

92-2000-517
50376
1997
149

Université des Sciences et Technologies de Lille

THÈSE

spécialité
Génie Electrique

Présentée par Monsieur

Benali BOUALEM

Ingénieur en électrotechnique U.S.T.Oran Algérie

Pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université des Sciences et Technologies de Lille

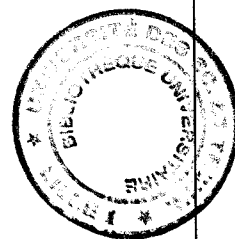
**Contribution à la modélisation
des systèmes électrotechniques
à l'aide des formulations en potentiels:
application à la machine asynchrone**

soutenue le: 2 juillet 1997
devant le jury composé de:

Monsieur J.M. BIEDINGER
Monsieur G. MEUNIER
Monsieur P. DULAR
Monsieur M. LAJOIE-MAZENC
Monsieur F. PIRIOU
Monsieur A. RAZEK

Rapporteur
Rapporteur

Directeur de thèse



- Remerciements -

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de Lille (L2EP) au sein de l'équipe "Modélisation Numériques des Systèmes Electrotechniques". Je tiens à remercier le directeur du laboratoire, Monsieur le Professeur C. Rombaut, pour son accueil et sa confiance.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur F. Piriou, qui encadré cette thèse, de m'avoir témoigné de sa confiance dès mon stage de D.E.A. J'apprécie ses qualités scientifiques et humaines. Je lui suis reconnaissant de l'aide, du soutien et des encouragements qu'il n'a cessé de m'apporter tout au long de ce travail.

J'adresse mes remerciements à:

Monsieur J.M. Biedinger, Professeur à l'université de Compiègne, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être membre du jury de thèse et pour avoir rédigé un rapport sur ce mémoire. Qu'il soit assuré de ma reconnaissance.

Monsieur G. Meunier, directeur de recherches au CNRS, de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail en tant que rapporteur de mon jury. Qu'il soit assuré de ma gratitude.

Monsieur P. Dular, Chargé de recherches au FNRS (Liège), d'avoir eu la gentillesse d'accepter de participer à mon jury.

Monsieur M. Lajoie-Mazenc, directeur de recherches au CNRS, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être membre de mon jury.

Monsieur A. Razek, directeur de recherches au CNRS, d'avoir accepter de faire partie de mon jury. Je lui suis aussi reconnaissant de l'accueil et de la confiance qu'il m'a accordés lors de mon stage de D.E.A.

Je tiens à remercier également:

Monsieur le Professeur R. Bausière de son accueil au sein du laboratoire.

Madame B. Lemaire-Semail, Messieurs P. Brochet, S. Clenet, M. Hecquet et M. Tounzi, chercheurs permanents de l'équipe, pour les discussions que nous avons eues lors des différentes réunions.

Les thésards du laboratoire et particulièrement I. Haouara, F. Marmin, L. Benali, C. Desombre, Y. Le Ménach, J.P. Dhaine, A. Briffaut, J.L. Ranson, P. Dzwiniel, O. Walti, O. Barre, C. Cot, F. Gillon, F. Hembert, H. Roisse et S. Brulé, pour l'ambiance sympathique qu'ils ont su créer au sein du laboratoire.

Tous les membres du laboratoire et particulièrement Madame Del Vitto.

Je n'oublie pas de remercier ma famille et mes amis qui m'ont toujours soutenus et encouragés.

Enfin, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du L2EP. Néanmoins, les premiers éléments de cette étude ont été engagés au LGEP dans l'équipe "Modélisation des Systèmes Electromagnétiques" dirigée par Monsieur A. Razek au cours d'un stage de DEA qui concernait la modélisation 2D d'un moteur asynchrone à cage. En outre, la partie 3D de ce travail s'inscrit dans la continuité des travaux effectués au LGEP.

Sommaire

<i>Introduction générale</i>	1
<i>Chapitre I.</i>	
<i>Résolution numérique des équations du champ électromagnétique</i>	
1. Introduction	4
2. Formulation des problèmes électromagnétiques	5
2.1. Equations de Maxwell.....	5
2.2. Formulations magnétostatiques.....	7
2.2.1. Formulations magnétostatiques en potentiel scalaire.....	8
2.2.2. Formulation magnétostatique en potentiel vecteur	10
2.3. Formulations magnétodynamiques.....	11
2.3.1. Formulations magnétiques.....	12
2.3.2. Formulations électriques	13
2.4. Conditions aux limites	14
2.5. Choix des formulations.....	14
3. Discrétisation spatiale et temporelle	16
3.1. Présentation de la méthode des éléments finis.....	16
3.1.1. Formulation variationnelle.....	16
3.1.2. Discrétisation spatiale.....	17
3.2. Discrétisation temporelle.....	19
3.3. Discrétisation des formulations	19
3.3.1. Etude en magnétostatique.....	19
3.3.2. Etude en magnétodynamique.....	21
3.3.3. Problème non linéaire.....	25
3.3.4. Résolution du système matriciel.....	25
3.4. Formulation hybride $a-\Omega$	27
3.4.1. Couplage.....	28
3.4.2. Discrétisation	29
4. Applications	32
4.1. Cube de fer dans un champ magnétique uniforme	32
4.1.1. Définition du problème	32
4.1.2. Résultats	33
4.2. Cube conducteur avec une densité de courant uniforme.....	35
4.2.1. Définition du problème	35
4.2.2. Résultats	36
5. Conclusion	39

Chapitre II.**Modélisation des systèmes électrotechniques**

1. Introduction.....	40
2. Couplage entre les équations magnétiques et l'équation du circuit électrique.....	41
2.1. Cas tridimensionnel	42
2.1.1. Formulation en potentiel vecteur.....	42
2.1.2. Formulation en potentiel scalaire	44
2.1.3. Formulation hybride.....	45
2.2. Cas bidimensionnel.....	46
2.3. Application: bobine entre deux plaques conductrices.....	47
2.3.1. Définition du problème	48
2.3.2. Résultats	49
3. Calcul des forces magnétiques et du couple.....	57
3.1. Méthode du tenseur de Maxwell.....	58
3.1.1. Principe	58
3.1.2. Discrétisation	58
3.2. Méthode des travaux virtuels	61
3.2.1. Principe	61
3.2.2. Discrétisation	62
3.3. Applications.....	66
3.3.1. Deux conducteurs parallèles.....	66
3.3.2. Electroaimant.....	67
4. Prise en compte du mouvement.....	74
4.1. Méthodes de remaillage.....	75
4.1.1. Remaillage complet.....	75
4.1.2. Remaillage partiel: bande de mouvement.....	75
4.2. Méthodes intégrales	76
4.2.1. Intégrales de frontières	77
4.2.2. Macro-élément.....	77
4.3. Méthodes de recollement des maillages	78
4.3.1. Multiplicateurs de Lagrange.....	78
4.3.2. Méthodes d'interpolation et d'extrapolation nodale.....	79
4.3.3. Ligne de glissement	79
4.3.3. Surface de glissement.....	80
4.4. Récapitulatif	83
5. Conclusion.....	84

Chapitre III.**Modélisation de la machine asynchrone à cage**

1. Introduction.....	85
2. Présentation des différents modèles.....	85
3. Modèle bidimensionnel de la machine asynchrone.....	88
3.1. Equations du champ électromagnétique.....	88
3.2. Bobinage statorique.....	90
3.3. Cage rotorique.....	91
3.4. Prise en compte de la rotation.....	93
3.5. Système matriciel.....	93
3.6. Inclinaison des encoches.....	94
4. Modèle tridimensionnel de la machine asynchrone.....	99
4.1. Difficultés liées à la modélisation 3D des machines électriques.....	100
4.2. Equations du champ électromagnétique et formulation utilisée.....	101
4.3. Bobinage statorique.....	105
4.4. Prise en compte de la rotation.....	106
4.5. Système matriciel.....	106
5. Application.....	108
5.1. Présentation de la machine étudiée.....	109
5.2. Maillages.....	110
5.3. Description des simulations effectuées.....	113
5.4. Résultats.....	113
5.4.1. Machine à encoches droites.....	113
5.4.2. Machine à encoches inclinées.....	118
6. Conclusion.....	124
Conclusion générale.....	125

Annexes

<i>Annexe 1: Elément réel → Elément de référence.....</i>	<i>128</i>
<i>Annexe 2: Calcul de la matrice de couplage dans la formulation hybride $\mathbf{a}-\Omega$.....</i>	<i>130</i>
<i>Annexe 3: Compléments couplage circuit.....</i>	<i>132</i>
<i>Annexe 4: Compléments pour le calcul des forces et du couple.....</i>	<i>135</i>
<i>Annexe 5: Calcul analytique de la force: exemple de deux conducteurs parallèles.....</i>	<i>138</i>
<i>Annexe 6: Inclinaison des encoches.....</i>	<i>140</i>
<i>Annexe 7: Calcul des paramètres du schéma électrique équivalent.....</i>	<i>143</i>

Bibliographie.....	144
---------------------------	------------

Introduction Générale

Introduction générale

La théorie de Maxwell constitue le formalisme de base permettant de décrire l'ensemble des phénomènes électromagnétiques. Cette théorie est donnée par des équations aux dérivées partielles reliant les champs magnétique et électrique. Pour des cas simples, ces équations ont des solutions analytiques donnant une distribution exacte des champs dans le dispositif étudié. Néanmoins, la majorité des problèmes de l'électromagnétisme sont complexes (géométrie compliquée, non-linéarités, interaction entre plusieurs phénomènes, ...) et leur résolution est impossible par des méthodes analytiques à moins d'utiliser des hypothèses simplificatrices. En conséquence, il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques basées sur une discrétisation des variables et de l'espace géométrique. Ces techniques transforment les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques avec des degrés de liberté finis. Parmi ces méthodes, celle des éléments finis est couramment utilisée car la discrétisation de l'espace se fait en fonction de la géométrie et la prise en compte des non-linéarités peut être envisagée. La solution obtenue fournit alors une approximation des grandeurs locales que sont les champs magnétique et électrique. Ces grandeurs sont exploitées par la suite pour déterminer des valeurs globales telles que les flux, les courants, ... Cette résolution numérique donne une précision suffisante pour envisager des applications de conception ou d'optimisation des systèmes électromagnétiques.

En principe, tous les systèmes électromagnétiques doivent être modélisés en trois dimensions. Cependant, beaucoup de dispositifs sont conçus de telle manière qu'ils privilégient une direction pour le courant. On choisit alors une formulation en deux dimensions avec dans la plupart des cas la composante non nulle du potentiel vecteur magnétique comme inconnue. Par contre, dans certains problèmes, l'utilisation d'un calcul tridimensionnel est nécessaire afin de tenir compte de la géométrie réelle ou des effets d'extrémité.

Profitant de l'évolution incessante des performances des calculateurs, des codes de calcul ont été développés avec des modèles 2D ou 3D [9][17][32][61][92][111]. Ce développement a pour conséquence d'améliorer la connaissance des phénomènes électromagnétiques et de fournir aux chercheurs et aux constructeurs de matériels des outils de calcul puissants [17][26][54][62][117].

Ce travail constitue une contribution dans le domaine de la modélisation 3D et 2D des systèmes électrotechniques sur la base de la méthode des éléments finis. Ainsi, nous présentons une synthèse des formulations magnétodynamiques et magnétostatiques et nous développons une approche hybride qui utilise un couplage des potentiels vecteur et scalaire. Pour modéliser une structure contenant un circuit électrique, les équations du champ électromagnétique et celles du circuit sont résolues simultanément. Cette résolution donne l'état magnétique du système et le courant. Afin de prédire les performances des systèmes électrotechniques, les forces et le couple sont des grandeurs importantes à déterminer. Pour cela, une partie de ce travail est dédiée au calcul de ces grandeurs dans le contexte de la méthode des éléments finis. La prise en compte du mouvement peut être simulée par de plusieurs techniques. Dans ce travail, nous développons, en 3D, une méthode dite surface de glissement. Le modèle ainsi développé peut être appliqué, entre autre, pour simuler le fonctionnement des machines asynchrones à cage et à encoches inclinées.

Ce mémoire est présenté en trois chapitres. Dans chaque chapitre, nous consacrons une partie aux applications qui servent de validation et de comparaison des méthodes étudiées.

Le chapitre I débute par une présentation des formulations magnétostatiques et magnétodynamiques sur la base des équations de Maxwell avec les hypothèses classiques de l'électrotechnique. Parmi ces approches, un intérêt particulier est accordé à celles utilisant des potentiels scalaires ou vecteurs. A partir de cette présentation, nous retiendrons les formulations qui seront utilisées dans la suite du travail. La discrétisation de ces approches est ensuite effectuée par la méthode des éléments finis avec une utilisation des éléments nodaux et d'arête, respectivement, pour les potentiels scalaires et vecteurs. Pour la discrétisation des potentiels vecteurs, les éléments d'arête sont mieux adaptés pour décrire la distribution spatiale des champs électrique et magnétique. En effet, ces éléments imposent uniquement la continuité de la composante normale du champ. Cette propriété est importante pour représenter des domaines ayant des sauts de perméabilité ou de conductivité. Dans ce contexte, nous avons développé une approche hybride utilisant le couplage des potentiels vecteur et scalaire. Ce couplage est réalisé en assurant les conditions de transmission des composantes du champ et de l'induction magnétique. Une telle approche peut être appliquée en magnétostatique et en magnétodynamique [108].

Les formulations présentées au cours du chapitre I permettent l'étude d'un système électromagnétique par une résolution des équations du champ. Cette résolution nécessite la connaissance d'un terme source. Ce modèle devient insuffisant lorsqu'il s'agit d'étudier une configuration caractérisée par une forte interaction entre les équations magnétiques et électriques [85].

Dans le chapitre II, nous nous intéresserons à trois aspects importants de la modélisation numérique des systèmes électrotechniques. Le premier concerne, le couplage des équations du champ avec celles du circuit électrique connecté à un bobinage filaire. Nous présenterons l'utilisation de cette notion pour les potentiels scalaire et vecteur [85]. Par la suite, nous l'étendrons à la formulation hybride [108]. En deuxième lieu, nous aborderons la détermination des forces et du couple dans les structures 2D et 3D. Ce calcul concerne uniquement les valeurs globales avec l'utilisation de deux méthodes : le tenseur de Maxwell et les travaux virtuels [13][68][109]. La fin de ce chapitre est consacrée à la prise en compte du mouvement. Après un état de l'art des principales méthodes utilisées, nous développerons une technique 3D simple à mettre en oeuvre [7][15][51][104][111]. Cette méthode, appelée surface de glissement, s'inspire de la ligne de glissement connue en 2D [118].

Le chapitre III est dédié à la modélisation 2D et 3D de la machine asynchrone à cage. Cette étude constitue une application directe des développements effectués dans les deux premiers chapitres. Nous commencerons par présenter un modèle 2D pas à pas dans le temps avec un couplage des circuits électriques au stator et au rotor [101]. Ce modèle sera étendu aux machines à encoches inclinées. Dans ce cas, la partie inclinée est découpée en sections droites dans lesquelles nous supposons une formulation 2D classique [88].

Afin d'introduire le modèle 3D de la machine, nous commencerons par exposer les principales difficultés liées à la mise en équation d'une telle structure. Par la suite, nous développerons notre approche. Dans ce cas, nous utilisons la formulation en potentiel vecteur modifié pour résoudre les équations du champ électromagnétique. La discrétisation du potentiel vecteur est donnée par les éléments d'arête. En ce qui concerne la structure étudiée, nous avons modélisé une machine réelle légèrement modifiée afin d'obtenir un maillage raisonnable au niveau du nombre d'inconnues.

Les résultats obtenus par les modèles 2D et 3D sont présentés avec et sans la prise en compte de l'inclinaison. Pour le cas des encoches droites, les conditions de calcul 3D sont équivalentes à une formulation 2D afin de valider le modèle 3D en le comparant au 2D.

Chapitre I

Résolution Numérique des Equations du Champ Electromagnétique

1. Introduction

La modélisation d'un système électromagnétique consiste à développer une structure mathématique apte à déterminer son état de fonctionnement. Le but d'une telle modélisation est d'accéder aux grandeurs locales (champ magnétique, densité de courant, ...) et globales (courant, flux, énergie, ...) nécessaires à l'analyse ou la conception des dispositifs électromagnétiques. La structure mathématique capable de nous fournir de tels résultats est basée sur la résolution des équations de Maxwell. Pour un problème donné, cette résolution nous donne les grandeurs locales à partir desquelles on peut déduire des grandeurs globales. Lorsque les structures étudiées sont complexes, il n'existe pas de solution analytique aux équations de Maxwell. De ce fait, il est nécessaire de recourir à des méthodes de résolution numérique.

Dans ce chapitre, nous débuterons par un rappel des équations de base que sont les équations de Maxwell. A partir de ces équations, nous exposerons les différentes formulations mathématiques pour les problèmes magnétostatiques et magnétodynamiques. Parmi ces formulations, nous nous intéresserons à celles qui utilisent des potentiels scalaires ou vecteurs. Le choix d'une formulation pour traiter un problème donné dépend de plusieurs critères tels que la nature du phénomène étudié et la topologie du système.

Par la suite, nous présenterons la résolution numérique des équations du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis. Cette méthode permet le passage des équations aux dérivées partielles à un système d'équations algébriques définies dans un espace discret. Dans ce contexte, nous allons effectuer la discrétisation des formulations retenues et le développement d'un couplage entre le potentiel scalaire magnétique et le potentiel vecteur magnétique. Ce couplage est appelé formulation hybride.

Les différentes formulations présentées seront appliquées à deux exemples simples en magnétostatique. Les résultats obtenus seront comparés avec ceux de la formulation hybride. Dans le premier exemple, nous visualiserons l'induction magnétique dans un cube de fer plongé dans un champ uniforme. Pour le deuxième exemple, nous nous intéresserons au calcul de l'énergie magnétique emmagasinée dans un cube conducteur avec une densité de courant uniforme et constante.

2. Formulation des problèmes électromagnétiques

La modélisation en électromagnétisme est basée sur les équations de Maxwell qui constituent le modèle de départ. En utilisant les hypothèses de l'électrotechnique, on peut extraire de ces équations le modèle magnétodynamique caractérisant l'évolution dans le temps du champ électromagnétique. L'étude en régime statique constitue alors le modèle magnétostatique. Ces modèles peuvent être formulés en introduisant des variables autres que les champs physiques. On parle alors de formulations en terme de potentiels scalaires ou vecteurs. La notion de potentiel est très intéressante car elle permet de rendre implicite une des équations à résoudre. En effet, le champ physique est relié au potentiel par une opération de dérivation ou d'intégration. Toutefois, l'utilisation des potentiels engendre certaines difficultés comme le problème des régions non simplement connexes pour le potentiel scalaire ou la définition d'une condition de jauge pour le potentiel vecteur. L'exposé des avantages et des difficultés de chaque formulation nous permet d'établir des critères pour le choix de telle ou telle approche pour un problème donné. Ces critères sont basés sur la nature du problème et la géométrie du domaine.

2.1. Equations de Maxwell

L'ensemble des phénomènes en électromagnétisme est régi par la théorie de Maxwell qui est donnée par un système d'équations aux dérivées partielles sous la forme suivante [16]:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{d} \quad (\text{I.1})$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} \quad (\text{I.2})$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\text{div } \mathbf{d} = \rho \quad (\text{I.4})$$

avec:

\mathbf{h} le champ magnétique (A/m)

\mathbf{b} l'induction magnétique (T)

\mathbf{e} le champ électrique (V/m)

\mathbf{d} l'induction électrique (C/m²)

\mathbf{j} la densité de courant de conduction (A/m²)

ρ la densité volumique de charges (C/m³).

Les équations (I.1) et (I.2) expriment le couplage entre les grandeurs électriques et magnétiques et les équations (I.3) et (I.4) représentent la conservation des flux.

L'équation (I.1) implique qu'une variation dans le temps de l'induction électrique crée une variation du champ magnétique. Le terme $\partial_t \mathbf{d}$ est appelé densité de courant de déplacement. De la même manière, l'équation (I.2), appelée loi de Faraday, implique qu'une variation dans le temps de l'induction magnétique provoque une variation du champ électrique. A partir des équations (I.1) et (I.4), on obtient la conservation de la charge électrique:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \partial_t \rho = 0 \quad (\text{I.5})$$

Dans le domaine de l'électrotechnique, la fréquence des phénomènes étudiés est telle que le courant de déplacement peut être négligé devant le courant de conduction. On parle alors de l'approximation de l'électrotechnique. Dans ces conditions, l'équation (I.1) et la conservation de la charge (I.5) deviennent:

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j} \quad (\text{I.6})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (\text{I.7})$$

L'équation (I.6) est connue sous le nom de la loi d'Ampère.

Lois de comportement

Les champs \mathbf{h} , \mathbf{b} , \mathbf{e} et \mathbf{d} , définis dans les équations de Maxwell, ne sont pas indépendants. En effet, ils sont reliés entre eux par les lois de comportement qui expriment les propriétés des matériaux. Ces lois s'écrivent comme suit:

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad (\text{I.8})$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad (\text{I.9})$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (\text{I.10})$$

avec:

μ la perméabilité magnétique (H/m)

ε la permittivité électrique (F/m)

σ la conductivité électrique ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$).

Les valeurs μ , ε et σ sont des tenseurs et elles peuvent varier en fonction de la température, de la saturation, de l'hystérésis, etc. Néanmoins, dans un grand nombre d'applications, les milieux considérés peuvent être supposés isotropes et non-linéaires. Dans notre étude, la permittivité n'intervient pas et la conductivité sera supposée constante. Pour la perméabilité nous prendrons, selon le problème traité, une caractéristique linéaire (μ constante) ou non-linéaire $\mu = \mu(|\mathbf{h}|)$.

Conditions de transmission

Aux interfaces entre deux milieux de propriétés différentes, les champs subissent des discontinuités. Cependant, Il est possible d'exprimer des relations de continuité sur les composantes de ces champs. Par intégration des équations de Maxwell sur un volume élémentaire qui englobe l'interface, nous pouvons écrire les conditions suivantes:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1)|_{\Gamma} = \mathbf{j}_s \quad (\text{I.11})$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{I.12})$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1)|_{\Gamma} = \rho_s \quad (\text{I.14})$$

avec:

\mathbf{j}_s la densité surfacique de courant

ρ_s la densité surfacique de charge électrique

\mathbf{n} la normale à la l'interface Γ qui sépare les milieux 1 et 2.

Dans les exemples que nous aurons à traiter, les grandeurs \mathbf{j}_s et ρ_s n'interviennent pas. Par conséquent, les conditions (I.11) et (I.12) expriment, respectivement, la continuité de la composante tangentielle des champs magnétique et électrique et les conditions (I.13) et (I.14) donnent la continuité de la composante normale de l'induction magnétique et électrique. A partir de l'équation (I.7), on peut exprimer la continuité de la composante normale de la densité de courant, soit:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1)|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{I.15})$$

2.2. Formulations magnétostatiques

Lorsque les phénomènes étudiés indépendants du temps, les dérivées temporelles dans les équations de Maxwell s'annulent et les grandeurs magnétiques et électriques sont découplés. Dans ce cas, l'étude des problèmes magnétiques fait l'objet de la magnétostatique. En notant la densité de courant source \mathbf{j}_0 , les équations de Maxwell à considérer sont:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}_0 \quad (\text{I.16})$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 \quad (\text{I.17})$$

On ajoute à ces deux équations la loi de comportement magnétique (I.8).

L'introduction des potentiels peut s'avérer intéressante pour formuler les problèmes de la magnétostatique. Dans ce cas, on peut envisager des approches en potentiels vecteurs ou scalaires.

1.2.1. Formulations magnétostatiques en potentiel scalaire

Potentiel scalaire total

Dans les régions dépourvues de sources de courant, l'équation (I.16) s'écrit $\text{rot } \mathbf{h} = 0$. Dans ces conditions, le champ magnétique \mathbf{h} peut être défini à partir d'un potentiel scalaire magnétique Ω tel que:

$$\mathbf{h} = -\text{grad}\Omega \quad (\text{I.18})$$

En remplaçant cette relation dans l'équation (I.17) et en utilisant la loi de comportement (I.8), on obtient la formulation en potentiel scalaire total [5]:

$$\text{div} (\mu \text{ grad } \Omega) = 0 \quad (\text{I.19})$$

Lorsque la perméabilité est uniforme dans tout le domaine, la formulation se réduit à l'équation de Laplace, i.e. $\Delta\Omega = 0$. A l'interface entre deux milieux de perméabilités différentes, la définition d'un potentiel Ω continu assure la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique. Quant à la continuité de la composante normale de l'induction, elle est implicite dans l'équation (I.19).

Potentiel scalaire réduit

En présence de sources de courant dans le domaine étudié, il n'est plus possible de travailler avec le potentiel scalaire total partout. On décompose alors le champ magnétique en deux parties: $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_r$ [4].

Le champ \mathbf{h}_0 , appelé champ source, est créé par les courants tel que $\text{rot } \mathbf{h}_0 = \mathbf{j}_0$. Son calcul est effectué à l'aide de la loi de Biot et Savart en tout point de l'espace sans la prise en compte des matériaux ferromagnétiques:

$$\mathbf{h}_0(\mathbf{m}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}_0} \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{p}) \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} d\mathbf{v} \quad (\text{I.20})$$

avec \mathbf{m} le point de calcul du champ, \mathbf{p} le point de d'intégration appartenant au volume inducteur \mathcal{D}_0 et \mathbf{r} le vecteur reliant les points \mathbf{p} et \mathbf{m} .

Le champ \mathbf{h}_r est dû à la présence des matériaux ferromagnétiques vérifiant $\text{rot } \mathbf{h}_r = 0$, ce qui permet d'introduire le potentiel scalaire magnétique réduit Ω_r tel que $\mathbf{h}_r = -\text{grad}\Omega_r$. En remplaçant l'expression du champ magnétique dans l'équation (I.17) et en utilisant la relation (I.8), on obtient la formulation potentiel scalaire réduit:

$$\text{div} (\mu(\mathbf{h}_0 - \text{grad}\Omega_r)) = 0 \quad (\text{I.21})$$

Cette formulation présente l'avantage de la facilité de mise en oeuvre. Cependant, elle engendre des imprécisions numériques sur le calcul du champ total \mathbf{h} dans les régions à forte perméabilité. Ce qui engendre une erreur importante sur l'induction magnétique [31][46]. Cette

erreur peut être réduite par un choix adéquat des fonctions d'approximations du champ h_0 [36][73]. Une autre possibilité consiste à coupler explicitement le potentiel scalaire total Ω utilisé dans la région à forte perméabilité avec le potentiel scalaire réduit défini dans la région inductrice [5][56]. Dans ce cas, on obtient une formulation avec deux potentiels scalaires. Le couplage est effectué, à l'interface entre les deux régions, en assurant les conditions de transmission. Pour la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique, on peut écrire:

$$\Omega|_{\Gamma} = \Omega_r|_{\Gamma} - \int_{\gamma} h_0 \cdot dl \quad (1.22)$$

où γ est un chemin sur l'interface Γ .

Les deux formulations que nous venons de présenter (Ω et Ω_r) ont l'avantage d'utiliser des variables scalaires ce qui représente un gain au niveau du nombre d'inconnues. Cependant, la formulation Ω est mise en difficulté lorsqu'il s'agit de modéliser des régions non simplement connexes. Car le potentiel scalaire devient multiforme [59]. La solution consiste à rendre le domaine simplement connexe en effectuant des coupures et en imposant des sauts de potentiels [34][35]. Pour la formulation Ω_r , la difficulté réside dans l'évaluation du champ source h_0 qui nécessite un temps de calcul assez élevé.

Potentiel scalaire t_0 - Ω

Pour la formulation en potentiel scalaire réduit, le champ source h_0 a une signification physique définie par la loi de Biot et Savart. Toutefois, il est possible de définir des champs sources fictifs [27][67][82][84]. Cela constitue la formulation t_0 - Ω avec t_0 un champ vectoriel connu et vérifiant la relation:

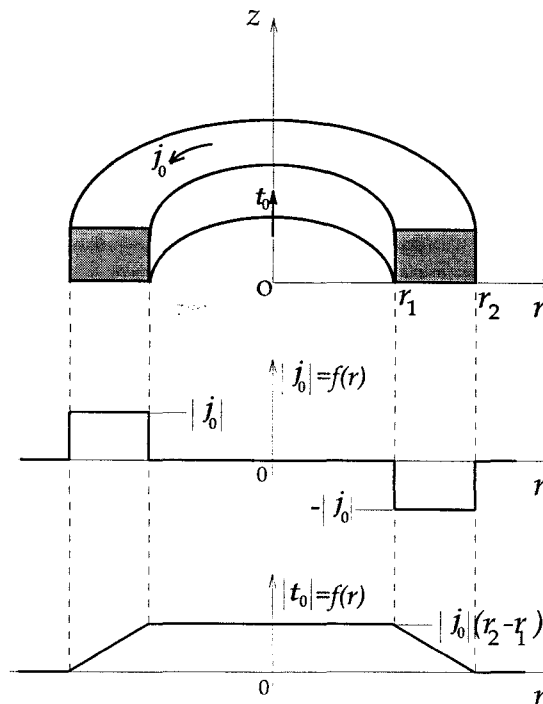
$$\text{rot } t_0 = j_0 \quad (1.23)$$

Le champ source t_0 est déterminé à partir de la connaissance de la densité de courant j_0 dans les régions inductrices. Le potentiel scalaire total Ω est utilisé dans tout le domaine et le champ magnétique s'exprime sous la forme suivante:

$$h = t_0 - \text{grad}\Omega \quad (1.24)$$

Lorsque la géométrie des régions inductrices est simple, la distribution du vecteur source t_0 peut être obtenue aisément par une expression analytique. A titre d'exemple, nous considérons une bobine en forme de tore et de section carrée (Fig. I.1.). La densité de courant est uniforme en module et elle est située dans un plan perpendiculaire à l'axe du tore oz . La distribution du vecteur t_0 est déterminée tel que la relation (1.23) soit satisfaite. Le calcul de ce vecteur se fait dans une partie (simplement connexe) du domaine étudié contrairement au champ h_0 qui doit être calculé dans tout le domaine.

Pour des domaines ayant des formes complexes, le vecteur source t_0 ne peut être calculé analytiquement et il faut alors envisager une résolution numérique de l'équation (1.23) pour le déterminer dans tout le domaine.


 Fig. I.1. Exemple de distribution de t_0

En remplaçant l'expression du champ magnétique dans (I.17) et en utilisant (I.8), on obtient la formulation en potentiel scalaire t_0 - Ω avec t_0 connu:

$$\text{div} (\mu(t_0 - \text{grad} \Omega)) = 0 \quad (\text{I.25})$$

On note qu'on peut retrouver l'équation (I.21) à partir de (I.25) en remplaçant t_0 par h_0 . En effet, pour les deux cas, seule la définition du terme source diffère.

2.2.2. Formulation magnétostatique en potentiel vecteur

L'équation (I.17) permet d'exprimer l'induction magnétique b à partir d'un potentiel vecteur magnétique a tel que:

$$b = \text{rot } a \quad (\text{I.26})$$

En utilisant cette relation et la loi de comportement magnétique (I.8), on peut réécrire l'équation (I.16) sous la forme:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } a \right) = j_0 \quad (\text{I.27})$$

Cette équation constitue la formulation magnétostatique en potentiel vecteur [33][59]. D'après la relation (I.26), la continuité de la composante tangentielle de a assure la continuité de la composante normale de l'induction b . La continuité de la composante tangentielle du champ h est implicite dans l'équation (I.27). Dans cette formulation, les difficultés liées aux régions non simplement connexes ne se posent pas; mais son caractère vectoriel entraîne un nombre d'inconnues élevé par rapport aux formulations en potentiel scalaire.

D'après l'équation (I.27), le potentiel vecteur \mathbf{a} peut être déterminé au gradient d'une fonction scalaire quelconque près. Par conséquent, la solution obtenue n'est pas unique. En effet, il manque une équation qui permet de fixer la fonction scalaire et garantir l'unicité de la solution. Une telle équation est appelée condition de jauge. On peut utiliser la jauge de Coulomb $\text{div } \mathbf{a} = 0$ qui implique la continuité de la composante normale du potentiel vecteur \mathbf{a} [33][41]. Une autre possibilité consiste à choisir la condition $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$, avec \mathbf{w} un champ vectoriel dont les lignes ne se referment pas [37]. Cette jauge présente l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du problème.

2.3. Formulations magnétodynamiques

L'étude des phénomènes magnétiques et électriques en régime dynamique fait l'objet de la magnétodynamique. Les équations de Maxwell à considérer sont alors:

$$\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j} \quad (\text{I.28})$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b} \quad (\text{I.29})$$

$$\text{div } \mathbf{b} = 0 \quad (\text{I.30})$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (\text{I.31})$$

A ces équations, il faut ajouter les lois de comportement (I.8) et (I.10). Pour le traitement des problèmes magnétodynamiques, on peut travailler directement avec le champ magnétique \mathbf{h} ou le champ électrique \mathbf{e} [32][50]. Cependant, le caractère physique de ces variables entraîne, d'après les conditions de transmission (I.11) à (I.14), une discontinuité de leur composante normale à l'interface entre deux régions de caractéristiques différentes. Une autre approche consiste à introduire des potentiels pour exprimer les champs \mathbf{h} et \mathbf{e} . A partir de l'équation (I.30), on définit le potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} tel que:

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a} \quad (\text{I.32})$$

En utilisant cette relation dans l'équation (I.29), le champ électrique peut s'écrire:

$$\mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{a} - \text{grad } \varphi \quad (\text{I.33})$$

avec φ le potentiel scalaire électrique.

D'autre part, on peut définir un potentiel vecteur électrique \mathbf{t} vérifiant la conservation du courant (I.31) tel que:

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{t} \quad (\text{I.34})$$

En reportant cette expression dans l'équation (I.28), le champ magnétique s'écrit alors:

$$\mathbf{h} = \mathbf{t} - \text{grad } \Omega \quad (\text{I.35})$$

avec Ω le potentiel scalaire magnétique.

A partir des relations (I.35) et (I.33) on peut établir deux formulations. La première, appelée formulation magnétique, utilise le champ magnétique \mathbf{h} comme variable principale. La seconde, appelée formulation électrique, utilise le champ électrique \mathbf{e} comme variable principale. On note que ces formulations en terme de potentiels permettent de travailler avec des grandeurs continues.

2.3.1. Formulations magnétiques

Formulation en champ magnétique \mathbf{h}

Pour les régions conductrices ($\sigma \neq 0$), l'équation à résoudre est obtenue à partir des relations (I.28) et (I.29) ainsi que les lois comportement (I.8) et (I.10):

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{h}\right) + \partial_t\mu\mathbf{h} = 0 \quad (\text{I.36})$$

Cette formulation admet une solution unique et ne nécessite pas de jauge [30].

Dans les régions non-conductrices ($\sigma = 0$), le problème se réduit à la résolution de l'équation (I.30) qui peut se faire en utilisant une formulation en potentiel scalaire telle que (I.21) ou (I.25). Afin de coupler les régions conductrices et non-conductrices, il faut assurer les conditions de transmission des champs. Au niveau de la discrétisation, le choix des fonctions d'approximation doit permettre la libération de la composante normale du champ magnétique [21].

Formulation en potentiels \mathbf{t} - Ω

La formulation du problème dans les régions conductrices s'obtient en remplaçant les expressions (I.35) et (I.34) dans l'équation (I.29) et en utilisant les lois de comportement (I.8) et (I.10) [14][27][30][84]:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{t}\right) + \partial_t(\mu(\mathbf{t} - \operatorname{grad}\Omega)) = 0 \quad (\text{I.37})$$

Dans les régions non-conductrices, on peut employer les formulations magnétostatiques en potentiel scalaire définies par les équations (I.21) ou (I.25). Le potentiel vecteur électrique \mathbf{t} est décomposé en deux parties: un vecteur source \mathbf{t}_0 dû à la densité de courant imposée et connue et le potentiel vecteur électrique défini dans les régions conductrices.

D'après la relation (I.35), la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{h} est assurée si, à la fois, le scalaire Ω et la composante tangentielle de \mathbf{t} sont continus. La continuité de la composante normale de l'induction \mathbf{b} est vérifiée implicitement dans les équations (I.37) et (I.25). A l'interface entre une région conductrice et non-conductrice, il faut assurer la continuité de la composante normale de la densité de courant, i.e. $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$. D'après la relation (I.34), cela entraîne l'annulation de la composante tangentielle du potentiel vecteur électrique, i.e. $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0$.

Comme pour la formulation en \mathbf{a} , la résolution de l'équation (I.37) ne donne pas de solution unique au problème. Afin d'assurer l'unicité de la solution, il faut imposer une condition de jauge. Dans ce cas, on peut utiliser la jauge de Coulomb $\text{div} \mathbf{t} = 0$ ou une jauge du type $\mathbf{t} \cdot \mathbf{w} = 0$ [14].

2.3.2. Formulations électriques

*Formulation en potentiel vecteur magnétique modifié \mathbf{a}^**

Cette formulation utilise le potentiel vecteur magnétique modifié qui peut être considéré comme la primitive par rapport au temps du champ électrique \mathbf{e} [10][42]:

$$\mathbf{a}^* = -\int_0^t \mathbf{e}(t') dt' \quad (\text{I.38})$$

Pour les régions conductrices, l'équation à résoudre est obtenue en remplaçant les expressions de l'induction ($\mathbf{b} = \text{rot} \mathbf{a}^*$) et de la densité de courant ($\mathbf{j} = -\sigma \partial_t \mathbf{a}^*$) dans l'équation (I.28) et en utilisant les lois comportement (I.8) et (I.10), soit:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{a}^* \right) + \sigma \partial_t \mathbf{a}^* = 0 \quad (\text{I.39})$$

Dans les régions non-conductrices, le champ électrique n'est pas calculé et une formulation magnétostatique en terme de potentiel vecteur magnétique peut être utilisée. Dans ce cas, les deux régions (conductrice et non-conductrice) sont couplées naturellement. On peut aussi utiliser le potentiel scalaire en explicitant le couplage des deux régions.

En prenant la divergence de l'équation (I.39), on obtient $\text{div} \sigma \mathbf{a}^* = 0$, ce qui entraîne la continuité du produit de la conductivité par la composante normale de \mathbf{a}^* . Il s'agit d'une condition de jauge implicite dans les régions conductrices [11]. A l'interface entre deux milieux de conductivités différentes, cette condition entraîne la discontinuité de la composante normale de \mathbf{a}^* . Par contre, sa composante tangentielle doit être continue afin d'assurer la continuité de la composante normale de \mathbf{b} . Pour les régions non-conductrices, il faudra imposer une condition de jauge du type Coulomb ou $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Formulation en potentiels \mathbf{a} - ϕ

Cette formulation utilise le potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} dans tout le domaine et le potentiel scalaire électrique ϕ dans les régions conductrices. En remplaçant les expressions (I.32) et (I.33) dans l'équation (I.28) et en utilisant les lois de comportement (I.8) et (I.10), on obtient la formulation \mathbf{a} - ϕ [6][33][39][41]:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{a} \right) + \sigma (\partial_t \mathbf{a} + \text{grad} \phi) = 0 \quad (\text{I.40})$$

En imposant la conservation du courant (I.31), on obtient une équation supplémentaire:

$$\text{div} \sigma (\partial_t \mathbf{a} + \text{grad} \phi) = 0 \quad (\text{I.41})$$

On note que cette équation est implicite dans (I.40).

A la séparation entre deux régions, la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{a} assure la continuité de la composante normale de \mathbf{b} . La continuité de la composante tangentielle de \mathbf{h} est implicite dans l'équation (I.40). D'après la relation (I.33), la continuité du potentiel ϕ et de la composante tangentielle de \mathbf{a} assure la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{e} . La continuité de la composante normale de \mathbf{j} est implicite dans l'équation (I.41).

Comme pour la formulation magnétostatique en potentiel vecteur, il faut assurer l'unicité de la solution. Les équations $\text{div} \mathbf{a} = 0$ et $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$ constituent alors des conditions de jauges possibles.

2.4. Conditions aux limites

Soit le domaine d'étude global \mathcal{D} délimité par la frontière Γ qu'on scinde en deux parties Γ_h et Γ_b . Nous considérons les conditions aux limites fréquemment rencontrées:

$$\mathbf{h} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0 \quad (\text{I.42})$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0 \quad (\text{I.43})$$

Ces conditions peuvent se présenter sur des plans de symétrie. La condition (I.43) intervient lorsqu'aucun flux magnétique ne sort du domaine \mathcal{D} . La condition (I.42) est rencontrée lorsque le milieu environnant le domaine \mathcal{D} est supposé de perméabilité infinie.

Sur la frontière d'un conducteur ($\sigma \neq 0$), l'équation (I.28) et la condition (I.42) entraînent $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_h . D'autre part, l'équation (I.29) et la condition (I.43) impliquent $\mathbf{e} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_b .

Pour les formulations en potentiels, les conditions aux limites considérées se traduisent par des conditions de Dirichlet (le potentiel est fixé) ou de Neumann (la dérivée du potentiel par rapport à la normale à Γ est fixée) ou par une combinaison des deux (condition de Cauchy).

2.5. Choix des formulations

L'introduction de la notion de potentiel est un moyen pratique pour résoudre les problèmes magnétostatiques et magnétodynamiques. Chacun des potentiels est défini afin de rendre implicite dans l'équation à résoudre une des équations de Maxwell. D'après l'inventaire des formulations présentées, on peut se demander laquelle de ces formulations choisir pour modéliser un problème donné.

En modélisation bidimensionnelle, les courants suivent une direction privilégiée, ce qui implique la réduction du potentiel vecteur à une seule composante. De plus, les équations à résoudre définissent une jauge implicite. Pour ces raisons, la formulation en potentiel vecteur \mathbf{a} est préférée à celle en potentiel scalaire. Pour ce dernier, le problème des régions non simplement connexes subsiste encore en 2D.

En modélisation tridimensionnelle, les formulations qui utilisent des potentiels scalaires sont nettement plus avantageuses du point de vue taille du problème. Mais la solution devient multiforme dans les domaines non simplement connexes et il faut alors recourir à un traitement supplémentaire (coupures, saut de potentiel). Le potentiel vecteur n'entraîne pas ce genre de difficultés. Cependant, le caractère vectoriel de cette formulation engendre un nombre d'inconnues élevé et nécessite une condition de jauge afin d'assurer l'unicité de la solution. Pour ces raisons, le choix d'une formulation en 3D dépend de plusieurs critères tels que la géométrie (domaine simplement connexe ou non), la nature du problème (magnétodynamique, magnétostatique), les ressources informatiques dont on dispose (espace mémoire, nombre d'opérations par seconde), etc.

Dans notre étude, nous avons retenu les formulations en potentiel vecteur \mathbf{a} et celle en potentiel scalaire t_0 - Ω pour modéliser les problèmes magnétostatiques. Le calcul du vecteur source t_0 est préféré à celui du champ \mathbf{h}_0 , parce qu'il est plus économique. Dans les exemples que nous aurons à traiter, le vecteur t_0 est donné par des expressions analytiques. Pour l'étude de la magnétodynamique, nous avons retenu la formulation magnétique en potentiels t - Ω et les deux formulations électriques \mathbf{a} - ϕ et \mathbf{a}^* .

Les résultats obtenus par ces formulations seront confrontés avec ceux de l'approche hybride qui sera développé par la suite. La comparaison sera faite sur les grandeurs locales et globales et sur les performances (temps de calcul et espace mémoire).

3. Discrétisation spatiale et temporelle

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté une formulation continue des problèmes magnétostatiques et magnétodynamiques sous forme d'équations différentielles aux dérivées partielles. Ces équations régissent la répartition spatiale des champs vectoriels (\mathbf{h} , \mathbf{e} , \mathbf{a} , ...) ou des fonctions scalaires (φ , Ω , ...). En général, la résolution de telles équations ne peut être obtenue analytiquement et l'utilisation des méthodes numériques s'avère nécessaire pour avoir une solution approchée du problème. Le rôle des méthodes numériques est de remplacer la formulation continue par une formulation discrète. Parmi ces méthodes, on peut envisager la méthode des différences finies qui remplace la forme différentielle des formulations par des équations algébriques aux différences finies. Dans ce cas, le domaine d'étude est constitué d'un réseau de mailles rectangulaires et la valeur de l'inconnue sur chaque noeud du réseau est exprimée en fonction des noeuds voisins. Cette méthode présente une facilité de mise en oeuvre, mais elle n'est pas adaptée à des géométries complexes. La méthode des éléments finis est une autre approche de discrétisation spatiale qui ne présente pas ce genre de difficulté. De plus, elle permet de traiter les non-linéarités des milieux [2][3][89]. Lorsque les phénomènes étudiés évoluent dans le temps, les dérivées temporelles peuvent être discrétisées par une méthode du type différences finies. Cette double discrétisation (spatiale et temporelle), nous ramène à des systèmes d'équations algébriques dont la résolution donne une solution approchée du problème.

3.1. Présentation de la méthode des éléments finis

Afin de discrétiser les formulations magnétostatiques et magnétodynamiques retenues, les équations à résoudre sont ramenées d'une forme différentielle à une forme intégrale, qui s'adapte mieux à la discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis. Cette dernière consiste à réaliser un maillage de la structure étudiée et à interpoler les inconnues sur les éléments de ce maillage.

3.1.1. Formulation variationnelle

Dans les formulations présentées précédemment, il s'agit de résoudre des équations aux dérivées partielles dans un domaine d'étude \mathcal{D} avec des conditions aux limites définies sur sa frontière Γ . Ces formulations peuvent être réécrites sous la forme compacte suivante:

$$L u + f = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D} \quad (\text{I.44a})$$

$$C u + q = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{I.44b})$$

où L est un opérateur différentiel appliqué à la variable inconnue u et C un opérateur associé à une condition sur Γ . f et q sont des fonctions connues.

Cette présentation du problème constitue une formulation forte dont la résolution directe est souvent difficile, vu l'ordre élevé des dérivations et le caractère discontinu des variables considérées. Une approche intégrale du problème (I.44) peut être intéressante pour réaliser la discrétisation spatiale. Cela donne la formulation variationnelle, ou faible, qui est définie sous la forme suivante [31]:

$$\int_{\mathcal{D}} u' \cdot (L u + f) dv = 0 \quad (\text{I.45})$$

avec u' une fonction scalaire ou vectorielle, appelée fonction test. La solution du problème (I.45) est dite faible et elle doit être vérifiée quelle que soit la fonction u' définie dans l'espace des fonctions test $E_u(\mathcal{D})$. Cette solution ne satisfait pas toujours le problème (I.44). En effet, cela dépend des propriétés de l'espace $E_u(\mathcal{D})$. Par contre, une solution de la formulation forte (I.44), résout également le problème (I.45). En intégrant par parties l'équation (I.45) et en appliquant la formule de Green, on retrouve des éléments du problème initial (I.44): équation différentielle et certaines conditions aux limites. L'avantage de la formulation faible, par rapport à la formulation forte, est la diminution du degré de dérivation des équations et la prise en compte directe de certaines conditions aux limites. De plus, elle est mieux adaptée à une discrétisation par la méthode des éléments finis.

3.1.2. Discrétisation spatiale

La discrétisation de la formulation variationnelle par la méthode des éléments finis consiste à remplacer l'espace fonctionnel continu par un espace discret dont les entités sont appelées fonctions d'approximation. Le domaine d'étude \mathcal{D} est donné par un ensemble d'éléments géométriques de formes simples. Cette procédure de discrétisation de l'espace est appelée maillage. Un élément fini est alors défini par sa forme géométrique et les fonctions d'approximation qui lui sont associées.

En géométrie 3D, les éléments du maillage peuvent être des tétraèdres, des hexaèdres ou des prismes [89]. En 2D, il s'agit de triangles ou de quadrilatères. Les sommets de ces éléments sont appelés noeuds. Les arêtes et les facettes de chaque élément sont alors repérées par un ensemble ordonné de noeuds.

Sur chaque élément, les inconnues du problème sont discrétisées par une combinaison des fonctions d'approximation spatiales continues. Une telle combinaison peut se faire sur les noeuds, les arêtes, les facettes ou le volume de l'élément. Le caractère continu de ces fonctions permet d'interpoler la valeur de l'inconnue en tout point du domaine étudié. Ces fonctions constituent un espace fonctionnel dans lequel le problème initial va être résolu [22][91][113].

Dans cette étude, nous avons utilisé l'élément tétraédrique linéaire en 3D et l'élément triangulaire du premier ordre en 2D. Les fonctions d'approximation sont considérées sur les noeuds pour les inconnues scalaires (ou la composante non nulle du potentiel vecteur en 2D) et sur les arêtes pour les inconnues vectorielles.

Fonctions d'approximation nodales

Sur chaque élément, la variable scalaire "u" est donnée par une combinaison des valeurs u_i aux noeuds tel que:

$$u^e = \sum_{i=1}^4 \lambda_i u_i \quad (I.46)$$

λ_i est la fonction d'approximation nodale; elle est égale à 1 pour le noeud i et vaut 0 aux autres noeuds. Pour le tétraèdre du premier ordre, λ_i est un polynôme en x,y,z de degré inférieur ou égal à un.

Les fonctions d'approximation nodales assurent la continuité, à travers les facettes, des variables utilisées [89]. Ceci est loin d'être un avantage quand on travaille avec des vecteurs comme inconnues. Par exemple, dans le cas de la formulation en potentiel vecteur magnétique, un saut de perméabilité entraîne une discontinuité de la composante tangentielle de l'induction magnétique ce qui est incompatible avec la continuité imposée par les éléments nodaux. Le même problème est posé pour le potentiel vecteur électrique avec un saut de conductivité. Dans ce cas, c'est la composante tangentielle de la densité de courant qui doit être discontinue. Toutefois, cette difficulté peut être surmontée en ajoutant une inconnue supplémentaire à chaque noeud situé sur l'interface. On parle alors de libération de la composante normale du potentiel vecteur [64][96].

En résumé, les fonctions d'approximation nodales se prêtent bien à la discrétisation d'un scalaire et la discontinuité des champs physiques est engendrée par le gradient. C'est le cas des formulations utilisant les potentiels scalaires magnétique Ω et électrique ϕ . Par contre, l'utilisation des inconnues vectorielles nécessite un traitement supplémentaire lorsqu'il y a une discontinuité des composantes des vecteurs considérés. Une autre alternative consiste à discrétiser les vecteurs par les éléments d'arête.

Fonctions d'approximation d'arête

Lorsque l'inconnue est vectorielle, on peut envisager une approximation sur les arêtes du tétraèdre. Pour une arête k du maillage repérée par les noeuds i et j, on utilise la circulation c_{uk} de la variable vectorielle u tel que:

$$c_{uk} = \int_k \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (I.47)$$

Sur chaque élément, la variable u est donnée les circulations le long des six arêtes du tétraèdre:

$$\mathbf{u}^e = \sum_{k=1}^6 w_k c_{uk} \quad (I.48)$$

où w_k est la fonction d'approximation d'arête donnée par les fonctions nodales associées aux noeuds. Pour un tétraèdre, la fonction d'approximation d'arête s'exprime comme suit:

$$w_k = \lambda_i \mathbf{grad} \lambda_j - \lambda_j \mathbf{grad} \lambda_i \quad (I.49)$$

La fonction w_k est linéaire et continue par morceaux. Au passage entre deux éléments, on peut montrer que les fonctions d'approximation d'arête assurent la continuité de la composante tangentielle de la variable vectorielle u et laissent libre sa composante normale [21][37][39][90][95]. Cette propriété est très importante pour discrétiser les champs physiques h et e ou les potentiels vecteurs a et t . D'autre part, on peut vérifier la continuité de la composante normale du rotationnel de u . Cela implique une continuité des composantes normales de b et j lorsqu'on utilise, respectivement, les potentiels vecteurs a et t .

Méthode de Galerkin

La discrétisation de la formulation variationnelle, nous ramène à résoudre un système d'équations dont les degrés de liberté sont liés au nombre de noeuds et d'arêtes du maillage. Pour obtenir un tel système, on doit choisir autant de fonctions test que d'inconnues générées par le maillage. La méthode de Galerkin est associée à la discrétisation spatiale dans le sens où elle consiste à utiliser les fonctions d'approximation (nodales ou d'arête) comme des fonctions test [89]. Son application à la formulation variationnelle génère un système d'équations algébriques dont la résolution nous donne une solution approchée du problème initial.

3.2. Discrétisation temporelle

En ce qui concerne les formulations magnétodynamiques, on constate qu'en plus des dérivations par rapport à l'espace, il y a une dérivation par rapport au temps. La méthode des éléments finis permet de résoudre numériquement le problème dans l'espace. La dérivation par rapport au temps est obtenue par une méthode du type différences finies. Dans notre étude, nous avons retenu la méthode d'Euler implicite dont la convergence et la stabilité sont démontrées [47]. La dérivée temporelle d'une fonction $u(t)$ à l'instant $t+\Delta t$ est discrétisée de la manière suivante:

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t+\Delta t} \approx \frac{u_{t+\Delta t} - u_t}{\Delta t} \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad \text{et} \quad u_{t_0} = u_0 \quad (\text{I.50})$$

avec t_0 l'instant initial, t_f l'instant final et u_0 la valeur initiale de la fonction $u(t)$ qui doit être imposée pour démarrer le processus itératif. Le temps t est donné par des instants dans l'intervalle d'étude $[t_0, t_f]$ qui sont calculés à partir du pas de temps Δt . Ce dernier peut être constant ou variable; il dépend de la fréquence des phénomènes étudiés.

3.3. Discrétisation des formulations

3.3.1. Etude en magnétostatique

Dans ce cas, nous désirons calculer le champ magnétique dans une structure tridimensionnelle qui peut être constituée de matériaux magnétiques éventuellement non linéaires. Les sources du champ sont des régions inductrices caractérisées par une densité de courant imposée et connue. Pour obtenir ces résultats, nous allons établir la forme variationnelle et la discrétisation spatiale pour les formulations retenues (potentiel scalaire $t_0-\Omega$ et potentiel vecteur a).

Formulation en potentiel scalaire t_0 - Ω

L'équation à résoudre est donnée par (I.25) où t_0 représente la source du champ magnétique. Ce vecteur est confiné dans une région simplement connexe notée \mathcal{D}_0 . L'application de la formulation variationnelle, nous donne après transformation l'équation suivante:

$$\int_{\mathcal{D}} \mu \mathbf{grad} \Omega' \cdot \mathbf{grad} \Omega \, dv + \int_{\Gamma} \Omega' \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\mathcal{D}_0} \mu \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{grad} \Omega' \, dv \quad \forall \Omega' \in E_{\Omega'}(\mathcal{D}) \quad (\text{I.51})$$

avec Ω' une fonction test scalaire.

La forme discrète du potentiel scalaire magnétique est donnée par les fonctions d'approximation nodales (I.46) avec $u = \Omega$. En remplaçant cette forme dans l'équation (I.51) et en utilisant la méthode de Galerkin, on obtient le système d'équations suivant:

$$\sum_{i=1}^{N_n} \int_{\mathcal{D}} \mu \mathbf{grad} \lambda_j \cdot \mathbf{grad} \lambda_i \Omega_i \, dv + \int_{\Gamma} \lambda_j \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\mathcal{D}_0} \mu \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{grad} \lambda_j \, dv \quad j = 1, N_n \quad (\text{I.52})$$

avec " N_n " le nombre de noeuds du maillage. En annulant l'intégrale de surface dans (I.52), on assure au sens faible la condition $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$. La condition $\mathbf{h} \times \mathbf{n} = 0$ est imposée au sens fort par les fonctions d'approximation. Les équations algébriques données par (I.52) peuvent être réécrites sous la forme matricielle suivante:

$$[S_{\Omega}][\Omega] = [F_{\Omega}] \quad (\text{I.53})$$

avec S_{Ω} la matrice de raideur et F_{Ω} le vecteur source; leurs termes s'écrivent:

$$S_{\Omega_{i,j}} = \int_{\mathcal{D}} \mu \mathbf{grad} \lambda_j \cdot \mathbf{grad} \lambda_i \, dv \quad i, j = 1, N_n \quad (\text{I.54a})$$

$$F_{\Omega_j} = \int_{\mathcal{D}_0} \mu \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{grad} \lambda_j \, dv \quad j = 1, N_n \quad (\text{I.54b})$$

Le vecteur $[\Omega]$ contient les valeurs du potentiel scalaire magnétique aux noeuds du maillage. La matrice de raideur est symétrique et définie positive, ce qui représente un avantage considérable. En effet, cela permet d'utiliser des méthodes de résolution performantes (peu coûteuses en espace mémoire et en temps de calcul).

Formulation en potentiel vecteur a

Dans ce cas, la solution du problème est donnée par la résolution de l'équation (I.27). En appliquant la formulation variationnelle et en effectuant des transformations, on obtient l'équation suivante:

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{a}' \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a} \, dv + \int_{\Gamma} \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{n}) \, ds = \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{a}' \cdot \mathbf{j}_0 \, dv \quad \forall \mathbf{a}' \in E_a(\mathcal{D}) \quad (\text{I.55})$$

où \mathbf{a}' représente une fonction test vectorielle.

