

N° d'ordre: 2031

THESE

présentée à

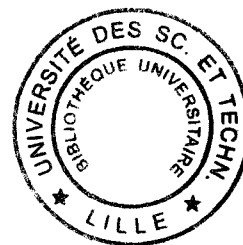
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Pour obtenir le titre

Docteur en MECANIQUE

Par

F. OBLE



MODELISATION DES GRANDES STRUCTURES LORS DU DECROCHAGE TOURNANT DANS UNE ROUE AXIALE EN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

Soutenue le 15 juillet 1997 devant le jury composé de :

| | | |
|----------------------|-----------------|---|
| Rapporteurs : | T. ARTS | Professeur (Von Karman Institute) |
| | G. A. GEROLYMOS | Professeur (LEMFI, Université PARIS VI) |
| Examineurs : | G. BOIS | Directeur (Société METRAFLU) |
| | G. CAIGNAERT | Professeur (L.M.L, ENSAM) |
| | U. EHRENSTEIN | Professeur (L.M.L, Université Lille I) |
| Directeur de thèse : | D. BUISINE | Professeur (L.M.L, Université Lille I) |

Laboratoire de Mécanique de LILLE
L.M.L , URA CNRS 1441



Table des Matières

| | |
|--|----|
| INTRODUCTION | 3 |
| I ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE | 5 |
| I.1 Etudes expérimentales | 6 |
| I.1.1 Introduction | 6 |
| I.1.2 Compréhension du phénomène | 7 |
| I.1.2.1 Vitesse de rotation et nombre de Cellules | 7 |
| I.1.2.2 Structure de la cellule. | 8 |
| I.1.3 Déclenchement et contrôle du décrochage tournant. | 11 |
| I.1.3.1 Déclenchement. | 11 |
| I.1.3.2 Signes précurseurs. | 12 |
| I.1.3.3 Contrôle. | 13 |
| I.1.4 Conclusion de l'étude expérimentale | 14 |
| I.2 Etudes théoriques | 15 |
| I.2.1 Stabilité | 15 |
| I.2.2 Le décrochage établi | 19 |
| I.2.3 Conclusion sur les études théoriques | 24 |
| I.3 Conclusions et définition des objectifs | 25 |
| II MODELISATION | 26 |
| II.1 Introduction | 26 |
| II.2 Schémas numériques | 28 |
| II.2.1 Introduction | 28 |
| II.2.2 Equations. | 29 |
| II.2.2.1 Schéma A.L.E | 29 |
| II.2.2.2 Schéma "prédicteur-correcteur" | 31 |
| II.2.2.3 Résolution | 32 |
| II.2.3 Maillage | 32 |
| II.2.3.1 Base locale | 33 |
| II.2.3.2 Décalage des maillages pression et vitesse. | 34 |
| II.2.4 Equations en coordonnées locales sur un maillage parallélogramme. | 34 |
| II.2.4.1 Opérateurs dans le repère local | 34 |
| II.2.4.2 Schémas dans le repère local. | 35 |
| II.2.5 Discrétisation spatiale | 36 |
| II.2.5.1 Opérateur divergence | 36 |
| II.2.5.2 Opérateur gradient | 37 |
| II.2.5.3 Opérateur laplacien | 38 |
| II.2.5.4 Expression du terme de convection. | 39 |

| | | |
|---|--|-----------|
| II.2.5.5 | Termes de convection dans la base locale | 40 |
| II.2.5.6 | Convection d'un scalaire | 41 |
| II.2.6 | Stabilité du terme de transport pris séparément | 41 |
| II.2.7 | Conditions aux limites | 45 |
| II.2.7.1 | Parois | 45 |
| II.2.7.2 | Condition d'Entrée-Sortie | 46 |
| II.2.8 | Test sur la correction de débit. | 48 |
| II.3 | Conclusion | 49 |
| III RESOLUTION DE LA PRESSION | | 50 |
| III.1 | Résolution locale mono-domaine | 51 |
| III.1.1 | Résolution spectrale des grandes échelles | 51 |
| III.1.1.1 | Formulation. | 51 |
| III.1.1.2 | Résolution sur un maillage | 55 |
| III.1.2 | Résolution des petites échelles | 56 |
| III.1.2.1 | Méthode des singularités tronquées | 56 |
| III.1.2.2 | Méthode ADI | 62 |
| III.1.3 | Conclusion sur la résolution mono-domaine | 63 |
| III.2 | Résolution multi-domaines | 64 |
| III.2.1 | Introduction | 64 |
| III.2.2 | Raccordement fonctionnel des grandes échelles | 67 |
| III.2.2.1 | Présentation de la technique sur une interface unique | 67 |
| III.2.2.2 | Généralisation au cas de plusieurs sous-domaines | 71 |
| III.2.2.3 | Cas particulier des sous-domaines à géométrie semblable et nombre d'interfaces limité | 73 |
| III.2.2.4 | Recherche du domaine de validité de la méthode | 74 |
| III.2.2.5 | Optimisation de la résolution par association avec la méthode spectrale mono-domaine. | 78 |
| III.2.3 | Raccordement des petites échelles | 79 |
| III.2.3.1 | Méthode des singularités | 79 |
| III.2.3.2 | Méthode ADI | 80 |
| III.2.4 | Organigramme du calcul | 81 |
| III.2.5 | Convergence de la méthode. | 81 |
| III.2.6 | Application 1: cas d'un anneau. | 81 |
| III.2.6.1 | Application 2: cas d'une grille d'aube. | 84 |
| III.2.6.2 | Application 3: Mise en œuvre de la méthode dans toute sa généralité.(Roue-Diffuseur) | 86 |
| III.3 | Conclusion | 88 |
| IV APPLICATION MULTI-DOMAINES BIDIMENSIONNELLE | | 89 |
| IV.1 | Objectifs | 89 |
| IV.2 | Description de l'application | 90 |
| IV.2.1 | Géométrie | 90 |
| IV.2.2 | Schémas utilisés | 90 |
| IV.3 | Paramètres de l'étude. | 91 |
| IV.3.1 | Débit | 91 |
| IV.3.2 | Calage | 91 |
| IV.3.3 | Nombre de Reynolds | 91 |
| IV.3.4 | Incidence | 92 |

| | | |
|----------|---|------------|
| IV.3.5 | Nature de la perturbation. | 92 |
| IV.4 | Analyse des résultats | 93 |
| IV.4.1 | Synthèse des essais | 93 |
| IV.4.2 | Analyse du phénomène au travers des essais. | 93 |
| IV.4.2.1 | Déclenchement du décrochage. | 93 |
| IV.4.2.2 | Nombre des cellules. | 97 |
| IV.4.2.3 | Propagation des cellules. | 98 |
| IV.4.2.4 | Coalescence de deux cellules. | 98 |
| IV.4.2.5 | Zone d'influence des cellules. | 99 |
| IV.4.2.6 | Vitesse de rotation des cellules. | 99 |
| IV.4.3 | Conclusion des essais | 99 |
| IV.5 | Conclusion | 100 |
| V | APPLICATIONS TRIDIMENSIONNELLES | 102 |
| V.1 | Introduction | 102 |
| V.2 | Application mono-domaine | 102 |
| V.2.1 | Introduction | 102 |
| V.2.2 | Conditions d'essai. | 103 |
| V.2.2.1 | Dispositif expérimental | 103 |
| V.2.2.2 | Hypothèses géométriques | 103 |
| V.2.3 | Conditions aux limites spécifiques. | 104 |
| V.2.3.1 | Entrée sortie | 104 |
| V.2.3.2 | Fente | 104 |
| V.2.4 | Résolution de la pression | 104 |
| V.2.5 | Résultats | 105 |
| V.2.6 | Conclusion | 105 |
| V.3 | Résolution multi-domaine dans une grille d'aubes tridimensionnelle. | 106 |
| V.3.1 | Déroulements des essais. | 107 |
| V.3.1.1 | Essais dans un stator | 107 |
| V.3.1.2 | Essais dans un rotor | 107 |
| V.3.2 | Résultats des essais. | 108 |
| V.3.2.1 | Etude dans un stator | 108 |
| V.3.2.2 | Etude dans un rotor. Contribution de l'accélération de Coriolis. | 110 |
| V.3.3 | Conclusion des essais. | 111 |
| V.4 | Conclusion | 112 |
| | CONCLUSION | 113 |
| | CONCLUSION | 113 |
| | PERSPECTIVES | 114 |
| | Références bibliographiques | 116 |
| | ANNEXES | 121 |
| | A Résultats de convergences (a) | 122 |
| | B Résultats de convergences (b) | 132 |

| | |
|---------------------------|-----|
| C CONVECTION | 139 |
| D CAS TEST 2D A | 142 |
| E CAS TEST 2D B | 157 |
| F CAS TEST 2D C | 161 |
| G CAS TEST 2D D | 169 |
| H CAS TEST 3D : INJECTION | 176 |
| I CAS TEST 3D GRILLE A | 179 |
| J CAS TEST 3D GRILLE B | 193 |
| K CAS TEST 3D GRILLE C | 201 |

Table des Figures

| | | |
|-------|--|----|
| I.1 | Type différents de décrochage. | 5 |
| I.2 | Corrélation I selon PAMPREEN | 6 |
| I.3 | corrélation II selon PAMPREEN | 7 |
| I.4 | Description du décollement tournant par Y. LE BOT et P. BERNARD | 8 |
| I.5 | Concept de cellules actives de DAY et CUMPSTY | 9 |
| I.6 | Evolution de cellule au cours de sa traversée par la roue selon MATHIOU- DAKIS | 9 |
| I.7 | Mise en évidence d'un pic de contrepression dans des machines différentes selon BUISINE | 10 |
| I.8 | Comportement du jet fuite à des régimes différents de fonctionnement selon GE NING | 12 |
| I.9 | Courbe de performance, en cas de décollement tournant, tirée de la ref [51] | 15 |
| I.10 | Machine et son circuit assimilé à un résonnateur de Helmholtz. | 16 |
| I.11 | Limites de stabilité par le calcul (Mc CAUGHAN) et par l'expérience (GREITZER) | 17 |
| I.12 | Illustration d'un résultats de stabilité obtenus par ABED et al | 18 |
| I.13 | Convention géométrique de l'étude de Takata et Nagano | 19 |
| I.14 | Comportement de grille en fonction de l'incidence du fluide | 20 |
| I.15 | Evolution du décrochage tournant suivant l'angle d'incidence selon SPA- LART | 22 |
| II.1 | Détail d'une maille. | 33 |
| II.2 | Maillage incliné bidimensionnel. | 34 |
| II.3 | Diagramme de stabilité 2D | 43 |
| II.4 | Diagramme de stabilité 3D | 44 |
| II.5 | Discretisation de la condition de Neumann appliquée à la paroi sur la pression. | 45 |
| II.6 | Evolution du débit dans un canal interaube. | 48 |
| II.7 | Evolution du débit dans le cas d'un domaine multi-canaux | 49 |
| III.1 | Séparations grandes échelles, petites échelles | 50 |
| III.2 | Zones d'influence du point central | 56 |
| III.3 | Base ξ, η | 62 |
| III.4 | Extrait de A. LERAT et Z. N. WU. | 64 |
| III.5 | Décomposition en deux sous-domaines(A. Farcy) | 66 |
| III.6 | Décomposition en deux sous-domaines | 68 |
| III.7 | Evaluation de la discontinuité | 69 |
| III.8 | Décomposition en plusieurs sous-domaines | 71 |
| III.9 | Relation entre les sous-domaines | 72 |

| | |
|--|-----|
| III.10(a) Décomposition d'un domaine axisymétrique. (b) Décomposition d'un domaine périodique sur lui-même. | 73 |
| III.11 Décomposition de deux sous domaines unidimensionnels | 74 |
| III.12 Fonctions de raccordement unidimensionnelles | 75 |
| III.13 Une fonction harmonique bidimensionnelle dans le cas du raccordement de canaux inter-aubes. | 75 |
| III.14 Discontinuité résiduelle et chevauchement de maillage | 79 |
| III.15 Etude comparative de la convergence d'un multi-domaine.(a) | 83 |
| III.16 Etude comparative de la convergence d'un multi-domaine.(a) | 84 |
| III.17 Etude comparative de la convergence d'un multi-domaine. | 85 |
| III.18 Etude comparative de la convergence d'un multi-domaine: cas d'une grille inclinée | 86 |
| IV.1 Décomposition en sous-domaines d'une grille d'aubes 2D | 89 |
| IV.2 Décomposition en sous-domaines d'une grille de plaques planes 2D | 90 |
| IV.3 Terminologie angulaire | 92 |
| IV.4 Comportement de grille en fonction de l'incidence du fluide. Notations: A pour "Attached flow", R pour "Rotating stall", D pour "Deep stall", W pour "Waves" | 100 |
| V.1 Dispositif expérimental. Travaux de J.N Blanchard et Y. Brunet | 103 |
| V.2 Récapitulatif des conditions aux limites (vitesse). | 104 |
| V.3 Grille de plaques planes 3D | 106 |
| A.1 Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est nulle. Chacun des coefficients poids est optimisé. | 123 |
| A.2 Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est nulle. Les coefficients poids sont dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. | 123 |
| A.3 Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est nulle | 124 |
| A.4 Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est nulle | 124 |
| A.5 Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 30° . Chacun des coefficients poids est optimisé. | 125 |
| A.6 Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 30° . Les coefficients poids sont dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. | 125 |
| A.7 Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est de 30° | 126 |
| A.8 Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est de 30° | 126 |

| | | |
|------|---|-----|
| A.9 | Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 45° . Chacun des coefficients poids est optimisé. | 127 |
| A.10 | Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 45° . Les coefficients poids sont dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. | 127 |
| A.11 | Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est de 45° | 128 |
| A.12 | Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est de 45° | 128 |
| A.13 | Convergence de la méthode ADI en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est nulle | 129 |
| A.14 | Convergence de la méthode ADI en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 30° | 129 |
| A.15 | Convergence de la méthode ADI en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 45° | 130 |
| A.16 | Comparaison de la convergence de la méthode ADI avec celle de la méthode des singularités pour des seconds membres identiques . L'inclinaison du domaine est nulle | 130 |
| A.17 | Comparaison de la convergence de la méthode ADI avec celle de la méthode des singularités pour des seconds membres identiques. L'inclinaison du domaine est de 30° | 131 |
| A.18 | Comparaison de la convergence de la méthode ADI avec celle de la méthode des singularités pour des seconds membres identiques. L'inclinaison du domaine est de 45° | 131 |
| B.1 | Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1: coupure à 20 mailles 1 itération sur les singularités. Courbe 2: coupure à 10 mailles 1 itération sur les singularités. Courbe 3: coupure à 5 mailles 1 itération sur les singularités. | 133 |
| B.2 | Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1: coupure à 20 mailles 2 itérations sur les singularités. Courbe 2: coupure à 10 mailles 2 itérations sur les singularités. Courbe 3: coupure à 5 mailles 2 itérations sur les singularités. | 133 |
| B.3 | Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1: coupure à 20 mailles 3 itérations sur les singularités. Courbe 2: coupure à 10 mailles 3 itérations sur les singularités. Courbe 3: coupure à 5 mailles 3 itérations sur les singularités. | 134 |
| B.4 | Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1: coupure à 20 mailles 4 itérations sur les singularités. Courbe 2: coupure à 10 mailles 4 itérations sur les singularités. Courbe 3: coupure à 5 mailles 4 itérations sur les singularités. | 134 |

| | | |
|------|---|-----|
| B.5 | Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1 : coupure à 20 mailles 1 itérations sur les singularités. Courbe 2 : coupure à 20 mailles 2 itérations sur les singularités. Courbe 3 : coupure à 20 mailles 3 itérations sur les singularités. Courbe 4 : coupure à 20 mailles 4 itérations sur les singularités. Courbe 5 : coupure à 10 mailles 1 itérations sur les singularités. Courbe 6 : coupure à 10 mailles 2 itérations sur les singularités. Courbe 7 : coupure à 10 mailles 3 itérations sur les singularités. | 135 |
| B.6 | Différentes étapes d'un calcul multi-domaine 2D | 136 |
| B.7 | Application de la méthode de raccordement pour une grille 2D inclinée. . . | 137 |
| B.8 | Application de la méthode de raccordement à un ensemble roue-diffuseur. . | 138 |
| C.1 | Convection unidimensionnelle $def(x) = \sin(2\pi x)$, $\sigma = 0,5$, $\gamma = 0$ ou $0,99$ | 139 |
| C.2 | Convection unidimensionnelle de $f(x) = \sin(4\pi x)$, $\sigma = 0,5$, $\gamma = 0$ ou $0,99$ | 139 |
| C.3 | Convection unidimensionnelle de $f(x) = \sin(2\pi x)$, $\sigma = 0,9$, $\gamma = 0$ ou $0,99$ | 140 |
| C.4 | Convection unidimensionnelle de $f(x) = \sin(4\pi x)$, $\sigma = 0,9$, $\gamma = 0$ ou $0,99$ | 140 |
| C.5 | Convection bidimensionnelle de $f(x,y) = \sin(2\pi x).\sin(2\pi y)$, $\sigma = 0,5$, $\gamma = 0$ ou $0,99$ | 140 |
| C.6 | Convection bidimensionnelle de $f(x,y) = \sin(2\pi x).\sin(2\pi y)$, $\sigma = 0,7$, $\gamma = 0$ ou $0,9$ | 141 |
| C.7 | Convection bidimensionnelle de $f(x,y) = \sin(2\pi x).\sin(2\pi y)$, $\sigma = 0,85$, $\gamma = 0,9$ | 141 |
| C.8 | Convection tridimensionnelle de $f(x,y,z) = \sin(2\pi x).\sin(2\pi y).\sin(2\pi z)$, $\sigma = 0,3$, $\gamma = 0$ ou $0,9$ | 141 |
| D.1 | Lignes d'émission - Essais 1 et 2 - inclinaison aubage: 30° α : (a) 15° (b) 20.19° - Schéma A.L.E | 142 |
| D.2 | lignes d'émission - Essais 3 et 6 - calage: 30° α :(a) 20.19° (b) 26.30° - Schéma A.L.E | 143 |
| D.3 | Lignes d'émission - Essais 7 et 8 - inclinaison aubage: 30° α : (a) 26.30° (b) 38.19° - Schéma A.L.E | 144 |
| D.4 | Champ de vitesses. Essais 1 et 2 - Inclinaison aubage: 30° α : (a) 15° (b) 20.19° - Schéma A.L.E | 145 |
| D.5 | Champ de vitesses. Essais 3 et 6 - Inclinaison aubage: 30° α : (a) 20.19° (b) 26.30° - Schéma A.L.E | 146 |
| D.6 | Champ de vitesses. - Essais 7 et 8 - - inclinaison aubage: 30° α : (a) 26.30° (b) 38.19° - Schéma A.L.E | 147 |
| D.7 | Champ de vitesse et iso-pression - Essai 4 - Inclinaison aubage: 30° α : 22.43° - Schéma A.L.E | 148 |
| D.8 | iso-pressions- Essai 3 et 6 - calage: 30° α : (a) 20.19° (b) 26.30° | 149 |
| D.9 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 3 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 20,19^\circ$) | 150 |
| D.10 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 4 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 22,43^\circ$) | 150 |
| D.11 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 5 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 24,46^\circ$) | 151 |
| D.12 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 5 - iso-valeurs - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 24,46^\circ$) | 151 |
| D.13 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 6 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 26,30^\circ$) | 152 |

| | | |
|------|--|-----|
| D.14 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 6 - iso-valeurs - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 26,30^\circ$) | 152 |
| D.15 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale- schéma: PC - essai 9 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$) | 153 |
| D.16 | Champ de vitesse et iso-pression - schéma: P-C - essai 9 - Perturba- tion:Grille ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$) | 154 |
| D.17 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale cas 2d empilé - essai 10 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 47,13^\circ$) | 155 |
| D.18 | Champ de vitesse et iso-pression - schéma: P-C - essai 10 - Perturba- tion:Grille ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 47,73^\circ$) | 156 |
| E.1 | Champ de vitesse et iso-pression - essai 13 - schéma: P-C ($\lambda = 40^\circ$, $\alpha = 36,09^\circ$) | 158 |
| E.2 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation de grille - essai 12 - schéma: P-C- ($\lambda = 40^\circ$, $\alpha = 35,75^\circ$) | 159 |
| E.3 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation de grille - essai 13 - schéma: P-C- ($\lambda = 40^\circ$, $\alpha = 36,09^\circ$) | 159 |
| E.4 | Evolution du débit en fonction du temps après diminution de l'incidence. Hystérésis.- essai 11 - schéma: P-C- $\lambda = 40^\circ$, $\alpha = 33,78^\circ$) | 160 |
| F.1 | Champ de vitesse et iso-pression - essai 14 schéma: P-C - Perturbation: Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 25^\circ$) | 162 |
| F.2 | Evolution du débit au cours du temps - essai 14 - schéma: P-C - Perturba- tion: Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 25^\circ$) | 163 |
| F.3 | Evolution du débit au cours du temps - essai 15 - schéma: P-C - Perturba- tion: Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 27^\circ$) | 163 |
| F.4 | Evolution du débit au cours du temps - essai 16 -schéma: P-C - Perturba- tion: Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 28^\circ$) | 164 |
| F.5 | Evolution du débit au cours du temps - essai 17 - schéma: ALE - Pertur- bation: Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 164 |
| F.6 | Evolution du débit au cours du temps - essai 18 - schéma: P-C - Perturba- tion: Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) - Phase d'établissement. | 165 |
| F.7 | Evolution du débit au cours du temps - essai 18 - schéma: P-C - Perturba- tion: Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) - Historique complet jusqu'au décrochage établi. | 165 |
| F.8 | Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 18 - iso-valeurs - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 166 |
| F.9 | Evolution du débit au cours du temps - essai 19 - schéma: P-C Perturba- tion: Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 166 |
| F.10 | Champ de vitesse et iso-pression - essai 18 - schéma: P-C - Perturbation: Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 167 |
| F.11 | Champ de vitesse et iso-pression - essai 19 - schéma: P-C - Perturbation: Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 168 |
| G.1 | (a) évolution du champ de vitesse - essai 17 - schéma: ALE (2 cellules en rotation) ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ (1 pts sur 4 sont représentés) | 169 |
| G.2 | (b) évolution du champ de vitesse - essai 17 - schéma: ALE - (2 cellules en rotation) ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ (1 pts sur 4 sont représentés) | 170 |

| | | |
|------|--|-----|
| G.3 | (a) coalescence de deux cellules.- essai 17 - schéma: ALE ($\lambda = 45^\circ, \alpha = 30^\circ$ (1 pts sur 4 sont représentés)) | 170 |
| G.4 | (b) coalescence de deux cellules.- essai 17 - schéma: ALE ($\lambda = 45^\circ, \alpha = 30^\circ$ (1 pts sur 4 sont représentés)) | 171 |
| G.5 | Lignes d'émission (a) et champ de vitesse (a) - essai 17- schéma: ALE - Perturbation: Entrée($\lambda = 45^\circ, \alpha = 30^\circ$) | 172 |
| G.6 | Champ de vitesse (a) et iso-pression (b) - essai 17- schéma: ALE - Perturbation: Entrée ($\lambda = 45^\circ, \alpha = 30^\circ$) | 173 |
| G.7 | iso-pression et ligne d'émission - essai 17- schéma:ALE - Perturbation: Entrée ($\lambda = 45^\circ, \alpha = 30^\circ$) | 174 |
| G.8 | Pic de contrepression | 174 |
| G.9 | Pic de contrepression extrait de Buisine [1] | 175 |
| H.1 | Expérience. Lignes d'émission. cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$ | 176 |
| H.2 | Calcul .Lignes d'émission. Maillage: 116000 points . cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$ | 177 |
| H.3 | Calcul. Lignes d'émission. Maillage: 210000 points . cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$ | 177 |
| H.4 | Expérience. Ecoulements secondaires. cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$ | 178 |
| H.5 | Calcul. Ecoulements secondaires. cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$ | 178 |
| I.1 | Cas 3D - Stator avec cisaillement- Champ de vitesse et iso-pression - schéma: P-C - Perturbation:Grille - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 30^\circ, \alpha = 38, 73^\circ$) | 180 |
| I.2 | Cas 3D - Stator avec cisaillement- Champ de vitesse et iso-pression - schéma: P-C - Perturbation:Grille - à mi-envergure- ($\lambda = 30^\circ, \alpha = 38, 73^\circ$) | 181 |
| I.3 | Cas 3D- Stator avec cisaillement - Champ de vitesse et iso-pression - schéma: P-C - Perturbation:Grille - proche parois B ("carter") ($\lambda = 30^\circ, \alpha = 38, 73^\circ$) | 182 |
| I.4 | Cas 3D - Stator avec cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Perturbation:Grille - mi-corde- ($\lambda = 30^\circ, \alpha = 38, 73^\circ$) | 183 |
| I.5 | Cas 3D - Stator avec cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Perturbation:Grille - sortie des canaux - ($\lambda = 30^\circ, \alpha = 38, 73^\circ$) | 184 |
| I.6 | Cas 3D - Stator avec cisaillement - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - schéma: P-C ($\lambda = 30^\circ, \alpha = 38, 73^\circ$) | 185 |
| I.7 | Cas 3D - Stator sans cisaillement - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - schéma: P-C - ($\lambda = 45^\circ, \alpha = 30^\circ$) | 185 |
| I.8 | Cas 3D - Stator sans cisaillement - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - schéma: P-C - ($\lambda = 45^\circ, \alpha = 33, 7^\circ$) | 186 |
| I.9 | Cas 3D - Stator sans cisaillement - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 45^\circ, \alpha = 33, 7^\circ$) | 187 |
| I.10 | Cas 3D - Stator sans cisaillement - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - à mi-envergure - ($\lambda = 45^\circ, \alpha = 33, 7^\circ$) | 188 |
| I.11 | Cas 3D - Stator sans cisaillement - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - proche parois B ("carter") - ($\lambda = 45^\circ, \alpha = 33, 7^\circ$) | 189 |

| | | |
|------|--|-----|
| I.12 | Cas 3D - Stator sans cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - entrée d'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$) | 190 |
| I.13 | Cas 3D - Stator sans cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - mi-corde - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$) | 191 |
| I.14 | Cas 3D - Stator sans cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - sortie d'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$) | 192 |
| J.1 | Cas 3D- Envergure: 0,1 - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 194 |
| J.2 | Cas 3D - Envergure: 0,1 - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 195 |
| J.3 | Cas 3D - Envergure: 0,1 - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1.10^{-4}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 195 |
| J.4 | Cas 3D - Envergure: 0,1 - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1.10^{-5}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 196 |
| J.5 | Cas 3D- Envergure: 0,1 - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1.10^{-5}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 197 |
| J.6 | Cas 3D - Envergure: 0,2 - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1.10^{-5}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 198 |
| J.7 | Cas 3D- Envergure: 0,2 - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1.10^{-5}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 199 |
| J.8 | Cas 3D - Envergure: 0,2 - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - (a) mi-corde, (b) une corde après la sortie de l'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$) | 200 |
| K.1 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 202 |
| K.2 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - (a) mi-corde, (b) une 1/2 corde après la sortie de l'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 203 |
| K.3 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 204 |
| K.4 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - à mi-envergure - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 205 |
| K.5 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - proche parois B ("carter") - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 206 |
| K.6 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 12,5$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 207 |
| K.7 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 12,5$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - (a) mi-corde, (b) une 1/2 corde après la sortie de l'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 208 |

| | | |
|------|---|-----|
| K.8 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 12,5$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 209 |
| K.9 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 12,5$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - à mi-envergure - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 210 |
| K.10 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 12,5$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - proche parois B ("carter") - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 211 |
| K.11 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 212 |
| K.12 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - (a) entrée d'aubage, (b) à mi-corde - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 213 |
| K.13 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - sortie d'aubage - (a) mi-corde, (b) une corde après la sortie de l'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 214 |
| K.14 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 215 |
| K.15 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 6,2$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - à mi-envergure - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 216 |
| K.16 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - proche parois B ("carter") - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 217 |
| K.17 | Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 4,6$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - (a) entrée d'aubage, (b) à mi-corde - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) | 218 |

Résumé

L'étude des écoulements internes instationnaires dans les turbomachines a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux. Ceux-ci ont montré qu'en présence de décrochage tournant l'écoulement s'organise en de grosses structures tourbillonnaires tridimensionnelles appelées cellules. Ces travaux montrent par ailleurs que la zone d'entrée de la roue dans la cellule est le lieu d'un pic de contrepression qui semble être maintenu par les échanges de quantité de mouvement dans les espaces inter-roues. L'objectif de cette thèse est de proposer dans un cadre incompressible un modèle numérique capable de rendre compte de cette structure particulière du phénomène établi.

Le schéma utilisé est présenté dans une première partie. Il conduit à la résolution d'une équation de Poisson pour la pression pour laquelle on développe une méthode itérative. Elle consiste à résoudre exactement les grandes échelles par une méthode spectrale et à approximer les petites échelles par une technique de singularités tronquées.

La deuxième partie est consacrée à la résolution de l'équation de Poisson. Le problème est traité par une technique de décomposition en sous-domaines. On présente une technique de raccordement qui réduit les discontinuités introduites sur les frontières inter-domaines par la résolution séparée de l'équation dans chaque sous-domaines. Cette méthode est adaptée à une mise en œuvre sur un ordinateur à architecture modérément parallèle.

La résolution en pression est introduite dans un schéma numérique ALE et dans un schéma de type prédictor -correcteur. Enfin on propose une application bidimensionnelle et tridimensionnelle. La présentation des résultats obtenus fait l'objet de la troisième et de la quatrième partie respectivement.

LISTE DES SYMBOLES

SYMBOLES LATINS

| | | |
|------------------|---|--|
| \vec{e}_j | : | Base locale |
| \vec{e}^j | : | Cobase locale |
| G | : | Fonction de Green |
| g_k | : | Coefficients de pondération (méthode des singularités tronquées) |
| \mathcal{H} | : | Espace de Hilbert associé à la résolution spectrale |
| \mathcal{H}_N | : | Sous Espace de Hilbert (N fonctions) |
| L_c | : | Longueur d'onde de coupure |
| M_{ik} | : | Matrice projection |
| n_j | : | Nombre de points de la ligne de nœuds j |
| N | : | Nombre de fonctions de la résolution spectrale |
| n_Γ | : | Tangente à la ligne de nœuds traversant l'interface Γ |
| P | : | Pression absolue |
| p | : | Pression relative |
| p^* | : | Pression adimensionnée |
| r | : | Résidu de la projection spectrale |
| \mathfrak{R}_e | : | Nombre Reynolds |
| R_o | : | Rayon de la roue |
| t | : | Coordonnée temporelle |
| s | : | Second membre de l'équation de Poisson pour la pression |
| \vec{V} | : | Vecteur vitesse dans le repère absolu (R_a) |
| \vec{W} | : | Vecteur vitesse dans le repère relatif (R_r) |
| w^j | : | Composantes de la vitesse dans la base locale |
| W^j | : | Composantes physiques de la vitesse dans la base locale |

SYMBOLES GRECS

| | | |
|--------------------------------|---|--|
| α | : | Incidence du fluide par rapport à l'aubage |
| $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ | : | Coefficients de relaxation intervenant dans la correction de débit |
| χ | : | Amplitude de la correction de débit |
| Δt | : | Pas de temps |
| $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ | : | Pas d'espace |
| δ_p, δ'_p | : | Discontinuités de fonction, de pente |
| γ | : | Paramètre de contrôle de la viscosité numérique |
| λ | : | Calage |
| φ_i | : | Base de fonctions pour la projection du second membre |
| $\tilde{\varphi}_i$ | : | Base de fonctions pour la projection des discontinuités |

| | | |
|--------------------------|---|---|
| ψ_i | : | Fonctions de correction pour la pression p |
| $\tilde{\psi}_i$ | : | Fonctions de correction pour les discontinuités de la pression |
| $\vec{\omega}_o$ | : | Vitesse de rotation |
| Φ | : | Coefficient de débit $\Phi = \frac{W_x}{W_y}$ |
| Π | : | Fonctionnelle de raccordement |
| Π_p | : | Fonctionnelle de raccordement dans le cas d'un domaine périodique |
| ρ | : | Masse volumique |
| σ | : | Nombre de Courant |
| σ_j, σ_{j_0} | : | Nombre de Courant local |
| ξ, η, ζ | : | Coordonnées locales |

SYMBOLES DE LA BIBLIOGRAPHIE

SYMBOLES LATINS

| | | |
|-------------|---|---|
| B | : | Paramètre de GREITZER [33] |
| C | : | Accroissement de pression dû au compresseur |
| F | : | Accroissement de pression dû au circuit |
| \dot{m}_c | : | Débit masse du compresseur |
| \dot{m}_T | : | Débit masse du circuit |

SYMBOLES GRECS

| | | |
|---------|---|---|
| β | : | Incidence du fluide par rapport à la roue |
| ξ | : | Calage selon TAKATA et NAGANO [62] |
| τ | : | Temps caractéristique. |

Indices

| | | |
|----|---|-------------------------------|
| ss | : | Relatif à l'état stationnaire |
| c | : | Relatif au compresseur |
| T | : | Relatif au circuit |

INTRODUCTION

Le 27 août 1939 le Heinkel He-178 effectue le premier vol à réaction de l'histoire. Dix ans plus tard le premier avion civil était mis sur le marché. Depuis lors les constructeurs aéronautiques n'ont eu de cesse l'amélioration des performances des moteurs. L'enjeu est de taille, les exigences actuelles en termes de coûts de fonctionnement font qu'un gain de performances se traduit immédiatement en parts de marché.

Une turbomachine est le siège de phénomènes aérothermodynamiques instationnaires qui pris isolément les uns des autres sont suffisamment complexes pour justifier des recherches spécifiques : pompage, écoulements secondaires, interaction rotor-stator, phénomène de sillage, propagation des ondes de chocs, bruits et vibrations propres, Tous ces phénomènes contribuent à l'accroissement des pertes et éloignent la machine du mode de fonctionnement idéal.

Le décrochage tournant apparaît à la faveur de l'amplification d'une perturbation sous la forme d'une perte de l'axisymétrie globale de l'écoulement. Des zones à débit réduit, appelées cellules, se propagent dans la roue dans le même sens de rotation que celle-ci. L'apparition du décrochage est ponctuée d'une chute brutale des performances du compresseur pouvant conduire jusqu'à l'extinction pour un moteur. Les conséquences parfois désastreuses auxquelles peut mener le décrochage tournant ont été instigatrices de nombreux travaux de recherche.

Le présent travail a été demandé par des industriels regroupés dans le pôle FIRTECH "MEMTA". L'axe "turbomachine" du Laboratoire de Mécanique de Lille comprend un pôle expérimental et un pôle numérique, c'est à ce dernier qu'a été confié la tâche d'une modélisation du décrochage tournant dans le cadre des écoulements incompressibles.

Les travaux expérimentaux de ces dernières années ont montré que les échanges tridimensionnels de quantité de mouvement ont un rôle prépondérant dans l'entretien du décrochage. L'étude menée au cours de ce travail se limite à la modélisation des grandes structures de l'écoulement. Le modèle a nécessité la mise en œuvre d'une technique de résolution multi-domaines de l'équation de Poisson pour la pression compatible avec l'utilisation d'un ordinateur parallèle.

Ce mémoire s'articule autour de cinq chapitres :

Le premier chapitre comprend une description du phénomène au travers d'une étude bibliographique. La première partie est consacrée aux travaux expérimentaux qui à partir d'une description de plus en plus fine du phénomène aboutissent finalement à un contrôle actif du décrochage. La seconde partie retrace au travers des travaux théoriques les avancées dans les tentatives de modélisation. Enfin on place notre étude dans ce contexte.

La modélisation des équations de Navier Stokes est réalisée au moyen de deux schémas. Le premier est établi à partir d'une formulation typiquement A.L.E (Arbitrary Lagrangian and Eulerian) , le second est un schéma "prédicteur-correcteur". Ils sont tous deux détaillés dans le chapitre II. On décrit les opérateurs et on présente les techniques spécifiques que l'on a intégrées dans notre modèle.

La résolution de l'équation de Poisson pour la pression constitue la spécificité et le point fort de ce travail, elle fait l'objet du chapitre III. La première partie est consacrée à la présentation de la méthode de résolution rapide sur un domaine unique. Dans la seconde partie on propose une formulation pour la résolution de l'équation de Poisson sur un multi-domaine. Celle-ci est basée sur le raccordement des solutions issues de la résolution séparée dans chaque sous-domaine.

Au cours du chapitre IV l'application du modèle au cas d'une grille d'aubes bidimensionnelle est présentée. Des critères d'apparition du décrochage sont mis en évidence. Les résultats obtenus sont en bon accord avec l'expérience compte tenu de la simplicité de la configuration étudiée.

Le dernier chapitre aborde la résolution tridimensionnelle. Une application mono-domaine sujette à des instabilités spatiales est présentée . Le cas d'une grille d'aubes 3D est traité. Quelques points de comparaison avec le calcul 2D sont présentés.

La conclusion de ce mémoire comprend une synthèse des points traités. On y dégage les principaux apports de ce travail et on propose quelques perspectives.

Chapitre I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Le décrochage tournant se manifeste dans les turbomachines sous la forme de cellules dans lesquelles l'écoulement est à débit réduit, nul, ou négatif. Le phénomène a été plus étudié dans le cas des compresseurs où on a trouvé des cellules de nombre et d'étendue variables, circulant à des vitesses allant de 0,2 à 0,8 fois la vitesse de rotation de la roue.

On distingue principalement deux types de décrochage. Le premier comprend plutôt plusieurs cellules de faible amplitude, alors que le second en comporte rarement plus d'une, d'amplitude plus importante. La figure I.1 donne une idée que l'on peut se faire de la forme cellulaire du décrochage dans le plan de la roue.

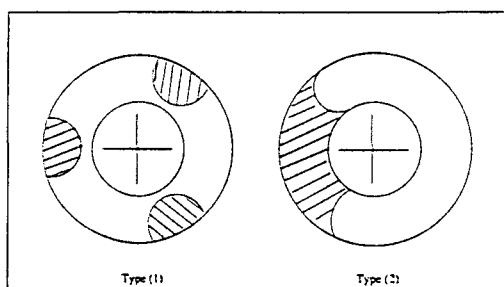


FIG. I.1 - *Type différents de décrochage.*

La première forme s'associe généralement au décollement tournant, phénomène altérant peu profondément le fonctionnement du compresseur. La seconde se comporte plutôt comme un décrochage affectant fortement l'organisation de l'écoulement, voire du circuit. Ce même décrochage peut conduire à un régime pulsé mettant en jeu l'ensemble de la machine et du circuit. On peut constater dans ce cas des phases d'apparition et de disparition du décrochage, on parle alors de pompage.

L'apparition du décrochage correspond à une augmentation importante des pertes et des contraintes associée à une chute brutale des performances du compresseur. A l'échelle d'un moteur cela peut se traduire par son extinction ou la rupture des aubages. On comprend aisément que les constructeurs se soient très tôt intéressés au phénomène.

Ces vingt dernières années ont apporté des progrès dans la connaissance du décro-

chage tournant. A l'heure actuelle sa modélisation semble être à la portée des grands calculateurs.

I.1 Etudes expérimentales

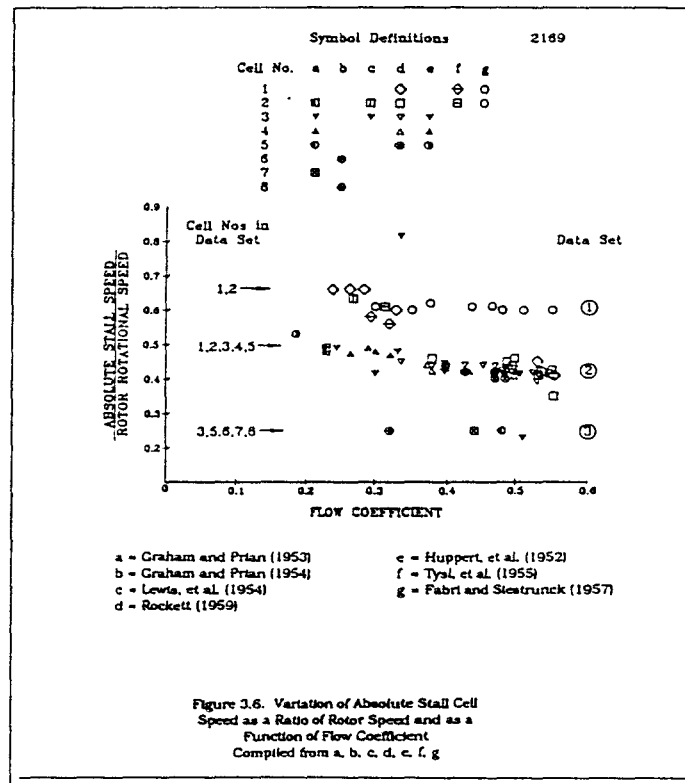
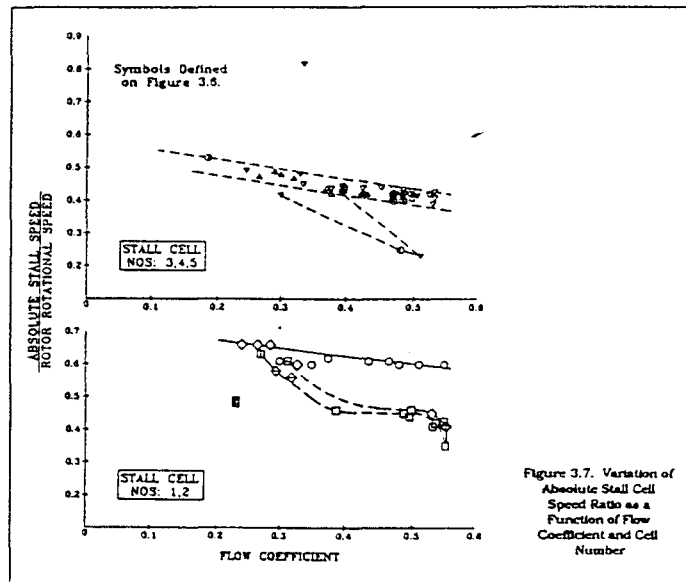


FIG. I.2 - *Corrélation I selon PAMPREEN*

I.1.1 Introduction

L'étude expérimentale du décrochage tournant n'est pas aisée. Les difficultés sont liées, d'une part à la géométrie complexe que constitue une turbomachine, et d'autre part à la précision et la rapidité de l'instrumentation qu'il est nécessaire de mettre en oeuvre. La miniaturisation des capteurs, ainsi que l'amélioration de leurs performances, ont permis des études de plus en plus précises des écoulements internes lors du décrochage.

Nous avons choisi de présenter, sous la forme d'un bref rappel chronologique, à la fois les connaissances acquises en la matière et les nouvelles techniques mises en oeuvre afin de maîtriser le phénomène.

FIG. I.3 - *corrélation II selon PAMPREEN*

I.1.2 Compréhension du phénomène

I.1.2.1 Vitesse de rotation et nombre de Cellules

Au travers de travaux expérimentaux PAMPREEN [57] dresse des corrélations concernant les cellules.

La figure (I.2) comprend une synthèse d'essais réalisés sur des machines diverses. La vitesse de rotation des cellules ainsi que leur nombre sont exprimés en fonction du débit réduit ($\Phi = \frac{C_x}{U}$). On distingue trois types de décrochage. Un nombre de cellules faibles (≤ 2) sous-tend une vitesse de rotation rapide par rapport au carter fixe (0,7, 0,8 selon la convention de PAMPREEN) ce qui correspond à une vitesse de rotation faible dans le repère lié à la roue (0,2, 0,3 on ne considère plus que ce repère dans la suite de l'exposé). Une analyse purement statistique (quelques exceptions infirment parfois la règle), sur des machines distinctes, place le nombre de cellules faible en correspondance avec un débit réduit également faible: $0,2 \leq \Phi \leq 0,35$. PAMPREEN ajoute que les cellules ont une vitesse de rotation plus lente lorsqu'elles occupent la totalité de l'envergure de des aubages. Il interprète donc la variation de la vitesse de rotation observée fig. (I.3) comme le passage d'un décrochage sur une envergure limitée à un décrochage sur toute l'envergure. Les auteurs de travaux ultérieurs (DAY et CUMPSTY [14], DAS et JANG [11]) confirment ces premières observations. En revanche MATIOUDAKIS [48] ne remarque pas de variation de l'étendue de la cellule. Cependant, sur des essais menés à vitesse de roue constante, il observe que le nombre de cellules ainsi que leur vitesse de rotation semblent liés à la valeur du débit réduit: $\Phi = 0,3$ correspond à 1 à 2 cellules.

Ces corrélations constituent une base de données à partir de laquelle les modèles prédictifs peuvent être validés.

I.1.2.2 Structure de la cellule.

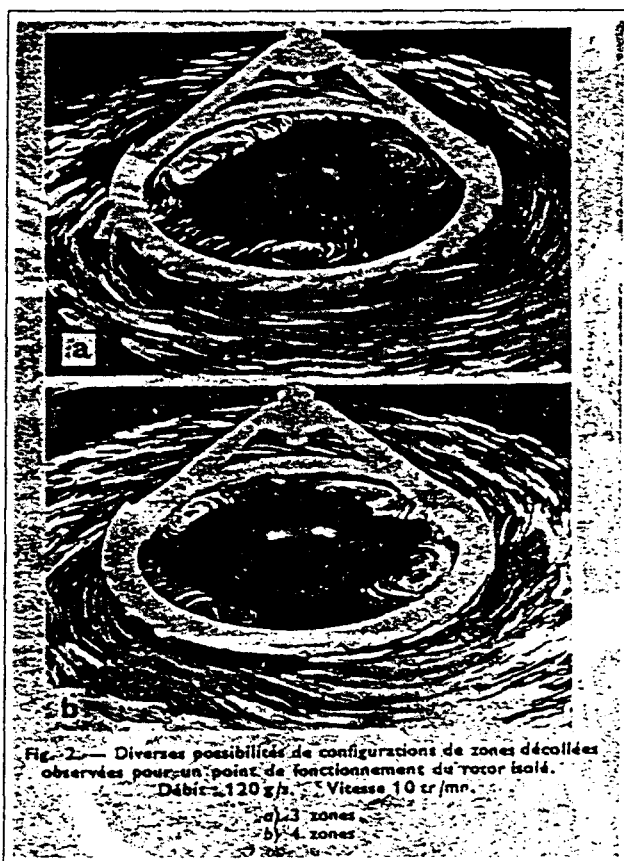


FIG. I.4 - Description du décollement tournant par Y. LE BOT et P. BERNARD

Dès 1972 Y. LE BOT et P. BERNARD [42] présentent les résultats d'une étude qualitative du décollement tournant. Ils prouvent, au moyen d'une analogie hydraulique, qu'un tel comportement du fluide n'est pas ou est peu dépendant de la nature du fluide utilisé. La technique utilisée présente, par ailleurs, l'avantage de montrer clairement comment un aubage peut traverser une cellule sans pour autant la détruire.

Leurs premières conclusions concernent le comportement des cellules. Ils montrent que la façon dont on atteint le régime décroché a une incidence directe sur le nombre de cellules (fig I.4). Leur vitesse de déplacement dépend à la fois du nombre d'aubes des grilles fixes et de l'espace inter-roues.

Dans une étude ultérieure, DAY et CUMPSTY [14] présentent des résultats quantitatifs, en terme de pression et de vitesses locales. Les constatations qu'ils font à partir de leurs résultats les conduisent à introduire le concept de "cellules actives" (fig I.5).

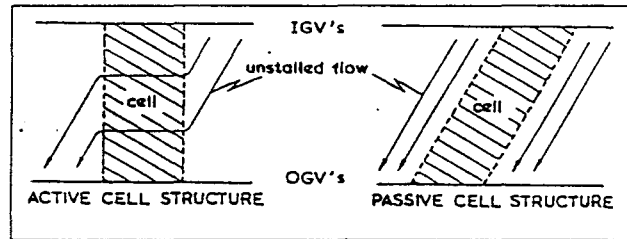


FIG. I.5 - *Concept de cellules actives de DAY et CUMPSTY*

Ce concept implique que la cellule est alimentée par le fluide provenant de la zone saine de l'écoulement et inversement qu'elle débite sur une zone saine. Par ailleurs la traversée de l'espace inter-roues par le fluide non décroché contribuerait à favoriser, à l'amont du rotor, la prérotation de l'écoulement décroché.

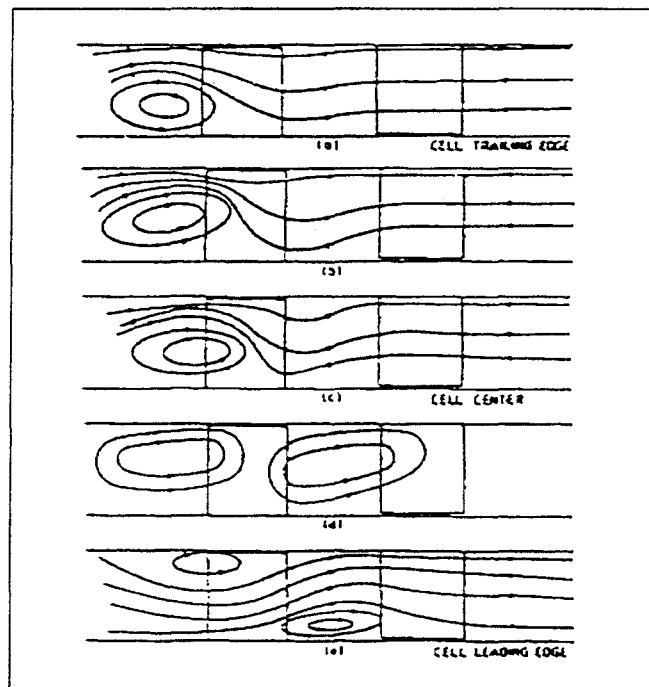


FIG. I.6 - *Evolution de cellule au cours de sa traversée par la roue selon MATHIOUDAKIS*

Des mesures tridimensionnelles ultérieures confirment ces premiers travaux. Ainsi grâce aux expériences menées par BREUGELMANS [5], DAS et JIANG [11] et MATHIOUDAKIS [48], la connaissance du phénomène, notamment dans le plan méridien moyen, se précise. Elles confirment que la cellule se développe axialement au travers des différents étages. Les structures observées dans ce plan sont, au coeur de la cellule, composées de deux tourbillons contrarotatifs de diamètres sensiblement égaux à l'envergure des aubages. A cet égard MATHIOUDAKIS montre, par la grande précision de ses mesures, les différentes formes prises par la cellule au cours de la traversée de celle-ci par la roue (fig I.6).

Il semble donc que le décrochage tournant soit un phénomène où les échanges convectifs sont très importants, à la fois suivant la direction circonférencielle mais aussi suivant la direction radiale. Les constatations de MATHIOUDAKIS soulignent que la cellule est délimitée par une ligne de courant. Il conclut que le fluide provenant de la zone saine ne peut traverser la zone décrochée, notamment dans la zone inter-roues. Le modèle proposé par DAY et CUMPSTY semble donc remis en question.

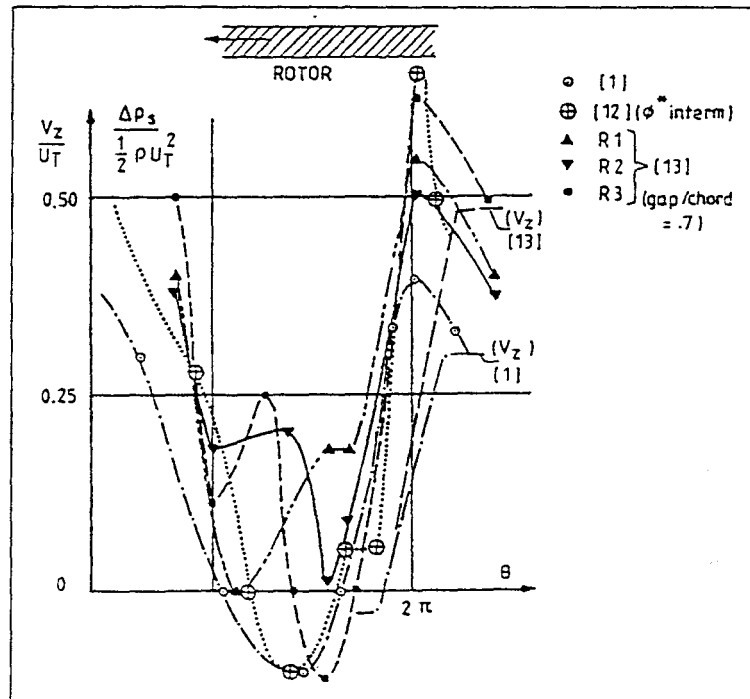


FIG. I.7 - Mise en évidence d'un pic de contrepression dans des machines différentes selon BUISINE

Avec ces études, on se fait une idée assez précise de la structure moyenne du décrochage tournant. Il existe cependant des exceptions suivant le type de compresseur. Ainsi dans une étude plus récente, GIANISSIS et al [30] vérifient que dans certains compresseurs il peut coexister à la fois des étages décrochés et des étages non décrochés. Ils confirment par ailleurs que le décrochage d'un aubage ou d'un étage ne préfigure pas forcément celui de l'ensemble des étages. L'apparition du décrochage ne provient donc pas forcément d'un décrochage local d'aubage, ni d'un décrochage d'étage.

Dans une étude récente FILE et al [28] proposent le modèle en eau d'un compresseur centrifuge. Contrairement à LEBOT et BERNARD [42] qui mènent une étude qualitative, cette fois l'analogie hydraulique permet d'établir une comparaison précise avec un compresseur centrifuge en air étudié par ailleurs. Du fait de l'analogie hydraulique la vitesse de l'écoulement est réduite, ce qui permet une observation visuelle de la propagation des cellules ou un enregistrement par une simple caméra CCD. Les auteurs observent que le modèle en eau décroche à l'identique du modèle en air en terme d'hystérésis du phéno-

mène et de vitesse de rotation des cellules. Les résultats en eau sont donc directement transposables en air. L'observation visuelle confirme que l'aubage traverse la cellule sans que celle-ci soit déstructurée.

On peut s'interroger sur l'existence et la non déstructuration de la cellule lors du passage des aubages. La présence d'un pic de contrepression dans la zone d'entrée de la roue dans la cellule apparaît comme liée au phénomène. A notre connaissance ce sont GREITZER et CUMPSTY [10] qui soulignent les premiers l'existence de ce pic. Il sera par la suite confirmé par BUISINE [4] qui, dans une étude comparative des travaux [5], [11], [48], montre que les résultats obtenus avec des machines différentes aboutissent aux mêmes conclusions quant à l'existence de ce pic (fig I.7) : La présence de ce pic provoque un blocage du débit. A la lumière des différentes études expérimentales citées précédemment, le grand décrochage établi apparaît comme un phénomène mettant en jeu des mécanismes essentiellement convectifs au contraire du décollement tournant qui serait plutôt lié à un comportement de couche limite. L'étape suivante consiste en la détermination des signes annonciateurs du décrochage tournant.

I.1.3 Déclenchement et contrôle du décrochage tournant.

I.1.3.1 Déclenchement.

Si les structures de l'écoulement sont bien connues lors du décrochage tournant établi, la phase transitoire, elle, l'est moins. On remarque cependant que la première cellule apparaît, dans la plupart des cas, dans la zone proche du carter.

Ainsi Mc DOUGALL et al [21] animent avec DAY la controverse selon laquelle l'apparition du décrochage aurait lieu, selon la dimension du jeu d'extrémité d'aubage, soit au niveau de l'arbre soit au niveau du jeu. Les mesures de DAY semblent prouver, en effet, que la cellule apparaît en premier lieu non loin du carter. Ces deux auteurs trouvent un accord en distinguant la formation cellulaire et les prémices du décrochage. Mc DOUGALL et al ajoutent qu'il est possible que le déclenchement se produise sur l'arbre, à l'aval du rotor ; et que la forme de plus faible énergie, associée au décrochage, migre ensuite vers la zone périphérique amont du rotor.

La dimension du jeu de fuite conditionne en partie le point d'apparition du décrochage (sur la courbe caractéristique de la machine). Les essais de Mc DOUGALL [20] et de GOTO [32] montrent qu'une diminution du jeu de fuite de 3% à 0,7% de l'envergure totale repousse les limites d'apparition du décrochage. Le coefficient de débit limite passe dans ce cas de 0,45 à 0,38. GOTO précise qu'une augmentation du jeu se traduit par une augmentation de l'intensité des écoulements secondaires près du carter et inversement dans la région proche de l'arbre.

Dans un cas d'un très faible nombre d'aubes, GE NING [52] étudie en profondeur le comportement du fluide dans la zone périphérique. La vélocimétrie laser lui permet, par des mesures non intrusives, d'atteindre des zones d'écoulement très proches de la

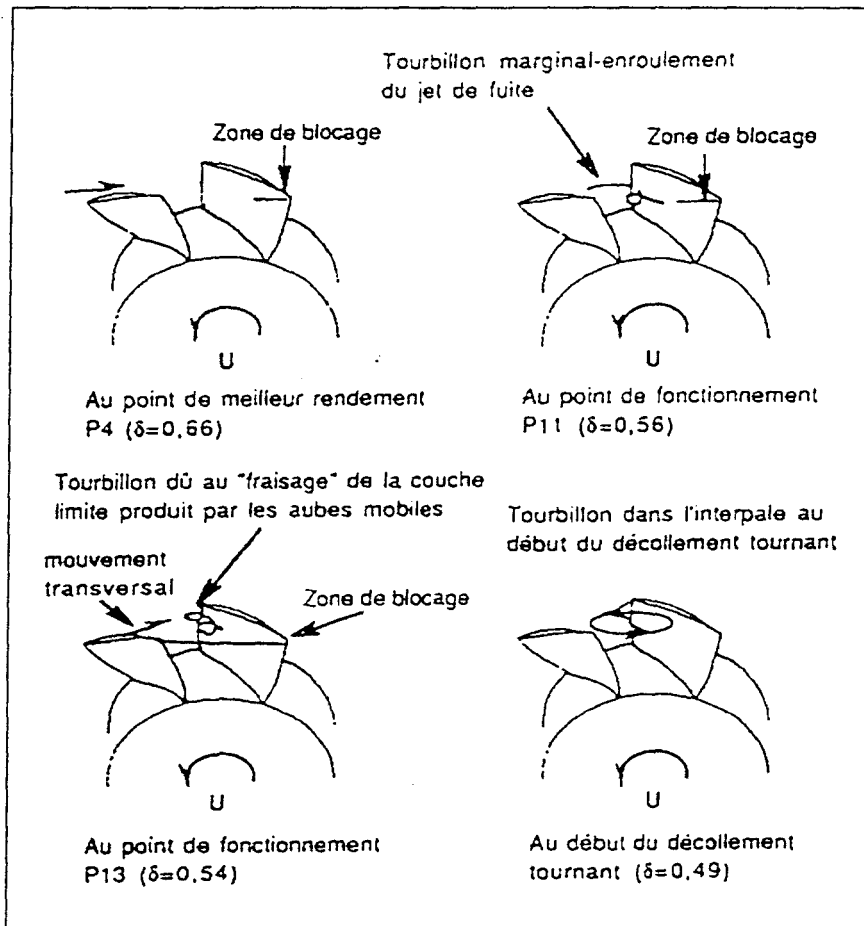


FIG. I.8 - Comportement du jet fuite à des régimes différents de fonctionnement selon GE NING

paroi (4mm). Il obtient ainsi des informations que les études précédentes ne pouvaient donner. Il remarque que selon le régime de fonctionnement du compresseur une cellule se forme dans la zone proche du carter. Ce comportement peut être dû à un décollement de la couche limite annulaire associé à l'effondrement du tourbillon marginal que forme l'enroulement du jet de fuite. La figure I.8 représente un résumé des observations de GE NING. Les constatations de l'auteur ne permettent pas de préciser si l'effondrement a un rôle déclencheur ou un rôle amplificateur de la rupture d'axisymétrie.

Les travaux de GE NING, de GOTO et Mc DOUGALL confortent l'idée selon laquelle l'enroulement du jet de fuite (figure I.8) intensifie les échanges tridimensionnels de quantité de mouvement en présence de décrochage. Il est vraisemblable qu'une augmentation de l'intensité du jet de fuite contribue à une amplification des phénomènes non-linéaires sensibles au cisaillement.

I.1.3.2 Signes précurseurs.

INOUE et al [38] proposent une technique de détection du décrochage. Au moyen d'un capteur de pression placé sur le carter, il mesure la fluctuation de pression. Le décrochage

est détecté lorsque la corrélation entre la mesure en un point de référence et la mesure en un autre point annonce une rupture de la périodicité de la fluctuation de pression.

D'autres travaux mettent en évidence la présence d'ondes tournantes annonciatrices du décrochage tournant. Ainsi les mesures réalisées par GARNIER et al [29] révèlent que des ondes de faible amplitude se propagent dans le compresseur sans déformation durant des périodes assez longues (200 tours de roue). Ensuite, elles se déforment et s'amplifient pour laisser place au décrochage. Ces travaux montrent enfin que ces ondes naissent dans l'étage qui décroche le premier et qu'une distorsion d'entrée de compresseur accélère leur amplification. DAY [15] confirme l'observation d'ondes de "prédécrochage". Ses observations indiquent qu'il peut arriver que la perturbation initiale soit locale et prenne la forme d'une cellule avant même que l'on ait pu distinguer la présence des ondes. Il conclut qu'il faut distinguer la présence des ondes de leur rôle déclencheur. Une étude postérieure conduit DAY et FREEMAN [17] à s'intéresser au cas d'un compresseur haute vitesse en l'occurrence un moteur ROLLS-ROYCE. Le but est de rechercher les similitudes ou les différences de comportement entre ce compresseur et les compresseurs basse vitesse de laboratoire. La difficulté principale se situe ici dans la nécessaire prise en compte des effets dus à la compressibilité du fluide. Les étages fonctionnent alors différemment, ils décrochent notamment indépendamment les uns des autres. Le décrochage se produit dans les premiers étages à basse vitesse et dans les derniers étages à haute vitesse. Pour une vitesse intermédiaire, le moteur a un comportement similaire aux compresseurs "de laboratoire". On trouve alors un décrochage dont les cellules couvrent partiellement l'envergure de l'aubage et qui peut dégénérer vers du décrochage annulaire. Dans le cas du compresseur haute vitesse une dégénérescence conduisant à du décrochage annulaire entraîne l'arrêt du moteur. De même les cycles de décrochage associés au pompage sont plus violents et conduisent à l'extinction. Un point remarquable : les prémisses de décrochage sous la forme d'ondes de faibles amplitudes ne sont pas observées, par contre les cellules se développent à la faveur d'une perturbation locale comparable à celles que remarque DAY [16] dans un compresseur basse vitesse. En conclusion il se dégage des travaux [17] que tous les résultats relevés en laboratoire sur des compresseurs basse vitesse ne sont pas directement applicables aux moteurs, cela pose le problème de la transposition de toutes les recherches effectuées avec des hypothèses de faible compressibilité.

I.1.3.3 Contrôle.

La présence de signes précurseurs ouvre la possibilité d'un contrôle actif du décrochage tournant.

Deux équipes semblent s'en partager la primauté : la première s'illustre par l'article de PADUANO et al [56] et la seconde par un article de DAY [16]. La première obtient un contrôle actif en opposant aux ondes de "prédécrochage" une autre onde artificiellement créée, au moyen d'un mécanisme servomoteur qui perturbe la vitesse axiale amont. Un

gain de l'ordre de 20% sur la plage de fonctionnement du compresseur est obtenu. Le succès de la méthode confirme le lien étroit qui lie le décrochage et les ondes de "pré-décrochage". Cette étude est menée sur un étage de compresseur. Une étude postérieure (HAYNES et al [36]) utilise une installation identique et adapte les travaux de la première étude à une machine composée de trois étages. La technique se montre toute aussi performante. Les gains, en performance, obtenus sont de l'ordre de 8%. Les auteurs attribuent la limitation en gain à la présence d'harmoniques non prises en compte par leur modèle, notamment celles du pompage qui sont d'ordre zéro par rapport à l'azimut θ . L'autre cause envisagée est une mauvaise adéquation entre le temps de détection et le temps de réaction du système.

Une autre solution consiste à aspirer ou à souffler l'enroulement du jet de fuite. DAY adopte cette solution et parvient ainsi, au moyen d'une injection pariétale annulaire, à supprimer le décrochage. Il vérifie que cette technique, connue par ailleurs comme préventive, se révèle aussi efficace après l'apparition du décrochage ou du pompage.

Aux techniques de contrôle qui supposent l'utilisation d'un appareillage complexe de traitement du signal, GYSLING et GREITZER [35] opposent une solution "aéromécanique". Ils remarquent, par simple application du principe de conservation de l'énergie, qu'une réduction de la vitesse axiale se traduit par une augmentation locale de la pression. Cette augmentation de pression locale peut par action sur une valve provoquer l'ouverture de celle-ci et créer une injection pariétale locale qui rétablit le débit local de manière analogue à la technique de soufflage proposée dans [16]. Les auteurs proposent la mise en équations du système de contrôle et à partir d'une étude linéaire dégagent une série de paramètres dont l'optimisation conduit à des gains de 16% sur les performances de la machine considérée. A titre de comparaison une injection pariétale préventive ne permet que 6% de gain. Le point fort de la technique est sa simplicité de mise en œuvre en regard techniques "électroacoustiques". Son usage dans le cas d'une machine industrielle peut à priori être envisagé.

Un autre moyen de contrôle serait évidemment de pouvoir prédire par avance, au moyen d'une étude théorique, les éléments qui déstabilisent l'écoulement dans le compresseur.

I.1.4 Conclusion de l'étude expérimentale

Les points essentiels à retenir quant au décrochage tournant sont :

- Le système formé par l'ensemble machine circuit peut être considéré comme un système prédisposé aux instabilités. Une étude de la stabilité peut donc être un point d'entrée à l'étude du décrochage tournant.
- Les travaux expérimentaux ne laissent pas présumer une perte de stabilité d'origine tridimensionnelle. En revanche ils montrent que les cellules se développent dans les

trois directions de l'espace. Les caractéristiques géométriques et cinématiques de celles-ci ont donc une forte dépendance tridimensionnelle.

- Une fois le décrochage établi les effets visqueux semblent jouer un rôle secondaire devant celui des effets convectifs.

Ces points ont guidés la plupart des études théoriques, menées ces dernières années.

I.2 Etudes théoriques

I.2.1 Stabilité

Une première idée peut être d'étudier la stabilité globale. Sur un diagramme de performance de la machine, le phénomène d'hystérésis auquel est associé le décrochage se traduit par une boucle de non retour à l'état initial (figure I.9).

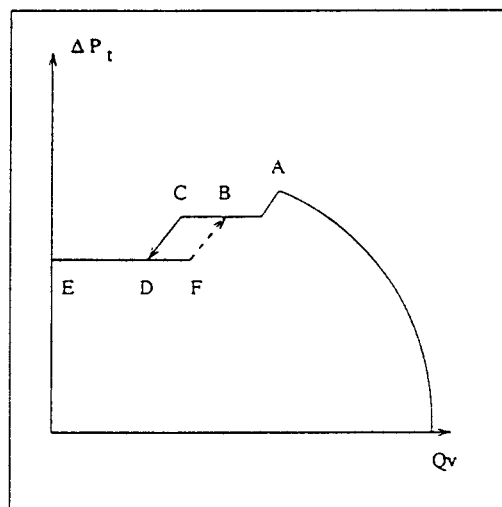


FIG. I.9 - Courbe de performance, en cas de décollement tournant, tirée de la ref [51]

GREITZER présente, en 1976, une étude globale de la stabilité [33] dont il reprend les termes dans [34]. L'objectif est de borner les domaines d'apparition du décrochage tournant et du pompage.

L'ensemble circuit compresseur est assimilé à un résonateur de Helmholtz dont on connaît la pulsation ω en fonction des caractéristiques géométriques (figure I.10). Le compresseur est assimilé à un disque d'action et le vannage assuré par un disque d'obturation.

$$\omega = a \cdot \sqrt{\frac{A_c}{V_p * L_c}} \quad a \text{ est la vitesse du son} \quad (I.1)$$

Pour modéliser l'écoulement il introduit un système non-linéaire composé de quatre équations.

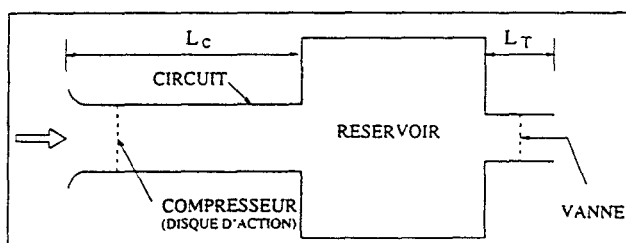


FIG. I.10 - Machine et son circuit assimilé à un résonateur de Helmholtz.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\dot{m}_c}{dt} &= B(C - \Delta P) \\
 F &= \frac{A_c^2}{A_T^2} \dot{m}_T^2 \\
 \frac{d\dot{m}_T}{dt} &= \frac{B}{G} (\Delta P - F) \\
 \frac{d\Delta P}{dt} &= \frac{1}{B} (\dot{m}_c - \dot{m}_T) \\
 \frac{d\Delta P}{dt} &= \frac{1}{\tau} (C_{ss} - C)
 \end{aligned} \tag{I.2}$$

où \dot{m}_c et \dot{m}_T sont les débits masse du compresseur et du circuit respectivement, et avec C l'accroissement de pression et τ le temps adimensionné d'établissement du décrochage pour N tours de roue. U est la vitesse d'entraînement.

Les équations I.2 sont adimensionnées à la fois par le paramètre B et le paramètre G tels que :

$$B = \frac{U}{2 * a} \sqrt{\frac{V_p}{A_c L_c}} \tag{I.3}$$

$$G = \frac{A_c L_T}{A_T L_c} \tag{I.4}$$

La résolution linéaire du problème I.2 aboutit à l'obtention de valeurs critiques de B qui délimitent les zones de fonctionnement stables de l'ensemble étudié. Ces valeurs sont ensuite confrontées à une série d'expériences qui imposent le paramètre B comme un seuil d'apparition du décrochage et du pompage. L'auteur vérifie que lorsque les grandeurs, qui caractérisent B , varient dans un rapport constant la réaction de la machine reste inchangée. Ainsi des conditions d'essais respectant les valeurs de $B \leq 0,45$ mènent au décrochage et celles de $B > 0,45$ mènent au pompage.

MOORE et GREITZER [50] introduisent dans les équations adimensionnées (par rapport à B) une perturbation en espace, selon la direction azimutale, et en temps. L'idée est, en partie, de se libérer de l'hypothèse d'écoulement axisymétrique. La loi de variation de pression du compresseur est donnée en fonction du débit adimensionné Φ :

$$\psi_c = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho U^2} = F(\Phi) - \tau \frac{d\Phi}{dt} \quad (I.5)$$

La fonction F est introduite analytiquement sous la forme d'une loi de variation cubique qui s'approche, de par sa forme, des courbes de performances réelles soit :

$$\psi_c = \psi_{co} + H[1 + \frac{3}{2}(\frac{\Phi}{W} - 1)\frac{1}{2}(\frac{\Phi}{W} - 1)^3] \quad (I.6)$$

où H , W et ψ_{co} caractérisent la forme de la cubique. Ils sont calés en fonction des extrema d'une courbe expérimentale. Les résultats de GREITZER sont retrouvés. Les auteurs montrent de surcroît que seule une perturbation azimutale qui rompt l'axisymétrie de l'écoulement conduit au décrochage tournant.

Mc CAUGHAN [8] reprend les équations de GREITZER et MOORE et pose le problème en termes de bifurcation du système. Au travers de nouveaux paramètres β et S homogènes à B et à (H,W) respectivement il retrouve la courbe de stabilité que GREITZER [33] a obtenu par ses travaux expérimentaux (fig. I.11).

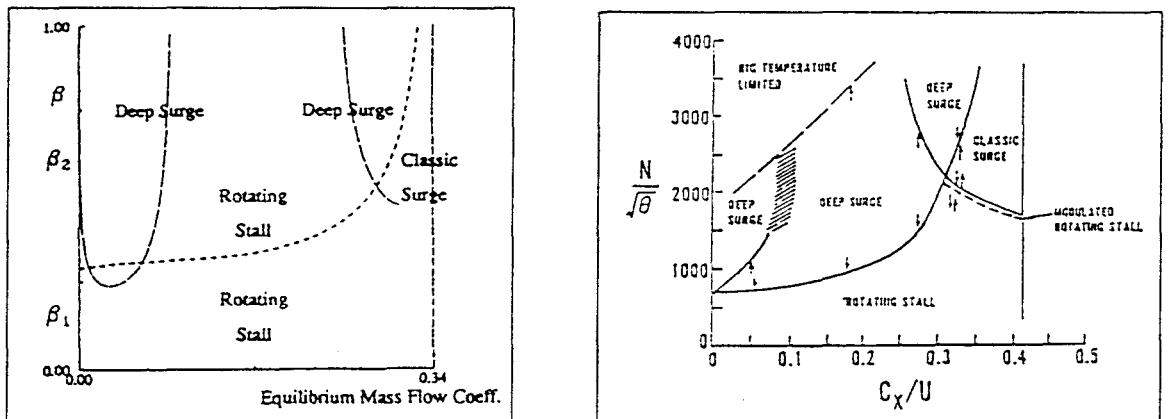


FIG. I.11 - Limites de stabilité par le calcul (Mc CAUGHAN) et par l'expérience (GREITZER)

Mc CAUGHAN [9] complète son étude de stabilité par une investigation numérique de la réponse du modèle selon l'allure de la courbe de performance. L'auteur conclut que le point de retour à un écoulement axisymétrique est directement lié à la forme de la courbe caractéristique de la machine. Plus la zone de fonctionnement instable est abrupte plus le point de retour se situe loin du point origine, (ie) plus l'hystérésis est marqué.

ABED et al [1] reprennent l'étude de GREITZER [33]. Ils montrent qu'en appliquant la théorie de la bifurcation de Hopf seule on peut isoler une valeur limite du paramètre B . Ils négligent les forces d'inertie dues à la vanne et supposent petit le temps d'établissement du décrochage ($\tau \simeq 0$). Par ailleurs les pertes de charge linéiques sont minimisées :

$$\Delta P = F = \frac{A_c^2}{A_T^2} \dot{m}_T^2 \quad (I.7)$$

Le système I.2 est réduit à deux équations :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\dot{m}_c}{dt} &= B(C_{ss}(\dot{m}_c) - \Delta P) \\
 \frac{d\Delta P}{dt} &= \frac{1}{B}(\dot{m}_c - \frac{A_T}{A_c}(\Delta P)^{\frac{1}{2}}) \\
 \Delta P &= F(\dot{m}_T)
 \end{aligned}
 \tag{I.8}$$

La théorie de la bifurcation de Hopf appliquée à l'équilibre distingue une valeur critique de B :

$$B_{Hopf} = \frac{1}{(F'(\dot{m}_c^0)C'_{ss}(\dot{m}_c^0))^{1/2}}
 \tag{I.9}$$

B_{Hopf} correspond à une valeur d'équilibre stable du décrochage "RSE" tournant, le pompage est considéré comme un cas instable. La résolution numérique de leur modèle recule leur étude sur celle de GREITZER (fig. I.12).

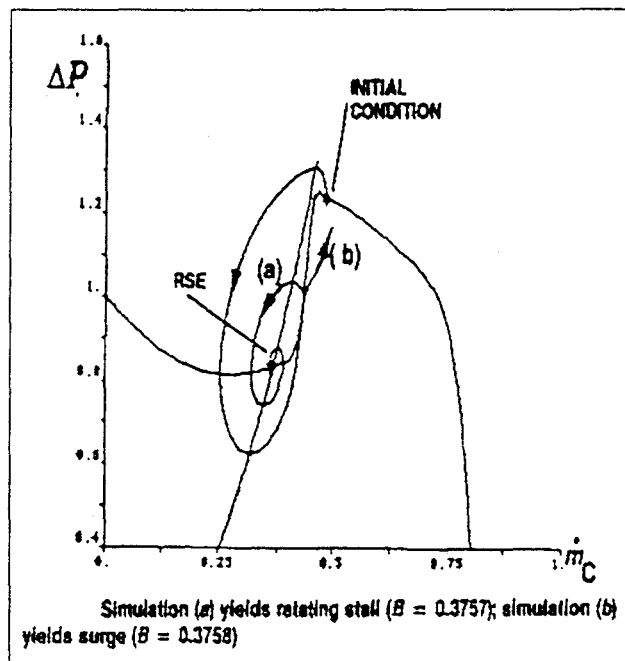


FIG. I.12 - Illustration d'un résultats de stabilité obtenus par ABED et al

Plus récemment HAYNES et al [36]) proposent une amélioration du modèle de MOORE et GREITZER . Il introduisent une loi de retard dans les pertes L (I.10) selon le modèle suggéré par EMMONS et al [22] :

$$\delta L = \delta L_{quasi\ stationnaire}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau \text{ Le temps caractéristique}
 \tag{I.10}$$

Les auteurs vérifient ainsi que l'introduction de termes non-linéaires dans le modèle permet une assez bonne concordance avec leurs travaux expérimentaux en termes de vitesse de propagation et de taux d'accroissement des première, deuxième et troisième

harmoniques. Ce modèle laisse entrevoir de bonnes perspectives quant à la prédiction du décrochage, il reste cependant l'écueil de la détermination du paramètre de retard τ fortement lié à la grille d'aubes.

A notre connaissance, les approches dites globales ne permettent pas l'obtention de résultats conformes à l'expérimentation notamment en ce qui concerne le nombre et la vitesse de rotation des cellules.

L'instabilité qui conduit au décrochage tournant prend en compte les conditions aux limites d'entrée et de sortie et met en jeu un ensemble de phénomènes locaux tels que le comportement de grille et le décollement de couche limite. Une voie a été empruntée par FERRAND ([27],[7]). Elle consiste à modéliser le comportement local de l'écoulement. A partir d'une méthode basée sur les matrices de transfert, il isole les modes propres associés au décrochage tournant. Il obtient ainsi des résultats sur le nombre de cellules mais aussi sur leur vitesse de propagation dans la roue. Ce type d'étude reste cependant encore assez éloigné de la réalité physique.

A notre avis, il faudrait pour s'en approcher, mener une étude approfondie non linéaire de la phase transitoire complexe. Par ailleurs, il reste encore à étudier le problème de la stabilité du grand décrochage établi, non encore posé à notre connaissance, en termes d'approche variationnelle et de stabilité sous critique.

Une autre voie consiste à s'intéresser au décrochage établi.

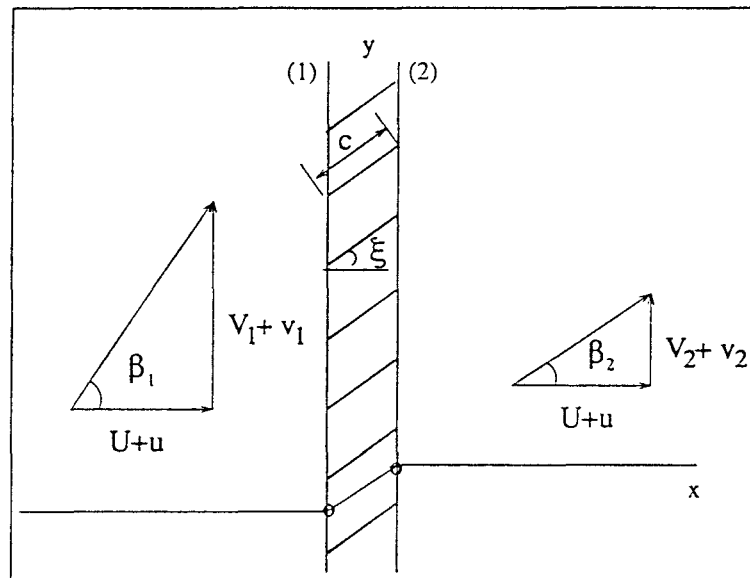


FIG. I.13 - Convention géométrique de l'étude de Takata et Nagano

I.2.2 Le décrochage établi

On a, avec le défilement du décollement par rapport à la roue, à la fois de grandes fluctuations en temps et en espace, ce qui suffit à montrer le caractère non linéaire et

instationnaire du phénomène établi.

TAKATA et NAGANO [62] sont les premiers à résoudre le problème complet en considérant des non linéarités dans les équations.

L'écoulement étant potentiel amont et rotationnel aval, ils discrétisent les équations locales par une méthode de type fonction de courant et vorticité dans un espace bidimensionnel. La roue est assimilée à un disque d'action I.13.

Ils modélisent le comportement bidimensionnel instationnaire en introduisant des termes de retard en pertes (X) et en déviation (β_2).

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial X}{\partial t} &= X_{ss} - X \\ \tau_\beta \frac{\partial \beta_2}{\partial t} &= \beta_{2ss} - \beta_2 \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

les valeurs de X_{ss} et τ_β sont établies par l'intermédiaire de courbes de réponse de grilles d'aubes étudiées par le NACA (fig. I.14)

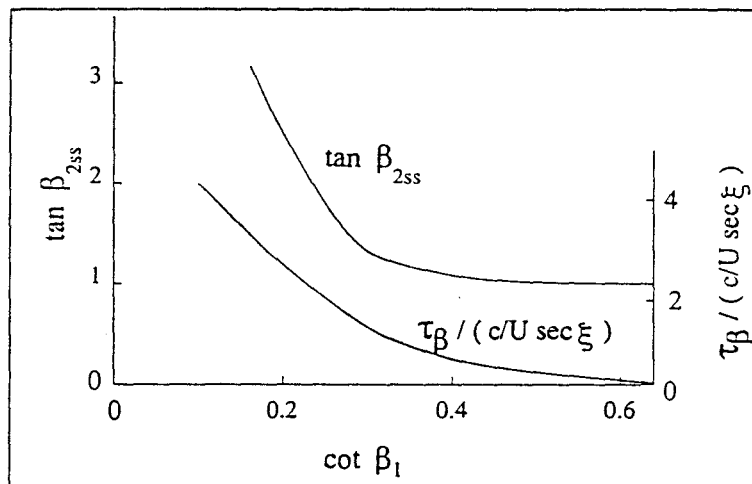


FIG. I.14 - Comportement de grille en fonction de l'incidence du fluide

Ils montrent que ce type d'approche permet l'obtention d'une structure cellulaire stable. L'étude établit un lien étroit entre la taille et le nombre de cellules, et le rapport de la vitesse axiale moyenne sur la vitesse tangentielle de la roue. Lorsque le compresseur ne comprend qu'une roue isolée, le nombre de lobes de la perturbation initiale conditionne le nombre de cellules observées. Les auteurs constatent une indépendance entre le nombre de cellules et la longueur d'onde de la perturbation lorsque l'étage complet est simulé.

