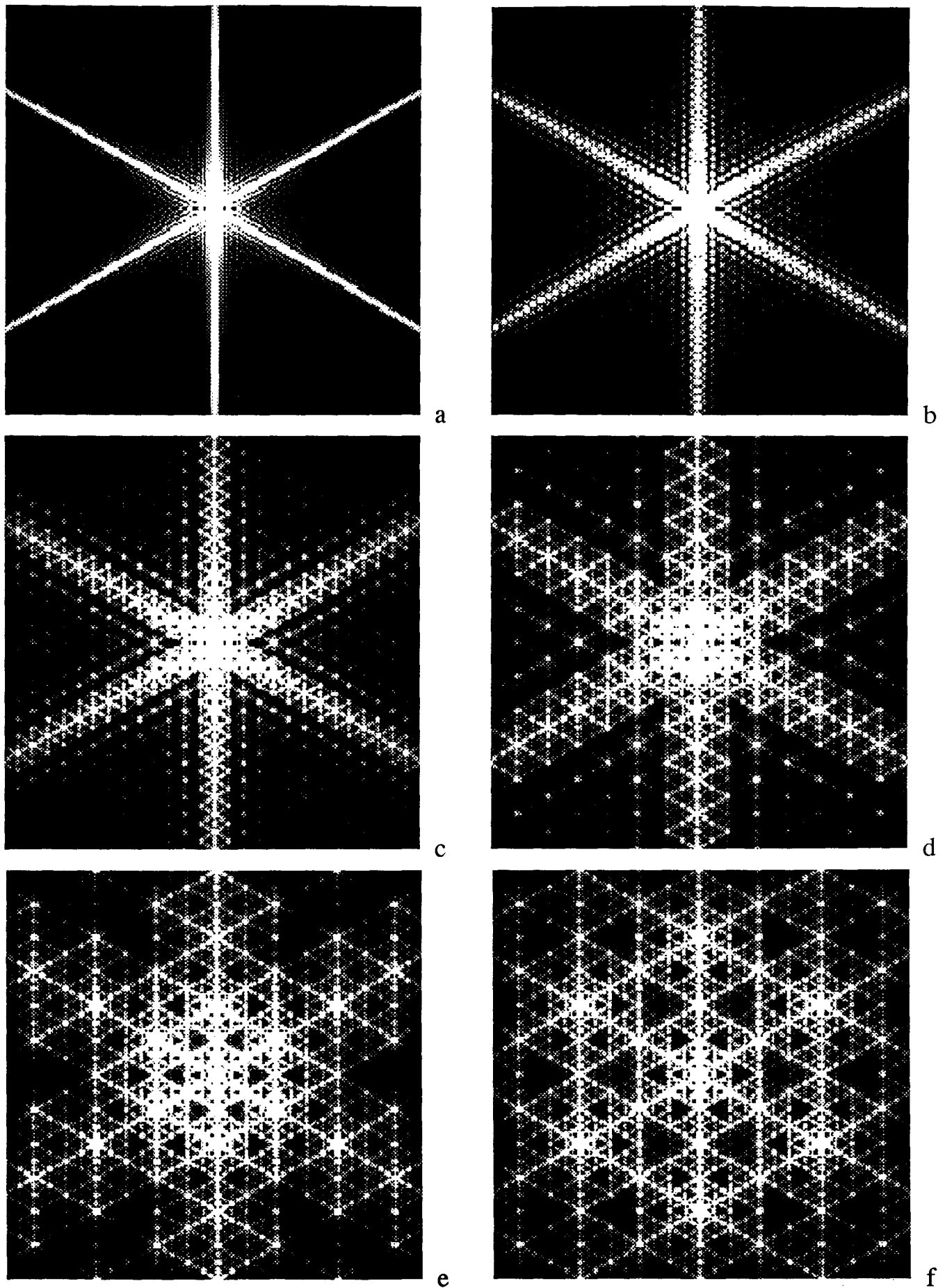


Figure 3-4 : figures de diffraction relatives à un tamis de Sierpinski représentées pour des ordres d'itération allant de 0 (a) à 5 (f).

On remarque une certaine autosimilarité dans les figures de diffraction pour des ordres d'itération élevés. Néanmoins, cette autosimilarité n'est pas aussi rigoureuse que celle de l'ouverture dans l'espace direct. La région constituée des abords immédiats du pic central ne prend aucun caractère autosimilaire lorsqu'on augmente l'ordre d'itération. Ce phénomène est dû au fait que le caractère fractal de l'ouverture a une limite supérieure de résolution, à savoir le diamètre caractéristique de l'ouverture [58]. Comme dans le cas des contours fractals [58], on peut mettre en évidence deux types de région :

- une région centrale de caractère fractal, qui s'étend lorsqu'on augmente l'ordre d'itération. Le facteur d'échelle ($\rho=1/2$) apparaît sur les figures de diffraction (figures 4e et 4f).

- plusieurs régions pseudo-périodiques dans les directions orthogonales aux côtés de l'ouverture. Le terme pseudo-périodique employé ici est dû à la décroissance globale de l'intensité au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'origine. Lorsque l'ordre d'itération augmente, nous pouvons remarquer que la structure régulière due au triangle initial seul disparaît progressivement. Les pics secondaires sont altérés mais restent distribués sur les mêmes directions privilégiées.

III-A-7) Résultats expérimentaux

Nous avons obtenu les figures de diffraction de manière expérimentale pour diverses ouvertures fractales. Le système expérimental est représenté sur la figure 1. Nous avons considéré le cas du flocon de Von Koch.

Les figures de diffraction issues du calcul pour $k=1,2,3,4$ sont représentées sur la figure 5 et le résultat de l'expérience pour $k=4$ sur la figure 6. L'accord entre la théorie et l'expérience est très satisfaisant.

Les expressions analytiques théoriques sont dans ce cas très compliquées, parce que les lois de génération impliquent des rotations d'angle $2\pi/3$. Nous rejoignons en cela les conclusions de Uozumi *et al.*[58].

Nous aboutissons aux mêmes conclusions que dans le cas précédent :

- La figure de diffraction du triangle initial est progressivement déstructurée. Aux premiers ordres d'itération, les pics ne sont distribués que sur trois directions. Progressivement, ils se répandent sur l'ensemble du plan, mais certains pics sont distribués en des structures hexagonales de différentes échelles.
- Aux premiers ordres d'itération, l'intensité n'est élevée que dans la région centrale. Pour des ordres d'itération plus élevés, des pics apparaissent de plus en plus loin du centre. L'énergie traversant l'ouverture tend à être de mieux en mieux dispersée dans le plan d'observation. De plus, les seconds pics et les suivants deviennent de plus en plus intenses par rapport au pic central.
- Le pic central devient de plus en plus pointu. Ce fait a déjà été établi dans le cas de l'ensemble de Cantor 1D. Comme dans le cas des formes construites par creusement, on peut remarquer que la région centrale de la figure de diffraction n'est pas modifiée lorsque l'ordre d'itération augmente. D'autre part, on peut déceler des structures apparaissant à plusieurs échelles sur les figures de diffraction, mais cette autosimilarité n'est pas rigoureuse.

On observe de plus les deux régions définies dans le cas précédent, à savoir une région centrale fractale, et des bandes extérieures à cette région présentant une pseudo-périodicité.

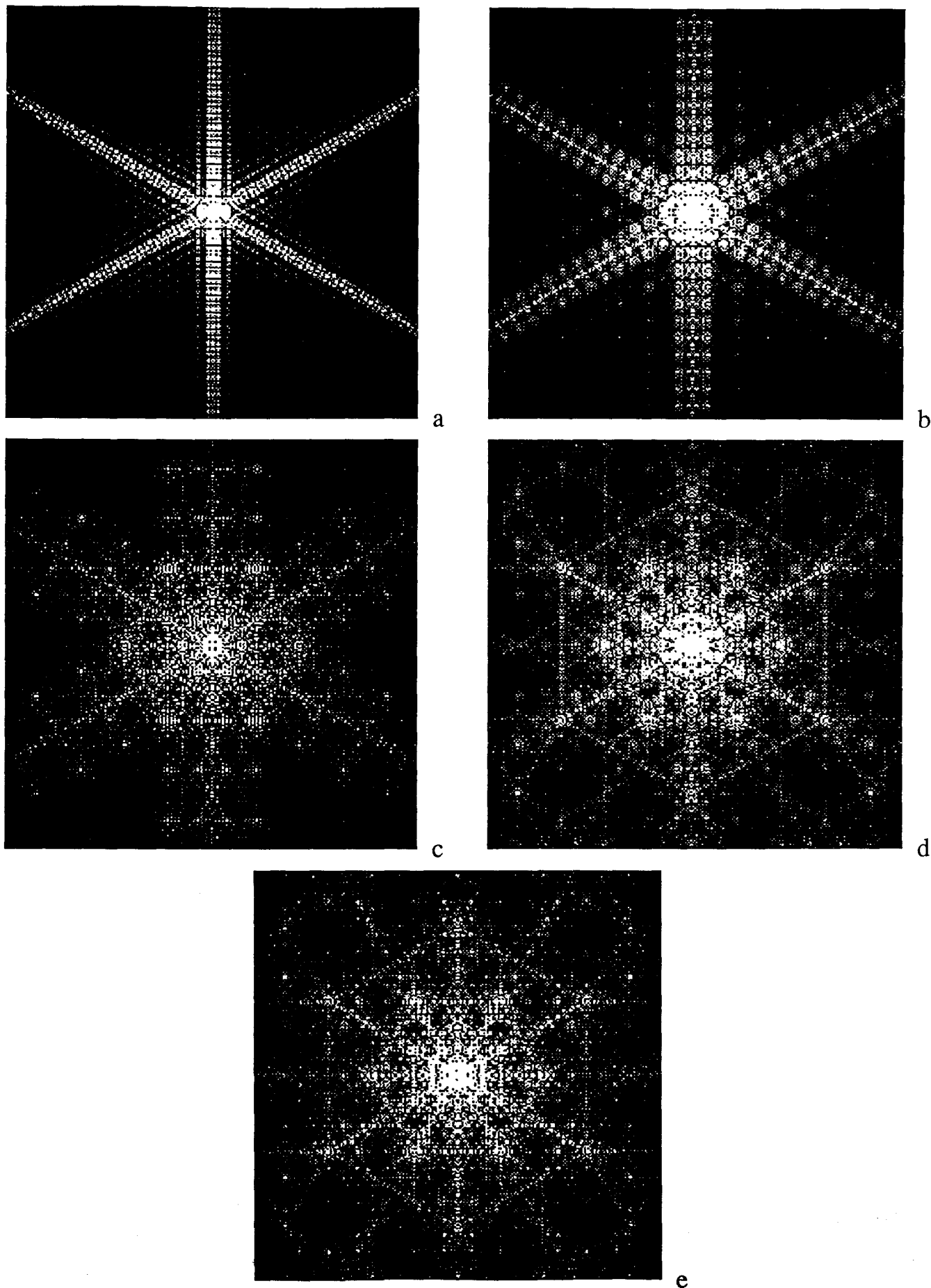


Figure 3-5 : figures de diffraction d'un flocon de Von Koch représentées d'après les formules analytiques, pour un ordre d'itération allant de 1 (a) à 5 (e).

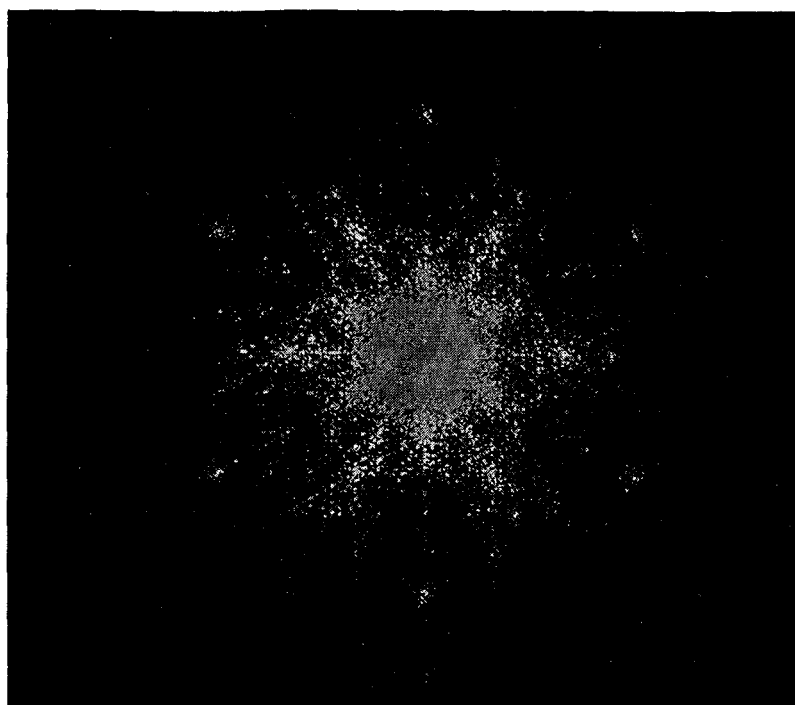


Figure 3-6 : image diffractée obtenue expérimentalement pour un flocon de Von Koch d'ordre 4.

Mêmes si les hypothèses de Fraunhofer faites ici sont relativement restrictives, les travaux effectués représentent une avancée notable. Bien que nous ne puissions obtenir dans tout les cas une expression analytique concise, l'accord avec l'expérience est bon et les comportements observés semblent très généraux. Malgré tout, il n'est pas possible de généraliser les concepts employés à l'étude des objets fractals tridimensionnels. Ceci est dû au fait qu'en 3D, il faut tenir compte des phénomènes propagatifs.

III-B) La propagation en milieu hétérogène

Nous avons vu dans le chapitre I qu'il pouvait être donné aux paramètres de propagation, impédance et constante de propagation, en milieu hétérogène, une forme nouvelle :

$$\begin{cases} Z(\omega) = \frac{(a_1 + i\omega k_1)^\alpha}{(a_2 + i\omega k_2)^\beta} \\ \gamma(\omega) = (a_1 + i\omega k_1)^\alpha (a_2 + i\omega k_2)^\beta \end{cases} \quad (3-20)$$

Cette expression n'est pas compatible avec la plupart des théories envisagées jusqu'ici. Celles-ci traitent le problème en introduisant des solutions généralisées aux équations de Maxwell où les paramètres caractéristiques du milieu (ou de ses constituants) ne sont plus obligatoirement des constantes réelles puisqu'on les fait dépendre de la fréquence. Ainsi les paramètres de propagation conservent leur forme prise en milieu homogène avec une puissance 1/2 provenant directement d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et donc des équations de Maxwell.

La forme (20) montre explicitement que c'est l'ensemble de l'étude de la propagation qui est à reconsidérer. Nous allons nous y attacher dans la suite en prenant un point de vue géométrique.

Tout d'abord nous allons présenter l'électromagnétisme classique à l'aide de l'outil puissant que constituent les formes différentielles. Ceci nous permettra de proposer une généralisation des équations de Maxwell. Nous prendrons ensuite le point de vue de la topologie algébrique. Dans ce cadre, nous interprétons la propagation inertielle en milieu homogène comme la circulation sur les géodésiques d'une variété, en l'occurrence un tore ponctué. Le passage au milieu hétérogène se traduit dans ce contexte par une modification de la variété d'appui avec introduction d'un point à l'infini caractérisé par un accès hyperbolique.

III-B-1) Électromagnétisme et formes différentielles

Le formalisme différentiel extérieur permet de fournir une image simplifiée des relations entre variables électromagnétiques. Après avoir présenté les p-formes, nous allons voir que le calcul extérieur donne un aspect unifié à l'ensemble de l'édifice électromagnétique.

III-B-1-a) Les p-formes

Les p-formes sont des éléments d'espaces vectoriels particuliers définis à partir d'un espace vectoriel L sur R [60,61]. On part de $\Lambda^0 L = R$ et $\Lambda^1 L = L$. $\Lambda^2 L$ est défini comme l'ensemble des sommes de termes :

$$\sum_i a_i (\alpha_i \wedge \beta_i) \quad (3-21)$$

où les a_i sont des réels et les α_i et β_i sont des vecteurs de L. Ces expressions vérifient les lois suivantes pour tous a_i, b_i, α_i et β_i :

$$\begin{cases} (a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2) \wedge \beta = a_1 (\alpha_1 \wedge \beta) + a_2 (\alpha_2 \wedge \beta) \\ \alpha \wedge (b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2) = b_1 (\alpha \wedge \beta_1) + b_2 (\alpha \wedge \beta_2) \\ \alpha \wedge \alpha = 0 \\ \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha = 0 \end{cases} \quad (3-22)$$

Soit $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ une base de L. Alors si $\alpha = \sum_i a_i \sigma^i$ et $\beta = \sum_i b_i \sigma^i$, on a :

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i,j} a_i b_j \sigma^i \wedge \sigma^j = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i) \sigma^i \wedge \sigma^j \quad (3-23)$$

ce qui montre qu'une base de $\Lambda^2 L$ est constituée par l'ensemble des 2-formes du type $\sigma^i \wedge \sigma^j$ avec $1 \leq i < j \leq n$.

La dimension de $\Lambda^2 L$ vaut donc : $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Pour $p \geq 2$, on définit $\Lambda^p L$ de façon analogue. Ses éléments sont des sommes de termes

$$\sum_i a(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) \quad (3-24)$$

dans lesquels les α_i et β_i sont des vecteurs de L et qui vérifient les lois suivantes

- * $(a\alpha + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p = a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p)$ et des lois analogues si tout α_i est remplacé par une combinaison linéaire.
- * $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = 0$ si deux composantes α_i de ce produit sont égales.
- * $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ change de signe si deux des α_i consécutifs sont intervertis.

Comme dans le cas $p=2$, on construit une base de $\Lambda^p L$ par le procédé suivant : pour tout ensemble de p indices $H = \{h_1, \dots, h_p\}$ tel que $1 \leq h_1 < \dots < h_p \leq n$, on pose $\sigma^H = \sigma^{h_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{h_p}$, alors l'ensemble des σ^H constitue une base de $\Lambda^p L$. On conclut que

$$\dim \Lambda^p L = \binom{n}{p} \quad (3-25)$$

En particulier $\dim \Lambda^n L = \binom{n}{n} = 1$ et si $p > n$, tout élément de $\Lambda^p L$ est nul car alors son expression dans la base des σ^H contient au moins deux termes identiques et le produit est nul d'après les règles de manipulation.

Nous avons défini les espaces $\Lambda^p L$ et fourni quelques règles de calcul. Nous allons maintenant présenter les produits extérieurs qui permettent de passer des éléments de $\Lambda^p L$ à ceux de $\Lambda^{p+q} L$.

III-B-1-b) Les produits extérieurs

L'opérateur \wedge permet le déplacement dans l'ensemble des espaces vectoriels $\Lambda^p L$. On multiplie une p -forme λ par une q -forme μ pour obtenir une $(p+q)$ -forme $\lambda \wedge \mu$.

Les propriétés de ce produit extérieur sont :

- * $\lambda \wedge \mu$ est distributif par rapport à l'addition,
- * c'est une loi associative $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$,
- * $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu$.

Ces lois vont nous être utiles dans la manipulation des grandeurs électromagnétiques.

III-B-1-c) Les formes différentielles

Nous allons appliquer ce formalisme au cas particulier des formes différentielles [60-64]. On définit les formes d'ordre p sur un ouvert U de dimension n comme les expressions du type :

$$\omega = \sum_H a_H(x^1, \dots, x^n) dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_p} \quad (3-26)$$

où les fonctions a_H sont supposées continues différentiables. On peut aussi dire que ce sont des grandeurs intégrables sur un espace de dimension p ou mieux encore sur une variété de dimension p incluse dans un espace de dimension n . L'algèbre extérieure définie plus haut s'applique en tout point de U et on peut parler de forme différentielle sur U .

On définit l'opérateur de différentiation d qui à chaque p -forme ω associe une $(p+1)$ -forme $d\omega$ de la façon suivante :

$$\text{si } \omega = \sum_H a_H(x^1, \dots, x^n) dx^H, \text{ alors}$$

$$d\omega = \sum_{i,H} \frac{a_H}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^H$$

On montre que cet opérateur obéit aux règles suivantes :

$$* d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta \quad (3-27)$$

$$* d(\lambda \wedge \mu) = d\lambda \wedge \mu + (-1)^{(\text{deg } \lambda)} \lambda \wedge d\mu \quad (3-28)$$

$$* \text{pour toute } p\text{-forme } \omega, d(d\omega) = 0 \quad (3-29)$$

* pour toute fonction f , $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ (3-30)

L'identité (29) est appelée lemme de Poincaré. La formule (30) indique que pour les formes d'ordre 0, l'opérateur d s'identifie avec l'opérateur gradient.

Si ω est une 1-forme $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, alors d'après les règles (27) à (30), on montre que sa différentielle vaut :

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad (3-31)$$

donc pour les formes d'ordre 1, l'opérateur d s'identifie avec l'opérateur rotationnel.

Enfin si ω est une 2-forme $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, alors sa différentielle est :

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \quad (3-32)$$

donc pour les formes d'ordre 2, l'opérateur d s'identifie avec l'opérateur divergence.

III-B-1-d) Application à l'électromagnétisme

Nous rappelons très brièvement ici les équations de l'électromagnétisme.

Les équations de Maxwell :

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (3-33)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3-34)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3-35)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3-36)$$

L'équation de continuité :

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3-37)$$

Les équations de potentiel au chapitre I-A-3 sont facilement généralisables au cas non stationnaire :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (3-38)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3-39)$$

A chaque grandeur physique considérée ici, il est possible d'associer une forme différentielle. On se place pour ce faire dans l'espace à 4 dimensions (3 d'espace et une de temps) [60,65,66]. Le choix de l'allure et de l'ordre de la forme différentielle se fait par des critères physiques élémentaires en examinant sur quel espace on intègre ces grandeurs.

Par exemple si φ est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} , c'est une forme d'ordre 0. Le champ électrique \mathbf{E} peut être associé à une forme d'ordre 1. Ceci est dû au fait qu'intégrer un champ ne se fait que sur une courbe (la circulation du champ), variété de dimension 1. Nous écrirons donc :

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (3-40)$$

De la même façon, \mathbf{A} et \mathbf{H} sont associés à des formes d'ordre 1 :

$$A = A_x dx + A_y dy + A_z dz \quad (3-41)$$

$$H = H_x dx + H_y dy + H_z dz \quad (3-42)$$

En revanche \mathbf{B} est associé à une forme d'ordre 2. Ceci est dû au fait que la grandeur intégrale relative à \mathbf{B} est son flux à travers une surface. Nous aurons donc :

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \quad (3-43)$$

\mathbf{J} et \mathbf{D} sont également associées à des formes différentielles d'ordre 2.

$$J = J_x dy \wedge dz + J_y dz \wedge dx + J_z dx \wedge dy \quad (3-44)$$

$$D = D_x dy \wedge dz + D_y dz \wedge dx + D_z dx \wedge dy \quad (3-45)$$

Enfin ρ est associé à une forme d'ordre 3 car on obtient un scalaire par intégration de ρ sur une variété tridimensionnelle. On aura donc :

$$\rho = \rho dx \wedge dy \wedge dz \quad (3-46)$$

Nous allons mettre, grâce à cette écriture, les équations de l'électromagnétisme sous une forme particulièrement agréable.

On définit pour ce faire les formes différentielles suivantes α et Φ d'ordres respectifs 1 et 2 :

$$\alpha = A - \varphi dt = A_x dx + A_y dy + A_z dz - \varphi dt \quad (3-47)$$

$$\Phi = B - E dt \quad (3-48)$$

$$\Phi = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy - (E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt)$$

Nous allons examiner la différentielle de α . Pour calculer $d\alpha$ il est astucieux de décomposer l'opérateur d en ses composantes spatiales et temporelles :

$$d = d + \frac{\partial}{\partial t} dt \quad (3-49)$$

On a alors :

$$d\alpha = dA - d\varphi \wedge dt \quad (3-50)$$

$$\begin{aligned} d\alpha = & \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ & + \left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} dx - \frac{\partial A_y}{\partial t} dy - \frac{\partial A_z}{\partial t} dz - d\varphi \right) \wedge dt \end{aligned} \quad (3-51)$$

ou encore, en séparant partie temporelle et spatiale :

$$d\alpha = dA + \left(-\frac{\partial A}{\partial t} - d\varphi \right) \wedge dt \quad (3-52)$$

avec par définition :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A_x}{\partial t} dx + \frac{\partial A_y}{\partial t} dy + \frac{\partial A_z}{\partial t} dz \quad (3-53)$$

Or les équations (38) et (39) se traduisent en langage différentiel respectivement par :

$$B = dA \quad (3-54)$$

et :

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - d\varphi \quad (3-55)$$

On a donc d'après (48), (52), (54) et (55) :

$$d\alpha = \Phi \quad (3-56)$$

D'après le lemme de Poincaré, on a donc $d(d\alpha) = d\Phi = 0$. Nous allons vérifier que Φ a bien une différentielle nulle.

$$d\Phi = dB + \left(\frac{\partial B}{\partial t} + dE \right) \wedge dt \quad (3-57)$$

Or on a :

$$dB = 0 \quad (3-58)$$

et :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + dE = 0 \quad (3-59)$$

Ces égalités sont la traduction en termes différentiels des identités (35) et (34). On a donc bien $d\Phi = 0$.

Dans ce contexte, on interprète aisément les transformations de jauge. Une telle transformation $\alpha \rightarrow \alpha' = \alpha + df$ où f est une fonction scalaire va donner une autre solution de $d\alpha = \Phi$, ceci d'après le lemme de Poincaré appliqué à f .

D'autre part, on définit les formes différentielles Ψ et γ d'ordres respectifs 2 et 3 :

$$\Psi = D - Hdt \quad (3-60)$$

$$\Psi = D_x dy \wedge dz + D_y dz \wedge dx + D_z dx \wedge dy - (E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt)$$

$$\gamma = \rho - J dt \quad (3-61)$$

Calculons $d\Psi$. De la même façon que précédemment, on obtient :

$$d\Psi = dD + \left(\frac{\partial D}{\partial t} + dH \right) \wedge dt \quad (3-62)$$

Or les équations (33) et (36) se traduisent en langage différentiel respectivement par :

$$\rho = dD \quad (3-63)$$

et :

$$dH = J + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \quad (3-64)$$

On a donc d'après (61), (62), (63) et (64) :

$$d\Psi = \gamma. \quad (3-65)$$

Le lemme de Poincaré nous indique encore ici que $d(d\Psi) = d\gamma = 0$. Nous allons vérifier que Ψ a bien une différentielle nulle.

$$d\gamma = d\rho - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + dJ \right) \wedge dt \quad (3-66)$$

Or on a :

$$d\rho = 0 \quad (3-67)$$

(ρ est une forme d'ordre 3) et :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + dJ = 0 \quad (3-68)$$

qui est la traduction différentielle de l'équation de continuité (37). On a donc bien $d\gamma = 0$.

Nous sommes donc parvenus à exprimer toutes les équations de l'électromagnétisme classique sous une forme particulièrement simple, c'est-à-dire à l'aide des deux seules identités $d^2\alpha = 0$ et $d^2\Psi = 0$. L'électromagnétisme peut apparaître dans ce contexte comme une simple traduction du lemme de Poincaré.

Troisième partie : milieu fractal et électromagnétisme

Afin de mieux percevoir l'ensemble de l'édifice électromagnétique, nous allons présenter les relations liant toutes les variables sous la forme d'un diagramme tridimensionnel.

III-B-2) Présentation géométrique des équations de Maxwell

La présentation des grandeurs électromagnétiques en termes de formes différentielles va nous fournir une voie pour généraliser les équations de Maxwell aux milieux non différentiables.

III-B-2-a) Diagrammes électromagnétiques

Il existe un moyen de représenter les relations (33) à (39) sur un diagramme tridimensionnel (figure 7) [66-67]. Les grandeurs données d'abord en formalisme vectoriel sont représentées sur deux plans distincts qu'on appellera respectivement le plan des charges et le plan des sources. Cette dénomination vient du fait qu'un problème électromagnétique consiste à déterminer les deux champs électrique et magnétique (\mathbf{E} et \mathbf{B}) à partir d'une distribution donnée de charge et de courant (ρ et \mathbf{J}) (cf. paragraphe I-A-2-a). Dans ces conditions, les formes différentielles définies au chapitre II-B-1 sont séparées en formes liées aux champs (α et Φ) et en formes liées aux distributions de sources (Ψ et γ).

