

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Spécialité Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

Sonia HAJRI

Ingénieur ENIM (Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir)



### COMMANDE DYNAMIQUE PAR MODE GLISSANT APPLICATION A LA ROBUSTIFICATION DES PROCESSUS COMPLEXES

Soutenue le 27 Janvier 1997 devant le jury d'examen

Président : G. DAUPHIN-TANGUY

Rapporteurs : M. KSOURI  
D. MEIZEL  
M.G. SINGH

Examineurs : M. BENREJEB  
P. BORNE  
A-M. DESODT  
W. PERRUQUETTI  
J-P. RICHARD

Travail réalisé au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille, Ecole Centrale de Lille, sous la co-direction de Messieurs W. PERRUQUETTI, M. BENREJEB et P. BORNE.

A Mondher et mes parents

# Avant-Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Ecole Centrale de Lille, (LAIL URA-CNRS 1440), Villeneuve d'Ascq, sous la co-direction de Messieurs W. PERRUQUETTI, M. BENREJEB et P. BORNE.

Je tiens à remercier très vivement, Monsieur le Professeur Pierre BORNE, Directeur Scientifique de l'Ecole Centrale de Lille, Vice-Président d'IEEE/SMC et Vice-Président de l'IMACS, pour son aide précieuse, sa disponibilité et son enthousiasme qu'il a su me communiquer durant ces dernières années.

Qu'il me soit permis de remercier Monsieur Wilfrid PERRUQUETTI, Maître de Conférences à l'Ecole Centrale de Lille, pour ses conseils judicieux, ses encouragements et sa gentillesse qui m'ont été d'une aide précieuse.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Mohamed BENREJEB, Directeur du LARA (ENIT-Tunis), de l'honneur qu'il m'a fait en ayant accepté de co-diriger ce travail.

Je remercie également Madame le Professeur Geneviève DAUPHIN-TANGUY, Directeur du LAIL, pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant de présider le jury d'examen.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Mekki KSOURI, Directeur de l'ISET de Tunis, Directeur du LACS (ENIT-Tunis), pour m'avoir fait l'honneur de rapporter sur ce travail malgré son calendrier chargé.

Je suis très honorée que le Professeur Madan G.SINGH, Directeur du ``Computation Department'' de l'Université de Technologie de Manchester, ait accepté d'être rapporteur de ce mémoire et je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je tiens à assurer de ma reconnaissance le Professeur Dominique MEIZEL de l'UTC de Compiègne qui a accepté d'être rapporteur de ce mémoire.

Qu'il me soit permis de remercier Madame Anne-Marie DESODT, Maître de Conférences à l'université de Lille I, pour l'honneur qu'elle me fait de bien vouloir juger cette thèse.

Je tiens à remercier également Monsieur Jean-Pierre RICHARD, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de participer au jury de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes amis et à tous ceux qui ont contribué à ce travail d'une façon directe ou indirecte, continue ou discontinue.

# Table des matières

<b>Introduction générale .....</b>	<b>9</b>
<b>Chapitre 1 : Formalisme classique des régimes glissants .....</b>	<b>13</b>
Introduction.....	15
1.1 Des systèmes à structure variable aux régimes glissants.....	16
1.1.1 Théorie des équations différentielles à second membre discontinu.....	17
1.1.2 Condition de glissement.....	21
1.2 Dynamique glissante.....	22
1.2.1 Approche de la commande équivalente et régime glissant idéal.....	22
1.2.2 Influence des champs de vecteurs $f(x)$ et $g(x)$ sur le régime glissant.....	23
1.2.3 Remarques.....	24
1.3 Domaine de glissement : Analyse par les fonctions de Lyapunov.....	25
1.3.1 Domaine des conditions initiales.....	26
1.3.2 Exemple.....	30
1.4 Invariance des régimes glissants par rapport aux perturbations.....	31
1.5 Bouclage linéarisant à structure variable.....	32
1.5.1 Linéarisation exacte par retour d'état statique.....	33
1.5.2 Bouclage à structure variable.....	34
1.5.3 Remarque sur le choix de la surface.....	36
1.5.4 Robustesse vis-à-vis des perturbations .....	36
1.5.5 Exemple .....	39

1.6 Systèmes multivariables linéaires en entrées.....	42
1.6.1 Dynamique glissante.....	44
1.6.2 Nature du glissement.....	45
1.7 Formalisation classique du régime glissant des systèmes découplés.....	46
1.7.1 Linéarisation par découplage.....	46
1.7.2 Bouclage à structure variable.....	48
1.7.3 Exemple.....	49
1.8 Extensions méthodologiques dans l'élaboration de la commande.....	54
1.8.1 Commande continue dans une bande de la surface.....	54
1.8.2 Exemple.....	57
Conclusion.....	60

## **Chapitre 2 : Commande dynamique par mode glissant : application aux systèmes monovariables..... 61**

Introduction.....	63
2.1 Bouclage linéarisant à structure variable : Introduction de la nouvelle surface de glissement.....	64
2.1.1 Dynamique du système en régime glissant.....	66
2.1.2 Interprétation.....	68
2.1.3 Cas de la régulation.....	71
2.2 Influence des perturbations.....	72
2.2.1 Perturbation additive.....	73
2.2.2 Perturbation relative du gain constante.....	81
2.2.3 Perturbation relative du gain non constante.....	85
2.2.4 Domaine réel de glissement.....	94
2.2.5 Cas d'un gain de glissement variable.....	95
2.3 Deuxième proposition pour le contrôleur dynamique par mode glissant.....	100
2.3.1 Présentation du nouveau contrôleur.....	100
2.3.2 Exemple.....	102
Conclusion.....	108

## **Chapitre 3 : Commande dynamique par mode glissant : application aux systèmes multivariables..... 109**

Introduction.....	111
3.1 Découplage dynamique par mode glissant.....	112
3.1.1 Dynamique glissante.....	115
3.1.2 Interprétation.....	116
3.1.3 Cas de la régulation.....	118
3.1.4 Cas particulier où la matrice de découplage est diagonale.....	119
3.2 Robustesse par rapport à une perturbation additive.....	120
3.2.1 Estimation des gains de glissement .....	120
3.2.2 Estimation des temps de glissement .....	120
3.2.3 Exemple.....	121
3.3 Robustesse par rapport à une perturbation des gains.....	126
3.3.1 Cas où $\Theta(x,t)$ est constante.....	127
3.3.2 Cas où $\Theta(x,t)$ est non constante.....	135
3.4 Analyse de robustesse : Application au moteur synchrone .....	145
3.4.1 Commande classique par mode glissant .....	149
3.4.2 Commande continue dans une bande de la surface.....	151
3.4.3 Commande dynamique par mode glissant .....	153
3.4.5 Synthèse et analyse.....	155
3.4.6 Comparaison de robustesse par rapport aux perturbations.....	156
Conclusion.....	160

<b>Chapitre 4 : Approches avancées de la commande dynamique par mode glissant.....</b>	<b>161</b>
Introduction .....	163
4.1 Commande floue .....	165
4.1.1 Base de règles et définitions .....	165
4.1.2 Interface de fuzzification .....	166
4.1.3 Mécanisme d'inférence.....	167
4.1.4 Interface de défuzzification.....	169
4.2 Commande dynamique floue par mode glissant.....	170
4.3 Exemple .....	171
4.3.1 Commande classique par mode glissant.....	173
4.3.2 Commande dynamique par mode glissant .....	175
4.3.3 Commande dynamique floue par mode glissant.....	178
4.4 Commande multi-modèles.....	181
4.4.1 Calcul des confiances.....	183
4.4.2 Fusion des commandes élémentaires.....	184
4.5 Exemple.....	185
4.5.1 Commande multi-modèles par retour d'état.....	185
4.5.2 Commande multi-modèles par mode glissant.....	188
Conclusion.....	192

<b>Conclusion générale.....</b>	<b>193</b>
<b>Notations .....</b>	<b>197</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>203</b>
<b>Annexes .....</b>	<b>213</b>
Annexe 1.....	215
Annexe 2.....	217
Annexe 3.....	218
Annexe 4.....	221

# **Introduction générale**



# Introduction générale

La modélisation des systèmes réels est plus ou moins précise. En effet, elle se fait en négligeant certaines non linéarités et perturbations, souvent même, en réduisant le nombre de variables d'état du système. Et c'est à partir de cette représentation approximative de la réalité physique que l'on souhaite construire le plus simplement possible une commande robuste et performante.

Lorsque la partie commandée du processus est faiblement perturbée, les algorithmes de commande classiques, par exemple à action proportionnelle intégrale dérivée, peuvent s'avérer suffisants si les exigences sur la précision et la performance du système ne sont pas trop strictes. Néanmoins, dans le cas contraire et particulièrement lorsque la partie commandée est soumise à de fortes non linéarités et à des variations temporelles, il faut concevoir des algorithmes de commandes assurant la robustesse du comportement du processus vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres et leurs variations. On peut citer dans ce contexte, les systèmes de commande par mode glissant [Utkin 78] et [Bühler 86] qui sont en fait un cas particulier des systèmes à structure variable [Emelyanov 67] et [Utkin 77].

La caractéristique principale de ces systèmes est la commutation de leurs lois de commandes sur une surface choisie a priori, appelée surface de glissement, afin d'y maintenir, sous certaines conditions, le point représentatif de l'évolution du système. Le choix de cette surface dépend de la dynamique et du mode de stabilisation désirés pour le système en boucle fermée. Le système est dit alors en régime glissant et se trouve dans l'état du "système réduit" et libre de dimension inférieure du nombre d'entrée à la dimension du système original. Par suite, sa dynamique devient insensible aux variations paramétriques, aux erreurs de modélisation (dans une gamme qui reste large par rapport à celles des algorithmes classiques), et aux perturbations. La mise en oeuvre d'une telle commande est très simple. En effet, elle ne nécessite pas une représentation exacte du processus, ce qui est un avantage considérable à ne pas négliger. Cependant, l'utilisation de cette approche a été longtemps limitée par les vibrations résiduelles haute-fréquences qui se manifestent sur les grandeurs asservies. Diverses extensions méthodologiques ont permis de pallier à cet inconvénient,

néanmoins elles ont créé d'autres problèmes tels que la complexité de la mise en oeuvre, l'existence d'un compromis entre la robustesse et les performances du système, etc...

Dans ce mémoire, nous avons visé l'élaboration d'une loi de commande par mode glissant assurant à la fois robustesse, performance et simplicité.

Le premier chapitre, de nature bibliographique, présente le formalisme classique des régimes glissants dans les cas monovariante et multivariante. Leurs avantages et inconvénients sont illustrés par quelques exemples de simulation. Enfin, nous rappelons les résultats obtenus avec certaines extensions méthodologiques.

La synthèse d'un nouveau contrôleur par mode glissant dans le cas des systèmes monovariants fait l'objet du deuxième chapitre. Le choix d'une surface de glissement de même ordre que celui du système initial induit un compensateur dynamique dont l'action sera superposée à celle de l'entrée choisie pour le système non perturbé. La loi de commande ainsi établie permet de résoudre les problèmes liés au phénomène de broutement et à la réduction de l'ordre du système en boucle fermée. La robustesse de ce contrôleur dynamique par mode glissant pour différents types de perturbations est étudiée.

Dans le troisième chapitre, nous étendons les résultats obtenus pour les systèmes monovariants au cas des systèmes multivariants par une technique de découplage. De plus, une approche d'optimisation des gains et des temps de ralliement à la surface est exposée. Enfin, on réalisera une étude comparative de robustesse pour trois algorithmes de commande par mode glissant appliqués à la commande d'un moteur synchrone est présentée.

Enfin, le quatrième chapitre de ce mémoire concerne les techniques avancées de commandes en régime glissant par une approche floue dans un premier temps et une approche multi-modèles dans un second temps. En effet, la synthèse d'un gain de glissement flou est faite dans le but de réduire le phénomène de broutement. Enfin, l'intégration de la commande dynamique par mode glissant dans l'approche multi-modèles par une interpolation linéaire sera présentée.

# **Chapitre 1**

## **Formalisme classique des régimes glissants**



## Introduction

Les processus physiques sont le plus souvent non linéaires, mal définis et ont des paramètres variables. Par exemple, dans le cas des robots les équations dynamiques sont non linéaires, couplées, et les paramètres intervenant dans leur description dépendent de la charge. D'autre part, un modèle mathématique n'est rien d'autre qu'une représentation approximative de la réalité physique et cependant nous ne disposons que de ce modèle pour construire une loi de commande. Ainsi en vertu de la physique du système, qu'il nous faudra prendre en compte, la commande devra être **robuste** [Behtash 90] dans le sens où elle devra assurer une faible sensibilité aux incertitudes sur les paramètres, à leurs variations et aux perturbations.

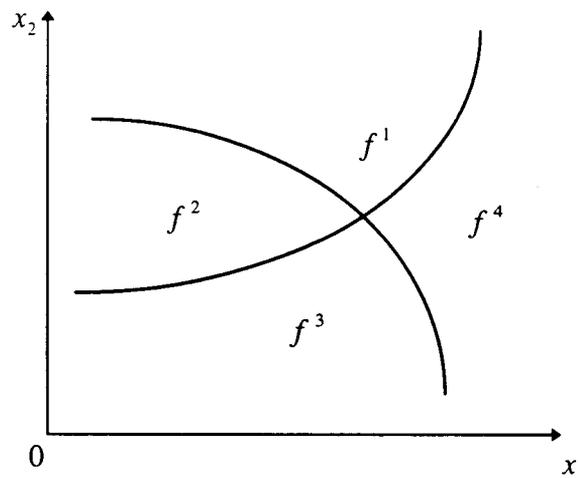
Les systèmes de **commande à structure variable** constituent une solution à ce problème (voir par exemple [Utkin 92], [Sira-Ramirez 88] et [Slotine 84]). Ils sont basés sur l'utilisation d'un terme discontinu dans la commande afin de contraindre le point représentatif de l'évolution du système à vérifier une équation différentielle, choisie a priori, généralement linéaire, **invariante et exponentiellement stable**.

La structure de ce chapitre est la suivante. Dans un premier temps, on rappellera l'historique et les concepts classiques utilisés pour la synthèse et l'analyse des régimes glissants des **systèmes monovariables** (sections 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5). On montrera l'intérêt particulier et la robustesse que présente un bouclage linéarisant à structure variable. La généralisation du cas monovisible au cas **multivariable linéaire en entrées** sera exposée dans la suite. Des exemples de réalisation de commande par mode glissant seront étudiés pour montrer les avantages et les inconvénients de ce type de commande. Enfin, on présentera les diverses **extensions méthodologiques**, leurs motivations et les résultats obtenus.

## 1.1 Des systèmes à structure variable aux régimes glissants

La théorie des systèmes à structure variable, initialisée au début du 20<sup>ème</sup> siècle [Nikol'ski 34], a pris son essor dans les années 60 par Emelyanov [Emelyanov 62] et [Itkis 76]. Pour de tels systèmes la structure du contrôleur utilisé peut changer d'une façon discontinue entre deux ou plusieurs structures. C'est le cas, par exemple, des circuits de conversion de puissance, où le système est gouverné par une équation différentielle différente pour chaque position de l'interrupteur [Hassan 93].

Un modèle serait du type  $\dot{x} = f(x,t)$ , où le champ de vecteurs  $f$  prend diverses valeurs  $f^i$  selon la région de l'espace d'état où l'on se trouve.



**Figure 1.1** : Systèmes à structure variable dans une coupe de l'espace d'état.

Les théories de la commande "bang-bang" et des systèmes à relais constituent un cas particulier de la théorie des systèmes à structure variable. Cette dernière a donné naissance aux notions de régimes glissants qui se sont par la suite étendus aux systèmes discontinus réalisés artificiellement [Utkin 77] et [Sira-Ramirez 90], c'est-à-dire, des systèmes du type  $\dot{x} = f(x,t,u)$ , avec  $f$  une fonction non linéaire continue, et pour lesquels on définit un retour d'état discontinu à l'aide de la variable  $u$ . Cette approche a pour but de maintenir l'état représentatif de l'évolution du système sur une variété  $S$  définie au préalable, appelée **surface de glissement**.

Dans ce contexte et sous certaines conditions, le système est dit en **régime glissant** et se trouve alors dans l'état du "système réduit" de dimension inférieure ou égale à  $(n - 1)$  et libre.

La dynamique du système, ainsi que sa stabilité sont indépendantes de la fonction  $f(x,t)$  et dépendent uniquement des paramètres de l'hypersurface choisie, ce qui explique l'insensibilité de cette loi de commande vis-à-vis des perturbations et des variations paramétriques.

Ainsi, avant de s'intéresser aux régimes glissants, nous allons rappeler quelques notions relatives aux systèmes discontinus.

### 1.1.1 Théorie des équations différentielles à second membre discontinu

La théorie de la commande à structure variable est basée sur la théorie des équations différentielles à second **terme discontinu** [Nikol'ski 34] et [Filippov 60, 88, 79].

#### 1.1.1.1 Notion de solution

Considérons le système d'ordre  $n$  représenté dans l'espace d'état par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad (1.1)$$

où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in X$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ , est le vecteur état,  $t$  est la variable temps et  $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$  représente un champ de vecteurs définissant les seconds membres qui sont des fonctions continues par morceaux présentant une discontinuité sur une variété différentiable  $S$ , de dimension  $(n - 1)$ , donnée par :

$$S(x) = 0. \quad (1.2)$$

La théorie des équations différentielles ordinaires cesse d'être valide car le système (1.1) ne vérifie plus les conditions classiques d'existence et d'unicité de solutions du théorème de Cauchy-Lipschitz à cause de la discontinuité du second membre. De nombreux auteurs (voir par exemple [Filippov 60, 88, 79], [Utkin 77, 92], [Aizerman 74] et [Bartolini 93]) se sont intéressés à ce **problème d'existence de solution**,  $x(t)$  décrivant l'état du système sur la surface de discontinuité  $S$  à l'instant  $t$ .

L'idée de base était de considérer un voisinage "tubulaire" contenant  $S$ , résultant des considérations pratiques telles que, phénomènes d'hystérésis, retard ou gain infini (la commutation est imparfaite), puis de faire tendre ce voisinage vers la surface  $S$  (la commutation devient parfaite).

On présente dans le paragraphe suivant l'approche de Filippov dans le cas d'une seule surface de discontinuité [Filippov 60, 88], sa généralisation à plusieurs surfaces de discontinuité est décrite dans [Filippov 79].

### 1.1.1.2 Approche de Filippov

Afin de résoudre ce problème de solution sur la surface de discontinuité  $S$ , il est nécessaire de chercher une fonction continue du temps qui évolue sur  $S$ . Pour cela, il faut prolonger le champ  $f$  sur la surface  $S$ , c'est-à-dire, il faut que  $f$  appartienne à l'espace tangent à  $S$  en  $x$ . Par suite, les vecteurs vitesses doivent être dirigés vers la surface  $S$ , en d'autres termes, la surface  $S$  doit être attractive au moins dans un voisinage (figure 1.2).

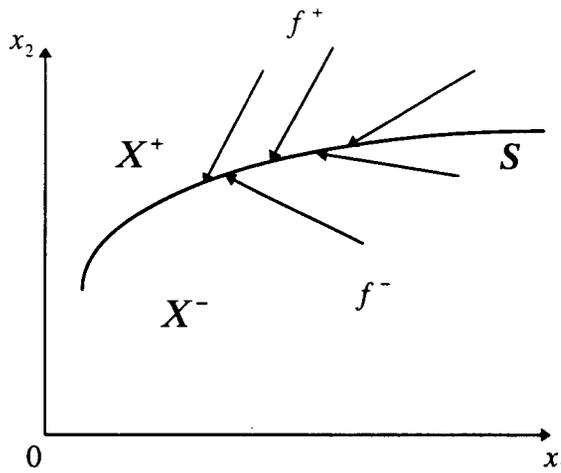


Figure 1.2 : Schéma de principe du régime glissant selon une coupe de l'espace d'état.

L'espace d'état  $X$  est donc caractérisé par (figure 1.2) :

$$X = \begin{cases} X^+ & \text{si } S(x) > 0, \\ X^- & \text{si } S(x) < 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

ce qui nous donne au voisinage de  $S(x) = 0$  deux valeurs de  $f$  :

$$f = \begin{cases} f^+ & \text{si } S(x) > 0, \\ f^- & \text{si } S(x) < 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Nous appellerons  $f_N^+$  et  $f_N^-$  les projections respectives de  $f^+$  et de  $f^-$  sur la normale à la surface  $S(x) = 0$ , orientée de  $X^-$  vers  $X^+$ .

Les conditions d'existence et d'unicité d'une solution  $x(t)$  du système (1.1) sont fournies par le théorème de Filippov suivant :

**Théorème 1.1 [Filippov 60]**

Considérons le système décrit par l'équation (1.1) satisfaisant la condition :

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq K, \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (1.5)$$

$K$  étant une constante indépendante de  $t$  et de  $x$ . Cette condition étant vérifiée pour tout  $x$  dans le domaine  $X = X^- \cup X^+$ . Soit une fonction  $S$  deux fois différentiable, telle que chacune des fonctions  $f_N^+$  et  $f_N^-$  est continue par rapport à  $x$  et  $t$ , pour  $x$  solution de  $S(x) = 0$ , et le vecteur  $h = f_N^+ - f_N^-$  est continûment différentiable. Si en chaque point de la surface  $S(x) = 0$ , les inégalités  $f_N^+ < 0$  et  $f_N^- > 0$  sont vérifiées, il existe alors dans le domaine  $X$ , une solution unique  $x(t)$  du système (1.1) qui dépend des conditions initiales de façon continue.

On peut remarquer que les inégalités  $f_N^+ < 0$  et  $f_N^- > 0$  signifient que  $S$  est **attractive** au moins dans un voisinage.

La solution unique  $x(t)$  du système (1.1) sur la surface de discontinuité  $S$  est donnée par la définition 1.1.

**Définition 1.1 [Filippov 60]**

La solution du système (1.1), pour  $x \in S$ , est définie par :

$$\begin{cases} x \in S, \\ \dot{x} = f_0 \in \{\overline{\text{Conv}(F)}_x \cap T_x S\}, \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $\text{Conv}(F)_x$  est le plus petit espace convexe engendré par  $f^+$  et  $f^-$  en  $x$ ,  $\overline{\text{Conv}(\cdot)}$  sa fermeture,  $T_x S$  l'espace tangent à  $S$  en  $x$ .

Il vient donc :

$$\begin{cases} x \in S, \\ \dot{x} = f_0(x,t) = \alpha f^+(x,t) + (1-\alpha)f^-(x,t), \end{cases} \quad (1.7)$$

avec  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Notons  $\nabla S$  le gradient de  $S(x)$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs.

D'après la définition 1.1, il faut que l'on ait  $\alpha$  (1.7) tel que :

$$\langle \nabla S, f_0 \rangle = 0. \quad (1.8)$$

Les équations (1.7) et (1.8) permettent d'établir la relation :

$$\alpha = \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle}. \quad (1.9)$$

En portant l'expression de  $\alpha$  dans (1.7), on obtient pour  $x \in S$  :

$$\dot{x} = \left[ \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \right] f^+ - \left[ \frac{\langle \nabla S, f^+ \rangle}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \right] f^-. \quad (1.10)$$

La trajectoire d'état sur la surface  $S$  est donc une combinaison convexe et unique des deux champs située dans l'espace tangent de la variété  $S$ .

On représente sur la figure suivante le principe de la construction du champ de vecteurs moyen  $f_0$  permettant de déterminer la solution du système (1.1) lorsque  $x \in S$ .

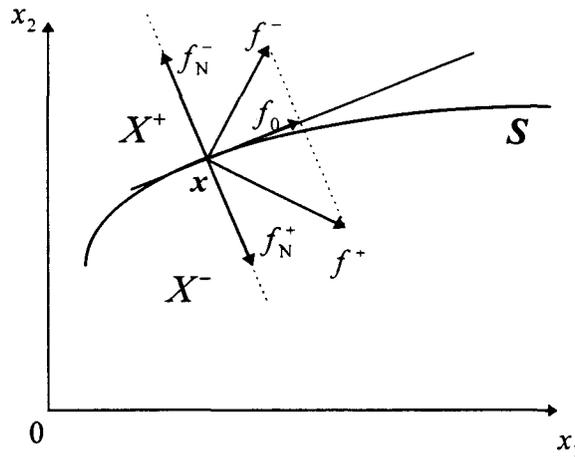


Figure 1.3 : Schéma de principe de la construction du champ de vecteur moyen  $f_0$  dans une coupe de l'espace d'état.

### 1.1.2 Condition de glissement

Pour exprimer la condition d'existence de solution énoncée par Filippov (voir paragraphe 1.1.1.2) ( $f_N^+ < 0$  et  $f_N^- > 0$ ) en fonction de la surface  $S$ , on peut calculer sa dérivée  $\dot{S}$  :

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \langle \nabla S, f \rangle, \quad (1.11)$$

qui représente le produit scalaire de la normale à la surface  $S(x) = 0$ , orientée de  $X^-$  vers  $X^+$  et du vecteur  $f(x, t)$ . Par suite, si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on en déduit :

$$(f_N^+ < 0 \text{ et } f_N^- > 0) \Leftrightarrow S\dot{S} < 0. \quad (1.12)$$

Cette condition (1.12), appelée **condition de glissement**, représente l'inégalité fondamentale pour la synthèse de la commande par modes glissants. Elle traduit le fait que si les projections de  $f^+$  et  $f^-$  sur le vecteur  $\nabla S$ , dans un voisinage de la surface  $S$ , sont de signes contraires alors la surface  $S$  est attractive.

## 1.2 Dynamique glissante

La **dynamique glissante** est définie par la trajectoire de l'état sur la surface glissante  $S$ . Il existe deux approches différentes selon la nature du système traité, c'est-à-dire discontinu par "nature" ou "artificiellement" [Utkin 77, 92].

Dans le premier cas, on considère que la commutation est parfaite et on applique l'approche de Filippov (voir section 1.1.1.2).

Dans le deuxième cas, c'est l'approche de la **commande équivalente** qui est la plus utilisée.

### 1.2.1 Approche de la commande équivalente et régime glissant idéal

La dynamique glissante résulte de l'action du champ équivalent, donné par la commande, appelée **commande équivalente**, qui rend la surface de glissement invariante [Utkin 92]. Cette condition d'invariance a été reprise en utilisant les concepts de la géométrie différentielle [Sira-Ramirez 88, 89, 90]. On considère des systèmes du type :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1.13)$$

avec  $g = [g_1, \dots, g_n]^T$  un champ de vecteurs définissant les gains de commande et  $u \in \mathbb{R}$ , une loi de commande vérifiant :

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } S(x) > 0, \\ u^- & \text{si } S(x) < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Selon cette loi, le système présente un régime glissant caractérisé par la dynamique équivalente

$$f_{eq}(x) = f(x) + g(x)u_{eq}, \quad (1.15)$$

dans laquelle,  $u_{eq}$  est la commande équivalente qui rend la surface de glissement  $S$  invariante et vérifie, pour  $x \in S$ , l'inégalité

$$\min(u^-(x), u^+(x)) < u_{eq}(x) < \max(u^-(x), u^+(x)). \quad (1.16)$$

En notant

$$u_{\min} = \min(u^-(x), u^+(x)), \quad \text{et} \quad u_{\max} = \max(u^-(x), u^+(x)), \quad (1.17)$$

on peut interpréter  $u_{eq}$  comme étant la valeur moyenne de  $u(t)$  lors de la commutation rapide entre  $u_{max}$  et  $u_{min}$ , [Utkin 92].

La commande équivalente correspond au **régime glissant idéal** (ni seuil, ni retard, ni hystérésis), c'est-à-dire pour lequel le glissement est décrit en utilisant la **condition d'invariance** :

$$S(x) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{S}(x) = 0. \quad (1.18)$$

Il vient en développant les calculs :

$$\dot{S} = \langle \nabla S, f + g u_{eq} \rangle = 0, \quad (1.19)$$

d'où :

$$u_{eq} = - \frac{\langle \nabla S, f \rangle}{\langle \nabla S, g \rangle}, \quad (1.20)$$

avec la condition d'existence :

$$\langle \nabla S, g \rangle \neq 0. \quad (1.21)$$

En portant l'expression de  $u_{eq}$  dans (1.13), on obtient l'équation du régime glissant idéal (solution de ((1.13), (1.14)) sur la surface  $S = 0$ ) :

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u_{eq} = \left[ I - g(x) (\langle \nabla S, g(x) \rangle)^{-1} \cdot (\nabla S) \right] f(x). \quad (1.22)$$

## 1.2.2 Influence des champs de vecteurs $f(x)$ et $g(x)$ sur le régime glissant

Notons par  $T_x X$  l'espace tangent à  $X$  en  $x$  et  $\Delta_S(x)$  un sous espace de  $T_x X$ , représentant la distribution glissante associée à la surface  $S$ , tels que :

$$\langle \nabla S, \Delta_S(x) \rangle = 0 \quad \text{i.e} \quad \Delta_S(x) = \text{Ker}(\nabla S), \quad (1.23)$$

alors la condition d'invariance de la variété glissante  $S$  (1.18) conduit à [Sira-Ramirez 88] :

$$Pf(x) \in \text{Ker}(\nabla S), \quad (1.24)$$

où  $P$  est un opérateur de projection sur  $T_x X$ , défini par :

$$P = \left[ I - g(x) \left( \langle \nabla S, g(x) \rangle \right)^{-1} \langle \nabla S, \cdot \rangle \right]. \quad (1.25)$$

Considérons la distribution  $\mathcal{D} \in \text{Vect}\{g(x)\}$ , où  $\text{Vect}\{g(x)\}$  est l'espace engendré par la base  $g(x)$ , et prenons par exemple, des vecteurs de la forme  $g(x)u(x)$ . On a donc :

$$Pg(x)u(x) = \left[ g(x) - g(x) \left( \langle \nabla S, g(x) \rangle \right)^{-1} \langle \nabla S, g(x) \rangle \right] u(x) = 0. \quad (1.26)$$

Ainsi, le champ de vecteurs  $g$  n'a aucune influence sur la dynamique glissante. En effet, la nature du mode de glissement idéal est définie par les composantes du champ de vecteurs  $f$  le long de la distribution  $\Delta_S(x)$ . En d'autres termes, seule la projection du champ  $f$  sur l'espace tangent à la surface détermine la dynamique de glissement.

### 1.2.3 Remarques

- Dans le cas des systèmes non affines en la commande, la dynamique glissante peut être calculée en utilisant l'approche de la commande équivalente pour le système rendu localement affine.

- Les dynamiques glissantes aux sens de Filippov [Filippov 60] et de Utkin [Utkin 92] sont équivalentes dans le cas des systèmes linéaires en entrée. Dans le cas contraire, elles sont en général différentes. L'exemple suivant illustre le cas où l'on a une solution bien définie selon Filippov, ce qui n'est pas le cas selon Utkin.

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -ax_2 + \frac{1}{2u+1}, \end{cases} \quad \text{avec } |u| > 1. \quad (1.27)$$

On définit la surface de glissement

$$S = ax_1 + x_2 = 0, \quad (1.28)$$

dont la dérivée :

$$\dot{S} = \frac{1}{2u+1} \neq 0. \quad (1.29)$$

On ne peut définir la dynamique glissante selon Utkin puisque la commande équivalente n'existe pas. Ce qui n'est pas le cas, selon Filippov, puisqu'elle est définie  $\forall |u| > 1$ .

### 1.3 Domaine de glissement : Analyse par les fonctions de Lyapunov

La détermination du **domaine de glissement** peut se ramener à l'étude de la stabilité du système en régime glissant [Bezvodinskaya 74], [Utkin 92] et [Perruquetti 97a]. Pour cela, on suppose que le glissement s'effectue dans un voisinage tubulaire de la surface  $S$  (glissement réel) qu'on fera tendre, dans le cas d'un glissement idéal, vers la variété glissante  $S$ . Les résultats de Lyapunov [Lyapunov 92] concernant la stabilité des systèmes non linéaires peuvent être ainsi étendus aux régimes glissants [Utkin 92].

#### Définition 1.2 [Utkin 92]

Un domaine  $D$  de dimension  $(n-1)$  inclus dans la variété  $S(x) = 0$  est un domaine de glissement si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , tel que  $\forall x_0 \in \nu(D, \delta)$ , la solution  $x(t) = x(t, u, t_0, x_0)$  ne peut quitter  $\nu(D, \varepsilon)$  qu'à travers  $\nu(\partial D, \varepsilon)$ .

Avec  $\nu(D, \varepsilon)$  un  $\varepsilon$ -voisinage de  $D$ ,  $\nu(\partial D, \varepsilon)$  un  $\varepsilon$ -voisinage de la frontière de  $D$  (notée  $\partial D$ ),  $x_0$  et  $t_0$  les conditions initiales.

Le domaine de glissement est la partie utile de la surface sur laquelle il peut y avoir naissance d'un régime glissant. Le théorème suivant d'Utkin, qui est basé sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov, fournit ces conditions dans le cas général, celui des systèmes multivariables [Utkin 92]. Dans ce contexte, on définit la surface  $S$  comme étant l'intersection de plusieurs surfaces élémentaires (voir section 1.6).

**Théorème 1.2 [Utkin 92]**

Pour qu'un domaine  $D$  de la variété  $S(x) = 0$  soit un domaine de glissement pour le système (1.13) et (1.14), il suffit que pour tout  $x$  de ce domaine il existe une fonction  $V(S,x,t)$ , continûment différentiable par rapport à chacun de ses arguments, définie sur un ensemble  $\Omega$  contenant l'origine et vérifiant les conditions ci-dessous :

1-  $V(S,x,t)$  est définie positive par rapport à  $S$  :

$$V(S,x,t) > 0 \text{ si } S \neq 0 \text{ et } V(0,x,t) = 0.$$

2- Sur  $\|S\| = R$ , pour tout  $t$  et tout  $x$  de la région considérée  $D$  :

$$\inf_{\|S\|=R} V(S,x,t) = h_R, \quad \sup_{\|S\|=R} V(S,x,t) = H_R, \quad \lim_{R \rightarrow 0} H_R = 0, \quad \text{où } h_R \text{ et } H_R \text{ sont des constantes}$$

positives qui dépendent exclusivement de  $R$ .

3-  $\frac{dV(S,x,t)}{dt}$  est définie négative pour tout  $S(x) \neq 0$  (en  $S$  elle n'est pas définie).

4- Sur  $\|S\| = R$  en dehors des points de discontinuités la relation :

$$\sup_{\|S\|=R} \frac{dV}{dt} = -M_R, \quad M_R > 0, \quad \sup_{R \in [a,b]} M_R > 0,$$

est vraie pour tout  $0 < a < b$  avec  $S \in \Omega$  si  $\|S\| \leq b$ .

**Remarque**

Dans le cas des systèmes monovariables, les points 2 et 4 du théorème 1.2 ne sont pas nécessaires pour définir le domaine de glissement.

**1.3.1 Domaine des conditions initiales**

D'après la définition 1.2 de Utkin l'estimation du domaine de glissement  $D$  dépend des conditions initiales  $(x_0, t_0)$ . Il est donc intéressant, pour la mise en oeuvre d'une commande par mode glissant, d'évaluer le **domaine des conditions initiales**, c'est-à-dire, le domaine contenant tous les états  $x_0$  à l'instant  $t_0$  qui permettent d'assurer un régime glissant. On présente ci-dessous la définition 1.3 de Perruquetti qui caractérise ce domaine.

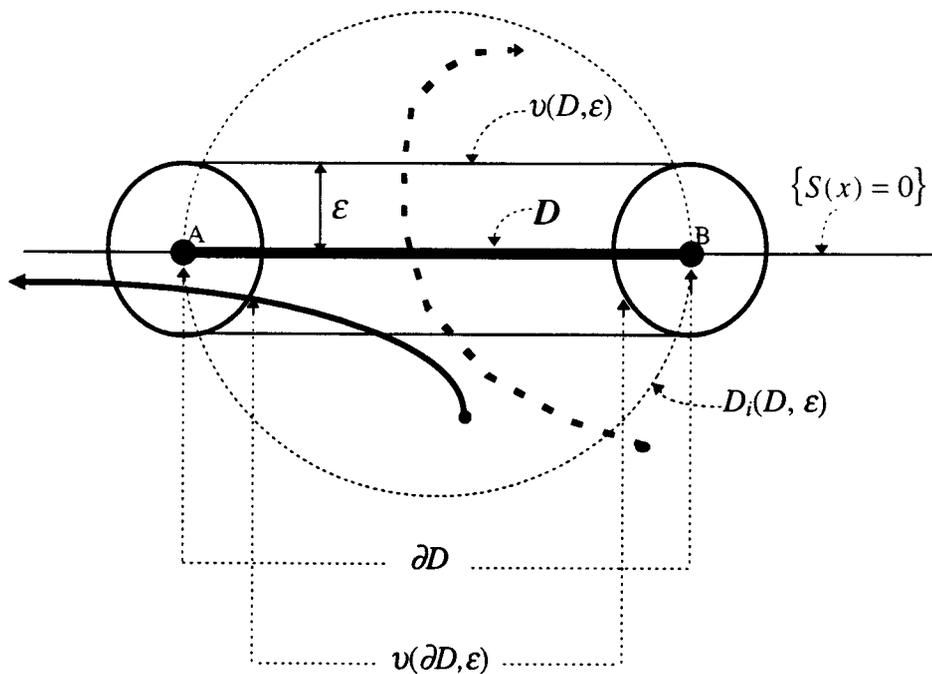
**Définition 1.3 [Perruquetti 97a]**

Un domaine  $D_i(D)$  de dimension  $n$  inclus dans l'espace d'état  $X$  est le domaine des conditions initiales du régime glissant si :

i/  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $D_i(D, \varepsilon)$  est le plus grand voisinage de  $D$  tel que la solution  $x(t)$  atteint  $v(D, \varepsilon)$  et ne peut le quitter qu'à travers  $v(\partial D, \varepsilon)$  si et seulement si  $x_0 \in D_i(D, \varepsilon)$ .

ii/  $D_i(D) = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_i(D, \varepsilon)$ .

La définition précédente est illustrée par le schéma suivant :



$$\partial D = \{A, B\}$$

- - Pas de glissement.
- Glissement.

**Figure 1.4 : Domaine de glissement.**

Pour estimer le domaine des conditions initiales, Perruquetti [Perruquetti 97a] a utilisé deux fonctions de Lyapunov : la première  $V_1$ , fonction de  $S$ , est créée afin d'assurer l'attractivité du domaine de glissement. Elle joue le même rôle que la fonction  $V$  définie dans le théorème 1.2. La deuxième  $V_2$ , fonction de  $w = \varphi(x) = [S, S^*]^T$  avec  $\varphi$  un difféomorphisme, a pour objectif de fournir des conditions d'invariance de la solution. La combinaison des deux critères ainsi obtenus permet alors d'obtenir une estimation du domaine des conditions initiales telle que la solution  $x(t, u, t_0, x_0)$  atteigne le domaine de glissement  $D$  et ne puisse le quitter qu'à travers un voisinage de sa frontière.

**Théorème 1.3 [Perruquetti 97a]**

S'il existe deux fonctions  $V_1(S)$  et  $V_2(w)$  vérifiant  $H_1$  et  $H_2$  :

$$V_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$H_1)$   $S \rightarrow V_1(S)$  avec  $V_1(S) = 0$  si  $S = 0$ ,  
et  $V_1$  est différentiable par rapport à  $S$  si  $S \neq 0$ .

$$V_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$w \rightarrow V_2(w)$ ,  
avec  $V_2$  est différentiable par rapport à  $w$  si  $S \neq 0$ .

$H_2)$  Il existe  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_2 > 0$  tels que :

$$S_2(\alpha_2) = \{w \in \mathbb{R}^n : V_2(w) \leq \alpha_2\}, \quad \dot{S}_2(\alpha_2) \cap \{w \in \mathbb{R}^n : S = 0\} \neq \emptyset,$$

$$D = S_2(\alpha_2) \cap \{w \in \mathbb{R}^n : S = 0\},$$

$$S_1(\alpha_1) = \{w \in \mathbb{R}^n : V_1(S) \leq \alpha_1\}, \quad S_1(\alpha_1) \text{ contient un voisinage de } \{w \in \mathbb{R}^n : S = 0\},$$

$$S_{12}(\alpha_1, \alpha_2) = S_1(\alpha_1) \cap S_2(\alpha_2),$$

$$w \in \partial S_{12}(\alpha_1, \alpha_2) - [\partial D \cup \partial S_1(\alpha_1)] : \nabla(V_2, S^*)^T \cdot \frac{dS^*}{dt} < 0 \text{ et } \nabla(V_1, S) \cdot \nabla(V_2, S) \geq 0,$$

$$w \in S_{12}(\alpha_1, \alpha_2) - D : \nabla(V_1, S) \cdot \frac{dS}{dt} < 0.$$

**Alors :**

$C_1)$   $D$  est un domaine de glissement pour le système (1.13) et (1.14).

$C_2)$   $S_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$  est une estimation par défaut de  $D_i(D)$ , si pour toute condition initiale  $x_0$  telle que  $w_0 = \varphi(x_0) \in S_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$ , la solution  $x(t, u, t_0, x_0)$  atteint  $D$  et ne peut le quitter qu'à travers sa frontière.

Le principe de ce théorème est illustré par le schéma de la figure 1.5.

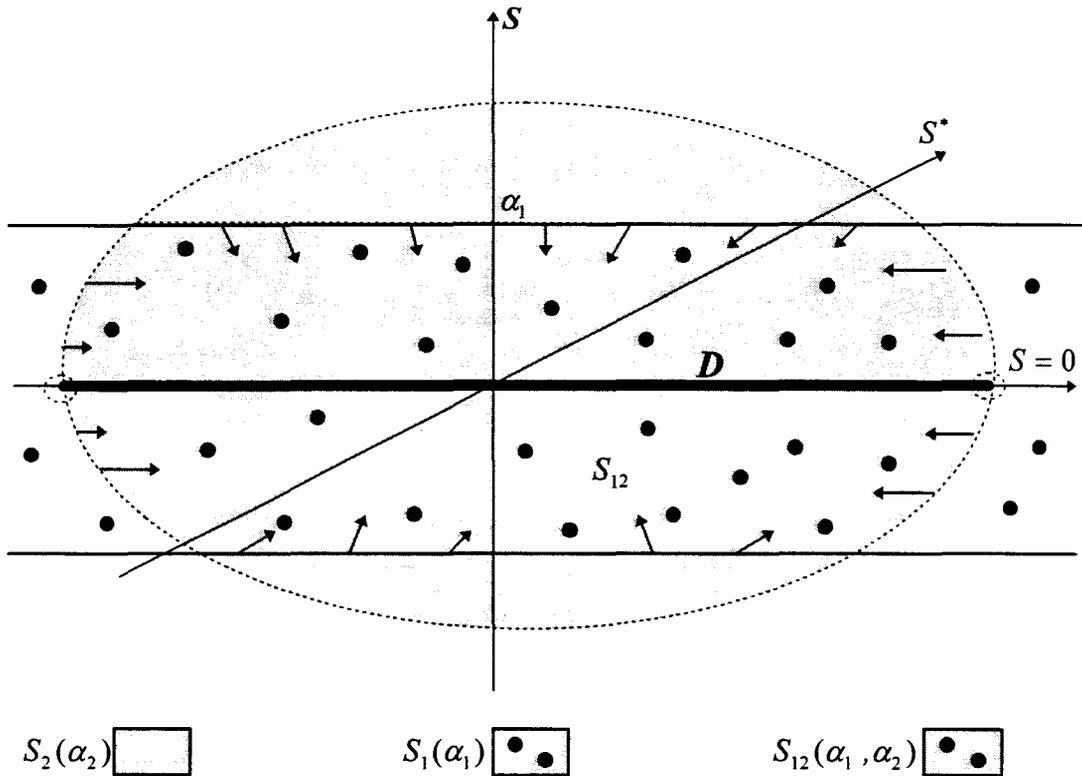


Figure 1.5 : Domaine de glissement et des conditions initiales.

**Remarque**

Le théorème 1.3 reste valable (mais devient plus restrictif) si l'on remplace dans la deuxième hypothèse  $H_2$  les conditions

$$\nabla(V_2, S^*)^T \cdot \frac{dS^*}{dt} < 0,$$

$$\nabla(V_1, S) \cdot \nabla(V_2, S) \geq 0,$$

par la condition  $\frac{dV_2}{dt} < 0$ .

Cette remarque est illustrée par l'exemple suivant.

### 1.3.2 Exemple

Soit le système non linéaire suivant [Perruquetti 97a] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_1 + x_2)^2 x_1, \\ \dot{x}_2 = (u + 2x_1)(x_1 + x_2)^2. \end{cases} \quad (1.30)$$

La transformation

$$w = Fx = [S \ S^*]^T, \quad (1.31)$$

avec :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

mène à :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (u + S^*)S^2, \\ \frac{dS^*}{dt} = -S^2 S^*. \end{cases} \quad (1.33)$$

On choisit la commande  $u$  vérifiant :

$$u = \begin{cases} -k & \text{si } S > 0 \\ k & \text{si } S < 0 \end{cases}, \quad \text{avec } k > 0. \quad (1.34)$$

Soient les fonctions  $V_1$  et  $V_2$  définies par :

$$V_1(S) = \frac{1}{2} S^2, \quad (1.35)$$

$$V_2(w) = \frac{1}{2} (S^{*2} + S^2), \quad (1.36)$$

on a alors :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} \cdot \nabla(V_1, S) = S^3 (u + S^*), \\ \frac{dV_2}{dt} = -S^2 S^{*2} + SS\dot{S}. \end{cases} \quad (1.37)$$

Le théorème 1.3 et la remarque qui le suit permettent de conclure que le domaine  $D$  défini par :

$$D = \{S = 0 \text{ et } |S^*| < k\}, \quad (1.38)$$

est un domaine de glissement pour le système (1.30) et la loi de commande (1.34) et que pour tout  $x_0$  tel que  $w_0 = Fx_0 \in D_i(D) = \{w \in \mathbb{R}^n : |S^*| < k\}$  (domaine non borné), la solution  $x(t)$  atteint  $D$  et ne le quitte éventuellement qu'à travers sa frontière. Remarquons toutefois que dans le cas présent  $x(t)$  ne quitte pas  $D$  de sa frontière mais reste sur  $D$  puisqu'en "régime glissant" on a :

$$x_1 = -x_2 \text{ et } \begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (1.39)$$

Le régime glissant n'existe donc pas au sens strict mais au sens large.

## 1.4 Invariance des régimes glissants vis-à-vis des perturbations

Considérons le système perturbé suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x), \quad (1.40)$$

où  $p$  représente les perturbations paramétriques du champ de vecteurs nominal  $f(x)$ .

L'**invariance** du régime glissant vis-à-vis de la perturbation  $p$  est donnée par la définition suivante [Sira-Ramirez 88] :

### Définition 1.5 [Sira-Ramirez 88]

Le régime glissant idéal possède une propriété d'invariance forte par rapport à la perturbation  $p$  si la dynamique du système en mode de glissement idéal est indépendante du signal de perturbation  $p$ .

Une condition suffisante d'invariance est énoncée par le théorème 1.4 de Sira-Ramirez. Son extension aux cas des systèmes multivariables non linéaires a été également faite dans [Sira-Ramirez 88], qui n'est autre que la généralisation de la condition classique d'invariance vis-à-vis des perturbations externes établie par Draženovic [Draženovic 69], El-Ghezawi [El-Ghezawi 83] et [Spurgeon 91] dans le cas des systèmes multivariables linéaires.

**Théorème 1.4 [Sira-Ramirez 88]**

Le régime glissant sur la variété  $S$  du système perturbé (1.40), satisfait les propriétés d'invariance vis-à-vis de  $p$ , si et seulement si le vecteur perturbation  $p$  satisfait la condition suivante :

$$p \in \text{Vect}\{g(x)\}, \quad (1.41)$$

avec Vect l'espace engendré par la base  $g(x)$ .

## 1.5 Bouclage linéarisant à structure variable

Le problème de la **linéarisation par difféomorphisme et bouclage** consiste à transformer, de manière exacte dans un domaine ouvert donné, un système non linéaire en un système linéaire à l'aide d'un bouclage d'état et d'un changement de variables sur l'état du système [Isidori 89] et [Fossard 93]. Lorsqu'elle existe, cette transformation permet de stabiliser le système en utilisant les méthodes courantes du linéaire (placement de pôles, synthèse quadratique, synthèse robuste, etc.) [Brockett 83] et [Charlet 89]. L'emploi de cette technique pour la régulation est essentiellement justifié par la facilité d'analyse du comportement des systèmes linéaires et la résolution d'un nombre important de problèmes réels dans ce contexte.

Dans le cas de la synthèse robuste, il existe des travaux concernant les **bouclages linéarisants à structure variable**. On peut citer par exemple, les travaux de Fernandez [Fernandez 87] et de Sira-Ramirez [Sira-Ramirez 89]. Par la suite, des chercheurs comme Harashima [Harashima 85a, 85b] commencèrent à s'intéresser à l'aspect pratique de cette approche.

Dans ce contexte, l'utilisation de la commande à structure variable a pour objectif de créer un régime glissant afin de stabiliser le système représenté sous la forme canonique de commandabilité (voir annexe 1).

### 1.5.1 Linéarisation exacte par retour d'état statique

Soit un système monovariante de dimension  $n$  décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = f(x, t) + g(x, t)u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1.42)$$

Dans l'annexe 1, on rappelle les conditions pour qu'un système non linéaire affine en la commande puisse se mettre sous cette forme, dite **forme canonique de commandabilité**.

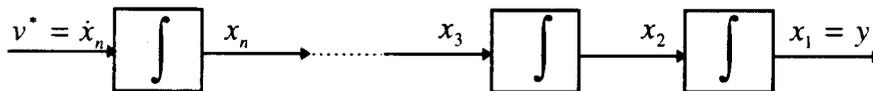
Si l'on considère le **retour d'état statique**

$$u = \frac{1}{g(x, t)}(v^* - f(x, t)), \quad (1.43)$$

expression dans laquelle  $v^*$  définit une nouvelle entrée, il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = v^*, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1.44)$$

Le modèle linéaire ainsi obtenu correspond au schéma de la figure suivante :



**Figure 1.6** : Principe de la linéarisation par retour d'état statique.

Plusieurs types de bouclages linéarisants sont proposés dans la littérature [Isidori 89]. Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse au bouclage linéarisant à structure variable [Fliess 91] et [Messenger 92].

#### Remarque

La linéarisation exacte par retour d'état statique est dite globale dans le cas où le système (1.44) est valide pour tout  $x$  appartenant à l'espace d'état.

## 1.5.2 Bouclage à structure variable

Dans le but de rendre l'origine de l'espace d'état asymptotiquement stable (voir annexe 2) pour le système (1.42), la surface de glissement  $S$  doit contenir le point final de stabilisation. En d'autres termes elle doit vérifier  $S(\text{l'origine})=0$ . Cette surface est prise ici linéaire dans le plan des phases et choisie comme étant la sous-variété de l'évolution désirée du système lors de l'application de la commande discontinue. On prend  $S$  de la forme

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_n = 1. \quad (1.45)$$

Les  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) définis dans (1.45) sont choisis de telle manière que  $a_0 + a_1 s + \dots + a_{(n-1)} s^{n-1} + s^n$  soit un **polynôme de Hurwitz**.

