

N° d'ordre: 1649

**THESE**



présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE  
LILLE

pour obtenir le grade de:

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE**

spécialité électronique

par

**Michel DULONGCOURTY**

**MODELISATION NUMERIQUE DE LA PROPAGATION  
D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE TRES BASSE  
FREQUENCE (0,1 - 100 Hz) ET DE FREQUENCE NULLE  
EMISE PAR DES SOURCES 2 ET 3D  
AU VOISINAGE D'UNE TRANSITION TERRE/MER DE  
PROFIL COTIER QUELCONQUE.**

Soutenue le 5 Février 1996 devant la Commission d'Examen.

Membres du Jury:	MM	R.GABILLARD	Président
		J.FONTAINE	Rapporteur
		C.PICHOT	Rapporteur
		P.DEGAUQUE	Directeur de thèse
		Ph.MARIAGE	Invité
		J-Y.BRUXELLE	Invité

## Remerciements

Cette étude a été effectuée au sein du Laboratoire de RadioPropagation et Electronique de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, laboratoire dirigé par Monsieur le Professeur Pierre Degauque. Qu'il trouve ici mes sentiments dévoués.

Je remercie le Groupe d'Etudes Sous-marines de l'Atlantique (GESMA) de la Direction des Constructions Navales (DCN) pour leur aide financière apportée au Laboratoire de RadioPropagation et Electronique de Lille (LRPE) sans laquelle mon travail aurait été beaucoup plus délicat.

Je remercie Monsieur le Professeur Emérite Robert Gabillard qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse et de juger ce travail. Qu'il trouve ici mes sentiments respectueux.

Je remercie Monsieur le Professeur Jacques Fontaine, Professeur à l'Université Blaise Pascal, et Monsieur Cristian Pichot, Directeur de recherches au CNRS à l'Université de Nice, pour avoir accepté de juger de ces travaux de recherche et d'assurer la tâche de rapporteur. Qu'ils trouvent ici mes plus vifs remerciements.

Je remercie Monsieur Philippe Mariage, Maître de Conférence au LRPE, qui a assuré la relecture de ce mémoire de thèse.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Jean-Yves Bruxelles, Ingénieur au GESMA de BREST qui a bien voulu faire partie du jury.

Je souligne la tolérance et la patience dont ont dues faire preuve les utilisateurs des stations de travail lors de l'utilisation intensive des moyens informatiques du LRPE placés sous la responsabilité de Madame Demoulin. Qu'ils trouvent ici mes sentiments amicaux pour avoir créer une atmosphère de travail fort sympathique.

Je remercie l'ensemble des contribuables français pour leur participation au financement de ma rédaction de thèse pour lesquels je ne peux citer les noms de peur d'oublier quelqu'un.

Je remercie également Monsieur Jean-Pierre Dehorter qui a assuré la reproduction de ce mémoire.

Introduction générale. ....	10
<b>Chapitre I - Présentation des méthodes numériques susceptibles de calculer le rayonnement d'une antenne émettant des ondes très basses fréquences ( 0.1 à 100 Hz) à proximité d'une transition Terre/mer.....</b>	<b>13</b>
Sommaire. ....	14
Introduction.....	15
I-1.Caractéristiques des ondes très basses fréquences dans la gamme allant de 0.1 à 100 Hz. ....	16
<b>I-1.1)Création d'ondes très basses fréquences. ....</b>	<b>16</b>
<b>I-1.2)Guidage des ondes très basses fréquences dans la cavité Terre/ionosphère.....</b>	<b>19</b>
<b>I-1.3)Réception et émission dans la mer. ....</b>	<b>21</b>
I-2.Caractéristiques électriques et géométriques d'une transition Terre/mer. ....	24
<b>I-2.1)Caractéristiques géométriques d'une transition Terre/mer....</b>	<b>24</b>
<b>I-2.2)Caractéristiques électriques du milieu de propagation. ....</b>	<b>27</b>
I-2.2.1)Caractéristiques électriques de l'eau de mer. ....	27
I-2.2.2)Caractéristiques électriques du sous-sol. ....	28
I-3.Etude bibliographique des méthodes numériques.....	32
<b>I-3.1)Etude bibliographique. ....</b>	<b>32</b>
<b>I-3.2)Choix d'une méthode numérique applicable à la propagation des ondes électromagnétiques à proximité d'une transition Terre/mer de profil côtier quelconque.....</b>	<b>39</b>
I-3.2.1)Méthode des éléments finis. ....	39
I-3.2.2)Méthode des différences finies. ....	40
Conclusion. ....	41

## Chapitre II - Modélisation de la propagation d'une onde plane au voisinage d'une transition Terre/mer. .... 42

Sommaire. ....	43
Introduction.....	44
II-1.Mise en équation. ....	46
II-2.Formulation par la méthode des différences finies associée à un calcul variationnel.....	48
<b>II-2.1)Calcul de la composante transversale de champ électromagnétique.....</b>	<b>48</b>
<b>II-2.2)Calcul des composantes de champ électromagnétique incluses dans le plan perpendiculaire à la transition Terre/mer. ....</b>	<b>53</b>
<b>II-2.3)Limitation artificielle du domaine.....</b>	<b>54</b>
II-2.3.1)Énumération des différents types de conditions aux limites. ....	54
II-2.3.2)Modèle de type Dirichlet.....	54
II-2.3.3)Modèle Mixte. ....	56
II-3.Application au cas de la transition Terre/mer. ....	58
<b>II-3.1)Validité du modèle. ....</b>	<b>58</b>
<b>II-3.2)Comportement de champ électromagnétique et règles de maillage à observer.....</b>	<b>61</b>
II-3.2.1)Comportement du champ électromagnétique en milieu stratifié.....	61
II-3.2.2)Comportement du champ électromagnétique en présence d'une anomalie en milieu stratifié.....	63
II-3.2.3)Comportement du champ électromagnétique en présence d'une transition Terre/mer par rapport au champ analytique calculé en milieu stratifié.....	64
<b>II-3.3)Etude fréquentielle sur une transition Terre/mer de différents profils côtiers.....</b>	<b>71</b>
II-3.3.1)Règles de maillage de pentes quelconques. ....	73
II-3.3.2)Résultats des simulations effectuées. ....	74
Conclusion. ....	87

## **Chapitre III - Modélisation du rayonnement d'une ligne source alternative au voisinage d'une transition Terre/mer.**

..... 89

Sommaire.....	90
Introduction.....	91
<b>III-1.Prise en compte du terme source dans la méthode des différences finies associée à un calcul variationnel.</b> .....	<b>93</b>
<b>III-1.1)Présentation de la méthode</b> .....	<b>93</b>
<b>III-1.2)Limitation artificielle du domaine.</b> .....	<b>96</b>
III-1.2.1)Etude bibliographique.....	96
III-1.2.2)Expression du champ rayonné par un dipôle électrique dans un milieu homogène et infini. ....	98
III-1.2.3)Description des différents modèles utilisés.....	101
III-1.2.3.1)Modèle de type Neumann. ....	101
III-1.2.3.2)Modèle de type Cauchy.....	102
III-1.2.3.3)Modèle Mixte. ....	104
<b>III-2.Validité des modèles.</b> .....	<b>105</b>
<b>III-2.1)Comparaison avec les éléments finis et les équations intégrales</b> .....	<b>105</b>
<b>III-2.2)Validation des différents modèles aux limites</b> .....	<b>108</b>
<b>III-2.3)Validité du modèle Mixte suivant le maillage</b> .....	<b>113</b>
<b>III-3.Etude fréquentielle et modale du rayonnement d'une ligne source située à différentes profondeurs dans la mer et à proximité d'une transition Terre/mer de différents profils côtiers</b> .....	<b>117</b>
<b>III-3.1)Etude du mode TE.</b> .....	<b>119</b>
<b>III-3.2)Etude du mode TM.</b> .....	<b>120</b>
<b>Conclusion.</b> .....	<b>135</b>

# Chapitre IV - Modélisation du rayonnement d'un dipôle électrique alternatif bidimensionnel au voisinage d'une transition Terre/mer..... 137

Sommaire.....	138
Introduction.....	139
IV-1.Présentation du modèle.....	140
IV-1.1)Hypothèses simplificatrices.....	140
IV-1.2)Conditions aux limites.....	141
IV-1.3)Validation.....	142
IV-2.Présentation des résultats.....	145
IV-2.1)Rayonnement d'un dipôle électrique vertical 2D à proximité d'une transition Terre/mer.....	145
IV-2.1.1)Localisation du DEV 2D.....	145
IV-2.1.2) DEV 2D à mi-profondeur dans la mer.....	146
IV-2.1.3) DEV 2D au fond de la mer.....	147
IV-2.1.4) DEV 2D sous la surface de la mer.....	148
IV-2.2)Rayonnement d'un dipôle électrique horizontal 2D à proximité d'une transition Terre/mer.....	148
IV-2.2.1)Localisation du DEH 2D.....	148
IV-2.2.2) DEH 2D à mi-profondeur dans la mer.....	149
IV-2.2.3) DEH 2D au fond de la mer.....	150
IV-2.2.4) DEH 2D sous la surface de la mer.....	150
Conclusion.....	177

## **Chapitre V - Modélisation du rayonnement d'un dipôle à courant continu à proximité d'une transition Terre/mer.**

.....	178
Sommaire.....	179
Introduction.....	181
<b>V-1. Modélisation du rayonnement d'un dipôle à courant continu par la méthode des différences finies.....</b>	<b>182</b>
<b>V-1.1) Problème à résoudre.....</b>	<b>182</b>
<b>V-1.2) Mise en équations.....</b>	<b>183</b>
<b>V-1.3) Discrétisation par la méthode des différences finies dans le cas d'un problème 2 et 3D.....</b>	<b>183</b>
V-1.3.1) Problèmes à deux dimensions.....	183
V-1.3.1.1) Discrétisation par points.....	183
V-1.3.1.2) Discrétisation par aires.....	184
V-1.3.2) Cas d'une source 3D dans un milieu 2D.....	186
<b>V-1.4) Conditions aux limites.....</b>	<b>188</b>
V-1.4.1) Problème à deux dimensions.....	188
V-1.4.2) Problème à trois dimensions.....	190
V-1.4.3) Recherche de conditions aux limites sur les dérivées.....	190
<b>V-1.5) Calcul du potentiel électrique dans l'espace à trois dimensions (x,y,z).....</b>	<b>192</b>
<b>V-1.6) Calcul des composantes de champ électrique.....</b>	<b>193</b>
<b>V-2. Validation du modèle.....</b>	<b>194</b>
<b>V-2.1) Calcul du potentiel électrique et des composantes de champ électrique dans un milieu stratifié illuminé par un dipôle.....</b>	<b>194</b>
<b>V-2.2) Rayonnement d'un dipôle à courant continu dans un demi-milieu.....</b>	<b>196</b>
<b>V-2.3) Tests de validation.....</b>	<b>197</b>

V-3.Application à la transition Terre/mer. ....	201
<b>V-3.1)Règles de maillage. ....</b>	<b>201</b>
<b>V-3.2)Rayonnement d'un dipôle à proximité d'une transition Terre/mer. ....</b>	<b>201</b>
V-3.2.1)Rayonnement d'un dipôle électrique horizontal dans la mer. ....	201
V-3.2.1.1)Localisation du dipôle. ....	202
V-3.2.1.2)Résultats ....	202
V-3.2.2)Rayonnement d'un dipôle électrique vertical dans la mer. .....	203
V-3.2.2.1)Localisation du dipôle. ....	203
V-3.2.2.2)Résultats ....	203
 Conclusion. ....	 217

## **Chapitre VI - Modélisation d'un dipôle à courant alternatif à proximité d'une transition Terre/mer. .... 218**

Sommaire.....	219
Introduction.....	220
VI-1.Equations de base à résoudre.....	222
VI-1.1)Equations de base sous forme différentielle.....	222
VI-1.2)Equations de base sous forme intégrale.....	223
VI-2.Cas d'une source 3D dans un milieu 2D.....	224
VI-3.Comparaison du rayonnement en milieu marin d'un dipôle électrique 3D alternatif avec celui d'un dipôle ligne source magnétique, d'une ligne source électrique et d'un dipôle 3D à courant continu .....	229
Conclusion. ....	231
Conclusion générale.....	233
Références bibliographiques.....	238
Annexe du chapitre II .....	249
Calcul de la fonctionnelle.....	250
Calcul du champ électromagnétique en onde plane TM en milieu stratifié.....	252

## Introduction générale

De part le monde, les océans occupent 75 % de la surface de la Terre. Par conséquent, la télécommunication avec les engins sous-marins ainsi que la prospection géophysique du sous-sol marin sont nécessaires pour des raisons de stratégie militaire et économique. La pénétration de l'énergie électromagnétique, à l'intérieur des milieux très conducteurs comme la mer et à des distances très éloignées d'un émetteur qui est situé généralement dans l'air et à proximité du sol, n'est possible qu'en très basses fréquences. Par exemple, pour une fréquence de 1 Hertz, la longueur d'onde dans l'air étant égale à 300 000 kilomètres, la propagation s'effectue sur des distances très importantes avec peu de distorsion du front d'onde car le relief terrestre est à une tout autre échelle. La profondeur de pénétration des ondes électromagnétiques dans la mer étant égale à 250 mètres, il est possible de communiquer avec un engin sous-marin immergé. Toutefois, à proximité de la côte terrestre, la couche d'eau de mer se rétrécissant, le relief côtier sous-marin perturbe la propagation des ondes très basses fréquences dans la mer. Pour cette raison, et par le fait du manque de solutions numériques dans la littérature scientifique, l'étude théorique originale présentée dans ce mémoire concerne la modélisation de la propagation d'une onde électromagnétique émise par un émetteur bi ou tridimensionnel, alternatif ou à courant continu, à proximité d'une transition côtière Terre/mer. Elle mettra en évidence l'influence d'une transition côtière Terre-mer ayant différents profils côtiers sous-marins sur la propagation dans la mer d'ondes très basses fréquences comprises entre 0,1 et 100 Hertz. Cette étude est d'autant plus importante que le nombre de kilomètres de côtes réparties à la surface du globe est très important. Ce thème de recherche a été développé à la demande du Groupe d'Etudes Sous-Marines de l'Atlantique (GESMA) de la Direction des Contructions Navales (DCN) basé à Brest.

Les solutions numériques élaborées pour cette structure géologique utilisent la méthode des différences finies quel que soit le type d'illumination simulée à cause des bons résultats obtenus même dans le cas d'un profil côtier vallonné ou à pente constante. Les couches fortement conductrices de l'écorce terrestre situées à des profondeurs importantes étant prises en compte dans les modèles théoriques correspondant à des fréquences d'émission très inférieures à celles utilisées dans notre étude ne sont pas pris en compte dans notre structure géologique. Les valeurs de la profondeur de pénétration des ondes électromagnétiques dans la mer

et dans la gamme des très basses fréquences sont relativement faibles par rapport à l'épaisseur de la couche d'eau de mer prise en compte dans les modèles géologiques (au maximum égale à 100 mètres à partir d'une distance égale à 500 mètres de la ligne de côte). Cela permet de réduire l'étude au cas d'une transition côtière Terre-mer variant géométriquement suivant quatre profils côtiers sous-marins bidimensionnels (abrupt, doublement abrupt, vallonné et à pente constante (20%) sur une distance horizontale égale à 500 mètres). L'invariance suivant la ligne de côte permet d'échapper au problème d'instabilité des solutions numériques dans le cas d'un milieu tridimensionnel incluant des contrastes de conductivité très importants. Le milieu de propagation étant bidimensionnel et le contraste de conductivité entre la mer et la Terre étant très important (4000), la méthode de résolution du système d'équations linéaires à résoudre est directe. Par contre, la méthode de résolution itérative la plus efficace appelée la méthode de surrelaxation successive (SOR, Southwell (1946)[1]) est nécessaire pour les problèmes tridimensionnels afin de réduire le temps de calcul et la mémoire utilisée pour le stockage des éléments non nuls de la matrice mais l'approximation initiale des inconnues et du paramètre de surrelaxation nécessaire à cette méthode de résolution n'est pas évidente à déterminer dans notre cas.

Afin de mettre en évidence les problèmes techniques et numériques bien spécifiques à la propagation des ondes électromagnétiques très basses fréquences dans les différents milieux de propagation, le premier chapitre commence par un bref historique. Par la suite, les principales solutions numériques existantes et simulant la réponse fréquentielle d'une transition Terre-mer de structure géologique très simplifiée et illuminée uniquement par une simple source électromagnétique plane sont énumérées.

Le deuxième chapitre présente le modèle aux différences finies associé à un calcul variationnel déterminé dans le cas de l'onde plane illuminant une transition Terre-mer. Le cas de l'illumination en onde plane est très souvent rencontré dans les modèles bidimensionnels et tridimensionnels car les conditions aux limites sont très simples et elle est couronnée de succès dans les applications magnétotelluriques. L'étude portera uniquement sur le mode Transverse Magnétique car l'onde se propageant dans la cavité Terre-ionosphère est quasi-TM (Wait (1961)[2]).

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation du rayonnement d'une ligne source alternative immergée au voisinage d'une transition côtière Terre/mer. Ceci permet de simuler le rayonnement d'une antenne parallèle à la ligne de côte. L'étude de la convergence et de la stabilité de différents modèles aux limites est abordée avant d'étudier le comportement du champ électromagnétique suivant les

modes Transverse Magnétique et Transverse Electrique au voisinage d'une transition Terre/mer abrupte ou non abrupte.

Afin de contourner les problèmes numériques des modèles entièrement tridimensionnels, le quatrième chapitre concerne un modèle élaboré dans le cas de la modélisation du rayonnement d'un dipôle électrique alternatif bidimensionnel immergé et illuminant une transition côtière Terre/mer. Le dipôle électrique bidimensionnel est assimilé à deux lignes sources magnétiques et rayonne comme un alignement de dipôles électriques tridimensionnels ou comme deux solénoïdes parallèles à la ligne de côte et parcourus par des courants en opposition de phase. Une étude paramétrique dans la gamme des très basses fréquences est menée suivant la profondeur d'immersion, l'orientation du dipôle et les différents profils côtiers sous-marins.

Le cinquième chapitre présente le modèle aux différences finies choisi afin de simuler le rayonnement d'un dipôle à courant continu tridimensionnel illuminant une transition Terre/mer. Ce chapitre est très important car il permet de valider le chapitre précédent sur le rayonnement d'émetteurs immergés, bidimensionnels et alternatifs en très basses fréquences.

Le sixième chapitre présente le modèle aux différences finies choisi dans le cas de la modélisation du rayonnement d'un dipôle alternatif tridimensionnel illuminant une transition Terre/mer. Les modèles tridimensionnels sont abordés avec leurs propres caractéristiques et le cas du modèle où une source tridimensionnelle illumine un milieu bidimensionnel est discuté plus profondément car il est capable de simuler des structures géologiques complexes.

Afin de mieux comprendre les phénomènes électromagnétiques au voisinage d'une transition Terre/mer, il a été nécessaire de visualiser pour l'ensemble des différents types d'illumination les cartes de champ des composantes transverses, horizontales et verticales de champ électromagnétique et les cartes vectorielles du vecteur de Poynting et de courant électrique de part et d'autre des frontières de conductivité. C'est pourquoi ce type de représentation reviendra périodiquement tout au long de ce mémoire. Les résultats numériques permettront d'expliquer entre autres les caractéristiques de propagation des ondes électromagnétiques en mode TE et TM, l'importance de l'orientation d'un dipôle électrique immergé, de la fréquence d'émission et du type de relief sous-marin côtier sur la propagation des ondes électromagnétiques à proximité d'une transition Terre/mer.

**I- Présentation des méthodes numériques susceptibles de calculer le rayonnement d'une antenne émettant des ondes très basses fréquences ( 0.1 à 100 Hz) à proximité d'une transition côtière Terre/mer.**

Sommaire

Introduction..... 15

I-1.Caractéristiques des ondes très basses fréquences dans la gamme allant de 0.1 à 100 Hz. .... 16

**I-1.1)Création d'ondes très basses fréquences. .... 16**

**I-1.2)Guidage des ondes très basses fréquences dans la cavité Terre/ionosphère..... 19**

**I-1.3)Réception et émission dans la mer. .... 21**

I-2.Caractéristiques électriques et géométriques d'une transition Terre/mer. .... 24

**I-2.1)Caractéristiques géométriques d'une transition Terre/mer.... 24**

**I-2.2)Caractéristiques électriques du milieu de propagation. .... 27**

        I-2.2.1)Caractéristiques électriques de l'eau de mer..... 27

        I-2.2.2)Caractéristiques électriques du sous-sol..... 28

I-3.Etude bibliographique des méthodes numériques..... 32

**I-3.1)Etude bibliographique. .... 32**

**I-3.2)Choix d'une méthode numérique applicable à la propagation des ondes électromagnétiques à proximité d'une transition Terre/mer de profil côtier quelconque..... 39**

        I-3.2.1)Méthode des éléments finis. .... 39

        I-3.2.2)Méthode des différences finies..... 40

Conclusion. .... 41

## **Introduction**

Ce chapitre d'introduction présente, dans une première partie, les utilisateurs concernés par les ondes électromagnétiques très basses fréquences (0,1 à 100 Hz), qu'ils soient militaires ou géophysiciens, ainsi que les problèmes rencontrés lors de la création, de la propagation et de la réception de ces ondes ayant des valeurs de longueur d'onde dans l'air pouvant dépasser la circonférence de la Terre mais des longueurs d'onde dans le sol et dans l'eau de mer très inférieures permettant de limiter le domaine d'étude.

Par la suite, le modèle géologique qui approxime une transition Terre/mer de profil côtier quelconque et qui est employé dans les simulations numériques en vue de connaître la réponse électromagnétique d'une telle structure géologique illuminée par différents types de sources est discuté.

Enfin, les différentes méthodes numériques qui ont été appliquées au cas de la transition Terre/mer de structure géologique très simplifiée sont énumérées avec leurs propres caractéristiques avant de définir la méthode numérique applicable à notre modèle géologique.

## **I-1. Caractéristiques des ondes très basses fréquences dans la gamme allant de 0.1 à 100 Hz.**

La création, la propagation et la réception des ondes très basses fréquences ayant des longueurs d'onde dans l'air pouvant dépasser la circonférence de la terre et des longueurs d'onde dans la mer très inférieures, posent des problèmes techniques et théoriques suivant que l'émetteur et le récepteur sont situés dans la cavité Terre-ionosphère ou dans la mer. Les très basses fréquences regroupent les gammes de fréquences couramment appelées Ultra, Extrêmement et Très Basses Fréquences correspondant respectivement aux gammes de fréquences (<3 Hz), (3 Hz , 3 kHz), (3 kHz, 30 kHz) et sont appelées dans la littérature anglaise sous la dénomination Ultra, Extra et Very Low Frequencies.

### **I-1.1) Création d'ondes très basses fréquences.**

Déjà en 1899, Nikola Tesla envisagea un système de communication couvrant le monde entier en utilisant un émetteur localisé à Colorado Springs. En 1901, Marconi fit avec succès une démonstration de communication transatlantique en utilisant une instrumentation plus simple et moins coûteuse. Ensuite, Tesla [3] proposa que la cavité comprise entre la Terre et l'ionosphère pouvait être mise dans un mode résonnant à une fréquence voisine de 10 Hertz ( la longueur d'onde devient du même ordre de grandeur que la circonférence de la Terre). Depuis l'époque de Tesla, les ondes électromagnétiques aux environs de 60 Hertz ont été exploitées pour la distribution de puissance. En fait, l'invention de Tesla de la technique du courant polyphasé continue d'être le principal moyen de distribuer la puissance électrique.

Mais d'autres utilisateurs de son invention comme Conrad et Schlumberger, en 1920, furent les premiers à prospecter les ressources naturelles tels que les dépôts de minéraux à l'aide d'une onde électromagnétique ayant une fréquence voisine de 100 Hz. Le point significatif à propos de ces premiers développements était que la Terre pouvait être excitée par onde électromagnétique dans une région et la réponse pouvait être observée à une distance comprise entre 10 mètres et 10 kilomètres.

En avril 1963, la marine américaine (la Navy) conduisit une démonstration de communication entre un émetteur côtier fonctionnant aux Extrêmes Basses Fréquences (3 Hz à 3 kHz) et un sous-marin nucléaire opérant à 3200 km des côtes avec son antenne de réception immergée à plusieurs centaines de mètres de profondeur dans l'océan, dans le cadre du projet Sanguine. Ces investigations ont

été confirmées par la suite par la théorie. En effet, on démontre qu'un champ électrique polarisé verticalement et un champ magnétique polarisé horizontalement se propagent à l'intérieur du guide d'onde formé par la Terre et l'ionosphère à des fréquences pour lesquelles la longueur d'onde devient supérieure à la distance Terre-ionosphère (70 à 80 km). Cette onde dite TEM rasante pénètre alors dans l'océan à des profondeurs considérables.

Durant le mois de Juin 1960, au laboratoire Lincoln de l'Institut de Technologie du Massachusetts à Ipswich, la mesure du coefficient de qualité,  $Q$ , de la cavité Terre-ionosphère donna une valeur comprise entre 4 et 5 au mode fondamental TEM pour une gamme de fréquences allant de 5 à 45 Hz. L'armée américaine rejeta alors l'idée d'utiliser la fréquence de résonance de la cavité Terre-ionosphère afin de communiquer par les modes de cavité car son coefficient de qualité était trop faible. Puis, elle s'est tournée vers l'utilisation d'un câble horizontal au-dessus d'un sol faiblement conducteur dont la conductivité  $\sigma$  est comprise entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$  S/m sur plusieurs fois la profondeur de pénétration et enterré en ses extrémités dans des régions fortement conductrices, c'est-à-dire de conductivité supérieure à  $10^{-2}$  S/m. En 1974, Chu [4] montra que le champ rayonné par ce câble de longueur  $L$  peut être considéré comme provenant d'un dipôle magnétique fictif horizontal localisé dans le sol et parcouru par un courant  $I$ . Ces dimensions sont de longueur  $L$  et de largeur  $\delta_e/\sqrt{2}$  où  $\delta_e$  représente la profondeur de pénétration dans le sol comme il est décrit sur la figure (I.1).

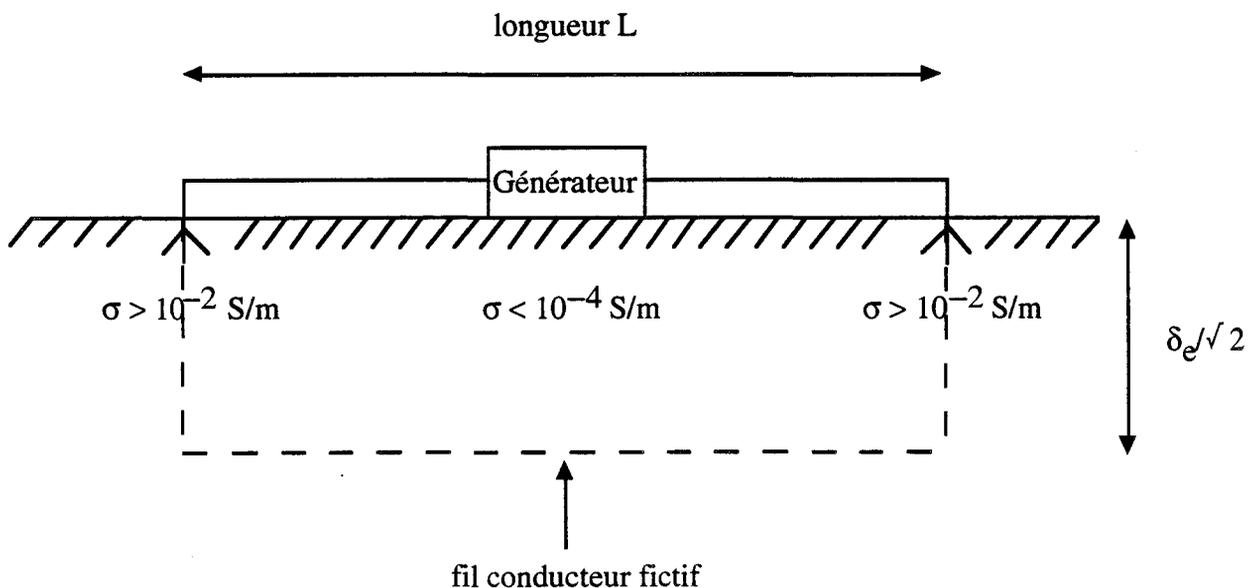


Figure (I.1): Boucle magnétique équivalente à un câble de longueur  $L$ .

Pour assurer la pénétration du courant sur la totalité de la profondeur de pénétration dans le sol, l'antenne doit satisfaire plusieurs  $\delta_e$  de longueur, d'environ 160 km ou plus. Si la longueur d'antenne est comparable ou inférieure à la valeur de  $\delta_e$ , la puissance de radiation est encore proportionnelle à I.L mais la puissance d'entrée doit être augmentée afin d'obtenir la même valeur de courant I car la résistance d'entrée a augmenté.

En 1989, Field, Bannister et Hopkins [5] ont montré qu'un dipôle électrique vertical supporté par un aérostat pouvait rayonner au moins 100000 fois plus de puissance en ELF qu'un dipôle horizontal ayant le même moment électrique. L'explication vient du fait que le dipôle électrique vertical excite plus efficacement le guide d'onde Terre-ionosphère car il est aligné avec la polarisation du mode fondamental transverse électromagnétique. Il peut être alors beaucoup plus court que les dipôles électriques horizontaux sans être localisé dans les rares régions de faible conductivité terrestre comme dans le Wisconsin ou le Michigan.

Un autre mécanisme efficace pour la production d'une onde ELF/VLF est d'utiliser l'ionosphère comme antenne d'émission en l'excitant par des puissantes ondes électromagnétiques Hautes Fréquences comme il est indiqué sur la figure (I.2). Ceci a été étudié expérimentalement et théoriquement dans les 30 dernières années. En 1973, Willis et Davis [6] ont affirmé que les perturbations des courants naturels ionosphériques devaient donner naissance à des fluctuations du champ géomagnétique. Le plasma ionosphérique est irradié par une puissante onde électromagnétique Haute Fréquence, laquelle est modulée dans la gamme des ondes ELF/VLF. Les électrons situés à l'intérieur du volume de plasma irradié par les rayons HF éprouvent un réchauffement périodique à la fréquence de modulation HF. Puisque la conductivité de l'ionosphère est dépendante de la température du milieu, la conductivité varie aussi périodiquement. Les courants naturels ionosphériques qui passent dans cette région chauffée sont modulés par ce changement de conductivité. Dans le guide d'onde Terre-ionosphère, on récupère l'amplitude de la HF modulée dans une gamme ELF/VLF à plusieurs milliers de kilomètres de l'émission (Werner et Ferraro (1987) [7]).

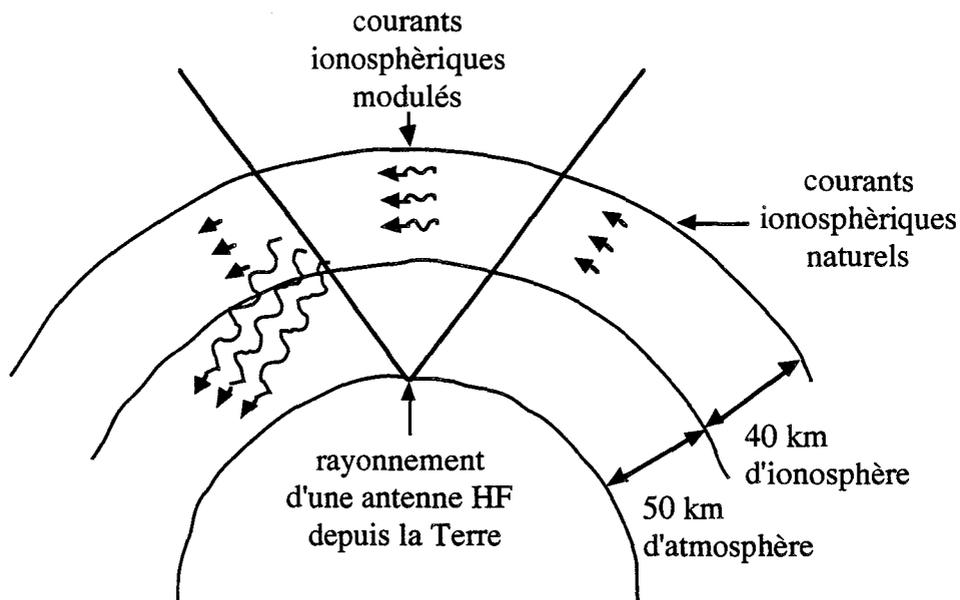


Figure (I.2): Emission d'une onde ELF/VLF par l'excitation de l'ionosphère.

En 1993, Kuo [8] a suggéré d'utiliser deux groupes distants d'antennes HF. Chacun d'entre eux rayonne la même puissance mais à des fréquences légèrement différentes. Cette différence de fréquence est déterminée par la fréquence de la radiation ELF/VLF désirée. Les ondes électromagnétiques ainsi générées sont guidées dans la cavité Terre-ionosphère.

### I-1.2) Guidage des ondes très basses fréquences dans la cavité Terre/ionosphère.

Burrows et Niessen (1972) [9] ont montré que l'atténuation dans la cavité Terre-ionosphère était moins importante de nuit que de jour. Par exemple, à 78 Hz, l'atténuation de jour est égale à 1,28 dB/1000 km comparée à 1,01 dB/1000 km durant la nuit. A 156 Hz, ces valeurs sont de 3,12 dB/1000 km le jour et de 1,74 dB/1000 km la nuit. Un autre phénomène a été aussi observé dans le voisinage de la station radio émettrice européenne haute puissance, Radio Luxembourg, c'est la non-linéarité de l'ionosphère quand elle est illuminée par des champs électromagnétiques très élevés (Howe(1938)[10]).

Galejs (1968) [11] a choisi la distance Terre-ionosphère comprise entre 70 et 85 km et une conductivité de l'ionosphère comprise entre  $10^{-6}$  et  $10^{-5}$  S/m pour confirmer par son modèle théorique, les atténuations pratiques obtenues dans le guide d'onde Terre/ionosphère. Wait (1961) [2] montra que, dans la gamme des fréquences ELF, un mode quasi-TM se propage. Par contre, dans la gamme des

fréquences VLF, Galejs montra que les modes TE et TM se propagent avec une ionosphère apparaissant soit comme un réflecteur parfait en mode TM ( $\sigma$  tend vers zéro), soit comme un conducteur parfait en mode TE ( $\sigma$  tend vers l'infinie). Une diminution de la conductivité de l'ionosphère conduit à une diminution de l'atténuation des ondes en mode TM et à une augmentation de l'atténuation des ondes en mode TE.

Wait et Spies, en 1969 [12] et 1970 [13], ont étudié les modes de conversion en VLF, c'est-à-dire pour des fréquences comprises entre 15 et 20 kHz et pour une communication aérienne de part et d'autre d'une transition Terre-mer. L'étude paramétrique reposait sur la valeur de la surélévation de la partie terrestre valant successivement 0, 0,5, 1 et 1,5 km par rapport au niveau de la mer et sur la valeur de la conductivité du sol comprise entre  $10^{-4}$  et  $10^{-2}$  S/m. Ils ont montré que l'élévation terrestre au-dessus du niveau de la mer modifiait les coefficients de conversion, particulièrement lorsque la propagation s'effectuait depuis la Terre vers la mer. Wait a supposé dans son modèle représenté à la figure (I.3) que la transition Terre-mer est abrupte et composée de la juxtaposition de deux demi-milieux. Localement, l'ionosphère est située à une hauteur constante et caractérisée par une impédance de surface  $Z_i$ .

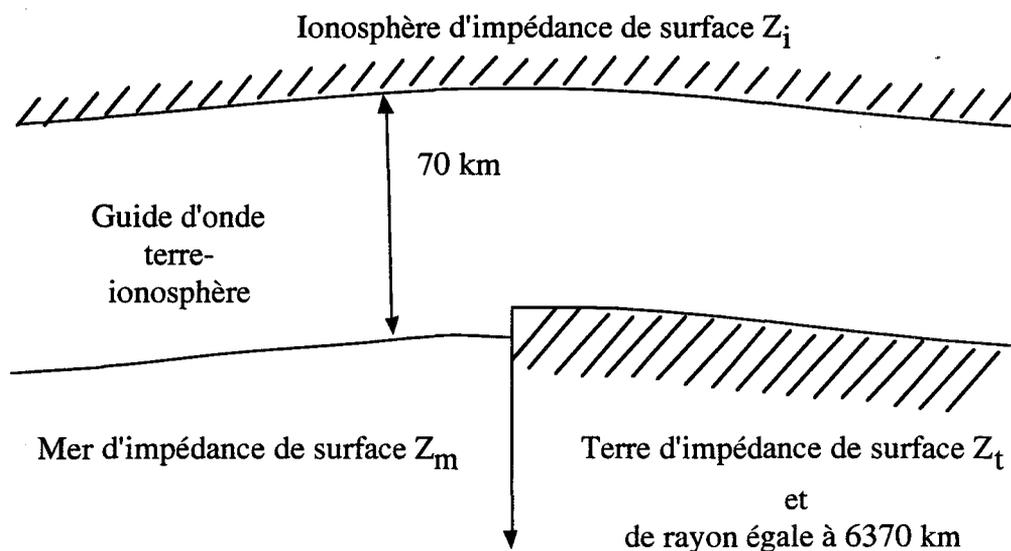


Figure (I.3): Modèle de guide d'onde Terre-ionosphère utilisé par Wait.

Par contre, Ledinegg (1982) [14] a pris en compte les différents états de l'ionosphère durant la nuit et le jour, représentés sur la figure (I.4)

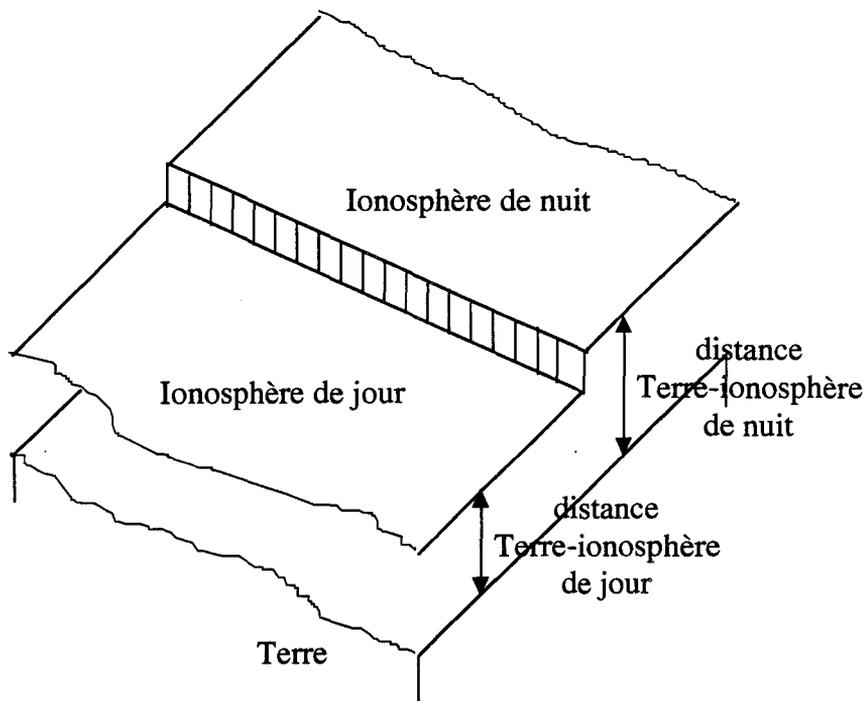


Figure (I.4): Modèle quasi-plan du guide d'onde Terre-ionosphère de Ledinegg.

Le problème à trois couches, Terre-atmosphère-ionosphère, est réduit à un problème aux limites impliquant des impédances de surface aux interfaces des différents milieux considérés. L'approximation des fines couches sphériques appliquée à l'atmosphère permet de réduire le problème à un modèle quasi-plan. Un système d'équations intégrales couplées est obtenu et résolu par une procédure itérative.

### I-1.3) Réception et émission dans la mer.

Les communications avec les sous-marins en immersion requièrent des antennes immergées de 2 à 300 mètres de longueur remorquées derrière le sous-marin. Ceci évite le bruit électromagnétique d'origine chimique entourant la coque du sous-marin au cours de son déplacement. Burrows (1976) [15] proposa que 2 antennes pouvaient être réalisées à l'intérieur d'un câble tracté: la première est formée d'une paire d'électrodes et la seconde est un long solénoïde qui assure une réception omnidirectionnelle (figure (I.5)).

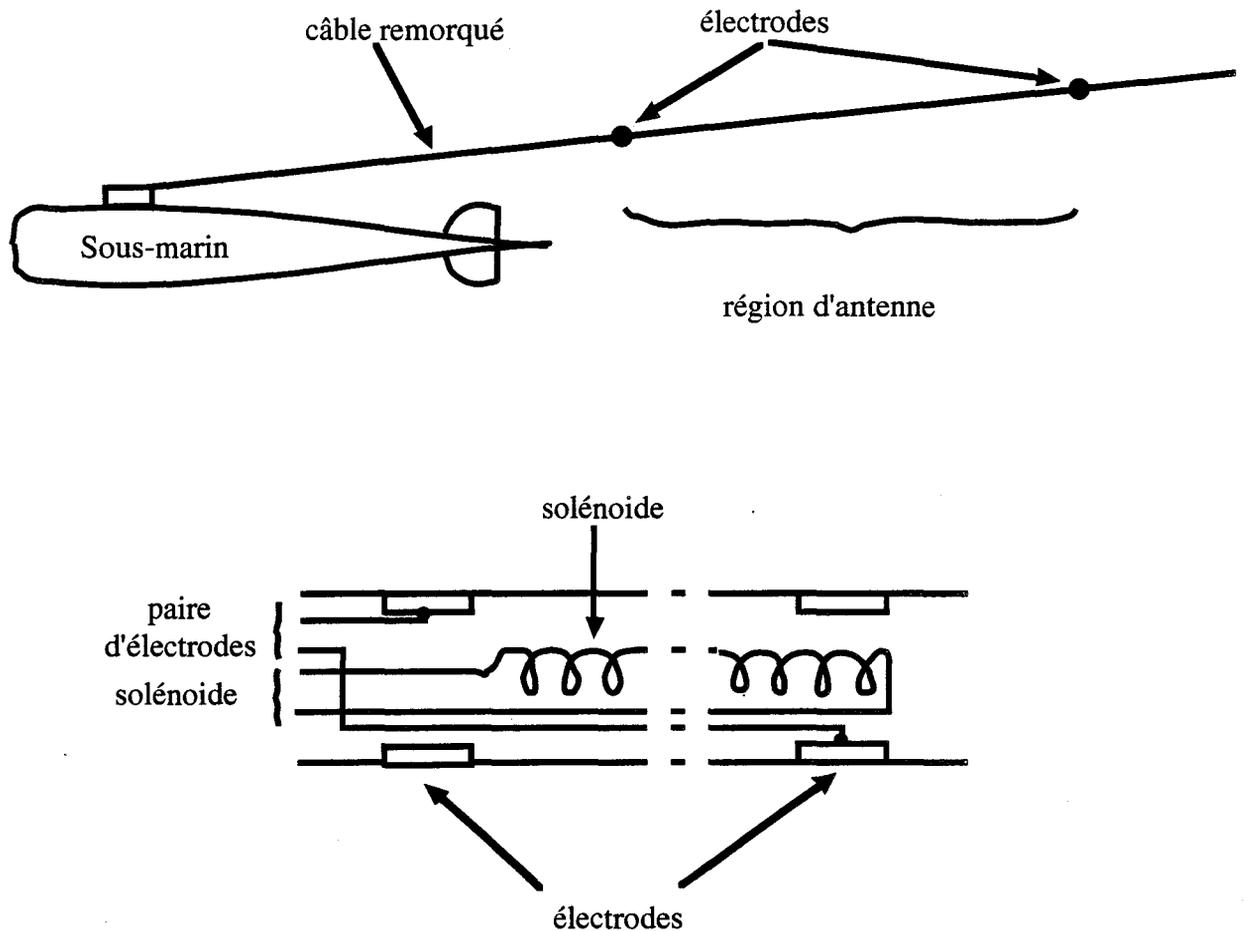
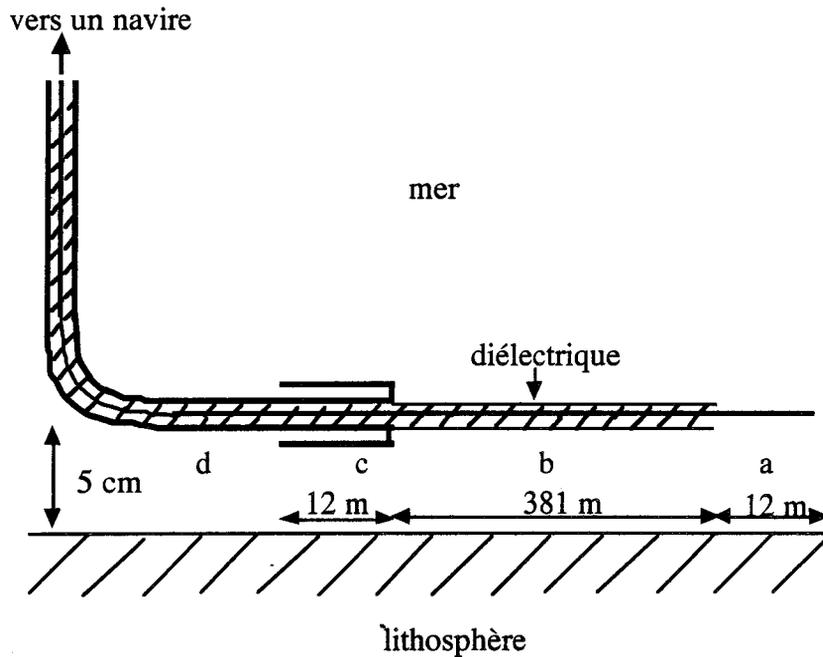


Figure (I.5): Câble antenne remorqué par un sous-marin.

Pour des applications de communication et de prospection géophysique, King (1986) [16] a étudié les propriétés de différentes antennes immergées à proximité de l'interface océan-lithosphère (partie solide de l'écorce terrestre). Il proposa comme antenne, l'utilisation d'une barre de métal dans une gamme de fréquences comprise entre 0,3 et 3 Hz et l'utilisation du conducteur central sortant d'un câble blindé pour 1 kHz (figure (I.6)). Quand le milieu dans lequel est plongée une antenne ayant la forme d'une barre de métal est conducteur, les courants radiaux depuis l'antenne vers l'extérieur font diminuer le courant axial. Ceci signifie que bien souvent on ne peut utiliser que des antennes électriques relativement courtes avec des petites longueurs effectives correspondantes. Les courants radiaux peuvent être éliminés en enveloppant la barre de métal dans un matériau diélectrique mais ceci modifie les propriétés de l'antenne.



- a : barre de métal monopole,
- b : barre de métal recouvert de diélectrique,
- c : manchon monopole replié sur la ligne coaxiale,
- d : ligne coaxiale isolée pour éviter la corrosion

**Figure (I.6):** Exemple d'une antenne immergée conçue pour 1 kHz.

King souligne qu'en ELF, l'impédance d'entrée de l'antenne est en majeure partie constituée par l'impédance interne du conducteur de cuivre qui n'a pas une conductivité infinie mais d'environ  $5,65 \cdot 10^7$  S/m. Par conséquent, une puissance importante se dissipe par effet Joule dans l'antenne. Par exemple, pour une antenne constituée d'un conducteur de cuivre circulaire de diamètre  $a$ , il définit par la relation,  $f \# 10^{-2} / a^2$ , la limite entre les fréquences basses et hautes pour lesquelles le conducteur de cuivre peut être approximé par un conducteur parfait. Pour éviter cette perte de puissance, l'utilisation de magnétomètres supraconducteurs a été entreprise dès 1974 par Wolf, Davis et Nisenoff [17] puis en 1975 par Goldstein et Dinger [18]. Mais ce type d'antenne nécessite l'élaboration d'un système de refroidissement qui limite ses performances et ses domaines d'applications.

## I-2. Caractéristiques électriques et géométriques d'une transition côtière Terre/mer.

### I-2.1) Caractéristiques géométriques d'une transition Terre/mer.

Dans la littérature, seul Bostick, Cox et Field (1978) [19] ont fourni des informations très détaillées des caractéristiques géométriques et électriques de la transition côtière Terre/mer relative à l'état de Washington. Ils ont mis en évidence l'importance du profil côtier et de la nature du sous-sol océanique par des campagnes de mesure sur la communication sous-océanique au nord-ouest de l'Etat de Washington à partir de la péninsule Olympique. La figure (I.7) décrit le profil côtier de l'Etat de Washington et les emplacements de l'émetteur appelé "XMTR" en bordure de mer et les deux positions immergées du récepteur appelé "RCVR" pour une gamme de fréquences allant de 0,1 à 15 Hz.

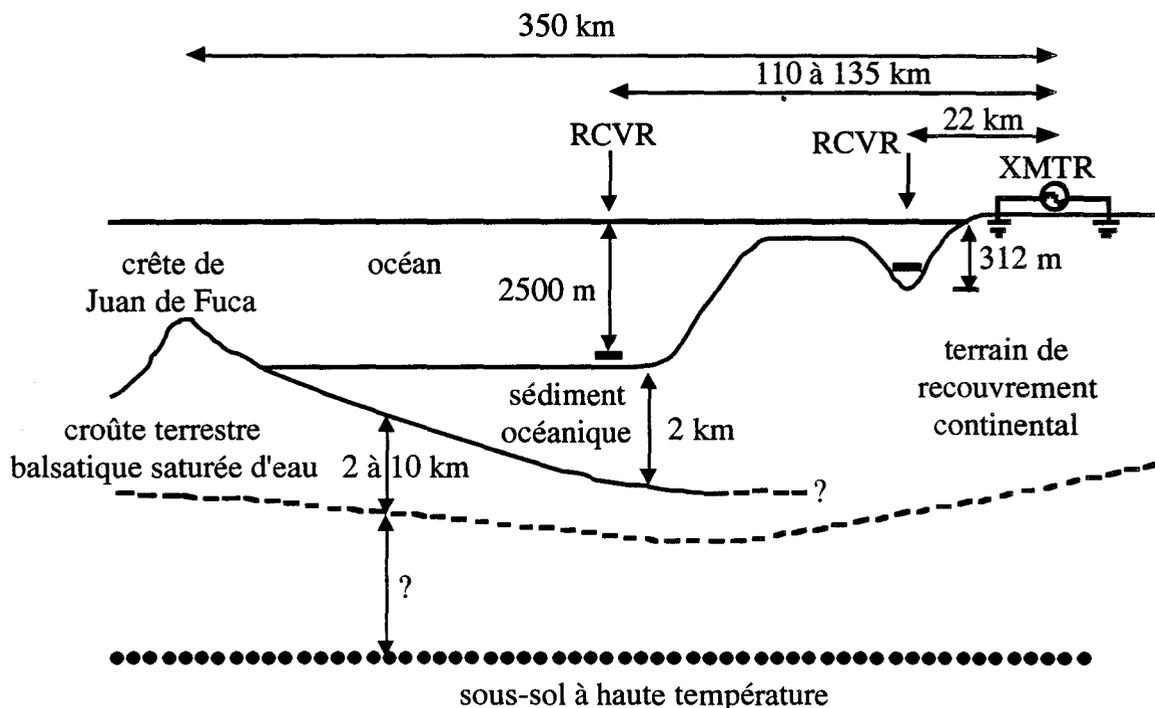


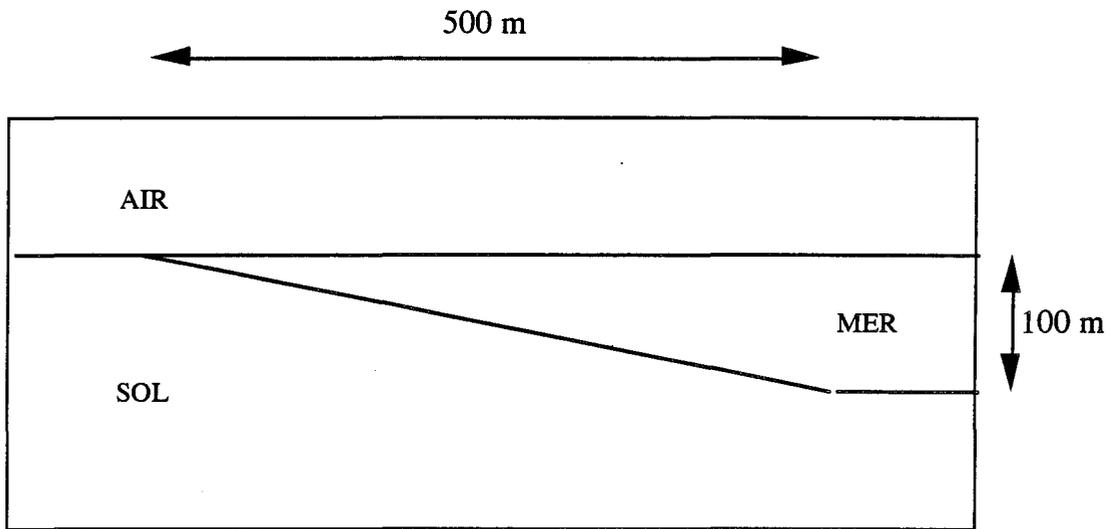
Figure (I.7): Profil côtier de l'Etat de Washington, l'échelle n'étant pas respectée.

En général, les paramètres géométriques essentiels d'une zone côtière sont:

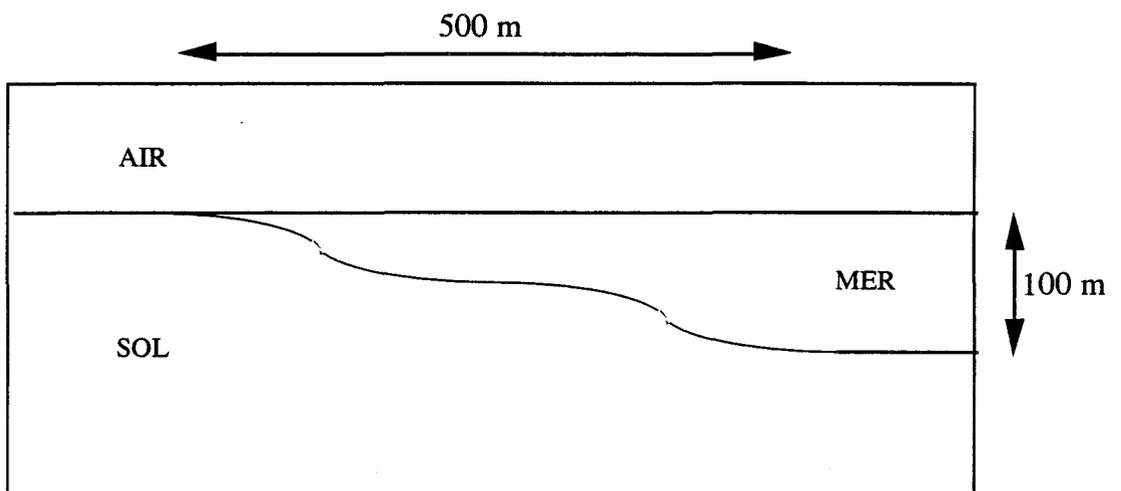
- le profil transversal perpendiculaire à la ligne de côte,
- le profil latéral parallèle à la ligne de côte.

Compte tenu de la complexité et de la variété des profils transversaux, ainsi

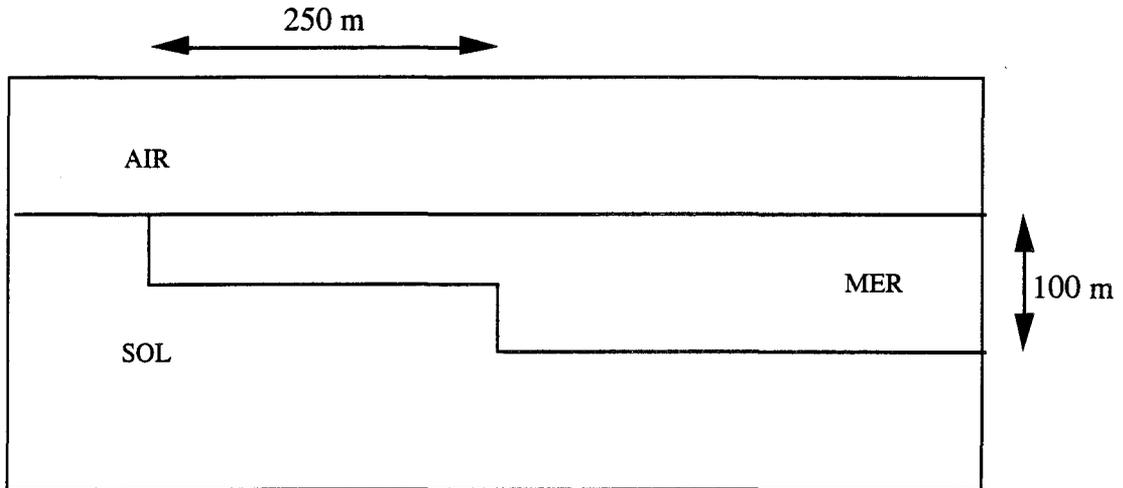
que des limites de simulation numérique, notre étude porte uniquement sur les phénomènes de propagation en très basses fréquences intervenant dans les régions côtières. Par conséquent, seules des transitions côtières Terre/mer de différents profils côtiers supposés invariants suivant la ligne de côte seront envisagées. Quatre profils côtiers transversaux sont considérés et décrits sur les quatre schémas de la figure (I.8).



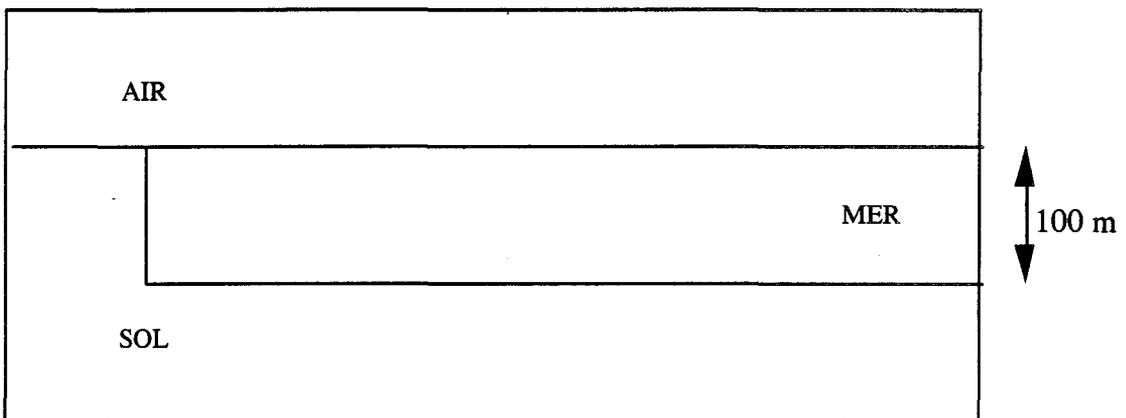
Figure(I.8-a): Profil côtier à pente constante ( 20%) sur 500 mètres.



Figure(I.8-b): Profil côtier vallonné sur 500 mètres.



Figure(I.8-c): Profil côtier à double transition abrupte.



Figure(I.8-d): Profil côtier à transition abrupte.

Ces différents profils sont découpés en éléments rectangulaires par un mailleur utilisé dans la méthode des différences finies. Le domaine d'étude est donc découpé en tranches et couches de dimension adéquate. Ceci ne pose pas de problèmes dans le cas de l'approximation de transitions abruptes, par contre le découpage d'une pente inclinée ou vallonnée suit des règles strictes qui ont été déterminées et prises en compte lors de la conception du mailleur.

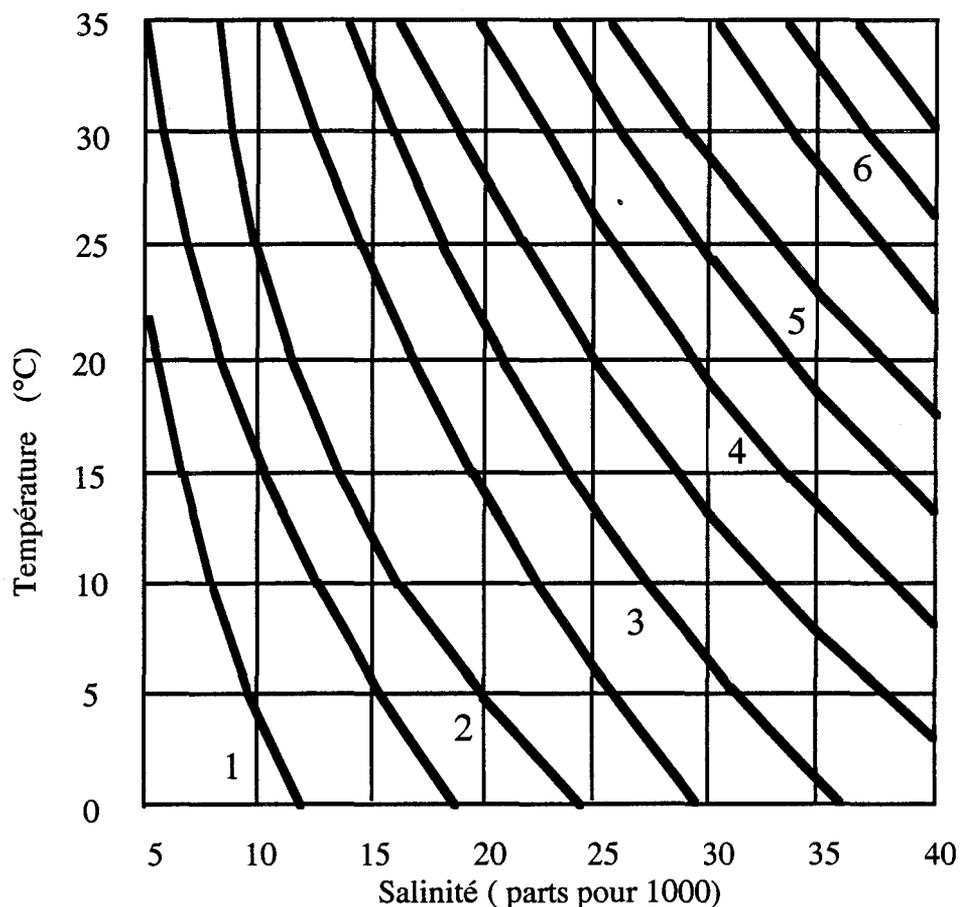
Les caractéristiques géométriques de la transition Terre/mer étant décrites, il reste à déterminer les caractéristiques électriques des différents milieux la constituant.

### I-2.2) Caractéristiques électriques du milieu de propagation.

Les milieux de propagation rencontrés au niveau d'une transition Terre-mer ont des caractéristiques électriques très différentes.

#### I-2.2.1) Caractéristiques électriques de l'eau de mer.

Par exemple, l'eau de mer par rapport à l'eau douce et à la terre est très conductrice ( $\sigma = 4 \text{ S/m}$ ). De plus, cette conductivité varie suivant la température, la salinité et la pression. La figure (I.10) montre ses variations en fonction de la température et de la salinité. Le paramètre pression ayant une moindre importance n'est pas représenté sur cette figure.



**Figure (I.10):** Conductivité en S/m de l'eau de mer en fonction de la température et de la salinité.

La permittivité relative diélectrique  $\epsilon_r$  de l'eau de mer varie entre 78 et 81 selon la température, la profondeur et la salinité. Les valeurs les plus hautes sont atteintes pour les eaux froides et plus salines. On prendra dans toute l'étude une valeur moyenne égale à 80.

La perméabilité  $\mu$  est pratiquement identique pour l'ensemble des matériaux non ferromagnétiques. Elle est indépendante de la fréquence du signal utilisée et des paramètres qui influent sur la conductivité de l'eau de mer. On prend donc:

$$\mu = \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m.}$$

I-2.2.2) Caractéristiques électriques du sous-sol.

Des études menées sur la propagation des ondes électromagnétiques via le sous-sol océanique ont apporté des renseignements intéressants sur la caractéristique électrique du sous-sol marin.

Par exemple, en 1976, Bostick, Cox et Field [19] menèrent des campagnes de mesures sur la péninsule Olympique au nord-ouest de Washington, figure (I.7). Les résultats obtenus ont montré que la conductivité du sous-sol océanique était au moins égale à  $10^{-3}$  S/m et que la présence d'une zone d'anomalie pouvait poser problème à la propagation des ondes électromagnétiques sous les océans.

En 1990, Chave, Flosadottir et Cox [20] montra que l'utilisation d'un simple demi-espace comme approximation du sous-sol océanique pouvait engendrer des erreurs non négligeables dans la simulation d'une communication sous-océanique en ULF et ELF. Les figures (I.11) et (I.12) montrent quelques exemples des valeurs de conductivité suivant l'enfoncement à partir de la surface de la mer, l'âge de la lithosphère et l'emplacement géographique de la mesure.

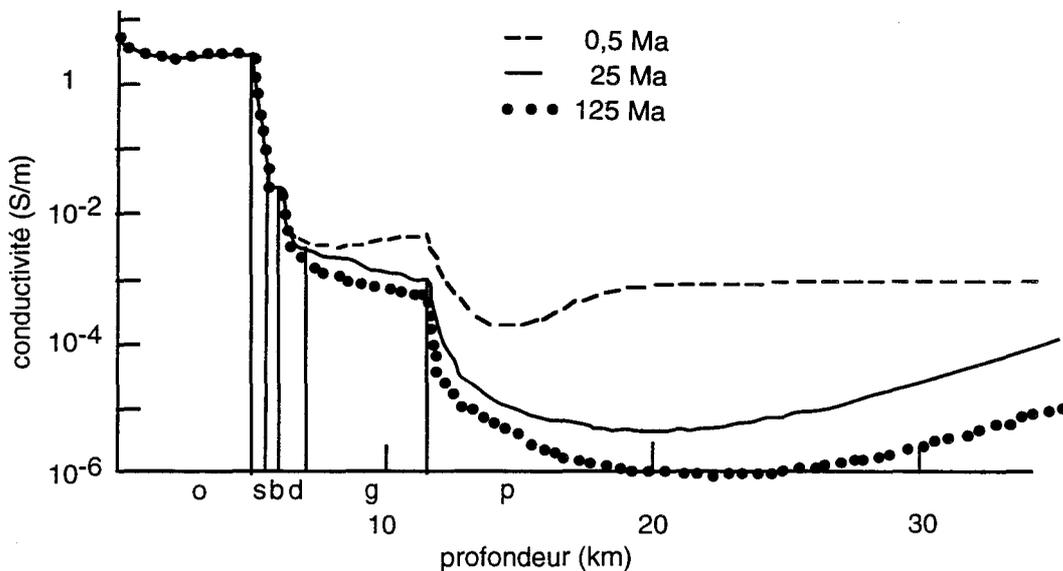


Figure (I.11): Profils de conductivité suivant la profondeur et l'âge de la lithosphère.

Les différentes zones délimitées verticalement représentent l'océan (o), les

sédiments (s), la couche de basalte (b), le diabase (d), les gabbros cumulés et massifs (g), et le manteau péridotite (p).

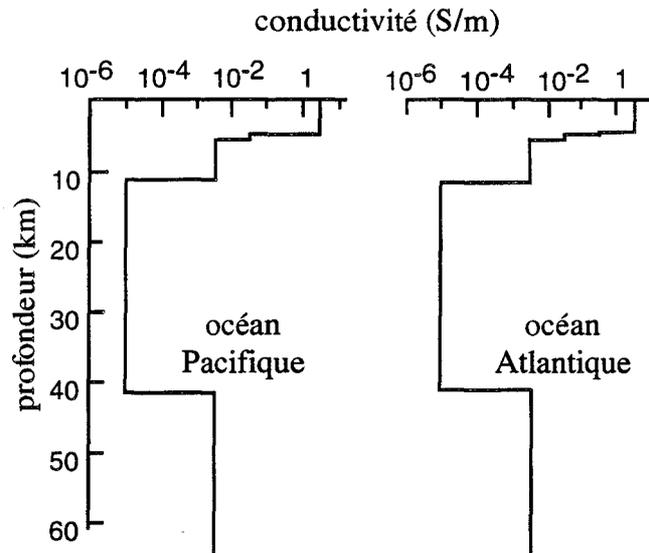


Figure (I.12): Profils de conductivité suivant la profondeur pour les océans Atlantique et Pacifique.

Ranganayaki et Madden (1980) [21] ont déterminé des solutions analytiques qui prennent en compte l'effet de la nature du sous-sol sur le rayonnement électromagnétique au niveau d'une anomalie localisée en surface qui représente d'après eux une transition Terre-mer illuminée par une onde plane pour des fréquences voisines de  $10^{-4}$  Hz. La configuration géologique simulée est représentée sur la figure (I.13). Les valeurs des profondeurs de pénétration dans la mer et dans le sol sont respectivement égales à 27 et 1530 km. Comme elles sont supérieures à la profondeur d'eau de la mer et de la terre, le comportement du champ électromagnétique au voisinage de la transition Terre-mer va dépendre fortement de la nature des couches profondes du sous-sol.

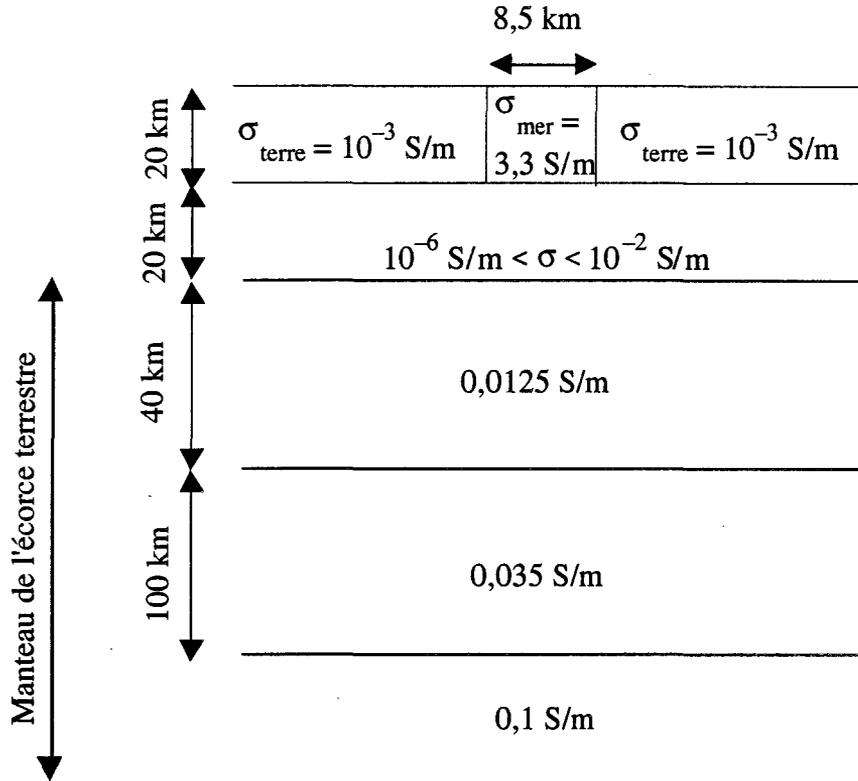


Figure (I.13): Modèle simulé par Ranganayaki et Madden.

En conclusion, les différences de nature du sous-sol qui existent entre la zone côtière et le sous-sol océanique nous limitent à l'étude de la zone côtière. Comme la structure de l'écorce terrestre est tenue compte par certains chercheurs dans une gamme de fréquences très inférieure à celle utilisée dans notre étude, la conductivité du sous-sol marin est donc fixée à une valeur égale à  $10^{-3} \text{ S/m}$  correspondant à celle de la terre humide qui est bien moins importante que la conductivité de la mer (4 S/m). Sa permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$  est choisie égale à 5. Ces caractéristiques électriques étant fixées, nous pouvons calculer l'épaisseur de peau,  $\delta$ , des différents milieux. Pour  $\sigma > \omega\epsilon$ , où  $\omega$  représente la pulsation angulaire,  $\delta$  est donnée en première approximation par la formule (I.1).

$$\delta \approx \sqrt{2/(\omega \mu \sigma)} \approx \frac{500}{\sqrt{\sigma f}} \quad (\text{I.1})$$

La figure (I.14) donne, dans une large gamme de fréquences, l'épaisseur de peau, l'atténuation et la longueur d'onde dans le milieu marin qui est le moins propice à la propagation des ondes électromagnétiques.

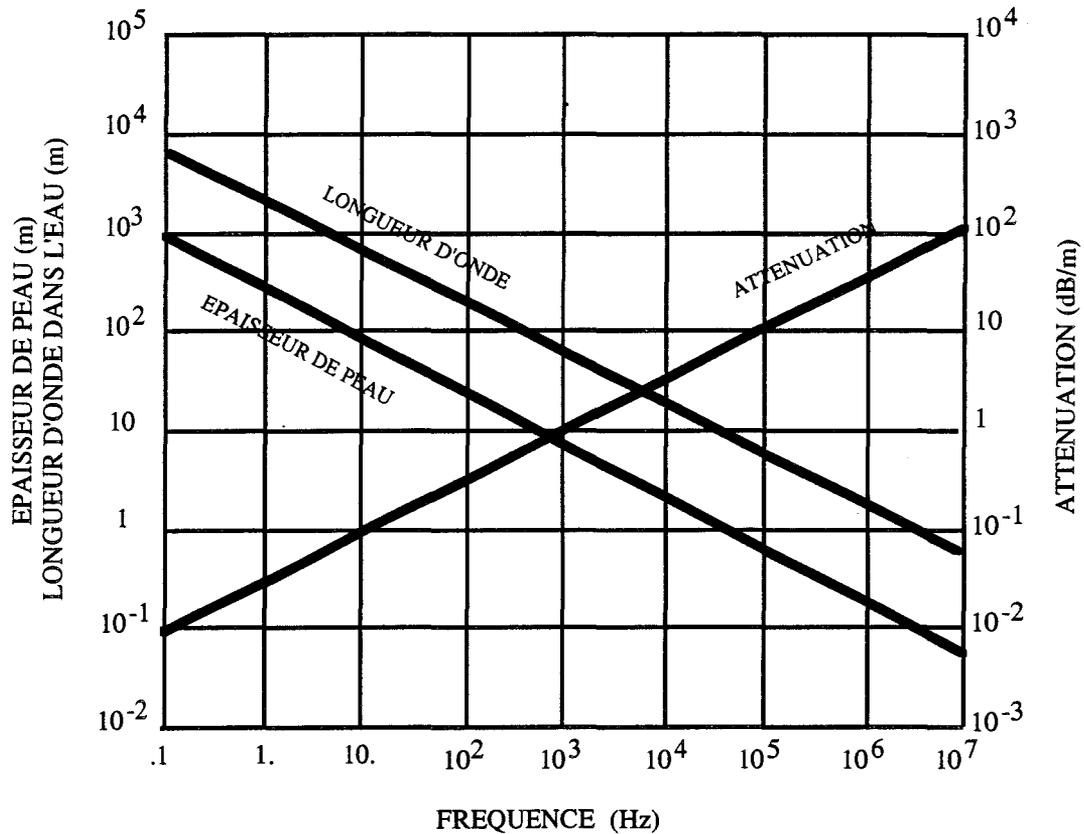


Figure (I.14): longueur d'onde et épaisseur de propagation dans l'eau de mer suivant la fréquence.

Le tableau ci-dessous regroupe les différentes valeurs de l'épaisseur de peau pour l'eau de mer et de la terre, suivant les fréquences que nous avons considérées.

Fréquence (Hz)	0,1	1	10	100
$\delta_{\text{terre}}$ ( km )	50	16	5	1,6
$\delta_{\text{mer}}$ ( m )	800	250	80	25

Dans cette gamme de fréquences, il est nécessaire de prendre en compte le profil côtier du sous-sol marin car l'épaisseur de la couche d'eau de mer peut devenir comparable à la profondeur de pénétration des ondes électromagnétiques dans la mer et l'épaisseur de peau dans le sous-sol marin peut être bien plus importante que la distance émetteur-ligne de côte (500 m).

### I-3. Etude bibliographique des méthodes numériques.

Une étude bibliographique a révélé que peu de recherches ont été publiées sur le sujet. Les sujets de recherche ont été orientés sur:

- le rayonnement de dipôles dans l'océan ou en milieu stratifié et à proximité des interfaces air/mer ou mer/sous-sol marin (Fraiser-Smith [22,23,24], Inan [25,26]),
- la propagation des ondes électromagnétiques dans le sous-sol océanique depuis la côte (Bostick [19]) ou dans la cavité Terre-ionosphère (Wait [2], Galeijs [11]),
- la propagation des ondes électromagnétiques au travers d'une transition semi-infinie verticale ou inclinée (figure (I.15)) avec une illumination en onde plane pour laquelle des formulations analytiques peuvent être élaborées (Weaver [27]).

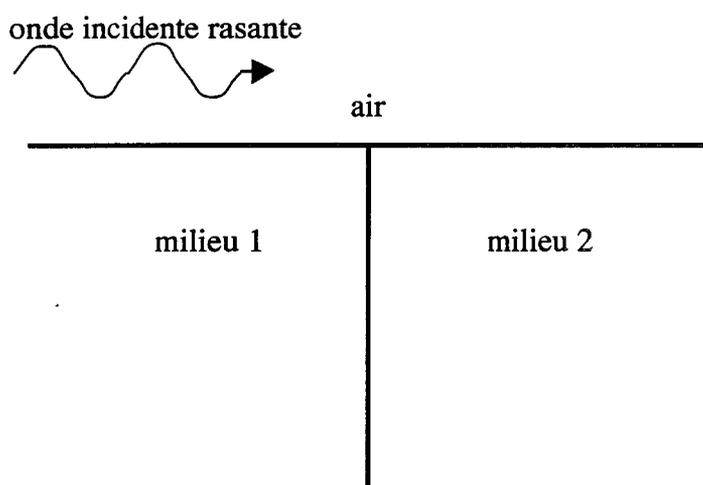


Figure (I.15): Transition abrupte et semi-infinie.

- seuls, Lines et Jones (1972) [28] se sont intéressés à la propagation des ondes au niveau d'une transition abrupte Terre-mer avec une illumination en onde plane de période 30 minutes afin de vérifier une augmentation de la composante verticale de champ magnétique à la surface d'une transition Terre-mer dans la gamme des fréquences ULF.

#### I-3.1) Etude bibliographique.

Weaver (1963) [27] s'est penché sur les raisons de l'augmentation de la composante magnétique verticale observée par les stations réceptrices côtières pour des fréquences allant de  $10^{-3}$  à 3 Hz. Il a élaboré une formulation analytique dans le cas d'une onde plane illuminant une transition Terre-mer abrupte et semi-infinie en polarisation TM ou TE, c'est-à-dire parallèle à la discontinuité et en

incidence normale comme il est représenté sur la figure (I.16).

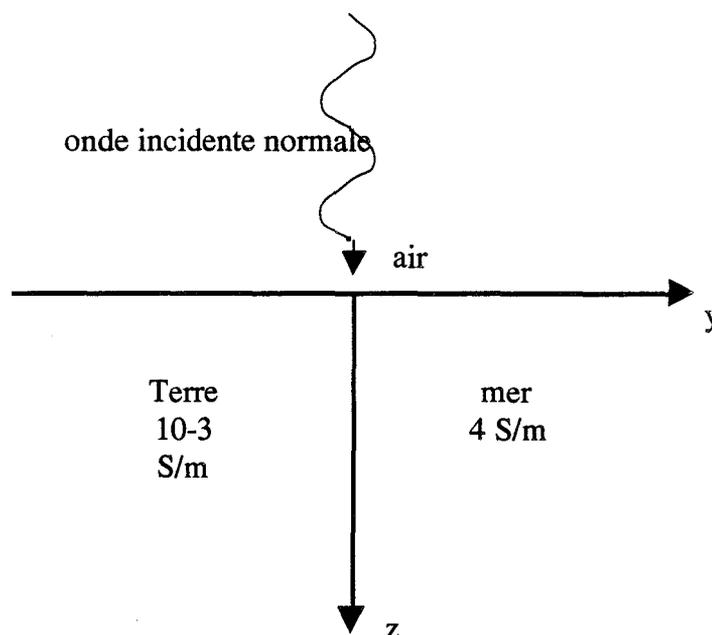


Figure (I.16): Modèle simulé par Weaver.

Ce type d'illumination simule le champ rayonné par les systèmes de courants ionosphériques et la présence d'une couche conductrice située à plus de 400 km de profondeur dans le manteau de l'écorce terrestre est négligée par Weaver. Pour des fréquences inférieures à 100 Hz et des conductivités supérieures à  $10^{-4}$  S/m, il a démontré que:

- le champ magnétique est constant et égal à deux fois la valeur du champ magnétique incident, indépendamment de la fréquence et de la conductivité du demi-milieu. Dosso et Lokken (1961) [29] ont montré de plus que le champ magnétique était constant en surface indépendamment de la valeur de l'angle d'incidence,
- la composante tangentielle de champ électrique est négligeable à la surface d'un bon conducteur par rapport à sa valeur fixée par l'illumination,
- pour le mode TE, la dérivé verticale de la composante transversale de champ électrique est constante en surface car proportionnelle à la composante tangentielle de champ magnétique.

Après avoir donné une solution dans le cas de la polarisation TM, Nicoll et Weaver (1977) [30] ont ajouté une couche infiniment conductrice à une profondeur variable afin de simuler la forte conductivité du manteau supérieur de l'écorce terrestre. Ces solutions en mode TM sont analytiques et reposent sur la technique de résolution de Wiener-Hopf.

Puis, Fischer (1977)[31] , (1978) [32] [33] et (1979) [34] s'est intéressé aux effets d'induction électromagnétique pour les polarisations TM et TE à proximité d'une transition Terre-mer. Dans le modèle étudié, décrit sur la figure (I.17), l'océan est représenté mathématiquement par une feuille parfaitement conductrice et d'épaisseur infinitésimale.

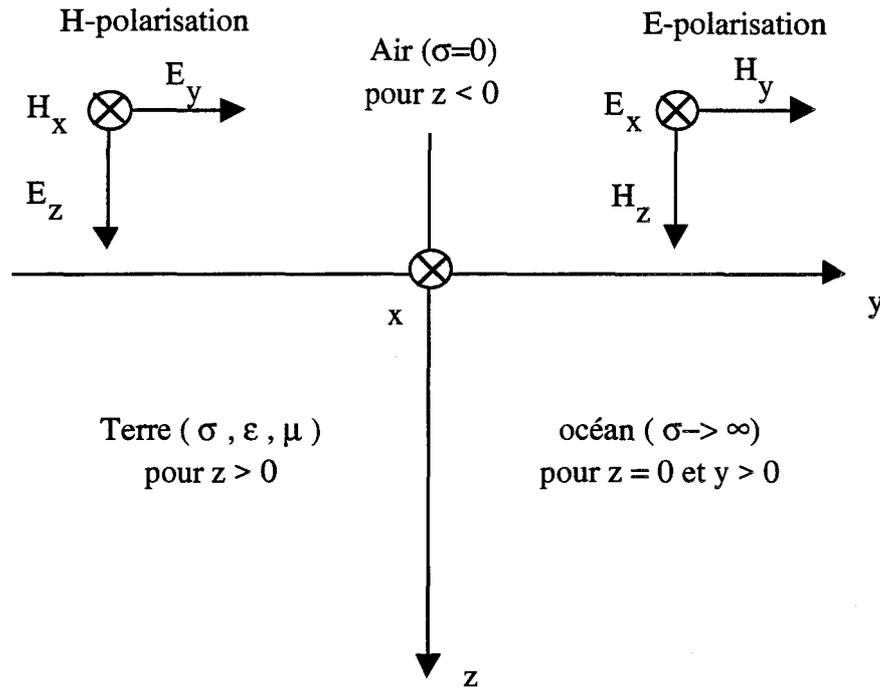


Figure (I.17): Modèle de transition Terre-mer utilisé par Bailey (1977) [35], Nicoll et Weaver (1977) [30] , Weaver (1978) [36][37] puis Fisher pour le mode TE (1979) [34].

Comme Weaver, Fischer a souligné que la solution du problème dans le cas de la polarisation TM est plus rigoureuse et moins difficile à obtenir que celle en polarisation TE. Puisque le demi-milieu supérieur est non conducteur et que les directions des lignes de courant électrique sont horizontales, les raisons de continuités impliquent que le courant intégré depuis la surface jusqu'à une profondeur infinie est indépendant de la coordonnée  $y$ . Par conséquent, et en tenant compte des équations de Maxwell, le champ magnétique parallèle à la ligne de côte et en surface est aussi indépendant de la coordonnée  $y$ . Par analogie avec la polarisation TM, pour le mode TE, une composante horizontale de champ magnétique uniforme pourrait être fixée en surface. Cependant, des fortes variations horizontales de champ magnétique perpendiculaire à la côte ont été enregistrées par des stations radios côtières et continentales , Camfield (1970) [38] et Babour (1976) [39]. Pourtant, Fisher (1979) a donné une solution dans le

cas de la polarisation TE par le calcul d'une fonction de Green. Il a constaté que le mode TM produisait davantage d'effets que le mode TE. Il explique ceci par la possibilité qu'ont les lignes de champ magnétique de circuler du manteau de l'écorce terrestre vers l'océan en mode TM tandis qu'en polarisation TE les lignes de champ magnétique tangentent l'océan car dans ce cas le vecteur champ magnétique est compris dans le plan perpendiculaire à l'océan.

Lines et Jones (1973) [40] ont étudié la perturbation des champs électromagnétiques alternatifs d'une onde plane à la surface de la mer par la présence d'îles pour des périodes de signal allant de 1 à 10 et 30 minutes de période correspondant à des fréquences de 0.0166 , 0.00166 et 0.000555 Hertz. Dans le tableau suivant sont regroupées les valeurs de la profondeur de pénétration dans les différents milieux pour les différentes fréquences utilisées.

Conductivité des différents milieux	Profondeur de pénétration en km pour une période de:		
	1 mn	10 mn	30 mn
$\sigma_{\text{air}} = 0 \text{ S/m}$	infini		
$\sigma_{\text{océan}} = 4 \text{ S/m}$	1,95	6,15	10,68
$\sigma_{\text{île}} = 10^{-3} \text{ S/m}$	123,28	389,84	675,22

Le maillage, décrit dans l'article, est détaillé sur les figures (I.18) et (I.19) représentant les coupes verticales et horizontales de la structure géologique étudiée. Il est constitué de 22 mailles suivant les 3 directions de l'espace et il est identique pour les deux structures d'îles étudiées. Le maillage est identique suivant les axes (ox) et (oy). Les conditions aux limites supposent que les distances autour de l'anomalie soit suffisamment importantes pour que :

- le champ électromagnétique sur les côtés latéraux donné par sa valeur dans le cas d'un milieu stratifié air/mer/terre puisse être retrouvé,
- le champ soit suffisamment faible au niveau du fond du domaine,
- l'onde plane ( $H_y, E_x$ ) sur le côté supérieur du domaine puisse être fixée par la déformation des lignes de champ.

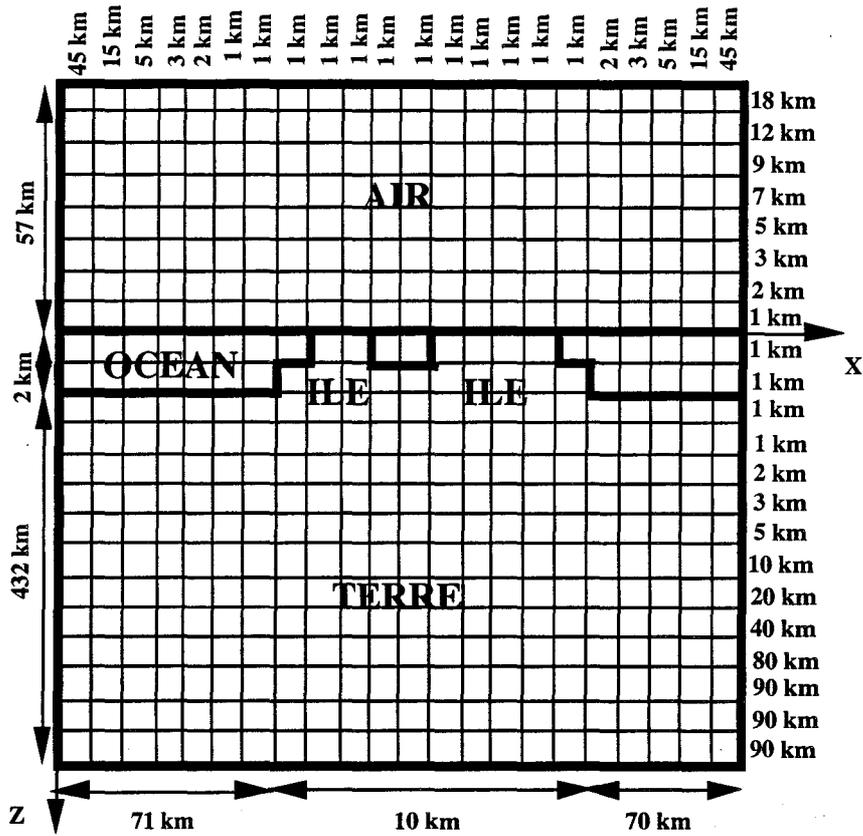


Figure (I.18): maillage et structure transversale du modèle de la double île.

