

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE  
LILLE

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES DE LA  
MATIÈRE ET DU RAYONNEMENT



**THÈSE**

présentée par

**Jean-Christophe CELET**

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université de Lille I**

DANS LA SPÉCIALITÉ : LASERS, MOLÉCULES,  
RAYONNEMENT ATMOSPHÉRIQUE

**RÉSONANCES LINÉAIRES ET  
NON-LINÉAIRES DES LASERS DE  
CLASSE B**

Soutenue le 28 Janvier 1997 devant le jury composé de :

Rapporteurs :	Thomas Erneux	Chercheur qualifié F.N.R.S. Univ. Libre Bruxelles
	Yakov Khanin	Vice-Directeur Institut Phys. Appliquée Nizhny-Novgorod
Membres du jury :	Jean-Jacques Aubert	Chef de service LETI CENG Grenoble
	Pierre Glorieux	Professeur U.S.T.L.
	Marc Douay	Professeur U.S.T.L.
	Didier Dangoisse	Professeur U.S.T.L., directeur de thèse



# Remerciements

Cette thèse a été réalisée à l'U.F.R. de Physique de l'Université des Sciences et Technologies de Lille dans le Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne. Je remercie, son directeur, Monsieur le Professeur P. GLORIEUX de m'y avoir accueilli.

J'adresse de vifs remerciements à Messieurs YA. KHANIN, vice-directeur de l'Institut de Physique Appliquée de Nizhny-Novgorod et T. ERNEUX, chercheur qualifié F.N.R.S. à l'Université Libre de Bruxelles, pour avoir bien voulu rapporter sur le travail présenté dans ce mémoire. Je les remercie des précieuses aides et suggestions qu'ils m'ont fourni durant les travaux accomplis en collaboration. J'ai une pensée particulière pour P. KHANDOKHIN à qui je témoigne toute ma sympathie : les trois mois passés ensemble ont été pour moi une formidable expérience. Je ne suis pas sans oublier G. LYTHE au contact duquel d'enrichissantes discussions ont pu s'établir. Les collaborations effectuées avec ces personnes ont permis d'aboutir en partie aux résultats présentés dans ce mémoire.

Je remercie Messieurs J.-J. AUBERT, chef de service au LETI CENG de Grenoble et M. DOUAY, Professeur au Laboratoire de Dynamique Moléculaire et Photonique d'avoir bien voulu se joindre au jury.

Cette thèse s'est déroulée sous la direction de Monsieur le Professeur D. DANGOISSE. Je lui suis reconnaissant, ainsi qu'à P. GLORIEUX, de m'avoir suivi et prodigué leurs conseils pendant ces trois années. Je les remercie en particulier pour le savoir physique et l'expérience dont ils m'ont fait profiter.

Je n'aurais pas réussi ce travail sans l'aide de personnes qui m'ont côtoyé pendant trois ans. J'assure toute ma reconnaissance à S. BIELAWSKI, D. DEROZIER, C. SZWAJ et G. BOULANT pour leur soutien, leur précieuse aide technique sur les manipulations du laser YAG et du laser à fibre, sur les simulations numériques et les connaissances qu'ils m'ont apporté sur la

dynamique des lasers et le contrôle du chaos.

Le démarrage de cette thèse n'aurait pu ce faire sans l'aide technique et scientifique de D. HENNEQUIN, C. LEPERS et E. LOUVERGNAUX. Je les remercie vivement. Merci à M. LEFRANC, J.-C. GARREAU, D. WILKOWSKI pour leur aide en informatique et leurs stimulantes conversations. Je dis également merci à toutes les personnes du laboratoire qui l'espace de quelques instants ont répondu à mes questions ou m'ont aidé à solutionner les problèmes que je rencontrais et à mener à bien le travail accompli.

Je souhaite, en outre, remercier également les services techniques : J.-M. LAPAUW et son équipe de l'atelier d'électronique, L. PACCOU, D. LESAGE et son équipe à l'atelier de mécanique, Pascal et Serge au service photocopie. Merci à Cécile et Stéphanie pour leur éternel sourire.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Dynamique basse fréquence d'un laser multimode de classe B</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	11
1.2 Le modèle mathématique . . . . .	13
1.2.1 Le laser monomode . . . . .	13
1.2.2 Le laser multimode . . . . .	18
1.2.3 Analyse de stabilité linéaire et spectre des fréquences de relaxation . . . . .	22
1.3 Etude expérimentale . . . . .	25
1.3.1 Le montage . . . . .	25
1.3.2 Les paramètres expérimentaux . . . . .	26
1.3.3 Observation des fréquences de relaxation . . . . .	28
1.4 Modulation externe sinusoïdale du laser . . . . .	28
1.4.1 Introduction . . . . .	28
1.4.2 Comportements observés . . . . .	31
1.4.3 La dynamique d'antiphase . . . . .	31
1.4.4 Non-compensation des oscillations près du seuil des modes . . . . .	37
1.4.5 Conclusion . . . . .	38
1.5 Le laser soumis à une contre-réaction . . . . .	39
1.5.1 Introduction . . . . .	39
1.5.2 Analyse de stabilité linéaire . . . . .	41
1.5.3 Influence de la contre-réaction sur le comportement du laser : résultats numériques . . . . .	43
1.5.4 Résultats expérimentaux et discussion . . . . .	51
1.6 Conclusion . . . . .	54

<b>2</b>	<b>Passage lent à travers une résonance dans un laser à paramètre modulé</b>	<b>57</b>
2.1	Introduction . . . . .	57
2.2	Dispositif expérimental . . . . .	59
2.2.1	Principe des mesures . . . . .	59
2.2.2	Influence des bruits techniques . . . . .	63
2.2.3	Forme des courbes de résonance . . . . .	65
2.3	Théorie . . . . .	65
2.3.1	Des équations du bilan aux équations « $xy$ » . . . . .	65
2.3.2	Approximation de faible amplitude . . . . .	68
2.3.3	Approximation de grande amplitude . . . . .	71
2.3.4	Comparaison avec les résultats expérimentaux . . . . .	75
2.4	Effet du bruit . . . . .	77
2.5	Etude dynamique . . . . .	81
2.5.1	Oscillations de relaxation dans l'enveloppe . . . . .	81
2.5.2	Lois d'échelle dynamiques . . . . .	87
2.6	Conclusion . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Influence d'une perturbation sous-harmonique dans un laser à paramètre modulé</b>	<b>95</b>
3.1	Introduction . . . . .	95
3.2	Le laser à fibre . . . . .	99
3.2.1	Description du montage expérimental . . . . .	99
3.2.2	Théorie . . . . .	103
3.3	Résultats . . . . .	106
3.4	Conclusion . . . . .	138
	<b>Conclusion</b>	<b>139</b>
<b>A</b>	<b>Oscillations de relaxation basses-fréquences dans les lasers de classe B soumis à une contre-réaction</b>	<b>141</b>
<b>B</b>	<b>Oscillations forcées dans un système linéaire à deux degrés de liberté</b>	<b>155</b>
<b>C</b>	<b>Méthode d'approximation harmonique utilisée pour l'étude des oscillations forcées dans les systèmes dissipatifs faiblement non-linéaires</b>	<b>161</b>
<b>D</b>	<b>Analyse perturbative des équations « <math>xy</math> » du laser mono-mode</b>	<b>167</b>

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	7
<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>



# Introduction

Les processus de relaxation ont un effet primordial sur les propriétés dynamiques des systèmes physiques : ils définissent la capacité de chacun de leurs degrés de liberté à réagir à un quelconque changement de situation. Le comportement temporel de la variable de sortie, la présence d'instabilités, les effets d'une excitation externe sont autant de données importantes permettant de mieux comprendre leur fonctionnement. Les systèmes dynamiques libres, à petit nombre de degrés de liberté, possèdent souvent des états stationnaires, c'est-à-dire des solutions indépendantes du temps de leurs équations d'évolution. L'amortissement et éventuellement la période du transitoire de relaxation vers ces solutions stationnaires fixent l'échelle de temps de la dynamique du système et sont, de cette façon, des données importantes pour analyser l'évolution de la variable de sortie lorsque l'on a recours à des techniques de forçage périodique, de modulation rapide, d'injection, de couplage à d'autres systèmes, etc . . .

Le laser est un système dynamique qui répond tout à fait aux caractéristiques énoncés ci-dessus. Ce mémoire de thèse, à dominante expérimentale, traite plus particulièrement de la dynamique des lasers de classe B [1, 2]. Nous nous intéressons au comportement que ces lasers peuvent engendrer par modulation d'un de leur paramètre au voisinage d'une fréquence de relaxation ou à des sous-harmoniques de celles-ci. Les trois chapitres de ce mémoire présentent des volets fortement reliés à ce thème et s'intègrent parfaitement à l'actualité en matière de recherche dans ce domaine. La dynamique des lasers multimodes développée dans le premier chapitre fût un thème central de recherche en Union Soviétique dans les années 1970-1980. Ce domaine a connu un regain d'intérêt ces dernières années comme base à l'élaboration de mémoires optiques dynamiques. L'étude des résonances non-linéaires dans les systèmes optiques s'est également fortement développée durant les décennies 1970 et 1980. Elle connaît toujours actuellement un attrait. Enfin, la dynamique chaotique et le contrôle du chaos, abordées dans le troisième chapitre, font actuellement l'objet d'une activité en plein essor.

Le premier chapitre traite de la dynamique multimodale des lasers de

classe B et des phénomènes coopératifs qui la soutendent. Du point de vue dynamique, chaque mode du laser apporte deux degrés de liberté supplémentaires. Les lasers multimodes sont particulièrement adaptés à l'étude des processus qui interviennent dans les systèmes à grand nombre de degrés de liberté. Ils possèdent plusieurs fréquences propres résultant des interactions modales. Dans ce contexte, nous étudions le spectre basse-fréquence du laser libre : les fréquences autre que la fréquence de relaxation standard sont invisibles dans le spectre de l'intensité totale de sortie. Nous envisageons une technique de contre-réaction pour les mettre en évidence et examinons l'influence de celle-ci.

Dans le second chapitre, nous considérons le passage à travers la résonance non-linéaire d'un laser monomode modulé périodiquement au voisinage de sa fréquence de relaxation. Ce passage induit un phénomène de bistabilité optique dans l'enveloppe de réponse illustré par l'apparition d'un cycle d'hystérésis. Nous étudions l'évolution des fréquences de commutation à la fois en régime « statique » et en régime « dynamique ». Ce chapitre décrit une étude originale présentant de nombreuses comparaisons entre théorie et expérience.

Le dernier chapitre s'inscrit dans le cadre général du contrôle du chaos : nous nous intéressons à l'influence d'une perturbation sous-harmonique sur le comportement du laser à paramètre de pompe modulé et, en particulier, à l'influence de la phase de cette perturbation. La modulation du paramètre de pompe provoque, suivant les conditions initiales, une transition vers le chaos par différentes routes. L'ajout d'une faible perturbation sous-harmonique modifie la transition vers le chaos : déplacement des points de bifurcation, changement d'attracteur, stabilisation du régime dans des régions instables et *vice-versa*, crises ... Les comparaisons entre simulations numériques et travaux expérimentaux sont qualitativement en bon accord.

La littérature scientifique fournit de nos jours des modèles très riches permettant de décrire la dynamique des lasers. Les modèles découlant de la théorie semi-classique ont aujourd'hui supplanté les modèles classiques des équations du bilan jugés insuffisants. Les modèles utilisés au cours des trois chapitres s'orientent cependant tous autour des modèles des équations du bilan (en intensité et inversion de population). Ils ont permis de très bons accords lors des comparaisons théorie-expérience.

# Chapitre 1

## Dynamique basse fréquence d'un laser multimode de classe B

### 1.1 Introduction

L'étude des phénomènes de relaxation est née, dès l'avènement du laser, de l'observation de pulsations constituées de séries de « pics intenses » dans l'intensité émise [3]. Ces pulsations, appelées « spiking », ont été confirmées par un grand nombre d'expériences : elles sont apparues comme une caractéristique commune à beaucoup de lasers à état solide [4].

Du point de vue théorique, les tentatives pour décrire la dynamique du laser utilisent les équations du bilan reliant l'intensité à l'inversion de population [5–10]. STATZ, DEMARS [5] et DUNSMUIR [6] ont donné les premières solutions numériques à ces équations. DUNSMUIR [6] et GŪRS [10] ont déterminé la fréquence et l'amortissement de petites oscillations de relaxation. D'autre part, des travaux se sont orientés vers l'étude du bruit [11–17]. McCUMBER calcula les fluctuations d'intensité en sortie des lasers en utilisant les équations du bilan linéarisées [16] : sa théorie prédit l'existence d'un pic intense dans le spectre basse fréquence à la fréquence des oscillations de relaxation. Ceci fut vérifié expérimentalement avec un laser YAG dopé au néodyme [17].

L'existence de cette fréquence de relaxation dans le spectre de l'intensité du laser peut avoir des conséquences importantes sur sa dynamique. Elle se manifeste en particulier comme une fréquence de résonance sur les lasers à conduite externe périodique. La modulation d'un paramètre fut utilisée à la fois pour étudier les pulsations géantes de l'émission et pour de possibles

applications de communication qui réclament la modulation de l'intensité de sortie du laser [18–25]. Si la fréquence de modulation externe avoisine la fréquence de résonance du système, des comportements instables, ainsi que des phénomènes non-linéaires dépendant du temps, peuvent être mis en évidence.

Les lasers oscillent généralement sur plusieurs modes longitudinaux. On doit à TANG, STATZ, DEMARS [26] et RÓSS [27] l'extension du modèle monomode à une oscillation multimode; POLLONI et SVELTO [28] y ont inclus le « hole burning » spatial. L'étude de la dynamique du laser multimode s'est portée d'abord sur les transitoires [26, 29–31]. Des calculs, en supposant égales les intensités modales [30] et dans le cas d'une répartition spectrale symétrique des modes autour du mode central [31], ont montré que le spectre basse fréquence des lasers multimodes possède plusieurs fréquences de relaxation. Plus récemment, des méthodes théoriques, basées sur la modulation d'un paramètre du laser, ont permis de déterminer le spectre basse fréquence du laser multimode pour une répartition quelconque des modes dans la courbe de gain [32–34]. Le laser multimode y est décrit comme un ensemble de  $K$  systèmes couplés, où  $K$  est le nombre de modes. Ce couplage intermodal est responsable du spectre multifréquence et de la dynamique caractéristique du laser.

L'étude de la dynamique des lasers multimodes a récemment connu un regain d'intérêt sous l'influence de K. OTSUKA et P. MANDEL [35–41]. Leurs travaux apportent un approfondissement considérable des concepts de base de la physique des oscillateurs couplés. D'autre part, la recherche dans ces systèmes, d'états d'*antiphase*, en tant que solutions périodiques non-linéaires de type « spiking », ouvre des champs d'application nouveaux comme par exemple l'élaboration de mémoires optiques dynamiques, de nouvelles possibilités en communication . . . [36]. Enfin, il ressort de tout ceci une meilleure connaissance des propriétés du bruit dans les lasers.

Dans ce chapitre, divisé en quatre parties, notre objectif est d'obtenir des confirmations expérimentales qualitatives de résultats théoriques obtenus à partir du modèle de TANG, STATZ et DEMARS [26]. Dans la première partie, nous rappelons les idées essentielles contenue dans la modélisation du laser monomode ainsi que le calcul de la fréquence et de l'amortissement des oscillations de relaxation. Nous introduisons ensuite le modèle du laser multimode et établissons le système retenu dans nos simulations numériques; sur le plan analytique, le calcul des états stationnaires et de la matrice de stabilité linéaire est redéveloppé. Les expérimentations ont été effectuées sur un laser YAG dopé au néodyme et pompé par diode laser: le montage et les paramètres expérimentaux sont discutés dans la deuxième partie. Nous présentons, dans la troisième, une analyse du laser à forçage périodique externe:

lorsque le faisceau de pompe est modulé, le système laisse apparaître certains comportements dus à la dynamique d'antiphase : interférences constructives ou destructives suivant la fréquence de modulation, non-compensation au seuil des modes . . . Nous nous proposons, dans la dernière section, de vérifier l'influence d'une contre-réaction dérivative construite à partir de la combinaison de l'intensité totale et de l'intensité d'un des modes longitudinaux : nous analysons les caractéristiques de la dynamique obtenue, en fonction du signe et de l'amplitude de la contre-réaction, sur le spectre basse fréquence du laser. Cette étude est l'oeuvre d'une collaboration avec P. KHANDOKHIN et YA. KHANIN de l'Institut de Physique Appliquée de Nizhny-Novgorod.

## 1.2 Le modèle mathématique

### 1.2.1 Le laser monomode

#### Etats stationnaires et fréquence de relaxation

Le modèle des équations du bilan du laser monomode découle d'une analyse simple du processus d'amplification de la lumière, fondée sur les concepts bien connus d'échange d'énergie stimulée et spontanée entre les atomes et le rayonnement. Il fournit une description intuitive de la dynamique du laser basée sur les équations couplées de la densité de l'inversion de population et de la densité d'énergie électromagnétique contenue dans la cavité [5, 6].

Le milieu actif considéré ci-dessous est réduit à un système à deux niveaux d'énergie. On suppose également que le milieu actif est homogène. Soient  $n(t)$  la densité d'inversion de population (différence de population entre l'état excité et l'état non-excité des ions actifs par unité de volume) et  $m(t)$  la densité d'énergie optique dans la cavité. Nous appliquons l'approximation du champ uniforme, ainsi la variable  $m$ , qui représente une énergie moyenne, ne possède aucune dépendance en  $z$ . L'évolution couplée des deux variables dynamiques est donnée par :

$$\frac{dm(t)}{dt} = Bm(t)n(t) - 2\kappa m(t) \quad (1.1a)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = \gamma_{\parallel}(n^{(0)} - n(t)) - \beta Bm(t)n(t) \quad (1.1b)$$

Ces équations, établies pour la première fois par H. STATZ et G. DEMARS [5], indiquent que le nombre de photons dans la cavité augmente grâce à l'émission induite avec le taux  $Bm(t)n(t)$  ( $B$  portant le nom de coefficient d'EINSTEIN) et diminue à un taux  $2\kappa m(t)$  dû aux pertes ;  $T_c = 1/2\kappa$  représente la durée de vie du champ dans la cavité. Les effets contraires du pom-

page  $\gamma_{\parallel} n^{(0)}$  et d'un processus de relaxation  $\gamma_{\parallel} n(t)$  tendent à amener l'inversion de population vers sa valeur limite  $n^{(0)}$ . Celle-ci est également diminuée par l'émission induite  $\beta B m(t) n(t)$ .

Ce modèle simple nous permet déjà d'établir la condition de seuil : si le champ dans la cavité est initialement faible, l'oscillation va se développer ( $dn/dt > 0$ ) si :

$$n(t=0) > \frac{2\kappa}{B} \quad (1.2)$$

La quantité  $n_{seuil} = 2\kappa/B$  représente le seuil d'inversion de population pour l'action laser. Si la valeur initiale de  $n$  est celle de l'inversion de population à l'équilibre  $n^{(0)}$ , alors la condition nécessaire à l'oscillation laser est :

$$n^{(0)} > n_{seuil} = \frac{2\kappa}{B} \quad (1.3)$$

En tenant compte de l'équation (1.3), nous effectuons le changement de variables sans dimension suivant :

$$I(t) = \frac{\beta B m(t)}{\gamma_{\parallel}} \quad (1.4a)$$

$$N(t) = \frac{B n(t)}{2\kappa} = \frac{n(t)}{n_{seuil}} \quad (1.4b)$$

Nous définissons également deux quantités :

- le paramètre de pompage :  $A = B n^{(0)} / 2\kappa = n^{(0)} / n_{seuil}$ . La condition d'oscillation de l'équation 1.3 devient alors  $A > 1$  ;
- le paramètre  $G$  :  $G = 2\kappa / \gamma_{\parallel}$ . La dynamique particulière des lasers à état solide est basée sur la grande valeur de ce paramètre (typiquement de  $10^4$  pour un laser YAG) ;

Dans la suite et pour alléger l'écriture nous n'indiquons plus la dépendance temporelle des variables. En introduisant le temps sans dimension  $\tau = \gamma_{\parallel} t$ , nous obtenons le modèle adimensionné de STATZ et DEMARS :

$$\frac{dI}{d\tau} = GI(N - 1) \quad (1.5a)$$

$$\frac{dN}{d\tau} = A - N(I + 1) \quad (1.5b)$$

On montre qu'il n'existe que deux solutions stationnaires. Les coordonnées des points fixes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (calculées en annulant les dérivées) sont :

$$\overline{I}_{\mathcal{A}} = 0 \qquad \overline{N}_{\mathcal{A}} = A \qquad (1.6a)$$

$$\overline{I}_{\mathcal{B}} = A - 1 \qquad \overline{N}_{\mathcal{B}} = 1 \qquad (1.6b)$$

Le type et la stabilité des points fixes peuvent être examinés en linéarisant le système d'équations (1.5) au voisinage de chacun de ces points. Soient  $\tilde{i}$  et  $\tilde{n}$  les écarts respectifs par rapport aux coordonnées  $\overline{I}$  et  $\overline{N}$  du point fixe considéré :

$$\tilde{i} = I - \overline{I} \qquad (1.7a)$$

$$\tilde{n} = N - \overline{N} \qquad (1.7b)$$

Au voisinage du point  $\mathcal{A}$ , les équations linéarisées deviennent :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(A-1) & 0 \\ -A & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{n} \end{pmatrix} \qquad (1.8)$$

La stabilité des solutions dépend du signe de la partie réelle des racines de l'équation caractéristique :

$$(\lambda + 1)[\lambda - G(A - 1)] = 0 \qquad (1.9)$$

L'une des racines de cette équation est toujours négative  $\lambda_1 = -1$  tandis que le signe de l'autre dépend de la valeur de  $A$ . Si  $A < 1$  alors les deux racines sont négatives et le point fixe est un noeud stable. Par contre si  $A > 1$  alors  $\lambda_2$  est positive et le point est un col.

Au voisinage du point  $\mathcal{B}$ , les équations linéarisées sont :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G(A-1) \\ -1 & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{n} \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

L'équation caractéristique prend la forme :

$$\lambda^2 + A\lambda + G(A - 1) = 0 \qquad (1.11)$$

Elle possède les racines :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - G(A - 1)} \qquad (1.12)$$

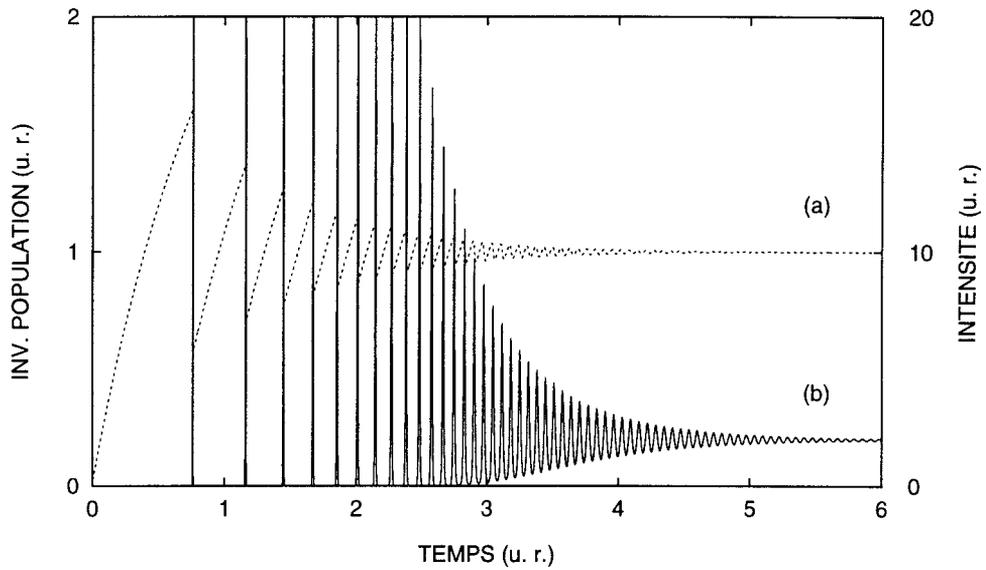


FIG. 1.1 – Transitoires de démarrage de l'oscillation du laser monomode pour l'inversion de population (a) et l'intensité (b) avec les paramètres  $A = 3$  et  $G = 5000$  et pour les conditions initiales  $I(0) = 0,01$  et  $N(0) = 0,02$ .

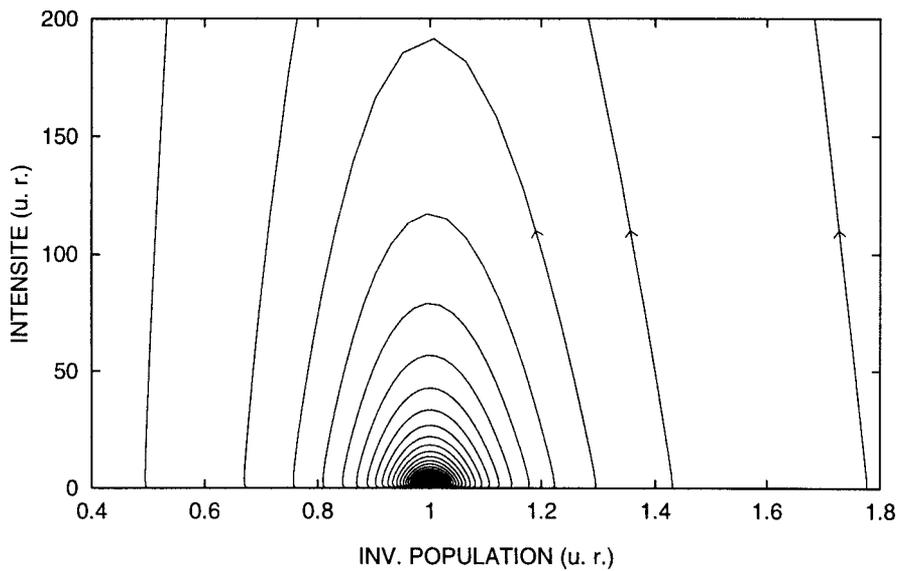


FIG. 1.2 – Trajectoire dans l'espace des phases relative aux transitoires de la figure 1.1 ( $A = 3$ ,  $G = 5000$  et pour les mêmes conditions initiales). La partie de la courbe proche de l'axe des abscisses est parcourue à vitesse lente, l'autre partie à vitesse rapide.

Le point fixe  $\mathcal{B}$  peut être soit un noeud stable, soit un foyer stable suivant le signe du discriminant. Pour un laser de classe B,  $G \gg 1$ , le point fixe est alors toujours un foyer. L'équation (1.12) peut s'écrire :

$$\lambda_{1,2} = t_R \pm i\omega_R \quad (1.13)$$

La partie imaginaire de  $\lambda$  exprime la fréquence des oscillations amorties de l'intensité au voisinage du point  $\mathcal{B}$  :

$$\omega_R = \sqrt{G(A-1)} \quad (1.14)$$

et la partie réelle représente leur amortissement :

$$t_R = -\frac{A}{2} \quad (1.15)$$

### Transitoires et portrait de phase

Le comportement impulsionnel, dénommé « spiking » dans l'introduction, s'observe très facilement sur les transitoires des lasers à état solide [42]. La figure 1.1 est un exemple, obtenu par simulation numérique du système (1.5), du régime transitoire qui se produit au démarrage du laser. Il est constitué, dans un premier temps, de grandes impulsions d'intensité, caractéristiques d'un comportement fortement non-linéaire, qui s'éteignent rapidement pour laisser place à des oscillations linéaires amorties.

Lorsque le laser est mis en marche, sous l'effet du pompage, l'inversion de population croît lentement. Tant que celle-ci n'a pas atteint sa valeur seuil, la densité de photon dans le laser reste essentiellement proche de 0. Dès que l'inversion de population excède cette valeur, la densité de photon croît exponentiellement à partir du bruit. Lorsque le nombre de photons dépasse sa valeur stationnaire, l'émission stimulée est capable de dépeupler le niveau excité des ions actifs plus rapidement que la pompe ne peut le remplir. Il se produit alors une forte diminution de l'inversion de population pendant un temps très bref. La croissance du pic d'intensité s'arrête dès que l'inversion repasse au-dessous de sa valeur stationnaire. L'intensité décroît rapidement et l'inversion peut redémarrer grâce au pompage. En raison du temps de croissance très court du nombre de photons dans la cavité (typiquement  $\tau_c = 1/G$ ), les pics d'intensité observés sont très étroits.

Le système (1.5) ne fournit pas de solutions analytiques simples capables de décrire le comportement pulsé du laser. Cependant, des méthodes d'approximation, basées sur la grande valeur de  $G$ , permettent d'étudier ce processus non-linéaire. De telles méthodes ne sont pas adaptées au voisinage des points fixes, pour lequel une approximation linéaire reste possible [1].

Ces approximations permettent ainsi de décomposer le mouvement du point  $(N, I)$ , représentatif du système dans l'espace des phases, en un mouvement rapide suivi d'un mouvement lent. La figure 1.2 indique la trajectoire qui lui est associée dans cet espace. Le point  $(N, I)$  parcourt lentement la portion de la trajectoire proche de l'axe des abscisses. Dans cette région, la probabilité d'émission induite est faible et la vitesse du point ne dépend que du taux de pompage. Ce point représentatif décrit, par contre, à grande vitesse l'autre partie de la trajectoire pour laquelle l'émission induite domine le pompage. Les trajectoires de phase convergent lentement vers le foyer  $\mathcal{B}$   $(1, A - 1)$ . Un tour de cette spirale correspond à l'émission d'un pic. On peut ainsi, par cette méthode approchée, calculer de façon élémentaire l'amplitude des pics, la durée de ceux-ci et l'intervalle entre deux pics [1]. Nous aurons l'occasion, dans le chapitre 2, lors de l'étude du laser monomode à paramètre de pompe modulé de revenir sur cette scission de la trajectoire en deux mouvements et sur la méthode analytique approchée.

Nous ne souhaitons pas développer davantage la théorie du laser monomode. En effet, celle-ci a été étudiée de façon exhaustive dans de nombreuses monographies [1, 4, 42, 43] en proposant des modèles plus riches que celui présenté ici. Nous voulons nous concentrer désormais sur l'étude du laser multimode, d'abord parce qu'il correspond mieux à la réalité de notre dispositif expérimental, ensuite parce qu'il répond aux objectifs fixés dans l'introduction.

## 1.2.2 Le laser multimode

### Le modèle

Il est bien connu que les lasers à état solide, conçus sans filtre modal, peuvent osciller simultanément sur plusieurs modes longitudinaux. Ceci est communément attribué à la combinaison de deux phénomènes distincts : le « hole burning » spatial et le fait que la largeur de la courbe de gain du laser excède l'espacement intermodal. Le résonateur expérimental usuel comprend des miroirs sphériques de haute qualité dans une configuration Pérot-Fabry. Cette configuration conduit à une structure d'onde stationnaire avec une alternance de régions de forte et de faible saturation. Cette saturation dépend de l'amplitude locale du champ. Nous obtenons ainsi des plans nodaux parallèles entre eux et espacés de  $\lambda/2$ . Selon la théorie de TANG, STATZ et DEMARS [26], les atomes actifs localisés au voisinage des plans nodaux d'un mode axial donné et maintenu dans leur état excité par le pompage vont stimuler la naissance d'autres modes axiaux qui possèdent alors un maximum d'intensité en cet endroit. Cette structure d'onde stationnaire est valable

pour tous les modes : chaque mode crée donc son propre réseau spatial d'inversion de population. Le « hole burning » spatial est très présent dans les lasers à cristaux ; en effet, l'amplitude des vibrations du réseau cristallin est petite comparée à la longueur d'onde optique et les ions actifs se situant aux maxima d'intensité sont sensiblement toujours les mêmes. Dans les lasers à gaz, au contraire, l'agitation thermique des atomes ou des molécules actifs moyenne l'inversion de population et peut atténuer le « hole burning » spatial.

Nous envisageons ici une cavité Pérot-Fabry cylindrique d'axe  $z$  ( $x$  et  $y$  sont les coordonnées transverses). Nous étudions seulement les effets longitudinaux et négligeons les dépendances transverses. Cette cavité vide sélectionne un nombre discret de modes axiaux, respectivement espacés d'un intervalle en fréquence de  $c/2L$  où  $c$  est la vitesse de la lumière et  $L$  la longueur optique de la cavité.

La caractéristique spectrale d'un laser est fréquemment décrite en termes de forme et largeur de raie, et de nombre de modes longitudinaux. La largeur de raie de la transition laser vient limiter le nombre de modes qui ont un gain suffisant pour osciller. Ainsi, si la largeur spectrale de la courbe de gain est supérieure à l'espacement intermodal alors plusieurs modes axiaux sont susceptibles d'exister. Lorsque le paramètre de pompage s'accroît, le mode central est le premier à atteindre le seuil d'oscillation. Les autres modes, qui prendront naissance, auront par conséquent un gain inférieur au premier du fait de leur décalage en fréquence. Le modèle qui en découle, prend en compte des gains modaux différents. Une autre approche consiste à choisir un gain identique et des pertes différentes sur chaque mode. Cette hypothèse aboutit à un modèle similaire au notre, mais semble toutefois moins réaliste [44] (*cf.* Annexe A).

Le modèle de TANG, STATZ et DEMARS [26] s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{dm_j(t)}{dt} = -2\kappa m_j(t) + D\gamma_j m_j(t) \int_0^L n(z,t) \psi_j^2 dz \quad (1.16a)$$

$$\frac{\partial n(z,t)}{\partial t} = \gamma_{\parallel} (n^{(0)} - n(z,t)) - \sum_{l=1}^K D\gamma_l n(z,t) m_l(t) \psi_l^2 \quad (1.16b)$$

Dans ces équations  $m_j(t)$  est la densité de photons du mode  $j$  et  $n(z,t)$  la différence de population entre l'état excité et l'état non-excité des ions actifs.  $n^{(0)}$  est la valeur stationnaire de  $n(z,t)$  en l'absence d'émission stimulée ;  $\gamma_{\parallel}$  et  $\kappa$  ont la même signification que pour le laser monomode ;  $D$  est un coefficient proportionnel au coefficient d'EINSTEIN pour l'émission stimulée ;  $\gamma_j$  est le gain du mode  $j$  normalisé par rapport au gain du mode central (pour ce mode nous avons  $\gamma_1 = 1$ ).  $\psi_j$  représente une fonction propre de la cavité.  $K$

est le nombre de modes qui oscillent. Puisque l'on néglige les dépendances transverses des modes, la seule coordonnée à prendre en compte est la côte  $z$ . Ceci permet d'utiliser l'approximation de l'onde plane, à savoir :

$$\psi_j = \sqrt{2} \sin(k_j z) \quad (1.17)$$

soit :

$$\psi_j^2 = 2 \sin^2(k_j z) = 1 - \cos(2k_j z) \quad (1.18)$$

où  $k_j = 2\pi p_j/L$  est le nombre d'onde du mode  $j$  ( $p_j$  est un nombre entier). Le système prend alors la forme suivante :

$$\frac{dm_j(t)}{dt} = -2\kappa m_j(t) + D\gamma_j m_j(t) \int_0^L n(z, t) [1 - \cos(2k_j z)] dz \quad (1.19a)$$

$$\frac{\partial n(z, t)}{\partial t} = \gamma_{\parallel} (n^{(0)} - n(z, t)) - \sum_{l=1}^K D\gamma_l m_l(t) n(z, t) [1 - \cos(2k_l z)] \quad (1.19b)$$

Au voisinage du seuil d'oscillation, l'inversion de population peut être décomposée en une série de Fourier limitée à ses termes de plus bas degré [26] :

$$n(z, t) = n_0(t) + \sum_{l=1}^K n_l(t) \cos(2k_l z) \quad (1.20)$$

Les coefficients de la décomposition ont la forme :

$$n_0(t) = \frac{1}{L} \int_0^L n(z, t) dz \quad (1.21a)$$

$$n_j(t) = \frac{2}{L} \int_0^L n(z, t) \cos(2k_j z) dz \quad (1.21b)$$

Pour alléger l'écriture, nous omettons dans la suite de ce paragraphe la dépendance de chacune des variables par rapport au temps. En introduisant  $n_0$  et  $n_j$  dans les équations, il suit :

$$\frac{dm_j}{dt} = -2\kappa m_j + D\gamma_j m_j L (n_0 - \frac{n_j}{2}) \quad (1.22a)$$

$$\frac{dn_0}{dt} = \gamma_{\parallel} (n^{(0)} - n_0) - \sum_{l=1}^K D\gamma_l m_l (n_0 - \frac{n_l}{2}) \quad (1.22b)$$

$$\frac{dn_j}{dt} = -n_j (\gamma_{\parallel} + \sum_{l=1}^K D\gamma_l m_l) + D\gamma_j m_j n_0 \quad (1.22c)$$

On pose  $G = 2\kappa/\gamma_{\parallel}$ ,  $A = DL/2\kappa n^{(0)}$  et on effectue les changements de variables suivants :

$$I_j = \frac{Dm_j}{\gamma_{\parallel}} \quad (1.23)$$

$$N_0 = \frac{DL}{2\kappa} n_0 \quad (1.24)$$

$$N_j = \frac{DL}{2\kappa} n_j \quad (1.25)$$

En introduisant de plus le temps réduit  $\tau = \gamma_{\parallel} t$ , nous obtenons le système d'équations adimensionnées du modèle de TANG, STATZ et DEMARS [36–39, 41, 45–47] :

$$\frac{dI_j}{d\tau} = GI_j \left[ \gamma_j \left( N_0 - \frac{N_j}{2} \right) - 1 \right] \quad (1.26a)$$

$$\frac{dN_0}{d\tau} = A - N_0 - \sum_{l=1}^K \gamma_l I_l \left( N_0 - \frac{N_l}{2} \right) \quad (1.26b)$$

$$\frac{dN_j}{d\tau} = \gamma_j I_j N_0 - N_j \left( 1 + \sum_{l=1}^K \gamma_l I_l \right) \quad (1.26c)$$

### Calcul des solutions stationnaires

Les solutions stationnaires notées  $\bar{I}_j$ ,  $\bar{N}_0$ ,  $\bar{N}_j$  vérifient :

$$G\bar{I}_j \left[ \gamma_j \left( \bar{N}_0 - \frac{\bar{N}_j}{2} \right) - 1 \right] = 0 \quad (1.27a)$$

$$A - \bar{N}_0 - \sum_{l=1}^n \gamma_l \bar{I}_l \left( \bar{N}_0 - \frac{\bar{N}_l}{2} \right) = 0 \quad (1.27b)$$

$$\gamma_j \bar{I}_j \bar{N}_0 - \bar{N}_j \left( 1 + \sum_{l=1}^n \gamma_l \bar{I}_l \right) = 0 \quad (1.27c)$$

Il est commode d'exprimer les coordonnées de l'état stationnaire de la solution lasante en fonction de  $\bar{N}_0$  et d'introduire les notations  $S_1 = \sum 1/\gamma_j$  et  $S_2 = \sum 1/\gamma_j^2$  [41, 46]. Les solutions stationnaires obtenues sont :

$$\bar{N}_j = 2 \left( \bar{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j} \right) \quad (1.28)$$

$$\bar{I}_j = \frac{\bar{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j}}{\gamma_j \left[ S_1 - \left( K - \frac{1}{2} \right) \bar{N}_0 \right]} \quad (1.29)$$

Quant à l'équation vérifiée par la composante continue  $\bar{N}_0$  du développement en série de Fourier, elle se déduit de (1.27b) :

$$A = \bar{N}_0 + \frac{\bar{N}_0 S_1 - S_2}{S_1 - (K - \frac{1}{2})\bar{N}_0} \quad (1.30)$$

Les solutions stationnaires du modèle du laser multimode dépendent non seulement du nombre de modes  $K$  mais aussi, par l'intermédiaire de  $S_1$  et de  $S_2$ , du gain de ces modes.

### 1.2.3 Analyse de stabilité linéaire et spectre des fréquences de relaxation

Nous allons analyser la stabilité des solutions stationnaires en considérant l'évolution des petits écarts par rapport à celles-ci, soit :

$$\tilde{i}_j = I_j - \bar{I}_j \quad (1.31a)$$

$$\tilde{n}_0 = N_0 - \bar{N}_0 \quad (1.31b)$$

$$\tilde{n}_j = N_j - \bar{N}_j \quad (1.31c)$$

La linéarisation du système (1.26) nous conduit à :

$$\frac{d\tilde{i}_j}{d\tau} = G \frac{\bar{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j}}{S_1 - (K - \frac{1}{2})\bar{N}_0} (\tilde{n}_0 - \frac{\tilde{n}_j}{2}) \quad (1.32a)$$

$$\frac{d\tilde{n}_0}{d\tau} = - \sum_{k=1}^K \tilde{i}_k - \frac{\bar{N}_0}{2[S_1 - (K - \frac{1}{2})\bar{N}_0]} \tilde{n}_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{\bar{N}_0 - \frac{1}{\gamma_k}}{S_1 - (K - \frac{1}{2})\bar{N}_0} \tilde{n}_k \quad (1.32b)$$

$$\frac{d\tilde{n}_j}{d\tau} = \bar{N}_0 \gamma_j \tilde{i}_j - 2(\bar{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j}) \sum_{k=1}^K \gamma_k \tilde{i}_k + \frac{(\bar{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j})\tilde{n}_0 - \bar{N}_0 \tilde{n}_j}{S_1 - (K - \frac{1}{2})\bar{N}_0} \quad (1.32c)$$

Ce dernier système peut être écrit sous la forme générale :

$$\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = L \cdot \mathbf{V} \quad (1.33)$$

où  $\mathbf{V}$  est un vecteur de coordonnées  $(\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \dots, \tilde{i}_K, \tilde{n}_0, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_K)$ . Les éléments de la matrice  $L = (l_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1\dots(2K+1)}$  sont données par les relations

suivantes (où  $j, q = 1, 2 \dots, K$ ):

$$l_{j,q} = 0 \quad (1.34)$$

$$l_{j,K+1} = \frac{G \left( \overline{N_0} - \frac{1}{\gamma_j} \right)}{S_1 - \left( K - \frac{1}{2} \right) \overline{N_0}} \quad (1.35)$$

$$l_{j,K+1+j} = - \frac{G \left( \overline{N_0} - \frac{1}{\gamma_j} \right)}{2 \left[ S_1 - \left( K - \frac{1}{2} \right) \overline{N_0} \right]} \quad (1.36)$$

$$l_{j,K+1+q} = 0 \quad (1.37)$$

$q \neq j$

$$l_{K+1,j} = -1 \quad (1.38)$$

$$l_{K+1,K+1} = - \frac{\overline{N_0}}{2 \left[ S_1 - \left( K - \frac{1}{2} \right) \overline{N_0} \right]} \quad (1.39)$$

$$l_{K+1,K+1+j} = \frac{\overline{N_0} - \frac{1}{\gamma_j}}{2 \left[ S_1 - \left( K - \frac{1}{2} \right) \overline{N_0} \right]} \quad (1.40)$$

$$l_{K+1+j,j} = 2 - \gamma_j \overline{N_0} \quad (1.41)$$

$$l_{K+1+j,q} = -2 \left( \overline{N_0} - \frac{1}{\gamma_j} \right) \quad (1.42)$$

$q \neq j$

$$l_{K+1+j,K+1} = \frac{\overline{N_0} - \frac{1}{\gamma_j}}{S_1 - \left( K - \frac{1}{2} \right) \overline{N_0}} \quad (1.43)$$

$$l_{K+1+j,K+1+j} = - \frac{\overline{N_0}}{S_1 - \left( K - \frac{1}{2} \right) \overline{N_0}} \quad (1.44)$$

$$l_{K+1+j,K+1+q} = 0 \quad (1.45)$$

$q \neq j$

L'équation caractéristique est du type:

$$\|l_{\alpha\beta} - \lambda \delta_{\alpha\beta}\| = 0 \quad (1.46)$$

où  $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de KRONECKER. Elle possède une racine réelle négative et  $K$  paires de racines complexes conjuguées avec des parties réelles négatives si  $G \gg 1$  et  $\gamma_j \simeq 1$  [34]. Ceci signifie que le laser de Classe B possède  $K$  amortissements et fréquences d'oscillations de relaxation. Le calcul analytique des fréquences de relaxation, dans le cas général de  $K$  modes, n'est pas chose facile. Elles ont été calculées dans le cas du laser bimode [32, 38, 41] et du laser à  $K$  modes possédant une dégénérescence  $(K - 1)$  sur la basse fréquence [41, 46]. Cette dégénérescence s'obtient en supposant que tous les modes ont le même gain, mais  $\varepsilon$  correspond à aucune situation réelle. Le caractère

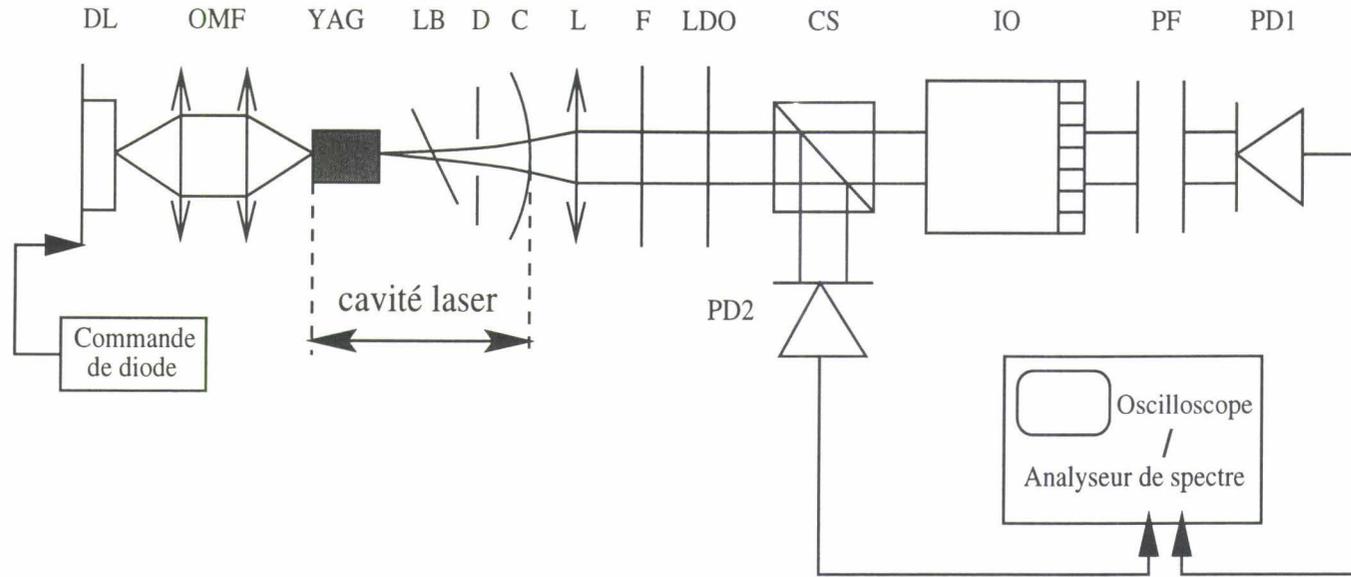


FIG. 1.3 – Dispositif expérimental du laser YAG. Il se compose du système de pompage: la diode laser (DL), les optiques de mise en forme du faisceau de pompe; de la cavité: le barreau de YAG, la lame à incidence de Brewster (LB), le diaphragme (D), le miroir de couplage (C); des chaînes de détection: la lentille de collimation (L), le filtre à  $1,06 \mu\text{m}$ , la lame demi-onde (LDO), le cube séparateur (CS), l'isolateur optique (IO), l'interféromètre de Péro-Fabry (PF), les photodétecteurs (PD1 et PD2).

multifréquence du spectre a été montré numériquement [32, 38, 39, 41, 48] et expérimentalement avec 2, 3 ou 4 modes longitudinaux [32, 38–40, 48].

Dans la suite de ce mémoire, les  $2K$  valeurs propres complexes sont notées sous la forme  $\delta_{j-1} \pm i\omega_{j-1}$  (où  $j = 1, \dots, K$ ). Nous adoptons de plus la convention suivante: les fréquences propres  $\omega_{j-1}$  sont ordonnées de la plus élevée à la plus faible, de l'indice 0 à l'indice  $K - 1$ .

## 1.3 Etude expérimentale

### 1.3.1 Le montage

Le montage du laser est illustré sur la figure 1.3. Le milieu actif est un barreau de YAG cylindrique de 5 mm de long et 5 mm de diamètre, à faces parallèles et contenant une concentration en néodyme de 1,1 %. L'une des faces de ce barreau est hautement transparente à 808 nm et hautement réfléchissante ( $R > 99,5 \%$ ) à  $1,064 \mu\text{m}$ , l'autre est traitée anti-reflet à cette même longueur d'onde.

La cavité est plan-concave, l'un des miroirs est déposé sur la face d'entrée du barreau, l'autre possède un rayon de courbure de 40 mm et un coefficient de réflexion de 95 %. Plusieurs éléments optiques sont insérés dans cette cavité. Tout d'abord, une lame à incidence de Brewster nous offre la possibilité d'obtenir un faisceau laser polarisé rectilignement et d'éliminer toute dynamique de polarisation pouvant résulter de la biréfringence du cristal. Ensuite, un diaphragme d'ouverture variable permet la sélection du mode transverse  $\text{TEM}_{00}$ . Il nous est également possible d'insérer un étalon PÉROT-FABRY de 1 mm d'épaisseur de façon à réaliser un filtrage des modes longitudinaux.

La pompe est une diode laser émettant un rayonnement à 810 nm, d'une puissance maximale de 500 mW. Ce rayonnement est focalisé sur la face d'entrée du barreau de YAG à l'aide d'un système composé de deux lentilles et d'un anamorphoseur. La puissance optique maximale incidente sur le barreau peut être estimée à environ 325 mW: les pertes importantes s'expliquent par une divergence très forte du faisceau de diode devant l'ouverture de la première lentille ainsi que par les réflexions optiques non négligeables qu'elle produit.

Le dispositif d'alimentation de la diode laser autorise la régulation du courant injecté dans celle-ci ainsi que la régulation de sa température. Il est équipé de deux entrées de modulation du courant d'une bande passante supérieure à 10 MHz. Ces signaux modulés s'ajoutent à la composante continue délivrée par l'alimentation. Un dispositif de protection limite l'intensité du courant de diode à 1 A. La commande de diode possède en outre deux sorties:

la première permet de visualiser le courant qui traverse la diode (détection par exemple d'un écrêtage du signal dans le cas de fortes modulations); l'autre donne accès à la puissance optique émise par la diode laser. En effet, une photodiode (« diode monitor ») placée derrière la diode laser mesure la puissance émise par celle-ci; un convertisseur nous fournit une tension directement proportionnelle à cette puissance. Notons que la connaissance de la puissance optique est indispensable pour calculer le paramètre de pompe.

Le faisceau de sortie du laser est collimaté à l'aide d'une lentille, puis filtré du rayonnement de pompe résiduel. Un cube séparateur alimente deux chaînes de détection: l'une pour l'intensité totale, l'autre pour l'intensité des différents modes. La répartition de l'intensité optique entre les voies se fait à l'aide d'une lame demi-onde placée devant le cube.

Les puissances optiques des faisceaux de chaque voie sont mesurées par des photodiodes au silicium (Hamamatsu S4752 et S2216-01). Le signal électrique qui en sort alimente un convertisseur courant-tension. La fréquence de coupure ( $> 5$  MHz) des amplificateurs excède largement la fréquence des signaux observés. Le nombre ainsi que l'intensité relative des modes longitudinaux sont déterminés à l'aide d'un analyseur de spectre optique. Cet analyseur est un interféromètre de PÉROT-FABRY plan-plan: l'un des miroirs est conduit par trois céramiques piezo-électriques placées à  $120^\circ$  l'une de l'autre et dont la tension de commande peut être modulée. Le spectre optique est ainsi reconstruit par simple balayage de la longueur de cavité. Pour éviter toute réflexion optique parasite du P.-F. vers la cavité laser, un isolateur optique d'une isolation supérieure à 30 dB a été placé entre les deux.

La sélection du nombre de modes longitudinaux s'obtient par action sur le courant injecté dans la diode de pompe: pour certains alignements, nous avons pu observer jusqu'à six modes longitudinaux avec un paramètre de pompage atteignant au maximum 9.

### 1.3.2 Les paramètres expérimentaux

#### Le paramètre de pompe

La définition du paramètre de pompe  $A$  est donnée à la section 1.2.1, page 14. Soient  $I_{seuil}$  et  $I_{laser}$  les puissances optiques reçues par le barreau de YAG, respectivement au seuil d'émission laser et en un point de fonctionnement quelconque du laser. L'inversion de population à l'équilibre est proportionnelle à la puissance optique incidente; le coefficient de proportionnalité étant indépendant de la puissance injectée, il vient:

$$A = \frac{n^{(0)}}{n_{seuil}} = \frac{I_{laser}}{I_{seuil}} = \frac{V_{laser}}{V_{seuil}} \quad (1.47)$$

où  $V_{laser}$  et  $V_{seuil}$  sont les tensions de la diode monitor correspondant à  $I_{laser}$  et  $I_{seuil}$ . Le dernier rapport de 1.47 est facilement accessible.

### Les constantes $\kappa$ et $\gamma_{\parallel}$

Pour estimer l'ordre de grandeur des fréquences de relaxation, il faut avoir accès aux constantes  $\kappa$  et  $\gamma_{\parallel}$ . La valeur de  $\frac{1}{\gamma_{\parallel}} = 230\mu s$  est extraite de [24, 42]. Quant à  $\kappa$ , on peut le déterminer à l'aide de la relation [49], valable pour une cavité Pérot-Fabry :

$$\kappa = -\frac{c}{2L_{opt}} \ln[R_1 R_2 (1 - \alpha)^2] \quad (1.48)$$

où :

- $L_{opt}$  est la longueur optique de la cavité ;
- $R_1$  et  $R_2$  sont les coefficients de réflexion des miroirs ;
- $\alpha$  les pertes supplémentaires, par simple passage de la lumière dans la cavité, dues par exemple aux éléments intra-cavité.

Nous estimons le produit  $R_1 R_2$  à 0,95 et  $\alpha$  à 0,01. Pour une longueur optique de 38 mm, nous évaluons :  $\kappa = 2,8 \cdot 10^8 s^{-1}$ .

L'expression (1.14) de la fréquence de relaxation d'un laser monomode transcrite en unités dimensionnées (Hz) est :

$$\nu_R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\gamma_{\parallel} \kappa (A - 1)} \quad (1.49)$$

Ainsi lorsque  $A = 2$ , la fréquence de relaxation est environ 175 kHz. Pour le régime monomode, on doit en plus tenir compte de l'augmentation des pertes internes de la cavité, dues à l'insertion de l'étalon Pérot-Fabry.

### Sélection des modes

L'espacement intermodal est défini par :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2(n_1 l_1 + n_2 l_2)} \quad (1.50)$$

où  $n_1$ ,  $l_1$  (respectivement  $n_2$ ,  $l_2$ ) sont l'indice de réfraction et la longueur du chemin optique dans le YAG (respectivement l'air). Dans notre cas pour  $n_1 = 1,82$  [24],  $l_1 = 5$  mm,  $n_2 = 1$ ,  $l_2 = 29$  mm, on évalue  $\Delta\nu$  à 3,95 GHz.

Cette valeur ne correspond pas cependant à celle calculée en évaluant l'allongement des céramiques piezo-électriques permettant de passer d'un mode longitudinal au suivant. Il apparaît que le barreau de YAG à faces planes parallèles se comporte comme une sous-cavité qui opère une sélection des modes : seul un mode longitudinal sur trois oscille. L'intervalle de fréquence entre deux pics consécutifs du spectre optique, présenté sur la figure 1.7, vaut  $3 \times 3,95 = 11,85$  GHz.

### 1.3.3 Observation des fréquences de relaxation

#### Méthode directe

Elle consiste à observer le spectre des fluctuations d'intensité du laser. Pour cela nous avons utilisé l'analyseur de spectre Advantest TR4131. Du point de vue expérimental, cette méthode est la plus simple car elle ne nécessite aucune modification particulière du montage et permet une mesure quasi-instantanée de la fréquence de relaxation.

#### Modulation du paramètre de pompe

Une autre méthode consiste à moduler faiblement le paramètre de pompe du laser (taux de modulation  $< 1\%$ ), les pertes de cavité ou tout autre paramètre, avec un signal dont la fréquence dépend linéairement du temps. Lorsque la fréquence de modulation excite l'une des fréquences propres du laser, il se produit le phénomène classique de résonance. On peut ainsi, en modulant sur des plages de fréquences suffisamment grandes mesurer les différentes fréquences de relaxation du laser.

#### Percussion du paramètre de pompe

Une autre méthode enfin consiste à appliquer un échelon de courant à la diode de pompe puis à observer le retour du laser vers son état d'équilibre. Ce dernier présente alors des oscillations de relaxation amorties, dont on peut extraire les fréquences par FFT.

## 1.4 Modulation externe sinusoïdale du laser

### 1.4.1 Introduction

De nos jours, l'étude de la dynamique des lasers est facilitée par la modulation d'un de ses paramètres. Celle-ci peut s'appliquer aux pertes, à la pompe,

à la longueur de cavité. Dans tous les cas, et si son amplitude est suffisamment importante, le système répond comme un oscillateur non-linéaire. Les effets, qui peuvent notamment être répertoriés, sont le tirage de la fréquence de relaxation, la bistabilité ou la multistabilité de l'enveloppe de réponse du laser, le doublement de période, les pulsations chaotiques . . .

Pour le laser de classe B monomode, la modulation apporte un degré de liberté supplémentaire rendant possible l'apparition du chaos. Sur ce sujet, de nombreux travaux théoriques [50–56] ont pu être vérifiés expérimentalement [53, 56–59]. En général, le chaos apparaît à la suite d'une cascade de doublement de période et disparaît par la cascade inverse [60–62].

Plus rares sont les études exhaustives sur la dynamique non-linéaire dans les lasers multimodes. Le couplage intermodal, responsable d'instabilités rend les études énormément complexes [63]. Dans le cas du laser YAG en anneau dopé au néodyme, des travaux ont porté sur les fluctuations chaotiques apparaissant comme résultat de l'interaction entre les ondes se propageant en sens inverse [64–66]. Dans le même esprit, EVDOKIMOVA et KAPTSOV [67] ont analysé la nature de la transition vers le chaos dans un laser YAG à pompe modulée.

Outre les recherches sur le chaos, le laser à paramètre modulé a permis d'observer le spectre basse fréquence du laser [32, 34, 48, 67–69] et plus récemment de mettre en évidence le phénomène de dynamique d'antiphase [36, 37, 40, 70].

La configuration de notre système expérimental (voir section 1.3), pour laquelle des oscillations impulsionnelles ont déjà été montrées [25, 57, 71], nous permet aisément de moduler l'amplitude du faisceau de pompe [72]. TREDICCE *et al.* [2] ont établi, d'après une étude sur le modèle du laser monomode de STATZ et DEMARS, que la modulation d'amplitude de pompe produit les mêmes effets que la modulation des pertes à ceci près que le degré d'excitation doit être plus important : pour une fréquence de modulation proche de la fréquence de relaxation, le terme de forçage, dans le cas de la modulation de pompe, est de l'ordre de 100 fois celui de la modulation des pertes pour obtenir des effets dynamiques comparables.

Notre objectif, dans cette partie, est d'observer une manifestation de la dynamique d'antiphase sur le spectre basse fréquence du laser numériquement et expérimentalement. La méthode numérique s'appuie sur une faible modulation du paramètre de pompe alors que dans la méthode expérimentale nous avons enregistré les spectres de bruit des modes et de l'intensité totale.

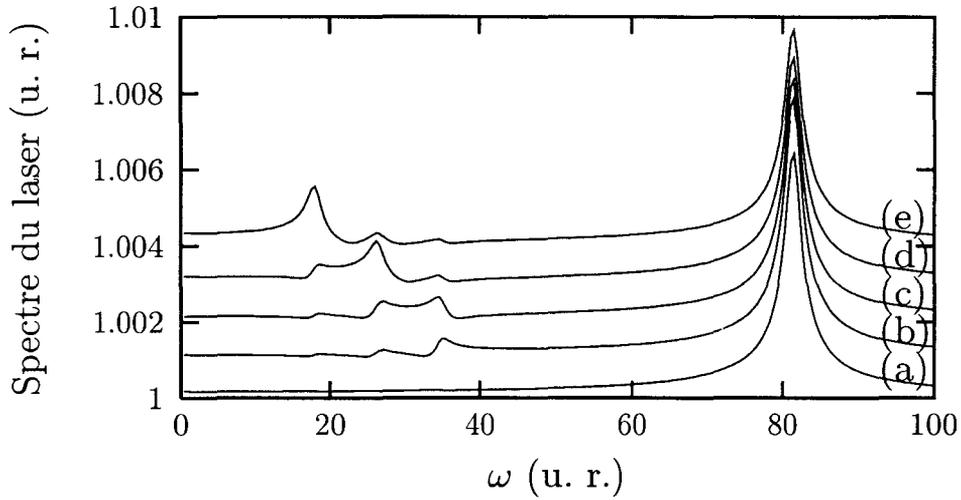


FIG. 1.4 – Simulation numérique des spectres de l'intensité totale (courbe (a)) et des intensités des modes 1 à 4 (respectivement (b), (c), (d) et (e)) pour le système (1.26). Les paramètres choisis sont :  $A = 2$ ,  $G = 7000$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 0,97$ ,  $\gamma_3 = 0,94$ ,  $\gamma_4 = 0,92$  et  $\Delta A = 8.10^{-5}$ .