Le bouclage linéarisant à structure variable peut être introduit à l'aide de plusieurs types de loi de raliement à la surface. Par exemple [Elmali 92] :

$$\dot{S} = -\eta S - M \text{sign}(S), \quad \eta > 0 \text{ et } M > 0, \quad (1.46)$$

ou [Utkin 92] et [Asada 86] :

$$\dot{S} = -M \text{sign}(S), \quad (1.47)$$

avec :

$$\text{sign}(S) = \begin{cases} +1 & \text{si } S > 0, \\ 0 & \text{si } S = 0, \\ -1 & \text{si } S < 0. \end{cases} \quad (1.48)$$

et  $M$  est une constante strictement positive appelée **gain de glissement**.

Nous présentons dans ce paragraphe l'approche la plus classique [Utkin 92] et [Asada 86]. Par suite, la surface de glissement  $S$  est une solution de l'équation (1.47).

Ce choix de la surface  $S$  permet de satisfaire la condition d'attractivité

$$S\dot{S} < 0 \quad \text{si } S \neq 0. \quad (1.49)$$

En effet :

$$S\dot{S} = -M|S| < 0, \quad \text{si } S \neq 0. \quad (1.50)$$

Considérons (1.45), la dérivée de  $S$  s'écrit :

$$\dot{S} = \dot{x}_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1}, \quad (1.51)$$

l'équation (1.47) permet d'établir la relation :

$$\dot{x}_n = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - M\text{sign}(S). \quad (1.52)$$

Si l'on considère le système (1.44), il en résulte pour la nouvelle entrée l'expression :

$$v^* = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - M\text{sign}(S). \quad (1.53)$$

Ce qui permet, compte tenu de l'équation (1.43), de définir le bouclage linéarisant à structure variable :

$$u = \frac{1}{g(x,t)} \left( -\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - M\text{sign}(S) - f(x,t) \right). \quad (1.54)$$

Cette commande apparaît comme la somme d'un signal de basse fréquence  $u_{\text{eq}}$  et d'un signal de haute fréquence  $\Delta u$  assurant le régime glissant. En effet, on a :

$$\begin{cases} u_{\text{eq}} = \frac{1}{g(x,t)} \left( -\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i+1} - f(x,t) \right), \\ \Delta u = \frac{-M\text{sign}(S)}{g(x,t)}. \end{cases} \quad (1.55)$$

La convergence de  $S$  vers 0 s'effectue en un temps fini  $t_g$ , que nous appellerons pour simplifier, **temps de glissement** :

$$t_g = \frac{|S(0)|}{M}. \quad (1.56)$$

Quand le régime glissant est atteint, la dynamique du système original (1.42) est plongée dans l'état d'un système réduit et libre représenté dans l'espace d'état par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1.57)$$

Il est important de bien choisir les coefficients  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) de la surface de glissement  $S$  puisqu'ils déterminent la dynamique et le mode de stabilisation.

### 1.5.3 Remarque sur le choix de la surface

La surface de glissement peut être définie d'une façon plus générale dans l'espace de l'erreur de la sortie  $y$  par rapport à la consigne  $y_c$  :

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (y^{(i)} - y_c^{(i)}) = 0, \quad a_n = 1. \quad (1.58)$$

En effet, en remplaçant  $y_c$  par zéro et  $y^{(i)}$  par  $x_{i+1}$  dans (1.58), on retrouve l'équation (1.45).

### 1.5.4 Robustesse par rapport aux perturbations

#### 1.5.4.1 Perturbation additive

Considérons le système dynamique défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = f(x, t) + g(x, t)u + p(x, t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1.59)$$

où  $p(x, t)$  représente les perturbations extérieures, les variations paramétriques et l'effet de certaines non linéarités. On se place dans le cas où l'hypothèse :

$$|p(x, t)| \leq p^1, \quad (1.60)$$

est satisfaite.

L'expression de  $S$  est donnée par l'équation (1.45), soit :

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_n = 1.$$

On désire assurer la condition d'attractivité (1.49) de la surface  $S(x) = 0$ . En utilisant (1.59), le calcul de  $S\dot{S}$  donne

$$S\dot{S} = S \left( \sum_{i=1}^{n-1} a_i \dot{x}_{i+1} + f(x,t) + g(x,t)u + p(x,t) \right). \quad (1.61)$$

Alors le bouclage linéarisant à structure variable (1.54) défini par :

$$u = \frac{1}{g(x,t)} \left( - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \dot{x}_{i+1} - M \text{sign}(S) - f(x,t) \right).$$

assure l'attractivité de la surface  $S(x) = 0$  et maintient l'évolution sur celle-ci une fois atteinte si le gain de glissement  $M$  est supérieur à la borne maximum de la perturbation  $p(x,t)$ . Soit, en considérant (1.60) :

$$M > p^1, \quad (1.62)$$

où  $p^1$  est une borne connue.

### 1.5.4.2 Cas d'une perturbation du gain non constante

#### Première approche

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = f(x,t) + (g(x,t) + \Delta g(x,t))u + p(x,t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1.63)$$

où  $\Delta g(x,t)$  représente une incertitude sur le gain.  $p(x,t)$  et  $\Delta g(x,t)$  sont des fonctions réelles non linéaires vérifiant :

$$|\Delta g(x,t)| \leq \delta^1, \quad (1.64)$$

$$|p(x,t)| \leq p^1, \quad (1.65)$$

dans lesquelles  $\delta^1$  et  $p^1$  sont des bornes connues.

Le choix du bouclage défini par (1.54) assure la condition de glissement (1.49) du système (1.63) si le gain de glissement  $M$  vérifie [Elmali 92] :

$$M > \text{Sup}_{x,t} \left| \frac{p(x,t) + \Delta g(x,t)u_{\text{eq}}}{1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)}} \right|. \quad (1.66)$$

Il vient en utilisant les hypothèses (1.64) et (1.65) :

$$M > \frac{p^1 + \delta^1 |u_{\text{eq}}|}{1 - \frac{\delta^1}{|g(x,t)|}}, \quad (1.67)$$

avec la condition :

$$\frac{\delta^1}{|g(x,t)|} \ll 1. \quad (1.68)$$

En fait, il apparaît que la condition (1.67) n'est valable que si la commande

$$u_{\text{eq}} \text{ est bornée.} \quad (1.69)$$

On peut remplacer les conditions (1.65) et (1.69) par une seule condition moins restrictive, pour cela on pose :

$$\zeta(x,t) = p(x,t) + \Delta g(x,t)u_{\text{eq}}, \quad (1.70)$$

et l'on suppose que :

$$|\zeta(x,t)| \leq \zeta_1. \quad (1.71)$$

Dans ce contexte, la condition d'attractivité (1.49) est satisfaite par le choix du gain de glissement

$$M > \frac{\zeta_1}{1-\alpha}, \quad \text{avec} \quad \left| \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right| \leq \alpha \ll 1. \quad (1.72)$$

### Deuxième approche

Pour satisfaire la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$ ,  $M$  peut être choisi [Elmali 92], tel que :

$$M > p(x,t) + \Delta g(x,t)u. \quad (1.73)$$

Il est clair que la détermination de  $M$  nécessite la connaissance de  $u$  qui est lui même fonction de  $M$ . Afin de résoudre ce dilemme de causalité, la valeur courante de  $u$  est remplacée par la valeur la plus récente  $u(t - \tau)$ , où  $\tau$  est un temps infinitésimal utilisé pour réaliser un bouclage. C'est le concept de Youssef-Toumi [Youssef-Toumi 90], pour traiter les systèmes dynamiques à retard. En utilisant les hypothèses établies par (1.64) et (1.65), on peut écrire :

$$M(t) > p^1 + \delta^1 u(t - \tau). \quad (1.74)$$

Cette technique nécessite un réajustement du gain de glissement  $M$  à chaque instant  $t$  et par suite, une mise à jour de la connaissance des commandes et de l'influence de toutes les perturbations. De plus, elle n'est applicable que pour des systèmes ne présentant pas de variations brusques.

### 1.5.5 Exemple

Considérons le système du deuxième ordre représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 + (1 + \Delta g(x,t))u + p(x,t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1.75)$$

On souhaite pour la sortie  $y$ , une réponse à une entrée nulle du type deuxième ordre de constante de temps équivalente égale à 1/3 de seconde. Comme ce n'est pas possible ici, on choisit un comportement du type premier ordre avec la même constante de temps.

Il en résulte pour  $S$  l'expression (voir paragraphe 1.5.2) :

$$S = 3x_1 + x_2. \quad (1.76)$$

En utilisant les équations (1.75) et (1.76), la condition de glissement devient :

$$S\dot{S} = S(3\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 + (1 + \Delta g(x,t))u + p(x,t)) < 0. \quad (1.77)$$

La résolution de cette inéquation, par rapport à  $u$ , fournit des solutions assurant l'évolution du système en régime glissant. Le bouclage

$$u = -3x_2 + x_1 x_2 - M \text{sign}(S), \quad (1.78)$$

dans lequel  $M$  est choisi suffisamment grand pour contrebalancer les effets des perturbations  $\Delta g(x,t)$  et  $p(x,t)$ . Sous ces conditions de convergence, il vient donc pour le système réduit caractérisant la dynamique du système en régime glissant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1, & \text{avec } x_2 = -3x_1, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1.79)$$

Les simulations ont été réalisées dans le cas où :

$$\begin{cases} \Delta g(x,t) = 0.5 \sin t, & |\Delta g(x,t)| \leq 0.5, \\ p(x,t) = \sin t, \\ |\zeta(x,t)| \leq 2, \end{cases} \quad (1.80)$$

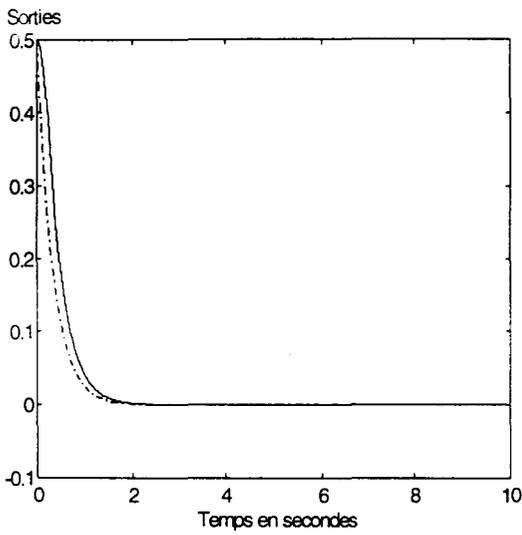
où  $\zeta(x,t)$  définie par (1.70) et s'écrit dans ce contexte :

$$\zeta(x,t) = \sin t + 0.5 \sin t (-3x_2 + x_1 x_2). \quad (1.81)$$

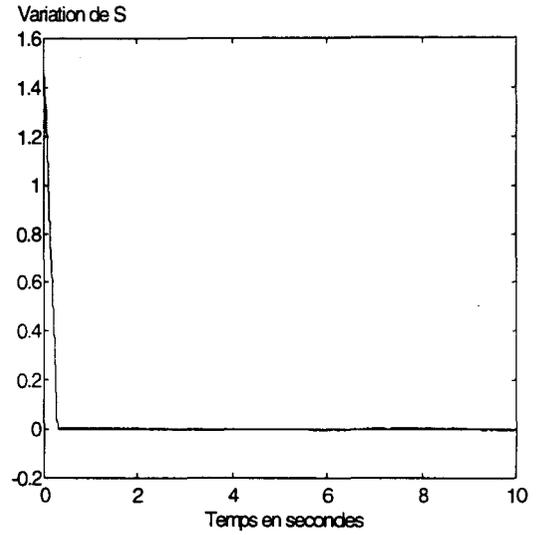
Par suite, l'inéquation (1.72) qui satisfait la condition d'attractivité de la surface et de robustesse de la commande impose un gain de glissement  $M > 2$ . Les figures suivantes présentent les résultats de simulation pour un gain de glissement

$$M = 5. \quad (1.82)$$

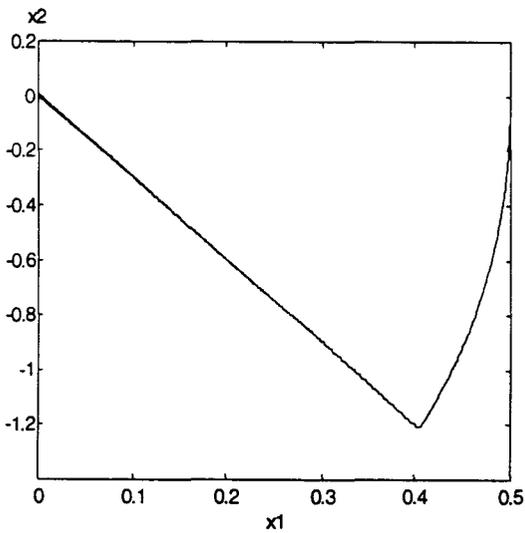
Toutes les simulations de ce mémoire ont été faites avec le logiciel Matlab en utilisant l'algorithme Runge Kutta d'ordre cinq et un pas d'échantillonnage égal à 1 ms.



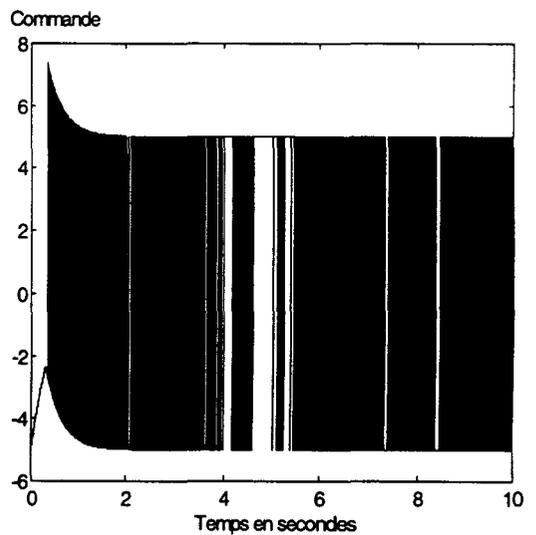
**a** : Evolution des sorties désirée  $y_d$  ( — ) et réelle  $y$  ( -.- ).



**b** : Variation de  $S$ .



**c** : Plan de phase  $x_2 = f(x_1)$ .



**d** : Variation de la commande  $u$ .

**Figure 1.7** : Evolution du système en boucle fermée.

On constate que la sortie réelle  $y$  du processus coïncide avec la sortie désirée  $y_d$  (sortie du système non perturbé) après un certain temps (voir figure 1.7.a).

Ce type de loi de commande permet donc d'atteindre l'objectif souhaité, mais engendre des oscillations donnant lieu sur certaines grandeurs à un phénomène de broutement (figures 1.7.b et 1.7.d) indésirable en pratique.

## 1.6 Systèmes multivariables linéaires en entrées

Le principe de la commande par mode glissant peut être également appliqué à des systèmes multivariables. Dans ce cas, chaque composante du vecteur commande commute rapidement entre une valeur maximale et une valeur minimale en faisant ainsi apparaître le mode de glissement. Dans cette section, on s'intéresse à un cas de systèmes largement étudié dans la littérature, celui des **systèmes multivariables linéaires en entrées**. On peut citer à titre d'exemple les travaux de Utkin [Utkin 92], de Sira-Ramirez [Sira-Ramirez 88, 90] et de Decarlo [Decarlo 88], la liste est loin d'être complète. Ces systèmes présentent un intérêt particulier, du fait que de nombreux systèmes physiques réels peuvent s'écrire sous cette forme [Dodds 91] et [Lian 95], les calculs théoriques sont plus explicites et faciles à réaliser et enfin la dynamique glissante est unique et s'obtient par la méthode de la commande équivalente.

Considérons un système non linéaire à  $m$  entrées dont l'espace d'état  $x$  est de dimension  $n$ , décrit vectoriellement par :

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad (1.83)$$

où  $f$  élément de  $\mathbb{R}^n$ , représente un champ de vecteurs, généralement non linéaire.  $G$  une matrice de gain de commande de dimension  $n \times m$ .  $f$  et  $G$  ne sont pas connus exactement et l'on suppose par la suite, qu'ils sont différentiables.  $u_i$  est la  $i$ -ème composante du vecteur commande  $u$  défini sur  $\mathbb{R}^m$  et subissant une discontinuité du type :

$$u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x) & \text{si } S_i(x) > 0, \\ u_i^-(x) & \text{si } S_i(x) < 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (1.84)$$

sur une surface  $S_i(x) = 0$  de dimension  $(n - 1)$ .

Il s'agit de définir une loi de commande  $u$  afin d'amener le plus vite possible l'état du système sur la surface  $S(x) = 0$ , et l'y maintenir jusqu'à atteindre l'état final. Dans le cas le plus général, le régime glissant a lieu sur une variété de dimension  $(n - m)$ , définie par :

$$S(x) = \bigcap_{i=1}^m S_i(x). \quad (1.85)$$

En posant :

$$\mathfrak{S} = \{f^1, \dots, f^{2m}\}, \quad (1.86)$$

avec :

$$f^1 = f(x, u_1^+), f^2 = f(x, u_1^-), f^3 = f(x, u_2^+), \dots, f^{2m} = f(x, u_m^-), \quad (1.87)$$

on obtient un système défini par une famille finie de champs de vecteurs  $\mathfrak{S}$ , de cardinal  $2m$ , entre lesquels le système commute selon la position de l'état.

La généralisation du domaine de glissement du cas scalaire au cas multivariable est donnée par la définition suivante :

**Définition 1.6 [Utkin 92]**

Pour qu'un domaine  $D$  de l'intersection  $S = \bigcap_{i=1}^m S_i$  soit un domaine de glissement pour le système (1.83, 1.84) il faut que :

- Ce domaine ne contienne aucune trajectoire entière pouvant être générée par l'équation  $\dot{x} = f^i(x)$ , où  $f^i$  est un élément de la famille  $\mathfrak{S}$ .
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$  tel que toute trajectoire commençant le mouvement dans un  $\delta$ -voisinage de dimension  $n$  de  $D$ , ne peut quitter le  $\varepsilon$ -voisinage de  $D$  que dans un voisinage de "rayon"  $\varepsilon$  de sa frontière.

Ainsi, après application de la loi de commutation définie par les  $2m$  champs de vecteurs, la variété glissante est attractive.

### 1.6.1 Dynamique glissante

Le régime glissant idéal, assuré grâce au vecteur commande équivalente  $u_{eq}$ , s'effectue en satisfaisant la condition (1.18). Cette dernière devient en utilisant (1.83) :

$$S_x f(x) + S_x G(x) u_{eq} = 0, \quad (1.88)$$

où  $S_x$  est une matrice  $m \times n$ , dont les lignes correspondent aux vecteurs gradient de  $S_i(x)$  :

$$S_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial S_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial S_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial S_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (1.89)$$

On définit alors la commande équivalente :

$$u_{eq} = -(S_x G(x))^{-1} S_x f(x), \quad (1.90)$$

avec la condition que la matrice  $(S_x G)$  soit inversible.

En remplaçant  $u$  par  $u_{eq}$  (1.90) dans (1.83), il vient pour la dynamique glissante :

$$\dot{x} = f(x) - G(x)(S_x G(x))^{-1} S_x f(x). \quad (1.91)$$

#### Remarques

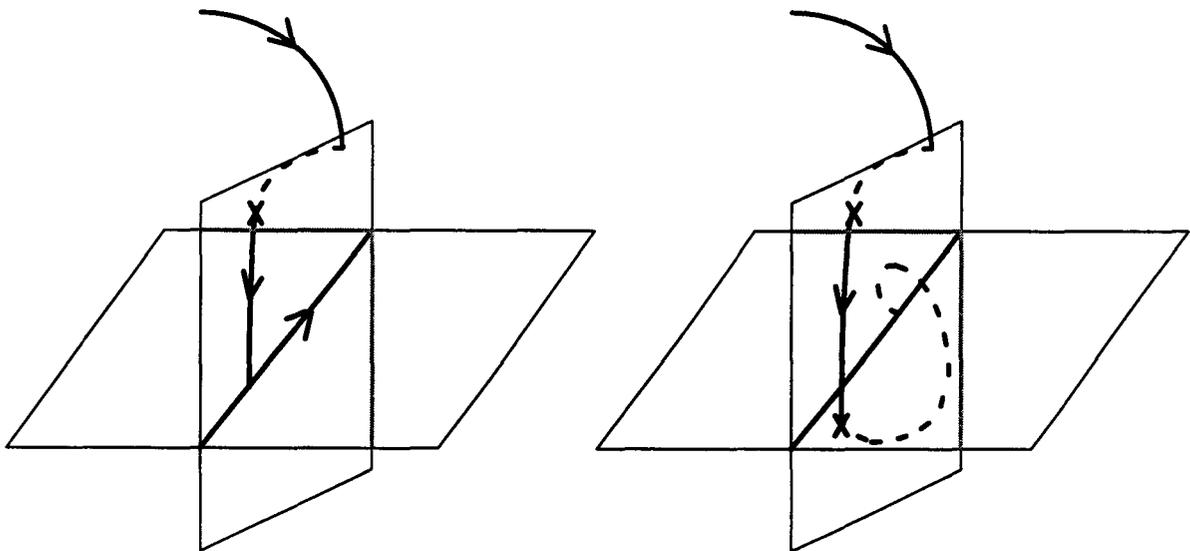
- Dans le cas des systèmes linéaires en entées, la dynamique glissante est la même selon l'approche de Filippov ou celle de Utkin [Utkin 92], ce qui permet de conclure que celle-ci n'est rien d'autre que la dynamique annulatrice du système relativement à la sortie  $y = S(x)$ .

- La dynamique glissante est définie d'une façon intrinsèque à la surface  $S$  et ne dépend pas des  $u_i^+(x)$  et  $u_i^-(x)$ , ( $i=1, \dots, m$ ).

## 1.6.2 Nature du glissement

Dans la littérature, il existe différents types de glissement [Harashima 85b]. Une première approche, consiste à regarder le processus comme résultant de la superposition de  $m$  régimes glissants scalaires. C'est-à-dire, que la loi de commutation (1.84) implique un régime glissant sur chaque surface  $S_i$ . En effet ceci est seulement suffisant pour l'existence d'un régime glissant sur  $S$  mais pas nécessaire (figure 1.8.a).

Une deuxième approche, consiste à imposer que l'état rejoigne  $S$  en traversant les  $S_i$ , c'est-à-dire, que la loi de commutation (1.84) implique un mouvement de glissement sur  $S$  sans avoir nécessairement un mouvement de glissement sur chaque  $S_i$  (figure 1.8.b).



**a** : Glissement sur  $S$  avec glissement sur chaque  $S_i$ .

**b** : Glissement sur  $S$  sans avoir glissement sur chaque  $S_i$ .

**Figure 1.8** : Différents cas de glissement.

L'idée de base de la première approche est d'exploiter la théorie développée dans le cas des systèmes dont la variété glissante est de codimension un. A titre d'exemple, on peut citer la commande par hiérarchisation [Utkin 92], dont le principe est de privilégier certaines surfaces par rapport à d'autres selon un ordre lié à la stratégie de commande.

## 1.7 Formalisation classique du régime glissant des systèmes découplés

Une autre façon d'exploiter la théorie des modes glissants dans le cas monovarié est de **découpler** le système multivarié en sous-systèmes monovariés [Isidori 89], [Borne 93] et [Fossard 93]. On définit, pour chaque sous-système, une nouvelle entrée et une variété glissante de codimension un. La loi de commande ainsi établie [Fernandez 87], [Utkin 92], [Mitzova 94] et [Huang 94], assure un mouvement de glissement sur chaque surface  $S_i$ .

### 1.7.1 Linéarisation par découplage

Dès le début de la commande multivarié, le problème du découplage n'a pas cessé d'intéresser quantité de chercheurs. Ce phénomène s'explique tant par la simplicité de mise en oeuvre du système global de commande que par sa réponse à des impératifs de sécurité en isolant des chaînes de commande [Fung 95] et [Chen 91].

#### Définition 1.7 [Isidori 89]

Un système multivarié à  $m$  entrées et  $m$  sorties est **découplable** s'il se présente comme un ensemble de  $m$  sous-systèmes monovariés indépendants, dans le sens où les entrées du sous-système  $i$  n'affectent pas la sortie  $y_j$  et réciproquement.

Le système (1.83) peut s'écrire sous la forme (voir annexe 3) :

$$y^* = f^*(x) + G^*(x)u, \quad (1.92)$$

où l'on pose [Borne 93] :

$$\begin{cases} y^* = [y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)}]^T, \\ f^* = [f_1^*, \dots, f_m^*]^T, \\ G^* = [G_1^*, \dots, G_m^*]^T. \end{cases} \quad (1.93)$$

Considérons les équations (1.92) et (1.93), il en résulte pour la représentation du système sous **forme canonique de commandabilité**, l'expression :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{x}_{ir_i} = f_i^*(x) + G_i^*(x)u, \\ y_i = x_{i1}. \end{cases} \quad (1.94)$$

Si les indices  $r_i$  sont invariants et la matrice  $G^*$  inversible dans un domaine  $D_{ex} \subset \mathbb{R}^n$  de l'espace d'état, on peut poser dans  $D_{ex}$ , le **retour d'état statique** :

$$u = G^{*-1}(v^* - f^*), \quad (1.95)$$

où  $v^*$  définit un nouveau vecteur de commande, et il vient pour le modèle linéaire :

$$y^* = v^*. \quad (1.96)$$

Le système ainsi découplé est formé de  $m$  sous-systèmes monovariabiles indépendants, représentés sous forme canonique de commandabilité :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{x}_{ir_i} = v_i^*, \\ y_i = x_{i1}. \end{cases} \quad (1.97)$$

### Remarques

- En plus des conditions de validité déjà présentées , si le modèle linéarisé par découplage est de dimension inférieure à celle du système initial, il faut vérifier la stabilité de la partie du processus non observable par ce modèle [Isidori 89].

- Dans le cas où la matrice  $G^*$  n'est pas inversible, on ne peut pas trouver un bouclage statique pour le système (1.94). Néanmoins, il est possible, dans certains cas, de trouver une solution mettant en oeuvre un bouclage dynamique [Isidori 89], [Nijmeijer 90] et [Fossard 93] (voir annexe 3).

### 1.7.2 Bouclage à structure variable

Si l'on considère le système décrit par (1.97), on définit  $m$  surfaces découplées  $S_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) :

$$S_i = \sum_{k=1}^{r_i} a_{ik} x_{ik} = 0, \quad a_{ir_i} = 1, \quad (1.98)$$

correspondant pour la surface  $S_i$  au sous-système :

$$\begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{x}_{ir_i} = v_i^*, \\ y_i = x_{i1}, \end{cases} \quad (1.99)$$

et vérifiant :

$$S_i \dot{S}_i < 0 \quad \text{si} \quad S_i \neq 0. \quad (1.100)$$

Les  $a_{ik}$  ( $i = 1, \dots, m$ , et  $k = 0, \dots, (r_i - 1)$ ) définis dans (1.98) sont choisis de telle manière que  $a_{i0} + a_{i1}s + \dots + a_{i(r_i-1)}s^{r_i-1} + s^{r_i}$  soit **un polynôme de Hurwitz**.

D'après (1.53), on obtient pour  $v_i^*$  :

$$v_i^* = - \sum_{k=1}^{(r_i-1)} a_{ik} x_{i,k+1} - M_i \text{sign}(S_i), \quad M_i > 0. \quad (1.101)$$

$M_i$  est une constante positive choisie supérieure à la borne maximale de la perturbation (voir paragraphe 1.5.4).

Cette méthode nous permet de déterminer pour le système (1.97), le bouclage linéarisant à structure variable (1.95), où le nouveau vecteur commande est donné par la relation :

$$v^* = \begin{bmatrix} - \sum_{k=1}^{(r_1-1)} a_{1k} x_{1,k+1} - M_1 \text{sign}(S_1) \\ \vdots \\ - \sum_{k=1}^{(r_m-1)} a_{mk} x_{m,k+1} - M_m \text{sign}(S_m) \end{bmatrix}. \quad (1.102)$$

Quand le régime glissant est atteint, la dynamique du système original (1.94) devient, celle d'un système de dimension  $(n - m)$  représenté dans l'espace d'état par :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 2), \\ \dot{x}_{i,r_i-1} = -\sum_{k=1}^{r_i-1} a_{ik} x_{ik}, \\ y_i = x_{i1}, \end{cases} \quad (1.103)$$

### 1.7.3 Exemple

Considérons le système à deux entrées décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 0.8x_2x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - 0.2x_1x_3 - 2x_3 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 - 0.1x_3, \end{cases} \quad (1.104)$$

avec :

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_3. \end{cases} \quad (1.105)$$

#### 1.7.3.1 Linéarisation par découplage

En dérivant les sorties  $y_1$  et  $y_2$  jusqu'à faire apparaître les composantes de la commande  $u_1$  et  $u_2$ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -6x_1 + 0.8x_2x_3 + u_1, \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} = -3.1x_2 - 0.2x_1x_3 - 1.99x_3 + 2u_2. \end{cases} \quad (1.106)$$

Si l'on considère le retour d'état statique défini au paragraphe 1.7.1, il vient :

$$\begin{cases} u_1 = v_1^* + 6x_1 - 0.8x_2x_3, \\ u_2 = 0.5(v_2^* + 3.1x_2 + 0.2x_1x_3 + 1.99x_3). \end{cases} \quad (1.107)$$

Suite aux erreurs de modélisation et aux perturbations externes, la description du processus, donnée par le système (1.104) n'est pas exacte. En effet, la représentation du système réel s'écrirait :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 0.8x_2x_3 + u_1 + p_1(x, t), \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - 0.2x_1x_3 - 2x_3 + 2u_2 + p_2(x, t), \\ \dot{x}_3 = x_2 - 0.1x_3, \end{cases} \quad (1.108)$$

pour lequel on suppose :

$$\begin{cases} |p_1(x, t)| \leq p^1, \\ |p_2(x, t)| \leq p^2, \end{cases} \quad (1.109)$$

avec  $p^1$  et  $p^2$  des bornes connues. Le système réel découplé est composé donc de deux sous-systèmes monovariabiles qui s'écrivent en tenant compte de (1.108) :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = v_1^* + p_1(x, t), \\ y_1 = x_1, \end{cases} \quad (1.110)$$

et

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dt} = x_2 - 0.1x_1, \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} = v_2^* + p_2(x, t), \\ y_2 = x_3. \end{cases} \quad (1.111)$$

### 1.7.3.2 Contrôleur classique par mode glissant

On désire avoir pour la sortie  $y_1$  du processus une réponse à une consigne  $y_{1c}$  nulle et un comportement du type premier ordre de constante de temps égale à 1 seconde. Pour la sortie  $y_2$ , on souhaite une réponse à un échelon de commande du type deuxième ordre et de même constante de temps équivalente. Ceci n'est pas possible, on choisit donc des comportements correspondant à des systèmes d'ordres inférieurs mais de même constante de temps (voir paragraphe 1.7.2). Il en résulte pour  $S_1$  et  $S_2$  les expressions :

$$\begin{cases} S_1 = x_1, \\ S_2 = (x_3 - \Gamma(t)) + \dot{x}_3, \end{cases} \quad (1.112)$$

où  $\Gamma(t)$  est un échelon unitaire.

Dans l'expression de la surface  $S_1$ , on ne tient pas compte de la valeur de la constante de temps désirée pour le sous-système (1.110). Ceci est dû à la définition classique de la surface de glissement (1.45).

On obtient donc les nouvelles entrées  $v_1^*$  et  $v_2^*$  :

$$\begin{cases} v_1^* = -M_1 \text{sign}(S_1), & M_1 > p^1, \\ v_2^* = 0.1x_3 - x_2 - M_2 \text{sign}(S_2), & M_2 > p^2. \end{cases} \quad (1.113)$$

En remplaçant  $v_1^*$  et  $v_2^*$  par leurs valeurs (1.113) dans (1.107), il en résulte pour le retour d'état par mode glissant l'expression :

$$\begin{cases} u_1 = -M_1 \text{sign}(S_1) + 6x_1 - 0.8x_2x_3, & M_1 > p^1, \\ u_2 = 0.5(-M_2 \text{sign}(S_2) + 2.1x_2 + 0.2x_1x_3 + 2.09x_3), & M_2 > p^2. \end{cases} \quad (1.114)$$

### 1.7.3.3 Simulations

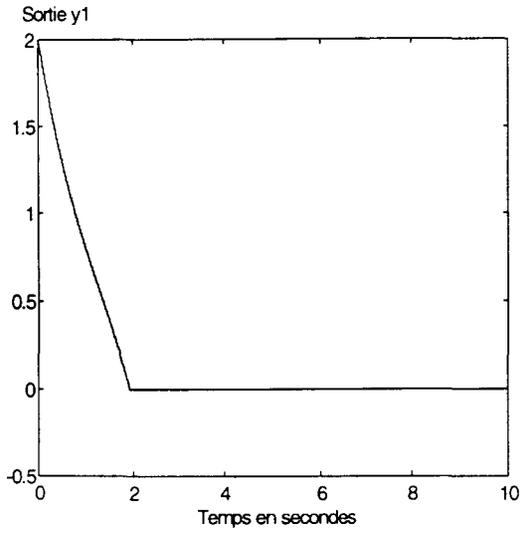
On a choisit pour les simulations :

$$\begin{cases} p_1(x,t) = 0.2x_1 + 0.4x_2x_3 + \text{sin}t, & |p_1(x,t)| \leq 1.5, \\ p_2(x,t) = -0.2x_2 - 0.2x_1x_3 + 0.5\text{sin}t, & |p_2(x,t)| \leq 1.5. \end{cases} \quad (1.115)$$

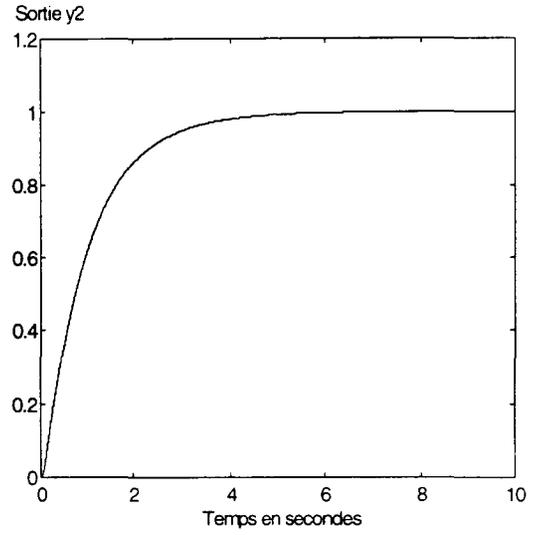
En tenant compte de (1.114) et (1.115), on réalise le choix suivant des gains de glissements :

$$\begin{cases} M_1 = 2, \\ M_2 = 10. \end{cases} \quad (1.116)$$

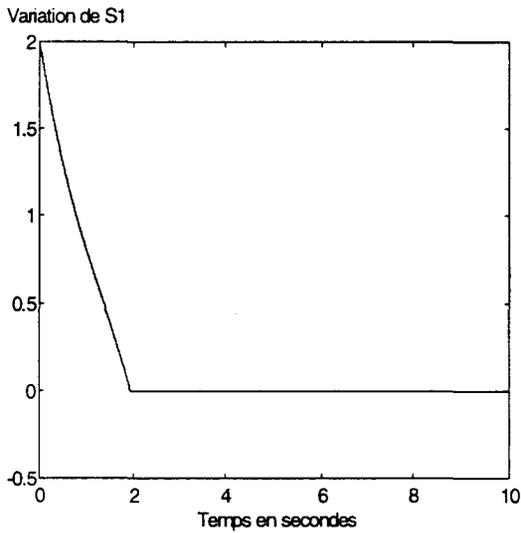
Toutefois, la loi de commande ((1.114), (1.116)) reste valable pour tout autre choix des expressions de  $p_1(x,t)$  et  $p_2(x,t)$  (1.115), tel que  $|p_1(x,t)| \leq 1.5$  et  $|p_2(x,t)| \leq 1.5$ .



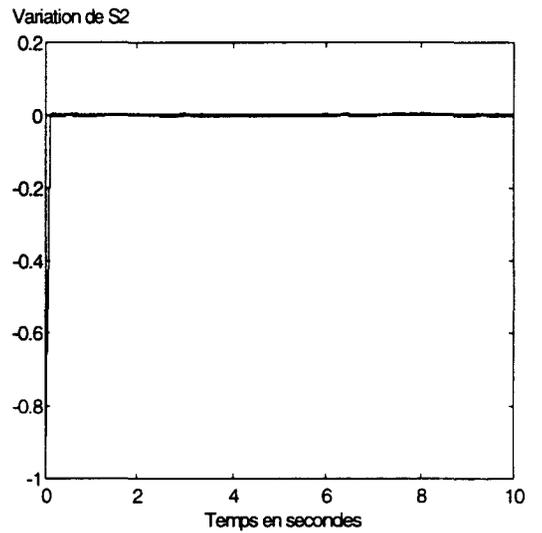
**a** : Variation de la sortie  $y_1$ .



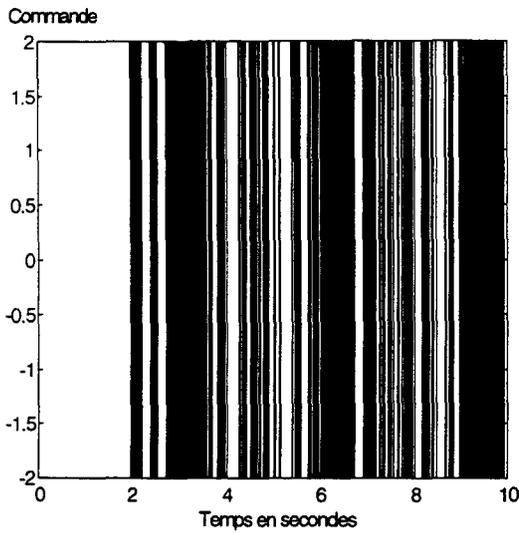
**b** : Variation de la sortie  $y_2$ .



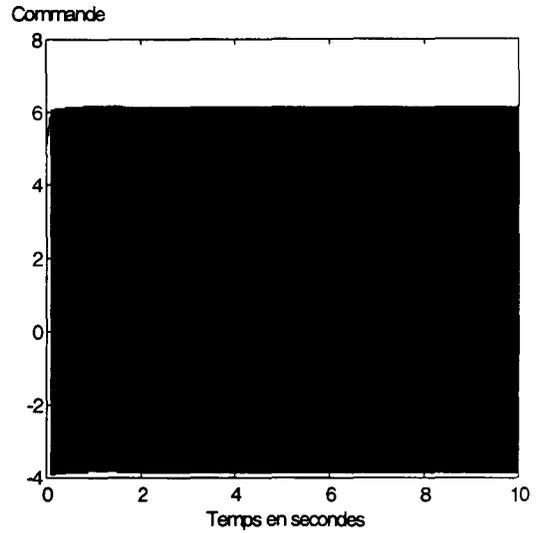
**c** : Variation de  $S_1$ .



**d** : Variation de  $S_2$ .



e : Variation de la commande  $u_1$ .



f : Variation de la commande  $u_2$ .

**Figure 1.9 :** Evolution du système en boucle fermée.

On remarque qu'après un certain temps, le comportement du système bouclé devient celui du système désiré. Cependant, la présence d'oscillations à haute fréquence dans les organes de commande (voir figures 1.9.e et 1.9.f) altère les performances du système et par suite limite l'utilisation du régulateur dans la pratique.

En plus, si l'on considère "la surface"  $S_1$  on constate que la convergence de la sortie réelle  $y_1$  vers la consigne  $y_{1c}$  ne satisfait pas le mode de stabilisation souhaité. Ce qui est normal, vu l'expression de  $S_1$  (1.112). En effet, la réduction de l'ordre du système, a fait perdre toutes les informations concernant la dynamique désirée pour la sortie  $y_1$ . Dans ce cas particulier, la notion de glissement n'est plus correcte puisque celui-ci s'effectue en un point.

## 1.8 Extensions méthodologiques dans l'élaboration de la commande

Malgré les différents avantages de la commande à structure variable, son utilisation dans certains domaines, a été entravée par les **oscillations** du régime glissant dues aux imperfections (hystérésis, retard) des éléments de commutations (voir exemples 1.5.5 et 1.7.3), qui excitent les dynamiques de hautes fréquences non modélisées. Afin d'y remédier, de nombreux algorithmes à structures variables ont été développés durant la dernière décennie. On peut citer la commande continue dans une bande de la surface [Slotine 83, 84], et [Harashima 86], qu'on va développer au paragraphe suivant, la commande avec correction intégrale en régime permanent ou pendant des phases dynamiques spécifiques [Harashima 86]. En effet, le compensateur dynamique diminue l'erreur en régime permanent, mais provoque souvent des oscillations supplémentaires sur la réponse en régime transitoire. On peut citer aussi les travaux de Ambrosino [Ambrosino 84], de Hsu [Hsu 89], de Slotine [Slotine 86], de Hamerlain [Hamerlain 93] et de Nouri [Nouri 94] concernant la commande adaptative à modèle de référence. Dans ce contexte, existe la commande sous-optimale [Mira 72] qui introduit des surfaces non linéaires ou linéaires par morceaux.

### 1.8.1 Commande continue dans une bande de la surface

La solution proposée par Slotine [Slotine 83] consiste à remplacer la loi de commande discontinue par une loi continue en  $x$  à l'intérieur d'une fine bande située au voisinage de la surface de glissement, la discontinuité étant conservée à l'extérieur de cette bande. La formulation de Slotine est la suivante :

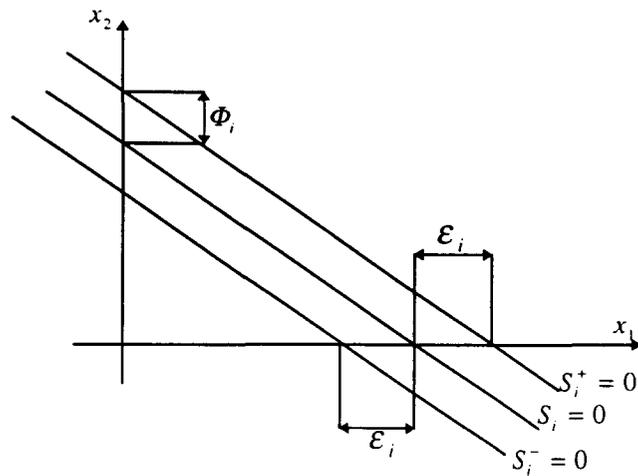
$$B_i(t) = \{x, |S_i(x)| \leq \Phi_i, \Phi_i > 0\}, \quad (1.117)$$

d'où :

$$B_i(t) = \{x, S_i^+(x) > 0 \text{ ou } S_i^-(x) < 0\}, \quad (1.118)$$

avec (dans le cas d'un système d'ordre deux) :

$$\begin{cases} S_i^-(x) = S_i(x) + \lambda_i \varepsilon_i, & S_i^+(x) = S_i(x) - \lambda_i \varepsilon_i, \\ \Phi_i = \lambda_i \varepsilon_i. \end{cases} \quad (1.119)$$



**Figure 1.10 :** Construction de  $B_i(t)$  [Asada 86] dans le cas où  $S = a_1 x_1 + x_2$  ;  
 $\Phi_i$  épaisseur de la bande ;  $\epsilon_i$  largeur de la bande.

Pour la synthèse du correcteur, deux formes sont retenues :

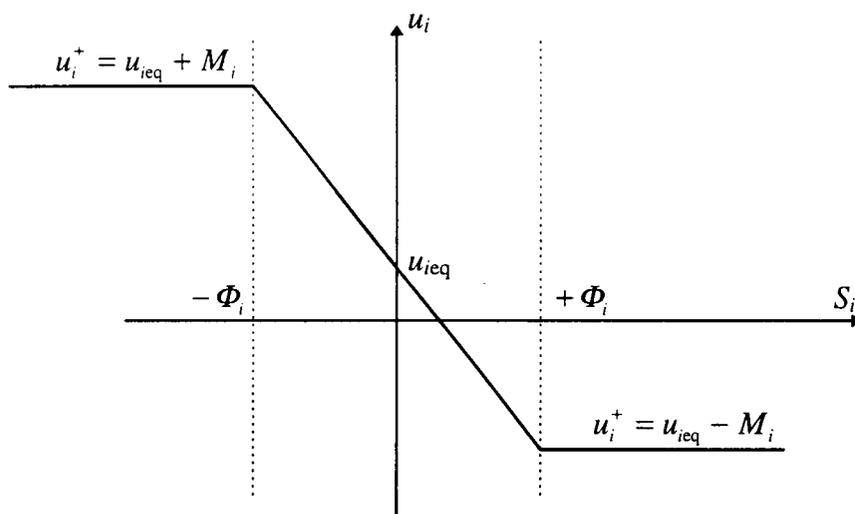
### 1.8.1.1 Première forme utilisée [Slotine 83]

On choisit pour la composante haute fréquence

$$\Delta u_i = -M_i \text{sat}\left(\frac{S_i}{\Phi_i}\right). \quad (1.120)$$

$$\text{Si } \left|\frac{S_i}{\Phi_i}\right| \leq 1 \quad \text{alors} \quad \text{sat}\left(\frac{S_i}{\Phi_i}\right) = \left(\frac{S_i}{\Phi_i}\right) \quad \text{et} \quad u_i = u_{ieq} - M_i \frac{S_i}{\Phi_i}, \quad (1.121)$$

$$\text{Si } \left|\frac{S_i}{\Phi_i}\right| > 1 \quad \text{alors} \quad \text{sat}\left(\frac{S_i}{\Phi_i}\right) = \text{sign}(S_i) \quad \text{et} \quad u_i = u_{ieq} - M_i \text{sign}(S_i). \quad (1.122)$$



**Figure 1.11** : Loi de commande par bande continue au voisinage de la surface de glissement selon Slotine.

### 1.8.1.2 Deuxième forme utilisée [Harashima 86]

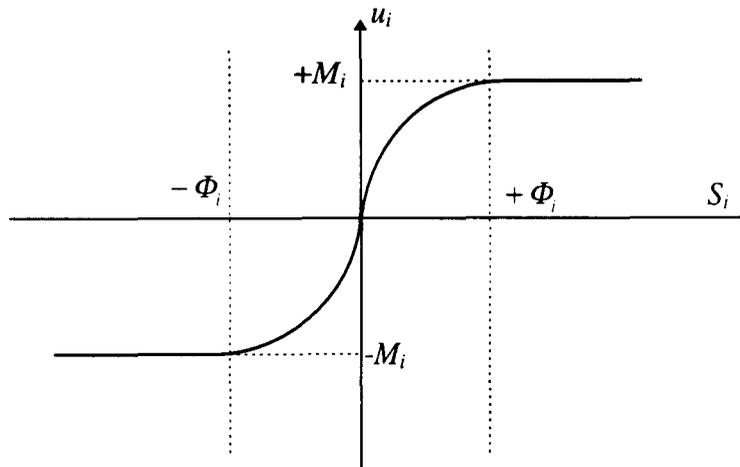
Une autre solution proposée par Harashima pour lisser la commande au voisinage des surfaces  $S_i = 0$ , est de remplacer les fonctions  $\text{sign}(S_i)$  par des fonctions continues  $\text{cont}(S_i)$ , de la forme :

$$\text{cont}(S_i) = \frac{S_i}{|S_i + \delta_i|}, \quad \delta_i > 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (1.123)$$

$$\text{Si } |S_i| \leq \Phi_i, \quad \text{alors} \quad u_i = u_{ieq} - M_i \text{cont}(S_i), \quad (1.124)$$

sinon

$$u_i = u_{ieq} - M_i \text{sign}(S_i), \quad (1.125)$$



**Figure 1.12 :** Loi de commande par bande continue au voisinage de la surface de glissement selon Harashima.

### Remarque

Afin d'augmenter les performances de la commande, les zones continues de taille  $2\Phi_i$  des fonctions  $\text{sat}(S_i)$  et  $\text{cont}(S_i)$  doivent être aussi petites que possible. Cependant, dans le cas de très grandes perturbations, on doit augmenter le gain  $M_i$  et par suite augmenter la bande  $2\Phi_i$ . Ainsi, la mise en place d'une commande continue dans une bande de la surface nécessite un compromis entre la robustesse et les performances [Kachroo 96].

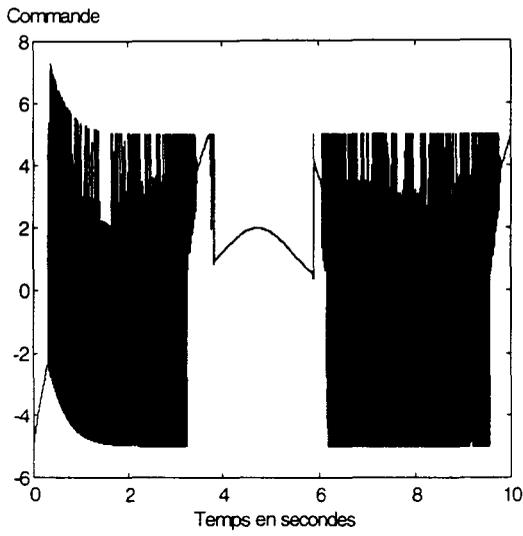
### 1.8.2 Exemple

Reprenons l'exemple du paragraphe 1.5.5 en remplaçant la fonction  $\text{sign}()$  dans (1.78) par la fonction  $\text{sat}()$ , il en résulte pour la loi de commande l'expression :

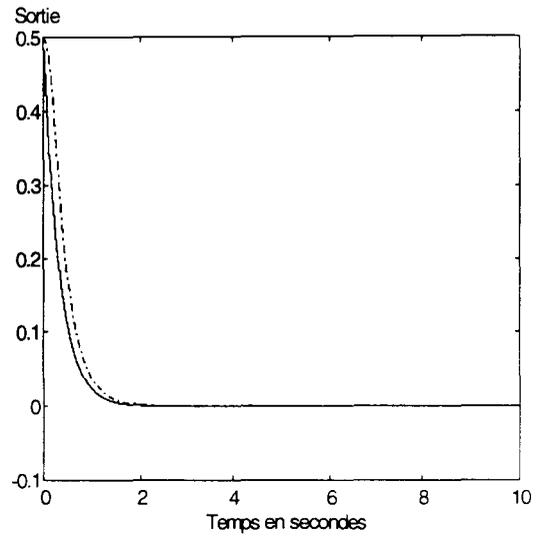
$$u = -3x_2 + x_1x_2 - M\text{sat}\left(\frac{S}{\Phi}\right). \quad (1.126)$$

On se propose de faire varier  $\Phi$  en laissant  $M$  constant, c'est-à-dire :

$$M = 5.$$



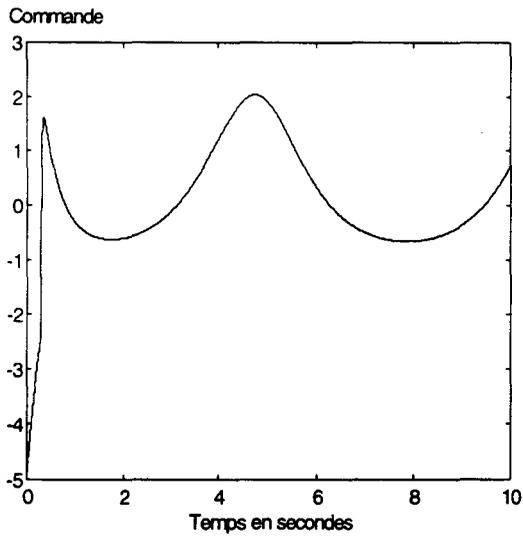
**a** : Variation de la commande  $u$ .



