

T
gu...
50346
1997
403
numéro d'ordre 1977

Thèse

présentée à

L'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le grade de

Docteur en Mécanique

par

Didace EKEOM



Modélisation par la méthode des éléments finis du rayonnement d'un transducteur piézoélectrique dans un puits de forage

Soutenu le 6 mars 1997 devant la commission d'examen :

Rapporteurs Monsieur J.-L. IZBICKI

 Monsieur J.-L. MARI

Examineurs Monsieur D. BUISINE

 Monsieur J.-P. COYETTE

 Monsieur J.-C. DEBUS

 Monsieur G. DHATT

 Monsieur B. DUBUS

 Monsieur B. PIWAKOWSKI



à mes parents,

à ma famille et à tous mes amis,

à tout ceux qui m'ont aidé à devenir ce que je suis.

"Petits enfants ... Je vous donne un commandement nouveau : aimez vous les uns les autres ; comme je vous ai aimé, vous aussi, aimez-vous les uns les autres. A ceci, tous reconnâitrons que vous êtes mes disciples, si vous avez de l'amour les uns pour les autres."

Bonne Nouvelle de Jésus-Christ, selon l'apôtre Jean, chapitre 13, versets 34 et 35.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le professeur D. BUISINE qui a accepté la présidence de ce jury.

Je remercie Messieurs les professeurs J.-L. IZBICKI et J.-L. MARI qui ont bien voulu juger ce travail dans sa version provisoire, avec un sérieux et une grande sympathie.

Je remercie également Messieurs J.-P. COYETTE, G. DHATT et B. PIWAKOWSKI de leur participation au jury.

Je remercie Messieurs B. HAMONIC et J.-C. DEBUS de m'avoir accueilli au sein du laboratoire d'acoustique de l'Institut d'Électronique et de Microélectronique du Nord département Institut Supérieur d'Électronique du Nord.

J'exprime toute ma reconnaissance à C. GRANGER de m'avoir aidé à réaliser la partie expérimentale de ce travail et surtout pour sa sympathie, sa disponibilité.

Je remercie Monsieur J.-P. NYS pour les photos illustrant la partie expérimentale de ce travail.

Je suis profondément reconnaissant envers Monsieur R. BOSSUT qui m'a apporté un soutien permanent en informatique.

De tout mon coeur je tiens à remercier Madame D. DUBUS d'avoir offert son temps libre pour relire ce rapport.

Je remercie tout particulièrement Monsieur B. DUBUS qui a suivi de près l'intégralité de ce travail. Cette thèse n'aurait vraisemblablement pas abouti sans ses multiples suggestions scientifiques, et surtout sa persévérance. Je lui exprime mon sincère attachement. Je le remercie aussi pour sa fraternité.

Je tiens à associer l'ensemble des membres du laboratoire d'acoustique de l'Institut Supérieur d'Électronique du Nord pour leurs aides efficaces, leurs multiples interventions.

A tous merci.

Sommaire

Remerciements	
Notations	
Introduction	1
Chapitre I : Analyse théorique du rayonnement d'une source acoustique dans un puits	
I-1 Présentation du problème	5
I-1.1 Position du problème réel	5
I-1.1.1 Environnement du puits de forage	5
I-1.1.2 Imagerie sismique	6
I-1.1.3 Mesure des célérités des ondes dans la formation	8
I-1.1.4 Exemple de site d'essai	9
I-1.2 Position du problème traité	10
I-2 Présentation de la méthode des éléments finis	11
I-2.1 Les équations du problème	12
I-2.2 Formulation variationnelle et discrétisation	15
I-2.3 Méthode des éléments finis appliquée aux solides	17
I-2.4 Méthode des éléments finis appliquée aux fluides parfaits	19
I-2.5 Couplage fluide-solide	22
I-2.6 Introduction des pertes	22
I-3 Formulation du rayonnement dans un milieu infini élastique isotrope	23
I-3.1 Solutions élémentaires du rayonnement en milieu élastique infini	24
I-3.1.1 Analyse en déformations planes : rayonnement cylindrique	24
I-3.1.2 Analyse en symétrie axiale : rayonnement sphérique	26
I-3.2 Élément infini	28
I-3.2.1 Principe et état de l'art	28
I-3.2.2 Formulation théorique de l'élément infini	31
I-3.2.3 Mise sous forme matricielle et intégration numérique	36
I-3.3 Élément d'impédance mécanique	37
I-3.3.1 Principe	37
I-3.3.2 Discrétisation par éléments finis	38
I-3.4 Équation intégrale	40
I-4 Tests de validations	41
I-4.1 Cylindre infini pulsant ou tournant	41

I-4.2	Sphère pulsante	45
I-4.3	Point oscillant	48
I-4.4	Transducteur piézoélectrique rayonnant dans un puits	50
I-5	Conclusion	51
Chapitre II : Formulation théorique du couplage éléments finis-décomposition en k		
II-1	Formulation de l'équation intégrale sur la paroi du puits	55
II-1.1	Position du problème	55
II-1.2	Décomposition spectrale	56
II-1.3	Discrétisation de l'équation intégrale	60
II-1.3.1	Spectre d'une impulsion de contrainte nodale	61
II-1.3.2	Matrice d'impédances mutuelles	62
II-2	Conditions aux limites sur les couvercles	66
II-2.1	Équations du problème	66
II-2.2	Recherche numérique du pôle k_T	68
II-2.3	Unicité de la solution	70
II-2.4	Élément rayonnant	72
II-3	Couplage aux éléments finis	74
II-3.1	Analyse harmonique d'un puits vide soumis à une force normale sur la paroi	74
II-3.2	Analyse harmonique d'un puits rempli de fluide et soumis à une force normale sur la paroi	75
II-3.3	Analyse harmonique du rayonnement d'un transducteur piézoélectrique dans un puits	76
II-4	Rayonnement dans la formation	77
II-4.1	Rayonnement d'un puits vide	77
II-4.2	Rayonnement d'un puits rempli de fluide	79
II-5	Méthode éléments finis-décomposition en k appliquée au fluide	80
II-5.1	Matrice d'impédance mutuelle	80
II-5.2	Rayonnement des couvercles	81
II-5.3	Couplage aux éléments finis	82
II-6	Conclusion	82

Chapitre III : Validation du couplage éléments finis-décomposition en k

III-1 Puits vide	85
III-1.1 Présentation du problème traité	85
III-1.2 Distribution triangulaire de contrainte normale	88
III-1.3 Distribution rectangulaire de contrainte normale	100
III-1.4 Distribution sinus de contrainte normale	106
III-1.5 Puits vide entouré de fluide	110
III-1.6 Conclusion	115
III-2 Puits rempli d'un fluide parfait	115
III-2.1 Excitation directe de la paroi du puits	116
III-2.2 Source idéale dans un puits	125
III-2.3 Conclusion	128

Chapitre IV : Applications

IV-1 Présentation de la méthode expérimentale	131
IV-1.1 Choix du milieu extérieur	131
IV-1.2 Description du dispositif et principe de la mesure	132
IV-1.2.1 Matériel utilisé et condition de la mesure	133
IV-1.2.2 Principe de la mesure	134
IV-2 Transparence acoustique du tube	136
IV-3 Analyse du transducteur	143
IV-3.1 Présentation du transducteur	143
IV-3.2 Caractérisation et modélisation du transducteur	143
IV-4 Rayonnement du transducteur dans le tube	151
IV-5 Conclusion	165
Conclusion générale	167
Références bibliographiques	169
Annexe I	173
Annexe II	177
Annexe III	183
Annexe IV	184

Notations

- $[B^{(e)}]$: matrice des dérivées des fonctions d'interpolation du déplacement,
- $[B_p^{(e)}]$: matrice des dérivées des fonctions d'interpolation de la pression,
- $[B_\phi^{(e)}]$: matrice des dérivées des fonctions d'interpolation du potentiel électrique,
- $[B_1^{(e)}]$: matrice des dérivées des monômes d'interpolation du déplacement,
- $[c^D]$: tenseur de rigidité à excitation électrique constante, condensé ou non,
- $[c^E]$: tenseur de rigidité à champ électrique constant, condensé ou non,
- c_{BF} : capacité basse fréquence du transducteur,
- c_f : célérité de l'onde de compression dans le milieu fluide (encore notée v_f),
- C_p : capacité parallèle du transducteur,
- $[D]$: matrice reliant les contraintes aux déformations élastiques,
- $[D']$ et $[D'']$: matrices résultantes de l'assemblage des éléments rayonnants,
- $[d]$: tenseur piézoélectrique condensé ou non,
- $[D^E]$: tenseur d'élasticité à champ électrique constant condensé ou non,
- \underline{D} : vecteur excitation du champ électrique,
- $[e]$: tenseur piézoélectrique condensé ou non,
- \underline{E} : vecteur champ électrique,
- E : module de Young ou d'élasticité,
- \underline{F} : vecteur des forces nodales appliquées,
- \underline{f} : densité superficielle de force connue,
- f : fréquence,
- f_a : fréquence d'antirésonance,
- f_r : fréquence de résonance,
- $H_{c0}^{(1)}$: fonction de Hankel d'indice nul et de première espèce,
- $H_{c0}^{(2)}$: fonction de Hankel d'indice nul et de seconde espèce,

- $H_{c1}^{(1)}$: fonction de Hankel d'indice un et de première espèce,
- $H_{c1}^{(2)}$: fonction de Hankel d'indice un et de seconde espèce,
- [I] : matrice identité,
- J_{c0} : fonction de Bessel d'indice nul,
- k_c : coefficient de couplage électromécanique,
- k_f : nombre de l'onde de compression dans le milieu fluide,
- k_p : nombre d'onde de l'onde de compression dans le milieu solide,
- k_s : nombre d'onde de l'onde de cisaillement dans le milieu solide,
- k_T : nombre d'onde de l'onde de l'onde de tube,
- [K_{uu}] : matrice globale de rigidité mécanique,
- [$K_{uu}^{(e)}$] : matrice élémentaire de rigidité mécanique,
- [$K_{u\phi}$] : matrice globale de rigidité mécanique,
- [$K_{u\phi}^{(e)}$] : matrice élémentaire de rigidité mécanique,
- [$K_{\phi\phi}$] : matrice globale diélectrique,
- [$K_{\phi\phi}^{(e)}$] : matrice élémentaire diélectrique,
- [L] : matrice globale de couplage à l'interface fluide-solide,
- [$L^{(e)}$] : matrice élémentaire de couplage à l'interface fluide-solide,
- L : quantité variationnelle,
- [M] : matrice masse cohérente globale solide,
- [$M^{(e)}$] : matrice masse cohérente élémentaire solide,
- [M_f] : matrice masse cohérente globale fluide,
- [$M_f^{(e)}$] : matrice masse cohérente élémentaire fluide,
- [$N^{(e)}$] : matrice des fonctions d'interpolation d'un élément solide,
- [$N_p^{(e)}$] : matrice des fonctions d'interpolation d'un élément fluide,
- [$N_T^{(e)}$] : matrice des fonctions d'interpolation de la contrainte normale d'un élément d'impédance mécanique-mutuelle,

- \underline{n} : vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur du solide,
- N_p : nombre de pôle(s) à l'intérieur d'un contour fermé,
- N_Z : nombre de zéro(s) à l'intérieur d'un contour fermé,
- O : origine du repère de l'espace,
- p : champ de pression,
- \underline{P} : vecteur global des valeurs nodales de la pression,
- $\underline{P}^{(e)}$: vecteur des valeurs nodales de la pression dans un élément fluide,
- P_e : puissance électrique active,
- P_{eau} : puissance acoustique rayonnée dans l'eau,
- P_{tube} : puissance acoustique transportée par l'onde de tube,
- \underline{Q} : vecteur global des valeurs des charges électriques,
- Q_p : charge électrique portée par l'électrode,
- r, s : coordonnées réduites pour les éléments finis et infinis,
- r : distance à l'axe pour le couplage éléments finis-décomposition en k ,
- R : rayon de la sphère rayonnante,
- R_p : résistance parallèle du transducteur
- $[S]$: tenseur des déformations,
- $[s^D]$: tenseur d'élasticité à excitation électrique constante ou non,
- \underline{S} : tenseur des déformations condensé ou vecteur des déformations,
- S_i : surface frontière entre un domaine solide et un domaine fluide,
- S_p : surface du domaine piézoélectrique recouverte d'une électrode,
- $S_{p'}$: surface du domaine fluide où la pression est connue,
- S_T : surface pour laquelle la contrainte est connue en tout point,
- S_u : surface pour laquelle le déplacement est connu,
- S_σ : surface limitant le domaine piézoélectrique sur laquelle il n'y a pas d'électrode,
- S_∞ : surface frontière limitant le domaine fluide,
- $[T]$: tenseur des contraintes,

$\underline{\mathbb{T}}$: tenseur des contraintes condensé,
 $\underline{\mathbf{U}}$: vecteur global des valeurs nodales des déplacements,
 $\underline{\mathbf{U}}^{(e)}$: vecteur des valeurs nodales des déplacements dans un élément solide,
 U_{elec} : énergie électrique à l'entrée du transducteur,
 U_{meca} : énergie mécanique à la sortie du transducteur,
 \mathbf{u} : champ de déplacement,
 u_i' : déplacement imposé dans la direction i ,
 v_f : célérité de l'onde de compression dans le milieu fluide (encore notée c_f),
 v_p : célérité de l'onde de compression dans le milieu solide,
 v_s : célérité de l'onde de cisaillement dans le milieu solide,
 x, y, z : coordonnées globales,
 Y_{elec} : admittance électrique du transducteur,
 $[\mathbf{Z}(\omega)]$: matrice d'impédance mécanique-mutuelle globale pour un milieu solide,
 $[\mathbf{Z}_f(\omega)]$: matrice d'impédance mutuelle globale pour un milieu fluide,
 $[\mathbf{Z}_{loc}(\omega)]$: matrice d'impédance mécanique locale pour un milieu solide,
 $[\epsilon^S]$: tenseur diélectrique à déformation constante,
 $[\epsilon^T]$: tenseur diélectrique à contrainte constante,
 δ_{ij} : symbole de Kronecker,
 ϵ : critère de tolérance pour la convergence des intégrales,
 ϵ_0 : permittivité diélectrique du vide,
 ϕ_0 : potentiel électrique de l'électrode chaude du transducteur piézoélectrique,
 λ, μ : coefficients de Lamé,
 ν : coefficient de Poisson,
 γ : contour fermé,
 Γ_{ext} : frontière extérieure,
 Γ_{∞} : couvercle(s) du puits,
 χ_s : coefficient de compressibilité adiabatique,

- ψ : flux du champ de vitesse acoustique,
- ω : pulsation,
- ∂ : symbole de dérivation partielle,
- Δ : opérateur différentiel Laplacien,
- ∇ : opérateur différentiel nabla,
- $| |$: valeur absolue d'un nombre réel,
- $\| \|$: module d'un nombre complexe,
- $(\bar{\cdot})$: spectre de la quantité (\cdot) dans l'espace des nombres d'ondes,
- \int : symbole d'intégration,
- Σ : symbole de sommation.

Introduction

Les transducteurs piézoélectriques permettent la conversion d'un signal électrique en un signal acoustique et réciproquement. Leur domaine d'utilisation recouvre l'acoustique sous-marine [1] (systèmes sonar, d'imagerie ou de télécommunication, sondeurs), les applications industrielles ultrasonores [2] (soudage, usinage, nettoyage, génération d'aérosols ...), le contrôle non destructif [3] et l'imagerie médicale [4] (échographie), l'acoustique et la géophysique pétrolière [5-7]. Dans le cas d'une source acoustique, une tension électrique imposée au matériau piézoélectrique, provoque la mise en vibration de l'ensemble de la structure et par conséquent le rayonnement de l'onde acoustique dans le milieu environnant. La description du comportement de ce système nécessite la prise en compte simultanée de trois problèmes, respectivement électrique, mécanique et acoustique. A partir des analogies électromécaniques classiques [8], des schémas électriques équivalents peuvent être élaborés pour modéliser des transducteurs de géométrie simple. Leur exploitation permet alors d'accéder aux caractéristiques du transducteur dans une bande de fréquence réduite. Quand la géométrie du transducteur et/ou celle du milieu environnant sont/est complexe(s) ou la bande de fréquence large, il devient nécessaire de mettre en oeuvre un outil de simulation numérique qui produit des informations plus riches. C'est le cas des codes ATILA [9] et EQI [10] qui exploitent respectivement la méthode des éléments finis [11-13] et la méthode des équations intégrales [14-15].

En acoustique pétrolière les transducteurs piézoélectriques sont utilisés pour effectuer des mesures dans les puits de forage [5-6] (évaluation de nappe de pétrole, imagerie sismique, diaggraphie, contrôle non destructif...). Compte tenu du faible niveau d'énergie transmis dans la formation (terrain) et de la complexité de phénomènes physiques rencontrés, les concepteurs de systèmes sont amenés à simuler numériquement les sources afin d'optimiser leur fonctionnement.

L'objet de cette thèse est, dans le contexte général décrit précédemment, d'apporter une contribution à la description, l'analyse et la modélisation des différents phénomènes physiques liés au rayonnement d'une source acoustique dans un puits de forage. Ce travail a permis d'incorporer des nouveaux outils de calcul dans le code de calcul ATILA, visant à modéliser, par la méthode des éléments finis le rayonnement d'un transducteur piézoélectrique dans un puits de forage. Le puits de diamètre constant est rempli de fluide, et entouré d'une formation élastique homogène isotrope s'étendant à l'infini. Le caractère infini du milieu conduit à un traitement spécifique des conditions aux limites. L'intérieur du puits (le transducteur, le fluide) est modélisé par éléments finis. Sur la frontière extérieure des éléments spécifiques sont utilisés (éléments d'impédance, éléments d'impédance mécanique-mutuelle, éléments rayonnants).

Ce rapport est divisé en trois parties. Le premier chapitre a pour objet l'analyse théorique de la modélisation par la méthode des éléments finis de la propagation des ondes acoustiques dans une formation élastique infinie. Nous développons deux types d'éléments : un élément infini et un élément d'impédance mécanique. Dans la deuxième partie nous présentons une formulation théorique originale pour décrire le rayonnement d'un transducteur situé dans un puits. Seul l'intérieur du puits (transducteur, fluide) est modélisé par éléments finis sur une hauteur finie. L'effet du milieu solide extérieur est décrit par une méthode d'éléments de frontières (équation intégrale discrétisée) calculée à l'aide d'une décomposition en k . Les couvercles du puits sont modélisés par des éléments rayonnants fluides chargés d'absorber l'onde de tube [16]. La validation de cette méthode présentée dans la troisième partie, a été effectuée sur trois géométries pour lesquelles les solutions analytiques sont développées : l'application d'une distribution de contraintes sur le puits vide; l'application d'une distribution de contraintes sur le puits rempli de fluide; le rayonnement d'une source ponctuelle située dans le puits. Enfin au chapitre IV, nous présentons des mesures effectuées pour un tube rempli d'huile monté dans un bassin rempli d'eau afin de valider expérimentalement le modèle. Un projecteur piézoélectrique annulaire est installé dans le tube. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux sur la pression dans l'huile et dans l'eau.

Chapitre I

Analyse théorique du problème du rayonnement d'une source acoustique dans un puits

Ce chapitre a pour objectif d'analyser le rayonnement d'une source acoustique placée dans un puits rempli de fluide, et entouré d'une formation élastique s'étendant à l'infini. Dans une première étape nous présentons les problèmes réel et idéal traités. Dans une seconde partie, est décrite la méthode des éléments finis appliquée à la propagation des ondes élastiques dans un milieu infini en régime harmonique. Les techniques numériques permettant la troncature du milieu infini sont présentées : élément infini, élément d'impédance mécanique, méthodes des équations intégrales. Finalement, une discussion est menée sur la validité des résultats numériques obtenus avec les éléments infinis et les éléments d'impédance mécanique par comparaisons aux résultats analytiques ou publiés.

I-1 Présentation du problème

I-1.1 Position du problème réel

Essayons de décrire les conditions réelles dans lesquelles seront utilisés les transducteurs piézoélectriques dans les puits de forage [5-6]. En géophysique, diverses techniques acoustiques sont utilisées pour effectuer des mesures dans les puits de forage. La gamme de fréquences varie de 10 Hz pour des applications basses fréquences et sismiques à 1 MHz pour des applications ultrasonores. Excepté pour les très basses fréquences, les sources situées dans le puits de forage sont soumises à un environnement rude. L'espace et la puissance électrique disponibles sont limités. La pression et la température sont élevées (supérieures à 1000 bars et 175 °C) et la boue dans le puits peut avoir des propriétés acoustiques défavorables. De plus, la durée des mesures est restreinte pour des raisons économiques.

La propagation des ondes acoustiques basses fréquences (en dessous du kilohertz) entre deux puits peut être utilisée pour déterminer les propriétés de la roche par tomographie. Des sources performantes en puissance et en rendement sont nécessaires pour surmonter l'atténuation sur quelques centaines de mètres des ondes acoustiques dans la formation. Pour obtenir une bonne résolution, une importante largeur de bande est nécessaire. Dans les bandes fréquentielles moyennes (de 1 kHz à 50 kHz), la propagation le long du puits de forage sur une distance supérieure à environ un mètre est utilisée pour mesurer les vitesses de compression et de cisaillement de la formation. Les applications ultrasonores incluent le contrôle non destructif du casing d'acier ou l'imagerie haute résolution de la formation, et le plus grand défi est de surmonter l'atténuation due à la boue.

I-1.1.1 Environnement du puits de forage

L'environnement du puits impose des restrictions sévères sur les transducteurs acoustiques. La première de ces restrictions concerne les dimensions du transducteur. En général, dans un puits non tubé, le diamètre du puits limite celui de la source à moins de 100 mm, par contre dans un puits tubé celui est limité à moins de 43 mm.

Le contact avec le fluide contenu dans le puits implique que les transducteurs acoustiques sont soumis à la pression hydrostatique. La colonne de fluide doit maintenir la forme du puits, afin d'éviter que celui-ci ne s'effondre. Ceci est obtenu en utilisant une boue chargée avec de lourdes particules minérales, ce mélange ayant une masse volumique double de celle de l'eau. Un puits de forage peut atteindre une profondeur de plusieurs kilomètres, dans lequel le dispositif expérimental doit supporter une pression supérieure à 1000 bars. La température augmente également avec la profondeur. Elle avoisine généralement 175 °C, et peut occasionnellement dépasser 200 °C.

Le câble électrique, reliant le dispositif à l'intérieur du puits aux équipements à la surface, a une section limitée et une longueur de plusieurs kilomètres. Ceci limite à moins d'un kilowatt la puissance électrique totale disponible. Cette puissance n'est pas entièrement allouée à la source, mais à l'ensemble du dispositif, comme par exemple l'acquisition et la transmission des données.

I-1.1.2 Imagerie sismique

En imagerie sismique seules les basses fréquences (10 Hz à 100 Hz) peuvent être utilisées, et le domaine de résolution est alors compris entre 30 et 300 mètres. Ce type de résolution est inadapté lorsque des caractéristiques de faibles dimensions doivent être détectées dans le gisement. Certaines de ces caractéristiques peuvent être critiques pour les compagnies pétrolières, comme par exemple la continuité d'une couche ou la position d'un front de gaz. Cette situation a récemment conduit à l'idée de la sismique de puits à puits : la source et les récepteurs sont placés dans des puits distincts. L'ordre de grandeur de la distance entre deux puits est de plusieurs centaines de mètres. Les transducteurs sont localisés dans le voisinage immédiat de la zone de la cible et les ondes n'ont pas à franchir la zone de séparation (figure I-1). Dans cette configuration, on peut utiliser des fréquences plus élevées, avec le bénéfice d'une meilleure résolution. La résolution peut atteindre 3 m à 1 kHz. La technique d'imagerie inclut la technique classique des réflexions utilisée en sismique de surface, à condition de séparer les ondes incidentes et réfléchies.

Les récepteurs sont : de simples hydrophones suspendus dans le fluide, des géophones à trois axes ou des accéléromètres collés sur la paroi du puits. Cette association permet de recouvrir l'intégralité du champ d'onde, au prix d'une conception mécanique plus complexe. Pour la source, divers principes physiques ont été utilisés expérimentalement : sources explosives, canons à air, sparkler, sources hydrauliques, pneumatiques et piézoélectriques [5-7, 17-20]. En fonction de la configuration, ces sources qui sont généralement de petite taille devant les longueurs d'ondes, peuvent se comporter comme des monopôles ou des dipôles. Parmi toutes ces sources, les monopôles piézoélectriques présentent un nombre intéressant de caractéristiques :

- Ils sont bien adaptés pour la génération d'un signal sonore (à environ 1 kHz), avec une faible intensité pour ne pas endommager le puits,

- Le contrôle de la fréquence se fait facilement par la forme de l'excitation électrique. En utilisant un balayage à modulation de fréquence, il est possible d'augmenter le niveau d'énergie à une fréquence, tout en conservant une énergie totale faible,

- Le signal d'une telle source est très répétitif, et permet ainsi d'améliorer le rapport signal sur bruit, en mémorisant un grand nombre d'acquisitions si nécessaire,

- Les dispositifs piézoélectriques peuvent avoir des rendements importants, ce qui est un avantage dans un système où l'énergie totale est limitée,

- Le monopôle librement suspendu dans le fluide, ne nécessite pas le collage d'un système mécanique complexe sur la paroi du puits, et permet ainsi une mise en mouvement rapide d'un point du puits à un autre.

Cependant, plusieurs problèmes se posent lors de la conception de ce type de sources :

- Les dimensions de la source sont assujetties à des contraintes. En effet le diamètre du puits limite celui de la source. D'autre part, la hauteur caractéristique de la source doit être très petite devant la plus petite des longueurs d'onde du problème,

- Le puits rempli de fluide est un guide d'onde et son mode basse fréquence est appelé onde de tube. Seule une infime partie de l'énergie est rayonnée dans la formation (environ 1% à 1 kHz), ce qui rend difficile l'évaluation des nappes de pétrole à l'échelle métrique,

- La pression hydrostatique, due à la colonne de fluide se trouvant au dessus du transducteur, limite les performances de celui-ci. Il en est de même pour la formation entourant le puits.

On peut également faire de l'imagerie autour d'un seul puits. Dans ce cas, la source et les antennes sont situées sur la même sonde. La géométrie est très similaire à celle de la sismique marine, où un navire soutient la source et les câbles de remorque le long des antennes d'hydrophones. La sonde, mise en mouvement le long du puits, est excitée tous les 15 cm, (la distance entre deux récepteurs consécutifs). Les récepteurs sont des hydrophones omnidirectionnels, et l'image reconstituée ne fournit pas d'information suivant l'azimut. La fréquence optimale, fonction de l'atténuation de la formation et du rapport des impédances des milieux fluide et solide, est de quelques kilohertz. La profondeur des investigations est de quelques dizaines de mètres. Les récepteurs enregistrent les réflexions dues à des interfaces non perpendiculaires au puits.

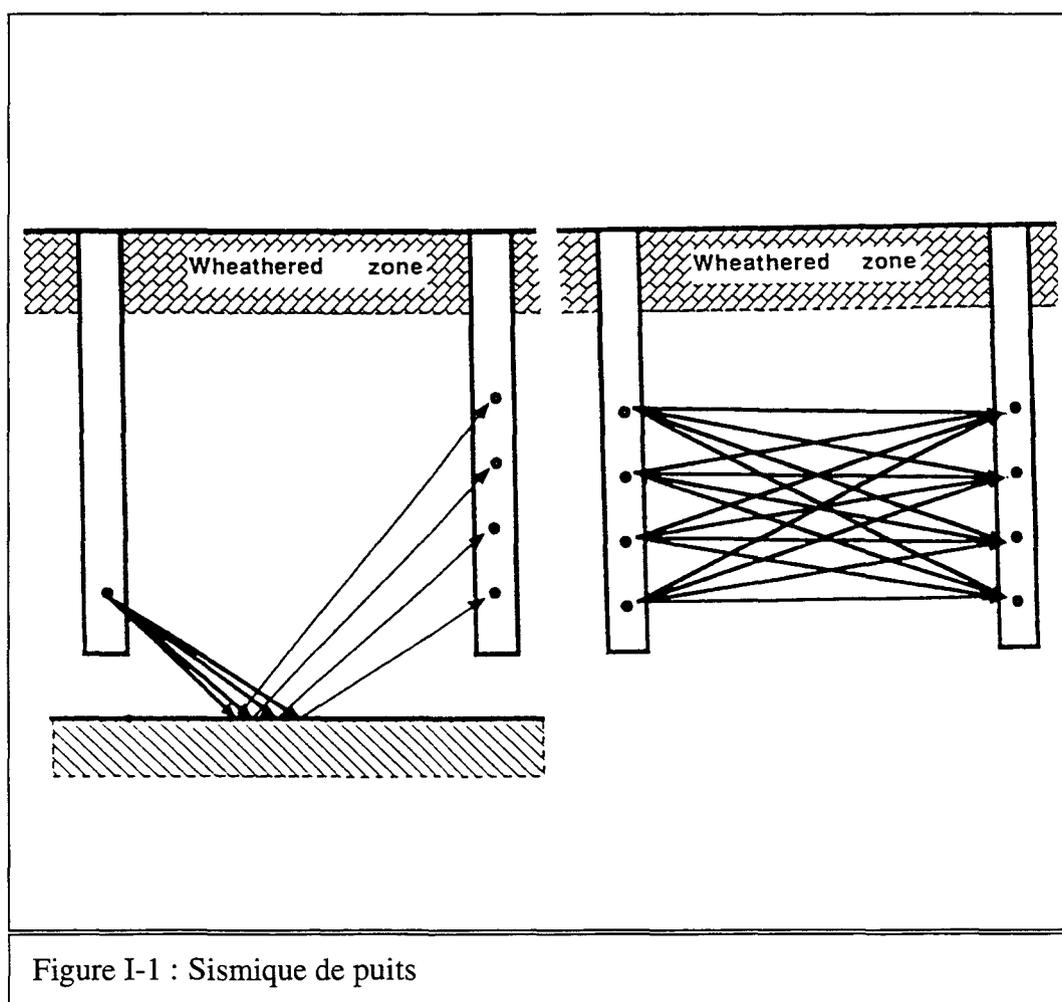


Figure I-1 : Sismique de puits

I-1.1.3 Mesure des célérités des ondes dans la formation

Les mesures des célérités des ondes de compression et de cisaillement dites respectivement onde P et S dans la formation au voisinage du puits ont fait l'objet de nombreuses études au cours des quinze dernières années [5-7]. Ces mesures de célérités des ondes P et S sont appelées diaggraphie. Le principe de la diaggraphie est basé sur la réfraction des ondes acoustiques à l'intérieur de la formation : une source piézoélectrique de rayonnement monopolaire ou dipolaire située au centre du puits génère des impulsions de pression dans le fluide, qui sont converties en ondes de compression et de cisaillement dans la formation. Ces ondes se propagent le long de l'interface solide-fluide (formation-fluide) et sont continûment reconverties en onde de pression dans le fluide. Une antenne d'hydrophones détecte le signal. La différence des temps d'arrivée entre deux récepteurs est indépendante du fluide et donne les célérités des ondes P et S dans la formation. Lorsque la célérité des ondes S dans la formation est supérieure à celle des ondes de compression dans le fluide, les signaux relatifs aux ondes P et S sont aisément détectables. Par contre, si la célérité des ondes S est inférieure à celle des ondes de compression dans le fluide, le signal de l'onde fluide arrive le premier sur le récepteur et rend indétectable le signal relatif à l'onde S.

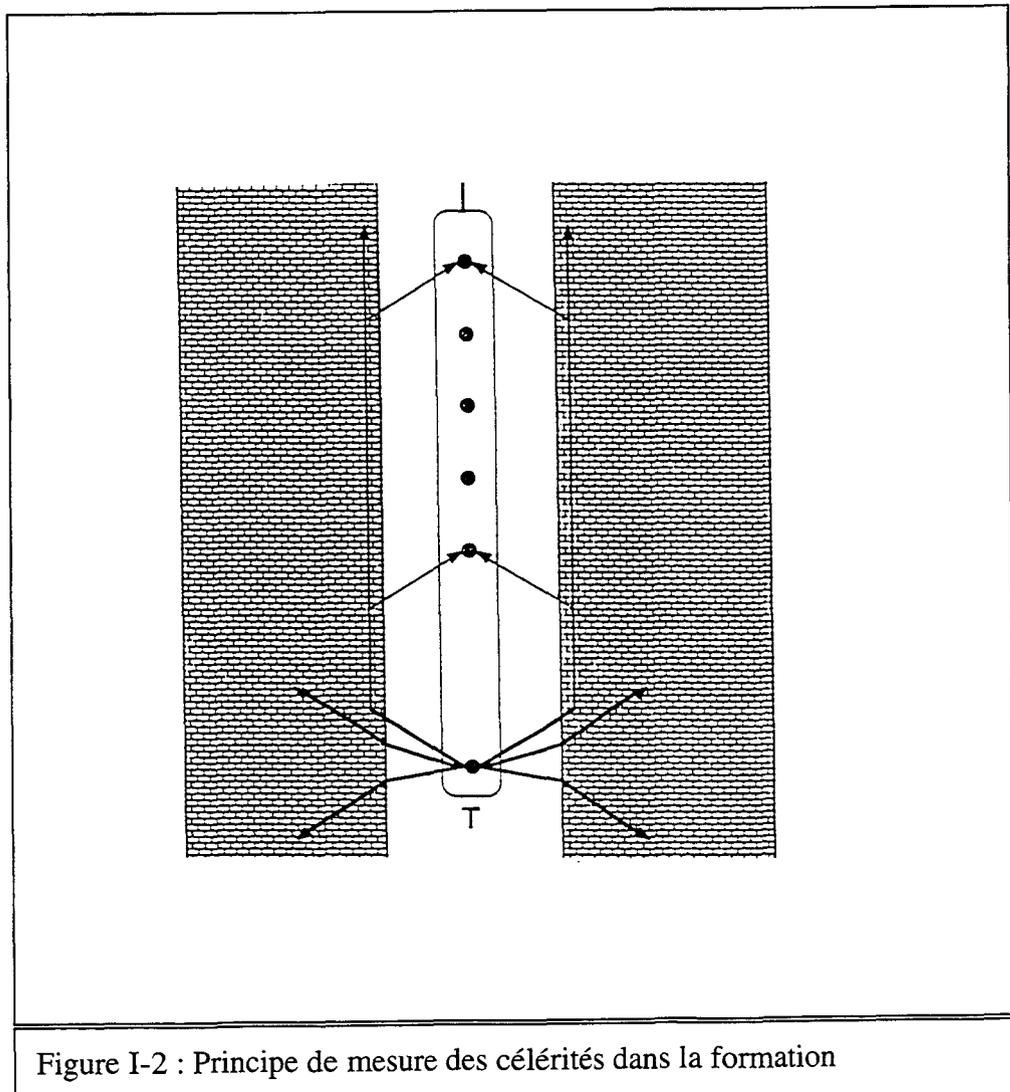


Figure I-2 : Principe de mesure des célérités dans la formation

I-1.1.4 Exemple de site d'essai

Présentons ici un site d'essai aménagé près de la mine d'uranium de Lodève sur un terrain connu par de nombreux puits forés jusqu'à 500 ou 600 mètres donnant une bonne connaissance de la structure du sous-sol. De plus une interprétation géologique des diagraphies a été effectuée par des géologues de la mine. Le site est traversé par une faille d'un rejet de 30 mètres et de deux plus petites de 5 et 3 mètres de rejet, constituant un banc d'essai intéressant pour évaluer les résolutions des méthodes entre puits [6]. On peut constater sur la figure (I-3) : les puits ne sont pas rectilignes et le milieu (la formation) autour n'est pas homogène.

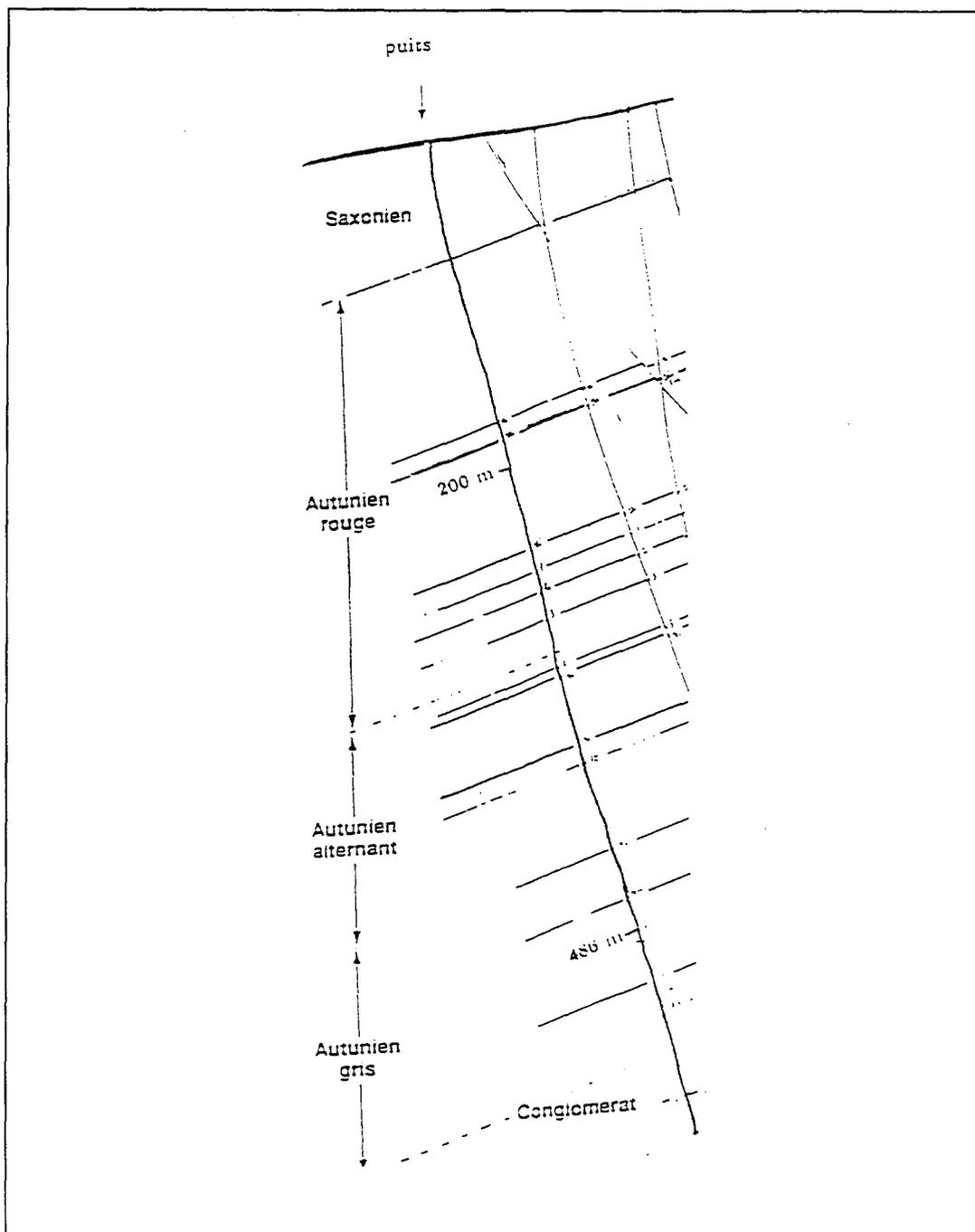


Figure I-3 : Site d'essai de la mine de LODÈVE (Languedoc Roussillon/France)

I-1.2 Position du problème traité

Nous nous proposons de modéliser le rayonnement de transducteurs piézoélectriques dans un puits de forage rectiligne, de profondeur infinie, de diamètre constant entouré d'une formation élastique homogène isotrope s'étendant à l'infini (figure I-4.a) à l'aide de la méthode des éléments finis. Le domaine modélisé de taille finie, est constitué d'un domaine fluide parfait, d'un transducteur piézoélectrique qui est la source acoustique, et d'une formation élastique entourant le puits. Ces dimensions sont limitées par des frontières sur lesquelles des conditions aux limites non réfléchissantes doivent être imposées (figure I-4.b). Les calculs sont effectués en régime harmonique (dépendance temporelle en $e^{+j\omega t}$). Notre apport sera donc d'écrire des conditions aux limites prenant en compte le caractère infini du milieu.

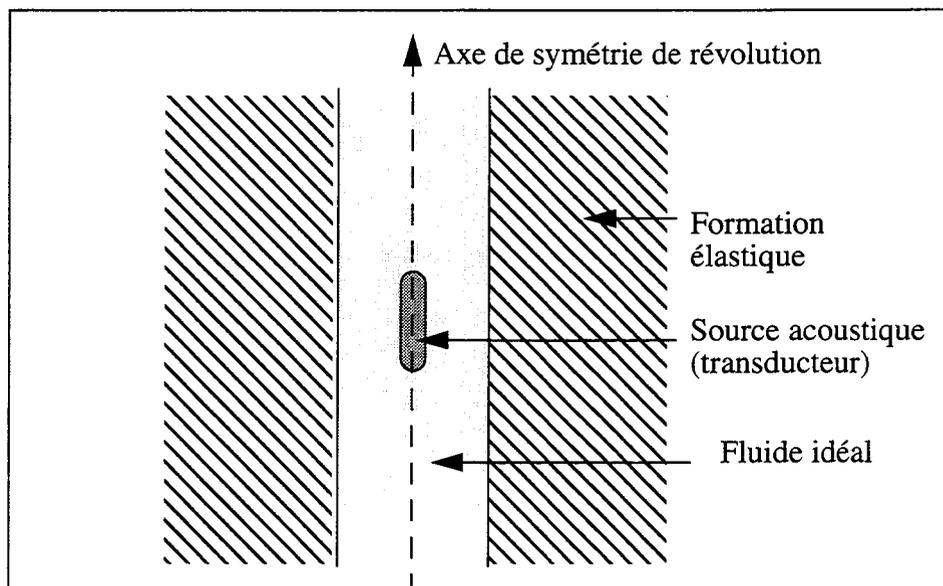


Figure I-4.a : Description du problème traité

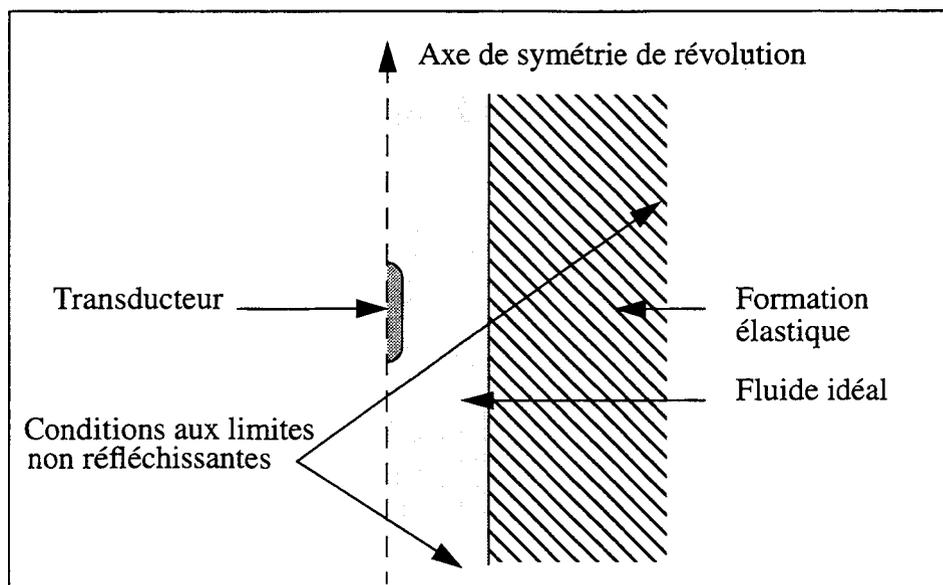
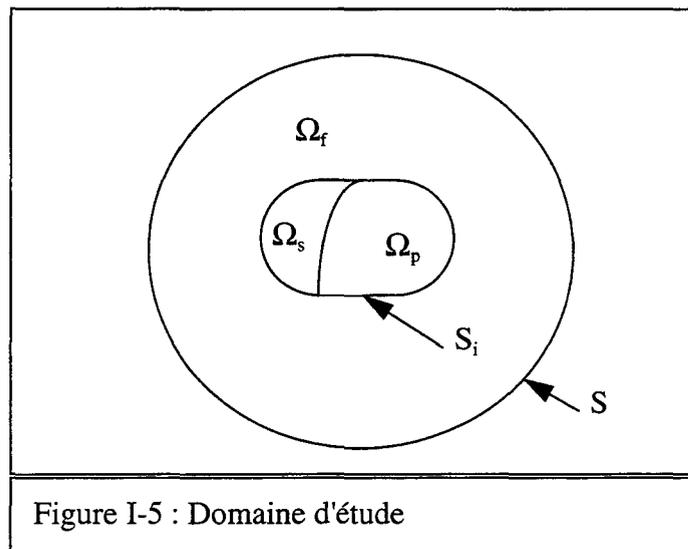


Figure I-4.b : Description du problème modélisé

I-2 Présentation de la méthode des éléments finis

L'évolution actuelle de la technologie amène les scientifiques à réaliser des projets de plus en plus complexes. Ils ont besoin pour cela de simuler le comportement de systèmes physiques, afin de prévoir l'influence de leurs décisions au moment de la conception des systèmes. Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement des systèmes grâce aux équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre efficacement ces équations. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique. Elle consiste à utiliser une approximation simple des inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Cette méthode est actuellement très répandue dans l'industrie, principalement en mécanique. Les références [11-12] donnent un aperçu général de cette méthode.



Dans cette section, nous présentons la méthode des éléments finis appliquée à l'analyse de transducteurs piézoélectriques rayonnants dans un milieu élastique composé de domaines fluide et solide. La description du problème suppose la résolution d'un problème électrique, mécanique et acoustique. Le problème électrique est couplé au problème mécanique à l'intérieur du domaine piézoélectrique Ω_p . Le rayonnement acoustique se fait dans les domaines fluide Ω_f et/ou solide Ω_s (figure I-5). Dans la suite, seuls les effets linéaires sont considérés, pour les problèmes électrique, mécanique et acoustique, ce qui exclut les non-linéarités de grandes déformations ou comportement. Les phénomènes physiques étudiés sont supposés avoir une dépendance temporelle en $e^{+j\omega t}$, où $\omega = 2\pi f$ désigne la pulsation et f la fréquence. Les résultats présentés dans cette section sont détaillés dans la thèse de J.-N. Decarpigny [13].

I-2.1 Les équations du problème

Dans le domaine piézoélectrique Ω_p , le couplage entre grandeurs électrique et mécanique est décrit par les équations constitutives de la piézoélectricité :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i &= e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_j \end{aligned} \quad (I-1)$$

où $[T]$ est le tenseur des contraintes, $[S]$ le tenseur des déformations élastiques, \underline{E} le vecteur champ électrique, \underline{D} le vecteur d'excitation électrique, $[c^E]$ le tenseur des rigidités élastiques à champ électrique constant, $[\epsilon^S]$ le tenseur des permittivités diélectriques à déformation constante et $[e]$ le tenseur des constantes piézoélectriques. La notation d'Einstein est utilisée et sera conservée dans la suite. Le tenseur des déformations élastiques est défini par :

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (I-2)$$

u_k (k variant de 1 à 3) désignant les composantes du déplacement. Les composantes du vecteur champ électrique sont définies par la relation suivante :

$$E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (I-3)$$

où Φ est le potentiel électrique. A ces équations s'ajoute l'équation fondamentale de la dynamique :

$$-\rho \omega^2 u_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (I-4)$$

où ρ désigne la masse volumique du solide, ω la pulsation et l'équation de Poisson qui s'écrit :

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \quad (I-5)$$

lorsqu'il n'y a pas de charges libres en volume dans les matériaux considérés. On obtient à partir des équations (I-1), (I-4) et (I-5) le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} -\rho \omega^2 u_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} (e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_j) &= 0 \end{aligned} \quad (I-6)$$

Pour un domaine purement élastique, les équations se déduisent des équations précédentes en ignorant les termes où interviennent les grandeurs électriques. Les conditions aux limites associées à ces équations sont mécaniques ou électriques. Lorsque les dimensions du domaine mécanique sont finies, les conditions mécaniques peuvent porter sur le déplacement en tout point d'une surface appelée S_u (condition de type Dirichlet) :

$$u_i = u_i' \quad (I-7)$$

où u_i' est un champ de déplacement connu sur S_u . Elles peuvent aussi s'appliquer sur le champ de contrainte (condition de type Neumann) en tout point d'une surface notée S_t et s'écrire :

$$T_{ij}n_j = f_i \quad (I-8)$$

où \underline{n} est la normale unitaire sortante de la surface S_t et \underline{f} la densité surfacique de force. Lorsque le domaine élastique est de taille infinie, il faut faire appel à des méthodes très spécifiques qui seront présentées dans le paragraphe I-3. Les conditions électriques s'appliquent sur des surfaces du domaine Ω_p . Pour une surface S_e limitant Ω_p et sur laquelle il n'y a pas d'électrode, compte tenu de la valeur élevée de la permittivité diélectrique des matériaux piézoélectriques considérés, l'absence de charges surfaciques conduit à écrire :

$$D_i n_i = 0 \quad (I-9)$$

Pour une surface quelconque S_p de Ω_p recouverte d'une électrode, il est possible d'imposer soit le potentiel de cette électrode :

$$\Phi = \Phi_p \quad (I-10)$$

où Φ_p représente un potentiel électrique connu, soit la charge portée par l'électrode :

$$-\int_{S_p} D_i n_i dS_p = Q_p \quad (I-11)$$

où Q_p est une charge électrique connue.

De la même façon, le fluide est supposé compressible et parfait. On suppose de plus qu'il est faiblement perturbé autour du repos. Sous ces hypothèses, la propagation des ondes acoustiques dans le fluide est régie par l'équation de Helmholtz, issue de la linéarisation de l'équation de Euler. On a alors à l'intérieur du domaine fluide Ω_f :

$$\Delta p + k_f^2 p = 0 \quad (I-12)$$

où k_f est le nombre d'onde de l'onde de compression. Si c_f désigne la célérité du son dans le fluide, ρ_f sa masse volumique, et χ_s sa compressibilité adiabatique. Le nombre d'onde est donné par la formule :

$$k_f = \frac{\omega}{c_f} \quad (\text{I-13})$$

avec :

$$c_f = \sqrt{\frac{1}{\chi_s \rho_f}} \quad (\text{I-14})$$

Pour le fluide seul, on considère des conditions sur le champ de pression de la forme (condition de type Dirichlet) :

$$p = p' \quad (\text{I-15})$$

où p' est un champ pression connu sur la surface S_p , et des conditions sur la dérivée normale du champ de pression du type (condition du type Neumann) :

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \psi \quad (\text{I-16})$$

où la densité de flux ψ de vitesse est une quantité connue, pour des surfaces notées S_ψ . En tout point de l'interface entre le solide et le fluide S_i , des conditions de continuité dynamique (condition de continuité de la contrainte normale) :

$$T_{ij} n_j = -p n_i \quad (\text{I-17})$$

et cinématique (condition de continuité du déplacement normal) :

$$n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho_f \omega^2 u_i n_i \quad (\text{I-18})$$

sont appliquées. Enfin, sur la surface S_∞ , correspondant à la troncature du domaine fluide infini, la condition de rayonnement de Sommerfeld impose [21-24] :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (rp) \text{ finie} \quad (\text{I-19})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(jk_f p + \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] = 0$$

uniformément dans toutes les directions de l'espace, r étant la distance à tout point fixé.

I-2.2 Formulation variationnelle et discrétisation

Les équations (I-6) et (I-12) d'une part, (I-7), (I-8), (I-10), (I-11), (I-15), (I-16), (I-17), et (I-18) d'autre part, sont respectivement les équations de Euler et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire L définie par la formule (I-20). Les trois premières intégrales concernent le solide élastique. Le premier terme peut être associé au potentiel de déformation et à l'énergie cinétique, le second terme aux déplacements imposés et le troisième terme au travail des forces extérieures. Si l'on ajoute à ces intégrales les trois intégrales suivantes, on obtient la fonctionnelle correspondant aux équations et aux conditions aux limites de la piézoélectricité. Les trois intégrales suivantes s'appliquent quant à elles, au domaine fluide seul. Elles peuvent être associées, dans l'ordre, à l'équation de Helmholtz (I-12) et aux conditions aux limites (I-15), et (I-16). Enfin le dernier terme décrit le couplage entre le domaine solide et le domaine fluide. L'annulation de la quantité L au premier ordre implique la vérification des équations (I-6) à (I-12), et des conditions aux limites.

$$\begin{aligned}
L = & \int_{\Omega_s} \frac{1}{2} (S_{ij} c^E_{ijkl} S_{kl} - \rho \omega^2 u_i^2) d\Omega_s - \int_{S_u} (u_i - u_i') n_j (c^E_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k) dS_u \\
& - \int_{S_T} f_i u_i dS_T - \int_{\Omega_p} \frac{1}{2} (2 S_{kl} e_{ikl} E_i + E_i \epsilon_{ij}^S E_j) d\Omega_p \\
& - \sum_{p=0}^M \int_{S_p} (\Phi - \Phi_p) n_i (e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_j) dS_p + \sum_{p=0}^M \Phi_p Q_p \quad (I-20) \\
& + \frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{\Omega_f} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)^2 - k_f^2 p^2 \right] d\Omega_f - \frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{S_p'} (p - p') n_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dS_p' \\
& - \frac{1}{\rho \omega^2} \int_{S_\psi} p \psi dS_\psi - \int_{S_i} p u_i n_i dS_i
\end{aligned}$$

Lors de la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis, le domaine étudié est découpé en sous-domaines appelés éléments, interconnectés par des points appelés noeuds (figure I-6). Si l'on suppose que φ est l'inconnue du problème, en un point quelconque situé à l'intérieur d'un élément e la valeur de φ peut être reliée aux valeurs nodales $\varphi^{(e)}$ à l'aide des fonctions d'interpolation. Nous utiliserons les fonctions d'interpolation de Lagrange dont la description est donnée dans l'annexe II. En ce point on a :

$$\varphi = [N^{(e)}] \underline{\varphi}^{(e)} \quad (I-21)$$

Dans cette dernière formule $[N^{(e)}]$ représente la matrice ligne des fonctions d'interpolation. Ces éléments sont isoparamétriques, c'est à dire qu'il existe une relation biunivoque entre les coordonnées locales et globales du système.

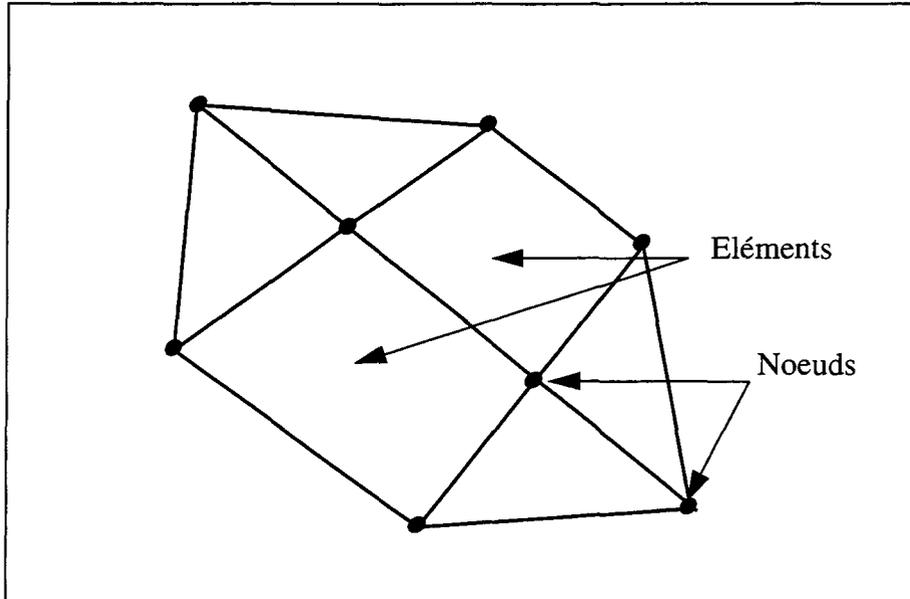


Figure I-6 : Discrétisation du domaine d'étude par éléments finis

Le calcul des intégrales se fait dans le repère réduit lié à l'élément de référence, grâce à une transformation des coordonnées réelles en coordonnées réduites (figure I-7).

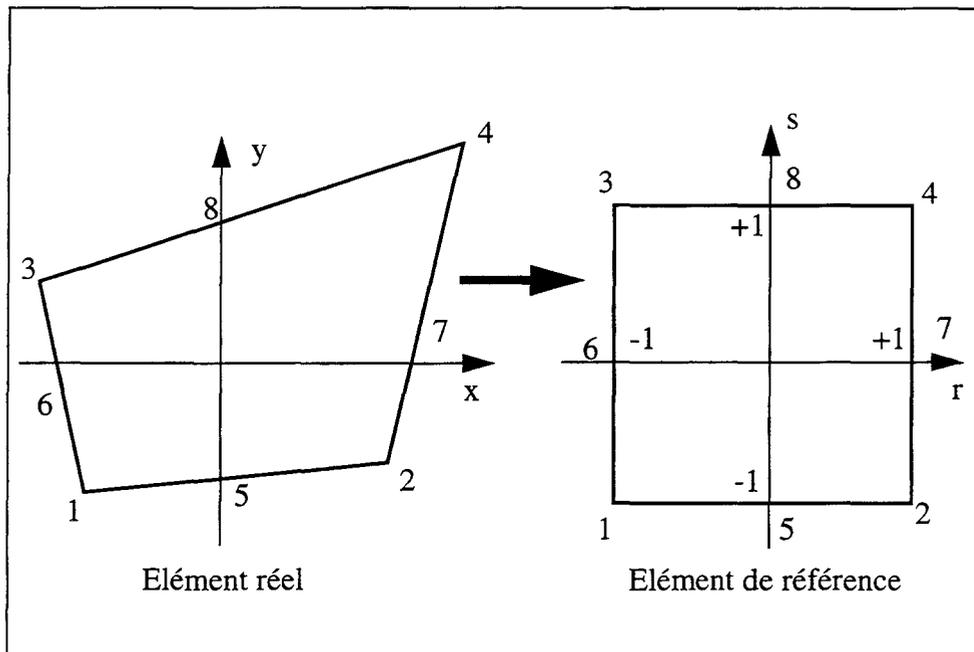


Figure I-7 : Passage de l'élément réel à l'élément de référence

I-2.3 Méthode des éléments finis appliquée aux solides

On suppose que le solide élastique, homogène, isotrope, occupe un domaine de l'espace Ω_s . Par la suite, on indiquera les tailles de matrice pour un problème bidimensionnel à symétrie de révolution correspondant au problème posé (figure I-4). Cependant le développement est complètement généralisable en trois dimensions. Le vecteur \underline{u} (vecteur déplacement comportant en tout point les composantes radiale et axiale) en un point intérieur à un élément e est donné par la formule (I-22) :

$$\underline{u} = \left[\mathbf{N}^{(e)} \right] \underline{U}^{(e)} \quad (\text{I-22})$$

$[\mathbf{N}^{(e)}]$ est la matrice des fonctions d'interpolation des déplacements. C'est une matrice comportant deux lignes et n colonnes où n est égal au nombre de noeuds de l'élément. Le tenseur condensé des déformations élastiques \underline{S} (annexe II) s'écrit sous forme vectorielle :

$$\underline{S} = \left[\mathbf{B}^{(e)} \right] \underline{U}^{(e)} \quad (\text{I-23})$$

$[\mathbf{B}^{(e)}]$ est la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation. La loi de comportement du milieu (Loi de Hooke) [25] peut être mise sous forme matricielle condensée. Elle s'écrit alors :

$$\underline{T} = \left[\mathbf{D} \right] \left[\mathbf{B}^{(e)} \right] \underline{U}^{(e)} \quad (\text{I-24})$$

où $[\mathbf{D}]$ est un tenseur d'ordre deux obtenu par condensation du tenseur d'ordre quatre $[\mathbf{c}^E]$. \underline{T} est le tenseur condensé des contraintes (annexe II) mis sous forme vectorielle. La fonctionnelle ce problème discrétisée par éléments finis s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s = & \sum_e \frac{1}{2} \int_{\Omega_s^{(e)}} \underline{U}^{t(e)} \left[\mathbf{B}^{(e)} \right]^t \left[\mathbf{D} \right] \left[\mathbf{B}^{(e)} \right] \underline{U}^{(e)} d\Omega_s^{(e)} \\ & - \sum_e \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega_s^{(e)}} \underline{U}^{t(e)} \left[\mathbf{N}^{(e)} \right]^t \rho \left[\mathbf{N}^{(e)} \right] \underline{U}^{(e)} d\Omega_s^{(e)} \\ & - \sum_e \int_{S_T^{(e)}} \underline{U}^{t(e)} \left[\mathbf{N}^{(e)} \right]^t \underline{f} dS_T^{(e)} \end{aligned} \quad (\text{I-25})$$

Dans cette expression $d\Omega_s^{(e)}$ désigne l'élément d'intégration volumique et $dS_T^{(e)}$ l'élément d'intégration surfacique de la surface sur laquelle on impose une densité d'efforts surfaciques \underline{f} . L'intégrale relative à la surface $S_u^{(e)}$, surface sur laquelle le déplacement est imposé, disparaît. En effet, le déplacement d'un point d'un élément est uniquement fonction des déplacements des noeuds de cet élément situés sur la même face dans l'élément. ρ désigne la masse volumique du solide. L'entier e parcourt l'ensemble des éléments finis solides situés à l'intérieur du domaine Ω_s .

En définissant la matrice de rigidité élémentaire mécanique $[K_{uu}^{(e)}]$ par :

$$[K_{uu}^{(e)}] = \int_{\Omega_s^{(e)}} [B^{(e)}]^t [D] [B^{(e)}] d\Omega_s^{(e)} \quad (I-26)$$

la matrice masse cohérente élémentaire $[M^{(e)}]$ par :

$$[M^{(e)}] = \int_{\Omega_s^{(e)}} [N^{(e)}]^t \rho [N^{(e)}] d\Omega_s^{(e)} \quad (I-27)$$

et le vecteur des forces des nœuds appliquées $\underline{F}^{(e)}$ par :

$$\underline{F}^{(e)} = \int_{S_T^{(e)}} [N^{(e)}]^t \underline{f} dS_T^{(e)} \quad (I-28)$$

il est alors possible d'exprimer la fonctionnelle sous la forme :

$$\mathcal{L}_s = \sum_e \left(\frac{1}{2} \underline{U}^{t(e)} [K_{uu}^{(e)}] \underline{U}^{(e)} - \frac{\omega^2}{2} \underline{U}^{t(e)} [M^{(e)}] \underline{U}^{(e)} - \underline{U}^{t(e)} \underline{F}^{(e)} \right) \quad (I-29)$$

Le système d'équations linéaires à résoudre est obtenu après minimisation de la fonctionnelle par rapport aux inconnues nœuds. Il s'écrit :

$$\left([K_{uu}] - \omega^2 [M] \right) \underline{U} = \underline{F} \quad (I-30)$$

où la matrice $[K_{uu}]$ est la matrice de rigidité mécanique globale, $[M]$ la matrice masse cohérente globale. Ces matrices sont symétriques et sont obtenues par assemblage des matrices élémentaires. \underline{U} est le vecteur global des valeurs nœuds des déplacements, et \underline{F} le vecteur global des forces nœuds appliquées obtenu par assemblage des vecteurs forces élémentaires. Pour les problèmes faisant intervenir un domaine piézoélectrique, la fonctionnelle discrétisée s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p = & \sum_e \left(\frac{1}{2} \underline{U}^{t(e)} [K_{uu}^{(e)}] \underline{U}^{(e)} - \frac{\omega^2}{2} \underline{U}^{t(e)} [M^{(e)}] \underline{U}^{(e)} - \underline{U}^{t(e)} \underline{F}^{(e)} \right) \\ & + \sum_e \left(-\frac{1}{2} \underline{\Phi}^{t(e)} [K_{\phi\phi}^{(e)}] \underline{\Phi}^{(e)} + \underline{U}^{t(e)} [K_{u\phi}^{(e)}] \underline{\Phi}^{(e)} \right) + \underline{\Phi} \underline{Q} \end{aligned} \quad (I-31)$$

où $[K_{\phi\phi}^{(e)}]$ est la matrice élémentaire de rigidité diélectrique, donnée par la formule :

$$\left[\mathbf{K}_{\phi\phi}^{(e)} \right] = - \int_{\Omega_p^{(e)}} \left[\mathbf{B}_{\phi}^{(e)} \right]^t \left[\boldsymbol{\varepsilon}^s \right] \left[\mathbf{B}_{\phi}^{(e)} \right] d\Omega_p^{(e)} \quad (\text{I-32})$$

$[\mathbf{B}_{\phi}^{(e)}]$ est la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation du potentiel électrique. $[\mathbf{K}_{u\phi}^{(e)}]$ est la matrice élémentaire de rigidité piézoélectrique, donnée par la formule :

$$\left[\mathbf{K}_{u\phi}^{(e)} \right] = \int_{\Omega_p^{(e)}} \left[\mathbf{B}^{(e)} \right]^t \left[\mathbf{e} \right] \left[\mathbf{B}_{\phi}^{(e)} \right] d\Omega_p^{(e)} \quad (\text{I-33})$$

$\underline{\Phi}$ est le vecteur global des valeurs nodales de potentiel électrique et \underline{Q} le vecteur global des valeurs nodales des charges électriques. Le système d'équations linéaires du problème piézoélectrique, résultant de l'assemblage de ces matrices élémentaires s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \left[\mathbf{K}_{uu} \right] - \omega^2 \left[\mathbf{M} \right] & \left[\mathbf{K}_{u\phi} \right] \\ \left[\mathbf{K}_{u\phi} \right]^t & \left[\mathbf{K}_{\phi\phi} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}} \\ \underline{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}} \\ -\underline{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \quad (\text{I-34})$$

où $[\mathbf{K}_{u\phi}]$ est la matrice de rigidité piézoélectrique globale et $[\mathbf{K}_{\phi\phi}]$ la matrice de rigidité diélectrique globale. Elles sont toutes deux symétriques, obtenues par assemblage des matrices élémentaires.

I-2.4 Méthode des éléments finis appliquée aux fluides parfaits

Le domaine fluide est découpé en éléments finis (figure I-6). Dans chacun de ces éléments, la pression p est reliée aux valeurs nodales de la pression $\underline{\mathbf{P}}^{(e)}$ de l'élément à l'aide des fonctions d'interpolation de Lagrange.

$$p = \left[\mathbf{N}_p^{(e)} \right] \underline{\mathbf{P}}^{(e)} \quad (\text{I-35})$$

Où $\underline{\mathbf{P}}^{(e)}$ est le vecteur des valeurs nodales de la pression, et $[\mathbf{N}_p^{(e)}]$ la matrice ligne des fonctions d'interpolation de la pression. En tout point du fluide, le flux ψ du champ de vitesse est directement lié à la dérivée normale de la pression. Il s'exprime par la formule :

$$\psi = \left[\mathbf{B}_p^{(e)} \right] \underline{\mathbf{P}}^{(e)} \quad (\text{I-36})$$

où $[\mathbf{B}_p^{(e)}]$ désigne la matrice des dérivées normales des fonctions d'interpolation de la pression. La fonctionnelle \mathcal{L}_f du problème fluide discrétisée par éléments finis s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_f &= \frac{1}{2\rho_f\omega^2} \sum_e \int_{\Omega_f^{(e)}} \mathbf{P}^{t(e)} \left[\mathbf{B}_p^{(e)} \right]^t \left[\mathbf{B}_p^{(e)} \right] \mathbf{P}^{(e)} d\Omega_f^{(e)} \\
 &\quad - \frac{k_f^2}{2\rho_f\omega^2} \sum_e \int_{\Omega_f^{(e)}} \mathbf{P}^{t(e)} \left[\mathbf{N}_p^{(e)} \right] \left[\mathbf{N}_p^{(e)} \right] \mathbf{P}^{(e)} d\Omega_f^{(e)} \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_f\omega^2} \sum_e \int_{\Gamma_\psi^{(e)}} \mathbf{P}^{t(e)} \left[\mathbf{N}_p^{(e)} \right]^t \psi dS_\psi^{(e)}
 \end{aligned} \tag{I-37}$$

$d\Omega_f^{(e)}$ est l'élément d'intégration de volume, et $dS_\psi^{(e)}$ l'élément d'intégration de la surface sur laquelle on impose le flux ψ . L'intégrale relative à $S_p^{(e)}$ a été omise pour les mêmes raisons que l'intégrale relative à S_u dans le solide (voir paragraphe I-2.3).

En définissant la matrice élémentaire de compressibilité fluide $[\mathbf{H}^{(e)}]$:

$$\left[\mathbf{H}^{(e)} \right] = \int_{\Omega_f^{(e)}} \rho_f c_f^2 \left[\mathbf{B}_p^{(e)} \right]^t \left[\mathbf{B}_p^{(e)} \right] d\Omega_f^{(e)} \tag{I-38}$$

la matrice masse cohérente élémentaire du fluide $[\mathbf{M}_1^{(e)}]$:

$$\left[\mathbf{M}_1^{(e)} \right] = \int_{\Omega_f^{(e)}} \left[\mathbf{N}_p^{(e)} \right]^t \rho_f \left[\mathbf{N}_p^{(e)} \right] d\Omega_f^{(e)} \tag{I-39}$$

et le vecteur élémentaire des valeurs nodales du flux $\underline{\Psi}^{(e)}$:

$$\underline{\Psi}^{(e)} = \int_{\Gamma_\psi^{(e)}} \left[\mathbf{N}_p^{(e)} \right]^t \psi d\Gamma_\psi^{(e)} \tag{I-40}$$

Il est alors possible d'exprimer la fonctionnelle dans le cas du fluide seul sous la forme :

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{\rho_f c_f^2 \omega^2} \sum_e \left(\frac{1}{2} \mathbf{P}^{t(e)} \left[\mathbf{H}^{(e)} \right] \mathbf{P}^{(e)} - \frac{\omega^2}{2} \mathbf{P}^{t(e)} \left[\mathbf{M}_1^{(e)} \right] \mathbf{P}^{(e)} - \rho_f c_f^2 \mathbf{P}^{t(e)} \underline{\Psi}^{(e)} \right) \tag{I-41}$$

L'application du principe variationnel conduit à minimiser la fonctionnelle par rapport aux valeurs nodales de la pression. Le système d'équations linéaires obtenu est donné par la formule (I-42) :

$$\left([H] - \omega^2 [M_1] \right) \underline{P} = \rho_f c_f^2 \underline{\Psi} \quad (I-42)$$

où $[H]$ et $[M_1]$ représentent respectivement la matrice de compressibilité globale et la matrice masse cohérente globale toutes deux symétriques. \underline{P} est le vecteur global des valeurs nodales de pression et $\underline{\Psi}$ le vecteur global des valeurs nodales de flux, obtenu par assemblage des vecteurs flux élémentaires. Lorsque nous sommes en présence d'un problème fluide ouvert, le vecteur $\underline{\Psi}$ dépend de la condition de rayonnement imposée sur la frontière extérieure. La condition idéale est une condition de non-réflexion numérique quelle que soit la forme de l'onde qui se propage dans le fluide. Sa formulation est analysée en détail dans les références [21-22]. Sachant que la surface extérieure est une sphère modélisée en symétrie de révolution, le champ de pression sur cette surface admet le développement multipolaire suivant :

$$p(r, \theta) = \frac{e^{-jk_f R}}{jk_f R} \sum_{n \geq 0} \frac{F_n(\theta)}{(jk_f R)} \quad (I-43)$$

où R est le rayon de la sphère frontière, F_n une fonction angulaire se déduisant de F_{n-1} par une relation différentielle. Les éléments de type dipolaire développés dans le code de calcul ATILA sont conçus pour absorber totalement les ondes associées aux deux premiers termes de ce développement, Dans ce cas le vecteur $\underline{\Psi}$ s'écrit sous la forme :

$$\underline{\Psi} = -\frac{1}{\rho_f c_f} \left(\frac{1}{R} + j \frac{\omega}{c_f} \right) [D] \underline{P} + \frac{1}{\rho_f c_f} \frac{\frac{1}{R} - j \frac{\omega}{c_f}}{1 + \frac{\omega^2 R^2}{c_f^2}} [D'] \underline{P} \quad (I-44)$$

où $[D]$ et $[D']$ sont obtenues par assemblage des matrices élémentaires $[D^{(e)}]$ et $[D'^{(e)}]$ de sphère rayonnante. Les matrices élémentaires de sphère rayonnante sont données par les équations (I-45) et (I-46). La frontière extérieure étant une sphère, l'élément d'intégration de surface $d\Gamma_\infty^{(e)}$ est exprimé en fonction de θ .

$$[D^{(e)}] = \int_{\Gamma_\infty^{(e)}} [N_p^{(e)}]^t [N_p^{(e)}] \sin \theta d\theta \quad (I-45)$$

$$[D'^{(e)}] = \int_{\Gamma_\infty^{(e)}} [\nabla_\theta N_p^{(e)}]^t [\nabla_\theta N_p^{(e)}] \sin \theta d\theta \quad (I-46)$$

$[\nabla_\theta N_p^{(e)}]$ est la matrice ligne des dérivées des fonctions d'interpolation de la pression suivant θ de l'élément $\Gamma_\infty^{(e)}$.