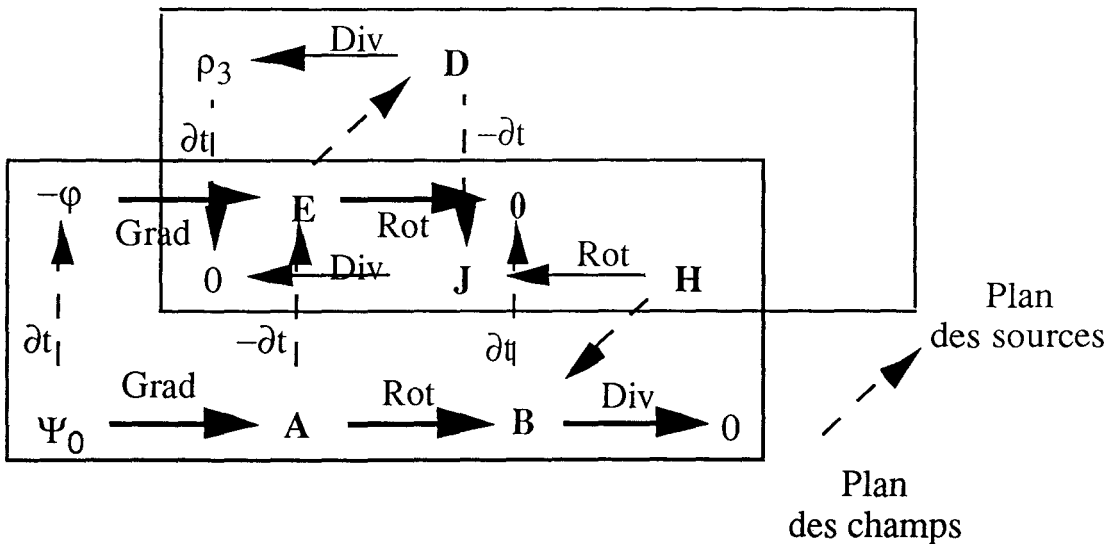


Figure 3-7 : diagramme tridimensionnel montrant les relations entre grandeurs électromagnétiques vectorielles.

Cette présentation permet de bien séparer l'action de l'opérateur de dérivation par rapport au temps, de celle des opérateurs spatiaux. Si on considère les formes différentielles associées aux différentes grandeurs, le diagramme prend la forme suivante :

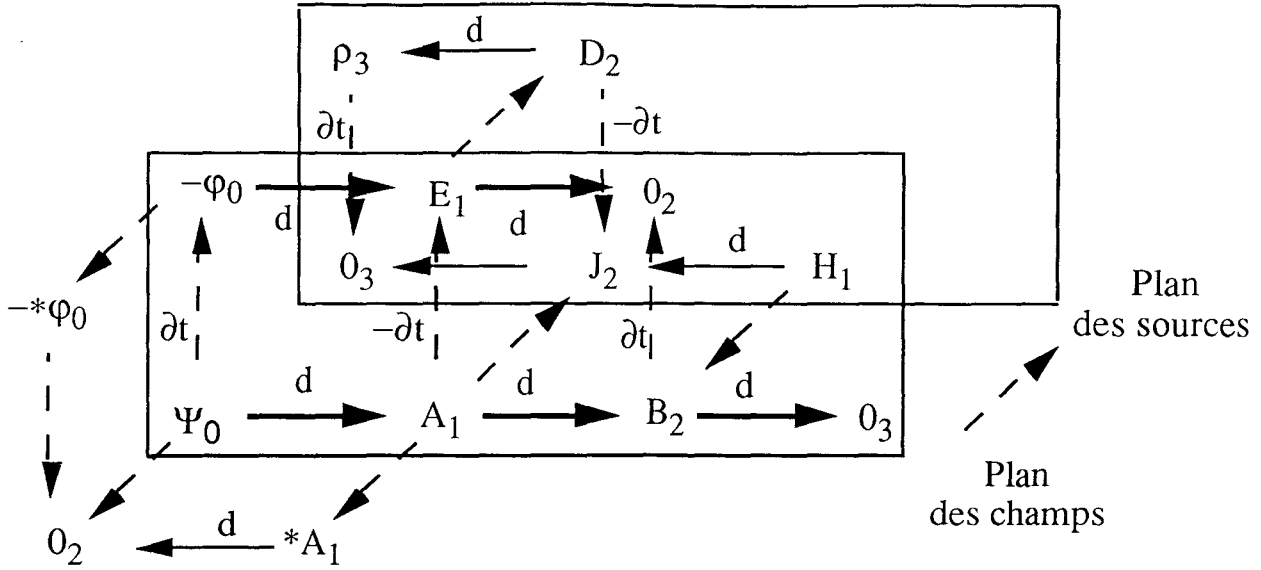


Figure 3-8 : diagramme tridimensionnel montrant les relations entre grandeurs électromagnétiques en tant que formes différentielles.

Les relations entre grandeurs électromagnétiques ont lieu soit entre grandeurs du plan des champs (54,55,58,59), soit entre grandeurs du plan des sources (63,64,67,68). Il n'existe de lien entre les deux plans que par les relations, entre B et H d'une part, entre D et E d'autre part. Nous allons voir que ces relations qui s'expriment en formalisme vectoriel à l'aide des paramètres caractéristiques vont ici prendre une forme opératoire.

III-B-2-b) L'opérateur de Hodge

Nous avons vu en toute généralité que l'espace des p-formes $\Lambda^p L$ sur un espace vectoriel L était de dimension $\binom{n}{p}$ (25). Or on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad (3-69)$$

Ceci signifie que $\Lambda^p L$ et $\Lambda^{n-p} L$ sont de même dimension, et donc qu'il est possible de les mettre en bijection. Ceci peut se faire par l'intermédiaire de l'opérateur de Hodge (noté ici *) qui est une application linéaire de $\Lambda^p L$ dans $\Lambda^{n-p} L$ définie comme suit :

Soit $\lambda \in \Lambda^p L$ fixé. L'application $\mu \rightarrow \lambda \wedge \mu$ est une transformation linéaire de $\Lambda^{n-p} L$ dans l'espace de dimension 1, $\Lambda^n L$. Si σ désigne une base de $\Lambda^n L$, on démontre [60] qu'il existe une unique (n-p)-forme $*\lambda$ telle que :

$$\lambda \wedge \mu = (*\lambda, \mu)\sigma \quad (3-70)$$

(,) désigne un produit scalaire sur $\Lambda^p L$. Il est défini à partir d'un produit scalaire classique sur L. Pour $\lambda = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ et $\mu = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_p$ où les α_i et les β_i sont des 1-formes, on étend le produit scalaire à $\Lambda^p L$ par :

$$(\lambda, \mu) = \text{déterminant } ((\alpha_i, \beta_j)) \quad (3-71)$$

L'opérateur de Hodge choisi va donc dépendre explicitement du produit scalaire défini sur L. Si par exemple $H = \{1, \dots, p\}$ et $K = \{p+1, \dots, n\}$, on a :

$$*\sigma^H = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K \quad (3-72)$$

Dans l'espace usuel tridimensionnel, on considère le produit scalaire défini sur la base orthonormale (dx, dy, dz) par :

$$(dx, dx) = (dy, dy) = (dz, dz) = +1 \quad (3-73)$$

Sur la base de l'espace des 1-formes, l'opérateur de Hodge $*_3$ va donner :

$$\begin{cases} *(dx) = dy \wedge dz \\ *(dy) = dz \wedge dx \\ *(dz) = dx \wedge dy \end{cases} \quad (3-74)$$

Les relations constitutives habituelles $D = \epsilon E$ et $B = \mu H$ prennent alors les formes respectives :

$$D = *_3 E \text{ et } B = *_3 H$$

On voit que les relations constitutives ne rendent pas compte uniquement d'une proportionnalité ou même d'une égalité tensorielle, mais surtout elles véhiculent le changement d'ordre des formes différentielles (ici de 1 à 2).

L'équation de jauge (cf. I-a-3-c) peut également être introduite sur ce diagramme à l'aide de l'opérateur de Hodge. On fait le choix de la jauge dite de Lorentz en écrivant en formalisme vectoriel :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (3-75)$$

En formalisme différentiel, cette identité s'écrit :

$$d(*\mathbf{A}) + \frac{\partial(*\varphi)}{\partial t} = 0 \quad (3-76)$$

Cette représentation montre clairement que le courant \mathbf{J} est une composante de $*\mathbf{A}$ et donc que l'équation de jauge est intimement liée à l'équation de continuité.

Le diagramme tridimensionnel (figure 8) présente les relations entre grandeurs électromagnétiques sous une perspective intéressante car il permet visuellement de bien les séparer et dégager leur signification géométrique. Il y a d'abord les relations temporelles (dérivation) montrées sur l'axe vertical. Ensuite il y a les relations entre formes de même ordre qui se situent à l'intérieur du plan des sources ou du plan des champs. Enfin, l'opérateur de Hodge permet de faire correspondre directement les deux plans. Cette analyse montre bien que les constantes définies en milieu homogène (permittivité électrique et perméabilité magnétique) ne dépendent que du changement d'ordre des formes différentielles et n'ont aucun lien avec la variable temps. Il y a donc une contradiction majeure à vouloir faire dépendre ces paramètres constitutifs de la fréquence.

III-B-2-c) Conditions de généralisation en milieu fractal

Nous allons proposer des voies en vue d'obtenir une adaptation des équations de Maxwell au milieu hétérogène. Nous commençons par nous placer dans le cas des milieux fractals. Même si un milieu hétérogène ne peut rigoureusement être assimilé à un milieu fractal parfait, cette extension est possible au moins entre deux ordres de grandeurs spatiaux formant les limites supérieures et inférieures de résolution. De plus, le formalisme multifractal

permet d'étendre considérablement la notion d'ensemble fractal. Nous nous tiendrons quant à nous au cas des ensembles fractals simples. C'est bien pour réaliser une étude directe des milieux fractals que nous nous sommes attachés à fabriquer de tels objets (cf. chapitre IV).

Le fait de considérer un milieu fractal conduit à des conséquences importantes. La notion de trajectoire est modifiée dans un tel milieu puisque l'arbre de génération conduit à la définition d'une nouvelle métrique [68]. La présence de singularités en nombre infini conduit à abandonner le caractère de variété riemannienne de l'espace-temps.

D'autre part la non différentiabilité intrinsèque du milieu fractal idéal conduit à abandonner la représentation euclidienne des champs en termes de vecteurs. Le formalisme différentiel-lui même doit être modifié par la généralisation des formes différentielles au cas non entier, ce qui oblige à reconsidérer l'ensemble de l'étude des p-formes.

Les formalismes vectoriel et différentiel ne sont plus adaptés à la résolution du problème posé. Seule une analyse géométrique fondée sur la paramétrisation de la géométrie fractale a permis d'ouvrir des voies de généralisation. Dans ce cadre [66-67], on remplace la différentiation habituelle par la convolution par l'élément différentiel fractal η . La circulation sur η équivaut à la différentielle habituelle d tandis que la circulation spatiale sur η^d (le contenu fractal de la boule de rayon η), correspond à une forme différentielle C_f à préciser. La dérivation temporelle d'ordre non entier est également introduite. Les équations de Maxwell prennent alors la forme :

$$d[B] = 0 \quad (3-77)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + d[E] = 0 \quad (3-78)$$

$$C_f[D] = \rho \quad (3-79)$$

$$C_f[H] = J + \frac{\partial^\alpha D}{\partial t^\alpha} \quad (3-80)$$

La jauge de Lorentz est alors également modifiée :

$$\frac{\partial^\alpha (*\varphi)}{\partial t^\alpha} + C_f[*A] = 0 \quad (3-81)$$

ainsi que l'équation de conservation de la charge d'après la remarque précédente :

$$\frac{\partial^\alpha (\rho)}{\partial t^\alpha} + C_f[J] = 0 \quad (3-82)$$

La démarche employée, même si elle permet de jeter les bases d'une généralisation des équations de l'électromagnétisme, souffre d'un sérieux manque de formalisme en matière de formes différentielles d'ordre non entier. Malgré tout, nous ne sommes pas dans l'impasse. Nous avons considéré jusqu'à présent le phénomène de propagation comme un type particulier de solution à des équations (Maxwell ou équations généralisées). Toutefois la propagation peut être également représentée par une trajectoire optimale sur une variété. C'est ce que nous allons présenter dans la suite.

III-B-3) Approche topologique de la propagation

L'appréhension des milieux hétérogènes est ici fondée sur une approche topologique de la propagation. Cette approche consiste à identifier la propagation à une trajectoire géodésique sur une variété [69]. Dans ce cadre, le passage du milieu homogène au milieu hétérogène ne va se traduire que par une modification de la variété d'appui.

III-B-3-a) Propagation en milieu homogène

Nous exposerons d'abord le cas le plus simple d'une propagation inertielle en milieu homogène. Cette propagation se traduit par l'existence d'une trajectoire géodésique sur une variété paramétrée. En milieu euclidien bidimensionnel, cette variété est un plan cartésien et la trajectoire est alors une demi-droite [69]. Le caractère euclidien du plan considéré nous autorise à le paver de façon doublement périodique par des carrés (cf. figure 9). Il est possible par projections successives de représenter l'ensemble de la trajectoire à l'intérieur d'un unique carré appelé domaine fondamental de représentation.

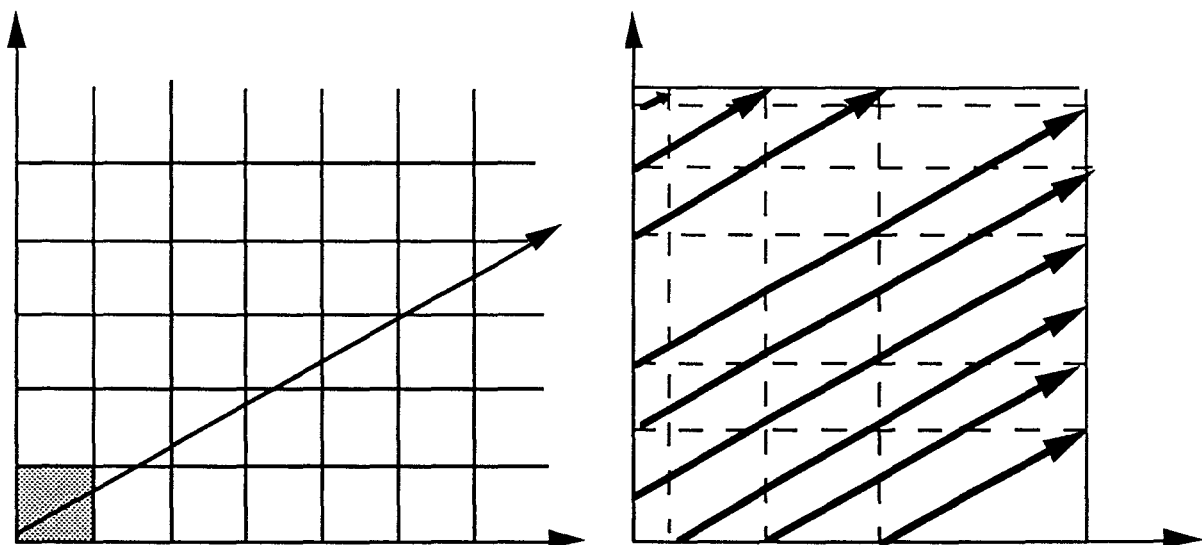


Figure 3-9 : pavage périodique du plan cartésien et projection d'une trajectoire dans le domaine fondamental.

Ce domaine fondamental a par définition des "côtés opposés équivalents". Il peut lui-même être associé à une variété bidimensionnelle incluse dans l'espace à trois dimensions. Il s'agit en l'occurrence d'un tore qu'on obtient par mise en coïncidence des côtés opposés du carré fondamental (cf. figure 10).

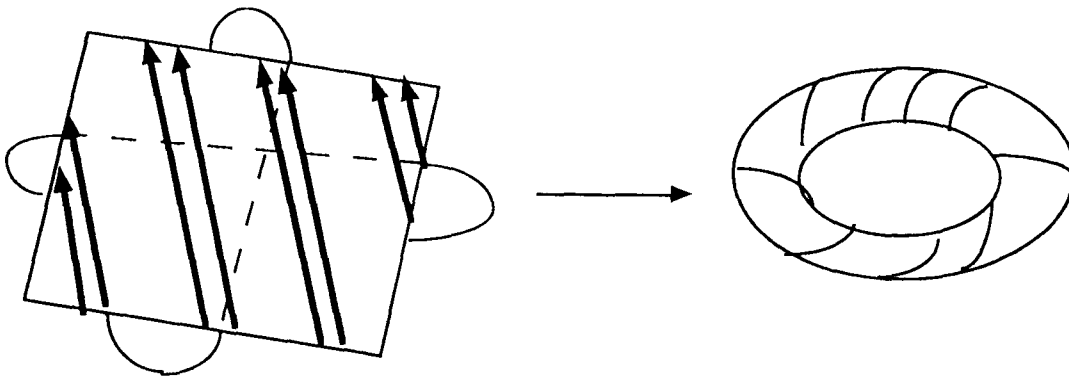


Figure 3-10 : obtention du tore par recollement des côtés opposés du domaine fondamental.

La trajectoire se trouve représentée de façon équivalente sur le tore et la propagation se traduit désormais par une trajectoire géodésique située sur le tore.

L'opération de projection de la trajectoire sur le domaine fondamental conduit à la réalisation d'un feuilletage de celui-ci. La pente de la demi-droite représente le rapport des fréquences entre le nombre de tours sur la méridienne et le nombre de tours suivant la longitude du tore.

Deux cas peuvent se présenter :

- la pente de la droite est rationnelle. Dans ce cas la trajectoire sur le domaine fondamental se referme sur elle-même et devient périodique. Le nombre de feuilletés définis par la trajectoire est fini.
- la pente de la droite est irrationnelle. La trajectoire ne se referme pas mais tout point du domaine fondamental sera infiniment voisin d'un feuillet. La trajectoire va recouvrir complètement le tore.

III-B-3-b) Propagation en milieu fractal

Voyons comment cette démarche peut être appliquée au cas des milieux fractals. Il est nécessaire de faire ressortir deux caractéristiques majeures que possèdent les formes fractales. La première est l'aspect arborescent de la construction. Cette propriété va se traduire du point de vue topologique par le caractère hyperbolique de la variété d'appui.

Il existe en dimension 2 plusieurs représentations d'un ensemble hyperbolique [31,70,71]. La première est donnée par le disque ouvert centré en O et de rayon 1. La distance sur ce disque est donnée par :

$$ds = \frac{|dz|}{1 - |z|^2} \quad (3-83)$$

Les géodésiques sont de deux types : des segments passant par O et des arcs de cercle orthogonaux au bord du disque (figure 11).

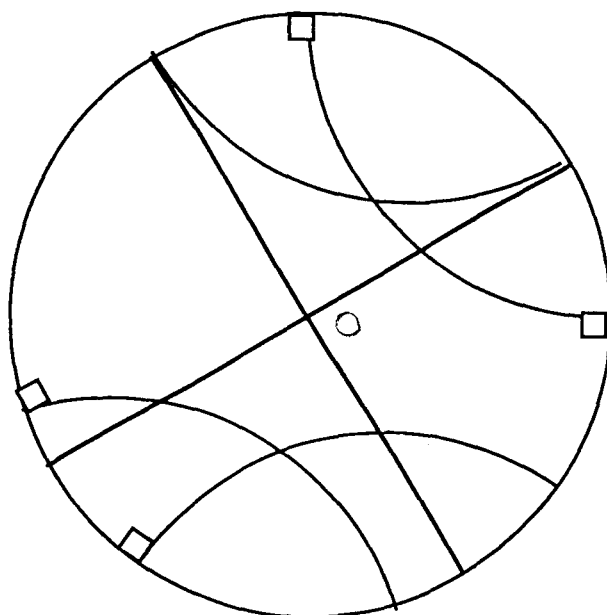


Figure 3-11 : géodésiques de l'espace hyperbolique avec la représentation disque.

Une autre représentation possible d'un espace hyperbolique, dite la représentation de Poincaré, consiste à prendre le demi-plan supérieur dans lequel la distance n'est plus donnée comme dans le plan euclidien par $ds^2 = dx^2 + dy^2$ mais par $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Les géodésiques de cet espace sont

d'une part les demi-droites verticales, d'autre part les demi cercles centrés sur l'axe des x (figure 12). Il est alors possible de paver ce demi-plan à l'aide d'un domaine fondamental qui sera ici un "triangle hyperbolique". Dans l'espace euclidien, on pouvait couvrir le plan à l'aide de deux translations de vecteurs

donnés non colinéaires. En espace hyperbolique, cette opération est réalisée par une composition d'une translation et d'une inversion (figure 12).

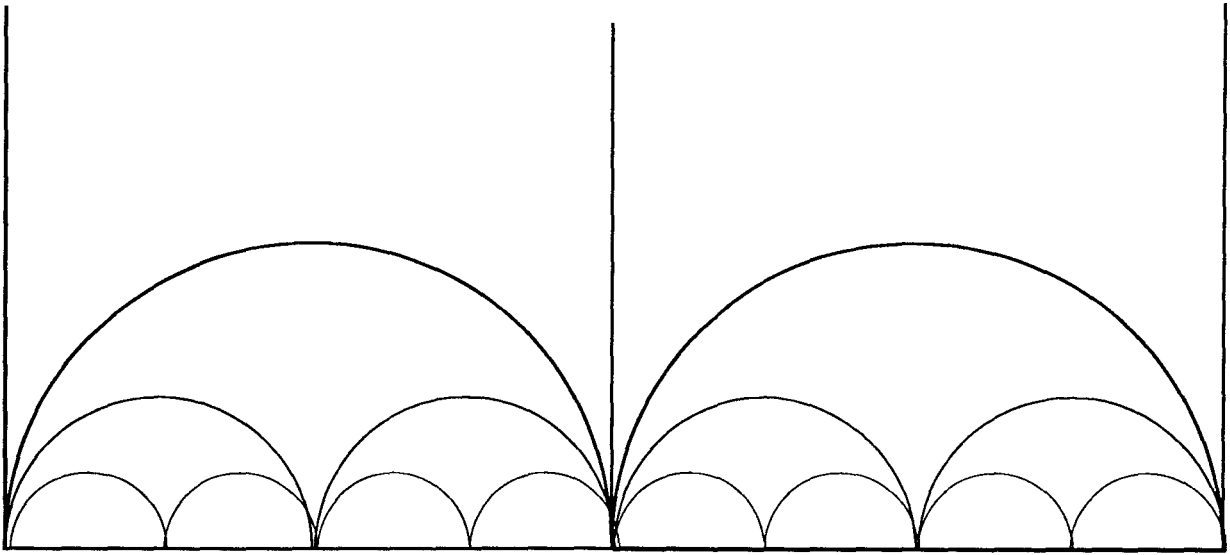


Figure 3-12 : géodésiques de l'espace hyperbolique avec la représentation demi-plan.

Le repliement topologique du domaine fondamental, analogue à celui effectué dans le cas euclidien, donne lieu à la formation d'un tore ponctué [69]. Ce tore est représentable de deux manières équivalentes : un tore privé d'un point ou un tore présentant une branche qui s'en va à l'infini.

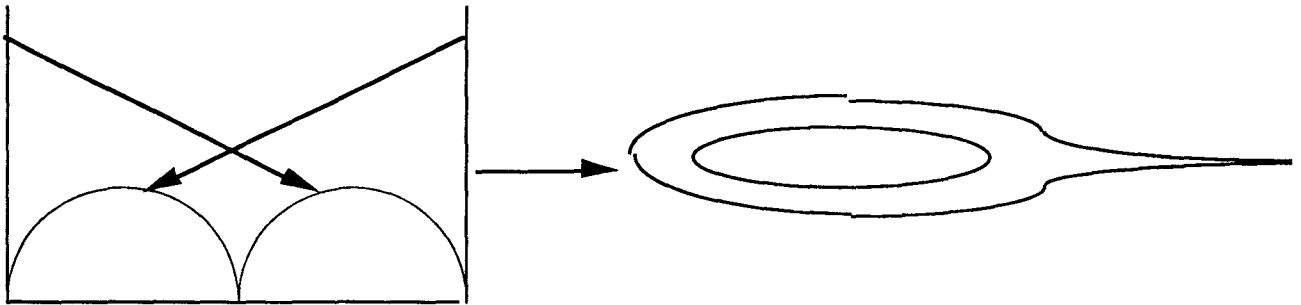


Figure 3-13 : tore ponctué engendré par repliement topologique du domaine fondamental.

Une observation directe du tore ponctué permet alors de constater l'existence de deux types distincts de trajectoires : d'une part celles qui s'enroulent sur l'anneau torique en laissant de côté la partie ponctué ; d'autre part celles qui rejoignent le point situé à l'infini.

Cette analyse se révèle insuffisante car on n'a considéré jusqu'ici que l'aspect d'arborescence lié à la génération fractale. Il est également nécessaire de tenir compte du caractère conforme de cette génération. En effet, il apparaît tout au long des étapes de la construction que les angles

Troisième partie : milieu fractal et électromagnétisme

caractéristiques des formes se conservent (cf. figure 14). En conséquence, la variété d'appui doit être modifiée. Si on choisit la représentation hyperbolique du disque unité, il faut tenir compte du fait que les géodésiques rencontrent maintenant le bord de l'espace, c'est-à-dire le cercle unité, avec un angle non nul α appelé angle de Stolz [68] (cf. figure 15). Cette modification du domaine fondamental a pour conséquence le fait qu'il va se replier sur lui même en un tore ponctué lui aussi modifié. Dans ce cas les géodésiques s'en allant à l'infini s'y rejoignent en faisant un angle non nul.

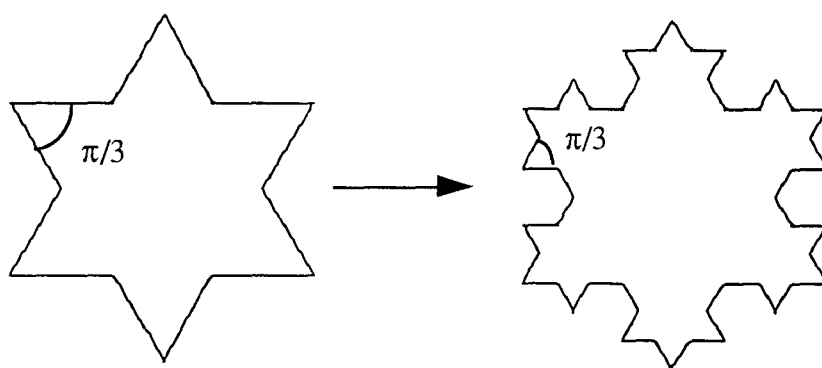


Figure 3-14 : caractère conforme de la génération fractale.

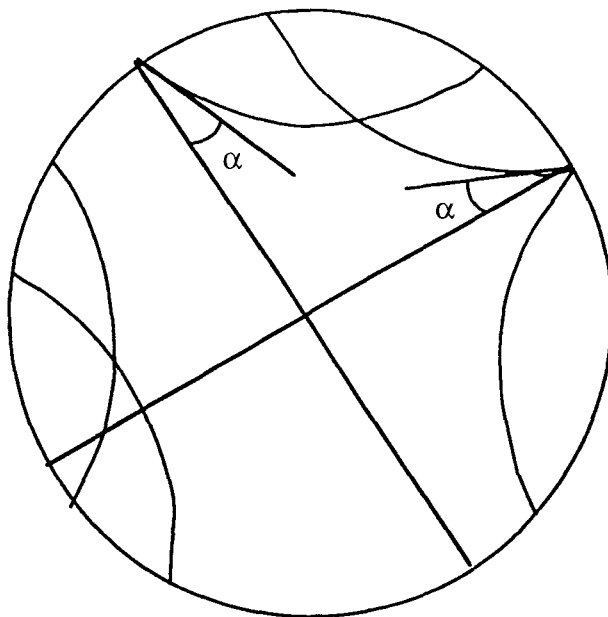


Figure 3-15 : géodésiques de l'espace hyperbolique modifiées dans le cas d'un angle de Stolz α non nul.

La démarche présentée ici n'a pas été menée à son terme. Néanmoins, par le caractère géométrique des représentations, elle permet de mieux saisir le fait que le comportement en milieu hétérogène sera radicalement différent de celui en milieu homogène, et ceci à cause de la modification de la métrique de l'espace considéré.