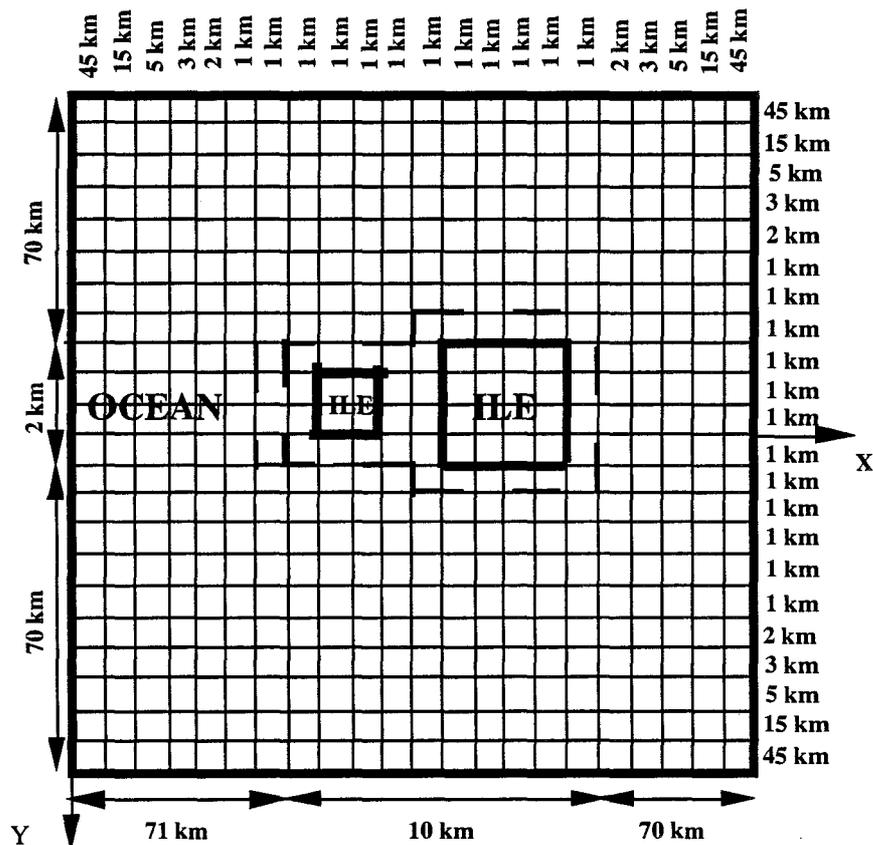


Figure (I.19): maillage et structure du modèle de la double île vue de dessus.

Lines et Jones (1972) [28] ont amélioré leur méthode numérique d'investigation du problème de la perturbation des champs géomagnétiques alternatifs au moyen d'inhomogénéités tridimensionnelles encastrées dans les couches de la Terre pour inclure les modèles dans lesquels les discontinuités verticales peuvent s'étendre jusqu'aux limites de la grille. Ils considèrent un modèle basé sur la non perturbation du champ électrique parallèle à la ligne de côte et à des distances éloignées de l'île. De cette façon, ils peuvent utiliser la solution d'un problème à deux dimensions prenant en compte une transition Terre-mer illuminée par une onde plane TE pour fixer les valeurs aux limites des champs d'un modèle tridimensionnel. Les conditions aux limites du problème à deux dimensions sont les suivantes: la dérivé horizontale du champ électrique transverse est nulle sur les côtés latéraux, le champ électrique au fond du domaine est nul et une solution du champ électrique satisfaisant l'équation différentielle à deux dimensions est déterminée dans le plan (oxz). Celle-ci est alors fixée sur le côté supérieur. La méthode de perturbation à trois dimensions est alors employée afin de fournir une solution pour le champ électrique à proximité de l'île. Lines et Jones ont montré que: les courants électriques contournent l'île, la composante verticale de champ électrique juste sous la surface de la mer est négligeable comparée à la composante verticale de champ électrique juste au-dessus de la surface de la mer, pourtant ces deux composantes sont causées par la même variation de charge électrique de surface. Par conséquent, les courants électriques juste en-dessous de la surface de la mer circulent parallèlement à celle-ci. Price (1967) [41] souligna également que le courant nécessaire afin d'établir les charges électriques en surface de la mer ont un effet négligeable sur le champ magnétique. Ils aboutissent à la conclusion que l'augmentation de la composante verticale de champ magnétique peut être causée aussi bien par les courants électriques dans la mer parallèles à la transition Terre-mer que par des différences de structure du manteau de l'écorce terrestre sous les continents et sous les océans. Le modèle décrit par 25\*25\*25 noeuds et la grille d'espacements sont représentés suivant une coupe transversale et une vue de dessus respectivement sur les figures (I.20) et (I.21). Le tableau ci-dessous regroupe les conductivités et les profondeurs de pénétration correspondantes.

Conductivité des différents milieux	Profondeur de pénétration en km pour une période de 30 mn
$\sigma_{\text{air}} = 0 \text{ S/m}$	infini
$\sigma_{\text{océan}} = 4 \text{ S/m}$	10,68
$\sigma_{\text{île}} = 10^{-3} \text{ S/m}$	675,22

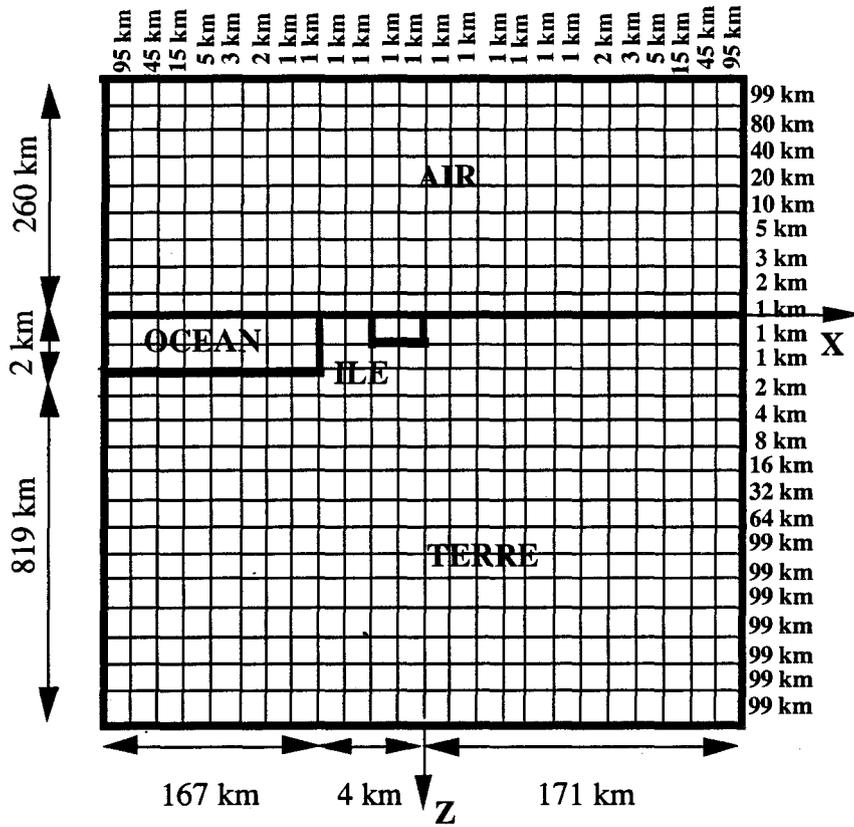


Figure (I.20): Coupe transversale avec les dimensions des mailles du réseau.

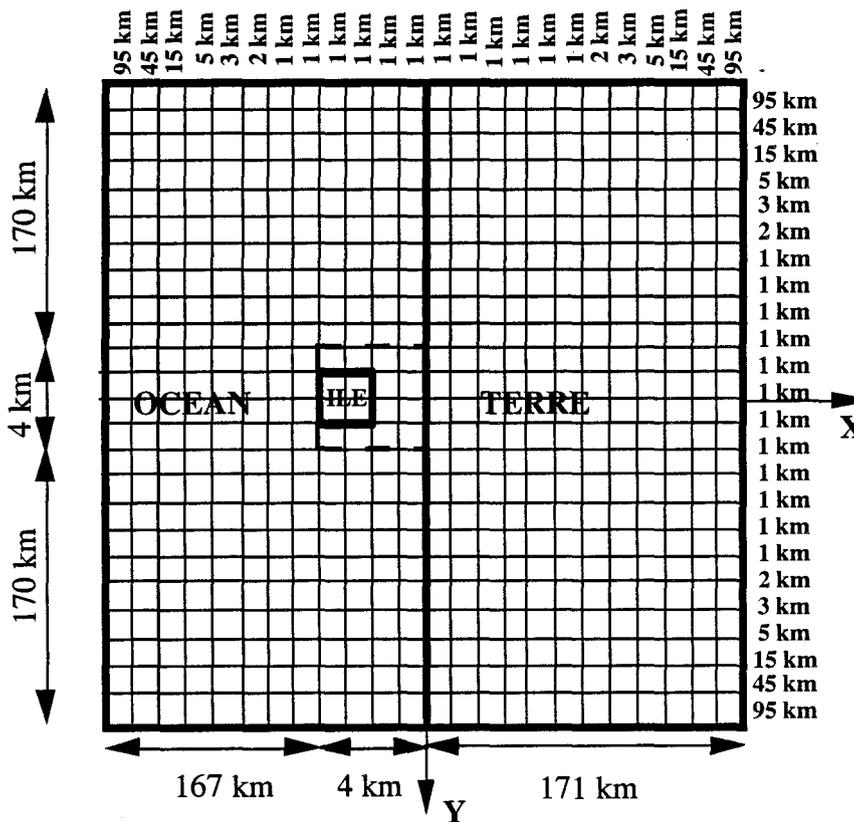


Figure (I.21): Vue de dessus avec les dimensions des mailles du réseau.

**I-3.2) Choix d'une méthode numérique applicable à la propagation des ondes électromagnétiques à proximité d'une transition côtière Terre/mer de profil côtier quelconque.**

L'approche analytique requiert souvent beaucoup de subtilités logiques et d'innovations algébriques pour des structures très simplistes. D'un autre côté, la méthode numérique est vraiment directe et simple dans le principe pour des structures complexes. Cependant, elle présente des problèmes bien spécifiques. Les méthodes numériques utilisables sont soit celle des différences finies soit celle des éléments finis en raison des conditions aux limites adaptables au problème de milieu ouvert. Le maillage d'une transition côtière Terre/mer est interrompu dans la mer qui peut être considérée comme une anomalie à la surface du sol de dimension horizontale semi-infinie. Les formulations aux équations intégrales nécessitent le calcul du champ inconnu seulement dans la région de l'anomalie et sont donc moins coûteuses en temps de calcul pour une ou plusieurs petites anomalies prises en compte et ne peuvent être utilisées que dans le cas d'anomalies localisées de surface fermée. Elles sont très utilisées pour concevoir des catalogues d'interprétation et plus répandues que la méthode des équations différentielles pour la modélisation tridimensionnelle.

**I-3.2.1) Méthode des éléments finis.**

Les premiers travaux réalisés à l'aide de la méthode des éléments finis dans le domaine de la prospection géophysique étaient basés sur des formulations variationnelles (Coggon (1971) [42]). Cependant, c'est équivalent et plus simple dans le concept de résoudre l'équation différentielle appropriée par la méthode des moments comme il est discuté dans les articles de Silvester et Haslam (1972) [43], Rijo (1977) [44] et de Lapidus et Pinder (1982) [45]. La méthode aux éléments finis permet d'utiliser des polygones, comme éléments de base de découpage, qui épousent davantage la forme des objets que les éléments rectangulaires de la méthode aux différences finies mais la conception du maillage est d'une complexité supérieure à celle des différences finies. Par exemple, à deux dimensions, les éléments triangulaires épousent parfaitement des plans inclinés. Par contre, la définition des réseaux de triangles représente souvent un travail fastidieux. Cette contrainte de rapidité de définition des réseaux et de facilité de modification des hypothèses sur les structures en cours d'interprétation a conduit Doucet et Ngoc [46] à utiliser des mailles rectangulaires. L'utilisation de mailles non rectangulaires nécessite de plus une optimisation en ce qui concerne la

numérotation des noeuds du maillage afin d'obtenir une matrice la plus compacte possible. Collins (1973) [47] a créé un algorithme de renumérotation automatique des noeuds qui réduit la largeur de bande de la matrice par un facteur 100 ou plus.

### **I-3.2.2) Méthode des différences finies.**

Une première étude avec le programme de Ku, Hsieh et Lim (1973) [48], a montré que des méthodes proches des différences finies pouvaient conduire à des résultats d'une précision tout à fait suffisante moyennant certaines précautions dans le choix des réseaux. Un autre avantage de la méthode des différences finies sur la méthode des éléments finis est la rapidité avec laquelle on obtient les résultats de simulation à cause du système de numérotation qui donne une matrice nettement mieux conditionnée pour appliquer les techniques de résolution matricielle itérative ou directe et elle n'interdit pas la modélisation de plans inclinés. Bien au contraire, Doucet (1981) [49] a obtenu dans le cas d'une anomalie et dans le cas d'une faille affleurante inclinée à 45° des résultats proches de ceux obtenus par les éléments finis avec des mailles triangulaires. De même, Mufti (1976) [50] a obtenu une parfaite concordance entre les résultats analytiques exacts de Peters et Bardeen (1930) [51] et ses résultats numériques obtenus par la méthode des différences finies en simulant le rayonnement de dipôles lignes sources à courant continu près d'une faille affleurante et inclinée à 45°.

En conclusion, la méthode des différences finies a été choisie dans un premier temps afin d'obtenir plus rapidement les résultats et a été conservée par la suite en raison des résultats satisfaisants obtenus dans le cas de profils côtiers non abrupts et à cause de la simplicité à concevoir le mailleur et les réseaux de mailles.

### Conclusion

Cette première partie a été essentiellement consacrée à une étude bibliographique conséquente afin de recueillir un maximum d'informations concernant les phénomènes de propagation d'ondes très basses fréquences, les caractéristiques géométriques et électriques d'une transition Terre/mer et les méthodes numériques applicables au calcul de la réponse fréquentielle d'une transition Terre/mer de structure géologique très simplifiée.

Cependant, la majeure partie de ces informations n'est pas directement applicable au cas de la propagation des ondes électromagnétiques dans la mer au voisinage d'une transition Terre/mer. La seule méthode numérique appliquée à ce problème concerne le cas d'une transition Terre/mer abrupte illuminée par une onde plane TE pour des signaux de 1, 10 et 30 minutes périodes. Elle fût élaborée par Lines et Jones en 1972 et 1973 [28] [40]. Par conséquent, les règles de maillage et les conditions aux limites citées au cours de ce premier chapitre vont faire l'objet d'études spécifiques avant d'aboutir à la réalisation de différents modèles numériques correspondant à différents types d'illumination. La méthode des différences finies constituera toujours le noyau central à partir duquel chaque modèle sera développé.

Les chapitres suivants ont pour thème commun la propagation au voisinage d'une transition Terre/mer et se distinguent entre eux par le type d'excitation. Dans chaque cas, une étude paramétrique portant sur le type de profil côtier sous-marin ainsi que sur la fréquence est présentée. Un effort particulier concernant la validation des modèles numériques a été réalisé tout au long de cette étude par comparaison entre les résultats obtenus suivant les différents types d'émission. Ces travaux permettront de dresser les caractéristiques essentielles de la propagation dans la mer des ondes électromagnétiques très basses fréquences au voisinage d'une transition Terre/mer. Des cartes vectorielles représentant le flux de Puissance ont été déterminantes afin de comprendre les phénomènes complexes de propagation au voisinage d'une transition Terre/mer.

**II- Modélisation de la propagation d'une onde plane au  
voisinage d'une transition côtière Terre/mer.**

Sommaire

Introduction.....	44
II-1.Mise en équation. ....	46
II-2.Formulation par la méthode des différences finies associée à un calcul variationnel.....	48
<b>II-2.1)Calcul de la composante transversale de champ électromagnétique.....</b>	<b>48</b>
<b>II-2.2)Calcul des composantes de champ électromagnétique incluses dans le plan perpendiculaire à la transition Terre/mer.....</b>	<b>53</b>
<b>II-2.3)Limitation artificielle du domaine.....</b>	<b>54</b>
II-2.3.1)Enumération des différents types de conditions aux limites. ....	54
II-2.3.2)Modèle de type Dirichlet.....	54
II-2.3.3)Modèle Mixte.....	56
II-3.Application au cas de la transition Terre/mer. ....	58
<b>II-3.1)Validité du modèle. ....</b>	<b>58</b>
<b>II-3.2)Comportement de champ électromagnétique et règles de maillage à observer.....</b>	<b>61</b>
II-3.2.1)Comportement du champ électromagnétique en milieu stratifié. ....	61
II-3.2.2)Comportement du champ électromagnétique en présence d'une anomalie en milieu stratifié.....	63
II-3.2.3)Comportement du champ électromagnétique en présence d'une transition Terre/mer par rapport au champ analytique calculé en milieu stratifié.....	64
<b>II-3.3)Etude fréquentielle sur une transition Terre/mer de différents profils côtiers.....</b>	<b>71</b>
II-3.3.1)Règles de maillage de pentes quelconques. ....	73
II-3.3.2)Résultats des simulations effectuées. ....	74
Conclusion. ....	87

## Introduction

Le plus simple modèle numérique pour la prospection géophysique est le modèle numérique à une dimension ou en milieu stratifié qui reposent sur des intégrales de Fourier ou de Bessel facilement évaluables. Par contre, la réalisation d'un modèle à deux ou à trois dimensions est beaucoup plus difficile, excepté dans les cas géométriques simples tels que les sphères ou les cylindres, où les frontières de conductivité correspondent à des surfaces de coordonnées constantes. Ces modèles basés sur des méthodes numériques sont à présent indispensables à l'avancée dans la compréhension et l'interprétation de certains phénomènes physiques. Le problème de la transition Terre/mer est un problème plus complexe qu'un problème à deux dimensions. Il a recours à des modèles numériques toujours basés sur les mêmes équations de propagation mais résolues différemment. Ces modèles utilisent une méthode de résolution, des règles de maillage et des conditions aux limites bien spécifiques pour que le maillage puisse s'arrêter dans la mer de dimension semi-infinie et pour prendre en compte les caractéristiques géométriques locales et semi-infinies de la transition Terre/mer, le contraste de conductivité très élevé entre la mer et la Terre et la présence de l'air en surface.

Les deux sources électromagnétiques d'intérêt pratique sont premièrement l'illumination d'une onde naturellement plane au-dessus de la surface de la Terre comme il est utilisé avec succès dans les méthodes magnétotelluriques et la seconde est la ligne source de courant alternative située à la surface de la Terre et approximée par une longue barre métallique ou par un côté d'une large boucle magnétique.

Dans le cas de l'onde plane, les champs électromagnétiques peuvent être pris comme la superposition d'un mode TM et TE (Wait (1961)[2], Galejs (1968)[11]). Parce que la composante verticale du courant électrique doit être nulle sous la surface d'un milieu conducteur comme la Terre et la mer, la composante transverse de champ magnétique parallèle à la ligne de côte est constante en surface (Dosso et Loken (1961)[29], Weaver (1963)[27]). Par conséquent, le maillage de l'air n'est pas nécessaire, ce qui simplifie le problème numérique et diminue le temps de calcul. Par contre, l'air doit être discrétisé dans le cas du mode TE puisque le champ électrique n'est pas constant à la surface de la transition Terre/mer, Fischer(1979)[34].

Comme Greenfield (1965)[52], Brewitt-Taylor et Weaver (1976)[53], Madden et Swift (1972)[54], Coggon (1971)[42], Nguyen (1982)[55], la méthode de résolution est directe par élimination de Gauss dans la partie supérieure d'un système de sous-matrice glissante suivant la bande centrale non nulle de la matrice à résoudre. La méthode de résolution itérative la plus efficace est la méthode de surrelaxation successive (SOR) dû à Southwell (1946)[1]. Elle est nécessaire pour les problèmes tridimensionnels afin de réduire le temps de calcul et la mémoire utilisée pour le stockage des éléments non nuls de la matrice ( Forsythe et Wason (1960)[56]) mais l'approximation initiale des inconnues et du paramètre de surrelaxation nécessaire à cette méthode de résolution n'est pas évidente à déterminer dans notre cas ( Jepsen (1969)[57], Muller et Losecke (1975)[58], Mufti (1976, 1978 et 1980)[50][59][60], Aiken et ... (1977)[61], Vasseur et Weidelt (1977)[62], Tatrallyay (1977 et 1978)[63][64][65], Smith (1978, page 252)[66][67], Marchuk et Shaidurov (1979)[68], Varentsov et Gobulev (1980)[69][70][71], Zhdanov et Spichak (1980)[72], Zhdanov, Gobulev, Spichak et Varentsov (1982)[73], Doucet (1982)[46], Robertson (1987 et 1989)[74][75].

Puisqu'il n'existe pas de formulation analytique correspondant au cas d'un profil géométrique même très simplifié d'une transition Terre-mer illuminée par une onde plane, le champ électromagnétique total est l'inconnu du problème. Par contre, dans le cas de la simulation de la réponse électromagnétique d'une anomalie localisée en milieu stratifié, ce champ total peut être calculé à partir de la somme du champ électromagnétique primaire en milieu stratifié et du champ secondaire réémis par l'anomalie contenue dans ce milieu stratifié.

Dans ce chapitre, il est présenté des résultats de simulations montrant que des règles de maillage relativement simples permettent de discrétiser des pentes à inclinaison constante et même des vallonnements par la méthode des différences finies.

## II-1. Mise en équation.

Nous développons une théorie mathématique et physique utilisant la méthode des différences finies associée à un calcul variationnel afin de connaître la carte de champ électromagnétique au niveau d'une transition Terre/mer. L'exemple de la figure (II.1) représente le cas particulier d'une transition abrupte Terre/mer dans l'espace à 3 dimensions.

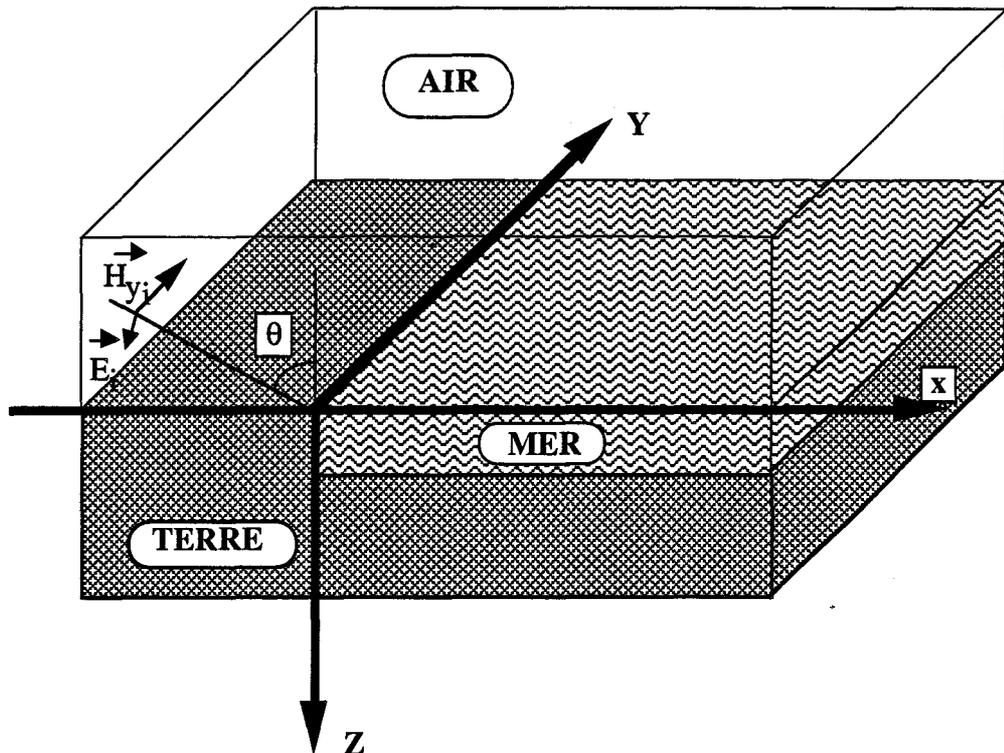


Figure (II.1): Problème à 3 dimensions.

La valeur du champ électromagnétique en tout point de l'espace représenté sur la figure (II.1) est régie par les équations de Maxwell suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

Dans ce chapitre, l'excitation électromagnétique de la transition Terre/mer se fait par une onde plane polarisée en mode TM avec son vecteur champ

magnétique parallèle à la ligne de côte et sa direction de propagation inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe (oz). Cela permettra d'étudier le comportement des composantes de champ électrique dans un plan perpendiculaire à la transition Terre/mer. La structure du terrain et la géométrie de la source étant supposées invariantes selon l'axe (oy), le modèle ainsi simulé devient bidimensionnel dans le plan (oxz) comme il est décrit sur la figure (II.2).

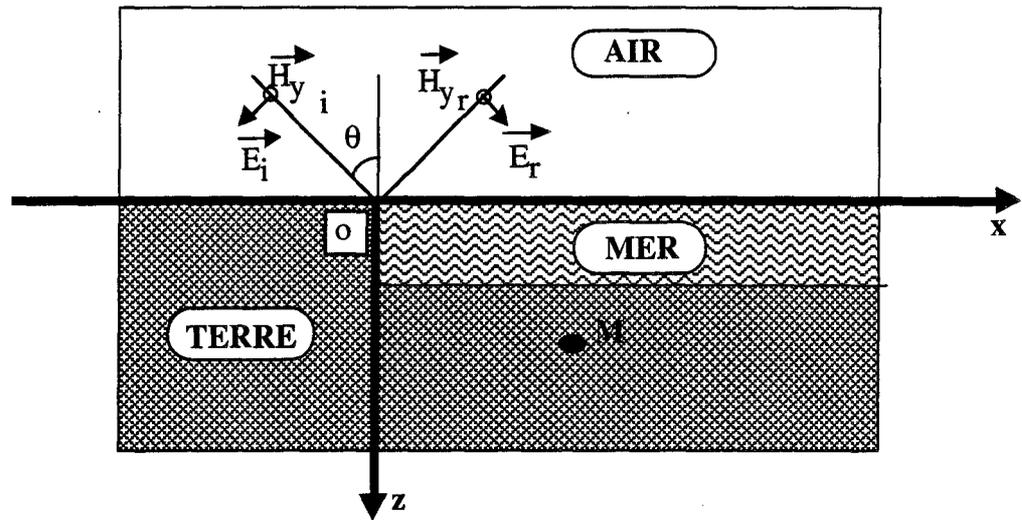


Figure (II.2): Problème à deux dimensions.

En un point M appartenant au domaine, les conductivité, permittivité et perméabilité du milieu sont notées respectivement  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et ces caractéristiques électriques sont fonctions uniquement des coordonnées spatiales du plan (x,z):

$$\begin{cases} \sigma(M) = \sigma(x,z) \\ \varepsilon(M) = \varepsilon(x,z) \\ \mu(M) = \mu(x,z) \end{cases} \quad (\text{II.2}),$$

Etant donné que la source est aussi bidimensionnelle, les vecteurs champ électrique et champ magnétique vérifient l'équation (II.3).

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \vec{E}(x,z) \\ \vec{H}(x,z) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{II.3}).$$

Il en résulte que les équations de Maxwell spatio-temporelles sont données par les formules (II.4) en choisissant une dépendance temporelle du type  $(e^{j\omega t})$ .

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega\mu(x,z) \vec{H}(x,z) \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} = (\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)) \vec{E}(x,z) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Nous pouvons en déduire les deux systèmes d'équations suivants:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega\mu H_z \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = j\omega\mu H_y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -(\sigma + j\omega\epsilon) E_x \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = (\sigma + j\omega\epsilon) E_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} = -(\sigma + j\omega\epsilon) E_y \end{cases} \quad (\text{II.5}).$$

Dans l'hypothèse d'une source lointaine située dans le guide d'onde Terre/ionosphère, l'onde incidente est assimilable à une onde plane décomposable en deux modes indépendants (Wait (1961)[2]). Pour le mode TM, la composante  $H_y$  s'obtient par la résolution de l'équation (II.6).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) \right] = j\omega\mu(x,z) H_y \quad (\text{II.6})$$

Pour le mode TE, la composante  $E_y$  s'obtient par la résolution de l'équation (II.7).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{j\omega\mu(x,z)} \left( \frac{\partial}{\partial x} E_y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{j\omega\mu(x,z)} \left( \frac{\partial}{\partial z} E_y \right) \right] = (\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)) E_y \quad (\text{II.7})$$

Les équations sont duales l'une de l'autre. Vu la forme complexe des équations, nous allons recourir à une méthode numérique basée sur les différences finies.

## II-2. Formulation par la méthode des différences finies associée à un calcul variationnel

II-2.1) Calcul de la composante transversale de champ électromagnétique.

Par rapport à la discrétisation directe des équations, la méthode

variationnelle peut englober les conditions aux limites dans le calcul, Forsythe (1960)[56]. Le principe consiste à subdiviser un domaine ( $\Omega$ ) en éléments rectangulaires discrets,  $\Omega_j$ , où les paramètres intrinsèques des milieux définis par  $\sigma_j$ ,  $\epsilon_j$  et  $\mu_j$  sont constants, figure (II.3).

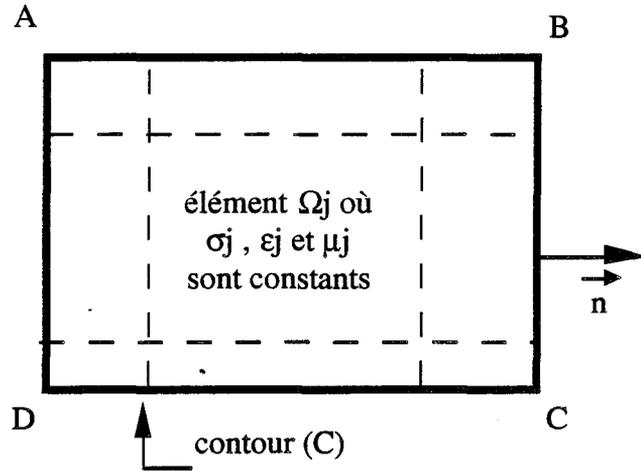


Figure (II.3): Domaine ( $\Omega$ ) discrétisé en éléments rectangulaires  $\Omega_j$ .

Sur chaque élément de surface,  $\Omega_j$ , les équations (II.8) et (II.9) expriment respectivement pour le mode TM et TE, le phénomène de diffusion du champ magnétique ou électrique dans l'élément  $j$ .

$$\left[ \frac{1}{\sigma_j + j\omega\epsilon_j} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - j\omega\mu_j \right) \right] H_y = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\left[ \frac{1}{j\omega\mu_j} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (\sigma_j + j\omega\epsilon_j) \right) \right] E_y = 0 \quad (\text{II.9})$$

Par exemple, la solution correspondant au mode TM sur le domaine ( $\Omega$ ) discrétisé en éléments rectangulaires sera le point de stationnarisation de la fonctionnelle  $F(H_y)$  donnée par l'expression (II.10).

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} (L_j H_y)(H_y) d\Omega_j \quad (\text{II.10})$$

où  $L_j$  est l'opérateur :

$$K_j \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \phi_j \quad (\text{II.11})$$

avec

$$K_j = (\sigma_j + j \omega \epsilon_j)^{-1} \text{ et } \phi_j = j \omega \mu_j \quad (\text{II.12})$$

L'expression (II.8) s'écrit sous la forme condensée (II.13).

$$L (H_y) = f \quad (\text{II.13})$$

Dans notre cas, le second membre est nul. On démontre, en annexe (II.1), que la solution de l'équation (II.13) sera la valeur stationnaire de la fonctionnelle suivante:

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \langle L H_y, H_y \rangle - \langle H_y, f \rangle = \frac{1}{2} \langle L H_y, H_y \rangle \quad (\text{II.14})$$

où

$$\langle L H_y, H_y \rangle = \iint_{(\Omega)} (L H_y) H_y \, d\Omega \quad (\text{II.15})$$

En discrétisant le domaine d'étude ( $\Omega$ ) en éléments ( $\Omega_j$ ), la fonctionnelle s'écrit sous la forme:

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} (L_j H_y) H_y \, d\Omega_j = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} [(K_j \Delta - \phi_j) H_y] H_y \, d\Omega_j \quad (\text{II.16})$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{II.17})$$

En utilisant l'identité de Green, il est possible d'écrire l'identité (II.18).

$$\iint_{(\Omega_j)} H_y \Delta H_y \, d\Omega_j = - \iint_{(\Omega_j)} (\nabla H_y)^2 \, d\Omega_j + \int_{(C_j)} H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} \, dl \quad (\text{II.18})$$

où  $n$  est la normale extérieure à ( $\Omega_j$ ), ( $C_j$ ) est le contour fermé de ( $\Omega_j$ ).

Le fait que la composante transverse de champ magnétique soit continue sur l'interface des éléments entraîne que l'intégrale curviligne sur l'ensemble du domaine peut s'écrire sous la forme (II.19).

$$\sum_j \int_{(C)} H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl = \int_{(C)} H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl \quad (\text{II.19})$$

où (C) est le contour fermé de ( $\Omega$ ). Par conséquent, la fonctionnelle quadratique,  $F(H_y)$ , s'écrit alors explicitement par l'expression (II.20).

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iiint_{\Omega_j} \left( K_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 \right) d\Omega_j - \frac{1}{2} \int_{\text{Contour}} K_f H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl \quad (\text{II.20})$$

où  $K_f = (\sigma_f + j \omega \epsilon_f)^{-1}$  ;  $\sigma_f$  et  $\epsilon_f$  sont respectivement la conductivité et la permittivité électrique des mailles frontalières,  $\vec{n}$  est la normale au contour (C)

et  $\frac{\partial}{\partial n}$  désigne la dérivée spatiale normale au contour.

Cette fonctionnelle quadratique est composée de deux intégrales qui traduisent la puissance dissipée à travers la surface ( $\Omega$ ) et la puissance écoulee à travers la frontière (C). Il est possible de montrer que la première intégrale représente la puissance moyenne dissipée à travers ( $\Omega$ ). En effet, la densité moyenne de flux de puissance, exprimée par le vecteur de Poynting  $\vec{S}$ , s'exprime par la relation (II.21).

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \quad (\text{II.21})$$

La puissance moyenne dissipée à travers ( $\Omega$ ) est donc égale au flux de la divergence de ce vecteur à travers cette surface exprimé par les expressions (II.22).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_f &= - \iint_{(\Omega)} \operatorname{div} \vec{S} \, d\Omega = - \frac{1}{2} \sum_j \iint_{(\Omega_j)} \operatorname{div}(\vec{E}_j \wedge \vec{H}_j) \, d\Omega_j \\
 &= - \frac{1}{2} \sum_j \iint_{(\Omega_j)} (\vec{H}_j \operatorname{rot} \vec{E}_j - \vec{E}_j \operatorname{rot} \vec{H}_j) \, d\Omega_j \quad (\text{II.22})
 \end{aligned}$$

Les équations de Maxwell écrites sous la forme (II.23) peuvent être utilisées afin d'exprimer le champ électrique  $\vec{E}$  et son rotationnel en fonction du champ magnétique  $\vec{H}$  et de son rotationnel.

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \\ \vec{E} = (\sigma + j\omega\epsilon)^{-1} \operatorname{rot} \vec{H} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

En injectant les résultats obtenus dans l'expression (II.22) de la puissance, nous obtenons la formule (II.24).

$$\mathbf{P}_f = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} \left[ \frac{1}{\sigma_j + j\omega\epsilon_j} (\operatorname{rot} \vec{H}_j \operatorname{rot} \vec{H}_j) + j\omega\mu_j \vec{H}_j \operatorname{rot} \vec{H}_j \right] d\Omega_j \quad (\text{II.24})$$

En mode TM, on peut développer cette formule et la mettre sous la forme (II.25).

$$\mathbf{P}_f = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} \left( K_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 \right) d\Omega_j \quad (\text{II.25})$$

En résumé, la solution du problème n'est autre que celle qui rend la puissance du système minimale, c'est-à-dire lorsque  $F(H_y)$  vérifie l'équation (II.26).

$$\frac{\partial F(H_y)}{\partial H_y} = 0 \quad (\text{II.26})$$

II-2.2) Calcul des composantes de champ électromagnétique incluses dans le plan perpendiculaire à la transition Terre/mer.

Pour le mode TM, les composantes horizontale et verticale de champ électrique respectivement appelées  $E_x$  et  $E_z$  sont déterminées à l'aide des équations de Maxwell bidimensionnelles (II.27):

$$\begin{cases} E_x = -\frac{1}{(\sigma + j \omega \epsilon)} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ E_z = \frac{1}{(\sigma + j \omega \epsilon)} \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases} \quad (II.27).$$

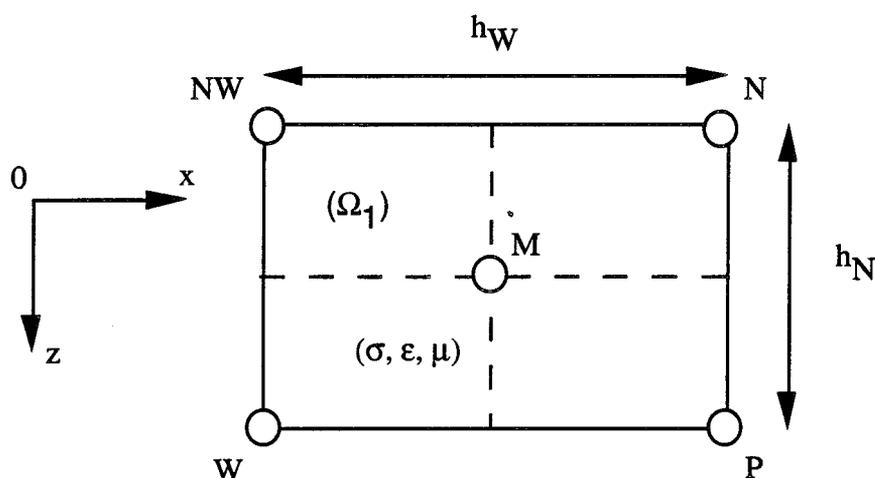


Figure (II.4): Discrétisation d'une maille élémentaire.

En considérant la discrétisation d'un élément rectangulaire comme il est décrit sur la figure (II.4), le champ électrique est calculé au point central M par les expressions (II.28).

$$\begin{cases} E_x(M) = -\frac{1}{2(\sigma + j \omega \epsilon)} \frac{(H_P + H_W) - (H_N + H_{NW})}{h_N} \\ E_z(M) = \frac{1}{2(\sigma + j \omega \epsilon)} \frac{(H_P + H_N) - (H_W + H_{NW})}{h_W} \end{cases} \quad (II.28).$$

On obtient des relations duales pour le mode TE. Il nous reste à déterminer les conditions aux limites valables pour la propagation des ondes électromagnétiques en onde plane au voisinage d'une transition Terre/mer.

II-2.3) Limitation artificielle du domaine.

II-2.3.1) Énumération des différents types de conditions aux limites.

Le domaine d'étude se schématise de la façon suivante:

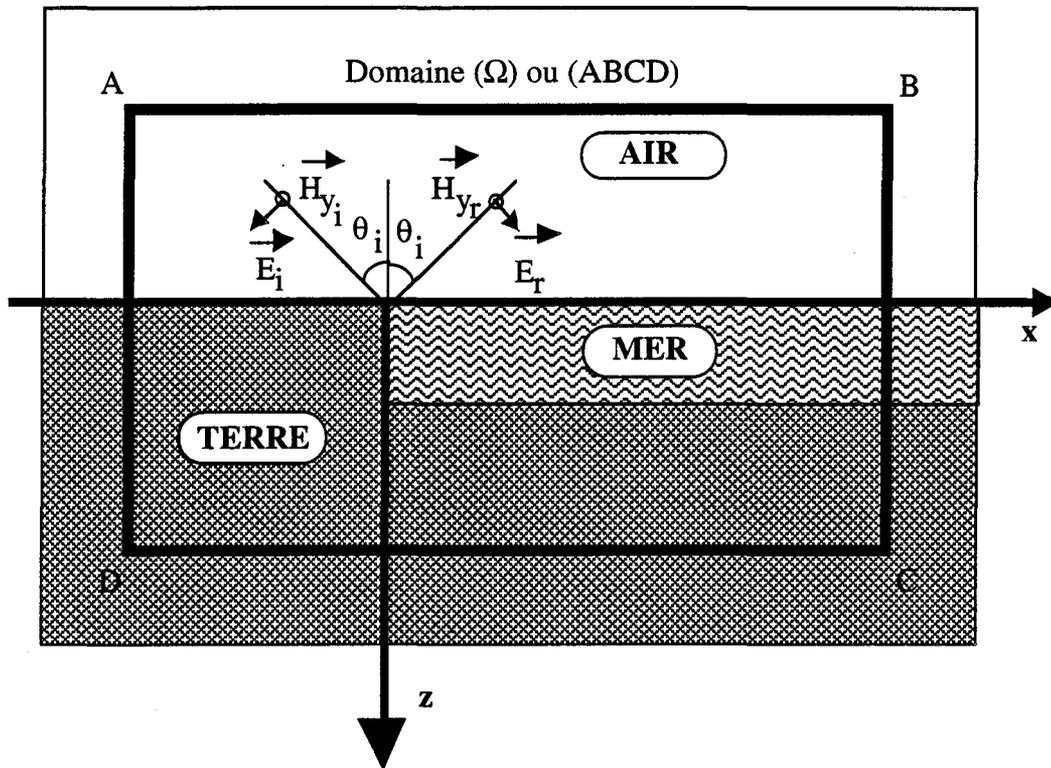


Figure (II.5): Limitation artificielle du domaine.

Le domaine central limité par le contour (ABCD) contient la transition abrupte terre-mer qui relie deux milieux stratifiés air-sol et air-mer-sol qui s'étendent de part et d'autre à l'infini. La valeur de champ électromagnétique peut être calculée sur les bords à partir des formules données par Wait (1970) [76] pour un milieu stratifié composé de  $M$  couches et illuminé par une onde plane. Ceci est possible à condition que les bords du domaine soient repoussés à une distance suffisamment éloignée de la transition pour que l'influence de la transition ne se fasse plus sentir au niveau du contour. Ceci permet d'utiliser des conditions aux limites de Dirichlet sur le contour (ABCD) dont les détails de calcul sont développés en annexe (II.2).

II-2.3.2) Condition de Dirichlet.

En très basse fréquence, la composante verticale du courant électrique est

nulle sous l'interface air/milieu conducteur. D'après les équations de Maxwell, il en résulte que la composante transverse de champ magnétique  $H_y$  est constante à l'interface air-sol quel que soit l'angle d'incidence de l'onde. Cette condition est appliquée sur le côté (AB). Si les côtés (AD) et (BC) sont repoussés à des distances suffisantes de la transition Terre/mer, les champs peuvent être fixés aux valeurs analytiques fournies par les formules de Wait (1970) [76] données en annexe (II.2). Si le côté (CD) est repoussé à une profondeur suffisante, on peut considérer que  $H_y$  est soit nulle soit donnée par une transformation linéaire des champs tabulaires au point D et C calculés dans les milieux stratifiés air-sol et air-mer-sol. Le schéma des conditions aux limites de ce modèle est résumé sur la figure (II.6).

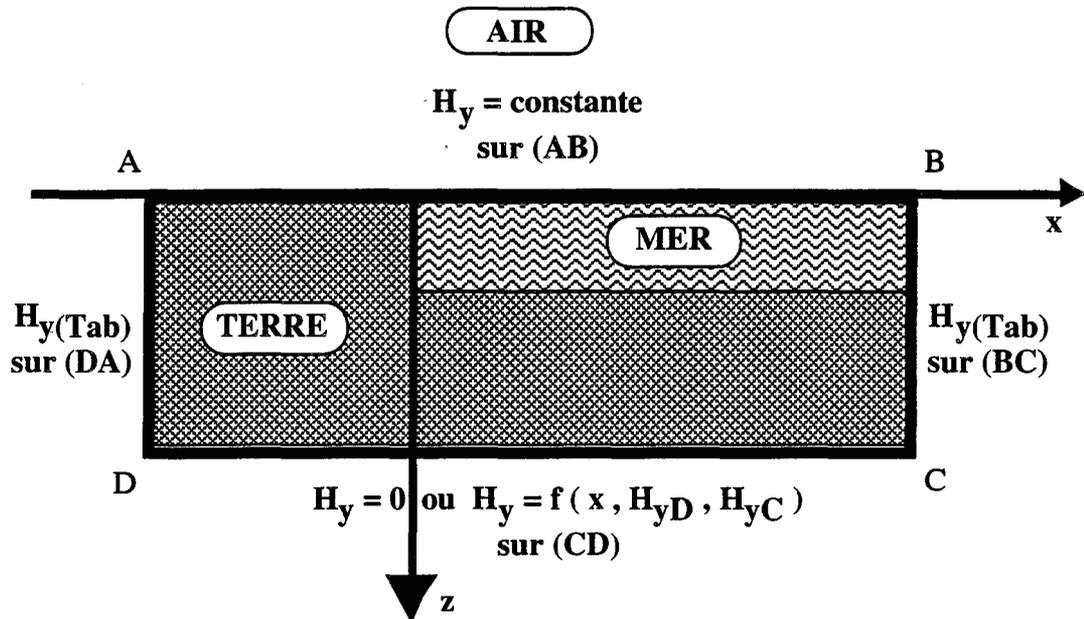


Figure (II.6): Condition de Dirichlet.

La fonctionnelle associée à ce modèle est donnée par l'expression (II.29).

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega} \left( K_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 \right) dx dz \quad (II.29)$$

Il existe deux variantes de ce modèle qui correspondent à une numérotation effectuée suivant les lignes ou suivant les colonnes. Pour ce modèle, le champ électromagnétique émis par la source excite les quatre côtés du domaine. L'inconvénient majeur de ce type de conditions aux limites est lié à la grande

taille du domaine, Mufti (1976, 1978 et 1980)[50][59][60]. De ce fait, il est difficile d'obtenir un maillage suffisamment fin. Afin de réduire l'étendue du domaine, on fixe des conditions approchées sur les dérivées du champ magnétique sur le contour comme le montre le modèle présenté par la suite.

### II-2.3.3) Condition Mixte.

Si l'onde résultante sur le côté (CD) reste plane, nous pouvons utiliser la notion d'impédance de surface analogue à celle de la théorie des lignes de transmission inhomogène.

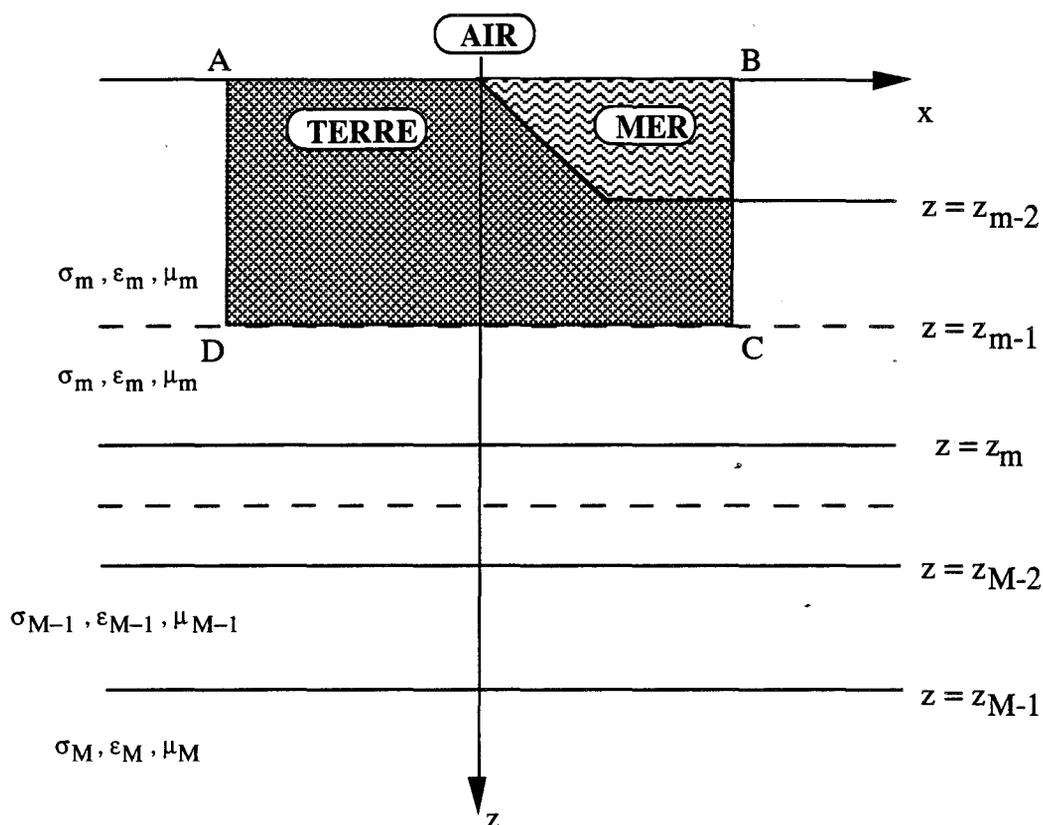


Figure (II.7): Condition aux limites du fond.

On note  $Z_f$  l'impédance de la surface située à une côte  $z = z_{m-1}$ , séparant deux milieux de caractéristiques électriques identiques.  $Z_f$  représente l'impédance de surface d'une couche horizontale de terrain comme il est indiqué sur la figure (II.7) et s'exprime par la formule (II.30).

$$Z_f = \left. \frac{E_{x,m}}{H_{y,m}} \right|_{z=z_{m-1}} \quad (\text{II.30})$$

En combinant cette expression de  $Z_f$  à l'équation de Maxwell (II.31), on obtient une condition aux limites de Cauchy à une côte  $z = z_{m-1}$  exprimée par la relation (II.32).

$$E_{x,m} = \frac{-1}{\sigma_m + j\omega\epsilon_m} \frac{\partial H_{y,m}}{\partial z} = -K_m \frac{\partial H_{y,m}}{\partial z} \quad (\text{II.31})$$

$$Z_f K_m^{-1} H_{y,m} + \frac{\partial H_{y,m}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.32}).$$

D'autre part, en supposant que le champ électromagnétique sur les deux bords (BC) et (DA) redevient tabulaire, le champ magnétique  $H_y$  peut se mettre sous la forme (II.33) (Wait (1970)[76]).

$$H_y = \left( a_m e^{-u_m z} + b_m e^{u_m z} \right) e^{-\gamma_0 \sin\theta x} \quad (\text{II.33})$$

où les paramètres ( $a_n, b_n, u_n, \gamma_0$ ) sont indépendants des coordonnées spatiales. On en déduit la relation (II.34) qui est aussi une condition aux limites de Cauchy.

$$\gamma_0 \sin(\theta) H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.34}).$$

En très basse fréquence ou en incidence normale ( $\theta = 0$ ), la relation (II.34) se réduit à une condition de Neumann. Finalement, les conditions aux limites retenues pour le modèle mixte sont résumées sur la figure (II.8).

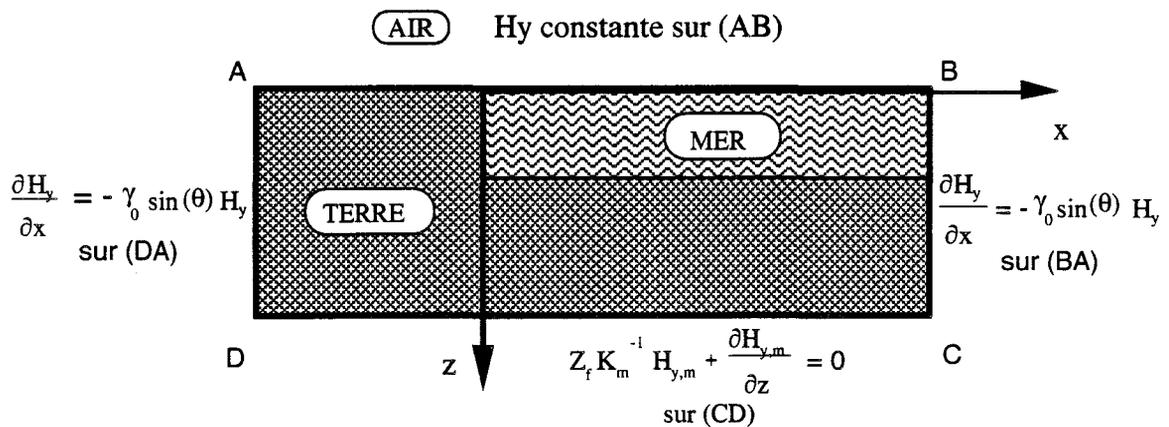


Figure (II.8): Modèle Mixte

La fonctionnelle associée à ce modèle s'exprime par la relation (II.35).

$$\begin{aligned}
 F(H_y) = & \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} \left( K_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 \right) d\Omega_j \\
 & + \frac{1}{2} \int_{(CD)} Z_f H_y^2 dl + \frac{\gamma_0 \sin(\theta)}{2} \int_{(BC)} K_f H_y^2 dl - \frac{\gamma_0 \sin(\theta)}{2} \int_{(DA)} K_f H_y^2 dl \quad (II.35)
 \end{aligned}$$

où  $Z_f$  est l'impédance de surface du sous-sol définie au niveau du segment (CD). L'intérêt de ce modèle est qu'il est directement applicable au cas de la transition Terre/mer puisqu'il fixe le champ magnétique uniquement sur le côté supérieur (AB) et qu'il réduit l'étendue du domaine suivant les deux axes du plan (ox) et (oz) grâce aux conditions aux limites de Cauchy. Ces conditions aux limites ont déjà été utilisées avec succès par Nguyen (1982) [55] pour la modélisation de la réponse bidimensionnelle d'une anomalie localisée dans le sol et illuminée par une onde plane.

### II-3. Application au cas de la transition Terre/mer.

#### II-3.1) Validité du modèle.

Afin d'étudier la validité du modèle aux différences finies avec les conditions aux limites définies précédemment, une comparaison est effectuée pour une configuration géométrique donnée à la figure (II.9) et simulée à l'aide d'une formulation analytique basée sur un développement en série infinie (D'Erceville et Kunetz, 1962) [77] et à l'aide de la méthode des éléments finis aux ordres élevés (Silvester et Haslam, 1972) [43]. Dans notre cas, la méthode des différences finies utilisant un modèle Mixte est préférée à un modèle de type Dirichlet car il est directement applicable au cas de la transition Terre/mer. Il fixe uniquement le champ magnétique en surface et ce champ peut être constant ou subir une progression linéaire entre les points A et B car il varie très peu en surface de part et d'autre de la transition sans influencer sur les phénomènes de propagation dans les milieux conducteurs.

Sur la figure (II.9), on considère une transition abrupte entre deux milieux de résistivité égale à 10 et 90  $\Omega.m$  reposant sur un socle infiniment conducteur. La comparaison des différentes méthodes s'effectue sur le calcul du rapport entre la densité de courant horizontale  $J_x$  et le champ magnétique  $H_y$  en surface. La

direction de propagation de l'onde incidente est normale à l'interface air/sol. L'amplitude de champ magnétique incident est égale à  $(1+j)$  A/m. La fréquence est fixée successivement à 20, 5 et 1.25 Hz donnant 3 valeurs du rapport  $D_1/h$ ,  $D_1$  représentant la profondeur de pénétration dans le milieu 1.

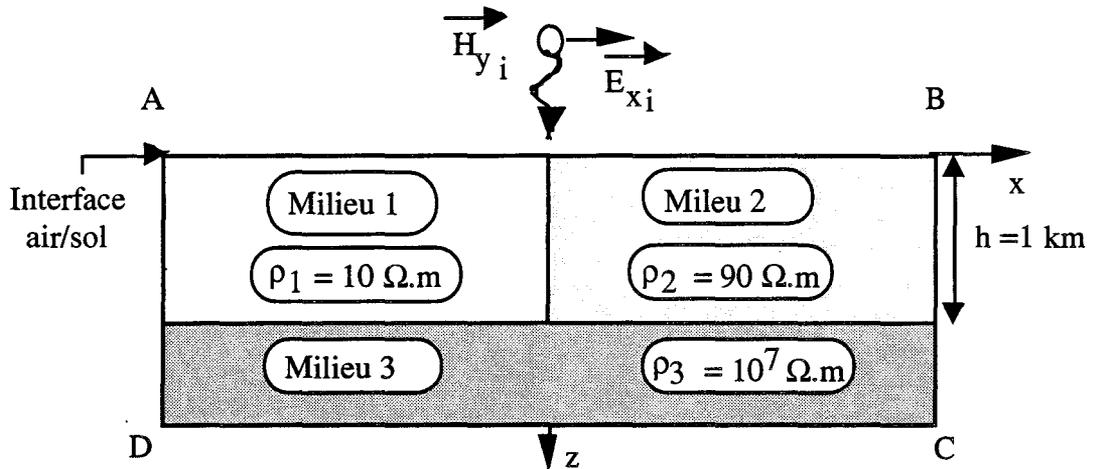


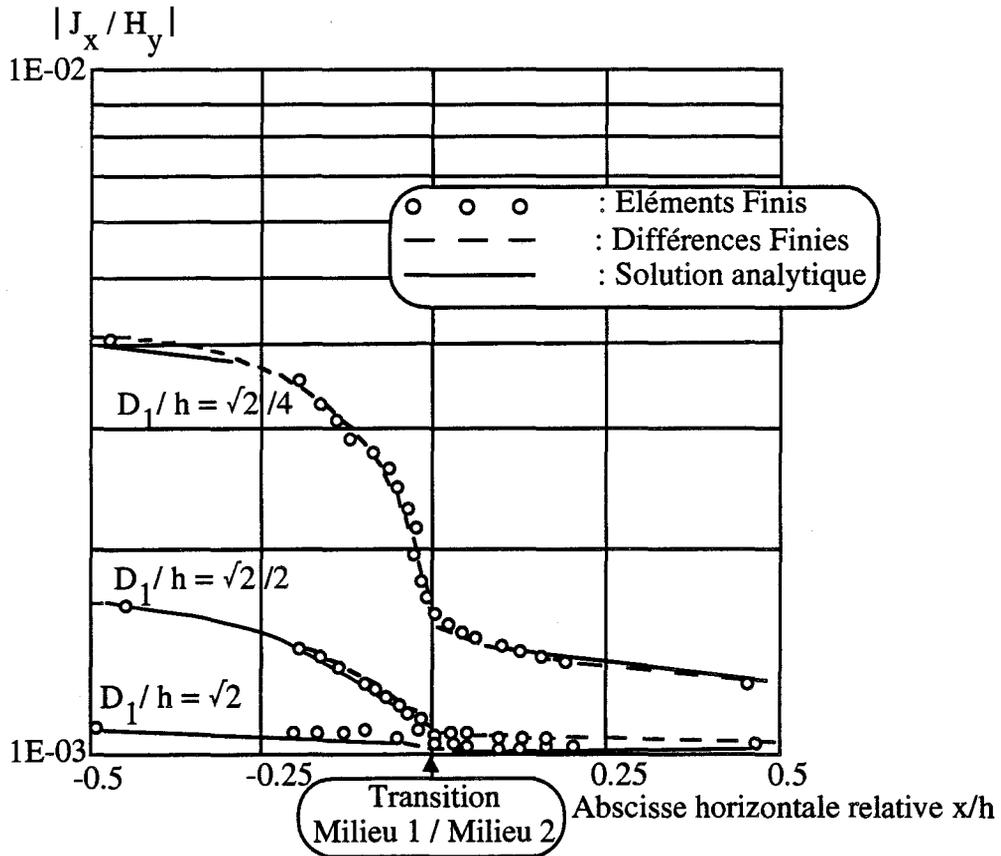
Figure (II.9): Modèle simulé par 3 méthodes numériques différentes.

Les variations du module et de la phase du rapport  $J_x/H_y$  sur le segment (AB) ont été représentées sur les graphiques supérieurs et inférieurs de la planche (II.1). On note une bonne concordance entre notre modèle et les résultats obtenus dans la littérature. Il a été impossible de choisir des échelles graphiques qui n'obscurcissent pas le comportement du champ électromagnétique dans les régions soit de haute soit de basse conductivité. La continuité des courbes est due à la continuité de la densité horizontale du courant électrique,  $J_x$ , donnée par la formule (II.36) et de la continuité de la composante transverse de champ magnétique à travers la transition.

$$J_x = \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (\text{II.36})$$

Par contre, la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  est déterminée par la loi d'Ohm (II.37) dans le cas de l'approximation très basses fréquences ou quasi-statique et subit une variation brutale au niveau de la transition dans le rapport inverse des conductivités.

$$E_x = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (\text{II.37})$$



Phase de  $(J_x / H_y)$  (degrés)

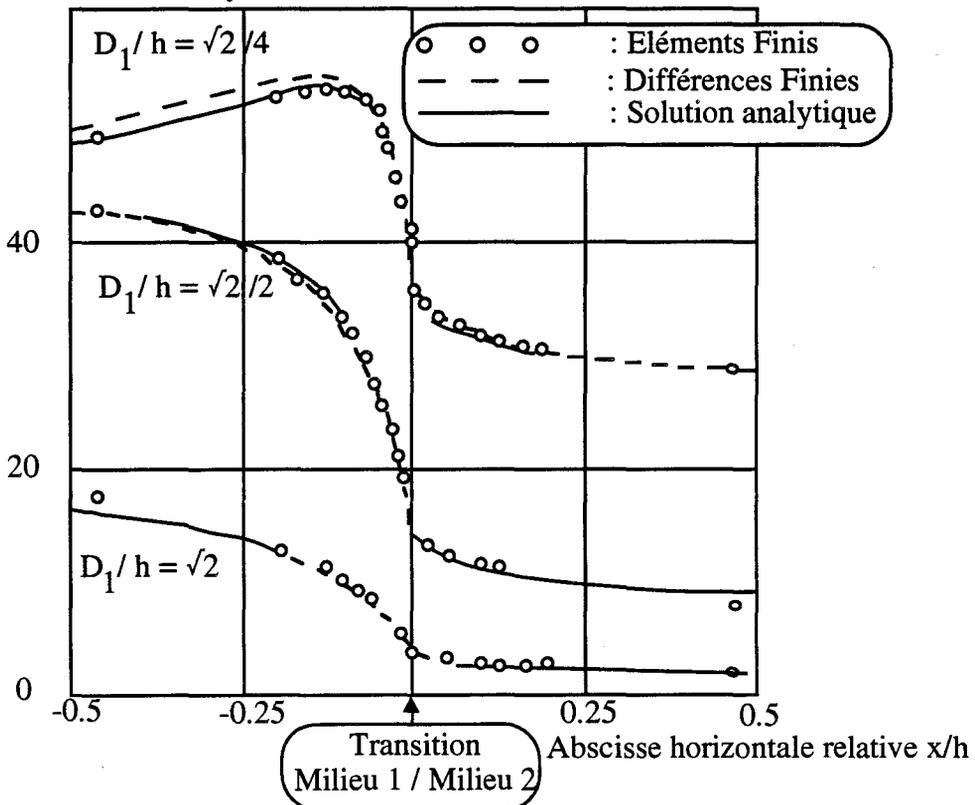


Planche (II.1) : Calcul du rapport  $J_x/H_y$  en surface d'une transition abrupte par différentes méthodes.

### II-3.2) Comportement du champ électromagnétique et règles de maillage à observer.

Dans ce paragraphe, les règles élémentaires de maillage pour le découpage d'une transition Terre/mer de profil côtier sous-marin quelconque sont présentées afin d'utiliser convenablement le modèle présenté précédemment. Ces règles ont été établies après des études paramétriques qui sont impossibles de reproduire en totalité dans ce mémoire. Nous nous contenterons d'en donner les principales conclusions. Pour cela, rappelons le comportement du champ électromagnétique en milieu stratifié et en présence d'une anomalie.

#### II-3.2.1) Comportement du champ électromagnétique en milieu stratifié et règles de maillage.

Sans la présence d'anomalies dans le sol, le champ électrique appelé primaire est composé d'une composante verticale  $E_z$  très importante dans l'air car l'interface air/sol joue le rôle de parfait conducteur et d'une composante horizontale  $E_x$  prépondérante dans le milieu conducteur. La composante verticale de champ électrique  $E_z$  dans l'air est indépendante de la fréquence car elle est reliée par l'impédance du vide au champ magnétique qui est fixé constant quelle que soit la fréquence dans les simulations numériques qui suivront. Dans le sol,  $E_z$  étant nettement inférieure à  $E_x$  peut être entachée d'une erreur importante.

En incidence normale par rapport à l'interface air/sol, seule l'unique composante transversale de champ magnétique et la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  existent. Dans l'air,  $E_x$  subit un phénomène d'ondes stationnaires avec un minimum de champ  $E_x$  au niveau de l'interface air/sol. Ce phénomène disparaît progressivement lorsque l'angle d'incidence devient rasant car l'onde incidente possède alors une unique composante verticale de champ électrique. L'angle d'incidence influe peu sur le comportement de la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  dans le sol car cette composante est proportionnelle à la décroissance verticale de champ magnétique qui ne dépend que de la fréquence. L'onde pénètre donc dans le sol avec une direction de propagation perpendiculaire à l'interface air/sol, quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence.

Les variations verticales de champ magnétique dans l'air semblent être indépendantes de l'angle d'incidence contrairement à ce qui se passe pour la composante horizontale de champ électrique qui en est proportionnelle. Ceci s'explique par les relations (II.28) issues des équations de Maxwell écrites dans l'air et dans le sol.

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -(\sigma + j \omega \epsilon_0) E_x \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial z} \approx -j \omega \epsilon_0 E_x & \text{dans l'air,} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} \approx -\sigma E_x & \text{dans le sol} \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

La continuité de la composante horizontale de champ électrique à l'interface air/sol implique que la variation du champ magnétique est très faible dans l'air. Il est donc nécessaire de calculer le champ magnétique avec la plus grande précision dans l'air pour en déduire les composantes de champ électrique par simple dérivation. Pour cette raison, le code de calcul a été réalisé en double précision mais il est à noter que le champ électrique peut être obtenu avec une bonne précision dans les milieux conducteurs sans avoir recours à la double précision car la variation du champ magnétique y est beaucoup plus importante.

La composante verticale de champ électrique existe pour un angle d'incidence non nul. Elle est prépondérante dans l'air mais négligeable dans le sol. En fait, la discontinuité de la composante verticale  $E_z$  de champ électrique vaut le rapport très élevé  $\sigma/\omega \epsilon$  à l'interface horizontale air/sol. Ceci s'explique par l'équation (II.39) reliant  $E_z$  et la dérivée horizontale de champ magnétique.

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = (\sigma + j \omega \epsilon_0) E_z \quad (\text{II.39})$$

Si on applique l'équation (II.39) dans l'air et le sol, on aboutit au système d'équations (II.40).

$$\begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial x} \approx j \omega \epsilon_0 E_z & \text{dans l'air} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} \approx \sigma E_z & \text{dans le sol} \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Puisque le champ magnétique est constant sur l'interface air/sol, on obtient le rapport élevé  $(E_z)_{\text{air}} / (E_z)_{\text{Sol}} = \sigma/\omega \epsilon_0$

Les tests effectués en milieu stratifié [78][79][80] ont permis de mettre en

évidence les principaux paramètres qui influent sur l'erreur relative commise par rapport au champ analytique. La dimension verticale du pas des mailles est le paramètre principal car les champs varient très peu sur une même couche ou pas du tout pour un angle d'incidence nul. Le maillage régulier donne une meilleure précision car il ne détermine pas les valeurs de champ près des interfaces où se situe souvent l'erreur relative maximum. Les conditions aux limites de Dirichlet, fixant un champ exact sur le contour, donnent de meilleurs résultats que la condition Mixte en milieu stratifié. Par contre, l'angle d'incidence et la numérotation des noeuds du maillage suivant les lignes ou les colonnes ne modifient pas l'erreur relative faite sur le calcul des champs. Les zones d'erreur relative maximum correspondent souvent à des valeurs calculées de champ nul et ne reflètent pas les performances réelles du modèle numérique.

### **II-3.2.2) Comportement du champ électromagnétique en présence d'une anomalie en milieu stratifié et règles de maillage.**

Dans le cas de la propagation en onde plane, seule la présence d'interfaces verticales crée des sources localisées de champ électromagnétique qui rayonnent sur des distances élevées en très basses fréquences dans le sol ce qui diffère nettement de la propagation en milieu stratifié ou à une dimension.

Puisque le maillage régulier ausculte l'évolution des champs près des interfaces et afin de mailler de grandes distances, il est nécessaire d'utiliser un maillage à progression géométrique avec une raison suivant l'axe (oz) inférieure à celle suivant l'axe (ox) car l'atténuation du champ est plus importante suivant la profondeur. Le paramètre primordial dans la conception du maillage reste la dimension des mailles. De part et d'autre des interfaces, les dimensions de maille peuvent être identiques et de l'ordre du mètre pour une bonne définition du contour des anomalies. La dimension de la maille aux limites du domaine peut être de l'ordre de grandeur de la profondeur de pénétration et même supérieure si elle ne se trouve pas dans la zone perturbée. Par contre, au coeur de l'anomalie où les champs évoluent rapidement, la plus grande dimension de maille doit être inférieure au cinquième de la profondeur de pénétration du milieu considéré. La zone perturbée dans le voisinage de l'anomalie où le champ électromagnétique diffère de celui calculé en milieu stratifié détermine les distances à mailler autour de l'anomalie car les conditions aux limites ne sont valables qu'en onde plane. Cependant l'utilisation du modèle Mixte réduit le domaine à discrétiser par rapport au modèle de type Dirichlet ce qui est avantageux en temps calcul. L'utilisation de couches absorbantes comme le propose Mufti (1978) [59] pour le

rayonnement d'une ligne source à courant continu (100 , 1000 , 10000 mètres pour les dernières dimensions de maille) n'apporte rien à nos modèles.

De part et d'autre de l'anomalie, la symétrie de la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  et l'antisymétrie de la composante verticale de champ électrique  $E_z$  par rapport à l'anomalie sur la couche médiane sont dues au contournement de l'anomalie par l'onde incidente et sont traduites mathématiquement par les fonctions de Green utilisées par Hohmann (1971)[81]. Celles-ci correspondent au rayonnement d'un champ secondaire par l'anomalie dans son voisinage qui s'ajoute au champ primaire dû à la source. Plus localement, la discontinuité de la composante horizontale  $E_x$  au niveau d'une transition verticale vaut, comme pour la discontinuité de la composante verticale  $E_z$  au niveau d'une interface horizontale séparant deux milieux conducteurs, le rapport des résistivités.

### II-3.2.3) Comportement du champ électromagnétique en présence d'une transition Terre/mer par rapport au champ analytique calculé en milieu stratifié.

Pour valider la condition Mixte dans le cas d'une transition Terre/mer, il est nécessaire de comparer les valeurs de champ électromagnétique aux limites du domaine avec celles calculées en milieu stratifié par les formules de Wait (1970)[76]. Nous devons donc calculer sur l'intégralité du domaine d'étude le rapport (II.41).

$$\left| \frac{\phi_{\text{STRATIFIE}} - \phi_{\text{TRANSITION}}}{\phi_{\text{STRATIFIE}}} \right| \quad (\text{II.41}),$$

où  $\phi$  représente soit la composante transversale de champ magnétique  $H_y$  soit la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  calculées soit en milieu stratifié soit en présence d'une transition Terre/mer. La composante verticale de champ électrique  $E_z$  n'est pas présentée dans ce paragraphe, car elle est négligeable par rapport à la composante horizontale de champ électrique excepté au niveau de la transition côté terre en raison de la courbure des lignes de courant électrique. Le type de transition Terre/mer choisi pour cette étude de convergence est à pente constante représenté sur la figure (II.10).

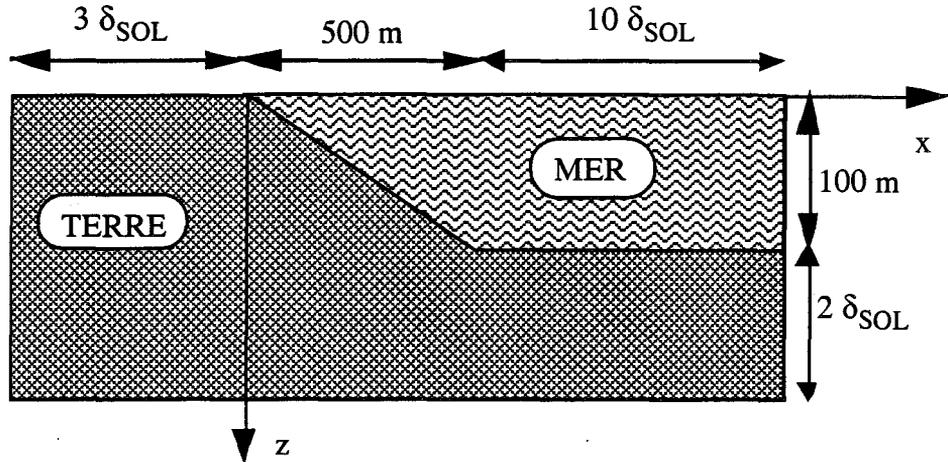


Figure (II.10): Modèle géologique de la transition Terre/mer considérée.

Le profil côtier correspond à une inclinaison constante égale à 20% sur 500 mètres. Les dimensions du domaine d'étude sont données sur la figure (II.10). L'onde incidente rasante en mode TM illumine cette transition aux fréquences 0,1, 1, 10 et 100 Hz. Sur les deux premières planches (II.2) et (II.3), les cartes de champ s'étendent sur la totalité du domaine d'étude décrit sur la figure (II.10). Par contre, sur les planches (II.4) et (II.5), la coordonnée verticale  $z$  est comprise entre une valeur nulle correspondant à la surface du sol ou de la mer et une profondeur égale à 200 mètres, ce qui permet d'analyser le comportement du champ électromagnétique dans la mer.

C'est dans l'étude du comportement du champ magnétique que l'on remarque une plus lente récupération des valeurs de champ du côté mer d'une transition Terre/mer par rapport à celles obtenues en milieu stratifié. Ceci est dû à ce que la mer est équivalente à une anomalie de longueur infinie constituant une source de champ électromagnétique très étendue. Les cartes de la planche (II.2) montrent de plus que ce phénomène est amplifié lorsque la fréquence augmente.

Côté terre, l'erreur relative sur le champ magnétique est constante par couche pour une distance horizontale supérieure à la profondeur de pénétration dans le sol et augmente pour les valeurs croissantes de la profondeur. Ceci est semblable à ce qui se passe en milieu stratifié. Aux limites droite et gauche du domaine, la planche (II.2) montre que la différence relative entre le champ magnétique calculé en milieu stratifié et en présence de la transition conserve des valeurs satisfaisantes devenant inférieures à  $10^{-3}$  à la surface. Au bas du domaine, ces valeurs atteignent  $5 \cdot 10^{-2}$  à gauche et  $10^{-1}$  à droite. Dans la partie centrale, la valeur de cette différence relative est importante et ne peut être utilisée comme test de convergence car on se situe dans une zone de transition entre un milieu

stratifié air/terre et air/mer/sol pour laquelle il n'existe pas de formulation analytique. L'étude du comportement de la composante horizontale de champ électrique, planche (II.3), par rapport à sa valeur en milieu stratifié montre que la différence relative aux limites droite et gauche du domaine est plus homogène car comprise entre une valeur inférieure à  $10^{-3}$  à la surface et inférieure à  $5 \cdot 10^{-2}$  au bas du domaine. Ce meilleur résultat est pourtant obtenu à partir du champ magnétique par simple dérivation verticale sur un élément rectangulaire élémentaire rappelée par la formule (II.42).

$$E_x \approx - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (\text{II.42})$$

Les planches (II.4) et (II.5) représentent l'erreur relative des champs pour une profondeur  $z$  comprise entre 0 et 200 mètres. Elles montrent un plus rapide rétablissement du champ électromagnétique en surface et aux limites droite et gauche du domaine. Par conséquent, le domaine d'étude peut être réduit si l'on désire connaître uniquement le comportement du champ électromagnétique en surface sans modifier les résultats obtenus précédemment. Les caractéristiques du domaine d'étude sont alors données par la figure (II.11).

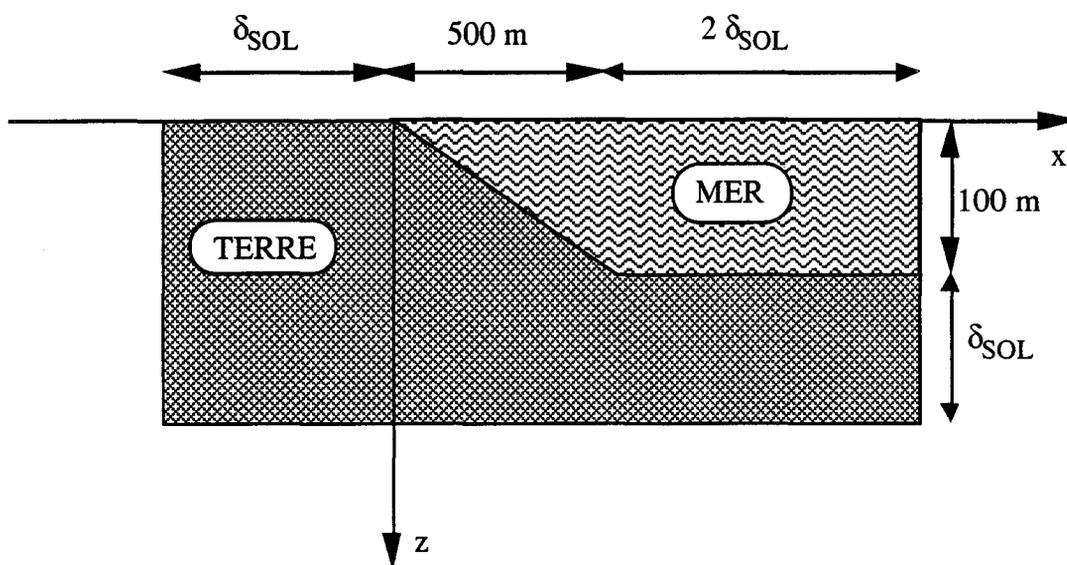


Figure (II.11): Domaine d'étude réduit.

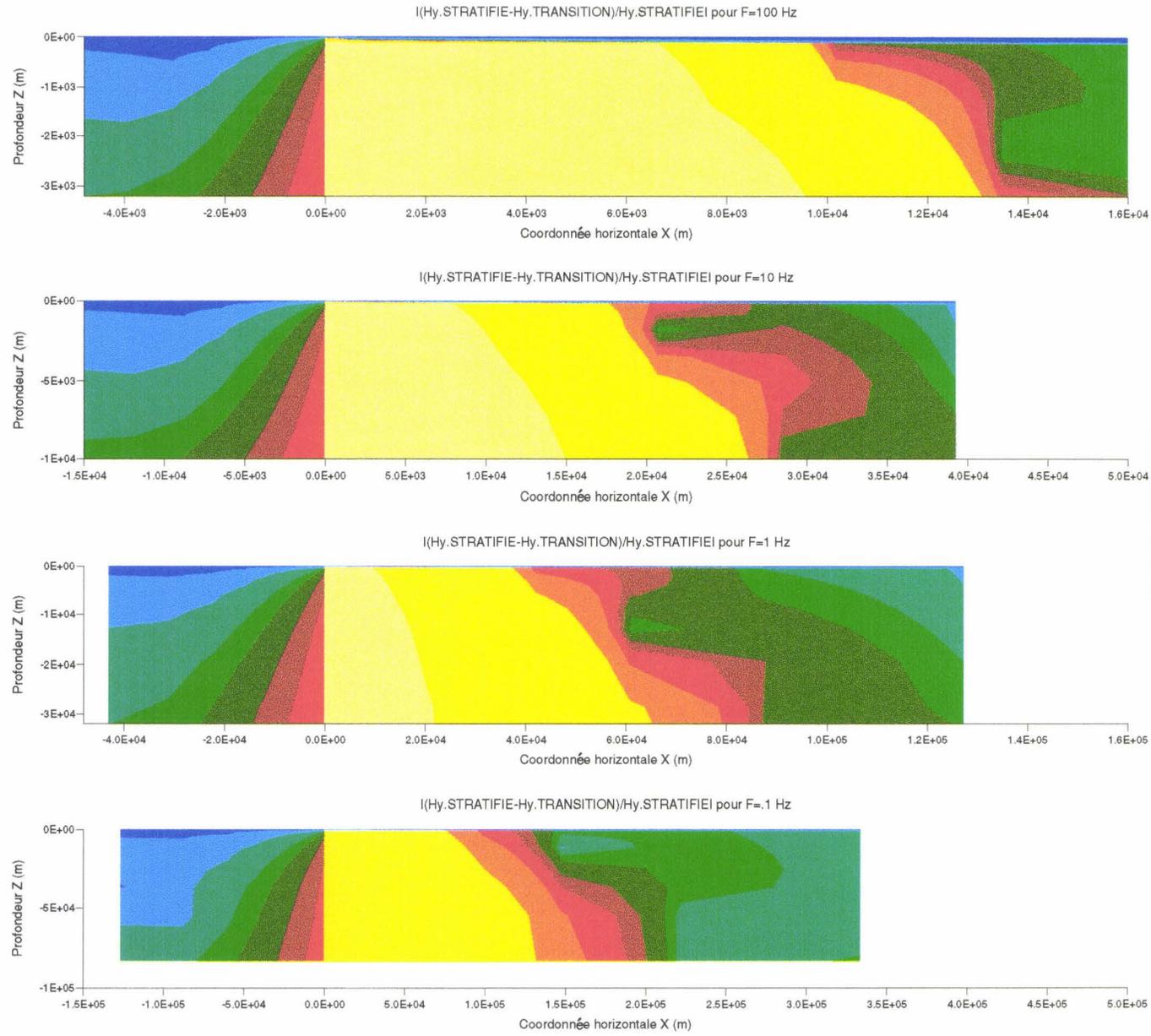


Planche (II.2): Convergence de  $H_y$  aux limites du domaine.

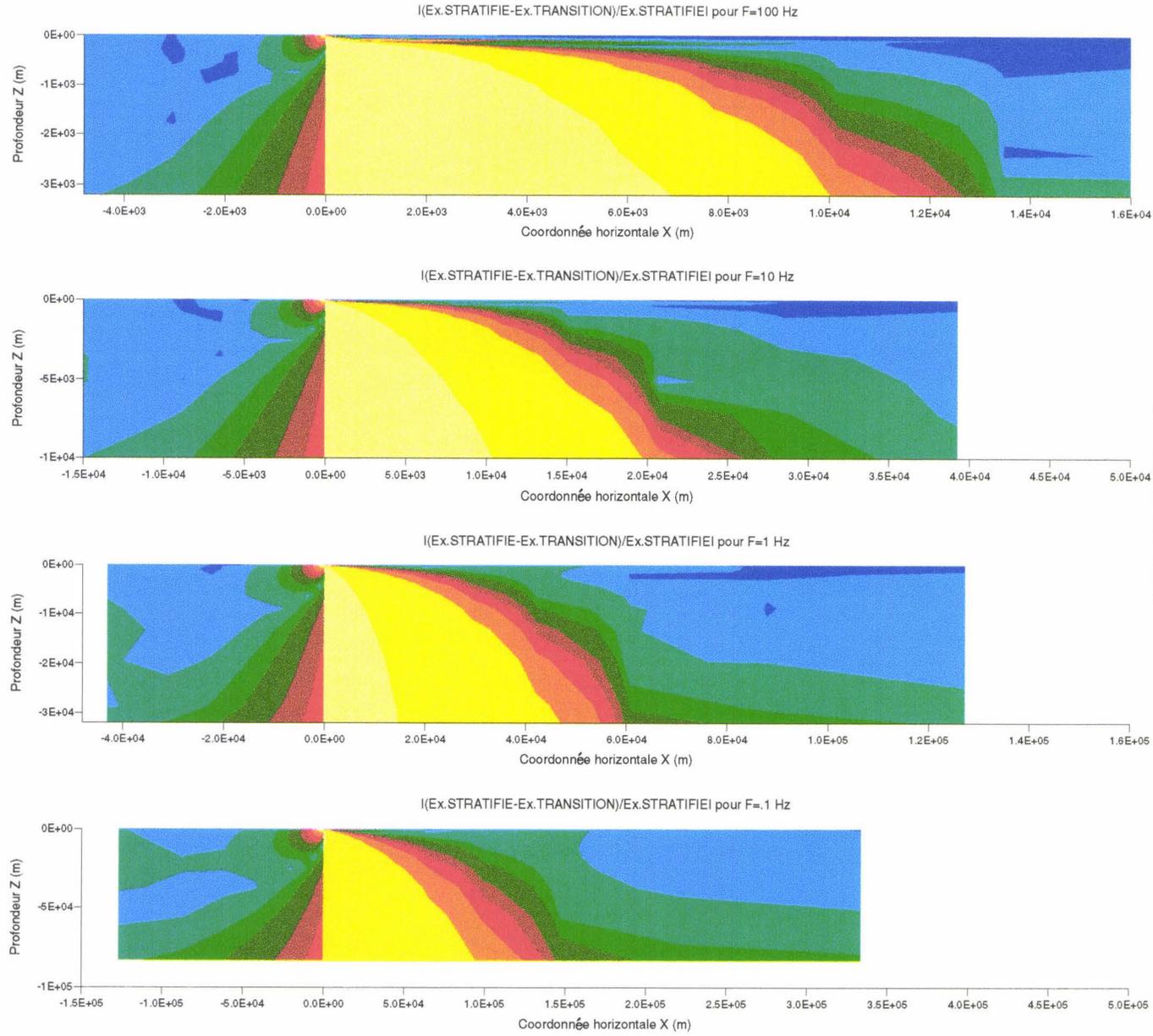


Planche (II.3) : Convergence de  $E_x$  aux limites du domaine.

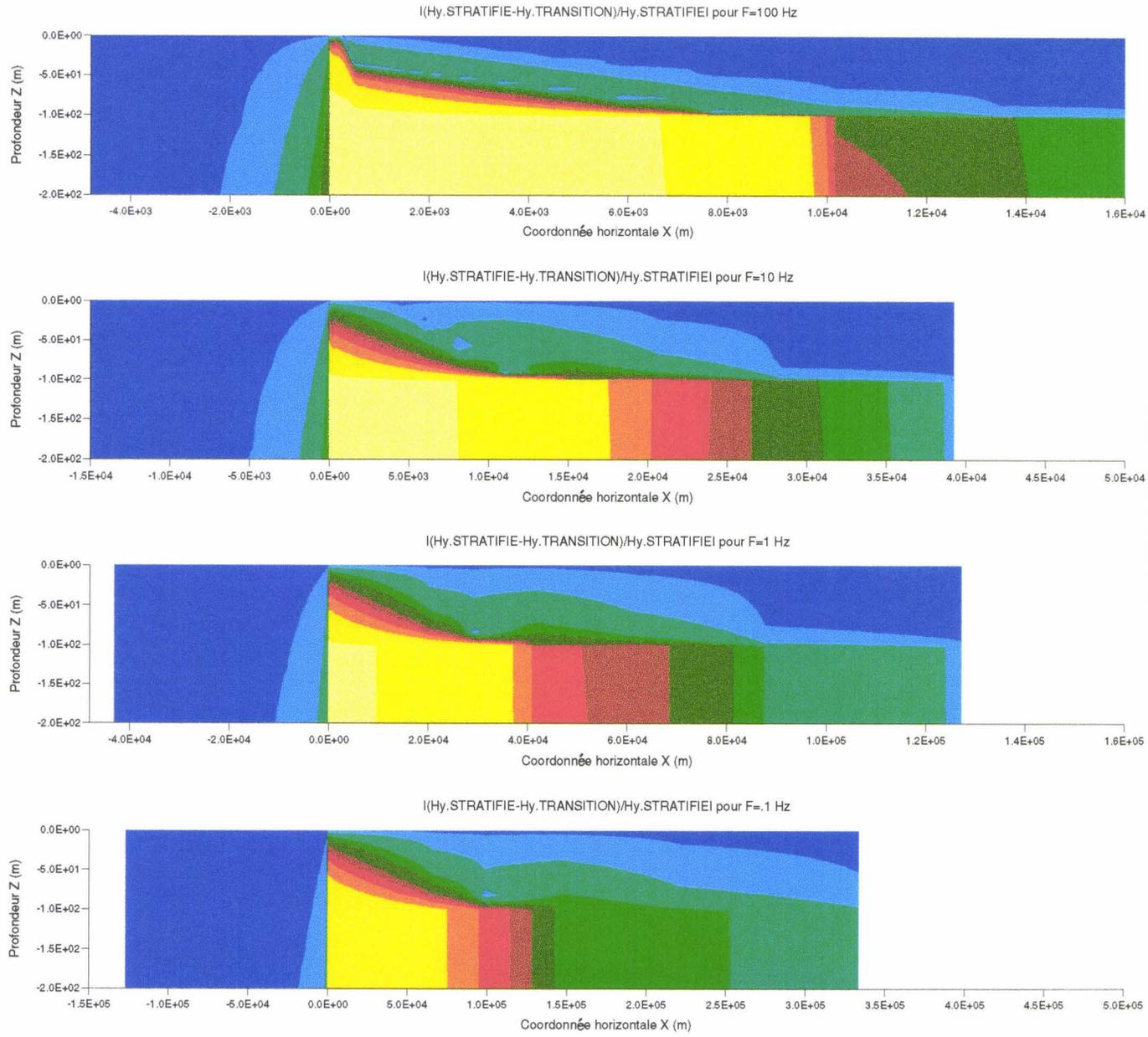


Planche (II.4): Convergence de  $H_y$  pour  $-200 \text{ m} < z < \text{à la surface}$ .