I-2.5 Couplage fluide-solide

Les problèmes étudiés séparément sont linéaires et l'application du théorème de superposition permet de dire que la fonctionnelle du problème global est la somme des fonctionnelles associées au solide et au fluide. La discrétisation en éléments finis conduit alors au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2 [M] & [K_{u\phi}] & -[L] \\ [K_{u\phi}]^t & [K_{\phi\phi}] & [0] \\ -\rho_f^2 c_f^2 \omega^2 [L]^t & [0] & [H] - \omega^2 [M_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\Phi} \\ \underline{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ -\underline{Q} \\ \rho_f c_f^2 \underline{\Psi} \end{bmatrix} \quad (I-47)$$

On peut remarquer dans la relation (I-47) que le système linéaire à résoudre n'est pas symétrique. De plus la matrice globale du premier membre étant creuse, un assemblage par ligne ciel est utilisé [11-12]. Dans cette dernière relation, $[L]$ désigne la matrice de couplage fluide-solide obtenue par assemblage des matrices élémentaires de couplage fluide-solide $[L^{(e)}]$ définies par la relation suivante :

$$[L^{(e)}] = \int_{S_i} [N^{(e)}]^t \underline{n} [N_p^{(e)}] dS_i \quad (I-48)$$

où \underline{n} désigne le vecteur normal unitaire orienté du fluide vers le solide.

I-2.6 Introduction des pertes

Dans un solide élastique ou une céramique piézoélectrique, des pertes mécaniques, piézoélectriques, diélectriques peuvent exister. Leur prise en compte se fait en introduisant des constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques complexes pour décrire les dissipations d'énergie [26]. Pour un matériau élastique isotrope, on écrit :

$$E = E' + jE'' \quad (I-49)$$

E est le module de Young E' sa partie réelle et E'' sa partie imaginaire. On définit la tangente de l'angle de pertes mécanique δ par le rapport de E'' sur E' , soit :

$$\tan(\delta) = \frac{E''}{E'} \quad (I-50)$$

De même lorsque le matériau est piézoélectrique les tenseurs $[s^E]$, $[d]$ et $[\epsilon^T]$ sont complexes.

I-3 Formulation du rayonnement dans un milieu infini élastique isotrope

La méthode des éléments finis est un outil de calcul qui permet de modéliser le rayonnement de transducteur piézoélectrique dans un milieu élastique fini. Lorsque le milieu élastique devient infini, la modélisation par éléments finis d'un tel milieu impose naturellement la limitation du domaine de calcul par une surface Γ_{ext} qui joue le rôle d'une surface extérieure. Si une condition aux limites appropriée n'est pas prescrite sur cette surface, cette troncature génère des ondes réfléchies qui théoriquement n'existent pas dans un milieu infini.

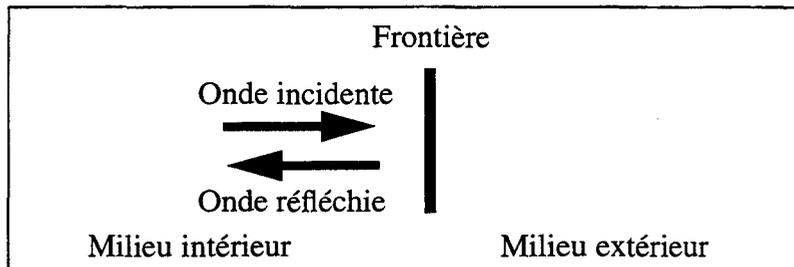


Figure I-8.a : Frontière totalement réfléchissante

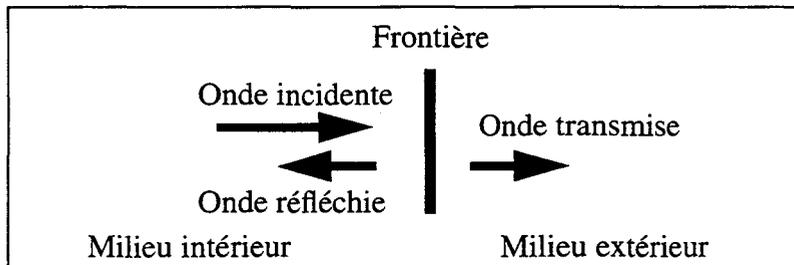


Figure I-8.b : Frontière partiellement transparente

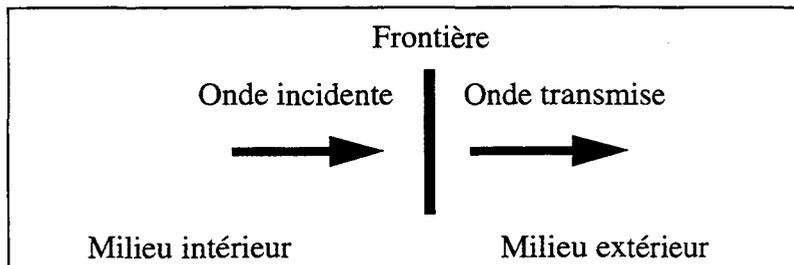


Figure I-8.c : Frontière parfaitement transparente

Les figures I-8.a à I-8.c montrent les différents cas auxquels nous pouvons être confrontés. Les conditions aux limites idéales correspondent à la figure-8.c où la frontière est alors parfaitement transparente. Dans ce cas, l'onde incidente est totalement transmise. Les figures I-8.a et I-8.b correspondent aux cas où le milieu de propagation est limité ou illimité avec une variation brutale des propriétés du matériau à la frontière. C'est le cas si la frontière sépare deux solides différents. L'onde incidente est alors partiellement ou totalement réfléchie.

Dans un milieu infini élastique isotrope plusieurs types de rayonnements élémentaires sont possibles. Le premier est le rayonnement d'une source ponctuelle : la nature du rayonnement est alors sphérique. Le second est celui d'une source infinie dans une direction (exemple : rayonnement d'une droite dans un milieu infini.). Dans ce cas, la nature du rayonnement est cylindrique. Le rayonnement d'un transducteur piézoélectrique dans un puits de forage est une combinaison de ces deux types de rayonnement, rendant délicat la prise en compte exacte des conditions aux limites.

Pour résoudre numériquement les problèmes de rayonnement dans un milieu infini, deux types de conditions aux limites sont possibles : des conditions aux limites locales ou intégrales. Les conditions aux limites locales reposent sur une connaissance a priori des ondes se propageant dans le milieu. C'est le cas des éléments infini et éléments d'impédance mécanique étudiés dans la suite de ce chapitre. Pour chacun de ces éléments, on suppose que la nature rayonnement de l'onde est sphérique et/ou cylindrique. Nous nous limiterons au cas du rayonnement sphérique pour l'élément infini, et nous traiterons les deux types de rayonnements pour l'élément d'impédance mécanique. Les conditions intégrales, qui sont des conditions exactes ne nécessitent aucune hypothèse sur le type d'onde. Elles reposent généralement sur l'obtention d'une fonction entre points appelée fonction d'influence. Avant de développer les différents types d'éléments, nous discuterons les solutions des problèmes physiques liées aux ondes cylindrique et sphérique.

I-3.1 Solutions élémentaires du rayonnement en milieu élastique infini

I-3.1.1 Analyse en déformations planes : rayonnement cylindrique

Le problème physique à résoudre est celui du cylindre infini pulsant et/ou tournant. On travaille dans le repère cylindrique (r, θ) , où r est le rayon polaire et θ l'angle polaire (figure I-9). u_p désigne la composante radiale du déplacement associée à l'onde de compression, et u_s la composante tangentielle du déplacement, associée à l'onde de cisaillement horizontale. Dans ce cas, on peut dire que les composantes u_p et u_s du déplacement ne sont fonction que de r . Par suite, toutes les dérivées suivant θ sont identiquement nulles. Si l'on calcule la dilatation volumique du milieu, qui est la trace du tenseur des déformations, on constate que celle-ci ne dépend que de la composante radiale. Par conséquent, si l'on ne propage que l'onde de cisaillement la dilatation volumique du milieu est nulle. Ce résultat permet d'affirmer que l'onde S peut se propager indépendamment de l'onde P, et réciproquement. La loi de comportement du milieu solide élastique homogène isotrope permet de déterminer les différents termes du tenseur des contraintes, en coordonnées cylindriques [25] :

$$\begin{aligned} T_{rr} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_p}{\partial r} + \frac{\lambda u_p}{r} \\ T_{\theta\theta} &= (2\mu + \lambda) \frac{u_p}{r} + \lambda \frac{\partial u_p}{\partial r} \\ T_{r\theta} &= \mu \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{u_s}{r} \right) \end{aligned} \quad (I-51)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé du solide considéré. Les projections, dans le repère cylindrique de l'équation fondamentale de la dynamique, conduisent au système d'équations différentielles ci-dessous :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_p}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_p}{\partial r} + (k_p^2 r^2 - 1) u_p = 0$$

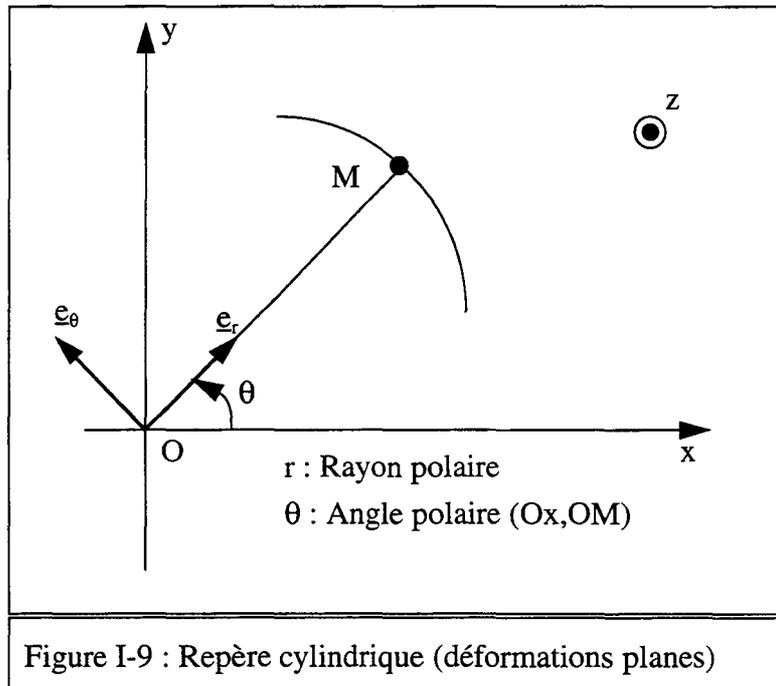
$$r^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_s}{\partial r} + (k_s^2 r^2 - 1) u_s = 0$$
(I-52)

Nous sommes en présence de deux équations cylindriques de Bessel d'indice un à arguments et à valeurs complexes [27-28]. Les solutions fondamentales sont des fonctions de Hankel d'indice un de première et seconde espèce respectivement. Comme seules les ondes divergentes sont autorisées, on ne retiendra que les fonctions de Hankel de seconde espèce associées aux ondes divergentes comme solution fondamentale [29]. Par suite, on a :

$$u_p(r) = u_{0p} H_{c1}^{(2)}(k_p r)$$

$$u_s(r) = u_{0s} H_{c1}^{(2)}(k_s r)$$
(I-53)

où u_{0p} et u_{0s} sont des constantes complexes déterminées par les conditions aux limites. $H_{c1}^{(2)}$ désigne la fonction cylindrique de Hankel d'indice un et de seconde espèce. k_p et k_s sont les nombres d'onde associés aux ondes P et S respectivement.



I-3.1.2 Analyse en symétrie axiale : rayonnement sphérique

On considère dans un repère sphérique (r, ϕ, θ) , où r désigne le rayon vecteur, ϕ l'angle polaire, et θ l'angle azimutal (figure I-10). u_p désigne la composante radiale du déplacement associée à l'onde de compression et u_s la composante tangentielle suivant \underline{e}_θ , associée à l'onde de cisaillement. La symétrie de révolution conduit à dire qu'il n'y a pas de déplacement suivant \underline{e}_ϕ et que toutes les dérivées suivant ϕ sont identiquement nulles.

Faisons l'hypothèse d'une propagation purement sphérique des ondes P et S : toutes les dérivées suivant θ sont identiquement nulles (celles suivant ϕ étant annulées par la symétrie de révolution). La loi de comportement du solide élastique classique nous donne les termes non nuls du tenseur des contraintes associé au champ de déplacement [25] :

$$\begin{aligned} T_{rr} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_p}{\partial r} + \frac{2\lambda u_p}{r} + \frac{\lambda}{r} \cot g(\theta) u_s \\ T_{r\theta} &= \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - \frac{u_s}{r} \right) \\ T_{\theta\theta} &= 2(\mu + \lambda) \frac{u_p}{r} + \lambda \frac{\partial u_p}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \cot g(\theta) u_s \\ T_{\phi\phi} &= 2(\mu + \lambda) \frac{u_p}{r} + \frac{\lambda u_p}{r} + \frac{(2\mu + \lambda)}{r} \cot g(\theta) u_s \end{aligned} \quad (I-54)$$

Les projections du principe fondamental de la dynamique dans le repère sphérique conduisent au système d'équations différentielles suivant :

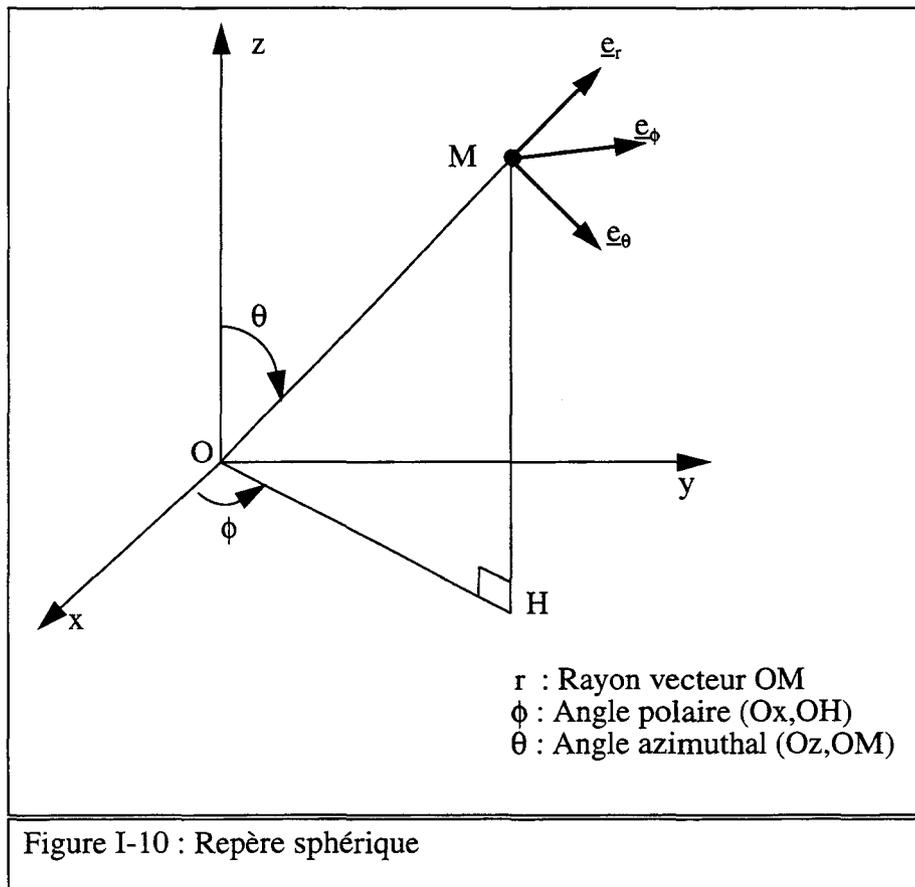
$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 u_p}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_p}{\partial r} + (k_p^2 r^2 - 2) u_p + \lambda \cot g(\theta) u_s &= 0 \\ r^2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_s}{\partial r} + k_s^2 r^2 u_s - \frac{u_s}{(\sin(\theta))^2} &= 0 \end{aligned} \quad (I-55)$$

La présence de l'angle θ dans les relations (I-54) et (I-55) montrent l'impossibilité de cette hypothèse. On remarque dans l'équation (I-55) : il faudrait que la composante tangentielle du déplacement soit nulle pour que la propagation de l'onde soit purement sphérique. Cela revient à dire que seule l'onde de compression peut avoir une propagation purement sphérique. Dans ce cas, l'équation (I-55) se simplifie et devient une équation de Bessel sphérique d'indice un, à valeur et argument complexes. Les solutions fondamentales sont des fonctions de Hankel d'indice un de première et seconde espèce [27-28]. Comme au paragraphe I-3.1.1, seules les ondes divergentes existent. La solution fondamentale retenue est la fonction sphérique de Hankel de seconde espèce [29].

La solution exacte en champ lointain de l'excitation ponctuelle ou quasi-ponctuelle est proposée par la référence [30]. Dans cette solution les deux ondes sont découplées.

$$\begin{aligned} u_p(r) &= u_{0p} H_{s1}^{(2)}(k_p r) \\ u_s(r) &= u_{0s} H_{s0}^{(2)}(k_s r) \end{aligned} \quad (\text{I-56})$$

où u_{0p} et u_{0s} sont des constantes complexes. $H_{s1}^{(2)}$ (respectivement $H_{s0}^{(2)}$) désigne la fonction sphérique de Hankel d'indice un (respectivement zéro) et de seconde espèce [27-28].



I-3.2 Élément infini

I-3.2.1 Principe et état de l'art

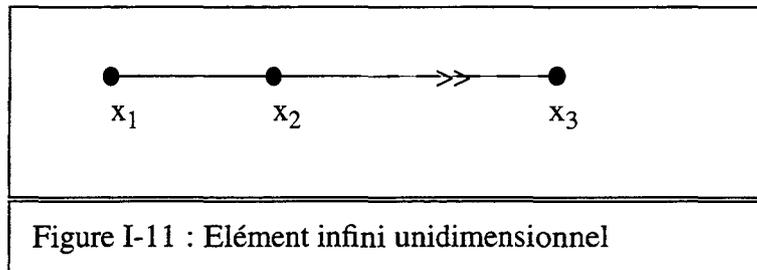
Pour certaines classes d'équations différentielles, il est possible par un changement de variable, de transformer un domaine extérieur en un domaine intérieur et de rechercher les solutions dans le domaine intérieur. Ainsi l'extérieur d'un cercle peut être réduit en l'intérieur de ce cercle par une transformation conforme. Le principe de l'élément infini est identique. Il est basé sur l'idée de transformer un domaine infini en un domaine fini, pouvant être traité comme un nouvel élément fini. Ainsi, un élément unidimensionnel à trois noeuds de coordonnées x_1 , x_2 , et x_3 où x_3 est rejetée à l'infini, est transformé dans le domaine $-1 < r < 1$ de coordonnées locale r , par (figure I-11) :

$$x(r) = M_1(r)x_1 + M_2(r)x_2 \quad (\text{I-57})$$

où les fonctions M_1 et M_2 décrivant la géométrie de l'élément infini sont données par la transformation :

$$\begin{aligned} M_1(r) &= \frac{-2r}{1-r} \\ M_2(r) &= \frac{1+r}{1-r} \end{aligned} \quad (\text{I-58})$$

Lorsque $r = -1, 0$ et $+1$ on obtient pour x les valeurs x_1, x_2, x_3 respectivement.



Ces éléments ont été introduits par R. L. Ungless [31] et P. Bettess [32]. La principale nouveauté de ces éléments par rapport aux éléments finis réside dans le choix des fonctions d'interpolation. Pour un tel élément, deux conditions doivent être satisfaites : 1) ces fonctions doivent pouvoir décrire les effets physiques comme la divergence géométrique ou le caractère oscillatoire d'une onde propagative. 2) les intégrales à travers l'élément doivent converger et être calculables numériquement. Il apparaîtra dans la suite que cette dernière condition n'est pas toujours simple à satisfaire.

Pour l'étude d'un problème unidimensionnel dans la direction x en statique, dans lequel l'inconnue du problème tend vers zéro lorsque la coordonnée x tend vers l'infini, P. Bettess [32] propose les fonctions d'interpolation données par les équations (I-59) et (I-60) :

$$N_i(x) = e^{(x_i - x)/l} \prod_{k=1, k \neq i}^{n-1} \frac{x_k - x}{x_k - x_i} \quad (\text{I-59})$$

pour i allant de 1 à $n-1$ et :

$$N_n(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} N_i(x) \quad (\text{I-60})$$

où n est le nombre de points de l'élément dans la direction x . Les $n-1$ premiers points ont des abscisses finies et le n -ième point se situe à l'infini. On remarquera que les fonctions d'interpolation vérifient les conditions de continuité du déplacement entre deux éléments adjacents :

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (\text{I-61})$$

Dans l'équation (I-59), l représente une échelle de longueur qui caractérise la décroissance, liée à la divergence géométrique du problème.

La description du caractère oscillatoire de l'onde propagative se fait en multipliant ces fonctions d'interpolation par une exponentielle complexe. P. Bettess et O. C. Zienkiewicz [33] ont proposé pour la résolution de problèmes de diffraction d'ondes de surface dans les fluides, les fonctions d'interpolation suivantes :

$$N_i(x) = e^{(x_i - x)/l} e^{jkx} \prod_{k=1, k \neq i}^{n-1} \frac{x_k - x}{x_k - x_i} \quad (\text{I-62})$$

pour i variant de 1 à $n-1$. Lorsque i est égal à n la formule (I-60) reste valable. Le terme k est le nombre d'onde. Le terme e^{jkx} traduit le caractère oscillatoire du phénomène. Cette fois-ci l est fonction de la divergence géométrique et de la dissipation d'énergie, lorsque le milieu est dissipatif. L'équation (I-62) donne les fonctions d'interpolation de l'élément infini d'un problème unidimensionnel d'onde propagative. Elles sont chacune constituées du produit d'une exponentielle réelle caractérisant la décroissance de l'onde, d'une exponentielle imaginaire caractérisant la nature propagative de l'onde et d'une fonction de forme décrivant la géométrie de l'élément. Lors du calcul des matrices élémentaires apparaissent des intégrales de zéro à l'infini, calculées par la méthode de Gauss-Coates. Le terme exponentiel lié à la décroissance de l'onde garanti la convergence numérique de ces intégrales.

On peut de la même manière définir des éléments infinis s'étendant à l'infini dans plusieurs directions de l'espace. P. Bettess [34] a mis au point des éléments infinis isoparamétriques en statique. La méthode consiste à partir d'un élément fini isoparamétrique à n noeuds, ayant pour fonctions de forme les $M_i(r,s)$ i variant de 1 à n , d'introduire des fonctions décroissantes $f_i(r,s)$, nulles lorsque l'on tend vers l'infini. On définit $f_i(r,s)$ comme le produit de deux exponentielles caractérisant l'atténuation de l'onde dans les deux directions. Les fonctions d'interpolation de l'élément infini sont alors définies comme :

$$N_i(r, s) = e^{(r_i - r)/l_1} e^{(s_i - s)/l_2} M_i(r, s) \quad (I-63)$$

Dans cette dernière formule il n'y a pas de sommation sur l'indice i . Cette modification permet de prendre en compte les propriétés de champ de l'inconnue au loin, qui ne pourraient être satisfaites par les fonctions de formes $M_i(r, s)$ de l'élément fini. Pour satisfaire les conditions de continuité des variables nodales entre deux éléments contigus, il faut que la relation suivante soit satisfaite pour tout i :

$$f(r_i, s_i) = 1 \quad (I-64)$$

Le passage à la propagation d'onde se fait en multipliant les fonctions d'interpolation données dans l'équation (I-63) par des exponentielles complexes associées aux ondes se propageant dans les directions r et s . On peut donner pour exemple l'élément infini dans deux directions de l'espace propageant une onde dans chacune des directions introduit par Chow et *al* [35]. Dans le cas d'un problème élastique, on peut propager jusqu'à trois types d'ondes : l'onde P, l'onde S et l'onde de Rayleigh dite onde R. Le défaut de ces éléments est de ne pouvoir propager qu'une seule onde à la fois dans un élément et dans une direction. Les fonctions d'interpolation de cet élément dans le cas d'un problème bidimensionnel sont :

$$N_i(r, s) = e^{(r_i - r)/l_1} e^{(s_i - s)/l_2} e^{jk_1 r} e^{jk_2 s} M_i(r, s) \quad (I-65)$$

Pour i variant de 1 à n , où n désigne le nombre de noeuds de l'élément. l_1 et l_2 sont des échelles de longueur dans les directions r et s s'étendant à l'infini. Elles caractérisent les décroissances de l'amplitude des ondes dans chacune de ces directions. k_1 et k_2 sont les nombres d'ondes dans les mêmes directions. $M_i(r, s)$ sont des fonctions d'interpolation de type Lagrange. Il faut noter que r et s sont ici des coordonnées paramétriques réduites.

Après détermination des fonctions d'interpolation, le calcul des matrices élémentaires nécessite des intégrations de zéro à l'infini. Pour cela, la méthode d'intégration classique de Gauss-Laguerre est utilisée en statique [34], tandis que celle de Gauss-Coates est utilisée en dynamique [33, 35].

C. Zhao et *al* [36] ont proposé un élément infini tridimensionnel pour les problèmes d'ondes élastiques dans les solides. Il a pour atout majeur de pouvoir propager jusqu'à trois types d'ondes dans la même direction s'étendant à l'infini. Nous avons étendu le développement de cet élément au cas bidimensionnel avec symétrie de révolution. Le paragraphe qui suit présente en détail le développement de cet élément.

I-3.2.2 Formulation théorique de l'élément infini

Les éléments infinis que nous utilisons sont tous constitués de deux arcs de cercles concentriques reliés par deux demi-droites dont les prolongements se coupent au point source de l'excitation (figure I-12). On peut associer à cet élément un élément de référence (ou réduit), le passage de l'élément réduit à l'élément réel s'effectuant par une application bijective ψ tel que :

$$\Psi(r_i, s_i) = (x_i, y_i) \tag{I-66}$$

où l'image du noeud i de l'élément réduit est le noeud i de l'élément réel. Ainsi à tout point (r,s) appartenant à l'élément réduit, on peut associer à l'aide de l'application ψ un point unique (x,y) de l'élément réel défini par :

$$x(r, s) = \sum_{i=1}^n M_i(r_i, s_i) x_i^{(e)} \quad ; \quad y(r, s) = \sum_{i=1}^n M_i(r_i, s_i) y_i^{(e)} \tag{I-67}$$

Dans ces deux expressions n désigne le nombre de points de l'élément. $x_i^{(e)}$ et $y_i^{(e)}$ sont respectivement les abscisses et ordonnées nodales de l'élément réel dans le repère global. Les M_i sont les fonctions de formes de l'élément fini quadratique à huit noeuds [11-12].

On définit la matrice jacobienne de la transformation ψ de la manière suivante :

$$[J_{(r,s)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \tag{I-68}$$

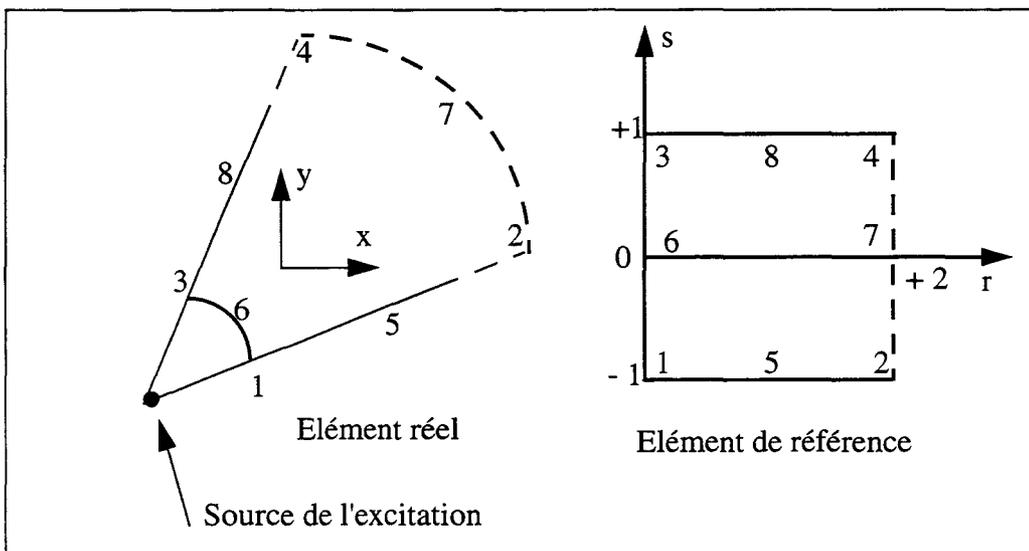


Figure I-12 : Passage de l'élément infini réel à l'élément de référence

L'approximation que l'on utilise est une approximation par éléments finis, c'est à dire que le déplacement en un point de l'élément est relié aux valeurs nodales du déplacement de l'élément :

$$u(x, y) = [N^{(e)}(r, s)] \underline{U}^{(e)} \quad (I-69)$$

$[N^{(e)}(r,s)]$ est la matrice des fonctions d'interpolation du déplacement au point (r,s) . On prend [36] :

$$\begin{aligned} N_1(r, s) &= p_1(r) \left(-\frac{s}{2}(1-s) \right) & N_5(r, s) &= p_2(r) \left(-\frac{s}{2}(1-s) \right) \\ N_2(r, s) &= p_3(r) \left(-\frac{s}{2}(1-s) \right) & N_6(r, s) &= p_1(r)(1-s^2) \\ N_3(r, s) &= p_1(r) \left(\frac{s}{2}(1+s) \right) & N_7(r, s) &= p_3(r)(1-s^2) \\ N_4(r, s) &= p_3(r) \left(\frac{s}{2}(1+s) \right) & N_8(r, s) &= p_2(r) \left(\frac{s}{2}(1+s) \right) \end{aligned} \quad (I-70)$$

où les p_i sont les fonctions de propagation de l'élément déterminées à l'aide des propriétés des ondes élastiques dans un milieu homogène isotrope infini soumis à une excitation ponctuelle ou quasi-ponctuelle. La solution en champ lointain de ce problème est connue [30, 36] :

$$\begin{aligned} u(r) &= u_0 H_{s1}^{(2)}(k_p r) \\ v(r) &= v_0 H_{s0}^{(2)}(k_s r) \\ w(r) &= w_0 H_{s0}^{(2)}(k_s r) \end{aligned} \quad (I-71)$$

u , v et w sont les composantes complexes du déplacement dans le repère sphérique. k_p et k_s sont les nombres d'ondes des ondes P et S, r la distance à la source, $H_{s1}^{(2)}$ et $H_{s0}^{(2)}$ les fonctions sphériques de Hankel de seconde espèce d'indice un et zéro respectivement. Compte tenu de la symétrie de révolution, la composante w du déplacement est identiquement nulle. Les ondes P et S sont approchées au loin par des fonctions de Hankel. On montre qu'au loin, l'onde de Rayleigh peut être remplacée par une exponentielle complexe :

$$u_R \sim A_R e^{-(\alpha + jk_R)r} \quad (I-72)$$

α désigne le coefficient de décroissance l'onde de Rayleigh [37]. Il est approché par l'équation (I-73).

$$\alpha = k_R \left(1 - \frac{v_R^2}{v_T^2} \right)^{1/2} \quad (\text{I-73})$$

On obtient finalement :

$$p_i(r) = E_{1i} H_{s1}^{(2)}(k_p r) + E_{2i} H_{s0}^{(2)}(k_s r) + E_{3i} e^{-(\alpha + jk_R)r} \quad (\text{I-74})$$

Afin de satisfaire aux conditions de continuité des variables nodales entre deux éléments adjacents, on doit écrire les systèmes d'équations suivants :

$$p_i(r_j) = \delta_{ij} \quad (\text{I-75})$$

ce qui nous donne trois systèmes d'équations linéaires, dont les solutions sont les coefficients E_{ij} , donnés dans la formule (I-76). Ceci détermine complètement les fonctions p_i :

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{H_{s0}^{(2)}(k_s r_m) H(r_2) - H_{s0}^{(2)}(k_s r_2) H(r_m)}{\Delta} \\ E_{12} &= \frac{H_{s0}^{(2)}(k_s r_2) H(r_1) - H_{s0}^{(2)}(k_s r_1) H(r_2)}{\Delta} \\ E_{13} &= \frac{H_{s1}^{(2)}(k_p r_2) H(r_m) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_m) H(r_2)}{\Delta} \\ E_{21} &= \frac{H_{s1}^{(2)}(k_p r_2) H(r_m) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_m) H(r_2)}{\Delta} \\ E_{22} &= \frac{H_{s1}^{(2)}(k_p r_1) H(r_2) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_2) H(r_1)}{\Delta} \\ E_{23} &= \frac{H_{s1}^{(2)}(k_p r_m) H(r_1) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_1) H(r_m)}{\Delta} \\ E_{31} &= \frac{H_{s1}^{(2)}(k_p r_m) H_{s0}^{(2)}(k_s r_2) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_2) H_{s0}^{(2)}(k_s r_m)}{\Delta} \\ E_{32} &= \frac{H_{s1}^{(2)}(k_p r_2) H_{s0}^{(2)}(k_s r_1) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_1) H_{s0}^{(2)}(k_s r_2)}{\Delta} \\ E_{33} &= \frac{H_{s1}^{(2)}(k_p r_1) H_{s0}^{(2)}(k_s r_m) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_m) H_{s0}^{(2)}(k_s r_1)}{\Delta} \end{aligned} \quad (\text{I-76})$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta = & H_{s1}^{(2)}(k_p r_1) H_{s0}^{(2)}(k_s r_m) H(r_2) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_1) H_{s0}^{(2)}(k_s r_2) H(r_m) \\ & + H_{s1}^{(2)}(k_p r_2) H_{s0}^{(2)}(k_s r_1) H(r_m) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_2) H_{s0}^{(2)}(k_s r_m) H(r_1) \\ & + H_{s1}^{(2)}(k_p r_m) H_{s0}^{(2)}(k_s r_2) H(r_1) - H_{s1}^{(2)}(k_p r_m) H_{s0}^{(2)}(k_s r_1) H(r_2) \end{aligned} \quad (I-77)$$

et :

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (I-78)$$

où r_1 et r_2 sont les rayons intérieur et extérieur des arcs de cercles concentriques de l'élément infini. Dans ces expressions les fonctions sphériques de Hankel d'indice 0 et d'indice un, sont associées aux ondes S et P respectivement. La fonction H est associée à l'onde de Rayleigh et est donnée par la formule (I-79) :

$$H(r) = e^{-(\alpha + jk_R)r} \quad (I-79)$$

Les figures I-13.a, à I-13.c montrent les fonctions de propagation en fonction de la variable réduite r pour un élément infini de longueur $l = 15$ m à 500 Hz. La formation dans laquelle se propage les ondes élastiques a les propriétés suivantes : $v_p = 5588$ m/s, $v_s = 3387$ m/s et $\rho = 2500$ kg/m³.

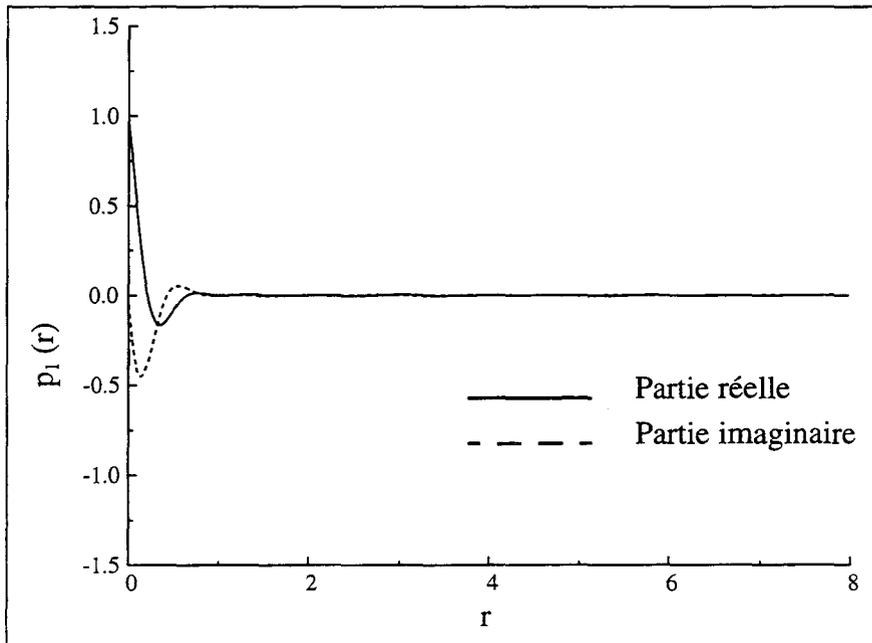


Figure I-13.a : Exemple de fonction de propagation de l'élément infini $p_1(r)$

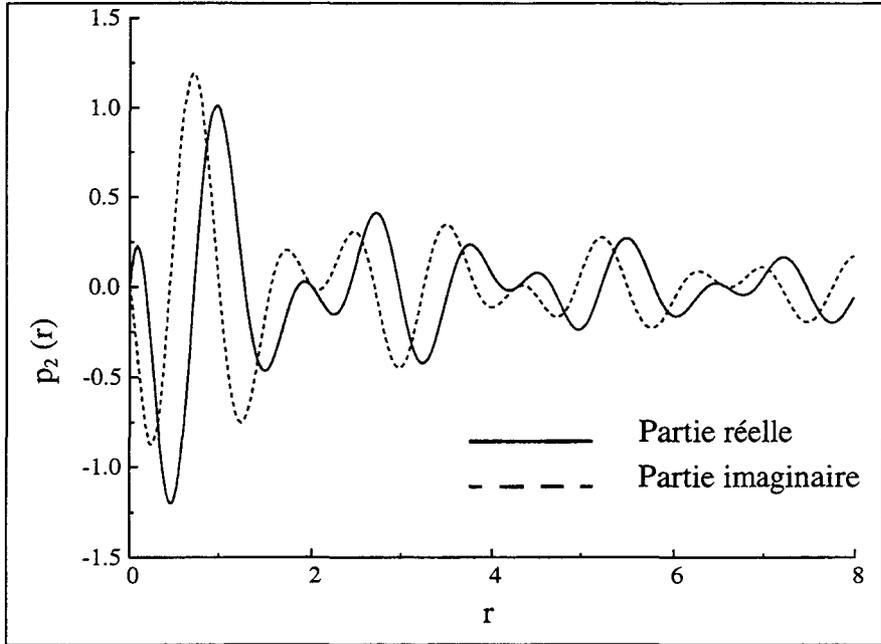


Figure I-13.b : Exemple de fonction de propagation de l'élément infini $p_2(r)$

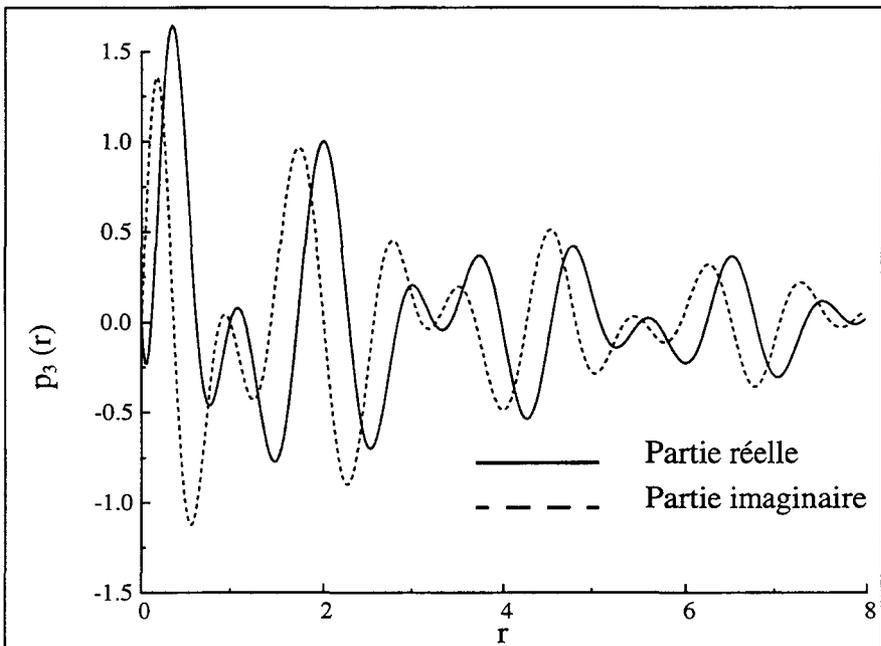


Figure I-13.c : Exemple de fonction de propagation de l'élément infini $p_3(r)$

I-3.2.3 Mise sous forme matricielle et intégration numérique

La formulation variationnelle utilisée est celle de Galerkin [11-12]. Les fonctions d'interpolation des inconnues du problème étant déterminées, les matrices de masse et de rigidité élémentaires s'expriment par :

$$\left[\mathbf{M}^{(e)}(\omega) \right] = \int_{\Omega^{(e)}} \left[\mathbf{N}^{(e)}(\omega) \right]^t \rho \left[\mathbf{N}^{(e)}(\omega) \right] \left\| \mathbf{J}_{(r,s)} \right\| dr ds \quad (\text{I-80})$$

pour la matrice de masse élémentaire,

$$\left[\mathbf{K}^{(e)}(\omega) \right] = \int_{\Omega^{(e)}} \left[\mathbf{B}^{(e)}(\omega) \right]^t \left[\mathbf{C}^E \right] \left[\mathbf{B}^{(e)}(\omega) \right] \left\| \mathbf{J}_{(r,s)} \right\| dr ds \quad (\text{I-81})$$

pour la matrice de rigidité élémentaire. Il est à noter que le domaine d'intégration $\Omega^{(e)}$ est défini par $\{r \geq 0; -1 \leq s \leq 1\}$. Ces matrices élémentaires sont complexes et fonction de la pulsation. Elles sont assemblées de manière classique avec les matrices issues des éléments finis, ce qui a pour conséquence de ne pas modifier la structure de bande de la matrice globale. Le système d'équations global ne change pas et s'écrit :

$$\left(\left[\mathbf{K}_{uu}(\omega) \right] - \omega^2 \left[\mathbf{M}(\omega) \right] \right) \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{F}} \quad (\text{I-82})$$

Les expressions des matrices élémentaires (équations (I-80) et (I-81)) contiennent des intégrales généralisées de zéro à l'infini, qui ne sont pas aisées à évaluer numériquement. Nous avons utilisé la méthode d'intégration de Gauss [11-12] par morceaux en tronquant arbitrairement le domaine d'intégration. Malgré cela l'évaluation de ces intégrales reste délicate. Les références [33-35] présentent les méthodes d'intégration utilisées usuellement pour le calcul des matrices élémentaires liées aux éléments infinis.

I-3.3 Élément d'impédance mécanique

I-3.3.1 Principe

Pour définir la matrice d'impédance mécanique, nous sommes conduits à trouver une relation matricielle locale entre les composantes du champ de déplacement (u_p composante radiale et u_s composante tangentielle) et les composantes du vecteur densité d'efforts surfaciques (f_r composante radiale et composante tangentielle f_θ). Il suffit pour cela de constater qu'il existe, d'après (I-53) et (II-56), une relation de proportionnalité entre les composantes du déplacement et leurs dérivées en champ lointain :

$$\frac{\partial u_p}{\partial r} = Z_p u_p \quad ; \quad \frac{\partial u_s}{\partial r} = Z_s u_s \quad (\text{I-83})$$

où Z_p et Z_s sont des coefficients complexes définis de la manière suivante :

$$Z_p = k_p H_p^{(2)}(k_p r) / H(k_p r) \quad ; \quad Z_s = k_s H_s^{(2)}(k_s r) / H(k_s r) \quad (\text{I-84})$$

Notons que la condition de rayonnement de Sommerfeld, donnée par l'équation (I-19) est alors automatiquement satisfaite [21-24]. Les coefficients Z_p et Z_s caractérisent un rayonnement monopolaire en déformations planes (respectivement en symétrie de révolution). H_p est la fonction cylindrique (respectivement sphérique) de Hankel d'indice un et seconde espèce et H_s la fonction cylindrique (respectivement sphérique) de Hankel d'indice un (respectivement zéro).

Soient M un point de la frontière extérieure Γ_{ext} du domaine à modéliser et \underline{n} le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur en M . On a d'après les lois de la mécanique des milieux continus [25] :

$$\underline{f}(M) = [\underline{T}(M)] \underline{n} \quad (\text{I-85})$$

où $[\underline{T}(M)]$ est le tenseur des contraintes au point M . Le tenseur $[\underline{T}(M)]$ est obtenu par la loi de comportement des milieux solides élastiques (donnée par l'équation (I-51) ou (I-54)). Si l'on développe l'expression (I-85), en tenant compte de (I-83) et de (I-84), on peut écrire une relation matricielle entre \underline{f} vecteur densité de forces surfaciques au point M et \underline{U} vecteur déplacement au même point. On établit ainsi grâce à un calcul relativement simple, la relation matricielle locale suivante :

$$\underline{f} = [\underline{Z}_{\text{loc}}] \underline{U} \quad (\text{I-86})$$

où $[\underline{Z}_{\text{loc}}]$ désigne la matrice d'impédance mécanique locale. Elle relie en tout point de la frontière les déplacements aux forces surfaciques. En déformations planes, on a :

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left((2\mu + \lambda)Z_p + \frac{\lambda}{r} \right) n_r & \mu \left(Z_s - \frac{1}{r} \right) n_\theta \\ \left(\frac{2\mu + 1}{r} + \lambda Z_p \right) n_\theta & \mu \left(Z_s - \frac{1}{r} \right) n_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ u_s \end{bmatrix} \quad (\text{I-87})$$

où n_r et n_θ sont les composantes du vecteur normal dans le repère cylindrique. Si Γ_{ext} est un arc de cercle, le vecteur normal est porté par le rayon polaire ($n_r = 1$; $n_\theta = 0$). La relation (I-87) se simplifie en :

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda)Z_p + \frac{\lambda}{r} & 0 \\ 0 & \mu \left(Z_s - \frac{1}{r} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ u_s \end{bmatrix} \quad (\text{I-88})$$

On voit alors que les deux ondes sont découplées. En symétrie de révolution, cette relation s'écrit lorsque la surface extérieure Γ_{ext} est une surface à r constant (le vecteur normal est donc porté par le rayon vecteur). On suppose que les deux ondes sont découplées, ce qui revient à annuler les termes contenant θ dans les équations (I-54) et (I-55) :

$$\begin{bmatrix} f_r \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left((2\mu + \lambda)Z_p + \frac{2\lambda}{r} \right) & 0 \\ 0 & \mu \left(Z_s - \frac{1}{r} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ u_s \end{bmatrix} \quad (\text{I-89})$$

I-3.3.2 Discrétisation par éléments finis

Les éléments surfaciques d'impédance mécanique sont simplement attachés aux éléments finis volumiques sur la frontière extérieure du domaine, afin de présenter une condition aux limites qui absorbe les ondes propagées. L'élément utilisé est un élément linéique à trois noeuds, comme l'indique la figure (I-14). L'interpolation du déplacement se fait à l'aide des fonctions de Lagrange. Par conséquent, dans chaque élément impédance, la valeur du déplacement en un point de l'élément est reliée aux valeurs nodales des déplacements de cet élément comme suit :

$$\underline{u} = \left[\mathbf{N}^{(e)} \right] \underline{U}^{(e)} \quad (\text{I-90})$$

Le passage de l'élément réel à l'élément de référence, le calcul des dérivées ainsi que celui du jacobien s'effectue de la même manière que pour l'élément fini classique [11-13].

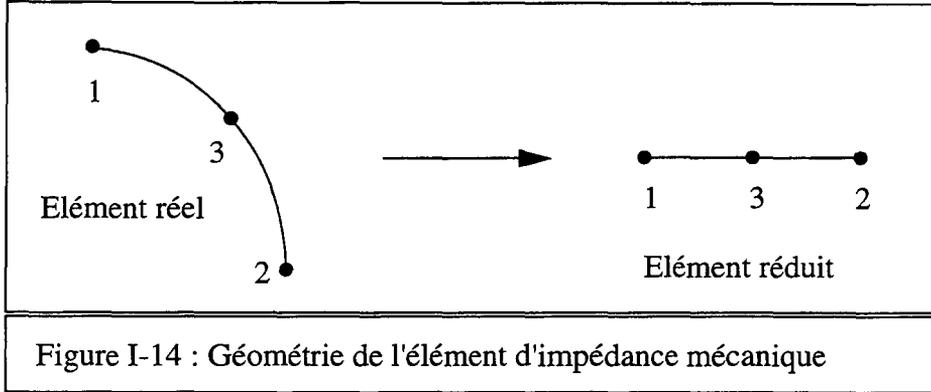


Figure I-14 : Géométrie de l'élément d'impédance mécanique

La frontière extérieure du domaine Γ_{ext} est découpée en éléments finis d'impédance mécanique. On suppose que la frontière extérieure Γ_{ext} est située dans le champ lointain. Il est alors facile de montrer que l'intégrale de la formulation variationnelle (équation (I-20)) relative au travail des forces extérieures :

$$- \int_{\Gamma_{\text{ext}}} f_i u_i dS_t \quad (\text{I-91})$$

devient après discrétisation par éléments finis :

$$- \sum_e \underline{U}^{(e)T} \int_{\Gamma_{\text{ext}}^{(e)}} [\underline{P}]^T [\underline{N}^{(e)}]^T [\underline{Z}_{\text{loc}}(\omega)] [\underline{N}^{(e)}] [\underline{P}] d\Gamma_{\text{ext}}^{(e)} \underline{U}^{(e)} \quad (\text{I-92})$$

où e désigne l'indice de sommation sur les éléments de la frontière extérieure. Il est à noter que les autres intégrales de la formulation variationnelle restent inchangées. $[\underline{P}]$ désigne la matrice de passage du repère local au repère global. L'intégration numérique se fait par méthode de Gauss, cinq points suffisant à effectuer le calcul des intégrales. On définit alors la matrice d'impédance mécanique élémentaire par la formule suivante :

$$[\underline{K}_{\text{imp}}^{(e)}(\omega)] = - \int_{\Gamma_{\text{ext}}^{(e)}} [\underline{P}]^T [\underline{N}^{(e)}]^T [\underline{Z}_{\text{loc}}(\omega)] [\underline{N}^{(e)}] [\underline{P}] d\Gamma_{\text{ext}}^{(e)} \quad (\text{I-93})$$

$[\underline{K}_{\text{imp}}^{(e)}(\omega)]$ est une matrice complexe et fonction de la fréquence, même en l'absence de pertes mécaniques. Elle est directement assemblée dans la matrice globale de rigidité mécanique qui reste symétrique. Cet assemblage se fait de manière tout à fait classique. Cela a pour conséquence de ne pas modifier la structure bande de la matrice de rigidité initiale. Le système d'équations à résoudre s'écrit toujours :

$$\left([\underline{K}_{\text{uu}}(\omega)] - \omega^2 [\underline{M}] \right) \underline{U} = \underline{F} \quad (\text{I-94})$$

La matrice de rigidité $[\underline{K}_{\text{uu}}(\omega)]$ résulte de l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires issues du calcul par éléments finis et des matrices élémentaires d'impédance mécanique.

I-3.4 Équation intégrale

La mise au point d'une méthode d'équation intégrale nécessite la connaissance de la fonction de Green associée au problème étudié [14]. La fonction de Green $G(r,r')$, aussi appelée fonction d'influence, symbolise le champ de déplacement créé en tout point r par une force ponctuelle unitaire située en r' . La fonction de Green d'un milieu solide élastique homogène infini est donnée par l'équation suivante [38] :

$$[G(r, r')] = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left(k_s^2 \frac{e^{jk_s R}}{R} [I] + \left[\nabla\nabla \frac{e^{jk_s R}}{R} - \frac{e^{jk_p R}}{R} \right] \right) \quad (I-95)$$

Dans cette expression, R désigne la distance entre les points r et r' , ∇ l'opérateur différentiel nabla et $[I]$ la matrice identité. Lorsque l'on est en présence d'une distribution de forces $\tau(r')$, le champ de déplacement est obtenu par intégration du produit de la distribution surfacique de force par la fonction de Green sur S surface où sont appliquées les forces :

$$\underline{u}(r) = \int_s [G(r, r')] \tau(r') dS \quad (I-96)$$

Dans ce cas, on assimile la frontière à un ensemble de sources suivant une certaine distribution. La fonction de Green est donc une solution quand on a homogénéité partout sauf en un point.

Pour discrétiser, on découpe l'intérieur du domaine en sous domaines appelés éléments, interconnectés par des noeuds. Sur la frontière extérieure S sont attachés des éléments spécifiques appelés éléments d'impédances mutuelles. Par la suite l'interpolation des variables d'espace ainsi que celle des inconnues du problème se fait de la même manière qu'en éléments finis. La mise sous forme matricielle de l'équation (I-96) conduit à une relation matricielle entre le champ de déplacement sur la surface S et les forces nodales sur S .

$$[Z(\omega)] \underline{U}_s = \underline{F}_s \quad (I-97)$$

\underline{U}_s et \underline{F}_s sont respectivement le vecteur des déplacements nodaux et le vecteur des forces nodales sur la surface S . $[Z(\omega)]$ est la matrice d'impédance mutuelle. Elle est couplée aux éléments finis de la manière suivante :

$$\left([K_{uu}] - \omega^2 [M] \right) \underline{U} = \underline{F} - [Z(\omega)] \underline{U}_s \quad (I-98)$$

où \underline{U} est le vecteur déplacement global et \underline{F} le vecteur forces nodales global. L'intérêt des méthodes intégrales est l'absence d'hypothèse sur la nature du rayonnement, la solution obtenue étant exacte à la discrétisation près. La transcription mathématique de cette méthode dans le cas du rayonnement d'un transducteur piézoélectrique dans un puits de forage est complexe et nous ne sommes pas en mesure de trouver l'expression analytique de la fonction de Green. Le chapitre II a pour objet la construction de la matrice d'impédance mécanique mutuelle reliant les déplacements nodaux normaux aux forces nodales normales sur la paroi du puits à l'aide d'une décomposition en k .

I-4 Tests de validations

La présente section est consacrée à la validation des éléments infinis et d'impédance mécanique. Pour tous les tests présentés, on suppose que le solide est élastique, homogène, isotrope sans pertes mécaniques, même si l'introduction des pertes ne pose aucune difficulté particulière. Le matériau choisi est tel que : $v_p = 5588$ m/s, $v_s = 3387$ m/s, et $\rho = 2500$ kg/m³. Le critère de discrétisation spatiale du domaine est tel que, la distance entre deux noeuds de coin d'un élément n'exède pas $\lambda_s/4$ [13], où λ_s est la longueur d'onde de l'onde de cisaillement, sauf naturellement pour l'élément infini dans la direction de propagation.

I-4.1 Cylindre infini pulsant ou tournant

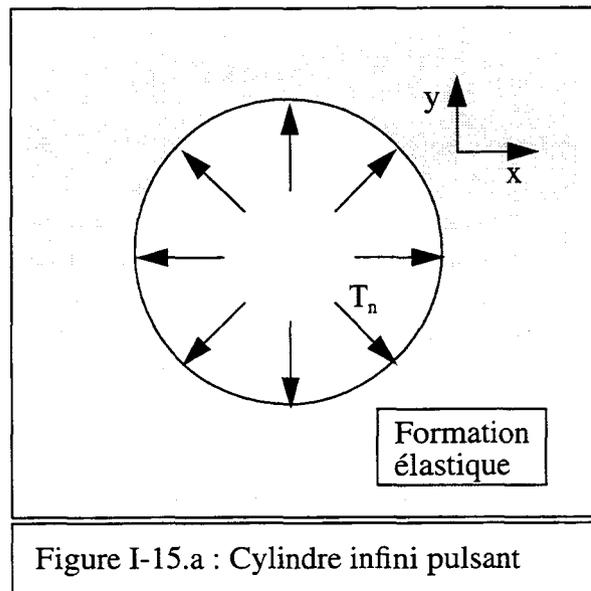
On considère un cylindre infini pulsant (respectivement tournant), de rayon $r_1 = 0,5$ m dans un milieu solide infini. On impose sur sa surface libre une contrainte normale T_n (respectivement tangentielle T_t) uniforme (figures I-15.a et I-15.b). D'après l'équation (I-53), les solutions analytiques sont données par :

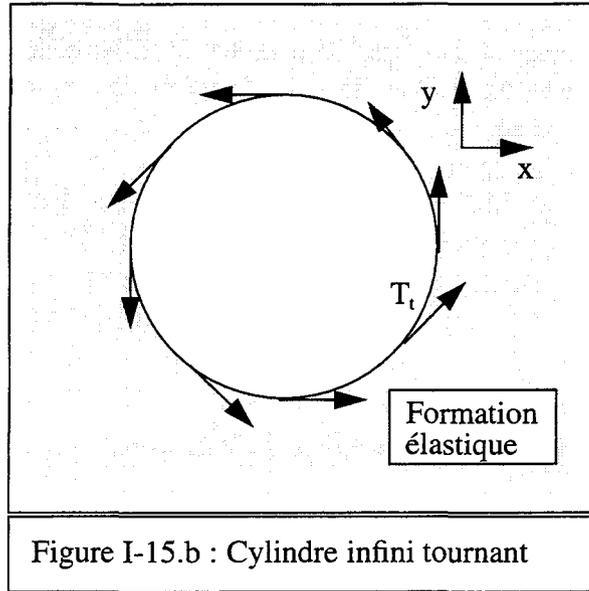
$$u_p(r) = u_{0p} H_{c1}^{(2)}(k_p r) \quad (\text{I-99})$$

pour le cylindre pulsant et par :

$$u_s(r) = u_{0s} H_{c1}^{(2)}(k_s r) \quad (\text{I-100})$$

pour le cylindre tournant.





Les deux ondes P (déplacement radial) et S (déplacement tangentiel) existent indépendamment l'une de l'autre. Les constantes complexes u_{0p} et u_{0s} sont déterminées par les conditions aux limites. L'écriture de la condition de continuité de la contrainte normale pour le cylindre pulsant et de la contrainte tangentielle pour le cylindre tournant conduit aux équations (I-99) et (I-100) :

$$u_{0p} = \frac{-T_n}{(2\mu + \lambda)k_p H_{c1}'^{(2)}(k_p r_1) + \frac{\lambda}{r_1} H_{c1}^{(2)}(k_p r_1)} \quad (I-101)$$

$$u_{0s} = \frac{-T_t}{\mu k_s H_{c1}'^{(2)}(k_s r_1) + \frac{\mu}{r_1} H_{c1}^{(2)}(k_s r_1)} \quad (I-102)$$

Le chargement étant uniforme dans la direction θ , seule la partie de la structure comprise entre $\theta = -5^\circ$ et $\theta = 5^\circ$ a été modélisée. On découpe en un seul élément dans la direction circonférentielle, et en vingt-cinq éléments dans la direction radiale r variant entre 0,5 à 5 m. Le calcul est effectué uniquement avec un élément impédance. Les figures I-16.a et I-17.a représentent l'évolution des déplacements radial et tangentiel normalisés au module du déplacement au point $r = r_1$ en fonction du rayon polaire r . Les figures I-16.b et I-17.b montrent la déformation de la structure modélisée.

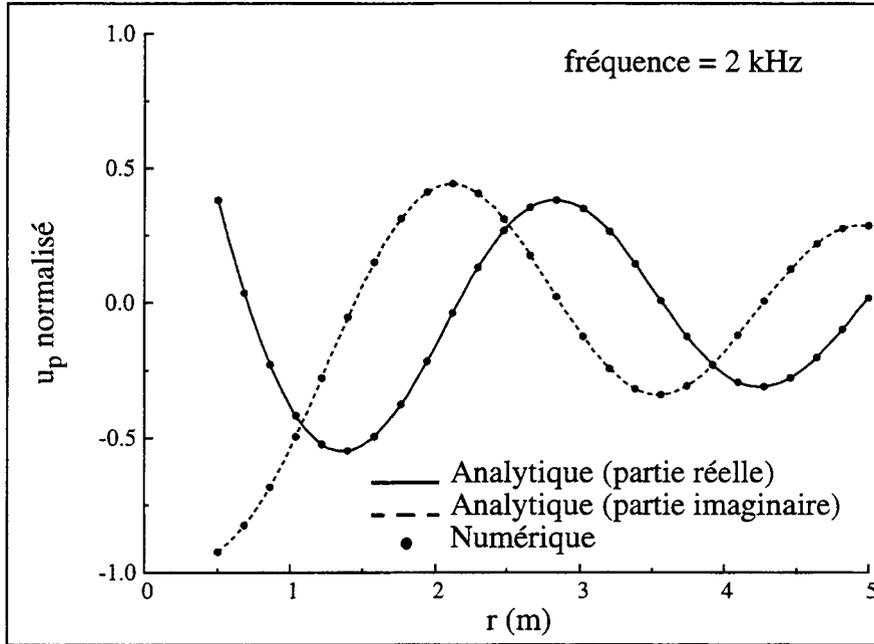


Figure I-16.a : Déplacement radial engendré par un cylindre pulsant (élément d'impédance mécanique)

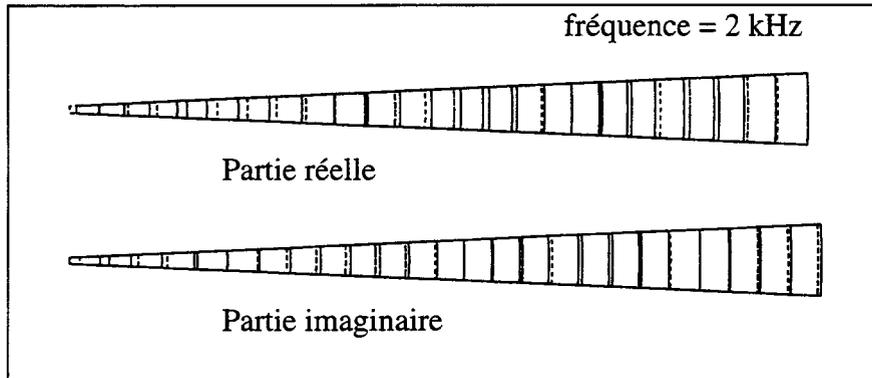


Figure I-16.b : Champ de déplacement engendré par un cylindre pulsant (élément d'impédance mécanique)

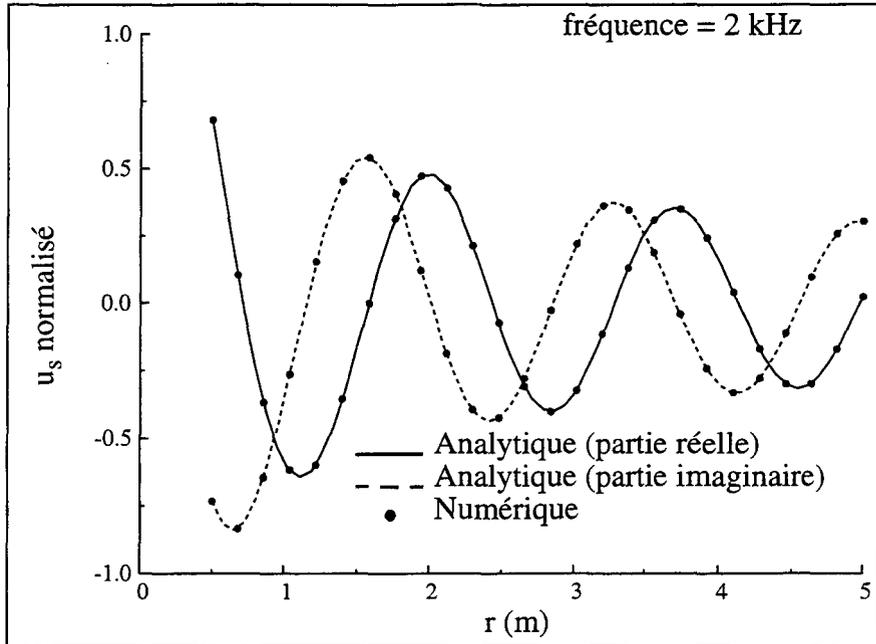


Figure I-17.a : Déplacement tangentiel engendré par un cylindre tournant (élément d'impédance mécanique)

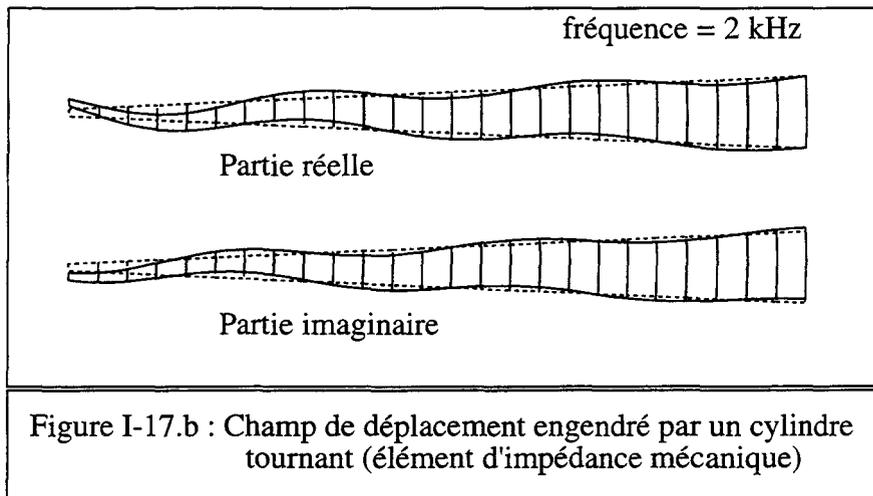


Figure I-17.b : Champ de déplacement engendré par un cylindre tournant (élément d'impédance mécanique)

Les figures I-16.a et I-17.a montrent un excellent accord entre les solutions numériques et analytiques. La frontière du domaine de calcul est donc parfaitement transparente. Ainsi, on peut dire que l'onde incidente est totalement transmise.

I-4.2 Sphère pulsante

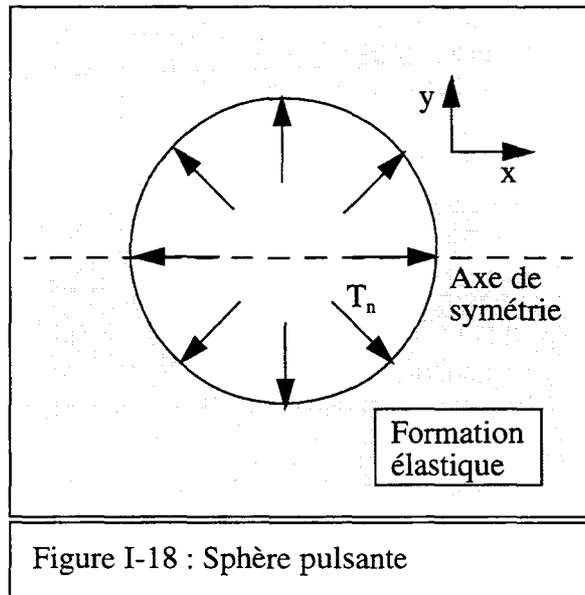
Considérons une sphère pulsante de rayon $r_1 = 0,5$ m dans un solide élastique isotrope infini. On impose sur sa surface libre une contrainte normale uniforme T_n (figure I-18). La solution analytique est donnée au paragraphe I-3.1.2 :

$$u_p(r) = u_{0p} H_{s1}^{(2)}(k_p r) \quad (\text{I-103})$$

La constante complexe u_{0p} est déterminée par les conditions aux limites (continuité de la contrainte normale).

$$u_{0p} = \frac{-T_n}{(2\mu + \lambda)k_p H_{s1}'^{(2)}(k_p r_1) + \frac{2\lambda}{r_1} H_{s1}^{(2)}(k_p r_1)} \quad (\text{I-104})$$

Le chargement étant uniforme dans la direction ϕ , seule la partie de la structure comprise entre $\theta = -5^\circ$ et $\theta = 5^\circ$ a été modélisée. On découpe en un seul élément suivant θ et en 25 éléments dans la direction radiale, r variant de 0,5 à 5 m. Un seul élément impédance mécanique est utilisé. La figure I-19.a montre l'évolution du déplacement radial normalisé au module du déplacement au point $r = r_1$ en fonction du rayon polaire r . La figure I-19.b présente le champ de déplacement de la structure modélisée.