QUATRIÈME PARTIE :

**RÉALISATION D'OBJETS FRACTALS
ET EXPÉRIENCES**

IV RÉALISATION D'OBJETS FRACTALS ET EXPÉRIENCES

L'étude théorique présentée plus haut de la génération fractale ne suffit pas pour remplir l'objectif que nous nous sommes assignés. Dans une démarche d'ingénierie, notre objectif est d'abord de fabriquer pratiquement des objets. Pour réaliser ces objets, plusieurs étapes sont nécessaires :

- la conception de l'objet. Le dessin de l'objet est effectué sur ordinateur, à l'aide de codes de génération que nous avons développés au cours de la thèse. Cette génération permet de stocker toutes les données qui décrivent la géométrie de l'objet.
- la réalisation de ces objets. Nous allons utiliser le procédé de stéréolithographie. C'est un procédé de fabrication basé sur la polymérisation par laser d'une résine liquide. Il offre la possibilité de maîtriser parfaitement la géométrie du matériau réalisé.

Nous allons maintenant examiner en détail les diverses étapes de la réalisation, en nous appuyant sur les études théoriques effectuées précédemment. Par la suite nous présenterons les premiers résultats expérimentaux en absorption électromagnétique de ces objets.

IV-A) Codes de génération des objets fractals

Sans revenir sur les définitions des types de formes déterministes données plus haut (II-B-1), nous montrerons comment chaque cas peut être traité du point de vue algorithmique.

IV-A-1) Distinction formes par creusement / par croissance

La notion d'objet fractal recouvre un spectre de définition très large. Nous n'envisagerons ici que des méthodes de génération déterministe. Même ici, une méthode générale peut s'appliquer de diverses façons à différents types d'objets.

Le procédé général est du type itératif. On part d'un élément de base encore appelé initiateur qu'on remplace par une réunion d'ensembles homothétiques de celui-ci dans un même rapport d'homothétie. Cette réunion est appelée générateur. Il est possible de recommencer l'opération sur chacun des éléments ainsi créés.

Nous allons voir dans la suite comment le choix de la conception d'un objet construit par croissance ou par creusement impose l'emploi de différentes procédures de génération.

La différence principale entre les deux types d'objets est que l'objet construit par creusement à *un ordre d'itération fini* possède la même dimension topologique que l'espace dans lequel il se trouve, ce qui n'est pas le cas des objets construits par croissance. Un tapis de Sierpinski d'ordre n est une surface ; une éponge de Sierpinski présente un volume. Au contraire la courbe de Von Koch est comme son nom l'indique une ligne brisée et non une surface du plan.

IV-A-2) Propriétés

Au premier abord, seuls les objets construits par creusement peuvent faire l'objet d'une méthode de fabrication. Il est cependant possible de matérialiser également les objets construits par croissance. On obtient ceci en effectuant plusieurs copies de l'objet construit à l'ordre n et en les assemblant d'une manière donnée. On peut interpréter cette construction dans le plan en considérant qu'on remplace l'initiateur par un polygone quelconque et qu'on applique la construction fractale à chacun des côtés de ce polygone indépendamment. On obtient par exemple une surface qu'on appelle flocon de Von Koch dans le cas d'une courbe de Von Koch "posée" sur un triangle équilatéral (figure 1). Dans l'espace, ceci revient à remplacer le polygone de départ par un polyèdre régulier.

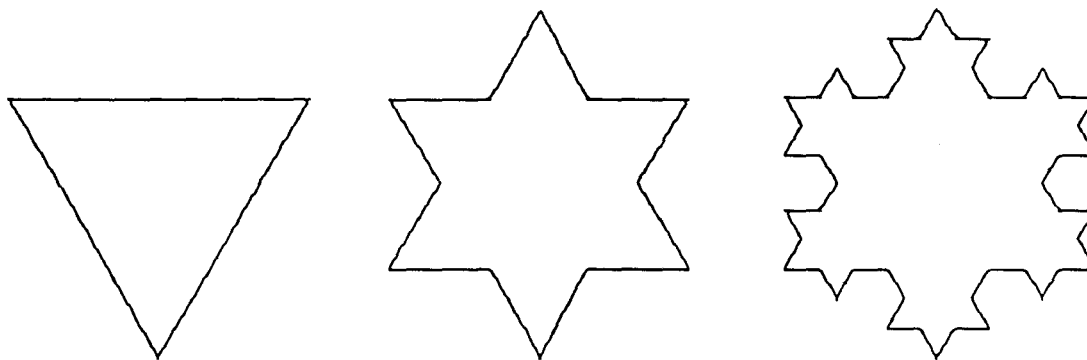


Figure 4-1 : flocon de Von Koch construit aux ordres d'itération 0, 1, 2.
L'initiateur est un triangle équilatéral.

Dans le plan il est aisé de réunir bout à bout des lignes brisées pour former une ligne brisée fermée. En revanche dans l'espace (figure 2), il est moins évident de pouvoir faire coïncider les "bords" des surfaces construites à l'ordre n (côtés de polygones).

Cette solution accorde la possibilité de réaliser plusieurs formes à partir d'une loi de croissance fractale donnée (figure 3). Ceci dépend du choix du polygone (resp. polyèdre) initial dans le plan (resp. espace). Par cette opération, on peut donner un contenu à certaines formes fractales. Il apparaît dans ce cas que ce n'est pas l'objet lui-même qui est à proprement parler fractal mais bien son bord, son interface avec l'extérieur.

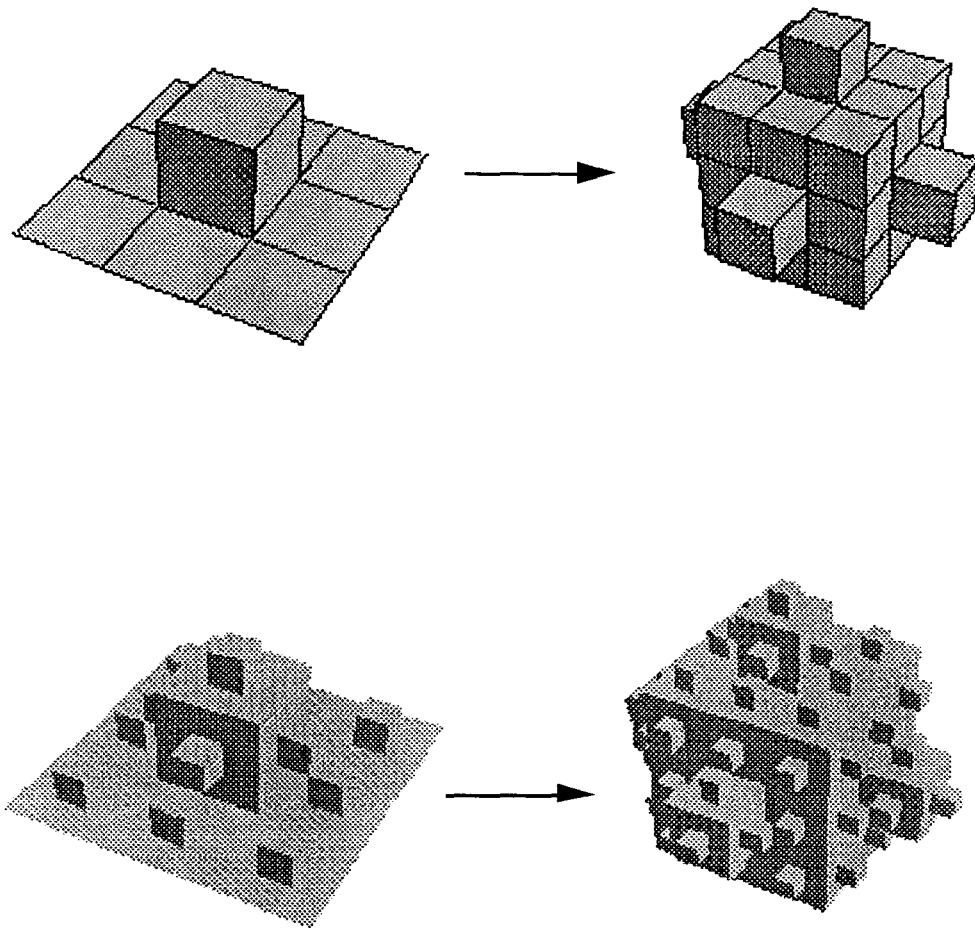


Figure 4-2 : surface fractale spatiale construite par croissance aux ordres d'itération 1 et 2 ; l'initiateur est un cube.

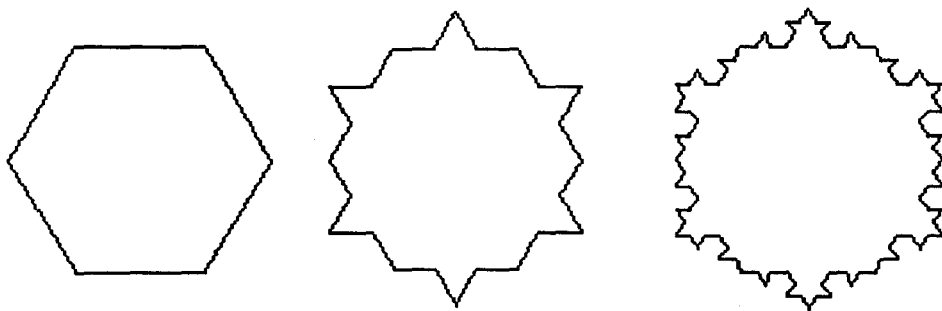


Figure 4-3 : flocon de Von Koch modifié avec pour initiateur un hexagone régulier.

Cependant, on peut remarquer que pour un véritable objet fractal, c'est-à-dire pour un ordre d'itération tendant vers l'infini, ce sont en fait uniquement les formes construites par croissance qui ne disparaissent pas. En effet, la construction par creusement implique qu'à chaque ordre d'itération, on enlève une partie du contenu (toujours la même en proportion). Donc à l'ordre infini, ce contenu s'annule. Ainsi un véritable tapis de Serpinski a une aire nulle ; une éponge de Serpinski a un volume nul. Au contraire, les objets construits par croissance ne disparaissent pas. Un vrai flocon de Von Koch a une surface finie mais un bord de longueur infinie.

Ainsi les contraintes d'ingénierie liées aux constructions par croissance et par creusement sont-elles fondamentalement différentes. Le cas des formes générées dans le plan est à cet égard particulièrement éclairant. Ainsi, à partir de certains générateurs, la ligne brisée fractale peut pour des ordres d'itération supérieurs à 2 se recouper, présenter des points doubles (figure 4). Dans ce cas, une ligne brisée fermée peut ne pas être une frontière. Cette forme n'est pas réalisable pratiquement et ne peut être l'objet que d'études purement théoriques.

De la même façon dans l'espace, des formes croissant à partir de polygones différents peuvent se rencontrer, s'interpénétrer. Dans ce cas également, l'objet n'est pas constructible et son étude est difficile. Un calcul de volume oblige à ne compter qu'une fois des volumes qui s'interpénètrent.

Au contraire, les formes construites par creusement dans le plan ne connaissent pas ce genre d'inconvénient. Etant donné que les p polygones du générateur sont tous inclus dans le polygone initial, il n'y a à aucun ordre d'itération croissance du motif vers l'extérieur. La difficulté est ici d'un autre ordre. En effet, il peut arriver que la forme à partir d'un certain ordre d'itération perde son caractère connexe. On voit que c'est le cas pour toutes les formes apparentées à l'ensemble de Cantor 1D. Le même phénomène se produit pour les objets en 3D (figure 5). Il peut arriver que l'objet final soit constitué de plusieurs motifs non liés les uns aux autres, même si le générateur est d'une seule pièce.

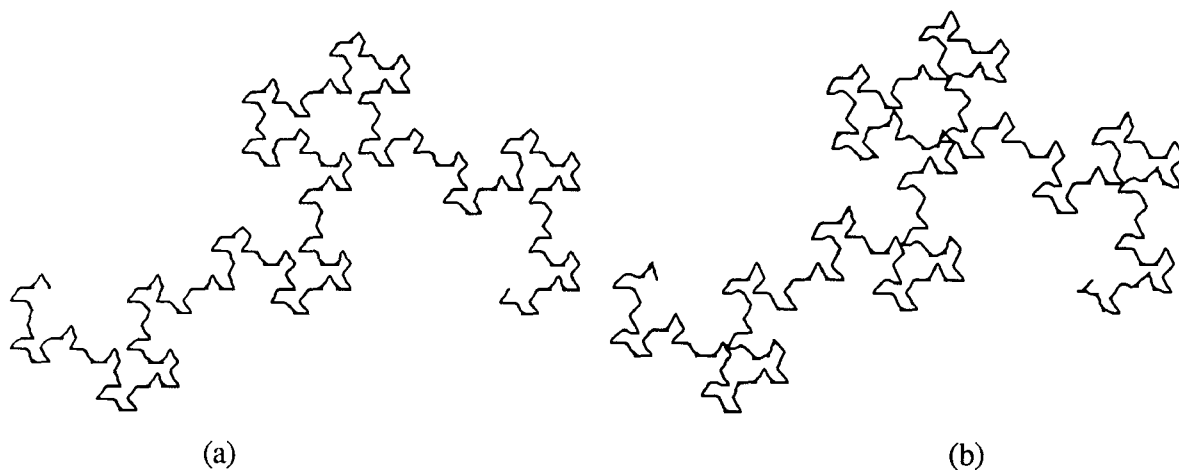


Figure 4-4 : deux courbes fractales construites à partir de deux générateurs similaires $(0, \theta, -\theta)$ (configuration caa)

(a) $\theta=60^\circ$, pas de chevauchement. (b) $\theta=61^\circ$, la courbe présente des points doubles

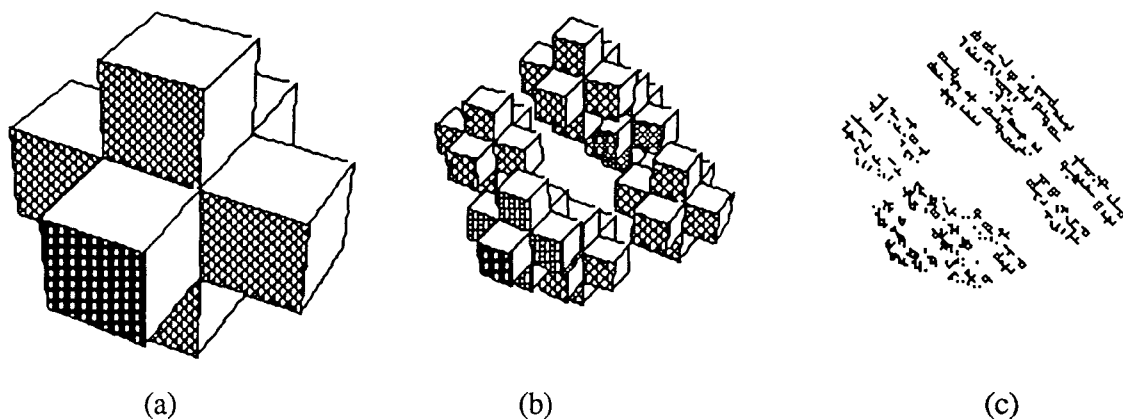


Figure 4-5 : forme fractale par creusement, connexe à l'ordre 1 (a) mais non connexe aux ordres d'itération supérieurs (b) et (c).

On constate que la construction par croissance peut engendrer un problème de trop plein tandis que celle par creusement peut poser des problèmes de connexion de la forme finale. On peut préciser les remarques faites ici à l'aide du concept de dimension fractale. Pour des objets fractals, les contenus (longueur, surface, volume) habituels sont susceptibles de diverger ou de tendre vers 0. Ils perdent leur signification courante. Pour chaque objet, on a donc défini de nouveaux contenus correspondant à une mesure dans un nouvel espace. La dimension fractale est la dimension de cet espace, en général non entière.

Un objet dont le caractère fractal est très marqué est caractérisé par une dimension fractale proche de la dimension de l'espace dans lequel il baigne (dimension fractale élevée).

La construction par croissance est donc toute indiquée pour réaliser des formes de faible dimension fractale. Les problèmes de chevauchement et d'interpénétration évoqués ci-dessus apparaissent dans le cas de dimensions fractales élevées. En revanche la construction par creusement est très adaptée au cas des objets de dimension élevée. Les problèmes de connexion apparaissent dans le cas de faibles dimensions, c'est-à-dire où à chaque itération, on ne conserve qu'un faible nombre de copies de l'objet initial.

Néanmoins, il demeure possible de concevoir par croissance des courbes planes de dimension fractale 2 (voir figure 6). Ces courbes dites de Péano présentent la propriété que tout voisinage d'un point d'une certaine région du plan rencontre la courbe d'ordre infini. En revanche, il n'a pas encore été réalisé de surface de Péano dans l'espace.

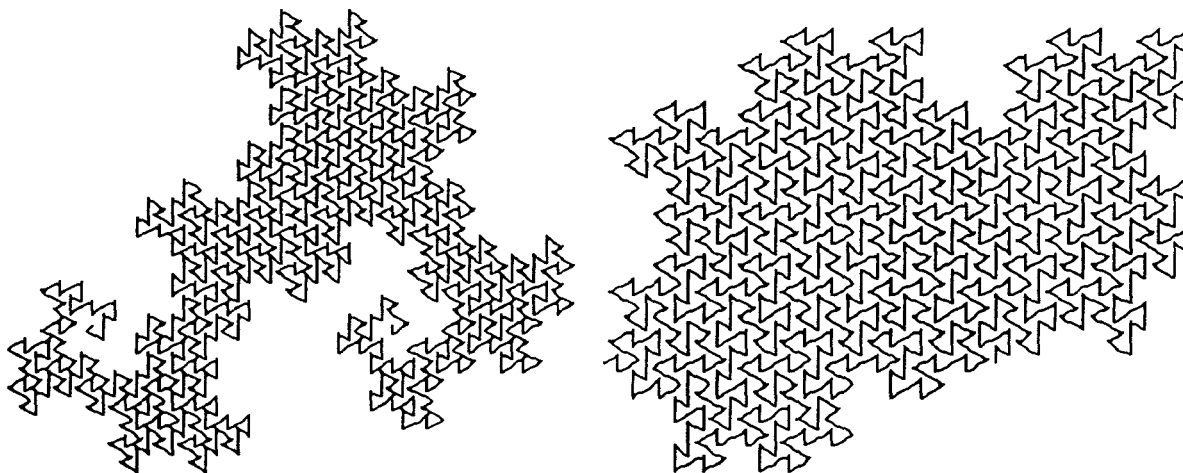


Figure 4-6 : courbes de Péano (de dimension fractale 2).

Les divers codes de génération mis au point tiennent compte du caractère propre de chaque type de construction.

IV-A-3) Algorithme général

Les codes élaborés dans les deux cas de construction précédents fonctionnent sur le principe itératif exposé ci-dessus. Il y a concrètement deux façons d'envisager la construction. Supposons que celle-ci soit décrite par une application f consistant en p homothéties de rapport ρ éventuellement composées avec des rotations. Dans ce cas la forme construite à l'ordre n est composée de p^n formes élémentaires semblables à l'initiateur. Le passage de l'ordre n à l'ordre $n+1$ peut se faire de deux manières. Il est possible de remplacer chacune des p^n formes élémentaires de la forme d'ordre n par p nouvelles formes. La forme d'ordre $n+1$ comprendra bien alors p^{n+1} formes. On peut aussi considérer la forme d'ordre n comme un bloc à part entière. On applique à ce bloc les diverses applications définissant p , sans tenir compte de la nature de l'objet antécédent. Ces deux constructions ne sont que la traduction de la décomposition de f^{n+1} de deux façons différentes.

$$f^{n+1} = f \circ f^n = f^n \circ f$$

Dans le premier cas, la construction revient à appliquer p^{n+1} homothéties composées éventuellement avec des rotations aux p^n formes élémentaires de la forme construite à l'ordre n . Dans le second cas, seules les p applications définissant f interviennent. C'est ce second algorithme que nous avons entrepris d'implémenter. Il offre l'avantage que f soit définie une fois pour toutes et par un nombre fini et limité d'applications.

IV-A-4) Spécificités de chaque type d'objet

Ayant commencé par développer un programme général, nous avons pu découvrir et observer certaines propriétés valables pour différentes catégories d'objets. A partir de ce constat, nous avons été amenés à développer des codes fonctionnant sur le même principe, mais optimisés pour chaque type d'objet plan ou tridimensionnel.

IV-A-4-a) Objets plans construits par croissance

Un tel objet construit à un ordre d'itération fini est complètement défini par une suite, un ensemble ordonné de segments. Tous ces segments possèdent la même longueur (ce qui n'est plus vrai dans le cas multifractal). Il est alors possible de caractériser un contour fractal par une suite d'angles. Nous avons simplifié le problème en le ramenant de l'étude d'un ensemble de couples à celle d'une suite de réels. Le programme de génération exige de préciser les différentes homothéties dans un ordre adéquat.

Cet ordre exige d'adapter l'entrée des données à l'aspect combinatoire de la génération. En effet, dans le cas où le générateur ne possède aucun élément de symétrie, chaque segment du générateur est susceptible de fournir à l'ordre suivant quatre configurations du générateur réduit (cf. figure 7). Le chiffre 4 est l'ordre du groupe ponctuel de symétrie du segment de droite. Si le générateur comprend p segments il y a dans le cas général mentionné ici au total 4^p courbes fractales constructibles. Nous avons indicé chacune des positions relatives à un segment par une lettre a, b, c ou d, au choix. La courbe fractale ouverte est entièrement caractérisée par une suite de p angles et une suite de p lettres. Ce sont les seules données à entrer dans le programme. Il y a par contre plusieurs possibilités dans le choix du polygone sur lequel on va "coller" les diverses formes d'ordre n .

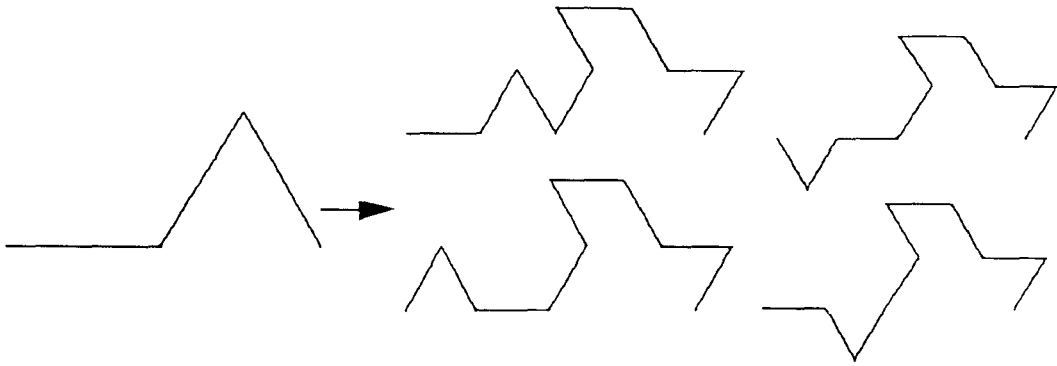


Figure 4-7 : quatre choix possibles pour chaque segment du générateur.

IV-A-4-b) Objets 3D construits par croissance

Contrairement au cas précédent, on ne peut concentrer ici la forme des données. Ceci provient du fait que le générateur comprend p polygones identiques situés dans l'espace et collés par leurs faces, mais il n'est plus possible ici de les ordonner. Les p applications définissant la construction sont ici données de manière arbitraire. Il faut cependant veiller à ce que les collages se fassent bien. La construction opère donc directement sur un ensemble de polygones et non sur une suite ordonnée de réels.

Le code effectue également la "fermeture" des objets par application à une forme d'ordre n de rotations dans l'espace et par concaténation des divers ensembles de faces obtenus.

IV-A-4-c) Objets construits par creusement

Dans le plan, la forme sera définie par un ensemble de segments et dans l'espace, par un ensemble de polygones. Que ce soit dans le plan ou dans l'espace, il n'existe ici aucun ordonnancement naturel des données. Les p applications sont choisies de telle sorte que la forme finale soit connexe.

IV-A-5) Caractéristiques des codes liées aux nécessités de fabrication

Ces codes permettent de visualiser les objets conçus. Toutefois, notre objectif étant de les fabriquer, il y a donc une double opération à mener :

- sauvegarder les données définissant une forme fractale d'ordre fini n .
- mettre ces données sous une forme compatible et directement exploitable par les procédés de fabrication.

IV-A-5-a) Contraintes générales

Nous n'insisterons pas sur la fabrication d'objets fractals plans. La réalisation de ces objets est devenue courante. Le procédé choisi est l'électroérosion. On découpe une plaque mince en aluminium en faisant passer un courant dans un fil qu'on fait défiler transversalement à la plaque. L'établissement du courant provoque une attaque électrochimique de la plaque par le fil à l'endroit voulu. Il est nécessaire de fournir à la machine pilotant la course du fil la liste des points définissant la ligne brisée fractale. Ceci est effectué désormais aisément.

En revanche la fabrication d'objets fractals tridimensionnels est bien moins répandue. A notre connaissance, cette thèse est la première sur le sujet. Nous reviendrons dans la suite sur le procédé de photostéréolithographie que nous avons employé. Du point de vue informatique, insistons sur le fait que la machine doit recevoir de la part de l'utilisateur une description géométrique de la pièce. Il s'agit d'un fichier dit de format STL. L'objet est décrit par une liste de triangles qui recouvrent complètement sa surface. De plus, chaque triangle est orienté par un vecteur normal dirigé vers l'extérieur de l'objet. Le recouvrement de la surface de l'objet par des triangles doit vérifier une condition supplémentaire. Un point du maillage doit être un vrai sommet de triangle et ne pas appartenir à un segment ouvert dont les deux extrémités sont d'autres points du maillage. La situation de la figure 8a est interdite car $A \in]BC[$. En revanche la situation de la figure 8b est parfaitement valable.

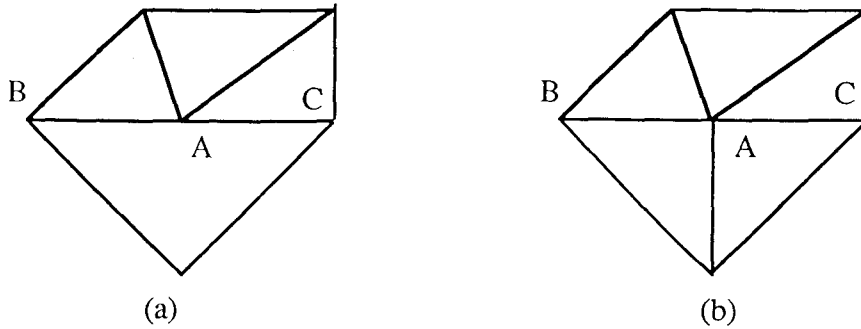


Figure 4-8 : (a) triangulation incorrecte pour le format STL - A n'est pas un vrai sommet car il appartient au segment [BC].
(b) triangulation correcte, tous les sommets sont des vrais sommets.

Le fichier STL se présente sous la forme :

solid ascii

...

```
facet normal 0.000000E+00 0.000000E+00 -1.000000E+00
```

```
outer loop
```

```
vertex 0.000000E+00 0.000000E+00 0.000000E+00
```

```
vertex 0.000000E+00 1.800000E+01 0.000000E+00
```

```
vertex 1.800000E+01 1.800000E+01 0.000000E+00
```

```
endloop
```

```
endfacet
```

...

```
end solid
```

Pour chaque triangle, on définit d'abord le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur de l'objet, ensuite on donne les coordonnées des trois points. Nous avons adapté les sorties afin que les coordonnées soient écrites sous la forme particulière ci-dessus.

L'objet à la sortie des codes étant décrit initialement par ses faces polygonales, il a été aisé de trianguler chaque face. Cette triangulation s'effectue après l'étape de génération. Dans le cas contraire, il serait nécessaire de générer un nombre bien plus élevé de facettes. Deux problèmes critiques se sont posés au cours de l'étude, auxquels il a fallu apporter des réponses séparées.

IV-A-5-b) Objets construits par creusement

Au cours de cette construction, on remplace une forme géométrique tridimensionnelle par plusieurs formes homothétiques. La propriété de connexité de l'objet final impose que ces formes homothétiques possèdent par endroits des faces communes (figure 9). Cette propriété présente deux inconvénients :

- ces faces communes sont fictives. Conservées dans l'ensemble des faces de l'objet à un ordre donné, elles vont donner chacune naissance à l'ordre suivant à p nouvelles faces elles aussi fictives. On conçoit là un énorme gaspillage de place mémoire d'une part, de temps de calcul d'autre part.
- le fichier STL à fournir ne doit comporter que des faces qui appartiennent à la frontière réelle du matériau. Le logiciel de pilotage est incapable d'appréhender l'existence de deux faces identiques ayant deux vecteurs normaux opposés.