Pour la discrétisation du potentiel vecteur \mathbf{a} , on utilise les fonctions d'approximation d'arête sous la forme (I.48) en posant $\mathbf{u}=\mathbf{a}$. En reportant cette forme dans l'équation (I.55) et en appliquant la méthode de Galerkin, on obtient:

$$\sum_{i=1}^{Na} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{w}_j \cdot \text{rot } \mathbf{w}_i c_{a_i} dv + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{n}) ds = \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{j}_0 dv \quad j = 1, Na \quad (\text{I.56})$$

où "Na" représente le nombre d'arêtes du maillage.

A la frontière Γ , nous considérons les conditions aux limites $\mathbf{h} \times \mathbf{n} = 0$ ou $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$. La première est assurée au sens faible par l'annulation l'intégrale surfacique. La deuxième condition est imposée au sens fort par les fonctions d'approximation.

Les équations données par (I.56) peuvent être réécrites sous la forme matricielle suivante:

$$[\mathbf{S}_a][\mathbf{c}_a] = [\mathbf{F}_a] \quad (\text{I.57})$$

Les termes de la matrice de raideur \mathbf{S}_a et du vecteur source \mathbf{F}_a s'écrivent:

$$S_{a_i,j} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{w}_j \cdot \text{rot } \mathbf{w}_i dv \quad i, j = 1, Na \quad (\text{I.58a})$$

$$F_{a_j} = \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{j}_0 dv \quad j = 1, Na \quad (\text{I.58b})$$

Le vecteur $[\mathbf{c}_a]$ contient les circulations du potentiel vecteur \mathbf{a} sur les arêtes du maillage. Comme pour la formulation en potentiel scalaire la matrice de raideur est symétrique et définie positive. Afin de garantir l'unicité de la solution, on doit imposer une condition de jauge sur le potentiel vecteur. Pour une discrétisation par les éléments d'arête, la condition $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$ est la mieux adaptée. Une telle jauge est obtenue en annulant les circulations sur les arêtes d'un arbre. Cette technique permet de réduire les degrés de liberté du système.

3.3.2. Etude en magnétodynamique

Le but de cette étude est de calculer la distribution du champ magnétique et les courants induits dans les structures tridimensionnelles contenant des matériaux magnétiques et conducteurs. Les inducteurs sont caractérisés par une densité de courant imposée et connue. Pour obtenir de tels résultats, nous allons utiliser la méthode des éléments finis dans le cadre des formulations magnétodynamiques retenues (magnétique $\mathbf{t}-\Omega$ et électriques $\mathbf{a}-\varphi$ et \mathbf{a}^*).

Formulation magnétique $\mathbf{t}-\Omega$

Les distributions du champ magnétique et de la densité de courant induit dans le domaine conducteur (noté \mathcal{D}_c et limité par la surface Γ_c) sont déterminées par la résolution de l'équation (I.37). L'application de la formulation variationnelle se fait en prenant une fonction test vectorielle $\mathbf{u}' = \mathbf{t}' - \text{grad}\Omega'$. Après transformation, on obtient:

$$\int_{\mathcal{D}_c} \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{t}' \cdot \text{rot } \mathbf{t} + \mu (\mathbf{t}' - \text{grad}\Omega') \cdot \partial_t (\mathbf{t} - \text{grad}\Omega) dv - \int_{\Gamma_c} (\mathbf{t}' - \text{grad}\Omega') \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{n}) ds = 0 \quad (\text{I.59})$$

$\forall \mathbf{t}' \in \mathbf{E}_r(\mathcal{D}_c) \text{ et } \forall \Omega' \in \mathbf{E}_\Omega(\mathcal{D}_c)$

Cette équation peut être exprimée en deux parties relatives aux fonctions de test t' et Ω' , soit:

$$\int_{\mathcal{D}_c} \frac{1}{\sigma} \text{rot } t' \cdot \text{rot } t + \mu t' \cdot \partial_t (t - \text{grad } \Omega) dv - \int_{\Gamma_c} t' \cdot (e \times n) ds = 0 \quad \forall t' \in E_t(\mathcal{D}_c) \quad (\text{I.60a})$$

$$-\int_{\mathcal{D}_c} \mu t \cdot \text{grad } \Omega' + \mu \text{grad } \Omega' \cdot \text{grad } \Omega dv + \int_{\Gamma_c} \Omega' b \cdot n ds = 0 \quad \forall \Omega' \in E_{\Omega'}(\mathcal{D}_c) \quad (\text{I.60b})$$

La condition $e \times n = 0$ est vérifiée au sens faible en annulant le terme surfacique dans l'équation (I.60a). D'autre part, l'intégrale de surface dans l'équation (I.60b) disparaît assurant au sens faible la conservation de la composante normale de l'induction. Les conditions aux limites sur la composante tangentielle du champ magnétique et la composante normale de la densité de courant sont imposées au sens fort par le choix des fonctions d'approximation.

Dans les régions non-conductrices, nous utilisons la formulation magnétostatique t_0 - Ω . On retrouve ainsi le potentiel scalaire Ω dans tout le domaine \mathcal{D} , le potentiel vecteur t dans la région conductrice \mathcal{D}_c et le vecteur source t_0 dans la région inductrice \mathcal{D}_0 . A l'interface entre les deux régions (conductrice et non-conductrice), les deux formulations sont couplées naturellement dans le sens où la continuité de la composante tangentielle de h est assurée par un potentiel scalaire Ω continu et une composante tangentielle du potentiel vecteur t nulle.

Pour la discrétisation par éléments finis des équations (I.60a) et (I.60b), le potentiel scalaire Ω est donné par les éléments nodaux et le potentiel vecteur t par les éléments d'arête. En utilisant les formes discrètes de ces potentiels et en appliquant la méthode Galerkin, on obtient le système d'équations algébriques:

$$\sum_{i=1}^{Na} \int_{\mathcal{D}_c} \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } w_j \cdot \text{rot } w_i c_{ti} + \mu w_j \cdot w_i \frac{dc_{ti}}{dt} \right) dv - \sum_{k=1}^{Nn} \int_{\mathcal{D}_c} \mu w_j \cdot \text{grad } \lambda_k \frac{d\Omega_k}{dt} dv = 0 \quad j = 1, Na \quad (\text{I.61a})$$

$$\sum_{k=1}^{Na} \int_{\mathcal{D}_c} \mu w_k c_{tk} \cdot \text{grad } \lambda_j dv + \sum_{i=1}^{Nn} \int_{\mathcal{D}_0} \mu \text{grad } \lambda_j \cdot \text{grad } \lambda_i \Omega_i dv = \int_{\mathcal{D}_0} \mu t_0 \cdot \text{grad } \lambda_j dv \quad j = 1, Nn \quad (\text{I.61b})$$

En effectuant la discrétisation temporelle (la méthode d'Euler implicite (I.50)) des équations précédentes, on obtient le système matriciel suivant:

$$\begin{bmatrix} \Delta t S_t + T_t & C_{t-\Omega} \\ C_{t-\Omega}^T & S_\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ \Omega \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_\Omega \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_t & C_{t-\Omega} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ \Omega \end{bmatrix}_t \quad (\text{I.62})$$

Les termes des matrices définies dans ce système s'écrivent:

$$S_{ti,j} = \int_{\mathcal{D}_c} \frac{1}{\sigma} \text{rot } w_j \cdot \text{rot } w_i dv \quad i, j = 1, Na \quad (\text{I.63a})$$

$$T_{ti,j} = \int_{\mathcal{D}_c} \mu w_i \cdot w_j dv \quad i, j = 1, Na \quad (\text{I.63b})$$

$$C_{t-\Omega,i,j} = -\int_{\mathcal{D}_c} \mu w_i \cdot \text{grad } \lambda_j dv \quad i = 1, Na ; j = 1, Nn \quad (\text{I.63c})$$

Les termes de la matrice S_Ω et du vecteur F_Ω sont donnés, respectivement, par les expressions (I.54a) et (I.54b). Les degrés de liberté du problème sont le nombre de noeuds du domaine étudié et le nombre d'arêtes dans la région conductrice. La matrice du système est symétrique et

définie positive. Afin de garantir l'unicité de la solution, il faut imposer la condition de jauge $t \cdot \mathbf{w} = 0$ dans le domaine conducteur. Comme pour la formulation magnétostatique en potentiel \mathbf{a} , cette condition est réalisée par la technique de l'arbre.

Formulation électrique \mathbf{a} - φ

Dans le domaine conducteur, l'équation à résoudre est donnée par (I.40). Avec une fonction test vectorielle $\mathbf{u}' = \mathbf{a}' + \mathbf{grad}\varphi'$, l'utilisation de la formulation variationnelle donne:

$$\int_{\mathcal{D}_c} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{a}' \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a} + \sigma (\mathbf{a}' + \mathbf{grad}\varphi') \cdot (\partial_t \mathbf{a} + \mathbf{grad}\varphi) dv + \int_{\Gamma_c} (\mathbf{a}' + \mathbf{grad}\varphi') \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{n}) ds = 0 \quad (I.64)$$

$$\forall \mathbf{a}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}'}(\mathcal{D}_c) \text{ et } \forall \varphi' \in \mathbf{E}_{\varphi'}(\mathcal{D}_c)$$

Il est possible de réécrire cette équation en deux parties relatives aux fonctions test \mathbf{a}' et φ' :

$$\int_{\mathcal{D}_c} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{a}' \cdot \mathbf{rot} \mathbf{a} + \sigma \mathbf{a}' \cdot (\partial_t \mathbf{a} + \mathbf{grad}\varphi) dv + \int_{\Gamma_c} \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{n}) ds = 0 \quad \forall \mathbf{a}' \in \mathbf{E}_{\mathbf{a}'}(\mathcal{D}_c) \quad (I.65a)$$

$$\int_{\mathcal{D}_c} \sigma \partial_t \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}\varphi' + \sigma \mathbf{grad}\varphi' \cdot \mathbf{grad}\varphi dv + \int_{\Gamma_c} \varphi' \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad \forall \varphi' \in \mathbf{E}_{\varphi'}(\mathcal{D}_c) \quad (I.65b)$$

La prise en compte de la condition limite $\mathbf{h} \times \mathbf{n} = 0$ annule le terme surfacique dans l'équation (I.65a). D'autre part, si on est présence de la condition $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$. Elle peut être vérifiée au sens faible en annulant l'intégrale de surface dans (I.65b). Les conditions aux limites sur les composantes normale de \mathbf{b} et tangentielle de \mathbf{e} sont assurées au sens fort par le choix des fonctions d'approximation.

Dans le domaine non-conducteur, nous utilisons le potentiel vecteur \mathbf{a} . Son couplage avec la formulation \mathbf{a} - φ est naturel. En effet, dans les deux cas la composante normale de \mathbf{b} est assurée par la continuité de la composante tangentielle du potentiel vecteur \mathbf{a} .

Pour la discrétisation des équations (I.65a) et (I.65b), le potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} est exprimé par les éléments d'arête et le potentiel scalaire électrique φ par les éléments nodaux. En appliquant la méthode de Galerkin, on obtient le système d'équations suivant:

$$\sum_{i=1}^{N_a} \int_{\mathcal{D}_c} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_i c_{ai} dv + \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i \frac{dc_{ai}}{dt} dv + \sum_{k=1}^{N_n} \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{grad} \lambda_k \varphi_k dv = \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{j}_0 dv \quad j = 1, N_a \quad (I.66a)$$

$$\sum_{k=1}^{N_a} \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \frac{dc_{ak}}{dt} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{grad} \lambda_j dv + \sum_{i=1}^{N_n} \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{grad} \lambda_j \cdot \mathbf{grad} \lambda_i \varphi_i dv = 0 \quad j = 1, N_n \quad (I.66b)$$

La discrétisation temporelle de ces équations, nous donne le système suivant:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_a + \mathbf{T}_a / \Delta t & \mathbf{C}_{\mathbf{a}-\varphi} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{a}-\varphi}^T & \Delta t \mathbf{S}_{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_a \\ \varphi \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ 0 \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_a / \Delta t & 0 \\ \mathbf{C}_{\mathbf{a}-\varphi}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_a \\ \varphi \end{bmatrix}_t \quad (I.67)$$

Les termes des matrices définies dans ce système ont les expressions suivantes:

$$S_{\varphi i,j} = \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{grad} \lambda_j \cdot \mathbf{grad} \lambda_i dv \quad i, j = 1, Nn \quad (I.68a)$$

$$T_{ai,j} = \int_{\mathcal{D}_c} \sigma w_i \cdot w_j dv \quad i, j = 1, Na \quad (I.68b)$$

$$C_{a-\varphi i,j} = \int_{\mathcal{D}_c} \sigma w_i \cdot \mathbf{grad} \lambda_j dv \quad i = 1, Na ; j = 1, Nn \quad (I.68c)$$

Les termes de la matrice S_a et du vecteur F_a sont donnés, respectivement, par les expressions (I.58a) et (I.58b). Les degrés de liberté du système correspondent au nombre d'arêtes du maillage et au nombre de noeuds dans la région conductrice. La matrice du système (I.67) est symétrique et définie positive. Comme pour la formulation magnétostatique en potentiel vecteur, nous utilisons la technique de l'arbre pour assurer l'unicité de la solution.

Formulation électrique a^*

Dans ce cas, le potentiel vecteur électrique modifié a^* est utilisé dans le domaine conducteur et on résout l'équation (I.39). La formulation variationnelle est obtenue en utilisant une fonction test vectorielle $u' = a^{*'}; ce qui nous donne:$

$$\int_{\mathcal{D}_c} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} a^{*'} \cdot \mathbf{rot} a^* + \sigma a^{*'} \cdot \partial_t a^* dv + \int_{\Gamma_c} a^{*'} \cdot (h \times n) ds = 0 \quad \forall a^{*'} \in E_{a^*}(\mathcal{D}_c) \quad (I.69)$$

Pour le domaine non-conducteur, nous utilisons la formulation en potentiel vecteur a dont la forme variationnelle est donnée par l'équation (I.55). A l'interface entre les deux régions (conductrice et non-conductrice), la continuité de la composante tangentielle de h est obtenue en annulant les termes de surface dans (I.69) et (I.55).

La discrétisation de l'équation précédente est obtenue en appliquant la méthode de Galerkin et en utilisant les éléments d'arête pour exprimer le potentiel vecteur modifié. Cela donne:

$$\sum_{i=1}^{Na} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} w_j \cdot \mathbf{rot} w_i c_{a^* i} dv + \int_{\mathcal{D}_c} \sigma w_j \cdot w_i \frac{dc_{a^* i}}{dt} dv = \int_{\mathcal{D}_0} w_j \cdot j_0 dv \quad j = 1, Na \quad (I.70)$$

La discrétisation temporelle de ces équations donne le système matriciel suivant:

$$\left[S_a + T_a / \Delta t \right] \left[c_{a^*} \right]_{t+\Delta t} = \left[F_a \right]_{t+\Delta t} + \left[T_a / \Delta t \right] \left[c_{a^*} \right]_t \quad (I.71)$$

Les termes des matrices S_a et T_a et du vecteur F_a sont donnés, respectivement, par les expressions (I.58a), (I.68b) et (I.58b). La résolution de ce système ne nécessite pas de jauge pour la région conductrice. Cependant, on doit définir une condition de jauge pour les régions non-conductrices. Dans la suite de ce chapitre, nous verrons qu'il est possible, sous certaines conditions, de résoudre le système sans imposer de jauge.

3.3.3. Problème non-linéaire

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que la discrétisation des formulations conduit à un système dont les termes de la matrice dépendent de la caractéristique du milieu. La méthode des éléments finis permet d'inclure les éventuelles non-linéarités liées aux milieux. Dans notre étude, seule la saturation des matériaux magnétiques est considérée par la relation $\mu = \mu(|h|)$. Généralement, cette donnée du problème est fournie par le constructeur sous la forme d'une série de points de mesure. Pour la modélisation numérique, on doit disposer d'une expression continue. A cet effet, plusieurs méthodes d'approximation de cette relation ont été développées [83]. Pour la résolution du système non-linéaire, nous avons utilisé la méthode itérative de Newton-Raphson [47].

A titre d'exemple, son application à la formulation magnétostatique en potentiel vecteur (I.57), nous donne pour l'itération $i+1$:

$$[S_a + S_a^{NL}]^i [\Delta c_a]^{i+1} = [F_a] - [S_a]^i [c_a]^i \quad \text{avec} \quad [\Delta c_a]^{i+1} = [c_a]^{i+1} - [c_a]^i \quad (\text{I.72})$$

Les termes de la matrice S_a^{NL} sont donnés par l'expression suivante:

$$S_{ai,j}^{NL} = \frac{\partial S_{ai,k}}{\partial c_{aj}} c_{ak} = \int_{\Omega} 2 \frac{\partial \mu^{-1}}{\partial |b|^2} (b \cdot \text{rot } w_j) (\text{rot } w_i \cdot b) dv \quad i, j = 1, Na \quad (\text{I.73})$$

Le facteur $\partial \mu^{-1} / \partial |b|^2$ est calculé par l'approximation de la courbe de saturation. On note que la matrice du système (I.72) reste symétrique et définie positive.

3.3.4. Résolution du système matriciel

Méthodes d'inversion et techniques de stockage

La résolution des équations du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis conduit à des systèmes matriciels caractérisés par un grand nombre d'inconnues. Il est donc nécessaire d'utiliser des techniques d'inversion performantes. Comme nous l'avons vu précédemment, la matrice du système possède certaines propriétés (creuses, symétriques, définies positives, ...) qui peuvent être exploitées afin d'alléger la résolution. Pour un problème donné, le choix de la méthode d'inversion et de la technique de stockage dépend de ces propriétés. Pour l'inversion de la matrice, on peut distinguer les méthodes directes et indirectes (itératives). Le principe d'une méthode directe (Gauss, Crout, Cholesky, ...) est d'utiliser une décomposition simplifiée du système initial. Son application exige une matrice régulière (la matrice inverse existe). La méthode indirecte (gradient conjugué, ...) consiste à améliorer une solution de départ par des itérations successives. La table (I.1) résume, à travers les propriétés de la matrice du système, les méthodes d'inversion et les techniques de stockage qui peuvent être utilisées.

	Méthodes directes		Méthode indirecte
	Crout	Cholesky	gradient conjugué
Stockage	ligne de ciel	ligne de ciel	morse
Propriétés de la matrice	symétrique	symétrique et définie positive	symétrique

Table I.1. Méthodes d'inversion: stockage et propriétés de la matrice

Le stockage en ligne de ciel consiste à garder les termes des lignes de la matrice à partir du premier terme non nul; celui en morse ne retient que les termes non nuls de la matrice. De ce fait, il est le plus performant du point de vue capacité mémoire.

Méthode du gradient conjugué et condition de jauge

Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, les formulations qui utilisent des potentiels vecteurs nécessitent la définition d'une jauge. Dans le cas d'une condition du type $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$ avec une discrétisation par des éléments d'arête, on utilise la technique de l'arbre qui permet la réduction des degrés de liberté du système à résoudre. Cependant, il est intéressant d'observer le comportement numérique de la méthode du gradient conjugué sans imposer de jauge.

Plusieurs travaux de recherche ont été menés avec comme objet l'utilisation de la jauge et l'influence du choix de l'arbre sur la précision des résultats. Ainsi, il a été constaté qu'un problème non jaugé converge lorsque le calcul est effectué en double précision. Cette convergence est nettement plus rapide par rapport à une résolution du même problème avec la jauge [66]. En fait, la convergence des systèmes non jaugés dépend du vecteur source et de sa discrétisation. L'algorithme converge si le système est compatible (matrice et terme source du même rang) [116]. Avec un terme source exprimé en \mathbf{j}_0 le système n'est pas compatible. On peut assurer sa compatibilité en dérivant \mathbf{j}_0 d'un vecteur \mathbf{t}_0 tel que $\text{rot } \mathbf{t}_0 = \mathbf{j}_0$ avec \mathbf{t}_0 discrétisé par les éléments d'arête. Une telle approche permet d'améliorer considérablement la convergence de la méthode du gradient conjugué [107][116]. Par ailleurs, en magnétodynamique, la formulation $\mathbf{a}-\phi$ non jaugé converge plus rapidement qu'une formulation \mathbf{a}^* non jaugé. Dans le premier cas, la structure de la matrice du système est mieux adaptée à un pré-conditionnement du type Cholesky incomplet [112].

En ce qui concerne l'influence d'un arbre arbitraire, il a été constaté qu'un tel choix n'affecte pas le calcul d'une valeur globale, par contre il influe sur le nombre d'itérations [82].

3.4. Formulation hybride $a-\Omega$

Dans l'étude des formulations magnétodynamiques, nous avons constaté que le couplage entre les régions conductrices et non-conductrices est naturel pour les formulations $(a-\varphi, a)$, (a^*, a) , et $(t-\Omega, t_0-\Omega)$. Cela est dû aux propriétés de continuité des potentiels vecteur ou scalaire au niveau de l'interface. Pour le potentiel vecteur a , la continuité de sa composante tangentielle impose fortement la continuité composante normale de b . En revanche, la continuité de la composante tangentielle de h est assurée au sens faible. Dans le cas du potentiel scalaire Ω , sa continuité impose fortement celle de la composante tangentielle de h ; mais la composante normale de b est vérifiée au sens faible par les formes intégrales.

D'autres possibilités de couplage entre les formulations peuvent être envisagées. Cela donne lieu à des formulations dites hybrides [11][24][60][64][94][103][108]. Dans ces approches, les potentiels scalaire Ω et vecteur a sont utilisés simultanément pour la résolution des équations du champ électromagnétique dans le domaine d'étude \mathcal{D} . De ce fait, certaines parties du domaine sont modélisées par une formulation électrique et d'autres par une formulation magnétique. Le couplage entre les deux parties doit être assuré par les conditions de transmission à l'interface.

Dans ce contexte, plusieurs travaux ont été menés pour développer des formulations hybrides en magnétodynamique ou en magnétostatique. Parmi ces travaux, on trouve l'utilisation du potentiel vecteur modifié a^* dans les régions conductrices et du potentiel scalaire magnétique Ω dans les régions non-conductrices [11]. Dans cette étude, le potentiel vecteur est discrétisé par les éléments nodaux. A l'interface (conducteur/non-conducteur), la composante normale de la densité de courant induit est annulée au sens faible. Par conséquent, il n'est plus nécessaire d'imposer la condition $a^* \cdot n = 0$. De plus, l'unicité de la solution est assurée sans condition de jauge pour le potentiel vecteur modifié. La formulation $a-\varphi$ dans les conducteurs et le potentiel Ω dans l'air a été aussi développée dans [24].

Dans le cas de la magnétostatique, on trouve la formulation hybride $a-\Omega$. Le potentiel vecteur est discrétisé par les fonctions d'approximation nodales dans les régions ferromagnétiques et le potentiel scalaire est utilisé dans l'air [64]. Les résultats obtenus par ce travail donnent une distribution de champ déformée au niveau de l'interface (fer/air). Cependant, les résultats obtenus au niveau global (calcul du flux) sont comparables à ceux obtenus par la formulation en potentiel vecteur magnétique a .

Dans notre étude, nous avons développé la formulation hybride $a-\Omega$. Elle peut être appliquée pour des problèmes magnétostatiques ou magnétodynamiques. Par rapport aux travaux mentionnés précédemment, notre approche utilise les éléments d'arête pour exprimer le potentiel vecteur magnétique [108].

3.4.1. Couplage

Le couplage entre la formulation en potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} et celle en potentiel scalaire magnétique Ω est obtenu en assurant les conditions de transmission à l'interface. Le domaine d'étude \mathcal{D} est divisé en deux régions notées \mathcal{D}_a et \mathcal{D}_Ω (les indices font référence au potentiel utilisé). L'interface qui les sépare est notée Γ_i (Fig. I.2). Les sources du champ peuvent appartenir à \mathcal{D}_a ou \mathcal{D}_Ω . Dans ce dernier cas, nous utilisons la formulation \mathbf{t}_0 - Ω avec la possibilité qu'une partie de la frontière de la région inductrice soit confondue avec Γ_i . Les conditions de transmission du champ et de l'induction sont données par les relations suivantes:

$$(\mathbf{h}_a - \mathbf{h}_\Omega) \times \mathbf{n}_a \Big|_{\Gamma_i} = (\mathbf{h}_a - (\mathbf{t}_0 - \mathbf{grad}\Omega)) \times \mathbf{n}_a \Big|_{\Gamma_i} = 0 \quad (\text{I.74a})$$

$$(\mathbf{b}_a - \mathbf{b}_\Omega) \cdot \mathbf{n}_\Omega \Big|_{\Gamma_i} = (\mathbf{rot}\ \mathbf{a} - \mathbf{b}_\Omega) \cdot \mathbf{n}_\Omega \Big|_{\Gamma_i} = 0 \quad (\text{I.74b})$$

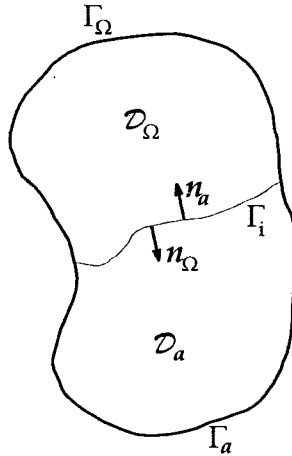


Fig. I.2. Domaine d'étude

Les normales sortantes notées \mathbf{n}_a et \mathbf{n}_Ω sont de signes opposés. Pour la suite, nous posons $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_a = -\mathbf{n}_\Omega$. Le couplage entre les deux formulations est fait par les intégrales surfaciques qui apparaissent dans la forme variationnelle des équations. Pour le potentiel vecteur \mathbf{a} , nous avons une intégrale de surface en fonction de $\mathbf{h} \times \mathbf{n}$ dans les équations (I.55), (I.65a) et (I.69). Pour le potentiel scalaire Ω , nous avons l'intervention de $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$ dans les équations (I.51) et (I.60b). Ces intégrales sont définies sur l'interface Γ_i et sur les frontières Γ_a et Γ_Ω . Compte tenu des conditions aux limites considérées, les intégrales relatives aux surfaces externes Γ_a et Γ_Ω s'annulent.

En vérifiant la condition (I.74a) pour la formulation en potentiel vecteur magnétique, le terme surfacique peut être réécrit sous la forme:

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{h}_a \times \mathbf{n}_a) ds = \int_{\Gamma_i} \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{t}_0 \times \mathbf{n}_i) ds - \int_{\Gamma_i} \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{grad}\Omega \times \mathbf{n}_i) ds \quad (\text{I.75})$$

Lorsque la frontière de la région inductrice fait partie de l'interface Γ_i avec $\mathbf{t}_0 \times \mathbf{n}_i \neq 0$, l'intégrale de surface en \mathbf{t}_0 apparaît comme un terme source dans le système matriciel.

Pour la formulation en potentiel scalaire magnétique, l'utilisation de la condition (I.74b), permet de réécrire l'intégrale de surface comme suit:

$$\int_{\Gamma_i} \Omega' \mathbf{b}_{\Omega} \cdot \mathbf{n}_{\Omega} ds = - \int_{\Gamma_i} \Omega' \mathbf{rot} \mathbf{a} \mathbf{n}_i ds \quad (\text{I.76})$$

L'utilisation de l'identité vectorielle:

$$\mathbf{rot}(\Omega' \mathbf{a}) = \mathbf{grad} \Omega' \times \mathbf{a} + \Omega' \mathbf{rot} \mathbf{a} \quad (\text{I.77})$$

permet de transformer (I.76) en:

$$- \int_{\Gamma_i} \Omega' \mathbf{rot} \mathbf{a} \mathbf{n}_i ds = - \oint_{\gamma_i} \Omega' \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_i} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{grad} \Omega' \times \mathbf{n}_i) ds \quad (\text{I.78})$$

où γ_i représente le contour fermé de l'interface Γ_i . Si cette dernière est une surface fermée, l'intégrale de contour dans la relation précédente s'annule parce qu'il n'y a pas de contour englobant la surface. Il en est de même, si l'interface passe par des plans de symétrie avec des conditions du type $\mathbf{a} \times \mathbf{n} = 0$ ou $\Omega = 0$. De telles conditions sont rencontrées dans la plupart des applications [58]. De ce fait, cette intégrale n'est pas évaluée. Dans d'autres situations, il faut la prendre en considération.

En comparant les intégrales de surface dans (I.75) et (I.78), nous remarquons qu'elles sont similaires (au signe près). Par conséquent, le couplage des deux formulations est obtenu d'une manière symétrique. Ce couplage est faible car il est basé sur la formulation variationnelle. En effet, la continuité des composantes du champ et de l'induction n'est assurée que par une sommation globale sur l'interface.

3.4.2. Discrétisation

La discrétisation de la formulation hybride passe par l'évaluation des intégrales de surface données par les expressions (I.75) et (I.78). Le potentiel scalaire dans l'intégrale de surface (I.75) est donné par les éléments nodaux. En appliquant la méthode de Galerkin avec des fonctions test définies sur les arêtes, nous obtenons la relation suivante:

$$I_{a-\Omega j} = - \sum_{k=1}^{N_n} \int_{\Gamma_i} w_j \cdot (\mathbf{grad} \lambda_k \times \mathbf{n}_i) ds \quad j = 1, N_a \quad (\text{I.79})$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme d'une matrice $C_{a-\Omega}$ dite de couplage entre les potentiels \mathbf{a} et Ω :

$$C_{a-\Omega j,k} = - \int_{\Gamma_i} w_j \cdot (\mathbf{grad} \lambda_k \times \mathbf{n}_i) ds \quad j = 1, N_a; k = 1, N_n \quad (\text{I.80})$$

Pour la discrétisation de l'intégrale de surface donnée par la relation (I.78), le potentiel vecteur est exprimé par les éléments d'arête et les fonctions test sont définies aux noeuds. Cela nous donne la matrice transposée de $C_{a-\Omega}$ avec un signe opposé.

Le calcul de la matrice de couplage est effectué par une intégration numérique des fonctions en trois dimensions sur les éléments de la surface Γ_i . Pour un maillage en tétraèdres, ces éléments sont des triangles. Les termes de la matrice $C_{a-\Omega}$ sont déterminés par une somme des intégrales élémentaires sur les tétraèdres qui sont en contact avec l'interface. En notant $C_{a-\Omega}^e$ la matrice élémentaire, nous pouvons réécrire la relation (I.80) sous la forme:

$$C_{a-\Omega,j,k} = \sum_{e=1}^{N_i} C_{a-\Omega}^e = - \sum_{e=1}^{N_i} \int_{\Delta^e} w_{j^*} (\mathbf{grad} \lambda_k \times \mathbf{n}_i) ds \quad j=1, N_a; k=1, N_n \quad (I.81)$$

" N_i " et Δ^e représentent, respectivement, le nombre et la surface des triangles.

Afin de faciliter le calcul, l'intégration est ramenée dans le système de coordonnées de référence (voir annexe 1). En intégrant sur un triangle, nous obtenons la matrice élémentaire de couplage de dimensions (3,3) :

$$C_{a-\Omega}^e = \frac{k}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } k = (-1)^{ns} \text{sign}(\det) \quad (I.82)$$

" ns " est un entier donné par le pointeur du noeud du tétraèdre en dehors de l'interface Γ_i . En effet, pour l'élément triangulaire concerné, la direction de la normale est déterminée par le gradient de la fonction d'approximation liée à ce noeud. On note que la matrice $C_{a-\Omega}^e$ est indépendante de la surface de l'élément. Les détails de son calcul sont présentés dans l'annexe 2.

Après cette discrétisation des intégrales de surface, considérons maintenant leurs intervention dans les systèmes matriciels pour les problèmes magnétostatiques et magnétodynamiques.

Cas de la magnétostatique

On résout les systèmes matriciels (I.53) et (I.57), respectivement, dans les domaines \mathcal{D}_a et \mathcal{D}_Ω . En introduisant la matrice de couplage, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{bmatrix} S_a & C_{a-\Omega} \\ C_{a-\Omega}^T & -S_\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a + F_i \\ -F_\Omega \end{bmatrix} \quad (I.83)$$

Les termes des matrices S_a , S_Ω et $C_{a-\Omega}$ sont donnés, respectivement, par les expressions (I.58a), (I.54a) et (I.80) et ceux des vecteurs F_a et F_Ω sont calculés, respectivement, par les expressions (I.58b) et (I.54b).

Lorsque la région inductrice est en contact avec l'interface Γ_i , le vecteur F_i doit être évalué. Ses termes s'écrivent:

$$F_i = - \int_{\Gamma_i} w_{j^*} (\mathbf{t}_0 \times \mathbf{n}_i) ds \quad j=1, N_a \quad (I.84)$$

Cas de la magnétodynamique

Le couplage entre les formulations magnétodynamiques (magnétique t - Ω et électrique a - φ ou a^*) est obtenu de la même manière en assurant la continuité du champ et de l'induction. Toutefois, si l'interface de couplage est confondue avec la frontière (ou une partie) de la région conductrice, il faut s'assurer qu'aucun courant ne sort de cette région. Autrement, $t \times n = 0$ pour la formulation magnétique et $j \cdot n = 0$ pour la formulation électrique. La première condition est assurée au sens faible en annulant la première intégrale de surface dans la relation (I.75). La deuxième est implicite lorsqu'on utilise le potentiel vecteur modifié dans la région conductrice. Pour la formulation a - φ , elle est assurée au sens faible.

En utilisant (I.62) et (I.67), le système matriciel obtenu pour un couplage (t - Ω et a - φ) est le suivant:

$$\begin{bmatrix} S_a + T_a/\Delta t & C_{a-\varphi} & 0 & C_{a-\Omega} \\ C_{a-\varphi}^T & \Delta t S_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta t S_t - T_t & -C_{t-\Omega} \\ C_{a-\Omega}^T & 0 & -C_{t-\Omega}^T & -S_\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \varphi \\ c_t \\ \Omega \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} F_a + F_i \\ 0 \\ 0 \\ F_\Omega \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_a/\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ C_{a-\varphi}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_t & -C_{t-\Omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \varphi \\ c_t \\ \Omega \end{bmatrix}_t \quad (I.85)$$

On note que la région conductrice peut se trouver dans le domaine \mathcal{D}_a ou \mathcal{D}_Ω . Il en est de même pour la région inductrice.

Pour un couplage (t - Ω, a^*), le système matriciel est obtenu en combinant (I.62) et (I.71):

$$\begin{bmatrix} S_a + T_a/\Delta t & 0 & C_{a-\Omega} \\ 0 & -\Delta t S_t - T_t & -C_{t-\Omega} \\ C_{a-\Omega}^T & -C_{t-\Omega}^T & -S_\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{a^*} \\ c_t \\ \Omega \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} F_a + F_i \\ 0 \\ F_\Omega \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_a/\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & -T_t & -C_{t-\Omega} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{a^*} \\ c_t \\ \Omega \end{bmatrix}_t \quad (I.86)$$

Les deux systèmes précédents donnent le couplage dans un cas général pour deux formulations magnétodynamiques. Toutefois, en partant de ces systèmes, il est possible de retrouver d'autres types de couplages tels que: la formulation magnétodynamique et magnétostatique. Il suffit alors de mettre à zéro les potentiels qui n'interviennent pas dans la résolution du problème.

Les systèmes matriciels (I.83), (I.85) et (I.86) ont une matrice symétrique mais non définie positive. Pour les résoudre, on utilise la méthode du gradient conjugué avec un pré-conditionnement du type Crout. Il est aussi possible d'utiliser la méthode de Cholesky adaptée qui est applicable lorsque les termes qui rendent la matrice non définie positive sont connus [45].

4. Applications

Les formulations magnétostatiques présentées dans les paragraphes précédents (potentiel scalaire Ω et potentiel vecteur a) sont testées sur deux exemples simples. Les résultats obtenus sont confrontés avec ceux de la formulation hybride a - Ω . Cette comparaison est faite au niveau des grandeurs locales et globales. Dans le premier exemple, nous observons l'influence d'un saut de perméabilité sur la distribution de l'induction dans le cas de l'approche hybride. Dans le deuxième, nous mettons en évidence l'apport de la formulation hybride pour le calcul d'une grandeur globale (énergie magnétique). Dans ce cas, les résultats numériques sont comparés avec une valeur analytique.

4.1. Cube de fer dans un champ magnétique uniforme

Dans cette application, on s'intéresse à la distribution du champ magnétique dans un cube de fer plongé dans un champ magnétique uniforme et constant. Le but est de visualiser la distribution de l'induction obtenue par la formulation hybride lorsque l'interface est située sur une séparation fer/air. Cette distribution est comparée avec celle obtenue par le potentiel scalaire magnétique Ω . Dans ce problème, la structure du domaine est constituée en majorité d'air. De ce fait, lorsque la formulation a - Ω est appliquée, le potentiel scalaire, plus économique du point de vue nombre d'inconnues, est employé dans l'air et le potentiel vecteur est utilisé dans le fer.

4.1.1. Définition du problème

Le cube de fer est placé dans l'espace constitué de l'air où règne un champ magnétique uniforme [64]. En exploitant les symétries, on se ramène à 1/8 de la structure initiale. La géométrie et les caractéristiques du problème sont représentées par la figure (I.3).

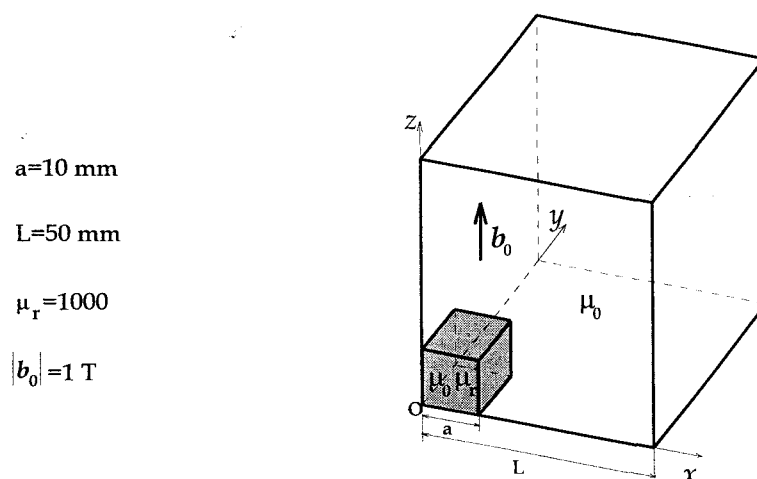


Fig. I.3. Structure étudiée

La caractéristique du fer est supposée linéaire. L'induction magnétique b_0 est imposée suivant l'axe oz par des conditions aux limites sur les potentiels utilisés.

Sur les plans de symétrie $x=0$ et $y=0$ et les plans $x=L$ et $y=L$, nous avons la condition $b \cdot n = 0$. Sur les plans $z=0$ et $z=L$, nous avons $h \times n = 0$. Afin d'imposer le module du champ, nous utilisons les conditions sur le potentiel scalaire: $\Omega=0$ sur $z=0$ et $\Omega = |b_0|L/\mu_0$ sur $z=L$.

4.1.2. Résultats

Le problème est modélisé par le potentiel scalaire Ω et la formulation hybride $a-\Omega$. Pour cette dernière, l'interface est située sur la séparation fer/air et on résout le système donné par (I.83). Pour le potentiel scalaire, on résout le système matriciel (I.53) avec un terme source exprimé en fonction des conditions aux limites sur le plan $z=L$. Afin d'assurer l'unicité de la solution, nous avons utilisé la technique de l'arbre dans le domaine modélisé avec le potentiel vecteur a . Les systèmes matriciels ont été résolus par la méthode du gradient conjugué.

La figure (I.4) représente le maillage de la structure; il comporte 8081 éléments, 1693 noeuds et 10128 arêtes. A partir des valeurs du potentiel scalaire et des circulations du potentiel vecteur, nous pouvons déduire l'induction magnétique. Cette dernière est tracée sur les plans $x=0$, $y=0$ et $z=L$ pour la formulation Ω (Fig. I.5.).

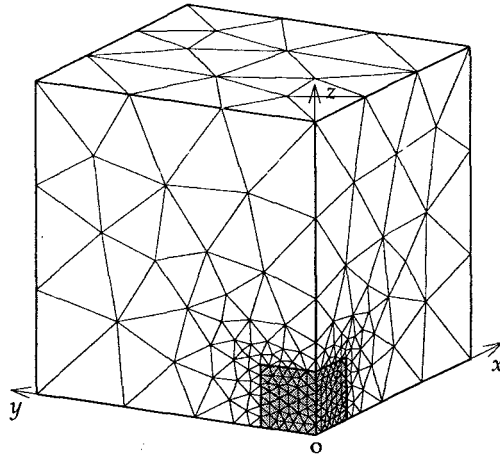


Fig. I.4. Maillage du domaine étudié

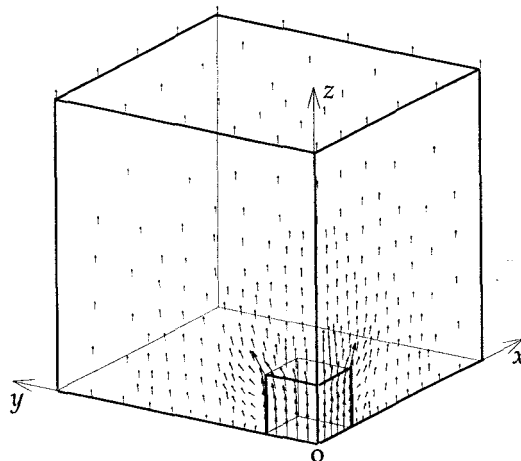


Fig. I.5. Distribution de l'induction b en $x=0$, $y=0$ et $z=L$

En prenant comme référence la distribution de l'induction obtenue par le potentiel scalaire Ω dans le plan $x=0$ (Fig. I.6a.), nous avons tracé, dans les mêmes conditions, la distribution obtenue par la formulation $a-\Omega$ (Fig. I.6b.). Nous remarquons que cette distribution est déformée au voisinage de l'interface fer/air et principalement au niveau du segment $y=a$. Par ailleurs, un calcul effectué avec un maillage plus fin que celui présenté ici n'a amené aucune amélioration sur le tracé de l'induction. Ce qui montre que la déformation à l'interface est indépendante du maillage. Ce phénomène peut être expliqué par le fait que le couplage entre les formulations a et Ω est assuré, pour cet exemple, par la composante normale de l'induction b dans le fer et la composante tangentielle du champ h dans l'air. Ces deux quantités sont très faibles au voisinage de l'interface à $y=a$. En effet, l'induction dans le fer est pratiquement tangentielle et le champ magnétique dans l'air est pratiquement normal. D'autre part, la formulation hybride n'assure la continuité de ces composantes qu'au sens faible.

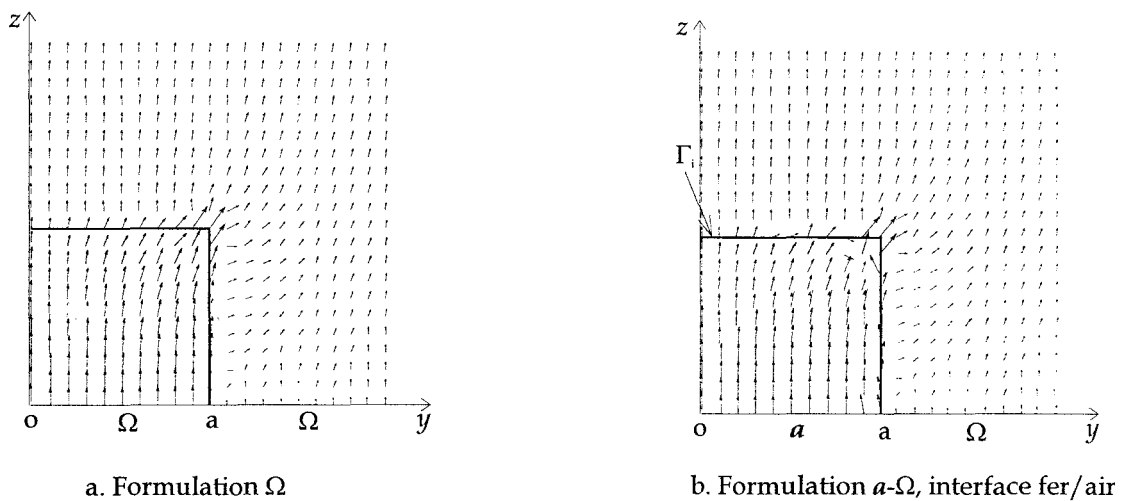


Fig. I.6. Distribution de l'induction b en $x=0$

Ce problème de déformation de l'induction disparaît dès que l'interface est déplacée dans l'air [64]. Dans ce cas, on a la même perméabilité de part et d'autre de la séparation entre les formulations a et Ω . La distribution de l'induction qui correspond à ce calcul est donnée par la figure (I.7). A partir de ce résultat on peut conclure que l'utilisation de la formulation hybride nécessite la disposition de l'interface dans un milieu de perméabilité constante. Dans de telles conditions, les distributions du champ ou de l'induction sont correctes.

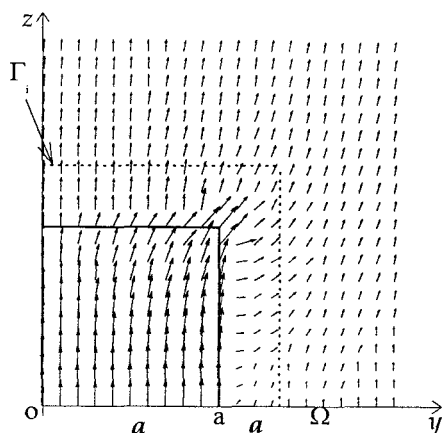


Fig. I.7. Distribution de l'induction b en $x=0$ (formulation a - Ω , interface air/air)

Dans ce problème, nous avons constaté que l'emploi de la formulation hybride a - Ω avec l'utilisation des éléments arête pour discrétiser le potentiel vecteur n'élimine pas les déformations observées au niveau de la distribution de l'induction à l'interface fer/air. De ce fait, nous avons abouti aux mêmes résultats, au niveau local, que ceux obtenus par l'utilisation des éléments nodaux [64]. En conclusion, pour obtenir une distribution correcte des grandeurs locales dans cet exemple, il faut soit utiliser le même potentiel dans tout le domaine ou placer l'interface dans l'air pour la formulation hybride.

4.2. Cube conducteur avec une densité de courant uniforme

Dans cet exemple, les formulations magnétostatiques en potentiel vecteur a et en potentiel scalaire t_0 - Ω ainsi que l'approche hybride a - Ω sont testées sur un cube conducteur avec une densité de courant uniforme et constante. Dans ce cas, nous disposons de la valeur analytique de l'énergie magnétique emmagasinée dans le cube. Cela permet de comparer la précision des résultats obtenus par les différentes formulations.

4.2.1. Définition du problème

La figure (I.8) représente la structure étudiée. Il s'agit d'un cube conducteur avec une densité de courant uniforme et constante j_0 dirigée suivant l'axe ox [37]. Les conditions aux limites sont telles qu'aucun flux ne sort du cube i.e. $b \cdot n = 0$ sur tous les plans externes. Cela implique $c_a = 0$ pour la formulation en potentiel vecteur a . Dans le cas de la formulation t_0 - Ω , le vecteur source t_0 est défini par $\text{rot } t_0 = j_0$. En partant de cette relation, la direction de t_0 est suivant oz et son module est égal à $|j_0|y$.

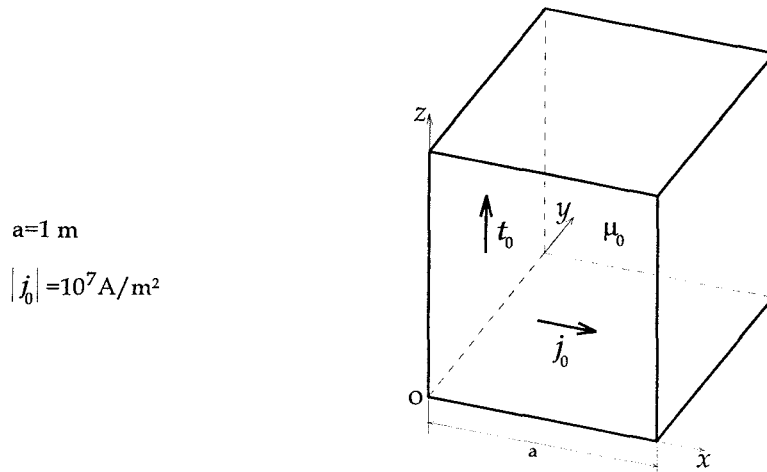


Fig. I.8. Structure étudiée

Dans le cas de la formulation hybride, le cube est divisé en deux parties de dimensions égales tel que le montre la figure (I.9). On note que la position de l'interface par rapport au vecteur \mathbf{t}_0 donne $\mathbf{t}_0 \times \mathbf{n}_i = 0$. Par conséquent, le terme source F_i défini dans le système matriciel (I.83) n'est pas évalué.

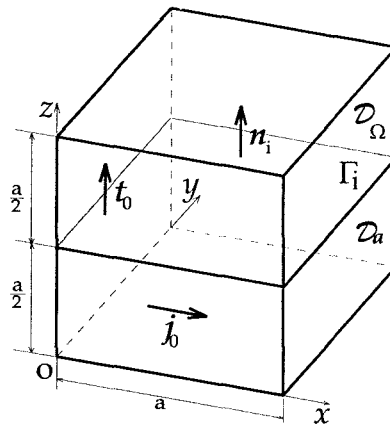


Fig. I.9. Définition des domaines pour la formulation hybride

4.2.2. Résultats

Le problème est résolu par trois formulations (potentiel scalaire t_0 - Ω , potentiel vecteur a , hybride a - Ω). Le but est de comparer la valeur de l'énergie obtenue par ces formulations. Pour la formulation a , nous avons utilisé la technique de l'arbre afin d'assurer l'unicité de la solution. La résolution est effectuée par la méthode du gradient conjugué. Dans cet exemple, nous avons mené les calculs pour deux maillages M1 et M2 comportant, respectivement, 456 et 3572 éléments. La figure (I.10) représente le maillage M2.

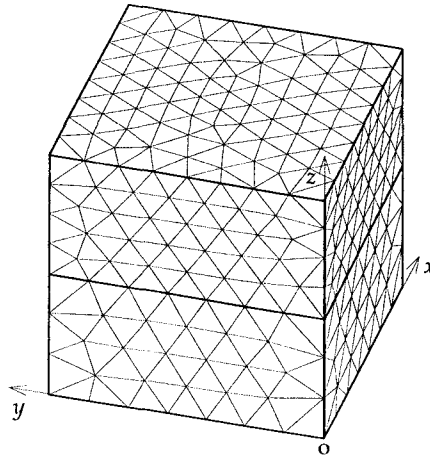


Fig. I.10. Maillage du domaine étudié

La résolution des systèmes matriciels nous donne les potentiel Ω et les circulations de a dans le domaine. En partant de ces valeurs, on peut déduire l'induction. La figure (I.11) représente les tracés de l'induction b sur le plan $x=a/2$ pour les formulations a et $t_0-\Omega$. Nous remarquons qu'il y a des différences entre les deux distributions (Fig. I.11a. et Fig.I. 11b.). Ceci est dû, d'une part à la condition aux limites $b.n = 0$ qui est imposée au sens faible par le potentiel Ω et au sens fort par le potentiel a , et d'autre part aux erreurs numériques engendrées par l'évaluation de l'expression $t_0 - grad\Omega$ pour la formulation Ω [82]. Pour la formulation hybride, nous retrouvons les mêmes différences entre la partie modélisée par le potentiel scalaire Ω et celle modélisée par le potentiel vecteur a (Fig. I.12.). D'autre part, il n'y a pas de déformations de la distribution de l'induction au voisinage de l'interface entre les deux régions.

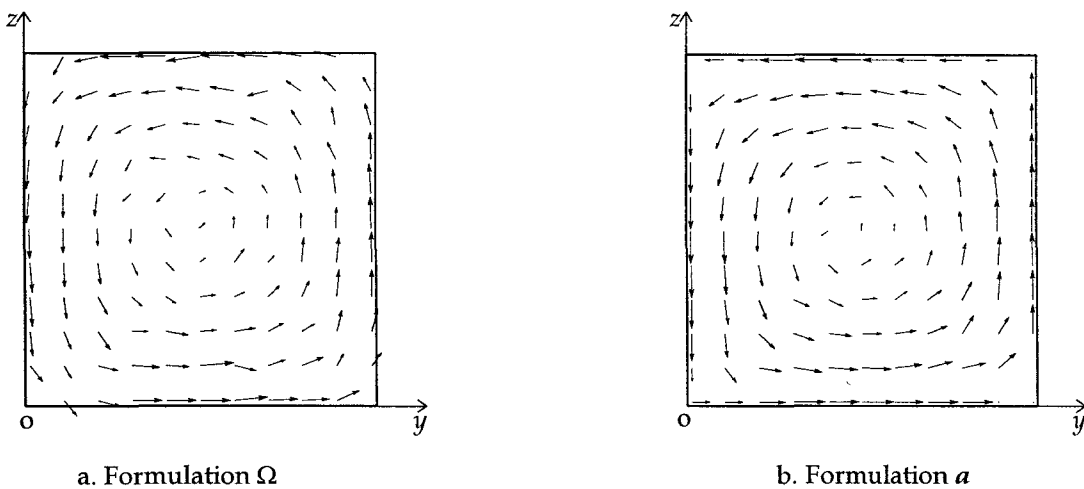


Fig. I.11. Distribution de l'induction b en $x=a/2$

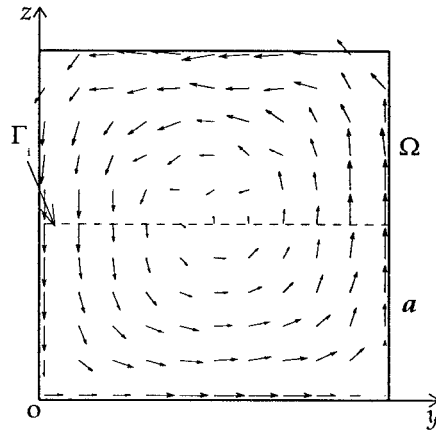


Fig. I.12. Distribution de l'induction b en $x=a/2$; Formulation $a-\Omega$

Dans ce problème, nous disposons de la valeur analytique de l'énergie magnétique emmagasinée dans le cube (2.208 MJ) [37]. Ce qui représente une référence pour l'évaluation de la précision des calculs effectués par les trois formulations. Sur la figure (I.12), nous avons reporté les valeurs de l'énergie en fonction du nombre d'éléments. Nous constatons que cette grandeur tend par des valeurs inférieures vers la solution analytique pour la formulation a . Inversement, elle tend par des valeurs supérieures pour la formulation Ω . En effet, il a été démontré qu'il y a une complémentarité des deux méthodes de calcul de l'énergie magnétique en magnétostatique [93]. Les résultats de l'approche hybride sont situés entre ceux calculés par les potentiels a et Ω . Les valeurs obtenues sont plus proches de la solution analytique. Il faut dire que cela n'est qu'une simple constatation numérique. Nous ne pouvons donc pas en tirer des conclusions à caractère général.

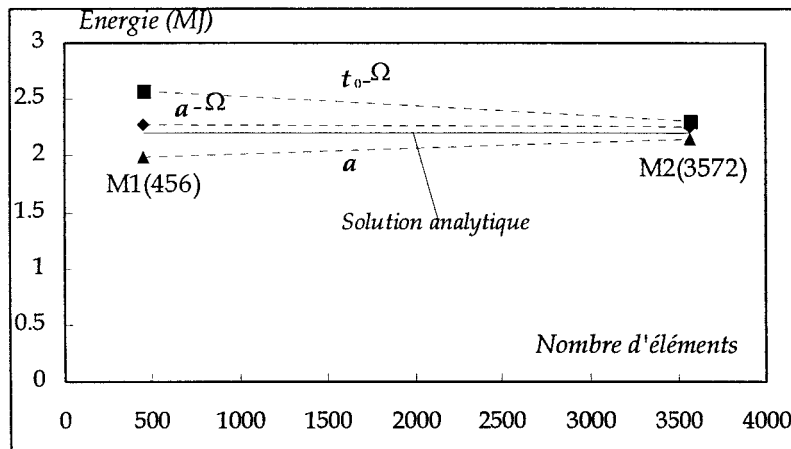


Fig. I.12. Comparaison de la valeur de l'énergie pour les différentes formulations

La table (I.2) résume les résultats obtenus par le maillage M2 en terme de précision (erreur relative par rapport à la valeur analytique) et de performances (nombre d'inconnues, taille mémoire et le temps CPU). Nous constatons que la formulation Ω est la plus performante du point de vue temps de calcul et taille mémoire. Toutefois, en terme de précision, elle est la moins avantageuse par rapport aux deux autres.

Formulation	Energie calculée (MJ)	Erreur relative %	Nombre d'inconnues	Taille mémoire	Temps CPU (s)
$t_0-\Omega$	2.314	4.80	826	5320	1
$a-\Omega$	2.247	1.76	2412	17474	12
a	2.145	2.85	3207	22178	18

Table I.2. Comparaison des différentes formulations pour le maillage M2

En résumé, nous pouvons dire que les résultats obtenus par la formulation hybride, au niveau local, confirment ce que nous avons conclu dans l'exemple précédent. En effet, nous obtenons une distribution correcte de l'induction lorsque l'interface est située dans un milieu de même perméabilité.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes formulations utilisées pour la modélisation des systèmes électromagnétiques. Un intérêt particulier a été accordé à l'utilisation des potentiels scalaires ou vecteurs. Les avantages et les difficultés inhérentes à chaque formulation ont été évoqués. Ensuite, nous avons présenté la méthode des éléments finis qui consiste à discrétiser l'espace fonctionnel et le domaine étudié. Dans ce contexte, nous avons vu comment traiter un problème dépendant du temps ou les éventuelles non-linéarités dans les milieux ferromagnétiques.