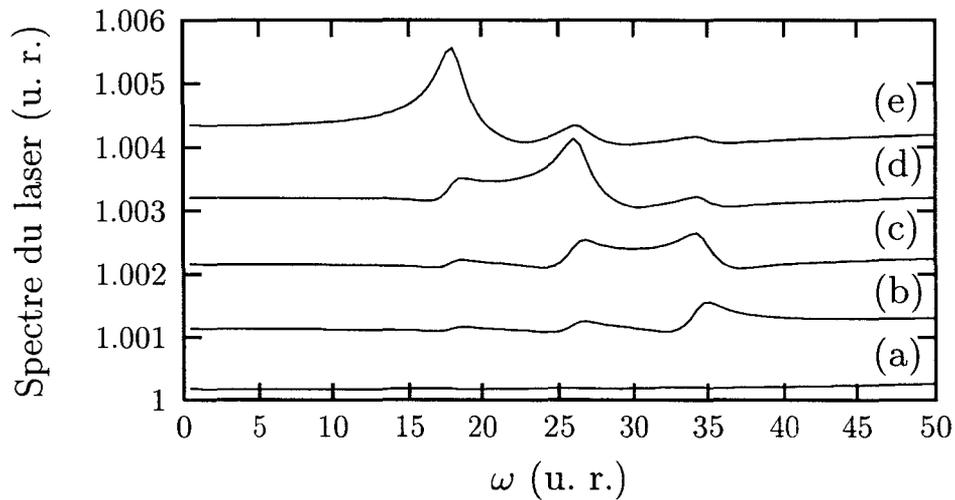


FIG. 1.5 – Spectres de la figure 1.4 où l'échelle des fréquences a été dilatée de façon à observer les basses fréquences de relaxation.

### 1.4.2 Comportements observés

Le paramètre de pompage défini par (1.47) devient :

$$A(t) = A + \Delta A \cos(2\pi\nu t) \quad (1.51)$$

où  $\Delta A$  représente l'amplitude de modulation transcrite en unité  $A$  et  $\nu$  la fréquence de modulation imposée à la pompe. Le laser multimode est le siège d'instabilités supplémentaires à des niveaux d'excitation plus faible comparés au laser monomode [57]. Les observations faites sur l'intensité totale dépendent des valeurs de  $A$  et  $\Delta A$  :

- Si le laser, initialement au-dessus du seuil d'émission (et bien au-dessus du seuil du mode le plus faible), est soumis à une faible modulation ( $\Delta A \ll 1$ ), alors l'intensité du laser est modulée de façon harmonique : sa fréquence est imposée par celle de la modulation. Un phénomène de résonance linéaire se produit si celle-ci avoisine la fréquence de relaxation. Lorsque  $\Delta A$  croît, de nouvelles composantes apparaissent dans le spectre de l'intensité totale, la résonance à  $\omega_R$  devient non-linéaire ;
- Si le laser est fortement modulé ( $\Delta A \approx A - 1$ ), la réponse de celui-ci est impulsionnelle (périodique ou stochastique) ;
- Si le laser est faiblement modulé au voisinage du seuil d'un mode, à la réponse sinusoïdale du laser vient s'ajouter la réponse impulsionnelle du mode naissant ;
- si le laser est en dessous du seuil ( $A < 1$  et  $A + \Delta A \geq 1$ ), le régime obtenu est impulsionnel.

Il ressort des observations faites que le taux de pompage et la valeur de l'amplitude de modulation revêtent un caractère essentiel. En général, deux types de régimes s'opposent : un régime linéaire où la réponse du laser est sinusoïdale et qui suppose une très faible modulation, et un régime non-linéaire où l'intensité de sortie admet un spectre multifréquence et peut présenter une réponse impulsionnelle. La dynamique d'antiphase que nous allons développer dans la section suivante a été étudiée par de nombreux auteurs pour les deux types de régime.

### 1.4.3 La dynamique d'antiphase

Le terme d'*état d'antiphase* a été introduit originellement par HADLEY et BEASLEY [73]. Cet état fut décrit dans des études numériques de circuits

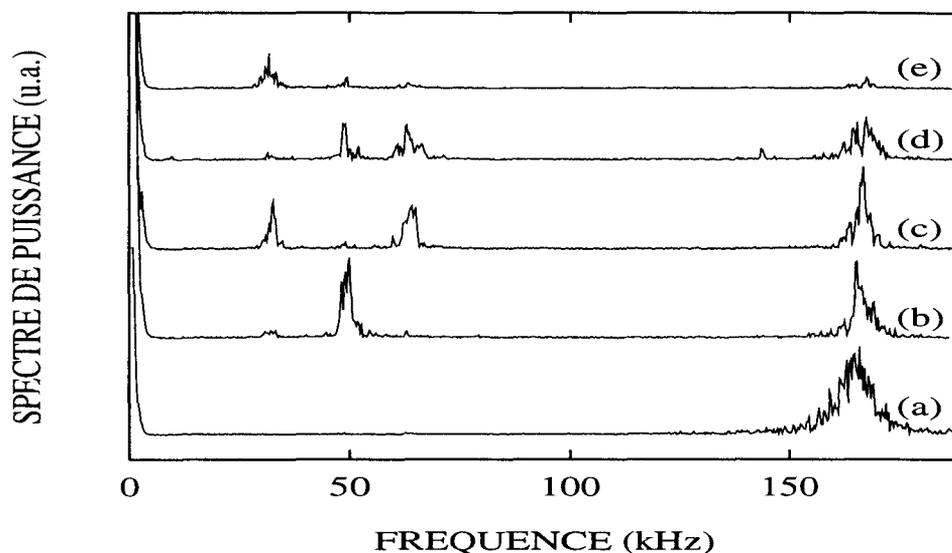


FIG. 1.6 – Relevé expérimental des spectres de puissance (a) de l'intensité totale, (b,c,d,e) des intensités des modes 1,2,3 et 4 respectivement (à  $A = 2,2$ ). Les fréquences de relaxation sont  $\nu_0 = \nu_r = 166\text{kHz}$ ,  $\nu_1 = 63\text{kHz}$ ,  $\nu_2 = 49\text{kHz}$ ,  $\nu_3 = 33\text{kHz}$ . L'échelle verticale est la même de (b) à (e).

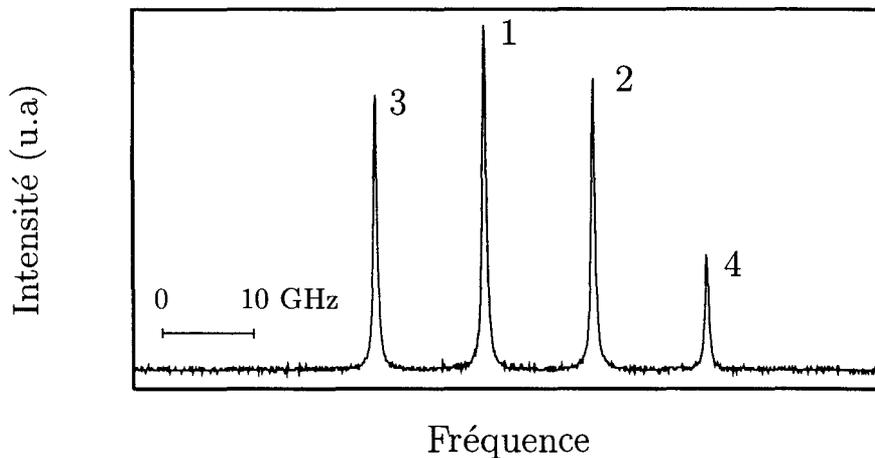


FIG. 1.7 – Exemple de spectre optique du laser YAG à quatre modes longitudinaux numérotés par ordre croissant du plus fort au plus faible.

contenant un nombre  $K$  de jonctions de Josephson couplées. Chaque jonction présente une réponse de même période, amplitude et forme seulement déphasée d'un  $K$ -ième de période par rapport à celle de sa voisine :

$$I_p(t) = I_0\left(t + p\frac{T}{K}\right) \quad p = 1, 2, \dots, K$$

où  $I_0$  est une fonction de période  $T$ . L'intensité totale du système n'est, par conséquent, pas modulée contrairement aux intensités partielles. La première observation expérimentale d'états d'antiphase revient à WIESENFELD *et al.* [70] sur un laser YAG à pompe modulée contenant un cristal doubleur intracavité. Des travaux récents sur le sujet ont étendu la définition de la dynamique d'antiphase [37, 38, 74] aux transitoires. Dans un régime transitoire, l'antiphase est caractérisée par le fait que l'intensité totale délivrée par le système relaxe vers son état stationnaire avec une seule fréquence tandis que chaque oscillateur le fait avec  $K$  fréquences. Notons également, qu'oscillations en phase et en opposition de phase sont des phénomènes connus dans des circuits électroniques couplés (voir Annexe B).

En optique, des progrès considérables ont été réalisés dans l'interprétation de la dynamique des lasers multimodes globalement couplés pour lesquels des oscillations de relaxation et une dynamique d'antiphase ont été prévues théoriquement et observées expérimentalement. La dynamique d'antiphase dans les lasers a été observée dans le cas de régimes impulsionsnels [75, 76], dans le spectre de bruit des états stationnaires [39], dans les transitoires de relaxation vers les états stationnaires [38, 74, 77], dans les régimes chaotiques [40, 78]. Bien que déjà pressenti par STATZ et TANG [29], il apparaît aujourd'hui que les lasers multimodes présentent un comportement collectif auto-organisé ; en particulier BRACIKOWSKI et ROY [79] ont montré que la densité de probabilité de l'intensité totale autour de sa valeur moyenne est gaussienne alors que celle de l'intensité d'un mode est franchement non-gaussienne dans un laser multimode chaotique où les modes sont globalement couplés.

Dans le cas de systèmes à grand nombre de degrés de liberté, les états d'antiphase apparaissent avec une extraordinaire multiplicité : l'existence d'un attracteur d'antiphase implique la coexistence de  $(K - 1)!$  attracteurs d'antiphase. La coexistence de tant d'attracteurs dans l'espace des phases peut avoir d'autres conséquences : le phénomène d'« encombrement » [80, 81] (« attractor crowding ») qui survient lorsque les bassins d'attraction de chaque état deviennent de plus en plus proches au fur et à mesure que  $K$  augmente, permettant de mettre en application un nouveau modèle de sensibilité au bruit.

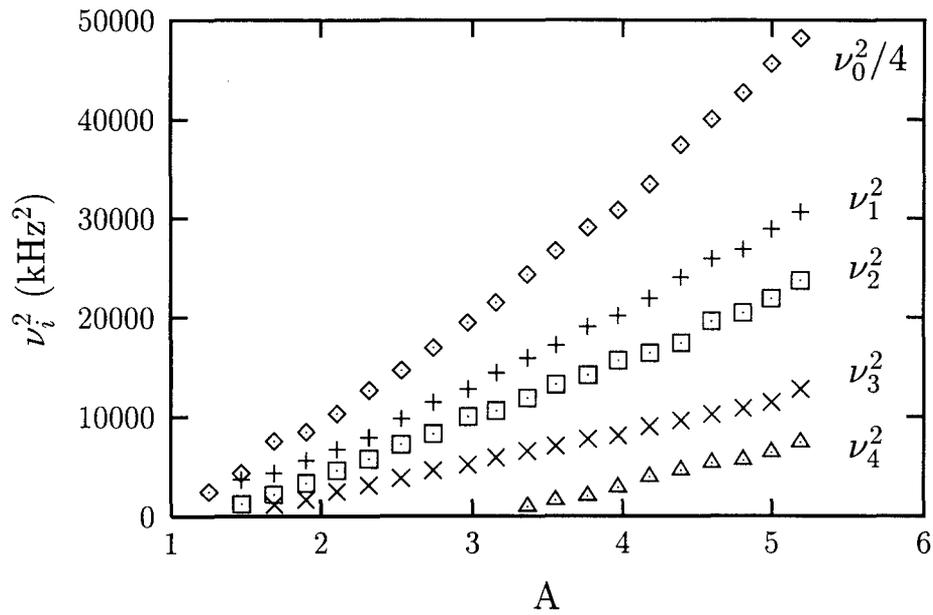


FIG. 1.8 – Etude expérimentale de la variation du carré des fréquences de relaxation avec le paramètre de pompe.

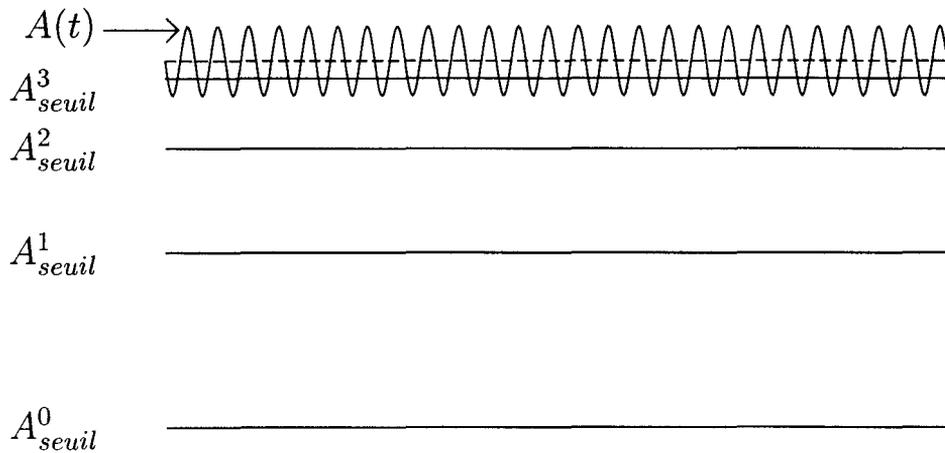


FIG. 1.9 – Schéma illustrant le principe d'observation d'oscillations de relaxation non-compensées sur l'intensité totale en modulant de part et d'autre du seuil d'un mode (ici le mode 4).  $A^j_{seuil}$  représente le seuil du mode  $j + 1$ .

### Observation de la dynamique d'antiphase

Pour étudier l'influence des oscillations de relaxation sur le rayonnement laser, il est nécessaire de quitter la structure autonome du modèle. De façon à reconstruire numériquement le spectre basse fréquence du laser, nous regardons la réponse de celui-ci à une faible modulation harmonique du paramètre de pompe, qui prend alors la forme de l'équation (1.51) où  $\Delta A \ll 1$ . A chaque valeur incrémentée de la fréquence de modulation, nous repérons la valeur maximale de la réponse harmonique des intensités en régime stationnaire. Les points des graphes des figures 1.4 et 1.5 correspondent aux amplitudes exprimées en unités réduites de l'intensité, en absence de modulation. Les spectres sont alors reconstitués points par points avec cette méthode qui reste applicable tant que la forme du signal est purement sinusoïdale.

Les résultats présentés sur les figures 1.4 et 1.5 confirment les multiples résonances basses-fréquences d'un laser multimode. Ces figures correspondent à une situation à  $K = 4$  modes longitudinaux. Tous les spectres montrent un pic de résonance à la pulsation  $\omega_0$ . Celle-ci est la seule qui apparaît dans le spectre de l'intensité totale et peut être interprétée comme la fréquence standard d'oscillation de relaxation  $\omega_R$  visible sur le spectre du laser monomode. L'expression analytique de la fréquence  $\omega_0$  peut être approximée de façon excellente par celle de  $\omega_R$  en admettant  $G \gg 1$  [37, 38, 41]. Les spectres des intensités modales manifestent en plus du pic à  $\omega_0$ , un groupe de  $(K - 1)$  basses fréquences de relaxation. Ces dernières correspondent à des oscillations en antiphase qui se compensent globalement pour donner un spectre d'intensité totale dans lequel ces composantes sont absentes. Ces observations traduisent une forte corrélation entre les intensités des différents modes. Ces basses fréquences sont fonction de  $A$ ,  $G$ ,  $K$  mais également des gains des différents modes. Ainsi, si plusieurs modes ont des gains identiques, un effet de dégénérescence des fréquences peut s'observer : les spectres affichent alors un nombre de fréquences de relaxation inférieur à  $K$ .

Pour mesurer expérimentalement les fréquences de relaxation, nous avons enregistré les spectres radiofréquences de fluctuation des intensités. Cette méthode possède l'avantage de ne nécessiter aucune modification du système. Pour éviter toute confusion avec les notations de l'étude numérique, nous avons choisi de noter ces fréquences (en Hertz) par la lettre  $\nu$  (la lettre  $\omega$  étant spécifiquement réservée aux fréquences sans dimension).

La figure 1.6 illustre les spectres de puissance expérimentaux de l'intensité de chaque mode et de l'intensité totale dans un laser à quatre modes longitudinaux. La fréquence standard de relaxation se situe à  $\nu_0 = 166$  kHz. Les basses fréquences de relaxation, présentes sur les spectres modaux, sont  $\nu_1 = 63$  kHz,  $\nu_2 = 49$  kHz,  $\nu_3 = 33$  kHz. Le spectre optique du laser pour

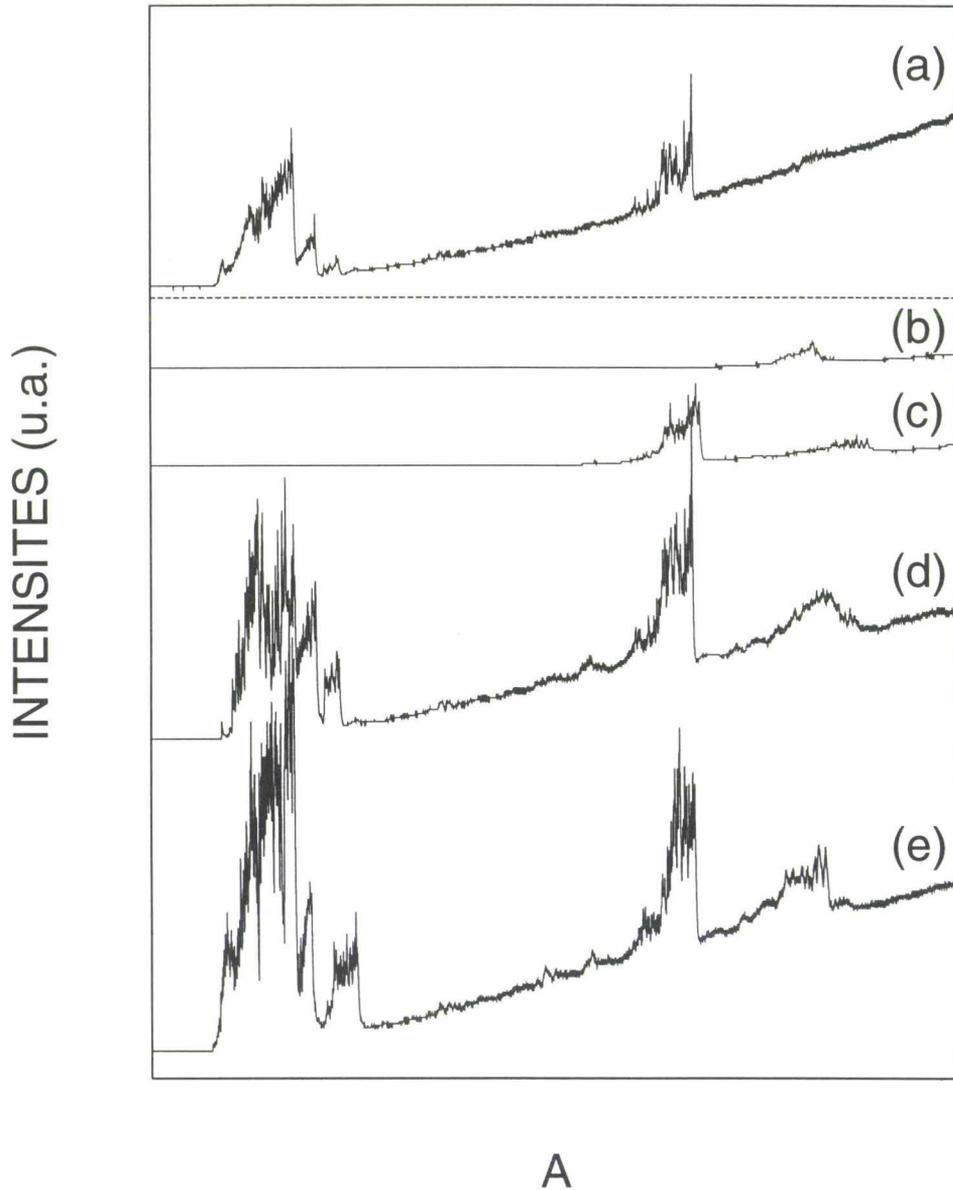


FIG. 1.10 - Caractéristique  $I = f(A)$  du laser. Le paramètre  $A$  est balayé et modulé de façon sinusoïdale. A chaque naissance d'un nouveau mode, la caractéristique  $I_{total}(A)$  du laser YAG montre des oscillations non-compensées. La courbe (a) représente l'intensité totale, les courbes (b) à (e) les intensités des modes 4 à 1 respectivement.

cette situation est indiquée sur la figure 1.7 et précise clairement que les gains de chaque mode sont différents des autres. Ceci nous protège d'un quelconque effet de dégénérescence sur l'une des fréquences. Le phénomène décrit ici est général ; en effet, nous avons aussi observé la dynamique d'antiphase pour 2, 3, 5 et 6 modes longitudinaux.

Toutes les fréquences de relaxation varient avec le paramètre de pompe  $A$ . Elles augmentent avec lui comme la haute fréquence  $\nu_0$  et lorsque le seuil d'un nouveau mode est atteint, une nouvelle fréquence, partant de la fréquence nulle, apparaît dans les spectres. Bien que n'ayant pas été prouvé analytiquement, il est généralement admis que ces fréquences dépendent quadratiquement du paramètre  $A$  suivant une loi du type  $\nu_j^2 \sim (A - A_{seuil}^j)$  où  $A_{seuil}^j$  est la valeur de  $A$  au seuil du mode  $j + 1$ . La figure 1.8 en donne une confirmation. Il est également admis que l'apparition d'un nouveau mode influence sur la pente  $\Delta\nu_0^2/\Delta A$  comme l'indiquent les références [38, 82, 83]. Mais ce phénomène n'a pas pu être observé ici.

#### 1.4.4 Non-compensation des oscillations près du seuil des modes

Dans les études du laser soumis à un forçage périodique (section 1.4.2), il est apparu que près du seuil d'un mode, les oscillations impulsionnelles qui prennent naissance, sont présentes également dans l'intensité totale. En d'autres termes, la compensation basse fréquence responsable du comportement en antiphase du laser est ici absente. Cette observation s'effectue si l'amplitude de modulation est suffisante pour atteindre le seuil du mode en question (voir figure 1.9). Des phénomènes similaires, montrant transitoires et oscillations de relaxation, ont déjà été observés numériquement et expérimentalement dans un laser bimode, modulé au voisinage du mode faible [84]. Ce fait remarquable peut être utilisé à bon escient en vue de déterminer le nombre de modes longitudinaux qui peuvent osciller simultanément sans avoir recours pour cela à un analyseur de spectre optique.

La méthode consiste à appliquer une conduite sinusoïdale à la pompe, de fréquence  $\nu$  fixée, qui permet de moduler le laser de part et d'autre du seuil d'oscillation du mode considéré, superposée à une variation linéaire lente du paramètre de pompe qui permet d'atteindre successivement les seuils des différents modes. De façon à ne pas exciter les fréquences de relaxation des modes déjà présents, la fréquence  $\nu$  de la modulation sinusoïdale a été choisie inférieure à 15 kHz. Dans ces conditions, le paramètre de pompage peut alors

être décrit par l'expression :

$$A(t) = \frac{A_{max} - A(0)}{\Delta t} t + m \cos(2\pi t) \quad (1.52)$$

où  $A(0)$  et  $A_{max}$  sont les valeurs initiale et finale de  $A$  respectivement,  $\Delta t$  le temps de balayage de la pompe entre ces deux valeurs.

Le résultat est présenté sur la figure 1.10 pour  $\nu = 14,9$  kHz. La caractéristique  $I_{total} = f(A)$  du laser présente des oscillations seulement pour certaines valeurs de  $A$ . Nous avons reporté en parallèle, sur cette figure, la caractéristique de chaque mode : il apparaît clairement que ces oscillations se produisent au seuil des modes. Ainsi pour la valeur maximale du paramètre  $A$  atteinte, quatre séries d'oscillations sont dénombrés sur l'enregistrement de l'intensité totale : cela nous indique que quatre modes longitudinaux oscillent.

Cependant, cette méthode possède un pouvoir séparateur limité lié à la largeur du domaine dans lequel les oscillations apparaissent comme le montre la figure 1.10 pour les deux premiers modes. Ainsi, pour pouvoir évaluer correctement le nombre de modes, il est nécessaire que leurs seuils soient bien séparés. Il apparaît en outre que pour les plus faibles modes l'amplitude des oscillations est fortement estompée. Dans notre exemple, les oscillations correspondant à la naissance du mode 4 sont peu marquées sur l'intensité totale.

### 1.4.5 Conclusion

Cette section nous a permis de nous familiariser avec le comportement en antiphase et la dynamique qui en découle. La dynamique temporelle d'un tel système nous paraît à la fois très riche et très complexe de telle sorte qu'il est très difficile de recenser la totalité des formes possibles de signaux.

Nous avons observé numériquement et expérimentalement sur le spectre de bruit du laser la dynamique d'antiphase. Le laser multimode présente plusieurs fréquences de relaxation : celles-ci ne sont visibles que sur les intensités modales. Or, il peut être important de connaître le nombre de ces fréquences car elles fixent une limite inférieure à la complexité du modèle étudié. Une question nous semble alors prendre toute son importance : existe-t-il un moyen de révéler dans le spectre de  $I_{total}$  les basses fréquences habituellement absentes ? La technique que nous proposons pour étudier ce problème, et que nous développons dans la section suivante, est celle de la contre-réaction.

## 1.5 Le laser soumis à une contre-réaction dérivative

### 1.5.1 Introduction

La technique de contre-réaction est très fréquemment utilisée dans l'étude des lasers. Elle sert en général à réduire les fluctuations de leur intensité de sortie dans des applications qui exigent une grande stabilité. En réalité, elle affecte fondamentalement le mécanisme de génération des photons et fut même testée pour obtenir des états comprimés du champ électromagnétique [85].

Du point de vue de la dynamique, cette technique paraît excellente pour créer des instabilités. ARECCHI *et al.* [86] ont obtenu du chaos dans un laser CO<sub>2</sub> monomode à pertes modulées par un signal proportionnel à l'intensité de sortie du laser. En outre, lorsque le gain de la boucle de contre-réaction croît de façon monotone, différents types d'instabilités peuvent être successivement mis en évidence [87, 88]. Le schéma de contre-réaction introduit dans ce cas une nouvelle variable dynamique et par suite le troisième degré de liberté nécessaire à l'établissement d'une dynamique chaotique. Cette méthode a permis de plus d'observer du chaos dans des systèmes passifs non-linéaires [89, 90].

Parallèlement, la contre-réaction est largement employée dans le contrôle du chaos. Les techniques utilisées en tant qu'applications de la méthode de OTT, GREBOGI et YORKE seront développées à la section 3.1. En fait, un laser soumis à une contre-réaction est un système complètement différent d'un laser en absence de contre-réaction et ceci peut être utilisé pour créer une variété de phénomènes dynamiques nouveaux. L'une des techniques les plus intéressantes parmi celles citées consiste à fixer le niveau de contre-réaction proportionnellement à la dérivée de l'intensité de sortie.

La contre-réaction dérivative n'altère pas la position des états stationnaires mais seulement leur stabilité. En effet, le coefficient d'amortissement caractérisant la relaxation vers l'état stationnaire, c'est à dire la partie réelle de la racine caractéristique, varie avec la contre-réaction. Ceci peut être utilisé positivement pour extraire du spectre de bruit, de faibles résonances masquées par de plus fortes.

Le laser multimode offre la possibilité théorique et pratique d'une grande diversité de schémas de contre-réaction dérivative. On peut se servir de l'intensité totale, de l'intensité d'un mode particulier ou d'une combinaison linéaire de l'intensité totale et de l'une des intensités modales. Nous avons choisi, dans notre terminologie, d'appeler contre-réaction sélective, une

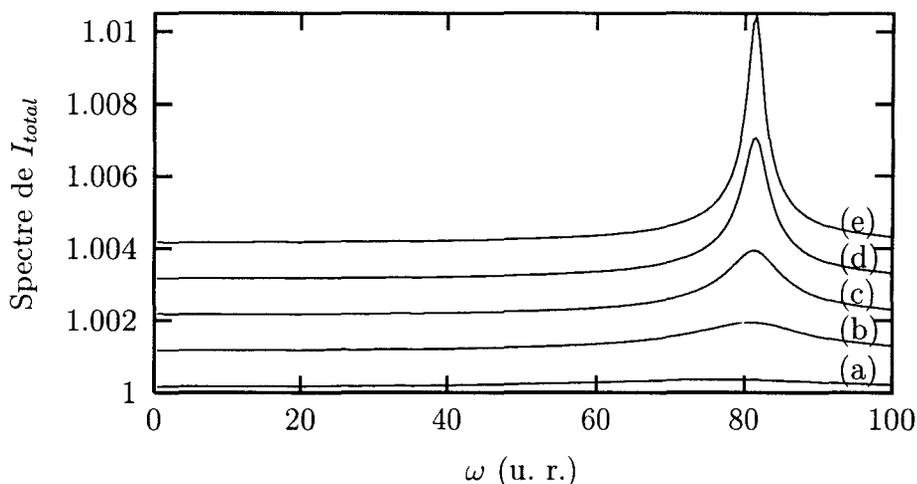


FIG. 1.11 – *Spectre numérique de l'intensité totale en présence d'une contre-réaction négative nourrie à partir de l'intensité totale pour différentes valeurs de  $A_{total}$ . Les valeurs des coefficients de contre-réaction sont  $A_{\mu} = 0$  et  $A_{total} = (a) 0 (b) -0,0001 (c) -0,0004 (d) -0,001 (e) -0,003$ . Chaque courbe a été décalée verticalement de 0,001 unité par rapport à la précédente pour permettre une meilleure lisibilité.*

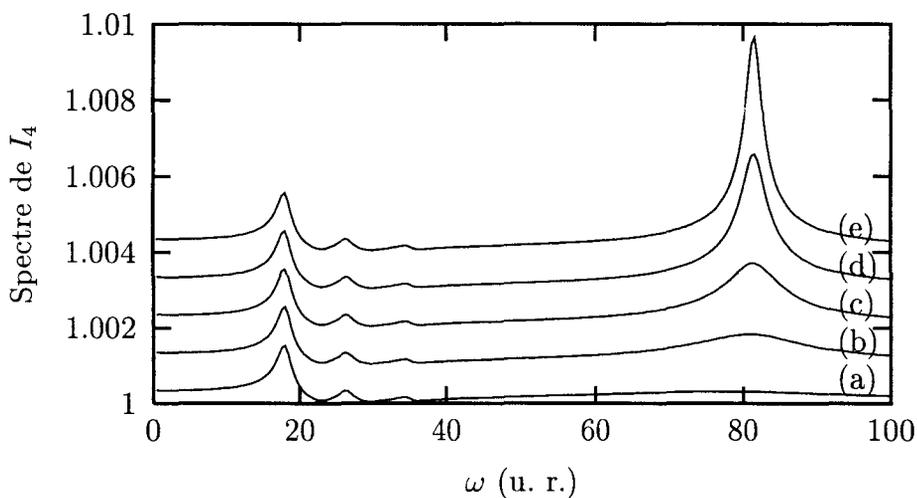


FIG. 1.12 – *Spectre numérique du mode 4 en présence d'une contre-réaction négative nourrie à partir de l'intensité totale pour des conditions identiques à celles de la figure 1.11.*

contre-réaction réalisée uniquement à partir de l'intensité d'un mode donné et contre-réaction combinée, une contre réaction qui utilise à la fois l'intensité totale et l'une des intensités modales.

Dans ce qui suit, nous montrons tout d'abord que la stabilité des solutions stationnaires est affectée par la contre-réaction. Nous détaillons ensuite une étude numérique et expérimentale de l'influence d'une contre-réaction dérivative sélective ou combinée sur le spectre basse fréquence d'un laser multimode de classe B. Suivant la valeur et le signe donnés aux coefficients de la combinaison linéaire, il est possible d'induire des régimes dynamiques particuliers : nous discutons de ces régimes et des scénarios obtenus.

### 1.5.2 Analyse de stabilité linéaire

En pratique, le signal de sortie du laser est réinjecté dans la diode de pompe : c'est le paramètre de pompage  $A$  qui est affecté. D'une façon générale celui-ci s'écrit :

$$A(\tau) = A_0 + A_{total} \frac{dI_{total}}{d\tau} + A_\mu \frac{dI_\mu}{d\tau} \quad (1.53)$$

où  $A_{total}$  et  $A_\mu$  représentent les gains de la boucle de contre-réaction des signaux proportionnels respectivement à l'intensité totale et à l'intensité d'un mode.

Dans nos notations, nous désignons par  $j$  l'indice d'un mode quelconque de notre système et par  $\mu$  l'indice du mode particulier qui nourrit la contre-réaction. L'expression du paramètre  $A$  ci-dessus est introduite dans le système (1.26). Les états stationnaires calculés dans la section 1.2.2 restent valables, seule leur stabilité est affectée.

Les coefficients de la matrice  $L$  définie par (1.33) deviennent :

$$l_{j,q} = 0 \quad (1.54)$$

$$l_{j,K+1} = \frac{G \left( \bar{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j} \right)}{S_1 - \left( K - \frac{1}{2} \right) \bar{N}_0} \quad (1.55)$$

$$l_{j,K+1+j} = - \frac{G \left( \bar{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j} \right)}{2 \left[ S_1 - \left( K - \frac{1}{2} \right) \bar{N}_0 \right]} \quad (1.56)$$

$$l_{j,K+1+q} = 0 \quad (1.57)$$

$$l_{K+1,j} = -1 \quad (1.58)$$

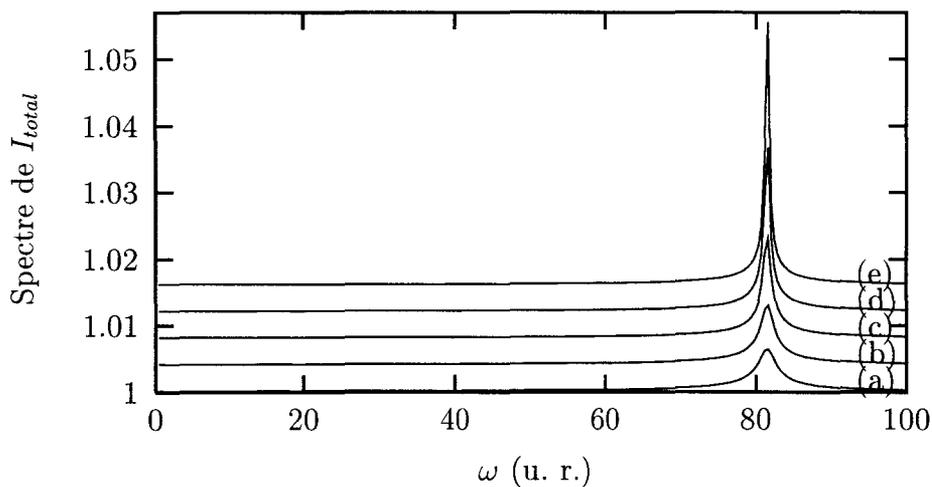


FIG. 1.13 – *Spectre numérique de l'intensité totale en présence d'une contre-réaction positive nourrie à partir de l'intensité totale pour différentes valeurs de  $A_{total}$ . Les valeurs des coefficients de contre-réaction sont  $A_{\mu} = 0$  et  $A_{total} = (a) 0 (b) 0,00005 (c) 0,0001 (d) 0,00013 (e) 0,00015$ . Chaque courbe a été décalée de  $0,004$  unité par rapport à la précédente pour permettre une meilleure lisibilité.*

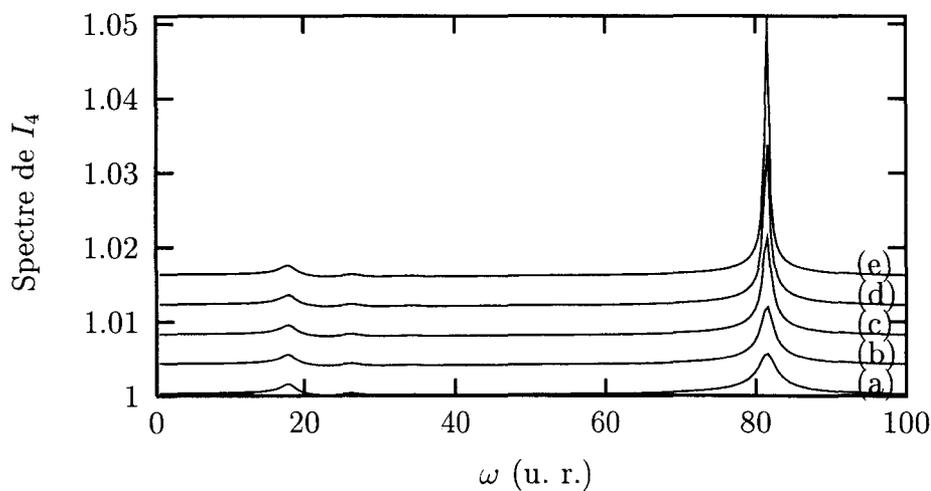


FIG. 1.14 – *Spectre numérique du mode 4 en présence d'une contre-réaction positive nourrie à partir de l'intensité totale pour des conditions identiques à la figure 1.13.*

$$l_{K+1,K+1} = \frac{1}{S_1 - (K - \frac{1}{2})\overline{N}_0} \left[ -\frac{1}{2}\overline{N}_0 + A_{total}G(K\overline{N}_0 - S_1) + A_\mu G\left(\overline{N}_0 - \frac{1}{\gamma_\mu}\right) \right] \quad (1.59)$$

$$l_{K+1,K+1+j} = \frac{1}{2[S_1 - (K - \frac{1}{2})\overline{N}_0]} \left[ \left(\overline{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j}\right) - A_{total}G\left(\overline{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j}\right) - A_\mu G\left(\overline{N}_0 - \frac{1}{\gamma_\mu}\right) \delta_{j\mu} \right] \quad (1.60)$$

$$l_{K+1+j,j} = 2 - \gamma_j \overline{N}_0 \quad (1.61)$$

$$l_{K+1+j,q} = 2\left(\overline{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j}\right) \quad (1.62)$$

$$l_{K+1+j,K+1} = \frac{\overline{N}_0 - \frac{1}{\gamma_j}}{S_1 - (K - \frac{1}{2})\overline{N}_0} \quad (1.63)$$

$$l_{K+1+j,K+1+j} = -\frac{\overline{N}_0}{S_1 - (K - \frac{1}{2})\overline{N}_0} \quad (1.64)$$

$$l_{K+1+j,K+1+q} = 0 \quad (1.65)$$

L'expression des coefficients que nous venons d'établir, nous amène à constater que la contre-réaction influe sur la stabilité du laser. En effet, par comparaison aux équations 1.34-1.45, les éléments de la ligne  $K + 1$  relatifs à  $d\tilde{n}_0/dt$  ont été modifiés. Le calcul analytique des racines de l'équation caractéristique est compliqué; une résolution numérique est cependant possible en fixant le nombre de modes. Ce travail a été réalisé dans le cas de la contre-réaction combinée [44]: l'augmentation de  $A_\mu$ , utilisé en tant que paramètre de contrôle, provoque un changement de signe des parties réelles  $\delta_{j-1}$  de ces valeurs propres. Les résultats seront discutés dans la section suivante.

### 1.5.3 Influence de la contre-réaction sur le comportement du laser : résultats numériques

Notre but est de vérifier l'influence d'une contre-réaction dérivative sur les propriétés du bruit des lasers de classe B, plus particulièrement sur le spectre radiofréquence des oscillations de relaxation. De façon spécifique, nous voulons étudier l'effet d'une telle contre-réaction sur les oscillations basses fréquences. Dans ce qui suit nous nous intéressons spécifiquement au

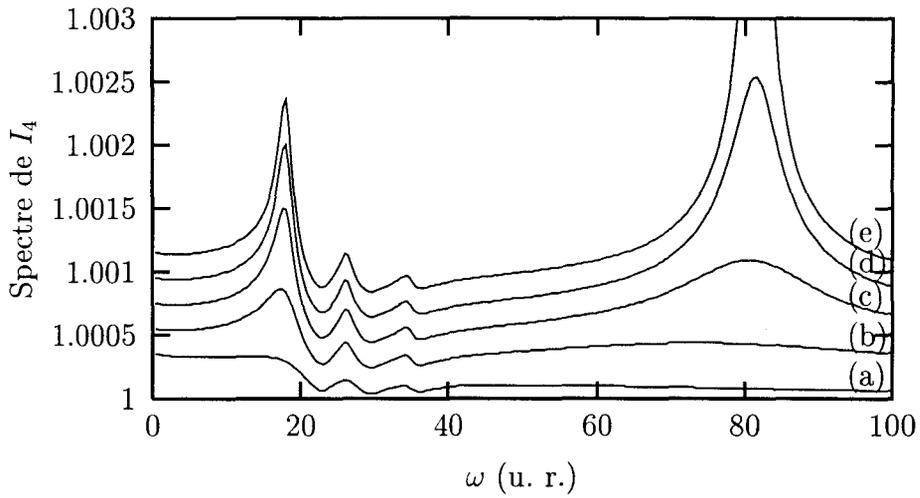


FIG. 1.15 – Spectre numérique du mode 4 en présence d’une contre-réaction négative nourrie à partir de l’intensité du mode 4 pour différentes valeurs de  $A_\mu$ . Les valeurs des coefficients de contre-réaction sont  $A_{total} = 0$  et  $A_\mu =$  (a) 0 (b) -0,004 (c) -0,015 (d) -0,05 (e) -0,15. Chaque courbe a été décalée de 0,004 unité par rapport à la précédente pour permettre une meilleure lisibilité.

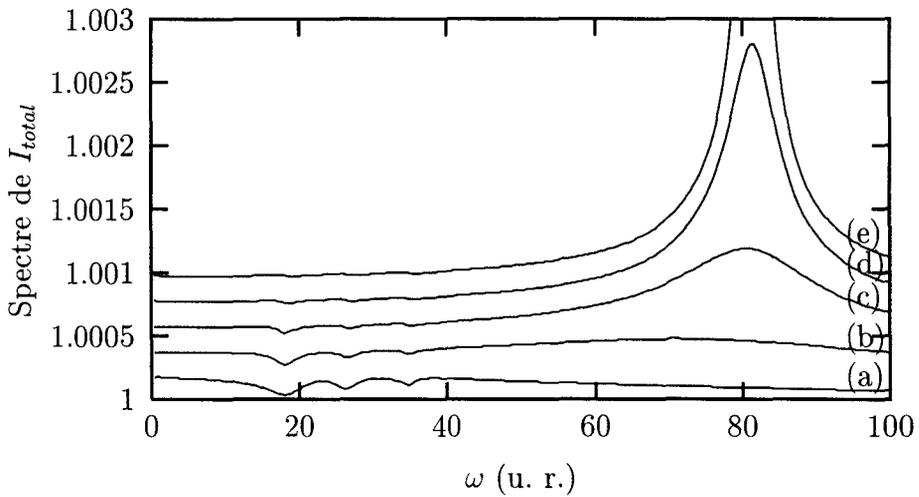


FIG. 1.16 – Spectre numérique de l’intensité totale en présence d’une contre-réaction négative nourrie à partir de l’intensité du mode 4 pour des conditions identiques à la figure 1.15.

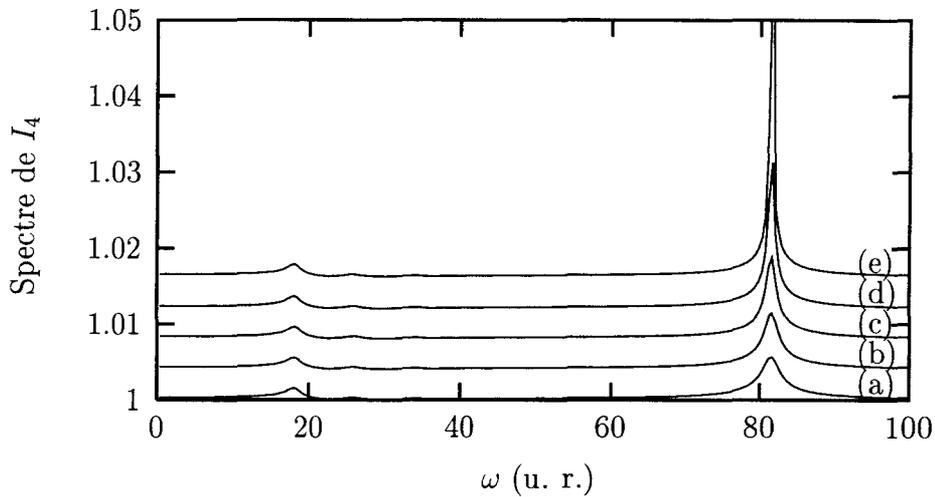


FIG. 1.17 – Calcul numérique du spectre du mode 4 en présence d'une contre-réaction positive nourrie à partir de l'intensité du mode 4 pour différentes valeurs de  $A_\mu$ . Les valeurs des coefficients de contre-réaction sont  $A_{total} = 0$  et  $A_\mu = (a) 0 (b) -0,004 (c) -0,015 (d) -0,05 (e) -0,15$ . Chaque courbe a été décalée de 0,004 unité par rapport à la précédente pour permettre une meilleure lisibilité.

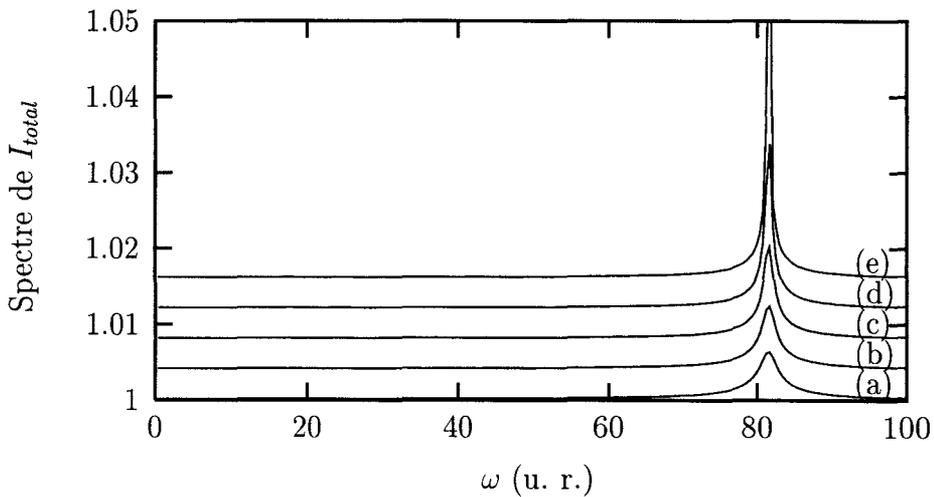


FIG. 1.18 – Calcul numérique du spectre de l'intensité totale en présence d'une contre-réaction positive nourrie à partir de l'intensité du mode 4 pour des conditions identiques à la figure 1.17.

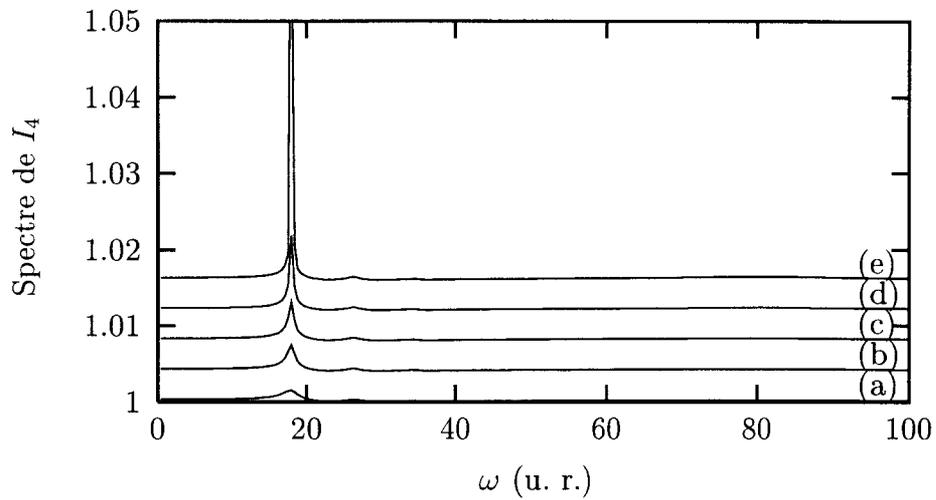


FIG. 1.19 – *Spectre numérique du mode 4 en présence d'une contre-réaction combinée pour différentes valeurs de  $A_\mu$ . Les valeurs des coefficients de contre-réaction sont  $A_{total} = -0,005$  et  $A_\mu = (a) 0 (b) 0,020 (c) 0,025 (d) 0,030 (e) 0,035$ . Chaque courbe a été décalée de  $0,004$  unité par rapport à la précédente pour permettre une meilleure lisibilité.*

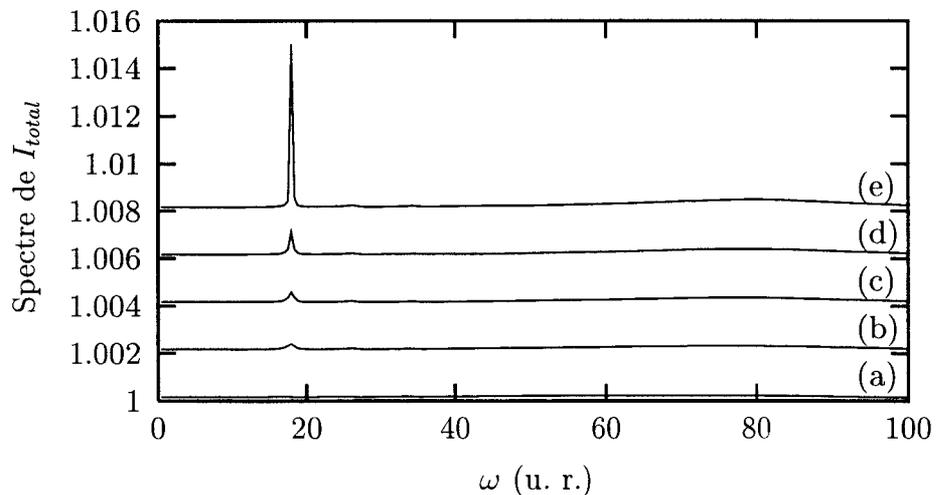


FIG. 1.20 – *Spectre numérique de l'intensité totale en présence d'une contre-réaction combinée pour des conditions identiques à la figure 1.19.*

cas  $K = 4$ . Nous exposons une étude numérique du laser soumis à une contre-réaction dérivative nourrie successivement par l'intensité totale, l'intensité d'un mode puis par une combinaison linéaire de ces deux dernières.

Le spectre numérique du laser libre est celui de la figure 1.4 ; les fréquences de relaxation restent les mêmes. La méthode d'observation des spectres numériques reste identique à celle exposée à la section 1.3.3 pour l'étude du spectre du régime relaxé : nous appliquons une très faible modulation sinusoïdale et nous reconstruisons la réponse fréquentielle du laser par incrémentation de la fréquence de modulation. Cette méthode n'est strictement valable que si la réponse du laser est harmonique, ce que nous avons vérifié au cours des simulations.

#### Contre-réaction dérivative à partir de $I_{total}$ :

Les coefficients  $A_{total}$  et  $A_j$  satisfont à :  $A_{total} \neq 0$ ,  $A_j = 0$ . Les résultats sont présentés sur les figures 1.11, 1.12, 1.13 et 1.14. Une telle contre-réaction influence fortement les oscillations de relaxation non-compensées à la fréquence  $\omega_0$ , mais est sans effet sur le groupe des basses fréquences. En effet, les figures 1.11 et 1.13 montrent qu'il n'y a aucune brisure de la dynamique d'antiphase, les fréquences  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  restant absentes du spectre de l'intensité totale. D'autre part, l'amplitude et la largeur des pics de résonance à ces fréquences ne sont absolument pas modifiées lorsque  $A_{total}$  varie (figures 1.12 et 1.14). Si  $A_{total} < 0$ , la hauteur du pic de résonance à  $\omega_0$  diminue avec  $A_{total}$ , pour disparaître complètement dès que  $|A_{total}| \geq 0,003$ . Cette diminution de l'amplitude de la composante spectrale s'accompagne d'une augmentation de sa largeur à mi-hauteur. Si, au contraire,  $A_{total}$  est positif, la résonance à  $\omega_0$  est excitée et l'augmentation de l'amplitude spectrale s'accompagne d'une diminution de sa largeur à mi-hauteur. Il ressort de ces observations que ce type de contre-réaction permet de stabiliser ou de déstabiliser l'intensité totale du laser.

#### Contre-réaction dérivative sélective :

Les coefficients  $A_{total}$  et  $A_j$  satisfont à :  $A_{total} = 0$ ,  $A_\mu \neq 0$ ,  $A_j = 0$  avec  $j = 1, \dots, 4$  et  $j \neq \mu$ . Ce cas est illustré sur les figures 1.15, 1.16, 1.17 et 1.18. Une telle contre-réaction influe à la fois sur la fréquence  $\omega_0$  et la basse fréquence  $\omega_{\mu-1}$ . Si  $A_\mu < 0$  (figures 1.15 et 1.16), l'amplitude et la largeur des résonances aux fréquences en question diminuent avec  $|A_\mu|$  (stabilisation du laser). Si  $A_\mu > 0$ , au contraire, ces pics augmentent en amplitude avec  $A_\mu$  (déstabilisation du laser) : la compensation basse fréquence est en même temps brisée car la fréquence  $\omega_{\mu-1}$  apparaît dans le spectre de l'intensité

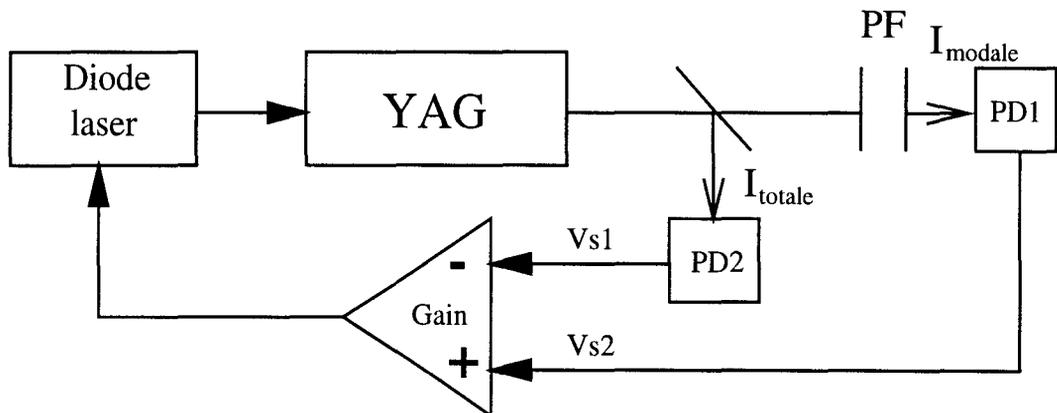


FIG. 1.21 – *Contre-réaction dérivative combinée : le signal de l'intensité totale est appliqué à l'entrée négative du dérivateur, alors que l'intensité de l'un des modes agit sur l'entrée positive.*

totale. Cependant, le pic de résonance à  $\omega_0$  reste prédominant et le laser se déstabilise préférentiellement à cette fréquence.

### Contre-réaction dérivative combinée :

Les coefficients  $A_{total}$  et  $A_j$  satisfont à :  $A_{total} \neq 0$ ,  $A_\mu \neq 0$ ,  $A_j = 0$  avec  $j = 1, \dots, 4$  et  $j \neq \mu$ . Nous venons de voir que la contre-réaction négative a un effet stabilisateur alors que la contre-réaction positive est destabilisatrice du système. L'idée est de combiner les effets observés précédemment : stabiliser le laser à la fréquence  $\omega_0$  et le déstabiliser à une basse fréquence. Nous considérons donc une situation où  $A_{total} < 0$  et  $A_\mu > 0$ . La valeur de  $A_{total}$  est fixée numériquement de façon à compenser la résonance à  $\omega_0$ , tandis que  $A_\mu$  est utilisé en tant que paramètre de contrôle. Les résultats sont présentés sur les figures 1.19 et 1.20. L'accroissement de  $A_\mu$  provoque une déstabilisation du laser à  $\omega_{\mu-1}$  et l'apparition du pic de fréquence  $\omega_{\mu-1}$  dans le spectre de  $I_{total}$ . Si on continue à augmenter  $A_\mu$ , le système se destabilise de nouveau : cette destabilisation est causée par l'apparition du pic de fréquence  $\omega_0$  dans le spectre basse-fréquence. Une étude numérique réalisée par KHANDOKHIN et KHANIN [44] (*cf.* Annexe A) sur les parties réelles  $\delta_{j-1}$  des valeurs propres des racines de l'équation caractéristique a mis en avant trois domaines distincts lorsque le paramètre  $A_\mu$  augmente :

- Pour les faibles valeurs de  $A_\mu$ , toutes les oscillations de relaxation sont amorties. Au fur et à mesure que  $A_\mu$  augmente, le pic de résonance à la fréquence  $\omega_{\mu-1}$  devient plus étroit. Le même phénomène, augmentation d'amplitude et amincissement du pic de résonance, survient dans le spectre de l'intensité totale.
- Dans le deuxième domaine, la partie réelle  $\delta_{\mu-1}$  est positive et une auto-modulation périodique à la fréquence  $\omega_{\mu-1}$  est observée. L'amplitude de modulation s'accroît avec  $A_\mu$ .
- Dans le troisième domaine, la haute fréquence d'oscillations de relaxation à la fréquence  $\omega_0$  devient non-amortie et un régime pulsé chaotique s'établit pour les plus grandes valeurs des coefficients de contre-réaction.

Un comportement similaire est observé si n'importe lequel des modes est choisi, à l'exception du plus fort, pour conduire la contre-réaction.

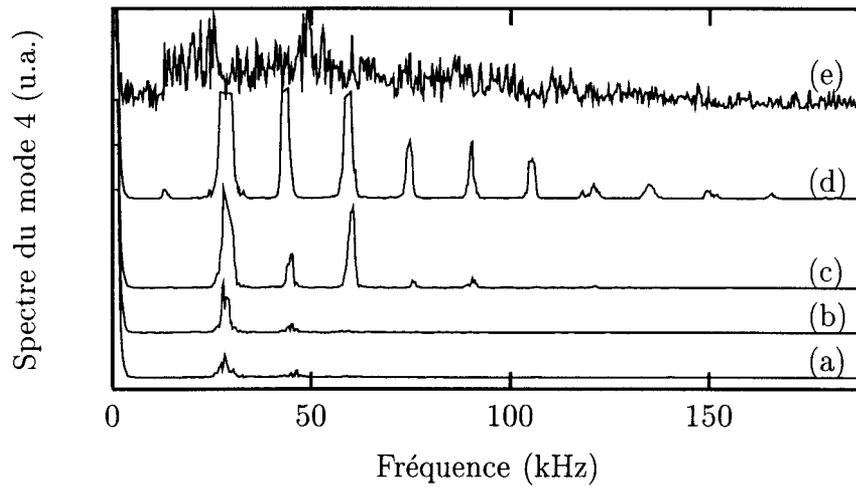


FIG. 1.22 – Spectre de puissance de bruit du mode 4 du laser soumis à une contre-réaction du type  $A_{total}dI_t/dt + A_4dI_4/dt$  pour différentes valeurs du paramètre  $A_4$  : (a)  $A_4/A_{total} = -1,96$  (b)  $-2,94$  (c)  $-5,3$  (d)  $-5,89$  (e)  $-10$ .

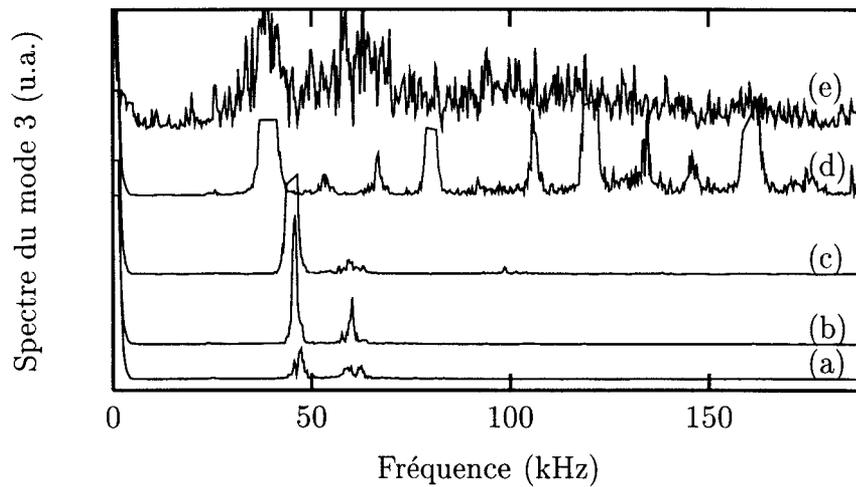


FIG. 1.23 – Spectre de puissance de bruit du mode 3 du laser soumis à une contre-réaction du type  $A_{total}dI_t/dt + A_3dI_3/dt$  pour différentes valeurs du paramètre  $A_3$  : (a)  $A_3/A_{total} = -2,35$  (b)  $-3,04$  (c)  $-3,14$  (d)  $-4,61$  (e)  $-4,71$ .