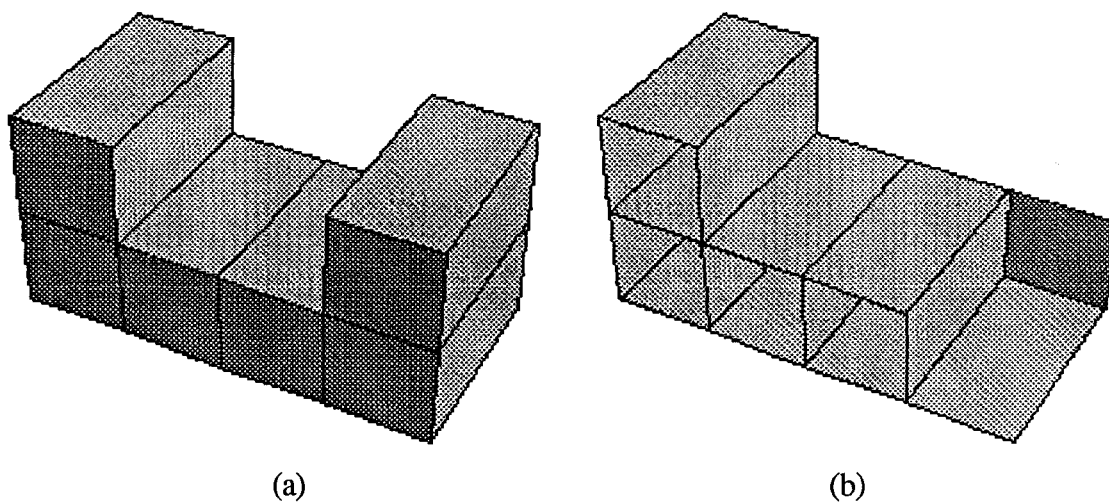


Figure 4-9 : (a) objet construit par creusement l'initiateur est un parallélépipède rectangle
(b) Sur une vue "ouverte", on distingue les faces internes communes à deux images différentes de l'initiateur.

C'est pourquoi nous avons dû mettre au point une procédure de suppression des faces virtuelles. La difficulté tenait au fait que deux faces superflues rencontrées sur la forme d'ordre 1 (le générateur) donnent naissance à 2^{p-1} faces superflues disséminées dans la totalité de l'objet d'ordre n (figure 10). Il y a un problème ardu de localisation de ces faces. Nous avons choisi de les supprimer à chaque ordre d'itération et d'inclure la procédure de reconnaissance dans la boucle de génération (figure 11). La procédure de génération devient alors optimale à chaque ordre d'itération. On obtient un fichier STL de type convenable.

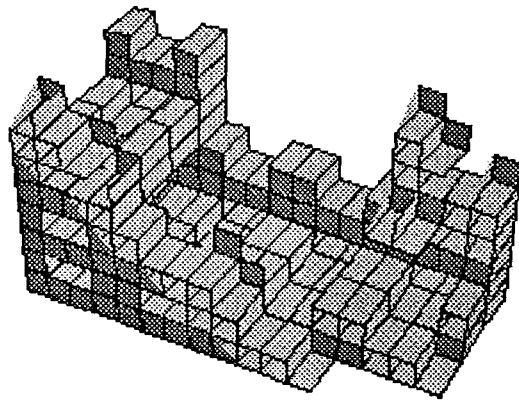


Figure 4-10 : les faces superflues sont disséminées dans toute l'étendue de l'objet.

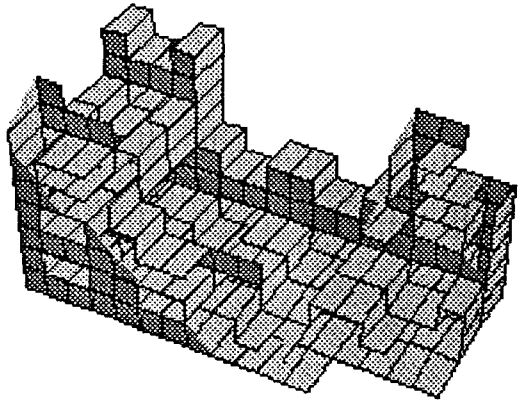


Figure 4-11 : l'objet de la figure 10 est maintenant représenté sans ses faces superflues. Il est décrit par 584 faces (quadrilatères) au lieu de $6^4=1296$

Examinons de plus près la procédure de suppression des faces. Il est possible d'établir différents algorithmes suivant la nature de l'objet généré. Un algorithme général valable dans tous les cas consiste à comparer successivement 2 à 2 les faces décrivant l'objet. Si N est le nombre total de faces après le n -ième génération, il y a $N^2/2$ opérations de comparaison à effectuer. Le temps de calcul varie alors comme N^2 , ce qui n'est pas excellent. On peut diminuer le temps de calcul en passant à la face suivante directement dès qu'une face est identifiée comme double.

Un algorithme plus performant a été mis au point dans le cas où la forme d'ordre 1 présente un nombre élevé de faces doubles. Les faces doubles sont incluses dans un nombre limité de plans définis par leurs équations (figure 12). On effectue d'abord une partition de toutes les faces selon l'appartenance

des points des faces à des plans donnés. On applique ensuite l'algorithme de comparaison des faces à chacun des ensembles ainsi définis. Le temps de partition varie comme N , car on vérifie des conditions sur les faces successives. Le temps de comparaison, bien que variant toujours comme N^2 , se trouve considérablement réduit. En définitive, le gain est appréciable.

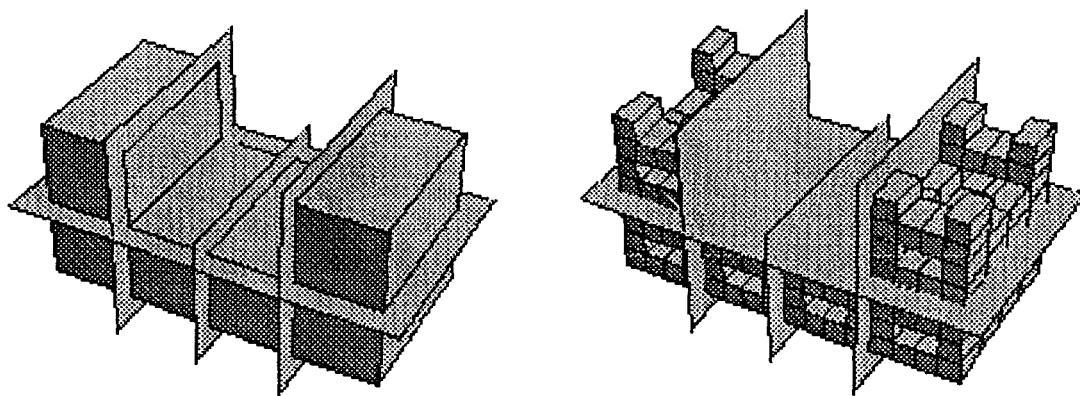


Figure 4-12 : les faces à supprimer sont situées dans un nombre fini de plans, ceci quel que soit l'ordre d'itération.

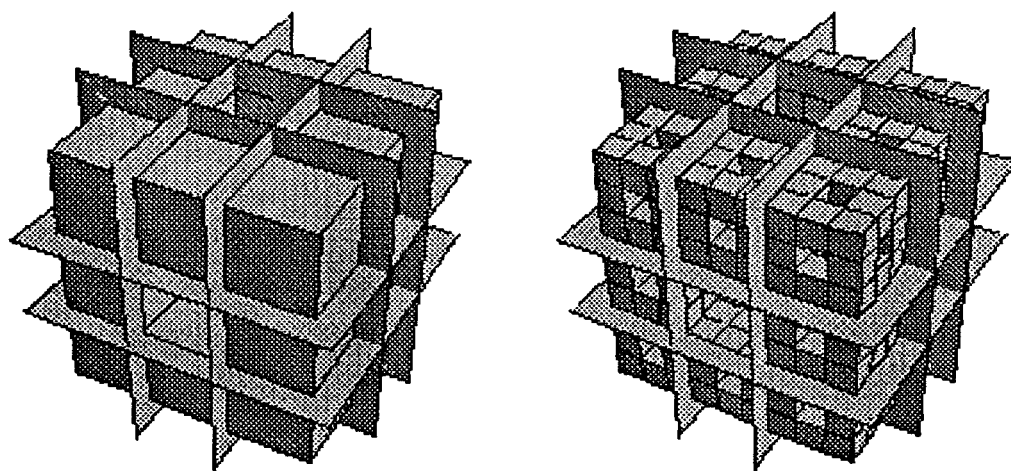


Figure 4-13 : éponge de Sierpinski - toutes les faces situées dans certains plans sont à supprimer.

Il existe des cas où toutes les faces appartenant à un plan donné sont doubles. Il faut donc toutes les supprimer (figure 13). On établit alors un algorithme de suppression direct des faces, sans comparaison 2 à 2. Ici le temps de calcul varie comme N , ce qui est énormément plus avantageux. Ce

cas est envisagé lorsque le générateur possède les mêmes éléments de symétrie que l'initiateur. Dans le cas où cette condition n'est pas réalisée, c'est l'allure de la forme d'ordre 2 qui détermine si on peut appliquer cet algorithme dont le temps de calcul varie comme N .

IV-A-5-c) Objets construits par croissance

Le problème de suppression des faces ne se pose pas dans ce cas, car si à un ordre donné, deux faces coïncident avec des vecteurs normaux opposés, alors à l'ordre suivant, les motifs de croissance ont toutes les chances de s'interpénétrer.

La difficulté présente a été associée ici à l'orientation cohérente des faces ayant une arête commune, et par action de proche en proche de toutes les faces. Ce problème ne se posait pas précédemment car l'initiateur était donné avec des vecteurs normaux convenables. La structure de l'algorithme permettait de préserver à chaque itération la bonne orientation de toutes les faces simples. L'itération maintient le caractère orientable de la variété.

Le vecteur normal n'est pas donné en soi mais est imposé par l'ordre dans lequel apparaissent les points de chaque face. Il est donc possible d'orienter dès le départ l'initiateur.

Il existe ici deux catégories de problèmes d'orientation.

Supposons qu'on soit parvenu à réaliser une surface fractale d'ordre n dont toutes les faces élémentaires soient orientées de la même façon. On définit une orientation arbitraire à l'aide du plan contenant l'initiateur. Tant que les copies de cette surface sur les faces d'un polyèdre quelconque n'ont pas été effectuées, celle-ci n'a pas d'existence propre. Or sur chaque face du polyèdre, il existe plusieurs façons de "coller" la surface fractale. En particulier, il existe deux types de configuration "en creux" et "en bosse" (figure 14). Le choix de l'un ou de l'autre type implique ou non d'avoir à changer le sens des vecteurs normaux. Cette procédure a été incluse dans l'algorithme de génération.

Le second type de problème puise ses racines dans le lien entre génération fractale et théorie des groupes. Nous avons vu qu'à partir d'une forme donnée, il est possible de générer plusieurs formes différentes à l'ordre suivant, ce nombre étant lié aux ordres des groupes ponctuels de symétrie des formes des deux ordres d'itération précédent. Il est donc possible d'amener,

par une homothétie composée à une isométrie positive, l'initiateur sur sa copie appartenant au générateur. Une partie de ces applications préserve l'orientation de l'initiateur et une autre partie les inverse. C'est pourquoi nous avons conçu une procédure qui à chaque itération, rétablit une orientation cohérente pour toutes les faces composant la surface fractale.

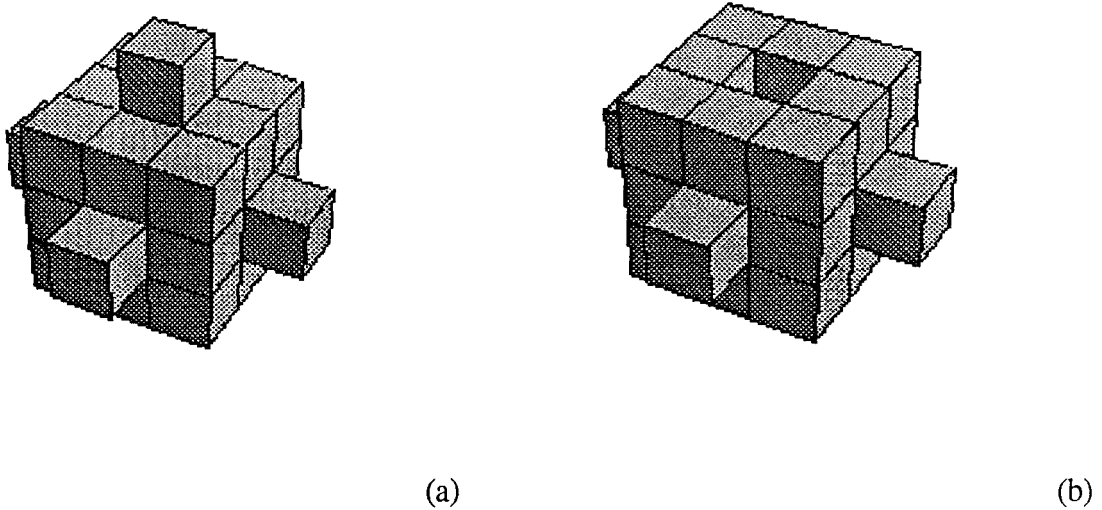


Figure 4-14 : deux choix sont possibles pour le "collage" de la surface fractale sur chaque face de l'initiateur. (a) en bosse (b) en creux

Les codes élaborés offrent un large éventail d'applications. Ils permettent de concevoir, de visualiser, et surtout de préparer la réalisation pratique d'objets. Au cours de ce travail, l'utilisation des codes a permis de découvrir des propriétés de la génération fractale au préalable ignorées ; citons le lien avec la théorie des groupes. Cette étude a permis en retour d'améliorer les codes.

IV-A-6) Amélioration et extension du domaine d'application des codes

Les améliorations ont été développées à deux niveaux principaux. Le premier concerne l'optimisation des fichiers STL, le second l'extension des codes à la génération d'objets multifractals ou autoaffines.

IV-A-6-a) L'optimisation des fichiers STL

On entend ici par optimisation la description d'un objet par un fichier STL comportant le minimum de triangles. Notre souci est bien sûr de diminuer la taille des fichiers et d'économiser de la place mémoire. En format ASCII, il est possible de stocker sur une disquette de 1,4 Mo un fichier STL d'environ 3000 triangles. Or le nombre de faces nécessaires à la description de l'objet croît très rapidement avec l'ordre d'itération de la forme fractale.

La création ex nihilo du fichier optimal est un problème difficile. Il semble alors plus aisé de partir d'un des fichiers STL existant et de faire disparaître certains points du maillage en concevant des triangles plus grands.

Mais contrairement à ce qu'on pourrait penser, il ne s'agit pas d'un problème plan mais bien tridimensionnel. On voit sur la figure 15 que le point A ne peut pas être supprimé du maillage dans le plan BCDE. Il s'agit en effet d'un point d'ancrage pour les autres triangles de sommet A. On définit un point d'ancrage comme un point appartenant nécessairement à tout maillage de l'objet, même si ce maillage n'est pas réalisé par des triangles.

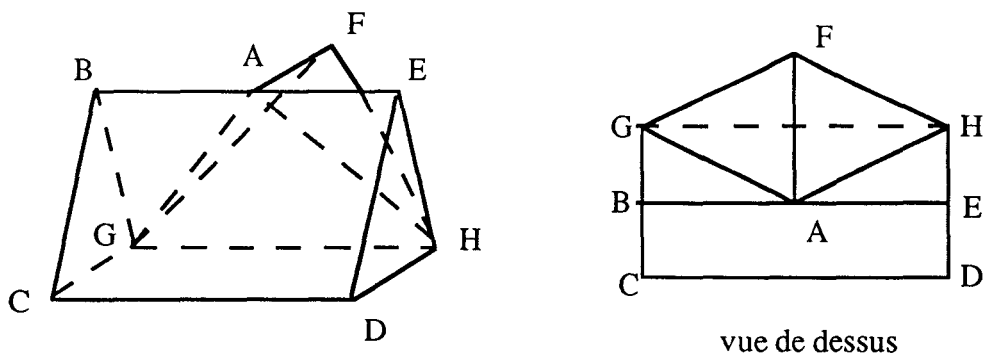


Figure 4-15 : la face BCDE de cet objet doit être divisée en au moins trois triangles. Un découpage BCD et BDE ne suffit pas car A est un point d'ancrage. Une division possible est ABC, ACD et ADE.

Il ne semble pas exister de solution générale à ce problème d'optimisation. On peut apporter des éléments de réponse dans le cas d'objets composés de parallélépipèdes rectangles. Toutes les faces de l'objet sont parallèles à trois plans donnés. Pour ce type d'objet obtenu par génération fractale, les faces le décrivant sont des parallélogrammes qu'il suffit de diviser en deux triangles après la phase de génération. Pour chaque sommet de parallélogramme, on désigne par S le nombre d'arêtes aboutissant à ce sommet. Il existe quatre possibilités [41], décrites sur la figure 16.

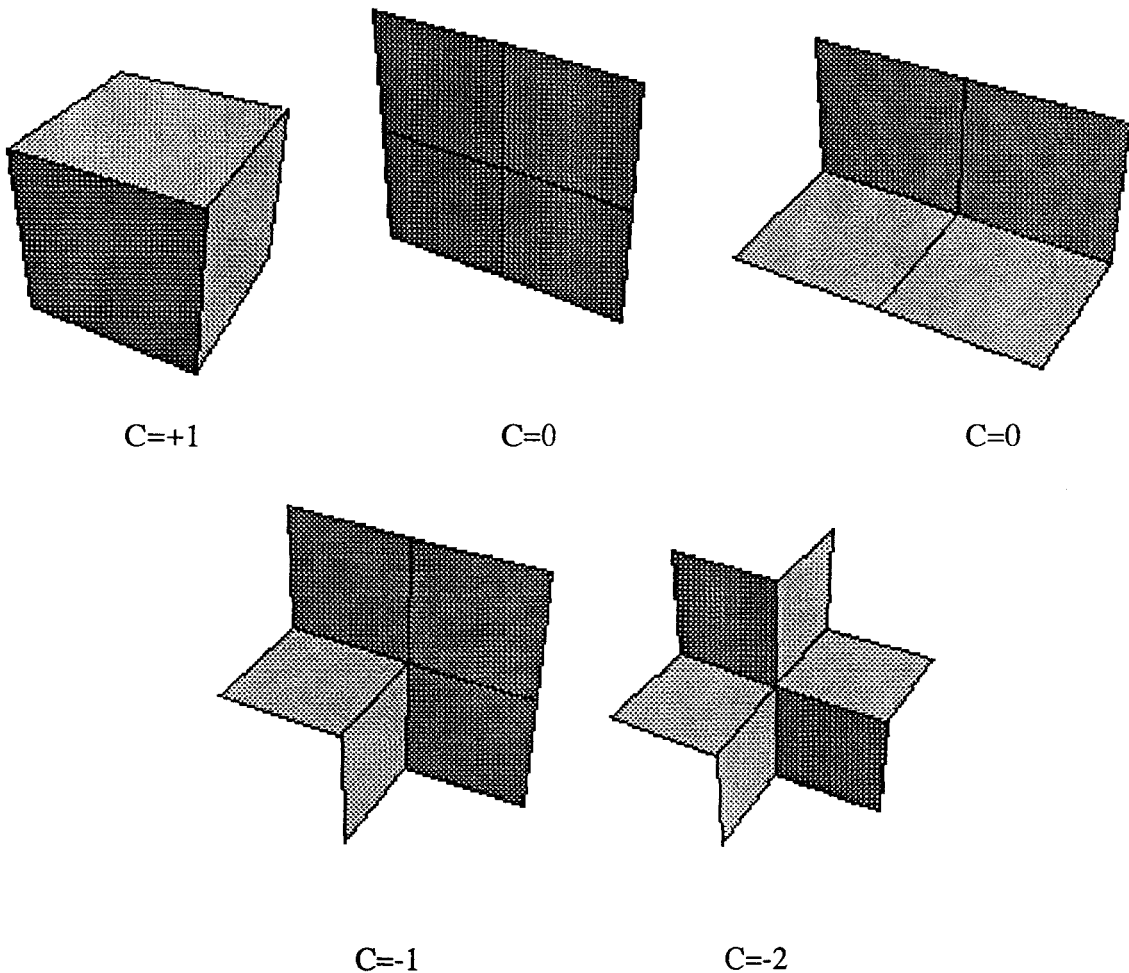


Figure 4-16 : les trois cas possibles de courbure sur des surfaces fractales orthogonales

On constate que S est la représentation discrète d'un paramètre continu des variétés à deux dimensions, à savoir la courbure. On peut définir ici un paramètre C représentant la courbure locale en un point singulier où la variété n'est pas différentiable. C est donné par la relation $C=4-S$. C peut prendre les valeurs 1, 0, -1, -2. On constate que les points tels que $C=1$, -1 ou -2 sont obligatoirement des points d'ancrage. Un sommet tel que $C=1$ (resp. -1, -2)

sera sommet d'au moins 3 triangles (resp. 4, 6) dans un maillage par des triangles en vue d'obtenir un fichier STL. Au contraire, il peut arriver que des sommets tels que $C=0$ soient retirés d'un maillage équivalent donnant lieu à un fichier STL plus court. Nous avons ainsi ramené un problème tridimensionnel à un problème plan. Malgré tout, il n'existe pas de procédure automatique permettant de remplacer certains triangles par des triangles plus grands. Si $C=0$, il est localement possible de le faire, mais avec un risque de supprimer des points d'ancrage voisins. A chaque simplification de proche en proche, il faut veiller à ne pas supprimer de points d'ancrage. Les propriétés locales ($C=0$) doivent pouvoir être étendues globalement.

On mesure à cette brève discussion d'une part qu'il y a un lien entre fractalité et variété riemannienne, d'autre part que les difficultés pratiques trouvent leur source dans une problématique fondamentale qu'il faudrait étudier.

IV-A-6-b) Extension du domaine d'application des codes.

La structure des algorithmes mis au point permet sans trop de difficultés de réaliser des codes capables de générer de nouvelles formes plus générales que les formes fractales. Ce sont :

- les formes multifractales. La construction présente la particularité que les différentes images de l'initiateur constituant le générateur sont obtenues par des homothéties de rapports différents (cf. figure 17). Il est néanmoins possible de définir une dimension fractale. Celle-ci n'est alors pas uniforme mais représente la moyenne d'une dimension locale dépendant de la région de la forme considérée.

- les formes autoaffines. Ici on passe de l'initiateur au générateur par application d'un nombre fini d'affinités et non d'homothéties (cf. figure 18). En un point donné de ce type de forme, la dimension fractale est alors dépendante de l'orientation considérée.

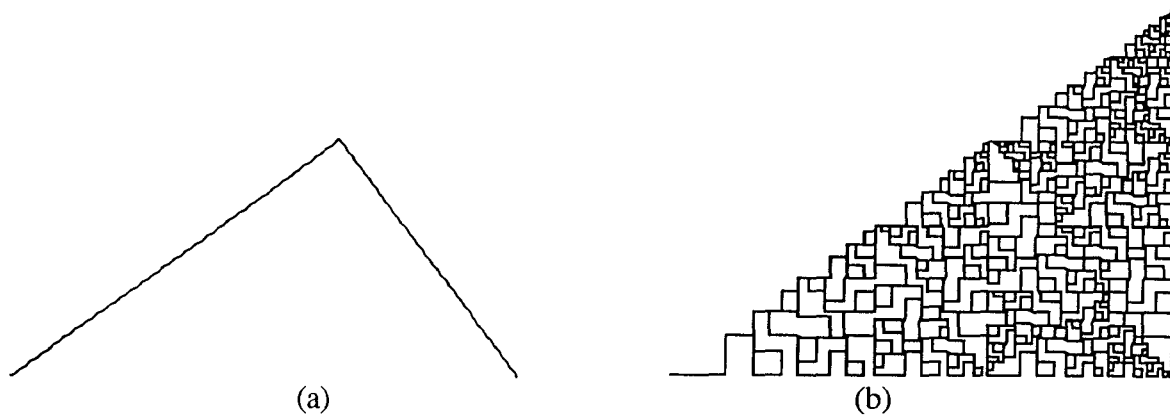


Figure 4-17 : forme multifractale (a) générateur, (b) ordre d'itération 10.

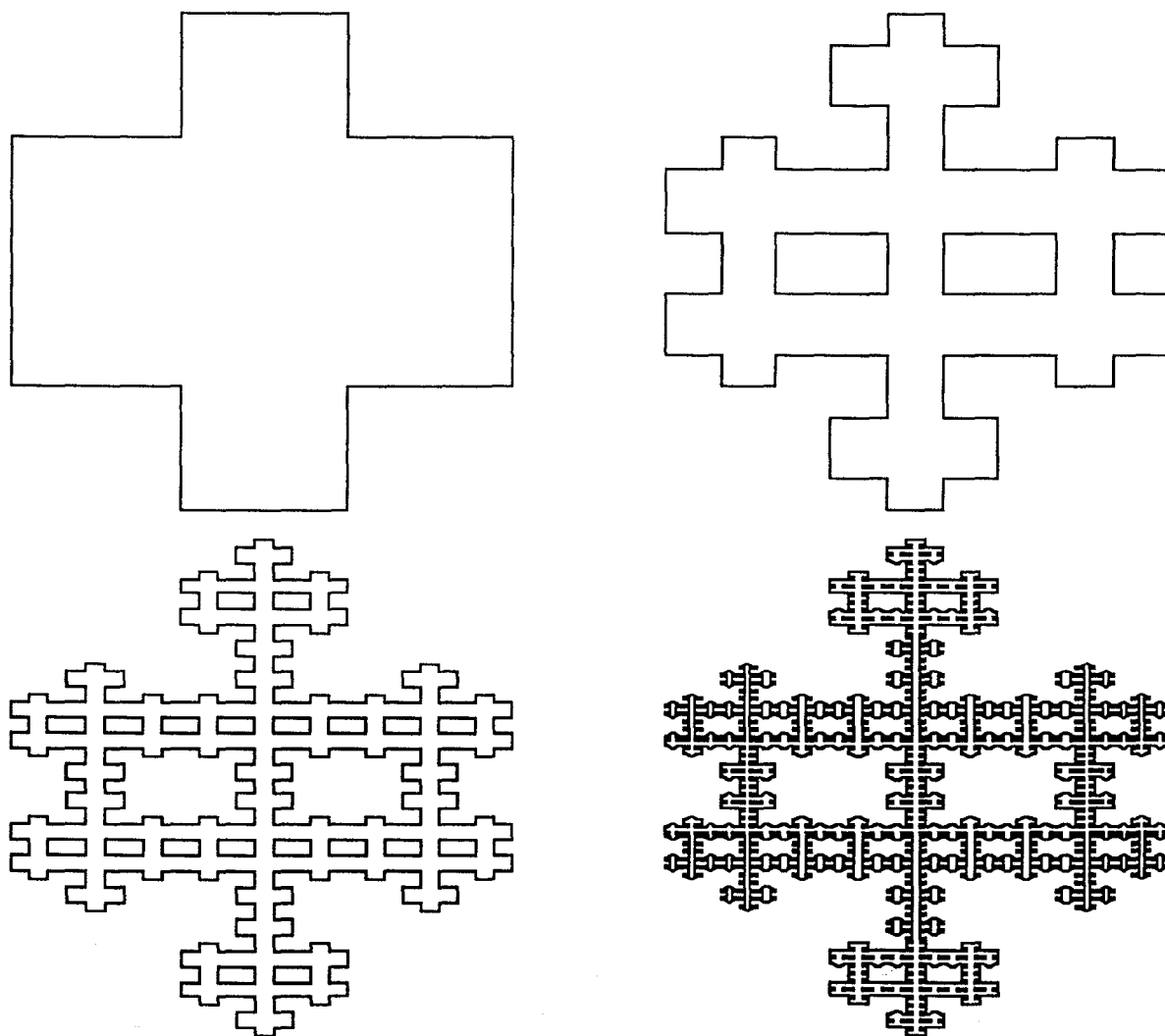


Figure 4-18 : forme autoaffine représentée aux ordres d'itération 1 à 4. Le facteur d'échelle est de $1/3$ en abscisse et de $1/4$ en ordonnée.