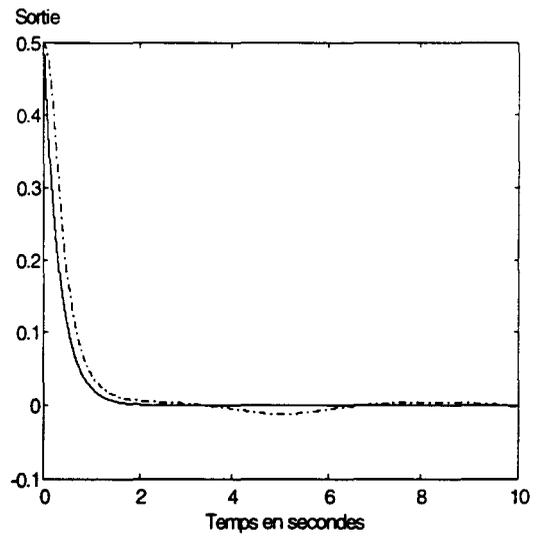
**b** : Evolution des sorties désirée et réelle :

$$y_d \text{ ( — ) } \quad y \text{ ( -.-.- )}.$$

**Figure 1.13** : Cas où  $\Phi = 5.10^{-4}$ .



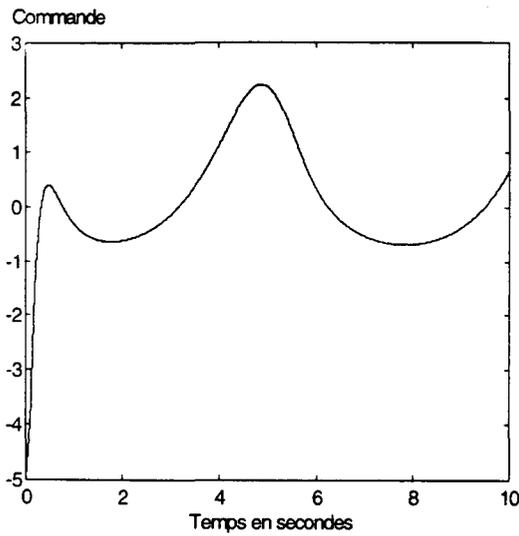
**a** : Variation de la commande  $u$ .



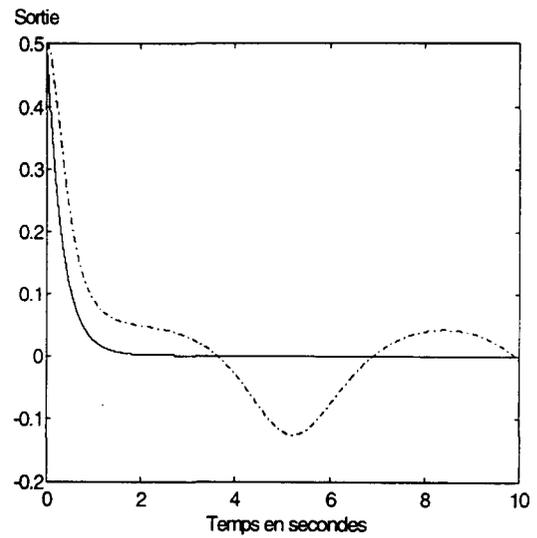
**b** : Evolution des sorties désirée et réelle :

$$y_d \text{ ( — ) } \quad y \text{ ( -.-.- )}.$$

**Figure 1.14** : Cas où  $\Phi = 5.10^{-2}$ .



**a :** Variation de la commande  $u$ .



**b :** Evolution des sorties désirée et réelle :

$y_d$  (—)     $y$  (-.-.-).

**Figure 1.15 :** Cas où  $\Phi = 5 \cdot 10^{-1}$ .

En augmentant  $\Phi$ , on constate que la commande devient plus lisse, mais au détriment des performances du système (voir figures 1.14.b et 1.15.b).

$\Phi \uparrow$  commande plus lisse

96

106

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une synthèse des principaux résultats sur la commande à structure variable en régime glissant dans le formalisme classique.

L'intérêt majeur de cette approche se situe d'une part dans la simplicité de mise en oeuvre de la loi de commande, d'autre part dans la synthèse des coefficients de la surface de glissement. On peut facilement prendre en compte aussi bien en terme de stabilité que de robustesse, les non-linéarités, les saturations et l'imprécision des paramètres identifiés du processus commandé. C'est un avantage non négligeable qui permet de connaître les limites de fonctionnement à ne pas dépasser.

Néanmoins, dans certains cas, les performances du système peuvent être altérées à cause d'un **phénomène de broutement** qui se manifeste dans les grandeurs asservies. En plus, la réduction de l'ordre du système ne permet pas toujours d'atteindre l'objectif imposé avec la dynamique désirée. En effet, si l'on considère le cas particulier d'un système de degré relatif égal à un, la surface de glissement correspondante, d'ordre zéro, permet de stabiliser le système sur l'origine mais ne peut définir la manière de l'atteindre.

Les extensions méthodologiques ont concerné uniquement le phénomène de broutement et ont permis sa diminution. Cependant, elles ont donné naissance à d'autres problèmes tels que, la complexité de la mise en oeuvre de la loi de commande, l'existence d'un compromis entre la robustesse du régulateur et les performances du système...

Ainsi, l'objectif de ce mémoire est de construire une loi de commande par mode glissant assurant à la fois, robustesse, performance et simplicité.

## **Chapitre 2**

**Commande dynamique par mode glissant :  
application aux systèmes monovariabiles**



## Introduction

Dans la réalité, il est souvent très difficile de représenter fidèlement un processus et de connaître toutes les variables mises en jeu. Par conséquent, la loi de commande qui lui sera associée doit être **robuste** afin de pallier à certaines non linéarités ou erreurs d'identification. La commande par mode glissant permet de répondre à ce problème, cependant comme le montre le chapitre 1, cette robustesse se fera au détriment des performances. En effet, la discontinuité de l'entrée induit des vibrations haute-fréquences indésirables en pratique. De plus, la surface de glissement définie dans le formalisme classique réduit l'ordre du système en boucle fermée, ce qui ne permet pas dans certains cas, d'imposer au système un mode de stabilisation.

Dans le but de remédier à ces inconvénients, on se propose dans ce chapitre de définir, pour des systèmes non linéaires monovariables, une commande par mode glissant qui soit robuste, performante et présentant une simplicité de mise en oeuvre. Nous présentons dans un premier temps, la synthèse d'un nouveau contrôleur par mode glissant. Celui-ci est basé sur la mise en oeuvre d'une surface de glissement de même ordre que le système. La surface ainsi définie fait intervenir une loi de commande particulière, appelée **commande dynamique par mode glissant (DMG)** : la condition de glissement [Utkin 92] impose une discontinuité sur la dérivée de la commande permettant ainsi de résoudre les problèmes liés au phénomène de broutement. En effet, l'intégration lisse la commande discontinue avant son application sur la dynamique du système et donc évite de faire apparaître ces vibrations résiduelles indésirables [Fliess 92]. De plus, elle permet de ne pas réduire l'ordre du système en boucle fermée. Nous étudions dans un second temps, la validité et la robustesse de la méthode proposée pour différents types de perturbations et domaines de glissement. Enfin, nous présentons une deuxième proposition pour le nouveau contrôleur dynamique par mode glissant.

## 2.1 Bouclage linéarisant à structure variable : Introduction de la nouvelle surface de glissement.

Considérons un système dont la représentation d'état sous forme canonique de commandabilité (annexe 1) est :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = f(x, t) + g(x, t)u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

Dans ce mémoire, on envisage des hypersurfaces linéaires définies dans l'espace de l'erreur de la sortie par rapport à la consigne. Soit  $S(t)$  la fonction continue, dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , définie comme suit :

$$S(t) = \sum_{i=0}^n a_i (y^{(i)} - y_c^{(i)}), \quad (a_n = 1), \quad (2.2)$$

où  $y_c$  désigne la consigne, qui est constante dans le cas d'une régulation et variable dans le cas d'une poursuite de trajectoire. La stabilité asymptotique est assurée si les coefficients  $a_i$  sont choisis de façon à ce que  $a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$  soit un polynôme de Hurwitz.

La commande choisie doit satisfaire la condition de glissement [Utkin 92] et [Slotine 83] :

$$S\dot{S} < 0 \quad \text{si} \quad S \neq 0, \quad (2.3)$$

pour assurer l'existence du mode glissant et la stabilité asymptotique sur l'origine.

### Lemme 2.1 [Hajri 96a]

Soit le système (2.1) pour lequel on définit la surface de glissement (2.2). Si la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$  est satisfaite et s'il existe un temps fini  $t_g$  pour lequel on a :

$$S = 0,$$

alors  $S(t)$  ne quitte plus  $S = 0 \quad \forall t \geq t_g$ .

**Démonstration**

Supposons que  $S(t)$  atteigne  $S = 0$  en un temps fini  $t_g$  et que l'on ait maintenant :

$$S(t) \neq 0 \quad \forall t \in \left\{ \left[ t_g, t_g + \delta \right], \delta > 0 \right\}, \quad (2.4)$$

comme  $S(t)$  est une fonction continue et dérivable alors  $\exists 0 < \delta_1 \leq \delta$ , pour lequel  $S(t)$  est une fonction croissante ou décroissante  $\forall t \in \left\{ \left[ t_g, t_g^+ \right], t_g^+ = t_g + \delta_1 \right\}$ .

Si  $S(t)$  est décroissante (resp. croissante) alors  $S(t)$  est négative et  $S(t) \geq S(t_g^+)$ , (resp. alors  $S(t)$  est positive et  $S(t) \leq S(t_g^+)$ ), or :

$$\lim_{t \rightarrow t_g^+} \left( \frac{S(t) - S(t_g^+)}{t - t_g^+} \right) = \left( \frac{dS(t)}{dt} \right)_{t=t_g^+}, \quad (2.5)$$

comme  $S(t) \geq S(t_g^+)$ , (resp.  $S(t) \leq S(t_g^+)$ ), alors  $\text{sign} \left( \frac{dS(t)}{dt} \right)_{t=t_g^+} = \text{sign}(S(t_g^+))$ ,

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse  $\dot{S} < 0$ , d'où la démonstration du lemme 1. ■

La fonction de glissement  $S(t)$  est choisie de telle manière qu'elle soit solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dS}{dt} = -M \text{sign}(S), \quad (2.6)$$

avec  $M$  une constante strictement positive.

L'équation (2.6) permet de montrer que la convergence de la surface  $S$  vers 0 s'effectue en un temps fini  $t_g$  :

$$t_g = \frac{|S(0)|}{M}. \quad (2.7)$$

La connaissance de  $\left( x_c^T = [y_c, \dot{y}_c, \dots, y_c^{(n)}] \right)_{t=0}$ ,  $x(0)$  et l'estimation de  $(y^{(n)})_{t=0}$  permettent de connaître  $S(0)$ .

Calculons  $\dot{S}(t)$ , il vient :

$$\dot{S}(t) = \sum_{i=0}^n a_i (y^{(i+1)} - y_c^{(i+1)}), \quad (2.8)$$

d'autre part,  $\dot{S}(t)$  vérifie l'équation (2.6), d'où on a :

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i+1)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i+1)} - M \text{sign}(S). \quad (2.9)$$

En utilisant (2.1), l'équation (2.9) devient :

$$\frac{d}{dt}(f(x, t) + g(x, t)u) = \sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i+1)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i+1)} - M \text{sign}(S). \quad (2.10)$$

La résolution de cette dernière équation, par rapport à  $u$ , fournit un bouclage dynamique remplissant les conditions d'évolution en mode glissant du système. Une solution de l'équation (2.10) donne le **bouclage linéarisant** suivant [Hajri 95, 96a] :

$$u = \frac{\sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} - M \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau - f(x, t)}{g(x, t)}. \quad (2.11)$$

Il est bien évident que l'intégration de la fonction discontinue lisse la commande avant son application sur la dynamique du système et donc, évite de faire apparaître des vibrations liées aux discontinuités de l'entrée.

### 2.1.1 Dynamique du système en régime glissant

Le régime glissant est atteint lorsque

$$S(t) = 0, \quad \text{avec} \quad \dot{S}(t) = 0. \quad (2.12)$$

Dans ce cas, la commande  $u$  est égale à la commande équivalente

$$u_{\text{eq}} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} - f(x, t)}{g(x, t)}, \quad (2.13)$$

et la dynamique glissante du système est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = f(x, t) + g(x, t)u_{\text{eq}}, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2.14)$$

En remplaçant  $u_{\text{eq}}$  par son expression (2.13), on obtient un système linéaire de dimension  $n$  défini dans l'espace des phases par :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = \sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Lorsque le régime glissant est atteint, le système est insensible aux éventuelles variations paramétriques puisque son comportement est régi par la dynamique de la surface. Le système (2.15) est de dimension  $n$ , par suite, l'introduction d'une telle fonction de glissement permet de ne pas réduire l'ordre du système en boucle fermée.

On remarque que la commande  $u$  (2.11) peut être mise sous la forme classique :

$$u = u_{\text{eq}} + \Delta u, \quad (2.16)$$

avec :

$$\begin{cases} u_{\text{eq}} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} - f(x, t)}{g(x, t)}, \\ \Delta u = \frac{-M \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau}{g(x, t)}. \end{cases} \quad (2.17)$$

## 2.1.2 Interprétation

Avec notre choix de la surface de glissement on déduit que la commande  $u_{eq}$  correspond au bouclage linéarisant par retour d'état statique. En effet, d'après la section 1.5.1 (chapitre 1), on peut écrire pour le système (2.1) :

$$\frac{d^n y}{dt^n} = v^* = f(x, t) + g(x, t)u, \quad (2.18)$$

où la nouvelle entrée est donnée par :

$$v^* = \sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}, \quad (2.19)$$

ce qui permet d'établir avec le choix de  $S$  (2.2), l'expression :

$$S = -v^* + y^{(n)}. \quad (2.20)$$

Par suite, l'expression du bouclage linéarisant qu'on applique au système (2.1) peut s'écrire :

$$u = \frac{v^* - f(x, t)}{g(x, t)}. \quad (2.21)$$

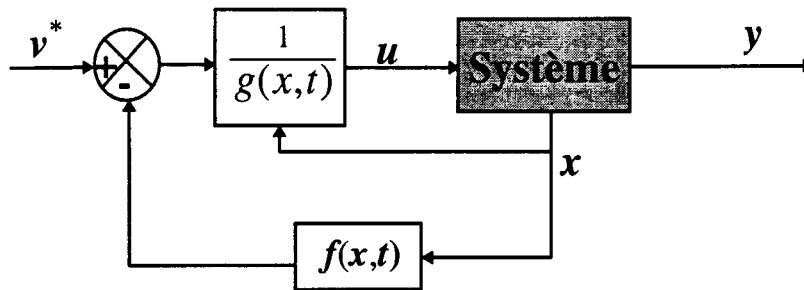
Il est bien évident que les équations (2.13) et (2.21) sont les mêmes. Par conséquent, on confirme bien que dans le cas où le système est parfaitement connu et ne subit aucune perturbation extérieure ou variation paramétrique, un bouclage linéarisant par retour d'état statique suffit pour imposer le comportement désiré. Dans le cas contraire, une **compensation dynamique** lui sera superposée afin de ramener l'état réel du système vers celui désiré.

Dans la suite de notre mémoire, on procède comme suit :

On commence par faire un bouclage linéarisant sur le système (2.1), ce qui peut être représenté schématiquement par la figure 2.1. Le système (2.1) se met alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = v^*, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2.22)$$

avec  $v^*$  la nouvelle entrée définie par (2.19).



**Figure 2.1** : Schéma de principe de la commande linéarisante par retour d'état statique.

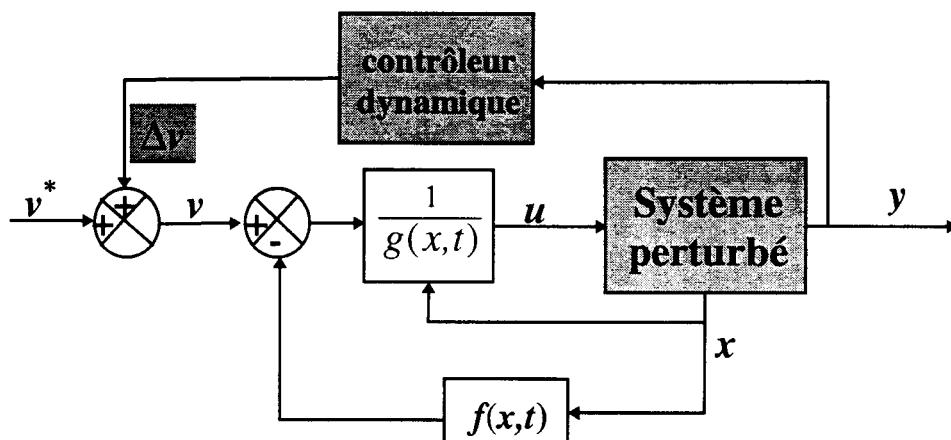
Si le système (2.1) ne présente aucune perturbation, les conditions initiales vérifient alors :

$$\left( y^{(n)} \right)_{t=0} = v^*(0). \quad (2.23)$$

d'où  $S(0) = 0$  et  $t_g = 0$ . Ce qui montre qu'on est immédiatement sur la surface et que le système coïncide avec le modèle.

On a considéré dans ce mémoire que l'instant de début de l'algorithme de commande correspond à  $(t_0 + \tau)$ , avec  $\tau$  un infiniment petit positif. Néanmoins, Pour simplifier l'écriture on notera cet instant  $t_0$ . En effet, dans (2.23) l'instant  $t = 0$  est en toute rigueur  $t = 0^+$ .

En présence de perturbations, une compensation dynamique  $\Delta v$  est superposée à  $v^*$  afin de compenser les phénomènes indésirables. Le principe du **correcteur dynamique par mode glissant** (DMG) proposé est réalisé selon le schéma bloc suivant :



**Figure 2.2 :** Schéma de principe de la commande dynamique par mode glissant.

La commande  $u$  s'écrit alors :

$$u = \frac{v - f(x,t)}{g(x,t)}, \quad (2.24)$$

où  $v$  est la nouvelle entrée définie par :

$$v = v^* + \Delta v, \quad (2.25)$$

avec  $v^*$  donné par l'équation (2.19) et :

$$\Delta v = -M \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau. \quad (2.26)$$

En définitive, la loi de commande  $u$  appliquée au système perturbé est donnée par (2.11), soit :

$$u = \frac{\sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} - M \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau - f(x,t)}{g(x,t)}.$$

A cause des perturbations et des variations paramétriques qui nous sont inconnues, les valeurs réelles de  $y^{(i)}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) seront estimées, en particulier à l'instant  $t = 0$ . Par suite, la valeur de  $S(0)$  est une valeur estimée, elle aussi. La robustesse de la méthode n'est pas détériorée, ce que nous prouve le lemme suivant :

**Lemme 2.2**

Soient le système défini par (2.1), la surface  $S$  donnée par (2.2) et  $u$  satisfaisant (2.11) :

$$u = \frac{\sum_{i=0}^n a_i y_c^{(i)} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} - M \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau - f(x, t)}{g(x, t)}$$

Alors on a glissement et stabilité asymptotique du système sur la consigne  $y_c$  quelque soit la valeur de  $S(0)$ .

**Démonstration**

Le choix de la commande  $u$  (2.11) pour le système (2.1) vérifie (2.6), soit :

$$\frac{dS}{dt} = -M \text{sign}(S).$$

Le signe de  $\dot{S}$  ne dépend pas de  $S(0)$ , la condition de glissement  $\dot{S} < 0$  est donc toujours satisfaite. Le temps de glissement est donné par (2.7), donc d'après le lemme 2.1 on a glissement et stabilité asymptotique du système sur la consigne  $y_c$  quelque soit la valeur de  $S(0)$ .

■

**2.1.3 Cas de la régulation**

Le mode régulation est obtenu en prenant une consigne  $y_c$  constante, d'où on a :

$$y_c^{(i)} = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \tag{2.27}$$

En régime permanent, on a :

$$x_1 = y_c, \text{ et } x_i = 0, \quad \forall 2 \leq i \leq n. \tag{2.28}$$

Dans ce cas, la dynamique désirée du système en boucle fermée est donnée par :

$$\frac{y}{y_c} = \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}. \tag{2.29}$$

La nouvelle entrée  $v^*$ , s'obtient donc en annulant toutes les dérivées de la consigne  $y_c$  dans l'équation (2.14) :

$$v^* = a_0 y_c - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}, \quad (2.30)$$

d'autre part l'expression de  $S$  devient :

$$S = -a_0 y_c + \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}. \quad (2.31)$$

En utilisant le résultat (2.11), la commande  $u$  appliquée au système (2.1) en cas de régulation s'écrit alors :

$$u = \frac{a_0 y_c - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} - M \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau - f(x, t)}{g(x, t)}. \quad (2.32)$$

## 2.2 Influence des perturbations

D'après ce qui précède la valeur de  $M$  n'a pas été quantifiée et donc le compensateur (2.11) ne peut compenser toutes les perturbations et variations paramétriques agissant sur le système. Une étude d'existence d'un régime glissant et de robustesse pour **différents types de perturbations** est donc nécessaire. On choisit des perturbations linéaires dans l'équation entrée-sortie du système. Ce choix est naturel car un tel système (2.1) est, le plus souvent, une approximation linéaire, par troncature des termes non linéaires. En l'occurrence la perturbation, représentée dans ce qui suit linéairement, est le plus souvent aussi une approximation de la perturbation réelle intervenant sur le système non linéaire. Elle n'est le plus souvent, connue que partiellement. De plus, dans une représentation linéaire des systèmes, il est naturel que les perturbations soient décrites par un modèle de même nature que celui utilisé pour décrire l'évolution de l'état [Messenger 92].

## 2.2.1 Perturbation additive

En présence d'une **perturbation additive**  $p(x,t)$ , le système (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i=1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = f(x,t) + g(x,t)u + p(x,t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.33)$$

où  $p(x,t)$  représente les variations éventuelles des paramètres ou une perturbation externe qui n'est pas connue mais vérifie [Hajri 95] :

$$\left| \frac{d(p(x,t))}{dt} \right| \leq \rho_1, \quad (2.34)$$

avec  $\rho_1$  une borne connue.

La loi de commande donnée par l'équation (2.24) mène au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i=1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = v^* + \Delta v + p(x,t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2.35)$$

### 2.2.1.1 Estimation du gain de glissement $M$

Dans ce cas la dérivée de  $S$  s'écrit :

$$\dot{S}(t) = -M \text{sign}(S) + \frac{d(p(x,t))}{dt}. \quad (2.36)$$

D'après (2.36), la condition de glissement  $\dot{S} < 0$  est vérifiée pour un gain :

$$M > \rho_1. \quad (2.37)$$

### 2.2.1.2 Première estimation du temps de glissement

#### Lemme 2.3

Soient le système (2.35) et l'hypothèse (2.34) satisfaite, s'il existe  $\Delta v$  tel que :

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = -M \text{sign}(S), \text{ avec } \Delta v(0) = 0 \text{ et } M > \rho_1,$$

alors  $S$  (2.20) converge vers 0 en un temps fini  $t_g$  :

$$\frac{|S(0)|}{M + \rho_1} \leq t_g \leq \frac{|S(0)|}{M - \rho_1}. \quad (2.38)$$

#### Démonstration

En intégrant l'équation (2.35), on obtient :

$$S(t) = S(0) - M \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau + \int_0^t \dot{p}(x, t) d\tau, \quad (2.39)$$

le temps de glissement est défini pour  $S(t_g) = 0$ , d'où :

$$S(0) - M \int_0^{t_g} \text{sign}(S(\tau)) d\tau + \int_0^{t_g} \dot{p}(x, t) d\tau = 0, \quad (2.40)$$

$\forall \tau \in [0, t_g[$  le signe de  $S(\tau)$  est constant, on a  $\text{sign}(S(\tau)) = \text{sign}(S(0))$ .

#### Cas où $S(0) > 0$

L'équation (2.40) devient :

$$S(0) - M t_g + \int_0^{t_g} \dot{p}(x, \tau) d\tau = 0, \quad (2.41)$$

(2.34) permet d'écrire :

$$-S(0) - \rho_1 t_g \leq -M t_g \leq -S(0) + \rho_1 t_g, \quad (2.42)$$

on en déduit :

$$\frac{S(0)}{M + \rho_1} \leq t_g \leq \frac{S(0)}{M - \rho_1}. \quad (2.43)$$

### Cas où $S(0) < 0$

L'équation (2.40) devient :

$$S(0) + Mt_g + \int_0^{t_g} p(x, \tau) d\tau = 0, \quad (2.44)$$

(2.34) et (2.44) donnent :

$$-S(0) - \rho_1 t_g \leq Mt_g \leq -S(0) + \rho_1 t_g, \quad (2.45)$$

on en déduit :

$$\frac{-S(0)}{M + \rho_1} \leq t_g \leq \frac{-S(0)}{M - \rho_1}. \quad (2.46)$$

les inégalités (2.43) et (2.46) conduisent à (2.38). ■

#### 2.2.1.3 Deuxième estimation du temps de glissement

Dans le lemme 2.3, la valeur de  $S(0)$  est donnée par la connaissance de  $x(0)$ ,  $(x_c^T = [y_c, \dot{y}_c, \dots, y_c^{(n)}])_{t=0}$ , et l'estimation de  $(y^{(n)})_{t=0}$ . D'après (2.2) et (2.35) on a :

$$S = -v^* + y^{(n)}. \quad (2.47)$$

Or le système (2.35) permet d'écrire :

$$(y^{(n)})_{t=0} = v^*(0) + p(x, 0), \quad (2.48)$$

ce qui donne en considérant l'équation (2.47) :

$$S(0) = p(x, 0). \quad (2.49)$$

En intégrant (2.36),  $S(t)$  peut être donnée par :

$$S(t) = -M \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau + p(x, t). \quad (2.50)$$

Le temps de glissement  $t_g$  satisfait l'équation suivante :

$$-M \int_0^{t_g} \text{sign}(S(\tau)) d\tau + p(x, t_g) = 0. \quad (2.51)$$

En supposant que  $p(x, t)$  vérifie :

$$|p(x, t)| \leq p^1, \quad (2.52)$$

où  $p^1$  est une borne connue, on aura donc :

$$\frac{-p^1}{M} \leq t_g \leq \frac{p^1}{M}. \quad (2.53)$$

Comme  $t_g$  est positif ou nul, on a :

$$0 \leq t_g \leq \frac{p^1}{M}. \quad (2.54)$$

L'estimation du temps de glissement (2.54) nécessite en plus de l'hypothèse (2.34) sur la dérivée de l'erreur, une autre hypothèse sur la perturbation, notamment (2.52).

#### 2.2.1.4 Exemple

Le modèle non linéaire du second ordre issu de l'identification est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_1 + u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2.55)$$

En fait une description exacte correspondrait au modèle :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_1 + u + p(x, t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2.56)$$

Dans l'hypothèse du modèle décrit en (2.55), on réalise le bouclage suivant :

$$u = v^* + x_1 - x_1 x_2. \quad (2.57)$$

L'obtention d'un système en boucle fermée caractérisé par la fonction de transfert :

$$\frac{y}{y_c} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}, \quad (2.58)$$

conduit à prendre :

$$v^* = 2y_c - 2x_1 - 3x_2, \quad (2.59)$$

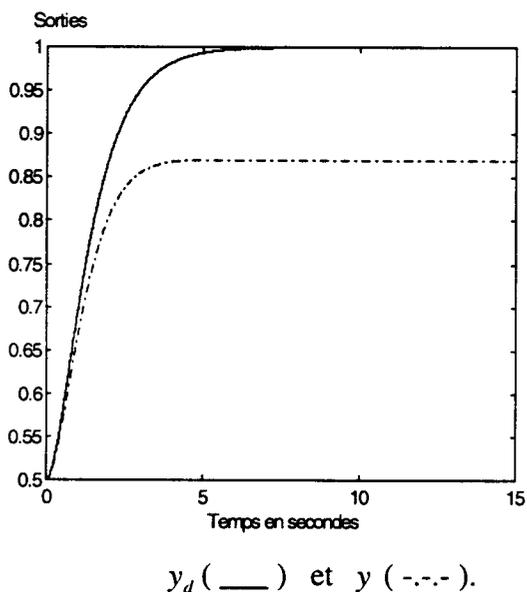
d'où :

$$u = 2\Gamma(t) - x_1 - 3x_2 - x_1x_2. \quad (2.60)$$

avec  $\Gamma(t)$  un échelon unitaire. Pour les simulations, on a supposé que la perturbation  $p(x,t)$  est décrite par :

$$p(x,t) = 0.2x_1x_2 - 0.3x_1. \quad (2.61)$$

En appliquant la commande  $u$  (2.60) au système ((2.56), (2.61)) on constate que la sortie réelle du système ne coïncide pas avec celle du modèle choisi (figure 2.3).



**Figure 2.3 :** Comparaison des sorties désirée  $y_d$  et réelle  $y$  du processus.

Afin de ramener la sortie  $y$  du système vers la sortie désirée  $y_d$ , on se propose de corriger le système dans un premier temps avec la commande classique par mode glissant (CMG), et dans un deuxième temps, avec la commande dynamique par mode glissant (DMG).

### Commande classique par mode glissant

Afin d'obtenir la même dynamique pour le système mais en réduisant son ordre, on choisit la surface de glissement classique  $S$  (chapitre 1, section 1.5.3) :

$$S = \frac{2}{3}(x_1 - \Gamma(t)) + x_2 = 0, \quad (2.62)$$

d'où la commande  $u$  :

$$u = x_1 - \frac{2}{3}x_2 - x_1x_2 - M\text{sign}(S), \quad (2.63)$$

où  $M$  est supérieur à la borne maximale de la perturbation  $p(x,t)$ .

Par suite et dans l'hypothèse où  $|p(x,t)| \leq 0.5$ , on choisit pour les simulations le gain de glissement :

$$M = 1. \quad (2.64)$$

### Commande dynamique par mode glissant

D'après (2.2) et (2.11) on a respectivement :

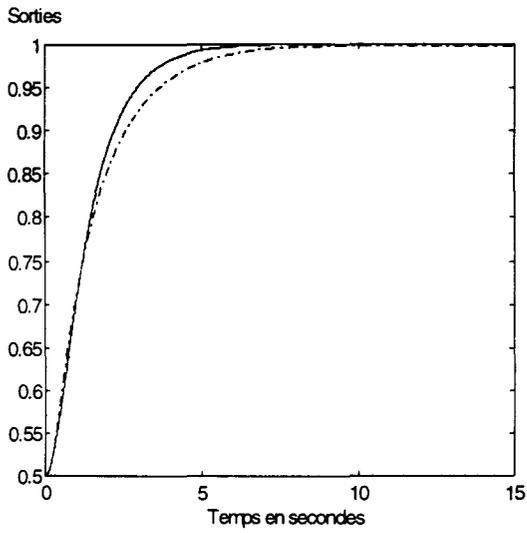
$$S = \dot{x}_2 + 3x_2 + 2(x_1 - y_c), \quad (2.65)$$

$$u = 2y_c - x_1 - 3x_2 - x_1x_2 - M \int_0^t \text{sign}(S(\tau))d\tau, \quad (2.66)$$

où  $M$  est supérieur à la borne maximale de la dérivée de la perturbation  $p(x,t)$ . Dans

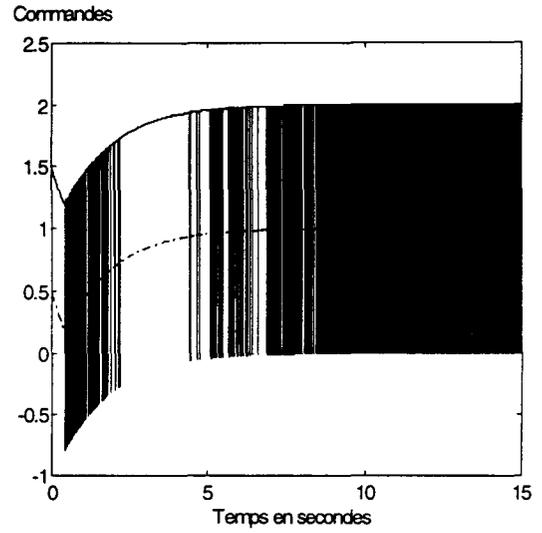
l'hypothèse où  $\left| \frac{d(p(x,t))}{dt} \right| \leq 0.5$ , on choisit pour les simulations (voir figure 2.5) le même gain

de glissement  $M$ , c'est-à-dire,  $M = 1$ .



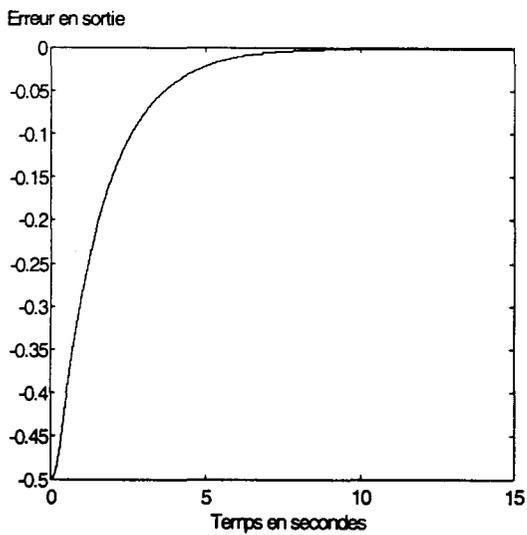
**a** : Evolution des sorties désirée et réelle :

$y_d$  (—) et  $y$  (-.-).

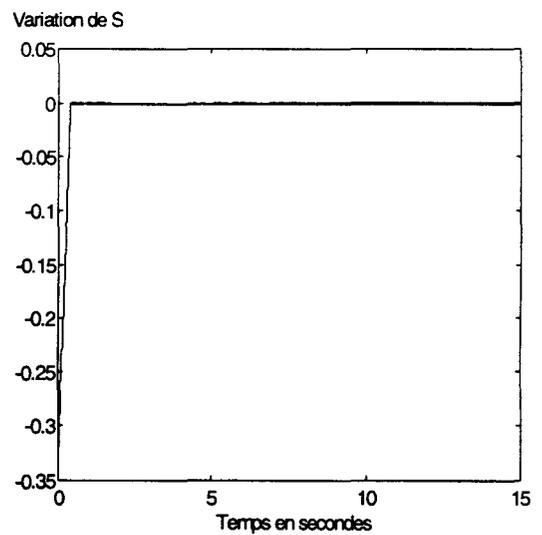


**b** : Evolution des commandes :

$u_{eq}$  (—) et  $u$  (-.-).

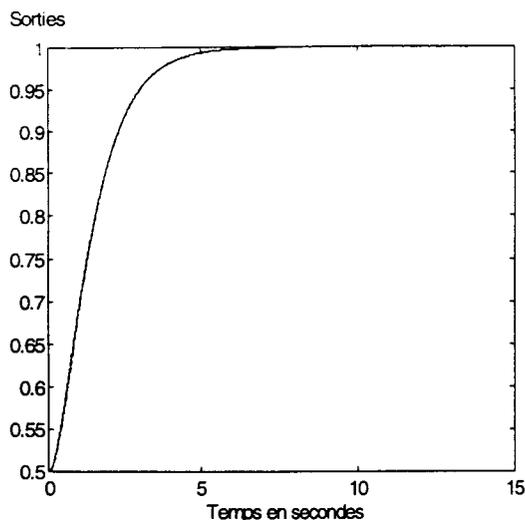


**c** : Variation de l'erreur en sortie.

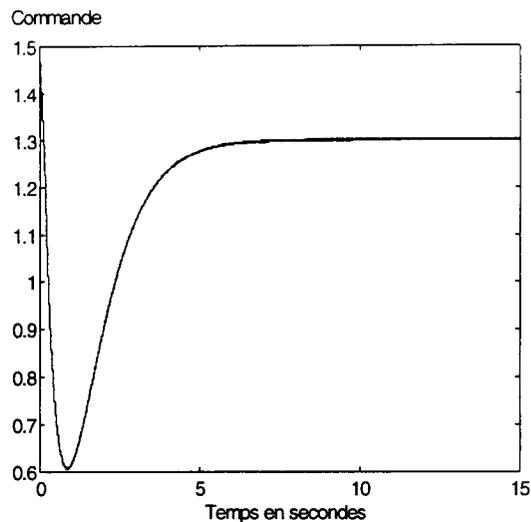


**d** : Variation de  $S$ .

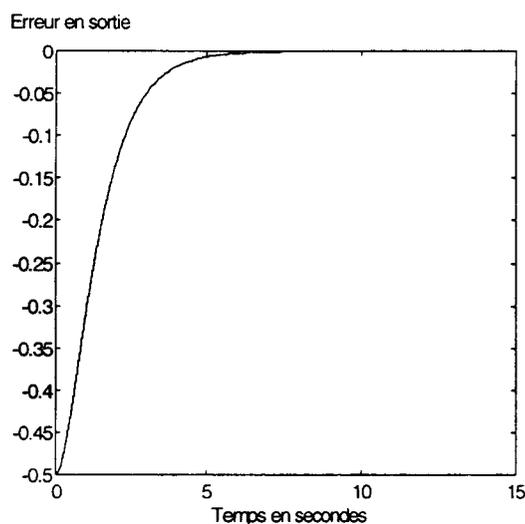
**Figure 2.4** : Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur classique par mode glissant.



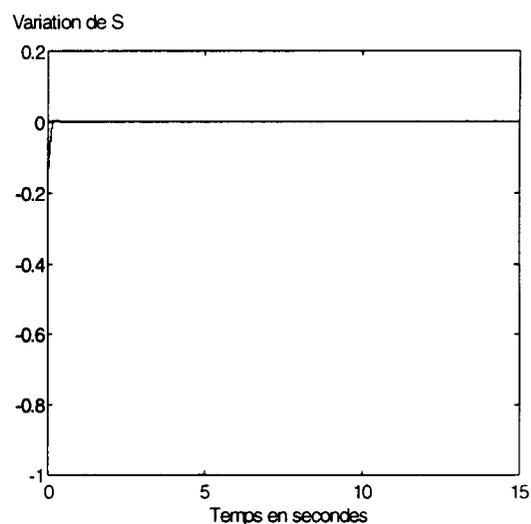
a :  $y_d$  ( — ) et  $y$  ( -.- ).



b : Variation de la commande  $u$ .



c : Variation de l'erreur en sortie.



d : Variation de  $S$ .

**Figure 2.5** : Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur dynamique par mode glissant.

En analysant les courbes, on remarque que les résultats obtenus avec la nouvelle approche de commande ((2.66), figure 2.5) sont meilleurs que ceux obtenus avec l'approche classique ((2.63), figure 2.4). En effet, on a une diminution des oscillations au niveau de la surface de glissement et de la commande, un temps de glissement plus faible, une erreur en sortie nulle en régime permanent et une sortie du système presque confondue avec celle du modèle.

## 2.2.2 Perturbation relative du gain constante

Supposons que le système (2.1) s'écrive sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = f(x, t) + (g(x, t) + \Delta g(x, t))u + p(x, t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.67)$$

où  $\Delta g(x, t)$  n'est pas connue et représente l'erreur sur le gain. Dans la plupart des systèmes physiques réels, la variation de  $\Delta g(x, t)$  est lente par rapport aux variations du système. De plus, on considère ici que la **perturbation relative du gain**  $\frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)}$  est constante et vérifie :

$$\left| \frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)} \right| \leq \alpha_1 \ll 1, \quad (2.68)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)} \right) = 0. \quad (2.69)$$

En considérant le bouclage donné par (2.24), le système (2.55) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{x}_n = v^* + \Delta v + \frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)} (v^* + \Delta v - f(x, t)) + p(x, t), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2.70)$$

### 2.2.2.1 Estimation du gain $M$

Si l'on considère l'expression de  $S$  (2.20) et le système (2.70),  $\dot{S}$  s'écrit :

$$\dot{S} = \frac{d}{dt} \left( \Delta v + \frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)} \Delta v \right) + \xi(x, t), \quad (2.71)$$

où  $\xi(x, t)$  est donné par :

$$\xi(x, t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)} (v^* - f(x, t)) + p(x, t) \right), \quad (2.72)$$

considérant (2.69), l'équation (2.71) devient :

$$\dot{S} = \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \frac{d(\Delta v)}{dt} + \xi(x,t). \quad (2.73)$$

On suppose que :

$$|\xi(x,t)| \leq \xi_1, \quad (2.74)$$

où  $\xi_1$  est une borne connue. La condition de glissement  $S\dot{S} < 0$  est vérifiée pour un gain  $M$  tel que [Hajri 95]:

$$M > \frac{\xi_1}{1 - \alpha_1}. \quad (2.75)$$

### Remarque

Dans le cas où on n'a pas une perturbation du gain, c'est à dire  $\Delta g(x,t) = 0$ , on obtient  $\xi(x,t) = \frac{d(p(x,t))}{dt}$ , et  $\alpha_1 = 0$ . En remplaçant donc  $\xi_1$  par  $\rho_1$  et  $\alpha_1$  par zéro dans l'inéquation (2.75), on retrouve le résultat exprimé par (2.37).

### 2.2.2.2 Première estimation du temps de glissement

#### Lemme 2.4 [Hajri 96a]

Soient le système défini par (2.70) et la surface  $S$  donnée par (2.20). Si les hypothèses (2.68) et (2.74) sont satisfaites et s'il existe  $\Delta v$  tel que :

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = -M \text{sign}(S), \text{ avec } \Delta v(0) = 0 \text{ et } M > \frac{\xi_1}{1 - \alpha_1},$$

alors  $S$  converge vers 0 en un temps fini  $t_g$  :

$$\frac{|S(0)|}{M(1 + \alpha_1) + \xi_1} \leq t_g \leq \frac{|S(0)|}{M(1 - \alpha_1) - \xi_1}. \quad (2.76)$$

### Démonstration

En intégrant (2.71), il vient :

$$S(t) = S(0) + \left(1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)}\right) \Delta v(t) + \int_0^t \xi(x,\tau) d\tau, \quad (2.77)$$

dans laquelle  $\Delta v$  satisfait (2.26).

Soit  $t_g$  tel que  $S(t_g) = 0$ .  $\forall t \in [0, t_g[$ ,  $\text{sign}(S(t))$  est constant, on a donc :

$$S(0) - Mt_g \left(1 + \frac{\Delta g(x,t_g)}{g(x,t_g)}\right) \text{sign}(S(0)) + \int_0^{t_g} \xi(x,\tau) d\tau = 0. \quad (2.78)$$

### Cas où $S(0) > 0$

L'équation (2.78) devient :

$$S(0) - Mt_g \left(1 + \frac{\Delta g(x,t_g)}{g(x,t_g)}\right) + \int_0^{t_g} \xi(x,\tau) d\tau = 0, \quad (2.79)$$

considérant les hypothèses (2.68) et (2.74) on aura :

$$-\xi_1 t_g \leq -\int_0^{t_g} \xi(x,\tau) d\tau \leq \xi_1 t_g, \quad (2.80)$$

$$\text{et} \quad -S(0) - \alpha_1 Mt_g - \xi_1 t_g \leq -Mt_g \leq -S(0) + \alpha_1 Mt_g + \xi_1 t_g, \quad (2.81)$$

on en déduit :

$$\frac{S(0)}{M(1 + \alpha_1) + \xi_1} \leq t_g \leq \frac{S(0)}{M(1 - \alpha_1) - \xi_1}. \quad (2.82)$$

### Cas où $S(0) < 0$

Par analogie avec le cas où  $S(0) > 0$ , on a :

$$-S(0) - \alpha_1 Mt_g - \xi_1 t_g \leq Mt_g \leq -S(0) + \alpha_1 Mt_g + \xi_1 t_g, \quad (2.83)$$

d'où :

$$\frac{-S(0)}{M(1+\alpha_1)+\xi_1} \leq t_g \leq \frac{-S(0)}{M(1-\alpha_1)-\xi_1}. \quad (2.84)$$

Les inégalités (2.82) et (2.84) montrent (2.76). ■

### 2.2.2.3 Deuxième estimation du temps de glissement

En considérant que :

$$S(0) = \zeta(x,0), \quad (2.85)$$

avec :

$$\zeta(x,t) = \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} (v^* - f(x,t)) + p(x,t). \quad (2.86)$$

L'intégration de (2.71) donne :

$$S(t) = -M \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau + \zeta(x,t). \quad (2.87)$$

Le temps de glissement  $t_g$  satisfait l'équation suivante :

$$-M \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t_g)}{g(x,t_g)} \right) \int_0^{t_g} \text{sign}(S(\tau)) d\tau + \zeta(x,t_g) = 0. \quad (2.88)$$

Supposons que  $\zeta(x,t)$  vérifie :

$$|\zeta(x,t)| \leq \zeta_1, \quad (2.89)$$

où  $\zeta_1$  est une borne connue, en utilisant l'hypothèse (2.68) on aura :

$$\frac{-\zeta_1}{M(1-\alpha_1)} \leq t_g \leq \frac{\zeta_1}{M(1-\alpha_1)}. \quad (2.90)$$

Comme  $t_g$  est positif ou nul, on a :

$$0 \leq t_g \leq \frac{\zeta_1}{M(1-\alpha_1)}. \quad (2.91)$$

### Remarque

Dans le cas où on n'a pas de perturbation du gain, c'est-à-dire :

$$\Delta g(x, t) = 0, \quad (2.92)$$

on obtient  $\xi(x, t) = \frac{d(p(x, t))}{dt}$ , et  $\alpha_1 = 0$ . Par suite, si l'on remplace  $\xi$  par  $\rho_1$  et  $\alpha_1$  par zéro dans (2.76), on retrouve le résultat (2.38), et si l'on substitue  $\zeta_1$  par  $p^1$  et  $\alpha_1$  par zéro dans (2.91), on retrouve le résultat exprimé par (2.54).

### 2.2.3 Perturbation relative du gain non constante

Dans ce cas l'hypothèse (2.69) n'est plus valable, on suppose alors que la dérivée de la perturbation relative du gain est bornée, ceci s'exprime par :

$$\left| \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)} \right) \right| \leq \alpha_2, \quad (2.93)$$

où  $\alpha_2$  est une borne connue.

#### 2.2.3.1 Estimation du temps de glissement

D'après (2.77), le terme  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)} \right)$  n'intervient pas dans le calcul du temps de glissement  $t_g$ , l'estimation donnée par le lemme 2.4, ainsi que le résultat (2.91) restent valables.

#### 2.2.3.2 Première estimation du gain $M$

Pour satisfaire la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$ ,  $M$  peut être choisi [Elmali 92], tel que :

$$M > \sup_{x, t} \left( \frac{\xi(x, t) + \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)} \right) \right) \Delta v}{1 + \frac{\Delta g(x, t)}{g(x, t)}} \right). \quad (2.94)$$

En utilisant les hypothèses établies par (2.68), (2.74) et (2.93) on peut écrire :

$$M > \frac{\xi_1 + \alpha_2 \Delta v}{1 - \alpha_1}. \quad (2.95)$$

Cette technique nécessite une mise à jour de la connaissance de l'influence de toutes les perturbations et elle n'est applicable que pour des systèmes ne présentant pas de variations brusques.

### 2.2.3.3 Nouvelle estimation du gain de glissement $M$

Si l'on considère la surface  $S$  définie par (2.20), le système (2.70) et le terme correcteur donné par (2.26), on obtient pour la dérivée de  $S$  l'expression suivante :

$$\dot{S} = -M \left( \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \text{sign}(S) + \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau \right) + \xi(x,t), \quad (2.96)$$

où est  $\xi(x,t)$  est donné par (2.72) et satisfait la condition (2.74).

#### **Théorème 2.1 [Hajri 96a]**

Soient le système défini par (2.70) et la surface  $S$  donnée par (2.20). Si les hypothèses (2.68), (2.74) et (2.93) sont satisfaites et s'il existe  $\Delta v$  tel que :

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = -M \text{sign}(S), \text{ avec } \Delta v(0) = 0 \text{ et}$$

$$M > \frac{\xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_g)}, \quad (2.97)$$

où  $t_g$  est le temps de glissement tel que  $\alpha_1 + \alpha_2 t_g < 1$ , alors la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$  est toujours vérifiée.

### Démonstration

Soit le gain  $M$  choisi :

$$M = \frac{\psi \xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_g)}, \quad \text{avec } \psi > 1. \quad (2.98)$$

On considère le cas où  $S(0) > 0$ , la même preuve sera faite dans le cas contraire. Les équations (2.96) et (2.98) donnent :

$$\dot{S} = \left( -\frac{\psi \xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_g)} \left( \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \text{sign}(S) + \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau \right) + \xi(x,t) \right). \quad (2.99)$$

En utilisant le lemme 2.4, on atteint  $S = 0$  en un temps fini  $t_g$ , et  $\forall t \in [0, t_g[$ , on a  $\text{sign}(S(t)) = \text{sign}(S(0)) = 1$ . L'équation (2.99) devient :

$$\dot{S} = \left( -\frac{\psi \xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_g)} \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} + t \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) \right) + \xi(x,t) \right), \quad (2.100)$$

$\forall t \in [0, t_g[$ , les hypothèses (2.68) et (2.93) permettent d'écrire :

$$\frac{\left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} + t \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right)}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_g)} > 1. \quad (2.101)$$

D'après (2.100) et (2.101),  $S\dot{S}$  s'écrit :

$$S\dot{S} = S \left( -\frac{\psi \xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_g)} \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} + t \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) + \xi(x,t) \right) < 0. \quad (2.102)$$

(2.102) permet de conclure que  $\forall t \in [0, t_g[$ , on a  $S\dot{S} < 0$ .

Supposons maintenant que l'on quitte la surface d'équation  $S = 0$ . On a alors pour un instant  $t$  tel que :

$$t_g \leq t \leq t_g + \delta, \text{ où } \delta > 0, \quad (2.103)$$

la propriété  $S(t) \neq 0$ .