Le modèle de TAKATA et NAGANO est généralisé par la suite par ORNER [54]. Les équations sont écrites dans les coordonnées curvilignes des surfaces de courant de la roue.

En répercutant les pertes d'une couche à l'autre, il crée une liaison radiale par l'intermédiaire des pertes et obtient une rotation en bloc des cellules. Il confirme que le modèle de TAKATA et NAGANO contient les équations nécessaires à l'observation de structures

de type cellulaire. Il rencontre les mêmes difficultés que TAKATA et NAGANO dans le cas d'un roue isolée. Il attribue la forte dépendance du nombre de cellules en fonction de la perturbation à l'influence de la vanne d'entrée.

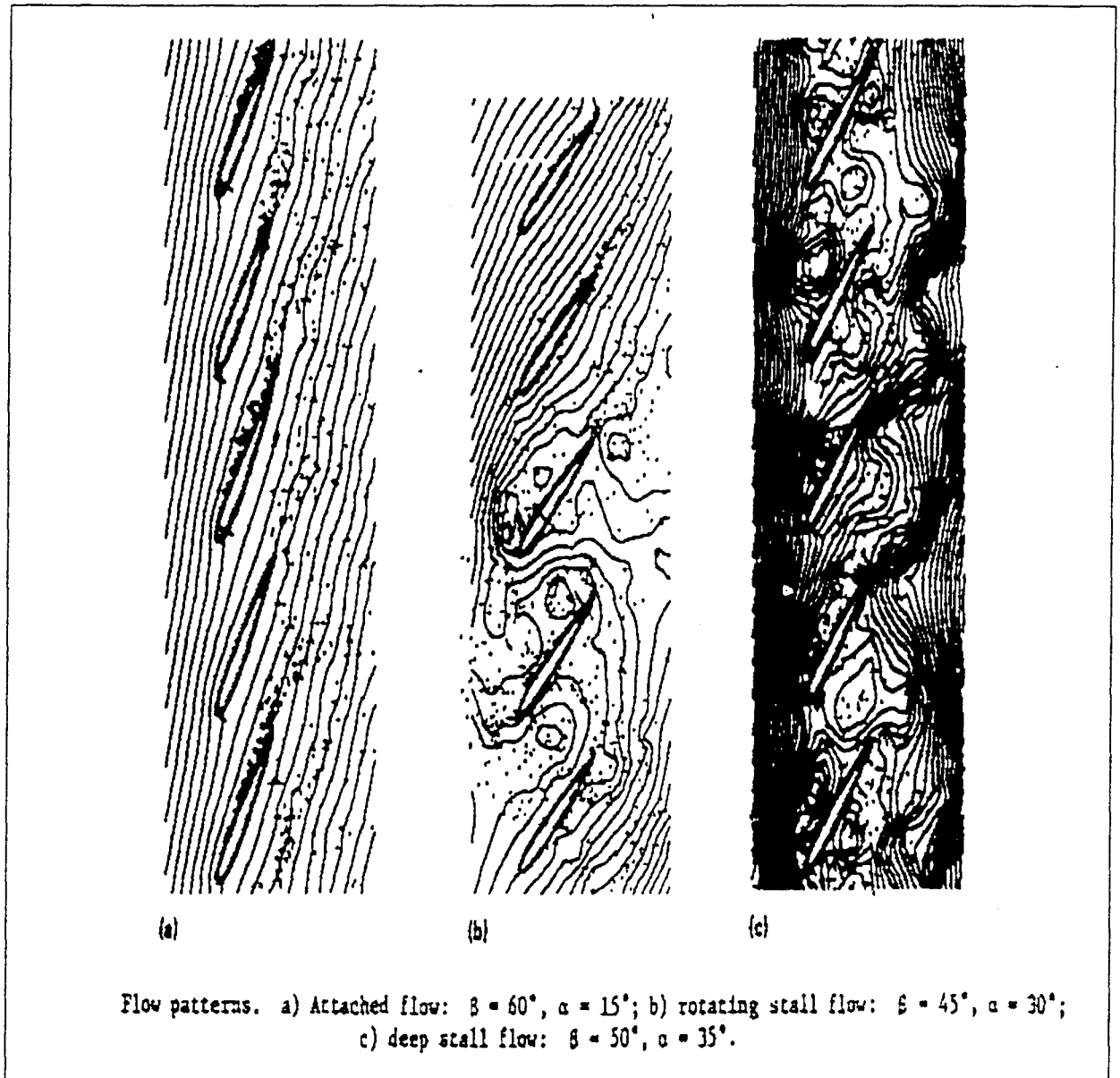


FIG. I.15 - Evolution du décrochage tournant suivant l'angle d'incidence selon SPALART

H. G. NEUHOFF et K. G. GRAHL [51] donnent une explication de l'invariance des cellules dans le cas d'une roue isolée. Ils incriminent l'hypothèse d'irrotationnalité amont d'être à l'origine des difficultés rencontrées. Ils proposent donc de lever cette hypothèse et dans ces conditions ils observent une indépendance entre la solution et l'initialisation.

Cependant l'introduction des pertes ne permet pas, dans ces méthodes initiales, la prise en compte de la recirculation dans la roue.

Nous avons nous même repris l'esprit de la méthode introduite par TAKATA et NAGANO dans le cas d'une roue isolée [53]. Au moyen d'une résolution A.L.E, on met en œuvre un modèle qui est cette fois capable de prendre en compte les écoulements avec retour. On introduit pour cela une loi de perte qui est adaptée au sens de l'écoulement.

Nous aboutissons à des conclusions similaires à nos prédécesseurs.

Plus récemment (1994) ESCURET et GARNIER [23] développent à partir de [2], une étude 3D avec une géométrie réelle. La roue et le stator sont traités comme des disques d'action et le modèle de pertes est limité à un sens unique d'écoulement (sans retour). Ils observent une intensité maximale de la perturbation axiale (amplifiée) dans la région du stator proche de l'arbre.

L'amélioration des techniques numériques et des moyens de calculs permet à SPALART [61] de s'attaquer au problème bidimensionnel en modélisant plusieurs canaux interaubes. Il emploie une méthode dite "Vortex" à laquelle il adjoint une méthode intégrale de résolution de la couche limite. Il vérifie par ses calculs l'importance de l'incidence du fluide par rapport à l'aubage sur la forme de décrochage obtenu (fig I.15). Par ailleurs, il obtient les mêmes résultats avec des plaques planes qu'avec des profils non cambrés. Ce résultat semble confirmer que le décrochage tournant n'est pas uniquement un problème de couche limite. A la suite de SPALART et en arguant que la méthode de ce dernier ne permet pas l'accès à une modélisation tridimensionnelle, DAVOUZADEH et al [13] proposent une nouvelle étude bidimensionnelle. Ils résolvent les équations de Navier Stokes par la mise en oeuvre d'un schéma ADI auquel ils ajoutent un modèle de turbulence de type $k-\epsilon$. Ainsi ils mettent en évidence, que dans des conditions identiques à celles de SPALART, on observe un décrochage. Cependant si l'on considère l'amplitude du phénomène observé, il semble ne s'agir cette fois que de décollement tournant. Il aurait été souhaitable de comparer les résultats obtenus sans modèle de turbulence afin de distinguer précisément le rôle des effets turbulents.

Enfin E. OUTA et KATO [55] proposent la résolution locale et bidimensionnelle des équations de Navier Stokes dans une machine mono étage. Leur schéma n'inclut pas de modèle de turbulence et ils négligent les effets radiaux. La configuration est proche d'une géométrie réelle mais le nombre d'aubes est réduit dans un rapport propre à conserver la solidité. Ils font varier la plage de fonctionnement et simulent un vannage en agissant sur la condition de pression en sortie (indice "e" pour "exit") de domaine de calcul :

$$P_e = P_s + \zeta \rho_e \bar{C}_{xe} |\bar{C}_{xe}| \quad (I.12)$$

Le débit est ainsi régulé en ajustant la valeur du paramètre ζ . Aucune perturbation n'est superposée à l'écoulement, le vannage seul suffit à déclencher le décrochage. L'axi-symétrie est, en effet, rompue ici par un nombre d'aubes du stator différent de celui du rotor. L'écoulement est donc soumis à des perturbations géométriques induites par les interactions rotor-stator. Les perturbations sont amplifiées à la faveur d'un vannage du circuit proche du point de décrochage.

Le modèle donne de bons résultats, mais il subsiste une erreur sur l'évaluation de la vitesse de rotation des cellules. Les auteurs attribuent cela à un nombre insuffisant d'aubes qui conduit à une surévaluation de la taille des cellules. Les travaux de E. OUTA et KATO

[55] confirment qu'en phase de décrochage profond la cellule se prolonge du rotor au stator et se déplace en bloc. Ils ne confirment pas les observations de MATIOUDAKIS [48] et accèdent le modèle de cellules actives de DAY et CUMPSTY [14] .

Très récemment ISMAEL et HE [40] ont proposé une simulation tridimensionnelle. Le jeu de fuite est ici supposé nul. Le schéma comporte un modèle de turbulence de type longueur de mélange et une résolution sous-grille. La validation axisymétrique est réalisée sur un compresseur transsonique de la NASA. Un calcul est conduit sur 7 des 22 canaux inter-aubes que comprend la machine. Une perturbation de la pression statique d'entrée d'amplitude 10% permet de rompre l'axisymétrie, cette perturbation est maintenue pendant la durée du calcul. Les deux essais présentés sont menés pour deux vitesses de rotation de 50% et de 100% de la vitesse nominale. Le premier essai (50%) donne lieu à du décrochage. Les auteurs identifient les cellules par une visualisation de l'entropie qu'ils identifient à un scalaire convecté. Le décrochage est partiel et apparaît au bout de 9 tours de roue sous la forme de deux cellules. Celles-ci coalescent, ensuite, pour n'en plus former qu'une seule. Le deuxième essai (100%) n'aboutit pas à du décrochage, en revanche les auteurs observent un phénomène de blocage qu'ils assimilent à du pompage. Ce blocage empêcherait, selon eux, le développement des cellules. Une analyse des résultats est proposée. Dans un compresseur transsonique, la présence de décrochage dépend de la capacité ou de l'incapacité qu'a l'écoulement dans les canaux, de communiquer avec l'amont de la grille.

Ce dernier travail est l'aboutissement de nombreuses études qui concluent sur la nécessité de prendre en compte les effets tridimensionnels de l'écoulement.

I.2.3 Conclusion sur les études théoriques

Deux voies ont été empruntées au cours de ces dernières années. La voie de la modélisation globale et la voie de la modélisation locale. La première a fait au départ l'objet d'études linéaires, elle a permis d'isoler des paramètres fondamentaux qui délimitent les conditions d'apparition du décrochage. L'amélioration des modèles a conduit les différents auteurs à étudier la bifurcation des solutions, le décrochage tournant est alors considéré comme une nouvelle solution d'équilibre. Les derniers développements basés sur l'utilisation de modèles non-linéaires aboutissent à des solutions de plus en plus proches de l'expérience. La seconde voie, celle de la modélisation locale a subi également une longue évolution. La grille est en premier lieu remplacée par une loi de comportement de grille. Celle-ci intègre les effets non-linéaires que prévoit l'expérience. La difficulté rencontrée quant à la validation de ces lois de comportement font que les modèles ont évolué vers la simulation des écoulements locaux dans la grille. La résolution des structures fines de l'écoulement dans le cas de grilles bidimensionnelles est aujourd'hui assez bien maîtrisée. Les enjeux actuels sont donc de développer la résolution tridimensionnelle. Les réponses attendues préciseront alors le rôle effectivement joué par les effets 3D sur l'apparition du

décrochage.

I.3 Conclusions et définition des objectifs

Cette brève revue, des travaux antérieurs, nous permet de définir nos objectifs principaux :

Nous proposons un modèle capable de simuler les échanges tridimensionnels de quantité de mouvement à la fois dans les canaux interaubes mais aussi dans l'ensemble de la roue et cela sans hypothèse de périodicité spatiale.

Le schéma mis en place est typiquement incompressible de façon à bénéficier de grands pas de temps, eu égard aux durées importantes (plusieurs tours de roue) à prendre en compte.

Le schéma est par ailleurs conçu pour être compatible avec l'utilisation d'une machine de calcul modérément parallèle.

A terme ce modèle devrait être capable de gérer un étage complet de machine.

Chapitre II

MODELISATION

II.1 Introduction

L'ensemble des travaux expérimentaux s'accorde pour décrire le décrochage tournant comme un phénomène qui survient à la faveur d'un état d'équilibre instable de l'ensemble de la machine. Ainsi, sa modélisation locale ne peut en aucun cas être réalisée sur un domaine réduit à un unique canal interaube. Le nombre de cellules, leur vitesse de rotation et l'étendue que chacune d'entre elles occupe dans la roue sont des inconnues d'un problème dont la détermination implique l'ensemble des canaux interaubes.

Un point d'entrée dans une modélisation du décrochage est la prise en compte des non linéarités comme l'avaient prédit de longue date TAKATA et NAGANO. Faisant suite à l'étude de TAKATA et NAGANO et utilisant un modèle de réponse ou de comportement de grille d'aubes, ORNER [54] NEUHOFF et GRAHL [51], G. BILLET et al [2], se sont systématiquement confrontés au problème de la qualification des courbes de réponses de β_{2ss} et τ par rapport à l'expérience. La modélisation de l'écoulement dans les canaux interaubes nous évite la quantification des termes de retard de décollement de couche limite ainsi que la réponse dynamique de déviation. L'étude locale du décrochage tournant doit donc être réalisée sur un domaine de taille équivalente à la grille d'aubes sur lequel nous sommes conduit à résoudre le problème de Navier Stokes.

Concernant la turbulence, dans cette première approche nous n'introduisons pas de modèle numérique de turbulence. Nous basons cette restriction sur une étude de D. BUISINE [4] qui montre la prépondérance des effets convectifs sur les effets visqueux lorsque le grand décrochage est établi. Nous nous attachons à modéliser les grandes structures et mettons l'accent sur la résolution des grandes échelles de l'écoulement au détriment des petites. Par rapport aux études numériques récentes notre approche est en accord avec celle menée par E. OUTA et al [55] qui mettent en évidence de grandes cellules de décrochage avec les mêmes hypothèses. En revanche le travail de DAVOUZADEH et al [13] qui prennent en compte les effets turbulents n'aboutit finalement qu'à du décollement tournant.

La taille du domaine peut être réduite si l'on suppose une certaine périodicité spatiale et temporelle de l'écoulement. Dans l'étude des interactions rotor stator CHAPIN [6], INQUIMBERT [39], et VINTELER [63] ont exploité les propriétés de périodicité de l'écoulement. Dans les études [6] et [63], est introduit le principe de périodicité choro-chronique qui permet de restreindre l'étendue du domaine à un nombre limité de canaux interaubes.

Dans le cas du décrochage tournant, nous sommes en présence d'une cellule souvent unique, l'hypothèse de périodicité de l'écoulement n'est pas vérifiée. Il semble n'y avoir d'autre choix que celui de la modélisation de l'ensemble de la roue comme l'ont proposée J.O ISMAEL et L. HE [40].

Les travaux expérimentaux de GARNIER et al [29] ainsi que ceux de DAY ([15], [16]) indiquent que plusieurs tours de roue sont nécessaires entre l'apparition des signes précurseurs du décrochage tournant et l'observation des premières cellules.

Pour une étude expérimentale, quelques tours de roue sont quasi négligeables en termes de temps d'observation. En revanche une simulation sur une telle durée nécessite l'utilisation de moyens informatiques importants. Le coût est d'autant plus élevé que le pas de temps est assujéti à la célérité du son.

C'est pourquoi le code mis en oeuvre est typiquement incompressible ou faiblement compressible. Le temps ne dépend que de la vitesse de convection. Notons que cette restriction faite sur la nature du fluide n'est pas dénuée de fondements physiques. L'étude expérimentale de LE BOT et BERNARD montre, en effet, que l'on peut dans ces conditions observer des cellules de décrochage.

L'adoption d'un modèle incompressible dispense de la résolution de l'équation pour l'énergie. En revanche elle introduit une équation de Poisson pour la pression. La résolution directe de cette équation étant trop coûteuse nous utilisons un schéma itératif spécifique qui résout directement les grandes échelles par une méthode spectrale et les petites échelles par une technique de singularités tronquées ou par une résolution ADI.

Après avoir mis en oeuvre ces techniques sur des domaines simplement connexes, nous proposons une méthode de raccordement entre domaines adjacents qui permet un par-tionnement du domaine et l'utilisation d'une machine parallèle. Dans la suite du chapitre nous détaillons le schéma et la discrétisation des opérateurs. La résolution de l'opérateur de Laplace fait l'objet du chapitre suivant.

II.2 Schémas numériques

II.2.1 Introduction

Le schéma initialement utilisé dans ce travail est du type A.L.E (Arbitrary Lagrangian and Eulerian) Il a été introduit au “Los Alamos Laboratory” dans les années 60-70 et est plutôt destiné à la résolution de problèmes à frontières mobiles. Des auteurs l'utilisent comme tel pour la résolution de problèmes d'évolution à surface libre, citons à ce propos les travaux de HIRT, AMSDEN et COOK (1974) [37] ainsi que ceux de B. RAMASWAMY [59] (1990).

L'appellation A.L.E provient de la décomposition que l'on fait de l'opérateur de dérivée par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{f} \quad (\text{II.1})$$

o ù

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}. \quad (\text{II.2})$$

Dans une première étape on résout l'équation II.1 qui détermine la dérivée matérielle. On se trouve alors dans le cas de l'observateur qui se déplace avec l'écoulement , la description est Lagrangienne. La deuxième étape nous ramène au maillage initial par la résolution de II.2.

Le formalisme A.L.E a fait l'objet de quelques travaux au sein du laboratoire, dont le travail de A. FEIDT [26] et celui de R. DEBUCHY [18]. Alors que le premier auteur propose une version bidimensionnelle de la technique le second réalise sur ces bases une résolution quasi 3D qu'il valide sur ses propres travaux expérimentaux concernant l'étude des disques en rotation.

Dans le schéma A.L.E, la pression est généralement traitée séparément et évaluée par rapport à l'état antérieur du champ de vitesse. B. RAMASWAMY [59] propose une amélioration de la méthode en réalisant une double évaluation de la pression. La première évaluation intervient lors de la première phase et l'équation de continuité est appliquée au champ de vitesse Lagrangien issu de la résolution de II.1. La seconde évaluation (corrective) complète la phase Eulérienne et l'équation de continuité est appliquée, cette fois, au champ de vitesse résultant de la résolution de II.2. Lorsque le maillage se déplace et se déforme durant le calcul ce double calcul assure une meilleure conservation de la masse.

Dans une première étape, les idées maîtresses de la résolution en pression ont été développées dans le cadre de la technique A.L.E bidimensionnelle . L'étape suivante a été d'améliorer la précision de la discrétisation temporelle. Pour cela un schéma “prédicteur-correcteur” du second ordre en temps est étudié. Il est mieux adapté que le premier lors-

qu'il s'agit de conserver la cohérence spatiale de structures de faible énergie rotationnelle devant l'énergie de convection.

II.2.2 Equations.

Les équations que l'on résout dans le cas de machines tournantes sont conventionnellement écrites dans un repère tournant à une vitesse $\vec{\omega}_o$. On a :

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{\omega}_o \wedge \vec{r} \quad (\text{II.3})$$

Où \vec{V} est la vitesse dans le repère absolu (R_a) et \vec{W} est la vitesse dans le repère relatif (R_r). Dans ce cas l'équation de Navier Stokes pour un fluide incompressible s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \vec{W} \cdot \vec{\nabla} \vec{W} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{\omega_o^2 \cdot r^2}{2} \right) - 2 \cdot \vec{\omega}_o \wedge \vec{W} + \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{W} = 0 \end{cases}$$

Le fluide est supposé non pesant :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \nu \cdot \Delta \vec{W} \\ \text{on pose } p^* &= \frac{p}{\rho} - \frac{\omega_o^2 \cdot r^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

On résout donc le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \vec{W} \cdot \vec{\nabla} \vec{W} = -\vec{\nabla} p^* - 2 \cdot \vec{\omega}_o \wedge \vec{W} + \nu \cdot \Delta \vec{W} \\ \nabla \cdot \vec{W} = 0 \\ \text{avec } p^* = \frac{p}{\rho} - \frac{\omega_o^2 \cdot r^2}{2} \end{cases}$$

II.2.2.1 Schéma A.L.E

On applique le formalisme A.L.E d'où on déduit la décomposition suivante :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \frac{\delta_1 \vec{W}}{\delta_1 t} + \frac{\delta_2 \vec{W}}{\delta_2 t} \quad (\text{II.5})$$

On associe

$$\begin{cases} \frac{\delta_1 \vec{W}}{\delta_1 t} \text{ à } \frac{d\vec{W}}{dt} \\ \text{et } \frac{\delta_2 \vec{W}}{\delta_2 t} \text{ à } -\vec{W} \cdot \vec{\nabla} \vec{W} \end{cases}$$

Les opérateurs $\frac{\delta_1}{\delta_1 t}$ et $\frac{\delta_2}{\delta_2 t}$ sont discrétisés en différences finies du premier ordre en temps.

On a .

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1 \vec{W}}{\delta_1 t} &= -\vec{\nabla} p^* + \nu \Delta \vec{W} - 2 \cdot \vec{\omega}_o \wedge \vec{W} \\ \frac{\delta_2 \vec{W}}{\delta_2 t} &= -\vec{W} \cdot \vec{\nabla} \vec{W}\end{aligned}\quad (\text{II.6})$$

A partir du système II.5 on construit le système discret par rapport au temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{W}_l - \vec{W}_n}{\Delta t} = -\vec{\nabla} p^* + \nu \Delta \vec{W}_n - 2 \cdot \vec{\omega}_o \wedge \vec{W}_n \\ \frac{\vec{W}_{n+1} - \vec{W}_l}{\Delta t} = -\vec{W}_l \cdot \vec{\nabla} \vec{W}_l \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{W}_l = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.7})$$

La prédiction de la pression est telle que la conservation de la masse est vérifiée à l'instant l.

$$\Delta p^* = S_{w_l} \quad (\text{II.8})$$

où on note

$$S_{w_l} = \nabla \cdot \left[\vec{W}_n + \Delta t (\nu \Delta \vec{W}_n - 2 \cdot \vec{\omega}_o \wedge \vec{W}_n) \right] \quad (\text{II.9})$$

L'équation (II.8) constitue l'équation de Poisson pour la pression qui est résolue à chaque pas de temps. L'une des principales causes de diffusion numérique de ce schéma est due au fait que la conservation de la masse est imposée à un état de la vitesse qui n'a de sens que sur un maillage qui s'est déplacé avec le fluide. P. MAERTEN [45] a appliqué ce schéma pour la simulation d'un écoulement de couche de mélange. Les structures instationnaires provenant d'une instabilité de type Kelvin Helmutz sont de faible énergie et sont trop rapidement dissipées par le schéma A.L.E au regard de l'expérience. En revanche lorsque les structures tourbillonnaires sont dues à un obstacle et que leur échelle caractéristique est de l'ordre de la taille de l'obstacle, le schéma A.L.E est suffisamment précis pour rendre compte de ces structures instationnaires.

Dans le cas d'une grille d'aubes, avec un fluide en forte incidence, il est légitime de supposer que les structures instables auront une échelle spatiale du même ordre que la dimension de l'aubage. Dans le cas d'écoulements à faible incidence le sillage de bord de fuite se comporte, par contre, comme une couche de mélange. Par conséquent, lorsque le maillage peut être suffisamment raffiné, cas bidimensionnel, l'étude du décrochage tournant peut être menée, en première approche, avec le schéma A.L.E.

II.2.2.2 Schéma "prédicteur-correcteur"

Quand on passe d'une résolution bidimensionnelle à une résolution tridimensionnelle on ne peut plus, pour des raisons de taille du problème, réduire la diffusion numérique par un raffinement du maillage. Or, les canaux inter-aubes sont le lieu d'écoulements secondaires de forte vorticité. L'énergie de ces structures est d'autant plus forte que l'écoulement principal est en forte incidence par rapport à l'aube. Une résolution tridimensionnelle nécessite donc une définition spatiale aussi grande dans le sens transverse que suivant l'écoulement principal.

Contraint d'utiliser des maillages moins raffinés que dans le cas 2D, on est amené à introduire un schéma du second ordre en temps de type prédicteur-correcteur.

L'équation différentielle :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = F(\vec{V}, t), \quad (\text{II.10})$$

est discrétisée temporellement

$$\begin{cases} \frac{\vec{V}_{n+1} - \vec{V}_n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(F(\vec{V}_l, t^{n+1/2}) + F(\vec{V}_n, t) \right) \\ \frac{\vec{V}_l - \vec{V}_n}{\Delta t} = F(\vec{V}_n, t) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Il s'agit là d'un schéma de Runge Kutta d'ordre deux que l'on peut également mettre sous la forme : phase prédictrice, phase correctrice.

$$\begin{cases} \frac{\vec{V}_l - \vec{V}_n}{\Delta t} = F(\vec{V}_n, t) \\ \frac{\vec{V}_{n+1} - \vec{V}_l}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(F(\vec{V}_l, t^{n+1/2}) - F(\vec{V}_n, t) \right) \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Appliquée aux équations de Navier Stokes on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{W}_l - \vec{W}_n}{\Delta t} = -\vec{\nabla} p^* - \vec{W}_n \cdot \vec{\nabla} \vec{W}_n + \nu \Delta \vec{W}_n - 2 \vec{\omega}_o \wedge \vec{W}_n \\ \frac{\vec{W}_{n+1} - \vec{W}_l}{\Delta t} = \frac{1}{2} (+\vec{W}_n \cdot \vec{\nabla} \vec{W}_n - \nu \Delta \vec{W}_n + 2 \vec{\omega}_o \wedge \vec{W}_n \\ \quad - \vec{W}_l \cdot \vec{\nabla} \vec{W}_l + \nu \Delta \vec{W}_l - 2 \vec{\omega}_o \wedge \vec{W}_l) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{W}_l = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

Comme pour le schéma A.L.E, la pression est déterminée de façon à vérifier la conservation de la masse à l'instant l.

$$\Delta p^* = S_{w_l} \quad (\text{II.14})$$

on note

$$S_{w_l} = \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{W}_n + \Delta t (-\vec{W}_n \cdot \vec{\nabla} \vec{W}_n + \nu \Delta \vec{W}_n - 2 \vec{\omega}_o \wedge \vec{W}_n) \right] \quad (\text{II.15})$$

Les termes convectifs sont cette fois pris en compte dans la phase prédictrice. Le calcul de la pression, qui assure la conservation de la masse à l'instant l, s'effectue ainsi sur un maillage fixe. Ce schéma est bien adapté à la résolution d'écoulements cisailés. Les structures de faible vorticité sont bien convectées sur de longues distances.

II.2.2.3 Résolution

Des applications font appel à des maillages quelconques structurés (coude, marche 3D, cavité inter-disque..) et une discrétisation de type méthode de volumes finis.

Dans ce travail la résolution spatiale multi-domaines est développée pour une géométrie simplifiée, elle est réalisée au moyen d'opérateurs de différences finies du second ordre. On résout les équations dans le repère relatif en supposant que la vitesse de rotation $\vec{\omega}_o$ est nulle. A terme la résolution multi-domaine devrait être étendue au cas des maillages curvilignes mobiles.

II.2.3 Maillage

Le maillage est incliné de l'angle λ qui est également l'angle de calage des plaques planes auxquelles sont assimilées les aubes en première approche. On note $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ les pas selon chacune des trois directions, x,y,z, de l'espace.

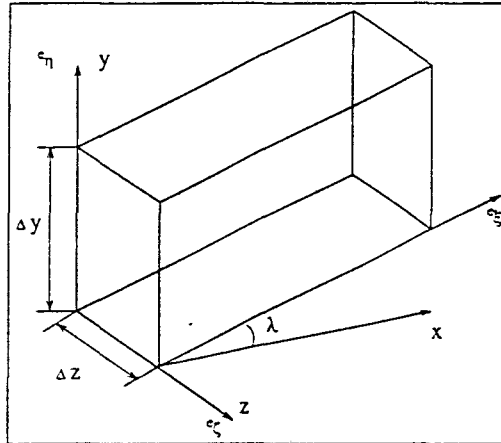


FIG. II.1 - Détail d'une maille.

II.2.3.1 Base locale

Les vecteurs \vec{e}_ξ , \vec{e}_η et \vec{e}_ζ constituent la base locale (fig II.1)

$$\begin{cases} \|\vec{e}_\xi\| = \frac{\Delta x}{\cos \lambda} \\ \|\vec{e}_\eta\| = \Delta y \\ \|\vec{e}_\zeta\| = \Delta z \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Les vecteurs \vec{e}^ξ , \vec{e}^η et \vec{e}^ζ forment la cobase associée.

$$\begin{cases} \|\vec{e}^\xi\| = \frac{1}{\Delta x} \\ \|\vec{e}^\eta\| = \frac{1}{\cos \lambda \Delta y} \\ \|\vec{e}^\zeta\| = \frac{1}{\Delta z} \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

Le passage d'une base à une autre s'effectue par la matrice

$$[g] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x^2} & -\frac{\tan \lambda}{\Delta x \Delta y} & 0 \\ \frac{\tan \lambda}{\Delta x \Delta y} & \frac{\sec^2 \lambda}{\Delta y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta z^2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

tel que:

$$\vec{e}^j = g^{ij} \vec{e}_i \quad (\text{II.19})$$

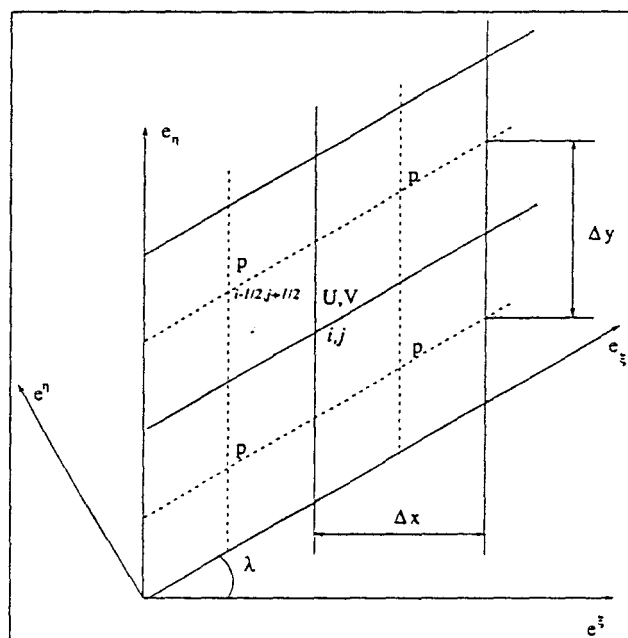


FIG. II.2 - Maillage incliné bidimensionnel.

II.2.3.2 Décalage des maillages pression et vitesse.

Une priorité est donnée aux termes $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{\text{grad}p}$ dans l'équation de quantité de mouvement ainsi qu'aux termes $Lapp$ et $\text{div} \vec{V}$ de l'équation de continuité. L'ordre des termes diffère deux à deux de une unité. C'est ce qui justifie le décalage de maillage indiqué sur la figure (II.2). Les mailles vitesses sont décalées d'une demi-maille pression. La résultante du gradient de pression est donc exprimée sur le maillage vitesse. A l'inverse la divergence de la vitesse est exprimée sur le maillage pression.

II.2.4 Equations en coordonnées locales sur un maillage parallélogramme.

II.2.4.1 Opérateurs dans le repère local

Le gradient d'un scalaire f s'exprime par :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \xi} \vec{e}^{\xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \vec{e}^{\eta} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \vec{e}^{\zeta} , \quad (\text{II.20})$$

l'expression du Laplacien d'un scalaire s'écrit comme suit :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} (\vec{e}^{\xi})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} (\vec{e}^{\eta})^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} (\vec{e}^{\xi} \cdot \vec{e}^{\eta}) + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} (\vec{e}^{\zeta})^2 \quad (\text{II.21})$$

soit dans le repère incliné :

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\sec^2 \lambda}{\Delta y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\tan \lambda}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{1}{\Delta z^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \quad (\text{II.22})$$

On note

$$\Delta_{\varepsilon\eta} f = \frac{1}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\sec^2 \lambda}{\Delta y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\tan \lambda}{\Delta x \Delta y} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \quad (\text{II.23})$$

Dans le repère $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ le champ de vitesse \vec{W} s'écrit :

$$\vec{W} = w^\xi \vec{e}_\xi + w^\eta \vec{e}_\eta + w^\zeta \vec{e}_\zeta \quad (\text{II.24})$$

Pour faciliter la mise en œuvre on introduit la notation suivante où W^j est la composante physique de la vitesse dans la base inclinée normée.

$$W^j = \|\vec{e}_j\| w^j \quad (\text{II.25})$$

La divergence de la vitesse est exprimée dans le repère $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = \frac{\partial w^\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial w^\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial w^\zeta}{\partial \zeta} \quad (\text{II.26})$$

ou encore :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = \frac{1}{\|\vec{e}_\xi\|} \frac{\partial W^\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{\|\vec{e}_\eta\|} \frac{\partial W^\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{\|\vec{e}_\zeta\|} \frac{\partial W^\zeta}{\partial \zeta} \quad (\text{II.27})$$

soit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = \frac{\cos \lambda}{\Delta x} \frac{\partial W^\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{\Delta y} \frac{\partial W^\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{\Delta z} \frac{\partial W^\zeta}{\partial \zeta} \quad (\text{II.28})$$

II.2.4.2 Schémas dans le repère local.

Schéma A.L.E La phase lagrangienne s'exprime en coordonnées locales :

$$\begin{cases} W_l^\xi = W_n^\xi + \Delta t \left[-\frac{\cos \lambda}{\Delta x} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \frac{\sin \lambda}{\Delta y} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + \nu \Delta W_n^\xi \right] \\ W_l^\eta = W_n^\eta + \Delta t \left[+\frac{\tan \lambda}{\Delta x} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} - \frac{1}{\Delta y} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + \nu \Delta W_n^\eta \right] \\ W_l^\zeta = W_n^\zeta + \Delta t \left[-\frac{1}{\Delta z} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} + \nu \Delta W_n^\zeta \right] \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

et la phase Eulérienne

$$W_l^j = W_n^j - \Delta t \left[\frac{\cos \lambda W_l^\xi}{\Delta x} \frac{\partial W_l^j}{\partial \xi} + \frac{W_l^\eta}{\Delta y} \frac{\partial W_l^j}{\partial \eta} + \frac{W_l^\zeta}{\Delta z} \frac{\partial W_l^j}{\partial \zeta} \right] \quad (\text{II.30})$$

Schéma "prédicteur-correcteur" La phase de prédiction est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} W_l^\xi = W_n^\xi + \Delta t \left[-\frac{\cos \lambda}{\Delta x} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \frac{\sin \lambda}{\Delta y} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} - \frac{\cos \lambda W_n^\xi}{\Delta x} \frac{\partial W_n^\xi}{\partial \xi} - \frac{W_n^\eta}{\Delta y} \frac{\partial W_n^\xi}{\partial \eta} - \frac{W_n^\zeta}{\Delta z} \frac{\partial W_n^\xi}{\partial \zeta} \right. \\ \left. + \nu \Delta W_n^\xi \right] \\ W_l^\eta = W_n^\eta + \Delta t \left[+\frac{\tan \lambda}{\Delta x} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} - \frac{1}{\Delta y} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} - \frac{\cos \lambda W_n^\xi}{\Delta x} \frac{\partial W_n^\eta}{\partial \xi} - \frac{W_n^\eta}{\Delta y} \frac{\partial W_n^\eta}{\partial \eta} - \frac{W_n^\zeta}{\Delta z} \frac{\partial W_n^\eta}{\partial \zeta} \right. \\ \left. + \nu \Delta W_n^\eta \right] \\ W_l^\zeta = W_n^\zeta + \Delta t \left[-\frac{1}{\Delta z} \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} - \frac{\cos \lambda W_n^\xi}{\Delta x} \frac{\partial W_n^\zeta}{\partial \xi} - \frac{W_n^\eta}{\Delta y} \frac{\partial W_n^\zeta}{\partial \eta} - \frac{W_n^\zeta}{\Delta z} \frac{\partial W_n^\zeta}{\partial \zeta} \right. \\ \left. + \nu \Delta W_n^\zeta \right] \end{array} \right. \quad (\text{II.31})$$

et pour la phase de correction

$$W_l^j = W_n^j + \frac{\Delta t}{2} \left\{ + \left[-\frac{\cos \lambda W_n^j}{\Delta x} \frac{\partial W_n^j}{\partial \xi} - \frac{W_n^\eta}{\Delta y} \frac{\partial W_n^j}{\partial \eta} - \frac{W_n^\zeta}{\Delta z} \frac{\partial W_n^j}{\partial \zeta} + \nu \Delta W_n^j \right] \right. \\ \left. - \left[-\frac{\cos \lambda W_l^\xi}{\Delta x} \frac{\partial W_l^j}{\partial \xi} - \frac{W_l^\eta}{\Delta y} \frac{\partial W_l^j}{\partial \eta} - \frac{W_l^\zeta}{\Delta z} \frac{\partial W_l^j}{\partial \zeta} + \nu \Delta W_l^j \right] \right\} \quad (\text{II.32})$$

II.2.5 Discrétisation spatiale

II.2.5.1 Opérateur divergence

Cas bidimensionnel L'opérateur divergence est exprimé au point pression $(i+1/2, j+1/2)$ et s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = \frac{\cos \lambda}{\Delta x} \bar{\bar{\delta}}_\xi W^\xi + \frac{1}{\Delta y} \bar{\bar{\delta}}_\eta W^\eta \quad (\text{II.33})$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\delta}}_\xi W^\xi &= \frac{1}{2} [W_{i+1,j+1}^\xi - W_{i,j+1}^\xi + W_{i+1,j}^\xi - W_{i,j}^\xi] \\ \bar{\bar{\delta}}_\eta W^\eta &= \frac{1}{2} [W_{i+1,j+1}^\eta - W_{i+1,j}^\eta + W_{i,j+1}^\eta - W_{i,j}^\eta] \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Cas

tridimensionnel L'opérateur divergence au point pression $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ est :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = \frac{\cos \lambda}{\Delta x} \overline{\overline{\delta}}_{\xi} W^{\xi} + \frac{1}{\Delta y} \overline{\overline{\delta}}_{\eta} W^{\eta} + \frac{1}{\Delta z} \overline{\overline{\delta}}_{\zeta} W^{\zeta} \quad (\text{II.35})$$

où

$$\overline{\overline{\delta}}_{\xi} W^{\xi} = \frac{1}{4} \left[W_{i+1,j+1,k+1}^{\xi} - W_{i,j+1,k+1}^{\xi} + W_{i+1,j,k+1}^{\xi} - W_{i,j,k+1}^{\xi} \right. \\ \left. + W_{i+1,j+1,k}^{\xi} - W_{i,j+1,k}^{\xi} + W_{i+1,j,k}^{\xi} - W_{i,j,k}^{\xi} \right] \quad (\text{II.36})$$

$$\overline{\overline{\delta}}_{\eta} W^{\eta} = \frac{1}{4} \left[W_{i+1,j+1,k+1}^{\eta} - W_{i+1,j,k+1}^{\eta} + W_{i,j+1,k+1}^{\eta} - W_{i,j,k+1}^{\eta} \right. \\ \left. + W_{i+1,j+1,k}^{\zeta} - W_{i+1,j,k}^{\zeta} + W_{i,j+1,k}^{\zeta} - W_{i,j,k}^{\zeta} \right] \quad (\text{II.37})$$

$$\overline{\overline{\delta}}_{\zeta} W^{\zeta} = \frac{1}{4} \left[W_{i+1,j+1,k+1}^{\zeta} - W_{i+1,j+1,k}^{\zeta} + W_{i,j+1,k+1}^{\zeta} - W_{i,j+1,k}^{\zeta} \right. \\ \left. + W_{i+1,j,k+1}^{\zeta} - W_{i+1,j,k}^{\zeta} + W_{i,j,k+1}^{\zeta} - W_{i,j,k}^{\zeta} \right] \quad (\text{II.38})$$

II.2.5.2 Opérateur gradient

Chacun des termes du gradient de pression est calculé au point vitesse (i, j) de manière analogue à celle utilisée pour la divergence

Cas bidimensionnel

$$\begin{cases} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} = \overline{\overline{\delta}}_{\xi} p \\ \frac{\partial p^*}{\partial \eta} = \overline{\overline{\delta}}_{\eta} p \end{cases}$$

avec

$$\overline{\overline{\delta}}_{\xi} p = \frac{1}{2} [p_{i+1/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j+1/2} + p_{i+1/2,j-1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}] \quad (\text{II.39})$$

$$\overline{\overline{\delta}}_{\eta} p = \frac{1}{2} [p_{i+1/2,j+1/2} - p_{i+1/2,j-1/2} + p_{i-1/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}] \quad (\text{II.40})$$

Cas tridimensionnel

$$\begin{cases} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} = \overline{\overline{\delta}}_{\xi} p^* \\ \frac{\partial p^*}{\partial \eta} = \overline{\overline{\delta}}_{\eta} p^* \\ \frac{\partial p^*}{\partial \zeta} = \overline{\overline{\delta}}_{\zeta} p^* \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\delta}}_{\xi} p = \frac{1}{4} \left[\right. & +p_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} - p_{i-1/2, j+1/2, k+1/2} \\ & +p_{i+1/2, j-1/2, k+1/2} - p_{i-1/2, j-1/2, k+1/2} \\ & +p_{i+1/2, j+1/2, k-1/2} - p_{i-1/2, j+1/2, k-1/2} \\ & \left. +p_{i+1/2, j-1/2, k-1/2} - p_{i-1/2, j-1/2, k-1/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\delta}}_{\eta} p = \frac{1}{4} \left[\right. & +p_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} - p_{i+1/2, j-1/2, k+1/2} \\ & +p_{i-1/2, j+1/2, k+1/2} - p_{i-1/2, j-1/2, k+1/2} \\ & +p_{i+1/2, j+1/2, k-1/2} - p_{i+1/2, j-1/2, k-1/2} \\ & \left. +p_{i-1/2, j+1/2, k-1/2} - p_{i-1/2, j-1/2, k-1/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\delta}}_{\zeta} p = \frac{1}{4} \left[\right. & +p_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} - p_{i+1/2, j+1/2, k-1/2} \\ & +p_{i-1/2, j+1/2, k+1/2} - p_{i-1/2, j+1/2, k-1/2} \\ & +p_{i+1/2, j-1/2, k+1/2} - p_{i+1/2, j-1/2, k-1/2} \\ & \left. +p_{i-1/2, j-1/2, k+1/2} - p_{i-1/2, j-1/2, k-1/2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

II.2.5.3 Opérateur laplacien

Le laplacien de p^* est exprimé sur le maillage pression,

$$\Delta p^* = \frac{1}{\Delta x^2} \delta_{\xi}^2 p^* + \frac{\sec^2 \lambda}{\Delta y^2} \delta_{\eta}^2 p^* - 2 \frac{\tan \lambda}{\Delta x \Delta y} \delta_{\xi \eta} p^* + \frac{1}{\Delta z^2} \delta_{\zeta}^2 p^* \quad (\text{II.44})$$

Au point pression $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ on a :

$$\begin{aligned} \delta_{\xi}^2 p &= p_{i-1/2, j+1/2, k+1/2} - 2 \cdot p_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} + p_{i+3/2, j+1/2, k+1/2} \\ \delta_{\eta}^2 p &= p_{i+1/2, j-1/2, k+1/2} - 2 \cdot p_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} + p_{i+1/2, j+3/2, k+1/2} \\ \delta_{\zeta}^2 p &= p_{i+1/2, j+1/2, k-1/2} - 2 \cdot p_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} + p_{i+1/2, j+1/2, k+3/2} \\ \delta_{\xi \eta} p &= p_{i+3/2, j+3/2, k+1/2} - p_{i+3/2, j-1/2, k+1/2} - p_{i-1/2, j+3/2, k+1/2} + p_{i-1/2, j-1/2, k+1/2} \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

L'expression reste valable, sous forme réduite aux indices i, j , lorsque l'on se restreint à une étude bidimensionnelle.

L'opérateur de Laplace ainsi formulé est du second ordre en espace. Il est utilisé de manière analogue sur le maillage vitesse pour le calcul des tensions visqueuses.

II.2.5.4 Expression du terme de convection.

Formulation. Le schéma de convection est établi à partir de l'équation de convection d'un scalaire passif u exprimée dans un repère cartésien. La convection s'effectue selon le vecteur $\vec{W}_o(u_o, v_o, w_o)$ maintenu constant.

L'équation de convection a la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_o \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v_o \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w_o \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.46})$$

l'opérateur de dérivée partielle par rapport au temps est décomposé au sens de Taylor jusqu'à l'ordre deux :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Theta(\Delta t^3) \quad (\text{II.47})$$

On cherche l'expression du terme de diffusion numérique qu'il convient d'introduire pour obtenir un schéma convectif stable d'ordre deux en espace.

L'équation II.46 est dérivée par rapport au temps,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[u_o \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v_o \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w_o \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (\text{II.48})$$

afin de faire apparaître une nouvelle expression de la dérivée seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[-u_o \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad -v_o \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad -w_o \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \quad (\text{II.49})$$

De (II.46) on déduit l'expression de $\frac{\partial u}{\partial t}$ en fonction des variables d'espace et on la substitue dans l'expression précédente.

Soit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & + u_o \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(u_o \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v_o \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w_o \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & + v_o \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(u_o \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v_o \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w_o \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & + w_o \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(u_o \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v_o \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w_o \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

On injecte l'expression précédente dans (II.47) et on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = & + u_o \cdot \left[-\frac{\partial u}{\partial x} + u_o \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v_o \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + w_o \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right] \\ & + v_o \cdot \left[-\frac{\partial u}{\partial y} + u_o \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + v_o \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + w_o \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right] \\ & + w_o \cdot \left[-\frac{\partial u}{\partial z} + u_o \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + v_o \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + w_o \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

On introduit les termes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ainsi que $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \sigma_{z_0}$, ces termes sont homogènes des nombres de Courant selon chacune des directions de l'espace et

$$\begin{cases} \sigma_x = \Delta t. \frac{u_0}{\Delta x} \\ \sigma_y = \Delta t. \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \sigma_z = \Delta t. \frac{w_0}{\Delta z} \end{cases}$$

ce qui réduit (II.52) à

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = & + \sigma_x \cdot \left[-\bar{\delta}_x u + \sigma_{x_0} \cdot \delta_x^2 u + \sigma_{y_0} \cdot \delta_{xy} u + \sigma_{z_0} \cdot \delta_{xz} u \right] \\ & + \sigma_y \cdot \left[-\bar{\delta}_y u + \sigma_{y_0} \cdot \delta_y^2 u + \sigma_{x_0} \cdot \delta_{yx} u + \sigma_{z_0} \cdot \delta_{yz} u \right] \\ & + \sigma_z \cdot \left[-\bar{\delta}_z u + \sigma_{z_0} \cdot \delta_z^2 u + \sigma_{x_0} \cdot \delta_{zx} u + \sigma_{y_0} \cdot \delta_{zy} u \right] \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

où les opérateurs $\bar{\delta}_i, \delta_i^2$ et δ_{ij} symbolisent des opérateurs de différences finies :

$$\begin{cases} \bar{\delta}_i \cdot u = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\ \delta_i^2 \cdot u = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \\ \delta_{ij} \cdot u = u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1} \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

et où

$$\sigma_{j_0} = \frac{1}{2} \cdot \text{signe}(\sigma_j) \cdot |\sigma_j| \quad (\text{II.54})$$

Introduction d'un décalage. On pose

$$\sigma_{j_0} = \frac{1}{2} \cdot \text{signe}(\sigma_j) \cdot |\sigma_j|^\gamma \quad (\text{II.55})$$

où σ_j sont les fractions de mailles parcourues par la particule et où γ est un exposant proche de 1 tel que à très faible vitesse, il subsiste un léger décalage amont.

Le schéma est ensuite écrit dans la base locale.

II.2.5.5 Termes de convection dans la base locale

La phase de convection dans $(0, \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ prend la forme suivante:

$$\begin{cases} W_{n+1}^j = W_l^j + \sigma_\xi [-\bar{\delta}_\xi W_l^j + \sigma_{\xi_0} \cdot \delta_\xi^2 W_l^j + \sigma_{\eta_0} \delta_{\xi\eta} W_l^j + \sigma_{\zeta_0} \delta_{\xi\zeta} W_l^j] \\ + \sigma_\eta [-\bar{\delta}_\eta W_l^j + \sigma_{\eta_0} \cdot \delta_\eta^2 W_l^j + \sigma_{\xi_0} \delta_{\xi\eta} W_l^j + \sigma_{\zeta_0} \delta_{\eta\zeta} W_l^j] \\ + \sigma_\zeta [-\bar{\delta}_\zeta W_l^j + \sigma_{\zeta_0} \cdot \delta_\zeta^2 W_l^j + \sigma_{\xi_0} \delta_{\xi\zeta} W_l^j + \sigma_{\eta_0} \delta_{\eta\zeta} W_l^j] \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\xi = \frac{\Delta t \cdot \cos \lambda \cdot W^\xi}{\Delta x} \text{ et } \sigma_{\xi_0} = \frac{1}{2} \cdot \text{signe}(\sigma_\xi) \cdot |\sigma_\xi|^\gamma \\ \sigma_\eta = \frac{\Delta t \cdot W^\eta}{\Delta y} \\ \sigma_\zeta = \frac{\Delta t \cdot W^\zeta}{\Delta z} \end{array} \right. \quad (\text{II.57})$$

Nous présentons par la suite quelques cas de transport d'une fonction simple. On fait une étude de comportement en fonction du nombre de courant σ et du coefficient γ qui introduit la diffusion numérique dans les trois directions de l'espace.

II.2.5.6 Convection d'un scalaire

L'étude a été menée sur un domaine cubique. Un scalaire est transporté dans le domaine selon une direction que l'on impose par le vecteur $\vec{W}_o(u_o, v_o, w_o)$.

Le nombre de Courant σ est pris inférieur à l'unité.

$$\sigma = \frac{\Delta t}{\min\left(\frac{\Delta x}{u_o}, \frac{\Delta y}{v_o}, \frac{\Delta z}{w_o}\right)} \quad (\text{II.58})$$

On applique le schéma à des fonctions scalaires discrétisées sur 20 mailles. Les essais sont menés pour des longueurs d'onde de 10 et 20 mailles. Le transport 2D et le transport 3D sont testés sur des fonctions découlant d'un produit de fonctions à une seule variable.

Dans le cas de la convection suivant x , on compare (annexes C.1,C.2,C.3 ,C.4,C.5,C.6,C.7,C.8) le comportement du schéma lorsque à la fois le nombre de courant σ et l'exposant γ varient. Lorsque $\gamma = 0$ le schéma se comporte comme un schéma aux dérivées amont du premier ordre en espace. Dans ces conditions le schéma est fortement dissipatif et tout particulièrement lorsque les longueurs d'onde sont égales ou inférieures à 10 mailles (annexes C.2,C.4). Lorsque $\gamma = 0,99$ le schéma transporte sans dissipation les longueurs d'onde de 20 mailles (annexes C.1,C.3) . Les longueurs d'onde de 10 mailles sont également convectées sans dissipation. On remarque toutefois une légère oscillation qui suit le signal (annexes C.2,C.4). Aucune perte de stabilité n'a été constatée.

Au cours de l'étude bidimensionnelle seules des longueurs d'ondes de 20 mailles sont testées (annexes C.5,C.6,C.7). A nombre de courant fixé, la limite de stabilité du schéma est plus vite atteinte pour $\gamma = 0$ (annexes C.6) que pour $\gamma = 0,9$. La limite de stabilité est de $\sigma = 0,5$ pour $\gamma = 0$ et $\sigma = 0,6$ pour $\gamma = 0,9$.

L'étude tridimensionnelle confirme cette tendance (annexes C.8). Une étude de stabilité, qui permet de cerner les limites d'utilisation du schéma de convection, s'impose.

II.2.6 Stabilité du terme de transport pris séparément

On développe ici une étude de stabilité au sens de Von Neumann à partir d'une décomposition spectrale de u (une composante du vecteur vitesse par exemple).

On pose :

$$u_{ijk}^n = \bar{u}^n \cdot e^{-I\omega t} \cdot e^{I\omega_x x} \cdot e^{I\omega_y y} \cdot e^{I\omega_z z} \quad (\text{II.59})$$

L'expression est introduite dans l'expression II.53 du schéma de transport. Après quelques simplifications on obtient l'expression réduite suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}^{n+1}}{\bar{u}^n} - 1 &= \sigma_x \cdot \left[\left(\frac{e^{-I\omega_x x} - e^{I\omega_x x}}{2} \right) \right. \\ &+ \sigma_{x0} (e^{I\omega_x x} + e^{-I\omega_x x} - 2) \\ &+ \frac{\sigma_{y0}}{4} (e^{-I\omega_x x - I\omega_y y} - e^{-I\omega_x x + I\omega_y y} - e^{I\omega_x x - I\omega_y y} + e^{+I\omega_x x + I\omega_y y}) \\ &+ \frac{\sigma_{z0}}{4} (e^{-I\omega_x x - I\omega_z z} - e^{-I\omega_x x + I\omega_z z} - e^{I\omega_x x - I\omega_z z} + e^{+I\omega_x x + I\omega_z z}) \\ &+ \sigma_y \cdot \left[\left(\frac{e^{-I\omega_y y} - e^{I\omega_y y}}{2} \right) \right. \\ &+ \sigma_{y0} (e^{I\omega_y y} + e^{-I\omega_y y} - 2) \\ &+ \frac{\sigma_{x0}}{4} (e^{-I\omega_x x - I\omega_y y} - e^{-I\omega_x x + I\omega_y y} - e^{I\omega_x x - I\omega_y y} + e^{+I\omega_x x + I\omega_y y}) \\ &+ \frac{\sigma_{z0}}{4} (e^{-I\omega_y y - I\omega_z z} - e^{-I\omega_y y + I\omega_z z} - e^{I\omega_y y - I\omega_z z} + e^{+I\omega_y y + I\omega_z z}) \\ &+ \sigma_z \cdot \left[\left(\frac{e^{-I\omega_z z} - e^{I\omega_z z}}{2} \right) \right. \\ &+ \sigma_{z0} (e^{I\omega_z z} + e^{-I\omega_z z} - 2) \\ &+ \frac{\sigma_{x0}}{4} (e^{-I\omega_x x - I\omega_z z} - e^{-I\omega_x x + I\omega_z z} - e^{I\omega_x x - I\omega_z z} + e^{+I\omega_x x + I\omega_z z}) \\ &+ \frac{\sigma_{y0}}{4} (e^{-I\omega_y y - I\omega_z z} - e^{-I\omega_y y + I\omega_z z} - e^{I\omega_y y - I\omega_z z} + e^{+I\omega_y y + I\omega_z z}) \\ &\left. \left. \right] \right] \quad (\text{II.60}) \end{aligned}$$

soit,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}^{n+1}}{\bar{u}^n} - 1 &= \sigma_x \cdot \{ -I \sin(\omega_x x) + \sigma_{x0} 2 \cdot [\cos(\omega_x x) - 1] \\ &+ \frac{\sigma_{y0}}{2} [\cos(\omega_x x + \omega_y y) - \cos(\omega_x x - \omega_y y)] \\ &+ \frac{\sigma_{z0}}{2} [\cos(\omega_x x + \omega_z z) - \cos(\omega_x x - \omega_z z)] \\ &+ \sigma_y \cdot \{ -I \sin(\omega_y y) + \sigma_{y0} 2 \cdot [\cos(\omega_y y) - 1] \} \\ &+ \frac{\sigma_{x0}}{2} [\cos(\omega_x x + \omega_y y) - \cos(\omega_x x - \omega_y y)] \\ &+ \frac{\sigma_{z0}}{2} [\cos(\omega_y y + \omega_z z) - \cos(\omega_y y - \omega_z z)] \\ &+ \sigma_z \cdot \{ -I \sin(\omega_z z) + \sigma_{z0} 2 \cdot [\cos(\omega_z z) - 1] \} \\ &+ \frac{\sigma_{x0}}{2} [\cos(\omega_x x + \omega_z z) - \cos(\omega_x x - \omega_z z)] \\ &+ \frac{\sigma_{y0}}{2} [\cos(\omega_y y + \omega_z z) - \cos(\omega_y y - \omega_z z)] \} \quad (\text{II.61}) \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{u}^{n+1}}{\bar{u}^n} - 1 = & \sigma_x \cdot \{-I \sin(\omega_x x) + \sigma_{xo} \cdot 2 \cdot [\cos(\omega_x x) - 1] \\
 & + \frac{\sigma_{yo}}{2} [\sin(\omega_x x) \cdot \sin(\omega_y y)] \\
 & + \frac{\sigma_{zo}}{2} [\sin(\omega_x x) \cdot \sin(\omega_z z)]\} \\
 & \sigma_y \cdot \{-I \sin(\omega_y y) + \sigma_{yo} \cdot 2 \cdot [\cos(\omega_y y) - 1] \\
 & + \frac{\sigma_{xo}}{2} [\sin(\omega_x x) \cdot \sin(\omega_y y)] \\
 & + \frac{\sigma_{zo}}{2} [\sin(\omega_y y) \cdot \sin(\omega_z z)]\} \\
 & \sigma_z \cdot \{-I \sin(\omega_z z) + \sigma_{zo} \cdot 2 \cdot [\cos(\omega_z z) - 1] \\
 & + \frac{\sigma_{xo}}{2} [\sin(\omega_x x) \cdot \sin(\omega_z z)] \\
 & + \frac{\sigma_{yo}}{2} [\sin(\omega_y y) \cdot \sin(\omega_z z)]\}
 \end{aligned}
 \tag{II.62}$$

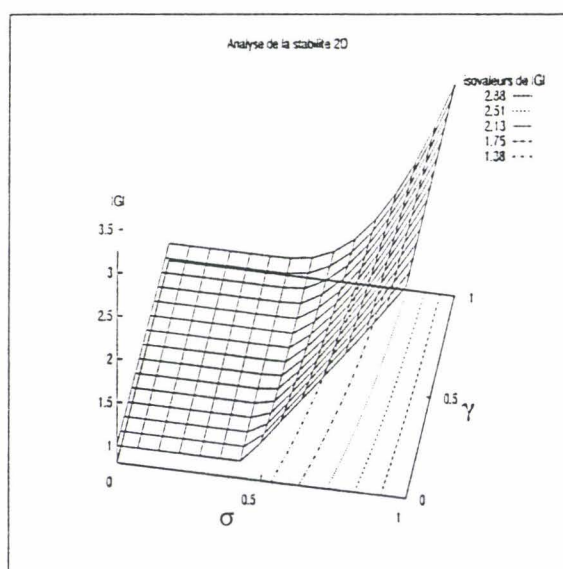


FIG. II.3 - Diagramme de stabilité 2D

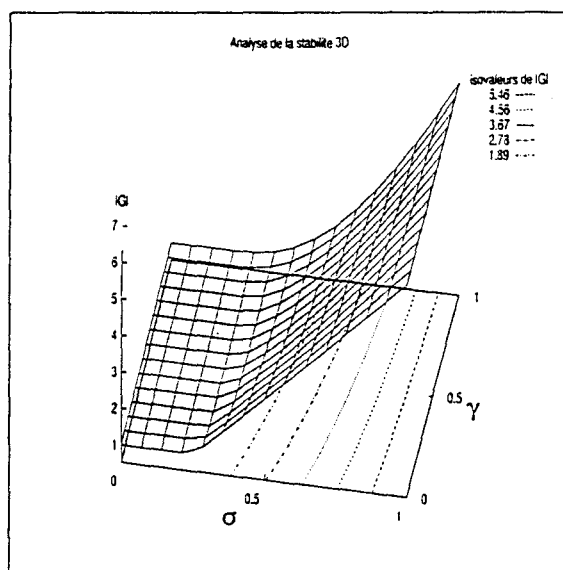


FIG. II.4 - Diagramme de stabilité 3D

On obtient finalement l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{u}^{n+1}}{\bar{u}^n} &= -I. \{ \sigma_x \cdot \sin(\omega_x x) + \sigma_y \cdot \sin(\omega_y y) + \sigma_z \cdot \sin(\omega_z z) \} \\
 &+ \{ 1 + 2.(\sigma_x \sigma_{x0} [\cos(\omega_x x) - 1] + \sigma_y \sigma_{y0} [\cos(\omega_y y) - 1] + \sigma_z \sigma_{z0} [\cos(\omega_z z) - 1]) \} \\
 &- \sin(\omega_x x) \cdot \sin(\omega_y y) [\sigma_x \sigma_{y0} + \sigma_y \sigma_{x0}] - \sin(\omega_x x) \cdot \sin(\omega_z z) [\sigma_x \sigma_{z0} + \sigma_z \sigma_{x0}] \\
 &- \sin(\omega_y y) \cdot \sin(\omega_z z) [\sigma_y \sigma_{z0} + \sigma_z \sigma_{y0}] \} \quad (II.63)
 \end{aligned}$$

On note

$$G = \frac{\bar{u}^{n+1}}{\bar{u}^n} \quad (II.64)$$

Le schéma est stable au sens de Neumann si

$$|G|^2 \leq 1 \quad (II.65)$$

Nous proposons d'établir le domaine de stabilité du schéma de convection lorsque

$$\sigma = \frac{\Delta t}{\min(\frac{\Delta x}{u_0}, \frac{\Delta y}{v_0}, \frac{\Delta z}{w_0})} \quad (II.66)$$

L'étude consiste à étudier le domaine spectral $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ des valeurs maximales de G et à reporter ces valeurs dans un diagramme $|G| = f(\sigma, \gamma)$ (voir II.3, II.4).

Les résultats obtenus sont cohérents avec les essais portant sur la convection d'un scalaire.

Les limites de stabilité déjà perçues au cours des essais de convection 2D sont retrouvées sur le diagramme II.3. Notamment, un exposant $\gamma = 0$ rend le schéma instable au sens

de Neumann pour des valeurs de σ supérieures à 0,4. Lorsque les essais associés aux figures (annexes C.6, C.7) sont examinés, on vérifie qu'ils correspondent à des cas instables. Le tracé des iso-valeurs de $|G|$ (fig II.3 et II.4) confirme les premières observations. Avec ces deux diagrammes on dispose du domaine de stabilité du terme de transport lorsque le pas de temps est calculé selon II.66.

II.2.7 Conditions aux limites

II.2.7.1 Parois

Vitesse Il y a adhérence sur les parois et sur les aubages où la vitesse est nulle. Rappelons que le schéma n'inclut ni modèle de turbulence ni calcul de couches limites et que le maillage n'est pas raffiné aux parois.

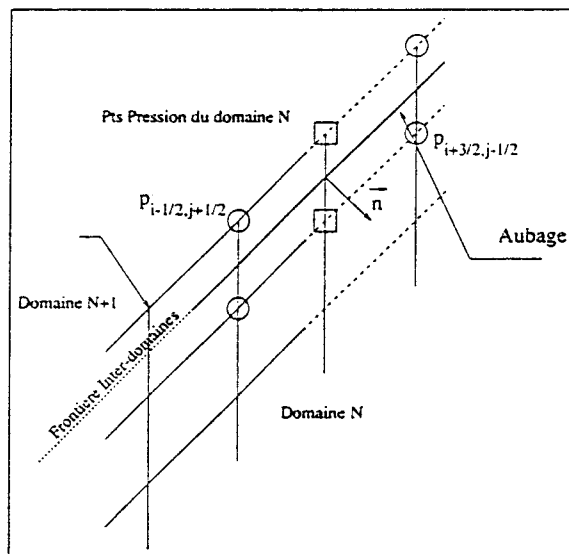


FIG. II.5 - *Discrétisation de la condition de Neumann appliquée à la paroi sur la pression.*

Pression La pression est régie par une condition de dérivée normale nulle.

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = 0 \quad (\text{II.67})$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{e}^{\eta}}{\|\vec{e}^{\eta}\|} \quad (\text{II.68})$$

la dérivée normale est

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = \vec{\nabla} p^* \cdot \frac{\vec{e}^{\eta}}{\|\vec{e}^{\eta}\|} \quad (\text{II.69})$$

soit pour la condition à la limite :

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\frac{\sin \lambda}{\Delta x} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \frac{1}{\Delta y \cos \lambda} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{II.70})$$

Dans cette application les parois (aubages) sont dans la direction des lignes de nœuds ξ . Comme le maillage pression est décalé du maillage vitesse (support du domaine physique), on exprime la condition de Neumann sur la pression aux points de chevauchement (fig. II.5).

La discrétisation est réalisée sur six points, avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(p_{i+3/2,j+1/2} - p_{i-1/2,j+1/2} + p_{i+3/2,j-1/2} - p_{i-1/2,j-1/2}) \\ \frac{\partial p^*}{\partial \eta} = (p_{i+1/2,j+1/2} - p_{i+1/2,j-1/2}) \end{cases} \quad (\text{II.71})$$

II.2.7.2 Condition d'Entrée-Sortie

Vitesse A l'entrée du domaine le champ de vitesse est forcé à une valeur uniforme sur toute la hauteur du maillage.

A la sortie la vitesse est évaluée par convection. Un traitement particulier est cependant appliqué lorsque, au passage d'un tourbillon intense la vitesse est négative à la sortie. La vitesse est alors imposée nulle c'est à dire : $\vec{W}(\text{sortie}) = \max(0, \vec{W}(\text{calculée}))$.

Pression D'une manière générale la pression est définie à une constante près. On impose en sortie une pression statique uniformément nulle. Cela suppose que la distance aval est suffisamment grande pour que cette condition ne constitue pas une gêne (ou un obstacle) pour la formation de la cellule.

En entrée, la valeur de la pression est déterminée de façon à maintenir un débit global constant au cours du temps. On introduit pour cela une correction de pression évaluée à partir du débit global calculé à l'itération précédente.

L'idée est de corriger la pression au moyen d'une fonction harmonique ψ_0 de gradient unitaire suivant la direction axiale à l'entrée.

On cherche à quantifier la fluctuation de débit due à cette correction appliquée pendant le laps de temps Δt . Pour cela l'équation de Navier Stokes selon l'axe x du domaine s'écrit :

$$\frac{d(U + u)}{dt} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \cdot \Delta(U + u) \quad (\text{II.72})$$

où u est la fluctuation de la composante axiale vitesse et où p^* a la forme

$$p^* = \bar{p} + \chi \psi_o, \quad \chi \text{ est l'amplitude de la correction.} \quad (\text{II.73})$$

En l'absence de fluctuation l'équation II.72 est supposée vérifiée :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \cdot \Delta U \quad (\text{II.74})$$

ce qui permet de déduire que

$$\frac{du}{dt} = -\chi \frac{\partial \psi_o}{\partial x} + \nu \cdot \Delta u \quad (\text{II.75})$$

A l'entrée on peut supposer que la perturbation de vitesse u est à gradient nul, ce qui rend le dernier terme de (II.75) nul. Il reste

$$\frac{du}{dt} = -\chi \frac{\partial \psi_o}{\partial x} \quad (\text{II.76})$$

avec à l'entrée

$$\frac{\partial \psi_o}{\partial x} = 1 \quad (\text{II.77})$$

La variation de débit est donc :

$$\frac{dQ}{dt} = -\chi \cdot S \quad (\text{II.78})$$

où S est la surface débitante.

On en déduit l'amplitude χ .

$$\chi = \frac{Q^n - Q^{n+1}}{S \Delta t} \quad (\text{II.79})$$

où Q^n devrait être le débit imposé Q_o .

En fait on ne peut donner qu'une tendance. Aussi, dans la pratique on fait intervenir à la fois un coefficient d'amortissement $\bar{\beta}$ et un coefficient de relaxation $\bar{\alpha}$ tel que

$$\bar{\chi} = \bar{\alpha} \cdot \frac{Q^n - Q_o - \bar{\beta}(Q^n - Q^{n-1})}{S \Delta t} \quad (\text{II.80})$$

II.2.8 Test sur la correction de débit.

Dans ce test, la pression dans chacun des canaux est corrigée avec la même amplitude. Nous avons étudié la réponse du modèle à une perturbation de débit sur un seul canal interaube. On représente (Fig II.6) l'évolution du débit au cours du temps pour des valeurs différentes de $\bar{\beta}$ et $\bar{\alpha}$ (voir TAB II.1) en fonction du nombre d'itérations.

Il est indéniable qu'un coefficient d'amortissement supérieur à l'unité permet de stabiliser très rapidement le débit à sa valeur nominale. Dans la pratique nous avons préféré laisser le débit s'établir plus progressivement et avons utilisé un coefficient $\bar{\beta}$ de 0,6.

| Essais | $\bar{\alpha}$ | $\bar{\beta}$ |
|--------|----------------|---------------|
| 1 | 0,4 | 0,2 |
| 2 | 0,4 | 0,4 |
| 3 | 0,4 | 0,6 |
| 4 | 0,4 | 0,8 |
| 5 | 0,4 | 1,0 |
| 6 | 0,4 | 1,2 |
| 7 | 0,6 | 1,2 |

TAB. II.1 - Classifications de différents essais selon les valeurs de $\bar{\beta}$ et $\bar{\alpha}$. Le maillage est de 61×21 mailles.

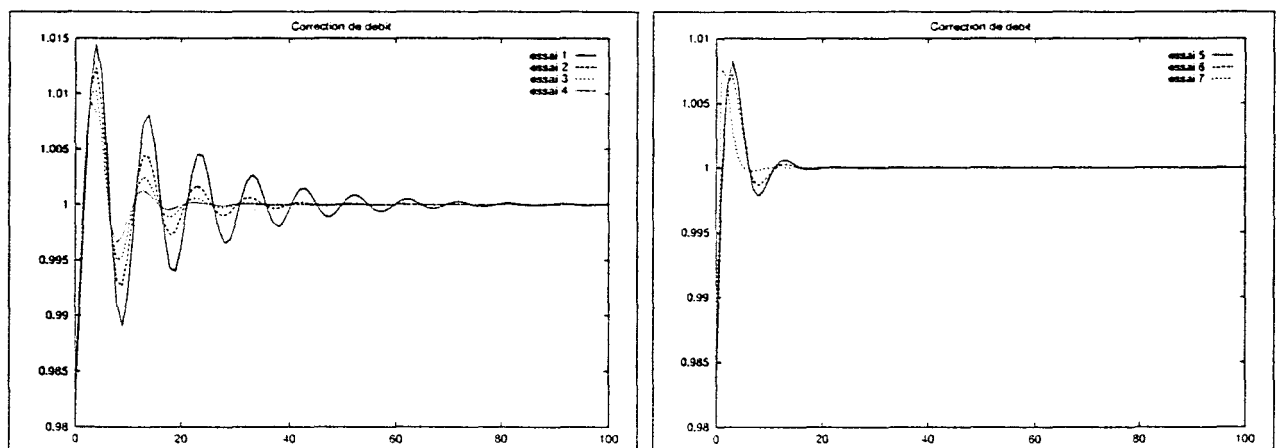


FIG. II.6 - Evolution du débit dans un canal interaube.

Appliqué à la roue complète, avec perturbation initiale, on obtient des résultats similaires. On peut constater fig.(II.7) que le débit se stabilise autour de la valeur nominale. Il reste néanmoins une fluctuation parasite analogue à un bruit blanc. Cette fluctuation est très faible en amplitude.

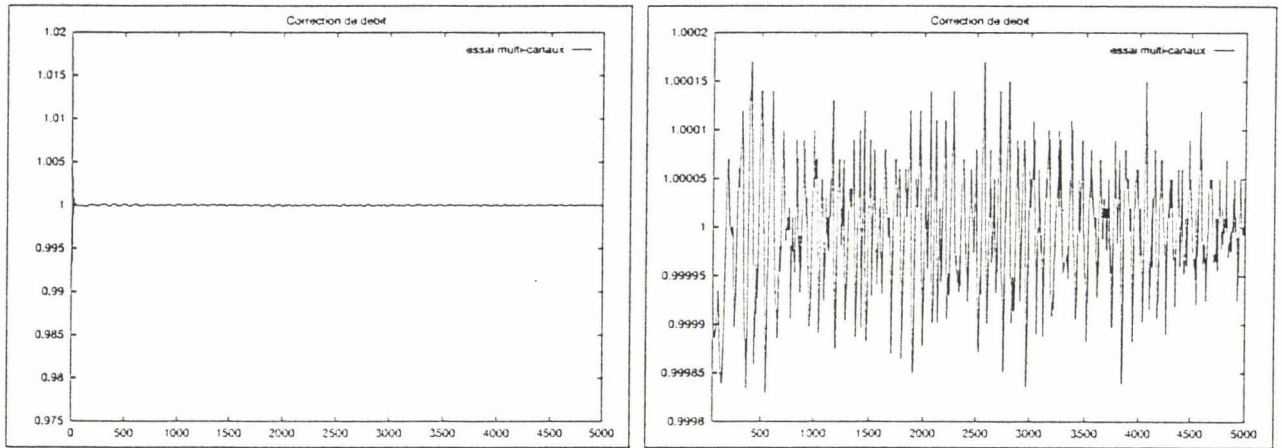


FIG. II.7 - Evolution du débit dans le cas d'un domaine multi-canaux

II.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons présenté les deux schémas mis en œuvre dans ce travail. Le premier schéma est du type A.L.E et est du premier ordre en temps. Il est utilisé pour la résolution 2D et sa viscosité numérique est compensée par un raffinement du maillage. Le second schéma "Prédicteur-correcteur" plus précis est destiné à la résolution 3D.

Les équations ont été développées dans un repère dont l'inclinaison est celle du calage des plaques planes qui simulent les aubages. Chaque étape du calcul est réalisée par des opérateurs du second ordre en espace.

Une étude de la stabilité du schéma pour la convection est menée. On délimite à la fois le coefficient γ qui régule la diffusion numérique du schéma et le domaine de stabilité (nombre de Courant).

Enfin, la prise en compte des conditions aux limites permet de fermer le problème. En dehors des conditions aux limites classiques, on développe une technique de correction dynamique de la pression qui assure, à chaque pas de temps, une conservation du débit nominal imposé.

Le chapitre suivant est entièrement consacré à la résolution locale et multi-domaine de la pression.

Chapitre III

RESOLUTION DE LA PRESSION

La résolution directe d'un problème de Poisson (III.1) est une opération très coûteuse envisageable seulement sur des géométries bidimensionnelles simples. Lorsque la géométrie devient plus complexe, une grille d'aubes par exemple, la largeur de bande du système linéaire augmente et pénalise fortement le temps de calcul.

$$\begin{cases} Lp = s & \text{dans } \mathcal{D} \\ p = p_0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ libre} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ solide} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

La résolution de ce problème, sur un domaine bidimensionnel et à fortiori sur un domaine tridimensionnel est, pour cela, réalisée au moyen de méthodes itératives ou au moyen de méthodes spectrales.

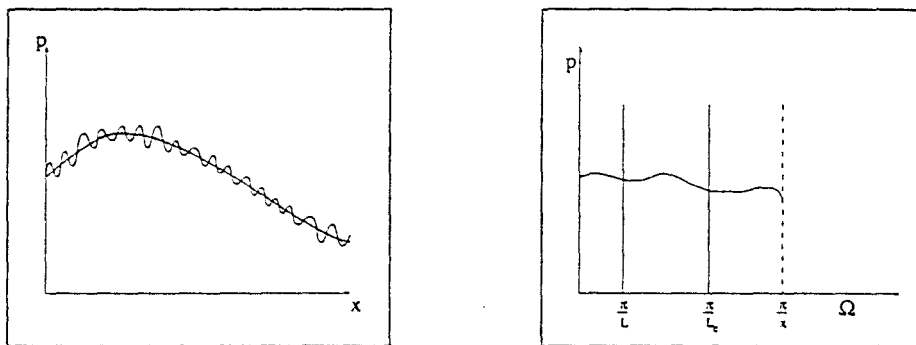


FIG. III.1 - Séparations grandes échelles, petites échelles

Des techniques itératives telles: la méthode ADI (Alternating Direction Implicit), la méthode SOR, utilisent les propriétés de l'opérateur de Laplace, que l'on suppose être celles de l'opérateur discrétisé. Ces techniques nécessitent un maillage structuré et leur vitesse de convergence est fortement liée à la finesse de celui-ci. Elles convergent d'autant plus rapidement que le second membre s (III.1) ne présente que des singularités très localisées, ou que les échelles sont petites en regard du domaine, les plus grandes échelles convergent lentement.

Les méthodes spectrales résolvent, en revanche, exactement le problème discret dans la mesure où la troncature en longueur d'onde correspond effectivement à (2 fois) la taille de la maille. Si la troncature est plus forte la précision du résultat dépend, cette fois, de la richesse de la base dans laquelle la description spectrale est faite.

Nous avons choisi de développer une méthode qui résout rapidement le problème de Poisson en associant les avantages de la méthode spectrale et de la méthode itérative et en attribuant à chacune d'entre elles la résolution d'une partie du spectre (figure III.1). La méthode spectrale résout exactement les grandes échelles. A l'issue de cette phase l'équation de Poisson est vérifiée pour toutes les longueurs d'ondes supérieures à une longueur d'onde de coupure L_c . Les fluctuations (irrégularités à longueurs d'ondes plus petites que la longueur d'onde de coupure) sont traitées par la méthode itérative.

La prise en compte de domaines complexes, non connexes, est réalisée au moyen d'une décomposition en sous-domaines en vue d'une parallélisation de la méthode. Le raccordement entre sous-domaines est réalisé par une technique analogue à celle utilisée pour l'équation locale : le raccordement des grandes échelles est complété par le raccordement des petites échelles.

Nous présentons dans une première partie la technique locale sur un domaine simple. La seconde partie est consacrée à la méthode de raccordement dans le cas d'un multi-domaine.

III.1 Résolution locale mono-domaine

III.1.1 Résolution spectrale des grandes échelles

III.1.1.1 Formulation.

La mise en œuvre des méthodes spectrales pour les équations de Navier Stokes suppose que l'on applique le principe de décomposition spectrale à l'ensemble des variables. Chacune d'entre elles est alors décrite dans une base de fonctions qui lui est propre. Le problème non-linéaire est alors formulé et résolu dans l'espace dual (FARCY et al [24], PINELLI [58], LECA et al [43]).

Dans notre cas la seule variable concernée est la pression p , mais les principes généraux restent identiques.

La méthodologie générale consiste à rechercher une description de p dans un sous espace \mathcal{H}_N de \mathcal{H} que l'on suppose être un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(,)_w$:

$$(f, g)_w = \int_{\mathcal{V}} fg \cdot w dV \quad f, g \in \mathcal{H} \quad (\text{III.2})$$

La restriction \mathcal{H}_N de \mathcal{H} est définie par une base de N fonctions ψ_i à nombre d'ondes limité telle que l'approximation p_N de p s'exprime par la relation suivante :

$$p_N = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i \quad (\text{III.3})$$

La détermination de p_N se ramène au calcul des coefficients a_i .

On appelle r_N le résidu :

$$r_N = L(p_N) - s \quad (\text{III.4})$$

Pour calculer les coefficients a_i on peut utiliser la méthode de Galerkin où s est décrit dans la même base que p . L'approximation p_N est donc obtenue en exprimant l'orthogonalité du résidu par rapport à la base ψ_i .

$$(r_N, \psi_k)_w = 0 \quad (\text{III.5})$$

L'inconvénient majeur de cette technique apparaît clairement : les fonctions ψ_i doivent vérifier les conditions aux limites du problème (III.1). GOTTLIEB et ORSAG [31] critiquent les différentes formes de décomposition : la décomposition en série de Fourier est bien adaptée aux problèmes comportant des périodicités spatiales selon certaines directions, la décomposition polynomiale (de Legendre ou de Tchebyshev) est préférable dans les cas non périodiques. L'association de ces deux types de décomposition est possible pour traiter les problèmes mixtes. Le choix est cependant assez limité et on ne peut traiter par cette méthode que des problèmes reposant sur des géométries relativement simples.

Une amélioration de la prise en compte des conditions aux limites consiste à introduire N_l contraintes linéaires imposées à p sur les frontières $\partial\mathcal{D}$. La relation (III.5) est alors appliquée uniquement aux $N - N_l$ premières fonctions. On parle, alors, de méthode Tau et on obtient une solution qui ne vérifie qu'approximativement les conditions aux limites.