Ainsi avons-nous mis au point des codes de génération fractale avec un double objectif :

- faire ressortir les caractéristiques de la génération fractale. Dans ce domaine, nous avons mis en évidence le rôle important des groupes de symétrie dans les possibilités de génération.
- préparer la fabrication de tels objets en mettant les données caractéristiques de l'objet sous une forme adéquate.

Ce double objectif a été atteint. Nous pouvons maintenant envisager la construction de nouveaux types d'objets plus généraux que les objets fractals.

IV-B) Fabrication d'objets fractals par stéréolithographie

La réalisation d'objets fractals et donc l'obtention de géométries complexes interdit l'emploi de méthodes classiques telles que l'usinage. En effet certaines régions à usiner peuvent très bien ne plus être accessibles directement. Il a donc fallu choisir une nouvelle méthode de fabrication capable de fournir en sortie des matériaux à géométrie complexe. Nous avons envisagé les méthodes de prototypage rapide, plus précisément la stéréolithographie.

IV-B-1) Description du procédé

La stéréolithographie constitue la plus ancienne des méthodes de prototypage rapide. Les brevets de l'invention ont été déposés voici une dizaine d'années [72]. Par la suite, le système a été développé par Spectra Physics.

Il s'agit d'un procédé de polymérisation par laser [73]. Le dispositif comprend un bain de photopolymère liquide. Au-dessus de ce bain se trouve un laser UV. On emploie généralement un laser à Hélium-Cadmium. Sa puissance de sortie est certes moins élevée que celle d'un laser à Argon (typiquement 40 mW contre 1W), mais le laser à Hélium-Cadmium a une durée de vie plus longue et son coût de fonctionnement est bien moindre.

Le faisceau laser, dévié par un dispositif optique, va être dirigé vers le bain de résine liquide. Une fois arrivé sur la résine, le faisceau laser va polymériser localement la résine sur une épaisseur e qu'on choisit habituellement parmi les valeurs 0,1 mm, 0,125 mm et 0,15 mm. La longueur d'onde du laser est choisie de telle sorte que l'énergie qu'il fournit correspond exactement à l'énergie de la réaction de polymérisation de la résine. Ainsi le laser va être capable de balayer la surface du bain et être capable de dessiner toutes sortes de géométries sur une section d'épaisseur e .

Le matériau est ainsi réalisé par polymérisation couche par couche. On obtient une pièce complète en un seul morceau grâce au dispositif suivant. Une plateforme horizontale est plongée dans le bain de résine liquide. Initialement, elle se trouve très près de la surface, de telle sorte que la première couche se fixe sur cette plateforme. Pour pouvoir retirer plus facilement la pièce en fin de

fabrication, on commence par construire sur une épaisseur de 8 mm environ des supports fins qui vont soutenir la pièce.

Lorsque la polymérisation d'une couche est terminée, la plateforme va s'enfoncer de l'épaisseur d'une couche. La résine liquide vient recouvrir la partie de pièce déjà fabriquée et la polymérisation de la couche suivante peut débuter. Puisque la résine liquide est visqueuse, le temps de recouvrement de la pièce peut être assez long. La plateforme est donc enfoncée plus profondément dans le bain puis remontée. Un bras passe alors à la surface du bac pour supprimer les parties bombées et obtenir une surface parfaitement horizontale. Chaque couche se fixe parfaitement sur la précédente. Ainsi, au fur et à mesure de la fabrication, la plateforme s'enfonce progressivement dans le bain de résine liquide, la partie déjà fabriquée soutenant la partie de la pièce en cours de réalisation.

Lorsque toutes les sections ont été achevées, on dispose d'une pièce durcie à 60%. Le post traitement va consister à retirer les supports et à placer les pièces dans un four UV afin de terminer la polymérisation.

IV-B-2) Caractéristiques des pièces

Grâce à ce procédé, on peut accéder à une très large gamme de formes de pièces. On conçoit immédiatement que la pièce ne doit pas contenir de cavité fermée car alors cette cavité se remplirait de résine liquide au cours de la fabrication. La résine resterait prisonnière. Si le nombre de cavités n'est pas trop important, il est possible de créer des trous afin que la résine puisse s'écouler et de construire en même temps des pastilles obturatrices.

Les propriétés physiques des pièces vont elles dépendre de la résine employée. Actuellement on utilise deux types de résine.

- Des résines de type acrylate. Leur polymérisation est rapide. En revanche, les pièces réalisées ne sont pas stables dimensionnellement. La résine présente le phénomène de retrait : la pièce a tendance à se contracter. De plus cette contraction n'est pas isotrope et peut entraîner des phénomènes de distorsion.

- Des résines de type époxy. Elles sont plus coûteuses et leur polymérisation est plus lente que dans le cas des résines acrylate. L'avantage des résines époxy aujourd'hui optimisées est que le retrait d'une part et la distorsion d'autre part ont quasiment disparu. Les pièces sont donc stables dimensionnellement. La résine époxy permet également d'obtenir des surfaces horizontales très lisses, tandis que sur les faces obliques ou verticales demeure la trace de la couche. Les pièces époxy doivent cependant être conservées à des températures raisonnables (environ 15-16°C) et surtout à l'abri de l'humidité.

Les caractéristiques des deux résines les plus courantes sont fournies dans les tableaux ci-dessous :

Propriété	Valeur	Conditions
densité	1,12 g/cm ³	à 25°C
viscosité	1600-2400 centipoises 1000-1500 centipoises	à 30°C à 35°C
Résistance à la traction	35 N/mm ²	
Module de rupture	1100 N/mm ²	
Allongement à la rupture	10%	

Tableau 4-1 : caractéristiques de la résine Cibatool® SL5149 (Acrylate).

Propriété	Valeur	Conditions
densité	1,14 g/cm ³	à 25°C
viscosité	165-195 centipoises	à 30°C
	125 centipoises	à 35°C
Résistance à la traction	59-60 N/mm ²	
Module de rupture	2400-2500 N/mm ²	
Allongement à la rupture	8-14%	

Tableau 4-2 : caractéristiques de la résine Cibatool® SL5170 (Époxy).

La résolution des pièces fabriquées est très bonne. En z la limitation est due à l'épaisseur de la couche qui peut être descendue actuellement à 0,1mm. En x et en y la précision est meilleure puisqu'on atteint 0,1 mm pour une pièce d'une longueur totale de 10cm. Cette dernière caractéristique n'est vérifiée que pour les résines époxy qui ne présentent plus de retrait.

IV-B-3) Les applications

Les pièces ont plusieurs destinations. Elles sont d'abord utilisables telles que. Le fait de fabriquer un prototype donne à chaque personne impliquée dans la conception d'une pièce ou d'un outil une bonne idée de la pièce finale. De plus, il est possible de déceler d'éventuels défauts et des modifications de géométrie à effectuer. Enfin les pièces brutes peuvent être soumises directement à certains tests (par exemple mécaniques).

Les pièces pleines peuvent aussi subir divers traitements tels que la métallisation. En revanche, une utilisation de ces pièces en fonderie est malaisée. Ceci est dû au fait que la pyrolyse qui sert à détruire la pièce fabriquée par stéréolithographie provoque une dilatation de la résine. Les contraintes exercées sur le moule peuvent alors provoquer la destruction de celui-ci.

C'est là une des raisons qui ont conduit à la mise au point d'un système de fabrication de pièces creuses. Il s'agit du logiciel QuickCast™ [73, 74]. Il permet de réaliser non pas la pièce complète mais une carapace de celle-ci de quelques millimètres d'épaisseur. L'intérieur de la pièce est quasiment vide, constitué uniquement d'un réseau à parois verticales alternées triangulaires ou carrées. La topologie du réseau intérieur est telle qu'en pratiquant des trous dans la carapace, toute la résine liquide peut s'écouler rapidement.

L'intérêt de ce procédé est d'obtenir une copie de la pièce en fonderie à partir du procédé de cire perdue carapace. On peut alors réaliser une copie de la pièce stéréo en aluminium ou en tungstène par exemple.

L'avantage des procédés de prototypage rapide et de leur application en fonderie par rapport aux méthodes traditionnelles s'exprime en terme de coût, du moins pour les petites séries. Elle permet également de gagner un temps très important. Nous allons voir maintenant comment la stéréolithographie est un outil tout à fait adapté pour réaliser des objets fractals tridimensionnels.

IV-B-4) Application aux objets fractals

La stéréolithographie est un outil tout indiqué pour fabriquer les objets fractals tridimensionnels. Elle permet d'obtenir des objets dont la forme est trop complexe pour pouvoir être fabriqués d'une autre manière. Il s'agit en général de pièces non usinables.

Le choix de la résine époxy, plus dure, a été effectué en vue d'obtenir des formes géométriques stables dimensionnellement. Cette dureté permet de ne pas générer autant de supports que dans le cas des objets fabriqués en résine acrylate. Il s'agit là d'un point important car il y a souvent beaucoup de supports pour les pièces fractales. De plus, ils sont difficiles à retirer car souvent peu accessibles.

Les pièces époxy ont également une bonne résolution. Ceci est important car nous voulions dès le départ obtenir des objets de caractère fractal déterministe et non des objets fractals approchés.

IV-C) Expériences électromagnétiques sur les objets fractals déterministes

IV-C-1) Résultats d'expériences

Nous avons entrepris de rechercher les propriétés d'absorption d'objets fractals fabriqués par stéréolithographie. L'expérience a consisté à envoyer un signal électromagnétique sur une surface recouverte d'objets fractals et à mesurer le signal réfléchi (figure 19). La distance d entre le point de mesure et la cible est réglable.

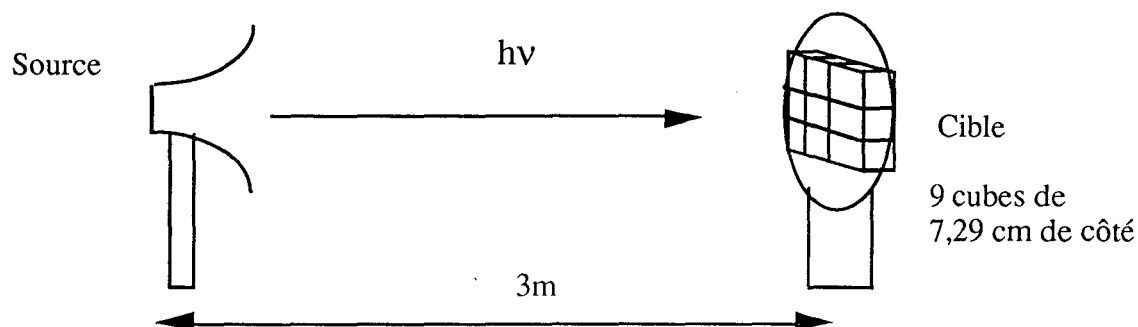


Figure 4-19 : schéma de principe des expériences de mesure de réflectivité.

Les mesures ont été effectuées sur une plage de fréquences allant de 1 à 14GHz. Nous avons mesuré la réflectivité $R = \frac{\|E_r \wedge H_r\|}{\|E_i \wedge H_i\|}$. La cible étalon consiste en un disque de 25 cm de diamètre, placé à environ 3m de la source. La calibration a été effectuée sur une plaque entièrement réfléchissante.

Avant de procéder aux mesures proprement dites sur les objets fractals, nous avons vérifié la validité du montage en utilisant comme cible divers absorbants (pentacarbonyle de fer) aux caractéristiques connues. Nous avons pu vérifier la coïncidence de la profondeur et de la largeur des pics d'absorption (figure 20).

Les formes étudiées consistent en des éponges de Menger construites à l'ordre 4 et de 7,29 cm de côté. Une première série de mesures a été effectuée sur un réseau de $3*3=9$ cubes accolés par leurs faces.

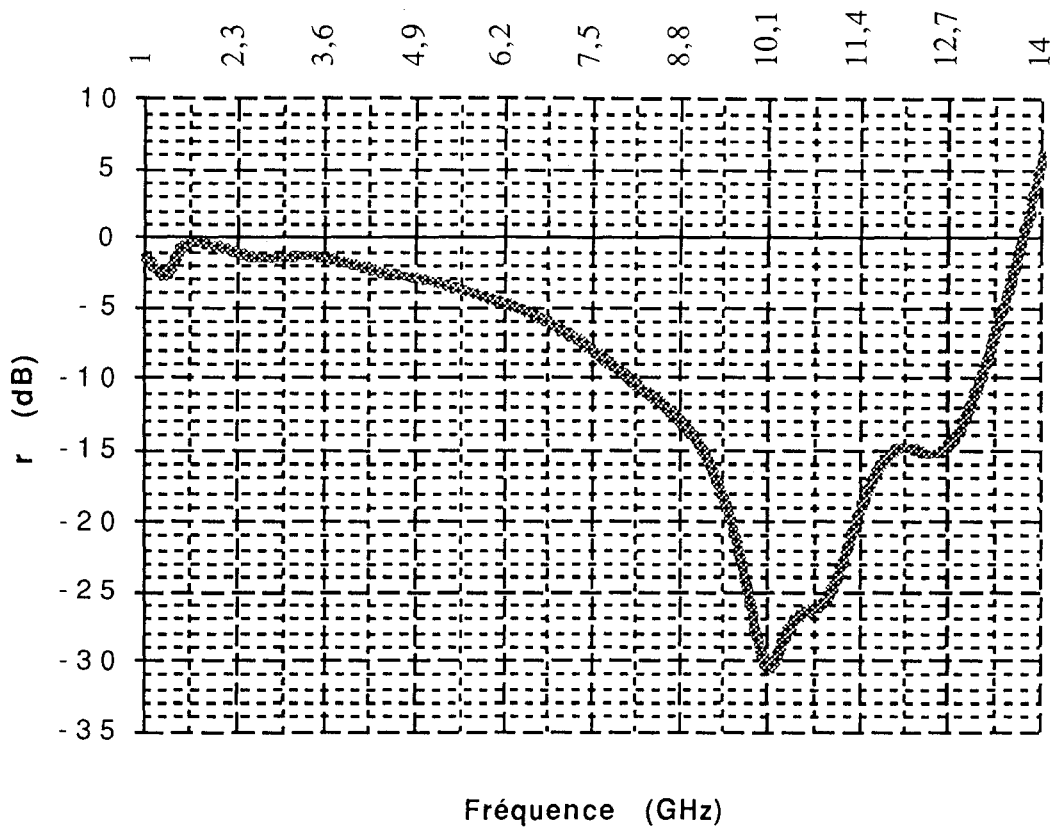


Figure 4-20 : spectre de réflexion d'un absorbant connu.

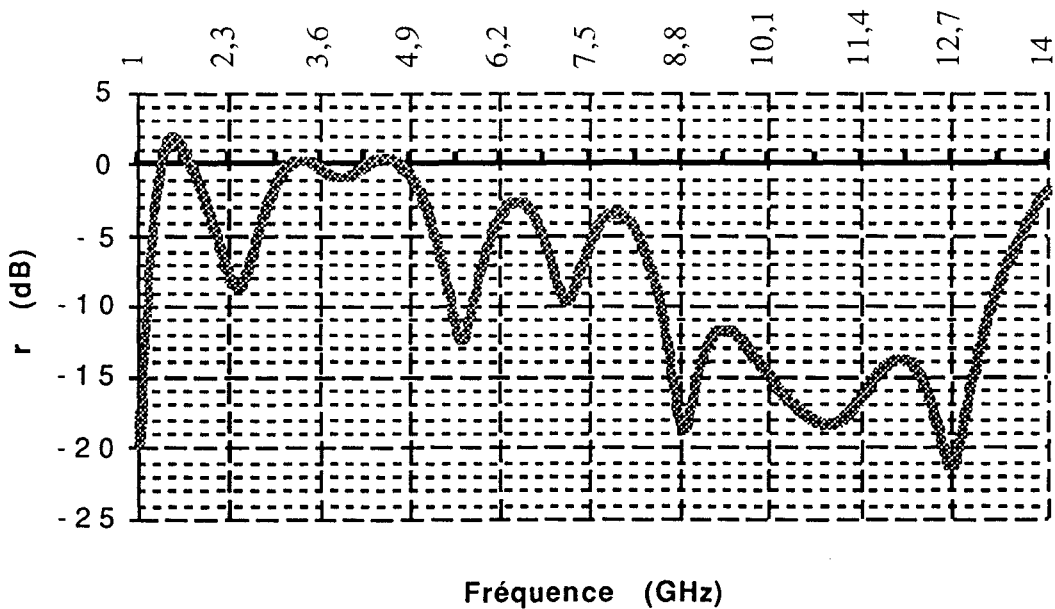


Figure 4-21 : spectre de réflexion de 9 éponges de Menger accolées.

Quatrième partie : réalisation d'objets fractals et expériences

On obtient le spectre représenté en figure 21. On constate deux faits :

- une périodicité d'ordre 2 dans les pics d'absorption, qui semble liée à la symétrie du motif fractal vis-à-vis du faisceau incident.
- une réflectivité très faible, inférieure à -12 dB sur une bande allant de 8 à 13 Ghz.

Il s'agit là d'un très bon résultat. Si on considère le matériau sous sa forme homogène, il ne présente qu'une très faible conductivité volumique ($\sigma=5,882.10^{-11}$ S.m⁻¹). Ses propriétés diélectriques sont données dans le tableau 3 :

Fréquence (kHz)	tg δ	ϵ_r
0,05	0,4	4,2
0,1	0,6	4,2
1	1,2	4,2
10	2,0	4,1
100	2,0	3,9
1000	2,4	3,8

Tableau 4-3 : propriétés électriques de la résine époxy Cibatool® SL5170.

Les paramètres mentionnés dans le tableau 3 ne sont pas connus pour des fréquences supérieures au MHz. Néanmoins, il est possible de prévoir l'ordre de grandeur de la réflectivité R. En effet, on constate une faible décroissance de la permittivité relative ϵ_r et une croissance de l'angle de perte δ en fonction de la fréquence. Pour un matériau homogène, le calcul explicite de la réflectivité est donné en annexe VI. On obtient $R=0,35$ pour $\epsilon_r=3,8$ et $\text{tg } \delta=2,4$. Nous avons représenté sur la figure 22 le comportement de R en fonction de δ pour des valeurs de ϵ_r comprises entre 1 et 5.

On constate qu'avec les variations observées de ϵ_r et δ , la valeur de R ne peut descendre en dessous de 0,3. Il en résulte que l'absorption des cubes fractals allant jusqu'à -12dB ne peut être expliquée par le comportement physique de la résine elle-même.

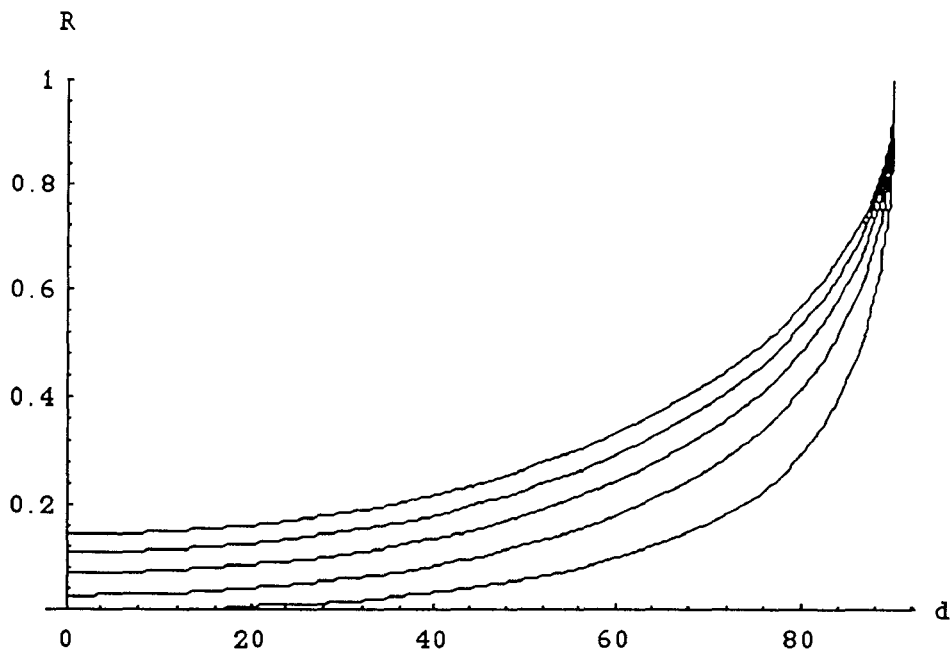


Figure 4-22 : réflectivité de la résine époxy homogène en fonction de l'angle de perte δ pour des valeurs de la permittivité relative ϵ_r allant de 1 à 5.

A partir des mêmes cubes, une seconde série d'expériences a été engagée. Cette fois les cubes ont été placés sur un support en résine époxy de telle sorte que le faisceau incident soit confondu avec une diagonale de chacun des cubes. Les résultats sont indiqués sur la figure 23. On observe deux faits principaux :

- les pics d'absorption ne sont plus groupés par deux mais par trois. Cette disposition particulière est peut-être due à la symétrie ternaire des cubes autour de leur diagonale.
- la bande d'absorption à -12 dB s'est élargie puisqu'elle va maintenant de 5 à 13 GHz.

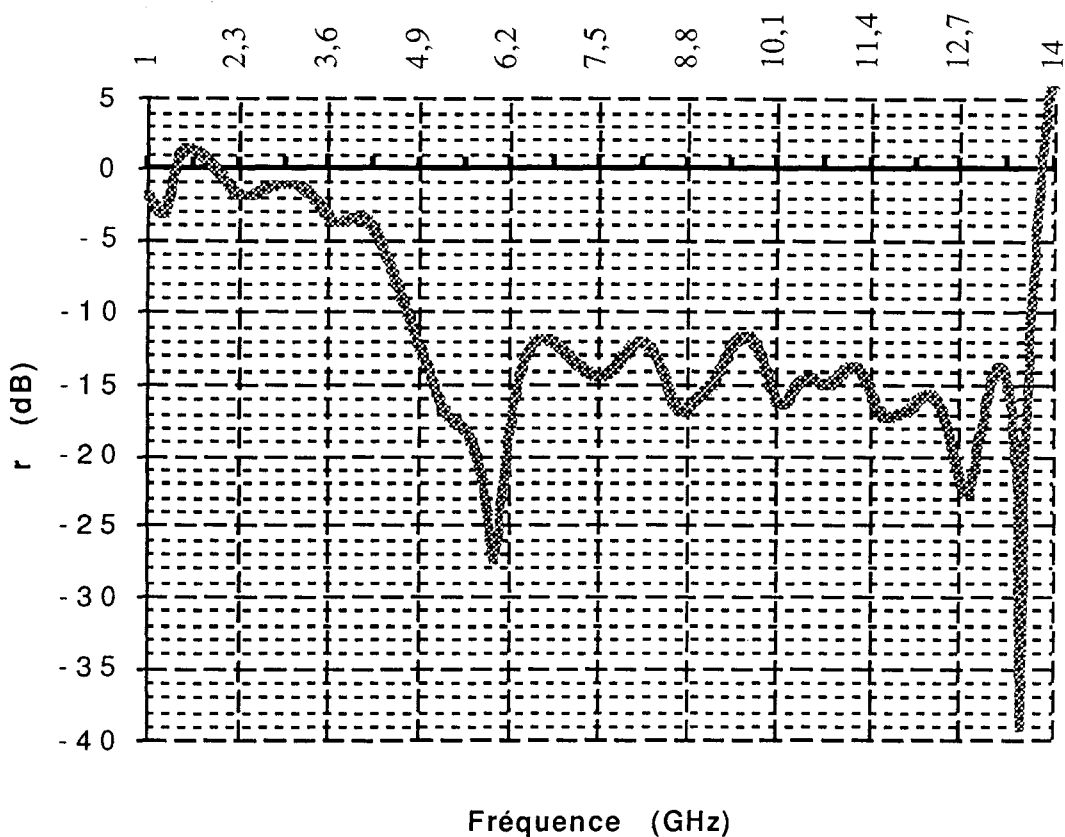


Figure 4-23 : spectre de réflexion de 9 éponges de Menger pointées vers la source.

Au vu des résultats, nous avons constaté l'importance de la symétrie de la cible par rapport à la direction du faisceau. Nous avons donc entrepris une troisième série d'expériences dans laquelle nous avons supprimé toute symétrie de l'ensemble des cubes vis-à-vis du faisceau incident. Nous avons pour cela inséré un parallélépipède entre le support en époxy des pièces fractales et la plaque circulaire.

Nous obtenons le spectre de réflexion décrit en figure 24. Nous observons d'abord que le regroupement des pics par 3 a disparu du fait de la brisure de symétrie, sauf pour les pics de plus basse fréquence. Ceci signifie que la perte de symétrie se fait moins ressentir à grande échelle qu'à petite échelle.

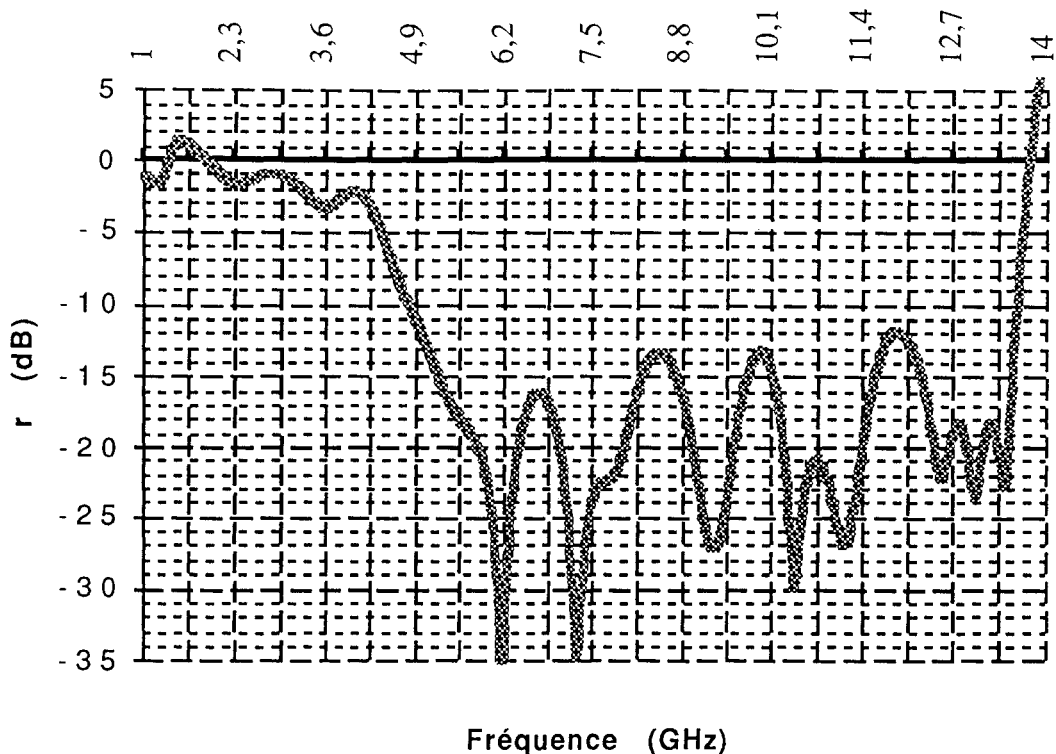


Figure 4-24 : spectre de réflexion de 9 éponges de Menger presque pointées vers la source.

On peut remarquer que comme dans le cas précédent, l'absorption est forte dans le domaine 5-13 GHz. Il y a cependant une différence. Tandis que dans le cas à symétrie ternaire, l'absorption la plus forte se trouvait aux environs de 12GHz, on la rencontre maintenant aux alentours de 8GHz. Ces considérations peuvent nous aider à concevoir des absorbants pour un domaine de fréquence donné.

On constate que ces résultats expérimentaux vont dans le même sens que les conjectures émises plus haut. Alors que le matériau considéré (résine époxy) ne présente, lorsqu'il est sous forme homogène, que de faibles pertes locales, les objets fractals constitués de ce matériau présentent des propriétés absorbantes loin d'être négligeables.

IV-C-2) Expériences complémentaires

Pour aller plus loin dans l'interprétation des expériences effectuées ci-dessus, il est nécessaire d'effectuer d'autres tests. On peut envisager les expériences sur les formes géométriques suivantes :

- des cubes fractals quasi-vides dont les faces sont des tapis de Sierpinski à deux dimensions. La comparaison des résultats avec ceux des objets tridimensionnels permettrait de bien séparer les contributions venant de phénomènes diffractifs ou propagatifs.

- des structures fractales où les trous, au lieu de se trouver dans les trois directions de l'espace, ne se trouveraient que dans une dimension. Dans une expérience, ces trous auraient la même direction que le faisceau incident. De même, on pourrait envisager la fabrication d'éponges avec des trous dans deux directions. Le faisceau envoyé sur l'objet serait alors orthogonal aux trous.