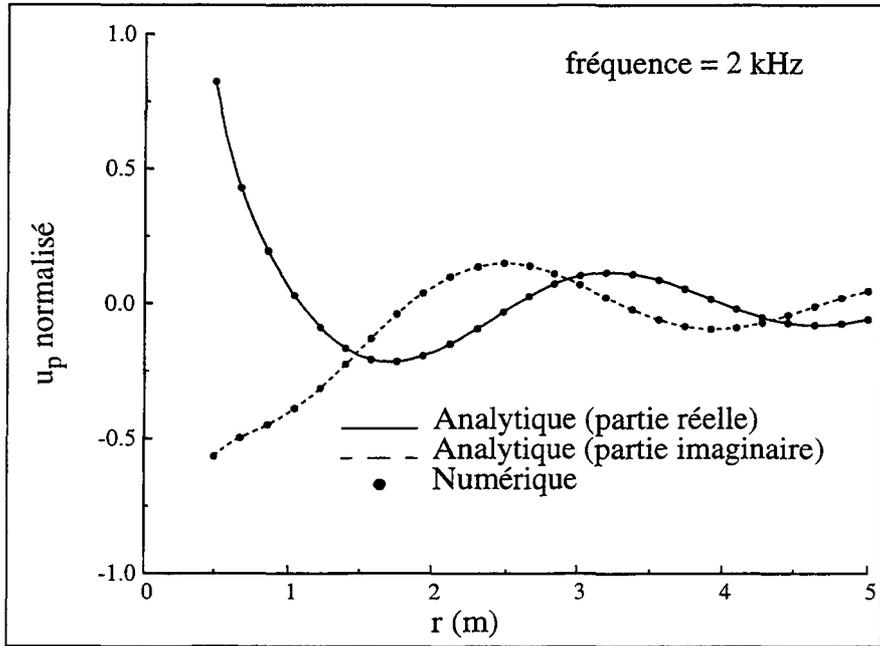


Figure I-19.a : Déplacement radial engendré par une sphère pulsante (élément d'impédance mécanique)

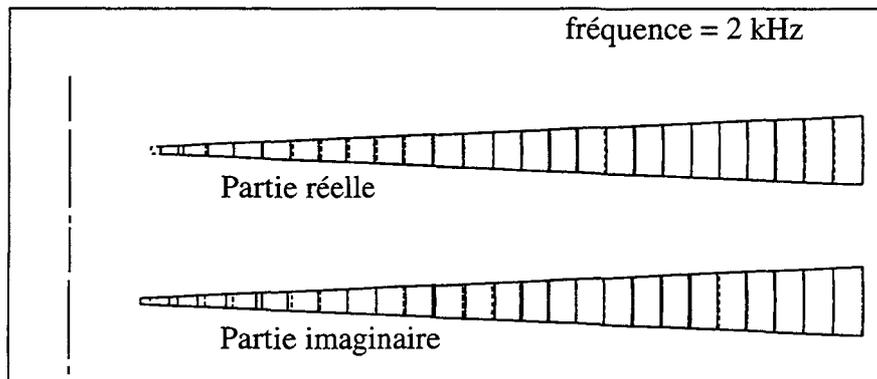


Figure I-19.b : Champ de déplacement engendré par une sphère pulsante (élément d'impédance mécanique)

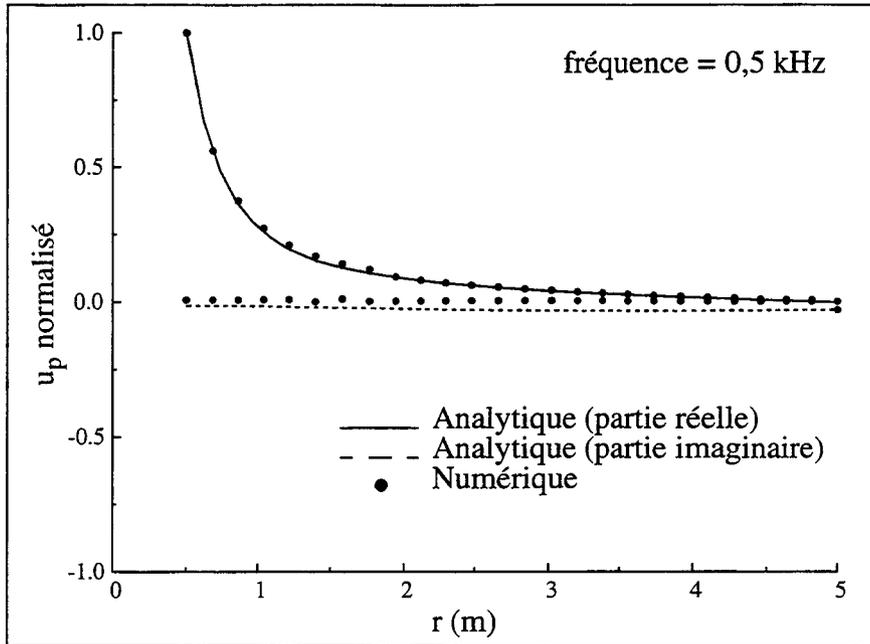


Figure I-20.a : Déplacement radial engendré par une sphère pulsante (élément infini)

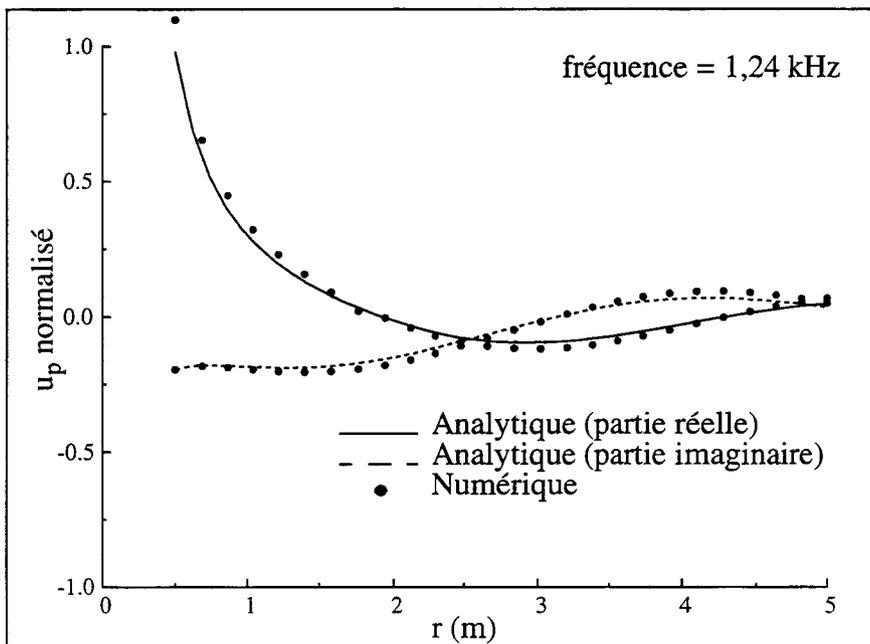


Figure I-20.b : Déplacement radial engendré par une sphère pulsante (élément infini)

La figure I-19.a montre un excellent accord entre les champs de déplacement numérique et analytique. Comme pour le cylindre infini, on peut dire que l'onde incidente est parfaitement transmise. L'introduction des pertes mécaniques n'affecte pas les performances des résultats (résultats non présentés). Lorsque la sphère pulsante est modélisée par le couplage éléments finis-élément infinis les résultats ne sont pas satisfaisants (figure I-20) et se dégradent pour des fréquences de plus en plus élevées. De plus, le champ de déplacement obtenu est fonction de la longueur de l'élément infini.

En conclusion, on constate que l'élément infini pose deux problèmes. Le choix de la longueur de l'élément est délicat car il n'existe aucune règle pour effectuer un choix cohérent. L'intégration numérique des matrices de rigidité et de masse est difficile à effectuer avec précision à cause de la troncature arbitraire du domaine d'intégration. En ce qui concerne l'élément d'impédance mécanique, les résultats obtenus sont en bon accord avec les solutions analytiques lorsque le critère de maillage est vérifié quelle que soit la fréquence.

I-4.3 Point oscillant

Considérons un solide élastique infini dans lequel on applique une force ponctuelle (figure I-21). La modélisation est faite en deux dimensions avec symétrie de révolution, l'axe de symétrie étant choisi parallèle à la direction de la force. La figure I-22 montre le maillage utilisé pour la modélisation du point oscillant. Les fonctions de directivité des ondes P, et S sont connues [39] et sont rappelées dans la formule (I-105) où R désigne la distance à la source. La figure (I-23) montre un très bon accord entre les diagrammes de directivité analytique et numérique.

$$u_p = \frac{F \cos(\theta)}{4\pi\rho v_p^2 R} \quad u_s = \frac{F \sin(\theta)}{4\pi\rho v_s^2 R} \quad (\text{I-105})$$

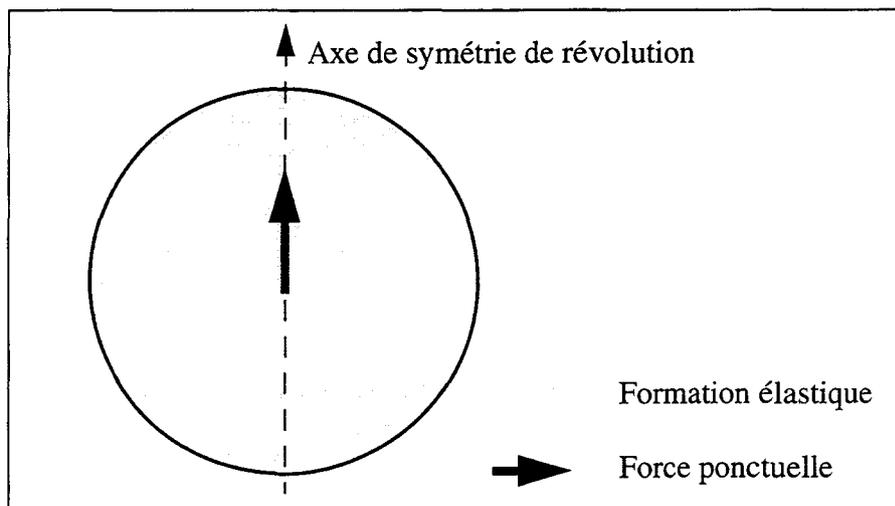
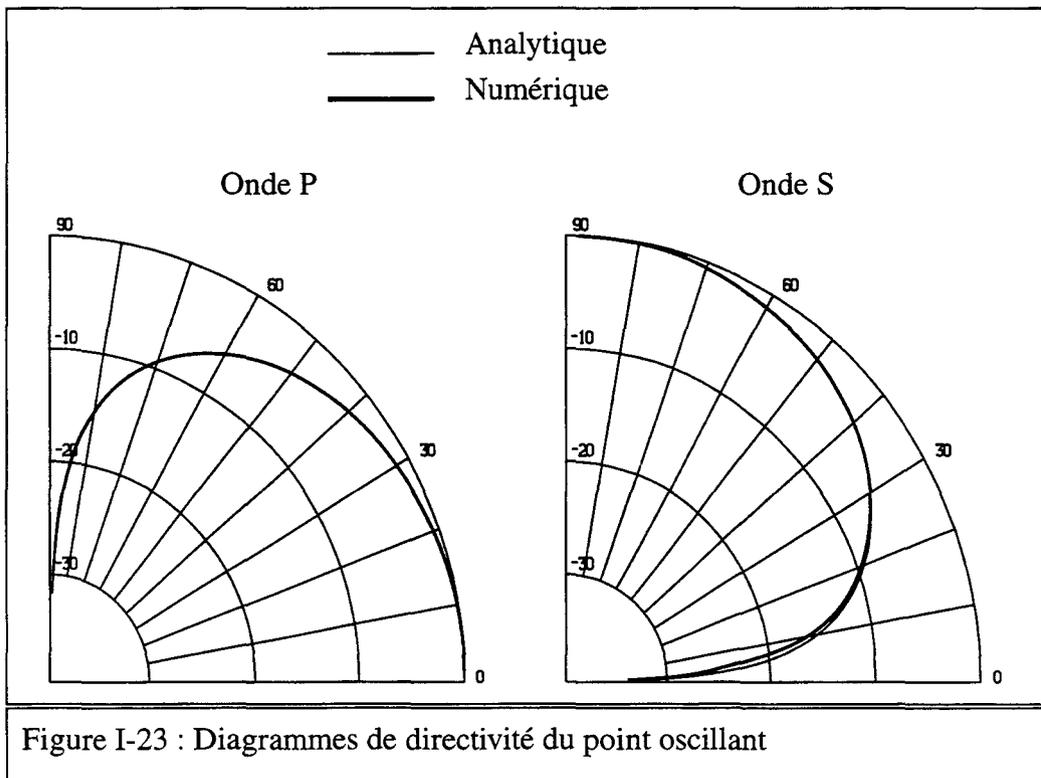
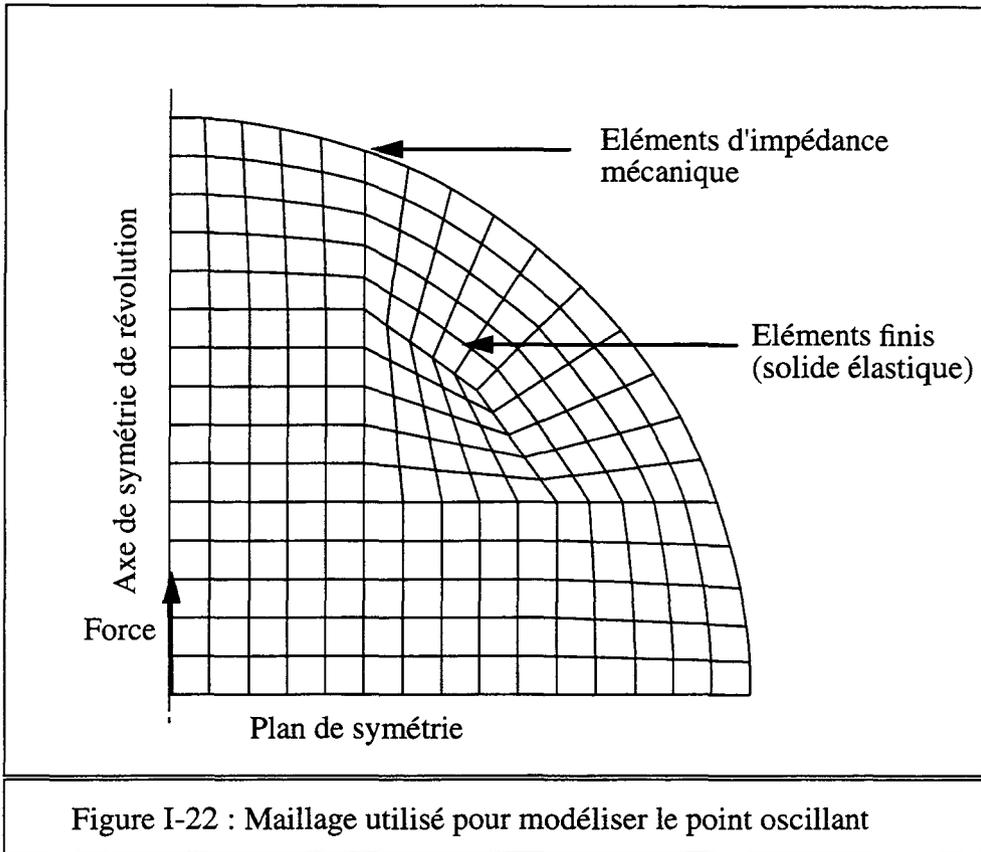


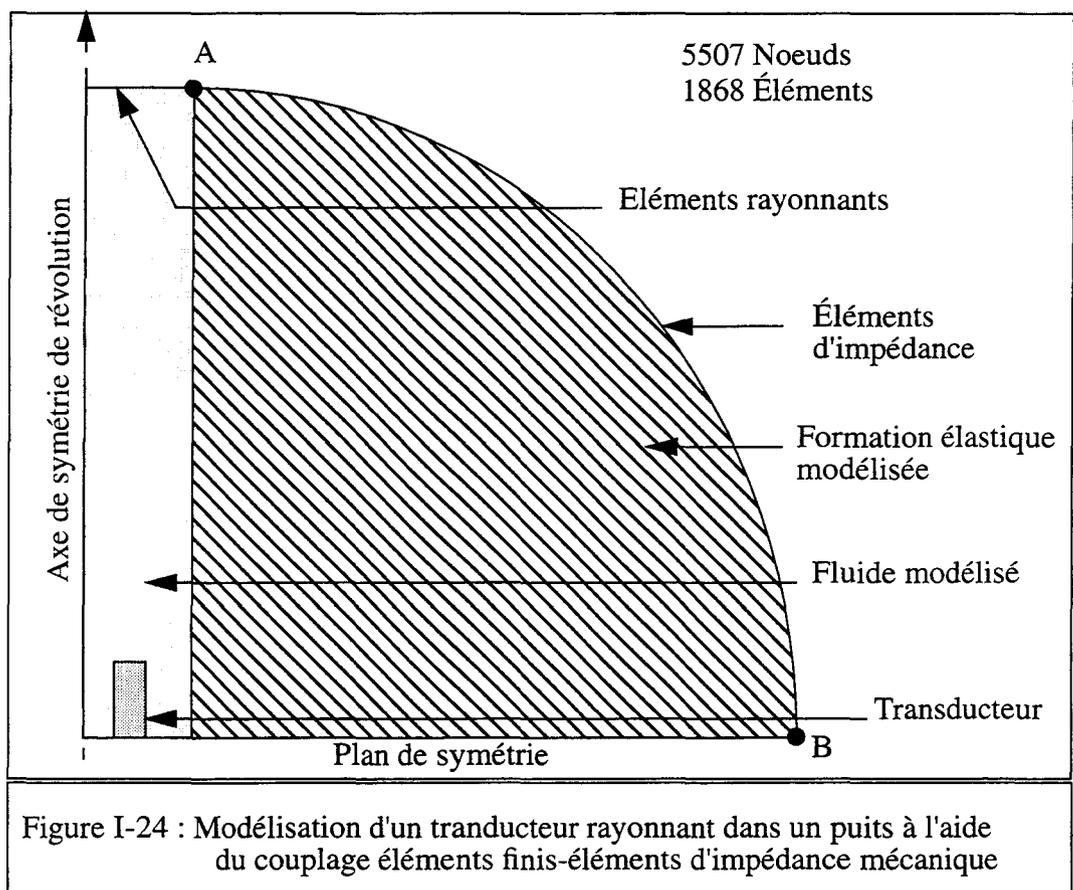
Figure I-21 : Point oscillant dans une formation élastique infinie



I-4.4 Transducteur piézoélectrique rayonnant dans un puits

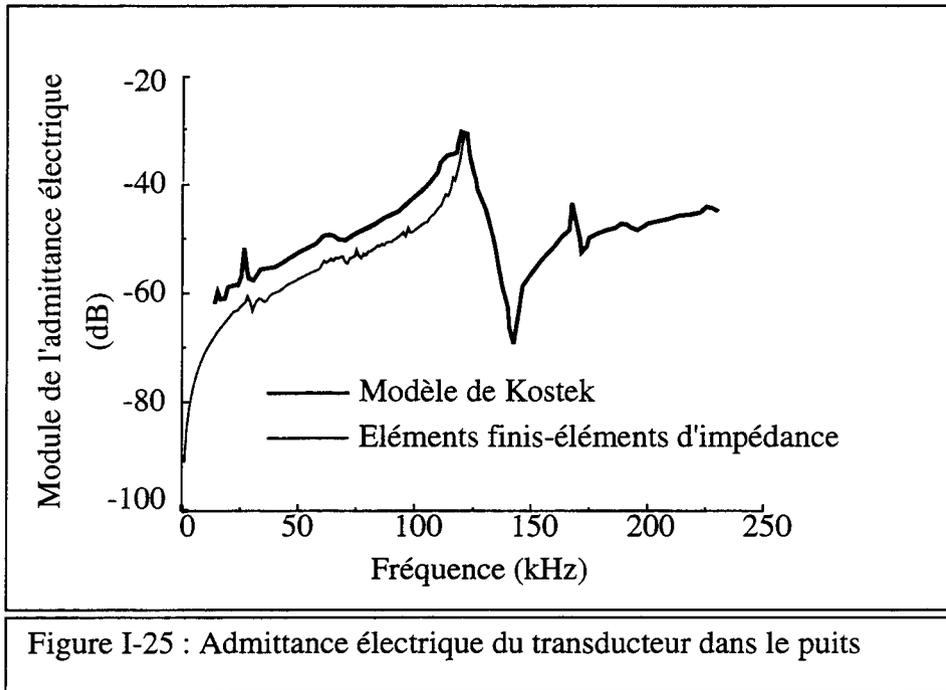
Nous avons appliqué le couplage éléments finis-éléments d'impédance mécanique à l'étude d'un transducteur piézoélectrique rayonnant dans un puits rempli d'huile et entouré d'une formation élastique [40]. Ce problème a déjà été étudié par S. Kostek à l'aide d'une méthode de différences finies [41].

Le transducteur utilisé est un anneau de 12,7 mm de hauteur, 12,7 mm de diamètre extérieur et de 0,8 mm d'épaisseur. Il est fabriqué en un seule pièce de céramique de type PZT. Le puits a un rayon de 0,1 m, la formation telle que $v_p = 4000$ m/s, $v_s = 2310$ m/s et $\rho = 2500$ kg/m³. Le fluide contenu dans le puits est une huile ayant les propriétés suivantes : $v_f = 1425$ m/s et $\rho_f = 856,5$ kg/m³. La figure I-24 présente schématiquement le problème modélisé.



L'intérieur du domaine est modélisé par éléments finis tandis que la frontière externe est modélisée par des éléments d'impédance mécanique et par des éléments rayonnants fluide. Le maillage de ce problème est constitué de 5507 noeuds, soient 1868 éléments (il n'est pas présenté car il serait trop dense). La nature du rayonnement dans le solide est supposé sphérique. Cette hypothèse est vraisemblablement correcte pour les points voisins du point B. Elle est par contre satisfaisante pour les points voisins du point A qui sont soumis à un rayonnement de l'onde de tube. L'élément d'impédance mécanique présente donc un handicap pour la modélisation de transducteur acoustique dans un puits de forage.

La figure I-25 compare l'admittance électrique du transducteur rayonnant dans le puits calculée par éléments finis avec les résultats obtenus par S. Kostek [41].



I-5 Conclusion

Le développement de l'élément infini ainsi que les tests effectués permettent de dire que cet élément présente plusieurs handicaps : le choix de la longueur de l'élément dans la direction s'étendant à l'infini n'est pas aisé ; le calcul des intégrales est délicat ; enfin les résultats obtenus même lorsque le rayonnement est purement sphérique sont peu satisfaisants.

L'élément d'impédance mécanique donne d'excellents résultats lorsque le rayonnement est purement cylindrique ou sphérique, ainsi que dans le cas du point oscillant. C'est donc une condition aux limites adaptée à un rayonnement monopolaire. Mais les conditions locales supposent la connaissance a priori du type de rayonnement. Le rayonnement d'un transducteur dans un puits étant la combinaison de deux types de rayonnement (rayonnement cylindrique et sphérique), il est par conséquent mal modélisé à l'aide d'éléments d'impédance mécanique. D'autre part il faut aussi modéliser la formation, ce qui a pour conséquence de d'augmenter la taille mémoire nécessaire au calcul.

Une méthode intégrale est donc souhaitable, car elle ne repose sur aucune hypothèse a priori de la nature du rayonnement. Le chapitre suivant est consacré à la mise au point d'une méthode intégrale, basée sur une décomposition en k et son couplage aux éléments finis.

Chapitre II

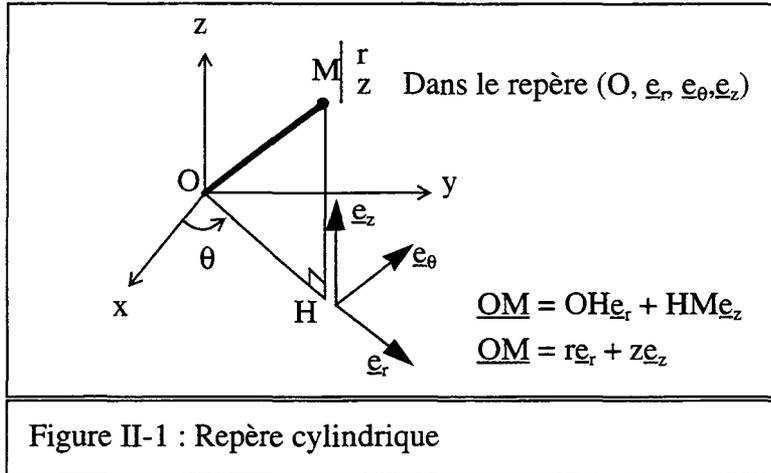
Formulation théorique du couplage éléments finis-décomposition en k

Le but de ce chapitre est d'obtenir une équation intégrale discrétisée et son couplage aux éléments finis de manière à décrire le rayonnement d'un transducteur piézoélectrique situé dans un puits de forage. Cette méthode suppose le calcul d'une matrice d'impédance mécanique mutuelle qui relie les forces nodales normales à la paroi du puits aux déplacements nodaux normaux, (en tout point de la paroi du puits). Ainsi, pour toute distribution de forces nodales normales donnée, on peut déterminer le champ de déplacement normal associé. Dans une première partie, nous calculons analytiquement le champ de déplacement normal associé à une distribution de contrainte normale, en l'absence de toute contrainte tangentielle, grâce à une décomposition en k. Par la suite, ces résultats sont utilisés pour calculer la réponse impulsionnelle à une excitation due à une impulsion de force nodale normale unitaire. Dans un troisième temps, une mise en forme matricielle est présentée reliant les forces nodales aux déplacements. Elle conduit à la construction d'une matrice d'impédance mécanique mutuelle, couplée par la suite aux matrices globales calculées par éléments finis. Enfin, nous effectuons, l'étude des modes de propagation dans le puits afin de déterminer la condition de rayonnement sur les couvercles du puits, et l'étude du rayonnement dans la formation.

II-1 Formulation de l'équation intégrale sur la paroi du puits

II-1.1 Position du problème

L'objet de ce chapitre est d'obtenir une expression discrétisée de l'équation intégrale sur la paroi du puits. Compte tenu de la géométrie du système (puits rectiligne de diamètre constant entouré d'une formation), on se place dans le repère cylindrique (r, θ, z) , de vecteurs de base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ et de centre O où r est le rayon polaire, θ l'angle polaire et z la cote (figure II-1). L'axe de révolution du puits est confondu avec l'axe (Oz) du repère.



On exprime, en régime harmonique à la pulsation ω , le vecteur déplacement en tout point de coordonnées (r, z) sous la forme :

$$\underline{u}(r, z) = u_r(r, z)\underline{e}_r + u_z(r, z)\underline{e}_z \quad (\text{II-1})$$

La symétrie de révolution permet de dire que la composante $u_\theta(r, z)$ du vecteur déplacement portée par \underline{e}_θ est identiquement nulle, ainsi que toutes les dérivées suivant θ . La formation est supposée élastique, homogène, isotrope, avec ou sans pertes mécaniques. Elle occupe le domaine Ω_s de l'espace. Sous ces hypothèses, l'équation vectorielle du principe fondamental de la dynamique dans le domaine Ω_s s'écrit [37] :

$$-\omega^2 \underline{u} = v_s^2 \Delta \underline{u} + (v_p^2 - v_s^2) \underline{\text{grad}}(\text{div}(\underline{u})) \quad (\text{II-2})$$

Dans cette dernière relation, Δ désigne l'opérateur Laplacien. v_p et v_s désignent les célérités des ondes P et S dans la formation. De plus, on suppose connue la contrainte normale appliquée à la paroi du puits $T_n(r_1, z)$. La résolution directe de l'équation de la dynamique avec les conditions aux limites qui lui sont associées est d'une grande complexité. Toutefois, une décomposition de cette équation dans l'espace des nombres d'onde (espace des k) permet de déterminer la solution. La décomposition en k est fréquemment utilisée en géophysique pétrolière notamment pour le calcul des problèmes de puits rempli de fluide. Le plus souvent, on calcule les champs des potentiels de vitesse. Puis ces résultats sont utilisés pour déterminer les champs de pression dans le fluide et de déplacement dans la formation [16, 42-44].

Il faut noter qu'une décomposition sur les nombres d'ondes perpendiculaires à la frontière a été proposée et couplée à des méthodes d'éléments finis [45-46]. Cette méthode est, dans l'esprit très différente de la méthode que nous proposons puisqu'elle produit une condition aux limites locale (et donc approchée).

II-1.2 Décomposition spectrale

La dépendance temporelle des variables en $e^{+j\omega t}$ est implicite dans la suite et par conséquent est omise. La décomposition spectrale se fait à k fixé en écrivant toute inconnue ϕ du problème de la manière suivante :

$$\bar{\phi}(r, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(r, z) e^{jkz} dz \quad (\text{II-3})$$

Il est toujours possible de décomposer le vecteur déplacement \underline{u} en la somme de deux vecteurs orthogonaux \underline{u}_p et \underline{u}_s tels que \underline{u}_p soit un vecteur sans rotationnel et \underline{u}_s un vecteur sans divergence [37]. Ceci permet de mettre l'équation fondamentale de la dynamique dans le domaine (ω, k) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}_p + k_p^2 \bar{u}_p &= \underline{0} \\ \Delta \bar{u}_s + k_s^2 \bar{u}_s &= \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

où k_p et k_s désignent les nombres d'onde associés aux ondes P et S. Les deux ondes se propagent suivant \underline{e}_r en s'éloignant de l'axe de symétrie. A partir de l'équation (II-4), on peut montrer que le déplacement associé à l'onde P est colinéaire au vecteur \underline{e}_r , tandis que celui associé à l'onde S est orthogonal à \underline{e}_r [37]. Cette dernière composante du déplacement est donc contenue dans le plan $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$. Comme la composante du déplacement suivant \underline{e}_θ est identiquement nulle, l'onde S est colinéaire au vecteur \underline{e}_z . C'est une onde de cisaillement verticale souvent nommée SV. On peut aussi constater que les deux ondes peuvent se propager indépendamment l'une de l'autre. Les projections de l'équation fondamentale de la dynamique suivant les vecteurs de base conduisent dans l'espace k au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial r} + (k_p^2 - k^2) \bar{u}_p - \frac{\bar{u}_p}{r^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} + (k_s^2 - k^2) \bar{u}_s &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-5})$$

Ces deux relations doivent être vérifiées à l'intérieur du domaine Ω_s . On obtient ainsi deux équations de Bessel d'indice un pour \bar{u}_p et zéro pour \bar{u}_s , à valeurs et arguments complexes. Les solutions fondamentales sont donc des fonctions cylindriques de Hankel de première et seconde espèces. Par suite on a :

$$\begin{aligned}\bar{u}_s(r) &= A_0 H_{c0}^{(1)}(\hat{k}_s r) + B_0 H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r) \\ \bar{u}_p(r) &= A_1 H_{c1}^{(1)}(\hat{k}_p r) + B_1 H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r)\end{aligned}\quad (\text{II-6})$$

avec :

$$\hat{k}_p = \sqrt{k_p^2 - k^2} \quad \hat{k}_s = \sqrt{k_s^2 - k^2} \quad (\text{II-7})$$

A_0, A_1, B_0 et B_1 sont des constantes complexes déterminées par les conditions aux limites. Les fonctions de Hankel de première espèce sont associées aux ondes convergentes, celles de seconde espèce sont associées aux ondes divergentes [29]. Or, le caractère infini du problème n'autorise dans la formation que les ondes divergentes, ceci qui nous conduit à prendre les coefficients A_0 et A_1 nuls. Par conséquent, on a :

$$\bar{u}_s(r) = B_0 H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r) \quad \bar{u}_p(r) = B_1 H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r) \quad (\text{II-8})$$

Dans la suite on notera u_{os} au lieu de B_0 et u_{op} au lieu de B_1 . Remarquons que lorsque k et k_α sont réels, et que $k > k_\alpha$ où $\alpha = p$ ou s , on a :

$$\hat{k}_\alpha = \pm j \sqrt{|k_\alpha^2 - k^2|} \quad (\text{II-9})$$

L'approximation asymptotique de la fonction $H_\nu^{(2)}(\hat{k}_\alpha r)$ lorsque $|\hat{k}_\alpha r|$ tend vers l'infini est donnée par [27-28] :

$$H_\nu^{(2)}(\hat{k}_\alpha r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \hat{k}_\alpha r}} e^{-j(\hat{k}_\alpha r - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \sum_{n \geq 0} \frac{(v, m)}{(2j \hat{k}_\alpha r)^m} \quad (\text{II-10})$$

où

$$(v, m) = \frac{(4v^2 - 1^2)(4v^2 - 3^2) \dots (4v^2 - (2m - 1)^2)}{2^{2m} m!} \quad (\text{II-11})$$

On sait que les composantes du déplacement $\bar{u}_p(r)$ et $\bar{u}_s(r)$ sont nulles à l'infini. Ceci conduit à prendre $\hat{k}_\alpha = -j \sqrt{|k_\alpha^2 - k^2|}$, lorsque k et k_α sont réels et que $k > k_\alpha$. On a alors $-\pi < \text{img}(\hat{k}_\alpha) \leq 0$. Lorsque k et k_α sont réels et que $k < k_\alpha$, on prendra $\hat{k}_\alpha = \sqrt{|k_\alpha^2 - k^2|}$. Si k et (resp. ou) k_α sont (resp. est) complexe(s), on prendra la racine carrée tel que $-\pi < \text{img}(\hat{k}_\alpha) \leq 0$.

Par ailleurs, \hat{k}_α introduit deux coupures du plan complexe (figure II-2) car \hat{k}_α n'est pas holomorphe autour des points $k = k_\alpha$ et $k = -k_\alpha$. Comme α peut prendre les valeurs p et s , on a quatre coupures du plan complexe.

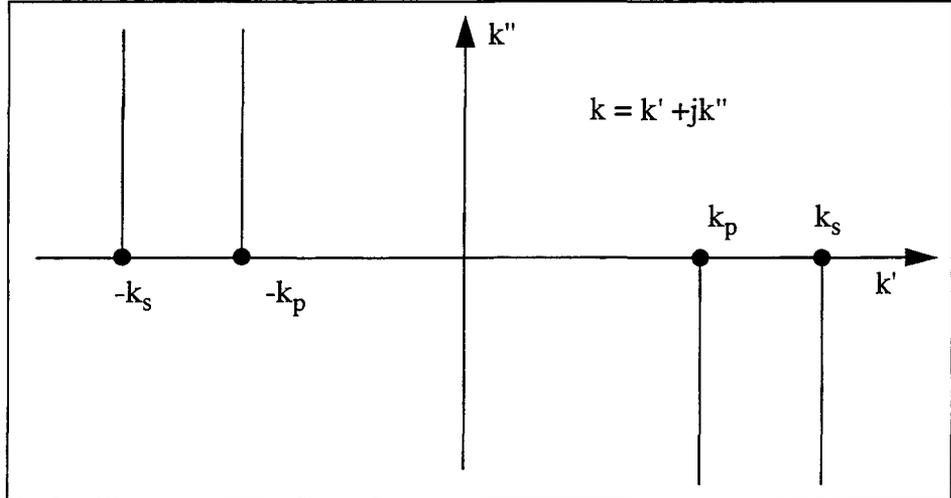


Figure II-2 : Coupures du plan complexe ($k' = +$ ou $-k_p$ et $k' = +$ ou $-k_s$)

L'écriture des conditions aux limites, traduisant la continuité de la contrainte sur la paroi du puits, permet la détermination des constantes complexes \bar{u}_{0p} , et \bar{u}_{0s} à k donné. La continuité de la contrainte normale s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left[(2\mu + \lambda)\hat{k}_p H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) + \frac{\lambda}{r_1} H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) \right] \bar{u}_{0p}(k) \\ & - jk\lambda H_{c0}^{(2)}(k_s r_1) \bar{u}_{0s}(k) = -\bar{T}_n(r_1, k) \end{aligned} \quad (\text{II-12})$$

celle de continuité de la contrainte de cisaillement s'écrit :

$$-j\mu k H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) \bar{u}_{0p}(k) + \mu \hat{k}_s H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r_1) \bar{u}_{0s}(k) = 0 \quad (\text{II-13})$$

La résolution de ce système de deux équations à deux inconnues conduit à la détermination des constantes \bar{u}_{0p} et \bar{u}_{0s} :

$$\bar{u}_{0p}(k) = \frac{-\hat{k}_s H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r_1) \bar{T}_n(r_1, k)}{\Delta} \quad (\text{II-14})$$

$$\bar{u}_{0s}(k) = \frac{-jk H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) \bar{T}_n(r_1, k)}{\Delta} \quad (\text{II-15})$$

Δ , déterminant du système linéaire constitué par les équations (II-12) et (II-13), est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta = & \left[(2\mu + \lambda)\hat{k}_p H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) + \frac{\lambda}{r_1} H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) \right] \hat{k}_s H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r_1) \\ & + \lambda k^2 H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r_1) H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

où r_1 désigne le rayon du puits et λ et μ les coefficients de Lamé du matériau. $\bar{T}(r_1, k)$ est le spectre de la contrainte normale sur la paroi du puits. Il est défini par la formule suivante :

$$\bar{T}_n(r_1, k) = \int_{-\infty}^{\infty} T_n(r_1, z) e^{jkz} dz \quad (\text{II-17})$$

Dans l'espace des nombres d'onde, le champ de déplacement est alors parfaitement déterminé. Pour tout r plus grand ou égal au rayon du puits r_1 , il est donné par :

$$\begin{aligned} \bar{u}_p(r, k) &= \bar{u}_{0p}(k) H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r) \\ \bar{u}_s(r, k) &= \bar{u}_{0s}(k) H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r) \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

Pour reconstituer le champ de déplacement, il suffit d'effectuer une transformation de Fourier inverse sur le champ de déplacement calculé dans l'espace des k . On obtient :

$$\begin{aligned} u_p(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_p(r, k) e^{-jkz} dk \\ u_s(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_s(r, k) e^{-jkz} dk \end{aligned} \quad (\text{II-19})$$

Dans ces deux intégrales, k parcourt entièrement l'axe réel et prend donc les valeurs k_p , $-k_p$, k_s , et $-k_s$, qui sont des points singuliers. \hat{k}_p , et \hat{k}_s ne sont pas holomorphes en ces points et les fonctions de Hankel ne peuvent avoir un argument nul. Si l'on calcule en ces points les limites des intégrands $\bar{u}_p(r, k) e^{-jkz}$ et $\bar{u}_s(r, k) e^{-jkz}$, on montre aisément que ceux-ci sont finis (voir annexe III). k_p , $-k_p$, k_s , et $-k_s$ sont donc de fausses singularités de $\bar{u}_p(r, k) e^{-jkz}$ et $\bar{u}_s(r, k) e^{-jkz}$. En pratique cela revient à dire que l'on peut calculer numériquement les intégrales en faisant décrire l'axe réel à k sans précaution particulière au voisinage de k_p , $-k_p$, k_s et $-k_s$. En ces points, des prolongements par continuité sont calculés.

D'autre part, il faut que Δ ne s'annule pas lorsque k parcourt l'axe réel. Supposons qu'il existe une valeur réelle de k pour laquelle Δ s'annule sans que les numérateurs des équations (II-14) et (II-15) ne s'annulent. Cette valeur de k serait alors le nombre d'onde d'un mode de propagation dans la formation le long du puits vide sans atténuation, ce qui est physiquement impossible.

Nous avons choisi d'utiliser la méthode d'intégration de Gauss par morceaux. Ces deux intégrales, qui sont des intégrales généralisées, convergent si, lorsque k tend vers plus ou moins l'infini, la contrainte décroît au moins comme $1/k$. La méthode numérique d'intégration est présentée sur l'intervalle $[0; +\infty[$ (les résultats étant transposables pour l'intervalle $] -\infty; 0]$). Examinons tout d'abord le problème de la troncature de l'intégrale. Soient $k_0 = 0$, $k_1 = \Delta k$, ..., $k_n = n \Delta k$, où Δk est un réel strictement positif et n un entier naturel. On définit la suite I_n par la formule suivante :

$$I_n = \int_0^{k_n} f(k) dk \quad (\text{II-20})$$

où $f(k)$ est égale à $\bar{u}_p(r,k)e^{-jkz}$ ou $\bar{u}_s(r,k)e^{-jkz}$. Pour ε réel strictement positif fixé à l'avance, la troncature de l'intégrale se fait lorsque la condition suivante est satisfaite :

$$\left\| \frac{I_{n+1} - I_n}{I_{n+1}} \right\| < \varepsilon \quad (\text{II-21})$$

où ε représente l'erreur relative entre I_{n+1} , et I_n .

Examinons à présent le problème de la discrétisation en k du domaine d'intégration numérique. Δk est fixé à 2. L'expression e^{-jkz} nous oblige à choisir le nombre de points d'intégration de Gauss sur un intervalle de longueur 2, en fonction de la valeur absolue de z . Dans cette exponentielle complexe, z est fixé et détermine la période d'oscillation en k de longueur $2\pi/z$. En prenant 19 points d'intégration de Gauss par période d'oscillation (plus exactement 19,635 points), on approche la fonction sur chaque quart de cet intervalle par un polynôme d'ordre 7. Cette méthode présente une limitation : le nombre de points d'intégration de Gauss sur un intervalle de longueur 2 augmente avec la valeur absolue de z . Lorsque $|z|=20$, il faut 125 points d'intégration. Ainsi, il apparaît clairement que la valeur absolue de z ne peut croître indéfiniment. Comme r est petit devant la valeur maximale de $|z|$, les conditions d'intégration sont imposées par la valeur maximale de $|z|$.

II-1.3 Discrétisation de l'équation intégrale

La paroi du puits est découpée en éléments linéiques (à trois noeuds), interconnectés par des noeuds (figure II-3). Tous ces éléments sont rectilignes et sont situés sur la droite $r = r_1$. L'objet de ce paragraphe est de déterminer la relation matricielle qui relie, sur la paroi du puits, les déplacements nodaux normaux \underline{u}_p aux réactions nodales normales \underline{R} induites par le champ de déplacement. Cette matrice est appelée matrice d'impédances mécaniques mutuelles $[Z(\omega)]$ et la relation réactions-déplacements s'écrit :

$$[Z(\omega)] \underline{U}_p = \underline{R} \quad (\text{II-22})$$

Son inverse $[Y(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1}$ est la matrice d'admittance. Le terme Y_{ij} représente le déplacement au noeud j dû à la force nodale unitaire au noeud i . Le terme Z_{ij} est la réaction nodale au noeud j due au déplacement nodal unitaire au noeud i . Les conditions aux limites sur le bord du puits permettent de ne pas considérer dans le calcul les termes relatifs à la composante tangentielle, aussi bien en force qu'en déplacement.

II-1.3.1 Spectre d'une impulsion de contrainte nodale

Considérons un élément fini linéique à trois noeuds dans le repère global comme l'indique la figure II-3.

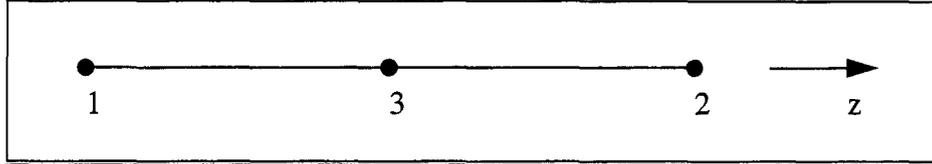


Figure II-3 : Élément d'impédance dans le repère global

\underline{T} est le vecteur des contraintes nodales normales. Les fonctions d'interpolation de Lagrange sont utilisées dans le repère global pour le calcul de la contrainte à l'intérieur d'un élément. Les éléments utilisés ici sont des éléments quadratiques. L'interpolation de la contrainte à l'intérieur d'un élément e se fait à l'aide de polynômes du second degré que l'on met sous la forme suivante :

$$N_{Ti}^{(e)}(z) = a_i z^2 + b_i z + c_i \quad (\text{II-23})$$

où i varie de 1 à 3. Les coefficients a_i , b_i et c_i sont déterminés par les relations :

$$N_{Ti}^{(e)}(z_j) = \delta_{ij} \quad (\text{II-24})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. La contrainte normale en un point de côte z appartenant à cet élément est donnée par :

$$T(z) = \left[N_T^{(e)} \right] \underline{T}^{(e)} \quad (\text{II-25})$$

La résolution des relations (II-23) et (II-24) permet la détermination des coefficients a_i , b_i et c_i :

$$a_1 = \frac{z_2 - z_3}{\Delta} \quad b_1 = \frac{z_3^2 - z_2^2}{\Delta} \quad c_1 = \frac{z_3 z_2^2 - z_2 z_3^2}{\Delta} \quad (\text{II-26})$$

$$a_2 = \frac{z_3 - z_1}{\Delta} \quad b_2 = \frac{z_1^2 - z_3^2}{\Delta} \quad c_2 = \frac{z_1 z_3^2 - z_3 z_1^2}{\Delta} \quad (\text{II-27})$$

$$a_3 = \frac{z_1 - z_2}{\Delta} \quad b_3 = \frac{z_2^2 - z_1^2}{\Delta} \quad c_3 = \frac{z_2 z_1^2 - z_1 z_2^2}{\Delta} \quad (\text{II-28})$$

avec :

$$\Delta = z_1 z_3^2 + z_2 z_1^2 + z_3 z_2^2 - z_1 z_2^2 - z_2 z_3^2 - z_3 z_1^2 \quad (\text{II-29})$$

Les fonctions $N_{Ti}^{(e)}(z)$ sont donc parfaitement déterminées, à condition que Δ ne soit pas nul. La condition de non nullité de Δ est satisfaite si et seulement si les coordonnées suivant l'axe z des trois noeuds de l'élément sont deux à deux distinctes. Le spectre des fonctions $N_{Ti}^{(e)}(z)$ est donné par l'expression suivante :

$$\bar{N}_{Ti}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{Ti}(z) e^{jkz} dz \quad (\text{II-30})$$

Il faut noter que les fonctions $N_{Ti}^{(e)}(z)$ sont nulles hors de l'élément e. Ce qui permet de limiter l'intégration à l'intervalle $[z_1 ; z_2]$. Les fonctions d'interpolation de la contrainte étant des polynômes du second degré, la primitive de l'intégrant (équation (II-30)) peut être déterminée analytiquement :

$$\bar{N}_{Ti}^{(e)}(k) = \begin{cases} \frac{a_i}{3}(z_2^2 - z_1^2) + \frac{b_i}{2}(z_2 - z_1) + c_i & \text{si } k = 0 \\ \left\{ -j \frac{a_i}{k} z_2^2 + \left(2 \frac{a_i}{k^2} - j \frac{b_i}{k} \right) z_2 + \left(2j \frac{a_i}{k^3} + \frac{b_i}{k^2} - j \frac{c_i}{k} \right) \right\} e^{jkz_2} & \text{si } k \neq 0 \\ \left\{ -j \frac{a_i}{k} z_1^2 + \left(2 \frac{a_i}{k^2} - j \frac{b_i}{k} \right) z_1 + \left(2j \frac{a_i}{k^3} + \frac{b_i}{k^2} - j \frac{c_i}{k} \right) \right\} e^{jkz_1} & \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

On remarquera que lorsque le module de k tend vers l'infini, le spectre $\bar{N}_{Ti}^{(e)}(k)$ tend vers zéro comme $1/k$. C'est la condition requise pour que l'on puisse calculer le champ de déplacement associé. Ainsi le spectre de la contrainte nodale normale unitaire induite du noeud i de l'élément e est parfaitement connu, $\bar{T}_n(k) = \bar{N}_{Ti}^{(e)}(k)$ lorsque la contrainte est nulle sur tous les noeuds de la paroi modélisés par des éléments d'impédance mécanique-mutuelle sauf au noeud i de l'élément (e).

II-1.3.2 Matrice d'impédances mutuelles

Dans un premier temps, nous nous proposons de définir la matrice d'admittance. Soit e un élément d'impédance mécanique mutuelle et i l'un des trois noeuds de cet élément sur lequel on impose la contrainte normale induite à l'unité, cette contrainte étant nulle sur les deux autres noeuds de l'élément. Le spectre de cette contrainte est donné par la formule (II-31). Nous avons vu dans le paragraphe II-1.2 que l'on pouvait alors calculer le champ de déplacement sur la paroi du puits. On peut donc déterminer $u_{pi}^{(e)}(r_1)$ défini comme le vecteur des valeurs nodales du déplacement normal sur la paroi induit par l'application de contrainte nodale normale unitaire au noeud i de l'élément e. C'est un vecteur de n lignes où n est le nombre de noeuds de la paroi. On écrit :

$$\left[\mathbf{u}_{pi}^{(e)}(r_1) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_p(r_1, k) \begin{bmatrix} e^{-jkz_1} \\ e^{-jkz_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{-jkz_n} \end{bmatrix} dk \quad (\text{II-32})$$

et on pose :

$$\left[\tilde{\mathbf{Y}}_i^{(e)}(\omega) \right] = \left[\mathbf{u}_{pi}^{(e)}(r_1) \right] \quad (\text{II-33})$$

La matrice d'admittance "élémentaire" est alors définie par :

$$\left[\tilde{\mathbf{Y}}^{(e)}(\omega) \right] = \left[\left[\tilde{\mathbf{Y}}_1^{(e)}(\omega) \right] \left[\tilde{\mathbf{Y}}_2^{(e)}(\omega) \right] \left[\tilde{\mathbf{Y}}_3^{(e)}(\omega) \right] \right] \quad (\text{II-34})$$

Elle est constituée de n lignes et de trois colonnes. La matrice d'admittance globale est obtenue par assemblage des matrices d'admittance élémentaires. On écrit :

$$\left[\tilde{\mathbf{Y}}(\omega) \right] = \sum_e \left[\tilde{\mathbf{Y}}^{(e)}(\omega) \right] \quad (\text{II-35})$$

où l'indice e parcourt tous les éléments d'impédance mécanique mutuelle. La matrice $[\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)]$ relie les contraintes nodales \mathbf{T} aux déplacements normaux nodaux \mathbf{U}_p sur la paroi du puits. On peut donc écrire :

$$\left[\tilde{\mathbf{Y}}(\omega) \right] \mathbf{T} = \mathbf{U}_p \quad (\text{II-36})$$

En inversant la matrice d'admittance $[\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)]$, on obtient la matrice des impédances mécaniques mutuelles $[\tilde{\mathbf{Z}}(\omega)]$ reliant les déplacements normaux nodaux aux contraintes nodales :

$$\left[\tilde{\mathbf{Z}}(\omega) \right] \mathbf{U}_p = \mathbf{T} \quad (\text{II-37})$$

Pour pouvoir coupler aux éléments finis, il faut transformer la matrice $[\tilde{\mathbf{Z}}(\omega)]$ pour obtenir une relation entre les réactions (forces) nodales et le déplacement normale (composante u_p) :

$$\left[\mathbf{Z}(\omega) \right] \mathbf{U}_p = \mathbf{R} \quad (\text{II-38})$$

On sait que le vecteur des réactions nodales élémentaires, quand la contrainte est connue, est donné par la formule (II-39) [11-13] :

$$\underline{R}^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \left[N_T^{(e)} \right]^t T(z) d\Gamma^{(e)} \quad (\text{II-39})$$

A partir de l'expression (II-25), on obtient :

$$\underline{R}^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \left[N_T^{(e)} \right]^t \left[N_T^{(e)} \right] \underline{T}^{(e)} d\Gamma^{(e)} \quad (\text{II-40})$$

Au noeud 1 (resp. 2, 3) de l'élément e correspond le degré de liberté i1 (resp. i2, i3) de la matrice d'impédance. Ceci nous permet d'écrire à partir de l'équation (II-37) :

$$T_{i1} = \left[\tilde{Z}_{i1,1} \dots \tilde{Z}_{i1,n} \right] \underline{U}_p \quad (\text{II-41})$$

$$T_{i2} = \left[\tilde{Z}_{i2,1} \dots \tilde{Z}_{i2,n} \right] \underline{U}_p \quad (\text{II-42})$$

$$T_{i3} = \left[Z_{i3,1} \dots Z_{i3,n} \right] \underline{U}_p \quad (\text{II-43})$$

Après report, dans l'équation (II-40), des équations (II-41) à (II-43), les trois composantes du vecteur réaction élémentaire s'écrivent :

$$\underline{R}_1^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \left\{ N_1 N_1 \left[\tilde{Z}_{i1,1} \dots \tilde{Z}_{i1,n} \right] + N_1 N_2 \left[\tilde{Z}_{i2,1} \dots \tilde{Z}_{i2,n} \right] + N_1 N_3 \left[Z_{i3,1} \dots Z_{i3,n} \right] \right\} d\Gamma^{(e)} \underline{U}_p \quad (\text{II-44})$$

$$\underline{R}_2^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \left\{ N_2 N_1 \left[\tilde{Z}_{i1,1} \dots \tilde{Z}_{i1,n} \right] + N_2 N_2 \left[\tilde{Z}_{i2,1} \dots \tilde{Z}_{i2,n} \right] + N_2 N_3 \left[\tilde{Z}_{i3,1} \dots \tilde{Z}_{i3,n} \right] \right\} d\Gamma^{(e)} \underline{U}_p \quad (\text{II-45})$$

$$\underline{R}_3^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \left\{ N_3 N_1 \left[\tilde{Z}_{i1,1} \dots \tilde{Z}_{i1,n} \right] + N_3 N_2 \left[\tilde{Z}_{i2,1} \dots \tilde{Z}_{i2,n} \right] + N_3 N_3 \left[\tilde{Z}_{i3,1} \dots \tilde{Z}_{i3,n} \right] \right\} d\Gamma^{(e)} \underline{U}_p \quad (\text{II-46})$$

On peut alors définir les trois lignes de la matrice "élémentaire" d'impédance mécanique mutuelle (il ne s'agit pas vraiment d'une matrice élémentaire dans la mesure où elle fait intervenir un couplage avec des noeuds extérieurs à l'élément considéré).

$$\left[Z_1^{(e)}(\omega) \right] = \int_{\Gamma^{(e)}} \left\{ N_1 N_1 \left[\tilde{Z}_{i1,1} \dots \tilde{Z}_{i1,n} \right] + N_1 N_2 \left[\tilde{Z}_{i2,1} \dots \tilde{Z}_{i2,n} \right] + N_1 N_3 \left[\tilde{Z}_{i3,1} \dots \tilde{Z}_{i3,n} \right] \right\} d\Gamma^{(e)} \quad (\text{II-47})$$

$$\left[Z_2^{(e)}(\omega) \right] = \int_{\Gamma^{(e)}} \left\{ N_2 N_1 \left[\tilde{Z}_{i1,1} \dots \tilde{Z}_{i1,n} \right] + N_2 N_2 \left[\tilde{Z}_{i2,1} \dots \tilde{Z}_{i2,n} \right] + N_2 N_3 \left[\tilde{Z}_{i3,1} \dots \tilde{Z}_{i3,n} \right] \right\} d\Gamma^{(e)} \quad (\text{II-48})$$

$$\left[Z_3^{(e)}(\omega) \right] = \int_{\Gamma^{(e)}} \left\{ N_3 N_1 \left[\tilde{Z}_{i1,1} \dots \tilde{Z}_{i1,n} \right] + N_3 N_2 \left[\tilde{Z}_{i2,1} \dots \tilde{Z}_{i2,n} \right] + N_3 N_3 \left[\tilde{Z}_{i3,1} \dots \tilde{Z}_{i3,n} \right] \right\} d\Gamma^{(e)} \quad (\text{II-49})$$

d'où la matrice "élémentaire" d'impédance mécanique mutuelle :

$$\left[Z^{(e)}(\omega) \right] = \begin{bmatrix} \left[Z_1^{(e)}(\omega) \right] \\ \left[Z_2^{(e)}(\omega) \right] \\ \left[Z_3^{(e)}(\omega) \right] \end{bmatrix} \quad (\text{II-50})$$

Elle est constituée de trois lignes et de n colonnes. La matrice d'impédance mécanique mutuelle globale est obtenue par assemblage des matrices "élémentaires" :

$$\left[Z(\omega) \right] = \sum_e \left[Z^{(e)}(\omega) \right] \quad (\text{II-51})$$

où l'entier naturel e parcourt tous les éléments d'impédance mécanique mutuelle. Il faut noter que la matrice $[Z(\omega)]$ est pleine, complexe et non symétrique.

II-2 Conditions aux limites sur les couvercles

II-2.1 Équations du problème

Considérons un puits de rayon r_1 rempli de fluide idéal et entouré d'une formation élastique homogène isotrope. Ecrivons les équations régissant ce problème dans l'espace des k en coordonnées cylindriques. A l'intérieur du puits, la pression est solution de l'équation de Helmholtz (équation (II-52)). Cette mise en équation dans l'espace des k conduit à une équation cylindrique de Bessel d'indice nul (équation (II-53)).

$$\Delta \bar{p} + k_f^2 \bar{p} = 0 \quad (\text{II-52})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + (k_f^2 - k^2) \bar{p} = 0 \quad (\text{II-53})$$

k_f désigne le nombre d'onde de l'onde de compression dans le fluide. Les solutions fondamentales sont des fonctions cylindriques de Hankel d'indice zéro, de première et seconde espèces. Dans le fluide, les ondes convergentes et divergentes coexistent. Les fonctions de Hankel sont définies comme une combinaison des fonctions de Bessel et de Neumann [27-28] (voir équations (II-5) et (II-6)). Notons que la fonction de Neumann est encore appelée fonction de Bessel de seconde espèce. Les fonctions de Neumann ne sont pas définies en r égal zéro où la pression doit être définie. Cette condition conduit à choisir les constantes multiplicatives des solutions fondamentales de sorte que les fonctions de Neumann n'apparaissent pas dans l'expression de la pression. On écrit alors :

$$\bar{p}(r, k) = J_0(\hat{k}_f r) p_0 \quad (\text{II-54})$$

où p_0 est une constante complexe déterminée par les conditions aux limites et \hat{k}_f est donnée par la formule :

$$\hat{k}_f = \sqrt{k_f^2 - k^2} \quad (\text{II-55})$$

La détermination du signe de \hat{k}_f se fait de la même manière que celle de \hat{k}_p ou de \hat{k}_s (voir paragraphe II-1.2). Les conditions aux limites du système fluide-formation sont les suivantes à l'interface fluide-solide : continuité de la contrainte normale, de la contrainte tangentielle et du déplacement normal. On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} (2\mu + \lambda)\hat{k}_p H'_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) + \frac{\lambda}{r} H'_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) - jk\lambda H_{c0}(\hat{k}_s r_1) & J_0(\hat{k}_f r_1) \\ H'_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) & 0 \\ -jk H'_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) & \hat{k}_s H'(\hat{k}_s r_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{0p} \\ \bar{u}_{0s} \\ \bar{p}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{T}_p \\ -\bar{T}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-56})$$

où \bar{T}_p et \bar{T}_s sont les spectres des composantes du champ de contrainte appliqué sur la paroi du puits. \bar{T}_p est le spectre de la contrainte normale et \bar{T}_s celui de la contrainte tangentielle. Comme le fluide est idéal, \bar{T}_s est identiquement nul. Le système acoustique, supposé dans un premier temps non dissipatif, est constitué du puits rempli d'un fluide idéal entouré d'une formation élastique. Ce système admet comme solution une série d'ondes appelées "ondes de tube", dont les nombres d'onde k_{Tn} sont les racines du déterminant du système d'équations donné par la formule (II-57) :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{k}_f J'_0(\hat{k}_f r_1)}{\omega^2 \rho_f} \left[(2\mu + \lambda)\hat{k}_p H'_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) + \frac{\lambda}{r} H'_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) \right] \hat{k}_s H'_{c0}(2)(\hat{k}_s r_1) \\ + \frac{\hat{k}_f J'_0(\hat{k}_f r_1)}{\omega^2 \rho_f} \lambda k^2 H_{c0}(2)(\hat{k}_s r_1) H'_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) \\ + \hat{k}_s H'_{c0}(2)(\hat{k}_s r_1) H'_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) J_0(\hat{k}_f r_1) \end{aligned} \quad (\text{II-57})$$

Pour r fixé, l'évolution suivant z de la pression s'écrit alors :

$$p(z) = p_1 e^{-jk_{T1}z} + p_2 e^{-jk_{T2}z} + \dots + p_m e^{-jk_{Tm}z} \quad (\text{II-58})$$

où les p_i (i variant de 1 à m) sont des constantes complexes. On ne retiendra dans la suite que le premier mode de tube (celui de vitesse la plus lente), dont le nombre d'onde sera désormais noté k_T au lieu de k_{T1} . k_T est donc racine de l'équation (I-57). La recherche de la racine d'une telle équation ne peut s'effectuer que numériquement. Lorsque $v_p > v_s > v_f$ et que le diamètre du puits est petit devant toutes les longueurs d'onde du problème, le nombre d'onde de l'onde de tube est généralement approché par la formule de Lee [16] :

$$k_T = \left(k_f^2 + \frac{\rho_f k_s^2}{\rho} \right)^{-1/2} \quad (\text{II-59})$$

On déduit de l'équation (II-59) que k_T est proche de k_f lorsque ρ_f est petit devant ρ et que v_s est grand devant v_f .

II-2.2 Recherche numérique du pôle k_T

Nous sommes amenés à déterminer numériquement le zéro de la fonction définie par l'équation (II-57), qui est une fonction complexe à variable complexe. La méthode de Newton-Raphson se prête bien à ce type de problèmes [47]. Pour rechercher une racine de l'équation $g(k) = 0$, où g est une fonction complexe dérivable, on fixe k_0 comme valeur initiale, et pour chaque itération on calcule k_{n+1} par la relation récurrence suivante :

$$k_{n+1} = k_n - \frac{g(k_n)}{g'(k_n)} \quad (\text{II-60})$$

L'expression approchée de Lee est choisie comme valeur initiale :

$$k_0 = \left(k_f^2 + \frac{\rho_f k_s^2}{\rho} \right)^{-1/2} \quad (\text{II-61})$$

La solution numérique est retenue lorsque la relation (II-62) est satisfaite :

$$\left\| \frac{k_{n+1} - k_n}{k_{n+1}} \right\| < \varepsilon \quad (\text{II-62})$$

où ε est un réel strictement positif fixé à l'avance représentant l'erreur relative entre deux itérations consécutives. En général, on prendra ε voisin de 0,005 soit encore 0,5% d'erreur relative entre k_n et k_{n+1} . Cette méthode est utilisable en basse fréquence (c'est à dire quand r_1 est petit devant toutes les longueurs d'onde du problème), où l'expression (II-61) peut être considérée comme une valeur initiale acceptable.

Pour calculer le pôle à une fréquence f élevée, on effectue une subdivision régulière de l'intervalle $[0, +\infty[$ en n segments de largeur $\Delta f = f/n$. Si Δf est assez petit, pour les fréquences $f_1 = \Delta f$ et $f_2 = 2\Delta f$, la formule (II-59) constitue une valeur initiale acceptable. On peut calculer directement par la méthode de Newton-Raphson $k_T^{(1)}$ et $k_T^{(2)}$, qui sont les nombres d'onde des ondes de tube associées aux fréquences f_1 et f_2 . Supposons connus $k_T^{(1)}, k_T^{(2)}, \dots, k_T^{(i)}$, on calcule la valeur initiale $k_0^{(i+1)}$ par extrapolation linéaire à partir de $k_T^{(i-1)}$ et $k_T^{(i)}$.

$$k_T^{(i)} = \frac{k_T^{(i-1)} + k_0^{(i+1)}}{2} \quad (\text{II-63})$$

Le tableau II-1 présente les résultats obtenus pour une formation élastique telle que $v_p = 5588$ m/s, $v_s = 3387$ m/s et $\rho = 2500$ kg/m³, et un fluide tel que $v_f = 1425$ m/s et $\rho_f = 856,5$ kg/m³. Dans le cas où, $v_p > v_s > v_f$ la formation est dite rapide. Le tableau II-2 présente les résultats obtenus pour une formation telle que $v_p = 3411$ m/s, $v_s = 1350$ m/s et $\rho = 2200$ kg/m³ et un fluide identique au précédent. Dans le cas où $v_p > v_f > v_s$, la formation est dite lente.

fréquence	k_T/k_f
100 Hz	1,0261
500 Hz	1,0128
1000 Hz	1,0074
5000 Hz	1,0017

Tableau II-1 : Exemple de calcul de nombre d'onde de l'onde de tube pour une formation rapide à $k_p/k_f = 0,255$ et $k_s/k_f = 0,421$

si, pour une formation rapide (tableau II-1), on écrit l'équation (II-61) en fonction des vitesses des différentes ondes, on a :

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{v_f} + \frac{\rho_f}{\rho v_s} \quad (\text{II-64})$$

On en déduit que v_0 est inférieure à v_f soit $k_0 > k_f > k_s > k_p$. Compte tenu des choix des différentes coupures du plan complexe et des propriétés des fonctions de Bessel et de Hankel, la quantité $g(k_0)/g'(k_0)$ est réelle [27-28]. On en déduit que $k_T^{(1)}$ est aussi réel et l'on constate qu'il est aussi plus grand que k_f . Par conséquent, $k_T^{(2)}$ est aussi réel et on itère le raisonnement. On démontre ainsi que $k_T^{(i)}$ est réel quelque soit i . La vitesse de l'onde de tube est donc réelle et inférieure à celle de l'onde de compression dans le fluide car $k_T > k_f > k_s > k_p$. Il n'y a pas de rayonnement de l'onde de tube en champ lointain dans la formation au cours de sa propagation (l'onde rayonnée est une onde évanescence).

fréquence	k'_T/k_s	k''_T/k_s
100 Hz	1,1102	0,00000
500 Hz	1,0002	-0,00738
1000 Hz	0,9762	-0,13215
5000 Hz	0,95246	-0,74331

Tableau II-2 : Exemple de calcul de nombre d'onde de l'onde de tube pour une formation lente à $k_p/k_s = 0,56$ et $k_f/k_s = 0,947$

Lorsque la formation est dite lente (tableau II-2), c'est à dire $v_p > v_f > v_s$, on constate que k_T est complexe soit $k_T = k'_T + jk''_T$. Deux cas de figures se présentent suivant que, la partie réelle de k_T est plus grande ou plus petite que k_s . Dans le premier cas, lorsque la partie réelle de k_T est comprise entre k_f et k_s . Le puits rayonne dans la formation avec une atténuation non négligable de l'onde de tube durant sa propagation. Dans le second cas, la partie réelle de k_T est plus grande que k_s . Le puits ne rayonne pas dans la formation en champ lointain car k_T est réel (l'onde rayonnée est évanescence). Le phénomène se produit pour des fréquences relativement basses, dans notre cas $r_1 \ll \lambda_s$.

II-2.3 Unicité de la solution

$g(k)$ étant la fonction définie au paragraphe précédent, on considère un contour γ fermé sur lequel $g(k)$ est régulière. L'intégrale définie par l'équation (II-65) donne le nombre de zéros (noté N_z) moins le nombre de pôles (noté N_p) de la fonction $g(k)$ contenus à l'intérieur du contour γ [48-49].

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\gamma} \frac{g'(k)}{g(k)} d\gamma = N_z - N_p \quad (\text{II-65})$$

Le nombre de pôles de la fonction $g(k)$ à l'intérieur du domaine du plan complexe délimité par γ , est donné l'intégrale (II-66) [49].

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\gamma} g(k) d\gamma = N_p \quad (\text{II-66})$$

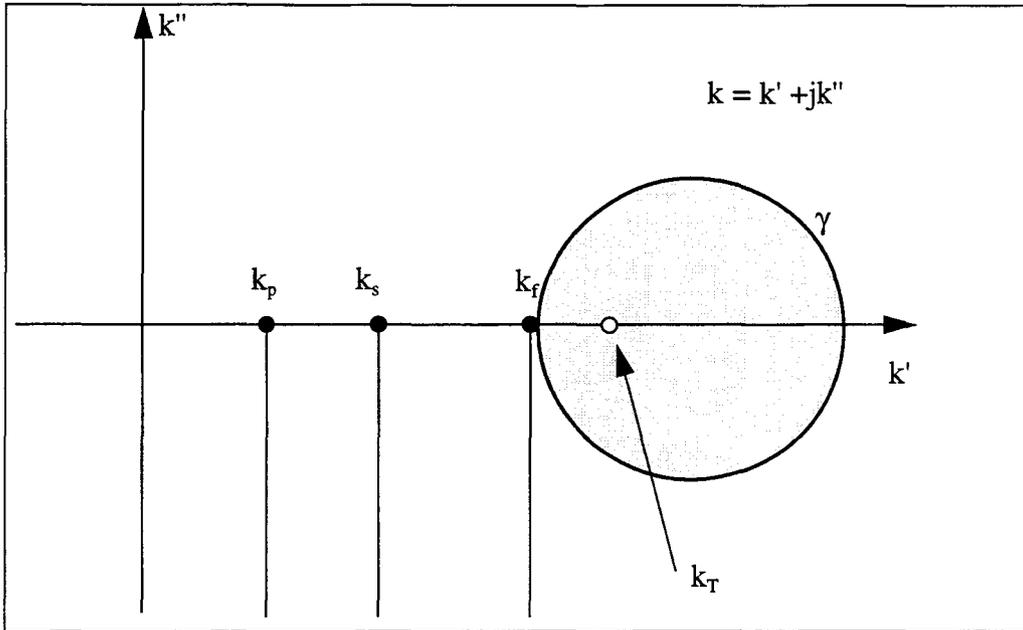
d'où :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\gamma} \left(\frac{g'(k)}{g(k)} + g(k) \right) d\gamma = N_z \quad (\text{II-67})$$

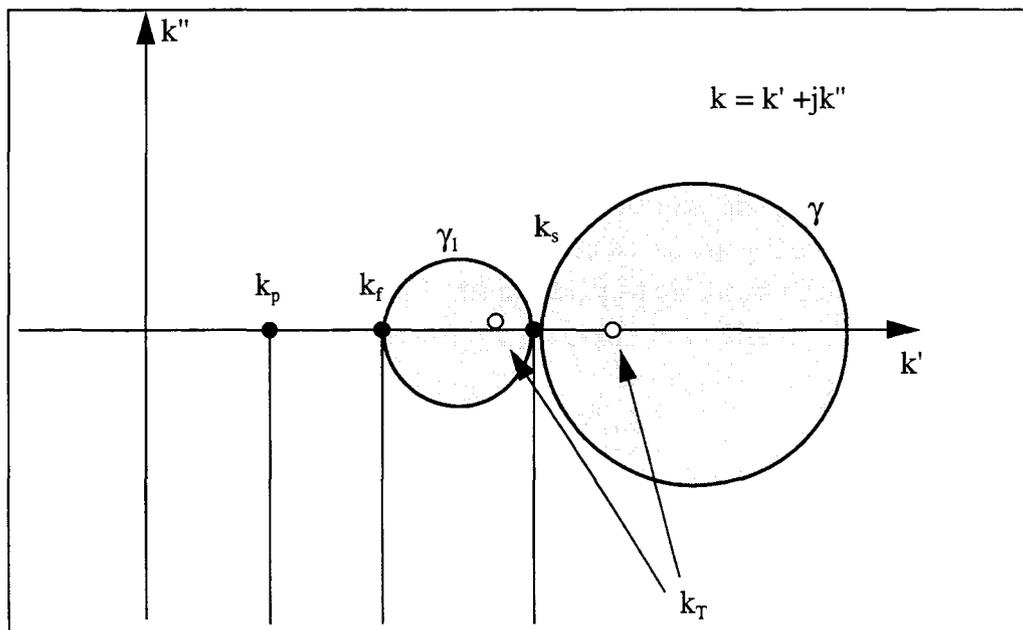
N_z désigne le nombre de zéros et N_p le nombre de pôles de la fonction g à l'intérieur du contour γ . Le calcul de ces intégrales se fait en écrivant k sous la forme $z_0 + re^{j\theta}$ où z_0 est un point du plan complexe, r un réel strictement positif et θ l'angle polaire autour de z_0 (variant de 0 à 2π). k décrit donc le cercle de centre z_0 et de rayon r . La méthode d'intégration de Gauss est utilisée.

On a vu que lorsque la formation est rapide et que le milieu est non dissipatif, le nombre d'onde de l'onde de tube ainsi que les nombres d'onde des ondes P, S et de l'onde de volume dans le fluide se trouvent sur l'axe réel. De plus, on a l'inégalité $k_p > k_s > k_f > k_T$. k_T se trouve donc dans un disque dont le diamètre est porté par l'axe réel, passant par $k_f + \varepsilon$, où ε est un réel strictement positif aussi petit que possible (figure II-4). Notons γ le contour de ce disque. On prend un rayon du cercle γ égal N fois la distance $|k_T - k_f|$, avec (N égal à 2, 3 ou 4). L'introduction des pertes mécaniques éloigne très légèrement les nombres d'ondes de l'axe réel. Il ne reste qu'à évaluer numériquement l'intégrale (II-67) pour vérifier que l'intérieur de γ ne contient qu'un seul zéro de $g(k)$. Les éventuelles autres racines de $g(k)$ correspondant à modes de tube plus rapides peuvent être calculés par la méthode proposée par les références [48-49].

En basse fréquence un seul mode de tube existe, alors que pour des fréquences élevées d'autres modes de tube sont obtenus. A 5 kHz par exemple, on constate l'apparition de deux autres pôles pour le cas présenté au tableau II-1. Ils sont situés dans le cercle de centre $k' = 20,825$ $k'' = 0,0$ de rayon 0,075 et le cercle de centre où $k' = 17,3$ et $k'' = -0,2$ (k' et k'' désignent les coordonnées dans le plan complexe du point d'affixe k), de rayon 0,4. Notons que k_T vaut 22,0837.



Lorsque la formation est lente et que le nombre d'onde de l'onde de tube est tel que $k_p > k_f > k_T > k_s$, on effectue la même démarche en prenant pour contour γ ou γ_1 (figure II-5).