### 1.5.4 Résultats expérimentaux et discussion

Les expériences ont été réalisées à l'aide du laser YAG décrit dans la section 1.3. Pour constituer le circuit de contre-réaction dérivative, les signaux électriques  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  provenant des photodiodes sont envoyés sur les deux entrées d'un circuit dérivateur (voir figure 1.21). Dans le cas de la contre-réaction combinée le signal représentant l'intensité totale est envoyé sur l'entrée positive du dérivateur et celui proportionnel à l'intensité d'un mode sur l'entrée négative. La sortie du dérivateur, proportionnelle à la différence pondérée des dérivées des deux quantités précédentes, est introduite dans la commande de diode laser. La fréquence de coupure (2 MHz) des amplificateurs utilisés excède largement le domaine des fréquences de relaxation (qui sont typiquement de la centaine de kHz).

Il ne nous a pas été possible expérimentalement de déterminer les gains  $A_\mu$  et  $A_{total}$  de chacune des boucles. Mais nous avons pu, dans le cadre de la contre-réaction combinée, mesurer leur rapport. Enfin, le montage expérimental tel que présenté sur la figure 1.21 ne nous permet de visualiser que le spectre de bruit radiofréquence du mode qui nourrit la contre-réaction : l'observation des spectres des autres modes aurait nécessité un second analyseur de spectre optique.

Dans un premier temps, nous avons utilisé une contre-réaction dérivative sélective positive. Nous avons observé une excitation simultanée d'une composante basse fréquence et de la composante à la fréquence  $\nu_0$ , comme prévue dans l'étude théorique. Lorsque le coefficient de la contre-réaction augmente, le système se déstabilise vers un comportement chaotique. Dans ce type d'expérience, la mise en valeur de la relaxation basse fréquence est obtenue pour de très faibles niveaux de contre-réaction et le chaos est rapidement atteint. Ainsi, la finesse requise pour contrôler le paramètre  $A_\mu$  ne nous a pas permis de poursuivre plus en avant la comparaison qualitative avec l'étude numérique.

Dans un deuxième temps, nous avons utilisé une contre-réaction dérivative combinée comme définie par le montage expérimental 1.21. Dans cette situation, l'information provenant de l'intensité totale est introduite dans la boucle de contre-réaction. Nous avons considéré le cas où les coefficients  $A_{total}$  et  $A_\mu$  remplissent la condition  $A_{total} < 0$  et  $A_\mu > 0$  pour réaliser à la fois l'amortissement à la fréquence  $\nu_0$  et l'excitation à une basse fréquence.

Les expérimentations ont été réalisées avec  $\mu = 1$  à 4 pour déterminer de quelle façon la sélection de la composante spectrale affecte les propriétés de bruit du laser.  $A_{total}$  est fixé à une valeur qui annule la composante spectrale à  $\nu_0$  et  $A_\mu$  est utilisé en tant que paramètre de contrôle. Le spectre expérimental du laser libre est celui de la figure 1.6. Les figures 1.22, 1.23,

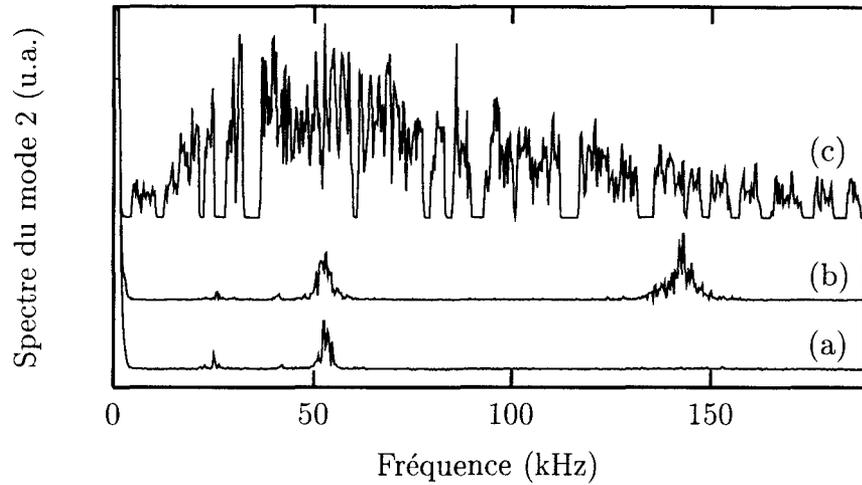


FIG. 1.24 – Spectre de puissance de bruit du mode 2 pour différentes valeurs de  $A_2$ . La contre-réaction est  $A_{total}dI_t/dt + A_2dI_2/dt$ . Les valeurs de  $A_2/A_{total}$  sont : (a)  $-3,92$  (b)  $-5,02$  (c)  $-5,10$ .

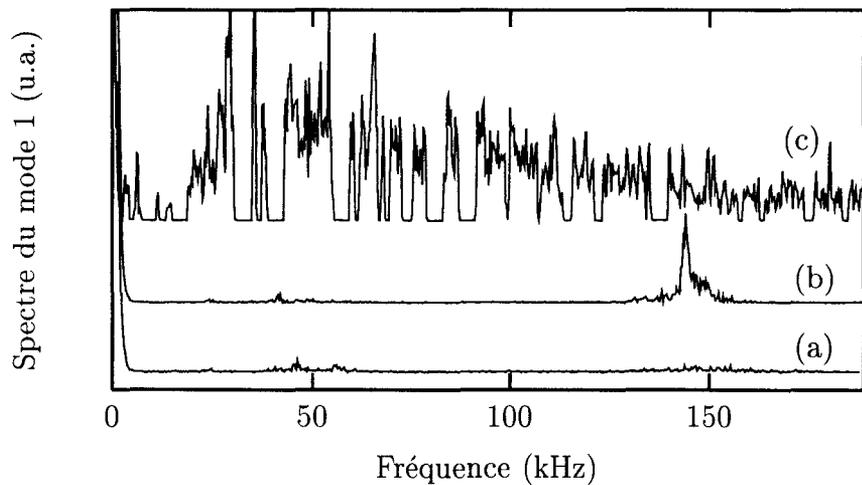


FIG. 1.25 – Spectre de puissance de bruit du mode 1 pour différentes valeurs de  $A_1$ . La contre-réaction est  $A_{total}dI_t/dt + A_1dI_1/dt$ . Les valeurs de  $A_1/A_{total}$  sont : (a)  $-2,53$  (b)  $-3,92$  (c)  $-4,12$ .

1.24 et 1.25 montrent les effets de la contre-réaction sur les modes 4, 3, 2 et 1 respectivement. Deux types de comportements, qui dépendent principalement du choix du mode particulier  $\mu$  qui conduit la contre-réaction, ont pu être observés. Dans toutes les situations, le système se déstabilise lorsque  $A_\mu$  augmente et atteint le chaos pour de forts niveaux de contre-réaction mais les transitions sont différentes. Le premier type de scénario peut être obtenu pour les modes 2, 3 et 4 mais n'a jamais été observé pour le mode 1 pour lequel le second type de scénario est valable.

Les figures 1.22 et 1.23 illustrent le premier type de scénario. Elles montrent différents spectres de puissance des intensités des modes 3 et 4 respectivement lorsque l'intensité d'un de ceux-ci alimente la contre-réaction combinée. Les spectres de (a) à (e) sont obtenus pour des valeurs croissantes de  $A_4$  ou  $A_3$ . Considérant par exemple la figure 1.22, pour de faibles valeurs de contre-réaction (a), nous observons les pics de bruit à  $\nu_2 = 49$  kHz et  $\nu_3 = 33$  kHz, présents dans le spectre de bruit du laser libre de la figure 1.6. Lorsque  $A_4$  augmente, le laser se déstabilise et son intensité est modulée à la fréquence  $\nu_3$ , produisant un pic intense à cette fréquence dans le spectre (c); étant donné les faibles composantes harmoniques, on peut supposer pour la courbe (c) une modulation presque purement sinusoïdale à  $\nu_3$ . Pour des valeurs plus grandes de  $A_4$ , des harmoniques de  $\nu_3$  et des combinaisons linéaires avec  $\nu_2$  (courbe (d)) apparaissent. Les valeurs extrêmes de  $A_4$  utilisées dans cette expérience (courbe (a)) conduisent au chaos avec l'apparition soudaine d'un spectre large. Pour la figures 1.23, des observations similaires peuvent être faites en considérant cette fois la fréquence  $\nu_2$  à la différence près que la contre-réaction induit une diminution des fréquences de relaxation. En effet, lors du passage de la courbe 1.23(c) à 1.23(d), les fréquences  $\nu_2$  et  $\nu_1$  diminuent et deviennent  $\nu'_2 = 41$  kHz et  $\nu'_1 = 55$  kHz. Ce déplacement des fréquences n'a pas été observé sur les spectres numériques.

Les figures 1.24 et 1.25 illustrent le second type de scénario, c'est-à-dire la transition directe vers le chaos, qui apparaît ici avec  $\mu = 2$  et  $\mu = 1$  respectivement. Considérons, à titre d'exemple, la figure 1.24. Le coefficient  $A_2$  augmente de (a) à (c). La courbe (a) montre que la contre-réaction combinée induit une compensation parfaite de la fréquence de relaxation à  $\nu_0$ . L'augmentation du paramètre  $A_2$  provoque une déstabilisation du système à  $\nu_0$ , alors que l'influence sur le pic à  $\nu_1$  est négligeable. La courbe (b)  $A_2/A_{total} = -5,02$  se situe juste en dessous du seuil du chaos qui se produit à  $A_2/A_{total} = -5,10$  avec l'apparition brusque d'un spectre large. En dessous de cette valeur ( $|A_2/A_{total}| = +5,10$ ), le laser opère en régime stationnaire continu. Il est à noter, là aussi, que la contre-réaction, présentée sur les figures expérimentales, provoque une diminution des fréquences: 55 kHz au lieu de 63 kHz pour  $\nu_1$  (figure 1.24). La figure 1.25 montre qualitativement

les mêmes comportement.

Les études théoriques et expérimentales ont mis en évidence en général trois domaines (premier scénario) de comportement dynamique du laser en présence d'une contre-réaction dérivative combinée (parfois deux seulement sont accessibles (second scénario)). Les trois domaines du premier scénario sont facilement identifiés lorsque le réglage fin de  $A_{total}$  permet d'annuler la haute fréquence de relaxation. Les observations pour différentes valeurs de  $A_\mu$  sont :

- oscillations de relaxation amorties dans le domaine 1.
- auto-modulation du laser à une basse fréquence de relaxation dans le domaine 2.
- comportement chaotique, causé par une régénérescence du pic de haute fréquence, dans le domaine 3.

Le second type de scénario est obtenu pour  $\mu = 1$  ou pour toute autre valeur de  $\mu$  pour laquelle le réglage fin du paramètre  $A_\mu$  n'a pu s'opérer correctement. Ce scénario ne laisse apparaître que deux domaines correspondant aux oscillations de relaxation amorties et au comportement chaotique ; la bifurcation est provoquée par la réapparition des oscillations de relaxation à  $\nu_0$ . Excepté pour le déplacement des fréquences, les résultats expérimentaux sont en très bon accord qualitatif avec les simulations numériques.

## 1.6 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre a exploré le comportement complexe qui peut apparaître dans un laser multimode de classe B. A cause de la présence des oscillations de relaxation basse fréquence qui sont en antiphase dans le système libre, la dynamique de celui-ci peut être très riche.

Nous avons montré numériquement et expérimentalement dans notre système, que les intensités des différents modes possèdent un comportement collectif auto-organisé, illustré par le phénomène de dynamique d'antiphase auquel il répond. La caractéristique en est l'absence des fréquences de relaxation dans le spectre de bruit de l'intensité totale. Nous avons cependant remarqué que des oscillations se produisent sur l'intensité totale lorsque l'on module de part et d'autre du seuil d'un mode donné. Ainsi donc, la dynamique du laser libre est imposée par la haute fréquence de relaxation. Pour stimuler les basses fréquences de relaxation, nous avons étudié l'influence d'une contre-réaction dérivative sur la dynamique du laser.

Dans le cas de la contre-réaction, cette dynamique peut être dominée par l'évolution globale imposée par  $\omega_0$  ( $\nu_0$ ), ou par une composante basse fréquence, ce qui est le cas lorsque la contre-réaction compense l'oscillation à  $\omega_0$  ( $\nu_0$ ). Le modèle décrit dans la section 1.2 fournit une excellente description de l'influence d'une contre-réaction combinée sur le laser YAG. Les effets observés sont :

- Les oscillations de relaxation sélectionnées deviennent non-compensées et, comme conséquence, un pic à la fréquence  $\omega_{\mu-1}$  apparaît dans le spectre de bruit de l'intensité totale.
- Une augmentation de la contre-réaction conduit à une instabilité laser et éventuellement au chaos par deux scénarios.

Le travail réalisé montre un excellent accord qualitatif entre théorie et expérience. Il confirme que des résonances basses-fréquences peuvent être cachées lorsque le phénomène d'antiphase est présent. La contre-réaction dérivative permet de briser la symétrie responsable de la compensation par antiphase.

L'étude présentée dans ce chapitre possède plusieurs prolongements possibles. D'abord, l'organisation des phases relatives des signaux temporels des différentes intensités modales lorsque le laser est modulé au voisinage d'une des fréquences de relaxation peut constituer un thème intéressant. Ceci a permis à MANDEL *et al.* [91] d'établir de façon théorique des lois universelles sur les spectres basses-fréquences du laser.

Dans notre système expérimental tous les modes se recouvrent spatialement. Une autre extension peut consister à étudier l'influence spatiale du couplage entre plusieurs lasers. En particulier, comment la dynamique du système est altérée si les faisceaux ne se recouvrent pas complètement et de façon plus générale lorsque les sources produisant les faisceaux ne sont pas cohérentes.



# Chapitre 2

## Passage lent à travers une résonance dans un laser à paramètre modulé

### 2.1 Introduction

Le phénomène de résonance non-linéaire, qui se produit dans les oscillateurs modulés périodiquement, est connu depuis longtemps en mécanique. En 1918, DUFFING [92] introduisit un modèle d'oscillateur non-linéaire avec un terme de raideur cubique pour simuler l'effet de durcissement des ressorts observé dans de nombreux systèmes mécaniques. Cet oscillateur est décrit par l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon k \frac{dx}{dt} + x + \epsilon x^3 = \epsilon p \cos(\mu t) \quad (2.1)$$

où  $x$  représente l'écart par rapport à la position d'équilibre,  $k$  est un paramètre de dissipation,  $p$  et  $\mu$  l'amplitude et la fréquence du forçage externe ;  $\epsilon$  est un petit paramètre. Cette équation a été utilisée de façon exhaustive dans de nombreux problèmes d'ingénierie [93, 94], dans des études sur le chaos et les oscillations dans les plasmas [94, 95]. Si la fréquence de modulation s'approche de la fréquence naturelle du système, l'amplitude des oscillations s'accroît de façon dangereuse et les larges oscillations qui prennent naissance peuvent fortement endommager le système. Par ailleurs, le passage à travers une résonance non-linéaire s'accompagne souvent du phénomène de bistabilité dans l'enveloppe de réponse : la caractéristique du système en fonction du balayage de la fréquence de forçage  $\mu$  présente une forme en « S ». Suivant l'histoire du système, la valeur de  $\mu$  détermine la valeur de sortie. MIGOULINE

*et al.* ont, en particulier, examiné la déformation des courbes de résonance de systèmes régis par une équation similaire à 2.1 (voir Annexe C).

En optique, plus particulièrement en physique des lasers, ce domaine fait l'objet depuis la dernière décennie d'une grande attention. Les résonances non-linéaires apparaissent facilement dans les lasers de classe B. Le passage à travers la résonance, par balayage « aller » et « retour » du paramètre de contrôle, s'accompagne également de la bistabilité de l'enveloppe du signal. L'étude de la bistabilité optique a engendré de nombreux travaux expérimentaux tant sur les systèmes passifs [96–101] que les systèmes actifs comme le laser CO<sub>2</sub> [102], le laser YAG [56, 103] et la diode laser [104, 105]. Outre le calcul des solutions stationnaires et de leur stabilité, les études théoriques, quant à elles, se sont portées sur les effets dynamiques. Au niveau des points tournants de la caractéristique stationnaire, l'évolution du système est dominé par des temps de relaxation théoriquement infinis, à l'origine d'un phénomène de ralentissement critique [106]. La vitesse de balayage du paramètre de contrôle joue alors un rôle capital : son accroissement entraîne un déplacement des seuils de commutation ayant pour conséquence un élargissement du cycle d'hystérésis. Ceci fut observé, par exemple, sur un laser CO<sub>2</sub> à absorbant saturable [102]. Les travaux, basés essentiellement sur le modèle de DUFFING [92], ont établi la loi d'échelle de l'évolution des cycles d'hystérésis : l'aire des cycles et la position des seuils de commutation évoluent selon une loi de puissance, à la fois pour l'amplitude  $\mu_M$  de l'intervalle exploré et la vitesse (ou fréquence) de balayage  $\Omega$  du paramètre de contrôle, proportionnellement au produit  $(\mu_M \Omega)^{2/3}$ . Ces lois furent confirmées sur une large classe de bistables, optiques ou non, telles que des filtres interférentiels non-linéaires [107], des systèmes moléculaires bistables optiquement épais [108–110], des systèmes atomiques bistables optiquement fins [111], des circuits électroniques [111] et des diodes laser [112].

Très récemment ROY *et al.* [113] ont établi les lois d'échelle de l'hystérésis dynamique d'un laser à semi-conducteur optiquement bistable à partir des équations du bilan d'un système à quatre dimensions. Ces lois ont été vérifiées numériquement et expérimentalement sur le laser soumis à la modulation sinusoïdale externe quasi-résonante d'un champ laser monomode. Dans cette expérience, lorsque l'amplitude du champ laser externe varie adiabatiquement, la caractéristique de la puissance totale de sortie, en fonction de l'intensité optique injectée, est bistable si le courant d'injection de la diode dépasse une valeur notée  $I_{seuil}$ . Les exposants des lois de puissance de la fréquence  $\Omega$  de l'évolution de l'aire des cycles d'hystérésis obtenus sont 1, 4/5 et 2/3 suivant que  $I < I_{seuil}$ ,  $I = I_{seuil}$  et  $I > I_{seuil}$ .

Le travail que nous présentons dans ce chapitre, fruit d'une collaboration avec T. ERNEUX et G. LYTHER de l'Université Libre de Bruxelles, possède

plusieurs centres d'intérêt. Il est tout d'abord l'occasion de développer une interaction originale entre l'expérimentation en physique des lasers et les mathématiques appliquées. En effet, nous comparons de façon quantitative les expressions analytiques, calculées à partir du modèle des équations du bilan du laser monomode, des fréquences de commutation du cycle d'hystérésis avec des données expérimentales. En outre, les coefficients déterminés par ROY *et al.* [113] ne nous semblent pas a priori universels et peuvent dépendre du type de laser. Nous proposons de mesurer, sur notre système expérimental, l'évolution des fréquences de commutation avec la vitesse de balayage de la fréquence de modulation. Enfin, nous étudions les effets du bruit sur le passage lent à travers la résonance.

Ce chapitre s'organise comme suit : dans la première section, nous décrivons le montage expérimental utilisé : un laser YAG monomode dopé au néodyme dont le paramètre de pompe est modulé périodiquement. Les principales étapes de l'étude théorique et de l'établissement des lois d'évolution statique par une méthode de perturbation sont résumées dans la deuxième section. Dans notre système, l'effet du bruit rend plus difficile la comparaison théorie-expérience : son influence est envisagée dans la troisième section. Enfin, nous étudions les effets dynamiques et les lois d'échelles dans la dernière partie.

## 2.2 Dispositif expérimental

### 2.2.1 Principe des mesures

L'étude a été réalisée sur le laser YAG décrit dans la section 1.3. La seule modification apportée au dispositif a consisté à insérer un étalon Pérot-Fabry intra-cavité de façon à maintenir le laser en régime monomode longitudinal sur une large plage du paramètre de pompage. Le système de détection reste également inchangé. La chaîne de détection contenant l'analyseur de spectre optique nous sert maintenant à contrôler le caractère monomode de l'émission laser.

Nous introduisons, à l'aide d'un synthétiseur de fréquence (Hewlett-Packard HP3325a), sur l'une des entrées de la commande de diode laser, une modulation sinusoïdale balayée en fréquence de façon triangulaire. La réponse du laser (chaîne de détection 2 sur la figure 1.3) ainsi que le signal triangulaire de référence du balayage sont envoyés sur un oscilloscope numérique (Tektronix TDS420). Ce dernier est utilisé en mode « enveloppe » ; ce qui nous permet d'extraire directement l'enveloppe de la réponse du laser, comme l'illustre la figure 2.1. Les signaux sont ensuite transférés sur un ordinateur

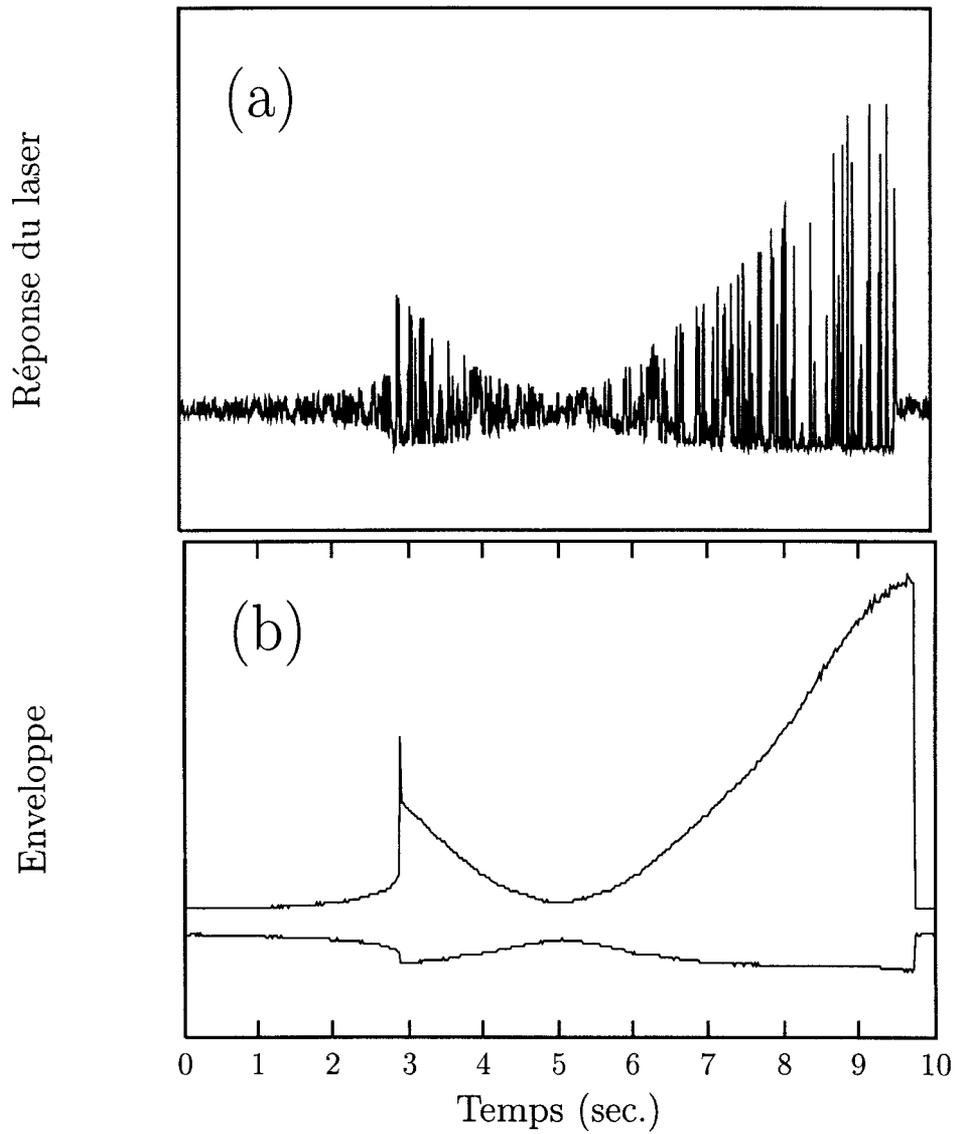


FIG. 2.1 – Exemple de réponse non-linéaire du laser pour un balayage « aller » et « retour » à travers une résonance : (a) signal (b) enveloppe.

Hewlett-Packard HP9000 puis traités numériquement.

La dépendance temporelle du paramètre de pompe peut être représentée par la relation :

$$A(t) = A + \Delta A \cos(2\pi\nu t) \quad (2.2)$$

où  $A$  est le paramètre de pompage en absence de modulation,  $\Delta A$  l'amplitude de modulation et  $\nu$  la fréquence du synthétiseur. Celle-ci est notre paramètre de contrôle dans l'élaboration des courbes de résonance. Elle varie suivant la loi :

$$\nu = \nu_0 \pm \frac{\Delta\nu}{\Delta t} t \quad (2.3)$$

où  $\Delta\nu/\Delta t$  représente la vitesse de balayage. Le synthétiseur utilisé permet de fixer et l'intervalle balayé  $\Delta\nu$  et la durée  $\Delta t$  du balayage. Dans nos expériences l'intervalle balayé demeure constant.

De façon à faciliter la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux, nous introduisons une fréquence sans dimension  $f = \nu/\nu_R$  où  $\nu_R$  est la fréquence de relaxation du système. Cette nouvelle fréquence suit la loi :

$$f = f_0 \pm \frac{\Delta f}{\Delta t} t \quad (2.4)$$

Indépendamment du paramètre  $\Delta f/\Delta t$ , nous pouvons faire varier l'amplitude de modulation  $\Delta A$ . Une résonance non-linéaire, en même temps qu'une réponse bistable du laser, se produit pour des  $\Delta A$  relativement petits ( $> 0,015$ ). En raison du phénomène de ralentissement critique au niveau des points tournants, nous avons dû, dans l'étude « quasi-statique », choisir des vitesses de balayage très lentes (beaucoup plus faibles que les taux caractéristiques de relaxation des variables). Pour ce type de manipulation, nous avons fixé en général  $\Delta f/\Delta t$  à  $0,08 \text{ s}^{-1}$ . Pour les études dynamiques  $\Delta f/\Delta t$  peut varier de  $0,4 \text{ s}^{-1}$  à  $6000 \text{ s}^{-1}$ .

L'intensité de sortie du laser est constituée d'une composante continue à laquelle vient s'ajouter une composante alternative périodique ou chaotique, due à la modulation du laser. A forte modulation, la réponse du laser est de type impulsionnelle et on remarque alors une asymétrie de l'enveloppe de réponse par rapport à la composante continue (voir figure 2.1). Dans ce qui suit nous n'en représenterons que la partie supérieure, c'est-à-dire celle qui se situe au-dessus de la composante continue. Ensuite, en superposant les courbes de résonance obtenues successivement par balayage « aller » et « retour », on isole le cycle d'hystérésis. Les figures 2.2 et 2.3 montrent des exemples de cycles statiques pour des valeurs différentes de l'amplitude de

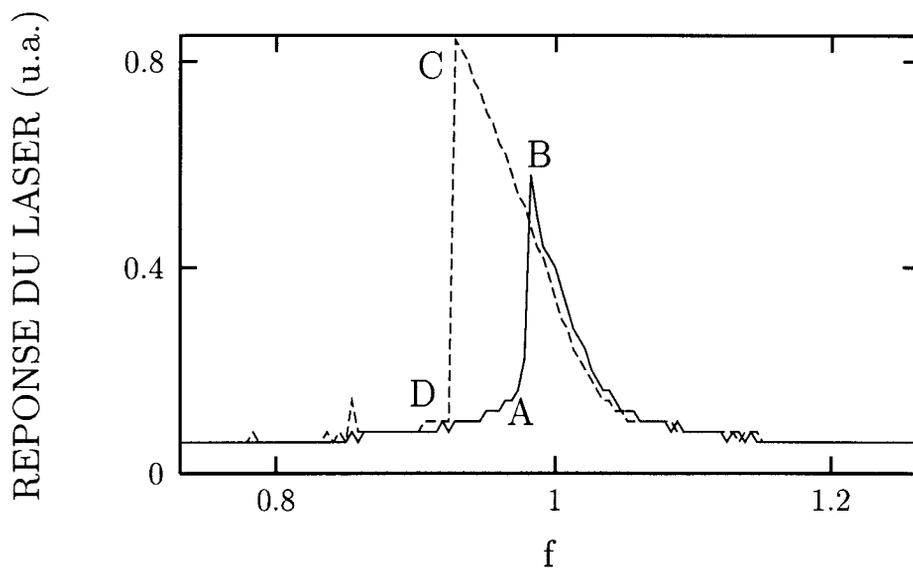


FIG. 2.2 – Exemple de cycle d'hystérésis (cycle délimité par les points A, B, C, D) obtenu par superposition du balayage « aller » et « retour » de la fréquence de modulation. Les paramètres expérimentaux sont  $A = 2,02$  et  $\Delta A = 0,015$ .

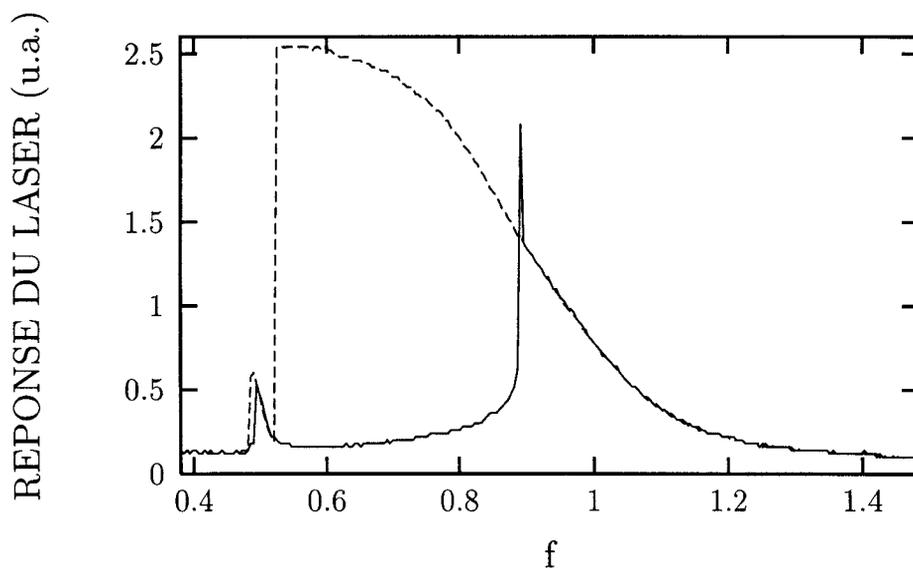


FIG. 2.3 – Exemple de cycle d'hystérésis statique obtenus pour un balayage « aller » et « retour » :  $A = 2,02$  et  $\Delta A = 0,181$ .

modulation. Sur la figure 2.2, le cycle d'hystérésis a été délimité par les points A, B, C et D. Lors du balayage par fréquences croissantes, le système commute vers la branche haute au point A ( $f_h = 0,98$ ). Lors du balayage retour, le système décrit complètement la branche haute avant de commuter sur la branche basse au point C ( $f_b = 0,93$ ). La figure 2.3 résume une étude similaire : l'augmentation de l'amplitude de modulation ( $\Delta A = 0,181$  au lieu de  $0,015$ ) influe sur l'amplitude de la réponse du système ainsi que sur la largeur du cycle d'hystérésis ( $f_h - f_b = 0,88 - 0,52 = 0,36$  au lieu de  $0,05$ ). Le pic à  $f = 0,5$  proche de  $f_b$  traduit la résonance sous-harmonique du laser. Etant donné la méthode expérimentale employée, les courbes laissent apparaître un transitoire de commutation, causé par le retour à l'équilibre du système après le saut sur la branche haute (voir figure 2.3).

### 2.2.2 Influence des bruits techniques

L'influence des bruits techniques est loin d'être négligeable dans ce genre d'expérience. Leur importance peut rendre plus difficile la comparaison entre théorie et expérience. En fait, nous devons faire face à deux types d'effet distincts : les fluctuations et les dérives de variables et de paramètres.

Les fluctuations (de fréquence supérieure à une dizaine de Hertz) ont des origines diverses : les bruits électroniques de commande de diode et des détecteurs, les fluctuations d'amplitude du faisceau de pompe, les bruits mécaniques résultant du manque de stabilité des supports du montage, le bruit d'émission spontanée.

Les dérives, comme par exemple les effets thermiques, sont responsables d'infimes élongations ou désalignements de la cavité mais peuvent néanmoins influencer de façon sensible sur les paramètres du laser et en particulier sur la fréquence de résonance. En particulier, elles peuvent être la cause d'une accentuation de la contre-réaction optique vers la diode de pompe qui produit de nouvelles instabilités.

Nous avons cherché à limiter les effets de dérive des paramètres. Pour obtenir des informations comparables une fois les conditions expérimentales choisies, plusieurs séries de mesures sont réalisées en un court intervalle de temps ( $< 2$  min.) de façon à limiter l'évolution des paramètres expérimentaux au cours des enregistrements. Pour cela, à l'aide d'un programme d'acquisition spécifique, l'ordinateur pilote successivement le synthétiseur de fréquence fixant la fréquence de modulation externe, et l'oscilloscope d'acquisition des signaux. Pour accélérer l'opération, les séries de fichiers sont enregistrées et stockées provisoirement en mémoire vive avant d'être transférées globalement sur le disque dur en fin de cycle.

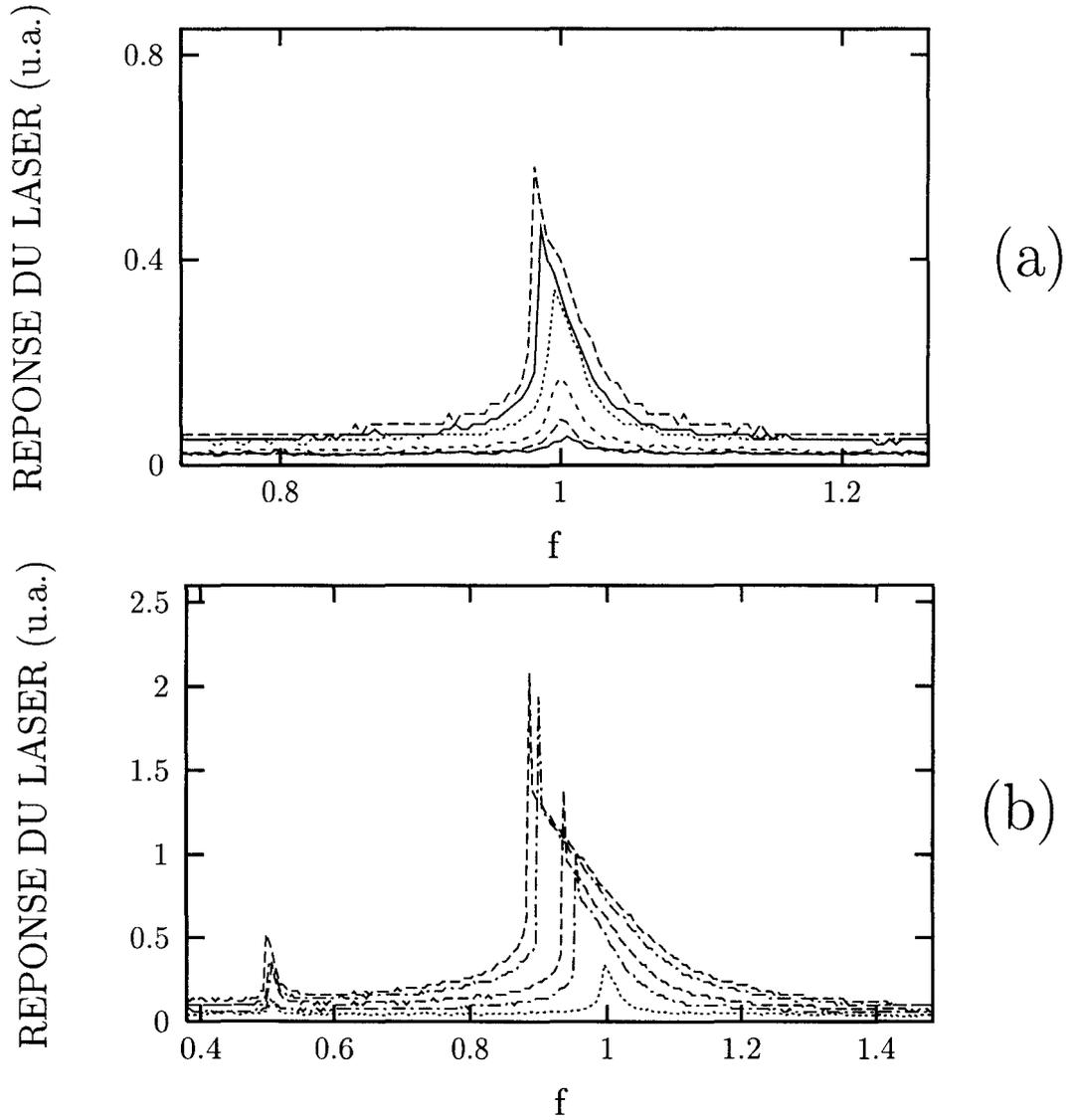


FIG. 2.4 – Formes des courbes de résonance en régime statique en fonction du balayage par valeurs croissantes de la fréquence de modulation, pour les valeurs d'amplitude de modulation : (a)  $\Delta A = 0,003; 0,005; 0,0085; 0,015; 0,0225; 0,030$  et  $A = 2,02$ ; (b)  $\Delta A = 0,015; 0,55; 0,091; 0,145; 0,181$  et  $A = 2,02$ . Nous avons, sur la figure (a), dilaté l'échelle des fréquences autour de  $f = 1$ .

### 2.2.3 Forme des courbes de résonance

Pour l'ensemble de l'étude du régime statique la vitesse de balayage utilisée est de  $\Delta f/\Delta t = 0,08 \text{ s}^{-1}$ ; nous avons vérifié, par rapport à la position des points de commutation, que le choix d'une vitesse plus faible ne modifiait pas les résultats. La transition d'une résonance linéaire vers une résonance non-linéaire (et réciproquement) s'effectue par action sur le paramètre  $\Delta A$ . Son effet est illustré sur les figures 2.4 et 2.5. Dans ces expériences nous avons balayé la fréquence de 85 à 335 kHz ( $0,38 < f < 1,45$ ). La fréquence de relaxation mesurée en régime linéaire est de 227 kHz. Nous pouvons constater :

- l'apparition de l'hystérésis pour  $\Delta A \geq 0,015$ . Elle est mise en évidence par la naissance d'un front droit sur l'enveloppe ;
- l'existence d'une suroscillation à la fréquence de commutation haute, due au phénomène de ralentissement critique ;
- une saturation, sur la branche supérieure, de la réponse de l'oscillateur, matérialisée par l'apparition d'un « plateau » pour de fortes amplitudes de modulation :  $\Delta A \geq 0,091$  ;
- la présence d'une résonance sous-harmonique à  $f = 0,5$  pour de fortes modulations, qui révèle également un phénomène de bistabilité.

Notons que les fréquences de commutation haute et basse sont des fonctions décroissantes de  $\Delta A$ . Dans la région bistable, les signaux temporels des deux branches sont différents : sur la branche inférieure, le laser présente une modulation harmonique sinusoïdale alors que sur la branche supérieure, le régime est pulsé.

## 2.3 Théorie

Cette section résume les principales étapes suivies pour établir les équations analytiques approchées de la courbe d'hystérésis statique ainsi que de l'évolution asymptotique des fréquences de commutation avec l'amplitude de la modulation externe.

### 2.3.1 Des équations du bilan aux équations « $xy$ »

Le modèle retenu est celui des équations du bilan du laser monomode, à deux niveaux d'énergie, déjà développé à la section 1.2.1 et représenté par

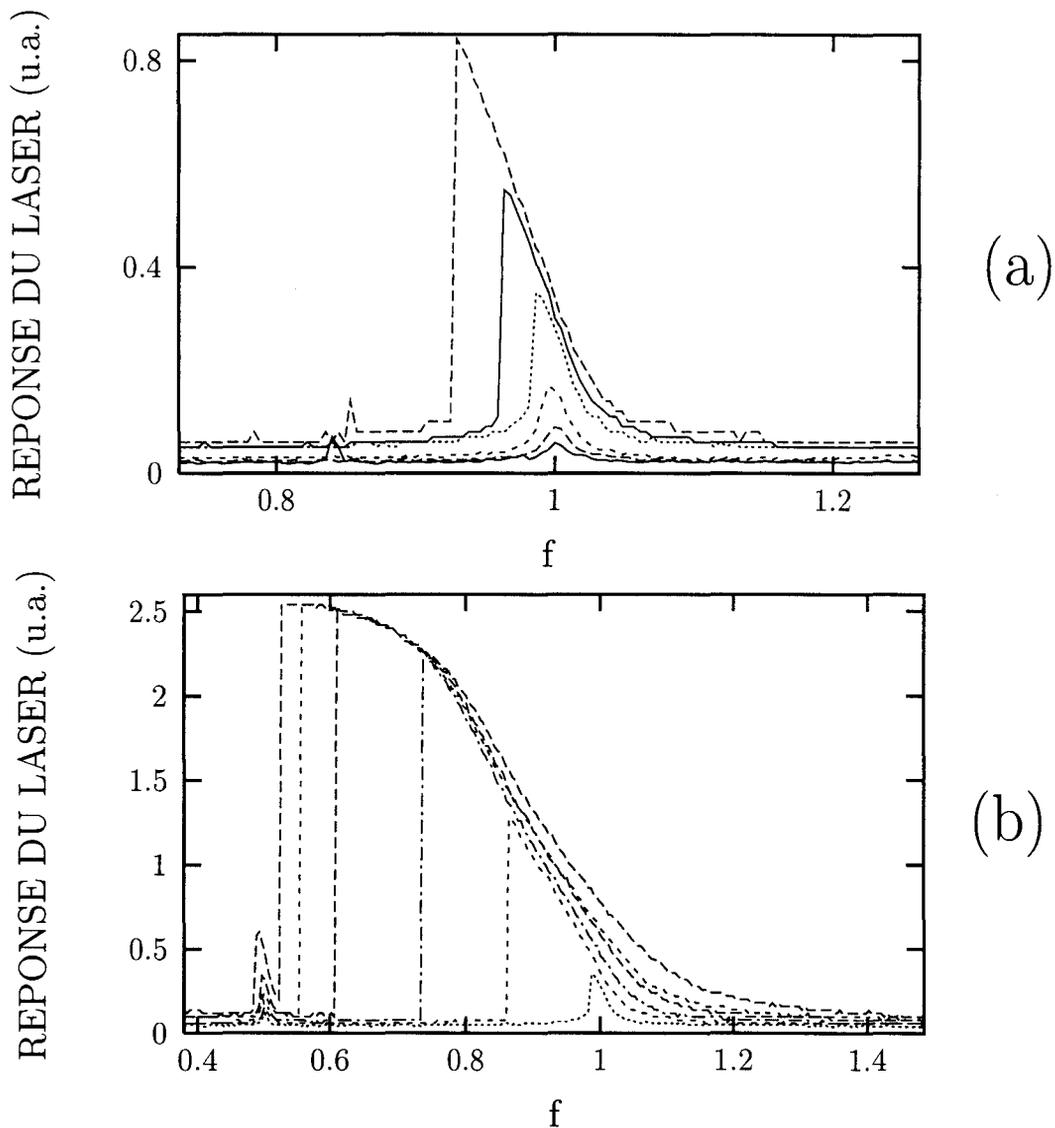


FIG. 2.5 – Formes des courbes de résonance du laser en fonction du balayage par valeurs décroissantes de la fréquence de modulation pour plusieurs amplitudes de modulation: (a)  $\Delta A = 0,003$ ;  $0,005$ ;  $0,0085$ ;  $0,015$ ;  $0,0225$ ;  $0,030$  et  $A = 2,02$ ; (b)  $\Delta A = 0,015$ ;  $0,037$ ;  $0,55$ ;  $0,091$ ;  $0,109$ ;  $0,181$  et  $A = 2,02$ . Nous avons, sur la figure (a), dilaté l'échelle des fréquences autour de  $f = 1$ .

les équations (voir page 14) :

$$\frac{dN}{d\tau} = A(\tau) - N(I + 1) \quad (2.5a)$$

$$\frac{dI}{d\tau} = GI(N - 1) \quad (2.5b)$$

Le paramètre de pompe dépendant du temps possède la forme similaire à l'équation 2.2 :

$$A(\tau) = A + \Delta A \cos(\omega\tau) \quad (2.6)$$

Les variables évoluent par rapport au temps sans dimension  $\tau = \gamma_{\parallel} t$ ;  $\omega$  est la fréquence de modulation en unité réduite. Rappelons que  $G$  représente le rapport  $2\kappa/\gamma_{\parallel}$ . Le calcul des solutions stationnaires et l'analyse de stabilité linéaire de ces solutions fournissent la fréquence de relaxation du système :

$$\omega_R = \sqrt{G(A - 1)} \quad (2.7)$$

Nous introduisons les variables  $x, y$  représentant l'évolution de l'inversion de population et du champ au voisinage de l'état stationnaire :

$$x = \frac{G}{\omega_R} (N - 1) \quad (2.8)$$

$$y = \frac{I}{A - 1} - 1 \quad (2.9)$$

Nous définissons de plus la fréquence réduite  $f$ , l'amortissement  $\epsilon$  et le forçage  $\delta$  par :

$$f = \frac{\omega}{\omega_R} \quad (2.10)$$

$$\epsilon = \frac{1}{\omega_R} = \frac{1}{\sqrt{G(A - 1)}} \quad (2.11)$$

$$\delta = \frac{\Delta A}{A - 1} \quad (2.12)$$

Avec ces nouvelles variables et en renormalisant le temps en unité de  $\omega_R$ , le système 2.5 est équivalent à :

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + \delta \cos(f\tau) - \epsilon x [1 + (A - 1)(y + 1)] \quad (2.13a)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = x(1 + y) \quad (2.13b)$$

Il apparaît désormais qu'en absence de modulation la solution stationnaire « lasante » de notre modèle est représentée dans l'espace des phases par le point de coordonnées  $(x = 0, y = 0)$ . Dans ce système apparaissent clairement les termes de forçage  $\delta \cos(f\tau)$  et de dissipation  $\varepsilon x [1 + (A - 1)(y + 1)]$ . Les équations «  $xy$  » ont déjà été utilisées dans le cadre d'études analytiques du laser de classe B à pertes modulées [114–116]. SCHWARTZ et ERNEUX les ont utilisées pour étudier analytiquement et numériquement le diagramme de bifurcation obtenu par modulation de l'amplitude du forçage, plus spécifiquement les solutions de période 1 et 2 qui émergent d'un point limite ou après une bifurcation de doublement de période [115]. ERNEUX *et al.* [116] s'en sont servis sous une forme un peu différente dans le cas d'un laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées périodiquement contrôlé par une contre-réaction continue retardée. Ils ont montré que l'on peut stabiliser des solutions périodiques instables en déplaçant le premier point de bifurcation de doublement de période. De plus, des équations similaires ont servi de base à des études de cinétiques chimiques [117, 118] et de variations de populations biologiques [119].

Nous allons distinguer deux traitements distincts suivant la forme des signaux laser. Lorsque le laser décrit la branche basse de la courbe de bistabilité, sa réponse est quasi-sinusoidale et la trajectoire dans l'espace des phases au voisinage du point fixe est assimilée à un cercle centré sur l'origine et une approximation de mouvement de petite amplitude peut s'opérer. Par contre, lorsque le régime du laser est pulsé, et c'est le cas sur la branche haute, la méthode précédente n'est plus valable et nous devons considérer directement le système 2.13 comme un système perturbé. Nous développons dans la suite chacune de ces approximations : pour la première méthode, nous recherchons la forme des solutions au voisinage de l'origine et déterminons les équations vérifiées par l'amplitude et la phase de ces solutions ; pour la seconde, nous traitons de façon perturbative l'ensemble du système 2.13.

### 2.3.2 Approximation de faible amplitude

La résolution analytique des équations 2.13 du laser perturbé périodiquement est mathématiquement difficile. Pour déterminer la réponse du laser, nous allons développer une méthode asymptotique basée sur les faibles valeurs de  $\varepsilon$  et  $\delta$  [114, 115]. Celle-ci s'appuie sur un développement à plusieurs échelles de temps présenté dans des ouvrages de mathématiques appliquées [120, 121].

Au voisinage du point fixe, les oscillations de petite amplitude sont har-

moniques. En première approximation, la solution de 2.13 est de la forme :

$$x \approx 2R \cos(T + \theta) \quad (2.14a)$$

$$y \approx 2R \sin(T + \theta) \quad (2.14b)$$

où  $T = f\tau$  et  $R \ll 1$ . L'amplitude  $R$  et la phase  $\theta$  sont alors solutions des « équations d'amplitudes » (voir annexe D) données par :

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{\delta}{4} \cos \theta - \frac{\epsilon A}{2} R \quad (2.15a)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\delta}{4R} \sin \theta - (f - 1) - \frac{1}{6} R^2 \quad (2.15b)$$

Déterminons dans un premier temps les solutions stationnaires du système 2.15. En posant les dérivées égales à 0, nous obtenons l'équation vérifiée par l'amplitude  $R$  de la solution périodique qui admet une ou trois solutions :

$$\delta = 2R \sqrt{\epsilon^2 A^2 + \left(2(f - 1) + \frac{1}{3} R^2\right)^2} \quad (2.16)$$

soit encore :

$$2(f - 1) = \pm \left(\frac{\delta^2}{4R^2} - \epsilon^2 A^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{R^2}{3} \quad (2.17)$$

La coexistence de trois solutions n'est possible que si le paramètre  $\delta$  dépasse une valeur critique  $\delta_c$  donnée par :

$$\delta_c = 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} (\epsilon A)^{\frac{3}{2}} \quad (2.18)$$

$\delta_c$  est relativement petit car  $\epsilon$  est un petit paramètre. Par exemple pour  $A = 2$  et  $\epsilon = 10^{-3}$ , on obtient  $\delta_c \simeq 10^{-4}$ . La variation de  $R$  en fonction de  $f$  est une courbe d'hystérésis dont les fréquences de commutation  $f_h$  et  $f_b$  ont été définies à la section 2.2.1. De telles courbes  $R(f)$  pour différentes valeurs de  $\delta$  sont représentées en pointillé sur la figure 2.6. Pour contrôler la validité de l'approximation de faible amplitude, nous avons également tracé point par point la valeur maximale de  $x$  calculée par simulation numérique du système 2.13. La figure 2.6 manifeste un excellent accord entre la formule analytique et les simulations numériques de 2.13, à la fois en régime linéaire (sans cycle d'hystérésis  $\delta = 0,0025$  à  $0,01$ ) et faiblement non-linéaire ( $\delta = 0,02$ ).

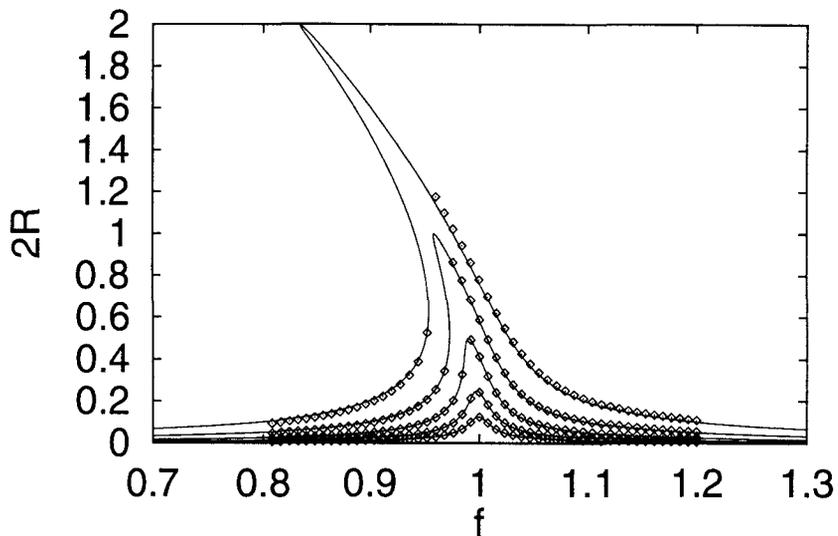


FIG. 2.6 – Forme théorique des courbes de résonance en régime statique. Les lignes représentent la variation de  $2R$  avec  $f$  telle que définie par l'équation 2.17. Les points sont les maxima de  $x$  solutions numériques des équations  $xy$  du système 2.13 ( $A = 2$ ,  $\epsilon = 0,01$  et  $\delta = 0,0025; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04$ ).

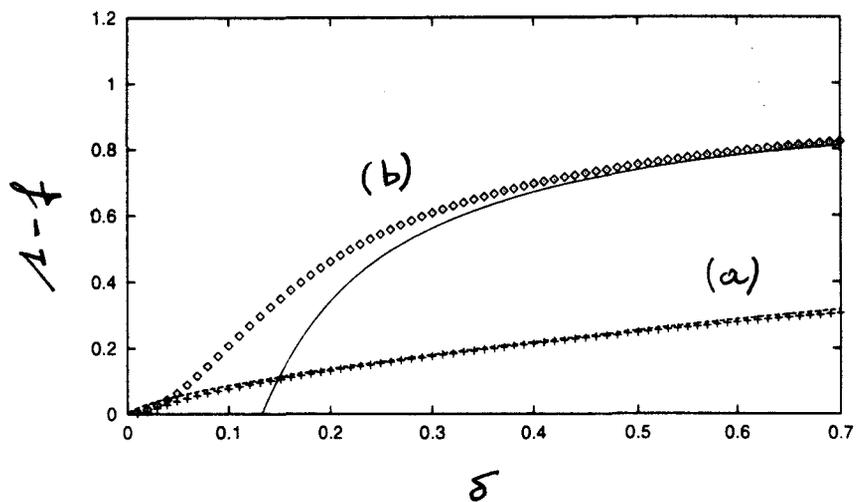


FIG. 2.7 – Validité des approximations de faible amplitude et de grande amplitude. Chacune des courbes représente la superposition des résultats de l'intégration numérique de 2.13 (symbolisés par des points) avec la courbe donnée par (a) l'équation 2.19 (b) l'équation 2.28 ( $A = 2$ ,  $\epsilon = 0,02$ ).

Lorsque la condition  $\delta > \delta_c$  est vérifiée, les fréquences de commutation sont données par :

$$f_h \simeq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{3}{4}} \delta^{\frac{2}{3}} \quad (2.19)$$

$$f_b \simeq 1 - \frac{1}{24} \left( \frac{\delta}{\epsilon A} \right)^2 \quad (2.20)$$

On peut noter que  $f_h$  ne dépend, en première approximation, que de  $\delta$ . Par contre  $f_b$  dépend des trois paramètres principaux  $\delta$ ,  $\epsilon$  et  $A$ . Les lois de puissance de  $f_h$  et  $f_b$  avec  $\delta$  diffèrent également.  $f_h$  évolue en  $\delta^{\frac{2}{3}}$  et sa courbe admet une direction asymptotique suivant l'axe des abscisses. A l'inverse,  $f_b$  est une fonction parabolique de  $\delta$  qui admet pour direction asymptotique l'axe des ordonnées.

La figure 2.7 donne l'évolution de  $f_h$  fournie par la formule 2.19 et montre un excellent accord avec celle de la fréquence de commutation haute calculée par simulation numérique du système 2.13. Cependant, l'équation 2.20 n'est pas en accord avec les simulations. Comme nous allons le développer dans la section suivante, l'approximation de faible amplitude n'est plus valable en raison de la forme des signaux sur la branche haute.

### 2.3.3 Approximation de grande amplitude

En régime fortement non-linéaire ( $\delta > 0, 02$ ), les approximations à la base de l'écriture des équations d'amplitude ne sont plus justifiées. Les trajectoires de l'espace des phases décrivent une solution à caractère impulsif : elles consistent en l'alternance d'un mouvement lent, pendant lequel l'intensité est proche de 0 alors que l'inversion de population s'accroît lentement vers sa valeur maximale, et d'un mouvement rapide associé à un pic d'intensité et corrélé à une forte diminution de l'inversion de population. La forme des solutions motive des approximations séparées pour chaque portion de trajectoire.

Nous voulons établir l'expression analytique approchée de la fréquence de commutation sur la branche basse. Considérons dans un premier temps le système conservatif, issu de 2.13 en posant  $\delta = \epsilon = 0$ . Il devient :

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 - z \quad (2.21a)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = xz \quad (2.21b)$$

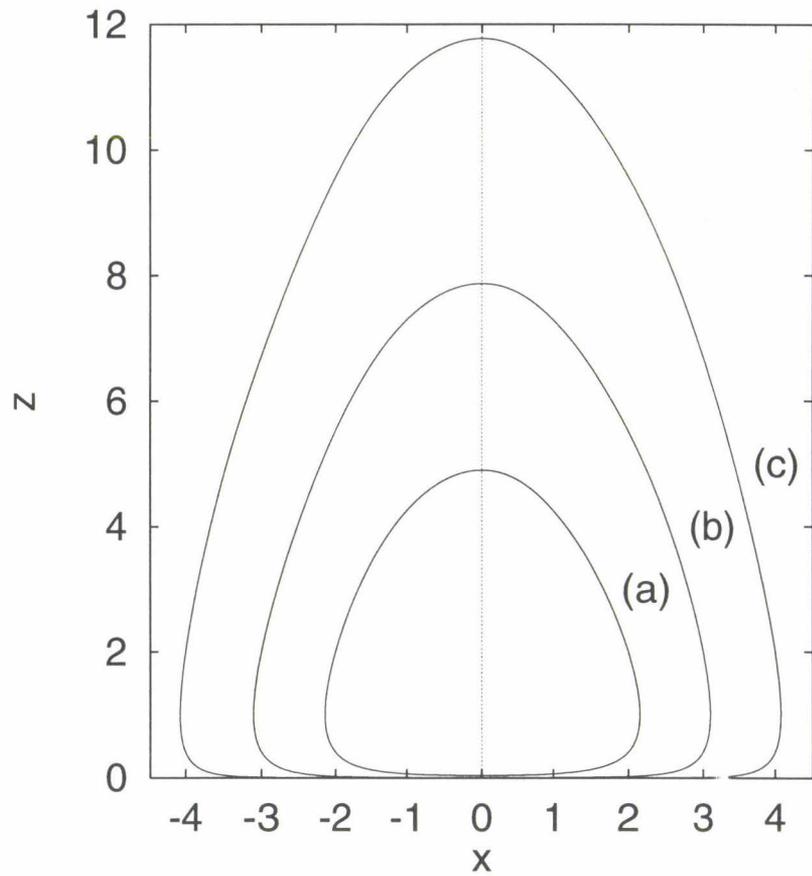


FIG. 2.8 – Exemples de trajectoire dans l'espace des phases pour l'équation 2.22. Les conditions initiales sont (a)  $x_0 = 2$ ,  $z_0 = 2$  (b)  $x_0 = 3$ ,  $z_0 = 2$  (c)  $x_0 = 4$ ,  $z_0 = 2$ .

où  $z = 1 + y$ . Ce système conservatif admet une constante de mouvement donnée par :

$$M = z - \ln z + \frac{1}{2}x^2 \quad (2.22)$$

Des trajectoires périodiques de l'espace des phases sont illustrées sur la figure 2.8 pour différentes conditions initiales. La période  $T$  des oscillations est une fonction croissante de l'amplitude du mouvement. Dans le cas du système dissipatif entretenant des équations 2.13, l'introduction d'un forçage de période  $T$  fixe la période des oscillations du laser et donc l'amplitude des pics.