Le procédé de stéréolithographie offre la possibilité d'effectuer d'autres tests sur une multitude de formes fractales construites à partir de cubes, de tétraèdres ou autres polyèdres.

CONCLUSION

Conclusion et perspectives

Cette thèse a permis de progresser à la fois dans le domaine de la géométrie fractale du point de vue mathématique et sur le plan de l'étude des propriétés physiques des objets fractals.

En terme d'étude géométrique, nous avons pu mettre en évidence le fait que dans la construction fractale même, il existe une série de choix à effectuer dans l'ordre des échelles dont la loi de probabilité dépend directement des groupes de symétrie des itérés successifs. Il ne s'agit pas là que d'une considération mathématique. Ce choix peut être lié à la notion d'entropie d'échelle dont la conséquence est la suivante : lors de tout processus physique sur un objet fractal (par exemple la propagation) il va exister un choix à effectuer dans l'ordre des échelles, et le processus physique doit révéler l'existence de ce choix au travers d'un terme de perte.

Sur le plan physique, nous sommes parvenus à établir une théorie approchée de la diffraction par des ouvertures fractales (qui peut sans trop de difficultés être étendue à toute forme d'ouverture). Même si elle permet d'obtenir directement des expressions analytiques des figures de diffraction (court-circuitant ainsi toutes les méthodes numériques habituelles), son efficacité est limitée par le fait que la plaque traversée est supposée d'épaisseur nulle. Elle ne peut par conséquent pas prendre en compte les caractéristiques physiques intrinsèques de la plaque et donc déceler une absorption éventuelle d'énergie par les bords.

Les résultats d'expériences sur des objets fractals spatiaux sont bien plus encourageants. En effet, nous avons pu mettre en évidence des absorptions importantes sur des objets fractals dont le matériau constitutif présente une conductivité quasi nulle et des pertes faibles. L'émergence d'un nouveau mode d'absorption fondé sur l'ordre des échelles oblige à une refonte complète de la théorie électromagnétique. Nous avons proposé diverses pistes à explorer en vue de cette refonte, en particulier l'approche topologique du phénomène de propagation. Il reste cependant un effort très notable à fournir pour adapter les équations de Maxwell aux milieux fractals qui sont fondamentalement non différentiables. Il convient peut-être de faire porter la non différentiabilité sur

les équations elles-mêmes et non sur le milieu considéré, qui présente une structure non différentiable et hétérogène dans l'espace mais qui possède une structure périodique simple dans l'ordre des échelles.

Bien entendu ce travail théorique est à effectuer en parallèle avec une série de tests physiques sur des matériaux de forme géométrique présentant des degrés plus ou moins complexes d'hétérogénéité déterministe : objets fractals, multifractals, autoaffines. La possibilité effective d'utiliser la stéréolithographie pour fabriquer ces objets permettra au travers d'expériences de faire émerger de nouveaux invariants liés aux phénomènes physiques sur des structures fractales.

ANNEXES

Annexe I : Mesures de propagation dans des matériaux composites

Nous présentons ici des résultats d'expériences effectuées sur des composites constitués d'une matrice PE/EPDM chargée à divers taux en noirs de carbone. Les comportements observés pour les constantes de propagation sont supposés du type

$$\begin{cases} Z(\omega) = \frac{(a_1 + i\omega k_1)^{1/d_1}}{(a_2 + i\omega k_2)^{1/d_2}} \\ \gamma(\omega) = (a_1 + i\omega k_1)^{1/d_1} (a_2 + i\omega k_2)^{1/d_2} \end{cases} \quad (\text{a1-1})$$

Dans ces expressions, les paramètres a_1 et a_2 représentent les pertes locales habituelles. k_1 et k_2 représentent de nouveaux invariants propres aux milieux hétérogènes qui sont la généralisation de la permittivité magnétique μ et électrique ε . Les paramètres d_1 et d_2 sont susceptibles de prendre des valeurs non entières, contrairement au cas homogène pour lequel ces dimensions sont toutes égales à 2, ce qui traduit bien le caractère quantique relativiste de la théorie électromagnétique.

Les expressions (a1-1) peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} Z(\omega) = \frac{k_1^{1/d_1} \left(\frac{a_1}{k_1} + i\omega \right)^{1/d_1}}{k_2^{1/d_2} \left(\frac{a_2}{k_2} + i\omega \right)^{1/d_2}} \\ \gamma(\omega) = k_1^{1/d_1} k_2^{1/d_2} \left(\frac{a_1}{k_1} + i\omega \right)^{1/d_1} \left(\frac{a_2}{k_2} + i\omega \right)^{1/d_2} \end{cases} \quad (\text{a1-2})$$

ou encore :

$$\begin{cases} Z(\omega) = Z_c(i)^{1/\nabla} \frac{\left(\omega - i \frac{a_1}{k_1}\right)^{1/d_1}}{\left(\omega - i \frac{a_2}{k_2}\right)^{1/d_2}} \\ \gamma(\omega) = \gamma_c(i)^{1/\Delta} \left(\omega - i \frac{a_1}{k_1}\right)^{1/d_1} \left(\omega - i \frac{a_2}{k_2}\right)^{1/d_2} \end{cases} \quad (\text{a1-3})$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{1}{\nabla} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \\ \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \end{cases} \quad (\text{a1-4})$$

qui sont de nouvelles dimensions liées à la métrique de la distribution d'inclusions et :

$$\begin{cases} Z_c = \frac{k_1^{1/d_1}}{k_2^{1/d_2}} \\ \gamma_c = k_1^{1/d_1} k_2^{1/d_2} \end{cases} \quad (\text{a1-5})$$

qui représentent respectivement l'impédance et la constante de propagation réduite réelle. On constate immédiatement grâce à la forme (a1-3) ce qui a déjà été mentionné dans le chapitre I-B-1), à savoir que même en absence de pertes locales habituelles ($a_1=0$ et $a_2=0$) les paramètres de propagation peuvent prendre des valeurs complexes. On met alors en évidence un nouveau mode d'absorption d'énergie non lié aux pertes habituelles.

Rappelons que dans le cas habituel homogène, on a :

$$d_1=2, d_2=2, \Delta=1 \text{ et } 1/\nabla=0$$

Il va s'agir expérimentalement de déterminer ces grandeurs, et de les comparer avec les grandeurs habituelles. C'est ce qui a été effectué sur des composites constitués d'une matrice PE/EPDM, renforcée par des noirs de carbone.

La composition des différents matériaux est donnée dans le tableau 1 ci-dessous. Plusieurs composés contiennent les mêmes éléments, mais à des taux de charge différents. Une première étape consiste à mesurer en fonction de la fréquence les paramètres définis plus haut. Des mesures ont été effectuées suivant les composés dans les domaines fréquentiels suivants :

0,02 GHz - 0,5 GHz,

0,2 GHz - 18 GHz.

Échantillon	Formulation
N16	XLH162 5%, PE/EPDM 95% voie mélangeur à cylindres
N17	XLH162 10%, PE/EPDM 90% voie mélangeur à cylindres
N18	XLH162 15%, PE/EPDM 85% voie mélangeur à cylindres
N19	XLH162 20%, PE/EPDM 80% voie mélangeur à cylindres
N46	SC 7710 100%

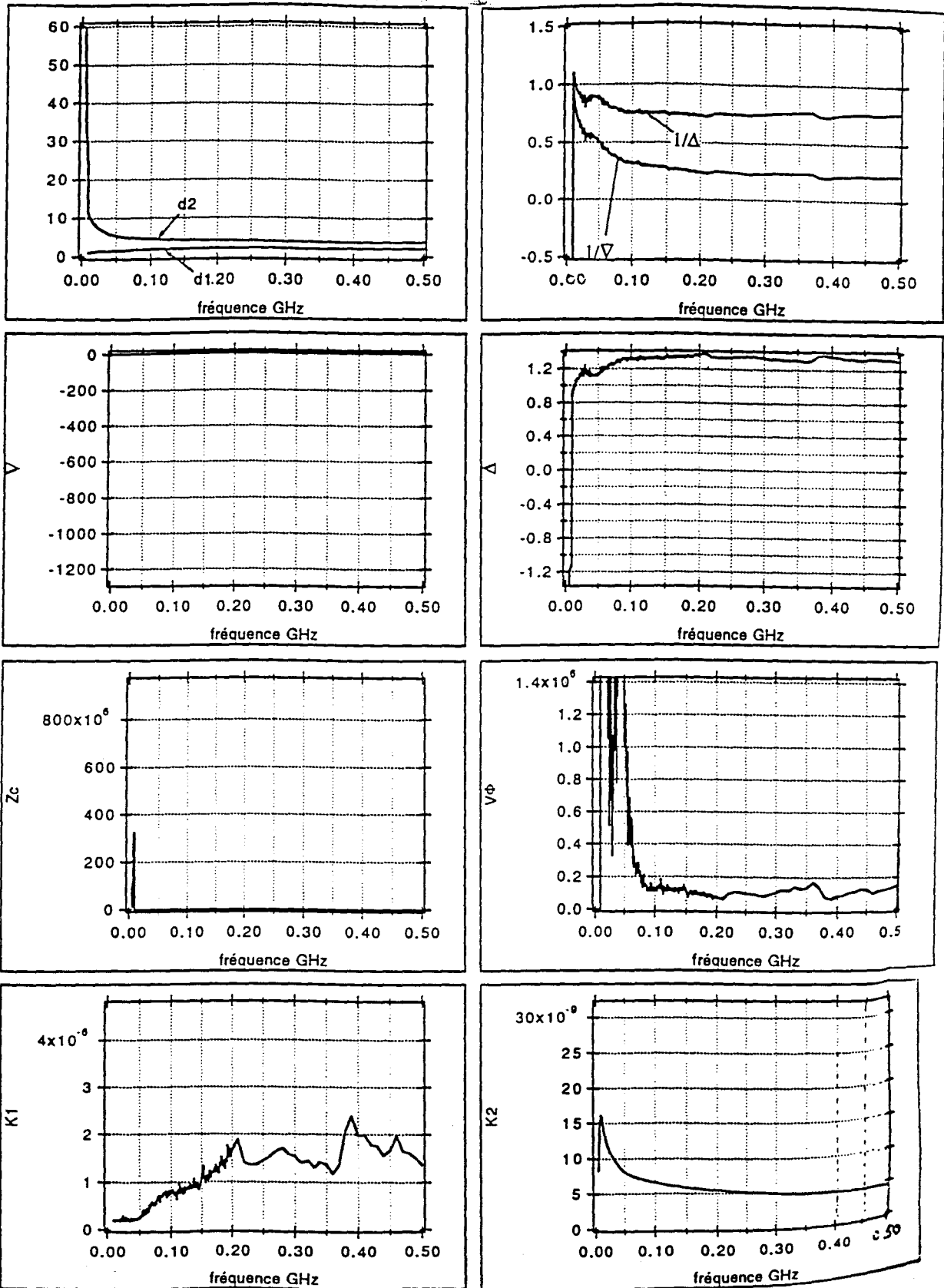
Tableau a1 : composition des différents composites à matrice PE/EPDM.

Nous représentons successivement dans chaque cas la variation en fréquence des paramètres d_1 , d_2 , $1/\nabla$, $1/\Delta$, ∇ , Δ , Z_c , $v\Phi=1/\gamma_c$, k_1 , k_2 (figures 1 à 4).

La principale conclusion qu'il est possible de tirer de cette série de mesures est que les divers paramètres, dans une large plage de fréquence allant de 1 à 18 GHz, ont une variation limitée.

Il est intéressant de constater que même si les paramètres d_1 , d_2 , Z_c , $v\Phi$, k_1 , k_2 , ne prennent pas des valeurs parfaitement constantes, ils présentent une variation par paliers successifs. Ceci peut être interprété par la différence de structure du matériau suivant les échelles. Le point important de cette analyse est que même si d_1 et d_2 ne sont pas absolument constants, les paramètres de dimension $1/\nabla$ et $1/\Delta$, qui présentent eux un véritable caractère d'invariant physique (cf. a1-3), ont une variation minimale sur une large plage de fréquence et prennent des valeurs bien distinctes des valeurs habituelles 0 et 2. A la lumière de ces résultats, on constate que le comportement observé expérimentalement des paramètres de propagation est mieux décrit par les formules (a1-1) que par les expressions habituelles comprenant la puissance $1/2$ et des paramètres constitutifs dépendant de la fréquence.

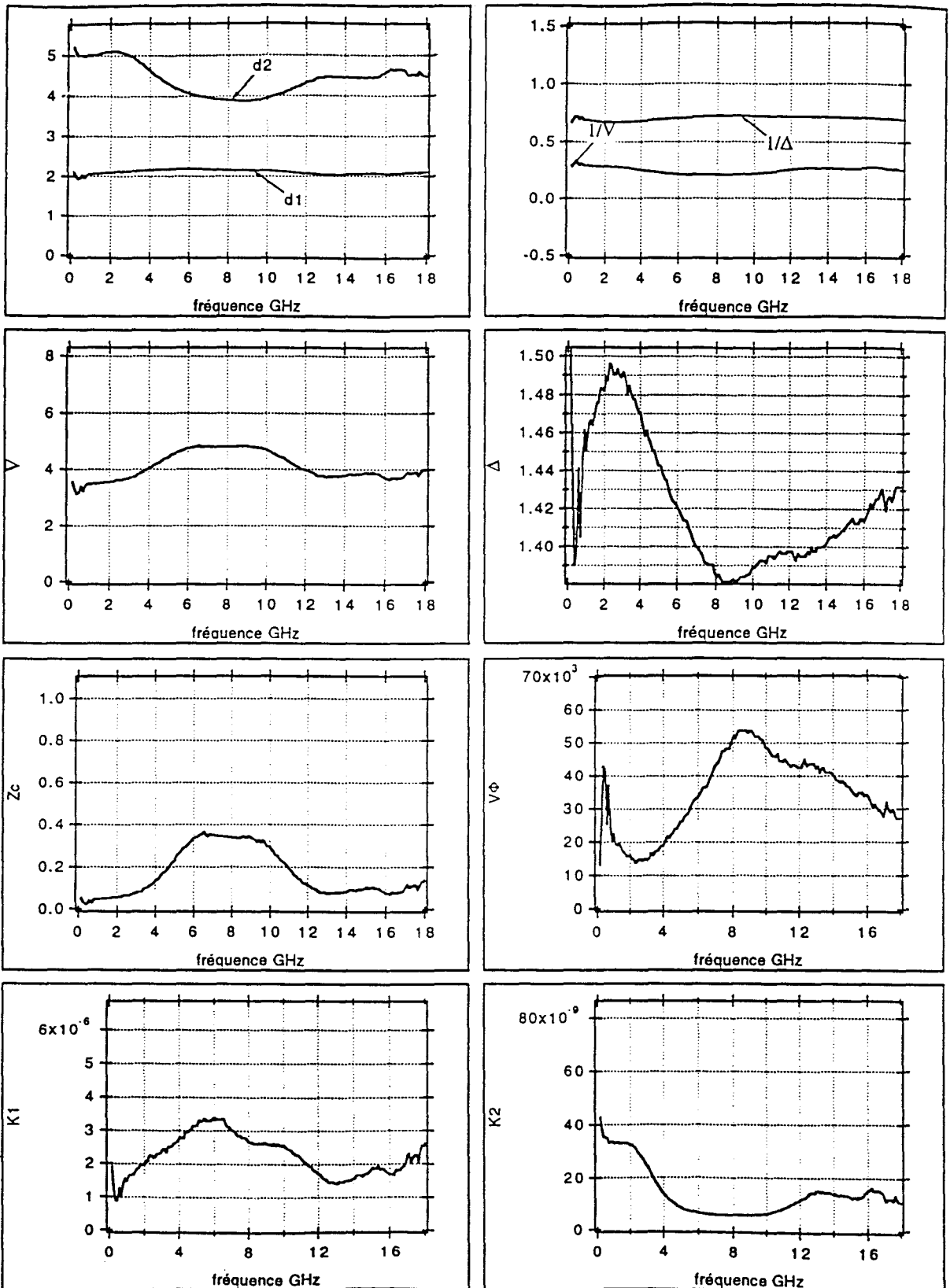
Annexes



N46_1 SC 7710

figure a1-1 : paramètres d_1 , d_2 , $1/\nabla$, $1/\Delta$, ∇ , Δ , Z_c , $v\Phi$, k_1 , k_2 mesurés sur des échantillons de SC 7710 sur le domaine fréquentiel 0,02 GHz - 0,5 GHz.

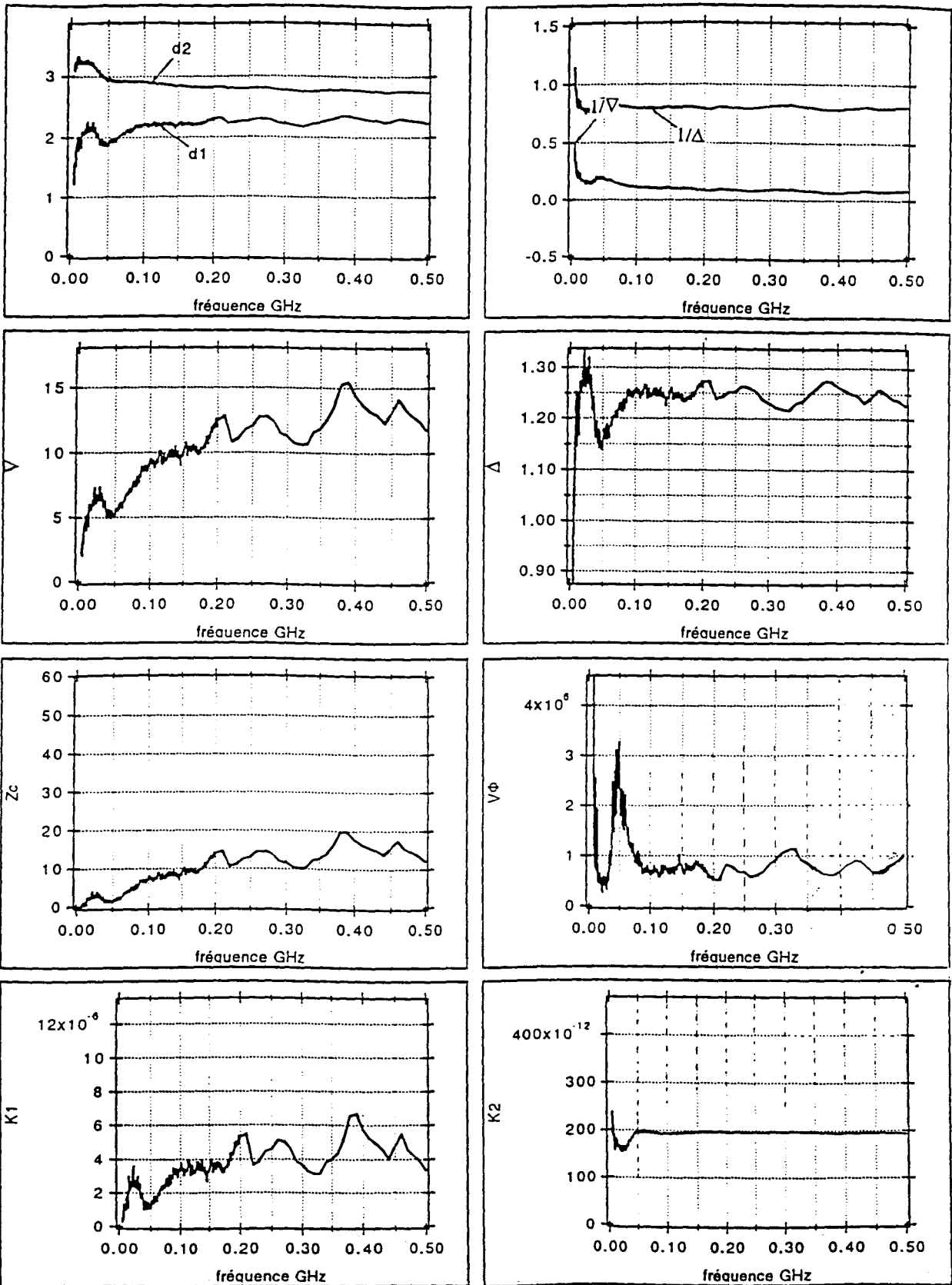
Annexes



N46_1 SC 7710

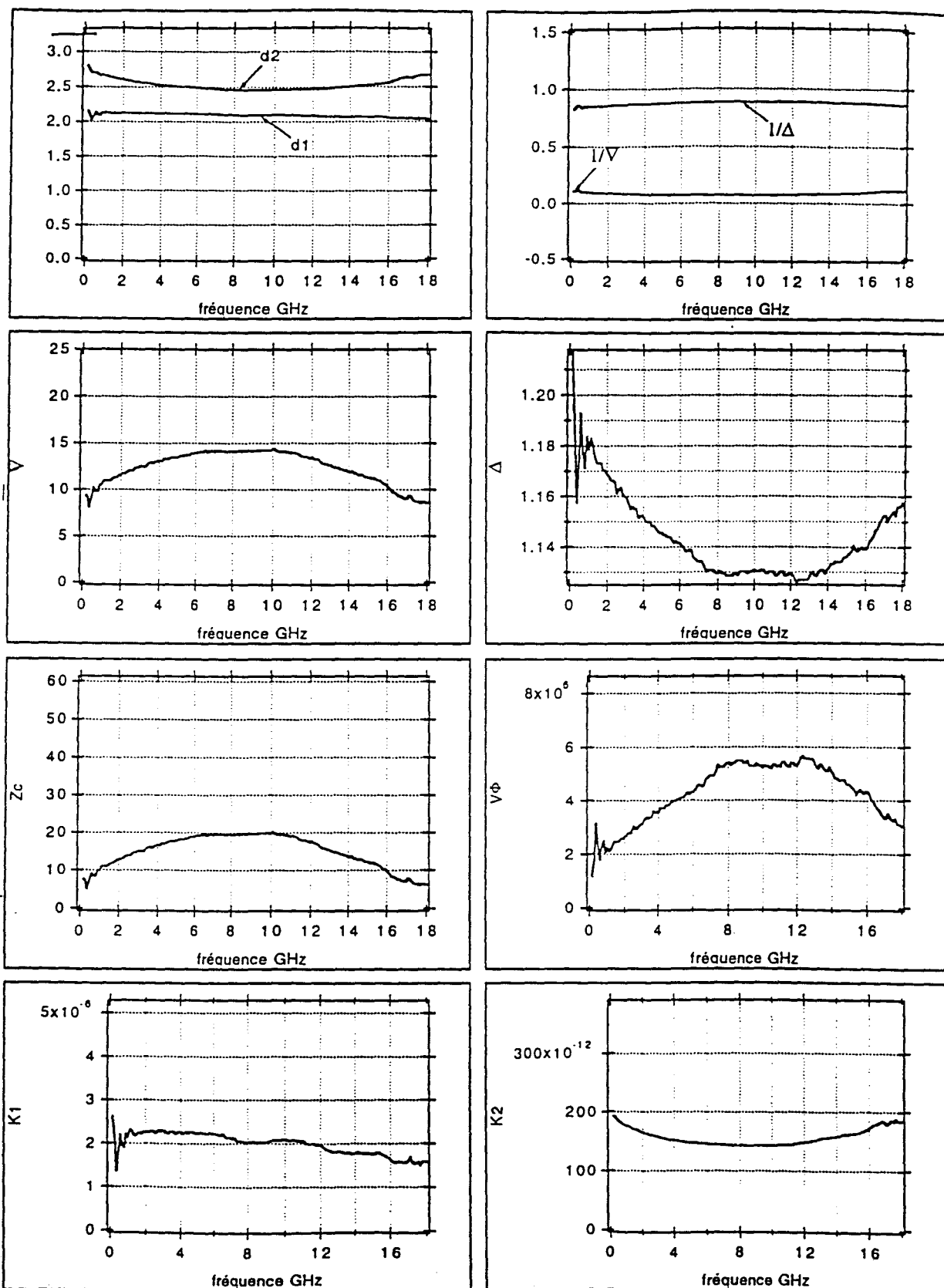
figure a1-2 : paramètres d_1 , d_2 , $1/\nabla$, $1/\Delta$, ∇ , Δ , Z_c , $v\Phi$, k_1 , k_2 mesurés sur des échantillons de SC 7710 sur le domaine fréquentiel 0,2 GHz - 18 GHz.

Annexes



N45_1 XLH162 20% + EMI 80%

figure a1-3 : paramètres d_1 , d_2 , $1/\nabla$, $1/\Delta$, ∇ , Δ , Z_c , $v\Phi$, k_1 , k_2 mesurés sur des échantillons de composite PE/EPDM -noir XLH162, sur le domaine fréquentiel 0,02 GHz - 0,5 GHz.



N45_1 XLH162 20% + EMI 80%

figure a1-4 : paramètres d_1 , d_2 , $1/V$, $1/\Delta$, V , Δ , Z_c , $v\Phi$, k_1 , k_2 mesurés sur des échantillons de composite PE/EPDM -noir XLH162, sur le domaine fréquentiel 0,2 GHz - 18 GHz.

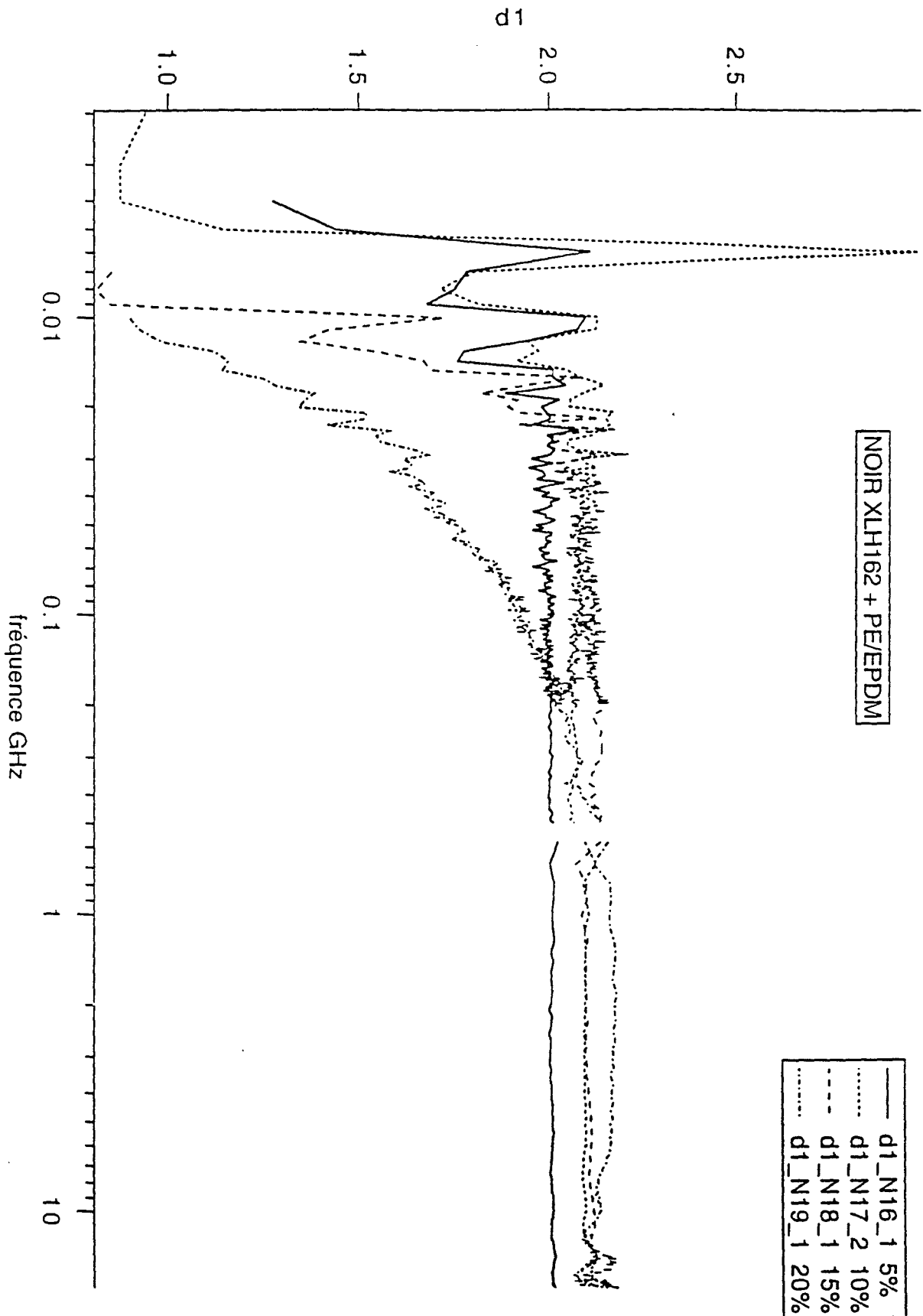


figure a1-5 : variation de d_1 en fonction de la fréquence pour divers taux de charge croissants.