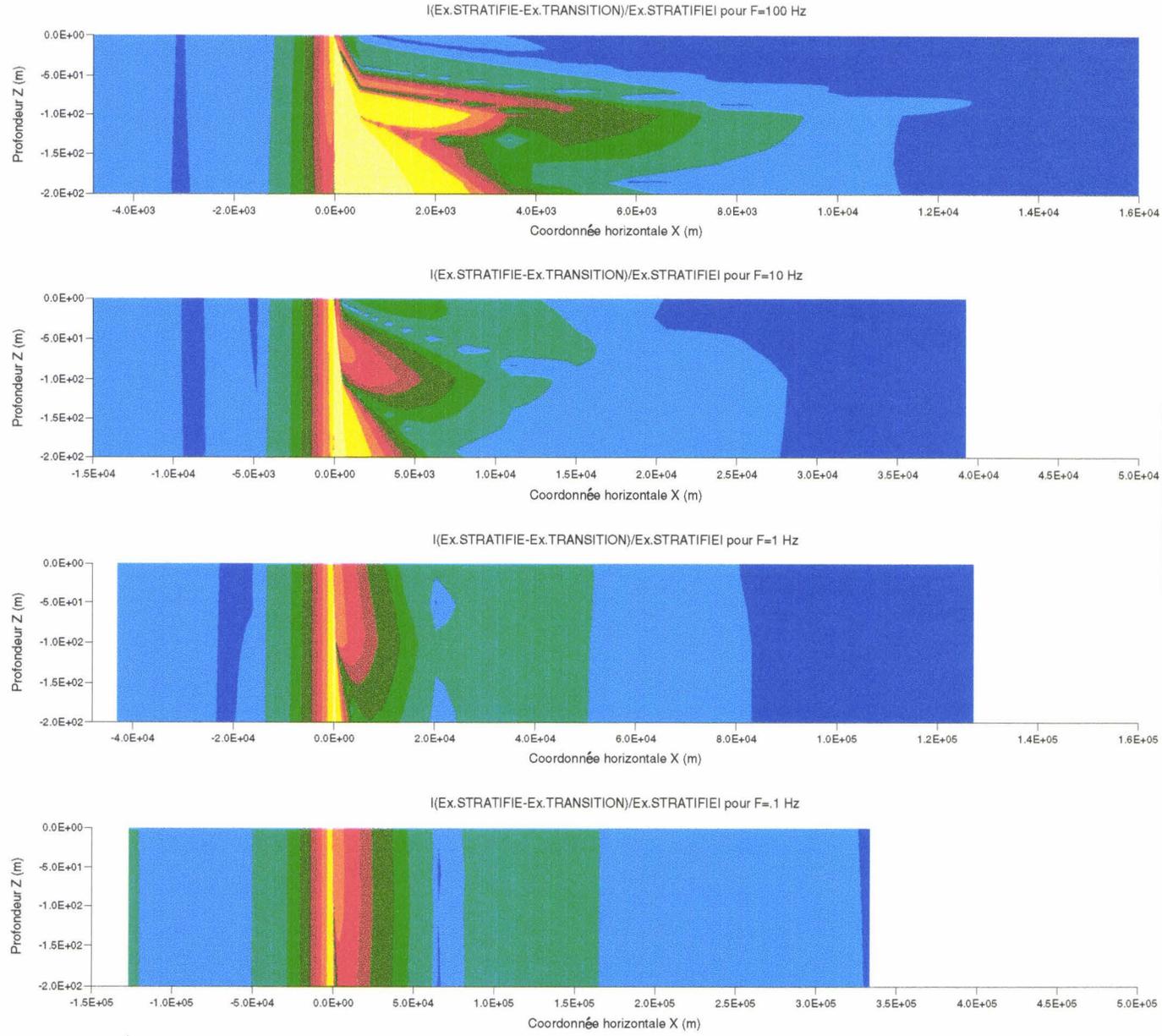


Planche (II.5) : Convergence de  $E_x$  pour  $-200 \text{ m} < z < \text{à la surface}$ .

II-3.3) Etude fréquentielle dans le cas d'une transition Terre/mer de différents profils côtiers.

L'onde incidente est rasante, comme il est décrit sur la figure (II.12), en mode TM avec l'amplitude du champ magnétique incident égale à 1 A/m en surface et pour quatre valeurs de fréquence 0,1 , 1, 10 et 100 Hz.

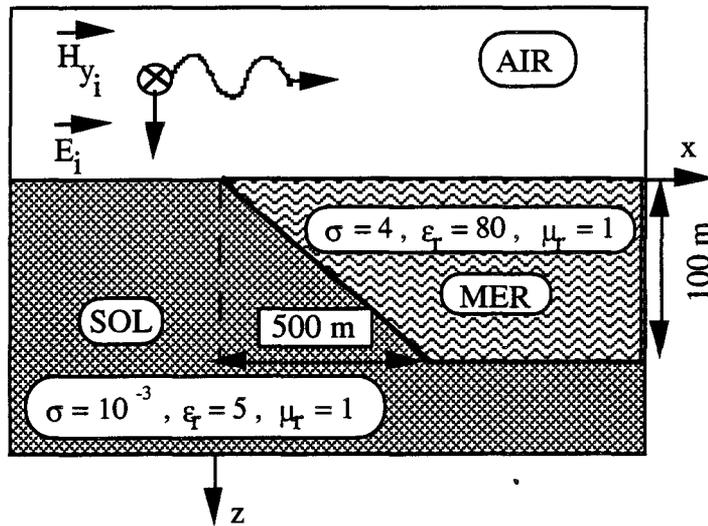


Figure (II.12): Profil côtier à pente constante d'une transition Terre/mer.

Les différents profils côtiers abrupts ou non abrupts représentant des transitions Terre/mer bidimensionnelles sont décrits sur les figures (II.13-a), (II.13-b), (II.13-c) et (II.13-d).

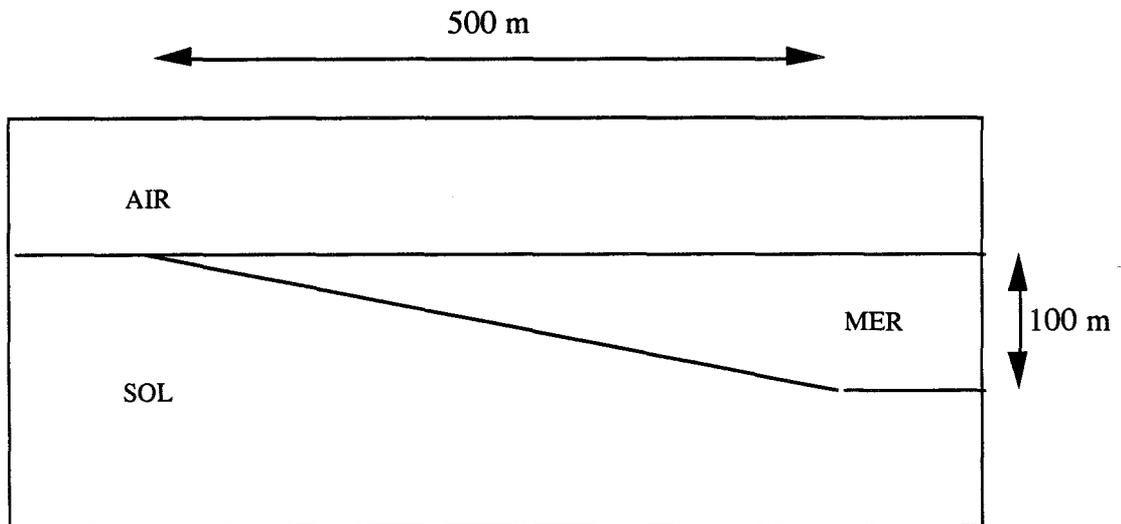


Figure (II.13-a): Profil côtier à pente constante ( 20%).

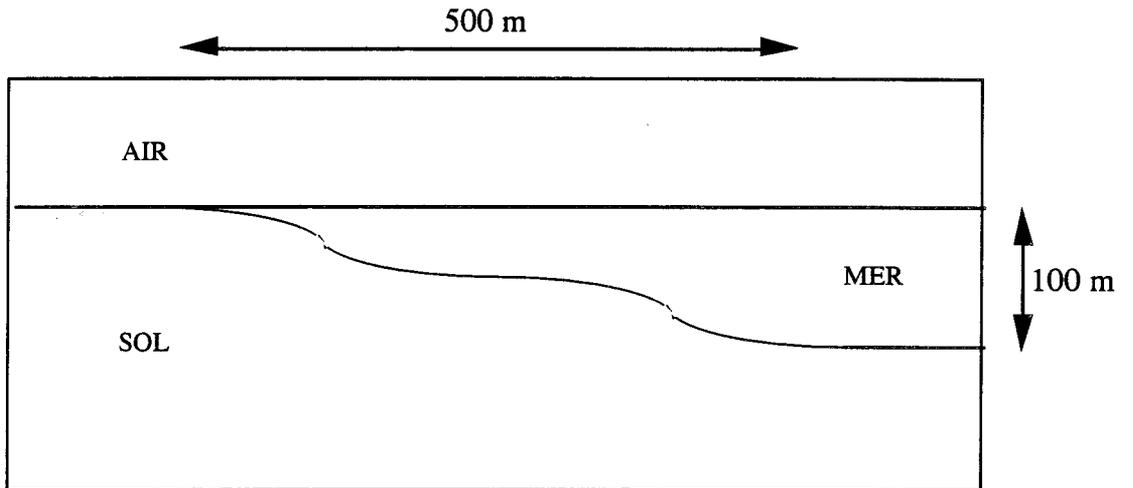


Figure (II.13-b): Profil côtier vallonné.

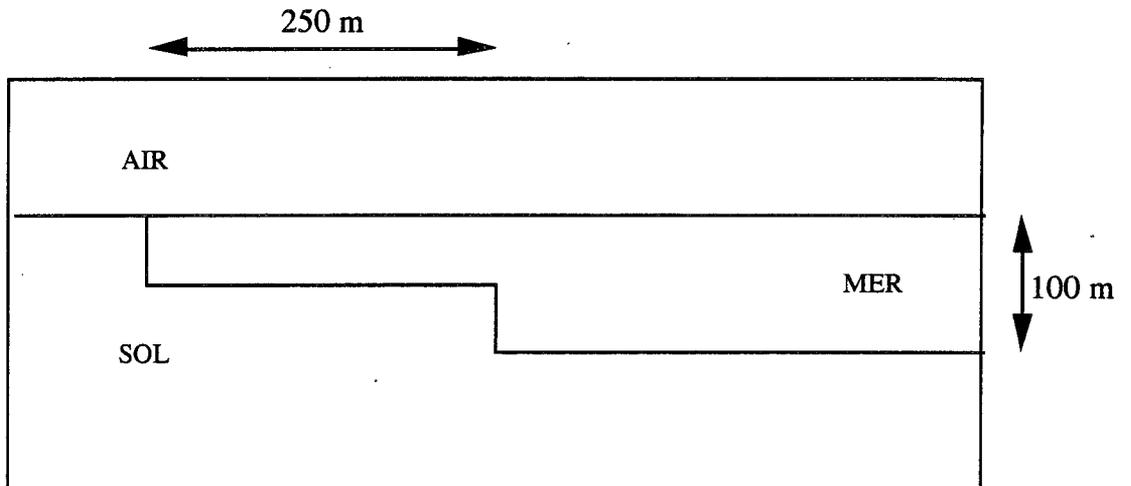


Figure (II.13-c): Profil côtier à double transition abrupte.

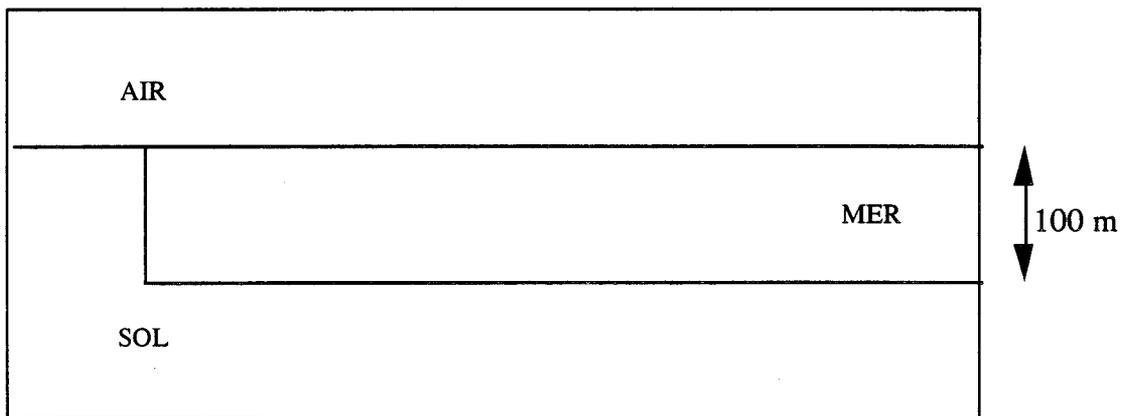


Figure (II.13-d): Profil côtier à transition abrupte.

Les différents profils côtiers cités précédemment sont classés dans l'ordre inverse de l'importance de la rupture de pente.

### II-3.3.1) Règles de maillage de pentes quelconques.

La méthode des différences finies utilisant des rectangles comme éléments de découpage se prête parfaitement pour simuler des transitions abruptes. Par contre, les transitions non abruptes nécessitent un découpage particulier des pentes avec des dimensions de marche en progression arithmétique ou géométrique afin d'utiliser une maille de départ de très faible dimension sans avoir recours à un grand nombre de couches et de tranches. On ne traite pas le cas des faibles pentes car, pour épouser la pente, le rapport des mailles de départ  $d_0/a_0$  doit être égal à  $d/h$  et si la distance  $d$  devient importante, la largeur de la maille de départ  $d_0$  n'est plus de faible dimension par rapport à la valeur de la profondeur de pénétration dans la mer, figure (II.14).

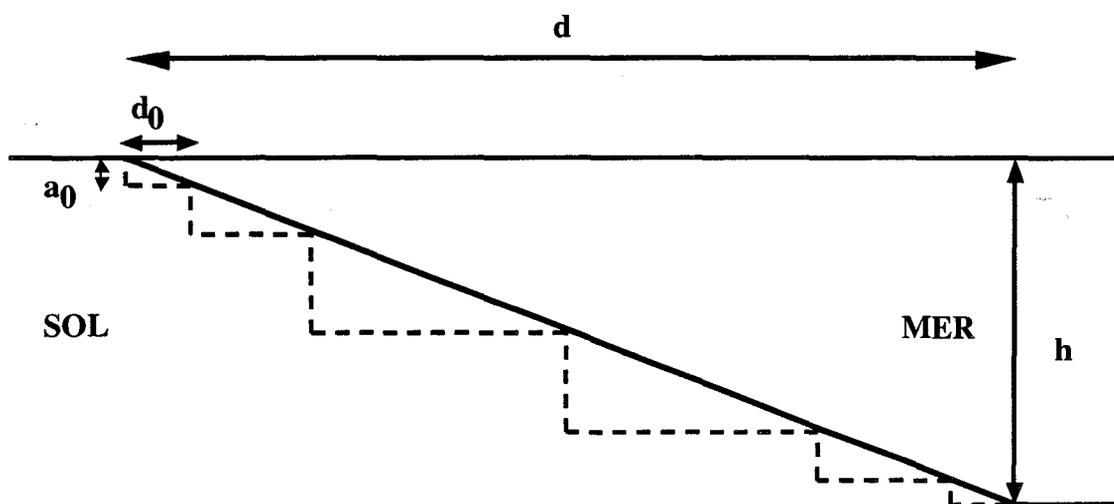


Figure (II.14): Maillage d'une pente constante en progression géométrique.

Cependant, des pentes de très faible inclinaison ont été testées sans avoir de problèmes de convergence. Par exemple, une pente à 2,5 % ou inclinée d'un angle de 1,4 degré par rapport à l'horizontale est réalisée par un dénivelé de 100 mètres sur une distance horizontale de 4 km. Cette possibilité de simuler de très faibles inclinaisons de pente vient du fait que la finesse du maillage horizontal peut être moins stricte que celle du maillage vertical à cause de l'atténuation plus importante des champs suivant la profondeur. En effet, l'illumination de la transition par une onde plane TM impose un champ magnétique constant en surface. Les différentes pentes présentées ici s'étendent sur une distance

horizontale de 500 mètres et un dénivelé de 100 mètres, ce qui correspond à une pente constante à 20% ou à un angle d'inclinaison égal à 11,3 degré. Pour le découpage de cette pente, le nombre de mailles est choisi identique suivant les deux axes et égal à 100. Toutefois, ce nombre de mailles peut être réduit de moitié sans perdre l'allure générale des cartes de champ obtenu. Le tableau suivant récapitule les dimensions de maille extrêmes au niveau des pentes discrétisées. La plus petite dimension de maille correspond aux valeurs des mailles de démarrage des pentes suivant les deux axes.

Type de pente:	Dimension de la plus petite maille	Dimension de la plus grande maille
Constante: axe horizontal	1 m	9 m
axe vertical	0,2 m	1,79 m
Vallonnée: axe horizontal	4 m	6,14 m
axe vertical	0,2 m	2,73 m

Les dimensions de maille sont calculées à partir de la distance à mailler, du type de progression des dimensions de maille ( maillage régulier, arithmétique, géométrique, logarithmique) et de la dimension de la maille de départ. Ces paramètres déterminent le nombre de maille à fixer afin de vérifier que les dimensions de maille ne soient pas trop importantes dans les zones où les champs évoluent rapidement et que le profil des pentes soit suffisamment défini. Par exemple, la transition à pente constante est obtenue suivant l'axe horizontal à partir de 100 mailles en progression géométrique symétrique sur une distance de 500 mètres avec une maille de départ égale à un mètre et suivant l'axe vertical à partir de 100 mailles en progression géométrique symétrique sur une distance de 100 mètres avec une maille de départ égale à 0,2 mètres.

### II-3.3.2) Résultats des simulations effectuées.

Nous devons nous contenter de la carte de champ électromagnétique sous la surface du sol ou de la mer car il a été impossible d'obtenir la convergence du champ électrique dans l'air. Il faut rappeler que déjà en milieu stratifié, on avait recours à la double précision, c'est-à-dire 16 chiffres significatifs, pour obtenir le champ électrique dans l'air par simple dérivation du champ magnétique car, pour 1 Hz, la longueur d'onde dans l'air est de 300 000 km. Par contre, pour une fréquence élevée de l'ordre de 1 GHz, les essais ont révélé que la double précision n'était pas nécessaire pour obtenir le champ électrique correctement dans l'air. La

composante verticale de champ électrique n'est pas reproduite dans ce chapitre car elle est très inférieure à sa composante horizontale dans un milieu conducteur (dans un rapport 100 à 1000).

Les planches (II.6) et (II.7) représentent les variations de l'amplitude de la composante horizontale de champ électrique à la surface du domaine dans le milieu réel simulé et en milieu stratifié. Pour le milieu réel simulé, le cas d'une transition abrupte est considéré. Sur les graphiques, les distances horizontales ont été choisies de manière à mettre en évidence les zones de convergence des deux courbes. On constate que le rétablissement du champ électrique  $E_x$  à sa valeur à la surface d'un milieu stratifié, coté mer, dépend de la profondeur de pénétration soit de la mer pour les fréquences 10 et 100 Hz soit du sol pour 0,1 et 1 Hz. On en déduit que l'effet du sol sur le comportement du champ électromagnétique en surface et côté mer ne se fait plus sentir au-dessus de la fréquence 10 Hz. Celle-ci correspond à une profondeur de pénétration dans l'eau de mer égale à 80 m qui est inférieure à la hauteur d'eau de mer égale à 100 mètres.

Par la suite, on s'intéressera à l'effet des caractéristiques géométriques de la transition sur le champ électrique dans la gamme des très basses fréquences. Sur la planche (II.8), les résultats obtenus dans le cas d'une transition abrupte sont comparés avec ceux obtenus dans le cas d'une transition non abrupte inclinée à 45 degrés. La transition en pente par un effet de pointe déplace le minimum de la composante horizontale de champ électrique vers le large proportionnellement à l'inverse de la fréquence. Ce phénomène peut aussi s'expliquer par la variation de l'épaisseur de la couche d'eau de mer qui nous place dans les deux situations suivantes. La première est celle où la profondeur de pénétration dans l'eau de mer est inférieure à la couche d'eau de mer pour l'abscisse considérée. Dans ce cas, l'influence du sol n'est pas prépondérante. Dans le cas contraire, l'influence du sol n'est pas négligeable et la valeur du champ électrique est augmentée. Le champ électrique est toujours proportionnel à la fréquence comme en milieu stratifié. Prenons le cas d'un demi-milieu air/sol où nous fixons le champ magnétique en surface à une valeur indépendante de la fréquence. Dans le milieu conducteur, le champ magnétique s'exprime par la formule (II.44).

$$H = H_{\text{Surface}} e^{-\frac{z}{\delta_{\text{SOL}}}} \quad (\text{II.44})$$

où  $z$  est la coordonnée verticale et  $\delta_{\text{SOL}}$  est la profondeur de pénétration dans le sol. Comme le champ électrique est égal à la dérivée du champ magnétique, il est proportionnel à la racine carrée de la fréquence à conductivité fixée du milieu de

propagation considéré comme le montre les équivalences (II.45).

$$E_x \approx \frac{\partial H}{\partial z} \approx -\frac{H}{\delta_{\text{sol}}} \approx \sqrt{\text{fréquence}} \quad (\text{II.45}).$$

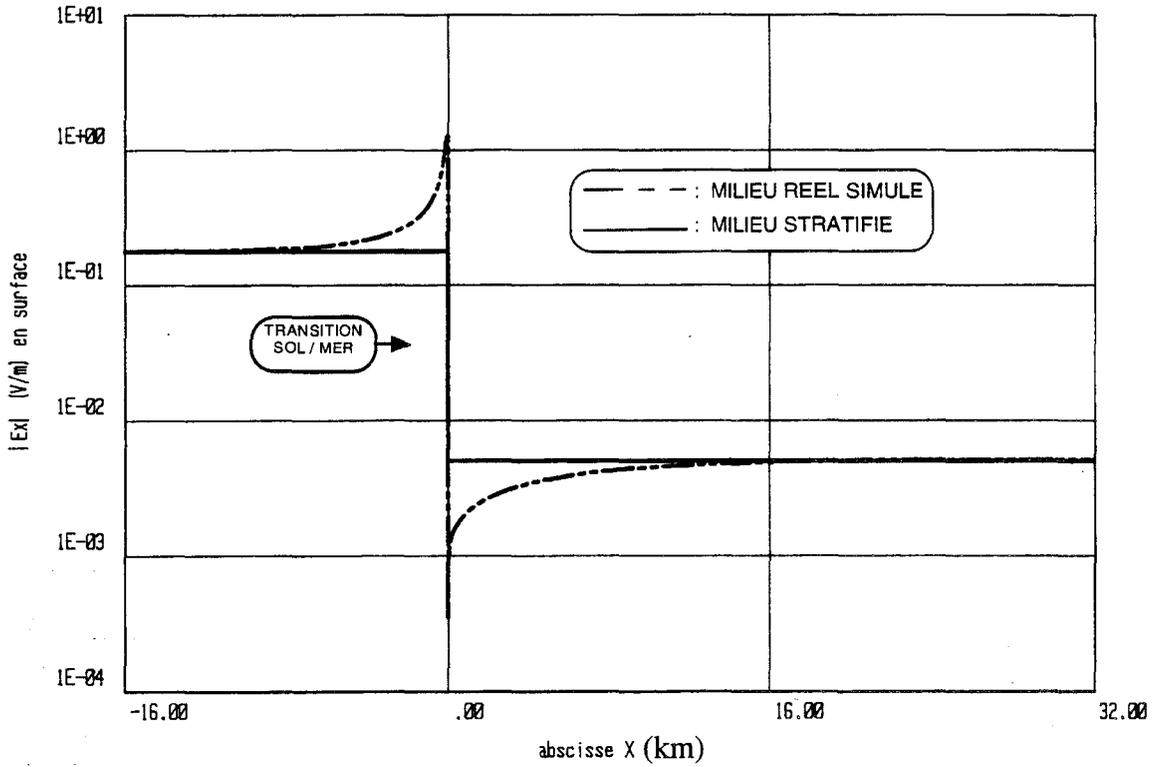
Sur les planches (II.9), (II.10), (II.11) et (II.12), on représente les cartes de champ de la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  au niveau de quatre profils côtiers de transition Terre/mer et pour quatre fréquences 0,1, 1, 10 et 100 Hz. L'échelle de valeur de champ électrique reste la même quels que soit le profil et la fréquence. Elle est choisie en progression géométrique de raison égale à  $\sqrt[3]{10} \approx 2,15$ . Pour 10 et 100 Hz, on constate la symétrie des cartes de la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  dans la mer par rapport à un axe situé à mi-profondeur dans la mer avec un minimum de champ à mi-profondeur. Les zones d'ombre dans la mer existent uniquement au niveau des transitions abruptes. Dans le sous-sol marin, le type de profil abrupt ne favorise pas la propagation des ondes électromagnétiques contrairement au profil à pente constante où vallonnée. Une plus forte dynamique des champs est observée dans la mer pour les fréquences hautes avec des valeurs beaucoup plus élevées à proximité de la surface et des portions de sol non verticales. Par exemple, pour 100 Hz, la dynamique est de 100 et pour 10 Hz, elle n'est plus que de 10. Par contre, pour 0,1 et 1 Hz, la dynamique est plus réduite avec des valeurs de champ plus faibles et des zones d'ombre plus importantes apparaissent au niveau des transitions abruptes car la profondeur de pénétration dans l'eau de mer est augmentée.

La compréhension des phénomènes électromagnétiques au niveau d'une transition Terre/mer est facilitée par la représentation du vecteur de Poynting afin de suivre le chemin emprunté par les ondes. Il s'exprime par la formule (II.46).

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \left( \vec{E} \wedge \vec{H}^* \right) \quad (\text{II.46})$$

Pour les mêmes profils côtiers sous-marins et les mêmes fréquences, le vecteur de Poynting est représenté sur les planches (II.13), (II.14), (II.15) et (II.16). L'échelle en puissance est commune à toutes les fréquences et choisie en progression géométrique de raison  $\sqrt{10} \approx 3,33$ . Pour les fréquences allant de 0,1 à 10 Hz, le flux de puissance pénètre dans la mer uniquement par l'interface air/mer avec des valeurs voisines et des zones d'ombre apparaissent au niveau des transitions abruptes. Par contre, sur la planche (II.16), correspondant à une fréquence de 100 Hz, la puissance pénètre dans la mer à la fois par l'interface air/mer et sol/mer. Ceci a pour effet de faire tourbillonner les lignes de courant suivant le profil de la côte dans la couche d'eau de mer et une plus forte dynamique de la puissance rayonnée est observée.

CHAMP ELECTRIQUE  $E_x$  pour une Frequence=1 Hz



CHAMP ELECTRIQUE  $E_x$  pour une Frequence=.1 Hz

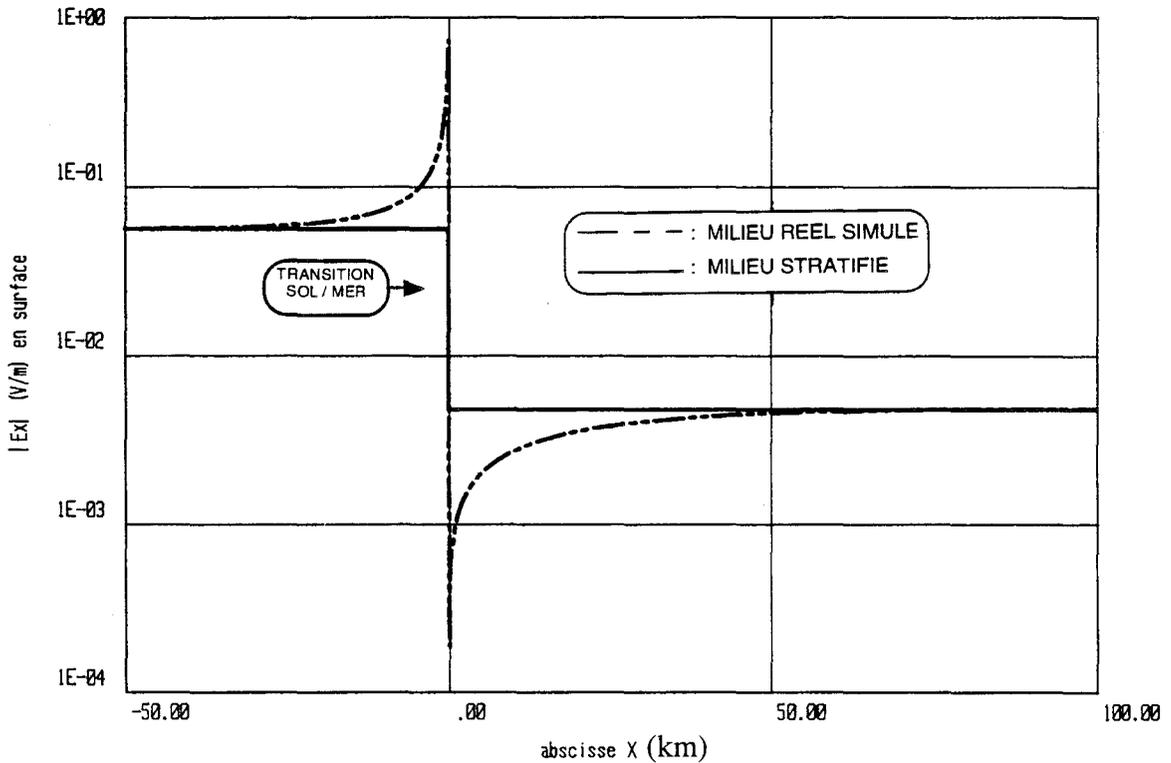
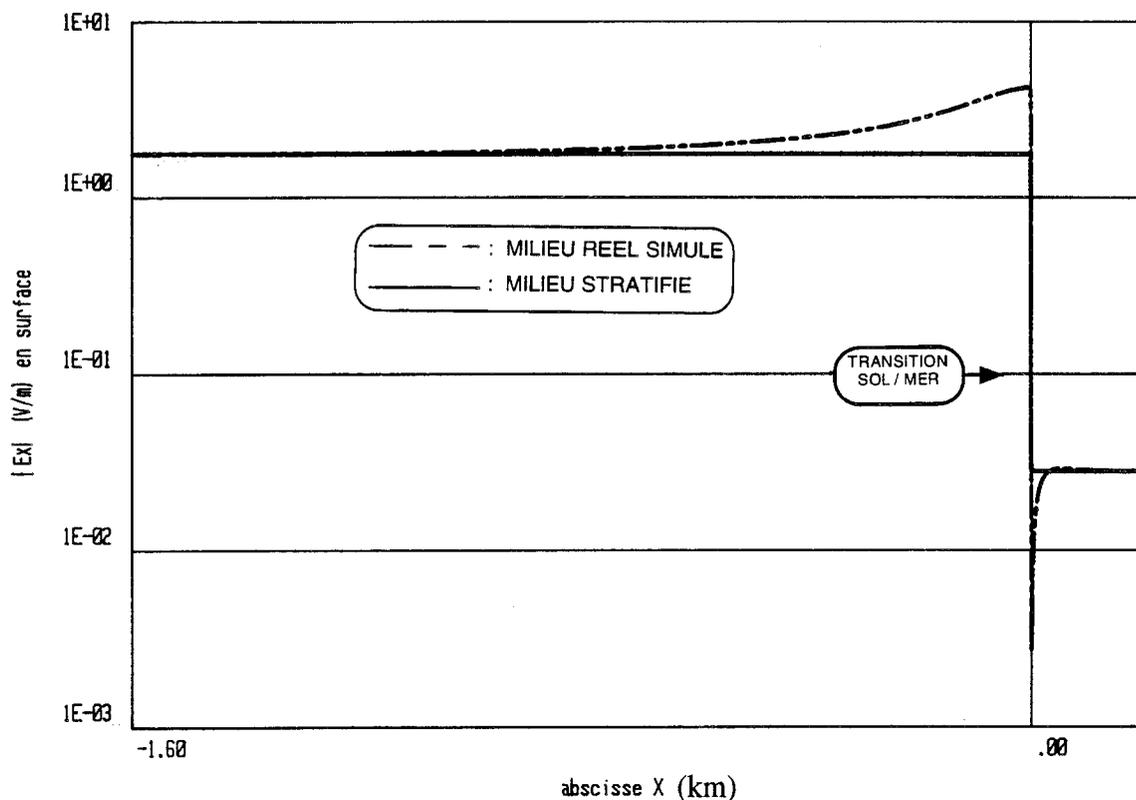


Planche (II.6):  $E_x$  en surface d'une transition abrupte pour 0,1 et 1 Hz.

CHAMP ELECTRIQUE  $E_x$  pour une Frequence=100 Hz



CHAMP ELECTRIQUE  $E_x$  pour une Frequence=10 Hz

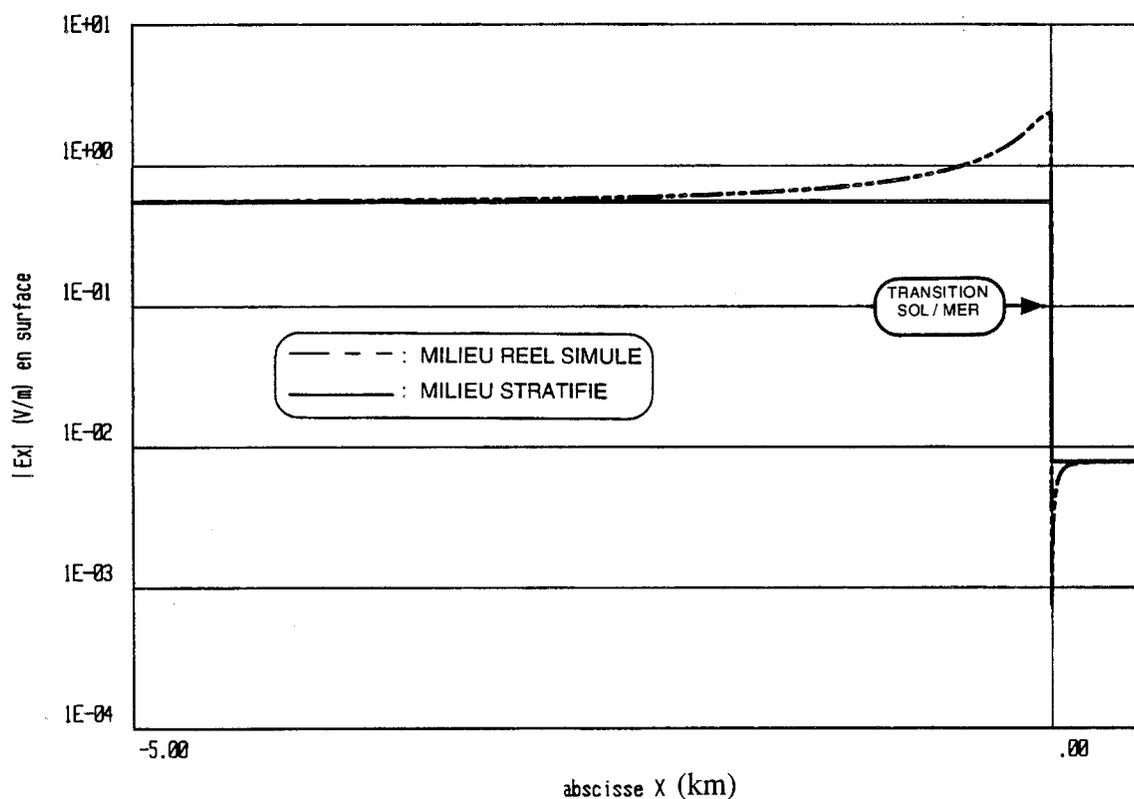
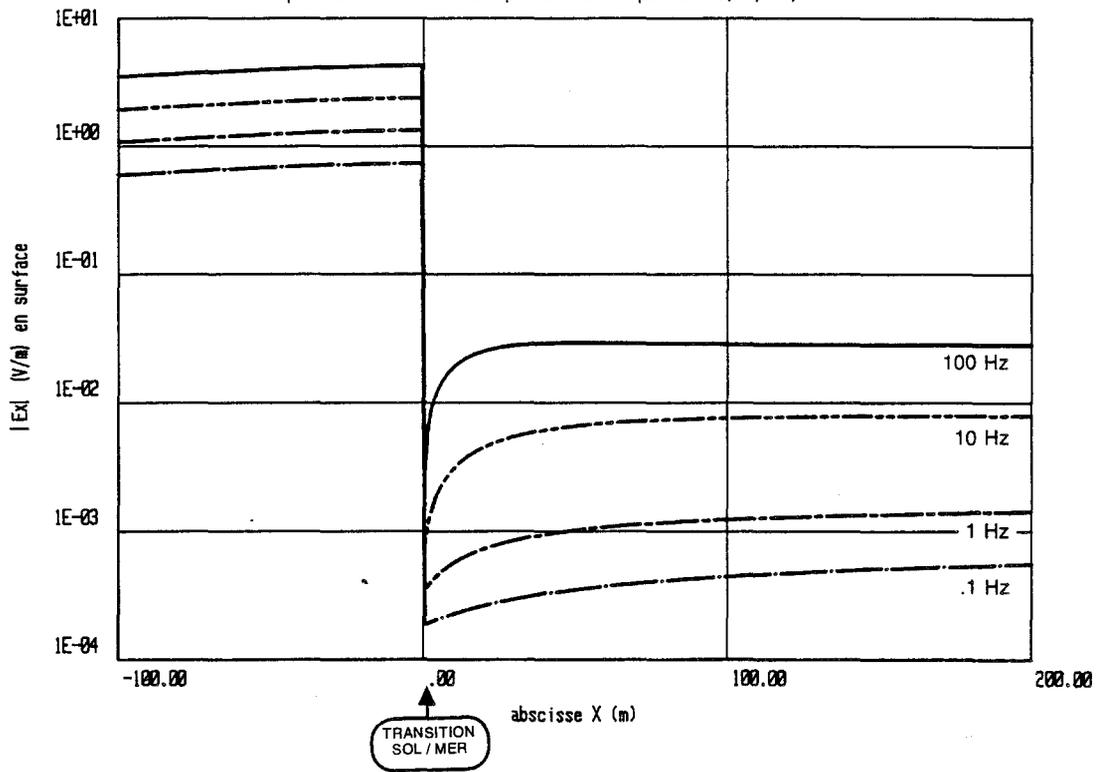


Planche (II.7):  $E_x$  en surface d'une transition abrupte pour 10 et 100 Hz.

COMPOSANTE HORIZONTALE DU CHAMP ELECTRIQUE:  $E_x$   
 pour une transition abrupte et une frequence= .1,1.,10.,100 Hz



COMPOSANTE HORIZONTALE DU CHAMP ELECTRIQUE:  $E_x$   
 pour une transition non abrupte et une frequence= .1,1.,10.,100 Hz

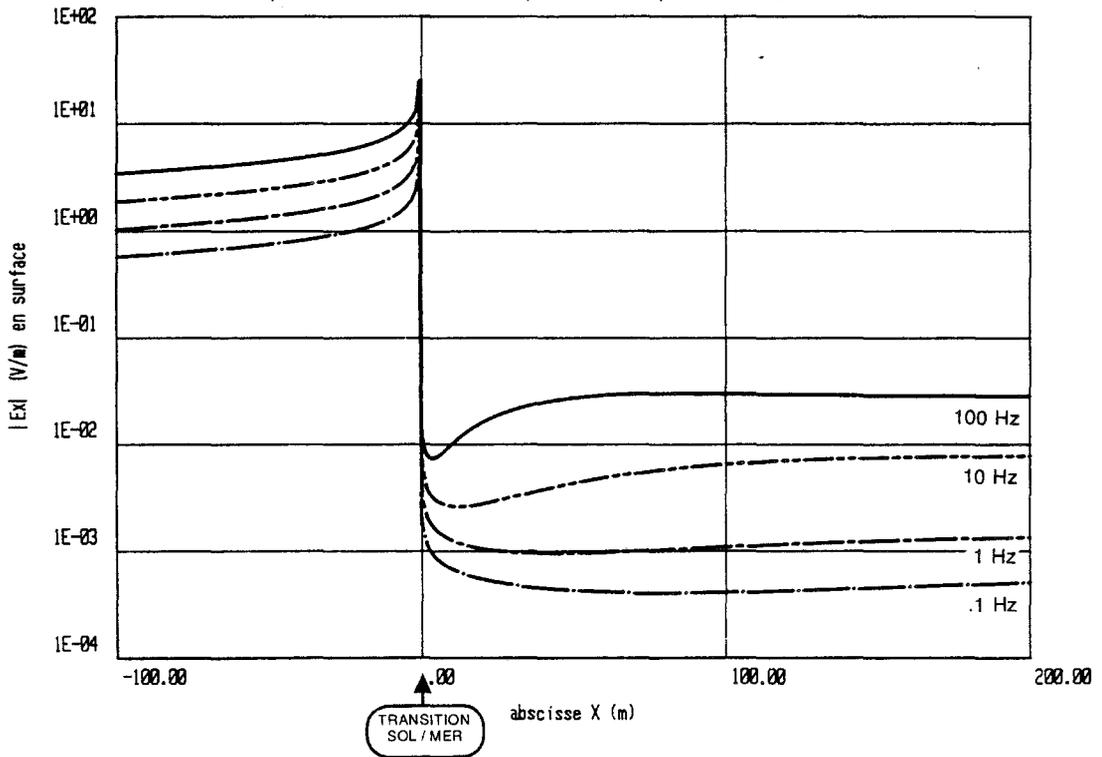


Planche (II.8):  $E_x$  en surface d'une transition abrupte et en pente ( $45^\circ$ ).

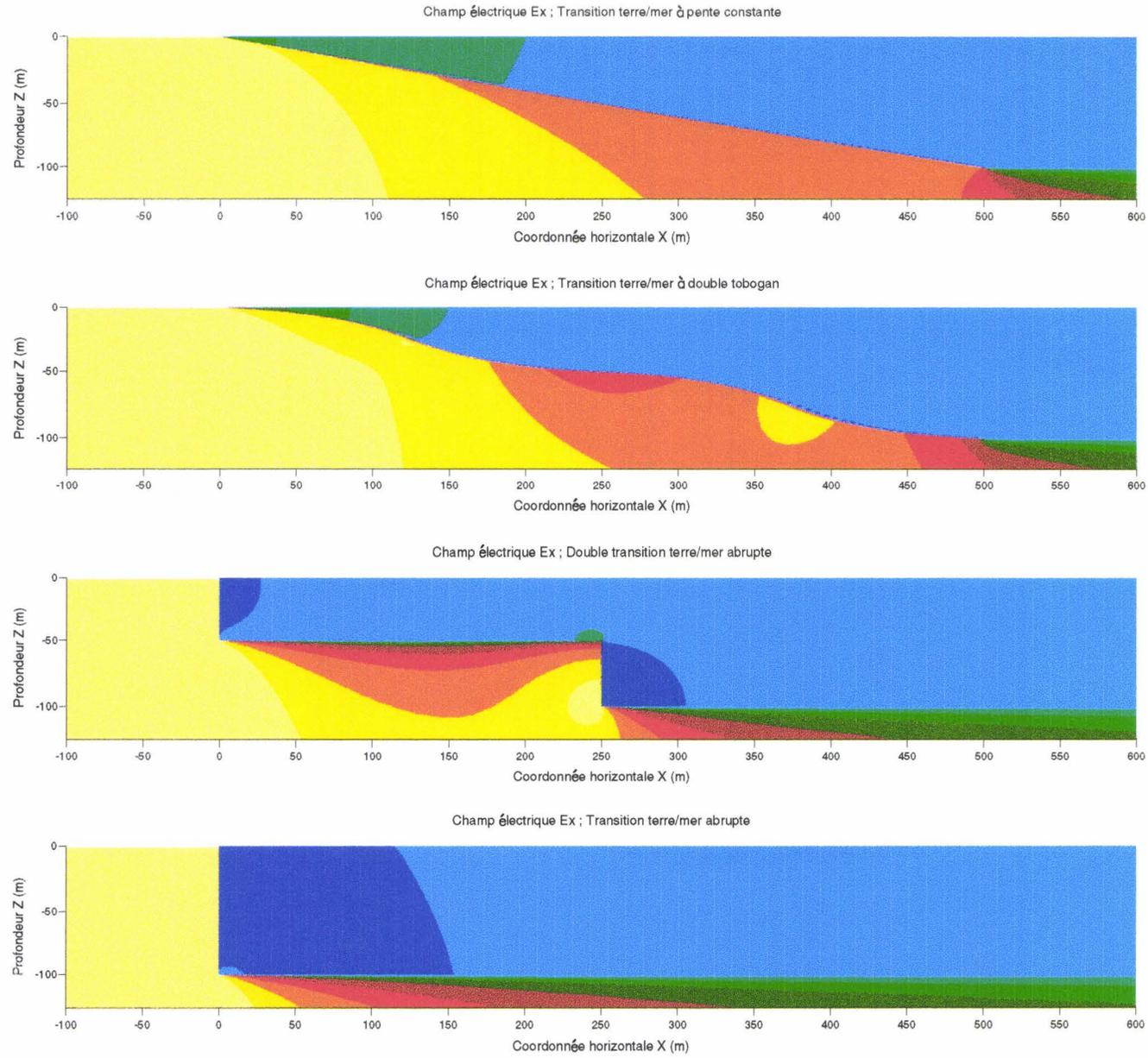


Planche (II.9): Carte de champ électrique pour 0,1 Hz.

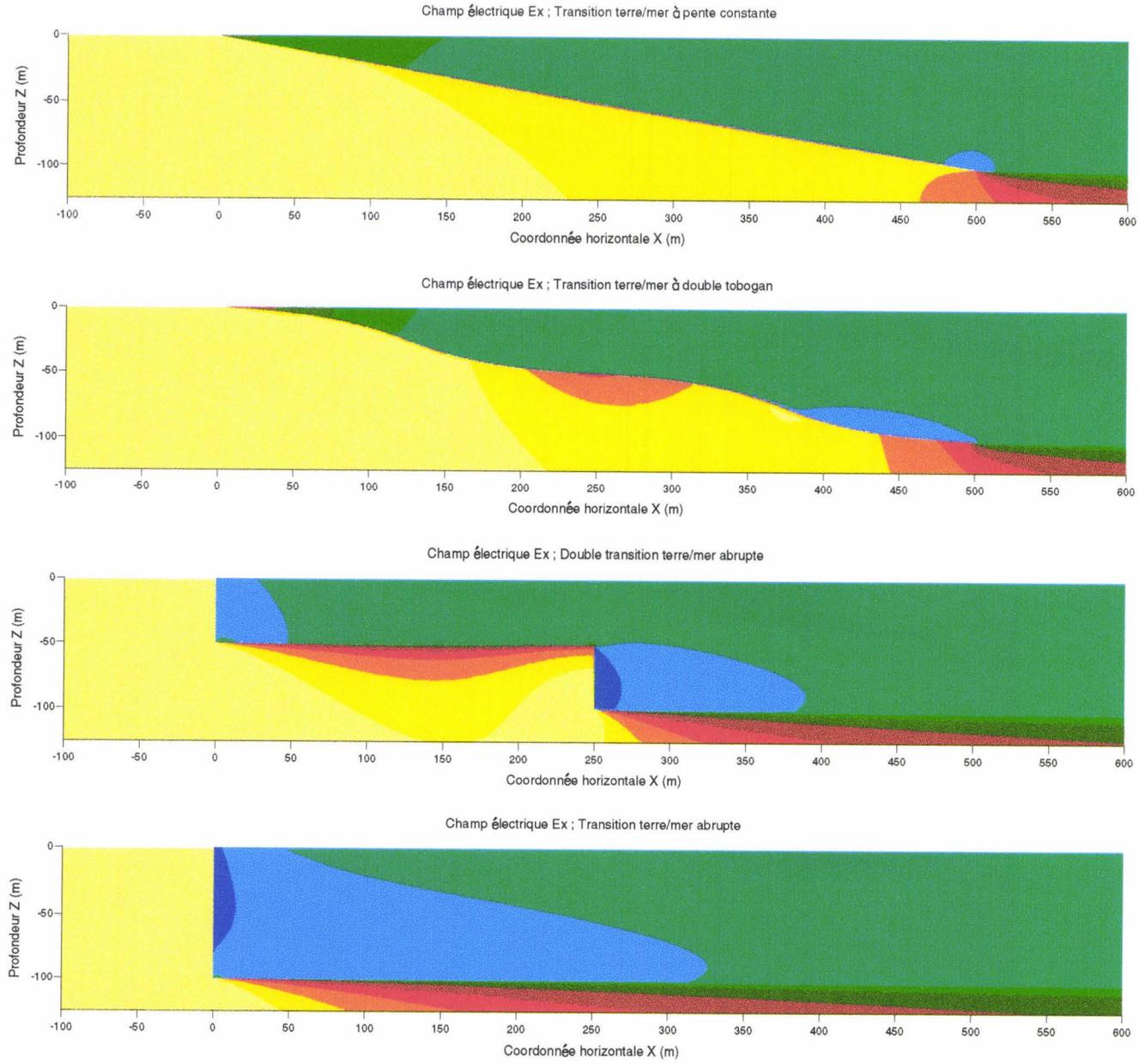


Planche (II.10): Carte de champ électrique pour 1 Hz.

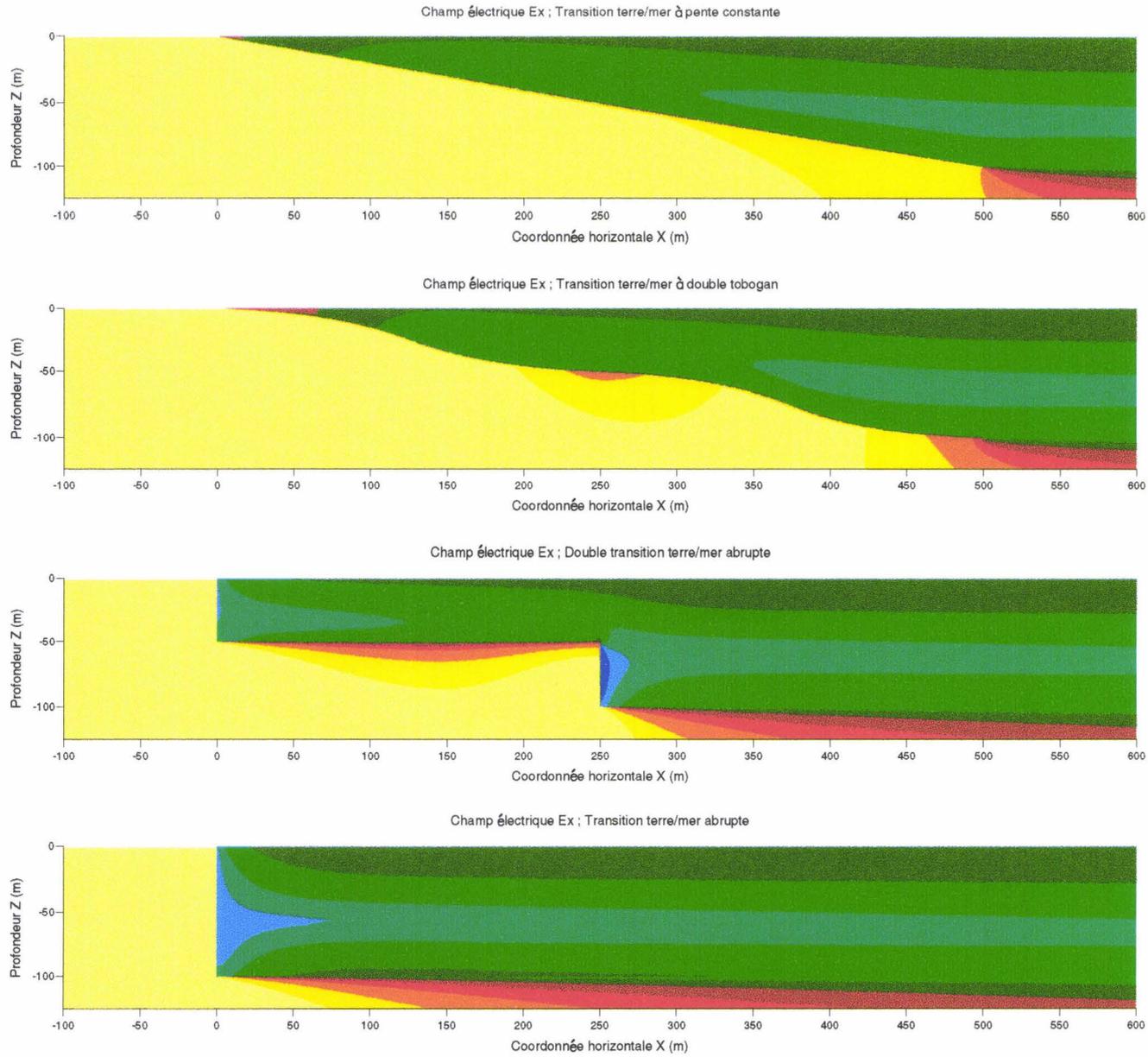


Planche (II.1.1): Carte de champ électrique pour 10 Hz.

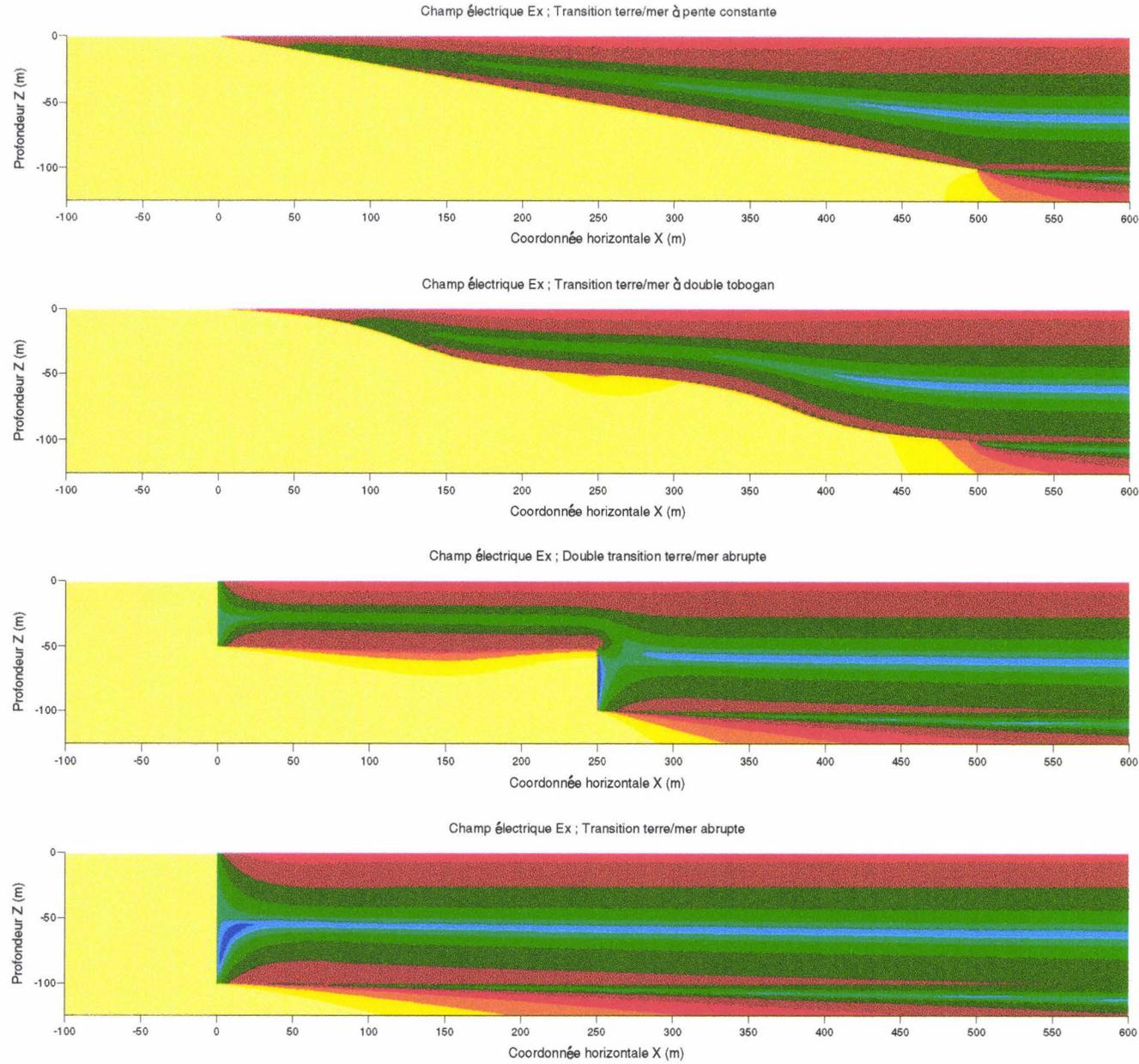


Planche (II.12): Carte de champ électrique pour 100 Hz.

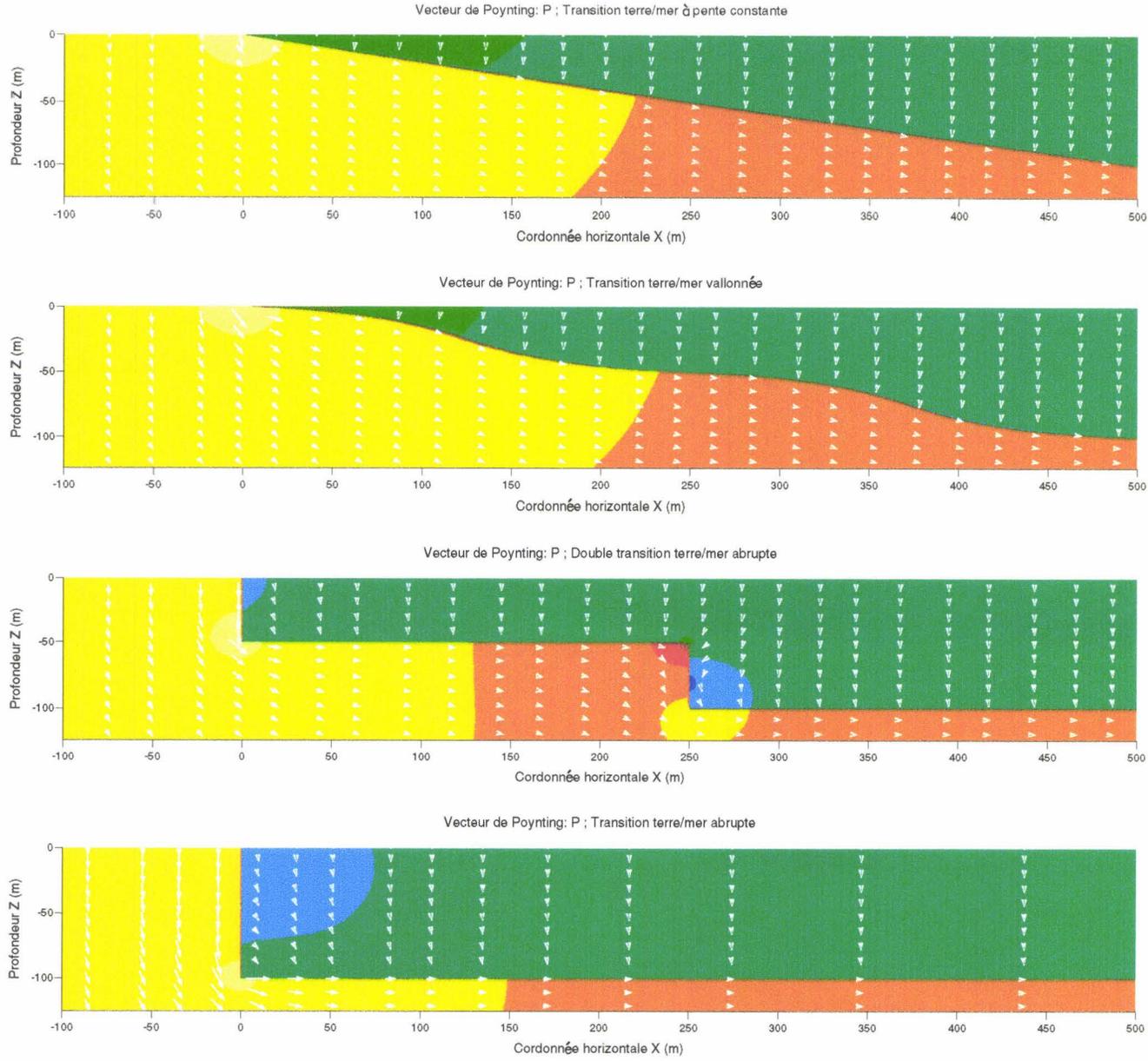


Planche (II.13): Carte du vecteur de Poynting pour 0,1 Hz.

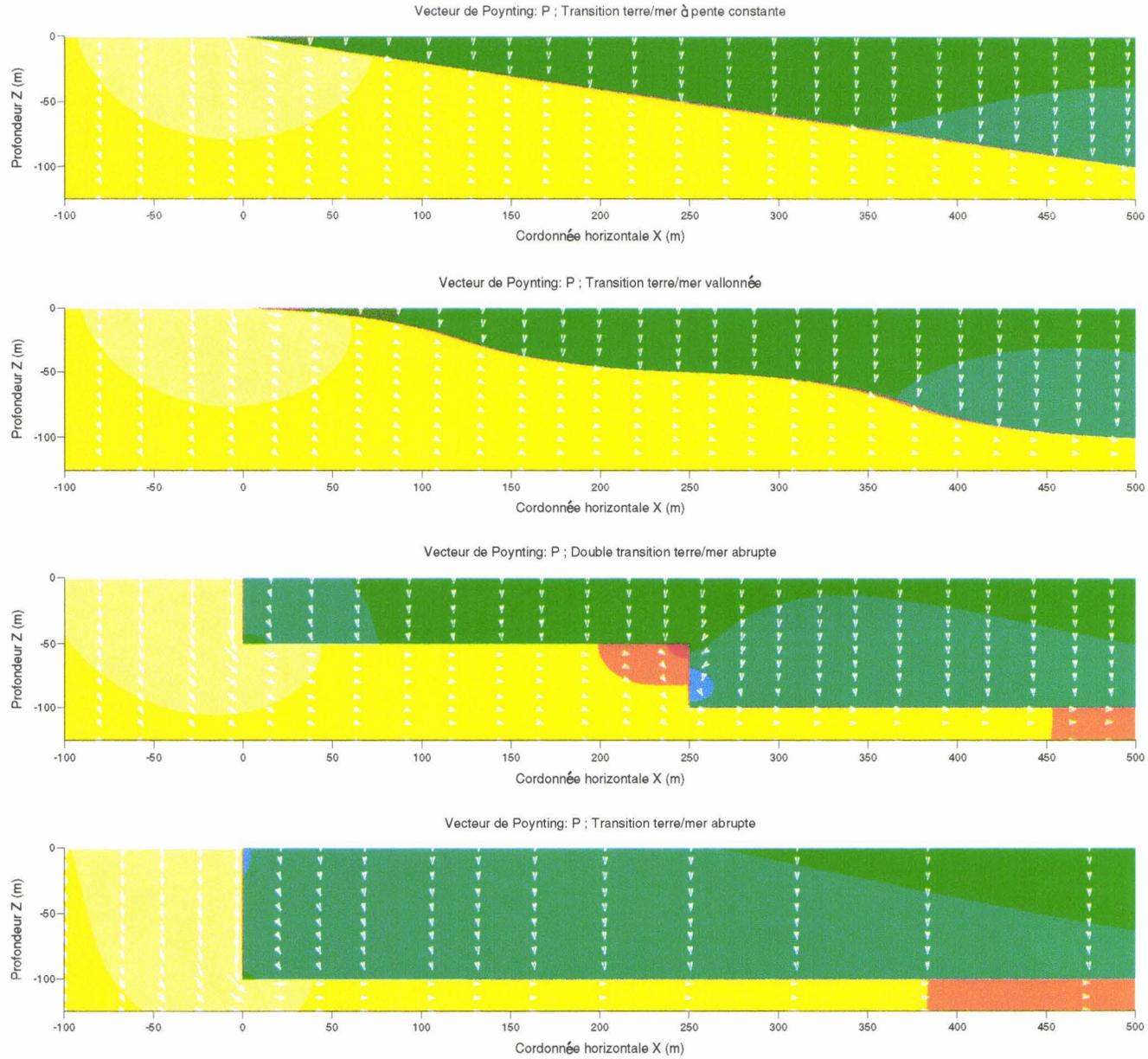


Planche (II.14): Carte du vecteur de Poynting pour 1 Hz.

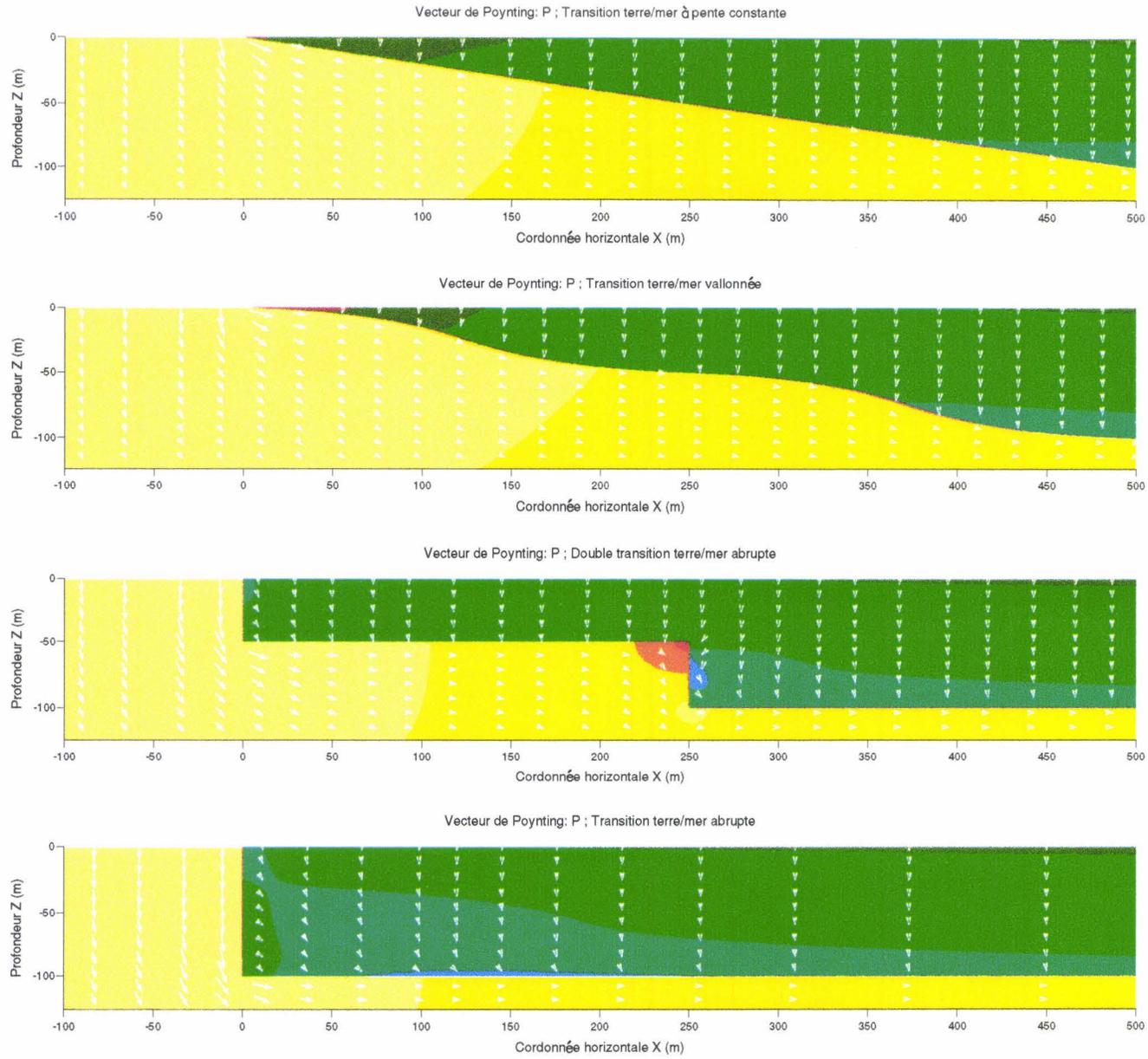


Planche (II.15): Carte du vecteur de Poynting pour 10 Hz.

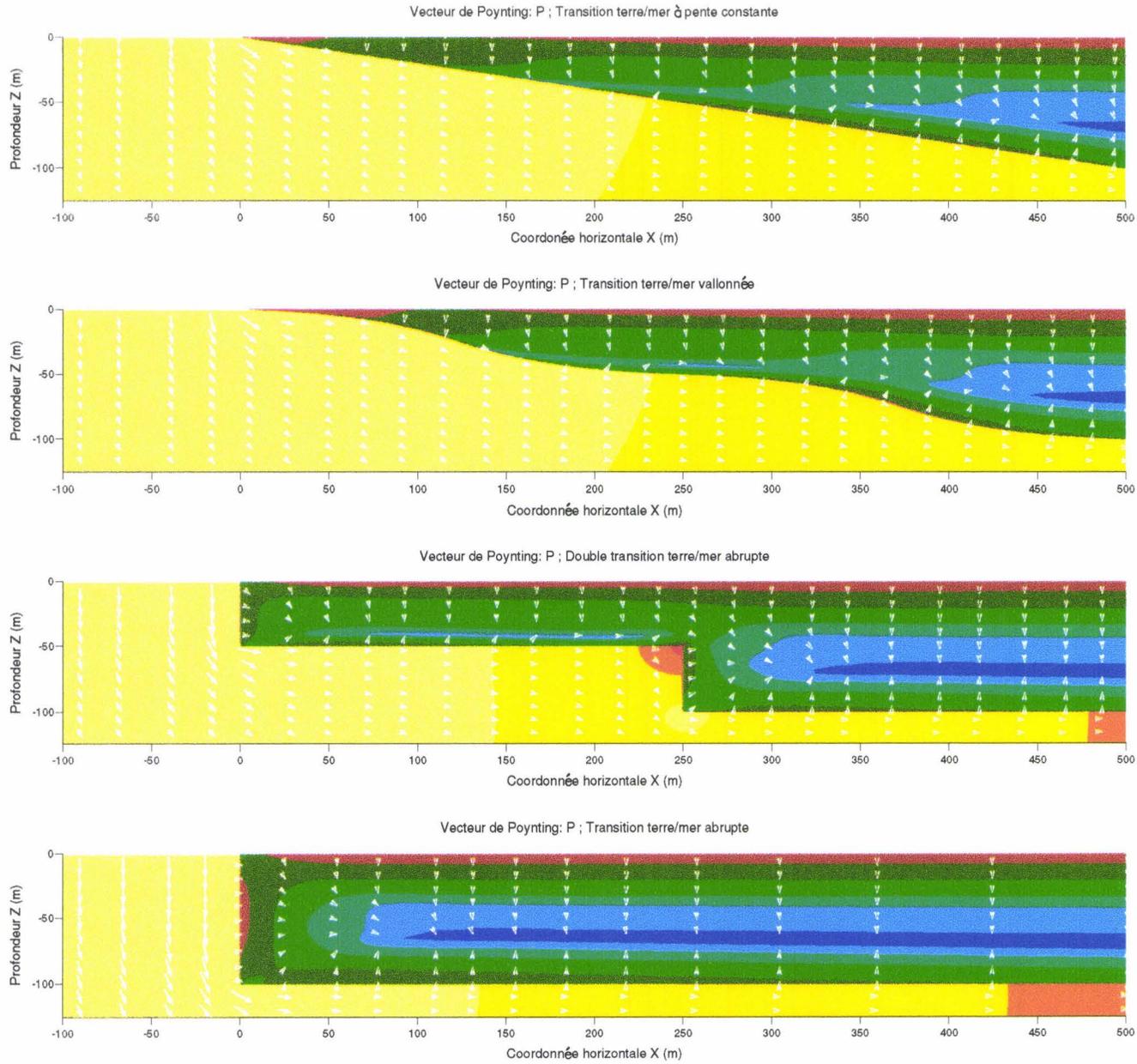


Planche (II.16): Carte du vecteur de Poynting pour 100 Hz.

## Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, les premiers paramètres pertinents qui causent les déformations des lignes de champ électromagnétique ont pu être mis en évidence au voisinage d'une transition illuminée par une onde plane en très basse fréquence issue d'un émetteur éloigné situé dans la cavité Terre-ionosphère.

Ces paramètres sont les caractéristiques géométriques de la transition et la valeur de la profondeur de pénétration dans la mer. Pour les fréquences correspondant à une profondeur de pénétration dans l'eau de mer inférieure à la valeur de l'épaisseur de la couche d'eau de mer, l'amplitude de la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  passe par un minimum à mi-profondeur dans l'eau de mer quelles que soient les caractéristiques géométriques de la transition. Dans le cas contraire, des zones d'ombre étendues de la composante horizontale de champ électrique sont situées au niveau des transitions abruptes du profil côtier mais des valeurs plus uniformes de champ électrique sont obtenues.

Les cartes vectorielles du flux d'énergie permettent de déterminer la cause de ces modifications. C'est-à-dire que pour une fréquence correspondant à une valeur de profondeur de pénétration dans la mer inférieure à l'épaisseur de la couche d'eau de mer, le champ électrique est suffisamment atténué dans l'eau de mer depuis la surface pour que l'onde se propageant par le sol sous la couche d'eau de mer et subissant une moins forte atténuation donne naissance à un champ électrique important au fond de la mer.

Dans le troisième chapitre, cette étude se poursuit par une émission de champ électromagnétique à l'aide d'une ligne source alternative incluse dans le maillage et se situant à proximité d'une transition Terre/mer en conservant les mêmes profils côtiers sous-marins que précédemment.

**III- Modélisation du rayonnement d'une ligne source  
alternative en milieu hétérogène par la méthode des différences  
finies associée à un calcul variationnel.**

**Sommaire**

Introduction.....	91
<b>III-1. Prise en compte du terme source dans la méthode des différences finies associée à un calcul variationnel. ....</b>	<b>93</b>
<b>III-1.1)Présentation de la méthode.....</b>	<b>93</b>
<b>III-1.2)Limitation artificielle du domaine. ....</b>	<b>96</b>
III-1.2.1)Etude bibliographique. ....	96
III-1.2.2)Expression du champ rayonné par un dipôle électrique dans un milieu homogène et infini. ....	98
III-1.2.3)Description des différents modèles utilisés.....	101
III-1.2.3.1)Modèle de type Neumann. ....	101
III-1.2.3.2)Modèle de type Cauchy.....	102
III-1.2.3.3)Modèle Mixte. ....	104
<b>III-2. Validité des modèles.....</b>	<b>105</b>
<b>III-2.1)Comparaison avec les éléments finis et les équations intégrales.....</b>	<b>105</b>
<b>III-2.2)Validation des différents modèles aux limites.....</b>	<b>108</b>
<b>III-2.3)Validité du modèle Mixte suivant le maillage.....</b>	<b>113</b>
<b>III-3. Etude fréquentielle et modale du rayonnement d'une ligne source située à différentes profondeurs dans la mer et à proximité d'une transition Terre/mer de différents profils côtiers.....</b>	<b>117</b>
<b>III-3.1)Etude du mode TE. ....</b>	<b>119</b>
<b>III-3.2)Etude du mode TM. ....</b>	<b>120</b>
<b>Conclusion. ....</b>	<b>135</b>

## Introduction

Comme la simulation numérique du rayonnement d'une onde plane très basse fréquence est possible pour le mode TM dans la mer et au voisinage d'une transition Terre/mer ayant des profils côtiers quelconques, il est intéressant de définir un modèle numérique dans le cas d'une source localisée dans la mer et à proximité de la transition Terre/mer. Puisque les modèles tridimensionnels de propagation d'onde électromagnétique posent de très délicats problèmes de convergence lors de la simulation de transitions de conductivité élevées et qu'ils ne sont pas directement applicables à des structures s'étendant jusqu'aux limites du domaine (Lines et Jones (1972) et (1973))[28][40], ce troisième chapitre développe une théorie et présente des résultats dans le cas d'une transition Terre/mer bidimensionnelle illuminée par une ligne source magnétique et électrique. Cette théorie prolonge celle établie précédemment dans le cas de l'onde plane où la source n'était pas localisée en un point de l'espace. Ce type d'émission est largement utilisé en prospection géophysique où la source est soit une longue barre métallique soit le plus proche côté d'une large boucle magnétique rectangulaire de la structure géologique à étudier.

La méthode de résolution est directe, comme dans le cas de l'onde plane, car les méthodes de résolution itérative convergent difficilement pour des modèles géologiques comportant des transitions de conductivité élevées. Puisqu'il n'existe pas de formulation analytique correspondant soit à un profil géologique simplifié d'une transition Terre/mer illuminée par une ligne source alternative soit au milieu stratifié et applicable à proximité de la transition Terre/mer, la composante de champ électromagnétique totale et transverse est encore l'inconnu du problème et des conditions aux limites sur les dérivées de champ électromagnétique sont recherchées sur les quatre côtés du domaine.

Ce chapitre est divisé en trois parties. Dans une première partie, le modèle numérique et les conditions aux limites sont présentés. Par opposition à la propagation en onde plane suivant le mode TM, l'air doit être maillé car il n'existe pas a priori de conditions aux limites applicables directement à la surface de la mer ou du sol et à proximité d'une source alternative immergée.

Une seconde partie traite de la validité du modèle en effectuant une

comparaison entre différentes conditions aux limites et avec les résultats donnés par la méthode des éléments finis (Coggon (1971)[42]) et par la méthode des équations intégrales (Hohmann (1971)[81]) dans le cas d'une anomalie enterrée dans un demi-milieu. Une comparaison n'a pas été présentée en milieu stratifié avec une formulation analytique car ceci ne représente qu'un simple problème à une dimension qui ne prend pas en compte les problèmes numériques plus complexes rencontrés dans un problème bidimensionnel.

Une troisième partie présente une étude paramétrique suivant la profondeur d'immersion de la source, la fréquence (0,1 Hz à 100 Hz) et le mode de propagation dû à une ligne source magnétique ou électrique.

### III-1. Prise en compte du terme source dans la méthode des différences finies associée à un calcul variationnel.

#### III-1.1) Présentation de la méthode.

Une densité de courant électrique et magnétique localisée en un point de l'espace est prise en compte dans les équations de Maxwell de la façon suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{M}_i \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_i \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

où  $\vec{M}_i$  et  $\vec{J}_i$  sont respectivement les densités de courant d'excitation magnétique ou électrique. Dans le cas de la ligne source parallèle à la ligne de côte, une représentation physique du problème est donnée sur la figure (III.1).

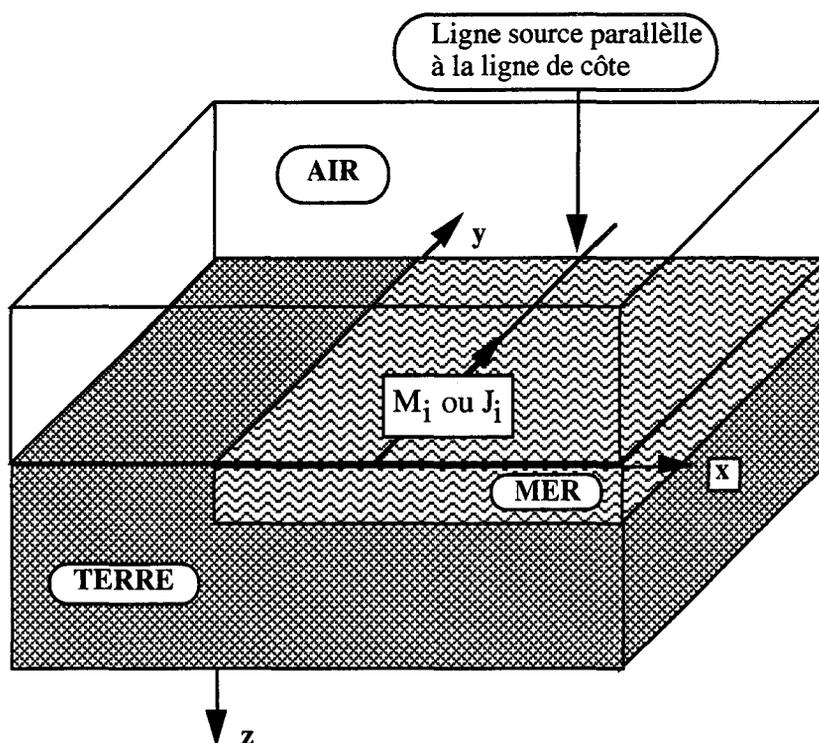


Figure (III.1): Problème à trois dimensions de l'espace.

Comme pour la propagation d'une onde plane, nous supposons l'invariance du milieu et de la source selon l'axe (oy). Nous passons donc d'un problème (3D) à un problème (2D). La ligne source parallèle à la ligne de côte devient un point

source électrique ou magnétique qui donne respectivement un mode TE ou un mode TM.

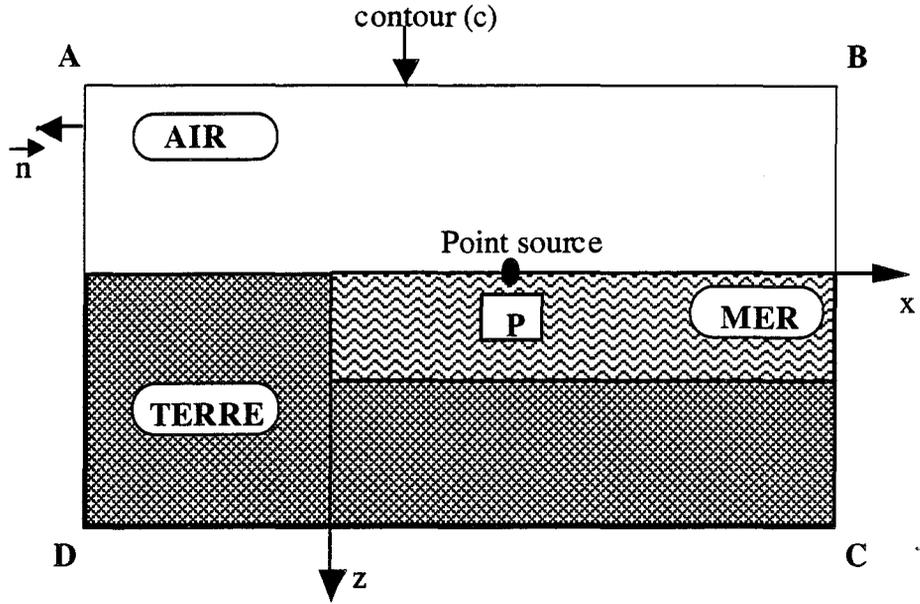


Figure (III.2): Problème à deux dimensions.

La solution générale au noeud P du maillage où se trouve le point source satisfait les équations (III.2) et (III.3) suivant le mode considéré. Pour le mode TM, les composantes de champ ( $H_y, E_x, E_z$ ) sont non nulles et la composante de champ magnétique transverse est solution de l'équation (III.2).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)} \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)} \left( \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) \right] = j\omega\mu(x,z) H_y + M_i \quad (III.2)$$

Pour le mode TE, les composantes de champ ( $E_y, H_x, H_z$ ) sont non nulles et la composante de champ électrique transverse est solution de l'équation (III.3).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{j\omega\mu(x,z)} \left( \frac{\partial}{\partial x} E_y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{j\omega\mu(x,z)} \left( \frac{\partial}{\partial z} E_y \right) \right] = (\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)) E_y + J_i \quad (III.3)$$

La solution sera le point de stationnarisation de la fonctionnelle  $F(H_y)$  donnée par la formule (III.4) dans le cas du mode TM sur le domaine ( $\Omega$ ) ou

(ABCD) discrétisé en rectangles élémentaires.

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} (L_j H_y - 2 M_j) (H_y) d\Omega_j \quad (\text{III.4})$$

Où  $L_j$  est l'opérateur :

$$K_j \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \phi_j \quad (\text{III.5})$$

avec  $K_j = (\sigma_j + j \omega \epsilon_j)^{-1}$  et  $\phi_j = j \omega \mu_j$  (III.6)

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} \left( K_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 - 2 M_j H_y \right) d\Omega_j - \frac{1}{2} \int_{\text{Contour}} K_f H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl \quad (\text{III.7})$$

où  $K_f = (\sigma_f + j \omega \epsilon_f)^{-1}$  ;  $\sigma_f$  et  $\epsilon_f$  sont respectivement la conductivité et la permittivité électrique des mailles frontalières,  $\vec{n}$  est la normale à la frontière (C),

$\frac{\partial}{\partial n}$  désignant la dérivée normale au contour.

Cette fonctionnelle quadratique traduit la puissance dissipée à travers la surface ( $\Omega$ ), la puissance écoulee à travers la frontière (C) et une source de puissance traduit par le terme supplémentaire  $2 M_j H_y$  imposée à l'intérieur du domaine ( $\Omega$ ).

Comme pour le cas de l'onde plane, la solution du problème n'est autre que celle qui rend la puissance du système minimale, c'est-à-dire pour:

$$\frac{\partial F(H_y)}{\partial H_y} = 0 \quad (\text{III.8})$$

En un noeud du maillage où l'on affecte une source de courant de valeur  $I_p$ ,

la relation générale reliant les cinq valeurs voisines de la composante de champ magnétique transverse dans la méthode de discrétisation tenant compte de cinq noeuds voisins est résumée par l'équation (III.10).

$$C_P H_P + C_L H_W + C_R H_E + C_T H_N + C_B H_S = \quad (III.10)$$

$$M_i (h_N + h_S) (h_E + h_N) = I_P$$

$I_P$  est le courant magnétique fixé par la suite dans les simulations en un noeud P du maillage intérieur au domaine d'étude,  $h_N$ ,  $h_S$ ,  $h_E$ ,  $h_N$  sont les dimensions des mailles entourant le noeud considéré,  $H_P$ ,  $H_W$ ,  $H_E$ ,  $H_N$  et  $H_S$  sont les valeurs de champ magnétique dans la méthode des cinq points aux différences finies.

Pour conserver les mêmes valeurs de champ électromagnétique issues de la même valeur du courant source, la valeur du courant source est divisé par deux ou par quatre afin d'obtenir la même valeur de la densité de courant,  $M_i$ , respectivement en un noeud situé sur l'un des quatre côtés du contour ou en un des quatre coins du contour A, B, C et D. Si ce n'est pas le cas, les conditions aux limites de Cauchy deviennent des conditions de Neumann, le ou les côtés où se situe la source devient ou deviennent une ou des interfaces parfaitement réfléchissantes et la puissance injectée par la source dans le domaine d'étude est multipliée par deux ou par quatre.

La dualité entre les modes TM et TE, donnent les relations de passage (III.1) d'un mode à l'autre. Le courant d'excitation magnétique devient alors le courant d'excitation électrique.

$$\begin{cases} H_y \rightarrow E_y \\ K_j \rightarrow \phi_j \\ \phi_j \rightarrow K_j \end{cases} \quad (III.11)$$

### III-1.2) Limitation artificielle du domaine.

#### III-1.2.1) Etude bibliographique.

Les conditions aux limites les plus fréquemment utilisées sont représentées sur la figure (III.3).

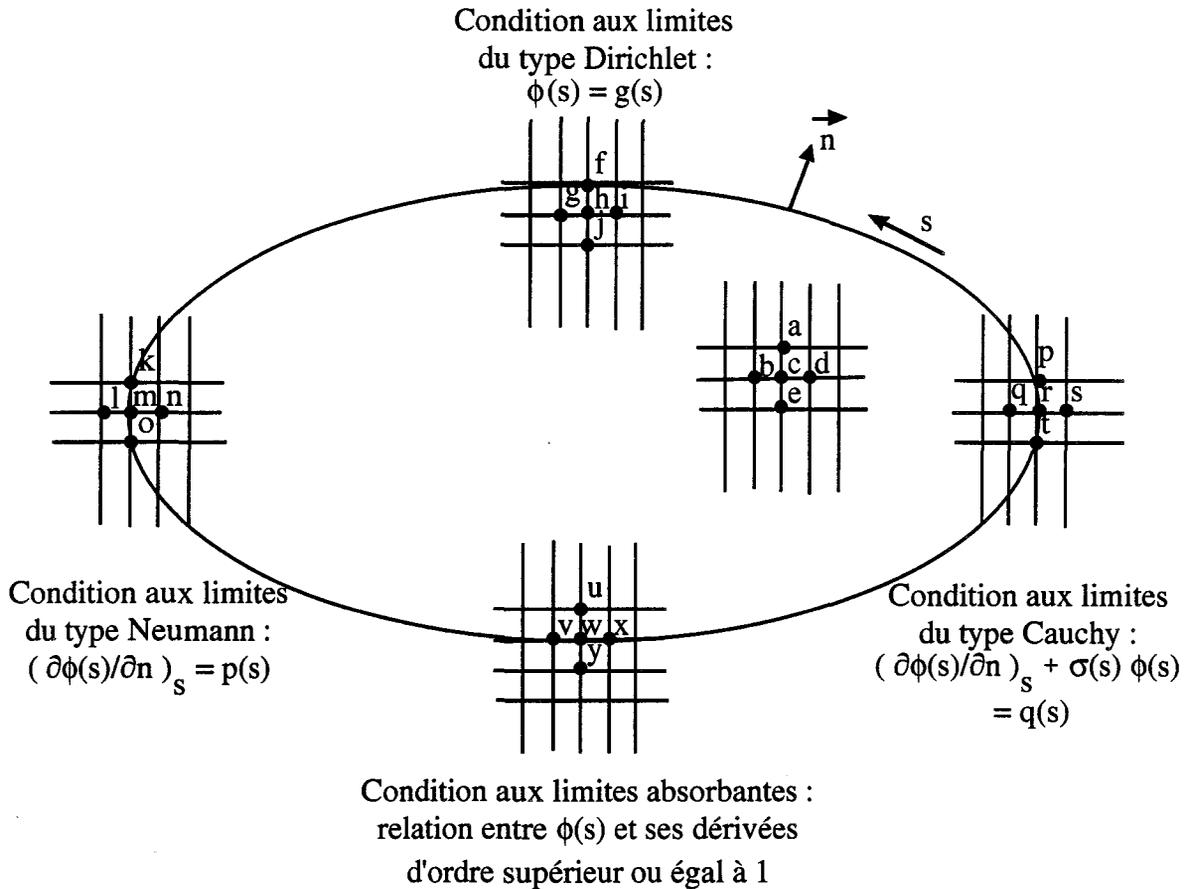


Figure (III.3): Le problème aux différentes conditions aux limites.

Comme dans le cas de la propagation en onde plane, nous avons le choix parmi 4 types de conditions aux limites: Dirichlet, Neumann, Cauchy et Absorbantes. Coggon (1971)[42], en vue de déterminer le rayonnement d'une ligne source électrique alternative en milieu hétérogène par la méthode des éléments finis, fixe sur le contour un champ électromagnétique calculé en milieu stratifié par la résolution des équations de Fredholm mais ceci augmente le temps d'exécution du programme pour une à deux couches géologiques simulées et ne peut traiter le cas de la transition Terre/mer. On n'utilisera pas non plus de modèle de type Dirichlet en fixant sur le contour un champ nul car le champ électromagnétique décroît très lentement en très basses fréquences dans des milieux faiblement conducteurs ou dans l'air. En courant continu, Coggon (1971)[42] a montré également qu'on pouvait moyenner les résultats obtenus en fixant successivement sur le contour un potentiel électrique  $V$  nul puis sa dérivée nulle car cela revient respectivement à sous-évaluer puis à surévaluer le potentiel électrique mais le temps de calcul est multiplié par deux. D'autre part, Dey et Morisson (1978)[82] et (1979)[83] en différentiant l'équation de Poisson dans

l'espace à trois dimensions afin de déterminer le potentiel électrique  $V$  dans le sous-sol dû à un dipôle à courant continu utilisent les conditions aux limites de Cauchy regroupées sur la figure (III.4).