D'autre part, il est caractéristique dans ce type de régime (et ceci est d'autant mieux vérifié que  $M$  est grand) que la durée d'une impulsion est très petite comparée à l'intervalle de temps qui sépare deux pics consécutifs. L'approximation la plus simple, pour relier la période du mouvement à l'amplitude du cycle, consiste donc à ignorer le temps pendant lequel la variable  $x$  évolue rapidement. Ceci revient à écrire des équations du système valables seulement pour le mouvement lent :

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 \quad (2.23a)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = xz \quad (2.23b)$$

L'amplitude maximale  $x_{\max}$  du mouvement est fixée par la période du forçage. On peut la déduire en intégrant 2.23a sur un cycle :

$$x_{\max} = T/2 = \pi/f \quad (2.24)$$

L'énergie dissipée par le laser sur une période est compensée par celle apportée par le forçage. Pour des conditions initiales données, le forçage maintient donc un point représentatif sur une trajectoire répondant à l'équation 2.22. L'énergie est désormais globalement conservée sur une période de modulation et la fonction  $M$  satisfait à :

$$\oint \frac{dM}{d\tau} d\tau = 0 \quad (2.25)$$

En dérivant l'équation 2.22 et à l'aide de 2.13, il vient aisément :

$$\frac{dM}{d\tau} = \delta x \cos f\tau - \epsilon x^2 [1 + (A - 1)z] \quad (2.26)$$

L'équation 2.25 fournit alors la relation :

$$\frac{\delta}{\epsilon A} = \frac{1}{3} f x_{\max}^2 \quad (2.27)$$

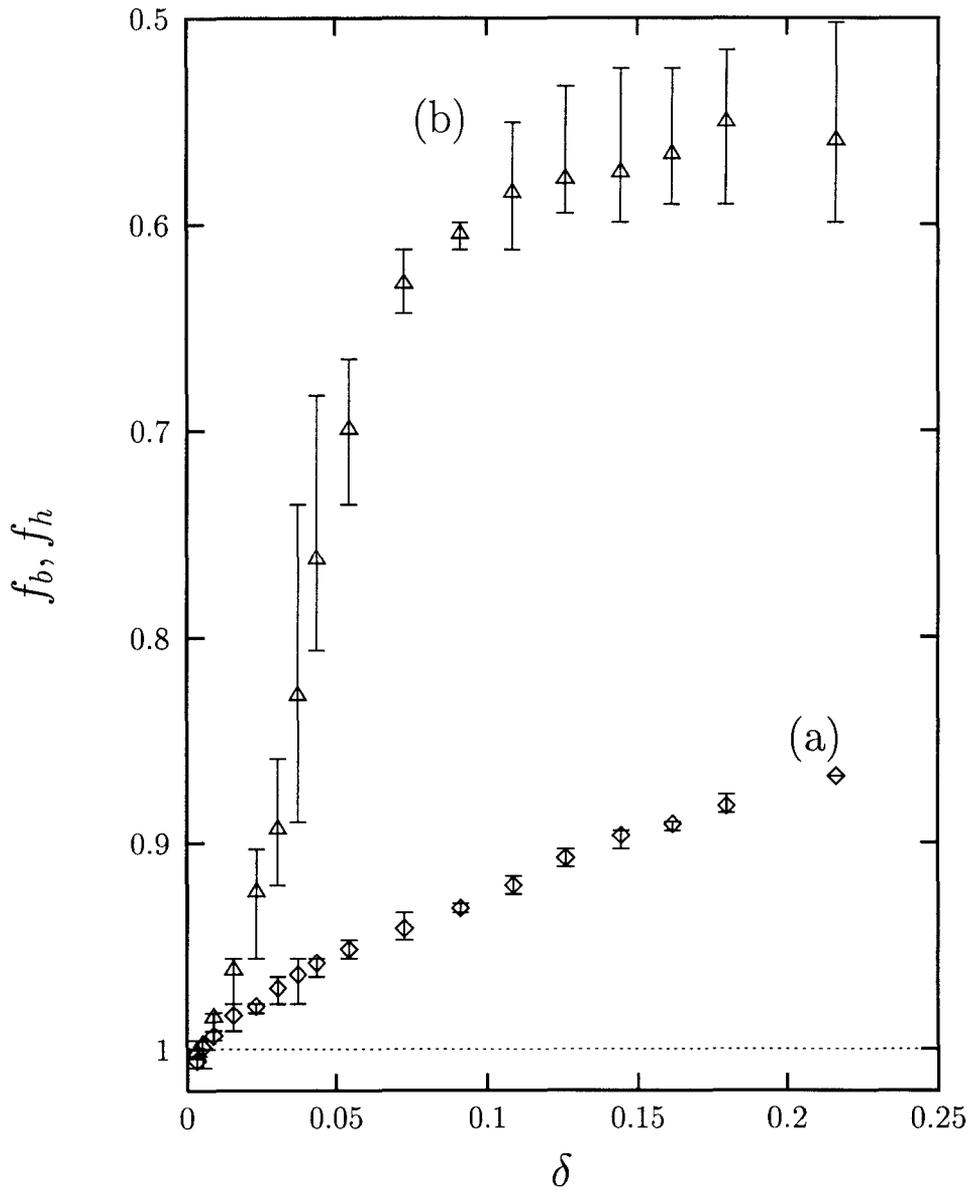


FIG. 2.9 – Fréquences de commutation (a) sur la branche haute (b) sur la branche basse du cycle d'hystérésis en fonction de l'amplitude relative de modulation dans le cas statique pour  $A = 2,02$ .

En tenant compte de 2.24 et en sachant que  $x_{max}$  est atteint pour  $f = f_b$ , il vient :

$$f_b = \frac{\pi^2 \epsilon A}{3\delta} \quad (2.28)$$

La figure 2.7b présente une comparaison de la courbe représentative de la relation 2.28 au résultat des simulations numériques du modèle 2.13. L'approximation de grande amplitude développée ci-dessus donne un excellent accord pour les grandes valeurs de  $M$ . Par contre, elle n'est absolument pas adaptée à décrire l'évolution de  $f_b$  aux faibles valeurs de  $\delta$  ( $\delta \leq 0,2$ ). Notamment, la loi hyperbolique 2.28 ne peut pas montrer le point d'inflexion dans la zone de forte expansion de  $f_b$  ( $\delta \approx 0,1$ ). De par la forme de l'expression 2.28, lorsque  $\delta \rightarrow \infty$ , l'expression  $1 - f_b$  tend asymptotiquement vers 1. Ce comportement traduit l'effet « plateau » discuté précédemment. Comme nous allons le voir cet effet est fortement accentué par le bruit.

### 2.3.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

La figure 2.9 montre les courbes expérimentales de l'évolution de  $f_h$  et  $f_b$  avec  $\delta$ . Pour les faibles valeurs de  $\delta$  ( $\delta < 0,01$ ), les fréquences du maximum de résonance sont identiques à l'« aller » et au « retour » : nous sommes en régime linéaire pour lequel l'enveloppe de réponse du laser ne présente aucune hystérésis. L'hystérésis est présente dès que les courbes (a) et (b) se séparent. Les « barres d'erreurs » indiquent la dispersion des points obtenus par comparaison de plusieurs enregistrements réalisés dans des conditions identiques. Elles montrent que  $f_h$  (courbe (a)) est peu sensible au bruit car la dispersion des mesures est faible. Lorsque l'on examine la courbe (b) décrivant l'évolution de  $f_b$  avec  $\delta$ , on constate que dès la naissance de l'hystérésis,  $f_b$  subit une forte variation pour  $0,02 < \delta < 0,06$ , suivie d'un « plateau » où cette fréquence reste à peu près constante. La fréquence  $f_b$  est naturellement sensible au bruit comme en témoigne la forte dispersion des mesures expérimentales aussi bien dans la zone de forte pente que sur le plateau.

Nous avons évalué expérimentalement le paramètre  $\epsilon$  en suivant une méthode utilisée dans [82] :  $\epsilon \simeq 0,0029$ . Cette estimation nous a permis de superposer (voir la figure 2.10) les courbes expérimentales et analytiques de l'évolution de  $f_b$  et  $f_h$  décrite par les équations 2.19 et 2.20. La courbe (a) est parfaitement décrite par la formule cubique donnée par 2.19 : l'approximation de faible amplitude fournit un excellent accord quantitatif. Nous avons choisi de joindre à la courbe (b) la valeur de  $f_b$  donnée par 2.20 et résultant de l'approximation de faible amplitude de façon à décrire l'hystérésis naissante (l'approximation de grande amplitude ne peut décrire correctement l'évolution de

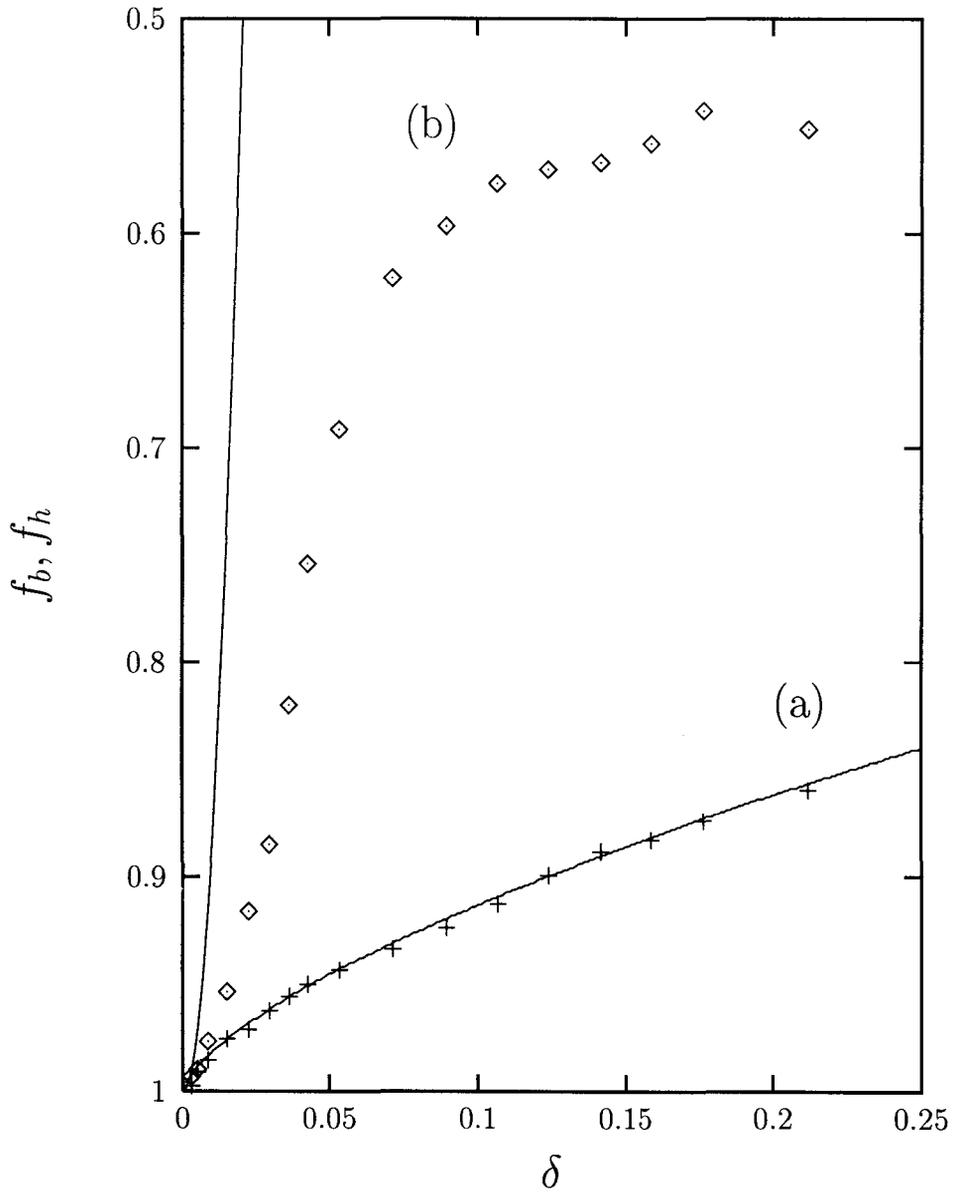


FIG. 2.10 – Superposition des lois analytiques données par les équations 2.19 et 2.20 avec les relevés expérimentaux.

$f_b$  aux faibles valeurs de  $\delta$  comme nous l'avons souligné dans la discussion de l'équation 2.28). La courbe expérimentale est par ailleurs fortement décalée vers les  $\delta$  plus élevés par rapport à celle résultant de l'approximation de grande amplitude. Nous avons attribué ce désaccord théorie-expérience, tout d'abord au fait que l'approximation de faible amplitude n'est pas adaptée pour décrire la branche haute, ensuite aux bruits du système expérimental. La section suivante est entièrement consacrée à l'influence de ces derniers.

A titre qualitatif, nous avons reporté sur la figure 2.11 la variation de l'amplitude maximale de la courbe de résonance avec  $\delta$  pour la même série de mesures. Les observations sont qualitativement les mêmes : la courbe (a) marque une nette inflexion à la naissance de l'hystérésis puis varie presque linéairement pour  $\delta \geq 0,05$ . Nous retrouvons sur la branche haute la forte expansion suivie du « plateau ». Celui-ci correspond cette fois à l'amplitude maximale des pics d'intensité que peut émettre le laser. Notons la grande dispersion des mesures dans la zone de forte expansion.

## 2.4 Effet du bruit

Nous avons suggéré dans la section précédente que le mauvais accord entre théorie et expérience illustré par la figure 2.7 est en partie attribuable au bruit. En effet, expérimentalement la commutation lors du balayage « retour » se produit plus tôt que ne le prévoit l'étude théorique. Nous nous sommes par conséquent intéressés aux effets du bruit. Le travail qui suit présente essentiellement une étude expérimentale. L'étude théorique correspondante a été réalisée par G. LYTHE et T. ERNEUX. Nous nous servons de leurs conclusions pour interpréter les effets observés.

La méthode la plus simple pour étudier l'effet du bruit sur un système consiste à perturber l'un de ces paramètres avec un bruit parfaitement contrôlé et obéissant avec une loi statistique connue. Nous avons injecté, à partir d'un générateur de fonction Stanford DS345 fonctionnant en générateur de bruit, un bruit blanc gaussien de bande 0-10 MHz sur l'une des entrées de commande de diode. Plusieurs enregistrements de courbes de résonance en fonction de la fréquence de modulation ont répétés successivement, ce qui a permis d'estimer la dispersion des mesures de  $f_h$  et  $f_b$ .

Les principaux résultats de cette étude sont illustrés sur la figure 2.12. La courbe (a) obtenue en absence de bruit additionnel constitue la référence (c'est la situation de la figure 2.9). Les courbes (b), (c) et (d) montrent l'effet du bruit, c'est à dire l'évolution de ces fréquences en fonction de l'amplitude de modulation pour plusieurs valeurs de bruit injecté sur la pompe. Les deux

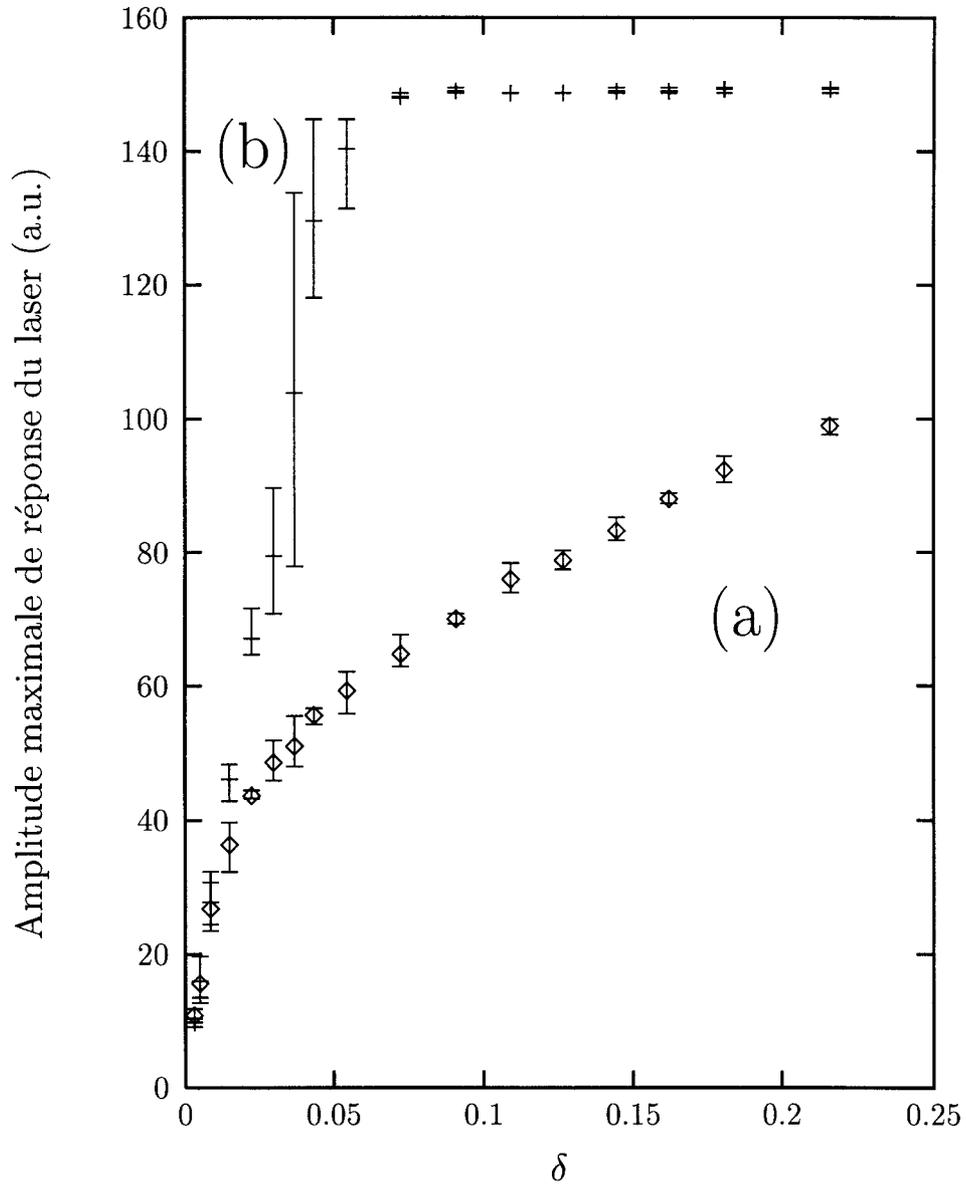


FIG. 2.11 – Amplitude de la réponse du laser (a) à la fréquence de commutation haute (b) à la fréquence de commutation basse en fonction de l'amplitude relative de modulation.

principaux effets que l'on peut relever sont :

- un déplacement de la zone de forte expansion vers les  $\Delta A$  croissants ( $0,6 \leq \Delta A \leq 0,14$ ) pour la courbe (b) et ( $0,22 \leq \Delta A \leq 0,25$ ) pour la courbe (c) ; en ce qui concerne la courbe (d) le système commute à la même fréquence à l'« aller » et au « retour » dans l'intervalle de  $\Delta A$  exploré ici.
- un abaissement et une disparition progressive du « plateau ». Ce plateau s'observe à  $f \simeq 0,56$  pour (a) et (b),  $0,63$  pour (c) et disparaît pour la courbe (d) dans la zone explorée.

Les observations effectuées peuvent être interprétées à l'aide d'un raisonnement simple. Lorsqu'en présence de bruit ajouté le système parcourt la branche haute du cycle d'hystérésis, il peut se produire des sauts accidentels vers la branche basse en raison de l'extrême finesse de la résonance non-linéaire. La valeur de la fréquence de commutation basse ainsi obtenue est, de ce fait, supérieure à celle de  $f_b$  en absence de bruit ajouté. Ce phénomène entraîne donc une diminution des largeurs des cycles et un déplacement de la courbe  $(\Delta A, f_b)$  vers les  $\Delta A$  plus élevés comme nous l'avons observé expérimentalement.

L'abaissement du « plateau » quant à lui peut s'expliquer en considérant les trajectoires dans l'espace des phases d'un point représentatif du système. Celui-ci décrit des courbes de la forme de celles de la figure 2.8. L'ajout de bruit entraîne nécessairement un accroissement des fluctuations du champ dans la cavité. L'étude numérique de G. LYTHER a montré que ces fluctuations fixent une limite supérieure à l'amplitude des oscillations en même temps qu'une limite inférieure à  $f_b$ . Une augmentation des fluctuations du champ (donc indirectement du bruit de pompe) a pour conséquence d'abaisser la hauteur du plateau tel que cela a été expérimentalement observé.

En conclusion, en vertu des résultats de l'étude numérique, nous avons interprété le mauvais accord entre théorie et expérience visible sur la figure 2.10 aux fluctuations d'origines diverses venant perturber les enregistrements expérimentaux. Ces bruits « naturels » des lasers empêchent une mesure correcte de la fréquence  $f_b$  de la façon discutée ci-dessus. Ce travail sur le bruit clos notre étude du passage à travers une résonance non-linéaire en régime « statique ». Comme indiqué dans l'introduction et motivé par les récents travaux de ROY *et al.*, nous nous intéressons maintenant aux phénomènes dynamiques que peut entraîner une augmentation de la vitesse de balayage de la fréquence de modulation.

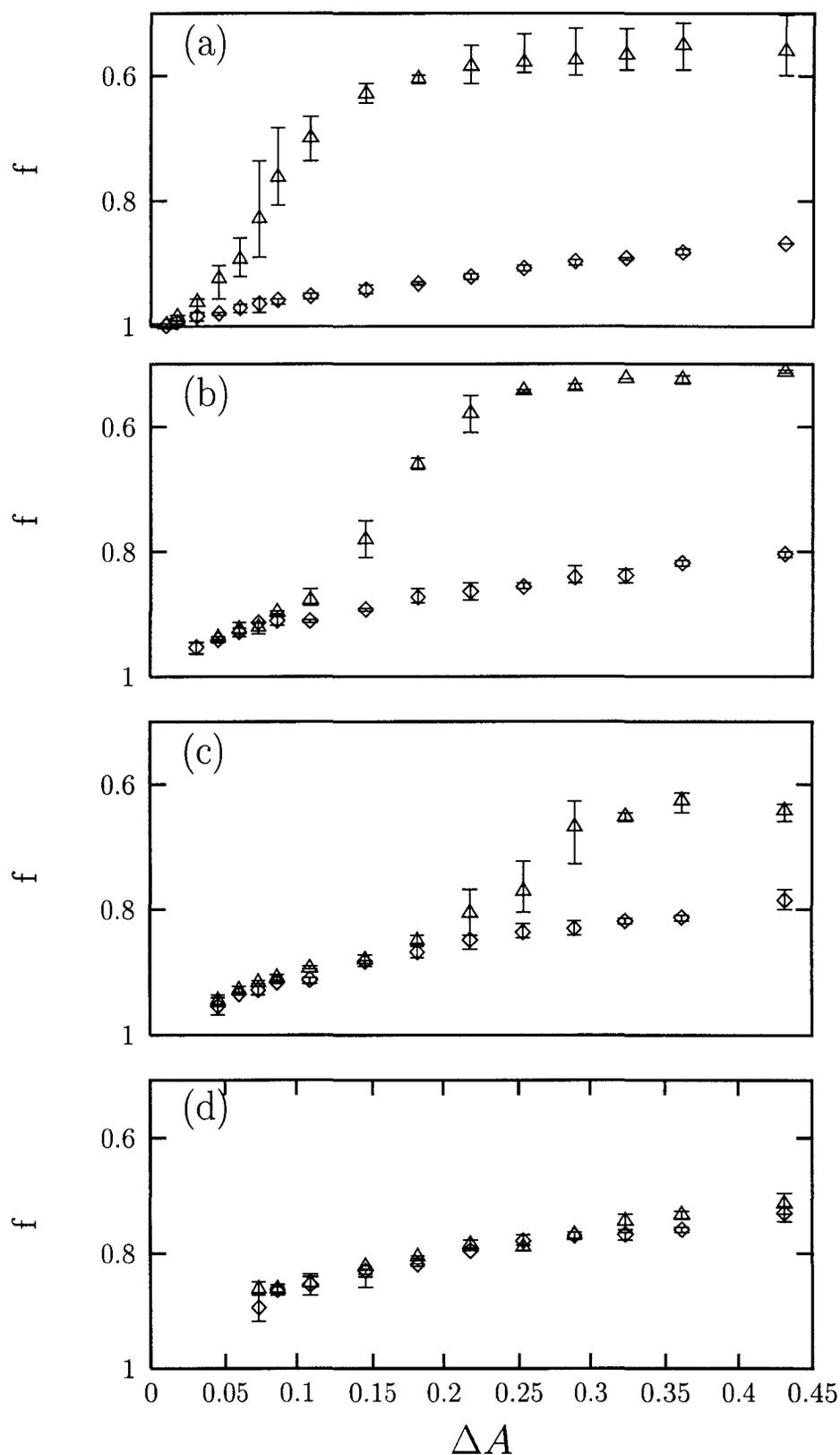


FIG. 2.12 – Evolution des fréquences de commutation avec l'amplitude de modulation pour différentes densités spectrales de bruit ajoutés sur la pompe : (a) sans bruit, (b) avec un niveau de bruit de  $-23,08$  dBm, (c) avec un niveau de bruit de  $-20,59$  dBm, (d) avec un niveau de bruit de  $-17,06$  dBm.

## 2.5 Etude dynamique

Nous nous intéressons dans cette section aux effets que peut produire un passage rapide à travers une résonance non-linéaire, lorsque le balayage du paramètre de contrôle ne peut plus être considéré comme « quasi-statique ». L'effet principal, déjà bien connu, est un déplacement des seuils de commutation qui s'effectue dans le sens d'un retard à la commutation. L'évolution de ces déplacements est régie par des lois d'échelle suivies par une large catégorie de systèmes passifs et récemment vérifiées par ROY *et al.* [113] dans le cas d'un laser à semi-conducteur. Notre objectif est essentiellement de déterminer les lois d'échelles de notre système.

Nous avons scindé notre travail en deux parties. Dans un premier temps, l'observation des enveloppes de réponse nous a permis de mettre en évidence un phénomène nouveau : au-delà d'une certaine vitesse de balayage, l'enveloppe de réponse du laser montre des oscillations de relaxation dont la fréquence dépend de l'écart à la résonance. La seconde partie vise la mesure des coefficients des lois d'échelles dynamiques à la fois dans le cas sans et avec hystérésis statique.

### 2.5.1 Oscillations de relaxation dans l'enveloppe

Les figures 2.13 et 2.14 proposent une comparaison entre des cycles d'hystérésis respectivement obtenus en régime quasi-statique et à grande vitesse de balayage. Il est clair que pour les deux sens de balayage, des oscillations de relaxation de fréquence très inférieure à  $f$  apparaissent sur l'enveloppe.

D'autres relevés expérimentaux (figures 2.15 à 2.18) illustrent globalement la naissance de ces oscillations à partir de la courbe statique (courbe (a) pour toutes les figures). Les figures 2.15 et 2.16 montrent l'évolution d'une courbe de résonance, dans un cas sans hystérésis statique, lorsque la vitesse de balayage est augmentée progressivement de (a) à (d). En parcourant ces courbes nous pouvons noter une diminution de l'amplitude de la résonance associée à un déplacement de fréquence. Ce déplacement est symétrique par rapport à  $f = 1$  en fonction du sens de balayage. Les figures 2.17 à 2.18 représentent une étude identique à ce qui précède, en présence d'hystérésis statique. La modulation de la pompe, sensiblement plus importante, procure ici des courbes présentant un meilleur rapport signal sur bruit. Contrairement au cas précédent, le déplacement de la résonance se produit uniquement lors du balayage « aller ». La symétrie des déplacements « aller » et « retour » est désormais brisée.

Il est également possible de remarquer que la période des oscillations diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la résonance : l'étude analytique

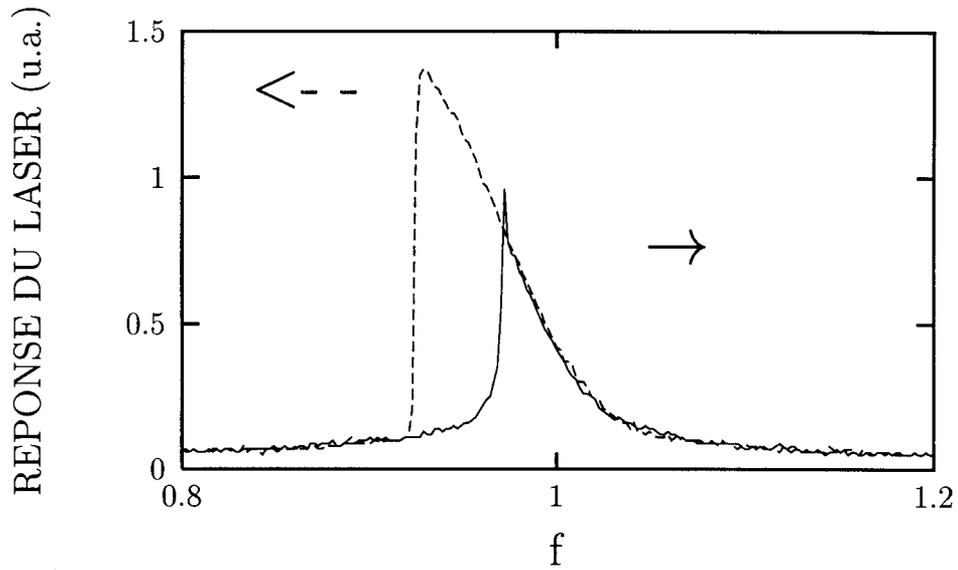


FIG. 2.13 - Cycle d'hystérésis à faible vitesse de balayage:  $A = 2,02$ ,  $\Delta A = 0,019$  et  $v = 21,9s^{-1}$ .

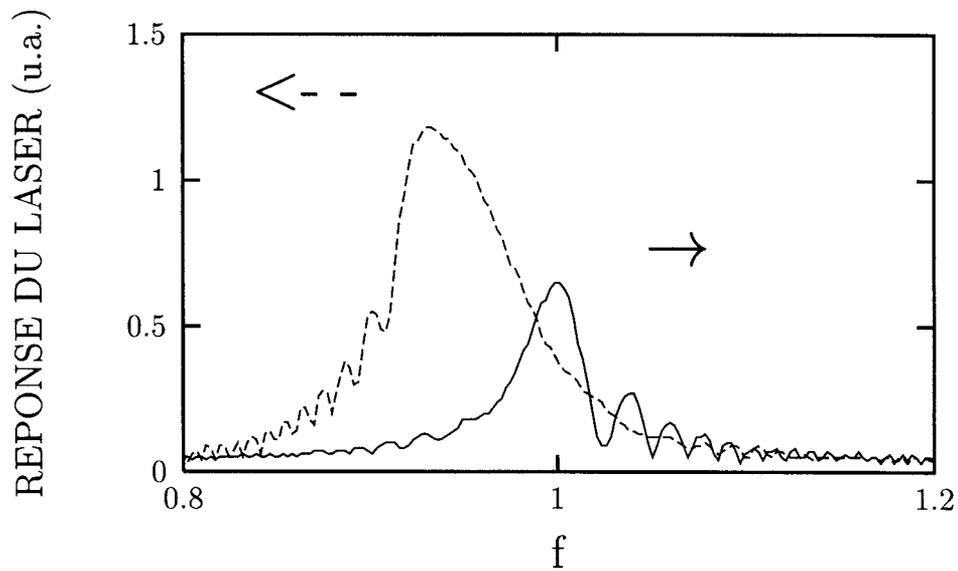


FIG. 2.14 - Passage rapide pour:  $v = 418,1s^{-1}$  ( $A = 2,02$  et  $\Delta A = 0,019$ ).

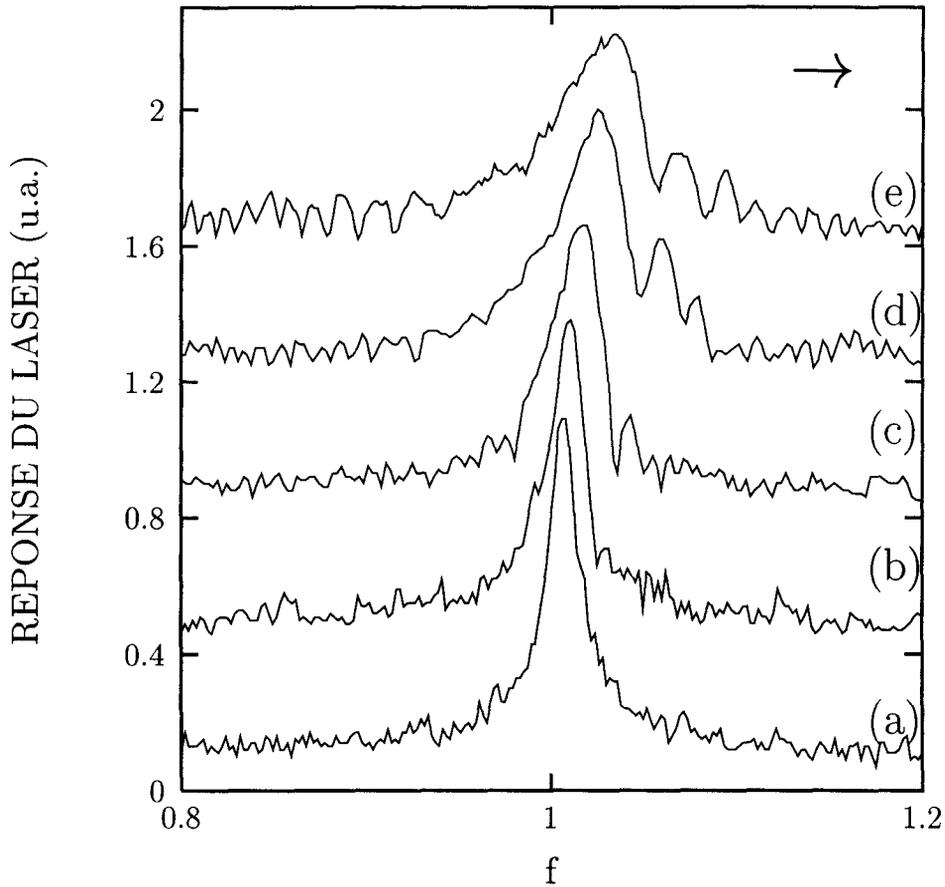


FIG. 2.15 – *Evolution des courbes de résonance du laser en régime dynamique (balayage suivant les fréquences croissantes) en absence d'hystérésis statique. Les différentes courbes sont obtenues pour  $A = 2,02$ ,  $\Delta A = 0,005$  et pour des vitesses de balayage (en  $s^{-1}$ ) de: (a) 21,9 (b) 79,6 (c) 219,0 (d) 418,1 (e) 597,2.*

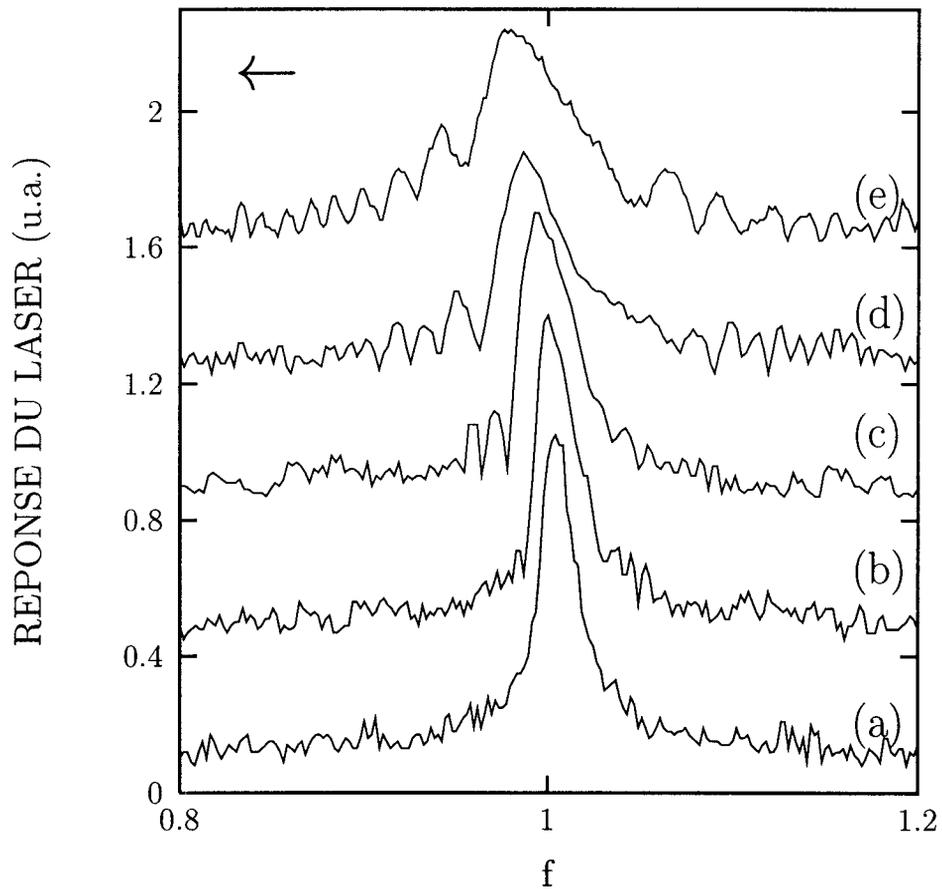


FIG. 2.16 – Evolution des courbes de résonance du laser en régime dynamique (balayage suivant les fréquences décroissantes) en absence d'hystérésis statique. Les différentes courbes sont obtenues pour  $A = 2,02$ ,  $\Delta A = 0,005$  et pour des vitesses de balayage (en  $s^{-1}$ ) de : (a) 21,9 (b) 79,6 (c) 219,0 (d) 418,1 (e) 597,2.

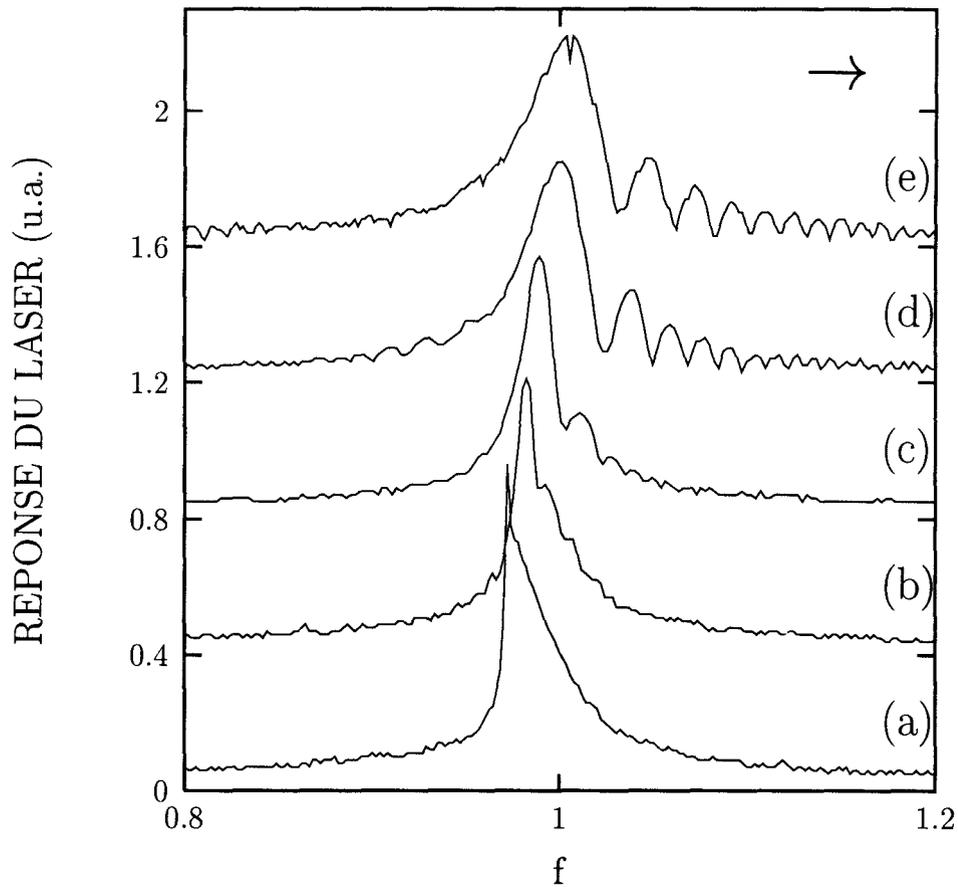


FIG. 2.17 – Evolution de l'enveloppe de résonance en régime dynamique (balayage suivant les fréquences croissantes) en présence d'hystérésis statique. Les données expérimentales sont  $A = 2,02$ ,  $\Delta A = 0,019$  et les vitesses (en  $s^{-1}$ ): (a) 21,9 (b) 79,6 (c) 219,0 (d) 418,1 (e) 597,2.

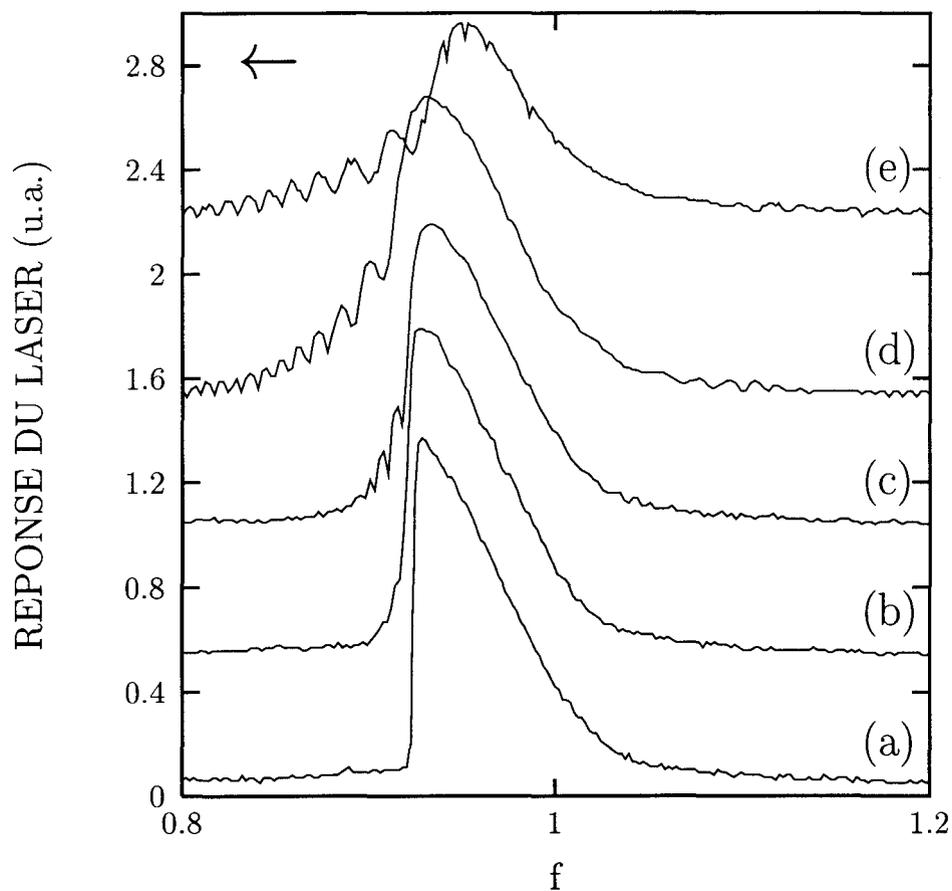


FIG. 2.18 – Evolution de l'enveloppe de résonance en régime dynamique (balayage suivant les fréquences décroissantes) en présence d'hystérésis statique. Les données expérimentales sont  $A = 2,02$ ,  $\Delta A = 0,019$  et les vitesses (en  $s^{-1}$ ): (a) 21,9 (b) 79,6 (c) 219,0 (d) 418,1 (e) 597,2.

de G. Lythe a montré qu'elle varie en  $1/1 - f$ .

### 2.5.2 Lois d'échelle dynamiques

Dans cette partie nous développons la méthode utilisée pour établir les lois d'échelles dynamiques de l'évolution des résonances avec  $v$  et discutons des résultats obtenus. En vertu des études théoriques déjà effectuées [112, 113] nous recherchons *a priori* une loi du type :

$$f - f_{stat} = a_0 v^{a_1} \quad (2.29)$$

où  $f_{stat}$  est la valeur de la fréquence de relaxation ou de commutation en régime statique. Les études antérieures sur un grand nombre de bistables tant passifs que actifs ont fourni :

- $a_1 = 1$  dans le cas sous-critique (sans cycle d'hystérésis) ;
- $a_1 = 4/5$  dans le cas critique (cycle naissant) ;
- $a_1 = 2/3$  dans le cas super-critique (avec cycle d'hystérésis).

Le protocole expérimental décrit dans la section 2.2 reste inchangé. Nous avons fixé l'amplitude de modulation du laser et réalisé en temps limité une série d'enregistrements en incrémentant la vitesse de balayage, tout en maintenant l'intervalle balayé constant. Cette façon de procéder, nous paraît encore une fois nécessaire pour limiter les dérives des paramètres du laser. Nous avons mesuré sur chaque courbe obtenue, la fréquence de résonance dans le cas sous-critique, les fréquences de commutation dans le cas super-critique. Le manque de stabilité de notre montage ne nous a pas permis d'isoler le régime critique. Lorsque nous observons la forme des enveloppes de réponse dynamiques (voir par exemple la figure 2.17), au-delà d'une certaine vitesse de balayage ( $v > 80s^{-1}$ ), la courbe ne présente plus de « front droit » aux fréquences de commutation, rendant difficile la mesure de celles-ci. Nous avons choisi de la mesurer au maximum de résonance.

Les principes expérimentaux étant rappelés, nous avons d'abord souhaité présenter la forme des courbes représentant l'évolution des maxima de résonance avec la vitesse de balayage  $v$  pour les deux régimes étudiés. Ces courbes sont illustrées par les figures 2.19 à 2.21.

La figure 2.19 représente la dépendance de la fréquence de résonance avec  $v$  en régime sans hystérésis statique à la fois pour un balayage « aller » et « retour ». Les flèches indiquent le sens de balayage de  $f$  correspondant à

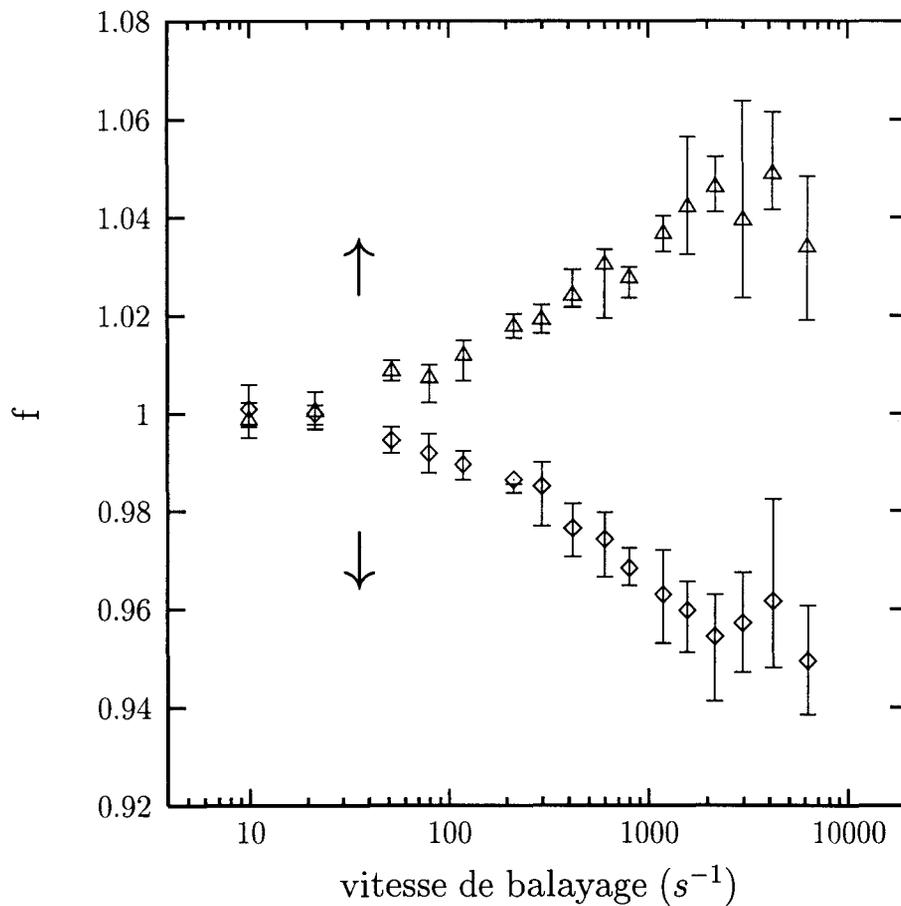


FIG. 2.19 – Dépendance de la fréquence de résonance avec la vitesse de balayage en absence d'hystérésis statique. Les données expérimentales sont  $A = 2,02$  et  $\Delta A = 0,005$ . Les flèches indiquent le sens de balayage pour chacune des branches. L'axe des abscisses est représenté en échelle logarithmique.

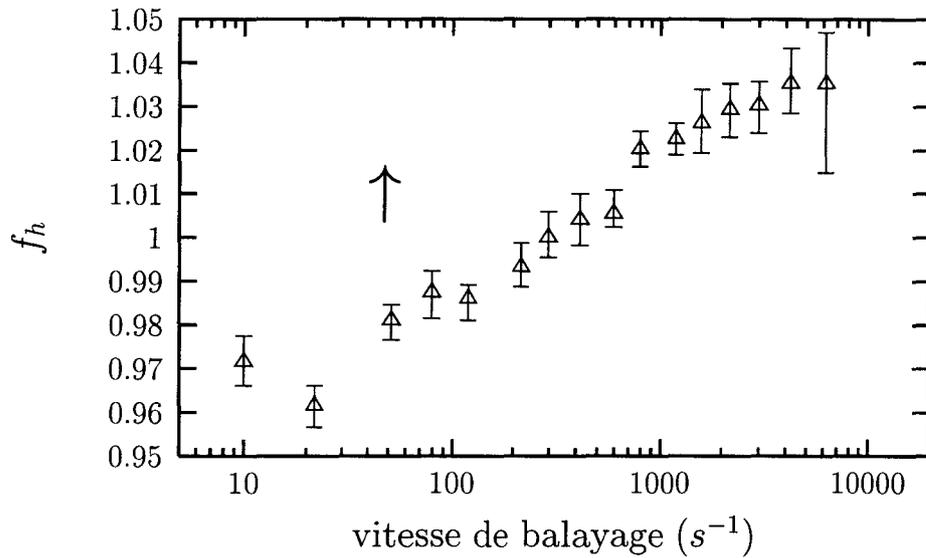


FIG. 2.20 – Dépendance de la fréquence de commutation  $f_h$  avec la vitesse de balayage en présence d'hystérésis statique. Les données expérimentales sont  $A = 2,02$  et  $\Delta A = 0,019$ . La flèche indique le sens de balayage.

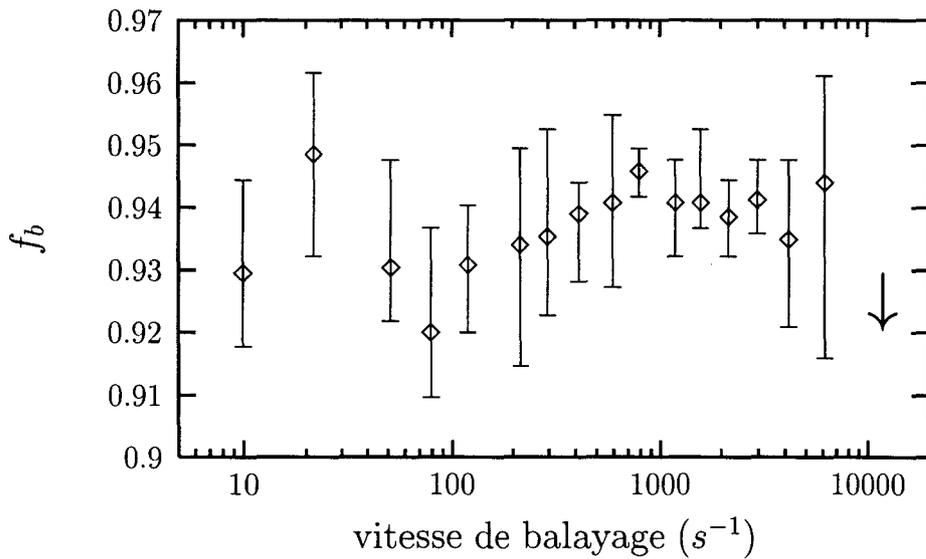


FIG. 2.21 – Dépendance de la fréquence de commutation  $f_b$  avec la vitesse de balayage en présence d'hystérésis statique. Les données expérimentales sont  $A = 2,02$  et  $\Delta A = 0,019$ . La flèche indique le sens de balayage.

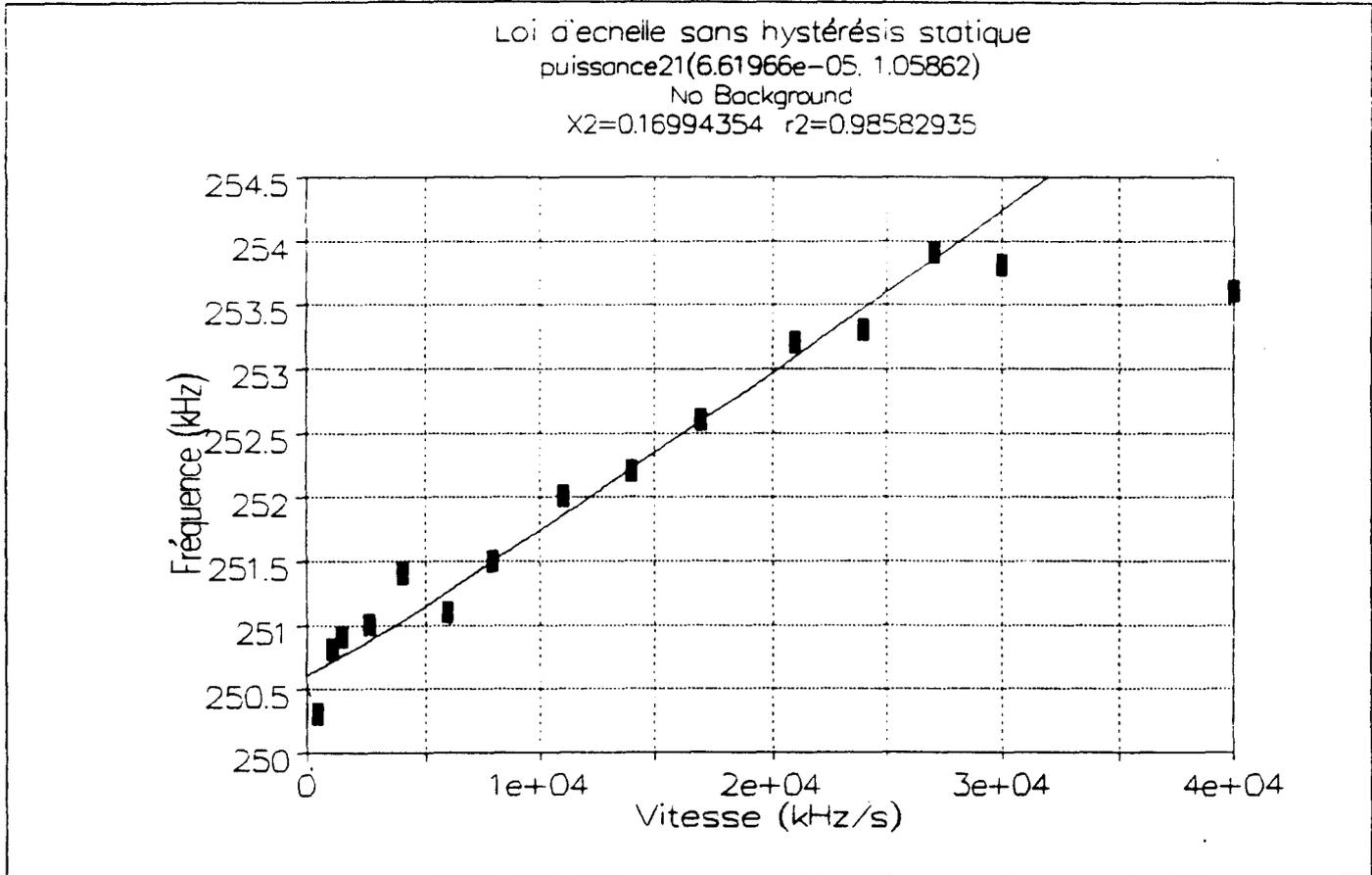


FIG. 2.22 – Interpolation de la courbe d'évolution de la fréquence de résonance avec la vitesse de balayage dans une situation sans hystérésis statique.

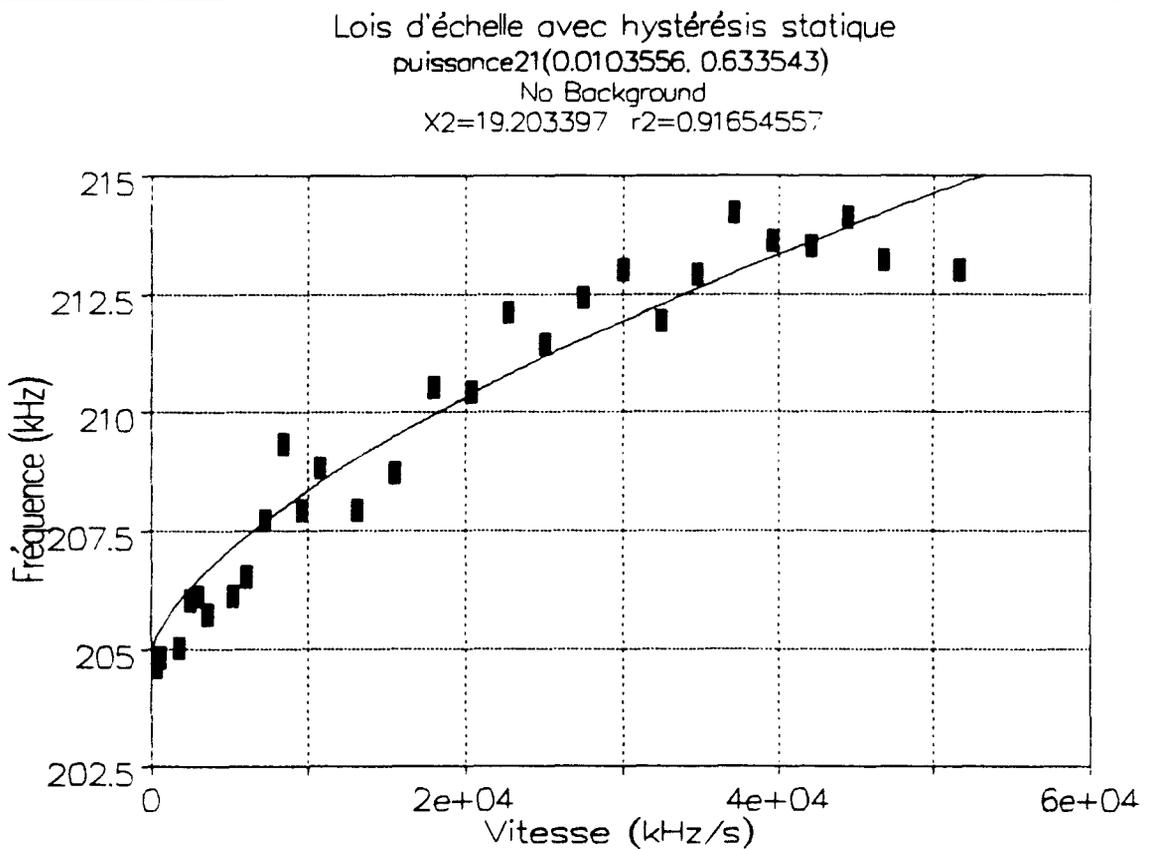


FIG. 2.23 – Interpolation de la courbe d'évolution de la fréquence de commutation avec la vitesse de balayage dans une situation avec hystérésis statique.

chacune des branches de la courbe. Nous pouvons scinder sa description en trois parties distinctes :

- aux faibles vitesses ( $v < 30s^{-1}$ ), la fréquence de résonance est identique à l'« aller » et au « retour » : les effets dynamiques ne se font pas encore sentir.
- aux vitesses moyennes ( $40s^{-1} < v < 2000s^{-1}$ ), la résonance se déplace de façon symétrique entre l'« aller » et le « retour ». Dans cette partie, la variation de  $f$  semble quasi-linéaire pour  $200s^{-1} < v < 2000s^{-1}$ . La transition entre le régime « quasi-statique » ( $f = 1$ ) et cette variation quasi-linéaire s'effectue de manière douce comme le suggère l'« inflexion » des branches ( $40s^{-1} < v < 200s^{-1}$ ).
- aux fortes vitesses, la fréquence  $f$  n'évolue plus : elle se stabilise à environ 1,045 pour la branche « aller » et 0,955 pour la branche « retour ».

Nous voulons, au vu de la description de la figure 2.19, insister sur le fait que les deux branches de la courbes sont symétriques par rapport à  $f = 1$ .

Les figures 2.20 et 2.21 montrent une étude identique réalisée en régime avec hystérésis statique. La figure 2.20 représente le résultat obtenu pour le balayage « aller ». Nous retrouvons une courbe qualitativement identique à celle de 2.19 :

- une fréquence  $f_h$  constante aux faibles vitesses ( $v < 30s^{-1}$ ).
- une variation « quasi-linéaire » aux vitesses moyennes ( $200s^{-1} < v < 3000s^{-1}$ ) précédée d'une transition « douce » ( $40s^{-1} < v < 200s^{-1}$ ).
- une fréquence  $f_h$  presque constante aux fortes vitesses ( $4000s^{-1} < v$ ). Ce dernier effet est cependant moins marqué ici.