Afin de se libérer des contraintes liées aux conditions aux limites nous approximations p et s par des sous-espaces distincts : \mathcal{H}_N , et \mathcal{H}_{N_p}

On cherche pour s une approximation telle que :

$$s_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i, \quad \varphi_i \in \mathcal{H}_N, \quad (\text{III.6})$$

et pour p :

$$p_N = \psi_0 + \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i \psi_i, \quad \psi_i \in \mathcal{H}_{N_p} \quad (\text{III.7})$$

Les éléments φ_i et ψ_i sont reliés via un problème de Poisson analogue à celui pour p mais avec des conditions aux limites homogènes.

soit :

$$\begin{cases} L\psi_i = \varphi_i, & \text{sur } \mathcal{D}, \text{ pour } i = 1, \dots, N \\ \psi_i = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ libre} \\ \frac{\partial\psi_i}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ solide} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

La fonction ψ_0 est une fonction harmonique dont le rôle est de prendre en compte les conditions aux limites d'entrée et de sortie (Débit). Elle vérifie les mêmes conditions aux limites que p .

$$\begin{cases} L\psi_0 = 0, & \text{sur } \mathcal{D} \\ \psi_0 = p_0, & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ libre} \\ \frac{\partial\psi_0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ solide} \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Afin de calculer les coefficients a_i on définit dans \mathcal{H}_N , le produit scalaire $(,)$:

$$(f, g) = \int_{\mathcal{V}} fg dV \quad f, g \in \mathcal{H}_N, \quad (\text{III.10})$$

On note r_N le résidu tel que :

$$r_N = s - s_N \quad (\text{III.11})$$

De l'égalité précédente, on déduit :

$$\sum_{i=1}^N a_i (\varphi_i, \varphi_k) + (r_N, \varphi_k) = (s, \varphi_k) \quad (\text{III.12})$$

La condition d'orthogonalité du résidu au sous-espace \mathcal{H}_N , s'exprime par :

$$(r_N, \varphi_k) = 0 \quad (\text{III.13})$$

ce qui conduit à

$$\sum_{i=1}^N a_i (\varphi_i, \varphi_k) = (s, \varphi_k) \quad (\text{III.14})$$

Il en découle la relation matricielle :

$$M_{ik} \cdot a_i = (s, \varphi_k) \quad (\text{III.15})$$

où $[M_{ik}]$ est une matrice inversible et de plus diagonale si la base est orthogonale. On peut en déduire les coefficients a_i .

$$a_i = M_{ik}^{-1} (s, \varphi_k) \quad (\text{III.16})$$

On note \tilde{p} l'erreur faite sur p :

$$p = p_N + \tilde{p} \quad (\text{III.17})$$

De la relation (III.13) on a déduit la relation (V.5) qui permet le calcul des coefficients a_i . Il nous manque une contrainte pour déterminer les \tilde{a}_i . On impose la formulation faible suivante:

$$(L\tilde{p} - r_N, \varphi_k) = 0 \quad (\text{III.18})$$

Ce qui implique compte tenu de (III.13):

$$(L\tilde{p}, \varphi_k) = 0 \quad (\text{III.19})$$

A partir de la l'équation de Poisson :

$$Lp = s, \quad (\text{III.20})$$

on déduit l'égalité suivante :

$$\sum_{i=1}^N \tilde{a}_i L\psi_i + L\tilde{p} = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i + r_N \quad (\text{III.21})$$

soit :

$$\sum_{i=1}^N \tilde{a}_i (L\psi_i, \varphi_k) + (L\tilde{p}, \varphi_k) = \sum_{i=1}^N a_i (\varphi_i, \varphi_k) + (r_N, \varphi_k), \quad (\text{III.22})$$

ce qui du fait de (III.18) conduit au système homogène :

$$\sum_{i=1}^N \tilde{a}_i (L\psi_i, \varphi_k) - \sum_{i=1}^N a_i (\varphi_i, \varphi_k) = 0 \quad (\text{III.23})$$

soit :

$$M_{ik} \cdot (\tilde{a}_i - a_i) = 0 \quad (\text{III.24})$$

D'où on déduit que

$$\tilde{a}_i - a_i = 0 \quad (\text{III.25})$$

Il suffit donc, une fois (III.8) résolue, de réaliser la projection de s dans la base de fonctions φ_i pour en déduire l'approximation des grandes échelles de p .

III.1.1.2 Résolution sur un maillage

La décomposition spectrale limitée à N fonctions constitue une première approximation (restriction). L'introduction d'une discrétisation en espace en constitue une seconde. Nous noterons \bar{p}_N l'approximation de p_N sur le maillage que l'on suppose structuré.

On introduit les variables (ξ, η, ζ) correspondant à la numérotation des nœuds des lignes de mailles et v qui varie sur $[0, 1]$ lorsque (ξ, η, ζ) varient respectivement : de 1 à n_ξ , de 1 à n_η , de 1 à n_ζ

Soit :

$$v(\xi) = \frac{\xi - 1}{n_\xi - 1}; v(\eta) = \frac{\eta - 1}{n_\eta - 1}; v(\zeta) = \frac{\zeta - 1}{n_\zeta - 1} \quad (\text{III.26})$$

On construit les fonctions $\bar{\varphi}_i$ à partir d'un produit de fonctions:

$$\bar{\varphi}_i = f_j(\xi).g_k(\eta).h_l(\zeta) \quad (\text{III.27})$$

Chacune des fonctions unidimensionnelles f, g, h , est définie à partir d'une fonction paramétrée Λ_n

$$\Lambda_n \begin{cases} \Lambda_1 = 1 \\ \Lambda_{2n} = \cos(m.2\pi v) & m = 1, \dots, M \\ \Lambda_{2n+1} = \sin(m.2\pi v) & m = 1, \dots, M \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

Cette définition des fonctions de base, à partir de la numérotation du maillage présente plusieurs avantages :

- Quel que soit le maillage : curviligne ou non curviligne, localement raffiné ou non raffiné , la matrice $[M_{ik}]^{-1}$ est diagonale.
- Par définition des fonctions Λ_n , la longueur d'onde de coupure s'exprime en terme de nombre de mailles. Le choix de la longueur d'onde de coupure est guidé par le souci d'optimiser le temps de calcul des deux phases : résolution des grandes échelles et résolution des petites échelles. Une longueur d'onde de deux mailles est une valeur limite pour laquelle la phase spectrale résout exactement le problème discrétisé. Cette solution suppose le stockage en mémoire d'un très grand nombre de fonctions ψ_i . Si au contraire cette longueur est trop grande la méthode de résolution donne une convergence lente de la méthode des singularités. Dans la pratique nous avons utilisé une demi-longueur de 10 mailles. La justification de ce choix est basée sur différents essais présentés dans le paragraphe concernant la résolution des petites échelles.
- Enfin, la finesse du maillage dans les zones de fort gradient est utilisée dans l'approximation spectrale.

En conclusion, la démarche que nous proposons est une variante des méthodes spectrales classiques. Elle permet de résoudre exactement toutes les longueurs d'onde supérieures à une longueur d'onde de coupure exprimée en nombre de mailles locales, et cela, sur un maillage curviligne structuré quelles que soient les conditions aux limites.

III.1.2 Résolution des petites échelles

Nous présentons, ici, deux méthodes itératives pour la résolution des petites échelles : la méthode des singularités tronquées et la méthode ADI.

Soit le problème :

$$\begin{cases} L\bar{p} = r & \text{dans } \mathcal{D} \\ \bar{p} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

La résolution de (III.29) est équivalente à celle de (III.30)

$$\begin{cases} Lp = s & \text{dans } \mathcal{D} \\ p = p_0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ libre} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ solide} \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Dans la suite de la présentation nous détaillons la technique de résolution en termes de pression puisqu'elle pourrait être utilisée seule (III.30), alors qu'il s'agit bien évidemment d'une correction de pression.

III.1.2.1 Méthode des singularités tronquées

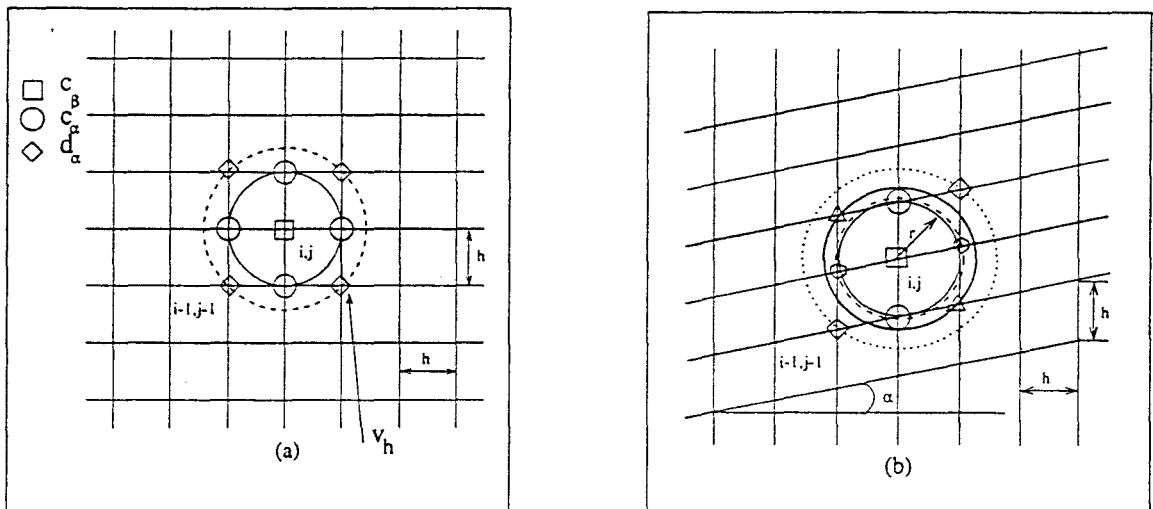


FIG. III.2 - Zones d'influence du point central



L'idée générale de la méthode est basée sur l'introduction de fonctions G , analogues à des fonctions de Green, qui répondent au problème suivant :

$$\begin{cases} L \left(G(x, y, z, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) \right) = \delta(x - \varsigma_1) \cdot \delta(y - \varsigma_2) \cdot \delta(z - \varsigma_3) & \text{dans } \mathcal{D} \\ G = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ libre} \\ \frac{\partial G}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ solide} \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

Par définition on a

$$\int f(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) \delta(x - \varsigma_1) \cdot \delta(y - \varsigma_2) \cdot \delta(z - \varsigma_3) d\varsigma_1 d\varsigma_2 d\varsigma_3 = f(x, y, z) \quad (\text{III.32})$$

Alors si

$$p(x, y, z) = \int G(x, y, z, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) \cdot s(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) d\varsigma_1 d\varsigma_2 d\varsigma_3 \quad (\text{III.33})$$

on a

$$Lp(x, y, z) = \int s(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) \cdot LG(x, y, z, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) d\varsigma_1 d\varsigma_2 d\varsigma_3 = s(x, y, z) \quad (\text{III.34})$$

On a introduit un nouveau problème : il faut désormais résoudre (III.31) pour obtenir $G(x, y, z, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3)$. Il existe des cas où l'on peut trouver des solutions analytiques mais uniquement pour des problèmes simples (ROACH [60]). La résolution numérique sur un domaine discret est théoriquement réalisable, mais elle suppose le stockage de toutes les fonctions G en chaque point du maillage. Par ailleurs, seules les fluctuations résiduelles de l'approximation spectrale sont traitées dans cette phase et donc la contribution des fonctions G "lointaines" est en moyenne très faible. C'est pourquoi, on introduit une fonction tronquée G_h dont la portée est limitée à un petit volume de contrôle v_h . Dans ces conditions (III.33) ne donne plus la solution exacte, la technique devient itérative. L'application de G_h agit comme une correction de \bar{p} entre un état n et un état $n + 1$, cette correction étant fondée sur l'évaluation du résidu de la divergence de la vitesse, on peut qualifier cette méthode de méthode de pseudo-compressibilité.

L'algorithme de résolution est le suivant :

$$\bar{p}^{n+1} = \bar{p}^n + \int_{v_h} G_h \cdot [\bar{s} - L_h \bar{p}^n] dv_h, \quad (\text{III.35})$$

où v_h est le domaine (ou pavé) sur lequel la sommation est effectuée.

La convergence est obtenue lorsque

$$\| \bar{s} - L_h \bar{p}^n \| \leq \varepsilon. \quad (\text{III.36})$$

Le volume élémentaire où est définie G_h comporte N^* points où \bar{p} et \bar{s} sont connus. Ce nombre correspond à un nombre carré ou cubique de nœuds selon que l'on traite un problème bidimensionnel (figure (III.2)) ou un problème tridimensionnel.

La relation (III.35) se discrétise de la manière suivante :

$$\bar{p}^{n+1} = \bar{p}^n + \sum_{k=1, N^*} g_k \cdot [\bar{s}_k - (L_h \bar{p}^n)_k] \Delta v_h \quad (\text{III.37})$$

où les coefficients g_k sont des coefficients de pondération que l'on optimise pour chacun des points de v_h en fonction de la forme du maillage.

Détermination des g_k Les g_k sont évalués de manière à ce que $G_h(L_h p)$ soit aussi proche que possible de p

Dans la pratique on n'atteint ce résultat qu'approximativement. On établit un ordre de grandeur de g_1 le poids du point central.

$$g_1 = -c_\beta \cdot h^2 \quad (\text{III.38})$$

Le coefficient c_β est un paramètre de l'ordre de grandeur de l'unité ce qui assure que g_1 est proportionnel à l'aire d'un élément de surface. Les coefficients g_k des autres points de v_h prennent une valeur que l'on ramène à celle du coefficient central.

$$g_k = c_\beta \cdot c_{\alpha_k} \quad \text{avec } k = 2, \dots, N^* \quad (\text{III.39})$$

où

$$0 \leq c_{\alpha_k} \leq 1 \quad \text{avec } k = 2, \dots, N^* \quad (\text{III.40})$$

Pour déterminer les g_k on est amené à optimiser les coefficients c_{α_k} en fonction de c_β .

Plusieurs méthodes d'optimisation des pondérations sont envisageables. La solution optimale serait bien évidemment l'optimisation systématique de chaque point de v_h . Cette opération peut très rapidement devenir fastidieuse lorsque les pavés sont de géométrie complexe. On donne figure (III.2) une représentation de v_h pour deux cas : un maillage à mailles carrées et un maillage incliné. La configuration est bidimensionnelle et on ne prend qu'une rangée de points autour du point central. Le passage du cas représenté figure (III.2.a) à celui de la figure (III.2.b) donne une bonne illustration des difficultés que l'on peut rencontrer.

On présente une méthode qui n'est pas unique et qui consiste à considérer que les points équidistants, d'une distance r (figure (III.2)), du point central sont affectés d'un même poids g_k , ce raisonnement a le mérite de pouvoir être tenu pour un calcul tridimensionnel.

Suivant ce raisonnement et d'après (III.39) on ramène chaque coefficient c_{α_k} en fonction d'un seul paramètre c_α :

$$c_{\alpha_k} = c_{\alpha} \cdot f(r) \quad \text{pour: } k = 2, N^* \quad (\text{III.41})$$

Soit :

$$g_1 = c_{\alpha} \cdot h^2 \quad (\text{III.42})$$

$$g_k = c_{\alpha} \cdot f(r) \cdot g_1 \quad \text{pour: } k = 2, N^* \quad (\text{III.43})$$

$$0 \leq c_{\alpha} \leq 1 \quad (\text{III.44})$$

La fonction $f(r)$ est une fonction de r décroissante, et notre choix s'est porté sur une fonction de la distance r au carré.

On la définit par :

$$f(r) = \frac{r_o^2}{r^2} \quad \text{où } r_o \text{ est la distance la plus proche du point central} \quad (\text{III.45})$$

L'introduction de $f(r)$ réduit à deux le nombre de paramètres à optimiser : c_{β} et c_{α} . Ces deux paramètres sont optimisés à chaque fois que le maillage ou l'opérateur L_h sont modifiés. Cette méthode de détermination des coefficients poids est relativement rapide à mettre en œuvre et bien adaptée à la résolution de problèmes tridimensionnels.

Application à un cas simple bidimensionnel On se place dans le cas de la figure (III.2.a) et on se donne une expression de L_h en différences finies sur 9 points :

$$\begin{aligned} L_h \cdot \bar{p} &= \frac{-3}{h^2} \cdot p_{i,j} \\ &+ \frac{1}{2h^2} \cdot (p_{i-1,j} + p_{i+1,j} + p_{i,j-1} + p_{i,j+1}) \\ &+ \frac{1}{4h^2} \cdot (p_{i-1,j-1} + p_{i+1,j-1} + p_{i-1,j+1} + p_{i+1,j+1}) \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

On exprime G_h comme suit :

$$\begin{aligned} G_h \cdot \bar{p} &= g_1 \cdot p_{i,j} \\ &+ g_2 \cdot (p_{i-1,j} + p_{i+1,j} + p_{i,j-1} + p_{i,j+1}) \\ &+ g_3 \cdot (p_{i-1,j-1} + p_{i+1,j-1} + p_{i-1,j+1} + p_{i+1,j+1}) \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

avec

$$\begin{cases} g_1 = -c_{\beta} \cdot h^2 \\ g_2 = c_{\alpha} \cdot g_1 \\ r_o = h \\ g_3 = c_{\alpha} \cdot \frac{h^2}{(\sqrt{2}h)^2} \cdot g_1 = \frac{c_{\alpha}}{2} \cdot g_1 \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Pour cette configuration on obtient une bonne convergence avec :

$$\begin{cases} c_\beta = 0.43 \\ c_\alpha = 0.23 \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

Taille du volume de contrôle Plus le volume v_h comprend de points plus la convergence est rapide. Mais cela implique beaucoup plus d'opérations, et complique la détermination de G_h . Par ailleurs, l'augmentation de la taille des volumes des singularités suppose que l'on augmente également le nombre de cas particuliers sur les frontières du maillage. Il est donc préférable, en termes de temps de calcul, de construire des fonctions G_h sur des volumes de contrôle les plus petits possibles.

Convergence de la méthode On présente le cas de la résolution d'une équation de Poisson avec des conditions aux limites de Dirichlet sur un maillage incliné de 20x20 mailles.

On compare le taux de convergence pour différentes formes de second membre à partir d'un critère basé sur la norme quadratique du reste $\|s - \Delta p\|$. Les figures (Annexes A.1,A.2,A.3,A.4,A.5,A.6,A.7,A.8,A.9,A.10,A.11,A.12) rendent compte de ces essais pour des inclinaisons différentes du maillage (figure (III.2.b)).

L'étude menée avec un second membre de type Dirac au centre du domaine donne les moins bons taux de convergence. On peut constater que la résolution d'une singularité ponctuelle nécessite un nombre d'itérations important dans le cas d'un domaine de 20 mailles de coté.

D'autres essais montrent la réponse en convergence de la méthode en fonction longueur d'onde du second membre. Ils permettent d'établir une première optimisation de la longueur d'onde de coupure, seuil à partir duquel les singularités ont un bon taux de convergence. Il apparaît que l'on obtient un gain de convergence significatif lorsque les longueurs d'ondes sont divisées par deux soit : lorsque l'on passe d'une longueur d'onde de 20 mailles à une longueur d'onde de 10 mailles et d'une longueur d'onde de 10 mailles à une longueur d'onde de 5 mailles. Soit sur les figures déjà citées aux essais menés pour " $s = \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)$ ", " $s = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)$ " ainsi que pour " $s = \sin(4\pi x) \cdot \sin(4\pi y)$ ".

On a également comparé le taux de convergence suivant les valeurs attribuées aux pondérations de la fonction G_h . Deux techniques d'optimisation des coefficients g_k sont présentées : l'une basée sur une optimisation individuelle de chacun des coefficients, l'autre basée sur l'introduction d'une fonction de correction $f(r)$ qui prend en compte l'éloignement r du point central. Les deux méthodes présentent des taux de convergence sensiblement équivalents, mais avec une vitesse de convergence légèrement plus rapide lorsque chaque coefficient g_k est optimisé (fig. A.3,A.4,A.7,A.8,A.11,A.12)

| Itérations sur les singularités | longueur de coupure | | |
|------------------------------------|---------------------|------------|-----------|
| | 20 mailles | 10 mailles | 5 mailles |
| 1 | 63 | 26 | 24 |
| 2 | 32 | <u>14</u> | 13 |
| 3 | 22 | 10 | 8 |
| 4 | <u>16</u> | 8 | 6 |

TAB. III.1 - Nombre d'itérations pour atteindre la convergence à 10^{-5} du résidu $\|\tilde{p}\|$ en fonction de la longueur d'onde de coupure et du nombre d'itérations sur les singularités par projection.

| Itérations sur les singularités | longueur de coupure | | |
|------------------------------------|---------------------|------------|-----------|
| | 20 mailles | 10 mailles | 5 mailles |
| 1 | 135 | 68 | 46 |
| 2 | 69 | <u>36</u> | 26 |
| 3 | 47 | 26 | 19 |
| 4 | <u>40</u> | 21 | 15 |

TAB. III.2 - Nombre d'itérations total pour atteindre la convergence à 10^{-10} du résidu $\|\tilde{p}\|$ en fonction de la longueur d'onde de coupure et du nombre d'itérations sur les singularités par projection.

Une étude menée sur la résolution d'une équation de Poisson combinant à la fois la méthode spectrale et les singularités tronquées permet une évaluation des temps de calcul de la résolution pour la pression. On présente différents cas de convergence où la coupure se fait à : 20, 10 et 5 mailles. On fait varier également le nombre d'itérations sur les singularités. Les figures (Annexes B.1, B.2, B.4 et B.4) montrent qu'une longueur d'onde de coupure de 5 mailles (courbe 3) plutôt que 10 mailles (courbe 2) n'apporte qu'un faible gain sur la vitesse de convergence.

On compare (Annexes B.5) la courbe 6 et la courbe 4 soit respectivement : une longueur de coupure de 10 mailles pour 2 itérations sur les singularités et une longueur de coupure de 20 mailles pour 4 itérations sur les singularités, il apparaît que de diviser par deux la longueur d'onde de coupure permet de diviser également par deux le nombre d'itérations sur les singularités tout en conservant le même taux de convergence.

Les tableaux (TAB III.1 et TAB III.2) constituent une synthèse de ces différents essais. Ils donnent le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention d'un taux de convergence donné en fonction de la longueur d'onde de coupure et du nombre d'itérations sur les singularités à chaque résolution spectrale. Le passage d'une longueur d'onde de coupure de 20 à 10 mailles se traduit par une diminution par deux du nombre d'itérations, sur les singularités, nécessaire à un même taux de convergence. La coupure à 20 mailles plutôt qu'à 10 mailles n'apporte un gain significatif, sur le nombre d'itérations à réaliser, que lorsqu'on recherche la convergence arithmétique. Toujours par le biais des tableaux (TAB

III.1 et TAB III.2) on établit (en gras et soulignés) qu'un même taux de convergence est obtenu pour une coupure à 20 mailles et 4 itérations sur les singularités que pour une coupure à 10 mailles et 2 itérations sur les singularités.

Si l'on considère que pour passer d'une longueur d'onde de coupure de 20 mailles à une longueur d'onde de coupure de 10 mailles il est nécessaire de stocker en mémoire deux fois plus de fonctions ψ_i par direction de l'espace ; que le nombre d'opérations nécessaires à une boucle sur les singularités est de l'ordre du nombre de points du maillage alors que pour une résolution spectrale il est égal à ce nombre que multiplie le nombre de fonctions de base, alors la longueur d'onde de coupure de 20 mailles s'impose.

Conclusion sur la méthode des singularités La méthode converge bien, son inconvénient principal est de mettre en jeu des paramètres g_i ajustables.

La méthode ADI constitue une alternative plus systématique, que nous avons mise en œuvre.

III.1.2.2 Méthode ADI

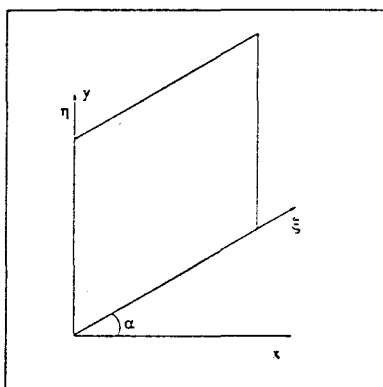


FIG. III.3 - Base ξ, η

Présentation de la technique Nous présentons la méthode, en reprenant la définition proposée par LASCAUX et THEODOR ([41]). On peut appliquer la méthode ADI à la résolution du système linéaire (III.50)

$$A.x = B, \quad (\text{III.50})$$

si la matrice A peut être décomposée en une somme de deux autres matrices H et V. On peut alors introduire un réel λ tel que

$$\begin{cases} Ax = (H + V)x = B \\ (H + \lambda I)x = b + (\lambda I - V)x \\ (V + \lambda I)x = b + (\lambda I - H)x \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

ce qui conduit à l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} (H + \lambda I)x^{n+\frac{1}{2}} = b + (\lambda I - V)x^n \\ (V + \lambda I)x^{n+1} = B + (\lambda I - H)x^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

où H et V correspondent aux dépendances suivant les deux directions de l'espace.

Afin d'établir des éléments de comparaison entre les deux méthodes nous avons réalisé un test similaire à celui mené pour les singularités.

Nous nous plaçons dans le cas d'un maillage incliné. L'opérateur de Laplace s'exprime alors dans la base locale inclinée (ξ, η) (voir figure (III.3)) :

$$\Delta p = a. \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + b. \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + c. \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} = s \quad (\text{III.53})$$

Dans le cas bidimensionnel, on décompose l'opérateur Δ en deux parties et on construit le système itératif suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{suivant } \xi & a. \frac{\partial^2 p^*}{\partial \xi^2} - a_\xi \cdot p^* = S - b. \frac{\partial^2 p^n}{\partial \eta^2} - c. \frac{\partial^2 p^n}{\partial \xi \partial \eta} - a_\xi \cdot p^n \\ \text{suivant } \eta & b. \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial \eta^2} - a_\eta \cdot p^{n+1} = S - a. \frac{\partial^2 p^*}{\partial \xi^2} - c. \frac{\partial^2 p^*}{\partial \xi \partial \eta} - a_\eta \cdot p^* \end{array} \quad (\text{III.54})$$

Le terme en dérivée croisée est systématiquement maintenu au second membre. Pour chacune des deux directions on résout un système linéaire tridiagonal. La technique reste implicite mais la résolution de systèmes tridiagonaux est très rapide.

Nous avons comparé les deux méthodes dans des cas de figure similaires et sur un domaine de vingt mailles au carré. Il ressort de cette étude (figures A.13, A.14, A.15, A.16, A.17, A.18) que les deux techniques réagissent globalement de la même manière.

Conclusion sur la technique Les performances de la technique ADI sont assez comparables à celles de la technique des singularités tronquées. La méthode ADI apparaît plus facile à mettre en œuvre car elle fait appel à moins de "savoir faire". En effet, alors que la première technique présentée suppose un ajustement des fonctions G tronquées, la seconde prend en compte directement l'opérateur différentiel. L'emploi de la méthode ADI est donc préférable lorsque l'opérateur différentiel peut se décomposer aisément. Bien que nécessitant un nombre d'opérations quasi-similaire, la méthode ADI devient, en revanche, plus lourde à mettre en œuvre lorsque le problème est tridimensionnel.

III.1.3 Conclusion sur la résolution mono-domaine

Nous avons présenté une méthode itérative originale. Elle consiste à résoudre un problème aux limites en deux étapes. Dans une première étape, on résout les grandes échelles par une technique spectrale où l'on décompose la solution dans une base de fonctions orthogonales. La seconde étape réduit le résidu issu de l'approximation spectrale.

Les deux méthodes sont complémentaires et sont parfaitement adaptées à la résolution du problème de Poisson pour la pression. En effet, la méthode converge rapidement et

quelques itérations suffisent au calcul de l'incrément de pression à chaque itération vitesse. Il reste à mettre en œuvre cette méthode dans le cas d'un multi-domaine et en préciser la méthode de raccordement.

III.2 Résolution multi-domaines

III.2.1 Introduction

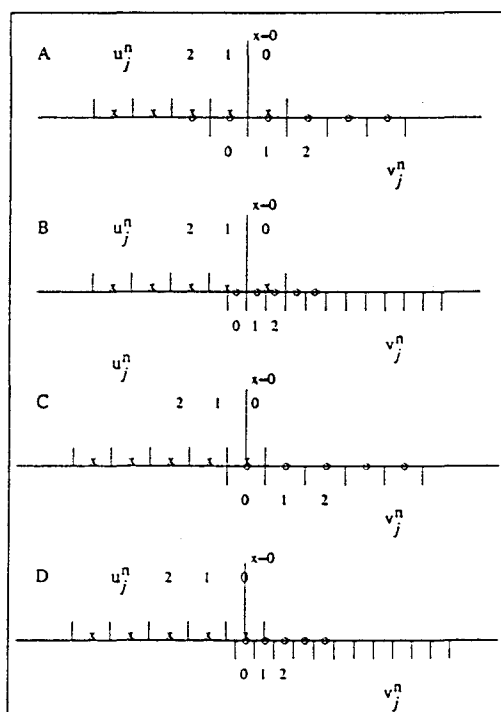


FIG. III.4 - Extrait de A. LERAT et Z. N. WU.

L'intérêt de la décomposition en sous-domaines s'est vu accru, ces dernières années, avec l'apparition de calculateurs parallèles. Le partitionnement d'un domaine en plusieurs sous-domaines constitue une alternative lorsque la géométrie est complexe ou périodique. L'avantage de ces machines par rapport aux calculateurs classiques réside surtout dans la répartition simultanée des tâches.

La résolution des équations de Navier-Stokes au moyen d'un ordinateur parallèle n'implique pas nécessairement une décomposition en sous-domaines. La parallélisation peut consister en une décomposition des opérateurs du schéma numérique. Deux études menées à l'ONERA ont été orientées en ce sens. P. LECA et al [43] proposent une parallélisation d'un algorithme de matrice d'influence, en étudient le comportement et les coûts de mise en œuvre. L. MANE et TA PHUOC LOC [47] présentent une utilisation de la technique ADI appliquée au calcul multi-processeurs. La décomposition des tâches se fait par un partage du domaine de calcul en bandes associées aux directions alternées en X puis en Y en affectant une bande à un processeur. Cette technique se montre très efficace avec des

gains importants en temps calcul.

Dans la suite de l'exposé nous orientons notre propos sur la décomposition en sous-domaines et principalement sur la principale difficulté rencontrée: le raccordement des sous-domaines lorsque le schéma nécessite la résolution d'un opérateur elliptique. En effet, la prise en compte d'une interface est généralement plus facile à gérer lorsque le calcul est explicite. L'information n'ayant alors qu'une portée de quelques mailles, traverse l'interface par simples reports ou échanges sur l'interface [63]. Le principal problème est de respecter la continuité, des grandeurs et leur gradient, à l'interface inter-domaines.

L'interface peut être définie comme le lieu géométrique de raccordement ou de chevauchement des maillages.

A. LERAT et Z. N. WU se sont intéressés à la stabilité d'un schéma implicite qui résout les équations d'Euler pour différents traitements de l'interface (figure III.4) . Ils proposent, notamment, des conditions de raccordement inconditionnellement stables :

$$u_0^{n+1} = v_1^n, \quad v_0^{n+1} = u_1^n, \quad (\text{III.55})$$

pour le cas de figure représenté (fig III.4.A), et

$$u_0^{n+1} = (u_1^n + v_1^*)/2 \quad (\text{III.56})$$

$$v_0^{n+1} = (v_1^n + u_1^*)/2, \quad (\text{III.57})$$

où

$$u_1^* = (1 - \alpha^u)u_1^n + \alpha^u u_1^{n+1}, \quad 0 \leq \alpha^u \leq 1 \quad (\text{III.58})$$

$$v_1^* = (1 - \alpha^v)v_1^n + \alpha^v v_1^{n+1}, \quad 0 \leq \alpha^v \leq 1, \quad (\text{III.59})$$

pour le cas de la fig III.4.C.

Le cas représenté (fig III.4.A) comporte un chevauchement de maillage analogue à celui utilisé pour la discrétisation de l'équation pour la pression avec l'interface ("x=0") définie à mi-maille.

De ce fait nous pouvons envisager d'utiliser (III.55) pour raccorder la pression lors de la mise en œuvre d'une méthode itérative telle que la méthode des singularités tronquées.

INQUIMBERT [39] a mis en œuvre un schéma à caractère implicite et a étudié plusieurs techniques de raccordement. Il montre qu'un raccordement des solutions par une technique de recouvrement de maillage et d'interpolations ne garantit pas la continuité des solutions. La continuité de la solution dépend fortement des conditions de raccordement imposées de part et d'autre des frontières de couplage, et l'on obtient de meilleurs résultats en imposant des conditions aux limites de Neumann en plus des conditions de

Dirichlet. Tout porte à croire que si les conditions de raccordement influencent aussi fortement les solutions c'est qu'elles ne sont pas suffisamment bien prises en compte. Les relations de couplage entre deux sous-domaines doivent donc impliquer à la fois : et les discontinuités de fonctions et les discontinuités de gradient.

A. FARCY [25] pose le problème à l'interface pour un opérateur de Laplace dans le cas d'une décomposition en deux sous-domaines.

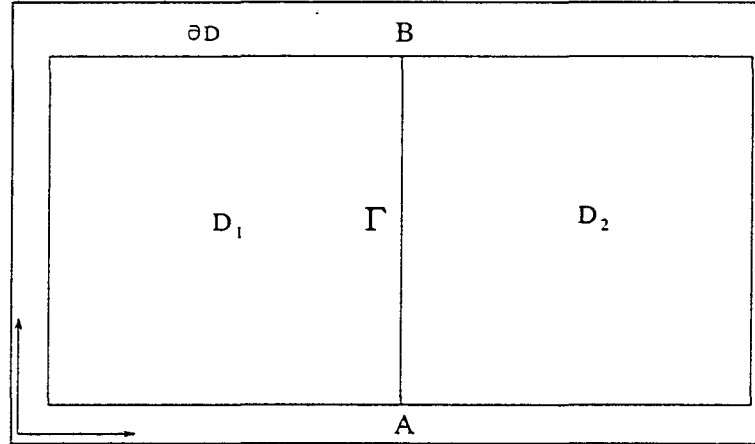


FIG. III.5 - Décomposition en deux sous-domaines (A. Farcy)

Il écrit les équations qui régissent le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = S & \text{dans } \mathcal{D} \\ u = u_o & \text{sur } \partial\mathcal{D} \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

Et les conditions de raccordement sur Γ :

$$\begin{cases} u_1 = u_2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial n_2} \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

Il construit un algorithme de raccordement :

$$\begin{cases} \Delta u_1^k = s & \text{dans } \mathcal{D}_1 \\ u_1^k = u_o & \text{sur } \partial\mathcal{D}_1 \\ u_1^k = u_1^{k-1} + C^{-1}(u_2^{k-1} - u_1^{k-1}) & \text{sur } \Gamma \\ \Delta u_2^k = s & \text{dans } \mathcal{D}_2 \\ u_2 = u_o & \text{sur } \partial\mathcal{D}_2 \\ \frac{\partial u_2^k}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1^k}{\partial n_1} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{III.62})$$

La matrice C , appelée capacitance, est basée sur la résolution de N_γ problèmes de Laplace :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_1^m = 0 & \text{dans } \mathcal{D}_1 \\ u_1^m = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}_1 \\ u_1^m = f^m & \text{sur } \Gamma \\ \Delta u_2^m = 0 & \text{dans } \mathcal{D}_2 \\ u_2^m = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D}_2 \\ \frac{\partial u_2^m}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1^m}{\partial n_1} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.63})$$

où les fonctions f^m sont des fonctions d'un sous-espace \mathcal{H}_Γ qui approximent la discontinuité de u sur Γ .

Cette première approche consiste donc à paramétrer et à coupler fonctionnellement les conditions aux limites imposées aux sous-domaines, elle permet ainsi de minimiser globalement les discontinuités.

Cependant la méthode comporte à notre sens quelques inconvénients. En effet, en plus de la résolution des N_γ problèmes (III.63), elle nécessite, la résolution de l'équation de Poisson sur \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 à chaque itération. Par ailleurs, la condition de Neumann sur Γ imposée à u_2^k dépend de la valeur de u_1^k , les calculs ne peuvent pas être simultanés, cela condamne du même coup leur parallélisation.

Notre démarche comporte sous certains aspects des similitudes avec la méthode que l'on vient de présenter. Néanmoins elle n'en a pas les inconvénients et peut être parallélisée.

III.2.2 Raccordement fonctionnel des grandes échelles

Ce paragraphe est décomposé en deux parties : La première présente la méthode de raccordement sur une interface ; la seconde généralise la méthode lorsque plusieurs interfaces sont interdépendantes.

III.2.2.1 Présentation de la technique sur une interface unique

A l'instar de A. Farcy, nous nous plaçons dans une configuration à une seule interface voir figure (III.6).

On cherche à résoudre sur \mathcal{D} le problème de Poisson suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lp = s & \text{dans } \mathcal{D} \\ p = p_0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ libre} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \text{ solide} \end{array} \right. \quad (\text{III.64})$$

Résolution dans les sous-domaines avec des conditions aux limites idéales
L'interface Γ sépare le domaine \mathcal{D} en deux sous-domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . On impose une condition mixte qui exprime la variation de la fonction suivant la ligne de maillage η_Γ qui traverse l'interface :

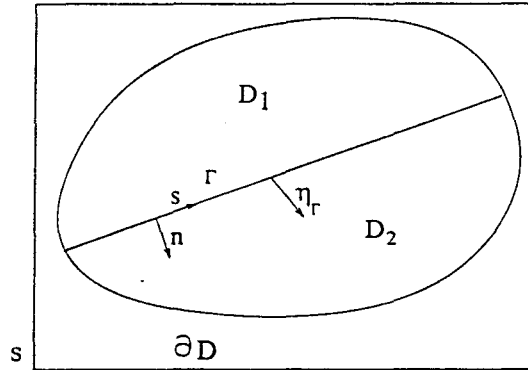


FIG. III.6 - Décomposition en deux sous-domaines

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \beta \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial \eta_\Gamma} = 0 \quad (\text{III.65})$$

une formulation de (III.64) pour \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lp_1 = S & \text{dans } \mathcal{D}_1 \\ p_1 = p_0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_1 \text{ libre} \\ \frac{\partial p_1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_1 \text{ solide} \\ \frac{\partial p_1}{\partial \eta_\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.66})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_2 = S & \text{dans } \mathcal{D}_2 \\ p_2 = p_0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_2 \text{ libre} \\ \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_2 \text{ solide} \\ \frac{\partial p_2}{\partial \eta_\Gamma} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.67})$$

Chacun des problèmes (III.66) et (III.67) est résolu séparément. Dans l'optique d'une parallélisation, ces tâches peuvent être réalisées simultanément par des processeurs différents, elles ne concernent en rien la méthode de raccordement.

Mesure de la discontinuité A l'issue de la résolution de (III.66) et (III.67), il apparaît une discontinuité de fonction δp et une discontinuité de gradient qui peut être reliée à la discontinuité de $\frac{\partial p}{\partial \eta_\Gamma}$ notée $\delta p'$ sur Γ (voir figure III.7).

$$\delta p = p_2 - p_1 \quad (\text{III.68})$$

$$\delta p' = \frac{\partial p_2}{\partial \eta_\Gamma} - \frac{\partial p_1}{\partial \eta_\Gamma} \quad (\text{III.69})$$

On propose une méthode de réduction (correction) de ces discontinuités.

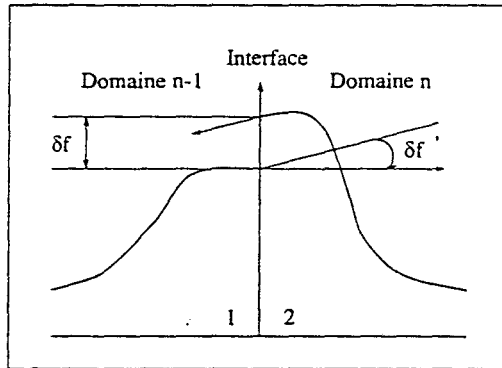


FIG. III.7 - Evaluation de la discontinuité

Réduction des discontinuités L'idée est de décrire la discontinuité δp dans un sous-espace \mathcal{K}_Γ au moyen de M fonctions $\tilde{\varphi}_i$ définies sur Γ .

$$\delta p(x) = \sum_{i=1}^M (b_i^1 - b_i^2) \tilde{\varphi}_i(x) + \epsilon_\Gamma \quad x \in \Gamma \quad (\text{III.70})$$

où ϵ_Γ est un résidu orthogonal à \mathcal{K}_Γ .

De (III.70) et d'après (III.68) on déduit l'expression :

$$p_1(x) + \sum_{i=1}^M b_i^1 \tilde{\varphi}_i(x) = p_2(x) + \sum_{i=1}^M b_i^2 \tilde{\varphi}_i(x) + \epsilon_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma, \quad (\text{III.71})$$

qui est une équation de correction des grandes échelles sur Γ .

Les coefficients b_i^k sont des inconnues que l'on ne peut calculer uniquement par la relation (III.70) qui ne détermine que leurs différences. Il faut donc prendre en compte la discontinuité de pente $\delta p'$ et pour cela connaître les pentes des fonctions harmoniques $\tilde{\psi}^k$ qui prolongent $\tilde{\varphi}$ dans le sous-domaine \mathcal{D}_k .

Les $\tilde{\psi}^k$ vérifient les problèmes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} L\tilde{\psi}_i^1 = 0 & \text{dans } \mathcal{D}_1 \\ \psi_i^1 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_1 \text{ libre} \\ \frac{\partial \psi_i^1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_1 \text{ solide} \\ \psi_i^1 = \tilde{\varphi}_i & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.72})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} L\tilde{\psi}_i^2 = 0 & \text{dans } \mathcal{D}_2 \\ \psi_i^2 = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_2 \text{ libre} \\ \frac{\partial \psi_i^2}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_2 \text{ solide} \\ \psi_i^2 = \tilde{\varphi}_i & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{III.73})$$

On peut alors écrire une équation de raccordement pour les pentes :

$$\delta p' = \sum_{i=1}^M b_i^1 \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}_i^1}{\partial \eta_\Gamma} - \sum_{i=1}^M b_i^2 \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}_i^2}{\partial \eta_\Gamma} + \epsilon'_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{III.74})$$

soit :

$$\frac{\partial p_2}{\partial \eta_\Gamma} + \sum_{i=1}^M b_i^2 \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}_i^2}{\partial \eta_\Gamma} = \frac{\partial p_1}{\partial \eta_\Gamma} + \sum_{i=1}^M b_i^1 \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}_i^1}{\partial \eta_\Gamma} + \epsilon'_\Gamma \quad x \in \Gamma \quad (\text{III.75})$$

que l'on écrit sous la forme simplifiée

$$\delta p' = \sum_{i=1}^M [b_i^1 \cdot \tilde{\psi}_i^1 - b_i^2 \cdot \tilde{\psi}_i^2] + \epsilon'_\Gamma \quad \text{où} \quad \tilde{\psi}_i' = \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \eta_\Gamma} \quad (\text{III.76})$$

On construit une fonctionnelle I_Γ que l'on définit comme une mesure quadratique de la discontinuité.

$$I_\Gamma = \int_\Gamma \left\{ \delta p - \sum_{i=1}^M (b_i^1 - b_i^2) \tilde{\varphi}_i \right\}^2 + \left\{ \delta p' - \left(\sum_{i=1}^M b_i^1 \cdot \tilde{\psi}_i^1 - b_i^2 \cdot \tilde{\psi}_i^2 \right) \right\}^2 d\Gamma \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{III.77})$$

On minimise cette fonctionnelle aux sens des moindres carrés, et on en tire

$$\frac{\partial I_\Gamma}{\partial b_j^1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial I_\Gamma}{\partial b_j^2} = 0 \quad (\text{III.78})$$

On en déduit un système linéaire, à $2M$ inconnues, exprimant les b_i^k en fonction des discontinuités δp et $\delta p'$:

$$\sum_{i=1}^M b_i^1 \int_\Gamma [\tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j + \tilde{\psi}_i^1 \tilde{\psi}_j^1] d\Gamma - \sum_{i=1}^M b_i^2 \int_\Gamma [\tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j + \tilde{\psi}_i^2 \tilde{\psi}_j^2] d\Gamma = \int_\Gamma [\delta f \tilde{\varphi}_j + \delta f' \tilde{\psi}_j^1] d\Gamma \quad (\text{III.79})$$

$$\sum_{i=1}^M b_i^1 \int_\Gamma [\tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j + \tilde{\psi}_i^1 \tilde{\psi}_j^1] d\Gamma - \sum_{i=1}^M b_i^2 \int_\Gamma [\tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j + \tilde{\psi}_i^2 \tilde{\psi}_j^2] d\Gamma = \int_\Gamma [\delta p \tilde{\varphi}_j + \delta p' \tilde{\psi}_j^2] d\Gamma \quad (\text{III.80})$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\tilde{M}_{ij} \cdot b_i^k = (\delta p, \tilde{\varphi}_j) + (\delta p', \tilde{\psi}_j^k) \quad (\text{III.81})$$

où

$$(f, g) = \int_\Gamma f \cdot g d\Gamma \quad (\text{III.82})$$

On en déduit les b_i^k par le calcul de $[\tilde{M}_{ij}]^{-1}$.

soit :

$$b_i^k = [\tilde{M}_{ij}]^{-1} \cdot ((\delta p, \tilde{\varphi}_j) + (\delta p', \tilde{\psi}_j^k)) \quad (\text{III.83})$$

On étend ces premiers principes à plusieurs sous-domaines et plusieurs interfaces.

III.2.2.2 Généralisation au cas de plusieurs sous-domaines

Le domaine \mathcal{D} est décomposé en N_{sd} sous-domaines et N_I interfaces.

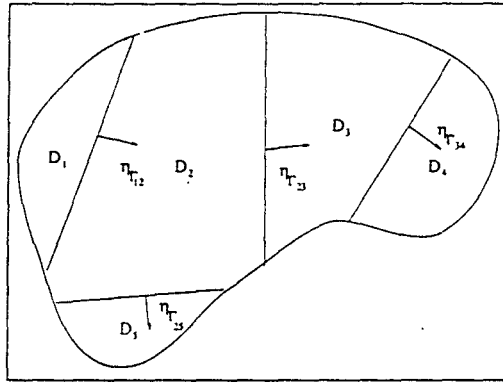


FIG. III.8 - Décomposition en plusieurs sous-domaines

Les $2.N_I$ problèmes dans les \mathcal{D}_k sous-domaines prennent la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p_k = S & \text{dans } \mathcal{D}_k \\ p_k = p_0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_k \quad \text{libre} \\ \frac{\partial p_k}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_k \quad \text{solide} \\ \frac{\partial p_k}{\partial \eta_{\Gamma_{lk}}} = 0 & \text{sur } \Gamma_{lk} \end{array} \right. \quad (\text{III.84})$$

Comme au paragraphe précédent on se donne des fonctions $\tilde{\varphi}$ et on construit les fonctions harmoniques $\tilde{\psi}_i$ qui vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L\tilde{\psi}_{il}^k = 0 & \text{dans } \mathcal{D}_k \\ \tilde{\psi}_{il}^k = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_k \quad \text{libre} \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_{il}^k}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D}_k \quad \text{solide} \\ \tilde{\psi}_{il}^k = \tilde{\varphi}_{il}^k & \text{sur } \Gamma_{lk} \\ \tilde{\psi}_{il}^k = 0 & \text{sur les autres interfaces} \end{array} \right. \quad (\text{III.85})$$

où Γ_{lk} est l'interface de séparation entre le sous-domaine \mathcal{D}_k et le sous-domaine \mathcal{D}_l (figure III.9).

La condition de Dirichlet homogène que l'on impose sur les interfaces complémentaires induit une interdépendance par les pentes entre les différentes interfaces.

L'équation de raccordement généralisée s'exprime donc pour chacune des l interfaces du sous-domaine \mathcal{D}_k (fig III.9):

$$p_k + \sum_{j=1}^{N_{I_k}} \sum_{i=1}^{M_{kj}} b_{ij}^k \tilde{\psi}_{ij}^k = p_l + \sum_{j=1}^{N_{I_l}} \sum_{i=1}^{M_{lj}} b_{ij}^l \tilde{\psi}_{ij}^l + \epsilon_\Gamma \quad \text{sur } \Gamma_{lk} \quad (\text{III.86})$$

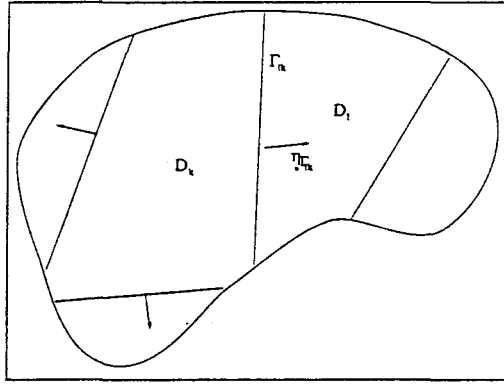


FIG. III.9 - Relation entre les sous-domaines

$$\frac{\partial p_k}{\partial \eta_{\Gamma_{lk}}} + \sum_{j=1}^{N_{I_k}} \sum_{i=1}^{M_{kj}} b_{ij}^k \frac{\partial \tilde{\psi}_{ij}^k}{\partial \eta_{\Gamma_{lk}}} = \frac{\partial p_l}{\partial \eta_{\Gamma_{lk}}} + \sum_{j=1}^{N_{I_l}} \sum_{i=1}^{M_{lj}} b_{ij}^l \frac{\partial \tilde{\psi}_{ij}^l}{\partial \eta_{\Gamma_{lk}}} + \epsilon'_{\Gamma_{lk}} \quad \text{sur } \Gamma_{lk}$$

En reprenant les notations précédentes

On exprime :

$$\begin{cases} \delta p_{lk} = p_l - p_k & \text{sur } \Gamma_{lk} \\ \delta p'_{lk} = \frac{\partial p_l}{\partial \eta_{\Gamma_{lk}}} - \frac{\partial p_k}{\partial \eta_{\Gamma_{lk}}} & \text{sur } \Gamma_{lk} \end{cases} \quad (\text{III.87})$$

La nouvelle mesure de la discontinuité prend la forme d'une fonctionnelle Π :

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{k=1}^{N_{sd}} \sum_{l=1}^{N_{I_k}} \int_{\Gamma_{lk}} \left\{ \delta p_{lk} + \sum_{j=1}^{N_{I_l}} \sum_{i=1}^{M_{lj}} b_{ij}^l \tilde{\psi}_{ij}^l - \sum_{j=1}^{N_{I_k}} \sum_{i=1}^{M_{kj}} b_{ij}^k \tilde{\psi}_{ij}^k \right\}^2 d\Gamma_{lk} \\ & + \int_{\Gamma_{lk}} \left\{ \delta p'_{lk} + \sum_{j=1}^{N_{I_l}} \sum_{i=1}^{M_{lj}} b_{ij}^l \tilde{\psi}_{ij}^l - \sum_{j=1}^{N_{I_k}} \sum_{i=1}^{M_{kj}} b_{ij}^k \tilde{\psi}_{ij}^k \right\}^2 d\Gamma_{lk} \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

Les coefficients b_{nm}^k sont obtenus par :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_{nm}^k} = 0 \quad (\text{III.89})$$

On obtient une relation matricielle un peu plus complexe puisqu'elle prend en compte l'ensemble des inconnues b_{ij}^k .

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{M_{km}} b_{im}^k \int_{\Gamma_{mk}} \tilde{\psi}_{im}^k \tilde{\psi}_{nm}^k d\Gamma_{mk} + \sum_{j=1}^{N_{I_m}} \sum_{i=1}^{M_{mj}} b_{ij}^m \int_{\Gamma_{mk}} \tilde{\psi}_{ij}^m \tilde{\psi}_{nm}^k d\Gamma_{mk} \\ & + \sum_{l=1}^{N_{I_k}} \left[- \sum_{j=1}^{N_{I_l}} \sum_{i=1}^{M_{lj}} \int_{\Gamma_{lk}} \tilde{\psi}_{ij}^l \tilde{\psi}_{nm}^k d\Gamma_{lk} + \sum_{j=1}^{N_{I_k}} \sum_{i=1}^{M_{kj}} \int_{\Gamma_{lk}} \tilde{\psi}_{ij}^k \tilde{\psi}_{nm}^k d\Gamma_{lk} \right] \\ & = \int_{\Gamma_{mk}} \delta p_{mk} \tilde{\psi}_{nm}^k d\Gamma_{mk} + \sum_{l=1}^{N_{I_k}} \int_{\Gamma_{lk}} \delta p'_{lk} \tilde{\psi}_{nm}^k d\Gamma_{lk} \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

que l'on peut exprimer également sous la forme :

$$\tilde{M}_{ijl} \cdot b_{ij}^k = (\delta p_{mk}, \tilde{\psi}_{nm}^k) + \sum_{l=1}^{N_{I_k}} (\delta p'_{lk}, \tilde{\psi}_{nm}^{l'}) \quad (\text{III.91})$$

et comme dans le cas à une interface, la matrice $[\tilde{M}_{ijl}]$ est inversible. On peut donc extraire les inconnues du problème.

III.2.2.3 Cas particulier des sous-domaines à géométrie semblable et nombre d'interfaces limité

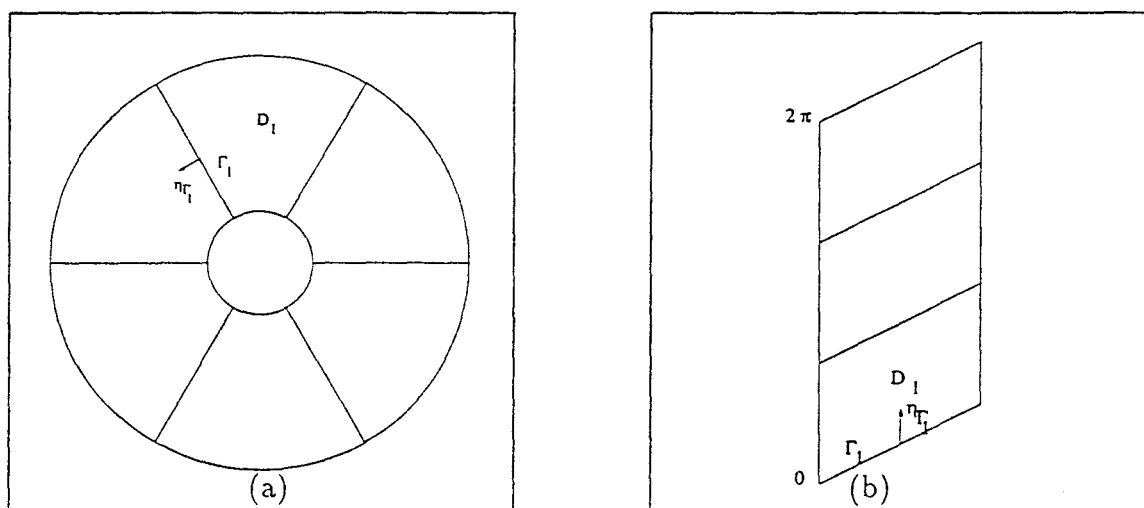


FIG. III.10 - (a) Décomposition d'un domaine axisymétrique. (b) Décomposition d'un domaine périodique sur lui-même.

Le cas peut se présenter sous bien formes. On relève, à titre d'exemples : le cas de géométries axisymétriques (fig. III.10(a)), ou encore celui d'une décomposition en part égales d'un domaine périodique sur lui-même (fig. III.10(b)). Le premier cas de figure est celui rencontré lors d'une modélisation d'écoulements incompressibles dans une cavité en rotation. Le second correspond au raccordement d'une zone amont ou d'une zone aval de grille d'aubes.

Dans ces deux cas le nombre d'interface est identique au nombre de sous domaines. La décomposition est fortement simplifiée par rapport au cas général. Tout d'abord, la particularité de la géométrie permet une phase de résolution commune des problèmes harmoniques. Ensuite, chacun des sous-domaines comprenant un même nombre d'interfaces les sommations à réaliser dans les fonctionnelles se retrouvent réduites. Cette périodicité spatiale a pour conséquence d'alléger le calcul et le stockage de la matrice de passage entre les fonctions dans les sous-domaines et les fonctions de raccordement.

La fonctionnelle résultante Π_p est obtenue par la sommation sur les N interfaces (respectivement sur les N sous-domaines). Les discontinuités sont approximées au moyen de M fonctions par interface soit $2.M$ fonctions harmoniques par sous-domaine qui interagissent entre elles.

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} [\delta p_k + \sum_{i=1}^{2M} b_i^{k+1} \tilde{\psi}_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{2M} b_i^k \tilde{\psi}_i^k]^2 d\Gamma \\ & + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} [\delta p_k' + \sum_{i=1}^{2M} b_i^{k+1} \frac{\partial \tilde{\psi}_i^{k+1}}{\partial \eta_{\Gamma_k}} - \sum_{i=1}^{2M} b_i^k \frac{\partial \tilde{\psi}_i^k}{\partial \eta_{\Gamma_k}}]^2 d\Gamma \end{aligned}$$

Le raccordement de sous-domaines géométriquement semblable se prête très bien à une résolution par ordinateur parallèle, notamment lorsque les algorithmes "maître et esclaves" sont confondus. Elle est adaptée à une résolution dans une grille d'aubes moyennant l'hypothèse d'une interaction faible entre les fonctions de raccordement de la zone amont de la roue avec celle de la zone aval.

C'est sous cette forme particulière que la méthode de raccordement a été mise en œuvre.

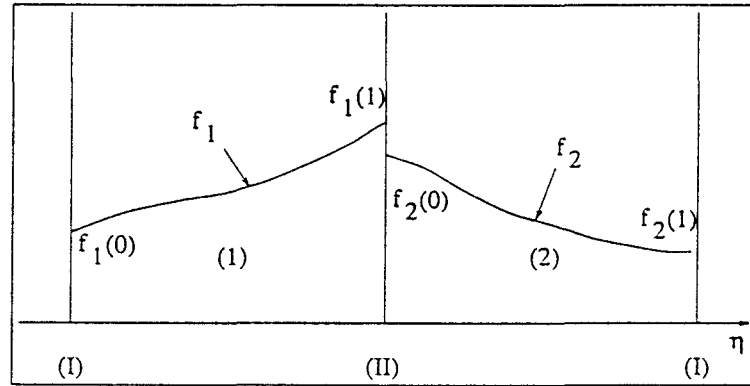


FIG. III.11 - Décomposition de deux sous domaines unidimensionnels

III.2.2.4 Recherche du domaine de validité de la méthode

Dans cette étude nous cherchons à isoler les paramètres qui mettent en défaut la formulation matricielle.

Au cours des paragraphes précédents nous n'avons pas évoqué, par souci de clarté, la possibilité de pondérer la mesure de la discontinuité de gradient par rapport à la discontinuité de fonction.

Auquel cas on écrirait pour Π_p :

$$\begin{aligned} \Pi_p = & \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} [\delta p_k + \sum_{i=1}^{2M} b_i^{k+1} \tilde{\psi}_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{2M} b_i^k \tilde{\psi}_i^k]^2 d\Gamma \\ & + \gamma \cdot \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} [\delta p_k' + \sum_{i=1}^{2M} b_i^{k+1} \frac{\partial \tilde{\psi}_i^{k+1}}{\partial \eta_{\Gamma_k}} - \sum_{i=1}^{2M} b_i^k \frac{\partial \tilde{\psi}_i^k}{\partial \eta_{\Gamma_k}}]^2 d\Gamma \end{aligned}$$

Où Υ reste à déterminer. Des essais successifs n'ont pas permis de conclure sur la nécessité d'imposer une valeur plutôt qu'une autre. C'est pourquoi nous avons choisi de lui donner une valeur unitaire. On peut néanmoins traiter un cas de raccordement suffisamment simple pour être résolu analytiquement.

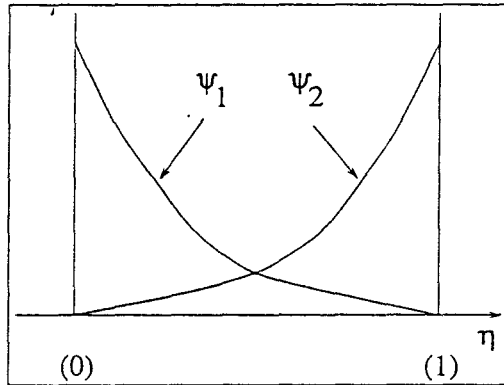


FIG. III.12 - Fonctions de raccordement unidimensionnelles

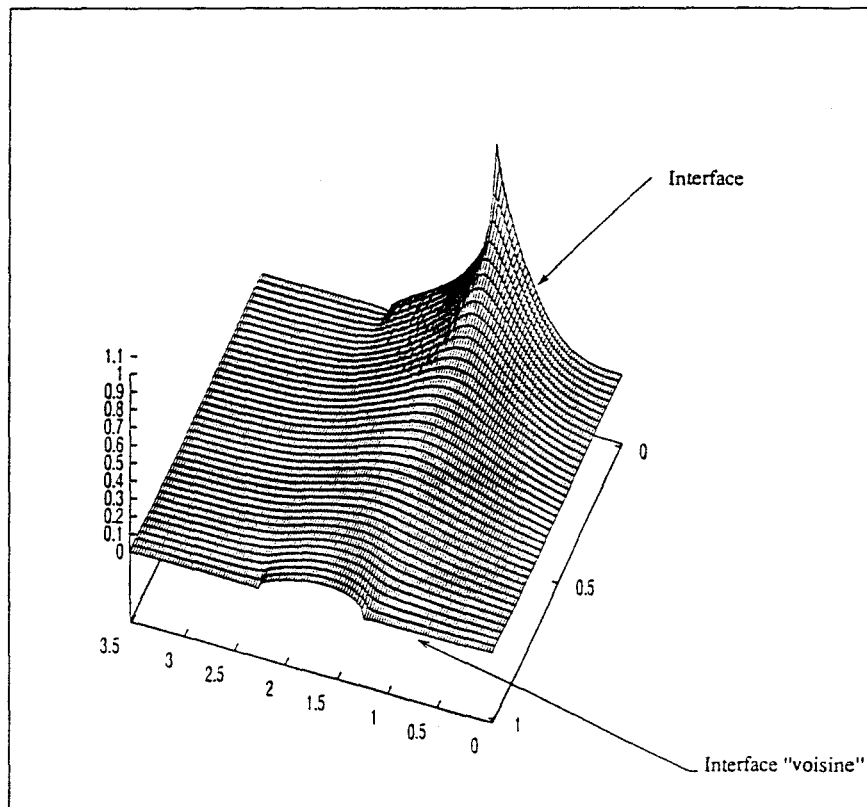


FIG. III.13 - Une fonction harmonique bidimensionnelle dans le cas du raccordement de canaux inter-aubes.

On se propose, donc, de raccorder sous la forme d'une solution périodique deux sous-domaines unidimensionnels géométriquement identiques (voir fig.(III.11)).

On recherche une fonction f continue sur les interface quand :

$$\begin{cases} p = p_1 + a_1^1 \cdot \psi_1 + a_2^1 \psi_2 & \text{sur le sous-domaine 1} \\ p = p_2 + a_1^2 \cdot \psi_1 + a_2^2 \psi_2 & \text{sur le sous-domaine 2} \end{cases} \quad (\text{III.92})$$

Les fonctions ψ_1 et ψ_2 ont pour valeurs limites :

$$\begin{cases} \psi_1(0) = 1 & \psi_1(1) = 0 \\ \psi_2(0) = 0 & \psi_2(1) = 1 \end{cases} \quad (\text{III.93})$$

$$\begin{cases} \psi_1'(0) = -1 & \psi_1'(1) = -k \\ \psi_2'(0) = k & \psi_2'(1) = 1 \end{cases} \quad (\text{III.94})$$

avec

$$\psi' = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \text{ et } k \geq 0 \quad (\text{III.95})$$

Pour que f soit continue en (I) (voir fig. III.11) on a

$$\begin{cases} p_2(1) + a_1^2 \cdot \psi_1(1) + a_2^2 \psi_2(1) = p_1(0) + a_1^1 \cdot \psi_1(0) + a_2^1 \psi_2(0) \\ p_2'(1) + a_1^2 \cdot \psi_1'(1) + a_2^2 \psi_2'(1) = p_1'(0) + a_1^1 \cdot \psi_1'(0) + a_2^1 \psi_2'(0) \end{cases} \quad (\text{III.96})$$

De même en (II)

$$\begin{cases} p_1(1) + a_1^1 \cdot \psi_1(1) + a_2^1 \psi_2(1) = p_2(0) + a_1^2 \cdot \psi_1(0) + a_2^2 \psi_2(0) \\ p_1'(1) + a_1^1 \cdot \psi_1'(1) + a_2^1 \psi_2'(1) = p_2'(0) + a_1^2 \cdot \psi_1'(0) + a_2^2 \psi_2'(0) \end{cases} \quad (\text{III.97})$$

Les équations III.96 et III.97 nous amènent à :

$$\begin{cases} \delta p_I = -a_1^1 \cdot \psi_1(0) - a_2^1 \psi_2(0) + a_1^2 \cdot \psi_1(1) + a_2^2 \psi_2(1) \\ \delta p_I' = -a_1^1 \cdot \psi_1'(0) - a_2^1 \psi_2'(0) + a_1^2 \cdot \psi_1'(1) + a_2^2 \psi_2'(1) \\ \delta p_{II} = a_1^1 \cdot \psi_1(1) + a_2^1 \psi_2(1) - a_1^2 \cdot \psi_1(0) - a_2^2 \psi_2(0) \\ \delta p_{II}' = a_1^1 \cdot \psi_1'(1) + a_2^1 \psi_2'(1) - a_1^2 \cdot \psi_1'(0) - a_2^2 \psi_2'(0) \end{cases} \quad (\text{III.98})$$

Soit si l'on substitue les ψ par leurs valeurs

$$\begin{cases} \delta p_I = -a_1^1 + a_2^2 \\ \delta p_I' = +a_1^1 - a_2^1 k - a_1^2 \cdot k + a_2^2 \\ \delta p_{II} = a_2^1 - a_1^2 \\ \delta p_{II}' = -a_1^1 k + a_2^1 - a_1^2 \cdot -a_2^2 k \end{cases} \quad (\text{III.99})$$

La fonctionnelle Π_p s'exprime, donc, sous la forme suivante :

$$\Pi_p = \{\delta p_I - (-a_1^1 + a_2^2)\}^2 + \{\delta p_{II} - (a_2^1 - a_1^2)\}^2 \quad (\text{III.100})$$

$$+ \Upsilon \{\delta p_I' - (+a_1^1 - a_2^1 k - a_1^2 \cdot k + a_2^2)\}^2 \quad (\text{III.101})$$

$$+ \Upsilon \{\delta p_{II}' - (-a_1^1 k + a_2^1 - a_1^2 \cdot -a_2^2 k)\}^2 \quad (\text{III.102})$$

On exprime que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i^k} = 0 \quad (\text{III.103})$$

On obtient la relation matricielle suivante :

$$M_{ik}[a_i^k] = S \quad (\text{III.104})$$

où

$$M_{ik} = \begin{bmatrix} 1 + \Upsilon(1 + k^2) & -2\Upsilon k & -2\Upsilon k & -1 + \Upsilon(1 + k^2) \\ -2\Upsilon k & 1 + \Upsilon(1 + k^2) & -1 + \Upsilon(1 + k^2) & -2\Upsilon k \\ -2\Upsilon k & -1 + \Upsilon(1 + k^2) & +1 + \Upsilon(1 + k^2) & -2\Upsilon k \\ -1 + \Upsilon(1 + k^2) & -2\Upsilon k & -2\Upsilon k & +1 + \Upsilon(1 + k^2) \end{bmatrix} \quad (\text{III.105})$$

et

$$S = \begin{bmatrix} \delta p_I - \Upsilon \delta p'_I + \Upsilon \delta p'_I I \\ -\delta p_{II} + \Upsilon \delta p'_I - \Upsilon \delta p'_I I \\ +\delta p_{II} + \Upsilon \delta p'_I - \Upsilon \delta p'_I I \\ \delta p_I - \Upsilon \delta p'_I + \Upsilon \delta p'_I I \end{bmatrix} \quad (\text{III.106})$$

Le déterminant de M_{ik} prend pour expression :

$$|M_{ik}| = 16. \Upsilon. (1 - k^2)^2 \quad (\text{III.107})$$

La relation linéaire III.104 qui rend possible le raccordement est donc conditionnée par

$$\begin{cases} \Upsilon \neq 0 \\ k \neq 1 \end{cases} \quad (\text{III.108})$$

Ces relations ne sont pas très contraignantes. La relation III.108 est, en effet, nécessairement vérifiée pour prendre en compte les discontinuités de pente. Dans le cas contraire, il faudrait imposer la répartition de correction de part et d'autre des interfaces pour fermer le problème.

Dans la pratique le coefficient de pente k ne peut être imposé. La valeur des pentes est inhérente à la résolution des problèmes harmoniques. Par le calcul on constate qu'elles sont nettement inférieures à l'unité et obéissent à une loi de progression exponentielle (fig III.13).

On peut conclure que ce cas analytique ne suffit pas à délimiter le domaine de validité de la méthode, mais qu'associé aux différents essais menés par ailleurs, il conforte le bien fondé des différents choix nécessaires à la mise en œuvre de la technique de raccordement.

III.2.2.5 Optimisation de la résolution par association avec la méthode spectrale mono-domaine.

La méthode de raccordement est indépendante de la méthode de résolution du problème mono-domaine elliptique. On pressent cependant, que la méthode de raccordement sera d'autant plus performante qu'elle sera intégrée à la résolution d'ensemble. Le couplage avec la méthode spectrale mono-domaine suppose que l'on puisse évaluer les coefficients b_j^k en fonction des coefficients a_i^k .

On écrit :

$$p_k = \sum_i a_i^k \cdot \psi_i + \sum_j b_j^k \cdot \tilde{\psi}_j + \epsilon_\Gamma \quad (\text{III.109})$$

On cherche à établir une relation entre les coefficients a_i^k et b_j^k qui minimise les discontinuités.

L'équation de continuité des grandes échelles prend la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_k} a_i^k \psi_i^k + \sum_{j=1}^{N_{I_k}} \sum_{i=1}^{M_{k_j}} b_{ij}^k \tilde{\psi}_{ij}^k &= \sum_{i=1}^{N_l} a_i^l \psi_i^l + \sum_{j=1}^{N_{I_l}} \sum_{i=1}^{M_{l_j}} b_{ij}^l \tilde{\psi}_{ij}^l + \epsilon_\Gamma & (\text{III.110}) \\ \sum_{i=1}^{N_k} a_i^k \psi_i^{k'} + \sum_{j=1}^{N_{I_k}} \sum_{i=1}^{M_{k_j}} b_{ij}^k \tilde{\psi}_{ij}^{k'} &= \sum_{i=1}^{N_l} a_i^l \psi_i^{l'} + \sum_{j=1}^{N_{I_l}} \sum_{i=1}^{M_{l_j}} b_{ij}^l \tilde{\psi}_{ij}^{l'} + \epsilon'_{\Gamma_{lk}} \quad \text{sur } \Gamma_{lk} \end{aligned}$$

On aboutit à une nouvelle expression de la fonctionnelle Π

$$\Pi = \sum_{k=1}^{N_d} \sum_{l=1}^{N_{I_k}} \int_{\Gamma_{lk}} \left[\sum_{i=1}^{N_l} a_i^l \psi_i^l - \sum_{i=1}^{N_k} a_i^k \psi_i^k + \sum_{j=1}^{N_{I_l}} \sum_{i=1}^{M_{l_j}} b_{ij}^l \tilde{\psi}_{ij}^l - \sum_{j=1}^{N_{I_k}} \sum_{i=1}^{M_{k_j}} b_{ij}^k \tilde{\psi}_{ij}^k \right]^2 d\Gamma_{lk} \quad (\text{III.111})$$

$$+ \int_{\Gamma_{lk}} \left[\sum_{i=1}^{N_l} a_i^l \psi_i^{l'} - \sum_{i=1}^{N_k} a_i^k \psi_i^{k'} + \sum_{j=1}^{N_{I_l}} \sum_{i=1}^{M_{l_j}} b_{ij}^l \tilde{\psi}_{ij}^{l'} - \sum_{j=1}^{N_{I_k}} \sum_{i=1}^{M_{k_j}} b_{ij}^k \tilde{\psi}_{ij}^{k'} \right]^2 d\Gamma_{lk} \quad (\text{III.112})$$

On minimise aux sens des moindres carrés et on obtient ainsi une expression des b_{nm}^k en fonction des a_i^k .

L'évaluation locale des discontinuités n'est plus nécessaire pour calculer les coefficients b_j , les calculs en sont donc considérablement allégés. Le raccordement ne nécessite alors que le stockage de la forme linéaire de passage entre les a_i et les b_j et les fonctions de correction $\tilde{\psi}_{ij}^k$.

On a optimisé la résolution des grandes échelles de la pression en réduisant les calculs intermédiaires et en rendant la première phase de raccordement solidaire de la phase de résolution dans les sous-domaines. Les fluctuations résiduelles (fig III.113) sont résolues quant à elles dans la phase de raccordement des petites échelles.

III.2.3 Raccordement des petites échelles

Dans les paragraphes suivants nous présentons l'adaptation des deux méthodes itératives, déjà évoquées précédemment, à une résolution multi-domaines.

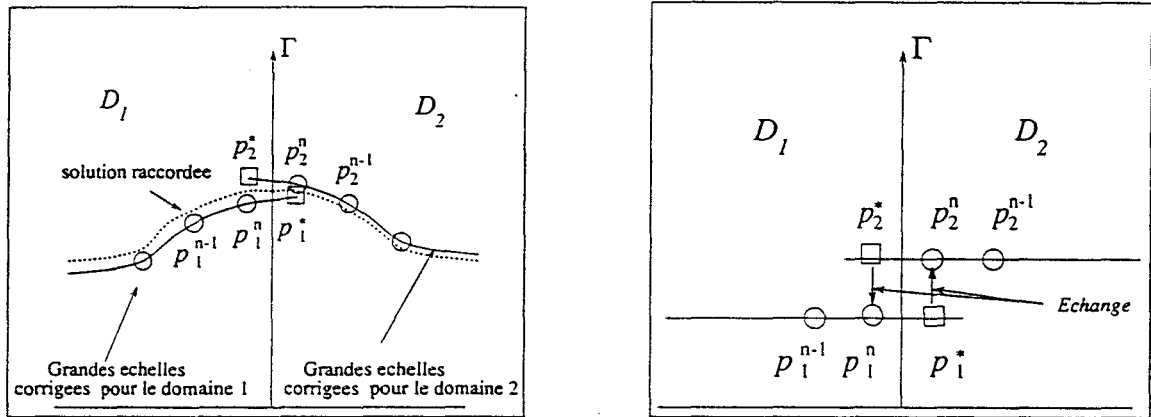


FIG. III.14 - *Discontinuité résiduelle et chevauchement de maillage*

III.2.3.1 Méthode des singularités

La méthode des singularités est très bien adaptée à ce traitement. Les maillages de chaque sous-domaine débordent d'une maille sur le sous-domaine voisin (fig III.14).

Comme on l'a vu, page 65, aux points débordants sont attribuées à la fin de chacune des étapes du calcul les pressions aux deuxièmes points intérieurs du domaine voisin (fig III.14) :

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_2^n \\ p_2^* &= p_1^n, \end{aligned} \tag{III.113}$$

Cette opération se traduit en terme de parallélisation par un échange vectorisé de données entre processeurs. Par le biais du processus itératif (III.35) on balaie le maillage de chaque sous domaine avant d'échanger à nouveau les données jusqu'à la convergence du calcul.

Remarque : on a supposé que les mailles sont en nombre identique et que les points de chevauchement sont confondus avec les points intérieurs du sous-domaine voisin. Nous n'avons pas traité d'autre cas qui impliquerait l'utilisation de techniques d'interpolations à l'instar de [39].

La résolution multi-domaine par la méthode des singularités tronquées est très facile à mettre en œuvre. Sa parallélisation suppose l'usage de maillages débordants associés à des échanges vectorisés.

III.2.3.2 Méthode ADI

La méthode ADI est plus difficile à paralléliser dans le cas d'une résolution par sous-domaines. En effet, la résolution par directions alternées suppose, par essence, un type de décomposition où il n'existe ni notion d'interface ni notion de sous-domaines. Elle convient plutôt à une parallélisation par tâches et est difficilement compatible avec une parallélisation par sous-domaines.

Nous ne reprenons pas, dans ce paragraphe, la méthode ADI en elle-même et nous nous replaçons dans le contexte de l'équation III.54 de la partie résolution mono-domaine.

Pour réaliser le couplage, suivant la direction azimutale η , on tient le même raisonnement que pour le raccordement des grandes échelles. Ainsi suivant la direction η on se ramène à un domaine unidimensionnel tel que la variable d'espace varie sur un intervalle $[0,1]$.

Sur chaque sous-domaine on résout

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - a_\eta \cdot f = S \quad f(0) = 0, f(1) = 0 \quad (\text{III.114})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} - a_\eta \cdot \psi_1 = 0 \quad \psi_1(0) = 0, \psi_1(1) = 1 \quad (\text{III.115})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} - a_\eta \cdot \psi_2 = 0 \quad \psi_2(0) = 1, \psi_2(1) = 0 \quad (\text{III.116})$$

Par combinaison des trois solutions du problème linéaire (III.114, III.115, III.116) dans le sous-domaine N , on peut écrire :

$$P_N = f_N + \alpha^N \cdot \psi_1 + \beta^N \cdot \psi_2 \quad (\text{III.117})$$

Les coefficients α^N et β^N sont déterminés en écrivant la continuité de fonction et de gradient en $\eta = 1$. Les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont de type exponentiel et la valeur de leur gradient, lorsque la fonction est nulle, est négligeable. Il n'est pas nécessaire d'introduire la notion de couplage des fonctions correctrices comme dans les grandes échelles. Le couplage est d'autant moins justifié que la résolution ADI est itérative.

La méthode ADI ainsi adaptée donne des résultats équivalents à ceux que l'on peut obtenir avec les singularités tronquées tout en permettant une inclinaison plus forte du maillage. Elle devient, cependant très coûteuse pour une résolution tridimensionnelle elle n'a donc été mise en œuvre que dans le cas particulier d'une grille bidimensionnelle que nous présentons au chapitre suivant.

III.2.4 Organigramme du calcul

Dans la suite du document nous présentons une synthèse des deux problèmes : la résolution des équations locales dans les sous-domaines et le raccordement des solutions. L'idée est de faire converger simultanément les deux phases de la résolution.

La résolution de la pression respecte donc l'algorithme suivant :

**Résolution des grandes échelles
dans chacun des sous-domaines \mathcal{D}_i**

$$\dot{p}_k^{n+1} = \dot{p}_k^n + \sum_i a_i^k \psi_i^k \quad (\text{III.118})$$

**Raccordement des sous-domaines :
correction
des grandes échelles des discontinuités**

$$\ddot{p}_k^{n+1} = \dot{p}_k^{n+1} + \sum_j b_j^k \tilde{\psi}_j^k \quad (\text{III.119})$$

Résolution des résidus

$$p_k^{n+1} = \ddot{p}_k^{n+1} + \tilde{p}^n \quad (\text{III.120})$$

où \tilde{p}^n est le résidu provenant à la fois de la résolution spectrale dans les sous-domaines mais aussi de la phase de raccordement.

La convergence est atteinte lorsque :

$$\| \tilde{p}^n \| \leq \varepsilon \quad (\text{III.121})$$

Dès la première itération les grandes échelles sont résolues exactement. Il semble donc que seule la phase de résolution itérative des résidus affecte la convergence du calcul.

III.2.5 Convergence de la méthode.

III.2.6 Application 1: cas d'un anneau.

On résout le laplacien d'une fonction p sur un domaine bidimensionnel analogue à celui représenté figure (III.10 (b)). Il est incliné d'un angle de 30° et est périodique sur lui-même. On le décompose en six sous-domaines identiques. Les conditions aux limites en entrée et en sortie sont des conditions de Dirichlet homogènes. On recherche une solution continue sur les interfaces. Dans cette étude les petites échelles sont résolues au moyen des singularités tronquées.

| Essais | Itérations sur les singularités | nombre de projections | correction | $\ \tilde{p} \ $ |
|--------|---------------------------------|-----------------------|------------|-------------------|
| 1 | 250 | 0 | non | 8,9E-4 |
| 2 | 5 | 1 | non | divergence |
| 3 | 250 | 1 | oui | 7,0E-6 |
| 4 | 50 | 5 | oui | 1,7E-9 |
| 5 | 25 | 10 | oui | 1,1E-11 |
| 6 | 10 | 25 | oui | 1,5E-14 |
| 7 | 5 | 50 | oui | 1,0E-15 |
| 8 | 2 | 125 | oui | 1,0E-15 |
| 9 | 1 | 250 | oui | 1,0E-15 |

TAB. III.3 - Résidu : $\| \tilde{p} \|$, pour un même nombre d'itérations sur les singularités.

On présente TAB. (III.3) un tableau récapitulatif de quelques essais consécutifs menés avec un maillage de 21x21 mailles par sous-domaine. Les discontinuités de fonction sont approximées par une base de Fourier réduite aux sinus, afin de respecter les conditions aux limites en entrée ainsi qu'en sortie. On opère, par ailleurs, une troncature de longueur d'onde 6 mailles.

Le second membre est une fonction alternée croissante :

$$s(\xi, \eta) = A(l) \cdot \xi \cdot (1 - \xi) \cdot \eta (1 - \eta) \quad (\text{III.122})$$

avec

$$A(l) = l \cdot (-1)^l, \quad \text{avec } l \text{ le numéro du canal qui varie de } 1 \text{ à } 6 \quad (\text{III.123})$$

Les figures (III.15, III.16) donnent le taux de convergence de $\| \tilde{p} \|$ en fonction du nombre d'itérations et pour chacun des essais. Les différents essais peuvent être comparés avec l'essai numéro 1. Il correspond à une résolution par singularités seules, la convergence est alors exponentielle, elle est comparable à celle obtenue pour des calculs sur un domaine unique. L'adjonction d'une phase de résolution spectrale avec raccordement accélère la convergence. Les essais 1,3,4 montrent une légère augmentation de $\| \tilde{p} \|$ à la faveur de chaque phase de projection. Ceci est dû à la prise en compte des points situés sur l'interface dans le calcul de $\| \tilde{p} \|$. Pour raccorder les petites échelles on est en effet contraint d'effectuer l'échange entre les points débordants et les points intérieurs alors que le calcul est davantage convergé dans les sous-domaines que sur l'interface. Ce passage obligé permet néanmoins un nouvel accroissement de la vitesse de convergence.

On présente (fig. B.6) l'évolution d'un calcul dont la solution analytique est connue :

$$p(\xi, \eta) = \sin(\pi v_\xi) * \sin(4 \cdot \pi v_\eta) \quad (\text{III.124})$$

où v décrit un intervalle $[0,1]$ lorsque ξ et η décrivent les lignes de nœuds.