Dans le but d'éliminer les difficultés de chaque formulation, nous avons développé une approche hybride basée sur un couplage faible entre les potentiels vecteur et scalaire. Elle fait intervenir la continuité des composantes du champ et de l'induction à l'interface qui sépare les deux formulations. La différence entre cette étude et les travaux effectués dans le même contexte se trouve au niveau de la discrétisation. En effet, nous avons couplé des fonctions d'approximation de nature différentes: éléments d'arête pour le potentiel vecteur et éléments nodaux pour le potentiel scalaire.

Finalement, les formulations magnétostatiques étudiées ont été testées sur deux exemples simples. Malgré sa simplicité, le premier constitue un véritable test de la formulation hybride pour le calcul des grandeurs locales. A ce niveau, nous avons constaté une déformation de la distribution de l'induction lorsque l'interface est située entre deux milieux de perméabilité différentes (fer/air). Cette déformation disparaît dès que l'interface placée dans un milieu homogène. Dans le deuxième exemple, la comparaison a été faite pour le calcul d'une grandeur globale (énergie magnétique). Il en ressort que la formulation hybride donne une bonne précision sur le calcul de cette grandeur.

Dans le chapitre suivant nous allons aborder le couplage entre les équations magnétiques et les celles du circuit électrique. Dans ce cas, l'approche hybride sera testée et comparée avec les autres formulations pour une application en magnétodynamique.

Chapitre II

Modélisation

des Systèmes Electrotechniques

1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la résolution des équations de Maxwell par la méthode des éléments finis. Dans les applications traitées, les sources du champ sont connues et imposées directement dans les systèmes matriciels. Or, la plupart des dispositifs électrotechniques sont le siège de plusieurs phénomènes (magnétiques, électriques, mécaniques, thermiques, ...) qui interagissent entre eux. Par exemple, l'alimentation en tension des régions inductrices, engendre un couplage des équations électriques et magnétiques. Par conséquent, une modélisation fine de ces systèmes nécessite le développement de modèles qui incluent le plus possible ces phénomènes et leurs couplages.

Dans ce chapitre, nous commencerons par présenter le couplage entre les équations magnétiques et électriques dans le cadre des formulations en potentiels. La densité de courant est alors exprimée en fonction du courant et le flux magnétique en fonction du potentiel utilisé. Pour la formulation hybride, nous développerons les systèmes matriciels lorsque la région inductrice est modélisée par a ou t_0 - Ω . Comme exemple d'application, nous effectuerons des calculs pour un problème magnétodynamique avec un couplage circuit. Il s'agit d'une bobine située entre deux plaques conductrices, et alimentée par un échelon de tension.

Par la suite, nous nous intéresserons à la détermination des forces et du couple dans les systèmes électrotechniques. Pour calculer ces grandeurs, nous présenterons deux méthodes: le tenseur de Maxwell et les travaux virtuels. Dans ce cas, seules les valeurs globales seront évaluées sans aborder le couplage avec les équations de la mécanique ni le calcul des déformations. Ces méthodes seront appliquées à deux exemples. Le premier sert de validation pour les algorithmes de calcul. Le deuxième concerne la modélisation d'un électroaimant.

La fin de ce chapitre sera consacrée à un état de l'art des principales méthodes utilisées pour la prise en compte du mouvement en 2D et en 3D. Pour notre part, nous développerons une technique simple qui sera utilisée dans la modélisation 3D de la machine asynchrone. Cette méthode, appelée surface de glissement, est une extension de la ligne de glissement connue en 2D.

2. Couplage entre les équations magnétiques et l'équation du circuit électrique

L'analyse des dispositifs électrotechniques est souvent limitée par les sources d'alimentation (générateur de courant ou de tension) et les éléments du circuit électrique (résistance, inductance, capacité, diode, ...). En effet, pour connaître la distribution du champ magnétique dans le domaine étudié, il est nécessaire d'accéder à la tension ou bien au courant. Dans cette étude, nous désirons calculer le champ magnétique dans une structure 2D ou 3D et le courant qui parcourt le bobinage. Pour obtenir de tels résultats, nous devons résoudre les équations du champ magnétique et du circuit électrique. La figure (II.1) représente la structure du système à étudier avec une alimentation en tension. Il s'agit d'un domaine \mathcal{D} pouvant contenir des matériaux magnétiques ou conducteurs. La région inductrice \mathcal{D}_0 est un bobinage filaire couplée à un circuit électrique. Nous faisons l'hypothèse que l'épaisseur de peau est très grande par rapport à la dimension du fils conducteur. Pour modéliser cette région, nous considérons une formulation magnétostatique en potentiel vecteur \mathbf{a} ou en potentiel scalaire Ω .

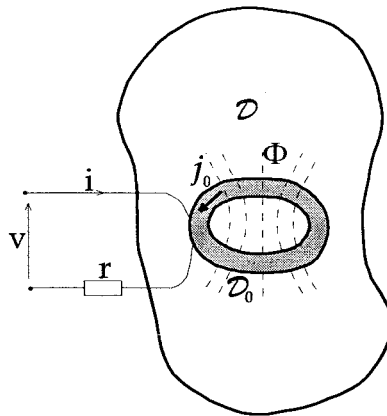


Fig. II.1. Configuration étudiée (domaine et circuit)

En ce qui concerne le circuit électrique, on s'est limité à une maille contenant une résistance " r " et une source de tension " v ". Toutefois, il est possible de considérer des circuits constitués d'autres éléments linéaires ou non. L'équation de cette maille est la suivante:

$$v = r i + \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{II.1})$$

Φ représente le flux magnétique engendré par le bobinage.

Pour résoudre le problème du couplage entre les équations du champ et du circuit électrique, plusieurs méthodes ont été proposées:

- la résolution séparée des deux équations par un calcul des inductances [12],
- la méthode intégréo-différentielle qui consiste à exprimer le courant en fonction d'une intégrale de la tension [42],
- la résolution simultanée [28][42][44][48][77].

Cette dernière méthode est la mieux adaptée pour une discrétisation du type éléments finis. En effet, par rapport à la deuxième méthode, le caractère creux de matrice du système est conservé et l'introduction des éléments non-linéaires dans le circuit électrique ne pose pas de problème majeur. En ce qui concerne la résolution séparée, elle doit être adaptée à chaque cas étudié. De plus, elle perd sa fiabilité lorsque l'interaction entre les circuits électrique et magnétique est importante.

Dans cette partie du chapitre, nous commencerons par présenter le couplage entre les équations du champ magnétique et du circuit dans les structures tridimensionnelles. Ce couplage utilise la résolution séparée. Pour la formulation hybride a - Ω , nous développerons les systèmes matriciels. Dans ce cas, la région inductrice peut être modélisée par la formulation a ou t_0 - Ω . Nous allons également rappeler les équations à résoudre en 2D. Par la suite, nous comparons les résultats obtenus par les différentes formulations pour une application 3D.

2.1. Cas tridimensionnel

2.1.1. Formulation en potentiel vecteur

L'état magnétique du système est obtenu par la résolution de l'équation (I.27). La densité de courant supposée uniforme et connue. Lorsque le bobinage est connecté à un circuit électrique alimenté en tension, le terme source dépend du courant. Il est donc nécessaire de résoudre l'équation du circuit (II.1). Cette résolution peut être couplée avec les équations du champ magnétique. Pour réaliser ce couplage, la densité de courant j_0 est exprimée en fonction du courant, et le flux magnétique Φ en fonction du potentiel vecteur a .

Expression de la densité de courant

Une région inductrice de section " s " et comportant " n_s " spires peut être caractérisée par un vecteur N appelé vecteur densité de spires [85]. La densité de courant j_0 s'écrit alors:

$$j_0 = N i \quad \text{avec} \quad N = \frac{n_s}{s} n_b \quad (\text{II.2})$$

Les vecteurs N et j_0 sont colinéaires et leur direction est donnée par la normale à la section droite du bobinage, notée n_b .

Expression du flux magnétique

Pour un conducteur, le flux magnétique est calculé par une intégration de l'induction magnétique \mathbf{b} sur la surface s_c qui est engendrée par sa position dans l'espace. Dans le cas de la formulation en potentiel vecteur \mathbf{a} , l'induction est donnée par $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$. En utilisant cette relation, le flux s'écrit:

$$\phi_c = \int_{s_c} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\gamma_c} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_b dl \quad (\text{II.3})$$

avec γ_c le contour de la surface s_c . En introduisant le vecteur densité de spires \mathbf{N} , nous pouvons exprimer le flux total de la bobine sous la forme suivante:

$$\Phi = k_\phi n_s \phi_c = k_\phi \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} dv \quad (\text{II.4})$$

Le coefficient k_ϕ permet la prise en compte des éventuelles symétries dans la structure étudiée. A titre d'exemple, pour une machine ayant $2p$ pôles et modélisée sur un pôle, on a $k_\phi = 2p$.

Système matriciel

Dans la région inductrice, on résout le système d'équations algébriques (I.56) avec une discrétisation du potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} par les éléments d'arête. En remplaçant l'expression de la densité courant (II.2) dans ce système, nous obtenons les équations suivantes:

$$\sum_{i=1}^{Na} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{w}_j \cdot \text{rot } \mathbf{w}_i c_{a_i} dv - \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{N} i dv = 0 \quad j = 1, Na \quad (\text{II.5})$$

D'autre part, en reportant la forme discrète du potentiel \mathbf{a} dans l'expression du flux magnétique (II.4), l'équation du circuit électrique (II.1) s'écrit alors:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}i + k_\phi \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{Na} \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{w}_j c_{a_j} \cdot \mathbf{N} dv \quad (\text{II.6})$$

Les deux équations précédentes constituent un couplage fort entre le calcul du champ magnétique et du courant dans le circuit électrique. En effectuant une discrétisation temporelle, nous obtenons le système matriciel suivant:

$$\begin{bmatrix} S_a & -C_{a-i} \\ -C_{a-i}^T & -k' \mathbf{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k' \mathbf{v} \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C_{a-i}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ i \end{bmatrix}_t \quad \text{avec } k' = \frac{\Delta t}{k_\phi} \quad (\text{II.7})$$

Les termes de la matrice C_{a-i} s'écrivent:

$$C_{a-i_j} = \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{N} dv \quad j = 1, Na \quad (\text{II.8})$$

La matrice du système (II.7) est symétrique mais non définie positive. Par conséquent, la solution peut être obtenue en utilisant le gradient conjugué avec un pré-conditionnement du type Crout ou la méthode de Cholesky adaptée [45]. Cette résolution nous donne simultanément les grandeurs locales (état magnétique du domaine \mathcal{D}) et la valeur du courant.

2.1.2. Formulation en potentiel scalaire

L'équation à résoudre est donnée par (I.25) avec le potentiel scalaire Ω comme inconnue. La région inductrice est caractérisée par le vecteur source t_0 vérifiant $\text{rot } t_0 = j_0$. Lorsque la géométrie est simple, ce vecteur peut être déterminé par une expression analytique. Afin d'introduire le couplage du circuit électrique, le vecteur t_0 est exprimé en fonction du courant, et le flux magnétique en fonction du potentiel Ω .

Expression du vecteur source t_0

A partir de la relation entre la densité de courant et le vecteur source t_0 , il est possible de définir un vecteur K tel que: $\text{rot } K = N$ [85]. Ce dernier est perpendiculaire à N et il permet d'exprimer le vecteur t_0 en fonction du courant. Soit:

$$t_0 = K i \quad (\text{II.9})$$

Les vecteurs t_0 et K sont colinéaires. De ce fait, si nous avons une expression analytique pour la distribution de t_0 , celle du vecteur K se déduit immédiatement.

Expression du flux magnétique

Dans l'expression (II.4), le flux magnétique est donné en fonction du vecteur N et du potentiel vecteur a . En remplaçant N par $\text{rot } K$ dans cette relation, nous obtenons ce flux en fonction du potentiel scalaire Ω et du vecteur K :

$$\Phi = k_\phi \int_{\mathcal{V}_0} \mu (K i - \text{grad } \Omega) \cdot K dv \quad (\text{II.10})$$

Système matriciel

Pour la formulation t_0 - Ω , on résout le système d'équations (I.52). Le potentiel scalaire Ω est une inconnue et le terme source est en fonction de la distribution du vecteur t_0 . En utilisant l'expression (II.9) dans ce système, nous obtenons les équations suivantes:

$$\sum_{l=1}^{N_n} \int_{\mathcal{V}} \mu \text{grad } \lambda_j \cdot \text{grad } \lambda_l \Omega_l dv - \int_{\mathcal{V}_0} \mu \text{grad } \lambda_j \cdot K i dv = 0 \quad j = 1, N_n \quad (\text{II.11})$$

D'autre part, en reportant la forme discrète du potentiel Ω dans la relation (II.10), l'équation du circuit électrique (II.1) s'écrit comme suit:

$$v = ri + k_\phi \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}_0} \mu |K|^2 dv - \sum_{j=1}^{N_n} \int_{\mathcal{V}_0} \mu \text{grad } \lambda_j \cdot K dv \right) \quad (\text{II.12})$$

Le système obtenu par les deux équations précédentes constitue un couplage fort entre le calcul du champ et la résolution de l'équation du circuit électrique.

Après une discrétisation des dérivées temporelles, ce système peut être réécrit sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} S_{\Omega} & -C_{\Omega-i} \\ -C_{\Omega-i}^T & k^l r + \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ k^l v \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C_{\Omega-i}^T & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ i \end{bmatrix}_t \quad (\text{II.13})$$

La matrice de couplage $C_{\Omega-i}$ fait intervenir le vecteur K et elle dépend de la perméabilité du milieu. Les termes de cette matrice et le scalaire κ s'écrivent comme suit:

$$C_{\Omega-i j} = \int_{\mathcal{D}_0} \mu \mathbf{grad} \lambda_j \cdot K \, dv \quad j=1, Nn \quad (\text{II.14a})$$

$$\kappa = \int_{\mathcal{D}_0} \mu |K|^2 \, dv \quad (\text{II.14b})$$

On note que la matrice du système (II.13) est symétrique et définie positive. Nous pouvons donc utiliser la résolution directe par la méthode de Cholesky ou le gradient conjugué avec un pré-conditionnement du type Cholesky incomplet. La solution obtenue donne l'état magnétique du domaine et la valeur du courant dans le circuit.

2.1.3. Formulation hybride

Pour cette approche, on résout les équations du champ magnétique données par le système matriciel (I.83). Afin de coupler ces équations avec celle du circuit électrique, nous considérons deux cas de figure selon la formulation utilisée pour modéliser la région inductrice \mathcal{D}_0 [108][109].

Pour le premier où la région est modélisée par le potentiel vecteur a , le système matriciel est obtenu en combinant les équations (I.83) et (II.7). Ce qui donne:

$$\begin{bmatrix} S_a & C_{a-\Omega} & -C_{a-i} \\ C_{a-\Omega}^T & -S_{\Omega} & 0 \\ -C_{a-i}^T & 0 & -k^l r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k^l v \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -C_{a-i}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_t \quad (\text{II.15})$$

Dans le deuxième cas, la région \mathcal{D}_0 fait partie du domaine \mathcal{D}_{Ω} . Le couplage est obtenu par l'utilisation des équations (I.83) et (II.13). Nous obtenons alors le système matriciel suivant:

$$\begin{bmatrix} S_a & C_{a-\Omega} & 0 \\ C_{a-\Omega}^T & -S_{\Omega} & C_{\Omega-i} \\ 0 & C_{\Omega-i}^T & -k^l r - \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k^l v \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\Omega-i}^T & -\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_t \quad (\text{II.16})$$

Dans les deux systèmes matriciels précédents, la matrice est symétrique mais non définie positive. La résolution peut être effectuée en choisissant les mêmes méthodes que pour la formulation en potentiel vecteur avec couplage circuit.

Pour les problèmes magnétodynamiques, l'écriture des systèmes matriciels est obtenue en ajoutant l'équation du circuit à celle du champ électromagnétique. Pour les formulations retenues, il s'agit des équations (I.67) pour $a-\phi$, (I.71) pour a^* , (I.62) pour $t-\Omega$ et (I.85) pour $a-\Omega$. Les systèmes obtenus sont présentés dans l'annexe 3. On notera que les couplages développés ne concernent que les régions inductrices qui sont modélisées par une formulation magnétostatique.

2.2. Cas bidimensionnel

Le calcul du champ électromagnétique bidimensionnel avec une couplage du circuit électrique tend à devenir d'usage courant pour la modélisation des dispositifs électrotechniques. A l'heure actuelle, les codes de calculs développés ont atteint le stade des applications industrielles. Pour cela, nous nous contenterons de faire un rappel des équations de base et des systèmes matriciels à résoudre.

Les problèmes 2D sont ceux qui présentent une invariance de la solution suivant une direction. Ils peuvent être posés en terme de potentiel vecteur dont la direction est fixée et seul le module constitue une inconnue. Ce choix assure implicitement une condition de jauge et la solution obtenue est unique. D'autre part, les difficultés liées à la prise en compte des régions inductrices restent posées avec une formulation en potentiel scalaire. Pour ces raisons, le potentiel vecteur a est le plus utilisé pour traiter les problèmes 2D. Dans ce paragraphe, nous allons considérer uniquement une configuration contenant un domaine d'étude \mathcal{D} avec un bobinage filaire couplé à un circuit électrique. Le couplage des conducteurs massifs sera présenté lorsque nous aborderons la modélisation de la machine asynchrone dans le prochain chapitre.

Avec une densité de courant source dirigée suivant oz i.e. $j_0 = (0,0,j_{0z})$, la direction du potentiel vecteur a sera également suivant cet axe $a = (0,0,a_z)$. L'équation à résoudre est la suivante:

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} a_z\right) = -j_{0z} \quad (\text{II.17})$$

Pour sa résolution par la méthode des éléments finis, le potentiel a_z est discrétisé au noeuds du maillage. En appliquant la méthode de Galerkin, nous obtenons les d'équations suivantes:

$$\sum_{k=1}^{N_n} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \lambda_j \cdot \operatorname{grad} \lambda_k a_{zk} ds - \frac{n_s}{s} \int_{\mathcal{D}_0} \lambda_j i ds = 0 \quad j=1, N_n \quad (\text{II.18})$$

λ représente la fonction d'approximation du potentiel.

Pour le couplage avec l'équation du circuit électrique, la densité de courant est exprimée en fonction du courant et des paramètres du bobinage. La relation (II.2) s'écrit alors:

$$j_{0z} = \frac{n_s}{s} i \quad (\text{II.19})$$

D'autre part, l'expression (II.4) permet d'exprimer le flux magnétique en fonction du potentiel a_z . Nous pouvons alors écrire l'équation (II.1) comme suit:

$$v = ri + k_\phi \frac{n_s}{s} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{Nn} \int_{\mathcal{D}_0} \lambda_j a_{zj} ds \quad (\text{II.20})$$

En faisant intervenir la relation (II.19) dans l'équation (II.18) et après une discrétisation de la dérivée temporelle, le système matriciel à résoudre est le suivant:

$$\begin{bmatrix} S_{a_z} & -C_{a_z-i} \\ -C_{a_z-i}^T & -kr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_z \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -kv \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C_{a_z-i}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_z \\ i \end{bmatrix}_t \quad (\text{II.21})$$

Les termes des matrices définies dans ce système s'écrivent:

$$S_{a_z,j,l} = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \lambda_j \cdot \mathbf{grad} \lambda_l ds \quad j=1, Nn; \quad l=1, Nn \quad (\text{II.22a})$$

$$C_{a_z-i,j} = \frac{n_s}{s} \int_{\mathcal{D}_0} \lambda_j ds \quad j=1, Nn \quad (\text{II.22b})$$

Le système (II.21) a une matrice symétrique mais non définie positive. Cependant, les termes qui la rendent non définie positive sont connus, nous pouvons donc utiliser la méthode de Cholesky adaptée.

2.3. Application: bobine entre deux plaques conductrices

Pour illustrer le couplage entre les équations du circuit et celles du champ magnétique, nous avons traité l'exemple d'une bobine inductrice située entre deux plaques conductrices [25]. Pour ce faire, nous avons considéré deux cas. En premier lieu, la conductivité des plaques est considérée nulle. Cela nous ramène à un problème magnétostatique avec le couplage circuit. La résolution a été effectuée par le potentiel scalaire t_0 - Ω , le potentiel vecteur \mathbf{a} et la formulation hybride \mathbf{a} - Ω . En deuxième lieu, nous avons considéré la bobine avec les plaques conductrices. Le problème a été résolu par les formulations magnétique, électrique et hybride. Les grandeurs à calculer sont: le champ magnétique, la densité de courant induit dans les plaques et l'intensité du courant dans la bobine.

2.3.1. Définition du problème

Il s'agit d'une bobine située entre deux plaques conductrices. La bobine est couplée à un circuit électrique constitué d'une résistance "r" et d'une source de tension continue "v". Les plaques conductrices ont une forme carrée d'épaisseur "a". La figure (II.2) représente la géométrie, les dimensions et les caractéristiques du système étudié. Pour limiter le domaine d'étude, la structure est plongée dans un cylindre d'air (rayon 420 mm, hauteur 900 mm) avec la condition $b.n = 0$ sur sa surface extérieure.

Plaque

L=240 mm
 a=12.7 mm
 $s = 3.28 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$

Bobine

$r_1 = 87 \text{ mm}$
 $r_2 = 116 \text{ mm}$
 h=28 mm
 e=3.175 mm

Circuit

v=20 V
 r=12.4 Ω
 $n_s = 700$

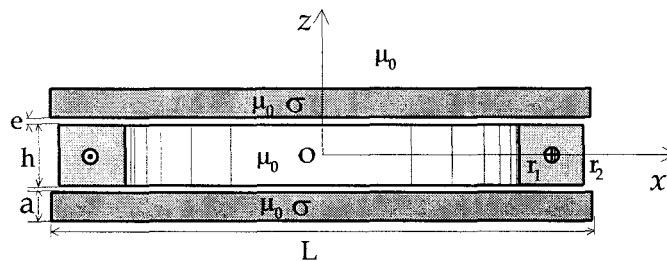


Fig. II.2. Géométrie et caractéristiques du système étudié

En exploitant les symétries (suivant les plans $x=0$, $y=0$ et $z=0$), on peut ramener l'étude à 1/8 du domaine initial. La figure (II.3) représente une vue 3D de la partie modélisée.

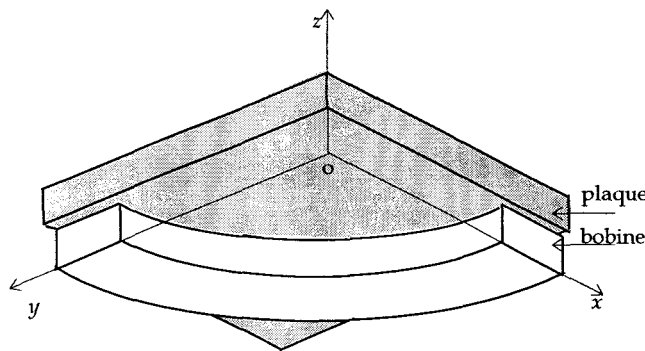


Fig. II.3. 1/8 de la structure étudiée

Sur les plans $x=0$ et $y=0$, nous avons la condition $b.n = 0$. Sur le plan $z=0$, la condition $h \times n = 0$ est imposée.

En magnétodynamique, on doit assurer la condition $j.n = 0$ sur la frontière de la plaque. Une telle condition est vérifiée au sens faible par les formulations $a-\varphi$ et a^* , et au sens fort par la formulation $t-\Omega$ avec $t \times n = 0$. Sur les plans de symétrie $x=0$ et $y=0$, nous avons la condition $e \times n = 0$. Elle est imposée au sens fort par les formulations électriques $a-\varphi$ et a^* en annulant la circulation de a et le potentiel scalaire φ . Pour la formulation $t-\Omega$, cette condition est assurée au sens faible.

Les interfaces utilisées pour la formulation hybride sont représentées par la figure (II.4). Dans le cas sans les plaques conductrices, l'interface sépare deux régions ayant les mêmes caractéristiques (air) (Fig. II.4a.). Lorsque les plaques sont considérées, elle est située sur la séparation conducteur/non-conducteur (Fig. II.4b.).

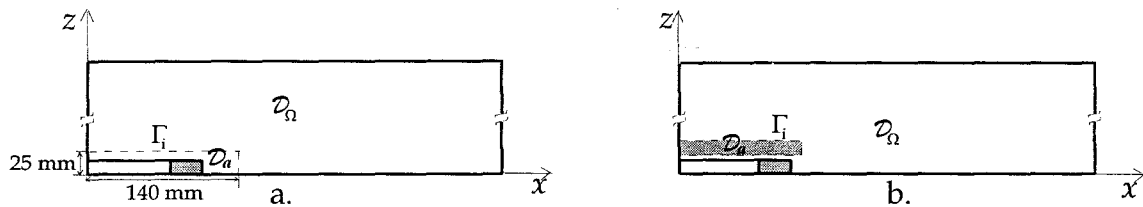


Fig. II.4. Position des interfaces (a. sans plaques, b. avec plaques)

2.3.2. Résultats

Dans les deux cas étudiés, nous avons appliqué un échelon de tension avec des conditions initiales nulles, puis nous avons calculé la réponse en courant. Le phénomène transitoire est simulé sur une durée de 80 ms avec un pas de temps $\Delta t = 2$ ms. Selon le cas traité, avec ou sans les plaques conductrices, nous avons adopté deux maillages différents. Ils comportent, respectivement, 16545 et 6754 éléments. En effet, il n'est pas nécessaire d'avoir un maillage fin dans la région conductrice pour le cas sans les plaques. La figure (II.5) représente le maillage du domaine étudié pour un calcul avec les plaques conductrices.

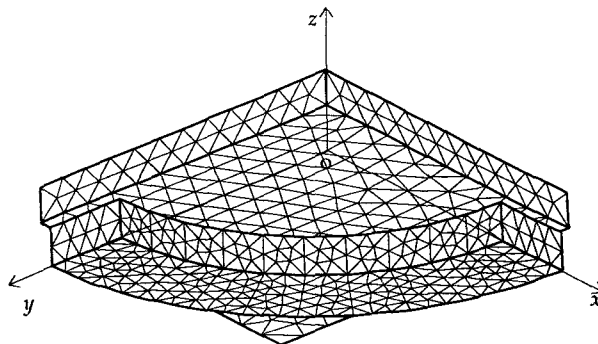


Fig. II.5. Maillage du domaine étudié (bobine et plaque)

Cas sans les plaques conductrices

Comme nous l'avons cité précédemment, ce cas correspond à la résolution d'un problème magnétostatique avec le couplage de l'équation du circuit électrique. Les calculs ont été effectués par les potentiels a et Ω et la formulation hybride a - Ω .

Pour l'approche hybride, la majeure partie de l'air est modélisée par le potentiel scalaire Ω et la région inductrice est traitée par le potentiel vecteur a (Fig. II.4a). Ce choix est justifié par le fait que la formulation a peut être utilisée sans difficulté dans les régions inductrices. De plus, l'extérieur (la mise dans une boîte d'air de la bobine) est pris en compte par le potentiel scalaire qui est plus économique en nombre d'inconnues.

Dans les systèmes d'équations à résoudre pour les différentes formulations, il est nécessaire de définir les distributions des vecteurs N et K . On note qu'elles correspondent, respectivement, à celles de j_0 et t_0 . Le vecteur N est défini dans la bobine avec un module constant $|N| = n_s/h(r_2 - r_1)$. Le vecteur K est calculé dans la bobine et le cylindre d'air qu'elle engendre. Son module est linéaire dans la bobine et constant dans le cylindre d'air $|K| = n_s/h$.

Pour le potentiel vecteur, l'unicité de la solution est assurée en imposant la jauge $a \cdot w = 0$ par la technique de l'arbre. Nous verrons par la suite, qu'il est plus intéressant de résoudre le problème sans imposer cette jauge. Pour les différentes formulations utilisées, la résolution des systèmes matriciels est effectuée par la méthode du gradient conjugué.

La figure (II.6) représente la distribution de l'induction b sur les plans $x=0$ et $y=0$ pour le potentiel vecteur. Nous avons aussi tracé la distribution de b sur le plan $y=0$ pour les formulations t_0 - Ω (Fig. II.7a) et a - Ω (Fig. II.7b). On note que la distribution obtenue par l'approche hybride ne subit pas de discontinuité au niveau de l'interface. En effet, cette dernière est située dans l'air (milieu de même perméabilité).

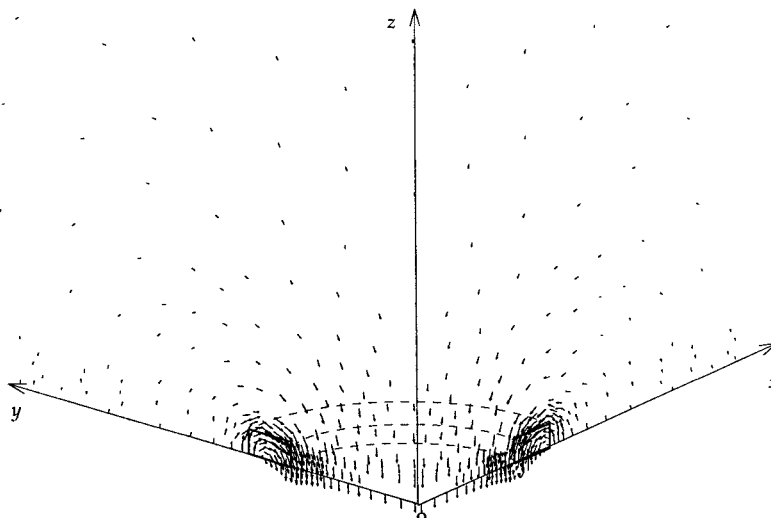


Fig. II.6. Distribution de l'induction b en $x=0$ et $y=0$ (formulation a)

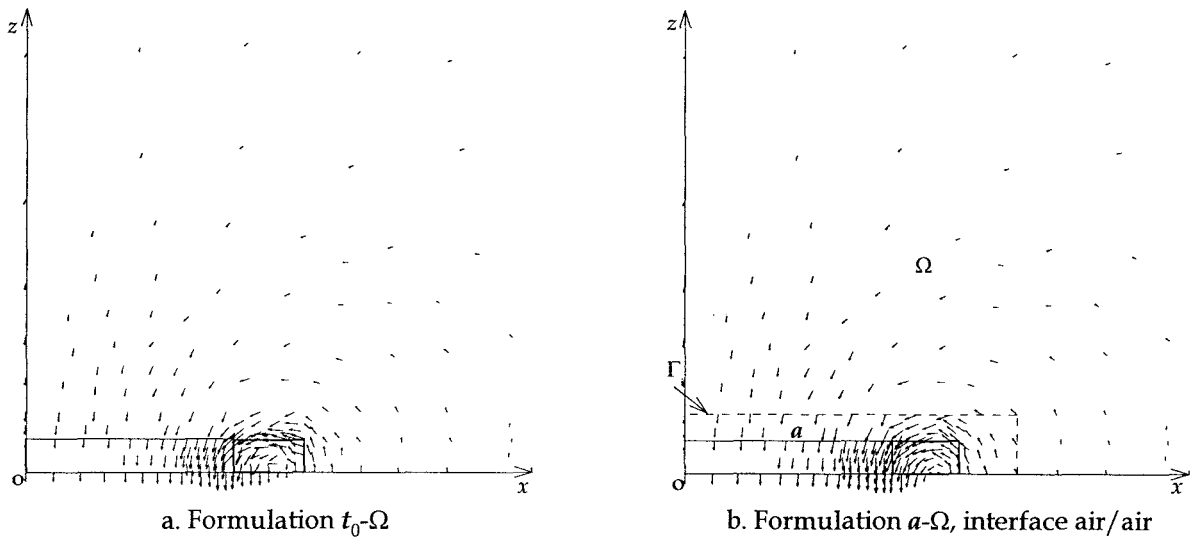


Fig. II.7. Distribution de l'induction b en $y=0$

La figure (II.8) donne l'évolution du courant en fonction du temps pour les différentes formulations. On note que le courant obtenu par l'approche hybride est situé entre les résultats des formulations a et $t_0-\Omega$.

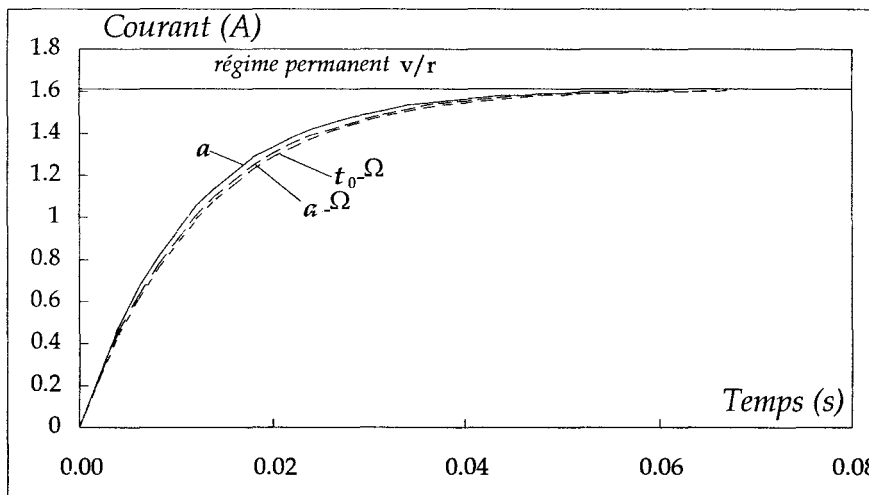


Fig. II.8. Evolution du courant (comparaison des différentes formulations)

Dans ce cas, il est possible de déduire la valeur de l'inductance de la bobine L_b en utilisant soit l'énergie magnétique " w " emmagasinée dans le système ou la constante de temps " τ " relevée sur l'évolution du courant. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont résumés dans la table (II.1). On peut noter que l'inductance calculée par la formulation hybride est située entre les deux autres approches.

Formulation	$L_b = 2w/i^2$ (mH)	$L_b = r\tau$ (mH)
$t_0-\Omega$	152.35	155.81
$a-\Omega$	147.65	150.63
a	137.65	140.30

Table II.1. Comparaison des valeurs de l'inductance

Utilisation de la jauge

Dans le chapitre précédent, nous avons discuté l'influence de l'utilisation de la jauge sur la rapidité de la convergence du gradient conjugué. Pour illustrer ce fait, nous avons comparé la convergence de la formulation a avec et sans l'utilisation de la jauge $a \cdot w = 0$. Dans les deux cas, nous avons résolu le système par la méthode du gradient conjugué avec un pré-conditionnement du type Crout. Les calculs ont été effectués en double précision. Pour le cas sans jauge, l'algorithme converge rapidement vers la bonne solution puis il diverge [66]. Le nombre d'itérations nécessaire à la convergence est nettement plus faible par rapport au cas jaugé.

La table (II.2) donne les performances des formulations utilisées. Il en ressort que la formulation en potentiel vecteur non jaugée bien que pénalisante du point de vue taille mémoire, est nettement plus rapide que le cas jaugé. En ce qui concerne l'approche hybride, nous avons un bon compromis taille-mémoire et rapidité.

Formulation	Jauge	Nombre d'inconnues	Taille mémoire	Temps CPU (s)	Nombre d'itérations
$t_0-\Omega$	-	1138	8654	1	24
$a-\Omega$	oui	5862	46091	39	413
a	oui	6846	54727	50	545
a	non	8074	73246	18	77

Table II.2. Comparaison des performances des différentes formulations

En résumé, nous pouvons dire que la résolution de ce problème nous a permis de confirmer les conclusions du premier chapitre concernant la distribution des grandeurs locales. D'autre part, nous avons validé les systèmes matriciels développés pour la formulation hybride avec le couplage de l'équation du circuit. Pour le calcul du courant et de l'inductance, nous avons obtenu des résultats qui se recoupent dans les différents cas considérés.

Cas avec les plaques conductrices

Considérons maintenant la bobine avec les plaques conductrices. Le problème est alors magnétodynamique avec un couplage de l'équation du circuit. Il a été traité en utilisant les formulations électriques $a-\varphi$ et a^* , magnétique $t-\Omega$ et hybride. Pour cette dernière, l'interface est confondue avec la frontière extérieure de la plaque, ce qui correspond à une séparation conducteur/air. Dans ces conditions, la région inductrice et l'air sont modélisés par le potentiel scalaire Ω et les plaques par les formulations $a-\varphi$ ou a^* . Les approches hybrides ainsi définies sont notées, respectivement, $a-\varphi-\Omega$ et $a^*-\Omega$.

Pour les potentiels vecteurs a et t , il faut assurer l'unicité de la solution en imposant une jauge. Par la suite, nous allons comparer l'influence de l'utilisation ou non de cette condition sur la convergence du gradient conjugué. Pour la formulation en a^* , nous n'avons pas imposé de jauge dans les régions non-conductrices.

Les figures (II.9a), (II.9b), (II.9c) et (II.9d) représentent, respectivement, les distributions de l'induction b pour les formulations a^* , $t-\Omega$, $a-\varphi-\Omega$ et $a^*-\Omega$. Ces tracés correspondent à $t=6$ ms. En comparant les résultats des formulations hybrides et de $t-\Omega$, on remarque que les tracés sont pratiquement identiques (la région inductrice étant modélisée par $t_0-\Omega$). On peut conclure que la disposition de l'interface sur la séparation conducteur/air n'affecte pas la distribution de l'induction.

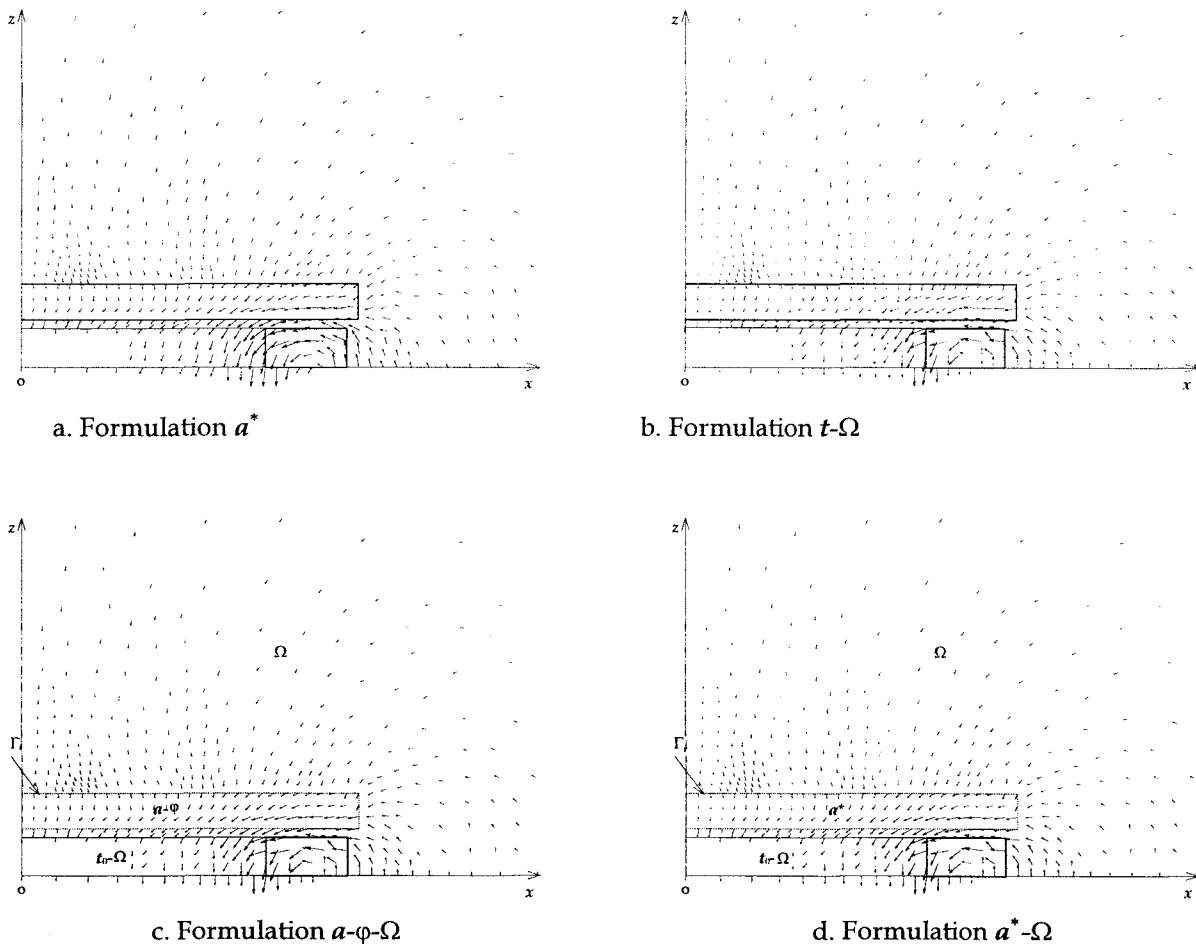


Fig. II.9. Distribution de l'induction b en $y=0$

A partir des valeurs des potentiels, nous pouvons aussi déduire la distribution de la densité de courant induit dans la plaque. La figure (II.10) représente cette distribution pour les formulations $a-\varphi$, $t-\Omega$, $a-\varphi-\Omega$ et $a^*-\Omega$. Pour les approches utilisant le potentiel vecteur magnétique dans les plaques (Fig. II.10a, Fig. II.10c et Fig. II.10d), les tracés sont similaires. On note que la conservation de la composante normale de j est vérifiée au sens faible. Pour le calcul en $t-\Omega$, cette condition est imposée au sens fort. Dans le cas des formulations hybrides, on peut conclure que la disposition de l'interface sur la séparation conducteur/air donne une répartition correcte de la densité de courant.

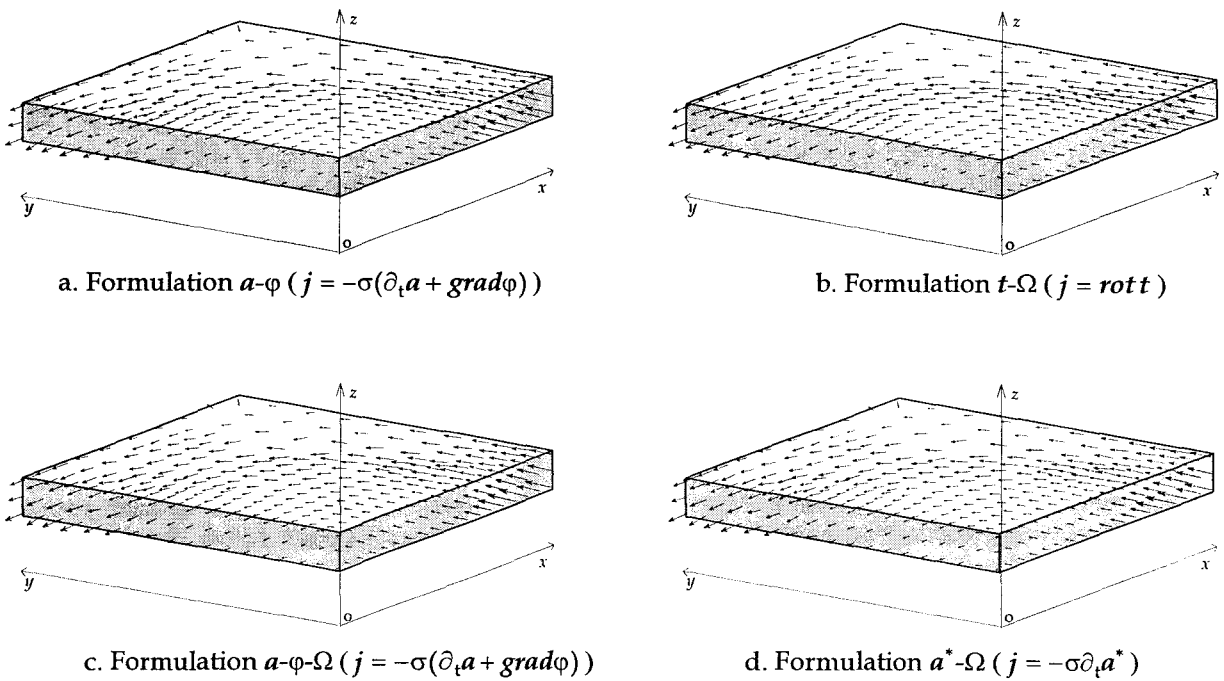


Fig. II.10. Distribution de la densité de courant induit j dans la plaque

L'évolution du courant est donnée par la figure (II.11). Elle comparée avec le résultat obtenu sans les plaques conductrices. On note que l'introduction des ces dernières accélère la réponse du système (constante de temps plus faible). Du point de vue précision, les écarts relevés entre les différentes formulations sont très faibles. De plus, les formulations $a-\varphi$ et a^* nous ont donné pratiquement les mêmes résultats. Cette constatation est aussi valable pour les approches $a-\varphi-\Omega$ et $a^*-\Omega$. C'est pourquoi, un seul résultat concernant ces calculs a été reporté sur la figure (II.11). Les formulations hybrides utilisées $a-\varphi-\Omega$ et $a^*-\Omega$ donnent des résultats situés entre $a-\varphi$ et $t-\Omega$.

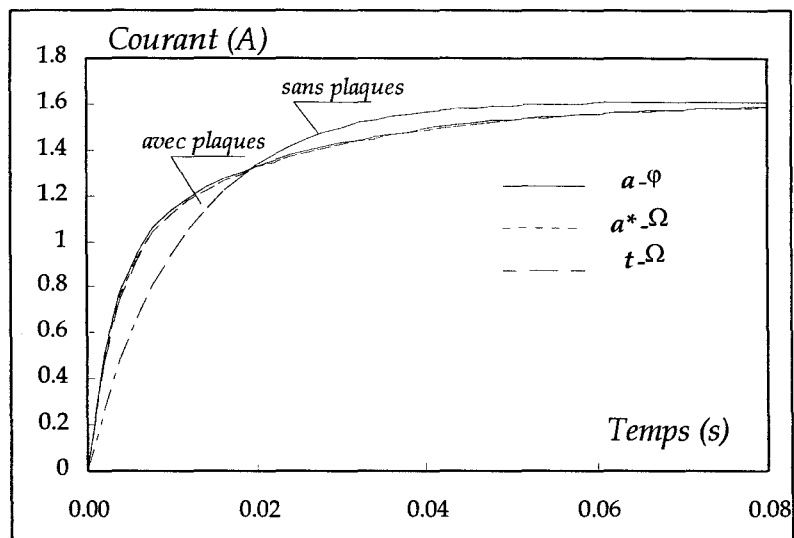


Fig. II.11. Evolution du courant

Pour cet exemple, il est possible de calculer la puissance dissipée par effet Joule p_j dans la plaque conductrice à l'aide de la relation suivante:

$$p_j = \int_v \frac{1}{\sigma} |j|^2 dv \quad (\text{II.23})$$

La densité de courant j est donnée en fonction des potentiels utilisés dans chaque formulation. La figure (II.12) montre l'évolution de la puissance p_j en fonction du temps. Cette puissance passe par un maximum puis décroît à zéro en régime permanent. On note que les résultats obtenus sont très proches et les formulations hybrides donnent des valeurs situées entre les deux approches électrique et magnétique.

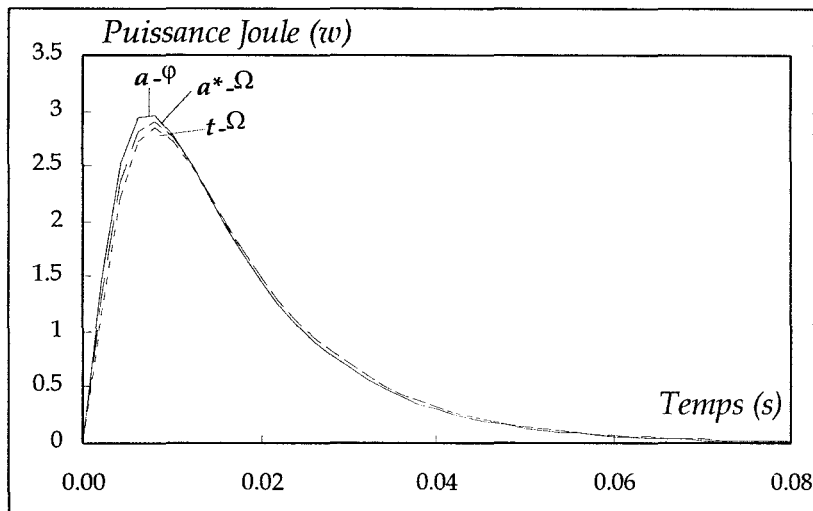


Fig. II.12. L'évolution de la puissance Joule p_j

Utilisation de la jauge

De la même manière que pour le cas sans les plaques, nous avons effectué des comparaisons qui illustrent l'influence de l'utilisation de la jauge sur la rapidité de convergence du gradient conjugué. Dans un premier lieu, nous avons comparé les formulations électriques avec la jauge $a.w = 0$. Pour le calcul en $a-\phi$ avec jauge, le système converge après un nombre d'itérations assez considérable par rapport aux formulations non jaugées $a-\phi$ et a^* . Dans ce dernier cas, le système converge vers la bonne solution puis il diverge. L'intérêt est que la convergence est atteinte avec un nombre d'itérations très faible par rapport au cas jaugé [66][110].

En ce qui concerne les formulations hybrides étudiées ($a^*-\Omega$, $a-\phi-\Omega$), le problème est jaugé dans les deux cas. En effet, lorsque le potentiel vecteur modifié a^* est défini dans une région conductrice de même conductivité, la condition de jauge est implicite. En comparant la convergence des deux approches, on peut dire que la formulation $a^*-\Omega$ est plus performante.

La table (II.3) donne les performances des différents cas étudiés avec ou sans jauge. Il en ressort que les formulations non jaugées bien que pénalisantes du point de vue taille mémoire, convergent très rapidement. Les performances de $a^*-\Omega$ et $a-\varphi-\Omega$ sont à l'intermédiaire entre celles des autres formulations.

Formulation	Jauge	Nombre d'inconnues	Taille mémoire	Temps CPU (s)	Nombre d'itérations
$t-\Omega$	oui	5290	58143	8	50
$t-\Omega$	non	5534	62954	7	43
$a-\varphi-\Omega$	oui	6760	90391	43	345
$a^*-\Omega$	-	6760	71211	12	68
$a-\varphi$	oui	17205	162091	220	892
$a-\varphi$	non	19989	210355	55	55
a^*	non	19255	179287	49	58

Table II.3. Comparaison des performances des différentes formulations

Cet exemple a été testé sur différentes formulations afin de dégager l'apport de la formulation hybride dans le cas magnétodynamique. Il en ressort des résultats satisfaisants du point de vue local et global. En effet, nous avons pu constater que la disposition de l'interface sur la séparation conducteur/air n'affecte pas la distribution des valeurs locales, contrairement à une séparation fer/air.

3. Calcul des forces magnétiques et du couple

Les efforts magnétiques exercés sur les parties mobiles d'un système électromagnétique constituent des grandeurs importantes pour l'étude de son fonctionnement. C'est le cas du couple pulsatoire dans les machines tournantes ou des forces qui s'exercent à la surface d'un matériau magnétique. Sous forme globale, ces grandeurs peuvent servir aussi à un couplage avec les équations de la mécanique (calcul de la vitesse et de la position) [52][98]. Au niveau local, les résultats servent à prédire les déformations que peut subir le système [68][70][76]. Pour déterminer ces efforts, plusieurs méthodes de calcul peuvent être employées. Parmi ces méthodes, on trouve celles qui sont basées sur le calcul de la densité de force (distribution de la force locale à la surface). La force globale est alors obtenue par une somme des forces locales. Ces méthodes utilisent des concepts basés sur les sources équivalentes (charges ou courants magnétiques), la dérivée de l'énergie magnétique ou le tenseur de Maxwell [10][69][71][97]. Dans un calcul par la méthode des éléments finis, ces techniques utilisent la distribution des grandeurs locales dans le domaine étudié.

Dans ce travail, nous nous intéresserons au calcul global de la force et du couple par deux méthodes: le tenseur de Maxwell et les travaux virtuels. Ces calculs sont présentés pour les structures 2D et 3D avec une discrétisation par la méthode des éléments finis des équations du champ électromagnétique [109].

Les deux méthodes de calculs sont testées sur deux exemples. Le premier concerne deux conducteurs parallèles avec des courants dans le même sens. On calcule alors la force qui s'exerce sur un conducteur. Cet exemple nous permet de valider les algorithmes de calcul de force implantés dans les codes de calcul 3D et 2D en comparant les valeurs numériques et la solution analytique. Dans le deuxième exemple, il s'agit de calculer la force portante d'un électroaimant. Ce dispositif sera modélisé avec une prise en compte du circuit électrique et de la saturation. Dans ce cas, les calculs seront effectués à l'aide des potentiels a , Ω et de la formulation hybride a - Ω .

3.1. Méthode du tenseur de Maxwell

3.1.1. Principe

Nous désirons calculer les forces et le couple qui s'exercent sur une partie \mathcal{D}' du domaine étudié \mathcal{D} . Cette région est limitée par une surface Γ . Le système peut contenir des matériaux magnétiques (linéaires ou non-linéaires), des conducteurs ou des régions inductrices caractérisées par une densité de courant uniforme (Fig. II.13). Ce calcul est effectué par l'application du tenseur de Maxwell \mathbf{T} qui est défini dans le vide (ou milieu équivalent) par l'expression suivante [1]:

$$\mathbf{T}_{i,j} = \mu_0 (h_i h_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} h^2) \quad i, j = x, y, z \quad (\text{II.24})$$

avec \mathbf{h} le champ magnétique donné par ces composantes dans le repère cartésien $oxyz$ $\mathbf{h} (h_x, h_y, h_z)$ et δ_{ij} le symbole de Kronecker.

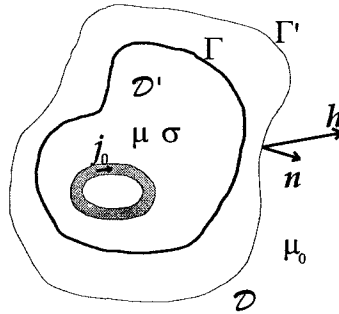


Fig. II.13. Application du tenseur de Maxwell

Le tenseur de Maxwell permet de calculer la force qui s'exerce sur le domaine \mathcal{D}' par une intégrale étendue à une surface Γ' qui l'entoure:

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{D}'} \text{div } \mathbf{T} dv = \oint_{\Gamma'} \mu_0 ((\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{h} - \frac{1}{2} |\mathbf{h}|^2 \mathbf{n}) ds \quad (\text{II.25})$$

La surface Γ' peut être quelconque à condition qu'elle soit définie complètement dans le vide (ou milieu équivalent). Elle doit aussi englober toute la région qui nous intéresse. \mathbf{n} représente la normale sortante à cette surface. A partir de l'expression précédente, on peut aussi déduire la valeur du couple \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \oint_{\Gamma'} \mu_0 ((\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{r} \times \mathbf{h}) - \frac{1}{2} |\mathbf{h}|^2 (\mathbf{r} \times \mathbf{n})) ds \quad (\text{II.26})$$

\mathbf{r} est le vecteur qui relie l'élément d'intégration ds à l'axe de rotation.

3.1.2. Discrétisation

Pour la modélisation numérique des systèmes électrotechniques, on est amené à approcher les intégrales donnant les valeurs de la force (II.25) ou du couple (II.26) par une somme finie effectuée sur la surface Γ' . En conséquence, cette dernière est représentée par un

assemblage de "Ne" éléments surfaciques en 3D ou linéiques en 2D. De telles entités sont obtenues par l'intersection du maillage éléments finis avec la surface Γ' . De ce fait, seule une partie des éléments du maillage est concernée par le calcul de la force ou du couple. En ce qui concerne le champ magnétique \mathbf{h} , il est remplacé par son approximation numérique sur chaque élément.