II-2.4 Élément rayonnant

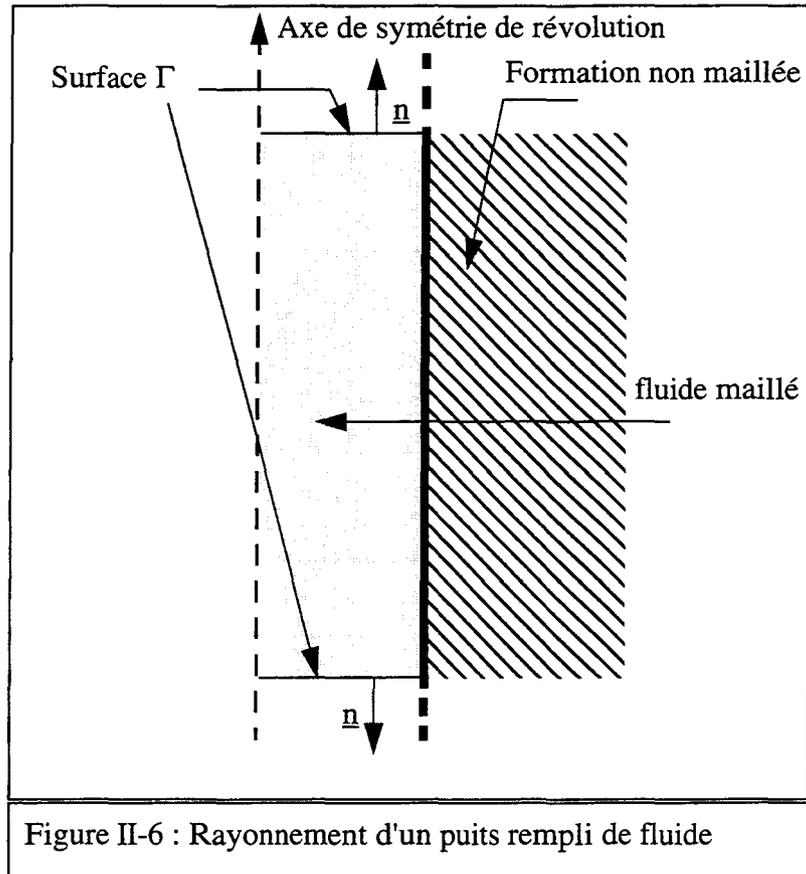


Figure II-6 : Rayonnement d'un puits rempli de fluide

Γ_∞ est la surface du couvercle orientée vers l'extérieur du volume fluide comme l'indique la figure II-6. Elle est située à z constant et r compris entre zéro et r_1 . Comme pour toute surface maillée par éléments finis, elle est découpée en éléments linéiques à trois noeuds que l'on vient attacher aux éléments fluides de la surface Γ_∞ . On suppose que la surface Γ_∞ est située en champ lointain, c'est à dire suffisamment loin de la source pour que le champ de pression sur Γ_∞ correspondent à celui de l'onde de tube. Le champ de pression sur Γ_∞ est donné par :

$$p(r, z) = p_0(r)e^{-jk_T|z|} \quad (\text{II-68})$$

Si d est la plus grande dimension de la source et L la distance du couvercle à la source, il faut que les conditions $d \ll L$ et $r_1 \ll L$ soient satisfaites [16]. Dans ce cas, la condition de rayonnement de Sommerfeld [21-24] sur la surface Γ_∞ s'écrit pour toute source dont le centre acoustique est placé en $z = 0$:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -j \operatorname{sgn}(z) k_T p \quad (\text{II-69})$$

où la fonction $\operatorname{sgn}(z)$ qui vaut 1 si $z > 0$ et -1 si $z < 0$. Cette relation nous permet de déterminer le flux de vitesse ψ sur la surface Γ_∞ :

$$\rho_f c_f^2 \Psi = -j \rho_f c_f^2 \omega^2 k_T \int_{\Gamma_\infty^{(e)}} \left[N_p^{(e)} \right]^t \operatorname{sgn}(z) \left[N_p^{(e)} \right] d\Gamma_\infty^{(e)} \underline{p}^{(e)} \quad (\text{II-70})$$

soit

$$\rho_f c_f^2 \Psi = -j \rho_f c_f^2 \omega^2 k_T \left[D^{(e)} \right] \underline{p}^{(e)} \quad (\text{II-71})$$

où $[D^{(e)}]$ est la matrice élémentaire de rayonnement

$$\left[D^{(e)} \right] = \int_{\Gamma_\infty^{(e)}} \left[N_p^{(e)} \right]^t \operatorname{sgn}(z) \left[N_p^{(e)} \right] d\Gamma_\infty^{(e)} \quad (\text{II-72})$$

La matrice globale de rayonnement $[D]$ est obtenue par assemblage des matrices élémentaires $[D^{(e)}]$. Elle est très creuse puisqu'elle ne fait intervenir que les valeurs nodales de la pression pour les noeuds de la surface Γ_∞ . Elle ne dépend pas de la fréquence. L'élément rayonnant construit est comparable à l'élément rayonnant d'onde sphérique de type monopolaire (équation I-45) [21-22], lorsque le rayon de la sphère est infini. Cet élément est un élément de non réflexion pour le mode de tube de nombre d'onde k_T . Les ondes dont le nombre d'onde sera différent de k_T seront partiellement réfléchies.

Si la fréquence de l'excitation est élevée, plusieurs ondes de tube peuvent coexister. On peut imaginer une matrice de rayonnement prenant en compte deux ondes de tube, de nombre d'ondes respectifs k_{T1} et k_{T2} en écrivant sur Γ_∞ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{j \operatorname{sgn}(z) k_{T1} e^{-jk_{T1}|z|} + j \operatorname{sgn}(z) A k_{T2} e^{-jk_{T2}|z|}}{e^{-jk_{T1}|z|} + A e^{-jk_{T2}|z|}} p \quad (\text{II-73})$$

d'où le vecteur élémentaire de flux de vitesse :

$$\underline{\Psi}^{(e)} = \frac{j \operatorname{sgn}(z) k_{T1} e^{-jk_{T1}|z|} + j \operatorname{sgn}(z) A k_{T2} e^{-jk_{T2}|z|}}{e^{-jk_{T1}|z|} + A e^{-jk_{T2}|z|}} \times \int_{\Gamma_\infty^{(e)}} \left[N_p^{(e)} \right]^t \operatorname{sgn}(z) \left[N_p^{(e)} \right] d\Gamma_\infty^{(e)} \underline{p}^{(e)} \quad (\text{II-74})$$

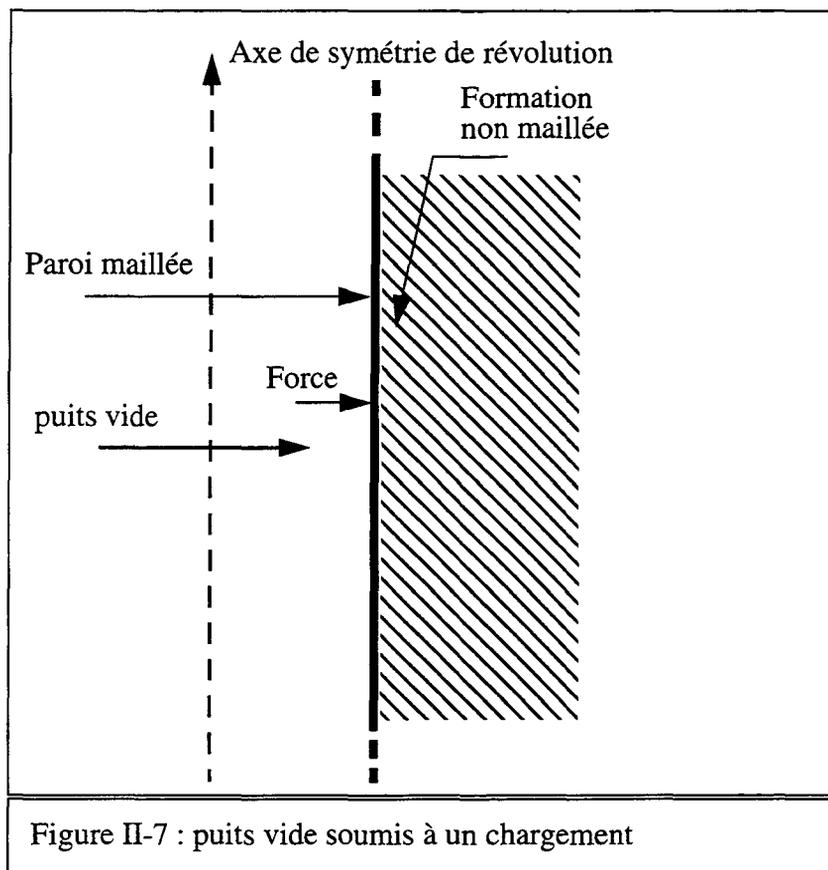
On peut ainsi calculer le vecteur flux de vitesse en fonction de la pression, à condition de connaître A , rapport des amplitudes des ondes de tube associées aux nombres d'ondes k_{T2} et k_{T1} . De plus, il faut être capable de trouver les deux premiers modes de tube. Cette formule pourra être généralisée à un nombre m quelconque de modes de tube, à condition d'être en mesure de calculer les rapports d'amplitudes, et les m nombres d'ondes des ondes de tube.

II-3 Couplage aux éléments finis

La matrice d'impédance mécanique, ainsi que la matrice de rayonnement à travers les couvercles sont désormais connues. Dans l'intégrale relative au travail des forces surfaciques d'un élément e de la frontière S_T (équation I-20), on décompose la force surfacique f en $f_{app} + R$, où f_{app} est la force appliquée sur Γ_T et R la réaction du milieu. Le vecteur des forces nodales totales s'écrit :

$$\underline{F} - \underline{R} = \underline{F} - [\underline{Z}(\omega)] \underline{U}_p \quad (\text{II-75})$$

II-3.1 Analyse harmonique d'un puits vide soumis à une force normale sur la paroi

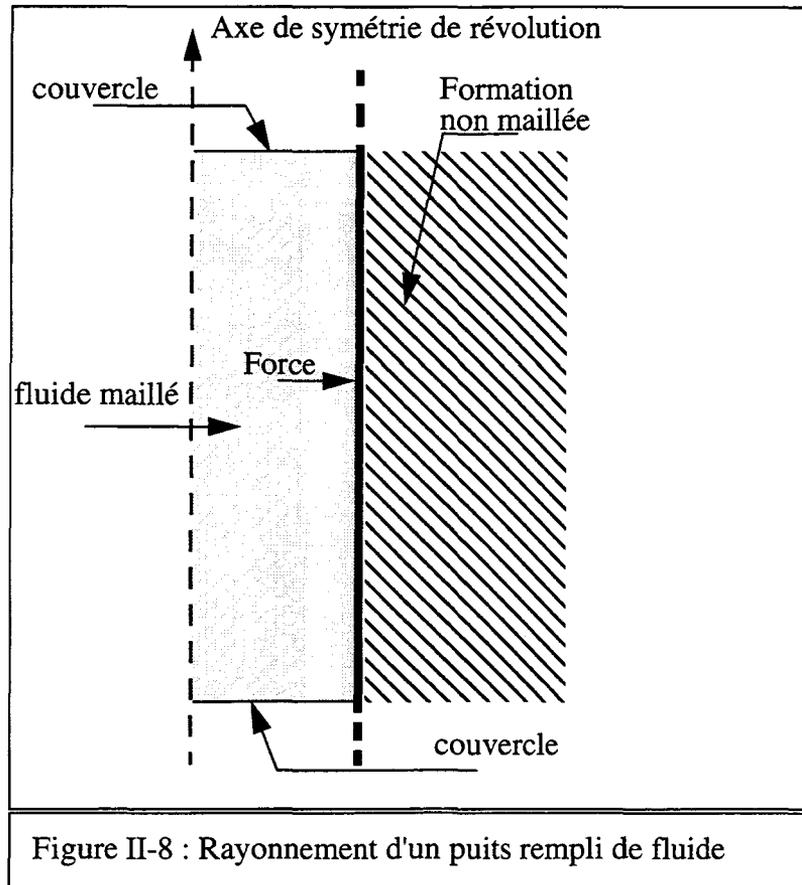


On considère l'analyse harmonique à la fréquence angulaire ω du puits vide soumis à une distribution de forces nodales sur la paroi du puits. La matrice d'impédance mécanique permet de relier directement les forces nodales aux déplacements nodaux. Le système d'équations à résoudre est non symétrique et s'écrit :

$$[\underline{Z}(\omega)] \underline{U}_p = \underline{F} \quad (\text{II-76})$$

\underline{F} est le vecteur des forces nodales appliquées, égal à vide à la réaction du milieu. Le champ de déplacement est complexe quelque soit \underline{F} car la matrice $[\underline{Z}(\omega)]$ est complexe. La résolution du système se fait par méthode de Gauss [11-12].

II-3.2 Analyse harmonique d'un puits rempli de fluide et soumis à une force normale sur la paroi



Dans cette analyse, le puits contient un fluide parfait. Le chargement est constitué du vecteur \underline{F} représentant les forces nodales normales au puits. Toutefois, on peut aussi imposer un champ de déplacement ou un champ de pression. Les couvercles du puits sont modélisés par des éléments rayonnants. Le système d'équations à résoudre est non symétrique du fait de la présence des éléments interfaces fluide-solide et des éléments d'impédances mécaniques mutuelles. Il s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [Z(\omega)] & -[L] \\ -\rho_f^2 c_f^2 \omega^2 [L]^t & [H] - \omega^2 [M_1] - j\rho_f c_f^2 \omega^2 k_T [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-77})$$

La résolution du système est effectuée par la méthode de Gauss. Les champs de déplacement et de pression sont complexes pour la même raison que précédemment et à cause de la présence des éléments rayonnants. On peut a posteriori calculer la réaction du milieu par l'expression :

$$[Z(\omega)] \underline{U}_p = \underline{R} \quad (\text{II-78})$$

\underline{R} est le vecteur de forces nodales normales qu'il faudrait appliquer sur la paroi du puits vide pour obtenir le champ de déplacement \underline{U}_p .

II-3.3 Analyse harmonique du rayonnement d'un transducteur piézoélectrique dans un puits

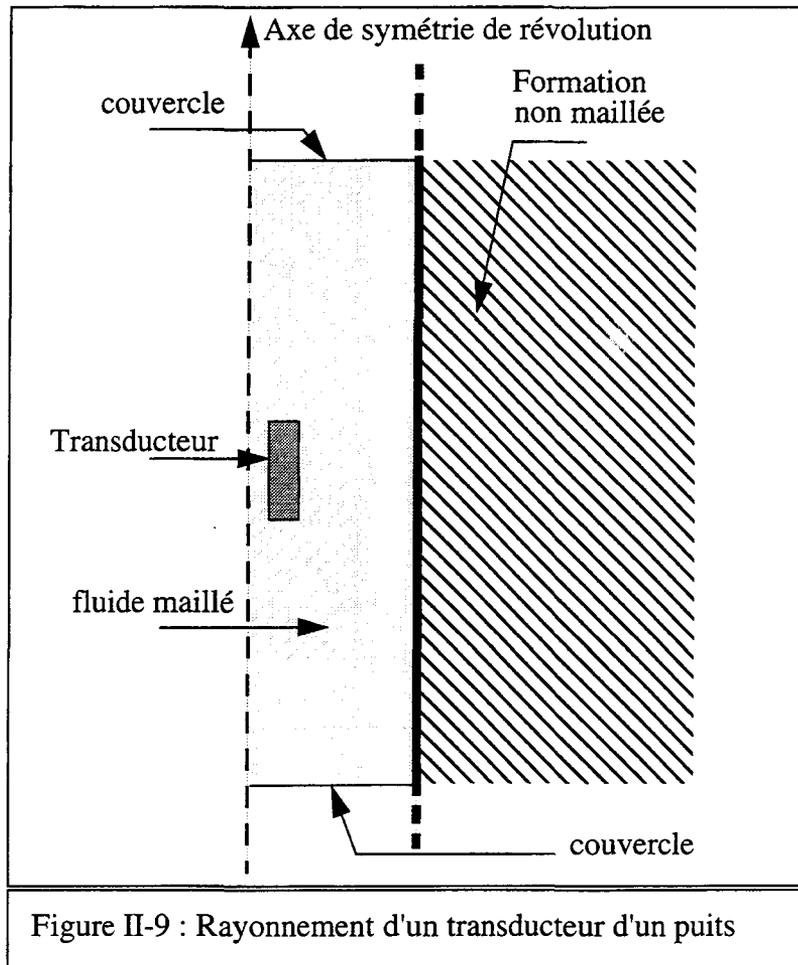


Figure II-9 : Rayonnement d'un transducteur d'un puits

Dans ce type d'analyse, le chargement est constitué d'une distribution nodale de forces et de charges électriques. Toutefois, on peut aussi imposer un champ de déplacement, de pression ou de potentiel électrique sur certains noeuds. Les couvercles du puits sont modélisés par des éléments rayonnants et la paroi du puits à l'aide d'éléments d'impédances mutuelles. Le système d'équations résultant s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] + [Z(\omega)] - \omega^2 [M] & [K_{u\phi}] & -[L] \\ [K_{u\phi}]^t & [K_{\phi\phi}] & [0] \\ -\rho_f^2 c_f^2 \omega^2 [L]^t & [0] & [H] - \omega^2 [M_1] - j\rho_f c_f^2 \omega^2 k_T [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\Phi}_p \\ \underline{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ -\underline{Q}_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-79})$$

La résolution du système est effectuée par la méthode de Gauss.

Si le transducteur possède une seule électrode chaude de potentiel électrique imposé Φ_0 , l'intensité du courant électrique qui la traverse peut s'écrire :

$$I = j\omega Q_p \quad (\text{II-80})$$

L'admittance électrique Y du transducteur est donnée par la relation :

$$Y = -j\omega \left[K_{\Phi_0\Phi_0} + \frac{1}{\Phi_0} K_{u\Phi_0}^t U \right] \quad (\text{II-81})$$

$K_{\Phi_0\Phi_0}$ et $K_{u\Phi_0}^t$ sont les restrictions des matrices piézoélectrique et diélectrique au degré de liberté électrique correspondant aux noeuds situés sur l'électrode.

II-4 Rayonnement dans la formation

Le calcul du rayonnement dans la formation est un outil indispensable pour caractériser la source acoustique modélisée. Ce calcul consiste à déterminer le champ de déplacement dans la formation sur un segment à r constant. Le même maillage que celui de l'interface fluide-solide est repris dans la direction z.

II-4.1 Rayonnement d'un puits vide

Lorsque le puits est vide, le vecteur contraintes nodales global est obtenu par multiplication de la matrice d'impédance mécanique $[\tilde{Z}(\omega)]$ par le vecteur des valeurs nodales du déplacement (équation (II-36)). Il suffit donc de trouver deux matrices d'impédance mécanique $[\tilde{Z}_p(r, \omega)]$ et $[\tilde{Z}_s(r, \omega)]$ reliant les champs de déplacement radial u_p et tangentiel u_s dans la formation, sur un segment parallèle à la paroi situé à une distance $r > r_1$ de l'axe du puits, au vecteur contraintes nodales normales à la paroi telles que :

$$[\tilde{Z}_p(r, \omega)] \underline{U}_p = \underline{\mathbb{I}} \quad (\text{II-82})$$

et :

$$[\tilde{Z}_s(r, \omega)] \underline{U}_s = \underline{\mathbb{I}} \quad (\text{II-83})$$

Le calcul de ces deux matrices se fait de la même manière que dans la section II-1.3.2. On a les formules suivantes :

$$\left[\mathbf{u}_{pi}^{(e)}(r) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_p(r, k) \begin{bmatrix} e^{-jkz_1} \\ e^{-jkz_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{-jkz_n} \end{bmatrix} dk \quad (\text{II-84})$$

pour la composante radiale du déplacement et :

$$\left[\mathbf{u}_{si}^{(e)}(r) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_s(r, k) \begin{bmatrix} e^{-jkz_1} \\ e^{-jkz_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{-jkz_n} \end{bmatrix} dk \quad (\text{II-85})$$

pour la composante tangentielle du déplacement. Le calcul des matrices d'impédances est identique à celui de la section II-1.3.2 remplaçant r_1 par r . On pose une fois de plus :

$$\left[\tilde{\mathbf{Y}}_{pi}^{(e)}(r, \omega) \right] = \left[\mathbf{u}_{pi}^{(e)}(r) \right] \quad (\text{II-86})$$

et :

$$\left[\tilde{\mathbf{Y}}_{si}^{(e)}(r, \omega) \right] = \left[\mathbf{u}_{si}^{(e)}(r) \right] \quad (\text{II-87})$$

De la même manière que dans la section II-1.4.2, on calcule d'abord les matrices d'impédances élémentaires, en assemblant les vecteurs colonnes $[\tilde{\mathbf{Y}}_{pi}^{(e)}(r, \omega)]$ $[\tilde{\mathbf{Y}}_{si}^{(e)}(r, \omega)]$. Ensuite l'assemblage des matrices élémentaires permet d'obtenir les matrices d'impédances mécaniques globales $[\mathbf{Z}_p(r, \omega)]$ et $[\mathbf{Z}_s(r, \omega)]$. On peut alors écrire les relations suivantes :

$$\left[\tilde{\mathbf{Z}}_p(r, \omega) \right] \mathbf{U}_p = \mathbf{I} \quad (\text{II-88})$$

$$\left[\tilde{\mathbf{Z}}_s(r, \omega) \right] \mathbf{U}_s = \mathbf{I} \quad (\text{II-89})$$

Ainsi pour toute distribution nodale de forces, on peut calculer le champ de déplacement dans la formation, et le rayonnement de l'onde acoustique.

II-4.2 Rayonnement d'un puits rempli de fluide

Lorsque le puits est rempli de fluide, des forces sont appliquées sur la paroi à l'extérieur du maillage et le principe utilisé pour calculer le rayonnement du puits vide doit être modifié. Soient z_1 et z_2 les côtes inférieure et supérieure du domaine de la paroi du puits modélisé, que l'on suppose éloignées de la source acoustique. On note T_1 et T_2 les valeurs (complexes) de la contrainte en ces deux points respectifs. Sachant que, loin de la source, le champ de contrainte dans le puits est extrapolé en tenant compte de l'hypothèse de l'onde de tube, on écrit :

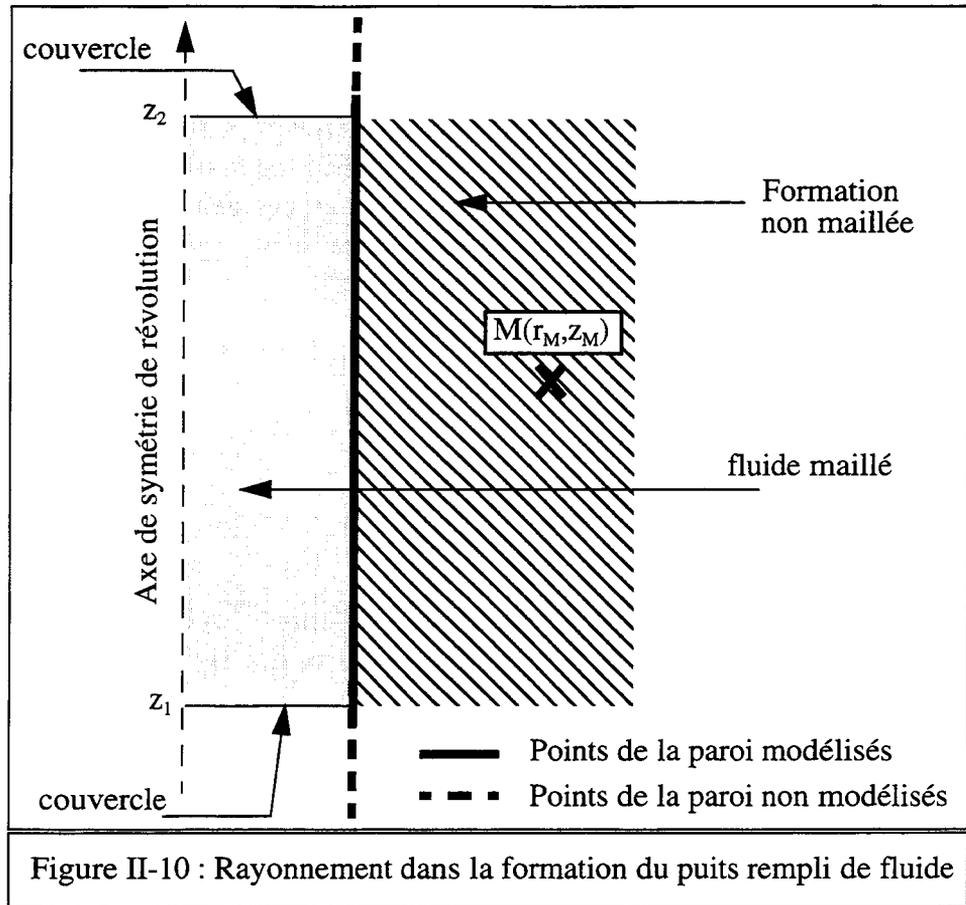
$$T(z) = \begin{cases} T_1 e^{jk_T(z-z_1)} & z < z_1 \\ T_2 e^{-jk_T(z-z_2)} & z > z_2 \\ 0 & z_1 < z < z_2 \end{cases} \quad (\text{II-90})$$

Le spectre de cette distribution de pression est donné par l'équation (II-91) lorsque k_T est réel et par l'équation (II-92) lorsque k_T est un nombre complexe ayant une partie imaginaire non nulle :

$$\begin{aligned} \bar{T}(k) = & -\frac{T_1}{2} e^{-jk_T z_1} \delta(k + k_T) + \frac{T_2}{2} e^{jk_T z_2} \delta(k - k_T) \\ & - T_1 e^{-jk_T z_1} \int_{z_1}^0 e^{jz(k_T + k)} dz - T_2 e^{jk_T z_2} \int_0^{z_2} e^{jz(k - k_T)} dz \end{aligned} \quad (\text{II-91})$$

$$\bar{T}(k) = -j \frac{T_1 e^{jk z_1}}{k - k_T} + j \frac{T_2 e^{jk z_2}}{k + k_T} \quad (\text{II-92})$$

Le calcul du rayonnement dans la formation se fait en deux étapes. Soit $M(r_M, z_M)$ le point de la formation pour lequel on calcule le rayonnement (calcul des deux composantes du champ de déplacement). La contribution de la région de la paroi du puits modélisé se fait de la même manière qu'avec un puits vide (paragraphe II-4.1). La contribution de la région non modélisée se fait en extrapolant la contrainte normale sur la paroi. On a fait l'hypothèse que le champ de contrainte est celui de l'onde de tube en champ lointain. Il est donc approché par l'équation (II-90) et son spectre est donné par les équations (II-91) et (II-92). Notons que la contrainte normale est égale à la pression au signe près. Le calcul du déplacement induit par ce champ de contrainte se fait à l'aide des équations (II-12) à (II-19) (paragraphe II-1.2).



II-5 Méthode éléments finis-décomposition en k appliquée au fluide

L'objet de cette section est d'étendre la méthode du couplage éléments finis-décomposition en k présentée dans un solide élastique classique au fluide idéal (voir paragraphes II-1 à II-4). Ceci est effectué en vue de modéliser le rayonnement de sources acoustiques dans un tube rempli d'huile et entouré d'eau afin de valider expérimentalement le couplage éléments finis-décomposition en k (chapitre IV). Nous présentons une description brève lorsque le milieu extérieur est fluide.

II-5.1 Matrice d'impédance mutuelle

Si on impose une distribution de densité surfacique de flux de vitesse $\psi(z)$ sur la paroi du puits de rayon r_1 , la pression engendrée sur la paroi est donnée dans l'espace des k par :

$$\bar{p}(k) = \frac{\bar{\psi}(k)}{\hat{k}_f H'_{c0}(2)(\hat{k}_f r_1)} H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_f r_1) \quad (\text{II-93})$$

où $\overline{\psi}(k)$ est le spectre de la densité surfacique de flux de vitesse et \hat{k}_f est donnée par l'équation (II-55). k_f est le nombre d'onde de l'onde compression dans le fluide. La pression en fonction de z est obtenue par transformation de Fourier inverse. L'élément d'impédance est linéique à trois noeuds (figure II-3). Si on impose une impulsion de densité de flux de vitesse nodale en un noeud d'un élément, on peut déterminer le spectre de cette densité de flux de vitesse, puis calculer la pression engendrée dans l'espace k . Finalement grâce à une transformée de Fourier inverse, on obtient la pression sur la paroi du puits. L'intégration numérique se fait par la méthode de Gauss. L'intégrand de l'équation (II-93) présente une singularité en $k = k_f$ et $k = -k_f$. Au voisinage de ces deux valeurs, l'intégrand de l'équation (II-93) se comporte comme $\ln[(k_f^2 - k^2)^{-1/2} r_1]$. Toutefois, dans les exemples étudiés jusqu'à présent, aucune précaution d'intégration numérique n'a été prise pour traiter ces deux singularités. Comme le problème est linéaire, on peut construire une relation matricielle entre le vecteur des valeurs nodales de la densité du flux de vitesse $\underline{\psi}$ et le vecteur des valeurs nodales de pression sur la paroi \underline{P} :

$$[Z_f(\omega)] \underline{P} = \underline{\psi} \quad (\text{II-94})$$

$[Z_f(\omega)]$ est une matrice pleine complexe non symétrique qui joue le rôle de fonction de Green du milieu extérieur.

II-5.2 Rayonnement des couvercles

Lorsque le puits (cylindre) entouré d'un fluide idéal est rempli d'un autre fluide idéal, les nombres d'onde des modes de propagation du système sont donnés par l'annulation de la quantité Δ_f (équation (II-95)). Cette équation est obtenue en écrivant les conditions de continuité de la pression et du déplacement normal à la surface de séparation des deux milieux :

$$\Delta_f = \frac{\hat{k}_1}{\omega^2 \rho_{f1}} J'_{c0}(\hat{k}_1 r_1) H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_2 r_1) - \frac{\hat{k}_2}{\omega^2 \rho_{f2}} J_{c0}(\hat{k}_1 r_1) H_{c0}'^{(2)}(\hat{k}_2 r_1) \quad (\text{II-95})$$

Dans cette expression l'indice 1 est associé au fluide interne (à l'exception de r_1 qui est le rayon du puits) et l'indice 2 est associé au fluide externe.

La détermination de la racine de Δ_f correspondant au premier mode de tube k_f se fait graphiquement. Sachant que racine est réelle ou très proche de l'axe réel lorsque $v_{f1} < v_{f2}$, on trace Δ_f en fonction de k où k parcourt l'axe réel à une fréquence fixée (figures IV-4.a à IV-4.c et IV-5, tableau IV-2).

II-5.3 Couplage aux éléments finis

Les matrices d'impédance $[Z_f(\omega)]$ et de rayonnement $[D]$ (associée à l'absorption du premier mode de tube) sont couplées aux matrices éléments finis. Le chargement est constitué d'une distribution nodale de forces \underline{F} et de charges électriques Q_p . Le système d'équations résultant s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2 [M] & [K_{u\phi}] & -[L] \\ [K_{u\phi}]^t & [K_{\phi\phi}] & [0] \\ -\rho_f^2 c_f^2 \omega^2 [L]^t & [0] & [H] + [Z_f(\omega)] - \omega^2 [M_I] - j\rho_f c_f^2 \omega^2 k_T [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\Phi}_p \\ \underline{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ -Q_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-96})$$

Dans ce système, $[K_{uu}]$ désigne la matrice de rigidité élastique, $[M]$ (resp. $[M_I]$) la matrice masse cohérente solide (resp. fluide), $[K_{u\phi}]$ (resp. $[K_{\phi\phi}]$) la matrice de rigidité piézoélectrique (resp. diélectrique), $[L]$ matrice de couplage fluide-solide et $[H]$ la matrice de compressibilité fluide.

II-6 Conclusion

Un modèle théorique, à notre connaissance original, a été mis au point. Il est basé sur le couplage éléments finis-décomposition en k et permet la prise en compte complète des conditions aux limites sur la paroi du puits. Lorsque celui-ci est vide le problème posé par la nature infinie du milieu est intégralement et correctement résolu, aux erreurs d'approximations numériques près (erreur relative maximale autorisée pour le calcul des intégrales généralisées ; discrétisation par éléments finis du domaine modélisé). Ainsi, pour toute distribution de forces nodales normales (resp. de flux de vitesse) sur la paroi, on sait parfaitement calculer le déplacement (resp. la pression) sur celle-ci et son rayonnement dans la formation (resp. dans le fluide) présentant ou non des pertes.

Lorsque le puits est rempli d'un fluide idéal et entouré d'une formation, nous avons déterminé la (les) vitesse(s) de(s) l'onde(s) de tube, grâce à un algorithme de Newton-Raphson dans le plan complexe. La détermination de cette vitesse est faite lorsque $v_p > v_s > v_f$, et $v_p > v_f > v_s$. Il faut noter que la plupart des publications sur ce sujet [16, 42-44] se contentent d'approcher cette vitesse par la formule de Lee (II-58) valable uniquement en basse fréquence quand $v_p > v_s > v_f$. La construction de l'élément rayonnant sur le couvercle du domaine de calcul a permis l'absorption totale de l'onde de tube. Toutefois, des difficultés peuvent apparaître pour plusieurs ondes de tube se propageant simultanément dans le puits. Ainsi, le problème de la modélisation d'une source acoustique dans un puits de forage, est bien traité pour les basses fréquences, où l'on est en présence d'une seule onde de tube. D'un point de vue purement numérique, cette méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter de maillage de la formation autour du puits. Seuls les points se trouvant à l'interface fluide-solide sont modélisés sur une longueur finie.

Chapitre III

Validation du couplage éléments finis- décomposition en k

L'objet de ce chapitre est la validation du modèle éléments finis-décomposition en k développé dans le chapitre précédent. Pour cela, nous présentons un ensemble de tests numériques dont les résultats sont systématiquement comparés à des résultats analytiques ou publiés. Dans la première partie, nous étudions le rayonnement d'un puits vide, soumis à un chargement normal à la surface de sa paroi. Nous examinons également tous les problèmes liés à la convergence de la solution, et des intégrales calculées. Dans la seconde partie, nous étudions le rayonnement d'un puits rempli d'un fluide idéal. Dans un cas la célérité de l'onde de cisaillement dans la formation est supérieure à celle de l'onde de compression du fluide dans l'autre, elle lui est inférieure.

III-1 Puits vide

III-1.1 Présentation du problème traité

Appliquons la méthode du couplage éléments finis-décomposition en k à l'étude du rayonnement d'un puits vide soumis à une contrainte normale sur sa paroi. Le rayon r_1 du puits vaut 0,5 m. La formation choisie pour effectuer les tests présente les caractéristiques suivantes : $E = 0,69383 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$; $\nu = 0.20963$; $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ où E désigne le module de Young, ν le coefficient de poisson et ρ la masse volumique. Ces valeurs correspondent aux célérités suivantes : $v_p = 5588 \text{ m/s}$; $v_s = 3387 \text{ m/s}$. La prise en compte des pertes mécaniques se fait en écrivant le module de Young et le coefficient de Poisson sous la forme complexe [9, 26] :

$$E = E' + jE'' \quad \nu = \nu' + j\nu'' \quad (\text{III-1})$$

Dans la suite de cette section on prendra $E'' = 0,10407 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ et $\nu'' = 0$, ce qui donne une tangente de l'angle de pertes mécaniques : $\tan(\delta) = E''/E' = 0,15$ (on dira dans la suite par abus de langage que le matériau présente 15% de pertes mécaniques).

Pour une distribution de contrainte normale $T(z)$ donnée sur la paroi du puits dans la région de l'espace $-10 \text{ m} < z < +10 \text{ m}$, on peut déterminer théoriquement le spectre $\bar{T}(k)$ dans l'espace des nombres d'onde k , si ce spectre décroît lorsque k tend vers l'infini comme $1/k^\alpha$, où α est un réel supérieur ou égal à un (condition requise pour la convergence des intégrales généralisées (voir paragraphe II-1.2) pour r supérieur ou égal à r_1). Nous pouvons alors calculer le déplacement en tout point de coordonnées (r, z) . Les composantes u_p et u_s du champ de déplacement sont données par les formules suivantes (équations (III-2) à (III-5)) :

$$u_p(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_p(r, k) e^{-jkz} dk \quad u_s(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_s(r, k) e^{-jkz} dk \quad (\text{III-2})$$

où les expressions de $\bar{u}_p(r, k)$ et $\bar{u}_s(r, k)$ sont données par :

$$\bar{u}_{0p}(k) = \frac{-\hat{k}_s H'_{c0}(2)(\hat{k}_s r_1) \bar{T}_n(k)}{\Delta} \quad \bar{u}_{0s}(k) = \frac{-jk H_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) \bar{T}_n(k)}{\Delta} \quad (\text{III-3})$$

Δ est donné par :

$$\Delta = \left[(2\mu + \lambda) \hat{k}_p H'_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) + \frac{\lambda}{r_1} H_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) \right] \hat{k}_s H'_{c0}(2)(\hat{k}_s r_1) + \lambda k^2 H_{c0}(2)(\hat{k}_s r_1) H_{c1}(2)(\hat{k}_p r_1) \quad (\text{III-4})$$

et :

$$\bar{u}_p(r, k) = \bar{u}_{0p}(k)H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r) \quad \bar{u}_s(r, k) = \bar{u}_{0s}(k)H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r) \quad (\text{III-5})$$

On utilise la même technique d'intégration numérique qu'au chapitre II (voir paragraphe II-1.2). Une fois la condition d'intégrabilité satisfaite, le calcul de ces intégrales est très stable.

L'étude du puits à vide se fait en ne maillant que sa paroi (figure III-1). Ce problème présente une symétrie de révolution, l'axe de symétrie étant confondu à l'axe du puits. Le maillage est constitué d'un segment de droite, sur lequel on repère les noeuds représentés ici par des points. Il est constitué de 20 éléments linéiques à trois noeuds de même longueur, soient 41 noeuds régulièrement espacés de 0,5 m et donc 41 degrés de liberté. Il occupe le domaine de l'espace compris entre de $z = -10$ m et $z = +10$ m. Le rayon du puits r_1 est égal 0,5 m. Le maillage utilisé pour le calcul du rayonnement dans la formation (figure III-2) est identique à celui utilisé pour le calcul du champ de déplacement sur la paroi puits, décalé de la distance $r - r_1$. r désigne la distance à l'axe de symétrie à laquelle on calcule le rayonnement dans la formation.

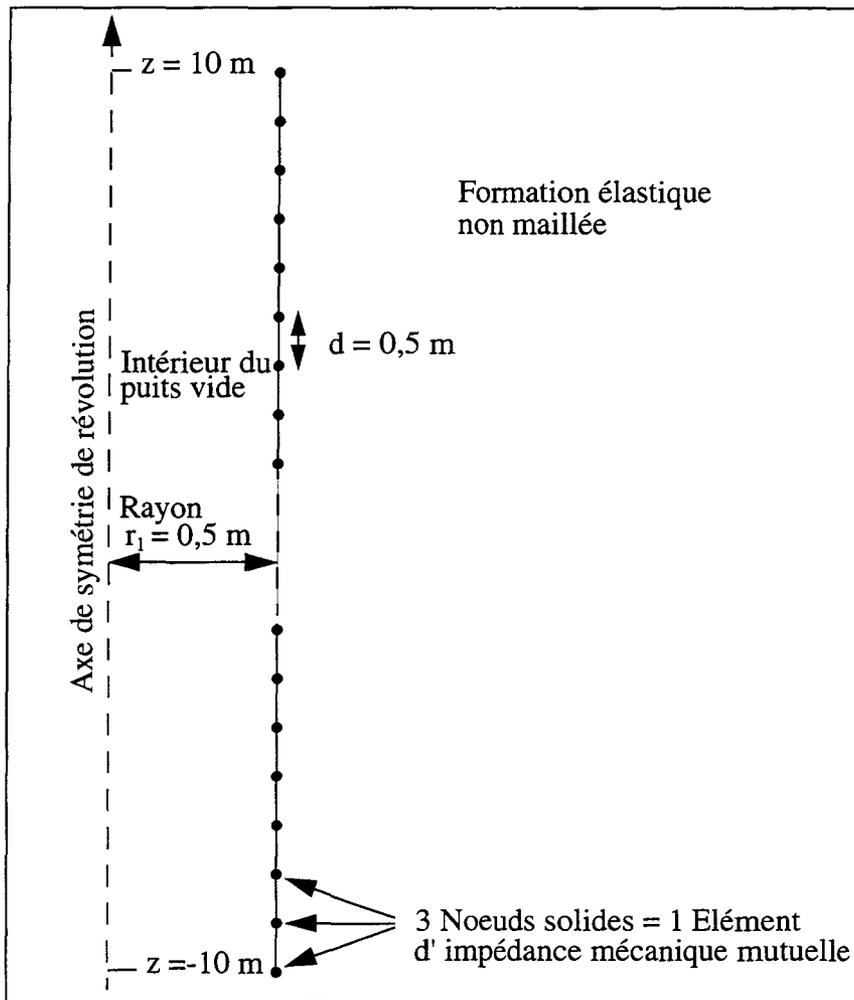
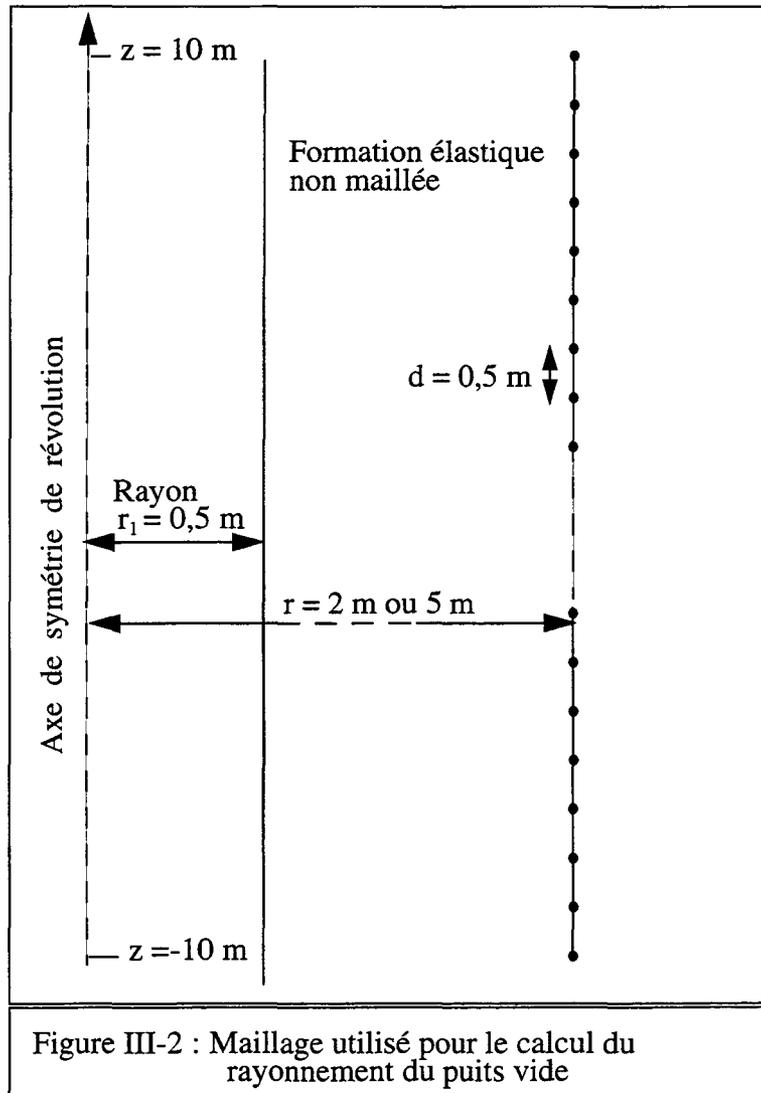


Figure III-1 : Maillage du puits vide



On effectue des tests pour des fréquences voisines du 1 kHz. Théoriquement, le critère de discrétisation en $\lambda_s/L = 4$ utilisé en éléments finis [9, 13, 21, 26] permet d'effectuer des tests jusqu'à 650 Hz, où λ_s est la longueur d'onde de l'onde de cisaillement dans la formation et L la plus petite longueur des éléments du domaine maillé. Ici tous les éléments sont de même longueur $L = 1$ m. Pour trois types de chargements, nous calculons la composante radiale du champ de déplacement u_p sur la paroi du puits ainsi que les deux composantes (u_p et u_s) du rayonnement dans la formation à 2 et 5 mètres de distance de l'axe de symétrie de révolution. Notons que pour ces trois tests, la matrice d'impédance mécanique à une fréquence fixée est identique.

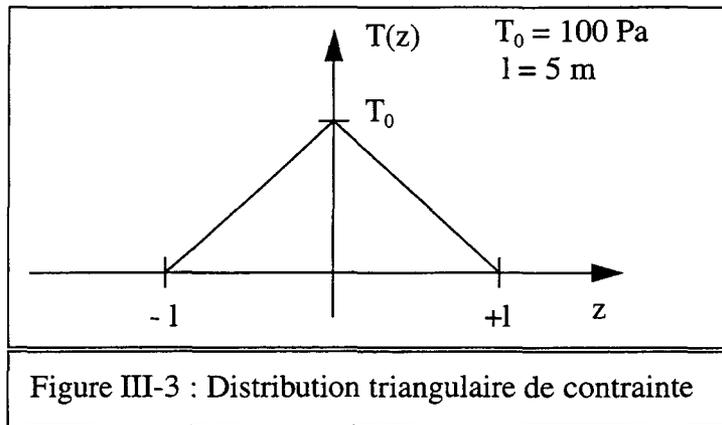
Le calcul se fait en deux étapes : premièrement nous calculons la composante radiale du champ de déplacement sur la paroi du puits (section II-1) ; puis en post-traitement les deux composantes (u_p et u_s) du rayonnement dans la formation sont calculées (voir paragraphe II-4.1). Les champs de déplacement obtenus par calcul numérique sont comparés systématiquement aux champs de déplacement analytiques.

III-1.2 Distribution triangulaire de contrainte normale

On impose une distribution triangulaire de contrainte normale d'amplitude maximale T_0 égale à 100 Pa sur une longueur $2l$ de la paroi du puits ($r_1 = 0,5\text{m}$, $l = 5\text{ m}$), telle que la coordonnée z soit comprise entre $-l$ et $+l$:

$$T(z) = \begin{cases} -\frac{T_0}{l}|z| + T_0 & \text{si } -l < z < l \\ 0 & \text{si } z < -l \text{ ou } z > l \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

La figure III-3 montre la courbe représentative de la distribution triangulaire de contrainte en fonction z .



$T(z)$ est une distribution paire, continue sur toute la droite réelle. Sa dérivée présente des discontinuités de première espèce aux points de coordonnées $z = -l$, $z = +l$ et $z = 0$. Son spectre est donné par la formule :

$$\bar{T}(k) = 2\frac{T_0}{l}\left(\frac{1 - \cos(kl)}{k^2}\right) \quad (\text{III-7})$$

La décroissance du spectre à l'infini étant en $1/k^2$, le calcul des intégrales (II-32), (II-84) et (II-85) est possible. Les figures III-4.a et III-4.b, montrent l'évolution du champ de déplacement radial normalisé à la valeur maximale du module du déplacement en fonction de z à 1 et 1,5 kHz pour une formation sans pertes mécaniques. Les figures III-5.a et III-5.b montrent les mêmes résultats (déplacement radial sur la paroi) lorsque la formation présente une tangente de l'angle de pertes mécaniques égale à 0,15. Les figures III-6.a à III-6.d montrent les deux composantes du déplacement à 2 et 5 mètres de l'axe de symétrie à 1 kHz dans une formation sans pertes mécaniques. Les figures III-7.a à III-7.d montrent les mêmes résultats (rayonnement dans la formation) lorsque la formation présente une tangente de l'angle de pertes mécaniques égale à 0,15.

Déplacement radial sur la paroi du puits vide pour une formation sans pertes mécaniques dû à une distribution triangulaire de contrainte normale

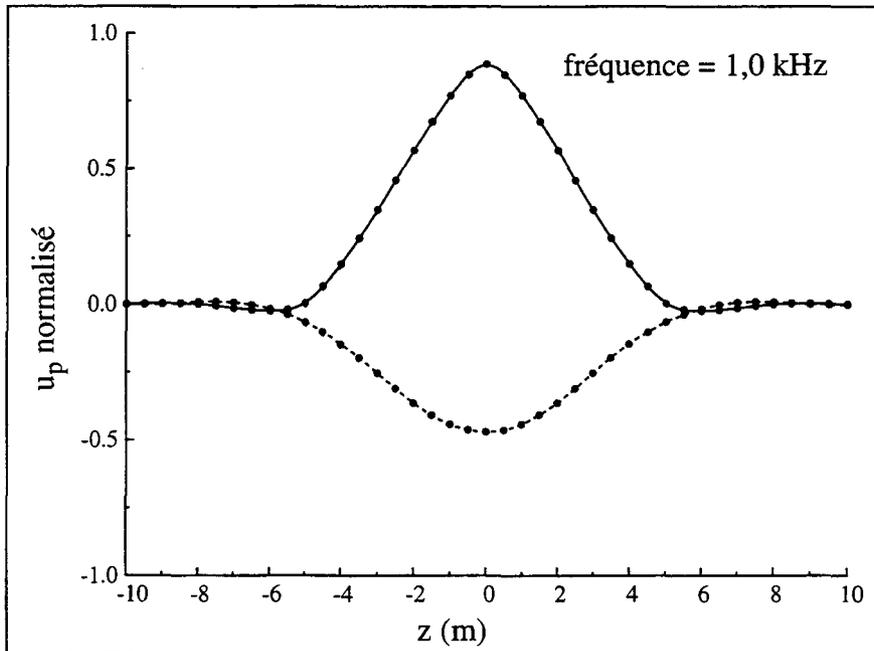


Figure III-4.a : Distribution triangulaire (formation sans pertes)

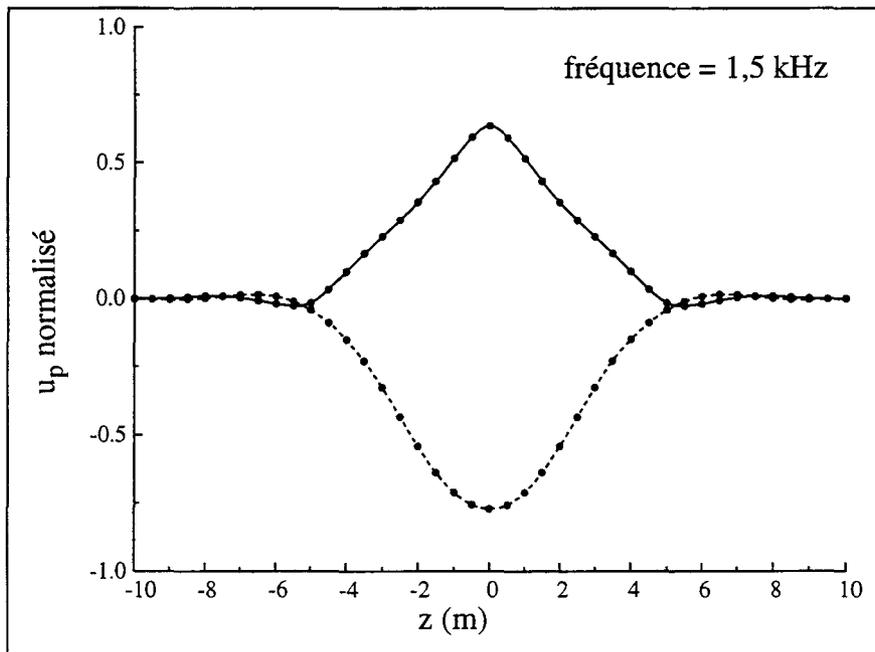


Figure III-4.b : Distribution triangulaire (formation sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Déplacement radial sur la paroi du puits vide pour une formation ayant 15% de pertes mécaniques dû à une distribution triangulaire de contrainte normale

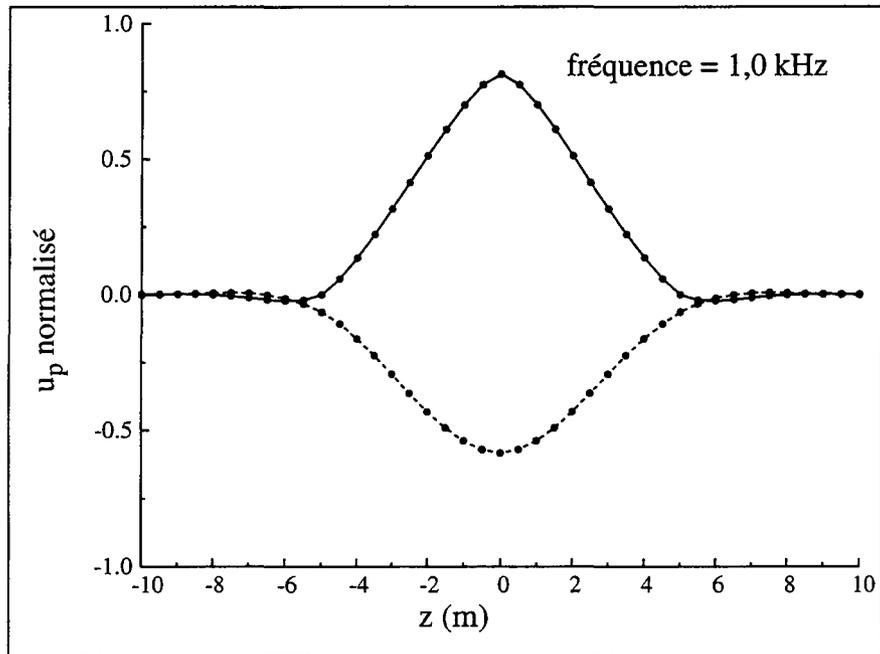


Figure III-5.a : Distribution triangulaire (formation avec pertes)

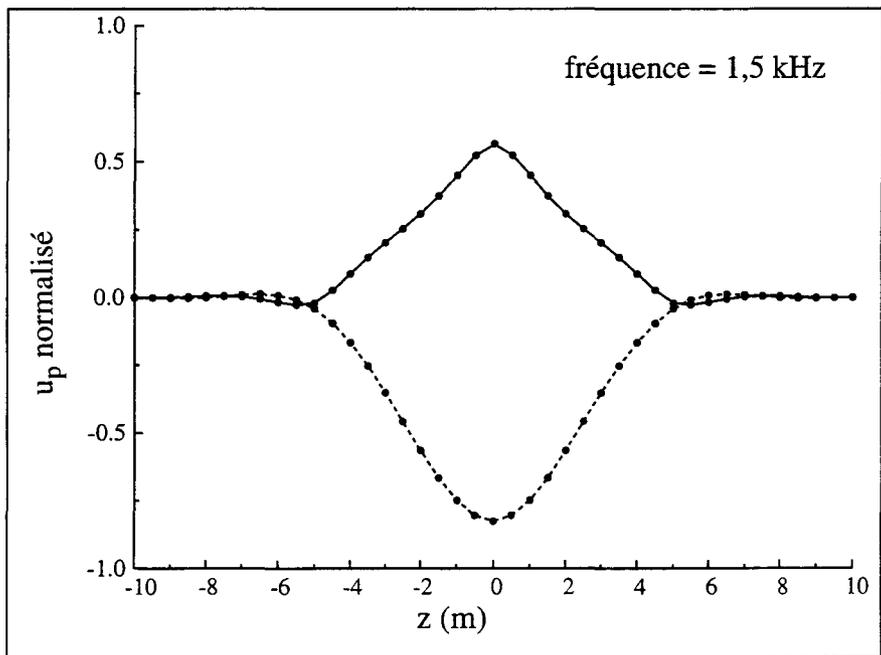


Figure III-5.b : Distribution triangulaire (formation avec pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante radiale du rayonnement du puits vide dans la formation sans pertes mécaniques dû à une distribution triangulaire de contrainte normale

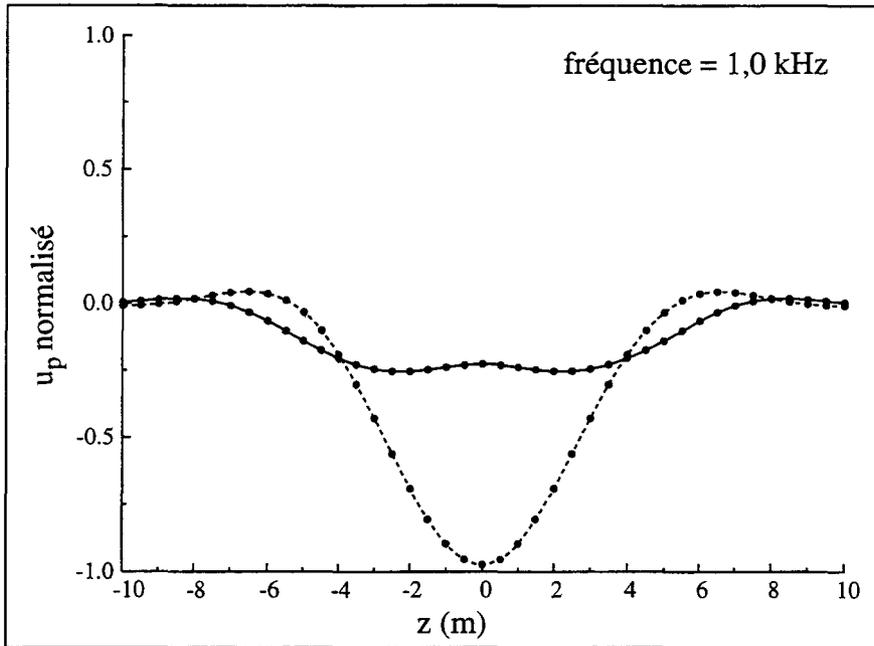


Figure III-6.a : Rayonnement à $r = 2$ m (formation sans pertes)

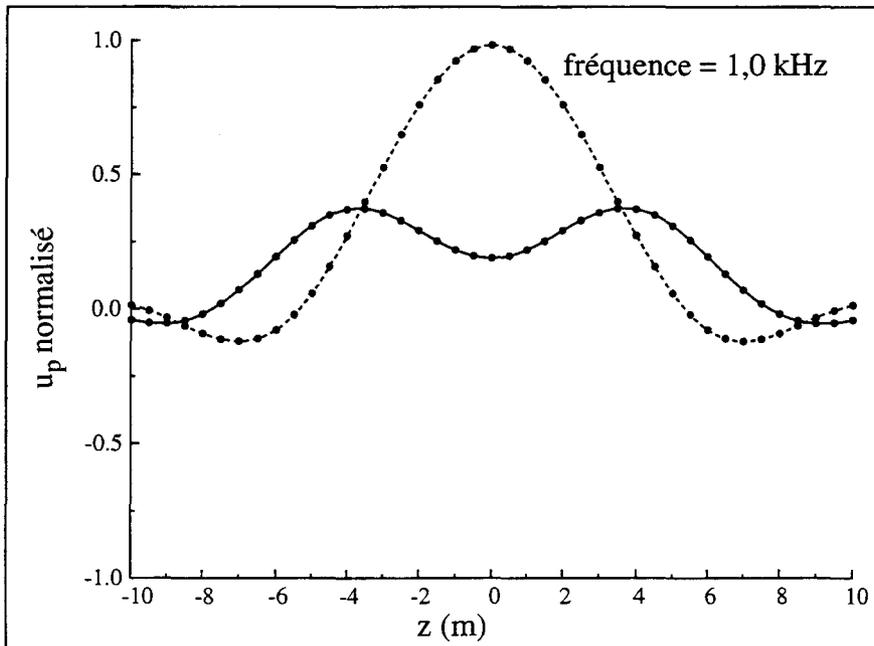


Figure III-6.b : Rayonnement à $r = 5$ m (formation sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante tangentielle du rayonnement du puits vide dans la formation sans pertes mécaniques dû à une distribution triangulaire de contrainte normale

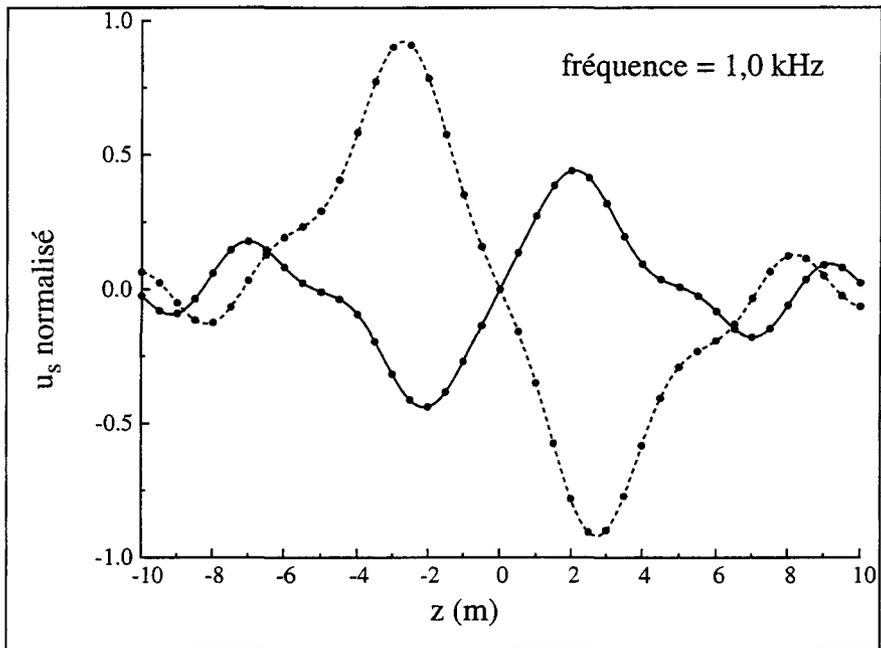


Figure III-6.c : Rayonnement à $r = 2$ m (formation sans pertes)

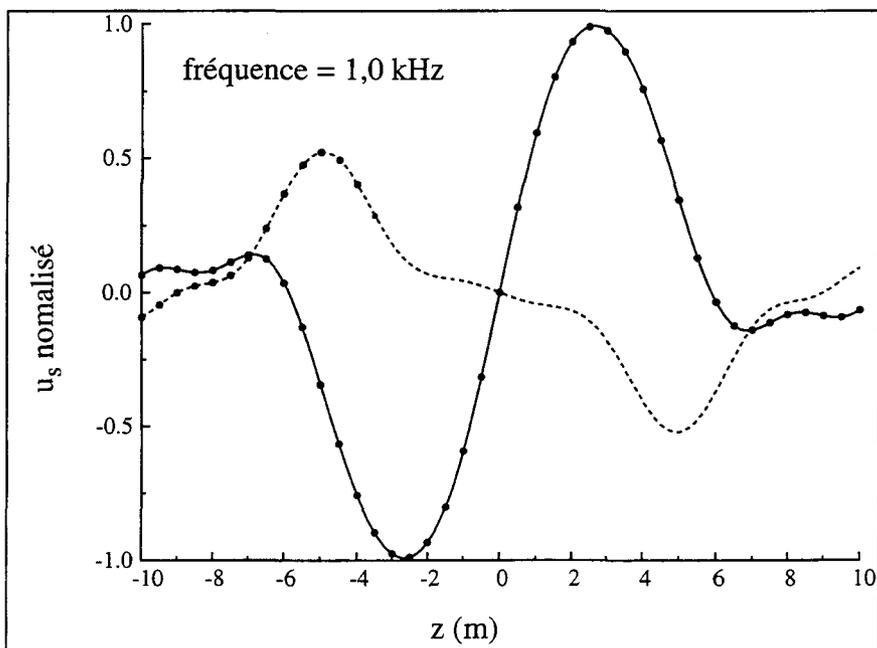


Figure III-6.d : Rayonnement à $r = 5$ m (formation sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante radiale du rayonnement du puits vide dans la formation avec 15% de pertes mécaniques dû à une distribution triangulaire de contrainte normale

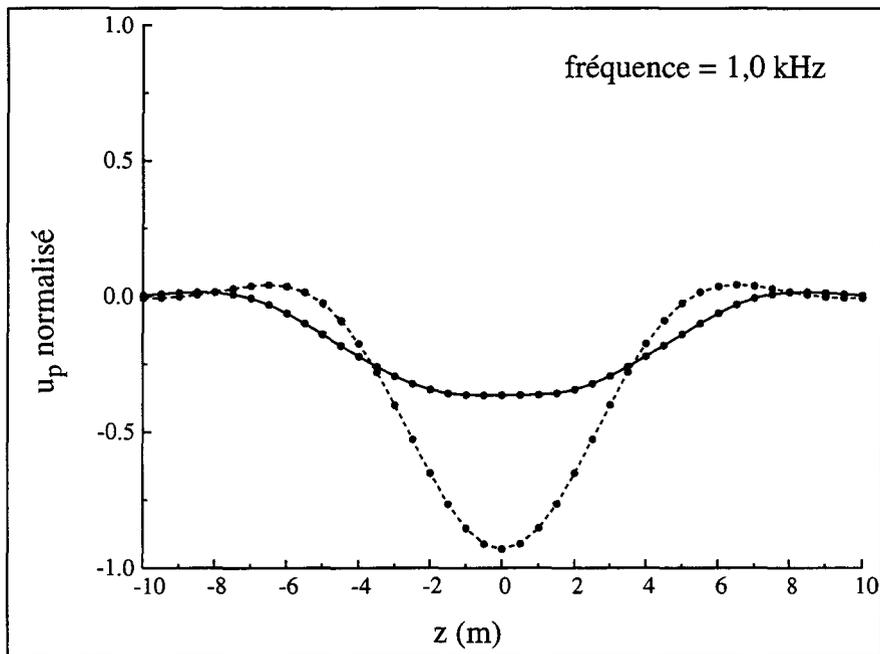


Figure III-7.a : Rayonnement à $r = 2$ m (formation avec pertes)

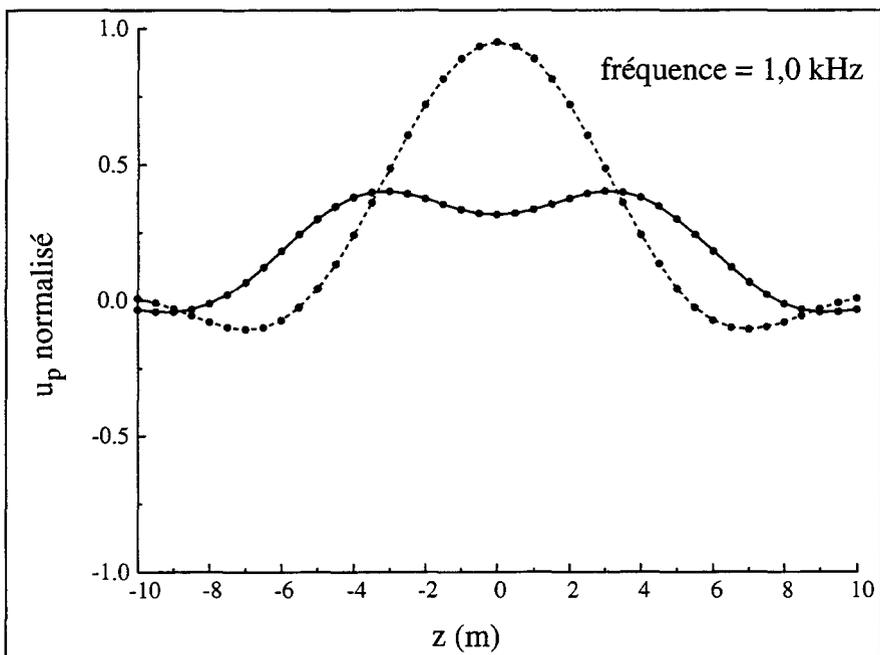


Figure III-7.b : Rayonnement à $r = 5$ m (formation avec pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante tangentielle du rayonnement du puits vide dans la formation avec 15% de pertes mécaniques dû à une distribution triangulaire de contrainte

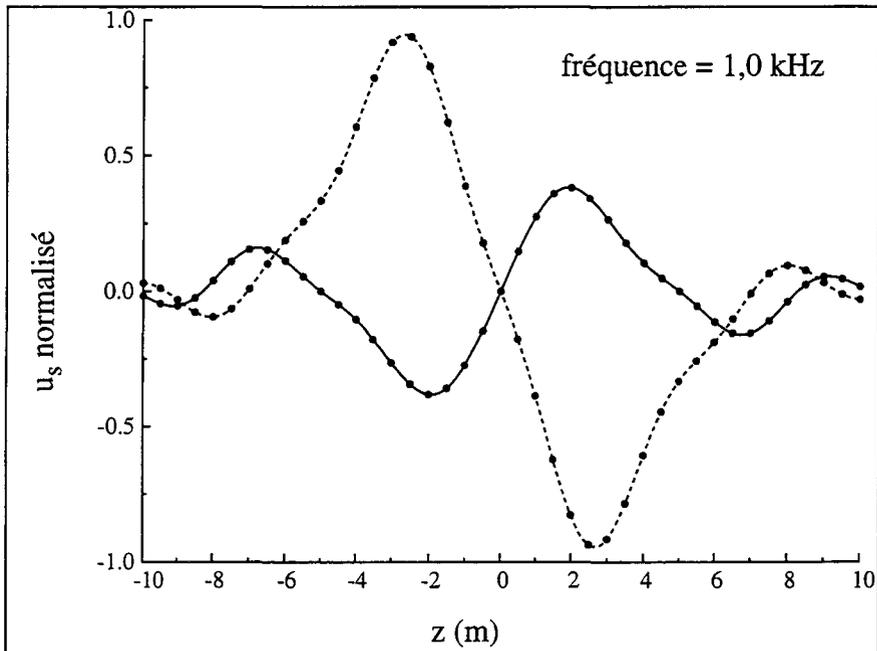


Figure III-7.c : Rayonnement à $r = 2$ m (formation avec pertes)

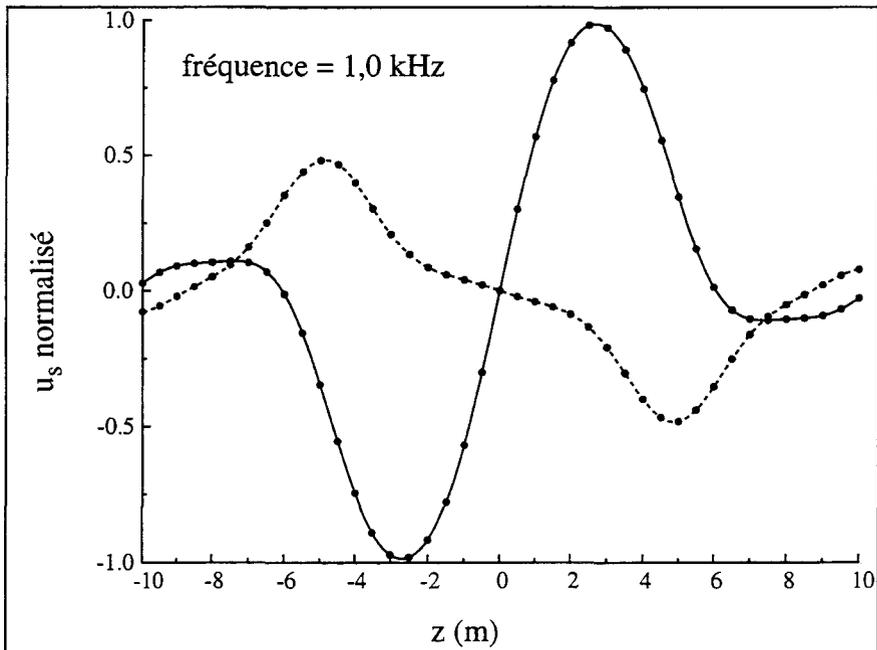


Figure III-7.d : Rayonnement à $r = 5$ m (formation avec pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

L'ensemble des résultats obtenus (figures III-4.a à III-7.d) montrent un parfait accord entre les champs de déplacement calculés par le couplage éléments finis-décomposition en k et les solutions analytiques, quelques soient les valeurs de z (côte) et de r (distance à l'axe de symétrie). L'introduction d'une tangente de l'angle de pertes mécaniques de 0,15 dans la formation n'affecte pas les performances de la méthode (figures III-5.a, III-5.b et III-7.a à III-7.d).

Le modèle numérique développé exige que l'on fasse une étude de la convergence. Deux types d'études de convergence sont possibles : la première consiste à étudier la convergence vers la solution en fonction du paramètre d'intégration numérique ϵ (voir paragraphe II-1.2), la seconde à l'étudier en fonction de la densité de maillage. Pour évaluer l'erreur, on définit l'erreur quadratique moyenne, E_{QM} donnée par la formule suivante :

$$E_{QM} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left\| \frac{u_{\alpha i(\text{analytique})}^2 - u_{\alpha i(\text{numerique})}^2}{u_{\alpha i(\text{analytique})}^2} \right\|^2} \quad (\text{III-8})$$

où α prend les valeurs p et s. N est le nombre de points du maillage et l'indice entier i parcourt les tous noeuds du maillage (noeuds de la partie de la paroi du puits maillée).

Les figures III-8 et III-9 montrent l'évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction du paramètre d'intégration ϵ (voir paragraphe II-1.2) pour une formation sans pertes mécaniques et une formation ayant une tangente de l'angle de pertes mécanique de 0,15 respectivement. La figure III-10 montre l'évolution de l'erreur en fonction de la densité du maillage, représentée par le paramètre λ_s/L lorsque ϵ vaut $5 \cdot 10^{-5}$. L vaut 1 m et est égal à la longueur d'un élément d'impédance (notons que tous les éléments du maillage sont identiques, voir figures III-1 et III-2). λ_s est la longueur d'onde de l'onde S dans la formation. Enfin la figure III-11 présente l'évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction de la tangente de l'angle de pertes ($\tan(\delta)$) mécaniques lorsque ϵ vaut $5 \cdot 10^{-5}$.

Les figures III-8 à III-11 montrent le faible niveau de l'erreur quadratique moyenne commise lors du calcul du déplacement sur la paroi et du calcul du rayonnement dans la formation. Le paramètre ϵ peut-être fixé à 10^{-2} , pour garantir une erreur quadratique moyenne inférieure à 0,03 (soit 3%). Malgré l'apparition d'une décroissance exponentielle dans les quantités à intégrer (équations (II-32), (II-84) et (II-85)) liée à la présence de pertes mécaniques, on constate (figure III-10) que l'introduction des pertes mécaniques ne change pas la précision des calculs. Enfin on remarque que le maillage n'a pas besoin d'être aussi dense qu'en éléments finis. Les éléments d'impédance mutuelle sont quasiment insensible à la discrétisation, par suite un critère de discrétisation en $\lambda_s/L = 2$ voir $\lambda_s/L = 1,5$ (au lieu de $\lambda_s/L = 4$) s'avère suffisant.