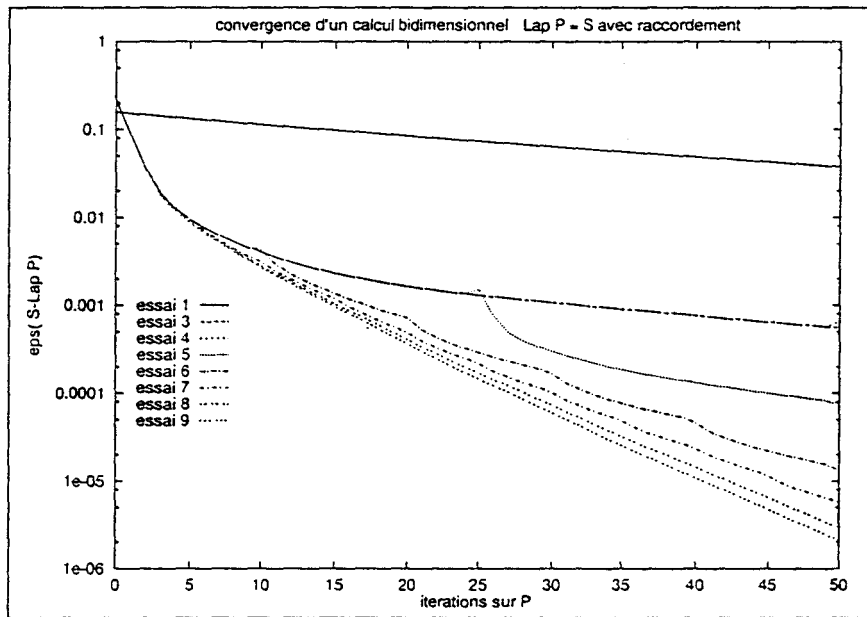


FIG. III.15 - Etude comparative de la convergence d'un multi-domaine.(a)

| Essais | Itérations sur les singularités par projections | correction | troncature |
|--------|---|------------|------------|
| 1 | 10 | oui | 6mailles |
| 2 | 10 | oui | 10mailles |
| 3 | 10 | oui | 20mailles |
| 4 | 5 | oui | 20mailles |

TAB. III.4 - Classifications de différents essais selon la longueur d'onde de coupure de la méthode de raccordement.

La figure (fig. B.6 (a)) donne l'allure du second membre. Les figures B.6 (b), (c), (d) représentent la solution après, respectivement : la résolution dans les sous-domaines, la correction des grandes échelles et à la convergence du calcul. On peut remarquer (Fig (B.6 (c)) le rôle important du raccordement des grandes échelles.

Enfin, on mène une étude de la convergence en fonction du nombre de fonctions de correction, i.e en fonction de la troncature de la base de raccordement.

Les différents essais sont répertoriés dans le tableau III.4 et la fig. III.17. L'essai N°3 montre une convergence irrégulière ponctuée d'un pic à chaque phase spectrale. On peut compenser cet effet de la troncature de la base spectrale en limitant le nombre d'itérations sur les singularités (cf essais 4). On garde de cette manière un taux de convergence élevé et on évite les pics dus à une mauvaise adéquation entre la phase de résolution des grandes échelles avec correction et la phase de résolution des petites échelles.

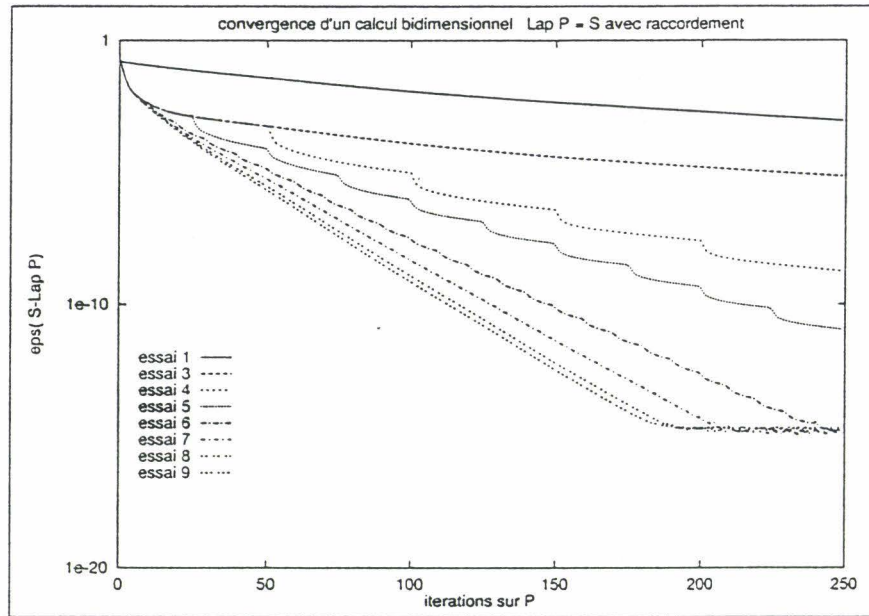


FIG. III.16 - Etude comparative de la convergence d'un multi-domaine.(a)

III.2.6.1 Application 2 : cas d'une grille d'aube.

On se place cette fois dans le cadre de la résolution de la pression dans une grille de plaques planes inclinées. L'objectif de la présente application est de vérifier que la présence d'un bord d'attaque et d'un bord de fuite ne nuit pas à la convergence du calcul.

On résout le problème couplé pour pression dont l'expression est :

$$\begin{cases} \Delta p = s & \text{dans } \mathcal{D} \\ p = 0 & \text{en Entrée et en Sortie} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur les aubes} \end{cases} \quad (\text{III.125})$$

Dans ce cas la solution analytique est inconnue. La validité des opérateurs ayant été vérifiée lors de l'application précédente, la convergence du calcul assure, à l'ordre de la discrétisation près, l'obtention de la bonne solution.

Mise en œuvre de la méthode de raccordement Chaque fonction harmonique de correction vérifie un problème analogue au problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\psi}_i = 0 & (\text{à l'intérieur du domaine}) \\ \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial n} = 0 & (\text{sur les frontières inter-domaines solides}) \\ \tilde{\psi}_i = 0 & (\text{en entrée et en sortie}) \\ \tilde{\psi}_i = \tilde{\varphi}_i & (\text{sur l'interface}) \\ \tilde{\psi}_i = 0 & (\text{sur les interfaces voisines}) \end{cases} \quad (\text{III.126})$$

Pour le traitement de multi-domaine présentant des périodicités on a défini une fonctionnelle Π_p comme mesure des discontinuités. Dans la méthode générale on suppose que

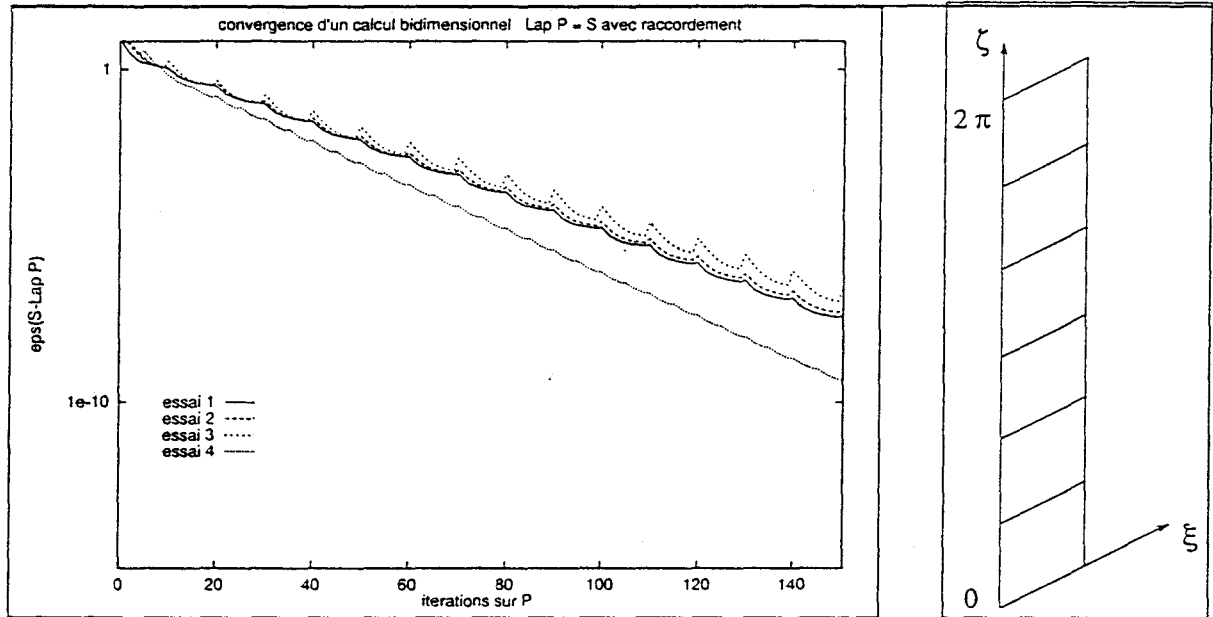


FIG. III.17 - Etude comparative de la convergence d'un multi-domaine.

l'interaction entre interfaces est toujours suffisamment forte pour influencer la qualité du raccordement.

Dans la présente application, on présume que les interfaces amont de l'aubage interagissent faiblement avec les interfaces aval. Cette hypothèse est vérifiée après une comparaison des gradients respectifs des fonctions de raccordement. On considère, par contre, que les interfaces amont, et respectivement les interfaces aval, interagissent entre elles fortement et nécessitent un couplage.

On simplifie la mesure des discontinuités à une mesure amont et une mesure aval, on scinde donc la fonctionnelle Pi_p en deux fonctionnelles : Π_{amont} et Π_{aval} .

On minimise les deux fonctionnelles, Π_{amont} et Π_{aval} , séparément ce qui conduit à deux relations matricielles. La phase de correction des grandes échelles consiste à corriger successivement les discontinuités amont et les discontinuités aval. Notons que l'on aurait pu recalculer les discontinuités à l'issue de chaque correction et ainsi construire un schéma itératif de façon à contrebalancer l'hypothèse d'interaction faible entre l'amont et l'aval.

Dans la pratique on considère que l'erreur faite sur la première étape peut être corrigée, en même temps que prise en compte des discontinuités non projetables, (ie) dans la phase de correction des petites échelles. La résolution des petites échelles est réalisée par la méthode des singularités tronquées.

Description de l'essai On présente un essai réalisé pour un calage de 45° . Les sous-domaines sont comme les canaux inter-aubes au nombre de 6. Les petites échelles sont résolues par singularités tronquées. Le maillage comprend 21×61 mailles par sous-domaine.

Les discontinuités sont approximées par une base de Fourier réduite aux sinus complétée d'une fonction linéaire nulle à l'entrée (sortie) du domaine et de valeur unitaire au bord d'attaque (au bord de fuite). La base ainsi constituée est adaptée au traitement des

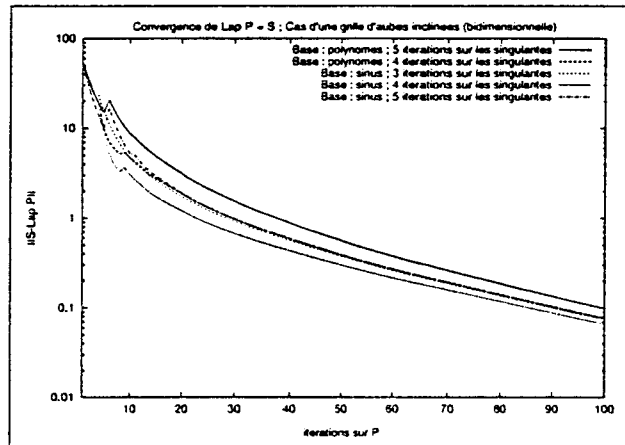


FIG. III.18 - Etude comparative de la convergence d'un multi-domaine : cas d'une grille inclinée

singularités dues à la présence de l'aubage. On compare les taux de convergence obtenus lorsque qu'au lieu d'une approximation sinusoïdale l'approximation est polynomiale.

On impose un second membre de même nature que lors de l'essai précédent, avec toutefois un nombre d'onde suivant la direction η qui est de 3π au lieu de 4π . On peut observer sur les figures (B.7 (a) (b)), représentant respectivement le second membre et la solution convergée, que la pression est parfaitement continue sur les interfaces. La convergence est rapide (fig III.18.).

Cependant, un pic subsiste à l'issue du premier passage du mode de résolution spectrale à la résolution par singularités (fig.III.18.). Le taux de convergence de la méthode est peu sensible au changement d'approximation : polynomiale ou sinusoïdale. L'amélioration de la convergence pour le cas particulier : 4 itérations sur les singularités par résolution spectrale, conforte l'idée selon laquelle il existe une adéquation optimale entre les deux techniques. La présence de ce pic ne nuit pas à la convergence qui est ensuite régulière.

La technique de raccordement garde toute son efficacité malgré la présence de l'aubage. L'hypothèse de faible interaction entre les interfaces amont et les interfaces aval est justifiée, elle ne nuit pas à la convergence et allège considérablement l'écriture de la fonctionnelle qui mesure les discontinuités.

III.2.6.2 Application 3: Mise en œuvre de la méthode dans toute sa généralité.(Roue-Diffuseur)

Une étude portant sur la résolution de la pression dans un étage de turbomachine centrifuge a permis de valider la méthode dans le cas général. La configuration est com-

posée d'un ensemble : roue, diffuseur. La roue comporte six aubes et le diffuseur cinq. Onze sous-domaines sont utilisés pour la décomposition en correspondance avec les onze canaux inter-aubes.

La roue peut être animée d'une vitesse de rotation. Le maillage de la roue est donc indépendant de celui du diffuseur et l'interface entre les sous-domaines "roue" des sous-domaines "diffuseur" est le lieu d'un chevauchement de maillage.

La pression est résolue lorsque le second membre est une composition de fonctions trigonométriques.

On reporte sur la figure (B.8) le champ d'iso-pression obtenu à la convergence du calcul. La continuité aux interfaces est très bien respectée. Ce résultat est encourageant dans la perspective de la résolution du problème de Navier Stokes dans son intégrité.

III.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons introduit une méthode de résolution rapide du problème de Poisson multi-domaines. Elle est construite par l'association de trois techniques qui se complètent mutuellement : une méthode spectrale, une méthode de raccordement, la méthode des singularités tronquées.

Une étude numérique de la convergence a été menée pour chacune des techniques. Elle a permis, en premier lieu, une comparaison entre la méthode ADI et la méthode de singularités tronquées. Ces deux méthodes sont comparables en ce qui concerne leur taux de convergence. On préfère, cependant la seconde, qui est comparable à une méthode de pseudo-compressibilité et par là même très rapide en termes de temps de calcul. En effet, comme elle n'implique pas les conditions aux limites elle est aussi d'une utilisation plus aisée lors du raccordement.

Ces deux techniques employées seules sont à convergence lente sur des domaines à grands nombre de points. Associées avec la méthode spectrale elles ne s'adressent qu'à des cellules de taille limitée à quelques mailles sur lesquelles elles sont très efficaces. . Enfin on donne quelques résultats de convergence ainsi que trois exemples d'application de la méthode de résolution multi-domaine La technique est parfaitement adaptée à une résolution sur ordinateur parallèle et complètement indépendante de la dimension du problème.

Dans le chapitre suivant nous utilisons la présente technique en la couplant avec la résolution vitesse dans le cadre d'une simulation bidimensionnelle.

Chapitre IV

APPLICATION MULTI-DOMAINES BIDIMENSIONNELLE

IV.1 Objectifs

Le but de cette application est de mettre en œuvre sur un cas simple la technique développée précédemment couplée cette fois au calcul de la vitesse. Son premier objectif est de tester la compatibilité locale de la méthode de résolution et du schéma ainsi que la validité de la correction de pression liée au débit ; le deuxième objectif est de se placer en situation de décrochage et de montrer l'existence de cellules. Une comparaison avec une autre simulation numérique est présentée.

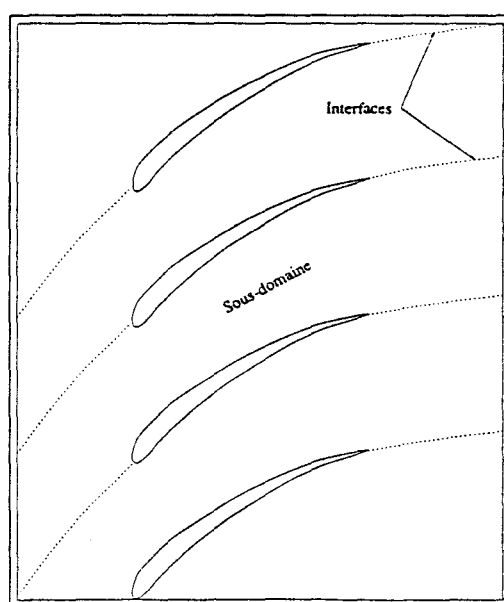


FIG. IV.1 - Décomposition en sous-domaines d'une grille d'aubes 2D

IV.2 Description de l'application

IV.2.1 Géométrie

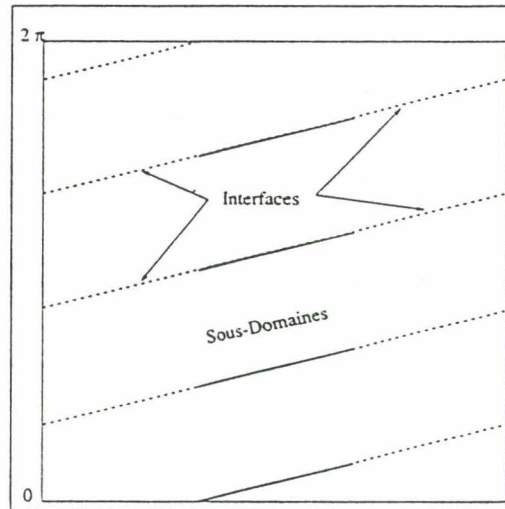


FIG. IV.2 - Décomposition en sous-domaines d'une grille de plaques planes 2D

Le premier objectif est de vérifier la compatibilité des opérateurs discrétisés. On se place dans le cas d'une grille de plaques planes (figure IV.2) et d'un maillage régulier à pas constant.

Ceci ne dégénère pas le problème. En effet, SPALART [61] a montré que l'on observe les mêmes structures cellulaires avec une grille non cambrée qu'avec une grille de plaques planes. En outre les structures recherchées ont une taille de l'ordre d'un canal inter-aubes, ce qui nous permet de négliger l'influence de l'épaisseur de l'aubage. La question qui se pose est de vérifier que cette grille, ainsi simplifiée, est susceptible de décrocher.

En l'absence de prédistributeur, on étend le domaine de calcul aussi loin que possible à l'amont et à l'aval de la grille, cela en vue de minimiser les effets de confinement numérique qu'induisent les conditions aux limites et de réduire l'influence de celles-ci sur la stabilité de l'écoulement.

Le nombre de canaux est conditionné par le nombre de processeurs du ordinateur. Il peut être d'un maximum de huit ou multiple de huit. La méthode de raccordement (voir chapitre III) est indépendante du nombre de sous-domaines. Elle exige cependant, lors de sa mise en œuvre informatique, un nombre d'aubes paire. Notons que cette limitation est liée au ordinateur utilisé et qu'elle peut être facilement levée sur d'autres systèmes informatiques.

IV.2.2 Schémas utilisés

Les deux schémas, détaillés au chapitre II, ont été testés. Le schéma A.L.E a été mis en œuvre dans une version bidimensionnelle. Le schéma "prédicteur-correcteur", développé

et écrit initialement pour des applications tridimensionnelles, est forcé à une résolution bidimensionnelle. Les couches sont empilées selon la direction ζ (cf chapitre II).

Sur la première et la dernière couche on applique une condition de Neumann à valeur nulle sur la vitesse ainsi que sur la pression.

Par ailleurs un calcul de lignes d'émission, par lâché de particules, a été intégré au calcul de l'écoulement lors de la résolution A.L.E. La technique relativement exigeante en ressources informatiques conduit à limiter le nombre de nœuds à 6000 points.

A titre d'exemple l'étude A.L.E lorsque l'angle de calage est de 45° a nécessité un maillage de 41×161 mailles par sous-domaine (respectivement par processeur).

La précision accrue du schéma "prédicteur-correcteur" (P-C) nous a permis d'établir, pour une géométrie identique, mais un nombre de points réduit d'un facteur 4, une comparaison avec la première résolution.

IV.3 Paramètres de l'étude.

IV.3.1 Débit

Il est maintenu constant pour l'ensemble des essais. Son contrôle est obtenu par la technique de correction du gradient de pression présentée au chapitre II. Cette technique a pour effet de maintenir un bruit permanent dans l'écoulement. Dans une étude portant sur la détection d'instabilités, la présence de bruit pourrait sembler pénalisante. Les turbomachines sont le lieu de phénomènes acoustiques d'origines diverses qui se superposent les uns sur les autres : bruit mécanique, fluctuations de pression, défauts géométriques...

En conclusion la régulation du débit ne va pas à l'encontre de l'étude de stabilité globale que l'on mène.

IV.3.2 Calage

Le calage est assujéti à l'inclinaison du maillage, on se limite aux angles suivant : 30° , 40° et 45° . Durant toute l'étude la solidité (rapport corde/pas) est maintenue constante et égale à l'unité.

IV.3.3 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est imposé en fonction de la corde c et de la vitesse débitante U_d par le biais de la viscosité dynamique ν telle que :

$$\mathcal{R}_e = \frac{U_d \cdot c}{\nu} \quad (\text{IV.1})$$

Tous les essais ont été menés avec un nombre de Reynolds de 1000.

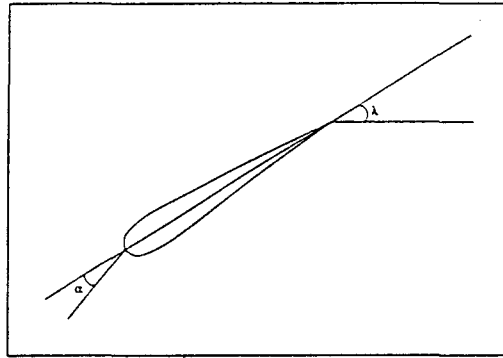


FIG. IV.3 - Terminologie angulaire

IV.3.4 Incidence

L'incidence α du fluide par rapport à l'aubage (voir fig IV.3) est donnée selon la même convention que Spalart [61]. Pour faire varier l'incidence on agit sur la valeur de Φ ,

où

$$\Phi = \frac{W_x}{W_y} \quad (\text{IV.2})$$

A l'instar de DAVOUDZADEH et al [13] on mène une étude analogue à celle de SPALART. Les travaux de celui-ci le conduisent, en effet, à remarquer que plus l'angle de calage est grand plus la grille décroche à un angle d'incidence faible. Selon ses résultats la limite de stabilité de la grille est atteinte si :

$$\alpha + \frac{\lambda}{2} = 47^\circ \quad (\text{IV.3})$$

Vérifions au travers de nos propres essais si on peut confirmer une telle loi.

IV.3.5 Nature de la perturbation.

En l'absence de perturbation de grande amplitude, une machine peut décrocher si son régime de fonctionnement est éloigné du régime nominal. Une perturbation accélère le processus d'amplification [29] et réduit le nombre de tours de roue au cours desquels le décrochage s'établit. Ce procédé a été exploité par TAKATA et NAGANO [62]. Ceux-ci sollicitent leur modèle au moyen de perturbations dont ils font varier la longueur d'onde. Ici le nombre d'aubes est réduit, on peut donc supposer que la longueur d'onde de la perturbation aura un rôle secondaire quant au nombre de cellules observées. Le rôle joué par la nature de la perturbation sera cependant examiné.

Deux types de perturbations sont donc imposées dans l'écoulement afin de contrôler d'une part si la perturbation s'amplifie aussi rapidement et d'autre part si le résultat final est inchangé quelle que soit la nature de la perturbation initiale.

La première est une perturbation sinusoïdale de la vitesse axiale à l'entrée du domaine de calcul (référéncée "e" dans TAB IV.1). Il s'agit d'une condition aux limites temporaire,

on la fait disparaître selon une loi exponentielle dans le temps. La seconde consiste, lors de l'initialisation, à diminuer la vitesse débitante dans l'un des canaux et respectivement l'augmenter dans un autre (référéncée perturbation de grille "g" dans TAB IV.1).

IV.4 Analyse des résultats

IV.4.1 Synthèse des essais

La synthèse est présentée dans le tableau IV.1. Seuls les essais apportant des informations significatives y apparaissent. Ils sont répertoriés principalement en fonction de l'angle de calage λ et de l'angle d'incidence α . On précise la valeur correspondante de Φ dont les essais révèlent l'importance dans le mécanisme d'apparition du décrochage.

Dans le cas où la grille ne décroche pas, on qualifie la perturbation résiduelle d'oscillation ou d'onde selon la régularité du signal qui la caractérise.

| Essai | λ | α | Φ | Schéma | Canaux | \tilde{u} | Cellules | maillage | Remarques |
|-------|-----------|----------|--------|--------|--------|-------------|----------|----------|--------------|
| 1 | 30° | 15° | 1,00 | ALE | 8 | e | – | 161x41 | amortie |
| 2 | 30° | 20, 19° | 0,83 | ALE | 8 | e | – | 161x41 | amortie |
| 3 | 30° | 20, 19° | 0,83 | ALE | 6 | e | – | 251x41 | amortie |
| 4 | 30° | 22, 43° | 0,76 | ALE | 6 | e | – | 251x41 | oscillations |
| 5 | 30° | 24, 46° | 0,71 | ALE | 6 | e | – | 251x41 | onde |
| 6 | 30° | 26, 30° | 0,66 | ALE | 6 | e | – | 251x41 | onde |
| 7 | 30° | 26, 30° | 0,66 | ALE | 8 | e | – | 161x41 | onde |
| 8 | 30° | 38, 19° | 0,40 | ALE | 8 | e | – | 161x41 | onde |
| 9 | 30° | 38, 19° | 0,40 | P-C | 6 | g | – | 201x41 | onde |
| 10 | 30° | 47, 13° | 0,23 | P-C | 6 | g | 1 | 81x21 | Décrochage |
| 11 | 40° | 33, 78° | 0,29 | P-C | 6 | g | – | 81x21 | onde |
| 12 | 40° | 35, 75° | 0,26 | P-C | 6 | g | 1 | 81x21 | Décrochage |
| 13 | 40° | 36, 09° | 0,24 | P-C | 6 | g | 2 | 81x21 | Décrochage |
| 14 | 45° | 25° | 0,36 | P-C | 6 | g | – | 81x21 | onde |
| 15 | 45° | 27° | 0,32 | P-C | 6 | g | – | 81x21 | Décrochage |
| 16 | 45° | 28° | 0,30 | P-C | 6 | g | 1 | 81x21 | Décrochage |
| 17 | 45° | 30° | 0,26 | ALE | 6 | e | 2 et 1 | 201x41 | Décrochage |
| 18 | 45° | 30° | 0,26 | P-C | 6 | e | 2 et 1 | 81x21 | Décrochage |
| 19 | 45° | 30° | 0,26 | P-C | 6 | g | 1 | 81x21 | Décrochage |

TAB. IV.1 - Synthèse des essais. Notation : "e" pour perturbation d'entrée, "g" pour perturbation de grille

IV.4.2 Analyse du phénomène au travers des essais.

IV.4.2.1 Déclenchement du décrochage.

Nous avons augmenté progressivement l'angle de calage et fait varier l'angle d'incidence.

Cas $\lambda = 30^\circ$ Un suivi de particules nous a permis de mettre en évidence la nature de l'écoulement pour les différents essais. On s'aperçoit de cette manière que l'écoulement reste périodique (D.1, D.2(a)) lorsque l'angle α est inférieur à 21 degrés (essais 1,2 et 3), et ce quel que soit le nombre de canaux mis en jeu. Or à 26, 30° (essais 6 et 7) (D.2(b), D.3(a)) on assiste à une déstabilisation de l'écoulement. Il n'est alors plus périodique sans toutefois perdre de sa cohérence. On parvient toujours à distinguer les sillages d'une aube par rapport à ceux de sa voisine. Au delà de 26, 30° (essais 8, D.3(b)), les sillages présentent de fortes dissymétries.

L'analyse des champs de vitesse ((fig. D.4, D.5, D.6 , D.7 (b)) correspondant respectivement aux essais (1,2,3,6,7,8,4) confirme les premières observations et renseigne sur l'évolution de l'écoulement à l'aval en fonction de l'incidence. L'essai 1 (fig. (D.4)) correspond au cas stationnaire. La structure de l'écoulement aval est parfaitement périodique. Les essais 2 et 3 (fig (D.5, D.6)) sont menés pour une même incidence mais un nombre de canaux différents. Ils semblent indiquer un comportement similaire de la grille dans les deux cas. On observe toutefois de légères différences trop faibles pour les imputer à l'influence du nombre de canaux. L'essai 4 (fig (D.7 (b)) marque une transition, l'écoulement aval n'est plus périodique et on note que les tourbillons, induits par le contournement du bord de fuite, refoulent dans le canal. Ce mécanisme persiste dans les essais 6 et 7 (fig. D.5(b) , D.6(a)). Bien que le nombre de canaux mis en jeu lors de l'essai 6 soit différent de celui de l'essai 7, aucune différence n'est perceptible à la seule vue des champs de vitesse. Enfin l'essai 8 est mené avec une forte incidence (fig.(D.6(b))). Les aubes sont toutes décrochées sans que cela conduise pour autant au décrochage de grille.

Les iso-valeurs de la pression des essais (4,3,6) ((fig. D.7(a) et D.8) mettent en évidence la nette différence existant entre un écoulement stable (essai 3, fig. (D.8)(a)) et un écoulement déstabilisé (essais 4 et 6 respectivement fig. (D.7)(a) et fig. (D.8)(b)). Les cas instables sont caractérisés par la présence de zones fortement dépressionnaires qui sont localisées aux bords de fuite des aubes les plus décrochées. On note que l'influence de ces zones peu s'étendre sur une demi corde amont. On pressent ici que l'amplification d'une de ces zones peut conduire au blocage d'un canal.

Lors des essais menés avec uniquement 6 canaux (essais 3,4,5 et 6) respectivement (fig. D.9 ,D.10,(D.11,D.12),(D.13,D.14)) nous avons conservé une trace de l'évolution du débit dans la roue tout au long du calcul ce qui permet de voir comment se propagent les perturbations. On retrouve (essai 3, fig. D.9) le cas complètement stable, avec un écoulement peu altéré au cours du temps.

Lorsque α est supérieur à 20°19 (essais 4,5 et 6) on observe de nets changements dans le comportement de l'écoulement. Ainsi pour une incidence de 22°43 (essai 4, fig. D.10) la grille est le lieu de petites fluctuations de type onde stationnaire. Ce phénomène est confirmé par l'essai n° 5 (fig D.11, D.12) au cours duquel une onde stationnaire se

superpose à l'écoulement sain. Au cours de l'essai n°6 (fig D.13, D.14) l'écoulement est marqué par une alternance d'ondes stationnaires et d'ondes progressives. On peut voir là les prémisses d'un décrochage, mais dans aucun de ces quatre essais nous n'avons observé de cas où le débit devient localement négatif.

Les essais 8 et 9 ont été menés à la fois avec le schéma "prédicteur-correcteur" et le schéma A.L.E. Dans les deux cas (fig. D.3, D.6, D.16, D.15) on observe une onde d'amplitude supérieure à celle des essais précédents sans toutefois observer d'amplification suffisante pour aller vers la formation de cellules.

Ces essais n'ont pas abouti à l'obtention de cellule de décrochage malgré des incidences déjà fortes. Les essais à calage supérieur étaient plus concluants et nous ont incité à penser que la valeur de Φ , toujours supérieure à 0,4, était beaucoup trop importante pour ce type de configuration. Cette hypothèse est vérifiée en diminuant Φ d'un facteur 2, l'incidence est alors de $47,13^\circ$. Après 24 tours de roue, la grille décroche et une cellule (débit négatif) (fig. D.17) se forme (fig. D.18). On évalue sa vitesse de rotation à 0,3 fois celle de la roue. Si l'on se réfère aux travaux expérimentaux on peut parler de grand décrochage, la cellule correspond à une zone de recirculation dont l'étendue englobe plusieurs canaux. On remarque (fig. D.18) que l'écoulement "refoule" largement dans les canaux 4 et 5 et la cellule semble alimentée par l'aval et par du fluide provenant des canaux 2 et 3. Seuls les canaux 1 et 6 débitent vers la sortie contrairement à ce que laisse penser le graphe (fig. D.17).

Dans les campagnes d'essais suivantes on s'appuie sur ces premiers constats, on cherche à préciser le mécanisme d'amplification et à établir une loi de décrochage de la grille.

Cas $\lambda = 40^\circ$ Ce cas a été traité par DAVOUDZADEH et al [13] pour des angles d'incidence qui n'exèdent pas 21° . Seule une onde que les auteurs identifient à du décollement tournant a été observée. Au moyen du schéma "prédicteur-correcteur" on étudie le comportement de la grille pour une incidence supérieure à 30° .

Il résulte des différents essais (11 à 13) (annexes E.1 ,E.2,E.3), qu'au delà d'un angle d'incidence de $35,75^\circ$ (essai 12, fig. E.2) l'écoulement se déstabilise et la perturbation prend une forme cellulaire. La cellule englobe alors une zone dont l'amplitude couvre deux canaux interaubes et à l'intérieur desquels le fluide "refoule" de l'aval vers l'amont. Ce régime est atteint après une longue période, équivalente à 39 tours de roue, durant laquelle la perturbation est entretenue. Nous avons poussé nos investigations jusqu'à l'incidence de $36,09^\circ$ (essai 13). L'instabilité se produit également tardivement : après 34 tours de roue (fig. E.3). Les prémisses (perturbation amplifiée) sont d'amplitude plus importante que pour le cas à $35,75^\circ$ avec par moment ($8^{\text{ième}}_{\text{tour}}, 1^{\text{ier}}_{\text{canal}}$) et ($28^{\text{ième}}_{\text{tour}}, 1^{\text{ier}}_{\text{canal}}$) des changements de signe du débit (zones de refoulement). Le phénomène se stabilise sous la forme de deux cellules, diamétralement opposées, qui occupent chacune l'espace d'un canal interaube (fig. E.1). Le champ de vitesse et le champ de pression semblent indiquer que les deux cellules sont d'amplitude et donc de vitesse de déplacement différentes. Il

s'agit en fait d'un résultat instantané, et une analyse de l'historique de l'évolution du débit dans les canaux (fig. E.3) conclut que les cellules se déplacent en moyenne, sur plusieurs tours de roue, à vitesse constante. Par contre la traversée d'un canal par l'une des deux cellules donne lieu à un ralentissement de celle-ci durant lequel les cellules paraissent se rapprocher l'une de l'autre.

Une fois le décrochage établi nous avons cherché à en sortir. Pour cela l'angle d'incidence est réduit et les calculs sont poursuivis durant plusieurs tours de roue après chaque réduction angulaire. La grille sort du décrochage pour l'angle α égal à $33,78^\circ$ (fig.E.4). La grille est donc sujette à un phénomène d'hystérésis d'environ 2° ce qui correspond au passage d'un débit réduit Φ de 0,24 à 0,29. Le phénomène d'hystérésis est couramment observé dans les mesures expérimentales. Il était par ailleurs déjà présent dans les résultats de TAKATA et NAGANO ([62]). Ce phénomène est avant tout la manifestation d'un comportement non-linéaire, c'est pourquoi le modèle de TAKATA et NAGANO suffit pour en montrer l'existence.

Les résultats obtenus confirment que DAVOUDZADEH et al [13] ne pouvaient observer de grand décrochage avec d'aussi faibles incidences. Les résultats obtenus démontrent des bonnes capacités du modèle à prendre en compte de fortes recirculations.

Ces essais soulignent l'importance du paramètre Φ devant la différence angulaire entre le calage et l'angle du fluide. Il semble que le type de grille que l'on étudie est susceptible d'amplifier des perturbations lorsque Φ est proche de 0,3. Ces observations sont confirmées par les essais menés avec un calage λ de 45° .

Cas $\lambda = 45^\circ$ Ce cas a fait l'objet d'une étude plus approfondie que celle menée lors des essais précédents. On y compare notamment le schéma ALE avec le schéma "prédicteur-correcteur" pour une configuration de l'écoulement et un type de perturbation similaire. Pour rechercher les limites de stabilité de la grille lorsque α varie, on fait usage du schéma du second ordre en temps.

Pour α égal à 25° (essai 14 fig. F.1, F.2) la perturbation est entretenue sous la forme d'une onde régulière de débit qui se propage dans la grille dans laquelle le débit reste positif. Elle prend forme rapidement et reste stable sur plus de 22 tours. Sa régularité nous a conduit à ne pas poursuivre les calculs plus au delà.

La limite au delà de laquelle le débit devient localement négatif est atteinte pour une valeur de α comprise entre 27° (essai 15 fig.F.3) et 28° (essai 16 fig.F.4) soit lorsque Φ tend vers 0,31. En effet, pour un angle d'incidence de 27° la perturbation est amplifiée, entretenue durant 17 tours puis s'atténue ensuite brutalement, tandis que pour 28° , l'onde est parfaitement stabilisée.

Une augmentation de 1 degré de l'incidence suffit donc à faire décrocher rapidement la grille. En l'espace de 8 tours, une cellule de grande amplitude se forme et subsiste jusqu'à l'interruption du calcul.

Les essais (17,18,19) traitent la même configuration : $\alpha = 30^\circ$, $\lambda = 45^\circ$. Ils aboutissent tous les trois à du décrochage tournant à une seule cellule quel que soit le schéma mis en œuvre et qu'elle que soit la perturbation initiale. Notons que ce cas a été étudié par un autre auteur (SPALART) qui conclut également à un cas instable de type grand décrochage.

Par les essais (17,18) on compare le comportement des deux schémas pour une perturbation identique (en entrée de domaine de calcul). Les deux schémas donnent des résultats globalement comparables (fig F.5, F.6, F.7, F.8). L'écoulement passe par une phase de décrochage à deux cellules. Celle-ci débute au 13^{ième} tour pour le schéma A.L.E et au 15^{ième} tour pour le schéma du second ordre. Enfin les cellules coalescent au 27^{ième} pour former une cellule unique avec les deux schémas.

Une différence subsiste cependant : les valeurs extrêmes que prend le débit dans les canaux sont, en valeurs absolues, plus grandes dans le cas A.L.E que dans le cas "prédicteur-correcteur". On trouve une différence de 10% sur les valeurs "maxi" et une différence de 25% sur les valeurs "mini". Il est probable que cela est imputable d'une part à un maillage plus grossier d'un facteur 4 pour le schéma du second ordre. D'autre part il ne nous a pas été possible de respecter à l'identique toutes les caractéristiques de la géométrie. Notamment, la zone aval est plus grande dans le cas traité par la technique ALE. La condition de pression statique uniforme en sortie de domaine peut donc influencer plus fortement l'écoulement.

Enfin pour la même géométrie angulaire nous avons remplacé la perturbation d'entrée par une perturbation de grille (essai 19). La transition est très rapide, on passe en régime décroché, mono cellulaire, en l'espace de 7 tours de roue, (F.9). L'amplitude de l'onde est toutefois légèrement supérieure (2% sur les valeurs "maxi" du débit) dans le cas d'une perturbation d'entrée. L'allure des champs de vitesse et des champs de pression sont comparables (figures F.11, F.10). Les valeurs instantanées de la pression donnent cependant 4% de différence sur les valeurs "maxi" et 8% de différence sur les valeurs "mini". Sur le seul examen de ces essais nous ne pouvons expliquer ces différences.

Par contre à la lumière de ces essais il devient indiscutable que l'apparition du décrochage dans cette grille de plaques planes est conditionnée par la valeur de Φ .

IV.4.2.2 Nombre des cellules.

Au cours de nos essais nous n'avons observé qu'un unique cas de décrochage établi comportant deux cellules. Cela est suffisant pour affirmer que le nombre de cellules est indépendant du type de perturbation. La présente étude confirme donc les remarques de NEUHOFF et GRAHL [51] concernant le rapport étroit entre le nombre de cellules ainsi que leur vitesse de rotation et la rotationnalité du fluide à l'amont de la grille. La résolution des équations de Navier Stokes a pour principal avantage de limiter les hypothèses sur

la nature de l'écoulement aux seules conditions aux limites. On évite ainsi les problèmes qu'ont rencontrés TAKATA et NAGANO et ORNER [54] qui supposent l'écoulement potentiel à l'amont et aboutissent ainsi à un nombre de cellules égal au nombre de lobes de la perturbation initiale.

IV.4.2.3 Propagation des cellules.

Nous examinons le mécanisme de propagation des cellules au travers de l'essai 17.

Ainsi entre le 17^{ième} et le 25^{ième} tour, deux cellules se propagent d'un canal à un autre (fig G.1 (a),(b),(c),(d) , G.2(a),(b),(c),(d)). Par le calcul on dispose d'une interprétation de la propagation d'une des deux cellules. Tout d'abord la cellule ($n^{\circ}1$) occupe les canaux 2 et 3 (fig G.1 (a)). Le débit important régnant alors dans le canal $n^{\circ}4$ va retarder le décrochage de l'aube $n^{\circ}4$. Par contre en l'espace de un dixième de tour le canal $n^{\circ}2$ se remplit et l'aube $n^{\circ}2$ devient fortement chargée. Le canal $n^{\circ}3$ est alors bloqué par l'apport d'énergie du tourbillon de bord de fuite de l'aube $n^{\circ}3$. Au même instant l'aube $n^{\circ}4$ décroche, et le fluide amont est dévié, la cellule reprend alors son amplitude maximale. Les blocages successifs des canaux lors de la propagation de la cellule précisent le mécanisme perçu dans la première campagne d'essais.

Le blocage d'un canal survient à la faveur de l'enroulement d'un tourbillon de bord de fuite qui n'est pas évacué assez rapidement. L'écoulement sain est alors dévié en amont du canal qui fonctionne déjà avec un débit réduit contribuant ainsi au remplissage du canal par l'aval. L'ensemble de l'écoulement bascule alors vers un nouvel état qui comprend des zones fortement tourbillonnaires suffisamment cohérentes pour ressembler à des cellules.

On compare (G.8,G.9) l'allure de la contrepression entre l'entrée et la sortie de la roue. De part leur allure les deux courbes présentent des similitudes. Toutefois les extrema sont assez différents. On trouve au moins deux raisons à la surévaluation de l'intensité du pic. D'une part l'étude est bidimensionnelle et la vorticité de l'écoulement confinée dans le plan est très certainement surévaluée par rapport au 3D. D'autre part le nombre d'aubes est réduit par rapport à une machine réelle. La cellule occupe un espace différent de celui qu'elle occuperait dans une grille de plus grande dimension. Notamment le nombre de canaux englobés par la cellule excéderait sans doute deux. La vorticité locale serait donc moindre. Notons que E. OUTA et KATO [55] rencontrent des problèmes similaires lorsqu'ils comparent leurs résultats aux études expérimentales.

IV.4.2.4 Coalescence de deux cellules.

L'essai 17 nous donne la possibilité de commenter brièvement le processus de coalescence de deux cellules. Le calcul donne une différence de taille entre les deux cellules dès le déclenchement du phénomène. La plus petite cellule se trouve englobée dans la zone d'influence de la plus grande qui plus rapide finit par la rattraper (fig G.3 (a),(b),(c),(d),(e) ,G.4 (a),(b),(c),(d),(e)). Les figures (G.5, G.6, G.7) montrent un aperçu de l'écoulement

entre le début et la fin de la coalescence. Les lignes d'émission fig (G.5) et (fig G.7) ne laissent pas de place au doute. Il existe une zone de grande amplitude qui englobe deux aubes fig (G.5) et pour finir trois aubes fig G.7). Finalement la cellule unique se stabilise et se propage à vitesse constante dans la roue.

Ce mécanisme est confirmé lors de l'essai 18 au travers de la figure (F.8) qui retrace l'historique du débit dans les canaux. Le début de la phase de coalescence est marquée par une variation de l'inclinaison des iso-valeurs qui traduit une augmentation de la vitesse de propagation d'une des deux cellules. La stabilisation de l'écoulement (iso-valeurs parallèles) annonce le début de la phase unicellulaire.

IV.4.2.5 Zone d'influence des cellules.

Dans chacun des cas traités l'influence d'une cellule se fait ressentir loin en amont. Par ailleurs, la cellule est délimitée par une frontière très nette que l'écoulement sain ne traverse pas. On est tenté de faire un parallèle avec les observations de MATHIOUDAKIS [48] qui observe qu'une ligne de courant contourne la cellule.

La figure G.7 souligne l'étendue de la zone "morte" contournée par le fluide sain et est comparable avec les résultats de SPALART (I.15 (b)). Les iso-pression correspondantes indiquent que la zone décrochée influence l'écoulement sur près de deux cordes à l'amont de la roue. Il est donc vraisemblable que les conditions aux limites d'entrée pourraient empêcher la formation des cellules. En effet le forçage de la vitesse aurait alors pour conséquence de gêner la surdéviation amont provoquée par le blocage de l'un des canaux et donc de contenir l'écoulement dans son état stable.

IV.4.2.6 Vitesse de rotation des cellules.

Les cellules semblent se déplacer d'un canal à l'autre dans le sens de l'incidence du fluide. Au cours de nos essais nous observons une constance de la vitesse de rotation des cellules quand le phénomène est établi. On évalue celle-ci à 0,3 fois la vitesse relative de la roue quel que soit le nombre de cellules mises en jeu. La vitesse d'une cellule n'est donc apparemment pas directement liée à la taille de celle-ci. Nos travaux trouvent place dans la classification fournie par PAMPREEN [57] à partir d'une synthèse de différents travaux expérimentaux. En effet le grand décrochage apparaît à faible débit réduit et les cellules sont alors au nombre de une à deux. Les résultats obtenus sont donc cohérents avec la bibliographie.

IV.4.3 Conclusion des essais

Nous avons reporté les résultats de nos calculs ainsi que ceux de DAVOUDZADEH et al [13] sur un diagramme identique à celui de SPALART [61] (figure IV.4). Nous conservons la même notation que ce dernier soit : A pour "attached flow", R pour "Rotating stall", D pour "Deep stall" auxquelles nous ajoutons la notion de "Waves" : W. Nous distinguons le

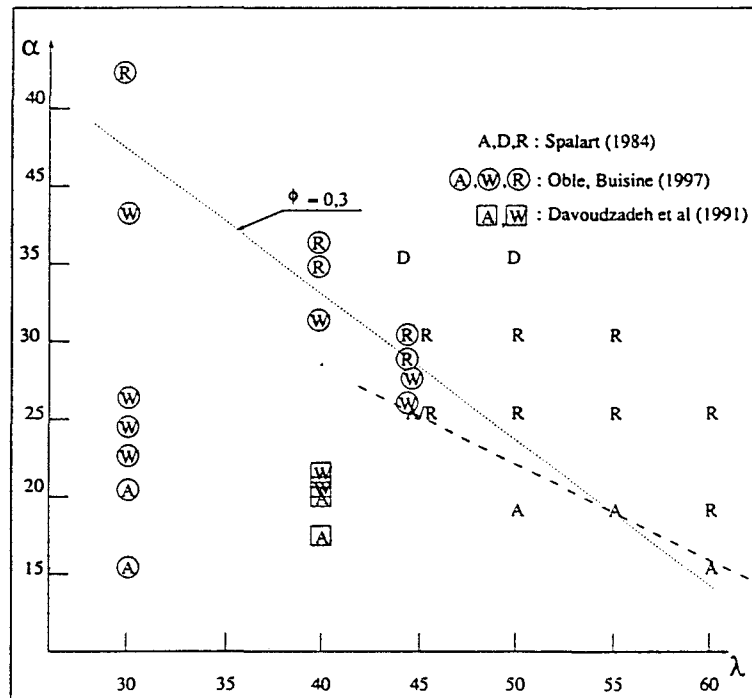


FIG. IV.4 - Comportement de grille en fonction de l'incidence du fluide. Notations: A pour "Attached flow", R pour "Rotating stall", D pour "Deep stall", W pour "Waves"

phénomène de décrochage tournant du phénomène d'ondes tournantes. Par ce diagramme SPALART donne de manière il est vrai très simplifiée une limite (ligne en pointillés sur figure IV.4) en deçà de laquelle on n'observe pas de décrochage tournant. Dans notre cas on obtient une certaine correspondance avec le schéma. Nous avons inclus une seconde ligne, le long de laquelle le paramètre Φ prend pour valeur 0,26. Elle fixe les limites d'apparition des cellules que donnent notre modèle et n'est pas en contradiction avec l'étude de SPALART.

IV.5 Conclusion

Par cette étude bidimensionnelle nous avons montré que les deux modèles mis en œuvre sont capables de simuler le décrochage tournant dans une grille de plaque planes. Compte tenu de la géométrie étudiée on peut dire que les résultats concordent plutôt bien avec les observations expérimentales d'origines diverses. Les grandeurs principales sont retrouvées. Le modèle est notamment capable de donner des vitesses de rotation cohérentes avec la forme de décrochage obtenue longtemps après la disparition de la perturbation initiale.

Elle montre la nécessité de disposer d'un domaine numérique suffisamment important à l'amont de la roue. Par ailleurs on peut estimer que la méthode de raccordement est bien adaptée au traitement de géométries complexes. Elle ouvre ainsi la voie à une résolution tridimensionnelle du même cas d'étude.

Au cours du chapitre suivant on se propose de vérifier si les mécanismes d'apparition,

de formation ou encore de propagation des cellules sont retrouvés lorsque la grille est dotée d'une envergure limitée.

Chapitre V

APPLICATIONS TRIDIMENSIONNELLES

V.1 Introduction

Au cours du chapitre IV, le schéma "prédicteur-correcteur" a été utilisé en version "2D empilée", cette fois le schéma est mis en œuvre dans sa version tridimensionnelle.

Dans une première partie, la compatibilité des opérateurs est vérifiée dans le cadre d'une application mono-domaine simple typiquement tridimensionnelle.

Pour la résolution en pression nous faisons appel à des hypothèses simplificatrices qui réduisent les temps de calcul du modèle tout en permettant le passage à des géométries de type canal inter-aubes à section rectangulaire et maillage incliné.

L'objet de la seconde partie est de présenter les résultats obtenus lorsqu'on prend en compte une grille de plaques planes dotée d'une envergure. Une comparaison avec la modélisation bidimensionnelle est proposée.

V.2 Application mono-domaine

V.2.1 Introduction

L'étude porte sur l'interaction d'un écoulement principal d'eau et d'un jet latéral issu d'une fente mince. Cette étude a été menée au L.M.L par J.N BLANCHARD et Y. BRUNET. Nous ne détaillerons pas ici la topologie de l'écoulement, ce n'est pas le propos de la présente étude et renvoyons le lecteur à [3].

L'objectif est de vérifier que le modèle est susceptible de simuler des instabilités de cisaillement au même titre qu'il peut simuler des instabilités dues à la présence d'obstacles dans l'écoulement.

On semble s'éloigner ici du contexte principal qui est l'étude des instabilités dans les turbomachines. On peut cependant observer que des études sur les jets ont été menées dans le cadre du refroidissement des aubages de turbines où l'accent est mis sur la turbulence de grandes échelles plus que sur les instabilités.

Par ailleurs l'injection latérale a été utilisée pour contrôler l'apparition du décrochage tournant ou pour sortir du décrochage tournant DAY [16] : c'est ce qui justifie la présente application.

Après avoir décrit brièvement le dispositif expérimental, nous précisons les conditions aux limites spécifiques à l'application. Une simplification du modèle pression est ensuite proposée. Enfin on présente les résultats obtenus.

V.2.2 Conditions d'essai.

V.2.2.1 Dispositif expérimental

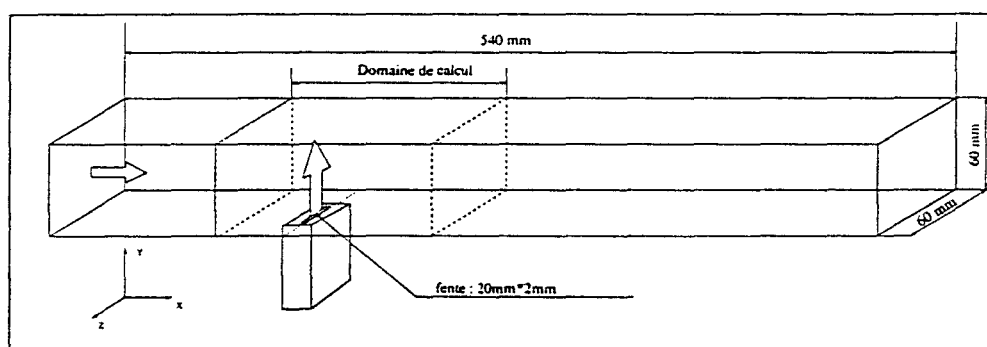


FIG. V.1 - *Dispositif expérimental. Travaux de J.N Blanchard et Y. Brunet*

Un jet vertical issue d'une fente mince d'épaisseur, e et de largeur égale au tiers de la largeur D de la veine est en interaction avec l'écoulement principal (fig. V.1).

L'écoulement est caractérisé par le rapport d'injection α , donné comme le rapport de la vitesse débitante du jet U_v sur la vitesse débitante de l'écoulement transversal U_h , et le nombre de Reynolds basé sur la vitesse débitante horizontale :

$$\mathcal{R}_e = \frac{U_h D}{\nu} \quad (\text{V.1})$$

L'observation montre que l'écoulement est sujet à l'apparition d'instabilités qui surviennent lorsque l'on dépasse à la fois un nombre de Reynolds critique et un rapport d'injection critique, les deux critères étant interdépendants.

Dans les paragraphes suivants nous détaillons les hypothèses retenues pour mener à bien la modélisation.

V.2.2.2 Hypothèses géométriques

Le domaine de calcul est de longueur inférieure à celle du domaine physique (voir fig (V.1)).

Le maillage est constitué d'un empilement de parallélépipèdes rectangles à pas régulier. On se place ainsi dans le cas limite d'une inclinaison nulle du maillage présenté dans le chapitre II. La fente très mince est discrétisée sur 2 mailles suivant l'épaisseur.

V.2.3 Conditions aux limites spécifiques.

V.2.3.1 Entrée sortie

On impose une pression statique uniforme en sortie de domaine. La pression en entrée est évaluée par la technique de correction de débit déjà présentée. Le profil de la vitesse en entrée est rectangulaire.

V.2.3.2 Fente

Le profil de vitesse est rectangulaire suivant la largeur de la fente. Dans la fente, nous avons considéré une condition de gradient de pression nulle suivant la direction de l'injection, comme pour les points de la paroi. Elle ne fait donc pas l'objet d'un traitement particulier.

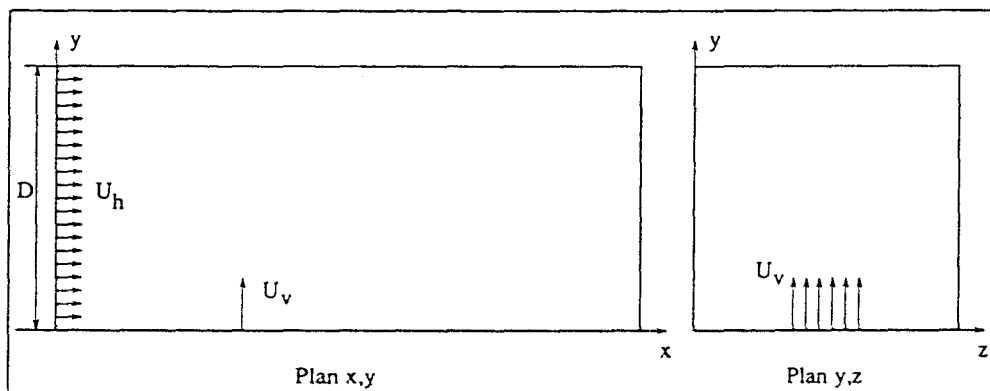


FIG. V.2 - Récapitulatif des conditions aux limites (vitesse).

V.2.4 Résolution de la pression

Dans le modèle bidimensionnel les fonctions ψ_i sont résolues directement et stockées intégralement. La résolution directe est beaucoup trop lourde dans le cas tridimensionnel. Dans le même temps on cherche à réduire les coûts de stockage des données.

On utilise ici les propriétés de symétrie de translation du problème. On se ramène à un problème un plan qui sera le plan aubes à aubes dans le cas de l'application de grille d'aubes. La direction de l'envergure (ζ) est traitée par une décomposition de Fourier réduite au cosinus, qui respectent des conditions de Neumann nulles aux limites.

On reprend les notations introduites dans le chapitre II (Eq. III.27) et on recherche une solution ψ_i qui permet une séparation des variables telle que :

$$\psi_i = F_i(\xi, \eta) \cdot H_i(\zeta) \quad (\text{V.2})$$

Dans ce cas H_l est connue :

$$H_l(\zeta) = -\frac{1}{\omega_{\zeta_l}^2} \cdot h_l(\zeta) \quad (\text{V.3})$$

et

$$\begin{cases} \Delta \psi_i = H_l \cdot \Delta_{\xi\eta} F_i + F_i \frac{\partial^2 H_l}{\partial \zeta^2} \\ \frac{1}{\Delta z^2} \frac{\partial^2 H_l}{\partial \zeta^2} = h_l \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

Le problème à résoudre pour chaque fonction ψ_i est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} F_i - \omega_{\zeta_l}^2 F_i = -\omega_{\zeta_l}^2 \cdot f_{\xi} \cdot g_{\eta} & (\text{à l'intérieur du domaine}) \\ \frac{\partial F_i}{\partial n} = 0 & (\text{sur les parois}) \\ F_i = 0 & (\text{en entrée et en sortie}) \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

Seules les fonctions F_i sont stockées, les fonctions ψ_i sont recomposées lors du report dans la résolution des grandes échelles.

La méthode est valable dans tous les cas où le problème admet une symétrie de translation tels que dans le cas d'une grille de plaques planes. Associée avec la méthode des singularités tronquées elle conserve les mêmes propriétés de convergence que dans le cas général (cf chapitre III).

V.2.5 Résultats

Nous nous sommes intéressés à l'étude de l'écoulement lorsque le nombre de Reynolds est de 500. On présente en annexes (H.1,H.2,H.3), une confrontation des résultats obtenus avec l'expérience. Le nombre de structures prédit est inférieur à celui de l'expérience. Une augmentation du nombre des points de maillage améliore la précision des résultats (H.2,H.3). Dans un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement principal (H.4,H.5) on compare le champ de vitesse donné par le calcul à la photographie d'un suivi de particules obtenue lors de l'expérience. Les écoulements secondaires dûs au contournement du jet par l'écoulement principal sont reproduits mais la taille des structures contrarotatives est surestimée par le calcul.

V.2.6 Conclusion

On a introduit au cours de cette étude une optimisation de la résolution spectrale pour la pression. Elle permet d'alléger les calculs et le stockage des données.

De par les hypothèses (fig (V.2) que l'on impose et le maillage utilisé, on ne peut accéder ici qu'à la stabilité globale des grandes structures, les structures fines de l'écoulement sont exclues.

Au travers des résultats obtenus on vérifie les capacités du schéma à rendre compte de structures instables dont l'amplification est assujettie à la tridimensionnalité de l'écoulement. On vérifie par ailleurs que ces instabilités tridimensionnelles sont convectées de façon cohérente jusqu'à la sortie du domaine.

Le schéma semble remplir les conditions nécessaires à la simulation du phénomène de décrochage tournant dans le cas d'une grille d'aubes tridimensionnelle.

V.3 Résolution multi-domaine dans une grille d'aubes tridimensionnelle.

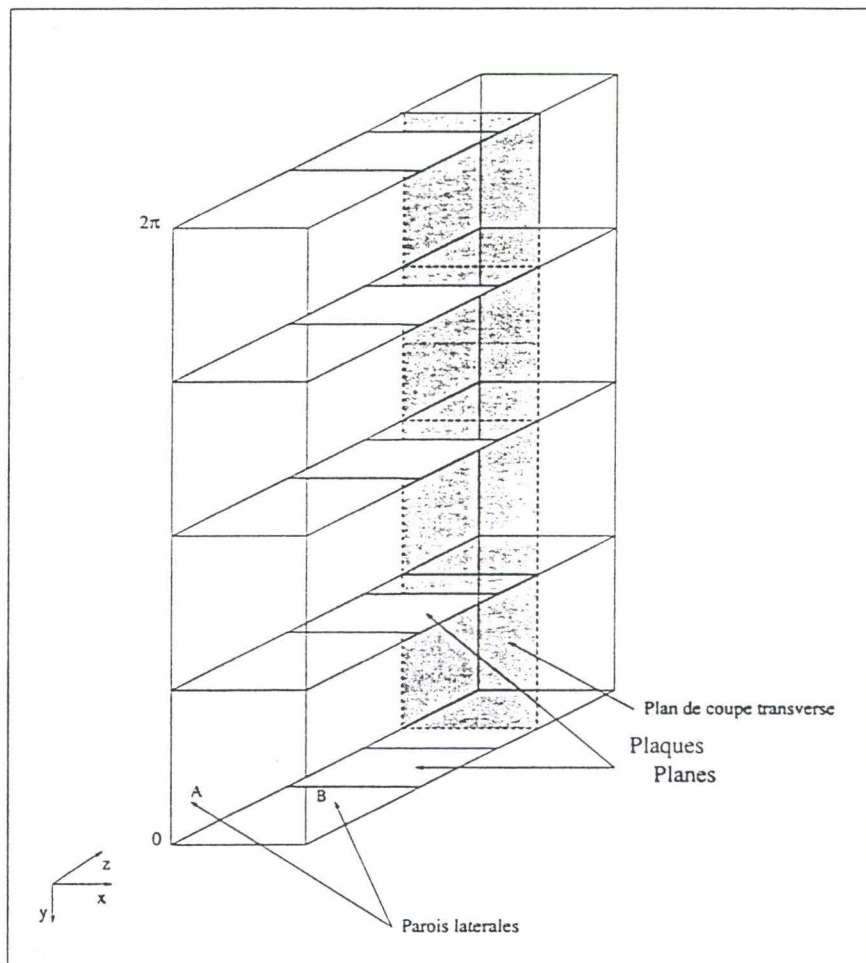


FIG. V.3 - Grille de plaques planes 3D

Au cours du chapitre précédent, une étude de sensibilité aux différents paramètres de l'écoulement a mis en évidence des solutions d'ondes progressives de grandes amplitudes que l'on a identifiées à du décrochage tournant. Le blocage des canaux a alors été attribué à une amplification excessive des enroulements tourbillonnaires dûs au contournement du bord de fuite.

Le domaine d'étude est cette fois composé d'un empilement de plaques planes dont l'envergure est limitée par deux parois latérales (fig. V.3). Dans ce cas une incidence minime du fluide par rapport à l'aubage est suffisante pour voir la naissance d'écoulements secondaires. En outre le canal est maintenant sensible aux forces de Coriolis.

On peut se demander si dans ces conditions les mécanismes d'apparition et de propagation observés dans le cas 2D sont transposables au cas 3D. L'objet de l'étude consiste donc à établir une comparaison avec l'étude présentée au chapitre précédent. L'accent est mis sur l'étude de l'influence des échanges tridimensionnels de quantité de mouvement.

V.3.1 Déroutements des essais.

La solidité est maintenue constante égale à l'unité et les canaux sont au nombre de 6. On mène des essais dans un stator puis dans un rotor. On étudie le cas d'un calage à 30° et plus particulièrement celui d'un calage à 45° .

V.3.1.1 Essais dans un stator

Cas d'un calage de 30° On présente un essai mené avec un calage de 30° pour une incidence de $38,73^\circ$. Ce cas est donné stable par la modélisation 2D. A l'amont on impose une répartition linéaire de la vitesse tangentielle ce qui introduit un cisaillement. Dans ce cas la paroi A est assimilée à l'"arbre" et la paroi B au "carter"

La périodicité de l'écoulement est rompue par une perturbation de grille (cf chapitre IV).

Cas d'un calage de 45° Le cas du calage de 45° et d'une incidence de 30° est traité plus en détail. On fait ici le choix de forcer la solution plutôt que de laisser le phénomène s'établir de lui même. Le calcul est initialisé avec le champ de vitesse et le champ de pression issus d'un calcul 2D en phase de décrochage établi.

Afin de déterminer dans quelle mesure le phénomène se dissipe ou se maintient, on fait varier l'incidence, le nombre de Reynolds local et l'envergure.

V.3.1.2 Essais dans un rotor

Au cours de cette étape on anime une grille inclinée à 45° d'une vitesse de rotation. En vue d'évaluer la contribution des effets de Coriolis. On mène une campagne d'essais au cours de laquelle on augmente la rotation tout en maintenant l'incidence.

Comme dans le cas d'un stator à 45° on initialise le calcul avec avec une solution issue d'un calcul 2D.

V.3.2 Résultats des essais.

V.3.2.1 Etude dans un stator

Calage $\lambda = 30^\circ$. On se place dans le cas d'une solidité et d'une envergure unitaire, les canaux sont donc de section carrée.

La vitesse azimutale à l'entrée du domaine est donnée par l'expression :

$$W_y(\zeta) = V_o \left[\frac{1}{2} + \zeta \right], \quad \zeta \text{ varie entre 0 et 1 le long de l'envergure} \quad (\text{V.6})$$

Ce cas a été traité lors de l'essai 9 de l'étude bidimensionnelle (figure D.16) et peut donner lieu à une comparaison des champs de pression et des champs de vitesse.

On représente figures (I.1, I.2, I.3) l'allure du champ de pression et du champ de vitesse dans la grille, respectivement près de la paroi A ("arbre"), à mi-envergure, et près de la paroi B ("carter"). Les vitesses débitantes et les écoulements transverses sont décrits à mi-envergure ainsi qu'en sortie d'aubage sur les figures (I.4, I.5). On obtient une image tridimensionnelle de l'écoulement.

Comme dans le cas 2D l'écoulement est globalement périodique. Par contre l'écoulement 3D est très perturbé dans les canaux ainsi que dans les sillages. Cela est principalement dû à la forte vorticité du fluide dans l'aubage (I.4, I.5).

L'évolution du débit dans les canaux au cours du temps est donnée par la figure I.6 que l'on compare au résultat issu de l'étude 2D empilée figure D.15. Dans les deux cas il existe une onde progressive persistante mais de faible amplitude. En l'occurrence l'onde prévue par le calcul 3D est de moindre amplitude que celle donnée par le calcul 2D. On retrouve cette différence d'amplitude en comparant les extrema de la pression. Les valeurs absolues maximales sont obtenues dans la région proche du "carter" mais sont de 30% inférieures à celles de l'étude 2D.

Il est assez difficile de conclure sur cet essai et le doute persiste puisque les effets tridimensionnels calculés semblent avoir un rôle plus dissipatif que ne le laisse entendre l'expérience.

Ces premières constatations nous ont incitée à approfondir notre étude dans le cas d'un calage à 45° .

Calage $\lambda = 45^\circ$. Le calcul est initialisé avec la solution établie de l'essai n   19 (chapitre IV, calage $\lambda = 45^\circ$ et incidence 30°) que l'on empile uniformément suivant la direction (ζ) de l'envergure.

Dans un premier temps, on se place dans le cas de canaux interaubes à section carrée avec un nombre de Reynolds \mathfrak{R}_e de 1000 à l'instar de la résolution 2D. On passe d'une incidence de 30° à une incidence de $33,7^\circ$ et dans les deux cas on observe (fig I.7, I.8) un amortissement de l'onde initiale. Toutefois la période d'amortissement semble d'autant plus longue que l'incidence est forte. Dans le cas d'une incidence de 30° (fig. I.7) l'onde

s'amortit au bout de 13 tours alors que pour une incidence de $33,7^\circ$ (fig. I.7) l'onde n'est pas encore complètement amortie à cette même date.

On trace d'une part les iso-pression et le champ de vitesse dans le plan de grille pour une incidence de $33,7^\circ$ (proche de la parois A fig. (I.9), à mi-envergure fig.(I.10), proche de la parois B fig. (I.11)), et d'autre part les iso-vitesse débitante et les composantes transverses (fig I.12,I.13,I.14) . La grille est très nettement décrochée en raison de la forte incidence, en revanche la cellule de décrochage tournant est totalement dissipée. L'écoulement dans les canaux est affecté d'une forte vorticité. On remarque (fig I.12,I.13,I.14)) la présence d'écoulements secondaires, ceux-ci contribuent vraisemblablement à dissiper l'énergie des tourbillons de bords de fuite qui alimentent les cellules (chapitre IV). Une première conclusion consiste à incriminer les contraintes visqueuses qui s'exercent sur l'arbre et sur le carter. Elles sont ici prépondérantes du fait du confinement et du nombre de Reynolds relativement faible. A cela s'ajoute une surévaluation de la taille des structures en raison du faible nombre de mailles.

On est conduit à mener une étude d'influence des forces de frottement induites par les parois limitant l'envergure de la grille.

On étudie l'influence du freinage dû aux parois. Pour cela l'intensité des contraintes visqueuses est contrôlée en modifiant la viscosité suivant l'envergure (notée : ν_r). Pour accentuer l'influence de ces parois on se rapproche de l'étude bidimensionnelle "2D empilée" en limitant dans un premier temps à trois noeuds le nombre de points suivant l'envergure et en remplaçant la condition de glissement par une condition d'adhérence. Afin de conserver suivant la direction de l'envergure le même pas de maillage que celui du cas à section carrée, on réduit l'envergure dans le même rapport que le nombre de maille. La section passe de l'unité à 0,1.

On présente trois essais pour lesquels ν_r prend pour valeurs : 5.10^{-4} , 1.10^{-4} , 1.10^{-5} , tandis que la viscosité dans les deux autres directions est de 1.10^{-3} . Le premier de ces trois essais aboutit à une dissipation de toutes les structures rotationnelles de l'écoulement. La grille n'est plus décrochée malgré une incidence de 30° (fig. J.1). De même toutes les fluctuations de débit sont amorties (fig J.2). Dans ce cas le nombre de Reynolds local est de 200, le cisaillement d  à la présence des parois contribue donc à laminariser l'écoulement. L'essai suivant est mené avec un nombre de Reynolds local de 1000, soit le même que celui du plan de grille. L'onde associée au décrochage tournant (fig J.3) est amortie mais plus lentement. Dans le troisième essai le Reynolds local est de 10000. Cette fois la cellule n'est pas amortie (J.4) et reste cohérente(fig. J.5) On note que les valeurs minimales de la pression sont en valeur absolue inférieures de 40% à celles obtenues par le calcul 2D (fig. F.11), ceci en raison de l'adhérence aux parois.

Ces essais confirment nos premières conclusions. Les forces de viscosité semblent jouer ici un rôle plus important que dans le cas d'une grille bidimensionnelle. Une mauvaise évaluation de la taille des structures dans la direction de l'envergure a pour effet principal de diffuser l'énergie du fluide qui refoule vers l'amont. Dans ces conditions chacune des

aubes est décrochée et l'écoulement n'étant pas suffisamment bloqué reste périodique.

Ces premières conclusions sont confirmées lorsque l'on augmente l'envergure de 0,1 à 0,2 tout en conservant une valeur ν_r de 1.10^{-5} . La solution semble converger vers une onde progressive (fig. J.6) d'amplitude moindre que celle observée au cours de l'étude 2D. Les figures représentant le champ de vitesse et le champ de pression dans le plan de grille (fig. J.7) et dans le plan transverse (fig. J.8) mettent en évidence un mécanisme de blocage assez différent de celui déjà observé. En effet on ne perçoit pas d'écoulement refoulant bien que deux des canaux soient bloqués. Cette fois les zones à débit réduit s'apparentent à des zones de fluide mort limitées à l'amont comme à l'aval de la grille par un écoulement fortement dévié qui ne débite qu'au travers une partie limitée du domaine.

V.3.2.2 Etude dans un rotor. Contribution de l'accélération de Coriolis.

Pour introduire les termes de Coriolis on introduit la rotation ω_o par l'intermédiaire d'un rayon moyen R_o tel que :

$$\omega_o = \frac{W_y}{R_o} \quad (V.7)$$

La géométrie est celle d'une grille dont le pas et le calage sont unitaire, l'envergure est fixée à 0,5. On agit sur ω_o par l'intermédiaire de R_o et on contrôle les contraintes visqueuses comme lors les essais précédents.

Le premier essai est mené pour un rayon R_o de 10 (ce qui correspond sensiblement à 63 aubes) et une viscosité ν_r de 1.10^{-3} . Dans ce cas la viscosité très forte rend la solution périodique (fig. K.1) en l'espace de 7 tours roue. L'allure des iso-vitesse débitante (fig. K.2(a), K.2 (b)) confirme cette première constatation et montre que l'écoulement diffère très peu d'un canal à l'autre. Notons que la grille débite plus dans la région proche de "l'arbre" (fig. K.2(a), K.3), que dans la région proche du "carter" (fig. K.4, K.5). Cette dissymétrie de l'écoulement n'ayant été observée que dans le cas d'un écoulement cisailé on attribue celle-ci à la prise en compte des termes de Coriolis. La contribution de ceux-ci est cependant trop faible devant la contribution des effets visqueux et la solution d'onde progressive introduite lors de l'initialisation est complètement dissipée et remplacée par une solution analogue à du décrochage annulaire.

Pour un rayon R_o de 12,4 et une viscosité ν_r fixée à 5.10^{-4} la solution obtenue n'est plus périodique (fig. K.6). En revanche, on observe des fluctuations de débit dont l'amplitude est faible en regard de celle de la solution 2D introduite lors de l'initialisation. La dissymétrie observée lors de l'essai précédant est moins marquée (fig. K.7(a), K.8). On distingue par contre des canaux plus fortement bloqués que d'autres. Là encore le blocage a lieu plutôt dans la zone proche du carter. Ces observations semblent en accord avec les études expérimentales mais demandent confirmation sur une géométrie plus conforme à la réalité. On vérifie dans le plan de grille (fig. K.8, K.9, K.10) que le blocage des canaux se fait à la faveur d'une forte déviation de l'écoulement à l'amont comme à l'aval de la

grille. Comme dans le cas d'une envergure de 0,2 l'écoulement ne refoule pas dans l'aubage et contrairement à l'étude 2D l'écoulement dans les canaux bloqués semble ne pas être alimenté par du fluide en provenance de l'aval.

Enfin on poursuit le calcul précédent en maintenant ν_r fixée à 5.10^{-4} mais en diminuant R_o qui prend la valeur 6,20, ce qui double le poids des termes de Coriolis. La solution obtenue reste non périodique (fig. K.11) mais l'onde apparente est plus faible en amplitude. Par contre la dissymétrie de l'écoulement est beaucoup plus marquée et les figures (K.12(a), K.12(b)) montrent que la grille est fortement décrochée dans la zone proche du "carter", sur toute sa hauteur et jusqu'à la sortie de l'aubage (fig. K.13(a),K.13(b)).

Les figures dans le plan grille (fig. K.14, K.15,K.16) complètent ces premières constatations. On remarque notamment que dans la zone proche du "carter" (fig. K.16) le canal n° 3 fait l'objet d'un contournement ce qui semble en accord avec la figure (fig. K.11) qui annonce un déficit de débit dans ce canal au même instant. Notons que ce dernier phénomène va en s'atténuant à mesure que l'on diminue R_o (qui passe à 4,6). La cellule est alors complètement évacuée et laisse place à du décrochage annulaire (fig. K.13(a),K.13(b)).

On est ici en présence d'un phénomène assez différent de ce qui a été observé dans le cas d'une grille 2D. Les zones de l'écoulement que l'on identifie à des cellules sont beaucoup moins bien délimitées et semblent plutôt localisées près d'une paroi au détriment de l'autre. Par ailleurs l'analyse de la déstabilisation de l'écoulement au travers d'un suivi du débit au cours du temps trouve ici ses limites. En effet lorsqu'il existe des zones à débit réduit celles-ci ne bloquent que partiellement le canal. Il est donc tout à fait naturel de ne pas retrouver les grandes variations de débit de l'étude 2D. Une solution pour pallier cet inconvénient serait d'examiner l'historique du débit local près des parois par analogie avec les expériences récentes visant au contrôle du décrochage tournant (chapitre I).

V.3.3 Conclusion des essais.

Les essais menés dans un stator ont montré qu'une trop forte viscosité contribue à dissiper l'énergie nécessaire à l'alimentation des cellules de décrochage tournant. A partir de ces premières conclusions, l'étude de la contribution des termes de Coriolis a été menée dans un rotor. Des essais successifs ont mis en évidence un comportement de l'écoulement qui semble lié aux valeurs de la vitesse de rotation. On trouve ainsi une limite inférieure en dessous de laquelle le décrochage est annulaire. Lorsque l'on augmente la vitesse de rotation l'écoulement devient alors dissymétrique et comporte une cellule qui n'occupe qu'une partie limitée de l'envergure. Pour une vitesse de rotation encore supérieure on revient à du décrochage annulaire.

Les solutions obtenues alors ne se présentent plus sous la forme de structures bien organisées comme dans le cas du modèle bidimensionnel. Face à de telles différences entre les calculs 2D et les calculs 3D on ne peut qu'être prudent dans l'analyse de nos résultats. On mettra principalement en cause la faible définition du maillage qui contribue à suréva-

luer l'importance des effets visqueux le long de l'envergure, d'où la nécessité d'introduire un modèle de couche limite.

Dans le cas de l'injection nous avons été contraint à mettre en œuvre des maillages de l'ordre de la centaine de milliers de mailles et le double était encore insuffisant pour rendre compte des structures fines de l'écoulement. DENTON [19] remarque que cette limite est rapidement franchie lors de la simulation des écoulements visqueux. On attend donc beaucoup d'un raffinement du maillage.

V.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre deux applications ont été présentées. La première est une application mono-domaine dont l'objet est la simulation de l'interaction de deux écoulements d'eau dans le cas limite d'une fente bidimensionnelle. La seconde est une résolution multi-domaines appliquée à l'étude du décrochage tournant dans une grille de plaques planes d'envergure limitée.

Les résultats obtenus, dans le cas de l'injection, sont en accord qualitatif avec l'expérience. On montre que l'augmentation du nombre de points du maillage apporte une amélioration sensible de la solution. On peut légitimement penser qu'un raffinement de maillage, tel qu'il puisse prendre en compte les structures fines de l'écoulement, aboutirait à une solution proche de l'expérience. Cette étude prouve que le modèle permet la simulation d'écoulements sujets à des instabilités tridimensionnelles.

La modélisation tridimensionnelle du décrochage tournant a été abordée sous deux aspects. D'une part on mène dans un stator une étude de sensibilité à la viscosité, de l'envergure et de l'incidence du fluide. Elle conclut que la présence d'écoulements secondaires contribue à uniformiser les structures de l'écoulement et donc à atténuer les écarts constatés en 2D entre les canaux. Ainsi des cellules ont pu être mises en évidence au cours de cette première étape grâce à une augmentation du nombre de Reynolds radial local. D'autre part on traite le cas d'un rotor en introduisant des termes de Coriolis dont on fait varier l'intensité. Les différents essais menés ont permis de délimiter des plages de fonctionnement en fonction de la vitesse de rotation. On distingue notamment des plages de fonctionnement comportant des cellules de décrochage tournant localisées près d'une paroi et des plages de fonctionnement où on se trouve plutôt en présence de décrochage annulaire. Ces premières investigations ne sont donc pas en contradiction avec les travaux expérimentaux mais demandent confirmation sur une géométrie réelle.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION

Grâce aux travaux expérimentaux, menés au cours de ces dernières années, on a pu conforter notre opinion sur les techniques à mettre en œuvre pour une simulation du décrochage tournant. Des objectifs ont été fixés :

Le premier objectif était de prendre en compte des temps de calcul d'une durée équivalente à plusieurs tours de roue tout en accordant une priorité aux grandes échelles de l'écoulement. Pour cela on a mis en œuvre deux schémas typiquement incompressibles dont la stabilité assujettie à la vitesse de convection assure de grands pas de temps.

Le calcul de la pression passe par la résolution d'une équation de Poisson à chaque pas de temps. Par l'association d'une méthode spectrale et d'une technique itérative équivalente à une loi de pseudo-compressibilité, on a obtenu un algorithme de résolution rapide de l'équation de Poisson.

Le deuxième objectif était de modéliser l'ensemble de la roue. Une technique de résolution multi-domaine compatible avec l'utilisation d'une machine parallèle a été envisagée.

La difficulté résidait dans la résolution de l'équation de Poisson pour la pression dans un domaine partitionné en sous-domaines. Une méthode de raccordement a été développée. Elle rétablit la continuité de la pression après la résolution dans les sous-domaines. La méthode, au départ indépendante de la résolution locale, est couplée avec la technique spectrale pour la résolution des grandes échelles. La technique itérative corrige les discontinuités résiduelles à grand nombre d'ondes.

Dans un cadre bidimensionnel, le cas d'une grille de plaques planes inclinées est traitée dans des conditions d'essai favorables à l'apparition de cellules de décrochage. On vérifie ainsi que la méthode multi-domaines mise en œuvre est susceptible de simuler le décrochage tournant malgré les forts gradients de pression dûs à la présence de cellules en rotation dans l'écoulement. Plusieurs essais ont permis de mettre en évidence une limite au delà de laquelle on observe du décrochage tournant structuré en cellules. Le décrochage

tournant apparaît dans la roue pour un coefficient de débit Φ inférieur à 0,3. Un modèle de propagation des cellules est proposé. Il suppose un déplacement par blocages successifs des canaux entrant dans la cellule, l'alimentation se faisant par l'aval.

Après avoir présenté une application tridimensionnelle mono-domaine on traite le cas d'une grille de plaques planes dont l'envergure est limitée par deux parois. L'idée est de vérifier si les mécanismes perçus au cours de l'étude bidimensionnelle sont toujours valables.

La première partie de l'étude traite le cas d'un stator, dans le but d'évaluer le rôle joué par la viscosité. Les essais concluent à l'existence d'un nombre de Reynolds radial critique en dessous duquel, la viscosité uniformise les structures de l'écoulement empêchant du même coup la formation ou l'entretien de cellules de décrochage tournant.

La seconde partie traite le cas d'un rotor et on étudie notamment la sensibilité de l'écoulement aux forces de Coriolis. Les essais effectués avec une incidence forte conduisent aux conclusions suivantes :

Alors que les effets secondaires ont tendance à uniformiser l'écoulement entre canaux, les termes de Coriolis ont un effet inverse.