Cas tridimensionnel

On cherche à déterminer les composantes de la force $\mathbf{F}^T (F_x, F_y, F_z)$ et le couple. Ce dernier est calculé pour une rotation du domaine \mathcal{D}' autour de l'axe oz et il n'a alors qu'une seule composante, notée C_z . L'utilisation des éléments tétraédriques du premier ordre suppose une variation linéaire du potentiel considéré. Le champ magnétique est alors constant dans chaque élément. Pour un élément de surface Γ^e , les composantes du champ et de la normale sortante sont, respectivement, $\mathbf{h}^{eT} (h_x^e, h_y^e, h_z^e)$ et $\mathbf{n}^{eT} (n_x^e, n_y^e, n_z^e)$. On note que le choix d'une surface élémentaire plane implique une normale sortante unique. En utilisant les notations précédentes dans la relation (II.25), nous pouvons alors écrire les composantes de la force \mathbf{F} sous la forme matricielle suivante (voir annexe 4):

$$F_s = \frac{\mu_0}{2} \sum_{e=1}^{Ne} \Gamma^e (\mathbf{h}^{eT} \mathbf{M}_s^e \mathbf{h}^e) \quad s = x, y, z \quad (\text{II.27})$$

Pour chaque composante de la force \mathbf{F} , la matrice \mathbf{M}_s^e s'écrit:

$$\mathbf{M}_x^e = \begin{bmatrix} n_x^e & 0 & 0 \\ 2n_y^e & -n_x^e & 0 \\ 2n_z^e & 0 & -n_x^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_y^e = \begin{bmatrix} -n_y^e & 2n_x^e & 0 \\ 0 & n_y^e & 0 \\ 0 & 2n_z^e & -n_y^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_z^e = \begin{bmatrix} -n_z^e & 0 & 2n_x^e \\ 0 & -n_z^e & 2n_y^e \\ 0 & 0 & n_z^e \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Pour le calcul du couple, le vecteur \mathbf{r} est défini par les projections du barycentre de l'élément surfacique sur le plan oxy , soit $\mathbf{r}^{eT} (r_x^e, r_y^e, 0)$. A partir de la relation (II.26), la composante C_z du couple peut s'écrire:

$$C_z = \frac{\mu_0}{2} \sum_{e=1}^{Ne} \Gamma^e (\mathbf{h}^{eT} \mathbf{M}_c^e \mathbf{h}^e) \quad (\text{II.29})$$

La matrice \mathbf{M}_c^e est donnée par l'expression suivante:

$$\mathbf{M}_c^e = r_x^e \mathbf{M}_y^e - r_y^e \mathbf{M}_x^e = \begin{bmatrix} -r_x^e n_y^e - r_y^e n_x^e & 2r_x^e n_x^e & 0 \\ -2r_y^e n_y^e & r_x^e n_y^e + r_y^e n_x^e & 0 \\ -2r_y^e n_z^e & 2r_x^e n_z^e & -r_x^e n_y^e + r_y^e n_x^e \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

Dans le cas des machines tournantes, le calcul du couple est effectué en utilisant une surface disposée dans l'entrefer. Il s'agit d'un cylindre d'axe oz et de rayon R . En utilisant les coordonnées polaires dans l'expression précédente, nous obtenons:

$$\mathbf{M}_c^e = 2R \begin{bmatrix} -\cos\theta^e \sin\theta^e & \cos^2\theta^e & 0 \\ -\sin^2\theta^e & \cos\theta^e \sin\theta^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

θ^e est l'angle que fait le vecteur \mathbf{r}^e avec l'axe ox .

En théorie, les valeurs de la force ou du couple ne dépendent pas du choix de la surface d'intégration Γ . Cela n'est pas toujours vérifié en modélisation numérique [13][79]. En effet, pour avoir une précision suffisante, cette surface doit être placée de façon à relier les milieux des arêtes des tétraèdres (Fig.II.14.). Ces éléments appartiennent à une couche entourant l'objet modélisé. Selon la disposition de ces éléments dans cette couche, on peut distinguer deux types d'éléments surfaciques: triangles ou quadrilatères. Cela nécessite donc deux algorithmes différents pour calculer la surface et le barycentre.

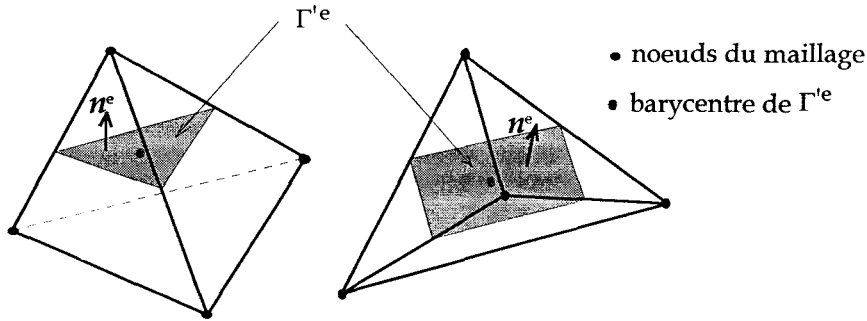


Fig. II.14. Type d'éléments surfaciques
intersection entre un maillage en tétraèdres et la surface d'intégration

Cas bidimensionnel

Le domaine étudié est maillé en triangles du premier ordre et nous désirons déterminer les composantes F_x et F_y de la force et le couple C_z . Dans la représentation 2D, la surface d'intégration est une ligne fermée. Le terme ds dans les relations (II.25) et (II.26) peut s'écrire Ldl ; avec L la longueur du dispositif suivant oz . Pour chaque élément linéique de longueur l^e , nous disposons de la valeur du champ magnétique et de la normale sortante $\mathbf{n}^{eT}(n_x^e, n_y^e, 0)$. Dans ces conditions, le calcul de force est ramené à l'expression matricielle suivante:

$$F_s = L \frac{\mu_0}{2} \sum_{e=1}^{Ne} l^e (\mathbf{h}^{eT} \mathbf{M}_s^e \mathbf{h}^e) \quad s = x, y \quad (\text{II.32})$$

$$\text{avec } \mathbf{M}_x^e = \begin{bmatrix} n_x^e & 0 \\ 2n_y^e & -n_x^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_y^e = \begin{bmatrix} -n_y^e & 2n_x^e \\ 0 & n_y^e \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Pour le calcul du couple, nous utilisons les projections du centre du segment l^e comme composantes du vecteur \mathbf{r}^e . Nous obtenons alors l'expression suivante:

$$C_z = L \frac{\mu_0}{2} \sum_{e=1}^{Ne} l^e (\mathbf{h}^{eT} \mathbf{M}_c^e \mathbf{h}^e) \quad (\text{II.34})$$

$$\text{avec } \mathbf{M}_c^e = r_x^e \mathbf{M}_y^e - r_y^e \mathbf{M}_x^e = \begin{bmatrix} -r_x^e n_y^e - r_y^e n_x^e & 2r_x^e n_x^e \\ -2r_y^e n_y^e & r_x^e n_y^e + r_y^e n_x^e \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

Les éléments linéiques l^e sont obtenus par l'intersection du maillage en triangles avec la courbe d'intégration Γ' . Il n'existe alors qu'une seule configuration possible: un segment reliant les centres des arêtes coupées par la courbe Γ' (Fig. II.15).

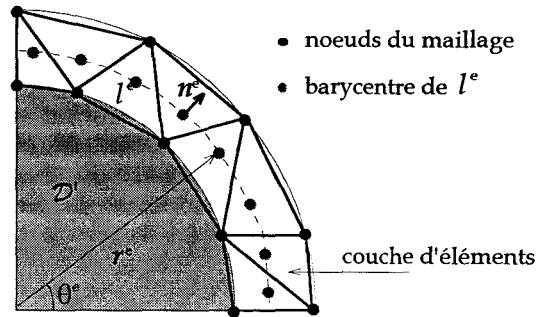


Fig. II.15. Surface d'intégration pour le tenseur de Maxwell (cas bidimensionnel)

En conclusion, le calcul de la force globale ou du couple par le tenseur de Maxwell présente plusieurs avantages:

- le calcul du champ magnétique peut se faire, dans un cas linéaire ou non, pour un problème magnétostatique ou magnétodynamique.
- le choix de la surface d'intégration est quelconque.
- seule une partie des éléments du maillage est concernée par ce calcul.

Néanmoins, l'implantation de cette méthode dans un code de calcul engendre certaines difficultés, telles que:

- cette méthode ne peut être généralisée à tous les types de maillages par une procédure unifiée, d'où la nécessité de l'adapter aux éléments traversés par la surface d'intégration (triangles, quadrilatères, tétraèdres, hexaèdres, ...).
- la multiplicité des formes de la surface élémentaire implique une l'utilisation de plusieurs algorithmes pour le calcul de la surface, du barycentre et du champ magnétique.

Toutefois, ces difficultés ne sont pas insurmontables. C'est pourquoi, le tenseur de Maxwell est largement utilisé et il constitue souvent une référence dans le calcul des forces et du couple.

3.2. Méthode des travaux virtuels

3.2.1. Principe

Nous considérons le même domaine \mathcal{D}' que celui défini précédemment (Fig. II.13.). Nous désirons calculer les forces et le couple par la méthode des travaux virtuels. Cette approche est basée sur le principe de la transformation de l'énergie magnétique en énergie mécanique. En effet, on peut montrer que la force totale, suivant une direction "s", est calculée à partir de la variation de l'énergie magnétique "w" du système après un déplacement dans cette même direction. Ce mouvement est effectué à flux constant, i.e. b constant [10][68].

$$F_s = -\partial_s w \Big|_{b=\text{cte}} \quad s = x, y, z \quad \text{avec} \quad w = \int_{\mathcal{D}'} \int_0^b h db dv \quad (\text{II.36})$$

Une expression similaire peut être établie en utilisant la variation de la co-énergie magnétique "w'" à courant constant, i.e. h constant:

$$F_s = \partial_s w' \Big|_{h=\text{cte}} \quad s = x, y, z \quad \text{avec} \quad w' = \int_{\mathcal{D}'} \int_0^h \mathbf{b} \, dh \, dv \quad (\text{II.37})$$

En supposant qu'il n'y a pas de variation de h ou de \mathbf{b} sur la frontière Γ durant le déplacement, le calcul de w et w' est effectué uniquement dans le domaine \mathcal{D}' . Vu les considérations sur le champ et l'induction, le calcul de la force est obtenu en utilisant: la dérivée de l'énergie (II.36) pour le potentiel vecteur \mathbf{a} et la dérivée de la co-énergie (II.37) pour le potentiel scalaire Ω [10]. Nous pouvons aussi calculer le couple par une dérivation de w ou de w' par rapport à l'angle de rotation θ . Nous obtenons donc les relations suivantes:

$$C_z = -\partial_\theta w \Big|_{b=\text{cte}} \quad C_z = \partial_\theta w' \Big|_{h=\text{cte}} \quad (\text{II.38})$$

3.2.2. Discrétisation

Le but est d'obtenir la valeur globale de la force ou du couple à partir d'une solution du problème par la méthode des éléments finis. Pour ce faire, il est possible d'utiliser une approche par différences finies qui consisterait à évaluer l'énergie w (II.36) ou la co-énergie w' (II.37) pour deux positions (s_0 et s_1) de la région \mathcal{D}' . La valeur de la force est alors donnée par les expressions:

$$F_s = -\frac{w_1 - w_0}{s_1 - s_0} \quad F_s = \frac{w'_1 - w'_0}{s_1 - s_0} \quad (\text{II.39})$$

Cette approche nécessite donc deux solutions du problème. D'autre part, elle introduit des erreurs d'arrondi sur le calcul de la force [13]. Pour ces raisons, on lui préfère une méthode basée sur la dérivation locale de l'énergie ou de la co-énergie. Dans ce cas, le calcul de la force ou du couple est obtenu par une différentiation directe des fonctionnelles d'énergie w ou w' en utilisant une seule résolution par les éléments finis. Cette méthode donne un algorithme général et facile à implanter. Son introduction dans un code de calcul est faite par la dérivée de la matrice jacobienne [10].

Le calcul est effectué par une intégrale volumique en 3D ou surfacique en 2D. Généralement, on choisit sur une couche d'éléments située dans l'air et englobant le domaine \mathcal{D}' . Le mouvement de ce dernier implique une déformation des éléments. Les noeuds de la surface sont alors virtuellement déplacés [10][68][79]. Dans le cas des machines tournantes, une telle couche est disposée dans l'entrefer.

Cas tridimensionnel

Dérivée locale de l'énergie magnétique

L'utilisation du potentiel vecteur \mathbf{a} , discrétisé par des éléments d'arête, implique qu'un flux qui peut être gardé constant par les circulations de \mathbf{a} . Par conséquent, le calcul des forces est obtenu par la dérivée de l'énergie. Pour chaque élément, l'induction magnétique est donnée par la relation $\mathbf{b}^e = \text{rot } \mathbf{w}^e \mathbf{c}_a^e$. L'énergie magnétique est alors approchée par une somme finie sur les "Ne" éléments de la couche définie précédemment:

$$\mathbf{w} = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{w}^e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{c}_a^{eT} \mathbf{S}_a^e \mathbf{c}_a^e \quad \text{avec } \mathbf{S}_a^e = \int_{\mathcal{D}^e} \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{w}^{eT} \cdot \text{rot } \mathbf{w}^e dv \quad (\text{II.40})$$

\mathbf{w}^e est l'énergie magnétique pour un élément ayant subi un déplacement virtuel. On note que la matrice \mathbf{S}_a^e est la matrice de raideur élémentaire calculée dans l'air (voir l'expression (I.58a)). Comme les valeurs des circulations sont maintenues constantes pendant le déplacement et que l'énergie magnétique du domaine \mathcal{D}' change, la dérivation s'effectue uniquement sur les termes de la matrice \mathbf{S}_a^e . La force s'écrit alors comme suit:

$$\mathbf{F}_s = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{c}_a^{eT} \partial_s \mathbf{S}_a^e \mathbf{c}_a^e \quad (\text{II.41})$$

L'expression de la matrice $\partial_s \mathbf{S}_a^e$ est obtenue plus facilement par le passage de l'élément réel \mathcal{D}^e à l'élément de référence $\hat{\mathcal{D}}^e$ (voir annexes 1 et 4):

$$\partial_s \mathbf{S}_a^e = \int_{\hat{\mathcal{D}}^e} \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{w}^{eT} [(\partial_s \mathbf{J}^T) \mathbf{J}^{T^T} - (\partial_s \mathbf{J}')] \text{rot } \mathbf{w}^e d\hat{v} \quad (\text{II.42})$$

\mathbf{J} est la matrice jacobienne et \mathbf{J}' représente la co-matrice (matrice des cofacteurs) transposée de \mathbf{J} .

Dérivée locale de la co-énergie magnétique

Pour le potentiel scalaire Ω , la force est calculée par la dérivée de la co-énergie. En effet, on peut avoir un courant constant en fixant les valeurs du potentiel. Ce dernier est discrétisé par des éléments nodaux. Dans ce cas, le champ magnétique \mathbf{h} s'écrit $\mathbf{h}^e = -\text{grad } \lambda^e \Omega^e$ pour chaque élément. La co-énergie (II.37) est alors donnée par la relation suivante:

$$\mathbf{w}' = \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{w}'^e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{Ne} \Omega^{eT} \mathbf{S}_\Omega^e \Omega^e \quad \text{avec } \mathbf{S}_\Omega^e = \int_{\mathcal{D}^e} \mu_0 \text{grad } \lambda^{eT} \cdot \text{grad } \lambda^e dv \quad (\text{II.43})$$

On note que \mathbf{S}_Ω^e est la matrice élémentaire de raideur définie dans l'air (voir la relation (I.54a)). Durant le déplacement, les valeurs du potentiel Ω sont fixées par contre la co-énergie du domaine \mathcal{D}' change. De ce fait, la force est calculée par la dérivée de la matrice \mathbf{S}_Ω^e :

$$\mathbf{F}_s = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{Ne} \Omega^{eT} \partial_s \mathbf{S}_\Omega^e \Omega^e \quad (\text{II.44})$$

En utilisant les mêmes notations que précédemment, nous obtenons (annexe 4):

$$\partial_s \mathbf{S}_\Omega^e = \int_{\hat{\mathcal{D}}^e} \mu_0 \text{grad } \lambda^{eT} [(\partial_s \mathbf{J}^T) \mathbf{J}^{T^T} - (\partial_s \mathbf{J}')] \text{grad } \lambda^e d\hat{v} \quad (\text{II.45})$$

L'expression matricielle entre crochets " $(\partial_s J^T)J^T - (\partial_s J)J$ " est la même pour les deux relations (II.42) et (II.45). Cela représente un avantage considérable. En effet, il suffit d'utiliser un seul algorithme pour développer les calculs pour les deux formulations.

Dérivée de la matrice jacobienne

Le calcul de la force ou du couple, par la méthode des travaux virtuels, est ramené à une dérivation de la matrice jacobienne J. Cette dernière permet de passer de l'élément réel, de forme quelconque, à un élément de référence de forme unique (annexe 1). L'expression de J est donnée dans l'annexe 1, nous la rappelons ici afin de calculer sa dérivée. Pour un tétraèdre, dont les noeuds sont repérés par les coordonnées cartésiennes $((x_i, y_i, z_i) \ i=1,4)$, nous avons la relation suivante:

$$J = \mathbf{grad} \hat{\lambda} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \tag{II.46}$$

où $\hat{\lambda}$ désigne les fonctions d'approximation nodales définies dans le système de référence. Ces fonctions sont linéaires, donc leur gradient est constant. Par conséquent, la dérivation de J est faite uniquement sur les coordonnées des noeuds de l'élément. Cela donne:

$$\partial_s J = \mathbf{grad} \hat{\lambda} \begin{bmatrix} \partial_s x_1 & \partial_s y_1 & \partial_s z_1 \\ \partial_s x_2 & \partial_s y_2 & \partial_s z_2 \\ \partial_s x_3 & \partial_s y_3 & \partial_s z_3 \\ \partial_s x_4 & \partial_s y_4 & \partial_s z_4 \end{bmatrix} \tag{II.47}$$

La table (II.4) résume les valeurs des dérivées pour les différentes composantes de la force suivant x, y et z. Pour le calcul du couple, on pose $s=\theta$.

s	noeud i déplacé			noeud i fixe		
	$\partial_s x_i$	$\partial_s y_i$	$\partial_s z_i$	$\partial_s x_i$	$\partial_s y_i$	$\partial_s z_i$
x	1	0	0	0	0	0
y	0	1	0	0	0	0
z	0	0	1	0	0	0
θ	y_i	$-x_i$	0	0	0	0

Table II.4. Les dérivées des coordonnées

Le calcul de la force nécessite donc la connaissance des éléments de la couche ainsi que les noeuds virtuellement déplacés (Fig. II.16.).

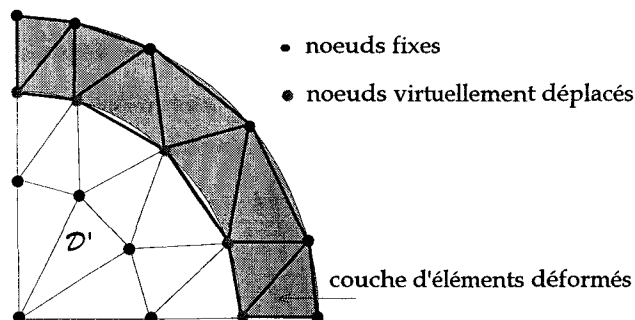


Fig. II.16. Eléments déformés et noeuds déplacés pour un maillage en triangles

Cas bidimensionnel

Pour la formulation 2D, le calcul de la force ou du couple par les travaux se fait par la dérivée de l'énergie magnétique. La procédure de calcul est similaire à celle présentée en 3D. Le seul changement se trouve au niveau des dimensions des matrices mises en jeu et des fonctions d'approximation utilisées. Dans ce cas, la dérivée de la matrice de raideur dans l'air est donnée par l'expression suivante:

$$\partial_s S_{a_z}^e = \int_{\mathcal{D}^e} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{grad} \lambda^{eT} [(\partial_s J^T) J^{TT} - (\partial_s J') J] \mathbf{grad} \lambda^e d\hat{s} \quad (\text{II.48})$$

Les fonctions λ^e sont définies pour un triangle du premier ordre et la matrice J a pour dimension (2,2).

En résumé, l'utilisation des travaux virtuels profite des avantages du tenseur de Maxwell, mais elle permet en plus de traiter le problème par un algorithme unique. Pour cela, il suffit de dresser une table contenant les noeuds virtuellement déplacés et les éléments appartenant à la couche. Du point de vue numérique, les deux méthodes présentées peuvent donner des résultats similaires pour des situations particulières. En effet, en partant d'une couche fine d'éléments, il a été montré que les deux méthodes sont équivalentes lorsque l'épaisseur de cette couche tend vers zéro [13]. C'est le cas des machines tournantes dont l'entrefer est généralement petit.

3.3. Applications

3.3.1. Deux conducteurs parallèles

L'intérêt de cet exemple est de valider les algorithmes de calcul de force (tenseur de Maxwell et méthode des travaux virtuels). En effet, pour cet exemple simple, nous disposons d'une solution analytique [1]. Bien qu'il s'agisse d'un problème invariant par translation, les calculs ont été également effectués en 3D. Les résultats obtenus par les calculs numériques ont été comparés avec la valeur analytique.

Définition du problème

Il s'agit de deux conducteurs parallèles avec un courant dans le même sens [76]. Les données géométriques ainsi que les distributions de la densité de courant j_0 et du vecteur source t_0 sont représentés par la figure (II.17). La structure est mise dans une boîte d'air (avec $b.n = 0$ sur la surface extérieure).

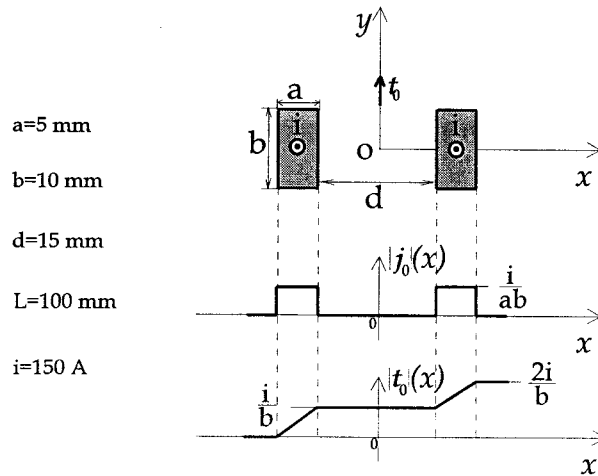


Fig. II.17. Deux conducteurs parallèles (géométrie, distribution de j_0 et de t_0)

Résultats

Le problème a été résolu en utilisant les formulations a et $t_0-\Omega$ en 3D et le potentiel vecteur a_z en 2D. Le calcul de la force globale qui s'exerce un conducteur a été fait par le tenseur de Maxwell et la méthode des travaux virtuels. Pour le premier cas, nous avons choisi une surface d'intégration qui englobe le conducteur. Pour la deuxième méthode, les noeuds situés à la surface du conducteur sont virtuellement déplacés. Les éléments déformés se trouvent dans une couche qui entoure le conducteur. La figure (II.18a) représente les lignes équipotentielles en 2D. La figure (II.18b) montre la distribution de l'induction magnétique b pour un calcul 3D en potentiel vecteur a .

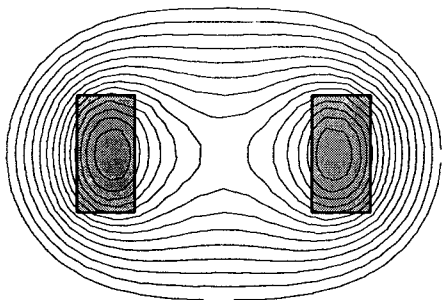


Fig. II.18a. Lignes équipotentielles 2D

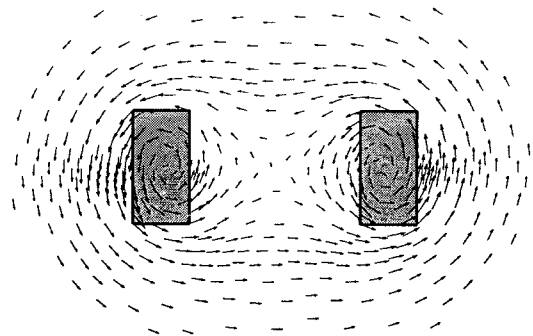


Fig. II.18b. Distribution de b (formulation a)

Le calcul analytique de la force donne $F_y=0$ et $F_x=2.9 \cdot 10^{-2}$ (voir annexe 5). La table (II.5) résume les résultats obtenus pour le calcul de F_x par les différentes formulations. ϵ représente l'erreur relative de la valeur calculée par rapport à la solution analytique.

Formulation	$F_x(\text{N})$	ϵ	$F_x(\text{N})$	ϵ
	Tenseur de Maxwell		Travaux virtuels	
3D a	$2.74 \cdot 10^{-2}$	5.5%	$2.22 \cdot 10^{-2}$	4.3%
3D $t_0-\Omega$	$3.12 \cdot 10^{-2}$	7.6%	$3.14 \cdot 10^{-2}$	8.3%
2D a_z	$2.78 \cdot 10^{-2}$	4.2%	$2.78 \cdot 10^{-2}$	4.2%

Table II.5. Comparaison de la force globale obtenue par les différentes formulations

On note que les deux méthodes de calcul de force donnent des résultats presque similaires. Par ailleurs, la formulation en potentiel scalaire est la moins intéressante du point de vue précision. Les résultats obtenus, pour cet exemple test, permettent de valider l'implantation du calcul de force dans les codes de calculs du champ en 2D et 3D.

3.3.2. Electroaimant

Dans cet exemple, notre but est de comparer la valeur de la force portante de l'électroaimant calculée par les différentes formulations (a , t_0 - Ω , a - Ω et 2D). En premier lieu, nous avons utilisé une caractéristique linéaire pour le fer. Par la suite, nous avons traité le problème avec une prise en compte des non-linéarités magnétiques. Dans les deux cas, nous avons imposé un courant constant dans la bobine. Le couplage circuit est introduit avec un échelon de tension.

Définition du problème

La géométrie et les dimensions du l'électroaimant étudié sont données la figure (II.19) [18]. Le circuit magnétique (la partie en U et la plaque) est de même perméabilité. Les longueurs suivant oz de la partie en U et de la plaque sont, respectivement, $L_U=90$ mm et $L_p=50$ mm.

La structure a des symétries par rapport aux plans $x=0$ et $z=0$; ce qui ramène à l'étude du 1/4 du domaine initial. La système est placé dans une boite d'air avec des condition aux limites $b.n = 0$. Sur les plans de symétrie, nous avons $h \times n = 0$ pour $x=0$ et $b.n = 0$ pour $z=0$.

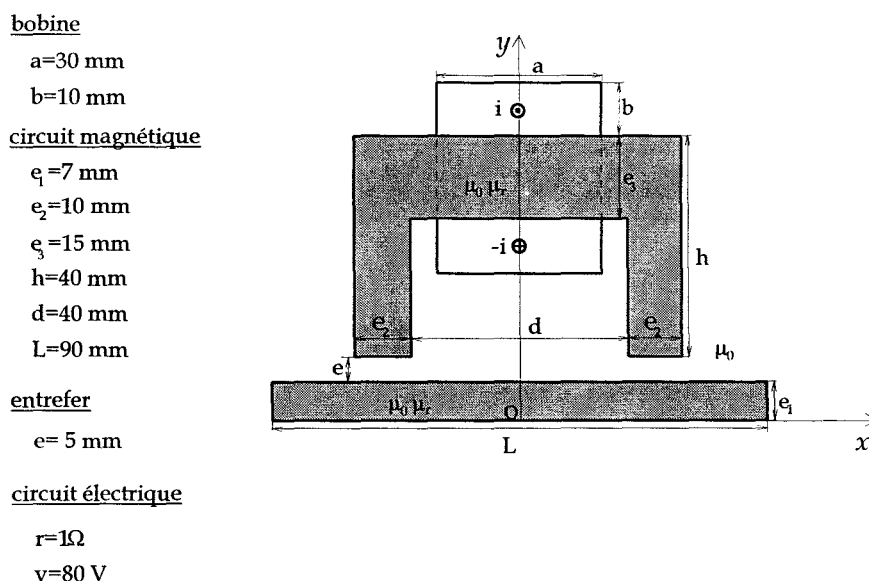


Fig. II.19. Géométrie et caractéristiques du système étudié

Résultats

Les calculs ont été effectués en 3D en utilisant les formulations a , t_0 - Ω et a - Ω . Les résultats obtenus ont été comparés avec le calcul 2D. En ce qui concerne la formulation hybride, l'interface Γ_i est un plan situé au milieu de l'entrefer. La bobine est alors modélisée par le potentiel a (Fig. II.20a.).

Pour le calcul de la force par le tenseur de Maxwell, la surface d'intégration Γ' peut être choisie comme le montre la figure (II.20b). Cette surface est composée de Γ'_1 passant par l'entrefer et de Γ'_2 entourant la plaque. Lorsque Γ'_2 est étendue aux conditions limites, l'induction est nulle et seule l'intégration sur Γ'_1 est prise en compte pour le calcul de la force. Dans le cas des travaux virtuels, nous avons considéré une couche d'éléments en contact avec la surface Γ'_1 .

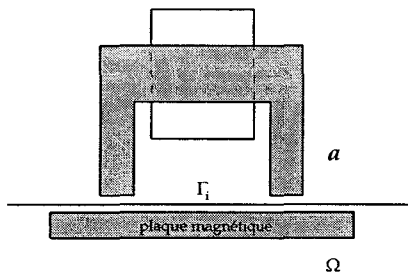


Fig. II.20a. Définition de l'interface Γ_i pour la formulation hybride

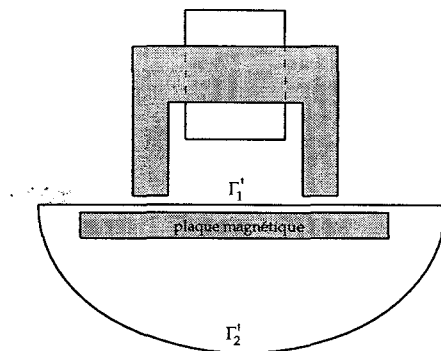


Fig. II.20b. Surface d'intégration pour le tenseur de Maxwell

La figure (II.21) représente le maillage de la structure, noté M3. Il comporte 13193 éléments, 2597 noeuds et 16295 arêtes.

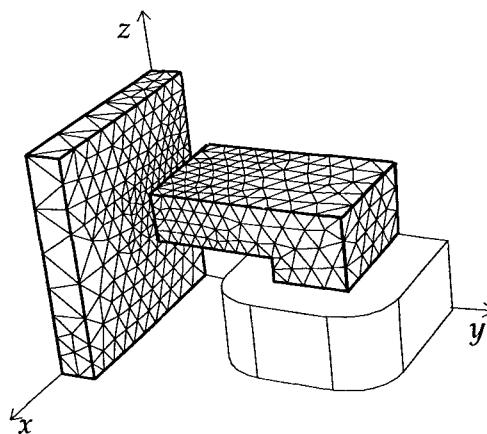


Fig. II.21. Maillage des parties magnétiques du domaine

1. Calcul linéaire

1.a. courant imposé

En utilisant une perméabilité magnétique constante $\mu_r=2777$, nous avons imposé un courant de 80 A dans la bobine. Pour résoudre les systèmes matriciels, nous avons utilisé la méthode du gradient conjugué. Pour le calcul 2D, nous avons employé la méthode de Cholesky. A partir des solutions obtenues en 3D, nous avons tracé la distribution de l'induction en $z=L_U/2$ pour les formulations a et $a-\Omega$ (Fig. II.22). En 2D, la figure (II.23) représente les lignes équipotentielles.

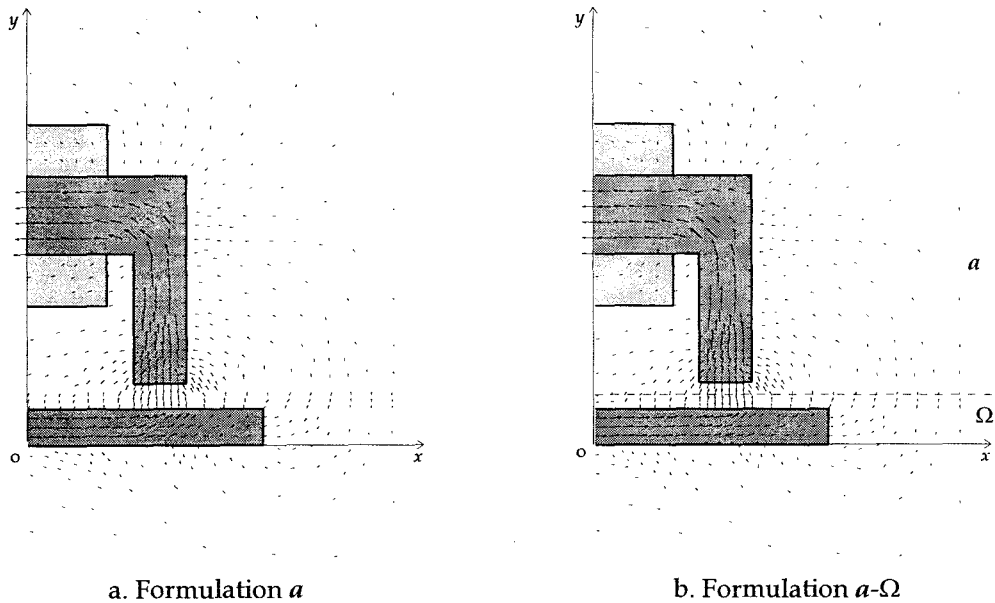


Fig. II.22. Distribution de l'induction b en $z=L_U/2$

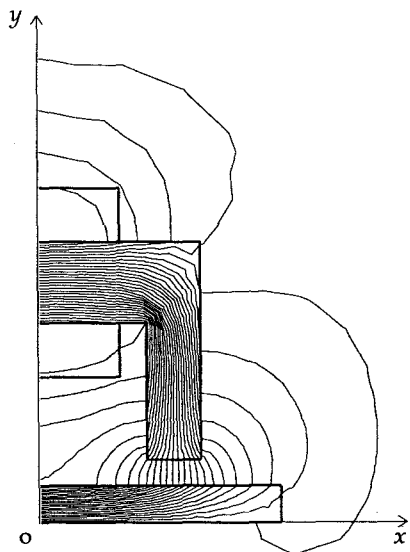


Fig. II.23. Lignes équipotentielles 2D

Sur la figure (II.24), nous avons reporté la valeur de la force calculée par les travaux virtuels pour quatre maillages. La formulation hybride a été testée uniquement sur les deux maillages fins. Les résultats montrent, en premier lieu, la sensibilité de la force calculée au nombre d'éléments plus particulièrement pour la formulation $t_0-\Omega$. En deuxième lieu, la force calculée par l'approche hybride est située entre celle obtenue par les formulations a et $t_0-\Omega$. Les résultats obtenus pour a et $t_0-\Omega$, nous rappellent la complémentarité des énergies en magnéto-statique évoquée pour l'exemple du cube conducteur (chapitre I). Toutefois, cette notion n'est pas démontrée pour le calcul des forces en magnéto-statique.

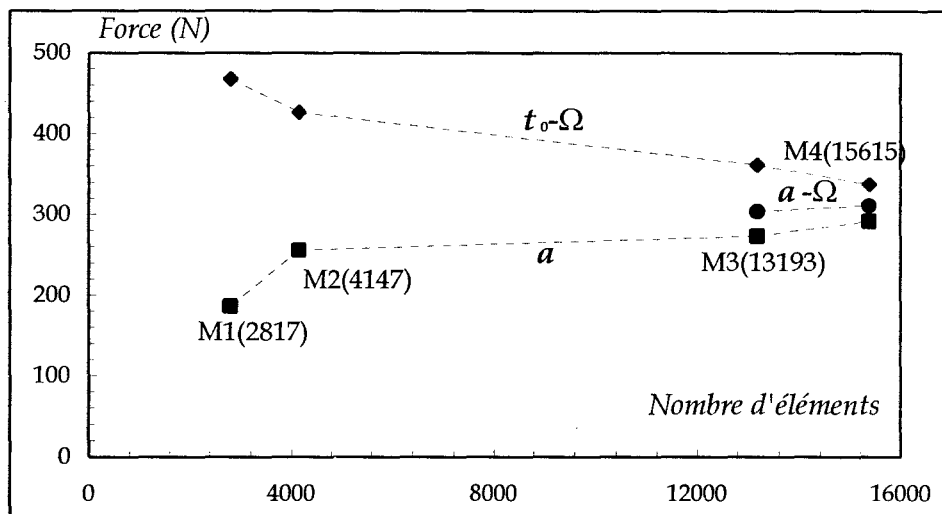


Fig. II.24. Comparaison de la force calculée par la méthode des travaux virtuels pour différents maillages

Pour le maillage M3, la table (II.6) donne les résultats et les caractéristiques de calcul (nombre d'inconnues, taille mémoire et temps CPU). En 2D, nous avons utilisé le stockage en ligne de ciel.

Formulation	$F_y(N)$	$F_y(N)$	Nombre d'inconnues	Taille mémoire	Temps CPU (s)
	Tens. Maxwell	Trav. virtuels			
3D a	273.7	274.3	12987	107006	230
3D $t_0-\Omega$	359.8	360.1	2431	19958	25
3D $a-\Omega$	303.9	302.2	9833	82778	108
2D a_z	277.8	277.9	434	28788	0.8

Table II.6. Comparaison de la force calculée et des performances (maillage M3)

1.b. tension imposée

Dans ce cas, on considère le couplage entre les équations magnétiques et électriques. Le circuit électrique est constitué d'une source de tension constante $v = 80\text{ V}$ et d'une résistance $r = 1\Omega$. Le calcul a été fait en linéaire avec un pas de temps $\Delta t = 1\text{ ms}$. La figure (II.25) montre l'évolution du courant pour les différentes formulations. On note en régime transitoire, une différence entre les résultats obtenus en 2D et en 3D. Cela est dû à l'hypothèse du calcul 2D qui

n'inclut pas toutes les inductances de fuite. On note aussi que les résultats obtenus par la formulation hybride sont très voisins de ceux du potentiel a . Cela peut être expliqué par le fait qu'une grande partie du domaine est modélisée par la formulation a .

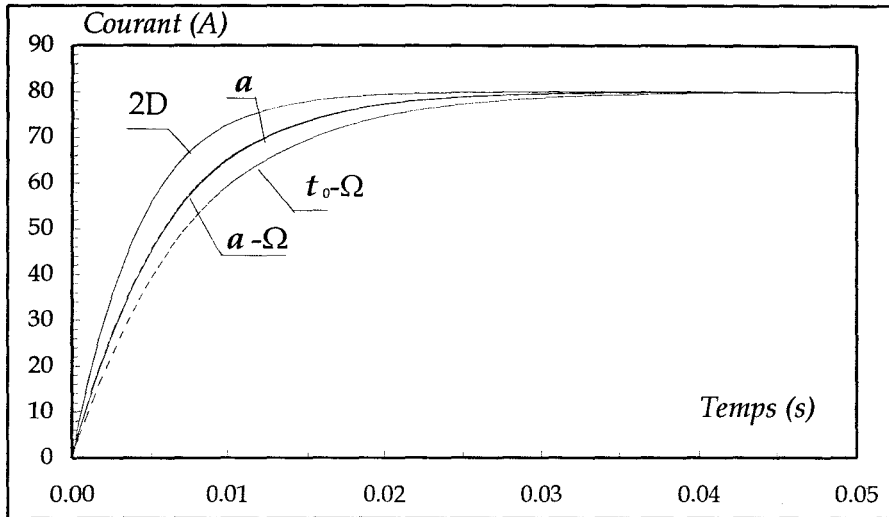


Fig. II.25. Comparaison de l'évolution du courant 3D et 2D

Afin d'illustrer l'influence des inductances de fuite sur les résultats 3D et 3D, nous avons comparé la formulation a et le calcul 2D pour un circuit magnétique fermé (la perméabilité de l'entrefer est égale à celle du circuit magnétique). Ce résultat est représenté par la figure (II.26).

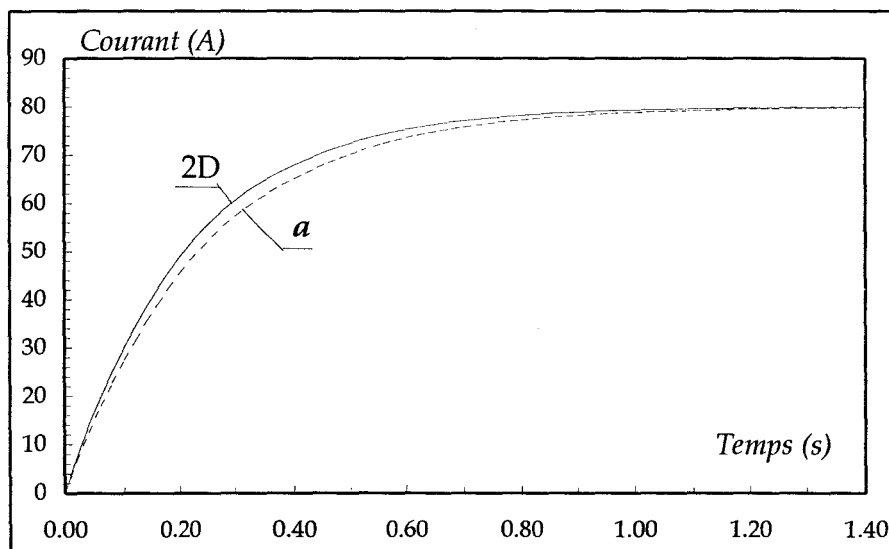


Fig. II.26. Comparaison 3D (formulation a) et 2D pour un circuit magnétique fermé

2. Calcul non-linéaire

L'approximation de la caractéristique du fer est donnée par les coefficients de Marrocco (Fig. II.27.). Les calculs ont été menés en utilisant le potentiel vecteur magnétique en 3D et en 2D. Pour résoudre les systèmes matriciels, nous avons utilisé la méthode itérative de Newton-Raphson. Comme pour le cas linéaire, nous avons considéré un courant imposé et un échelon de tension.

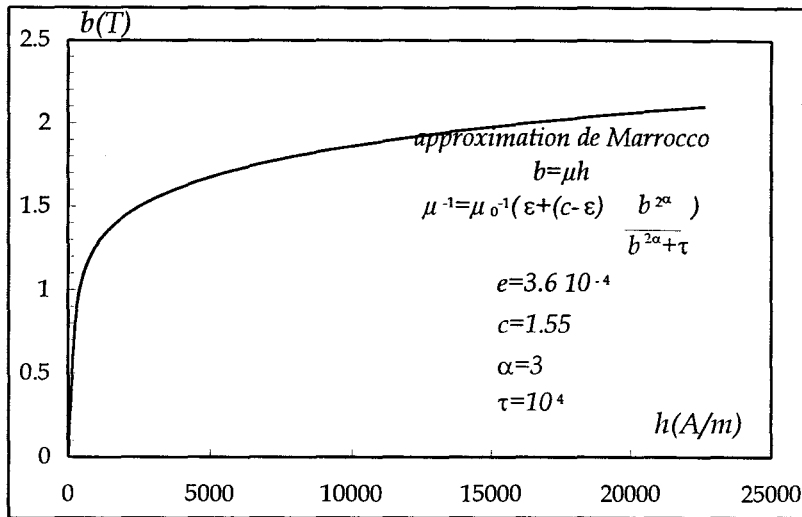


Fig. II.27. Approximation de la courbe $b(h)$ avec les coefficients de Marrocco

2.a. courant imposé

Pour illustrer ce calcul, nous avons comparé les résultats obtenus en 2D et en 3D pour le cas linéaire et non-linéaire (Fig. II.28.). On note sur cette figure l'importance de la prise en compte des non-linéarités magnétiques. En effet, la force obtenue s'écarte largement du calcul en linéaire et de l'approximation analytique. Dans ce dernier cas, le calcul ne tient pas compte des non-linéarités.

En utilisant les données du problème, l'approximation analytique de la force s'écrit:

$$F = \mu_0 \left(\frac{n_s i}{2e} \right)^2 S \tag{II.49}$$

avec S la surface d'une dent de l'électroaimant en regard de la plaque.

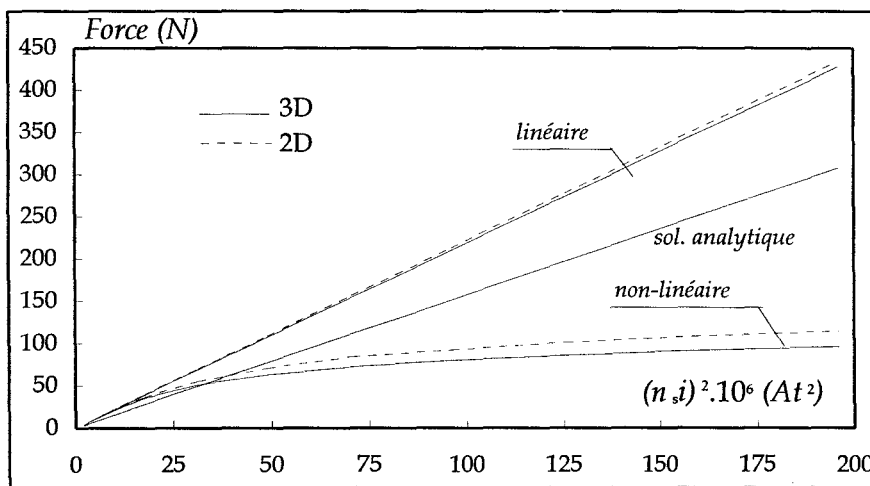


Fig. II.28. La force calculée en fonction du carré des ampères-tours (linéaire et non-linéaire; 3D et 2D)

2.b. tension imposée

En imposant un échelon de tension, nous avons comparé l'évolution du courant (en linéaire et non-linéaire). Les résultats sont donnés par la figure (II.29). Pour des valeurs faibles du courant, les courbes sont confondues. Ensuite, elles s'écartent du fait de la saturation du circuit magnétique.

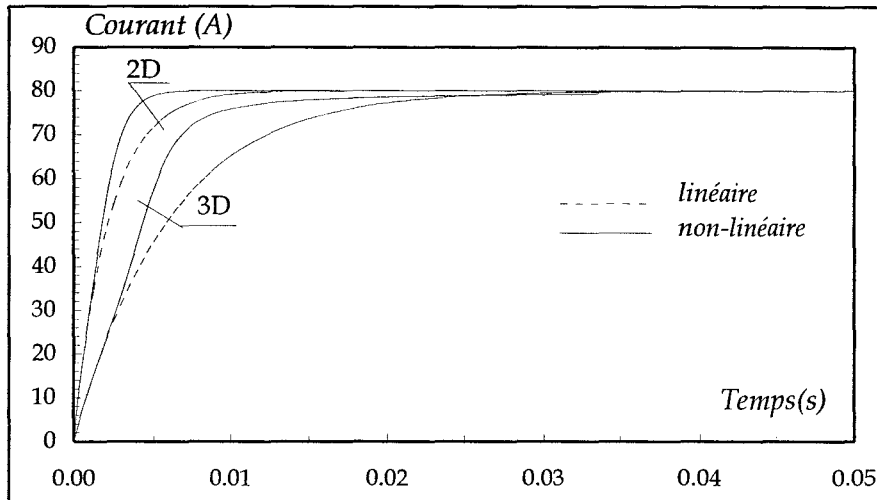


Fig. II.29. Comparaison de l'évolution du courant (linéaire et non-linéaire; 3D et 2D)

Dans cet exemple, nous avons exploité les algorithmes de calcul des forces en 2D et en 3D, le couplage avec un circuit électrique et les non-linéarités magnétiques. Les résultats obtenus valident les algorithmes développés en 2D et en 3D pour le calcul de force. Cela nous a permis de souligner l'importance de la finesse du maillage sur la précision et l'influence de la caractéristique du circuit magnétique sur la valeur de la force.

4. Prise en compte du mouvement

Les convertisseurs électromécaniques sont des dispositifs électrotechniques qui par définition comportent des parties en mouvement. Il peut s'agir de la rotation pour les machines électriques tournantes ou de translation pour les électroaimants. La modélisation numérique de tels systèmes nécessite donc le développement de techniques permettant la prise en compte du mouvement. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories:

- l'utilisation d'un seul référentiel indépendant de la position de la partie mobile. Le mouvement est alors simulé par l'introduction $\mathbf{v} \times \mathbf{b}$ dans les équations du champ électromagnétique; avec \mathbf{v} la vitesse de rotation ou de translation. Cette technique ne peut être appliquée qu'aux dispositifs ayant une partie mobile homogène (invariante par le déplacement) [60].
- l'utilisation de deux référentiels l'un mobile lié à la partie en mouvement \mathcal{D}_m et l'autre à la partie fixe du \mathcal{D}_f (Fig. II.30.). Dans cette approche, le mouvement est traité dans la région entrefer \mathcal{D}_e [9].

Dans cette partie, nous nous intéresserons uniquement aux méthodes développées dans la deuxième catégorie.

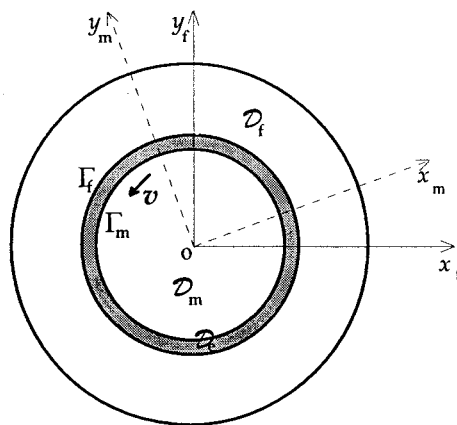


Fig. II.30. Utilisation de deux référentiels

En 2D, les études réalisées ont montré leur efficacité et les résultats obtenus sont satisfaisants. Cependant, l'extension des méthodes utilisées en 2D aux structures tridimensionnelles ne se fait pas d'une manière directe. Pour certaines techniques, la difficulté majeure réside dans le coût en temps de calcul et en espace mémoire requis. Ainsi, les travaux menés en 3D ont adopté des approches simples et peu coûteuses.

Les méthodes de prise en compte du mouvement dans le système à deux repères peuvent être classées comme suit:

- les techniques de remaillage (complet ou partiel),
- les méthodes intégrales,
- le recollement des maillages fixe et mobile.

Dans cette partie nous exposerons le principe, les avantages et les difficultés de ces techniques. Par la suite, nous développerons une approche basée sur le recollement des maillages. Elle sera appliquée au mouvement de la machine asynchrone dans le chapitre suivant.

4.1. Méthodes de remaillage

4.1.1. Remaillage complet

Le principe de cette méthode consiste à remailler complètement la géométrie du domaine pour chaque déplacement de la partie mobile. Cela impose donc un couplage entre le code de calcul par les éléments finis et le mailleur automatique. Il est donc nécessaire d'intégrer l'appel du mailleur dans le code de calcul. Dans la plupart des cas, le remaillage automatique est basé sur la géométrie et non sur les données du maillage effectué pour la position précédente. De ce fait, l'homogénéité du maillage n'est pas garantie. Ainsi, on peut se retrouver avec un nombre d'éléments qui varie en fonction de la position [96]. En utilisant cette techniques, les propriétés de la matrice du système sont inchangées. Par ailleurs, elle est économique lorsque le maillage a un faible nombre d'éléments.

4.1.2. Remaillage partiel: bande de mouvement

Les maillages des domaines \mathcal{D}_m et \mathcal{D}_f sont maintenus et seule la région entrefer \mathcal{D}_e est remaillée après chaque déplacement [15][52][79]. Ce dernier n'affecte pas les termes de la matrice reliés à la partie mobile vu les propriétés des fonctions d'approximation. Cette technique, appelée bande de mouvement, est très utilisée dans les problèmes 2D. Le remaillage peut être effectué par un mailleur automatique intégré au code de calcul ou en développant un algorithme de connexion des noeuds des bords Γ_m et Γ_f de l'entrefer. Cette technique est schématisée par la figure (II.31). On note que le noeud supplémentaire "n" est lié au noeud existant "n'" par les conditions de périodicité.

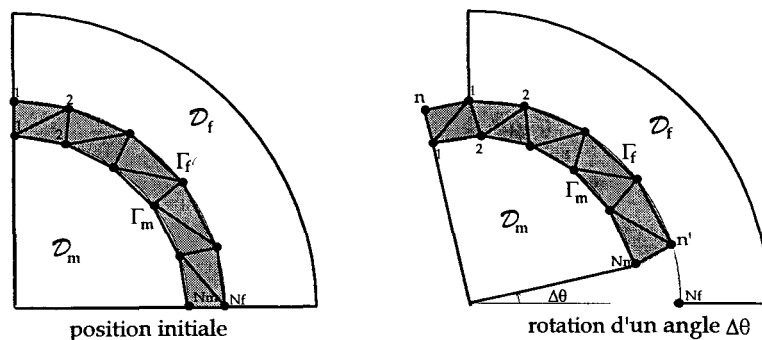


Fig. II.31. Prise en compte du mouvement par la bande de mouvement

L'utilisation de la bande de mouvement permet de garder les propriétés de la matrice éléments finis (creuse et symétrique). Cependant, elle peut engendrer des imprécisions numériques sur le calcul des grandeurs comme le couple des machines électriques. Ceci est dû au caractère discontinu de l'évolution du maillage lors du déplacement. Pour surmonter cette difficulté, on peut utiliser:

- des éléments quadrilatéraux décomposables en triangles. Ces derniers sont ensuite retenus dans la résolution du système en fonction d'un facteur de qualité [79].
- un double maillage local [52].

Dans notre étude, l'implantation de cette technique dans le code de calcul 2D a été faite sans restriction sur le nombre de noeuds sur les interfaces Γ_f et Γ_m . Le remaillage est effectué en employant un critère d'élimination des triangles les plus aplatis. Ce critère est donné par une comparaison des diagonales (d_1 et d_2) du quadrilatère créé par les noeuds de part et d'autre de l'entrefer (Fig. II.32.).

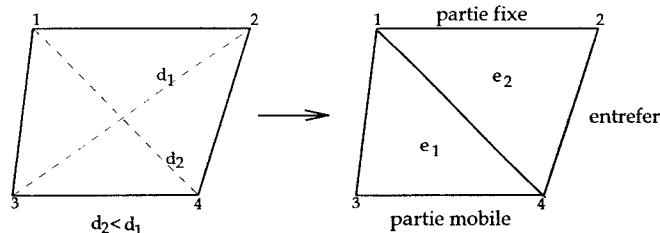


Fig. II.32. Critère utilisé pour le choix des triangles

Si la mise en oeuvre de cette technique en 2D ne pose pas de problème majeur, son extension au 3D n'est directe. En effet, il faut développer un algorithme de maillage puissant. A notre connaissance, cette méthode n'a été testée en 3D que pour une géométrie simple. Dans ce cas, le maillage en hexaèdres est issu d'une extrusion du maillage 2D [96]. Son application à des maillages en tétraèdres pose beaucoup de difficultés. De ce fait, la généralisation de cette approche pour les structures complexes et les différents types d'éléments nécessite une étude approfondie des techniques de maillage en 3D.

4.2. Méthodes intégrales

Les parties fixe et mobile sont couplées dans l'entrefer par des formules intégrales qui utilisent les noeuds aux bords Γ_m et Γ_f de l'entrefer. Ce couplage ne nécessite pas le maillage de l'entrefer et il peut être effectué en utilisant:

- la méthode des intégrales de frontières MIF [9][18],
- une solution analytique du champ magnétique dans l'entrefer obtenue au moyen d'un macro-élément [7].

4.2.1. Intégrales de frontières

Le principe de cette méthode est de ramener la solution du problème défini dans un volume à une solution équivalente sur la surface. Cette dernière entoure le volume et ne doit pas englober des matériaux non-linéaires. C'est le cas pour l'entrefer de machines électriques. En associant cette technique à la méthode des éléments finis, on parle alors de méthode mixte (MEF/MIF) [18][23]. Les résultats obtenus par son application au mouvement sont satisfaisants et ne dépendent pas du déplacement. Malheureusement, la matrice du système est pleine au niveau des degrés de liberté associés aux interfaces Γ_m et Γ_f . Son extension aux structures 3D va donc engendrer des coûts élevés en taille mémoire. De ce fait, cette méthode mixte n'a pas encore été envisagée pour modéliser le mouvement dans les systèmes tridimensionnels à géométrie complexe tels que les machines électriques.

4.2.2. Macro-élément

En 2D, cette méthode consiste à déterminer une solution analytique de l'équation de Laplace $\Delta a_z = 0$ dans la partie uniforme de l'entrefer. En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) , il est possible d'intégrer cette équation avec une séparation des variables. Avec un potentiel périodique, la solution est obtenue par un développement en série de Fourier. Le couplage de cette solution avec le calcul par les éléments finis est effectué en assurant la continuité du potentiel a_z au noeuds des frontières Γ_m et Γ_f . Cela se traduit par les relations suivantes:

$$a_z(\theta_f)|_{\Gamma_f} = \sum_{i=1}^{N_f} \alpha_i(\theta_f) a_{zi} \quad a_z(\theta_m)|_{\Gamma_m} = \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_i(\theta_m) a_{zi} \quad (II.50)$$

Les fonctions α_i vérifient $\alpha_i(\theta_i) = 1$ et $\alpha_i(\theta_j) = 0 \quad i \neq j$. Ces propriétés rappellent les fonctions d'approximation utilisées dans la méthode des éléments finis. L'entrefer constitue alors une sorte d'élément fini à plusieurs noeuds, d'où le nom de macro-élément (Fig. II.33.) [7].