Nous avons reproduit parallèlement la variation de  $f_b$  pour la même étude sur la figure 2.21 : la vitesse semble sans effet sur son évolution. Cette constatation est appuyée par la forte dispersion des mesures.

Suite à l'observation des figures 2.19, 2.20 et 2.21, nous pouvons à présent affirmer que l'apparition du comportement bistable du laser provoque une brisure de symétrie de l'évolution des maxima de résonance avec la vitesse  $v$  entre les balayages « aller » et « retour ».

Nous nous intéressons à présent aux lois d'échelle de l'évolution des maxima de résonance avec  $v$ . Les lois que nous allons établir ne sont strictement valables qu'aux faibles vitesses (cas de ROY *et al.* [113]). En vertu des développements précédents, nous nous sommes également limité à des interpolations sur des courbes obtenues par balayage suivant les fréquences  $f$  croissantes.

Le procédé expérimental reste toujours le même. Nous avons enregistré plusieurs courbes de résonance, où la vitesse est successivement incrémentée, en un court intervalle de temps. Les fréquences sont repérées au maximum de résonance et reportées sur un graphique  $(\Delta\nu/\Delta t, \nu)$  (nous avons laissé les variables dimensionnées, à savoir  $\nu$  en kHz et  $\Delta\nu/\Delta t$  en  $\text{kHz}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Les points expérimentaux sont ensuite interpolés sur une fonction à deux paramètres indéterminés du type de l'équation 2.29, à l'aide du logiciel PeakFit.

L'interpolation à deux paramètres indéterminés nous impose de fixer la fréquence de relaxation ou de commutation en régime statique. Dans notre système, cette fréquence est soumise à des fluctuations : une petite fluctuation de celle-ci peut influencer sur les valeurs de  $a_0$  et  $a_1$  mesurées.

Pour palier à cette difficulté nous avons dans un premier temps, réalisé une interpolation à trois paramètres indéterminés où la valeurs de  $f_{stat}$  est obtenue par l'interpolation. Toutefois, les résultats de cette méthode ont fourni des erreurs standards sur le coefficient  $a_1$  très importantes, n'assurant pas une bonne évaluation de celui-ci. Nous avons par conséquent abandonné cette méthode.

Les résultats de l'interpolation à deux paramètres indéterminés sont illustrés sur les figures 2.22 et 2.23. Les points à faible vitesse ( $\Delta\nu/\Delta t \leq 0,3 \text{ kHz}\cdot\text{s}^{-1}$ ) servent à fixer la fréquence de relaxation ou de commutation du régime statique : ils ont été exclus de l'interpolation. La figure 2.22 donne la loi de puissance en régime sans hystérésis statique :  $a_1 = 1$ . La figure 2.23 fournit le résultat en régime avec hystérésis statique :  $a_1 = 0,63$ . Des mesures répétées de cette dernière expérience fournissent en général un coefficient  $a_1$  dans l'intervalle  $[0,57;0,70]$ .

Les valeurs obtenues de l'exposant de la vitesse  $v$  des lois d'évolutions des fréquences de résonance ou de commutation ne mettent pas en défaut celles établies par ROY *et al.*.

## 2.6 Conclusion

L'étude du passage lent à travers une résonance a permis de montrer un excellent accord entre théorie et expérience. Lors de l'étude « statique », nous avons établi les lois d'évolution des fréquences de commutation haute et basse en fonction de l'amplitude du forçage, par une méthode de perturbation. La loi d'évolution de  $f_h$ , calculée analytiquement, est en accord quantitative avec l'expérience. Par contre, le désaccord entre théorie et expérience pour  $f_b$  fut expliqué par une étude sur les effets du bruit. Ces derniers ont pour conséquence d'abaisser l'effet de « plateau » observé en l'absence de bruit ajouté de réduire la largeur du cycle d'hystérésis.

Du point de vue dynamique, nous avons mis en évidence un nouveau phénomène : lorsque la fréquence est balayée au-delà d'une certaine vitesse, des oscillations de relaxation de l'enveloppe se manifestent. La période de ces oscillations varie proportionnellement à l'écart à la résonance. Les lois d'échelle dynamique ont été recalculées dans la limite des faibles vitesses dans les cas sous-critique et super-critique. Elles ne montrent aucune différence notable avec les exposants connus.

# Chapitre 3

## Influence d'une perturbation sous-harmonique dans un laser à paramètre modulé

### 3.1 Introduction

Durant la dernière décennie, l'un des plus intéressants défis lancé dans le domaine de la dynamique non-linéaire s'est porté sur le contrôle du chaos. Un attracteur chaotique possède une infinité d'états périodiques instables « enfouis » à l'intérieur de celui-ci. L'idée principale est de stabiliser le système sur l'une de ces orbites périodiques en appliquant de petites perturbations soigneusement choisies à l'un des paramètres du système ; les perturbations sont proportionnelles à l'écart entre le point représentatif du système (chaotique) dans l'espace des phases et un point fixe instable. Cette méthode fut proposée par OTT, GREBOGI et YORKE (OGY)[122] et vérifiée sur l'attracteur de HÉNON : les auteurs ont extrait une orbite de période 1 qui restait stable en présence de bruit ajouté. La première vérification expérimentale revient à DITTO *et al.* [123] sur un ruban magnéto-élastique. Depuis, diverses techniques de contrôle, basées sur l'algorithme général d'OGY, ont été expérimentées sur des systèmes tels que les lasers [124–127], les circuits électroniques [128], la convection thermique [129], les réactions chimiques [130–133], les systèmes biologiques [134, 135]. Une illustration spectaculaire en est la stabilisation en temps réel des arythmies chaotiques d'un coeur de lapin [134].

La plupart des techniques de contrôle font appel à une procédure de contre-réaction. En 1991, HUNT [128] introduisit une procédure de contrôle par *contre-réaction proportionnelle occasionnelle*, permettant d'appliquer de

fortes perturbations et de stabiliser le système sur des orbites  $pT$  périodiques ( $p$  est un nombre entier). Cette technique, essentiellement un cas limite de la méthode OGY, fut testée sur un laser multimode [124]. NEWELL *et al.* [136] l'utilisèrent pour synchroniser les signaux chaotiques d'une paire de résonateurs à diode indépendants. PENG, PETROV et SHOWALTER ont également utilisé une méthode de *contre-réaction proportionnelle simple* pour contrôler des systèmes chaotiques de faibles dimensions [130, 131] et l'ont appliquée à des systèmes chimiques et biologiques [131]. Ce dernier algorithme possède certaines limitations liées au choix du paramètre de contrôle. De façon à réaliser une stabilisation valable pour un choix quelconque de celui-ci, ROLLINS, PARMANANDA et SHERARD [137] ont présenté un algorithme de *contre-réaction proportionnelle récursive* pour contrôler le chaos dans des systèmes hautement dissipatifs, en appliquant une approche de DRESSLER et NITSCHÉ [138, 139]. Les mêmes auteurs ont mis cette méthode à exécution dans une cellule électrochimique [140]. SCHWARTZ et TRIANDAF [141, 142] ont introduit un algorithme de *continuation alternative* qui ne réclame pas de modèle analytique, mais des séries temporelles expérimentales. Cette méthode, qui utilise une technique de prédiction-corrrection, permet de suivre une orbite périodique instable en faisant varier un paramètre accessible du système de façon déterministe [141] ou aléatoire [142]. Elle fut testée numériquement sur l'attracteur de HÉNON [141, 142] et expérimentalement sur un oscillateur de DUFFING électronique [143]. NAGAI et LAI [144] se sont intéressés à des systèmes qui commutent de façon intermittente vers des états chaotiques ; leur stratégie est de faire un contrôle ciblé sur une trajectoire au voisinage de la phase chaotique désirée.

A *contrario*, des travaux récents motivés par le fait que la suppression du chaos peut être indésirable dans certains systèmes biologiques<sup>1</sup> se sont concentrés sur le maintien du chaos [135, 149, 150]. En particulier, IN *et al.* [150] ont montré toujours suivant un raisonnement similaire à la méthode OGY, que l'on peut maintenir un système physique dans un état chaotique ; ils ont vérifié cette méthode d'« anti-contrôle » expérimentalement sur un ruban magnéto-mécanique. Une technique de *contre-réaction occasionnelle* a permis à PARMANANDA et EISWIRTH [151], suivant la stratégie de IN *et al.*, de maintenir un oscillateur chimique dans un état chaotique désiré.

La méthode OGY réclame toutefois une analyse numérique de l'état du système et se trouve difficile à appliquer sur des systèmes à dynamique rapide. D'autre part, puisque l'on travaille sur des sections de POINCARÉ, les

---

1. Un exemple, aujourd'hui bien connu, en est la variation de la fréquence des battements du cœur humain où un état chaotique correspond à des conditions physiologiques de « bonne santé » tel que l'ont montré GOLDBERGER, MANDELL, WEST et leurs collaborateurs [145-148].

corrections apportées au système sont discrètes. Ainsi, le bruit peut parfois conduire celui-ci dans des régions éloignées de l'orbite périodique désirée [122]. Une méthode plus récente élaborée d'après un algorithme de PYRAGAS [152] propose un contrôle continu particulièrement adapté pour stabiliser des dynamiques chaotiques rapides. Celle-ci est basée sur une perturbation contre-réactionnelle construite à partir de la différence entre le signal de sortie retardée et le signal de sortie lui-même. La stabilisation est réalisée en ajustant l'amplitude du signal de contre-réaction. Elle possède l'avantage d'être robuste même en présence de bruit considérable. Cette méthode fut testée expérimentalement sur un oscillateur électronique [153], puis utilisée pour contrôler les oscillations électriques chaotiques induites par champ magnétique dans des semi-conducteurs [154], stabiliser des orbites périodiques instables dans un laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées [155] et dans un résonateur à diode [156], fixer des états stationnaires instables dans un système de MACKEY-GLASS [157, 158], contrôler le chaos dans un réseau de neurones [159]. SIMMINDINGER et HESS [160] l'ont également mise en application dans un laser à semi-conducteur où la boucle de contre-réaction est entièrement optique. Le désavantage de la méthode de PYRAGAS tient au fait que, dans certain cas, la portée du contrôle est limitée à une petite région de l'espace des paramètres. SOCOLAR *et al.* [161] ont adapté la méthode de façon à accroître la région où le contrôle peut être réalisé. DE SOUSA VIEIRA et LICHTENBERG [162] l'ont encore généralisé en introduisant une fonction non-linéaire dans le terme de contre-réaction.

Parallèlement aux méthodes de contre-réaction, une technique prometteuse et simple à mettre en oeuvre est apparue : l'introduction de petites perturbations externes qui modifient la dynamique sous-jacente du système et font apparaître des solutions périodiques stables. LIMA et PETTINI [163] ont montré analytiquement et numériquement, en partant d'un régime chaotique de l'oscillateur de DUFFING-HOLMES, qu'il est possible au moyen d'une petite perturbation paramétrique de fréquence bien choisie, de régulariser le régime du système. BRAIMAN et GOLDIRSCH [164] ont illustré un schéma sans contre-réaction pour créer des orbites périodiques : ils ont montré que l'on peut « domestiquer » celui-ci en introduisant une faible perturbation bien adaptée au système. Ce schéma est très attractif parce que son exécution en temps réel, particulièrement pour des systèmes à dynamiques rapides, est très simple. Du point de vue expérimental, une petite perturbation périodique a permis de contrôler le chaos dans des instabilités d'onde de spin [165], dans un bistable magnéto-élastique [166], dans un circuit électronique [167], dans une diode laser [168]. En outre, CHACON et BEJARANO [169] ont décrit une nouvelle route pour éliminer le chaos, en changeant simplement la forme de la perturbation. Ils ont illustré ceci sur l'oscillateur de DUFFING forcé avec

la fonction elliptique jacobienne.

Il est, par ailleurs, bien connu qu'une force externe appliquée à une fréquence de résonance, près des points de bifurcation, peut causer une amplification du signal périodique et un déplacement des points de bifurcation [170–173]. Dans des conditions normales d'opération, la réponse d'un oscillateur forcé et soumis à une modulation de fréquence moitié dépend fortement de la phase du signal. Des phénomènes dépendant de la phase au voisinage des bifurcations dans un laser  $\text{CO}_2$  ont été étudiées théoriquement [174, 175] et expérimentalement [176]. MEUCCI *et al.* [177] ont montré que l'attracteur chaotique d'un laser  $\text{CO}_2$  monomode à pertes modulées peut être stabilisé sur des orbites périodiques en ajustant la phase de la perturbation qui se trouve à la fréquence moitié ou quart de celle du forçage.

Des études fortement liées à ces dernières concernent l'influence d'une modulation secondaire quasi-résonante avec une sous-harmonique de la fréquence de forçage. L'influence du désaccord entre la sous-harmonique en question et la fréquence de la modulation secondaire fut étudiée par VOHRA *et al.* : il peut notamment provoquer un déplacement déstabilisateur d'une bifurcation de doublement de période [178], induire ou supprimer le chaos [179] dans la dynamique d'un ruban magnéto-strictif. Insistons sur le fait que ce désaccord produit, selon nous, le même effet qu'une dérive de la phase de la perturbation. Très récemment, YANG *et al.* [180] ont proposé une étude systématique de l'influence de la phase d'une perturbation additionnelle dans le contrôle de la dynamique de l'oscillateur de DUFFING.

Les études que nous venons de relater montrent l'intérêt et l'importance qu'ont porté les chercheurs à ce domaine ces dernières années. La technique de contre-réaction, largement employée, constitue une véritable méthode de contrôle où le régime final du système est prédictible (« goal-oriented schema »). À l'inverse, et à strictement parler, le schéma de modulation externe ne constitue pas une méthode de contrôle car son résultat n'est pas prédictible [181]. Cette faiblesse fait de celle-ci un champ ouvert à de nouvelles études et a conditionné notre choix pour une technique de modulation. Par ailleurs, LI et CHERN [182] ont développé une méthode permettant de prédire l'issue de l'action d'une faible perturbation périodique et l'ont appliquée sur un résonateur à diode [183].

Nous allons étudier, dans ce chapitre, comment la dynamique d'un système forcé est altérée par l'utilisation d'une seconde modulation à une fréquence sous-harmonique de la première. Nous avons accordé un rôle particulier à la phase relative de cette seconde modulation par rapport à la modulation principale. La plupart des travaux précédents ont considéré l'effet de la seconde modulation d'un point de vue local, c'est à dire en fixant la valeur des paramètres. L'originalité du travail présenté ici s'appuie sur le fait

que les effets de phase sont considérés de façon globale et dans un large choix de situations ; les prédictions expérimentales réalisées sur un laser à fibre dopée au néodyme ont été comparées aux observations numériques. Ce type de laser nous a permis de disposer d'un grand nombre de scénarios possibles de transitions vers le chaos incluant la cascade de doublement de période et la quasi-périodicité.

Ce chapitre se compose de deux parties. Dans la première, nous décrivons le montage expérimental : un laser à fibre dopé au néodyme et pompé par diode laser. Nous rappelons ensuite les idées essentielles de la modélisation et le modèle utilisé pour nos simulations. Les résultats obtenus font l'objet d'une soumission à publication : nous avons reproduit le texte soumis dans la seconde partie ; nous y détaillons les travaux réalisés pour les deux types de route vers le chaos considérées : la cascade de doublement de période et la quasi-périodicité. Pour chacune des routes, nous avons entrepris des simulations numériques du modèle pour un choix de paramètres prédéfinis et des études expérimentales comparatives : les résultats qualitatifs sont discutés tout au long de l'étude.

## 3.2 Le laser à fibre

### 3.2.1 Description du montage expérimental

Le laser à fibre a été choisi comme prototype pour étudier les effets de la phase d'une petite perturbation périodique à la fois pour des raisons techniques et physiques ; la principale raison étant la variété de régimes dynamiques dans lesquels il peut fonctionner.

Le montage expérimental de la figure 3.1 est identique à celui présenté par Serge Bielawski dans son mémoire de thèse [82]. Nous nous bornerons donc à en rappeler les principales caractéristiques. Il est constitué par un laser à fibre de géométrie Pérot-Fabry pompé par diode laser.

La cavité laser est composée de deux miroirs dichroïques  $M_1$  et  $M_2$  transparents à la longueur d'onde de pompe et de coefficients  $R_1 \geq 99.5 \%$  et  $R_2 = 95 \%$  autour de  $1.08 \mu\text{m}$ . Les miroirs sont plaqués directement sur les extrémités de la fibre. Afin de réduire les pertes de la cavité et d'améliorer le couplage entre le rayonnement de pompe et la fibre, un liquide adaptateur d'indice réalise le contact entre le miroir et la fibre. Le milieu actif est une fibre en silice de 3,50 mètres de long dopée au néodyme (300 ppm), possédant un coeur de  $5.8 \mu\text{m}$  et une longueur d'onde de coupure de  $1 \mu\text{m}$ . A la longueur d'onde du laser ( $1.08 \mu\text{m}$ ) seul le mode  $LP_{01}$  peut se propager.

Le laser de pompe est une diode monomode transverse émettant à 820 nm.

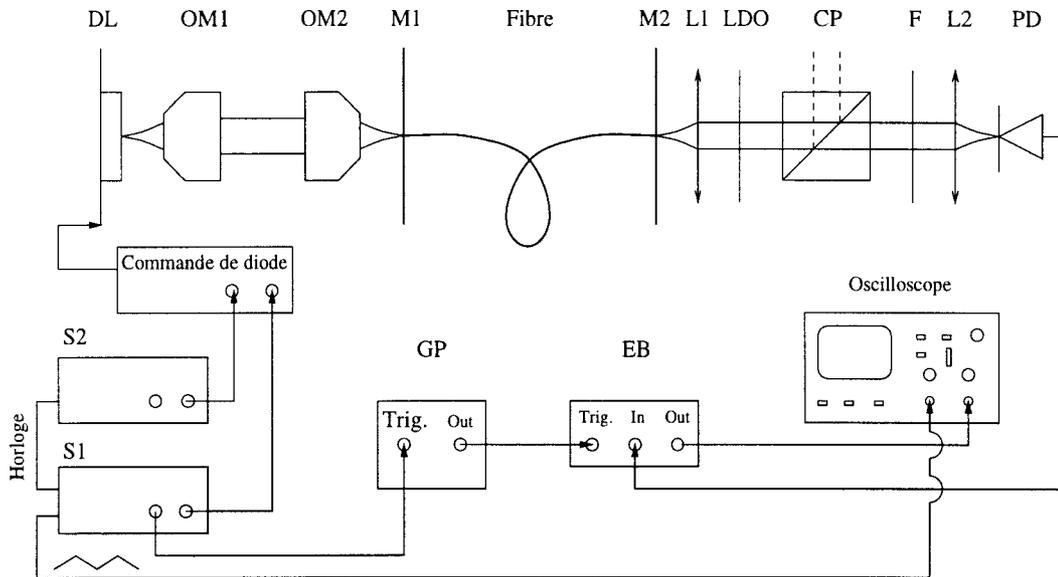


FIG. 3.1 – Montage expérimental du laser à fibre pour l'obtention des diagrammes de bifurcation. Les éléments sont : la diode laser DL, les objectifs de microscope OB1 et OB2, la cavité laser constituée des miroirs M1, M2 et de la fibre, les lentilles L1 et L2, la lame demi-onde LDO, le cube polariseur CP, le filtre interférentiel centré à  $1,08 \mu\text{m}$  F, le photodétecteur PD, les synthétiseur de fréquence S1 et S2, le générateur de pulse GP, l'échantillonneur-bloqueur EB.

Le faisceau émis est collimaté puis focalisé sur le cœur de la fibre au moyen de deux objectifs de microscope (de grossissement 10 et d'ouverture numérique 0.25). Le dispositif d'alimentation de la diode laser possède deux entrées de modulation du courant de diode identiques (bande passante de 0 à 1 MHz). Les modulations viennent s'ajouter à une composante continue réglable. Un dispositif de protection limite l'intensité du courant de diode laser.

En sortie du laser, le faisceau est collimaté à l'aide d'une lentille mince ( $L_1$ ), filtré de son rayonnement de pompe résiduel (F) puis focalisé ( $L_2$ ) sur une photodiode au silicium. Cette dernière est suivie d'un redresseur et d'un convertisseur courant-tension dont la réponse fréquentielle est constante dans la bande 0 - 1 MHz. Dans le montage, un cube séparateur (CS) précédé d'une lame demi-onde (LD) permet d'observer soit l'une des polarisations du faisceau, soit l'intensité totale.

La modulation de la pompe est réalisée en agissant sur le courant de diode laser par l'intermédiaire des entrées de modulation placées sur l'électronique de commande de celle-ci. Ce courant est conduit par deux synthétiseurs de fréquence (Hewlett Packard HP 3325b) verrouillés en phase l'un par rapport à l'autre, avec une différence de phase bien contrôlée.

L'évolution des différents régimes du laser avec un paramètre de contrôle, comme par exemple l'amplitude de modulation, la fréquence de modulation ou le paramètre de pompe, peut être représentée au moyen d'un diagramme de bifurcation. Les diagrammes de bifurcation décrits dans ce chapitre ont été observés directement à l'oscilloscope en représentant les valeurs échantillonnées à chaque période de modulation en fonction du paramètre de contrôle [82, 184, 185]. Le résultat de l'échantillonnage est une valeur unique si le régime est  $T$  périodique,  $m$  valeurs s'il est  $mT$  périodique ou une suite irrégulière s'il est chaotique.

Le mode opératoire est illustré sur la figure 3.1 où le paramètre de contrôle est l'amplitude de modulation du signal principal délivré par le générateur  $S_1$ . L'amplitude de modulation est repérée à l'aide du signal triangulaire de référence issu de  $S_1$ . D'autre part, le signal de synchronisation de  $S_1$ , déclenche un générateur d'impulsions qui délivre une impulsion retardée : le retard de celle-ci (ou phase de l'échantillonnage) ainsi que sa durée sont ajustables. A chaque impulsion, le signal provenant du détecteur est échantillonné et la valeur bloquée est envoyée à la voie  $Y$  de l'oscilloscope. L'évolution de la sortie de l'échantillonneur en fonction du triangle de référence constitue le diagramme de bifurcation.

Les diagrammes de bifurcation ne suffisent cependant pas à interpréter certains régimes dynamiques, comme par exemple la quasi-périodicité ou le chaos. Il est également intéressant de connaître le type d'attracteur d'un régime donné. Ceci peut être mis en évidence par des diagrammes de premier re-

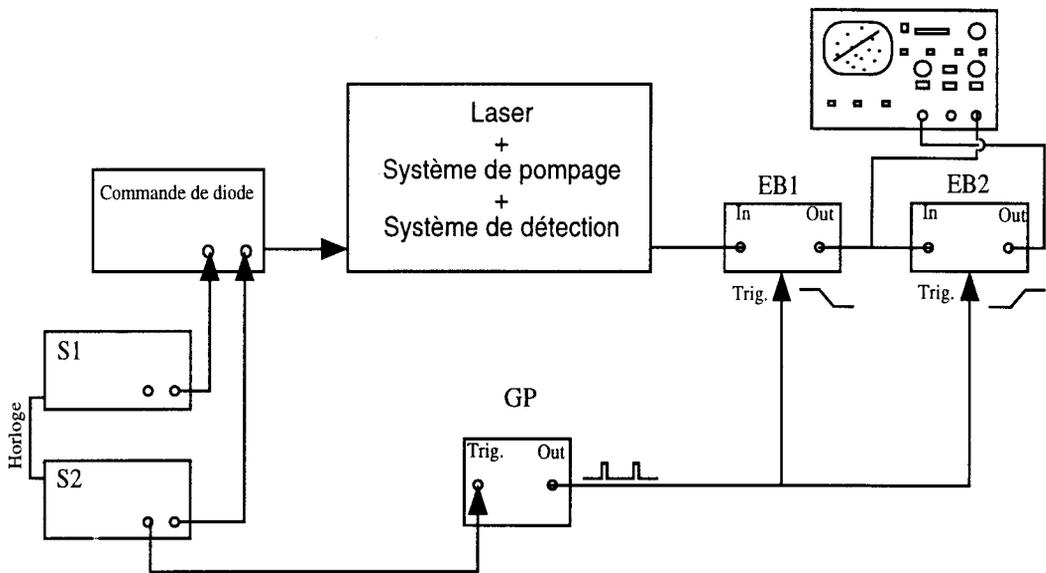


FIG. 3.2 – Montage expérimental pour l'obtention des diagrammes de premier retour. Les éléments du laser, du système de pompage et de détection sont les mêmes que sur la figure 3.1. Les autres éléments sont : les synthétiseurs S1 et S2; le générateur de pulse GP; les échantillonneurs-bloqueurs EB1 et EB2.

tour. Ceux-ci ont été obtenus par la méthode de l'échantillonnage en cascade présenté sur la figure 3.2. Comme précédemment, le signal de synchronisation du synthétiseur  $S_1$  déclenche le générateur d'impulsions (GP) qui produit une impulsion par période de modulation. L'impulsion de sortie de GP déclenche désormais deux échantillonneurs-bloqueurs ( $EB_1$  et  $EB_2$ ) placés en série. Ces échantillonneurs-bloqueurs sont déclenchés sur des pentes différentes de l'impulsion : sur la pente montante  $EB_2$  prend la valeur bloquée de  $EB_1$  ; sur la pente descendante  $EB_1$  échantillonne l'intensité du laser et bloque une nouvelle valeur. Les signaux de sortie des échantillonneurs-bloqueurs, envoyés sur l'oscilloscope nous donnent directement un diagramme  $(I_n, I_{n+1})$ .

### Paramètres expérimentaux

Les paramètres du laser sont *a priori* sensibles au réglage de la cavité. Nous avons optimisé l'alignement de la cavité comme dans [82] et considérons que les paramètres du laser sont approximativement les mêmes. Les méthodes d'évaluation du paramètre de saturation croisée, du paramètre d'asymétrie, de l'émission spontanée sont détaillées dans la même référence. Nous nous sommes intéressés aux paramètres fixant la dynamique du laser. Une des méthodes de mesure de la durée de vie  $\tau_f$  du niveau supérieur et de la durée de vie  $\tau_c$  des photons dans la cavité consiste à percuter faiblement le système (de façon à rester dans l'approximation linéaire) et à interpoler la réponse du laser sur une sinusoïde amortie. Cette opération répétée pour différentes valeurs de la puissance de pompage permet de déterminer  $\tau_f$  et le produit  $\tau_c\tau_f$ . On évalue ainsi  $\tau_f$  à  $250 \mu\text{s}$  et  $\tau_c$  autour de  $1,67 \cdot 10^{-7}$  s (soit  $\kappa = 1/\tau_f = 5,99 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ ) ; ceci fournit une fréquence de relaxation proche de celle mesurée dans nos expériences sur le spectre de bruit.

## 3.2.2 Théorie

### Description du modèle

Le modèle utilisé a également été étudié de façon exhaustive dans [82]. Nous nous contenterons ici d'en rappeler les idées essentielles. Le laser émet un rayonnement polarisé linéairement dans deux directions orthogonales : il est considéré comme un système bimode, chaque mode (ou sous-système) étant associé à chacune des directions propres de polarisation. Les sous-systèmes, couplés l'un à l'autre, sont décrits par un modèle de laser monomode de classe B répondant à l'approximation des équations du bilan. Les variables dynamiques sont l'intensité de chaque mode  $I_j$  et l'inversion de

Paramètres	Cascade de doublements de période	Quasipériodicité
$A_0$	1,75 à 1,93	3,65
$\beta$	0,43	0,43
$\alpha$	0,86	0,84
$\gamma$	$0,67 \cdot 10^{-3}$	$0,67 \cdot 10^{-3}$
$a$	$1,80 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-4}$
$\omega/\omega_R$	0,58 à 0,48	0,40
$r_1$	0,42	0,77 à 0,79
$r_2$	0,01	0,02

TAB. 3.1 – Valeurs des paramètres utilisées pour les simulations numériques dans chaque type d'étude.

population  $N_j$  correspondant à chaque sous-système. Le modèle s'écrit :

$$I_j = (N_j + \beta N_q - 1)I_j + a(N_j + \beta N_q) \quad (3.1)$$

$$N_j = \gamma [N_j^0(\tau) - (1 + I_j + \beta I_q) N_j] \quad (3.2)$$

avec  $j = 1, 2$  et  $q = 3 - j$ . Les variables évoluent par rapport au temps sans dimension  $\tau = t/\tau_c$ .  $\gamma$  est le taux de relaxation normalisé de l'inversion de population  $\gamma = \tau_c/\tau_f$  avec  $\tau_f$  le temps de relaxation de l'inversion de population.  $N_j^0(\tau)$  est relié au paramètre de pompe du système. L'asymétrie du système due à l'anisotropie du gain dans la cavité est définie par le paramètre  $\alpha = N_2^0/N_1^0$ ;  $\alpha \leq 1$  implique que l'indice 1 est attribué au sous-système dont le pompage est le plus fort.  $\beta$  est le paramètre de saturation croisée ( $0 \leq \beta \leq 1$ ). L'émission spontanée a été prise en compte et est représentée par le paramètre  $a$ . Enfin, les pertes sont indépendantes de l'état propre de polarisation.

Dans nos expériences, le laser est conduit en agissant sur le paramètre de pompe. Dans ces conditions, le paramètre  $N_j^0(\tau)$  s'écrit :

$$N_j^0(\tau) = N_j^0 \left( 1 + r_1 \cos \omega \tau + r_2 \cos \left( \frac{\omega \tau}{n} + \varphi \right) \right) \quad (3.3)$$

où  $N_j^0$  est relié au paramètre de pompe  $A$  par  $N_j^0 = A/(1 + \beta)$ .  $\omega$  et  $r_1$  sont respectivement la fréquence et l'amplitude de la modulation principale.  $r_2$  est l'amplitude de la perturbation,  $\varphi$  sa phase et  $n$  le rang de la sous-harmonique (ici  $n = 2$  ou  $4$ ).

Dans nos simulations, comme dans nos expérimentations, le laser oscille au-dessus du seuil du second mode. Nous nous intéresserons par la suite à l'étude analytique et numérique de la solution bimodale en présence d'asymétrie de gain ( $\alpha \neq 1$ ).

### Les simulations numériques

Pour être en concordance avec nos manipulations, nous avons observé les diagrammes de bifurcation par incrémentation du paramètre  $A$ , pour une transition vers le chaos par une cascade de doublements de période et par incrémentation du paramètre  $r_1$ , pour une transition vers le chaos par quasi-périodicité.

Les paramètres  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ont été fixés proches des valeurs expérimentales [82]. Les autres ont été choisis de façon à donner un bon accord qualitatif entre théorie et expérience. Le tableau 3.1 résume les valeurs de paramètres utilisés dans chaque type d'étude.

Un fait remarquable mérite d'être signalé : dans l'expression de  $N_j^0(\tau)$  lorsque le laser est soumis à la double conduite, les propriétés du systèmes

sont invariantes par translation de phase  $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi/n$ . Par suite, la variation de la phase est limité au domaine  $[0; 2\pi/n]$ .

### 3.3 Résultats

Les résultats qui font l'objet d'une soumission à une publication scientifique et sont rassemblées dans l'article intitulé « Global investigation of the influence of the phase of subharmonic excitation of a driven system » que nous présentons ci-après.

# Global investigation of the influence of the phase of subharmonic excitation of a driven system.

Didier Dangoisse, Jean-Christophe Celet and Pierre Glorieux.  
Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, associé au CNRS,  
Centre d'Etudes et Recherches Lasers et Applications,  
Université des Sciences et Technologies de Lille,  
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cédex (France).

## Abstract

Adding a small subharmonic perturbation to the driving signal of a modulated laser allows to control its dynamics. The influence of the phase of such a perturbation has been investigated both experimentally and by numerical simulations on a model of a fiber laser subjected to pump modulation. Depending on the operating conditions, the laser destabilises through a period-doubling cascade or via quasi-periodicity. Suitably phased subharmonic perturbations can stabilize periodic orbits, shift the whole bifurcation diagram and induce new crises. Experimental observations are in excellent agreement with the predictions from a simple model of the fiber laser.

## I. Introduction

Dynamics of nonlinear systems may be strongly affected by a small perturbation of some control parameter. This effect depends strongly on the characteristics of the perturbation and on the dynamical regime of the system under consideration. For instance the system is expected to be extremely sensitive to any perturbation in the vicinity of a bifurcation point. Moreover since Ott, Grebogi and Yorke proposed an algorithm to keep a chaotic system on one of the unstable periodic orbits which are embedded inside a chaotic attractor, there has been a great deal of interest for the control of chaos.<sup>1</sup> Basically a weak feedback using information on the dynamical state of the system allows to control and to lock it on an unstable periodic orbit. This idea triggered a lot of experiments and variants in all the domains of application of nonlinear dynamics e.g. chemical reactions, magneto-elastic ribbons, lasers,.... These methods make up the category of feedback techniques to control nonlinear dynamics. Nonfeedback techniques in which some parameter is externally driven, often by an externally applied sinusoidal signal, also received recently a renewed interest. They are known to induce spectacular effects. In particular it has been observed that a small modulation may suppress or induce chaos.<sup>2-6</sup>

A nonfeedback control method can be modelled in a system driven by a sinusoidal modulation  $r_1 \cos \Omega\tau$  as

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{F}(\vec{x}, r_1 \cos \Omega\tau, r_2 \cos(\Omega'\tau + \varphi))$$

Recently there has been some interest in the influence of the phase  $\varphi$  of the secondary modulation  $r_2 \cos(\Omega'\tau + \varphi)$ . This is relevant only in problems where  $\Omega$  and  $\Omega'$  are commensurate. The influence of the phase of a subharmonic perturbation i.e. such as  $\Omega/\Omega' = n$  of a modulated system has already been extensively explored in the vicinity of period-doubling bifurcations by Pisarchik and coworkers on a CO<sub>2</sub> laser with modulated losses. They essentially studied the phase dependence of small signal (de)amplification near T-2T and 2T-4T bifurcations.<sup>7,8</sup> Arecchi et al. also showed that the phase of the parametric perturbation is a crucial parameter which plays an important role in determining the resultant dynamics of the system.<sup>9</sup> Yang et al. recently studied numerically the phase effect of a second periodic forcing in the Duffing equation.<sup>10</sup> Closely related works concern the influence of a very small detuning between the main modulation and the subharmonic one i.e.

$|\Omega/n - \Omega'| \ll \Omega$  since such a detuning may be regarded as a small drifting phase.<sup>11,12</sup> Let us emphasize that the amplitude of this second perturbation is always much -typically 40 times - smaller than the main (driving) perturbation which places the system in a highly nonlinear domain.

Most of the previous works on the effect of a second perturbation considered a *local* point of view in the parameter space, i.e. fixed values of the parameters. Here the influence of the phase is more *globally* investigated, i.e. we have studied the effects for second and fourth subharmonic modulations in a driven system by measuring changes in full bifurcation diagrams. Both experiments and numerical simulations have also been carried out on two kinds of transition to chaos, namely when the system evolves to chaos either through a cascade of period-doubling bifurcations or through quasiperiodicity. Corresponding experiments have been made on a Nd<sup>3+</sup>-doped fiber laser. Such a laser was chosen because it displays the two above mentioned scenarios of transition to chaos. Therefore a model of such a laser has been used as a basis for numerical simulations. Let us stress that in spite of that, the phase phenomena presented in this paper are generic in the sense that they can be observed in a wide variety of nonlinear systems and are not specific to the doped fiber laser nor to the model discussed here.

This paper is organized in the following way : in the next section we recall the characteristics of the doped fiber laser and of its model used throughout this paper. The third section reports on the phase dependence of the changes induced by the parametric modulation on the period-doubling cascade transition to chaos and the associated chaotic regimes. These predictions are compared in the fourth section with experimental observations on the fiber laser operated in the corresponding situations. The case of a transition via quasiperiodicity is investigated both numerically and experimentally in the two following sections respectively. Conclusions and discussion are summarized in the last section.

## II. The fiber laser

The doped fiber laser has been chosen to study the phase effects of a small parametric perturbation both for technical and physical reasons. The main one is its versatility, i.e. its ability to be operated in a variety of dynamical regimes. By using various modulation conditions, it has been possible to induce both period-doubling cascades and quasiperiodicity in this system.

Moreover the fiber laser exhibits relaxation oscillations in the 10 kHz range, allowing easy modulation and detailed observation of its dynamics. The characteristics of the laser and its model were discussed in detail in<sup>13</sup>. In this section, we recall the parameters of the model and of the experimental set-up which are of interest for the following sections.

A schematic view of the experiment is given in Figure 1. The key element is the fiber laser which is essentially made of a 3.5 meter long  $\text{Nd}^{3+}$  doped fiber placed between mirrors with reflection coefficients of 95 and 99.5 per cent at the operating wavelength of  $1.06\mu\text{m}$ . Therefore the lifetime of the photons inside the cavity  $\tau_c$  which scales times in the model is equal to  $1.67 \cdot 10^7 \text{s}$  and the lifetime of population inversion is approximately equal to  $250\mu\text{s}$ , leading to a value of the reduced relaxation rate for population inversion  $\gamma$  of  $0.67 \cdot 10^{-3}$ . With these values of the parameters, the standard relaxation oscillation frequency of the laser is  $24.7\sqrt{A-1} \text{ kHz}^{14}$ . In typical conditions,  $A$  is approximately equal to 2 and the main driving is achieved around 10 kHz, i.e. at about half the relaxation oscillation frequency (see Table 1). Pump modulation is achieved by acting on the current injected in the pump diode. This current is driven by two frequency synthesizers phase-locked to one another and delivering two signals with harmonic frequencies and a controlled phase difference. In this study we consider only qualitative behaviors, e.g. shifts of bifurcation points and changes in dynamical regimes, therefore only the total intensity or one polarisation component needs to be monitored in the experiments. Periodic sampling of the fiber laser intensity at the driving modulation has been used all along this work, except in some seldom situations. This technique allows clear display and direct observation and identification of the bifurcation diagrams of the laser on an oscilloscope. For fixed values of the parameters, return maps have also been used. Such maps are experimentally obtained by the technique of cascade sampling already used in our previous experiments.<sup>13</sup> They proved useful to assign quickly quasiperiodic regimes discussed in Sections 4 and 5. In most experiments and simulations reported here, we have chosen the pump parameter  $A$  as a control parameter. Several other choices are possible. We have checked that qualitatively similar results are obtained when the driving amplitude  $r_1$  or the driving frequency  $\Omega$  are chosen instead of  $A$  as the swept parameter.

Parameters	T-doubling	Quasiperiodicity
$\beta$	0.43	0.43
$\alpha$	0.86	0.84
$A$	1.75 to 2	3.65
$\gamma$	$0.67 \cdot 10^{-3}$	$0.67 \cdot 10^{-3}$
$a$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
$\Omega/\Omega_R$	0.58 to 0.48	0.4
$r_1$	0.42	0.75 to 0.79
$r_2$	0.01	0.02

Table 1: Parameters used in the numerical simulations

As the laser emits radiation linearly polarised in two directions, it has been modeled as a two-mode system, each mode being associated with one polarisation eigenstate of the laser. The corresponding model is an extension of the so-called class-B model in which a term has been added to take care of the high level of spontaneous emission in this laser and the mode coupling parameter  $\beta$  has been introduced to account for competition of the two laser subsystems. The dynamical variables are the population inversion and the intensity in each polarisation state. The model writes as<sup>13</sup>

$$\begin{aligned}
\dot{m}_i &= (d_i + \beta d_j - 1)m_i + a(d_i + \beta d_j) \\
\dot{d}_1 &= \gamma [A(\tau)/(1 + \beta) - (1 + m_1 + \beta m_2) d_1] \\
\dot{d}_2 &= \gamma [\alpha A(\tau)/(1 + \beta) - (1 + m_2 + \beta m_1) d_2]
\end{aligned}$$

with  $i = 1$  and  $2$ ,  $j = 3 - i$ ,  $m_i$  and  $d_i$  are the reduced intensities and population inversions of the subsystems associated with each polarisation mode. The dots represent the derivatives with respect to a reduced time  $\tau = t/\tau_c$ .  $\gamma$  is the reduced relaxation time of population inversion in units of  $\tau_c$ .  $a$  is a parameter characterizing spontaneous emission,  $\alpha$  is a measure of the relative efficiency of the pumping in the two sublasers and  $\beta$  a cross-saturation coefficient.  $A(\tau)$  is the pump parameter common to the two laser subsystems. In our experiments the laser is driven by acting on this parameter, which is easily achieved by modulating the current injected in the pump laser diode. In the presence of the main and subharmonic modulation, the parameter  $A(\tau)$  writes as

$$A(\tau) = A(1 + r_1 \cos \Omega\tau + r_2 \cos(\Omega\tau/n + \varphi))$$

where  $A$  is the pump parameter in absence of modulation,  $r_1$  and  $\Omega$  the amplitude and the frequency of the main modulation respectively,  $r_2$  the

amplitude of the perturbation,  $\varphi$  its phase and  $n$  the rank of the subharmonic. Here two subharmonic frequencies are used, corresponding to  $n = 2$  or 4.

All simulations reported below have been obtained on the model given above and taking as initial conditions the results obtained with the preceding value of the control parameter, namely  $A$  or  $r_1$  in sections III-IV and V-VI respectively and always with increasing values unless otherwise specified. This procedure is important when a comparison with the experiments is aimed at because due to the presence of boundary crises, there may exist large domains of generalized multistability i.e. of coexistence between several attractors. In the first series of simulations discussed in the next section, we will present bifurcation diagrams obtained with both increasing and decreasing  $A$  to exhibit clearly the effects due to the existence of such hysteresis phenomena. Operating parameters of the laser were chosen so that it evolves towards chaos through either a period-doubling cascade or through quasiperiodicity both in experiments and in the numerical simulations. A key parameter of these experiments is the ratio of the modulation frequency  $\Omega$  to the relaxation oscillation frequency  $\Omega_R$  of the laser (both in units of  $\tau_c^{-1}$ ). In accordance with previous results, the transition to chaos through a period-doubling cascade is readily obtained as  $\Omega/\Omega_R \approx 0.5$  if other parameters are adequately chosen while if  $\Omega/\Omega_R \approx 0.4$ , this evolution occurs via quasiperiodicity. Note that in both cases, addition of subharmonic modulation automatically implies subharmonic response. This trivial (linear) effect should be distinguished from the nonlinear effects discussed below.

### III. Period-doubling cascade. A. Simulations

Period-doubling cascade is the most frequent scenario of transition to chaos in the fiber laser. Numerical simulations of the driven fiber laser were first carried out on the model presented in the previous section for a set of parameters corresponding to the experimentally accessible situation and in which the response of the system to pump modulation evolves to chaos through a period-doubling transition as the pump parameter  $A$  increases (see Table 1 and Figures 2 and 3). The regions of chaotic behavior end by a boundary crisis in which the chaotic attractor is destroyed and at larger  $A$  values the system evolves on another attractor, here a periodic attractor which also evolves as  $A$  is further increased.

Let us first discuss the different kinds of regimes for the subharmonic

modulation, as they come from the observation of the role of the amplitude  $r_2$  of the second modulation as illustrated for instance on Figure 2. Three domains may be distinguished:

- At very small values of  $r_2$ , typically  $r_2 \leq 10^{-4}$  in the conditions of Figure 2, the main effect of the additional modulation is to create a 4T periodic response in the low  $A$  region of the bifurcation diagram where the system was T or 2T periodic for  $r_2 = 0$ . As the 2T-4T bifurcation is approached, the amplitude of the 4T component of the response increases as appears from the splitting of the branches of the 4T solution (see region  $1.845 \leq A \leq 1.86$  in Figure 2b). This is the amplification of subharmonic perturbations already discussed in<sup>15,16</sup> and corresponds to a zone of linearity with respect to  $r_2$ .

- For larger modulations, namely in the range  $r_2 \sim 10^{-4}$ - $10^{-2}$ , the splitting of the 4T branch becomes prominent and new effects appear on the position and the nature of the other bifurcations. This is the topic of the present paper. In this domain, the system would be linear with respect to  $r_2$  in absence of  $r_1$ .

- If  $r_2$  is further increased, typically  $r_2 \sim 10^{-1}$  and above, this additional modulation may not be considered as small with respect to the main one. This is the domain of dynamics of systems subjected to two equally important modulations and will not be considered here.

Examples of the results commonly obtained with  $r_2 \ll r_1$  are displayed on Figures 2 and 3 where we have reported bifurcation diagrams as derived from the observation of one polarisation component with  $A$  as a control parameter and in the case of subharmonic perturbation with  $n = 4$ . The top diagram of Figure 3 is a reference in absence of the second modulation ( $r_2 = 0$ ) and the two lower ones illustrate the phase dependence of the action of the second (subharmonic) perturbation. These diagrams are obtained for phase shifts  $\varphi = 0$  and  $2\pi/9$ . The later value was chosen since it maximizes many of the phenomena discussed below. The existence of boundary crises, i.e. switching from a chaotic attractor to a new attractor with a different basin of attraction is accompanied by hysteresis phenomena. To illustrate this, all diagrams are presented in Figure 3 with both increasing and decreasing values of the control parameter  $A$ . Comparison of the two later diagrams with the reference one ( $r_2 = 0$ ) shows that depending on the phase of subharmonic modulation relative to the driving, this perturbation induces effects of different kinds which can be classified as follows:

- i - *shift and magnification of the whole bifurcation diagram with respect*

to the reference one. The scenario of transition to chaos through a period-doubling cascade may be preserved but the bifurcation points are shifted in a direction and with an amount which is phase dependent. Moreover the distance between corresponding bifurcations may also be altered by the presence of the second perturbation. An example of such phenomena is displayed on the diagrams presented in Figure 3. In absence of subharmonic perturbation (Figure 3a), the system undergoes a period-doubling cascade transition to chaos for  $1.84 \leq A \leq 1.885$  with  $4T \rightarrow 8T$  and  $8T \rightarrow 16T$  bifurcations at  $A = 1.8767$  and  $1.8812$  respectively. When the second modulation is applied, these transitions are shifted to lower  $A$  values, the magnitude of this shift depends on both the amplitude and the phase of the subharmonic perturbation. As an example the  $4T \rightarrow 8T$  bifurcation which occurs in the unperturbed system at  $A = 1.8767$  is shifted to  $A = 1.8557$  and the  $8T \rightarrow 16T$  bifurcation appears at  $A = 1.8655$  when an in-phase subharmonic bifurcation is applied. For a different phase  $\varphi$  of the subharmonic bifurcation, e.g.  $\varphi = 2\pi/9$ , the shifts are much weaker since the above mentioned bifurcations appear at  $A = 1.8677$  and  $A = 1.8745$  respectively. More generally numerical simulations indicate that the magnitude of the effect strongly depends on the phase  $\varphi$  of the subharmonic bifurcation with respect to the main one. The details of this process vary with the operating conditions of the laser and it should also be noticed that these shifts are almost always accompanied by dilatation of the period-doubling cascades as may be seen on Figure 3.

ii - *generation of periodic regimes in a region where the reference system, i.e. the unperturbed one, is chaotic and vice-versa.* On one hand this may be a simple consequence of the shift and magnification effects presented above, as e.g. in the conditions of Figure 3, for  $A = 1.870$  the unperturbed system is  $4T$  periodic and the perturbed one is chaotic for  $\varphi = 0$  and  $8T$  periodic for  $\varphi = 2\pi/9$ . On the other hand this could also be due to a change in the attractor as e.g. in the same conditions but in the range around  $A = 1.885$  where the unperturbed system is chaotic, the perturbed one is  $20T$  periodic for  $\varphi = 0$  and  $\varphi = 2\pi/9$ . Both perturbed periodic regimes correspond to limit cycles with no obvious connection with the original chaotic attractor. Additional studies show that some periodic windows which appeared within the parameter region of chaotic behavior are cancelled and new windows may be created. An example of this is obtained slightly outside the range explored on Figures 3 : a new  $8T$  periodic regime is created near  $A = 1.97$  for  $\varphi = 0$  in a region in which the unperturbed laser is chaotic. Inversely near

$A = 2$ , the unperturbed system is 9T periodic while it is chaotic in presence of subharmonic modulation at the two phases used in this set of simulations.

iii - *crisis induction and suppression*. A simple examination of the bifurcation diagrams shows that the second perturbation induces qualitative changes in these diagrams, in particular in the scenario of transition to and out of chaos. Several situations are typically encountered : a period-doubling cascade may be truncated or extended by the second perturbation. The later effect is observed near  $A = 1.885$  where the unperturbed system undergoes an internal crisis in which the attractor suddenly expands as shown on the Figure 3a. This crisis is postponed by the second modulation for both reference phases. Inversely boundary and internal crises can be observed in presence of the subharmonic modulation while they are absent from the reference bifurcation diagram. For instance additional simulations demonstrate that a boundary crisis occurs at  $\varphi = 2\pi/9$  and  $A = 1.97$  where the chaotic attractor obtained with the main driving only is destroyed in favor of a 8T limit cycle for  $\varphi = 0$  and of another chaotic attractor for  $\varphi = 2\pi/9$ . All these effects are strongly phase dependent but we have not found any simple relation between the dephasing  $\varphi$  and the magnitude of the shift of the bifurcation points. In the system considered here, several attractors may co-exist, a situation commonly associated with the existence of boundary crises. When this occurs, the second perturbation usually helps the system to jump into the basin of attraction of the other and the crisis occurs for lower values of the driving parameter. Note that this is a highly nonlinear contribution of the second modulation in spite of its low value and it may be attributed to the extreme sensitivity of the trajectories which explore the limits of the basin of attraction. It is classical that near these limit zones, the "equivalent potential" of the system presents extrema, i.e. allows for large explorations with a small change of the parameter. Moreover here this change is parametrically resonant and its phase may be adjusted to enhance the efficiency of the perturbation. Using again this potential analogy, it is clear that the phase of the perturbation should play a major role. Depending on its timing with respect to the laser response, the additional perturbation may push the system towards the boundary limit or pull it from it, therefore helping for or retarding the switching towards a new attractor basin of attraction.

The above classification is somewhat artificial but it provides a global point of view on how the subharmonic modulation alters the dynamics of this nonlinear system. Such a global point of view is necessary to understand the

action of the subharmonic perturbation. A local point of view would have shown only apparently erratic changes between chaotic, quasiperiodic and periodic regimes with no overview of the general organisation. Locally these changes can occur in both directions, i.e. induce or prevent the apparition of chaos and depending on the parameters chosen almost all changes in dynamical regimes are possible. The general point of view adopted here reveals the organisation of these changes and allows to understand how contradictory effects such as positive and negative shifts may coexist.

Similar simulations were repeated in the case of second subharmonic perturbation, i.e.  $n = 2$ . Corresponding results are given in Figure 4 for various amplitudes of the modulation. They show that the effects are essentially of the same nature as in the case of fourth subharmonic perturbation, except for three points : (i) because of this is a second subharmonic modulation, there are only two branches far from the nonlinear region and (ii) there are new possibilities open by the coexistence of several attractors. For instance, the diagram for  $r_2 = 0.002$  shows that there is a switching from one 2T regime to another one which gives rise to the period-doubling cascade as  $A$  is increased. The diagram obtained with  $r_2 = 0.004$  shows that the switching point shifts to higher  $A$  values as  $r_2$  is increased and at large  $r_2$  values, typically above  $r_2 = 0.01$ , the system switches directly from this 2T attractor to the other 2T attractor which is the one which appears beyond the domain of the period-doubling cascade, i.e. with  $1.91 \leq A \leq 1.96$ . For the parameters used in these simulations and as  $A$  varies, the system switches between two or three different 2T attractors depending on the value of  $r_2$ . As this parameter is varied the continuous transition between attractors with occurs at low  $r_2$  values is transformed into an abrupt one with associated hysteresis phenomena (iii) the system is more sensitive to second than to fourth subharmonic modulation as usual for such parametric modulations.

#### IV. Period-doubling cascade. B. Experiments

A series of experiments has been carried out in order to check the predictions of the model. We chose to concentrate here on the case  $n = 4$ . The pump power is modulated simultaneously at 7 kHz and 1.75 kHz, the former frequency is approximately equal to the half the measured relaxation frequency of the fiber laser . The pump power is chosen as the control parameter for obtaining the bifurcation diagram. Sweeps of the control parameter

are such that the range  $A = 1.59 - 1.93$  is spanned and typically  $r_2 = 0.025r_1$ . Note that when it is applied alone, the second perturbation is much less efficient than the main one because the latter corresponds to the condition of parametric resonance.

Figures 5 show several bifurcation diagrams obtained in these conditions, Figure 5a displays the reference diagram in absence of the subharmonic perturbation and b and c are the corresponding diagrams for different phases ( $\varphi = 0$  and  $\varphi = 2\pi/9$ ) of the subharmonic perturbation. They are in good agreement with the predictions of numerical simulations given in the preceding section:

i - the shift of the bifurcation points is clear. For instance, on the left side of the photographs ( $A = 1.59$ ), the regime is T periodic on the reference picture but becomes chaotic when the subharmonic perturbation is applied. Comparison of the right parts of the three diagrams shows that the general shape of the bifurcation diagram is not changed by the subharmonic bifurcation and that the dominant effect is a shift which is larger for  $\varphi = 0$  than for  $\varphi = 2\pi/9$ , in accordance with the prediction of the numerical simulations of the preceding section.

ii - creation of periodic windows in the chaotic domain and vice-versa. The 4T periodic regimes which are visible for instance in the central part ( $1.71 \leq A \leq 1.74$  and  $1.78 \leq A \leq 1.83$ ) of Figure 5c are absent of the same region in the reference diagram.

iii - induction of crises. A small internal crisis is visible on the left side of Figure 5b at  $A = 1.68$  where the system switches from a chaotic to a 4T periodic attractor.

All these observations agree with the predictions from the numerical simulations.

## V. Quasiperiodicity. A. Simulations

When the ratio of the modulation frequency to the relaxation frequency is changed from 0.5 to 0.4, the transition to chaos occurs at larger  $A$  values and through quasiperiodicity instead of the cascade of period-doubling bifurcations. Then as the pump modulation is increased, the laser first responds at the modulation frequency and at larger modulation amplitudes, a new frequency with no simple arithmetic relation with the driving one appears in the laser output intensity. This transition may be reproduced in the

fiber laser model presented above for the set of parameters given in Table 1 . Note also that the spontaneous emission coefficient  $a$  has to be changed significantly in order to reach quasiperiodicity in the range of parameters corresponding to experiments. Quasiperiodicity could also be obtained for different parameters but we want just to investigate on a plausible model the effect of a weak subharmonic parametric perturbation on the transition via quasiperiodicity. The Poincaré section of the attractor as given by taking periodic samples i.e. stroboscopy at the modulation frequency, clearly exhibits a transition at  $r_1 = 0.776$  in Figure 6. A Fourier transform of the laser response to modulation shows that the new frequency which appears at the bifurcation is approximately equal to  $0.27 \Omega$ . In presence of the weak subharmonic perturbation, we note different effects in addition to the trivial linear effect. They are:

- i- the shift of the bifurcation to quasiperiodic response towards higher modulation values
- ii- an enlargement and a shift of the periodic windows

For specific ranges of parameters, it is possible to control the dynamics of the laser by acting only on the phase of the second modulation. For instance, it is possible to switch from a quasiperiodic regime to a periodic one by taking advantage of the shift (i), e.g. by driving the system with an amplitude of  $r_1 = 0.777$  and applying a small subharmonic modulation with  $r_2 = 0.02$  and  $\varphi = 0$  (see Figures 6a and b). Similarly a periodic regime associated with a window inside a chaotic domain can be transformed into a quasiperiodic one by using the shift (ii) of this window induced by the subharmonic perturbation. This is the case with  $r_1 \cong 0.781$  and a subharmonic perturbation with  $r_2 = 0.02$  and  $\varphi = 0$  transforms the unperturbed 7T periodic response into a quasiperiodic one (see Figure 6a and b).

As it will be seen in the experimental section, the direct recording of the bifurcation diagrams is made difficult by technical fluctuations. As a compromise between fluctuations and adiabatic sweeping conditions, we had to choose a sweep rate in which the bifurcation diagrams are only slightly deformed by the fast passage across the bifurcations. Numerical simulations have been carried out to check that the dynamical deformation of the bifurcation diagrams does not alter drastically the effects discussed here with sweep rates similar to those used in the experiments. Two sets of simulations have been carried out for two different sweep rates of the modulation index ( $dr_1/d\tau = 6.6 \cdot 10^{-10}$  and  $2.2 \cdot 10^{-12}$  )corresponding respectively to the

standard experimental sweep rate of about 1Hz and to a very slow rate ensuring a good convergence towards the long time limit but experimentally unaccessible. The slow sweep results are reported on the Figures 5a and b discussed above and Figures 6c and d show two bifurcation diagrams dynamically deformed by the non adiabatic sweep. The abrupt jump in the sampled amplitudes which was observed at the bifurcation in the quasistatic regime is smoothened in both 6c and d diagrams and the shift of the bifurcation point induced by the sweep adds up with that induced by the subharmonic additional modulation. The results obtained at a rate corresponding to experimentally accessible values exhibit a dynamical hysteresis shift of the bifurcation points and the associated dynamical hysteretic effects.<sup>17,18</sup>

The conservation of the results obtained in the quasistatic regime under the conditions of nonadiabatic sweep is more clearly supported by the quantitative comparison of the evolution of the bifurcation points with the dephasing  $\varphi$ . In Figure 7 we have plotted the evolution of the position of the bifurcation to quasiperiodicity, i.e. the shift (i) discussed above versus the phase  $\varphi$  of the second modulation. Both dynamical and quasistatic results show the same sinusoidal dependence of the shift versus  $\varphi$  and all curves are just globally shifted by the dynamical (sweep) effect. Note that the quasistatic bifurcation point always shifts to larger modulation values as indicated by its position above the reference ( $r_1 = 0.776$ ). Moreover the shifts may be fitted to purely sinusoidal laws such as those indicated by the continuous curves shown on Figure 7.

As already mentioned in the case of the period-doubling cascade, it is necessary to consider the whole bifurcation diagram to understand the change in the dynamics due to the second perturbation. For instance a single phenomenon such as the shift of the bifurcation diagram may be used to change a chaotic regime into a periodic one and vice-versa depending only on the operating conditions of the laser and on the phase of the perturbation. It is then clear how and why the phase of the subharmonic perturbation could be used both for control and for creating chaos.

## VI. Quasiperiodicity. B. Experiments

By adjusting the laser parameters and more specifically the pump parameter  $A = 2.5$  and the modulation frequency which is now 12.75 kHz and corresponds approximately to  $0.4\Omega_R$ , it has been possible to observe a tran-

sition to quasiperiodicity in the laser with the main modulation only. In the first series of experiments, the laser is subjected to an additional  $n = 2$  subharmonic modulation. The amplitude of the additional modulation was set to 0.02 so as to keep it much smaller than the main modulation which was swept between 0.35 and 0.7. This sweep amplitude is much larger than that used in the numerical simulations because technical noise induces large fluctuations especially in the vicinity of the bifurcation points and large sweeps are required to exhibit clearly the bifurcation diagrams. Using such large sweeps produces unavoidable dynamical distortions of these diagrams as discussed in the preceding section. As for the numerical simulations, both forward and backward sweeps are superimposed on the display in order to exhibit the hysteresis phenomena and the dynamical deformations of the bifurcation diagrams.

The most striking effect observed experimentally is the enhancement of the dynamical shift of the bifurcation point and the associated change in the shape of the bifurcation diagram already discussed about numerical results. This is clear here on the central part of the perturbed bifurcation diagram where the full line associated with the periodic regime obtained for increasing values coincides with the spread values of the quasiperiodic regime which exists for a larger range at decreasing  $r_1$  values.

The exploration of experimental bifurcation diagrams also revealed a new effect which was not obtained in the numerical simulations reported above, namely the switching to a new attractor induced by the additional perturbation. This phenomenon appears clearly on the left side of the diagram reported on Figure 8 which was obtained for a first subharmonic modulation ( $n = 2$ ). At large modulation amplitudes, the laser switches from the quasiperiodic behaviour to a  $2T$  attractor which later destabilises in a quasiperiodic attractor. These new attractors are significantly different from the original ones which appeared in the low and medium modulation domains. This phenomenon is made more clear because of the hysteresis effect which accompanies it since as the modulation amplitude is decreased, the laser stays on a  $2T$  attractor on a wider range than for increasing amplitudes until it eventually switches back to the perturbed original attractor. This generalised bistability effect must be related to the sequential horseshoe formation already discussed in models of class-B lasers by Schwartz et al.<sup>19</sup> and whose effect in the form of generalised bistability has been observed in  $\text{CO}_2$  lasers since the early experiments on chaos in these lasers.<sup>18,20</sup> As doped

fiber lasers such as the one used in the present experiments belong to the same class of lasers, it may be anticipated that they should present the same phenomenology.

In this section we expose now some results in form of local results i.e. obtained for a given set of parameters and not as full bifurcation diagrams because here the former are more suitable for exhibiting unambiguously some qualitative changes in the dynamical regimes. The basic effect change is illustrated on Figure 9 where time traces of the laser output are displayed (a) in absence and (b) in presence of the second perturbation. With the main one, the laser intensity varies quasiperiodically with time while the presence of a fourth subharmonic perturbation at 3.1875 kHz and phase  $\varphi = 3\pi/2$  changes the original quasiperiodic behaviour into a 8T periodic one.