Lorsque la rotation est suffisamment importante on peut trouver une cellule d'amplitude spatiale limitée, localisée près du carter, celle-ci dégenère en décrochage annulaire si la vitesse de rotation augmente encore

Les débits dans les canaux varient moins que dans le cas 2D du fait de l'amplitude faible de la cellule devant l'envergure. Localement, près du carter les vitesses débitantes ainsi que les valeurs extrémales de la pression sont d'amplitude moindre en 3D : 30% inférieures pour les vitesses et jusqu'à 75% inférieures pour les dépressions.

Enfin le décrochage tournant semble apparaître pour des incidences légèrement plus faibles que dans le cas 2D et on relève encore la présence de cellules pour une incidence de 27° alors que dans le cas 2D le seuil d'apparition est de 28°.

PERSPECTIVES

On distingue ici les perspectives concernant la méthode de résolution proprement dite de celles concernant la simulation du décrochage tournant.

La technique de raccordement est tout particulièrement adaptée à la simulation d'écoulements dans des domaines dont la géométrie présente une périodicité spatiale. L'étude de l'écoulement dans une cavité inter-disques en fait partie. En effet, récemment les travaux de A. MALESYS [46] ont révélé la présence d'un noyau de structures en rotation. Une résolution supposant l'axisymétrie de l'écoulement ne peut mettre en évidence de telles structures. Il convient donc de prendre en compte la cavité dans son ensemble. Le chapitre III conclut positivement sur la mise en œuvre de la technique de raccordement de la pression dans le cadre d'un étage de pompe centrifuge. La technique est potentiellement à même d'être utilisée en vue d'une étude des interactions rotor-stator sans hypothèses

de périodicité de l'écoulement.

Le nombre de fonctions de la phase spectrale est lié au nombre de points du maillage et par conséquent pénalise fortement la durée du calcul tridimensionnel. Une optimisation du code est donc nécessaire pour augmenter la rapidité du calcul tridimensionnel. La voie de la parallélisation est maintenant ouverte, le passage sur des calculateurs parallèles plus puissants faisant appel à des gestionnaires de tâches standardisés (PVM, MPI) ne présente comme seule difficulté que l'adaptation des structures d'échanges dont on a fait usage au cours de ce travail.

Enfin la suite logique de cette thèse est la modélisation d'un étage complet en géométrie réelle, l'objet étant bien sûr une meilleure compréhension de l'écoulement, mais surtout de se donner un outil suffisamment rapide pour être utilisé comme une aide au dimensionnement. Le passage à des géométries réelles suppose une augmentation du nombre de Reynolds qui implique la mise en œuvre d'un modèle de turbulence.

Références bibliographiques

- [1] E. H ABED P.K. HOUP T W. M. HOSNY 1993 "*Bifurcation Analysis of Surge and Rotating Stall in Axial Flow Compressor*", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 115, pp 817-824, oct 1993
- [2] G. BILLET Ph. CHEVALIER P. LAVAL 1986 "*Etude Numérique de la Transmission d'une Distorsion dans un Compresseur Axial*", *ONERA, T.P. 1986 - 107*
- [3] J.N BLANCHARD 1996 "*Etude d'une interaction d'un jet bidimensionnel avec un écoulement transversal perpendiculaire et confiné*", *Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille*, novembre 1996
- [4] D. BUISINE. 1988 "*MODELISATION DU GRAND DECROCHAGE DANS LES COMPRESSEURS AXIAUX*" *Note technique 164 IVK, février 1988*
- [5] F.A.E BREUGELMANS "*low measurements in a rotating stall cell*", *von Karman Institute LS 1979-03 "Unsteady Flow in Turbomachines"*
- [6] V. CHAPIN 1993 "*Contribution a la Simulation de l'Interaction Aerodynamique de Deux Roues Ailettées en Mouvement Relatif*", *Thèse de Doctorat, L.E.M.F.I - CNRS. URA 1504, jan 1993*
- [7] J. CHAUVIN, P. FERRAND, M. CEN, B. SCHIAVELLO 1980 "*Décollement tournant dans les pompes et les compresseurs*", *LA HOUILLE BLANCHE*, No 1,2-1980
- [8] F. E. Mc CAUGHAN 1989 "*Application of Bifurcation Theory to Axial Flow Compressor Instability*", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 111, pp 426-433, oct 1989
- [9] F. E. Mc CAUGHAN 1989 "*Numerical Result for Axial Flow Compressor Instability*", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 111, pp 434-441, oct 1989
- [10] N.A. CUMPSTY et E.M. GREITZER 1982 "*A simple model for compressor stall cell propagation.*", *ASME Trans., J.Engrg for Power*, Vol.104, No 1, pp 170-176, jan 1982

- [11] D.R. DAS et H.K. JIANG 1983 "Flow measurement within rotating stall cells in single an multiphase axial flow compressors", *Sixt Int. symposium on air Breathing Engines*, juin 1983
- [12] D.K DAS et H.K JANG 1984 "An experimental study of rotating stall in multistage axial flow compressor.", *ASME Trans., J.Engrg for Power*, Vol.106, No 3, pp 542-551, july 1984
- [13] F. DAVOUDZADEH, N. S. LIU, J. SHAMROTH, J. THOREN 1990 "Navier-Stockes Study of Rotating Stall in Compressor Cascades", *AIAA Journal*, vol 28, No 3, pp492-498, mar 1990
- [14] I.J. DAY et N.A. CUMPSTY 1977 "The measurement and interpretation of flow within rotating stall cells in axial compressors.", *CUED/A TURBO/ TR 90*
- [15] I. J. DAY 1993 "Stall Inception in Axial Flow Compressors", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 115, pp 1-9, jan 1993
- [16] I. J. DAY 1993 "Active Suppression of Rotating Stall and Surge in Axial Compressors", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 115, pp 40-47, jan 1993
- [17] I. J. DAY, C. FREEMAN 1994 "The Unstable Behavior of Lom and High-Speed Compressors", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 116, pp 194-201, april 1994
- [18] R. DEBUCHY 1992 "Ecoulement Turbulent avec Aspiration Radiale entre un Disque Fixe et un Disque en Rotation", *Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille*, janv 1993
- [19] DENTON 1993 "Learning Flow Physics From Turbomachinery Flow Calculations", 2. *ISAIF*, pp 23-51 Pague, july 12-15 - 1993
- [20] N. M. McDOUGALL 1990 "A Comparaison Between the Design Point and Near Stall Performance of an Axial Compressors", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 112, pp 109-115, jan 1990
- [21] N. M. McDOUGALL, N. A CUMPSTY, T. P. HYNES 1990 "Stall Inception in Axial Compressors", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 112, pp 116-125, jan 1990
- [22] H. W. EMMONS, C. E. PEARSON and H. P. GRANT 1955 "Compressor Surge and Stall Propagation", *ASME JTransactions*, Vol. 79, pp 455-469
- [23] J. F ESCURET, V. GARNIER 1994 "Numerical Simulations of surge and rotating stall in multi-stage in Axial-Flow Compressors", *AIAA-94-3202 30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference June 27-29 1994/ Indianapolis, IN*

- [24] A. FARCY and T. ALZIARY DE ROQUEFORT 1988 "Chebyshev pseudospectral solution of the incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear domains", *Computer and Fluids Vol. 16, No. 4*, pp. 459-473, 1988
- [25] A. FARCY and T. ALZIARY DE ROQUEFORT 1990 "Pseudospectral multi-domain method for incompressible viscous flow computation", *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering 80 (1990) 337-346*, North-Holland
- [26] A. FEIDT 1990 "Quelques Résultats sur Une Méthode Numérique de Résolution du type EULER-LAGRANGE, Pour les Equations de Navier-Stockes", *Thèse de Doctorat, Univ Lille-Flandre-Artois, oct 1990*
- [27] P. FERRAND 1980 "Etude théorique des instabilités de l'écoulement dans les compresseurs axiaux", *Thèse de Doctorat, Univ Aix-Marseille, avril 1980*
- [28] G. FILE, G. GYARMATHY, T. STAUBLI 1997 "Water Model of a Single-stage Centrifugal Compressor for Studying Rotating Stall", *Darmstädter Kreis, Darmstadt, 10-11 april 1997*
- [29] V. H. GARNIER A. H EPSTEIN, E. M. GREITZER 1991 "Rotating Waves as Stall Inception Indication in Axial Compressors", *ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 113, pp 290-302, april 1991*
- [30] G.L.GIANNISSIS A. B. MCKENZIE R. L. ELDER 1989 "Experimental Investigation in a Mismatched Three-Stage Axial Flow Compressor", *ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 111, pp 418-425, oct 1989*
- [31] D. GOTTLIEB, S A ORSAG 1977 "Numerical Analysis of spectral methods, theory and application" edition SIAM
- [32] A. GOTO 1992 "Three-Dimensional Flow and Mixing in an Axial Flow Compressor' With Different Rotor Tip Clearances, *ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 114, pp 675-685, july1992*
- [33] E.M. GREITZER 1976 "Surge and Rotating Stall in Axial Flow Compressors Part II: Experimental Results And Comparaison With Theory", *ASME Trans., J.Engrg for Power, pp 199-217, april 1976*
- [34] E.M. GREITZER 1980 "REVIEW-Axial Compressor Stall Phenemena", *ASME Trans., J.of Fluids Engineering, Vol.102, pp 134-151, june 1980*
- [35] D. L. GYLING, E.M. GREITZER 1995 "'Dynamic Control of Rotating Stall in Axial Flow Compressors Using Aeromechanical Feedback', *ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 117 pp 307-319, july 1995*

- [36] J. M. HAYNES G. J. HENDRICKS A. H. EPSTEIN 1994 "Active Stabilization Rotating Stall in a Three-Stage Axial Compressor", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 116 pp 226-239, april 1994
- [37] C. W. HIRT, A. A. AMSDEN AND J. L. COOK "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds", *Journal of Computational Physics* 14, 227-253 (1974)
- [38] M. INOUE, M. KUROUMARU T. IWAMOTO Y. ANDO 1991 "Detection of a rotating stall in Isolated Axial Flow Compressor Rotors", *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 113, pp 281-289 oct 1991
- [39] F. INQUIMBERT 1993 "Calcul d'écoulements Instationnaires dans un Etage de Turbine Transsonique en Interaction Rotor-Stator", *Thèse de Doctorat, Univ Lille-Flandre-Artois*, oct 1993
- [40] J.O ISMAEL and L. HE 1997 "Three Dimensional Computation of Rotating Stall Inception", *2nd European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics Anvers*, March 1997
- [41] P. LASCAUX et R. THEODOR "Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de L'Ingénieur", *MASSON*, 1987
- [42] Y. LE BOT et P. BERNARD 1972 "Analyse par Analogie Hydraulique du Decollement Tournant Dans Les Compresseurs", *La RECHERCHE AEROSPATIALE*, No 4, pp187-198, juil 1972
- [43] P. LECA et G. SACCHI LANDRIANI 1987 "Parallélisation d'un algorithme de matrice d'influence pour la résolution des équations de Navier-Stokes par méthode spectrale", *La RECHERCHE AEROSPATIALE*, No 6, pp35-42, Nov-Dec 1987
- [44] A. LERAT et Z. N. WU 1996 'Stable Conservative Treatments for Implicit Euler Solvers', *Journal of Computational Physics* 123,45-64 (1996)
- [45] P. MAERTEN 1996 'Simulation numérique d'une couche de mélange', *Rapport d'activité n° 1, Pôle Firtech MEMTA*, 1996
- [46] A. MALESYS 1997 "Etude Expérimentale de l'écoulement Entre Disques Non Parallèles avec Précession. Mesures des Efforts Aérodynamiques. Visualisations", *Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille*, janv 1997
- [47] L. MANE et TA PHUOC LOC 1987 "Simulation d'écoulements instationnaires à grands nombre de Reynolds sur une architecture parallèle", *La RECHERCHE AEROSPATIALE*, No 2, pp49-58, Mars-Avril 1987

- [48] C. MATHIOUDAKIS 1985 "Rotating stall in axial flow compressors. Experimental and theoretical research.", Thèse de Doctorat, Université Catholique de Louvain, avril 1985
- [49] F. K. MOORE 1983 "A Theory of Rotating Stall of Multistage Axial Compressors, Part I II, III, ASME Journal 83-GT-44
- [50] F. K. MOORE et E.M. GREITZER 1986 "A Theory of Post-Stall Transients in Axial Compression Systems: Part I- Development of Equations", ASME Trans., J. Engrg for Power, Vol.108, No 1, pp 68-76 ,jan 1986
- [51] H. G. NEUHOFF et K. G GRAHL 1986 "Numerical Simulation of Rotating Stall in Axial Compressor' Blade Rows and stages', ASME Journal 86-GT-27
- [52] GE NING 1993 "Contribution à l'étude du décollement tournant dans les ventilateurs axiaux par vélocimétrie Doppler à laser et visualisation ", Thèse de Doctorat, Univ de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, Mai 1993
- [53] F. OBLE 1992 "Modélisation du Décrochage Tournant ", Rapport de DEA , Université des Sciences et Technologies de Lille, sept 1992
- [54] N. ORNER 1976 "Prédiction du décrochage tournant dans les compresseurs axiaux ", Thèse de Doctorat, Faculté polytechnique de MONS
- [55] E. OUTA D. KATO 1994 "An N-S Simulation of Stall Cell Behavior In a 2D Compressor Rotor-Stator System at Various Loads", ASME Paper 94-GT-257, june 13-16, 1994
- [56] J.D PADUANO , A.H EPSTEIN , L. VALAVANI , J. P. LONGLEY, E. M . GREITZER, G. R. GUENETTE 1993 "Active control of Rotating Stall in Low-Speed AXIAL Compressor", ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 115, pp 48-56, jan 1993
- [57] R. C. PAMPREEN 1993 "Compressor Surge and Stall', Library of Congress. Card Number : 92-70348, ISBN 0-933283-05-9, First Edition 1993
- [58] A. PINELLI and V. VACCA 1995 "A Parallel Spectral Multi-Domain Solver Suitable for DNS and LES Numerical Simulation of Incompressible Flows", AGARD FDP, Spain, Oct 1995, CP-578
- [59] B. RAMASWAMY 1990 "Numerical Simulation of Unsteady Viscous Free Surface Flow", Journal of computational physiques, pp 396-430, 1990
- [60] G. F. ROACH "GREEN'S FUNCTIONS", Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge

-
- [61] P.R. SPALART 1984 "*Two Recent Extensions of the Vortex Method*", *AIAA 2nd Aerospace Sciences Meeting, jan 9-12, 1984/RENO, Nevada*
- [62] H. TAKATA S. NAGANO 1972 "*Nonlinear Analysis of Rotating Stall*", *ASME Trans., J.Engrg for Power, pp 279-293 ,oct 1972*
- [63] D. VINTELER 1996 "*Interaction Rotor/Stator dans les Turbomachines Axiales*", *Thèse de Doctorat de L'Université de PARIS 6, 1996*

Annexe A

Résultats de convergences (a)

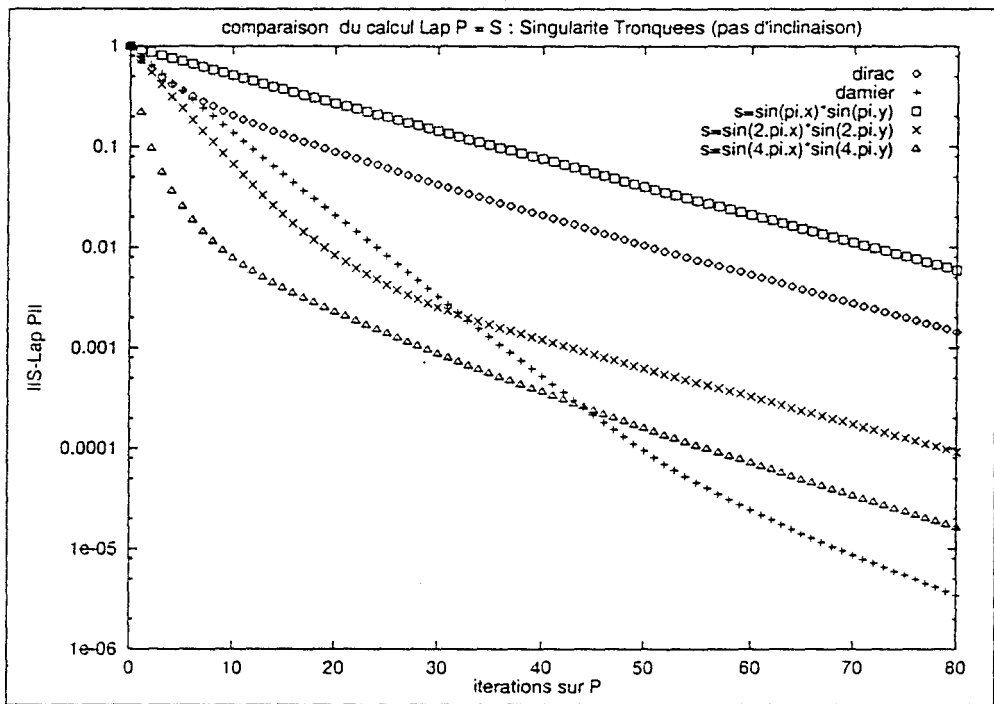


FIG. A.1 - Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est nulle. Chacun des coefficients poids est optimisé.

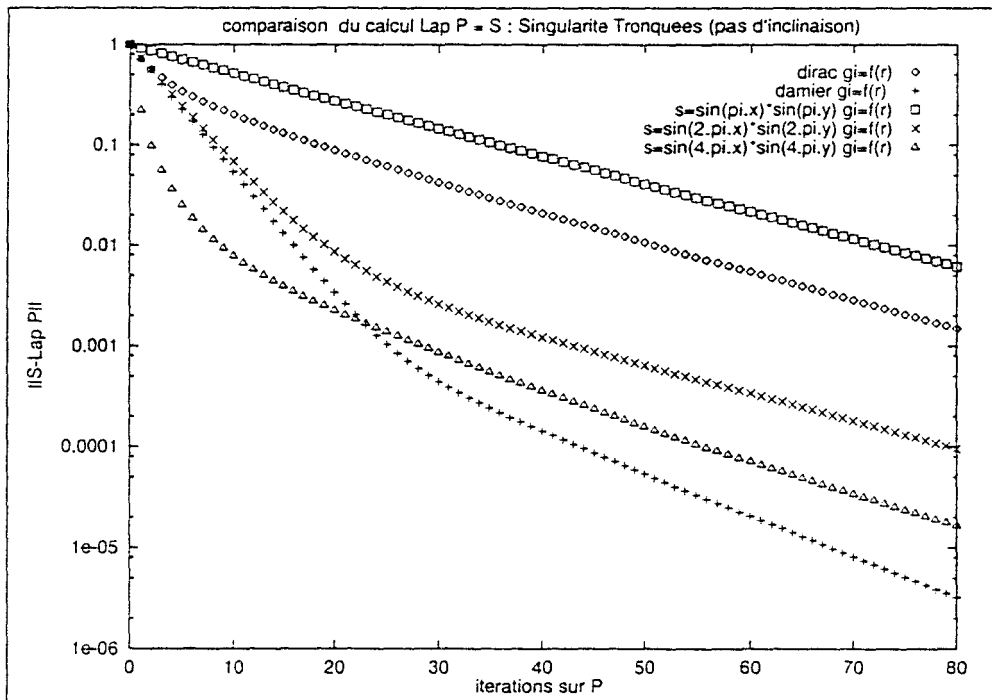


FIG. A.2 - Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est nulle. Les coefficients poids sont dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central.

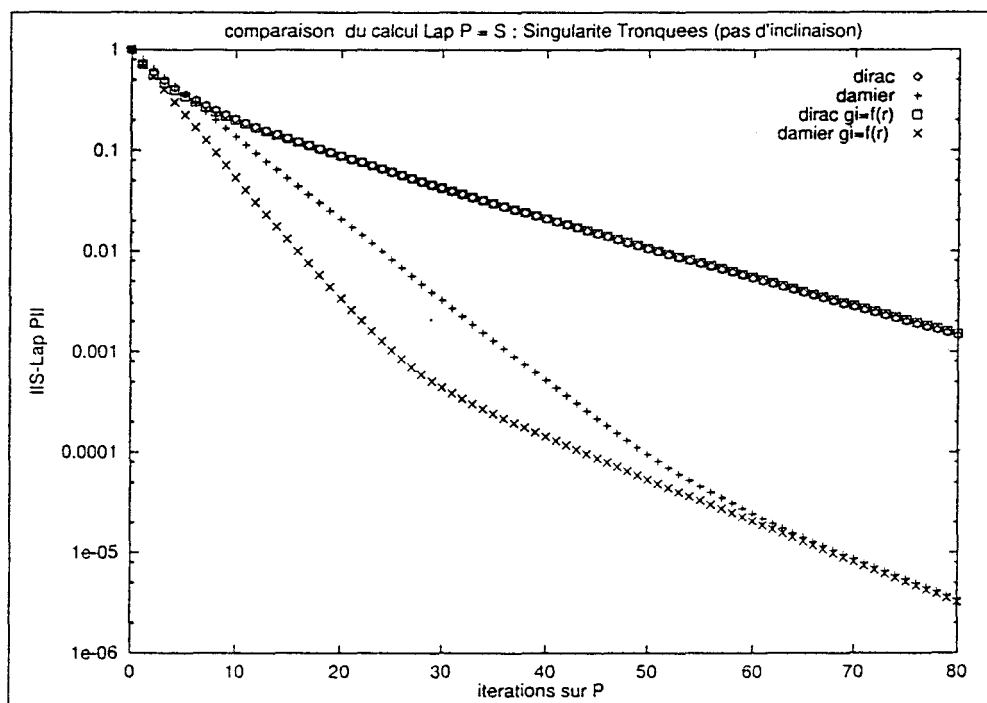


FIG. A.3 - Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables. L'inclinaison du domaine est nulle.

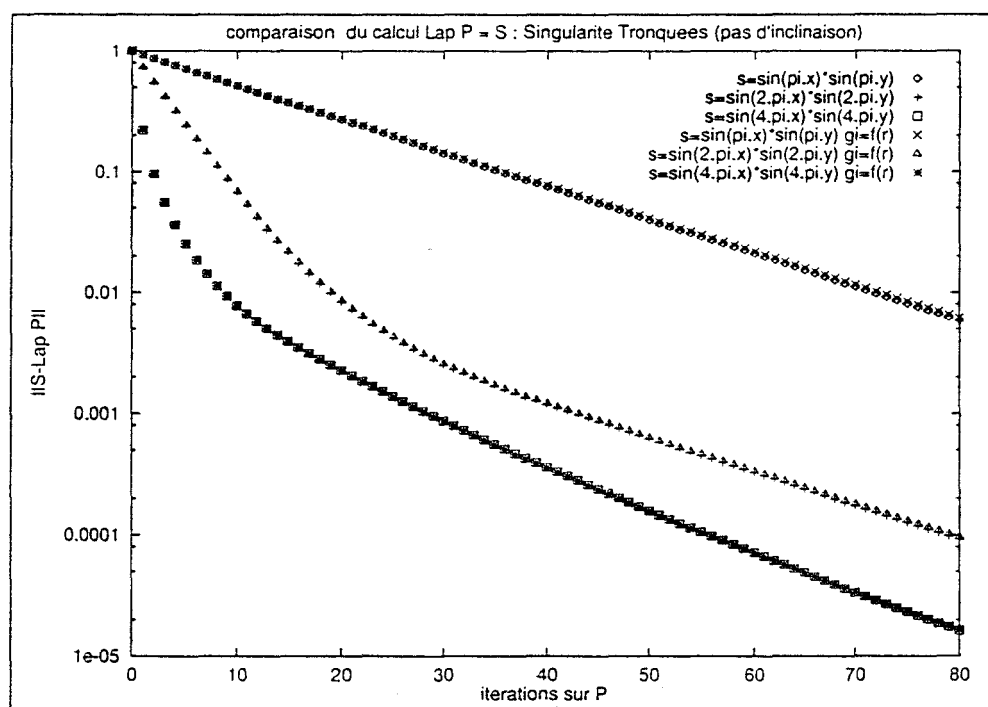


FIG. A.4 - Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables. L'inclinaison du domaine est nulle.

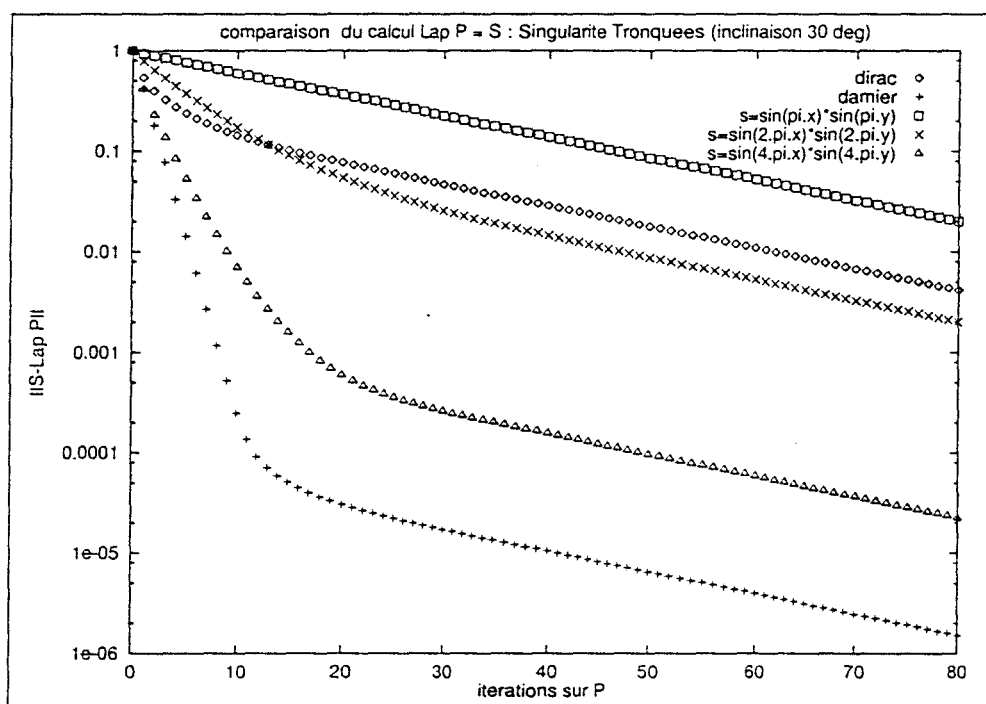


FIG. A.5 - Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 30° . Chacun des coefficients poids est optimisé.

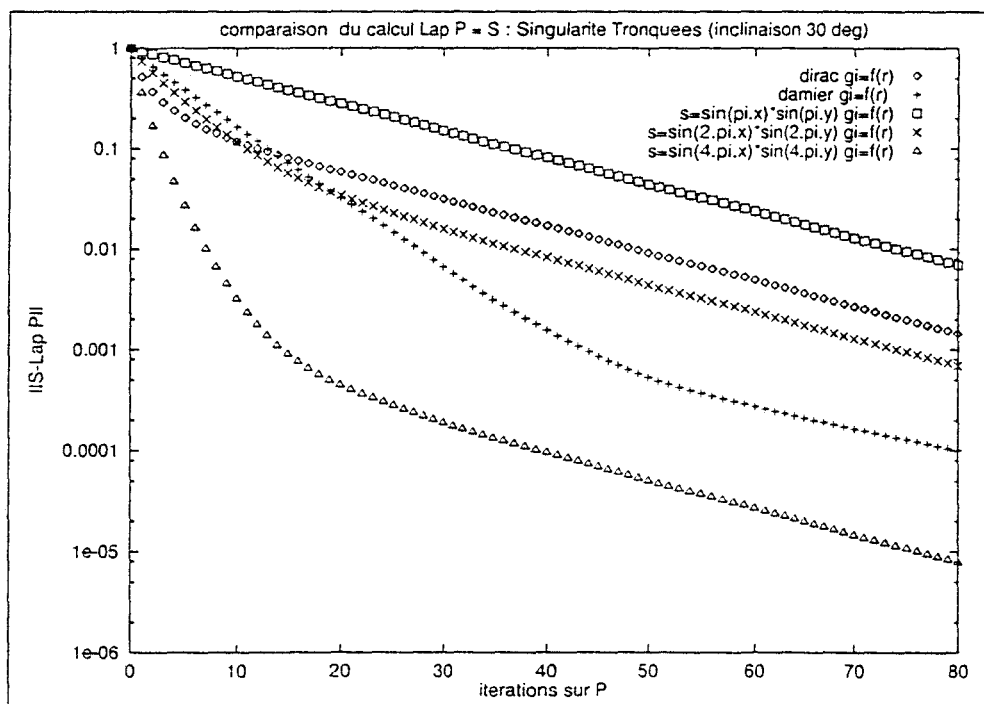


FIG. A.6 - Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 30° . Les coefficients poids sont dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central.

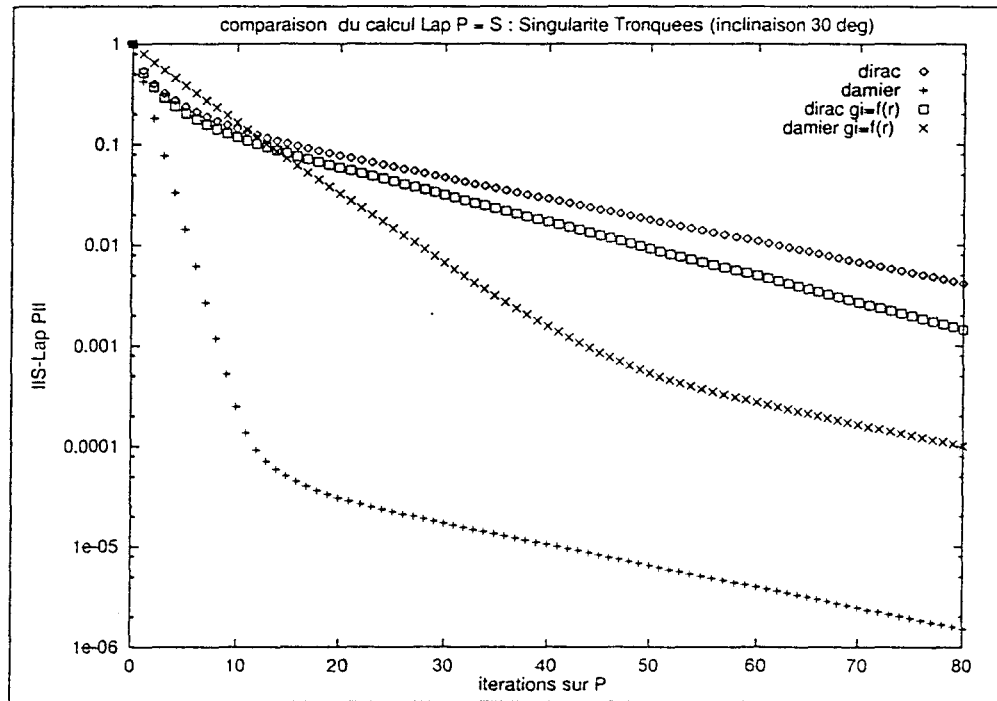


FIG. A.7 - Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est de 30°

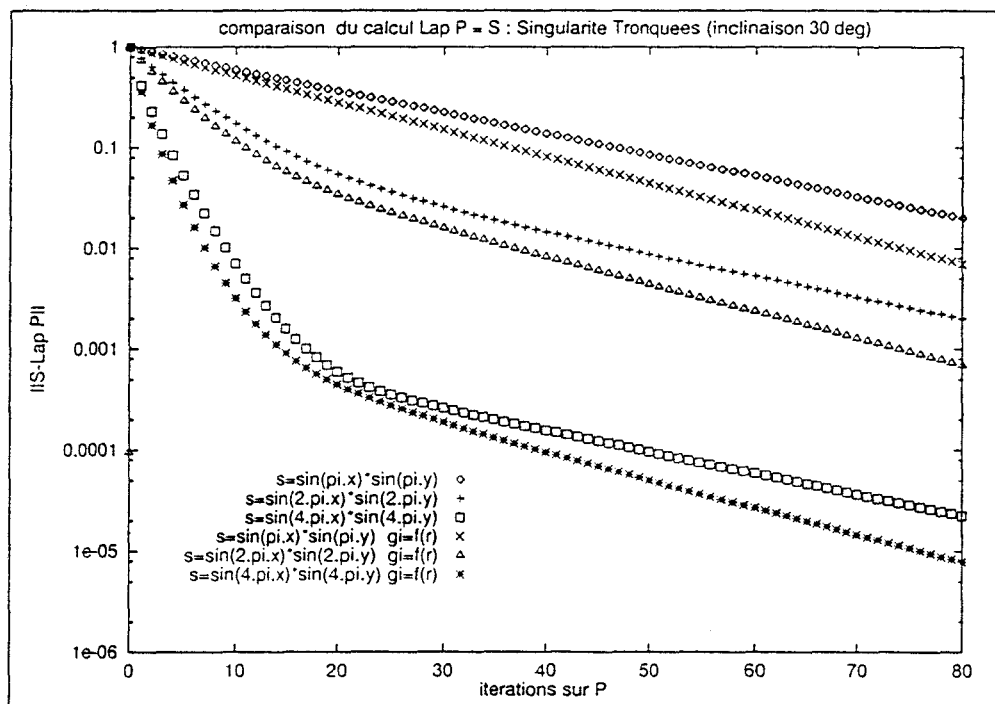


FIG. A.8 - Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est de 30°

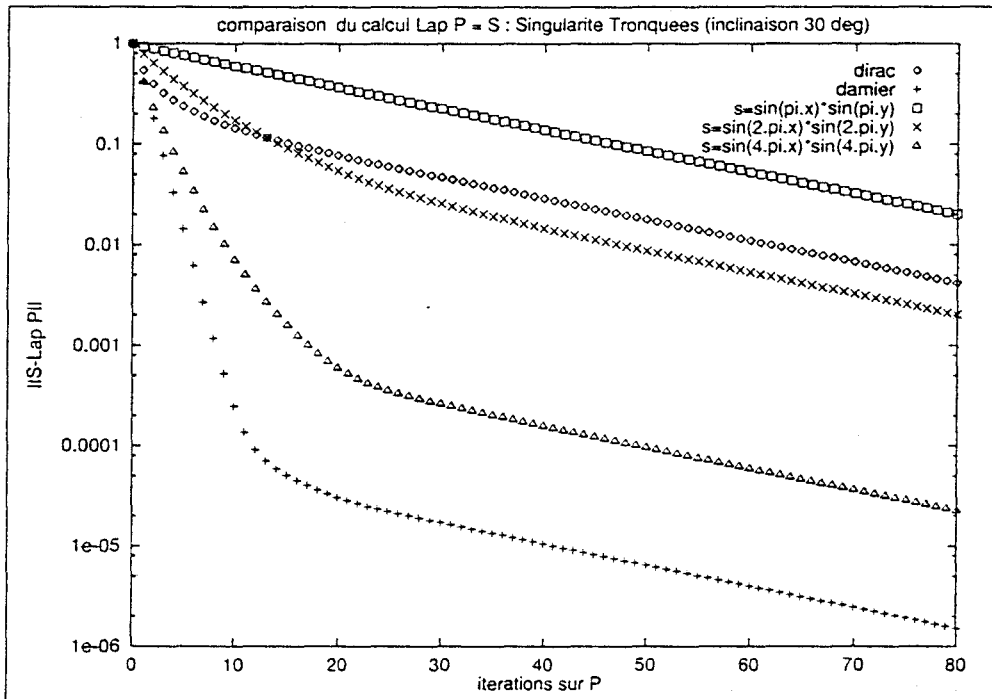


FIG. A.9 - Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 45° . Chacun des coefficients poids est optimisé.

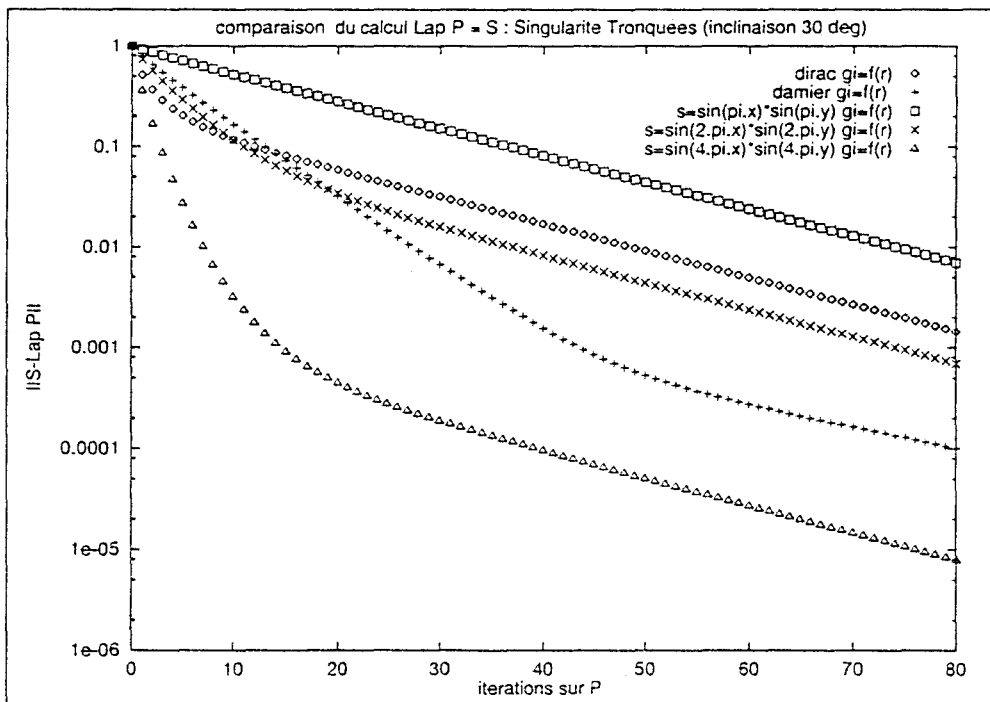


FIG. A.10 - Convergence de la méthode des singularités en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 45° . Les coefficients poids sont dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central.

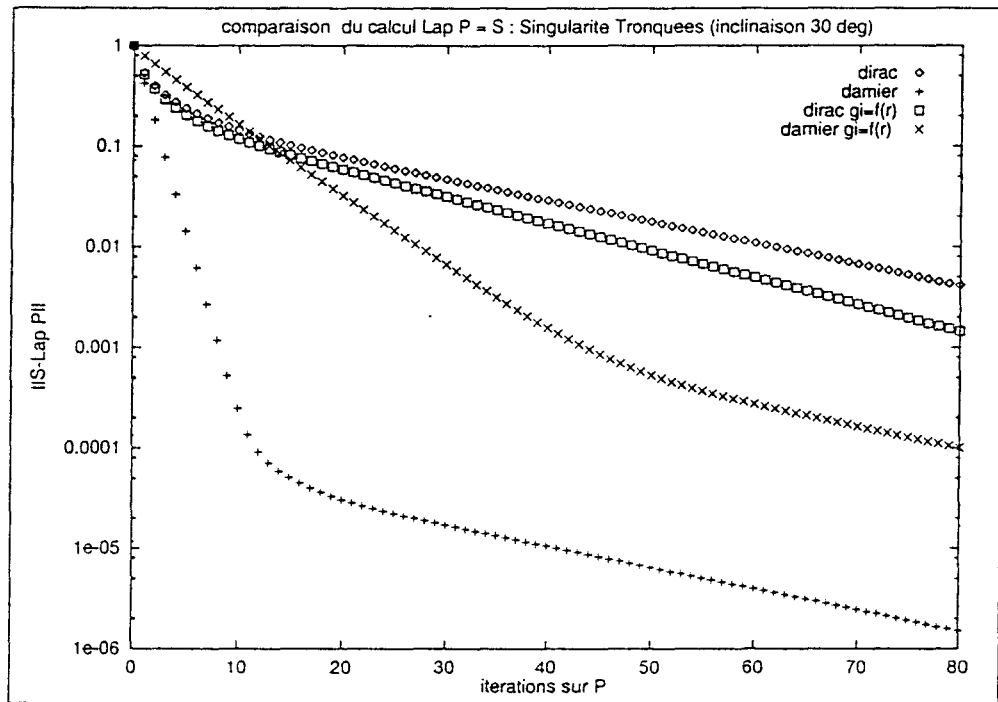


FIG. A.11 - Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est de 45°

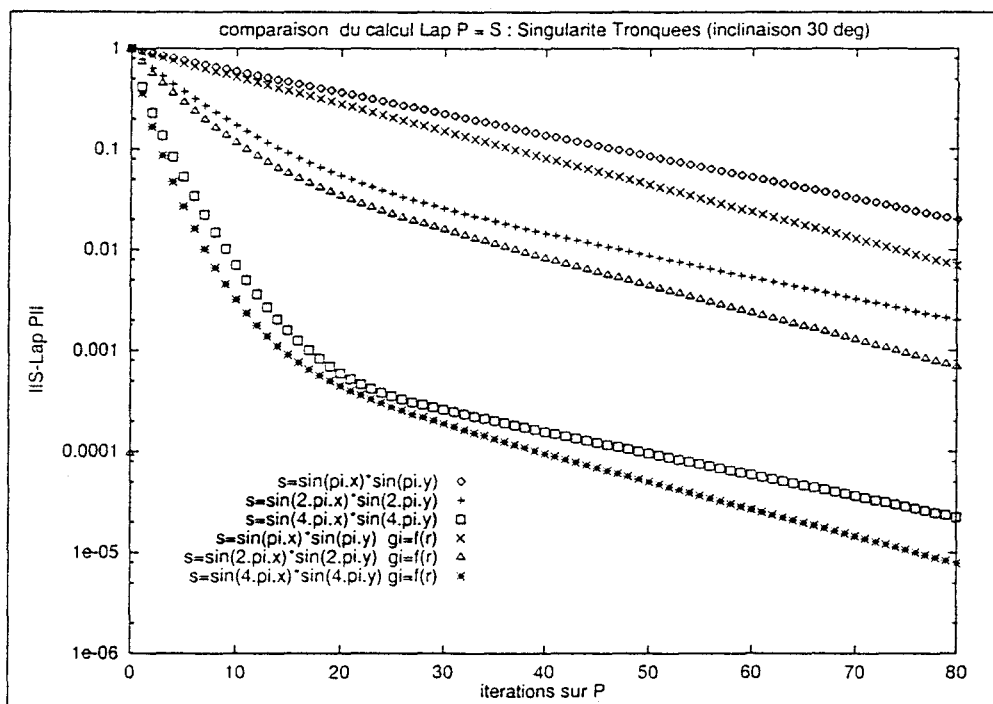


FIG. A.12 - Comparaison d'un calcul mené avec des coefficients poids optimisés ou dépendant d'une loi d'éloignement $f(r)$ du point central. Les seconds membres sont variables . L'inclinaison du domaine est de 45°

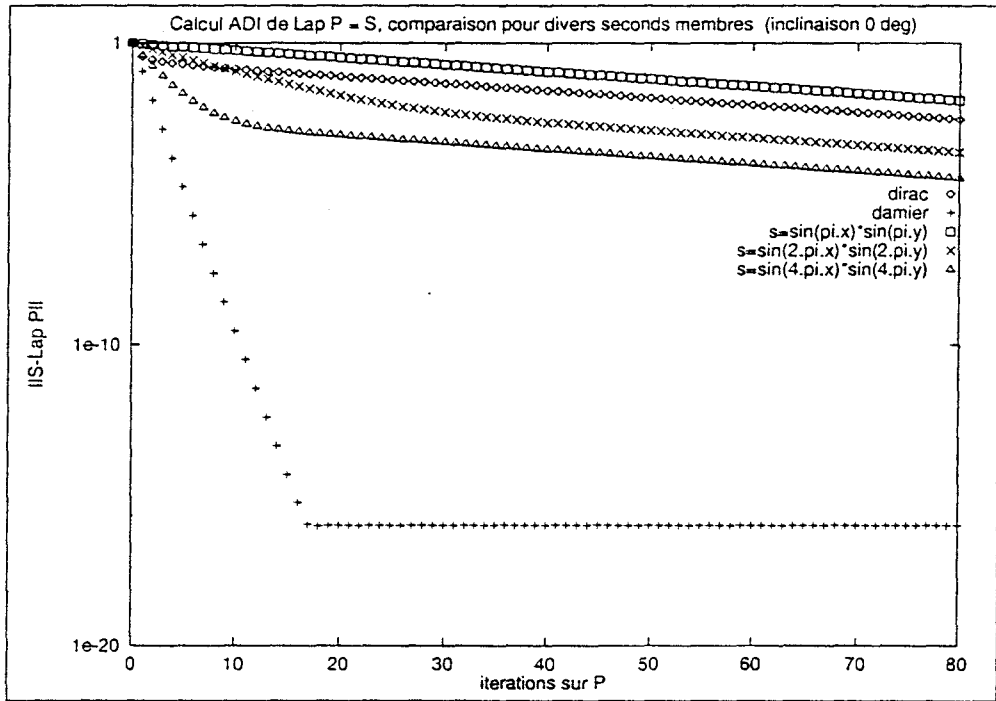


FIG. A.13 - Convergence de la méthode ADI en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est nulle

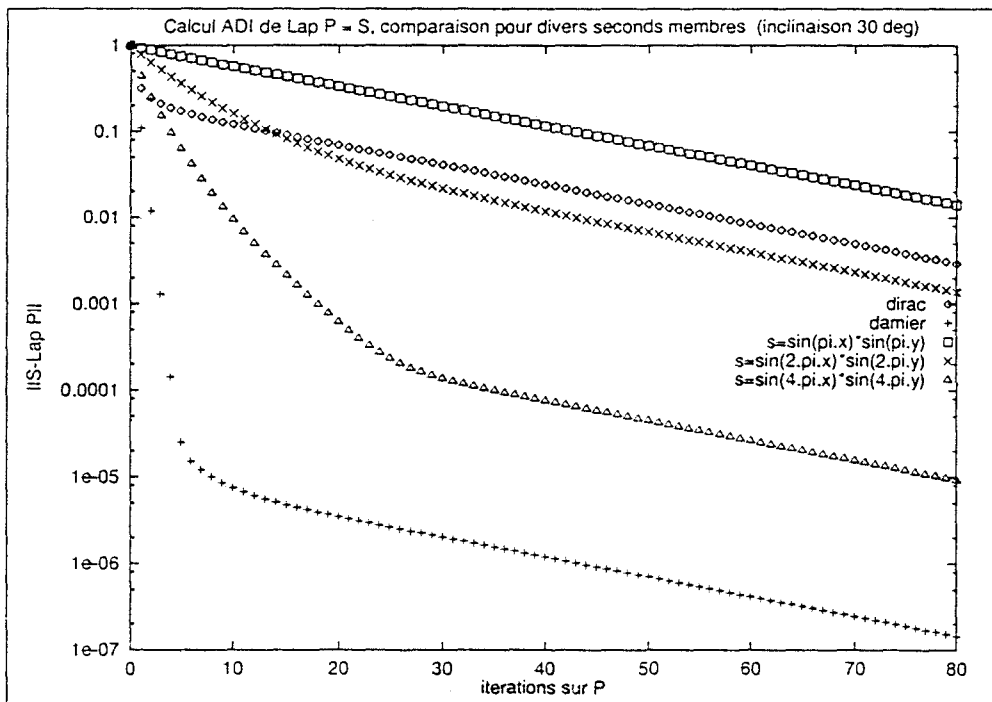


FIG. A.14 - Convergence de la méthode ADI en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 30°

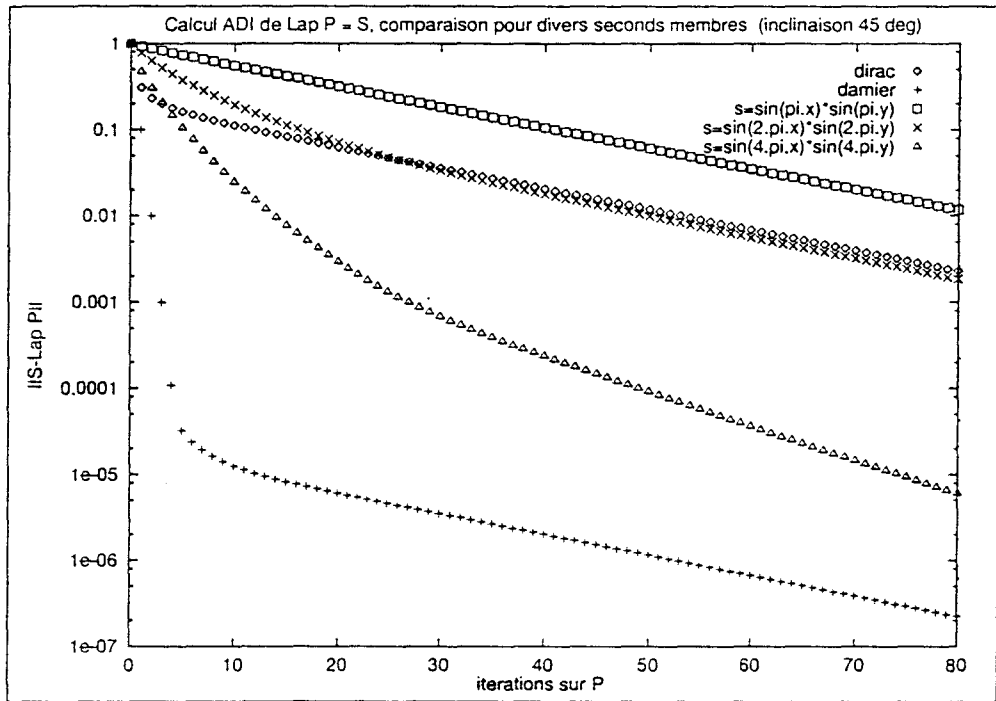


FIG. A.15 - Convergence de la méthode ADI en fonction du type de second membre. L'inclinaison du domaine est de 45°

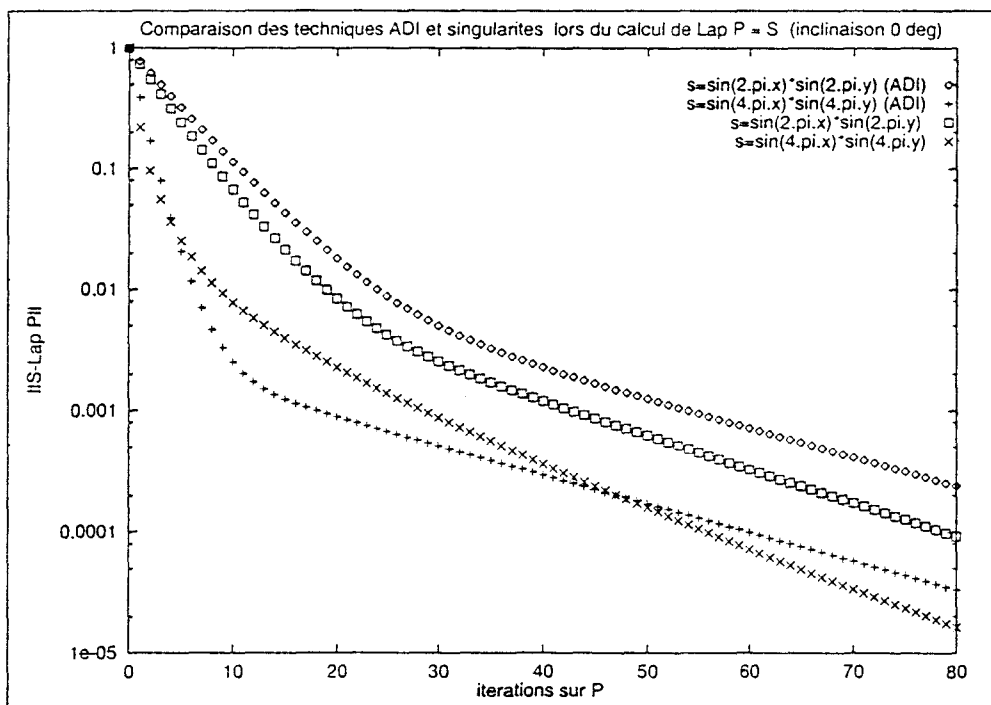


FIG. A.16 - Comparaison de la convergence de la méthode ADI avec celle de la méthode des singularités pour des seconds membres identiques. L'inclinaison du domaine est nulle

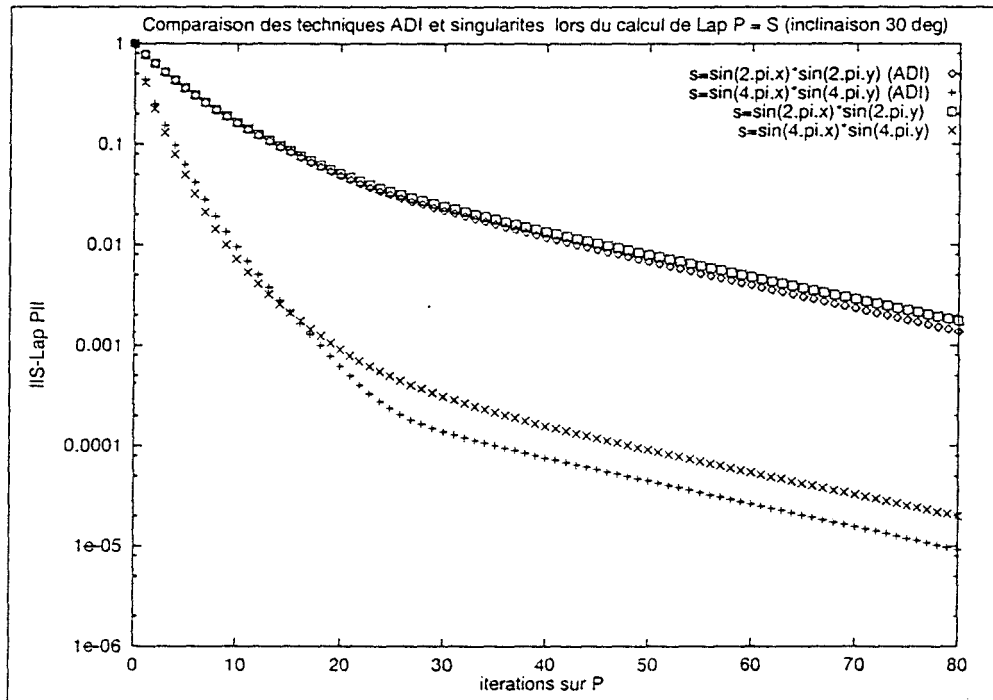


FIG. A.17 - Comparaison de la convergence de la méthode ADI avec celle de la méthode des singularités pour des seconds membres identiques. L'inclinaison du domaine est de 30°

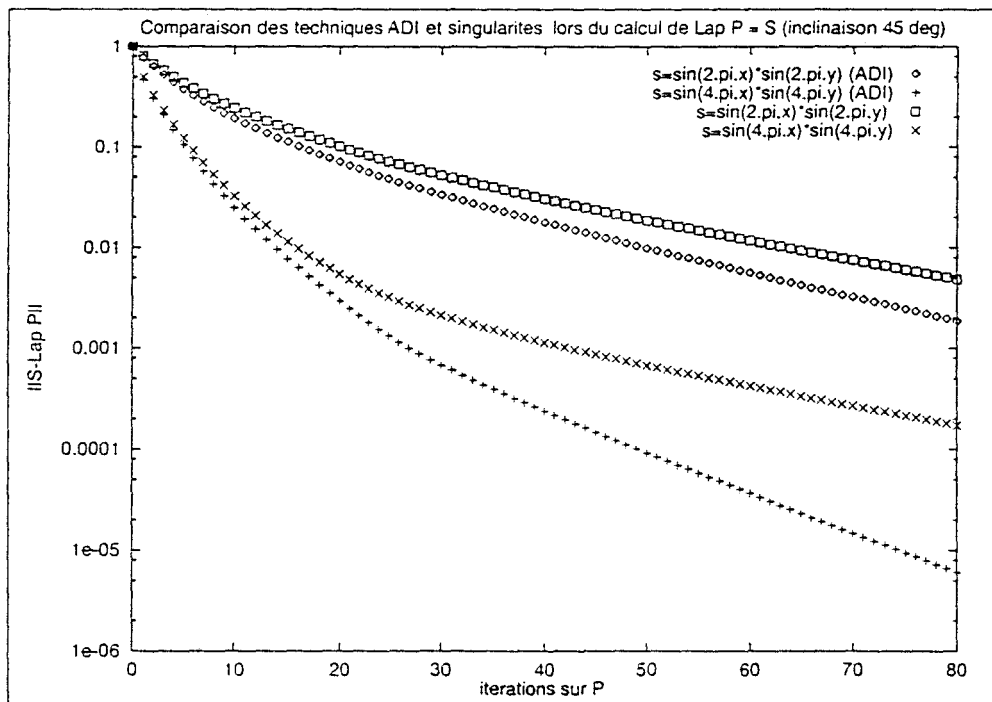


FIG. A.18 - Comparaison de la convergence de la méthode ADI avec celle de la méthode des singularités pour des seconds membres identiques. L'inclinaison du domaine est de 45°

Annexe B

Résultats de convergences (b)

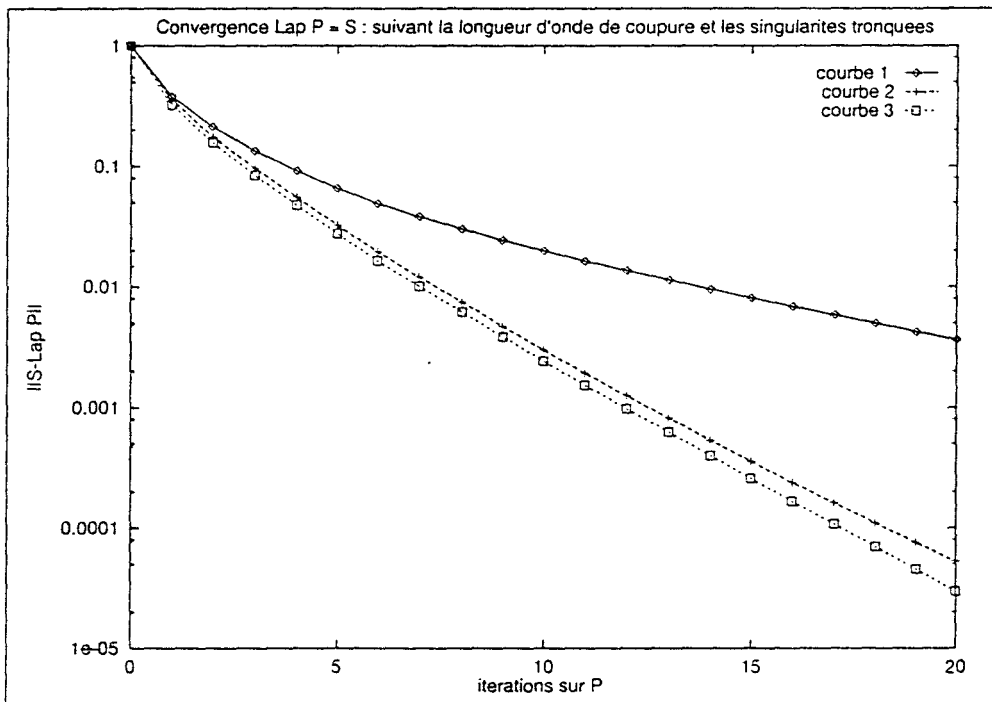


FIG. B.1 - Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1 : coupure à 20 mailles 1 itération sur les singularités. Courbe 2 : coupure à 10 mailles 1 itération sur les singularités. Courbe 3 : coupure à 5 mailles 1 itération sur les singularités.

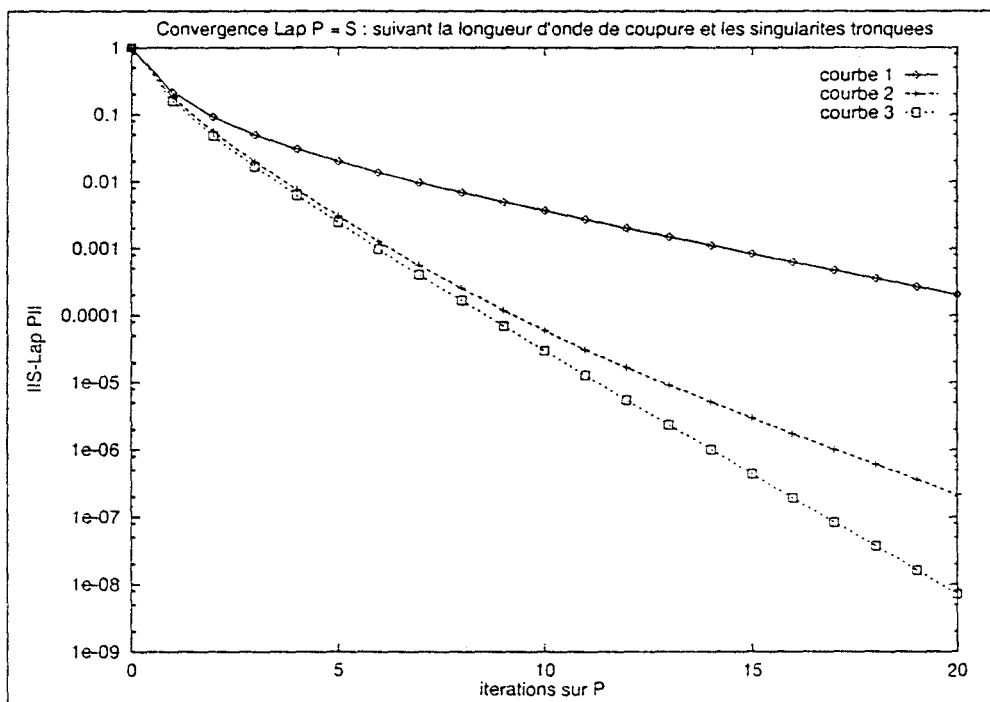


FIG. B.2 - Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1 : coupure à 20 mailles 2 itérations sur les singularités. Courbe 2 : coupure à 10 mailles 2 itérations sur les singularités. Courbe 3 : coupure à 5 mailles 2 itérations sur les singularités.

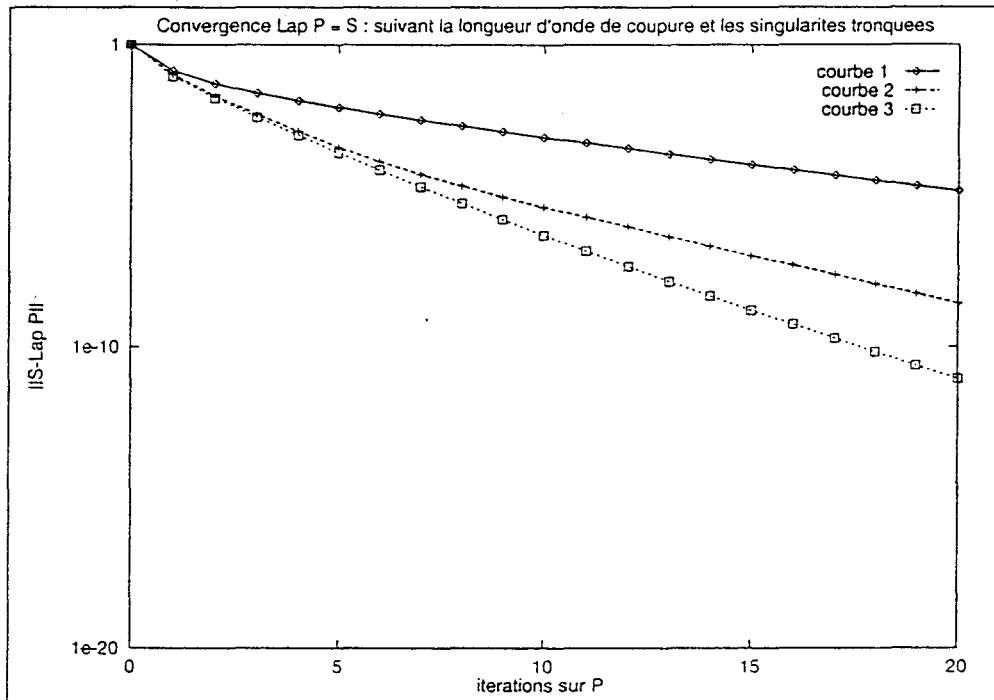


FIG. B.3 - Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1 : coupure à 20 mailles 3 itérations sur les singularités. Courbe 2 : coupure à 10 mailles 3 itérations sur les singularités. Courbe 3 : coupure à 5 mailles 3 itérations sur les singularités.

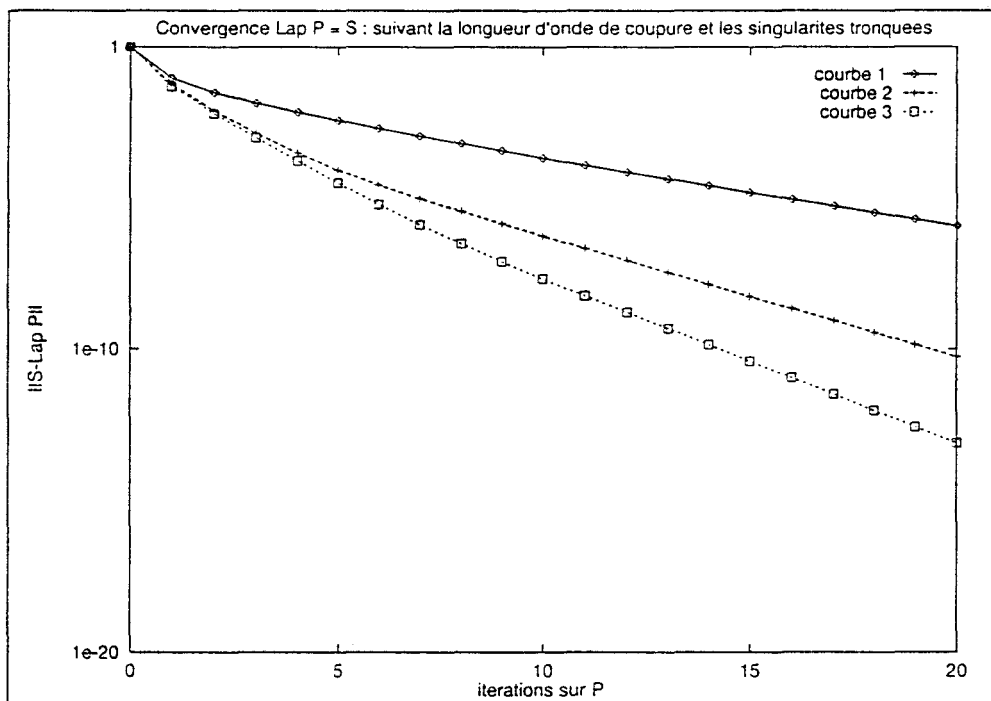


FIG. B.4 - Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1 : coupure à 20 mailles 4 itérations sur les singularités. Courbe 2 : coupure à 10 mailles 4 itérations sur les singularités. Courbe 3 : coupure à 5 mailles 4 itérations sur les singularités.

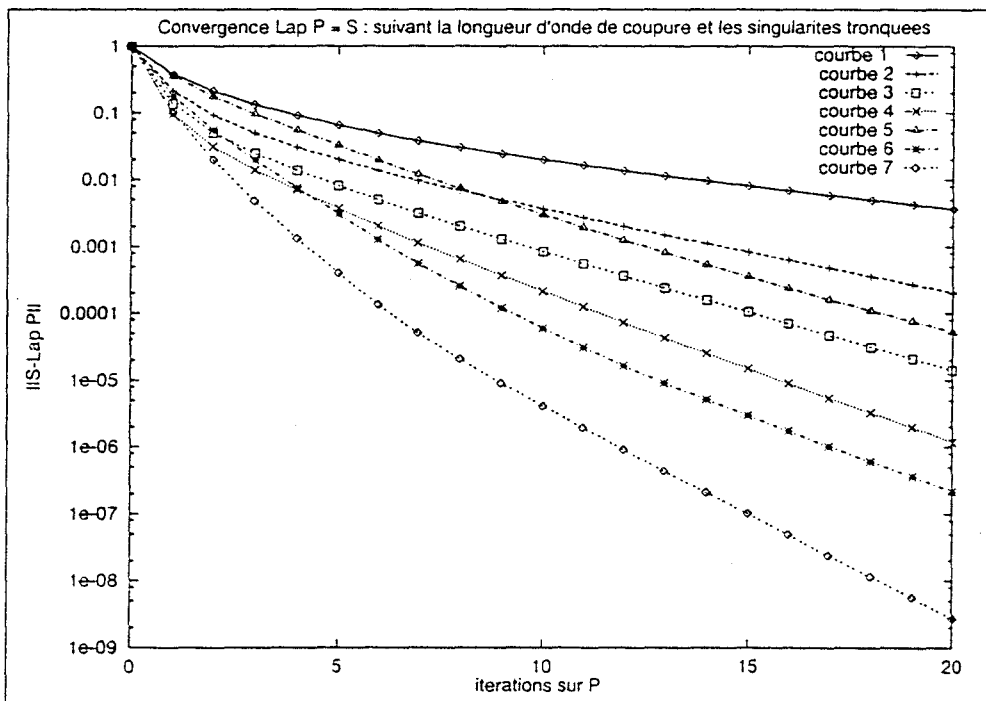


FIG. B.5 - Association méthode spectrale et technique des singularités. Courbe 1 : coupure à 20 mailles 1 itérations sur les singularités. Courbe 2 : coupure à 20 mailles 2 itérations sur les singularités. Courbe 3 : coupure à 20 mailles 3 itérations sur les singularités. Courbe 4 : coupure à 20 mailles 4 itérations sur les singularités. Courbe 5 : coupure à 10 mailles 1 itérations sur les singularités. Courbe 6 : coupure à 10 mailles 2 itérations sur les singularités. Courbe 7 : coupure à 10 mailles 3 itérations sur les singularités.

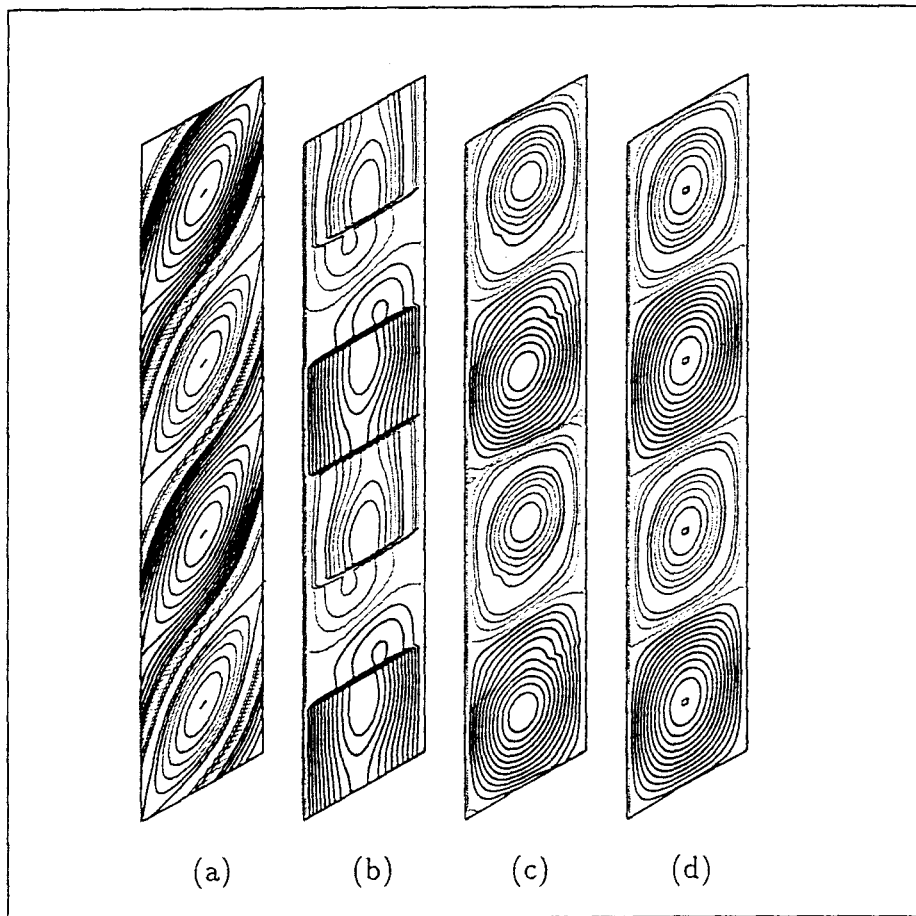


FIG. B.6 - Différentes étapes d'un calcul multi-domaine 2D

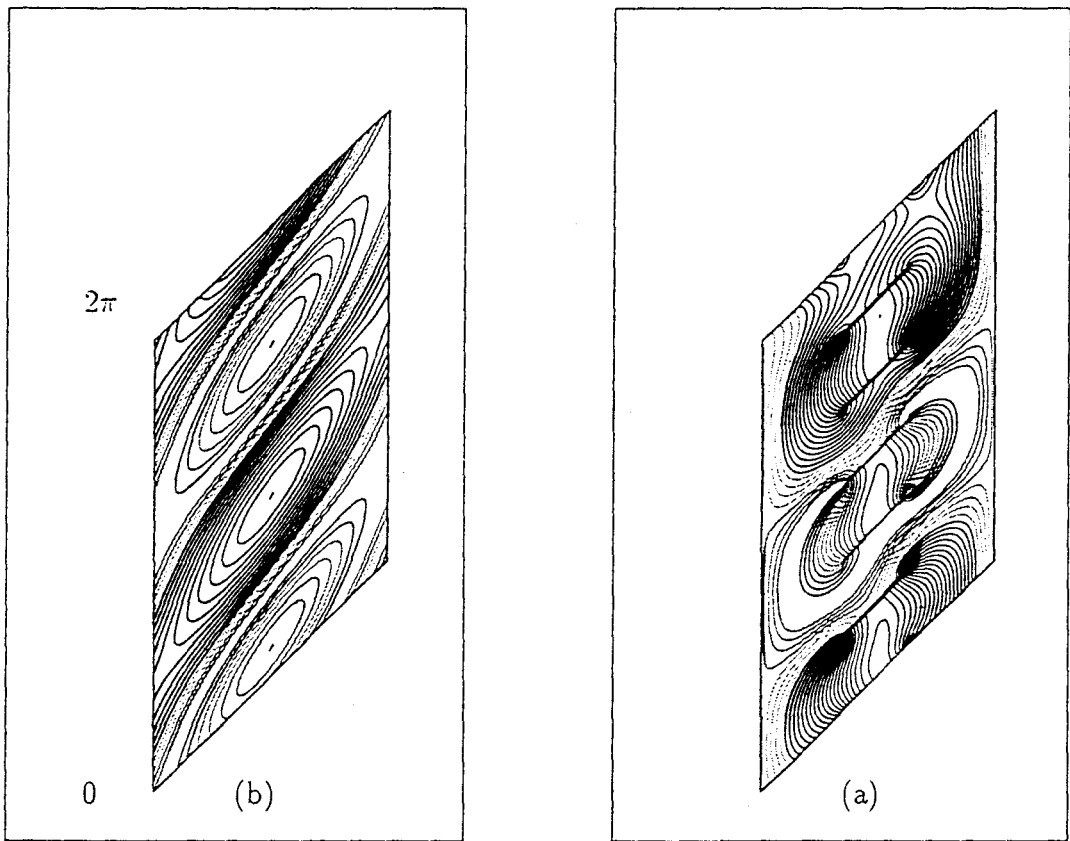


FIG. B.7 - Application de la méthode de raccordement pour une grille 2D inclinée.

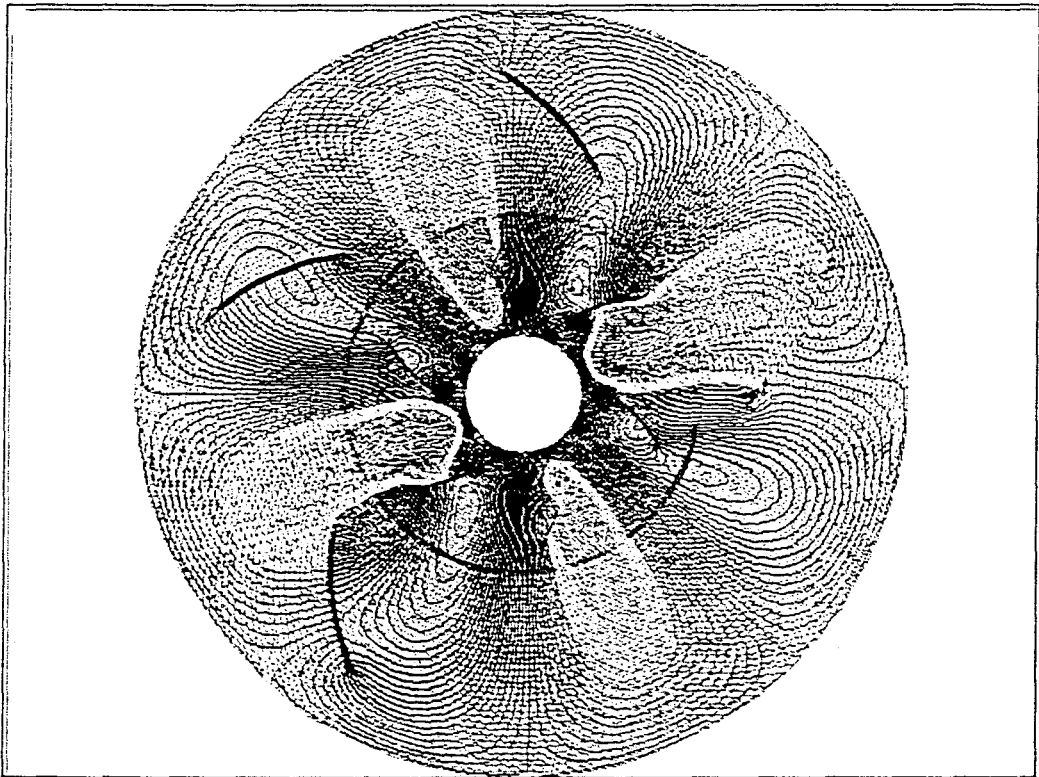
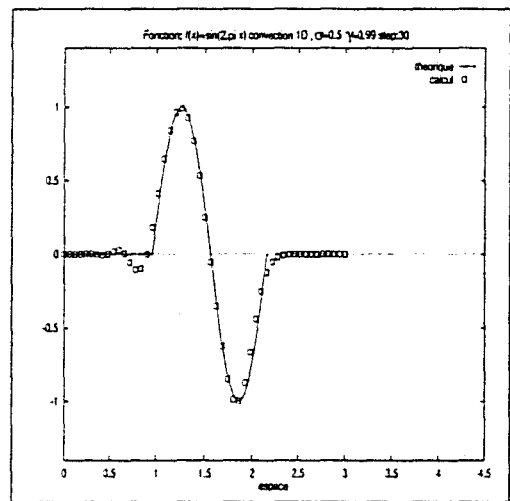
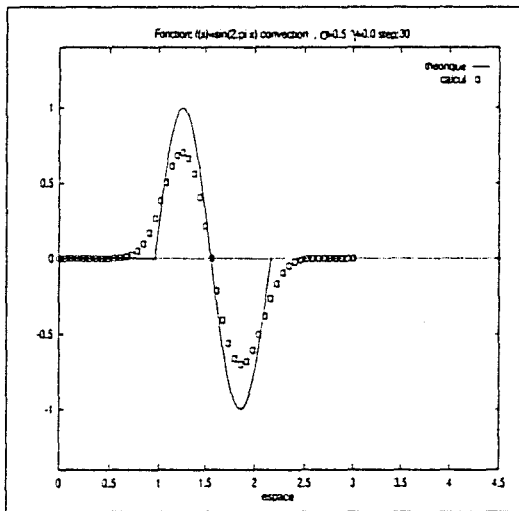
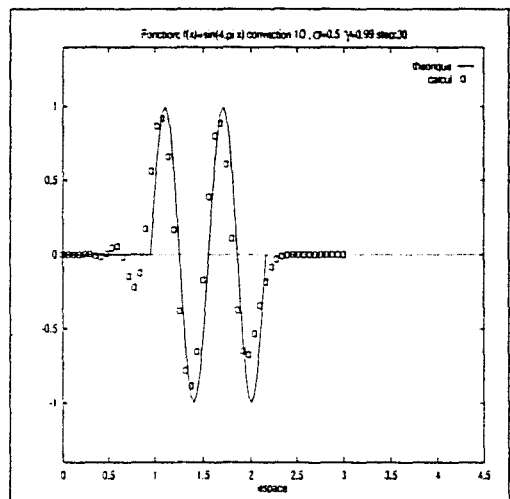
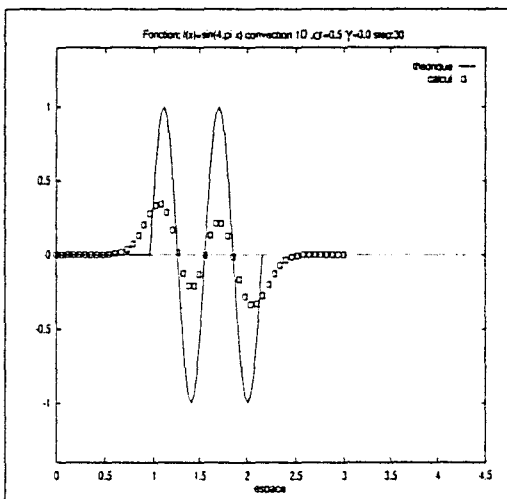


FIG. B.8 - Application de la méthode de raccordement à un ensemble roue-diffuseur.