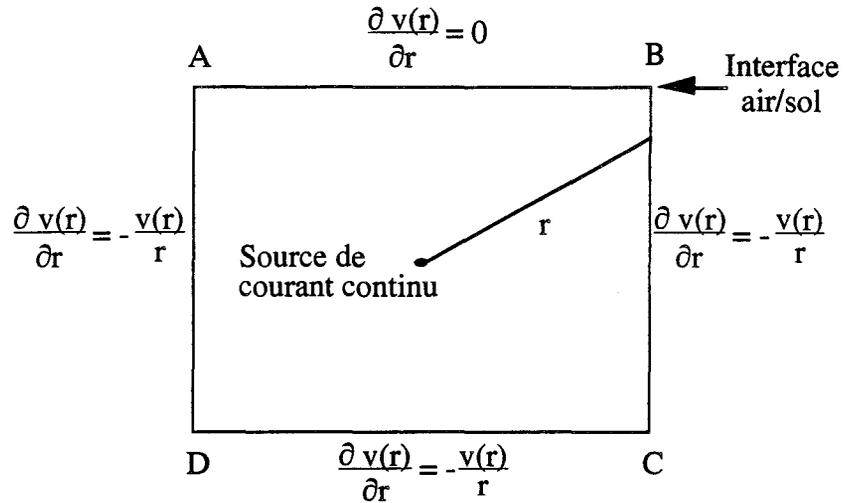


Figure (III.4): Modèle utilisé par Dey et Morisson (1979)[83].

Ce modèle donne de bons résultats pour déterminer une tomographie quelconque du sous-sol sans mailler de grandes distances. Par conséquent, nous recherchons des conditions aux limites de type Cauchy permettant à la fois de réduire le domaine d'étude, de simuler un nombre quelconque de couches géologiques en un temps de calcul réduit et de déterminer le rayonnement d'une ligne source alternative à proximité d'une transition Terre/mer. Des conditions aux limites simples du type Neumann seront aussi appliquées aux limites du domaine afin de montrer l'intérêt d'utiliser des conditions aux limites de Cauchy pour le rayonnement d'une ligne source en courant alternatif. Les conditions aux limites absorbantes utilisées afin d'annuler l'onde réfléchie sur le contour dans la zone en champ proche de l'antenne émettrice (Bayliss et Turkeltaux (1980)[84], Peterson et Castillo (1989)[85] et Zhdanov (1982)[73]) n'ont pas été nécessaires dans notre cas et donc n'ont pas été développées dans nos modèles.

### III-1.2.2) Expression du champ rayonné par une source dans un milieu homogène et infini.

Dans un milieu supposé tout d'abord homogène, on considère un dipôle électrique dont l'axe de rotation coïncide avec l'axe (oz) du système de coordonnées cylindriques représenté sur la figure (III.5) :

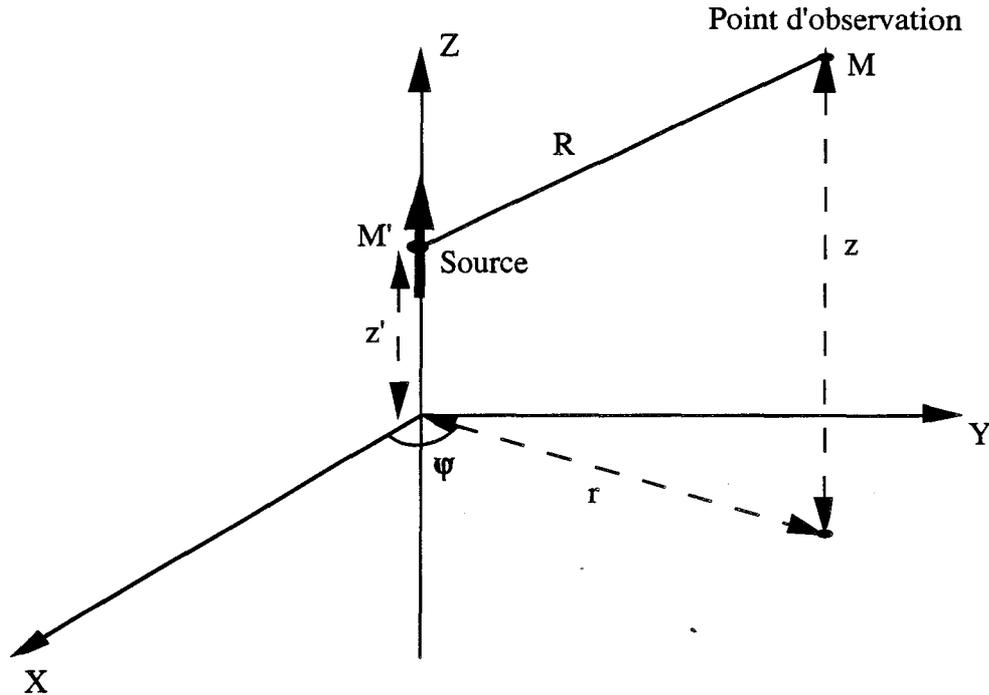


Figure (III.5): Rayonnement d'un dipôle électrique dans un milieu homogène.

Le milieu de conductivité  $\sigma$ , de perméabilité  $\epsilon$  et de permittivité  $\mu$  contient pour unique source de rayonnement ce dipôle infinitésimal de longueur  $dl$  parcouru par un courant alternatif  $I = I_0 e^{j\omega t}$ . Les points d'observation et d'émission  $M$  et  $M'$  sont repérés par leurs coordonnées cylindriques. Le champ électromagnétique rayonné est solution des équations de Maxwell. En introduisant le potentiel de Hertz  $\vec{\Pi}$ , les composantes électriques  $E$  et magnétiques  $H$  sont déduites des relations (III.12).

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{rot rot } \vec{\Pi} \\ \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{rot } \vec{\Pi} \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Le vecteur  $\vec{\Pi}$  résulte de l'équation de Helmholtz (III.13).

$$(\Delta - \gamma^2) \vec{\Pi} = \frac{\vec{p}}{\epsilon} \delta(R) \quad (\text{III.13})$$

où  $\vec{p}$  est la polarisation électrique du dipôle,  $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma$  est la constante de propagation du milieu, la pulsation  $\omega = 2\pi f$  où  $f$  est la fréquence de travail.

Dans le cas présent, la symétrie de révolution du système fait que le vecteur potentiel de Hertz  $\vec{\Pi}$  se réduit à une seule composante suivant l'axe (oz) décrite

par la formule (III.14).

$$\Pi_z = \frac{I dl}{4 \pi (\sigma + j \omega \epsilon)} \frac{e^{-\gamma R}}{R} \quad (\text{III.14})$$

où  $R = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$  est la distance émetteur récepteur.

Le développement des calculs mène aux composantes de champ électrique  $E_r$  et  $E_z$  incluses dans le plan incluant l'axe du dipôle électrique et à l'unique composante de champ magnétique  $H_\psi$  orthoradiale au dipôle électrique par les expressions (III.15).

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r(M) = \frac{I dl}{4 \pi (\sigma + j \omega \epsilon)} r (z - z') (\gamma^2 R^2 + 3 \gamma R + 3) \left[ \frac{e^{-\gamma R}}{R^5} \right] \\ E_z(M) = \frac{I dl}{4 \pi (\sigma + j \omega \epsilon)} \times \\ \left[ \frac{(z - z')^2}{R^2} (\gamma^2 R^2 + 3 \gamma R + 3) - (\gamma^2 R^2 + \gamma R + 1) \right] \left[ \frac{e^{-\gamma R}}{R^3} \right] \\ H_\psi(M) = - \frac{I dl}{4 \pi} r (\gamma R + 1) \left[ \frac{e^{-\gamma R}}{R^3} \right] \end{array} \right. \quad (\text{III.15})$$

Si la fréquence d'émission est telle que  $\sigma \gg \omega \epsilon$ , on définit une profondeur de pénétration des ondes dans le sol par la relation (III.16).

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad \text{et} \quad \gamma^2 \approx j \omega \mu \sigma = \frac{2}{\delta^2} \quad (\text{III.16})$$

On remarque d'après les formules des champs (III.15) que ceux-ci décroissent en fonction de la distance émetteur-récepteur suivant un facteur:

$$\begin{aligned} \exp(-R/\delta)/R \text{ si } |\gamma R| \gg 1 \\ \text{est équivalent à} \quad (III.17). \\ \exp(-R/\delta) \text{ si } R \gg \frac{\delta}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Cette décroissance est aussi vérifiée par le champ électromagnétique se propageant dans un milieu conducteur et issu d'une source quelconque. Nous savons également que le champ magnétique rayonné par une ligne source dans le cas de l'approximation quasi-statique décroît en  $1/R$  comme le démontre le théorème d'Ampère qui néglige le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell suivante:

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ en quasi-statique} \Rightarrow \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} \iff H_{\text{radiale}} = \frac{I_{\text{source}}}{2 \pi R} \end{aligned} \quad (III.18)$$

Mais en présence d'interfaces, séparant par exemple un demi-milieu air/sol, il n'existe pas de conditions aux limites valables à la fois dans l'air et dans le sol. On a donc recourt à l'étude de diverses conditions aux limites sur le contour comme le présente les modèles suivants.

### III-1.2.3) Description des différents modèles aux limites utilisés.

Les modèles directement applicables à la détermination du rayonnement d'une ligne source alternative à proximité d'une transition Terre/mer peuvent être en autres les suivants.

#### III-1.2.3.1) Modèle de type Neumann.

Les conditions de Neumann décrites sur la figure (III.6) sont susceptibles de convenir à notre problème.

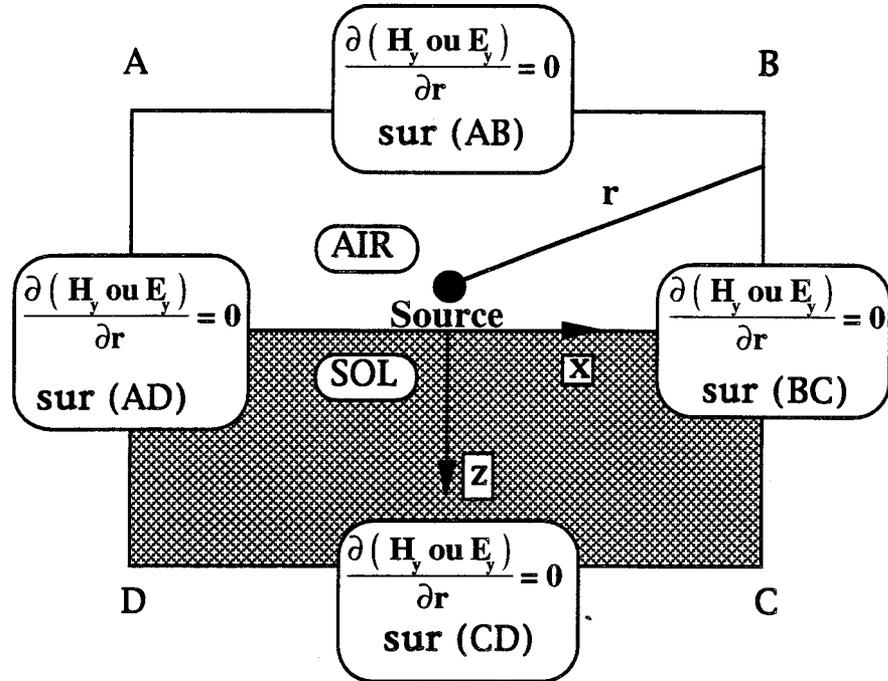


Figure (III. 6): Modèle de type Neumann.

Ce modèle ne calcule pas la puissance traversant le contour (ABCD). Il surévalue fortement le champ aux limites notamment dans l'air et il ne sera donc pas exploité par la suite. Sa fonctionnelle se réduit à l'expression (III.19).

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} \left( K_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 - 2 M_1 H_y \right) d\Omega_j \quad (\text{III.19})$$

### III-1.2.3.2) Modèle de type Cauchy.

Le modèle de type Cauchy dont les conditions aux limites sont données sur la figure (III.7) suppose la décroissance de champ en  $1/r$  suivant toutes les directions.

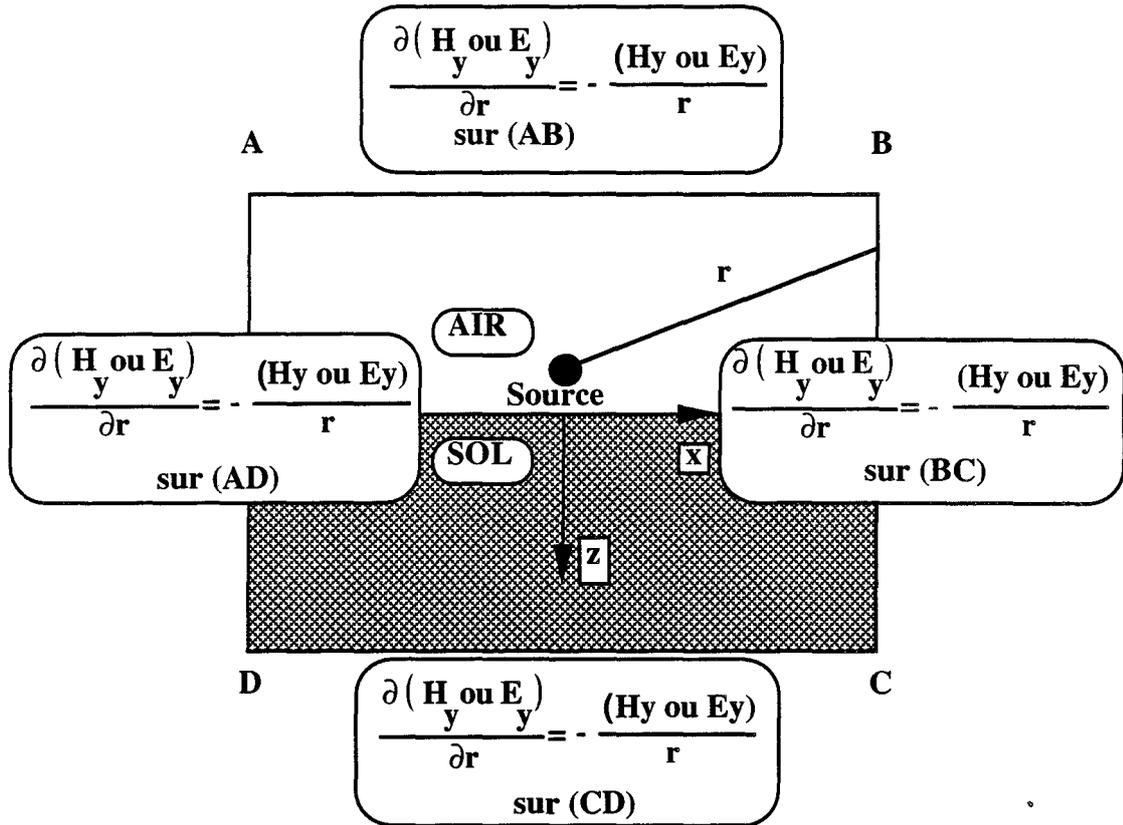


Figure (III.7): Modèle de type Cauchy.

Il est applicable à la propagation des ondes électromagnétiques en espace libre et dans le sol. En fixant ces dérivées, il permet de calculer la puissance traversant le contour qui apparaît dans l'expression de la fonctionnelle (III.20).

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iiint_{\Omega_j} \left( K_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi_j H_y^2 - 2 M_i H_y \right) d\Omega_j - \frac{1}{2} \int_{\text{Contour}} K_f H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl \quad \text{(III.20)}$$

Où  $K_f = (\sigma_f + j \omega \epsilon_f)^{-1}$  ;  $\sigma_f$  et  $\epsilon_f$  sont respectivement la conductivité et la permittivité électrique des mailles frontalières,  $\vec{n}$  étant la normale à la frontière (C),  $\frac{\partial}{\partial n}$  désigne la dérivée normale au contour (ABCD).

III-1.2.3.3) Modèle Mixte.

Le modèle Mixte dont les conditions aux limites sont données sur la figure (III.8) a été élaboré à partir du modèle de type Cauchy en déterminant la décroissance électrique suivant la tranche médiane et la couche en surface.

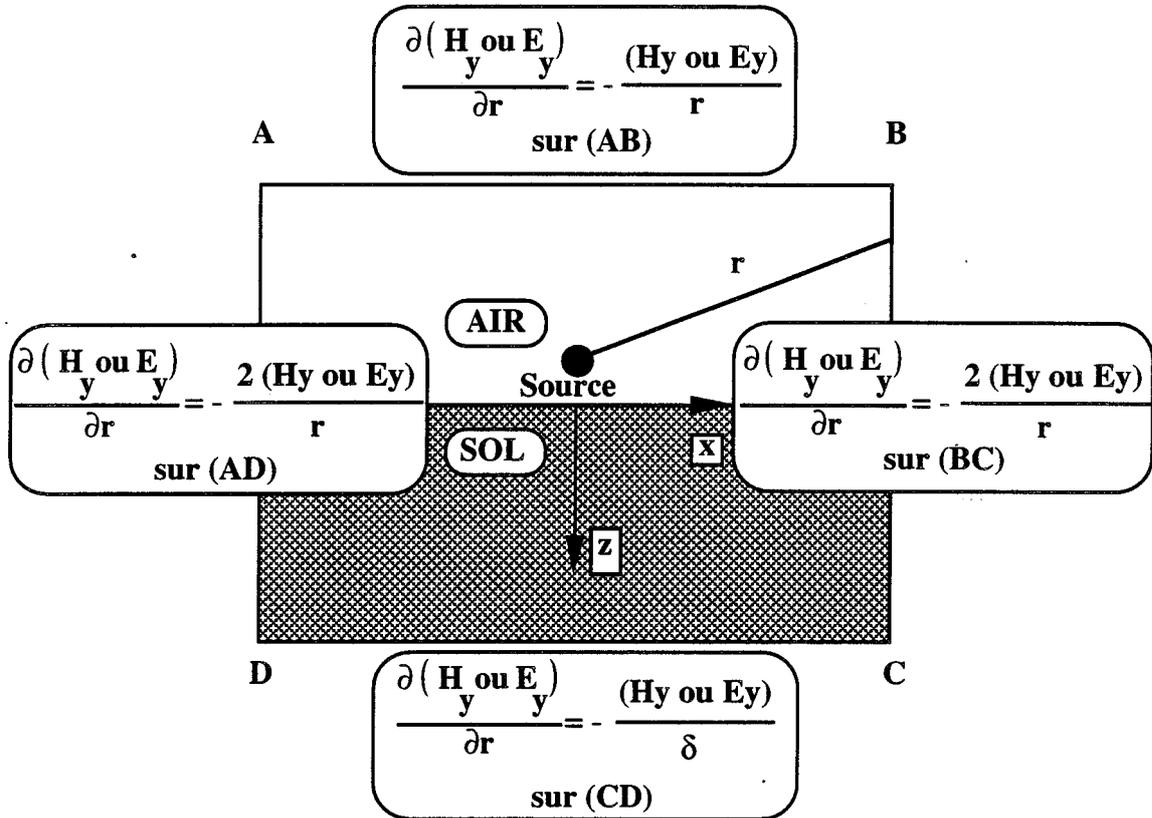


Figure (III.8): Modèle Mixte.

Par rapport au modèle précédent, il suppose la décroissance de champ:

- en  $1/r^2$  sur les côtés latéraux,
- en  $\exp(-r / \delta)$  sur le côté (CD) situé dans le sol. Ceci correspond à la décroissance de champ rayonné par une source quelconque dans un milieu homogène et infini pour des points éloignés de la source de plusieurs fois la valeur de la profondeur de pénétration dans le sol.

La décroissance de champ sur les cotés latéraux est une fonction d'atténuation qui se situe entre les décroissances de champ sur les côtés (AB) et (CD). Elle aura pour effet de surévaluer le champ au fond du domaine et de sous-évaluer le champ en haut du domaine dans l'air. Cependant ces effets n'affectent que très faiblement les valeurs de champ aux limites du domaine.

III-2. Validité des modèles.

III-2.1) Comparaison avec les éléments finis et les équations intégrales.

Dans la littérature, on trouve fréquemment en référence le cas d'une anomalie rectangulaire enterrée comme il est décrit sur la figure (III.9) dont la réponse fréquentielle a été étudiée par Coggon et Hohmann en 1971[42][81].

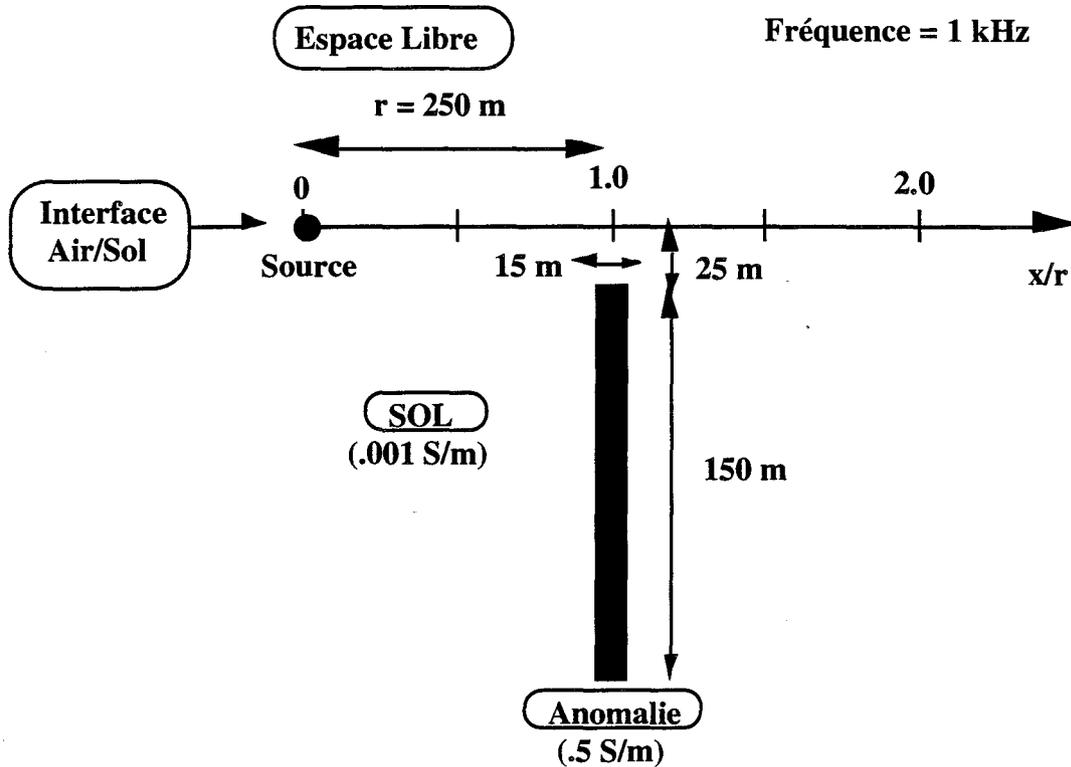


Figure (III.9): Description de la structure géologique pris en compte.

L'exemple d'application numérique présenté sur la planche (III.1) correspond à un déplacement horizontal égale à 500 m à surface du sol depuis la source, l'anomalie étant située à une profondeur de 25 mètres dans le sol. Pour la prospection en basses fréquences, la localisation horizontale et verticale d'une anomalie dans le sol est déterminée à travers les mesures de module et de phase des composantes horizontale et verticale de champ magnétique en surface normalisées par rapport à la valeur de champ magnétique  $H_0$  donnée par l'expression (III.21).

$$H_0 = \frac{I}{2 \pi x} \quad (\text{III.21})$$

Cette expression est l'amplitude de champ magnétique rayonné par une ligne source en très basses fréquences en espace libre où  $I$  est le courant circulant dans la ligne source et  $x$  la distance entre la source et le point de réception. Le champ magnétique a uniquement une composante orthoradiale.

Le maillage utilisé est en progression géométrique autour de la source et de l'anomalie en partant d'une maille égale à 1 mètre. Par contre, l'anomalie est découpée régulièrement en cinq tranches et vingt couches. On remarque que la dimension de l'anomalie à détecter et la distance à laquelle se situe l'anomalie de la source (égale à une moitié de la profondeur de pénétration dans le sol) sont nettement inférieures à la longueur d'onde dans le sol.

Une parfaite concordance des résultats est obtenue par la méthode aux différences finis qui calcule le champ total et les méthodes aux éléments finis et aux équations intégrales utilisées respectivement par Coggon (1971)[42] et Hohmann (1971)[81] qui calculent le champ primaire en milieu stratifié dû à la source et numériquement le champ secondaire réémis par l'anomalie.

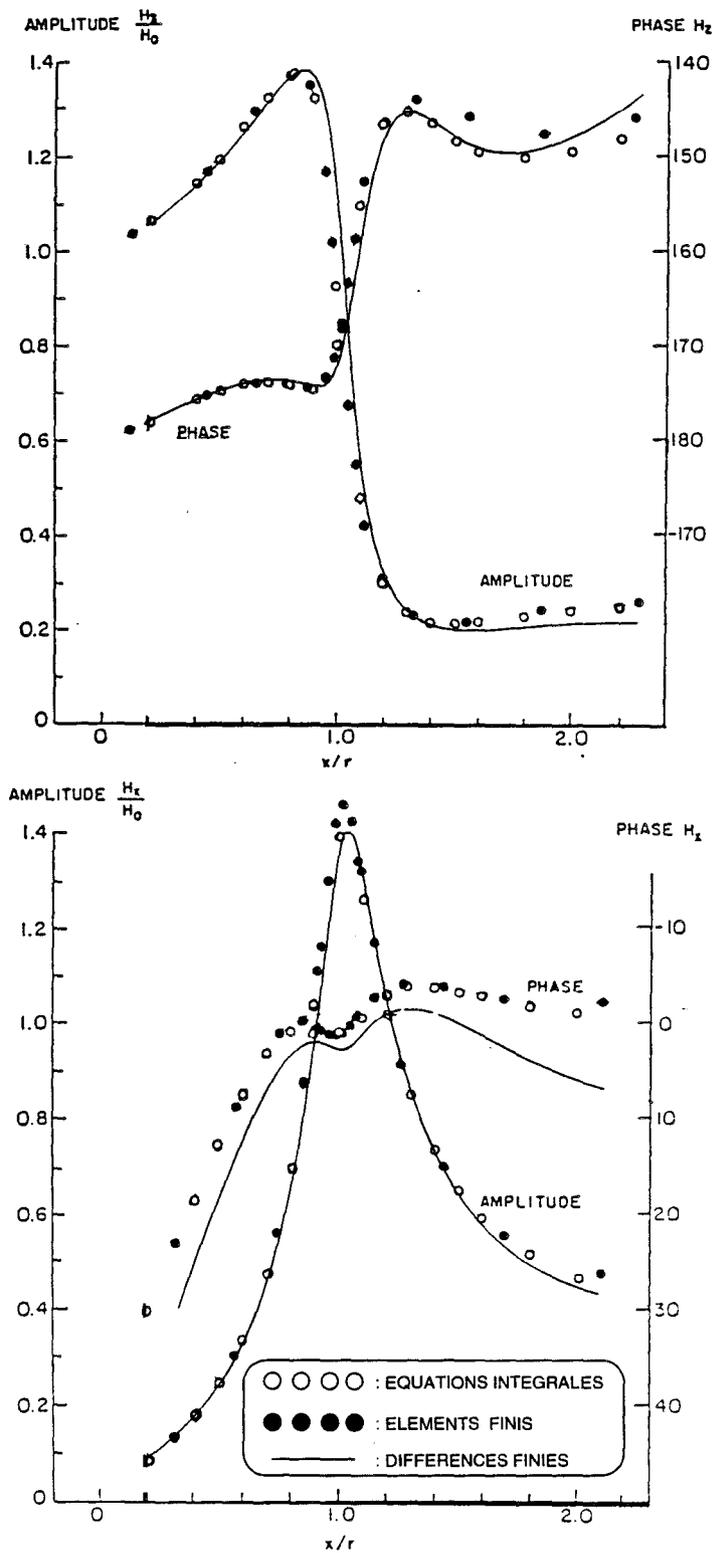


Planche (III.1): Comparaison avec d'autres méthodes numériques.

III-2.2) Validation des différents modèles aux limites.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons uniquement à la convergence du champ électrique transverse  $E_y$ . La validation des modèles passe par l'étude du champ électrique  $E_y$  rayonné par la ligne source pour différentes distances source-contour  $d$ , et pour les différentes conditions aux limites afin de vérifier que les conditions aux limites n'influent sur les valeurs de champ à l'intérieur du domaine. Pour cela, un demi-milieu air/sol est excité par une ligne source reposant sur le sol autour de laquelle 60 tranches et couches sont en progression géométrique avec une maille de départ égale au mètre, ceci est décrit sur la figure (III.10).

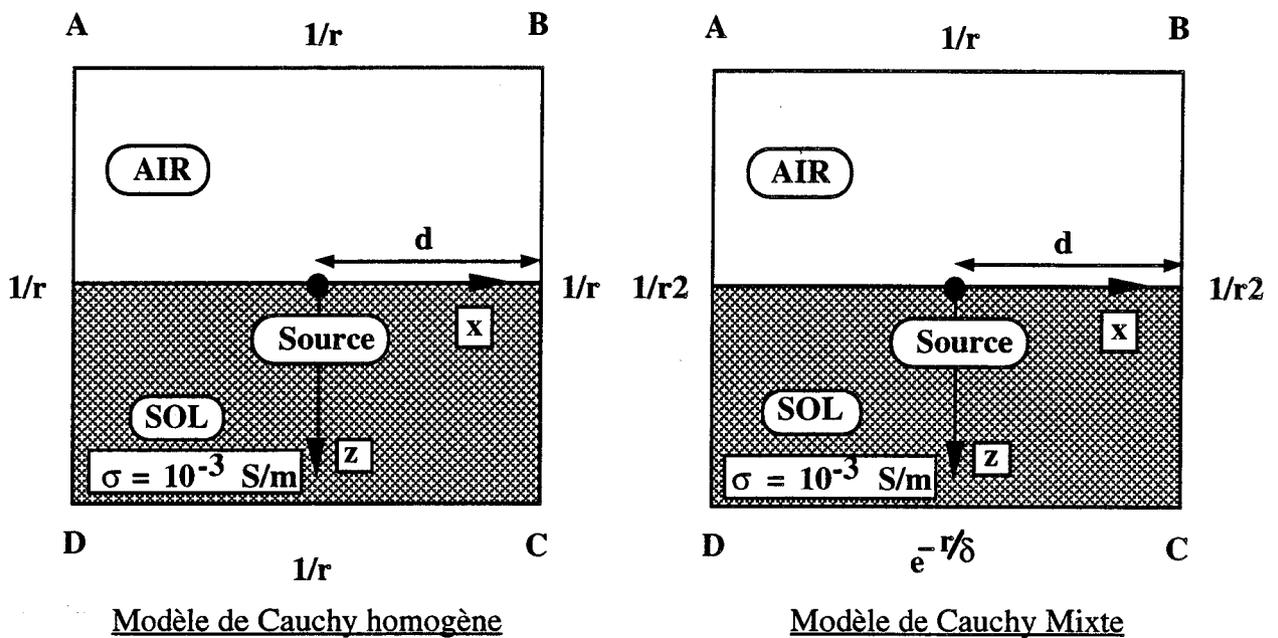


Figure (III.10): Demi-milieu air/sol excité par une ligne source.

Les caractéristiques du maillage sont regroupés dans les deux tableaux suivants correspondant à une fréquence de 0.1 Hz et 100 Hz. Les trois principales caractéristiques sont:

- la raison de la progression géométrique,
- la plus grande dimension de maille qui se situe aux limites du domaine,
- la distance  $d$  (source-contour) qui vaut 2, 5 et 10 fois la profondeur de pénétration dans le sol.

Pour une fréquence de 0,1 Hz, on a :

distance d (km)	raison q	plus grande maille (km)
$2 \delta_{sol} = 100$	1,18	15
$5 \delta_{sol} = 250$	1,2	41
$10 \delta_{sol} = 500$	1,21	88

et pour une fréquence de 100 Hz, on obtient :

distance d (km)	raison q	plus grande maille (m)
$2 \delta_{sol} = 3,2$	1,1	294
$5 \delta_{sol} = 8$	1,12	867
$10 \delta_{sol} = 16$	1,14	1925

Les planches (III.2) et (III.3) représentent le module de  $E_y$  suivant la tranche et la couche passant par la ligne source respectivement pour 0,1 et 100 Hz. Les résultats obtenus pour les trois distances source-contour d sont représentés sur le même graphique. Les courbes en trait pointillé sont obtenues avec les conditions aux limites en  $1/r$  et les courbes en trait plein avec des conditions aux limites mixtes. Elles s'interrompent pour chacune des trois valeurs de la distance source-contour d (100 km, 250 km et 500 km).

Nous obtenons les mêmes allures des courbes suivant la couche et la tranche passant par la source et sur des distances relatives à la profondeur de pénétration. On observe uniquement un décalage sur l'axe des ordonnées correspondant au rapport des fréquences. Ceci vérifie le théorème de Grant et West (1965)[86] valable uniquement en quasi-statique.

Sur le bord (AB) où l'on fixe une condition aux limites en  $1/r$  dans les deux modèles utilisés, on a un bon raccordement des courbes quelle que soit la valeur du paramètre d car les dimensions de maille sont nettement inférieures à la longueur d'onde dans l'air. La condition aux limites en  $1/r^2$  sur les côtés latéraux du modèle de type Cauchy mixte n'affecte pas les valeurs de champ sur le bord (AB).

Sur le bord (BC) et (DA), le modèle de type Cauchy mixte applique la bonne condition aux limites à la surface du milieu conducteur en fixant la décroissance du champ électrique en  $1/r^2$ .

Sur le bord (CD) dans le sol, la décroissance de champ électrique est bien en  $e^{-r/\delta}$  pour une distance  $d > 2 \delta_{SO1}$  comme le prévoit la théorie sur le rayonnement d'un dipôle électrique dans un milieu homogène infini. Cependant, le modèle aux conditions aux limites mixtes surévalue toujours mais légèrement le champ au niveau des dernières mailles. Ceci est dû d'une part au fait de fixer  $1/r^2$  sur les bords latéraux et d'autre part à une dimension de maille finale élevée car le choix d'un maillage plus uniforme en choisissant une progression arithmétique des mailles améliore les valeurs aux limites tout en diminuant les dimensions des mailles finales.

D'après les tableaux regroupant les caractéristiques du maillage, on remarque qu'on peut mailler des distances élevées avec une maille de départ égale au mètre et une dimension de maille aux limites de l'ordre de la profondeur de pénétration. Un nombre de couches et de tranches égal à 60 est suffisant pour conserver une raison faible. Les résultats obtenus en champ proche, pour une distance  $d < 2 \delta_{SO1}$ , ne sont pas présentés car les conditions aux limites ne sont plus vérifiées et les valeurs de champ obtenues à l'intérieur du domaine ne concordent plus avec celles calculées précédemment.

En conclusion, le modèle Mixte fixe les bonnes conditions aux limites sur le contour si la distance source-contour est supérieure à  $2 \delta_{SO1}$ .

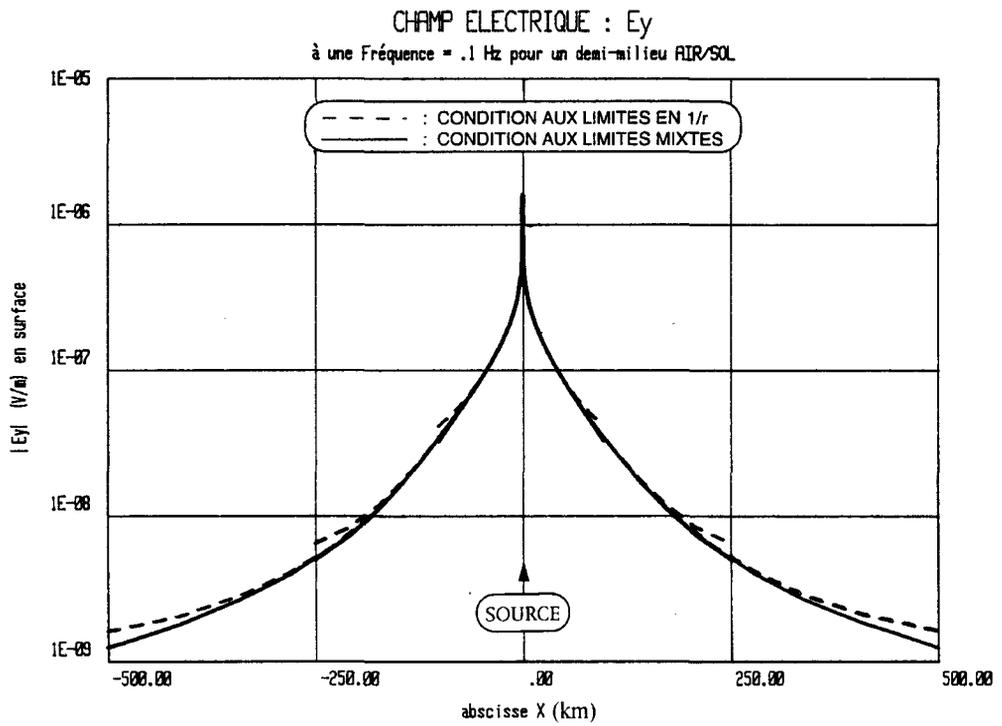
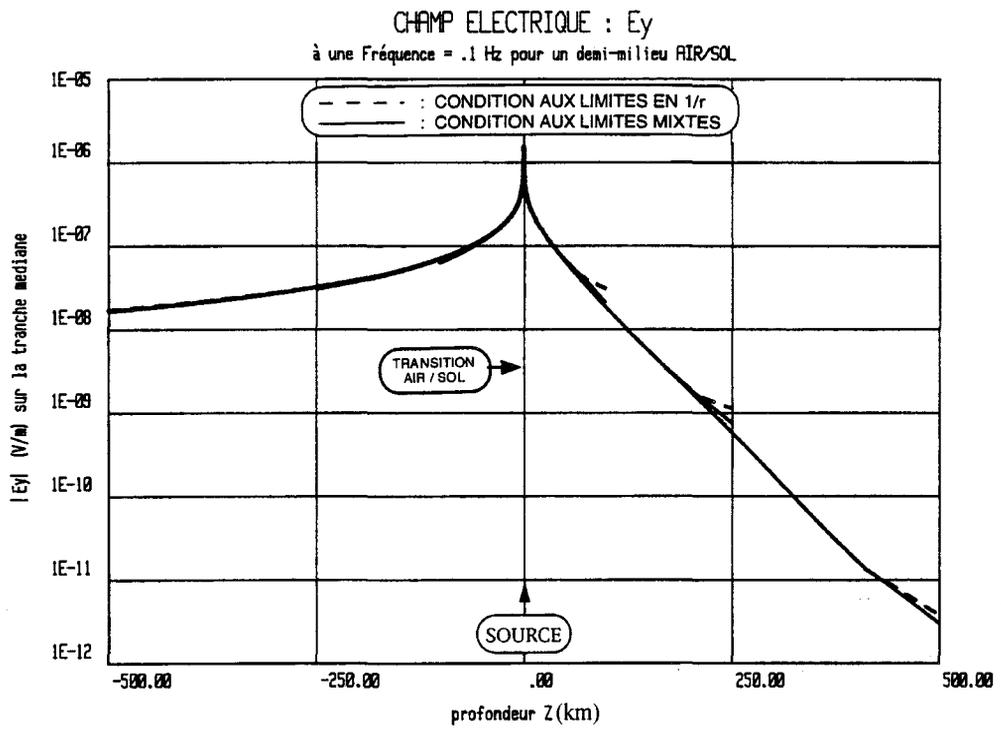


Planche (III.2): Validité des modèles aux limites pour  $F= 0,1$  Hz.

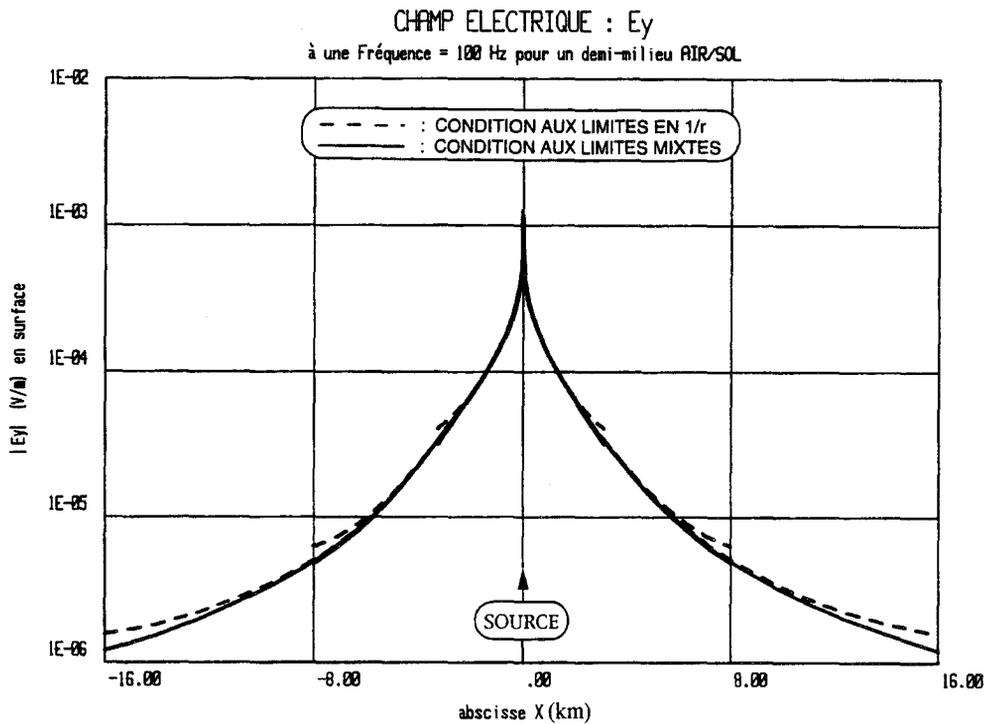
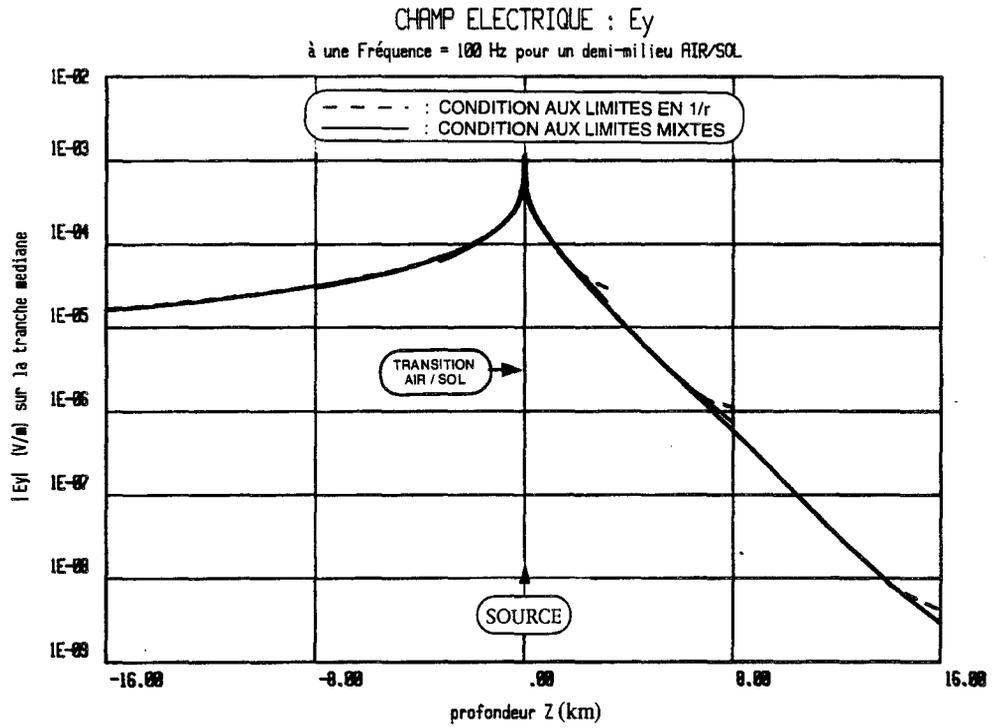


Planche (III.3): Validité des modèles aux limites pour  $F= 100$  Hz.

III-2.3) Validité du modèle Mixte suivant le maillage.

Pour se rendre compte de l'influence du maillage sur les phénomènes de propagation, un demi-milieu air/mer et air/sol est discrétisé à l'aide d'un maillage à progression géométrique autour d'une source émettant à 0,1, 1, 10 et 100 Hz. Comme la densité de maille doit être choisie en fonction de la décroissance des champs, le nombre de couches est deux fois plus important dans le milieu conducteur que dans l'air pour la même distance, d, maillée. Par contre, la maille de départ est toujours égale au mètre autour de la source et donc très inférieure à la profondeur de pénétration dans le milieu conducteur. Ceci est résumé sur la figure (III.11).

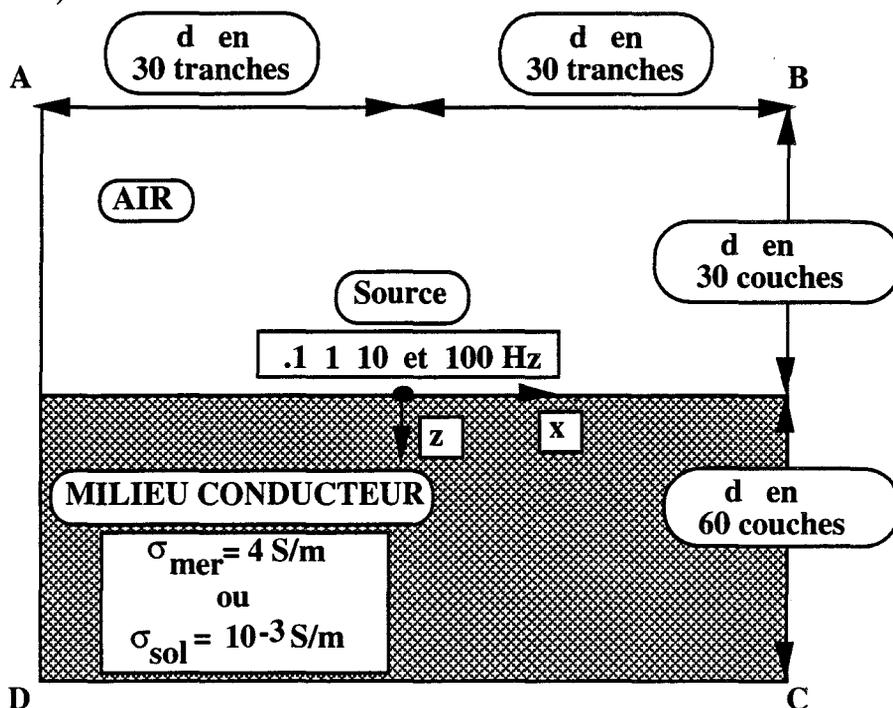


Figure (III.11): Maillage d'un demi-milieu air/mer ou air/sol.

Une distance source-contour d est choisie égale à deux fois la valeur de la profondeur de pénétration dans le milieu conducteur pour 0,1 Hz. Ceci donne les caractéristiques de maillage regroupées dans le tableau suivant.

distance d: source-contour	raison q	la plus grande dimension de maille
mer: 1,6 km { en 30 mailles en 60 mailles }	1,2	280 m
	1,08	130 m
sol: 100 km { en 30 mailles en 60 mailles }	1,42	30 km
	1,17	15 km

Les valeurs de la profondeur de pénétration en fonction de la fréquence et de la conductivité du milieu sont rappelées dans le tableau ci-dessous.

Fréquence (Hz)	$\delta_{\text{sol}}$ ( km)	$\delta_{\text{mer}}$ (m)
.1	50	800
1	16	250
10	5	80
100	1,6	25

Les ultimes dimensions de maille ont des valeurs très supérieures aux valeurs des profondeurs de pénétration pour les fréquences 10 et 100 Hz mais elles sont soit repoussées à une distance élevée où le champ électrique devient très faible dans le milieu conducteur soit situées dans l'air ou sur les bords latéraux. Ceci rappelle les couches absorbantes utilisées par Mufti en 1976 [50] pour le rayonnement d'un dipôle à courant continu.

Les courbes des planches (III.4) et (III.5) montrent les variations d'amplitude de la composante  $E_y$  de champ électromagnétique le long de la tranche et de la couche passant par la ligne source pour les demi-milieux air/mer et air/sol considérés pour 0,1, 1 , 10 et 100 Hz. Nous vérifions à nouveau le théorème quasi-statique de West et Grant (1965)[86] car nous obtenons des courbes similaires pour un demi-milieu air/sol et air/mer en traçant celles-ci sur une distance égale à deux fois la valeur de la profondeur de pénétration dans le milieu considéré.

Ces graphes permettent de déterminer la fréquence optimale à utiliser afin de réaliser une communication optimale avec un émetteur localisé en surface. Par exemple, en surface et à partir d'une certaine distance de la source, la composante transversale de champ électrique  $E_y$  récupère une valeur commune quelle que soit la fréquence. On a une compensation de la valeur de champ électrique entre le sol et l'air car l'atténuation dans le sol et la valeur du champ électrique dans l'air sont proportionnelles à la fréquence. Par conséquent, pour communiquer à la surface de la mer ou du sol, la distance émetteur-récepteur donne la fréquence minimale à partir de laquelle  $E_y$  reçu par le récepteur décroît. De même, la valeur de la profondeur d'immersion qui nous sépare de la source située en surface donne une fréquence optimale afin de recevoir un maximum de champ électrique  $E_y$ .

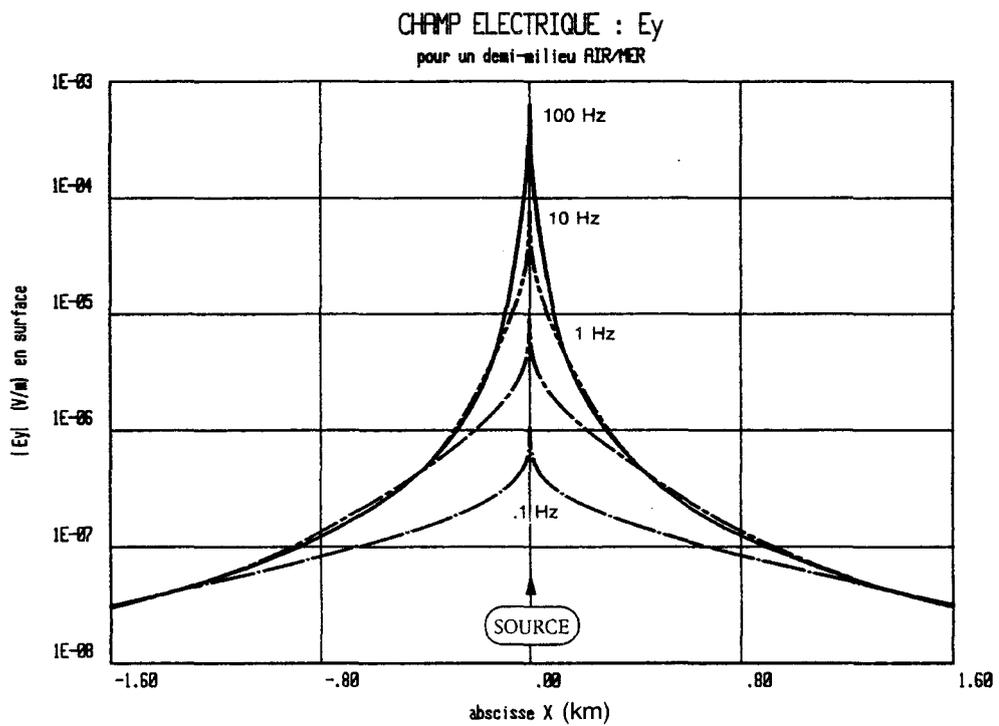
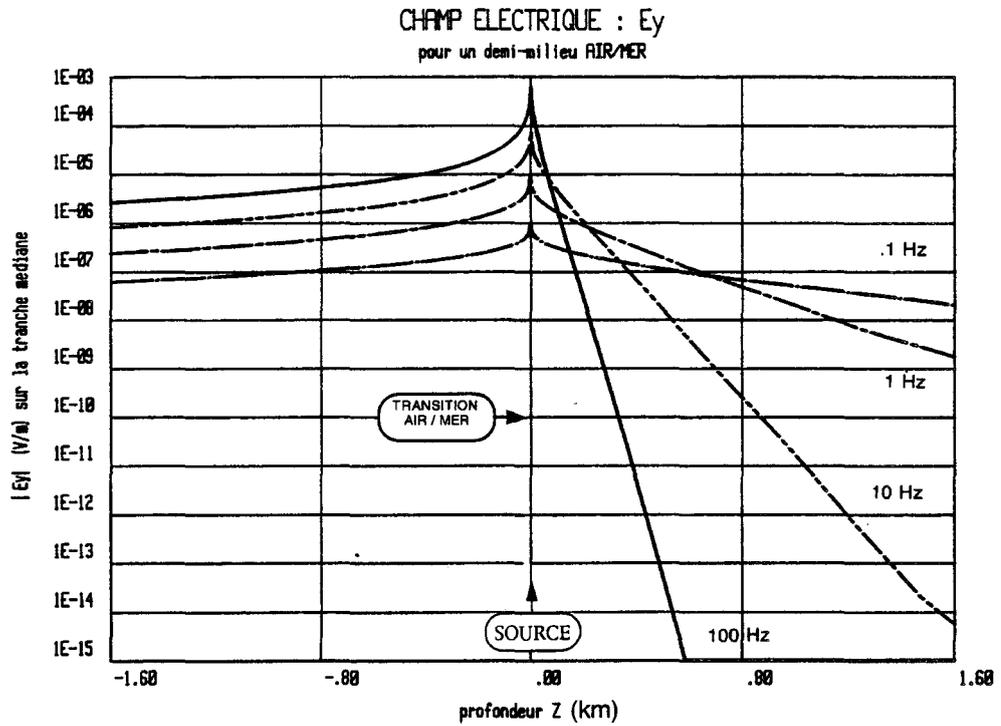


Planche (III.4): Validité du modèle suivant le maillage pour un demi-milieu air/mer.

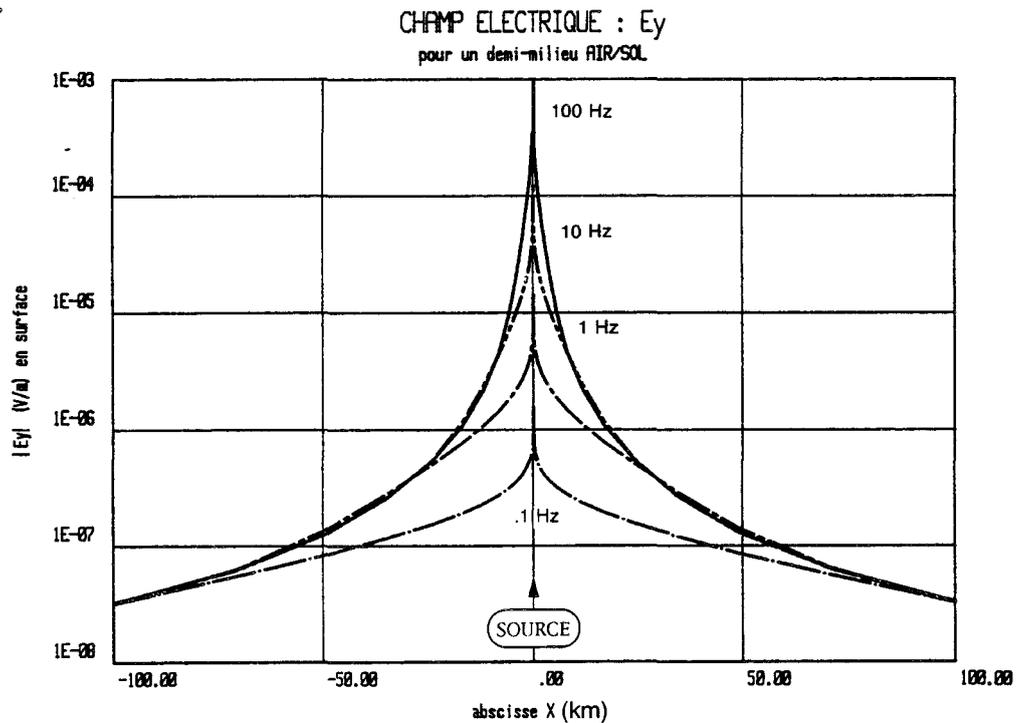
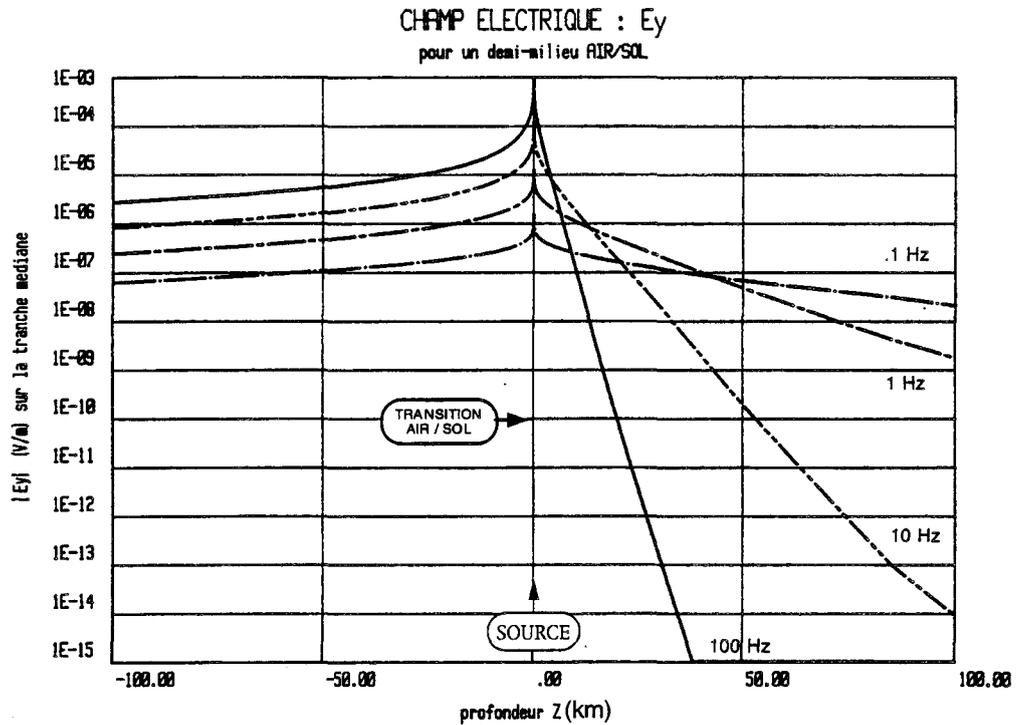


Planche (III.5): Validité du modèle suivant le maillage pour un demi-milieu air/sol.

### III-3. Etude fréquentielle et modale du rayonnement d'une ligne source située à différentes profondeurs dans la mer et à proximité d'une transition Terre/mer de différents profils côtiers.

La structure géologique de la transition Terre/mer à pente constante et les caractéristiques de maillage sont présentées sur la figure (III.12).

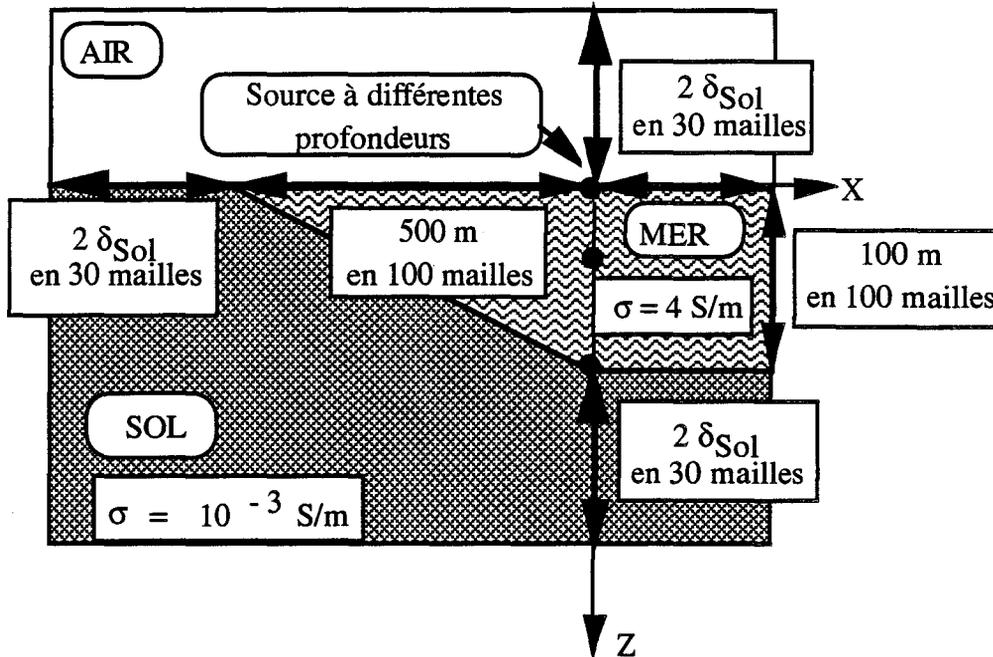


Figure (III.12): Cas de la transition Terre/mer à pente constante.

La ligne source est placée à différentes profondeurs dans la mer et à 500 mètres de la ligne de côte. Afin de favoriser le rayonnement dans la mer, les différentes localisations de la ligne source sont choisies à 20 cm en-dessous de l'interface air/mer, à 20 cm au-dessus de l'interface mer/sol et à mi-profondeur dans la mer. Le domaine s'étend sur une distance égale à deux fois la profondeur de pénétration dans le sol à la fois autour de la ligne source et autour de la transition. Le maillage est toujours en progression géométrique en partant d'une dimension de maille voisine du mètre aux interfaces et autour de l'antenne afin de concentrer le maillage au niveau de la transition. Dans le cas où la source est située à mi-profondeur dans la mer ou dans le cas de la transition vallonnée et à double transition abrupte, le maillage vertical dans la couche d'eau et le maillage horizontal du profil côtier sont divisés en deux parties identiques en progression géométrique symétrique sans augmenter le nombre de tranches ou de couches initiales. Les conditions aux limites du modèle Mixte sont fixées sur le contour et sont rappelées sur la figure (III.13).

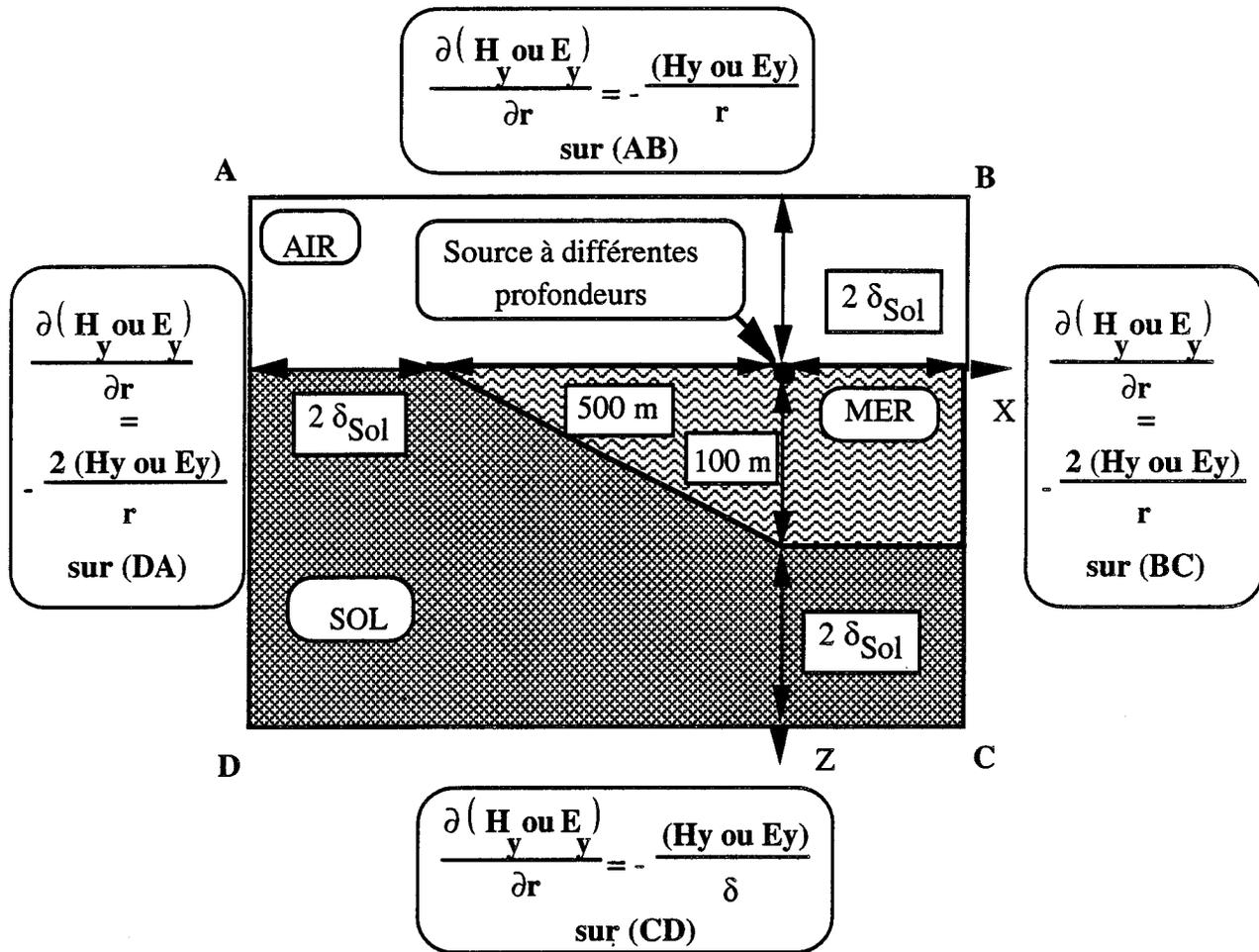


Figure (III.13): Conditions aux limites du modèle Mixte fixées sur le contour.

Une étude paramétrique portant sur la fréquence, les modes, la profondeur d'immersion et les différents profils côtiers a été effectuée pour l'ensemble des valeurs suivantes: quatre valeurs de la fréquence (0,1, 1, 10 et 100 Hz), deux modes (TE et TM) qui donnent respectivement les composantes (Ey, Hx et Hz) et (Hy, Ex, Ez), différentes valeurs de la profondeur d'immersion de la source (en surface ou au voisinage de la surface, à mi-profondeur et au voisinage ou au fond de la mer), différents profils côtiers (à pente vallonnée, à pente constante (50 ou 20%), à double transition abrupte et à une seule transition abrupte). Les résultats ont été présentés sous forme de cartes de champ, de cartes vectorielles et de courbes d'évolution des composantes parallèles et perpendiculaires au profil côtier comme il est décrit sur la figure (III.14). Compte tenu du nombre important de paramètres, cette étude ne peut pas être retranscrite intégralement dans ce mémoire. Par conséquent, les résultats les plus explicatifs sont reproduits dans ce chapitre.

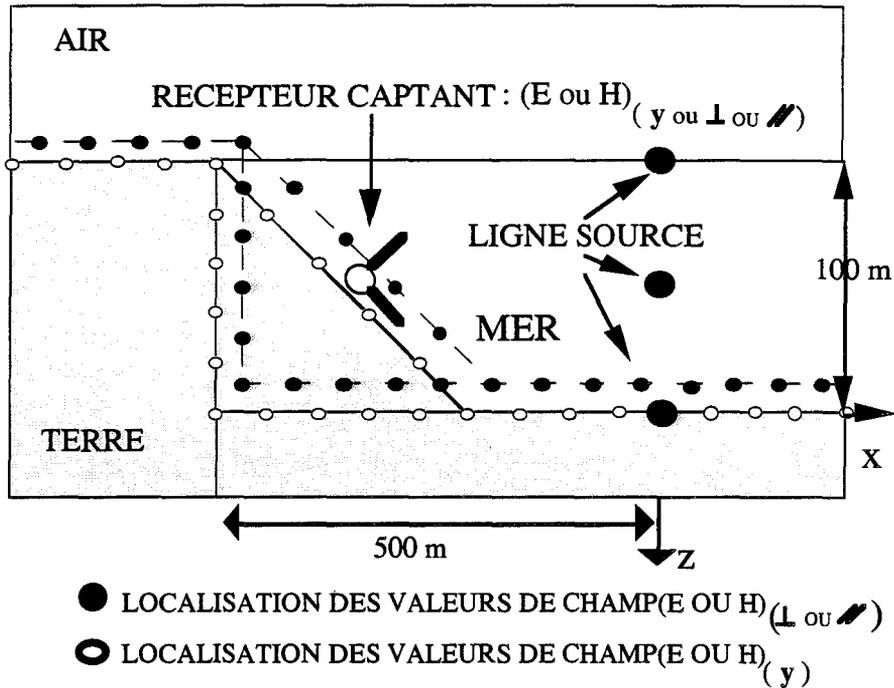


Figure (III.14): Localisation des valeurs de champ suivant le profil de la côte.

Chaque planche de ce chapitre contient donc quatre graphes correspondant de haut en bas aux quatre profils côtiers suivants : à pente constante (20%), à pente vallonnée, à double transition abrupte et à transition abrupte. Ces profils ont déjà été décrits en détail dans le premier et le deuxième chapitre. Les deux modes TM et TE seront étudiés. Les représentations graphiques concernent des cartes de champ et des cartes vectorielles du vecteur de Poynting sur une zone géographique centrée sur la source de coordonnées nulles. Cette zone s'étend sur une distance de 600 m suivant l'axe horizontal et sur une distance de 150 m suivant l'axe vertical afin de visualiser le comportement des composantes de champ de part et d'autre des différentes interfaces qui constituent la transition Terre/mer.

### III-3.1) Etude du mode TE.

Dans un premier temps, nous allons discuter des résultats de simulations obtenus dans le cas d'une ligne source électrique située à mi-profondeur dans la mer et créant un mode TE. Les planches (III.6) et (III.7) représentent respectivement les cartes de champ de la composante horizontale  $H_x$  et verticale  $H_z$  de champ magnétique pour une ligne source située à mi-profondeur dans la mer et émettant à une fréquence de 1 Hz. On constate que la composante

horizontale de champ magnétique  $H_x$  se déforme suivant l'interface mer-sol et air-mer avec son minimum à mi-profondeur dans la mer et avec une symétrie verticale des valeurs de champ. Par contre, la composante verticale  $H_z$  semble ne pas être sensible à la présence des interfaces des différents milieux constituant la transition terre-mer. Ceci peut être facilement expliqué par la représentation du flux de puissance reportée sur la planche (III.8). C'est-à-dire que quel que soit le profil côtier, le flux d'énergie converge vers son minimum situé dans la mer au niveau de la ligne de côte en prenant en tenaille la couche d'eau de mer.

L'étude des courbes et des cartes de champ du mode TE présentées dans le rapport datant de Juin 1994 [87] a montré également que les lignes de courant magnétique se déforment afin d'épouser la forme de la couche d'eau de mer. La composante de champ magnétique dans la mer, parallèle et suivant le profil côtier subit moins de discontinuités que la composante perpendiculaire et cette composante parallèle est moins atténuée même aux fréquences élevées sur le parcours horizontal et immergé que la composante perpendiculaire. Un minimum de la composante de champ électrique transverse,  $E_y$ , a toujours été observé à la profondeur de l'émetteur et au niveau de la transition Terre/mer pour une fréquence supérieure à 1 Hz. La symétrie verticale entre les cartes de champ électromagnétique obtenues pour une ligne source électrique placée à la surface de la mer et celles obtenues en plaçant la source au fond de la mer prouve qu'au niveau des interfaces air/mer et mer/sol, les composantes de champ électromagnétique dans le cas du mode TE ont le même comportement pour cette gamme de fréquences.

### III-3.2) Etude du mode TM.

Les planches (III.9) et (III.10) représentent la composante horizontale de champ électrique et le vecteur de Poynting pour une ligne source située sous la surface de la mer pour 1 ou 10 Hz. Un rayonnement dans la mer est visible et identique pour 1 et 10 Hz avec des valeurs de champ électrique et du vecteur de Poynting élevées en champ proche par réflexion sur l'interface air/mer. La ligne source est située à une profondeur de 20 cm sous l'interface air/mer car la mer peut être considérée comme un milieu parfaitement conducteur pour une ligne source située sur ou au-dessus de l'interface air/mer. Les planches (III.11) et (III.12) représentent la composante verticale de champ électrique  $E_z$  et le vecteur de Poynting pour 1 ou 10 Hz pour la ligne source située à mi-profondeur car un rayonnement identique de la composante verticale de champ électrique et du vecteur de Poynting est obtenu pour 1 et 10 Hz. Cependant, en ce qui concerne la

composante horizontale  $E_x$  représentée sur les planches (III.13) et (III.14) respectivement pour 1 et 10 Hz, un minimum de champ électrique plus prononcé est visible dans la mer pour 1 Hz. L'étude suivant les différents profils côtiers fait apparaître la localisation des zones d'ombre de la composante horizontale de champ électrique au niveau des transitions abruptes dans la mer. La représentation du vecteur de Poynting pour le mode TM donne une explication plus claire sur le comportement du rayonnement d'une ligne source magnétique dans la mer. Et par recouplement avec les cartes de champ électrique, on remarque deux zones distinctes de rayonnement dans la mer, la première est la zone de rayonnement en champ proche d'une ligne source où le champ électrique est important et orthoradial comme en milieu homogène et la deuxième est la zone de rayonnement en champ lointain dans la mer où le vecteur de Poynting est vertical car la composante horizontale de champ électrique est prépondérante. Les quatre dernières planches (III.15), (III.16), (III.17) et (III.18) de ce chapitre concernent le cas où la ligne source est située au fond de la mer. Elles représentent respectivement la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  et le vecteur de Poynting à 1 et 10 Hz. On constate que le rayonnement est plus important en zone proche dans la mer à 10 Hz qu'à 1 Hz par réflexion sur l'interface mer/sol.

En conclusion, quelle que soit l'immersion de la ligne source, le chemin suivi par le vecteur de Poynting depuis la source montre que le champ électrique en zone de champ lointain dans la mer est issu non pas directement de la source par réflexion sur les interfaces air/mer et mer/sol mais indirectement de la puissance transitant par le sol puis remontant à la surface de la mer pour assurer le bouclage des lignes de courant électrique autour de la source dans la mer. Les cartes de champ sont dans l'ensemble semblables pour 1 et 10 Hz car la profondeur de pénétration dans l'eau de mer valant 80 m à 10 Hz et 250 m à 1 Hz est proche ou supérieure à la hauteur de la couche d'eau de mer égale à 100 m. Par contre, suivant la profondeur d'immersion de la ligne source, on a des valeurs et des comportements différents des champs électromagnétiques et du vecteur de Poynting résultant. Un meilleur rayonnement est constaté dans les cas où la ligne source est située soit à mi-profondeur soit au fond de la mer avec des valeurs plus homogènes de la composante horizontale de champ électrique dans le second cas.

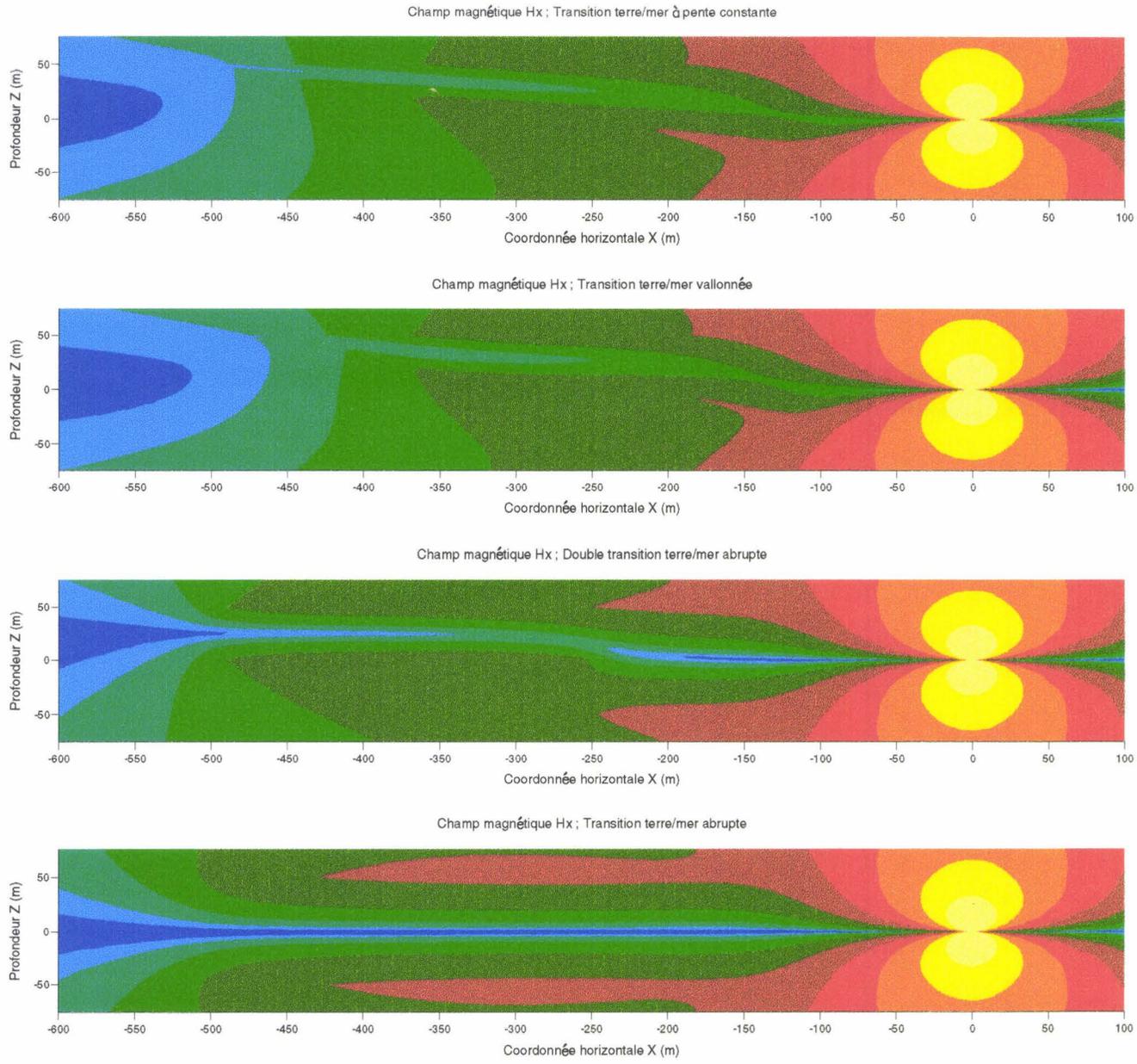


Planche (III.6): Composante horizontale de champ magnétique Hx pour une ligne source électrique située à mi-profondeur et pour 1 Hz.

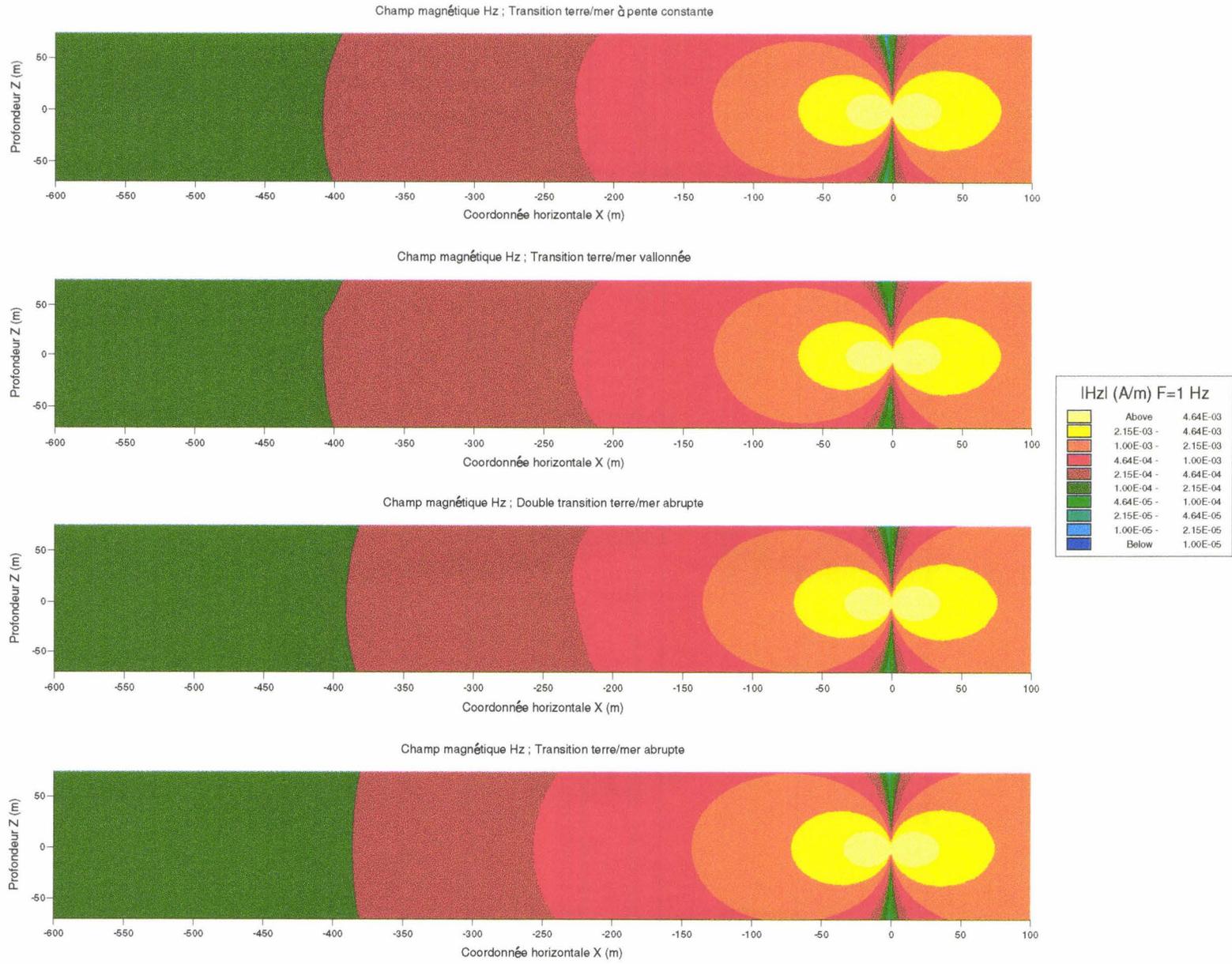


Planche (III.7): Composante verticale de champ magnétique Hz pour une ligne source électrique située à mi-profondeur et pour 1 Hz.

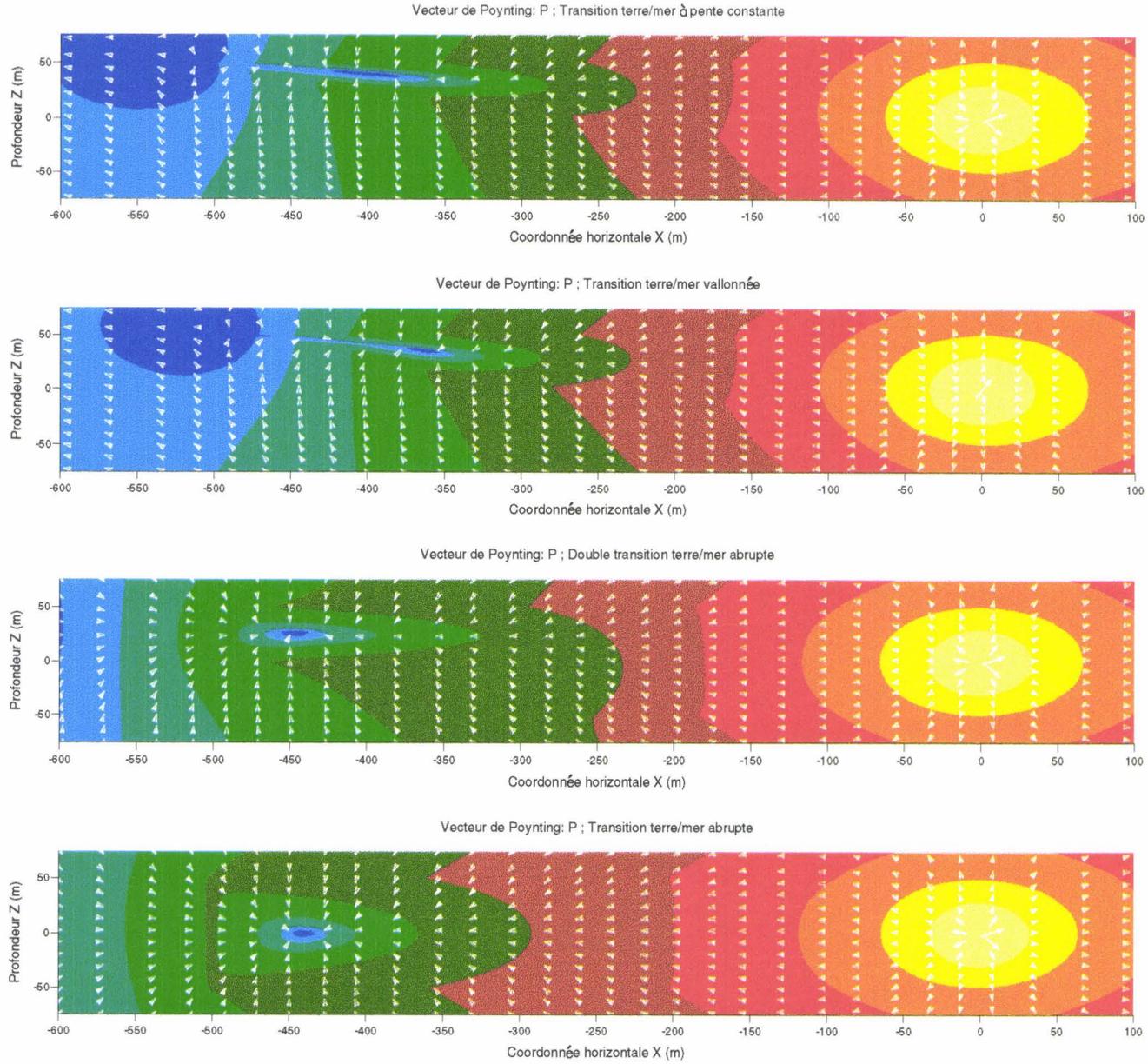


Planche (III.8): Vecteur de Poynting P pour une ligne source électrique située à mi-profondeur et pour 1 Hz.

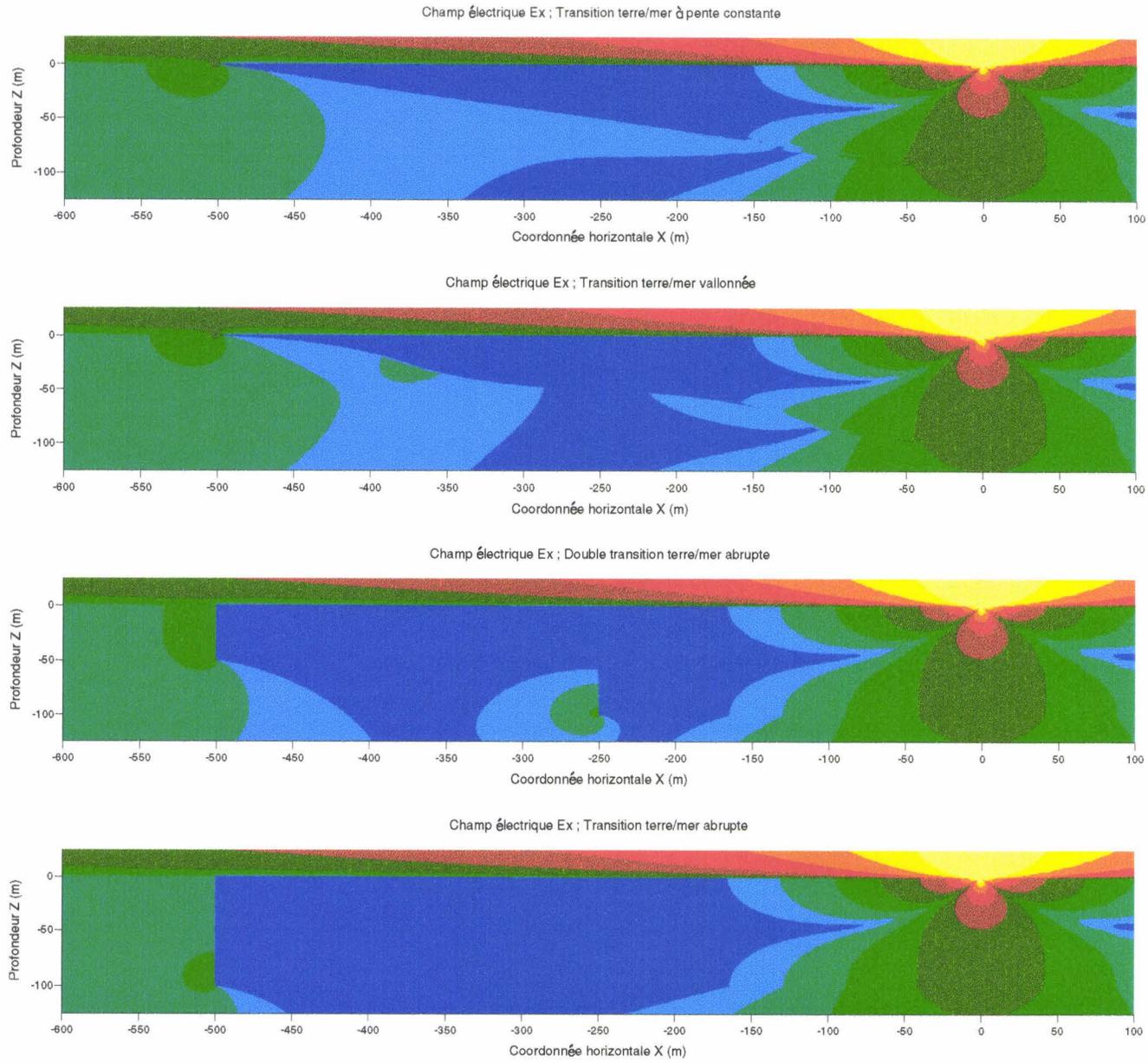


Planche (III.9): Composante horizontale de champ électrique Ex pour une ligne source magnétique située sous la surface pour 1 ou 10 Hz.