The periodicity of the signal in presence of the subharmonic perturbation which is already clear in the time trace is confirmed by the examination of the first return maps shown on Figure 10. Such a map is obtained by plotting a sampled value obtained by periodic sampling versus the value sampled at the preceding period, which is kept in a temporary buffer memory. By such a technique, it has been possible to obtain first return maps in real time on an oscilloscope. As mentioned above, a series of discrete points corresponds to a periodic regime while a closed curve is the signature of quasiperiodicity. With the experimental parameters chosen here, this first return map is equivalent to a Poincaré section. This section is achieved in a plane of constant phase of the main modulation, i.e.  $\Omega\tau = \text{constant} \pmod{2\pi}$  in the cylindrical phase space  $[x(t), \Omega\tau, x(t + T)]$ . For a three-dimensional phase space, both Poincaré section and first return map are equivalent in these conditions.

The Poincaré section obtained in absence of subharmonic modulation (Figure 10a) consists of two symmetric closed curves and are typical of a quasiperiodic regime. We have explored here the situation of  $n = 2$  subharmonic modulation with an amplitude of 0.02 while the main driving amplitude is 0.438. Two return maps corresponding to phases ( $\varphi = 0$  and  $\pi/18$ ) show that depending on  $\varphi$ , this perturbation may have opposite effects. The former drives the system towards a period 8 response (Figure 10b) while the later leads it to a chaotic regime (Figure 10c). Note that here the control of the dynamics through the phase of the subharmonic perturbation is very efficient and versatile since it has also been possible to set very different dynamical regimes (periodic, quasiperiodic and chaotic) just by choosing a different phase for the controlling perturbation.

The reverse control situation is illustrated on the various diagrams presented in Figure 11, now with fourth subharmonic modulation. More precisely, the unperturbed system is chaotic and the perturbed one may become periodic or stay chaotic depending on the phase of the second perturbation as illustrated by the different Poincaré sections shown on Figure 11. The reference diagram obtained in absence of the second perturbation (Figure 11a) is typical of a chaotic regime. An adequate choice of the phase of the second perturbation e.g.  $\varphi = 29\pi/18$  allows one to drive the system into periodic regimes (see Figure 11d) while a perturbation with the same amplitude and a phase of  $\pi$  would leave it in the chaotic domain (see Figure 11b). Note that with  $\varphi = 10\pi/9$  (Figure 11c) the dynamics are qualitatively changed. The system is no longer in the fully chaotic regime but rather in the C8 region of the inverse cascade which occurs at the beginning of the chaotic domain.

## VII. Conclusions

Both experimental investigations and numerical simulations show that the phase of a subharmonic modulation plays a major role in controlling the dynamics of a driven system. To understand even qualitatively the nature of this effect, it is necessary to consider globally the bifurcation diagrams. This has allowed us to give a more accurate view of the effects of such small subharmonic perturbation on various dynamical regimes including quasiperiodicity and chaos of a nonlinear system. Major changes of the bifurcation diagram have been observed such as shifts of bifurcations, crises and new attractors. Based on the knowledge gained from these bifurcation diagrams, it has been possible to switch from chaotic to quasiperiodic or periodic regimes and vice-versa depending on both the operating conditions and the perturbation parameters. The approach presented here provides us with an unitary point of view on several experiments dealing with the control of dynamical regimes by subharmonic perturbations resulting on a global simplification of the results. It showed that the possibility of controlling the dynamics through the phase of a subharmonic perturbation is quite general. It holds for both the period-doubling cascade and the quasiperiodic route to chaos and has been checked for both second and fourth subharmonics.

Simulations and experiments reported here are only a small part of the field open by the use of subharmonic modulation. However the variety of the dynamical changes observed indicate that it should be possible to "tailor" a

subharmonic perturbation to reach the specific regime. It may be anticipated that other subharmonic ratios should also actively control chaos but with efficiencies that should depend not only on the selected subharmonic ratio but also on the parameters which determine the chaotic regime since the nature and the stability of unstable periodic orbits should play a major role in the possibilities of controlling chaos.

#### *Acknowledgements*

The authors wish to thank the Région Nord-Pas de Calais and the FEDER for funding. S. Bielawski and D. Derozier are acknowledged for their help and discussions on the model. The Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne is Equipe Associée au CNRS (URA 249) and member of the Centre d'Etudes et de Recherches sur les Lasers et leurs Applications (CERLA).

#### **Figure captions**

Figure 1 : Schematic view of the experimental set-up. LD, laser diode; MO, microscope objective; M, mirror; L, lens; HWP, half-wave plate; BS, beam splitter; F, filter; PD, photodiode.

Figure 2 : Influence of the amplitude of the second ( $n = 4$  subharmonic) perturbation with  $\varphi = 0$  (a) no subharmonic modulation  $r_2 = 0$ , (b) extremely weak subharmonic modulation  $r_2 = 5.10^{-4}$ , (c) weak subharmonic modulation  $r_2 = 5.10^{-3}$ .

Figure 3 : Cascade of period-doubling bifurcations calculated for the fiber laser model (a, top) reference diagram in absence of subharmonic perturbation, (b) in presence of in phase ( $\varphi = 0$ ) and dephased ( $\varphi = 2\pi/9$ ) subharmonic ( $n = 4$ ) modulation for increasing and decreasing  $A$ .

Figure 4 : Same as Figure 3 with ( $n = 2$ ) subharmonic modulation. (a, top) reference diagram in absence of subharmonic perturbation, (b) and (c) in presence of in phase ( $\varphi = 0$ ) subharmonic modulation with amplitude  $r_2 = 2.10^{-3}$  and  $r_2 = 4.10^{-3}$  respectively.

Figure 5 : Experimental bifurcation diagrams in the case of ( $n = 4$ ) subharmonic perturbation, (a) reference diagram in absence of perturbation, (b) in presence of in phase ( $\varphi = 0$ ) and (c) dephased ( $\varphi = 2\pi/9$ ) subharmonic perturbation at the same frequency.

Figure 6 : Bifurcation diagram in the case of a transition to chaos via quasiperiodicity, (a) reference diagram in absence of subharmonic perturbation, (b) in presence of in phase ( $\varphi = 0$ ) subharmonic ( $n = 2$ ) modulation, (c) and (d) the same with a dynamic deformation of the bifurcation diagram induced by a non adiabatic sweep rate.

Figure 7 : Influence of the phase  $\varphi$  of subharmonic perturbation on the transition point from periodic to quasiperiodic response for two different sweep rates of the modulation index. The position of the bifurcation to quasiperiodicity is given for (a) increasing modulation amplitudes, (b) quasistatic conditions, (c) decreasing modulation amplitudes.

Figure 8 : Experimental observations of bifurcation diagrams of the fiber laser in the case of the transition to quasiperiodicity (a) in absence and (b) in presence of  $n = 2$  subharmonic modulation with phase  $\varphi = 13\pi/9$ . The amplitude of the driving field is swept between 0.35 and 0.7 at a rate of 1 Hz.

Figure 9 : Experimental observation of phase control in the case of a quasiperiodic regime. Temporal evolution of the laser output intensity (a) quasiperiodic regime in presence of the driving only, (b) period 8 response when a weak  $n = 4$  subharmonic modulation is added ( $r_1 = 0.438$  and  $r_2 = 0.02$ ).

Figure 10 : Experimental observation of phase control from a quasiperiodic state in the case of a  $n = 2$  subharmonic perturbation (a) reference quasiperiodic state (b)  $\varphi = 0$  period 8 regime (c)  $\varphi = \pi/18$  perturbed chaotic state.  $r_1 = 0.438$  and  $r_2 = 0.02$ .

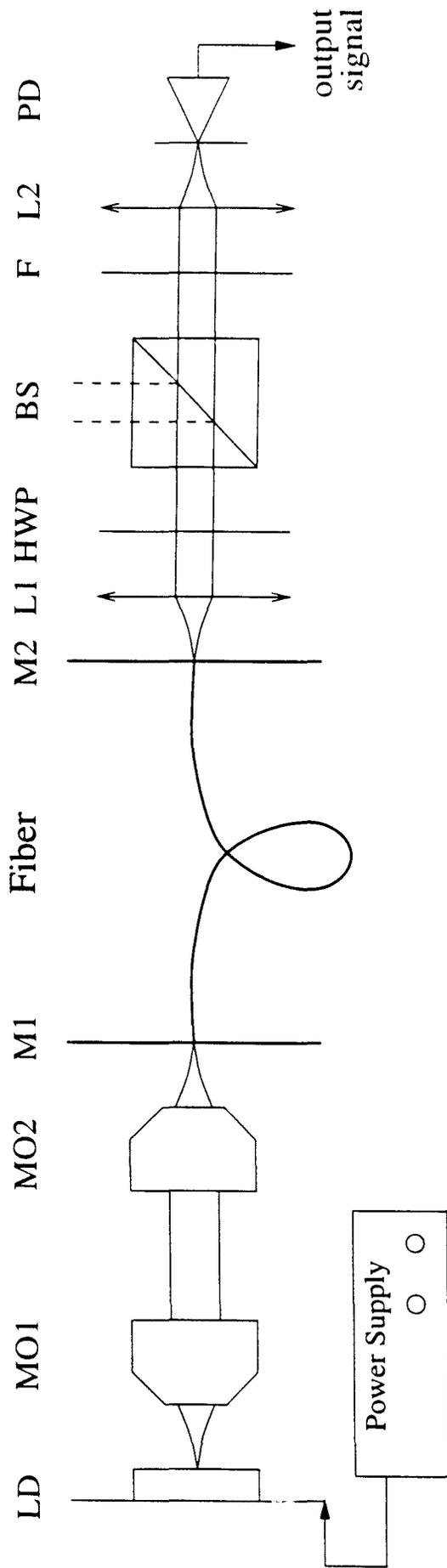
Figure 11 : Experimental observation of phase control from a chaotic state obtained through quasiperiodicity in the case of a  $n = 4$  subharmonic perturbation (main driving frequency 12.75 kHz,  $r_1 = 0.438$  and  $r_2 = 0.02$ ). Evolution of the Poincaré sections. (a) chaotic regime in presence of the driving only, (b) with added  $n = 4$  subharmonic perturbation at  $\varphi = \pi$ , the response is chaotic (c)  $\varphi = 10\pi/9$  chaotic8 response and (d)  $\varphi = 29\pi/18$  8T periodic response  $r_1 = 0.438$  and  $r_2 = 0.02$ .

## References

- <sup>1</sup>E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 1196
- <sup>2</sup>R. Lima and M. Pettini, Phys. Rev. A 41, (1990) 726
- <sup>3</sup>P. Bryant and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A 33 (1986) 2525
- <sup>4</sup>M. Ciofini, R. Meucci and F. T. Arecchi, Phys. Rev. E 52 (1995) 94
- <sup>5</sup>Y. Liu and J. R. Rios Leite, Phys. Lett. A 185 (1994) 35
- <sup>6</sup>N. Watanabe and K. Karaki, Opt. Lett. 20 (1995) 1032
- <sup>7</sup>R. Corbalan, J. Cortit, A.N. Pisarchik, V.N. Chizhevsky and R. Vilaseca, Phys. Rev. A 51 (1995) 663
- <sup>8</sup>P. Glorieux, C. Lepers, R. Corbalan, J. Cortit and A. N. Pisarchik, Opt. Comm. 1118 (1995) 309
- <sup>9</sup>R. Meucci, W. Gadowski, M. Ciofini and F. T. Arecchi, Phys. Rev. E 49 (1994) R2528
- <sup>10</sup>J. Yang, Z. Qu and G. Hu, Phys. Rev. E 53, (1996) 4402
- <sup>11</sup>Z. Qu, G. Hu, G. Yang and G. Qin, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 1736
- <sup>12</sup>S. T. Vohra, L. Fabiny, and F. Bucholtz, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 65
- <sup>13</sup>D. Derozier, S. Bielawski and P. Glorieux, Phys. Rev. A 46 (1992) 2811
- <sup>14</sup>Ya. I. Khanin, Principles of Laser Dynamics, North-Holland (Amsterdam)1995
- <sup>15</sup>B. B. Flapp and A. W. Hübler, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 2302
- <sup>16</sup>V.N. Chizhevsky and S.I. Turovets, Phys. Rev. A 50 (1994) 1840
- <sup>17</sup>P. Mandel and T. Erneux, Phys. Rev. Lett. 53 (1984)1818; P. Mandel in "Frontiers in Quantum Optics", E. Pike and S. Sarkar eds. Adam Hilger, Bristol (1986)
- <sup>18</sup>D. Dangoisse, P. Glorieux and D. Hennequin, Phys. Rev. A 36 (1987) 4775

- <sup>19</sup>I. B. Schwartz, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1359, Phys. Lett.*A* 126 (1988) 411
- <sup>20</sup>J. R. Tredicce, F. T. Arecchi, G. P. Puccioni, A. Poggi and W. Gadomski, Phys. Rev. A 34 (1986) 2073 ; H. G. Solari, E. Eschenazi, R. Gilmore and J. R. Tredicce, Opt. Comm. 64 (1987) 49

Figure 1



Sampled intensities

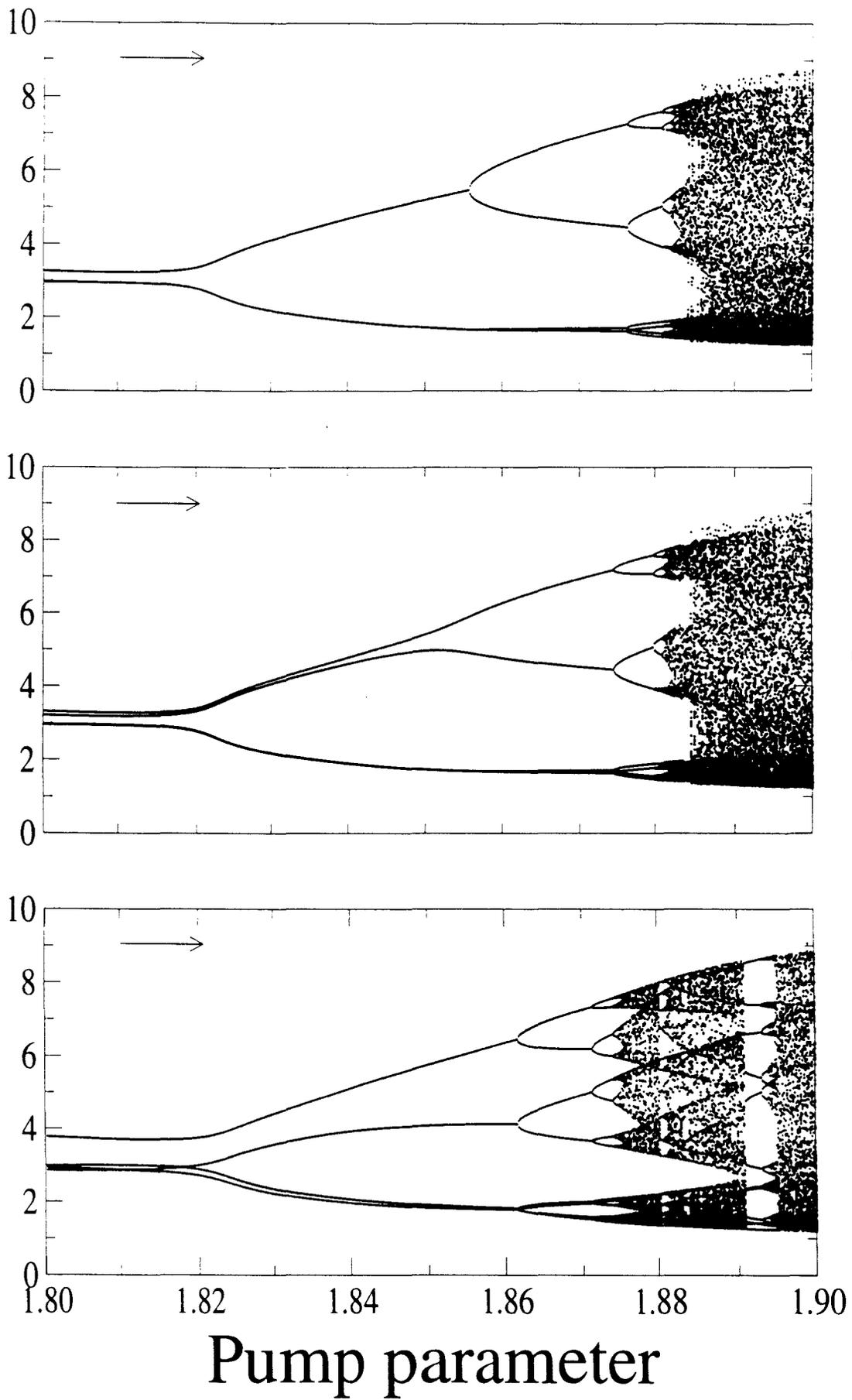
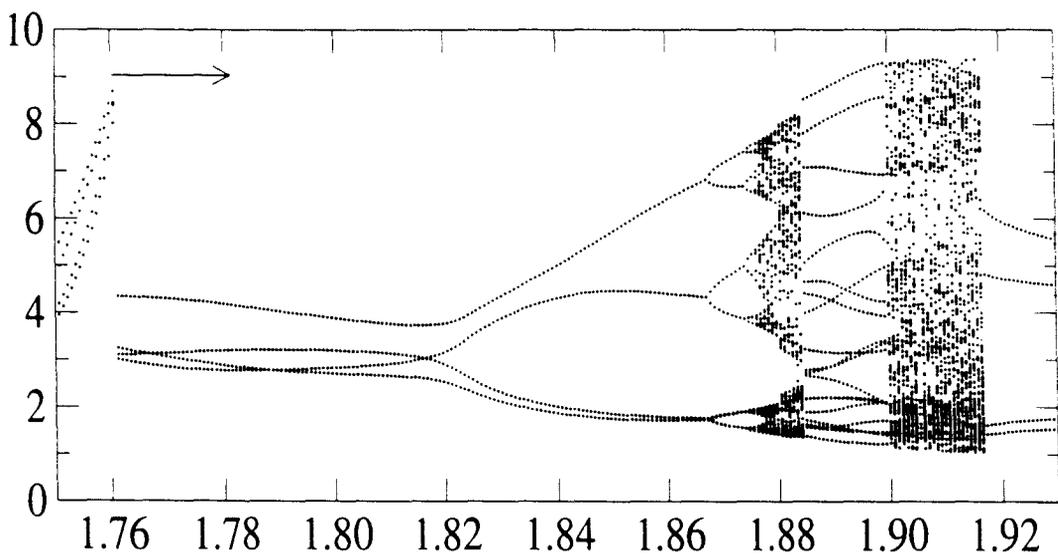
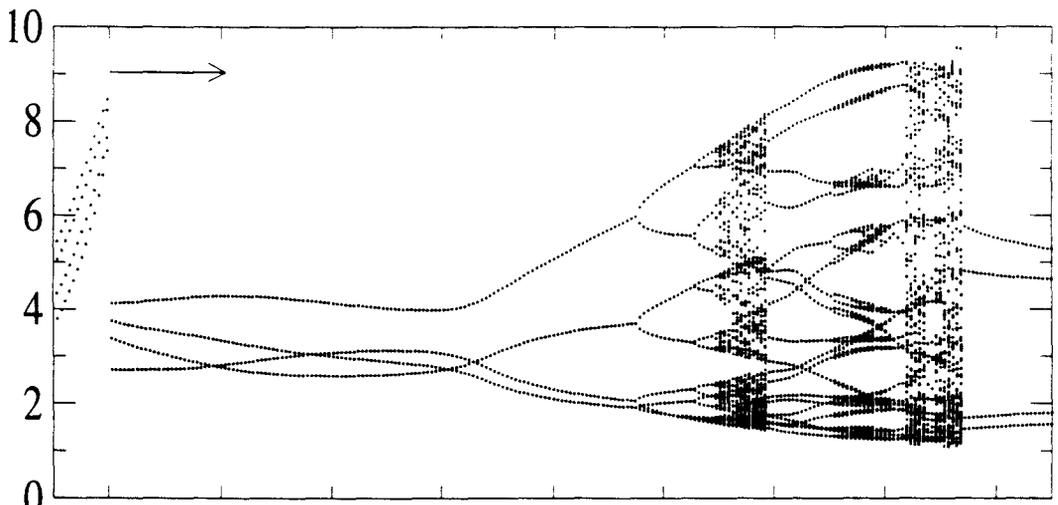
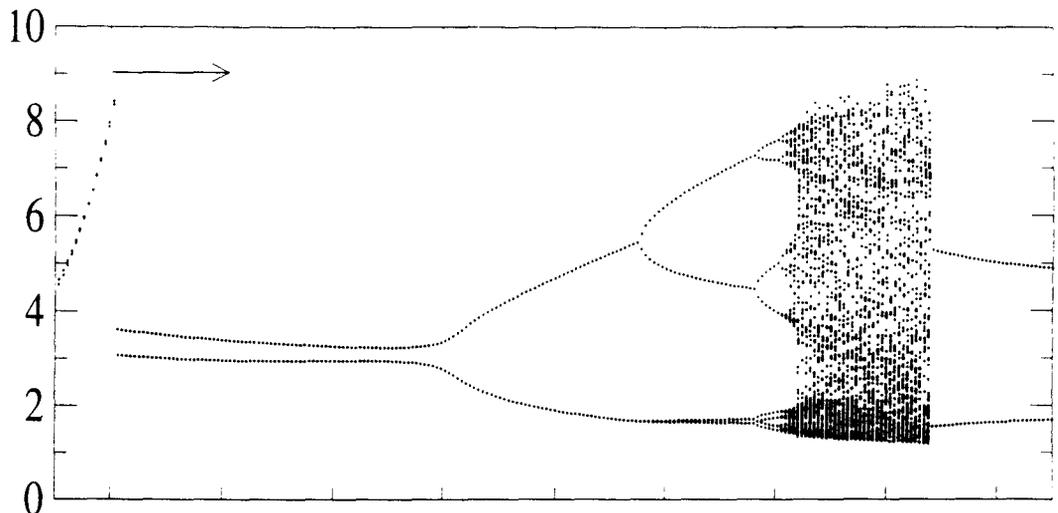


Figure 2

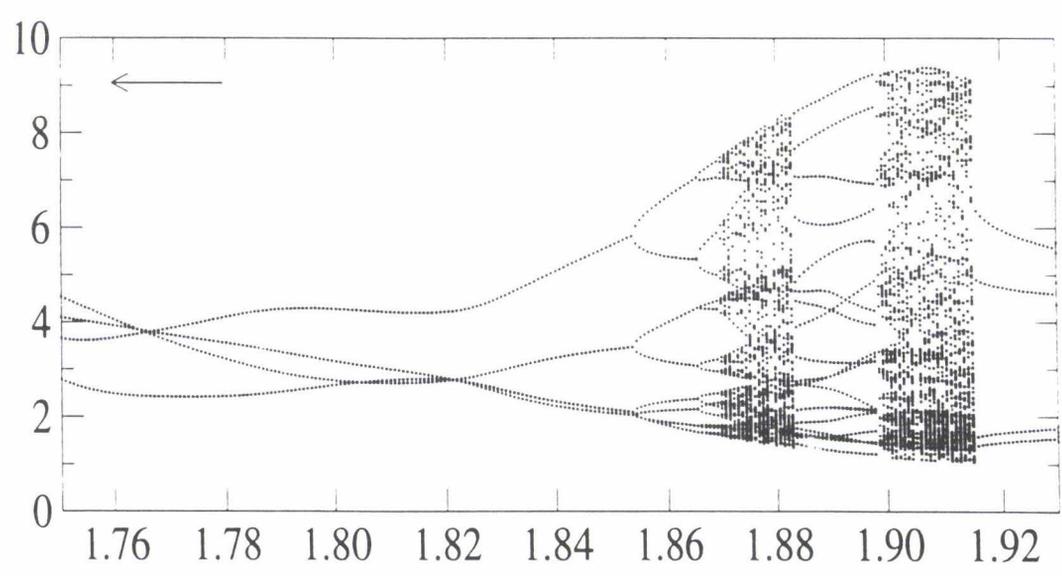
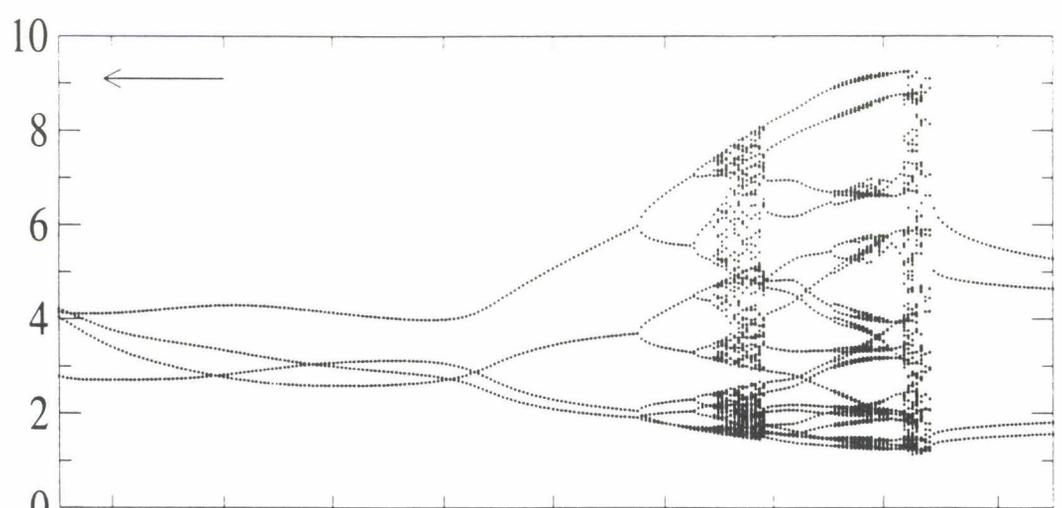
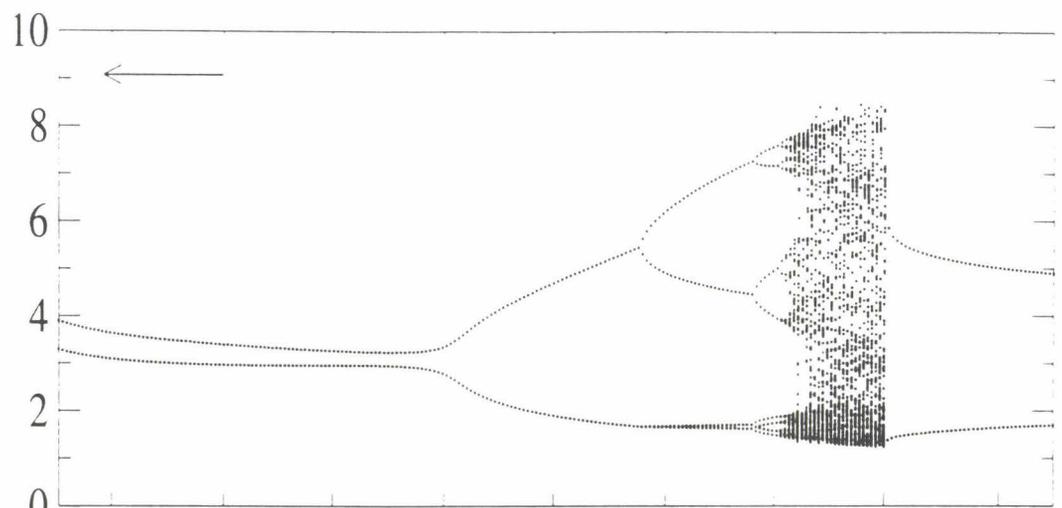
Sampled intensities



Pump parameter

Figure 3

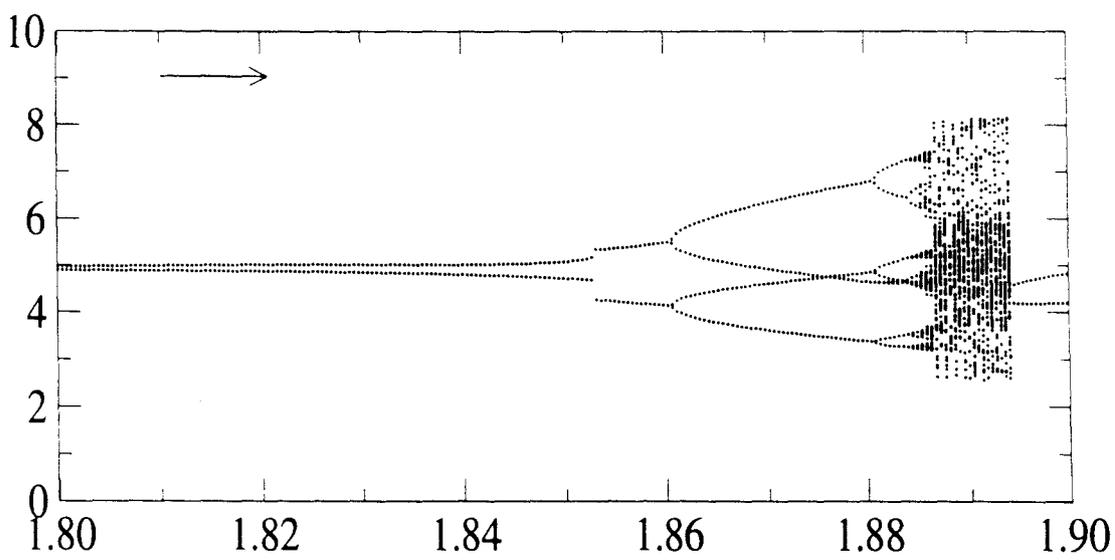
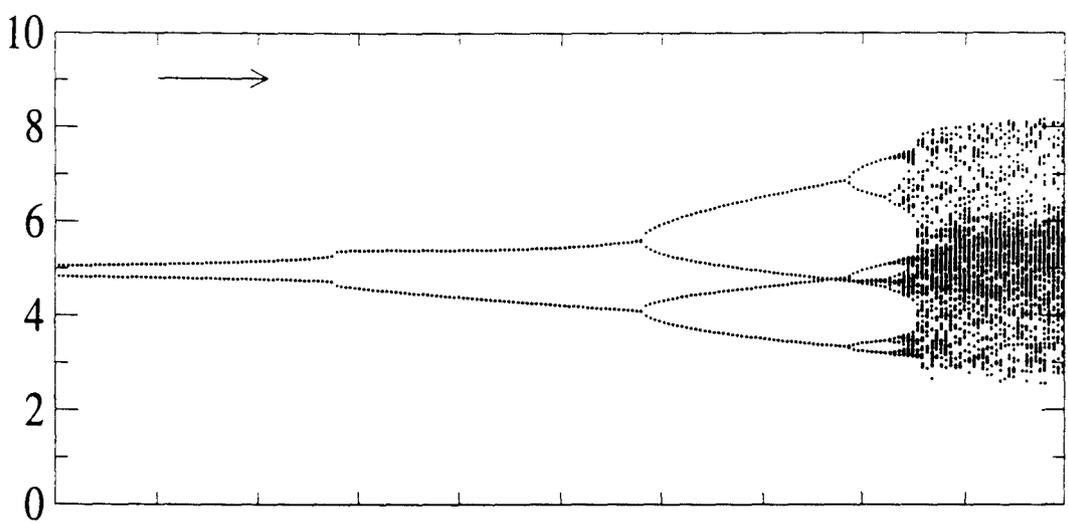
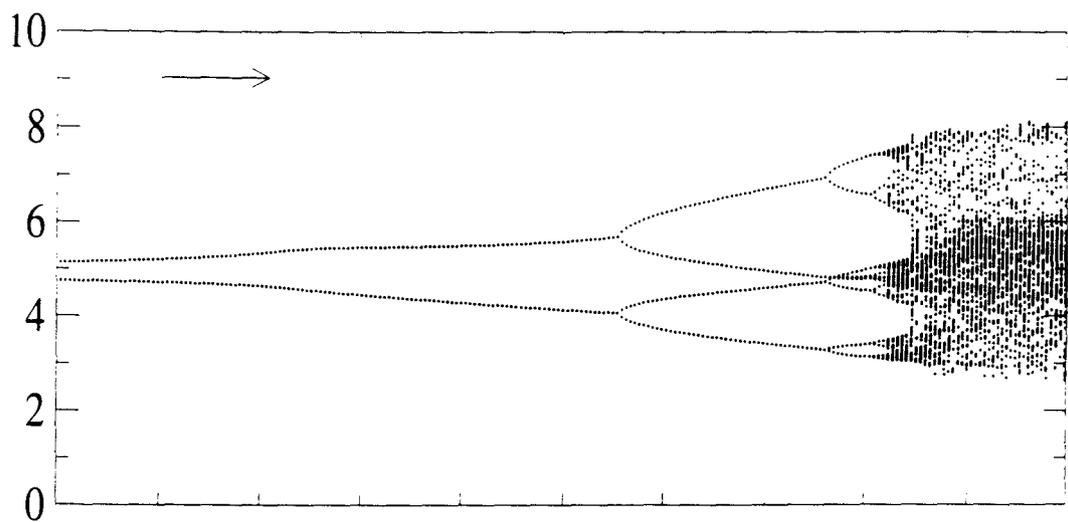
Sampled intensities



Pump parameter

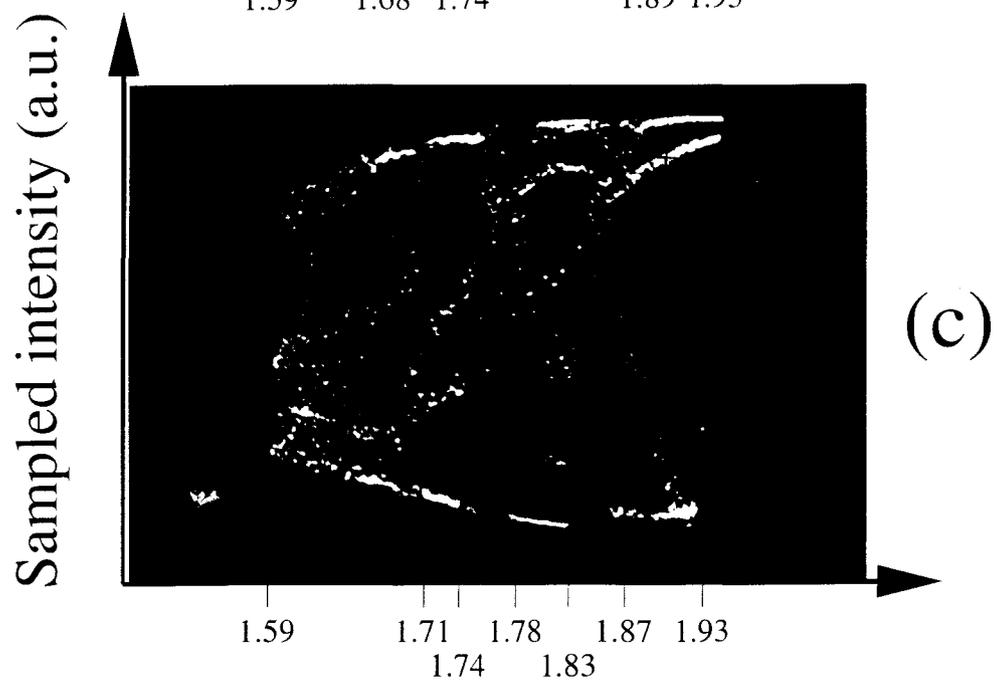
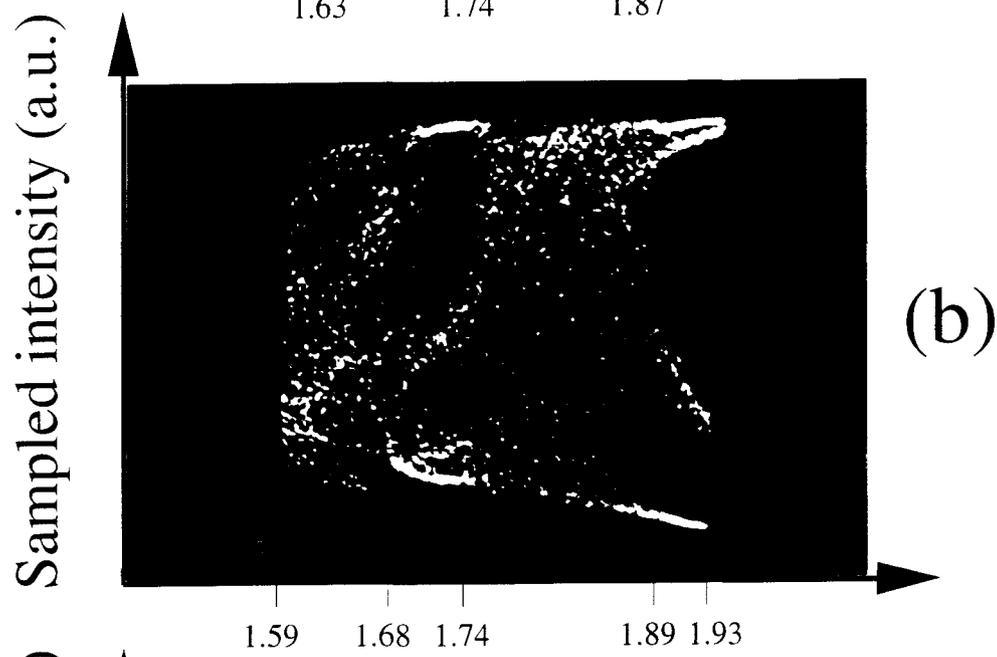
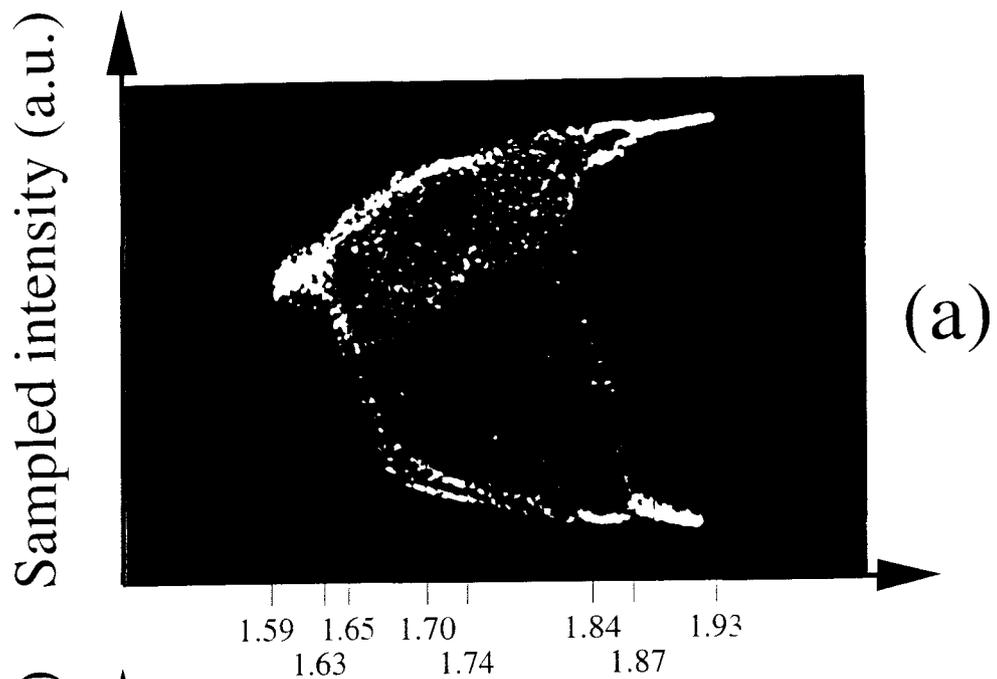
Figure 3

Sampled intensities



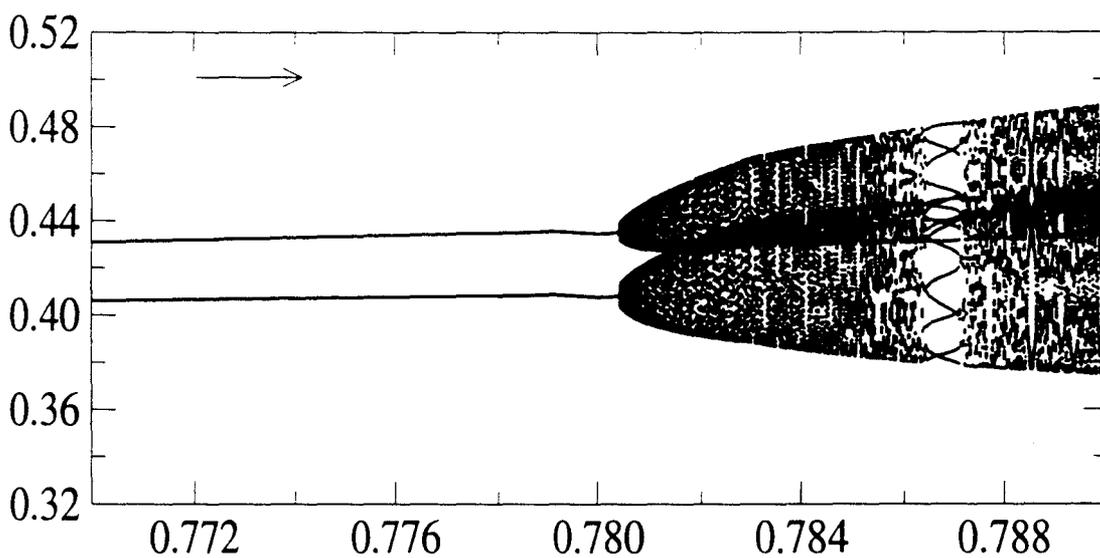
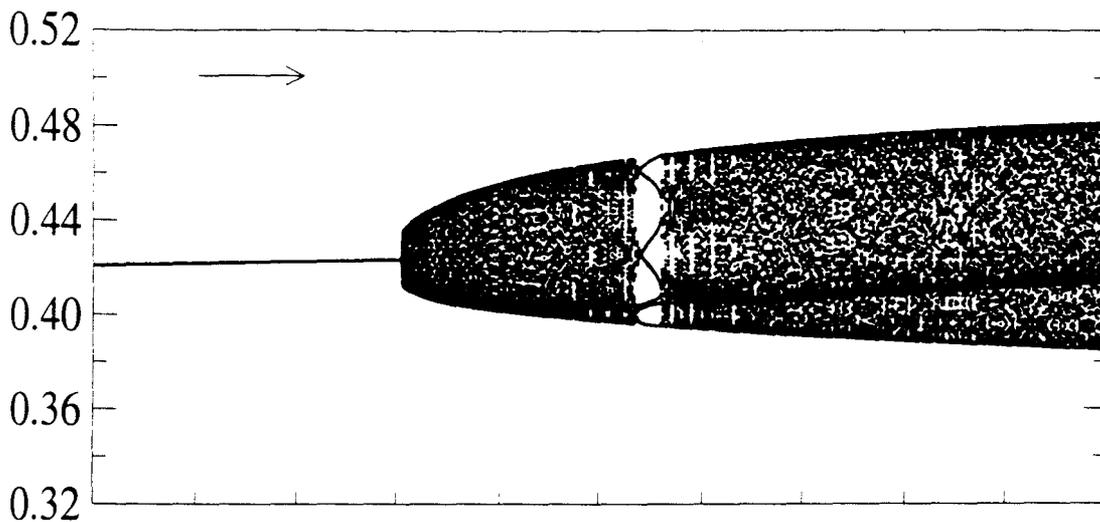
Pump parameter

Figure 4



Pump parameter A

Sampled Intensities



$r_1$

Figure 6

# Sampled Intensities

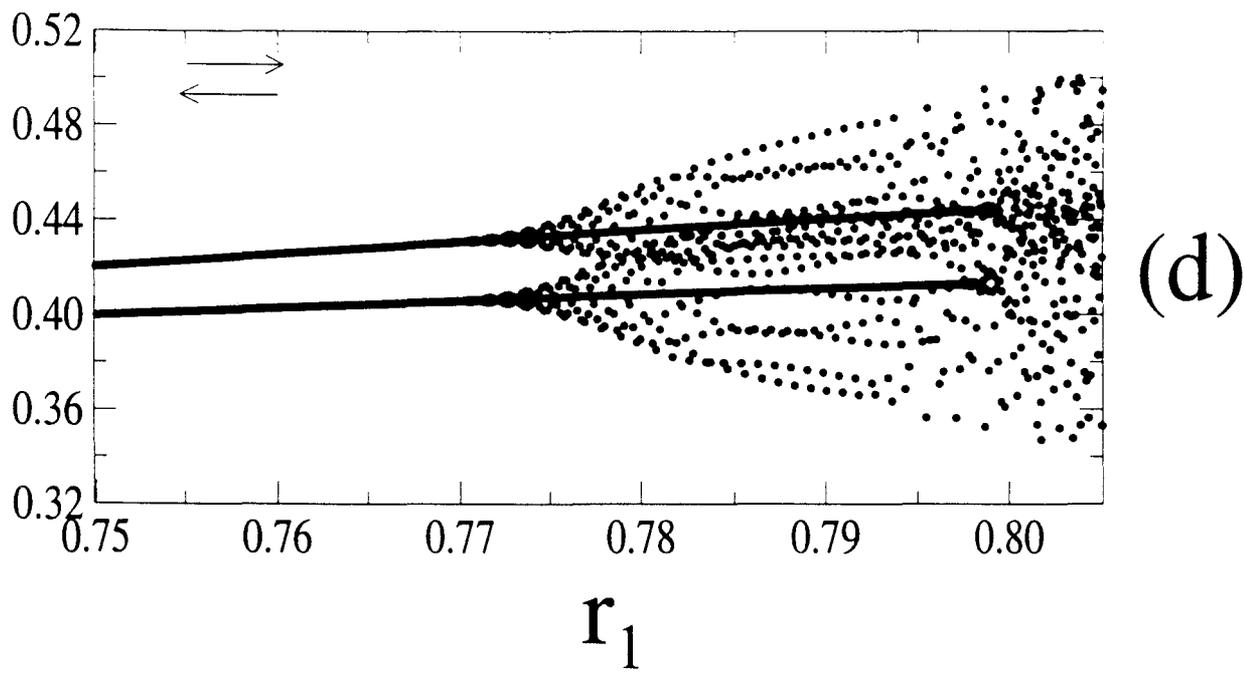
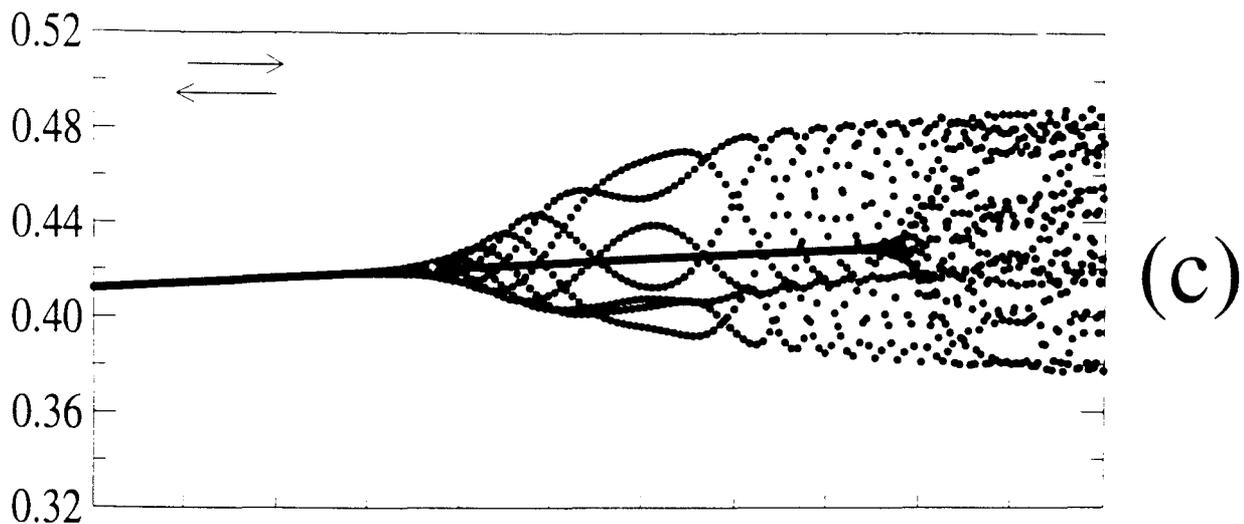


Figure 6

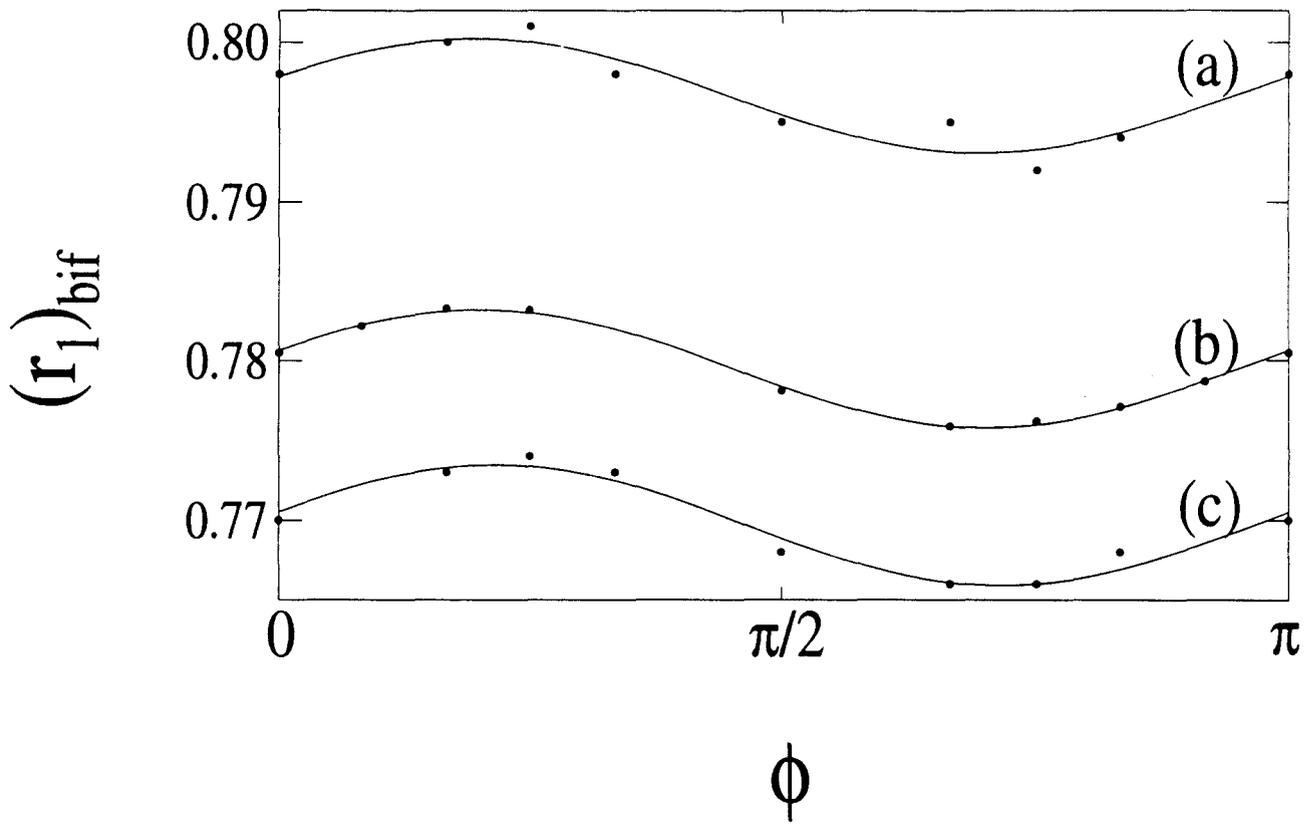


Figure 7

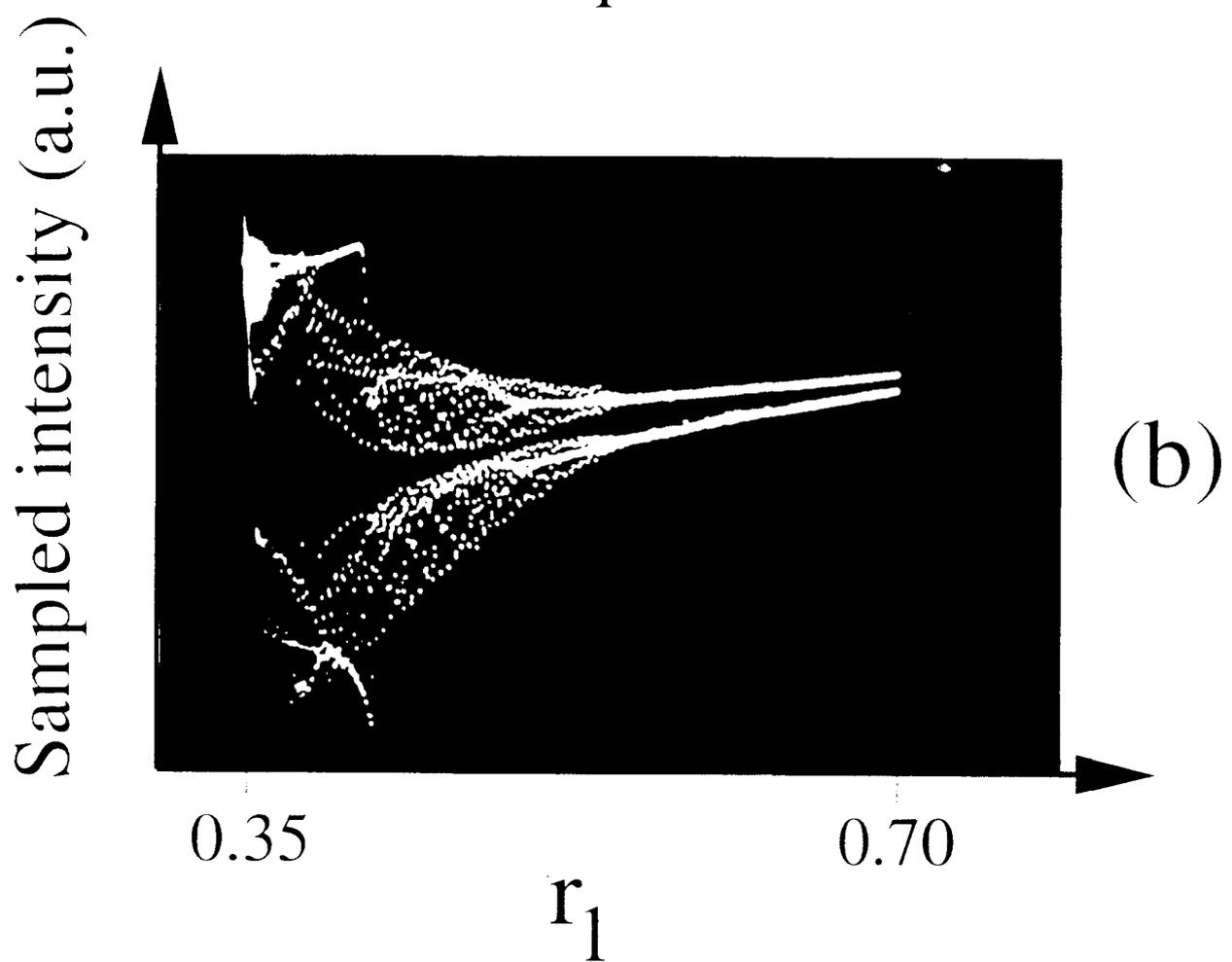
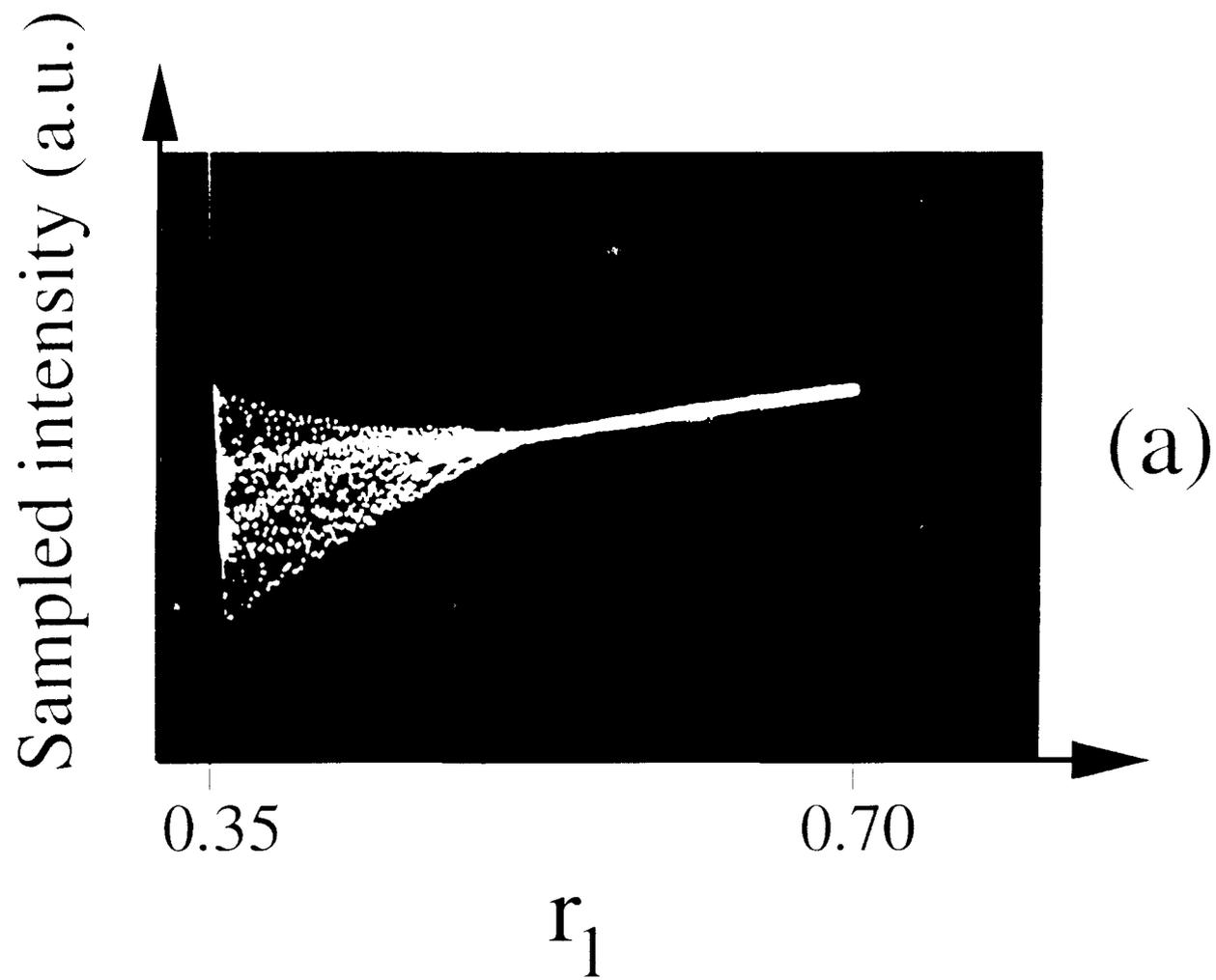