Comme  $S(t)$  est fonction continue et dérivable alors  $\exists 0 < \delta_1 \leq \delta$ , pour lequel  $S(t)$  est une fonction croissante ou décroissante  $\forall t \in \left[ t_g, t_g^+ \right], t_g^+ = t_g + \delta_1$ . Considérons le cas où  $S(t)$  est décroissante (la démonstration s'effectue de façon semblable si  $S(t)$  est croissante), on a alors  $\text{sign}(S(t)) = -1$ .

D'après (2.99),  $S\dot{S}$  s'écrit :

$$S\dot{S} = S \left( \frac{\psi \xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_g)} \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} + \delta_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) + \xi(x,t) \right) < 0. \quad (2.104)$$

La condition de glissement (2.104) est alors satisfaite et en utilisant le lemme 2.1,  $S(t)$  atteint le domaine défini par  $S = 0$  en un temps fini  $t_g$  et ne le quitte plus pour chaque instant  $t$  tel que  $t \geq t_g$ .

Ce qui prouve, en tenant compte de (2.102), le théorème 2.1. ■

### Remarques

- Dans le cas où on a une perturbation constante du gain (2.69), on a alors  $\alpha_2 = 0$ . En remplaçant  $\alpha_2$  par zéro dans l'inéquation (2.97), on retrouve le résultat (2.75).

- Dans le cas où on n'a pas une perturbation du gain, en utilisant (2.97) mais en annulant  $\alpha_2$  et  $\alpha_1$  et en remplaçant  $\xi_1$  par  $\rho_1$ , on retrouve le résultat (2.37).

#### 2.2.3.4 Estimation du gain de glissement $M$ en fonction des conditions initiales

En utilisant le lemme 2.4, on peut écrire :

$$t_g \leq t_{g\max}, \quad (2.105)$$

où  $t_{g\max}$  est le temps maximal de glissement défini par :

$$t_{g\max} = \frac{|S(0)|}{M(1 - \alpha_1) - \xi_1}. \quad (2.106)$$

Comme :

$$\frac{\xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_{g\max})} > \frac{\xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_g)}, \quad (2.107)$$

avec  $\alpha_1 + \alpha_2 t_{g\max} < 1$ . Alors le choix de  $M$  tel que :

$$M > \frac{\xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_{g\max})}, \quad (2.108)$$

satisfait la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$ .

### **Théorème 2.2 [Hajri 96a]**

Soient le système défini par (2.70) et la surface  $S$  donnée par (2.20), si les hypothèses (2.68), (2.74) et (2.93) sont satisfaites, alors une solution de  $S\dot{S} < 0$  est :

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = -M \text{sign}(S), \text{ avec } \Delta v(0) = 0 \text{ et :}$$

$$M > \frac{(\alpha_2 |S(0)| + 2\xi_1(1 - \alpha_1)) + \sqrt{\alpha_2^2 |S(0)|^2 + 4\alpha_2 \xi_1 |S(0)|(1 - \alpha_1)}}{2(1 - \alpha_1)^2}. \quad (2.109)$$

### **Démonstration**

Remplaçons  $t_{g\max}$  par sa valeur (2.106) dans l'inéquation (2.108), soit :

$$(1 - \alpha_1)^2 M^2 + (2\xi_1(\alpha_1 - 1) - \alpha_2 |S(0)|)M + \xi_1^2 > 0. \quad (2.110)$$

La résolution de (2.110) par rapport à  $M$  donne :

$$M \in ]0 \ M_1[ \cup ]M_2 \ \infty[, \quad (2.111)$$

avec :

$$M_1 = \frac{(\alpha_2 |S(0)| + 2\xi_1(1 - \alpha_1)) - \sqrt{\alpha_2^2 |S(0)|^2 + 4\alpha_2 \xi_1 |S(0)|(1 - \alpha_1)}}{2(1 - \alpha_1)^2}, \quad (2.112)$$

et

$$M_2 = \frac{(\alpha_2 |S(0)| + 2\xi_1(1 - \alpha_1)) + \sqrt{\alpha_2^2 |S(0)|^2 + 4\alpha_2 \xi_1 |S(0)|(1 - \alpha_1)}}{2(1 - \alpha_1)^2}. \quad (2.113)$$

D'après le lemme 2.4 on vérifie (2.75), c'est-à-dire :

$$M > \frac{\xi_1}{1 - \alpha_1},$$

donc  $M > M_2$ . Ce qui prouve le résultat (2.109). ■

### Remarques

- Il est intéressant de noter que l'estimation de  $M$  dépend des conditions initiales. En effet, plus l'état représentatif de l'évolution du système est éloigné de la surface  $S = 0$ , plus le gain de glissement  $M$  doit être important.

- Dans le cas où  $\frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)}$  est une constante, on a  $\alpha_2 = 0$  et on retrouve le résultat (2.75)

### 2.2.3.5 Estimation des perturbations en fonction du gain de glissement et des conditions initiales

Supposons maintenant que l'on ait la valeur du gain de glissement  $M$ , et que l'on désire étudier le domaine de validité de la perturbation  $\xi_1$  (2.74), afin de satisfaire la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$ . L'inéquation (2.110) peut être écrite :

$$\xi_1^2 - 2M(1 - \alpha_1)\xi_1 + \left( (1 - \alpha_1)^2 M^2 - \alpha_2 M |S(0)| \right) > 0. \quad (2.114)$$

La résolution de (2.114) par rapport à  $\xi_1$ , donne deux solutions strictement positives. Comme  $\xi_1 < M(1 - \alpha_1)$ , (lemme 2.4), on a :

$$0 < \xi_1 < M(1 - \alpha_1) - \sqrt{\alpha_2 M |S(0)|}. \quad (2.115)$$

### 2.2.3.6 Exemple

Considérons la description du système suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + p(x,t) + (2 + \sin t + \Delta g(x,t))u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (2.116)$$

où :

$$\begin{cases} \left| \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right| \leq 0.1, \\ \left| \xi(x,t) \right| \leq 1.3, \\ \left| \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right| \leq 1.7. \end{cases} \quad (2.117)$$

Considérant le système sans perturbations, la loi de commande  $u$  s'écrit :

$$u = \frac{1}{(2 + \sin t)} (v^* - x_1^2). \quad (2.118)$$

On souhaite avoir pour le processus une réponse à un échelon unitaire  $\Gamma(t)$  de commande du type deuxième ordre de constante de temps équivalente égale à 2 secondes, d'où la nouvelle entrée  $v^*$  :

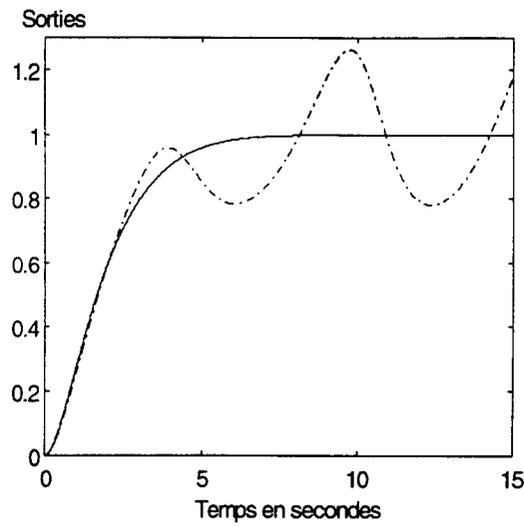
$$v^* = (y_c - y) - 2\dot{y}, \quad (2.119)$$

avec  $y_c$  égale à un échelon unitaire  $\Gamma(t)$  et  $x(0) = 0$ .

Pour les simulations, les perturbations vérifient :

$$\begin{cases} p(x,t) = -0.07x_1^2, \\ \Delta g(x,t) = -0.1 + 0.2\sin(1.2t) - \sin t. \end{cases} \quad (2.120)$$

En appliquant la loi de commande ((2.118), (2.119)) au système réel ((2.116), (2.120)), on remarque que la sortie réelle  $y$  du système ne coïncide pas avec celle désirée  $y_d$  du modèle (figure 2.6).



$y_d$  ( — ) et  $y$  ( -.- ).

**Figure 2.6 :** Comparaison des sorties désirée  $y_d$  et réelle  $y$  du processus.

En présence de perturbations, la commande  $u$  qui doit être appliquée au système s'écrit :

$$u = \frac{1}{(2 + \sin t)} (v^* - x_1^2) + \Delta u. \quad (2.121)$$

D'après (2.119), il en résulte pour  $S$  l'expression :

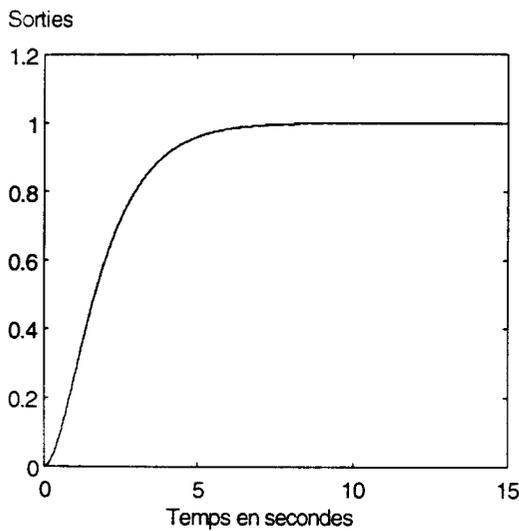
$$S = \ddot{y} + 2\dot{y} + (y - y_c), \quad (2.122)$$

où  $S(0) = -1$ . Dans l'hypothèse où

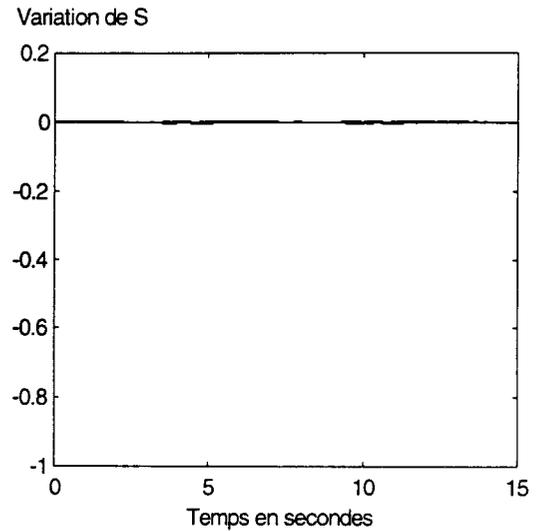
$$\alpha_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 1.7, \quad \xi_1 = 1.3, \quad (2.123)$$

l'inéquation (2.109) impose un gain de glissement  $M > 4.3$ . On a choisi pour les simulations la valeur :

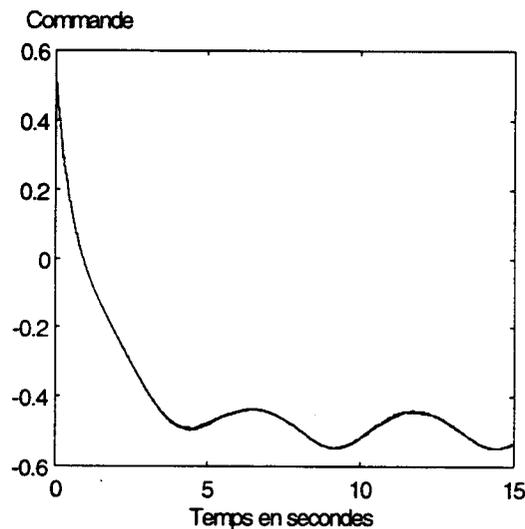
$$M = 4.5. \quad (2.124)$$



a :  $y_d$  ( — ) et  $y$  ( -.- ).



b : Variation de  $S$ .



c : Evolution de la commande  $u$ .

**Figure 2.7 :** Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur dynamique par mode glissant

Les figures 2.7.a, 2.7.b, et 2.7.c montrent respectivement, la comparaison de la sortie désirée  $y_d$  avec la sortie réelle  $y$  du système, la variation de  $S$  et la nouvelle loi de commande par mode glissant. On peut noter dans ce cas la robustesse de la méthode (figure 2.7.a) et l'atténuation du broutement (figure 2.7.c).

## 2.2.4 Domaine réel de glissement

Si on tient compte de toutes les imperfections telles que le retard, l'inertie du commutateur, les phénomènes d'hystérésis, l'imprécision sur les instruments de mesures, etc, on s'aperçoit que le glissement réel s'effectue dans un domaine  $D$  défini par une bande de largeur  $\pm \varepsilon$ , autour de la surface  $S$  déterminée par l'équation  $S = 0$ .

$$D = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_+, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : |S(t)| \leq \varepsilon\}, \quad (2.125)$$

$S(t)$  atteint le domaine  $D$  en un temps fini  $t_{g\varepsilon}$  :

$$\frac{|S(0)| - \varepsilon}{M(1 + \alpha_1) + \xi_1} \leq t_{g\varepsilon} \leq \frac{|S(0)| - \varepsilon}{M(1 - \alpha_1) - \xi_1}. \quad (2.126)$$

Pour  $\varepsilon$  tendant vers zéro, le régime glissant est idéal.

En se basant sur le théorème 2.1, notamment  $M$  donné par (2.97), le gain  $M_\varepsilon$  s'écrit :

$$M_\varepsilon > \frac{\xi_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 t_{g\varepsilon})}, \quad (2.127)$$

avec  $\alpha_1 + \alpha_2 t_{g\varepsilon} < 1$ .

### Corollaire 2.1 [Hajri 96a]

Soient le système défini par (2.70) et la surface  $S$  donnée par (2.20). On suppose que les hypothèses (2.68), (2.74) et (2.93) sont satisfaites et qu'il existe  $\Delta v$  tel que

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = -M \text{sign}(S), \text{ et } \Delta v(0) = 0.$$

Si  $S(t)$  atteint le domaine  $D$  défini par (2.125) alors le gain  $M_\varepsilon$  qui satisfaisant la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$  s'écrit :

$$M_\varepsilon > \frac{(\alpha_2 (|S(0)| - \varepsilon) + 2\xi_1 (1 - \alpha_1)) + \sqrt{\alpha_2^2 (|S(0)| - \varepsilon)^2 + 4\alpha_2 \xi_1 (|S(0)| - \varepsilon)(1 - \alpha_1)}}{2(1 - \alpha_1)^2}. \quad (2.128)$$

### Démonstration

On remplace  $|S(0)|$  par  $(|S(0)| - \varepsilon)$  dans la démonstration du théorème 2.2.

■

## 2.2.5 Cas d'un gain de glissement variable

On suppose maintenant que le gain de glissement  $M$  n'est plus constant, mais qu'il est défini par une fonction strictement positive du temps  $M(t)$  vérifiant :

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = M(t). \quad (2.129)$$

### 2.2.5.1 Estimation du temps de glissement

#### **Lemme 2.5**

Soient le système défini par (2.70) et la surface  $S$  donnée par (2.20). On suppose que les hypothèses (2.68) et (2.74) sont satisfaites et qu'il existe  $\Delta v$  tel que

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = -M(t)\text{sign}(S), \text{ avec } \Delta v(0) = 0,$$

et  $M(t)$  une fonction strictement positive du gain satisfaisant (2.129). Alors  $S(t)$  atteint  $S = 0$  en un temps fini  $t_g$  tel que :

- $\alpha_1(\mu(0) - \mu(t_g)) - \xi_1 t_g + S(0) + \mu(0) \leq \mu(t_g) \leq S(0) + \mu(0) + \xi_1 t_g - \alpha_1(\mu(0) - \mu(t_g)),$  (2.130)

si  $S(0) > 0$ .

- $\alpha_1(\mu(0) - \mu(t_g)) - \xi_1 t_g + S(0) - \mu(0) \leq -\mu(t_g) \leq S(0) - \mu(0) + \xi_1 t_g - \alpha_1(\mu(0) - \mu(t_g)),$  (2.131)

si  $S(0) < 0$ .

### Démonstration

En utilisant l'équation (2.78), on obtient :

$$S(0) + \left(1 + \frac{\Delta g(x, t_g)}{g(x, t_g)}\right) \Delta v(t_g) + \int_0^{t_g} \xi(x, \tau) d\tau = 0, \quad (2.132)$$

avec :

$$\Delta v(t_g) = - \int_0^{t_g} M(\tau) \text{sign}(S(\tau)) d\tau. \quad (2.133)$$

Comme le signe de  $S(\tau)$  est constant durant  $[0, t_g]$ , en utilisant (2.129) l'équation (2.133) devient :

$$\Delta v(t_g) = (\mu(0) - \mu(t_g)) \text{sign}(S(0)). \quad (2.134)$$

D'après les hypothèses du lemme 2.5,  $M(t)$  est une fonction strictement positive, alors  $\mu(t)$  est une fonction strictement croissante. En utilisant l'hypothèse (2.68), on a :

$$(1 + \alpha_1) (\mu(0) - \mu(t_g)) \leq \left(1 + \frac{\Delta g(x, t_g)}{g(x, t_g)}\right) (\mu(0) - \mu(t_g)) \leq (1 - \alpha_1) (\mu(0) - \mu(t_g)), \quad (2.135)$$

d'où on peut déduire (2.130) et (2.131) suivant le signe de  $S(0)$ .

■

### 2.2.5.2 Généralisation du temps de glissement

Dans ce cas, on suppose toujours que le gain de glissement  $M(t)$  est une fonction du temps mais qu'on a un **glissement réel** dans une bande variable  $\varepsilon(t)$  autour de la surface d'équation  $S = 0$ . L'estimation du temps de glissement est donnée par le lemme 2.6.

**Lemme 2.6 [Hajri 96a]**

Soient le système défini par (2.70) et la surface  $S$  donnée par (2.2). On suppose que les hypothèses (2.68) et (2.74) sont satisfaites et qu'il existe  $\Delta v$  tel que

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = -M(t)\text{sign}(S), \text{ avec } \Delta v(0) = 0,$$

et  $M(t)$  une fonction strictement positive du gain satisfaisant (2.129). Alors  $S(t)$  atteint le domaine  $D$  (2.125), avec  $\varepsilon(t)$  une fonction positive, en un temps fini  $t_{g\varepsilon}$  tel que :

- $(1 + \alpha_1)(\mu(0) - \mu(t_{g\varepsilon})) - \xi_1 t_{g\varepsilon} + S(0) \leq \varepsilon(t_{g\varepsilon}) \leq S(0) + \xi_1 t_{g\varepsilon} + (1 - \alpha_1)(\mu(0) - \mu(t_{g\varepsilon})),$  (2.136)

si  $S(0) > 0$ .

- $(1 - \alpha_1)(\mu(t_{g\varepsilon}) - \mu(0)) - \xi_1 t_{g\varepsilon} + S(0) \leq \varepsilon(t_{g\varepsilon}) \leq S(0) + \xi_1 t_{g\varepsilon} + (1 + \alpha_1)(\mu(t_{g\varepsilon}) - \mu(0)),$  (2.137)

si  $S(0) < 0$ .

**Démonstration**

Considérons l'équation (2.78) et le temps  $t_{g\varepsilon}$  tel que  $S(t_{g\varepsilon}) = \varepsilon(t_{g\varepsilon})$ , d'où on peut écrire :

$$S(0) + \left(1 + \frac{\Delta g(x, t_{g\varepsilon})}{g(x, t_{g\varepsilon})}\right) \Delta v(t_{g\varepsilon}) + \int_0^{t_{g\varepsilon}} \xi(x, \tau) d\tau = \varepsilon(t_{g\varepsilon}), \quad (2.138)$$

avec  $\Delta v(t_{g\varepsilon})$  satisfaisant (2.133), c'est-à-dire :

$$\Delta v(t_{g\varepsilon}) = - \int_0^{t_{g\varepsilon}} M(\tau) \text{sign}(S(\tau)) d\tau.$$

En utilisant la même démarche que celle de la démonstration du lemme 2.5, on a :

$$(1 + \alpha_1)(\mu(0) - \mu(t_{g\varepsilon})) \leq \left(1 + \frac{\Delta g(x, t_{g\varepsilon})}{g(x, t_{g\varepsilon})}\right) (\mu(0) - \mu(t_{g\varepsilon})) \leq (1 - \alpha_1)(\mu(0) - \mu(t_{g\varepsilon})). \quad (2.139)$$

Suivant le signe de  $S(0)$ , on démontre le lemme 2.6. La connaissance des fonctions  $\mu(t)$  et  $\varepsilon(t)$  permet d'estimer le temps de glissement  $t_{g\varepsilon}$ .

■

### Remarques

- Si  $\varepsilon(t) = 0$  et  $M(t)$  est une fonction strictement positive du temps vérifiant (2.129), on retrouve le résultat du lemme 2.5.

- Si  $\varepsilon(t) = \varepsilon$  (une constante) et  $\mu(t) = M$  (une constante), on retrouve le résultat (2.126).

- Si  $\varepsilon(t) = 0$  et  $\mu(t) = M$  (une constante), on retrouve le résultat du lemme 2.4.

### 2.2.5.3 Estimation du gain de glissement

#### Théorème 2.3 [Hajri 96a]

Soient le système défini par (2.70) et la surface  $S$  donnée par (2.20). Si les hypothèses (2.68), (2.74) et (2.93) sont satisfaites et s'il existe  $\Delta v$  tel que

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = -M(t)\text{sign}(S), \text{ avec } \Delta v(0) = 0,$$

et  $M(t)$  une fonction strictement croissante vérifiant (2.129). Alors la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$  est satisfaite si :

$$M(t) > \frac{\xi_1 + \alpha_2(\mu(t_g) - \mu(0))}{1 - \alpha_1}. \quad (2.140)$$

### Démonstration

Le signe de  $S(t)$  est constant durant  $[0, t_g[$ , d'où  $S\dot{S}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} S\dot{S} &= S \left( - \left( \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) M(t) + \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) \int_0^t M(\tau) d\tau \right) \text{sign}(S) + \xi(x,t) \right), \\ &= S \left( - \left( \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) M(t) + \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) (\mu(t_g) - \mu(0)) \right) \text{sign}(S) + \xi(x,t) \right), \end{aligned} \quad (2.141)$$

Soit  $M(t)$  satisfaisant (2.140) :

$$M(t) = \frac{\psi(\xi_1 + \alpha_2(\mu(t_g) - \mu(0)))}{1 - \alpha_1}, \quad \psi > 1. \quad (2.142)$$



On pose :

$$\left( \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \left( \frac{\psi(\xi_1 + \alpha_2(\mu(t_g) - \mu(0)))}{1 - \alpha_1} \right) + \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) (\mu(t_g) - \mu(0)) \right) = \phi, \quad (2.143)$$

(2.104) devient :

$$S\dot{S} = S(\xi(x,t) - \phi \text{sign}(S)). \quad (2.144)$$

Comme  $M(t)$  est une fonction strictement positive, alors  $\mu(t)$  est une fonction strictement croissante. On a donc :

$$\mu(0) < \mu(t_g). \quad (2.145)$$

En considérant les hypothèses (2.68) et (2.74) on obtient :

$$\phi > \xi_1, \quad (2.146)$$

donc quelque soit le signe de  $S$  on a  $S\dot{S} < 0$  durant  $[0, t_g[$ .

De plus, la même démarche que celle du théorème 2.1 montre que  $S = 0$  pour tout instant  $t \geq t_g$ , d'où la démonstration du théorème 2.3.

■

## 2.3 Deuxième proposition pour le contrôleur dynamique par mode glissant

### 2.3.1 Présentation du nouveau contrôleur

#### **Théorème 2.4 [Hajri 96b]**

Soient le système défini par (2.70) et la surface de glissement  $S$  donnée par (2.2), si les hypothèses (2.68), (2.74) et (2.93) sont satisfaites, alors le compensateur dynamique :

$$\frac{d(\Delta v)}{dt} = -(M_1 + M_2 (\text{sign}(\Delta v))\Delta v)\text{sign}(S), \quad (2.147)$$

avec :

$$M_1 > \frac{\xi_1}{1-\alpha_1} \quad \text{et} \quad M_2 > \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}, \quad (2.148)$$

satisfait la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$ .

#### **Démonstration**

D'après (2.59) on a :

$$\dot{S} = \left(1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)}\right) \frac{d(\Delta v)}{dt} + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)}\right)\right) \Delta v + \xi(x,t). \quad (2.149)$$

En remplaçant  $\frac{d(\Delta v)}{dt}$  par sa valeur (2.147) dans (2.149), on obtient :

$$\dot{S} = -\left(1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)}\right) (M_1 + M_2 (\text{sign}(\Delta v))\Delta v)\text{sign}(S) + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)}\right)\right) \Delta v + \xi(x,t). \quad (2.150)$$

#### **Cas où $S > 0$**

$S\dot{S}$  devient :

$$S\dot{S} = S \left( -\left(1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)}\right) (M_1 + M_2 (\text{sign}(\Delta v))\Delta v) + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)}\right)\right) \Delta v + \xi(x,t) \right), \quad (2.151)$$

$$S\dot{S} = S \left( -M_1 \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) + \xi(x,t) + \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) - M_2 \text{sign}(\Delta v) \right) \Delta v. \quad (2.152)$$

En utilisant les hypothèses (2.68), (2.74), (2.93) et (2.148) on a :

$$-M_1 \left( 1 + \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) + \xi(x,t) < 0. \quad (2.153)$$

Si  $\Delta v > 0$  on a :

$$\left( \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) - M_2 \right) \Delta v < 0. \quad (2.154)$$

Si  $\Delta v < 0$  on :

$$\left( \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right) + M_2 \right) \Delta v < 0. \quad (2.155)$$

(2.153), (2.154) et (2.155) montrent que la condition de glissement  $S\dot{S} < 0$  est satisfaite.

### Cas où $S < 0$

On utilise la même démonstration que dans le cas où  $S > 0$ , d'où la démonstration du théorème 2.4.

■

### **Remarques**

- Il est intéressant de noter que la deuxième proposition (2.147) est moins restrictive que la première (2.97). En effet on n'a plus la condition  $\alpha_1 + \alpha_2 t_g < 1$  à satisfaire.
- Dans le prolongement de ces résultats, nous avons développé un autre compensateur dynamique par mode glissant (voir [Perruquetti 97b]).

### 2.3.2 Exemple

On considère dans cet exemple [Hajri 96b], le système donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 - 0.1x_2 + (x_2^2 + 1 + \Delta g(x,t))u + p(x,t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.156)$$

où l'on suppose :

$$\begin{cases} \left| \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right| \leq 0.2, & \left| \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{g(x,t)} \right) \right| \leq 0.22, \\ |\varepsilon(x,t)| \leq 2.3, & |\xi(x,t)| \leq 2.3. \end{cases} \quad (2.157)$$

Si l'on considère le système (2.156) dans le cas idéal, c'est-à-dire en absence de perturbations. D'après (2.21), on a :

$$u = \frac{(v^* - x_1^3 + 0.1x_2)}{x_2^2 + 1}, \quad (2.158)$$

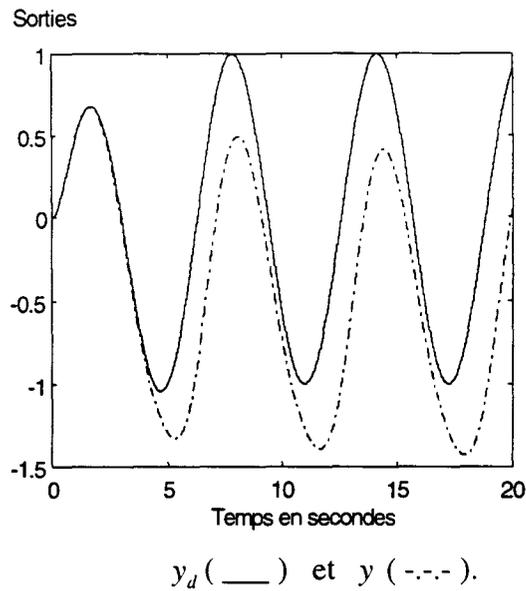
où la nouvelle entrée  $v^*$  est donnée par :

$$v^* = (y_c - y) + 2(\dot{y}_c - \dot{y}) + \ddot{y}_c, \quad (2.159)$$

le signal de référence  $y_c$  et les conditions initiales  $x(0)$  sont choisis tels que :

$$y_c = \sin t, \quad x(0) = 0. \quad (2.160)$$

En appliquant  $u$  (2.158) au système réel ((2.156), (2.157)), la trajectoire réelle  $y$  ne coïncide pas avec celle désirée  $y_d$  (figure 2.8).



**Figure 2.8 :** Comparaison des sorties désirée  $y_d$  et réelle  $y$  du processus.

Afin de rejoindre la trajectoire désirée, on propose d'utiliser dans un premier temps, la commande par mode glissant classique, et dans un deuxième temps la deuxième approche du contrôleur dynamique par mode glissant (théorème 2.4).

### 2.3.2.1 Commande classique par mode glissant

La surface de glissement classique s'écrit :

$$S = 0.5(y - y_c) + (\dot{y} - \dot{y}_c) = 0, \quad (2.161)$$

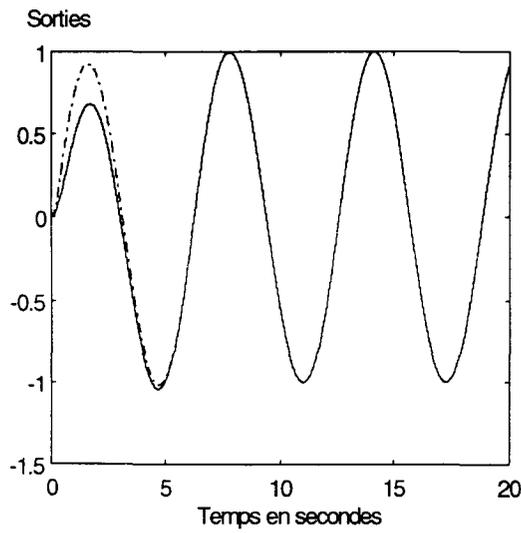
et la commande  $u$  est définie par :

$$u = \frac{0.5\dot{y}_c + \ddot{y}_c - 0.4x_2 - x_1^3}{x_2^2 + 1} - \frac{M \text{sign}(S)}{x_2^2 + 1}. \quad (2.162)$$

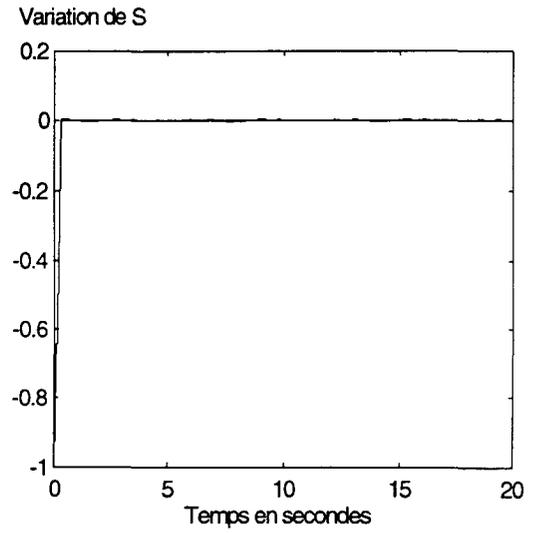
En utilisant (2.157),  $M$  est choisi (voir la première approche de la section 1.5.4.2 du chapitre 1) :

$$M = 3. \quad (2.163)$$

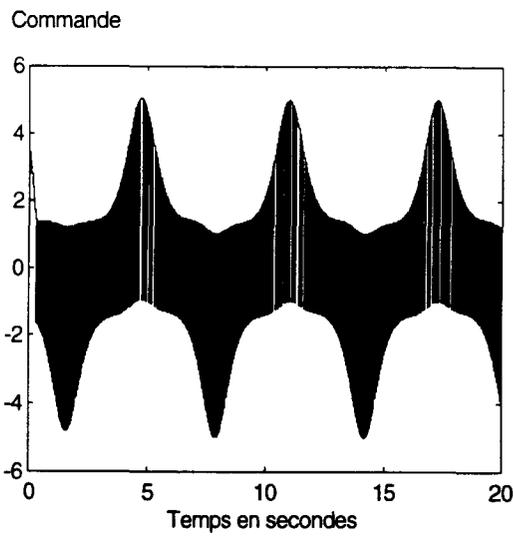
Les résultats sont présentés sur la figure 2.9.



a :  $y_d$  ( — ) et  $y$  ( -.- ).



b : Variation de  $S$ .



c : Variation de la commande  $u$ .

Figure 2.9 : Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur classique par mode glissant.

### 2.3.2.2 Deuxième proposition pour le contrôleur DMG

La nouvelle surface de glissement est définie par :

$$S = (y - y_c) + 2(\dot{y} - \dot{y}_c) + (\ddot{y} - \ddot{y}_c) = 0. \quad (2.164)$$

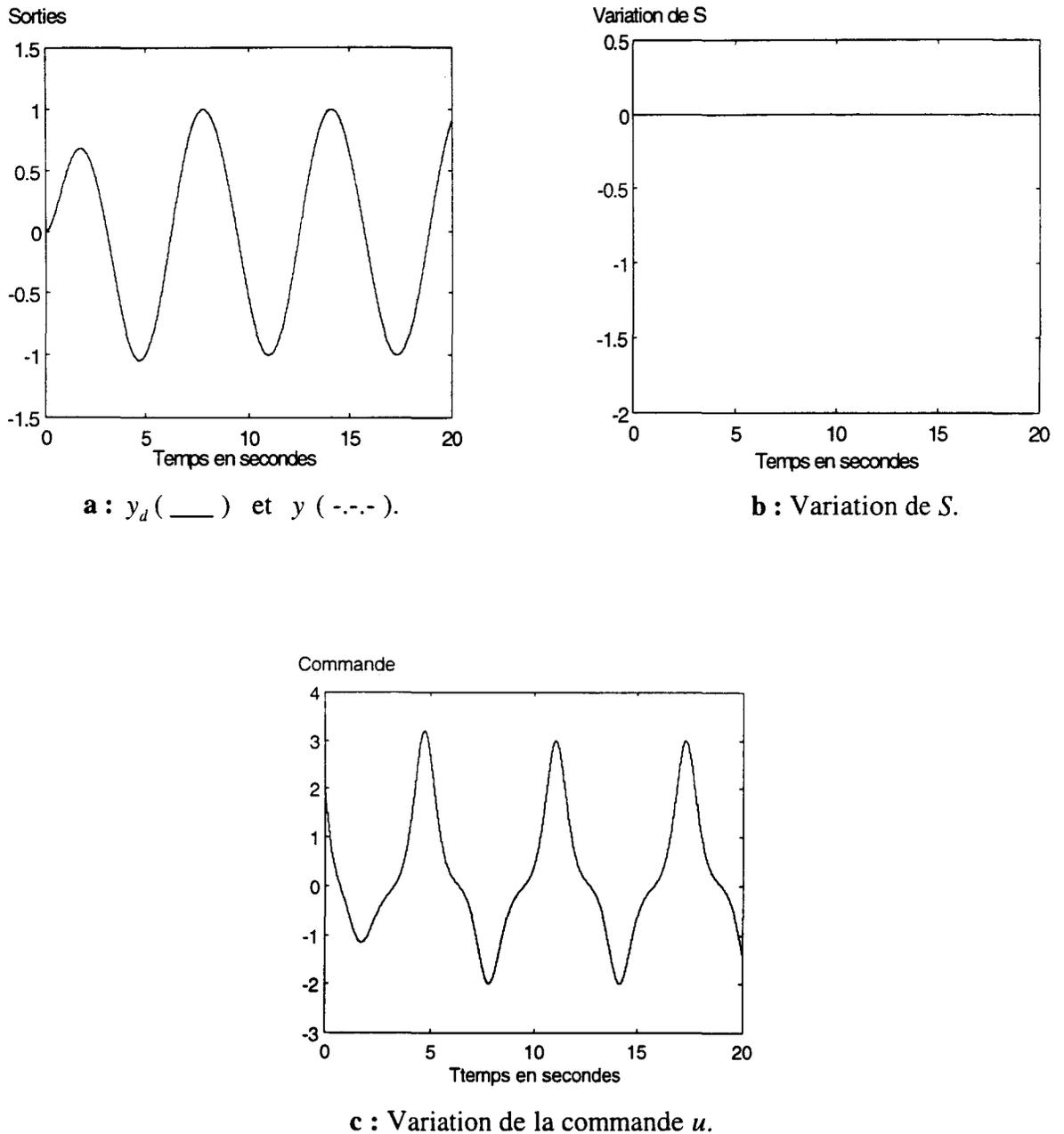
D'après (2.148) et (2.147), on choisit les gains de glissements :

$$\begin{cases} M_1 = 3, \\ M_2 = 0.3. \end{cases} \quad (2.165)$$

A partir de (2.21) et (2.157), la nouvelle commande s'écrit :

$$\begin{cases} u = \frac{y_c + 2\dot{y}_c + \ddot{y}_c - x_1 - 1.9x_2 - x_1^3}{x_2^2 + 1} - \frac{\Delta v}{x_2^2 + 1}, \\ \frac{d(\Delta v)}{dt} = -(3 + 0.3(\text{sign}(\Delta v))\Delta v)\text{sign}(S). \end{cases} \quad (2.166)$$

Les résultats de simulation sont présentés sur la figure 2.10.



**Figure 2.10 :** Evolution du système réel corrigé avec le deuxième contrôleur dynamique par mode glissant.

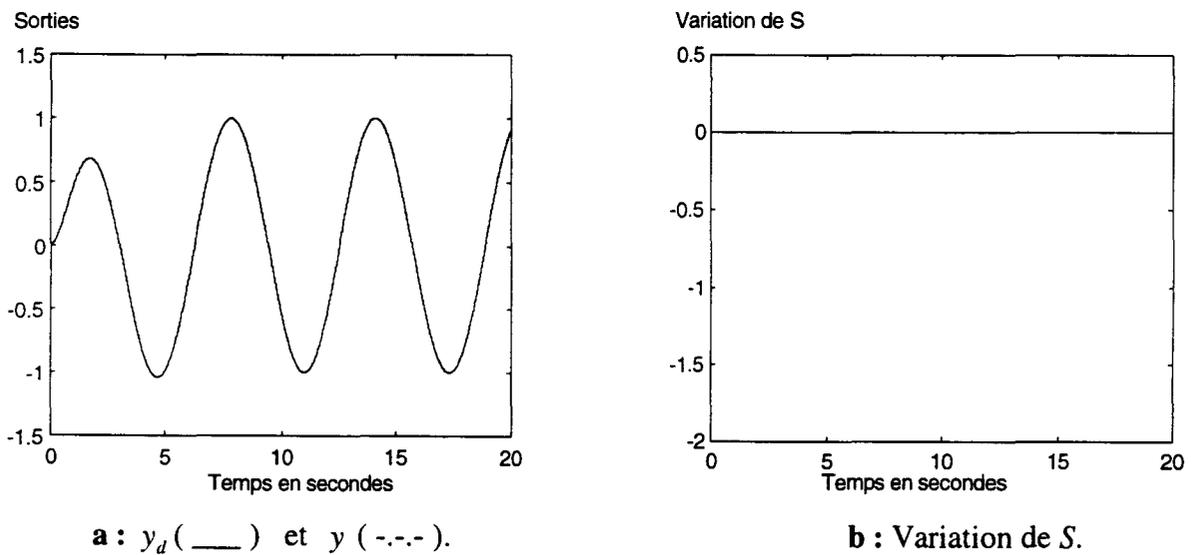
Il est intéressant de noter que la commande par mode glissant classique induit d'importantes oscillations indésirables tandis que l'amplitude du broutement par la nouvelle approche est négligeable. En plus, la convergence de la trajectoire réelle du système vers celle désirée est plus rapide avec la nouvelle méthode (figures 2.9.a, 2.10.a et 2.9.c, 2.10.c).

### 2.3.2.3 Remarque

Les simulations faites avec le nouveau compensateur (2.147), mais en réduisant les gains  $M_1$  et  $M_2$  tels que :

$$M_1 = 1.5, \text{ et } M_2 = 0.15, \quad (2.167)$$

donnent encore de bons résultats (voir figure 2.11), ce qui montre la robustesse de cette méthode.



**Figure 2.11 :** Evolution du système réel corrigé avec le deuxième contrôleur dynamique par mode glissant.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle vision de la commande en régime glissant. Cette approche est basée sur la mise en oeuvre d'une surface de glissement de même ordre que le système. En régime glissant, la discontinuité n'intervient plus sur l'entrée mais sur sa dérivée. On évite ainsi les phénomènes de broutement liés à des commutations trop rapides de l'entrée et la réduction de l'ordre du système en boucle fermée. La prise en compte de la dérivée de l'entrée et le fait de s'intéresser non seulement aux perturbations mais aussi à leurs dérivées, quand cela est possible, permet de s'affranchir des conditions géométriques de robustesse. Les exemples simulés sur ordinateur montrent que la sortie réelle du processus n'est plus influencée par la présence de perturbations bornées, lors de la stabilisation sur l'origine par l'approche proposée. De plus, les phénomènes de broutement intervenant lors de l'utilisation de la commande par mode glissant classique n'apparaissent plus dans ce contexte.

## **Chapitre 3**

**Commande dynamique par mode glissant :  
application aux systèmes multivariables**



## Introduction

La stabilisation asymptotique des systèmes monovariables avec le **correcteur dynamique par mode glissant** (DMG) a fait ses preuves dans les domaines de la **robustesse**, de la **poursuite de trajectoires** et de la simplicité de mise en oeuvre. On peut donc envisager une généralisation au cas des **systèmes multivariables** par une technique de **découplage**. En effet, le régime glissant est considéré comme un ensemble de  $m$  régimes glissants monovariables et par suite la loi de commande est définie par  $m$  correcteurs DMG indépendants. Cependant, cette notion d'indépendance n'est plus valable dans certains cas de perturbations, ce qui rend l'étude plus complexe que dans le cas monovariante.

Dans ce chapitre, où l'on considère des systèmes multivariables, est défini dans une première étape le correcteur dynamique par mode glissant. La validité et la complexité de la méthode est étudiée, dans une seconde étape, pour différents types de perturbations. On y décrit aussi une approche d'**optimisation** des gains de glissements sous certaines contraintes. Enfin, une étude comparative de la robustesse pour trois algorithmes de commande par mode glissant notamment la commande classique par mode glissant, la commande continue dans une bande de la surface et la commande dynamique par mode glissant est réalisée sur un exemple de **moteur synchrone**.

### 3.1 Découplage dynamique par mode glissant

Considérons un système multivariable, à  $m$  entrées et  $m$  sorties, représenté dans l'espace d'état de dimension  $n$  par (voir annexe 3) :

$$y^* = f^*(x, t) + G^*(x, t)u, \quad (3.1)$$

où l'on pose :

$$\begin{cases} y^* = [y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)}]^T, \\ f^* = [f_1^*, \dots, f_m^*]^T, \\ G^* = [G_1^*, \dots, G_m^*]^T. \end{cases} \quad (3.2)$$

La forme canonique de commandabilité correspondant au système (3.1) est donnée par :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{x}_{ir_i} = f_i^*(x, t) + G_i^*(x, t)u, \\ y_i = x_{i1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système (3.3) considéré dans nos travaux est supposé **commandable et observable**.

Par conséquent, on a  $\sum_{i=1}^m r_i = n$ . Toutefois, notre approche reste valable lorsque  $\sum_{i=1}^m r_i < n$ , à condition que la partie non observable du processus soit asymptotiquement stable.

On définit une variété glissante

$$S = [S_1, \dots, S_m]^T, \quad (3.4)$$

où les  $S_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont totalement découplées et décrites par :

$$S_i = \sum_{j=0}^{r_i} a_{ij} (y_i^{(j)} - y_{ic}^{(j)}), \quad a_{ir_i} = 1. \quad (3.5)$$

Les  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ , et  $j = 0, \dots, (r_i - 1)$ ) sont choisis de telle manière que  $a_{i0} + a_{i1}s + \dots + a_{i(r_i-1)}s^{r_i-1} + s^{r_i}$  soit un polynôme de Hurwitz.

On désire assurer la condition d'attractivité de chaque surface  $S_i = 0$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) :

$$S_i \dot{S}_i < 0 \quad \text{si } S_i \neq 0. \quad (3.6)$$

Le calcul de la dérivée de  $S_i$  donne :

$$\dot{S}_i = \left( \sum_{j=0}^{r_i} a_{ij} (y_i^{(j+1)} - y_{ic}^{(j+1)}) \right). \quad (3.7)$$

Alors le choix de

$$\dot{S}_i = -M_i \text{sign}(S_i), \quad M_i > 0, \quad (3.8)$$

assure la condition (3.6).

La convergence de chaque  $S_i$  vers 0 s'effectue en un temps fini  $t_{gi}$  :

$$t_{gi} = \frac{|S_i(0)|}{M_i}. \quad (3.9)$$

Par identification de (3.7) et (3.8), il vient :

$$\begin{pmatrix} y_1^{(r_1+1)} \\ \vdots \\ y_i^{(r_i+1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1^* \\ \vdots \\ \dot{y}_i^* \\ \vdots \\ \dot{y}_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{j=0}^{r_1-1} a_{1j} y_1^{(j+1)} + \sum_{j=0}^{r_1} a_{1j} y_{1c}^{(j+1)} - M_1 \text{sign}(S_1) \\ \vdots \\ -\sum_{j=0}^{r_i-1} a_{ij} y_i^{(j+1)} + \sum_{j=0}^{r_i} a_{ij} y_{ic}^{(j+1)} - M_i \text{sign}(S_i) \\ \vdots \\ -\sum_{j=0}^{r_m-1} a_{mj} y_m^{(j+1)} + \sum_{j=0}^{r_m} a_{mj} y_{mc}^{(j+1)} - M_m \text{sign}(S_m) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

où  $\dot{y}_i^*$  est la dérivée de la  $i$ -ème composante du vecteur  $y^*$  (3.2).

Une solution de l'intégration du système (3.10) par rapport à  $t$  est donnée par :

$$y^* = \begin{pmatrix} y_{1c}^{(r_1)} + \sum_{j=0}^{(r_1-1)} a_{1j} (y_{1c}^{(j)} - y_1^{(j)}) - M_1 \int_0^t \text{sign}(S_1(\tau)) d\tau \\ \vdots \\ y_{ic}^{(r_i)} + \sum_{j=0}^{(r_i-1)} a_{ij} (y_{ic}^{(j)} - y_i^{(j)}) - M_i \int_0^t \text{sign}(S_i(\tau)) d\tau \\ \vdots \\ y_{mc}^{(r_m)} + \sum_{j=0}^{(r_m-1)} a_{mj} (y_{mc}^{(j)} - y_m^{(j)}) - M_m \int_0^t \text{sign}(S_m(\tau)) d\tau \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Si les indices  $r_i$  sont invariants et la matrice  $G^*$  inversible dans un domaine  $D_{\text{ex}} \subset \mathbb{R}^n$  de l'espace d'état, en tenant compte de (3.1) et de (3.10), on peut dans  $D_{\text{ex}}$  poser :

$$u = (G^*(x, t))^{-1} \begin{pmatrix} y_{1c}^{(r_1)} + \sum_{j=0}^{(r_1-1)} a_{1j} (y_{1c}^{(j)} - y_1^{(j)}) - M_1 \int_0^t \text{sign}(S_1(\tau)) d\tau - f_1^*(x, t) \\ \vdots \\ y_{ic}^{(r_i)} + \sum_{j=0}^{(r_i-1)} a_{ij} (y_{ic}^{(j)} - y_i^{(j)}) - M_i \int_0^t \text{sign}(S_i(\tau)) d\tau - f_i^*(x, t) \\ \vdots \\ y_{mc}^{(r_m)} + \sum_{j=0}^{(r_m-1)} a_{mj} (y_{mc}^{(j)} - y_m^{(j)}) - M_m \int_0^t \text{sign}(S_m(\tau)) d\tau - f_m^*(x, t) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Par l'utilisation du contrôleur dynamique par mode glissant (3.12), on obtient une commande performante permettant la stabilisation asymptotique du système sur la consigne. En effet, **l'intégration** de la fonction signe dans l'expression de la nouvelle entrée, lisse la loi de commande et par suite atténue les vibrations de haute-fréquences.

### 3.1.1 Dynamique glissante

Le régime glissant est atteint sur chaque surface  $S_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) quand

$$S_i = 0, \quad \text{avec} \quad \dot{S}_i = 0. \quad (3.13)$$

D'où l'on définit la commande équivalente :

$$u_{\text{eq}} = (G^*(x, t))^{-1} \begin{pmatrix} y_{1c}^{(r_1)} + \sum_{j=0}^{(r_1-1)} a_{1j} (y_{1c}^{(j)} - y_1^{(j)}) - f_1^*(x, t) \\ \vdots \\ y_{ic}^{(r_i)} + \sum_{j=0}^{(r_i-1)} a_{ij} (y_{ic}^{(j)} - y_i^{(j)}) - f_i^*(x, t) \\ \vdots \\ y_{mc}^{(r_m)} + \sum_{j=0}^{(r_m-1)} a_{mj} (y_{mc}^{(j)} - y_m^{(j)}) - f_m^*(x, t) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

La dynamique glissante est alors obtenue en remplaçant  $u$  par  $u_{\text{eq}}$  (3.14) dans (3.1), soit :

$$y_{\text{eq}}^* = f^*(x, t) + G^*(x, t)u_{\text{eq}}. \quad (3.15)$$

Le système bouclé en régime glissant, caractérisé par les  $m$  sous-systèmes découplés est donc donné par :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{x}_{ir_i} = y_{ic}^{(r_i)} + \sum_{j=0}^{(r_i-1)} a_{ij} (y_{ic}^{(j)} - y_i^{(j)}), \\ y_i = x_{i1}. \end{cases} \quad (3.16)$$

La dynamique de chaque sous-système ne dépend que des coefficients de la surface correspondante, d'où l'importance du choix des  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$  et  $j = 0, \dots, (r_i - 1)$ ).