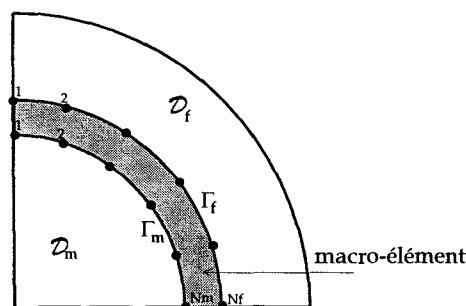


Fig. II.33. Prise en compte du mouvement par le macro-élément

L'introduction des relations (II.50) dans les matrices issues du calcul par les éléments finis donne une matrice pleine au niveau des degrés de libertés liés à Γ_m et Γ_f . De plus, pour obtenir une précision suffisante, il faut utiliser un grand nombre d'harmoniques pour la série de Fourier. Pour ces raisons, le macro-élément engendre des temps de calcul élevé pour un

maillage fin en 2D. Néanmoins, il donne des résultats précis et n'impose pas de contrainte sur le choix du déplacement. Théoriquement, il est possible de développer le même principe en 3D avec des coordonnées cylindriques. Mais, du point de vue pratique, l'application de cette technique serait très lourde à gérer en 3D.

4.3. Méthodes de recollement des maillages

La connexion des maillages fixe et mobile est faite au niveau d'une interface Γ_e (Fig. II.34). Cette surface peut être confondue avec Γ_m et Γ_f ou située entre les deux. Dans ce dernier cas, une partie du volume entrefer est liée à \mathcal{D}_m et l'autre à \mathcal{D}_f . Pour réaliser cette connexion plusieurs méthodes ont été développées:

- les multiplicateurs de Lagrange [51][60][113][115]
- la méthode d'interpolation ou d'extrapolation nodale [111]
- la ligne de glissement en 2D [29] et la surface de glissement en 3D [104][118].

En raison des avantages en temps de calcul et en espace mémoire, ces techniques sont souvent utilisées en 3D.

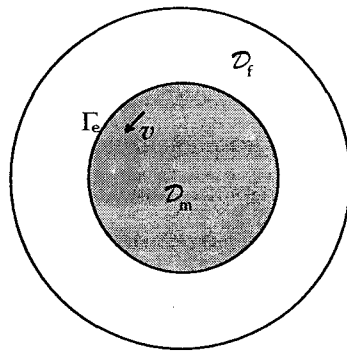


Fig. II.34. Utilisation d'une surface de recollement

4.3.1. Multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode permet le recollement des parties fixe et mobile en utilisant des contraintes additionnelles liées à la continuité du champ ou de l'induction. En d'autres termes, à chaque déplacement, on ajoute des équations qui assurent les conditions de transmission de \mathbf{h} ou de \mathbf{b} à l'interface Γ_e . Cette technique a fait l'objet de plusieurs travaux avec des éléments nodaux [51][60]. Plus récemment, elle a été développée en 3D pour la formulation en potentiel vecteur avec des éléments d'arête [113][115].

Pour le potentiel vecteur \mathbf{a} , le principe consiste à déterminer le minimum des fonctionnelles d'énergie dans les domaines \mathcal{D}_m et \mathcal{D}_f et d'une fonctionnelle liée à la continuité de \mathbf{a} . Cette dernière fait intervenir une inconnue supplémentaire λ , appelée Lagrangien. Ce minimum est calculé en annulant la différentielle. En effectuant une séparation des variables, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_m} (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}_m \cdot \text{rot } \delta \mathbf{a}_m - \delta \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{j}_{0m}) dv + \int_{\Gamma_e} \lambda \cdot \delta \mathbf{a}_m ds = 0 \\ \int_{\mathcal{D}_f} (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}_f \cdot \text{rot } \delta \mathbf{a}_f - \delta \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{j}_{0f}) dv + \int_{\Gamma_e} \lambda \cdot \delta \mathbf{a}_f ds = 0 \\ \int_{\Gamma_e} \delta \lambda \cdot (\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_f) ds = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Les indices m et f correspondent aux variables utilisées, respectivement, dans les domaines \mathcal{D}_m et \mathcal{D}_f . Le symbole δ indique la variation de l'inconnue. On peut montrer que l'utilisation de la formulation variationnelle conduit aux mêmes équations. Il suffit de remplacer les variations des inconnues par les fonctions tests correspondantes [113]. La discrétisation de (II.51) par la méthode des éléments finis conduit à un système matriciel dont les inconnues sont les potentiels vecteurs a_m et a_f et le Lagrangien λ . La matrice obtenue est symétrique avec des termes nulles sur la diagonale. Pour la résolution, on fait appel aux méthodes itératives. L'avantage de cette méthode est qu'elle génère un système proche de ceux des éléments finis. Donc, économique en espace mémoire. Cependant, elle est liée à la formulation utilisée (potentiel vecteur, potentiel scalaire) et aux fonctions d'approximation (nodales, arête). Il faut donc développer des routines de calcul spécifiques à chaque approche.

4.3.2. Méthodes d'interpolation et d'extrapolation nodale

La technique d'interpolation est basée sur la connexion des noeuds du bord mobile (situés sur Γ_e) aux éléments de la partie fixe. Les maillages fixe et mobile peuvent être réalisés séparément. De plus, étant basée sur la connexion, cette méthode est indépendante de la formulation utilisée: potentiel vecteur ou scalaire [111]. Au niveau de l'interface, chaque noeud mobile k se trouve en face d'un élément fixe. L'expression de la variable de travail (notée u) au noeud k est donnée de la manière suivante:

$$u_m^k = \sum_{i=1}^N \lambda_i^k u_{fi} \quad (\text{II.52})$$

avec λ_i^k les fonctions d'approximation nodales évaluées au noeud k . N est le nombre de noeuds par élément. L'avantage d'une telle méthode est de garder la structure de la matrice du système sans engendrer d'inconnues supplémentaires. Cependant, elle peut être mise en défaut lorsqu'il s'agit de maillage fortement hétérogène. Par ailleurs, son caractère nodal, n'assure qu'en moyenne la continuité du potentiel vecteur.

L'extrapolation nodale est introduite pour surmonter ces difficultés en créant une connexion surfacique par un choix de points supplémentaires à l'interface [96]. Parmi ces points, on peut choisir les points d'intégration de Gauss. Cela implique, un accroissement des degrés de liberté et un traitement particulier pour les points ajoutés. Les résultats obtenus par cette technique sont satisfaisants, mais son application reste limitée aux éléments nodaux.

4.3.3. Ligne de glissement

En utilisant cette technique, le raccord des deux maillages s'effectue suivant une ligne [29]. Cette méthode est simple à mettre en oeuvre, mais elle exige un maillage régulier au niveau de l'interface Γ_e . La ligne de glissement doit être subdivisée en segments ayant la même longueur (Fig. II.35.).

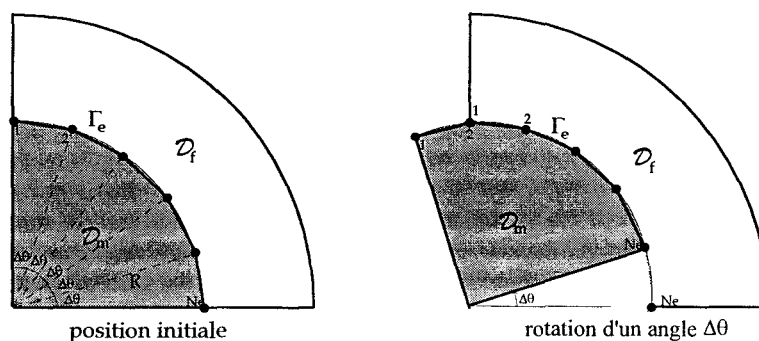


Fig. II.35. Prise en compte du mouvement par la ligne de glissement

L'inconvénient de cette technique est qu'elle ne permet pas de déplacement indépendant du pas de maillage $\Delta\theta$. En effet, le pas de temps Δt correspond à un nombre entier de $\Delta\theta$. Outre cette difficulté, elle présente l'avantage de garder les propriétés des matrices éléments finis sans engendrer d'inconnues supplémentaires.

4.3.4. Surface de glissement

La surface de glissement est tout simplement l'extension au 3D de la ligne de glissement [104][118]. Dans notre travail, cette technique a été développée et implantée dans le code de calcul 3D. Dans le prochain chapitre, son application sera présentée pour la simulation du mouvement dans une machine asynchrone. Pour la mise en oeuvre de cette méthode, il faut que le maillage soit régulier au niveau de l'interface Γ_e . De plus, il faut s'assurer de la conformité du maillage à chaque déplacement. Un maillage est dit conforme, lorsque l'interface entre deux éléments quelconque est une facette commune. Cette propriété est garantie avec un maillage régulier en noeuds et en arêtes.

Pour la ligne de glissement, nous avons vu que le mouvement est lié au pas de maillage. Cette difficulté peut être surmontée en recalculant les coordonnées de la partie mobile en fonction du déplacement. Cela implique une légère déformation des éléments dans l'entrefer. La figure (II.36) montre l'application de cette technique. A partir du maillage initial, la connexion des maillages fixe et mobile se fait en comparant le déplacement $\Delta\theta_d$ et le pas de maillage $\Delta\theta$.

- Lorsque l'angle de rotation vérifie $\Delta\theta_d < \Delta\theta/2$, seules les coordonnées des noeuds du maillage mobile sont recalculées en fonction du déplacement.
- Lorsque l'angle de rotation vérifie $\Delta\theta/2 \leq \Delta\theta_d < \Delta\theta$, les coordonnées des noeuds et la connectivité sont changées.

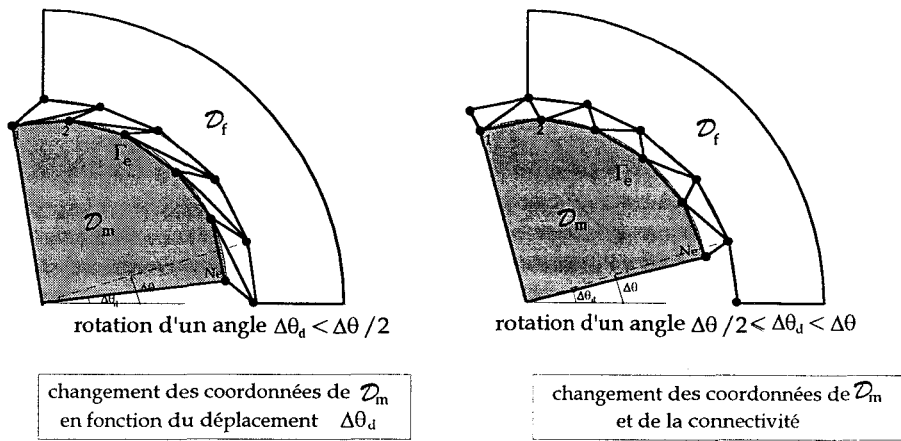


Fig. II.36. Connexion des noeuds en fonction du déplacement

Lors du déplacement, la connectivité reste inchangée pour les éléments du maillage fixe et ceux de la partie mobile n'ayant pas de contact avec l'interface Γ_e . Donc, les éléments qui nous intéressent se trouvent dans le maillage mobile et ils ont des noeuds ou des arêtes liés à la surface de glissement. Pour chaque déplacement, le changement de connectivité se fait par une permutation circulaire des degrés de liberté.

Pour la formulation en potentiel vecteur ou scalaire avec des éléments nodaux, ce sont les inconnues liées aux noeuds qui sont permutées. Pour le potentiel vecteur avec des éléments d'arête, nous permutons les circulations sur les arêtes. La figure (II.37) montre la connexion des maillages fixe et mobile après un pas de déplacement. Ce schéma correspond à une vue de l'interface de rotation suivant les directions axiale et radiale.

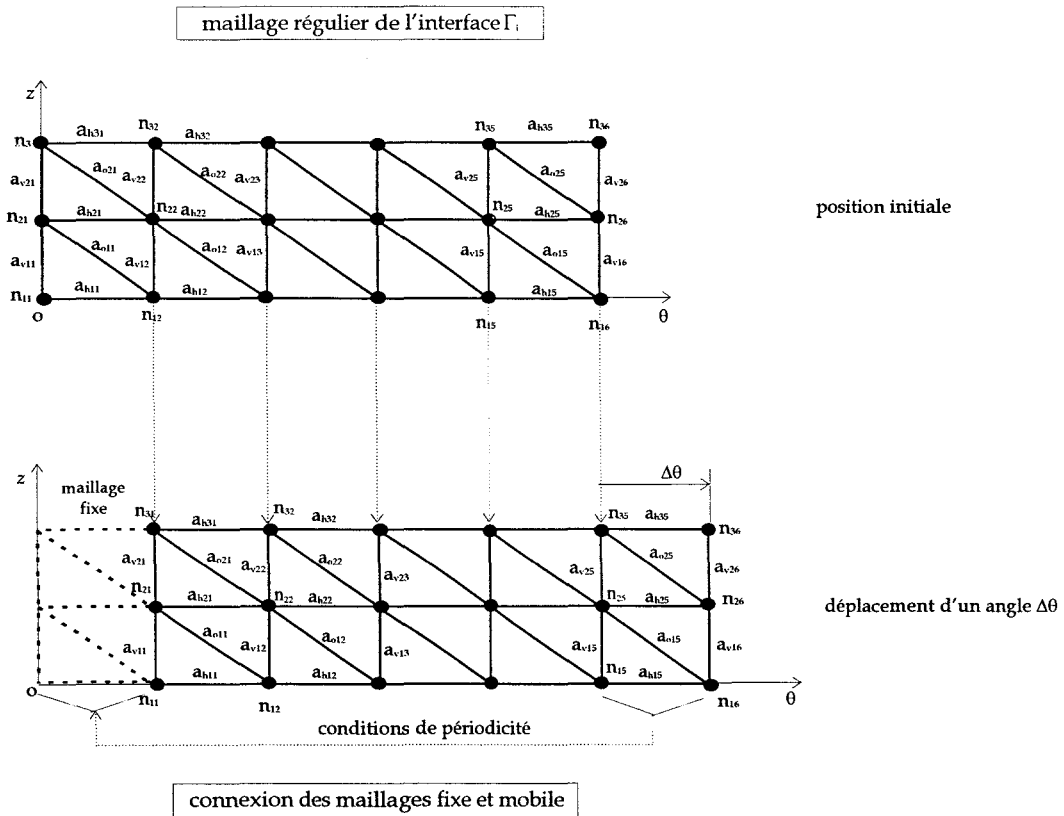


Fig. II.37. Connexion des maillages fixe et mobile par la surface de glissement

En utilisant les notations de la figure précédente, les tables ci-dessous donnent, à titre d'exemple, la permutation des noeuds qui se trouvent à $z=0$ et des arêtes situées dans la première couche d'éléments. Le coefficient β est introduit pour tenir compte de la périodicité de la structure; ($\beta = 1$ périodique, $\beta = -1$ anti-périodique).

permutation des noeuds (formulations utilisant des inconnues aux noeuds):

$\theta=0$	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	βn_{11}
$\theta=\Delta\theta$	βn_{15}	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}
$\theta=2\Delta\theta$	βn_{14}	βn_{15}	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}

permutation des arêtes (formulations utilisant des inconnues aux arêtes):

verticales (suivant oz)

$\theta=0$	a_{v11}	a_{v12}	a_{v13}	a_{v14}	a_{v15}	βa_{v11}
$\theta=\Delta\theta$	βa_{v15}	a_{v11}	a_{v12}	a_{v13}	a_{v14}	a_{v15}
$\theta=2\Delta\theta$	βa_{v14}	βa_{v15}	a_{v11}	a_{v12}	a_{v13}	a_{v14}

horizontales (suivant θ)

$\theta=0$	a_{h11}	a_{h12}	a_{h13}	a_{h14}	a_{h15}
$\theta=\Delta\theta$	βa_{h15}	a_{h11}	a_{h12}	a_{h13}	a_{h14}
$\theta=2\Delta\theta$	βa_{h14}	βa_{h15}	a_{h11}	a_{h12}	a_{h13}

obliques

$\theta=0$	a_{o11}	a_{o12}	a_{o13}	a_{o14}	a_{o15}
$\theta=\Delta\theta$	βa_{o15}	a_{o11}	a_{o12}	a_{o13}	a_{o14}
$\theta=2\Delta\theta$	βa_{o14}	βa_{o15}	a_{o11}	a_{o12}	a_{o13}

La permutation des inconnues engendre des changements de la connectivité. De ce fait, après chaque déplacement, nous devons faire appel à la routine de création des tables de stockage de la matrice du système. Pour le stockage morse, ce calcul est coûteux en temps de calcul. Il est donc nécessaire de l'optimiser.

Cette optimisation est faite en utilisant la procédure suivante:

- renuméroter les inconnues liées à l'interface Γ_e à partir de 1
- effectuer les changements dans les tables de stockage uniquement pour ces inconnues, en considérant seulement les éléments du maillage mobile en contact avec l'interface

On note que la taille de la matrice du système ne change pas lors du déplacement; car il n'y a pas d'inconnues supplémentaires.

4.4. Récapitulatif

La table (II.7) donne un récapitulatif des différentes techniques de prise en compte de mouvement exposées dans cette partie du chapitre.

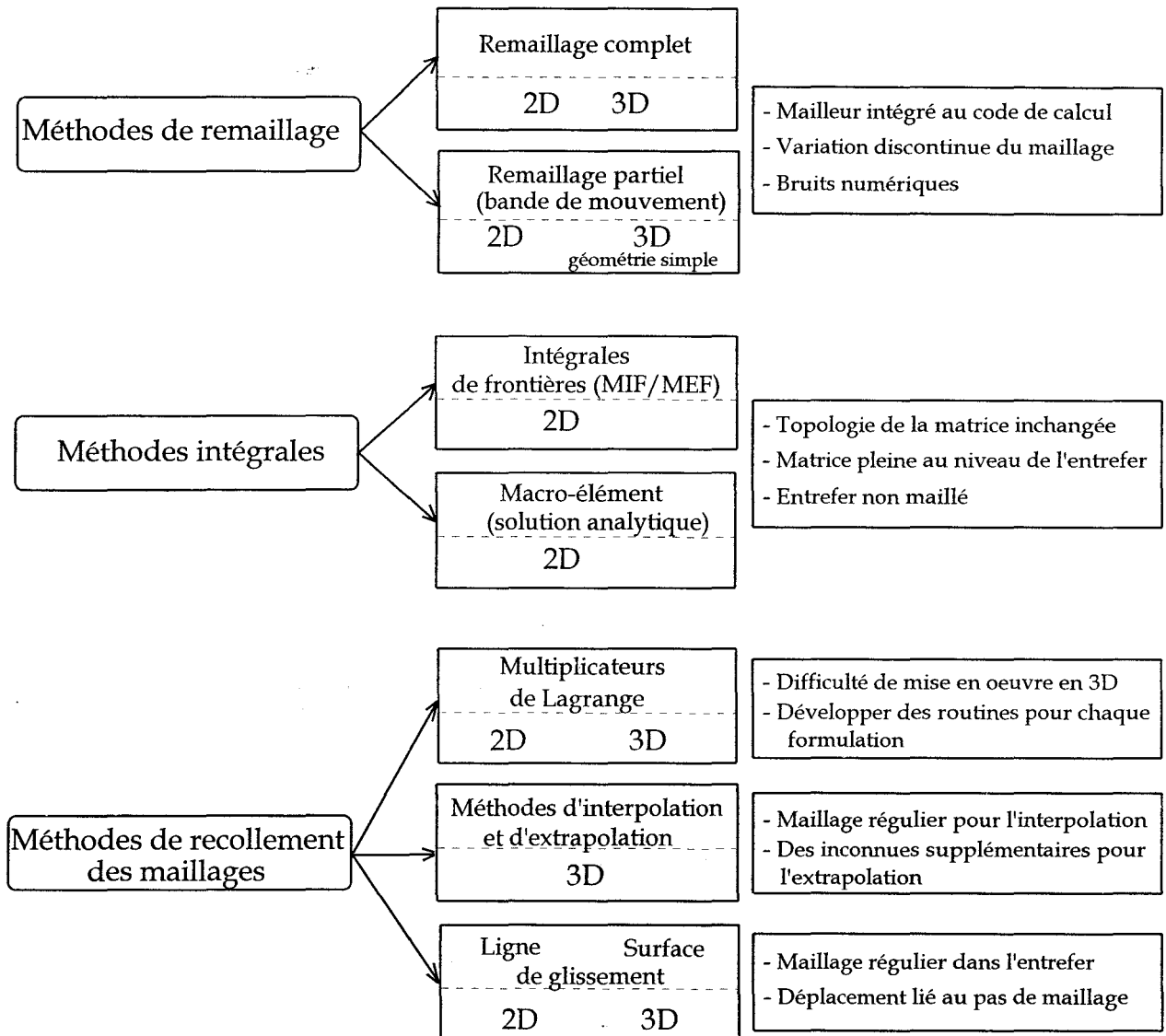


Table II.7. Récapitulatif des méthodes utilisées en 2D et 3D pour la prise en compte du mouvement

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé les méthodes de prise en compte du circuit électrique dans les dispositifs électrotechniques alimentés en tension. Ceci a été réalisé pour la formulation en potentiel vecteur \mathbf{a} et celle en potentiel scalaire t_0 - Ω . Dans le même contexte, nous avons développé les systèmes matriciels à résoudre pour la formulation hybride \mathbf{a} - Ω . Pour l'exemple de la bobine entre deux plaques conductrices, nous avons constaté que les résultats obtenus par la formulation \mathbf{a} - Ω , au niveau du courant et de la distribution de la densité de courant dans les plaques, sont assez proches de ceux obtenus par la formulation \mathbf{a} . Cette extension du couplage entre les équations électriques et magnétiques traitées par la formulation hybride élargit le champ d'application de cette méthode.

En deuxième lieu, nous avons développé les algorithmes de calcul des forces et du couple, en 3D et 2D, en utilisant deux méthodes: le tenseur de Maxwell et les travaux virtuels. Pour la deuxième méthode nous avons exposé un algorithme unifié pour l'utilisation des formulations \mathbf{a} et Ω . Ces algorithmes ont été validés pour un exemple simple dont la solution analytique est connue. Par la suite, une structure complexe (électroaimant) a été modélisée. En utilisant la formulation hybride, les distributions du champ magnétique obtenues donnent des résultats satisfaisants pour le calcul de la force.

A la fin du chapitre, nous avons exposé les différentes méthodes de prise en compte du mouvement pour la modélisation des systèmes électromécaniques par la méthode des éléments finis. Nous avons basé cet exposé sur la possibilité d'étendre les techniques 2D au 3D. Pour certaines d'entre elles, nous avons vu qu'une telle extension n'est pas possible à l'heure actuelle. Jusqu'à présent, les méthodes adoptées sont très simples à implanter et peu coûteuses. Dans cette optique, nous avons réalisé l'extension au 3D de la ligne de glissement utilisée en 2D. L'application de cette méthode sera présentée dans le chapitre suivant qui a pour objet la modélisation de la machine asynchrone.

Chapitre III

Modélisation

de la Machine Asynchrone à Cage

1. Introduction

Dans le domaine de la conversion électromécanique, le moteur asynchrone est très répandu. Ses principaux avantages sont sa robustesse, son coût, sa simplicité de réalisation et l'absence de contact avec le rotor. Ces dernières années, le développement de l'électronique de puissance et de la commande numérique ont permis d'envisager des asservissements à vitesse variable utilisant ce type de moteur. C'est pourquoi, des modèles numériques en 2D sont de plus en plus utilisés pour la conception et l'optimisation de ces machines [17][29][52]. Plus récemment, la montée en puissance des calculateurs a permis le passage aux modèles 3D. Ainsi, des travaux ont été publiés sur la machine synchrone à aimants permanents [104][114], autopilotée [80][81] ou encore sur la machine asynchrone à encoches inclinées [115].

Ce chapitre est consacré à la modélisation de la machine asynchrone. Il constitue une application des développements effectués précédemment. En effet, nous ferons appel aux éléments de calcul et aux méthodes présentées au cours des deux premiers chapitres. Nous commencerons par la mise en équation du problème en 2D avec le couplage circuit au stator et au rotor. Par la suite, ce modèle sera étendu aux machines à encoches inclinées. Dans ce cas, la procédure consiste à découper l'armature inclinée en sections droites dans lesquelles on suppose une formulation 2D classique. Enfin, nous introduisons la modélisation en 3D de la machine et les difficultés liées à la mise en équation d'une telle structure.

A la fin du chapitre, nous présenterons les résultats de la modélisation d'une machine asynchrone à cage. Dans un premier temps, nous ferons une étude à encoches droites en 2D et en 3D. Un tel calcul permettra de valider la technique de prise en compte du mouvement développée en 3D. Puis, nous nous intéresserons au cas des encoches inclinées avec une comparaison des calculs 2D et 3D.

2. Présentation des différents modèles

Présentation de la machine asynchrone à cage

La machine asynchrone est constituée de deux armatures en tôles encochées et séparées par un entrefer:

- l'armature fixe (stator) comporte des enroulements polyphasés à "p" paires de pôles. Le bobinage est composé de conducteurs filaires connectés au circuit d'alimentation.
- l'armature mobile (rotor) porte une cage formée de barres conductrices reliées entre elles par des anneaux de court circuit.

En fonctionnement moteur, les enroulements statoriques sont alimentés par un système de tensions équilibrées de pulsation ω , créant ainsi dans l'entrefer un champ tournant à la vitesse $\Omega_s = \omega / p$. Si Ω_r désigne la vitesse du rotor, les courants induits dans les barres créent, à leur tour, un champ tournant à la vitesse $\Omega_s - \Omega_r$ par rapport au rotor. Le glissement de la machine "g" est défini comme le rapport de la fréquence des courants rotoriques à celle des courants statoriques: $g = 1 - \Omega_r / \Omega_s$. L'interaction entre les deux champs produit un couple mécanique qui fait tourner le rotor.

A partir de cette présentation, il ressort que la machine asynchrone à cage constitue un système complexe en raison de sa géométrie et des phénomènes physiques à traiter. En effet, on y retrouve en plus du mouvement et des non-linéarités magnétiques, des conducteurs filaires au stator et des conducteurs massifs au rotor (barres et anneaux).

Modèles classiques

La machine asynchrone a été longtemps modélisée par un schéma électrique équivalent qui dérive de la théorie des champs tournants. Les paramètres de ce schéma (inductances et résistances) sont obtenus par une décomposition de la machine en différentes parties qui peuvent être analysées d'une manière simplifiée (Fig. II.1.). Le calcul de ces paramètres fait appel à une connaissance approximative de la distribution du champ magnétique à partir de laquelle sont déduites les perméances du circuit magnétique et de l'entrefer. En utilisant la notation complexe, un tel modèle permet d'évaluer les performances de la machine en régime permanent sinusoïdal. Le régime dynamique est formulé par un système d'équations différentielles qui peuvent être intégrées, par rapport au temps, par une méthode numérique du type Runge-Kutta ou Euler. Ces modèles donnent généralement des résultats satisfaisants au niveau de la prédiction du courant et du couple pour une alimentation sinusoïdale. Mais ils ne permettent pas le calcul direct des flux ni des courants rotoriques. Par ailleurs, il est difficile d'introduire les effets 3D (têtes de bobines, anneaux de court-circuit et inclinaison des encoches) ou les non-linéarités magnétiques. Dans la littérature, on trouve des méthodes utilisant des inductances en fonction du courant pour tenir compte de la saturation ou des facteurs correcteurs pour inclure les effets 3D.

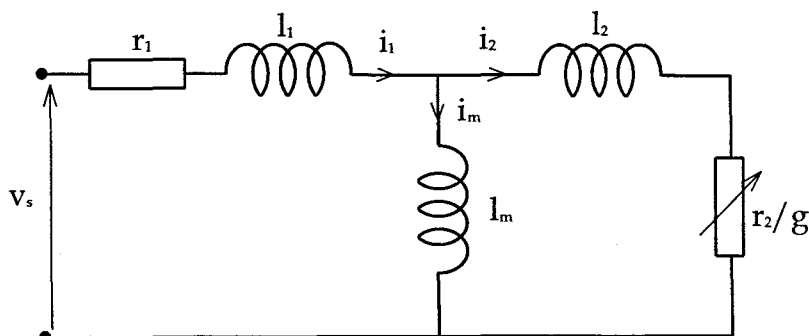


Fig. III.1. Schéma équivalent par phase d'une machine asynchrone

Modèles basés sur le calcul du champ par la méthode des éléments finis

La complexité des machines utilisées et l'exigence de bonnes performances dynamiques nécessitent une modélisation plus fine. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, la résolution des équations du champ par la méthode des éléments finis peut être couplé au circuit d'alimentation avec la prise en compte du mouvement. Néanmoins, une telle modélisation est coûteuse en temps de calcul et il est encore difficile d'envisager son couplage avec des commandes complexes de la machine. Dans ce contexte, les modèles simplifiés, comme le schéma équivalent, sont souvent utilisés. C'est pourquoi, plusieurs travaux ont été développés afin de déterminer les paramètres de ce schéma en utilisant un ou plusieurs calculs du champ en 2D [72][100][101]. Les résultats obtenus par ces études ont donné plus de précision sur les performances de la machine par rapport aux modèles classiques.

Lorsque les sources du champ sont supposées sinusoïdales, le régime permanent de la machine est obtenu par l'utilisation de la notation complexe [17][65][100]. Dans ce cas, le mouvement est introduit en changeant la valeur de la conductivité des barres en fonction du glissement. Quant à la saturation, elle est prise en compte à l'aide d'une courbe $b-h$ calculée par la valeur moyenne de la perméabilité sur une période. A partir de l'état magnétique de la machine, on peut déduire les paramètres du schéma équivalent pour un point de fonctionnement donné.

La modélisation plus générale des machines nécessite une discrétisation temporelle associée à une résolution simultanée des équations magnétiques et électriques [17][53][55][75][79]. Le mouvement est introduit par deux référentiels au stator et au rotor avec une liaison au niveau de l'entrefer. Cette approche permet une modélisation plus large de la machine. Les non-linéarités magnétiques ou électriques peuvent être introduites plus facilement par rapport au cas complexe. De plus, elle permet de simuler les régimes transitoires et la prise en compte des équations de la mécanique. Cependant, vu le nombre de pas nécessaires à la simulation et des itérations en non-linéaire, cette technique engendre des temps de calcul élevés. Mais avec le développement incessant des calculateurs, ces temps ne cessent de se réduire. Actuellement, ce modèle peut être envisagé pour des applications de conception ou d'optimisation à caractère industriel. Les résultats obtenus servent aussi à évaluer les paramètres du schéma équivalent [101].

La modélisation en trois dimensions de la machine asynchrone a commencé par le calcul des effets 3D tels que les têtes de bobines [72] ou les anneaux de court circuit [102]. Plus récemment, un modèle 3D a été présenté pour une machine à encoches inclinées. Il a été développé en pas à pas dans le temps avec la formulation électrique $a-\phi$ sans tenir compte de la saturation, ni des têtes de bobines. Le mouvement a été simulé par les multiplicateurs de Lagrange [115].

3. Modèle bidimensionnel de la machine asynchrone

Dans ce modèle, la structure électromagnétique est décrite par des équations à deux dimensions en tenant compte de deux types de conducteurs: massifs (barres du rotor) et filaires (bobinage du stator). Les équations du champ sont écrites dans le cadre de la formulation magnétodynamique avec la composante a_z du potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique φ . En 2D, ce dernier se réduit à une différence de potentiels aux bornes de chaque barre. La résolution de ces équations est faite par la méthode des éléments finis avec une discrétisation temporelle. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il est possible de réaliser le couplage du circuit d'alimentation avec la structure électromagnétique. Dans ce chapitre, ce couplage est appliqué au bobinage statorique pour une alimentation en tension de la machine. Par la suite, il sera étendu aux conducteurs massifs en utilisant la différence de potentiel aux bornes des barres et l'analyse du circuit de la cage rotorique. La rotation est simulée au niveau de l'entrefer par la bande de mouvement ou le macro-élément. Les non-linéarités magnétiques sont considérées par la méthode de Newton-Raphson.

La mise en équation de la machine asynchrone à cage conduit à un système matriciel. La résolution de ce dernier donne l'état magnétique du système et le courant dans les phases. On peut aussi déduire des grandeurs telles que le couple ou les courants rotoriques. A partir de ce modèle, nous avons développé une approche de prise en compte de l'inclinaison. Elle peut être présentée comme une généralisation du cas non-incliné.

3.1. Equations du champ électromagnétique

Dans l'hypothèse d'un système 2D, on suppose que le courant a une seule composante suivant oz , ce qui implique un champ magnétique dans le plan oxy . Le potentiel vecteur magnétique n'a alors qu'une seule composante a_z . Dans la région conductrice (barres rotoriques), nous introduisons le potentiel scalaire électrique φ . En 2D, nous pouvons montrer que le gradient de ce potentiel est le même dans toute la section conductrice modélisée [17][52]. En effet, la projection suivant oz , des vecteurs définis dans la relation (I.33) implique $\partial_x \varphi = 0$ et $\partial_y \varphi = 0$. La composante du gradient de φ suivant oz s'écrit alors:

$$\mathit{grad} \varphi = \frac{\Delta v}{L} k \quad (\text{III.1})$$

k représente un vecteur unitaire suivant oz et L la longueur du conducteur. Δv est la différence de potentiels, soit $\Delta v = \varphi_L - \varphi_0$; φ_0 et φ_L étant les potentiels aux extrémités d'une barre.

En ajoutant la densité de courant induit, supposée suivant oz , dans l'équation (II.17), nous obtenons l'équation électromagnétique du système:

$$\mathit{div} \left(\frac{1}{\mu} \mathit{grad} a_z \right) - \sigma \left(\partial_t a_z + \frac{\Delta v}{L} \right) = -j_{0z} \quad (\text{III.2})$$

La discrétisation de cette équation par la méthode des éléments finis (formulation variationnelle et méthode de Galerkin), nous conduit au système suivant:

$$\sum_{i=1}^{N_n} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \lambda_j \cdot \mathbf{grad} \lambda_i a_{zi} ds + \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \lambda_j \left(\partial_t \lambda_i a_{zi} + \frac{\Delta v}{L} \right) ds = \int_{\mathcal{D}_0} \lambda_j j_{0z} ds \quad j=1, N_n \quad (\text{III.3})$$

λ désigne les fonctions d'approximation nodales. En supposant la densité de courant j_{0z} et la différence de potentiels Δv connues, les degrés de liberté de ce système sont les valeurs du potentiel aux noeuds du maillage. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle suivante:

$$S_{a_z} a_z + T_{a_z} \frac{da_z}{dt} + C_{a_z - \Delta v} \Delta v = F_0 \quad (\text{III.4})$$

Les termes de la matrice S_{a_z} sont donnés par l'expression (II.22a) et ceux des matrices T_{a_z} , $C_{a_z - \Delta v}$ et du vecteur F_0 sont définis comme suit:

$$T_{a_z, i, j} = \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \lambda_i \lambda_j ds \quad i, j = 1, N_n \quad (\text{III.5a})$$

$$C_{a_z - \Delta v, i} = \frac{1}{L} \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \lambda_i ds \quad i = 1, N_n \quad (\text{III.5b})$$

$$F_{0i} = \int_{\mathcal{D}_0} \lambda_i j_{0z} ds \quad i = 1, N_n \quad (\text{III.5c})$$

L'expression de la matrice de couplage $C_{a_z - \Delta v}$ est donnée pour une barre, mais elle peut être facilement étendue à un système constitué de plusieurs conducteurs massifs.

Conditions aux limites

Pour la résolution du système (III.4), il est nécessaire de connaître les conditions aux frontières du domaine \mathcal{D} . Dans le cas des machines électriques, la condition du type $b.n = 0$ est fréquemment rencontrée. Elle se traduit sur le potentiel vecteur par une condition du type Dirichlet $a_z = 0$. Cette dernière est imposée sur le rayon externe du stator et le rayon interne du rotor (Fig. III.2.).

Conditions de périodicité

Les conditions périodiques ou anti-périodiques permettent de réduire le domaine étudié. Pour le potentiel vecteur, elles s'écrivent:

$$a_z|_A = \beta a_z|_B \quad (\text{III.6})$$

β est un coefficient qui prend la valeur 1 ou -1 selon la périodicité du système (Fig. III.2.).

A titre d'exemple, pour une machine à $2p$ pôles et comportant N_{er} encoches au rotor. La période du système est $2\pi/p$ ($\beta = 1$), si N_{er} est divisible par p . Elle vaut π/p , si N_{er} est divisible par $2p$.

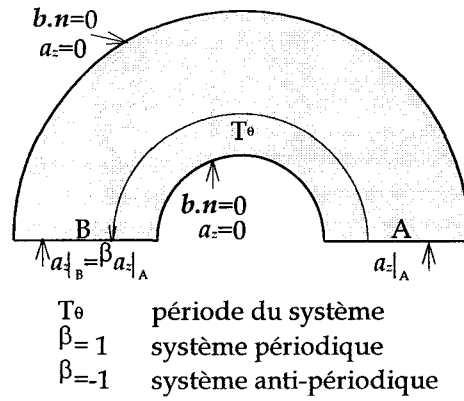


Fig. III.2. Conditions aux limites et de périodicité

3.2. Bobinage statorique

Dans ce paragraphe, nous présentons la mise en équation pour le montage en étoile des bobinages statoriques (Fig. III.3.). La même procédure peut être employée pour des circuits ayant des configurations différentes. Dans l'exemple choisi, le circuit comporte 2 noeuds et 4 branches (3 pour les phases et une pour le neutre). Il possède donc 3 degrés de liberté (voir annexe 3). Les branches des phases sont constituées d'une résistance r_s et d'une bobine caractérisée par son flux magnétique. Pour le neutre, nous considérons une résistance r_N . On note qu'il est possible de se ramener à un montage en étoile sans le neutre en imposant $r_N \gg r_s$. Le circuit est alimenté par un système de tensions $v_p = (v_a, v_b, v_c)$.

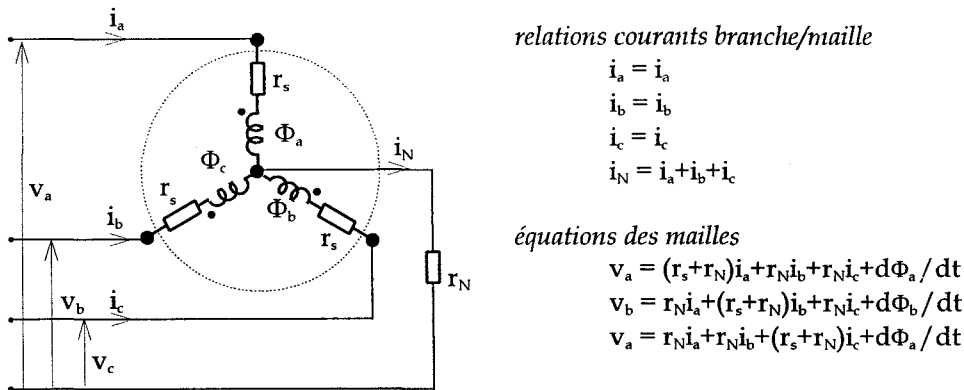


Fig. III.3. Configuration du circuit statorique étudié

En choisissant l'arbre du circuit comme étant la branche du neutre, nous pouvons définir les courants de mailles $i_m = (i_a, i_b, i_c)$ qui sont reliés à ceux des branches $i_{br} = (i_a, i_b, i_c, i_N)$ par l'expression matricielle suivante:

$$i_{br} = C_{br-m} i_m \quad \text{avec} \quad C_{br-m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.7)$$

Dans cet exemple, les courants de maille correspondent aux courants de phase. Par la suite, i_m sera remplacé par i_p .

Soit $j_{0p} = (j_{0a}, j_{0b}, j_{0c})$ la densité de courant dans les sections conductrices modélisées. Elle est donnée par l'expression suivante:

$$j_{0p} = \frac{n_{sp}}{s_p} D i_p \quad (\text{III.8})$$

avec n_{sp} le nombre de spires par phase et s_p la section d'une phase. La matrice D donne le sens du courant dans les sections. Pour un montage triphasé avec une modélisation sur un pôle, elle s'écrit:

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_a & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_b & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix} \quad \varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c = +1, -1 \quad (\text{III.9})$$

A l'aide de la relation (III.8), nous pouvons écrire le terme source F_0 sous la forme matricielle:

$$F_0 = C_{a_i-i_p} D i_p \quad (\text{III.10})$$

Les termes de la matrice $C_{a_i-i_p}$ sont donnés par la relation (II.22b).

Le flux magnétique engendré par les enroulements du stator $\Phi_p (\Phi_a, \Phi_b, \Phi_c)$ peut être exprimé en fonction du potentiel vecteur a_z (voir la relation (II.20)) et de la matrice D :

$$\Phi_p = k_\Phi D^T C_{a_i-i_p}^T a_z \quad \text{avec} \quad k_\Phi = \frac{1}{2}(3-\beta)pL \quad (\text{III.11})$$

En utilisant cette expression et en assemblant les équations de maille (Fig. III.3.), nous obtenons un système matriciel caractérisant le circuit électrique:

$$v_p = R_m i_p + k_\Phi D^T C_{a_i-i_p}^T \frac{da_z}{dt} \quad (\text{III.12})$$

$$\text{avec} \quad R_m = \begin{bmatrix} r_s + r_N & r_N & r_N \\ r_N & r_s + r_N & r_N \\ r_N & r_N & r_s + r_N \end{bmatrix}$$

3.3. Cage rotorique

Le calcul du courant induit dans les barres peut se faire en supposant qu'elles sont court-circuitées à l'infini. cela impose donc une différence de potentiel nulle $\Delta v = 0$. La densité de courant se réduit à $j_z = \partial_t a_z$. Dans un tel calcul, les effets des anneaux de court circuit sont négligés. Dans notre étude, nous considérons le circuit total de la cage (barres et anneaux). Afin d'établir sa mise en équation en 2D, nous allons examiner l'exemple simple d'une barre couplée à une résistance r_a (Fig. III.4.).

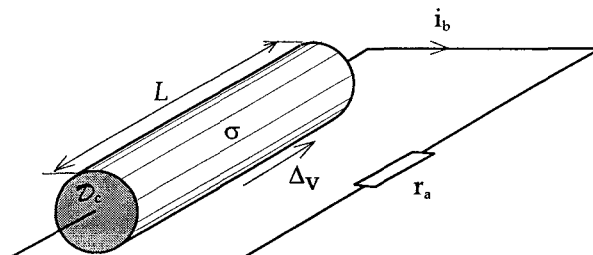


Fig. III.4. Barre conductrice couplée à une résistance

La loi d'Ohm s'écrit:

$$\Delta v = r_a i_b \tag{III.13}$$

i_b représente le courant de barre. Il est calculé par une intégrale sur la surface du domaine conducteur \mathcal{D}_c soit:

$$i_b = \int_{\mathcal{D}_c} j_z ds = - \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \left(\partial_t a_z + \frac{\Delta v}{L} \right) ds \tag{III.14}$$

Cette relation peut être réécrite en introduisant la résistance de barre r_b :

$$i_b + \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \partial_t a_z ds + \frac{\Delta v}{r_b} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r_b} = \int_{\mathcal{D}_c} \frac{\sigma}{L} ds \tag{III.15}$$

Le potentiel a_z est remplacé par son interpolation aux noeuds du maillage dans le domaine conducteur \mathcal{D}_c . En éliminant i_b dans les équations (III.13) et (III.15), nous obtenons:

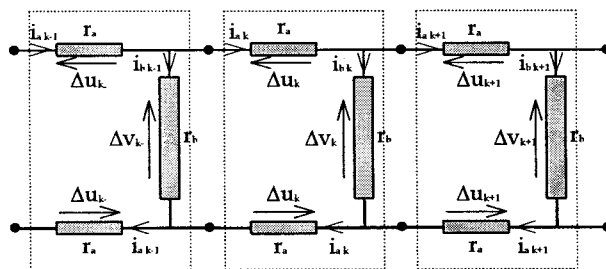
$$\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right) \Delta v + \sum_{i=1}^{N_n} \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \partial_t (\lambda_i a_{z_i}) ds = 0 \tag{III.16}$$

En divisant cette équation par L , nous pouvons introduire la matrice de couplage $C_{a_z-\Delta v}$ donnée par l'expression (III.5b). Ainsi, nous pouvons réécrire (III.16) sous la forme suivante:

$$\frac{1}{L} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right) \Delta v + C_{a_z-\Delta v}^T \frac{d a_z}{dt} = 0 \tag{III.17}$$

Circuit de la cage rotorique

En partant des équations établies pour l'exemple précédent, il est possible de considérer la cage rotorique de la machine [17][52]. Dans ce cas le circuit est formé de "Nb" barres connectées aux extrémités par des anneaux de court circuit (Fig. III.5).



Pour $k=1, Nb$

relations entre les tensions

$$2\Delta u_k = \Delta v_k - \Delta v_{k-1}$$

$$2\Delta u_{k+1} = \Delta v_{k+1} - \Delta v_k$$

$$\text{pour } k=1, \Delta v_0 = \beta \Delta v_{Nb}$$

relations entre les courants

$$i_{b k} = i_{a k} - i_{a k+1}$$

$$i_{b k+1} = i_{a k+1} - i_{a k+2}$$

$$\text{pour } k=Nb, i_{a Nb+1} = \beta i_{a 1}$$

Fig. III.5. Circuit de la cage rotorique

Le coefficient β dépend des conditions de périodicité (Fig. III.2.).

Les relations entre les tensions et les courants sont données par la figure précédente. Elles peuvent être résumées comme suit:

$$\begin{aligned} C^T \Delta v &= 2\Delta u \\ i_b = C i_a = C(\Delta u / r_a) &\Rightarrow M \Delta v = (r_a I) i_b \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{2} C C^T \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

avec $C(Nb, Nb)$ la matrice cyclique de connexion, $\Delta v(Nb)$ le vecteur des tensions aux bornes des barres, $\Delta u(Nb)$ le vecteur des tensions aux bornes des anneaux et $i_b(Nb)$ le vecteur des courants de barres. I désigne la matrice identité.

A titre d'exemple, pour un système constitué de 4 barres, la matrice $M(Nb, Nb)$ est donnée par l'expression suivante:

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -\beta \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -\beta & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

En utilisant la relation (III.18) et la matrice de couplage $C_{a_z-\Delta v}(Nn, Nb)$, nous pouvons réécrire l'équation (III.17) sous la forme suivante:

$$\frac{1}{L} \left(\frac{1}{r_a} M + \frac{1}{r_b} I \right) \Delta v + C_{a_z-\Delta v}^T \frac{d a_z}{dt} = 0 \quad (\text{III.20})$$

3.3. Prise en compte de la rotation

La rotation est introduite dans le modèle éléments finis en utilisant la de bande de mouvement. L'algorithme ainsi développé est comparé au calcul par le macro-élément (voir chapitre II, § prise en compte du mouvement). Comme la prise en compte du mouvement est simulée dans la région de l'entrefer, seuls les termes de la matrice de raideur varient en fonction du déplacement θ , i.e. $S_{a_z} = S_{a_z}(\theta)$.

3.4. Système matriciel

Les équations (III.4), (III.12) et (III.20) forment un système à " $Nn+Nb+3$ " degrés de liberté. Sa résolution nous donne les valeurs du potentiel aux noeuds du maillage, les tensions aux bornes des conducteurs massifs et les courants dans les phases statoriques. Après une discrétisation temporelle de ces équations, nous obtenons:

$$\begin{bmatrix} S_{a_z}(\theta) + T_{a_z} / \Delta t & C_{a_z-\Delta v} & -C_{a_z-i_p} D \\ C_{a_z-\Delta v}^T & Y & 0 \\ -D^T C_{a_z-i_p}^T & 0 & -k' R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_z \\ \Delta v \\ i_p \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k' v_p \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_{a_z} / \Delta t & 0 & 0 \\ C_{a_z-\Delta v}^T & 0 & 0 \\ -D^T C_{a_z-i_p}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_z \\ \Delta v \\ i_p \end{bmatrix}_t \quad (\text{III.21})$$

$$\text{avec} \quad k' = \frac{\Delta t}{k_\phi} \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{r_a} M + \frac{1}{r_b} I \right)$$

L'angle de rotation θ est lié au pas de temps Δt par la vitesse de rotation Ω_r , soit $\Delta\theta = \Omega_r \Delta t$. La matrice du système est symétrique mais non définie positive. Son inversion peut se faire par la méthode de Cholesky adaptée.

Prise en compte de la saturation

La saturation du circuit magnétique est introduite par une courbe $b-h$ qui peut être interpolée pour une fonction continue du type Marrocco ou par la méthode des splines. Au niveau de la résolution numérique, nous avons utilisé l'algorithme de Newton-Raphson (voir chapitre I, § problème non-linéaire).

Calcul du couple

A partir des valeurs du potentiel a_z au niveau de l'entrefer, nous pouvons le couple de la machine. En se référant aux méthodes développées dans le chapitre II (§ calcul des forces magnétiques et du couple), nous pouvons ramener l'expression du couple à la forme suivante:

$$C_z = k_c f(a_z, R, \theta) \quad \text{avec } k_c = (3 - \beta)pL \quad (\text{III.22})$$

La fonction f est donnée par les relations (II.34) et (II.48), respectivement, pour le tenseur de Maxwell et les travaux virtuels. R est le rayon de l'interface utilisée.

Calcul des courants de barres

Les courants dans les barres sont calculés directement à partir des tensions Δv à l'aide de l'équation (III.18):

$$i_b = \frac{1}{r_a} M \Delta v \quad (\text{III.23})$$

On note qu'on peut aussi utiliser l'expression (III.15) pour effectuer ce calcul.

3.4. Inclinaison des encoches

Les harmoniques de denture sont sources de nuisances dans les machines électriques (bruit magnétique, vieillissement prématuré, ...). L'inclinaison des encoches, suivant la direction axiale de l'une des armatures (stator ou rotor), est un moyen souvent utilisé par les constructeurs de machines pour limiter les effets de ces harmoniques. Cette inclinaison est donnée par un angle α_i qui dépend de la conception de la machine. Dans les modèles classiques, Elle est traitée par l'introduction du facteur k_{in} calculé en fonction de l'angle α_i (voir annexe 7). Pour un harmonique "n", il s'écrit:

$$k_{in} = \frac{\sin(n\alpha_i/2)}{(n\alpha_i/2)} \quad (\text{III.24})$$

Ce facteur intervient pour modifier la réactance magnétisante de la machine. Il est généralement inclus dans le schéma électrique équivalent sous la forme d'une impédance rapportée à la partie inclinée.

Une étude associant le facteur d'inclinaison et un calcul du champ en 2D a été présentée dans [8]. Elle propose de diviser le flux dans les enroulements inclinés ou non en deux parties traitées différemment. Cette séparation du flux implique des résolutions multiples des équations du champ, et par conséquent des temps de calcul élevés. Dans le même contexte, une autre approche a été utilisée pour une machine synchrone en substituant la partie inclinée et l'entrefer par un élément linéique équivalent [57].

Une modélisation rigoureuse de l'inclinaison des encoches nécessite a priori une formulation tridimensionnelle vu l'intervention de la direction axiale (Fig. III.6a.). Cependant, il est possible d'envisager un modèle en deux dimensions. Le principe consiste alors à découper la machine en " n_d " sections droites suivant l'axe oz (Fig. III.6b.). Dans chaque segment, la résolution du problème se fait en 2D. L'assemblage conduit à un système d'équations couplées. Cette technique a été appliquée à l'induit d'une machine à courant continu [45] et au stator d'une machine synchrone [49]. Dans ce travail, nous l'avons étendue à la machine asynchrone [87]. D'autres approches qui associent le calcul du champ en 2D et les paramètres du schéma équivalent, ont été développées. Par exemple, l'état magnétique du système est utilisé pour corriger les éléments du circuit. L'inclinaison est alors introduite par une résolution des " n_d " séparément [105].

Dans notre modèle, la mise en équation de la machine est basée sur la continuité des courants d'une section à l'autre. Pour les enroulements du stator, la densité de courant j_{0z} est la même dans chaque section k :

$$j_{0z}|_k = j_{0z} \quad k = 1, n_d \tag{III.25}$$

En ce qui concerne les conducteurs massifs, la densité de courant j est dirigée suivant le sens de l'inclinaison. Dans chaque section, nous considérons la projection de j sur l'axe oz :

$$j_z|_k = j_z = j \cos \alpha_i \quad k = 1, n_d \tag{III.26}$$

En utilisant ces relations de continuité, le modèle de la machine inclinée peut être obtenu en partant des équations écrites pour le cas des encoches droites.

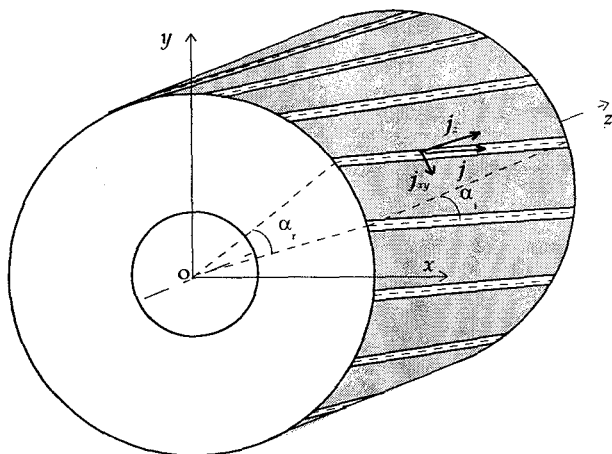


Fig. III.6a. Représentation d'un rotor incliné d'un pas d'encoche ($\alpha_i = \alpha_r$)

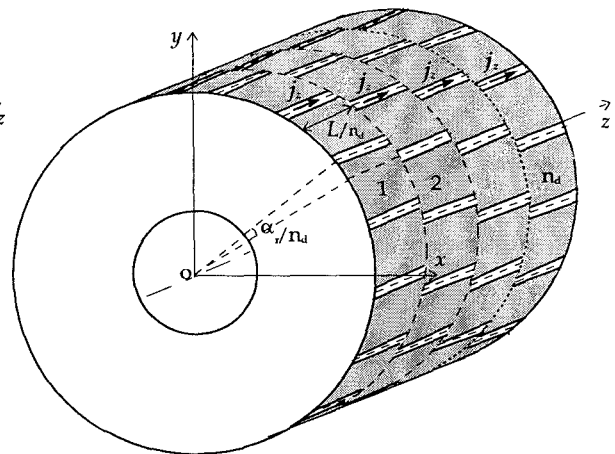


Fig. III.6b. Découpage du rotor suivant oz en n_d segments droits

Equations du champ électromagnétique

Pour une position donnée du rotor par rapport au stator, les différentes sections sont obtenues par une rotation de la partie mobile d'un angle correspondant à l'inclinaison. Chaque section "k" se trouve décalée par rapport à la section initiale (située à $z=0$, $k=1$) d'un angle $(k-1)\alpha_i/n_d$. Dans ces conditions, nous pouvons écrire l'équation du champ électromagnétique (III.4) pour les différentes sections de la manière suivante:

$$S_{a_z} \left(\theta + (k-1) \frac{\alpha_i}{n_d} \right) a_{zk} + T_{a_z} \frac{da_{zk}}{dt} + n_d C_{a_z-\Delta v} \Delta v_k - C_{a_z-i_p} D i_p = 0 \quad k=1, n_d \quad (III.27)$$

Dans ces équations, nous avons remplacé F_0 par son expression (III.10). La matrice $C_{a_z-\Delta v}$ définie par la relation (III.5b) est multipliée par n_d , car elle dépend de la longueur de la section suivant oz, " L/n_d ". On note que les termes des matrices T_{a_z} , $C_{a_z-\Delta v}$ et $C_{a_z-i_p}$ restent inchangés.

Bobinage statorique

Le flux total d'une phase est égal à la somme des flux engendrés par les différentes sections. En utilisant l'expression (III.10), nous obtenons:

$$\Phi_p = \sum_{k=1}^{n_d} \Phi_{pk} = \frac{k_\phi}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} D^T C_{a_z-\Delta v}^T a_{zk} \quad (III.28)$$

On note que le coefficient k_ϕ est divisé par " n_d ", car il dépend de la longueur suivant oz. Si l'on reporte cette relation dans l'équation du circuit électrique (III.12), cela donne:

$$v_p = \frac{k_\phi}{n_d} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n_d} D^T C_{a_z-\Delta v}^T a_{zk} + R_m i_p \quad (III.29)$$

Cage rotorique

Pour la cage rotorique, il est possible de réaliser le couplage entre l'équation du circuit formé par la cage inclinée et les équations du champ électromagnétique. Pour cela, on utilise les différences de potentiel Δv_k dans chaque segment k. La différence de potentiel totale est alors égale à la somme des Δv_k :

$$\Delta v = \sum_{k=1}^{n_d} \Delta v_k \quad (III.30)$$

Dans chaque segment, le courant de barre i_{bk} est calculé à l'aide de l'expression (III.14), soit:

$$i_{bk} = - \int_{\mathcal{D}_c} \sigma (\partial_t a_{zk} + n_d \frac{\Delta v_k}{L}) ds \quad (III.31)$$

Ce courant peut être relié au courant global dans la barre inclinée i_b :

$$i_{bk} = \int_{\mathcal{D}_c} j_z ds = \int_{\mathcal{D}_c} j \cos \alpha_i ds = \cos \alpha_i i_b \quad (III.32)$$

L'équation du circuit global de la cage (III.18) combinée aux relations (III.30) et (III.32), nous donne le système matriciel suivant:

$$\frac{n_d \cos \alpha_i}{L} \left(\frac{1}{r_a} M \sum_{j=1}^{n_d} \Delta v_j + \frac{n_d}{r_b} I \Delta v_k \right) + n_d C_{a_z - \Delta v}^T \frac{d a_{zk}}{dt} = 0 \quad k = 1, n_d \quad (\text{III.33})$$

On note que la résistance de barre r_b est calculée pour la barre inclinée avec une longueur $L/\cos \alpha_i$.