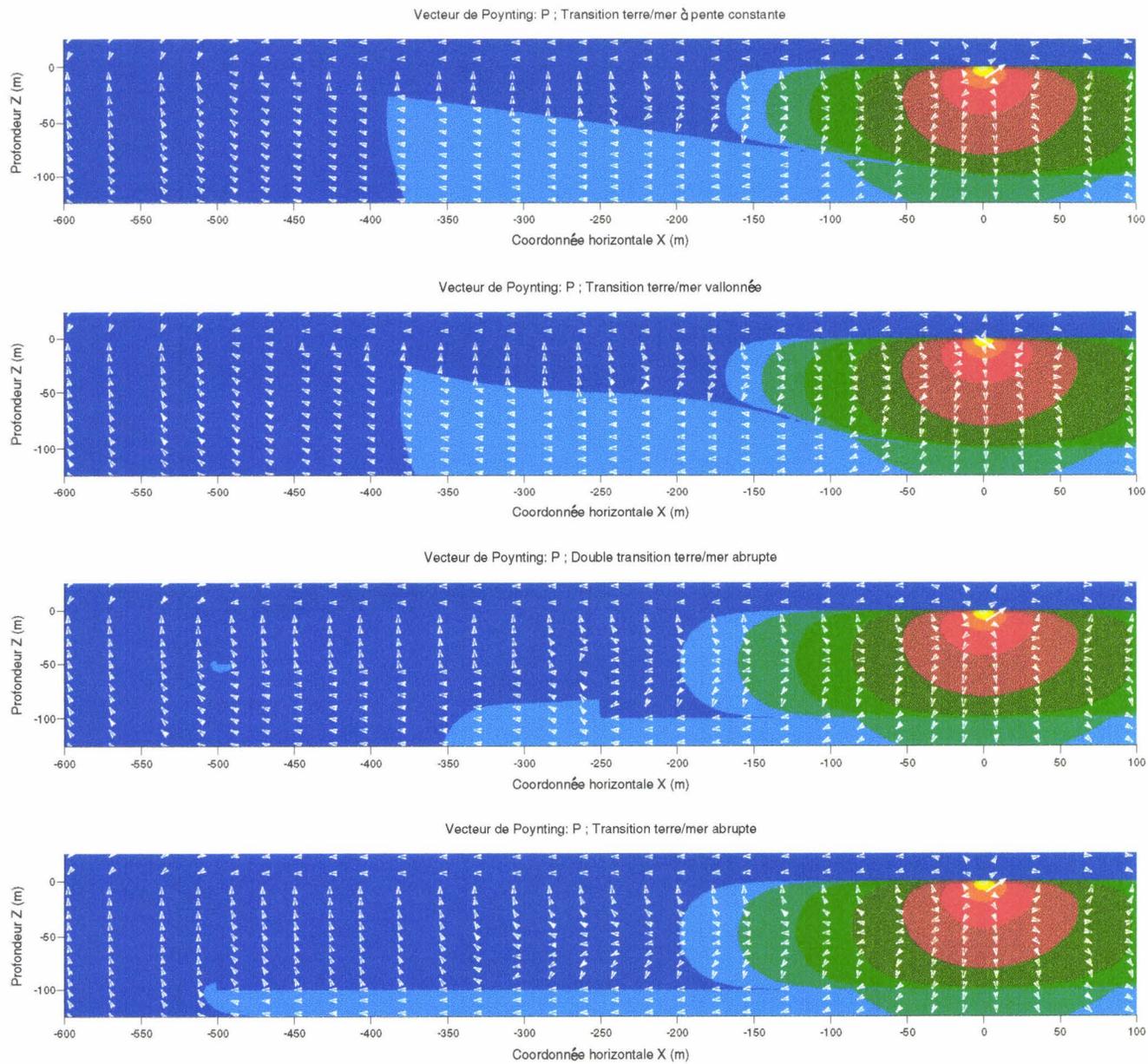


Planche (III.10): Vecteur de Poynting P pour une ligne source magnétique située sous la surface pour 1 ou 10 Hz.

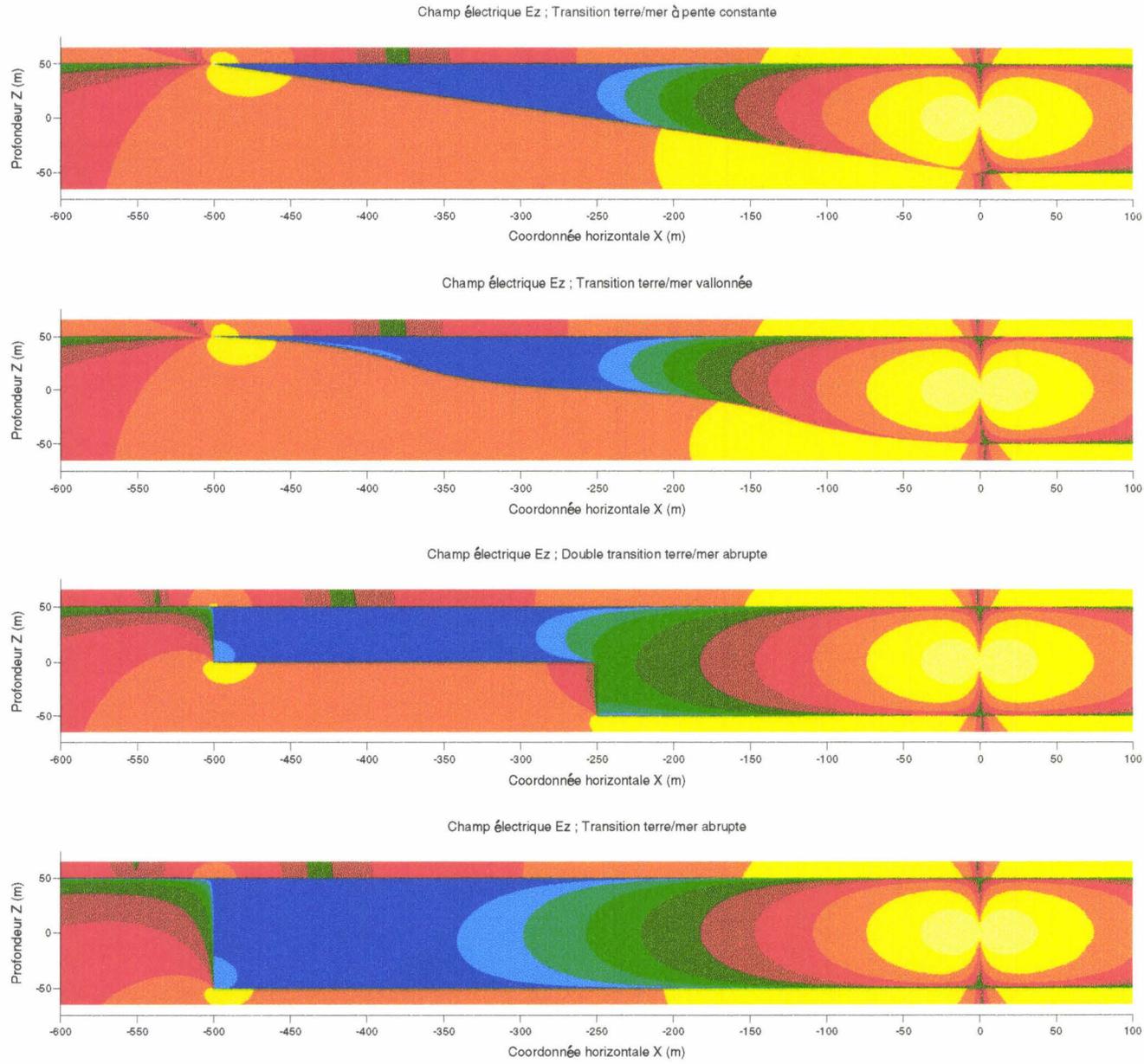


Planche (III.1.1): Composante verticale de champ électrique  $E_z$  pour une ligne source magnétique située à mi-profondeur et pour 1 ou 10 Hz.

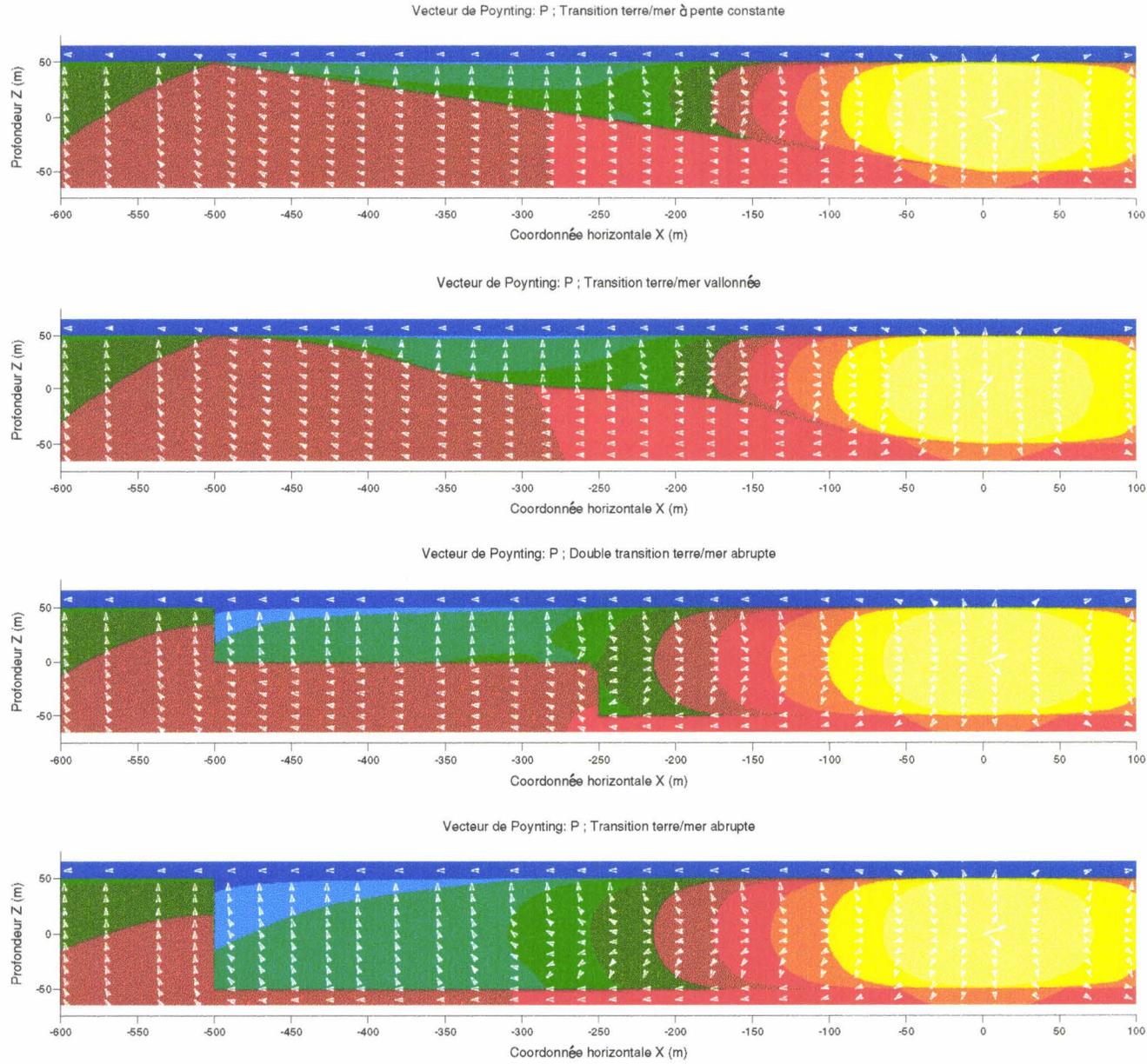


Planche (III.12): Vecteur de Poynting P pour une ligne source magnétique située à mi-profondeur et pour 1 ou 10 Hz.

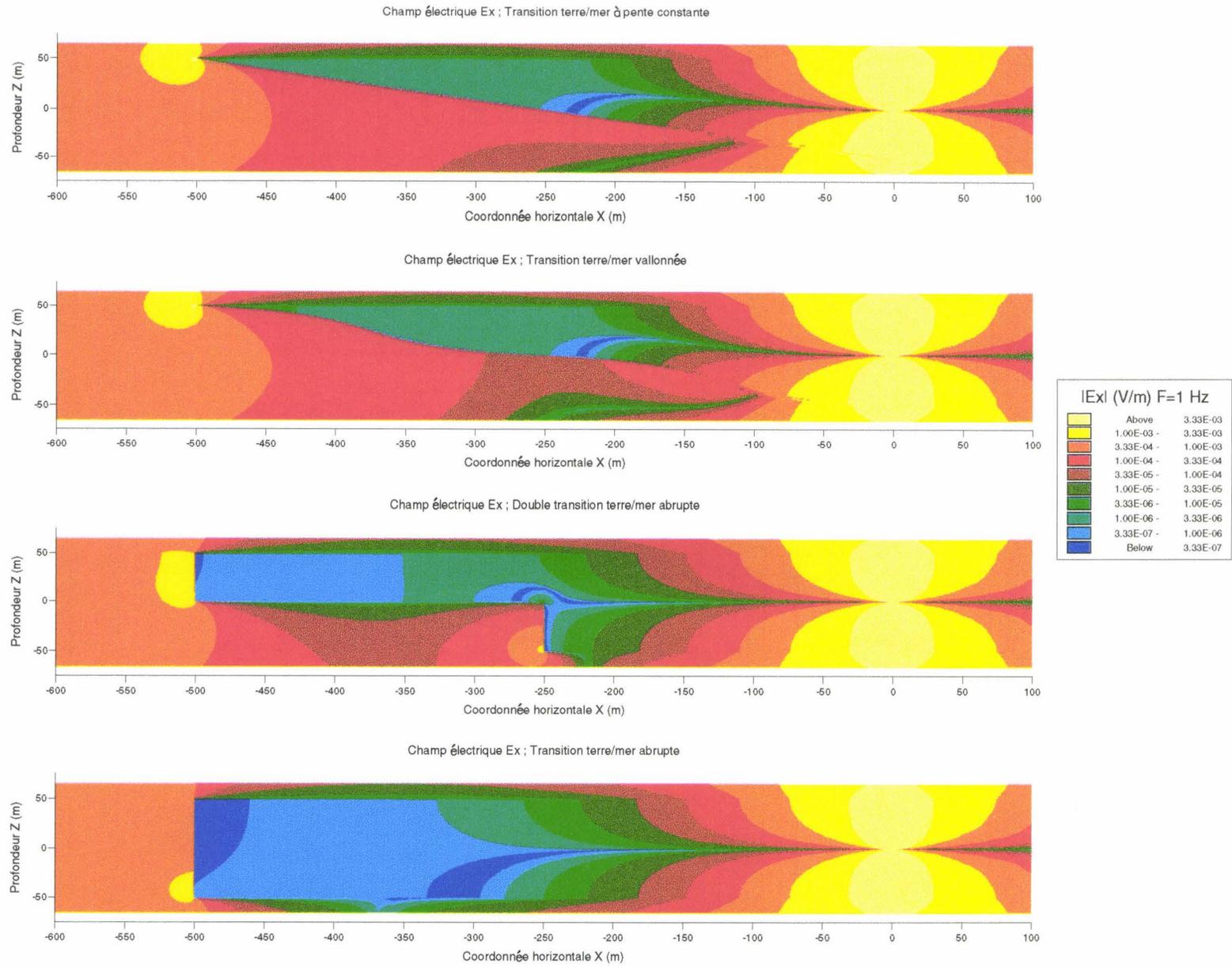


Planche (III.13): Composante horizontale de champ électrique Ex pour une ligne source magnétique située à mi-profondeur et pour 1 Hz.

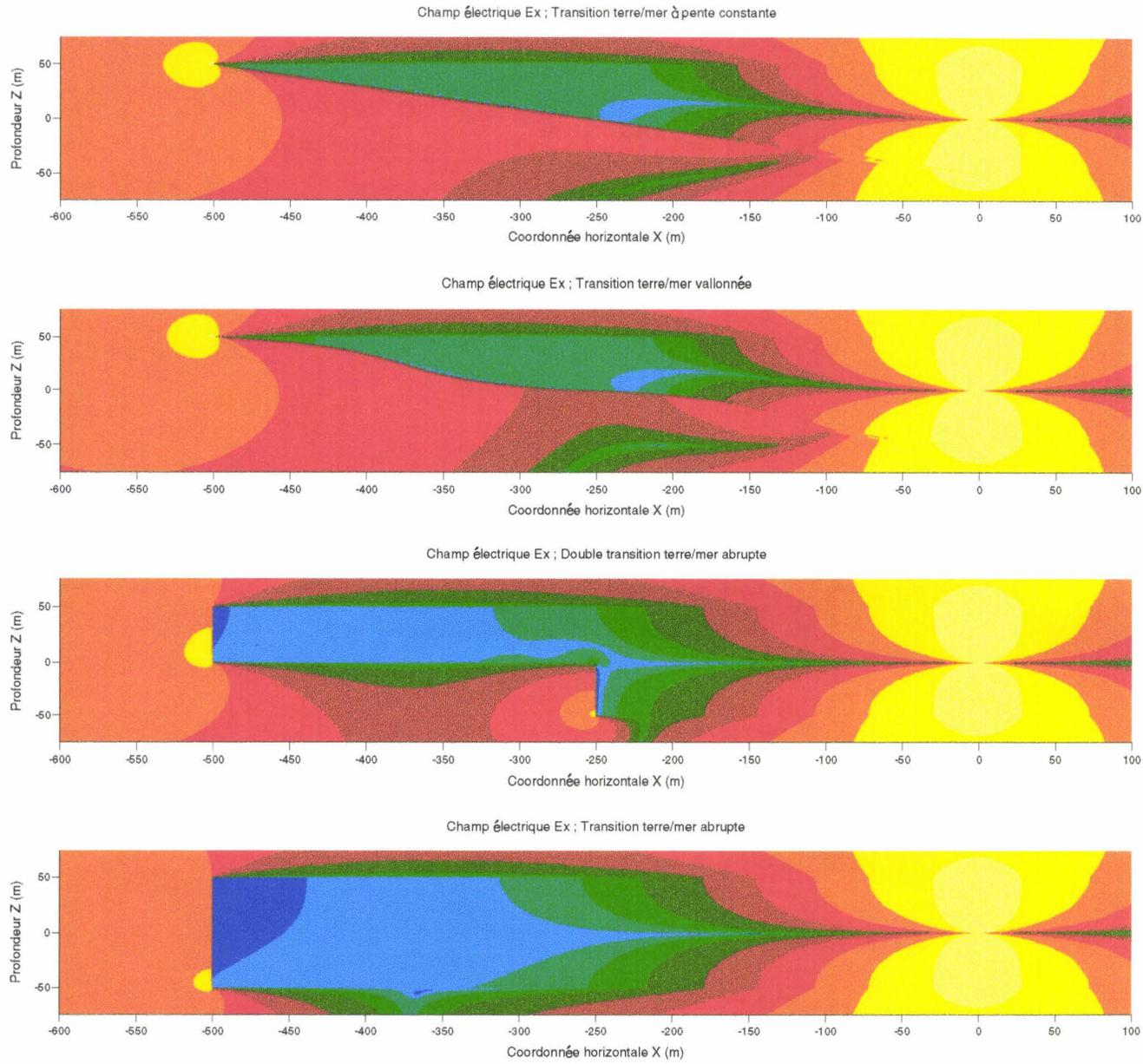


Planche (III.14): Composante horizontale de champ électrique  $E_x$  pour une ligne source magnétique située à mi-profondeur et pour 10 Hz.

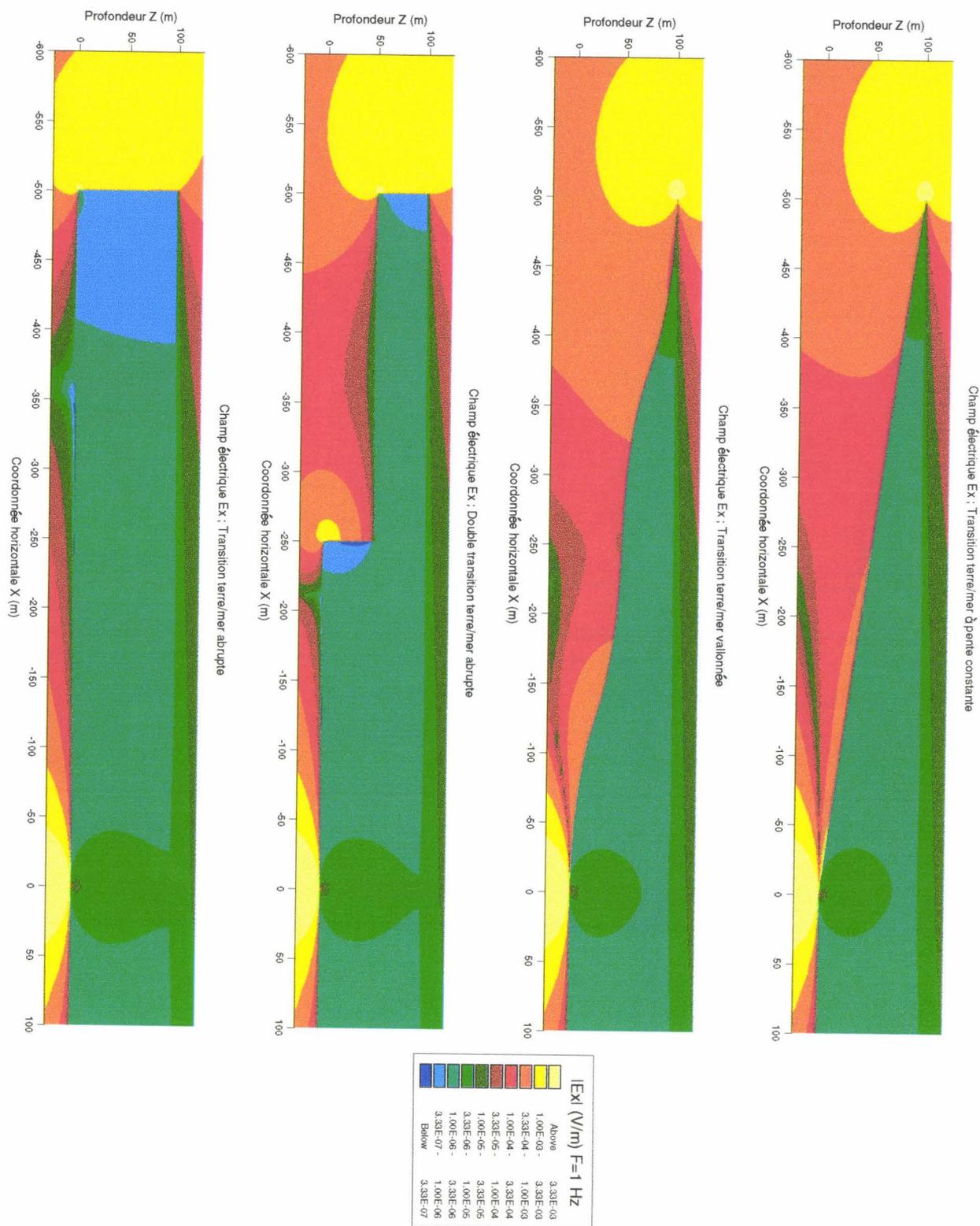


Planche (III.15): Composante horizontale de champ électrique Ex pour une ligne source magnétique située à 20 cm du fond de la mer et pour 1 Hz.

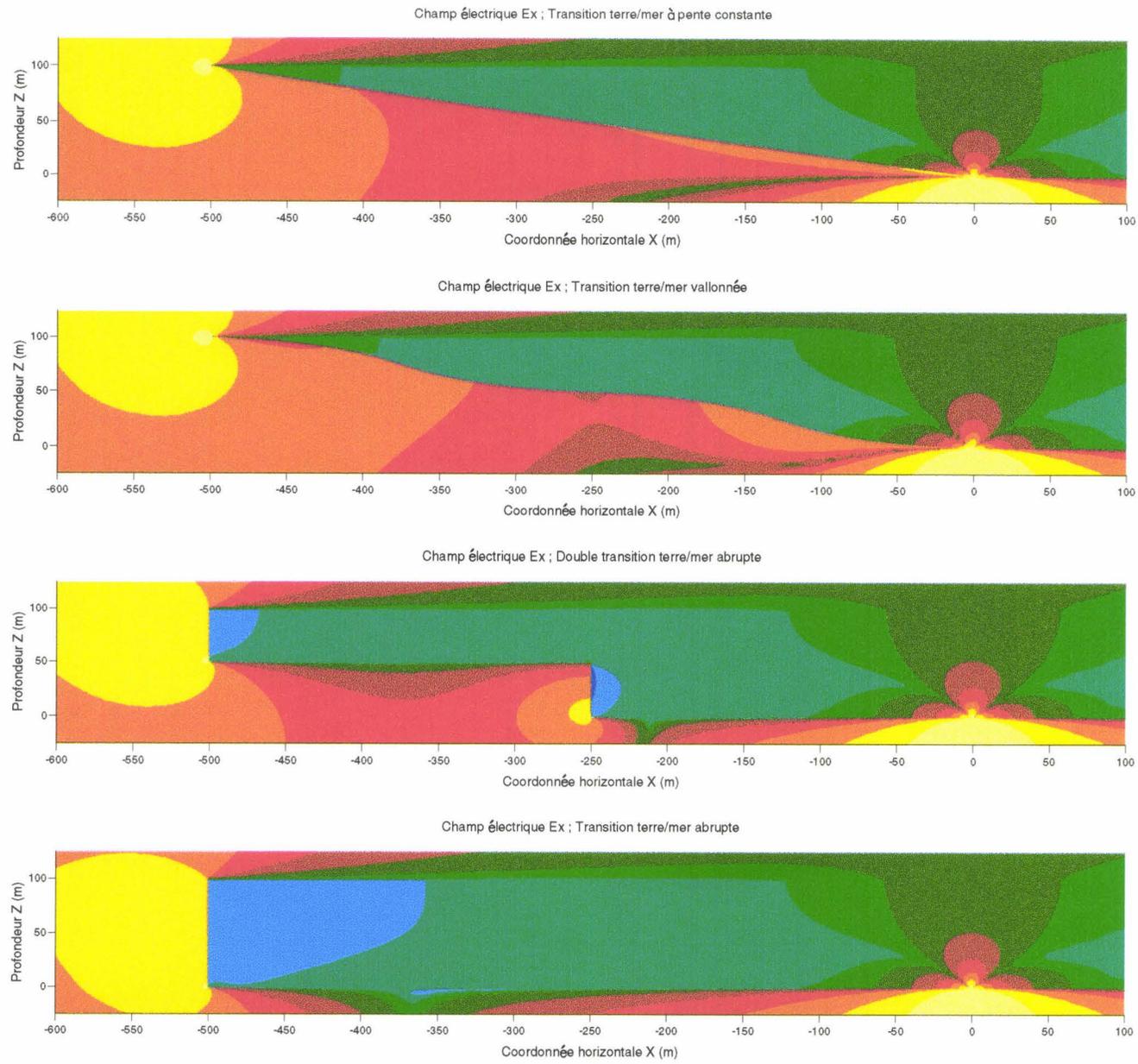


Planche (III.16): Composante horizontale de champ électrique  $E_x$  pour une ligne source magnétique située à 20 cm du fond de la mer et pour 10 Hz.

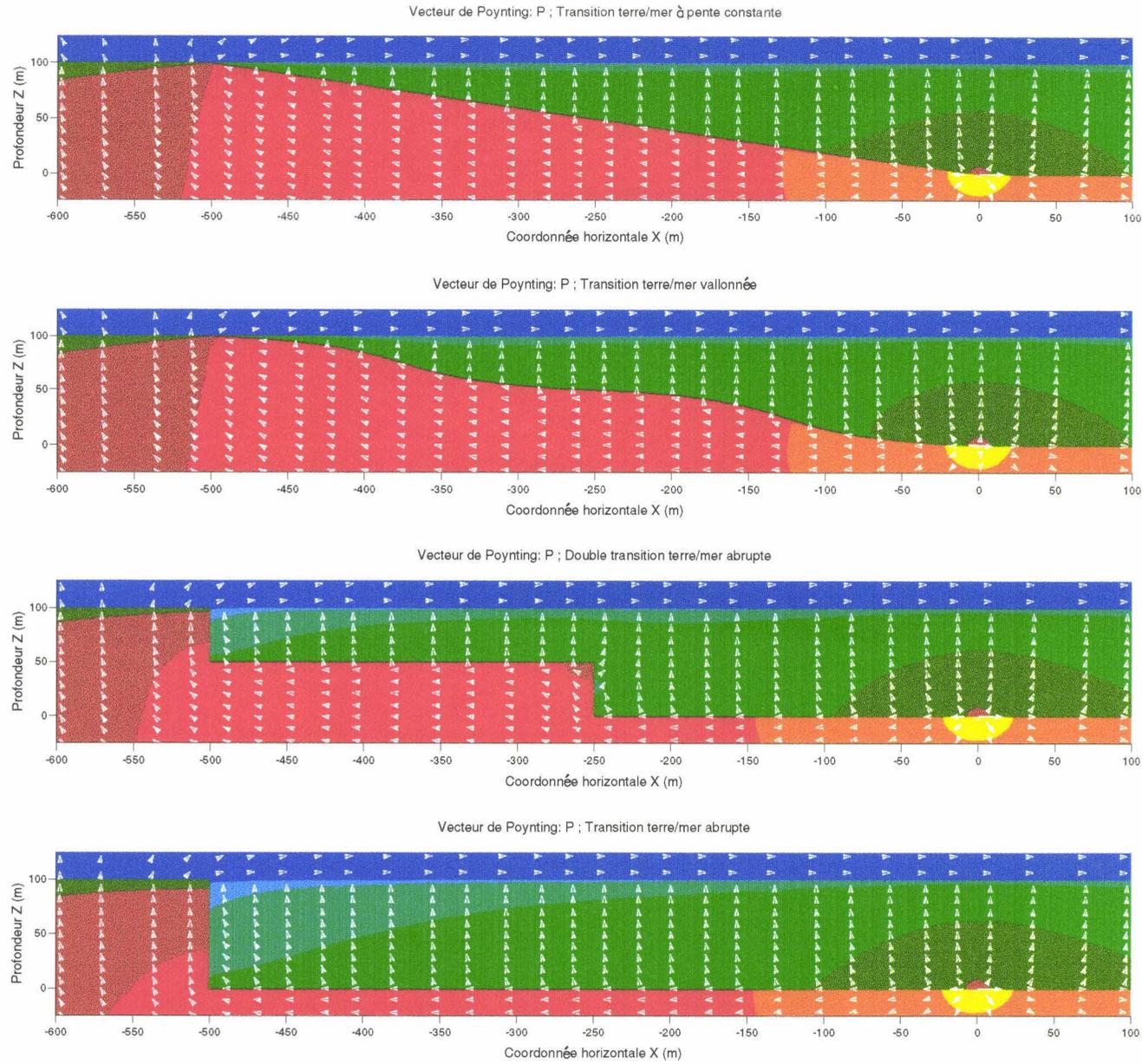


Planche (III.17): Vecteur de Poynting P pour une ligne source magnétique située à 20 cm du fond de la mer et pour 1 Hz.

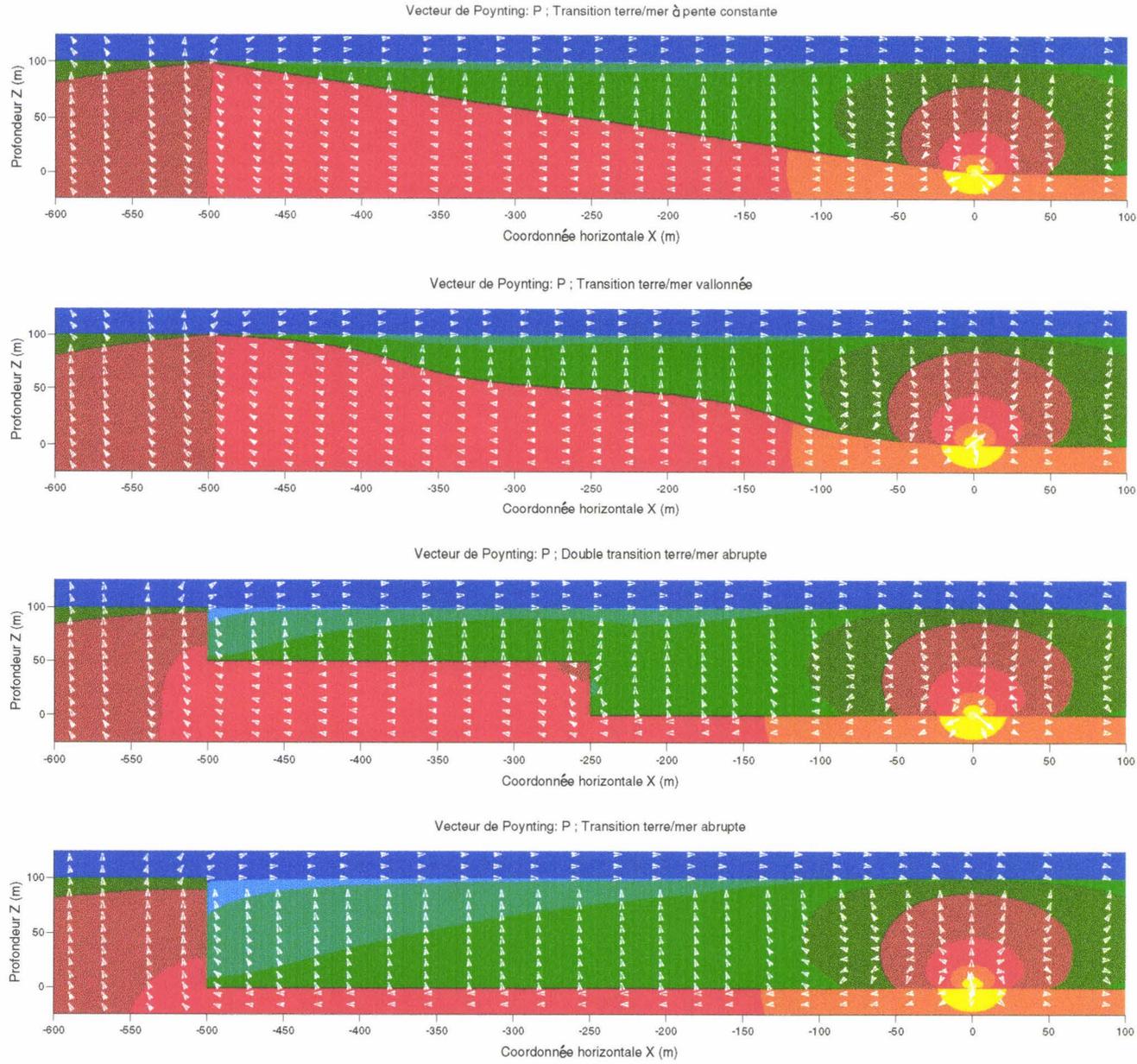


Planche (III.18): Vecteur de Poynting P pour une ligne source magnétique située à 20 cm du fond de la mer et pour 10 Hz.

**Conclusion**

Ce chapitre montre que contrairement au cas de la propagation du champ électromagnétique en onde plane pour laquelle les conditions aux limites utilisées sont du type Dirichlet et Cauchy afin de prendre en compte un émetteur situé en dehors du domaine discrétisé, il est nécessaire d'utiliser uniquement des conditions aux limites du type Cauchy pour une excitation par ligne source alternative à proximité d'une transition Terre/mer. Et, il est possible dans ce dernier cas de dresser des cartes de champ électromagnétique dans l'air.

L'étude de la propagation du champ électromagnétique au niveau d'une transition Terre/mer illuminée par une ligne source alternative électrique ou magnétique enfoncée à différentes profondeurs dans la mer confirme que les phénomènes électromagnétiques se produisant à proximité de la transition sont complexes puisqu'ils dépendent à la fois du type de profil côtier immergé, de la localisation de la source et des valeurs de la profondeur de pénétration dans les différents milieux conducteurs.

Il est apparu des oppositions dans le comportement des composantes de champ électromagnétique qui caractérisent les modes TM et TE. Notamment, la mer se comporte comme un parfait conducteur pour une ligne source magnétique située à la surface où au-dessus de la mer. Comme Fisher (1979)[34] l'avait signalé pour une illumination en onde plane, les effets de la transition Terre/mer sur la propagation des ondes électromagnétiques issues d'une ligne source se font davantage ressentir pour le mode TM que pour le mode TE. Les cartes des composantes de champ transversale, horizontale et verticale, ont fait apparaître que les directions des lignes de niveau des composantes de champ dans la mer et à proximité des interfaces air/mer et mer/sol sont inversées d'un mode à l'autre. Le tableau ci-dessous résume la direction des lignes de niveau de chaque composante dans la mer au niveau des différentes interfaces.

<u>Mode TM</u>	<u>Mode TE</u>
Hy: lignes de niveau horizontales	Ey: lignes de niveau verticales
Ex: " verticales	Hx: " horizontales
Ez: " horizontales	Hz: " verticales

Les cartes vectorielles du flux de puissance des deux modes ont mis en évidence la modification des lignes de courant électrique ou magnétique afin d'épouser la forme de la couche d'eau de mer et la forme du profil côtier.

Pour le mode TE, le flux de Puissance prend en tenaille la couche d'eau de mer et un minimum de la composante horizontale de champ magnétique est situé à mi-profondeur. Ceci provoque la symétrie observée sur les cartes des composantes de champ magnétique par rapport à un axe situé à mi-profondeur.

Par contre, pour le mode TM, on distingue deux zones de rayonnement dans la mer. La première est la zone de rayonnement en champ proche d'une ligne source où le champ électrique est important et orthoradial comme en milieu homogène et la deuxième est la zone de rayonnement en champ lointain dans la mer où la composante horizontale de champ électrique est prépondérante. De plus, quelle que soit l'immersion de la ligne source dans la mer, le chemin suivi par le vecteur de Poynting depuis la source montre que le champ électrique en zone de champ lointain dans la mer est issu non pas directement de la source par réflexion sur les interfaces air/mer et mer/sol mais indirectement de la puissance transitant par le sol puis remontant à la surface de la mer afin d'assurer le bouclage des lignes de courant électrique autour de la source située dans la mer.

L'étude suivant les différents profils côtiers fait apparaître la localisation des zones d'ombre de la composante horizontale de champ électrique au niveau des transitions abruptes dans la mer.

Afin de poursuivre l'étude du rayonnement électromagnétique de différents types de source à proximité d'une transition Terre/mer, le chapitre suivant est consacré à l'étude du rayonnement d'un dipôle électrique bidimensionnel immergé formé par deux lignes sources magnétiques alternatives parallèles à la ligne de côte. Dans ce cas, la puissance rayonnée par la source n'est plus omnidirectionnelle mais concentrée suivant une direction perpendiculaire au dipôle.

**IV- Modélisation du rayonnement d'un dipôle électrique alternatif bidimensionnel immergé au voisinage d'une transition Terre/mer.**

**Sommaire**

Introduction.....	139
<b>IV-1.Présentation du modèle. ....</b>	<b>140</b>
<b>IV-1.1)Hypothèses simplificatrices.....</b>	<b>140</b>
<b>IV-1.2)Conditions aux limites.....</b>	<b>141</b>
<b>IV-1.3)Validation. ....</b>	<b>142</b>
<b>IV-2.Présentation des résultats.....</b>	<b>145</b>
<b>IV-2.1)Rayonnement d'un dipôle électrique vertical 2D à proximité d'une transition Terre/mer. ....</b>	<b>145</b>
IV-2.1.1)Localisation du DEV 2D. ....	145
IV-2.1.2) DEV 2D à mi-profondeur dans la mer.....	146
IV-2.1.3) DEV 2D au fond de la mer. ....	147
IV-2.1.4) DEV 2D sous la surface de la mer.....	148
<b>IV-2.2)Rayonnement d'un dipôle électrique horizontal 2D à proximité d'une transition Terre/mer.....</b>	<b>148</b>
IV-2.2.1)Localisation du DEH 2D. ....	148
IV-2.2.2) DEH 2D à mi-profondeur dans la mer.....	149
IV-2.2.3) DEH 2D au fond de la mer. ....	150
IV-2.2.4) DEH 2D sous la surface de la mer.....	150
 Conclusion. ....	 177

## Introduction

D'après Ranganayaki et Madden (1980)[21], la transition Terre/mer est sans aucun doute la structure géologique la plus difficile à prendre en compte dans un modèle théorique. Et, afin d'éviter les problèmes de convergence et de temps de calcul qui se produisent lors de la simulation du rayonnement d'une source alternative tridimensionnelle dans un milieu hétérogène comportant des transitions de conductivité très élevées, il est intéressant d'étudier le rayonnement de dipôles électriques alternatifs bidimensionnels à partir du rayonnement de lignes sources magnétiques dont les résultats sont très stables et sont fournis en un temps de calcul très réduit par rapport au modèle tridimensionnel. Par exemple, le rayonnement de deux lignes sources électriques parcourues par des courants en opposition de phase permet d'approximer le rayonnement d'un cadre magnétique de faible largeur. Par transposition, on peut imaginer que deux lignes sources magnétiques permettent de simuler un dipôle électrique bidimensionnel.

Les résultats présentés dans ce chapitre concernent uniquement le cas du dipôle électrique alternatif bidimensionnel et le nouveau paramètre de simulation, orientation du dipôle, est analysé en plus des paramètres d'immersion, de fréquence et des profils côtiers sous-marins étudiés dans les chapitres précédents. Ce nouveau paramètre est très intéressant à étudier car il fixe l'orientation du flux de puissance émis depuis la source dans une direction bien précise par rapport à l'interface horizontale air/mer et par rapport aux différents profils côtiers sous-marins.

## IV-1. Présentation du modèle.

### IV-1.1) Hypothèses simplificatrices.

La simulation du rayonnement électromagnétique d'un dipôle électrique ou magnétique bidimensionnel peut être réalisée dans des milieux de propagation bidimensionnels à l'aide de dipôles lignes sources magnétiques ou électriques respectivement. Par exemple, on peut imaginer qu'un dipôle magnétique matérialisé sous la forme d'un cadre magnétique rectangulaire ayant une longueur supérieure à sa largeur peut être approximé par deux lignes sources électriques représentant les grands côtés du cadre rayonnant et parcourues par des courants électriques en opposition de phase (figure (IV.1)).

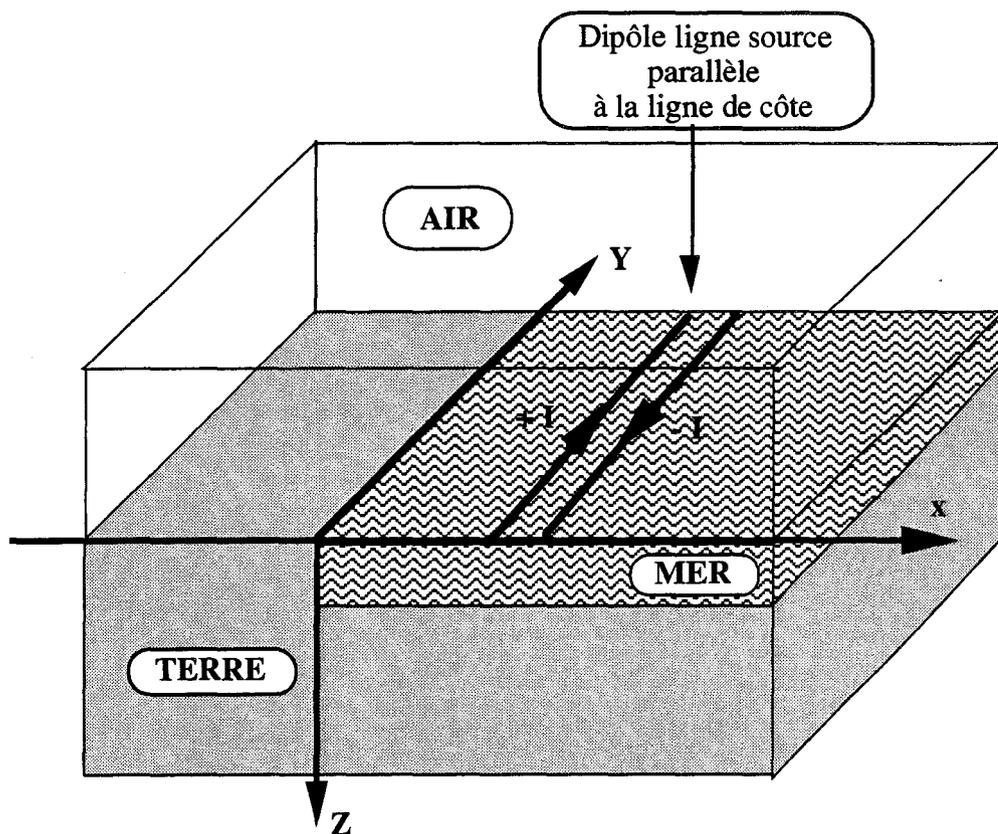


Figure (IV.1) : Représentation d'une transition abrupte illuminée par un dipôle ligne source électrique approximant un cadre magnétique.

Et par dualité entre les équations de propagation des dipôles et des lignes sources électriques et magnétiques, on peut transposer le problème de la simulation du dipôle magnétique au cas du dipôle électrique qui peut être approximé par deux lignes sources magnétiques.

Un dipôle ligne source est pris en compte dans les équations de Maxwell comme la superposition de deux lignes sources en opposition de phase et localisées en des endroits distincts de l'espace. Les équations à résoudre sont donc les mêmes que pour la simulation du rayonnement d'une ligne source et le programme informatique précédent a été amélioré afin de simuler un nombre quelconque de lignes sources parallèles. Dans les applications qui suivent, le courant magnétique est fixé à 1 H.A.rad/s dans les lignes sources magnétiques quelle que soit la fréquence. Dans les modèles tridimensionnels, la valeur du champ magnétique de la source  $H_s$  est fixée et cette valeur est reliée à la densité du courant magnétique  $J_m$  par la relation (IV.1).

$$J_m = j \omega \mu H_s \quad (IV.1).$$

IV-1.2) Conditions aux limites.

Comme pour le cas du rayonnement d'une ligne source, la limitation du domaine non borné est réalisée grâce à l'utilisation des conditions aux limites du type Cauchy (figure (IV.2)).

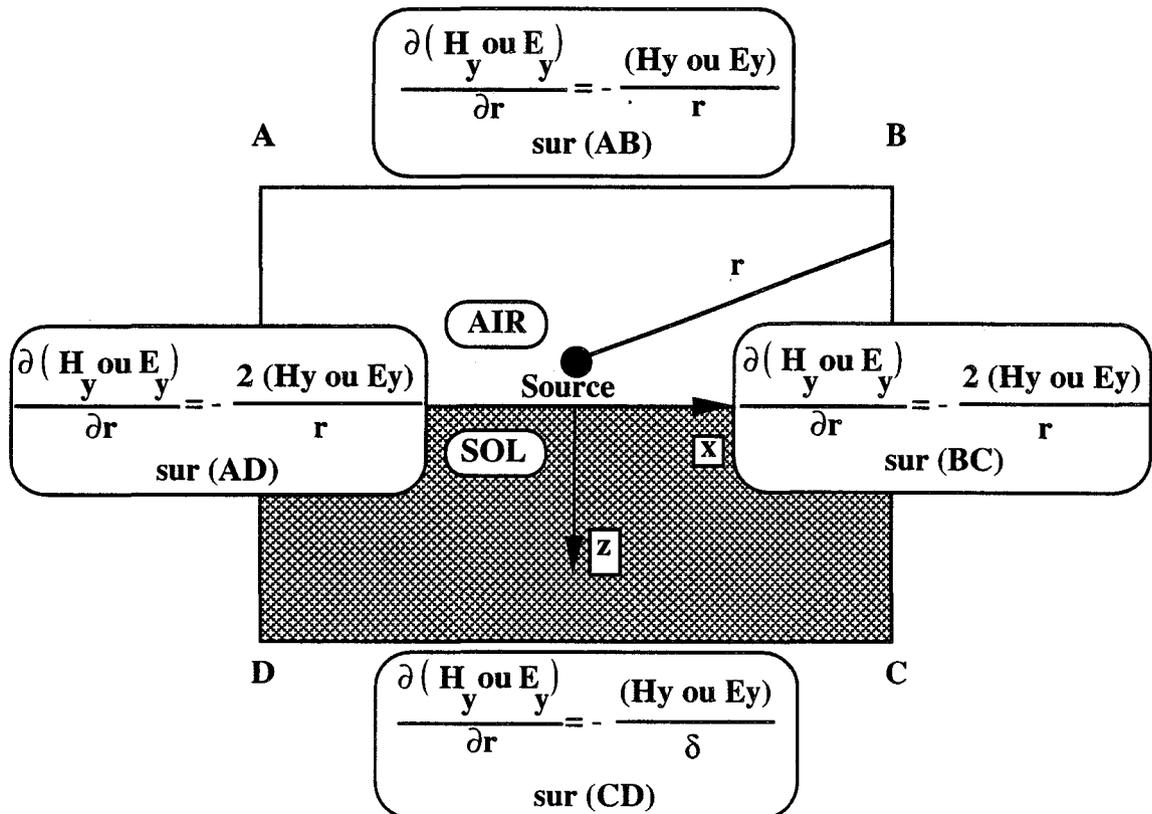


Figure (IV.2): Modèle Mixte.

Le modèle Mixte de la figure (IV.2) a été élaboré en déterminant la décroissance de la composante de champ électrique  $E_y$  rayonnée par une ligne source électrique suivant la tranche médiane et la couche en surface. Il suppose une décroissance de champ en  $1/r^2$  sur les côtés latéraux et une décroissance exponentielle sur le côté (CD) situé dans le sol. Ceci correspond à la décroissance du champ rayonné par un dipôle dans un milieu homogène et infini lorsque le côté (CD) est éloigné de la source de plusieurs fois la valeur de la profondeur de pénétration dans le sol. La décroissance de champ sur les cotés latéraux n'est que le juste milieu entre les décroissances de champ sur les côtés (AB) et (CD). Les limites du domaine sont repoussées à une distance supérieure ou égale à 2 fois la valeur de la profondeur de pénétration dans le sol autour de la source et de la transition.

#### IV-1.3) Validation.

La validation du rayonnement de dipôles lignes sources n'est pas nécessaire puisqu'elle repose sur la superposition du rayonnement de lignes sources parallèles qui ont été validées dans le chapitre précédent. Comme les conditions aux limites ne dépendent pas du nombre de lignes sources simulées, le programme ainsi conçu peut donc simuler un nombre quelconque de lignes sources parallèles.

Dans le cas du dipôle magnétique, la distance séparant les deux lignes sources concorde avec la largeur du cadre magnétique. Par contre, dans le cas du dipôle électrique, la distance entre les lignes sources magnétiques ne concorde pas à première vue à une dimension mesurable du dipôle électrique. Cependant, les essais effectués ont montré que le champ électrique est bien proportionnel à la distance séparant les lignes sources magnétiques et à la valeur du courant circulant dans les lignes sources comme pour le cas du dipôle magnétique. Cette constatation montre la difficulté à situer géographiquement le dipôle électrique bidimensionnel équivalent par rapport aux interfaces puisque les emplacements des lignes sources magnétiques ne correspondent pas aux emplacements des extrémités du dipôle électrique bidimensionnel mais ils sont équidistants et situés de part et d'autre de ceux-ci. Une représentation moins imagée de ce type de source est de considérer deux solénoïdes parallèles parcourus par des courants en opposition de phase.

Dans le cas du dipôle électrique vertical bidimensionnel, les lignes sources magnétiques doivent être situées suivant la même coordonnée sur l'axe vertical (oz). Il faut placer les deux lignes sources sous la surface pour qu'il y ait

rayonnement dans la mer par réflexion sur l'interface air/mer. L'air se conduit comme un milieu parfaitement réflecteur. Si les deux lignes sources magnétiques sont placées soit à l'extérieur soit à la surface de la mer, on obtient les mêmes résultats que dans le cas du rayonnement d'une ligne source magnétique vu dans le chapitre précédent. C'est-à-dire que la mer se conduit comme un milieu parfaitement conducteur.

Dans le cas du dipôle électrique horizontal bidimensionnel, les lignes sources magnétiques doivent être situées suivant la même coordonnée sur l'axe horizontal ( $ox$ ). Il faut au moins une ligne source magnétique située dans la mer pour qu'il y ait rayonnement dans la mer par réflexion sur l'interface air/mer ou mer/sol. Des équivalences de rayonnement d'un dipôle électrique horizontal au niveau d'une interface air/mer ou mer/sol peuvent être déduites des constatations précédentes et sont récapitulées sur la figure (IV.3) suivante.

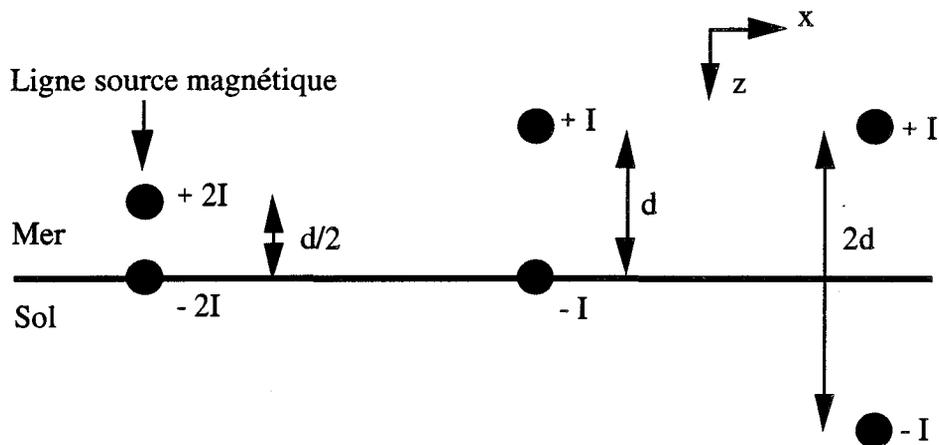


Figure (IV.3): Equivalence entre 3 dipôles électriques horizontaux au niveau d'une interface mer/sol.

Pour tester les limites du modèle théorique et pour obtenir des explications plus claires sur le comportement du rayonnement de dipôles lignes sources immergés au voisinage d'une transition Terre/mer, une étude faisant varier les conductivités et les limites des différents milieux a été menée. Sur la figure (IV.4) suivante, sont énumérées quelques configurations simulées dans le cas d'un dipôle électrique bidimensionnel immergé à mi-profondeur dans la mer. L'air a été remplacé notamment par un milieu faiblement conducteur de conductivité comprise entre  $10^{-9}$  et  $10^{-4}$  S/m puis par le sol de conductivité égale à  $10^{-3}$  S/m en considérant une transition abrupte ou en pente.

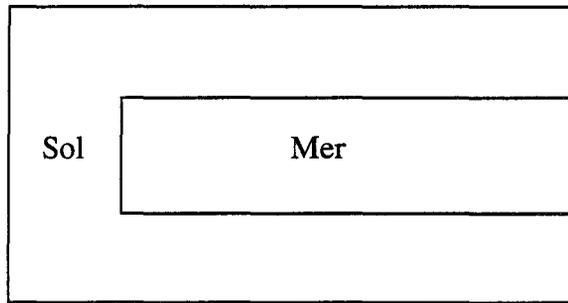


Figure (IV.4-a): Cas où l'air est remplacé par le sol représentant un bras de mer ou un relief sous-marin.

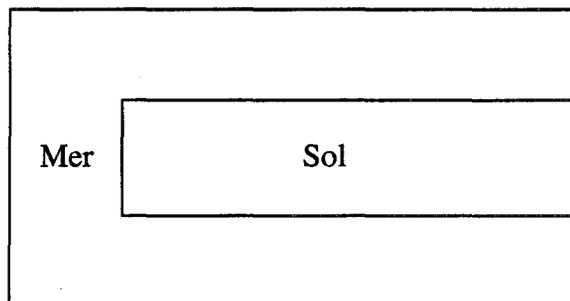


Figure (IV.4-b): Cas où la mer entoure le sol représentant le cas d'une péninsule ou d'un relief sous-marin.

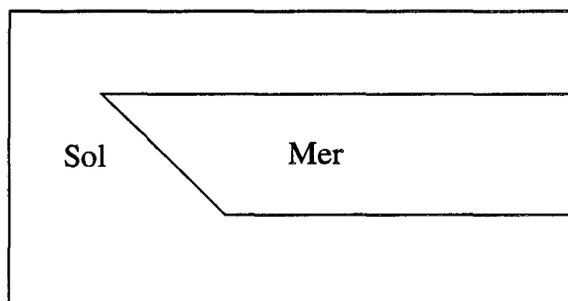
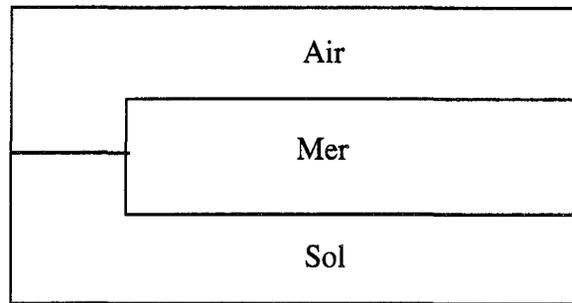


Figure (IV.4-c): Cas où l'air est remplacé par le sol avec une transition non abrupte (20%).



**Figure (IV.4-d):** Cas où le niveau de la mer est surélevé par rapport à la terre, l'inverse peut être aussi simulé.

Ces différents modèles géologiques ont pu être simulés grâce à l'utilisation de simples conditions aux limites de type Cauchy et en calculant le champ total. Ce choix dans l'élaboration du modèle théorique, ne fixant que le courant circulant dans le dipôle alternatif bidimensionnel, permet l'étude de modèles géologiques très différents sans restrictions sur la localisation de la source.

## IV-2. Présentation des résultats.

L'étude paramétrique repose sur la variation de la fréquence couvrant la gamme 0.1 à 100 Hz comme pour les excitations électromagnétiques précédentes de la transition Terre/mer, de la profondeur d'immersion de la source, de la position de l'émetteur par rapport aux interfaces comme pour le cas de la ligne source et de l'orientation du dipôle électrique bidimensionnel (horizontale ou verticale). Comme nous l'avons vu précédemment, les émetteurs sont placés dans la mer pour avoir un rayonnement important dans la mer sinon le milieu marin se comporte comme un milieu parfaitement conducteur. Les profils côtiers discrétisés sont toujours à pente constante (20%), vallonné, à double transition abrupte et à transition abrupte.

### IV-2.1) Rayonnement d'un dipôle électrique vertical 2D à proximité d'une transition Terre/mer.

#### IV-2.1.1) Localisation du DEV 2D.

Les lignes sources magnétiques sont donc positionnées à la même profondeur d'immersion et une distance de 40 cm les sépare avec un courant magnétique circulant dans les lignes sources égal à 1 H.A.rad/s (figure (IV.5)).

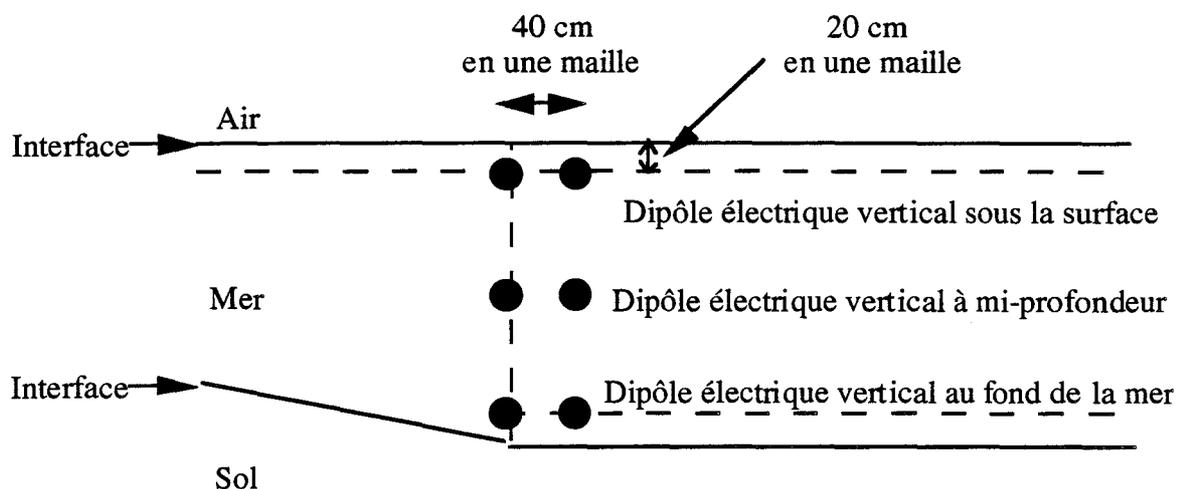


Figure (IV.5): Localisation du dipôle électrique vertical dans la mer et à proximité du profil côtier à pente constante.

Les cartes des composantes horizontale et verticale de champ électrique ( $E_x$  et  $E_z$ ) et les cartes vectorielles du vecteur de Poynting sont représentées dans la gamme de fréquences allant de 0,1 à 100 Hz pour 3 immersions de l'émetteur et suivant les profils côtiers abrupt, doublement abrupt, vallonné et à pente constante pour montrer l'importance du relief sous-marin sur la propagation des ondes électromagnétiques dans la mer et en bordure du littoral.

#### IV-2.1.2) DEV 2D à mi-profondeur dans la mer.

Les quatre premières planches correspondent à une immersion de l'antenne à mi-profondeur dans la mer. Sur les deux premières planches (IV.1) et (IV.2), le vecteur de Poynting a été représenté pour 0.1 et 100 Hz car il est semblable pour 0.1, 1 et 10 Hz au niveau de la transition Terre/mer et une plus forte atténuation n'est constatée que pour 100 Hz. La première constatation est qu'on distingue deux zones de rayonnement dans la mer comme dans le cas de la ligne source magnétique. La première zone correspond au rayonnement en champ proche où l'on retrouve les caractéristiques de rayonnement d'un dipôle électrique vertical. La deuxième zone correspond au rayonnement en champ lointain où le vecteur de Poynting est vertical. D'après le chemin suivi par le vecteur de Poynting, le champ lointain dans la mer est issu du champ proche de l'antenne qui se propage par le sol et remonte dans la mer quand la somme du champ direct et de ses réflexions sur les interfaces air/mer et mer/sol est assez affaiblie. Une deuxième caractéristique du rayonnement dans la mer d'un émetteur immergé est la

prépondérance de la composante horizontale de champ électrique sous l'interface air/sol ou air/mer puisque le vecteur de Poynting  $y$  est toujours vertical. Ceci pourrait servir à élaborer un nouveau modèle théorique avec une simple condition aux limites de Neumann au niveau de l'interface air/mer et air/sol. La troisième constatation est d'observer une inversion du sens du vecteur de Poynting suivant le profil côtier qui détermine la séparation entre le champ lointain et le champ proche. Ceci peut expliquer les fortes variations des composantes de champ électrique parallèle et perpendiculaire suivant le profil côtier constatées dans le rapport de Juin 1994 sur l'émission de lignes sources dans la mer. Dans le cas des transitions non abruptes, le rayonnement en champ proche dans la mer est moindre car le profil côtier offre plus de facilité au passage du rayonnement dirigé vers le sol. La troisième planche (IV.3) représente la carte de champ électrique pour 1 Hz et pour les différents profils côtiers. Les résultats sont semblables pour 0.1 Hz et la zone de très faible champ dans la mer disparaît pour 10 Hz pour homogénéiser la zone de champ lointain dans les cas des transitions non abruptes. La carte de la composante verticale de champ électrique est représentée sur la planche (IV.4) pour 1 Hz. Cette composante n'existe qu'en champ proche en restant semblable pour 0.1, 1 et 10 Hz. Nous avons pu constater que pour 0,1, 1 et 10 Hz, les cartes de champ électrique sont semblables dans la mer. Ceci correspond à des valeurs de profondeur de pénétration dans la mer supérieures à l'épaisseur de la couche d'eau de mer et à des valeurs de profondeur de pénétration dans le sol supérieures à la distance ligne de côte-émetteur comme l'indique le tableau suivant.

Fréquence (Hz)	$\delta_{sol}$ (km)	$\delta_{mer}$ (m)
0,1	50	800
1	16	250
10	5	80
100	1,6	25

**IV-2.1.3) DEV 2D au fond de la mer.**

Les planches (IV.5) à (IV.9) regroupent les caractéristiques du rayonnement d'un dipôle électrique vertical situé au fond de la mer. Une nouvelle fois, il se dégage des résultats numériques, l'influence prépondérante du relief sous-marin en bordure de mer sur le rayonnement d'antennes immergées. Sur les planches (IV.5) et (IV.6) représentant le vecteur de Poynting pour 1 et 100 Hz, on constate

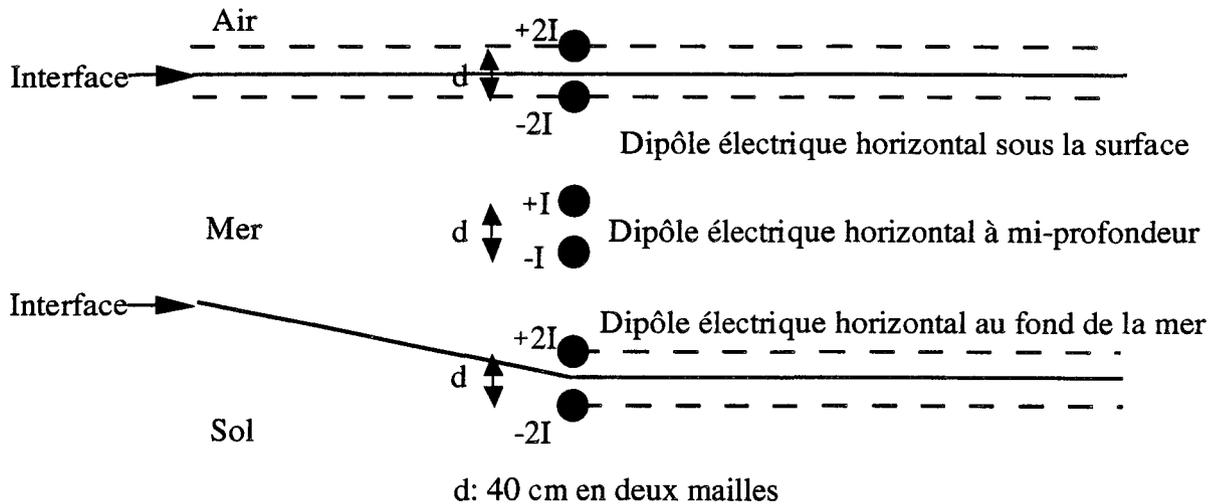
que quelle que soit la fréquence et au fur et à mesure que le profil côtier sous-marin tend vers le modèle de la transition Terre-mer à pente constante, les deux lobes supérieurs correspondant au rayonnement de l'antenne dans la mer se déforment pour n'en faire plus qu'un comme pour le rayonnement d'un dipôle électrique horizontal au fond de la mer que nous verrons par la suite. Pour 0,1, 1 et 10 Hz, le vecteur de Poynting est semblable au niveau de la transition Terre/mer, planche (IV.5), et une plus forte atténuation dans la mer est visible pour 100 Hz, planche (IV.6). La zone de champ proche est de nouveau plus réduite que pour l'émetteur situé à mi-profondeur car le rayonnement a plus de facilité à transiter par le sol. Les planches (IV.7) et (IV.8) correspondent aux cartes de champ électrique  $E_x$  respectivement pour 1 Hz et 10 Hz. Comme pour le cas de l'immersion à mi-profondeur, la zone de minimum dans la mer qui sépare la zone de champ proche et de champ lointain, est moins visible pour 10 Hz. La carte de champ électrique  $E_z$  représentée sur la planche (IV.9) montre que cette composante verticale n'existe qu'en champ proche dans la mer.

#### **IV-2.1.4) DEV 2D sous la surface de la mer.**

Le cas du dipôle électrique en surface est abordé sur les planches (IV.10) et (IV.11) où sont représentés le vecteur de Poynting et la composante de champ électrique  $E_x$  pour 1 Hz. C'est le cas le plus défavorable à la propagation des ondes électromagnétiques dans la mer puisque le rayonnement dans la mer n'est important qu'en champ proche par réflexion sur l'interface air/mer comme pour le cas de la ligne source.

### **IV-2.2) Rayonnement d'un dipôle électrique horizontal 2D à proximité d'une transition Terre/mer.**

#### **IV-2.2.1) Localisation du DEH 2D.**



**Figure (IV.6):** Caractérisation des dipôles électriques horizontaux bidimensionnels à proximité d'une transition Terre/mer à pente constante.

Les valeurs de courant pour les dipôles électriques situés en surface et au fond de la mer ont été doublées car la ligne source non immergée est équivalente à une ligne source placée au niveau de l'interface air/mer ou mer/sol. Pour effectuer des comparaisons avec les autres positions et orientations du dipôle, cette solution plus commode est donc préférée à celle qui vise à retoucher le maillage.

L'échelle en champ électrique issue de dipôles électriques horizontaux est multipliée par un coefficient égal à 3,33 par rapport à l'échelle en champ électrique issue de dipôles électriques verticaux pour bien représenter les comportements du rayonnement dans la mer dans les deux cas. Ceci montre un net avantage de la position horizontale du dipôle sur sa position verticale à courant et espacement identique entre lignes sources dans les deux cas.

#### IV-2.2.2) DEH 2D à mi-profondeur dans la mer.

Ce cas est représenté sur les planches (IV.12) à (IV.15). Le vecteur de Poynting correspondant aux deux premières planches souligne la faible zone de champ proche dans la mer quels que soient la fréquence et le profil côtier. La puissance rayonnée étant dirigée vers les interfaces air/mer et mer/sol a plus de facilité à quitter le milieu marin. De plus, pour les transitions non abruptes et pour 0,1, 1 et 10 Hz, cette facilité est augmentée côté sol où le lobe inférieur est plus restreint que le lobe supérieur. Par contre, pour 100 Hz, cette dissymétrie n'est plus constatée suivant le type de profil côtier car la valeur de la profondeur de

pénétration est égale à la moitié de la distance émetteur-interface mer/sol ou de la distance émetteur-interface air/mer. Le champ électromagnétique est donc suffisamment affaibli avant sa réflexion sur les interfaces air/mer et mer/sol pour qu'il ne soit pas perturbé dans sa zone de champ proche. Sur les planches (IV.14) et (IV.15) sont représentées les cartes de champ de la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  respectivement pour 1 et 10 Hz. Comme dans le cas du dipôle électrique vertical, on constate que le champ électrique  $E_x$  devient plus homogène à 10 Hz qu'à la fréquence de 1 Hz. En effet, la zone de minimum de champ dans la mer située entre la zone de rayonnement en champ proche et celle en champ lointain s'atténue pour les profils côtiers non abrupts.

#### **IV-2.2.3) DEH 2D au fond de la mer.**

Les planches (IV.16) à (IV.21) concernent la représentation du vecteur de Poynting et de la composante horizontale de champ électrique pour 1, 10 et 100 Hz pour un dipôle électrique horizontal situé au fond de la mer. Elles montrent que le lobe supérieur permet la propagation du champ rayonné dans la mer par réflexion sur l'interface mer/sol. L'augmentation de la fréquence a deux conséquences: une diminution de la zone de champ proche et une augmentation de la composante horizontale de champ électrique en zone de champ lointain. Sur la planche (IV.17) correspondant au vecteur de Poynting pour 10 Hz, il est permis de constater que les changements de direction des vecteurs dans l'air sont similaires à ceux dans le sol pour un dipôle électrique horizontal en surface, planche (IV.22). Le profil côtier a toujours le même effet sur le rayonnement du dipôle. Pour le dipôle électrique horizontal placé au bas de la transition à pente constante, l'angle d'ouverture offert au rayonnement du dipôle dans le sol est supérieur que pour les autres types de profil côtier. Comme il a été signalé précédemment dans le cas du dipôle électrique vertical situé au fond de la mer et à proximité du profil côtier à pente constante, planche (IV.7 et 8), on constate le même rayonnement dans la mer que dans le cas du dipôle électrique horizontal au fond de la mer caractérisé par son unique lobe supérieur dans la mer et sa décroissance de champ électrique.

#### **IV-2.2.4) DEH 2D sous la surface de la mer.**

Les planches (IV.22), (IV.23), (IV.24) et (IV.25) représentent respectivement le vecteur de Poynting pour 1 Hz, les cartes de la composante

horizontale de champ électrique  $E_x$  pour 1, 10 et 100 Hz pour un dipôle électrique horizontal situé sous la surface de la mer. Comme pour le cas du dipôle électrique horizontal au fond de la mer, le lobe côté mer permet la propagation de champ électromagnétique en champ proche dans la mer par réflexion sur l'interface air/mer. Par contre, pour 100 Hz, la composante horizontale de champ électrique présentée sur la planche (IV.25) est très faible dans la zone de champ lointain dû à l'atténuation importante de champ électromagnétique avant d'atteindre le sol. Le profil côtier a moins d'effets sur le rayonnement que pour les autres enfoncements plus importants dans la mer car la distance minimum émetteur-profil côtier égale approximativement à 100 mètres devient importante par rapport à la profondeur de pénétration dans la mer (25 mètres). Contrairement au cas du dipôle électrique vertical sous la surface de la mer, la propagation du champ électromagnétique dans la mer est améliorée en plaçant le dipôle parallèlement à l'interface air/mer pour des fréquences correspondant à des valeurs de profondeur de pénétration dans la mer supérieures à l'épaisseur de la couche d'eau de mer.

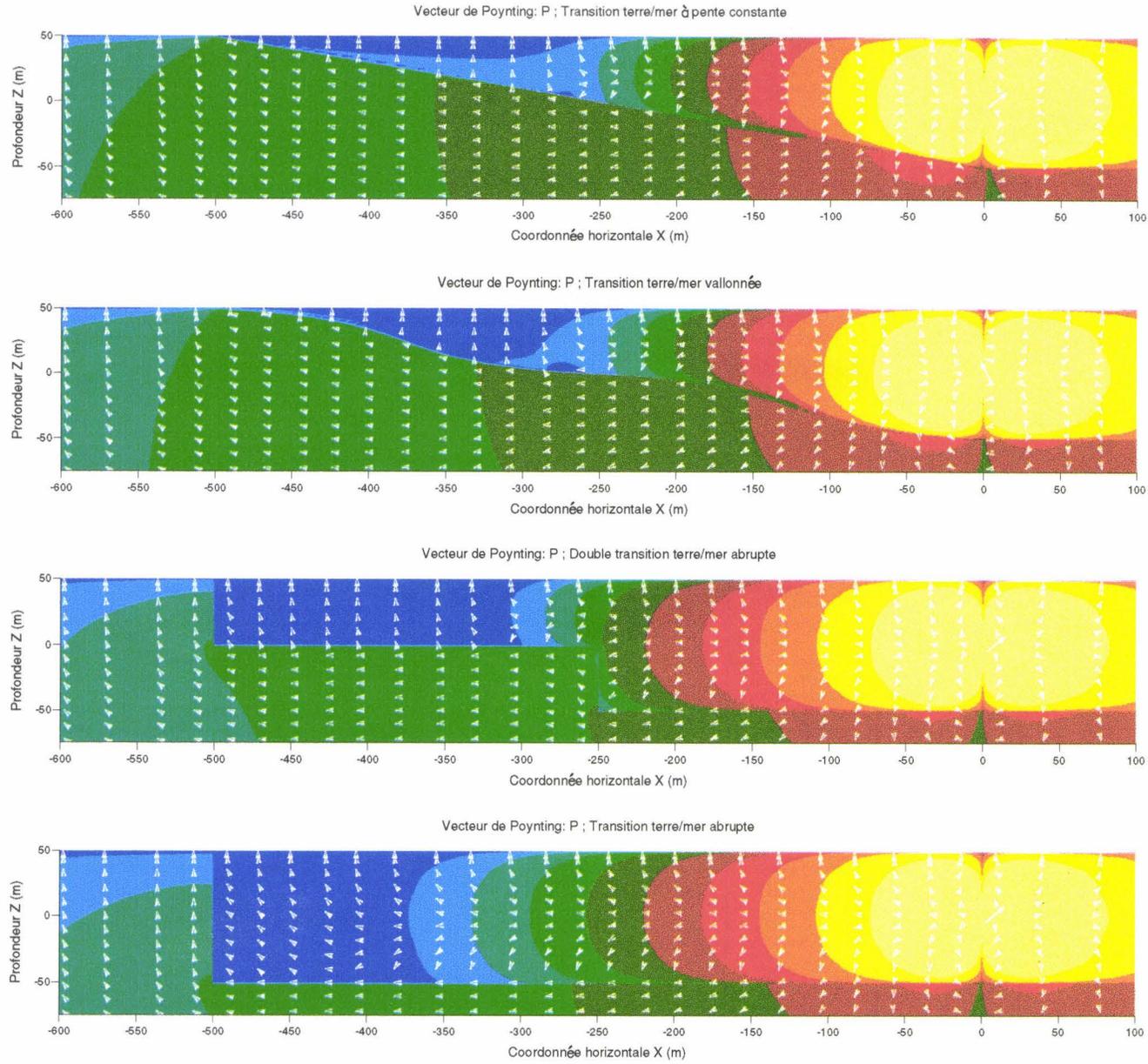


Planche (IV.1.): Vecteur de Poynting P pour un DEV bidimensionnel situé à mi-profondeur dans la mer et pour 1 Hz.

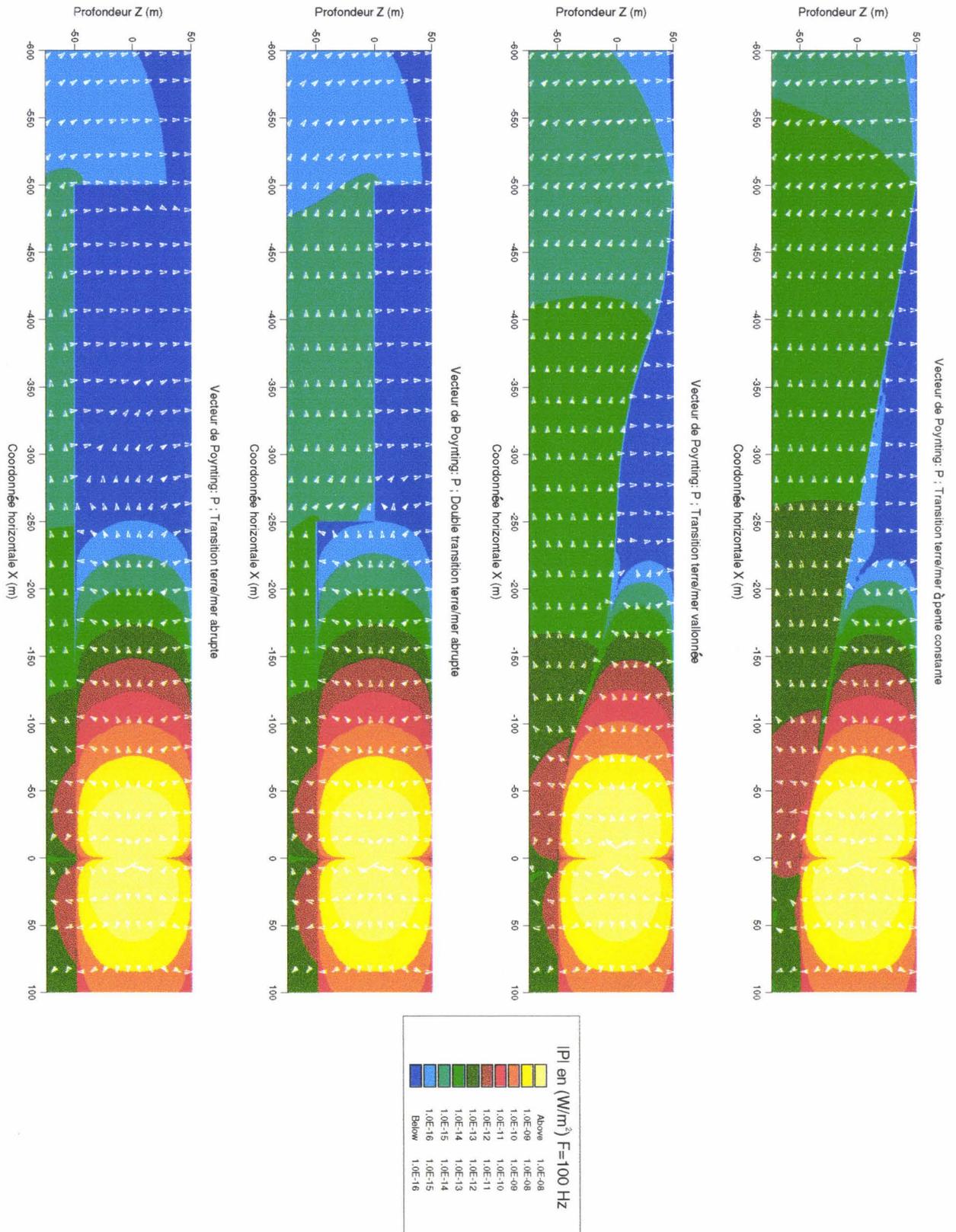


Planche (IV.2): Vecteur de Poynting  $P$  pour un DEV bidimensionnel situé à mi-profondeur dans la mer et pour 100 Hz.

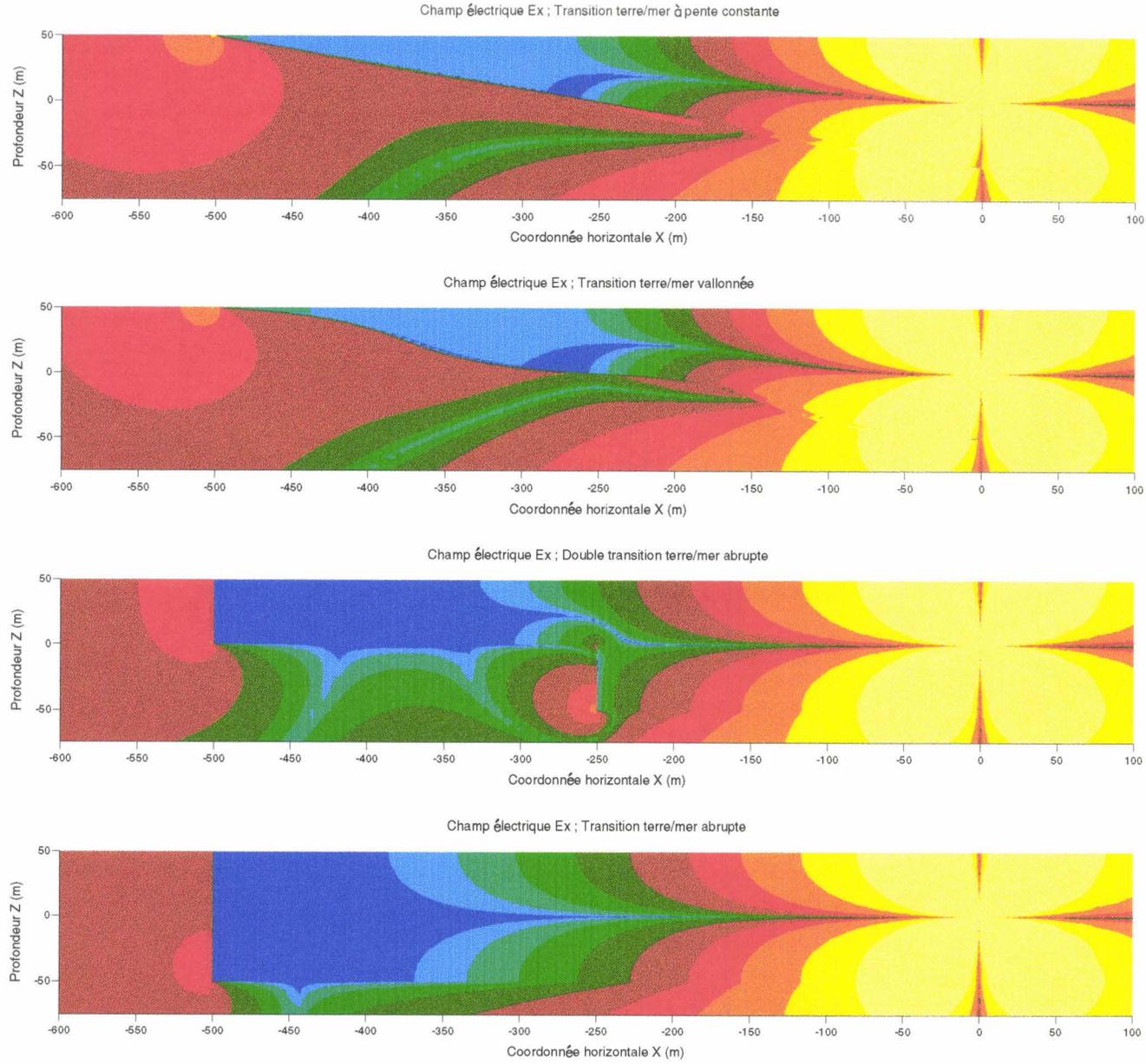


Planche (IV.3): Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEV bidimensionnel situé à mi-profondeur et pour 1 Hz.

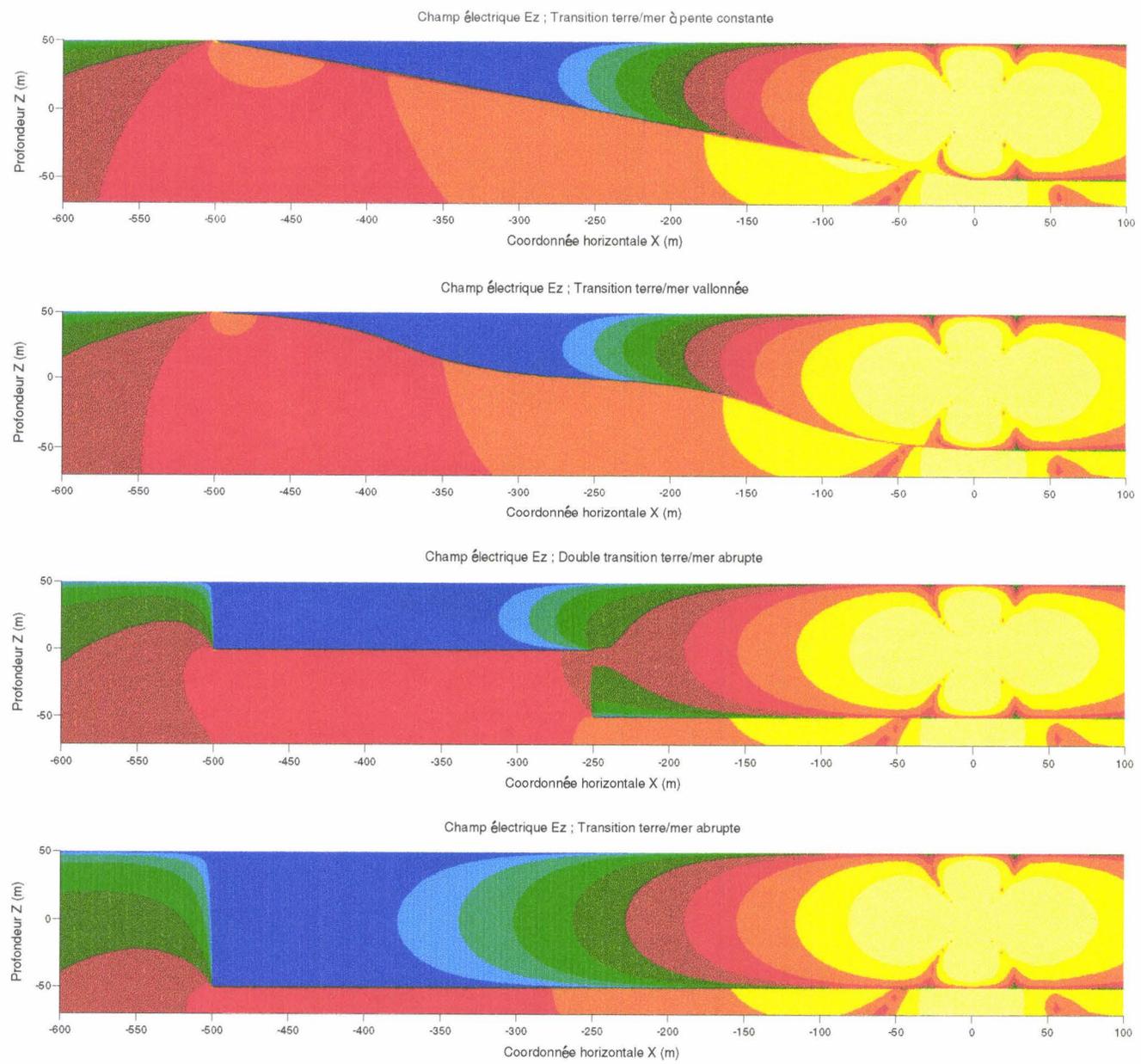


Planche (IV.4): Composante verticale de champ électrique Ez pour un DEV bidimensionnel situé à mi-profondeur et pour 1 Hz.