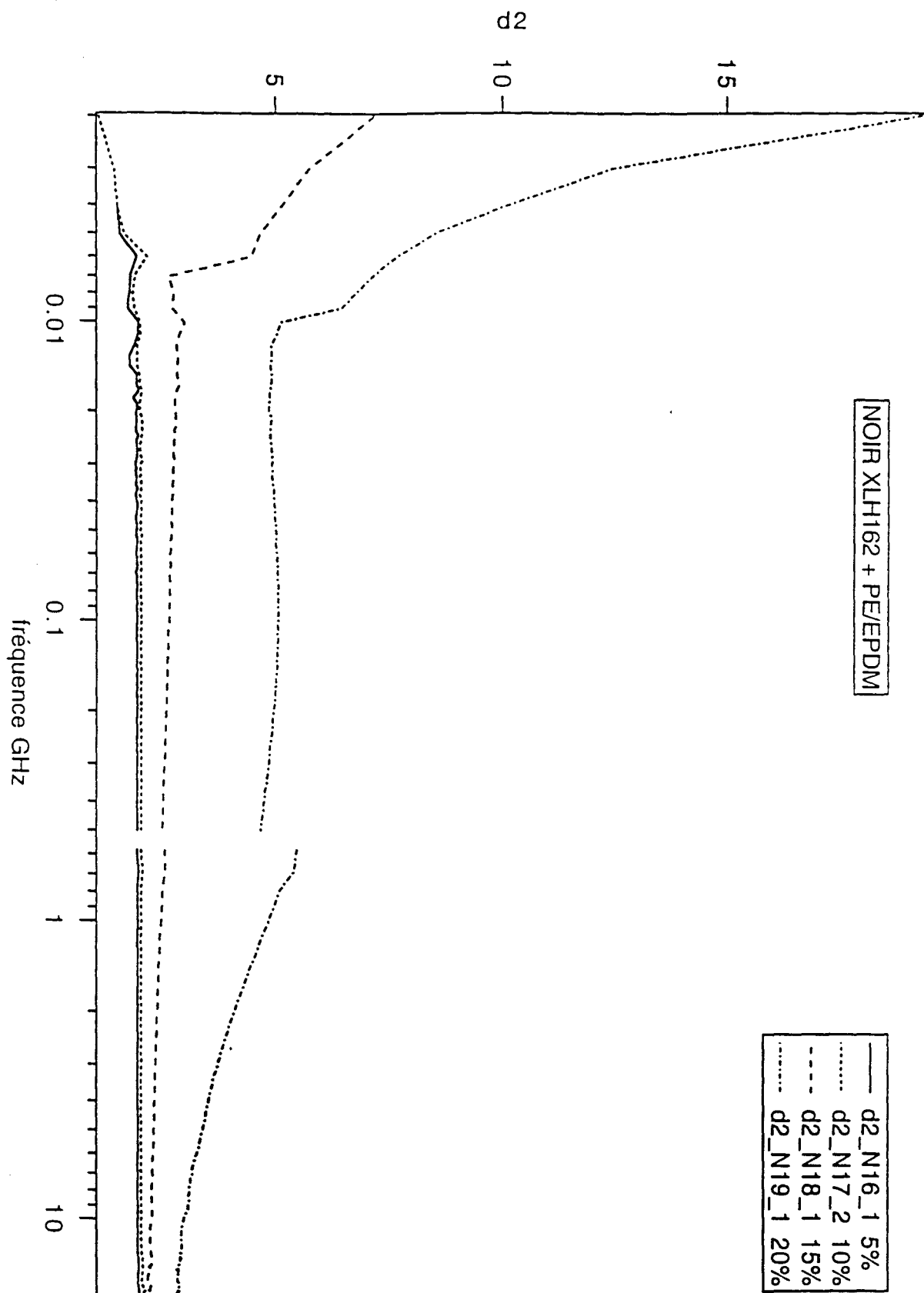


figure a1-6 : variation de d_2 en fonction de la fréquence pour divers taux de charge croissants.

La seconde étape des expériences consiste à comparer les différents paramètres obtenus en fonction du taux de charge en un constituant donné inclus dans le PE/EPDM. Nous avons ainsi observé le comportement de d_1 et d_2 pour divers domaines fréquentiels dans le cas de noirs de carbone auxquels on a ajouté en taux de charge croissants le noir XLH162 (figures 5 et 6).

On constate en général que plus le taux de charge est élevé, plus les dimensions d_1 et d_2 prennent des valeurs éloignées de la valeur usuelle 2. On observe également qu'à fréquence donnée supérieure à 0,05 GHz, les valeurs de d_2 sont supérieures à celles de d_1 , et les variations de d_2 sont bien plus importantes que celles de d_1 . On peut conjecturer là que la distribution de XLH162 dans la matrice PE/EPDM présente un caractère fractal et que ce caractère est d'autant plus marqué que la quantité de XLH162 dans le composite est élevée. d_2 , du fait de sa variation importante en fonction du taux de charge, semble directement être lié à la dimension fractale de la distribution des noirs de carbone. Au contraire, il n'a pas été possible d'agir de manière aussi nette sur d_1 , ce qui fait penser que ce paramètre est lié à la dynamique du processus ondulatoire et non au caractère statique de la distribution des noirs de carbone [75,76].

Annexe II : Démonstration par récurrence de la formule (2-50)

* Cette formule est vraie à l'ordre 1 :

Soit $k_1=j-1$ compris entre 0 et $p-1$. Ici A_{1,k_1} est un des p centres d'homothéties. On écrit la relation vectorielle d'homothétie :

$$A_{1,k_1} M_{1,j} = \frac{1}{q} A_{1,k_1} L \quad (\text{A2-1})$$

En décomposant chaque vecteur, on écrit sous forme symbolique :

$$M_{1,j} = \frac{q-1}{q} A_{1,k_1} + \frac{1}{q} L \quad (\text{A2-2})$$

Cette relation doit être entendue au sens des coordonnées homogènes des points. On retrouve bien la relation (50) pour $n=1$.

*Supposons que la relation (50) soit vraie à l'ordre $n-1$.

On a alors

$$M_{n-1,j'} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q-1}{q^i} A_{i,k_i} + \frac{1}{q^{n-1}} L \quad (\text{A2-3})$$

où les entiers k_1, \dots, k_{n-1} sont des entiers compris entre 0 et $p-1$ et satisfont la décomposition unique :

$$j' = \sum_{i=1}^{n-1} k_i p^{n-i-1} + 1 \quad (\text{A2-4})$$

Soit un point $M_{n,j}$ généré à l'ordre n . Il est l'image de $M_{n-1,j'}$ par une homothétie de rapport $1/q$, de centre Ω_n . On a donc :

$$M_{n,j} = \frac{q-1}{q} \Omega_n + \frac{1}{q} M_{n-1,j'} \quad (\text{A2-5})$$

Annexes

$$\text{Avec } j = p(j' - 1) + k_n + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} k_i p^{n-i} + k_n + 1 = \sum_{i=1}^n k_i p^{n-i} + 1 \quad (\text{A2-6})$$

D'autre part, Ω_n est l'image d'ordre $n-1$ de A_{n,k_n} , donc on peut écrire :

$$\Omega_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q-1}{q^i} A_{i,k_i} + \frac{1}{q^{n-1}} A_{n,k_n} \quad (\text{A2-7})$$

On déduit des trois relations (54), (56), (58) :

$$M_{n,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q-1}{q^i} A_{i,k_i} + \frac{q-1}{q^n} A_{n,k_n} + \frac{1}{q^n} L \quad (\text{A2-8})$$

$$M_{n,j} = \sum_{i=1}^n \frac{q-1}{q^i} A_{i,k_i} + \frac{1}{q^n} L \quad (\text{A2-9})$$

et la relation (50) est vraie à l'ordre n .

Nous avons démontré par récurrence la validité de la formule (50).

Annexe III : Démonstration par récurrence de la formule (2-61)

* Cette formule est vraie aux ordres 1 et 2 :

Pour n=1, il n'y a que deux termes et on a bien :

$$M_{1,j} = \lambda A_{1,k_1} + \mu f_1(L) \quad (A3-1)$$

Les termes centraux apparaissent pour n=2. On a, d'après (58) :

$$M_{2,j} = F_{\Omega_2}(M_{1,j'}) = \lambda \Omega_2 + \mu f_2(M_{1,j'}) \quad (A3-2)$$

Ω_2 et $M_{1,j'}$ sont donnés respectivement par (59) et (A3-1).

$$\Omega_2 = F_{\Omega_1}(A_{2,k_2}) = F_{A_{1,k_1}}(A_{2,k_2}) = \lambda A_{1,k_1} + \mu f_1(A_{2,k_2}) \quad (A3-3)$$

Par substitution dans (A3-2), il vient :

$$M_{2,j} = \lambda \left(\lambda A_{1,k_1} + \mu f_1(A_{2,k_2}) \right) + \mu f_2 \left(\lambda A_{1,k_1} + \mu f_1(L) \right) \quad (A3-4)$$

soit par développement :

$$M_{2,j} = \lambda^2 A_{1,k_1} + \lambda \mu \left(f_2(A_{1,k_1}) + f_1(A_{2,k_2}) \right) + \mu f_2 \circ f_1(L) \quad (A3-5)$$

On retrouve bien la formule (61) pour n=2.

* Supposons la formule (61) vraie à l'ordre n-1.

$$\begin{aligned} M_{n-1,j} &= \lambda^{n-1} A_{1,k_1} \\ &+ \sum_{s'=1}^{n-2} \left(\lambda^{n-1-s'} \mu^{s'} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s'} \leq n-1} f_{j_{s'}} \circ f_{j_{s'-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{s'})} \right) \right) \\ &+ \mu^{n-1} f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(L) \end{aligned} \quad (A3-6)$$

On a alors :

$$M_{n,j} = \lambda \Omega_n + \mu f_n(M_{n-1,j'}) \quad (\text{A3-7})$$

$M_{n-1,j'}$ est donné par (A3-6). D'après (26) et (27), Ω_n a pour expression :

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \lambda^{n-1} A_{1,k_1} \\ &+ \sum_{s'=1}^{n-2} \left(\lambda^{n-1-s'} \mu^{s'} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s'} \leq n-1} f_{j_{s'}} \circ f_{j_{s'-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{s'})} \right) \right) \\ &+ \mu^{n-1} f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(A_{n,k_n}) \end{aligned} \quad (\text{A3-8})$$

On obtient par substitution dans (A3-7) :

$$\begin{aligned} M_{n,j} &= \lambda^n A_{1,k_1} \\ &+ \sum_{s'=1}^{n-2} \left(\lambda^{n-s'} \mu^{s'} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s'} \leq n-1} f_{j_{s'}} \circ f_{j_{s'-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{s'})} \right) \right) \\ &+ \lambda \mu^{n-1} f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(A_{n,k_n}) \\ &+ \mu \lambda^{n-1} f_n(A_{1,k_1}) \\ &+ \sum_{s'=1}^{n-2} \left(\lambda^{n-1-s'} \mu^{s'+1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s'} \leq n-1} f_n \circ f_{j_{s'}} \circ f_{j_{s'-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{s'})} \right) \right) \\ &+ \mu^n f_n \circ f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(L) \end{aligned} \quad (\text{A3-9})$$

Le premier et le dernier terme de cette somme apparaissent bien dans (61).

On scinde l'expression restante en une somme de deux termes S_1 et S_2 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{s'=1}^{n-2} \left(\lambda^{n-s'} \mu^{s'} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s'} \leq n-1} f_{j_{s'}} \circ f_{j_{s'-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{s'})} \right) \right) \\ &+ \lambda \mu^{n-1} f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(A_{n,k_n}) \end{aligned} \quad (\text{A3-10})$$

La somme dans (A3-10) porte sur des $s'(s' < n)$, uplets tels que

$$h_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{s'}) = \min\left(N^*_{n-1} - \{j_i\}_{i \in N^*_{s'}}\right) \leq n-1 \quad (\text{A3-11})$$

On peut alors mettre S_1 sous la forme :

$$S_1 = \sum_{s'=1}^{n-1} \left(\lambda^{n-s'} \mu^{s'} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s'} \leq n-1} f_{j_{s'}} \circ f_{j_{s'-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{s'})} \right) \right) \quad (\text{A3-12})$$

$$\text{On a alors sommé tous les termes tels que } j_{s'} \leq n-1 \quad (\text{A3-13})$$

Si $j_{s'} = n-1$, un seul choix de $n-1$ uplet est possible : $(j_1, j_2, \dots, j_{s'}) = (1, 2, \dots, n-1)$. Il apparaît alors le terme $\mu \lambda^{n-1} f_n(A_{1, k_1})$.

Par ailleurs :

$$S_2 = \sum_{s'=1}^{n-2} \left(\lambda^{n-1-s'} \mu^{s'+1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{s'} \leq n-1} f_n \circ f_{j_{s'}} \circ f_{j_{s'-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{s'})} \right) \right) + \mu \lambda^{n-1} f_n(A_{1, k_1}) \quad (\text{A3-14})$$

$$S_2 = \sum_{t=2}^{n-1} \left(\lambda^{n-t} \mu^t \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{t-1} \leq n-1} f_n \circ f_{j_{t-1}} \circ f_{j_{t-2}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_{n-1}(j_1, j_2, \dots, j_{t-1})} \right) \right) + \mu \lambda^{n-1} f_n(A_{1, k_1}) \quad (\text{A3-15})$$

De la même façon que précédemment, on peut faire porter la somme sur des t-uplets.

$$S_2 = \sum_{t=1}^{n-1} \left(\lambda^{n-t} \mu^t \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{t-1} < j_t = n} f_n \circ f_{j_{t-1}} \circ f_{j_{t-2}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_n(j_1, j_2, \dots, j_{t-1}, n)} \right) \right) \quad (\text{A3-16})$$

On a alors sommé tous les termes tels que $j_t=n$ (A3-17)

Si $t=1$, alors $j_1=n$ et $h_n(n) = \min(N * _n - \{n\}) = 1$, même si dans ce cas j_{t-1} n'existe pas.

S_1 et S_2 représentent donc une même somme, S_1 porte sur les termes tels que $j_s \leq n-1$ et S_2 sur les termes tels que $j_s = n$. Il est donc possible d'effectuer un regroupement sur tous les n uplets possibles. Il vient :

$$S_1 + S_2 = \sum_{s=1}^{n-1} \left(\lambda^{n-s} \mu^s \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq n} f_{j_s} \circ f_{j_{s-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_n(j_1, j_2, \dots, j_s)} \right) \right) \quad (A3-18)$$

On a alors d'après ce qui précède :

$$M_{n,j} = \lambda^n A_{1,k_1} + \sum_{s=1}^{n-1} \left(\lambda^{n-s} \mu^s \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq n} f_{j_s} \circ f_{j_{s-1}} \dots \circ f_{j_1} \left(A_{h_n(j_1, j_2, \dots, j_s)} \right) \right) + \mu^n f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(L) \quad (A3-19)$$

et la relation (61) est vraie à l'ordre n .

Nous avons bien démontré par récurrence la formule (61).

Annexe IV : Diffraction à travers une ouverture triangulaire

Nous commençons par définir sur la figure 1 un repère direct $R(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tel que \mathbf{e}_3 soit dirigé vers la source.

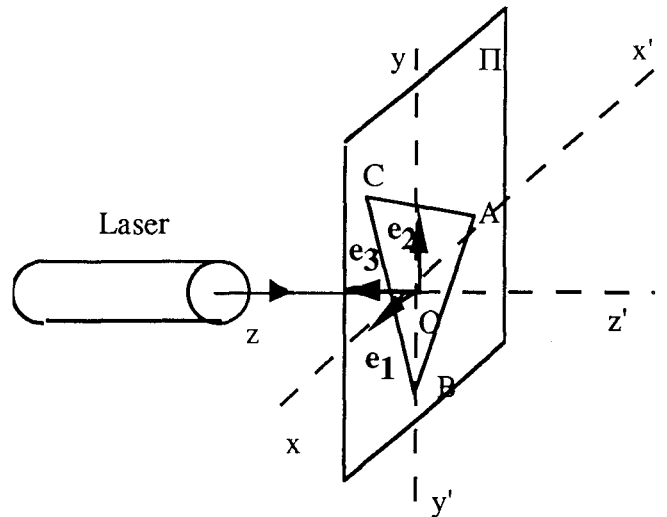


Figure a4-1 : définition d'un repère spatial direct pertinent

Une des propriétés majeures de la transformée de Fourier [57] est que la figure de diffraction n'est pas modifiée lorsqu'on translate l'ouverture dans le plan Π . L'amplitude est modifiée par un facteur de phase, mais pas l'intensité. Si l'écran P présente une ouverture S de centre de gravité $G(x_G, y_G)$, nous avons la relation suivante

$$U_S(M) = e^{-\frac{ik}{b}(Xx_G + Yy_G)} U_{S'}(M) = e^{-\frac{ik}{b} \mathbf{OG} \cdot \mathbf{OM}} U_{S'}(M) \quad (\text{A4-1})$$

où S' désigne l'image de S par la translation de vecteur \mathbf{GO} et M est un point de l'écran Π' . Ceci montre que dans le domaine de Fraunhofer, nous pouvons nous restreindre à des triangles centrés en O . Nous avons donc d'abord effectué le calcul dans un repère $R_1(O, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ (figure 2) obtenu par rotation de R tel que \mathbf{j}_1 est colinéaire à \mathbf{OA} .

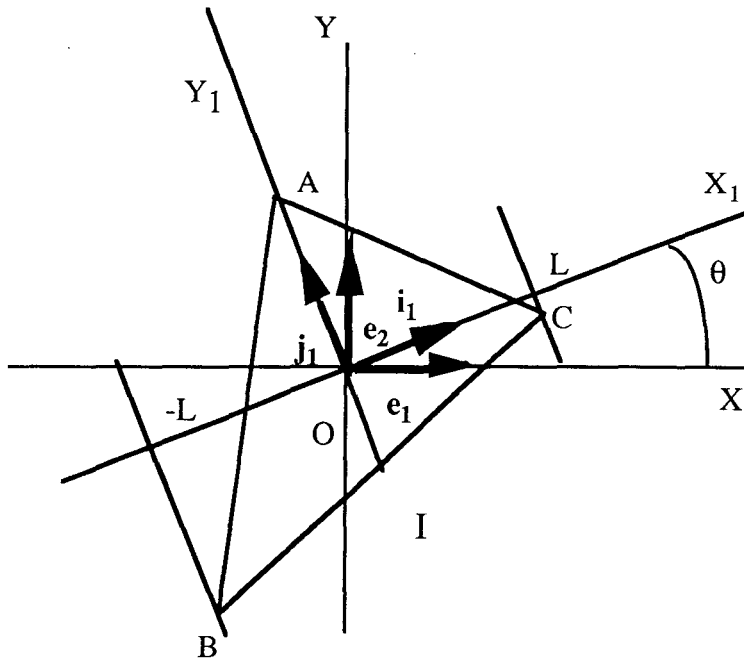


Figure a4-2 : définition de plusieurs repères utiles dans le plan Π'

a) Calcul dans le repère R_1

Dans R_1 , les coordonnées of A B C peuvent être décrites par uniquement trois paramètres p, q, L .

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ (p+q)L \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} -L \\ -pL \end{vmatrix} \quad C \begin{vmatrix} L \\ -qL \end{vmatrix}$$

I désigne le milieu de [BC]. De plus, on définit $m = \frac{p+q}{2}$ et $d = \frac{p-q}{2}$.

Les équations des côtés du triangle sont :

$$\begin{aligned} BC &: y=dx-mL \\ BA &: y=(p+2m)x+2mL \\ AC &: y=-(q+2m)x+2mL \end{aligned}$$

Nous divisons le triangle ABC en deux triangles ABI et AIC tels que $U=U_1+U_2$ avec :

$$U_1(M) = K \iint_{ABI} e^{-iu(X_1x+Y_1y)} dx dy = K \int_{-L}^0 V_1(x) dx$$

$$\text{avec } V_1(x) = \int_{dx-mL}^{(p+2m)x+2mL} e^{-iu(X_1x+Y_1y)} dy$$

$$\text{et } U_2(M) = K \iint_{AIC} e^{-iu(X_1x+Y_1y)} dx dy = K \int_0^L V_2(x) dx$$

$$\text{avec } V_2(x) = \int_{dx-mL}^{-(q+2m)x+2mL} e^{-iu(X_1x+Y_1y)} dy$$

Posons $r=uX_1$ et $s=uY_1$. r et s sont homogènes à l'inverse d'une longueur.

$$V_1(x) = -\frac{e^{-irx}}{is} \left(e^{-is((p+2m)x+2mL)} - e^{-is(x-mL)} \right)$$

$$V_1(x) = -\frac{1}{is} \left(e^{i(-2mLs-(r+sp+2sm)x)} - e^{i(smL-(r+sd)x)} \right)$$

Après intégration par rapport à x :

$$\frac{U_1(M)}{K} = \left(-\frac{e^{-2ismL}}{s(r+s(2p+q))} \left(1 - e^{i(r+s(2p+q))L} \right) + \frac{e^{ismL}}{s(r+sd)} \left(1 - e^{i(r+sd)L} \right) \right)$$

De la même façon, on a :

$$\frac{U_2(M)}{K} = \left(-\frac{e^{-2ismL}}{s(r-s(p+2q))} \left(e^{-i(r-s(p+2q))L} - 1 \right) + \frac{e^{ismL}}{s(r+sd)} \left(e^{-i(r+sd)L} - 1 \right) \right)$$

Après avoir rassemblé les termes de U_1 et U_2 , on obtient finalement

$$U(M) = 3mK \left(\frac{2 e^{-2ismL}}{(r+s(2p+q))(r-s(p+2q))} - \frac{e^{i(r+sp)L}}{(r+s(2p+q))(r+sd)} - \frac{e^{i(-r+sq)L}}{(r-s(p+2q))(r+sd)} \right)$$

En revenant aux coordonnées X_1 et Y_1 , on écrit :

$$U(M) = \frac{3Km}{u^2} \left(\frac{2 e^{-2iumLY_1}}{(X_1 + (2p+q)Y_1)(X_1 - (p+2q)Y_1)} - \frac{e^{iuL(X_1+pY_1)}}{(X_1 + (2p+q)Y_1)(X_1 + dY_1)} - \frac{e^{iuL(-X_1+qY_1)}}{(X_1 - (p+2q)Y_1)(X_1 + dY_1)} \right)$$

Les produits scalaires suivants apparaissent :

$$\begin{cases} \mathbf{OM.BA} = L(X_1 + (2p+q)Y_1) \\ \mathbf{OM.AC} = L(X_1 - (p+2q)Y_1) \\ \mathbf{OM.CB} = -2L(X_1 + dY_1) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mathbf{OA.OM} = (p+q)LY_1 = 2mLY_1 \\ \mathbf{OB.OM} = -L(X_1 + pY_1) \\ \mathbf{OC.OM} = L(X_1 - qY_1) \end{cases}$$

$$\text{et } e^{-i(rX'_0 + sY'_0)} = e^{-i\mathbf{OG.OM}}$$

Il en résulte que :

$$U(M) = \frac{6KmL^2}{u^2} \left(\frac{e^{-iu\mathbf{OA.OM}}}{(\mathbf{OM.BA})(\mathbf{OM.AC})} + \frac{e^{-iu\mathbf{OB.OM}}}{(\mathbf{OM.CB})(\mathbf{OM.BA})} + \frac{e^{-iu\mathbf{OC.OM}}}{(\mathbf{OM.AC})(\mathbf{OM.CB})} \right) \quad (\text{A4-2})$$

b) Calcul dans le repère R

La prochaine étape consiste à exprimer la relation (A4-2) dans le repère R. Tous les produits scalaires qui apparaissent dans (A4-2) ne sont pas modifiés par rotation. Il nous reste à examiner le facteur mL^2 et l'exprimer en fonction des points A, B et C.

$$\text{Nous notons que : } 4mL^2 = 2(p+q)L^2 = (\mathbf{BC} \wedge \mathbf{OA}).\mathbf{e}_3$$

Mais $\mathbf{BC} \wedge \mathbf{OA} = \mathbf{CB} \wedge \mathbf{AO} = (\mathbf{AB} - \mathbf{AC}) \wedge \mathbf{AO}$ et d'après la définition de I :

$$\mathbf{AO} = \frac{2}{3}\mathbf{AI} = \frac{1}{3}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC}).$$

$$\text{Donc } \mathbf{BC} \wedge \mathbf{OA} = \frac{1}{3}(\mathbf{AB} - \mathbf{AC}) \wedge (\mathbf{AB} + \mathbf{AC}) = \frac{2}{3}\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}$$

Nous déduisons l'expression suivante pour un triangle centré en O.

$$U(M) = \frac{K(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}).\mathbf{e}_3}{u^2} \left(\begin{array}{l} \frac{e^{-iu\mathbf{OA}.\mathbf{OM}}}{(\mathbf{OM}.\mathbf{BA})(\mathbf{OM}.\mathbf{AC})} \\ + \frac{e^{-iu\mathbf{OB}.\mathbf{OM}}}{(\mathbf{OM}.\mathbf{CB})(\mathbf{OM}.\mathbf{BA})} \\ + \frac{e^{-iu\mathbf{OC}.\mathbf{OM}}}{(\mathbf{OM}.\mathbf{AC})(\mathbf{OM}.\mathbf{CB})} \end{array} \right) \quad (\text{A4-3})$$

Ou :

$$U(M) = \frac{2KS_{ABC}}{u^2} \left(\begin{array}{l} \frac{e^{-iu\mathbf{OA}.\mathbf{OM}}}{(\mathbf{OM}.\mathbf{BA})(\mathbf{OM}.\mathbf{AC})} \\ + \frac{e^{-iu\mathbf{OB}.\mathbf{OM}}}{(\mathbf{OM}.\mathbf{CB})(\mathbf{OM}.\mathbf{BA})} \\ + \frac{e^{-iu\mathbf{OC}.\mathbf{OM}}}{(\mathbf{OM}.\mathbf{AC})(\mathbf{OM}.\mathbf{CB})} \end{array} \right) \quad (\text{A4-4})$$

où S_{ABC} est l'aire algébrique ABC. L'expression ci-dessus est valable pour tout triangle centré en O.

Pour tout triangle centré en $G(x_G, y_G)$, nous obtenons l'amplitude à partir de (A4-1), sachant que dans (A4-2), X et Y représentent les coordonnées de M dans le repère R et donc apparaîtront sous la forme de \mathbf{OM} dans le résultat

$$U(M) = \frac{K(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}).\mathbf{e}_3}{u^2} e^{-u\mathbf{OG}.OM} \left(\frac{e^{-iu\mathbf{GA}.OM}}{(\mathbf{OM}.BA)(\mathbf{OM}.AC)} + \frac{e^{-iu\mathbf{GB}.OM}}{(\mathbf{OM}.CB)(\mathbf{OM}.BA)} + \frac{e^{-iu\mathbf{GC}.OM}}{(\mathbf{OM}.AC)(\mathbf{OM}.CB)} \right)$$

Nous obtenons finalement pour un triangle quelconque de sommets ABC :

$$U(M) = \frac{K(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{AC}).\mathbf{e}_3}{u^2} \left(\frac{e^{-iu\mathbf{OA}.OM}}{(\mathbf{OM}.BA)(\mathbf{OM}.AC)} + \frac{e^{-iu\mathbf{OB}.OM}}{(\mathbf{OM}.CB)(\mathbf{OM}.BA)} + \frac{e^{-iu\mathbf{OC}.OM}}{(\mathbf{OM}.AC)(\mathbf{OM}.CB)} \right) \quad (\text{A4-5})$$

Annexe V : Contribution d'un point intérieur du maillage à l'amplitude de l'onde diffractée à travers une ouverture polygonale

Cette annexe a pour objet de montrer que la fonction

$$f_P(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathbf{PA}_k \wedge \mathbf{PA}_{k+1}) \cdot \mathbf{e}_3}{(\mathbf{A}_{k+1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{OM})(\mathbf{PA}_k \cdot \mathbf{OM})}$$
 est identiquement nulle si P est un point

du maillage situé à l'intérieur de l'ouverture. Par hypothèse, P est lié aux points $A_k, k=0, \dots, n$ vérifiant $A_0=A_n$ (figure 1).