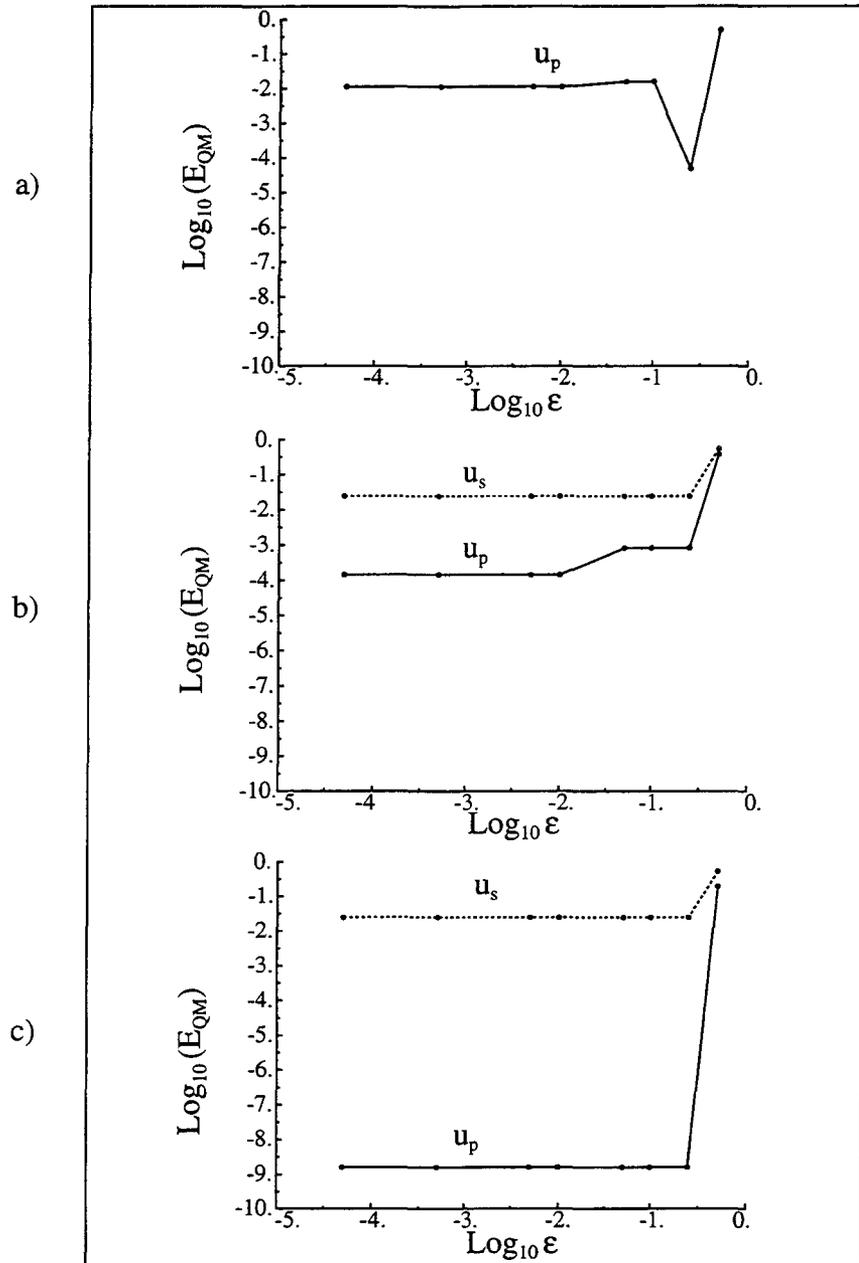


Figure III-8 : Évolution de l'erreur en fonction de ϵ (formation sans pertes mécaniques) :

- a) Composante u_p sur la paroi du puits,
- b) Composantes u_p et u_s à $r = 2$ m,
- c) Composantes u_p et u_s à $r = 5$ m.

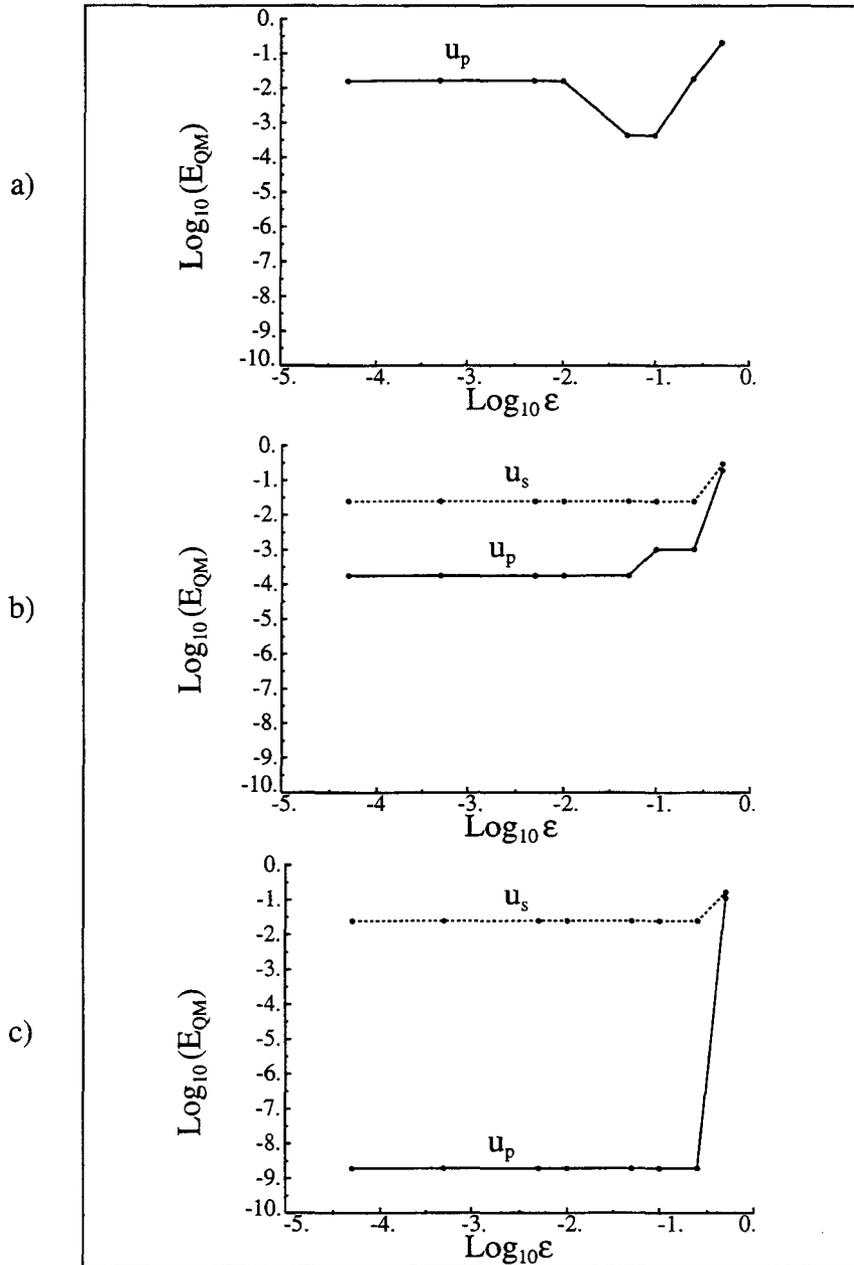


Figure III-9 : Évolution de l'erreur en fonction de ϵ (formation avec 15% de pertes mécaniques) :

- a) Composante u_p sur la paroi du puits,
- b) Composantes u_p et u_s à $r = 2$ m,
- c) Composantes u_p et u_s à $r = 5$ m.

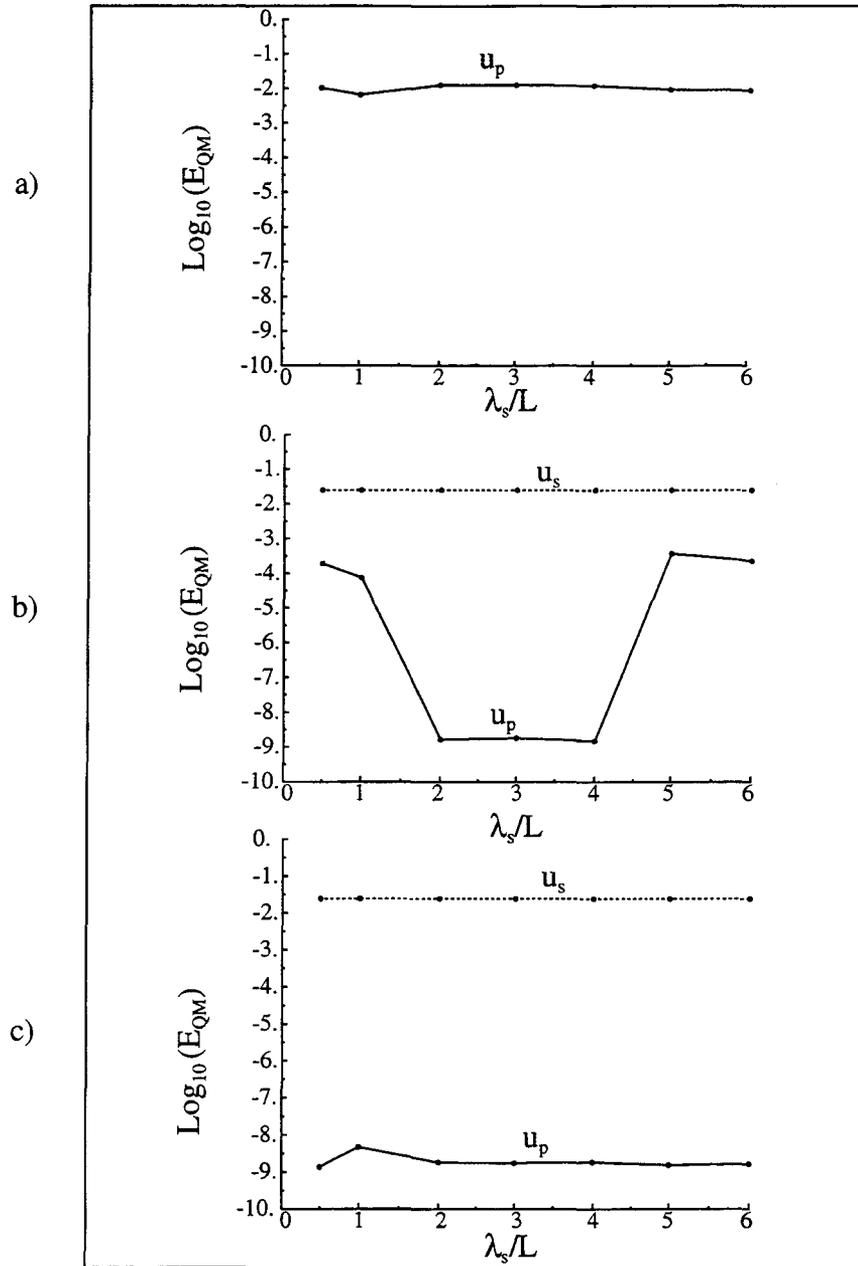


Figure III-10 : Évolution de l'erreur en fonction de λ_s/L
(formation sans pertes mécaniques) :

- a) Composante u_p sur la paroi du puits,
- b) Composantes u_p et u_s à $r = 2$ m,
- c) Composantes u_p et u_s à $r = 5$ m.

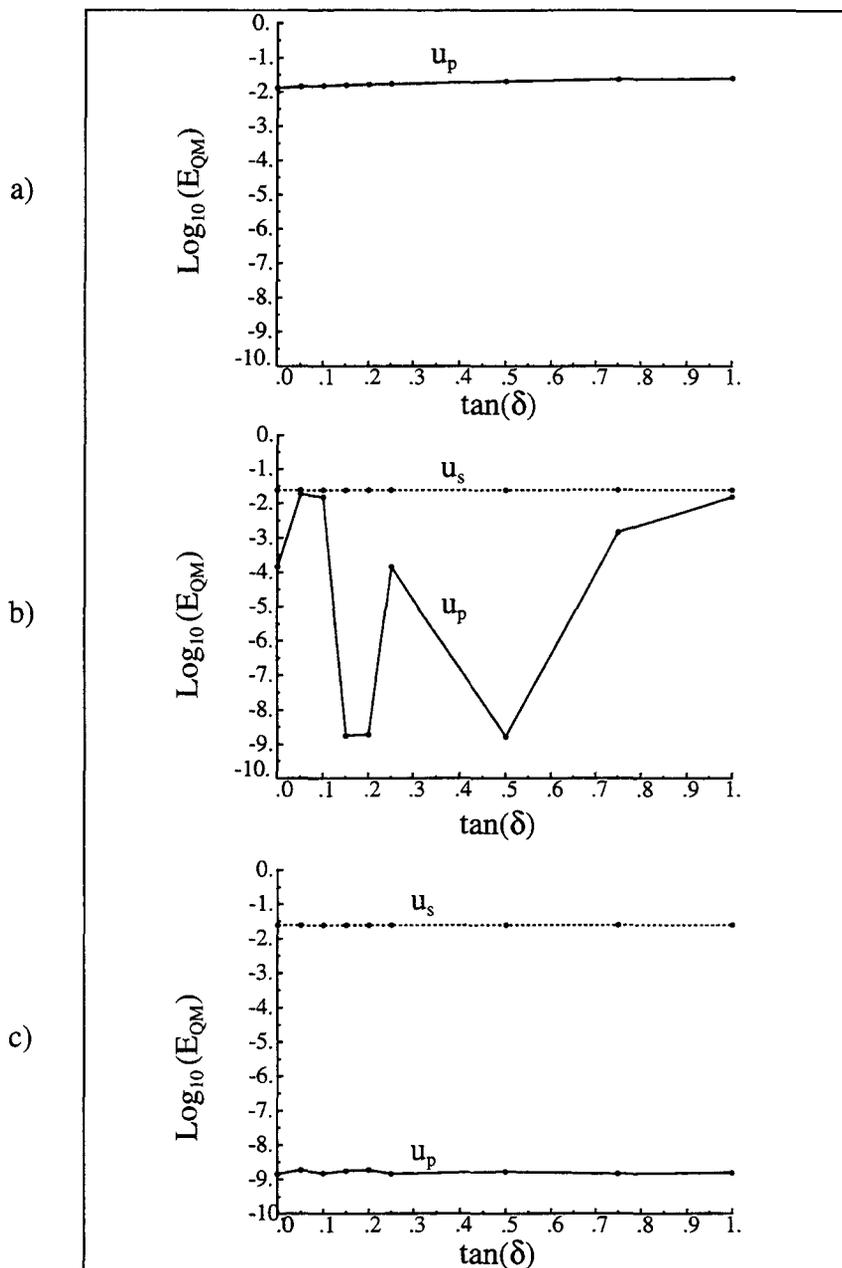


Figure III-11 : Evolution de l'erreur en fonction de $\tan(\delta)$:

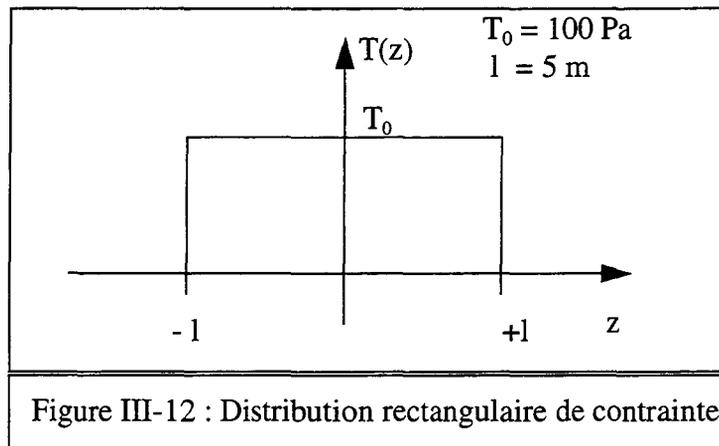
- a) Composante u_p sur la paroi du puits,
- b) Composantes u_p et u_s à $r = 2$ m,
- c) Composantes u_p et u_s à $r = 5$ m.

III-1.3 Distribution rectangulaire de contrainte normale

On impose une distribution rectangulaire de contrainte normale d'amplitude T_0 constante ($T_0 = 100$ Pa), sur une longueur $2l$ de la paroi du puits. La longueur l vaut 5 m et r_1 le rayon du puits est égal à 0,5 m. On définit en fonction de z la contrainte normale sur la paroi :

$$T(z) = \begin{cases} T_0 & \text{si } -l \leq z \leq l \\ 0 & \text{si } |z| > l \end{cases} \quad (\text{III-9})$$

La figure III-12 montre la courbe représentative de la distribution rectangulaire. On observe la parité de la distribution et l'existence de deux discontinuités de première espèce aux points de coordonnées $z = -l$ m, et $z = +l$ m.



Le spectre de cette distribution est donné par :

$$\bar{T}(k) = 2T_0 \frac{\sin(kl)}{k} \quad (\text{III-10})$$

La décroissance du spectre est en $1/k$, ce qui rend possible le calcul des intégrales (II-32), (II-84) et (II-85). Les figures III-13.a et III-13.b montrent l'évolution du déplacement radial sur la paroi du puits. Il est normalisé à la valeur maximale du module du déplacement, en fonction de z à 1 et 1,5 kHz pour une formation sans pertes mécaniques. Les figures III-14.a à III-14.d présentent les deux composantes du déplacement dans la formation à 2 et 5 mètres de l'axe de symétrie pour une formation sans pertes mécaniques à 1 kHz.

L'ensemble des résultats obtenus (figures III-13.a à III-14.d) montrent un parfait accord entre les champs de déplacement calculés par le couplage éléments finis-décomposition en k et les solutions analytiques, quelques soient les valeurs de z (côte) et de r (distance à l'axe de symétrie). L'introduction des pertes mécanique dans la formation n'affecte pas la qualité des résultats (résultats non présentés).

Déplacement radial sur la paroi du puits vide pour une formation sans pertes mécaniques dû à une distribution rectangulaire de contrainte normale

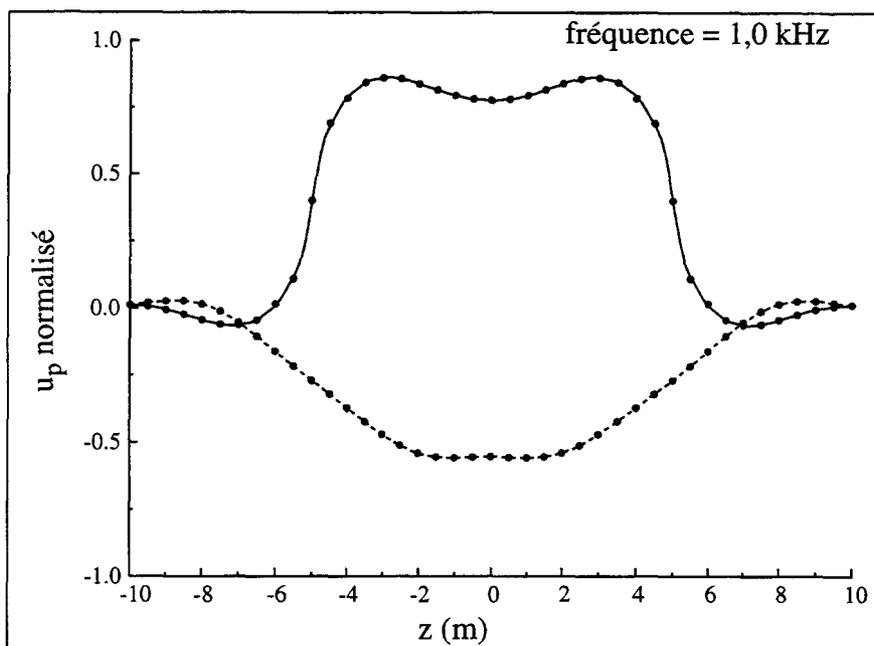


Figure III-13.a : distribution rectangulaire (formation sans pertes)

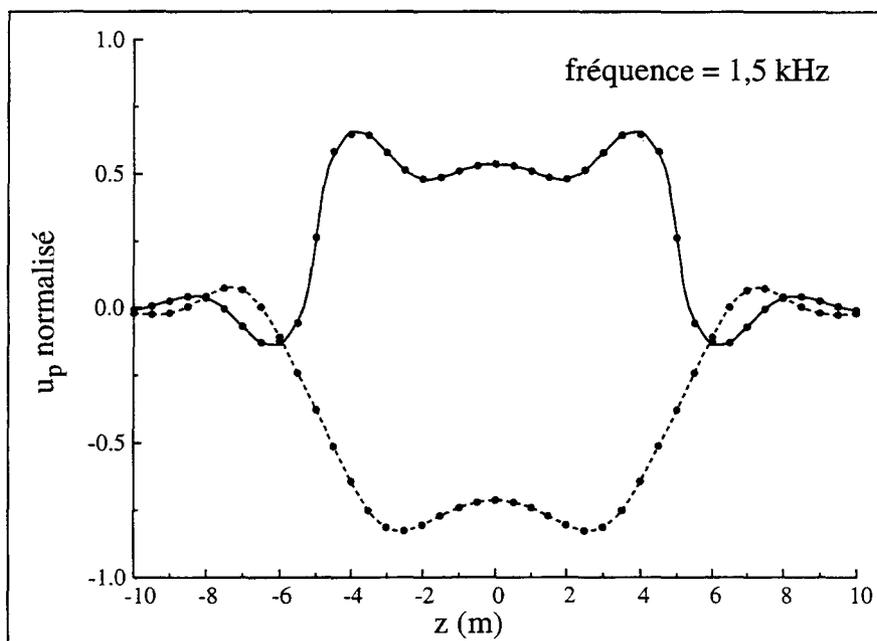


Figure III-13.b : distribution rectangulaire (formation sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante radiale du rayonnement du puits vide dans la formation sans pertes mécaniques dû à une distribution rectangulaire de contrainte normale

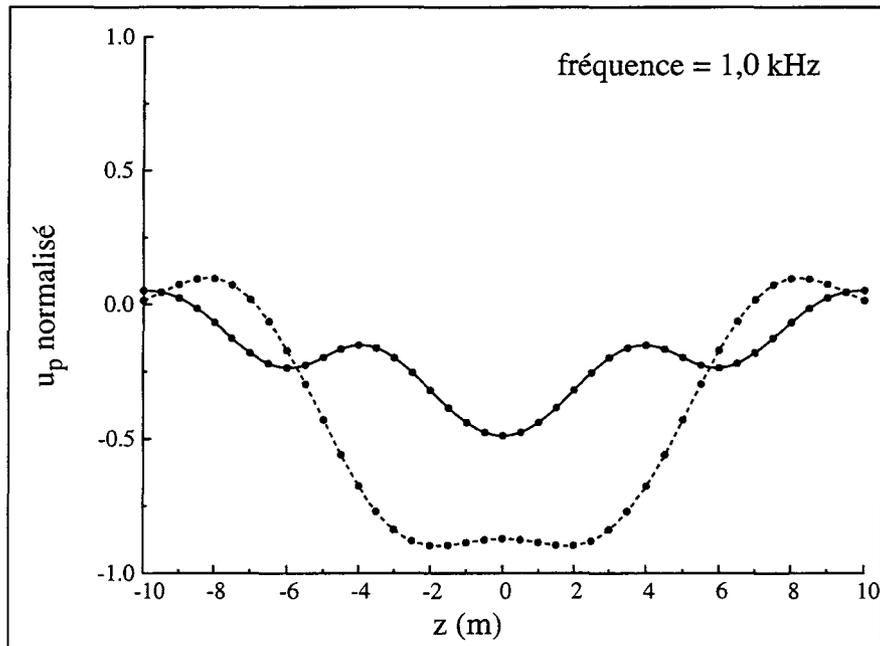


Figure III-14.a : Rayonnement à $r = 2$ m (formation sans pertes)

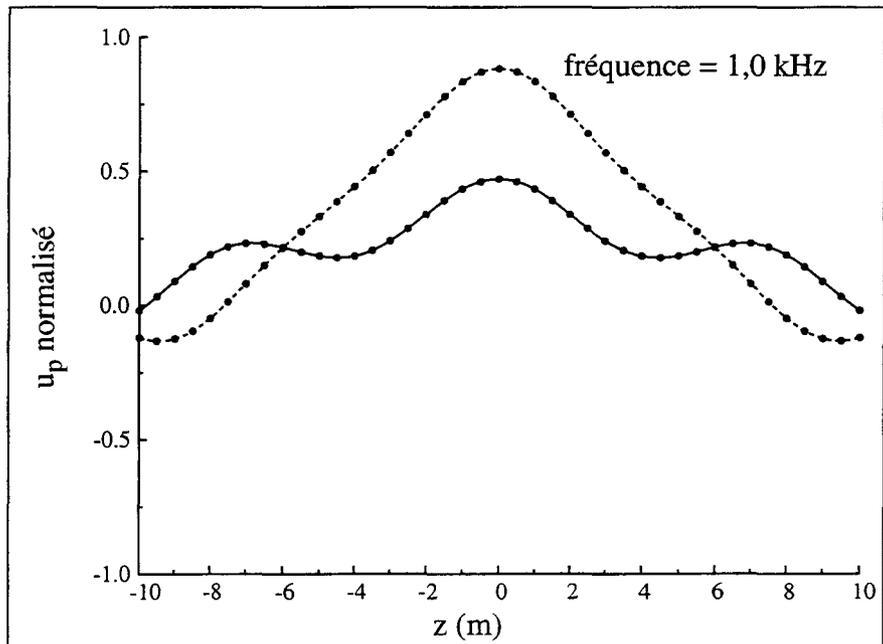


Figure III-14.b : Rayonnement à $r = 5$ m (formation sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante tangentielle du rayonnement du puits vide dans la formation sans pertes mécaniques dû à une distribution rectangulaire de contrainte normale

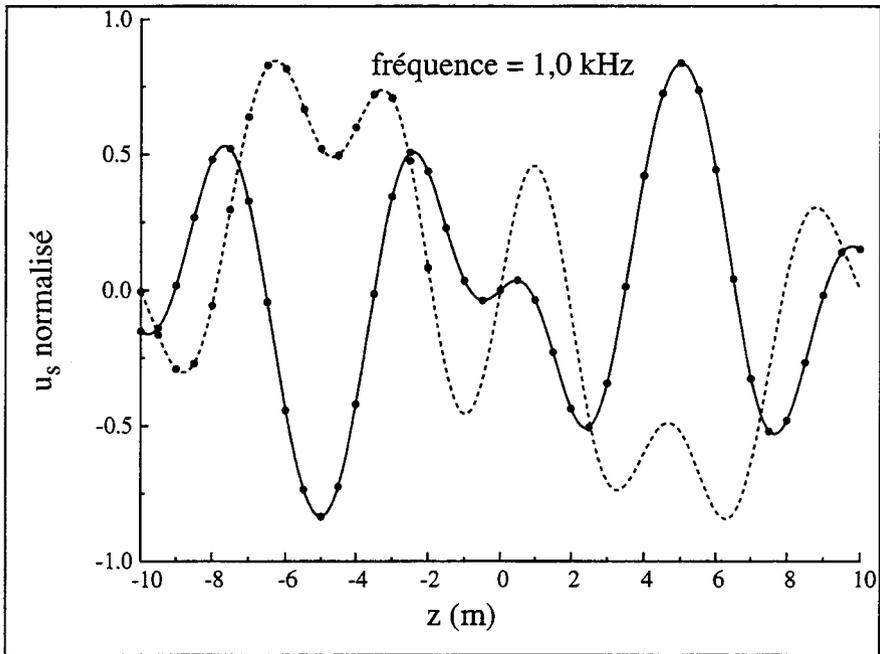


Figure III-14.c : Rayonnement à $r = 2$ m (formation sans pertes)

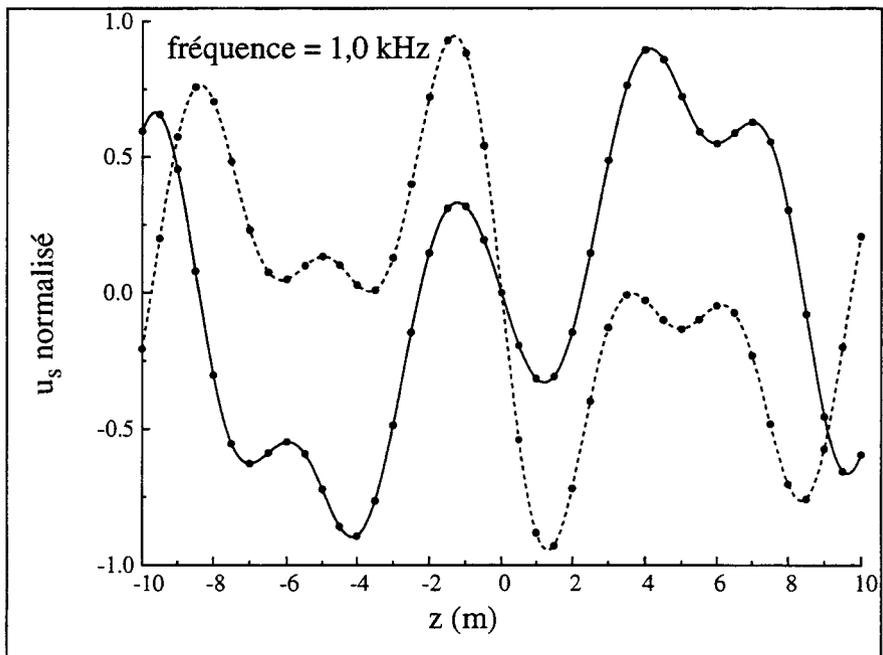
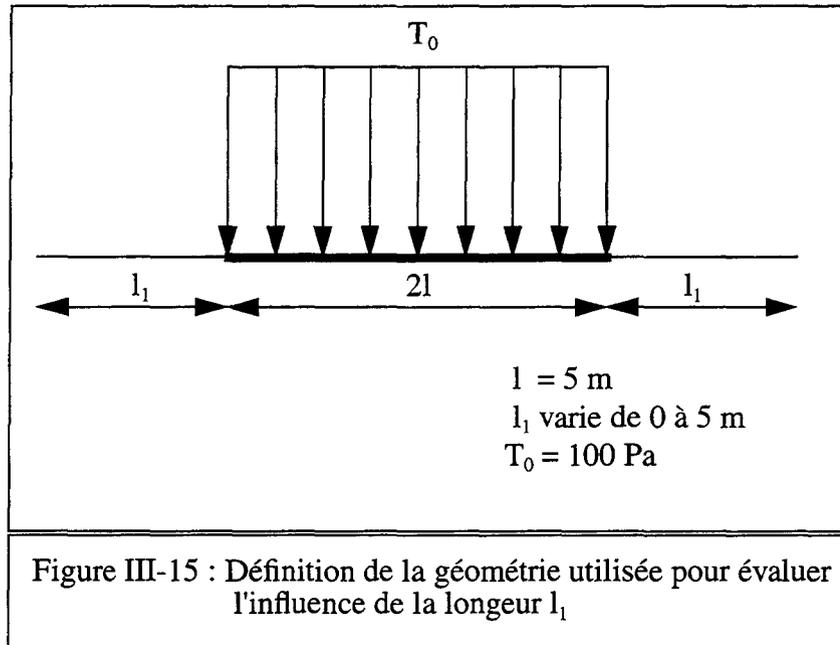


Figure III-14.d : Rayonnement à $r = 5$ m (formation sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Lors de l'analyse du rayonnement du puits vide soumis à une distribution de contraintes normales sur la paroi, le chargement du puits s'effectue sur une bande largeur de $2l = 10$ m située au centre du maillage. La longueur du puits maillée est de 20 m. Il reste donc à chaque extrémité du maillage une longueur $l_1 = 5$ m soumis à aucune charge (figure III-15). Nous nous proposons d'examiner l'influence de cette longueur sur la précision du calcul.



La figure III-16 montre l'évolution de l'erreur quadratique moyenne (équation III-8) en fonction de la longueur l_1 pour une formation sans pertes mécaniques. Le champ de déplacement sur la paroi ainsi que son rayonnement dans la formation à deux et cinq mètres de l'axe de symétrie sont calculés à 1 kHz avec $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ (soit 0,005 % d'erreur commise pour le calcul des intégrales). Malgré les deux discontinuités de première espèce du chargement l'erreur quadratique moyenne commise reste faible pour tous les déplacements calculés quelque soit la valeur de l_1 . On constate en particulier la très bonne précision si l'on ne modélise que la partie de la paroi sur laquelle on impose le chargement, c'est à dire lorsque l_1 est nulle.

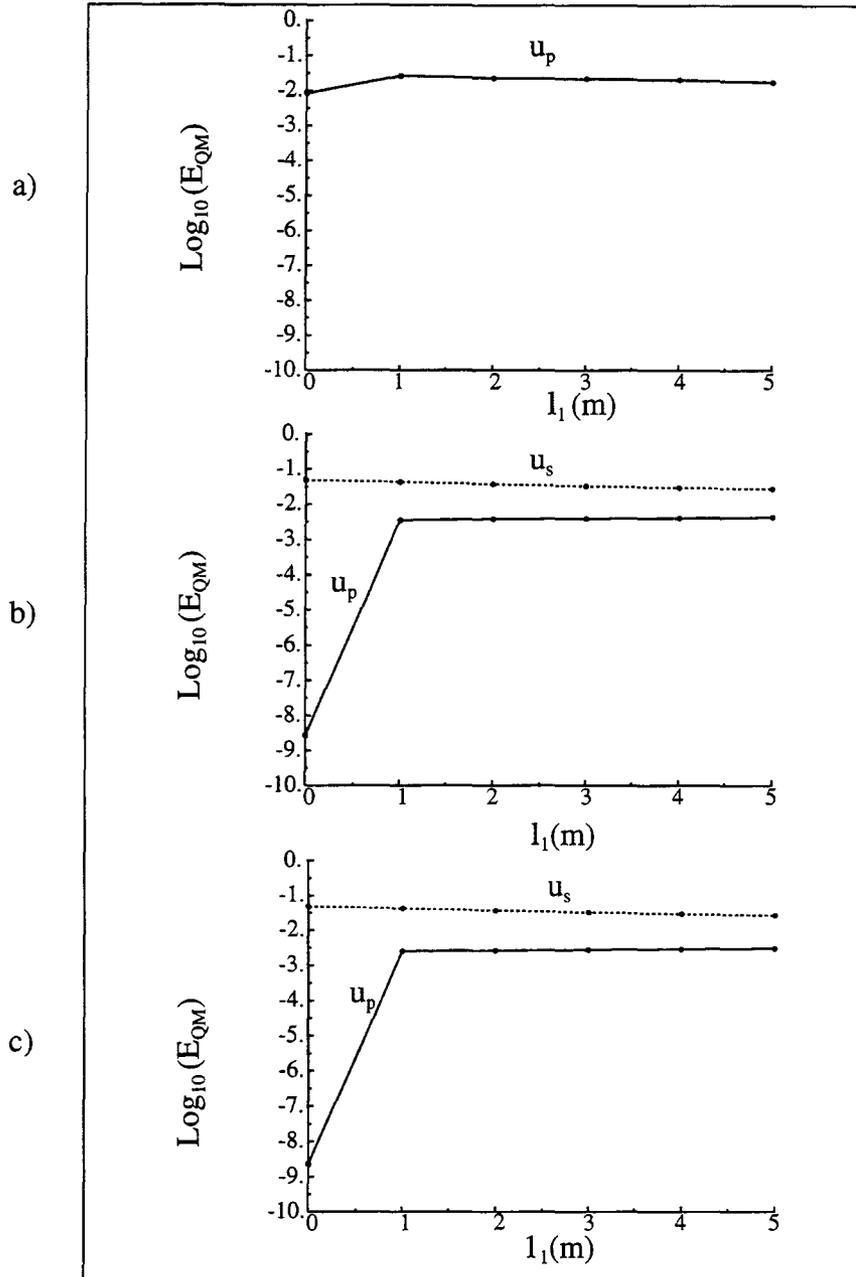


Figure III-16 : Évolution de l'erreur en fonction de l_1
(formation sans pertes mécaniques) :

- a) Composante u_p sur la paroi du puits,
- b) Composantes u_p et u_s à $r = 2$ m,
- c) Composantes u_p et u_s à $r = 5$ m.

III-1.4 Distribution sinus de contrainte normale

On impose une distribution sinus de contrainte normale d'amplitude T_0 égale 100 Pa, sur une longueur $2l$ de la paroi du puits, comprise entre $z = -l$ et $z = +l$, ($l = 5$ m, $r_1 = 0,5$ m). On définit la distribution sinus de la manière suivante :

$$T(z) = \begin{cases} T_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}z\right) & \text{si } -l < z < l \\ 0 & \text{si } |z| > l \end{cases} \quad (\text{III-11})$$

La figure III-17 montre la courbe impaire représentative de la distribution sinus. Elle est continue sur toute la droite réelle. Contrairement aux tests précédents qui correspondaient à un rayonnement de type monopolaire, la distribution sinus engendre un rayonnement dipolaire. Son spectre est donné par la formule (III-12).

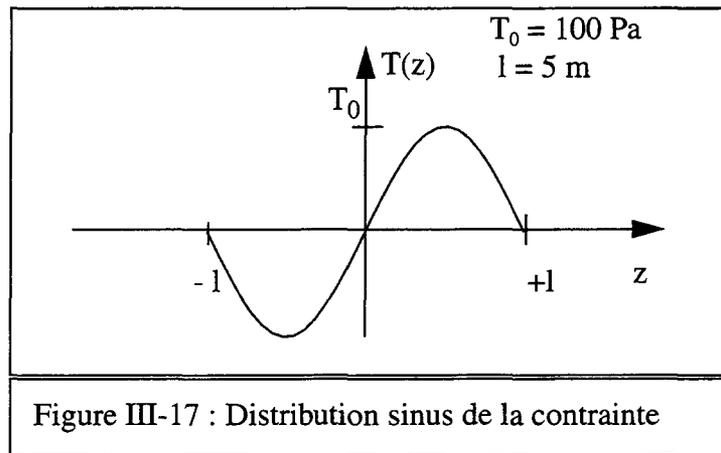


Figure III-17 : Distribution sinus de la contrainte

$$\bar{T}(k) = jT_0 \left(\frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{l} - k\right)l\right]}{\left(\frac{\pi}{l} - k\right)} - \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{l} + k\right)l\right]}{\left(\frac{\pi}{l} + k\right)} \right) \quad (\text{III-12})$$

La décroissance du spectre à l'infini est en $1/k$, rendant possible le calcul des intégrales (équations (II-32), (II-84) et (II-85)). Les figures III-18.a et III-18.b montrent l'évolution du déplacement radial sur la paroi du puits normalisé à la valeur maximale du module du déplacement en fonction de z à 1 et 1,5 kHz pour une formation sans pertes mécaniques. Les figures III-19.a à III-19.d montrent le rayonnement des deux composantes du déplacement dans la formation à 2 et 5 mètres de l'axe de symétrie pour une formation sans pertes mécaniques à 1 kHz. Les résultats obtenus soulignent le parfait accord entre les champs de déplacement calculés par le couplage éléments finis-décomposition en k et les solutions analytiques, quelque soient les valeurs de z (côte), de r (distance à l'axe de symétrie). L'introduction des pertes mécaniques dans la formation n'affecte pas les performances des résultats (résultats non présentés).

Déplacement radial sur la paroi du puits vide pour un formation sans pertes
mécaniques dû à une distribution sinus de contrainte normale

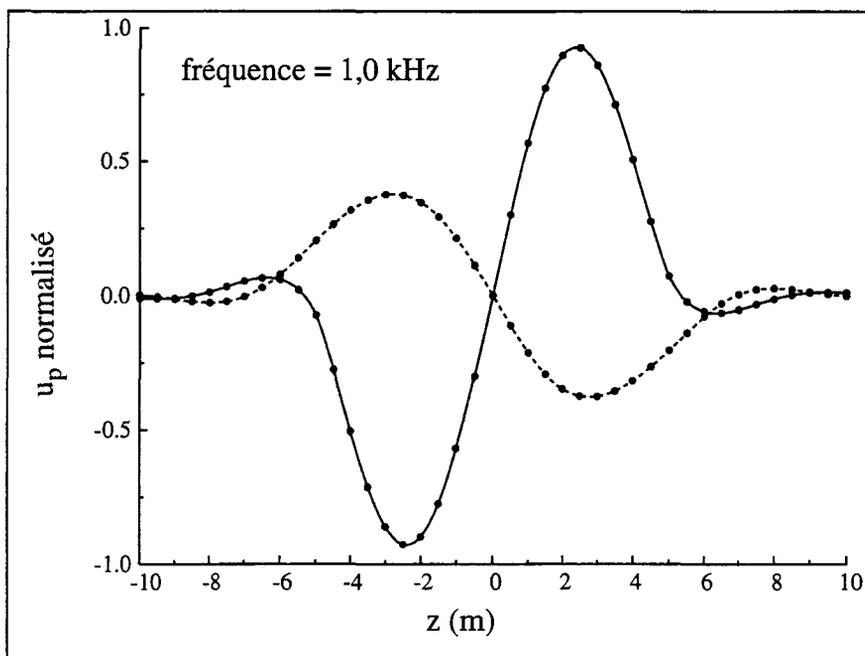


Figure III-18.a : Distribution sinus (formation sans pertes)

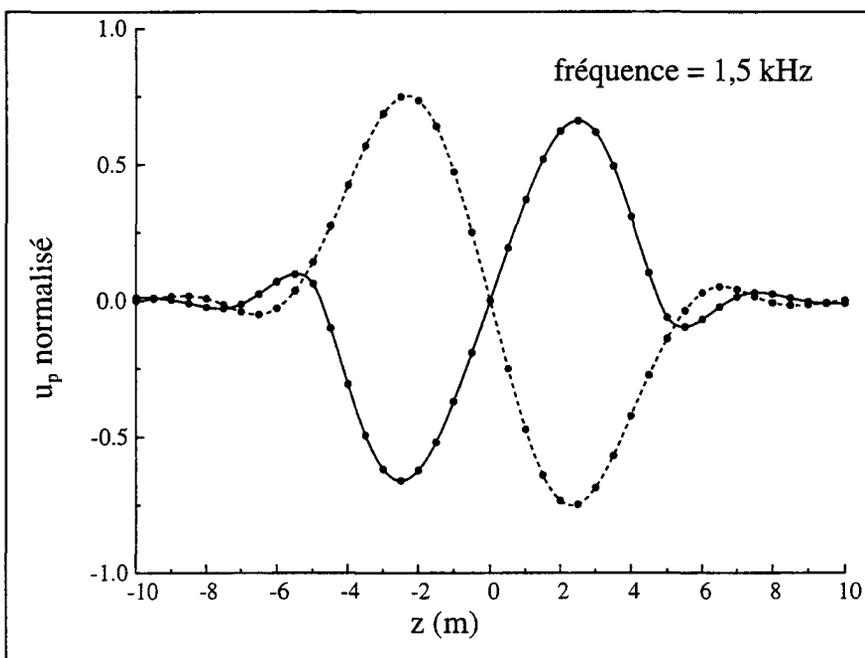


Figure III-18.b : Distribution sinus (formation sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante radiale du rayonnement du puits vide dans la formation sans pertes mécaniques dû à une distribution sinus de contrainte normale

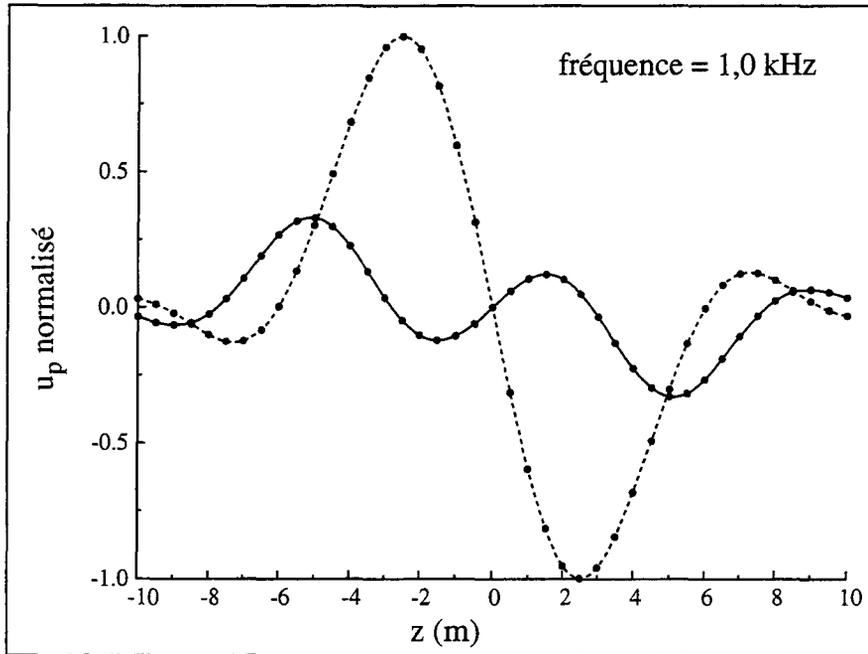


Figure III-19.a : Rayonnement à $r = 2$ m (formation sans pertes)

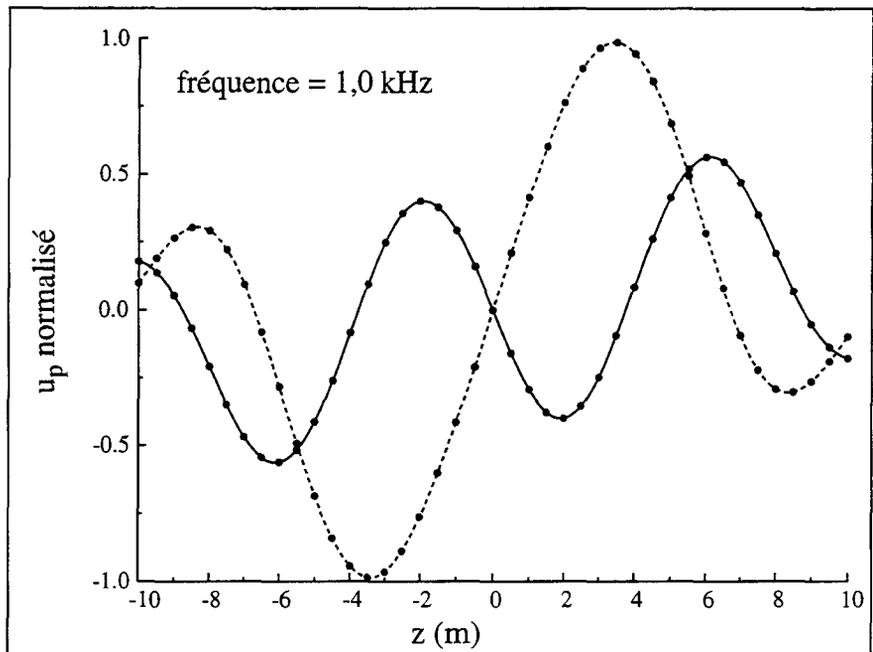


Figure III-19.b : Rayonnement à $r = 5$ m (formation sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante tangentielle du rayonnement du puits vide dans la formation sans pertes mécaniques dû à une distribution sinus de contrainte normale

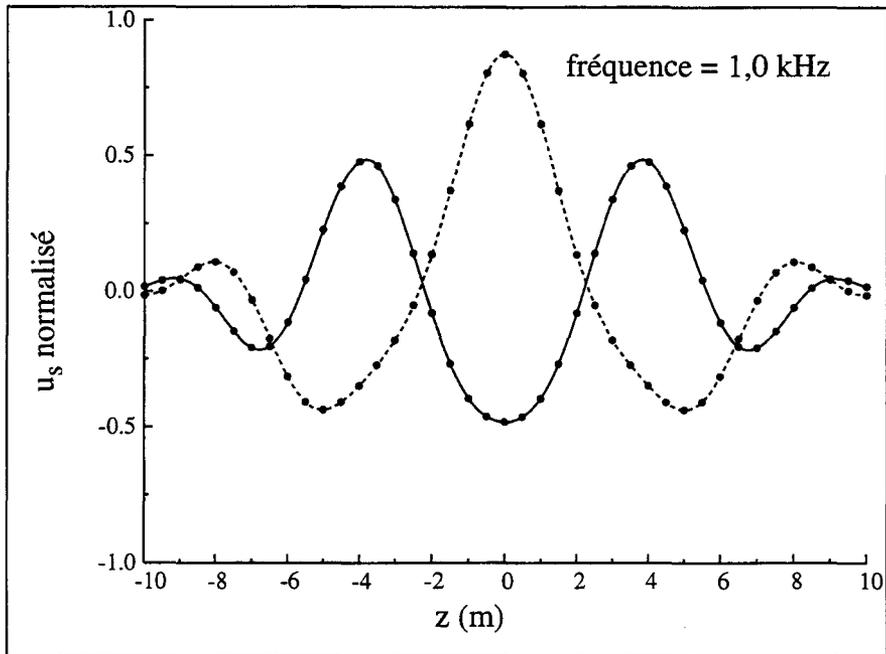


Figure III-19.c : Rayonnement à $r = 2$ m (formation sans pertes)

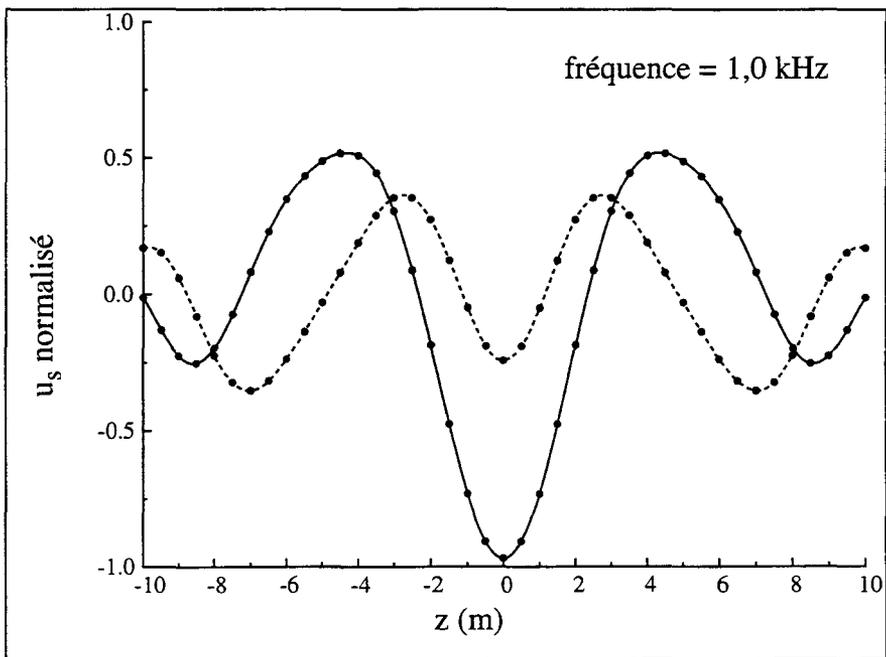


Figure III-19.d : Rayonnement à $r = 5$ m (formation sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

III-1.5 Puits vide entouré de fluide

Lorsque le milieu extérieur est un fluide idéal, on impose une distribution de densité surfacique de flux de vitesse $\psi(z)$ sur la paroi du puits dans la région de l'espace définie par : $-l < z < +l$ où la longueur l vaut 10 m. Le spectre $\bar{\psi}(k)$ pouvant être déterminé théoriquement dans l'espace des nombres d'onde k . Comme au paragraphe II-1.2, on peut montrer que la condition requise pour la convergence des intégrales généralisées pour r supérieur ou égal à r_1 est d'avoir un spectre décroissant lorsque k tend vers l'infini comme $1/k^\alpha$, où α est un réel supérieur ou égal à un. Nous pouvons alors calculer la pression en tout point de coordonnées (r,z) par la formule suivante :

$$p(r, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\psi}(k)}{\hat{k}_f H'_{c0}{}^{(2)}(\hat{k}_f r_1)} H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_f r) e^{-jkz} dk \quad (\text{III-13})$$

L'intégrand de l'équation (III-13) présente une singularité en $k = k_f$ et $k = -k_f$. Au voisinage de ces deux valeurs, l'intégrand de l'équation (III-13) se comporte comme $\ln[(k_f^2 - k^2)^{-1/2} r]$. Toutefois, aucune précaution d'intégration numérique n'est prise pour traiter ces deux singularités.

Le fluide choisi pour effectuer les tests de validation est l'eau à 14,5 °C. Il présente les caractéristiques suivantes : $\chi_s = 0,470719 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{kg}$; $\rho_f = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ où χ_s et ρ_f désignent respectivement la compressibilité adiabatique et la masse volumique du fluide, soit une célérité des ondes de compression : $v_f = 1458 \text{ m}/\text{s}$. La prise en compte des pertes se fait de la même manière que dans le fluide en écrivant le coefficient de compressibilité sous la forme complexe [9, 26].

On impose, comme au paragraphe III-1.3, une distribution rectangulaire (resp. triangulaire) de flux de vitesse d'amplitude $\psi_0 = 100 \text{ kg}/\text{s}^2$, sur la région de longueur $2l$, définie telle que la coordonnée z soit comprise entre $-l$ mètres et $+l$ mètres. La longueur l vaut 5 mètres, et r_1 le rayon du puits est égal à 0,5 m. La figure III-12 (resp. III-3) montre la courbe représentative de la distribution rectangulaire (resp. triangulaire). Son spectre est donné par la formule (III-10) (resp. (III-3)). La décroissance du spectre à l'infini est en $1/k$.

Les maillages utilisés pour le calcul de la pression sur la paroi du puits et du champ de pression rayonné sont identiques à ceux présentés au paragraphe III-1.1 (figure III-1 et III-2). Notons que le critère de discrétisation en $\lambda_f/4$ [9, 13, 21, 26] est vérifié jusqu'à 365 Hz.

Les figures III-21.a et III-21.b (resp. III-23.a et III-23.b) montrent l'évolution de la pression sur la paroi du puits pour du distribution de densité surfacique de flux rectangulaire (resp. triangulaire), normalisée à la valeur maximale du module de la pression, en fonction de z à 1 et 1,5 kHz pour un fluide sans pertes. Les figures III-22.a et III-22.b (resp. III-24.a et III-24.b) montrent le rayonnement de la pression dans le fluide à 2 et 5 mètres de l'axe de symétrie à 1 kHz. L'accord entre les résultats numériques et analytiques est excellent. Les remarques faites à l'issue de l'étude de la convergence aux paragraphes, III-1.2 et III-1.3 restent valables. On remarquera qu'à 1 kHz avec des éléments de 1 m de longueur (voir paragraphe III-1.1) le paramètre de discrétisation λ_f/L est voisin de 1,45.

Pression sur la paroi du puits vide entouré d'un fluide sans pertes due à une distribution rectangulaire de densité surfacique de flux

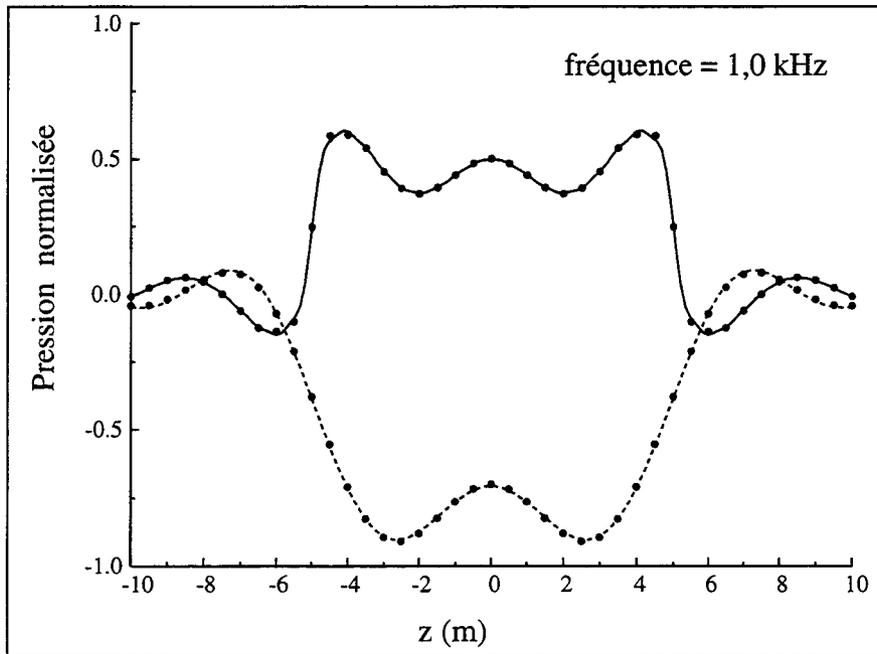


Figure III-21.a : Pression sur la paroi du puits (fluide sans pertes)

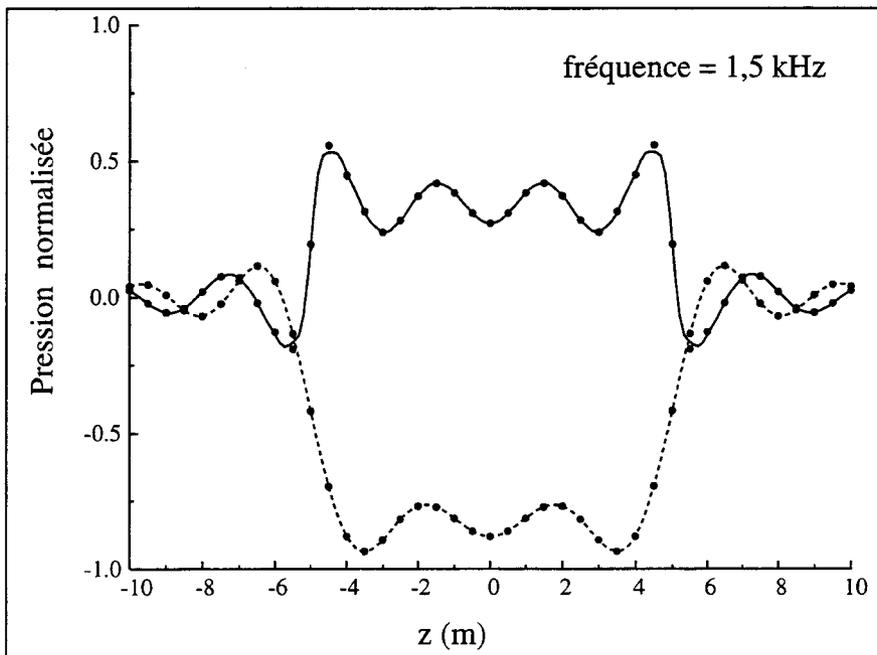


Figure III-21.b : Pression sur la paroi du puits (fluide sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Pression rayonnée par le puits vide entouré d'un fluide sans pertes due à une distribution rectangulaire de densité surfacique de flux

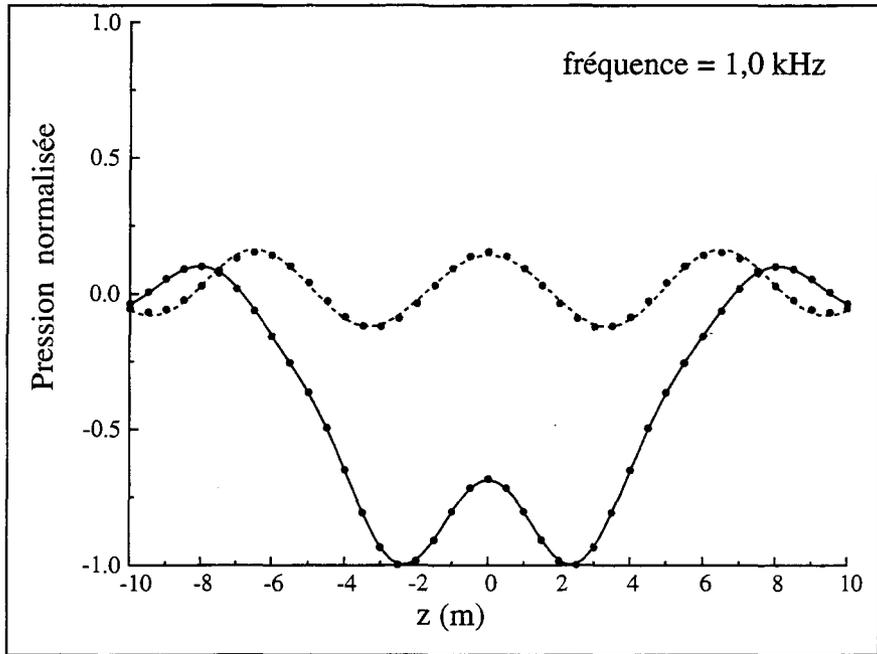


Figure III-22.a : Pression rayonnée à $r = 2$ m (fluide sans pertes)

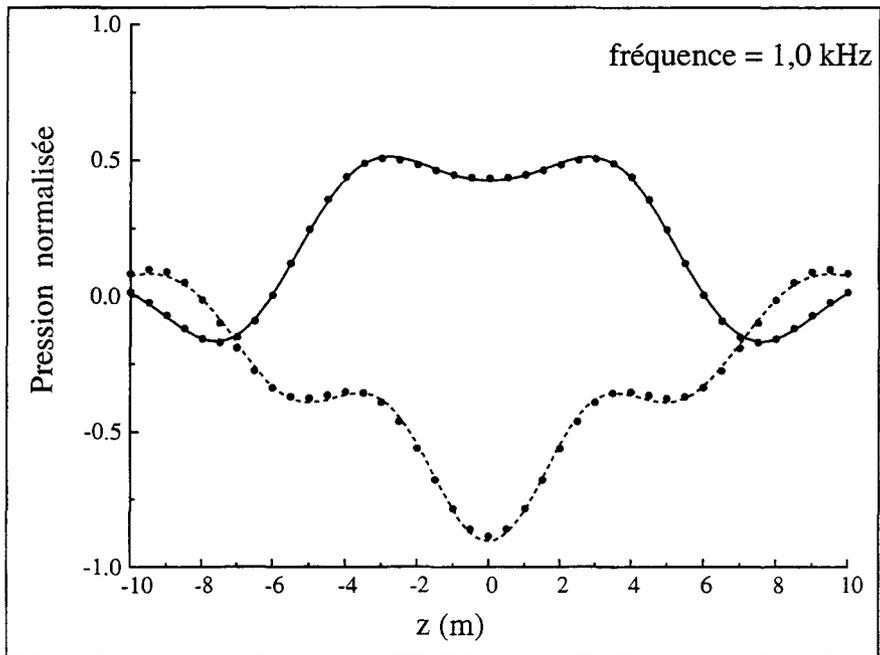


Figure III-22.b : Pression rayonnée à $r = 5$ m (fluide sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Pression sur la paroi du puits vide entouré d'un fluide sans pertes due à une distribution triangulaire de densité surfacique de flux

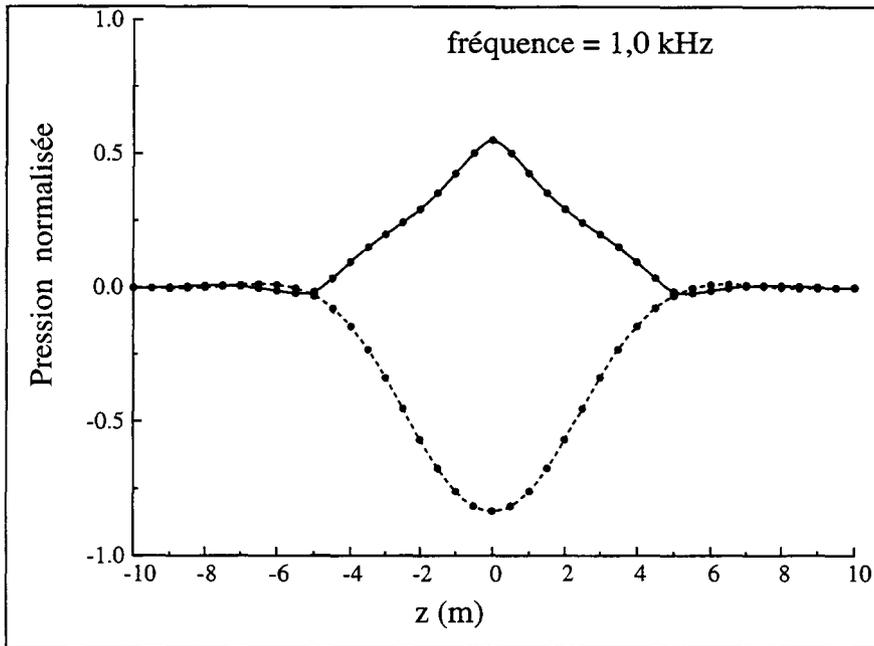


Figure III-23.a : Pression sur la paroi du puits (fluide sans pertes)

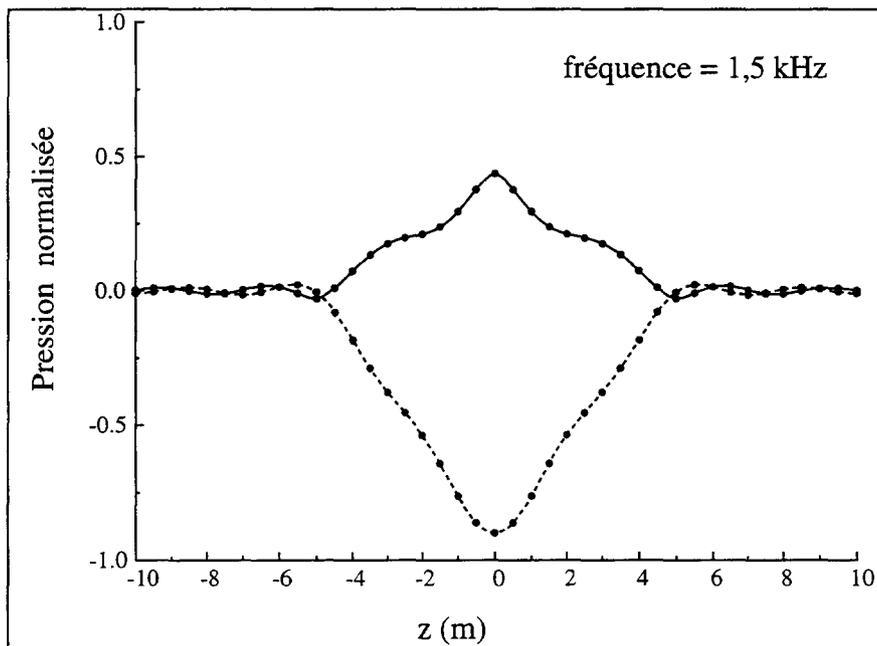


Figure III-23.b : Pression sur la paroi du puits (fluide sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Pression rayonnée par le puits vide entouré d'un fluide sans pertes due à une distribution triangulaire de densité surfacique de flux

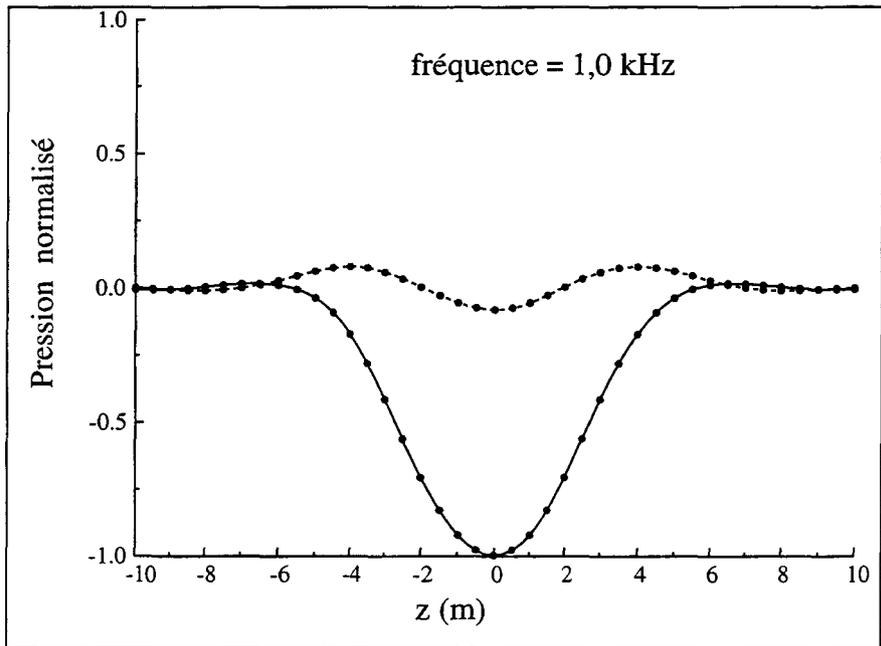


Figure III-24.a : Pression rayonnée à $r = 2$ m (fluide sans pertes)

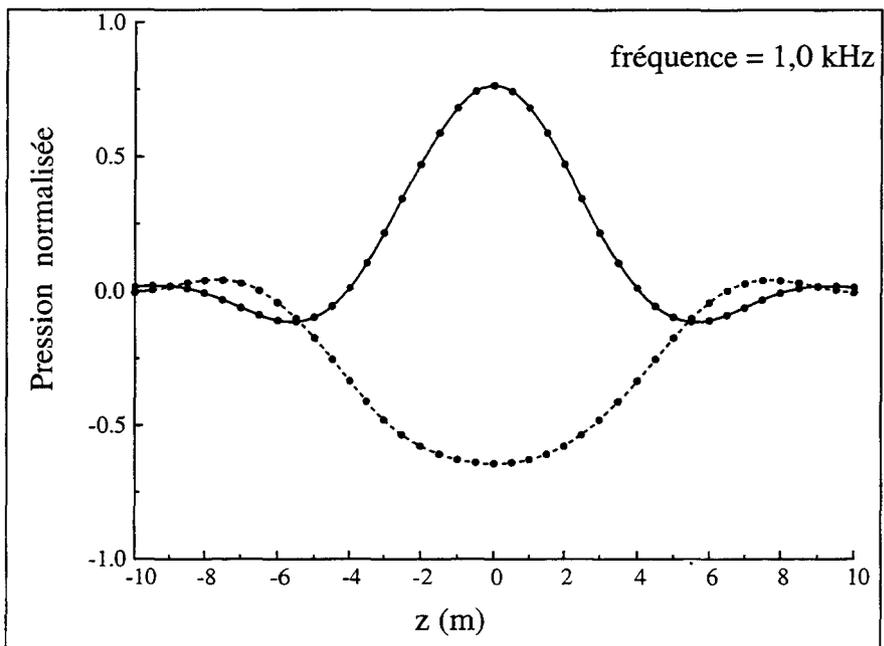


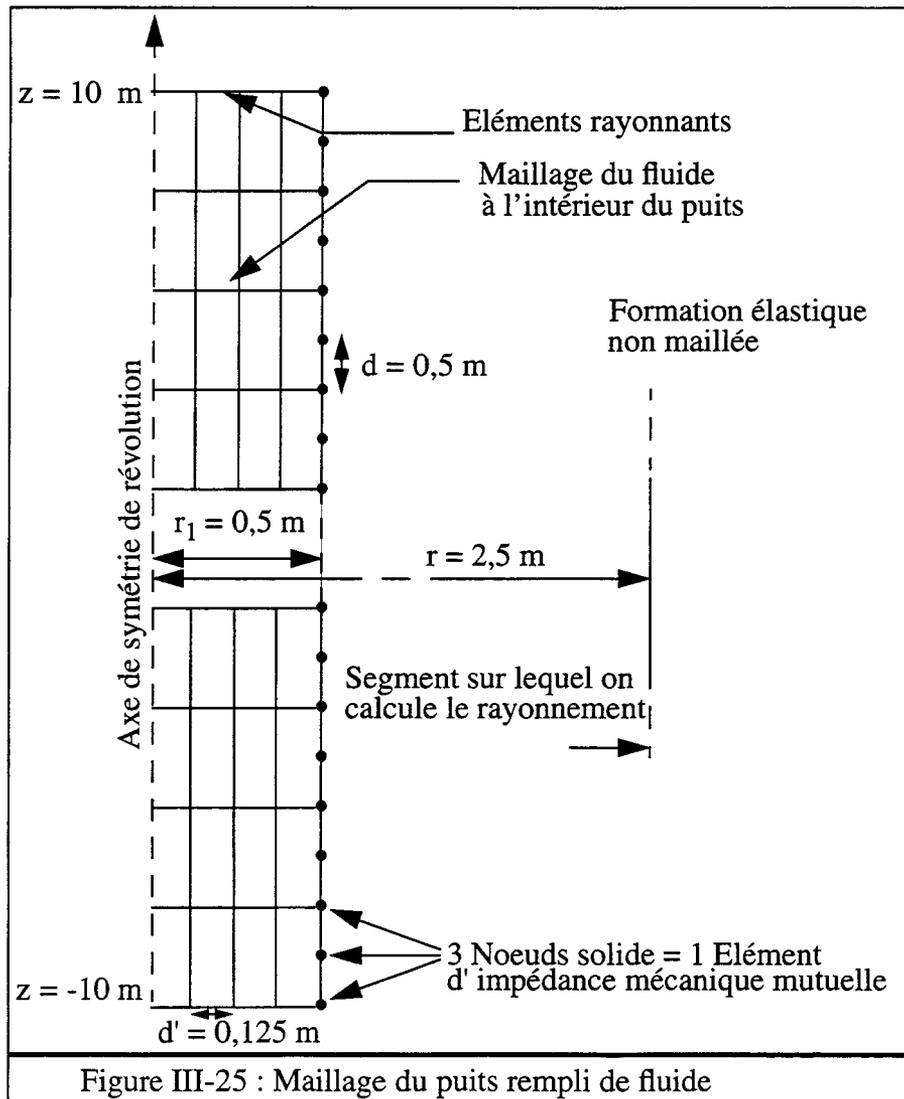
Figure III-24.b : Pression rayonnée à $r = 5$ m (fluide sans pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

III-1.6 Conclusion

L'ensemble des exemples présentés précédemment concerne le rayonnement d'un puits vide entouré d'une formation élastique (resp. d'un fluide idéal) et valide donc la description de la formulation à l'aide du couplage éléments finis-décomposition en k. Les comparaisons avec un modèle analytique sont effectuées pour les déplacements (resp. la pression) de la paroi et dans la formation. Les distributions de contraintes imposées correspondent à des rayonnements de type monopolaire ou dipolaire. Dans tous les cas, l'accord entre les résultats analytiques et numériques est excellent. Enfin, une étude systématique a été menée pour évaluer l'effet de la précision du calcul des intégrales, de la longueur de la paroi maillée, de l'introduction des pertes et de la densité de maillage sur la qualité des résultats obtenus.