Système matriciel

Après la formulation du problème, nous aboutissons à un système d'équations couplées qui requiert donc une résolution simultanée. L'assemblage et la discrétisation temporelle des équations (III.27), (III.29) et (III.33), nous donnent la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} S_d + T_d / \Delta t & C_{d(a_z - \Delta v)} & -C_{d(a_z - i_p)} \\ C_{d(a_z - \Delta v)}^T & Y_d & 0 \\ -C_{d(a_z - i_p)}^T & 0 & -k' R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{zd} \\ \Delta v_d \\ i_p \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k' v_p \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_d / \Delta t & 0 & 0 \\ C_{d(a_z - \Delta v)}^T & 0 & 0 \\ -C_{d(a_z - i_p)}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{zd} \\ \Delta v_d \\ i_p \end{bmatrix}_t \quad (\text{III.34})$$

$$\text{avec } k' = n_d \Delta t / k_\Phi$$

Dans ce système, les matrices s'écrivent en fonction de celles utilisées pour le modèle de la machine à encoches droites (voir le système (III.21)):

$$S_d = \begin{bmatrix} S_{a_z}(\theta) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{a_z}(\theta + \frac{\alpha_i}{n_d}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{a_z}(\theta + (n_d - 1) \frac{\alpha_i}{n_d}) \end{bmatrix} \quad T_d = \begin{bmatrix} T_{a_z} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_{a_z} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{a_z} \end{bmatrix}$$

$$C_{d(a_z - \Delta v)} = n_d \begin{bmatrix} C_{a_z - \Delta v} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{a_z - \Delta v} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{a_z - \Delta v} \end{bmatrix} \quad C_{d(a_z - i_p)} = \begin{bmatrix} C_{a_z - i_p} D \\ C_{a_z - i_p} D \\ \vdots \\ C_{a_z - i_p} D \end{bmatrix}$$

$$Y_d = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n_d} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n_d 1} & Y_{n_d 2} & \dots & Y_{n_d n_d} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad Y_{ij} = \begin{cases} \frac{n_d \cos \alpha_i}{L} \left(\frac{1}{r_a} M + \frac{n_d}{r_b} I \right) & i=j \\ \frac{n_d \cos \alpha_i}{L} \left(-\frac{1}{r_a} M \right) & i \neq j \end{cases}$$

Les vecteurs a_{zd} et Δv_d sont définis comme suit:

$$a_{zd}^T = [a_{z1} \quad a_{z2} \quad \dots \quad a_{zn_d}] \quad \Delta v_d^T = [\Delta v_1 \quad \Delta v_2 \quad \dots \quad \Delta v_{n_d}]$$

Le système (III.34) a pour nombre d'inconnues " $n_d(Nn+Nb)+3$ ". Sa matrice est symétrique mais non définie positive. De plus, elle garde le caractère creux du modèle éléments finis. Comme pour le cas des encoches droites, ce système peut être résolu en utilisant la méthode de Cholesky adaptée. On note qu'il est possible de se ramener au système sans inclinaison des encoches (III.21) en posant $n_d = 1$ et $\alpha_i = 0$ dans le système (III.34).

Prise en compte de la saturation

La saturation du circuit magnétique varie le long de la direction axiale de la machine. Le modèle proposé permet la prise en compte de cette variation. Un tel effet ne peut être considéré par le facteur d'inclinaison. Comme précédemment, nous utilisons la méthode de Newton-Raphson pour introduire cet aspect.

Calcul du couple

Avec une prise en compte de l'inclinaison des encoches, le couple C_{zd} est égal à la somme des couples C_{zk} calculés pour chaque section. En employant l'expression (III.21), nous obtenons:

$$C_{zd} = \sum_{k=1}^{n_d} C_{zk} = \frac{k_c}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} f(a_{zk}, R, \theta + (k-1) \frac{\alpha_i}{n_d}) \quad (III.35)$$

Calcul du courant de barre

Les courants dans les barres peuvent être calculés facilement à l'aide de l'équation du circuit (III.18) et de la relation (III.30):

$$i_b = \frac{\cos \alpha_i}{r_a} M \sum_{k=1}^{n_d} \Delta v_k \quad (III.36)$$

4. Modèle tridimensionnel de la machine asynchrone

Le développement des codes de calcul 3D et la montée en puissance des calculateurs laissent envisager une modélisation tridimensionnelle des structures électromagnétiques aussi complexes que les machines électriques. Une telle modélisation a permis de calculer avec plus de précision la distribution du champ magnétique dans les extrémités des machines. Dans ce contexte, des travaux ont été menés avec un couplage du calcul des effets 3D avec une formulation classique en deux dimensions [72][83]. Plus récemment, des approches 3D ont été développés pour la totalité de la machine [80][104][111][115].

Dans ce travail, nous proposons un modèle de la machine asynchrone à cage permettant de traiter le couplage avec le circuit connecté au bobinage statorique et la prise en compte du mouvement [116]. La distribution du champ électromagnétique est calculée à partir d'une résolution des équations de la magnétodynamique par la méthode des éléments finis. Nous avons utilisé alors une formulation le potentiel vecteur magnétique modifié a^* avec une discrétisation par les éléments d'arête. Bien qu'elle soit pénalisante du point de vue du nombre des inconnues, cette formulation permet un traitement aisé des inducteurs et du couplage avec les équations du circuit. Par ailleurs, les problèmes liés aux régions non simplement connexes ne se posent pas.

En ce qui concerne le bobinage statorique, notre travail ne tient pas compte des têtes bobines. Le couplage circuit est réalisé pour une alimentation en tension. Pour la cage rotorique, la formulation utilisée ne permet pas un couplage circuit similaire à celui présenté en 2D. Dans ces conditions, nous supposons un court circuit parfait dans le cas des encoches droites. Pour la machine à rotor incliné, les anneaux de court circuit sont inclus dans le domaine maillé. Le mouvement est simulé par la surface de glissement.

Le problème est résolu en supposant une caractéristique linéaire pour le fer. Ce choix est justifié par des raisons de temps de calcul. Comme nous l'avons exposé dans le chapitre I, la saturation peut être traitée avec une approximation de la courbe de première aimantation et par l'utilisation de l'algorithme itératif de Newton-Raphson.

Il est important de noter que les conditions de calcul sont simplifiées pour la modélisation de la machine à encoches droites. En effet, le système étudié peut être ramené à une formulation 2D. Notre but est de valider la technique de mouvement par une comparaison des résultats 2D et 3D. Par la suite, le calcul sera effectué dans de véritables conditions 3D, à savoir la machine à encoches inclinées.



4.1. Difficultés liées à la modélisation 3D des machines électriques

Les modèles tridimensionnels permettent un calcul plus réaliste de la distribution champ magnétique. Cependant, l'application de ces approches pour modéliser les machines électriques tournantes pose certaines difficultés qui peuvent être résumées en deux points:

- les temps de calcul,
- le maillage.

Les temps de calcul dépendent de plusieurs facteurs qui peuvent être inhérents au modèle ou à des éléments externes. Ces derniers sont principalement la rapidité du calculateur et sa capacité mémoire.

Concernant le modèle, on retrouve en premier lieu la formulation utilisée pour la mise en équation du système. Si en 2D, le choix de la formulation est quasi unanime pour du potentiel vecteur a_z . En 3D, la recherche de la formulation "idéale" est toujours d'actualité. Dans l'absolu, une telle approche, si elle existe, doit donner des résultats fiables avec un coût réduit en temps de calcul. En deuxième lieu, il s'agit des techniques d'inversion des systèmes matriciels. Au cours des chapitres précédents, nous avons souligné l'influence de l'utilisation ou non d'une condition de jauge sur la rapidité de la convergence de l'algorithme itératif du gradient conjugué. Il faut noter que cette méthode de résolution permet un stockage morse, donc un espace mémoire optimal.

La deuxième difficulté est la réalisation du maillage d'une structure aussi complexe qu'une machine électrique. En effet, la description de la géométrie est souvent difficile à mettre en oeuvre au niveau des têtes de bobines, des anneaux de court circuit ou d'une armature inclinée. Dans le cas des têtes de bobines, on se retrouve avec des volumes qui peuvent se croiser ou s'interpénétrer. De plus, l'intégration de cette partie au modèle nécessite un calcul supplémentaire afin de déterminer la distribution de la densité de courant dans le bobinage [72]. Pour les encoches inclinées, les éléments volumiques au niveau de l'entrefer peuvent être déformés.

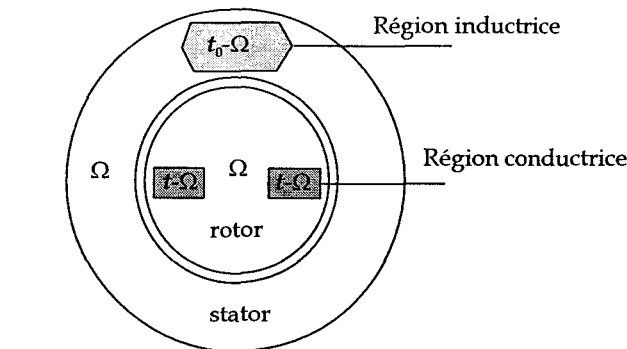
Outre la description de la géométrie, la réalisation du maillage doit prendre en compte la technique adoptée pour simuler le mouvement et les conditions de périodicité. En ce qui concerne le mouvement, il faut savoir quel type de maillage on peut utiliser au niveau de l'entrefer. Pour la méthode développée dans ce travail (la surface de glissement), le maillage doit être régulier et conforme par déplacement. Les conditions de périodicité doivent être satisfaites avec des correspondances géométriques entre les inconnues.

4.2. Equations du champ électromagnétique et formulation utilisée

Avec une modélisation 3D de la machine asynchrone, nous pouvons envisager une des formulations magnétodynamiques (électriques a^* , $a-\phi$, magnétique $t-\Omega$ ou hybride $a-\Omega$) présentées dans chapitre I. Par la suite, nous allons expliciter les avantages et les éventuelles difficultés de ces approches.

A partir de la présentation des formulations magnétodynamiques, il s'est avéré que l'approche magnétique $t-\Omega$ était la plus intéressante du point de vue nombre d'inconnues lorsque les régions conductrices ne constituent pas la majorité du domaine d'étude. Le potentiel scalaire Ω est défini dans tout le domaine, le potentiel vecteur t dans les régions conductrices et le vecteur source t_0 calculé analytiquement dans les régions inductrices (Fig III.7.). Les domaines conducteur et inducteur doivent être simplement connexes. Telle que nous l'avons présentée, l'utilisation de cette formulation, pour modéliser la machine asynchrone, se heurte principalement à deux difficultés:

- la complexité des formes géométriques des encoches statoriques rend très difficile, si ce n'est impossible, le calcul analytique de la distribution de t_0 .
- avec un potentiel vecteur t limité à la cage rotorique, la géométrie du domaine est non simplement connexe.



Traitement des régions non simplement connexes

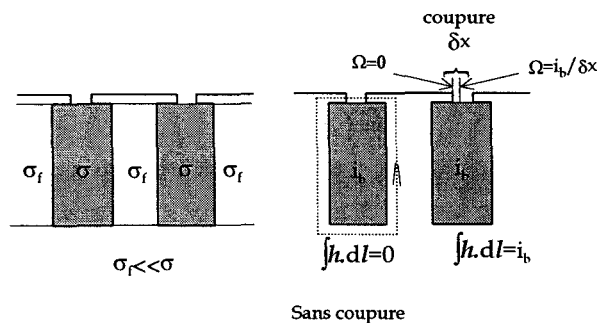


Fig. III.7. Configuration du problème dans le cas de la formulation $t-\Omega$

Pour résoudre ces deux problèmes, on peut envisager pour le premier une résolution, par la méthode des éléments finis, de l'équation $\text{rot } t_0 = j_0$ dans tout le domaine. Pour le deuxième, on peut rendre le domaine simplement connexe par une coupure ou par la définition du potentiel t dans une partie du fer avec une faible conductivité (Fig. III.7). Cette dernière solution bien que simple à mettre en oeuvre, augmente le nombre d'inconnues du système. Dans ces conditions, on perd l'intérêt d'utiliser cette approche.

L'approche hybride $a-\Omega$ développée dans le chapitre I peut être envisagée. Dans ce cas, le stator est modélisé par le potentiel a , et le rotor par la formulation $t-\Omega$. L'interface entre les deux domaines est alors située dans un milieu homogène qui est l'entrefer (Fig. III.8).

Cette méthode permet de résoudre le problème du vecteur t_0 , mais la difficulté liée aux régions non simplement connexes reste toujours posée au rotor. D'autre part, son utilisation dans ces conditions n'engendre pas de gain considérable en nombre d'inconnues. En effet, la quasi majorité de la machine est traitée par une inconnue vectorielle. Il n'y a que le fer du rotor qui est modélisé par un scalaire. De plus, l'introduction de l'interface au niveau de l'entrefer implique un maillage en trois couches. En effet, il est nécessaire de définir deux interfaces: une pour la formulation hybride et une autre pour la prise en compte du mouvement. Cette contrainte engendre alors un maillage fin dans l'entrefer et donc un accroissement du nombre d'inconnues par rapport à une formulation qui utilise deux couches et une interface.

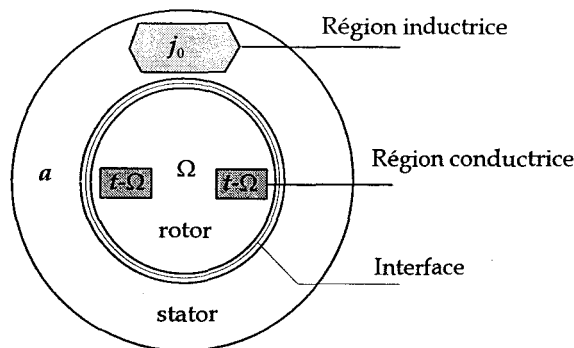


Fig. III.8. Configuration du problème dans le cas de la formulation hybride

Les difficultés évoquées précédemment ne se posent pas au niveau des formulations électriques a^* , $a-\varphi$. Mais l'inconvénient majeur de ces dernières est le grand nombre d'inconnues pour une structure telle que la machine asynchrone.

Dans ce travail, nous avons utilisé la formulation en a^* . Le potentiel vecteur modifié a^* est défini dans les régions conductrices et le potentiel vecteur a dans le reste du domaine (Fig. III.9.). Dans ce cas, nous avons moins d'inconnues que dans la formulation $a-\varphi$.

Cette approche a été présentée dans le chapitre I. Nous résumons ici, les équations à résoudre:

- dans les barres du rotor $\sigma \neq 0$:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{a}^*\right) - \sigma \partial_t \mathbf{a}^* = 0 \quad (\text{III.37})$$

\mathbf{a}^* le potentiel vecteur magnétique modifié, tel que:

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}^* \quad \text{et} \quad \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{a}^*$$

- dans les régions non conductrices (milieux magnétiques, entrefer et bobinage du stator):

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{a}\right) = \mathbf{j}_0 \quad (\text{III.38})$$

\mathbf{a} le potentiel vecteur magnétique, tel que

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$$

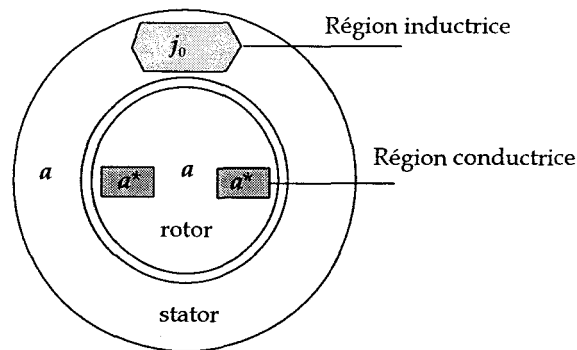


Fig. III.9. Configuration du problème dans le cas de la formulation $\mathbf{a}^* - \mathbf{a}$

La formulation en \mathbf{a}^* ne nécessite pas la définition d'une condition de jauge dans les régions conductrices (voir chapitre I). Par contre, afin d'obtenir une solution unique du problème, il faut imposer explicitement une jauge dans les régions non-conductrices. On peut alors définir une jauge du type $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$ qui s'adapte bien à une discrétisation par les éléments d'arête. Cette condition est appliquée en annulant les circulations de \mathbf{a} sur un arbre passant par tous les noeuds sans former une maille fermée. Cela entraîne une réduction du nombre d'inconnues.

Comme nous l'avons vu au cours du chapitre I et dans l'exemple de la bobine entre deux plaques conductrices, la méthode du gradient conjugué sans jauge converge avec un calcul en double précision [66]. Cette convergence est plus rapide par rapport au cas jaugé. En conséquence, la résolution du problème sans jauge permet un gain considérable en temps de calcul. Ce raisonnement est valable uniquement si l'espace mémoire du calculateur est suffisant pour résoudre le problème.

La discrétisation des deux équations précédentes nous donne le système matriciel suivant:

$$S_a c_a + T_a \frac{dc_a}{dt} = F_a \quad (\text{III.39})$$

Les termes des matrices S_a et T_a sont définies, respectivement, par les relations (I.58a) et (I.68b). Le vecteur source F_a est donné par l'expression (I.58b). Il dépend de la densité de courant j_0 dans les bobinages du stator. c_a désigne les circulations du potentiel vecteur sur les arêtes du maillage.

Conditions aux limites

Afin de définir complètement le problème, nous devons imposer les conditions aux frontières du domaine. Pour la formulation étudiée, la condition $b.n = 0$ est assurée au sens fort. Elle se traduit sur le potentiel utilisé par la condition de Dirichlet $c_a = 0$. Cette condition se présente sur les frontières externes de stator et du rotor (voir Fig. III.2.) et sur les extrémités de machine suivant l'axe oz .

Conditions de symétrie

Pour la modélisation de machine asynchrone à encoches droites, il est possible d'exploiter les conditions de symétrie suivant le plan situé au milieu de la machine et perpendiculaire à l'axe oz . Ce qui implique une réduction de moitié du domaine d'étude. Dans ce cas, les conditions de symétrie se traduisent par $b.n = 0$. Pour retrouver les grandeurs globales telles que le couple ou le flux, il suffit de multiplier les valeurs calculées par 2.

Dans notre étude, le cas des encoches droites a été traité sans tenir compte des extrémités de la machine (anneaux de court circuit et têtes de bobines). Dans ces conditions, nous pouvons considérer une bande de longueur Δl suivant oz . Pour obtenir les grandeurs globales pour une longueur L de la machine, il faut donc multiplier les valeurs calculées par $L/\Delta l$. Cette manière de résoudre de problème, nous a permis de minimiser le nombre d'inconnues.

Pour le cas des encoches inclinées, il n'y a pas de symétrie exploitable suivant l'axe de la machine. Cela est dû évidemment à l'inclinaison. il est donc nécessaire de mailler la machine totalement suivant la direction axiale.

Conditions de périodicité

Comme pour le modèle 2D, ces conditions peuvent être exploitées en 3D. La seule différence est qu'il faut assurer la correspondance géométrique des arêtes dans la cas de la formulation retenue. Ces conditions se traduisent par des relations simples entre les inconnues qui se trouvent sur les surfaces A et B (Fig. III.7.):

$$c_a|_A = \beta c_a|_B \quad (\text{III.40})$$

Sur la figure (III.7), tous les noeuds liés aux surfaces A et B sont correctement associés et cela ne pose aucun problème lorsqu'il s'agit d'une formulation qui utilise les éléments nodaux. Par contre, lorsqu'on utilise une discrétisation par les éléments d'arête, cette configuration du maillage n'est pas correcte. En effet, les arêtes k_1 et k_2 ne sont pas associées du point de vue géométrique. Il faut donc corriger le maillage afin d'assurer les conditions de périodicité.

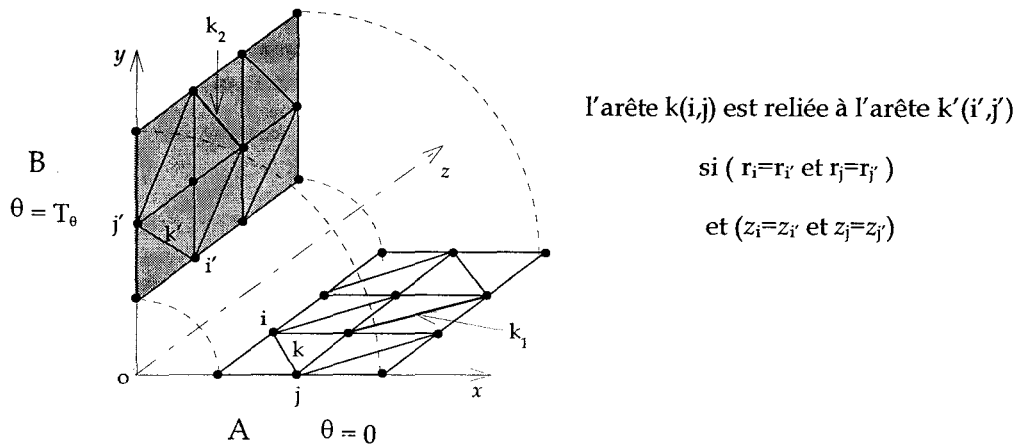


Fig. III.10. Conditions de périodicité avec les éléments d'arête

4.3. Bobinage statorique

La procédure de couplage entre les équations du champ et celles du circuit électrique a été développée dans le chapitre II pour la formulation en potentiel vecteur magnétique. Dans ce paragraphe, nous allons l'adapter au cas de la machine asynchrone avec une alimentation triphasée. Pour cela, nous allons réaliser l'extension au 3D de l'exemple du montage en étoile explicité traité en 2D (Fig. II.3).

Pour chaque phase k , on définit un vecteur densité de spires N_k (voir la relation (II.2)) et un coefficient ϵ_k indiquant le sens du courant (III.9). Dans ces conditions, la densité de courant dans les enroulements du stator peut s'écrire:

$$j_{0k} = \epsilon_k N_k i_k \quad k = a, b, c \quad (III.41)$$

Sans la prise en compte des têtes de bobines, la direction du vecteur N est suivant oz . En introduisant la relation précédente dans l'expression du terme source F_a (III.39), nous obtenons la forme matricielle:

$$F_a = C_{a-i_p} D i_p \quad (III.42)$$

Les termes des matrices C_{a-i_p} et D sont définis, respectivement, par les expressions (II.8) et (III.9). Ces deux matrices servent aussi à exprimer le flux magnétique:

$$\Phi_p = k_\Phi D^T C_{a-i_p}^T c_a \quad \text{avec} \quad k_\Phi = \frac{1}{2}(3 - \beta)p k_s \quad (III.43)$$

Le coefficient k_s est introduit pour tenir compte des symétries par rapport à un plan. A titre d'exemple, pour une machine ayant un plan de symétrie situé au milieu suivant la direction oz , nous avons $k_s = 2$.

En remplaçant la relation (III.43) dans l'équation du circuit, nous obtenons:

$$v_p = R_m i_p + k_\phi D^T C_{a-i_r}^T \frac{dc_a}{dt} \quad (\text{III.44})$$

La matrice résistance R_m est la même que celle définie dans (III.12).

Lorsque les anneaux de court circuit et les extrémités des barres sont maillés, les équations du champ sont suffisantes pour décrire le problème. Dans l'étude de la machine à encoches droites, la formulation utilisée a^*-a suppose un court circuit parfait au niveau de la cage. On notera qu'il est possible de développer un couplage circuit similaire à celui proposé en 2D en utilisant la formulation électrique $a-\phi$.

4.4. Prise en compte du mouvement

La rotation est simulée par la surface de glissement développée au chapitre II (§ prise en compte du mouvement). Cette méthode nécessite un maillage régulier au niveau d'une interface définie dans l'entrefer. Cette contrainte doit être assurée au niveau des arêtes afin d'obtenir un maillage conforme à chaque déplacement. Ce dernier est constant et il doit être lié au pas de maillage $\Delta\theta$. Dans la résolution du système matriciel, la surface de glissement se manifeste par un changement de la connectivité des éléments de l'entrefer à l'interface.

4.5. Système matriciel

La discrétisation temporelle des équations du champ électromagnétique (III.39) et du circuit électrique (III.44) nous donne le système matriciel suivant:

$$\begin{bmatrix} S_a(\theta) + T_a/\Delta t & -C_{a-i_r} D \\ -D^T C_{a-i_r}^T & -k' R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ i_p \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k' v_p \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_a/\Delta t & 0 \\ -D^T C_{a-i_r}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ i_p \end{bmatrix}_t \quad \text{avec } k' = \frac{\Delta t}{k_\phi} \quad (\text{III.45})$$

θ représente la position du rotor par rapport au stator. Avec la technique de mouvement utilisée, cette position varie en fonction du pas de maillage $\Delta\theta$. Elle est relié au pas de temps par la vitesse de rotation, i.e. $\theta = \theta_0 + n\Omega_r \Delta t$; n est un entier et θ_0 la position initiale.

Les degrés de liberté du système sont les circulations du potentiel vecteur le long des arêtes du maillage et les courants dans les phases. La matrice du système est symétrique mais non définie positive.

Vu la taille des systèmes mis en jeu, l'utilisation du stockage morse est nécessaire pour optimiser au maximum l'espace mémoire. Dans notre travail, nous avons utilisé le gradient conjugué avec un pré-conditionnement du type Crout.

Calcul du couple

A partir des circulations c_a obtenues à chaque pas de temps, nous pouvons évaluer le couple de la machine. Ce calcul est fait en utilisant les expressions (II.29) pour le tenseur de Maxwell et (II.41) pour la méthode des travaux virtuels. Dans les deux cas, nous pouvons réécrire l'expression du couple sous la forme suivante.

$$C_z = k_c f(c_a, R, \theta) \quad \text{avec } k_c = (3 - \beta) p k_s \quad (\text{III.46})$$

Dans le cas du tenseur de Maxwell, la surface d'intégration est un cylindre de rayon R . Pour la méthode des travaux virtuels, nous avons utilisé une des deux couches maillées dans l'entrefer.

Calcul du courant de barre

Pour la formulation en potentiel vecteur modifié, la densité de courant dans la barre s'écrit $j = -\sigma \partial_t \mathbf{a}^*$. Le courant de barre est alors donné par l'expression suivante:

$$i_b = - \int_{\Gamma_b} \sigma \partial_t \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{n}_b \, ds \quad (\text{III.47})$$

Γ_b représente la section droite de la barre et \mathbf{n}_b la normale à cette section. Si la surface Γ_b est invariante suivant la direction de la normale, il est possible de ramener l'intégrale surfacique à une intégrale volumique divisée par la longueur de la barre. En utilisant la forme discrète de potentiel \mathbf{a}^* et de la dérivée temporelle dans la relation (III.47), nous obtenons:

$$i_b \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\sigma}{L_b \Delta t} \sum_{e=1}^{N_e} v^e w^e (c_a^e \Big|_{t+\Delta t} - c_a^e \Big|_t) \quad (\text{III.48})$$

La somme est effectuée sur les " N_e " éléments de la barre. w^e et v^e représentent, respectivement, les fonctions d'approximation d'arête et le volume de chaque élément. L_b désigne la longueur de la barre.

5. Application

Nous allons maintenant appliquer les modèles développés dans ce chapitre à une machine asynchrone à cage. Après une présentation de la structure étudiée, nous allons expliquer la procédure utilisée pour la réalisation du maillage 3D. Par la suite, les simulations effectuées seront décrites. Les résultats numériques obtenus en 3D et 2D seront comparés entre eux. Nous considérons ainsi deux cas, avec et sans inclinaison. Dans le cas des encoches droites, les conditions de calcul 3D sont simplifiées. L'objectif de ce calcul est de valider la prise en compte du mouvement en 3D. La deuxième application concerne les modèles 3D et 2D avec inclinaison. Afin de limiter les temps de calcul pour le cas tridimensionnel, la caractéristique du fer est supposée linéaire.

5.1. Présentation de la machine étudiée

La machine que nous avons modélisée est un moteur asynchrone triphasé à cage. La géométrie et les dimensions ont été déduites d'une machine réelle [100]. En effet, quelques modifications ont été apportées au niveau de la longueur de la machine, la largeur de l'entrefer et la forme des encoches. Nous avons utilisé ce moyen afin d'obtenir un maillage qui ne soit trop lourd à gérer par les calculateurs dont nous disposons au laboratoire. La machine ainsi obtenue est appelée "machine d'étude".

La figure (III.11) représente la section 2D de la machine d'étude et la table (III.1) donne ses dimensions et ses caractéristiques.

<u>Dimensions</u>		<u>Bobinage statorique</u>		<u>Cage rotorique</u>	
rayon intérieur rotor:	$R_{ri}=20$ mm	nombre d'encoches:	$N_{es}=36$	nombre d'encoches:	$N_{er}=32$
rayon extérieur rotor:	$R_{re}=54.5$ mm	nombre de spires/phase:	$n_{sp}=66$	angle d'inclinaison:	$\alpha_r=\pi/16$
rayon intérieur stator:	$R_{si}=55.5$ mm	section d'une phase:	$s_p=188$ mm ²	conductivité:	$\sigma=3.5 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$
rayon extérieur stator:	$R_{se}=80$ mm	tension efficace:	$v_{peff}=220$ V	section d'une barre	$s_b=57.2$ mm ²
largeur entrefer:	$e=1$ mm	fréquence:	$f=50$ Hz	résistance d'une barre	$r_b=48.4 \mu\Omega$
longueur suivant oz:	$L=100$ mm	résistance d'une phase:	$r_s=1 \Omega$	résistance d'un anneau	$r_a=0.018 \mu\Omega$
<u>Fer</u>		<u>Périodicité</u>		<u>Vitesse</u>	
linéaire:	$\mu_r=4060$	nombre de poles:	$2p=4$	synchronisme	$N_s=1500$ tr/mn
non-linéaire:	courbe $b-h$	système anti-périodique	$\beta=-1, T_\theta=\pi/2$	nominale	$N_n=1450$ tr/min

Table III.1. Dimensions et caractéristiques de la machine d'étude

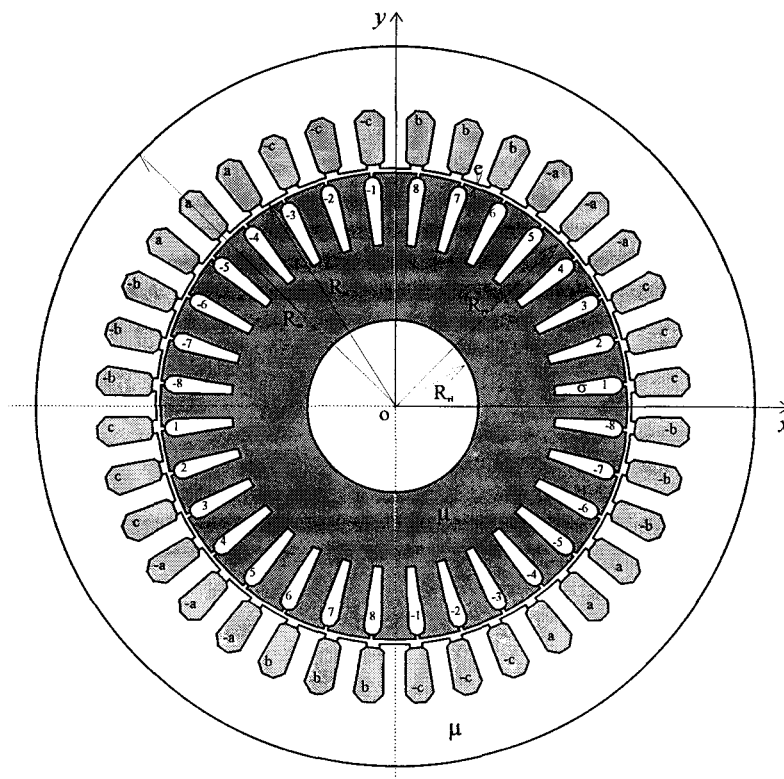


Fig. III.11. Section 2D de la machine

5.2. Maillages

Maillage 2D

Dans ce cas, nous avons utilisé le maillage représenté par la figure (III.12). Il comporte 1099 éléments triangulaires et 647 noeuds. Le nombre de noeuds sur chaque bord de l'entrefer est égal 73. La distance entre deux noeuds successifs est la même, ce qui correspond à un pas de maillage régulier $\Delta\theta = T_\theta / 72$. On note que l'entrefer n'est pas maillé, car il est pris en compte soit par le macro-élément ou par la bande de mouvement.

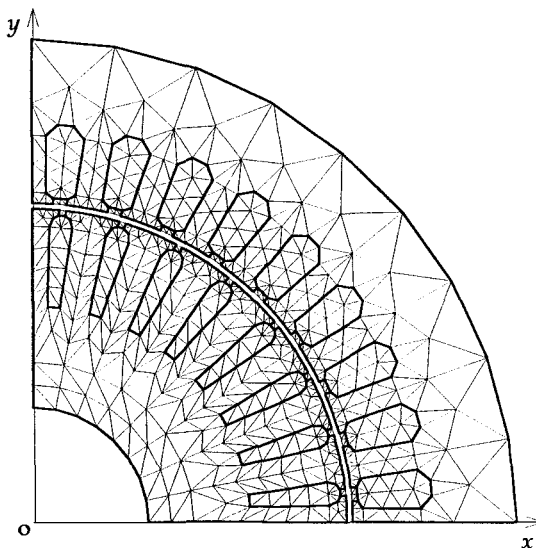


Fig. III.12. Maillage 2D du domaine étudié

Maillages 3D

Pour la réalisation du maillage 3D de la machine, nous distinguons le cas avec des encoches droites et celui avec des encoches inclinées. Pour le premier, nous avons procédé de la manière suivante (Fig. III.13.):

- ① - le maillage d'une encoche statorique et d'une encoche rotorique d'une manière libre (sur une épaisseur Δz).
- ② - le maillage manuel de l'entrefer en deux couches en réalisant le recollement des maillages précédents au niveau d'une interface où le maillage est régulier et conforme.
- ③ - duplication du maillage obtenu (les deux encoches et l'entrefer), par rotation dans le plan oxy , jusqu'à ce que la période spatiale T_θ du système soit atteinte.
- ④ - duplication du maillage, par translation suivant l'axe oz , jusqu'à ce que la longueur modélisée Δl soit atteinte.

En utilisant cette procédure, nous obtenons le maillage représenté par la figure (III.14a). Un agrandissement au niveau de la zone entrefer est donné par la figure (III.15b). Le maillage comporte 14592 éléments, cela correspond à 19107 inconnues. Nous avons alors utilisé 4 couches d'éléments dans l'entrefer sur une longueur axiale de 10 mm.

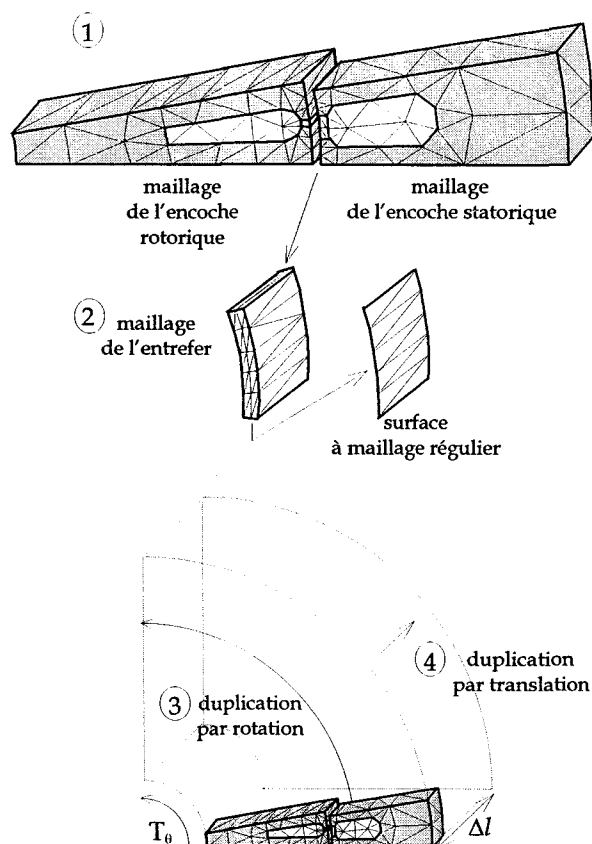


Fig. III.13. Procédure utilisée pour la réalisation du maillage 3D

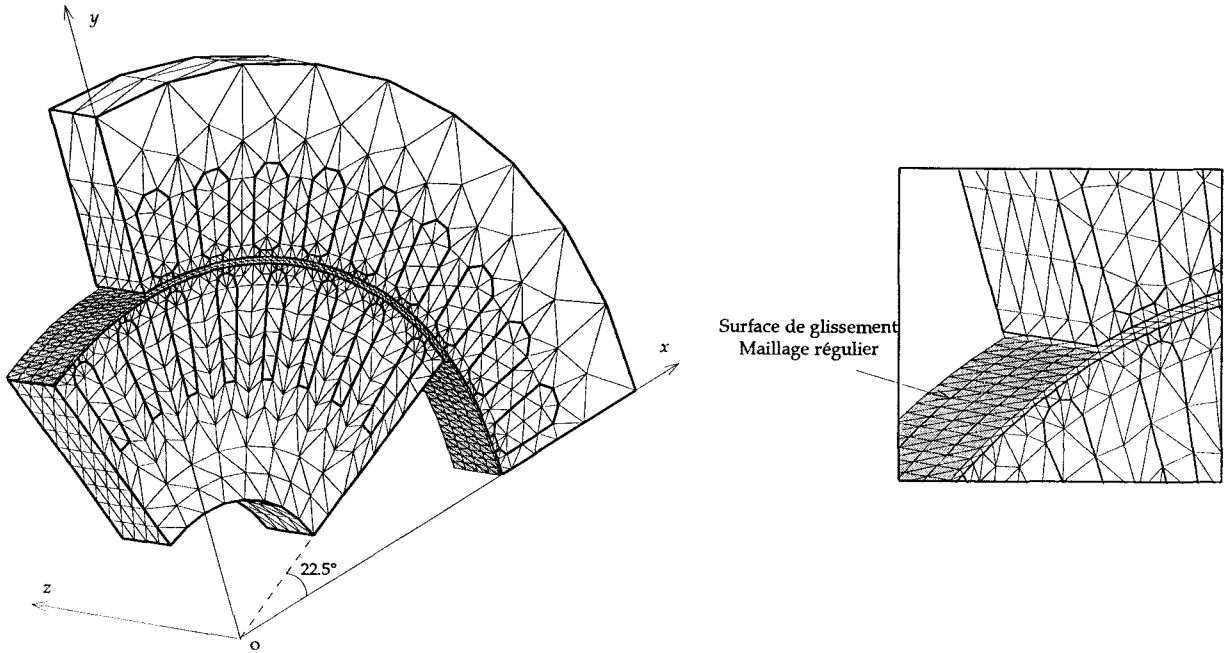


Fig. III.14. Maillage 3D du domaine étudié (machine à encoches droites)

Pour la machine à encoches inclinées, la géométrie de l'encoche rotorique est telle que le maillage ne peut être généré par une translation suivant l'axe oz. Il est donc nécessaire de mailler totalement l'encoche suivant cet axe. Par la suite, le maillage est complété en utilisant les étapes ② et ③ décrites dans le cas précédent (Fig.III.15. et Fig.III.16.). Ce maillage comporte 163974 éléments avec un nombre d'inconnues égal à 190127.

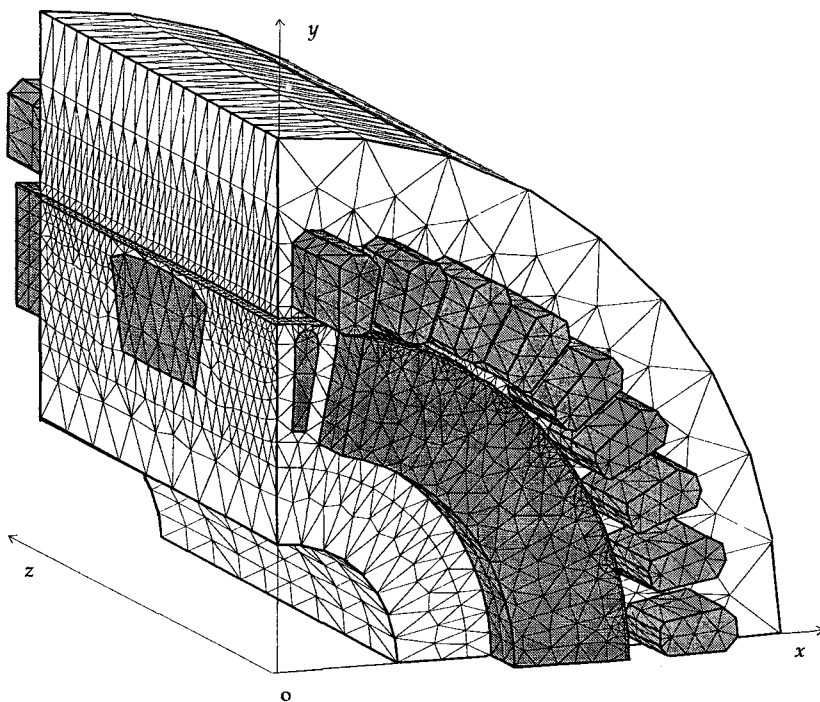
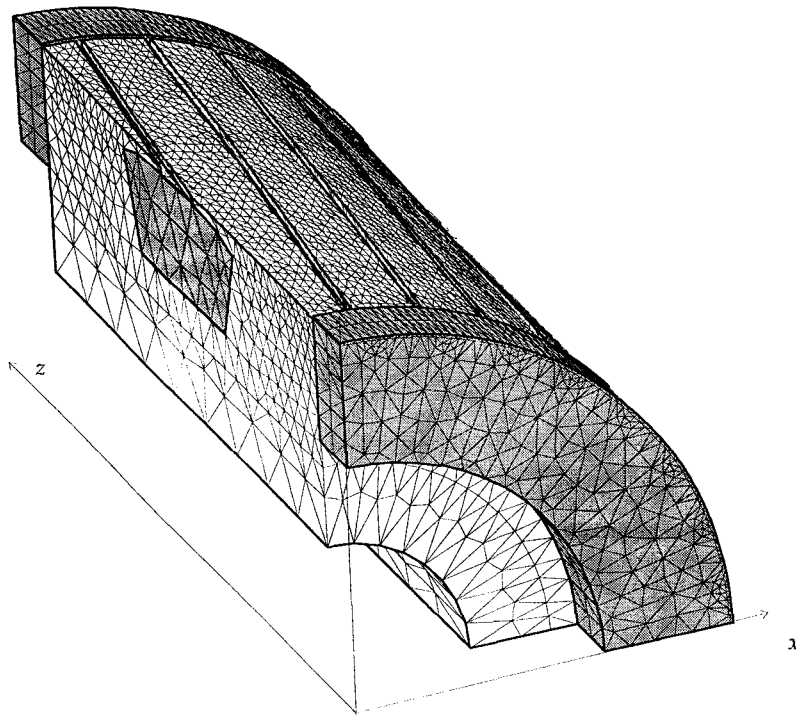
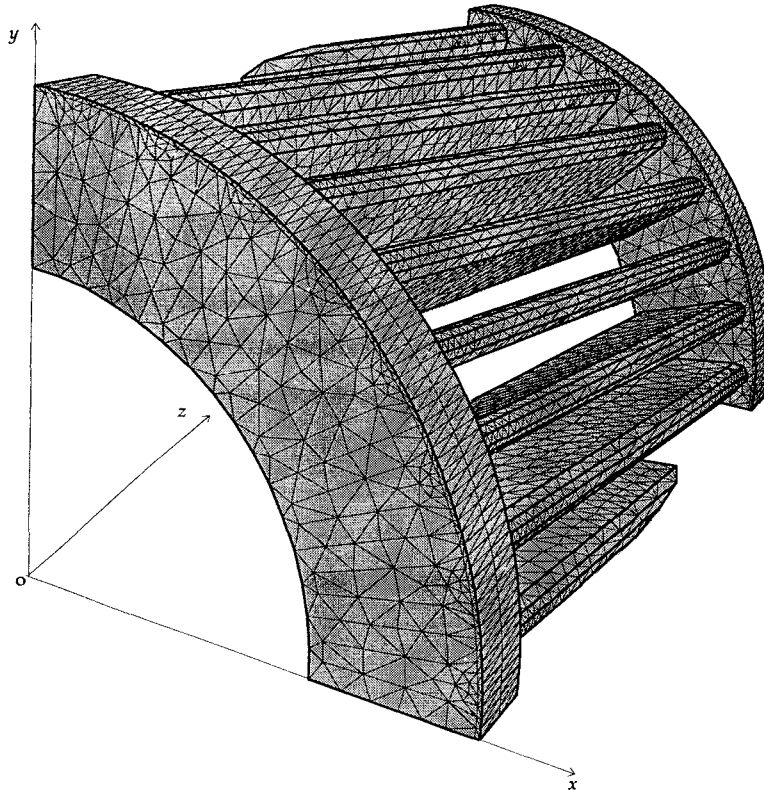


Fig. III.15. Maillage 3D du domaine étudié (machine à encoches inclinées)



a. Maillage du rotor incliné (fer et cage)



b. Maillage de la cage rotorique inclinée

Fig. 16. Maillage du rotor à encoches inclinées

5.3. Description des simulations effectuées

Les calculs ont été menés en 2D et en 3D pour trois simulations du fonctionnement de la machine: à rotor bloqué $\Omega_r=0$, à vide $\Omega_r=1500$ tr/mn et en régime nominal $\Omega_r=1450$ tr/mn. Dans les trois cas, nous avons utilisé des conditions initiales nulles:

$$\text{à } t = 0 \quad \begin{cases} a_z = 0, \Delta v = 0, i_p = 0 & 2D \\ c_a = 0, i_p = 0 & 3D \end{cases}$$

à rotor bloqué

Cette simulation ne nécessite pas la prise en compte du mouvement ($\forall t \theta = 0$), ainsi les matrices relatives au mouvement dans le cas du macro-élément ou de la bande de mouvement sont calculées pour le premier pas de temps. Le choix de ce dernier est fonction de la fréquence. A rotor bloqué ($g = 1$), les courants rotoriques évoluent à la même fréquence que les courants statoriques. Nous avons choisi un pas de temps $\Delta t = 1/(20f) = 1$ ms. Cet calcul a été effectué pour 6 périodes, cela correspond à 120 pas de temps

à vide et à vitesse nominale

La vitesse est fixée dès le départ (1500 tr/mn à vide ou 1450 tr/mn en régime nominal), ce qui engendre un transitoire. Le pas de temps est choisi en fonction du pas de déplacement du rotor $\Delta\theta$, tel que $\Delta t = \Delta\theta/\Omega_r$, avec Ω_r la vitesse du rotation. Ce calcul a été effectué sur 6 périodes de la tension appliquée, ce qui donne 864 pas de temps.

5.4. Résultats

Les résultats numériques obtenus sont présentés pour deux cas. Dans le premier, nous comparons les calculs 2D et 3D pour la machine à encoches droites. Le deuxième concerne la machine à encoches inclinées modélisée par les formulation 3D et 2D avec la prise en compte de l'inclinaison des encoches.

5.4.1 Machine à encoches droites

Calcul 2D

Le modèle 2D présenté au début de ce chapitre a été appliqué à la machine d'étude. Les inconnues du problème sont le potentiel aux noeuds du maillage, les courants dans les phases du stator et les différences de potentiel aux bornes des barres. Dans ce cas, cela correspond à 658 degrés de liberté. La solution est obtenue en résolvant, en pas à pas dans le temps, le système matriciel (III.21) par la méthode de Cholesky adaptée.

Calcul à rotor bloqué

Pour un calcul en linéaire et avec la tension nominale à 50 Hz, la figure (III.17) représente l'état magnétique de la machine (les lignes équipotentielles et la distribution de l'induction). Ces tracés correspondent au dernier point de calcul. On peut constater que la cage constitue un écran à la pénétration du champ à l'intérieur du rotor.

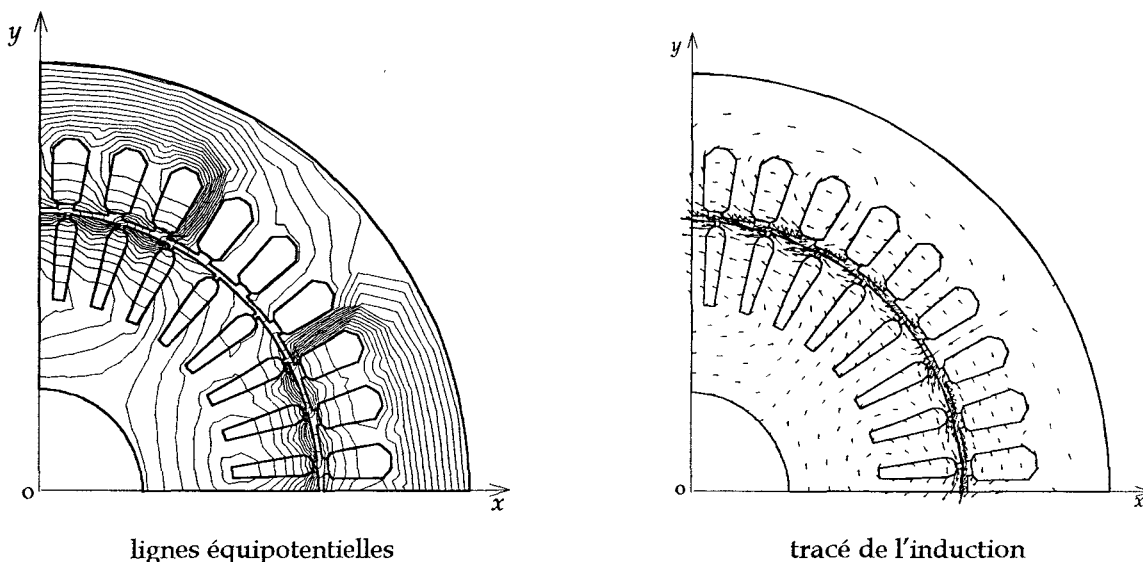


Fig. III.17. Calcul à rotor bloqué

La figure (III.18) donne l'évolution des courants de phase et du couple. On note une différence sur les amplitudes des courants de phase qui est due à la position stationnaire du rotor. La différence de potentiel et le courant dans une barre sont donnés par la figure (III.19). Sur ces figures, nous comparons les cas linéaire et non-linéaire. Ce dernier est introduit par la méthode des splines.

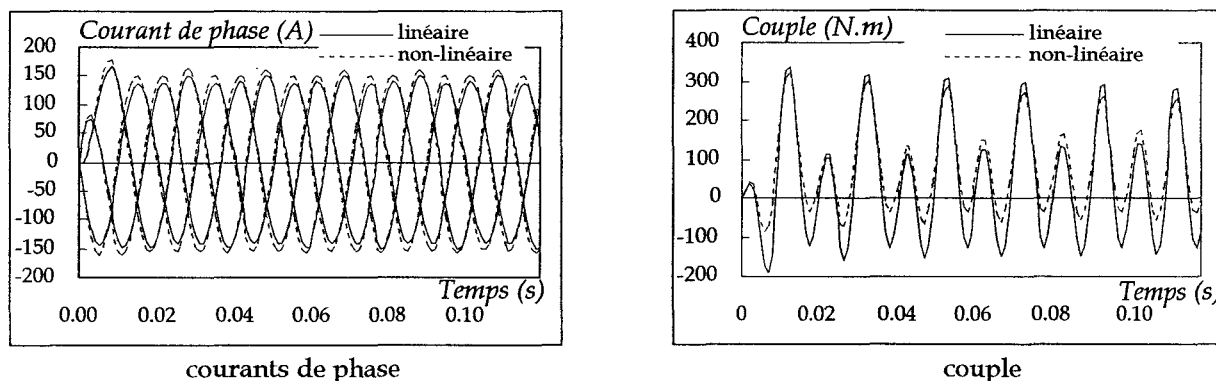
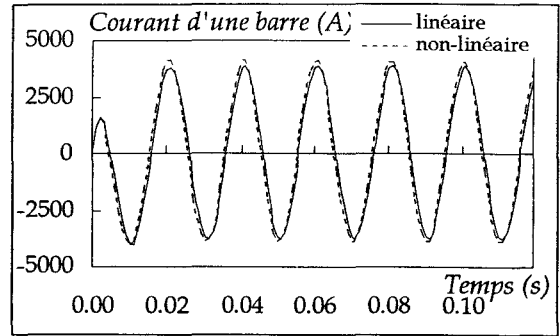
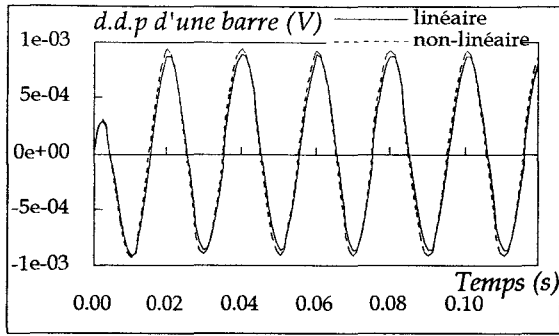


Fig. III.18. Calcul à rotor bloqué



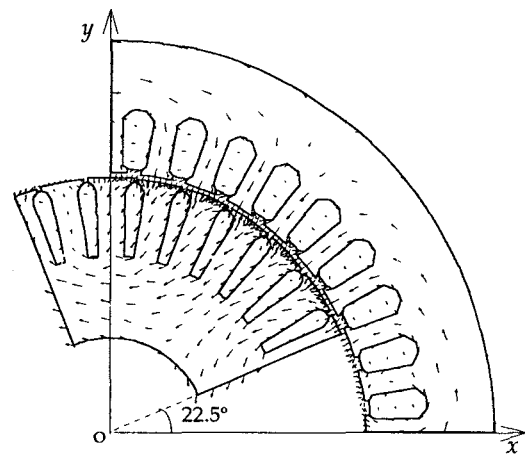
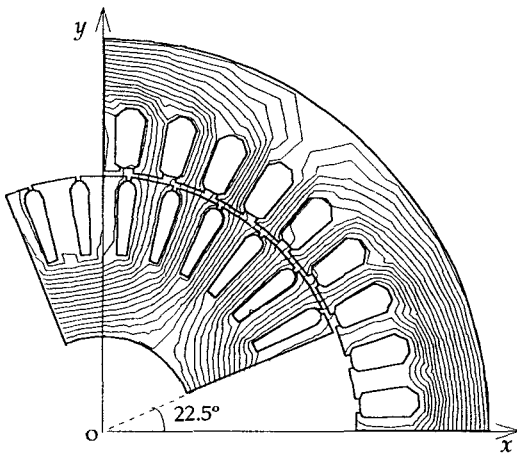
d.d.p aux bornes d'une barre

courant d'une barre

Fig. III.19. Calcul à rotor bloqué

Calcul à vide

Le calcul est effectué en linéaire et le mouvement est simulé par la bande de mouvement. La figure (III.20) montre les équipotentielles et la distribution de l'induction dans le plan 2D de la machine. Ces tracés correspondent à un angle de rotation $\theta = 22.5^\circ$. On constate que les lignes de champ pénètrent complètement le rotor et qu'aucune ligne ne traverse la cage du rotor.

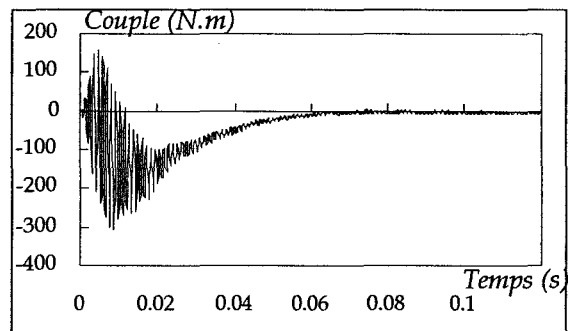
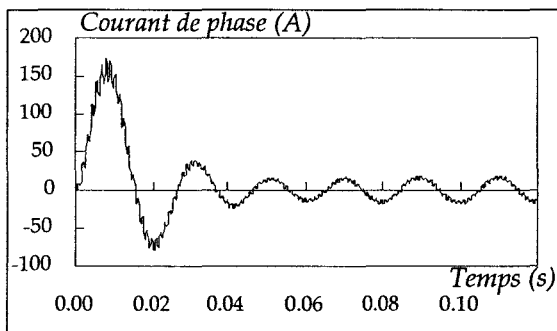


lignes équipotentielles

tracé de l'induction

Fig. III.20. Calcul à vide

La figure (III.21) donne l'évolution du courant de phase et le couple de la machine. On peut alors observer l'effet d'encoche sur ces deux grandeurs.



courant de phase

couple

Fig. III.21. Calcul à vide

A partir des deux simulations précédentes (à vide et à rotor bloqué), nous pouvons calculer les paramètres du schéma équivalent de la machine d'étude pour l'onde fondamentale [101]. La procédure de calcul est présentée dans l'annexe 7.