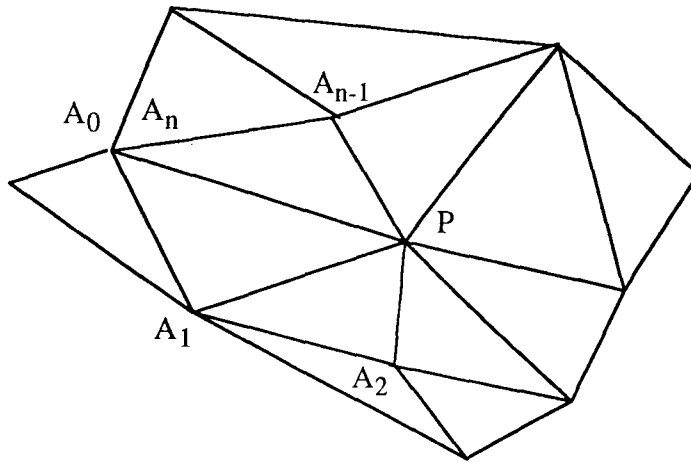


Figure a5-1 : Les points A_i sont liés à P par des arêtes du maillage.

Nous posons pour tout k compris entre 0 et n :

$$\mathbf{PA}_k = R_k (\cos(\theta_k), \sin(\theta_k))$$

Nous déduisons

$$(\mathbf{PA}_k \wedge \mathbf{PA}_{k+1}) \cdot \mathbf{e}_3 = R_k R_{k+1} \sin(\theta_{k+1} - \theta_k)$$

$$\mathbf{PA}_k \cdot \mathbf{OM} = R_k (\cos(\theta_k)X + \sin(\theta_k)Y)$$

Et :

$$f_P(M) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\theta_{k+1} - \theta_k)}{(\cos(\theta_k)X + \sin(\theta_k)Y)(\cos(\theta_{k+1})X + \sin(\theta_{k+1})Y)} \quad (\text{A5-1})$$

Si $Y \neq 0$, nous écrivons :

$$\frac{\sin(\theta_{k+1} - \theta_k)}{(\cos(\theta_k)X + \sin(\theta_k)Y)(\cos(\theta_{k+1})X + \sin(\theta_{k+1})Y)} = \begin{cases} \frac{\cos(\theta_k)}{Y(\cos(\theta_k)X + \sin(\theta_k)Y)} \\ + \frac{-\cos(\theta_{k+1})}{Y(\cos(\theta_{k+1})X + \sin(\theta_{k+1})Y)} \end{cases} \quad (\text{A5-2})$$

Nous obtenons cette expression en assimilant le membre de gauche à une fraction rationnelle en X. Nous réinjectons le résultat dans (A5-1) :

$$f_P(M) = \frac{1}{Y} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\cos(\theta_{k+1})}{(\cos(\theta_{k+1})X + \sin(\theta_{k+1})Y)} - \frac{\cos(\theta_k)}{(\cos(\theta_k)X + \sin(\theta_k)Y)} \right) \quad (\text{A5-3})$$

Tous les termes s'éliminent sauf deux :

$$f_P(M) = \frac{1}{Y} \left(\frac{\cos(\theta_n)}{(\cos(\theta_n)X + \sin(\theta_n)Y)} - \frac{\cos(\theta_0)}{(\cos(\theta_0)X + \sin(\theta_0)Y)} \right) \quad (\text{A5-4})$$

Mais nous avons posé $A_0=A_n$, donc $\theta_0=\theta_n$, et alors $f_P(M)=0$.

Le cas $Y=0$ est facile à résoudre. D'après (A5-1), nous avons :

$$f_P(M) = -\frac{1}{X^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\theta_{k+1} - \theta_k)}{\cos(\theta_k)\cos(\theta_{k+1})} \quad (\text{A5-5})$$

Mais $\frac{\sin(\theta_{k+1} - \theta_k)}{\cos(\theta_k)\cos(\theta_{k+1})} = \tan(\theta_{k+1}) - \tan(\theta_k)$, donc, de la même façon que précédemment :

$$f_P(M) = \frac{1}{X^2} (\tan(\theta_0) - \tan(\theta_n)) = 0 \text{ car } A_0=A_n.$$

Le dernier cas critique est celui où le point M est situé en O. L'amplitude est alors donnée par :

$$U(O) = K \iint_S dx dy = KS \quad (\text{A5-6})$$

et le problème est résolu.

Annexe VI : Calcul de la réflectivité de la résine époxy sous forme homogène.

Soit une onde passant du milieu 1 ($\sigma=0, \epsilon_0, \mu_0$) au milieu 2 ($\sigma_2, \epsilon_2=\epsilon_0\epsilon_r(1+tg\delta), \mu_2$).

On a $\sigma_2=5,88.10^{-11}\Omega^{-1}.m^{-1}$, $\epsilon_r=3,8$ et $tg\delta=2,4$.

on a respectivement

$$k_1^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$$

$$k_2^2 = -i\omega\mu_2(\sigma_2 + i\omega\epsilon_2) = -i\omega\mu_2(\sigma_2 - \omega\epsilon_0\epsilon_r tg\delta + i\omega\epsilon_0\epsilon_r)$$

On a $\sigma_2 \ll \omega\epsilon_0\epsilon_r tg\delta$ dès que :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \gg \frac{\sigma_2}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r tg\delta} = \frac{5,88.10^{-11}36.\pi.10^9}{2\pi.3,8.2,4} = 0,11Hz \text{ ce qui sera toujours le}$$

cas ici. On peut donc écrire

$$k_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_2 = \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_r \mu_2 (1 + itg\delta)$$

Le coefficient énergétique de réflexion est donné par :

$$R = \frac{|1 - s|^2}{|1 + s|^2}$$

avec, puisque l'angle d'incidence est nul :

$$s = \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}$$

$$\text{Or on a : } k_2 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_2}{\cos \delta}} e^{i\delta/2}$$

donc

$$s = \sqrt{\frac{\epsilon_r \mu_1}{\cos \delta \mu_2}} e^{i\delta/2} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\cos \delta}} e^{i\delta/2}$$

Application numérique :

$$\delta = \text{Arctg } 2,4 = 67,38^\circ$$

$$s = \sqrt{\frac{3,8}{\cos 67,38}} (\cos 33,69 + i \sin 33,69)$$

$$s = 3,143 (0,832 + 0,554i)$$

$$s = 2,615 + 1,741i$$

Donc $R = 0,35$

Index des figures

Partie I

Figure 1-1 : introduction de la notion de champ. La charge q_1 est supposée négative.

Figure 1-2 : circuit filiforme.

Figure 1-3 : illustration des phénomènes propagatifs.

Partie II

Figure 2-1 : représentation de la fonction de Weierstrass pour $\nu=2$ et plusieurs valeurs de H : (a) $H=0.9$; (b) $H=0.5$; (c) $H=0.1$.

Figure 2-2 : courbe de Von Koch construite aux ordres 0 à 5. La longueur de la courbe est multipliée par $4/3$ à chaque itération.

Figure 2-3 : forme fractale construite par creusement.

Figure 2-4 : éponge de Menger. C'est une généralisation en dimension 3 du tapis de Sierpinski.

Figure 2-5 : à tout ordre d'itération, remplacement de chaque segment de longueur l par $p=4$ segments de longueur $l/3$.

Figure 2-6 : le flocon de Von Koch est généré à partir d'un triangle équilatéral comme initiateur.

Figure 2-7 : génération d'une forme plane par éclatement.

Figure 2-8 : formes obtenues aux ordres 5 et 6 à partir du générateur représenté en figure 7.

Figure 2-9 : formes obtenues par réunion des formes d'ordre 0 à n générées dans l'exemple de la figure 7. Ici on a $n=4$ et $n=10$ respectivement.

Figure 2-10 : illustration par les générateurs de la correspondance entre construction par croissance (a) et par éclatement (b).

Figure 2-11 : illustration par les formes itérées de la correspondance entre construction par croissance et par éclatement.

Figure 2-12 : génération du flocon de Von Koch par construction par éclatement. Chaque triangle est remplacé par trois triangles.

Figure 2-13 : flocon de Von Koch obtenu par éclatement.

Figure 2-14 : la forme de Peano aux ordres d'itération 1 et 2.

Figure 2-15 : les quatre configurations abcd associées à un générateur.

Figure 2-16 : gauche : générateur et forme d'ordre 2 associés à la configuration caaca ; droite : forme d'ordre 5. A l'ordre infini, on a une courbe de Peano : la courbe recouvre complètement une certaine région du plan.

Figure 2-17 : gauche : le même générateur que sur la figure 16 et la forme d'ordre 2 associée à la configuration dbbdb ; droite : forme d'ordre 5 correspondante, différente de la forme d'ordre 5 de la figure 16.

Figure 2-18 : suite de configurations sur une forme d'ordre 2.

Figure 2-19 : le chevauchement angulaire survient au voisinage des points C et D.

Figure 2-20 : deux courbes fractales de configuration caa, le générateur étant défini par la suite d'angles $(0, \theta, -\theta)$; (a) $\theta=60^\circ$, la courbe n'a pas de points doubles. (b) $\theta>60^\circ$, des points doubles apparaissent au milieu des branches issues des deux segments [CD] et [DB] du générateur.

Figure 2-21 : multiplicité des formes fractales. La forme est obtenue en divisant un ruban en trois parties égales et en n'en conservant que deux. A l'ordre 2, plusieurs choix sont possibles quant à l'orientation des parties conservées.

Figure 2-22 : construction par croissance dans le plan. Un segment est remplacé par deux segments liés entre eux. A l'ordre 3, on a obtenu toutes les formes possibles.

Figure 2-23 : formes fractales construites aux ordres d'itération 0, 1 et 2. Nous divisons un triangle en quatre homothétiques et conservons l'un d'entre eux. Le choix du générateur détermine complètement la forme fractale à tout ordre d'itération.

Figure 2-24 : l'initiateur est celui de la figure 23, deux triangles sont conservés. De nouveau, toutes les formes sont séparées à l'ordre d'itération 1.

Figure 2-25 : l'initiateur est celui de la figure 23, deux triangles sont conservés. Ici encore, toutes les formes sont séparées à l'ordre d'itération 1.

Figure 2-26 : formes fractales construites aux ordres d'itération 0, 1, et 2. Le générateur est le même que celui de la figure 23 mais maintenant l'initiateur est un triangle isocèle. Certains générateurs fournissent plusieurs formes d'ordre 2.

Figure 2-27 : représentation des triangles avec les points numérotés. Les chiffres romains sont dédiés à l'initiateur.

Figure 2-28 : l'inversion des points 1 et 2 ne change pas les formes fractales obtenues aux ordres d'itération supérieurs à 2.

Figure 2-29 : l'inversion des points 1 et 2 ne modifie pas la forme d'ordre 2, mais les formes d'ordre supérieur. Contrairement au cas de la figure 24, l'axe de symétrie de l'initiateur n'échange pas les points 1 et 2.

Figure 2-30 : formes fractales construites aux ordres d'itération 0, 1, 2 et 3. Le générateur est le même que sur la figure 3 mais maintenant l'initiateur est

un triangle équilatéral. Certains générateurs fournissent plusieurs formes d'ordre 2 et certaines formes d'ordre 2 fournissent plusieurs formes d'ordre 3.

Figure 2-31 : la numérotation dépend de l'application affine associée au générateur :

- a : (I,II,III) \rightarrow (1,2,3) similitude,
- b : similitude composée avec une rotation d'angle $2\pi/3$,
- c : similitude composée avec une rotation d'angle $-2\pi/3$.

Figure 2-32 : lien entre la numérotation des points et la génération fractale :

a : l'axe de symétrie entre 2 et 3 est le même que celui entre II et III. \rightarrow une forme d'ordre 3.

b : l'axe de symétrie entre 2 et 3 n'est pas le même que celui entre II et III. \rightarrow deux formes d'ordre 3 (voir page suivante).

Figure 2-33 : ordre du groupe ponctuel de symétrie des formes fractales construites à divers ordres d'itération pour les trois cas d'initiateurs considérés ici :

- a : triangle quelconque
- b : triangle isocèle
- c : triangle équilatéral.

Figure 2-34 : ensemble de Cantor représenté aux premiers ordres d'itération.

Figure 2-35 : les coefficients barycentriques ont une interprétation géométrique simple lorsque leur somme vaut 1.

Figure 2-36 : relations entre les coordonnées homogènes à deux ordres d'itération consécutifs.

Figure 2-37 : pour un polygone non convexe, l'ensemble des points barycentres des sommets avec des coefficients positifs ne sera pas le polygone lui-même mais son enveloppe convexe.

Figure 2-38 : le point L est envoyé successivement sur les points M_1, M_2, M_3 par des homothéties de centres respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, correspondant à des sommets du triangle initial A, C et A.

Figure 2-39 : a : génération par homothétie pure,
b : génération par rotation d'angle $2\pi/3$ composée avec une homothétie.

Figure 2-40 : images possibles du triangle ABC et isométries associées.

Partie III

Figure 3-1 : système optique expérimental.

Figure 3-2 : les points du maillage sont divisés en deux types : ceux qui appartiennent à la frontière de l'ouverture et ceux qui ne lui appartiennent pas.

Figure 3-3 : une ouverture triangulaire et la figure de diffraction associée. Les échelles ne sont pas respectées.

Figure 3-4 : figures de diffraction relatives à un tamis de Serpinski représentées pour des ordres d'itération allant de 0 (a) à 5 (f).

Figure 3-5 : figures de diffraction d'un flocon de Von Koch représentées d'après les formules analytiques, pour un ordre d'itération allant de 1 (a) à 5 (e).

Figure 3-6 : image diffractée obtenue expérimentalement pour un flocon de Von Koch d'ordre 4.

Figure 3-7 : diagramme tridimensionnel montrant les relations entre grandeurs électromagnétiques vectorielles.

Figure 3-8 : diagramme tridimensionnel montrant les relations entre grandeurs électromagnétiques en tant que formes différentielles.

Figure 3-9 : pavage périodique du plan cartésien et projection d'une trajectoire dans le domaine fondamental.

Figure 3-10 : obtention du tore par recollement des côtés opposés du domaine fondamental.

Figure 3-11 : géodésiques de l'espace hyperbolique avec la représentation disque.

Figure 3-12 : géodésiques de l'espace hyperbolique avec la représentation demi-plan.

Figure 3-13 : tore ponctué engendré par repliement topologique du domaine fondamental.

Figure 3-14 : caractère conforme de la génération fractale.

Figure 3-11 : géodésiques de l'espace hyperbolique modifiées dans le cas d'un angle de Stolz α non nul.

Partie IV

Figure 4-1 : flocon de Von Koch construit aux ordres d'itération 0, 1, 2. L'initiateur est un triangle équilatéral.

Figure 4-2 : surface fractale spatiale construite par croissance aux ordres d'itération 1 et 2 ; l'initiateur est un cube.

Figure 4-3 : flocon de Von Koch modifié avec pour initiateur un hexagone régulier.

Figure 4-4 : deux courbes fractales construites à partir de deux générateurs similaires $(0, \theta, -\theta)$ (configuration caa) (a) $\theta=60^\circ$, pas de chevauchement. (b) $\theta=61^\circ$, la courbe présente des points doubles.

Figure 4-5 : forme fractale par creusement, connexe à l'ordre 1 (a) mais non connexe aux ordres d'itération supérieurs (b) et (c).

Figure 4-6 : courbes de Péano (de dimension fractale 2).

Figure 4-7 : quatre choix possibles pour chaque segment du générateur.

Figure 4-8 : (a) triangulation incorrecte pour le format STL - A n'est pas un vrai sommet car il appartient au segment [BC] (b) triangulation correcte, tous les sommets sont des vrais sommets.

Figure 4-9 : (a) objet construit par creusement l'initiateur est un parallélépipède rectangle.
(b) Sur une vue "ouverte", on distingue les faces internes communes à deux images différentes de l'initiateur.

Figure 4-10 : les faces superflues sont disséminées dans toute l'étendue de l'objet.

Figure 4-11 : l'objet de la figure 10 est maintenant représenté sans ses faces superflues.

Il est décrit par 584 faces (quadrilatères) au lieu de $6^4=1296$.

Figure 4-12 : les faces à supprimer sont situées dans un nombre fini de plans, ceci quel que soit l'ordre d'itération.

Figure 4-13 : éponge de Sierpinski - toutes les faces situées dans certains plans sont à supprimer.

Figure 4-14 : deux choix sont possibles pour le "collage" de la surface fractale sur chaque face de l'initiateur. (a) en bosse (b) en creux.

Figure 4-15 : la face BCDE de cet objet doit être divisée en au moins trois triangles. Un découpage BCD et BDE ne suffit pas car A est un point d'ancrage. Une division possible est ABC, ACD et ADE.

Figure 4-16 : les trois cas possibles de courbure sur des surfaces fractales orthogonales.

Figure 4-17 : forme multifractale (a) générateur, (b) ordre d'itération (10)

Figure 4-18 : forme autoaffine représentée aux ordres d'itération 1 à 4. Le facteur d'échelle est de $1/3$ en abscisse et de $1/4$ en ordonnée.

Figure 4-19 : schéma de principe des expériences de mesure de réflectivité.

Figure 4-20 : spectre de réflexion d'un absorbant connu.

Figure 4-21 : spectre de réflexion de 9 éponges de Menger accolées.

Figure 4-22 : réflectivité de la résine époxy homogène en fonction de l'angle de perte δ pour des valeurs de la permittivité relative ϵ_r allant de 1 à 5.

Figure 4-23 : spectre de réflexion de 9 éponges de Menger pointées vers la source.

Figure 4-24 : spectre de réflexion de 9 éponges de Menger pointées vers la source.

Index des tableaux

Tableau 2-1 : dénombrement de formes fractales constructibles par division d'un triangle en $p_m=4$ triangles homothétiques, dont on conserve p à chaque itération.

Tableau 2-2 : dénombrement des formes fractales constructibles par division d'un triangle isocèle en $p_m=4$ triangles homothétiques, dont on conserve p à chaque itération. Toutes les formes sont séparées à l'ordre d'itération 2.

Tableau 2-3 : dénombrement des formes fractales constructibles par division d'un triangle équilatéral en $p_m=4$ triangles homothétiques, dont on conserve p à chaque itération. Toutes les formes sont séparées à l'ordre d'itération 3.

Tableau 2-4 : nombre de formes constructibles par croissance, étant donné l'initiateur et le générateur, en fonction de l'ordre d'itération. Le générateur est une ligne brisée composée de p segments.

Tableau 4-1 : caractéristiques de la résine Cibatool® SL5149 (Acrylate).

Tableau 4-2 : caractéristiques de la résine Cibatool® SL5170 (Époxy).

Tableau 4-3 : propriétés électriques de la résine époxy Cibatool® SL5170.

Tableau a1 : composition des différents composites à matrice PE/EPDM.

Références bibliographiques

1. Edgar Elbaz, "Interactions fondamentales et structure de la matière", Hermann, 1982.
2. Emilio Segré, "les physiciens classiques et leurs découvertes, de la chute des corps aux ondes hertziennes", Fayard, 1987.
3. Feynman, Leighton, Sands, "Le cours de physique de Feynman, Électromagnétisme", Addison-Wesley Publishing Company, (1964).
4. Pearce Williams, "André-Marie Ampère", *Pour la Science*, **137**, 76-83, (mars 1989).
5. Albert Einstein, Leopold Infeld, "L'évolution des idées en physique", Champs, Flammarion.
6. Richard Feynman "The nature of physic laws".
7. James Clerck Maxwell "Traité d'électricité et de magnétisme", (1873).
8. Manuel Garcia Doncel, "Heinrich Hertz", *Pour la Science*, **197**, 82-89, (mars 1994).
9. G. Fournet, "Électromagnétisme à partir des équations locales", Masson (1979)
10. O. D. Kellog, "Foundations of Potential Theory", Springer-Verlag, (1967).
11. L. Pinchard, "Électromagnétisme classique et théorie des distributions", Ellipses, Paris, 1990.
12. R. Petit, "Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique", Masson, Paris, 1993.

13. R. Landauer, in "Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media", *AIP Conference Proceedings*, **2**, (1978).
14. G. Greffe, C. Grosse, *PIERS Vol 6*, Elsevier, (1992).
15. H. Looyenga, *Physica*, **31**, 401, (1965).
16. L. Landau, E. Lifschitz, "Electrodynamique des milieux continus", Editions Mir, Moscou, (1969).
17. R. Coelho, B. Aladenize, "Les diélectriques, propriétés diélectriques des matériaux isolants", Paris, Hermes, (1992).
18. J.C. Maxwell Garnett, *Philosophical Transactions, Royal Society. London*, **203**, 385 (1904)
19. J.C. Maxwell Garnett, *Philosophical Transactions, Royal Society. London*, **205**, 237 (1906)
20. D.Odiera, F. Carmona, *Journal de Physique*, **44**, 683 (1983)
21. S. Berthier, J. Lafait, C. Sella, T.K. Vien. *Thin Solid Films*, **125**, 171 (1985)
22. F. Henry, A. Priou, M. Greffe, *Progress in Electromagnetic Research Symposium*, Boston (1991)
23. S.R. Broadbent, J.M. Hammersley, Percolation processes I. Crystals and mazes, *Proceedings of Cambridge Society*, **53**, 629, (1957)
24. B.J. Last, D.J. Thouless, *Physical Review Letters*, **27**, 1719, (1971)
25. A.L. Efros, B.I. Shklovskii, Critical Behaviour of conductivity and dielectric constant near the metal-non-metal transition threshold, *Physic. Stat Sol. (b)*, **76**, 475, (1976)

26. J.P. Straley, Critical phenomena in resistor networks, *J. Phys. C*, **9**, 783, (1976)
27. J.P. Straley, Critical exponents for the conductivity of random resistor lattices, *Physical Review B*, **15**, 5733, (1977)
28. T. Robin, Thèse de doctorat, "Propriétés électromagnétiques d'agrégats fractals et de composites diélectrique-conducteur : une théorie macroscopique", (1992).
29. A. Le Méhauté et al., Progress in Electromagnetic Research Symposium, Boston (1989)
30. A. Le Méhauté, "Les géométries fractales", Paris, Hermes, 1990.
31. R. Bonola, "Non-euclidean Geometry", Dover Publications Inc. , New-York, 1955.
32. Benoît Mandelbrot, "Les objets fractals", *La Recherche*, janvier 1978, **85**, pp. 5-13.
33. Giuseppe Peano, "Sur une courbe qui remplit une aire plane", *Mathematische Annalen*, 1890, **36**, 157-160.
34. Helge Von Koch, "Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire", *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1904, **1**, 681-704.
35. Helge Von Koch, "Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes", *Acta Mathematica*, 1906, **30**, 145-174.
36. Felix Hausdorff, "Dimension und äusseres Mass", *Mathematische Annalen*, 1919, **79**, 157-179.

37. Gaston Julia, "Oeuvres de Gaston Julia", Paris, Gauthier-Villars, 1968.
38. Richardson, "The problem of contiguity : an appendix of statistics of deadly quarrels". *General systems Yearbook*, 1961, **6**, 139-187.
39. Benoît Mandelbrot, "Les objets fractals : forme hasard et dimension", Paris, Flammarion, 1975, réédition 1984, réédition 1989 suivi du "survol du langage fractal".
40. Benoît Mandelbrot, "The fractal geometry of nature", New York, Freeman, 1982.
41. Laurent Nottale, "Fractal Space-time and microphysics", World Scientific, 1992.
42. Barnsley, "Fractals everywhere", Orlando, Academic Press, 1988.
43. J.-F. Gouyet, "Physique et structures fractales", Paris, Masson, 1992
44. Sous la direction de Philippe de la Cotardière, "Astronomie", Larousse, 1990.
45. Etienne Klein, "Conversations avec le Sphinx, les paradoxes en physique", Albin Michel, 1991.
46. Witten, Sander, "Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon", *Physical Review Letters*, 1981, **47**, pp 1400-1403.
47. R. Jullien, "Les phénomènes d'agrégation et les agrégats fractals", *Annales des Télécommunications*, **41**,343.
48. R. Jullien, R. Botet, "Aggregation and fractal aggregates", *World Scientific*, Singapore, 1987.
49. C. Tricot, J. F. Quiniou, D. Wehbi, . Rocques-Carmes, B. Dubuc, "Évaluation de la dimension fractale d'un graphe", 1988, *Revue de Physique Appliquée* **23**, 111-124.

Visual Communications and Image Processing II, 241-259.

51. H. von Koch, Une méthode élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, *Acta Mathematica*, **30** (1905).
52. L. Nottale and J. Schneider, Fractals and Non-Standard Analysis, *J. of Math. Phys.*, **25**, 1296-1300 (1984).
53. A.J. Crilly, R.A. Earnshaw, H. Jones, "Fractals and chaos", Oxford University Press.
54. Allain C., Cloitre M., *Phys. Rev. B*, **33**, 3566, (1986).
55. Schmidt P. W., Dacai X., *Phys. Rev. A*, **33**, 560, (1986).
56. Berry M. V., *J. Phys. A*, **12**, 781, (1979).
57. Jaggard D., Kim Y., *J. opt. Soc. Am. A*, **4**, 1055, (1987).
58. Uozumi J., Kimura H., Asakura T., *Journal of Modern Optics*, **6**, 1011-1031, (1990).
59. Françon, *Optique* (Paris, Gauthier-Villars), (1964).
60. H. Flanders, "Differential forms with applications to the physical sciences", New-York, Academic Press, New-York, (1963).
61. P. Bamberg, S. Sternberg, "A course in Mathematics for students of physics", Cambridge University Press, (1990).
62. R.L. Bishop, R.J. Crittenden, "Geometry of manifolds", Academic Press, New-York, (1964).
63. G. Deschamps, Mathematics applied to physics, ch III, "Exterior differential forms", Springer Verlag, New-York, 111-161, (1970).

64. S. Sternberg, "Lectures on differential Geometry", Chelsea, (1983).
65. G. Deschamps, "Electromagnetics and differential forms", Proceedings of the IEEE, **69**,(6), 676-696, (1981).
66. A. Le Méhauté, F. Héliodore. D. Cottevaille, "Ondes en milieu fractal, application à la caractérisation des milieux hétérogènes". Revue technique et scientifique de défense, 23-33, (1992).
67. A. Le Méhauté, F. Héliodore. D. Cottevaille, F. Latreille, "Introduction to wave phenomena and uncertainty in a fractal space-I" dans "Quantum Mechnics, Diffusion and Chaotic Fractals", Pergamon, 1995.
68. P. Riot "Diverses approches de la fractalité, ou à la recherche de la fractalité cachée", Compte-rendu de l'Ecole d'été internationale "Géométrie fractale et hyperbolique, dérivation fractionnaire et fractale".
69. A. Le Méhauté, P. Riot, F. Héliodore, L. Nivanen, R. Nigmatullin, "JETC IV, Actes des 4^{es} Journées Européennes de Thermodynamique Contemporaine", septembre 1995, Nancy, CERET, CNRS, INPL, Université Henri Poincaré.
70. T. Bedford, M. Keane, C. Series, "Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces", Oxford University Press, 1991.
71. M. Bergé "Géométrie", Tome 2, Nathan, 1990.
72. Brevets
- J.C. André, A. Le Méhauté et O. de Witte ; "Dispositif pour réaliser un modèle de pièce industrielle" N° 85 09054 (14/06/85)
- J.C. André, M. Cabera, J.Y. Jezequel, A. Le Méhauté et O. de Witte ; "Procédé pour réaliser un modèle de pièce industrielle et dispositif de mise en oeuvre de ce procédé" N° 85 09054 (14/06/85)
- J.C. André, M. Bouchy , M. Cabera, A. Le Méhauté et O. de Witte ; " Procédé et dispositif pour réaliser un modèle de pièce industrielle" N° 85 09055 (14/06/85)

73. P. Jacobs, "Rapid prototyping and manufacturing, Fundamentals of stereolithography", Society of Manufacturing Engineers, (1992).

74. The Edge, Vol. IV, No. 1.

75. L. Nottale, "Fractals and the quantum theory of spacetime", International Journal of Modern Physics A. 4(19), 5047-5117 (1989).

76. L. Nottale, "The fractal structure of quantum spacetime", Compte-rendu des XXVⁱèmes rencontres de Moriond, (1989).