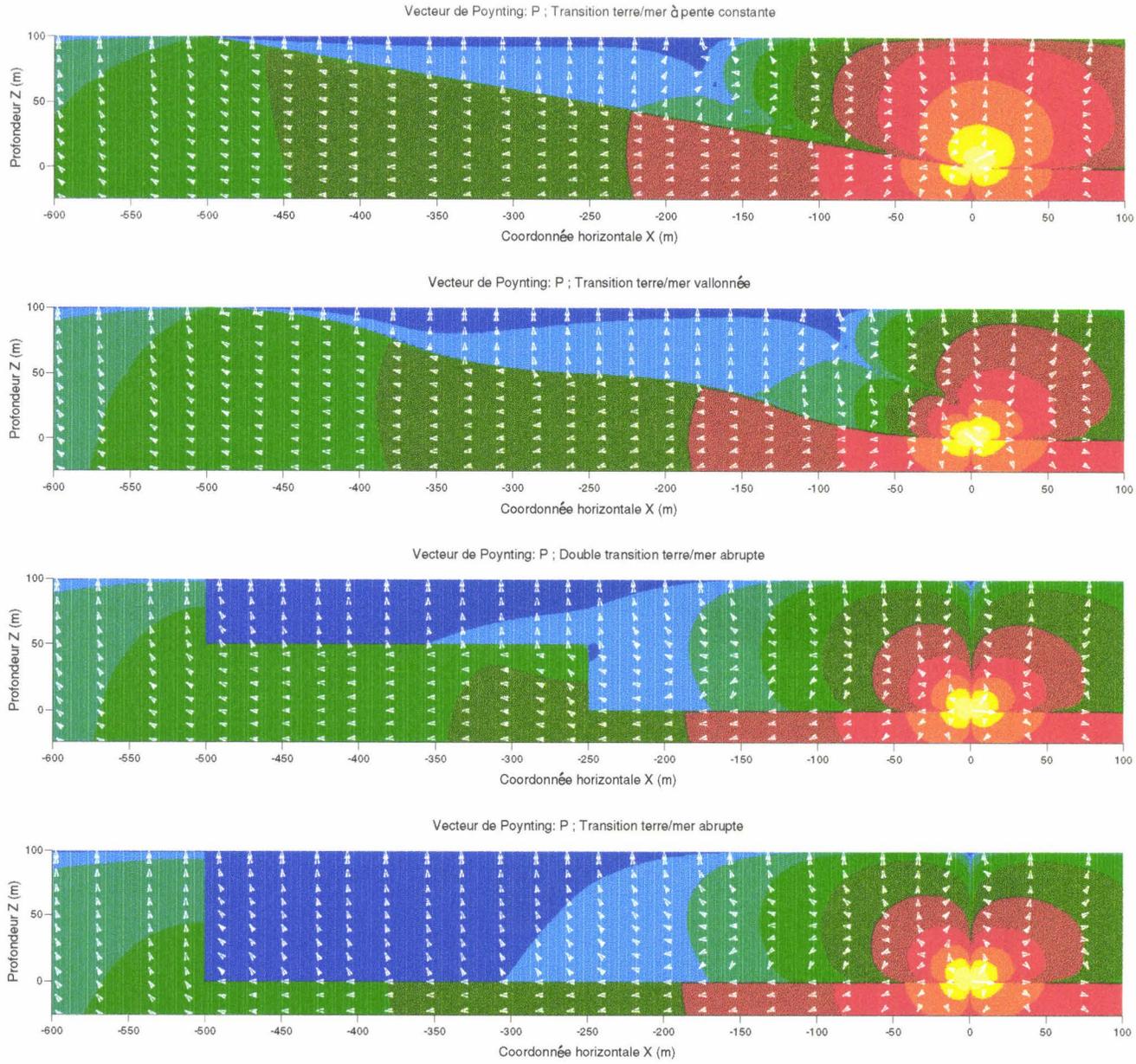


Planche (IV.5): Vecteur de Poynting P pour un DEV bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 1 Hz.

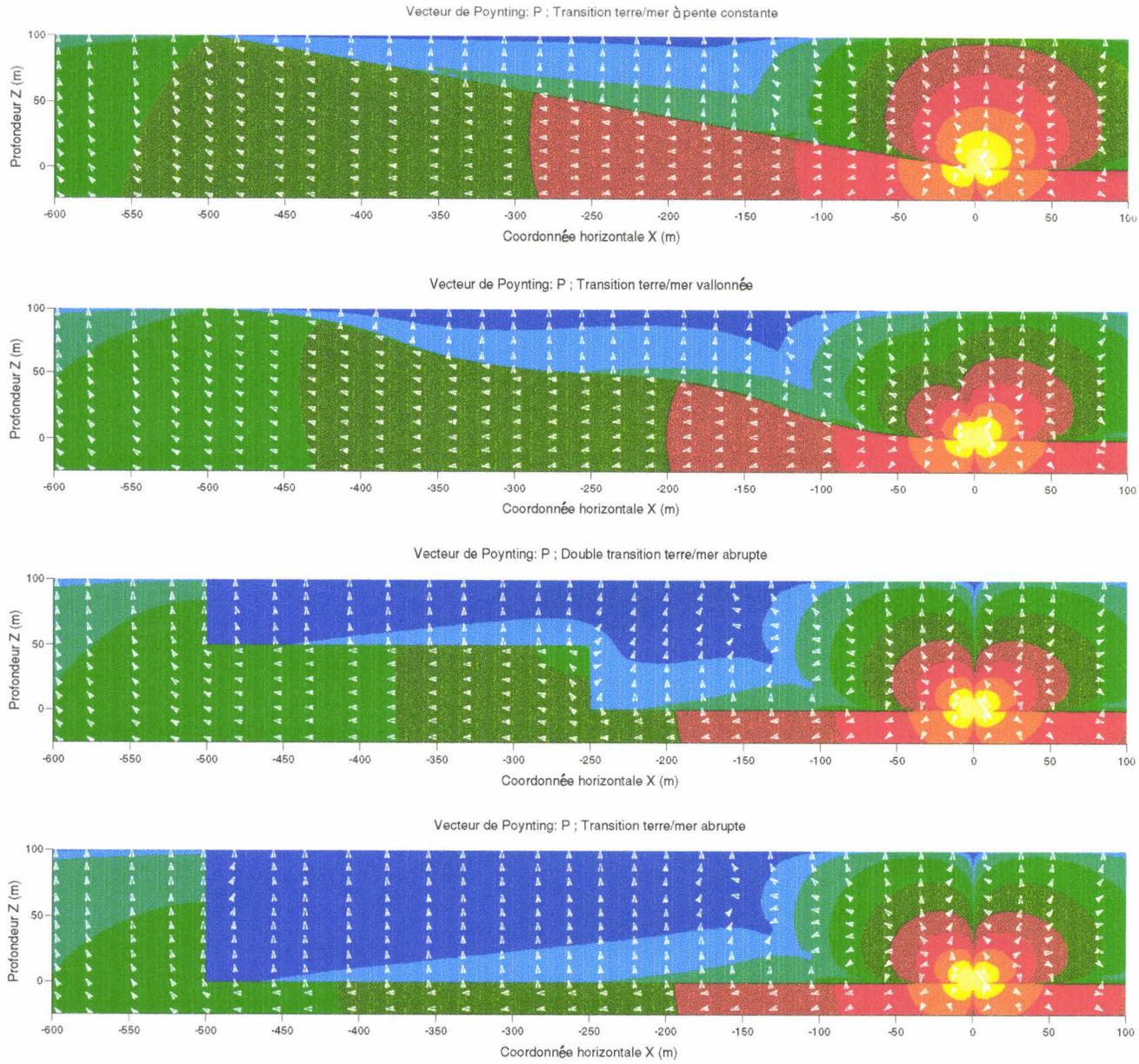


Planche (IV.6): Vecteur de Poynting P pour un DEV bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 100 Hz.

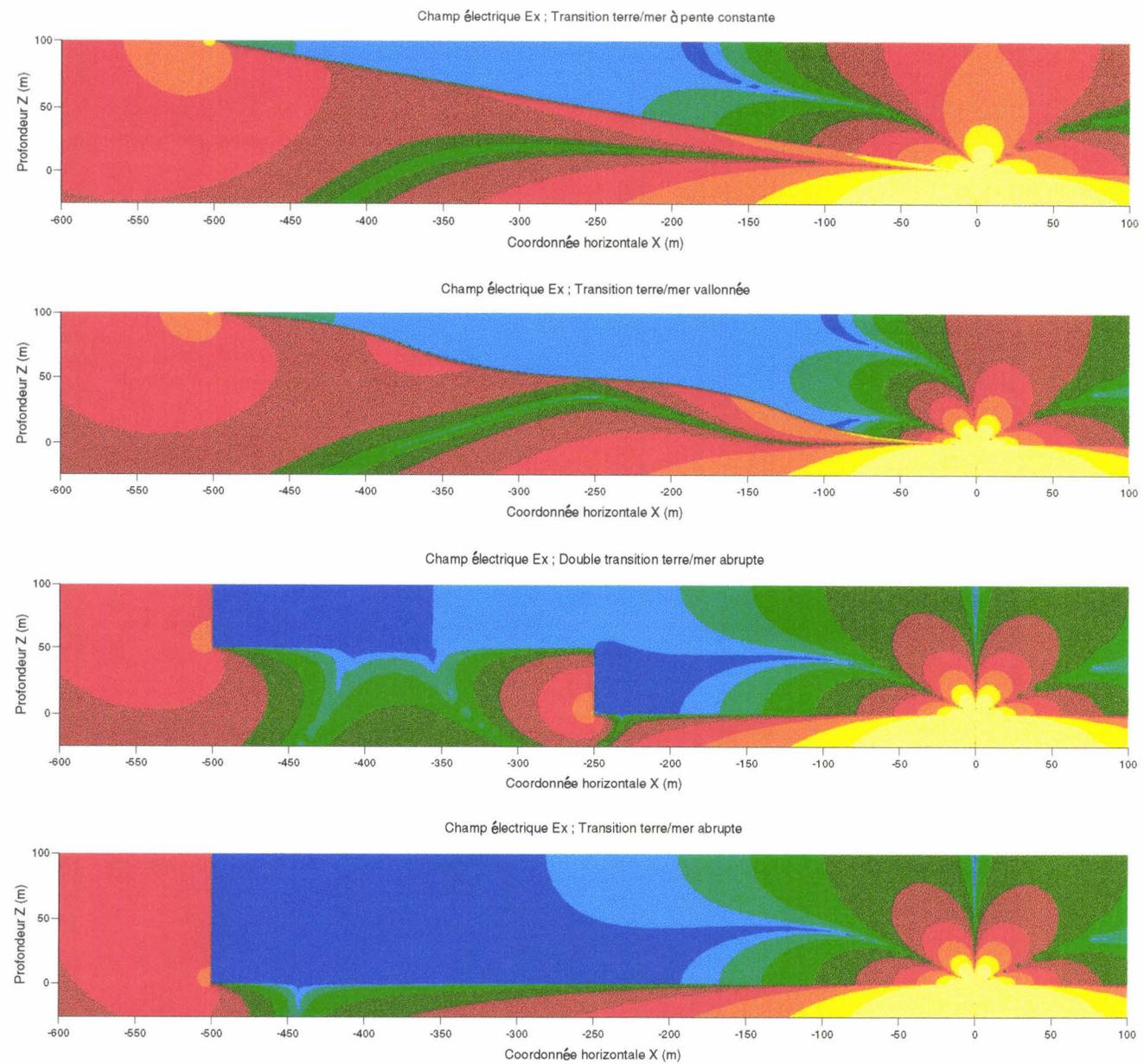
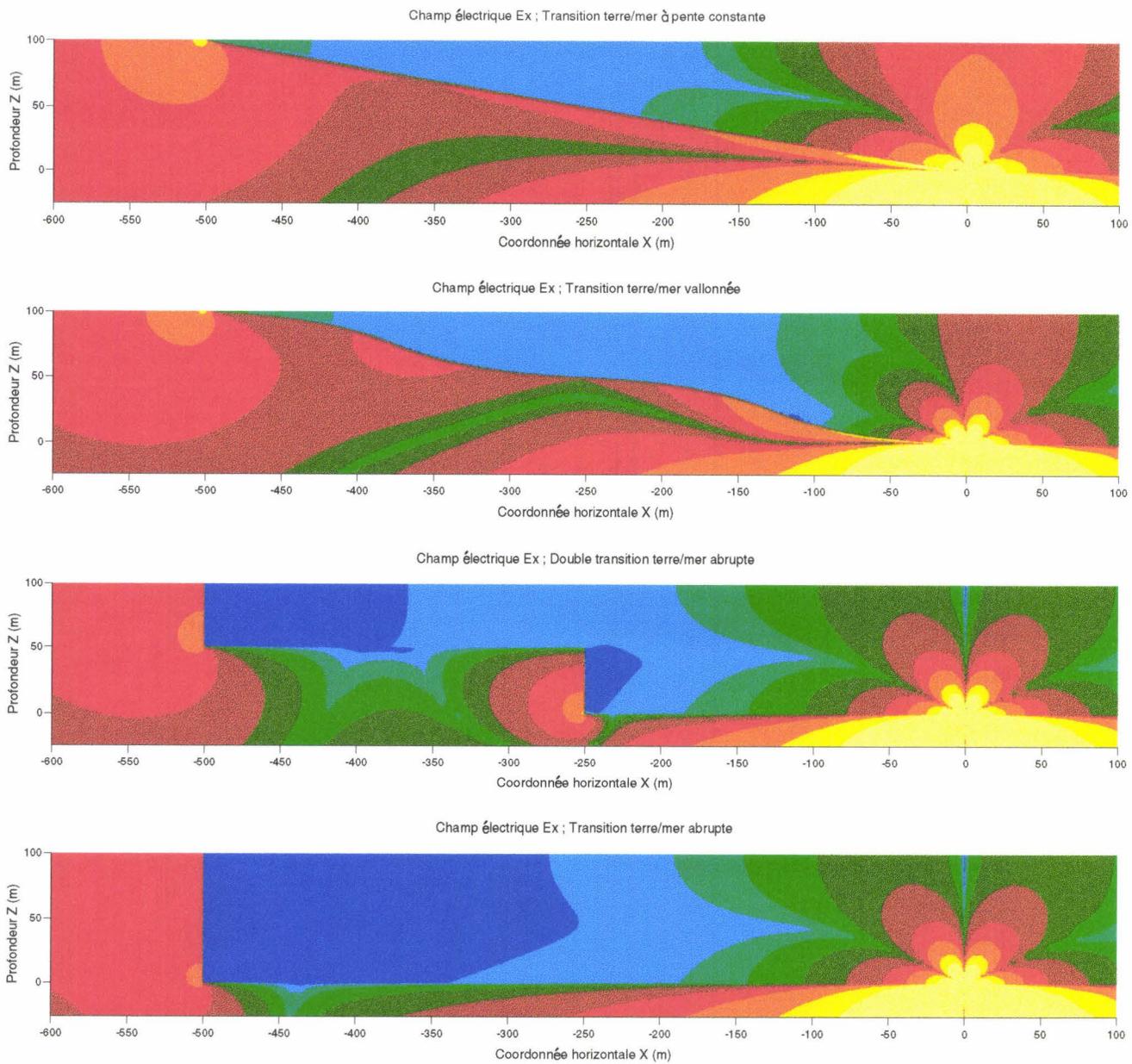


Planche (IV.7): Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEV bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 1 Hz.



**Planche (IV.8):** Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEV bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 10 Hz.

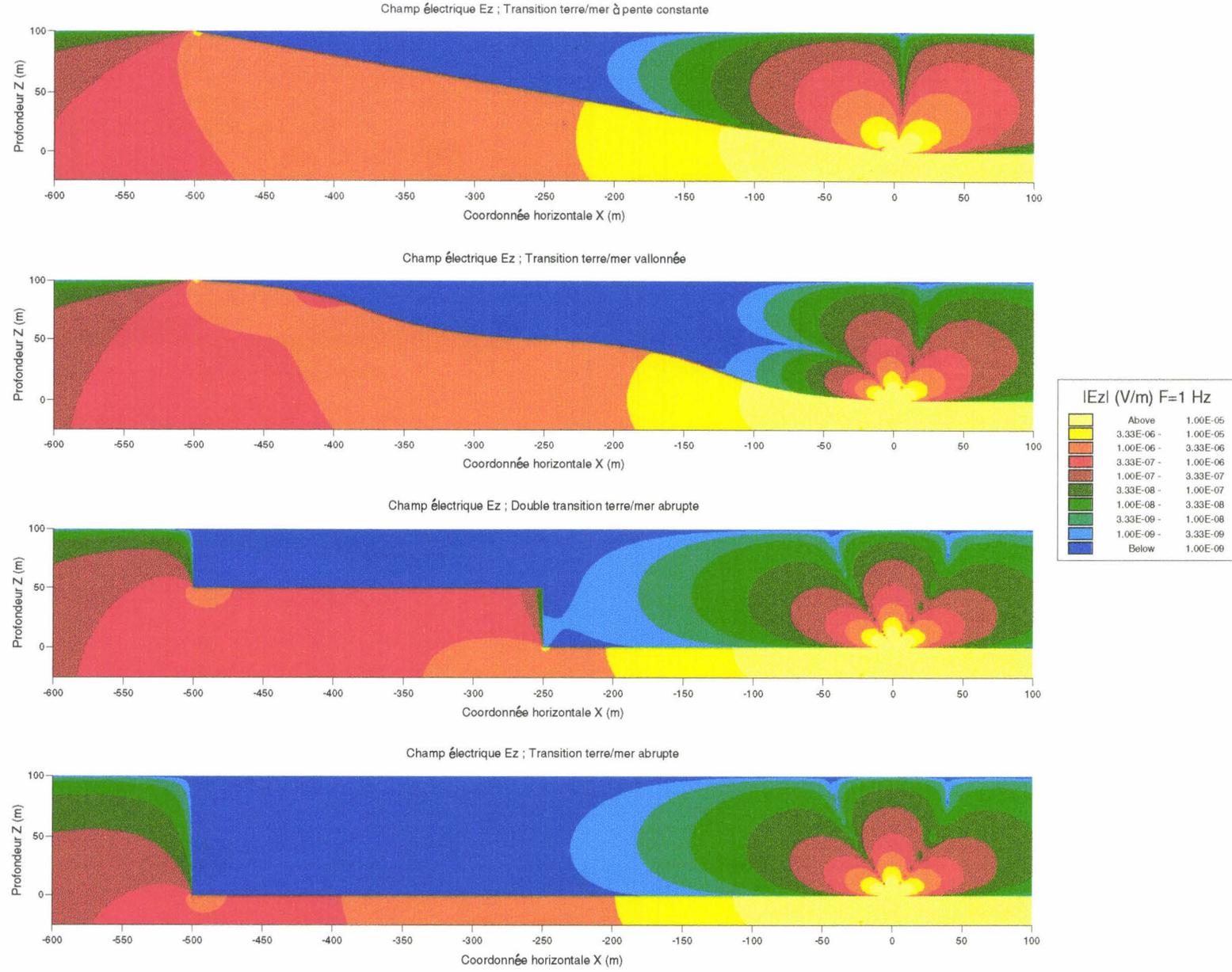


Planche (IV.9): Composante verticale de champ électrique  $E_z$  pour un DEV bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 1 Hz.

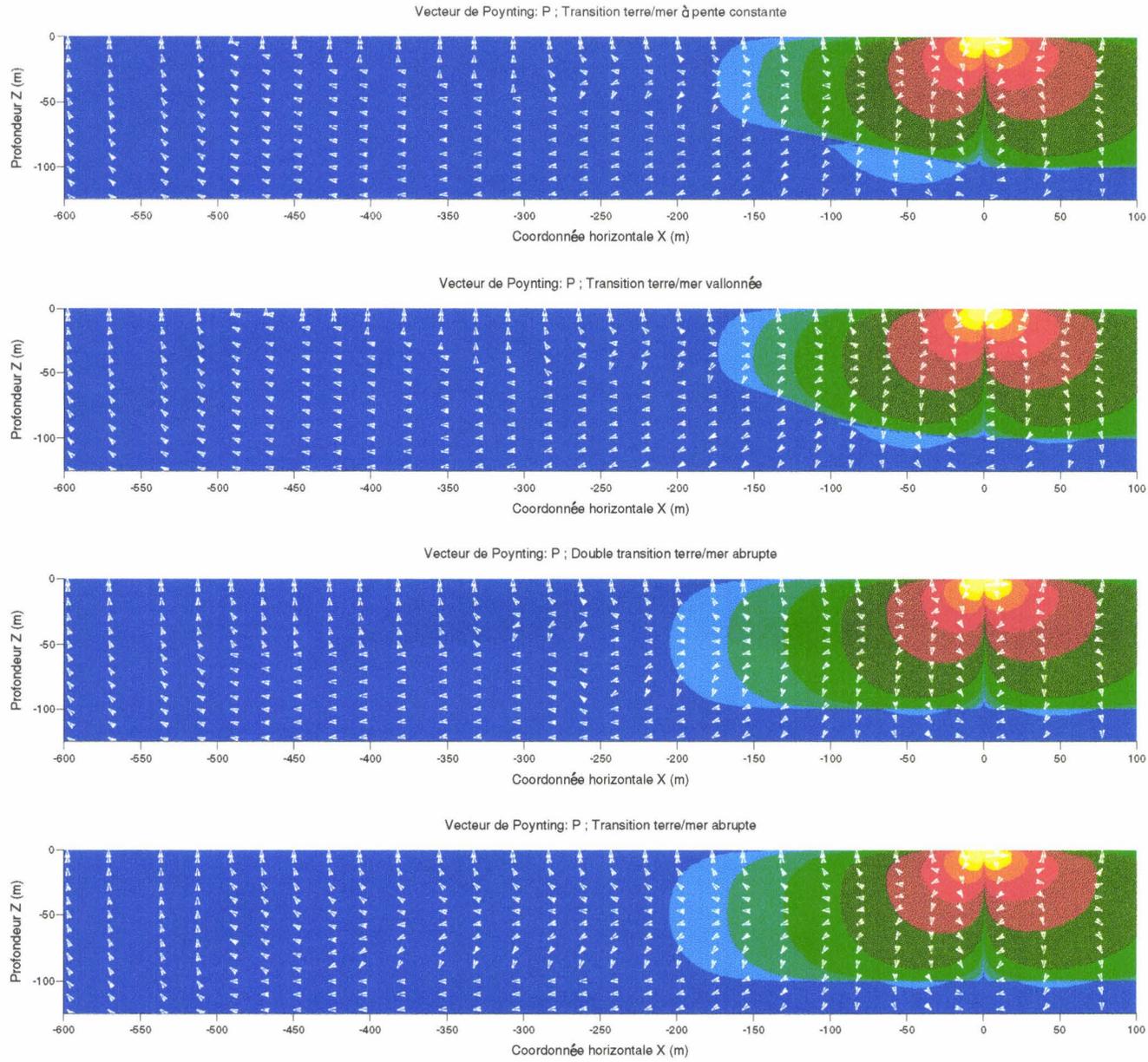


Planche (IV.10): Vecteur de Poynting P pour un DEV bidimensionnel situé en surface et pour 1 Hz.

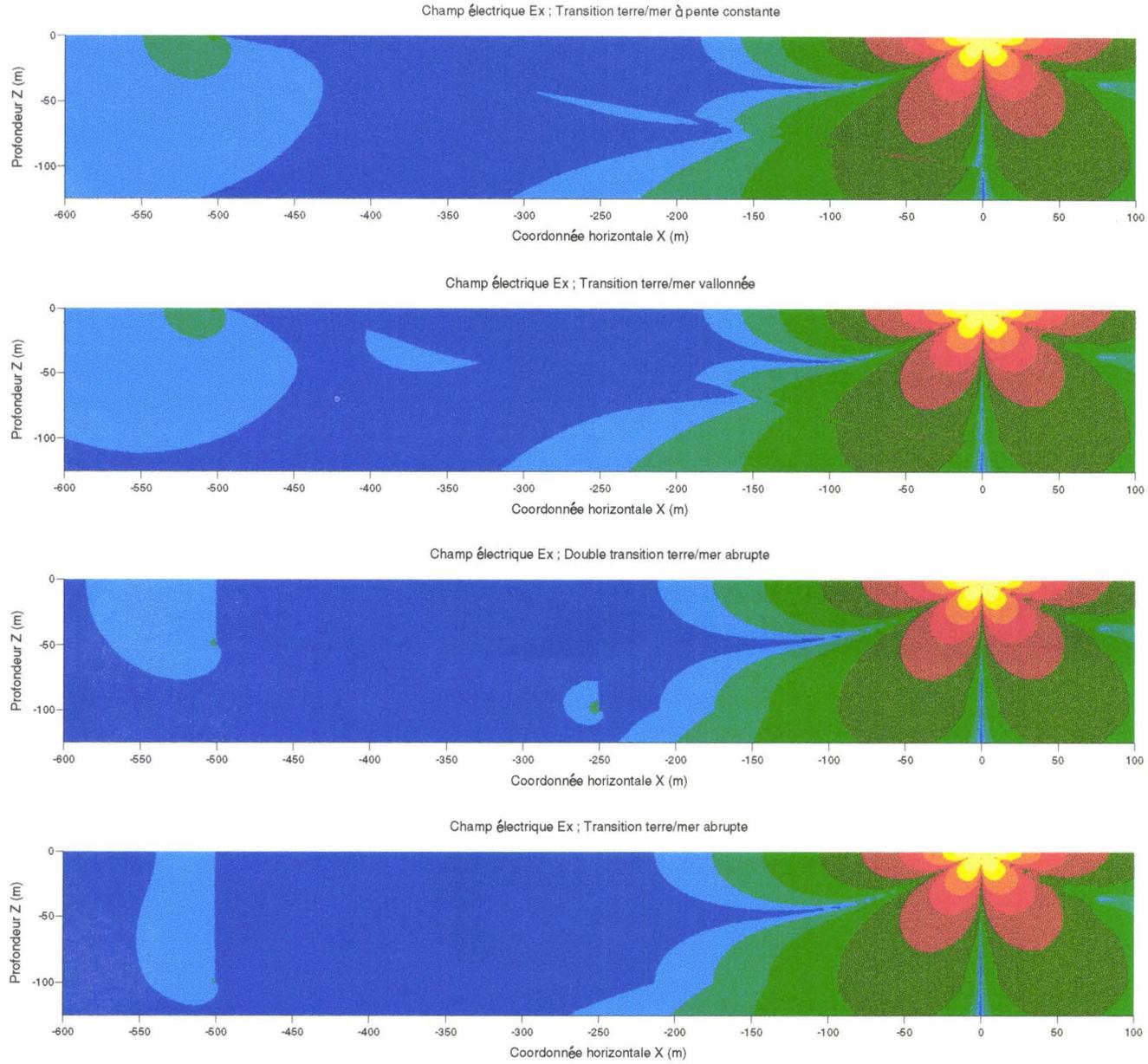


Planche (IV.11): Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEV bidimensionnel situé en surface et pour 1 Hz.

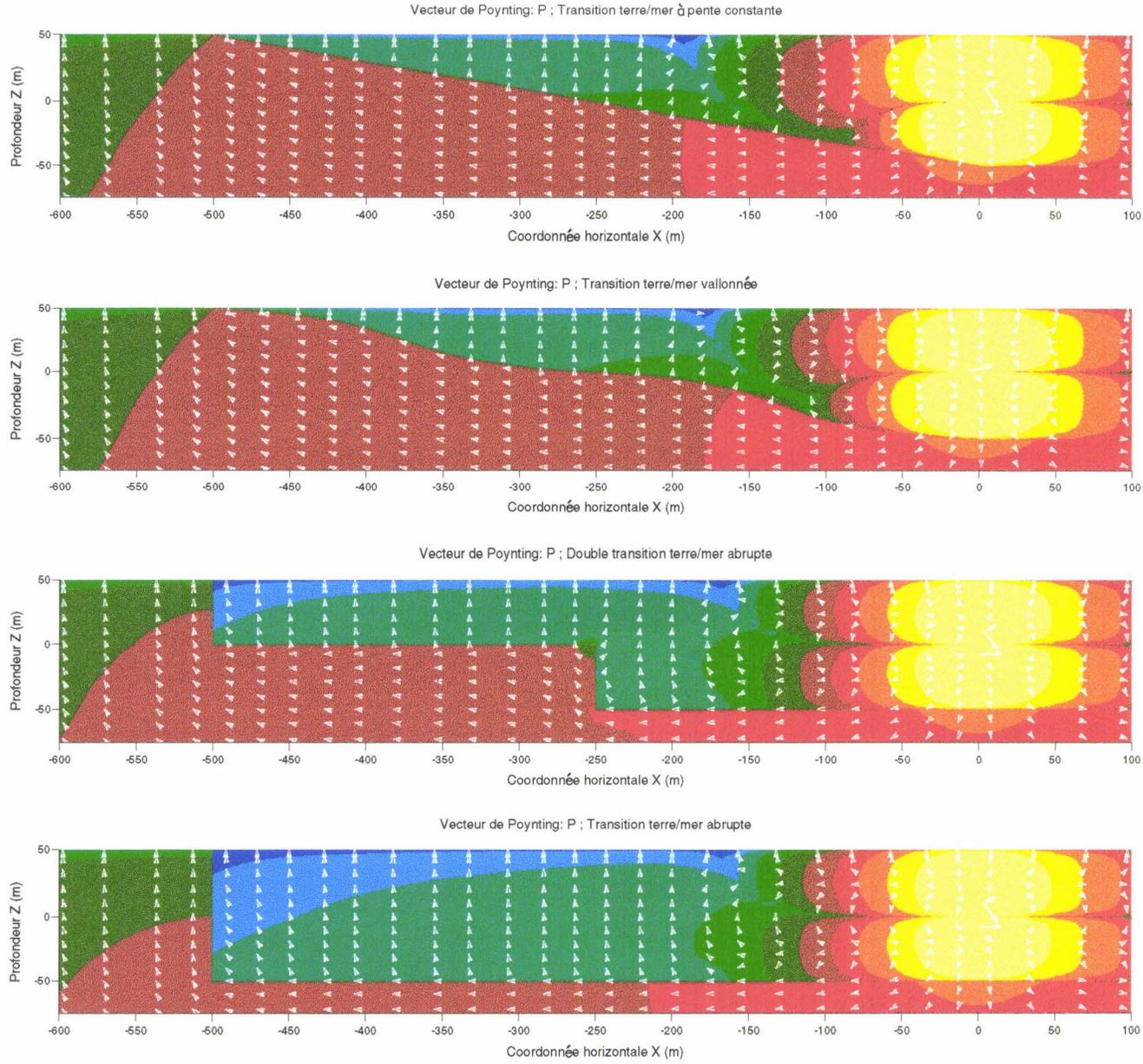


Planche (IV.12): Vecteur de Poynting P pour un DEH bidimensionnel situé à mi-profondeur dans la mer et pour 1 Hz.

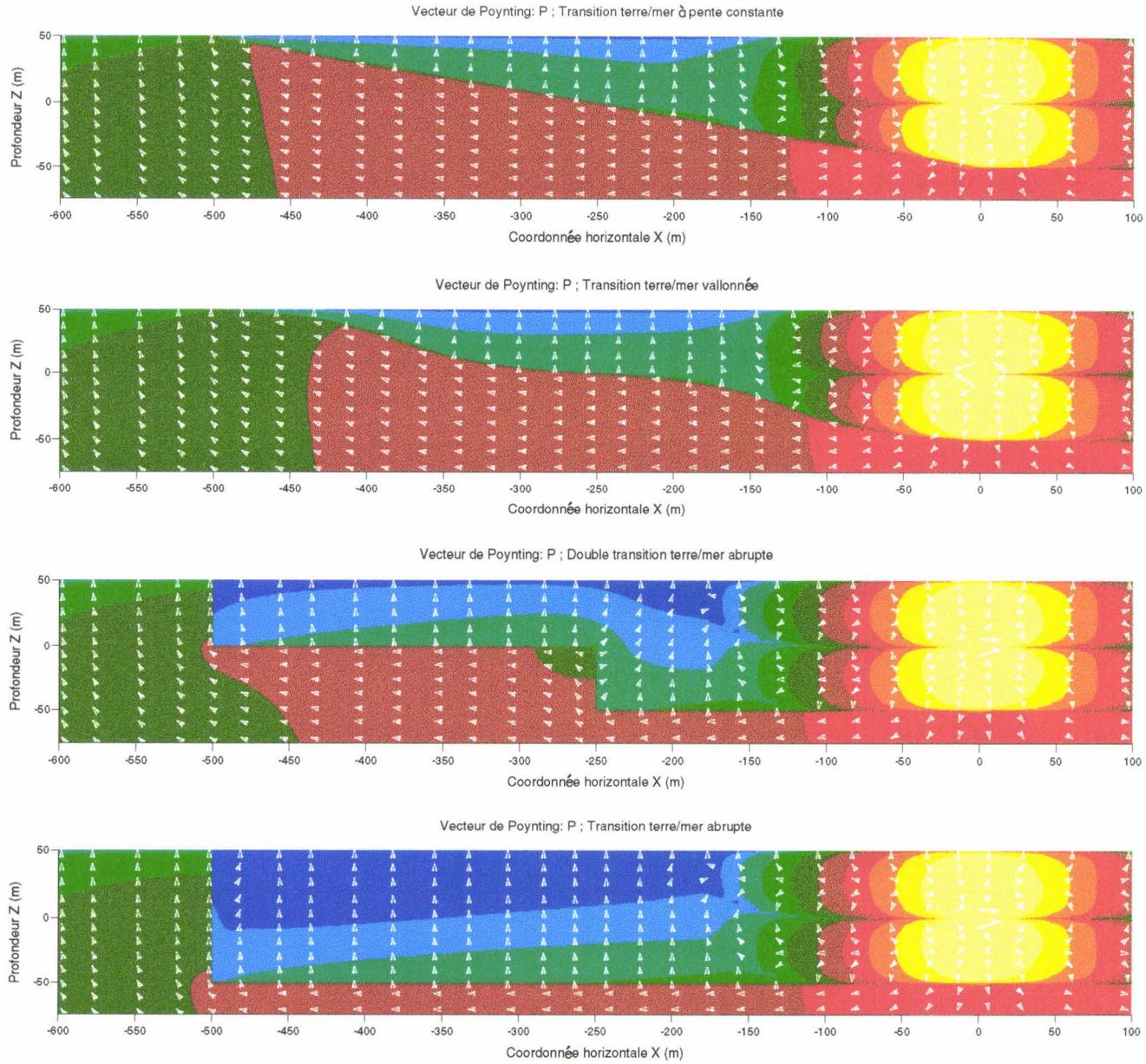
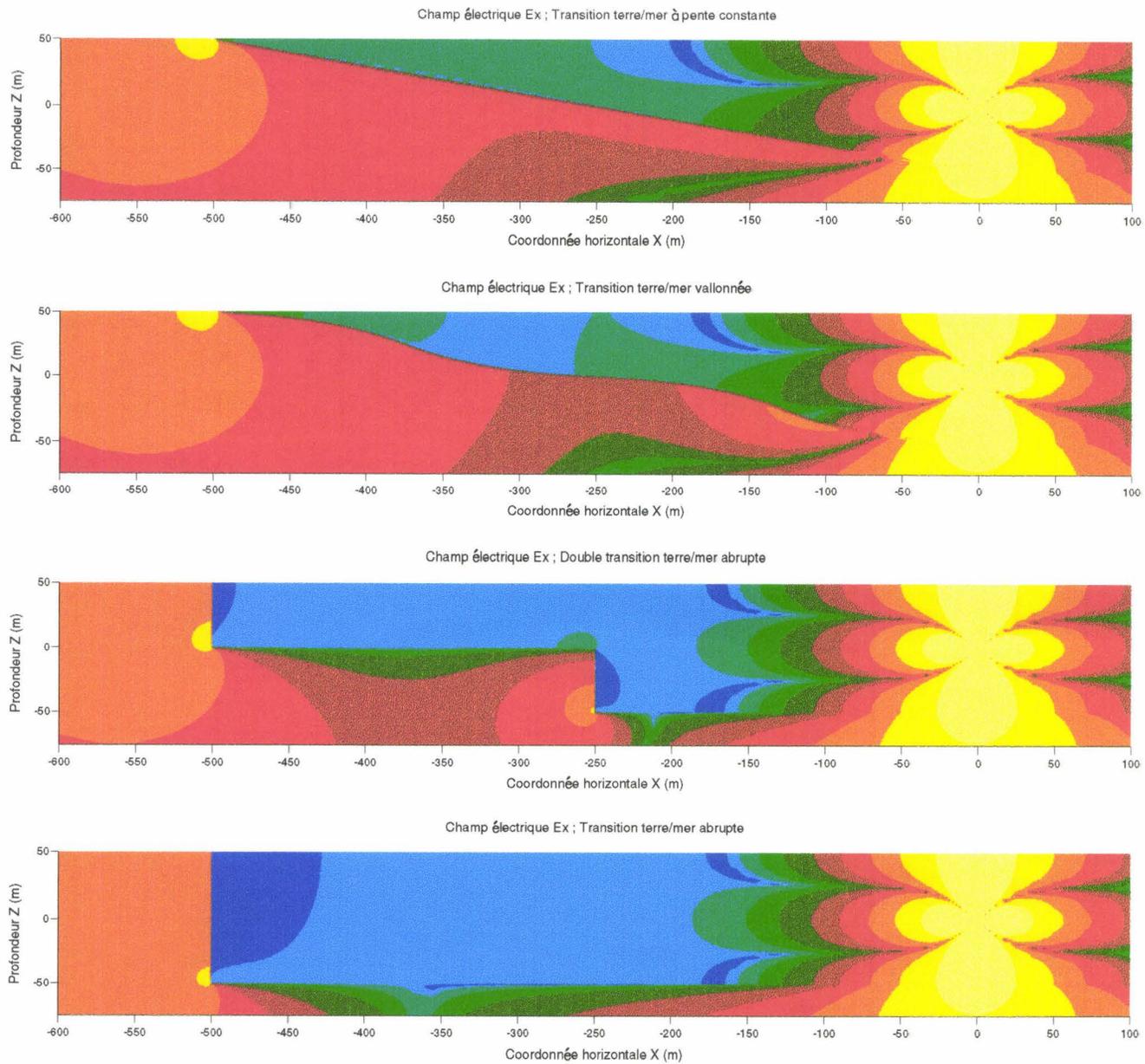


Planche (IV.13): Vecteur de Poynting P pour un DEH bidimensionnel situé à mi-profondeur dans la mer et pour 100 Hz.



**Planche (IV.14):** Composante horizontale de champ électrique  $E_x$  pour un DEH bidimensionnel situé à mi-profondeur et pour 1 Hz.

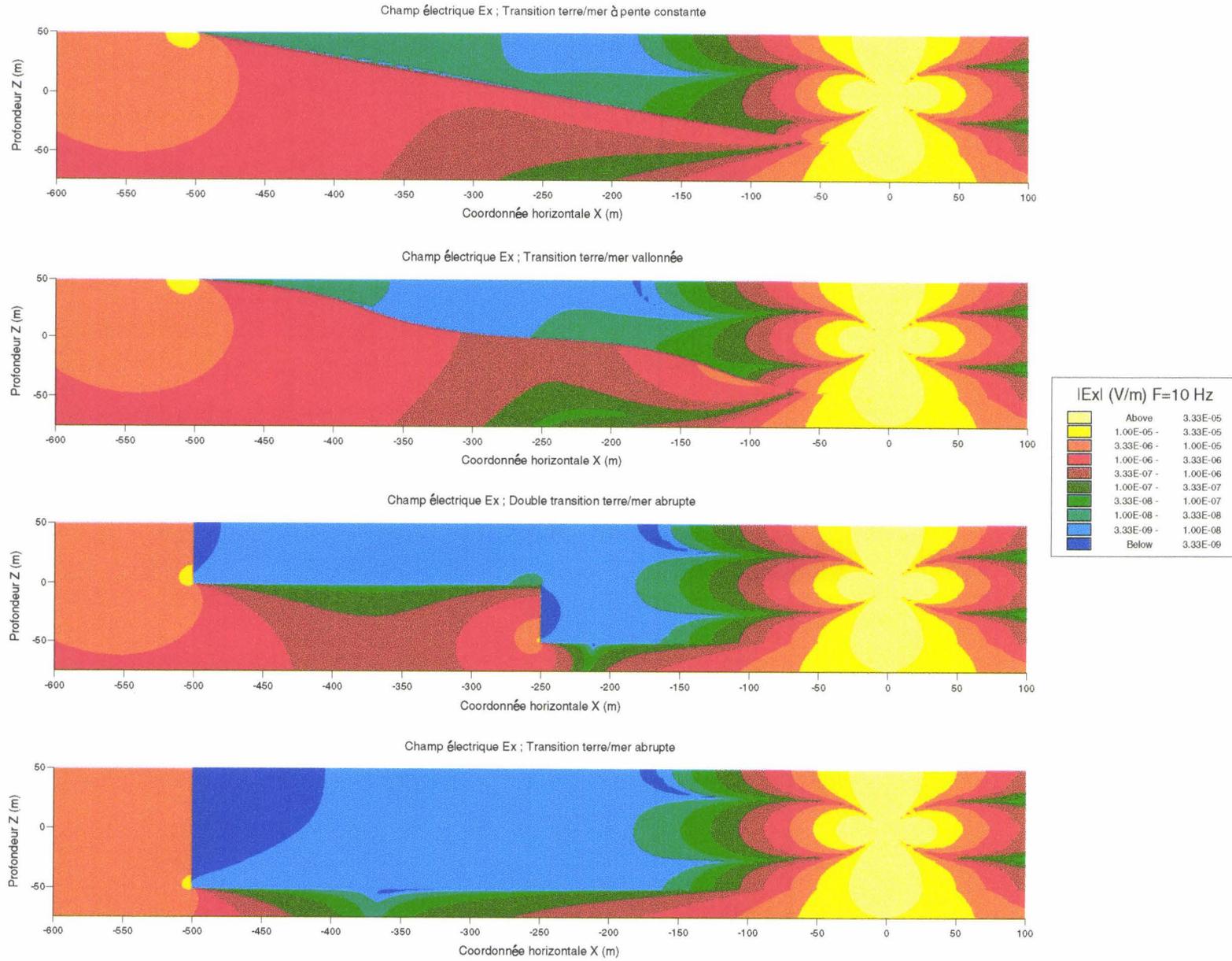


Planche (IV.15): Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEH bidimensionnel situé à mi-profondeur et pour 10 Hz.

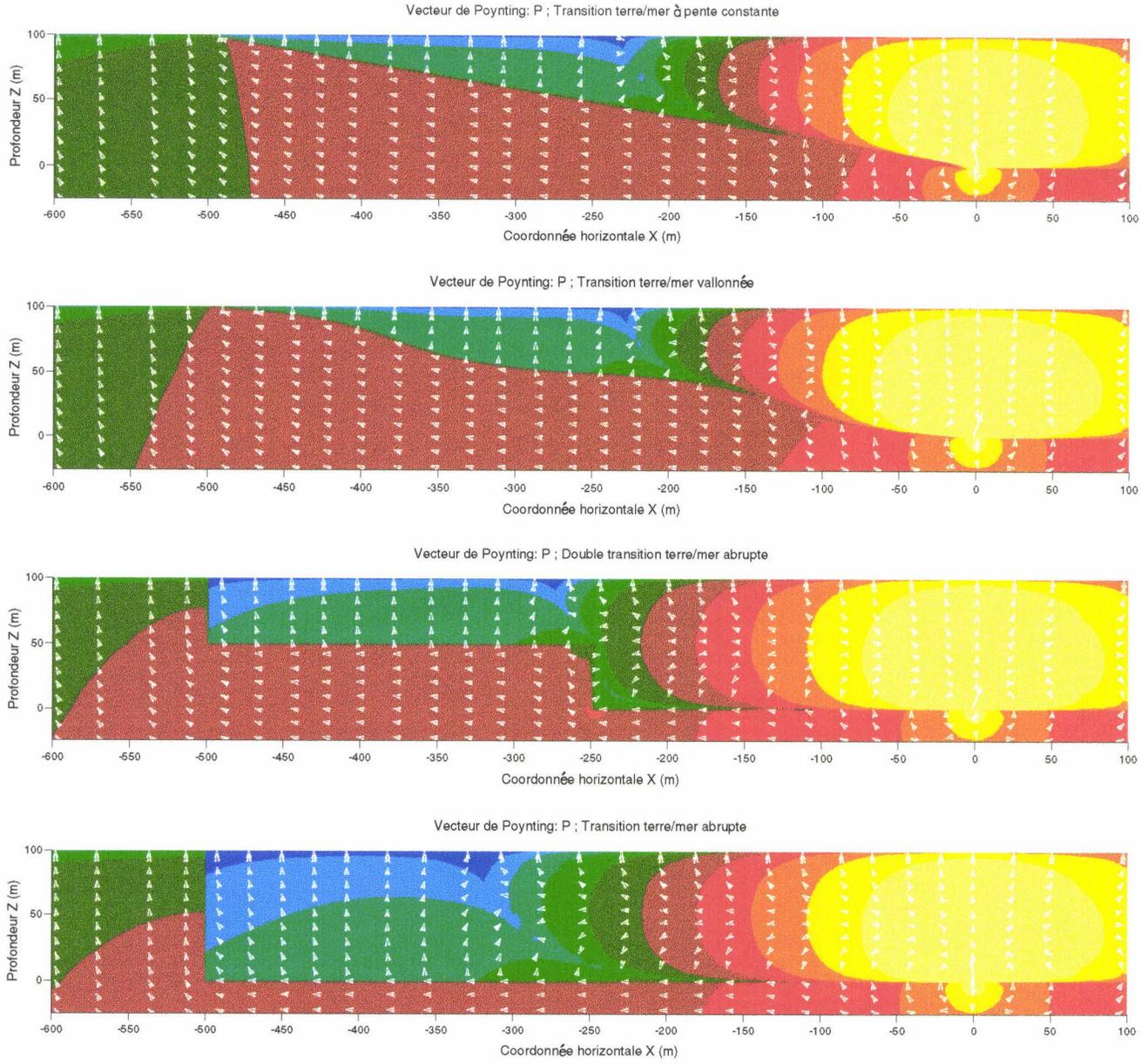


Planche (IV.16): Vecteur de Poynting P pour un DEH bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 1 Hz.

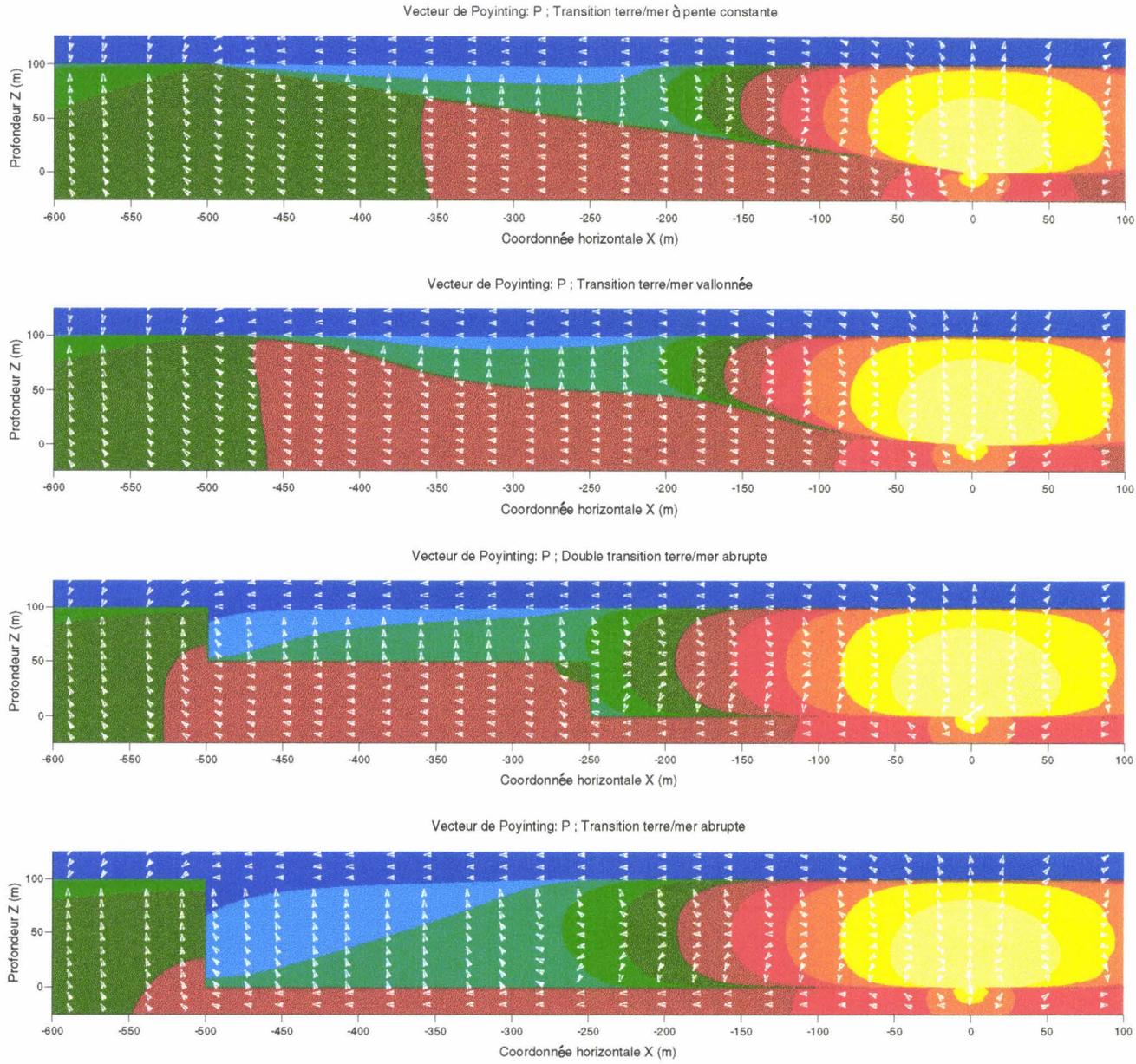


Planche (IV.17): Vecteur de Poynting P pour un DEH bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 10 Hz.

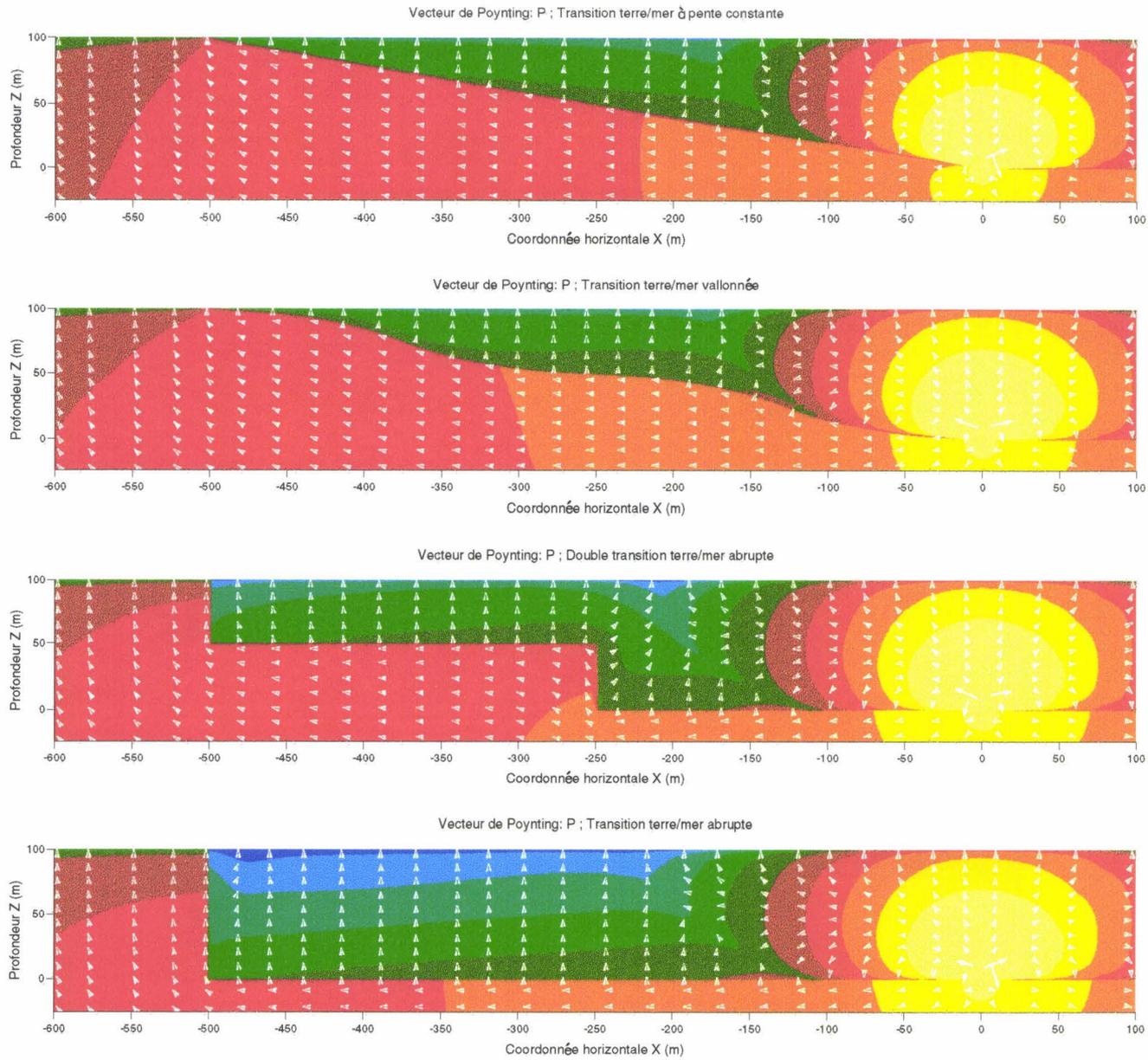


Planche (IV.18): Vecteur de Poynting P pour un DEH bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 100 Hz.

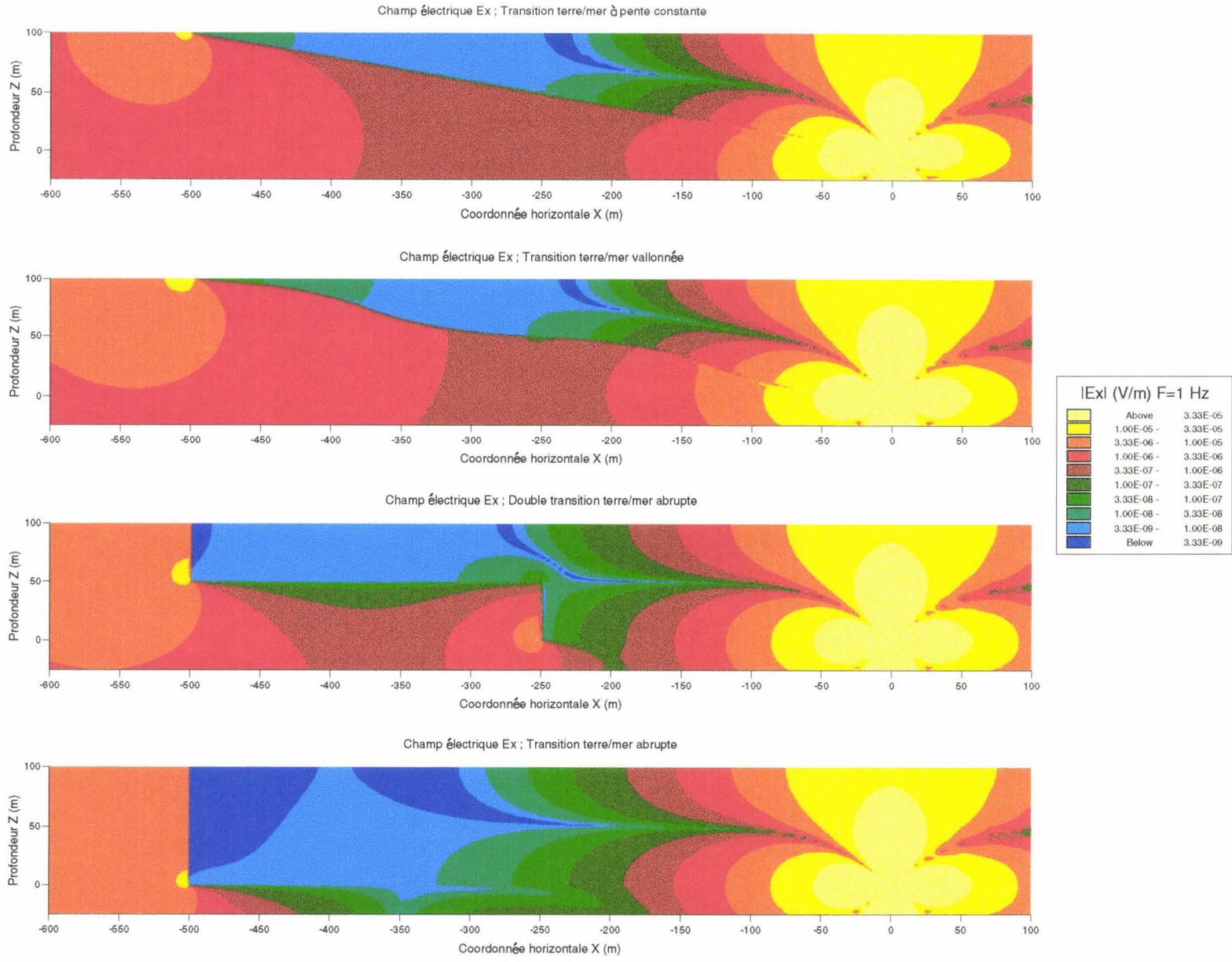


Planche (IV.19): Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEH bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 1 Hz.

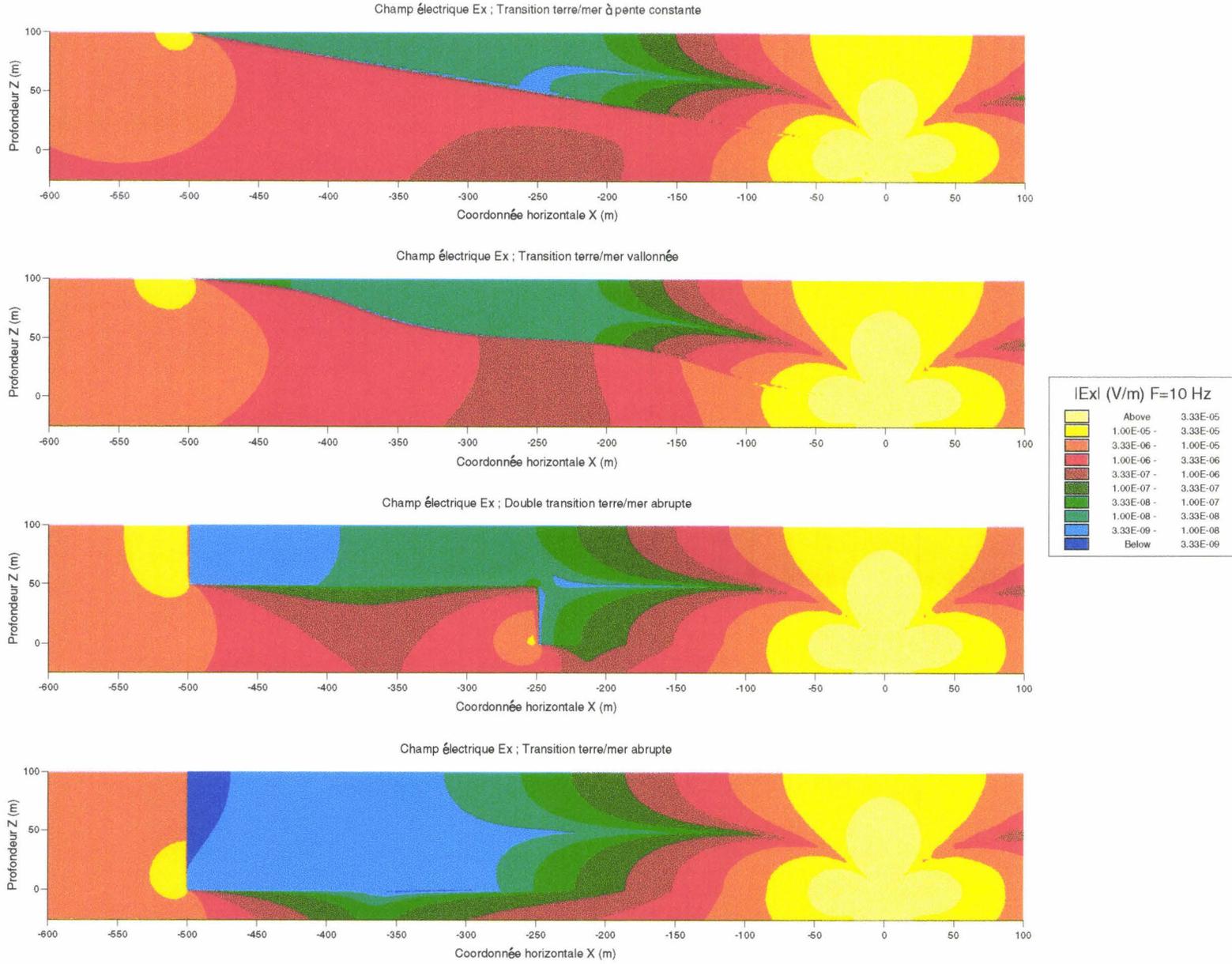


Planche (IV.20): Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEH bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 10 Hz.

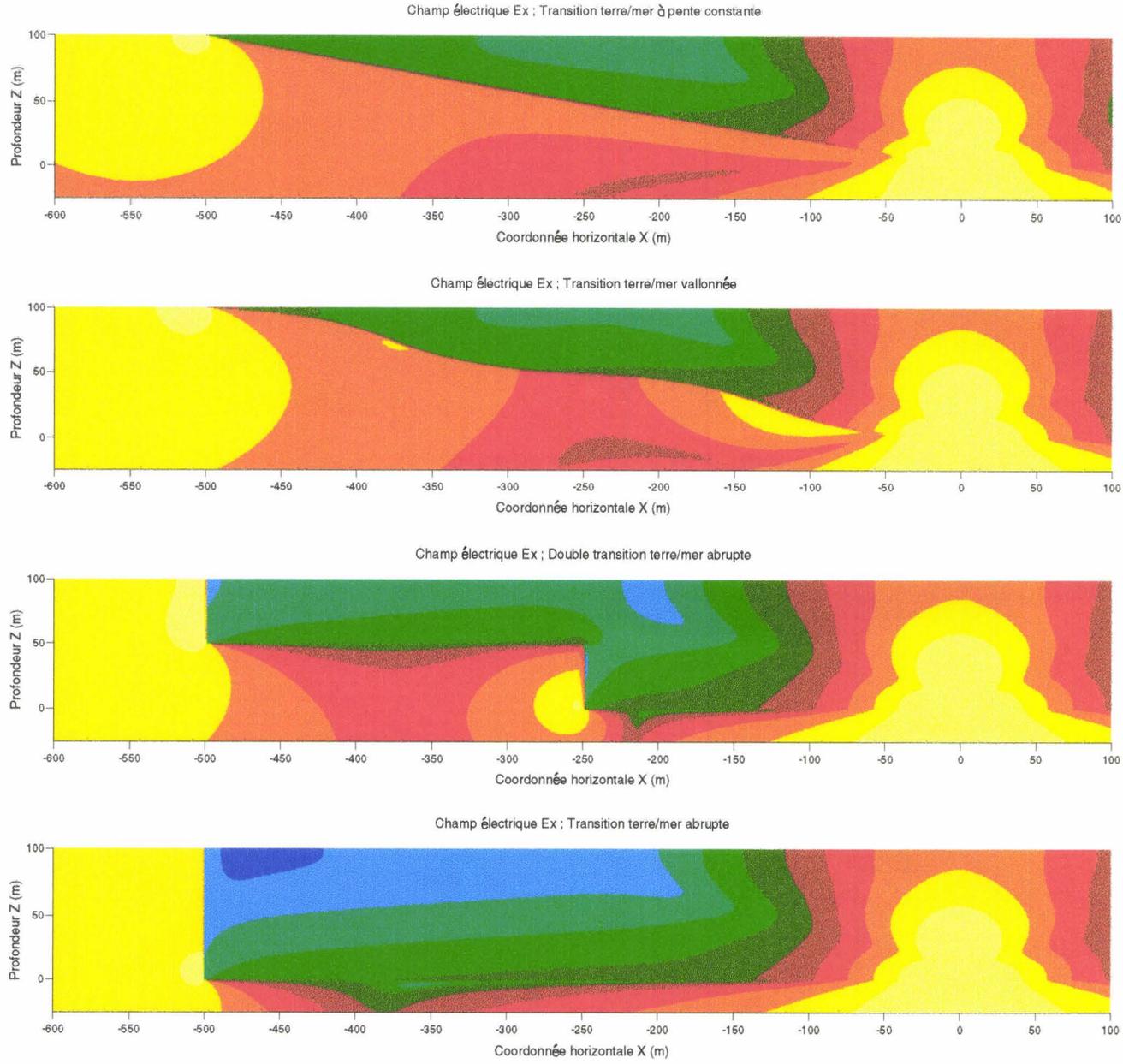


Planche (IV.2.1): Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEH bidimensionnel situé au fond de la mer et pour 100 Hz.

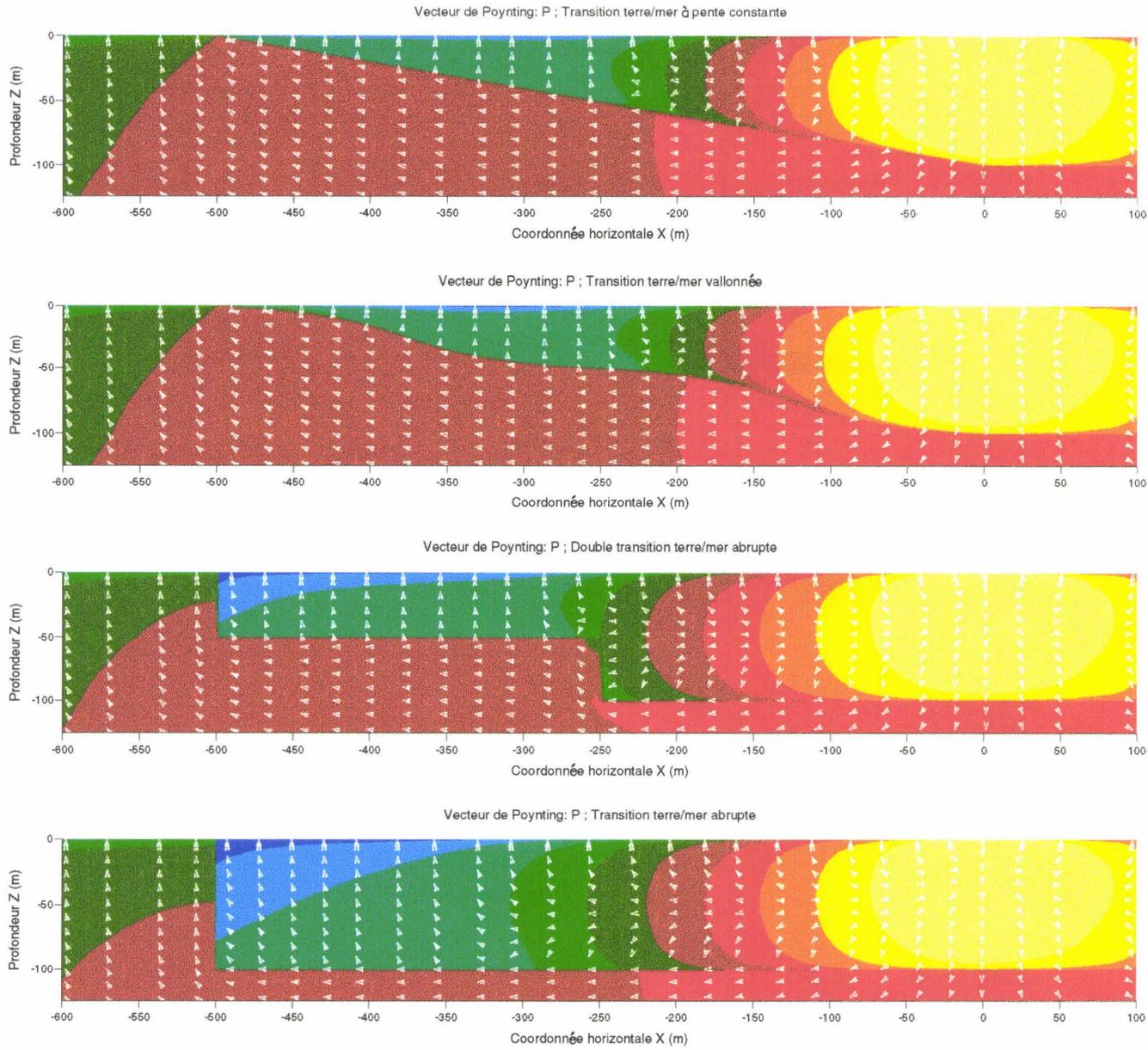


Planche (IV.22): Vecteur de Poynting P pour un DEH bidimensionnel situé en surface et pour 1 Hz.

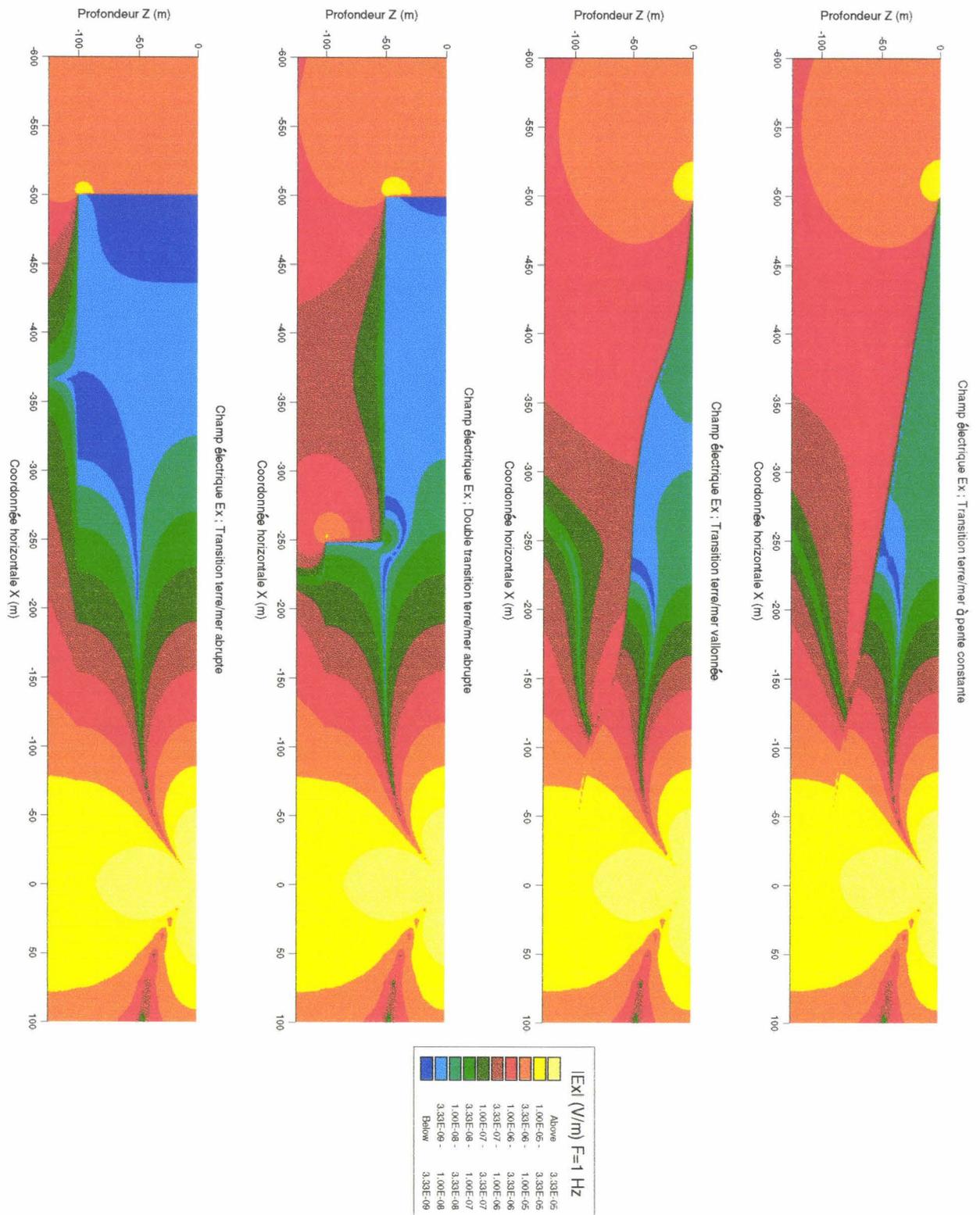


Planche (IV.23): Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEH bidimensionnel situé en surface et pour 1 Hz.

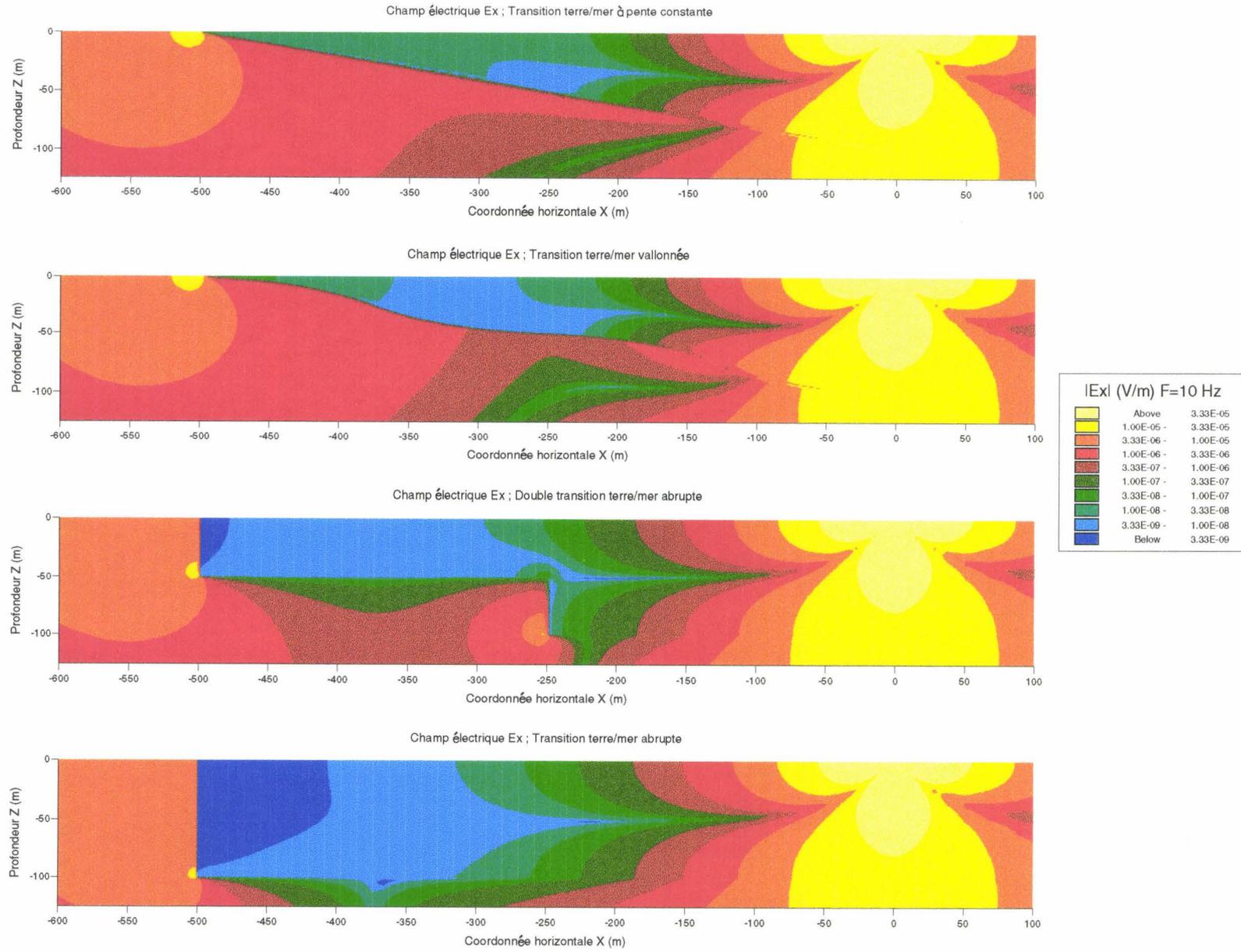
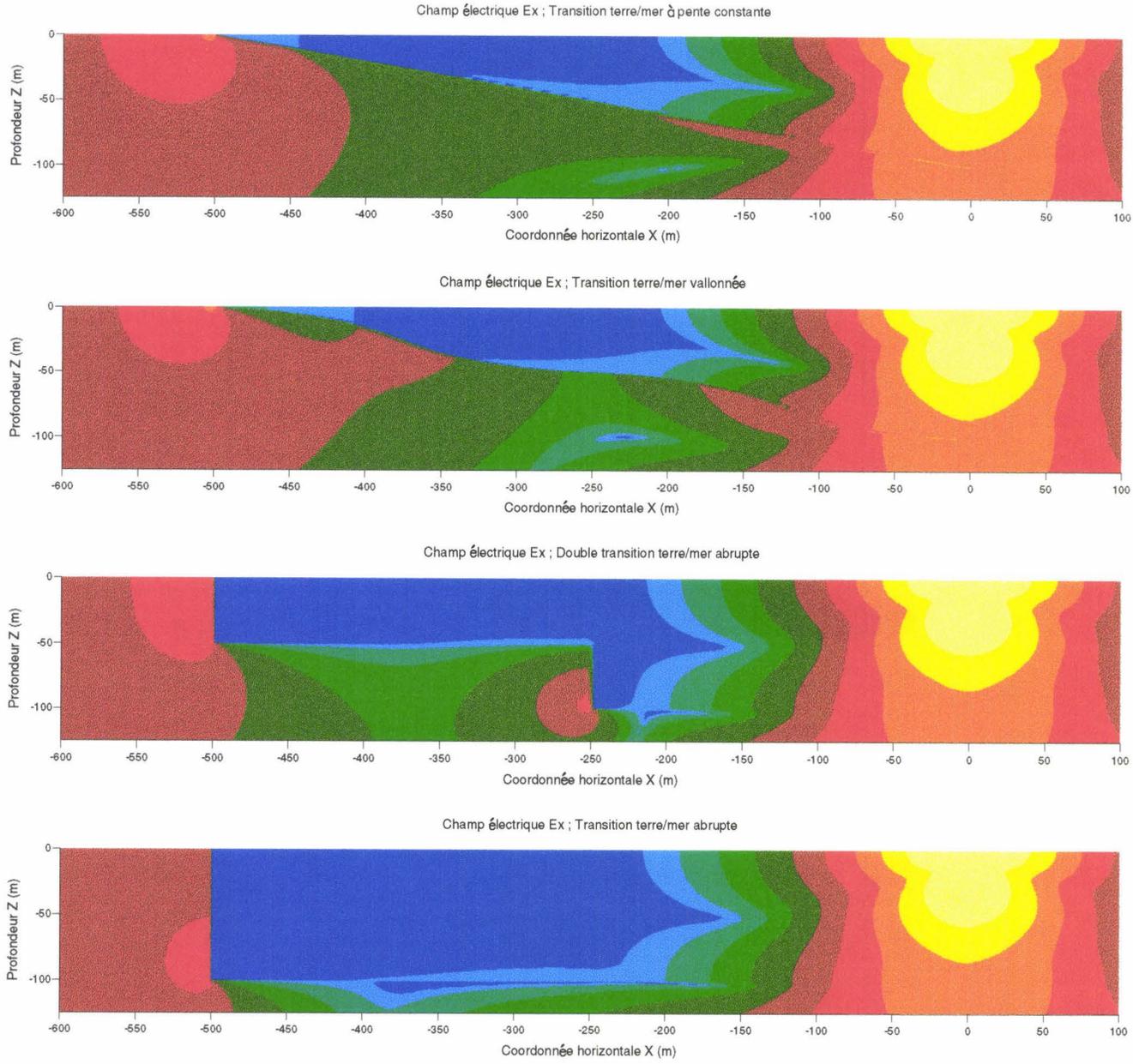


Planche (IV.24): Composante horizontale de champ électrique  $E_x$  pour un DEH bidimensionnel situé en surface et pour 10 Hz.



**Planche (IV.25):** Composante horizontale de champ électrique Ex pour un DEH bidimensionnel situé en surface et pour 100 Hz.

### **Conclusion**

Le rayonnement électromagnétique causé par des dipôles électriques bidimensionnels a confirmé les caractéristiques déjà établies dans le cas de lignes sources magnétiques. Notamment, l'importance de la localisation de l'antenne d'émission par rapport aux interfaces air/mer et mer/sol et la différenciation de deux zones de comportement du rayonnement dans la mer appelées couramment zones en champ proche et en champ lointain.

L'étude de l'influence du profil côtier sous-marin a été particulièrement intéressante puisqu'elle a permis de mettre en évidence des différences notables entre les résultats obtenus sur le comportement du rayonnement d'un dipôle électrique horizontal et vertical au voisinage d'une transition Terre/mer abrupte et non abrupte. Par exemple, le rayonnement d'un dipôle électrique vertical situé dans le fond de la mer et à proximité du profil côtier à pente constante est comparable à celui d'un dipôle horizontal avec un rayonnement plus important dans la mer.

L'étude fréquentielle a révélé que les cartes de champ de la composante horizontale du champ électrique sont identiques pour 0.1 et 1 Hz et deviennent plus homogènes pour 10 Hz par la quasi-disparition de la zone de minimum de la composante horizontale de champ électrique entre la zone de champ lointain et la zone de champ proche. Une plus forte atténuation des champs apparaît seulement à 100 Hz dans la mer car la profondeur de pénétration correspondante est égale à 25 mètres ce qui est nettement inférieure à l'épaisseur de la couche d'eau de mer (100 mètres).

L'étude suivant l'orientation du dipôle électrique a permis de montrer que la position horizontale est la plus efficace pour obtenir un maximum de champ électrique dans la zone de champ lointain dans la mer et à proximité de la ligne de côte. Ceci peut s'expliquer par le fait que, le champ électrique en champ lointain étant dû à la puissance transitant par le sous-sol comme il a été mis en évidence dans le chapitre précédent, la position horizontale du dipôle qui canalise la puissance vers l'interface mer/sol favorise le passage de la puissance rayonnée dans le sol.

Il serait intéressant de comparer ces résultats au rayonnement d'un dipôle électrique tridimensionnel. Dans ce but, le modèle de Dey et Morrison (1979) [83] correspondant au rayonnement d'un dipôle électrique à courant continu est appliqué au cas de la transition Terre/mer.

**V- Modélisation par la méthode des différences finies du rayonnement d'un dipôle à courant continu à proximité d'une transition Terre/mer.**

**Sommaire**

Introduction.....	181
<b>V-1.Modélisation du rayonnement d'un dipôle à courant continu par la méthode des différences finies. ....</b>	<b>182</b>
<b>V-1.1)Problème à résoudre. ....</b>	<b>182</b>
<b>V-1.2)Mise en équations. ....</b>	<b>183</b>
<b>V-1.3)Discrétisation par la méthode des différences finies dans le cas d'un problème 2 et 3D. ....</b>	<b>183</b>
V-1.3.1)Problèmes à deux dimensions. ....	183
V-1.3.1.1)Discrétisation par points. ....	183
V-1.3.1.2)Discrétisation par aires. ....	184
V-1.3.2)Cas d'une source 3D dans un milieu 2D. ....	186
<b>V-1.4)Conditions aux limites. ....</b>	<b>188</b>
V-1.4.1)Problème à deux dimensions.....	188
V-1.4.2)Problème à trois dimensions. ....	190
V-1.4.3)Recherche de conditions aux limites sur les dérivées. ....	190
<b>V-1.5)Calcul du potentiel électrique dans l'espace à trois dimensions (x,y,z).....</b>	<b>192</b>
<b>V-1.6)Calcul des composantes de champ électrique.....</b>	<b>193</b>
<b>V-2.Validation du modèle. ....</b>	<b>194</b>
<b>V-2.1)Calcul du potentiel électrique et des composantes de champ électrique dans un milieu stratifié illuminé par un dipôle.....</b>	<b>194</b>
<b>V-2.2)Rayonnement d'un dipôle à courant continu dans un demi-milieu.....</b>	<b>196</b>
<b>V-2.3)Tests de validation.....</b>	<b>197</b>

V-3.Application à la transition Terre/mer. .... 201

    V-3.1)Règles de maillage. .... 201

    V-3.2)Rayonnement d'un dipôle à proximité d'une transition  
Terre/mer. .... 201

        V-3.2.1)Rayonnement d'un dipôle électrique horizontal dans la  
mer. .... 201

            V-3.2.1.1)Localisation du dipôle. .... 202

            V-3.2.1.2)Résultats ..... 202

        V-3.2.2)Rayonnement d'un dipôle électrique vertical dans la mer.  
..... 203

            V-3.2.2.1)Localisation du dipôle. .... 203

            V-3.2.2.2)Résultats ..... 203

Conclusion. .... 217

**INTRODUCTION**

Ce chapitre est très important car il permet de simuler le rayonnement d'une source tridimensionnelle à courant continu et à proximité d'une transition Terre/mer pour les mêmes profils côtiers sous-marins utilisés dans le cas des sources bidimensionnelles alternatives et très basses fréquences. Cette source tridimensionnelle est au minimum un dipôle à courant continu comme il est étudié dans ce chapitre mais peut aussi être un nombre quelconque d'électrodes à courant continu donnant un bilan nul en courant. Nous pourrons donc, en comparant les différents résultats obtenus, en déduire si le rayonnement d'une source bidimensionnelle et alternative reflète bien le rayonnement d'une source tridimensionnelle en champ proche et en champ lointain. Ce modèle à courant continu a été conçu par Dey et Morisson (1979) [83] mais n'a pas été appliqué à la structure géologique d'une transition Terre/mer. Il repose sur une transformation de l'espace tridimensionnel  $(x,y,z)$  en un espace  $(x,ky,z)$  par une transformation de Fourier paire qui transforme la coordonnée  $y$  suivant l'axe d'invariance du milieu ( $oy$ ) en variable  $ky$ . La méthode de résolution est toujours directe sans atteindre des temps de calcul importants (4 à 5 heures) et la solution du problème repose sur le calcul du potentiel électrique total. On ne fixe que la valeur du courant et la localisation de la cathode et de l'anode du dipôle à courant continu. La partie aérienne de la transition Terre/mer n'est pas maillée car une simple mais exacte condition aux limites de Neumann peut être fixée à la surface de la mer et du sol sur le potentiel électrique. De plus, comme les équations ne comportent plus que des opérations entre des valeurs réelles, une économie importante de temps de calcul est réalisée et nous pouvons simuler les mêmes profils côtiers sous-marins des chapitres précédents sans atteindre des temps de calcul importants avec des problèmes de convergence.

Ce chapitre commence par la présentation du modèle numérique bidimensionnel et tridimensionnel d'une source à courant continu. Puis une comparaison avec une formulation analytique en milieu stratifié, déterminée par Peters et Bardeen (1930) [51] pour une source bidimensionnelle à courant continu étendue au cas d'un dipôle tridimensionnel à courant continu, valide le modèle et donne une idée sur ses performances numériques. Comme dans le chapitre précédent, les orientations verticales et horizontales du dipôle seront étudiées pour différentes profondeurs d'immersion dans la mer et nous pourrons comparer le comportement du rayonnement d'une source bidimensionnelle en très basses fréquences avec celui d'une source tridimensionnelle à courant continu.

## V-1. Modélisation du rayonnement d'un dipôle à courant continu par la méthode des différences finies.

### V-1.1) Problème à résoudre.

La configuration géologique relative au rayonnement d'un dipôle à courant continu immergé au voisinage d'une transition Terre/mer abrupte est représentée sur la figure (V.1).

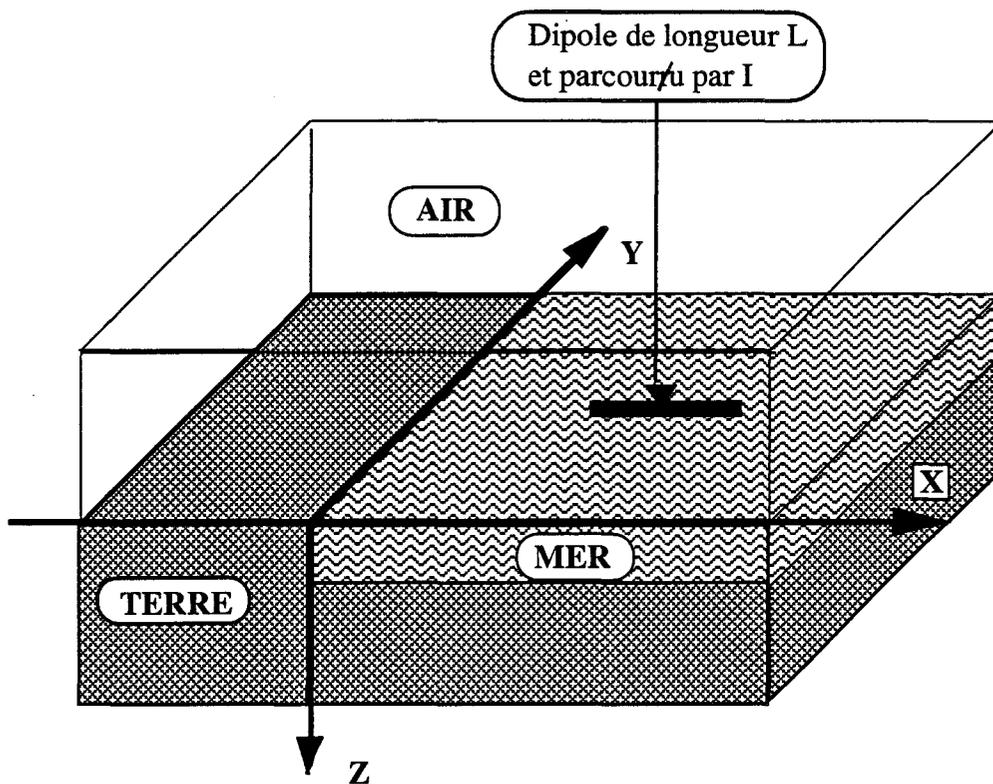


Figure (V.1) : Transition abrupte terre-mer excitée par un dipôle à courant continu transverse à la ligne de côte.