### 3.1.2 Interprétation

Si l'on pose :

$$y^* = v^*, \quad (3.17)$$

on obtient pour la  $i$ -ème composante de  $v^*$  :

$$v_i^* = y_i^{(\tau_i)} = y_{ic}^{(\tau_i)} + \sum_{j=0}^{(\tau_i-1)} a_{ij} (y_{ic}^{(j)} - y_i^{(j)}). \quad (3.18)$$

Ainsi le choix de  $S_i$  (3.5) permet d'établir :

$$S_i = -v_i^* + y_i^{(\tau_i)}, \quad (3.19)$$

ce qui revient à stabiliser asymptotiquement le système (3.1) sur la consigne, en absence d'incertitudes et de perturbations, par un simple retour d'état statique :

$$u = (G^*(x,t))^{-1}(v^* - f^*(x,t)), \quad (3.20)$$

dont le schéma de principe est donné par la figure suivante :

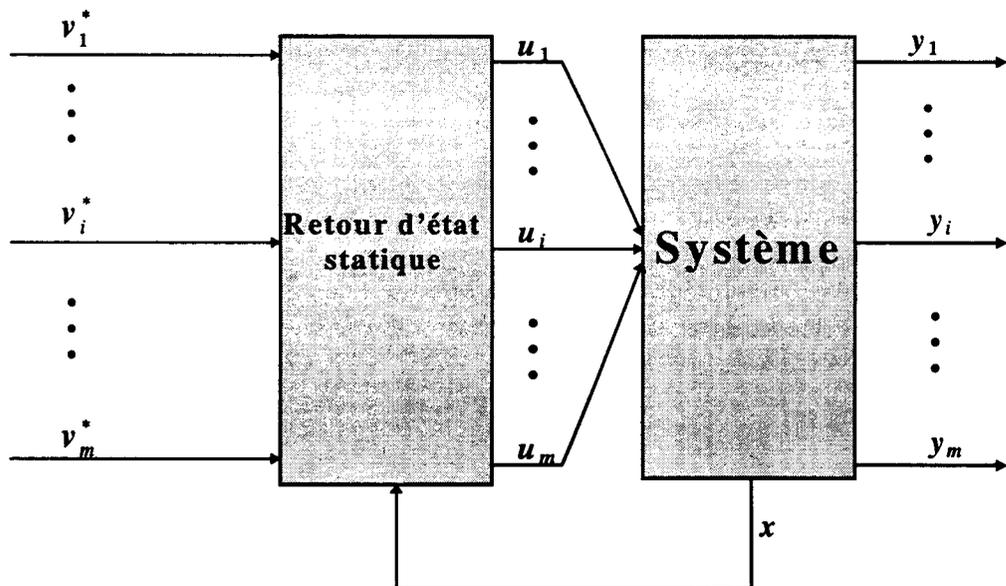


Figure 3.1 : Schéma de principe d'une linéarisation par découplage.

Le système ainsi découplé est formé de  $m$  sous-systèmes monovariabiles indépendants, représentés sous forme canonique de commandabilité :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{x}_{ir_i} = v_i^*, \\ y_i = x_{i1}. \end{cases} \quad (3.21)$$

En présence d'erreurs et de perturbations, la nouvelle entrée  $v^*$  ne permet plus d'atteindre les objectifs souhaités. Ce qui justifie la présence du terme correcteur par mode glissant

$$\Delta v_i = -M_i \int_0^t \text{sign}(S_i(\tau)) d\tau, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.22)$$

dans l'expression de la commande (3.11). D'où l'on définit le nouveau vecteur de commande  $v$  (voir figure 3.2) :

$$v = \begin{pmatrix} v_1^* + \Delta v_1 \\ \vdots \\ v_i^* + \Delta v_i \\ \vdots \\ v_m^* + \Delta v_m \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

permettant de stabiliser asymptotiquement le système sur la consigne. Il en résulte dans ce cas, le retour d'état :

$$u = (G^*(x, t))^{-1} (v^* + \Delta v - f^*(x, t)). \quad (3.24)$$

Ainsi, le système découplé devient :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{x}_{ir_i} = v_i^* + \Delta v_i, \\ y_i = x_{i1}. \end{cases} \quad (3.25)$$

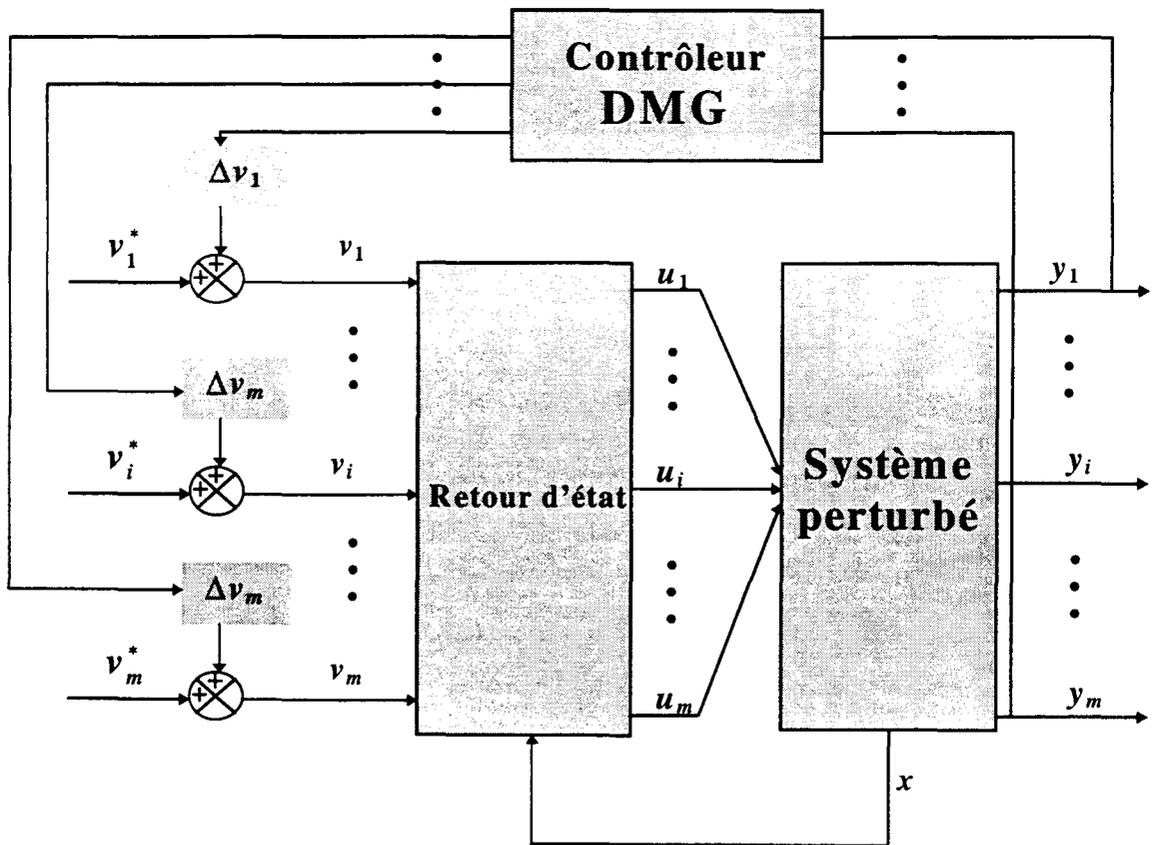


Figure 3.2 : Schéma de principe du contrôleur DMG des systèmes multivariables découplés.

### 3.1.3 Cas de la régulation

Dans ce cas, la consigne  $y_{ic}$  est constante et l'on a :

$$y_{ic}^{(j)} = 0, \quad 1 \leq j \leq r_i. \quad (3.26)$$

Chaque entrée  $v_i^*$  est déterminée à partir de la dynamique imposée au  $i$ -ème sous-système en boucle fermée :

$$\frac{y_i}{y_{ic}} = \frac{a_{i0}}{a_{i0} + a_{i1}s + \dots + a_{i(r_i-1)}s^{r_i-1} + s^{r_i}}. \quad (3.27)$$

La nouvelle entrée  $v_i^*$  devient :

$$v_i^* = a_{i0}y_{ic} - \sum_{j=0}^{(r_i-1)} a_{ij}y_i^{(j)}, \quad (3.28)$$

on lui associe la surface de glissement

$$S_i = -a_{i0}y_i^c + \sum_{j=0}^{r_i} a_{ij}y_i^{(j)} = 0, \quad a_{ir_i} = 1. \quad (3.29)$$

### 3.1.4 Cas particulier où la matrice de découplage est diagonale

Supposons que la matrice  $G^*(x,t)$  soit diagonale, telle que :

$$G^*(x,t) = \begin{pmatrix} g_{11}(x,t) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & g_{ii}(x,t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & g_{mm}(x,t) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

La matrice  $G^*(x,t)$  est inversible, d'après sa définition (voir annexe 3), il en résulte donc pour la  $i$ -ème composante du vecteur commande  $u$  :

$$u_i = \frac{1}{g_{ii}(x,t)} \left( v_i^* - M_i \int_0^t \text{sign}(S_i(\tau)) d\tau - f_i^*(x,t) \right). \quad (3.31)$$

## 3.2 Robustesse par rapport à une perturbation additive

En présence d'une perturbation additive  $p(x,t)$ , le système (3.1) s'écrit :

$$y^* = f^*(x,t) + G^*(x,t)u + p(x,t), \quad (3.32)$$

où  $p = [p_1, \dots, p_m]^T \in \mathbb{R}^m$  représente une perturbation additive. Dans ce cas, le système découplé (3.25) devient :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{x}_{ir_i} = v_i^* + \Delta v_i + p_i(x,t), \\ y_i = x_{i1}. \end{cases} \quad (3.33)$$

### 3.2.1 Estimation des gains de glissement

Les équations (3.19) et (3.33) permettent d'établir l'expression :

$$S_i \dot{S}_i = S_i \left( \frac{d}{dt} (\Delta v_i + p_i(x,t)) \right). \quad (3.34)$$

La condition de glissement est alors satisfaite si les gains de glissement  $M_i$  vérifient :

$$M_i > \rho_i, \quad (3.35)$$

avec  $\rho_i$  une borne connue, satisfaisant [Hajri 96e] :

$$\left| \frac{d}{dt} (p_i(x,t)) \right| \leq \rho_i. \quad (3.36)$$

### 3.2.2 Estimation des temps de glissement

Soit le système (3.33), pour lequel on définit le contrôleur dynamique par mode glissant (3.22). Alors chaque  $S_i$  converge vers 0 en un temps fini  $t_{gi}$  (lemme 2.3) :

$$\frac{|S_i(0)|}{M_i + \rho_i} \leq t_{gi} \leq \frac{|S_i(0)|}{M_i - \rho_i}. \quad (3.37)$$

### 3.2.3 Exemple

On considère dans cet exemple [Hajri 96e], le système identifié par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 + (1 + x_1^2)u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 + 20\text{Ln}(2 + x_1^2)u_2 + 2u_1, \\ y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{cases} \quad (3.38)$$

Toutefois, une description plus exacte du processus (que l'on ignore mais que l'on a supposé pour réaliser les simulations) serait donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.9x_1^2 + 1.1x_2 + (1 + x_1^2)u_1 + 0.5\text{sint}, \\ \dot{x}_2 = 0.9x_1x_2 + 0.3x_2\text{sint} + 20\text{Ln}(2 + x_1^2)u_2 + 2u_1, \\ y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{cases} \quad (3.39)$$

Considérant (3.38) et (3.39), on en déduit pour la perturbation :

$$p(x, t) = \begin{pmatrix} p_1(x, t) \\ p_2(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1x_1^2 + 0.1x_2 + 0.5\text{sint} \\ -0.1x_1x_2 + 0.3x_2\text{sint} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Une linéarisation par découplage du type :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = x_1^2 + x_2 + (1 + x_1^2)u_1 = v_1^*, \\ \frac{dy_2}{dt} = x_1x_2 + 20\text{Ln}(2 + x_1^2)u_2 + 2u_1 = v_2^*, \end{cases} \quad (3.41)$$

permet d'établir le retour d'état statique :

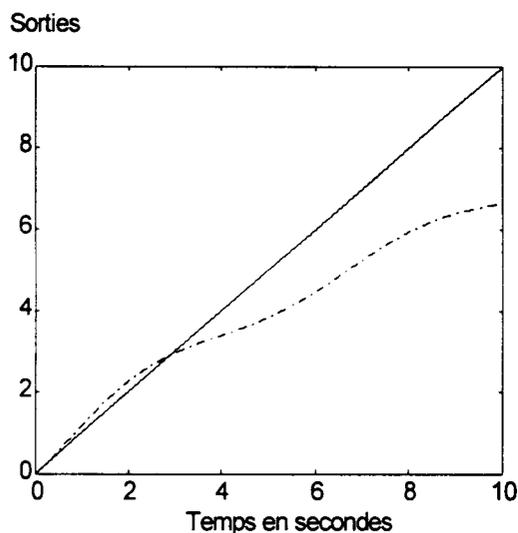
$$\begin{cases} u_1 = \frac{v_1^* - x_1^2 - x_2}{1 + x_1^2}, \\ u_2 = \frac{v_2^* - 2\left(\frac{v_1^* - x_1 - x_2}{1 + x_1^2}\right) - x_1x_2}{20\text{Ln}(2 + x_1^2)}. \end{cases} \quad (3.42)$$

On souhaite avoir pour la sortie  $y_1$  du processus une réponse à une rampe unitaire et un comportement du type premier ordre de constante de temps égale à 1 seconde. Pour la sortie  $y_2$ , on désire également un comportement de même type mais de constante de temps égale à 1.25 secondes. D'où l'on définit les nouvelles entrées :

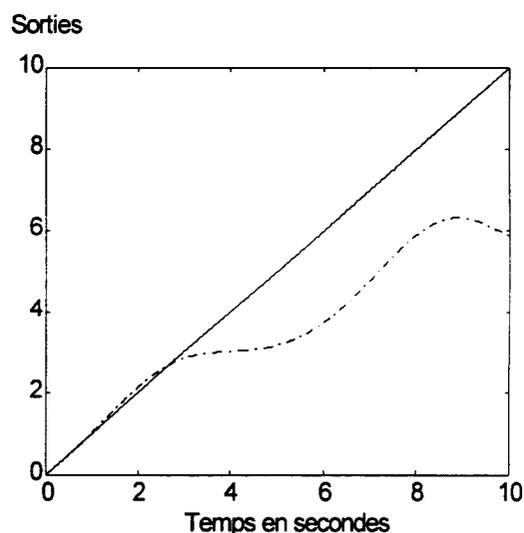
$$\begin{cases} v_1^* = (y_{1c} - y_1) + \dot{y}_{1c}, \\ v_2^* = 0.8(y_{2c} - y_2) + \dot{y}_{2c}, \end{cases} \quad (3.43)$$

avec  $y_{1c}$  et  $y_{2c}$  des consignes égales, dans cet exemple, à des rampes unitaires.

En appliquant la loi de commande ((3.42),(3.43)) respectivement aux systèmes (3.38) et (3.39), on constate que les trajectoires réelles du processus ne coïncident pas avec celles désirées (voir figure 3.3).



**a** :  $y_{1d}$  (—) et  $y_1$  (-.-.-).



**b** :  $y_{2d}$  (—) et  $y_2$  (-.-.-).

**Figure 3.3** : Comparaison des sorties désirées  $y_{1d}$ ,  $y_{2d}$  et réelles  $y_1$ ,  $y_2$  du processus.

Afin d'atteindre l'objectif souhaité, on considère la loi de commande (3.24), qui appliquée au processus réel (3.39), donne :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{v_1^* + \Delta v_1 - x_1^2 - x_2}{1 + x_1^2}, \\ u_2 = \frac{v_2^* + \Delta v_2 - 2\left(\frac{v_1^* + \Delta v_1 - x_1^2 - x_2}{1 + x_1^2}\right) - x_1 x_2}{20 \text{Ln}(2 + x_1^2)}. \end{cases} \quad (3.44)$$

Le système (3.43) permet de définir les expressions de  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\begin{cases} S_1 = (y_1 - y_{1c}) + (\dot{y}_1 - \dot{y}_{1c}), \\ S_2 = 0.8(y_2 - y_{2c}) + (\dot{y}_2 - \dot{y}_{2c}), \end{cases} \quad (3.45)$$

pour lesquelles, on vérifie les conditions de glissement  $S_1 \dot{S}_1 < 0$  et  $S_2 \dot{S}_2 < 0$ , à l'aide du correcteur dynamique :

$$\begin{cases} \Delta v_1 = -M_1 \int_0^t \text{sign}(S_1(\tau)) d\tau, & M_1 > \rho_1, \\ \Delta v_2 = -M_2 \int_0^t \text{sign}(S_2(\tau)) d\tau, & M_2 > \rho_2. \end{cases} \quad (3.46)$$

Où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux bornes connues satisfaisant :

$$\left| \frac{d}{dt}(p_1(x, t)) \right| \leq \rho_1, \quad (3.47)$$

$$\left| \frac{d}{dt}(p_2(x, t)) \right| \leq \rho_2. \quad (3.48)$$

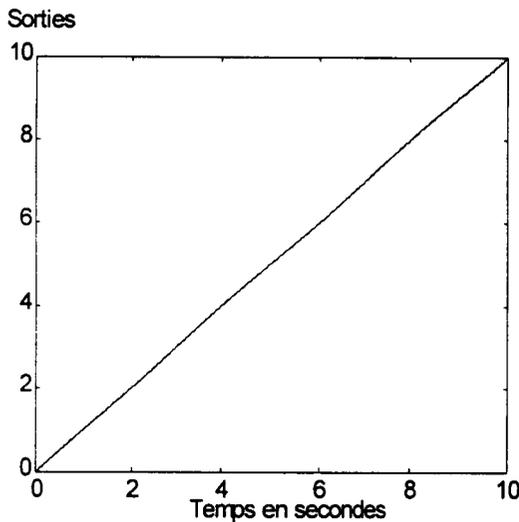
Il en résulte pour le contrôleur dynamique par mode glissant (DMG) l'expression :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{v_1^* - M_1 \int_0^t \text{sign}(S_1(\tau)) d\tau - x_1^2 - x_2}{1 + x_1^2}, \\ u_2 = \frac{v_2^* - M_2 \int_0^t \text{sign}(S_2(\tau)) d\tau - 2u_1 - x_1 x_2}{20 \text{Ln}(2 + x_1^2)}. \end{cases} \quad (3.49)$$

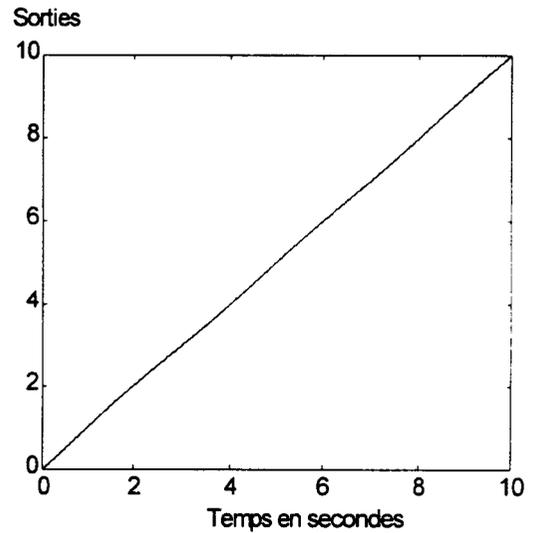
L'évolution du système réel (3.39) avec le choix de la commande (3.49) et les gains de glissement

$$\begin{cases} M_1 = 3, \\ M_2 = 5, \end{cases} \quad (3.50)$$

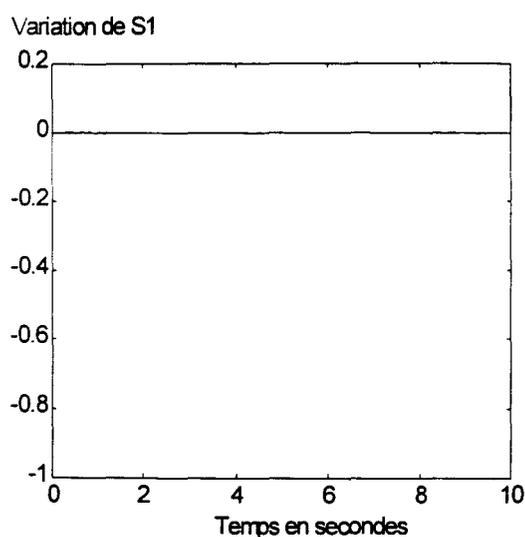
est donnée par la figure 3.4.



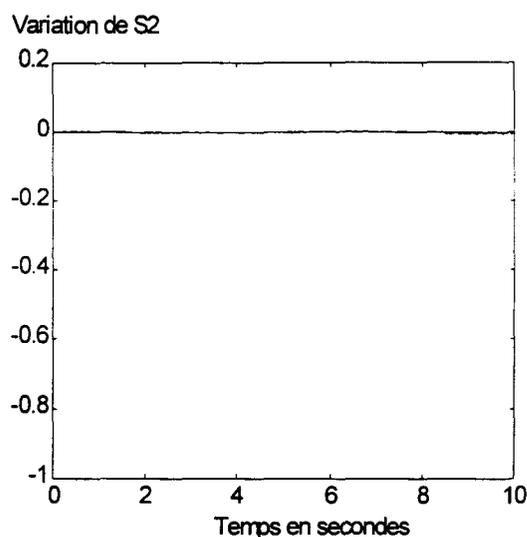
**a :**  $y_{1d}$  (\_\_\_) et  $y_1$  (-.-.-).



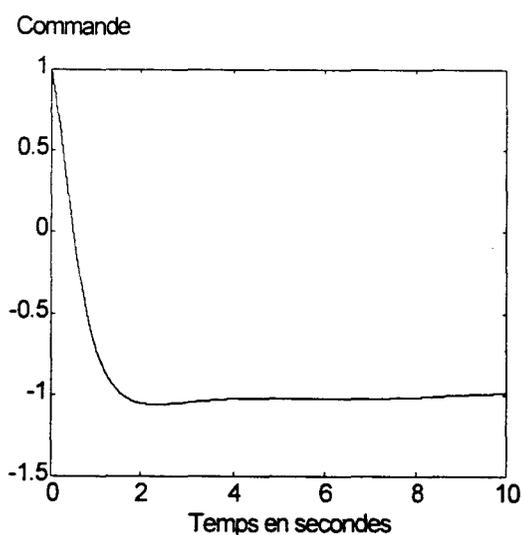
**b :**  $y_{2d}$  (\_\_\_) et  $y_2$  (-.-.-).



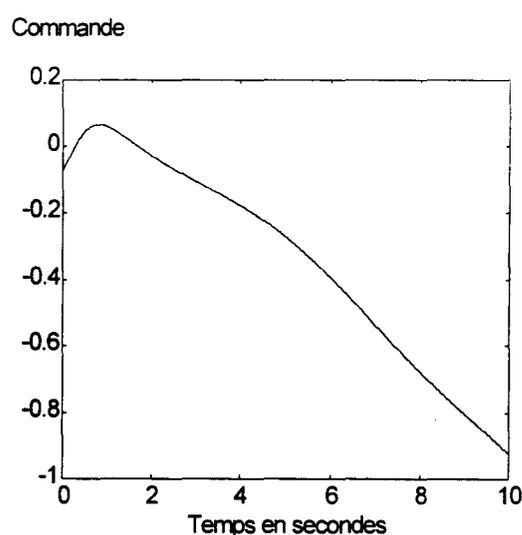
c : Variation de  $S_1$ .



d : Variation de  $S_2$ .



e : Variation de la commande  $u_1$ .



f : Variation de la commande  $u_2$ .

**Figure 3.4 :** Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur dynamique par mode glissant.

Il est important de noter que l'utilisation du contrôleur dynamique par mode glissant permet de réduire (voire supprimer) les commutations haute-fréquences sur la commande sans pour autant diminuer les performances de poursuite du système réel.

### 3.3 Robustesse par rapport à une perturbation des gains

Supposons qu'une description plus exacte du système (3.1) soit donnée par :

$$y^* = f^*(x, t) + [G^*(x, t) + \Delta G(x, t)]u + p(x, t), \quad (3.51)$$

où  $\Delta G(x, t) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ , représente la matrice incertitude sur les gains.

Si l'on considère le bouclage (3.24), le système (3.51) devient :

$$y^* = v^* + \Delta v + (\Theta(x, t))\Delta v + \varepsilon(x, t), \quad (3.52)$$

dans lequel on a :

$$\Theta(x, t) = (\Delta G(x, t)G^*(x, t))^{-1}, \quad (3.53)$$

et

$$\varepsilon(x, t) = \Theta(x, t)(v^* - f^*(x, t)) + p(x, t). \quad (3.54)$$

Dans ce cas, le système (3.25) s'écrit :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{x}_{ik} = x_{i,k+1}, & k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{x}_{ir_i} = v_i^* + \Delta v_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij}(x, t)\Delta v_j + \varepsilon_i(x, t), \\ y_i = x_{i1}, \end{cases} \quad (3.55)$$

où les  $[\theta_{ij}(x, t)]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$  correspondent aux éléments de la matrice  $\Theta(x, t)$ , et  $\varepsilon_i(x, t)$  est le  $i$ -ème élément de  $\varepsilon(x, t)$ .

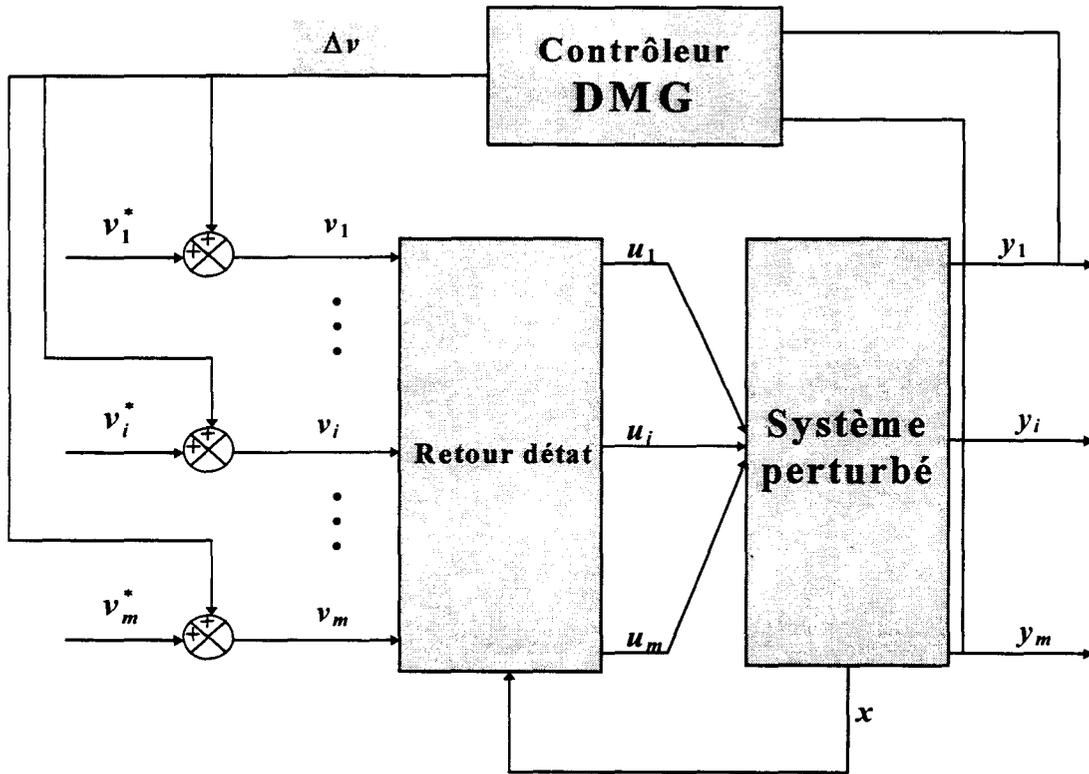


Figure 3.5 : Schéma de principe du contrôleur DMG des systèmes multivariables non découplés.

### 3.3.1 Cas où $\Theta(x, t)$ est constante

#### 3.3.1.1 Estimation des gains de glissement

La dérivée de  $S_i$  (3.19) s'écrit en tenant compte du système (3.55) :

$$\dot{S}_i = \frac{d}{dt} \left( \varepsilon_i(x, t) + (1 + \theta_{ii})\Delta v_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \theta_{ij} \Delta v_j \right). \quad (3.56)$$

Sachant que  $\Theta(x, t)$  est constante, il vient :

$$\dot{S}_i = (1 + \theta_{ii})\dot{\Delta v}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \theta_{ij} \dot{\Delta v}_j + \dot{\varepsilon}_i(x, t). \quad (3.57)$$

**Théorème 3.1 [Hajri 96d]**

Soient le système (3.55) et la surface de glissement (3.19). Si les hypothèses suivantes :

$$|\theta_{ij}| \leq \alpha_{ij} \quad \text{et} \quad \alpha_{ii} \ll 1, \quad (3.58)$$

$$\left| \frac{d\varepsilon_i(x,t)}{dt} \right| \leq \xi_i, \quad (3.59)$$

où  $\alpha_{ij}$ , et  $\xi_i$  sont des bornes connues ( $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq m$ ), alors le terme correcteur donné par (3.22) avec :

$$M_i > \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j}{1 - \alpha_{ii}}, \quad (3.60)$$

satisfait la condition de glissement (3.6).

**Démonstration**

Les équations (3.22) et (3.57) donnent :

$$\dot{S}_i = \dot{\varepsilon}_i(x,t) - M_i(1 + \theta_{ii})\text{sign}(S_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \text{sign}(S_j). \quad (3.61)$$

Soit le gain  $M_i$  choisi :

$$M_i = \psi_i \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j}{1 - \alpha_{ii}}, \quad \text{avec} \quad \psi_i > 1. \quad (3.62)$$

L'équation (3.61) devient :

$$\dot{S}_i = -\psi_i \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j}{1 - \alpha_{ii}} (1 + \theta_{ii})\text{sign}(S_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \text{sign}(S_j) + \dot{\varepsilon}_i(x,t), \quad (3.63)$$

de plus, d'après les hypothèses (3.58) et (3.59), on a :

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} - \xi_i \leq -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \text{sign}(S_j) + \dot{\epsilon}_i(x, t) \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} + \xi_i . \quad (3.64)$$

Considérons le pire des cas, c'est-à-dire :

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \text{sign}(S_j) + \dot{\epsilon}_i(x, t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} + \xi_i , \quad (3.65)$$

et soit  $S_i > 0$  (la même démarche sera faite dans le cas contraire) , l'équation (3.63) devient :

$$\dot{S}_i = -\psi_i \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j}{1 - \alpha_{ii}} (1 + \theta_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} + \xi_i . \quad (3.66)$$

Comme

$$\frac{(1 + \theta_{ii})}{1 - \alpha_{ii}} \geq 1, \quad \text{et} \quad \psi_i > 1, \quad (3.67)$$

on déduit donc que la condition de glissement (3.6) est satisfaite. ■

### 3.3.1.2 Première estimation des temps de glissement

#### Lemme 3.1

Soit le système (3.55) pour lequel on définit la solution ((3.22), (3.60)) et on satisfait les hypothèses (3.58) et (3.59). Alors chaque  $S_i$  (3.19) converge vers 0 en un temps fini  $t_{gi}$ , ( $i = 1, \dots, m$ ) :

$$\frac{|S_i(0)|}{(1 + \alpha_{ii}) M_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j + \xi_i} \leq t_{gi} \leq \frac{|S_i(0)|}{(1 - \alpha_{ii}) M_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j - \xi_i} . \quad (3.68)$$

**Démonstration**

En intégrant (3.57), il vient :

$$S_i(t) = S_i(0) - M_i(1 + \theta_{ii}) \int_0^t \text{sign}(S_i(\tau)) d\tau - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \int_0^t \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \int_0^t \dot{\epsilon}_i(x, \tau) d\tau. \quad (3.69)$$

Soit  $t_{gi}$ , tel que :

$$S_i(t_{gi}) = 0, \quad (3.70)$$

il vient :

$$S_i(0) - M_i(1 + \theta_{ii}) \int_0^{t_{gi}} \text{sign}(S_i(\tau)) d\tau - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \int_0^{t_{gi}} \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \int_0^{t_{gi}} \dot{\epsilon}_i(x, \tau) d\tau = 0. \quad (3.71)$$

$\forall \tau \in [0, t_{gi}[$ ,  $\text{sign}(S_i(\tau))$  est constant, on a donc :

$$S_i(0) - M_i(1 + \theta_{ii}) t_{gi} \text{sign}(S_i(0)) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \int_0^{t_{gi}} \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \int_0^{t_{gi}} \dot{\epsilon}_i(x, \tau) d\tau = 0. \quad (3.72)$$

$S_i(0) > 0$

L'équation (3.72) devient :

$$S_i(0) - M_i(1 + \theta_{ii}) t_{gi} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \int_0^{t_{gi}} \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \int_0^{t_{gi}} \dot{\epsilon}_i(x, \tau) d\tau = 0. \quad (3.73)$$

Les hypothèses (3.58) et (3.59) permettent d'écrire :

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} t_{gi} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \int_0^{t_{gi}} \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} t_{gi}, \quad (3.74)$$

$$- \alpha_{ii} t_{gi} - \xi_i t_{gi} \leq \theta t_{gi} - \int_0^{t_{gi}} \dot{\epsilon}_i(x, \tau) d\tau \leq \alpha_{ii} t_{gi} + \xi_i t_{gi}, \quad (3.75)$$

d'où l'on a :

$$-S_i(0) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} t_{gi} - \xi_i t_{gi} - M_i \alpha_{ii} t_{gi} \leq -M_i t_{gi} \leq -S_i(0) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} t_{gi} + \xi_i t_{gi} + M_i \alpha_{ii} t_{gi}. \quad (3.76)$$

Finalement on obtient :

$$\frac{S_i(0)}{(1 + \alpha_{ii}) M_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j + \xi_i} \leq t_{gi} \leq \frac{S_i(0)}{(1 - \alpha_{ii}) M_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j - \xi_i}. \quad (3.77)$$

$$S_i(0) < 0$$

Il vient la mise en équation :

$$S_i(0) + M_i (1 + \alpha_{ii}) t_{gi} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \int_0^{t_{gi}} \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \int_0^{t_{gi}} \dot{\epsilon}_i(x, \tau) d\tau = 0. \quad (3.78)$$

La même démarche que précédemment conduit à :

$$\frac{-S_i(0)}{(1 + \alpha_{ii}) M_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j + \xi_i} \leq t_{gi} \leq \frac{-S_i(0)}{(1 - \alpha_{ii}) M_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j - \xi_i}. \quad (3.79)$$

Les inégalités (3.77) et (3.79) montrent le lemme 3.1. ■

### 3.3.1.3 Deuxième estimation

La valeur de  $S_i(0)$  n'est qu'une estimation de la valeur réelle. Elle est donnée par la connaissance de  $x_i(0)$ ,  $(x_c^T = [y_{ic}, \dot{y}_{ic}, \dots, y_{ic}^{(r)}])_{t=0}$ , et l'estimation de  $(y_i^{(r)})_{t=0}$  (voir chapitre 2, section 2.2.1.3). Il vient :

$$S_i(0) = \varepsilon_i(x, 0), \quad (3.80)$$

l'intégration de (3.57) donne :

$$S_i(t) = -M_i(1 + \theta_{ii}) \int_0^t \text{sign}(S_i(\tau)) d\tau - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \int_0^t \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \varepsilon_i(x, t). \quad (3.81)$$

Le temps de glissement  $t_{gi}$  satisfait :

$$-M_i(1 + \theta_{ii}) \int_0^{t_{gi}} \text{sign}(S_i(\tau)) d\tau - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij} \int_0^{t_{gi}} \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \varepsilon_i(x, t_{gi}) = 0. \quad (3.82)$$

Supposons que l'on ait :

$$|\varepsilon_i(x, t)| \leq \zeta_i, \quad (3.83)$$

avec  $\zeta_i$  une borne connue, alors l'hypothèse (3.58) permet d'établir :

$$\frac{-\zeta_i}{M_i(1 + \alpha_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j} \leq t_{gi} \leq \frac{\zeta_i}{M_i(1 - \alpha_{ii}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j}, \quad (3.84)$$

or  $t_{gi} \geq 0$ , il vient donc :

$$0 \leq t_{gi} \leq \frac{\zeta_i}{M_i(1 - \alpha_{ii}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j}. \quad (3.84)$$

Pour l'estimation de  $t_{gi}$ , la deuxième approche exige une contrainte en plus, celle définie par (3.83).

### 3.3.1.4 Remarques

• Considérons le cas où la matrice  $\Theta(x, t)$  est nulle, on retrouve tous les résultats établis au paragraphe 3.2.

• Si la matrice  $\Theta(x, t)$  est diagonale, il vient :

$$M_i > \frac{\xi_i}{1 - \alpha_{ii}}, \quad (3.85)$$

$$\frac{|S_i(0)|}{(1 + \alpha_{ii})M_i + \xi_i} \leq t_{gi} \leq \frac{|S_i(0)|}{(1 - \alpha_{ii})M_i - \xi_i}. \quad (3.86)$$

Les  $m$  sous-systèmes sont donc totalement découplés et on vérifie bien les résultats du paragraphe 3.2 du chapitre 2.

• Si la matrice  $\Theta(x, t)$  est triangulaire, les gains de glissement  $M_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) seront déterminés grâce à un **principe de hiérarchisation**. En effet, si l'on considère le cas d'une matrice triangulaire supérieure, on aura :

$$\left( \left( \left( M_1 \rightarrow M_2 \right) \rightarrow \dots \right) \rightarrow M_{m-1} \right) \rightarrow M_m. \quad (3.87)$$

Ce qui implique que la connaissance de  $M_1$  suffit à déterminer les gains de glissement  $M_i$  ( $i = 2, \dots, m$ ). En considérant (3.60), on obtient :

$$\begin{aligned} M_1 &> \frac{\xi_1}{1 - \alpha_{11}}, \\ &\downarrow \\ M_2 &> \frac{\xi_2 + \alpha_{21}M_1}{1 - \alpha_{22}}, \\ &\vdots \\ &\downarrow \\ M_m &> \frac{\xi_m + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{mj}M_j}{1 - \alpha_{mm}}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

### 3.3.1.5 Optimisation des gains de glissement

Si l'on considère l'équation (3.60), il vient pour le  $i$ -ème sous-système, l'expression :

$$M_i(1 - \alpha_{ii}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j > \xi_i, \quad (3.89)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$M_i(1 - \alpha_{ii}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j \geq \gamma_i, \quad (3.90)$$

avec :

$$\gamma_i = \xi_i + \sigma_i, \quad \sigma_i > 0. \quad (3.91)$$

En posant :

$$M = [M_1, \dots, M_m]^T, \quad \gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_m]^T, \quad \text{et} \quad A = [\alpha_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad (3.92)$$

on en déduit le système d'inéquations linéaires en  $M$  :

$$(I - A)M \geq \gamma. \quad (3.93)$$

Soit le critère suivant à **optimiser** :

$$\text{OPT } z = \sum_{i=1}^m \lambda_i M_i, \quad (3.94)$$

avec  $\lambda_i > 0$  et où l'optimisation de  $z$  peut être une minimisation de  $z$ , sous les contraintes :

$$\begin{cases} (I - A)M \geq \gamma, \\ M_i \geq v_i, \quad 0 < v_i \approx 0, \quad 1 \leq i \leq m. \end{cases} \quad (3.95)$$

Ceci revient à un **problème de programmation linéaire**. Plusieurs méthodes de résolution ont été proposées dans la littérature. On peut citer à titre d'exemple, la méthode du simplexe, d'élimination de Fourier, de pénalité, graphique [Alj 86]...

### Exemple

Soit le problème linéaire PL :

$$PL : \begin{cases} \text{Minimiser} & z = M_1 + M_2, \\ & 0.9M_1 - 0.5M_2 \geq 2, \\ & -0.3M_1 + 2M_2 \geq 1, \\ & M_1 \geq 10^{-9}, M_2 \geq 10^{-9}. \end{cases} \quad (3.96)$$

La méthode du simplexe donne :

$$M_1 = 2.8, \quad \text{et} \quad M_2 = 0.91. \quad (3.97)$$

### 3.3.2 Cas où $\Theta(x, t)$ est non constante

Soit l'expression de  $S_i$  donnée par (3.19) :

$$S_i = -v_i^* + y_i^{(\tau)},$$

sa dérivée s'écrit en considérant le système (3.55) :

$$\dot{S}_i = (1 + \theta_{ii}(x, t))\Delta\dot{v}_i + \dot{\theta}_{ii}(x, t)\Delta v_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \theta_{ij}(x, t)\Delta\dot{v}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \dot{\theta}_{ij}(x, t)\Delta v_j + \dot{\epsilon}_i(x, t). \quad (3.98)$$

#### 3.3.2.1 Première estimation des gains de glissement

Celle-ci consiste à déterminer un gain  $M_i$  en fonction des  $\Delta v_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Pour ce faire, on considère que les termes en  $\Delta v_j$  sont des perturbations (voir chapitre 2, section 2.2.3.2). Il vient pour  $M_i$  l'expression :

$$M_i > \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \alpha_{ij} M_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \beta_{ij} \Delta v_j}{1 - \alpha_{ii}}, \quad (3.99)$$

valable uniquement pour des  $\Delta v_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) ne présentant pas des variations brusques [Youssef-Toumi 90].

### 3.3.2.2 Deuxième estimation des gains de glissement

#### **Théorème 3.1 [Hajri 96d]**

Soient le système (3.55) et la surface de glissement (3.19). Si l'on vérifie les hypothèses (3.59) et :

$$\begin{cases} |\theta_{ij}(x, t)| \leq \alpha_{ij} \ll 1, \\ \left| \frac{d\theta_{ij}(x, t)}{dt} \right| \leq \beta_{ij}, \end{cases} \quad (3.100)$$

où  $\alpha_{ij}$  et  $\beta_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq m$ ) sont des bornes connues, alors la solution (3.22) avec :

$$M_i > \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\alpha_{ij} + \beta_{ij} t_{gi}) M_j}{1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii} t_{gi})}, \quad (3.101)$$

où  $1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii} t_{gi}) > 0$ , satisfait la condition de glissement (3.6).

#### **Démonstration**

Les équations (3.22) et (3.98) donnent :

$$\dot{S}_i = -M_i(1 + \theta_{ii}(x, t))\text{sign}(S_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij}(x, t)\text{sign}(S_j) - \sum_{j=1}^m M_j \dot{\theta}_{ij}(x, t) \int_0^t \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \dot{\epsilon}_i(x, t). \quad (3.102)$$

En utilisant le lemme 3.1, on atteint  $S_i = 0$  en un temps fini  $t_{gi}$  et  $\forall t \in [0, t_{gi}[$ , on a  $\text{sign}(S_i(t)) = \text{sign}(S_i(0))$ .

On considère le cas où  $S_i(0) > 0$  (la même démarche sera faite dans le cas contraire), L'équation (3.102) devient alors :

$$\dot{S}_i = -M_i(1 + \theta_{ii}(x, t) + \dot{\theta}_{ii}(x, t)t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij}(x, t)\text{sign}(S_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \dot{\theta}_{ij}(x, t) \int_0^t \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \dot{\epsilon}_i(x, t). \quad (3.103)$$

Les hypothèses (3.59) et (3.100) permettent d'écrire :

$$\begin{cases} -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \beta_{ij} t \leq -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \dot{\theta}_{ij}(x, t) \int_0^t \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \beta_{ij} t, \\ -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} - \xi_i \leq -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij}(x, t) \text{sign}(S_j) + \dot{\epsilon}_i(x, t) \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \alpha_{ij} + \xi_i. \end{cases} \quad (3.104)$$

Considérons le cas le plus défavorable, c'est-à-dire :

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \theta_{ij}(x, t) \text{sign}(S_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j \dot{\theta}_{ij}(x, t) \int_0^t \text{sign}(S_j(\tau)) d\tau + \dot{\epsilon}_i(x, t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j (\alpha_{ij} + \beta_{ij} t) + \xi_i, \quad (3.105)$$

il en résulte le choix :

$$\dot{S}_i = -M_i (1 + \theta_{ii}(x, t) + \dot{\theta}_{ii}(x, t)t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j (\alpha_{ij} + \beta_{ij} t) + \xi_i. \quad (3.106)$$

Soit le gain  $M_i$  satisfaisant (3.101) :

$$M_i = \psi_i \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\alpha_{ij} + \beta_{ij} t_{gi}) M_j}{1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii} t_{gi})}, \quad \text{avec } \psi_i > 1. \quad (3.107)$$

L'équation (3.106) devient :

$$\dot{S}_i = -\psi_i \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\alpha_{ij} + \beta_{ij} t_{gi}) M_j}{1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii} t_{gi})} (1 + \theta_{ii}(x, t) + \dot{\theta}_{ii}(x, t)t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j (\alpha_{ij} + \beta_{ij} t) + \xi_i. \quad (3.108)$$

Or :

$$\psi_i \frac{(1 + \theta_{ii}(x, t) + \dot{\theta}_{ii}(x, t)t)}{1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii} t_{gi})} > 1, \quad \forall t \in [0, t_{gi}[, \quad (3.109)$$

d'où :

$$S_i \dot{S}_i < 0 \quad \forall t \in [0, t_{gi}[. \quad (3.110)$$

Supposons maintenant que l'on quitte la surface d'équation  $S_i = 0$ . On a alors pour un instant  $t$  tel que :

$$t_{gi} \leq t \leq t_{gi} + \delta, \text{ où } \delta > 0, \quad (3.111)$$

la propriété :

$$S_i(t) \neq 0. \quad (3.112)$$

Comme  $S_i(t)$  est fonction continue et dérivable alors  $\exists 0 < \delta_1 \leq \delta$  pour lequel  $S_i(t)$  est une fonction croissante ou décroissante  $\forall t \in \left\{ [t_{gi}, t_{gi}^+], t_{gi}^+ = t_{gi} + \delta_1, \delta_1 > 0 \right\}$ . Considérons le cas où  $S_i(t)$  est décroissante (la démonstration s'effectue de façon semblable si  $S_i(t)$  est croissante), on a alors :

$$\dot{S}_i = \psi_i \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\alpha_{ij} + \beta_{ij} t_{gi}) M_j}{1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii} t_{gi})} \left( 1 + \theta_{ii}(x, t) + \delta_1 \dot{\theta}_{ii}(x, t) \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j (\alpha_{ij} + \delta_1 \beta_{ij}) + \xi_i, \quad (3.113)$$

d'où  $S_i \dot{S}_i < 0$ .

En appliquant le lemme 2.1 (chapitre 2), on en déduit que :

$$S_i = 0, \quad \forall t \geq t_{gi}. \quad (3.114)$$

Ce qui prouve, en tenant compte de (3.110), le théorème 3.2. ■

### 3.3.2.3 Remarque

Si la matrice  $\Theta(x, t)$  est diagonale, il en est de même pour  $\dot{\Theta}(x, t)$ , le système est donc parfaitement découplé. En effet, chaque sous-système ayant une sortie  $y_i$  a une entrée  $v_i$ . On retrouve donc les résultats du chapitre 2.

### 3.3.2.4 Optimisation des gains de glissement

#### Programmation linéaire

Soient des temps de glissement  $t_{gi}$  fixés, vérifiant  $1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii}t_{gi}) > 0$ , on en déduit le système d'inéquations linéaires en  $M$  :

$$(I - B)M \geq \gamma. \quad (3.115)$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_m]^T \\ \gamma_i = \xi_i + \sigma_i, \quad \sigma_i > 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad B = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}t_{gi}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}. \quad (3.116)$$

De plus, d'après (3.68) on a :

$$\begin{cases} (I - A)M \leq \chi, \\ (I + A)M \geq \kappa, \end{cases} \quad (3.117)$$

où l'on définit :

$$A = [\alpha_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad \begin{cases} \chi = [\chi_1, \dots, \chi_m]^T, \\ \chi_i = \xi_i + \frac{|S_i(0)|}{t_{gi}}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \kappa = [\kappa_1, \dots, \kappa_m]^T, \\ \kappa_i = \xi_i - \frac{|S_i(0)|}{t_{gi}}. \end{cases} \quad (3.118)$$

Le programme linéaire (PL) [Alj 86] s'écrit alors :

$$\text{PL : } \begin{cases} \text{OPT } z = \sum_{i=1}^m \lambda_i M_i, \\ (I - B)M \geq \gamma, \\ (I - A)M \leq \chi, \\ (I + A)M \geq \kappa, \\ M_i \geq v_i, \quad 0 < v_i \approx 0, \quad 1 \leq i \leq m. \end{cases} \quad (3.119)$$

Supposons maintenant que l'on quitte la surface d'équation  $S_i = 0$ . On a alors pour un instant  $t$  tel que :

$$t_{gi} \leq t \leq t_{gi} + \delta, \text{ où } \delta > 0, \quad (3.111)$$

la propriété :

$$S_i(t) \neq 0. \quad (3.112)$$

Comme  $S_i(t)$  est fonction continue et dérivable alors  $\exists 0 < \delta_1 \leq \delta$ , pour lequel  $S_i(t)$  est une fonction croissante ou décroissante  $\forall t \in \left\{ \left[ t_{gi}, t_{gi}^+ \right], t_{gi}^+ = t_{gi} + \delta_1 \right\}$ . Considérons le cas où  $S_i(t)$  est décroissante (la démonstration s'effectue de façon semblable si  $S_i(t)$  est croissante), on a alors :

$$\dot{S}_i = \psi_i \frac{\xi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\alpha_{ij} + \beta_{ij} t_{gi}) M_j}{1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii} t_{gi})} \left( 1 + \theta_{ii}(x, t) + \delta_1 \dot{\theta}_{ii}(x, t) \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m M_j (\alpha_{ij} + \delta_1 \beta_{ij}) + \xi_i, \quad (3.113)$$

d'où  $S_i \dot{S}_i < 0$ .

En appliquant le lemme 2.1 (chapitre 2), on en déduit que :

$$S_i = 0, \quad \forall t \geq t_{gi}. \quad (3.114)$$

Ce qui prouve, en tenant compte de (3.110), le théorème 3.2. ■

### 3.3.2.3 Remarque

Si la matrice  $\Theta(x, t)$  est diagonale, il en est de même pour  $\dot{\Theta}(x, t)$ , le système est donc parfaitement découplé. En effet, chaque sous-système ayant une sortie  $y_i$  a une entrée  $v_i$ . On retrouve donc les résultats du chapitre 2.