III-2 Puits rempli d'un fluide parfait



L'intérieur du puits est maillé avec des éléments finis fluides. A l'interface fluide-formation (fluide-solide), on vient superposer les éléments finis interface et les éléments d'impédance mécanique mutuelle. La formation n'est pas modélisée à l'exception des points de l'interface fluide-formation. Sur les couvercles sont placés des éléments rayonnants. L'impédance acoustique de rayonnement est adaptée au premier mode de tube (voir paragraphe II-3). La figure III-25 présente partiellement le maillage décrit.

Nous effectuons deux types de tests de validation dans le cas d'un puits rempli de fluide. Le premier consiste à appliquer directement sur la paroi du puits une distribution de contrainte normale, comme dans les cas précédents (voir section III-1). Pour le second type de tests, on place une source ponctuelle dans le puits au point de coordonnées $r = 0, z = 0$. En ce point, la valeur du flux est imposée. Dans le premier cas on présente le déplacement sur la paroi du puits, ainsi que le rayonnement dans la formation (figure III-26.a à III-31.b). Dans le second cas sont présentés, les isopressions dans le puits (figure III-34.a et III-34.b) et la pression moyenne dans le puits (figures III-35.a et III-35.c).

III-2.1 Excitation directe de la paroi du puits

On impose sur la paroi du puits rempli de fluide une distribution triangulaire de contrainte normale d'amplitude maximale T_0 égale à 100 Pa (resp. une distribution rectangulaire d'amplitude T_0) sur la région de la paroi du puits de longueur $2l$ définie de la manière suivante : $-l < z < +l, r = r_1$, où $l = 0,5$ m et $r_1 = 0,5$ m. Les expressions de la contrainte en fonction de z , et celle de son spectre dans l'espace (ω, k) sont données dans les formules (III-9) et (III-10) pour la distribution triangulaire (resp. (III-12) et (III-13) rectangulaire). La résolution du système d'équations donné par la formule (II-52) permet de calculer les deux composantes du champ de déplacement lorsque r est supérieur ou égal au rayon du puits r_1 :

$$u_p(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_p(r, k) e^{-jkz} dk \quad u_s(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_s(r, k) e^{-jkz} dk \quad (\text{III-14})$$

où les expressions $\bar{u}_p(r, k)$, et $\bar{u}_s(r, k)$ sont données par :

$$\begin{aligned} u_{0p}(k) &= -\frac{\hat{k}_f J'_0(\hat{k}_f r_1) \hat{k}_s H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r_1) \bar{\sigma}_n(k)}{\omega^2 \rho_f \Delta} \\ u_{0s}(k) &= -\frac{\hat{k}_f J'_0(\hat{k}_f r_1) jk H_{c1}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) \bar{\sigma}_n(k)}{\omega^2 \rho_f \Delta} \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

et Δ est donné par :

$$\Delta = \frac{\hat{k}_f J'_0(\hat{k}_f r_1)}{\omega^2 \rho_f} \left\{ \begin{aligned} & \left[(2\mu + \lambda) \hat{k}_p H'_{c1}{}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) + \frac{\lambda}{r} H_{c1}{}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) \right] \hat{k}_s H'_{c0}{}^{(2)}(\hat{k}_s r_1) \\ & + \lambda k^2 H_{c0}{}^{(2)}(\hat{k}_s r_1) H_{c1}{}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) \\ & + \hat{k}_s H'_{c0}{}^{(2)}(\hat{k}_s r_1) H_{c1}{}^{(2)}(\hat{k}_p r_1) J_0(\hat{k}_f r_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-16})$$

finalement :

$$\bar{u}_p(r, k) = H_{c1}{}^{(2)}(\hat{k}_p r) u_{0p}(k) \quad ; \quad \bar{u}_s(r, k) = H_{c0}{}^{(2)}(\hat{k}_s r) u_{0s}(k) \quad (\text{III-17})$$

Lorsque le milieu est non dissipatif, Δ peut avoir une racine réelle ou très proche de l'axe réel du plan complexe. Les intégrants l'équation (III-14) présentent alors des singularités ou des variations brutales au voisinage de cette racine. Pour remédier à ce problème, nous introduisons des pertes mécaniques fictives dans la formation éloignant ainsi les racines de l'axe réel sans modifier la solution de façon significative : les intégrales (III-14) peuvent alors être évaluées à l'aide de la méthode d'intégration numérique de Gauss sans précaution particulière.

Dans une première étape, la formation modélisée a les propriétés suivantes : $v_p = 5588$ m/s, $v_s = 3387$ m/s, $\rho = 2500$ kg/m³. Le fluide est une huile telle que : $v_f = 1425$ m/s, $\rho_f = 856,5$ kg/m³. La célérité de l'onde de compression du fluide est inférieure à celle de l'onde de cisaillement dans la formation, on est dans le cas d'une formation rapide. Ceci implique d'avoir le zéro de Δ sur l'axe réel (paragraphe II-2.2). Dans le cas d'une distribution triangulaire de contraintes les figures III-26.a et III-26.b montrent l'évolution du déplacement radial sur la paroi du puits normalisé à la valeur maximale du module du déplacement en fonction de z à 1 et 1,5 kHz pour une formation ayant une tangente de l'angle de pertes mécaniques de 0,05 pour la formation rapide et un fluide sans pertes. Les figures III-27.a et III-27.b présentent les deux composantes du rayonnement à une distance $r = 2,5$ m de l'axe du puits à 1 kHz. Les mêmes résultats sont montrés aux figures III-28.a, III-28.b, III-29.a et III-29.b pour un chargement rectangulaire. L'ensemble de ces courbes souligne un bon accord entre les résultats numériques et analytiques. La matrice d'impédance étant correctement calculée, on en déduit que le rayonnement de l'onde de tube dans le cas d'une formation rapide est correctement pris en compte.

Dans un second cas, la formation choisie a les caractéristiques suivantes : $v_p = 3411$ m/s, $v_s = 1350$ m/s et $\rho = 2200$ kg/m³. Le fluide est inchangé. La formation est dite lente si la célérité des ondes de compression dans le fluide est plus élevée que celle des ondes S dans le solide. On impose le même chargement triangulaire que précédemment. Les figures III-30.a et III-30.b montrent l'évolution du déplacement radial sur la paroi du puits normalisé à la valeur maximale du module du déplacement en fonction de z à 1 et 1,5 kHz. Ceci est valable pour une formation ayant une tangente de l'angle de pertes mécaniques de 0,5 et un fluide sans pertes. Les deux composantes du rayonnement dans la formation à une distance $r = 2,5$ m de l'axe du puits à 1 kHz sont montrées par les figures III-31.a et III-31.b. Les résultats soulignent l'excellent l'accord entre les résultats numériques et analytiques. Cependant ces résultats peuvent impliquer une limitation en fréquence de la méthode, liée à l'apparition et la contribution de la deuxième onde de tube.

Composante radiale du déplacement sur la paroi du puits rempli de fluide entouré d'une formation rapide dû à une distribution triangulaire de contrainte normale

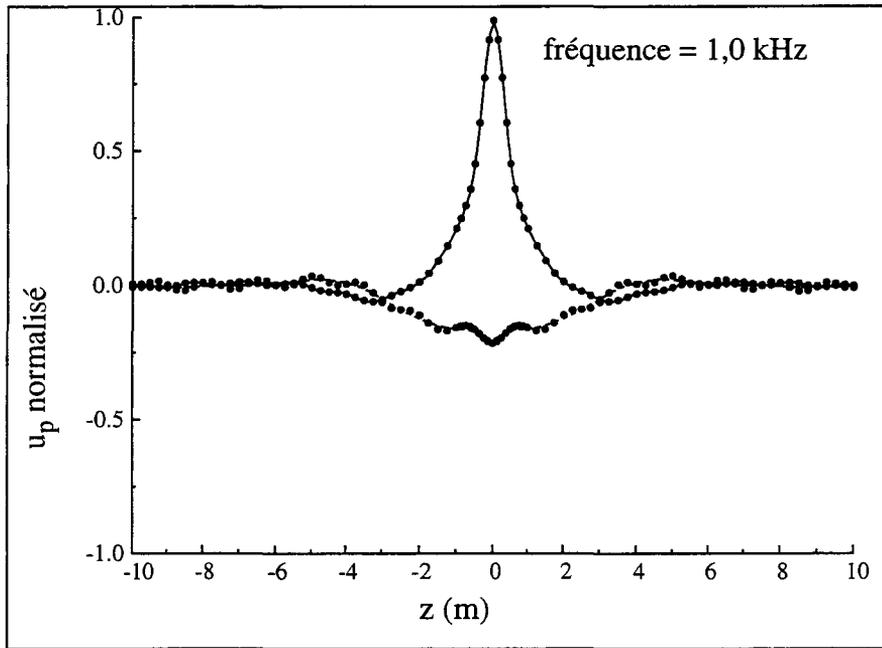


Figure III-26.a: Distribution triangulaire (formation avec pertes)

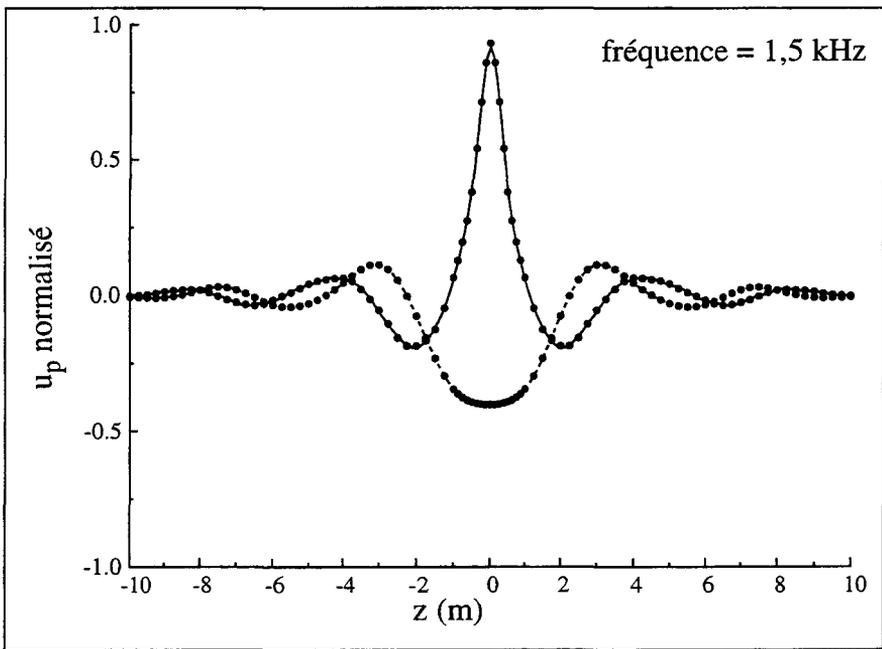


Figure III-26.b : Distribution triangulaire (formation avec pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Rayonnement des deux composantes du déplacement dans la formation rapide dû à une distribution triangulaire de contrainte normale sur la paroi à 1,0 kHz

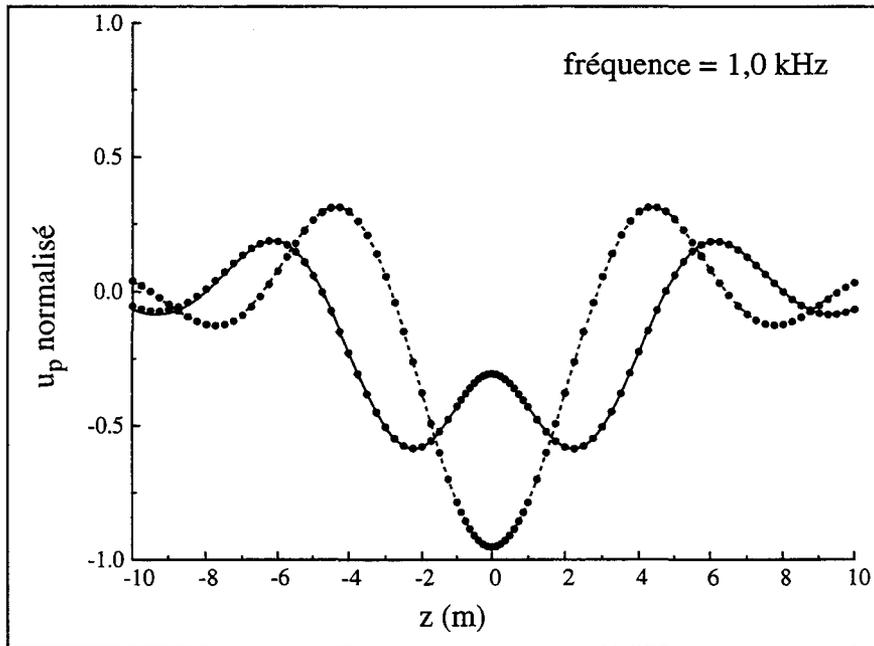


Figure III-27.a : Rayonnement à $r = 2,5$ m (formation avec pertes)

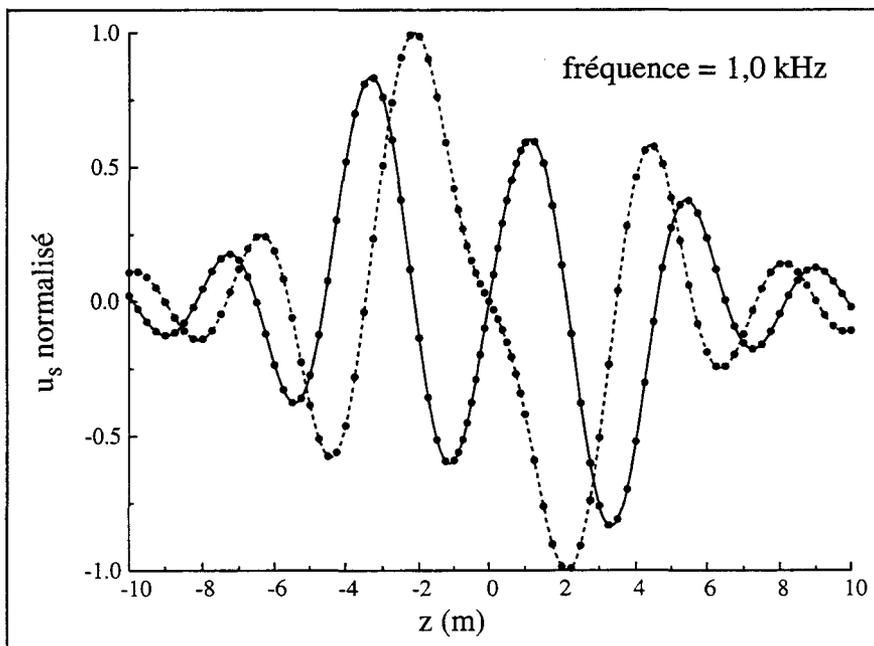


Figure III-27.b : Rayonnement à $r = 2,5$ m (formation avec pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante radiale du déplacement sur la paroi du puits rempli de fluide entouré d'une formation rapide dû à une distribution rectangulaire de contrainte normale

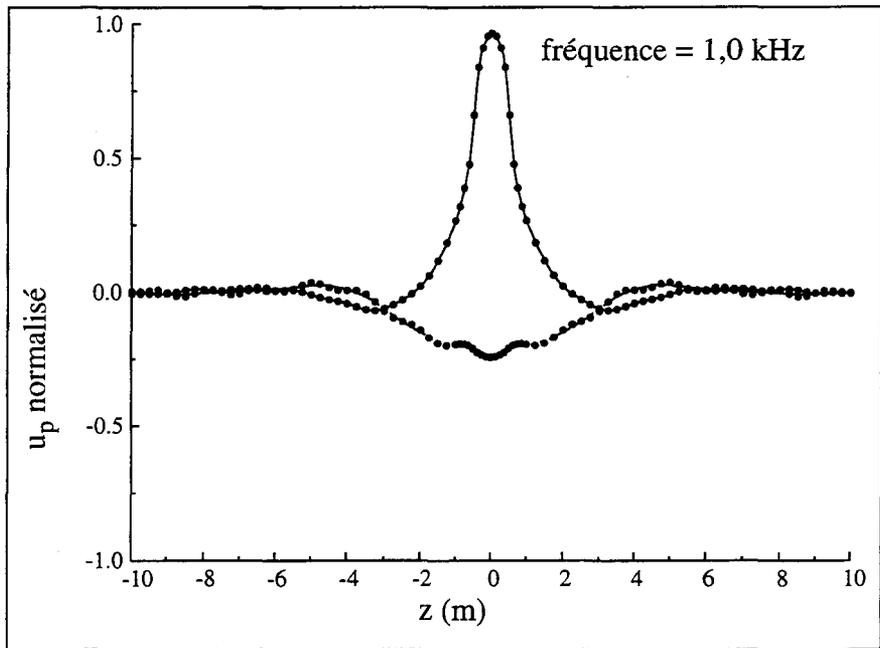


Figure III-28.a : Distribution rectangulaire (formation avec pertes)

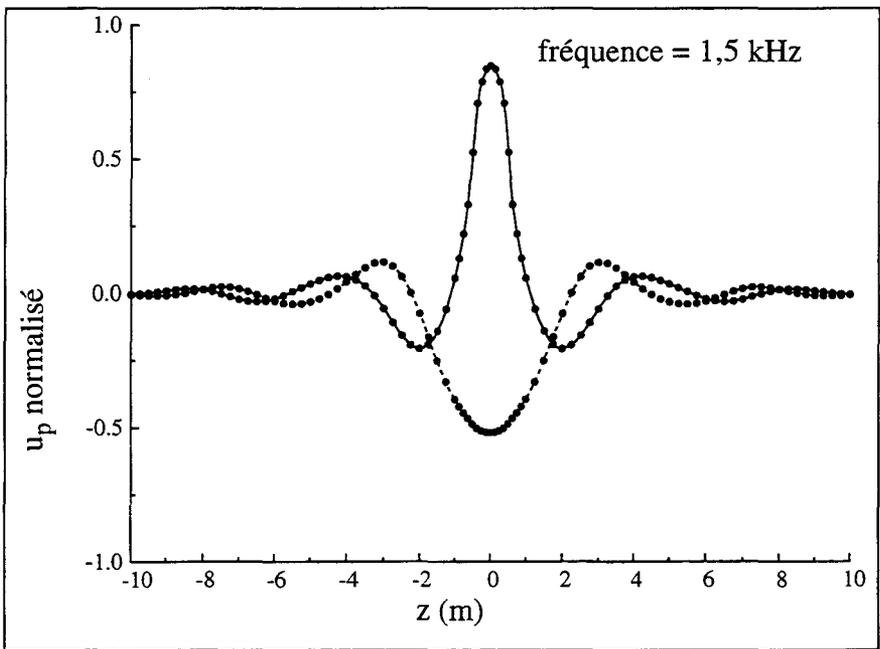


Figure III-28.b : Distribution rectangulaire (formation avec pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Rayonnement des deux composantes du déplacement dans la formation rapide dû à une distribution rectangulaire de contrainte normale sur la paroi à 1,0 kHz

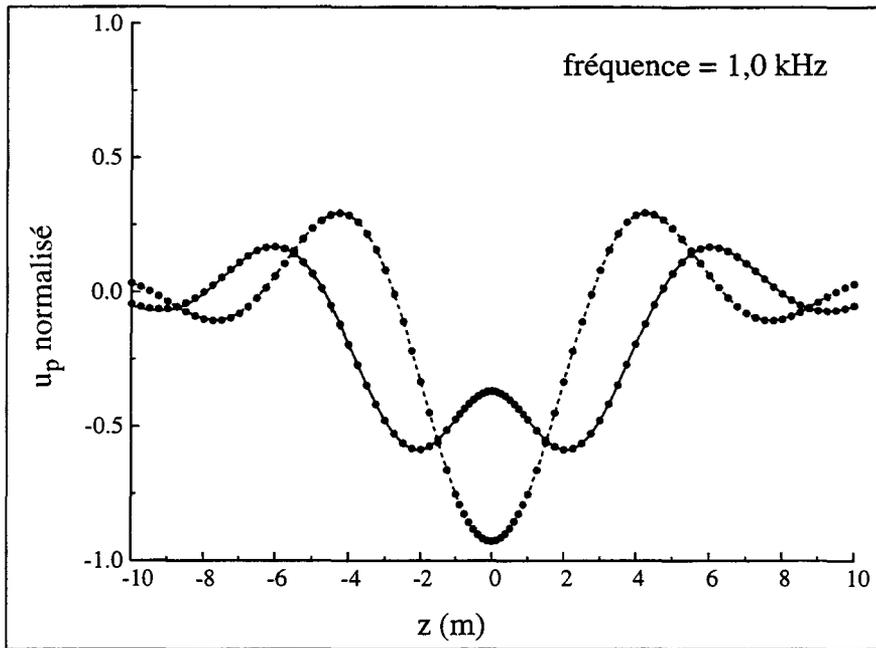


Figure III-29.a : Rayonnement à $r = 2,5$ m (formation avec pertes)

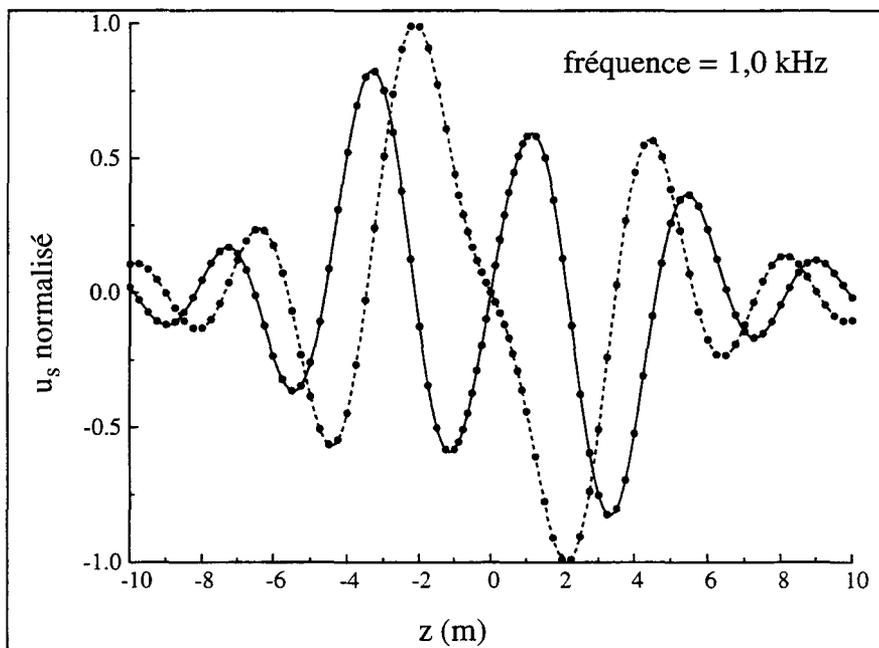


Figure III-29.b : Rayonnement à $r = 2,5$ m (formation avec pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Composante radiale du déplacement sur la paroi du puits rempli de fluide entouré d'une formation lente dû à une distribution triangulaire de contrainte normale

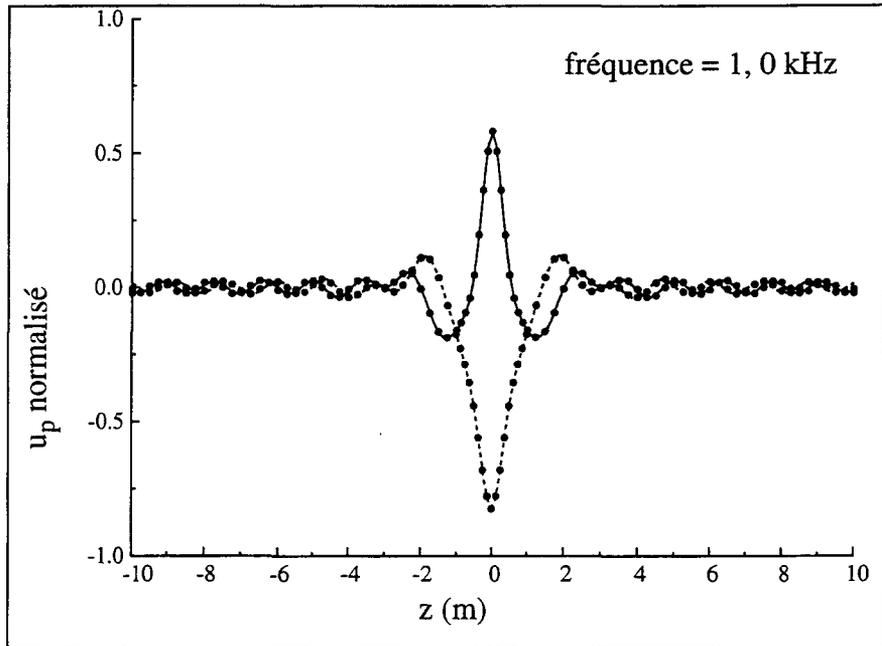


Figure III-30.a : Distribution triangulaire (formation avec pertes)

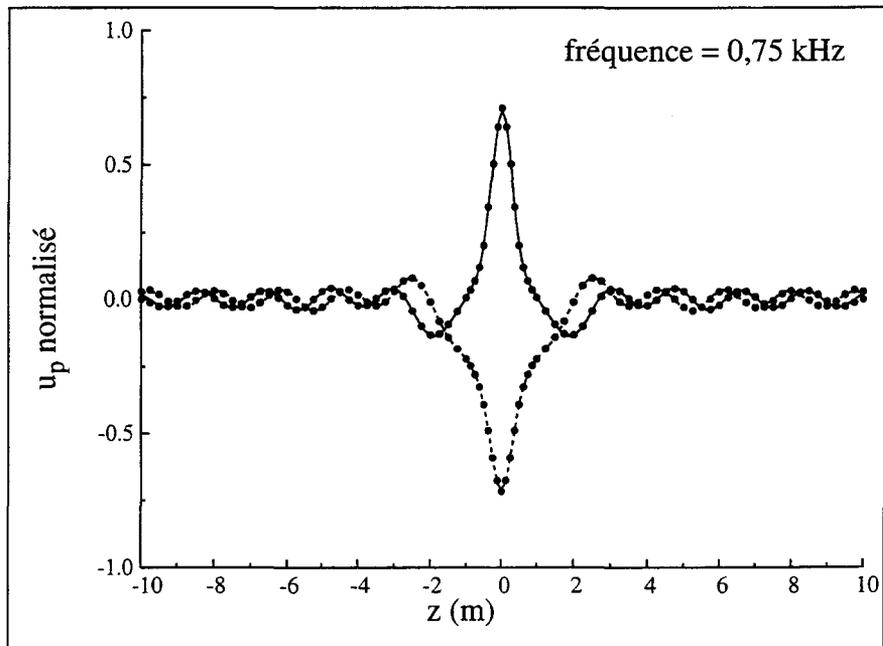


Figure III-30.b : Distribution triangulaire (formation avec pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

Rayonnement des deux composantes du déplacement dans la formation lente dû à une distribution triangulaire de contrainte normale sur la paroi à 1,0 kHz

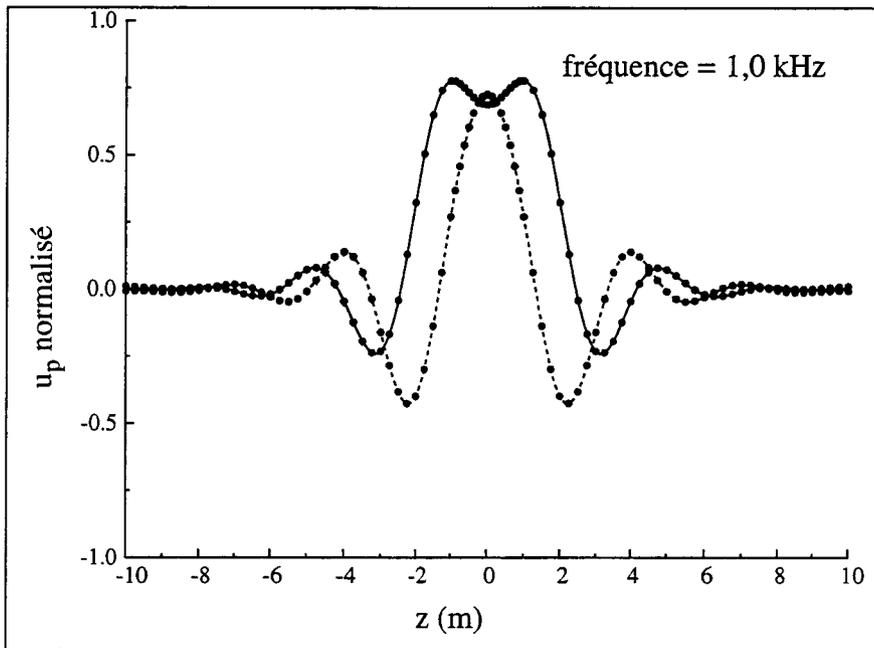


Figure III-31.a : Rayonnement à $r = 2,5$ m (formation avec pertes)

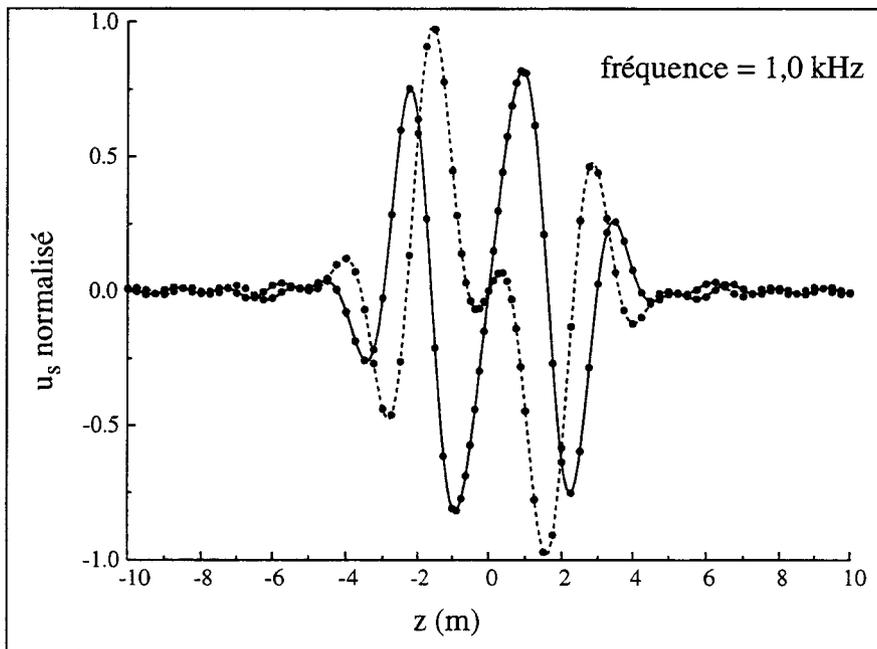
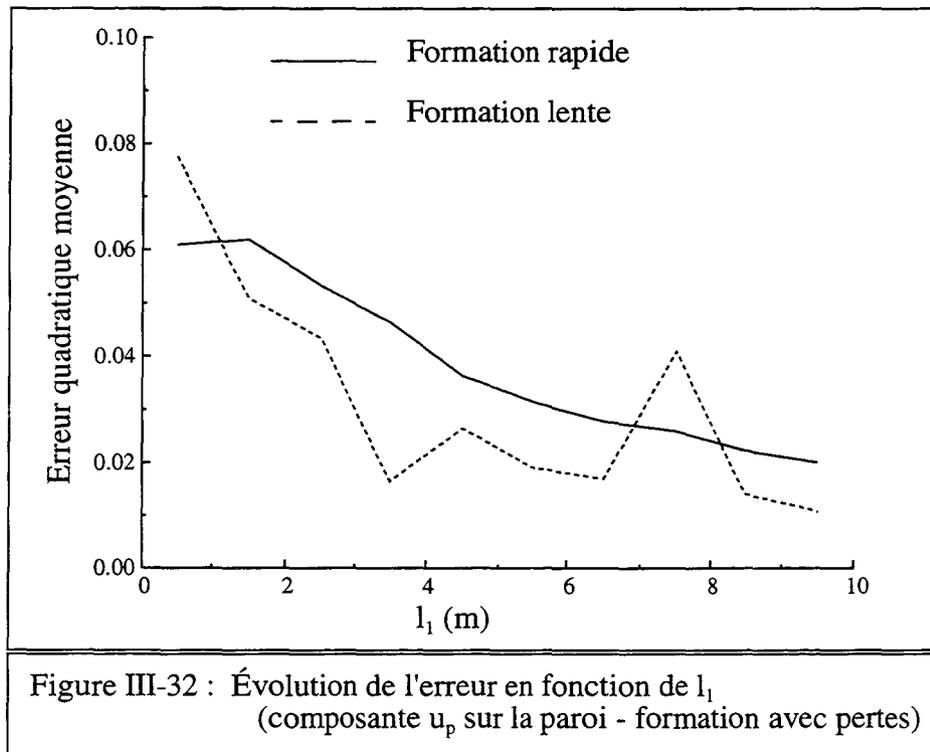


Figure III-31.b : Rayonnement à $r = 2,5$ m (formation avec pertes)

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

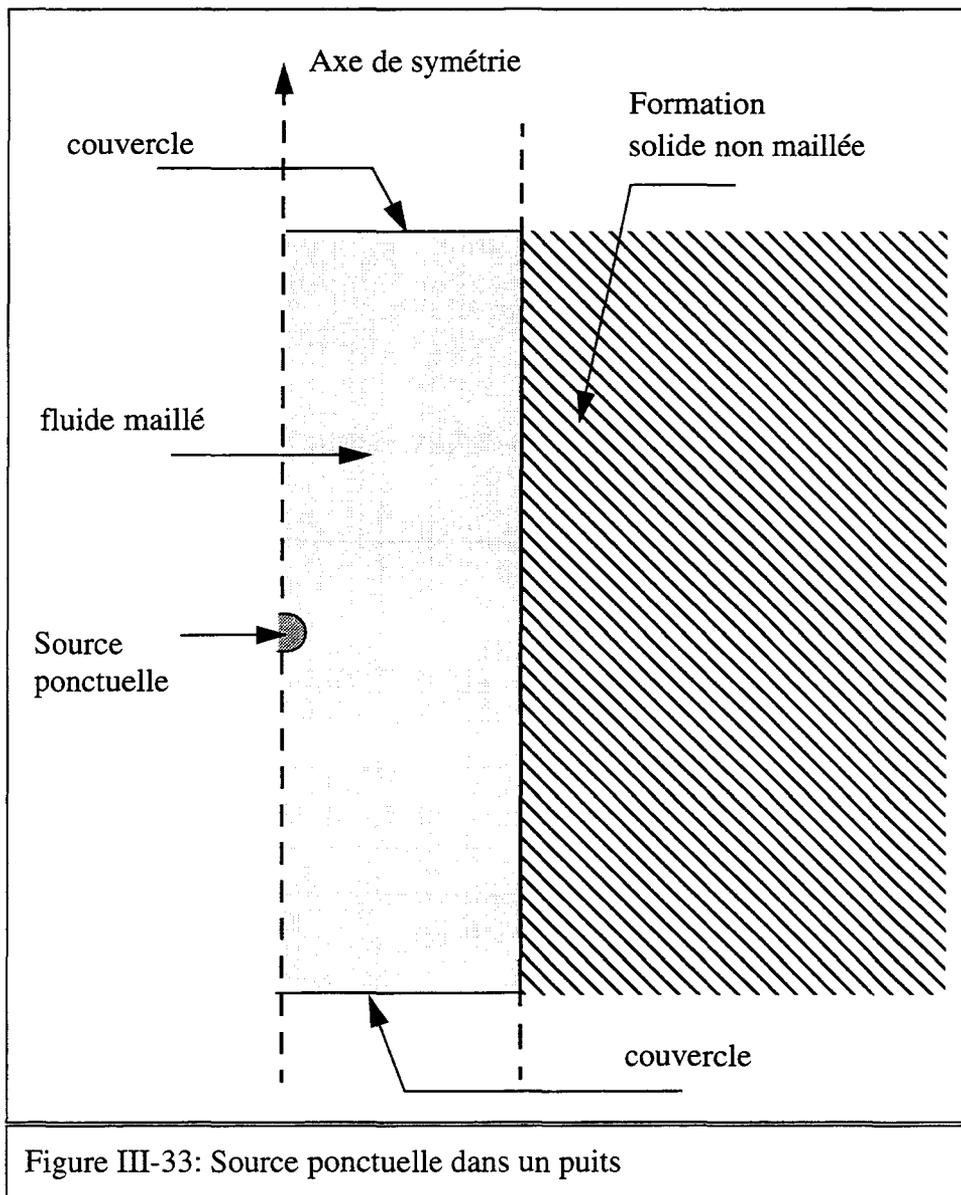
L'ensemble des résultats obtenus montrent comme dans le cas du puits vide un très bon accord entre les solutions analytiques et celles calculées par le couplage éléments-finis décomposition en k.

Enfin une étude de la convergence de la solution numérique vers la solution analytique du même type de celle présentée au paragraphe III-1.3 est effectuée à 1 kHz. La distribution de contrainte choisie est triangulaire d'amplitude maximale $T_0 = 100$ Pa sur le domaine de la paroi du puits de rayon $r_1 = 0,5$ m tel que : $-0,5 \text{ m} < z < 0,5 \text{ m}$. Lorsque le domaine modélisé contient des noeuds dont la valeur de la coordonnée z est supérieur à 2,5 m, le calcul de l'erreur quadratique moyenne se fait on n'utilisant que les noeuds de la paroi tel que : $-2,5 \text{ m} < z < 2,5 \text{ m}$ afin d'éviter la prise en compte des erreurs des troncatures numériques liées à la très faible valeur du déplacement au dela de $|z| > 2,5 \text{ m}$. La figure III-32 montre l'évolution de l'erreur quadratique moyenne commise sur la composante radiale du déplacement (u_p) sur la paroi du puits en fonction de la longueur l_1 lorsque la formation est rapide ou lente. Cette étude confirme la qualité des résultats numériques et traduit principalement l'influence de la distance à la source à laquelle on place les couvercles. On notera le faible niveau de l'erreur pour les formations rapide et lente quelque soit la longueur modélisée.



III-2.2 Source idéale dans un puits

On place dans le puits rempli de fluide une source idéale ponctuelle (figure III-33). La formation et le fluide ont les mêmes caractéristiques que dans les tests précédents (formation rapide). Le diamètre du puits r_1 est toujours égal à 0,5 m.



La solution approchée basse fréquence de ce problème a été proposée par Lee [16]. Cette solution donne le champ de pression moyen dans le puits, à condition que le rayon du puits soit petit devant toutes les longueurs d'onde liées au problème. La pression moyenne est alors donnée par :

$$p(z) = -jv_0 \frac{\omega \rho_f c_T}{\pi r_1^2} e^{-jk_T |z|} \quad (\text{III-18})$$

où $k_T = \omega/c_T$ est le nombre d'onde de l'onde de tube de vitesse c_T donnée par la formule (II-59). ρ_f désigne la densité volumique du fluide, v_0 la vitesse volumique de la source et ω la pulsation. Ces tests sont réalisés pour un fluide et une formation ne présentant aucune perte mécanique. Les figures III-34.a et III-34.b montrent les cartes d'isopressions dans le puits à 150 et 250 Hz. Les figures III-35.a III-35.b et III-35.c montrent l'évolution de la pression moyenne normalisée à sa valeur maximale en fonction de z , à 150, 250 et 500 Hz.

Les résultats montrent un bon accord entre la solution proposée par Lee [16] et le modèle que nous avons développé jusqu'à environ 500 Hz (figure III-35.c). Cette fréquence semble être la limite d'utilisation du modèle de Lee pour un puits le cas étudié.

Cartes d'isopressions dans le puits excité par une source idéale

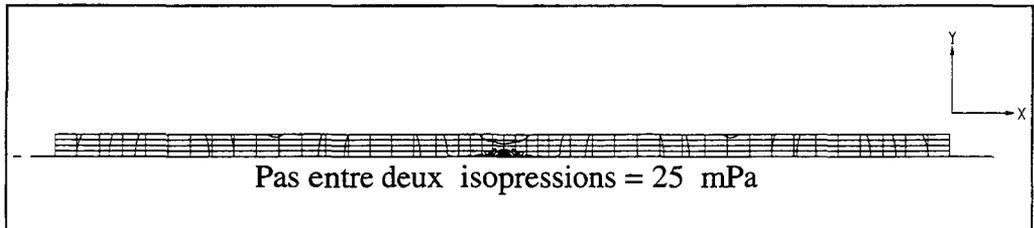


Figure III-34.a : Carte d'isopressions à 150 Hz

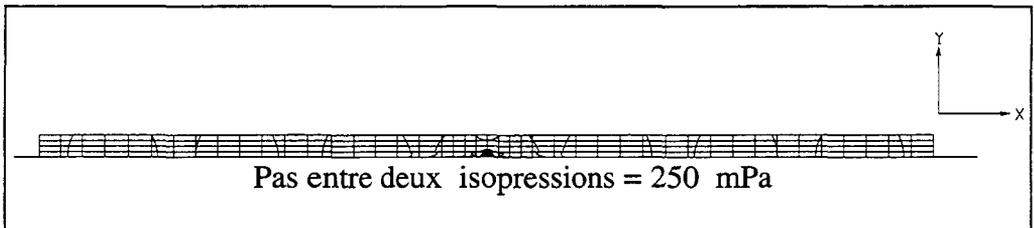


Figure III-34.b: Carte d'isopressions à 250 Hz

**Source idéale (ponctuelle) dans un puits rempli d'un fluide parfait
(champ de pression moyen à 150 Hz et 250 Hz)**

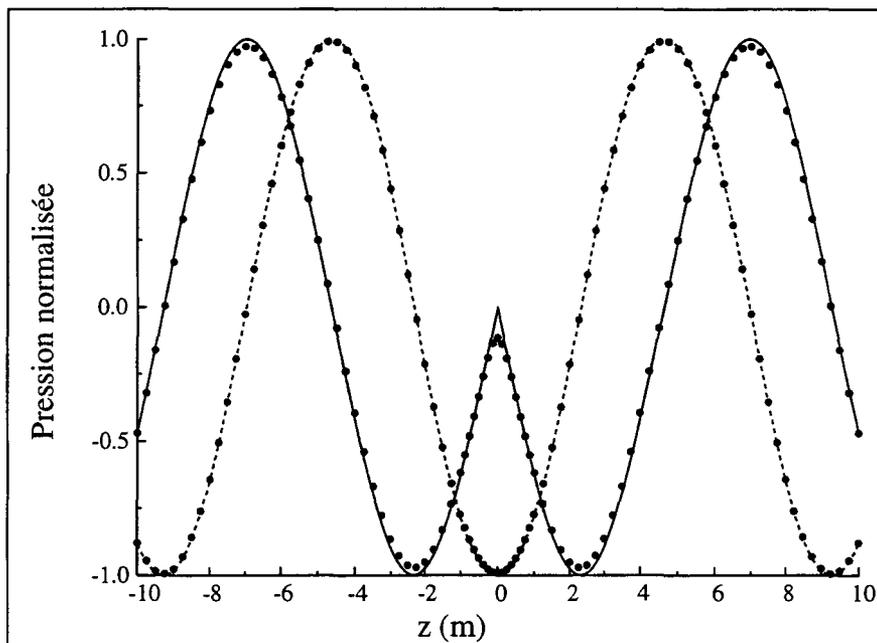


Figure III-35.a : Source idéale dans un puits à 150 Hz

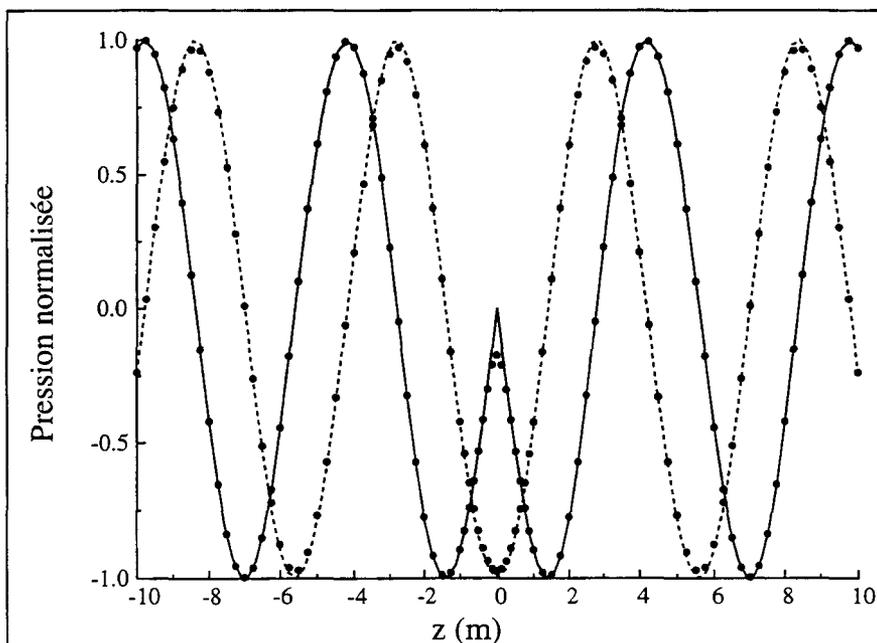
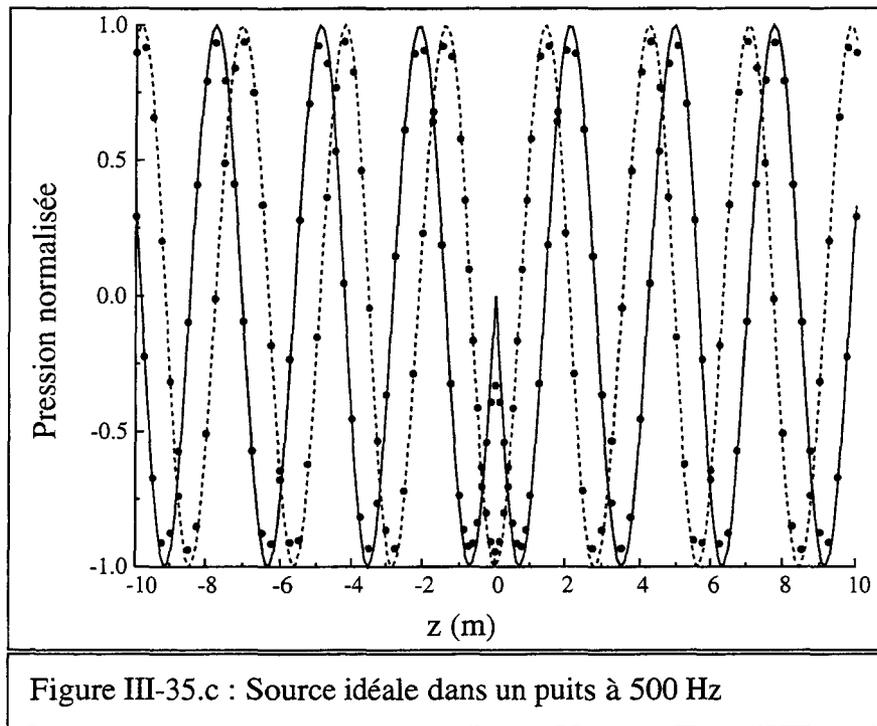


Figure III-35.b: Source idéale dans un puits à 250 Hz

- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

**Source idéale (ponctuelle) dans un puits rempli d'un fluide parfait
(champ de pression moyen à 500 Hz)**



- Solution analytique (partie réelle)
- - - Solution analytique (partie imaginaire)
- Solution numérique

III-2.3 Conclusion

Les tests présentés dans ce deuxième paragraphe décrivent un puits rempli de fluide. La formation est modélisée à l'aide des éléments d'impédances mutuelles. Les éléments rayonnants placés sur les couvercles imposent l'impédance acoustique de l'onde de tube. Les tests effectués concernent le cas d'une distribution de contraintes appliquées sur la paroi et d'une source ponctuelle située dans le puits. L'ensemble des résultats obtenus sont en excellent accord avec les solutions analytiques. Cependant, la méthode utilisée est limitée aux basses fréquences pour lesquelles une seule onde de tube existe.

Chapitre IV

Applications

Dans ce dernier chapitre, le couplage éléments finis-décomposition en k est appliqué à l'étude du rayonnement d'un anneau de céramique piézoélectrique dans un tube rempli d'huile et entouré d'eau. Nous présentons en premier lieu la méthode expérimentale, les conditions dans lesquelles s'effectuent les mesures ainsi que le banc de mesure. Une étude expérimentale de la transparence acoustique du tube est entreprise pour évaluer l'influence du tub, qui n'est pas pris en compte dans le modèle numérique. Par la suite, une modélisation de l'anneau de céramique à vide permet d'ajuster les constantes de matériau de la céramique. Pour terminer, nous plaçons l'anneau de céramique dans le tube rempli d'huile entouré d'eau et nous comparons les résultats expérimentaux aux résultats numériques.

IV-1 Présentation de la méthode expérimentale

Cette section a pour objet de présenter la configuration choisie pour appliquer la méthode du couplage éléments finis-décomposition en k présentée au chapitre II, au cas d'un transducteur piézoélectrique rayonnant dans un puits. Dans une première partie, nous justifions le choix qui consiste à remplacer la formation par un fluide. Puis nous présentons brièvement le matériel utilisé, ainsi que le principe de la mesure.

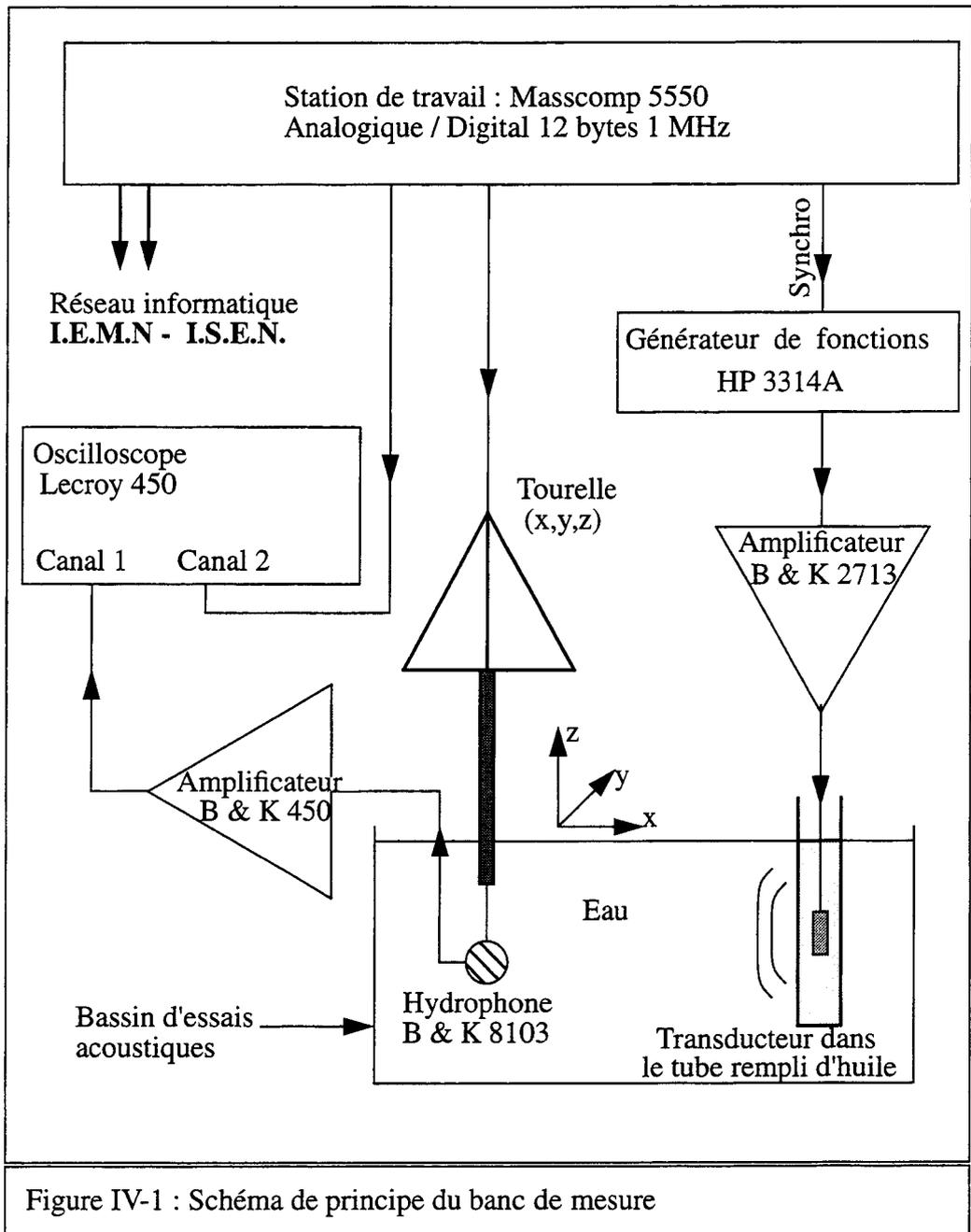
IV-1.1 Choix du milieu extérieur

La mesure du rayonnement d'un transducteur piézoélectrique rayonnant dans un puits entouré d'une formation élastique homogène est très difficile à réaliser. Il faudrait pouvoir disposer d'un puits dans une formation homogène et être en mesure de relever le champ de déplacement dans la formation à différents endroits. Pour cela, il faut forer un puits de quelques mètres, dans un terrain homogène puis le tuber pour éviter son effondrement. La mesure du champ de déplacement nécessite la présence de capteurs dans la formation. L'ensemble de ces contraintes nous a conduit à modifier le problème.

Nous avons choisi de remplacer la formation (solide élastique homogène) par de l'eau. Pour simuler le puits, nous avons introduit dans l'eau un tube contenant une huile silicone. Le tube est utilisé comme surface de séparation des deux fluides. Son comportement n'étant pas modélisé, il est nécessaire qu'il soit transparent acoustiquement. La méthode utilisée pour modéliser ce problème est présentée à la section II-5 et sa validation au paragraphe III-1.5.

IV-1.2 Description du dispositif et principe de la mesure

La figure IV-1 montre le schéma de principe du banc de mesure utilisé.



IV-1.2.1 Matériel utilisé et condition de la mesure

Les mesures ont été effectuées dans le bassin d'essais acoustiques de l'Institut Supérieur d'Électronique du Nord (I.S.E.N.). Le matériel utilisé est essentiellement constitué de :

- une station de travail Mascomp 5550, autour de laquelle s'articule tout le banc de mesure. Elle est munie d'une carte d'acquisition rapide de 1 MHz et d'un logiciel qui pilote l'ensemble des instruments,

- un générateur de fonction Hewlett-Packard de type 3314A, synchronisé et commandé par la station de travail, délivrant un train d'impulsions à une fréquence donnée. L'amplitude et la phase sont réglables à partir de la station de travail,

- un amplificateur de puissance Bruel & Kjaer de type 2713 qui permet d'alimenter le transducteur acoustique. La puissance fournie par cet amplificateur peut être modifiée de façon continue. Son gain varie de 0 à 60 dB. Il est conçu pour alimenter, à faible bruit, des charges hautement capacitives à des niveaux de tension élevés,

- un transducteur électroacoustique (figure IV-2.b), constitué par un anneau libre de céramique piézoélectrique de type PZT5A (Morgan Matroc). Les électrodes sont disposées sur les cylindres interne et externe correspondant respectivement à l'électrode chaude excitée à 100 volts et à la masse (le câble électrique est en noir sur la photo). Le transducteur est tenu par deux fines croix en PVC permettant de le centrer sur l'axe du tube et le maintenir à la verticale. L'ensemble est suspendu à l'aide d'un fil fin de nylon (câble transparent),

- le bassin d'essais acoustiques de l'I.S.E.N. (figure IV-2.a) dont les dimensions sont les suivantes : 8 m de longueur, 6 m de largeur et 6,5 m de profondeur. Il est rempli d'eau qui est donc le support de propagation de ondes acoustiques. La température de l'eau voisine de 14 °C tout au long des essais, correspondant à une célérité du son $c_{\text{eau}} = 1458 \text{ m/s}$ et une masse volumique $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$.

- un tube en PVC ayant une hauteur de 4 m, un diamètre intérieur de 47,6 mm et un diamètre extérieur de 50,6 mm (figure IV-2.a et IV-2.b). Il est maintenu à la verticale par une bague fixée à un double rail métallique. Le tube est rempli d'une huile silicone de type 47V10 (Isolants Nord) de célérité du son $c_{\text{huile}} \sim 1005 \text{ m/s}$ à 14 °C et de masse volumique $\rho_{\text{huile}} = 930 \text{ kg/m}^3$. Le tube est plongé dans le bassin d'eau. Une masse suspendue à son extrémité inférieure permet de le maintenir à la verticale,

- l'hydrophone de réception est un hydrophone Bruel & Kjaer de type 8103 dont le S_h est constant pour toutes les fréquences de mesures à -214 dB (référence 1V/ μPa). Il est placé à une distance variable du tube. Sa position est pilotée à partir de la station de travail qui commande la tourelle sur laquelle est fixée l'hydrophone. x, y et z désignent les coordonnées de l'hydrophone par rapport au centre acoustique de l'anneau. La coordonnée y est maintenue à zéro tout au long des essais. Pour une valeur de z varie de -50 cm à 50 cm. La pression est relevée à pas d'intervalle régulier,

- une tourelle quatre axes de chez Micro-contrôle sur laquelle est fixé le capteur (figure IV-2.a). Elle permet le positionnement précis et automatique du capteur, grâce à

des moteurs pas à pas commandés par la station de travail. Elle autorise trois translations (x,y,z) et une rotation autour de l'axe (Oz), avec une résolution de 0,05 mm suivant x, 0,1 mm suivant y et 0,05 mm suivant z.

- un pré-amplificateur Brookdeal Electronics LTD faible bruit de type 450. Il est chargé d'amplifier les signaux obtenus sur l'hydrophone de réception. Ce pré-amplificateur intègre un filtre passe-bande, de bande passante réglable et assure un gain variable entre 30 et 80 dB,

- un oscilloscope numérique à deux voies Lecroy de type 9410 permettant de visualiser simultanément les signaux d'émission et de réception.

D'autre part nous avons mesuré l'impédance électrique du transducteur dans l'air et dans le tube rempli d'huile entouré d'eau à l'aide d'un analyseur Hewlett-Packard de type 4194A.

IV-1.2.2 Principe de la mesure

Le projecteur est relié au générateur de fonction HP 3314A via l'amplificateur B & K 2713. Ce générateur commandé par la station de travail délivre un train d'impulsions sinusoïdales dont le nombre de sinusoïdes est optimisé en fonction de la fréquence pour limiter les échos parasites dus aux réflexions sur les parois du bassin. Le projecteur est alimenté par un signal amplifié et génère une onde acoustique dans l'huile qui l'environne. Cette onde est transmise à l'eau de la cuve via le tube en PVC et est captée par l'hydrophone B & K 450. L'hydrophone de réception est monté sur une tourelle commandée par la station de travail. Cette tourelle permet de positionner précisément l'hydrophone. Le déplacement de la tourelle perturbe légèrement le champ d'onde au voisinage de l'hydrophone. Pour résoudre ce problème, un temps de pause de 10 à 15 secondes, pendant lequel aucune mesure n'est effectuée est observé après chaque déplacement de tourelle. L'onde se propageant dans l'eau parvient au capteur. Les signaux reçus sont amplifiés par le pré-amplificateur B & K 450 et sont transmis au Masscomp. La détermination précise de l'amplitude et de la phase du signal reçu moyenné sur l'enveloppe de ce signal se fait par transformation de Hilbert [50] (voir annexe IV). Les signaux émis par le générateur de fonction et reçus par le capteur sont transmis à l'oscilloscope pour être visualisés.

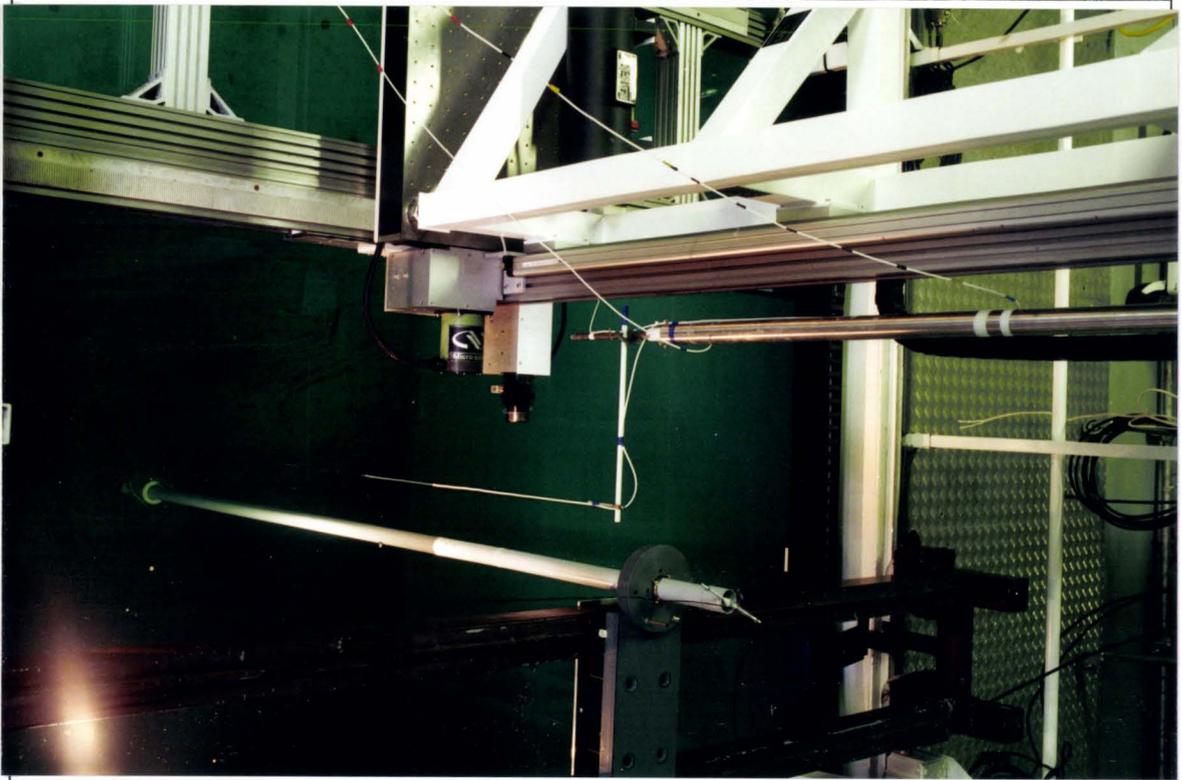


Figure IV-2.a : Dispositif expérimental du bassin d'essais acoustiques

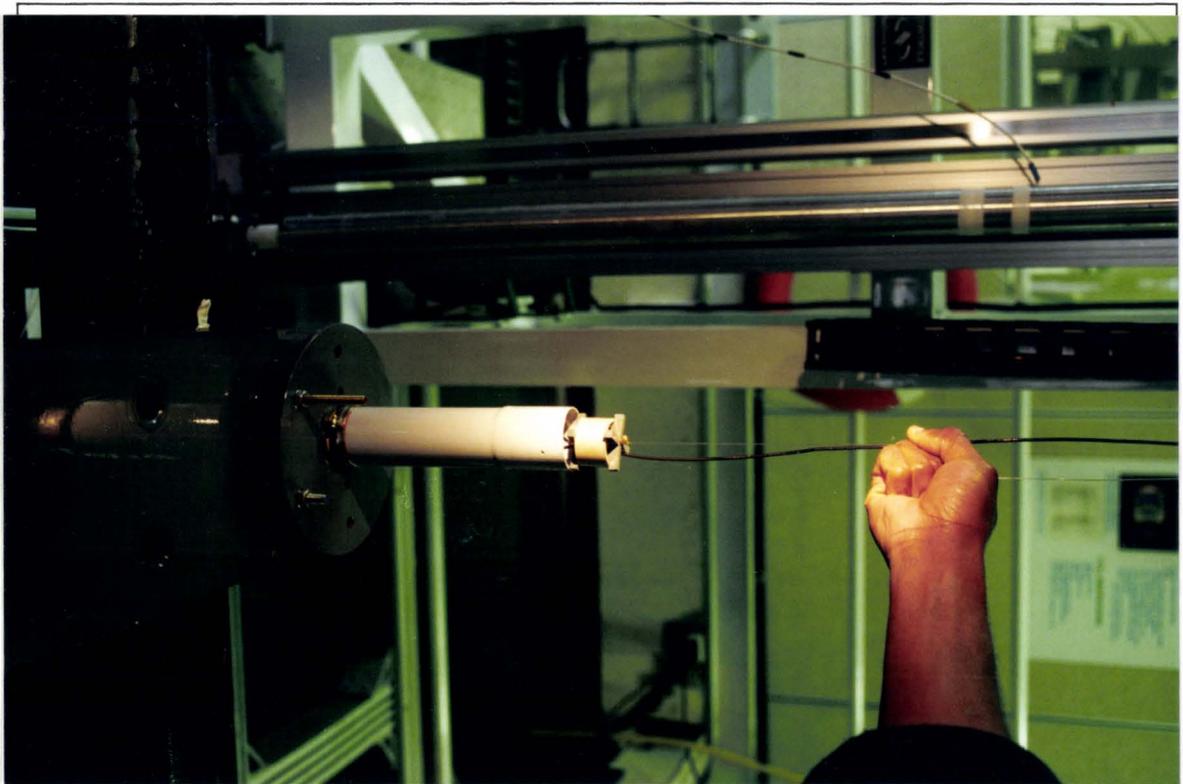


Figure IV-2.b : Transducteur électroacoustique avant introduction dans le tube

IV-2 Transparence acoustique du tube

Nous avons étudié expérimentalement l'influence de la présence du tube ainsi que celle de la distance à l'axe à laquelle on place le capteur. L'étude de la transparence acoustique se fait de manière suivante : on place une source acoustique dans le tube rempli d'eau et on mesure la pression le long d'un segment parallèle à l'axe (Oz) en déplaçant l'hydrophone. On effectue la même mesure en l'absence du tube. Les champs de pression mesurés sont alors comparés. Le tube est acoustiquement transparent lorsque les deux champs de pression sont proches. Pour une onde plane, la transparence acoustique entre deux milieux fluides est assurée lorsque les impédances acoustiques $z = \rho c$ sont égales.

	Eau	Plexiglas	PVC
c (m/s)	1458	2800	1400
ρ (kg/m ³)	1000	1190	1400
$\rho c / \rho_{\text{eau}} c_{\text{eau}}$	1	2,285	1,344

Tableau IV-1 : Caractéristiques acoustique des matériaux constituant le tube

Le tube en plexiglas présente l'avantage d'être optiquement transparent ce qui facilite le positionnement du transducteur. On peut alors aisément déterminer la position des différents éléments présents dans le tube. Cette transparence permet aussi de voir ce qui se passe dans le tube. Nous avons par exemple détecté la présence de bulles d'air. Il n'est par contre pas acoustiquement transparent car son impédance acoustique est environ deux supérieure à celle de l'eau (tableau IV-1).

Le tube en PVC a une impédance acoustique assez proche de celle de l'eau (tableau IV-1), mais il est opaque. Pour éviter la présence de bulles d'air dans le tube, nous avons versé quelques gouttes de détergent puis fait descendre et monter plusieurs fois un objet cylindrique de diamètre très proche du diamètre intérieur du tube.

Les figures IV-3.a à IV-3.i comparent les relevés de pression suivant (Oz) à différentes fréquences et différentes distances à l'axe du tube, pour une même source (anneaux de céramiques piézoélectrique de PZ27 de chez Hybrico) rayonnant dans l'eau en présence ou non du tube de PVC. Le centre acoustique (centre de la source) est situé en $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Pour chaque relevé $x = r$, où r varie entre 300 mm et 1000 mm, $y = 0$ mm et -500 mm $< z < 500$ mm. Au voisinage de $z = 0$ et pour x suffisamment grand, la présence du tube est à peine remarquable. Pour z grand ($z > 250$ mm), on observe l'influence du rayonnement du tube. Les figures IV-4.a à IV-4.c montrent la représentation graphique de Δ_f (voir paragraphe II-5.2) en fonction de k réel positif. Δ_f est donné par l'équation (II-97). Son annulation permet de déterminer le nombre d'onde k_T l'onde de tube, donc la vitesse $c_T = 2\pi f/k_T$ de l'onde de tube associée. La racine de Δ_f apparaît clairement sur le graphique. Le tableau IV-2 compare les valeurs des vitesses de l'onde de tube mesurées et calculées. On remarque le bon accord entre la mesure et le calcul. La figure IV-5 montre l'évolution de la vitesse de l'onde de tube calculée en fonction de la fréquence. La transparence du tube et la condition de rayonnement sont donc satisfaites.