Dans le cas du problème à deux dimensions, l'émetteur devient un dipôle ligne source, c'est-à-dire deux lignes sources en opposition de phase parallèles à la ligne de côte. En courant continu, l'air n'est pas maillé car il n'y a pas de courant électrique qui y circule et une simple mais exacte dérivée nulle sur le potentiel électrique peut être appliquée sur l'interface air-milieu conducteur. Le dipôle électrique est constitué de deux points sources  $+I$  et  $-I$  pour assurer un bilan nul en courant fourni par un générateur mais d'une manière plus générale le programme informatique permet de simuler un nombre quelconque de sources électriques à courant continu.

V-1.2) Mise en équations.

Le rayonnement de sources à courant continu est déterminé à travers le calcul du potentiel électrique  $\phi$  émis. La conservation de la charge dans un élément de volume implique :

$$\text{div } \vec{j} = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{V.1})$$

$Q$ : charge contenue dans l'élément de volume ( C / m<sup>3</sup>),

$j$ : densité de courant dans l'élément de volume.

En lui associant, d'une part, la loi d'Ohm:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{V.2}),$$

et d'autre part, l'expression liant le champ électrique au potentiel électrique:

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \quad (\text{V.3}),$$

on aboutit à l'équation fondamentale régissant le comportement du potentiel électrique dans un milieu de résistivité non nulle hétérogène à trois ou deux dimensions :

$$\text{div} (\sigma \text{ grad } \Phi) = - \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{V.4}).$$

V-1.3) Discrétisation par la méthode des différences finies dans le cas d'un problème 2 et 3D.

V-1.3.1) Problèmes à deux dimensions.

La discrétisation peut s'effectuer par points ou par aires avec l'approximation aux différences centrées dans les deux cas pour une meilleure précision.

V-1.3.1.1) Discrétisation par points.

Dans un système de coordonnées cartésiennes et dans le cas d'un milieu invariant suivant l'axe (oy), l'équation (V.4) peut se mettre sous la forme (V.5).

$$\frac{\partial \left[ \sigma(x, z) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]}{\partial x} + \frac{\partial \left[ \sigma(x, z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]}{\partial z} + j_p(x, z) = 0 \quad (\text{V.5})$$

où  $j_p$  est une densité de courant injectée dans le sol.

#### V-1.3.1.2) Discrétisation par aires.

En utilisant le théorème de Green appliqué au premier membre de l'équation (V.4), on obtient la relation (V.6).

$$\iint_{\Delta A_{i,j}} \text{div} (\sigma \text{ grad } \Phi) \, ds = \oint_{L_{i,j}} \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \, dl \quad (\text{V.6})$$

où  $\eta$  est le vecteur normal à la frontière et  $L_{i,j}$  représente le contour de l'élément de surface  $\Delta A_{i,j}$  de la figure (V.2).

Utilisant la relation (V.6), l'équation (V.4) devient l'équation (V.7).

$$\oint_{L_{i,j}} \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \, dl = -I \quad (\text{V.7})$$

où  $I$  est la valeur du courant électrique créé par une source de courant localisée dans le sol. D'après Dey et Morisson (1979)[83], la discrétisation par aires donne de meilleurs résultats que la discrétisation par points, elle sera donc développée par la suite.

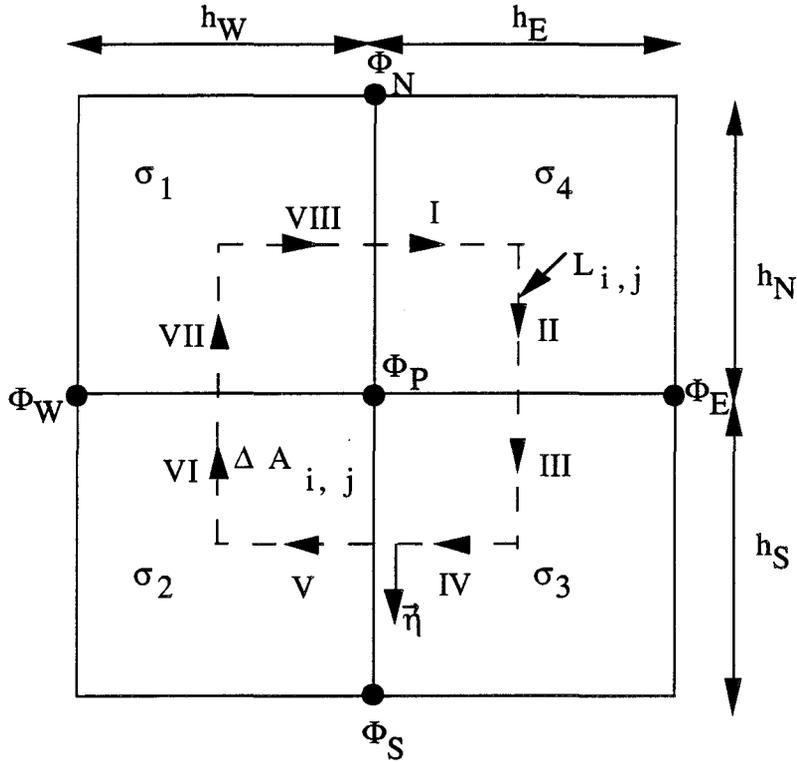


Figure (V.2): Schéma de la discrétisation par aires.

Le contour d'intégration  $L_{i,j}$  est subdivisé en huit segments élémentaires sur

lesquels la dérivée  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$  est approximée par la formule aux différences centrées.

En un nœud  $p$  intérieur au domaine, l'équation (V.8) aux cinq inconnues de potentiel électrique voisin,  $\Phi_N, \Phi_E, \Phi_S, \Phi_W$  et  $\Phi_P$  est obtenue.

$$C_L \Phi_W + C_B \Phi_S + C_R \Phi_E + C_T \Phi_N + C_P \Phi_P = I$$

(V.8)

Cette équation exprime la conservation du courant au nœud  $P$  où les expressions des coefficients  $C_L, C_R, C_T, C_B$ , données ci-dessous, sont équivalents aux conductances apparentes vues entre le nœud  $P$  et ses quatre voisins  $N, W, E, S$ .

$$C_L = -\frac{1}{2} \frac{h_S \sigma_2 + h_N \sigma_1}{h_W} \quad (V.9)$$

$$C_B = -\frac{1}{2} \frac{h_E \sigma_3 + h_W \sigma_2}{h_S} \quad (V.10)$$

$$C_R = -\frac{1}{2} \frac{h_N \sigma_4 + h_S \sigma_3}{h_E} \quad (V.11)$$

$$C_T = -\frac{1}{2} \frac{h_W \sigma_1 + h_E \sigma_4}{h_N} \quad (V.12)$$

$$C_P = -[C_L + C_B + C_R + C_T] \quad (V.13)$$

**V-1.3.2) Cas d'une source 3D dans un milieu 2D.**

Pour un milieu et une source tridimensionnels, l'équation à résoudre est la suivante:

$$-\text{div} [\sigma(x, y, z) \text{grad } \Phi(x, y, z)] = \frac{\partial Q}{\partial t} \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s) \quad (V.14)$$

La source à courant continu, localisée au point de coordonnées  $(x_s, y_s, z_s)$ ,

débite une quantité de charge par unité de volume et de temps :  $\frac{\partial Q}{\partial t}$ . Dans le

cas d'une transition Terre/mer, le milieu géologique est invariant suivant la ligne de côte.

$$\frac{\partial \sigma(x, y, z)}{\partial y} = 0 \quad (V.15)$$

L'équation (V.14) devient :

$$-\operatorname{div} [\sigma(x, z) \operatorname{grad} \Phi(x, y, z)] = \frac{\partial Q}{\partial t} \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s)$$

(V.16)

Cette équation est résolue dans l'espace des transformées de Fourier par la transformation de Fourier suivante :

$$\tilde{\Phi}(x, k_y, z) = \int_0^{+\infty} \Phi(x, y, z) \cos(k_y y) dy \quad (\text{V.17})$$

La coordonnée  $y$  est changée en variable  $K_y$  appelée nombre d'onde. Dans l'espace  $(x, k_y, z)$ , l'équation (V.16) se transforme en l'équation (V.18).

$$-\operatorname{div} [\sigma(x, z) \operatorname{grad} \tilde{\Phi}(x, k_y, z)] + k_y^2 \sigma(x, z) \tilde{\Phi}(x, k_y, z) = \tilde{Q} \delta(x_s) \delta(z_s)$$

$$\text{où } \tilde{Q} = \frac{I}{2 \Delta A}$$

(V.18)

$I$  est le courant injecté au point  $(x_s, z_s)$ ,  $\Delta A$  est l'aire élémentaire autour du point d'injection. Ceci revient au problème à deux dimensions, c'est-à-dire à déterminer  $\tilde{\Phi}$  dans le plan  $(x, z)$  pour différentes valeurs de  $k_y$ . Dans le cas d'une discrétisation par aires, l'équation (V.18) devient :

$$-\oint_{L_{i,j}} \sigma \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} dl + k_y^2 \iint_{\Delta A_{i,j}} \sigma(x, z) \tilde{\Phi}(x, k_y, z) da = \frac{I}{2} \delta(x_s) \delta(z_s)$$

(V.19)

Pour un noeud intérieur au domaine, l'équation (V.20) donne le potentiel électrique,  $\tilde{\Phi}$ , dans le domaine  $(x, k_y, z)$ .

$$C_L \tilde{\Phi}_W + C_B \tilde{\Phi}_S + C_R \tilde{\Phi}_E + C_T \tilde{\Phi}_N + C_P \tilde{\Phi}_P = \frac{I}{2}$$

(V.20)

Seul le coefficient  $C_P$  est modifié par rapport au problème à deux dimensions et s'exprime par l'expression (V.21).

$$C_P = - \left[ \left( 1 - \frac{k_y^2}{4} h_W^2 \right) C_L + \left( 1 - \frac{k_y^2}{4} h_S^2 \right) C_B + \left( 1 - \frac{k_y^2}{4} h_E^2 \right) C_R + \left( 1 - \frac{k_y^2}{4} h_N^2 \right) C_T \right]$$

(V.21)

Pour  $K_y = 0$ , le coefficient  $C_P$  correspond au cas d'un modèle entièrement bidimensionnel.

#### V-1.4) Conditions aux limites.

Pour les noeuds appartenant au contour, il existe deux grands types de modèles avec différentes conditions aux limites: le premier est le modèle de type Dirichlet dans lequel le potentiel électrique est déterminé analytiquement en milieu stratifié et le deuxième est du type Neumann, Cauchy ou couche

absorbante, la dérivée du potentiel électrique  $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$  sur les segments élémentaires

appartenant au contour est en relation avec la valeur du potentiel électrique et ses dérivées. Dans le cas d'une source tridimensionnelle dans un milieu bidimensionnel, ces conditions aux limites sont transposées dans le domaine  $(x, ky, z)$ .

##### V-1.4.1) Problème à deux dimensions.

Le potentiel électrique rayonné par une ligne source dans un milieu infini, homogène et isotrope est calculé à partir de l'équation intégrale (V.21).

$$\oint_L \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} dl = -I \quad (\text{V.21})$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = -\frac{I}{4 \pi \sigma} \ln(r^2) \quad (\text{V.22})$$

Dans le cas du dipôle ligne source représenté sur la figure (V.3) et en utilisant le théorème de superposition, le potentiel électrique s'exprime donc par :

$$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{I}{4 \pi \sigma} \ln\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) \quad (\text{V.24})$$

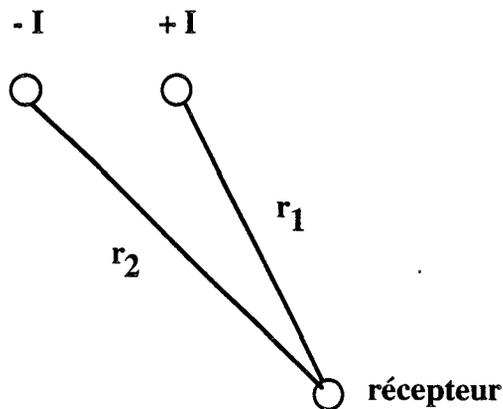


Figure (V.3): Emission par un dipôle ligne source.

Si on place une ligne source ou un dipôle ligne source à la surface d'un demi-milieu, le potentiel électrique est doublé car l'interface air/sol joue le rôle de réflecteur parfait. La condition aux limites (V.25) exprime ce phénomène.

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)_{\text{interface}} = 0 \quad (\text{V.25})$$

**V-1.4.2) Problème à trois dimensions.**

Le potentiel électrique rayonné par un point source dans un milieu infini, homogène et isotrope est calculé à partir de l'équation intégrale suivante :

$$\iint_{(S)} \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} ds = -I \quad (V.26)$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{I}{4 \pi \sigma r} \quad (V.27)$$

Dans le cas d'un dipôle, le potentiel électrique s'exprime donc par :

$$\Rightarrow \Phi(r) = \frac{I}{4 \pi \sigma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (V.28)$$

Si on place un dipôle à la surface d'un demi-milieu, le potentiel électrique est également doublé car l'interface air/sol joue toujours le rôle de réflecteur parfait.

**V-1.4.3) Recherche de conditions aux limites sur les dérivées.**

Pour le cas de la transition Terre/mer qui ne correspond pas à un milieu stratifié, il est impossible de calculer analytiquement les valeurs de champ ou de potentiel électrique émis par un dipôle immergé dans la mer. La seule façon de fixer un champ aux limites du domaine est de lui attribuer la valeur nulle à une distance importante de la source mais par soucis de temps calcul et de facilité d'emploi du logiciel, la recherche de conditions aux limites aux dérivées est nécessaire. Une condition aux limites propres doit être solution de l'équation (V.29) aux limites du domaine (x,ky,z) d'après Dey et Morisson (1979)[83].

$$\alpha(x,z) \tilde{\phi} + \beta(x,z) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta} = f_2(x,z) \quad (V.29)$$

où  $f_2(x,z)$  exprime un terme source au niveau du contour. Le potentiel électrique primaire  $\phi(r)$  dû à la source ponctuelle comme le potentiel secondaire perturbateur dû à une inhomogénéité située dans le sol décroît inversement avec

la distance émetteur-récepteur dans l'espace  $(x,y,z)$  et donc en  $K_0(k_y r)$  dans l'espace des transformées de Fourier. Ceci est résumé dans les formules (V.30).

$$\Phi(r) = \frac{A}{r} \Leftrightarrow \tilde{\Phi}(x, k_y, z) = A K_0(k_y r) \quad (\text{V.30})$$

où  $r$  est la distance émetteur-récepteur,  $k_y$  est le nombre d'onde et  $K_0$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro. Par conséquent, on en déduit la relation (V.31) suivante :

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta}(x, k_y, z) = -A k_y K_1(k_y r) \vec{e}_r \cdot \vec{\eta} \quad (\text{V.31})$$

où  $K_1$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 1,  $\vec{e}_r$  est le vecteur unitaire colinéaire à  $r$  et  $\vec{\eta}$  est le vecteur normal au contour. L'équation (V.29) peut donc se mettre sous la forme (V.32).

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta}(x, k_y, z) + \alpha \tilde{\Phi}(x, k_y, z) = 0 \quad (\text{V.32})$$

$$\text{où} \quad \alpha = \frac{k_y K_1(k_y r)}{K_0(k_y r)} \vec{e}_r \cdot \vec{\eta} \quad (\text{V.33})$$

C'est une condition aux limites du type Cauchy qui relie la valeur du potentiel électrique à sa dérivée. On réduit le coût des calculs en réduisant le domaine d'étude et les réflexions dues aux sources virtuelles le long du contour sont supprimées. Il devient possible de simuler le cas de la transition Terre/mer sans fixer la valeur du potentiel électrique aux limites du domaine. Par contre, pour le modèle bidimensionnel, l'utilisation d'une même condition aux limites sur la dérivée du potentiel électrique n'a pas été aussi fructueuse. Et comme la nullité du potentiel électrique ne peut être fixée aux limites du domaine que pour le rayonnement de dipôles lignes sources, le modèle bidimensionnel n'a pas été poursuivi.

En conclusion, l'unique modèle dont on dispose est relatif à une source

tridimensionnelle dans un milieu bidimensionnel présenté sur la figure (V.4). Elle regroupe une condition de Neumann exacte sur l'interface air/mer et une condition de Cauchy approchée sur les autres côtés situés dans la mer ou dans le sol.

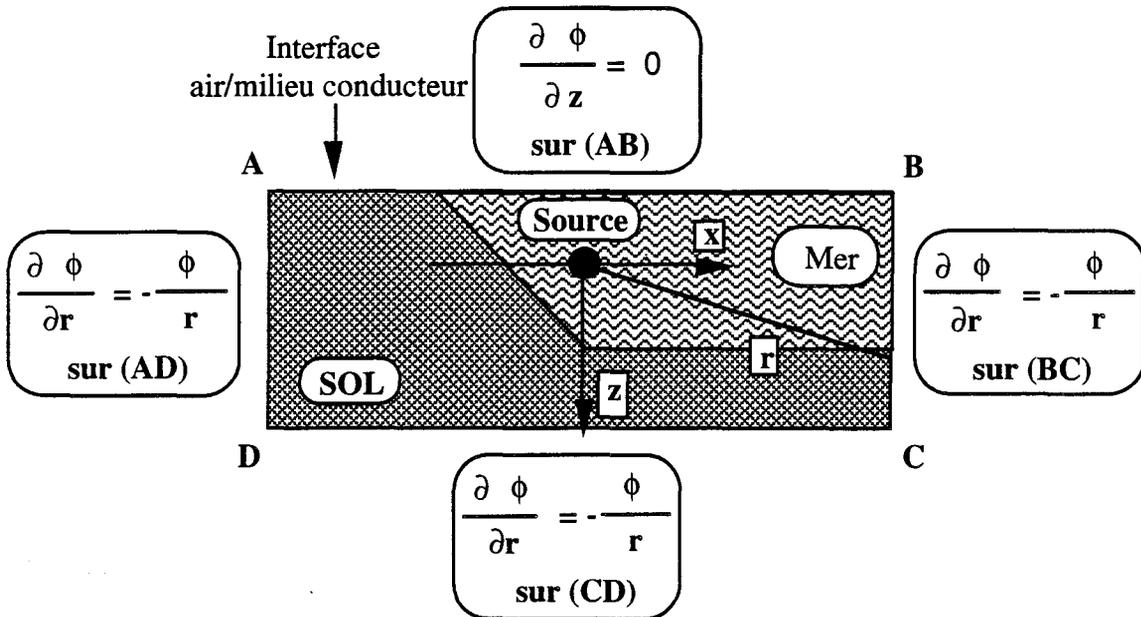


Figure (V.4): Modèle final utilisé pour simuler le rayonnement d'un dipôle à courant continu et à proximité d'une transition Terre/mer.

V-1.5) Calcul du potentiel électrique dans l'espace à trois dimensions  $(x,y,z)$ .

Pour connaître le potentiel électrique dans l'espace  $(x,y,z)$ , la transformée de Fourier inverse donnée par la formule (V.34) est alors utilisée.

$$\Phi(x,y,z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\Phi}(x,k_y,z) \cos(k_y y) dk_y$$

(V.34).

En intégrant par intervalles sur lesquels on suppose une décroissance exponentielle de  $\tilde{\Phi}$  on aboutit à l'expression (V.35) qui donne le potentiel électrique  $\Phi$  dans l'espace  $(x,y,z)$ .

$$\Phi(x,y,z) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{i=Nk_y-1} \left\{ \frac{\tilde{\Phi}(x,k_y,z)}{a_i^2 + y^2} [y \sin(y k_y) - a_i \cos(y k_y)] \right\}_{k_y = k_{y_i}}^{k_y = k_{y_{i+1}}} \quad (V.35)$$

avec 
$$a_i = \frac{1}{(k_{y_{i+1}} - k_{y_i})} \ln \left[ \frac{\tilde{\Phi}(k_{y_i})}{\tilde{\Phi}(k_{y_{i+1}})} \right]$$

V-1.6) Calcul des composantes de champ électrique.

Les formules (V.36) donnent les composantes horizontale et verticale de champ électrique. Elles sont obtenues simplement par le calcul du gradient de potentiel électrique au centre des éléments de surface, figure (V.5).

$$\begin{cases} \vec{E}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{(\Phi_W + \Phi_{NW}) - (\Phi_N + \Phi_P)}{2 h_E} \\ \vec{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{(\Phi_{NW} + \Phi_N) - (\Phi_P + \Phi_W)}{2 h_N} \end{cases} \quad (V.36)$$

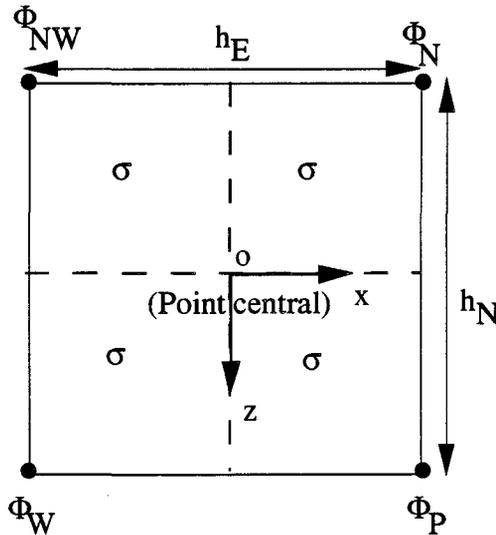


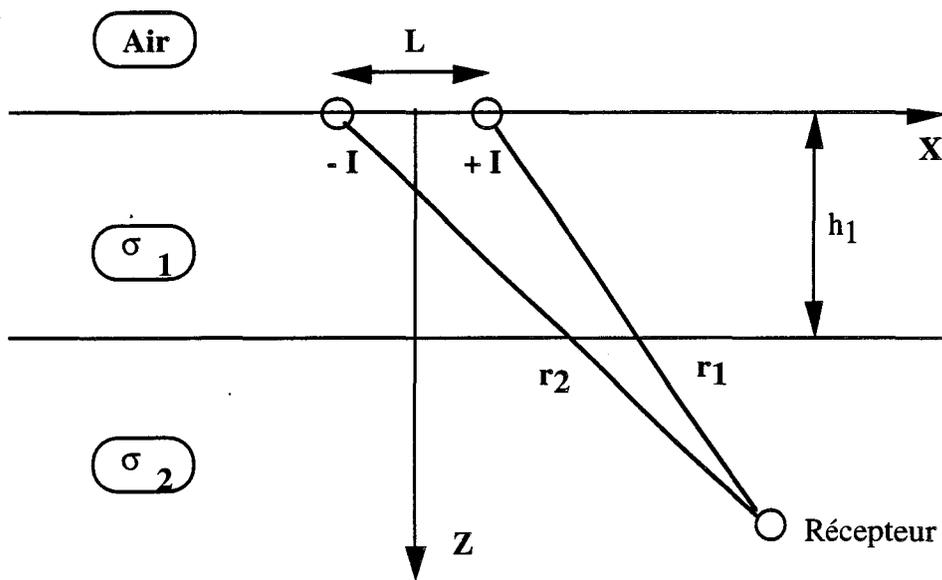
Figure (V.5): Découpage d'un élément de surface.

## V-2. Validation du modèle.

Ne trouvant pas de résultats de comparaison en milieu bidimensionnel dans la littérature comme dans le cas de l'onde plane et de la ligne source, la validation du modèle numérique est faite en comparant les résultats numériques avec ceux fournis par des formules analytiques concernant le rayonnement de dipôles à la surface d'un milieu stratifié.

### V-2.1) Calcul du potentiel électrique et des composantes de champ électrique dans un milieu stratifié illuminé par un dipôle.

Le calcul analytique du potentiel électrique dans un milieu stratifié à deux couches parallèles dû à un dipôle ligne source localisé en surface dont les caractéristiques sont décrites sur la figure (V.6), a été étudié par Peters et Bardeen (1930)[51].



**Figure (V.6):** Dipôle ligne source à la surface d'un milieu stratifié à deux couches conductrices parallèles.

En choisissant l'origine du repère cartésien au milieu du dipôle ligne source, le potentiel en un point  $(x,z)$  dans le sol conducteur est donné par les formules (V.37) suivant la localisation du récepteur.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Phi_1(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^n f(x; 2n h_1 - z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^n f(x; 2n h_1 + z) \\
 \text{pour } 0 \leq z \leq h_1 \\
 \\
 \Phi_2(x,z) = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^n f(x; 2n h_1 + z) \\
 \text{pour } z \geq h_1 \\
 \\
 \text{avec } f(x,z) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \ln \frac{\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 + z^2}{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + z^2}
 \end{array} \right.$$

(V.37)

$f(x,z)$  est le potentiel électrique dans un demi-milieu de conductivité  $\sigma_1$  excité par un dipôle ligne source en surface,  $I$  est le courant circulant dans le dipôle ligne source,  $L$  est la longueur du dipôle ligne source,  $h_1$  est l'épaisseur de la première couche,  $n$  est le nombre de réflexions sur les différentes interfaces,  $\gamma = \sigma_1/\sigma_2$  est le rapport des conductivités.

Ces expressions ont été utilisées par Mufti (1976)[50] dans le cas du rayonnement d'un dipôle ligne source dans un modèle de type Dirichlet à deux dimensions. En ce qui concerne le rayonnement d'un dipôle tridimensionnel à courant continu, la formule  $f(x,z)$  donnée dans les équations (V.37) est simplement remplacée par la formule (V.38), exprimant le potentiel électrique dans un demi-milieu air/sol excité par un dipôle de longueur  $L$  situé en surface.

$$f(x,z) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-L)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+L)^2 + z^2}} \right) \quad (V.38)$$

Les composantes de champ électrique sont obtenues par le calcul du gradient du potentiel électrique comme pour le modèle numérique.

### V-2.2) Rayonnement d'un dipôle à courant continu dans un demi-milieu.

Afin d'expliquer les résultats obtenus en courant continu, nous sommes obligé d'étudier le rayonnement électromagnétique du dipôle horizontal en demi-milieu en représentant les lignes de courant, figure (V.7). L'unique différence par rapport au milieu homogène est un facteur 2 multiplicateur des champs car l'interface air/mer ou air/sol constitue un parfait réflecteur. Les caractéristiques essentielles du rayonnement d'un dipôle à courant continu sont résumées sur la figure (V.7). La composante horizontale de champ électrique est maximale suivant l'axe du dipôle et dans le plan perpendiculaire et médian au dipôle tandis que la composante verticale est maximale suivant une surface biconique centrée sur le dipôle avec un angle d'ouverture voisin de  $45^\circ$  qui correspondra à la zone d'erreur maximale sur la composante horizontale de champ électrique  $E_x$ . Le potentiel électrique est nul sur le plan perpendiculaire et médian au dipôle car les électrodes opposent la même valeur du potentiel. Suivant l'axe du dipôle concordant avec l'axe (ox), les parités des champs sont paire, impaire et impaire respectivement pour la composante horizontale, verticale du champ électrique et le potentiel électrique.

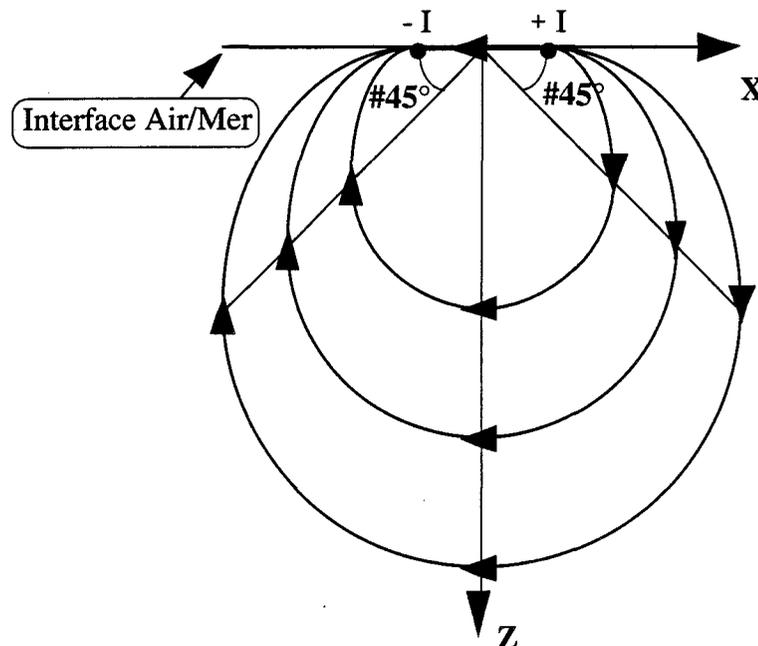


Figure (V.7): Lignes de courant ou de champ électrique dans un demi-milieu.

## V-2.3) Tests de validation.

Les configurations de test sont les demi-milieux air/mer ou air/sol et le milieu stratifié à 3 couches parallèles, air/mer/sol, avec une épaisseur d'eau de mer égale à 100 m. Les paramètres de convergence sont le maillage et les valeurs attribuées à  $K_y$  dans le domaine  $(x, K_y, z)$ . Ces valeurs remplacent les dimensions des mailles à fixer suivant l'axe  $(oy)$  dans un modèle tridimensionnel. Les cartes d'erreur sur les champs électromagnétiques ont conduit à prendre les 15 valeurs de  $K_y$  suivantes, 0.000005, 0.00001, 0.00005, 0.0001, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.75, 1, 3, sachant que les faibles valeurs améliorent la précision au niveau du contour et que les valeurs élevées améliorent la précision des résultats au voisinage du dipôle. Ce nombre de valeurs peut être réduit à 10 sans pour autant augmenter considérablement l'erreur qui se situe en majeure partie au niveau du contour inférieur, droite et gauche, où l'on trouve les plus grandes dimensions de mailles et aux emplacements des zéros ou des zones des minimums des composantes de champ électromagnétique. Les règles de maillage en courant continu sont les mêmes qu'en courant alternatif toujours en progression géométrique avec une maille de départ voisine du mètre. Par contre, les distances à mailler sont relativement faibles vis à vis de celles dans le cas du rayonnement d'une ligne source alternative en très basses fréquences (0.1 et 1 Hz). Comme la notion de profondeur de pénétration n'existe plus, la distance source-contour est fixée à une valeur égale à 1 km afin que le champ soit suffisamment affaibli au niveau du contour. Le dipôle étant de faible longueur (2 m), il peut être découpé en une ou plusieurs mailles régulières. Dans les tests de convergence qui suivent, le dipôle est découpé en deux mailles identiques afin d'y centrer l'origine du repère  $(oxz)$ .

Les planches (V.1) et (V.2) regroupent uniquement les erreurs relatives faites sur la composante horizontale de champ électrique  $E_x$  en demi-milieu air/mer ou air/sol, figure (V.8), et dans un milieu à trois couches air/mer/sol, figure (V.9), car cette composante est prépondérante dans la mer en champ lointain quelle que soit l'orientation du dipôle émetteur.

Pour un demi-milieu air/mer ou air/sol, l'erreur relative sur la composante horizontale de champ électrique est identique et ne dépend donc pas de la conductivité du milieu conducteur, planche (V.1). Les résultats obtenus pour un maillage de 30 mailles autour du dipôle pour un demi-milieu et avec en plus 50 couches dans la mer pour le milieu air/mer/sol sont déjà convenables, planche (V.1) et (V.2). L'erreur relative maximale concorde dans les deux cas avec les emplacements de nullité des composantes de champ électrique et avec les zones

où les dimensions de maille sont les plus élevées.

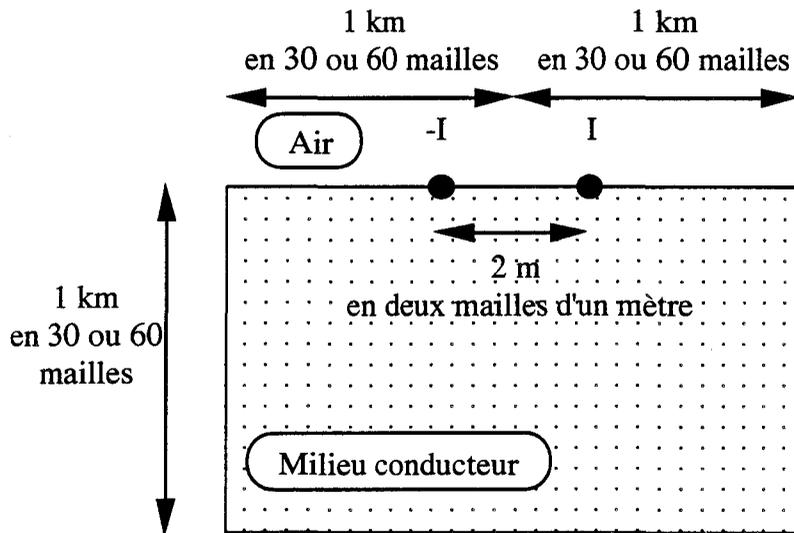


Figure (V.8): Cas du demi-milieu excité par un dipôle horizontal en surface.

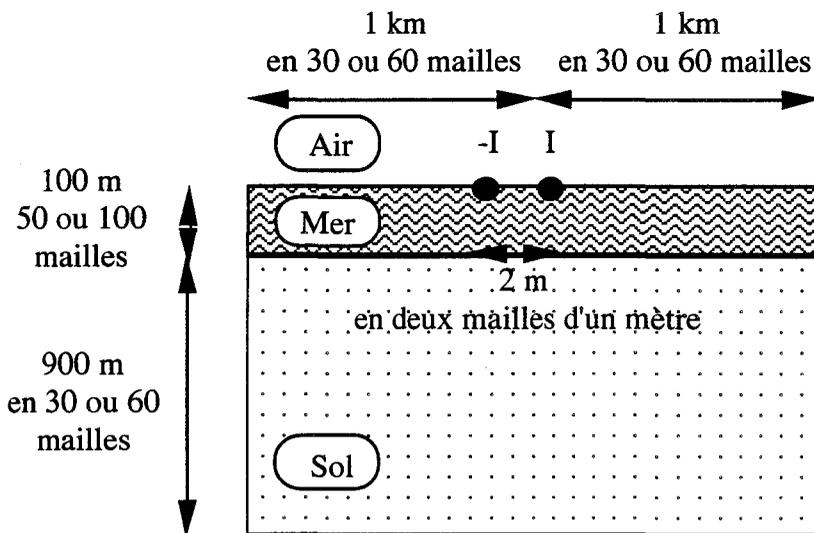


Figure (V.9): Cas d'un milieu stratifié air/mer/sol excité par un dipôle horizontal en surface.

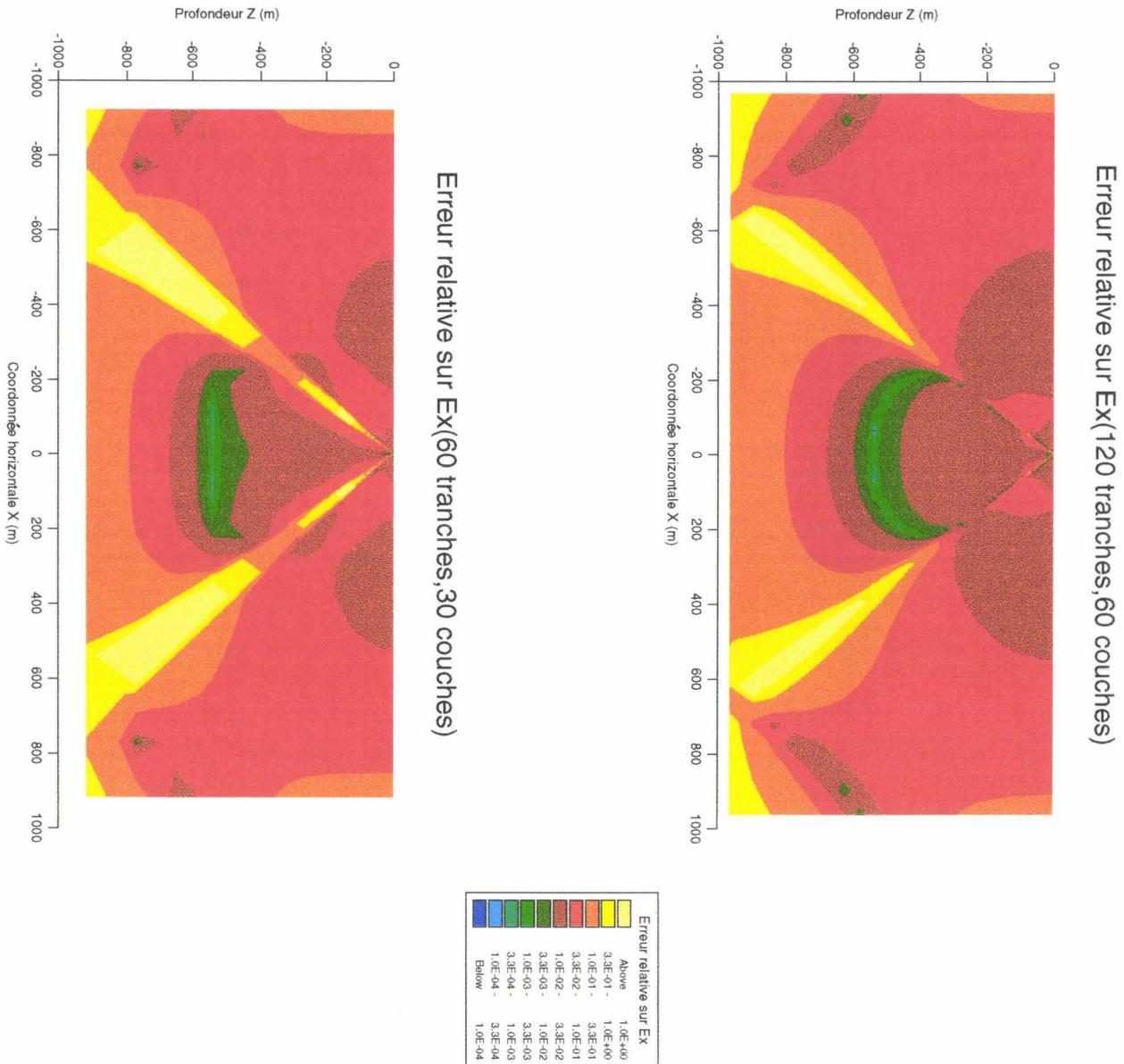
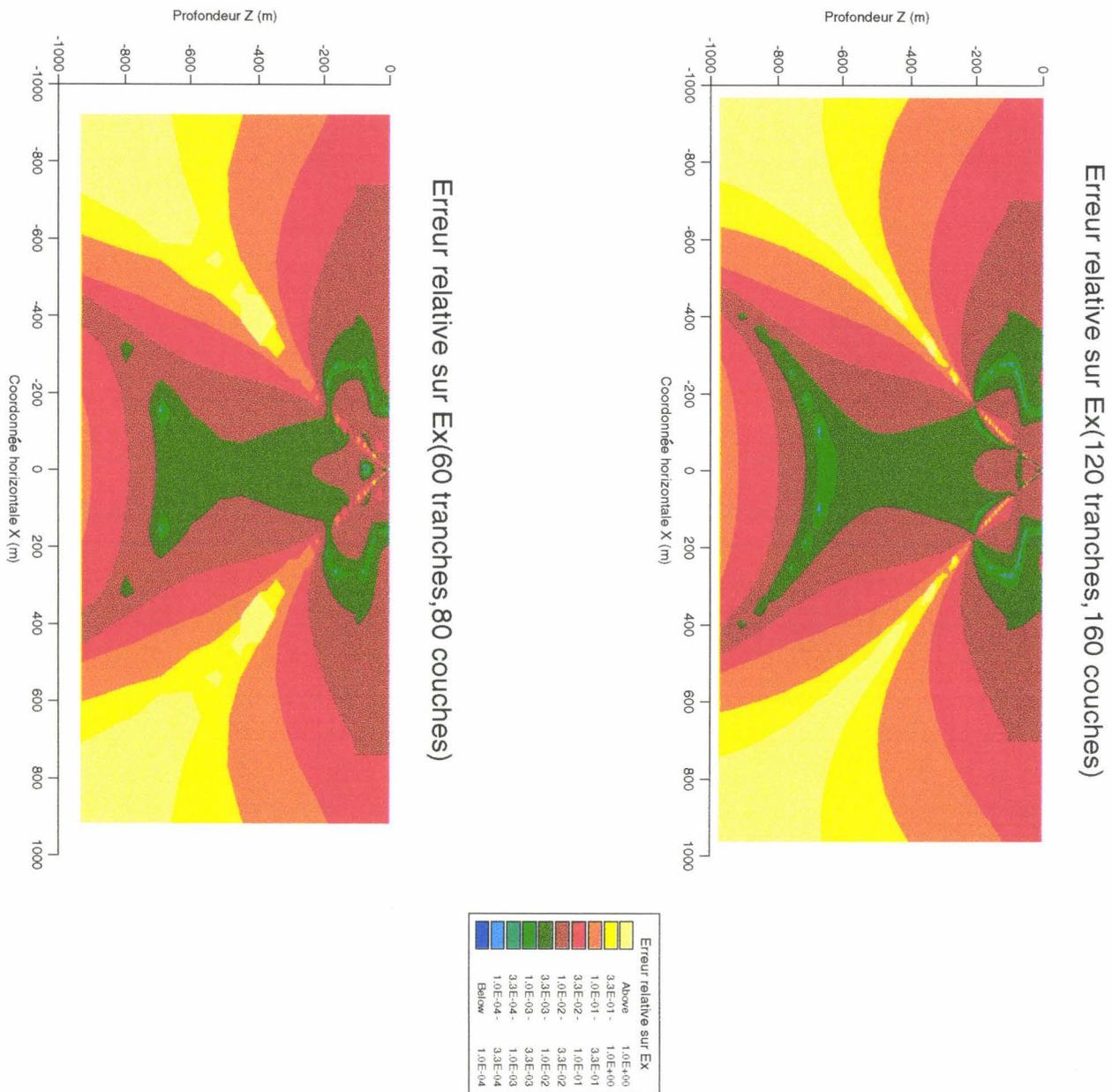


Planche (V.1): Cartes d'erreur relative sur Ex en demi-milieu air/mer ou air/sol pour un dipôle à courant continu horizontal en surface.



**Planche (V.2):** Cartes d'erreur relative sur Ex en milieu stratifié air/mer/sol pour un dipôle à courant continu horizontal en surface.

### V-3. Application à la transition Terre/mer.

#### V-3.1) Règles de maillage.

Un exemple est donné sur la figure (V.10) dans le cas d'une transition non abrupte.

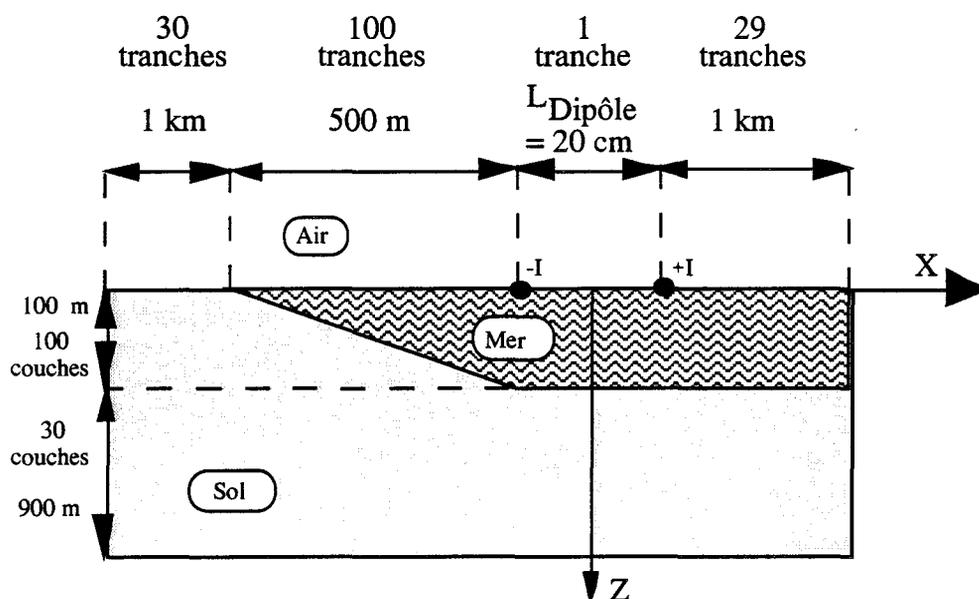


Figure (V.10) : Maillage de la transition Terre/mer.

Pour les transitions vallonnées ou à pente constante (20 %), le découpage est identique à ceux utilisés dans les chapitres précédents. Le domaine d'étude est plus restreint qu'en illumination par le dipôle ligne source alternatif car l'air n'est pas maillé comme dans le cas du mode TM de l'onde plane.

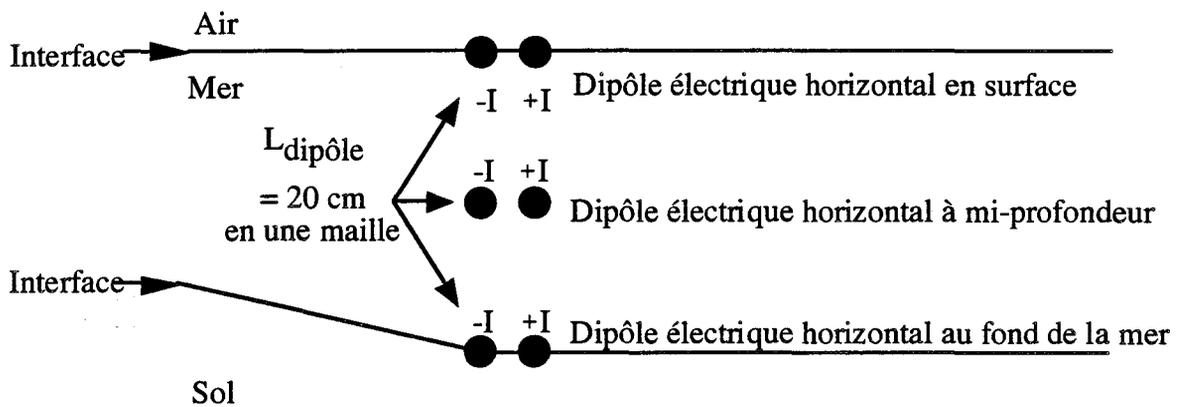
#### V-3.2) Rayonnement d'un dipôle à proximité d'une transition Terre/mer.

Le dipôle à courant continu est toujours localisé à 500 mètres de la ligne de côte. L'étude paramétrique repose sur l'orientation du dipôle (horizontale et verticale), l'immersion du dipôle (au fond de la mer, à mi-profondeur et à la surface de la mer) et les quatre profils côtiers sous-marins. Cette étude est donc présentée sous la forme de cartes vectorielles de champ électrique et de cartes de champ de la composante horizontale de champ électrique.

##### V-3.2.1) Rayonnement d'un dipôle électrique horizontal dans la mer.

V-3.2.1.1) Localisation du dipôle.

Contrairement, au dipôle électrique alternatif bidimensionnel étudié dans le chapitre précédent, le dipôle électrique à courant continu tridimensionnel pose moins de problèmes pour le situer par rapport aux interfaces car les extrémités du dipôle correspondent à sa cathode et à son anode, figure (V.11). Il peut être placé au niveau des interfaces sans perdre le rayonnement important dans la mer. La longueur du dipôle est fixée à 20 cm et un courant de 1 A est injecté dans le dipôle.



**Figure (V.11):** Localisation des électrodes constituant le dipôle horizontal.

V-3.2.1.2) Résultats

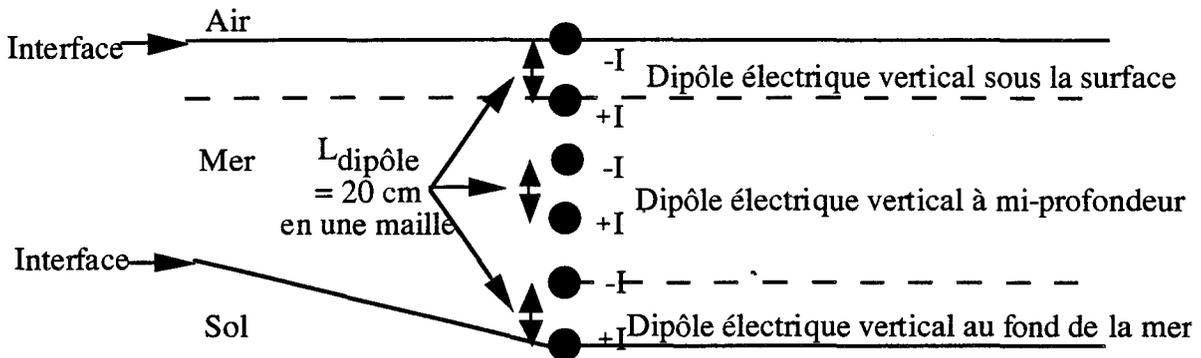
Les planches (V.3), (V.4) et (V.5) décrivent les cartes de champ de la composante de champ électrique correspondant aux trois immersions du dipôle électrique horizontal. Quels que soit le relief du fond sous-marin et l'enfoncement du dipôle dans la mer, la composante horizontale de champ électrique subit la même atténuation en  $1/r^2$  suivant la direction de la couche d'eau de mer. On constate toujours des zones d'ombre au niveau des transitions abruptes. Des zones de minimum de la composante horizontale de champ électrique sont faiblement perceptibles dans la zone de champ proche. La dynamique des valeurs de champ électrique s'effectue entre  $10^{-10}$  et  $10^{-6}$  V/m dans la mer.

Les planches (V.6), (V.7) et (V.8) correspondent aux cartes vectorielles de champ électrique pour les trois valeurs de l'immersion du dipôle électrique à courant continu. On remarque qu'il s'agit d'une orientation favorable du dipôle dans la mer car les lignes de champ électrique sont très rapidement parallèles aux interfaces air/mer et air/sol.

## V-3.2.2) Rayonnement d'un dipôle électrique vertical dans la mer.

## V-3.2.2.1) Localisation du dipôle.

La figure (V.12) décrit la localisation des électrodes constituant le dipôle vertical pour les trois valeurs d'immersion à proximité d'un profil côtier à pente constante. La longueur du dipôle est toujours de 20 cm avec un courant électrique de 1 A injecté dans le dipôle.



**Figure (V.12):** Localisation du dipôle électrique vertical à proximité d'un profil côtier sous-marin à pente constante.

## V-3.2.2.2) Résultats

Les planches (V.9), (V.10), (V.11) décrivent les cartes de champ de la composante horizontale de champ électrique pour les trois valeurs de l'immersion du dipôle électrique vertical. La position verticale du dipôle électrique provoque des différences flagrantes du rayonnement du dipôle suivant l'immersion du dipôle et le type de profil côtier sous-marin. Il en résulte que la dynamique de champ électrique dans la mer est beaucoup plus forte et s'effectue entre  $10^{-14}$  et  $10^{-6}$  V/m.

Les planches (V.12), (V.13), (V.14) décrivent les cartes vectorielles de champ électrique pour les trois valeurs de l'immersion du dipôle électrique vertical. Cette orientation du dipôle est la plus pénalisante car les lignes de champ électrique sont déformées en zone de champ proche par la présence des interfaces air/mer et mer/sol afin d'épouser la forme de la couche d'eau de mer.

Pour une immersion nulle du dipôle électrique vertical correspondant aux planches (V.11) et (V.14), les valeurs de champ électrique sont les plus faibles comme pour un source alternative située en surface. De même, pour un dipôle électrique vertical situé soit au fond de la mer correspondant aux planches (V.9) et (V.12) soit à mi-profondeur correspondant aux planches (V.10) et (V.13), le

rayonnement du dipôle est fortement amélioré dans la mer par la présence d'un profil côtier non abrupt.

Un autre phénomène déjà observé en courant alternatif se reproduit dans le cas du dipôle électrique vertical à courant continu au fond de la mer et suivant un profil à pente constante correspondant aux planches (V.9) et (V.12). Ce phénomène est la correspondance entre le rayonnement du dipôle électrique vertical au fond de la mer et à proximité d'un profil côtier à pente constante et le rayonnement d'un dipôle électrique horizontal situé au même endroit. Les valeurs de champ électrique s'en trouvent nettement augmentées. De la même façon, l'évolution du rayonnement du dipôle vertical à courant continu suivant les différents profils côtiers concorde avec l'évolution du rayonnement du dipôle vertical bidimensionnel alternatif au fond de la mer.

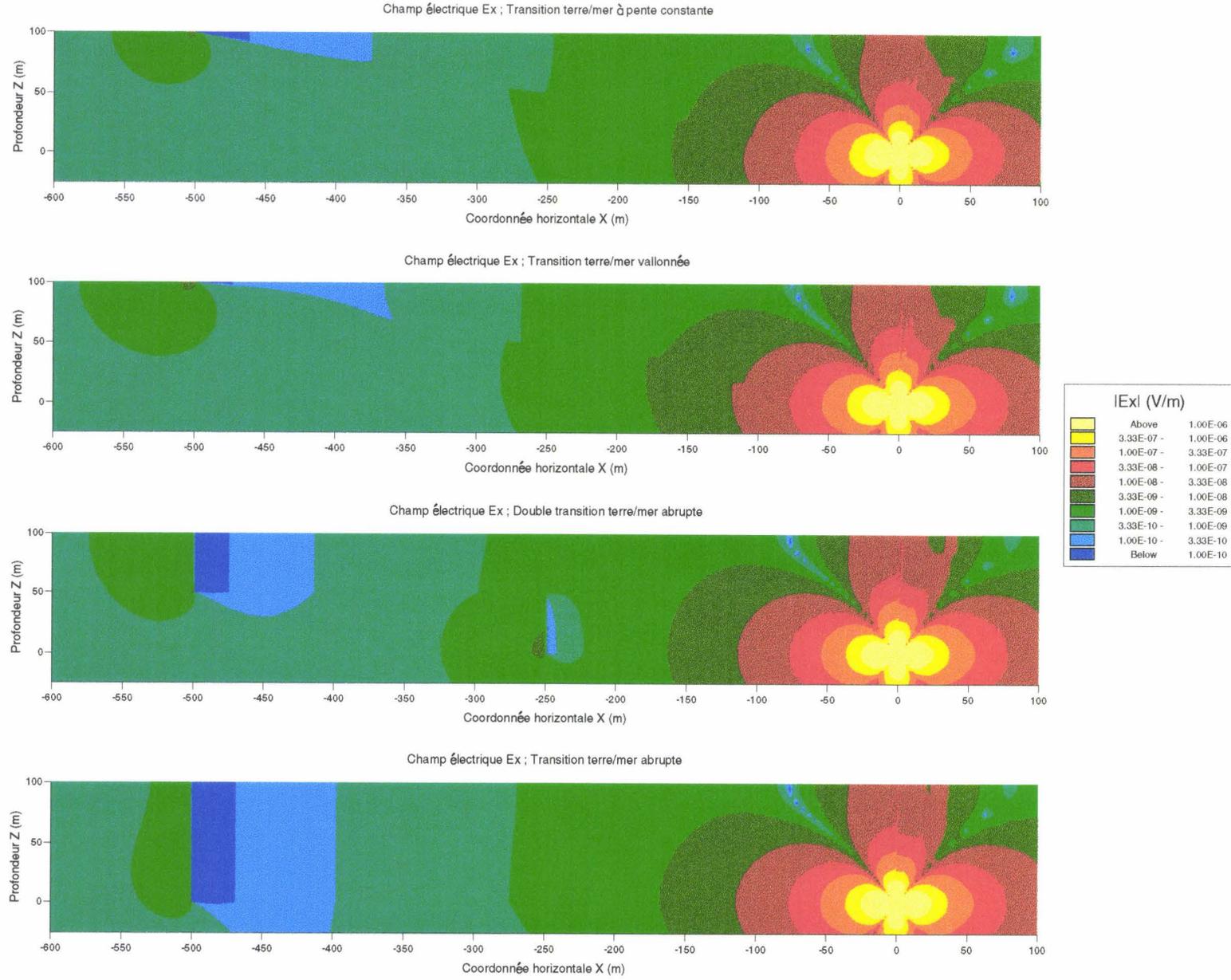
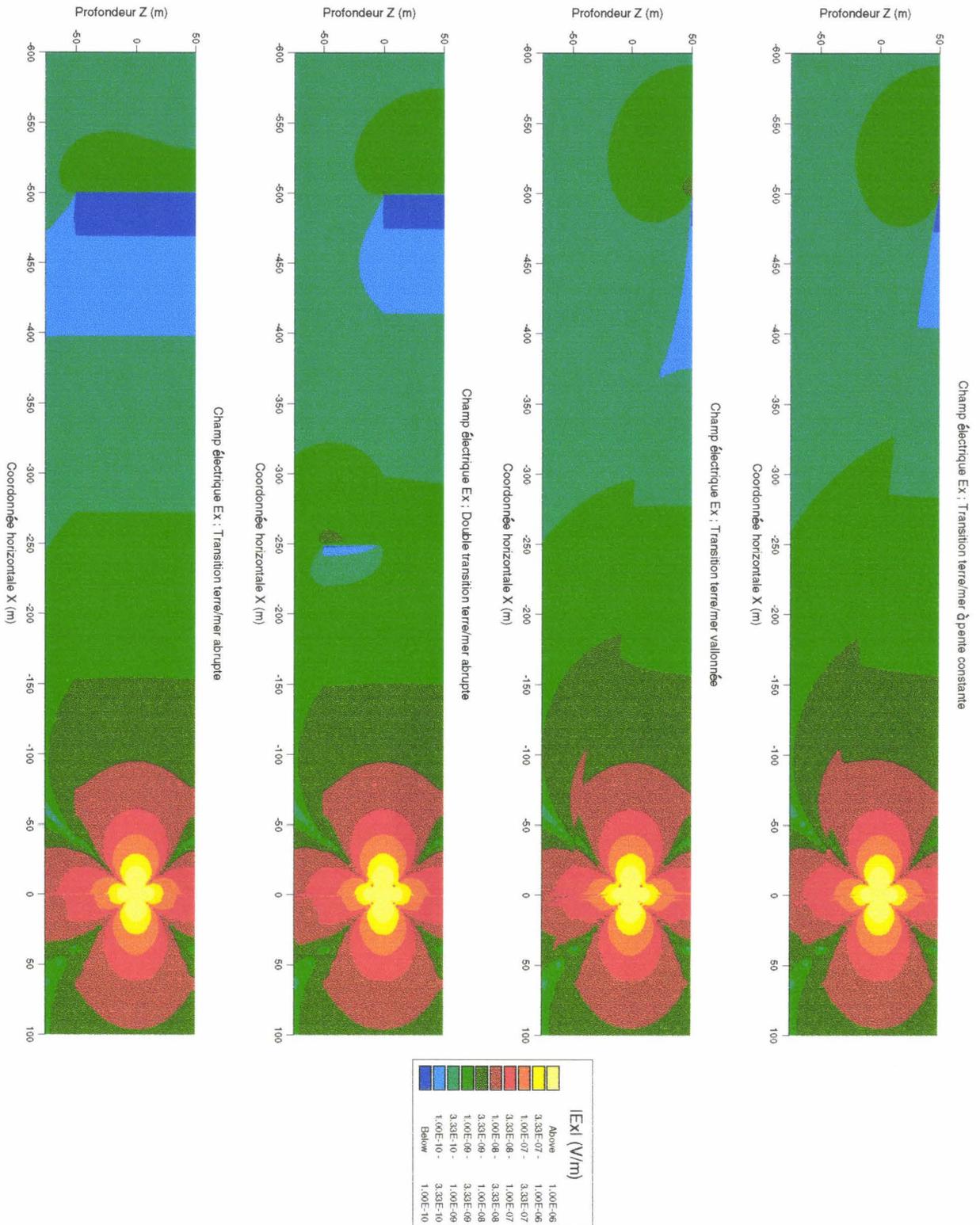


Planche (V.3): Carte de la composante horizontale de champ électrique pour un dipôle électrique horizontal au fond de la mer.



**Planche (V.4):** Carte de la composante horizontale de champ électrique pour un dipôle électrique horizontal à mi-profondeur dans la mer.

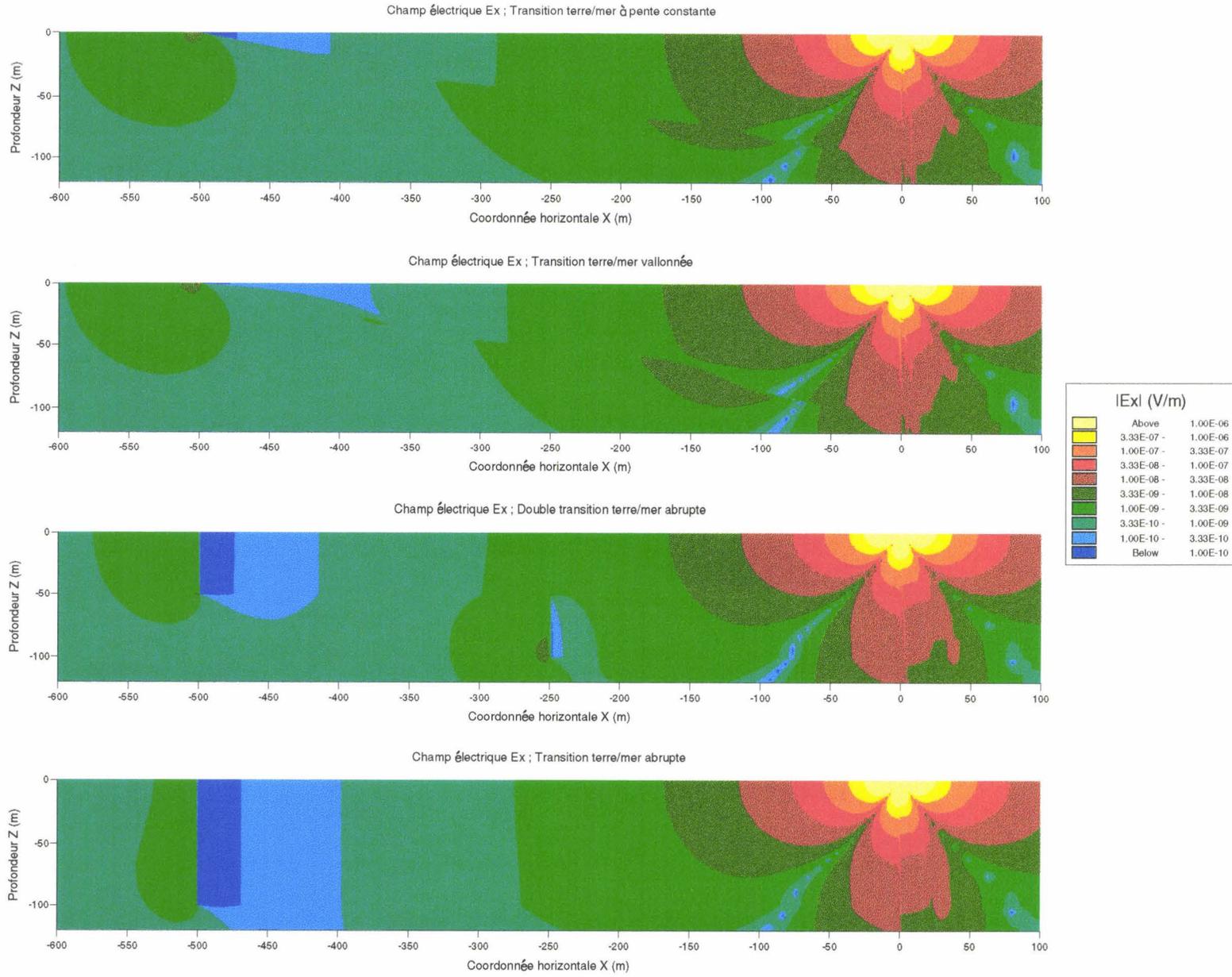


Planche (V.5): Carte de la composante horizontale de champ électrique pour un dipôle électrique horizontal à la surface de la mer.

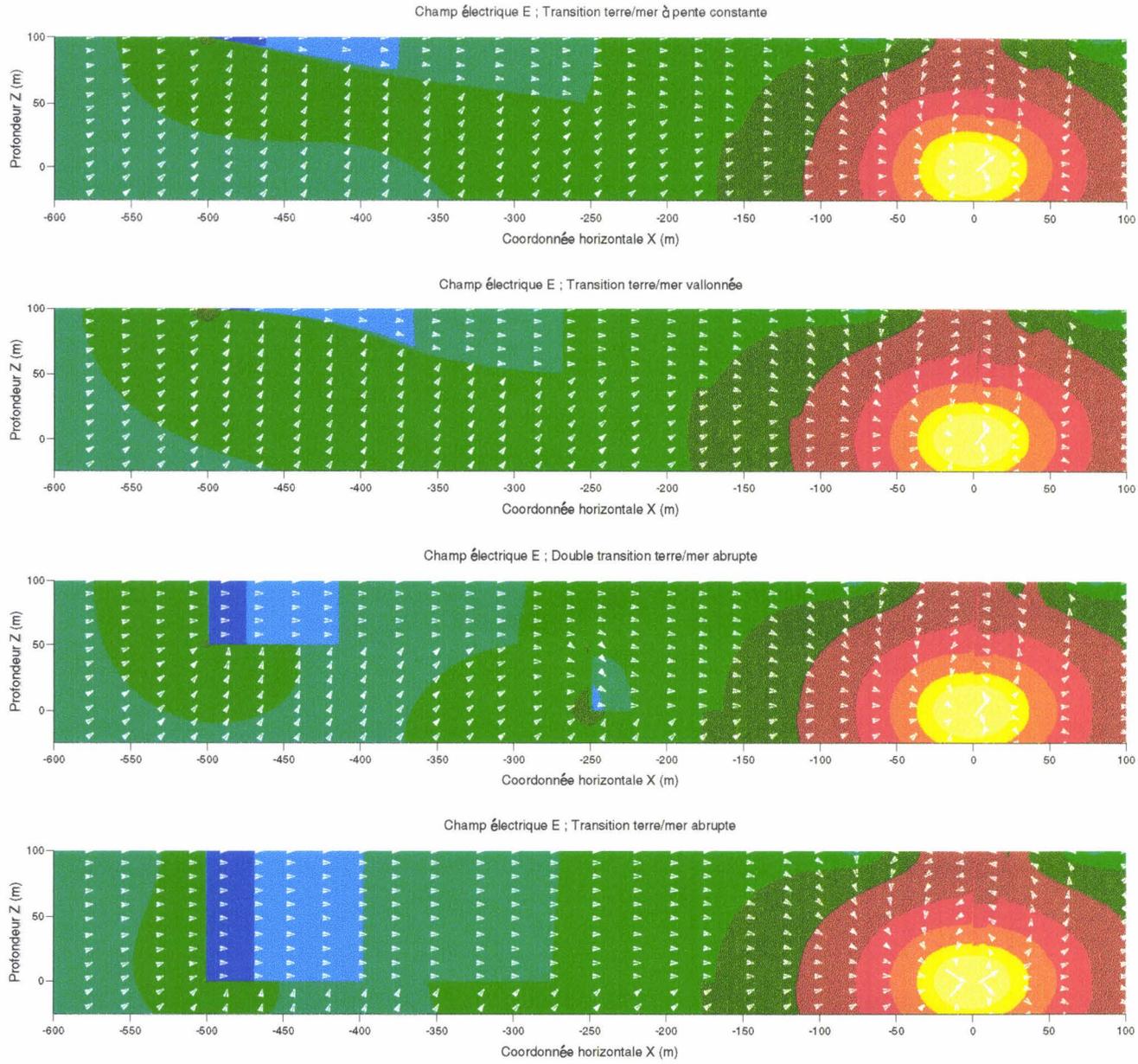


Planche (V.6): Carte vectorielle de champ électrique pour un dipôle électrique horizontale au fond de la mer.

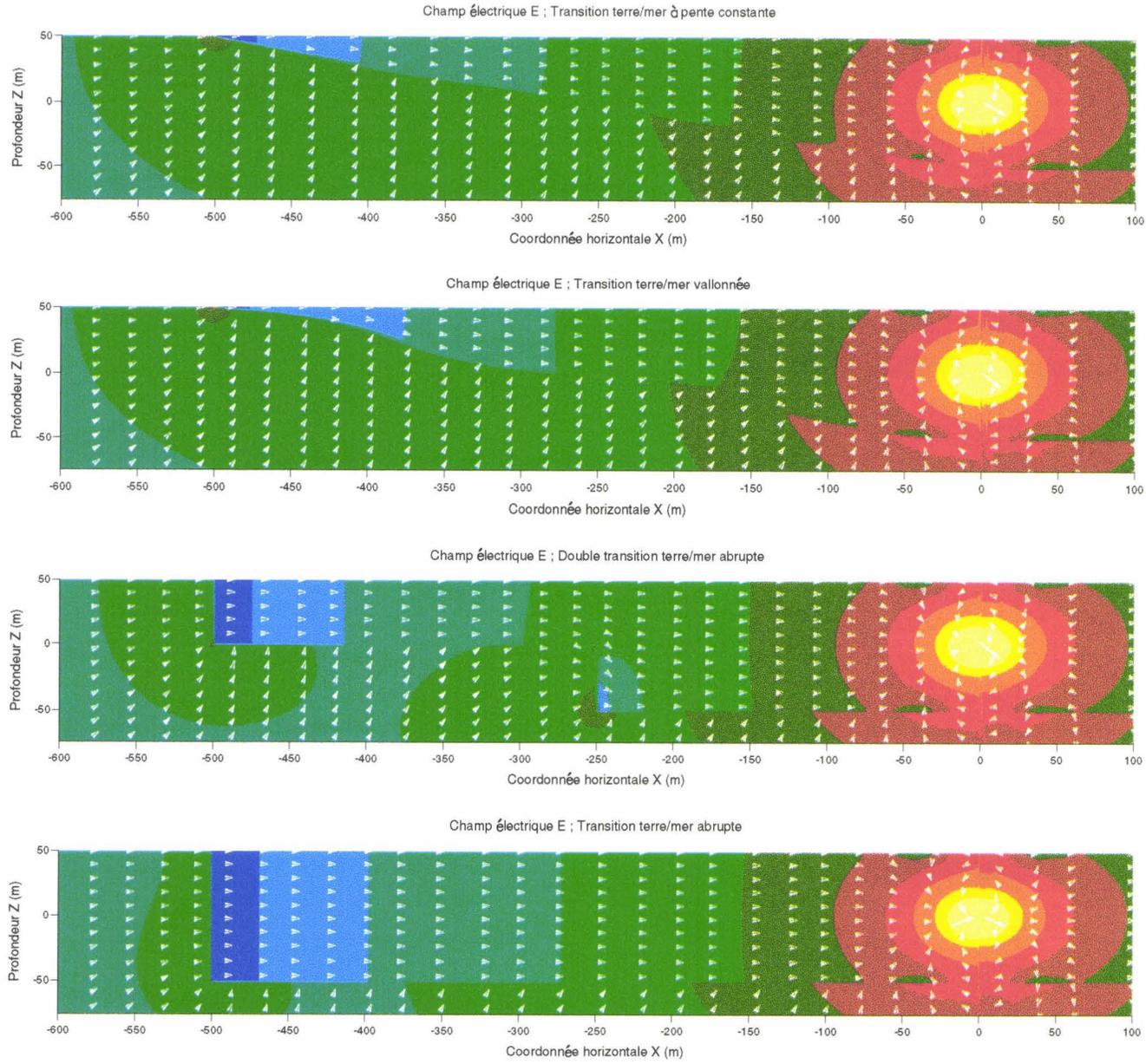


Planche (V.7): Carte vectorielle de champ électrique pour un dipôle électrique horizontale à mi-profondeur dans la mer.

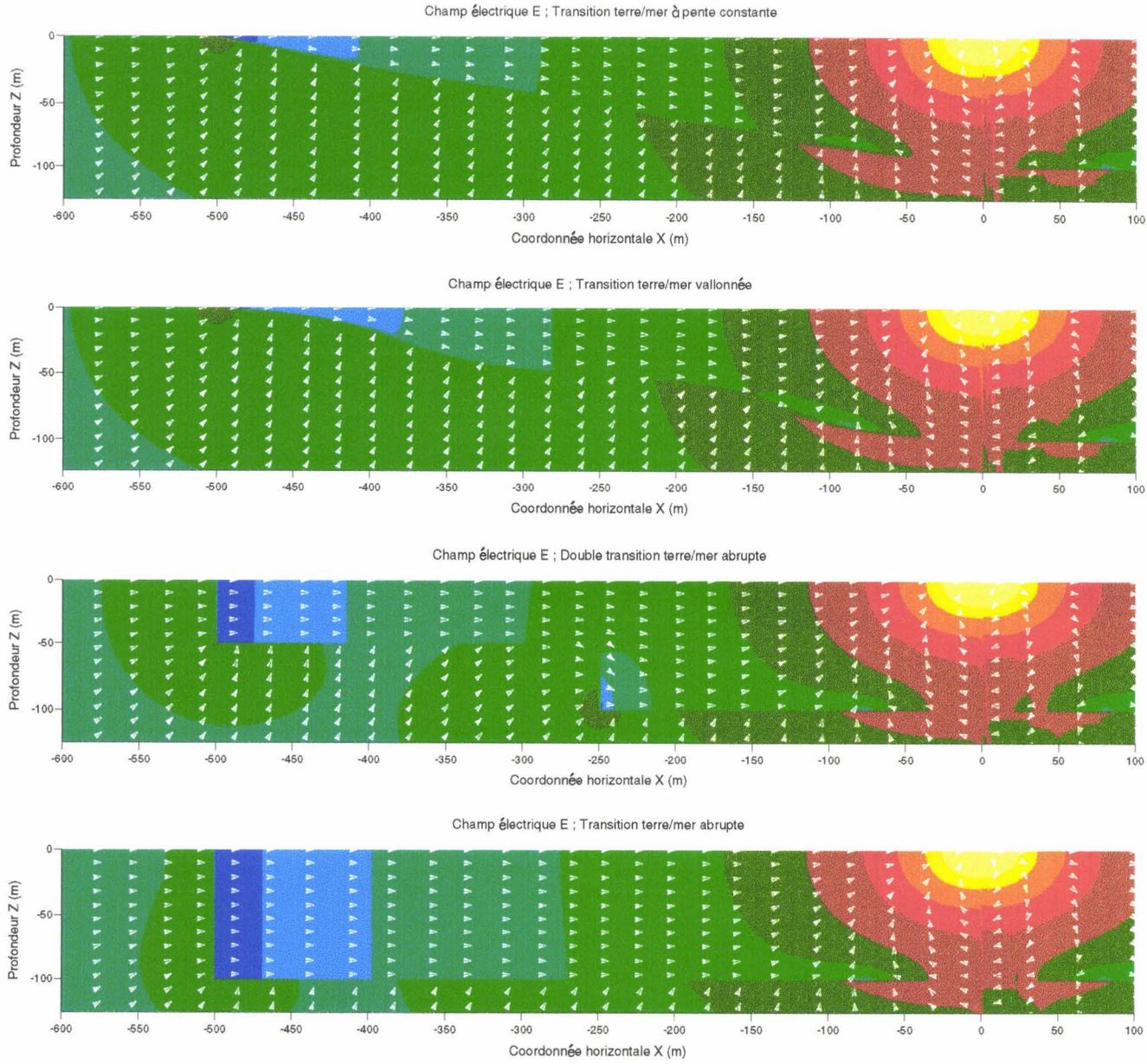


Planche (V.8): Carte vectorielle de champ électrique pour un dipôle électrique horizontale en surface.

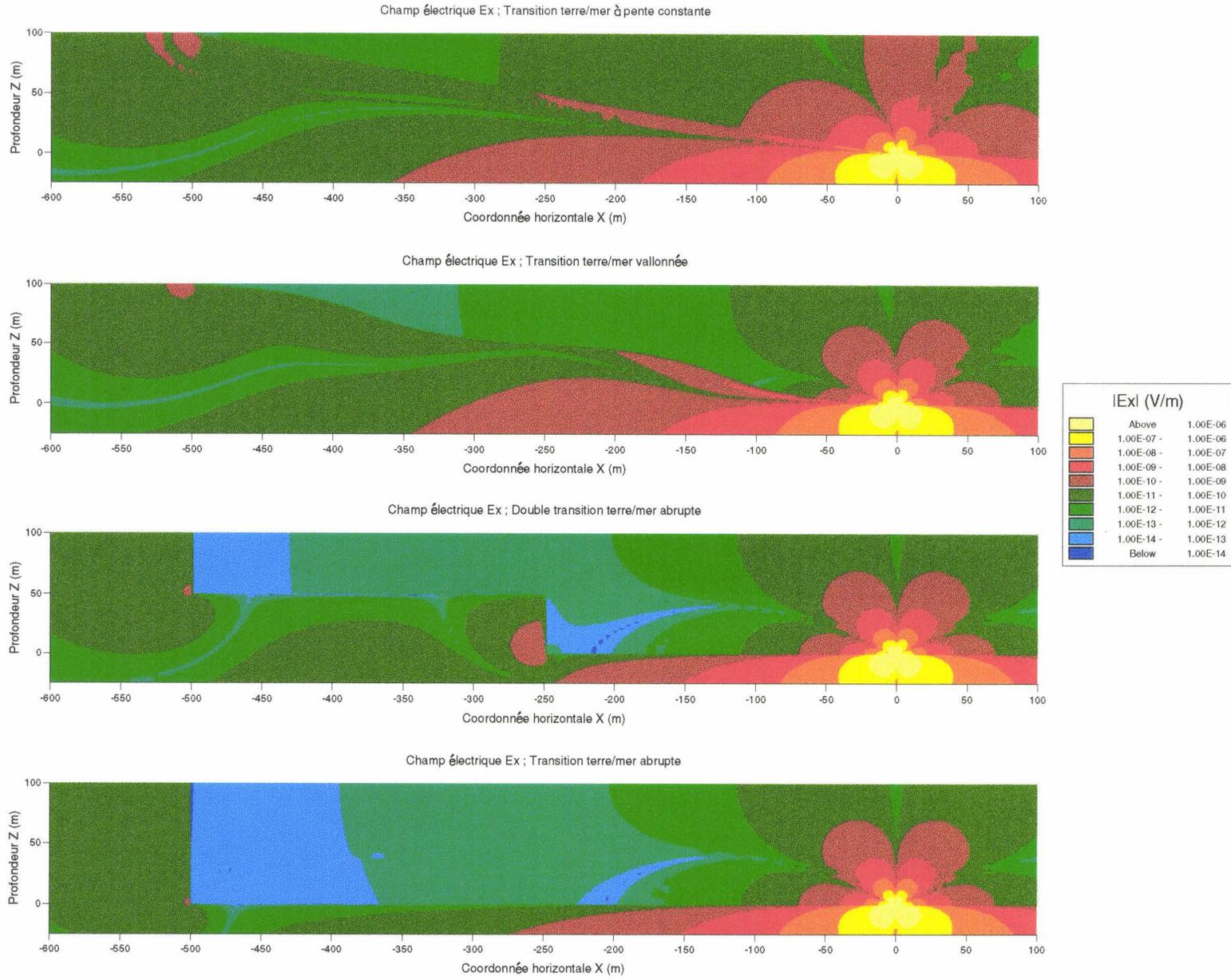


Planche (V.9): Carte de la composante horizontale de champ électrique pour un dipôle électrique verticale au fond de la mer.

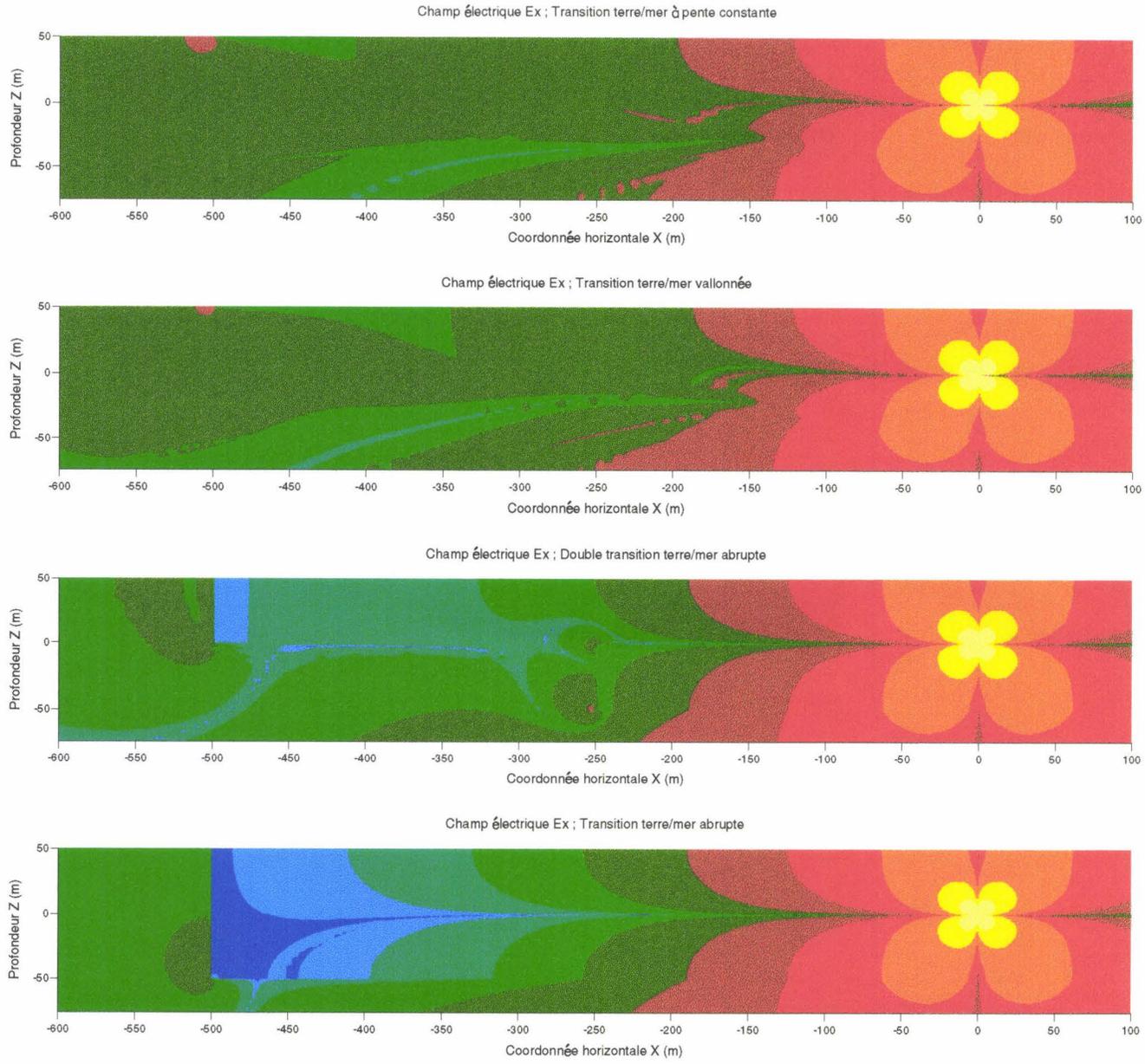


Planche (V.10): Carte de la composante horizontale de champ électrique pour un dipôle électrique verticale à mi-profondeur dans la mer.

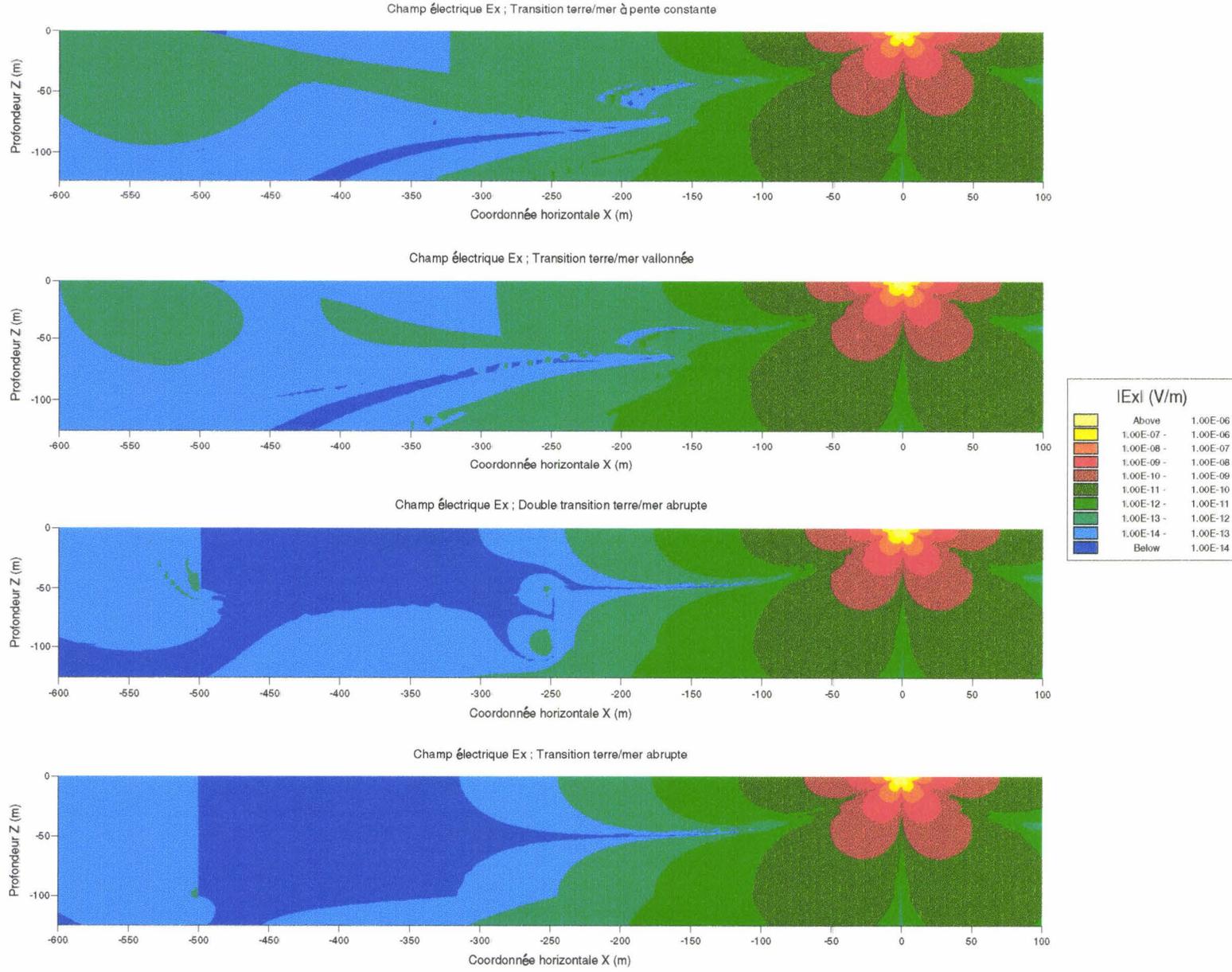


Planche (V.11): Carte de la composante horizontale de champ électrique pour un dipôle électrique verticale à la surface de la mer.

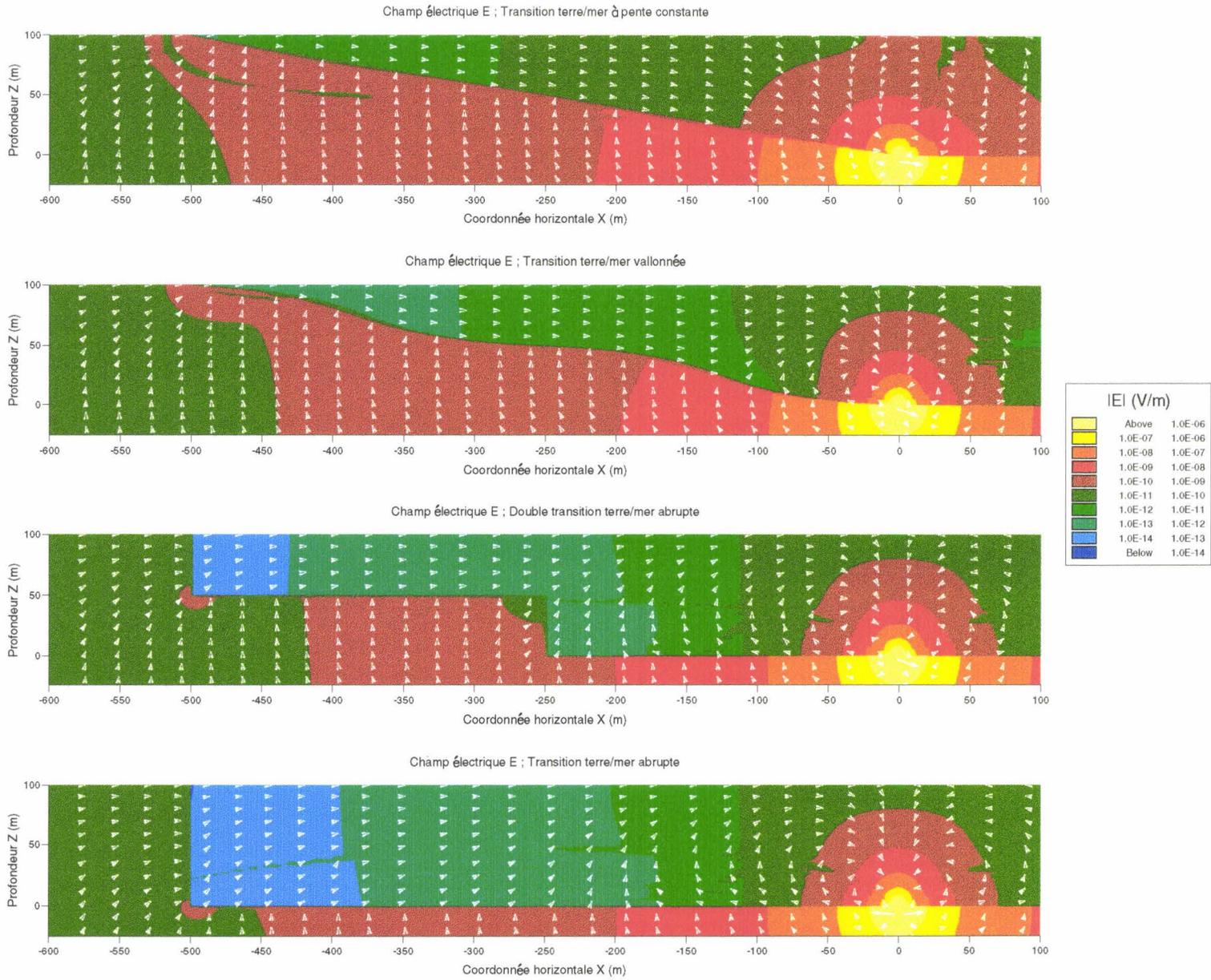


Planche (V.12): Carte vectorielle de champ électrique pour un dipôle électrique verticale au fond de la mer.