Annexe C

CONVECTION

FIG. C.1 - Convection unidimensionnelle de $f(x) = \sin(2\pi x)$, $\sigma = 0,5$, $\gamma = 0$ ou $0,99$ FIG. C.2 - Convection unidimensionnelle de $f(x) = \sin(4\pi x)$, $\sigma = 0,5$, $\gamma = 0$ ou $0,99$

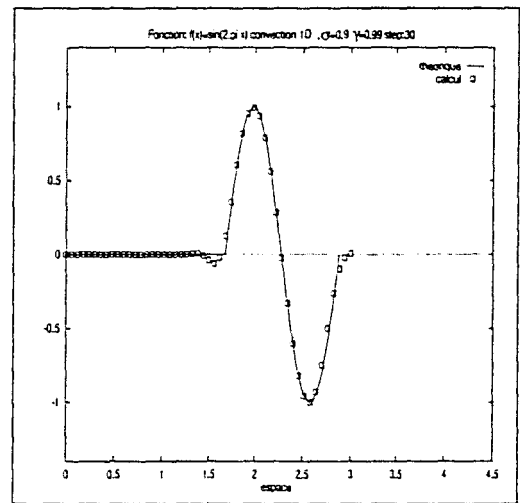
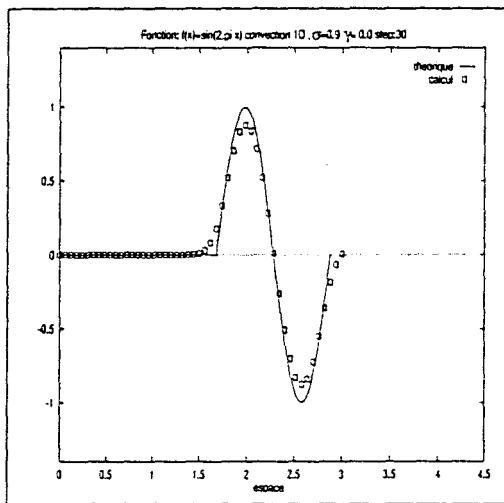


FIG. C.3 - Convection unidimensionnelle de $f(x) = \sin(2\pi x)$, $\sigma = 0,9$, $\gamma = 0$ ou $0,99$

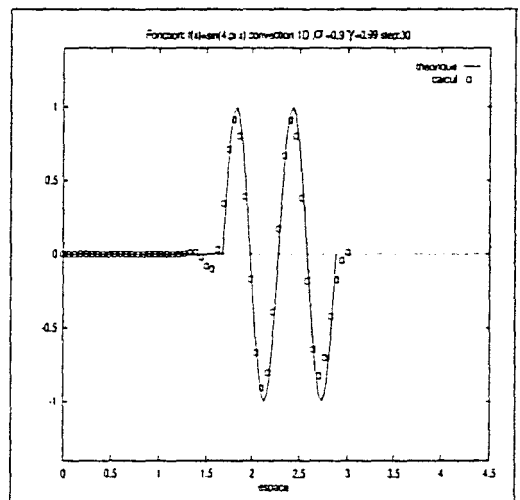
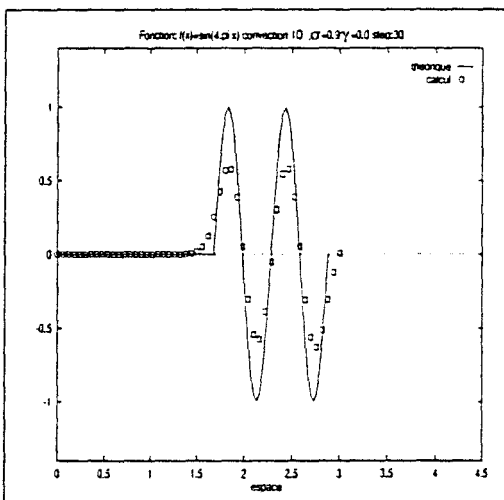


FIG. C.4 - Convection unidimensionnelle de $f(x) = \sin(4\pi x)$, $\sigma = 0,9$, $\gamma = 0$ ou $0,99$

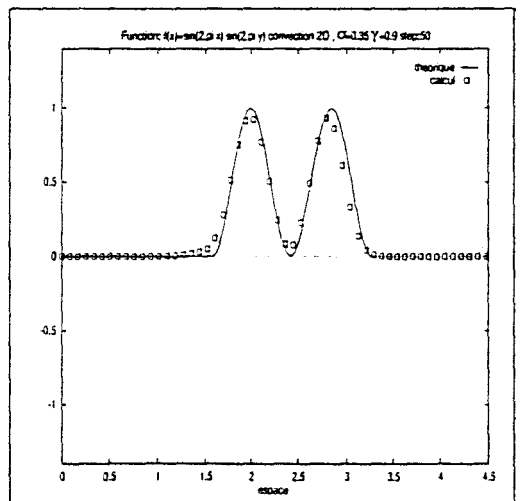
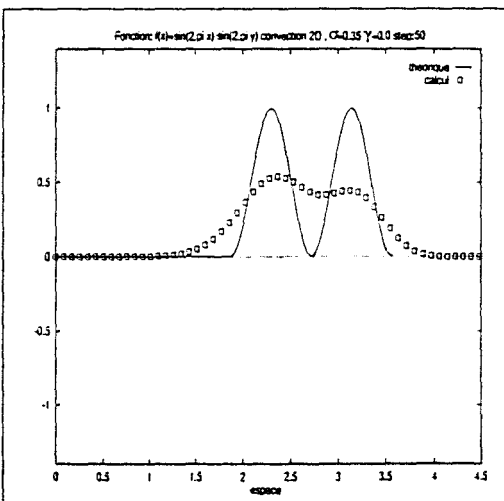


FIG. C.5 - Convection bidimensionnelle de $f(x,y) = \sin(2\pi x).\sin(2\pi y)$, $\sigma = 0,5$, $\gamma = 0$ ou $0,99$

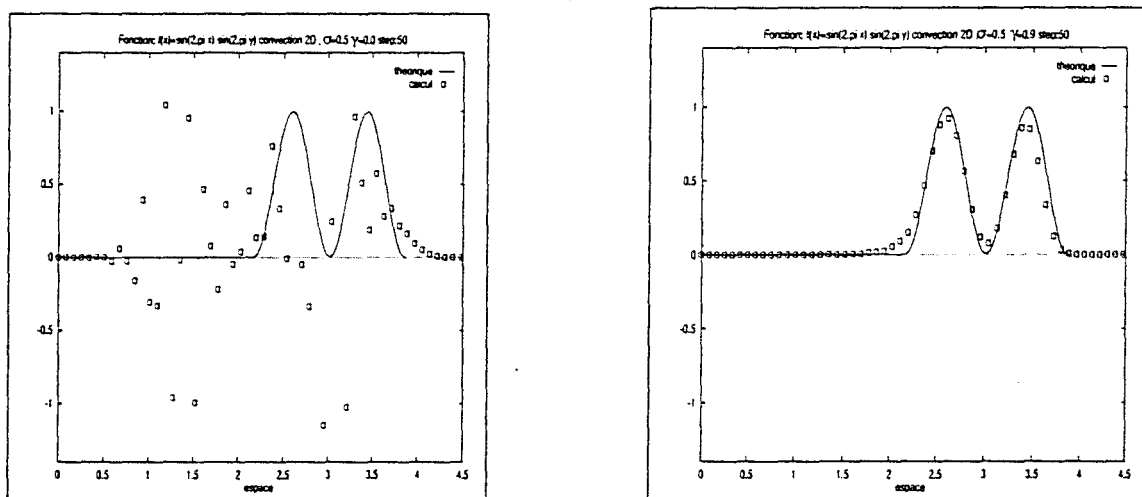


FIG. C.6 - Convection bidimensionnelle de $f(x,y) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)$, $\sigma = 0,7$, $\gamma = 0$ ou $0,9$

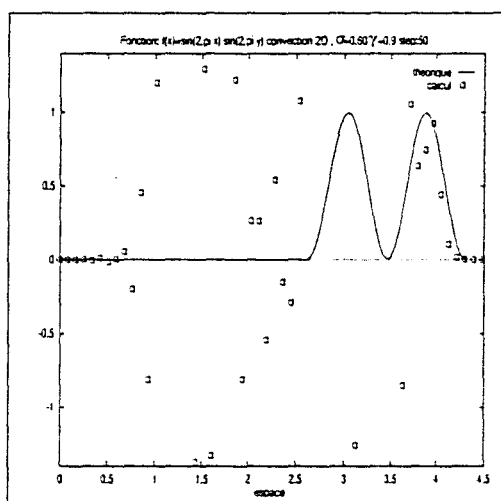


FIG. C.7 - Convection bidimensionnelle de $f(x,y) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)$, $\sigma = 0,85$, $\gamma = 0,9$

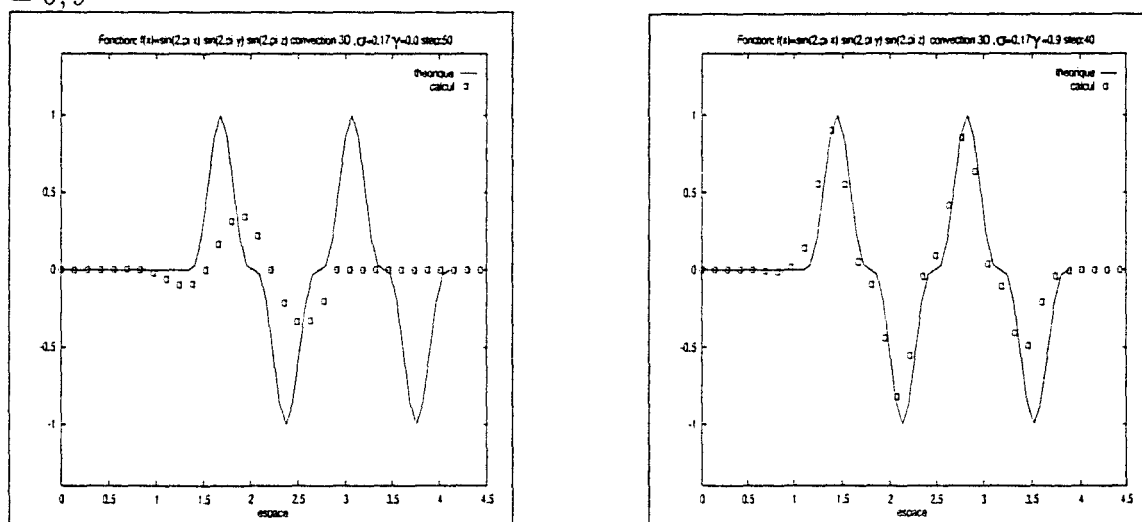


FIG. C.8 - Convection tridimensionnelle de $f(x,y,z) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y) \cdot \sin(2\pi z)$, $\sigma = 0,3$, $\gamma = 0$ ou $0,9$

Annexe D

CAS TEST 2D A

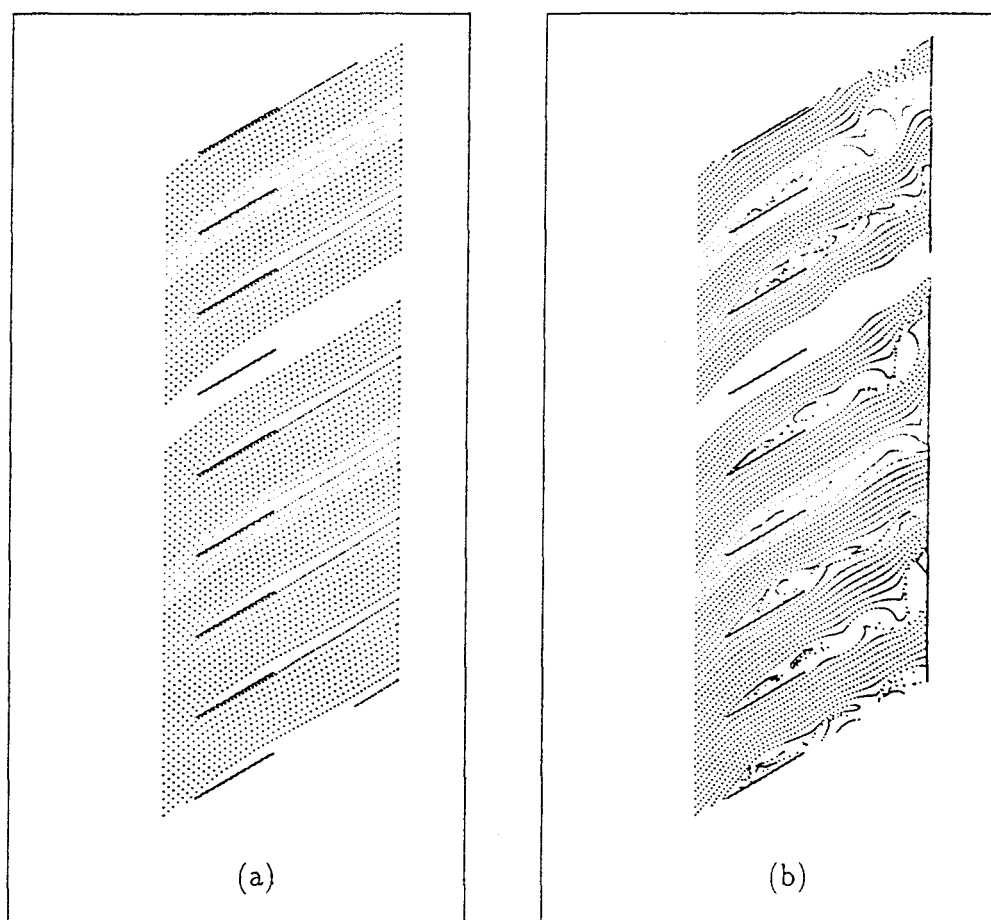


FIG. D.1 - Lignes d'émission - Essais 1 et 2 - inclinaison aubage : 30° α : (a) 15° (b) 20.19° - Schéma A.L.E

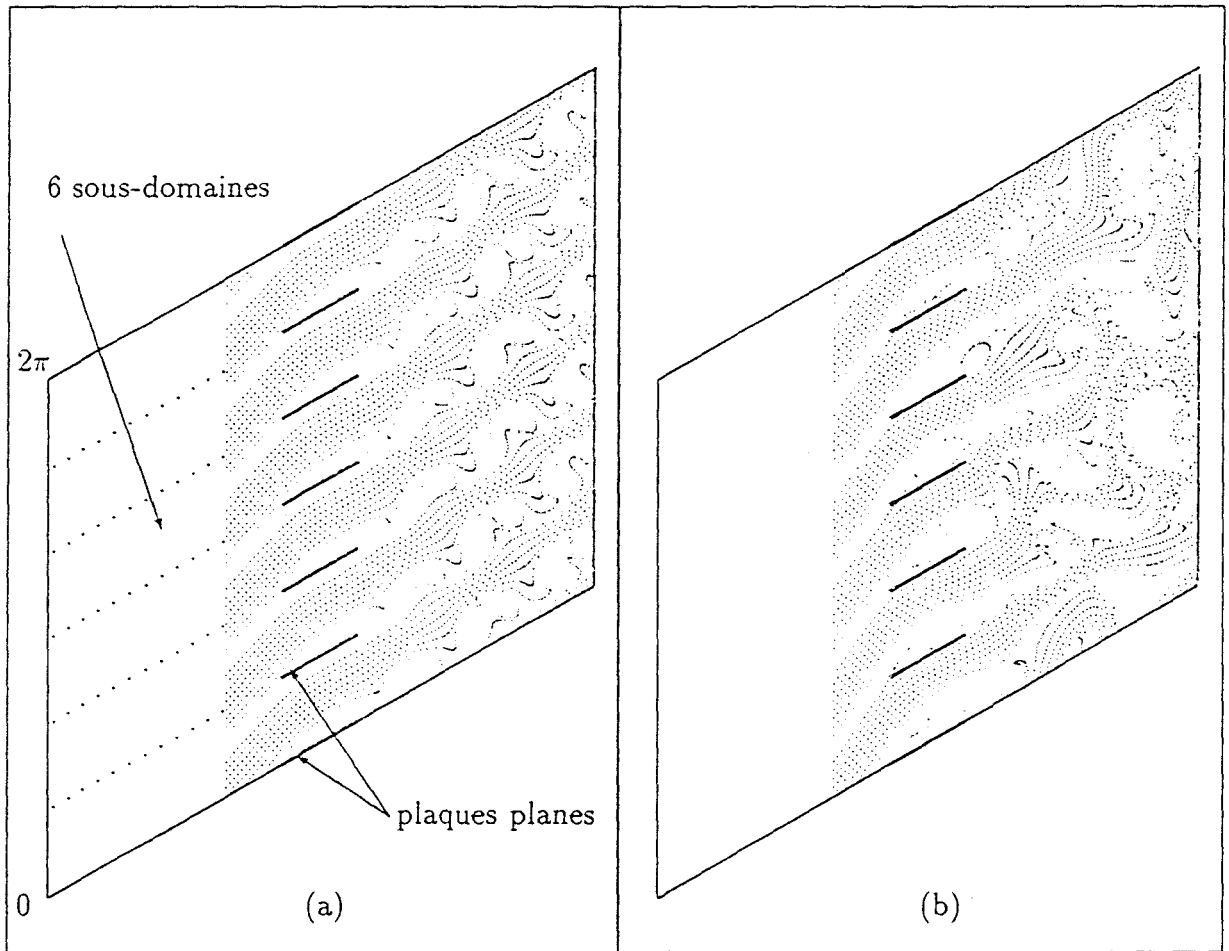


FIG. D.2 - lignes d'émission - Essais 3 et 6 - calage: 30° α : (a) 20.19° (b) 26.30° - Schéma A.L.E

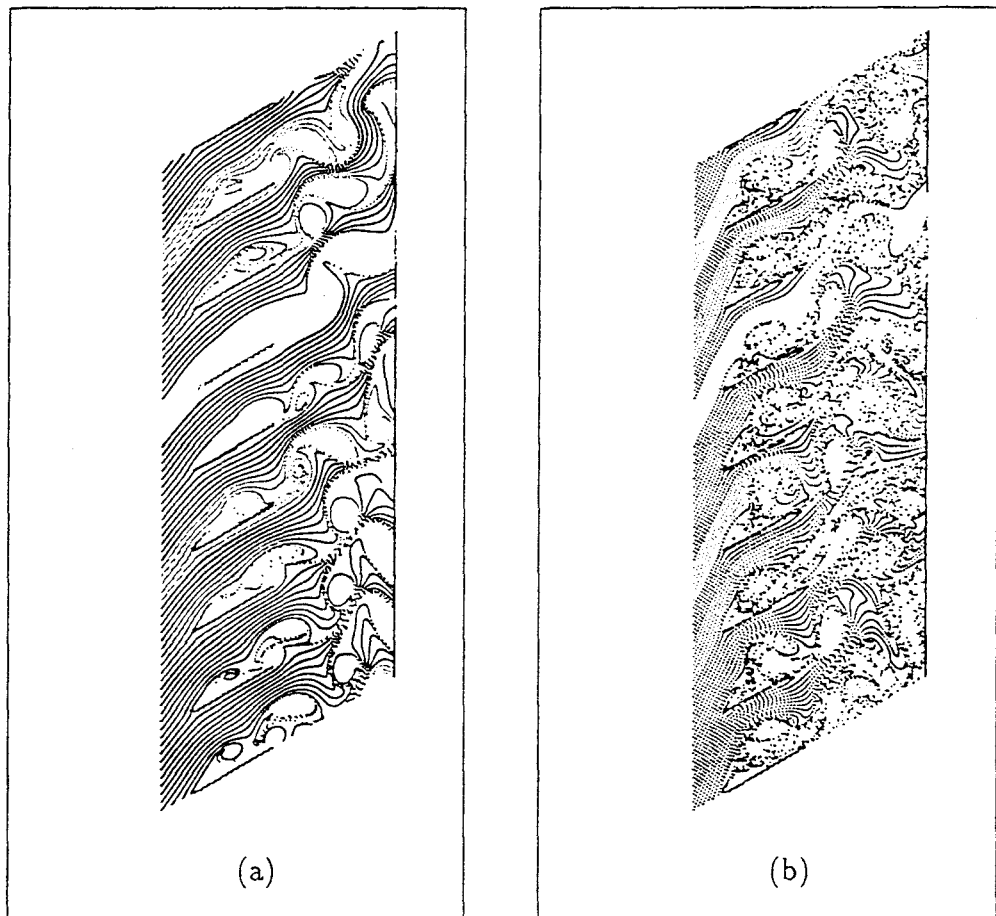


FIG. D.3 - Lignes d'émission - Essais 7 et 8 - inclinaison aubage : 30° α : (a) 26.30° (b) 38.19° - Schéma A.L.E

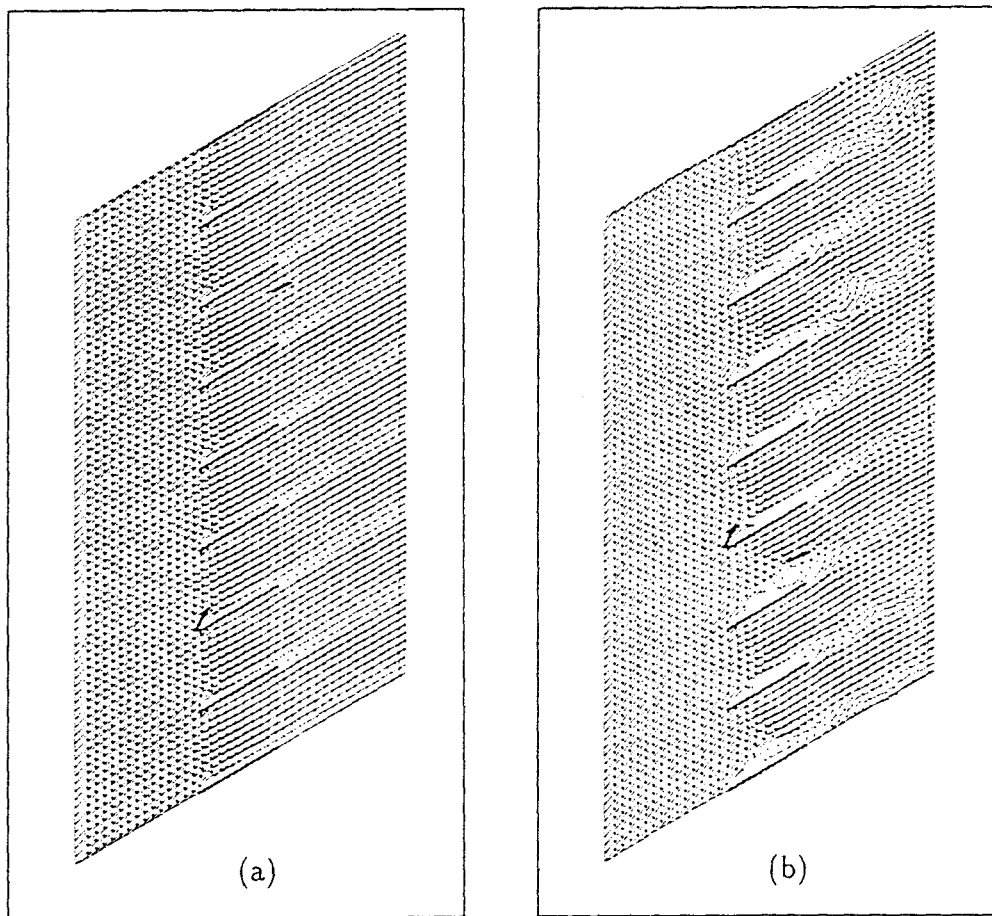


FIG. D.4 - *Champ de vitesses. Essais 1 et 2 - Inclinaison aubage : 30° α : (a) 15° (b) 20.19° - Schéma A.L.E*

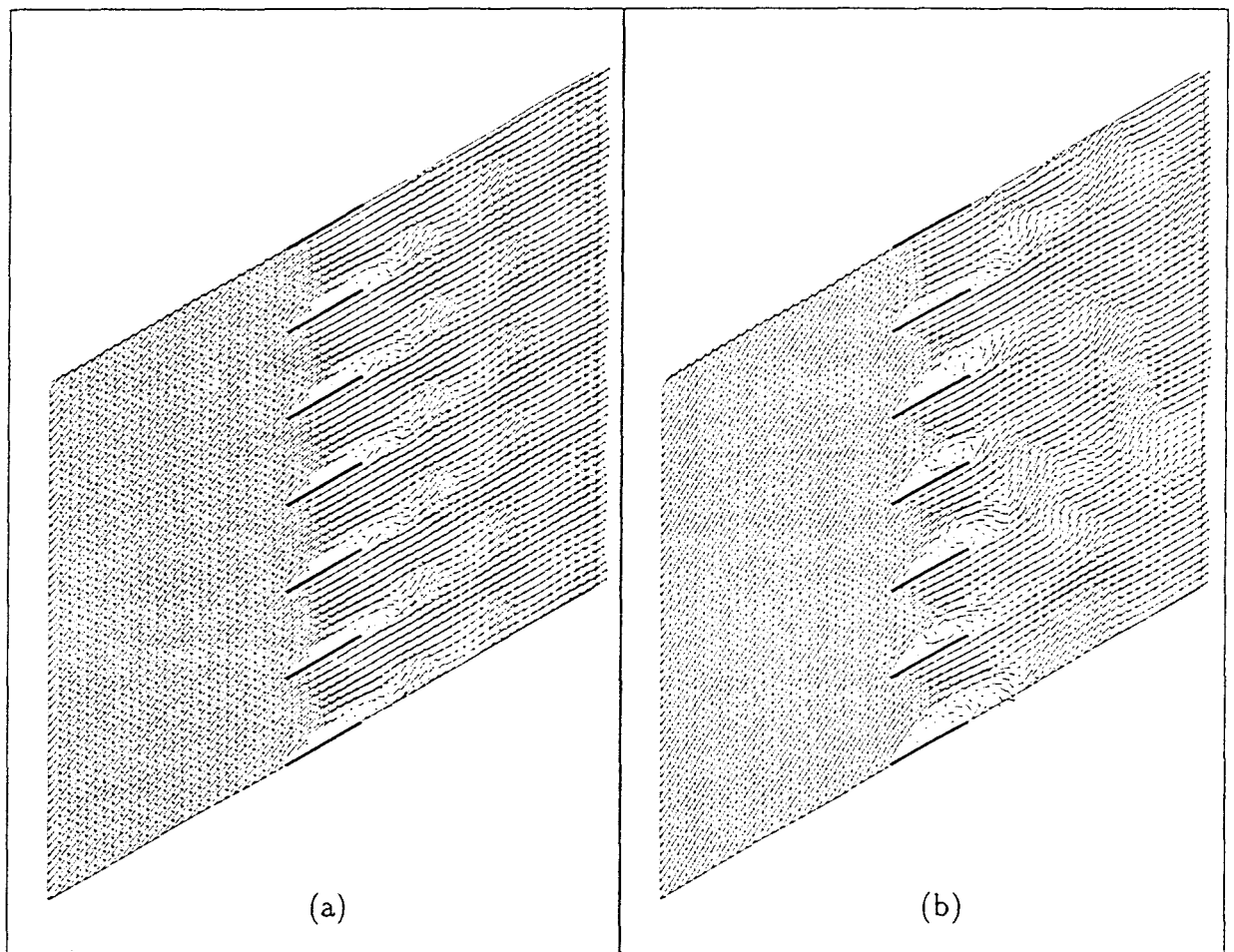


FIG. D.5 - *Champ de vitesses. Essais 3 et 6 - Inclinaison aubage : 30° α : (a) 20.19° (b) 26.30° - Schéma A.L.E*

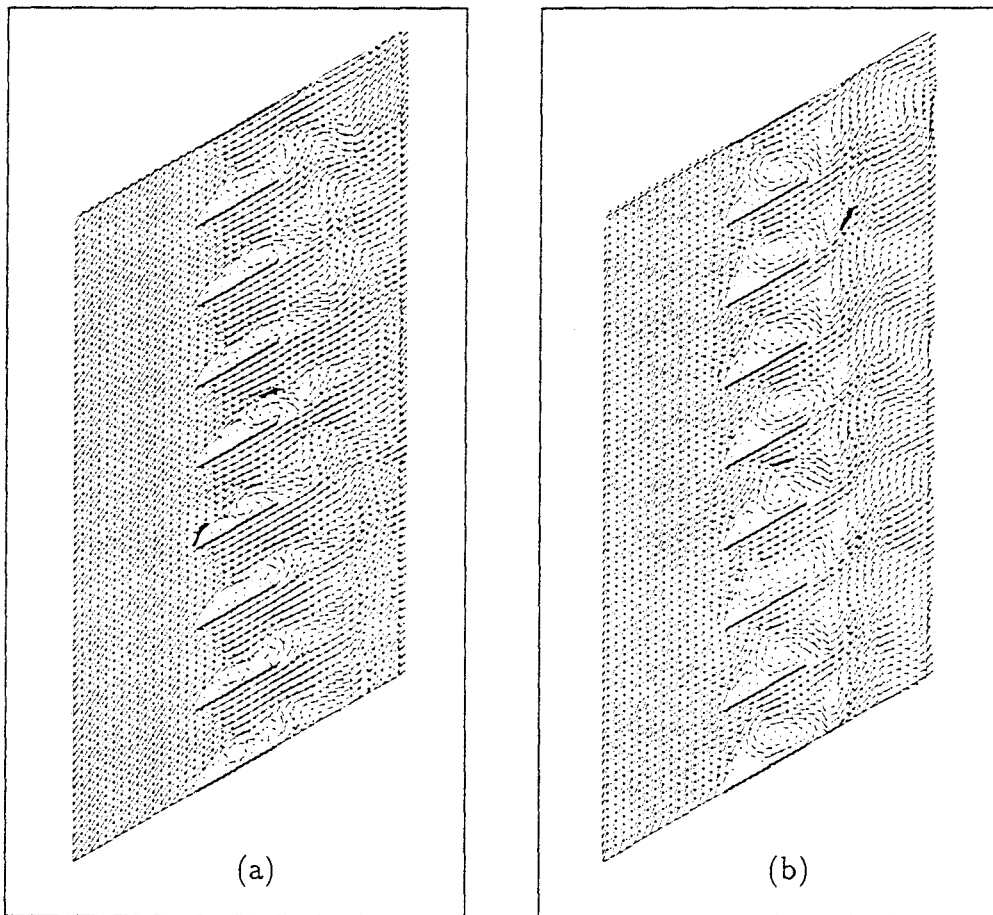


FIG. D.6 - *Champ de vitesses. - Essais 7 et 8 - - inclinaison aubage : 30° α : (a) 26.30°
(b) 38.19° - Schéma A.L.E*

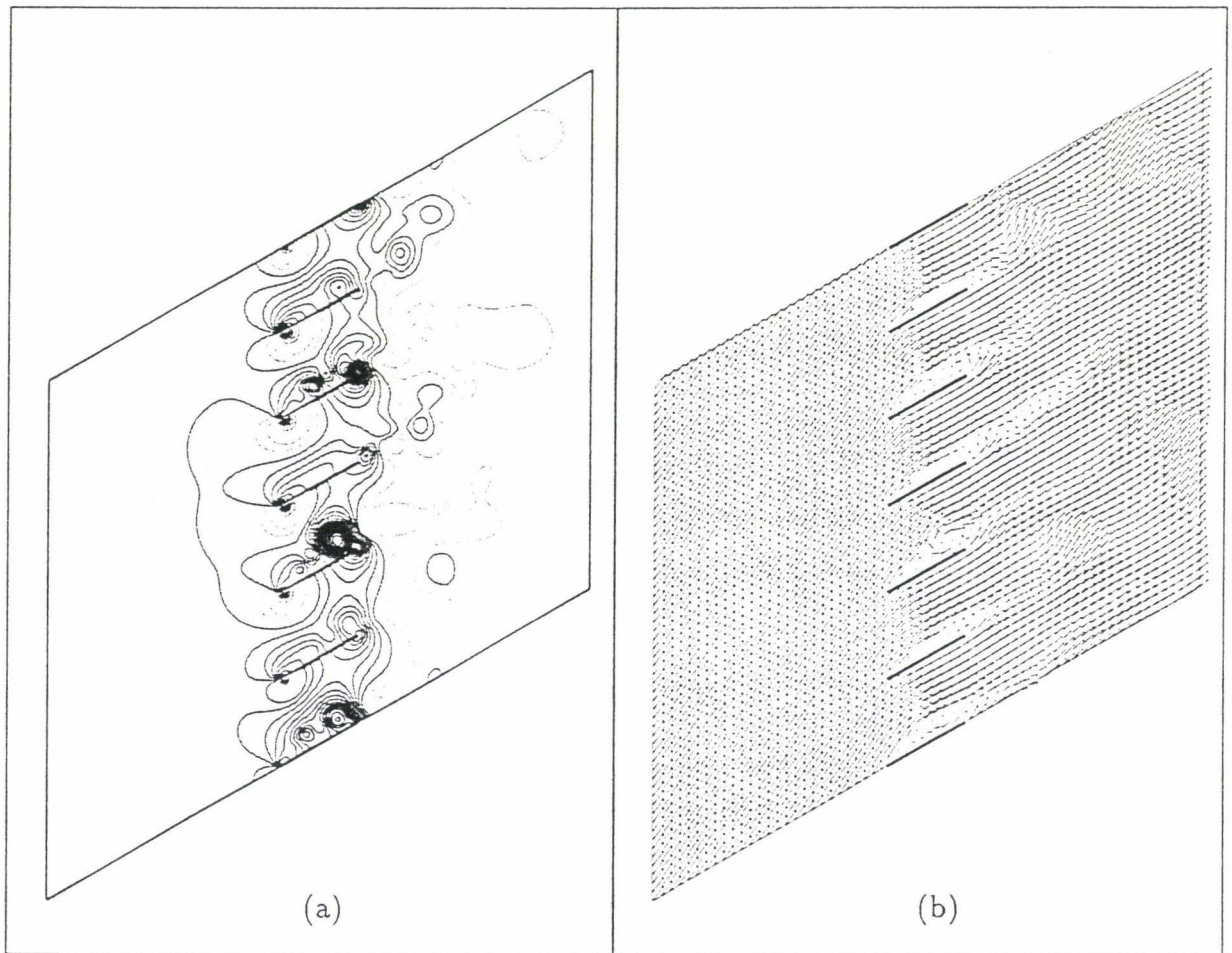


FIG. D.7 - *Champ de vitesse et iso-pression - Essai 4 - Inclinaison aubage : 30° α : 22.43°
- Schéma A.L.E*

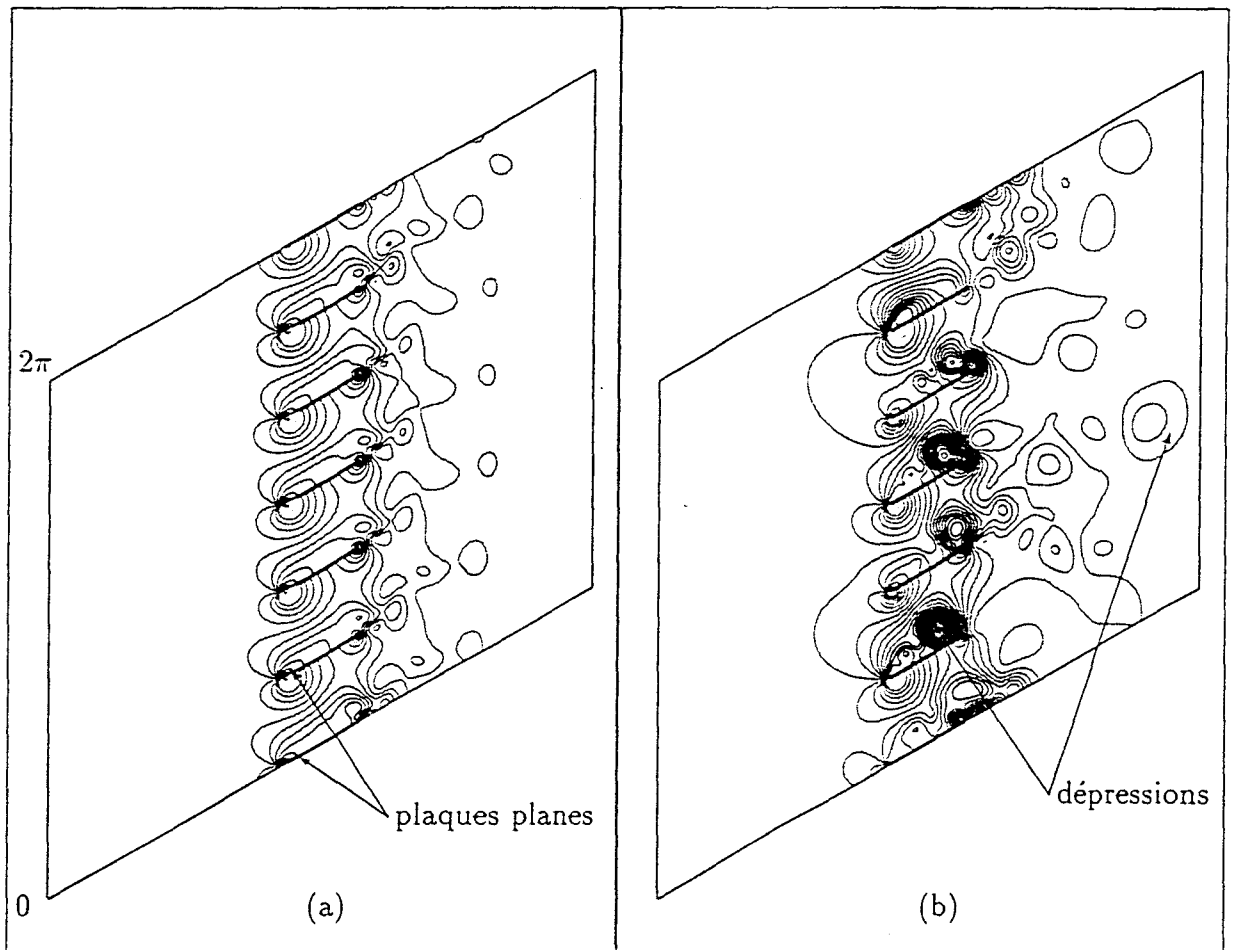


FIG. D.8 - iso-pressions- Essai 3 et 6 - calage: $30^\circ \alpha$: (a) 20.19° (b) 26.30°

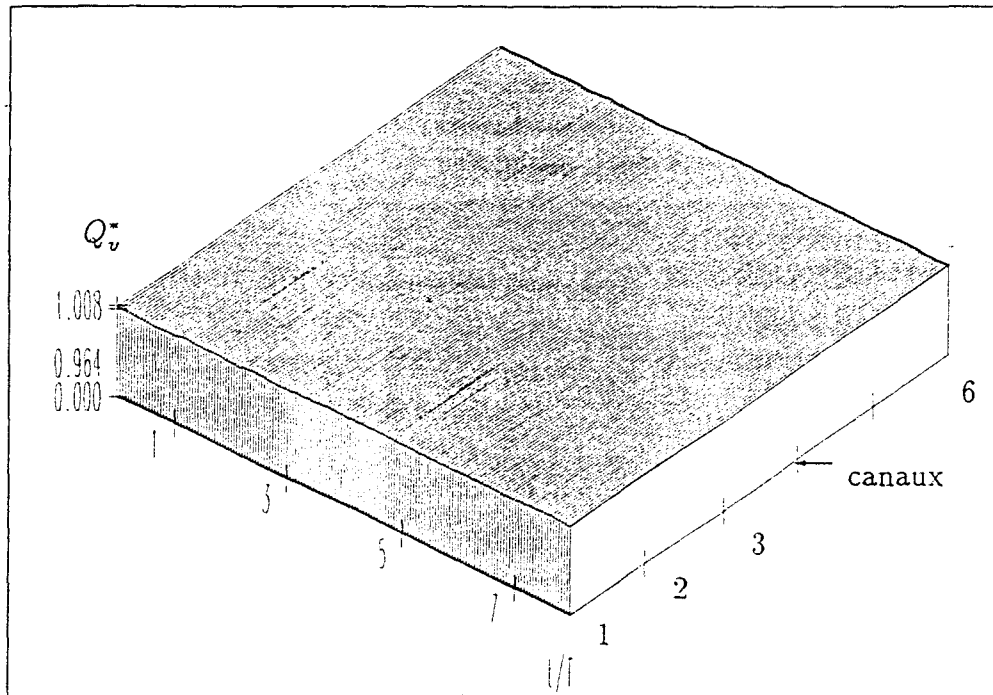


FIG. D.9 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale -
essai 3 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 20,19^\circ$)

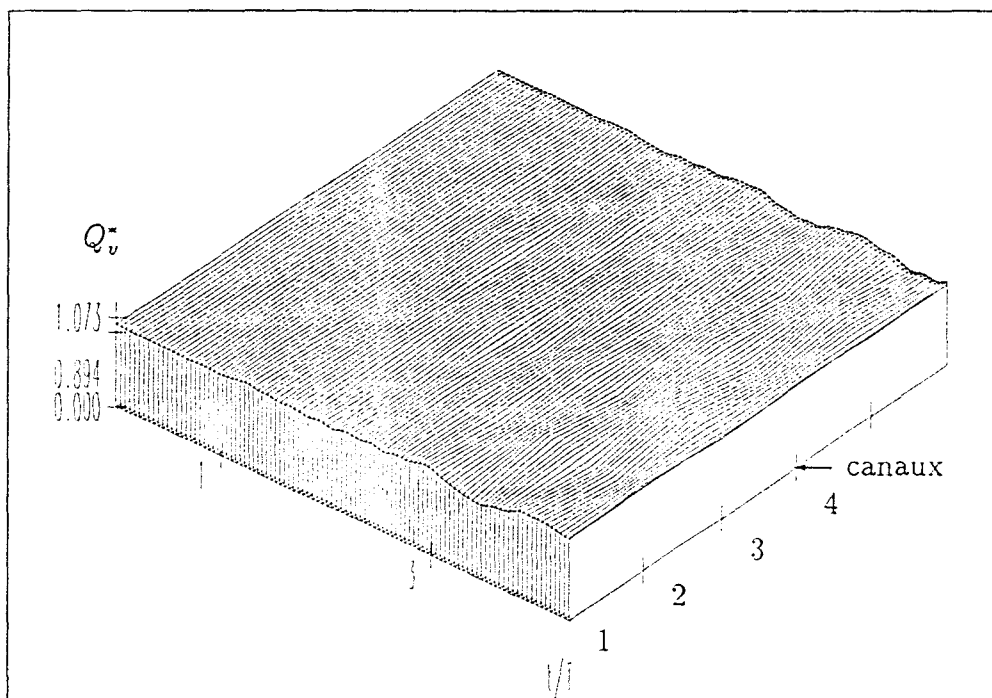


FIG. D.10 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale -
essai 4 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 22,43^\circ$)

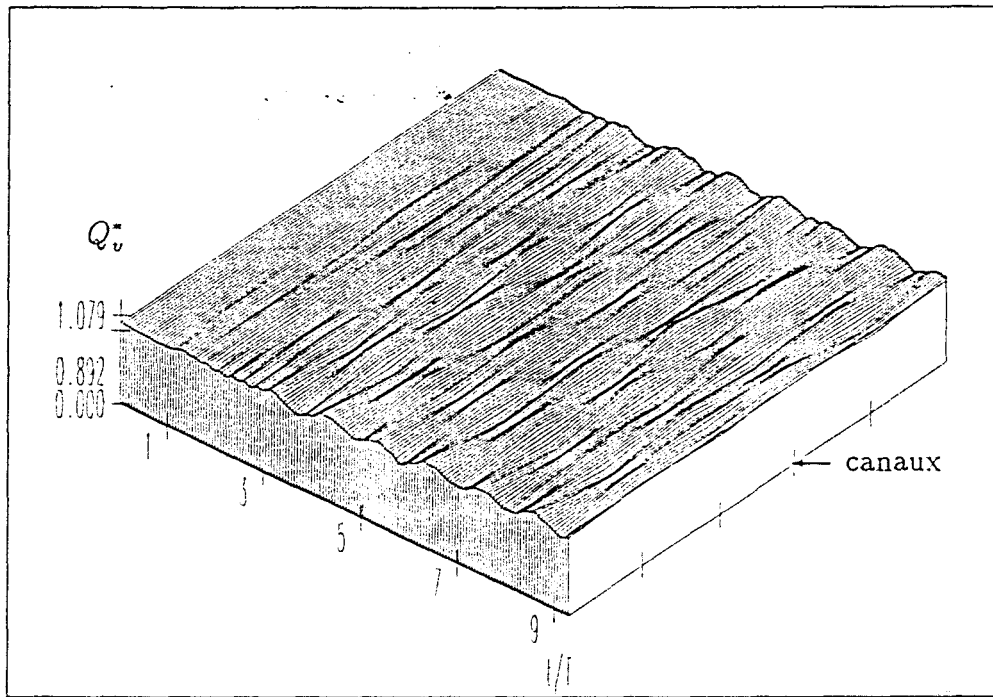


FIG. D.11 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 5 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 24,46^\circ$)

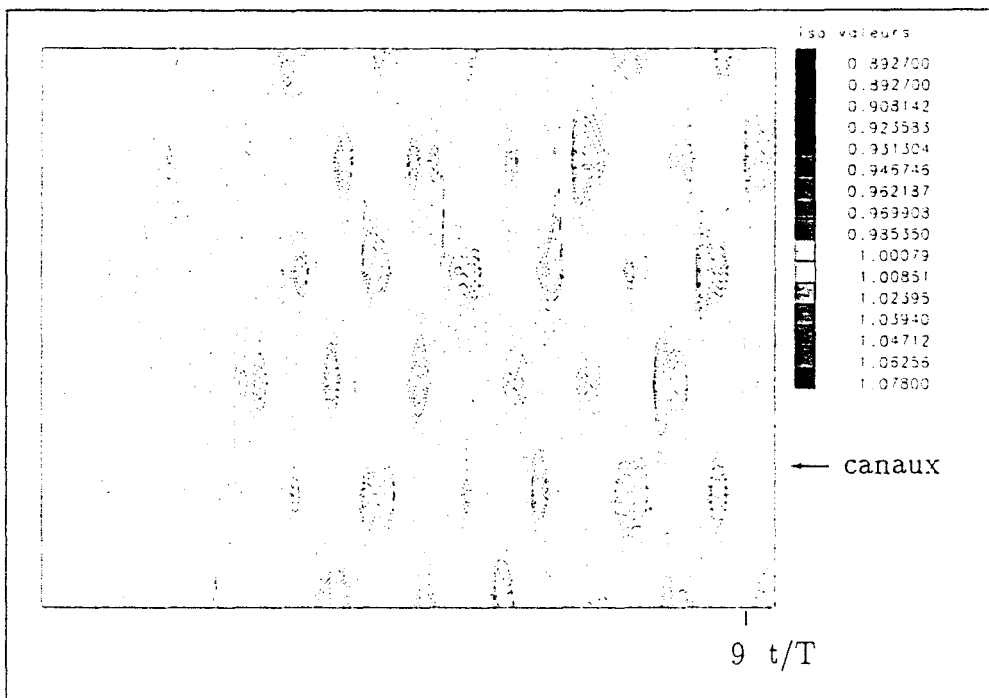


FIG. D.12 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 5 - iso-valeurs - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 24,46^\circ$)

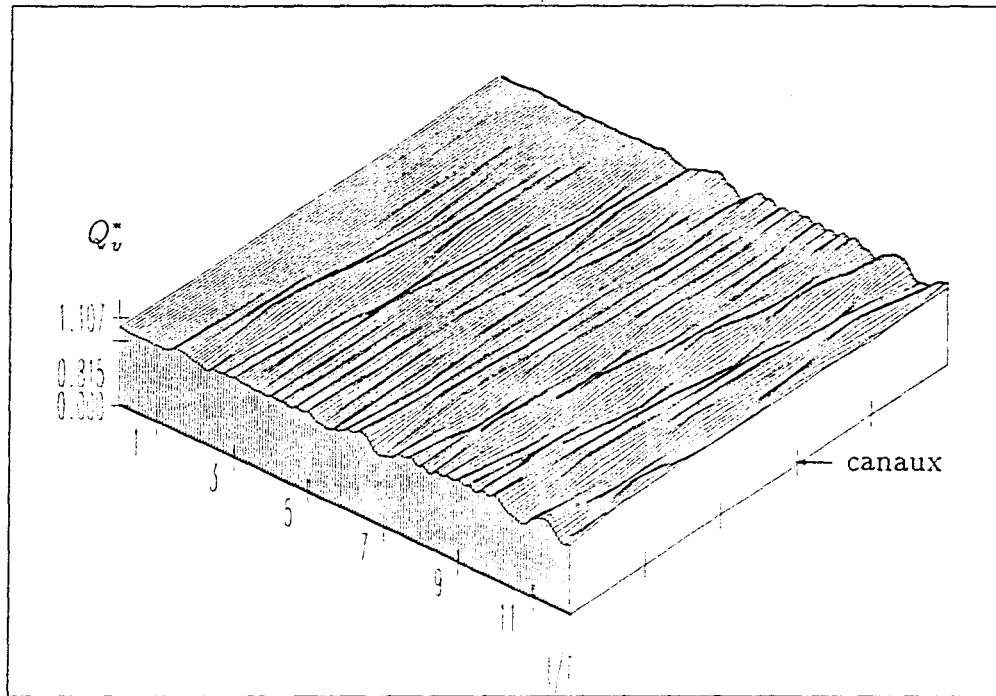


FIG. D.13 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 6 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 26, 30^\circ$)

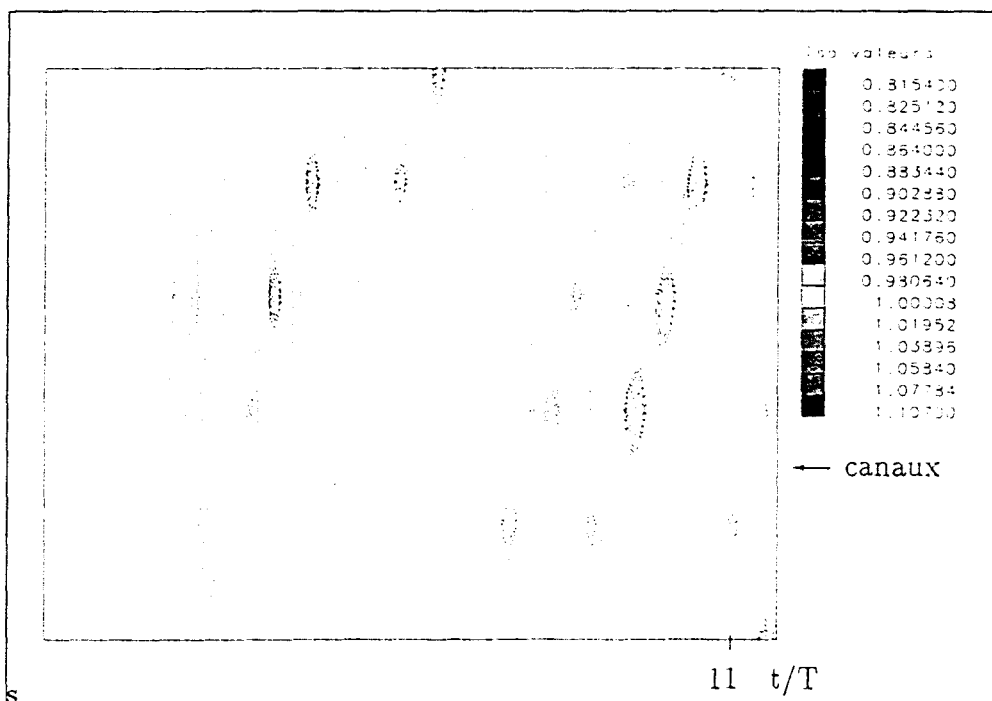


FIG. D.14 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 6 - iso-valeurs - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 26, 30^\circ$)

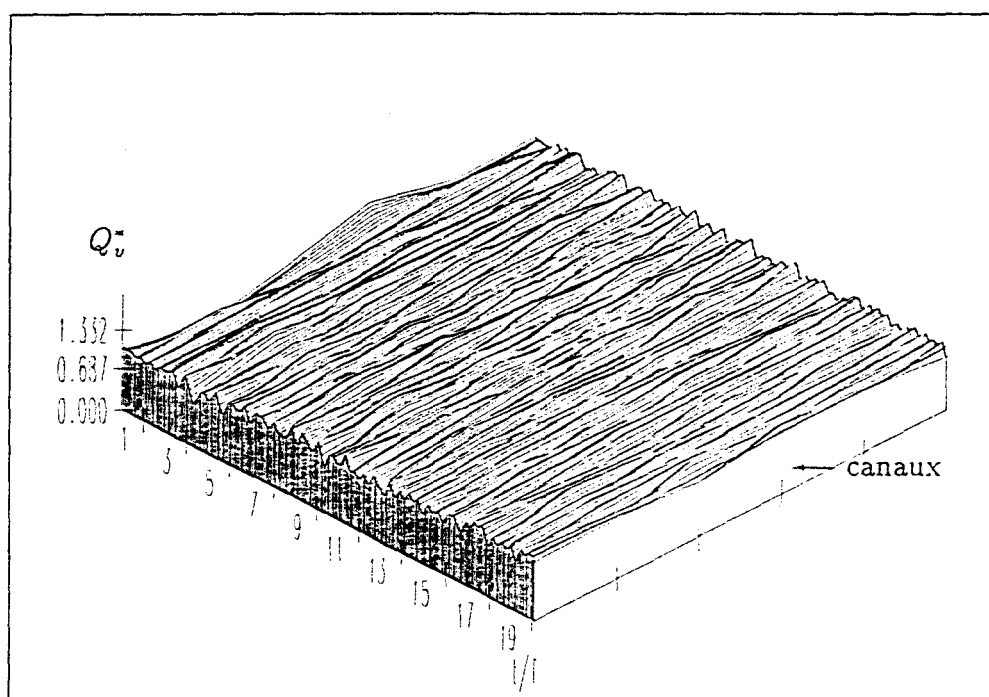


FIG. D.15 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - schéma : PC - essai 9 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$)

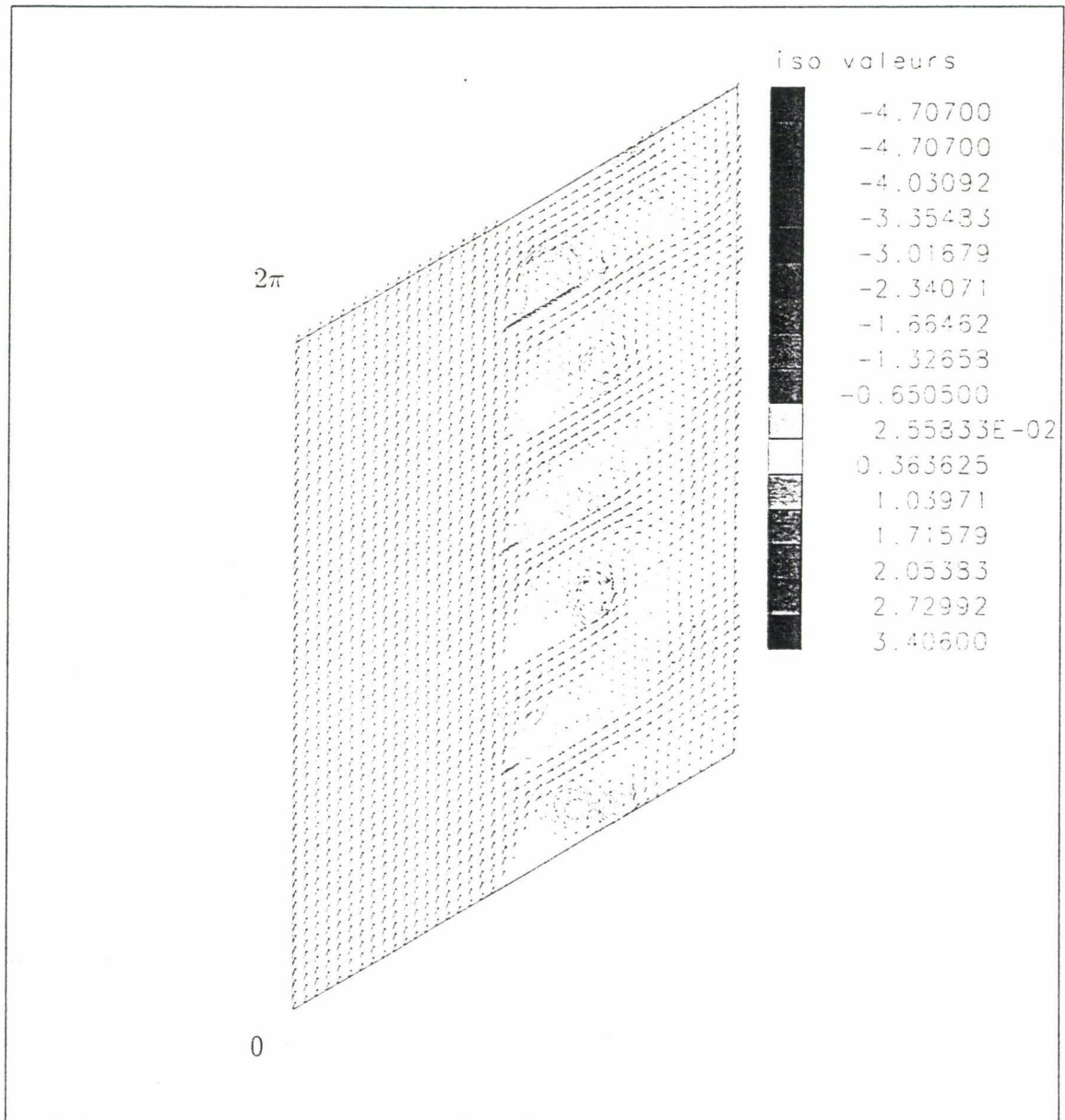


FIG. D.16 - *Champ de vitesse et iso-pression - schéma : P-C - essai 9 - Perturbation : Grille ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$)*

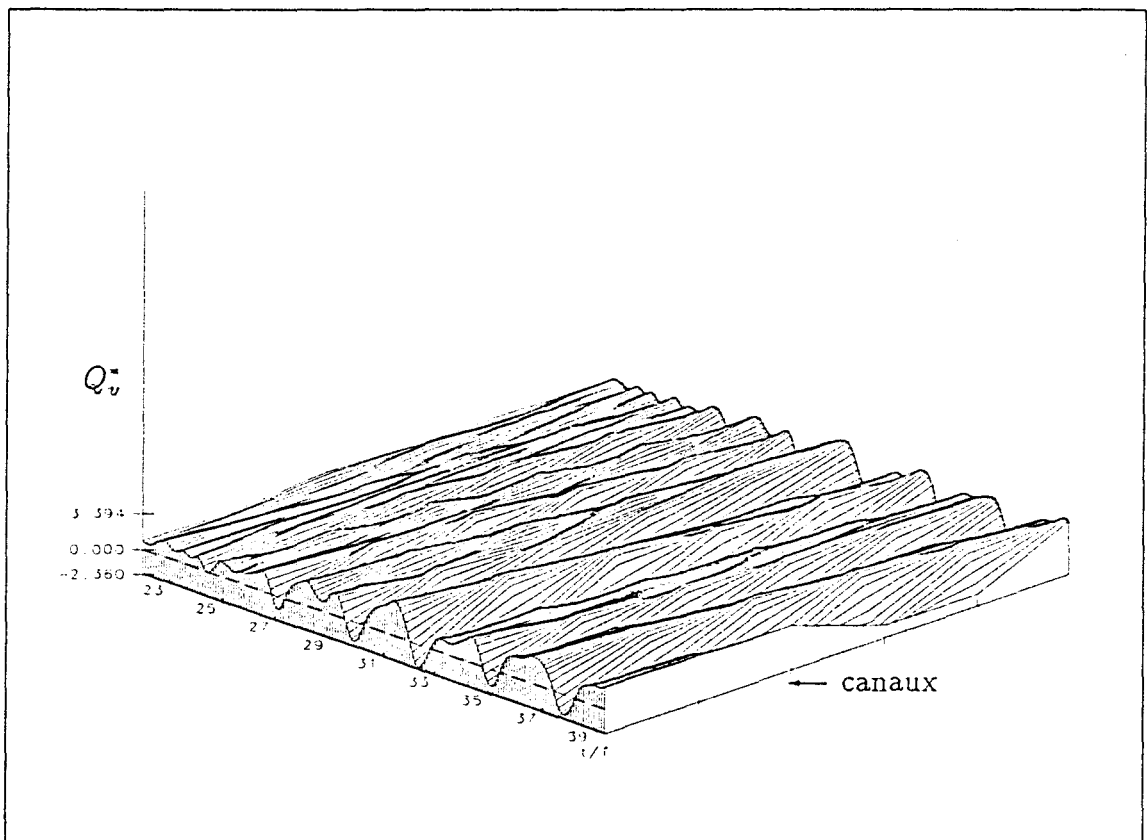


FIG. D.17 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale cas 2d empilé - essai 10 - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 47,13^\circ$)

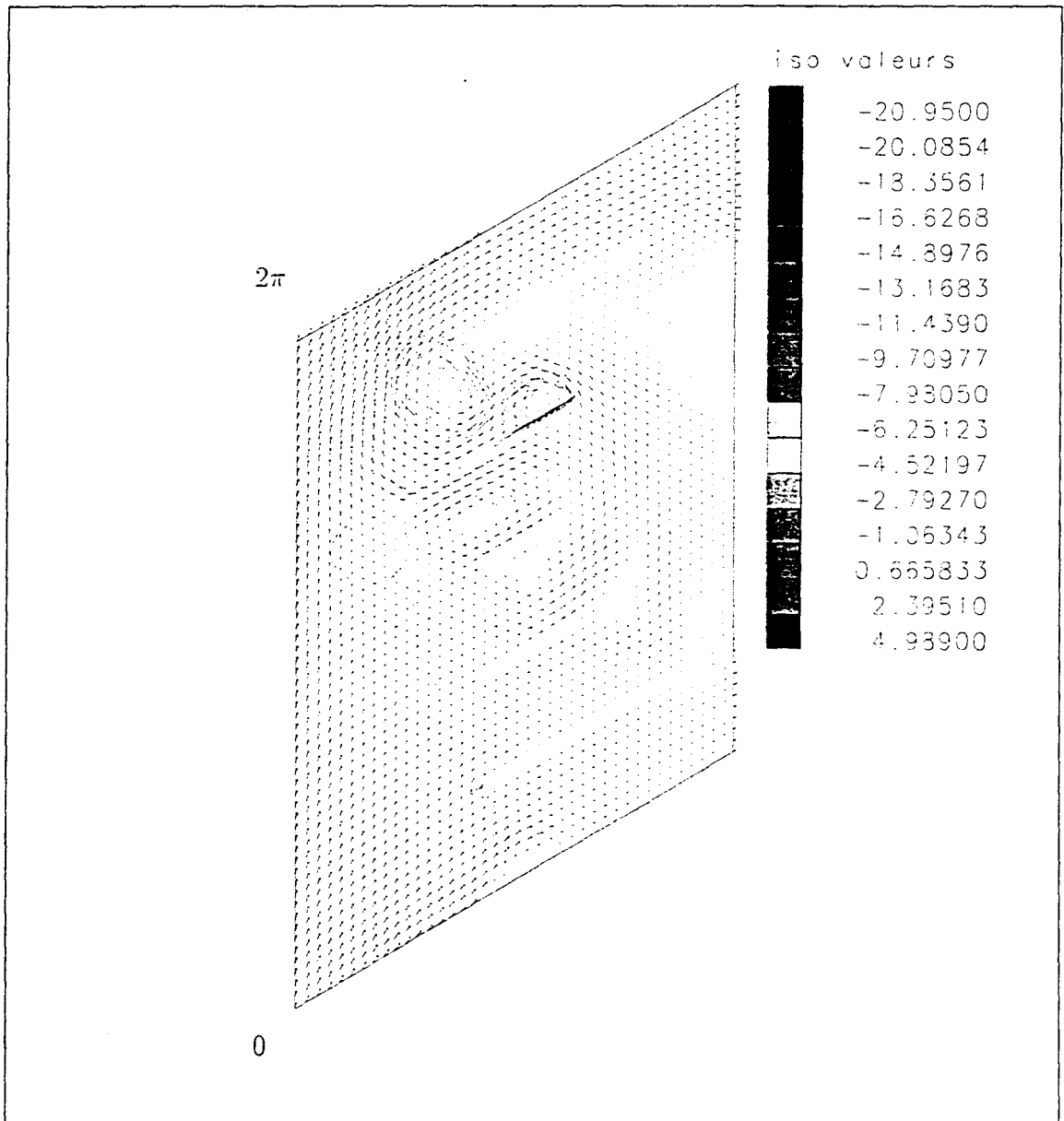


FIG. D.18 - *Champ de vitesse et iso-pression - schéma : P-C - essai 10 - Perturbation : Grille ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 47,73^\circ$)*

Annexe E

CAS TEST 2D B

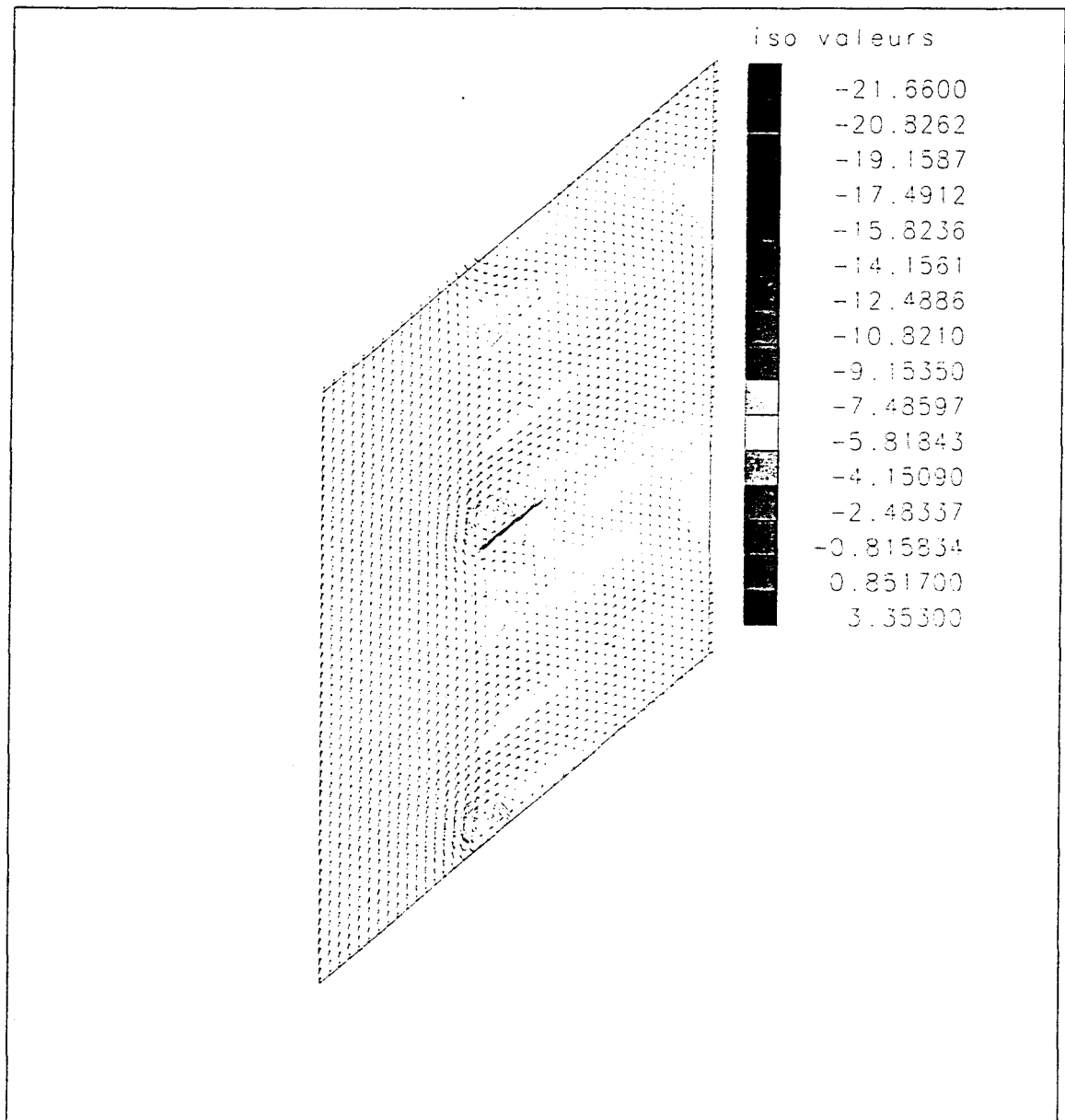


FIG. E.1 - *Champ de vitesse et iso-pression - essai 13 - schéma : P-C ($\lambda = 40^\circ$, $\alpha = 36,09^\circ$)*

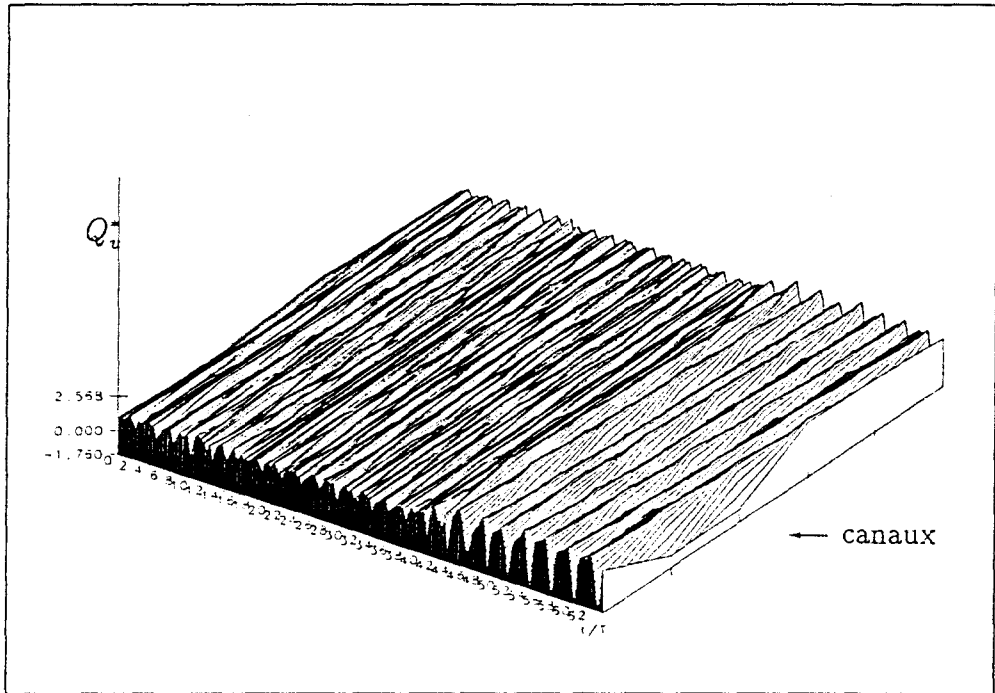


FIG. E.2 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation de grille -
essai 12 - schéma: P-C- ($\lambda = 40^\circ$, $\alpha = 35,75^\circ$)

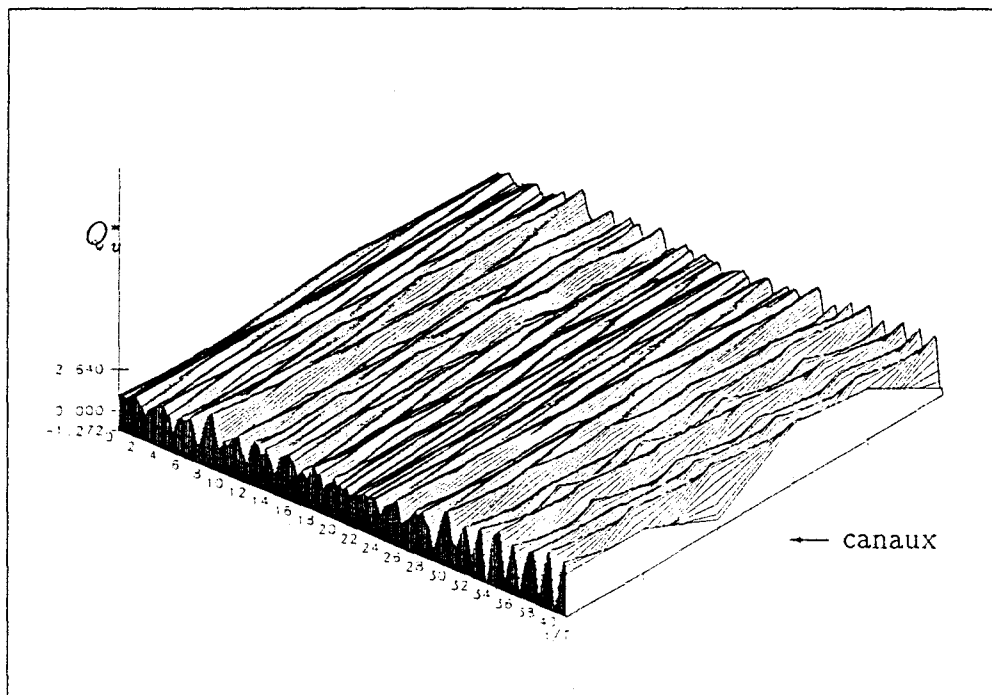


FIG. E.3 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation de grille -
essai 13 - schéma: P-C- ($\lambda = 40^\circ$, $\alpha = 36,09^\circ$)

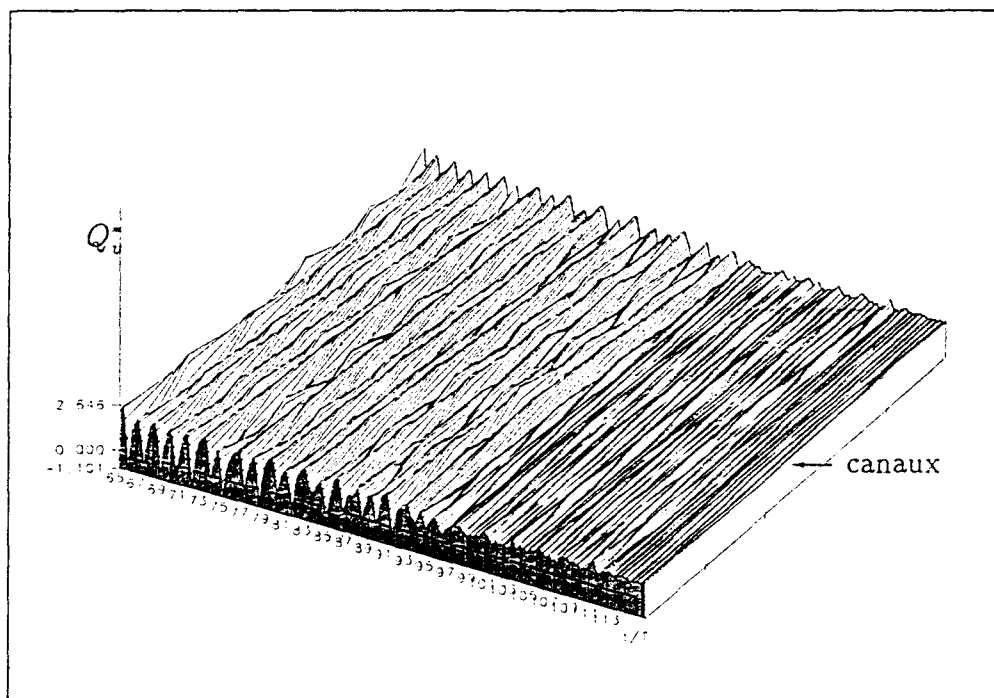


FIG. E.4 - Evolution du débit en fonction du temps après diminution de l'incidence.
Hystérésis.- essai 11 - schéma : P-C- $\lambda = 40^\circ$, $\alpha = 33,78^\circ$)

Annexe F

CAS TEST 2D C

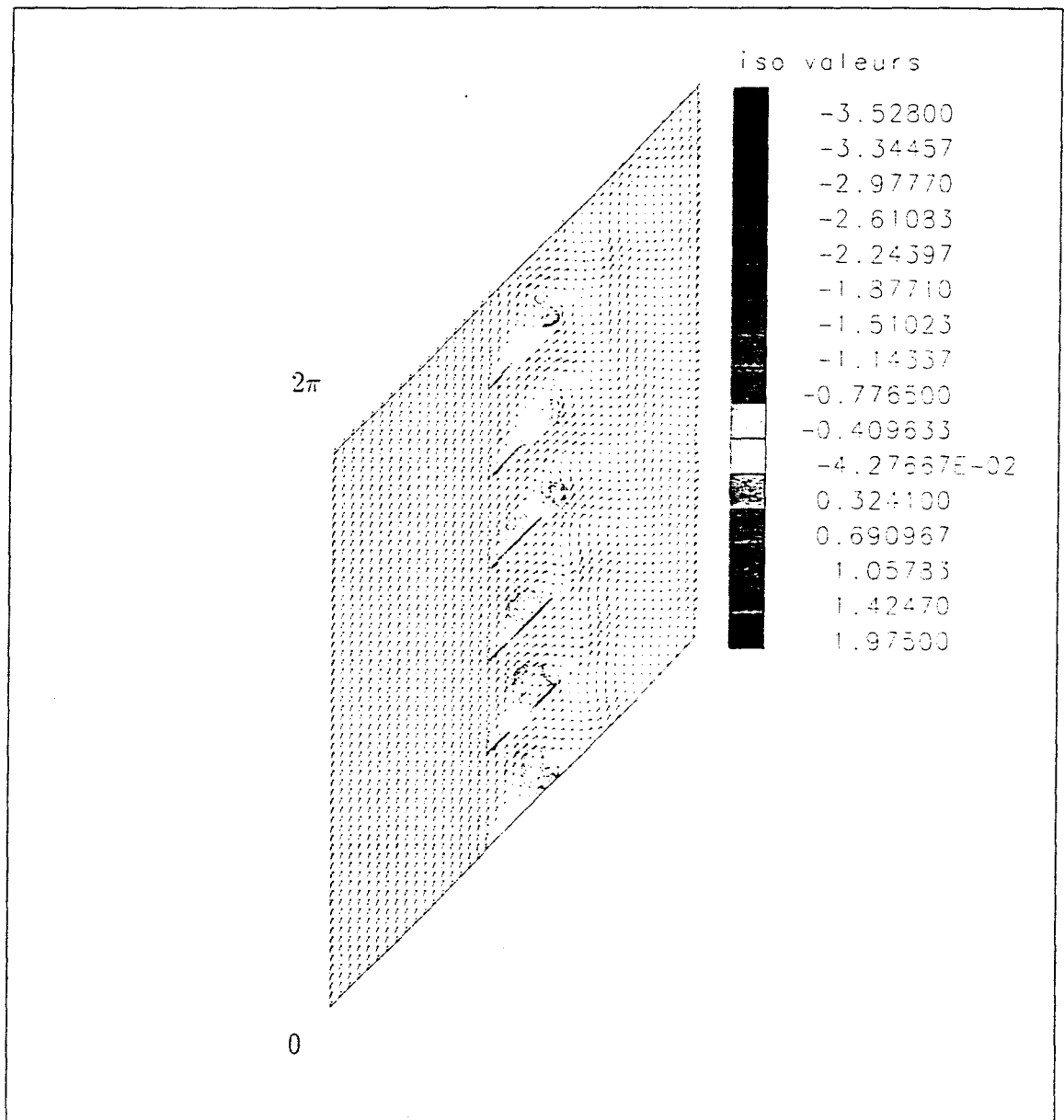


FIG. F.1 - Champ de vitesse et iso-pression - essai 14 schéma : P-C - Perturbation : Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 25^\circ$)

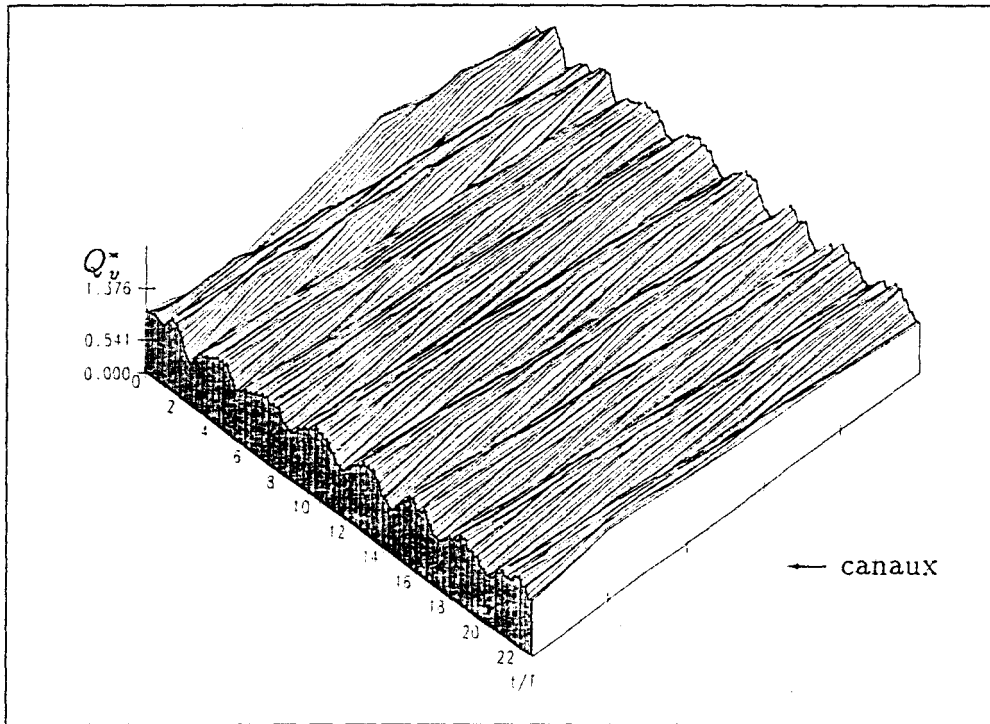


FIG. F.2 - Evolution du débit au cours du temps - essai 14 - schéma : P-C - Perturbation : Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 25^\circ$)

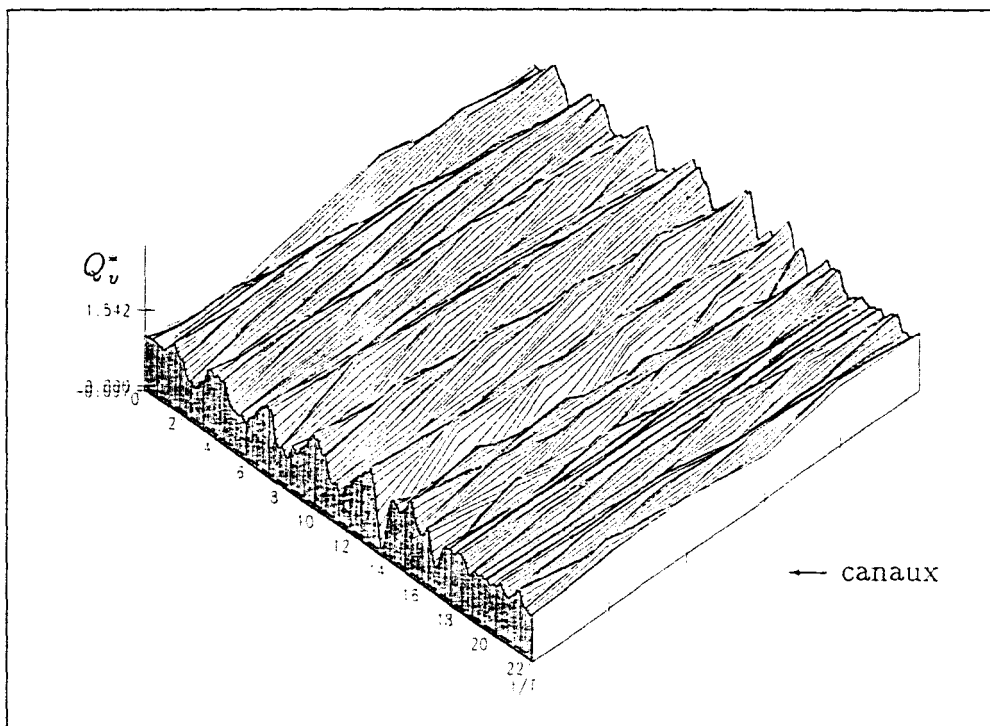


FIG. F.3 - Evolution du débit au cours du temps - essai 15 - schéma : P-C - Perturbation : Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 27^\circ$)

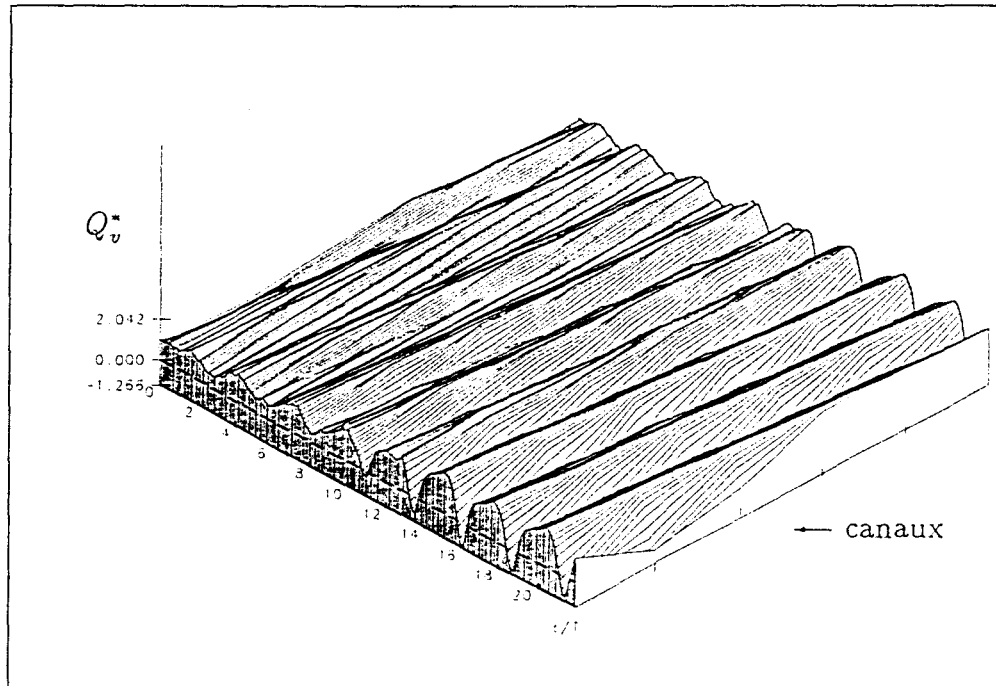


FIG. F.4 - Evolution du débit au cours du temps - essai 16 -schéma : P-C - Perturbation : Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 28^\circ$)

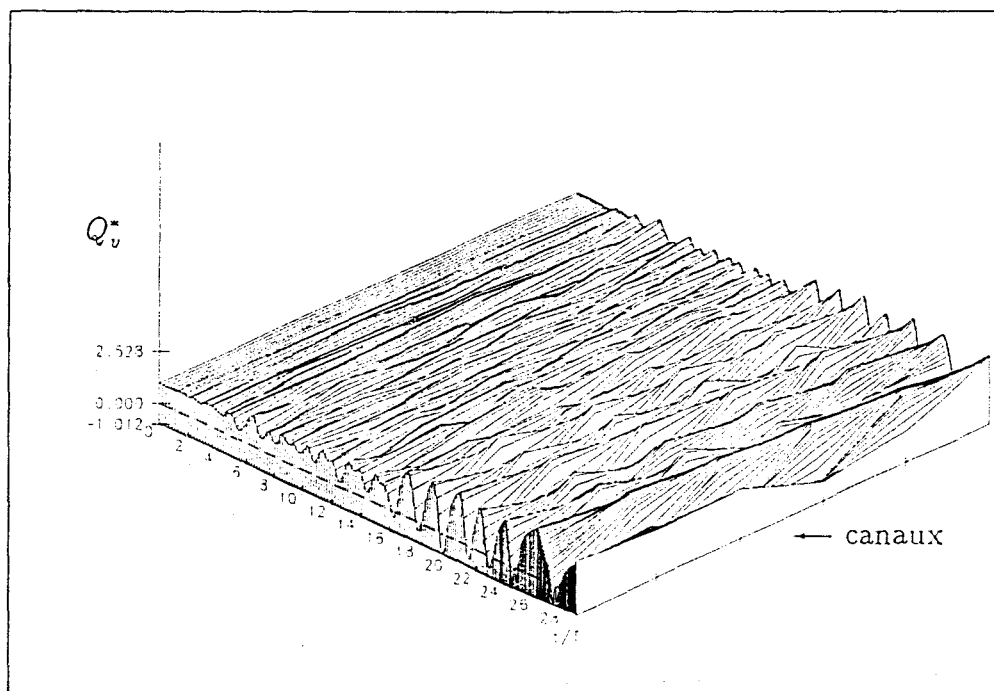


FIG. F.5 - Evolution du débit au cours du temps - essai 17 - schéma : ALE - Perturbation : Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

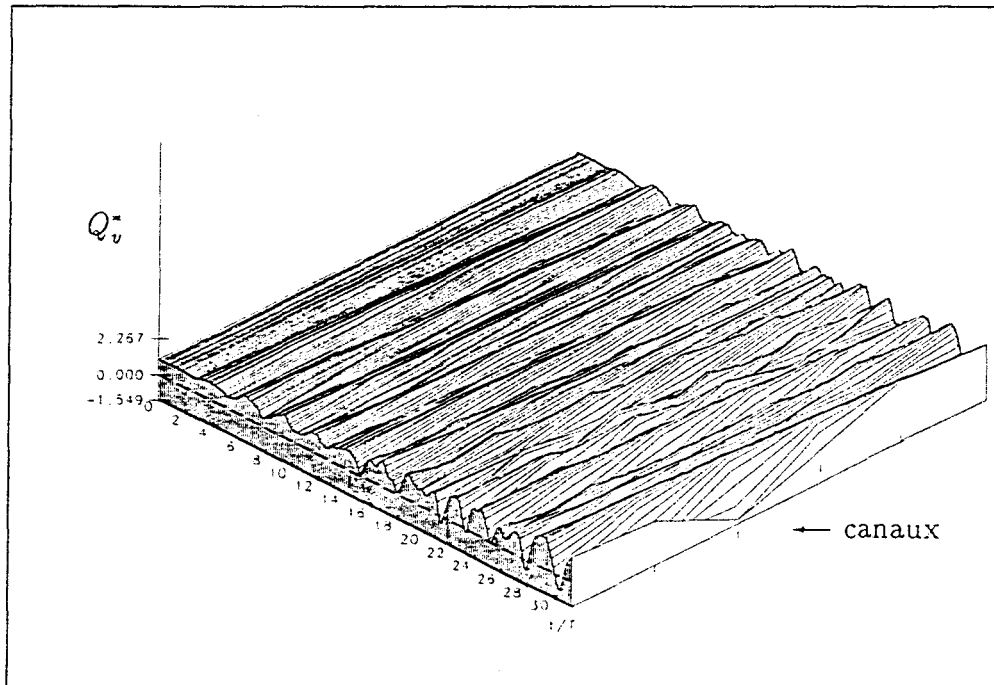


FIG. F.6 - Evolution du débit au cours du temps - essai 18 - schéma : P-C - Perturbation : Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) - Phase d'établissement.