Figure 8

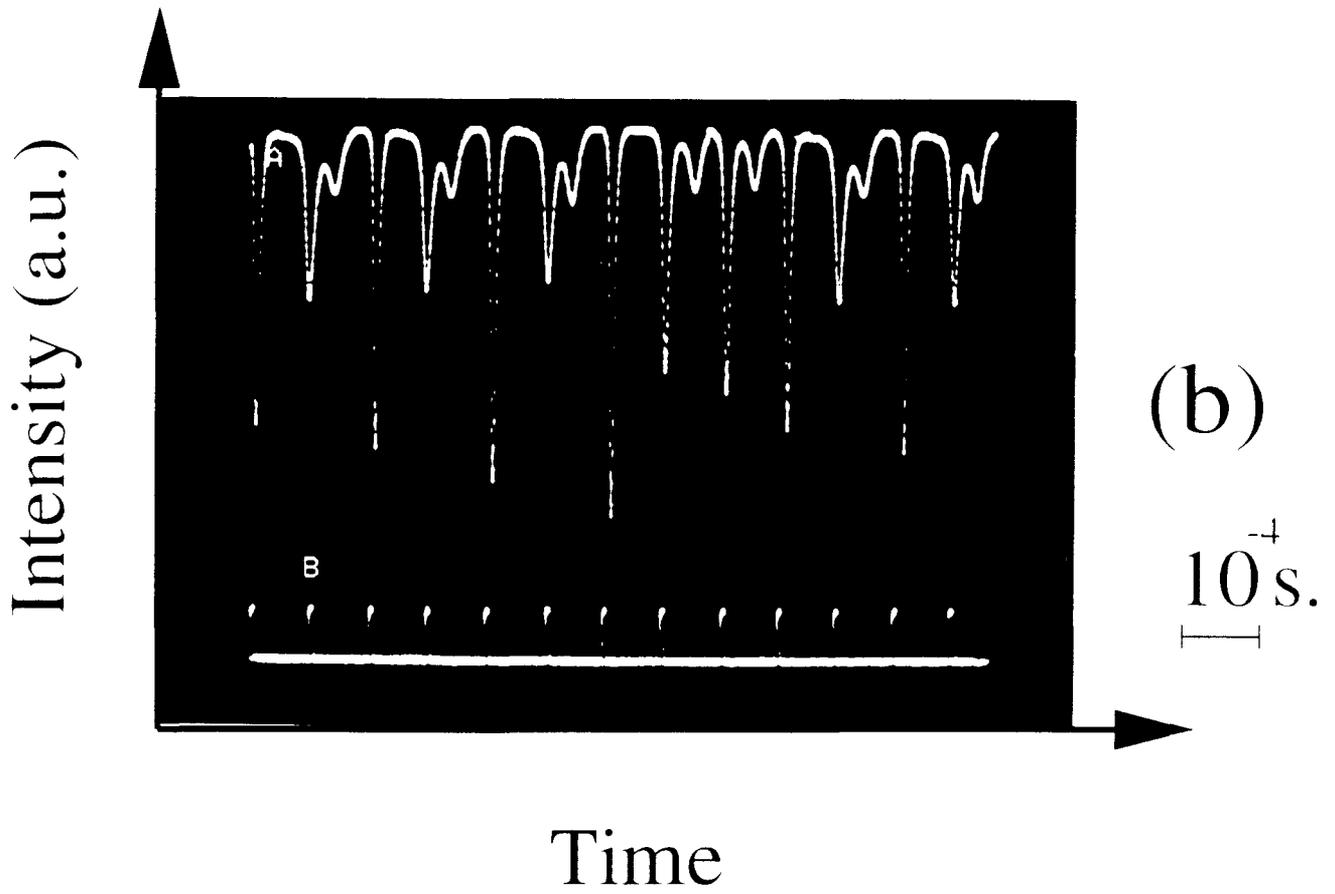
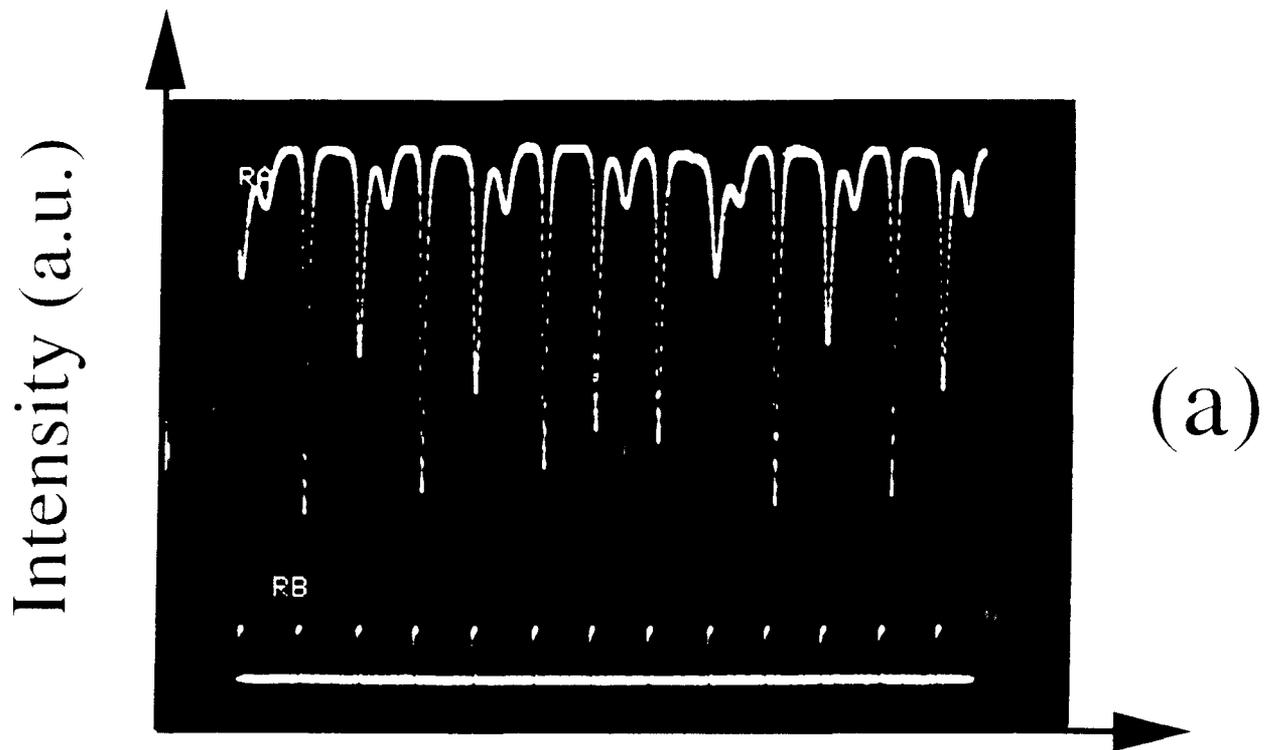


Figure 9

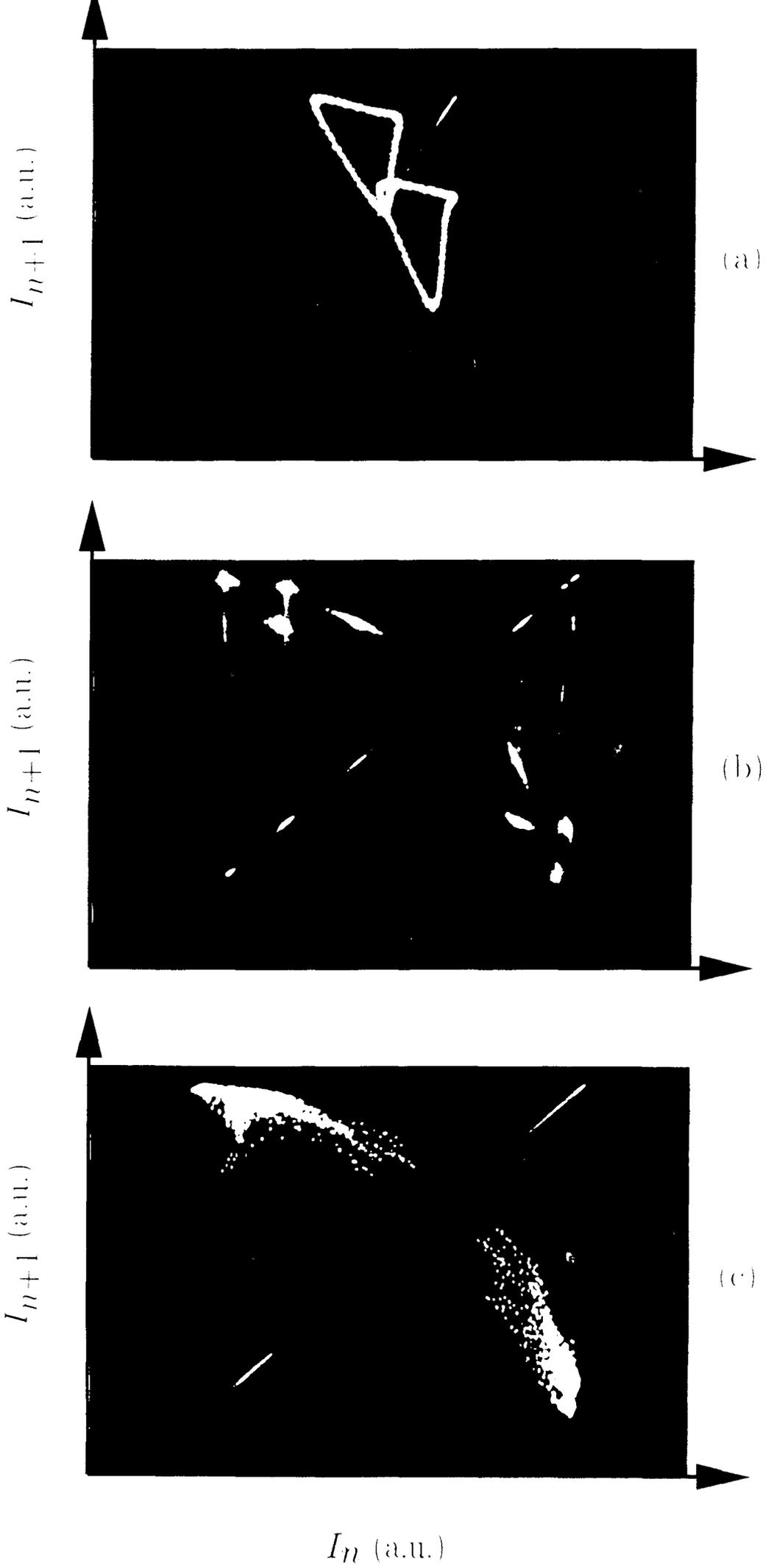
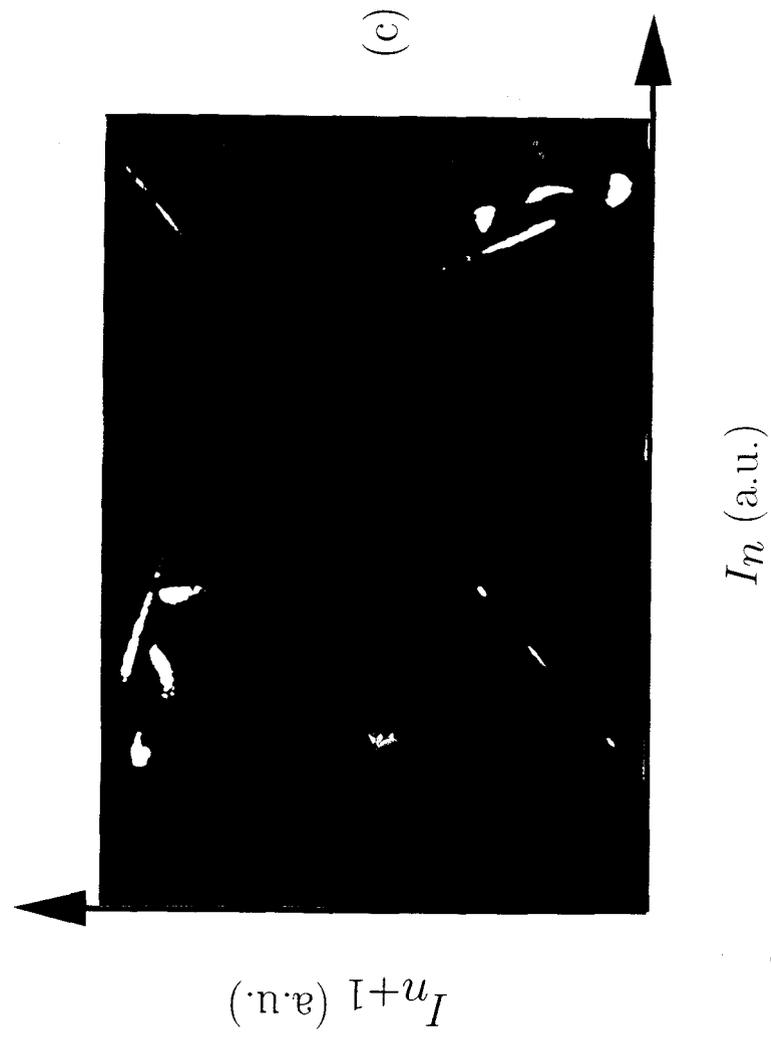
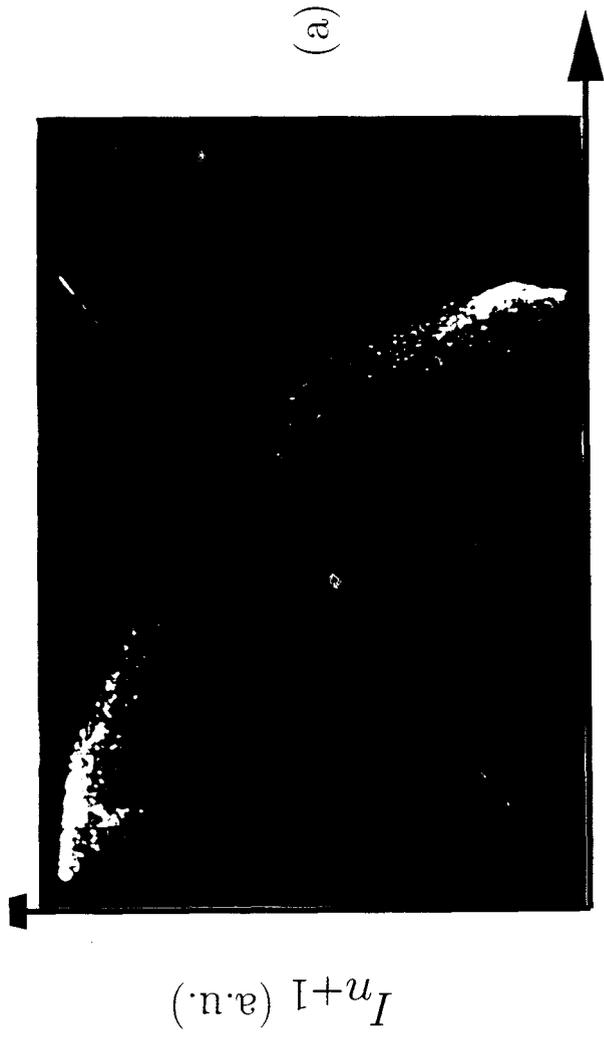


Figure 10



### 3.4 Conclusion

Les études expérimentales et les simulations numériques, développées au cours de ce chapitre, montrent que la phase de la perturbation sous-harmonique joue un rôle majeur dans le contrôle de la dynamique d'un système forcé. Pour comprendre même qualitativement la nature de cet effet, il est nécessaire de considérer globalement les diagrammes de bifurcation. Ce travail nous a permis de donner une vue plus précise des effets d'une très faible perturbation sur des régimes dynamiques variés incluant quasi-périodicité et chaos dans un système non-linéaire.

Nous avons étudié de façon exhaustive comment l'ajout d'une perturbation influe sur la dynamique d'un laser à fibre dopé au néodyme, en considérant principalement les effets sur les diagrammes de bifurcation. Les changements majeurs observés sont les déplacements des points de bifurcation, les crises et les commutations vers un nouvel attracteur. Basé sur la connaissance acquise de ces diagrammes, il est possible de faire basculer le système d'un régime chaotique vers des régimes quasi-périodiques ou périodiques et vice-versa suivant les conditions d'opération.

# Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire s'intègrent dans le large champ de l'étude de la dynamique du laser de classe B. Ses propriétés dynamiques en font un outil intéressant pour l'étude des fréquences de relaxations, des résonances induites par modulation d'un de ces paramètres et de la dynamique chaotique.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'étude du spectre basse-fréquence du laser multimode. Contrairement au laser monomode, le laser multimode possède plusieurs fréquences propres de relaxation. Leur disposition relative est révélatrice d'un comportement auto-organisé du laser qui se traduit par une *dynamique d'antiphase*. Nous avons observé cette dynamique d'antiphase sur le spectre basse-fréquence de notre système, numériquement en modulant faiblement le paramètre de pompe et expérimentalement en observant directement le spectre de bruit radiofréquence. Le spectre de l'intensité totale ne présente qu'une seule fréquence de relaxation qui correspond à la fréquence standard du laser monomode. Les autres fréquences ne sont visibles que sur les spectres des intensités modales et correspondent à des oscillations en antiphase qui se compensent globalement. Nous avons montré, en appliquant une modulation externe, que des oscillations de relaxation pouvaient cependant s'observer sur l'intensité totale à chaque naissance de mode. Nous avons également réalisé une étude de l'influence d'une contre-réaction dérivative et montré qu'il est possible de mettre en évidence des fréquences basses de relaxation dans le spectre de l'intensité totale si la contre-réaction est appliquée de façon adéquate.

La modulation externe du laser monomode, au voisinage de la fréquence de relaxation, induit un phénomène de résonance. Nous avons étudié, dans le second chapitre, le passage lent à travers cette résonance lorsque le paramètre de pompe est modulé. A partir d'un certain taux de modulation la résonance devient non-linéaire et la réponse du laser est bistable : suivant le sens de balayage du paramètre de contrôle le système commute vers un état « haut » ou vers un état « bas ». Nous avons rappelé les étapes qui ont permis d'aboutir aux expressions analytiques des fréquences de commutation

à partir du modèle classique des équations du bilan en inversion de population et en intensité et les avons comparées aux études expérimentales. Nous nous sommes en outre intéressés aux effets du bruit sur ces fréquences et aux effets dynamiques lorsque la vitesse de balayage du paramètre de contrôle est augmentée. Dans l'étude dynamique nous avons en particulier observé un phénomène nouveau : l'apparition d'oscillations dans l'enveloppe de réponse du laser. Nous avons également proposé les lois d'évolution des fréquences avec la vitesse de balayage, dans la limite des faibles vitesses : elles confirment les lois de puissance déjà connues.

Le troisième chapitre se rapproche des expériences de contrôle : nous y étudions les effets d'une perturbation sous-harmonique sur la dynamique du laser à paramètre de pompe modulé. Ces effets sont étudiés de façon globale en considérant l'ensemble du diagramme de bifurcation et pour différentes routes vers le chaos : la cascade de doublement de période et la quasi-périodicité. Un changement de la phase de la perturbation peut éliminer ou amener le chaos. Les effets notamment observés sont : des déplacements des points de bifurcation, des changements d'attracteurs, des créations de fenêtres périodiques, des crises. Les simulations numériques et les observations expérimentales sont en très bon accord.

Les expériences exposées dans ce triptyque ont été systématiquement mises en parallèle à des études numériques ou théoriques. Sur l'ensemble des résultats nous avons obtenus de très bons accords qualitatifs. Ceux-ci ont été acquis grâce aux modèles simples des équations du bilan : le modèle de Tang, Statz et de Mars du laser multimode pour le premier chapitre, le modèle des équations du bilan d'un système à deux niveaux d'énergie du laser monomode pour le second, un modèle d'équations couplées où chaque sous-système répond aux équations du bilan du laser monomode pour le dernier chapitre.

Le travail réalisé propose plusieurs extensions possibles. Dans le cadre du laser multimode, il serait fort utile d'étudier l'influence spatiale sur le couplage entre modes longitudinaux : les propriétés du spectre basse-fréquence, la façon dont la dynamique est altérée lorsque les faisceaux ne se recouvrent que partiellement. L'étude réalisée dans le second chapitre, peut relancer des travaux sur les transitions du second ordre : l'évolution des fréquences de commutation pourraient donner lieu à des lois de puissances différentes de celles établies pour notre système. Enfin, le « contrôle » du chaos, par application d'une perturbation extérieure est un domaine ouvert : développer des méthodes où l'état final du système est prédictible peut être l'orientation future de ce champ d'investigation.

# Annexe A

## Oscillations de relaxation basses-fréquences dans les lasers de classe B soumis à une contre-réaction

*Full length article*

### Low frequency relaxation oscillations in class B lasers with feedback

P. Khandokhin <sup>a</sup>, Ya. Khanin <sup>a</sup>, J.-C. Celet <sup>b</sup>, D. Dangoisse <sup>b</sup>, P. Glorieux <sup>b,1</sup>

<sup>a</sup> *Institute of Applied Physics, Russian Academy of Science, 46 Uljanov Street, 603 600 Nizhny-Novgorod, Russia*

<sup>b</sup> *Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, UA CNRS 249, Université de Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

Received 28 February 1995; revised version received 11 May 1995

---

#### Abstract

Relaxation oscillations have been studied both theoretically and experimentally in a multimode YAG laser in the presence of a derivative feedback. In addition to the standard relaxation oscillations, discrete low frequency components are present in the noise spectrum of each individual mode but they compensate almost exactly in the total intensity. The influence of a combined derivative feedback involving both the total intensity and that of one selected mode on the behavior of the relaxation oscillations and nonlinear dynamics of the laser is investigated. It is shown that the compensation nature of the low frequency relaxation oscillations of the multimode class B lasers can be disturbed in this case and, as a consequence, the selected relaxation oscillations appear in the noise spectrum of the total intensity. A higher feedback level can induce a destabilization of the laser and eventually chaos. An excellent qualitative agreement between experiments and theory has been obtained.

---

#### 1. Introduction

Laser physicists interested in highly stable sources are sometimes puzzled by low frequency peaks which appear in the radiofrequency (rf) noise spectrum of their laser at completely different time scales, usually much slower than the atomic or photon lifetimes and the mode spacings. Classical methods to lower the noise content of laser radiation involve mode filtering and feedback stabilization loops. Even the most sophisticated lasers such as the diode pumped YAG lasers specially designed for gravitational wave detectors exhibit rf noise peaks at frequencies significantly lower than the standard relaxation frequency of the laser [1]. In typical high performance systems, part of the laser output — before or after spatial filtering — is sampled and used to correct for the laser intensity and/or fre-

quency variations via a feedback loop which acts on a suitable control parameter such as the laser cavity length for frequency stabilization or the pump power for intensity control.

On the one hand, recent studies on the dynamics of lasers with a small number of modes revealed the existence of low frequency relaxation oscillations. On the other hand, the analysis of the effect of feedback loops and especially of derivative feedback loops on dynamical systems has shown that they could be helpful to stabilize unstable states of nonlinear systems. Thus we have investigated the relaxation oscillation spectrum of a YAG laser in the presence of derivative feedback as it is revealed by its rf noise spectrum. To understand why we have chosen a multilongitudinal mode YAG laser, it is useful to place the present work in the general context of laser dynamics.

Dynamical systems and in particular lasers are first characterized by their steady states, i.e. time independ-

---

<sup>1</sup> Also with the Institut Universitaire de France.

ent solutions of their evolution equations. Once these states are known, one usually proceeds to a linear stability analysis to determine the stability of these solutions. The period and damping of transient oscillations set the time scale of the dynamics of the system and therefore are important data for the laser rf noise spectrum or when phenomena such as periodic driving, fast modulation, coupling with other systems, etc. are involved [2–4]. The point of view developed in this paper is centered on these relaxation oscillations. More specifically we have considered here a YAG laser which belongs to class B lasers since this kind of lasers is the simplest which present damped relaxation oscillations. Let us recall that laser dynamics are ruled by the interplay of the electric field, the atomic polarization and the population inversion. In class B lasers, the atomic polarization relaxes towards its equilibrium much faster than the other variables or combination of variables and therefore it may be adiabatically eliminated. The dynamical state of a class B laser is ruled by two variables in the single-mode operation and more generally by  $2n+1$  real variables when an  $n$ -mode operation is considered together with spatial holeburning.

In a single-mode class B laser there is only one frequency  $\omega_0$  for the relaxation oscillations since this is a two-dimensional dynamical system. This frequency is simply related to laser parameters and has been used practically to give access to quantities such as the cavity loss or the population inversion lifetime [4,7].

In multimode lasers, there may exist several relaxation frequencies whose properties reveal features susceptible to significantly altering the dynamics of these lasers. For instance, the case of a two-mode class B laser revealed the existence of low frequency relaxation oscillations in addition to those observed at  $\omega_0$ . The angular frequency  $\omega_1$  of these oscillations is much lower than that of the relaxation oscillations  $\omega_0$  in the case of the single-mode operation. Let us stress that  $\omega_1$  is a purely dynamical frequency and differs by several orders of magnitude from the splitting between two optical modes of the cavity. In the case of the Nd:YAG laser discussed here they are in the optical ( $3 \times 10^{14}$  Hz) range with a mode spacing of about 4 GHz while the dynamical resonances are in the  $10^4$  Hz domain. When the number of lasing modes increases, additional relaxation frequencies may appear and the spectroscopy of relaxation oscillations may be carried out. Sev-

eral techniques give access to the value of these frequencies; for instance, the measure of the laser response to a small sinusoidal modulation [8] or the Fourier transform of its response to a pulsed perturbation of one of its parameters [9].

When several resonances with different strength and linewidth exist, weaker lines may be hidden by stronger resonances leading to a wrong determination of such a simple quantity as the number of resonances. In fact the number of relaxation frequencies appears to be very important when a model is to be built, because a system with  $n$  relaxation frequencies requires at least  $2n$  dynamical variables and this sets a lower bound on the complexity of the model. A technique to enhance weaker resonances is to use adequate feedbacks.

In practice, feedback is often used to reduce the fluctuations in the laser output with the final goal of eliminating laser noise [10–12]. For instance, the laser intensity may be stabilized by controlling the cavity losses. Feedback has also been considered from a dynamical point of view. Arecchi et al. first showed that a CO<sub>2</sub> laser with positive feedback displays instabilities of different kinds and in particular Shilnikov chaos [2,3]. Occasional proportional feedback has been used to lock a YAG or an optical fiber laser on unstable periodic orbits embedded inside a chaotic attractor [10,13]. Continuous feedback is also useful to stabilize unstable steady states and to track them over a wide range of parameters in which the laser is usually spiking periodically or chaotically [4,13].

Indeed a laser with feedback is a dynamical system completely different from the laser in absence of feedback and this has been used to create a variety of interesting dynamical phenomena. One of the most interesting among these feedback techniques uses the derivative of the output intensity to set the feedback level. Since it vanishes in case of a steady-state operation, derivative feedback does not alter the steady states but only their stability, i.e. the characteristic roots associated with these steady states. Therefore derivative feedback presents a particular interest over most other feedback techniques.

The damping coefficient characterizing the relaxation towards the steady state, i.e. the real part of the characteristic root, varies with the feedback. This may be used positively to enhance weak relaxation resonances hidden by larger ones. The width and strength of the resonances are obviously altered by the feedback

and frequency shifts, i.e. variations of the imaginary part are also possible in principle. Because the real and imaginary parts of the characteristic roots are quite different in many systems, the question of the applicability of feedback techniques to the spectroscopy of relaxation oscillations remains open and to answer it is one purpose of the present paper.

The multimode laser theoretically and technically offers the possibility of a wide variety of feedbacks. For instance, the total intensity or the intensity in one particular mode or a specific combination of these intensities may be used to “tailor” the feedback according to the kind of dynamical regime which is wanted, e.g. periodic regimes or a cw operation on the stable and also unstable steady states, discussed above.

We report here on a detailed investigation of relaxation resonances of a multimode class B laser with a derivative feedback built from a combination of the total intensity and of the intensity in a given mode. It is possible to use more complicated combinations but the combination proposed here allows to obtain almost any dynamical regime. As mentioned earlier, the monomode class B laser is always stable and possesses only one relaxation frequency. We have considered here the case of the multimode operation of this laser when up to four modes are simultaneously excited above threshold. As the number of laser modes involved increases, that of the relaxation resonances also increases and here up to four relaxation frequencies may play a significant role in the dynamics of such a laser.

This paper is organized as follows: in the next section we present a rate equation model describing the operation of the class B laser with derivative feedback. Steady-state solutions are given and their stabilities are linearly analyzed. This may not be done analytically but requires numerical simulations which have been carried out with parameters corresponding to the Nd:YAG laser. The results of these calculations are discussed in Section 2. The corresponding experiments have been performed on the above mentioned laser with a feedback made up of a combination of the total intensity and the intensity in one longitudinal mode. As reported in Section 3, various dynamical features have been obtained depending on the amplitude and the sign of the feedback and in particular on the relative weight of the selected mode intensity. They include regenerative amplification and selective excitation of low frequency quasi-sinusoidal oscillations and chaos. The

variety of these results shows that “tailoring the feedback” is possible according to the kind of dynamical richness which is wanted, and that using the information from individual modes provides the necessary freedom to match this purpose. Possible extensions of the method to different feedbacks and lasers will be discussed in the conclusion.

## 2. Theory

### 2.1. Mathematical model

Let us start with the well-known rate equations of a multimode laser [14]:

$$\begin{aligned} \frac{dI_j}{d\tau} &= GI_j \left( \int N \psi_j^2 dV - 1 - C_j \right), \\ \frac{\partial N}{\partial \tau} &= A - N \left( 1 + \sum_{j=1}^n I_j \psi_j^2 \right). \end{aligned} \quad (1)$$

We do not take into account here the fact that the gain coefficients of individual modes are different because of the frequency dependence of the gain but introduce instead of this the loss distribution which is represented by the quantities  $C_j$  ( $C_j$  is the additional loss of the  $j$ th mode with respect to the losses of the reference mode). Normalized field intensities  $I_j$  and the inversion  $N$  are used as variables in Eqs. (1). The dimensionless time is introduced by the equality  $\tau = \gamma_n t$ , where  $\gamma_n$  is the population inversion relaxation rate. Other notations have the following meaning:  $G = 2\kappa/\gamma_n$ , where  $\kappa$  is the field decay rate in the cavity with  $C_k = 0$ ,  $\psi_k$  is the cavity eigenfunction,  $V$  is the cavity volume,  $A$  is the laser pumping parameter. The summation is extended over the  $n$  cavity modes and will be denoted by  $\Sigma$  in the following.

We will study only longitudinal modes with respect to the  $x$ -axis which permits the use of the plane-wave approximation

$$\psi_j = \sqrt{2} \sin(k_j x), \quad (2)$$

where  $k_j$  is the wave number of the  $j$ th mode. Limiting the spatial Fourier expansion of the population inversion to the lowest terms,

$$N_0 = \frac{1}{L} \int_0^L N(x, \tau) dx,$$

$$N_j = -\frac{1}{L} \int_0^L N(x, \tau) \cos(2k_j x) dx, \quad (3)$$

where  $L$  is the cavity length, we obtain the set [14]

$$\begin{aligned} \frac{dI_j}{d\tau} &= P_j = GI_j(N_0 + N_j - 1 - C_j), \\ \frac{dN_0}{d\tau} &= Q_0 = A - N_0(1 + \sum I_j) - \sum N_j I_j, \\ \frac{dN_j}{d\tau} &= Q_j = -N_j(1 + \sum I_j) - \frac{1}{2}N_0 I_j. \end{aligned} \quad (4)$$

Using the loss distribution of the form

$$C_j = \beta(j-1), \quad (5)$$

it is possible to define the intensities of all modes through only one parameter  $\beta$ .

The combined feedback, discussed here, consists of combining two channels for controlling the pumping. The input signal of the first channel is proportional to the derivative of the total intensity while the second channel is connected with the derivative of the intensity in a given mode  $\nu$ . Such a combined feedback is represented by the expression

$$A = A_0 + K_{\text{total}} \sum \frac{dI_j}{d\tau} + K_\nu \frac{dI_\nu}{d\tau}, \quad (6)$$

which is the pump parameter to be introduced in Eq. (4b).

## 2.2. Steady-state solutions and relaxation oscillations in the absence of feedback

The steady states of the system are the same as those of the multimode class B laser in the absence of derivative feedback and we follow the analysis of [15]. The steady-state solutions of Eqs. (4) are given by the following relations:

$$\bar{I}_j = -\frac{2}{\bar{N}_0} (1 + \bar{I}_{\text{total}}) \bar{N}_j,$$

$$\bar{N}_j = -(\bar{N}_0 - 1 - C_j),$$

$$\bar{N}_0 = \frac{2(1 + \bar{I}_{\text{total}})(n + \sum C_j)}{2n + (2n-1)\bar{I}_{\text{total}}}, \quad (7)$$

and the number of lasing modes  $n$  depends on the pumping parameter  $A_0$ . The quantity  $\bar{I}_{\text{total}} = \sum \bar{I}_j$  is the positive root of the quadratic equation

$$b_0 \bar{I}_{\text{total}}^2 + b_1 \bar{I}_{\text{total}} + b_2 = 0, \quad (8)$$

where the coefficients  $b_i$  are given by the following expressions:

$$\begin{aligned} b_0 &= (2n-1)(1 + 2\sum C_j) - (2n-1)^2 \frac{\sum C_j(C_j+1)}{n + \sum C_j}, \\ b_1 &= 4n(1 + 2\sum C_j) - A(2n-1) \\ &\quad - 4n(2n-1) \frac{\sum C_j(C_j+1)}{n + \sum C_j}, \\ b_2 &= 2[(2n+1)\sum C_j - n(A-1)] - 4n^2 \frac{\sum C_j(C_j+1)}{n + \sum C_j}. \end{aligned} \quad (9)$$

Linearizing the set (4) with the feedback of the form (6) around the steady-state solution (7) leads to the characteristic equation

$$\|a_{\mu\nu} - \lambda \delta_{\mu\nu}\| = 0. \quad (10)$$

Here  $\delta_{\mu\nu}$  is the Kronecker symbol and the quantities  $a_{\mu\nu}$  are given by the following relations (where  $j, q = 1, 2, \dots, n$ ):

$$a_{j,q} = \frac{\partial P_j}{\partial I_q} = 0, \quad a_{j,n+1} = \frac{\partial P_j}{\partial N_0} = G\bar{I}_j,$$

$$a_{j,n+1+j} = \frac{\partial P_j}{\partial N_j} = G\bar{I}_j, \quad a_{j,n+1+q} |_{q \neq j} = \frac{\partial P_j}{\partial N_q} = 0,$$

$$a_{n+1,j} = \frac{\partial Q_0}{\partial I_j} = -(1 + C_j),$$

$$a_{n+1,n+1} = \frac{\partial Q_0}{\partial N_0} = -(1 + \bar{I}_{\text{total}}) + GK_{\text{total}}\bar{I}_{\text{total}} + GK_\nu \bar{I}_\nu,$$

$$a_{n+1,n+1+j} = \frac{\partial Q_0}{\partial N_j} = -\bar{I}_j + GK_{\text{total}}\bar{I}_{\text{total}} + GK_\nu \bar{I}_\nu \delta_{j\nu},$$

$$\begin{aligned}
 a_{n+1+j,q} |_{q \neq j} &= \frac{\partial Q_j}{\partial I_q} = -\bar{N}_j, \\
 a_{n+1+j,j} &= \frac{\partial Q_j}{\partial I_j} = -\bar{N}_j - \frac{1}{2}\bar{N}_0, \\
 a_{n+1+j,n+1} &= \frac{\partial Q_j}{\partial N_0} = -\frac{1}{2}\bar{I}_j, \\
 a_{n+1+j,n+1+q} |_{q \neq j} &= \frac{\partial Q_j}{\partial N_q} = 0, \\
 a_{n+1+j,n+1+j} &= \frac{\partial Q_j}{\partial N_j} = -(1 + \bar{I}_{\text{total}}). \tag{11}
 \end{aligned}$$

The characteristic equation (10) possesses one real negative root plus  $n$  pairs of complex-conjugate roots with negative real parts if  $G \gg 1$ ,  $\beta \ll 1$  and the feedback is switched off ( $K_{\text{total}} = K_\nu = 0$ ). This means that the  $n$ -mode class B laser possesses  $n$  types of relaxation oscillations. In the limit  $\beta = 0$  all the lasing modes are equal in right what leads to a  $(n - 1)$ -fold degenerate relaxation frequency spectrum. As it is shown in Fig. 1, the inequality of the mode losses leads to unequal steady-state mode intensities (Fig. 1a) and simultaneously removes the degeneracy in the spectrum of low frequency relaxation oscillations (Fig. 1b).

Looking for the behavior of the roots one can find a small range  $\beta_a < \beta < \beta_b$ , of the control parameter  $\beta$  inside which the number of relaxation oscillations is smaller than the mode number by unity. On the lower end of this region ( $\beta = \beta_a$ ) the quantity  $\text{Im}\lambda_4$  becomes zero and the complex root  $\lambda_4 = \delta_4 + i\omega_4$  turns into two real roots (Figs. 1b, c). One of these new roots becomes zero at the upper limit of the mentioned region ( $\beta = \beta_b$ ). This coincides with the disappearance of the fifth mode.

To study how the relaxation oscillations alter the laser radiation, it is necessary to leave the frame of the autonomous laser model. There are two possible approaches. The first one consists in studying the intensity fluctuation spectra. Relaxation frequency sequences are displayed in such spectra as separated peaks. This method is preferable from the experimental point of view because it does not require any complication of the laser system. The second approach consists in the examination of the transfer functions, i.e. the laser response to the weak harmonic modulation of

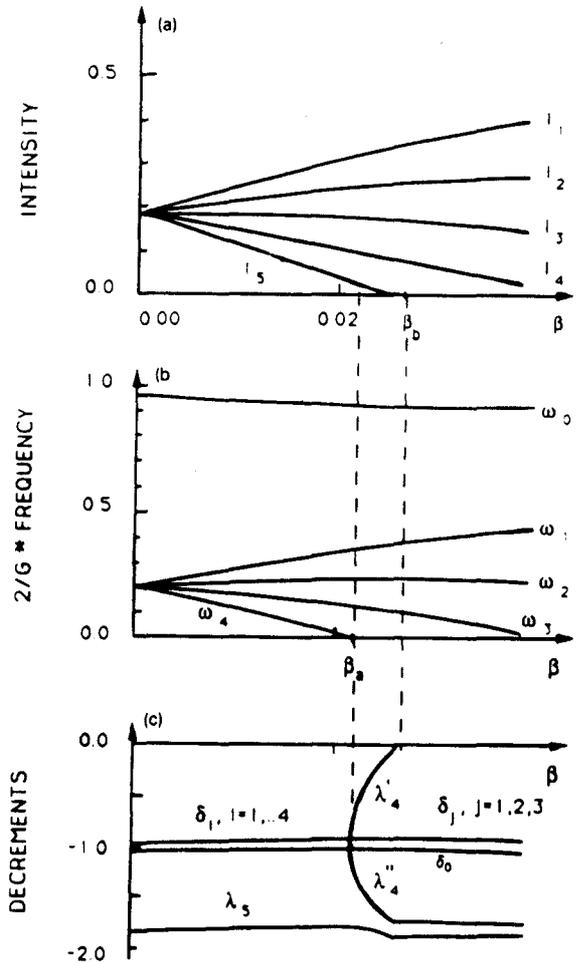


Fig. 1. Influence of the loss asymmetry parameter  $\beta$  on (a) the mode intensities, (b) the frequencies and (c) the decrements of the relaxation oscillations with  $G = 100$  and  $A = 2$ .

cavity losses or any other parameter. This method is more convenient in theory so far as only one frequency is present at a time. Both approaches are undoubtedly equivalent in the linear approximation where the principle of superposition holds.

Introducing a weak loss modulation in Eq. (4) leads to the set of inhomogeneous algebraic equations

$$\sum_{\nu=1}^n (a_{\mu\nu} - i\omega) \xi_\nu(\omega) = \beta_\mu. \tag{12}$$

Matrix elements  $a_{\mu\nu}$  are defined by relations (11),  $\beta_\mu$  is a column vector which characterizes the amplitude of the external forces,  $\omega$  is the modulation frequency,  $\xi_\nu(\omega)$  is the complex transfer function which describes the laser response to modulation.

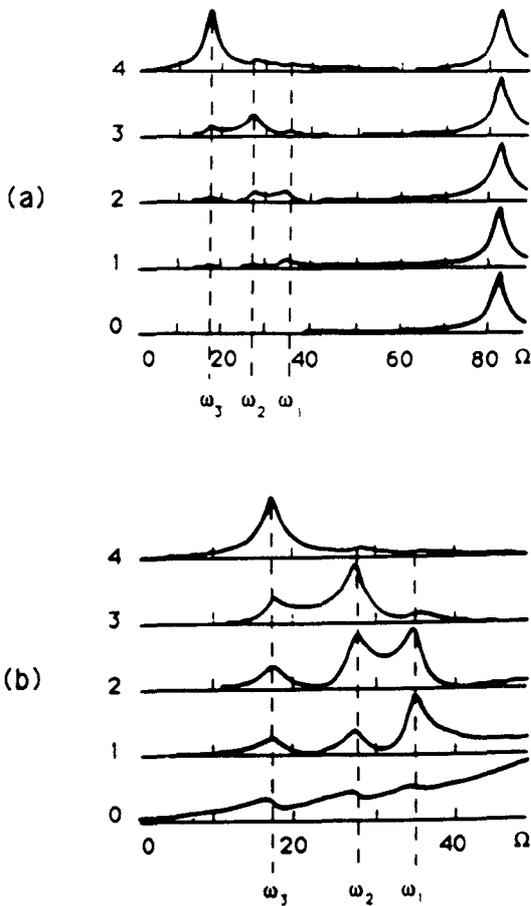


Fig. 2. Transfer function  $\xi$  for each mode (curve 1 to 4) and for the total intensity (curve 0): (a) the frequency scale is selected for observation of all relaxation frequencies  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ ; (b) the frequency scale is suitable for observation only of low relaxation frequencies  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ;  $G = 7000, A = 2, \beta = 0.03$ .

The mode intensity transfer functions normalized to their maximum values,

$$\xi_\mu = \frac{|\xi_\mu(\omega)|}{|\xi_\mu|_{\max}}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (13)$$

are presented in Fig. 2 as well as the total intensity transfer function which is defined in a similar manner:

$$\xi_{\text{total}} = \frac{|\sum \xi_\mu(\omega)|}{|\sum \xi_\mu|_{\max}}. \quad (14)$$

Figs. 2a and 2b differ by the frequency axis scale thanks to which Fig. 2a wholly covers the domain at relaxation oscillations while Fig. 2b is limited by its low frequency part only. The results of computations confirm the above statement that the low frequency relaxation oscillations compensate the curve  $\xi_{\text{total}}(\omega)$  corresponding to the total intensity which shows only

one peak at frequency  $\omega_r$  while low frequency peaks are present only in the individual mode transfer functions but not in the total intensity one.

### 2.3. Influence of a feedback on the laser behavior

Switching on a feedback changes the situation which has been described in the previous section. Let us consider some particular cases as they appear from numerical simulations whose results are displayed in Figs. 3 to 5. They correspond to the total intensity derivative feedback (Fig. 3a), the selective derivative feedback (Fig. 3b) and the combined derivative feedback (Figs. 4 and 5).

#### 2.3.1. Total intensity derivative feedback: $K_{\text{total}} \neq 0, K_\mu = 0$

In this situation, a negative feedback proportional to the derivative of the total intensity is applied to the pump parameter. One may conclude from the results

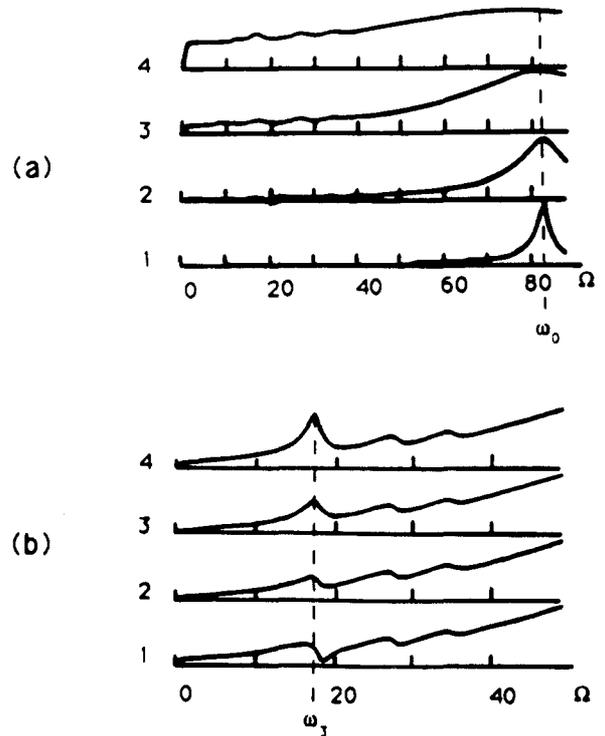


Fig. 3. Transfer function  $\xi_{\text{total}}(\omega)$  for different values of the  $K_{\text{total}}$  and  $K_\nu$  parameters: (a)  $K_\nu = 0.0$ , modes 1 to 4; curve (a1):  $K_{\text{total}} = 0.0$ ; (a2):  $-0.001$ ; (a3):  $-0.005$ ; (a4):  $-0.010$ ; (b)  $K_{\text{total}} = 0.0, K_\mu = 0.0$ , modes 1 to 3; curve (b1):  $K_4 = -0.005$ ; (b2):  $0.000$ ; (b3):  $0.005$ ; (b4):  $0.010$ ; where  $G, A, \beta$  are the same as in Fig. 2.

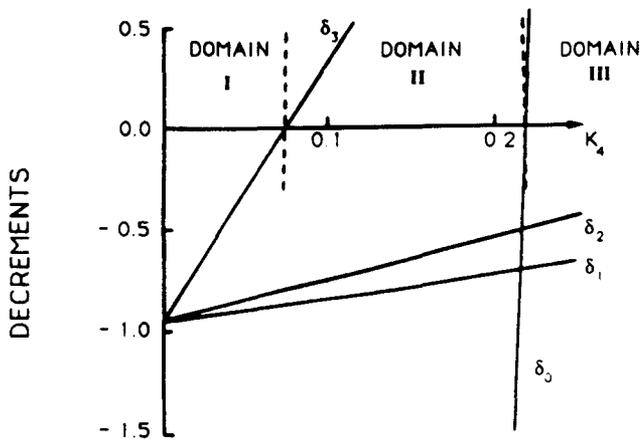


Fig. 4. Influence of the combined derivative feedback on the decrements of the relaxation oscillations;  $G = 7000$ ,  $A = 2$ ,  $\beta = 0.03$ ,  $K_{\text{total}} = -0.005$ .

of the theoretical analysis given in Fig. 3a that such a feedback strongly influences the noncompensated relaxation oscillation whose frequency  $\omega_0$  is the highest. On the contrary, if the feedback is positive ( $K_{\text{total}} > 0$ ) this type of oscillations can become undamped (this case is not presented in Fig. 3). The influence of such a feedback on the group of low frequency relaxation oscillations is not so remarkable. In any case, there is no manifestation of these oscillations in the transfer function  $\xi_{\text{total}}(\omega)$ .

### 2.3.2. Selective derivative feedback: $K_{\text{total}} = 0$ , $K_\nu \neq 0$ , $K_{\mu \neq \nu} = 0$

This case is reflected by Fig. 3b. It is clear that low frequency relaxation oscillations are not completely compensated anymore and are visible in the total intensity. However, the predominant influence on the high frequency oscillations remains in this case. An increase in  $K_\nu$  results in a laser instability at the point where  $\delta_0$  changes sign.

### 2.3.3. Combined derivative feedback: $K_{\text{total}} \neq 0$ , $K_{\mu \neq \nu} = 0$

The value at  $K_{\text{total}} = -0.015$  is fixed in numerical calculations while  $K_\nu$  is used as a control parameter. The dependences  $\delta_\nu(K_4)$  are presented in Fig. 4 and we have distinguished three domains there. All the relaxation oscillations are damped in the domain I. But the shape of the transfer function exhibits a remarkable change when the control parameter  $K_4$  approaches the

bifurcation value. It is shown in Fig. 5a that the resonance peak at the relaxation frequency  $\omega_3$  narrows. There is no visible increase in peak amplitude in Fig. 5a because the transfer functions are normalized to their maximum values.

The same phenomenon at the increasing and narrowing of the resonance peak takes place in the intensity fluctuation spectrum. It can be attributed to the effect of regenerative noise amplification in the vicinity of the laser instability threshold.

In domain II, the decrement  $\delta_3$  is positive and a periodic self-modulation with frequency equal to  $\omega_3$  is observed. The modulation index increases with  $K_4$  and approaches 100% near the upper boundary of region II.

In domain III, the high frequency relaxation oscillations with the frequency  $\omega_0$  also become undamped and chaotic pulsations are established at higher values of the feedback.

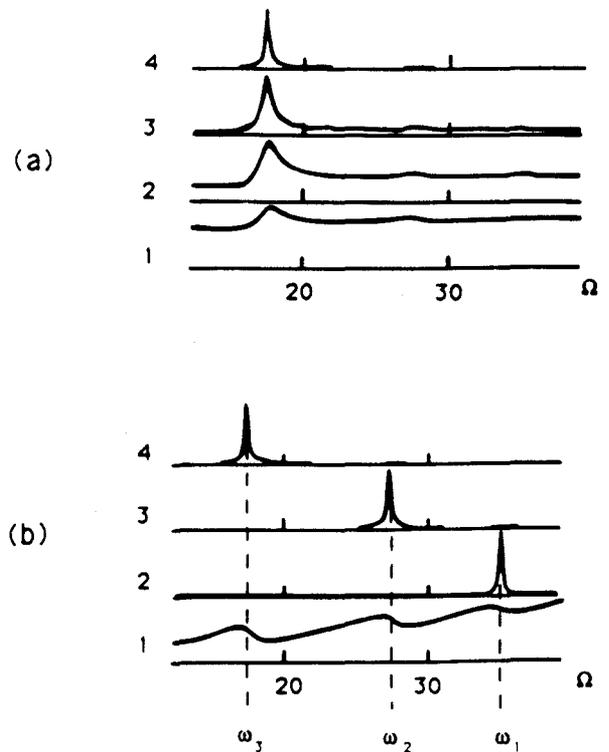


Fig. 5. Transfer function  $\xi_{\text{total}}(\omega)$  for different values of the  $K_{\text{total}}$  and  $K_\nu$  parameters: (a)  $K_{\text{total}} = -0.015$ ,  $K_\mu = 0.0$ , mode 1 to 3; curve (a1):  $K_4 = 0.010$ ; (a2):  $-0.030$ ; (a3):  $-0.060$ , (a4):  $-0.075$ ; (b) curve (b1):  $K_{\text{total}} = 0.0$ ,  $K_\nu = 0.0$ , mode 1 to 4; (b2):  $K_{\text{total}} = -0.015$ ,  $K_2 = 0.039$ ,  $K_\mu = 0.0$  for  $\mu = 1, 3, 4$ ; (b3):  $K_{\text{total}} = -0.015$ ,  $K_3 = 0.041$ ,  $K_\mu = 0.0$  for  $\mu = 1, 2, 4$ ; (b4):  $K_{\text{total}} = -0.015$ ,  $K_4 = 0.075$ ,  $k_\mu = 0.0$  for  $\mu = 1, 2, 3$ ; where  $G = 7000$ ,  $A = 2.2$ ,  $\beta = 0.03$ .

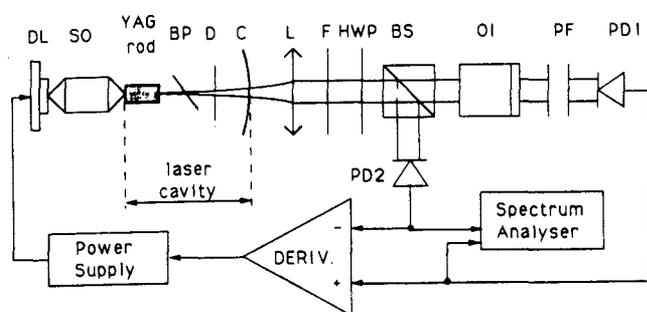


Fig. 6. Experimental setup. DL: laser diode; SO: shaping optics; BP: Brewster plate; D: diaphragm; C: output coupler; L: collimating lens; F: filter at  $1.06\ \mu\text{m}$ ; HWP: half wave plate; BS: beamsplitter; OI: optical isolator; PF: Perot–Fabry interferometer; PD: photodetector.

A similar regularity is observed if any other mode is chosen, except the strongest one, for driving the feedback (Fig. 5b).

### 3. Experiment

#### 3.1. Experimental setup

The experiments have been achieved with a Nd:YAG laser in a Fabry–Pérot configuration end-pumped by a cw laser diode operating at  $812\ \text{nm}$  (Fig. 6). The Nd:YAG rod is  $5\ \text{mm}$  long,  $5\ \text{mm}$  in diameter, with plane ends, and contains a nominal neodymium concentration of  $1.1\%$ . One end of this rod is highly reflecting at  $1.064\ \mu\text{m}$  and the other is AR coated at the same wavelength. The output coupler is concave with a radius of curvature of  $40\ \text{mm}$  and a  $95\%$  reflectivity. In these conditions, the total output power of the laser is  $30\ \text{mW}$  for a total incident power on the rod of  $325\ \text{mW}$  and it is possible to obtain values of the pump parameter  $A$  reaching  $9.1$ . A variable aperture diaphragm is inserted inside the cavity to select single-mode oscillation on the  $\text{TEM}_{00}$  mode. A Brewster plate forces laser action on a linear polarization and eliminates the polarization dynamics which may result from the crystal birefringence. In this configuration, the laser emits up to six longitudinal modes at the maximum pump power. The longitudinal mode separation is calculated to be  $\Delta\nu = c/2(n_1l_1 + n_2l_2) = 3.95\ \text{GHz}$  where  $n_1, l_1$  (resp.  $n_2, l_2$ ) are the refractive index and the path length in Nd:YAG (resp. air):  $n_1 = 1.82, l_1 = 5\ \text{mm}, n_2 = 1, l_2 = 29\ \text{mm}$ . The laser emission spectrum is monitored by a scanning a Fabry–Pérot interferometer

(Burleigh-TL 15) isolated from the laser cavity with the help of a polarizer cube and a quarter wave plate.

The laser output power is separated in two optical channels which monitor the total intensity and the intensity in a single longitudinal mode respectively. The corresponding signals provided by two photodiodes (Hamamatsu S4712) are sent to the two inputs of a differential amplifier. The amplifier output which is proportional to the weighted difference of these two quantities is sent to a derivating circuit and is amplified before driving the power supply of the pump diode (Fig. 6). The bandwidth of all these circuits far exceeds the range of the relaxation frequencies which are a few hundred kHz typically.

The control parameters which are easily accessible in this experimental setup are the pump power which is proportional to the parameter  $A$  of the theoretical section, and the positive and negative feedback coefficients  $K_{\text{total}}$  and  $K_\nu$ .

In order to calculate  $K_{\text{total}}$  and  $K_\nu$ , an external periodic modulation has been introduced in the derivative circuit and the gain of each part of the derivator has been calculated taking in account the normalization of the intensity after the beamsplitting. Due to the presence of an amplifier used in a derivation mode, the absolute gain of each channel depends on the external modulation frequency and only their ratio is independent of this frequency and can be compared with the corresponding theoretical value.

Relaxation frequencies have been obtained using the simplest of the two approaches discussed in Section 2, which is to record the fluctuation spectra. A variant of this technique consists in driving the pump diode with a noise generator, thus artificially creating a white noise excitation spectrum. This leads to similar results but has not been used throughout here.

#### 3.2. Fluctuation spectra

We have chosen a multimode regime, with  $A = 2.2$ , in which four longitudinal modes oscillate in a nonsymmetrical pattern to avoid any degeneracy effect which could result from a symmetrical role of longitudinal modes (Fig. 7). The different modes are denoted 1 to 4 going from the strongest to the weakest one. The intensities of the first three modes are similar while the intensity of the fourth mode is much weaker, i.e. the laser is operating just above the fourth-mode threshold.

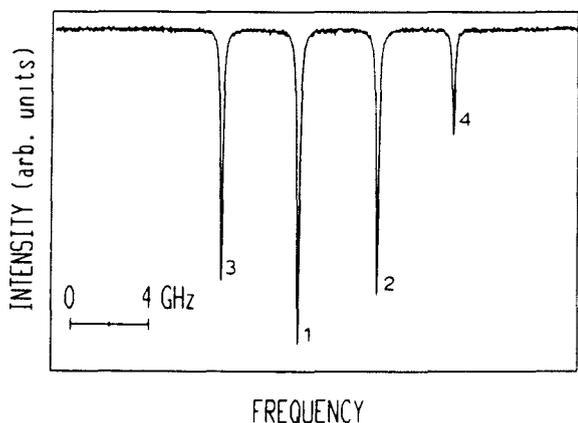


Fig. 7. Optical spectrum at  $A = 2.2$ . The different modes oscillate in a non-symmetrical pattern, where the intensity of the fourth mode is far weaker than the others.

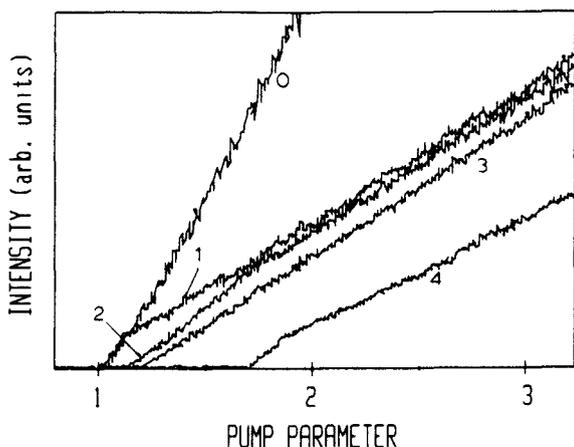


Fig. 8. Modal (1 to 4) and total (5) intensity variations versus the pump parameter  $A$ . The thresholds of the modal outputs are  $A = 1.15$  (mode 2),  $A = 1.2$  (mode 3),  $A = 1.7$  (mode 4).

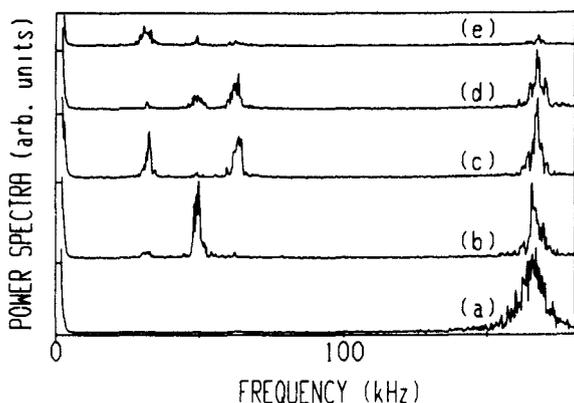


Fig. 9. Power spectra of (a) total output and (b) modal outputs mode 1, (c) mode 2, (d) mode 3, (e) mode 4, at  $A = 2.2$ . The recorded relaxation frequencies are:  $\omega_1 = \omega_r = 166$  kHz,  $\omega_1 = 63$  kHz,  $\omega_2 = 49$  kHz,  $\omega_3 = 33$  kHz. The vertical scale is the same from (b) to (e).

Fig. 8 gives the modal and total intensity variations versus the pump parameter  $A$ . As is expected from the optical spectrum, the thresholds of the first three modes are close to each other ( $A = 1.15$  for mode 2,  $A = 1.2$  for mode 3), while the threshold of mode four is slightly higher ( $A = 1.7$ ). The modal intensities increase almost linearly with  $A$  except for the mode 1 which exhibits a discontinuity at the threshold for mode 2 ( $A = 1.15$ ).

Fig. 9 gives an example of radiofrequency (rf) noise power spectra obtained at  $A = 2.2$  for each of the longitudinal modes and for the total intensity. All spectra display a resonance peak at a frequency  $\omega_0/2\pi = 166$  kHz which is in the range of the value ( $\omega_0/2\pi = 360$  kHz) calculated from the characteristics of our laser in a single-mode class B model. As a consequence the resonance at  $\omega_0$  may be interpreted as the standard relaxation oscillation frequency of the laser [15]. This frequency is the only one which appears in the rf spectrum of the total intensity of the laser, and all lower resonance frequencies which are observed on individual mode fluctuations are almost absent from the total intensity. Therefore they correspond to antiphase oscillations which globally compensate each other. This indicates a strong correlation between the fluctuations in the different longitudinal modes. The rf noise spectra in each longitudinal mode exhibit several resonances at frequencies lower than 80 kHz typically. In the conditions of Fig. 9 they appear at  $\omega_1/2\pi = 63$  kHz,  $\omega_2/2\pi = 49$  kHz,  $\omega_3/2\pi = 33$  kHz. These frequencies vary with the pump parameter  $A$ . As for the standard relaxation oscillation  $\omega_0$  of the laser, their frequencies decrease when  $A$  decreases and they tend towards zero as the threshold is approached in accordance with the numerical simulations reported in Fig. 1. In most of the explored range, the squared frequencies are linear functions of  $A - A_{thr}^i$  where  $A_{thr}^i$  is the threshold for mode  $i$ .

The relative intensities of the different low frequency peaks at  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  also follow the predictions of the numerical simulations. In particular the weakest mode displays a strong peak at  $\omega_3$ . In the conditions of Fig. 9, this peak appears only in  $I_4$  and  $I_2$  and mostly in  $I_4$  for the corresponding numerical simulations. Then it is reasonable to assign the resonance frequency  $\omega_3$  to the low intensity laser mode. In accordance with the antiphase phenomenon [17-20], other longitudinal modes  $I_1, I_2$  and  $I_3$  also respond at this frequency and their global contribution compensates for that of the weakest

one,  $I_4$ . As the later is much weaker than all the others, the contribution of the relaxation oscillations at  $\omega_3$  should be considered as much stronger in relative units. The assignment of one relaxation frequency, i.e. one dynamical mode, to a single longitudinal mode, i.e. an optical mode, is generally not possible. However, this possibility appears sometimes both in the model and the experiments. For instance, the peak at  $\omega_2$  mostly concerns intensity  $I_1$ , while the contributions in any other modes are much weaker. Practically, the peak heights and frequencies depend on the losses in the different longitudinal modes which are not correctly described by such a simple formula as (5). Thus a quantitative discrepancy between theory and experiment is expected. Let us stress that the qualitative agreement extends to the width of the different peaks. In the experiments reported in Fig. 9, all the low frequency peaks have a similar width of the order of a few kHz and the standard relaxation oscillation at  $\omega_0$  is twice as broad, as obtained in numerical simulations (see Fig. 1 for instance).

Altogether the qualitative agreement, especially concerning the existence and the frequencies of the low frequency relaxation oscillations, remains excellent.

### 3.3. Derivative feedback

Our purpose here is to check the influence of derivative feedback on the noise properties of class B lasers, in particular on the spectrum of relaxation oscillations. More specifically we want to investigate the interplay of such a feedback with low frequency oscillations. In a first step we have used a positive selective derivative feedback, i.e. a feedback proportional to the derivative of a modal intensity. We observed the simultaneous excitation of a low frequency component and of high frequency relaxation oscillations at  $\omega_0$ , as is expected from the theoretical predictions of Section 2.3.2. When the feedback coefficient increases, the system destabilizes and evolves towards chaos. In this kind of experiments, the enhancement of low frequency relaxation is obtained only for very low levels of feedback, and chaos is easily reached. On the opposite, the combined derivative feedback allows one to enhance the low frequency oscillations with respect to the high ones as discussed hereafter.