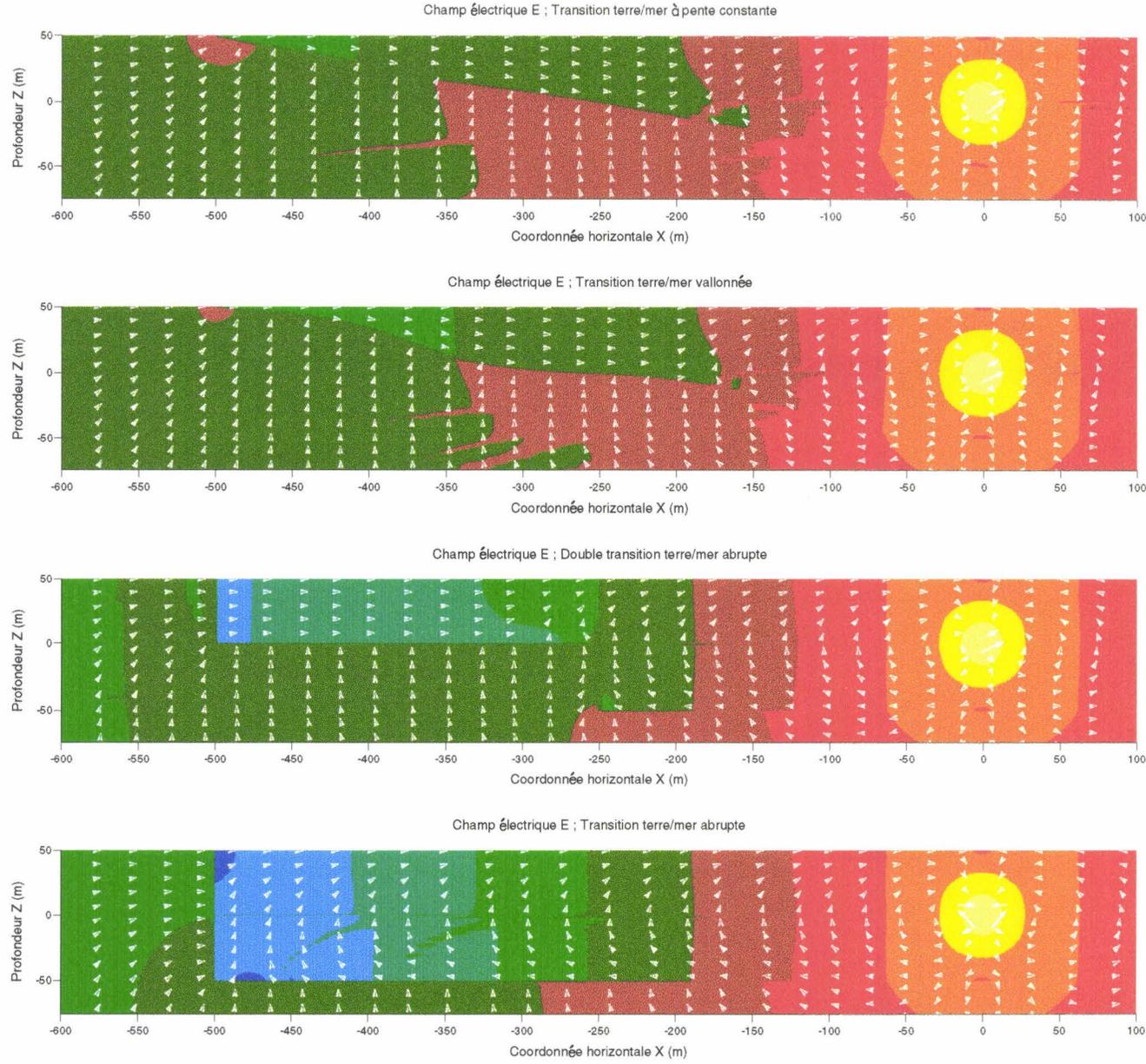


Planche (V.13): Carte vectorielle de champ électrique pour un dipôle électrique verticale à mi-profondeur dans la mer.

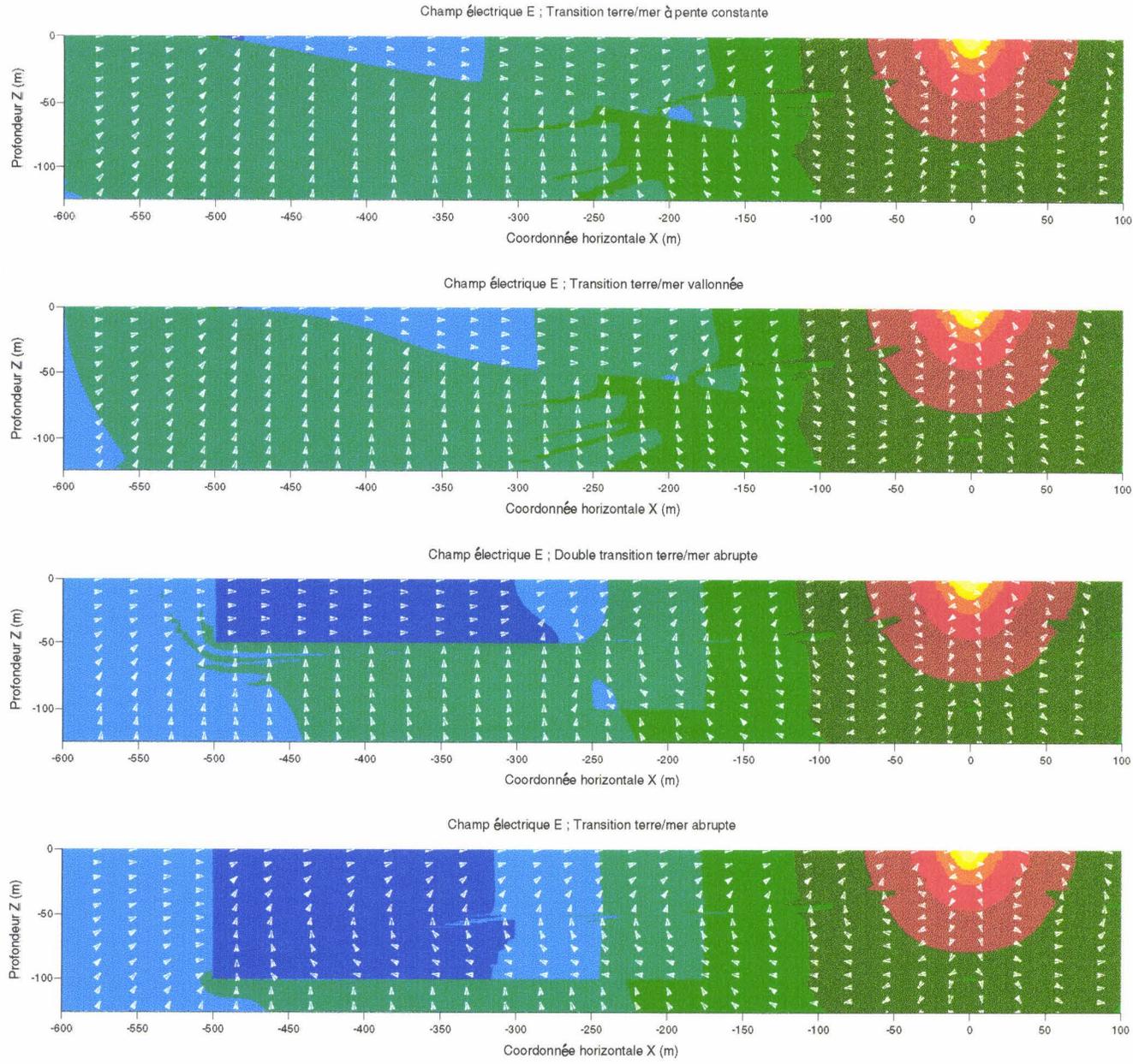


Planche (V.14): Carte vectorielle de champ électrique pour un dipôle électrique verticale en surface.

**Conclusion**

Dans ce chapitre, il est montré qu'un dipôle électrique vertical tridimensionnel à courant continu situé à proximité d'un profil côtier à pente constante rayonne comme un dipôle horizontal tridimensionnel à courant continu comme pour un dipôle électrique bidimensionnel alternatif. L'évolution vers ce résultat remarquable suivant les différents profils côtiers sous-marins est aussi similaire dans les deux types d'excitation électromagnétique. La position horizontale du dipôle est favorable à la propagation des ondes électromagnétiques dans la mer car les lignes de courant ou de champ électrique sont parallèles aux interfaces air/mer et mer/sol.

Cependant, des différences en ce qui concerne le rayonnement d'un émetteur 2D alternatif et d'un émetteur 3D à courant continu existent. Notamment dans la mer, en courant continu et pour un DEH, une zone de rayonnement en champ proche est plus réduite et une diminution de la composante horizontale de champ électrique s'effectue suivant la direction de la couche d'eau de mer quels que soient le type de relief côtier et l'immersion de la source.

La suite logique de cette étude porte sur des comparaisons entre une excitation tridimensionnelle alternative au voisinage de la côte et les sources 2 et 3D étudiées précédemment.

**VI- Modélisation d'un dipôle à courant alternatif au  
voisinage d'une transition Terre/mer.**

**Sommaire**

Introduction.....	220
VI-1.Equations de base à résoudre.....	222
<b>VI-1.1)Equations de base sous forme différentielle.....</b>	<b>222</b>
<b>VI-1.2)Equations de base sous forme intégrale.....</b>	<b>223</b>
VI-2.Cas d'une source 3D dans un milieu 2D.....	224
VI-3.Comparaison du rayonnement en milieu marin d'un dipôle électrique 3D alternatif avec celui d'un dipôle ligne source magnétique, d'une ligne source électrique et d'un dipôle 3D à courant continu .....	229
Conclusion. ....	231

## Introduction

Dans les années passées, beaucoup d'efforts ont été menés pour le développement de modèles magnétotelluriques tridimensionnels. Ce travail s'est concentré sur une approche aux équations intégrales (Raiche (1974)[88], Hohmann (1975)[89], Weidelt (1975)[90][91], Wannamaker (1984)[92][93], San Filippo et Hohmann (1985)[94], Wannamaker (1991)[95]), qui a servi de théorie de référence par la suite pour les autres méthodes. Les solutions aux équations intégrales sont très rapides en temps de calcul quand il y a seulement une anomalie de forme simple dans un milieu stratifié. Les algorithmes aux différences finies ou éléments finis (Jones et Pascoe (1972)[96], Reddy (1977)[97]) sont plus efficaces pour modéliser des géométries complexes arbitraires, mais leur utilisation n'a pas été très étendue puisqu'ils mènent à de larges systèmes d'équations qui sont toujours résolus par des techniques simples. Des avancées récentes dans les techniques de relaxation itérative (Sarkar (1991)[98]) et l'augmentation constante de la puissance des ordinateurs devraient permettre aux modèles tridimensionnels l'étude de structures terrestres de plus en plus compliquées. En développant des algorithmes pour la modélisation magnétotellurique tridimensionnelle, la motivation s'est tournée vers le désir d'être capable de modéliser des milieux complexes arbitraires, ce qui est très important quand des inversions doivent être faites. Ceci nous conduit à l'utilisation des méthodes différentielles sur les méthodes intégrales et à l'intérieur de la classe des méthodes différentielles, les différences finies sont plus simples à élaborer que les éléments finis. Les premiers algorithmes de modélisation magnétotellurique furent développés par Jones et Pascoe en 1972 [96] et Lines et Jones en 1972[28] et 1973[40]. Leurs algorithmes résolvaient l'équation de diffusion du second ordre en champ électrique sur un maillage tridimensionnel pour de simples modèles géologiques et utilisaient un schéma itératif de Gauss-Seidel ( Jones (1974)[99]). Ce travail a été modifié afin de considérer une source de champ non uniforme (Hibbs et Jones (1976)[100]). Plus tard, Zhdanov (1982)[73] a exploré l'application de conditions aux limites asymptotiques au schéma aux différences finies bien qu'aucun résultat fût présenté pour le modèle tridimensionnel. Des applications dans le domaine temporel ont été élaborées par Adhidjaja et Hohmann en 1989 [101] en développant un algorithme aux différences finies pour le calcul de la réponse temporelle électromagnétique d'une

anomalie en utilisant un schéma de Dufort-Frankel [102]. Leurs résultats se sont limités à de simples structures géologiques et ne sont pas en agrément avec les solutions aux équations intégrales. Il est possible que cela soit dû à des sources de champ électromagnétique variant trop rapidement, à des inexactitudes de grille et à une combinaison pour le terme source de calculs numériques et analytiques. Xinghua (1991) [103] a développé un nouvel algorithme tridimensionnel par différences finies qui résout directement les trois composantes de champ magnétique. Ces algorithmes tridimensionnels ont aussi été développés par Yee (1966)[104]. Quoiqu'ils ne sont pas applicables à l'induction électromagnétique dans le sol, Taflove (1988)[105] [106] et Morgan (1990) [107] ont revu la génération de courant utilisée par Yee (1966)[104] pour de plus vastes applications.

Ce chapitre présente les différentes méthodes numériques différentielles susceptibles d'être employées pour simuler le rayonnement de dipôles alternatifs 3D en milieu hétérogène. Dans une seconde partie, il détaille le modèle retenu et adapté à la transition Terre/mer. Dans une dernière partie, une comparaison des rayonnements des différents types de sources 2 et 3D, alternatives et à courant continu est effectuée.

## VI-1. Equations de base à résoudre.

Dans la méthode des différences finies, il y a deux façons de résoudre les équations d'induction électromagnétique dans le sol. La façon la plus fréquente est d'utiliser la forme différentielle des équations de Maxwell à travers une équation de base impliquant uniquement le champ électrique ou le champ magnétique. La deuxième façon est d'utiliser les équations de Maxwell sous la forme intégrale couplant le champ électrique et le champ magnétique sur les faces des parallélépipèdes définies par les mailles élémentaires du réseau.

### VI-1.1) Equations de base sous forme différentielle.

L'équation de base pour la méthode des différences finies utilisée par Lines et Jones (1973) [40] ou Jones et Vozoff (1978) [108] pour une source d'onde plane et pour une fréquence telle que les courants de déplacement peuvent être négligés, est la suivante:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (\text{VI.1})$$

$$\text{où } k^2 = -j \omega \mu_0 \sigma$$

Reddy (1977) [97] a publié des résultats de magnétotellurie tridimensionnelle basés sur une solution aux éléments finis de l'équation (VI.1). La technique Galerkin a été utilisée avec des fonctions de base et de test linéaires dans des éléments hexaédriques. Le problème de discontinuité de la composante normale de champ électrique est amoindri par le choix de transitions de conductivité progressives plutôt qu'abruptes. Le terme source se réduit alors à une charge de volume plutôt qu'à une distribution de charge de surface. Cependant, des contrastes de conductivité supérieurs à 10 provoquent encore une erreur supérieure à 10% pour trois noeuds d'espacement au niveau du contraste de conductivité.

Primore (1981) [109] présente une solution tridimensionnelle aux éléments finis par minimisation d'une fonctionnelle et en utilisant des éléments hexaédriques pour une source alternative localisée. Le système d'équations est résolu grâce à la méthode de surrelaxation successive. Les résultats discordent avec ceux donnés par les équations intégrales à partir de contrastes de conductivité supérieurs à 30 dans le cas d'une anomalie enterrée dans un sol homogène.

Zhdanov, Gobulev, Spichak et Varentsov (1982) [73] ont préféré utiliser l'équation (VI.2) pour un meilleur coût de calcul dans l'utilisation du schéma aux sept points et d'une méthode de résolution itérative. Toutefois, aucun résultat

numérique de leur modèle développé à partir de cette équation n'a été publié.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \sigma}{\sigma} \right) - j \omega \mu_0 \sigma \mathbf{E} = 0 \quad (\text{VI.2})$$

Chen et Fung [110] ont appliqué la méthode des différences finies sur l'équation de base (VI.3) impliquant uniquement le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Elle est résolue par la technique de surrelaxation avec changement de région et le schéma aux sept points.

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{\nabla \sigma}{\sigma} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - j \omega \mu_0 \sigma \mathbf{B} = 0 \quad (\text{VI.3})$$

Leurs résultats concordent avec ceux d'Hohmann (1983) [111] qui utilise la méthode des équations intégrales, de Lee (1981) [112] qui utilise une méthode hybride et Gupta (1987) [113] qui utilise une méthode hybride plus récente. L'avantage de la méthode hybride est d'économiser du temps de calcul en combinant la méthode des équations intégrales qui est plus rapide à converger en dehors de l'anomalie et une méthode des éléments finis ou des différences finies pour discrétiser l'anomalie.

### VI-1.2) Equations de base sous forme intégrale.

Mackie, Madden et Wannamaker (1993) [114] ont développé un algorithme de propagation d'impédance pour calculer la réponse magnétotellurique d'une structure tridimensionnelle enterrée dans le sol basée sur les formes intégrales des équations de Maxwell plutôt que sur une forme différentielle. Cette méthode repose sur le couplage entre la loi d'Ampère (VI.4),

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \iint \mathbf{J} \, d\mathbf{S} = \iint \sigma \mathbf{E} \, d\mathbf{S} \quad (\text{VI.4})$$

et la loi de Faraday (VI.5),

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = \iint j \mu \omega \mathbf{H} \, d\mathbf{S} \quad (\text{VI.5})$$

sur les faces plates des cellules élémentaires définies par le maillage. Ils assignent le champ magnétique tangentiel aux limites du domaine. Cette formulation n'implique pas de différentiations quoique cela mène aux mêmes équations aux différences qui seraient obtenues par les équations différentielles du premier ordre de Maxwell. Elle donne des résultats comparables avec ceux fournis par les équations intégrales de Wannamaker (1991)[95].

## VI-2. Cas d'une source 3D dans un milieu 2D.

Comme pour le cas d'une source dipolaire tridimensionnelle à courant continu dans un milieu bidimensionnel, il est possible de simuler le rayonnement d'une source tridimensionnelle alternative dans un milieu bidimensionnel afin de diminuer le temps de calcul. L'utilisation d'un modèle théorique simulant le rayonnement d'une source tridimensionnelle dans un milieu tridimensionnel nécessite un temps de calcul important et de gros problèmes de convergence peuvent survenir pour des configurations géologiques comportant des contrastes de conductivité importants et des structures trop complexes à mailler. La prise en compte de l'invariance du milieu suivant une direction tout comme la symétrie de révolution d'un problème tridimensionnel permet d'étudier des structures géologiques plus complexes. Les dimensions de mailles sont alors de plus petites dimensions pour un même nombre de noeuds utilisé dans un problème tridimensionnel avec une diminution du temps de calcul et une meilleure stabilité. La réduction d'un problème tridimensionnel à une série de problèmes bidimensionnels est accomplie par une transformée de Fourier paire (VI.6) sur les composantes de champ électrique et magnétique parallèles à l'axe d'invariance (oy).

$$\tilde{H}(x,ky,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x,y,z) e^{jk_y y} dy \quad (\text{VI.6})$$

$$H(x,y,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}(x,ky,z) e^{jk_y y} dk_y \quad (\text{VI.7})$$

Ce procédé utilisé entre autres par Stoyer (1974)[115], Lee (1978)[116], Lee et Morisson (1985)[117] et Unsworth, Travis et Chave (1993)[118], sera détaillé par la suite suivant les différentes applications possibles.

Lee (1978)[116] et Lee et Morrison (1985)[117] ont présenté une solution aux éléments finis pour le champ électrique secondaire calculé à partir de la valeur du champ primaire donnée par des simples formules analytiques du rayonnement d'un dipôle magnétique vertical et horizontal en espace libre ou en milieu stratifié. L'avantage de l'utilisation de l'espace libre sur le demi-espace est la formulation analytique du rayonnement. Cependant, le champ secondaire inconnu varie encore très rapidement au voisinage de la source, ce qui est indésirable.

Lee (1978)[116] a formulé le problème en terme de champ électrique parce qu'il avait des difficultés numériques à choisir une approche en terme de champ magnétique notamment à proximité de l'interface air-terre, où le champ

magnétique subit de rapides changements de pente. Il montra que le champ électrique avait un bon comportement en fonction du paramètre  $k_y$ . Ces valeurs numériques pour un demi-espace concordent avec des résultats analytiques pour un dipôle magnétique vertical pour lequel il n'y a pas de composante de champ électrique normale à l'interface air/terre. Cependant, sa vérification pour un dipôle magnétique horizontal n'était pas bonne en raison d'erreurs apparaissant dans le calcul numérique des dérivées du champ électrique. Le schéma aux éléments finis fait l'hypothèse de la continuité des champs mais la composante normale de champ électrique a une brusque discontinuité à la surface de la terre. Lee résolut ce problème à l'intérieur du maillage en introduisant des transitions graduelles de conductivité plutôt qu'abruptes. Il trouva un bon agrément entre ses résultats et ceux de Primore (1981)[109] pour une anomalie tridimensionnelle de faible contraste de conductivité possédant la même section transversale et excitée par un dipôle magnétique vertical.

Lee et Morrison (1985)[117] ont proposé une solution numérique pour le calcul des champs électromagnétiques rayonnés par un dipôle électrique ou magnétique dans un milieu invariant suivant une direction. Cette solution leur sembla particulièrement appropriée pour l'exploration électromagnétique du sous-sol à l'aide de dipôles car les champs tombent si rapidement depuis une source tridimensionnelle qu'une anomalie de forme allongée peut être représentée à deux dimensions. Ils utilisent la méthode des éléments finis formulée autour d'une intégrale variationnelle. Le champ électrique solution du problème est décomposé en deux termes en utilisant le théorème de superposition. Le terme primaire correspondant au champ électrique sans la présence de l'anomalie ou en milieu stratifié peut être déterminé analytiquement. Le calcul numérique porte sur le calcul du terme secondaire correspondant au champ électrique rayonné par l'anomalie. Ils obtiennent le champ magnétique avec une meilleure précision à partir d'une intégrale de Green sur les courants sources ( $J = \sigma E$ ) qu'à partir de la dérivation du champ électrique. Les limites du domaine d'étude sont placées suffisamment loin de l'inhomogénéité afin d'assurer la nullité du champ secondaire. Cependant, cette méthode intégrale pour le calcul du champ magnétique consomme beaucoup de temps de calcul et limite le modèle à de petites zones d'anomalie et détruit la flexibilité de la méthode des éléments finis.

Comme il est montré dans l'article de Stoyer et Greenfield (1976)[119], il existe une autre façon de formuler le problème d'une source tridimensionnelle dans un milieu bidimensionnel en considérant deux équations différentielles du second ordre couplées pour les composantes de champ électrique et de champ magnétique suivant l'axe d'invariance du milieu. Les avantages de cette approche

sont que le nombre d'inconnues est réduit de 3 à 2 et qu'ils sont continus aux interfaces. Alors les problèmes rencontrés par Lee à l'interface air/terre sont éliminés, et il n'est pas nécessaire de concevoir des transitions graduées aux discontinuités de conductivité, Hohmann (1988)[120]. Les autres composantes peuvent être calculées par des différentiations numériques. Dans le nouveau domaine d'étude  $(x,ky,z)$ , deux équations couplées aux dérivées partielles sont obtenues en composantes de champ électrique et magnétique parallèles à l'axe d'invariance  $(oy)$ , (VI.8).

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tilde{H}_y}{z^M} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tilde{H}_y}{z^M} \right) - j k_y \left( \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + j k_y \left( \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial z} + Y^M \tilde{H}_y = \\
 & - Y^M \tilde{M}_{Sy} + j k_y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tilde{M}_{Sx}}{z^M} \right) + j k_y \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tilde{M}_{Sz}}{z^M} \right) j k_y + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tilde{J}_{Sz}}{z^M} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tilde{J}_{Sx}}{z^M} \right)
 \end{aligned}$$

(VI.8)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tilde{E}_y}{z^E} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tilde{E}_y}{z^E} \right) - j k_y \left( \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + j k_y \left( \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial z} + Y^E \tilde{E}_y = \\
 & - \tilde{J}_{Sy} + j k_y \frac{\partial}{\partial x} (\xi \tilde{J}_{Sx}) + j k_y \frac{\partial}{\partial z} (\xi \tilde{J}_{Sz}) - \frac{\partial}{\partial x} (j \omega \mu \frac{\tilde{M}_{Sz}}{z^E}) + \frac{\partial}{\partial z} (j \omega \mu \frac{\tilde{M}_{Sx}}{z^E})
 \end{aligned}$$

(VI.8)

où  $z^M = (\sigma + j \omega \epsilon) \left( 1 - \frac{k_y^2}{k^2} \right)$  représente une impédance pour le mode TM,

$Z^E = j \omega \mu \left( 1 - \frac{k_y^2}{k^2} \right)$  représente une impédance pour le mode TE,  $Y^M = j \omega \mu$

et  $Y^E = \sigma + j \omega \epsilon$  représentent respectivement une admittance pour le mode TM et TE,  $\tilde{M}$  et  $\tilde{J}$  sont les sources de courant magnétique et électrique dans le domaine  $(0, x, ky, z)$  et  $\xi = (k_y^2 - k^2)^{-1} = (Z^M Y^M)^{-1} = (Z^E Y^E)^{-1}$  avec  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu \sigma$ , constante de propagation.

Les approximations par la méthode des différences finies donnent pour chaque noeud du maillage  $i$  et ses quatre voisins proches, les équations couplées suivantes:

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{\tilde{H}_{y0} - \tilde{H}_{yi}}{Z_i^M} + \frac{\tilde{E}_{yi} - \tilde{E}_{y0}}{C_i} \right) + Y_0^M \tilde{H}_{y0} = S_0^M \quad (VI.9)$$

$$\sum_{i=1}^4 \left( \frac{\tilde{E}_{y0} - \tilde{E}_{yi}}{Z_i^E} + \frac{\tilde{H}_{yi} - \tilde{H}_{y0}}{C_i} \right) + Y_0^E \tilde{E}_{y0} = S_0^E \quad (VI.10)$$

où  $Z_i$  et  $Y_0$  représentent des impédances et des admittances localisées,  $C_i$  représente un terme de couplage entre les modes TE et TM et  $S_0$  représente les termes sources dus à des dipôles magnétiques ou électriques orientés suivant les trois directions de l'espace.

Stoyer (1974) [115] montra que 12 à 16 valeurs de  $ky$  positives et espacées suivant une progression logarithmique pouvaient déjà donner des résultats satisfaisants. Comme Swift (1971) [121], Stoyer utilisa des conditions aux limites d'onde plane, d'impédance terminale. Leur méthode de résolution est directe par blocs tridiagonaux comme celle utilisée par Greenfield (1965) [52]. Les composantes de champ électrique et magnétique non parallèles à la direction de non invariance du terrain sont dans un premier temps calculées dans le domaine  $(x, ky, z)$  par les relations ci-dessous puis une transformation de Fourier inverse permet de récupérer les différentes composantes de champ électromagnétique dans l'espace  $(oxyz)$ .

$$\tilde{H}_x = - \frac{1}{\left(1 - \frac{k_y^2}{k^2}\right)} \frac{\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z}}{j \omega \mu} - \frac{j k_y}{(k_y^2 - k^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} \quad (\text{VI.11})$$

$$\tilde{H}_z = \frac{1}{\left(1 - \frac{k_y^2}{k^2}\right)} \frac{\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y}}{j \omega \mu} - \frac{j k_y}{(k_y^2 - k^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} \quad (\text{VI.12})$$

$$\tilde{E}_x = \frac{1}{\left(1 - \frac{k_y^2}{k^2}\right)} \frac{\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z}}{\sigma + j \omega \varepsilon} - \frac{j k_y}{(k_y^2 - k^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \quad (\text{VI.13})$$

$$\tilde{E}_z = - \frac{1}{\left(1 - \frac{k_y^2}{k^2}\right)} \frac{\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y}}{\sigma + j \omega \varepsilon} - \frac{j k_y}{(k_y^2 - k^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \quad (\text{VI.14})$$

A l'issue de cette ultime étude bibliographique, nous sommes en mesure de proposer un ensemble de conditions qui, semble-t-il, doit convenir au mieux à la réalisation d'un modèle théorique de rayonnement d'un dipôle alternatif tridimensionnel situé dans un milieu bidimensionnel. Dans le cas de la transition Terre/mer, cette approche doit être modifiée dû au problème des conditions aux limites. La frontière océan/continent terrestre ne peut être considérée comme une anomalie localisée dans un milieu homogène et cette difficulté est accrue dans le cas d'une source tridimensionnelle alternative immergée dans la mer. L'étude a traité uniquement les cas de dipôles électriques et magnétiques parallèles à la ligne de côte afin d'éviter les distributions de Dirac qui apparaissent au niveau des sources de courant non parallèles à la ligne de côte. Les conditions aux limites utilisées sont celles de Cauchy et de Neumann avec une décroissance en  $1/r$  ou

nulle des champs. Les composantes de champ magnétique et électrique dans le plan perpendiculaire au dipôle peuvent être déduites directement des composantes de champ magnétique et électrique parallèles à l'axe d'invariance ( $oy$ ) comme pour un modèle à deux dimensions à cause de la symétrie du milieu et de la source par rapport à ce plan. Les premiers résultats ne donnent pas entièrement satisfaction surtout dans le cas du dipôle magnétique parallèle à la ligne de côte pour lequel les composantes de champ électrique sont comprises dans un plan perpendiculaire aux interfaces des différents milieux et pour des fréquences supérieures à 1 Hz. Pour Hohmann (1988)[120], il serait avantageux de résoudre le champ secondaire car les termes sources dans les équations de champ total impliquent des dérivées de distributions de Dirac et il serait également intéressant de formuler le problème en terme de champ magnétique ou en terme de potentiel vecteur et de potentiel scalaire.

### VI-3. Comparaison du rayonnement en milieu marin d'un dipôle électrique 3D alternatif avec celui d'un dipôle ligne source magnétique, d'une ligne source électrique et d'un dipôle 3D à courant continu.

Comme il est précisé dans les chapitres III et IV, le rayonnement d'une ligne source électrique ou d'un dipôle électrique 2D peut être comparé au rayonnement d'un long dipôle électrique ou d'une série de dipôles électriques 3D alignés et parallèles entre eux. En champ lointain, quelque soit le type de source alternative, la décroissance des champs en milieu conducteur homogène s'effectue exponentiellement suivant la valeur de la profondeur de pénétration du milieu considéré. Par contre, le rayonnement subit une plus forte atténuation en champ proche. Il serait donc intéressant de quantifier l'importance de la zone de champ proche des différents types de source simulée. Pour cela, une comparaison de la composante de champ électrique colinéaire à la source donnée par les différentes sources est effectuée en milieu homogène marin de conductivité égale à 4 S/m et pour une fréquence de 1 Hz. La profondeur de pénétration correspondante est égale à 250 m. La figure (VI.1) rassemble les différentes sources simulées (ligne source électrique, dipôle électrique 2D et dipôle électrique 3D alternatif et à courant continu) avec leurs caractéristiques respectives. Dans le cas d'un dipôle électrique 3D alternatif, la formule relative à la composante verticale de champ électrique  $E_z$  dans les expressions (III.15) donnée au troisième chapitre est utilisée pour calculer la valeur de la composante de champ électrique colinéaire au dipôle. Dans les autres cas, cette valeur est calculée par les différents modèles numériques mis au point dans les différents chapitres. Dans le cas du dipôle ligne

source magnétique, la valeur du courant magnétique est toujours fixée à 1 H.A.rad/s.

Sur la planche (VI.1), le graphique supérieur représente les variations de la composante de champ électrique issue d'un dipôle 3D en courant alternatif et d'un dipôle électrique 2D alternatif (ligne source électrique et dipôle ligne source magnétique). Les différences sur la décroissance des champs sont constatées dans la zone de champ proche où la composante de champ électrique relative au dipôle électrique 3D alternatif subit la plus forte atténuation. La dimension de la zone de champ proche est sensiblement la même pour le dipôle électrique 3D alternatif et le dipôle ligne source magnétique et elle peut être estimée de l'ordre de la moitié de la valeur de profondeur de pénétration (125 m). Elle est quasiment inexistante dans le cas de la ligne source électrique. En conclusion, l'approximation du rayonnement d'un dipôle électrique 3D alternatif par un dipôle ligne source magnétique est meilleure que par une ligne source électrique.

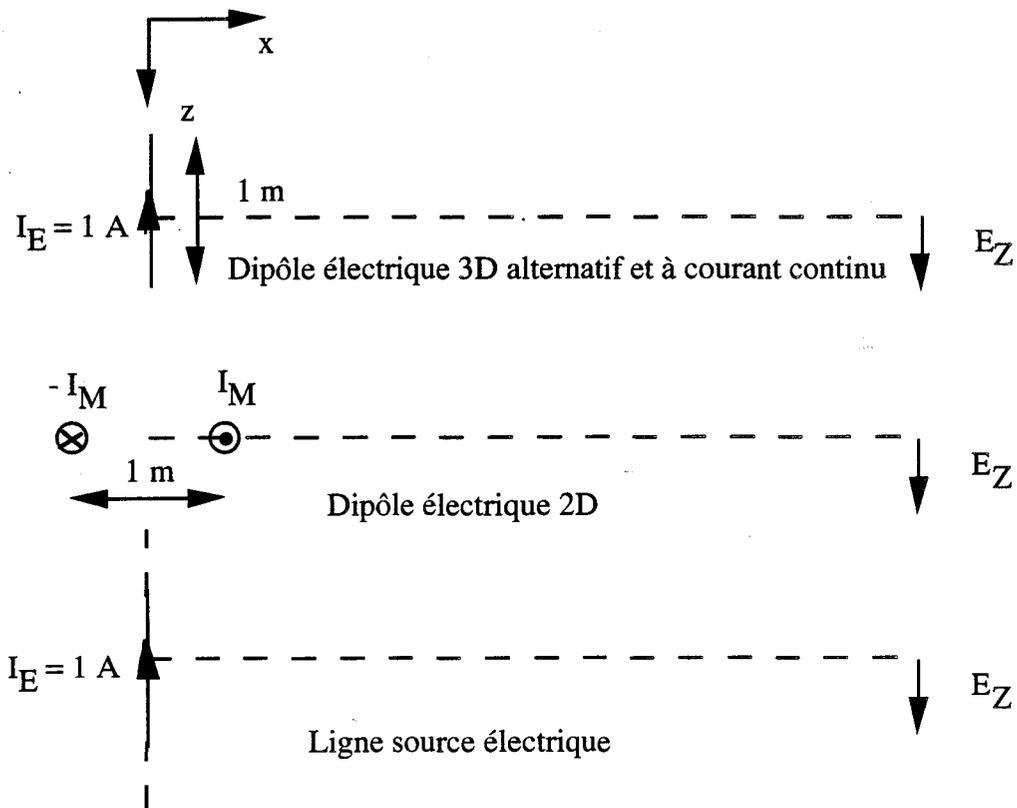


Figure (VI.1): Caractéristiques des dipôles électriques 2 et 3D alternatifs et à courant continu.

Le graphique inférieur de la planche (VI.1) représente les variations de la composante de champ électrique en milieu marin issue d'un dipôle 3D en courant alternatif pour 1 Hz et à courant continu. Elle fait apparaître la concordance des

valeurs de champ électrique issue d'un dipôle électrique 3D à courant continu et alternatif en champ proche (125 m) et une différence de la décroissance des champs dans la zone de champ lointain où la décroissance en courant alternatif dépend de la valeur de la profondeur de pénétration.

En conclusion, ce chapitre n'est qu'une étude préliminaire de la propagation des ondes électromagnétiques issues d'une source 3D alternative à proximité d'une transition Terre/mer et elle mérite d'être poursuivie dans le futur.

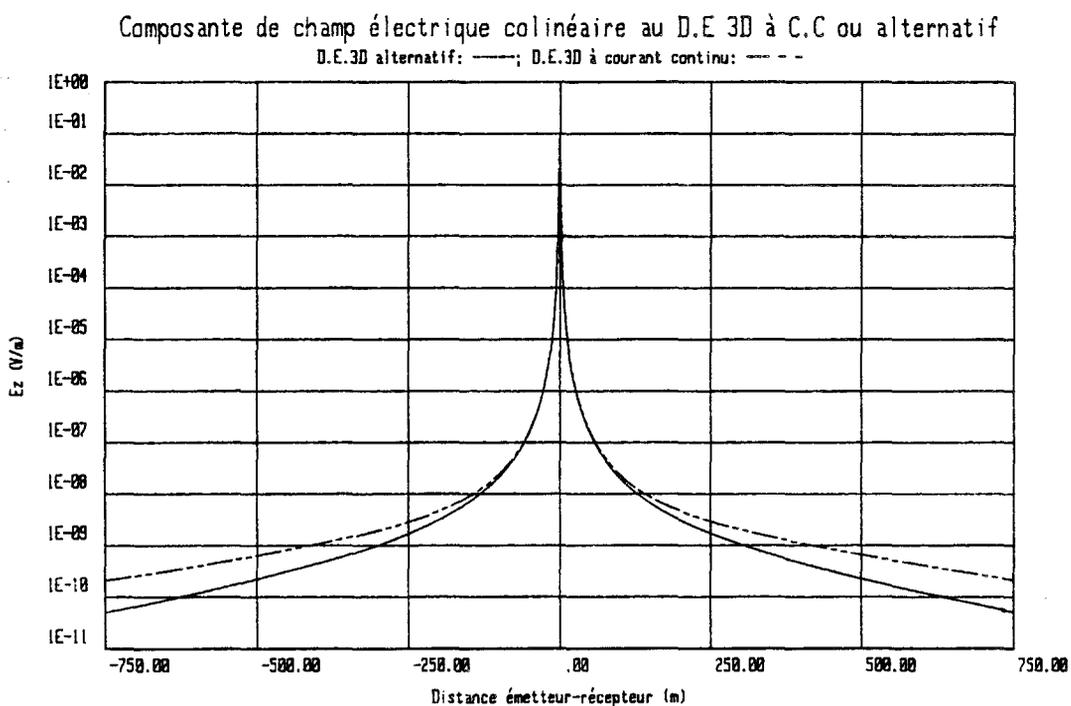
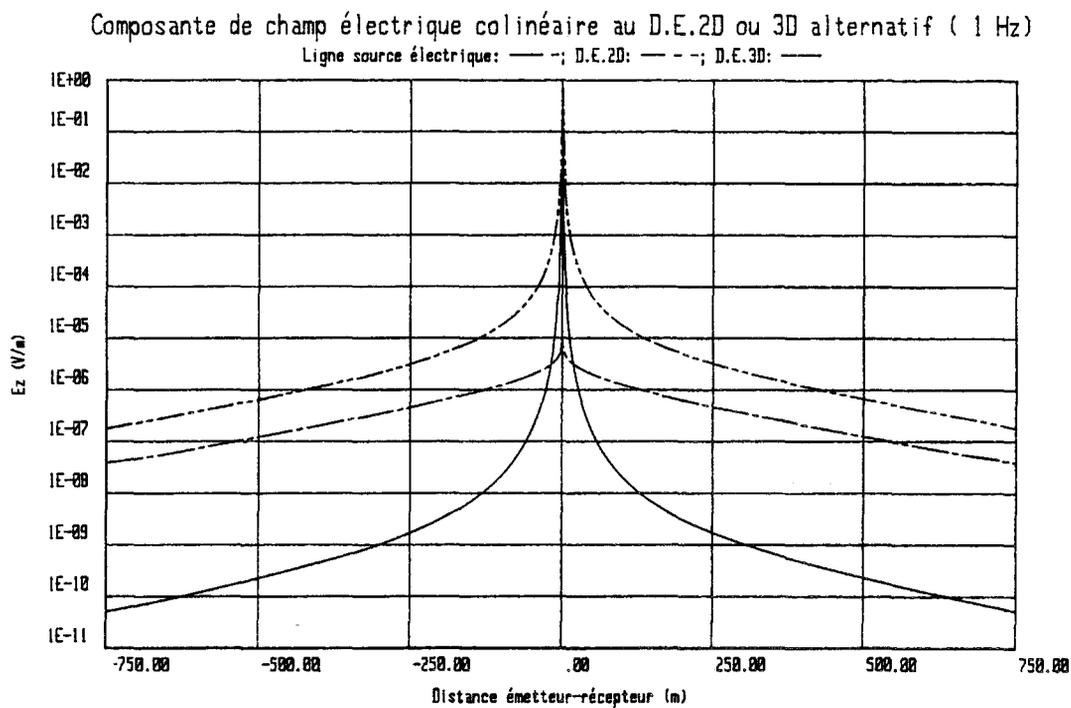


Planche (VI.1): Comparaison de la composante de champ électrique colinéaire aux dipôles électriques 2 et 3D, alternatif et à courant continu.

## **Conclusion générale**

Le développement de modèles théoriques basés sur la méthode des différences finies a permis de montrer qu'il était possible de simuler le rayonnement d'une onde plane, d'une ligne source alternative, d'un dipôle électrique bidimensionnel alternatif en très basses fréquences et d'un dipôle électrique à courant continu à proximité d'une transition Terre/mer ayant un profil côtier abrupt, à pente constante (20%), vallonné et à double transition abrupte.

Cependant, l'étude bibliographique a révélée à priori que les modèles théoriques n'ont été appliqués qu'à des transitions Terre/mer ayant une structure géologique relativement simple. La seule méthode numérique appliquée au cas d'une transition Terre/mer abrupte et illuminée par une onde plane TE pour des signaux de 1, 10 et 30 minutes de période fût élaborée par Lines et Jones en 1972 et 1973. Pour cette raison, ces travaux constituent une approche scientifique originale dans le domaine de la modélisation de vibrations électromagnétiques à très basses fréquences au voisinage des zones côtières.

Dans toute l'étude, la transition Terre/mer a été considérée comme invariante suivant la ligne de côte pour plusieurs raisons. La première est que les caractéristiques de la propagation des ondes très basses fréquences (0,1 à 100 Hz) correspondant à des longueurs d'onde très importantes dans l'air pouvant dépasser la circonférence de la Terre et à des longueurs d'onde dans le sol et dans l'eau de mer très inférieures nous limitent à l'étude d'une zone côtière peu étendue variant sur une distance horizontale de 500 mètres. La deuxième raison est que des problèmes numériques surviennent dans les modèles tridimensionnels contenant des transitions de conductivité élevée. Une troisième raison est que cette structure géologique comprenant une anomalie de contraste de conductivité très important et s'étendant jusqu'aux limites du domaine ne peut pas être prise en compte dans un modèle classique à deux ou à trois dimensions mais nécessite une méthode de résolution et des conditions aux limites bien spécifiques (Ranganayaki et Madden (1980) et Lines et Jones (1972) et (1973)).

Les phénomènes de propagation étant complexes au voisinage de la transition Terre/mer illuminée par les différents sources étudiées, il a été nécessaire de représenter des cartes vectorielles du vecteur de Poynting et du champ électrique afin de faire apparaître très clairement les caractéristiques de la propagation des ondes très basses fréquences dans la mer à proximité de la ligne de côte. L'étude suivant les différents types de source a permis de valider les différents modèles élaborés et de dresser les caractéristiques de propagation des

ondes électromagnétiques au voisinage d'une transition côtière Terre/mer.

Dans le cas de l'onde plane en mode TM correspondant au rayonnement d'un émetteur éloigné situé dans la cavité Terre/ionosphère, la couche d'eau de mer est contournée par l'onde incidente à partir de la ligne de côte via le sous-sol marin et l'air. Dans la mer, on récupère une onde se propageant verticalement issue de l'interface air/mer pour les fréquences inférieures à 100 Hz avec des valeurs de champ électrique homogène et une onde issue des interfaces air/mer et Terre/mer pour 100 Hz. Ceci peut être expliqué par le fait que pour une fréquence correspondant à une valeur de profondeur de pénétration dans la mer inférieure à l'épaisseur de la couche d'eau de mer, le champ électrique est suffisamment atténué dans l'eau de mer depuis la surface pour que l'onde se propageant par le sol sous la couche d'eau de mer et subissant une moins forte atténuation donne naissance à un champ électrique important au fond de la mer.

Comme Fisher (1979) l'avait signalé pour une illumination en onde plane, les effets de la transition Terre/mer sur la propagation des ondes électromagnétiques issues d'une ligne source se font davantage ressentir pour le mode TM que pour le mode TE. Notamment, il est apparu des oppositions dans le comportement des composantes de champ électromagnétique qui caractérisent les modes TM et TE. Par exemple, pour le mode TE, le flux de puissance prend en tenaille la couche d'eau de mer quelle que soit l'immersion de la ligne source électrique. Par contre, pour une ligne source magnétique située à la surface où au-dessus de la mer, la mer se comporte comme un milieu parfaitement conducteur.

De même, les directions des lignes de niveau des composantes de champ dans la mer et à proximité des interfaces air/mer et mer/sol sont inversées d'un mode à l'autre. Le tableau ci-dessous résume la direction des lignes de niveau des composantes de champ dans la mer au niveau des différentes interfaces.

<u>Mode TM</u>	<u>Mode TE</u>
Hy: lignes de niveau horizontales	Ey: lignes de niveau verticales
Ex: "                    verticales	Hx: "                    horizontales
Ez: "                    horizontales	Hz: "                    verticales

Dans le cas de la ligne source magnétique, du dipôle électrique bidimensionnel immergés alternatifs dans la gamme des très basses fréquences ou du dipôle électrique à courant continu, deux zones distinctes du rayonnement dans la mer ont été mises en évidence. La première zone de rayonnement appelée en champ proche est caractérisée par un champ électrique important comme en milieu homogène et la deuxième zone de rayonnement appelée en champ lointain

est caractérisée par une composante horizontale de champ électrique prépondérante. Le chemin suivi par le vecteur de Poynting depuis la source montre que le champ électrique en zone de champ lointain dans la mer est issu non pas directement de la source par réflexion sur les interfaces air/mer et mer/sol mais indirectement de la puissance transitant par le sol puis remontant à la surface de la mer afin d'assurer le bouclage des lignes de courant électrique autour de la source située dans la mer.

L'étude suivant l'orientation du dipôle électrique a permis de montrer que la position horizontale est la plus efficace pour obtenir un maximum de champ électrique en champ lointain dans la mer et à proximité de la ligne de côte. Ceci peut s'expliquer de deux manières. La première est que le champ électrique en champ lointain étant dû à la puissance transitant par le sous-sol, la position horizontale du dipôle qui canalise la puissance vers l'interface mer/sol favorise le passage de la puissance rayonnée dans le sol. La deuxième explication vient du fait que les lignes de courant ou de champ électrique au voisinage du dipôle horizontal concordent avec la direction de la couche d'eau de mer.

L'étude de l'influence du profil côtier sous-marin a été particulièrement intéressante puisqu'elle a permis de mettre en évidence des différences notables. Par exemple, la composante horizontale de champ électrique qui est prépondérante dans la mer à proximité de la ligne de côte est augmentée dans le cas d'une transition Terre/mer non abrupte. L'épaisseur de la couche d'eau de mer se rétrécissant à proximité de la ligne de côte, les champs électromagnétiques sont moins atténués dans l'eau de mer.

L'orientation des dipôles électriques bidimensionnels alternatifs et à courant continu par rapport aux différents profils côtiers est très importante car dans les deux cas, un dipôle vertical placé au fond de la mer et à proximité d'un profil côtier à pente constante rayonne comme un dipôle électrique horizontal. Ceci permet de relier le rayonnement d'un dipôle électrique bidimensionnel à très basse fréquence au rayonnement d'un dipôle tridimensionnel à courant continu. L'évolution vers ce résultat remarquable suivant les différents profils côtiers sous-marins est aussi similaire dans les deux types d'excitation électromagnétique. Une application directe de cette constatation est la détermination du relief sous-marin à partir de la mesure de la composante horizontale de champ électrique provenant d'un simple dipôle électrique vertical immergé à proximité du relief sous-marin à déterminer.

L'étude fréquentielle a révélé que les cartes de champ de la composante horizontale de champ électrique sont identiques pour 0.1 et 1 Hz et deviennent plus homogènes pour 10 Hz par la quasi-disparition de la zone de minimum de la

composante horizontale de champ électrique entre la zone de champ lointain et la zone de champ proche. Une plus forte atténuation des champs apparaît seulement à 100 Hz dans la mer car la profondeur de pénétration correspondante est égale à 25 mètres ce qui est nettement inférieure à l'épaisseur de la couche d'eau de mer (100 mètres) prise en compte.

Cependant, des différences existent en ce qui concerne le rayonnement d'un émetteur 2D alternatif et d'un émetteur 3D à courant continu. Notamment, en courant continu et pour un DEH, on a constaté dans la mer une zone de rayonnement en champ proche plus réduite et une diminution de la composante horizontale de champ électrique suivant la direction de la couche d'eau de mer quels que soient le type de relief côtier et l'immersion de la source.

La suite logique de cette étude pourrait porter sur un modèle comportant une source alternative tridimensionnelle dans un milieu à deux dimensions puisque le modèle concernant le rayonnement d'un dipôle à courant continu ne pose pas de gros problèmes numériques. L'interface air/mer ou air/sol coïncidant toujours avec la direction verticale du vecteur de Poynting, vérifie que l'air est un milieu parfaitement réflecteur. Ceci concorde avec la simple et exacte condition de Neumann en surface d'un milieu conducteur pour le modèle à courant continu et pourrait servir de base à l'étude d'un modèle théorique dans lequel une condition aux limites en courant alternatif est fixée à la surface de la mer et du sol.

**Références bibliographiques**

**[1] Southwell R.V**

Departement of Earth and Planetary Sciences, Massachusetts of Technology, Cambridge.

"Relaxation methods in theoretical physics" London, Oxford University Press, 1946.

**[2] Wait J.R**

"Wave propagation around a curved boundary which contains an obstacle" Canad. J. Phys., vol. 40, pp. 1010-1016, 1961.

**[3] Tesla N**

"The transmission of electric energy without wires" The Electrical World and Engineers, 5 March 1904.

"Art of transmitting electrical energy through the natural mediums" Patent 787-412, 18 April 1905.

**[4] Chu T.S**

"The radiation of ELF waves" IEEE Transactions on Communications, vol. 22, n°4, April 1974.

**[5] Field E.C and Kies L.R**

**Bannister P.R and Ingram R.F**

**Hopkins W.D and Roberts M.A**

"An aerostat-supported ELF/VLF transmitter" Radio Science, vol. 24, n°2, pp. 235-246, March-April 1989.

**[6] Willis J.W and Davis J.R**

"Radio frequency heating effects on electron density in the low E region" Geophys. Res., 78, 5710, 1973.

**[7] Werner D.H and Ferraro A.J**

"Steerable ELF/VLF radiation produced by an array of ionospheric dipoles generated from HF heating" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-35, n°9, pp. 1022-1030, September 1987.

**[8] Kuo S.P**

Weber Research Institute, Polytechnic University, Farmingdale, New York

"Generation of ELF and VLF waves by a thermal instability excited in the HF heater-modulated polar electrojet" Radio Science, vol. 28, n°6, pp. 1019-1027, Nov-Dec 1993.

**[9] Burrows M.L and Niessen C.W**

"ELF communication system design" IEEE publication 72 CHO 660-1 OCC, pp. 95-109, 1972.

**[10] Howe G.W.O**

"Accurate measurements of the Luxembourg effect" Wireless Engineer, vol. 15, pp. 187, April 1938.

**[11] Galejs J**

"ELF and VLF fields of a horizontal electric dipole" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-16, n°6, pp. 689-705, November 1968

**[12] Wait J.R**

"On Mode Conversion of VLF Radio Waves at a Land-Sea Boundary" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-17, n° 2, pp. 216-220, March 1969.

**[13] Wait J.R et Spies K.P**

ESSA Research Laboratories, Boulder, Colorado 80302

"VLF mode propagation across an elevated coastline" Radio Science, vol. 5, n° 8,9, pp. 1169-1173, August-September 1970.

**[14] Ledinegg E**

"VLF Mode Conversion at terminator taking into account earth's curvature" Radio Science, vol. 17, n°5, pp. 879-887, September-October 1982.

**[15] Burrows M.L**

"The submarine-towed ELF loop antenna" Radio Science, vol. 11, n°4, pp. 357-366, April 1976.

**[16] King R.W.P**

"Antennas in material Media Near boundaries with application to communication and geophysical exploration: part I: the bare metal dipole; part II: the terminated insulated antenna" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. ap-34, n°4, pp. 483-496, April 1974

**[17] Wolf S.A, Davis J.R and Nisenoff M**

"Magnetic field sensors for submarine communications" Trans. IEEE Commun., COM-22(4), pp. 549-554, 1974. Institute of Electrical and Electronics Engineers, New-york .

**[18] Goldstein J and Dinger R.J**

"Motion stability measurements of a submarine-towed ELF receiving platform" in IEEE AP-S International Symposium, pp. 353-356, 1975. Institute of Electrical and Electronics Engineers, New-york .

**[19] Bostick F.X, Cox C.S and Field E.C**

"Land-to-seafloor electromagnetic transmissions in the 0,1 to 15 Hz band" Radio Science, vol. 13, n°4, pp. 701-708, July-August 1978.

**[20] Chave A.D, Flosadottir A.H et Cox C.S**

ESSA Research Laboratories, Boulder, Colorado 80302

"Some comments on seabed propagation of ULF/ELF electromagnetic fields" Radio Science, vol. 25, n°5, pp. 825-836, September-October 1990.

**[21] Ranganayaki R.P and Madden T.R**

"Generalized thin sheet analysis in magnetotellurics : an extension of Price's analysis" Geophys. J. R. Astr. Soc. , vol. 60, pp. 445-457, 1980.

**[22] [23] Fraser-Smith A.C et Bubenik D.M**

Radioscience Laboratory, Stanford Electronics Laboratories, Stanford, California 94 305

"ULF/ELF magnetic fields generated at the sea surface by submerged magnetic dipoles" Radio Sciences, vol. 11, n° 11, pp. 901-913, November 1976.

"ULF/ELF electromagnetic fields generated above a sea of finite depth by a submerged vertically-directed harmonic magnetic dipole" Radio Sciences, vol. 14, n° 1, pp. 59-74, Janvier-Février 1979.

**[24] Fraser-Smith A.C, Inan A.S, Villard O.G et Joiner R.G**

"Seabed propagation of ULF/ELF electromagnetic fields from harmonic dipole sources located on the seafloor" Radio Sciences, vol. 23, n°6, pp. 931-943, Novembre-Décembre 1988.

**[25] Inan A.S, Fraser-Smith A.C et Villard O.G**

Université de Portland, Portland, Oregon.

"ULF/ELF electromagnetic fields produced in a conducting medium of infinite extent by a linear current source of finite length" IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP.33, n°12, pp. 1363-1369, Décembre 1985.

**[26] Inan A.S et Fraser-Smith A.C**

Université de Portland, Portland, Oregon.

"Further investigation of the interference minimums in the low-frequency electromagnetic fields produced by a submerged vertical magnetic dipole" Radio Sciences, vol. 25, n°4, pp. 339-347, Juillet-Août 1990.

**[27] Weaver J.T**

Pacific Naval Laboratory, Defence Research Board of Canada, Victoria, British Columbia.

"The electromagnetic field within a discontinuous conductor with reference to geomagnetic micropulsations near a coastline" Canadian Journal of Physics, vol. 41, pp. 484-495, 1963.

**[28] Lines L.R et Jones F.W**

Department of Physics and the Institute of Earth and Planetary Physics, Université d'Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

"The perturbation of alternating geomagnetic fields by an island near a coastline" Canadian Journal of Earth Sciences, vol. 10, pp. 510-518, 1972.

**[29] Dosso H.W et Lokken J.E**

Rapport 61-1 du laboratoire naval du pacifique, 1961.

**[30] Nicoll M.A and Weaver J.T**

"H-polarisation induction over an ocean edge coupled to the mantle by a conducting crust" Geophys. J. Roy. Astron. Soc., vol. 49, pp. 427-442, 1977.

**[31] [32] [33] Fischer G, Schnegg P.A, and Usadel K.D.**

"E polarisation induction in a conducting half-space screened by a perfectly conducting half-plane" Acta Geodaet. Geophys. et Montanist (Hungary), vol. 12, pp. 247-253, 1977.

"Electromagnetic response of an ocean coast model to E polarisation induction" Geophys. J. Roy. Astron. Soc., vol. 53, pp. 599-616, 1978.

"Electromagnetic induction at a model ocean coast" Geomag. Geoelect., 1978.

**[34] Fischer G**

"Electromagnetic induction effects at an ocean coast" Proceedings of the IEEE, vol. 67, n°7, July 1979.

**[35] Bailey R.C**

"Electromagnetic induction over the edge of a perfectly conducting ocean: the H-polarisation case" Geophys. J. Roy. Astron. Soc., vol. 48, pp. 385-392, 1977.

**[36] Weaver J.T**

"Electromagnetic induction in thin sheet conductivity anomalies at the surface of the earth" Geophys. J. Roy. Astron. Soc., vol. 55, pp. 1044-1050, 1978.

**[37] Weaver J.T et Brewitt-Taylor C.R**

"Improved boundary condition for the numerical solution of E-polarisation problems in geomagnetic induction" Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, vol. 54, pp. 309-317, 1978.

**[38] Camfield P.A, Gough D.L and Porath H**

"Magnetometer array studies in the north-western United States and South-western Canada" Geophys. J. Roy. Astron. Soc., vol. 22, pp. 201-221, 1970.

- [39] Babour K, Mosnier J, Daignieres M, Vasseur G, Le Mouël J.L and Rossignol J.C**  
 "A geomagnetic variation anomaly in the northern Pyrenees" *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, vol. 45, pp. 583-600, 1976.
- [40] Lines L.R et Jones F.W**  
 "The perturbation of alternating geomagnetic fields by three-dimensional island structures" *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, vol. 32, pp. 133-154, 1973.
- [41] Price A.T**  
 "Electromagnetic induction within the earth" in "Physics of geomagnetic phenomena" S Matsushita and W Campbell Editions, Academic Press Inc., pp. 235-297, 1967.
- [42] Coggon J.H**  
 "Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method" *Geophysics*, vol. 36, n°1, pp. 132-155, February 1971.
- [43] Silvester P et Haslam R.S**  
 "Magnetotelluric modelling by the finite element method" *Geophysical Prospecting*, vol. 20, pp. 872-891, 1972.
- [44] Rijo L**  
 "Modeling of electric and electromagnetic data" Ph.D.Thesis, Université de l'Utah.
- [45] Lapidus L et Pinder G.F**  
 "Numerical solution of partial differential equations in science and engineering" John Wiley et Sons, Inc., 1982.
- [46] Doucet D et Ngoc P.V**  
 Laboratoire de Géophysique Appliquée et Structurale (LAGAS), Ecole Nationale Supérieure de Géologie (ENSG)  
 "Génération et optimisation de la méthode des différences finies pour la modélisation en magnétotellurique (MT)" *Geophysical Prospecting*, vol. 32, pp. 292-316, 1984.
- [47] Collins R.J**  
 "Bandwidth reduction by automatic renumbering" *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, vol. 6, pp. 345-356, 1973.
- [48] Ku C.C, Hsieh M.S et Lim S.H**  
 "The topographic effect in electromagnetic fields" *Canadian Journal of Earth Sciences*, vol. 10, pp. 645-656, 1973.
- [49] Doucet D**  
 "Méthode numériques de simulation appliquées à l'étude des structures 2 dimensions pour l'interprétation en magnétotellurique et en tellurique-tellurique" Thèse de doctorat 3<sup>ème</sup> cycle, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1981.
- [50] Mufti I.R**  
 "Finite-difference resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures" *Geophysics*, vol. 41, n°1, pp. 62-78, February 1976.
- [51] Peters L.J et Bardeen J**  
 "The solution of some theoretical problems which arise in electrical methods of geophysical exploration" *University of Winsconsin Eng. Expt. St. Bull.* 71, 1930.

**[52] Greenfield R.J**

"Two-dimensional calculations of magnetic micropulsation resonances" Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, USA, 1965.

**[53] Brewitt-Taylor C.R et Weaver J.T**

"On the finite difference solution of two-dimensional induction problems" Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, vol. 47, pp. 375-396, 1976.

**[54] Madden T.R et Swift S.M**

"Magnetotelluric investigations of the electric conductivity of the crust and upper mantle" Zemnaya kora i Verkhnyaya Mantiya, pp. 403-415, Mir, Moscow, 1972.

**[55] Nguyen Q.T**

"Modélisation numérique de la réponse d'une structure bidimensionnelle illuminée par une onde électromagnétique plane" Thèse de doctorat 3<sup>ème</sup> cycle, Université de Lille I, 1982.

**[56] Forsythe G.E et Wasow W**

"Finite difference methods for partial differential equations" Willey, New-York, 1960.

**[57] Jepsen A.F**

"Resistivity and induced polarisation modeling" Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley, 1969.

**[58] Muller W et Losecke W**

"Acceleration convergence technique and grid spacing problems in two-dimensional magnetotelluric modelling" Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, vol. 41, pp. 185-191, 1975.

**[59] [60] Mufti I.R**

"A practical approach to finite-difference resistivity modeling" Geophysics, vol. 43, n°5, pp. 930-942, August 1978.

"Finite-difference evaluation of apparent resistivity curves" Geophysical Prospecting, vol. 28, pp. 146-166, 1980.

**[61] Aiken C.L, Hastings D.A et Sturgul J.R**

"Numeric solutions of the response of a two-dimensional earth to an oscillating dipole source" Geophys. Prosp., vol. 21, pp. 763-782, 1973.

**[62] Vasseur G and Weidelt P**

"Bimodal electromagnetic induction in non-uniform thin sheets with an application to the northern Pyrenean induction anomaly" Geophys. J. Roy. Astron. Soc., vol. 51, pp. 669-690, 1977.

**[63] [64] [65] Tatrallyay M**

"On the interpretation of EM Sounding curves by numerical modelling using the Method" Acta Geod. Geophys. Montanist. Acad. Sci. Hung, vol. 12, pp. 279-285, 1977.

"On the numerical modelling of two -dimensional conductivity structures in cylindrical and cartesian coordinates" Acta Geod. Geophys. Montanist. Acad. Sci. Hung, vol. 13, pp. 441-453, 1978.

"On the sources of error in the finite difference method for electromagnetic modelling" IV Workshop on Electromagnetic Induction in the Earth and Moon, University of Munich, FRG, 1978.

**[66] [67] Smith G.D**

"Numerical solutions of partial differential equations" New-York, Oxford University Press., 1965.

"Numérique solution of partial differential equations" 2nd edn, Oxford University Press, London, 1978.

**[68] Marchuk G.I et Shaidurov V.V**

"Improvement of the Accuracy of solving Difference Schemes" Nauka, Moscow, 1979.

**[69] [70] [71] Varentsov I.M et Gobulev N.G**

"On one algorithm for the finite-difference modelling of electromagnetic fields" Fundamentalnye Problemy Morskikh Elektromagnitnykh Issledovaniy, pp. 169-185, Izmiran, Moscow, 1980.

"The application of the asymptotic boundary conditions for modelling the electromagnetic field in heterogenous media" Problemy Morskikh Elektromagnitnykh Issledovaniy, pp. 77-95, Izmiran, Moscow, 1980.

"Programs for finite-difference EM field modelling in 2D heterogeneous media" Algoritmy i Programmy Analiza Geomagnitnogo Polya, pp. 147-176, Izmiran, Moscow, 1980.

**[72] Zhdanov M.S et Spichak**

"Finite-difference modelling of electromagnetic fields over three-dimensional geoelectric inhomogeneities" Problemy Morskikh Elektromagnitnykh Issledovaniy, pp. 102-115, Izmiran, Moscow, 1980.

**[73] Zhdanov M.S, Golubev N.G, Spichnak V.V and Varentsov**

Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation, USSR Academy of Sciences

"The construction of effective methods for electromagnetic modelling" Geophys. J. R. Astr. Soc., vol. 68, pp. 589-607, 1982.

**[74] [75] Robertson R.C**

"The E perpendicular polarisation response of a two-dimensional heterogeneous layer modeled by two thin sheets in a horizontally stratified half-space" IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, vol. GE-25, pp. 432-440, 1987.

"The E perpendicular polarisation response of a two-dimensional heterogeneous layer modeled by two thin sheets" IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, vol. 27, n°4, pp. 369-374, July 1989.

**[76] Wait J.R**

"Electromagnetic waves in stratified media" Second edition, Pergamon Press, 1970.

**[77] D'Erceville I et Kunetz G**

"The effect of a fault on the earth's natural electromagnetic field" Geophysics, vol. 27, pp. 651-665, 1962.

**[78] Degauque P**

"Etude de la propagation des ondes électromagnétiques en milieu conducteur complexe" Rapport final du contrat conclu entre DCN/GESMA et l'USTLFA, Mai 1992.

**[79] [80] Dulongcourty M**

"Modélisation numérique de la réponse d'une structure bidimensionnelle illuminée par une onde plane très basse fréquence" Rapport de stage de DEA, Juillet 1991.

"Etude théorique de la propagation des ondes électromagnétiques à proximité

d'une transition Terre/mer ( cas de l'onde plane et de la ligne source électrique pour une transition abrupte et inclinée à 45°)" Rapport intermédiaire du contrat DCN/GESMA-USTLFA, Décembre 1993.

**[81] Hohmann G.W**

Département de Géologies et de Géophysiques, Université de l'Utah, Salt Lake City, Utah, 84112.

"Electromagnetic scattering by conductors in the earth near a line source of current" *Geophysics*, vol. 36, pp. 101-131, February 1971.

**[82] [83] Dey A et Morrison H.F**

"Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures" *Geophysical Prospecting*, vol. 27, pp. 106-136, 1979.

"Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures" *Geophysics*, vol. 44, n°4, pp. 753-780, April 1979.

**[84] Bayliss A et Turkel E**

"Radiation boundary conditions for wavelike equations" *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 33, pp. 707-725, 1980.

**[85] Peterson A.F et Castillon S.P**

"A frequency-domain differential equation formulation for electromagnetic scattering from inhomogeneous cylinders" *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-37, n°5, pp. 601-607, May 1989.

**[86] Grant F.S and West G.F**

"Interpretation theory in applied geophysics" McGraw-Hill Book Co., Inc. New-york.

**[87] Dulongcourty M**

"Etude théorique de la propagation des ondes électromagnétiques à proximité d'une transition Terre/mer ( cas des lignes sources électriques ou magnétiques et de dipôles à courant continu pour une transition abrupte et inclinée à 45°)" Rapport final du contrat DCN/GESMA-USTLFA, Juin 1994.

**[88] Raiche A.P**

"An integral equation approach to three-dimensional modeling" *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, vol. 36, pp. 363-376, 1974.

**[89] Hohmann G.W**

"Three-dimensional-induced polarisation and electromagnetic modeling" *Geophysics*, vol. 40, pp. 309-324, February 1975.

**[90] [91] Weidelt P**

"Inversion of two-dimensional conductivity structure" *Phys. Earth planet. Int.*, vol. 10, pp. 282-291, 1975.

"Electromagnetic induction in three-dimensional structure" *J. Geophys.*, vol. 41, pp. 85-109, 1975.

"Entwicklung und Erprobung eines Verfahrens zur Inversion zweidimensionaler Leitfähigkeitsstrukturen in E-polarisation" Dissertation, Göttingen Universität, Göttingen, 1978.

**[92] Wannamaker P.E, Hohmann G.W et San Filippo W.A**

"Electromagnetic modeling of three-dimensional bodies in layered earths using integral equations" *Geophysics*, vol. 49, pp. 60-74, 1984.

**[93] Wannamaker P.E, Hohmann G.W et Ward S.H.**

"Magnetotelluric responses of three-dimensional bodies in layered earths"

Geophysics, vol. 49, pp. 1517-1533, 1984.

**[94] San Filippo W.A et Hohman G.W**

"Integralequation solution for the transient electromagnetic response of a three-dimensional body in a conductive half-space" Geophysics, vol. 50, n°3, pp. 798-809, June 1985.

**[95] Wannamaker P.E**

"Advances in three-dimensional magnetotelluric modeling using integral equations" Geophysics, vol. 56,, pp. 1716-1728, 1991.

**[96] Jones F.W et Pascoe L.J**

"The perturbation of alternating geomagnetic fields by three-dimensional conductivity inhomogeneities" Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, vol. 27, pp. 479-485, 1972.

**[97] Reddy I.K, Rankin D et Phillips R.J**

"Three-dimensional modeling in magnetotelluric and magnetic variational sounding" Geophys. J. Roy. Astr. Soc., vol. 51, pp. 313-325, 1977.

**[98] Sarkar T.K**

"Application of conjugate gradient method to electromagnetics and signal analysis" Elsevier Science Publ. Co., Inc, 1991.

**[99] Jones F.W**

"The perturbation of geomagnetic fields by two-dimensional and three-dimensional conductivity inhomogeneities" Pageoph, vol. 112, pp. 793-800, 1974.

**[100] Hibbs R.D et Jones F.W**

Department of Physics and the Institute of Earth and Planetary Physics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

"The calculation of perturbation and induction arrows for a three-dimensional conductivity model and dipole source fields" Pageoph, vol. 114, pp. 997-1008, Birkhauser Verlag, Basel, 1976.

**[101] Adhidjaja J.I et Hohmann G.W**

"A finite-difference algorithm for the transient electromagnetic response of a three-dimensional body" Geophys. J. Int., vol. 98, pp. 233-242, 1989.

**[102] Dufort E.C et Frankel S.P**

"Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations" Math. tables and other aids to computation (former title of Mathematics of computation), vol. 7, pp. 135-152, 1953.

**[103] Xinghua P, Agarwal A.K et Weaver J.T**

"A theoretical investigation of anisotropic geoelectric structures using three-dimensional numerical models" XX General Assembly, IUGG, Vienna, Austria, IAGA Program and Abstracts, paper GAM 1.6.

**[104] Yee K.S**

"Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media" IEEE Trans. Ant. Prop., AP-14, pp. 302-307, 1966.

**[105] Taflove A**

"Review of the formulation and applications of the finite-difference time-domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions with arbitrary structures" Wave Motion, vol. 10, pp. 547-582, 1988.

**[106] Taflove A et Umashankar K.R**

"The finite-difference time-domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions with arbitrary structures" Morgan M.A, Ed., Finite-element et finite difference methods in electromagnetic scattering, Elsevier Science Publ. Co., Inc. 287-373, 1990.

**[107] Morgan M.A**

"Finite element and finite difference methods in electromagnetic scattering" Editor Elsevier, 1990.

**[108] Jones F.W et Vozoff K**

"The calculation of magnetotelluric quantities for three-dimensional conductivity inhomogeneities" Geophysics, vol. 43, pp. 1167-1175, 1978.

**[109] Primore D.F, Hohmann GW, Ward S.H et Sill W.R**

"An investigation of finite element modeling for electrical and electromagnetic data in three dimensions" Geophysics, vol. 46, pp. 1009-1024, 1981.

**[110] Chen P.F et Fung P.C**

Department of Physics, University of Hong Kong, Hong Kong.

"A mesh convergence test for the finite difference method in three-dimensional Electromagnetic modelling" Chinese Journal of Geophysics, vol. 32, n°4, pp. 569-573.

**[111] Hohmann G.W**

"Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling" Geophys. Surv., vol. 6, pp. 27-83, 1983.

**[112] Lee K.H, Pridmore D.F et Morrison H.F**

"A hybrid three-dimensional electromagnetic modeling scheme" Geophysics, vol. 46, n°5, pp. 796-805, 1981.

**[113] Gupta P.K, Bennett L.A et Raiche A.P**

"Hybrid calculations of three-dimensional electromagnetic response of buried conductors" Geophysics, vol. 52, pp. 301-306, 1987.

**[114] Mackie R.L, Madden T.R et Wannamaker P.E**

"Three-dimensional magnetotelluric modeling using difference equations - Theory and comparisons to integral equation solutions" Geophysics, vol. 58, n°2, pp. 215-226, February 1993.

**[115] Stoyer C.H**

"Numeric solutions of the response of a two-dimensional earth to an oscillating magnetic dipole source with application to a groundwater field study" Ph. D. Thesis, Pennsylvania State University, 1974.

**[116] Lee K.H**

"Electromagnetic scattering by a two-dimensional inhomogeneity due to an oscillating magnetic dipole" Ph. D. Thesis, Université de California, Berkeley, 1978.

**[117] Lee K.H and Morrison H.F**

"A numerical solution for the electromagnetic scattering by a two-dimensional inhomogeneity" Geophysics, vol. 50, n°3, pp. 466-472, March 1985.

**[118] Unsworth M.J, Travis B.J, and Chave D**

"Electromagnetic induction by a finite electric dipole source over a 2-D earth"

Geophysics, vol. 58, n°2, pp. 198-214, February 1993.

**[119] Stoyer C.H et Greenfield R.J**

"Numeric solutions of the reponse of a two-dimensional earth to an oscillating dipole source" Geophysics, vol. 41, n°3 , pp. 519-530, June 1976.

**[120] Hohmann G.W**

"Numerical Modeling for Electromagnetic methods of geophysics" Investigations in geophysics n°3, Electromagnetic methods in applied geophysics, vol. 1, Theory, édité par Misac N. Nabighian, 1988.

**[121] Swift C.M**

"Theoretical magnetotelluric and turam response from two-dimensional inhomogeneities" Geophysics, vol. 36, pp. 38-52, 1971.

**[122] Raviart P et Faure P**

"Cours d'analyse numérique" Ecole Polytechnique, 1976.

**[123] Zienkiewick O.C**

"La méthode des éléments finis" Ediscience Paris, 1973.

**Annexe du chapitre II**

### CALCUL DE LA FONCTIONNELLE DU CHAMP MAGNETIQUE.

Le champ magnétique vérifie l'équation:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_y = f \quad \text{sur } (\Omega) \quad (\text{AI.1}),$$

$$\text{où } \begin{cases} K = [\sigma(x,z) + j\omega\epsilon(x,z)]^{-1} \\ \phi = j\omega\mu(x,z) \\ f = 0 \end{cases} \quad (\text{AI.2}).$$

$$\text{En posant } L = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \quad (\text{AI.3}),$$

l'équation (AI.1) s'écrit:  $L H_y = f$  (AI.4).

Nous rappelons d'abord, certaines définitions:

- le produit intérieur s'écrit d'après Primore (1981) [109]:

$$\langle L H_y, H_y \rangle = \iint_{(\Omega)} (L H_y) H_y \, d\Omega \quad (\text{AI.5}),$$

- l'opérateur  $L_t$  est auto-adjoint ( ou symétrique) au sens de (AI.5) si:

$$\langle L_t u, v \rangle = \langle u, L_t v \rangle \quad (\text{AI.6}),$$

- l'opérateur  $L_t$  est défini positif s'il vérifie:

$$\begin{cases} \langle L_t u, u \rangle > 0 \text{ si } u \neq 0 \\ \langle L_t u, u \rangle = 0 \text{ si } u = 0 \end{cases} \quad (\text{AI.7}).$$

Nous démontrons par la suite que la fonctionnelle du champ magnétique a la forme suivante:

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \langle L H_y, H_y \rangle - \langle H_y, f \rangle = \frac{1}{2} \langle L H_y, H_y \rangle \quad (\text{AI.8}).$$

Il nous reste à modifier (AI.1) en une forme appropriée.

En discrétisant  $(\Omega)$  en un nombre fini d'éléments discrets  $(\Omega_j)$  où  $\sigma_j$ ,  $\epsilon_j$  et  $\mu_j$  sont supposés constants et puisque le champ magnétique est continu à l'interface des éléments, la fonctionnelle (AI.5) peut s'écrire:

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} (L_j H_y) H_y \, d\Omega_j = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} (L_j H_y) H_y \, d\Omega_j \quad (\text{AI.9}).$$

L'opérateur  $L_j$  est certes auto-adjoint mais non défini positif, par conséquent, il ne

satisfait pas les hypothèses du théorème de minimum (Raviart (1976)[122]). La solution de l'équation (AI.1) ne peut être déduite de la minimisation de  $F(H_y)$  (AI.8).

Cependant, on peut montrer que la valeur stationnaire de  $F(H_y)$  correspondra à la solution de (AI.8). En effet, si  $H_{y0}$  est une solution, elle vérifie donc:

$$L_j H_{y0} = 0 \quad (\text{AI.10}).$$

On forme la quantité suivante :

$$\delta(\varepsilon) = F(H_{y0} + \varepsilon \widetilde{H}_y) - F(H_{y0}) \quad (\text{AI.11}),$$

où  $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \text{ est un nombre réel arbitraire} \\ \widetilde{H}_y \text{ est une valeur arbitraire de } H_y. \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} F(H_{y0} + \varepsilon \widetilde{H}_y) &= \frac{1}{2} \langle L_j (H_{y0} + \varepsilon \widetilde{H}_y), (H_{y0} + \varepsilon \widetilde{H}_y) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle L_j H_{y0}, (H_{y0} + \varepsilon \widetilde{H}_y) \rangle + \frac{\varepsilon}{2} \langle L_j \widetilde{H}_y, (H_{y0} + \varepsilon \widetilde{H}_y) \rangle \end{aligned} \quad (\text{AI.12})$$

$L_j$  étant auto-adjoint, on a:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \langle L_j H_{y0}, (H_{y0} + \varepsilon \widetilde{H}_y) \rangle = \langle L_j H_{y0}, H_{y0} \rangle + \varepsilon \langle L_j H_{y0}, \widetilde{H}_y \rangle \\ \langle L_j \widetilde{H}_y, (H_{y0} + \varepsilon \widetilde{H}_y) \rangle = \langle L_j H_{y0}, \widetilde{H}_y \rangle + \varepsilon \langle L_j \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_y \rangle \end{array} \right. , \\ \Rightarrow \delta(\varepsilon) = \varepsilon \langle L_j H_{y0}, \widetilde{H}_y \rangle + \frac{\varepsilon^2}{2} \langle L_j \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_y \rangle \end{aligned} \quad (\text{AI.13})$$

En différentiant par rapport à  $\varepsilon$  :

$$\frac{d\delta(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \langle L_j H_{y0}, \widetilde{H}_y \rangle + \varepsilon \langle L_j \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_y \rangle \quad (\text{AI.14})$$

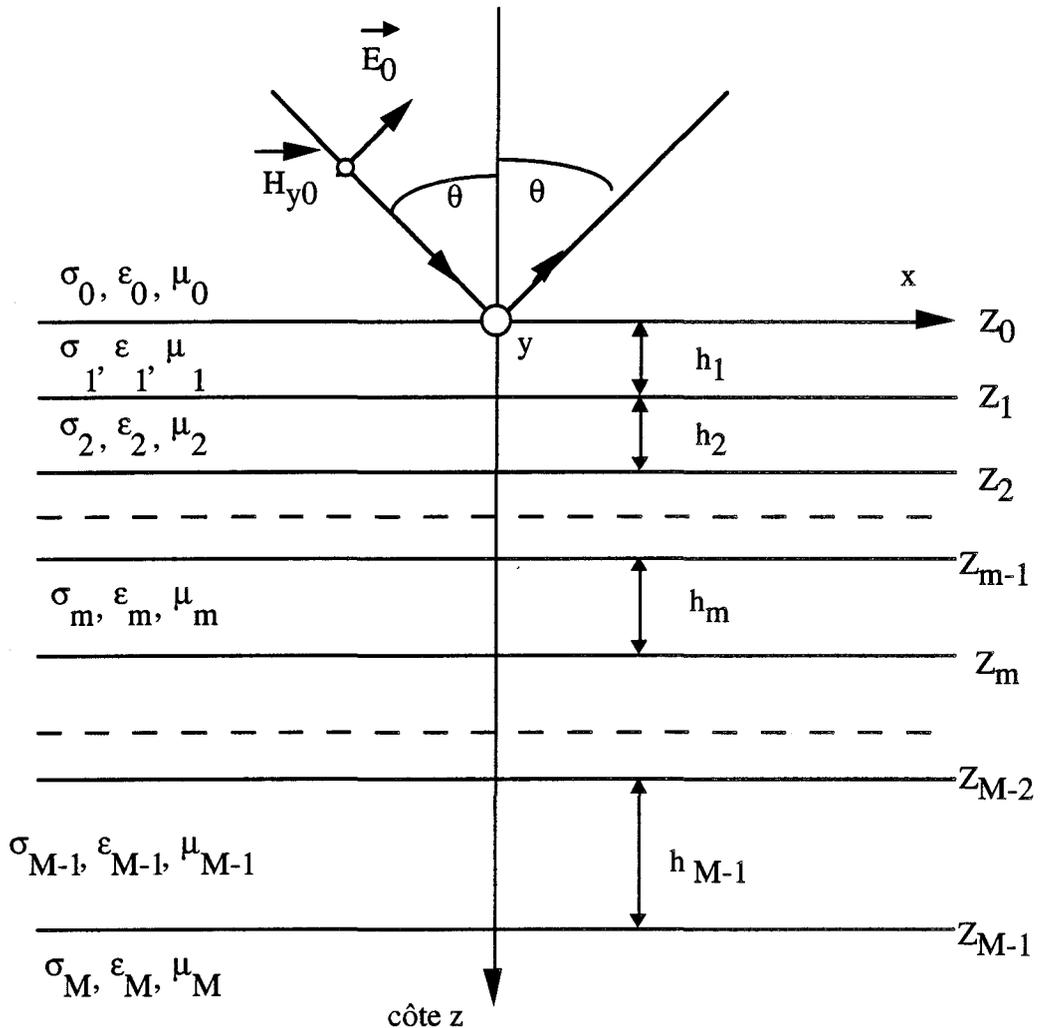
L'expression (AI.14) s'annule au point stationnaire, correspondant à  $\varepsilon = 0$ , c'est-à-dire pour :

$$\begin{aligned} \langle L_j H_{y0}, \widetilde{H}_y \rangle &= 0 \quad \text{et comme } \widetilde{H}_y \text{ étant arbitraire} \\ \Rightarrow L_j H_{y0} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{AI.15}).$$

Autrement dit le point stationnaire est la solution de (AI.9). Le passage d'une proposition variationnelle à l'équation différentielle équivalente est relativement simple comme nous l'avons montré ici. Par contre, le processus inverse serait compliqué et de toute façon restrictif quelle que soit sa généralité, pour la simple raison que, fréquemment on ne peut pas établir de principe variationnel (Zienkiewicz (1973)[123]).

**CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE DANS UN  
MILIEU STRATIFIE.**

Pour le mode TM, et sous une forme duale pour le mode TE, le champ électrique est dans le plan (oxz). Nous représentons le demi-milieu inférieur stratifié par la figure suivante:



Il se compose de  $M$  couches, de propriétés électromagnétiques  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ . Le champ magnétique ne possède qu'une composante  $H_y$ .

Le problème traité ci-dessus est analogue à la configuration d'une ligne de transmission.

Dans la couche  $m$ , il est solution de :

$$\left(\Delta - \gamma_m^2\right) H_{ym} = 0 \quad (\text{A2.1})$$

$$\text{où } \gamma_m^2 = j \sigma_m \mu_m \omega - \epsilon_m \mu_m \omega^2 \quad \text{avec } \text{Re}(\gamma_m) > 0 \quad (\text{A2.2})$$

et la solution générale s'exprime par :

$$H_{my} = \left( a_m e^{-u_m z} + b_m e^{+u_m z} \right) e^{-i \lambda x} \quad (\text{A2.3})$$

où  $u_m^2 = (\lambda^2 + \gamma_m^2)$  avec  $\text{Re}(u_m) > 0$  et  $\lambda$  est complexe arbitraire.

Il suffit de déterminer  $a_m$ ,  $b_m$  à partir des conditions de continuité des champs  $E_x$  et  $H_y$  aux interfaces des couches.

Le champ magnétique incident s'écrit :

$$H_{0y}^{\text{inc}} = H_0 e^{-\gamma_0 \cos(\theta) z} e^{-\gamma_0 \sin(\theta) x} \quad (\text{A2.4})$$

En l'identifiant à (A2.2), on a :

$$a_0 = H_0$$

$$i \lambda = \gamma_0 \sin(\theta)$$

$b_0 e^{u_0 z} e^{-\gamma_0 \sin(\theta) x}$ , l'expression de l'onde réfléchie avec un angle de réflexion  $\theta$ .

On en déduit le champ électrique dans une couche  $m$  par :

$$\begin{cases} E_{m,x} = -(\sigma_m + j \omega \epsilon_m)^{-1} \frac{\partial H_{m,y}}{\partial z} \\ E_{m,z} = (\sigma_m + j \omega \epsilon_m)^{-1} \frac{\partial H_{m,y}}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{A2.5})$$

### Détermination de $a_m$ , $b_m$ :

Les conditions de continuités à la côte  $z_{m-1}$ , se traduisent par :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{m-1,x} = E_{m,x} \\ H_{m-1,y} = H_{m,y} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{m-1} + j \omega \varepsilon_{m-1})^{-1} \frac{\partial H_{m-1,y}}{\partial z} = (\sigma_m + j \omega \varepsilon_m)^{-1} \frac{\partial H_{m,y}}{\partial z} \\ H_{m-1,y} = H_{m,y} \end{array} \right\}$$

(A2.6)

Seule l'onde sortante est admise en dernière couche,  $b_M = 0$ .

On écrit de la même façon (A2.6) pour  $M-1$  couches, ce qui donne  $2(M-1)$  équations linéaires de  $2(M-1)$  inconnues  $a_m$ ,  $b_m$  résolues en fonctions de  $a_0$ .

En dernière couche:

$$b_M = 0$$

$$\text{d'où } H_{M,y} = a_M e^{-u_M z} e^{-\gamma_0 \sin(\theta) x} \quad (\text{A2.7})$$

$$H_{M-1,y} = (a_{M-1} e^{-u_{M-1} z} + b_{M-1} e^{u_{M-1} z}) e^{-\gamma_0 \sin(\theta) x}$$

L'impédance de surface à la côte  $Z_{M-1}$  :

$$Z_f = Z_M = \frac{E_{M-1,x}}{H_{M-1,y}} \quad (\text{A2.8})$$

$$\text{D'après (A2.15) et (A2.7), elle vaut : } Z_f = K_M = \frac{u_M}{(\sigma_M + j \omega \varepsilon_M)} \quad (\text{A2.8})$$

- à la côte  $z_{M-2}$  :

$$Z_{M-1} = K_{M-1} \frac{K_M + K_{M-1} \tanh(u_{M-1} h_{M-1})}{K_{M-1} + K_M \tanh(u_{M-1} h_{M-1})} \quad (\text{A2.9})$$

- à la côte  $z_{M-3}$  :

$$Z_{M-2} = K_{M-2} \frac{Z_{M-1} + K_{M-2} \tanh(u_{M-2} h_{M-2})}{K_{M-2} + Z_{M-1} \tanh(u_{M-2} h_{M-2})} \quad (\text{A2.10})$$

- à la côte  $z_{m-1}$  :

$$Z_m = K_m \frac{Z_{m+1} + K_m \tanh(u_m h_m)}{K_m + Z_{m+1} \tanh(u_m h_m)} \quad (\text{A2.11})$$

$$\text{où } K_m = \frac{u_m}{(\sigma_m + j \omega \epsilon_m)} , \quad u_m = (\lambda^2 + \gamma_m^2)^{1/2} \quad (\text{A2.12})$$

- à la côte  $z_1$  :

$$Z_2 = K_2 \frac{Z_3 + K_2 \tanh(u_2 h_2)}{K_2 + Z_3 \tanh(u_2 h_2)} \quad (\text{A2.13})$$

- à la côte  $z_0$  :

$$Z_1 = K_1 \frac{Z_2 + K_1 \tanh(u_1 h_1)}{K_1 + Z_2 \tanh(u_1 h_1)} \quad (\text{A2.14})$$

Appliquant (A1.6) on a :

$$R = \frac{b_0}{a_0} = \frac{K_0 - Z_1}{K_0 + Z_1} \quad (\text{A2.15})$$

Les autres coefficients se déduisent de (A2.15) par les deux formules de récurrence:

$$a_m = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{K_{m-1}}{K_m} \right) a_{m-1} e^{-(u_{m-1} - u_m) z_{m-1}} + \left( 1 - \frac{K_{m-1}}{K_m} \right) b_{m-1} e^{+(u_{m-1} + u_m) z_{m-1}} \right]$$

$$b_m = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{K_{m-1}}{K_m} \right) a_{m-1} e^{-(u_{m-1} + u_m) z_{m-1}} + \left( 1 + \frac{K_{m-1}}{K_m} \right) b_{m-1} e^{+(u_{m-1} - u_m) z_{m-1}} \right]$$

(A2.16)

## Résumé

De part le monde, les océans occupent 75 pour cent de la surface de la Terre. Par conséquent, la télécommunication avec les engins sous-marins ainsi que la prospection géophysique du sous-sol marin sont nécessaires pour des raisons de stratégie militaire et économique. La pénétration de l'énergie électromagnétique à l'intérieur des milieux conducteurs et à des distances éloignées d'un émetteur n'est possible qu'en très basses fréquences ou en courant continu. A cause d'un manque de résultats théoriques dans la littérature scientifique, ce mémoire de thèse développe des solutions numériques permettant de simuler le rayonnement d'un émetteur à deux ou à trois dimensions, alternatif ou à courant continu, à proximité d'une transition côtière Terre/mer afin de mettre en évidence l'influence du relief côtier sous-marin sur la propagation des ondes électromagnétiques très basses fréquences ( 0,1 à 100 Hz) et à courant continu.

Avant d'attaquer l'élaboration de différentes solutions numériques, les résultats d'une étude bibliographique regroupant les caractéristiques de propagation des ondes très basses fréquences et les caractéristiques de solutions numériques existants très simplistes sont présentées. Par la suite, les différentes solutions numériques utilisant la méthode des différences finies et simulant la propagation des ondes électromagnétiques très basses fréquences et à courant continu émises par une source à deux ou à trois dimensions à proximité d'une transition Terre/mer de profil côtier abrupt, à double transition abrupte, vallonné et à pente constante sur une distance horizontale de 500 mètres sont exposées.

Les résultats numériques ont permis d'expliquer entre autres les caractéristiques de propagation des ondes électromagnétiques en mode TE et TM, l'importance de l'orientation d'un dipôle électrique immergé, de la fréquence d'émission et du type de relief sous-marin côtier sur la propagation des ondes électromagnétiques à proximité d'une transition Terre/mer.

### Mots clefs

Différences finies	Onde électromagnétique
Emetteur à courant continu	Emetteur à courant alternatif
Antenne	Dipôle électrique
Transition Terre/mer	Maillage