Calcul à vitesse nominale

Pour la simulation à vitesse nominale 1450 tr/mn, la figure (III.22) montre l'évolution du courant de phase et du couple. Comme pour le cas à vide, on peut observer là aussi l'effet d'encoche sur ces deux grandeurs.

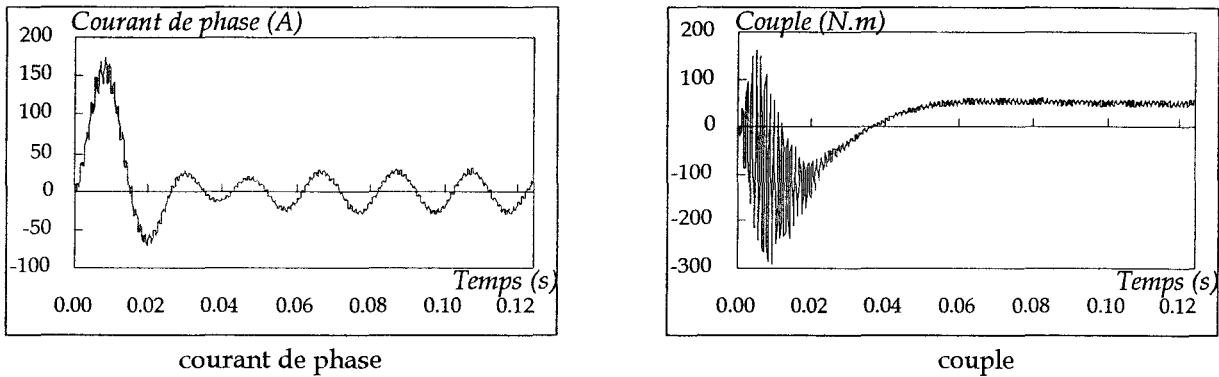


Fig. III.22. Calcul à vitesse nominale

Dans ce cas, nous avons comparé les résultats obtenus par une prise en compte du mouvement par le macro-élément et la bande de mouvement. La figure (III.23) donne l'évolution du courant de phase et du couple pour la dernière période de calcul. On peut noter que les deux méthodes donnent des résultats similaires.

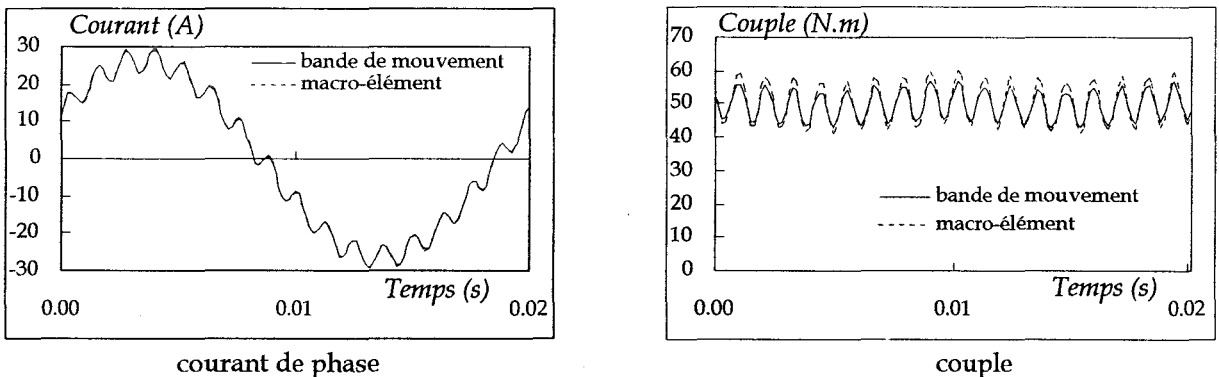


Fig. III.23. Comparaison de deux techniques de prise en compte du mouvement en 2D

Calcul 3D

Nous avons basé la validation du modèle 3D sur la comparaison des résultats obtenus avec ceux du calcul 2D. En effet, les conditions utilisées en 3D nous ramènent à un système invariant par translation. L'intérêt d'un tel calcul est de valider le modèle 3D.

Les inconnues du problème sont les circulations du potentiel vecteur sur les arêtes et les courants dans les phases statoriques. La résolution a été effectuée, en linéaire, par la méthode du gradient conjugué. Pour un calcul à vide, la figure (III.24) donne la distribution de l'induction dans la machine. Ce tracé correspond à un angle de rotation de 22.5° .

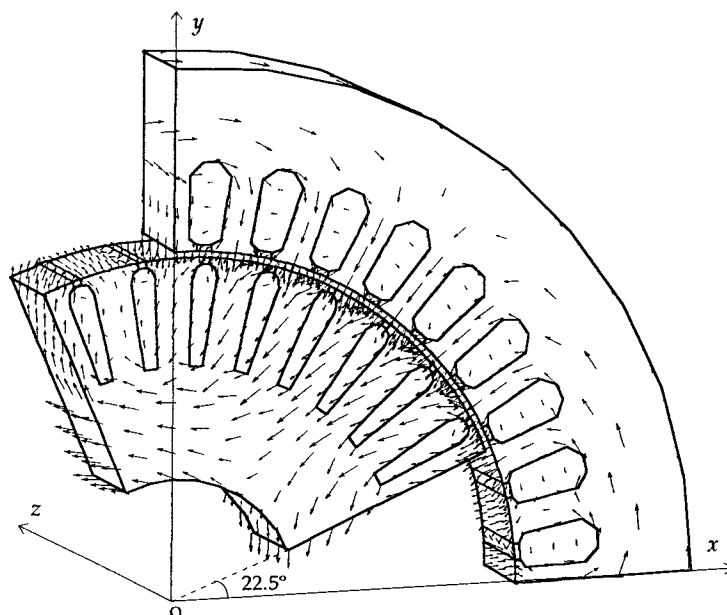
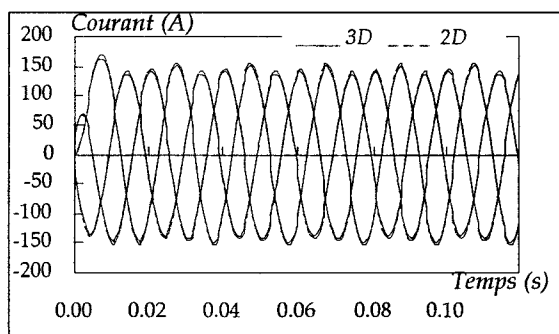
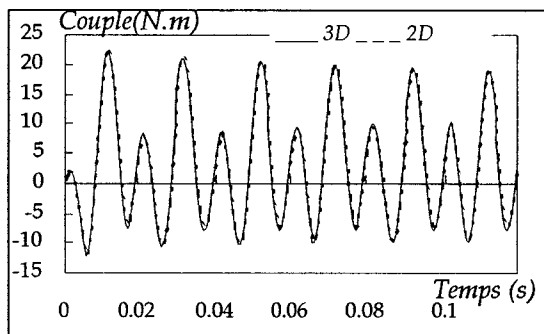


Fig. III.24. Calcul 3D à vide: tracé de l'induction

Pour la simulation à rotor bloqué, la figure (III.25) représente une comparaison des calculs 2D et 3D (les courants de phase et le couple de la machine). On note une bonne concordance des résultats obtenus. Un tel calcul permet de valider le couplage circuit et le calcul du couple en 3D.



courant de phase



couple

Fig. III.25. Comparaison des calculs 2D-3D à rotor bloqué

A vitesse nominale, nous avons comparé le courant d'une phase en régime transitoire et permanent (Fig. III.26.). Comme précédemment, les résultats obtenus en 2D et 3D sont équivalents.

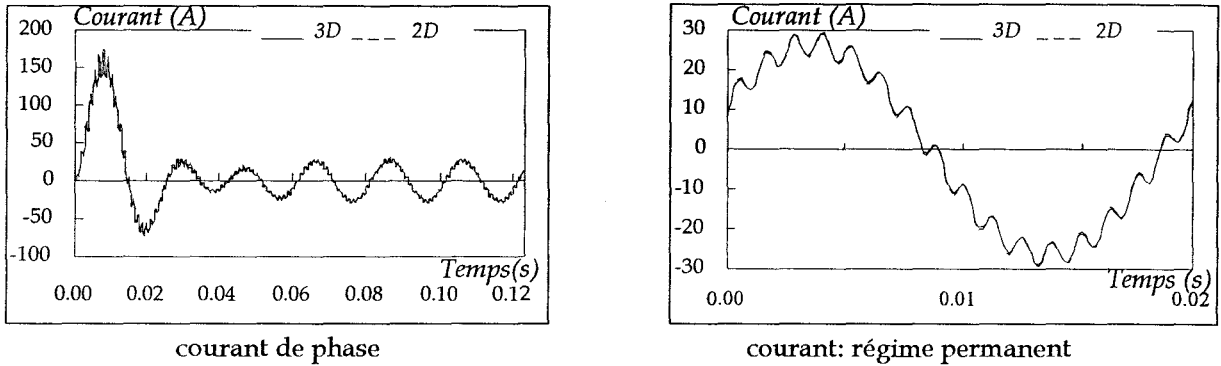


Fig. III.26. Comparaison des calculs 2D-3D à vitesse nominale

Dans les mêmes conditions, la figure (III.27) représente l'évolution du couple en régime transitoire et permanent. Pour ce dernier, on peut noter que la méthode des travaux virtuels, par rapport au tenseur de Maxwell, donne des résultats plus proches du calcul 2D.

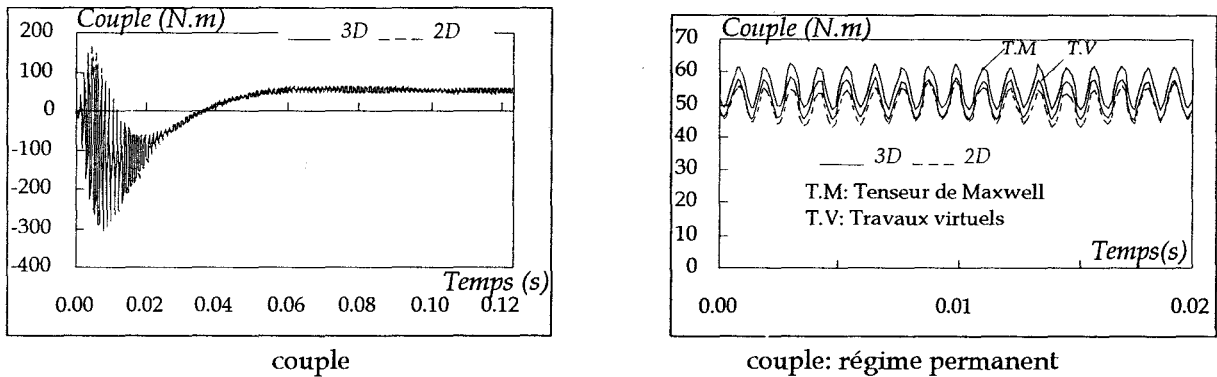


Fig. III.27. Comparaison des calculs 2D-3D à vitesse nominale

5.4.2. Machine à encoches inclinées

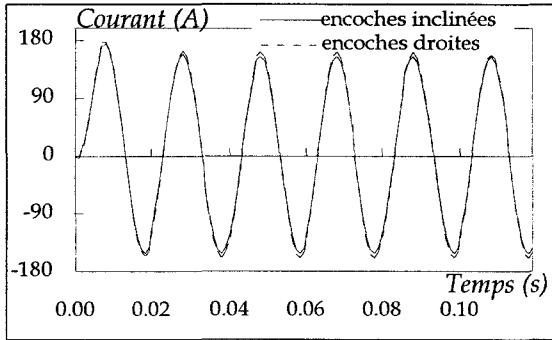
Après la validation du modèle 3D avec le mouvement pour la machine à encoches droites, nous l'avons appliqué à la machine à encoches inclinées. Les barres du rotor sont inclinées d'un pas d'encoche. Les résultats obtenus en 3D sont comparés avec ceux de la formulation 2D avec l'inclinaison.

Calcul 2D avec inclinaison des encoches

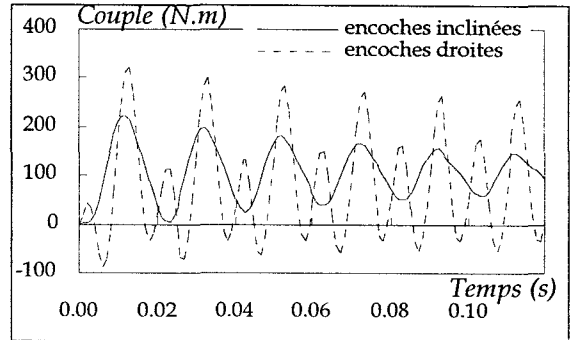
Pour effectuer ce calcul, nous avons utilisé un nombre de sections égal à 9; i.e $n_d = 9$ dans le système d'équations (III.34). Ce choix correspond au nombre d'éléments triangulaires de l'entrefer liés à un pas d'encoche rotorique. En effet, pour chaque décalage de la section initiale, le déplacement est égal au pas de maillage au niveau de l'entrefer.

Calcul à rotor bloqué

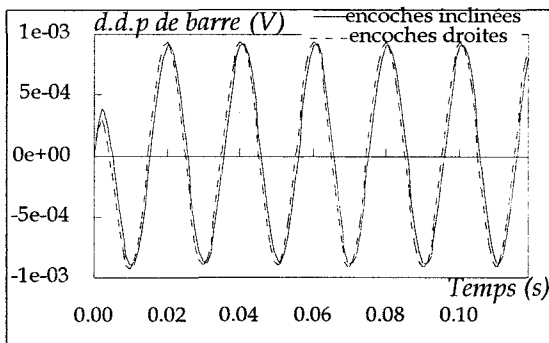
Dans ce cas, nous avons effectué les calculs avec prise en compte de la saturation. La figure (III.28) montre l'évolution du courant de phase, du couple, de la différence de potentiel et du courant dans une barre. Les résultats sont comparés avec et sans prise en compte de l'inclinaison.



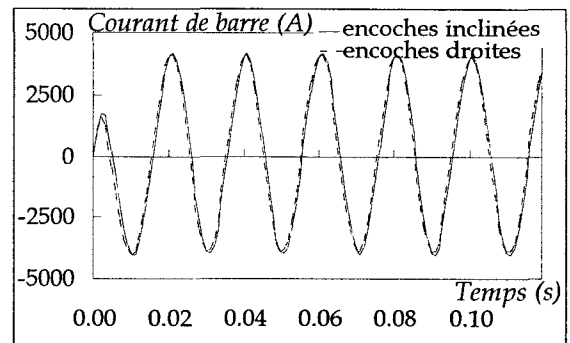
courant de phase



couple



d.d.p aux bornes d'une barre

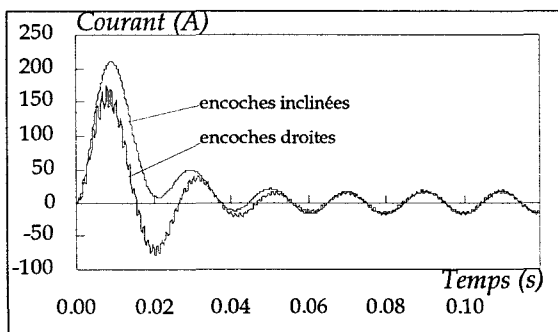


courant d'une barre

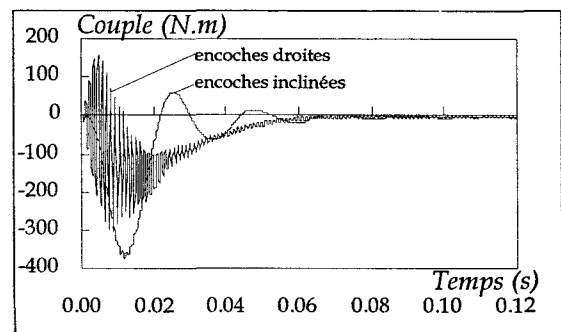
Fig. III.28. Comparaison des calculs à rotor bloqué

Calcul à vide

Pour cette simulation, nous avons comparé les résultats en linéaire avec et sans prise en compte de l'inclinaison. La figure (III.29) représente l'évolution du courant de phase et du couple.



courant de phase



couple

Fig. III.29. Comparaison des calculs à vide

La figure (III.30) donne, en régime permanent, une comparaison de la forme d'onde et le spectre du courant, avec et sans la prise en compte de l'inclinaison. On note alors pour le cas des encoches droites la présence de l'harmonique 17. L'amplitude de ce dernier est atténuée lorsqu'on introduit l'inclinaison des encoches. Par ailleurs, il y a une diminution de l'amplitude du fondamental en fonction du facteur d'inclinaison (voir annexe 7). Pour les calculs numériques, cette réduction correspond à 0.988. En utilisant l'expression analytique (III.24), on obtient un facteur $k_{i1} = 0.993$.

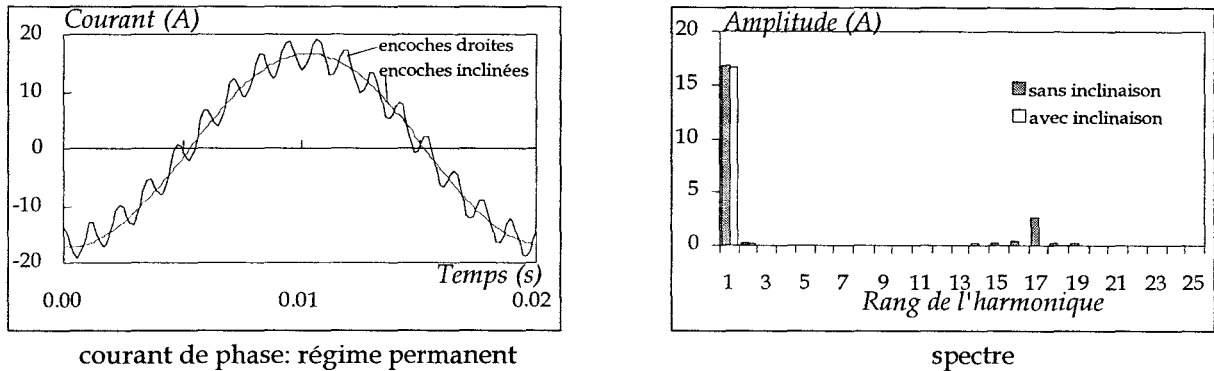


Fig. III.30. Comparaison des calculs à vide

Calcul à vitesse nominale

La figure (III.31) donne l'évolution du courant de phase en régime transitoire et permanent. Les calculs sont comparés pour les cas avec et sans la prise en compte de l'inclinaison. Comme pour le calcul précédent (à vide), on notera l'élimination des effets d'encoches sur l'onde du courant. Dans les mêmes conditions, la figure (III.32) représente l'évolution du couple de la machine.

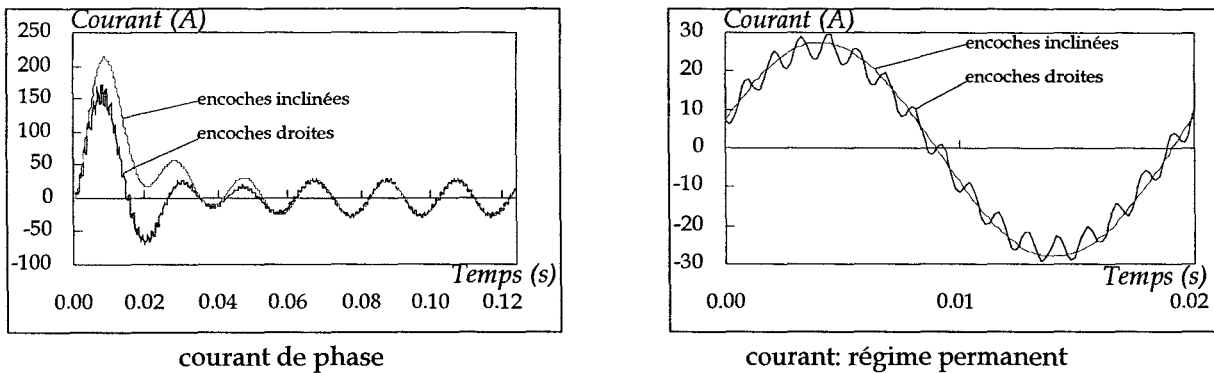


Fig. III.31. Calcul à vitesse nominale: comparaison du courant de phase

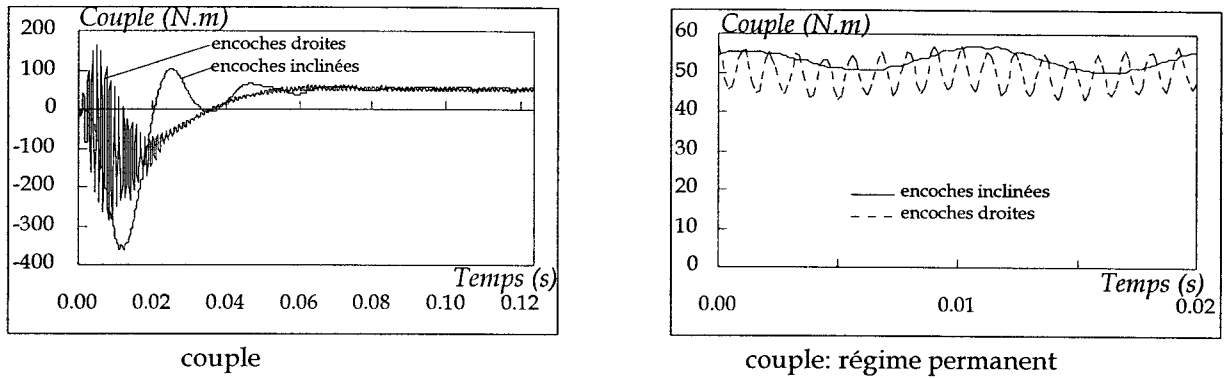


Fig. III.32. Calcul à vitesse nominale: comparaison du couple

A titre indicatif, nous avons comparé les temps de calcul en fonction du nombre de sections utilisées. La figure (III.33) les performances des deux techniques de prise en compte du mouvement (bande de mouvement et macro-élément). D'après cette figure, nous avons pratiquement un rapport de 4 entre les deux méthodes. Les temps CPU donnés correspondent au premier pas de simulation.

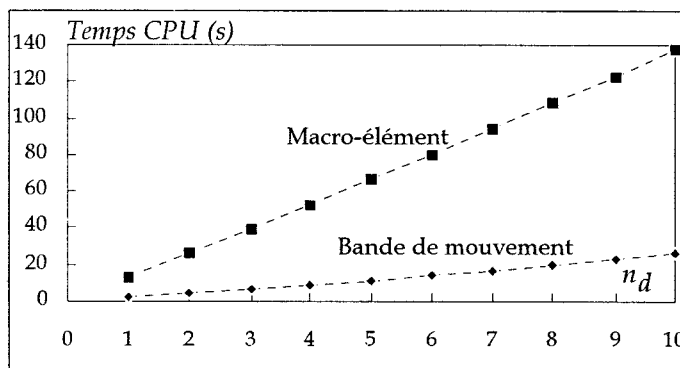


Fig. III.33. Calcul des temps de calcul: bande de mouvement et macro-élément

Calcul 3D avec inclinaison des encoches

Cette simulation a été effectuée en linéaire. Le nombre d'inconnues générées par le maillage est tel que les temps de calcul sont élevés. Pour cette raison, les résultats présentés dans ce paragraphe sont partiels. Ainsi, nous présentons le calcul à rotor bloqué sur deux périodes du courant. Quant au calcul à vide, il sera donné pour les premiers pas de temps réalisés. On notera que vu la capacité du calculateur, " Station Digital alpha 266 Ghz avec 192 MB de mémoire vive", nous n'avons pas pu exécuter les deux calculs en même temps.

Calcul à rotor bloqué

La figure (III.34) donne le courant d'une phase. Dans ce cas, nous avons comparé les résultats du calcul 3D incliné avec ceux des calculs 2D incliné et 3D non-incliné. Dans les mêmes conditions, la figure (III.35) représente l'évolution du couple. On peut noter sur les deux courbes une bonne concordance entre les résultats obtenus.

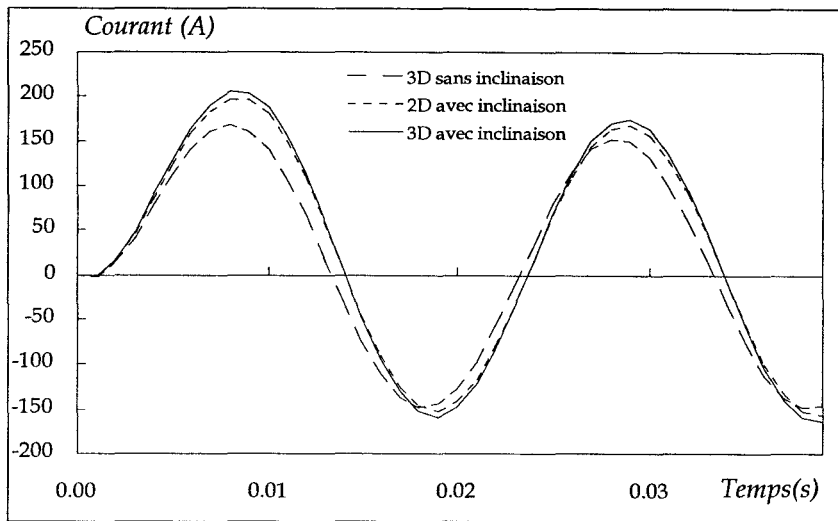


Fig. III.33. Comparaison à rotor bloqué: courant de phase

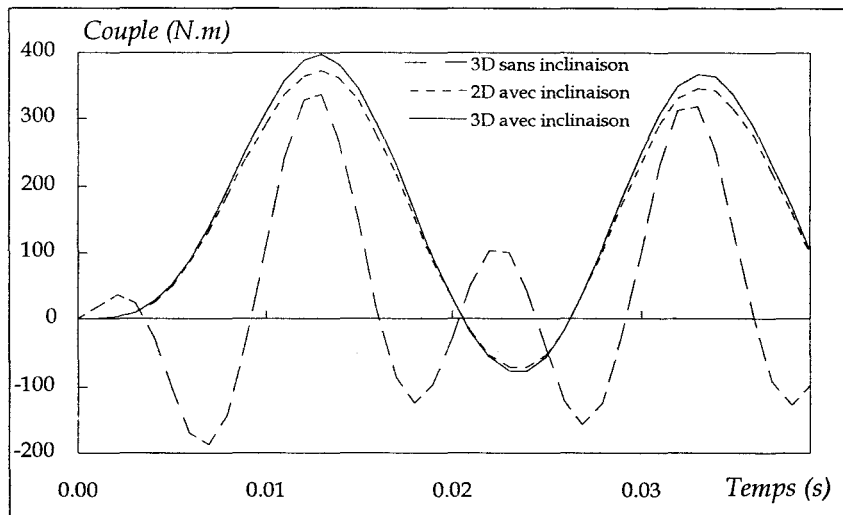


Fig. III.34. Comparaison à rotor bloqué: couple

Calcul à vide

Pour ce calcul, nous avons pu réaliser 19 pas de temps. La figure (III.35) donne le courant de phase et la figure (III.36) représente le couple. Pour cette dernière, nous avons comparés uniquement les calculs avec inclinaison, car l'amplitude du couple dans le cas non-incliné est très grande par rapport aux autres résultats.

Ces résultats partiels ne permettent pas de valider complètement le calcul 3D et d'en tirer des conclusions à caractère général. En effet, nous n'avons pas accès au régime permanent en 3D.

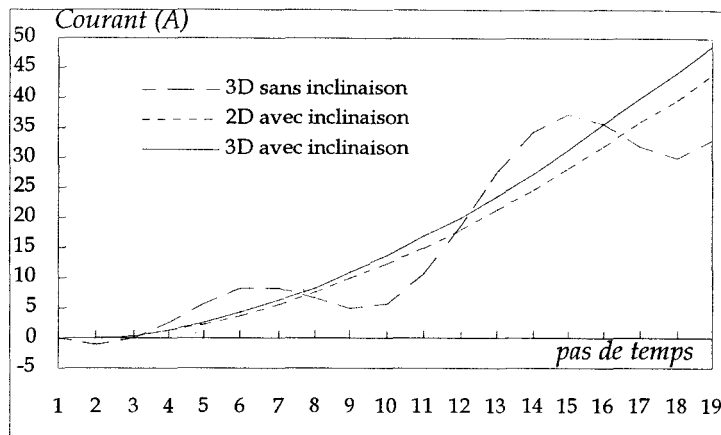


Fig. III.35. Comparaison à vide: courant de phase

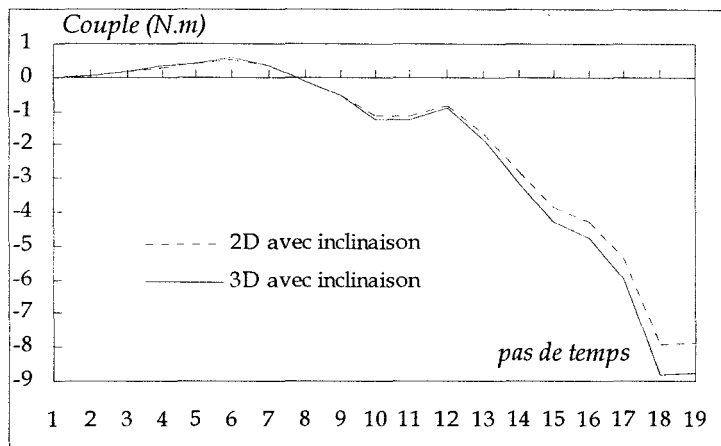


Fig. III.36. Comparaison à vide: couple

Il faut dire que ce modèle engendre des temps de calcul assez élevés. A titre indicatif les temps nécessaires pour une inversion sont de 23h. Néanmoins, l'acquisition de calculateur plus performant permettra de réduire ces temps.

En conclusion, les résultats présentés en 2D pour la prise en compte du mouvement ont permis de valider la méthode proposée. En ce qui concerne, sa comparaison avec le modèle 3D incliné, les résultats obtenus sont partiels et ne peuvent donc pas être interprétés correctement. En ce qui concerne le modèle 3D, son développement s'inscrit dans le cadre des méthodes de calcul présentées dans cette étude. Toutefois, des améliorations sont nécessaires principalement au niveau de la réalisation du maillage, la technique de prise en compte du mouvement et la méthode de résolution des systèmes matriciels. Pour cette dernière, l'utilisation d'un terme source compatible permet une convergence plus rapide pour les formulations en potentiel vecteur non jaugé. Par ailleurs, les approches en potentiel scalaire constituent une alternative intéressante pour la modélisation des machines. Ces formulations peuvent être envisagées en associant un calcul numérique du vecteur source dans le enroulements à géométrie complexe, et un traitement robuste des problèmes liés aux régions non simplement connexes. Cependant, comme nous l'avons souligné dans les applications, ces méthodes exigent un maillage fin pour avoir une précision suffisante sur des grandeurs telles que le couple et les forces. D'autres développements sont également nécessaires notamment au niveau du couplage circuit par un calcul numérique du vecteur source, et des non-linéarités magnétiques.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et développé des modèles numériques 2D et 3D de la machine asynchrone à cage. Ils sont basés sur la résolution des équations du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis. Dans le cas bidimensionnel, l'utilisation de la composante non nulle du potentiel vecteur ne pose pas de difficultés pour modéliser les systèmes électrotechniques. La situation en 3D n'en est pas encore à ce stade. En effet, des développements sont nécessaires pour obtenir des formulations robuste, mais raisonnablement coûteuse en espace mémoire et en temps de calcul. Néanmoins, plusieurs modèles 3D ont été présentés pour les machines électriques.

Après un exposé du modèle 2D, nous avons élaboré une approche pour la prise compte de l'inclinaison des encoches. Ce modèle permet de simuler le fonctionnement de la machine asynchrone à cage en incluant le couplage des circuits électriques et magnétiques ainsi que le mouvement du rotor.

A l'heure actuelle, les principales difficultés liées à la modélisation 3D des machines se posent au niveau des temps de calculs et de la réalisation des maillages. Pour notre part, les choix que nous avons fait sont en fonction des éléments de calcul développés au cours de ce travail. Ainsi, le modèle tridimensionnel a été développé dans le contexte de la formulation en potentiel vecteur avec une discrétisation par les éléments d'arête. Le mouvement est considéré par la surface glissement.

Ces modèles ont été appliqué à la simulation d'un moteur asynchrone avec une comparaison des résultats numériques. Les calculs ont été effectués à rotor bloqué, à vide et vitesse nominale. Pour les encoches droites, nous avons validé l'approche 3D avec la prise en compte du mouvement et du couplage circuit. Par la suite, nous avons présenté les résultats du modèle 2D avec inclinaison. Dans ce cas, nous avons constaté l'atténuation des harmoniques de denture pour les ondes du courant et du couple. De plus, la comparaison de ces résultats avec le calcul 3D sont en bonne concordance.

La taille du problème 3D avec inclinaison est telle que les temps de calcul engendrés sont prohibitifs. De ce fait, nous n'avons pu présenter que des résultats partiels pour les simulations effectuées. Par ailleurs, nous nous sommes limités au calcul en linéaire pour une machine dont la géométrie a été légèrement modifiée.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Ce travail constitue une contribution dans le domaine de la modélisation du champ électromagnétique dans des structures 2D et 3D. Les modèles présentés sont basés sur une résolution numérique des équations de Maxwell par la méthode des éléments finis. Ce calcul donne la distribution du champ et les grandeurs globales caractérisant le fonctionnement du système étudié. Les solutions numériques offrent une précision suffisante pour envisager des applications de conception ou d'optimisation des dispositifs électrotechniques.

L'étude menée a fait l'objet de trois parties.

Dans la première, nous avons présenté les formulations des problèmes électromagnétiques et leur résolution par la méthode des éléments finis. Pour cette dernière, les potentiels scalaires et vecteurs sont, respectivement, associés aux éléments nodaux et d'arête. Dans ce contexte, nous avons développé une approche hybride basée sur un couplage entre les potentiels vecteur et scalaire magnétique. Cette formulation peut apporter des solutions pour surmonter les difficultés liées aux domaines non simplement connexes ou pour réduire les degrés de liberté du problème. Pour l'exemple d'application étudié, nous avons constaté une déformation de la distribution du champ pour interface fer/air. Au delà, de ce problème, les résultats obtenus au niveau global, et pour une séparation conducteur/air sont corrects.

Les courants dans les systèmes électrotechniques sont souvent imposés par des sources de tensions via un réseau électrique. La modélisation de tels dispositifs dans le cadre de la méthode des éléments finis nécessite donc une prise en compte de l'interaction entre les circuits magnétique et électrique. Nous avons présenté ce couplage pour une formulation en potentiel scalaire et vecteur des équations du champ magnétique. Par la suite, nous l'avons étendu à l'approche hybride. Nous avons validé notre étude par une comparaison entre les différentes formulations. Nous avons alors remarqué une bonne concordance des résultats.

Les forces magnétiques et le couple constituent des grandeurs importantes dans l'analyse et la prédiction des performances des systèmes ayant une partie déformable ou en mouvement. Pour les déterminer, nous avons présenté deux méthodes: le tenseur de Maxwell et les travaux virtuels. Ces deux techniques ont été exposées du point de vue du principe et de la procédure d'implantation dans le code de calcul. La méthode des travaux virtuels offre alors un algorithme unifié pour les formulations en potentiels scalaire et vecteur. Avec une utilisation des éléments d'arête, les conditions d'application de cette méthode sont facilement vérifiées. En effet, le calcul de la dérivée de l'énergie magnétique à flux constant se fait en imposant une circulation constante. Le tenseur de Maxwell est basé sur l'interpolation du champ magnétique sur les éléments concernés par le calcul des forces ou du couple. Toutefois, lorsque la couche qui intervient dans l'évaluation de ces grandeurs est mince, les deux méthodes conduisent à des valeurs équivalentes. Nous avons pu constater cela sur le calcul du couple de la machine, car l'entrefer a une faible épaisseur. Par contre, la comparaison des résultats obtenus par les formulations en potentiels scalaire et vecteur, ont montré une sensibilité plus nette du potentiel scalaire à la finesse du maillage.

Concernant la prise en compte du mouvement, nous avons présenté une synthèse des méthodes existantes en 2D et en 3D. Pour notre part, nous avons développé la surface de glissement qui est une extension de la ligne de glissement utilisée en 2D. Cette technique est simple à mettre en oeuvre et permet de garder la taille et les propriétés de la matrice du système inchangées. Cependant, son application impose des contraintes pour la réalisation du maillage. En effet, la surface de glissement définie dans l'entrefer doit être maillée régulièrement et la conformité du maillage doit être assurée à chaque déplacement. De plus, le mouvement est limité par le pas de maillage.

La machine asynchrone à cage est un dispositif électrotechnique qui offre un véritable test des différentes méthodes développées précédemment. En effet, elle fait intervenir une formulation magnétodynamique avec un couplage des équations du circuit électrique, la prise en compte du mouvement et le calcul du couple.

Dans ce contexte, nous avons commencé par la mise en équation de la machine avec une formulation en deux dimensions. A partir de ces équations, nous avons établi un modèle 2D permettant la prise en compte de l'inclinaison des encoches. Cette approche consiste à résoudre une succession finie de problèmes 2D obtenus par un découpage de la machine dans la direction axiale. La résolution de ces problèmes est faite simultanément avec un couplage des équations du circuit électrique au stator et au rotor. Un tel modèle permet d'inclure la saturation du circuit magnétique dans le sens longitudinal.

Le modèle 3D de la machine a été développé en utilisant la formulation en potentiel vecteur modifié \mathbf{a}^* avec une discrétisation par les éléments d'arête. Le problème a été résolu par la méthode du gradient conjugué sans utiliser de jauge. En effet, par rapport à l'utilisation de la jauge l'algorithme converge plus rapidement. Cette formulation est pénalisante du point de vue nombre d'inconnue et donc coûteuse en temps de calcul et en espace mémoire. Néanmoins, les problèmes liés aux régions non simplement connexes ne se posent pas. Ces difficultés exigent un traitement spécifique pour une formulation en potentiel scalaire t - Ω . De plus, le calcul analytique du vecteur source t_0 est rendue impossible par la géométrie de la région inductrice. Ces mêmes problèmes interviennent avec une application de la formulation hybride \mathbf{a} - Ω .

Au niveau de l'application des modèles présentés, nous avons exposé, en premier lieu, les résultats de la machine à encoches droites en comparant les calculs 2D et 3D. Ce dernier a été effectué dans des conditions similaires au 2D. Cela nous a permis de valider la méthode de prise en compte du mouvement développée en 3D. Ceci étant fait, nous nous sommes intéressés au cas de la machine à encoches inclinées. En confrontant les résultats avec et sans inclinaison en 2D, nous avons constaté l'élimination des harmoniques d'encoches. Ce qui correspond au but de l'inclinaison. Concernant les résultats 3D de la machine à encoches inclinées, ils se recourent avec ceux du modèle 2D.

Pour des raisons de temps de calcul, seul le calcul linéaire a été réalisé en 3D.

En perspectives, nous pouvons dire que dans un proche avenir le développement des calculateurs va permettre de modéliser le problème en saturé. Dans ce cas, une comparaison réaliste est alors possible entre le modèle 2D proposé pour l'inclinaison et le calcul 3D. Par ailleurs, des développements en cours, concernant les formulations compatibles, sont susceptibles de conduire à des approches plus économiques en temps de calcul et la possibilité de modéliser des enroulements à géométrie complexe.

Annexes

Annexe 1

Elément réel → Elément de référence

L'élément tétraédrique linéaire est défini par 4 noeuds, 6 arêtes et 4 facettes (Fig. A1.1.). Les fonctions d'approximation sont considérées sur les noeuds ($n_i, i=1,4$) de l'élément pour les inconnues scalaires et sur les arêtes ($a_i, i=1,6$) pour les inconnues vectorielles.

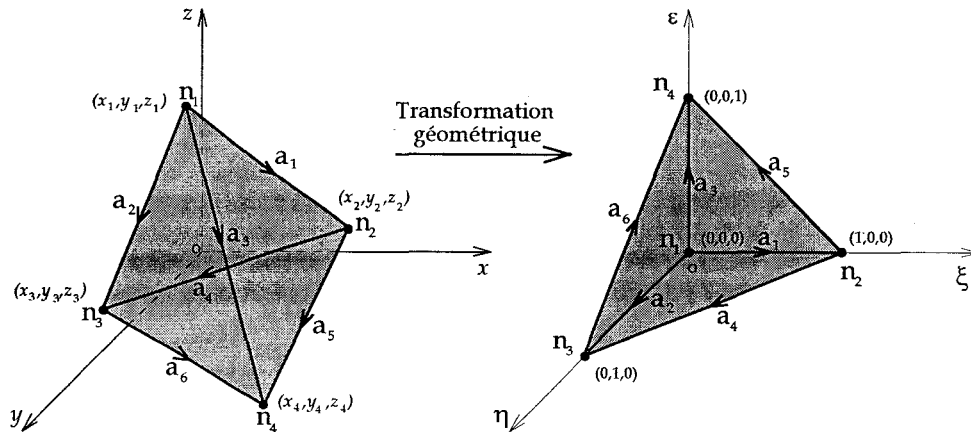


Fig. A1.1 Elément tétraédrique linéaire et son élément de référence

Pour exprimer plus facilement les fonctions d'approximation, l'élément géométrique (réel) est ramené à un élément de référence. Cela est réalisé par une fonction de transformation bijective du système de coordonnées réel $oxyz$ en un système de référence $o\xi\eta\epsilon$. L'utilisation de cette transformation permet de paramétrer l'élément réel dans le système de référence.

Fonctions d'approximation nodales

Avec une paramétrisation de l'élément réel dans le système de coordonnées de référence les fonctions d'approximation ($\hat{\lambda}_i, i=1,4$) sont données par la table (A1.1).

Noeud i	Fonctions d'approximation $\hat{\lambda}_i$
1	$1-\xi-\eta-\epsilon$
2	ξ
3	η
4	ϵ

Table A1.1. Fonctions d'approximation nodales pour un élément de référence

Fonctions d'approximation d'arête

Pour l'élément de référence, les fonctions d'approximation d'arête ($\hat{w}_k, k=1,6$) sont présentées par la table (A1.2). Une arête k est repérée par deux noeuds i et j .

Arête k	Noeuds i-j	Fonctions d'approximation \hat{w}_k		
		ξ	η	ϵ
1	1-2	$1-\eta-\epsilon$	ξ	ξ
2	1-3	η	$1-\xi-\epsilon$	η
3	1-4	ϵ	ϵ	$1-\xi-\eta$
4	2-3	$-\eta$	ξ	0
5	2-4	$-\epsilon$	0	ξ
6	3-4	0	$-\epsilon$	η

Table A1.2. Fonctions d'approximation d'arête pour un élément de référence

Transformation des dérivées

Les dérivées directionnelles d'une fonction scalaire u définies dans les systèmes de coordonnées réelles et de référence sont reliées par l'expression matricielle suivante:

$$\mathit{grad}_{\xi\eta\varepsilon} u = J \mathit{grad}_{xyz} u \quad \mathit{grad}_{xyz} u = J^{-1} \mathit{grad}_{\xi\eta\varepsilon} u \quad (\text{A1.1})$$

La matrice J est dite matrice jacobienne de l'élément et elle est définie comme suit:

$$\text{avec } J = \mathit{grad} \hat{\lambda}[x, y, z] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

On peut montrer aussi que le rotationnel d'une fonction vectorielle u dans le repère $oxyz$ est relié à celui défini dans le repère $o\xi\eta\varepsilon$ par:

$$\mathit{rot}_{xyz} u = \frac{1}{\det J} J^T \mathit{rot}_{\xi\eta\varepsilon} u \quad (\text{A1.3})$$

Transformation des intégrales

L'intégrale volumique d'une fonction $f(x,y,z)$ sur l'élément réel E est ramenée à une intégrale sur l'élément de référence \hat{E} par la relation suivante:

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\hat{E}} f(\xi, \eta, \varepsilon) |\det J| d\xi d\eta d\varepsilon \quad (\text{A1.4})$$

avec $\det J$ le déterminant de la matrice J .

Annexe 2

Calcul de la matrice de couplage pour la formulation hybride $a-\Omega$

Le couplage des potentiels scalaire et vecteur a été effectué en introduisant la matrice de couplage $C_{a-\Omega}$ donnée par l'expression (I.80). Les termes de cette matrice sont obtenus par un assemblage sur les éléments volumiques qui ont un contact surfacique avec l'interface Γ_i . En utilisant des tétraèdres, les éléments surfaciques qui forment l'interface sont des triangles. A chacun de ces triangles est associée une matrice élémentaire $C_{a-\Omega}^e$. La matrice de couplage s'écrit alors:

$$C_{a-\Omega} = \sum_{e=1}^{Ni} C_{a-\Omega}^e = \sum_{e=1}^{Ni} \int_{\Gamma_e} (w_{xyz} \times \text{grad} \lambda_{xyz}) \cdot n \, ds \quad (\text{A2.1})$$

"Ni" représente le nombre de triangles et Γ_e la surface de chaque triangle.

Calcul de la matrice de couplage élémentaire

Ce calcul est réalisé plus facilement dans le système de référence. En effet, quelque soit la position du triangle dans le système de coordonnées xyz , l'intégrale surfacique est ramenée au plan $o\xi\eta$ dans le système de référence $o\xi\eta\varepsilon$ (Fig. A2.1.). En utilisant les transformations des dérivées et d'intégrale données dans l'annexe 1, la matrice élémentaire s'écrit sous la forme:

$$C_{a-\Omega}^e = \int_{\Gamma} (J^{-1} \hat{w}_{\xi\eta\varepsilon} \times J^{-1} \text{grad}_{\xi\eta\varepsilon} \hat{\lambda}) \cdot n^e J_{\Gamma} \, d\xi \, d\eta \quad \text{avec } \varepsilon = 0 \quad (\text{A2.2})$$

$C_{a-\Omega}^e$ est de dimensions (3,3), car elle fait intervenir les trois arêtes et les trois noeuds du triangle. Le terme J_{Γ} permet la transformation 3D/2D de l'intégrale et il est en fonction de la surface de l'élément dans le repère xyz .

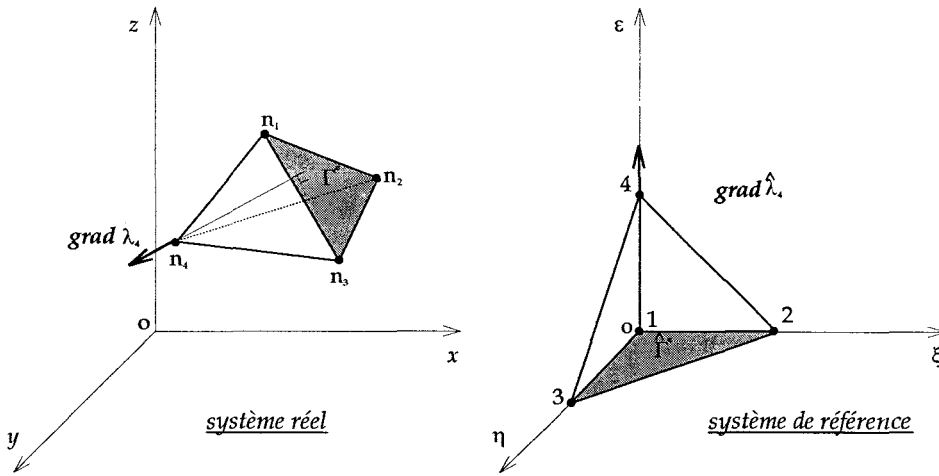


Fig. A2.1. Définition de la surface d'intégration dans le système de référence

En considérant le triangle défini par les noeuds (n_1, n_2, n_3), on peut montrer que la normale n^e à sa surface est dirigée suivant le gradient de la fonction d'approximation au noeud n_4 ; soit $\text{grad}_{xyz} \lambda_4$. Cette normale est reliée au terme J_{Γ} par l'expression $n^e J_{\Gamma} = (J^{-1} \text{grad}_{\xi\eta\varepsilon} \hat{\lambda}_4) |\det J|$. En remplaçant cette dernière dans (A2.2) et en effectuant les calculs, nous obtenons la relation suivante:

$$C_{a-\Omega}^e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} M^e(\xi, \eta) \frac{|\det J|}{\det J} \, d\xi \, d\eta \quad (\text{A2.3})$$

$$\text{avec } M^e(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta & -(1-\xi-\eta) & -(\xi-\eta) \\ \xi & 1-\xi & \xi \\ -(1-\eta) & -\eta & \eta \end{bmatrix} \quad (\text{A2.4})$$

Après intégration de cette relation, nous obtenons

$$C_{a-\Omega}^e = \frac{\text{sign}(\det J)}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2.5})$$

L'expression obtenue est indépendante des coordonnées de l'élément et de sa surface, seul le signe du déterminant de la matrice jacobienne de l'élément volumique (auquel appartient le triangle) intervient. Le calcul effectué précédemment n'est valable que pour l'élément (n_1, n_2, n_3) . Pour les autres facettes du tétraèdre (n_1, n_2, n_4) , (n_1, n_3, n_4) et (n_2, n_3, n_4) , il faut tenir compte des permutations nécessaires pour retrouver le triangle (n_1, n_2, n_3) . Chaque permutation signifie un changement de signe au niveau du $\det J$. Pour ce faire, nous avons établi une liaison entre le nombre de ces permutations et l'indice du noeud du tétraèdre qui n'appartient pas à la surface (noté ns). Par exemple, pour la face (n_1, n_2, n_3) , nous avons $ns = 4$. En introduisant cet indice, la matrice élémentaire pour chaque élément triangulaire est reliée à la matrice $C_{a-\Omega}^e$, tel que: $C_{a-\Omega}^e(ns) = (-1)^{ns} C_{a-\Omega}^e(4)$. La table (I.4) donne les valeurs de " ns " pour les 4 faces du tétraèdre et les pointeurs d'assemblage (noeuds et arêtes) de la matrice élémentaire de couplage.

Face	1	2	3	4
Arêtes	1,2,4	1,3,5	2,3,6	4,5,6
Noeuds	1,2,3	1,2,4	1,3,4	2,3,4
ns	4	3	2	1

Table I.4. Valeurs des pointeurs d'assemblage et de ns

Lorsque l'élément contient deux ou trois faces en contact avec l'interface la matrice élémentaire est obtenue par assemblage des matrices de chaque triangle séparément.

Annexe 3

Compléments couplage circuit

1. Présentation des systèmes matriciels dans le cas des formulations magnétodynamiques en 3D avec couplage circuit

Dans ce cas le domaine étudié comporte une région inductrice couplée à un circuit extérieur et une région avec des courants induits. Les systèmes d'équations à résoudre peuvent être déduites directement des formes matricielles développées dans le chapitre I (§ formulations magnétodynamiques) et le chapitre II (§ couplage avec les équations du circuit extérieur). Dans cet annexe nous allons expliciter les systèmes matriciels pour les formulations électriques ($a-\varphi$, a^*), magnétique ($t-\Omega$) et hybrides ($a-\varphi-\Omega$, $a^*-\Omega$).

Formulation électrique $a-\varphi$

La région inductrice est modélisée par la formulation en potentiel vecteur a et la région conductrice est prise en compte par la formulation $a-\varphi$.

$$\begin{bmatrix} S_a + T_a/\Delta t & C_{a-\varphi} & -C_{a-i} \\ C_{a-\varphi}^T & \Delta t S_\varphi & 0 \\ -C_{a-i}^T & 0 & -k' r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \varphi \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k' v \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_a/\Delta t & 0 & 0 \\ C_{a-\varphi}^T & 0 & 0 \\ -C_{a-i}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \varphi \\ i \end{bmatrix}_t \quad (A3.1)$$

*Formulation électrique a^**

La formulation a est utilisée pour la région inductrice et le potentiel vecteur modifié a^* dans la région conductrice.

$$\begin{bmatrix} S_a + T_a/\Delta t & -C_{a-i} \\ -C_{a-i}^T & -k' r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{a^*} \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k' v \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_a/\Delta t & 0 \\ -C_{a-i}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{a^*} \\ i \end{bmatrix}_t \quad (A3.2)$$

Formulation magnétique $t-\Omega$

Le potentiel scalaire magnétique Ω est utilisé dans tout le domaine étudié; le potentiel vecteur électrique t est introduit dans la région conductrice et la région inductrice est prise en compte par le vecteur source t_0 .

$$\begin{bmatrix} \Delta t S_t + T_t & C_{t-\Omega} & 0 \\ C_{t-\Omega}^T & S_\Omega & -C_{\Omega-i} \\ 0 & -C_{\Omega-i}^T & k' r + \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k' v \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_t & C_{t-\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{\Omega-i}^T & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_t \quad (A3.3)$$

Formulation hybride $a-\varphi-\Omega$

Dans ce cas, nous considérons la région inductrice modélisée par la formulation en potentiel scalaire $t_0-\Omega$ et le domaine conducteur par la formulation $a-\varphi$. Les inconnues du système sont alors les circulations de a et le potentiel scalaire φ aux noeuds du domaine conducteur, le potentiel scalaire Ω aux noeuds du domaine non-conducteur et le courant i dans le bobinage.

$$\begin{bmatrix} S_a + T_a/\Delta t & C_{a-\varphi} & C_{a-\Omega} & 0 \\ C_{a-\varphi}^T & \Delta t S_\varphi & 0 & 0 \\ C_{a-\Omega}^T & 0 & -S_\Omega & C_{\Omega-i} \\ 0 & 0 & C_{\Omega-i}^T & -r - \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \varphi \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k' v \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_a/\Delta t & 0 & 0 & 0 \\ C_{a-\varphi}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{\Omega-i}^T & -\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ \varphi \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_t \quad (A3.4)$$

Formulation hybride a^* - Ω

Le domaine conducteur est pris en compte par la formulation en potentiel vecteur modifié a^* et les régions non-conductrices sont modélisées par la formulation en potentiel scalaire t_0 - Ω . Les inconnues du problème sont alors les circulations du potentiel vecteur modifié a^* dans le domaine conducteur, le potentiel scalaire Ω aux noeuds du domaine non-conducteur et le courant i dans le bobinage.

$$\begin{bmatrix} S_a + T_a/\Delta t & C_{a-\Omega} & 0 \\ C_{a-\Omega}^T & S_\Omega & C_{\Omega-i} \\ 0 & C_{\Omega-i}^T & -k'r - \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{a^*} \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k'v \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} T_a/\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{a-i}^T & -\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{a^*} \\ \Omega \\ i \end{bmatrix}_t \quad (A3.5)$$

Les termes des matrices utilisées dans cette partie de l'annexe ont été explicités au cours des chapitres I et II et le coefficient k' est le même pour les différents systèmes. Il est donné en fonction du coefficient de flux k_Φ et du pas de temps Δt , tel que: $k' = \Delta t/k_\Phi$. D'autre part, tous les systèmes ont une matrice symétrique; mais elle n'est définie positive que pour la formulation magnétique t - Ω (système A3.3).

2. Analyse d'un circuit électrique complexe

Dans le chapitre II (§ couplage entre les équations magnétiques et l'équation du circuit électrique) nous avons utilisé un circuit de configuration simple (une seule maille). Dans cet annexe, nous allons considérer un circuit de configuration complexe dont les éléments peuvent être reliés d'une manière quelconque. Dans ce cas, le couplage entre les équations du circuit électrique et ceux du champ électromagnétique peut être réalisé par une analyse du circuit par les deux lois de Kirchhoff (la loi des noeuds et la loi des mailles).

Considérant un circuit électrique (extérieur au domaine éléments finis) constitué de " N_b " branches reliant " N_n " noeuds. Il est possible d'établir la mise en équation d'un tel circuit, en choisissant un arbre qui passe par tous les noeuds et dont les branches ne se referment pas. Lorsqu'une des branches qui n'appartiennent pas à l'arbre est fermée, nous obtenons une maille (boucle). En considérant les courants de maille i_m comme inconnues ($N_m = N_b - N_n + 1$), les courants dans les branches i_{br} sont liés aux courants i_m par:

$$i_{br} = C_{br-m} i_m \quad \text{avec} \quad C_{br-m}(N_b, N_m) \quad (A3.6)$$

La matrice C_{br-m} est appelée matrice de correspondance et ses termes valent "1" si i_{br} et i_m sont dans le même sens, "-1" s'ils sont de sens contraire et "0" lorsqu'il n'y a pas de liaison entre les deux courants. D'autre part, nous pouvons écrire la loi de Kirchhoff pour les tensions dans chaque maille k (constituée d'une résistance r_k , une inductance L_k et d'une fem v_k). En plus de ces éléments, il faut envisager la possibilité d'avoir une liaison entre le circuit et le domaine éléments finis; cette liaison est caractérisée par le flux Φ_{mk} . Cela nous donne " N_m " équations indépendantes:

$$\sum_k r_k i_{mk} + L_k \frac{di_{mk}}{dt} + \frac{d\Phi_{mk}}{dt} - v_{mk} = 0 \quad (A3.7)$$

Avec une résolution par les éléments finis des équations du champ électromagnétique, le flux d'un enroulement Φ_{br} peut être exprimé en fonction du potentiel utilisé. Dans le cas de la formulation 3D en potentiel vecteur a , nous avons la relation matricielle:

$$\Phi_{br} = k_\Phi \cdot C_{a-i}^T c_a \quad (A3.8)$$

Les termes de la matrice C_{a-i}^T sont donnés par la relation (II.6), c_a représente les circulations de a sur les arêtes du maillage et k_Φ le coefficient du flux.