### 3.3.2.4 Optimisation des gains de glissement

#### Programmation linéaire

Soient des temps de glissement  $t_{gi}$  fixés, vérifiant  $1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii}t_{gi}) > 0$ , on en déduit le système d'inéquations linéaires en  $M$  :

$$(I - B)M \geq \gamma. \quad (3.115)$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_m]^T \\ \gamma_i = \xi_i + \sigma_i, \quad \sigma_i > 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad B = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}t_{gi}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}. \quad (3.116)$$

De plus, d'après (3.68) on a :

$$\begin{cases} (I - A)M \leq \chi, \\ (I + A)M \geq \kappa, \end{cases} \quad (3.117)$$

où l'on définit :

$$A = [\alpha_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad \begin{cases} \chi = [\chi_1, \dots, \chi_m]^T, \\ \chi_i = \xi_i + \frac{|S_i(0)|}{t_{gi}}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \kappa = [\kappa_1, \dots, \kappa_m]^T, \\ \kappa_i = \xi_i - \frac{|S_i(0)|}{t_{gi}}. \end{cases} \quad (3.118)$$

Le programme linéaire (PL) [Alj 86] s'écrit alors :

$$\text{PL : } \begin{cases} \text{OPT } z = \sum_{i=1}^m \lambda_i M_i, \\ (I - B)M \geq \gamma, \\ (I - A)M \leq \chi, \\ (I + A)M \geq \kappa, \\ M_i \geq v_i, \quad 0 < v_i \approx 0, \quad 1 \leq i \leq m. \end{cases} \quad (3.119)$$

### Programmation non linéaire

Dans ce contexte, on ne fixe plus les temps de glissement  $t_{g_i}$  comme au paragraphe précédent et on se propose d'optimiser une fonction non linéaire des gains et des temps de glissement  $f(M_1, \dots, M_m, t_{g_1}, \dots, t_{g_m})$ . On peut déterminer la fonction  $f$ , en choisissant par exemple, un critère quadratique minimisant les temps de glissement. Ceci revient à un **problème de programmation non linéaire (PNL)** à résoudre [Alj 86] :

$$\text{PNL : } \begin{cases} \text{OPT } z = f(M_1, \dots, M_m, t_{g_1}, \dots, t_{g_m}), \\ \forall 1 \leq i \leq m, \\ M_i - \sum_{j=1}^m (\alpha_{ij} + \beta_{ij} t_{g_i}) M_j \geq \gamma_i, \\ M_i t_{g_i} - \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} t_{g_i} M_j - \xi_i t_{g_i} \leq |S_i(0)|, \\ M_i t_{g_i} + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} t_{g_i} M_j + \xi_i t_{g_i} \geq |S_i(0)|, \\ 1 - (\alpha_{ii} + \beta_{ii} t_{g_i}) \geq \nu_i, \\ M_i \geq \nu_i, \quad 0 < \nu_i \approx 0. \end{cases} \quad (3.120)$$

#### 3.3.2.5 Exemple [Hajri 96d]

Soit le système décrit par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 + (x_2^2 + 1)u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2^2 + u_1 + (\sin x_1 + 2)u_2, \\ y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{cases} \quad (3.121)$$

Le calcul des dérivées des sorties  $y_1$  et  $y_2$  donne :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = x_1 x_2 + (x_2^2 + 1)u_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = x_2^2 + u_1 + (\sin x_1 + 2)u_2, \end{cases} \quad (3.122)$$

d'où la commande linéarisante entrées/sorties :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{v_1^* - x_1 x_2}{x_2^2 + 1}, \\ u_2 = \frac{v_2^* - x_2^2}{\sin x_1 + 2} - \frac{v_1^* - x_1 x_2}{(x_2^2 + 1)(\sin x_1 + 2)}, \end{cases} \quad (3.123)$$

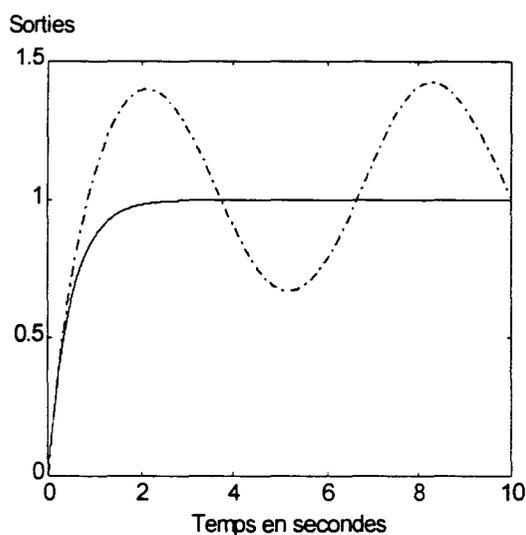
expression dans laquelle on choisit pour les nouvelles entrées :

$$\begin{cases} v_1^* = 2(y_{1c} - y_1), \\ v_2^* = y_{2c} - y_2, \end{cases} \quad (3.124)$$

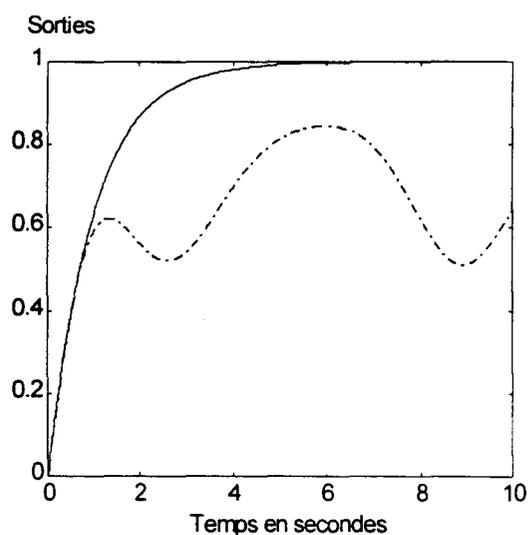
où  $y_{1c}$  et  $y_{2c}$  sont deux consignes égales à un échelon unitaire.

A l'aide de la loi de commande ((3.123), (3.124)), on souhaite stabiliser asymptotiquement le processus réel sur les consignes  $y_{1c}$  et  $y_{2c}$  (voir figure 3.6). Celui-ci, est en fait donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1.1x_1 x_2 + (0.9x_2^2 + 1)u_1 + 0.8\sin t, \\ \dot{x}_2 = 0.9x_2 \sin x_2 + (1 + 0.2x_1^2)u_1 + (0.8\sin x_1 + 2.1)u_2 \\ y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2. \end{cases} \quad (3.125)$$



**a :**  $y_{1d}$  (—) et  $y_1$  (-.-.-).



**b :**  $y_{2d}$  (—) et  $y_2$  (-.-.-).

**Figure 3.6 :** Comparaison des sorties désirées  $y_{1d}$ ,  $y_{2d}$  et réelles  $y_1$ ,  $y_2$  du processus.

Les systèmes (3.121) et (3.125) permettent d'établir :

$$\Theta(x, t) = \begin{pmatrix} -\frac{0.1x_2^2}{x_2^2 + 1} & 0 \\ \frac{0.2x_1^2 - (\sin x_1 + 2)(0.1 - 0.2\sin x_1)}{x_2^2 + 1} & \frac{(0.1 - 0.2\sin x_1)}{\sin x_1 + 2} \end{pmatrix}, \quad (3.126)$$

et :

$$\varepsilon(x, t) = \begin{pmatrix} 0.1x_1x_2 + 0.8\sin t - \frac{0.1x_2^2(v_1^* - x_1x_2)}{x_2^2 + 1} \\ 0.9x_2\sin x_2 - x_2^2 + \frac{(v_1^* - x_1x_2)(0.2x_1^2 - (\sin x_1 + 2)(0.1 - 0.2\sin x_1))}{x_2^2 + 1} + \frac{(v_2^* - x_2^2)(0.1 - 0.2\sin x_1)}{\sin x_1 + 2} \end{pmatrix}. \quad (3.127)$$

On suppose, pour la condition initiale  $x(0) = 0$ , que l'on a :

$$|\theta(x, t)| \leq \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad |\dot{\theta}(x, t)| \leq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |\dot{\varepsilon}(x, t)| \leq \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}. \quad (3.128)$$

D'après la figure 3.6, on constate que la sortie réelle du processus ne coïncide pas avec celle désirée. Pour y remédier, on remplace la loi de commande précédemment calculée ((3.123), (3.124)) par le contrôleur DMG :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{v_1^* + \Delta v_1 - x_1x_2}{x_2^2 + 1}, \\ u_2 = \frac{v_2^* + \Delta v_2 - x_2^2}{\sin x_1 + 2} - \frac{v_1^* + \Delta v_1 - x_1x_2}{(x_2^2 + 1)(\sin x_1 + 2)}, \end{cases} \quad (3.129)$$

avec:

$$\begin{cases} \Delta v_1 = -M_1 \int_0^t \text{sign} S_1(\tau) d\tau, \\ \Delta v_2 = -M_2 \int_0^t \text{sign} S_2(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (3.130)$$

dont les surfaces de glissement correspondantes sont données par :

$$\begin{cases} S_1 = -v_1^* + \dot{y}_1 = 0, \\ S_2 = -v_2^* + \dot{y}_2 = 0. \end{cases} \quad (3.131)$$

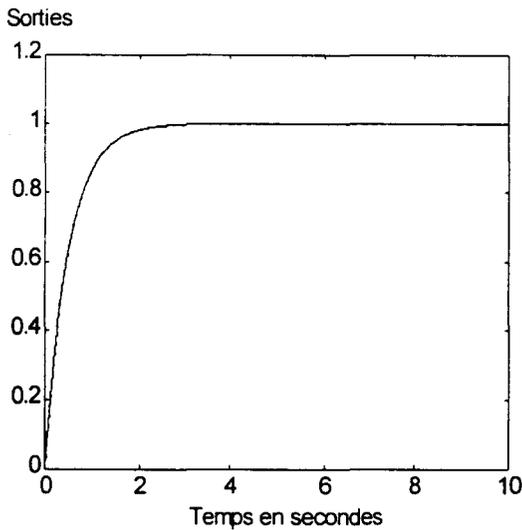
Le choix des temps de glissement :

$$t_{g1} = t_{g2} = 1 \text{ ms}, \quad (3.132)$$

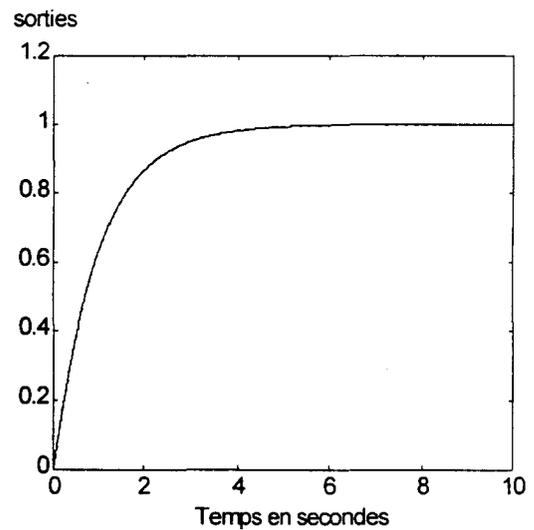
avec les hypothèses (3.128) permet, à l'aide du théorème 3.2, d'estimer les gains de glissement nécessaires. Pour les simulations, on a choisi :

$$M_1 = M_2 = 1. \quad (3.133)$$

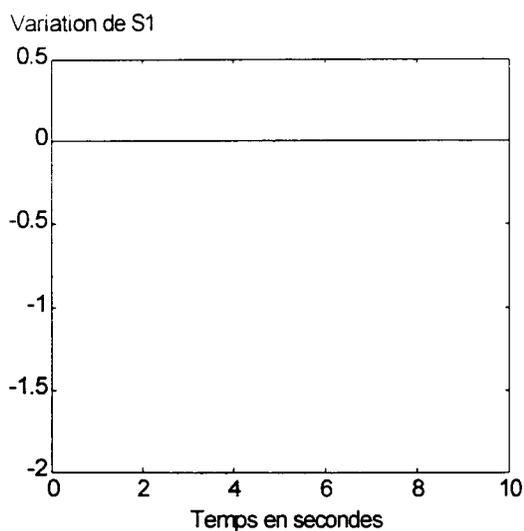
L'évolution du système réel (3.125) est donnée par la figure 3.7.



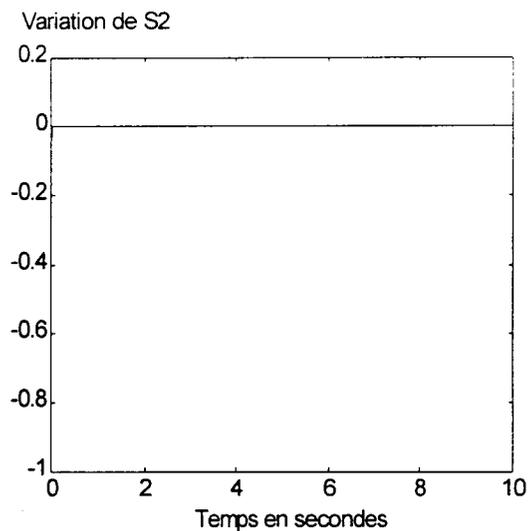
**a** :  $y_{1d}$  (\_\_\_) et  $y_1$  (-.-.-).



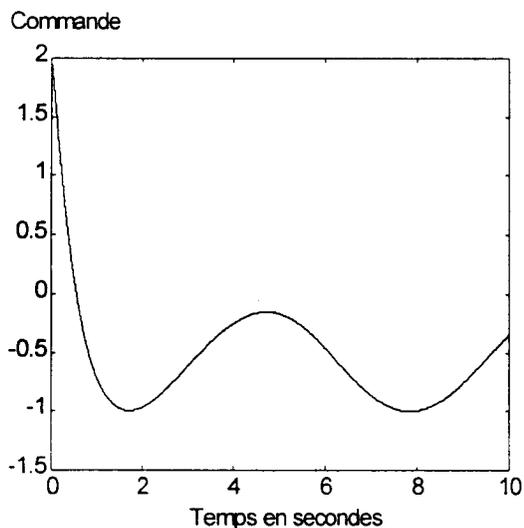
**b** :  $y_{2d}$  (\_\_\_) et  $y_2$  (-.-.-).



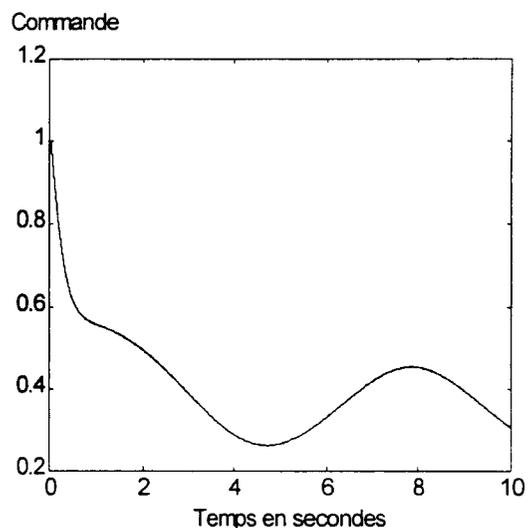
c : Variation de  $S_1$ .



d : Variation de  $S_2$ .



e : Variation de la commande  $u_1$ .



f : Variation de la commande  $u_2$ .

**Figure 3.7 :** Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur dynamique par mode glissant.

Il est très intéressant de remarquer les performances de poursuite du système réel (voir figures 3.7.a et 3.7.b), ainsi que la robustesse de la commande illustrée par les figures 3.7.e et 3.7.f.

### 3.4 Analyse de robustesse : Application au moteur synchrone

Considérons un **moteur synchrone** représenté par (voir théorie de Park [Séguier 94]) :

$$\begin{cases} V_d = R_s i_d - p\omega\phi_q + \frac{d\phi_d}{dt}, \\ V_q = R_s i_q + p\omega\phi_d + \frac{d\phi_q}{dt}, \end{cases} \quad (3.134)$$

avec :

$$\begin{cases} \phi_d = L_d i_d + \phi_f, \\ \phi_q = L_q i_q, \end{cases} \quad (3.135)$$

et :

$$C = p((L_d - L_q)i_d + \phi_f)i_q = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega + C_0. \quad (3.136)$$

où les indices  $d$  et  $q$  caractérisant les **composantes de Park**.

#### Notations

$V$  : tension.

$i$  : courant.

$\phi$  : flux.

$\phi_f$  : flux de fuite.

$\omega$  : vitesse mécanique.

$L$  : inductance.

$R_s$  : résistance statorique.

$p$  : nombre de paires de pôles.

$J$  : moment d'inertie.

$f$  : coefficient de frottement hydraulique.

$C$  : couple.

$C_0$  : couple à vide, que l'on suppose constant.

### Mise en équations

En posant :

$$u = [u_1, u_2]^T, \quad u_1 = V_d, \quad u_2 = V_q, \quad (3.137)$$

et :

$$x = [x_1, x_2, x_3]^T, \quad x_1 = i_d, \quad x_2 = i_q, \quad x_3 = \omega. \quad (3.138)$$

On peut réécrire le système ((3.134), (3.135), (3.136)) dans l'espace d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + g_1 u_1, \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + g_2 u_2, \\ \dot{x}_3 = f_3(x). \end{cases} \quad (3.139)$$

Dans lequel on pose [Le Pioufle 90] :

$$\begin{cases} f_1(x) = a_0 x_1 + a_1 x_2 x_3, \\ f_2(x) = a'_0 x_2 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_3, \\ f_3(x) = b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2 + b_0 x_3 - \frac{C_0}{J}, \end{cases} \quad (3.140)$$

et

$$\begin{cases} a_0 = -\frac{R_s}{L_d}, & a_1 = p \frac{L_q}{L_d}, & g_1 = \frac{1}{L_d}, \\ a'_0 = -\frac{R_s}{L_q}, & a_2 = -p \frac{L_d}{L_q}, & a_3 = -\frac{p\phi_f}{L_q}, & g_2 = \frac{1}{L_q}, \\ b_1 = \frac{p(L_d - L_q)}{J}, & b_2 = \frac{p\phi_f}{J}, & b_0 = -\frac{f}{J}. \end{cases} \quad (3.141)$$

Après identification, le système (3.139) s'écrit [Séguier 94] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.5x_1 + x_2 x_3 + 0.5u_1, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - 4x_1 x_3 - 0.2x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 4x_1 x_2 + 0.4x_2 - 0.2x_3 - 1. \end{cases} \quad (3.142)$$

On souhaite contrôler le couple moteur de la machine synchrone qui dépend des courants  $i_d$  et  $i_q$  (voir l'équation (3.136)). Pour cela, on se propose d'annuler le courant  $i_d$  et par suite contrôler le courant  $i_q$ , qui dépend lui même de la dynamique de la vitesse  $\omega$ . On choisit donc comme sorties :

$$\begin{cases} y_1 = i_d = x_1, \\ y_2 = \omega = x_3. \end{cases} \quad (3.143)$$

On souhaite avoir un courant  $i_d$  nul avec un comportement du type premier ordre de constante de temps égale à une seconde. Pour la vitesse  $\omega$ , on désire atteindre une consigne de 10rd/s avec un comportement du type deuxième ordre de même constante de temps.

### Linéarisation par découplage

En dérivant les sorties  $y_1$  et  $y_2$  du système (3.142), jusqu'à faire apparaître  $u_1$  et  $u_2$ , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(x) + 0.5u_1, \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} = 4x_2f_1(x) + (4x_1+0.4)f_2(x) - 0.2f_3(x) + 2x_2u_1 + (4x_1+0.4)u_2, \end{cases} \quad (3.144)$$

d'où l'on définit le retour d'état :

$$\begin{cases} u_1 = 2(v_1^* - f_1(x)), \\ u_2 = \frac{1}{(4x_1+0.4)}(v_2^* - 4x_2f_1(x) + 0.2f_3(x) - 2x_2u_1) - f_2(x), \end{cases} \quad (3.145)$$

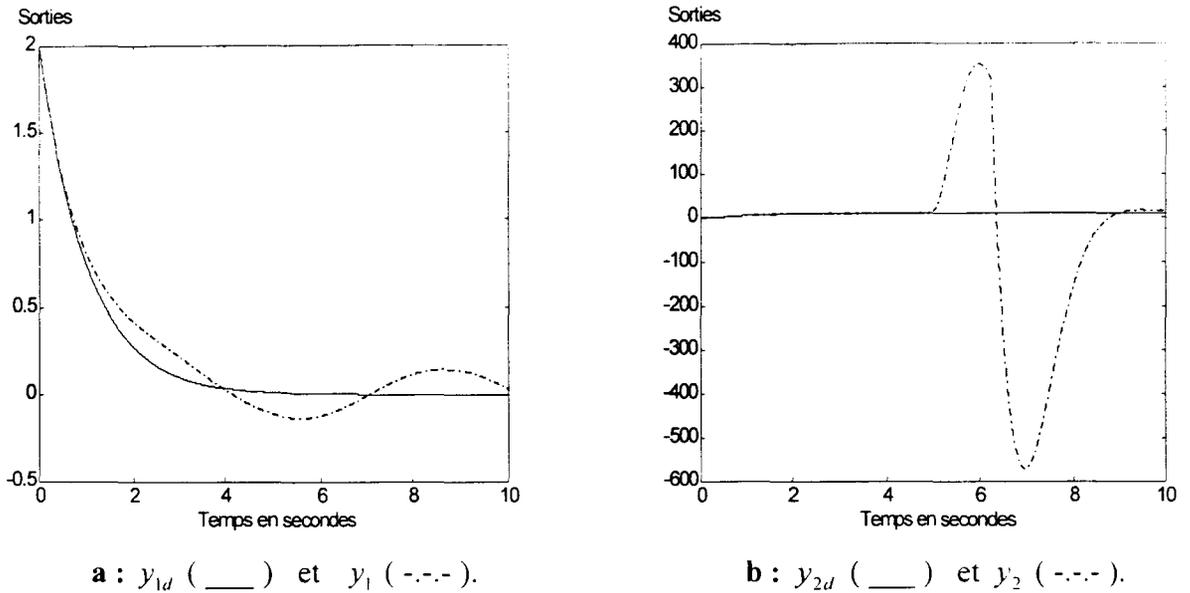
avec :

$$\begin{cases} v_1^* = -x_1, \\ v_2^* = 4(10\Gamma(t) - x_3) - 4\dot{x}_3, \end{cases} \quad (3.146)$$

où  $\Gamma(t)$  représente un échelon unitaire.

La commande  $u_2$  est définie seulement dans le cas où  $4x_1+0.4 \neq 0$ . Ceci est toujours vrai, car le courant  $i_d$  ( $x_1$ ) n'atteint pas le courant de désexcitation.

Pour la commande ((3.145), (3.146)) les évolutions des sorties réelles et désirées du processus sont présentées dans la figure suivante.



**Figure 3.8 :** Comparaison des sorties désirées  $y_{1d}$ ,  $y_{2d}$  et réelles  $y_1$ ,  $y_2$  du processus.

D'après la figure 3.8, il est clair qu'on ne peut adopter ((3.145), (3.146)) pour commander notre processus. En réalité, la connaissance de  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  et  $f_3(x)$  n'est pas exacte (elle est issue de l'identification) et le système réel ne vérifie pas (3.142). Néanmoins, on suppose pour les simulations, qu'il se met sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.5x_1 + x_2x_3 + 0.5u_1 + 0.2\sin t, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - 4x_1x_3 - 0.2x_3 + u_2 + 0.2\sin t, \\ \dot{x}_3 = 4x_1x_2 + 0.4x_2 - 0.2x_3 - 2. \end{cases} \quad (3.147)$$

Afin d'atteindre l'objectif souhaité, on se propose, de déterminer les nouvelles entrées au système (3.144). Pour cela, trois algorithmes de commande par mode glissant, notamment la commande classique par mode glissant (CMG), la commande continue dans une bande de la surface (CBS) et la commande dynamique par mode glissant (DMG).

### 3.4.1 Commande classique par mode glissant

Afin de garder la même dynamique mais en réduisant l'ordre des sous-systèmes, on choisit les surfaces de glissement  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\begin{cases} S_1 = x_1 = 0, \\ S_2 = (x_3 - 10\Gamma(t)) + \dot{x}_3 = 0. \end{cases} \quad (3.148)$$

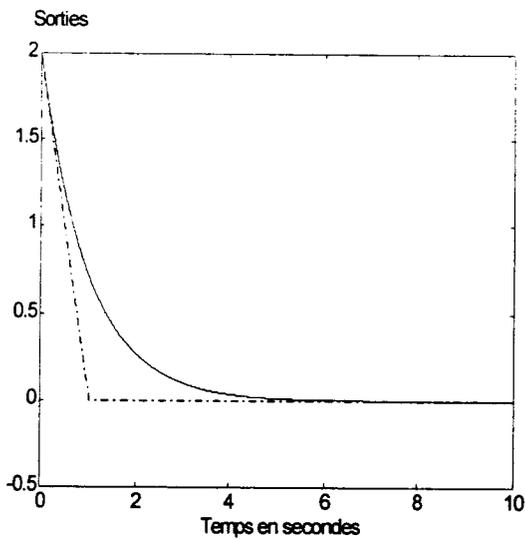
De plus, on définit pour le retour d'état (3.145), la nouvelle entrée :

$$\begin{cases} v_1^* = -M_1 \text{sign}(S_1), \\ v_2^* = -f_3(x) - M_2 \text{sign}(S_2). \end{cases} \quad (3.149)$$

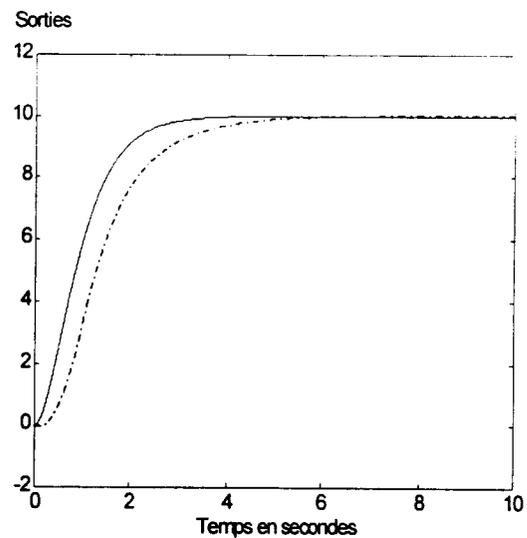
L'évolution du processus avec le choix des gains de glissement :

$$M_1 = 2, \quad \text{et} \quad M_2 = 8. \quad (3.150)$$

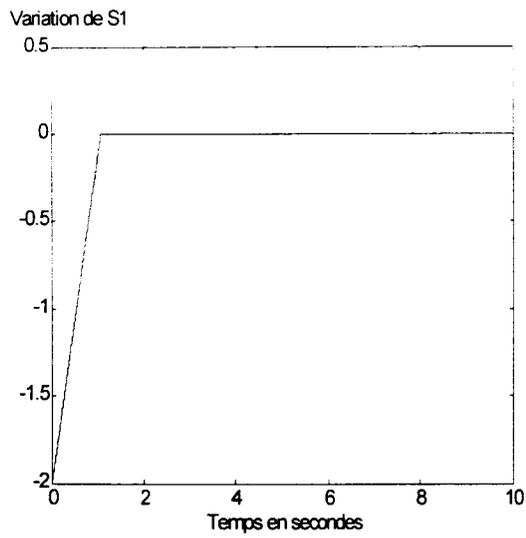
est illustrée par la figure 3.9.



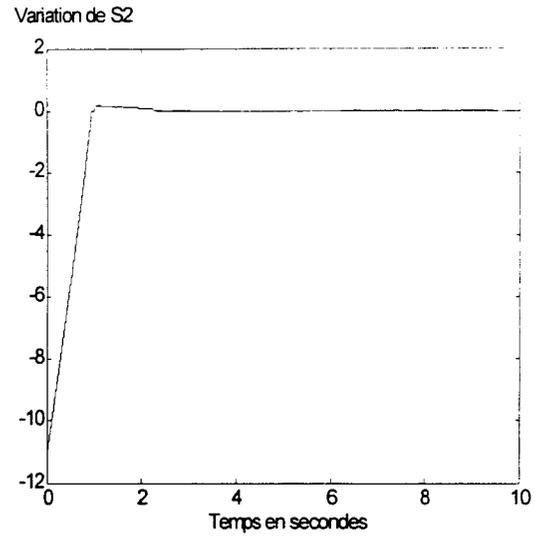
**a** :  $y_{1d}$  (—) et  $y_1$  (-.-.-).



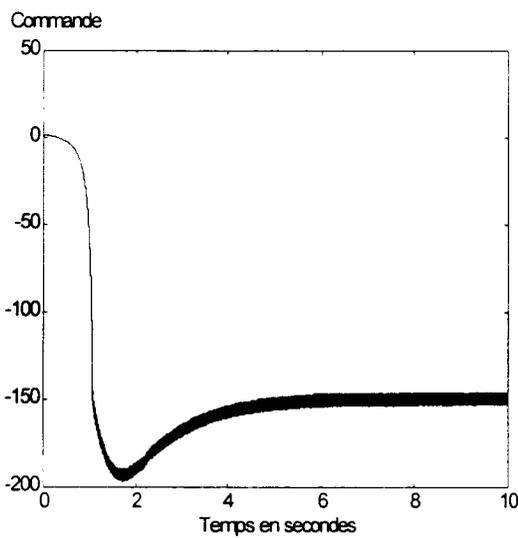
**b** :  $y_{2d}$  (—) et  $y_2$  (-.-.-).



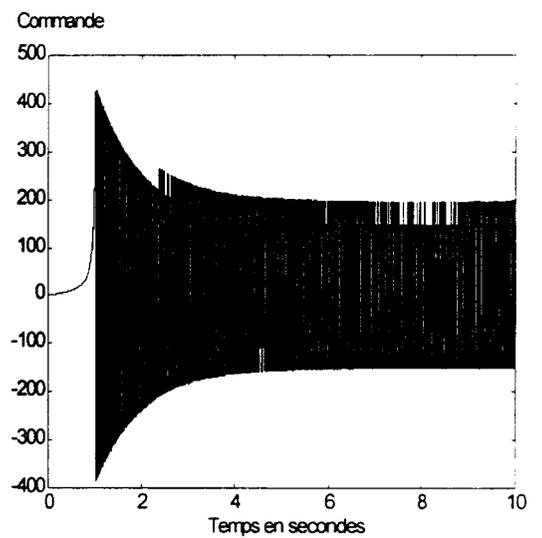
**c** : Variation de  $S_1$ .



**d** : Variation de  $S_2$ .



**e** : Variation de la commande  $u_1$ .



**f** : Variation de la commande  $u_2$ .

**Figure 3.9** : Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur classique par mode glissant.

### 3.4.2 Commande continue dans une bande de la surface

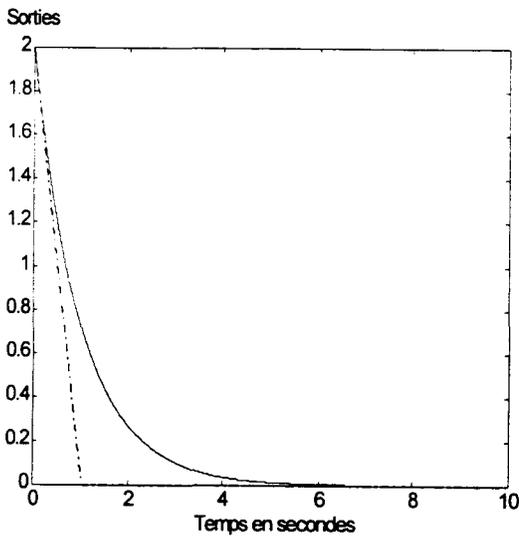
Les résultats du paragraphe 3.4.1 restent valables, toutefois on remplace la nouvelle entrée (3.149) par :

$$\begin{cases} v_1^* = -M_1 \text{sat}\left(\frac{S_1}{\Phi}\right), \\ v_2^* = -f_3(x) - M_2 \text{sat}\left(\frac{S_2}{\Phi}\right), \end{cases} \quad (3.151)$$

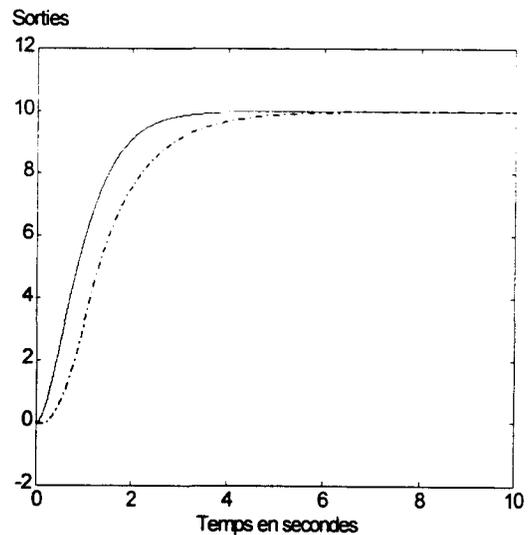
avec les mêmes gains de glissement que précédemment (3.150) et

$$\Phi = 25 \cdot 10^{-5}. \quad (3.152)$$

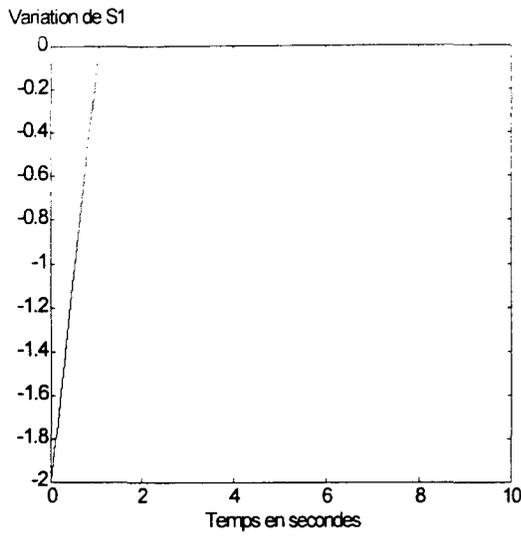
Les résultats de simulation sont représentés par la figure 3.10.



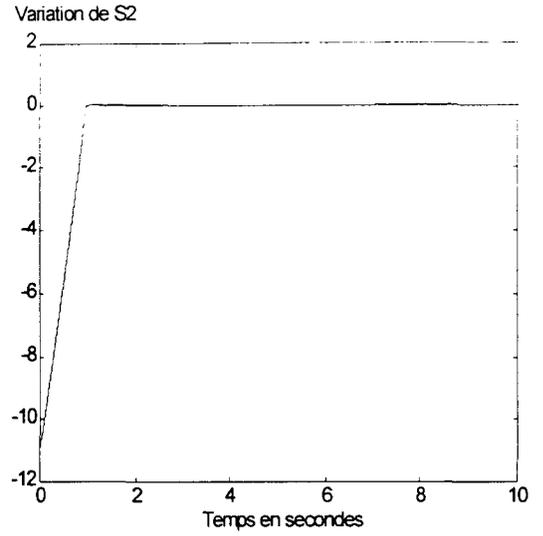
**a** :  $y_{1d}$  (—) et  $y_1$  (-.-.-).



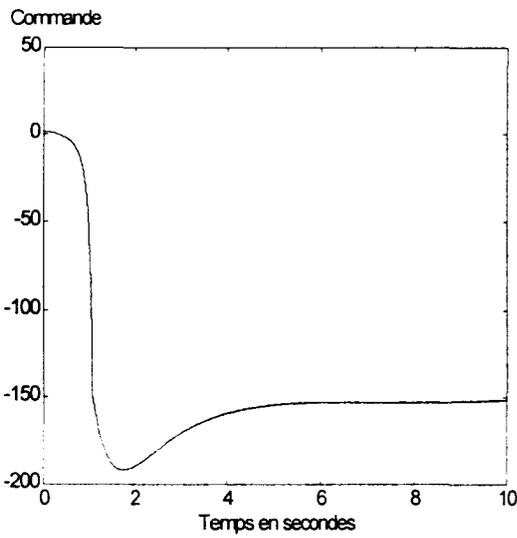
**b** :  $y_{2d}$  (—) et  $y_2$  (-.-.-).



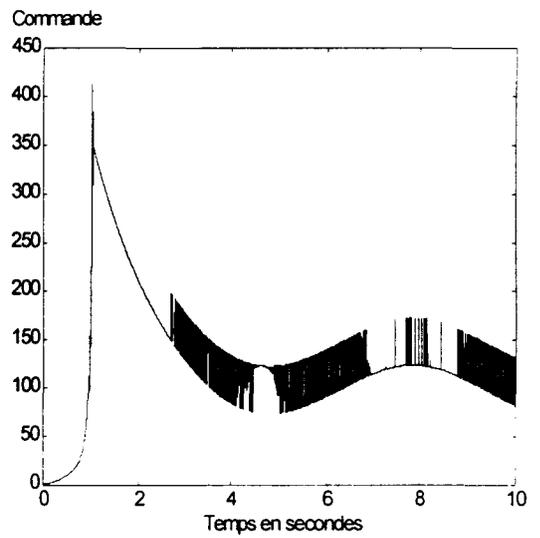
**c** : Variation de  $S_1$ .



**d** : Variation de  $S_2$ .



**e** : Variation de la commande  $u_1$ .



**f** : Variation de la commande  $u_2$ .

**Figure 3.10** : Evolution du système réel corrigé avec la commande continue dans une bande de la surface.

### 3.4.3 Commande dynamique par mode glissant

Soit le retour d'état défini par :

$$\begin{cases} u_1 = 2(v_1^* + \Delta v_1 - f_1(x)), \\ u_2 = \frac{1}{(4x_1+0.4)}(v_2^* + \Delta v_2 - 4x_2 f_1(x) + 0.2 f_3(x) - 2x_2 u_1) - f_2(x), \end{cases} \quad (3.153)$$

avec :

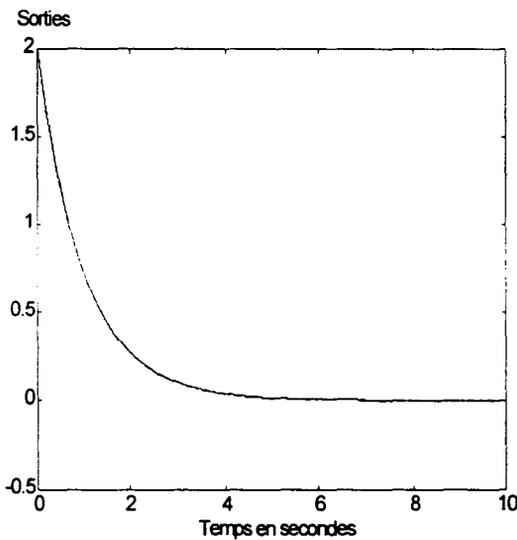
$$\begin{cases} \Delta v_1 = -M_1 \int_0^t \text{sign} S_1(\tau) d\tau, \\ \Delta v_2 = -M_2 \int_0^t \text{sign} S_2(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (3.154)$$

et les expressions :

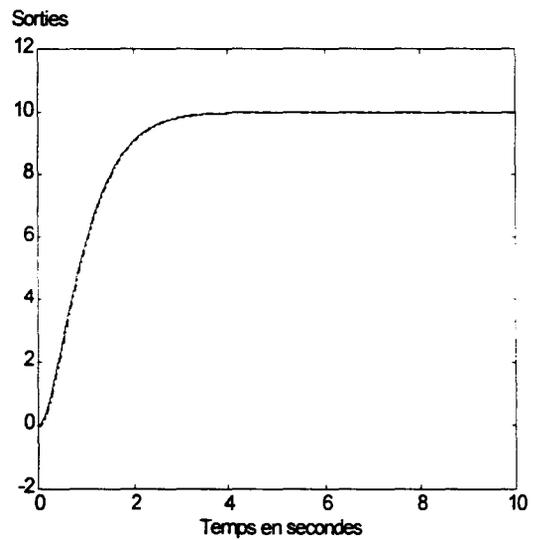
$$\begin{cases} S_1 = \dot{y}_1 - v_1^*, \\ S_2 = \ddot{y}_2 - v_2^*, \end{cases} \quad (3.155)$$

dans lesquelles  $v_1^*$  et  $v_2^*$  sont donnés par (3.146) et les gains  $M_1$  et  $M_2$  vérifient (3.150).

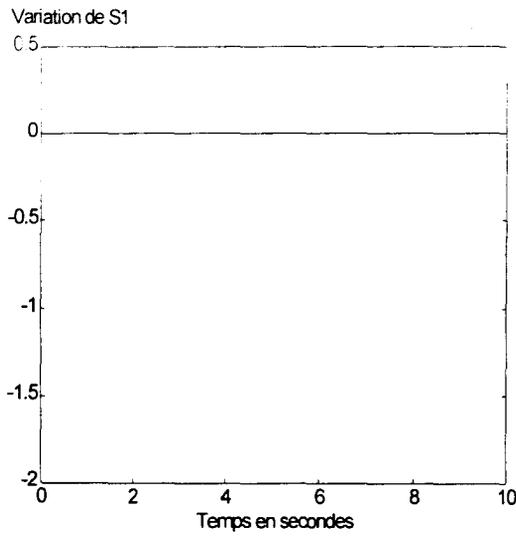
On présente ci-dessous l'évolution du système réel corrigé avec le contrôleur par mode glissant.



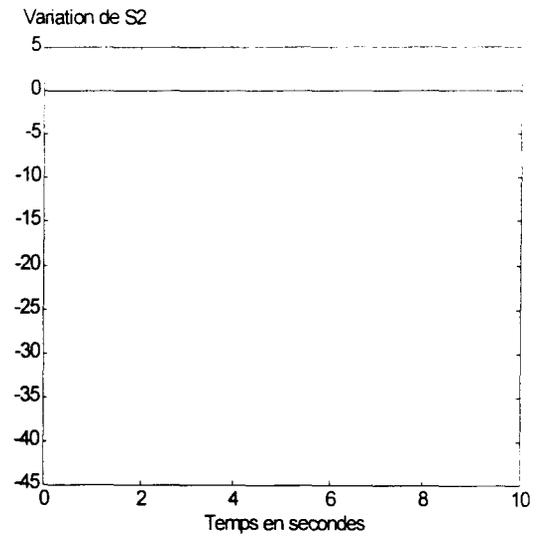
**a** :  $y_{1d}$  (—) et  $y_1$  (-.-.-).



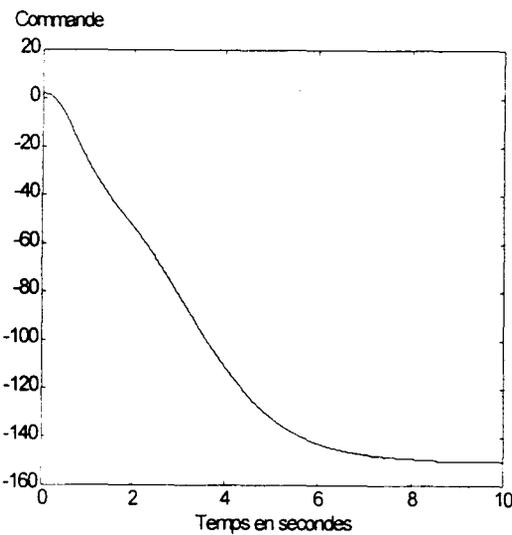
**b** :  $y_{2d}$  (—) et  $y_2$  (-.-.-).



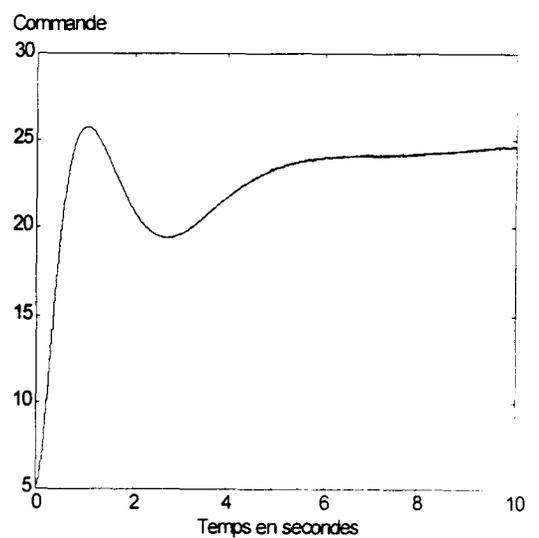
c : Variation de  $S_1$ .



d : Variation de  $S_2$ .



e : Variation de la commande  $u_1$ .



f : Variation de la commande  $u_2$ .

**Figure 3.11** : Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur dynamique par mode glissant.

### 3.4.5 Synthèse et analyse

L'analyse des résultats, illustrés par les figures 3.9, 3.10 et 3.11, fait apparaître que le contrôleur DMG donne le meilleur suivi en position, le plus faible temps de glissement, et la plus lisse loi de commande. De plus, on présente dans le tableau 3.1, les erreurs de poursuite maximales données par les trois algorithmes.

Max( $y_i - y_{id}$ )			
Commandes \ Sorties	CMG	CBS	DMG
$y_1$	0.7	0.7	$2.9 \cdot 10^{-4}$
$y_2$	2.7	2.7	0.2

**Tableau 3.1 :** Comparaison des erreurs maximales de poursuite.

Il est clair que le commande DMG présente les plus faibles erreurs maximales de poursuite.

### 3.4.6 Comparaison de robustesse par rapport aux perturbations

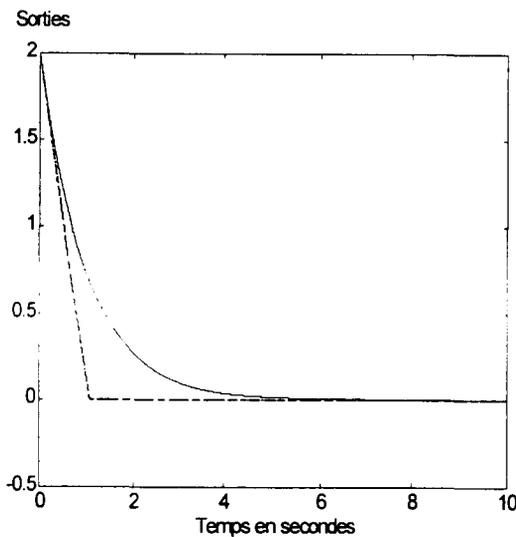
On se propose dans ce paragraphe de faire varier les erreurs de modélisations et d'appliquer les mêmes lois de commande afin d'analyser la robustesse de chaque algorithme vis-à-vis de ces perturbations.

#### Premier essai

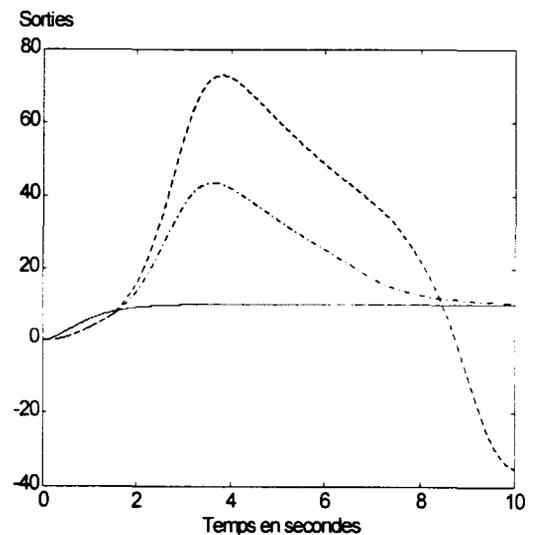
Le système réel n'est plus donné par (3.147) mais s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.5x_1 + x_2x_3 + 0.5u_1 + 0.3\sin t, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - 4x_1x_3 - 0.2x_3 + u_2 + 0.3\sin t, \\ \dot{x}_3 = 4x_1x_2 + 0.4x_2 - 0.2x_3 - 2. \end{cases} \quad (3.156)$$

Les résultats de simulations de suivi de trajectoire sont présentés par la figure 3.12 et le tableau 3.2.



a : Première composante de la sortie.



b : Deuxième composante de la sortie.

**Figure 3.12 :** Comparaison des trois algorithmes de commande :

DMG (.....)    CMG(-.-.-)    CBS (---)    Modèle (\_\_\_).

Max( $y_i - y_{id}$ )			
Commandes \ Sorties	CMG	CBS	DMG
$y_1$	0.7	0.7	$3.5 \cdot 10^{-4}$
$y_2$	33.5	63	0.2

**Tableau 3.2 :** Comparaison des erreurs maximales de poursuite.

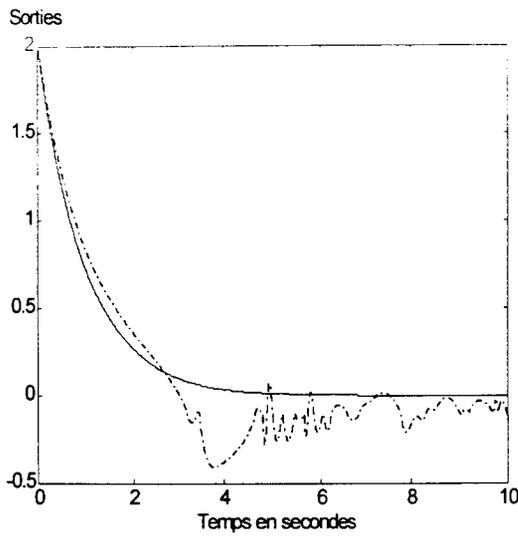
L'analyse de ces résultats montre que le contrôleur DMG présente encore le meilleur suivi de trajectoire. En effet, l'augmentation de la perturbation n'a pas altéré la qualité de poursuite du système, ce qui n'est pas le cas des deux autres algorithmes.

### Deuxième essai

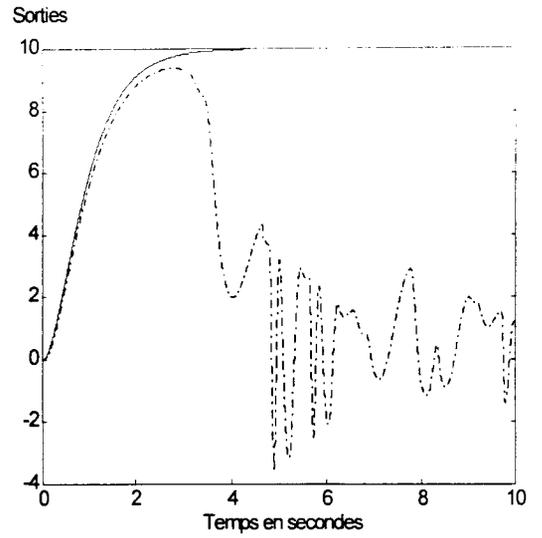
Considérons la deuxième perturbation du système (3.147) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.4x_1 + 0.99x_2x_3 + 0.5u_1 + 0.2\sin t, \\ \dot{x}_2 = -3.2x_2 - 4.1x_1x_3 - 0.2x_3 + u_2 + 0.2\sin t, \\ \dot{x}_3 = 4x_1x_2 + 0.4x_2 - 0.2x_3 - 2. \end{cases} \quad (3.157)$$

L'évolution du système réel avec la commande ((3.145), (3.146)) ne donne pas de bons résultats (figure 3.13). L'application des trois algorithmes est illustrée par la figure 3.14.

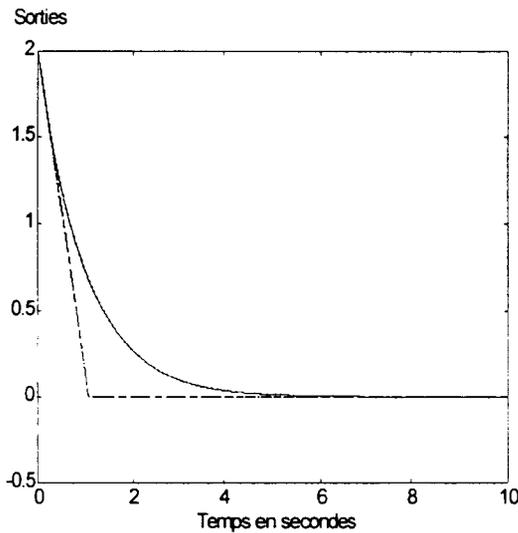


a :  $y_{1d}$  (\_\_\_) et  $y_1$  (-.-.-).

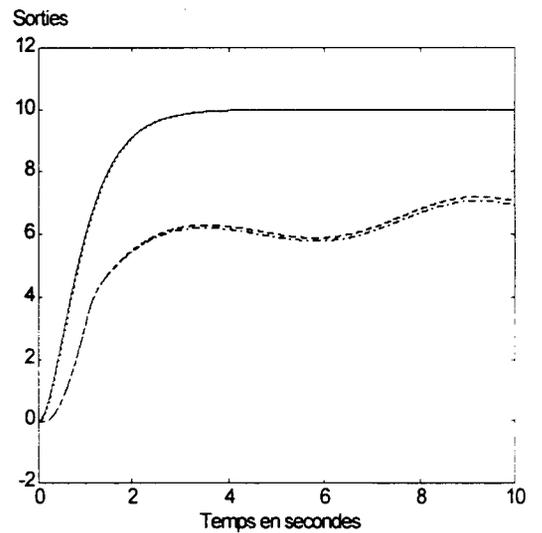


b :  $y_{2d}$  (\_\_\_) et  $y_2$  (-.-.-).