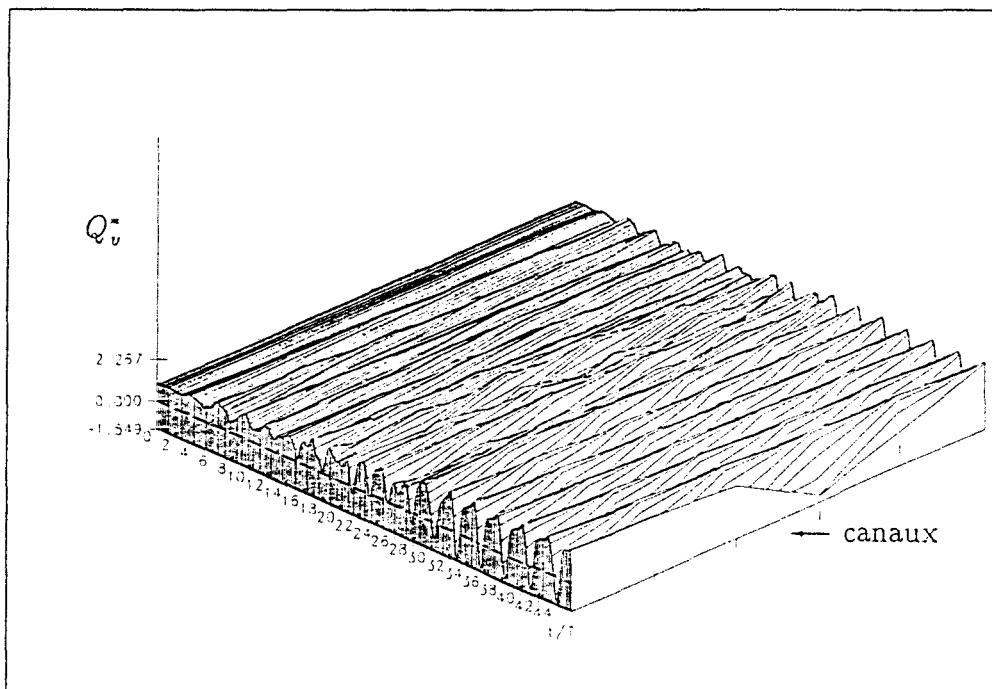


FIG. F.7 - Evolution du débit au cours du temps - essai 18 - schéma : P-C - Perturbation : Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$) - Historique complet jusqu'au décrochage établi.

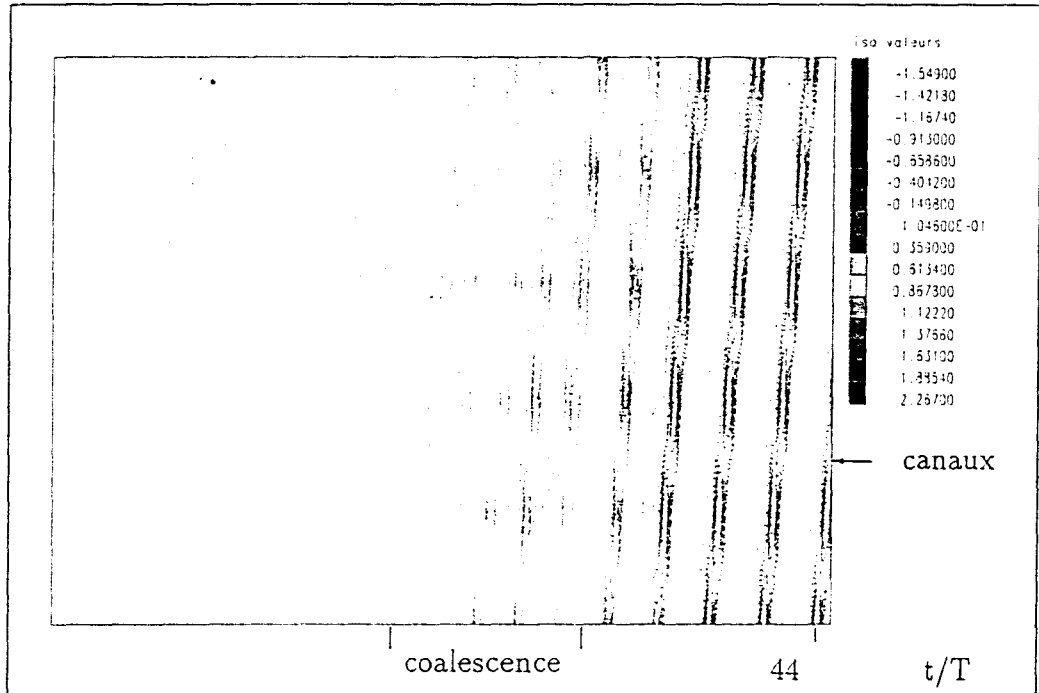


FIG. F.8 - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - essai 18 - iso-valeurs - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

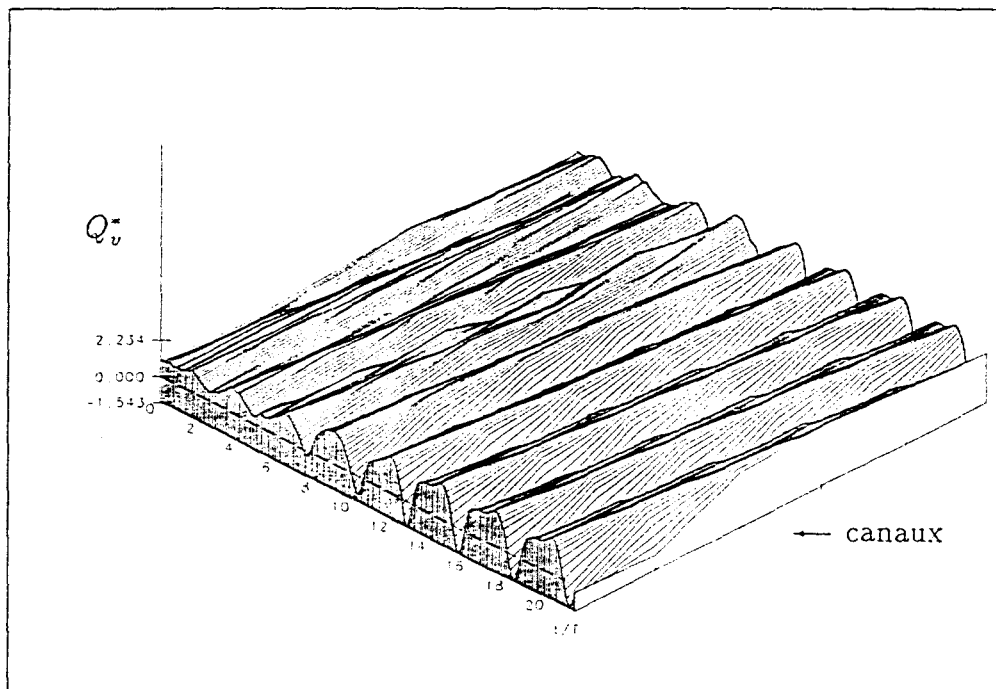


FIG. F.9 - Evolution du débit au cours du temps - essai 19 - schéma : P-C Perturbation : Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

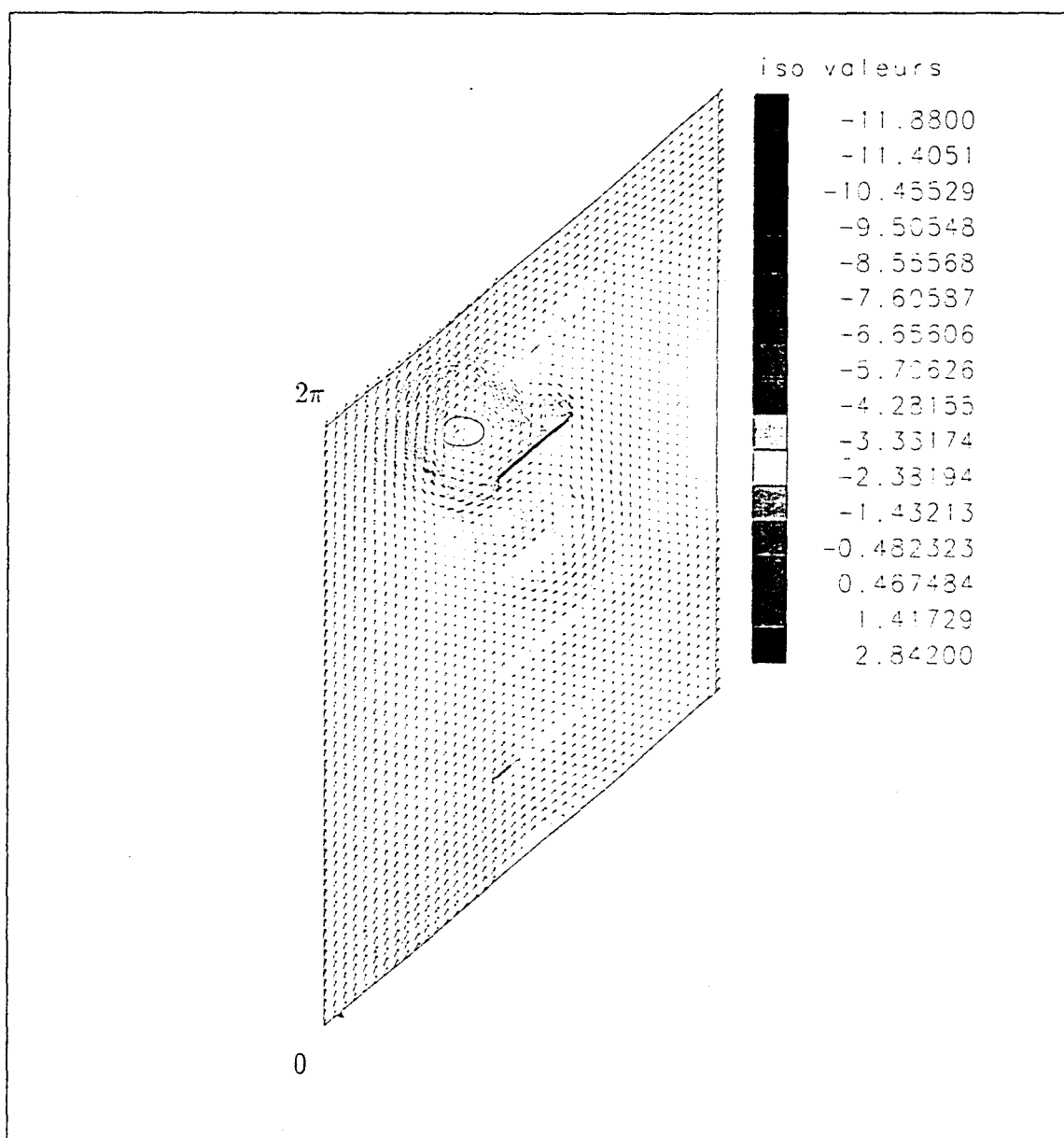


FIG. F.10 - *Champ de vitesse et iso-pression - essai 18 - schéma : P-C - Perturbation : Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)*

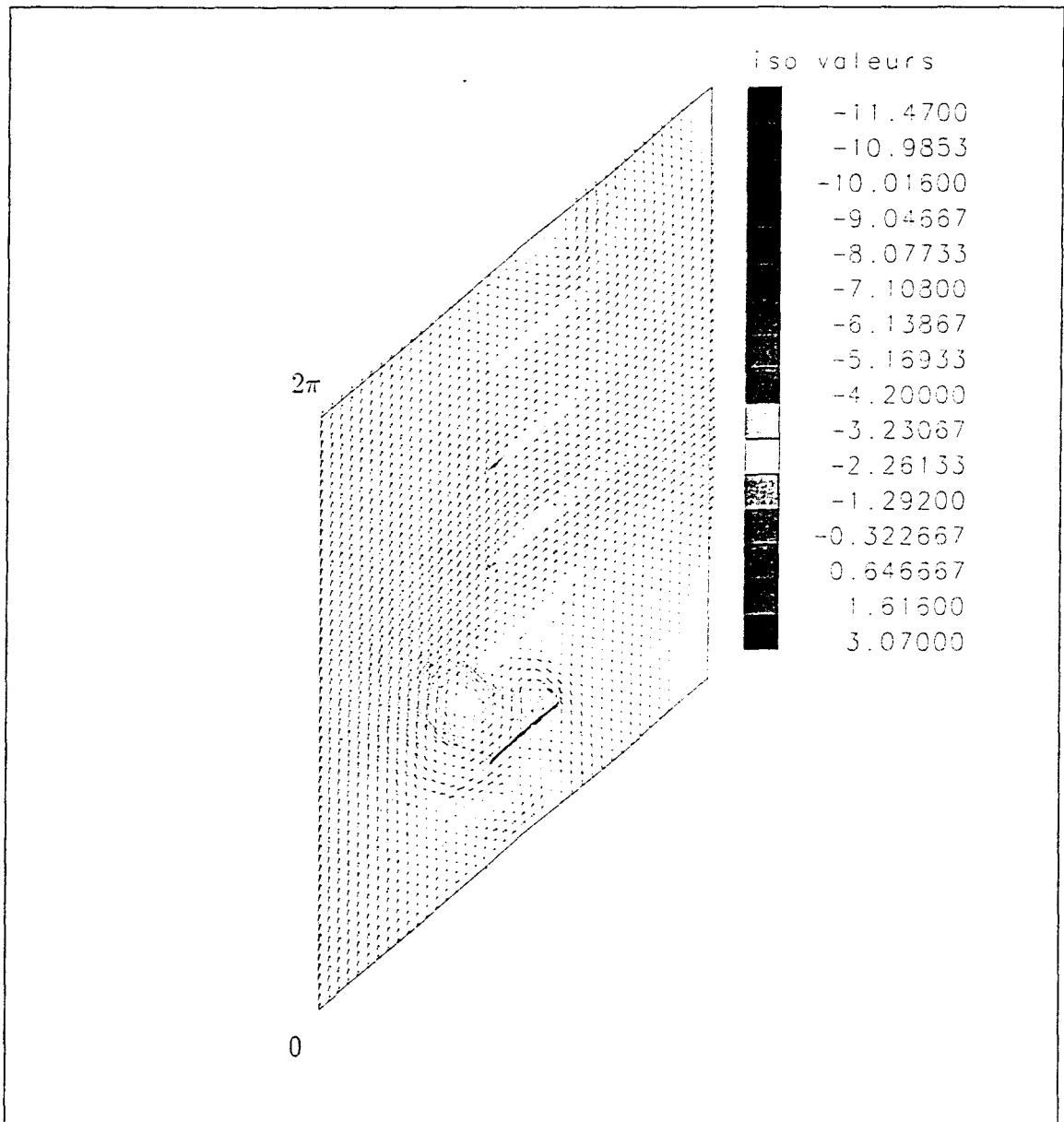


FIG. F.11 - *Champ de vitesse et iso-pression - essai 19 - schéma : P-C - Perturbation : Grille ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)*

Annexe G

CAS TEST 2D D

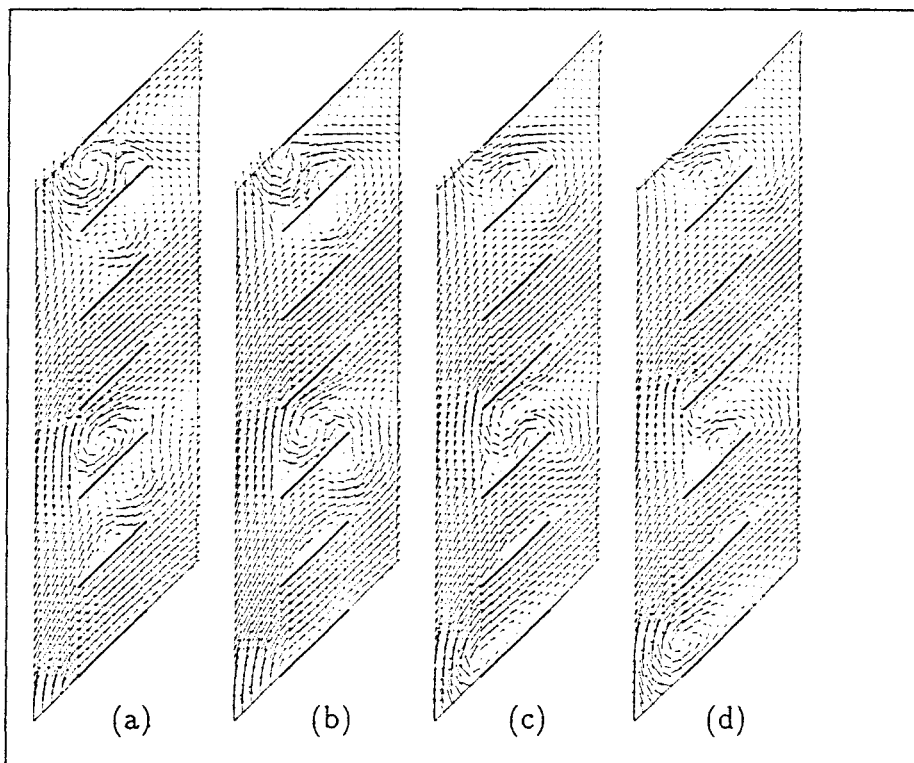


FIG. G.1 - (a) évolution du champ de vitesse - essai 17 - schéma : ALE (2 cellules en rotation) ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ (1 pts sur 4 sont représentés))

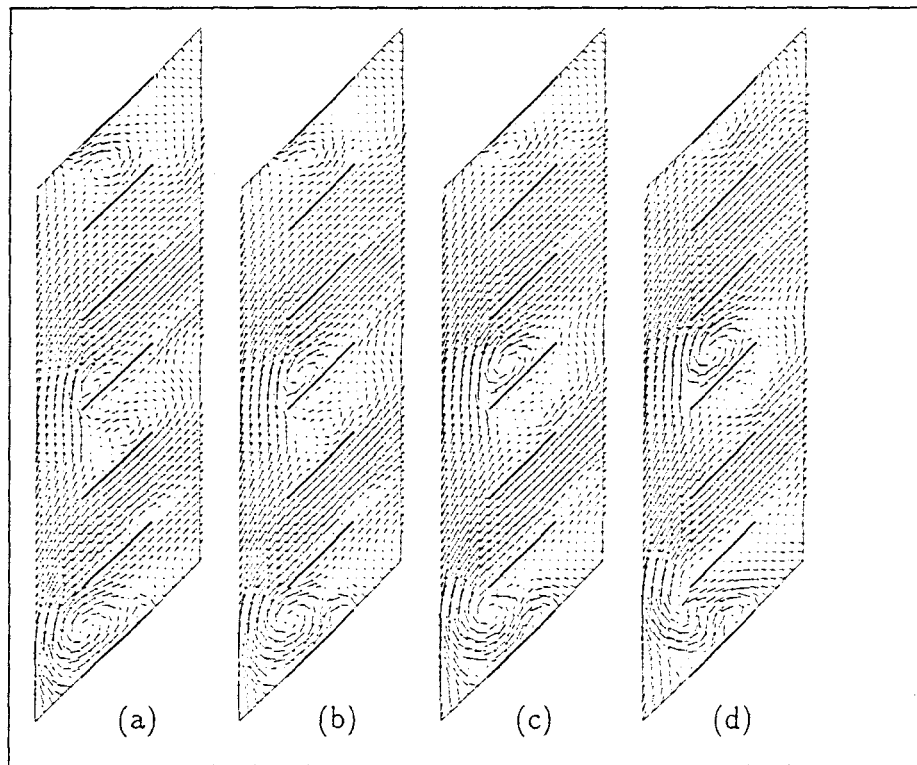


FIG. G.2 - (b) évolution du champ de vitesse - essai 17 - schéma : ALE - (2 cellules en rotation) ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ (1 pts sur 4 sont représentés))

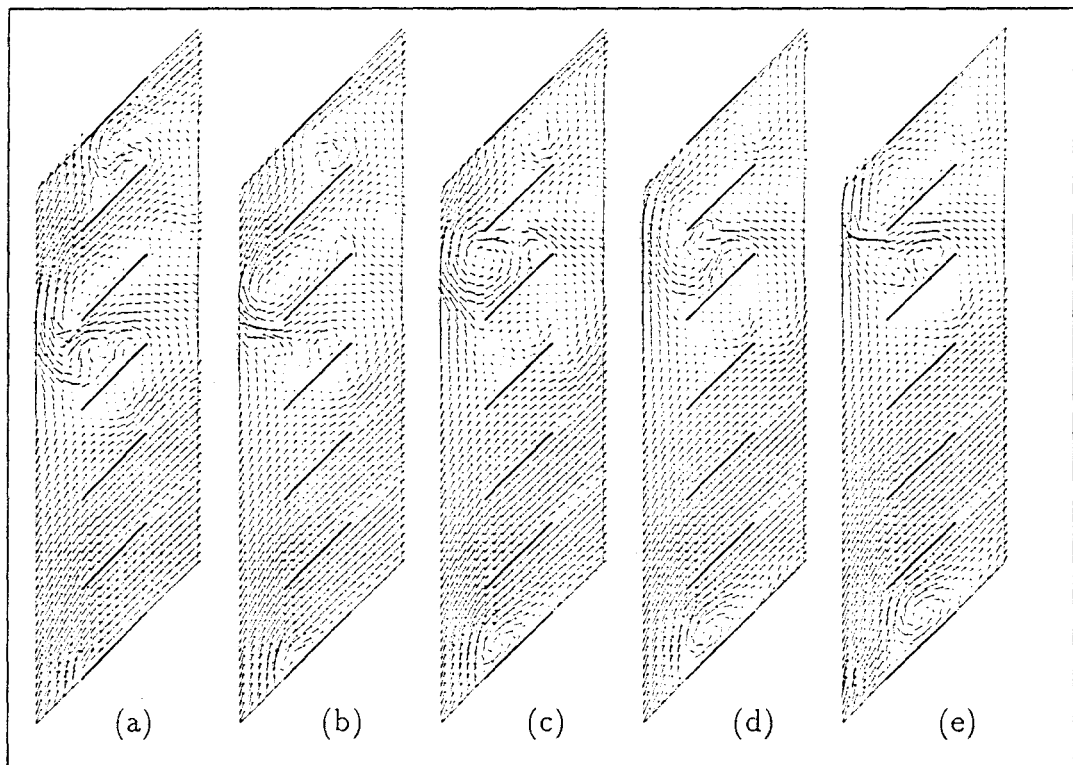


FIG. G.3 - (a) coalescence de deux cellules.- essai 17 - schéma : ALE ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ (1 pts sur 4 sont représentés))

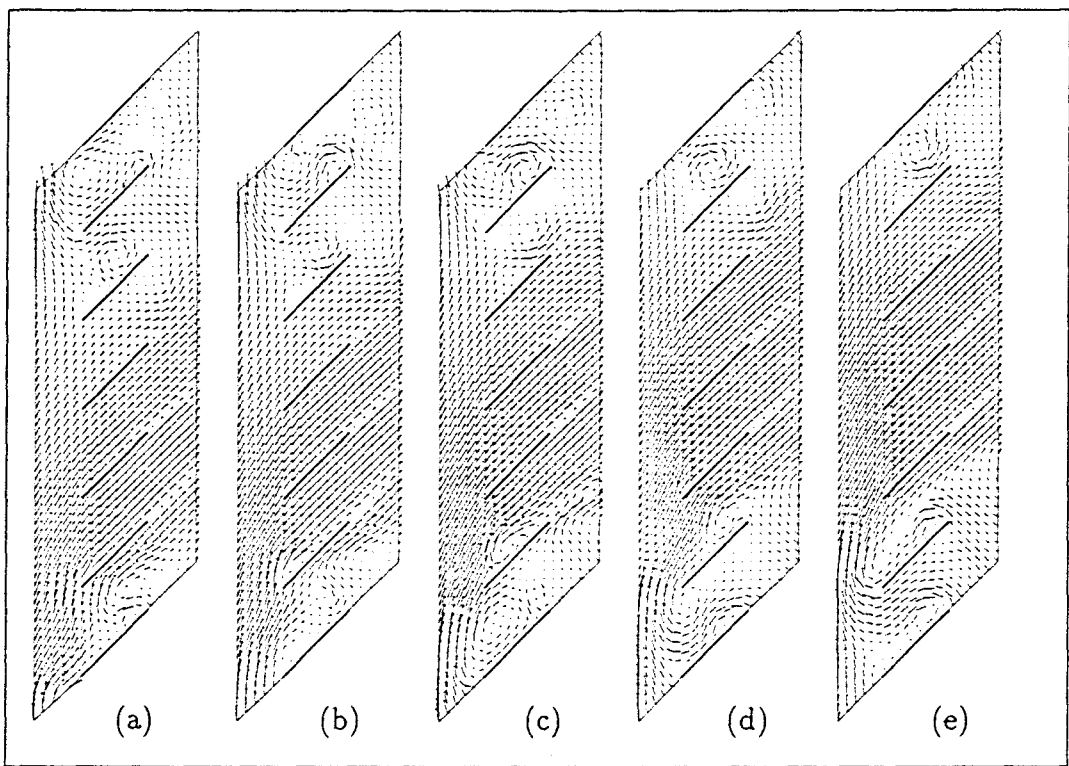


FIG. G.4 - (b) coalescence de deux cellules.- essai 17 - schéma : ALE ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$
(1 pts sur 4 sont représentés))

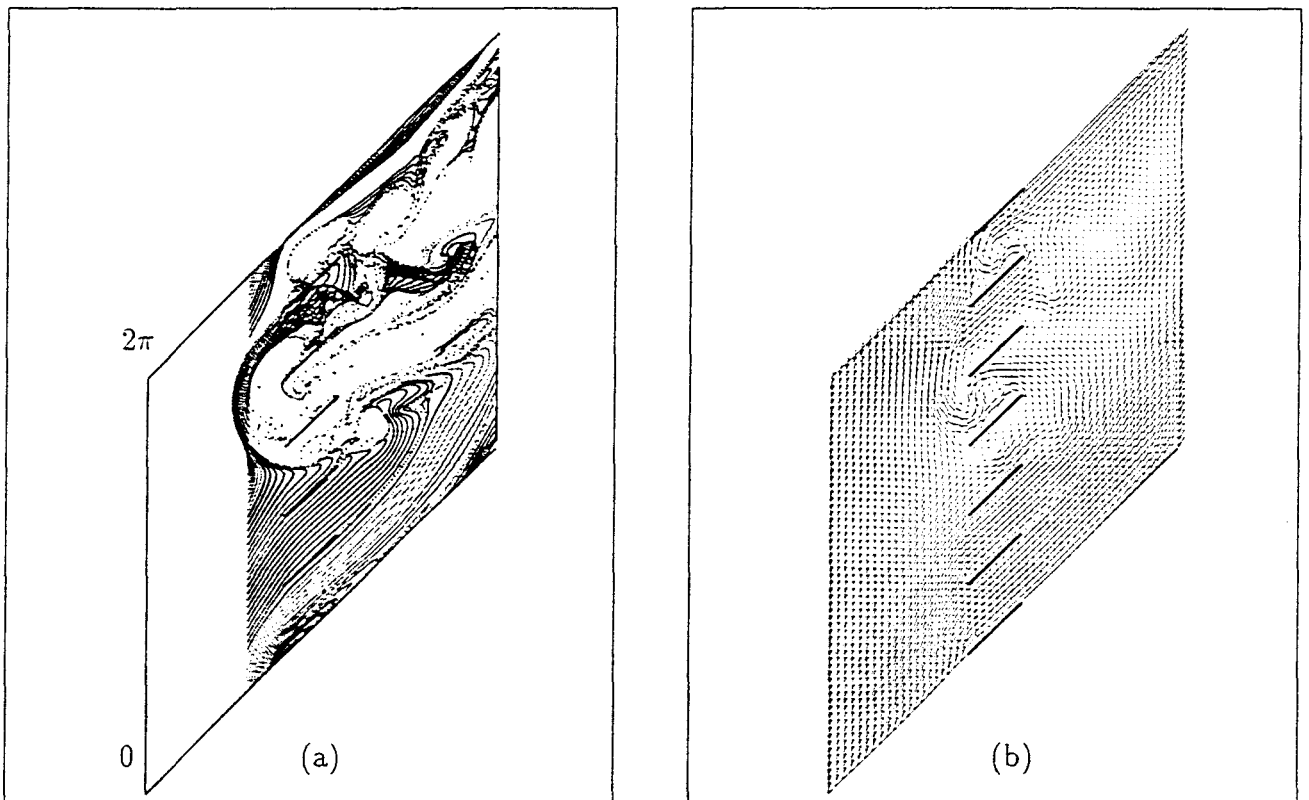


FIG. G.5 - Lignes d'émission (a) et champ de vitesse (a) - essai 17- schéma : ALE -
Perturbation : Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

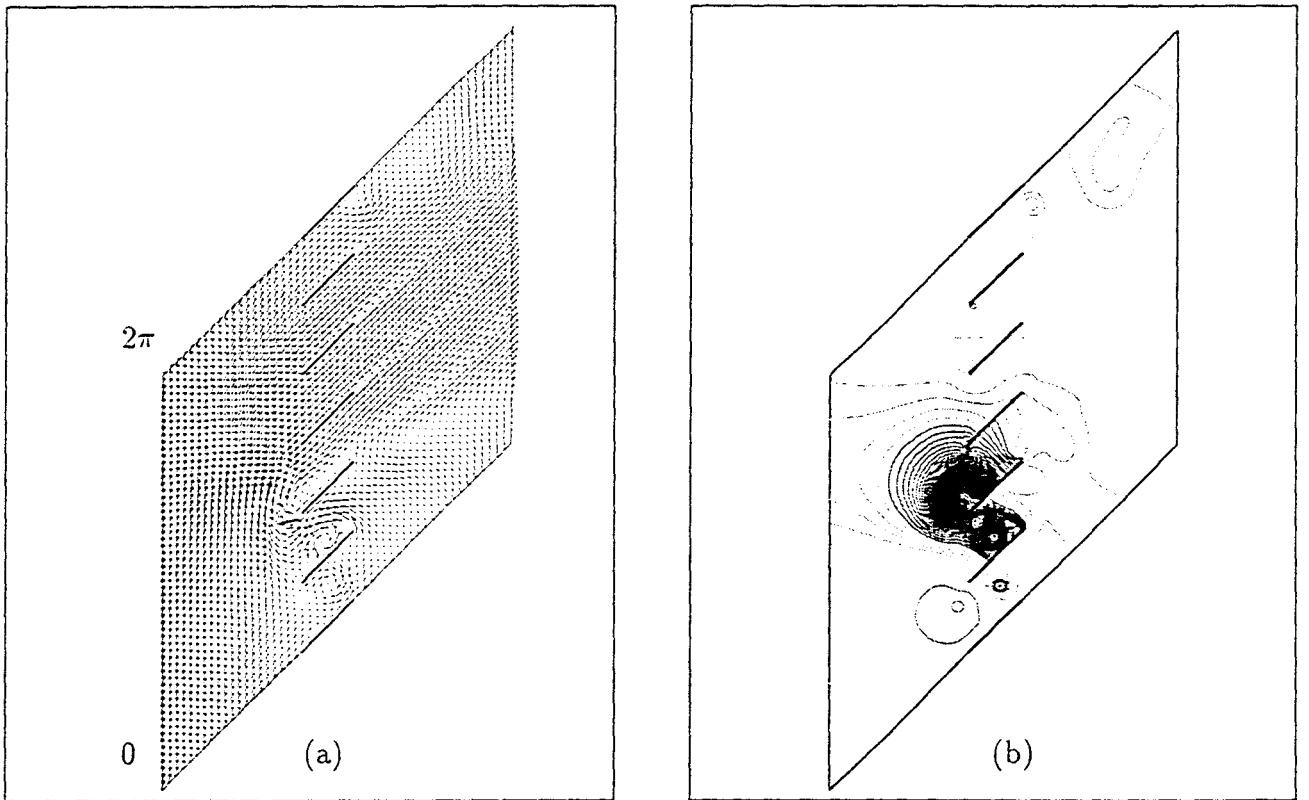


FIG. G.6 - *Champ de vitesse (a) et iso-pression (b) - essai 17- schéma : ALE - Perturbation : Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)*

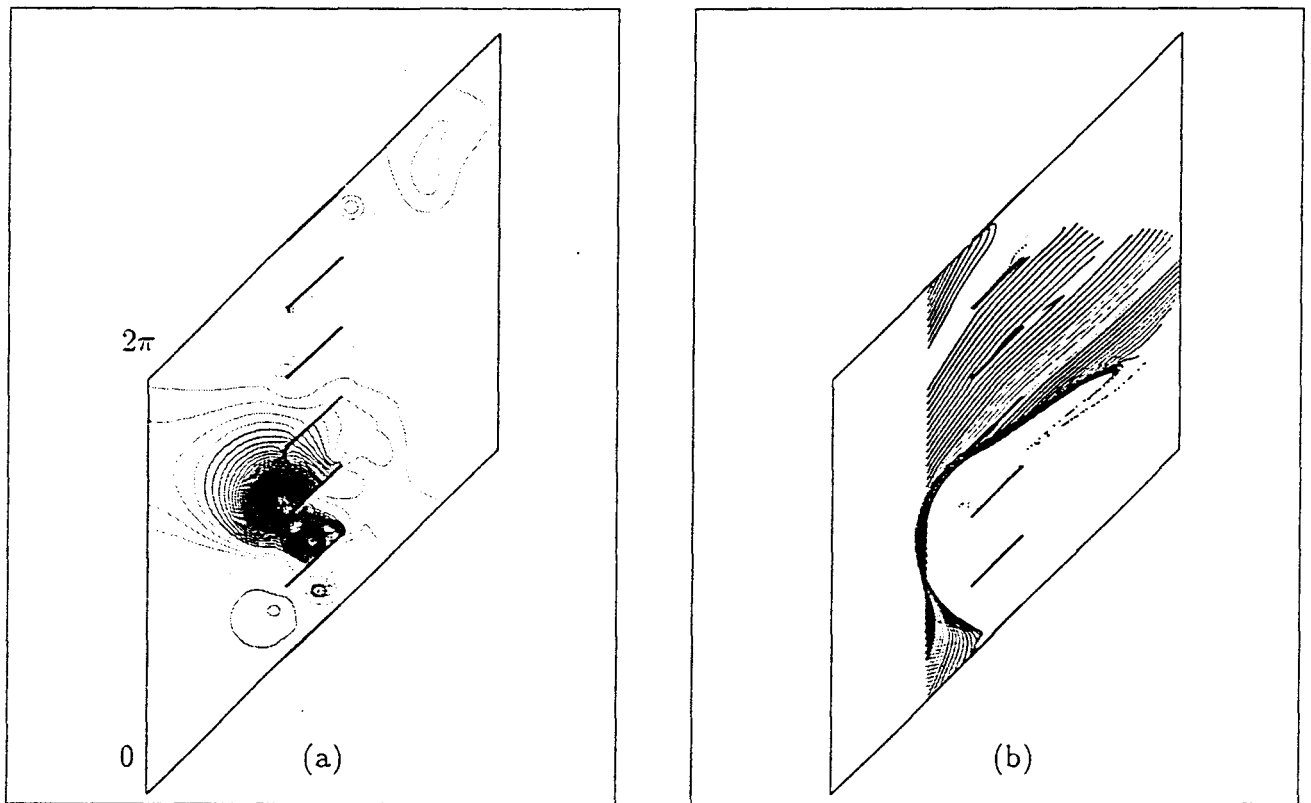


FIG. G.7 - iso-pressure et ligne d'émission - essai 17- schéma :ALE - Perturbation :
Entrée ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

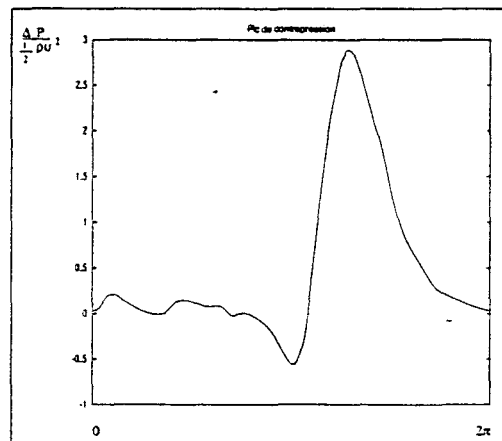


FIG. G.8 - Pic de contrepression

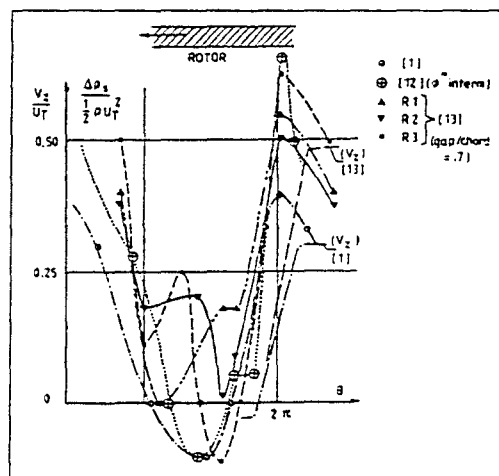


FIG. G.9 - Pic de contrepression extrait de Buisine [1]

Annexe H

CAS TEST 3D : INJECTION

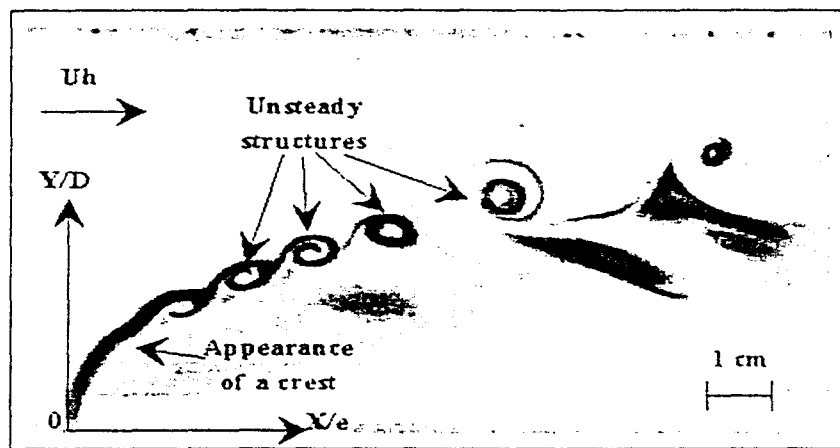


FIG. H.1 - *Experience. Lignes d'émission. cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$*

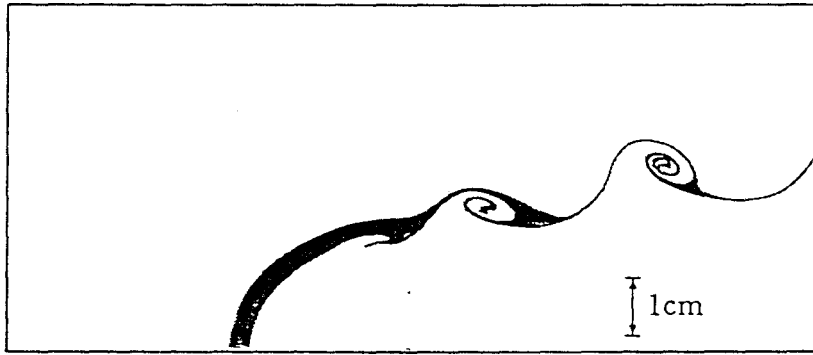


FIG. H.2 - *Calcul. Lignes d'émission. Maillage : 116000 points . cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$*

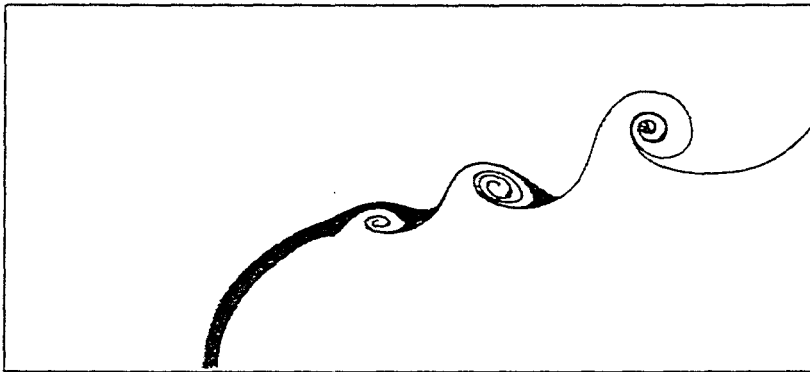


FIG. H.3 - *Calcul. Lignes d'émission. Maillage : 210000 points . cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$*

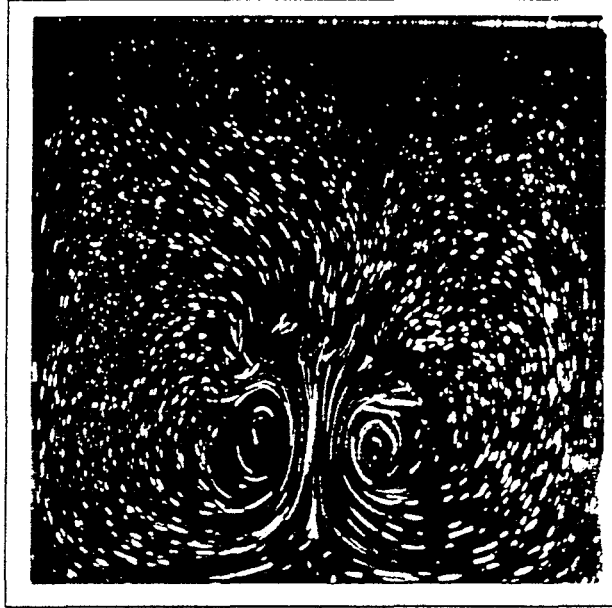


FIG. H.4 - *Expérience. Ecoulements secondaires. cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$*

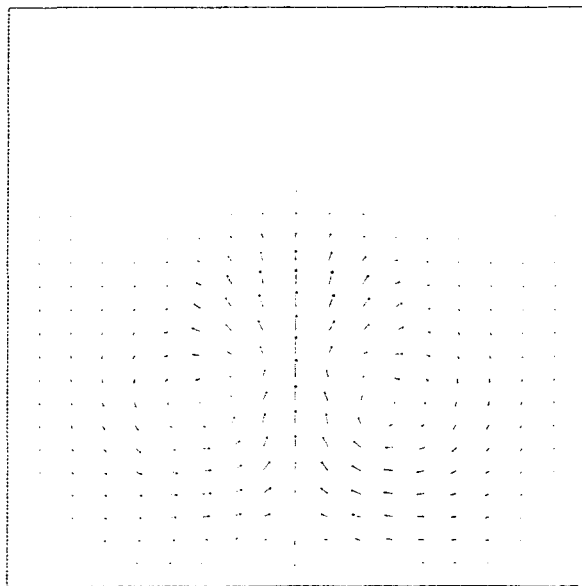


FIG. H.5 - *Calcul. Ecoulements secondaires. cas $\mathcal{R}_e = 500, \alpha = 4.5$*

Annexe I

CAS TEST 3D GRILLE A

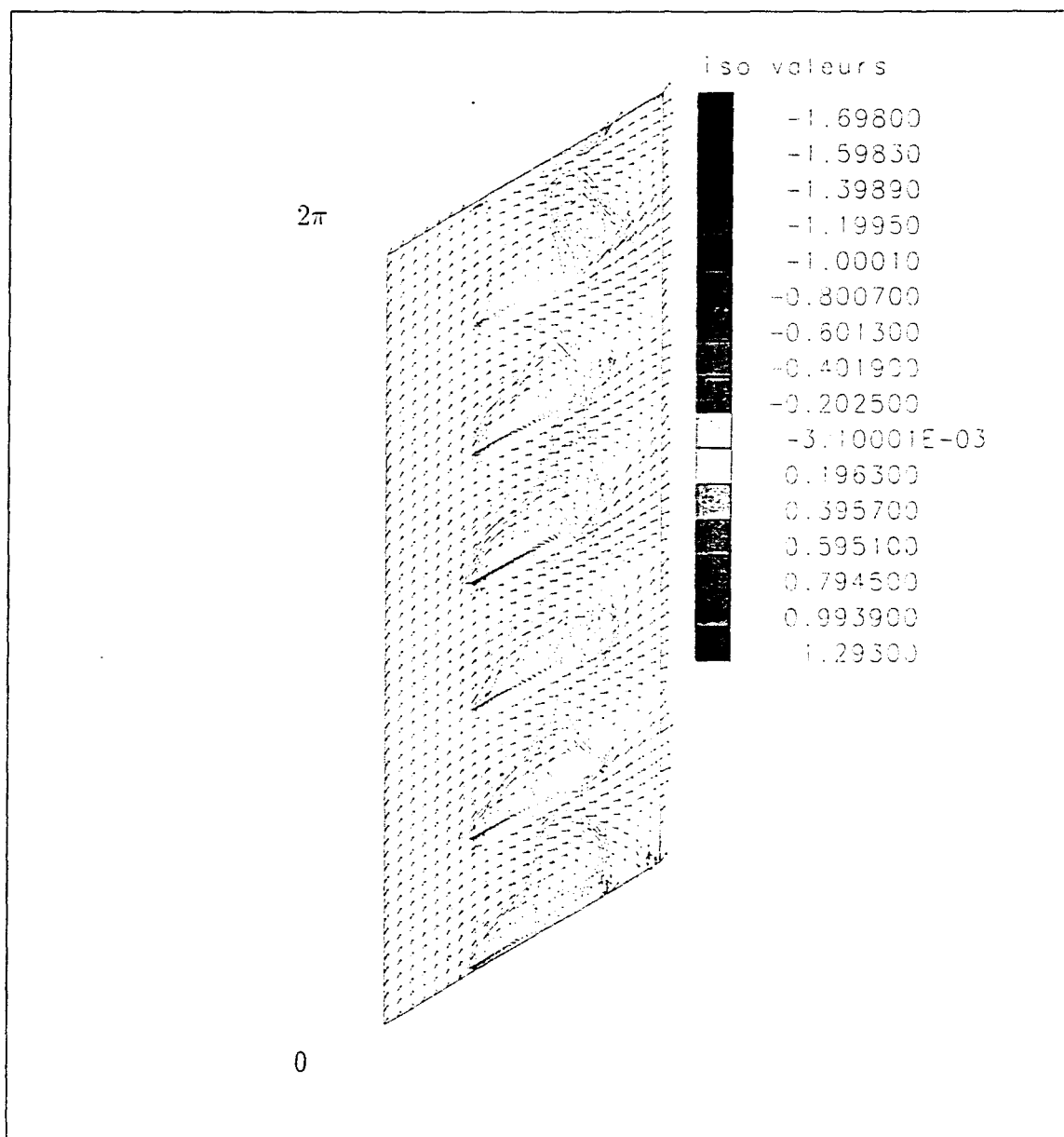


FIG. I.1 - Cas 3D - Stator avec cisaillement- Champ de vitesse et iso-pression - schéma : P-C - Perturbation : Grille - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$)

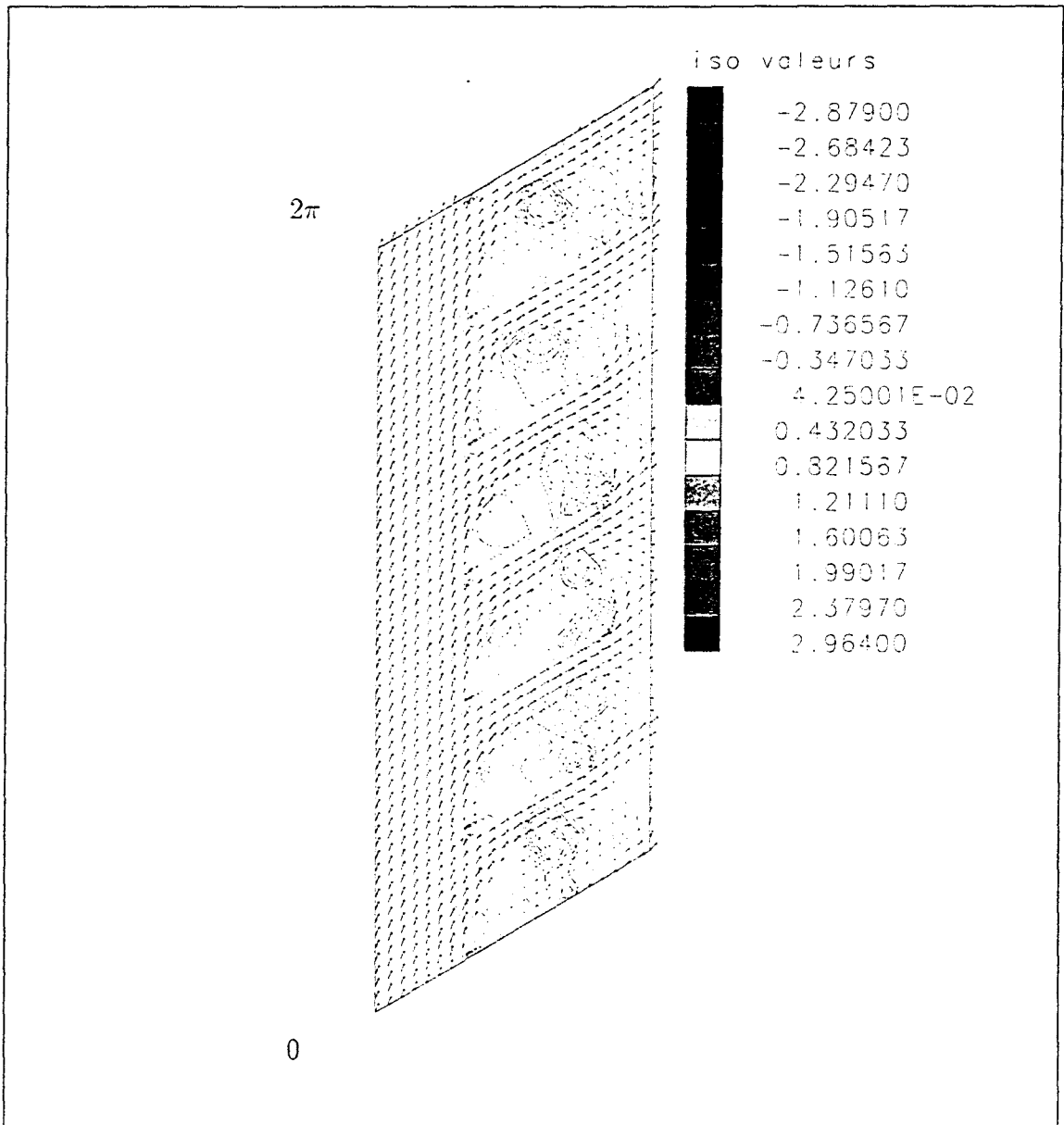


FIG. I.2 - Cas 3D - Stator avec cisaillement- Champ de vitesse et iso-pression - schéma :
 P-C - Perturbation :Grille - à mi-envergure- ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$)

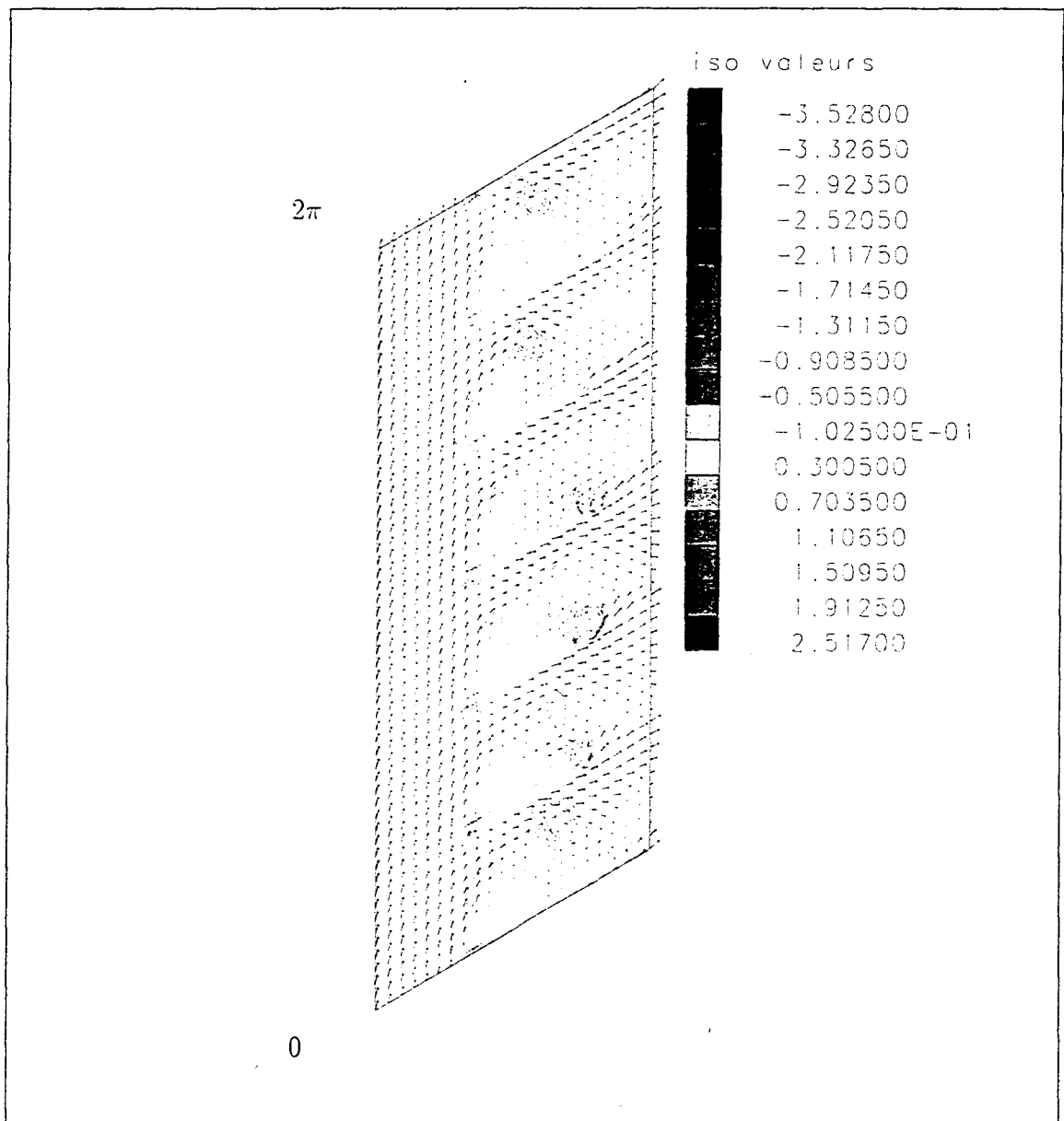


FIG. I.3 - Cas 3D- Stator avec cisaillement - Champ de vitesse et iso-pression - schéma :
 P-C - Perturbation:Grille - proche parois B ("carter") ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$)

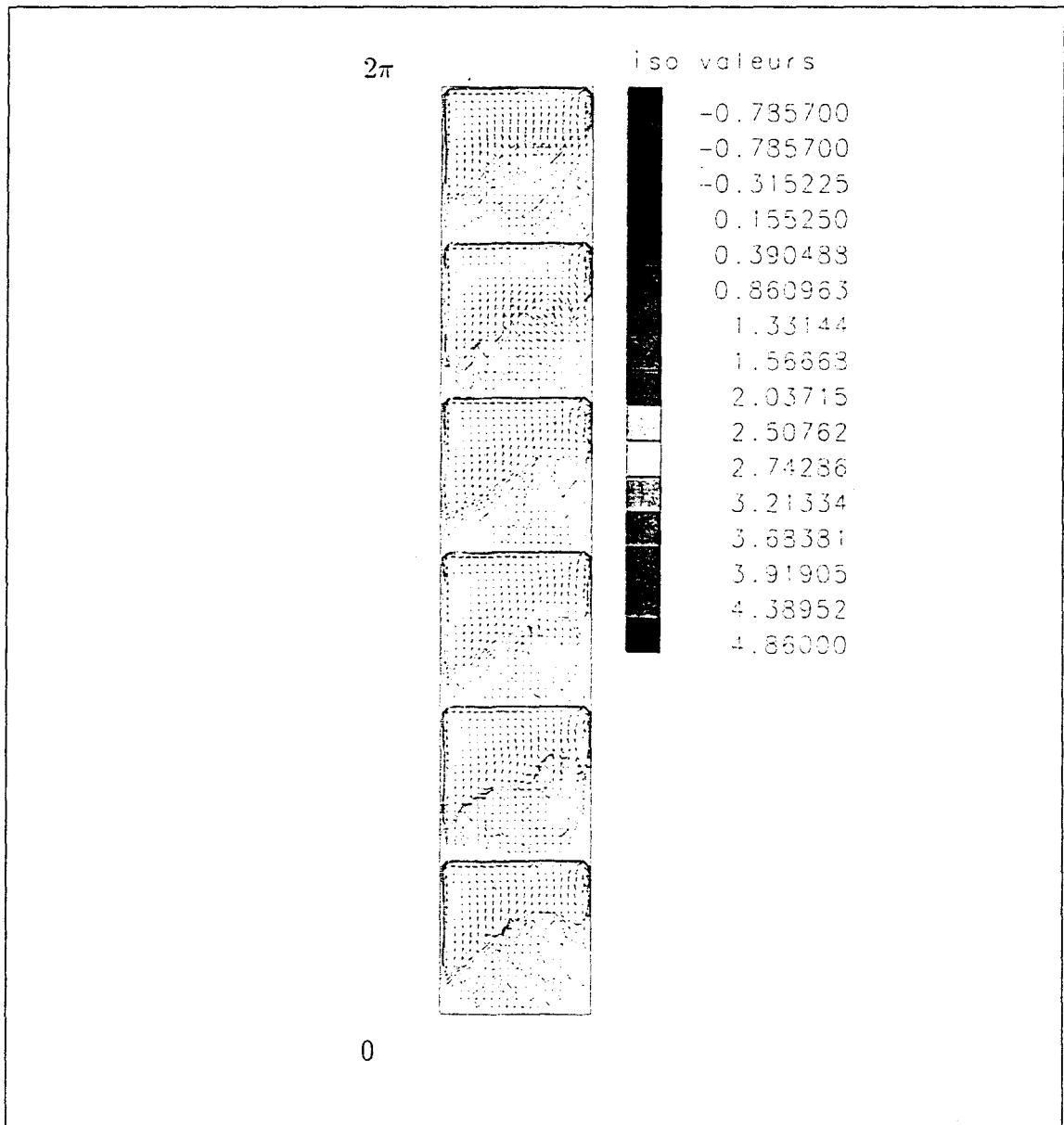


FIG. I.4 - Cas 3D - Stator avec cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Perturbation : Grille - mi-corde - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$)

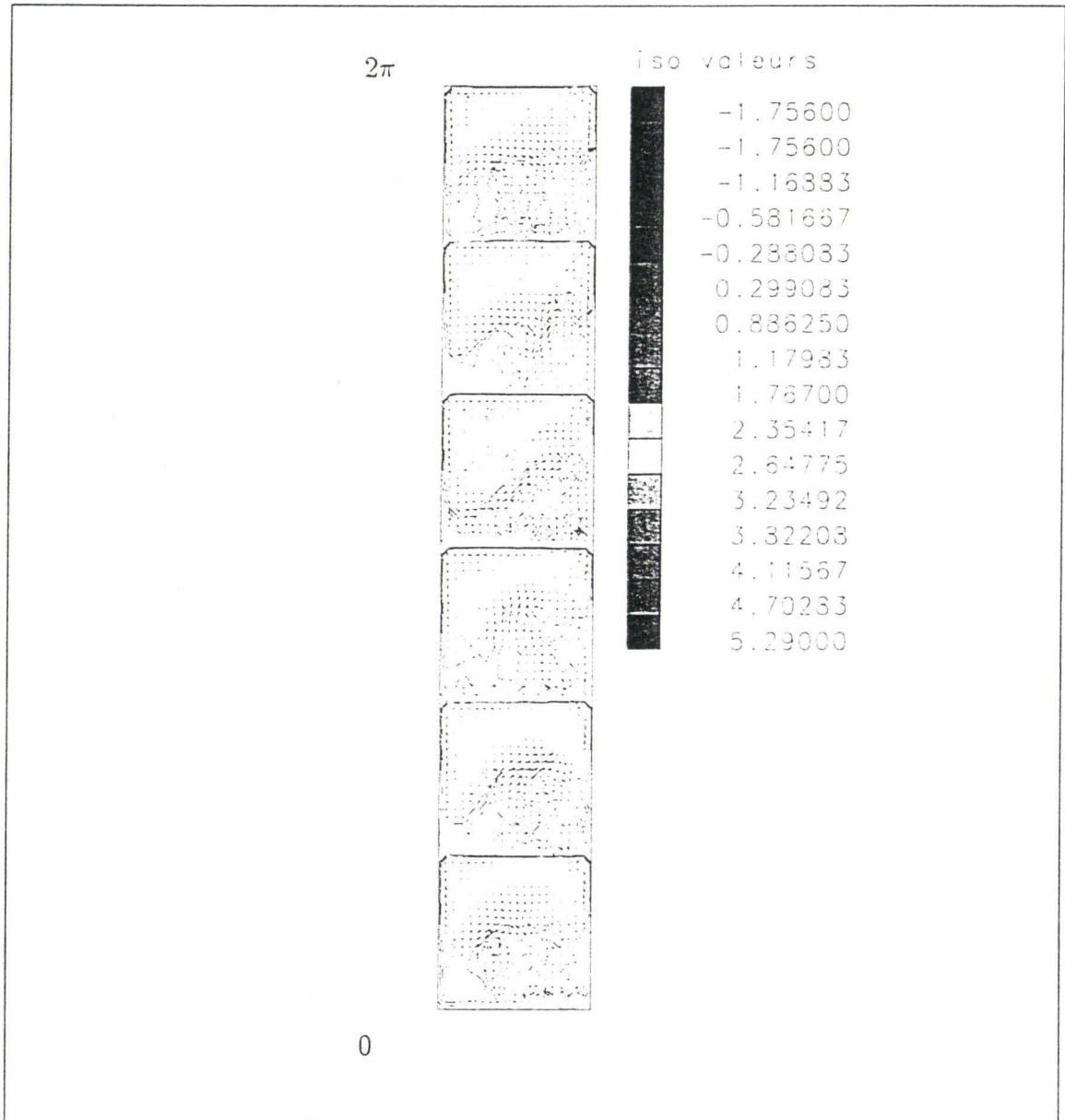


FIG. I.5 - Cas 3D - Stator avec cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma: P-C - Perturbation:Grille - sortie des canaux - ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$)

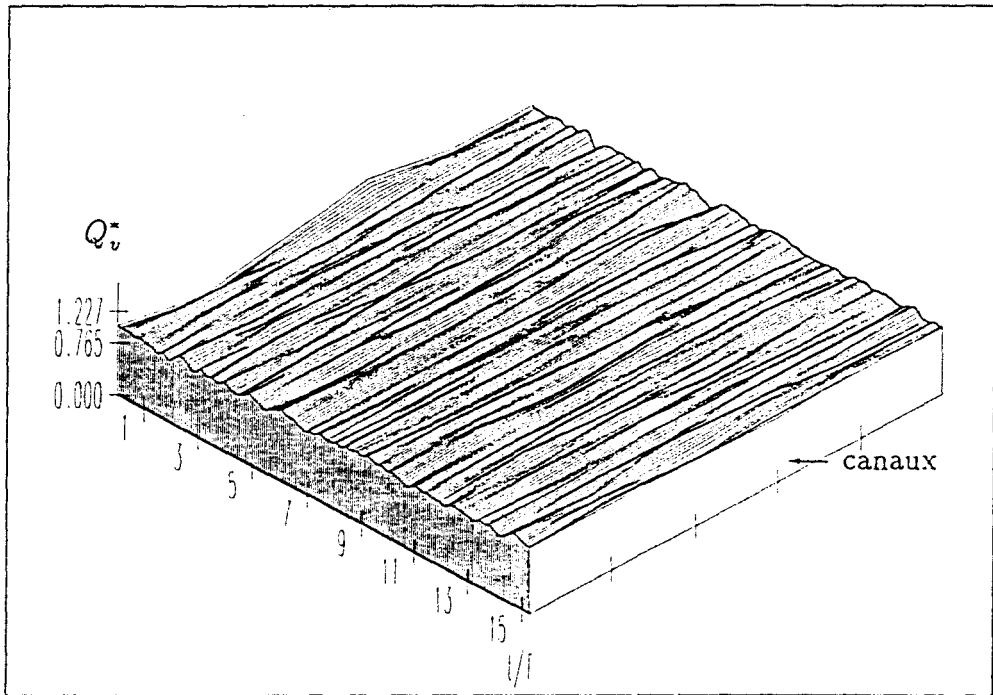


FIG. I.6 - Cas 3D - Stator avec cisaillement - Evolution du débit en fonction du temps après une perturbation initiale - schéma : P-C ($\lambda = 30^\circ$, $\alpha = 38,73^\circ$)

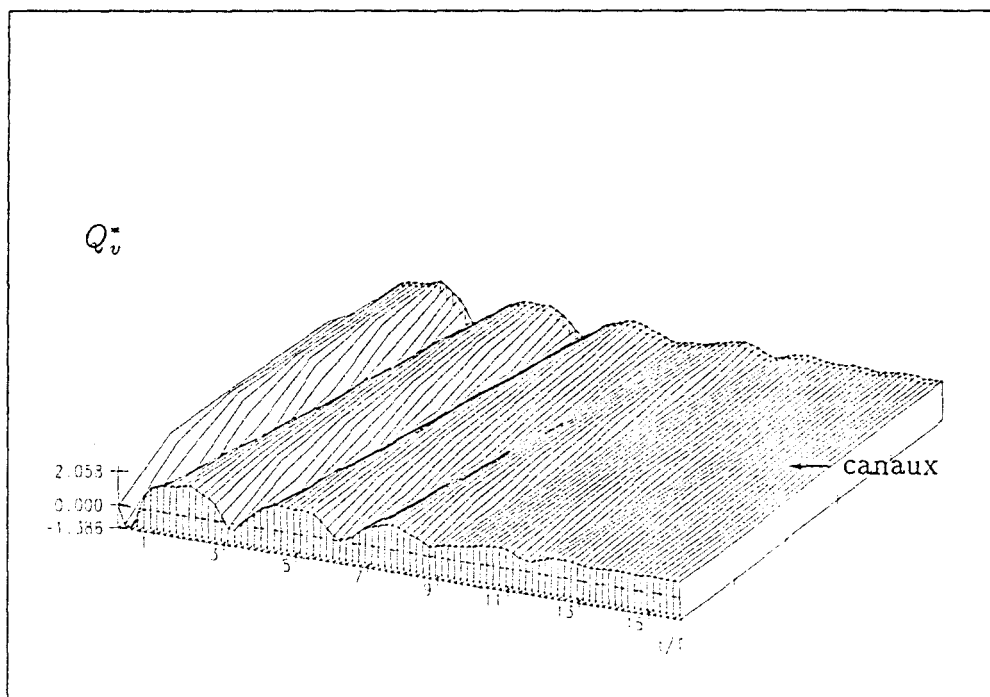


FIG. I.7 - Cas 3D - Stator sans cisaillement - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - schéma : P-C - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

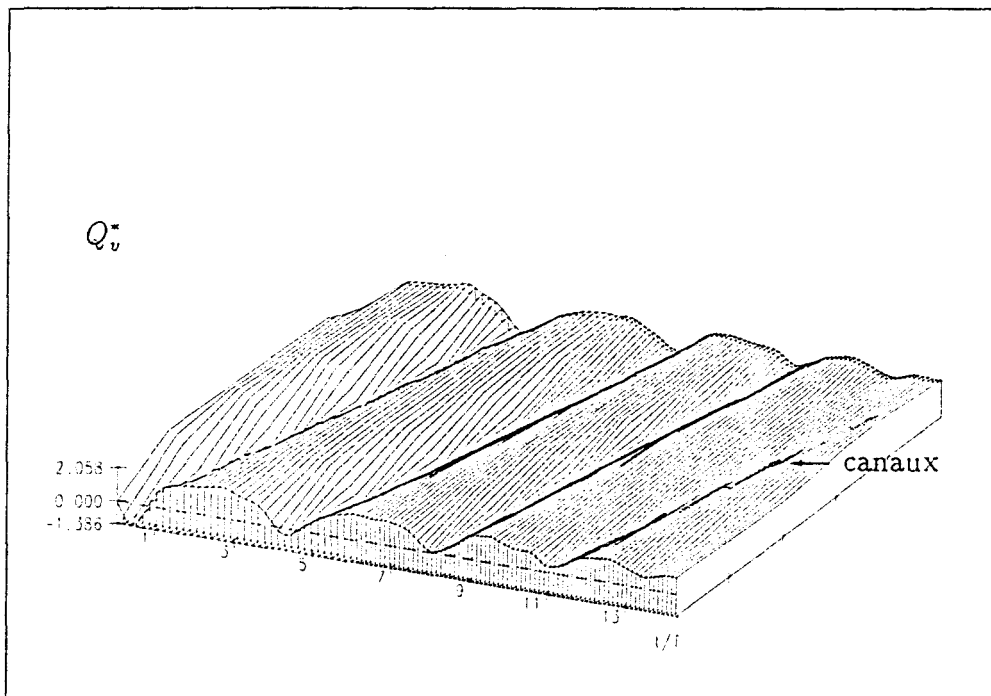


FIG. I.8 - Cas 3D - Stator sans cisaillement - Evolution du débit en fonction du temps
- Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - schéma : P-C - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$)

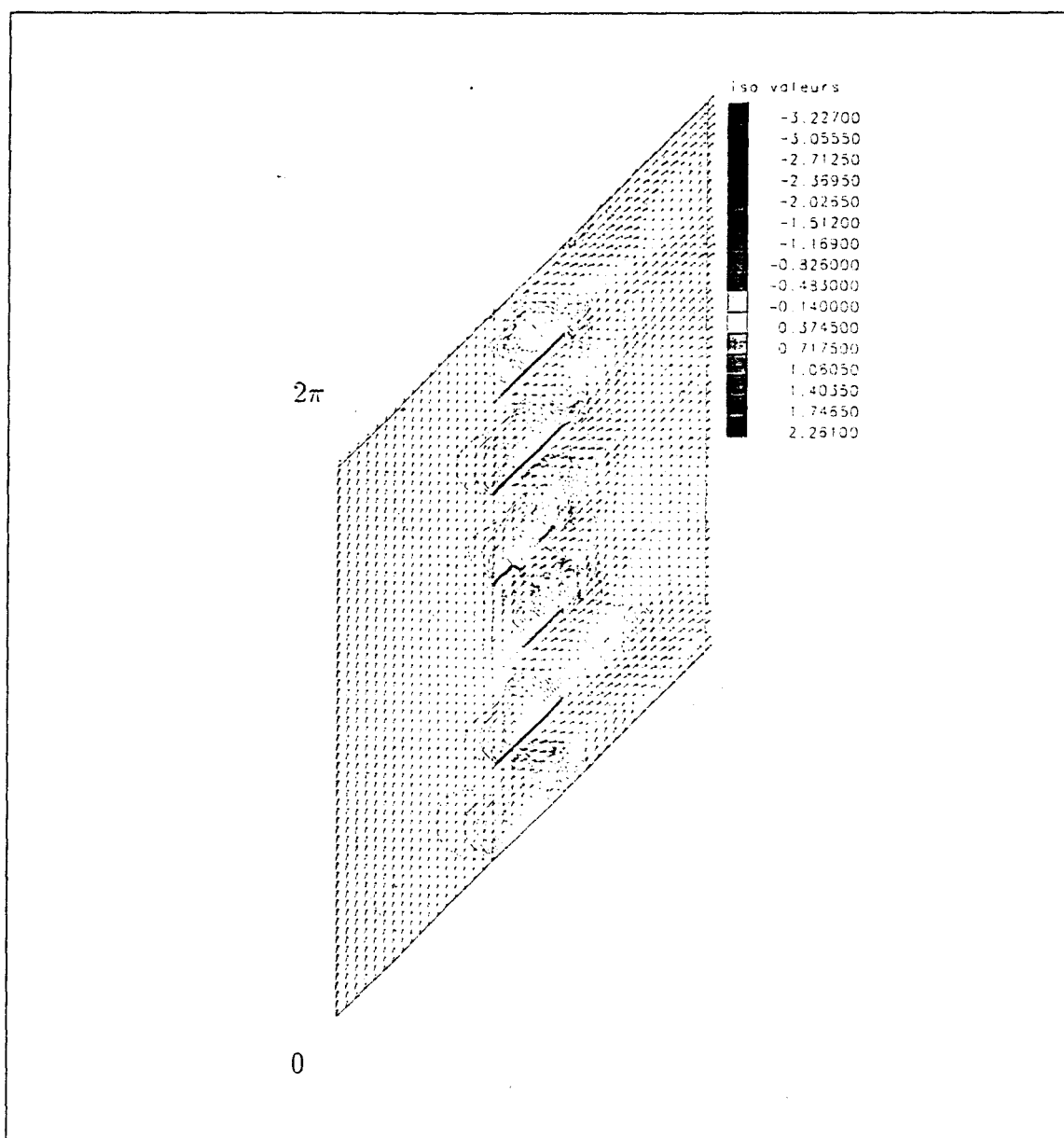


FIG. I.9 - Cas 3D - Stator sans cisaillement - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$)