La matrice de correspondance peut être utilisée pour relier les flux Φ_{br} et Φ_m tel que $\Phi_m = C_{br-m}^T \Phi_{br}$. En assemblant les équations (A3.7) et en remplaçant le flux magnétique par son expression (A3.8), nous obtenons la forme matricielle suivante:

$$R_m i_m + L_m \frac{di_m}{dt} + k_\Phi C_{br-m}^T C_{a-i}^T \frac{dc_a}{dt} = v_m \quad (A3.9)$$

Les matrices R_m et L_m correspondent, respectivement, à l'assemblage des résistances r_k et des inductances r_k . v_m est le vecteur contenant les sources de tensions r_{mk} .

Afin de réaliser le couplage entre les équations du circuit et ceux du champ électromagnétique, la densité de courant est donnée en fonction du courant de branches i_{br} (voir la relation (II.2)) ou en fonction du courant de maille en utilisant la relation (A3.6). Les équations obtenues par la discrétisation par les éléments finis s'écrivent alors:

$$S_a c_a - C_{br-m} C_{a-i} i_m = 0 \quad (A3.10)$$

Les termes de la matrice S_a sont données par l'expression. Les deux équations précédentes (A3.9) et (A3.10) constituent le couplage entre le circuit électrique et le calcul du champ par les éléments finis dans le cas des conducteurs filaires. Après la discrétisation de la dérivée temporelle dans (A3.9), nous obtenons le système matriciel:

$$\begin{bmatrix} S_a & -C_{br-m} C_{a-i} \\ -C_{br-m}^T C_{a-i}^T & \frac{-1}{k_\Phi} (\Delta t R_m + L_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ i_m \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{k_\Phi} \Delta t v_m \end{bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{0}{k_\Phi} L_m \\ -C_{br-m}^T C_{a-i}^T & \frac{-1}{k_\Phi} L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_a \\ i_m \end{bmatrix}_t \quad (A3.11)$$

L'introduction de la matrice correspondance permet donc d'analyser un circuit électrique complexe et le couplage avec les équations magnétiques s'obtient avec une procédure similaire que pour un circuit simple constitué d'une seule maille. Il suffit de définir les termes des matrices C_{br-m} , R_m , L_m et le vecteur v_m . On note que les propriétés de la matrice du système restent inchangés (pour la formulation en potentiel vecteur a : symétrique mais non définie positive).

Annexe 4

Compléments pour le calcul des forces et du couple

1. Tenseur de Maxwell

La discrétisation de la formule de Maxwell (II.25) pour le calcul des forces est obtenue en remplaçant l'intégrale de surface par une somme finie sur les "Ne" éléments surfaciques. Le champ magnétique \mathbf{h} est donné par son approximation sur les éléments concernés $\mathbf{h}^{eT} = (h_x^e \ h_y^e \ h_z^e)$ et la normale sortante pour chaque élément s'exprime par $\mathbf{n}^{eT} = (n_x^e \ n_y^e \ n_z^e)$. En notant Γ^{eT} la surface de l'élément, nous obtenons la relation suivante:

$$\mathbf{F} = \mu_0 \sum_{e=1}^{Ne} \Gamma^{eT} ((\mathbf{h}^e \cdot \mathbf{n}^e) \mathbf{h}^e - \frac{1}{2} |\mathbf{h}^e|^2 \mathbf{n}^e) \quad (\text{A4.1})$$

A partir de cette expression, nous pouvons déduire les composantes de la force $\mathbf{F}^T = (F_x \ F_y \ F_z)$:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \mu_0 \sum_{e=1}^{Ne} \Gamma^{eT} ((h_x^e n_x^e + h_y^e n_y^e + h_z^e n_z^e) \begin{bmatrix} h_x^e \\ h_y^e \\ h_z^e \end{bmatrix} - \frac{1}{2} (h_x^{e2} + h_y^{e2} + h_z^{e2}) \begin{bmatrix} n_x^e \\ n_y^e \\ n_z^e \end{bmatrix}) \quad (\text{A4.2})$$

Cette relation peut être réécrite sous la forme:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \mu_0 \sum_{e=1}^{Ne} \Gamma^{eT} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (h_x^{e2} - h_y^{e2} - h_z^{e2}) n_x^e + h_x^e h_y^e n_y^e + h_x^e h_z^e n_z^e \\ \frac{1}{2} (h_y^{e2} - h_x^{e2} - h_z^{e2}) n_y^e + h_x^e h_y^e n_x^e + h_y^e h_z^e n_z^e \\ \frac{1}{2} (h_z^{e2} - h_x^{e2} - h_y^{e2}) n_z^e + h_x^e h_z^e n_x^e + h_y^e h_z^e n_y^e \end{bmatrix} \quad (\text{A4.3})$$

En explicitant cette expression pour chaque composante de la force, il est possible de se ramener à une écriture matricielle. A titre d'exemple, nous donnons les calculs pour exprimer la composante F_x :

$$F_x = \mu_0 \sum_{e=1}^{Ne} \Gamma^{eT} \mathbf{h}^{eT} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} n_x^e & 0 & 0 \\ 0 & -n_x^e & 0 \\ 0 & 0 & -n_x^e \end{bmatrix} \mathbf{h}^e + \mathbf{h}^{eT} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n_y^e & 0 & 0 \\ n_z^e & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{h}^e \quad (\text{A4.4})$$

Finalement, nous obtenons la relation qui correspond à (II.27):

$$F_x = \mu_0 \sum_{e=1}^{Ne} \Gamma^{eT} \mathbf{h}^{eT} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} n_x^e & 0 & 0 \\ n_y^e & -n_x^e & 0 \\ n_z^e & 0 & -n_x^e \end{bmatrix} \mathbf{h}^e = \mu_0 \sum_{e=1}^{Ne} \Gamma^{eT} \mathbf{h}^{eT} \mathbf{M}_x \mathbf{h}^e \quad (\text{A4.5})$$

2. Méthode des travaux virtuels

dérivée de l'énergie magnétique (formulation en potentiel vecteur)

La valeur de la force ou du couple s'obtiennent en dérivant, suivant la direction du déplacement s , l'énergie magnétique à flux constant. La discrétisation est obtenue par une somme sur les éléments déformés avec l'utilisation des circulations du potentiel vecteur \mathbf{c}_a^e :

$$F_s = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{Ne} \mathbf{c}_a^{eT} \partial_s S_a^e \mathbf{c}_a^e \quad (\text{A4.6})$$

Dans le repère de référence, la matrice S_a^e s'écrit (voir annexe 1):

$$S_a^e = \int_{\mathcal{D}^e} \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{\det \mathbf{J}} \text{rot } \hat{\mathbf{w}}^T \mathbf{J} \right) \cdot \left(\mathbf{J}^T \text{rot } \hat{\mathbf{w}} \frac{1}{\det \mathbf{J}} \right) | \det \mathbf{J} | d\hat{\mathbf{v}} \quad (\text{A4.7})$$

Avec $\hat{\mathbf{w}}$ les fonctions d'approximation d'arête dans le repère de référence.

En dérivant cette matrice par rapport à s , nous obtenons:

$$\begin{aligned} \partial_s S_a^e = \frac{\text{sign}(\det J)}{\mu_0} \int_{\mathcal{B}^e} (\text{rot } \hat{w}^T \partial_s J) \cdot (J^T \text{rot } \hat{w}) \frac{1}{\det J} + (\text{rot } \hat{w}^T J) \cdot (\partial_s J^T \text{rot } \hat{w}) \frac{1}{\det J} \\ + (\text{rot } \hat{w}^T \partial_s J) \cdot (J^T \text{rot } \hat{w}) \partial_s \left(\frac{1}{\det J} \right) d\hat{v} \end{aligned} \quad (\text{A4.8})$$

Cette expression peut s'écrire aussi:

$$\begin{aligned} \partial_s S_a^e = \frac{\text{sign}(\det J)}{\mu_0} \int_{\mathcal{B}^e} (\text{rot } \hat{w}^T J) \left(\frac{1}{\det J} J^{-1} \partial_s J + \partial_s J^T J^{-T} \frac{1}{\det J} \right) (J^T \text{rot } \hat{w}) \\ + (\text{rot } \hat{w}^T \partial_s J) \cdot (J^T \text{rot } \hat{w}) \frac{-\partial_s \det J}{(\det J)^2} d\hat{v} \end{aligned} \quad (\text{A4.9})$$

La dérivée du déterminant de J s'obtient facilement en posant: $J^{-1} = J'/\det J$, avec J' la matrice transposée des cofacteurs de J . Nous pouvons donc écrire $(\det J)I = J'J$, avec I la matrice identité. En employant ces relations dans (A4.9), nous obtenons:

$$\partial_s S_a^e = \frac{\text{sign}(\det J)}{\mu_0} \int_{\mathcal{B}^e} \frac{1}{(\det J)^2} (\text{rot } \hat{w}^T J) (J' \partial_s J + \partial_s J^T J^T - \partial_s J' J - J' \partial_s J) (J^T \text{rot } \hat{w}) d\hat{v} \quad (\text{A4.10})$$

Après quelques simplifications, nous obtenons l'expression finale (voir la relation (II.42)) de la dérivée de la matrice S_a^e définie par les fonctions d'approximation d'arête w dans le repère réel et de la dérivée de la matrice jacobienne:

$$\partial_s S_a^e = \frac{\text{sign}(\det J)}{\mu_0} \int_{\mathcal{B}^e} (\text{rot } w^T) (\partial_s J^T J^T - \partial_s J' J) (\text{rot } w) d\hat{v} \quad (\text{A4.11})$$

dérivée de la co-énergie magnétique (formulation en potentiel scalaire)

Dans ce cas, la force ou le couple sont obtenus par une dérivation de la co-énergie magnétique à courant constant. En utilisant les valeurs du potentiel scalaire au niveau des éléments déformés, nous obtenons la forme discrète pour la valeur de la force suivant le sens du déplacement s :

$$F_s = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{Ne} \Omega^{eT} \partial_s S_\Omega^e \Omega^e \quad (\text{A4.12})$$

La matrice S_Ω^e s'exprime en utilisant les fonctions d'approximation nodales $\hat{\lambda}$ dans le repère de référence comme suit (voir annexe 1):

$$S_\Omega^e = \int_{\mathcal{B}^e} \mu_0 (\text{grad } \hat{\lambda}^T J^{-T}) \cdot (J^{-1} \text{grad } \hat{\lambda}) |\det J| d\hat{v} \quad (\text{A4.13})$$

En introduisant la matrice des cofacteurs transposée J' , la dérivation par rapport à s de l'expression précédente donne:

$$\begin{aligned} \partial_s S_\Omega^e = \text{sign}(\det J) \mu_0 \int_{\mathcal{B}^e} (\text{grad } \hat{\lambda}^T \partial_s J^T) \cdot (J' \text{grad } \hat{\lambda}) \frac{1}{\det J} \\ + (\text{grad } \hat{\lambda}^T J^T) \cdot (\partial_s J' \text{grad } \hat{\lambda}) \frac{1}{\det J} + (\text{grad } \hat{\lambda}^T J^T) \cdot (J' \text{grad } \hat{\lambda}) \partial_s \left(\frac{1}{\det J} \right) d\hat{v} \end{aligned} \quad (\text{A4.14})$$

Nous pouvons réécrire cette relation sous la forme:

$$\begin{aligned} \partial_s S_\Omega^e = \text{sign}(\det J) \mu_0 \int_{\mathcal{B}^e} (\text{grad } \hat{\lambda}^T J^T) \left(\frac{1}{\det J} J^{-T} \partial_s J^T + \partial_s J' J^{-1} \frac{1}{\det J} \right) \cdot (J' \text{grad } \hat{\lambda}) \\ + (\text{grad } \hat{\lambda}^T J^T) \cdot (J' \text{grad } \hat{\lambda}) \frac{-\partial_s (\det J)}{(\det J)^2} d\hat{v} \end{aligned} \quad (\text{A4.15})$$

En remplaçant la dérivée du déterminant par son expression matricielle, nous obtenons:

$$\partial_s S_\Omega^e = \text{sign}(\det J) \mu_0 \int_{\mathcal{D}^e} (\mathbf{grad} \hat{\lambda}^T J^{-T}) (J^T \partial_s J^T + \partial_s J^T J - \partial_s J^T J - J^T \partial_s J) J^{-1} \mathbf{grad} \hat{\lambda} d\hat{v} \quad (\text{A4.16})$$

Finalement, l'utilisation des fonctions d'approximation nodales λ définies dans le repère réel, nous ramène à l'expression suivante (voir la relation (II.45)):

$$\partial_s S_\Omega^e = \text{sign}(\det J) \mu_0 \int_{\mathcal{D}^e} (\mathbf{grad} \lambda^T) (J^T \partial_s J^T - J^T \partial_s J) (\mathbf{grad} \lambda) d\hat{v} \quad (\text{A4.17})$$

Pour les deux cas présentés, le calcul de la force ou du couple dépend de l'évaluation de la même expression matricielle entre crochets dans (A4.11) et (A4.17) i.e. $(J^T \partial_s J^T - J^T \partial_s J)$. Au cours du chapitre II (§ calcul des forces magnétiques et du couple), nous avons explicité la dérivation de la matrice jacobienne $\partial_s J$. Dans le paragraphe suivant, nous allons donner la procédure de calcul de la dérivée de la matrice J .

Calcul de la dérivée de la matrice J

La matrice jacobienne J est donnée en fonction des coordonnées de l'élément, dans le repère cartésien $((x_i, y_i, z_i), i = 1, 4)$, par la relation suivante:

$$J = \mathbf{grad} \hat{\lambda} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A4.18})$$

En définissant les vecteurs variations Δx , Δy et Δz comme suit:

$$\Delta x = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \end{bmatrix}, \quad \Delta y = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_1 \end{bmatrix}, \quad \Delta z = \begin{bmatrix} z_2 - z_1 \\ z_3 - z_1 \\ z_4 - z_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A4.19})$$

nous pouvons écrire la matrice J et sa dérivée $\partial_s J$ sous une forme compacte:

$$J = |\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z| \quad \partial_s J = |\partial_s \Delta x \quad \partial_s \Delta y \quad \partial_s \Delta z| \quad (\text{A4.19})$$

En utilisant ces notations, la matrice $J' = (\det J) J^{-1}$ et sa dérivée $\partial_s J'$ s'écrivent:

$$J' = |\Delta y \times \Delta z \quad \Delta z \times \Delta x \quad \Delta x \times \Delta y| \quad (\text{A4.20})$$

$$\partial_s J' = |\partial_s \Delta y \times \Delta z + \Delta y \times \partial_s \Delta z \quad \partial_s \Delta z \times \Delta x + \Delta z \times \partial_s \Delta x \quad \partial_s \Delta x \times \Delta y + \Delta x \times \partial_s \Delta y| \quad (\text{A4.21})$$

A partir de la relation (A4.21), nous déduire les dérivées suivant les directions $s = (x, y, z)$:

$$\partial_s J' = \begin{cases} |0 & \Delta z \times \partial_x \Delta x & \partial_x \Delta x \times \Delta y| & s=x \\ |\partial_y \Delta y \times \Delta z & 0 & \Delta x \times \partial_y \Delta y| & s=y \\ |\Delta y \times \partial_z \Delta z & \partial_z \Delta z \times \Delta x & 0| & s=z \end{cases} \quad (\text{A4.22})$$

Pour le calcul du couple, on pose $s = \theta$; ce qui donne:

$$\partial_\theta J' = |\partial_\theta \Delta y \times \Delta z \quad \Delta z \times \partial_\theta \Delta x \quad \partial_\theta \Delta x \times \Delta y + \Delta x \times \partial_\theta \Delta y| \quad (\text{A4.23})$$

Les valeurs des dérivées $\partial_x \Delta x$, $\partial_y \Delta y$, $\partial_z \Delta z$, $\partial_\theta \Delta x$ et $\partial_\theta \Delta y$, définies dans (A4.22) et (A4.23), sont obtenues en utilisant la table (II.5).

Annexe 5

Calcul analytique de la force: exemple des deux conducteurs parallèles

Calcul de l'induction magnétique pour un conducteur de section rectangulaire

Soit un conducteur de section rectangulaire (longueur $2b$, largeur $2a$) parcouru par un courant constant suivant oz , tel que le montre la figure (A5.1). L'induction magnétique peut être obtenue analytiquement dans tout l'espace [1].

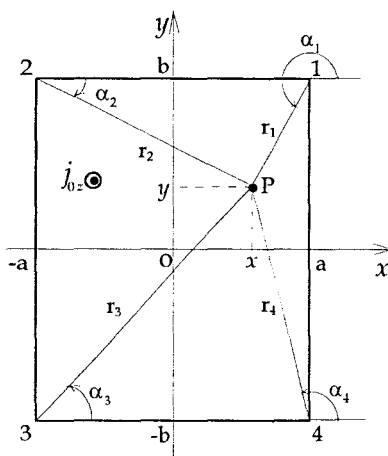


Fig. A5.1. Conducteur de section rectangulaire

Pour le calcul de la force, nous allons nous intéresser uniquement à l'induction sur la frontière du conducteur. Dans ce cas, les composantes b_x et b_y sont données par l'expression:

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \frac{\mu_0 j_{0z}}{2\pi} \begin{bmatrix} g_x(x, y) \\ g_y(x, y) \end{bmatrix} \tag{A5.1}$$

$$\text{tel que } \begin{cases} g_x(x, y) = (y-b)\log\frac{r_1}{r_2} + (y+b)\log\frac{r_3}{r_4} + (x-a)(\alpha_1 - \alpha_4) + (x+a)(\alpha_3 - \alpha_2) \\ g_y(x, y) = (x-a)\log\frac{r_1}{r_4} + (x+a)\log\frac{r_3}{r_2} - (y-b)(\alpha_1 - \alpha_2) - (y+b)(\alpha_3 - \alpha_4) \end{cases} \tag{A5.2}$$

$$\text{avec } \begin{cases} r_1 = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}, & \alpha_1 = \pi + \arctan((b-y)/(a-x)) \\ r_2 = \sqrt{(a+x)^2 + (b-y)^2}, & \alpha_2 = -\arctan((b-y)/(a+x)) \\ r_3 = \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}, & \alpha_3 = +\arctan((b+y)/(a+x)) \\ r_4 = \sqrt{(a-x)^2 + (b+y)^2}, & \alpha_4 = \pi - \arctan((b+y)/(a-x)) \end{cases}$$

Calcul de force pour un système à deux conducteurs parallèles

Pour deux conducteurs parallèles conduisant le courant dans le même sens, l'induction magnétique peut être obtenue par une superposition des deux inductions créées par chaque conducteur.

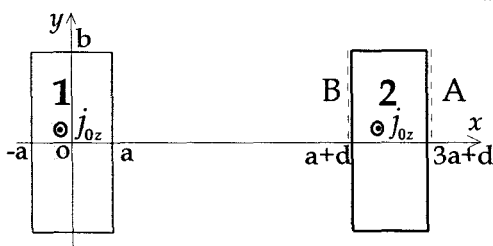


Fig. A5.2. Système à deux conducteurs avec des courants dans le même sens

La symétrie du système suivant l'axe $y = 0$, nous permet de limiter les calculs à la moitié i.e. $0 \leq y \leq b$. On note que la composante de la force suivant oy est nulle ($F_y = 0$). Pour calculer la force qui agit sur le conducteur "2" suivant l'axe ox , nous devons expliciter les inductions sur les faces A et B.

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_2 = \frac{\mu_0 j_{0z}}{2\pi} \begin{bmatrix} g_x(x = a, y) + g_x(x = 3a + d, y) \\ g_y(x = a, y) + g_y(x = 3a + d, y) \end{bmatrix} \quad (A5.3)$$

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}_2 = \frac{\mu_0 j_{0z}}{2\pi} \begin{bmatrix} g_x(x = -a, y) + g_x(x = a + d, y) \\ g_y(x = -a, y) + g_y(x = a + d, y) \end{bmatrix} \quad (A5.4)$$

En appliquant le tenseur de Maxwell, la valeur de la force globale, qui agit sur un conducteur, s'écrit $F_x = F_x|_A + F_x|_B$ avec:

$$F_x|_A = \int_A f_{xA}(y) dy = \int_A \frac{1}{2\mu_0} (b_{xA}^2 - b_{yA}^2) dy \quad (A5.5)$$

$$F_x|_B = \int_B f_{xB}(y) dy = \int_B \frac{-1}{2\mu_0} ((b_{xB}^2 - b_{yB}^2) dy \quad (A5.6)$$

Application numérique

Pour l'exemple traité dans le chapitre II, nous avons les données suivantes:

$$a = 2.5 \text{ mm}, \quad b = 5 \text{ mm}, \quad d = 15 \text{ mm}$$

$$i = 150 \text{ A} \rightarrow j_{0z} = \frac{i}{4ab} = 3 \text{ A/mm}^2$$

Les calculs des expressions (A5.5) et (A5.6) ont été fait sous Excel (tableur). En effet, la valeur globale de la force peut être par une intégration numérique des fonctions f_A et f_B . avec un pas $\Delta y = 0.05 \text{ mm}$. La répartition des densité de force en fonction de y sont données par le figure (A5.3). La valeur obtenue pour la force agissant sur un conducteur est $F_x = 0.29 \text{ N/m}$

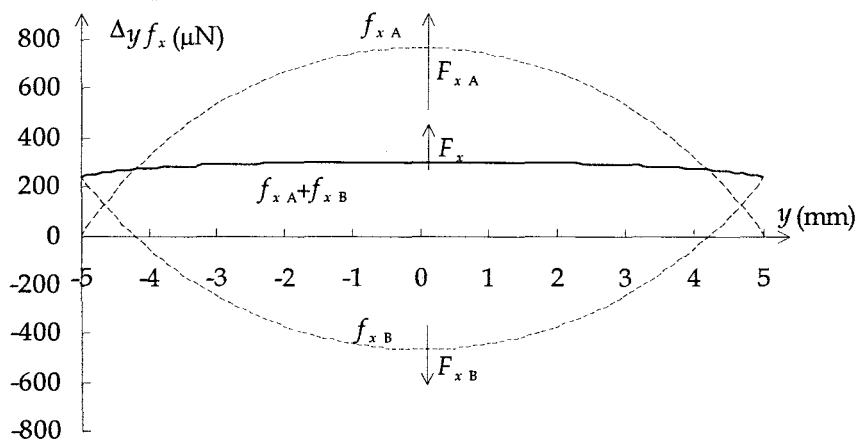


Fig. A5.3. Tracé de $F_x(y)$

Annexe 6

Inclinaison des encoches

1. Facteur d'inclinaison

Dans la littérature, on peut trouver une définition du facteur d'inclinaison comme le rapport entre les f.e.m induites calculées dans les cas incliné et droit. Afin de déterminer ce facteur, commençons par calculer la f.e.m induite aux bornes d'un conducteur droit i.e. orienté suivant la direction perpendiculaire au plan de répartition du champ (Fig.A7.1a).

Soit un champ tournant de p paires de pôles et de pulsation ω . Afin de simplifier le problème, on suppose une répartition sinusoïdale et radiale dans l'entrefer. Ce champ peut s'écrire en un point P (repéré par l'angle α) de la manière suivante:

$$h(\alpha, t) = h_m \cos(\omega t - p\alpha) \quad (\text{A7.1})$$

avec h_m la valeur maximale du champ.

Soit un conducteur rectiligne de longueur L placé au point P (Fig. A7.1). Il coupe alors un flux pendant une durée dt . En même temps, le champ a tourné d'un angle ωdt et la section engendrée est égale à $L R \omega dt$. D'après la loi de Lenz, une f.e.m apparaît aux bornes de ce conducteur et elle s'écrit:

$$e_c(\alpha, t) = -\mu_0 h_m L R \omega \cos(\omega t - p\alpha) \quad (\text{A7.2})$$

Pour un conducteur incliné d'un angle α_i par rapport au plan de la répartition, on peut appliquer la formule précédente à une portion élémentaire dl , située à la distance l du point P , supposé rectiligne et parallèle à l'axe oz (Fig. A7.1b). La f.e.m. élémentaire peut s'écrire alors sous la forme:

$$de_c = -\mu_0 h_m dl R \omega \cos(\omega t - p\alpha_l) \quad \text{avec} \quad \alpha_l = \alpha + \frac{l}{L} \alpha_i \quad (\text{A7.3})$$

En intégrant cette relation sur la longueur du conducteur, cela donne:

$$e_{ci}(\alpha, t) = \int_{-L}^L de_c = -\mu_0 h_m L R \omega \left(\frac{2}{p\alpha_i} \sin \frac{p\alpha_i}{2} \right) \cos(\omega t - p\alpha - \frac{p\alpha_i}{2}) \quad (\text{A7.4})$$

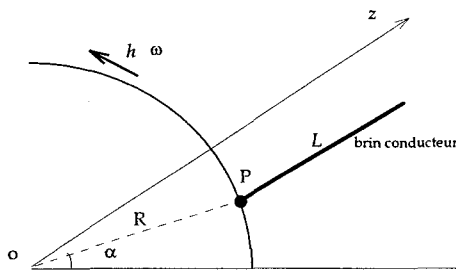


Fig. A7.1a. cas d'un conducteur droit

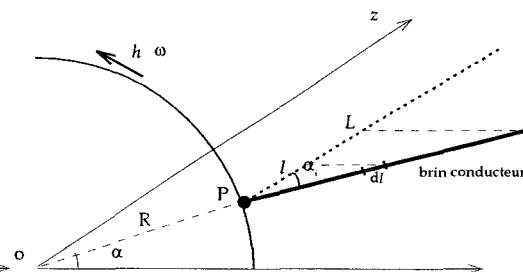


Fig. A7.1b. cas d'un conducteur incliné

En calculant le rapport des f.e.m efficaces E_{cd} et E_{ci} calculées, respectivement, pour les cas droit (A7.2) et incliné (A7.4), cela donne:

$$k_i = \frac{E_{ci}}{E_{cd}} = \frac{\sin(p\alpha_i/2)}{(p\alpha_i/2)} \quad (\text{A7.5})$$

D'après cette expression, le facteur k_i est inférieur à 1 et il tend vers 1 lorsque l'angle d'inclinaison tend vers 0. On note que l'expression de la f.e.m dans le cas incliné (A.7.4) révèle un déplacement de la phase à l'origine d'un angle $p\alpha_i/2$.

L'expression précédente donne le facteur d'inclinaison est pour le fondamental. Dans le cas des harmoniques liés à la répartition du champ magnétique, ce facteur s'écrit pour un harmonique d'ordre n/p :

$$k_{in} = \frac{\sin(n\alpha_i/2)}{(n\alpha_i/2)} \quad (A7.4)$$

Pour éliminer par exemple un harmonique d'ordre n_h/p , il suffit de mettre à zéro le facteur d'inclinaison qui lui associé.

$$\sin\left(\frac{n_h\alpha_i}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad n_h\alpha_i = 2k\pi \quad \text{avec } k \text{ un entier} \quad (A7.4)$$

A partir de cette relation, nous pouvons déduire la valeur de l'angle d'inclinaison qui annulera l'harmonique d'ordre n_h/p . En choisissant la plus petite valeur non nulle i.e. correspondant à $k = 1$, nous obtenons $\alpha_i = 2\pi/n_h$.

2. Choix de l'inclinaison

Les machines présentent des harmoniques d'espace dus à la répartition discontinue des conducteurs dans l'armature du stator et du rotor. Ces harmoniques sont à l'origine du bruit magnétique et peuvent provoquer un vieillissement prématuré du matériel. C'est pourquoi, les constructeurs cherchent à éliminer ces harmoniques ou à les atténuer. Pour ce faire, ils ont recours à deux techniques: un choix judicieux du nombre d'encoches au stator et au rotor ou une inclinaison des encoches d'une des armatures. Généralement, c'est la deuxième solution qui est utilisée.

Supposons, pour simplifier, une répartition sinusoïdale du champ dans l'entrefer de la machine. La perméance du circuit magnétique varie dans l'entrefer à une fréquence qui correspond au pas dentaire. Si on note N_e le nombre d'encoches d'une armature, la variation de la perméance est égale à N_e/p fois le fondamental. En utilisant la relation (A7.2) et en réduisant la modulation de la perméance à l'onde fondamentale, on peut écrire la f.e.m aux bornes d'un conducteur sous la forme:

$$e(\alpha, t) = e_m \cos \omega t (1 + \gamma \cos\left(\frac{N_e}{p} \omega t - p\alpha\right)) \quad (A7.5)$$

γ est un coefficient qui dépend de l'ouverture d'encoche.

En développant cette expression, on peut l'écrire:

$$e(\alpha, t) = e_m \left[\cos \omega t + \frac{\gamma}{2} \cos\left(\left(\frac{N_e}{p} + 1\right)\omega t - p\alpha\right) + \frac{\gamma}{2} \cos\left(\left(\frac{N_e}{p} - 1\right)\omega t - p\alpha\right) \right] \quad (A7.6)$$

D'après cette relation, les harmoniques de denture apparaissent comme une fonction d'amplitude constante et d'ordre $N_e/p \pm 1$. Pour réduire ces deux harmoniques, une solution consiste à incliner les encoches. Pour cela, on annule les facteurs d'inclinaison qui leurs sont associés. Dans ces conditions, nous obtenons deux valeurs pour l'angle d'inclinaison:

$$\alpha_{i1} = \frac{2\pi}{N_e + p} \quad \text{et} \quad \alpha_{i2} = \frac{2\pi}{N_e - p} \quad (A7.7)$$

Comme nous nous pouvons définir qu'une seule valeur, on suppose N_e très grand devant p ce qui donne $\alpha_i = 2\pi/N_e$. Cela correspond à une inclinaison d'un pas d'encoche. Dans ce cas, les deux harmoniques de denture ne sont pas annulés mais leurs amplitudes sont fortement réduites.

Exemple d'application

Considérons une armature avec $p = 2$ et comportant 32 encoches. D'après la relation (A7.6), une telle configuration développe deux harmoniques de denture d'ordre 15 et 17. La forme d'onde de la f.e.m avec et sans ces harmoniques est donnée par la figure (A7.2). Dans ce calcul, nous avons posé $e_m = 1 \text{ V}$, $\omega = 314.15 \text{ rd / s}$ et $\gamma = 0.7$.

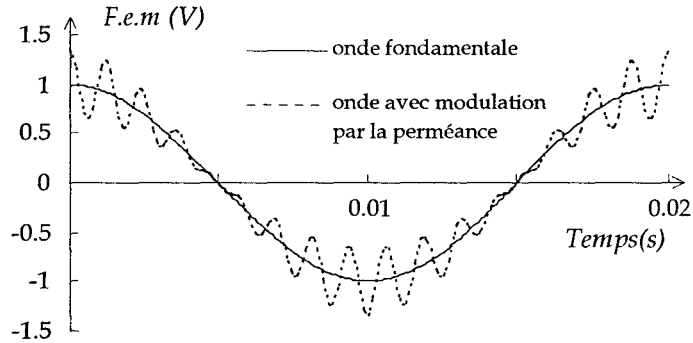


Fig. A7.1. Formes d'ondes fondamentale et sa modulation par la perméance du circuit magnétique

Avec une inclinaison égale au pas dentaire i.e. $\alpha_i = \pi/16$, les facteurs d'inclinaison calculés à partir de la relation (A7.4) sont égaux à $k_{i15} = 0.0662$ et $k_{i17} = -0.0494$, respectivement, pour les harmoniques 15 et 17. Pour le fondamental, le facteur est égale à $k_{i15} = 0.998$. La figure (A7.3a) montre la forme d'onde du flux après l'inclinaison et la figure (A7.3b) donne le spectre de cette onde comparé au cas sans inclinaison.

Annexe 7

Calcul des paramètres du schéma électrique équivalent

Les paramètres du schéma équivalent en L de la machine (Fig. A8.1) peuvent être obtenus à partir des tests à vide et à rotor bloqué.

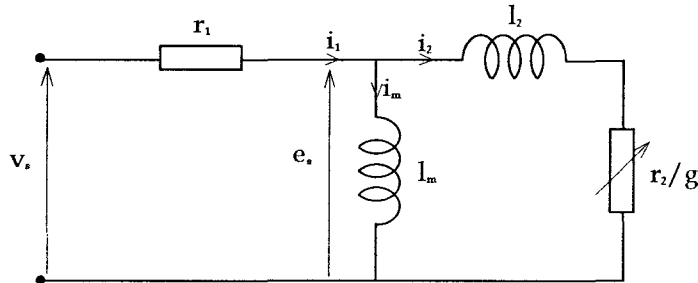


Fig. A8.1. Schéma électrique équivalent de la machine

Dans cet annexe, nous présentons une procédure de calcul de ces paramètres dans le cas du modèle pas à pas dans le temps. Dans ce cas, il faut traiter des valeurs instantanées. Par contre, dans la formulation complexe, on utilise les amplitudes et les phases des courants calculés. Les calculs sont donnés pour l'onde fondamentale à 50 Hz pour un schéma ramené au stator.

Le test à vide i.e. $g = 0$ permet de calculer l'inductance magnétisante, en utilisant la relation suivante:

$$I_m = \frac{\langle Q_0(t) \rangle}{\omega \langle i_{s0}^2(t) \rangle} \quad (\text{A8.1})$$

avec $\langle Q_0(t) \rangle$ la valeur moyenne de la puissance réactive à vide sur une période, $i_{s0}(t)$ le courant absorbé à vide et ω la pulsation de la tension appliquée.

A partir du test à rotor bloqué i.e. $g = 1$, on peut calculer la résistance rotorique r_2 et l'inductance de fuite rotorique l_2 . Le courant magnétisant est déduit en fonction de la source de tension v_s et l'inductance magnétisante calculée par la relation (A8.1):

$$i_m(t) = \frac{e_s(t - T/4)}{I_m \omega} \quad (\text{A8.2})$$

avec T la période de la tension appliquée. En effectuant le bilan des puissances actives et réactives pour le calcul à rotor bloqué, on peut écrire:

$$\langle P_1(t) \rangle = r_2 \langle (i_{s1}(t) - i_m(t))^2 \rangle \quad (\text{A8.3})$$

$$\langle Q_1(t) \rangle = I_m \omega \langle i_m^2(t) \rangle + l_2 \omega \langle (i_{s1}(t) - i_m(t))^2 \rangle \quad (\text{A8.4})$$

Pour la machine d'étude, les valeurs obtenues sont les suivantes:

$$I_m = 0.165 \text{ H}, \quad l_2 = 8.81 \text{ mH}, \quad r_2 = 0.64 \Omega$$

Bibliographie

Bibliographie

- [1] E. Durand, "Magnétostatique", *Ed. Masson et Cie*, 1968.
- [2] P. Silvester and M.V.K. Chari, "Finite element solution of saturable magnetic problems", *IEEE Trans. PAS*. PAS-89, pp 1642-1651, 1970.
- [3] O. C. Zienkienvicz, "La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur", *Ed. Ediscience*, 1973
- [4] O. C. Zienkienvicz, J. Lyness and D. R. J. Owen, "Three dimensional magnetic field determination using scalar potential", *IEEE Trans. Mag.* vol. 13, no. 5, pp 1649-1656, 1977.
- [5] J. Simkin and C. V. Trowbridge, "On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problem in electromagnetics", *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 14, pp 423-440, 1979.
- [6] T. Morisue, "Magnetic vector potential and electric scalar potential in three dimensional eddy current problem", *IEEE Trans. Mag.* vol. 18, no. 2, pp 531-535, 1982.
- [7] A. Razek, J. L. Coulomb, M. Feliachi and J. C. Sabonnadière, "Conception of an air gap element for dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machine", *IEEE Trans. Mag.* vol. 18, no. 2, pp 655-659, 1982.
- [8] S. Williamson and J. W. Ralph, "Finite element analysis for non linear field problems with complex current sources", *IEE Proceedings*, vol. 129, pt. A, no. 6, pp 391-395, 1982.
- [9] F. Bouillault and A. Razek, "Prise en compte du mouvement dans la détermination numérique des courants de Foucault dans une structure électromagnétique", *Revue de physique appliquée*, vol. 25, pp 649-659, 1983
- [10] J. L. Coulomb, "A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness", *IEEE Trans. Mag.* vol. 19, no. 6, pp 2514-2519, 1983.
- [11] C. R. I. Emson and J. Simkin, "An optimal method for 3D eddy currents", *IEEE Trans. Mag.* vol. 19, no. 6, pp 2450-2452, 1983.
- [12] F. Piriou and A. Razek, "Calculation of saturated inductance for numerical simulation of synchronous machines", *IEEE Trans. Mag.* vol. 19, no. 6, pp 2628-2631, 1983.
- [13] J. L. Coulomb and G. Meunier, "Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation", *IEEE Trans. Mag.* vol. 20, no. 5, pp 1894-1896, 1984.
- [14] R. Albanese, R. Martone, G. Miano and G. Rubinnacci, "A T formulation for 3D finite eddy current computation", *IEEE Trans. Mag.* vol. 21, no. 6, pp 2299-2302, 1985.
- [15] B. Davat, Z. Ren and M. Lajoie-Mazenc, "The movement in field modeling", *IEEE Trans. Mag.* vol. 21, no. 6, pp 2296-2298, 1985.
- [16] G. Fournet, "Electromagnétisme à partir des équations locales", *Ed. Masson*, 1985
- [17] A. Arkkio, "Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic and circuit equations", *Thesis of acta polytechnica scandinavica*, Electrical engineering series No. 9, Helsinki, 1987.
- [18] F. Goby, "Utilisation d'une méthode couplée: éléments finis-éléments intégrales de frontières, pour le calcul des forces dans les dispositifs électromagnétiques", *Thèse de doctorat*, Univ. Paris VI, septembre 1987.

- [19] R. Albanese and G. Rubinacci, "Solution of three dimensional eddy current problems by integral and differential methods", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 98-101, 1988.
- [20] O. Biro, "Use of two-component vector potential for 3D eddy current calculations", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 102-105, 1988.
- [21] A. Bossavit, "A rationale for 'edge elements' in 3D fields computations", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 74-79, 1988.
- [22] A. Bossavit, "Withney forms: a class of finite elements for three dimensional computations", *IEE. Proceedings*, vol 135 pt A, no. 8, pp. 1541-1550, 1988.
- [23] F. Bouillault and A. Razek, "Hybrid numerical methods for movement consideration in electromagnetic system", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 259-261, 1988.
- [24] A. Kameari, "Three dimensional eddy current calculation using finite element method with A-v in conductor and Ω in vacuum", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 118-121, 1988.
- [25] P. J. Leonard and D. Rodger, "Voltage forced coils for 3D finite element method electromagnetic model", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 6, pp 2579-2581, 1988.
- [26] G. Meunier, D. Shen and J. L. Coulomb, "Modelisation of 2D and axisymmetric magnetodynamic domain by the finite elements method", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 166-169, 1988.
- [27] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and Y. Okada, "Improvement of T- Ω method for 3D eddy current analysis", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 94-97, 1988.
- [28] F. Piriou and A. Razek, "Coupling of saturated electromagnetic systems to non-linear power electronic devices", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 274-277, 1988.
- [29] T. W. Preston, A. B. J. Reece and P. S. Sangha, "Induction motor analysis by time stepping techniques", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 471-474, 1988.
- [30] W. Renhart, H. Stögner and K. Preis, "Calculation of 3D eddy current problems by finite element method using either an electric or a magnetic vector potential", *IEEE Trans. Mag.* vol. 24, no. 1, pp 122-125, 1988.
- [31] A. Bossavit, "Modèles et modélisation en électrotechnique", *Techniques de l'ingénieur, traité Généralité*, no. A 1 207, pp. 1-25, 1989.
- [32] A. Bossavit and J. C. Vérité, "The 'TRIFOU' code: solving the 3D eddy currents problem by using h as state variable" *IEEE Trans. Mag.* vol. 19, no. 6, pp 2465-2470, 1989.
- [33] O. Biro and K. Preis, "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three dimensional eddy currents", *IEEE Trans. Mag.* vol. 25, no. 4, pp 3145-3159, 1989.
- [34] P. J. Lenoard and D. Rodger, "A new method for cutting the magnetic scalar potential in multiplying connected eddy curen problem", *IEEE Trans. Mag.* vol. 25, no. 5, pp 471-474, 1989.
- [35] A. Voudras and K. J. Binns, "Magnetostatics with scalar potentials in multiply connected regions", *IEE Proceedings*, vol. 136, pt. A, no. 2, pp 49-54, 1989.
- [36] J. P. Webb and B. Forghani, "A single scalar potential method for 3D magnetostatics using edge elements", *IEEE Trans. Mag.* vol. 25, no. 5, pp 4126-4128, 1989.
- [37] R. Albanese and G. Rubinacci, "Magnetostatic field computations in terms of two components vector potentials", *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 29, pp 515-532, 1990.
- [38] A. Arkkio, "Finite element analysis of cage induction motors fed by static frequency converters", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no 2, pp 551-554, 1990.
- [39] O. Biro and K. Preis, "Finite element analysis of 3D eddy currents", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no. 2, pp 418-423, 1990.
- [40] F. Bouillault, Z. Ren and A. Razek, "Calculation of 3D eddy current problems by and hybrid T- Ω method", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no. 2, pp 478-481, 1990.

- [41] G. Caron de la Morinais, "Contribution à la modélisation des phénomènes magnétodynamiques en 3D", *Thèse de doctorat*, I.N.P.Grenoble, 1990.
- [42] F. Hecht, A. Marroco, F. Piriou and A. Razek, "Modélisation des systèmes électrotechniques par couplage des équations électriques et magnétiques", *Revue de physique appliquée*, vol. 25, pp 649-659, 1990
- [43] A. Kameari, "Calculation of transient 3D eddy current using edge elements", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no. 2, pp 466-469, 1990.
- [44] P. J. Leonard, D. Rodger and R. J. Hill, "Calculation of AC losses in current forced conductors using 3D finite element and the A- Ψ -V method", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no. 2, pp 490-492, 1990.
- [45] W. Long, "Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques à l'aide du couplage des équations des circuits magnétique et électrique", *Thèse de doctorat*, Univ. Paris VI, octobre 1990.
- [46] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and T. Imai, "Effect of permeability of magnetic materials on errors of the T- Ω method", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no.2, pp 698-701, 1990.
- [47] J. P. Nougier, "Méthodes de calcul numérique", *Ed. Masson*, 1990.
- [48] F. Piriou and A. Razek, "Numerical simulation of a non-conventional alternator connected to a rectifier", *IEEE Trans. Energy Conversion* vol. 5, no., pp 512-518, 1990.
- [49] F. Piriou and A. Razek, "A model for coupled magnetic-electric circuits in electric machines with skewed slots", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no.2, pp 1096-1100, 1990.
- [50] Z. Ren, F. Bouillault, A. Razek, A. Bossavit and J. C. Vérité, "A new hybrid model using electric field formulation for 3D eddy currents problems", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no. 2, pp 470-473, 1990.
- [51] D. Rodger, H. C. Lai and P. J. Leonard, "Coupled elements for problems involving movement", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no. 2, pp 548-550, 1990.
- [52] E. Vassent, "Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par la méthode des éléments finis", *Thèse de doctorat*, I.N.P.Grenoble, novembre 1990.
- [53] E. Vassent, G. Meunier, A. Foggia and J. C. Sabonnadière, "Simulation of induction operation using a step by step finite element method", *Journal of applied physics*, vol. 67, no. 9, pp 5809-5812, 1990.
- [54] S. Williamson, L. H. Lim and M. J. Robinson, "Finite element models for cage induction motor analysis", *IEEE Trans. Industry application*, vol. 26, no. 6, pp 1007-1017, 1990.
- [55] S. Williamson, L. H. Lim and A. C. Smith, "Transient analysis of cage induction motors using finite elements", *IEEE Trans. Mag.* vol. 26, no. 2, pp 941-944, 1990.
- [56] G. Bedrosian, "Magnetostatic cancellation error revisited", *IEEE Trans. Mag.* vol. 27, no. 5, pp 4181-4184, 1991.
- [57] K. Benghezal, M. Ivanis, J. P. Yonnet and D. Leduc, "Skewed stator synchronous motor modelling by a 2D electromagnetic simulation software", *IEEE Trans. Mag.* vol. 27, no. 5, pp 4235-4237, 1991.
- [58] O. Biro and K. R. Richter, "CAD in electromagnetism", *Advances in electronics and electron physics*, P. Hawkins, Academic press, vol. 82, 1991.
- [59] A. Bossavit, C. Emson et I. Mayergoyz, "Méthodes numériques en électromagnétisme", *Coll. de la Direction des Etudes et Recherche d'EDF*, Ed. Eyrolles, 1991.
- [60] Y. Maréchal, "Modélisation des phénomènes magnétostatiques avec terme de transport. Application aux ralentisseurs électromagnétiques", *Thèse de doctorat*, I.N.P.Grenoble, février 1991.
- [61] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, T. Imai and K. Muramatsu, "Comparison of various methods of analysis and finite elements in 3D magnetic field analysis", *IEEE Trans. Mag.* vol. 27, no. 5, pp 4073-4076, 1991.

- [62] T. Nakata and K. Fujiwara, "Recent progress in numerical analysis for electromagnetic devices", *IEEE Trans. Mag.* vol. 27, no., pp 4221-4227, 1991.
- [63] T. W. Nehl and D. A. Field, "Accuracy of force calculations using first order tetrahedra for electromagnetic devices with small air gaps", *IEEE Trans. Mag.* vol. 27, no. 5, pp 4250-4253, 1991.
- [64] K. Preis, I. Bardi, O. Biro, C. Magele, W. Renhart, K. R. Richter and G. Vrisk, "Numerical analysis of 3D magnetostatic fields", *IEEE Trans. Mag.* vol. 27, no. 5, pp 3798-3803, 1991.
- [65] E. Vassent, G. Meunier and A. Foggia, "Simulation of induction machines using complex magnetodynamic finite element method coupled with the circuit equations", *IEEE Trans. Mag.* vol. 27, no. 5, pp 4246-4249, 1991.
- [66] D. Benzerga, S. Bouissou, F. Bouillault and F. Piriou, "Numerical behaviour of ICCG method for 3D magnetostatic problems", *International workshop on electric and magnetic fields*, pp 33.1-33.5, Liège 1992.
- [67] A. G. Kladas and J. A. Tegopoulos, "A new potential formulation for 3D magnetostatic necessitating no source field calculation", *IEEE Trans. Mag.* vol. 28, no.2, pp 1103-1106, 1992.
- [68] Z. Ren and A. Razek, "Local force computation in deformable bodies using edge elements", *IEEE Trans. Mag.* vol. 20, no. 2, pp 1212-1215, 1992.
- [69] Z. Ren and A. Razek, "On the magnetic forces calculation by equivalent sources methods", *International workshop on electric and magnetic fields*, pp 21.1-21.5, Liège 1992.
- [70] Z. Ren, M. Besbes and S. Boukhtache, "Calculation of local magnetic forces in magnetized materials", *International workshop on electric and magnetic fields*, pp 64.1-64.6, Liège 1992.
- [71] N. Sadowski, Y. Lefèvre, M. Lajoie-Mazenc et J. P. A. Bastos, "Sur le calcul des forces magnétiques", *Journal Physique III*, France, pp 859-870, 1992.
- [72] A. Taieb Brahimi, "Contribution à la modélisation de la machine asynchrone à cage par logiciels d'éléments finis 2D et 3D", *Thèse de doctorat*, I.N.P.Grenoble, juin 1992.
- [73] O. Biro, K. Preis, G. Vrisk, K. R. Richter and I. Tigar, "Computation of 3D magnetostatic fields using reduced scalar potential", *IEEE Trans. Mag.* vol. 29, no. 2, pp 1329-1332, 1993.
- [74] A. Bossavit, "Electromagnétisme, en vue de la modélisation", *Coll. Mathématiques & applications*, Ed. Springer-Verlag, 1993.
- [75] B. Boualem, "Modélisation d'une machine asynchrone à encoches inclinées", *Rapport de stage de D.E.A*, L.G.E.Paris, juillet 1993.
- [76] G. Henneberger and W. Hadrys, "On the nature of different approaches for the calculation of magnetic forces and their mechanical displacement effects", *Compumag*, pp 2-3, 1993.
- [77] P. Lombard et G. Meunier, "Couplage des équations électriques et magnétiques", *Journal Physique III*, France, pp 397-412, 1993
- [78] F. Piriou and A. Razek, "Finite element analysis in electromagnetic systems accounting for electric circuit", *IEEE Trans. Mag.* vol. 29, no., pp 1669-1675, 1993.
- [79] A. Sadowski, "Contribution à la modélisation des machines électriques par la résolution simultanée des équations du champ et des équations du circuit d'alimentation", *Thèse de doctorat*, I.N.P.Toulouse, décembre 1993.
- [80] M. A. Alhamadi and N. A. Demerdash, "Three dimensional magnetic field computation by a coupled vector-scalar potential method in brushless dc motors with skewed permanent mounts - the formulation and FE grids", *IEEE Trans. Energy Conversion* vol. 9, no. 1, pp 1-14, 1994.
- [81] M. A. Alhamadi and N. A. Demerdash, "Three dimensional magnetic field computation by a coupled vector-scalar potential method in brushless dc motors with skewed permanent mounts - the no-load and load results", *IEEE Trans. Energy Conversion* vol. 9, no. 1, pp 15-25, 1994.

- [82] D. Benzerga, "Contribution à la modélisation 3D des phénomènes électromagnétiques régis par les équations de la magnétostatique et la magnétodynamique", *Thèse de doctorat*, Univ. Paris VI, février 1994.
- [83] O. Bienvenu, A. Yahiaoui, A. Bossavit and F. Bouillault, "Coupling of 2D and 3D electromagnetic computations for impedance calculations of end windings", *International conference of electrical machines*, vol. 2, pp 412-414, 1994.
- [84] S. Bouissou, "Comparaison des formulations en potentiel, pour la résolution numérique en 3D des équations magnétiques couplées aux équations de circuit électrique" *Thèse de doctorat*, Univ. Paris VI, juillet 1994.
- [85] S. Bouissou and F. Piriou, "Comparison between two formulations in terms of potential for the coupling of magnetic and electric circuit equation", *IEE Proceedings -Sci. Meas. Technol.*, vol. 141 pt. A, no. 6, pp 486-490, 1994.
- [86] S. Bouissou and F. Piriou, "Study of 3D formulations to model electromagnetic devices", *IEEE Trans. Mag.* vol. 30, no. 5, pp 3228-3231, 1994.
- [87] S. Bouissou, F. Piriou, C. Kieny and G. Tanneau, "Numerical simulation of a power transformer using 3D finite element method coupled to circuit equation", *IEEE Trans. Mag.* vol. 30, no. 5, pp 3228-3231, 1994.
- [88] B. Boualem and F. Piriou, "Modelling of induction motor accounting for skewed slots effects", *International conference of electrical machines*, vol. 2, pp 699-704, 1994.
- [89] G. Dhatt et G. Touzot, "Une présentation de la méthode des éléments finis", *Coll. de l'Université Technique Compiègne*, Ed. Maloine, 1994.
- [90] P. Dular, "Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires", *Thèse de doctorat*, Univ. Liège, mai 1994.
- [91] P. Dular, J. Y. Hody, A. Nicolet, A. Genon and W. Legros, "Mixed finite elements associated with a collection of tetrahedra, hexahedra and prisms", *IEEE Trans. Mag.* vol. 30, no. 5, pp 2980-2983, 1994.
- [92] Y. Kawase, O. Miyatani and T. Yamagushi, "Numerical analysis of dynamic characteristics of electromagnets using 3D finite element method with edge element", *IEEE Trans. Mag.* vol. 30, no. 5, pp 3248-3251, 1994.
- [93] C. Li, Z. Ren and A. Razek, "On the complementarity between the energy results of H and E formulations in eddy-current problems", *IEE Proceedings -Sci. Meas. Technol.*, vol. 141 pt. A, no. 6, pp 25-30, 1994.
- [94] Y. Le Menach, "Couplage entre les formulations T_0 - Ω et A - ϕ ", *Rapport de stage de D.E.A, L2.E.P Lille*, juillet 1994.
- [95] G. Mur, "Edge elements, their advantages and their disadvantages", *IEEE Trans. Mag.* vol. 30, no. 5, pp 3552-3557, 1994.
- [96] R. Perrin-Bit, "Modélisation des machines électriques tournantes par le méthode des éléments finis tridimensionnels: calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement", *Thèse de doctorat*, I.N.P.Grenoble, septembre 1994.
- [97] Z. Ren, "Comparison of different force calculation methods in 3D finite element modelling", *IEEE Trans. Mag.* vol. 30, no. 5, pp 3471-3474, 1994.
- [98] Z. Ren and A. Razek, "A strong coupled model for analysing dynamic behaviours of non linear electromechanical systems" *IEEE Trans. Mag.* vol. 30, no. 5, pp 3252-3255, 1994.
- [99] N. Takahashi, T. Nakata, Suhartono and H. Morishige, "Investigation of a model to verify software for 3D static force calculation", *IEEE Trans. Mag.* vol. 30, no. 5, pp 3483-3486, 1994.
- [100] A. Yahiaoui, "Modélisation électromagnétique d'un actionneur asynchrone en vue de sa commande", *Thèse de doctorat*, Univ. Paris VI, février 1994.

- [101] A. Yahiaoui, B. Boualem, F. Bouillaut and F. Piriou, "Induction motor analysis by finite element method using complex and time stepping techniques", *International conference of electrical machines*, vol. 1, pp 311-315, 1994.
- [102] Y. Yahiaoui and F. Bouillaut, "2D and 3D numerical computation of electrical parameters of an induction motor", *IEEE Trans. Mag.* vol. 30 no. 5, pp 3690-3692, 1994.
- [103] A. Bossavit, "On "hybrid" electric-magnetic methods", *Plenum publishing corporation, Electric and magnetic fields*, pp 237-240, 1995.
- [104] Y. Kawase, T. Yamaguchi and Y. Hayashi, "Analysis of cogging torque of permanent magnet motor by 3D finite element method", *IEEE Trans. Mag.* vol. 31, no. 3, pp 2044-2047, 1995.
- [105] S. Salon, D. Burow, C. Slavik, R. Bushman and M. DeBartoli, "Comparison of pulsating torques in induction motors by analytical and finite element methods", *IEEE Trans. Mag.* vol. 31, no. 3, pp 2056-2059, 1995.
- [106] S. Williamson, T. J. Flack and A. F. Volskenk, "Representation of skew in time-stepped two-dimensional finite-element models of electrical machines", *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 31, no. 5, pp 1009-1015, 1995.
- [107] O. Biro, K. Preis and K. Richter, "On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems", *IEEE Trans. Mag.* vol. 32, no. 3, pp 651-654, 1996.
- [108] B. Boualem and F. Piriou, "Hybrid formulation A- Ω with finite element method to model in 3D electromagnetic systems", *IEEE Trans. Mag.* vol. 32, no. 3, pp 659-662, 1996.
- [109] B. Boualem and F. Piriou, "On the use of potentials to study a 3D magnetostatic problems", *International workshop on electric and magnetic fields*, pp 101-106, Liège 1996.
- [110] C. Cot, "Modélisation d'une machine asynchrone triphasée à encoches inclinées", *Rapport de stage de D.E.A, L.2.E.P Lille*, juillet 1996.
- [111] T. Dreher, R. Perrin-Bit, G. Meunier and J. L. Coulomb, "A three dimensional finite element modelling of rotating machines involving movement and external circuit", *IEEE Trans. Mag.* vol. 32, no. 3, pp 1070-1073, 1996.
- [112] K. Fujiwara, T. Nakata and H. Ohashi, "Improvement of convergence characteristic of ICCG method for A- ϕ method using edge elements", *IEEE Trans. Mag.* vol. 32, no. 3, pp 804-807, 1996.
- [113] N. Gasmi, "Contribution à la modélisation des phénomènes électriques-magnétiques couplés et du mouvement pour les systèmes électromagnétiques en 3D", *Thèse de doctorat, Univ. Paris VI*, octobre 1996.
- [114] Y. Kawase, Y. Hayashi, T. Yamagushi, Y. Ishihar and S. Kitamura, "3D finite element analysis of permanent magnet motor excited from square pulse voltage source", *IEEE Trans. Mag.* vol. 32, no. 3, pp 1537-1540, 1996.
- [115] H. Kometani, S. Sakabe and K. Nakanishi, "3D electromagnetic analyses of a cage induction motor with rotor skew", *IEEE Trans. Energy conversion* vol. 11, no. 2, 1996
- [116] Z. Ren, "Influence of the R.H.S. on the convergence behaviour of the curl-curl equation", *IEEE Trans. Mag.* vol. 32, no. 3, pp 655-658, 1996
- [117] T. Yamagushi, Y. Kawase and Y. Hayashi, "Dynamic transient analysis of vector controlled motors using 3D finite element method", *IEEE Trans. Mag.* vol. 32, no. 3, pp 1549-1552, 1996.
- [118] B. Boualem, F. Piriou, "Modélisation 3D du circuit électrique et du mouvement: application à la machine asynchrone", *Proceedings Numelec Lyon*, pp 108-109, 1997.