**Figure 3.13** : Comparaison des sorties désirées  $y_{1d}$ ,  $y_{2d}$  et réelles  $y_1$ ,  $y_2$  du processus.



a : Première composante de la sortie.



b : Deuxième composante de la sortie.

**Figure 3.14** : Comparaison des trois algorithmes de commande :

DMG (.....) CMG(-.-.-) CBS (-.-) Modèle (\_\_\_).

Max( $y_i - y_{id}$ )			
Commandes \ Sorties	CMG	CBS	DMG
$y_1$	0.7	0.7	$10^{-3}$
$y_2$	4.2	4.1	0.2

**Tableau 3.3** : Comparaison des erreurs maximales de poursuite.

Les figures (3.12) et (3.14) montrent la robustesse du contrôleur dynamique par mode glissant vis-à-vis à des variations paramétriques. En effet, celui-ci offre les meilleurs résultats tant en qualité de suivi de trajectoire qu'en robustesse et en rapidité.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une extension des résultats obtenus pour les systèmes monovariables au cas des systèmes multivariables. L'idée de base était de considérer, par une technique de découplage, que le régime glissant global est un ensemble de  $m$  régimes glissants monovariables afin de pouvoir exploiter les résultats du chapitre 2. La superposition, selon le type de perturbations, d'un ou plusieurs termes correcteurs à chaque entrée découplante permet de définir la nouvelle loi de commande dynamique par mode glissant. Il a été montré qu'à partir d'un critère que l'on choisit selon le cahier des charges, on peut réaliser une optimisation des gains et des temps de glissement. Enfin, une étude comparative de robustesse pour trois algorithmes de commande par mode glissant (CMG, CBS et DMG) a montré que la commande dynamique par mode glissant (DMG) présente le meilleur suivi de trajectoire, le plus faible temps de glissement, la plus lisse loi de commande et la plus grande insensibilité vis-à-vis des variations paramétriques et perturbations.

# **Chapitre 4**

## **Approches avancées de la commande dynamique par mode glissant**



## Introduction

La théorie de la **logique floue** introduite par Zadeh en 1965 [Zadeh 65] permet de traiter des variables imprécises dont l'appartenance à un sous-ensemble donné est une valeur qui peut varier entre 0 et 1. Un domaine d'application de la logique floue qui devient de plus en plus important depuis 1974 est celui de la commande de processus [Mamdani 74], [Jamshidi 93], [Ying 94] et [Dieulot 96]. Les lois de commande classiques sont alors remplacées par une **base de règles** de la forme :

$$\mathbf{SI\ conditions\ ALORS\ opérations,} \quad (4.1)$$

où les différentes conditions et opérations sont définies par des **variables linguistiques**. Dans ce cas, la stratégie de commande ne nécessite plus un modèle mathématique particulier mais plutôt l'adaptation des expériences obtenues par un opérateur. On évite ainsi les problèmes d'identifications complexes et mal définies [Zadeh 73] et [Dubois 95a].

La généralisation de la structure du contrôleur flou [Takagi 85], [Johansen 94] et [Narendra 95] a donné naissance à l'approche **multi-modèles**. Celle-ci est basée sur la mise en oeuvre de plusieurs modèles locaux qui constituent en fait une représentation simplifiée du système. Dans le cas où la sortie du contrôleur multi-modèles est une commande, une fusion des commandes élémentaires de chaque modèle en fonction de leur validité [Delmotte 95] fournit la commande globale du système. Ainsi, l'estimation de la commande à chaque instant ne nécessite plus un modèle global du système (qui est en général fortement non linéaire) [Hajri 96f]. Cependant, dans certains cas, le choix des modèles locaux n'est qu'une déduction de certains comportements du système et ne représente pas fidèlement, l'évolution réelle du processus. D'où la nécessité d'associer à chaque modèle une loi de commande robuste afin de pallier à ces erreurs de modélisation [Delmotte 96] et [Hwang 94].

Dans la première partie de ce chapitre, la synthèse d'un **gain de glissement flou** sera proposée dans le but de robustifier les performances des systèmes à commandes par mode glissant, notamment la réduction du phénomène de broutement. Le choix de ce gain va dépendre de la position de l'état du système par rapport à la surface de glissement  $S = 0$ . En effet, plus l'état est éloigné de la surface  $S = 0$  plus le gain de glissement doit être élevé et inversement si l'état est proche de la surface  $S = 0$ . Enfin, l'intégration de la commande dynamique par mode glissant (DMG) (développée dans les chapitres 2 et 3) dans l'approche multi-modèles sera présentée dans la deuxième partie de ce chapitre.

## 4.1 Commande floue

La structure classique d'un régulateur par logique floue est composée de quatre blocs distincts comme le montre la figure 4.1 [Dubois 95b] et [Lee 90a, 90b].

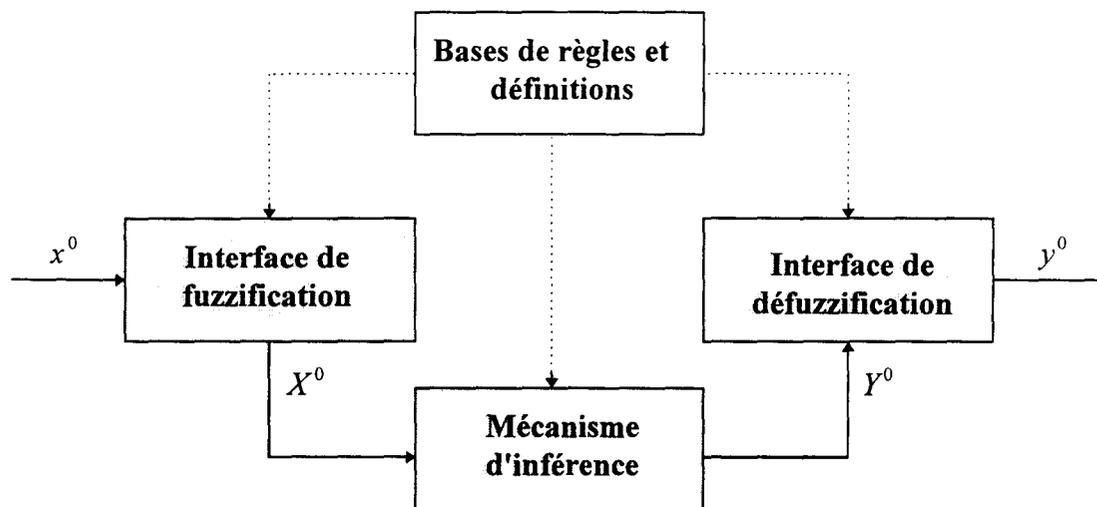


Figure 4.1 : Structure d'une commande floue.

### 4.1.1 Base de règles et définitions

On regroupe dans ce bloc toutes les définitions utilisées pour l'élaboration de la loi de commande telles que le choix des opérateurs [Weber 83] (voir par exemple tableau 4.1 et annexe 4) et une description de la stratégie de commande avec plusieurs règles  $R^i$ , se basant sur des variables linguistiques liées entre elles par des opérateurs, de la forme :

$$k \text{ règles } R^i : \text{SI } (x \text{ est } X^i) \text{ ALORS } (y \text{ est } Y^i), \quad (4.2)$$

où  $x$  est la variable d'entrée et  $y$  est la variable de sortie.  $X^i$  et  $Y^i$  sont respectivement des sous-ensembles flous d'entrée et de sortie.

Opérateur	Choix
Intersection $\wedge$	min
Union $\vee$	max
Projection floue	sup
Implication floue	min

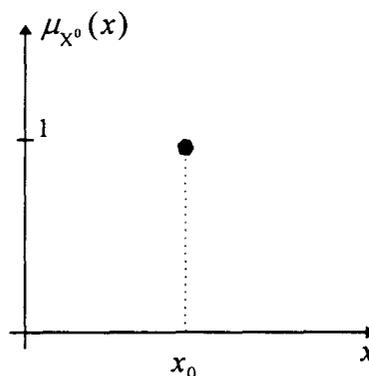
**Tableau 4.1** : Choix des différents opérateurs de la logique floue.

Le tableau 4.1 présente un exemple de choix des opérateurs de la logique floue qu'on a adopté dans la suite de ce chapitre.

#### 4.1.2 Interface de fuzzification

Elle permet de définir des **fonctions d'appartenance** pour les différentes variables. On réalise ainsi la conversion d'une grandeur physique  $x^0$  en une variable linguistique, c'est-à-dire, appartenant à un sous-ensemble flou  $X^0$  d'un univers de discours  $U$  (voir annexe 4), caractérisée par une fonction continue dans  $[0 ; 1]$ , appelée fonction d'appartenance et notée  $\mu_{X^0}(x^0)$ .

Le choix des sous-ensembles flous dépend de la confiance que l'on accorde aux variables mesurées. Par exemple, si la mesure  $x^0$  est précise, la représentation du sous-ensemble flou  $X^0$  se fait par un fait précis comme le montre la figure 4.2. L'opérateur de fuzzification utilisé dans ce cas est la transformation dite du singleton.



**Figure 4.2** : Fuzzification pour une mesure précise.

En présence de bruits ou de perturbations, la mesure  $x^0$  est alors imprécise, et par suite la représentation du sous-ensemble flou  $X^0$  se fait par un fait imprécis (voir figure 4.3). Dans ce cas, on utilise le plus souvent pour les fonctions d'appartenance des formes trapézoïdales ou triangulaires [Weber 83] comme le montre la figure 4.3.

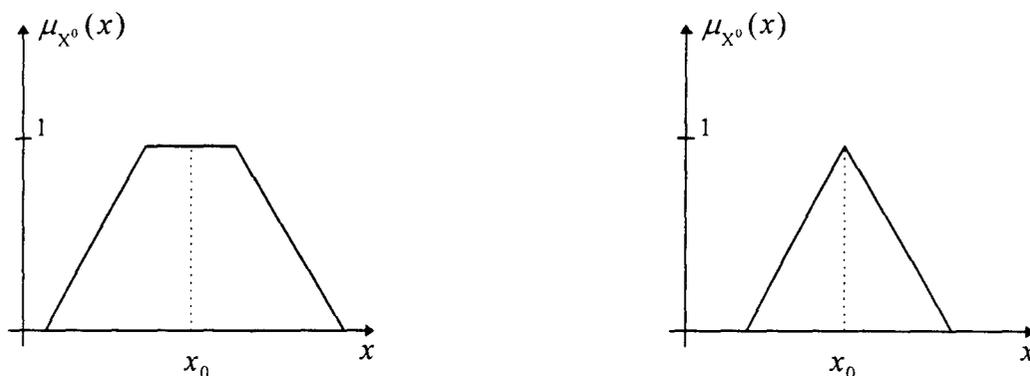


Figure 4.3 : Fuzzification pour une mesure imprécise.

### 4.1.3 Mécanisme d'inférence

Il permet de lier, à l'aide d'un certain nombre de règles, le sous-ensemble flou  $X^0$  de l'univers de discours  $U$ , correspondant à la fuzzification de la variable de mesure  $x^0$ , à un sous ensemble flou  $Y^0$  caractérisant la variable de sortie exprimée, elle aussi, sous forme linguistique sur l'univers de discours  $W$ .

Fait flou :  $x$  est  $X^0$ ,

$m$  règles  $R^i$  : SI ( $x$  est  $X^i$ ) ALORS ( $y$  est  $Y^i$ ), (4.3)

Conclusion :  $y$  est  $Y^0$ .

Si les règles  $R^i$  utilisées dans (4.3) sont disjonctives, la relation globale  $R$  est définie par l'opérateur d'union  $\vee$  sur les  $m$  règles floues  $R^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) et caractérisée par sa fonction d'appartenance  $\mu_R$  :

$$\mu_R(x, y) = \mu_{R^1}(x, y) \vee \dots \vee \mu_{R^m}(x, y), \quad (4.4)$$

expression dans laquelle la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou défini par la règle  $R$  s'écrit (tableau 4.1) :

$$\mu_{R^i}(x, y) = \min(\mu_{X^i}(x), \mu_{Y^i}(y)). \quad (4.5)$$

Le sous-ensemble flou  $Y^0$  de l'univers de discours  $W$  solution du problème (4.3) est la projection sur  $W$  de l'intersection entre le sous-ensemble flou  $X^0$  et la relation  $R$  (4.4).

En se basant sur le choix des opérateurs du tableau 4.1, il en résulte pour la fonction d'appartenance  $\mu_Y(y)$  l'expression :

$$\mu_Y(y) = \sup_x \left( \min \left( \mu_{X^0}(x), \max_{i=1 \text{ à } m} (\mu_{R^i}(x, y)) \right) \right), \quad (4.6)$$

#### 4.1.3.1 Exemple

Considérons le problème (4.3) avec une seule règle :

$$\begin{aligned} & \text{Fait flou : } x \text{ est } X^0, \\ & R^1 : \text{SI } (x \text{ est } X^1) \text{ ALORS } (y \text{ est } Y^1), \\ & \text{Conclusion : } y \text{ est } Y^0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

La solution  $Y^0$  au problème (4.7) est donnée en considérant (4.5) et (4.6) dans le cas d'une seule règle, c'est-à-dire,  $m = 1$ . Il vient :

$$\mu_Y(y) = \min \left( \sup_x \left( \min \left( \mu_{Y^1}(x), \mu_{X^0}(x) \right) \right), \mu_{Y^1}(y) \right). \quad (4.8)$$

La construction graphique du sous-ensemble flou  $Y^0$ , pour un exemple de fonctions d'appartenance des sous-ensembles flous  $X^0$ ,  $X^1$  et  $Y^1$  est présentée sur la figure 4.4.

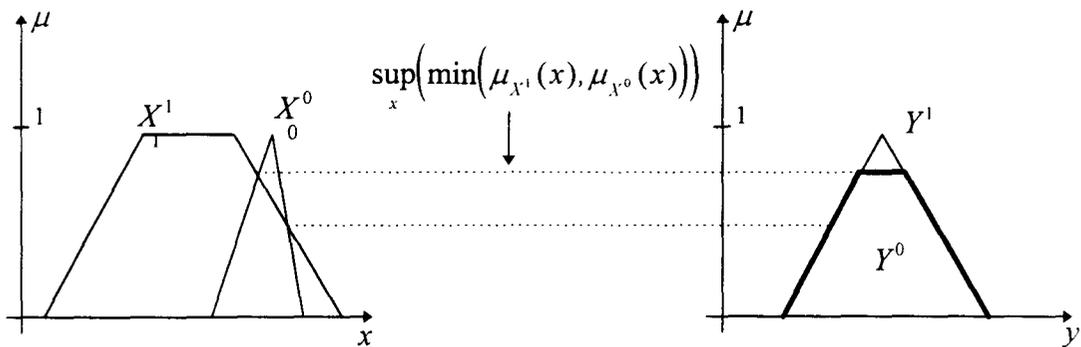


Figure 4.4 : Construction du sous-ensemble flou  $Y^0$ .

#### 4.1.4 Interface de défuzzification

Les méthodes d'inférence fournissent une fonction d'appartenance  $\mu_Y(y)$  pour la variable de sortie  $y$ . Il s'agit donc d'une information floue. Comme l'organe de commande nécessite un signal précis, il faut transformer cette information floue en une valeur déterminée. Cette opération est appelée **défuzzification** et notée  $D_F$ . Parmi les méthodes qui existent dans la littérature [Lee 90a, 90b], on peut citer la défuzzification barycentrique qui consiste à déterminer le centre de gravité de la fonction d'appartenance  $\mu_Y(y)$  :

$$D_F(Y) = \frac{\int y \mu_Y(y) dy}{\int \mu_Y(y) dy} \quad (4.9)$$

Dans le cas où les sous-ensembles flous  $M^i$  relatifs aux gains à choisir dans les règles floues  $R^i$  sont des singletons, la **défuzzification barycentrique** donne :

$$y = D_F(Y) = \frac{\sum_{i=1}^k y^i \mu_Y(y^i)}{\sum_{i=1}^k \mu_Y(y^i)}, \quad (4.10)$$

où  $k$  est le nombre de sous-ensemble flous  $Y^i$  distincts sur l'univers de discours  $W$ .

## 4.2 Commande dynamique floue par mode glissant

On se propose dans ce chapitre de réduire le phénomène de broutement. Pour ce faire, on utilise un gain variable, basé sur la théorie de la logique floue [Hajri 96c]. Le gain de glissement, qui était constant dans tous les exemples précédents, est remplacé par une fonction floue dépendant de la position de l'état du système par rapport à la surface de glissement  $S = 0$ .

De manière pratique, on conçoit que plus l'état du système est éloigné de la surface  $S = 0$  plus le gain de glissement doit être élevé et inversement si l'état est proche de la surface  $S = 0$ . On considère donc la distance  $d$  à la surface  $S = 0$  comme étant une variable de mesure. Il est nécessaire de la transformer en un ensemble flou  $\Omega$  caractérisé par une fonction d'appartenance  $\mu_{\Omega}(d)$ .

On désire déterminer le gain de glissement flou  $\Pi$ , solution du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Fait flou : } d \text{ est } \Omega, \\ & m \text{ règles } \mathbf{R}^i : \text{SI } (x \text{ est } \Omega^i) \text{ ALORS } (M \text{ est } \Pi^i), \\ & \text{Conclusion : } M \text{ est } \Pi, \end{aligned} \tag{4.11}$$

dans cette relation,  $\Omega^i$  et  $\Pi^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont des sous-ensembles flous définis respectivement sur leur universs de discours  $U$  et  $W$ . L'ensemble flou  $\Pi$  est caractérisé par sa fonction d'appartenance  $\mu_{\Pi}(M)$ , expression donnée par les résultats (4.5) et (4.6) :

$$\mu_{\Pi}(M) = \text{Sup}_d \left( \min \left( \mu_{\Omega^0}(d), \max_{i=1 \text{ à } m} \left( \mu_{R^i}(d, M) \right) \right) \right), \tag{4.12}$$

avec :

$$\mu_{R^i}(d, M) = \min \left( \mu_{\Omega^i}(d), \mu_{\Pi^i}(M) \right). \tag{4.13}$$

L'interface de défuzzification donne :

$$M = D_f(II). \quad (4.14)$$

En utilisant le résultat établi au chapitre 2 (2.24), il vient pour le **correcteur dynamique flou par mode glissant** (DFMG) l'expression :

$$u = \frac{1}{g(x,t)} \left( v^* - \int_0^t D_f(II) \text{sign}(S(\tau)) d\tau - f(x,t) \right), \quad (4.15)$$

dans laquelle  $D_f(II)$  est donné par (4.14) et supérieur à la borne maximale de la perturbation.

### 4.3 Exemple

Considérons le système modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + (2 + \sin t)u, \\ y = x. \end{cases} \quad (4.16)$$

Une description exacte du processus réel serait donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + ((2 + \sin t) + \Delta g(x,t))u + p(x,t), \\ y = x, \end{cases} \quad (4.17)$$

où  $\Delta g(x,t)$  et  $p(x,t)$  sont inconnues dans la réalité. Cependant, pour les résultats de simulation on a supposé :

$$\begin{cases} p(x,t) = 0.1x^2 + 0.2x\sin(10t), \\ \Delta g(x,t) = -0.3(2 + \sin t). \end{cases} \quad (4.18)$$

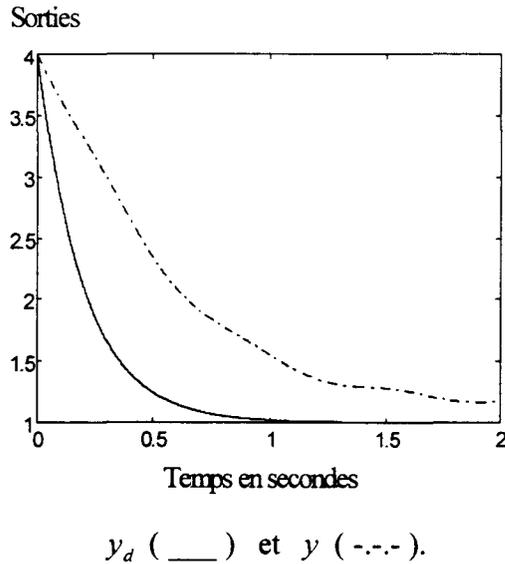
On souhaite avoir pour le processus une réponse à un échelon de commande du type premier ordre de constante de temps égale à 0.2 secondes. Pour ce faire et dans l'hypothèse du modèle défini par (4.16), on choisit la loi de commande :

$$u = \frac{1}{2 + \sin t} (v^* - x^2), \quad (4.19)$$

où :

$$v^* = 5(\Gamma(t) - y). \quad (4.20)$$

La réponse réelle du processus  $y$  est comparée à celle désirée  $y_d$ , pour les mêmes conditions initiales  $y(0) = 4$ , sur la figure 4.5.



**Figure 4.5 :** Comparaison des sorties désirée  $y_d$  et réelle  $y$  du processus.

Sur cette figure, on constate que la sortie réelle  $y$  du processus ne coïncide pas avec celle désirée  $y_d$ . On souhaite y remédier tout en satisfaisant la condition :

$$\text{l'erreur maximale en sortie est inférieure à } 0.2, \quad (4.21)$$

où l'erreur en sortie  $e$  est définie par :

$$e = y - y_d. \quad (4.22)$$

Pour ce faire, on considère trois algorithmes de commandes : la commande classique par mode glissant (CMG), la commande dynamique par mode glissant (DMG) et la commande dynamique floue par mode glissant (DFMG).

#### 4.3.1 Commande classique par mode glissant

Dans le but d'imposer la même dynamique au système réel (voir l'expression de  $v^*$  dans (4.20)) mais en réduisant son ordre, on considère la surface de glissement d'ordre zéro définie pour  $t \geq 0^+$  par :

$$S = 5(y - \Gamma(t)) = 0, \quad (4.23)$$

d'où la loi de commande :

$$u = \frac{1}{2 + \sin t} (-x^2 - M \text{sign}(S)). \quad (4.24)$$

D'après la première approche de la section 1.5.4.2 du chapitre 1, le gain de glissement  $M$  doit satisfaire :

$$M > \frac{\zeta_1}{1 - \alpha}, \quad \alpha \ll 1, \quad (4.25)$$

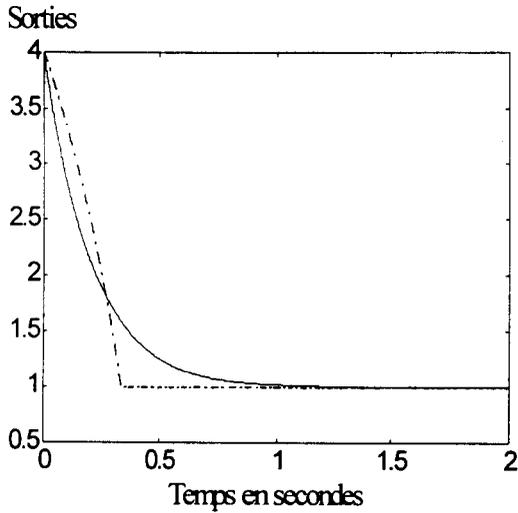
avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \left( -\frac{\Delta g(x,t)}{2 + \sin t} x^2 + p(x,t) \right) \right| \leq \zeta_1, \\ \left| \frac{\Delta g(x,t)}{2 + \sin t} \right| \leq \alpha. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

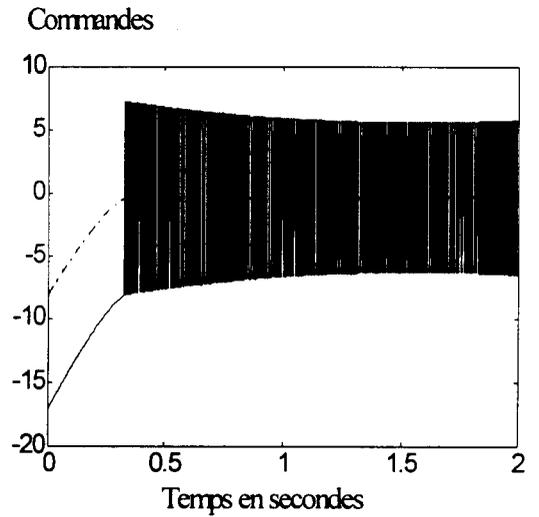
Dans cet exemple, l'utilisation d'une surface de glissement d'ordre inférieur à celui du système fait perdre toutes les informations concernant a dynamique désirée. Comme le gain de glissement est inversement proportionnel au temps de glissement, alors plus le gain  $M$  est important plus le temps nécessaire pour atteindre la consigne est faible, cependant, sans tenir compte de la valeur souhaitée pour la constante de temps.

Si l'on considère les équations (4.25) et (4.26), pour lesquelles on suppose  $\zeta_1 = 8$  et  $\alpha = 0.3$ , on trouve que le gain de glissement  $M$  doit être supérieur à 11.5.

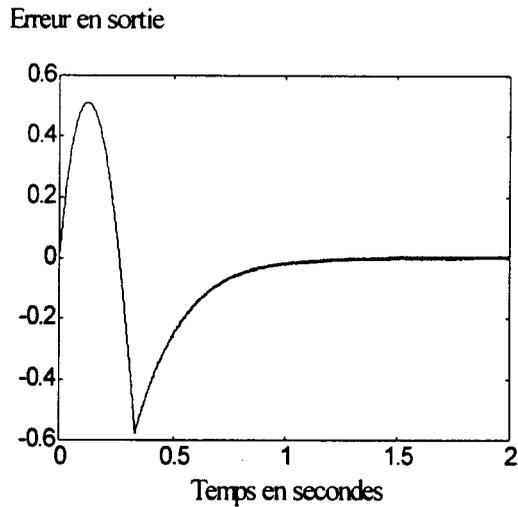
En faisant varier le gain de glissement entre 12 et 50, on constate que la valeur de  $M$  qui donne la plus petite erreur maximale en sortie est de 18 (voir figure 4.6). Néanmoins, cette erreur en sortie ne satisfait pas la condition (4.21) puisqu'elle est égale à 0.58 comme le montre la figure 4.6.c.



a : Evolution des sorties :  
 $y_d$  (—) et  $y$  (-.-.-).



b : Evolution des commandes :  
 $u_{eq}$  (—) et  $u$  (-.-.-).



c : Evolution de l'erreur en sortie.

**Figure 4.6 :** Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur classique par mode glissant.

En conclusion, le contrôleur classique par mode glissant ne permet pas de satisfaire le cahier des charges imposé pour l'évolution du processus. De plus, la simulation montre qu'un tel régulateur avec un gain de glissement égal à 18 fait apparaître de très importantes oscillations haute-fréquences au niveau de l'organe de commande (figure 4.6.b).

### 4.3.2 Commande dynamique par mode glissant

Si l'on considère les résultats du chapitre 2, notamment la section 2.1.3 et la nouvelle expression  $v^*$  donnée par (4.20), il en résulte pour la surface de glissement de même ordre que le système l'expression :

$$S = 5(y - \Gamma(t)) + \dot{y} = 0. \quad (4.27)$$

De même, la loi de commande DMG appliquée au processus réel (4.17) ainsi que le gain de glissement sont donnés respectivement par (voir chapitre 2, théorème 2.2) :

$$u = \frac{1}{2 + \sin t} \left( 5(\Gamma(t) - y) - M \int_0^t \text{sign}(S(\tau)) d\tau - x^2 \right), \quad (4.28)$$

et

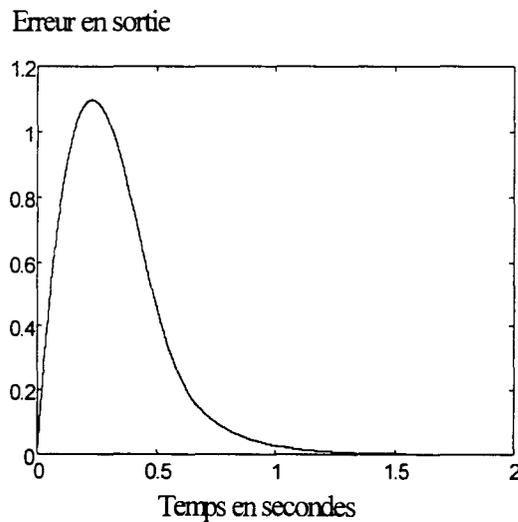
$$M > \frac{(\alpha_2 |S(0)| + 2\xi_1(1 - \alpha_1)) + \sqrt{\alpha_2^2 |S(0)|^2 + 4\alpha_2 \xi_1 |S(0)|(1 - \alpha_1)}}{2(1 - \alpha_1)^2}. \quad (4.29)$$

Avec :

$$\begin{cases} \left| \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{2 + \sin t} (v^* - x^2) + p(x,t) \right) \right|_{\xi_1}, \\ \left| \frac{\Delta g(x,t)}{2 + \sin t} \right| < \alpha_1 \ll 1, \\ \left| \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta g(x,t)}{2 + \sin t} \right) \right| < \alpha_2. \end{cases} \quad (4.30)$$

Dans l'hypothèse où  $|S(0)| = 15$ ,  $\alpha_1 = 0.3$ ,  $\alpha_2 = 0.1$  et  $\xi_1 = 3$  le gain de glissement  $M$  (4.29) doit être supérieur à 9.8. Dans une première étape, on choisit un gain de glissement  $M$  vérifiant :

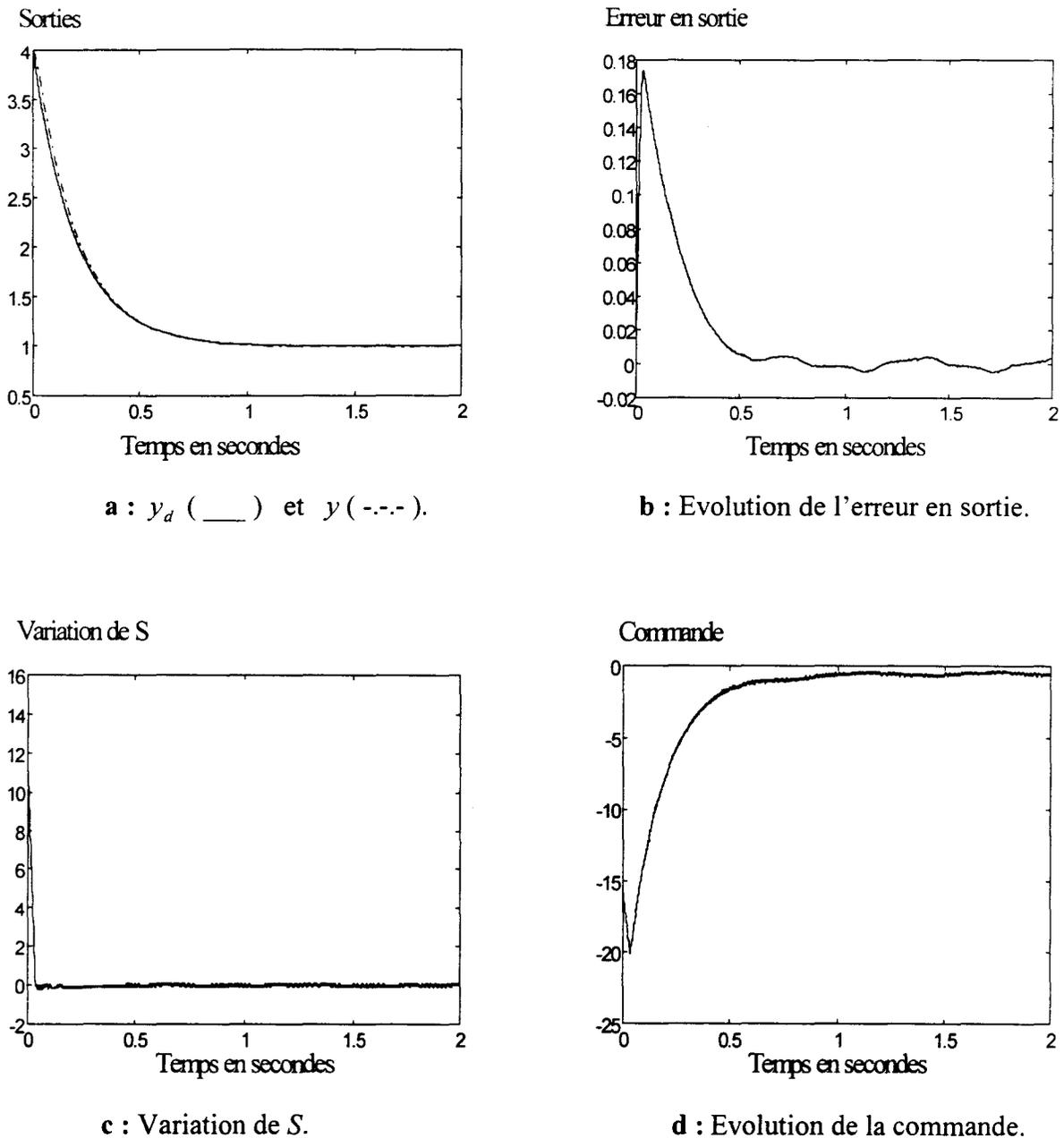
$$M = 10. \quad (4.31)$$



**Figure 4.7 :** Evolution de l'erreur en sortie pour  $M = 10$ .

La figure 4.7 illustre la variation de l'erreur en sortie. La convergence de la sortie réelle vers la sortie désirée et par suite, vers la consigne est facilement déduite. Cependant, l'erreur maximale en sortie est supérieure à 0.2. Une valeur satisfaisante correspond à :

$$M = 400. \quad (4.32)$$



**Figure 4.8 :** Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur dynamique par mode glissant.

L'utilisation du contrôleur DMG permet d'avoir une erreur maximale en sortie de 0.178 et une convergence plus rapide de la sortie réelle vers la sortie désirée. Toutefois, la figure 4.8 montre l'existence de faibles oscillations hautes fréquences qui détériorent les performances de la loi de commande. Pour remédier à ce problème, on se propose de remplacer le gain de glissement  $M$ , qui était constant dans le paragraphe précédent, par un gain de glissement flou.

### 4.3.3 Commande dynamique floue par mode glissant

On considère pour la variable "distance  $d$  à la surface de glissement" quatre sous-ensembles flous : Petit (P), Moyen Petit (MP), Moyen Grand (MG) et Grand (G). Ils sont définis sur l'univers de discours de  $d$ . Les fonctions d'appartenance associées aux classes respectives P, MP, MG et G sont respectivement  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  et  $\mu_4$ . On suppose aussi, quatre classes possibles pour la valeur du gain  $M$ , définies par les sous-ensembles flous Très Petit (TP), Moyen (M), Moyen Grand (MG) et Grand (G), sur l'univers de discours  $M$ .

Les figures 4.9.a et 4.9.b présentent les choix retenus après essais pour ces différents sous-ensembles flous.

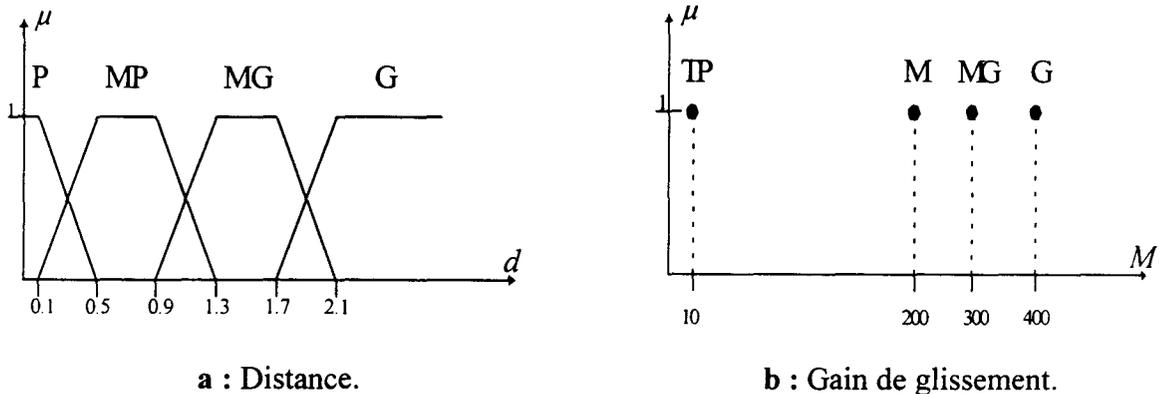


Figure 4.9 : Présentation des sous-ensembles.

On définit alors la base de règles suivante :

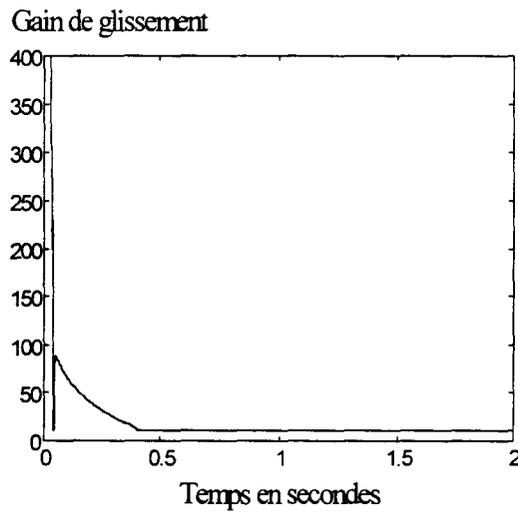
Règle N° :	SI $d$ est	ALORS $M$ est
1	Petit	Très Petit : $M_1$
2	Moyen Petit	Moyen : $M_2$
3	Moyen Grand	Moyen Grand : $M_3$
4	Grand	Grand : $M_4$

Tableau 4.2 : Base de règles du gain de glissement flou.

Comme les sous-ensembles flous  $M_i$  relatifs aux gains à choisir dans les règles floues  $R_i$  sont des singletons  $M_i$  (figure 4.9b), il en résulte avec la défuzzification barycentrique le gain de glissement :

$$M(d) = D_F(\Pi) = \frac{\sum_{i=1}^4 M_i \mu_i(d)}{\sum_{i=1}^4 \mu_i(d)}, \quad (4.33)$$

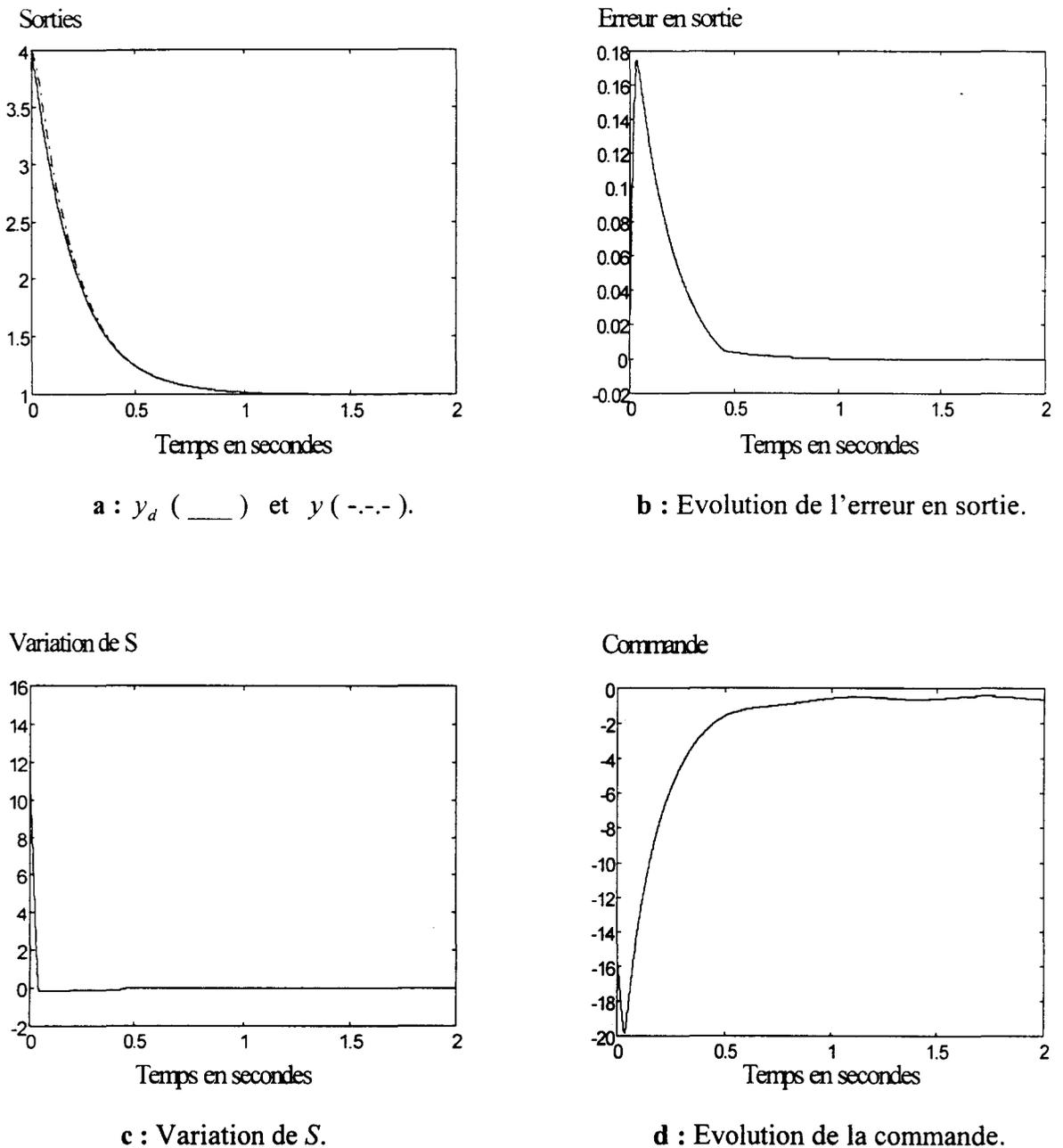
dont l'évolution au cours du temps pour le problème choisi est donnée par la figure 4.10.



**Figure 4.10 :** Variation du gain de glissement flou  $M(t)$ .

Ainsi, la loi de commande (4.15) s'écrit :

$$u = \frac{1}{2 + \sin t} \left( 5(\Gamma(t) - y) - \int_0^t M(\tau) \text{sign}(S(\tau)) d\tau - x^2 \right). \quad (4.34)$$



**Figure 4.11 :** Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur dynamique flou par mode glissant.

Le contrôleur dynamique flou par mode glissant assure une erreur maximale en sortie de 0.178. De plus il est intéressant de constater que les oscillations résiduelles hautes fréquences n'existent plus en régime permanent et que la loi de commande est lisse, comme le montre la figure 4.11.

## 4.4 Commande multi-modèles

Elle consiste à considérer plusieurs modèles simples du système, pour lesquels on définit des commandes particulières. La commande globale appliquée au système sera donc une **fusion** de ces commandes élémentaires [Dubois 95b].

Soit le système multivariable donné par (voir annexe 3) :

$$y^* = f^*(x,t) + G^*(x,t)u, \quad (4.35)$$

où l'on pose :

$$\begin{cases} y^* = [y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)}]^T, \\ f^* = [f_1^*, \dots, f_m^*]^T, \\ G^* = [G_1^*, \dots, G_m^*]^T. \end{cases} \quad (4.36)$$

Avec  $f^*(x,t)$  et  $G^*(x,t)$  inconnues. On considère que l'on a accès à un certain nombre de modèles du système (4.35).

Le  $j$ -ème modèle  $M^j$  correspondant est décrit par :

$$M^j: y^{j*} = f^{j*}(x,t) + G^{j*}(x,t)u^j, \quad (4.37)$$

où  $f^{j*}(x,t)$  et  $G^{j*}(x,t)$  sont connues.

Si l'on pose :

$$y^{j*} = v^{j*}, \quad (4.38)$$

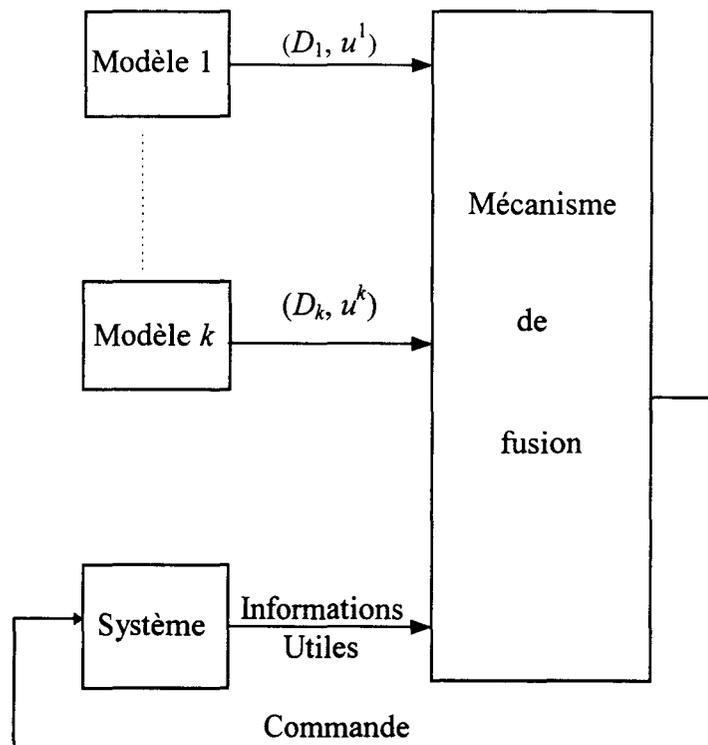
la commande élémentaire  $u^j$  ( $u^j = [u_1^j, \dots, u_m^j]^T$ ) du  $j$ -ème modèle est donnée par :

$$u^j = (G^{j*}(x,t))^{-1}(v^{j*} - f^{j*}(x,t)), \quad (4.39)$$

avec  $G^{j*}(x,t)$  une matrice inversible.

Chaque modèle  $M^j$  ( $j = 1, \dots, k$ ), est caractérisé par le couple  $(D_j, u^j)$ , où  $D_j$  est le domaine de validité du  $j$ -ème modèle dans lequel, la commande du système correspond à  $u^j$ . Le passage entre les différents domaines est réalisé par **une interpolation linéaire** des différentes commandes.

La figure suivante présente la structure de la commande multi-modèles proposée.



**Figure 4.12 :** Structure de la commande multi-modèles proposée.

## Principe de fonctionnement

La commande multi-modèles utilise des règles  $R^j$  de la forme :

$$R^j : \text{SI le système est le modèle } M^j \text{ ALORS la commande est } u^j. \quad (4.40)$$

La stratégie de cette loi de commande s'effectue en deux étapes :

- 1- Calcul des **confiances** dans les modèles  $M^j$ , ( $j = 1, \dots, k$ ).
- 2- Fusion des commandes élémentaires  $u_i^j$ , ( $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, k$ ).

### 4.4.1 Calcul des confiances

Le calcul des confiances dans les modèles  $M^j$  est basé sur les distances de l'état représentatif du système,  $x_r = [x_{r1}, \dots, x_{rn}]^T \in \mathbb{R}^{n_r}$ , (voir annexe 4) aux différents domaines  $D_j$ . Les distances  $d_j$  sont obtenues de la façon suivante :

$$d_j = \min_{x \in D_j} \|x_r - x\|, \quad (4.41)$$

où  $\| \cdot \|$  est une norme scalaire. Les confiances  $c_j$  dans les modèles  $M^j$  sont alors données par l'expression [Dubois 95b] :

$$c_j = (1 - d'_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \left( 1 - e^{-\left(\frac{d_i}{\sigma}\right)^2} \right), \quad (4.42)$$

dans laquelle on a :

$$d'_j = \frac{d_j}{\sum_{i=1}^k d_i}. \quad (4.43)$$

Cette définition de la confiance  $c_j$  assure la condition :

$$\text{Plus le modèle } M^j \text{ est loin de } x_r, \text{ plus la confiance } c_j \text{ est faible.} \quad (4.44)$$

Le terme défini dans (4.42) par

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \left( 1 - e^{-\left(\frac{d_i}{\sigma}\right)^2} \right), \quad (4.45)$$

est appelé coefficient de renforcement. Il assure des confiances  $c_j$  nulles dans tous les autres domaines  $D_j$  ( $j \neq i$ ) si l'état représentatif du système se trouve dans le domaine  $D_i$ . Le paramètre  $\sigma$  permet de contrôler la transition entre les différents modèles. En effet plus  $\sigma$  est important plus les transitions sont brusques et plus la confiance dans un modèle se réduit à son domaine de validité.

#### 4.4.2 Fusion des commandes élémentaires

On se propose, dans ce paragraphe de déterminer, chaque composante  $u_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) du vecteur commande  $u$ . Pour ce faire, il faut fusionner toutes les commandes élémentaires  $u_i^j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) associées à chaque modèle  $M^j$  en fonction de sa validité  $c_j$ , qu'on appelle aussi confiance (4.42). On considère donc les  $k \times m$  commandes  $u_i^j$  :

$$\begin{aligned} \text{Modèle } 1 : & \begin{cases} (u_1^1, c_1), \\ \vdots \\ (u_m^1, c_1), \end{cases} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \text{Modèle } k : & \begin{cases} (u_1^k, c_k), \\ \vdots \\ (u_m^k, c_k). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Une interpolation linéaire des différentes commandes  $u_i^j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) permet de déterminer l'expression de la  $i$ -ème composante  $u_i$  du vecteur commande  $u$  :

$$u_i = \frac{\sum_{j=1}^k c_j u_i^j}{\sum_{j=1}^k c_j}. \quad (4.47)$$

## 4.5 Exemple

Considérons le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3 \cos t + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4 (2 + \sin t), \\ \dot{x}_4 = u_2, \\ y_1 = x_1, \\ y_2 = x_3. \end{cases} \quad (4.48)$$

Le calcul des dérivées secondes des sorties  $y_1$  et  $y_2$  conduit à :

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = y_1^* = x_3 \cos t + u_1, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = y_2^* = x_4 \cos t + u_2 (\sin t + 2). \end{cases} \quad (4.49)$$

En réalité, on ne connaît pas les systèmes (4.48) et (4.49) mais l'on suppose que le système est à coefficients périodiques dans le temps et qu'on a accès à un certain nombre de modèles  $M^j$ .

### 4.5.1 Commande multi-modèles par retour d'état

On envisage pour le système (4.48) cinq modèles "instantanés" sur les domaines de validité  $D_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ). De plus, on choisit le temps  $t$  (modulo  $2\pi$ ) comme variable caractéristique du système. La représentation de l'espace des modèles dans lequel sont calculées les distances  $d_j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) est donnée par la figure suivante.