Therefore, in a second step, we used a combined derivative feedback as defined by e.g. (6). In this sit-

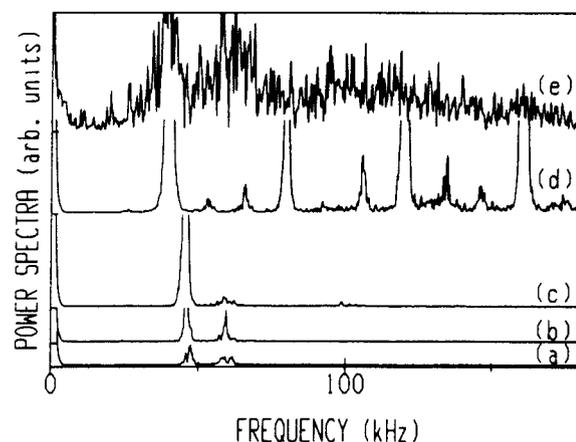


Fig. 10. Power spectra of mode 3 (feedback is  $K_{\text{total}} dI_1/dr + K_3 dI_3/dr$ ) for different values of the  $K_3$  parameter: (a)  $K_3/K_{\text{total}} = -2.35$ , (b)  $-3.04$ , (c)  $-3.14$ , (d)  $-4.61$ , (e)  $-4.71$ . The peak heights are adjusted for a better reading. The vertical scale is increased by a factor of 6 in (e).

uation the information from the total intensity is added in the feedback loop. We have paid special attention to the case where the coefficients  $K_{\text{total}}$  and  $K_\nu$  fulfill the conditions  $K_{\text{total}} < 0$  and  $K_\nu > 0$  to realize both the compensation of the high frequency  $\omega_0$  and the excitation of a low frequency.

Experiments were performed with  $\nu = 1$  to 4 to determine how the selection of the spectral component affects the laser noise properties.  $K_{\text{total}}$  was fixed at the value which minimizes the high frequency peak in the rf noise spectrum and  $K_\nu$  was used as the control parameter. As an example of the results, graphs showing the feedback effects on the third and second mode are given in Figs. 10 and 11 respectively. Two kinds of behavior

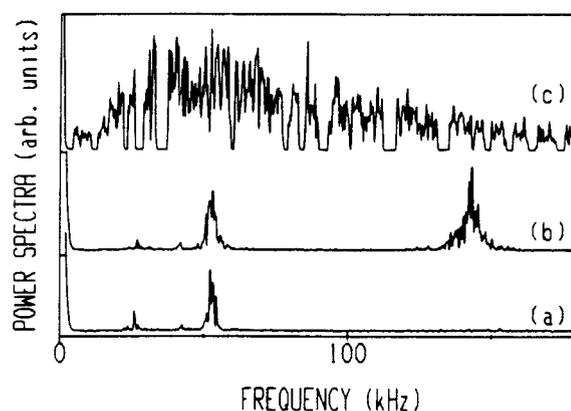


Fig. 11. Power spectra of mode 2 (feedback is  $K_{\text{total}} dI_1/dr + K_2 dI_2/dr$ ) for different values of the  $K_2$  parameter: (a)  $K_2/K_{\text{total}} = -3.92$ , (b)  $-5.02$ , (c)  $-5.10$ . The vertical scale is the same for (a) and (b).

are observed depending mostly on the particular mode  $\nu$  which is used for preparing the feedback information. In almost all situations, the system destabilizes as  $K_\nu$  increases and it reaches chaos at large feedback levels, but the details of the transitions are different. In the first case the laser destabilizes through low frequency oscillations while in the second case it switches directly to chaos. The first type of scenario can be seen with adequate feedback coefficients for  $\nu = 2, 3$  or 4 but has never been observed for  $\nu = 1$  for which only the second type of scenario is available. In other words, no low frequency destabilization occurs with  $\nu = 1$ . As an example of the results, graphs showing the feedback effects on the third and second mode are given in Figs. 10 and 11 respectively.

Fig. 10 illustrates the first scenario. It shows different rf power spectra of the laser intensity in mode 3 when a combined derivative feedback using the intensity in this particular mode is applied. Spectra (a) to (e) are successively obtained by increasing  $K_3$ . At low feedback level, e.g. Fig. 10a, the laser stationary state is continuous and two peaks are observed at  $\omega_1/2\pi = 63$  kHz and  $\omega_2/2\pi = 49$  kHz. These peaks are already present in the rf noise spectrum of the third mode of the free running laser (see e.g. Fig. 9). As  $K_3$  increases, the laser destabilizes and its intensity is modulated at  $\omega_2$  and there remains a significant contribution of the noise around  $\omega_1$ . If  $K_3$  increases further, the modulation at  $\omega_2$  becomes stronger giving a sharp peak at this frequency. The low harmonics content indicates an almost pure sinusoidal modulation at this frequency. At higher values of  $K_3$ , harmonics of  $\omega_2$  and combinations with  $\omega_1$  such as  $3\omega_2 - \omega_1$ ,  $4\omega_2 - \omega_1$ , etc. (Fig. 10d) appear. The largest values used in the experiment (Fig. 10e) lead to chaos with the sudden appearance of a broad spectrum.

Fig. 11 illustrates the second kind of behavior which appears here with  $\nu = 2$ , i.e. the direct transition to chaos. The coefficient  $K_2$  increases from (a) to (c). Fig. 11a shows that the combined derivative feedback induces (i) a compensation almost perfect of the standard relaxation oscillation at  $\omega_0$ , (ii) a partial compensation of the peak at  $\omega_3$  and (iii) an enhancement and a shift of the peak at frequency  $\omega_1$  which appears for the feedback coefficients used here at  $\omega_1/2\pi = 55$  kHz (instead of  $\omega_1/2\pi = 63$  kHz in absence of feedback). Fig. 11b corresponds to a value of  $K_2/K_{\text{total}}$  ( $K_2/K_{\text{total}} = -5.02$ ) just below the transition to chaos which

occurs at  $K_2/K_{\text{total}} = -5.10$ . Then the high frequency peak at  $\omega_0$  becomes stronger than the low frequency one at  $\omega_1$ , and at  $K_2/K_{\text{total}} = -5.10$  the laser switches to chaos with the sudden appearance of a broadband spectrum. Let us emphasize that for lower values of  $K_2$  ( $|K_2/K_{\text{total}}| < 5.10$ ) the laser operates in the continuous stationary regime. Fig. 11b shows that the combined derivative feedback also shifts the high frequency peak by 30 kHz on the low frequency side.

The first scenario is observed when a careful selection of  $K_{\text{total}}$  allows one to compensate the high relaxation frequency noise peak. The three domains of dynamical behavior for different values of  $K_\nu$  are those predicted in the theoretical study (see e.g. Fig. 4) namely (i) damped relaxation oscillations in domain I (lowest values of  $K_\nu$ ), (ii) self-modulation of the laser at a low frequency after a Hopf bifurcation in domain II and (iii) chaotic behavior caused by the regeneration of the high relaxation frequency peak in domain III (largest values of  $K_\nu$ ). The second type of scenario is obtained for  $\nu = 1$  or any value of  $\nu$  for which  $K_{\text{total}}$  is not well selected as indicated before. It allows only two domains to appear corresponding to damped relaxation oscillations and chaotic behavior respectively, and the bifurcation is due to the reappearance of the relaxation oscillations at frequency  $\omega_0$ .

Except for the observed frequency shifts, the experimental results with the combined derivative feedback are in qualitative good agreement with the theory, especially as it concerns the three different domains presented in Fig. 4.

#### 4. Conclusion

The present work has explored the complex behavior which occurs in a multimode system (here a laser) in the presence of a combined feedback. Because of the interplay of low frequency relaxation oscillations which are in antiphase in the free-running system, the dynamics of the system is very rich. It may be dominated by the global evolution corresponding here to the high frequency relaxation oscillation at  $\omega_0$  or by a low frequency component, which is the case when the feedback is designed to compensate for the later oscillation. In most situations, the combined feedback alters both. This problem has been considered here on a multimode YAG laser which appeared well suited for such a study.

Altogether the model derived in the theoretical section provides an excellent description of the influence of a combined derivative feedback on the multimode YAG laser. The major effects of such a feedback are:

- The selected relaxation oscillations become uncompensated and, as a consequence, the corresponding frequency peak appears in the noise spectrum of the total intensity.
- An increase in the selected feedback leads to a laser instability and eventually to chaos by two scenarios. The first route consists of Hopf bifurcation followed by the transition from the low frequency regular oscillations to the chaotic ones through the quasi-periodicity. By the second scenario the chaotic pulsations are established just after the supercritical Hopf bifurcation, but the time scale corresponds to the highest relaxation frequency in this case.

The qualitative agreement is excellent but a detailed quantitative description is beyond the scope of this work. It would require a more precise description of the loss–gain mechanisms in the YAG laser so that these processes are described by a formula more realistic than (5), which is a phenomenological way of introducing the influence of these processes. The search for a better quantitative agreement requires to include the frequency dependence of the gain in the YAG laser and to accordingly change the loss dependence on longitudinal mode order. This would open the possibility of spectroscopy of the laser dynamics. Note that in such a spectroscopy the linewidths present as much interest as the resonance frequencies since their evolution may anticipate the appearance of instabilities.

This work also confirms that contrary to what is usually assumed, the observation of one dynamical variable may be misleading when antiphase processes are present. The derivative feedback ensures that the steady states remain the same and the combination breaks the symmetry responsible for the compensation of antiphase evolutions.

This work can be extended in several directions. One would be to consider the case of a laser with several *transverse* modes, e.g. a class B laser like the CO<sub>2</sub> laser with the lower order Hermite–Gauss TEM<sub>00</sub> and TEM<sub>10</sub>. Otsuka showed that in such a laser, antiphase dynamics depends on the transverse coordinates [21]. Therefore it should open a new way of designing feedback signals using information from different points in the transverse section of the laser beam.

If more numerous longitudinal modes are concerned, the symmetry breaking due to the feedback considered here should be less pronounced because all the modes not involved in the feedback still compensate for each other and it may be interesting to check the possible relation which has been discussed here between optical and dynamical modes.

### Acknowledgements

This work was supported by INTAS (1010-CT 93-0015) and ISF (R8G000) grants. The Centre National de la Recherche Scientifique and the Université des Sciences et Technologies de Lille are gratefully acknowledged for the visiting positions for two of us (Y.K. and P.K.).

### References

- [1] C. Man, *Les lasers et leurs applications*, Proc. Cargèse Summer School, Soc. Franç. Opt., to be published; private communication.
- [2] F.T. Arecchi, W. Gadomski and R. Meucci, *Phys. Rev. A* 34 (1986) 1617; F.T. Arecchi, R. Meucci and W. Gadomski, *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 2205.
- [3] F.T. Arecchi, A. Lapucci, R. Meucci, J.A. Roversi and P.H. Couillet, *Europhys. Lett.* 6 (1988) 677.
- [4] D.C. Hanna, R.G. Smart, R.J. Suni, A.I. Ferguson and M.W. Phillips, *Optics Comm.* 68 (1988) 128.
- [5] D.V. Ivanov, Ya.I. Khanin, I.I. Matorin and A.S. Pikovsky, *Phys. Lett. A* 89 (1982) 229.
- [6] P.A. Khandokhin and Ya.I. Khanin, *Kvant. Electron.* 11 (1984) 1483 [*Sov. J. Quantum Electron.* 14 (1984) 1004].
- [7] P.A. Khandokhin, *Izv. Vyss. Uchebn. Zaved. Radiofiz.* 22 (1979) 813. [*Sov. Radiophys.* 22 (1979) 564].
- [8] Yu.D. Golyaev and S.V. Lantratov, *Kvant. Electron.* 6 (1974) 2361 [*Sov. J. Quantum Electron.* 9 (1979) 1390].
- [9] K. Otsuka, P. Mandel, S. Bielawski, D. Derozier and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* 46 (1992) 1692.
- [10] S. Bielawski, M. Bouazaoui, D. Derozier and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* 47 (1993) 3276.
- [11] R. Roy, T.W. Murphy Jr., T.D. Maier, Z. Gills and E.R. Hunt, *Phys. Rev. Lett.* 68 (1992) 1259.
- [12] For a review on laser noise see R. Roy, A.W. Yu and S. Zhu, *Colored noise in dye laser fluctuations*, in: *Noise in nonlinear dynamical systems*, eds. F. Moss and P.V.E. McClintock (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989) pp. 90–118.
- [13] D.J. Gauthier, D.W. Sukow, H.M. Concannon and J.E.S. Socolar, *Phys. Rev. E* 50 (1994) 2343.

- [14] C.L. Tang, H. Statz and G. deMars, *J. Appl. Phys.* 34 (1963) 2289.
- [15] P. Mandel, P. Georgiou, K. Otsuka and D. Pieroux, *Optics Comm.* 100 (1993) 341.
- [16] D.E. McCumber, *Phys. Rev.* 141 (1966) 306.
- [17] K. Otsuka, M. Georgiou and P. Mandel, *Jpn. J. Appl. Phys.* 31 (1992) L1250.
- [18] K. Otsuka, P. Mandel, M. Georgiou and C. Etrich, *Jpn. J. Appl. Phys.* 32 (1993) L318.
- [19] P. Hadley and M.R. Beasley, *Appl. Phys. Lett.* 50 (1987) 621.
- [20] K. Wiesenfeld, C. Bracicowski, G. James and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 1749.
- [21] K. Otsuka, *Jpn. J. Appl. Phys.* 32 (1993) L1414.



## Annexe B

# Oscillations forcées dans un système linéaire à deux degrés de liberté

Considérons les oscillations forcées dans un système contenant deux circuits oscillants couplés par inductance, l'un d'eux comportant une f.e.m. extérieure  $E(t)$  (figure B.1). Ecrivons les équations d'oscillations pour ces circuits en négligeant l'amortissement :

$$\frac{1}{C_1} \int i_1 dt + L_1 \frac{di_1}{dt} = E + M \frac{di_2}{dt} \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt + L_2 \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \quad (\text{B.1b})$$

où  $i_1$  et  $i_2$  sont des courants dans les circuits  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$  les inductances et capacités des circuits. Supposons que la force extérieure appliquée au système s'exprime sous la forme :

$$E(t) = E_0 \cos(pt) \quad (\text{B.2})$$

Dans ce cas, les équations d'oscillations deviennent :

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \nu_1^2 \cdot i_1 - \alpha_1 \frac{d^2 i_2}{dt^2} = -\frac{E_0 p}{L_1} \sin(pt) \quad (\text{B.3a})$$

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \nu_2^2 \cdot i_2 - \alpha_2 \frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0 \quad (\text{B.3b})$$

où  $\nu_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ ,  $\nu_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$ ,  $\alpha_1 = \frac{M}{L_1}$  et  $\alpha_2 = \frac{M}{L_2}$ .

Lorsque le système est libre de forçage, nous pouvons définir les pulsations

propres au système. Considérons le système B.3 sans second membre et cherchons des solutions du type :

$$i_1 = I_1 \sin(\omega t) \quad (\text{B.4a})$$

$$i_2 = I_2 \sin(\omega t) \quad (\text{B.4b})$$

En réinjectant dans B.3 sans second membre, nous obtenons :

$$(\nu_1^2 - \omega^2) I_1 + \alpha_1 \omega^2 I_2 = 0 \quad (\text{B.5a})$$

$$(\nu_2^2 - \omega^2) I_2 + \alpha_2 \omega^2 I_1 = 0 \quad (\text{B.5b})$$

Ce dernier système admet une solution non triviale si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \nu_1^2 - \omega^2 & \alpha_1 \omega^2 \\ \alpha_2 \omega^2 & \nu_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.6})$$

soit :

$$(1 - \alpha_1 \alpha_2) \omega^4 - (\nu_1^2 + \nu_2^2) \omega^2 + \nu_1^2 \nu_2^2 = 0 \quad (\text{B.7})$$

Cette équation bicarrée fournit deux pulsations possibles :

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2(1 - \alpha_1 \alpha_2)} \left[ (\nu_1^2 + \nu_2^2) - \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 \nu_1^2 \nu_2^2} \right] \quad (\text{B.8a})$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2(1 - \alpha_1 \alpha_2)} \left[ (\nu_1^2 + \nu_2^2) + \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 \nu_1^2 \nu_2^2} \right] \quad (\text{B.8b})$$

Les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont appelées pulsations propres ou normales du système. Les oscillations dans le système forcé se composent des oscillations propres aux pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et des oscillations forcées à la pulsation de forçage extérieure  $p$ . Cherchons désormais une solution de B.3 de la forme :

$$i_1 = I_1 \sin(pt) \quad (\text{B.9a})$$

$$i_2 = I_2 \sin(pt) \quad (\text{B.9b})$$

En substituant ces solutions dans le système initial, nous déduisons :

$$(\nu_1^2 - p^2) I_1 + \alpha_1 p^2 I_2 = -\frac{E_0 p}{L_1} \quad (\text{B.10a})$$

$$(\nu_2^2 - p^2) I_2 + \alpha_2 p^2 I_1 = 0 \quad (\text{B.10b})$$

Par une méthode de substitution, nous déterminons :

$$I_1 = -\frac{E_0 p \cdot (\nu_2^2 - p^2)}{L_1 [(\nu_1^2 - p^2)(\nu_2^2 - p^2) - \alpha_1 \alpha_2 p^4]} \quad (\text{B.11a})$$

(B.11b)

$$I_2 = -\frac{\alpha_2 E_0 p^3}{L_1 [(\nu_1^2 - p^2)(\nu_2^2 - p^2) - \alpha_1 \alpha_2 p^4]} \quad (\text{B.11c})$$

La figure B.2 donne les variations de  $I_1$  et  $I_2$  en fonction de la force excitatrice  $p$ . Aux points  $p = \omega_1$  et  $p = \omega_2$ , les amplitudes deviennent infiniment grandes.

Pour un système à deux degré de liberté la résonance se produit aux deux pulsations propres du système.

Lorsque  $p < \nu_2$ ,  $i_1$  et  $i_2$  effectuent des oscillations en opposition de phase et lorsque  $p > \nu_2$ , les oscillations sont en phase. Au point  $p = \nu_2$ , l'amortissement des oscillations se produit dans le circuit où agit la force extérieure ayant pour conséquence l'annulation de  $I_1$ .

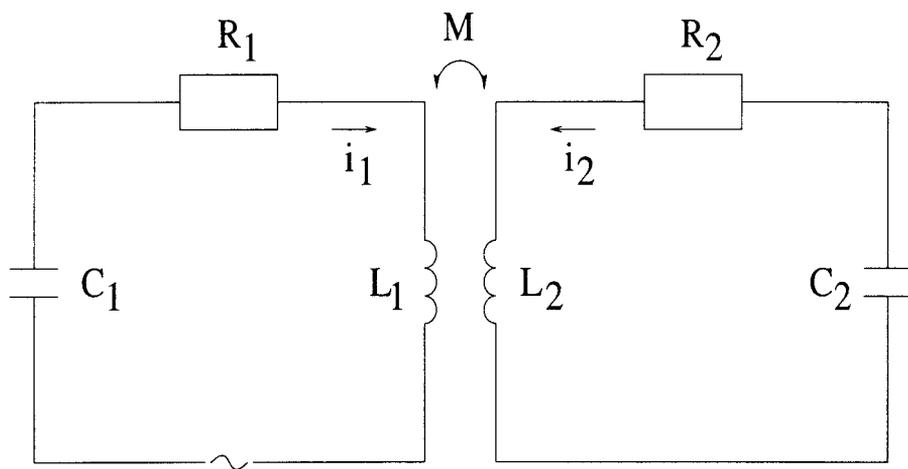


FIG. B.1 – Schéma de circuits RLC couplés par inductance et soumis à une action extérieure.

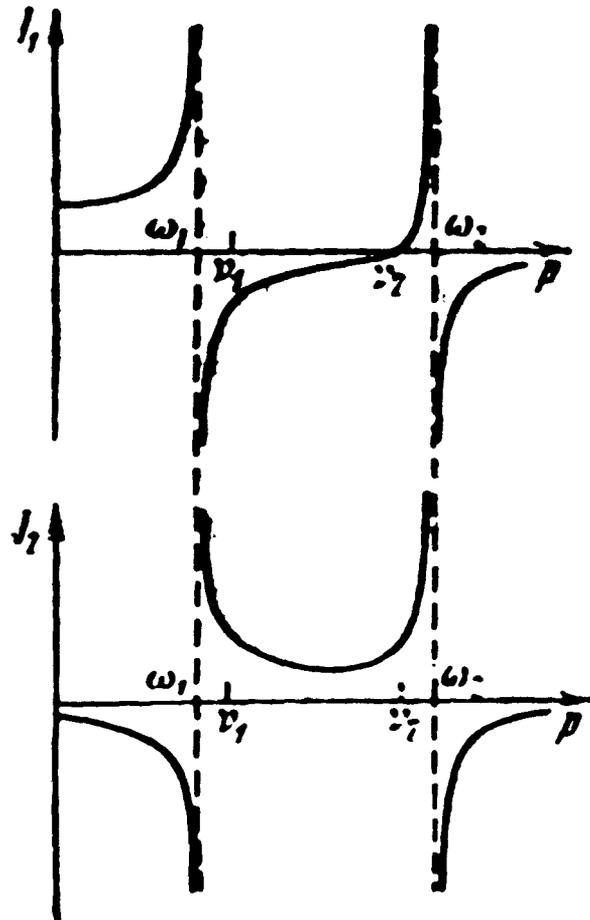


FIG. B.2 – Variation de  $I_1$  et  $I_2$  pour un système conservatif à deux degrés de liberté en fonction de la pulsation de la force extérieure



## Annexe C

# Méthode d'approximation harmonique utilisée pour l'étude des oscillations forcées dans les systèmes dissipatifs faiblement non-linéaires

Nous considérons un système à un degré de liberté, faiblement linéaire, soumis à un forçage harmonique, dans lequel les oscillations forcées, excitées, sont proches des solutions harmoniques. Nous nous intéressons également à de faibles amortissements (petites dissipations) de façon à ce que les propriétés oscillantes soient nettement exprimées et non que le système soit apériodique.

Considérons un système oscillant décrit par :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + P \cos(pt) \quad (\text{C.1})$$

Si les non-linéarités et la dissipation sont petites, la fonction  $F(x, dx/dt)$  est également petite comparée aux termes du premier membre de l'équation. Ceci nous permet de chercher des solutions approchées sous la forme :

$$x = a \cos(pt) + b \sin(pt) + a_0 \quad (\text{C.2})$$

Les propriétés non-linéaires du terme dissipatif sont susceptibles de conduire à l'asymétrie des oscillations forcées, qui se traduit par la présence d'un terme constant dans la solution. Cette remarque justifie le terme  $a_0$  dans l'expres-

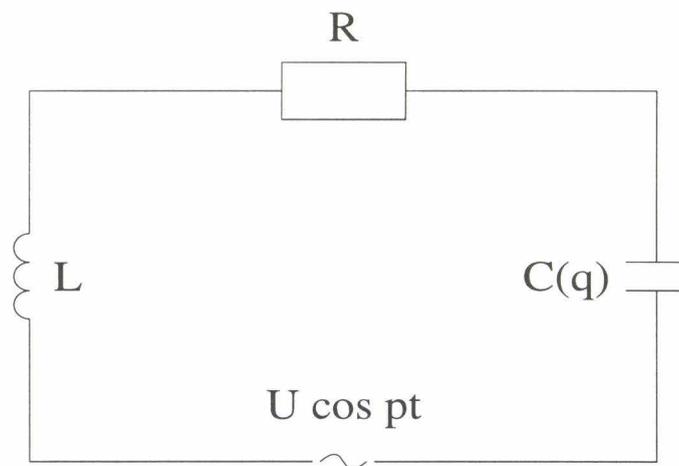


FIG. C.1 – Schéma d'un circuit  $RLC$  avec un condensateur  $C(q)$  non-linéaire soumis à une sollicitation excitatrice harmonique.

sion C.2. Il suit, pour les dérivées aux deux premiers ordres, les expressions :

$$\frac{dx}{dt} = -ap \sin(pt) + bp \cos(pt) \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ap^2 \cos(pt) - bp^2 \sin(pt) \quad (\text{C.4})$$

D'autre part, la fonction non-linéaire  $F(x, dx/dt)$  admet une décomposition en série de Fourier qui s'écrit :

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(pt) + \beta_1 \sin(pt) + \dots \quad (\text{C.5})$$

où les coefficients de cette décomposition sont donnés par :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) d\tau \quad (\text{C.6})$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \cos \tau d\tau \quad (\text{C.7})$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \sin \tau d\tau \quad (\text{C.8})$$

où  $\tau = pt$ .

En substituant C.2, C.4 et C.5 dans l'équation initiale C.1 et en comparant les coefficients de  $\cos(pt)$  et  $\sin(pt)$ , on obtient un système d'équations juste qui se présente sous la forme :

$$\omega_0^2 a_0 = \alpha_0 \quad (\text{C.9})$$

$$a(\omega_0^2 - p^2) = \alpha_1 + P \quad (\text{C.10})$$

$$b(\omega_0^2 - p^2) = \beta_1 \quad (\text{C.11})$$

Ce système doit permettre de trouver les valeurs  $a_0$ ,  $a$ ,  $b$  en fonction de  $P$  et les relations entre  $\omega_0$  et  $p$  pour une forme donnée de la fonction  $F(x, dx/dt)$ .

L'équation C.1 décrit par exemple un circuit RLC à capacité non-linéaire illustré par la figure C.1. L'équation décrivant ce système s'écrit :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L} u_c(q) = -\frac{R}{L} + \frac{U}{L} \cos(pt) \quad (\text{C.12})$$

Une bonne approximation pour un condensateur ferro-électrique est donnée par :

$$U_c(q) = \frac{1}{C_0} (q + \gamma_0 q^3) \quad (\text{C.13})$$

En introduisant la variable adimensionnée  $x = q/q_0$ , on obtient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 \gamma x^3 - 2\delta \frac{dx}{dt} + P \cos(pt) \quad (\text{C.14})$$

où  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}$ ,  $\gamma = \gamma_0 q_0^2$ ,  $2\delta = \frac{R}{L}$  et  $P = \frac{U}{Lq_0}$ .

Par identification avec C.1, nous avons :

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -\omega_0^2 \gamma x^3 - 2\delta \frac{dx}{dt} \quad (\text{C.15})$$

Les coefficients à l'ordre 0 et 1 du développement en série de Fourier de  $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  sont :

$$\alpha_0 = 0 \quad (\text{C.16})$$

$$\alpha_1 = -2\delta pb - \frac{3}{4}\omega_0^2 \gamma (a^2 + b^2) a \quad (\text{C.17})$$

$$\beta_1 = 2\delta pa - \frac{3}{4}\omega_0^2 \gamma (a^2 + b^2) b \quad (\text{C.18})$$

Le système d'équations C.11 devient :

$$\left(\omega_0^2 - p^2 + \frac{3}{4}\omega_0^2 \gamma A^2\right) a + 2\delta pb = P \quad (\text{C.19a})$$

$$\left(\omega_0^2 - p^2 + \frac{3}{4}\omega_0^2 \gamma A^2\right) b - 2\delta pa = 0 \quad (\text{C.19b})$$

où  $A^2 = a^2 + b^2$ .

En élevant au carré et en additionnant membre à membre les deux dernières équations, il vient :

$$\left(\omega_0^2 - p^2 + \frac{3}{4}\omega_0^2 \gamma A^2\right)^2 A^2 + 4\delta^2 p^2 A^2 - P^2 = 0 \quad (\text{C.20})$$

soit encore :

$$(\omega^2 - p^2) A^2 + 4\delta^2 p^2 A^2 - P^2 = 0 \quad (\text{C.21})$$

où  $\omega^2 = \omega_0^2 (1 + 3/4\gamma A^2)$  est le carré de la pulsation des oscillations libres du même système non-linéaire à  $\delta = 0$ .

La dépendance obtenue entre  $p^2$  et  $A$  est représentée graphiquement sous la forme de courbes de résonance. Les figures C.2 et C.3 indiquent une telle

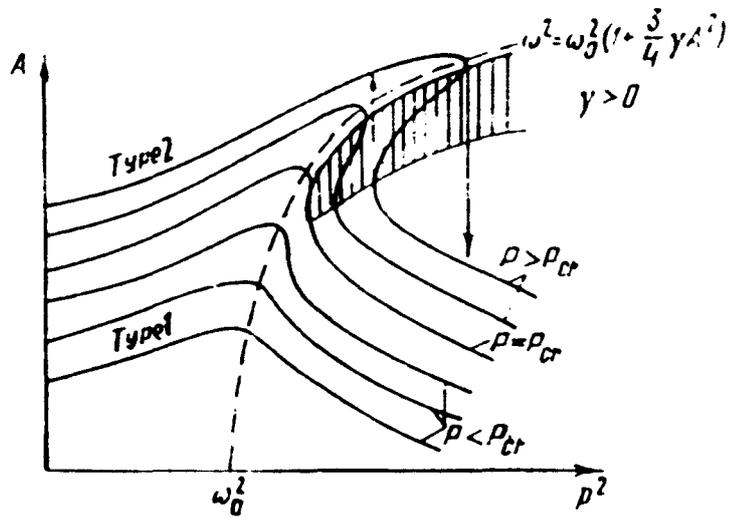


FIG. C.2 – Famille de courbes de résonance pour un circuit non linéaire à non-linéarité dure et à amortissement constant

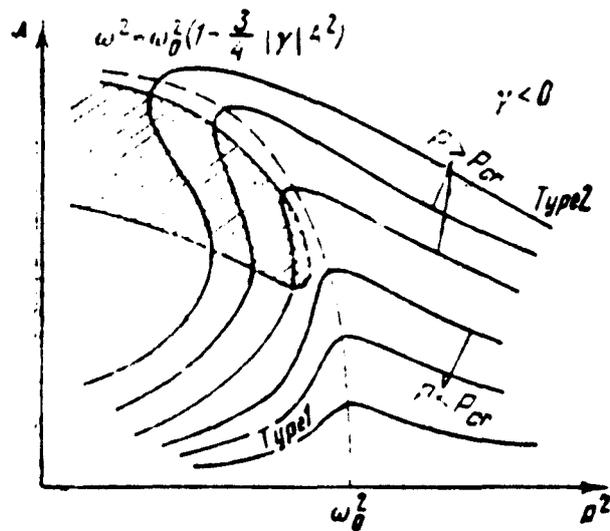


FIG. C.3 – Famille de courbes de résonance pour un circuit non linéaire à non-linéarité douce et à amortissement constant

famille pour une valeur fixée de  $\delta$  et pour différentes amplitudes de la force d'excitation  $P$ .

On peut alors distinguer deux types de comportement suivant que  $P$  excède ou non une valeur critique  $P_{crit}$ .

- Si  $P < P_{crit}$  : les courbes  $A(p^2)$  sont des applications. Elles sont toutes disposées en-dessous de la courbe  $P = P_{crit}$  et représentent les courbes de résonance quelque peu déformées pour un circuit linéaire ordinaire amorti.

- Si  $P > P_{crit}$  : les courbes de résonance admettent des portions à tangente verticale, et dans un domaine déterminé des valeurs de  $p^2$ , l'équation C.20 admet plusieurs solutions.

Il est à noter, de plus, que l'inclinaison des courbes de résonance dépend du signe de  $\gamma$  : elles sont inclinées vers les basses fréquences si  $\gamma > 0$  et vers les hautes si  $\gamma < 0$ .

Enfin, la méthode d'approximation sinusoïdale ne permet pas de déterminer la stabilité des solutions trouvées. Cependant, des études complémentaires permettraient de prouver que dans la région de paramètre  $p^2$ , où la courbe présente un « S », la branche intermédiaire est instable et le comportement du système dans cette région est dit bistable.

## Annexe D

# Analyse perturbative des équations « xy » du laser monomode

Nous proposons de résoudre les équations suivantes en utilisant une méthode de perturbation à échelle multiple [114, 116] :

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + \delta \cos f\tau - \epsilon x (1 + (A - 1)(1 + y)) \quad (\text{D.1a})$$

$$\frac{dy}{d\tau} = x(1 + y) \quad (\text{D.1b})$$

pour lequel les perturbations sont produites par de petites valeurs de  $\delta$  et  $\epsilon$ . Nous posons les égalités suivantes :

$$f = f_0 + C\eta\tau \quad (C = \pm 1) \quad (\text{D.2})$$

$$f_0 = 1 + \delta^{\frac{2}{3}}a \quad (\text{D.3})$$

$$\eta = \delta^{\frac{4}{3}}a \quad (\text{D.4})$$

$$\epsilon = \delta^{\frac{2}{3}}b \quad (\text{D.5})$$

Nous voulons déterminer des solutions périodiques de petites amplitudes. A cette fin, nous recherchons une solution de la forme :

$$x(T, s, \tau) = \delta^{\frac{1}{3}}x_1(T, s) + \delta^{\frac{2}{3}}x_2(T, s) + \dots \quad (\text{D.6a})$$

$$y(T, s, \tau) = \delta^{\frac{1}{3}}y_1(T, s) + \delta^{\frac{2}{3}}y_2(T, s) + \dots \quad (\text{D.6b})$$

Ces solutions dépendent de deux variables de temps indépendantes : le temps rapide du forçage périodique  $T = f\tau$  et le temps lent donné par  $s = \delta^{\frac{2}{3}}\tau$ .

En utilisant les nouvelles échelles de temps dans le système (D.1b), le système devient :

$$\left(\frac{df}{d\tau}\tau + f\right) x_T + \delta^{\frac{2}{3}} x_s = -y + \delta \cos T - \epsilon x (1 + (A - 1)(1 + y)) \quad (\text{D.7a})$$

$$\left(\frac{df}{d\tau}\tau + f\right) y_T + \delta^{\frac{2}{3}} x_s = x(1 + y) \quad (\text{D.7b})$$

où  $x_T$  et  $x_s$  (resp.  $y_T$  et  $y_s$ ) représentent les dérivées de  $x$  (resp.  $y$ ) par rapport à  $T$  et  $s$ . Ces dérivées se développent à leur tour en puissance de  $\delta^{\frac{1}{3}}$  de la façon suivante :

$$x_T(T, s, \tau) = \delta^{\frac{1}{3}} x_{1T}(T, s) + \delta^{\frac{2}{3}} x_{2T}(T, s) + \dots \quad (\text{D.8a})$$

$$x_s(T, s, \tau) = \delta^{\frac{1}{3}} x_{1s}(T, s) + \delta^{\frac{2}{3}} x_{2s}(T, s) + \dots \quad (\text{D.8b})$$

Il en va de même pour  $y_T$  et  $y_s$ .

En introduisant dans le système (D.7b) les développements de  $x$ ,  $y$ ,  $x_T$ ,  $x_s$ ,  $y_T$ ,  $y_s$  et en égalant à 0 les termes de même puissance en  $\delta$ , nous obtenons une série de problèmes linéaires pour les coefficients  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$  ...

\* Termes en  $0\left(\delta^{\frac{1}{3}}\right)$  :

$$x_{1T} = -y_1 \quad (\text{D.9a})$$

$$y_{1T} = x_1 \quad (\text{D.9b})$$

La solution peut s'exprimer sous la forme :

$$x_1 = \alpha(s) e^{iT} + C.C. \quad (\text{D.10a})$$

$$y_1 = -i\alpha(s) e^{iT} + C.C. \quad (\text{D.10b})$$

où  $\alpha(s)$  est indéterminé et  $C.C.$  signifie le complexe conjugué. Puisque  $\alpha(s)$  est inconnu, nous résolvons le problème à l'ordre suivant :

\* Termes en  $0\left(\delta^{\frac{2}{3}}\right)$  :

$$x_{2T} = -y_2 \quad (\text{D.11a})$$

$$y_{2T} = x_2 + x_1 y_1 \quad (\text{D.11b})$$

et :

$$x_1 y_1 = -i\alpha^2(s) e^{2iT} + C.C. \quad (\text{D.12})$$

La solution d'un tel système s'écrit :

$$x_2 = \beta(s) e^{iT} + p_2(s) e^{2iT} + C.C. \quad (\text{D.13a})$$

$$y_2 = -i\beta(s) e^{iT} + q_2(s) e^{2iT} + C.C. \quad (\text{D.13b})$$

où  $\beta(s)$  est une nouvelle amplitude indéterminée.

En réinjectant dans le système (D.11b), on trouve les conditions vérifiées par  $p_2(s)$  et  $q_2(s)$ , soit :

$$p_2(s) = -\frac{i}{3}\alpha^2(s) \quad (\text{D.14})$$

$$q_2(s) = -\frac{2}{3}\alpha^2(s) \quad (\text{D.15})$$

L'amplitude  $\alpha(s)$  du mode critique est toujours indéterminée. Nous devons pousser la résolution à l'ordre suivant.

Termes en  $0(\delta)$  :

Le système obtenu peut s'écrire :

$$x_{3T} + y_3 = \cos T - Abx_1 - x_{1T}(a + 2Cas) - x_{1s} \quad (\text{D.16})$$

$$y_{3T} - x_3 = x_2y_1 + x_1y_2 - y_{1T}(a + 2Cas) - y_{1s} \quad (\text{D.17})$$

Il est à noter que :

(1) les termes résonants de  $(x_1y_2 + x_2y_1)$  en  $e^{iT}$  sont :

$$\alpha^*\alpha^2\left(-\frac{2}{3}\right) + i\alpha^*\alpha^2\left(-\frac{i}{3}\right) = -\frac{1}{3}\alpha^*\alpha^2 \quad (\text{D.18})$$

où  $\alpha^*$  est le complexe conjugué de  $\alpha$ .

(2)

$$\cos T = \frac{1}{2}e^{iT} + C.C. \quad (\text{D.19})$$

Le problème linéaire homogène défini par :

$$x_{3T} + y_3 = 0 \quad (\text{D.20a})$$

$$y_{3T} - x_3 = 0 \quad (\text{D.20b})$$

admet de solutions périodiques bornées du type de celles trouvées dans le problème à l'ordre  $\delta^{\frac{1}{3}}$ . Les membres de droite du système (D.16) possèdent

des termes qui sont proportionnels aux solutions du problème homogène. De façon à éliminer les termes séculaires qui peuvent apparaître, le système inhomogène doit satisfaire à la *condition de stabilité*. Cette condition implique que le produit interne du membre de droite du système (D.16) avec la solution du problème linéaire adjoint (c'est-à-dire  $(x, y) = (1, -i) \cdot \exp(is)$ ) soit égal à 0 :

$$(1, i) \cdot \left( \frac{1}{2} - Ab\alpha(s) - i\alpha(s)(a + 2Cas) - \alpha_s(s), \right. \\ \left. - \frac{1}{3}\alpha^2(s)\alpha^*(s) - \alpha(s)(a + 2Cas) + i\alpha_s(s) \right) = 0 \quad (\text{D.21})$$

Ceci conduit à une équation différentielle ordinaire pour l'amplitude  $\alpha(s)$  donnée par :

$$\alpha_s(s) = \frac{1}{4} - \frac{bA}{2}\alpha(s) - i\alpha(s)(a + 2Cas) - \frac{i}{6}\alpha^2(s)\alpha^*(s) \quad (\text{D.22})$$

où  $\alpha_s(s) = d\alpha(s)/ds$ .

Pour analyser les solutions de (D.22), il est plus approprié de définir :

$$\alpha(s) = r(s) e^{i\theta(s)} \quad (\text{D.23})$$

et de considérer les équations d'évolution de  $r$  et  $\theta$ . On obtient alors :

$$\frac{d}{ds}r = \frac{1}{4} \cos \theta - \frac{bAr}{2} \quad (\text{D.24a})$$

$$r \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{4} \sin \theta - (a + 2Cas)r - \frac{1}{6}r^3 \quad (\text{D.24b})$$

Il est plus utile d'analyser les équations d'amplitude à l'aide des paramètres originaux  $A, \delta, \epsilon$  et  $f$ . Pour ce, nous reprenons la variable de temps originelle  $\tau = \delta^{-\frac{2}{3}}s$  et introduisons l'amplitude  $R = \delta^{\frac{1}{3}}r$ . Nous obtenons les équations pour  $R(\tau)$  et  $\theta(\tau)$  :

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{\delta}{4} \cos \theta - \frac{\epsilon A}{2}R \quad (\text{D.25a})$$

$$R \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\delta}{4} \sin \theta - (f - 1)R - \frac{1}{6}R^3 \quad (\text{D.25b})$$

Ce système est équivalent au système (2.15) de la section 2.3 dans le cas statique ( $df/d\tau = 0$ ) et en supposant  $R \neq 0$ .

# Bibliographie

- [1] Y. I. Khanin, in *Principles of laser dynamics*, edited by Y. I. Khanin (Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1995).
- [2] J. R. tredicce, N. B. Abraham, G. P. Puccioni, and F. T. Arecchi, *Opt. Com.* **55**, 131 (1985).
- [3] R. J. Collins *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 303 (1960).
- [4] N. B. Abraham, P. Mandel, and L. M. Narducci, in *Progress in Optics*, edited by E. Wolf (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991), Vol. 25, Chap. Dynamical instabilities and pulsation in lasers, (pour une revue des études des années 60 sur la dynamique des lasers).
- [5] H. Statz and G. deMars, in *Quantum Electronics*, edited by C. H. Townes (Columbia University Press, New York, 1960), Chap. Transient and oscillation pulses in masers, pp. 530–537.
- [6] R. Dunsmuir, *J. Electronics Control* **10**, 453 (1961).
- [7] R. W. Hellwarth, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 9 (1961).
- [8] R. W. Hellwarth, in *Advances in Quantum Electronics*, edited by J. R. Singer (Columbia University Press, New-York, 1961).
- [9] T. H. Maiman, *Phys. Rev.* **123**, 1145 (1961).
- [10] K. Gürs, *Z. Naturforsch.* **17a**, 990 (1962).
- [11] L. J. Prescott and A. van der Ziel, *Phys. Lett.* **12**, 317 (1964).
- [12] J. A. Armstrong and A. W. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 68 (1965).
- [13] A. W. Smith and J. A. Armstrong, *Phys. Lett.* **16**, 38 (1965).
- [14] C. Freed and H. A. Haus, *Appl. Phys. Lett.* **6**, 85 (1965).

- [15] J. A. Armstrong and A. W. Smith, Phys. Rev. **140**, 155 (1965).
- [16] A. McCumber, Phys. Rev. A **141**, 622 (1966).
- [17] J. E. Geusic, H. M. Marcos, and L. G. van Uitert, in *Physics of Quantum Electronics*, edited by P. L. Kelley, B. Lax, and P. E. Tannenwald (McGraw Hill, Inc., New York, 1966), Chap. A study of the YAIG:Nd oscillator, pp. 725–734.
- [18] A. J. D. Maria, J. Appl. Phys. **34**, 2984 (1963).
- [19] F. J. McClung and R. W. Hellwarth, Proceedings IEEE **46** (1963).
- [20] A. Yariv, J. Appl. Phys. **36**, 388 (1965).
- [21] E. Hofelich-Abate and F. Hofelich, Z. Phys. **290**, 13 (1968).
- [22] T. Kimura and K. Otsuka, J. Appl. Phys. **40**, 5399 (1969).
- [23] T. Kimura and K. Otsuka, IEEE J. Quantum Electron. **QE-6**, 764 (1970).
- [24] H. G. Danielmeyer, J. Appl. Phys. **41**, 4014 (1970).
- [25] H. G. Danielmeyer and F. T. Ostermayer, J. Appl. Phys. **43**, 2911 (1972).
- [26] C. L. Tang, H. Statz, and G. deMars, J. Appl. Phys. **34**, 2289 (1963).
- [27] D. Röss, Z. Naturforsch. **19a**, 1169 (1964).
- [28] R. Polloni and O. Svelto, IEEE J. Quant. Electron. **QE-4**, 481 (1968).
- [29] H. Statz and C. L. Tang, J. Appl. Phys. **35**, 1377 (1964).
- [30] B. L. Livshitz and V. L. Tsikunov, Sov. Phys. JETP **22**, 1260 (1966).
- [31] E. S. Kovalenko and A. V. Pugovkin, Radiophys. and Quant. Electron. **131** (1968).
- [32] Y. D. Golyaev and S. V. Lantratov, Sov. J. Quant. Electron. **9**, 1390 (1979).
- [33] A. S. Meller, P. A. Khandokhin, and Y. I. Khanin, Sov. J. Quant. Electron. **16**, 1502 (1986).

- [34] O. N. Evdokimova and L. N. Kaptsov, *Sov. J. Quant. Electron.* **19**, 1001 (1989).
- [35] K. Otsuka, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 329 (1990).
- [36] K. Otsuka, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1090 (1991).
- [37] K. Otsuka and J.-L. Chern, *Phys. Rev. A* **45**, 8288 (1992).
- [38] K. Otsuka *et al.*, *Phys. Rev. A* **46**, 1692 (1992).
- [39] K. Otsuka, M. Georgiou, and P. Mandel, *Jpn J. Appl. Phys.* **31**, L1250 (1992).
- [40] K. Otsuka, P. Mandel, M. Georgiou, and C. Etrich, *Jpn J. Appl. Phys.* **32**, L318 (1993).
- [41] P. Mandel, M. Georgiou, K. Otsuka, and D. Pieroux, *Opt. Com.* **100**, 341 (1993).
- [42] A. E. Siegman, in *Lasers*, 2<sup>e</sup> ed. (University Science Books, Mill Valley, California, 1986), Chap. Laser spiking and mode competition, pp. 955–1002.
- [43] A. Yariv, *Quantum Electronics*, 3<sup>e</sup> ed. (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989).
- [44] P. A. Khandokhin *et al.*, *Opt. Com.* **123**, 372 (1996).
- [45] O. N. Evdokimova and L. N. Kaptsov, *Sov. J. Quant. Electron.* **21**, 38 (1991).
- [46] D. Pieroux and P. Mandel, *Opt. Com.* **107**, 245 (1994).
- [47] K. Otsuka, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2701 (1994).
- [48] V. V. Azarova *et al.*, *Sov. J. Quant. Electron.* **9**, 1378 (1979).
- [49] D. C. Hanna, R. G. Smart, A. I. Fergusson, and M. W. Phillips, *Opt. Com.* **68**, 128 (1988).
- [50] Yamada and Graham, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1322 (1980).
- [51] Scholz, Yamada, Brand, and Graham, *Phys. Lett. A* **82**, 321 (1981).
- [52] M. Mayr, Risken, and Vollmer, *Opt. Com.* **36**, 480 (1981).

- [53] F. T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni, and J. Tredicce, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1217 (1982).
- [54] D. I. Ivanov, Y. I. Khanin, I. I. Matorin, and A. S. Pikovsky, *Phys. Lett.* **89A**, 229 (1982).
- [55] N. I. Poluskin, P. A. Khandokhin, and Y. I. Khanin, *Sov. J. Quantum Electron.* **13**, 950 (1983).
- [56] P. A. Khandokhin and Y. I. Khanin, *Sov. J. Quant. Electron.* **14**, 1004 (1984).
- [57] K. Kubodera and K. Otsuka, *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-17**, 1139 (1981).
- [58] C. O. Weiss and King, *Opt. Com.* **44**, 59 (1982).
- [59] W. Klische, H. R. Telle, and C. O. Weiss, *Opt. Lett.* **9**, 561 (1984).
- [60] D. Dangoisse, P. Glorieux, and D. Hennequin, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2657 (1986).
- [61] D. Dangoisse, P. Glorieux, and D. Hennequin, *Phys. Rev. A* **36**, 4775 (1987).
- [62] T. Midavaine, D. Dangoisse, and P. Glorieux, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1989 (1985).
- [63] Y. I. Khanin and I. V. Koryukin, *Transverse Pattern in Nonlinear Optics*, *Proc. SPIE* **1840**, 148 (1991).
- [64] L. G. Bezaeva, L. N. Kaptsov, and I. Z. Sharipov, *Sov. J. Quant. Electron.* **15**, 1152 (1985).
- [65] P. A. Khandokhin and Y. I. Khanin, *Sov. J. Quant. Electron.* **18**, 1248 (1988).
- [66] V. A. Parfenov, P. A. Khandokhin, and Y. I. Khanin, *Sov. J. Quant. Electron.* **18**, 1243 (1988).
- [67] O. N. Evdokimova and L. N. Kaptsov, *Sov. J. Quant. Electron.* **20**, 824 (1990).
- [68] N. M. Galaktionova *et al.*, *Sov. Tech. Phys. Lett.* **4**, 403 (1978).

- [69] O. N. Kapralova and L. N. Kaptsov, *Sov. J. Quant. Electron.* **14**, 1127 (1984).
- [70] K. Wiesenfeld, C. Bracikowski, G. James, and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1749 (1990).
- [71] S. R. Chinn, H. Y.-P. Hong, and J. W. Pierce, *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-12**, 189 (1976).
- [72] T. Y. Fan and R. L. Byer, *IEEE J. Quant. Electron.* **QE-24**, 895 (1988).
- [73] P. Hadley and M. R. Beasley, *Appl. Phys. Lett.* **50**, 621 (1987).
- [74] S. Bielawski, D. Derozier, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **46**, 2811 (1992).
- [75] P. L. Boudec *et al.*, *Opt. Lett.* **18**, 1890 (1993).
- [76] P. Mandel and J.-Y. Wang, *Opt. Lett.* **19**, 533 (1994).
- [77] E. Lacot, F. Stoeckel, and M. Chenevier, *Phys. Rev. A* **49**, 3997 (1994).
- [78] E. A. Viktorov, D. R. Klemer, and M. A. Karim, *Opt. Com.* **113**, 441 (1995).
- [79] C. Bracikowski and R. Roy, *Phys. Rev. A* **43**, 6455 (1991).
- [80] K. Y. Tsang and K. Wiesenfeld, *Appl. Phys. Lett.* **56**, 495 (1990).
- [81] K. Wiesenfeld and P. Hadley, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1335 (1989).
- [82] S. Bielawski, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1993.
- [83] N. B. Abraham, L. L. Everett, C. Iwata, and M. B. Janicki, *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.* **2095**, 16 (1993).
- [84] Y. D. Golyaev and S. V. Lantratov, *Sov. J. Quant. Electron.* **4**, 1224 (1975).
- [85] S. Machida and Y. Yamamoto, *Opt. Com.* **57**, 290 (1986).
- [86] F. T. Arecchi, G. Gadamski, and R. Meucci, *Phys. Rev. A* **34**, 1617 (1986).
- [87] F. T. Arecchi, R. Meucci, and G. Gadamski, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2205 (1987).

- [88] F. T. Arecchi *et al.*, Europhys. Lett. **6**, 677 (1988).
- [89] F. A. Hopf, B. L. Kaplan, H. M. Gibbs, and R. L. Shoemaker, Phys. Rev. A **25**, 2172 (1982).
- [90] H. Nakatsuka, S. Asaka, H. Itoh, and K. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **50**, 109 (1983).
- [91] P. Mandel and J. Y. Wang, Phys. Rev. Lett. **75**, 1923 (1995).
- [92] G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz* (F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918).
- [93] J. J. Stoker, *Non linear vibrations in mechanical and electrical systems* (Interscience Publishers, Inc., New York, 1950).
- [94] F. C. Moon, *Chaotic vibration* (Wiley, Chichester, 1987).
- [95] J. Guckenheimer and P. Holmes, in *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields* (Springer-Verlag, Inc., New-York, 1983), Chap. An introduction to chaos: four examples, pp. 66–116.
- [96] H. M. Gibbs, S. L. McCall, and T. N. C. Venkatesan, Phys. Rev. Lett. **36**, 1135 (1976).
- [97] P. W. Smith and E. H. Turner, Appl. Phys. Lett. **30**, 280 (1977).
- [98] A. Gozzini and F. Maccarone, Lett. Nuovo Cimento **1D**, 489 (1982).
- [99] D. E. Grant and H. J. Kimble, Optics Com. **44**, 415 (1983).
- [100] A. T. Rosenberger, L. A. Orozco, and H. J. Kimble, Phys. Rev. A **28**, 2569 (1983).
- [101] K. Bohnert, H. Kalt, and C. Klingshirn, Appl. Phys. Lett. (1983).
- [102] P. Glorieux and D. Dangoisse, IEEE J. Quant. Electron. **QE-21**, 1486 (1985).
- [103] I. I. Matorin, A. S. Pikovskii, and Y. I. Khanin, Sov. J. Quant. Electron. **14**, 1401 (1984).
- [104] W. F. Sharfin and M. Dagenais, IEEE J. Quant. Electron. **QE-23**, 303 (1987).

- [105] M. Dagenais, Z. Pan, T. Ding, and H. Lin, in *Digital Optical Computing, Critical Reviews of optical science and technology*, edited by R. A. Athale (SPIE, Bellingham, WA, 1990), p. 126.
- [106] C. Boden, F. Mitschke, and P. Mandel, *Opt. Com.* **76**, 178 (1990).
- [107] J. Y. Bigot, A. Daunois, and P. Mandel, *Phys. Lett. A* **123**, 123 (1987).
- [108] B. Segard, J. Zemmouri, and B. Macke, *Opt. Com.* **60**, 323 (1986).
- [109] B. Segard, J. Zemmouri, and B. Macke, *Opt. Com.* **63**, 339 (1987).
- [110] N. Fettouhi, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1995.
- [111] F. Mitschke, C. Boden, W. Lange, and P. Mandel, *Opt. Com.* **71**, 385 (1989).
- [112] P. Jung, G. Gray, and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1873 (1990).
- [113] A. Hohl *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2220 (1995).
- [114] T. Erneux, P. Mandel, and B. Baer, *Phys. Rev. A* **35**, 1165 (1987).
- [115] I. B. Schwartz and T. Erneux, *SIAM J. Appl. Math.* **54**, 1083 (1994).
- [116] T. Erneux, S. Bielawski, D. Derozier, and P. Glorieux, *Quantum Semi-class. Opt.* **7**, 951 (1995).
- [117] S. M. Baer and T. Erneux, *SIAM J. Appl. Math.* **46**, 721 (1986).
- [118] S. M. Baer and T. Erneux, *SIAM J. Appl. Math.* (1986).
- [119] I. B. Schwartz and H. L. Smith, *J. Math. Biology* **18**, 233 (1983).
- [120] A. H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques* (John Wiley & Sons, Inc., New-York, 1993).
- [121] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations* (Wiley, New-York, 1979).
- [122] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990).
- [123] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, and M. L. Spano, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3211 (1990).
- [124] R. Roy *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1259 (1992).

- [125] Z. Gills, C. Iwata, and R. Roy, Phys. Rev. Lett. **69**, 3169 (1992).
- [126] E. Brun, Phys. Rev. E **47**, 267 (1993).
- [127] S. Bielański, D. Derozier, and P. Glorieux, Phys. Rev. A **47**, R2492 (1993).
- [128] E. R. Hunt, Phys. Rev. Lett. **67**, 1953 (1991).
- [129] J. Singer, Y. Z. Wang, and H. H. Bau, Phys. Rev. Lett. **66**, 1123 (1991).
- [130] B. Peng, V. Petrov, and K. Showalter, J. Phys. Chemistry **95**, 4957 (1991).
- [131] V. Petrov, B. Peng, and K. Showalter, J. Chem. Physics **96**, 7506 (1992).
- [132] V. Petrov, V. Gaspar, J. Mosere, and K. Showalter, Nature (London) **361**, 240 (1993).
- [133] V. petrov, M. J. Crowley, and K. Showalter, Phys. Rev. Lett. **72**, 2955 (1994).
- [134] A. Garfinkel, M. L. Spano, W. L. Ditto, and J. N. Weiss, Science **257**, 1230 (1992).
- [135] S. J. Schiff *et al.*, Nature **370**, 615 (1994).
- [136] T. C. Newell, P. M. Alsing, A. Gavrielides, and V. Kovanis, Phys. Rev. E **49**, 313 (1994).
- [137] R. W. Rollins, P. Parmananda, and P. Sherard, Phys. Rev. E **47**, R780 (1993).
- [138] V. Dressler and G. Nitsche, Phys. Rev. Lett. **68**, 1 (1992).
- [139] G. Nitsche and U. Dressler, Physica D **58**, 153 (1992).
- [140] P. Parmananda, P. Sherard, R. W. Rollins, and H. D. Dewald, Phys. Rev. E **47**, R3003 (1993).
- [141] I. Schwartz and I. Triandaf, Phys. Rev. A (1992).
- [142] I. Triandaf and I. Schwartz, Phys. Rev. E **48**, 718 (1993).
- [143] T. Carroll, I. Triandaf, I. B. Schwartz, and L. Pecora, Phys. Rev. A **46**, 6189 (1992).

- [144] Nagai and Lai, Phys. Rev. E **51**, 3942 (1995).
- [145] A. L. Goldberger, L. J. Findley, M. R. Blackburn, and A. J. Mandell, Am. Heart J. **107**, 612 (1984).
- [146] A. L. Goldberger, V. Bhargava, B. J. West, and A. J. Mandell, Physica D **19**, 282 (1986).
- [147] A. J. Mandell, Physica D **27**, 235 (1987).
- [148] C. K. Peng *et al.*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1343 (1992).
- [149] W. Yang, M. Ding, A. Mandell, and E. Ott, Phys. Rev. E **51**, 102 (1995).
- [150] V. In, S. Mohan, W. L. Ditto, and M. Spano, Phys. Rev. Lett. **74**, 4420 (1995).
- [151] P. Parmananda and M. Eiswirth, Phys. Rev. E **54**, R1036 (1996).
- [152] K. Pyragas, Phys. Lett. A **170**, 421 (1992).
- [153] K. Pyragas and A. Tamasèvičius, Phys. Lett. A **180**, 99 (1993).
- [154] E. Schöll and K. Pyragas, Europhys. Lett. **24**, 159 (1993).
- [155] S. Bielawski, D. Derozier, and P. Glorieux, Phys. Rev. E **49**, R971 (1994).
- [156] D. J. Gauthier, D. W. Sukow, H. M. Concannon, and J. E. S. Socolar, Phys. Rev. E **50**, 2343 (1994).
- [157] A. Kittel, J. Parisi, and A. Tamasèvičius, Phys. Lett. **198**, 433 (1995).
- [158] A. Namajunas, K. Pyragas, and A. Tamasèvičius, Phys. Lett. A **204**, 255 (1995).
- [159] C. Lourenco, A. Babloyatz, and A. Tamasèvičius, Neural Comput. **6**, 114 (1994).
- [160] C. Simmindinger and O. Hess, Phys. Lett. A **216**, 97 (1996).
- [161] J. E. S. Socolar, D. W. Sukow, and D. J. Gauthier, Phys. Rev. E **50**, 3245 (1994).
- [162] M. de Sousa Vieira and A. J. Lichtenberg, Phys. Rev. E **54**, 1200 (1996).

- [163] R. Lima and M. Pettini, Phys. Rev. A **41**, 726 (1990).
- [164] Y. Braiman and I. Goldhirsch, Phys. Rev. Lett. **66**, 2545 (1991).
- [165] A. Azevedo and S. M. Rezende, Phys. Rev. Lett. **66**, 1342 (1991).
- [166] L. Fronzoni and M. Giocondo, Phys. Rev. Lett. **43**, 6483 (1991).
- [167] T. Kapitaniak, I. J. Kocarev, and L. O. Chua, Int. J. Bifurc. Chaos **3**, 459 (1993).
- [168] Watanabe, Opt. Lett. (1995).
- [169] R. Chacón and J. D. Bejarano, Phys. Rev. Lett. **71**, 3103 (1993).
- [170] K. Wiesenfeld and B. McNamara, Phys. Rev. Lett. **55**, 13 (1985).
- [171] K. Wiesenfeld and B. McNamara, Phys. Rev. Lett. **33**, 629 (1986).
- [172] P. Bryant and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **33**, 2525 (1986).
- [173] S. T. Vohra, F. Bucholtz, K. P. Koo, and D. M. Dagenais, Phys. Rev. Lett. **66**, 212 (1991).
- [174] R. Corbalan *et al.*, Phys. Rev. A **51**, 663 (1995).
- [175] R. Corbalan, J. Cortit, V. N. Chizhevsky, and A. N. Pisarchik, Infrared Phys. Technol. **36**, 71 (1995).
- [176] P. Glorieux *et al.*, Opt. Com. **118**, 309 (1995).
- [177] R. Meucci, W. Gadomski, M. Ciofini, and F. T. Arrechi, Phys. Rev. E **49**, R2528 (1994).
- [178] S. T. Vohra, L. Fabiny, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **72**, 1333 (1994).
- [179] S. T. Vohra, L. Fabiny, and F. Bucholtz, Phys. Rev. Lett. **79**, 65 (1995).
- [180] J. Yang, Z. Qu, and G. Hu, Phys. Rev. E **53**, 4402 (1996).
- [181] T. Shinbrot and *et al.*, Nature **363**, 411 (1993).
- [182] H.-J. Li and J.-L. Chern, Phys. Rev. E **52**, 297 (1995).
- [183] H.-J. Li and J.-L. Chern, Phys. Rev. E **54**, 2118 (1996).

- [184] D. Hennequin, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1987.
- [185] C. Lepers, Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1993.