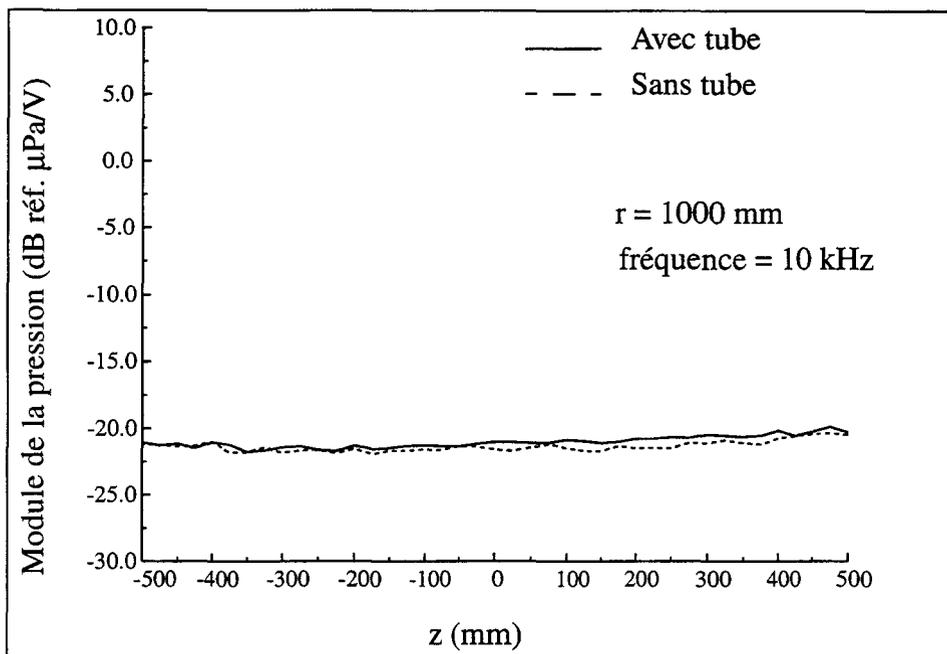


Figure IV-3.a : Étude de la transparence acoustique du tube en PVC

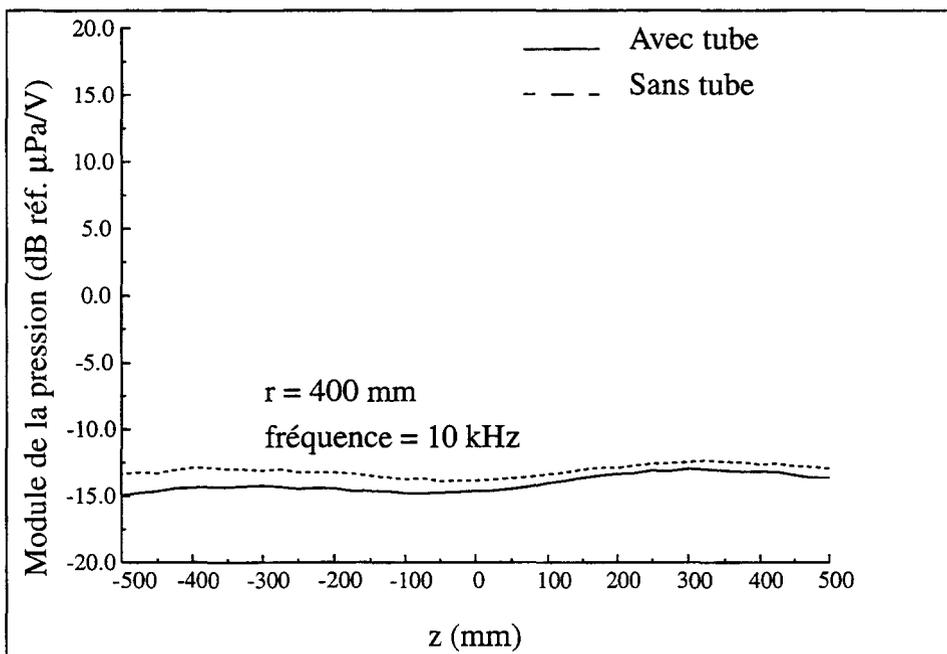


Figure IV-3.b : Etude de la transparence acoustique du tube en PVC

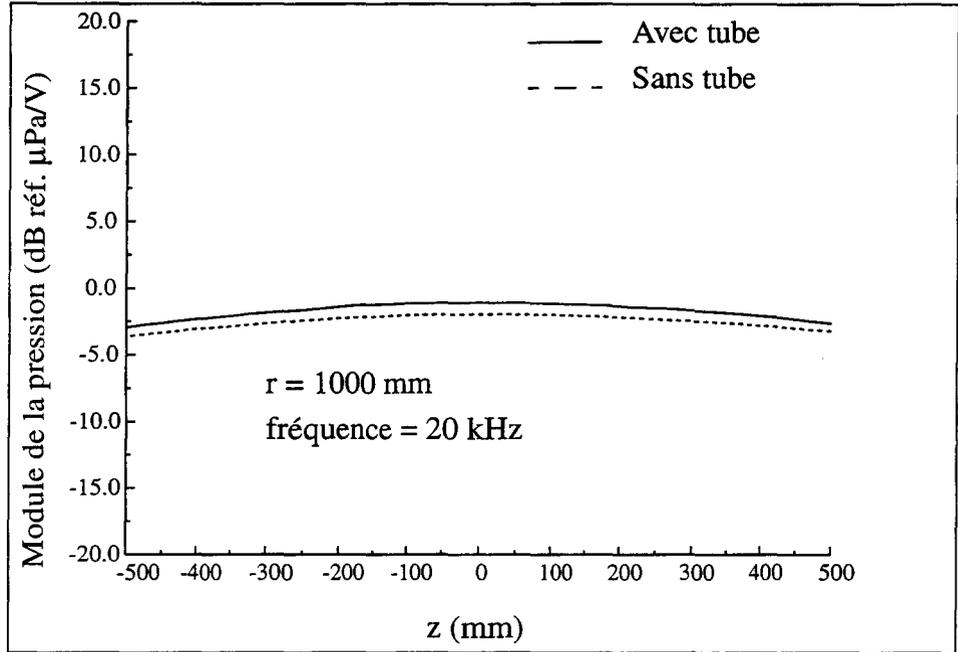


Figure IV-3.c : Etude de la transparence acoustique du tube en PVC

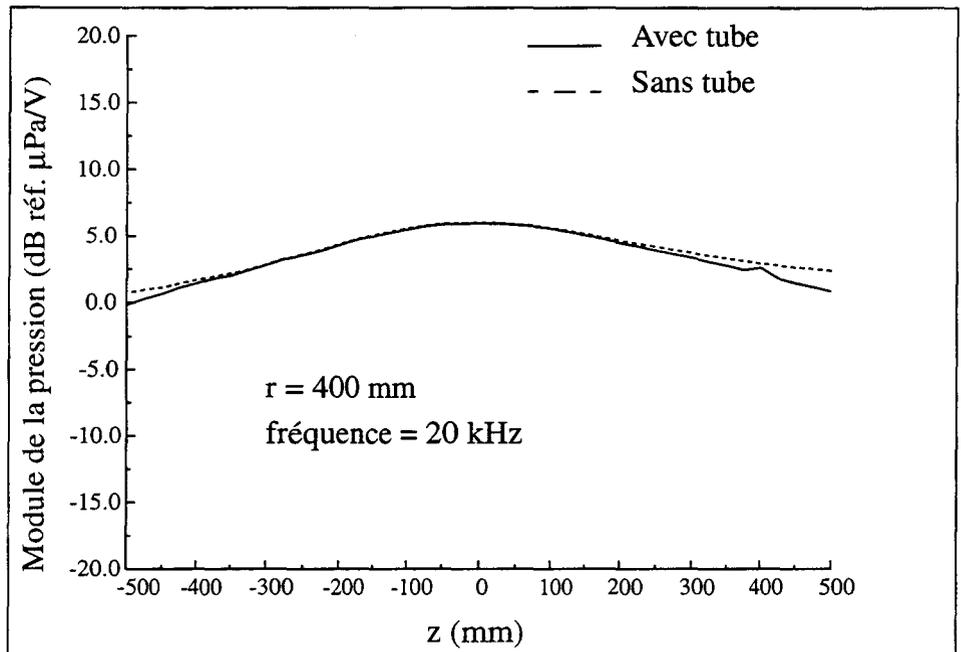


Figure IV-3.d : Etude de la transparence acoustique du tube en PVC

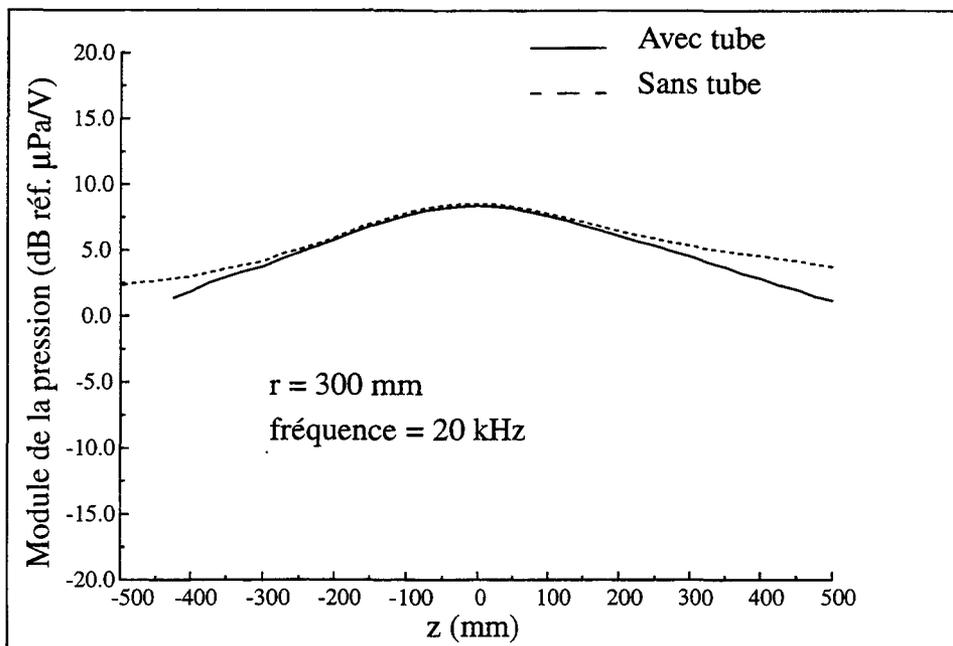


Figure IV-3.e : Etude de la transparence acoustique du tube en PVC

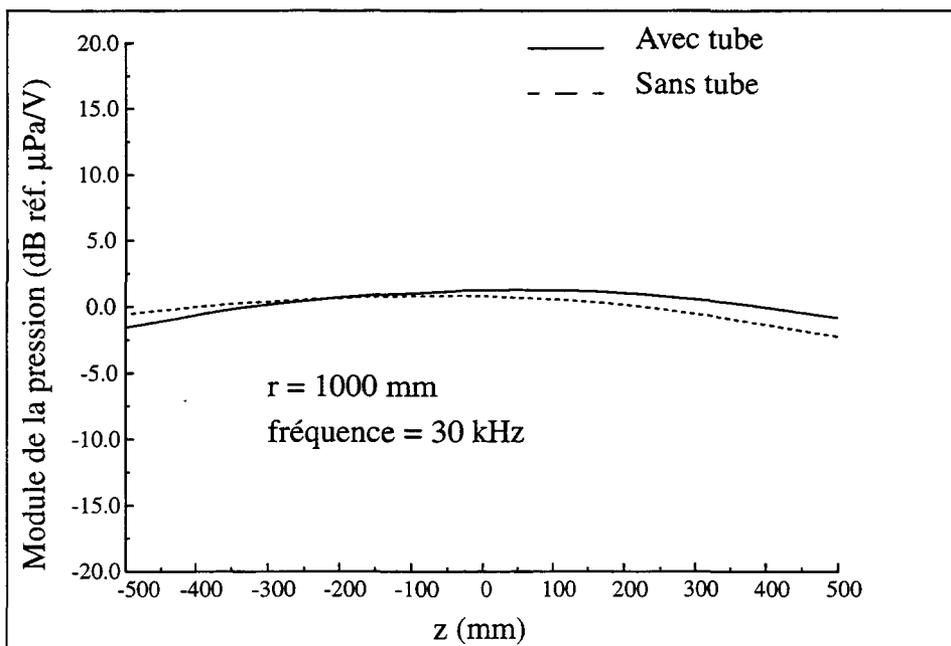


Figure IV-3.f : Etude de la transparence acoustique du tube en PVC

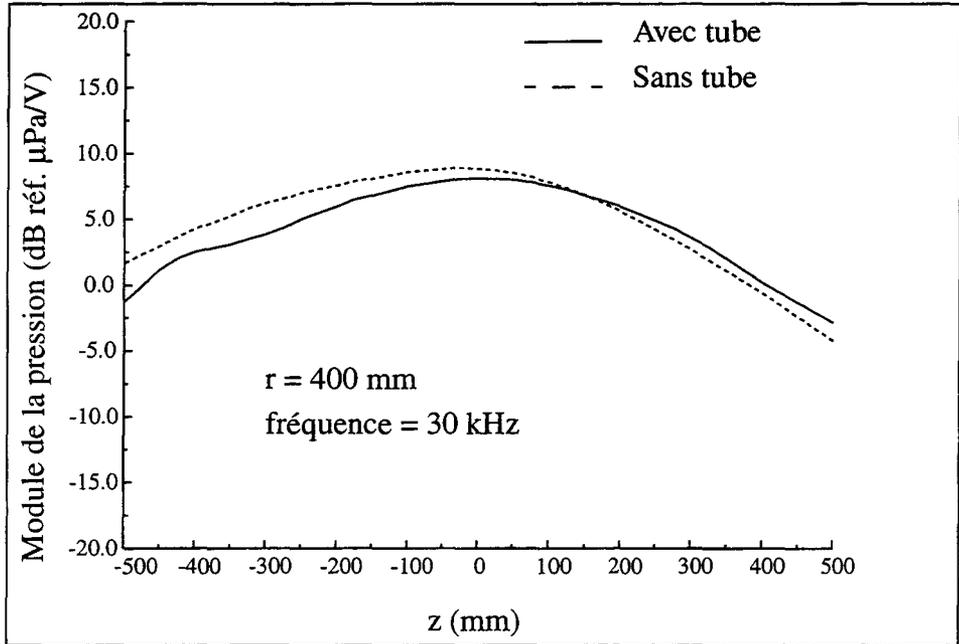


Figure IV-3.h : Etude de la transparence acoustique du tube en PVC

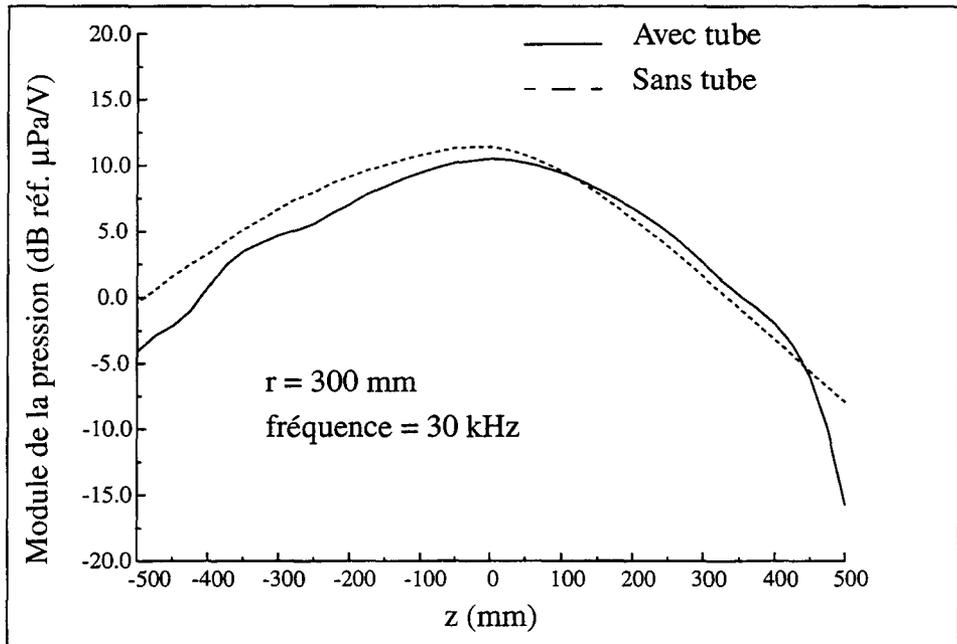


Figure IV-3.i : Transparence acoustique du tube en PVC

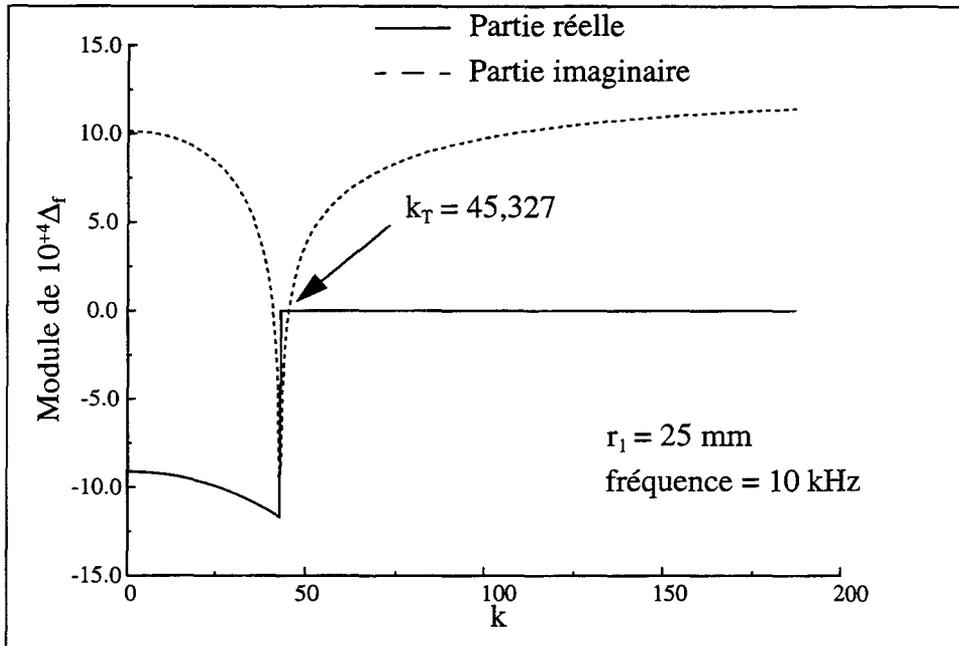


Figure IV-4.a : Recherche graphique de k_T

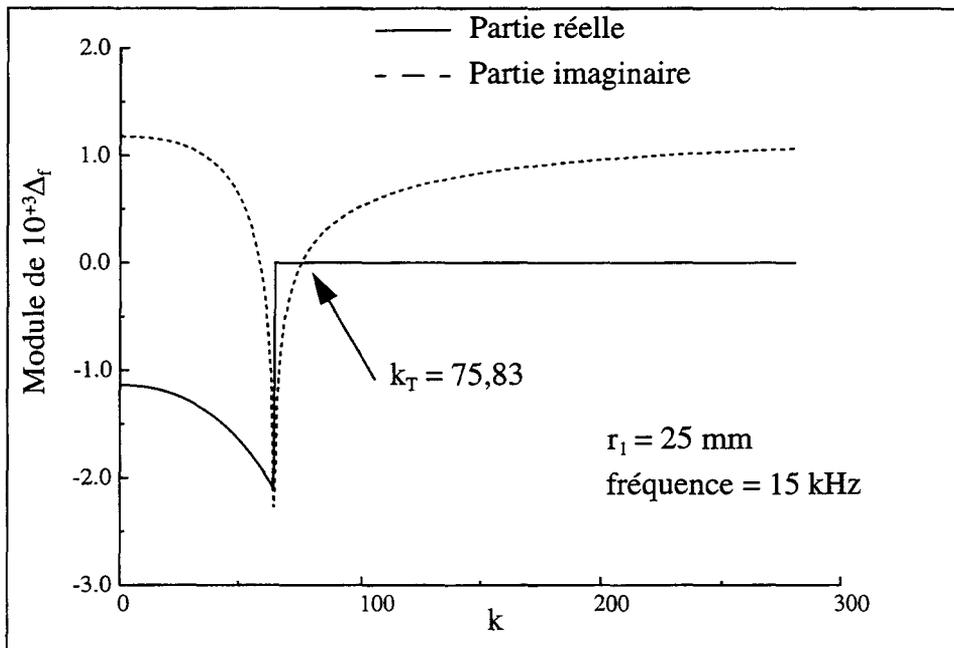


Figure IV-4.b : Recherche graphique de k_T

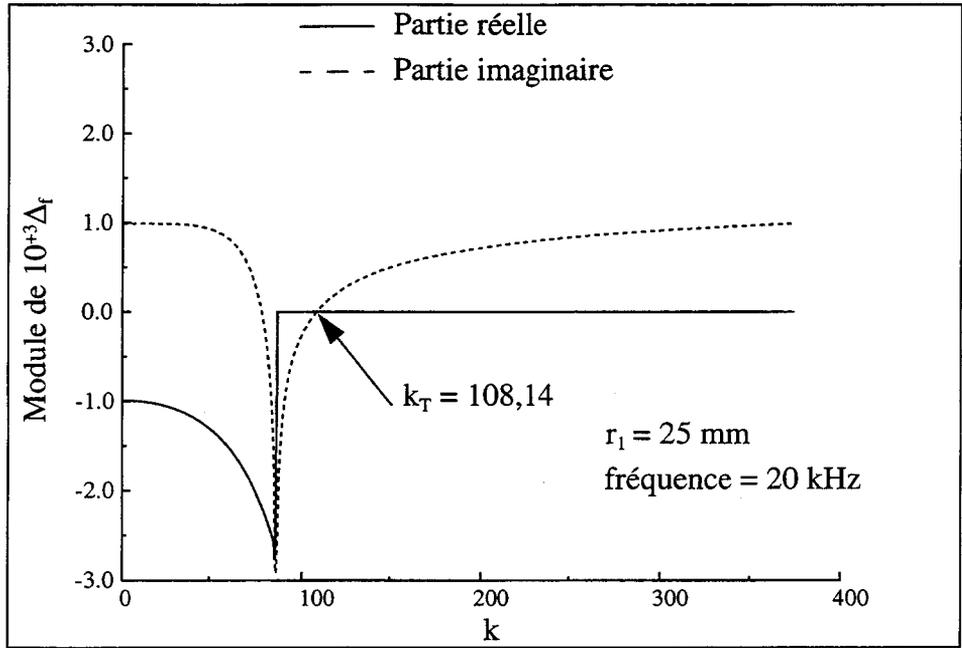


Figure IV-4.c : Recherche graphique de k_T

Fréquence (kHz)	c_T calculée (m/s)	c_T mesurée (m/s)	Erreur relative (%)
10	1386,2	1387	0,058
15	1242,9	1252	0,732
20	1162,0	1174	1,032

Tableau IV-2 : Comparaison des vitesses de l'onde de tube calculée et mesurée

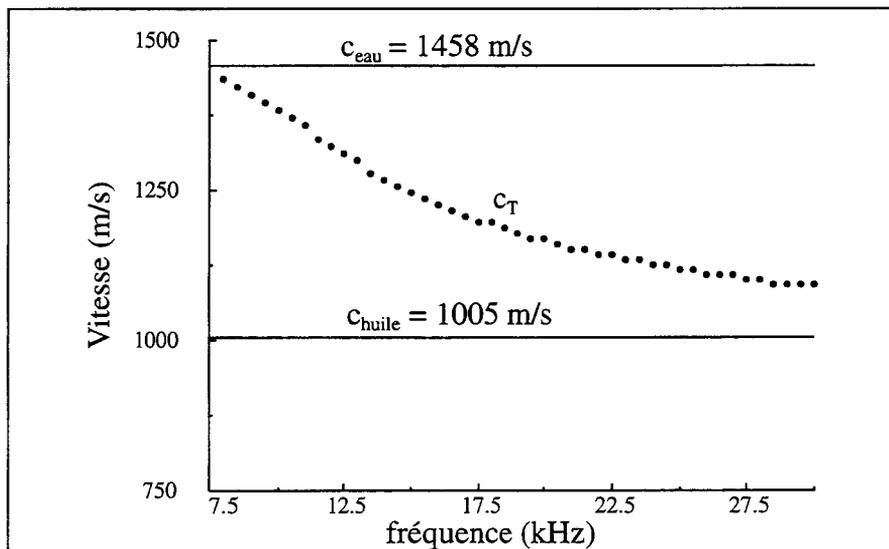
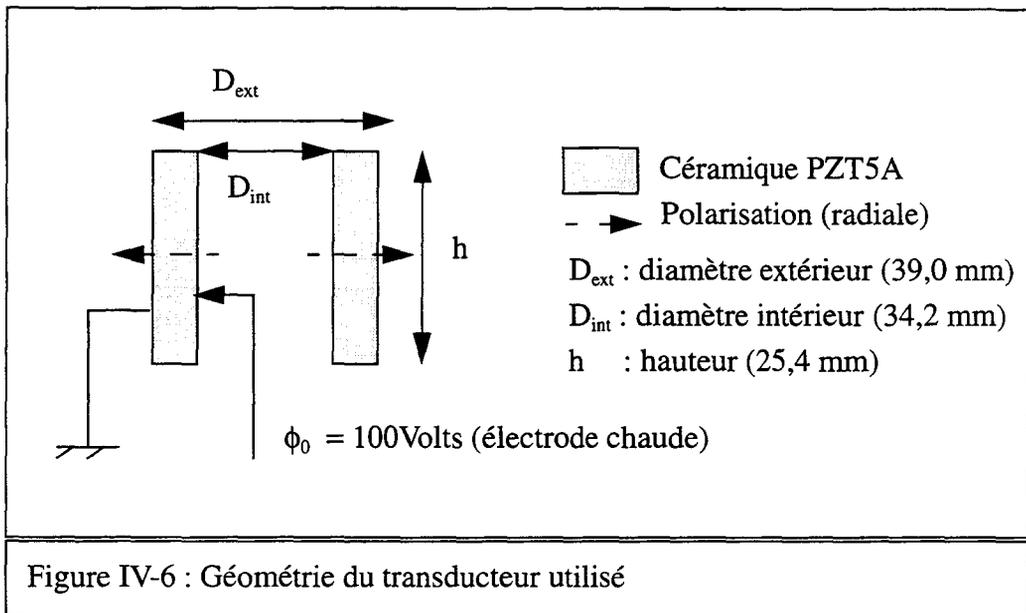


Figure IV-5 : Courbe de dispersion théorique de l'onde de tube

IV-3 Analyse du transducteur

IV-3.1 Présentation du transducteur

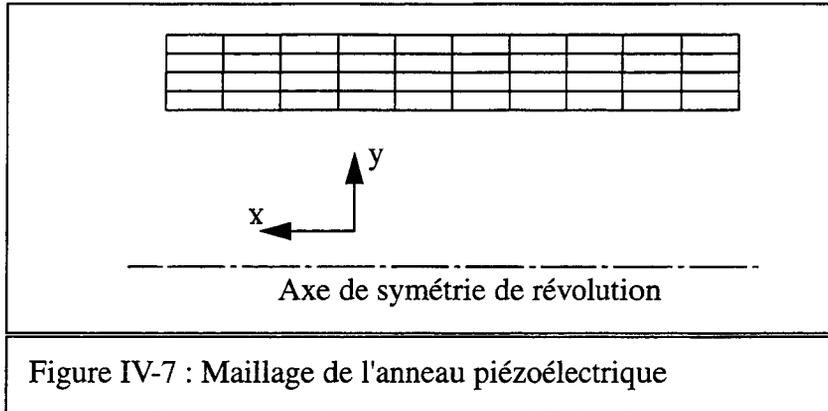
Le transducteur utilisé pour la validation expérimentale est un anneau à immersion libre (céramique annulaire). Il est présenté à la figure IV-2.b et sa géométrie est décrite à la figure IV-6. La caractéristique principale de ce type de transducteurs est sa capacité à supporter de grandes pressions hydrostatiques. Ils sont très utilisés en acoustique pétrolière. Cet anneau est réalisé d'une seule pièce en céramique piézoélectrique PZT5A (Morgan Matroc). Sa polarisation est radiale. Les caractéristiques de cette céramique fournies par la société Morgan Matroc sont présentées dans le tableau IV-3.



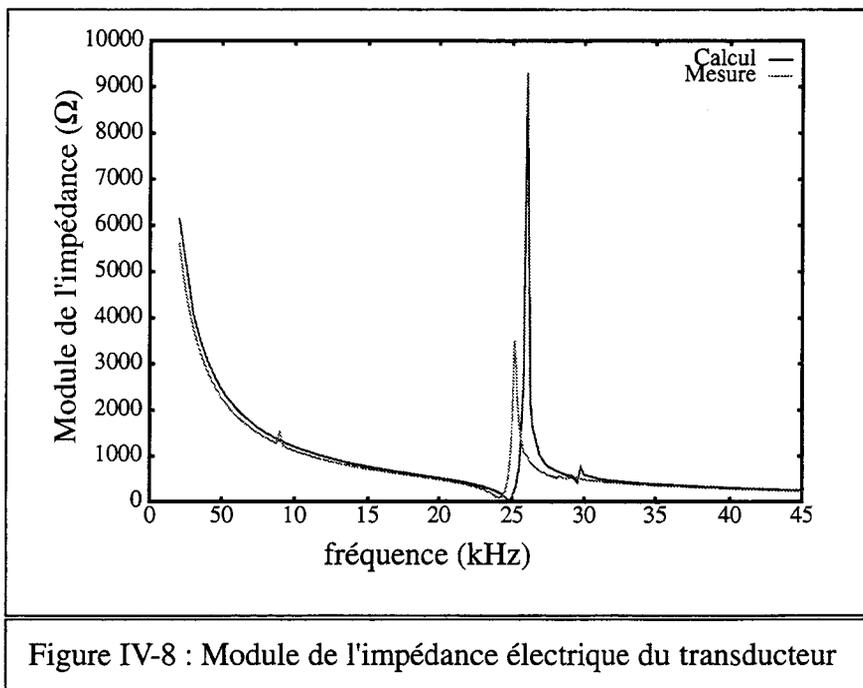
IV-3.2 Caractérisation et modélisation du transducteur

L'étude d'un transducteur acoustique commence par l'évaluation de ses caractéristiques à vide. Compte tenu de la faible impédance acoustique apportée par l'air, on substitue l'air au vide, ce qui facilite considérablement l'analyse expérimentale.

La méthode des éléments finis permet d'analyser le comportement de l'anneau de céramique à vide. La modélisation par éléments finis de ce problème utilise la symétrie de révolution par rapport à l'axe de l'anneau. Quarante éléments finis piézoélectriques bidimensionnels à huit noeuds sont utilisés pour décrire la géométrie du transducteur (figure IV-7). Dans un premier temps nous utilisons les constantes du matériau fournies par les tables de la société Morgan Matroc (tableau IV-3) [51].



Le code ATILA permet de calculer en post-traitement l'impédance électrique de la céramique. Nous avons tracé et comparé les courbes du module de l'impédance électrique obtenues par le calcul par éléments finis et la mesure directe à l'aide de l'impédancemètre de type HP 4194A, dans la bande de fréquence 2-45 kHz. Les résultats sont présentés à la figure IV-8. Ils font clairement apparaître la nécessité d'ajuster les constantes du matériau.



Cet ajustement s'effectue à partir de quatre mesures à l'aide de la procédure suivante :

- la pesée du transducteur donne la masse volumique ρ ,
- la fréquence de résonance du mode radial de l'anneau permet de déterminer le terme s_{11}^E à partir de l'expression [1]:

$$f_r = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{1}{\rho s_{11}^E}} \quad (\text{IV-1})$$

où a désigne le rayon moyen de l'anneau,

- la capacité basse fréquence de l'anneau c_{BF} , mesurée à 1 kHz, donne le terme ϵ_{33}^T à l'aide de l'expression :

$$c_{BF} = \frac{2\pi ah}{e} \epsilon_{33}^T \quad (IV-2)$$

où h et e désignent respectivement la hauteur et l'épaisseur de l'anneau,

- la mesure de la fréquence d'antirésonance f_a donne accès au coefficient de couplage k_{31} du mode radial et par conséquent à la constante d_{31} .

$$k_{31}^2 = 1 - \frac{f_r^2}{f_a^2} = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T} \quad (IV-3)$$

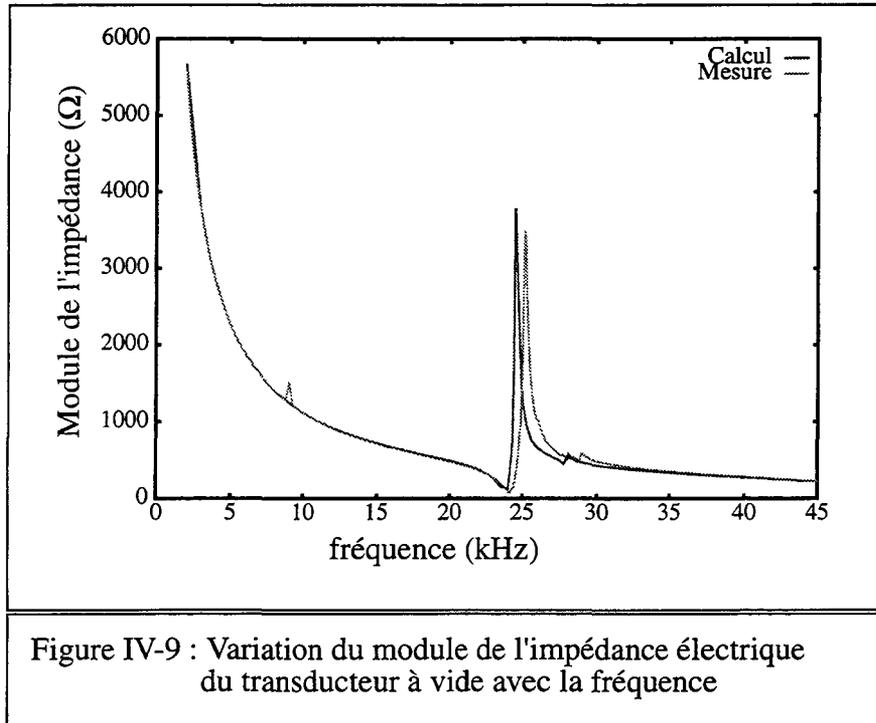
Les autres termes du tenseur $[s^E]$ (resp. $[d]$, $[\epsilon^T]$) sont ajustés en appliquant le même coefficient correctif que pour s_{11}^E (resp. ϵ_{33}^T , d_{31}). Enfin le tenseur $[\epsilon^S]$ est obtenu par la classique relation tensorielle :

$$[\epsilon^S] = [\epsilon^T] - [d] [s^E]^{-1} [d]^t \quad (IV-4)$$

Les valeurs des constantes ajustées sont reproduites dans le tableau IV-3.

	Morgan Matroc	Après ajustage
ρ (kg/m ³)	7750	7072
s_{11}^E (10 ⁻¹² m ² /N)	16,4	19,4
s_{12}^E (10 ⁻¹² m ² /N)	-5,74	-6,79
s_{13}^E (10 ⁻¹² m ² /N)	-7,22	-8,54
s_{22}^E (10 ⁻¹² m ² /N)	16,4	19,4
s_{33}^E (10 ⁻¹² m ² /N)	18,8	22,2
s_{44}^E (10 ⁻¹² m ² /N)	47,5	56,6
d_{15} (10 ⁻¹² m/V)	584	536
d_{31} (10 ⁻¹² m/V)	-171	157
d_{33} (10 ⁻¹² m/V)	374	343
$\epsilon_{11}^S/\epsilon_0$	916	1301
$\epsilon_{33}^S/\epsilon_0$	830	1225

Tableau IV-3 : Caractéristiques de la céramique piézoélectrique PZT5A



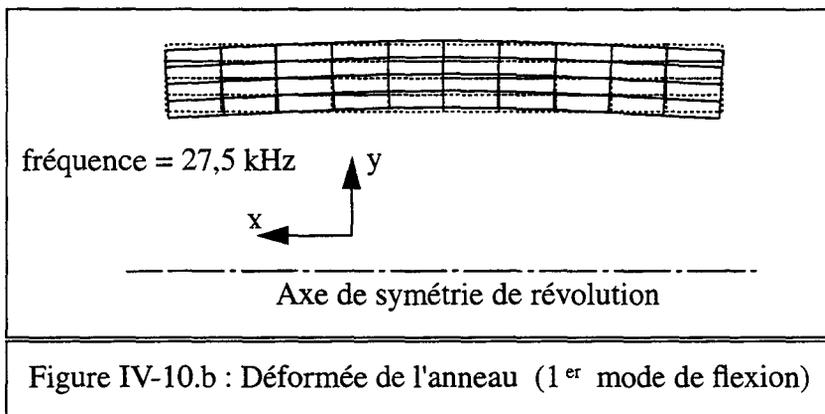
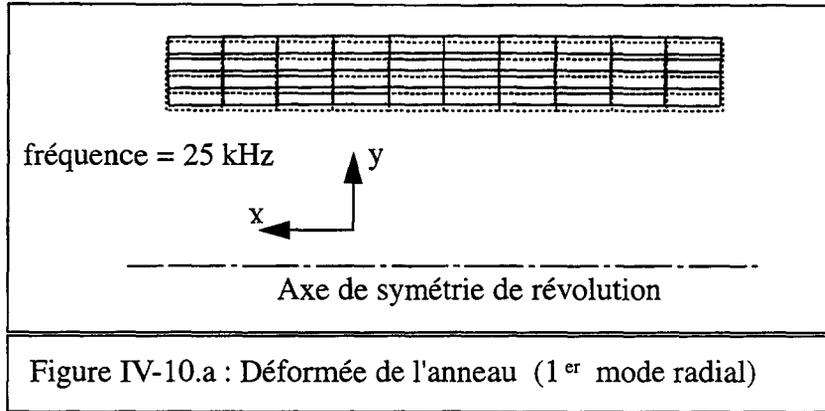
La figure IV-9 compare les modules des impédances électriques calculés par éléments finis avec les propriétés ajustées et mesurés. L'accord est satisfaisant. Les constantes ajustées du matériau seront utilisées par la suite.

Deux résonances sont observées sur la courbe d'impédance électrique. Le premier mode radial est couplé à 7,76% et se situe à 25 kHz (figure IV-10.a). Le premier mode de flexion est situé à 27,75 kHz (figure IV-10.b) et est couplé à 4,12%. Rappelons que le coefficient de couplage k_c est donné par l'équation (IV-5) [1]:

$$k_c^2 = \frac{U_{\text{meca}}}{U_{\text{elec}}} \quad (\text{IV-5})$$

Dans cette équation U_{meca} , U_{elec} désignent respectivement les énergies mécanique à la sortie et électrique à l'entrée du transducteur. Le coefficient de couplage caractérise la capacité du transducteur à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique. Il peut également s'obtenir à l'aide de la relation :

$$k_c = \sqrt{\frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2}} \quad (\text{IV-6})$$



—— Structure déformée
- - - - Structure au repos

Le rayonnement de l'anneau de céramique immergé dans une huile silicone 47V10 est analysé par éléments finis. Aucune mesure n'a été effectuée dans cette configuration. La figure IV-11 présente le maillage utilisé pour modéliser le problème du rayonnement dans un milieu fluide infini. Ce maillage est constitué de 20 éléments piézoélectriques, 22 éléments interfaces solide-fluide, 276 éléments fluides et de 18 éléments fluides rayonnants. La modélisation tient compte de la symétrie de révolution et du plan de symétrie. La frontière extérieure est située à 250 mm du centre acoustique. Les figures IV-12.a (resp. IV-12.b) montre le module (resp. la phase) de l'impédance électrique du transducteur rayonnant dans l'huile entre 2 et 45 kHz. Le transducteur étant un anneau libre immergé, le cylindre intérieur se remplit d'huile et se comporte comme une cavité fluide. La figures IV-13.a montre la déformée de la structure associée au mode de cavité. La figure IV-13.b montre la déformée associée au premier mode radial. Enfin, la figure IV-13.c présente la déformée du premier mode de flexion.

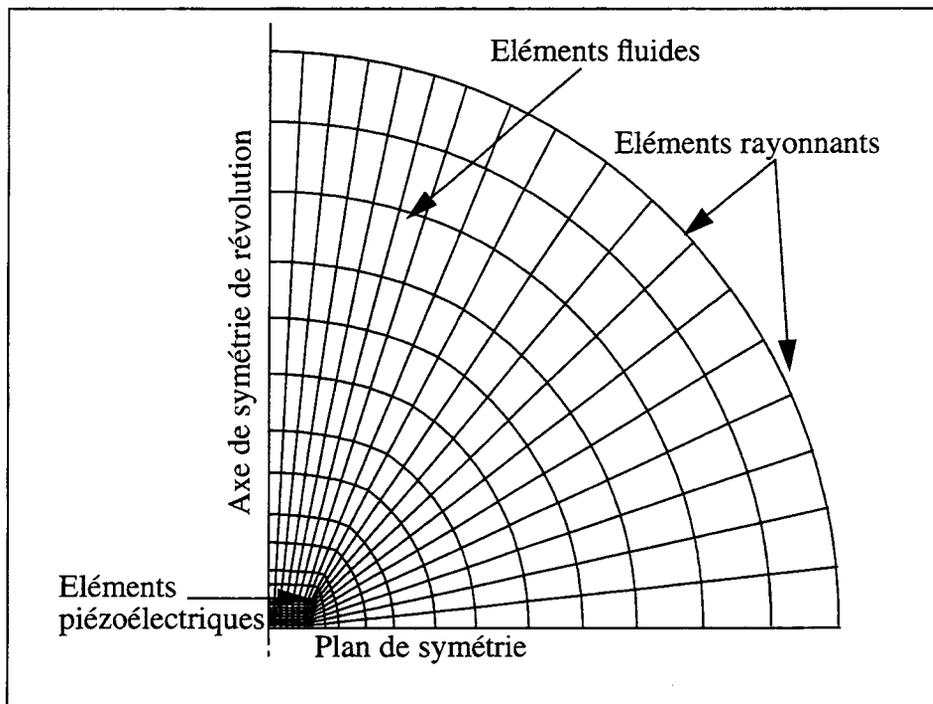


Figure IV-11 : Maillage de l'anneau immergé dans l'huile

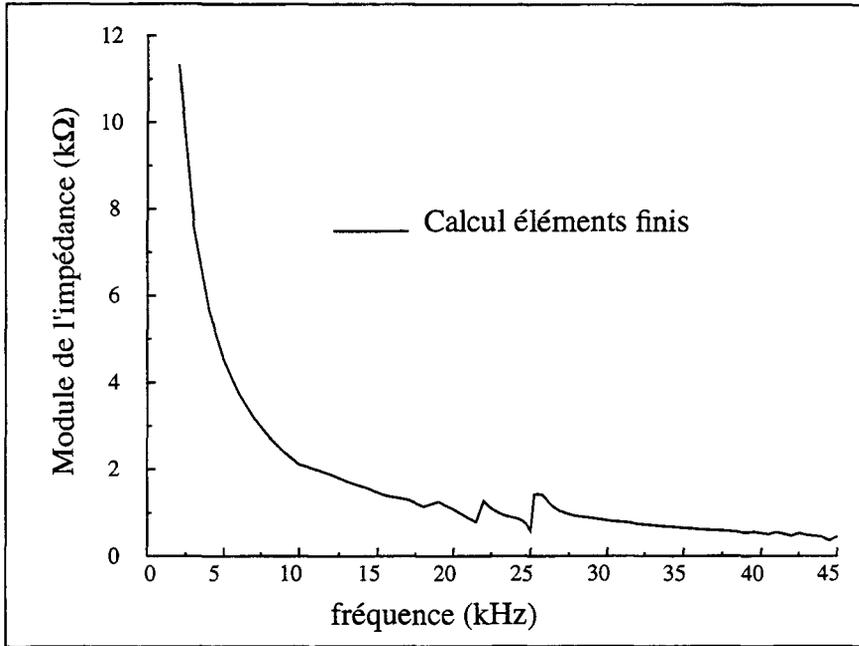


Figure IV-12.a : Impédance électrique du transaduteur rayonnant dans l'huile

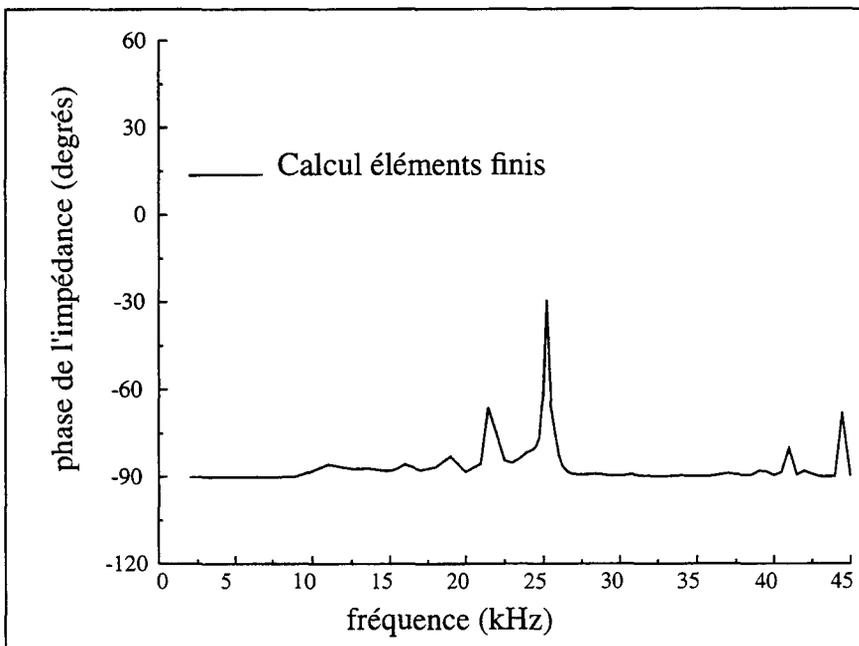


Figure IV-12.b : Impédance électrique du transducteur rayonnant dans l'huile

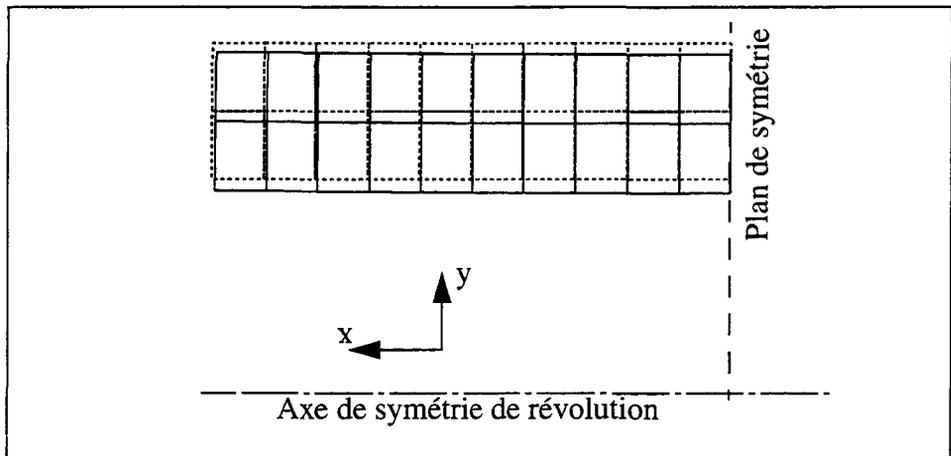


Figure IV-13.a : Déformée de l'anneau à 11,0 kHz (mode de cavité)

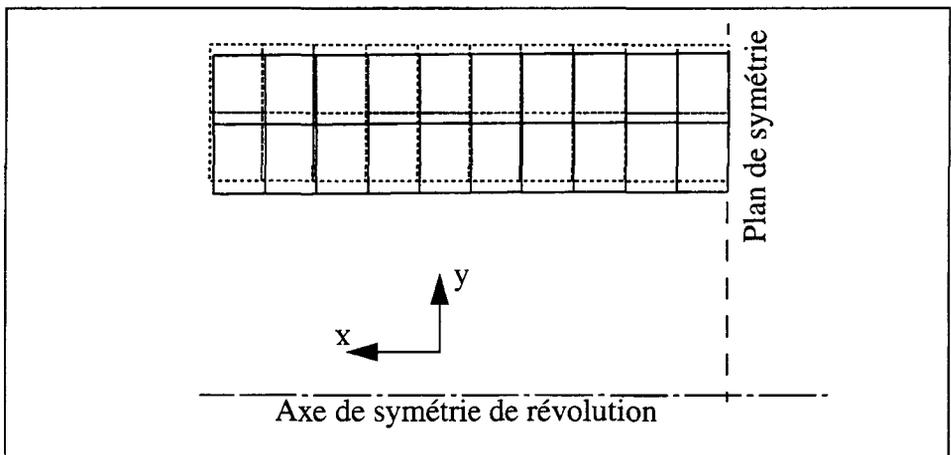


Figure IV-13.b : Déformée de l'anneau à 21,5 kHz (1^{er} mode radial)

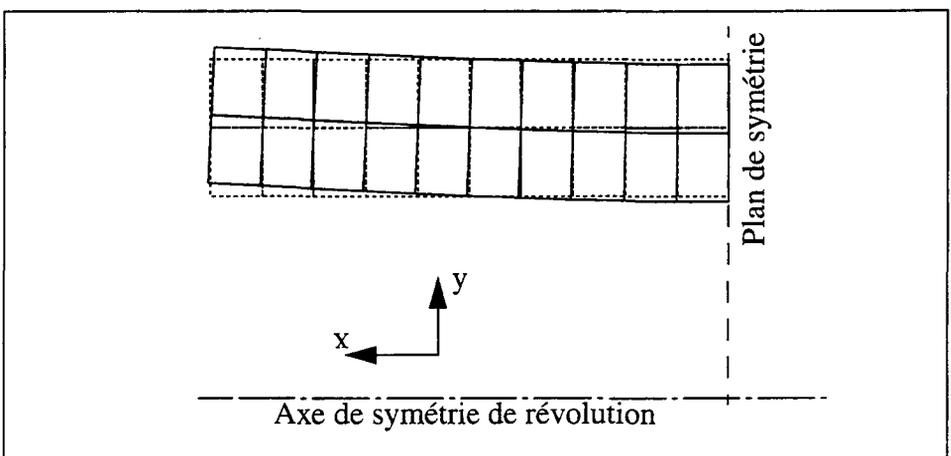


Figure IV-13.c : Déformée de l'anneau à 25,25 kHz (1^{er} mode de flexion)

— Structure déformée
 - - - - Structure au repos

IV-4 Rayonnement du transducteur dans le tube

L'objet de cette section est de modéliser par le couplage éléments finis-décomposition en k le rayonnement du transducteur piézoélectrique (section IV-3) dans le tube de PVC rempli d'huile 47V10, entouré d'eau et de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux. La figure IV-14 présente le problème modélisé. La figure IV-15 montre le maillage utilisé pour modéliser le rayonnement du transducteur dans le tube. Ce maillage est constitué 4 éléments finis piézoélectriques, 6 éléments d'interface fluide-solide, 148 éléments finis fluides, 44 éléments d'impédances mutuelles fluides et 6 éléments rayonnants fluides, soient 541 noeuds et 208 éléments.

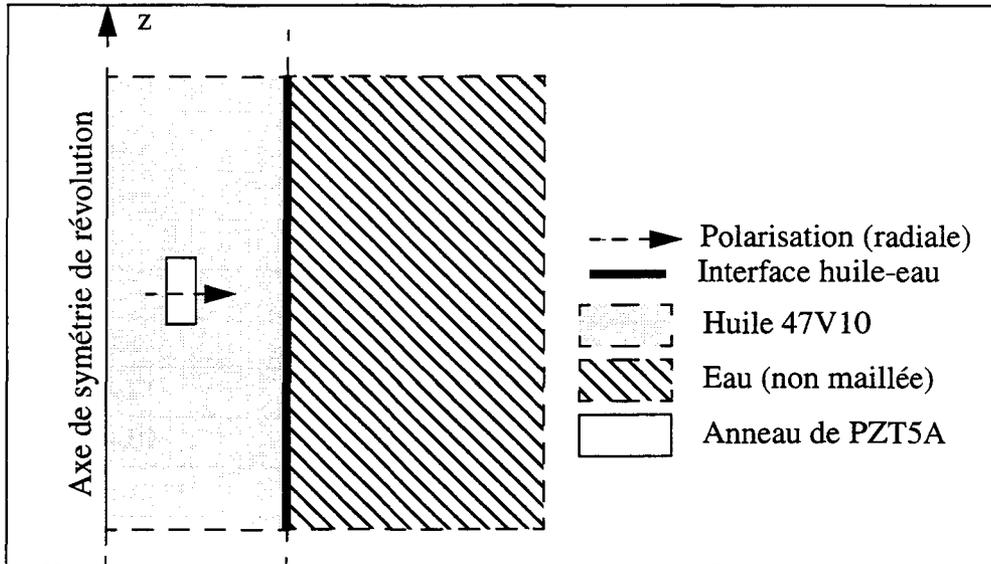


Figure IV-14 : Géométrie du problème modélisé

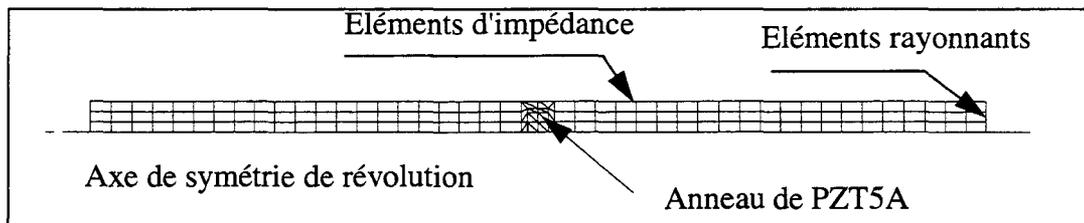


Figure IV-15 : Maillage de l'anneau rayonnant dans le tube

La puissance électrique active P_e à l'entrée du transducteur s'écrit :

$$P_e = \frac{1}{2} \frac{\phi_0^2}{R_p} \quad (\text{IV-7})$$

ϕ_0 est la tension imposée sur l'électrode chaude. R_p et C_p désignent respectivement la résistance et la capacité parallèle du transducteur, elles sont liées à l'admittance électrique Y_{elec} par l'équation (IV-8).

$$Y_{elec} = \frac{1}{R_p} + j\omega C_p \quad (\text{IV-8})$$

Cette puissance est dissipée sous forme de puissance transportée par l'onde de tube P_{tube} (équation IV-10), de puissance rayonnée dans l'eau P_{eau} (équation IV-9) et de puissance thermique associée aux pertes des matériaux. Si l'on admet que l'effet des pertes est négligable, on peut écrire :

$$P_e = P_{\text{eau}} + P_{\text{tube}} \quad (\text{IV-9})$$

$$P_{\text{tube}} \sim 2S \left(\frac{1}{2\rho_{\text{huile}} c_T} p^2 \right) \quad (\text{IV-10})$$

p est la pression moyenne sur le couvercle (éléments rayonnants) et S sa section qui vaut $1,96 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

	Calcul	Mesure
R_p (k Ω)	11	10,8
C_p (nF)	14,28	14,1
c_T (m/s)	1242,9	1252
p (Pa)	9403	5011
P_e (W)	0,454	0,463
P_{tube} (W)	0,15	0,0423
P_{eau} (W)	0,304	non mesurée

Tableau IV-4 : Comparaison entre paramètres calculés et mesurés

Le tableau IV-4 compare les grandeurs calculées et mesurées à 15 kHz. Le bon accord entre les impédances électriques calculée et mesurée montre que les conditions de rayonnement sont bien prises en compte. Les puissances acoustiques rayonnées dans l'eau présentent aussi un bon accord. Par contre, la différence existant entre les puissances transportées par l'onde de tube est probablement due à la présence du tube en PVC. De plus, on ne peut pas garantir que la mesure de la pression dans le tube se fait exactement sur l'axe.

Les figures IV-16.a et IV-16.b montrent respectivement les parties réelle et imaginaire de la pression calculée et de la pression mesurée dans le tube. Une normalisation est effectuée pour corriger l'erreur sur la prédiction de la pression dans le tube. On écrit :

$$\frac{p}{p'} = \frac{9403}{5011} = 1,876 \quad (\text{IV-11})$$

où p et p' sont respectivement les modules pression théorique et expérimentale du champ de pression transporté par l'onde de tube. La pression mesurée est alors multipliée par ce facteur. On peut remarquer le bon accord entre les deux courbes. Le léger déphasage peut s'expliquer la présence des deux croix sur le transducteur (figure IV-2.b), par la présence du tube, par l'enrobage de l'hydrophone et l'imprécision de positionnement (câble non tendu).

Comparaison de la pression calculée et mesurée sur l'axe du tube

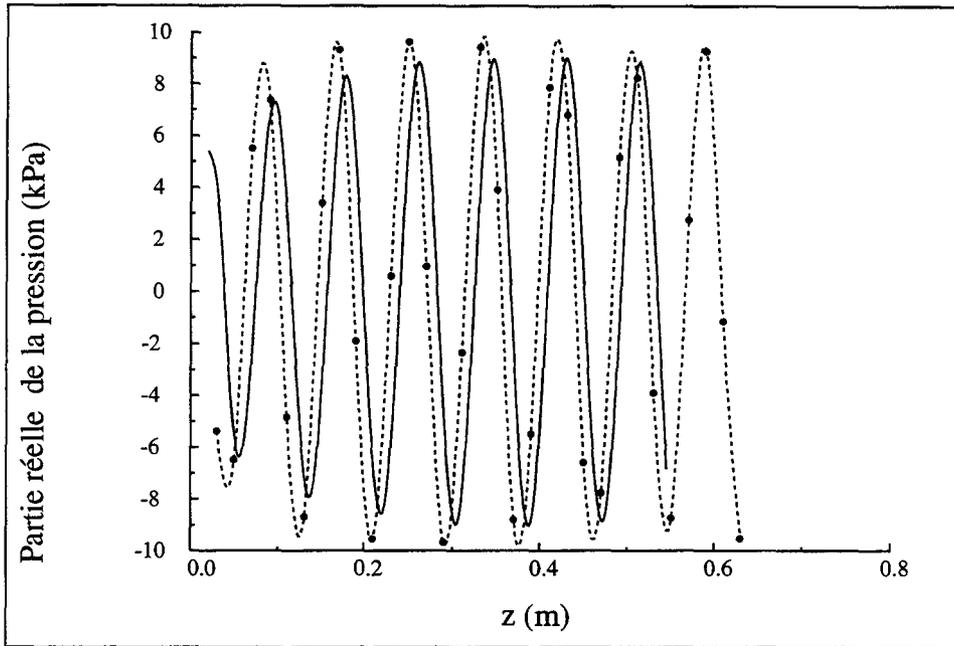


Figure IV-16.a : Pression dans le tube en PVC à 15 kHz

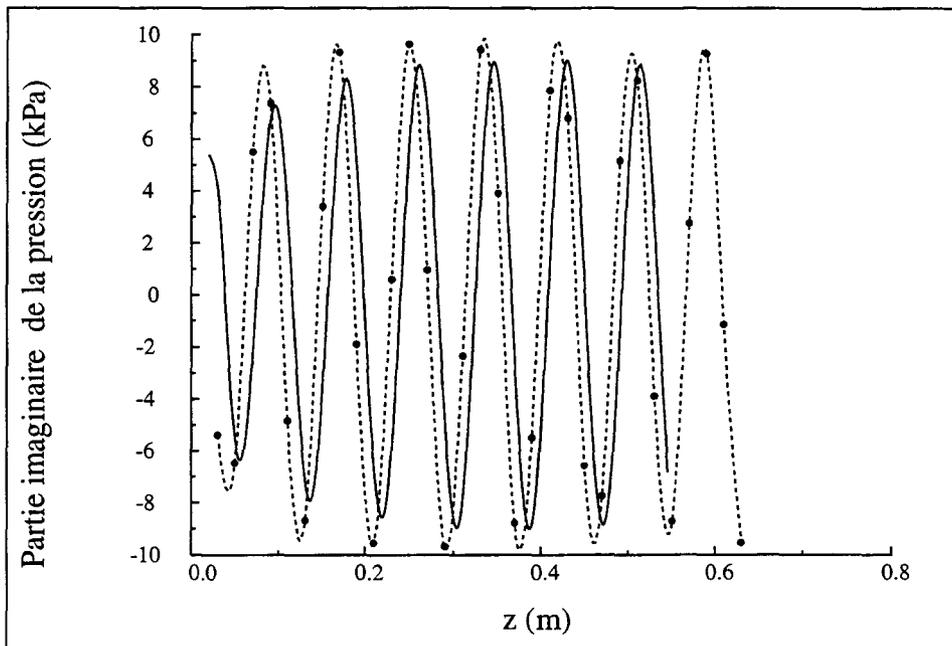


Figure IV-16.b : Pression dans le tube en PVC à 15 kHz

——— Pression calculée
 - - - - Pression mesurée (● points de mesure)

En acoustique pétrolière, un à deux pour cent de la puissance acoustique disponible sont rayonnées dans la formation autour du puits de forage. Les données théoriques du tableau IV-4 montre qu'environ les deux tiers de la puissance électrique active du transducteur sont rayonnées dans l'eau. Ce résultat s'explique par la faible rupture d'impédance entre l'huile et l'eau $(\rho)_{\text{eau}}/(\rho)_{\text{huile}} = 1,56$. Dans le cas d'un puits de forage rempli de pétrole et entouré d'une formation le rapport $(\rho)_{\text{formation}}/(\rho)_{\text{pétrole}}$ est de l'ordre de 10, ce qui représente une bien plus grande rupture d'impédance.

Les figures IV-17 à IV-26 comparent les résultats mesurés et calculés à l'extérieur du tube. Le problème traité présente une symétrie par rapport au plan $z = 0$. Seuls les résultats obtenus pour $z > 0$ sont présentés.

Les figure IV-17 à IV-19 comparent les modules des pressions mesurée et calculée à 10, 15 et 20 kHz dans l'eau à 400, 500 et 600 mm de l'axe du tube pour z allant de 0 à 500 mm. On constate une grande différence entre la mesure et le calcul à 10 kHz. L'analyse des figures IV-26.a et IV-26.b représentant le module et la phase de l'impédance du transducteur et celle de la figure IV-27 représentant la puissance électrique active permettent de repérer une résonance probablement associée au mode de cavité. Dans le calcul numérique cette fréquence est légèrement décalée en fréquence et nettement plus amortie. Ceci explique la forte différence observée sur la figure IV-17. A 15 et 20 kHz l'accord entre les mesures et la théorie est correct à 400, 500 et 600 mm de l'axe du tube.

Les figures IV-20.a à 25.b montrent les parties réelle et imaginaire de la pression mesurée et calculée à l'extérieur du tube à 15 et 20 kHz et à 400, 500 et 600 mm de l'axe du tube. L'accord entre la mesure et le calcul est excellent, sauf au voisinage immédiat de $z = 0$.

Enfin, l'écart observé à haute fréquence entre valeurs calculées et mesurées (figures IV-26 et IV-27) peut avoir plusieurs origines : la densité insuffisante du maillage utilisé (précision garantie jusqu'à 20 kHz), l'existence de résonances supplémentaires dues à la présence du tube en PVC, l'apparition d'une seconde onde de tube non prise en compte dans le modèle.

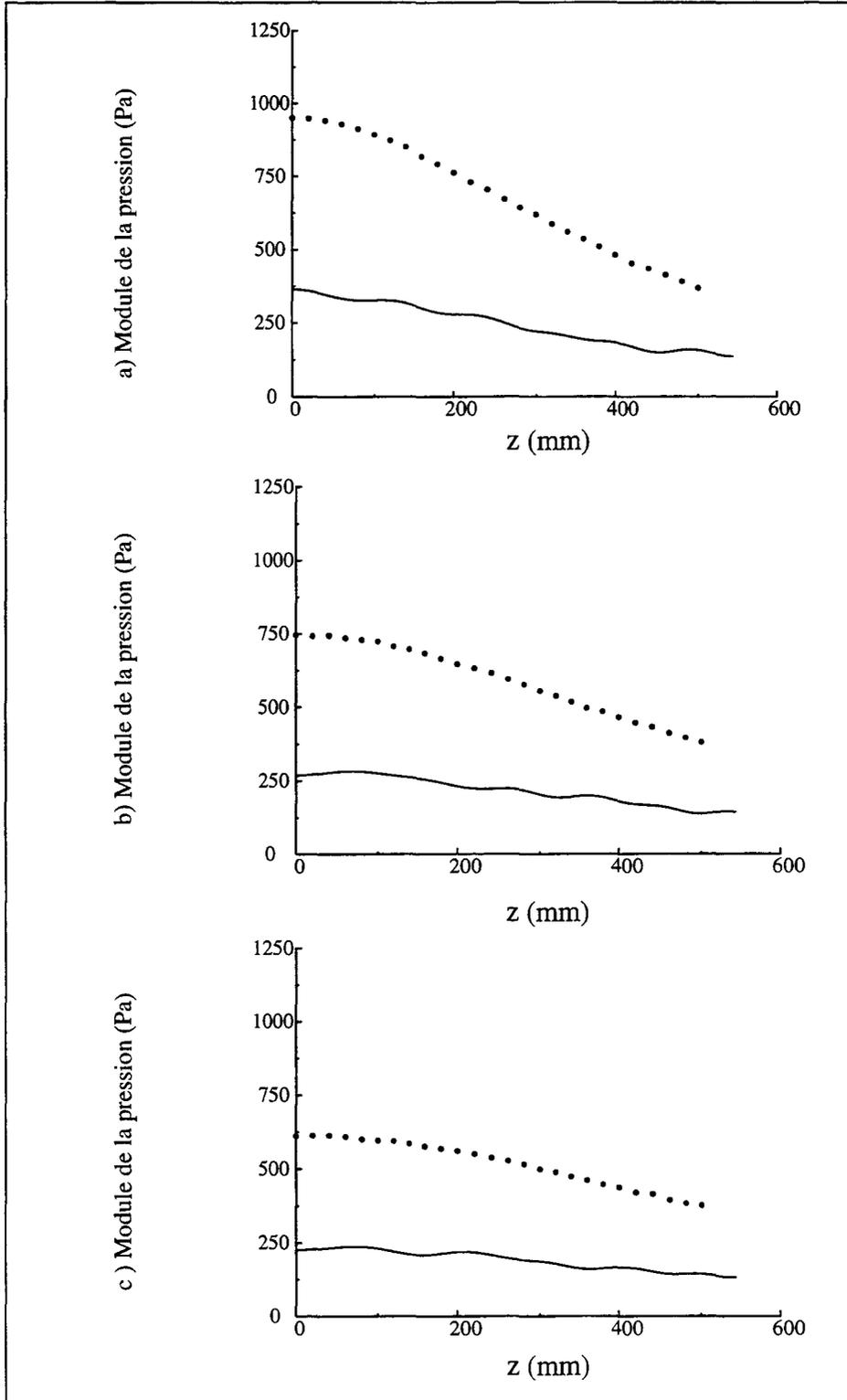


Figure III-17 : Comparaison du module de la pression (calculée et mesurée rayonnée dans l'eau à 10 kHz :

a) $r = 400$ mm, b) $r = 500$ mm , c) $r = 600$ mm.

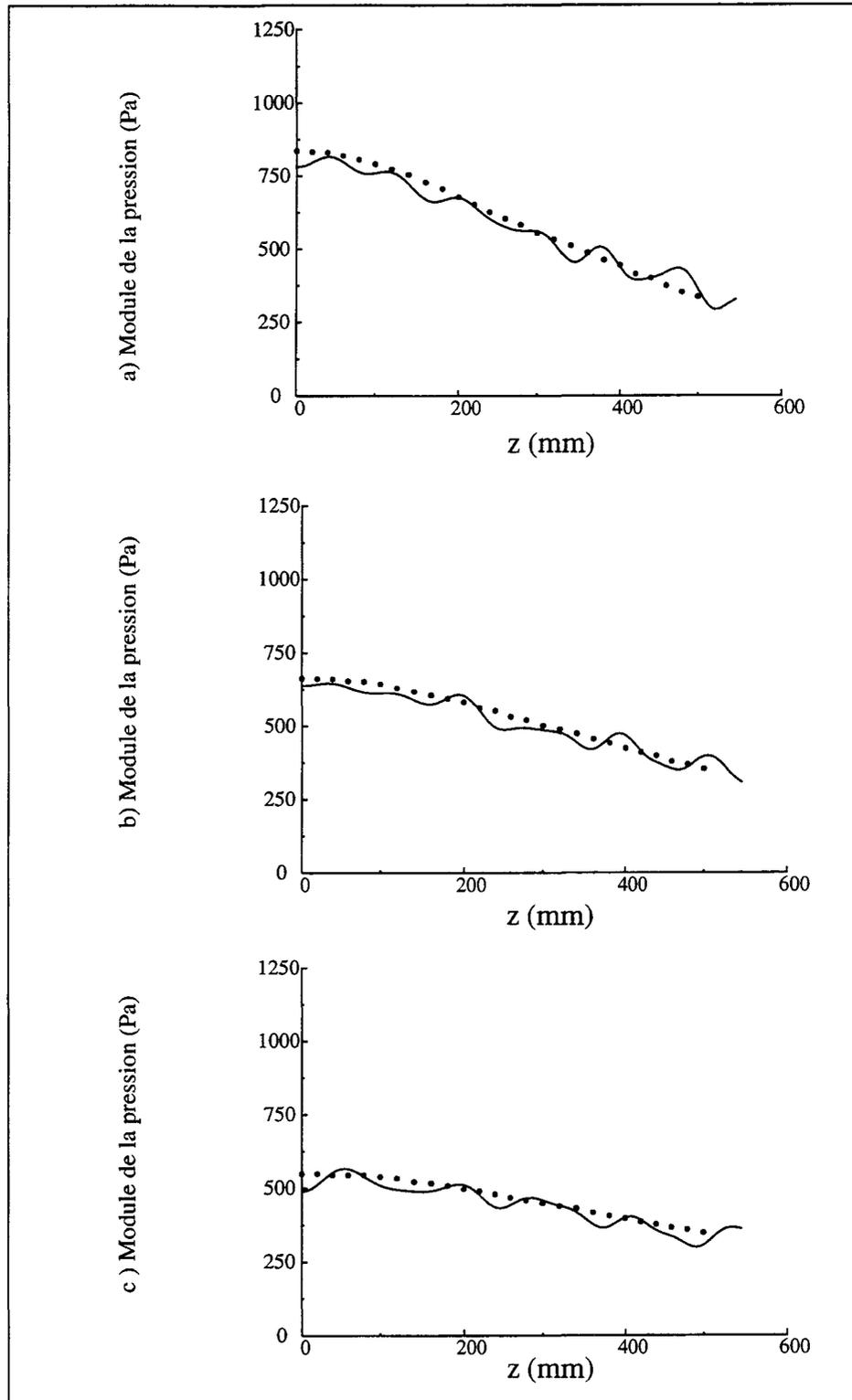


Figure III-18 : Comparaison du module de la pression (calculée et mesurée rayonnée dans l'eau à 15 kHz :

a) $r = 400$ mm, b) $r = 500$ mm , c) $r = 600$ mm.

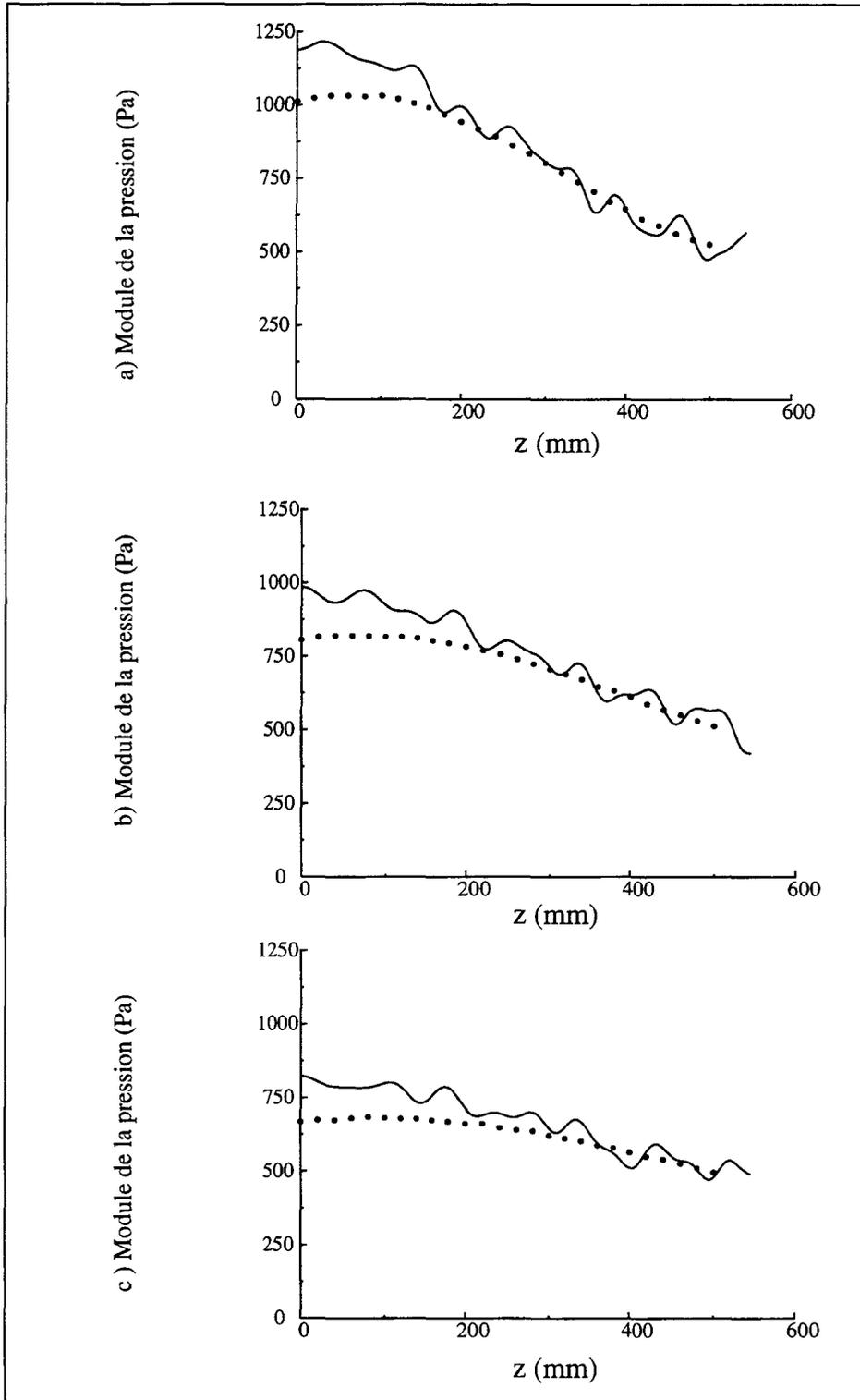


Figure III-19 : Comparaison du module de la pression (calculée et mesurée rayonnée dans l'eau à 20 kHz :

a) $r = 400$ mm, b) $r = 500$ mm , c) $r = 600$ mm.