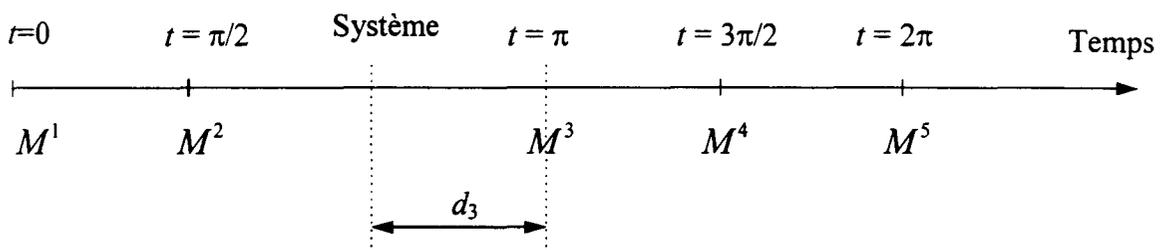


Figure 4.13 : Espace des modèles du système (4.48).

En tenant compte de l'équation (4.37), il vient pour les cinq modèles :

$$M^1 : \begin{cases} y_1^{1*} = x_3 + u_1^1, \\ y_2^{1*} = x_4 + 2u_2^1, \end{cases} \quad D_1 = \{t = 0\}, \quad (4.50)$$

$$M^2 : \begin{cases} y_1^{2*} = u_1^2, \\ y_2^{2*} = 3u_2^2, \end{cases} \quad D_2 = \left\{t = \frac{\pi}{2}\right\}, \quad (4.51)$$

$$M^3 : \begin{cases} y_1^{3*} = -x_3 + u_1^3, \\ y_2^{3*} = -x_4 + 2u_2^3, \end{cases} \quad D_3 = \{t = \pi\}. \quad (4.52)$$

$$M^4 : \begin{cases} y_1^{4*} = u_1^4, \\ y_2^{4*} = u_2^4, \end{cases} \quad D_4 = \left\{t = \frac{3\pi}{2}\right\}, \quad (4.53)$$

$$M^5 : \begin{cases} y_1^{5*} = x_3 + u_1^5, \\ y_2^{5*} = x_4 + 2u_2^5, \end{cases} \quad D_5 = \{t = 2\pi\}, \quad (4.54)$$

En posant :

$$\forall j = 1, \dots, 5 : \begin{cases} y_1^{j*} = v_1^*, \\ y_2^{j*} = v_2^*, \end{cases} \quad (4.55)$$

où  $v_1^*$  et  $v_2^*$  sont les nouvelles entrées définies par :

$$\begin{cases} v_1^* = 225(y_{1c} - y_1) - 30\dot{y}_1, \\ v_2^* = 200(y_{2c} - y_2) - 30\dot{y}_2, \end{cases} \quad (4.56)$$

avec ici  $y_{1c}$  et  $y_{2c}$  égaux chacun à un échelon unitaire.

Il en résulte pour les différentes commandes associées aux modèles  $M^j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ), les expressions suivantes :

$$u^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 = v_1^* - x_3 \\ u_2^1 = \frac{v_2^* - x_4}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

$$u^2 = \begin{pmatrix} u_1^2 = v_1^* \\ u_2^2 = \frac{v_2^*}{3} \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

$$u^3 = \begin{pmatrix} u_1^3 = v_1^* + x_3 \\ u_2^3 = \frac{v_2^* + x_4}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

$$u^4 = \begin{pmatrix} u_1^4 = v_1^* \\ u_2^4 = v_2^* \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

$$u^5 = \begin{pmatrix} u_1^5 = v_1^* - x_3 \\ u_2^5 = \frac{v_2^* - x_4}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Les confiances  $c_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) sont calculées suivant (4.42). En utilisant la méthode de défuzzification barycentrique (4.47), on a alors :

$$u_1 = \frac{c_1 u_1^1 + c_2 u_1^2 + c_3 u_1^3 + c_4 u_1^4 + c_5 u_1^5}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5}, \quad (4.62)$$

$$u_2 = \frac{c_1 u_2^1 + c_2 u_2^2 + c_3 u_2^3 + c_4 u_2^4 + c_5 u_2^5}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5}. \quad (4.63)$$

Afin d'éviter les à-coup lors de la commutation entre deux commandes on a choisi pour le coefficient  $\sigma$  utilisé dans le coefficient de renforcement dans (4.42) la valeur :

$$\sigma = 5 \cdot 10^{-2}. \quad (4.64)$$

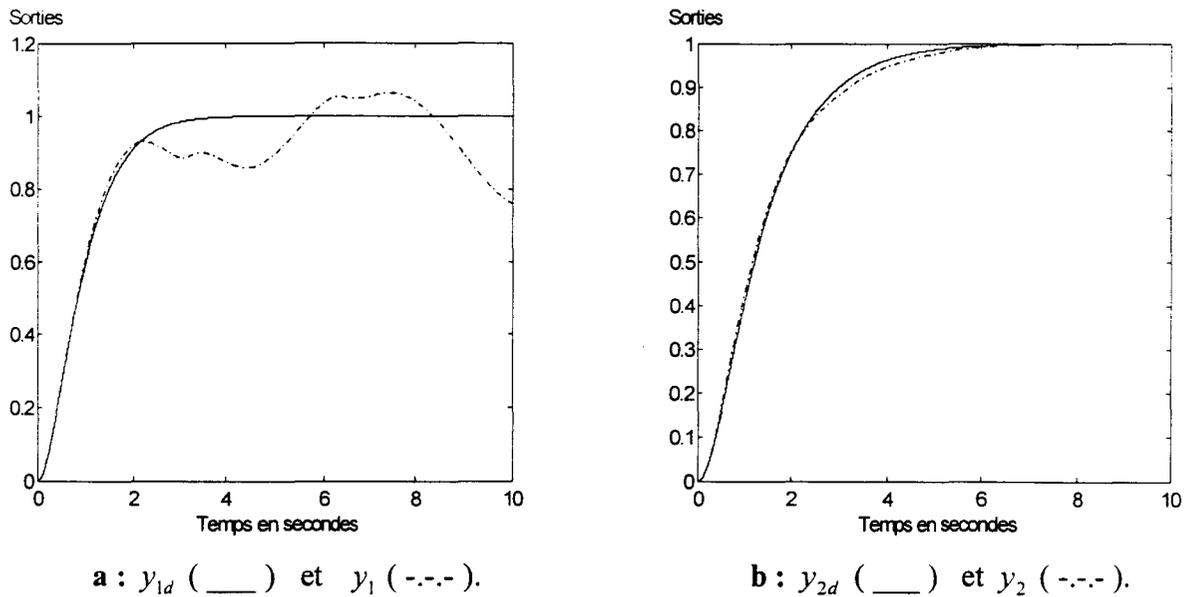


Figure 4.14 : Comparaison des sorties désirées  $y_{1d}$ ,  $y_{2d}$  et réelles  $y_1$ ,  $y_2$  du processus.

D'après la figure 4.14, on constate que les sorties réelles  $y_1$  et  $y_2$  du processus ne coïncide pas avec celles désirées  $y_{1d}$  et  $y_{2d}$ . En effet le choix de cinq modèles locaux sur l'espace des modèles donné par la figure 4.13 n'est qu'une déduction de certains comportements du système original et ne reflète pas, dans certains cas, l'évolution réelle du processus. Il faut donc émettre des réserves sur la validité d'une telle commande en intégrant dans sa stratégie une loi de commande robuste.

#### 4.5.2 Commande multi-modèles par mode glissant

On se propose dans ce paragraphe de robustifier l'approche multi-modèles par le choix d'une commande robuste, notamment la commande dynamique par mode glissant, déjà développée dans les chapitres 2 et 3. Pour ce faire, on choisit deux surfaces de glissement de même ordre que les sous-systèmes découplés (4.55), définies par :

$$\begin{cases} S_1 = -v_1^* + \ddot{y}_1 = 0, \\ S_2 = -v_2^* + \ddot{y}_2 = 0. \end{cases} \quad (4.65)$$

Les différentes commandes dynamiques par mode glissant sont données par :

$$u^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 = v_1^* - M_1 \int_0^t \text{sign}(S_1(\tau)) d\tau - x_3 \\ u_2^1 = \frac{v_2^* - M_2 \int_0^t \text{sign}(S_2(\tau)) d\tau - x_4}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

$$u^2 = \begin{pmatrix} u_1^2 = v_1^* - M_1 \int_0^t \text{sign}(S_1(\tau)) d\tau \\ u_2^2 = \frac{v_2^* - M_2 \int_0^t \text{sign}(S_2(\tau)) d\tau}{3} \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

$$u^3 = \begin{pmatrix} u_1^3 = v_1^* - M_1 \int_0^t \text{sign}(S_1(\tau)) d\tau + x_3 \\ u_2^3 = \frac{v_2^* - M_2 \int_0^t \text{sign}(S_2(\tau)) d\tau + x_4}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.68)$$

$$u^4 = \begin{pmatrix} u_1^4 = v_1^* - M_1 \int_0^t \text{sign}(S_1(\tau)) d\tau \\ u_2^4 = v_2^* - M_2 \int_0^t \text{sign}(S_2(\tau)) d\tau \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

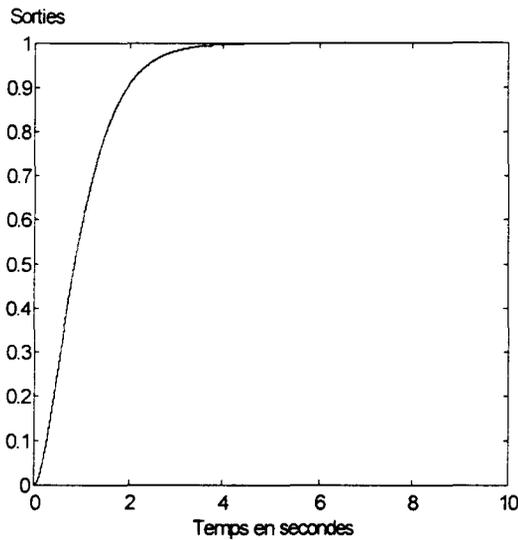
$$u^5 = \begin{pmatrix} u_1^5 = v_1^* - M_1 \int_0^t \text{sign}(S_1(\tau)) d\tau - x_3 \\ u_2^5 = \frac{v_2^* - M_2 \int_0^t \text{sign}(S_2(\tau)) d\tau - x_4}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

où les gains de glissement  $M_1$  et  $M_2$  doivent contrebalancer les erreurs de modélisation (voir chapitre 3).

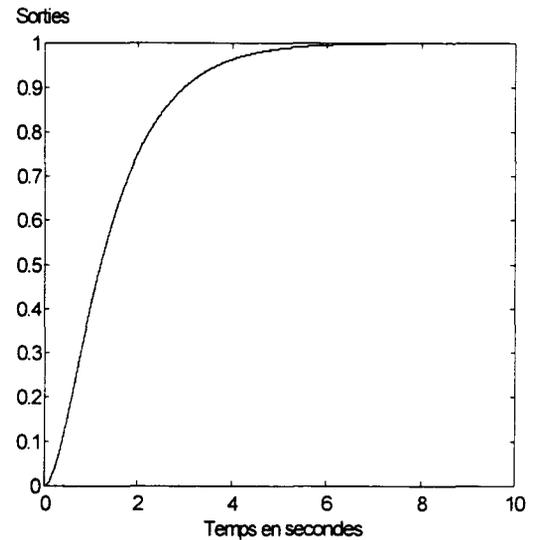
Dans l'hypothèse que le choix des gains

$$M_1 = 2, \text{ et } M_2 = 1, \quad (4.71)$$

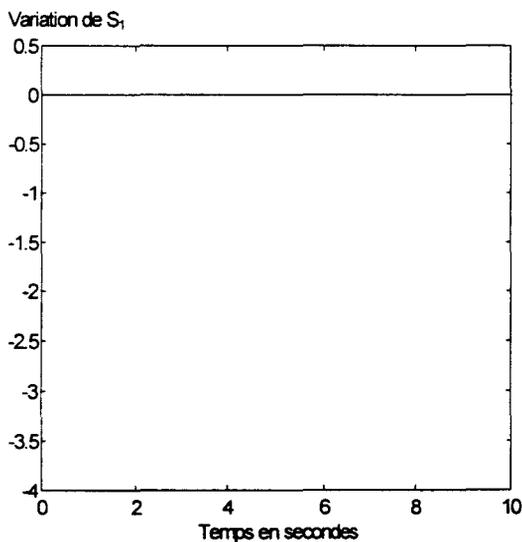
satisfait les conditions de glissement, on obtient en simulation sur la figure 4.15, l'évolution du système réel corrigé avec le contrôleur dynamique par mode glissant dans une approche multi-modèles.



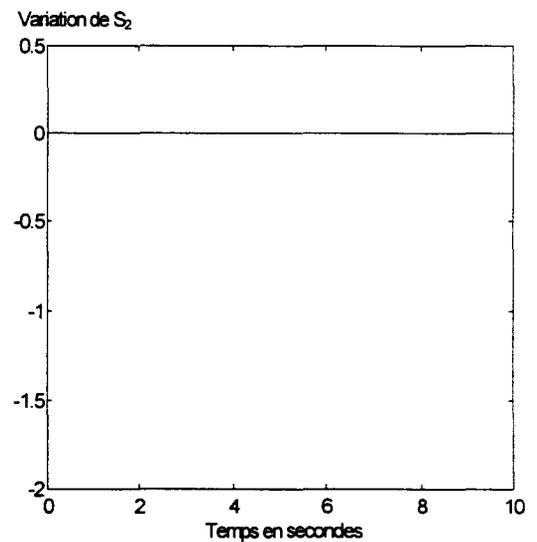
a :  $y_{1d}$  (\_\_\_) et  $y_1$  (-.-.-).



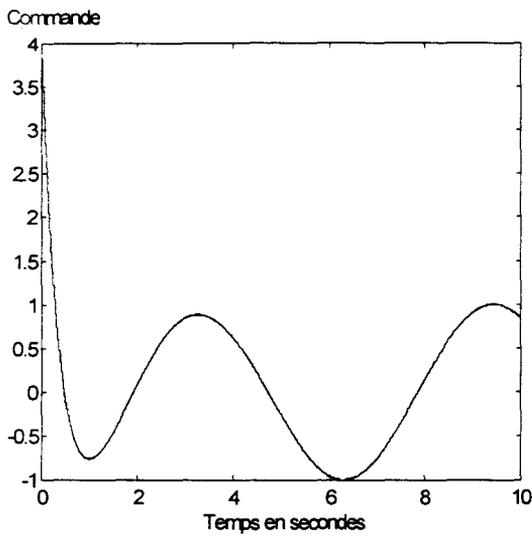
b :  $y_{2d}$  (\_\_\_) et  $y_2$  (-.-.-).



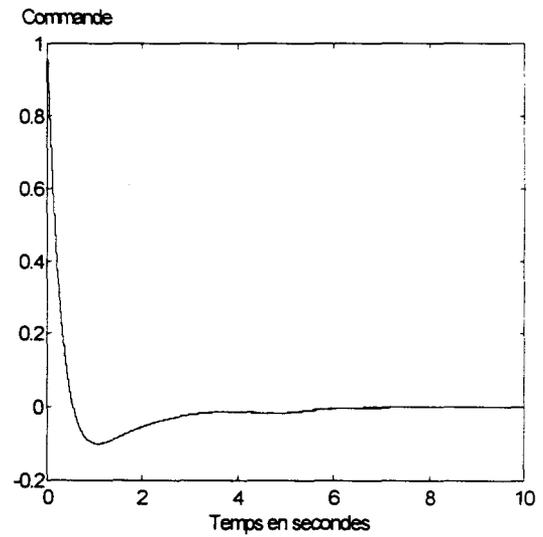
c : Variation de  $S_1$ .



d : Variation de  $S_2$ .



e : Variation de la commande  $u_1$ .



f : Variation de la commande  $u_2$ .

**Figure 4.15 :** Evolution du système réel corrigé avec le contrôleur dynamique par mode glissant.

Les figures 4.15.a et 4.15.b permettent de conclure que l'on atteint l'objectif souhaité, c'est-à-dire, faire coïncider les sorties réelles  $y_1$  et  $y_2$  avec celles désirées  $y_{1d}$  et  $y_{2d}$ . L'utilisation du contrôleur dynamique par mode glissant a permis donc d'augmenter les performances de suivi du système sans pour autant diminuer la robustesse de la commande.

## **Conclusion**

Dans ce chapitre, on a étudié dans une première partie, l'efficacité de l'introduction d'un gain de glissement flou dans la synthèse d'une commande par mode glissant. En effet, celui-ci permet non seulement d'augmenter les performances de suivi de la commande, mais aussi de réduire la quantité d'énergie nécessaire pour le bon fonctionnement du processus. De plus, on a constaté que si la mise en oeuvre d'une telle commande est basée sur l'analyse qualitative d'un expert, cette approche permet à l'opérateur de maîtriser le système de commande

Dans la deuxième partie, on a illustré les avantages de la commande dynamique par mode glissant dans une approche multi-modèles. On a donc pu, avec l'intégration d'une commande robuste dans la synthèse de la loi de commande multi-modèles, contrebalancer les erreurs dues aux choix des modèles locaux, de leur domaine de validité et des confiances dans ces modèles.

## **Conclusion générale**



# Conclusion générale

La méthode classique de synthèse en mode glissant fait apparaître un certain nombre de problèmes. Notre objectif dans ce travail a été donc d'élaborer un nouvel algorithme de commande par mode glissant assurant à la fois, robustesse, performance et simplicité afin de remédier au phénomène de broutement d'une part et à la réduction de l'ordre du système en boucle fermée d'autre part.

Pour cela, nous avons introduit une nouvelle vision des régimes glissants. Celle-ci est basée sur une mise en oeuvre simple d'une surface de glissement de même ordre que le système. On évite ainsi à la fois la réduction de l'ordre du système en boucle fermée et les effets indésirables des vibrations haute-fréquences. Cette loi de commande particulière qu'on a appelé commande dynamique par mode glissant impose une discontinuité sur la dérivée de la commande et non plus sur la commande elle même. La validité de ce type de commande vis-à-vis de différents types de perturbations et domaines de glissements a été assurée lors de la stabilisation asymptotique du système sur la surface de glissement sous certaines conditions. Divers résultats de simulation ont permis d'illustrer cette approche.

La généralisation des résultats obtenus dans le cas monovariable au cas multivariable a été réalisée. Pour ce faire, on a considéré le régime glissant global comme un ensemble de  $m$  régimes glissants monovariables indépendants en se basant sur une technique de découplage. Néanmoins, cette notion d'indépendance ne reste plus valable pour certains types de perturbations. La robustesse de la méthode impose un système d'inéquations en gains et temps de glissement. La résolution de ce dernier en satisfaisant un critère d'optimisation sous certaines contraintes a été présentée. Enfin, une étude comparative de robustesse de trois algorithmes de commande par mode glissant, notamment la commande classique par mode glissant, la commande continue dans une bande de la surface et la commande dynamique par mode glissant, a montré que cette dernière réalise le meilleur suivi de trajectoire, le plus faible temps de ralliement à la surface de glissement, et la loi de commande la plus douce.

La dernière partie du travail a concerné les techniques avancées de commandes en régime glissant par une approche floue dans un premier temps et une approche multi-modèles dans un second temps. En effet, l'intégration de la logique floue dans la synthèse du gain de glissement en fonction de la distance de l'état représentatif de l'évolution du système à la surface  $S = 0$  a permis la réduction du phénomène de broutement. Ceci a été illustré par un exemple de mise en oeuvre. L'intégration du contrôleur DMG dans l'approche multi-modèles a permis de pallier aux erreurs dues au choix des modèles locaux, de leur domaine de validité et des confiances accordées dans les modèles.

# **Notations**



# Notations



$\mathbb{R}$  l'ensemble des réels :

$\mathbb{R}_+$  l'ensemble des réels positifs ou nuls.

$\mathbb{R}^n$  l'espace vectoriel de dimension  $n$  construit sur le corps des réels.

$\mathbb{R}^*$  l'ensemble des réels non nuls.

$t \in \mathbb{R}_+$  représente la variable temporelle.

$t_0 \in \mathbb{R}_+$  est l'instant initial (qui peut être fixe).

$t_g \in \mathbb{R}_+$  est le temps de ralliement à la surface qu'on appelle, pour simplifier, temps de glissement.

$X \subset \mathbb{R}^n$  est l'espace d'état.

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in X$  est le vecteur état.

$x(t)$  est le vecteur état instantané.

$x_0$  ou  $x(0)$  représente la condition initiale.

$x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$  est l'état représentatif du système.

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  est la dérivée de  $x$  par rapport au temps  $t$ .

$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$  est la dérivée seconde de  $x$  par rapport au temps  $t$ .

$x^{(i)}$  est la  $i$ -ème dérivée de  $x$  par rapport au temps  $t$ .

$f(.)$   $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$  représente un champ de vecteurs définissant les seconds membres qui sont des fonctions continues par morceaux présentant une discontinuité sur une variété différentiable  $S$ .  $(.)$  est égal selon le contexte à  $(x, t)$  ou  $(x)$ .

- $g(.)$   $g = [g_1, g_2, \dots, g_m]^T \in \mathbb{R}^m$  est un champ de vecteurs définissant les gains de commande.  $(.)$  est égal selon le contexte à  $(x, t)$  ou  $(x)$ .
- $u$   $u \in \mathbb{R}$  est la commande d'un système monovariante.  
 $u = [u_1, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$  est la commande d'un système multivariante.  
 $u_{\text{eq}}$  est la commande équivalente.
- $y$  la sortie réelle du processus.  
 $y_d$  est la sortie désirée.  
 $y_c$  est la consigne.  
 $y_i$  est la  $i$ -ème composante de  $y$ .  
 $y(0)$  représente la condition initiale.
- $p(x, t)$   $p(x, t) \in \mathbb{R}$  est la perturbation paramétrique ou extérieure.  
 $p(x, t) \in \mathbb{R}^m$  dans le cas des systèmes multivariants.
- $\Delta g(x, t)$   $\Delta g(x, t) \in \mathbb{R}$  une incertitude sur le gain.
- $S(x)$   $S = \bigcap_{i=1}^m S_i$  est la surface de glissement que l'on note aussi  $S(t)$ .  
 $S(0)$  représente la condition initiale.
- $s$  l'opérateur de Laplace.
- $D$  le domaine de glissement.
- $\partial(.)$  la frontière de l'ensemble  $(.)$ .
- $\overset{\circ}{(.)}$  la fermeture de l'ensemble  $(.)$ .
- $D_{\text{ex}}$  le domaine d'existence.
- $\nabla S$  est le gradient de  $S$ .

$\text{Ker}(\cdot)$  le noyau de  $(\cdot)$ .

$\nabla(V, x)$  le gradient de  $V$  par rapport à la variable  $x$ .

$V$  fonction de Lyapunov.

$S_x$  une matrice  $m \times n$ , dont les lignes correspondent aux vecteurs gradient de  $S_i(x)$ .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs.

$v(D, \varepsilon)$  un  $\varepsilon$ -voisinage de  $D$ .

$v^*$  une nouvelle entrée.

$\Delta v$  le terme dynamique par mode glissant.

$v$   $v = v^* + \Delta v$ .

$\text{sign}(S)$   $\text{sign}(S) = +1$  si  $S > 0$ ,  $0$  si  $S = 0$ ,  $-1$  si  $S < 0$ .

$M$   $M \in \mathbb{R}_+^*$ , gain de glissement dans le cas monovarié.

$M = [M_1, \dots, M_m]^T$ , gain de glissement dans le cas multivarié, où  $M_i$  est le gain de glissement relatif à la surface  $S_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

$M(t)$  gain de glissement variable.

$\Gamma(t)$  un échelon de commande.

$G(\cdot)$   $G \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  matrice de gain de commande.  $(\cdot)$  est égal selon le contexte à  $(x, t)$  ou  $(x)$ .

$y^*$   $y^* = [y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)}]^T$ , où  $y_i^{r_i}$  est la dérivée  $r_i$ -ème de  $y_i$ .

$f^*$   $f^* = [f_1^*, \dots, f_m^*]^T \in \mathbb{R}^m$ , (voir annexe 3).

$G^*$   $G^* = [G_1^*, \dots, G_m^*]^T \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , (voir annexe 3).

$\Delta G(x, t)$   $\Delta G(x, t) \in (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$  représente la matrice incertitude sur les gains de commande (voir page 126).

$\Theta(x, t)$   $\Theta(x, t) = (\Delta G(x, t)G^*(x, t))^{-1}$ .

$I$  la matrice identité.

$|A|$  la matrice  $n \times n$  dont les éléments sont les modules des éléments de la matrice  $A$  :

$$\left[ |a_{ij}(x, t)| \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$|A| \leq B \Rightarrow \left[ |a_{ij}(x, t)| \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \leq \left[ b_{ij}(x, t) \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ , où  $A$  et  $B$  sont des matrices  $n \times n$  et

$\left[ b_{ij}(x, t) \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  est un élément de  $B$  correspondant à la  $i$ -ème ligne et à la  $j$ -ème colonne.

$R^i$  la  $i$ -ème règle.

$D_F$  l'opérateur de défuzzification.

$\Pi$  le gain de glissement flou.

$M^j$  le  $j$ -ème modèle.

$u^j$  la commande du  $j$ -ème modèle.

$u_i^j$  est la  $i$ -ème composante du vecteur commande correspondant au  $j$ -ème modèle.

$c_j$  la confiance accordée au  $j$ -ème modèle.

$D_j$  le domaine de validité du  $j$ -ème modèle.

# **Bibliographie**



# Bibliographie

- [Aizerman 74] M.A. Aizerman, E.S.Pyatniskii, Foundations of a theory of discontinuous systems I, Avto. Tele., N°7, p.33-47, July 1974.
- [Alj 86] A.Alj, R.Faure, Guide de la recherche opérationnelle, T1 et T2, Masson, 1986.
- [Ambrosino 84] G.Ambrosino, G.Celentano, F.Garofolo, Variable structure model reference adaptive control systems, Int.J.Control, Vol.39, N°6, p.1339-1349, 1984.
- [Asada 86] H.Asada, J.-J.E.Slotine, Robot analysis and control, Wiley, New-York, 1986.
- [Bartolini 93] G.Bartolini, T.Zolezzi, Behavior of variable-structure control systems near the sliding manifold, Systems & Control letters, N°21, p.43-48, 1993.
- [Behtash 90] S.Behtash, Robust output tracking for non-linear systems, Int.J.Control, Vol.51, N°6, p.1381-1407, 1990.
- [Borne 93] P.Borne, G.Dauphin-Tanguy, J.P.Richard, F.Rotella, I.Zambettakis, Analyse et régulation des processus industriels, T.1 Régulation continue, Vol.4, Editions Technip, 1993.
- [Bezvodinskaya 74] T.A. Bezvodinskaya, E.F.Sabaev, Stability conditions in the large for variable structure systems, Avto. Tele., N°10, p.64-68, October 1974.
- [Brockett 83] R.W.Brockett, Asymptotic stability and feedback stabilization, Differential Geometric Control Theory, R.W.Brockett, R.S.Millman et H.J.Sussmann édés, Birkhäuser, Boston, p.181-191, 1983.
- [Bühler 86] H.Bühler, Réglage par mode glissant, Presse Poly. Romande, Lausanne, 1986.
- [Charlet 89] B. Charlet, Sur quelques problèmes de stabilisation robuste des systèmes non linéaires, Thèse de doctorat, ENSMP, N°d'ordre 706, Novembre 1989.

- [Chen 91] Y.P.Chen, K.S.Yeung, Sliding-mode control of multi-link flexible manipulators, *Int.J.Control*, Vol.54, N°2, p.257-278, 1991.
- [Decarlo 88] R.Decarlo, S.H.Zak, G.P.Matthews, Variable structure control of nonlinear multivariable systems : A Tutorial, *Proc.IEEE*, Vol.76, N°3, March 1988.
- [Delmotte 95] F.Delmotte, L.Dubois, P.Borne, Adaptive multi-model controller using trust, *IEEE Conf.on Systems, Man and cybernetics*, Vancouver, p.4155-4160, 1995.
- [Delmotte 96] F.Delmotte, S.Hajri, P.Borne, Multi-model and sliding mode control, *WAC96*, Montpellier, France, 27-30 May 1996.
- [Dieulot 96] J-Y.Dieulot, S.Hajri, P.Borne, A fuzzy control synthesis using the variable structure approach, *Studies in Informatics and Control*, Vol.5, N°1, p.5-14, March 1996.
- [Dodds 91] S.J.Dodds, A.B.Walker, Sliding-mode control system for the three-axis attitude control of rigid-body spacecraft with unknown dynamics parameters, *Int.J.Control*, Vol.54, N°4, p.737-761, 1991.
- [Draženovic 69] B.Draženovic, The invariance condition in sliding mode systems, *Automatica*, Vol.5, p.287-295, Pergamon Press, 1969.
- [Dubois 95a] L.Dubois, F.Delmotte, P.Borne, A quasi optimization method of control for ill defined system using a multi-model approach, *Proceedings of MMAR'95*, Poland, p.121-125, 1995.
- [Dubois 95b] L.Dubois, Utilisation de la logique floue dans la commande des systèmes complexes, Thèse de doctorat en Sciences Productiques, USTL, Lille, N°d'ordre 1588, Septembre 1995.
- [El-Ghezawi 83] O.M.El-Ghezawi, A.S.I.Zinober, S.A.Billings, Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach, *Int.J.Control*, Vol.38, N°3, p.657-671, 1983.

[Elmali 92] H.Elmali, N.Olgac, Sliding mode control with perturbation estimation (SMCPE) : a new approach, Int.J.Control, Vol.56, N°4, p.923-941, 1992.

[Emelyanov 67] S.V.Emelyanov, Sliding mode control systems, Nauka, Moscou, 1967.

[Fernandez 87] B.Fernandez R. and J.Karl Hedrick, Control of multivariable non-linear systems by the sliding mode method, Int.J.Control, Vol.46, N°3, p.1019-1040, 1987.

[Fillipov 60] A.G.Fillipov, Application of the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides to non-linear problems in automatic control, In Proc. 1st IFAC congress, p.923-927, 1960.

[Fillipov 79] A.F.Filippov, Differential equations with second members discontinuous on intersecting surfaces, Diff. Urav., Vol.15, N°10, p.1814-1832, 1979.

[Fillipov 88] A.F.Filippov, Differential equations with discontinuous right-hand sides, Kluwer academic publishers, 1988.

[Fliess 91] M.Fliess, F.Messenger, Methods of nonlinear discontinuous stabilization, Nonlinear synthesis, C.I.Byrnes et A.Kurzhanzky eds., Birkhäuser, p.112-131, 1991.

[Fliess 92] M.Fliess, F.Messenger, Sur la commande en régime glissant, C.R.Acad.Sc.Paris, T.313, Série I, p.951-956, 1992.

[Fossard 93] A.J.Fossard, D.Normand-Cyrot, Systèmes non linéaires, T.3 Commande, Masson, 1993.

[Fung 95] E.H.K.Fung, F.C.K.Cheung, A variable structure tracking controller for a flexible one-link robot, IEEE, p.4458-4463, 1995.

[Hajri 95] S.Hajri, M.Benrejeb, P.Borne, Sur une nouvelle approche de la commande à mode glissant, JTEA'95, Nabeul, Tunisie, 10-11 Novembre 1995.

- [Hajri 96a] S. Hajri, W.Perruquetti, P.Borne, Dynamic sliding mode controller for perturbed nonlinear SISO systems, Rapport interne, LAIL ECL 59651 Villeneuve d'Ascq, France, 1996.
- [Hajri 96b] S.Hajri, P.Vanheeghe, P.Borne, Output tracking via robust sliding mode controller, International conference on Non-Linear Problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, Floride USA, 9-11 May 1996,.
- [Hajri 96c] S.Hajri, F.Delmotte, P.Borne, Fuzzy extended sliding mode controller, 10th ESM96, Budapest, Hongrie, 2-6 June 1996.
- [Hajri 96d] S. Hajri, W.Perruquetti, P.Borne, Robust linearizing control of MIMO systems by sliding mode approach, IMACS Multiconference CESA'96, Lille, France, 9-12 July 1996.
- [Hajri 96e] S. Hajri, W.Perruquetti, P.Borne, A new sliding mode controller for multivariable nonlinear systems, IEEE SMC, Pékin, Chine, 13-17 October 1996.
- [Hajri 96f] S. Hajri, P.Borne, Commande floue multi-modèle des systèmes multivariables, JTEA'96, Nabeul, Tunisie, 8-9 Novembre 1996.
- [Hamerlain 93] M.Hamerlain, Commande hiérarchisée à modèle de référence et à structure variable d'un robot manipulateur à muscles artificiels, Thèse de doctorat, GARI/DGE/INSA, Toulouse, N° d'ordre 223, Janvier 1993.
- [Harashima 85a] F.Harashima, T.Ueshiba and H.Hashimoto, Sliding mode control for robot manipulator, Proc.of IEEE Conf.Brussels, p.251-256, October 1985.
- [Harashima 85b] F.Harashima, J.X.Xu, H.Hashimoto, T.Ichiyama, Tracking control of robot manipulator using sliding mode, 15th ISIR, Tokyo, 1985.
- [Harashima 86] F.Harashima, H.Hashimoto, K.Maryama, Practical robust control of robot arm using variable structure systems, Proc.of IEEE, Int.Conf.on robotics and automation San Francisco, p.532-538, 1986.

- [Hassan 93] A.Hassan, Contribution à la commande des systèmes discontinus, Thèse de doctorat en automatique et traitement de signal, INPG, Grenoble, N°d'ordre 0044, Mars 1993.
- [Hsu 89] L.Hsu, R.R.Costa, Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements part 1, Int.J.Control, Vol.49, N°2, p.399-416, 1989.
- [Huang 94] Y.Huang, K.S.Yeung, Output-sliding design of multivariable systems, Int.J.Control, Vol.25, N°9, p.1373-1389, 1994.
- [Hwang 94] Y.R.Hwang, M.Tomizuka, Fuzzy smoothing algorithms for variable structure systems, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.2, N°4, p.277-284, 1994.
- [Isidori 89] A.Isidori, Nonlinear control systems, Springer-Verlag Berlin, 2nd edition, 1989.
- [Itkis 76] U.Itkis, Control systems of variable structure systems, New York, Wiley, 1976.
- [Jamshidi 93] M.Jamshidi, N.Vadiee, T.J.Ross, Fuzzy logic and control, Prentice Hall, 1993.
- [Johansen 94] T.A.Johansen, Fuzzy model based control : stability, robustness and performance issues, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.2, N°3, p.221-234, 1994.
- [Kachroo 96] P.Kachroo, M.Tomizuka, Chattering reduction and error convergence in the sliding-mode of a class of nonlinear systems, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.41, N°7, p.1063-1068, 1996.
- [Lee 90a] C.C.Lee, Fuzzy logic in control systems : Fuzzy logic controller, part I, IEEE Trans.Syst., Man, Cybern., Vol.20, N° 2, p.404-418, 1990.
- [Lee 90b] C.C.Lee, Fuzzy logic in control systems : Fuzzy logic controller, part II, IEEE Trans.Syst., Man, Cybern., Vol.20, N° 2, p.419-435, 1990.
- [Le Pioufle 90] B.Le Pioufle, G.Georgiou, J.P.Louis, C.Bergmann, Application of a decoupling controller and non-linear methods for the control of selfcontroller synchronous motors, IMACS-TC1'90, Nancy, 10-20 September, 1990.

[Lian 95] T.Lian, A.Goldenberg, Adaptive and sliding control flexible joint robots in constrained motion, IEEE, p.4161-4166, 1995.

[Lyapunov 92] A.M.Lyapunov, Lyapunov Centenary issue, Int.J.Control, Vol.55, N°3, March 1992.

[Messenger 92] F.Messenger, Sur la stabilisation discontinue des systèmes, Thèse de doctorat en sciences Automatiques, Orsay, Paris, Mars 1992.

[Mamdani 74] E.H.Mamdani, Application of fuzzy algorithms for simple dynamic plant, Proceeding IEE, Vol.21, N°12, p.1585-1588, 1974.

[Mira 72] C.Mira, J.P.Vernes et J.Ershler, Extension du principe des systèmes à structure variable au cas où l'hypersurface de glissement est non linéaire. Application à la commande sous-optimale, R.A.I.R.O, N°J-2, p. 59-72, Mai 1972.

[Mitzova 94] D.Mitzova, Commande à structure variable appliquée à un moteur synchrone, Thèse de doctorat en automatique et informatique industrielle, INSA, Toulouse, N°d'ordre 285, Juin 1994.

[Narendra 95] K.S.Narendra, J.Balakrishnan, M.K.Ciliz, Adaptation and learning using multiple models, switching and tuning, IEEE Control Systems, p.37-51, 1995.

[Nijmeijer 90] H.Nijmeijer, A.Van Der Schaft, Nonlinear dynamical control systems Springer- Verlag New York Inc, 1990.

[Nikol'ski 34] G.N. Nikol'ski 34, On automatic stability of a ship on a given course. Proc.of Central communications Lab., N°1, p.34-75, 1934.

[Nouri 94] A.S.Nouri, Généralisation du régime glissant et de la commande à structure variable applications aux actionneurs classiques et à muscles artificiels, Thèse de doctorat en Sciences Productiques, I.N.S.A, Toulouse, Janvier 1994.

[Perruquetti 94] W.Perruquetti, Sur la stabilité et l'estimation des comportements non linéaires non stationnaires perturbés, Thèse de doctorat en Sciences Productiques, USTL, Lille, N°d'ordre 1286, Février 1994.

[Perruquetti 97a] W.Perruquetti, J.P.Richard, P.Borne, Lyapunov analysis of sliding motions : application to bounded control, à paraître dans Mathematical Problems in Engineering, 1997.

[Perruquetti 97b] W.Perruquetti, S.Hajri, Sliding mode approach for input/output linearization, IFAC CIS'97, Belfort, France, May 1997.

[Séguier 94] G.Séguier, F.Notelet, Electrotechnique industrielle, Technique & Documentation, Lavoisier, 1994.

[Sira-Ramirez 88] H.Sira-Ramirez, Differential geometric methods in variable-structure control, Int.J.Control, Vol.48, N°4, p.1359-1390, 1988.

[Sira-Ramirez 89] H.Sira-Ramirez, Sliding regimes in general non-linear systems : a relative degree approach, Int.J.Control, Vol.50, N°4, p.1487-1506, 1989.

[Sira-Ramirez 90] H.Sira-Ramirez, Non linear variable structure systems in sliding modes : the general case, IEEE TAC-34, N°11, November 1990.

[Slotine 83] J.J.E.Slotine, S.S.Sastry, Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators, Int.J.Control, Vol.38, N°2, p.465-492, 1983.

[Slotine 84] J.J.E.Slotine, Sliding controller design for non-linear systems, Int.J.Control, Vol.40, N°2, p.421-434, 1984.

[Slotine 86] J.J.E.Slotine and J.A.Coetsee, Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems, Int.J.Control, Vol.43, N°6, p.1631-1651, 1986.

[Spurgeon 91], S.K. Spurgeon, Choice of discontinuous control component for robust sliding mode performance, Int.J.Control, Vol.53, N°1, p.163-179, 1991.

[Takagi 85] T.Takagi, M.Sugeno, Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, IEEE Trans. on System, Man, Cybernetics, Vol.SMC, N°1, p116-132, 1985.

[Utkin 77] V.I.Utkin, Variable structure systems with sliding modes, IEEE.TAC, Vol.AC-22, N°2, p.212-222, 1977.

[Utkin 78] V.I.Utkin, Sliding modes and their application in sliding mode systems, Edition MIR, Moscou, 1978.

[Utkin 92] V.I.Utkin, Sliding modes in control optimization, Springer-Verlag, 1992.

[Weber 83] S.Weber, a general concept of fuzzy connectives, negation and implications based on t-norms and t-conorms, Fuzzy Sets and Systems, N°11, p.115-134, 1983

[Youssef-Toumi 90] K. Youssef-Toumi, A time delay controller for systems with unknown dynamics, Proceedings of the America society of mechanical engineers, Ser.G journal of dynamic systems, measurement and control, Vol.11, N°2, p.133-142, 1990.

[Ying 94] C.Ying, Practical design of fuzzy controllers, Automatica, p.1185-1195, 1994.

[Zadeh 65] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Informat.Control, Vol.8, p.338-353, 1965.

[Zadeh 73] L. A. Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Trans.Syst., Man, Cybern., Vol.3, p.28-44, 1973.

# **Annexes**



## Annexe 1

### Forme canonique de commandabilité d'un système monovariante

La linéarisation par difféomorphisme et bouclage d'un système est basée sur la notion de son degré relatif. Pour cela, on considère la représentation d'état du système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (\text{A1.1})$$

#### Définition [Isidori 89]

Le système (A1.1) a un degré relatif  $r$  en un point  $x^0$  si l'on peut vérifier que :

- i-  $L_g L_f^k h(x) = 0$  dans un voisinage de  $x^0$  et  $\forall k < r - 1$ ,
- ii-  $L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$ .

$L_f$  désigne la dérivée de Lie dans la direction du champ de vecteurs  $f$  telle que :

$$L_g L_f^k h(x) = \frac{\partial(L_f^k h)}{\partial x} g(x), \quad L_f^k h(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x), \quad \text{et } L_f^0 h(x) = h(x). \quad (\text{A1.2})$$

Le degré relatif d'un système est égal au nombre de fois que l'on dérive la sortie  $y$  jusqu'à faire apparaître d'une façon explicite la commande  $u$ . La représentation du système sous la forme canonique de commandabilité est donc donnée par la proposition suivante :

#### Proposition [Isidori 89]

Si un système a un degré relatif  $r$  égal à  $n$  en un point  $x^0$ , la transformation

$$z_i = \varphi_i(x) = L_f^{i-1} h(x), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (\text{A1.3})$$

permet de mettre le système (A1.1) sous la forme canonique de commandabilité :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1}, & i = 1, \dots, (n-1), \\ \dot{z}_n = a(z) + b(z)u, \\ y = z_1. \end{cases} \quad (\text{A1.4})$$

## Remarques

- En plus des conditions de validité déjà présentées, si le modèle (A1.4) est de dimension inférieure à celle du système initial  $r < n$ , il convient, dans le cas d'une linéarisation par retour d'état statique, de vérifier que les  $(n - r)$  variables internes restent asymptotiquement stable [Isidori 89].

- Une approche de même nature, sous certaines hypothèses, permet de traiter le cas où les champs de vecteurs  $f$  et  $g$  dépendent à la fois de  $x$  et de  $t$  ( $f(x, t)$  et  $g(x, t)$  au lieu de  $f(x)$  et  $g(x)$  dans (A1.1)).

## Annexe 2

Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (\text{A2.1})$$

pour laquelle le problème de Cauchy admet des solutions  $\forall t \in \mathbb{R}$  et soit  $x_s$  un point d'équilibre, alors on a les définitions suivantes :

### Stabilité asymptotique

#### Définition [Perruquetti 94]

$x_s$  est stable au sens de Lyapunov si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0, \text{ tel que :} \\ \forall x_0 \in \nu(x_s, \delta(\varepsilon)) \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0) - x_s\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

#### Définition [Perruquetti 94]

$x_s$  est attractif si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0, \forall x_0 \in \nu(x_s, \delta(\varepsilon)), \exists T(x_0, \varepsilon) > 0 \text{ tel que :} \\ \|x(t, t_0, x_0) - x_s\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 + T. \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

#### Définition [Perruquetti 94]

$x_s$  est asymptotiquement stable si et seulement si  $x_s$  est à la fois stable au sens de Lyapunov et attractif.

## Annexe 3

### Forme canonique de commandabilité d'un système multivariable

La classe des systèmes considérée est celle des systèmes non linéaires affines, de dimension  $n$ , dont le nombre d'entrées  $m$  est égale au nombre de sorties, modélisés par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)u, \\ y = h(x), \end{cases} \quad (\text{A3.1})$$

avec  $h^\top(x) = [h_1(x) \ h_2(x) \ \dots \ h_m(x)]$ .

La méthode consiste à dériver chaque composante  $y_i$  du vecteur de sortie jusqu'à faire apparaître le vecteur de commande  $u$ . Il vient en notant [Borne 93] :

$$\begin{cases} h_i(x) = h_i^0(x), \\ h_i^j(x) = h_{i,x}^{j-1}(x) f(x), \\ h_{i,x}^j(x) = \frac{\partial h_i^j(x)}{\partial x}, \\ Q_i^j(x) = h_{i,x}^{j-1}(x) G(x), \end{cases} \quad (\text{A3.2})$$

$$\forall j < r_i - 1, \quad Q_i^j(x) = 0 \quad \text{et} \quad Q_i^{r_i}(x) \neq 0, \quad (\text{A3.3})$$

d'où l'on peut établir :

$$\begin{cases} \forall 1 \leq i \leq m, \\ \forall j \leq r_i - 1, \quad y_i^{(j)} = h_i^j(x), \\ y_i^{(r_i)} = h_i^{r_i}(x) + Q_i^{r_i}(x)u. \end{cases} \quad (\text{A3.4})$$

Soit en posant :

$$\begin{cases} y^* = [y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)}]^\top, \\ f^*(x) = [h_1^{r_1}(x), \dots, h_m^{r_m}(x)]^\top = [f_1^*(x), \dots, f_m^*(x)]^\top, \\ G^*(x) = [Q_1^{r_1}(x), \dots, Q_m^{r_m}(x)]^\top = [G_1^*(x), \dots, G_m^*(x)]^\top. \end{cases} \quad (\text{A3.5})$$

on obtient:

$$y^* = f^*(x) + G^*(x)u. \quad (\text{A3.6})$$

Le changement de variable [Isidori 89]

$$\begin{cases} y^* = [y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)}]^T, \\ f^*(z) = [h_1^{r_1}(x), \dots, h_m^{r_m}(x)]_{x=\Psi^{-1}(z)}^T, \\ G^*(z) = [Q_1^{r_1}(x), \dots, Q_m^{r_m}(x)]_{x=\Psi^{-1}(z)}^T. \end{cases} \quad (\text{A3.7})$$

avec :

$$\Psi = [\varphi_1^1(x), \dots, \varphi_{r_1}^1(x), \dots, \varphi_1^m(x), \dots, \varphi_{r_m}^m(x)]^T, \quad (\text{A3.8})$$

$$\begin{cases} \forall 1 \leq k \leq r_i \text{ et } \forall 1 \leq i \leq m \text{ on a :} \\ \varphi_k^i(x) = h_i^k(x), \end{cases} \quad (\text{A3.9})$$

et

$$\begin{cases} z = [z_1, \dots, z_m]^T, \\ \forall 1 \leq i \leq m, z_i = [z_{i1}, \dots, z_{ir_i}]^T = [\varphi_{r_i}^i(x), \dots, \varphi_1^i(x)]^T, \end{cases} \quad (\text{A3.10})$$

permet de mettre le système (A3.6) en  $m$  sous-systèmes représentés sous forme canonique de commandabilité :

$$\forall i = 1, \dots, m : \begin{cases} \dot{z}_{ik} = z_{i,k+1}, \quad k = 1, \dots, (r_i - 1), \\ \dot{z}_{ir_i} = f_i^*(z) + G_i^*(z)u, \\ y_i = z_{i1}. \end{cases} \quad (\text{A3.11})$$

Le système (A3.11) considéré dans nos travaux est supposé commandable et observable. Par

conséquent, on a  $\sum_{i=1}^m r_i = n$ .

### Remarque

Une approche de même nature, sous certaines hypothèses, permet de traiter le cas où  $f$  et  $G$  dépendent à la fois de  $x$  et de  $t$ . On remplace donc  $f(x)$  et  $G(x)$  par  $f(x,t)$  et  $G(x,t)$  dans (A3.1) et par suite  $f^*(x)$  et  $G^*(x)$  par  $f^*(x,t)$  et  $G^*(x,t)$  dans (A3.6).

## Linéarisation par découplage

Il existe deux types de bouclages : les bouclages statiques sur l'état et les compensateurs dynamiques.

### • Bouclage statique sur l'état

Considérons le système (A3.6), si les indices  $r_i$  sont invariants et la matrice  $G^*$  inversible dans un domaine  $D_{ex} \subset \mathbb{R}^n$  de l'espace d'état, on peut poser dans  $D_{ex}$ , le retour d'état statique :

$$u = G^{*-1} (v^* - f^*), \quad (\text{A3.12})$$

où  $v^*$  définit un nouveau vecteur de commande, et il vient pour le modèle linéaire :

$$y^* = v^*. \quad (\text{A3.13})$$

### • Compensateur dynamique

Considérons le cas où la matrice  $G^*$  n'est pas inversible, on ne peut trouver donc un bouclage statique pour le système (A3.6). Néanmoins, on peut chercher, dans certains cas, une solution dynamique [Isidori 89], [Nijmeijer 90] et [Fossard 93]. Pour cela, il faut ajouter à ce système, un système dynamique auxiliaire tel que :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \mu(x, \eta) + \varphi(x, \eta)w, \\ u = \alpha(x, \eta) + \beta(x, \eta)w, \end{cases} \quad \eta \in \mathbb{R}^k \text{ et } w \in \mathbb{R}^m. \quad (\text{A3.14})$$

#### Définition [Fossard 93]

Le découplage dynamique est possible si on est capable de trouver  $k$ ,  $\mu(x, \eta)$ ,  $\varphi(x, \eta)$ ,  $\alpha(x, \eta)$ ,  $\beta(x, \eta)$  tels que le système

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + G\alpha \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G\beta \\ \varphi \end{pmatrix} w, \\ y = h(x), \end{cases} \quad (\text{A3.15})$$

avec  $\eta \in \mathbb{R}^k$  et  $w \in \mathbb{R}^m$ , soit découplable par bouclage statique.

## Annexe 4

### • Opérateur d'intersection

#### Définition

Une fonction  $\wedge$  est un opérateur d'intersection si et seulement si :

$$\wedge : [0 ; 1] \times [0 ; 1] \rightarrow [0 ; 1]$$

$\wedge$  est non décroissante pour chaque argument,

$\wedge$  est commutative,

$\wedge$  est associative,

$\wedge$  a 1 pour élément neutre.

Les fonctions possédant ces propriétés sont appelés des normes triangulaires (T-norme).

### • Opérateur d'union

#### Définition

Une fonction  $\vee$  est un opérateur d'union si et seulement si :

$$\vee : [0 ; 1] \times [0 ; 1] \rightarrow [0 ; 1]$$

$\vee$  est non décroissante pour chaque argument,

$\vee$  est commutative,

$\vee$  est associative,

$\vee$  a 0 pour élément neutre.

Les fonctions possédant ces propriétés sont appelés des conormes triangulaires (T-conorme).

- **Univers de discours**

**Définition**

L'univers de discours  $U$  est tel que tous les éléments considéré appartiennent de façon certaine à  $U$ .

$$\forall x \in U, \mu_U(x) = 1.$$

L'univers de discours  $U$  représente le domaine d'évolution des variables.

- **Etat représentatif du système**

**Définition**

On appelle état représentatif du système, le vecteur  $x_r \in \mathbb{R}^n$  dont les composantes permettent de discriminer les différents modèles  $M^j$ .