Comparaison de la pression (calculée et mesurée) rayonnée dans l'eau à 400 mm de l'axe du tube et à 15 kHz

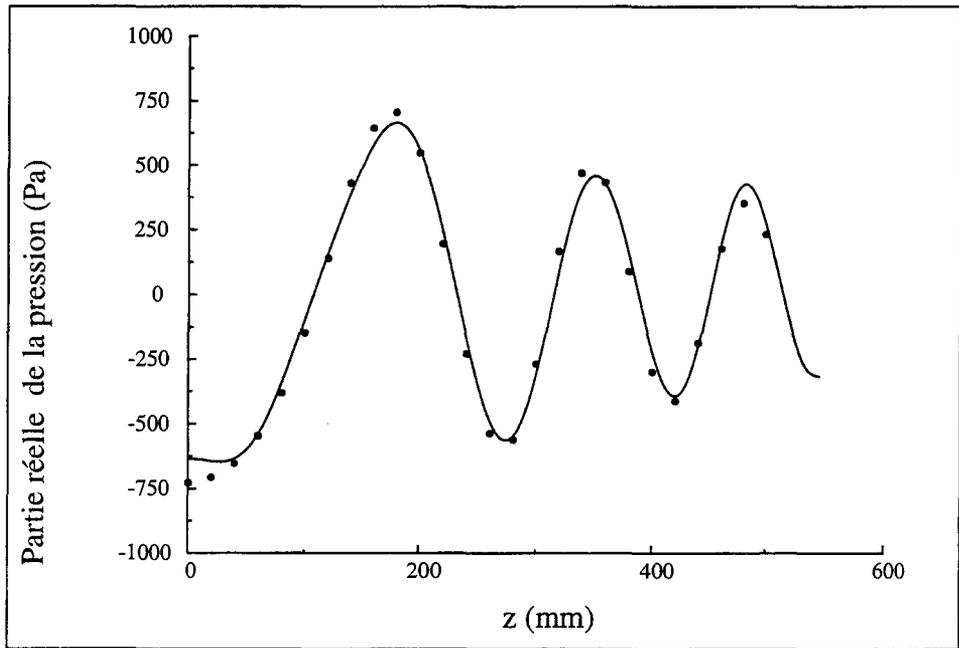


Figure IV-20.a : Pression rayonnée hors du tube à 15 kHz

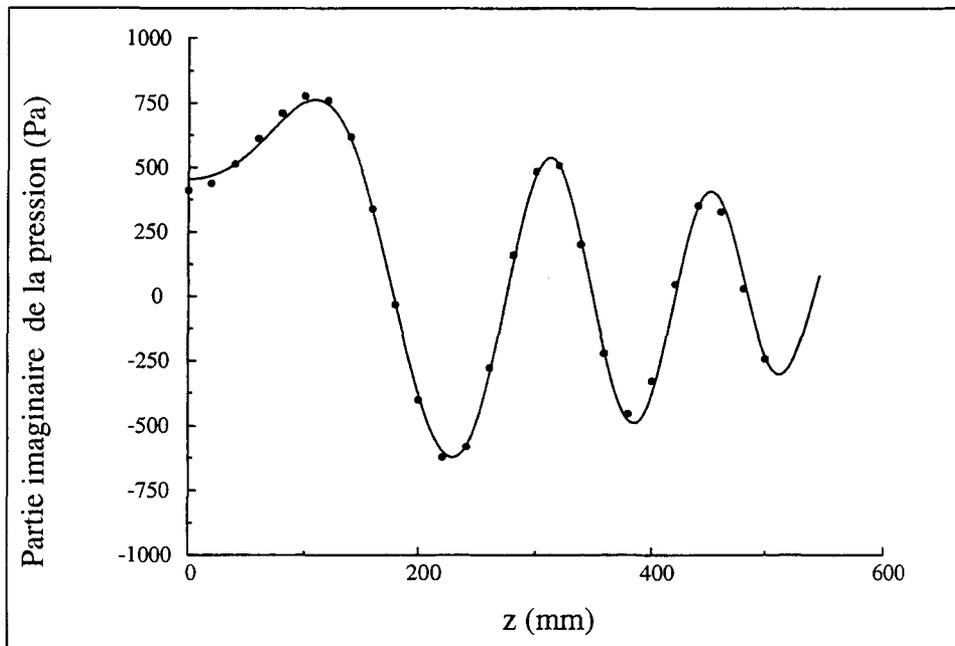


Figure IV-20.b : Pression rayonnée hors du tube à 15 kHz

— Pression calculée
 - - - - Pression mesurée (● points de mesure)

Comparaison de la pression (calculée et mesurée) rayonnée dans l'eau à 500 mm de l'axe du tube et à 15 kHz

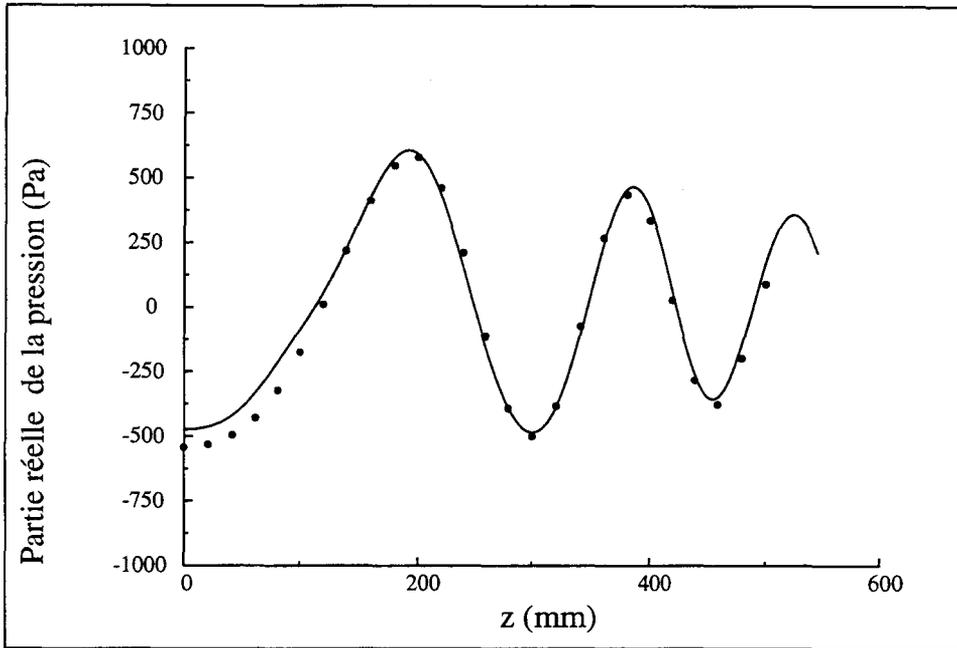


Figure IV-21.a : Pression rayonnée hors du tube à 15 kHz

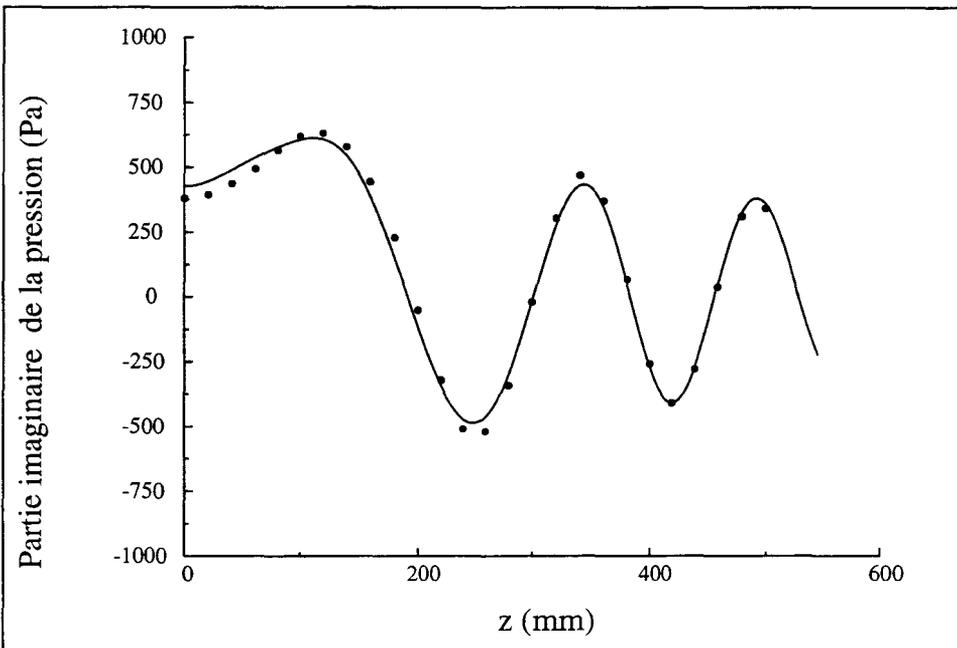


Figure IV-21.b : Pression rayonnée hors du tube à 15 kHz

——— Pression calculée
 - - - - - Pression mesurée (● points de mesure)

Comparaison de la pression (calculée et mesurée) rayonnée dans l'eau à 600 mm de l'axe du tube et à 15 kHz

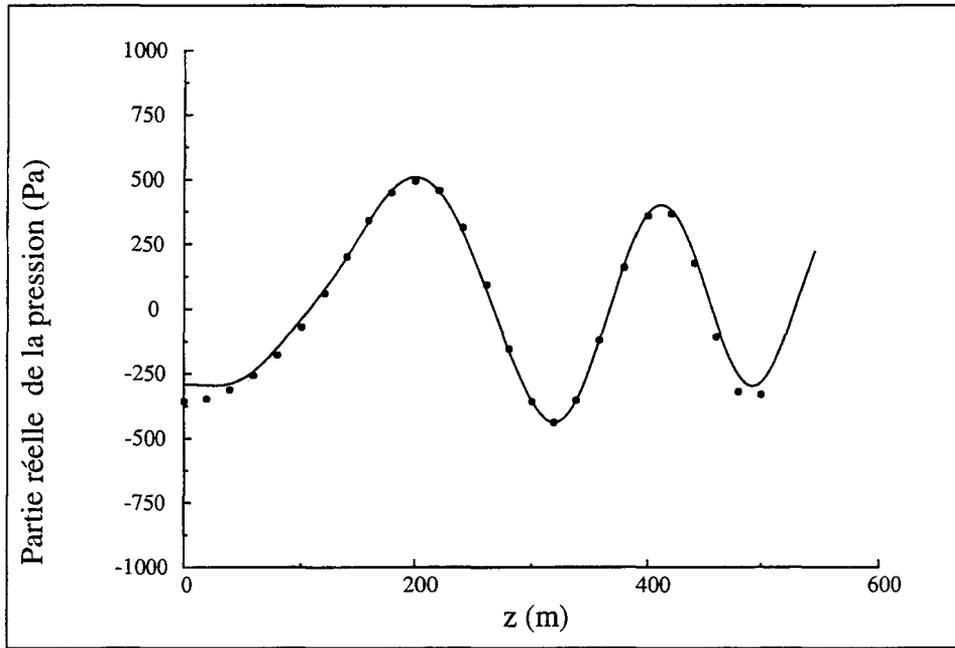


Figure IV-22.a : Pression rayonnée hors du tube à 15 kHz

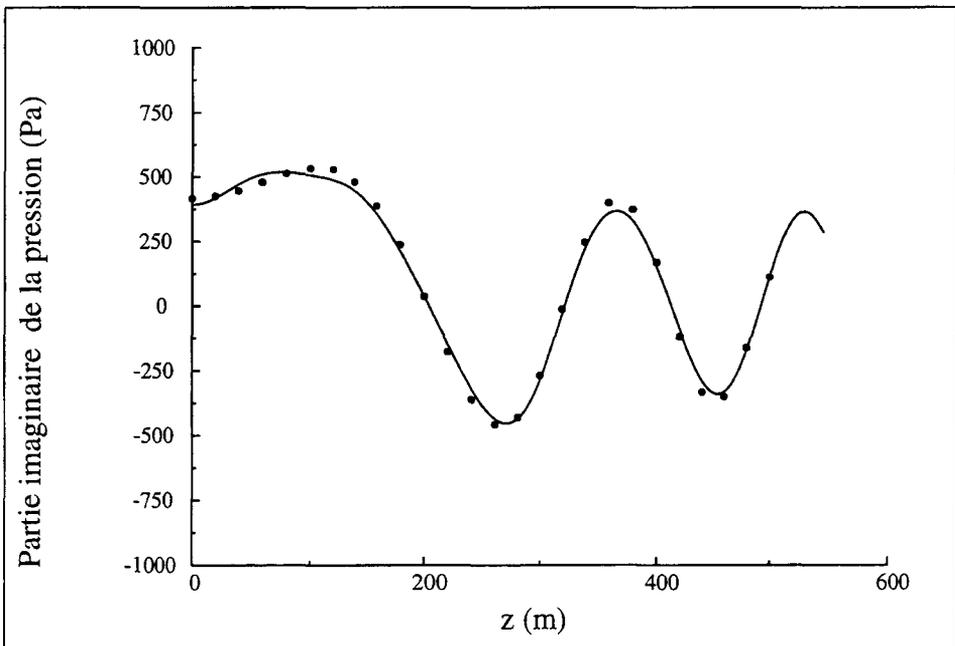


Figure IV-22.b : Pression rayonnée hors du tube à 15 kHz

——— Pression calculée
 - - - - - Pression mesurée (● points de mesure)

Comparaison de la pression (calculée et mesurée) rayonnée dans l'eau à 400 mm de l'axe du tube et à 20 kHz

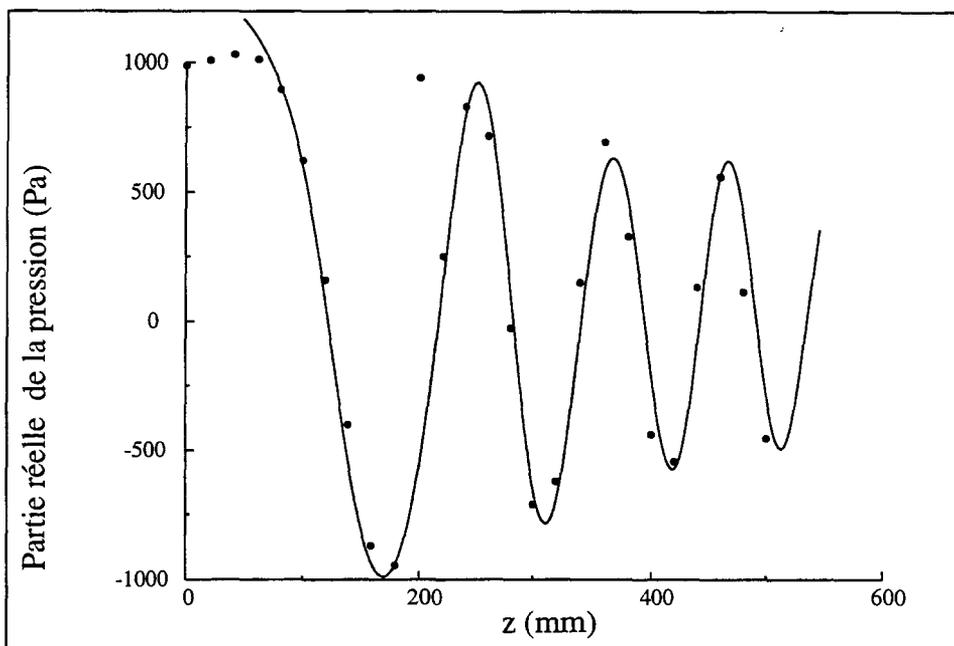


Figure IV-23.a : Pression rayonnée hors du tube à 20 kHz

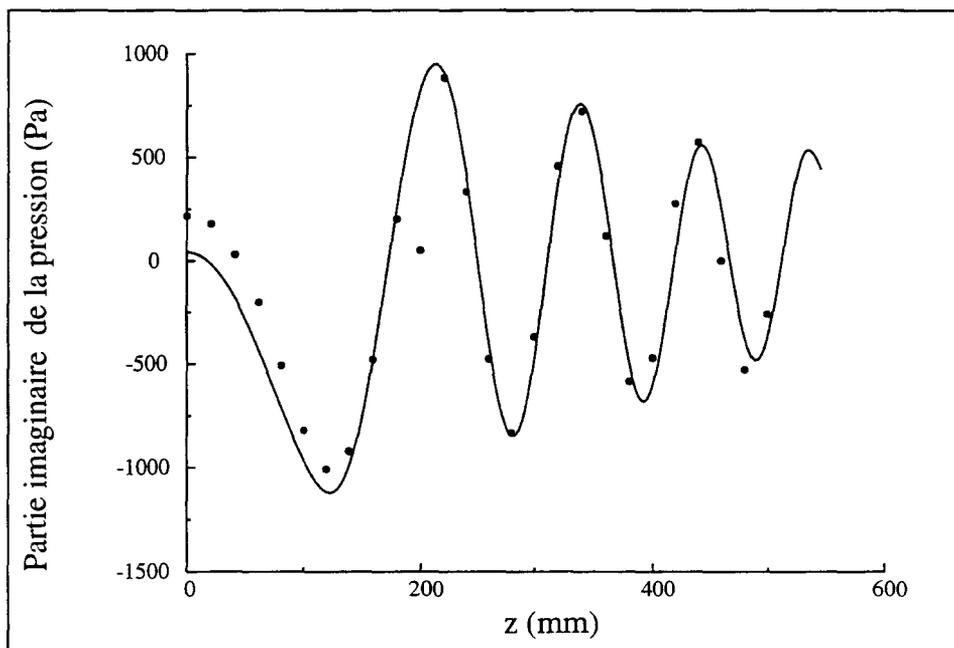


Figure IV-23.b : Pression rayonnée hors du tube à 20 kHz

——— Pression calculée
 - - - - - Pression mesurée (● points de mesure)

Comparaison de la pression (calculée et mesurée) rayonnée dans l'eau à 500 mm de l'axe du tube et à 20 kHz

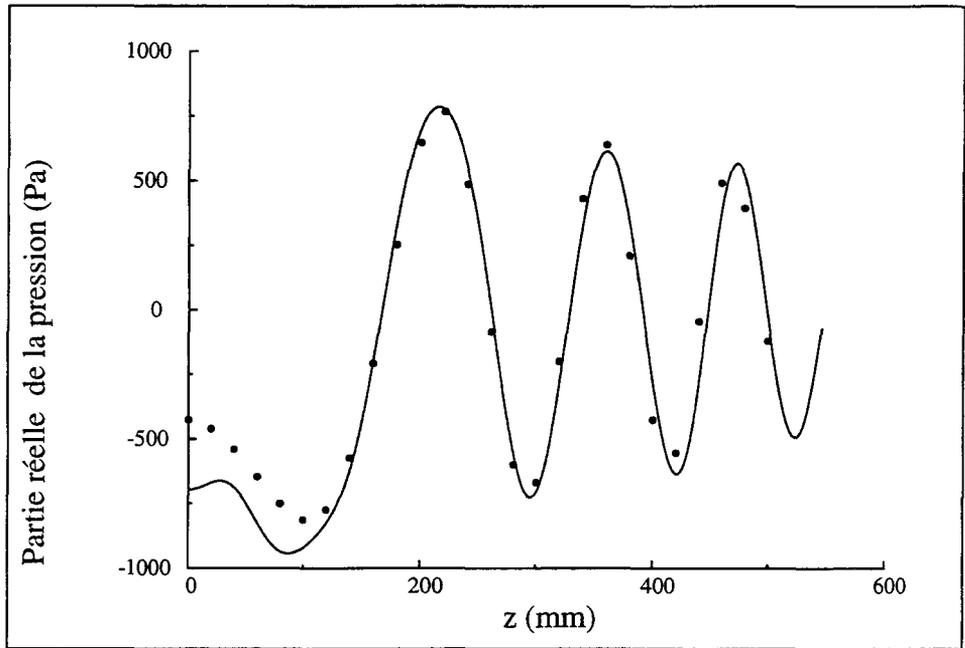


Figure IV-24.a : Pression rayonnée hors du tube à 20 kHz

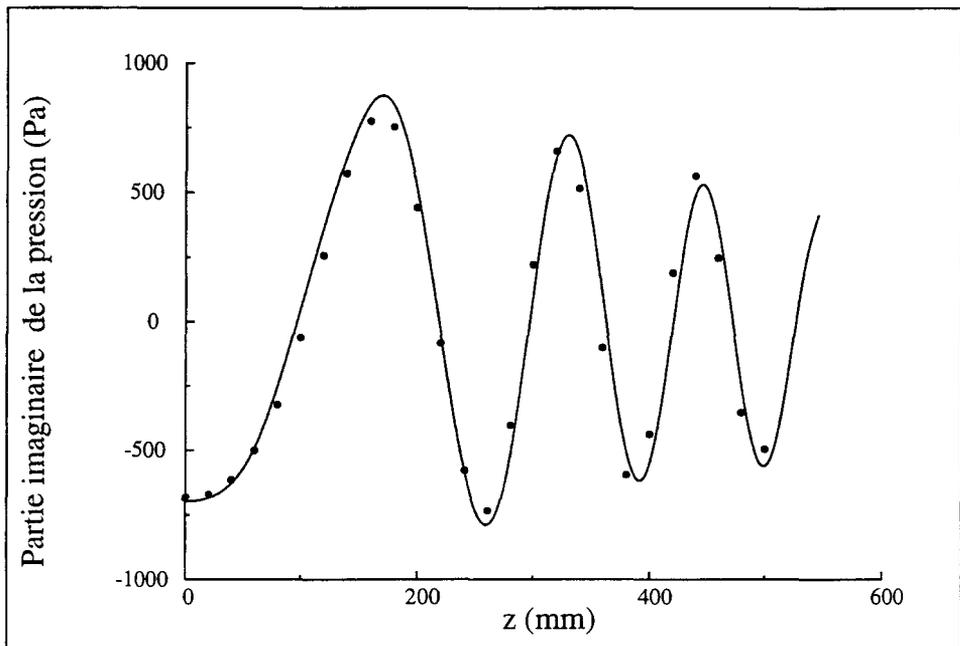


Figure IV-24.b : Pression rayonnée hors du tube à 20 kHz

— Pression calculée
 - - - - Pression mesurée (● points de mesure)

Comparaison de la pression (calculée et mesurée) rayonnée dans l'eau à 600 mm de l'axe du tube et à 20 kHz

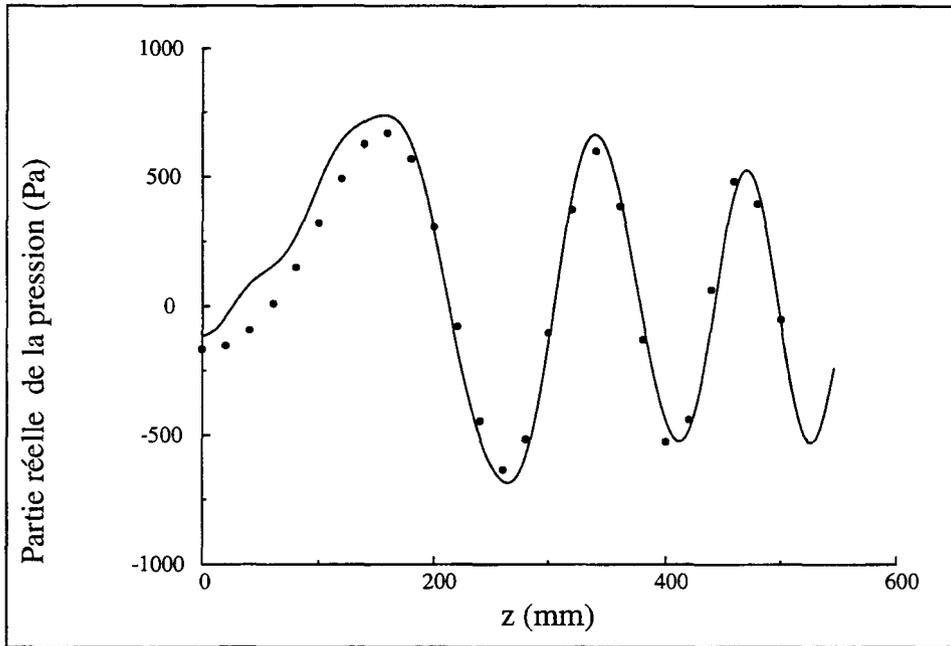


Figure IV-25.a : Pression rayonnée hors du tube à 20 kHz

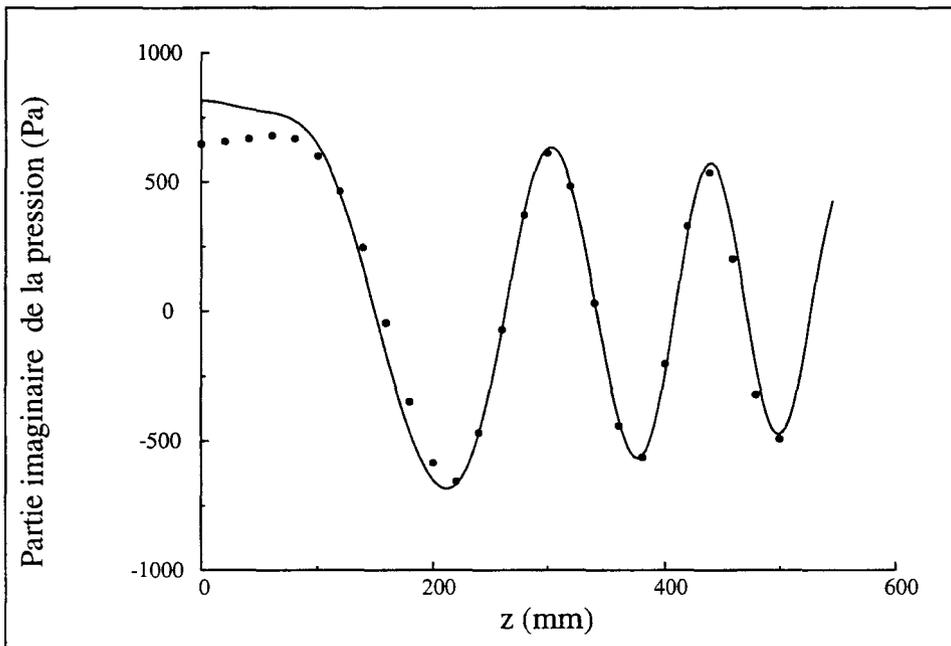


Figure IV-25.b : Pression rayonnée hors du tube à 20 kHz

— Pression calculée
 - - - Pression mesurée (● points de mesure)

Impédance électrique du transducteur rayonnant dans le tube

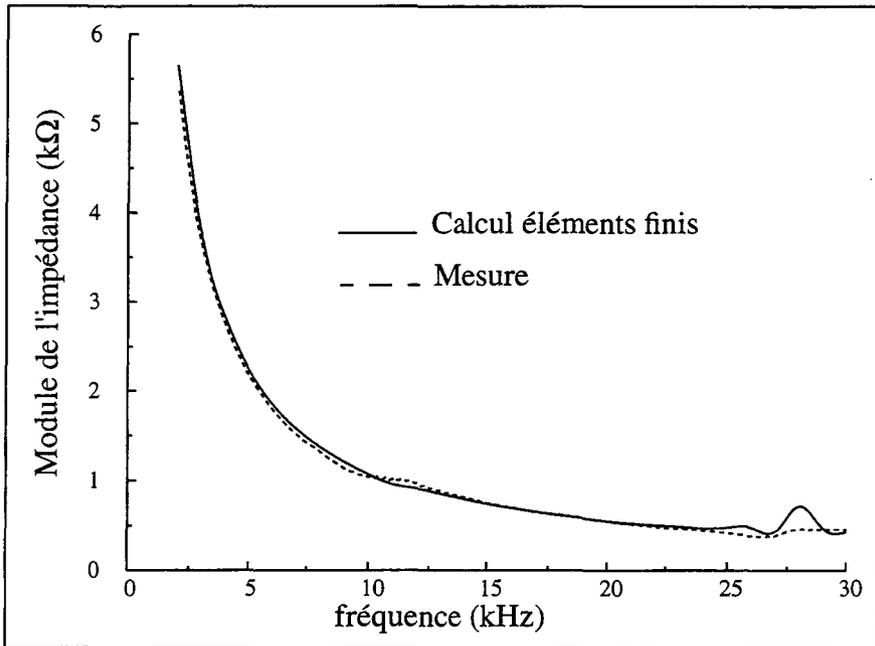


Figure IV-26.a : Impédance électrique du transducteur rayonnant dans le tube rempli d'huile

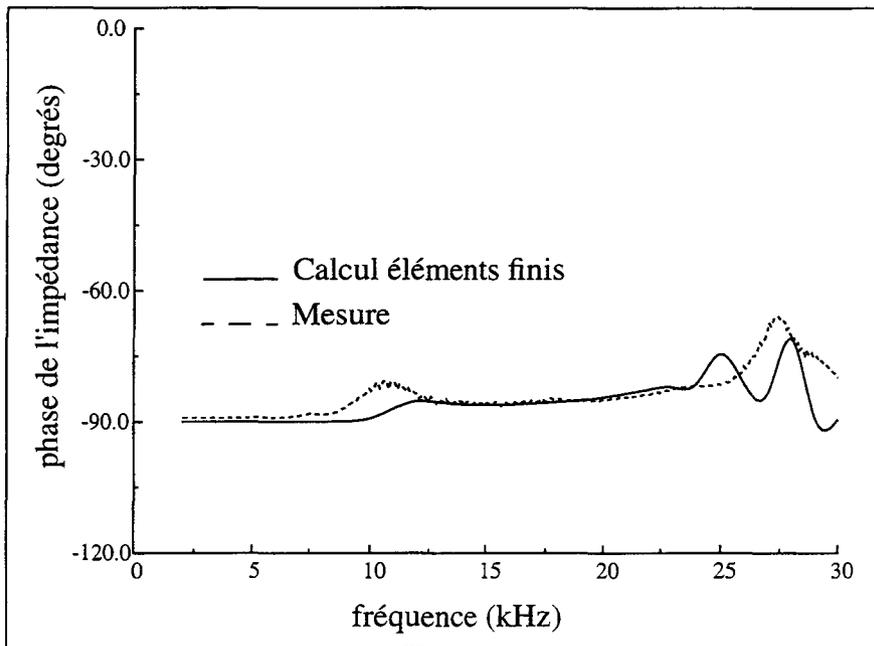
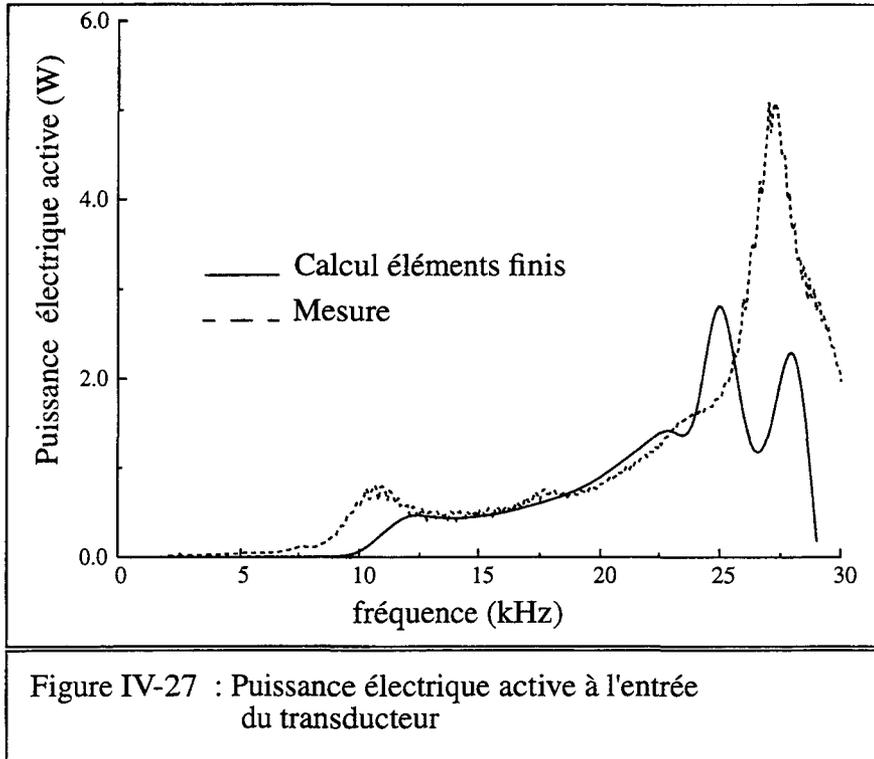


Figure IV-26.b : Impédance électrique du transducteur rayonnant dans le tube rempli d'huile



IV-5 Conclusion

L'étude expérimentale et numérique d'un transducteur piézoélectrique rayonnant dans un tube rempli d'huile et entouré d'eau, présentée dans cette partie, constitue une application directe des modèles développés précédemment. Les mesures effectuées sur l'impédance du transducteur, la pression dans le tube et à l'extérieur du tube sont en bon accord avec les prédictions numériques. Les modèles développés peuvent donc à présent être utilisés pour concevoir et optimiser des sources piézoélectriques pour l'acoustique pétrolière.

Conclusion

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse concerne la modélisation par la méthode des éléments finis du rayonnement de transducteurs électroacoustiques en régime harmonique dans des puits de forage. Ce problème, dont l'intérêt est évident en sismique de puits, ne peut être résolu par les outils existants dans le code ATILA. La principale difficulté associée à ce problème est la prise en compte du caractère infini du puits et de la formation élastique dans le modèle numérique.

Nous avons, dans le premier chapitre de ce mémoire, évalué deux éléments classiques d'absorption d'ondes élastiques : l'élément infini et l'élément d'impédance mécanique. L'élément infini présente des handicaps majeurs (difficultés d'intégration numérique, résultats médiocres). L'élément d'impédance mécanique donne d'excellents résultats lorsque l'onde est purement cylindrique ou sphérique. Par contre, en présence d'un puits, il ne peut absorber la combinaison d'une onde cylindrique et d'une onde sphérique. Ces résultats nous ont conduit à faire le choix d'une méthode intégrale (chapitre II) non restrictive sur la nature des ondes qui se propagent dans la formation.

Dans le second chapitre, nous avons développé une méthode numérique basée sur le couplage éléments finis-décomposition en k , conduisant à la construction d'une matrice d'impédances mécaniques mutuelles et à son couplage aux éléments finis. Cette matrice relie les déplacements aux forces sur la paroi du puits vide et équivaut à une solution intégrale. En post-traitement, nous calculons le rayonnement dans la formation. En présence d'un puits rempli de fluide, nous avons déterminé grâce un algorithme de Newton-Raphson, la vitesse du premier mode de tube et avons construit un élément rayonnant fluide d'absorption de cette onde pour une formation rapide ou

lente. Pour terminer, nous proposons une extension de la méthode au rayonnement d'une source acoustique dans un puits entouré d'un milieu extérieur fluide.

La validation du modèle précédent nous a conduit à développer des modèles analytiques pour un puits vide ou rempli de fluide chargé par une distribution de force sur sa paroi. Nous utilisons aussi un modèle approché publié par Lee [16] décrivant le rayonnement d'une source ponctuelle dans un puits entouré d'une formation rapide. Pour l'ensemble des tests réalisés, un excellent accord est obtenu entre résultats numériques et analytiques. Ceci valide la prise en compte des conditions aux limites sur la paroi du puits et sur les couvercles. Finalement dans une dernière partie, l'étude du rayonnement d'un transducteur piézoélectrique annulaire dans un tube rempli d'huile et entouré d'eau est menée sur les plans expérimental et numérique.

A l'issue de ce travail, le rayonnement d'une source acoustique dans un puits de forage peut être modélisé par éléments finis. Cependant, le modèle présenté dans ces travaux peut encore être enrichi suivant plusieurs aspects. Il peut évoluer vers le rayonnement d'une source acoustique dans un puits tubé en prenant directement en compte son tubage dans la matrice d'impédance mutuelle. On peut également envisager la construction d'un élément rayonnant fluide absorbant plusieurs ondes de tube. Une première approche de ce développement est proposé au chapitre II. Une reconstitution du signal en régime transitoire grâce à une transformée de Fourier discrète inverse est immédiatement possible. Elle permettrait le tracé de sismogrammes habituellement utilisés pour l'interprétation et l'analyse des phénomènes en sismique. Enfin le modèle développé peut être utilisé par les concepteurs de sources pour la géophysique ou l'acoustique pétrolière de manière à optimiser la distribution d'énergie rayonnée et en particulier minimiser l'énergie captée par l'onde de tube.

Références bibliographiques

[1] **O. B. WILSON,**

"Introduction to theory and design of sonar transducers", Peninsula Publishing Co, (1989), reprinted from first edition (1985).

[2] **J.-N. DECARPIGNY et P. TIERCE,**

"Applications des sons et ultrasons aux processus industriels de fabrication", colloque sur les matériaux piézoélectriques, les ultrasons et leurs applications, CAST-INSA, Lyon, (1986).

[3] **B. NONGAILLARD,**

"L'instrumentation ultrasonore appliquée au contrôle non destructif", Journée d'étude acoustique région Nord/Pas de Calais, Villeneuve d'Ascq (1987).

[4] **M. NAILLON, R. H. COURSAnt et F. BESNIER,**

"Analyse de structures piézoélectriques par une méthode d'éléments finis", Acta Electronica vol. 25, 341-362, (1983).

[5] **B. FROELICH,**

"Transducer needs for petroleum acoustics", dans "Power transducers for sonics and ultrasonics", édité par B. F. HAMONIC, O. B. WILSON et J.-N. DECARPIGNY, Springer-Verlag, 22-34, (1990).

[6] **L. NICOLETIS et M. BECQUEY,**

"Validation in situ de la sismique de puits haute résolution pour décrire les réservoirs pétroliers", Institut français du pétrole, Rapport 42 018, (1995).

[7] **S. BOYER et J.-L. MARI,**

"Sismique et diagraphies", Technip, (1994).

[8] **H. F. OLSON,**

"American Institute of Physics Handbook", McGraw-Hill, (1972).

[9]

"Finite-element code for piezoelectric and magnetostrictive transducers modeling", ATILA User's manuel, version 5.03, (1993).

[10]

"Code équations intégrales pour la modélisation du rayonnement ou la diffraction acoustique par une structure tridimensionnelle immergée", EQI, Notice d'utilisation, version 5.01, (1996).

[11] O. C. ZIENKIEWICZ,

"La méthode des éléments finis", McGraw-Hill, (1979).

[12] G. DHATT et G. TOUZOT,

"Introduction aux éléments finis", Collection Université de Compiègne, Maloine, (1982).

[13] J.-N. DECARPIGNY,

"Application de la méthode des éléments finis à l'analyse de transducteurs piézoélectriques", Thèse de Doctorat d'Etat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1984).

[14] H. A. SCHENCK,

"Improved integral formulation for acoustics radiation problems", J. Acoust. Soc. Am., vol. 44, 271-276, (1967).

[15] A. LAVIE,

"Modélisation du rayonnement ou de la diffraction acoustique par une méthode mixte équations intégrales-champ nul", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1989).

[16] M. W. LEE et A. H. BALCH,

"Theoretical seismic wave radiation from a fluid-filled borehole", Geophysics, vol. 47, 1308-1314, (1982).

[17] M. W. LEE, A. H. BALCH et W. R. PETERS,

"Radiation from a downhole air gun source", Geophysics, vol. 49, 27-36, (1984).

[18] T. E. OWEN, W. T. BALOGH et W. R. PETERS,

"An arc discharge pulse source for borehole seismic applications", presented at the 58th annual international meeting of the Society of Exploration Geophysicists, Anaheim, California, (1988).

[19] H. C. HARDEE, G. J. ELBRING et B. N. PAULSSON,

"Downhole seismic source", Geophysics, vol. 52, 729-739, (1987).

[20] W. T. BALOGH, T. E. OWEN, et J. M. HARRIS,

"A new piezoelectric transducer for hole-to-hole seismic applications", Presented at 58th annual international Meeting of the society of exploration geophysicists, Anaheim, California, (1988).

[21] **R. BOSSUT et J.-N. DECARPIGNY,**

"Finite element modeling of radiating structure using dipolar damping", J. Acoust. Soc. Am., vol. 86, 1234-1244, (1989).

[22] **R. BOSSUT,**

"Modélisation de transducteurs piézoélectriques annulaires immergés par la méthode des éléments finis" Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, (1985).

[23] **F. V. ATKINSON,**

"On Sommerfeld's radiation condition", Phil. Mag., vol. 40, 645-651, (1949).

[24] **L. H. WILCOX,**

"A generalization of the theorem of Rellich and Atkinson", Proc. Am. Math. Soc., vol. 7, 271, (1956).

[25] **P. GERMAIN et P. MULLER,**

"Mécanique des milieux continus", 2^{ème} édition, Masson, (1986).

[26] **B. DUBUS,**

"Analyse des limitations de puissance des transducteurs piézoélectriques", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1989).

[27] **G. N. WATSON,**

"A treatise on the theory of Bessel equations", 2^{ème} édition, Cambridge University Press, (1958).

[28] **M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN,**

"Handbook of mathematical functions", Dover publications, New York (1972).

[29] **M. C. JUNGER et D. FEIT,**

"Sound structures and their interaction", 2^{ème} édition, MIT Press (1986).

[30] **F. MEDINA et R. L. TAYLOR,**

"Finite element technique for problems of unbounded domains", Int. J. Num. Meth., vol. 19, 699-709, (1983).

[31] **R. L. UNGLESS,**

"An infinite finite element", M. A. Sc thesis, University of British Columbia, (1973).

[32] **P. BETTESS,**

"Infinite elements", Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 11, 53-64, (1977).

[33] **P. BETTESS et O. C. ZIENKIEWICZ,**

"Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements", Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 11, 1271-1290, (1977).

- [34] **P. BETTESS**,
"More on infinite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 15, 1613-1626, (1980).
- [35] **Y. K. CHOW et I. M. SMITH**,
"Static and periodic infinite solid element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 17, 503-526, (1981).
- [36] **C. ZHAO et S. VALLIAPPAN**,
"A dynamic infinite element for three-dimensional infinite domain wave problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 36, 2567-2580, (1993).
- [37] **E. DIEULESAINT et D. ROYER**,
"Ondes élastiques dans les solides", Masson, (1974).
- [38] **T. H. TAN**,
"Scattering of elastic waves by elastically transparent obstacles (integral equation method)", *Appl. Sci. Res.*, vol. 31, 29-51, (1975).
- [39] **J. E. WHITE**,
"Underground sound", Elsevier Science Publ. Co., 193-210, (1983).
- [40] **D. EKEOM et B. DUBUS**,
"Coupling finite element and impedance element to model the radiation of piezoelectric transducers in boreholes", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 95 suppl., (1994).
- [41] **S. KOSTEK**,
"Modeling of a piezoelectric transducer and its application to full wave acoustic logging", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 95, 109-122, (1994).
- [42] **A. L. KURKJIAN**,
"Numerical computation of individual far-field arrivals excited by an acoustic source in a borehole", *Geophysics*, vol. 50, 852-866, (1985).
- [43] **C. H. CHENG et M. N. TOKSÔZ**,
"Elastic wave propagation in a fluid-filled borehole and synthetic logs", *Geophysics*, vol. 46, 1042-1053, (1981).
- [44] **K. M. TUBMAN, C. H. CHENG et M. N. TOKSÔZ**,
"Synthetic full waveform acoustic logs in cased borehole" *Geophysics*, vol. 49, 1438-1449, (1986).
- [45] **G. DEGRANDE et G. DE ROECK**,
"An absorbing boundary condition for wave propagation in saturated poroelastic media - Part I: Formulation and efficiency evaluation", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 12, 411-421, (1993).

[46] G. DEGRANDE et G. DE ROECK,

"An absorbing boundary condition for wave propagation in saturated poroelastic media - Part II: Finite element formulation", Soil Dynamics and Earthquake Engineering, vol. 12, 423-432, (1993).

[47] J.-P. NOUGIER,

"Méthodes de calcul numérique", Masson, (1983).

[48] B. DAVIES,

"Locating the zeros of an analytic function", Journal of Comp. Physics, vol. 66, 36-49, (1981).

[49] P. CRISTINI,

"Fast and accurate method for the solution of the characteristic equation of shallow water propagation in isovelocity ocean", dans "Proceeding of the Third European Conference on Underwater Acoustics" édité par J. S. PAPADAKIS, Crete University Press, 195-200, (1996).

[50] J. MAX,

"Méthode et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques", tome 1, 4^{ème} édition, Masson, (1989).

[51] MORGAN MATROC Inc, Electro Ceramics Division,

"Piezoelectric technology data for designers".

Annexe I

Équations constitutives de la piézoélectricité

a) Relations constitutives pour un matériau piézoélectrique

Dans un matériau piézoélectrique, les tenseurs de déformations [S] et des contraintes [T] et les vecteurs champ électrique \underline{E} et l'excitation électrique D sont liés par quatre couples équivalents de relations constitutives. En choisissant [S] et \underline{E} comme variables indépendantes, on a :

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ij}^S E_j \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

où $[c^E]$ est le tenseur d'ordre quatre des rigidités élastique à champ électrique constant, $[e]$ le tenseur d'ordre trois des constantes piézoélectriques et $[\epsilon^S]$ le tenseur d'ordre deux des permittivités diélectriques à déformation constante, les indices i, j, k et l variant de 1 à 3. Les propriétés remarquables des tenseurs [S] et [T] permettent de condenser leurs notations sous forme de vecteurs à six composantes. Le système précédent (A-1) devient alors :

$$\begin{cases} T_m = c_{mn}^E S_n - e_{jm} E_j \\ D_i = e_{in} S_n + \epsilon_{ij}^S E_j \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

où les indices m et n varient de 1 à 6 et les indices i et j de 1 à 3. Les éléments c_{mn}^E et e_{jm} se déduisent simplement des éléments c_{ijkl}^E et e_{kij} . En choisissant [S] et [D] comme variables indépendantes, on substitue au système précédent le système :

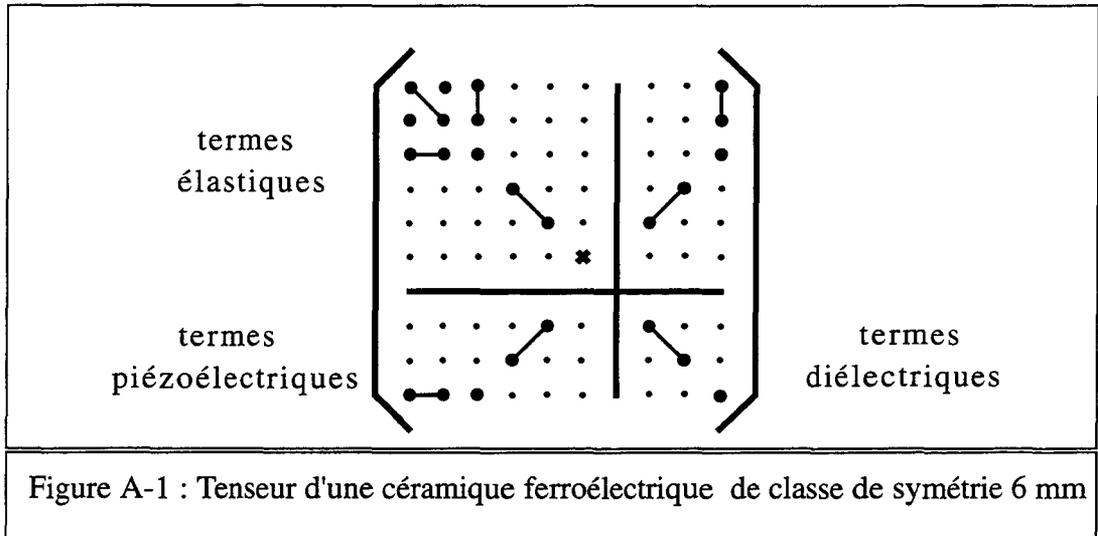
$$\begin{cases} T_m = c_{mn}^D S_n - h_{jm} D_j \\ E_i = -h_{in} S_n + \beta_{ij}^S D_j \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

En choisissant [T] et [E] comme variables indépendantes, on obtient :

$$\begin{cases} S_m = s_{mn}^E T_n + d_{jm} E_j \\ D_i = d_{in} T_n + \epsilon_{ij}^T E_j \end{cases} \quad (\text{A-4})$$

b) Cas d'une céramique ferroélectrique

Les céramiques ferroélectriques sont des composés obtenus par frittage d'oxydes et de sels de plomb, de zirconium et de titane. Après polarisation, réalisée en soumettant la céramique à un champ électrique élevé (quelques dizaines de kV/cm), généralement à une température proche de la température de Curie, apparaît un effet piézoélectrique. La symétrie des tenseurs caractéristiques est celle de la classe $6mm$. En adoptant une présentation générale qui regroupe les trois tenseurs dans une notation symbolique matricielle unique, on a le tenseur de la figure A-1.



Les petits points indiquent les termes nuls, les lignes joignent les termes égaux et la croix représente, selon le cas, $2(s_{11}-s_{22})$ ou $(c_{11}-c_{22})/2$. Comme on le voit, l'axe x_3 , qui est l'axe de polarisation, est privilégié. Le matériau est isotrope dans le plan x_1x_2 . L'axe de polarisation correspond à la direction du champ électrique polarisant.

Annexe II

Présentation du code éléments finis ATILA

A) Méthode des éléments finis

A l'intérieur de chaque élément fini, les variables champ de déplacement, potentiel électrique ou champ de pression sont définies de manière unique par les valeurs qu'elles prennent aux nœuds de l'élément. Cette définition est assurée à l'aide de fonctions d'interpolation. Cette annexe présente les fonctions d'interpolation utilisées dans les éléments du code ATILA, ainsi que la formulation des différents tenseurs qui en découle.

a) Fonctions d'interpolation

On considère un élément triangulaire dont les trois sommets sont les trois nœuds et $\underline{\Phi}^{(e)}$ le vecteur des valeurs nodales du potentiel électrique sur ces trois nœuds. A partir de ces valeurs et des coordonnées des sommets, il est possible d'exprimer la valeur de Φ par une interpolation linéaire :

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)}(x, y) \Phi_i^{(e)} \quad (\text{A-5})$$

dont les coefficients $N_i^{(e)}$, appelés fonctions d'interpolation ou de pondération, sont représentés à la figure A-2. Ces fonctions sont des polynômes en x et y dont les neuf coefficients constants (3x3) sont définis par les relations :

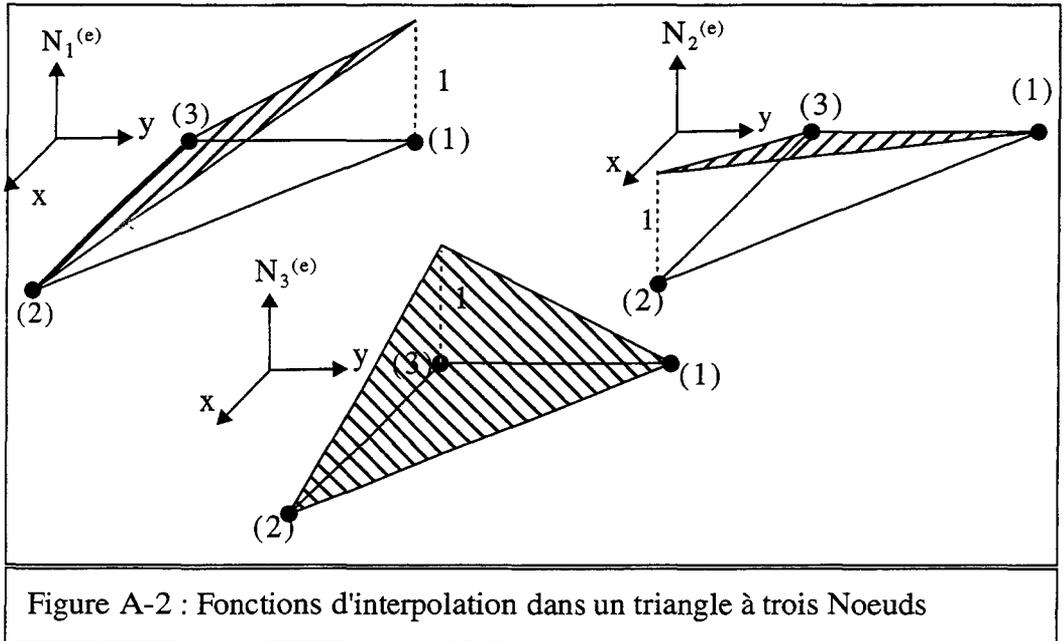
$$\begin{aligned} N_i^{(e)}(x_i, y_j) &= 1 & \text{si} & & i = j \\ N_i^{(e)}(x_i, y_j) &= 0 & \text{si} & & i \neq j, \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

où les indices i et j varient de 1 à 3. Pour ce même élément, si on s'intéresse au champ de déplacement \underline{u} dont le vecteur des valeurs nodales $\underline{U}^{(e)}$ s'écrit :

$$\underline{u} = \left[N^{(e)} \right] \underline{U}^{(e)} \quad (\text{A-7})$$

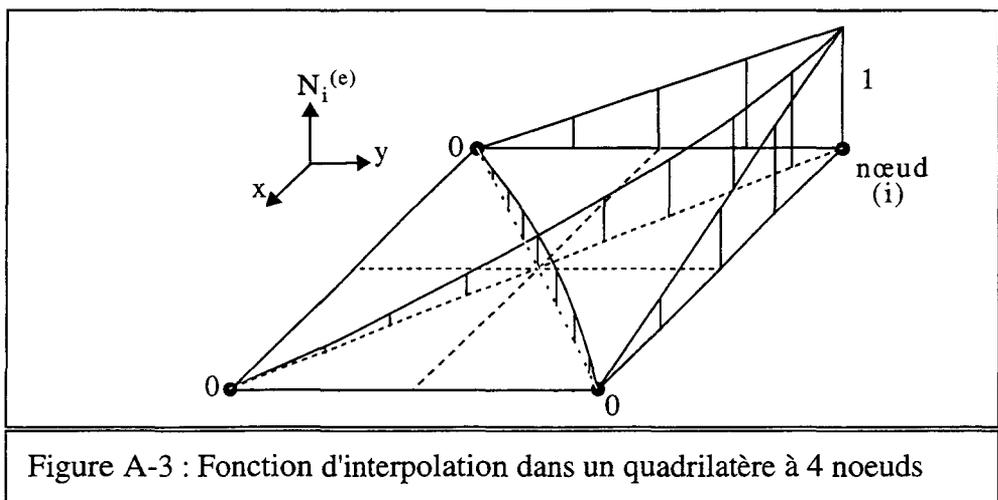
avec :

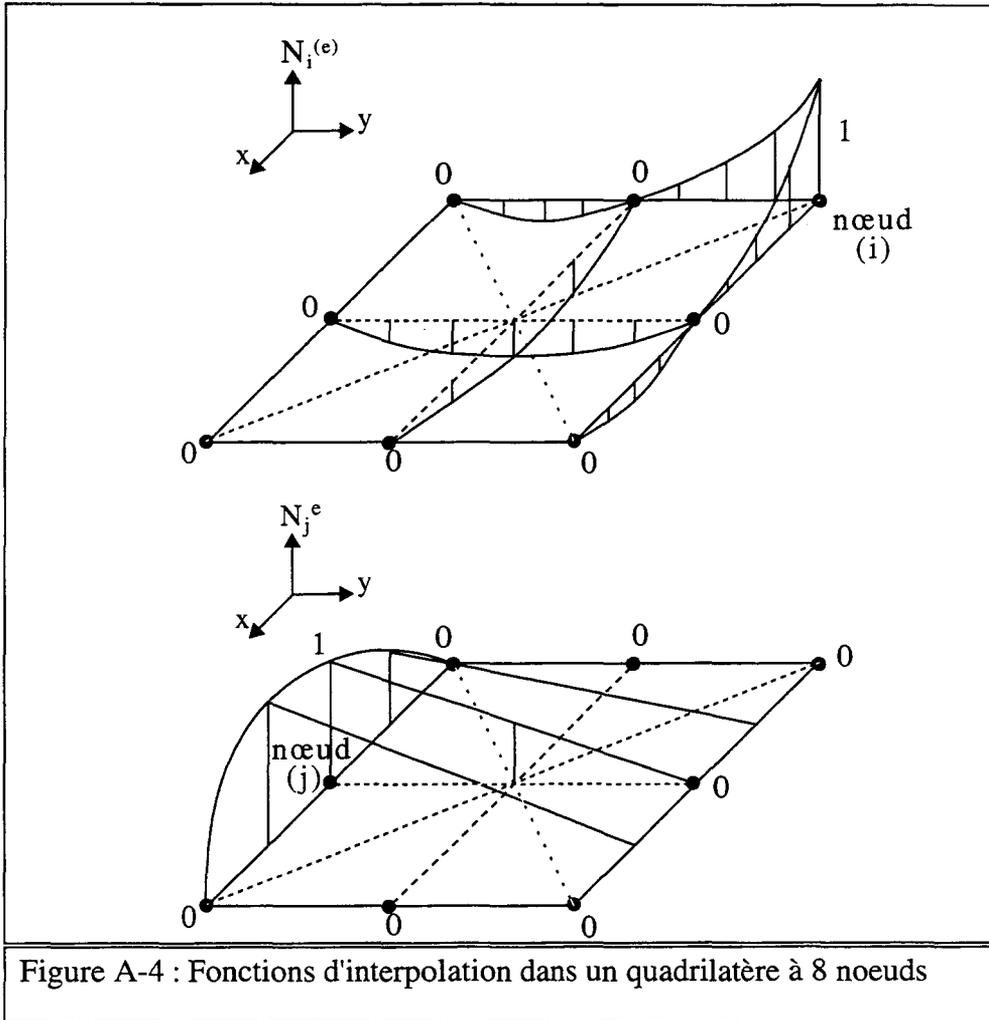
$$\left[N^{(e)} \right] = \left[N_1^{(e)}(x, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} N_2^{(e)}(x, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} N_3^{(e)}(x, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \quad (\text{A-8})$$



Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins sont les nœuds, les relations précédentes restent valables à condition de faire varier les indices i et j de 1 à 4. Les fonctions d'interpolation restent linéaires sur les côtés de l'élément mais deviennent quadratiques à l'intérieur (figure A-3).

Pour un élément quadrilatère dont les quatre coins et les milieux des quatre côtés sont les huit nœuds, les relations précédentes restent valables en faisant varier les indices i et j de 1 à 8. Cette fois, les fonctions d'interpolation deviennent quadratiques sur les côtés (figure A-4). Cette procédure est évidemment généralisable à des interpolations d'ordre plus élevé ou à des éléments tridimensionnels. Tous les détails peuvent être trouvés dans les livres de O. C. Zienkiewicz et de G. Dhatt et *al* [11-12].





a) Formulation des différents tenseurs

Dans le cas d'un problème bidimensionnel avec symétrie de révolution, le champ électrique s'écrit :

$$\underline{E} = -\vec{\text{grad}}(\Phi) \tag{A-9}$$

ou encore, pour un élément à p nœuds :

$$\underline{E} = -\left[\vec{\text{grad}}(N_1^{(e)}), \dots, \vec{\text{grad}}(N_p^{(e)}) \right] \underline{\Phi} \tag{A-10}$$

En posant :

$$B_{\Phi i}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{A-11}$$

et :

$$\left[\mathbf{B}_{\Phi}^{(e)} \right] = \left[\mathbf{B}_{\Phi 1}^{(e)}, \mathbf{B}_{\Phi 2}^{(e)}, \dots, \mathbf{B}_{\Phi p}^{(e)} \right] \quad (\text{A-12})$$

le champ électrique peut s'écrire :

$$\underline{\mathbf{E}} = - \left[\mathbf{B}_{\Phi}^{(e)} \right] \underline{\Phi} \quad (\text{A-13})$$

Pour les déformations, on obtient, en utilisant la notation à six composantes :

$$\underline{\mathbf{S}} = \left[\mathbf{B}^{(e)} \right] \underline{\mathbf{U}}^{(e)} \quad (\text{A-14})$$

avec :

$$\left[\mathbf{B}^{(e)} \right] = \left[\left[\mathbf{B}_1^{(e)} \right], \left[\mathbf{B}_2^{(e)} \right], \dots, \left[\mathbf{B}_p^{(e)} \right] \right] \quad (\text{A-15})$$

et :

$$\left[\mathbf{B}_i^{(e)} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-16})$$

Dès lors, les relations constitutives de la piézoélectricité s'écrivent dans l'élément sous la forme :

$$\underline{\mathbf{T}} = \left[\mathbf{c}^{\mathbf{E}} \right] \left[\mathbf{B}^{(e)} \right] \underline{\mathbf{U}}^{(e)} + \left[\mathbf{e} \right]^T \left[\mathbf{B}_{\Phi}^{(e)} \right] \underline{\Phi}^{(e)} \quad (\text{A-17})$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \left[\mathbf{e} \right] \left[\mathbf{B}^{(e)} \right] \underline{\mathbf{U}}^{(e)} - \left[\mathbf{\epsilon}^{\mathbf{S}} \right] \left[\mathbf{B}_{\Phi}^{(e)} \right] \underline{\Phi}^{(e)}$$

où $[c^E]$, $[e]$ et $[\varepsilon^S]$ sont respectivement le tenseur des rigidités élastiques à champ électrique constant condensé, le tenseur piézoélectrique condensé et le tenseur des permittivités diélectriques à déformations constantes (Annexe I).

B) Présentation des éléments de la bibliothèque du code ATILA

Les éléments du code ATILA sont, en majorité, des éléments isoparamétriques à interpolation quadratique [9] qui permettent une description simple de surfaces courbes. Pour ces éléments, il est nécessaire de distinguer le repère global, le repère local et le repère réduit. Les coordonnées des nœuds du maillage sont exprimées dans le repère global. Le repère local est un repère intermédiaire attaché à l'élément considéré. Le repère réduit est utilisé pour calculer les intégrales relatives aux matrices et vecteurs élémentaires (équations (I-26) à (I-28) par exemple) à l'aide d'une technique numérique dite de quadrature de Gauss. Le repère local se déduit du repère global à l'aide d'une matrice de rotation. La transformation des coordonnées des nœuds du repère réduit au repère local (figure A-5) est réalisée à l'aide d'une transformation ponctuelle utilisant les fonctions d'interpolation.

Les éléments disponibles dans le code peuvent être à deux ou trois dimensions et de formes variées. Seuls les éléments utilisés dans ce travail sont répertoriés ci-après :

Eléments mécaniques

Ces éléments peuvent décrire le comportement de structures élastiques isotropes. Ils peuvent être bidimensionnels (triangle à 6 nœuds ou quadrilatère à 8 nœuds) ou tridimensionnels (tétraèdre à 10 nœuds, prisme à 15 nœuds ou hexaèdre à 20 nœuds). Les éléments à deux dimensions permettent des analyses en contraintes planes, déformations planes ou à symétrie axiale.

Eléments piézoélectriques

Ces éléments décrivent des structures constituées d'un matériau piézoélectrique. Ils peuvent être bidimensionnels (triangle à 6 nœuds ou quadrilatère à 8 nœuds) ou tridimensionnels (tétraèdre à 10 nœuds, prisme à 15 nœuds ou hexaèdre à 20 nœuds). Les éléments à deux dimensions permettent des analyses en déformations planes ou à symétrie axiale. Tout type de matériau piézoélectrique, quel que soit son tenseur représentatif, peut être décrit.

Eléments fluides

Ces éléments servent à modéliser un fluide homogène. Ils peuvent être bidimensionnels (triangle à 6 nœuds ou quadrilatère à 8 nœuds) ou tridimensionnels (tétraèdre à 10 nœuds, prisme à 15 nœuds ou hexaèdre à 20 nœuds). Les éléments à

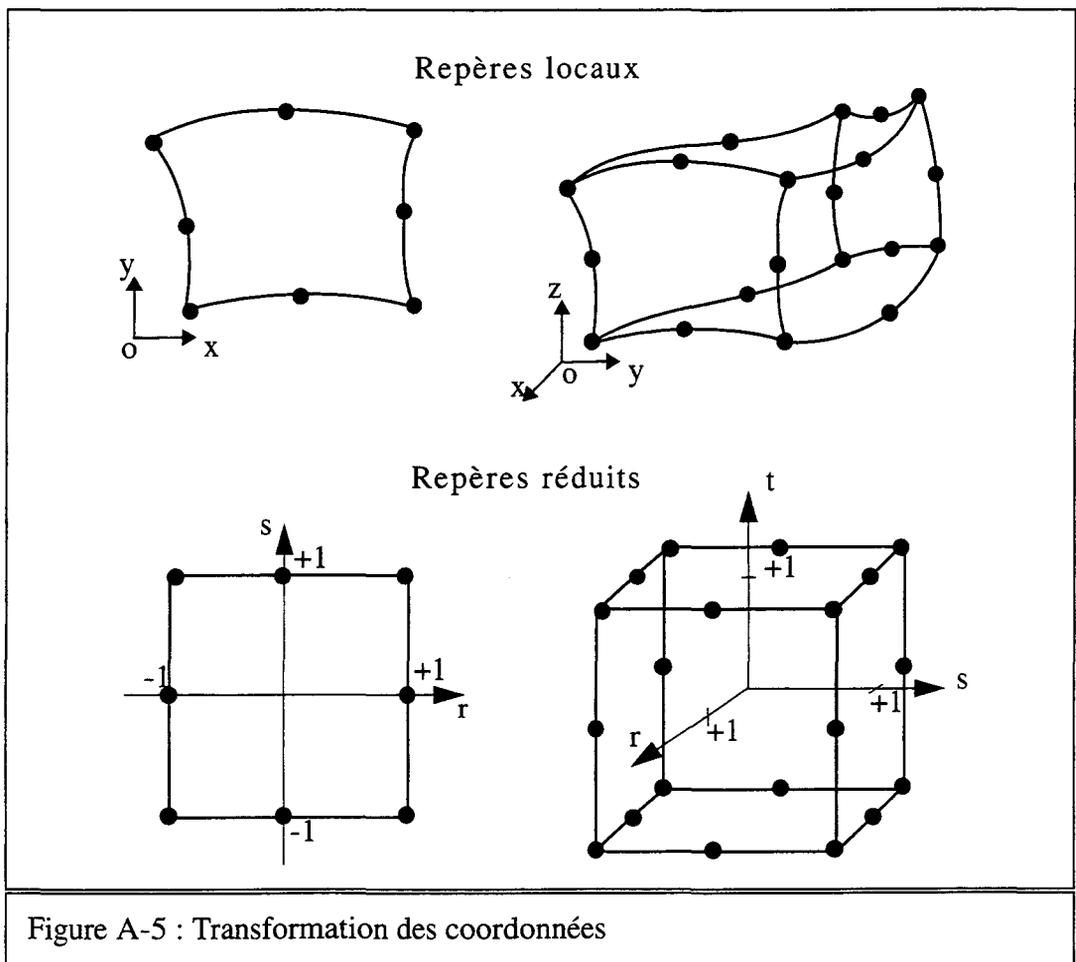
deux dimensions permettent l'analyse d'un champ de pression ne dépendant que de deux coordonnées d'espace ou à symétrie axiale.

Eléments interfaces

Ces éléments imposent conditions de continuité cinématique et dynamique à l'interface des maillages solide et fluide. Ils peuvent être bidimensionnels (élément à 6 noeuds) ou tridimensionnels (triangles à 12 noeuds ou quadrilatère à 16 noeuds). Les éléments bidimensionnels permettent des analyses en déformations planes et en symétrie axiale.

Eléments rayonnants

Ces éléments imposent une condition de rayonnement monopolaire ou dipolaire sur la surface fluide limitant le maillage. Ils permettent des modélisations bidimensionnelle (élément à 3 noeuds) ou tridimensionnelle (triangle à 6 noeuds ou quadrilatère à 8 noeuds).



Annexe III

Prolongement par continuité

Au voisinage de zéro, la fonction cylindrique de Hankel d'indice nul et de seconde espèce peut être approchée par l'expression suivante [27-28] :

$$H_{c0}^{(2)}(x) = -2\frac{j}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

celle d'indice un et de seconde espèce par :

$$H_{c1}^{(2)}(x) = \frac{2j}{\pi x} \quad (\text{A-18})$$

Par suite lorsque k est égal à k_p ou $-k_p$, l'intégrand relatif au calcul du déplacement radial (équations II- 14 et II-19) se simplifie et s'écrit alors :

$$\frac{-1}{2\pi} \frac{\lambda \hat{k}_s H_{c0}^{\prime(2)}(\hat{k}_s r_1) \bar{T}_n(k) e^{-jkz}}{\hat{k}_s H_{c0}^{\prime(2)}(\hat{k}_s r_1) + \lambda k^2 H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r_1)} \frac{r_1}{r} \quad (\text{A-19})$$

Dans cette expression r_1 désigne le rayon du puit et r la distance à l'axe du point pour lequel on calcule le déplacement. L'intégrand relatif au calcul de la composante tangentielle (équations II-15 et II-19) s'écrit :

$$\frac{-1}{2\pi} \frac{\lambda \hat{k}_s H_{c0}^{\prime(2)}(\hat{k}_s r_1) \bar{T}_n(k) e^{-jkz}}{\hat{k}_s H_{c0}^{\prime(2)}(\hat{k}_s r_1) + \lambda k^2 H_{c0}^{(2)}(\hat{k}_s r_1)} \quad (\text{A-20})$$

Lorsque k vaut k_s ou $-k_s$, l'intégrand relatif au calcul de la composante radiale du déplacement est nul et celui relatif au calcul de composante tangentielle s'écrit :

$$\frac{-j \bar{T}_n(k) e^{-jkz}}{2\pi \lambda k} \quad (\text{A-21})$$

Annexe IV

Mesure de phase

Il est commode d'exprimer le signal reçu par l'hydrophone $u(t)$ comme la partie réelle d'un signal complexe sous la forme suivante :

$$\underline{u}(t) = \hat{U} e^{j(\omega_0 t + \alpha)} \quad (\text{A-22})$$

Dans cette expression \hat{U} désigne l'amplitude du signal $\underline{u}(t)$ et $\Phi(t) = \omega_0 t + \alpha$ sa phase instantanée α est sa phase initiale dans la fenêtre d'observation. On peut donc écrire :

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (\text{A-23})$$

Sa transformée de Fourier est donnée par l'équation :

$$\underline{U}(f) = \frac{\hat{U}}{2} e^{j\alpha} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \quad (\text{A-24})$$

δ représente la fonction de Dirac, $\hat{U} e^{j\alpha}$ est le phaseur qui contient l'information d'amplitude et de phase initiale du signal reçu.

Le même signal déphasé de $\pi/2$, noté $v(t)$ est donné par l'équation suivante :

$$v(t) = \hat{U} \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (\text{A-25})$$

Le spectre du signal sinus s'exprime en fonction de celui du signal cosinus associé sous la forme :

$$v(t) = \text{Re}\{TF^{-1}\{-j\varepsilon(f)U(f) + j\varepsilon(-f)U(f)\}\} \quad (\text{A-26})$$

TF^{-1} est l'opérateur transformée de Fourier inverse et ε est donnée par :

$$\varepsilon(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A-27})$$

Cette transformation correspond à une transformée de Hilbert [50]. L'amplitude du signal reçu est donnée par l'équation :

$$\|\underline{u}(t)\| = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)} \quad (\text{A-28})$$

tandis que la phase instantanée du signal reçu s'obtient simplement en considérant la relation suivante :

$$\Phi(t) = \text{atan}\left(\frac{v(t)}{u(t)}\right) = \omega_0 t + \alpha \quad (\text{A-29})$$