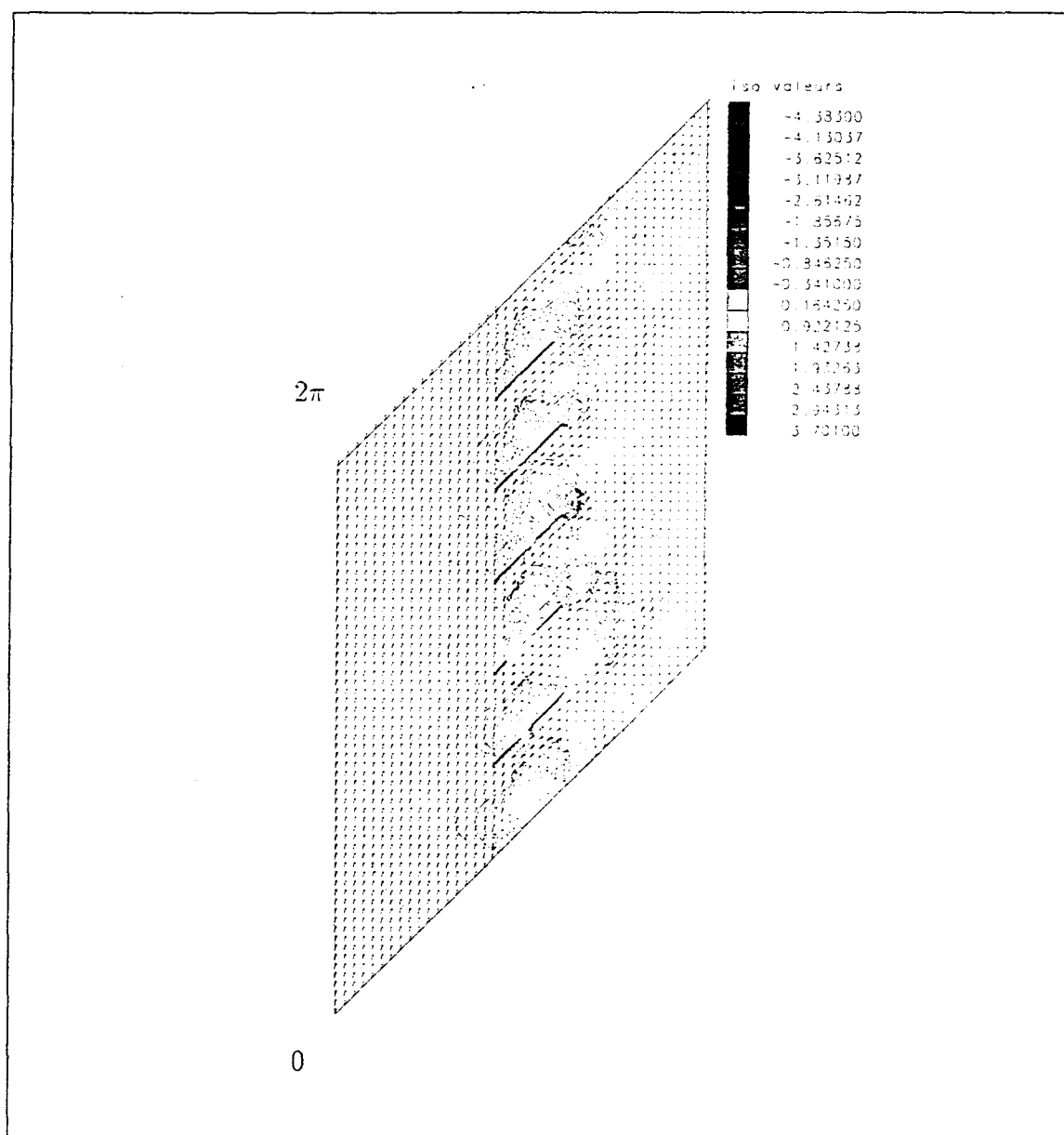


FIG. I.10 - Cas 3D - Stator sans cisaillement - Champ de vitesse et iso-pression -
Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - à mi-envergure - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$)

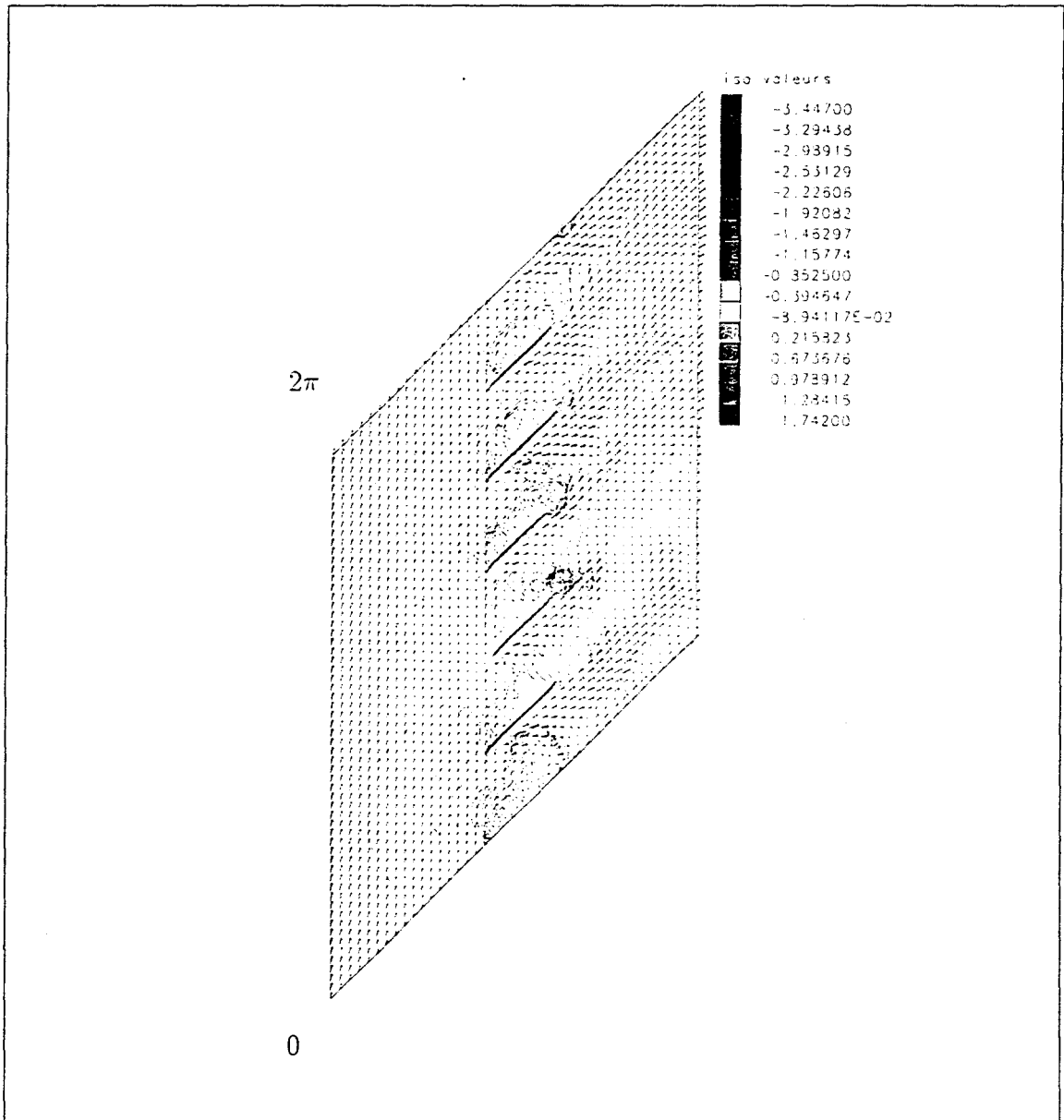


FIG. I.11 - Cas 3D - Stator sans cisaillement - Champ de vitesse et iso-pression -
 Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - proche parois B ("carter") - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$)

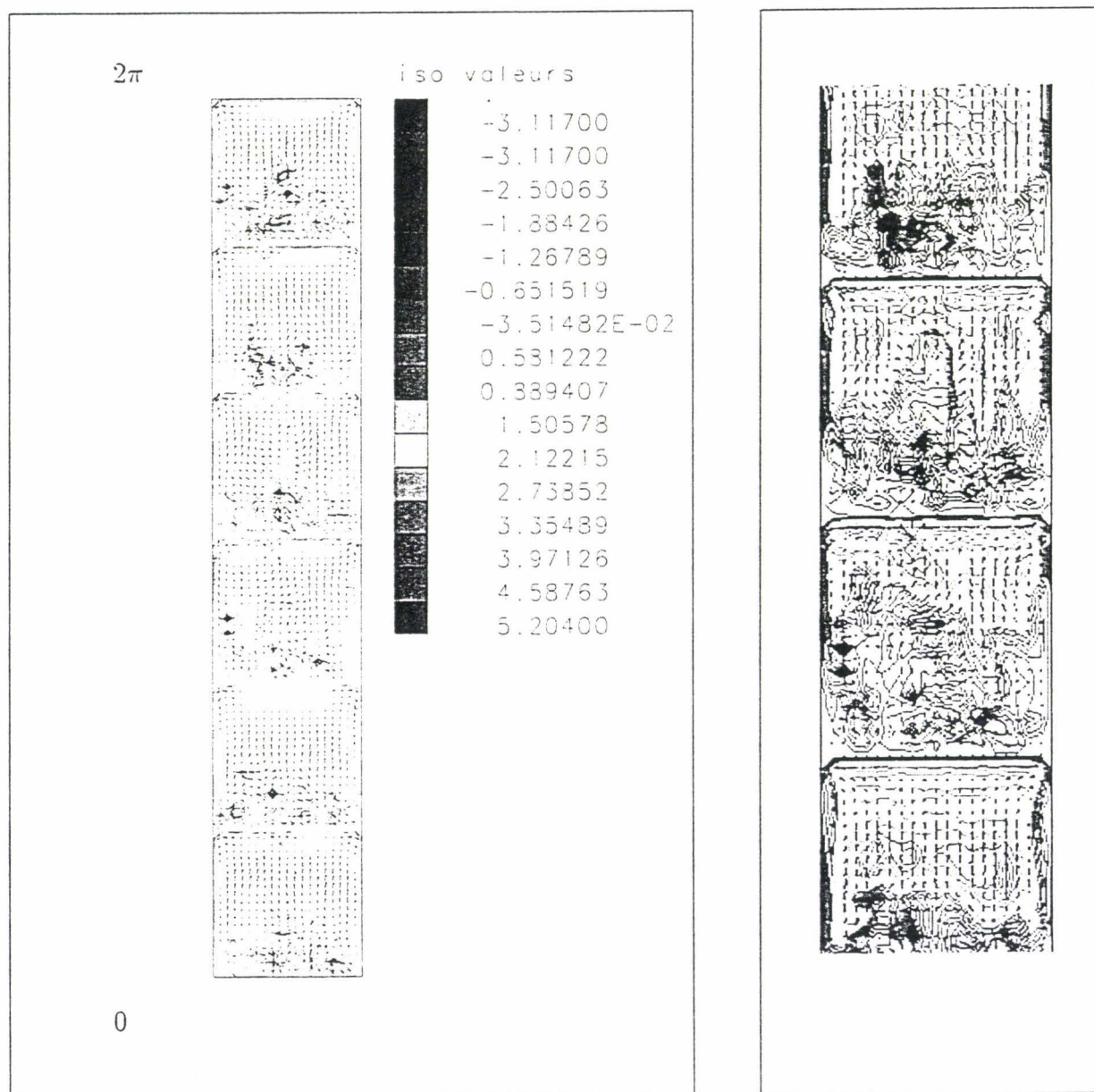


FIG. I.12 - Cas 3D - Stator sans cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - entrée d'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$)

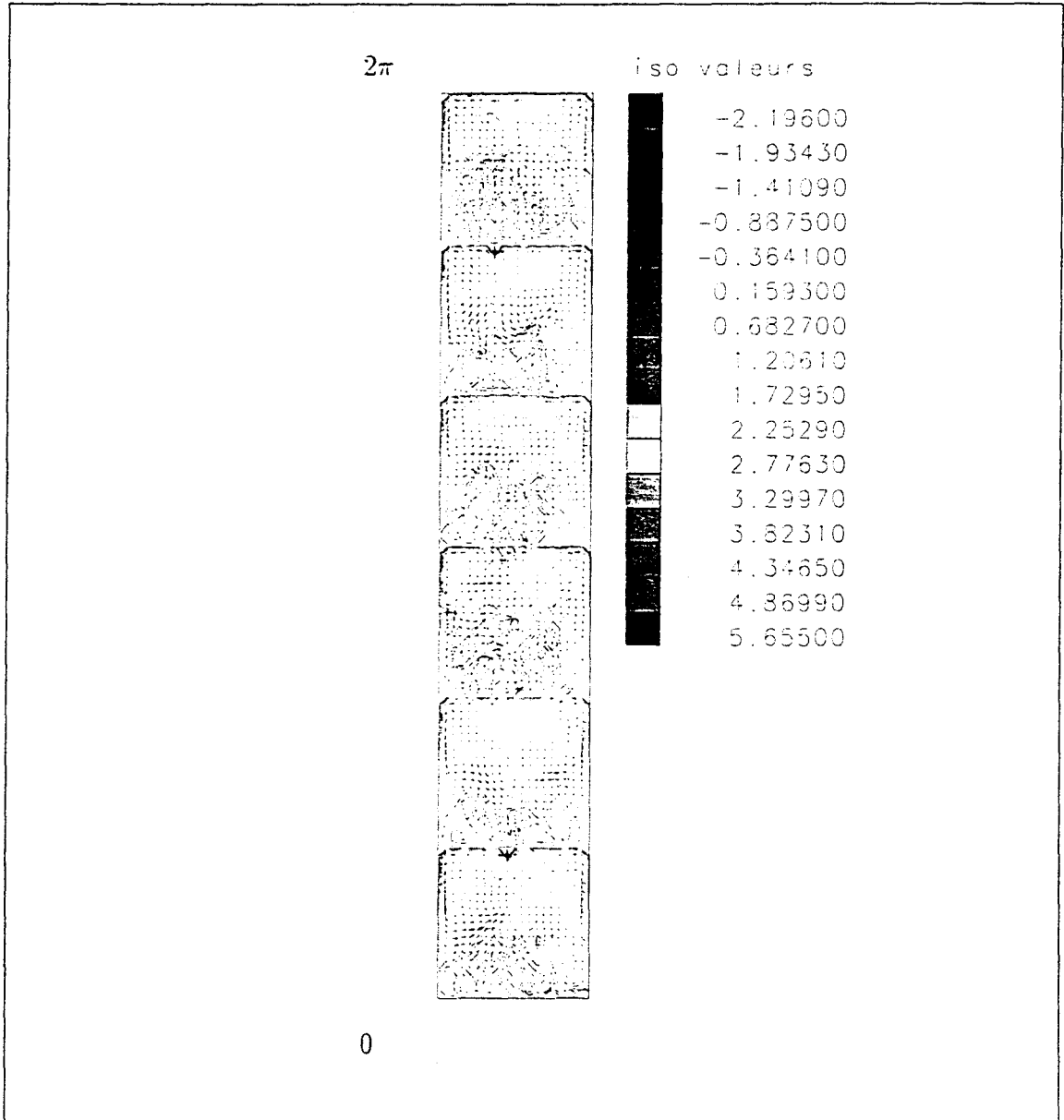


FIG. I.13 - Cas 3D - Stator sans cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - mi-corde - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$)

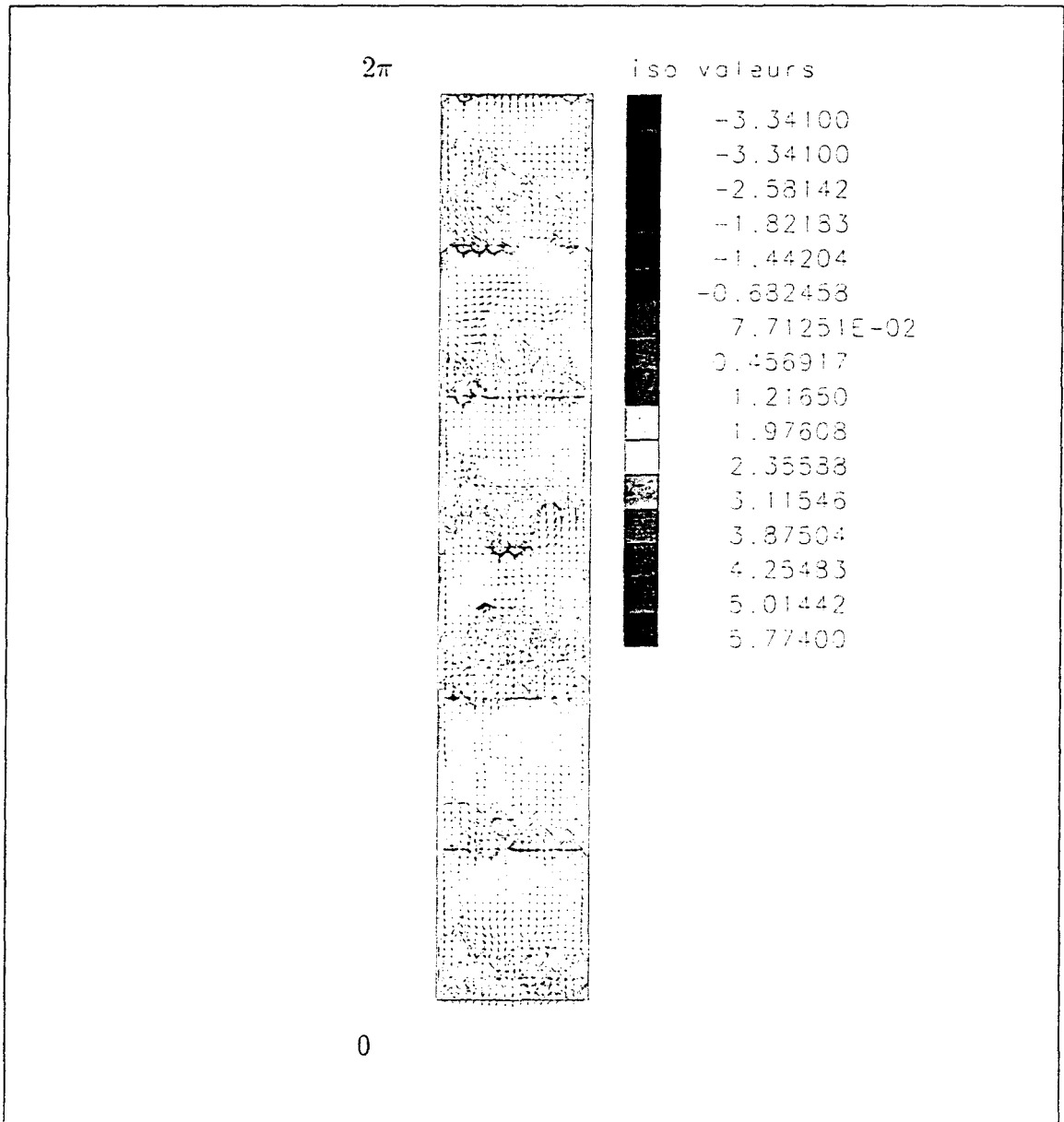


FIG. I.14 - Cas 3D - Stator sans cisaillement - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - sortie d'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$)

Annexe J

CAS TEST 3D GRILLE B

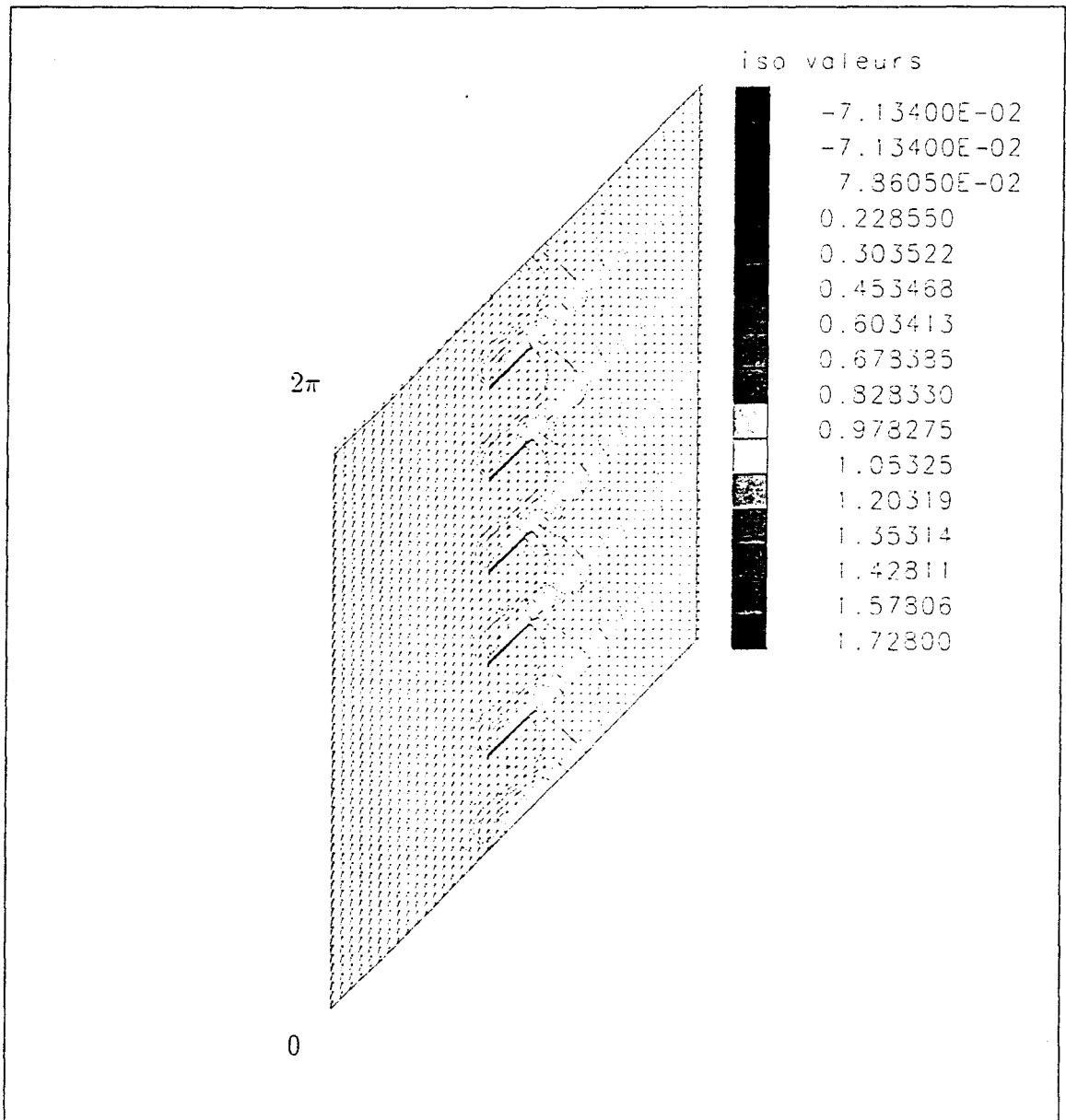


FIG. J.1 - Cas 3D- Envergure : 0,1 - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation :
Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

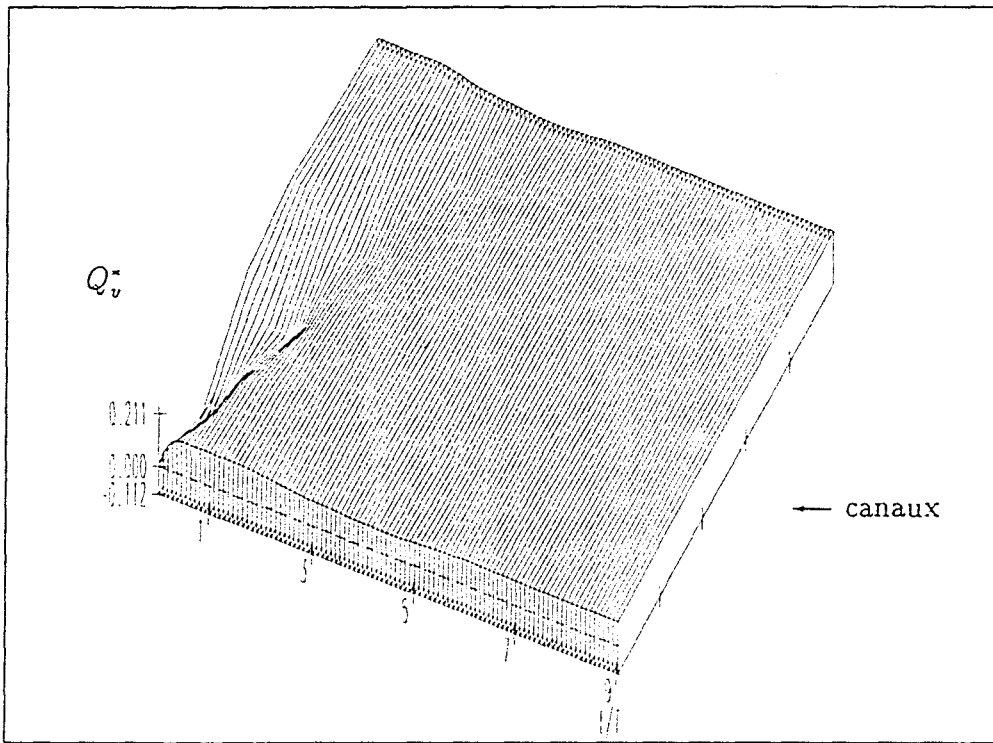


FIG. J.2 - Cas 3D - Envergure : 0,1 - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 5 \cdot 10^{-4}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

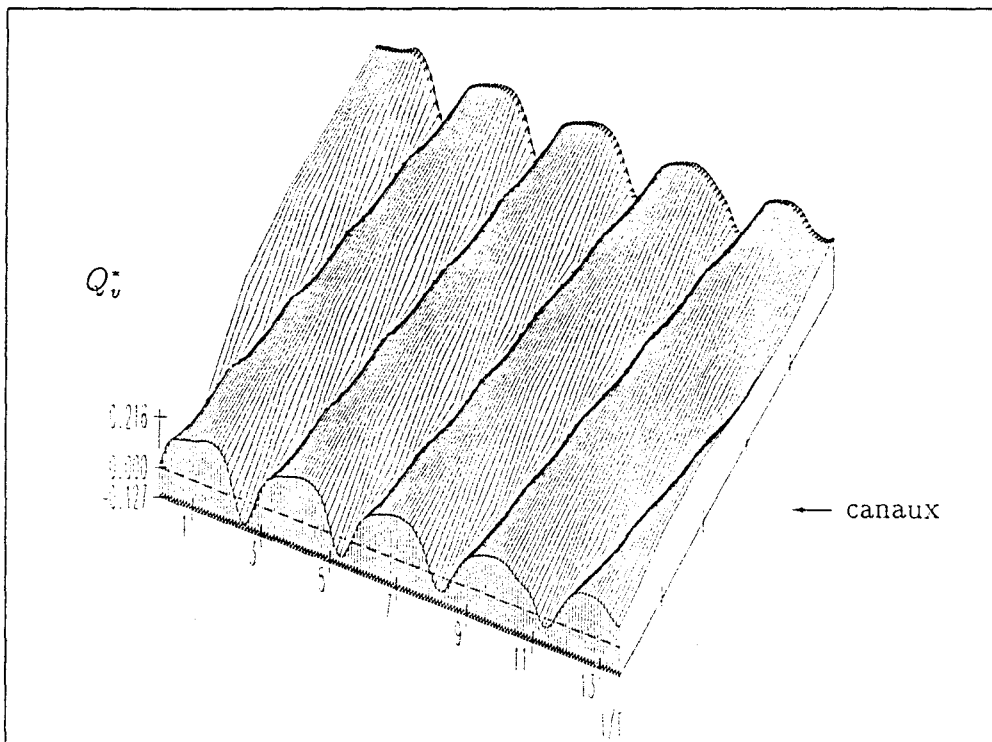


FIG. J.3 - Cas 3D - Envergure : 0,1 - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1 \cdot 10^{-4}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

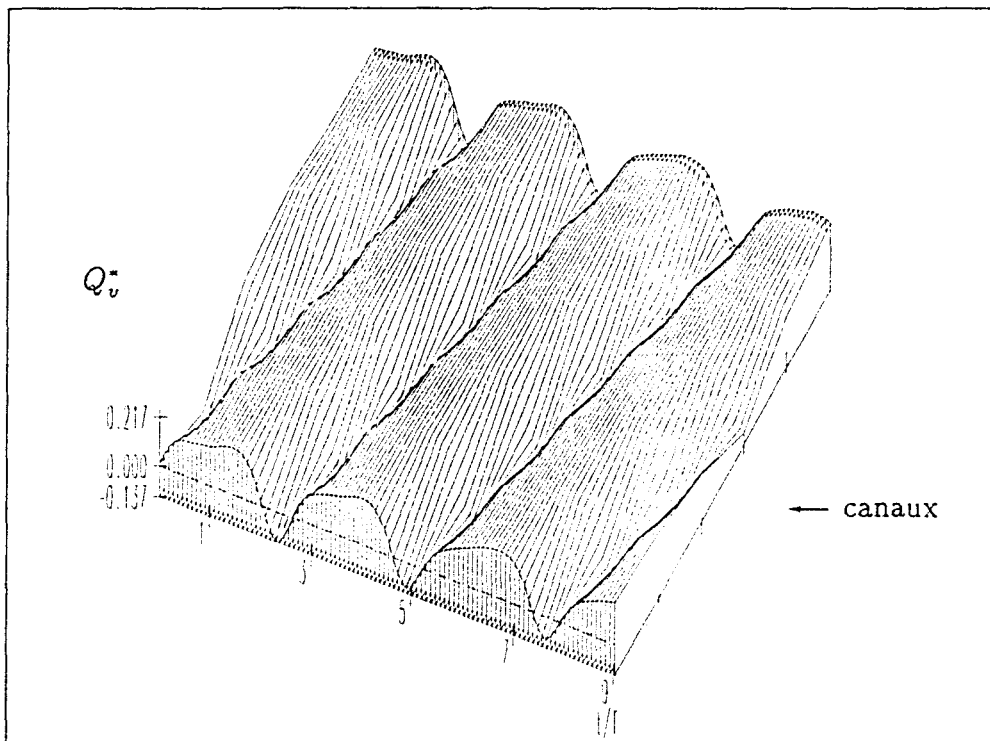


FIG. J.4 - Cas 3D - Envergure : 0,1 - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1.10^{-5}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

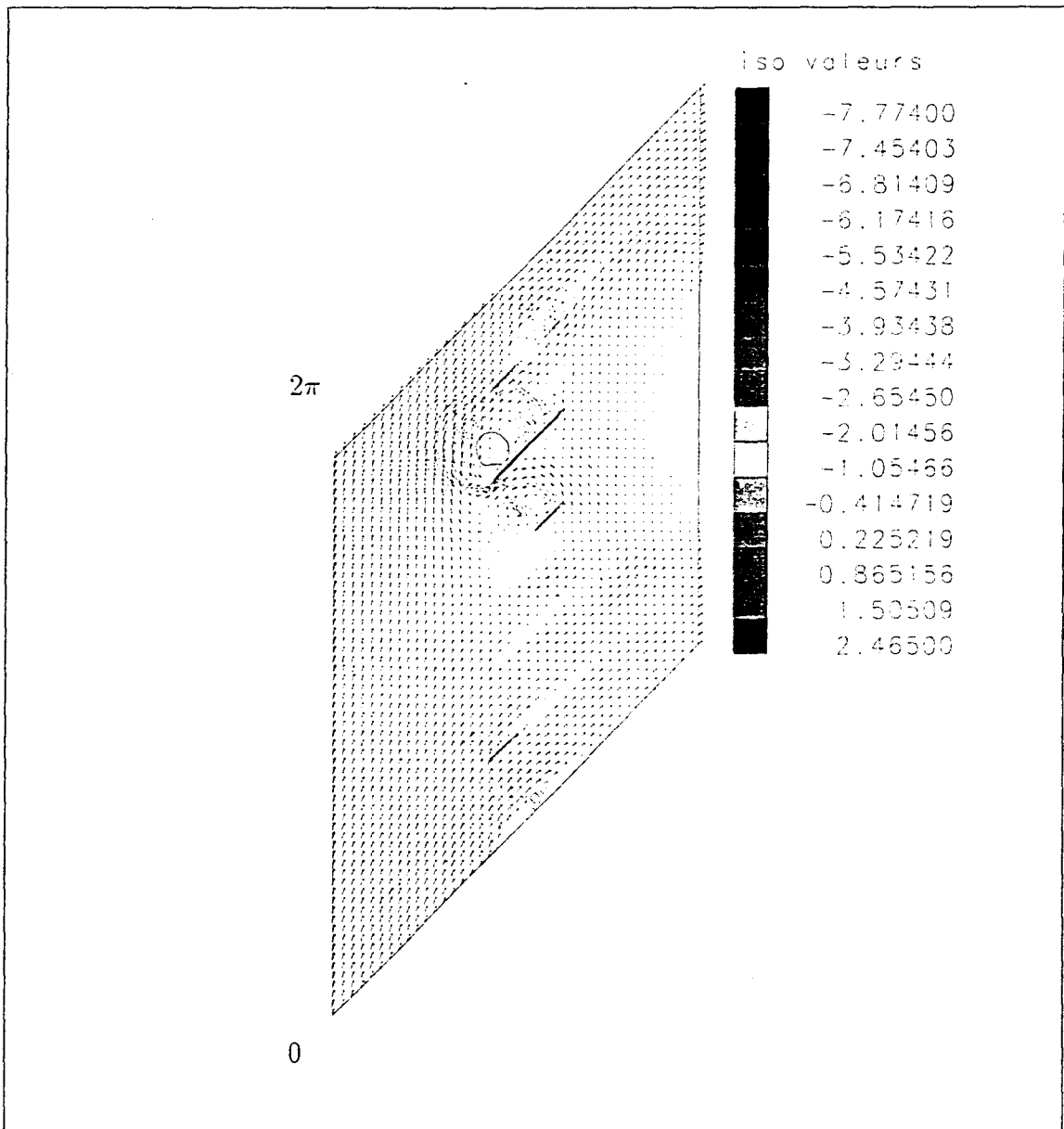


FIG. J.5 - Cas 3D- Envergure : 0,1 - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation :
Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1.10^{-5}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

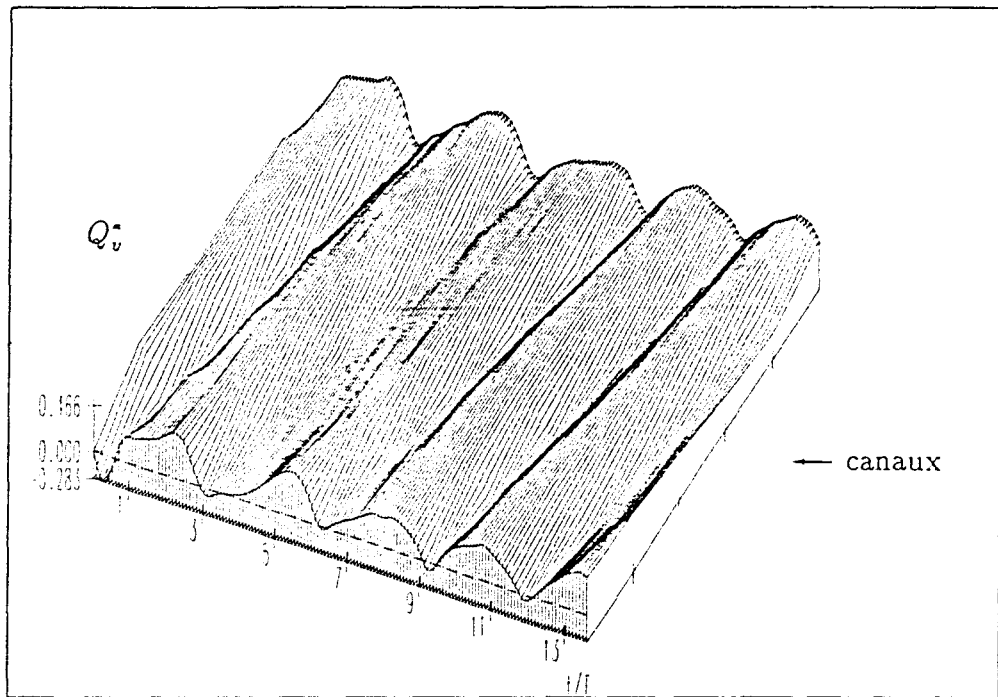


FIG. J.6 - Cas 3D - Envergure : 0,2 - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1.10^{-5}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

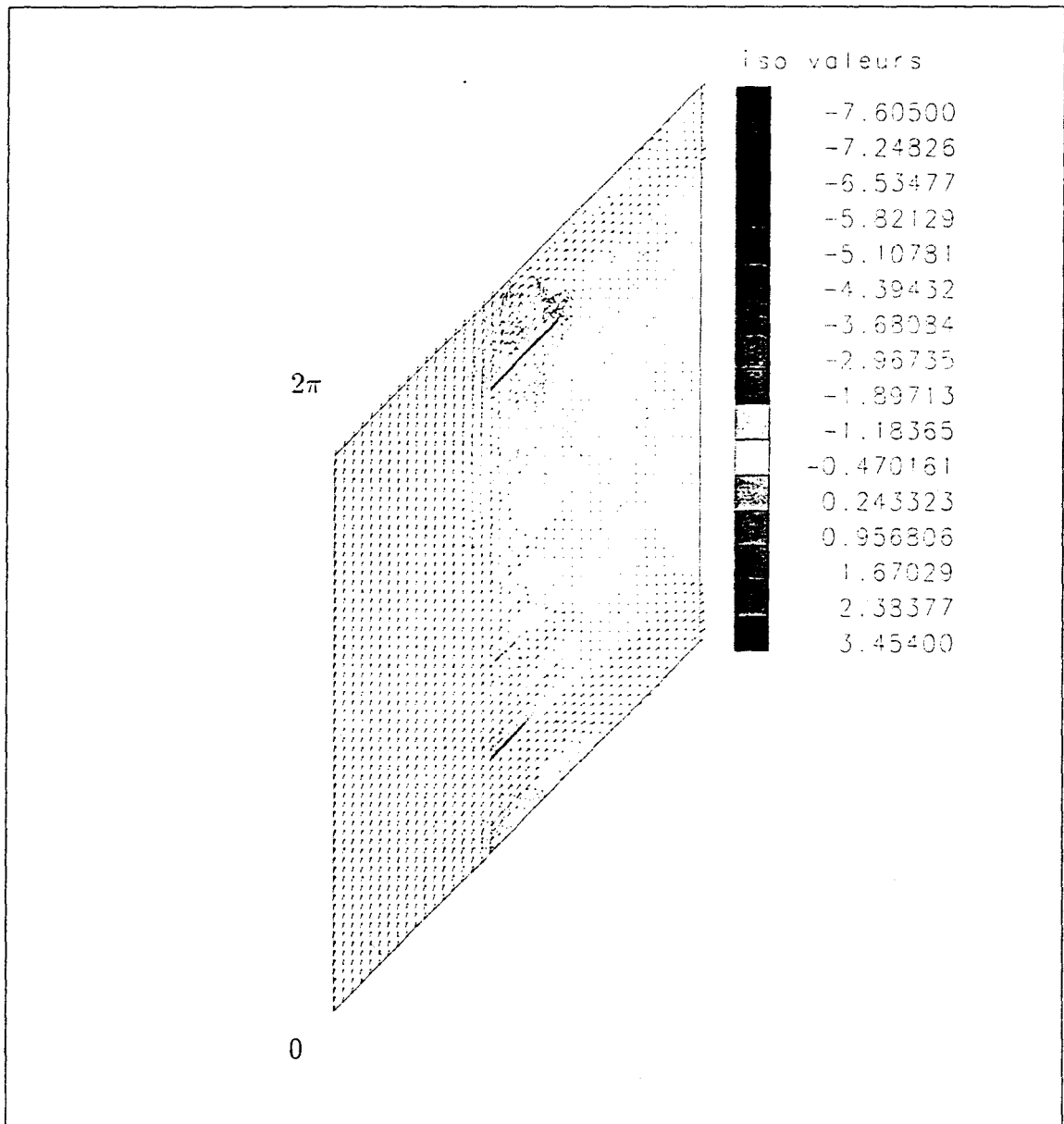


FIG. J.7 - Cas 3D- Envergure : 0,2 - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - $\nu_r = 1.10^{-5}$ - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

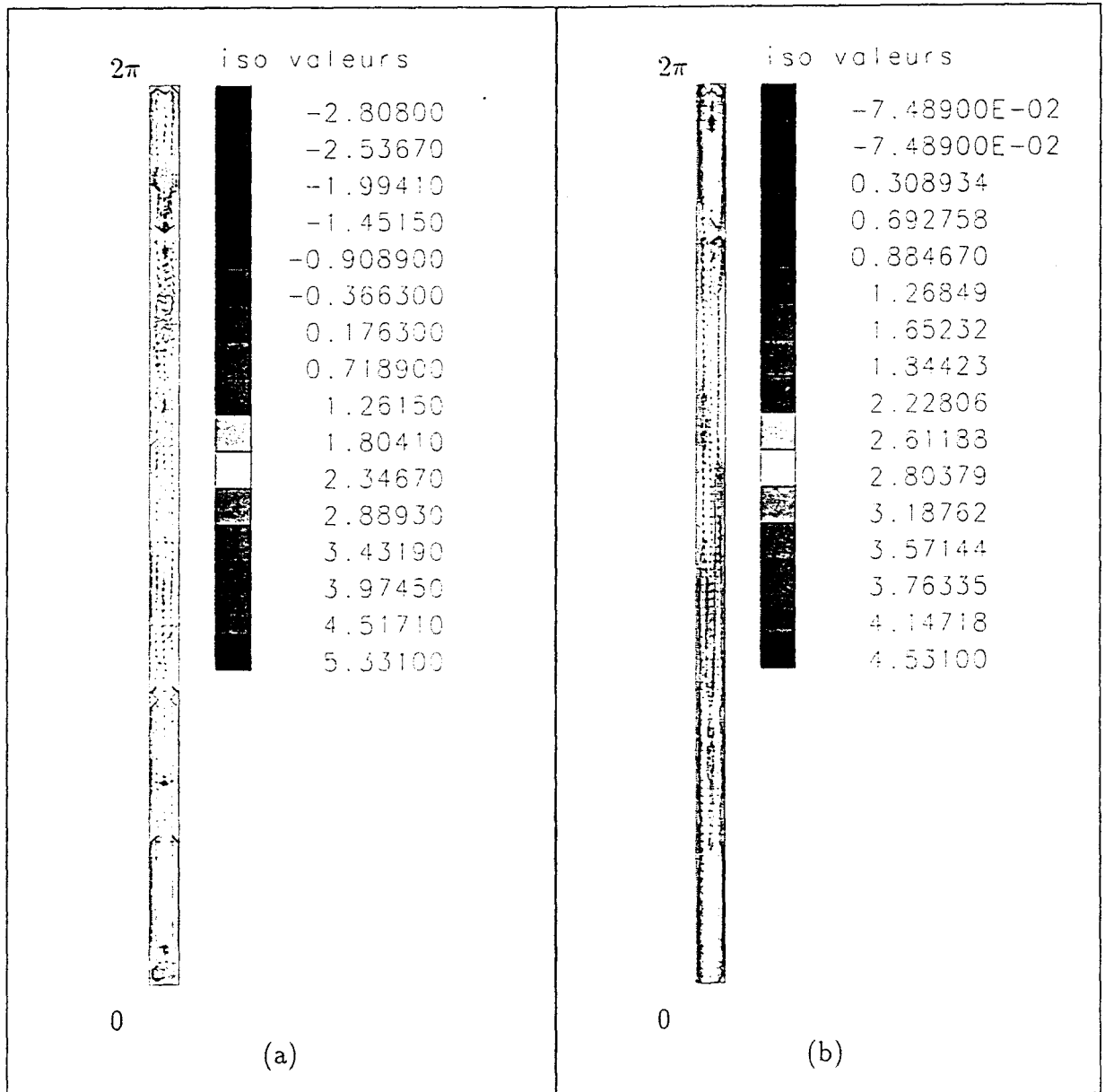


FIG. J.8 - Cas 3D - Envergure : 0,2 - iso vitesses débitantes et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - (a) mi-corde, (b) une corde après la sortie de l'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 33,7^\circ$)

Annexe K

CAS TEST 3D GRILLE C

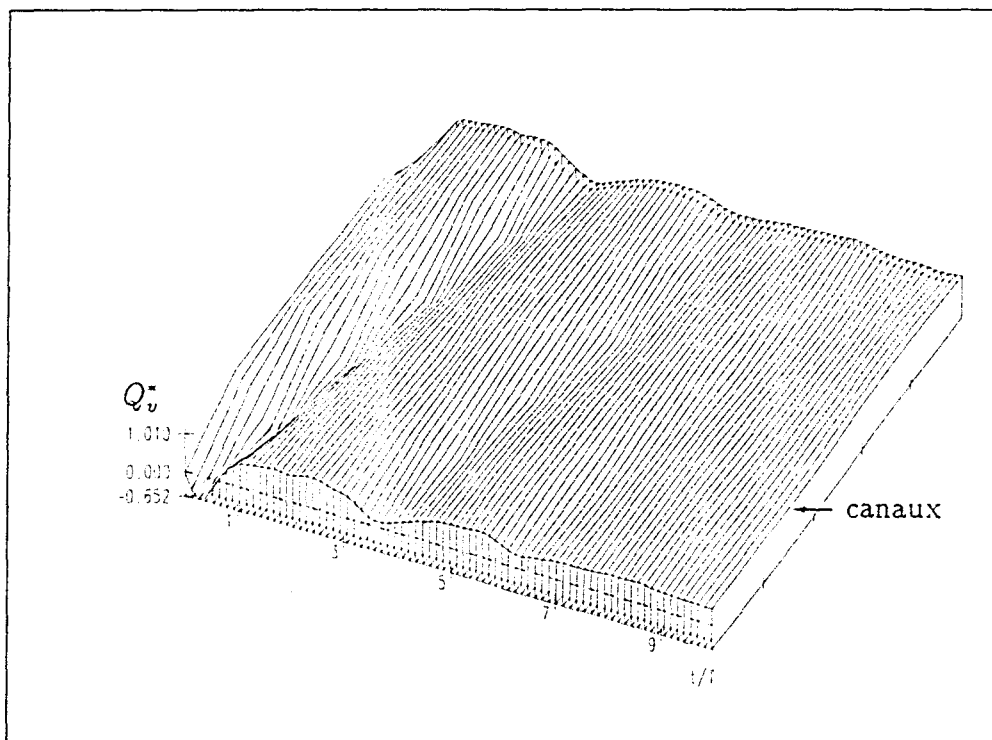


FIG. K.1 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

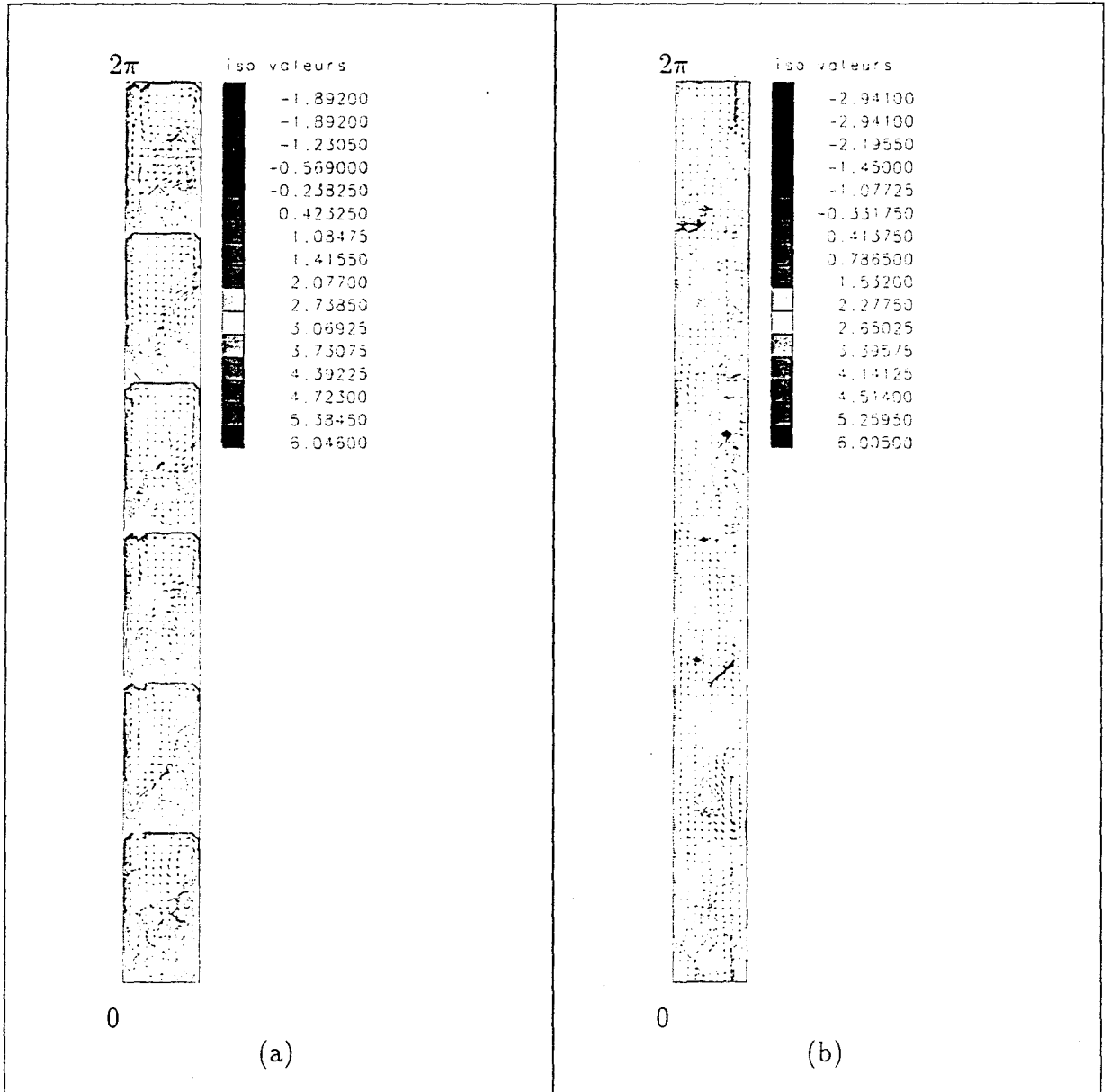


FIG. K.2 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - (a) mi-corde, (b) une 1/2 corde après la sortie de l'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

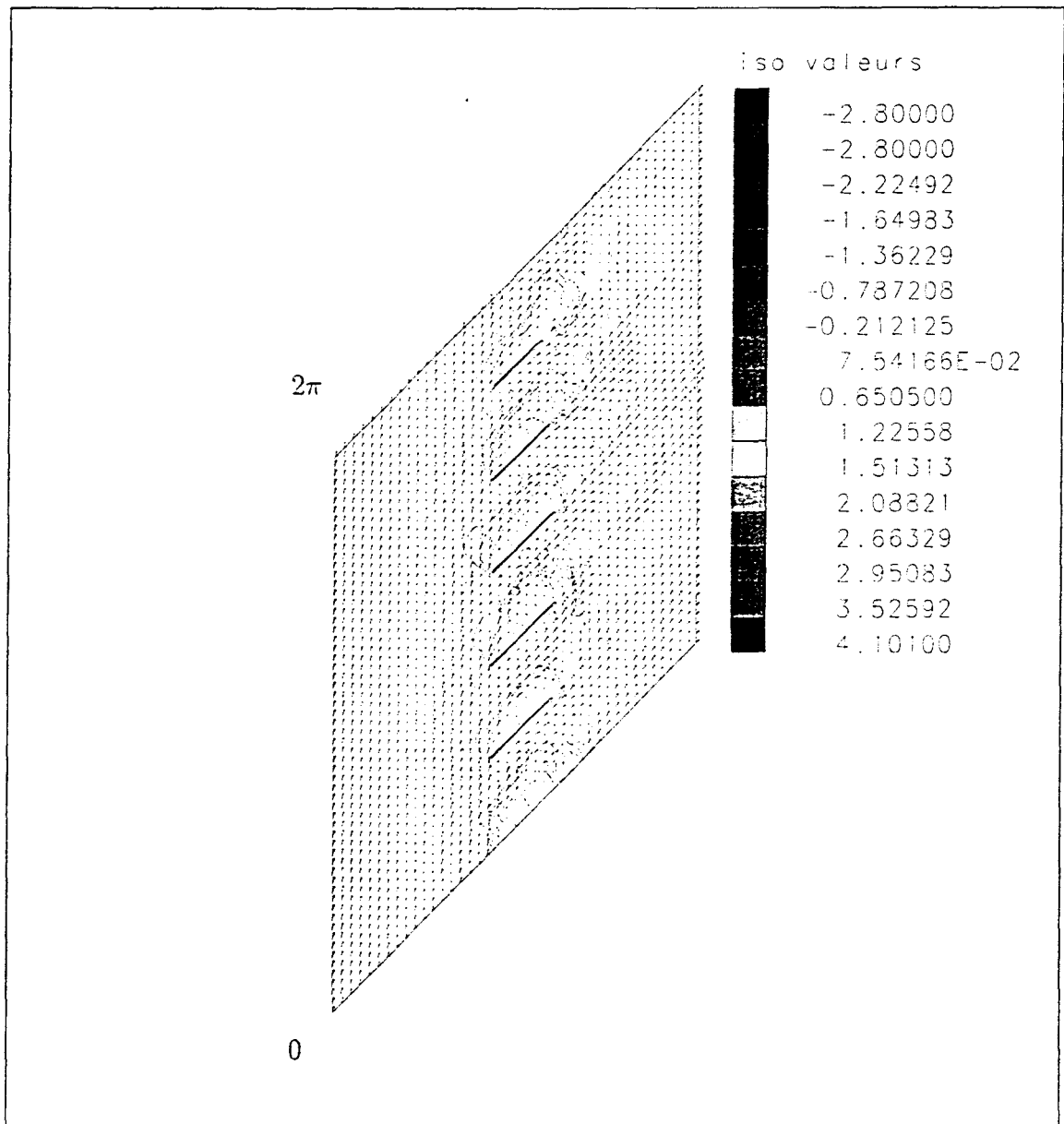


FIG. K.3 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

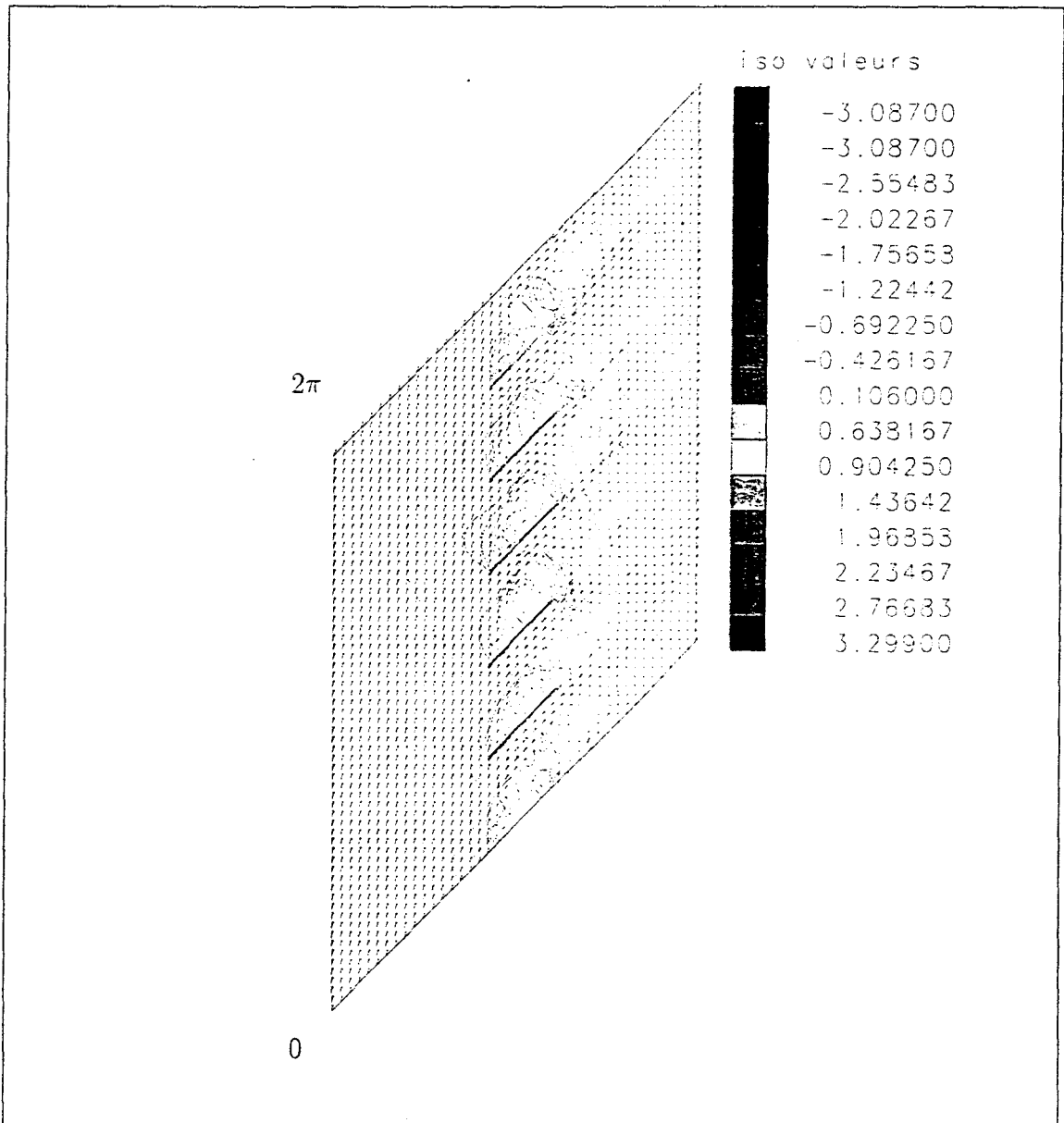


FIG. K.4 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - Champ de vitesse et iso-pressure - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - à mi-envergure - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

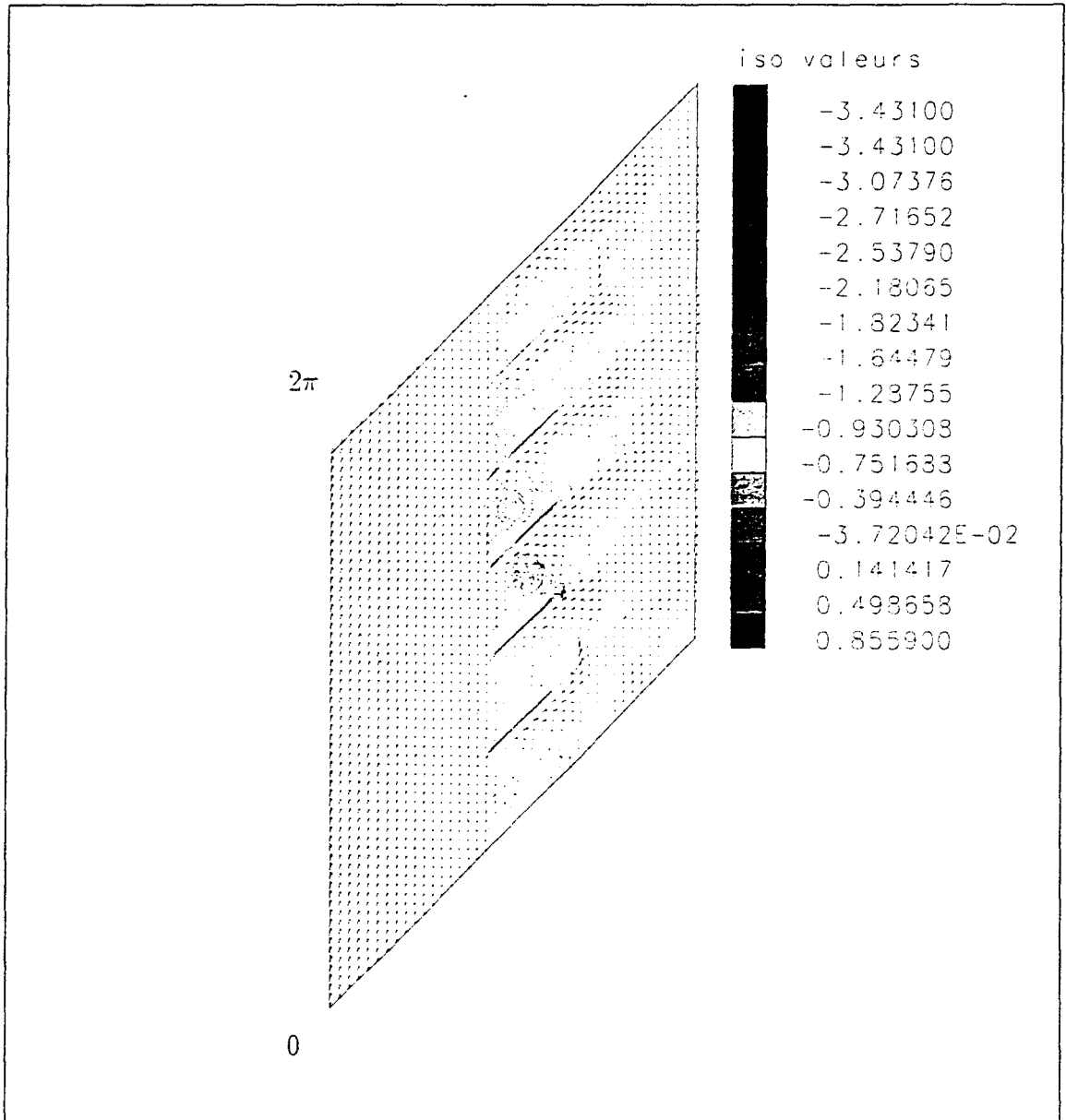


FIG. K.5 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 10$ - $\nu_r = 1.10^{-3}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - proche parois B ("carter") - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

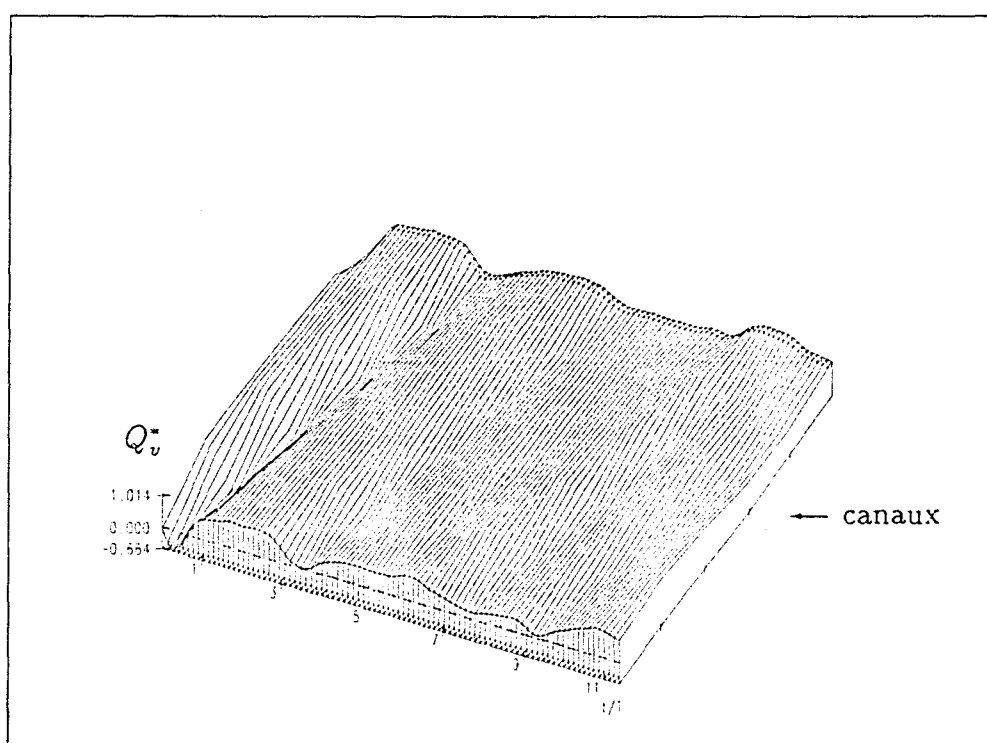


FIG. K.6 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 12,5$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

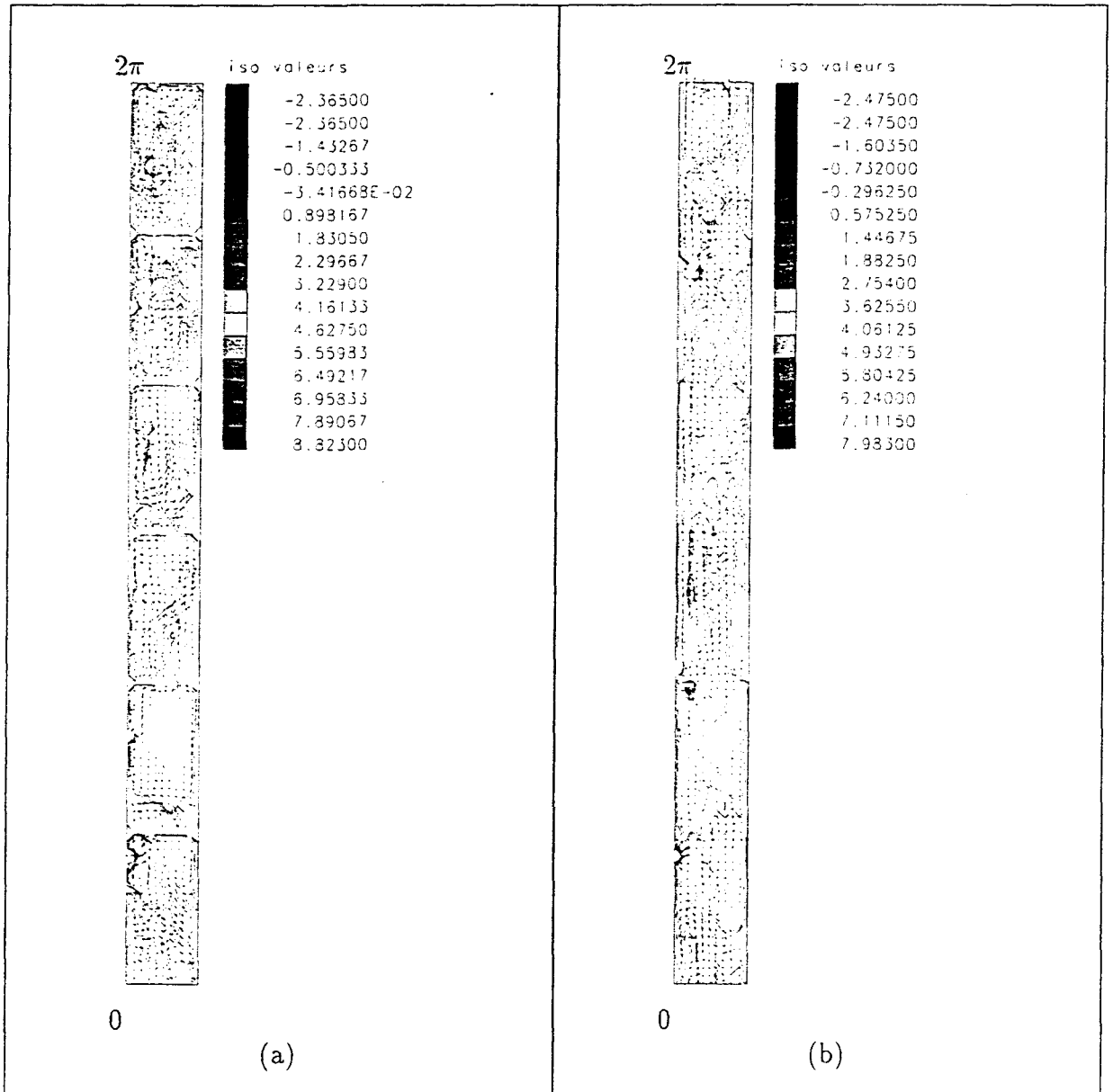


FIG. K.7 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 12,5$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - (a) mi-corde, (b) une 1/2 corde après la sortie de l'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

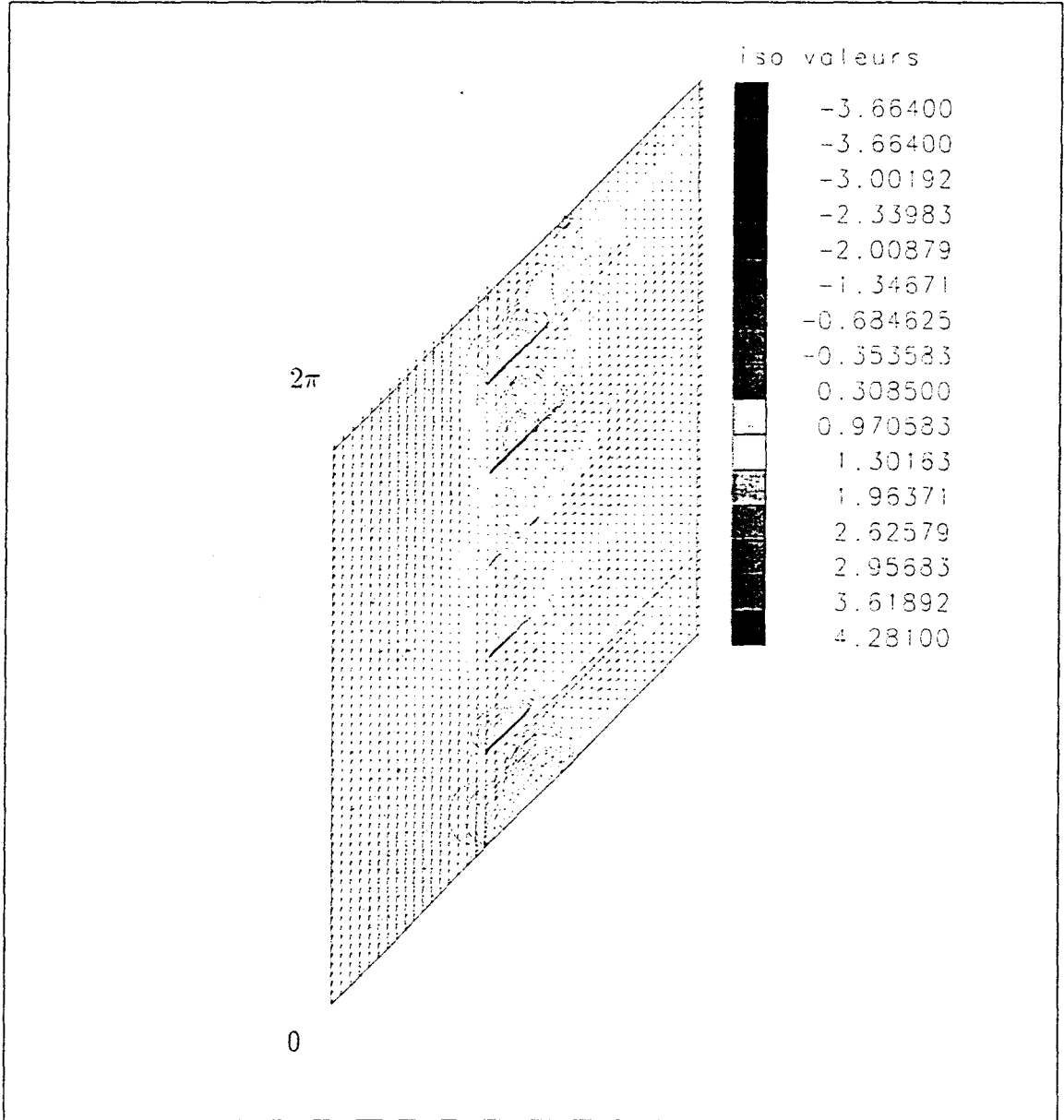


FIG. K.8 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 12,5$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Champ de vitesse et iso-pressure - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

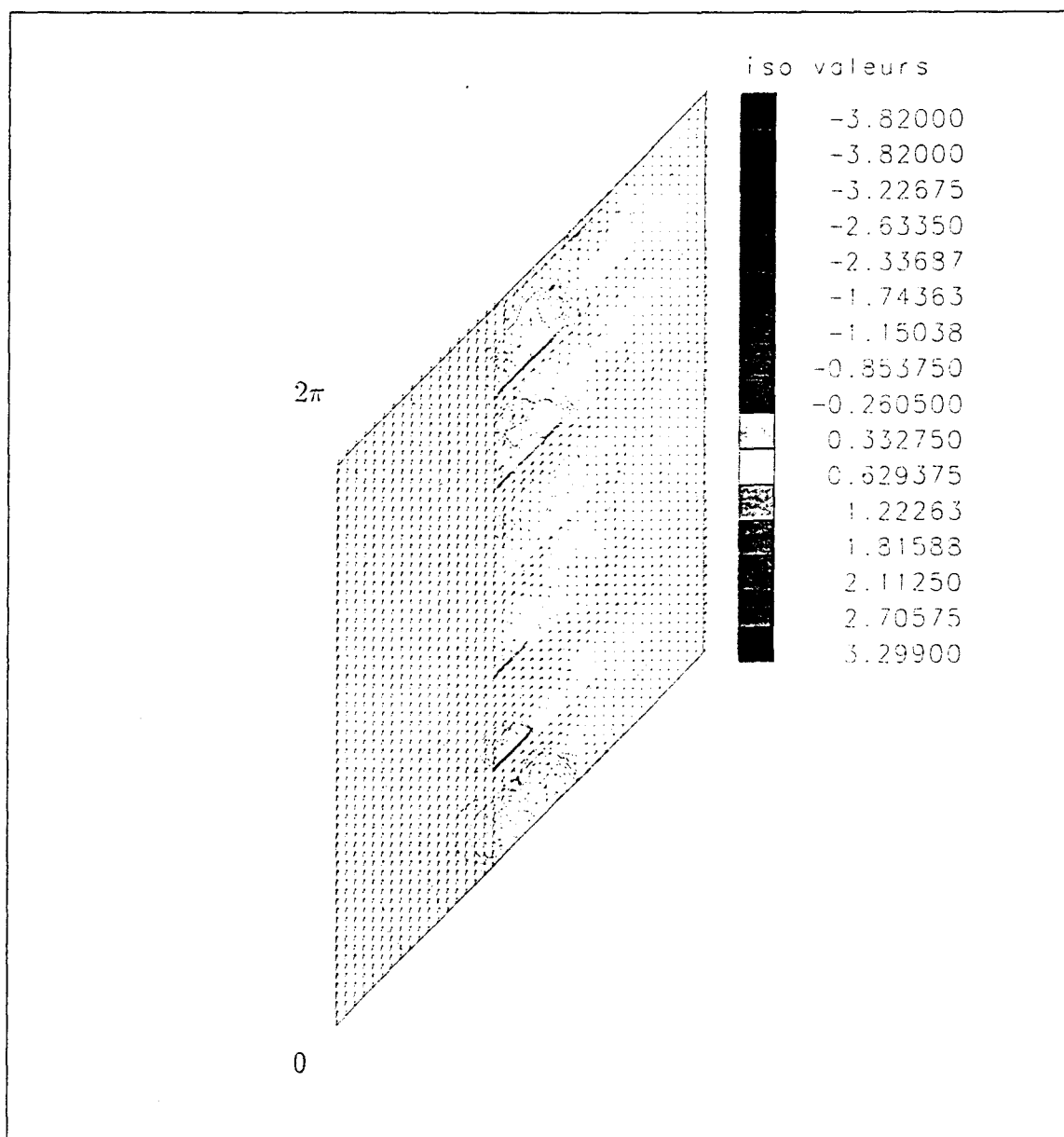


FIG. K.9 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 12,5$ - Champ de vitesse et iso-pression -
 Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - à mi-envergure - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

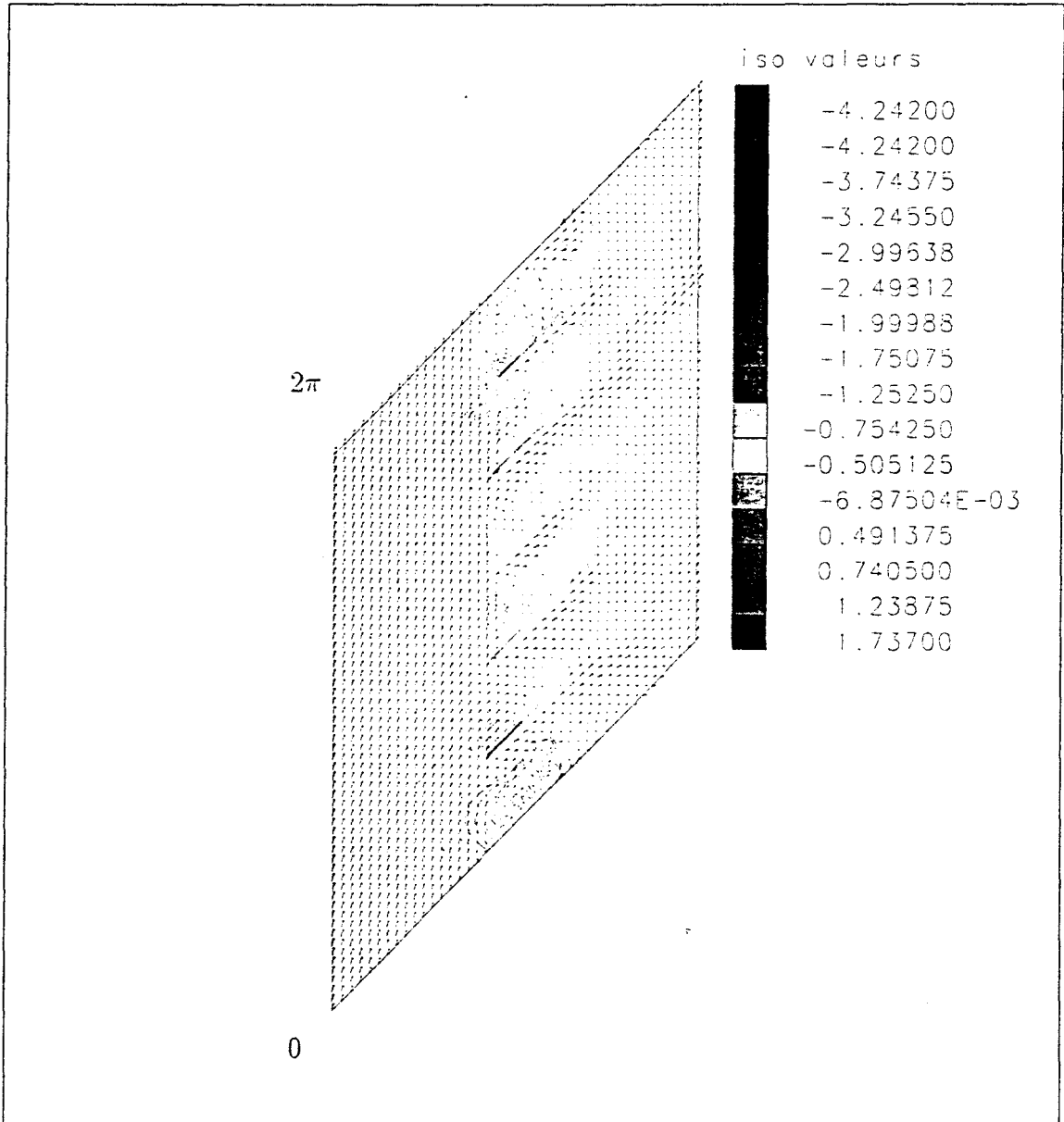


FIG. K.10 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 12,5$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Champ de vitesse et iso-pressure - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - proche parois B ("carter") - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

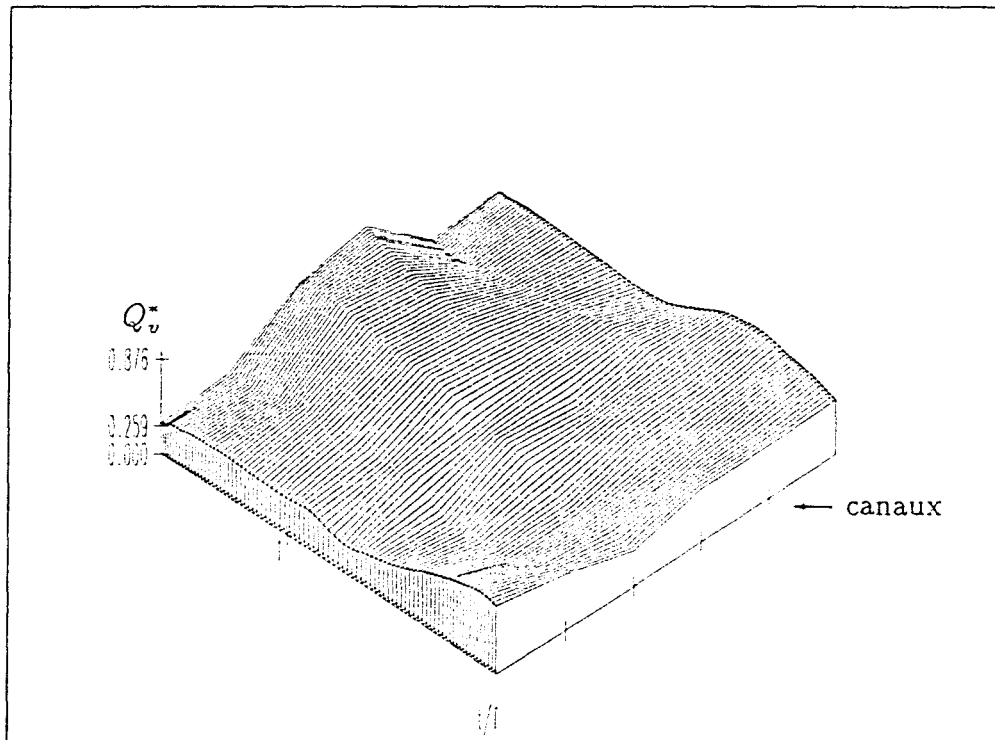


FIG. K.11 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Evolution du débit en fonction du temps - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

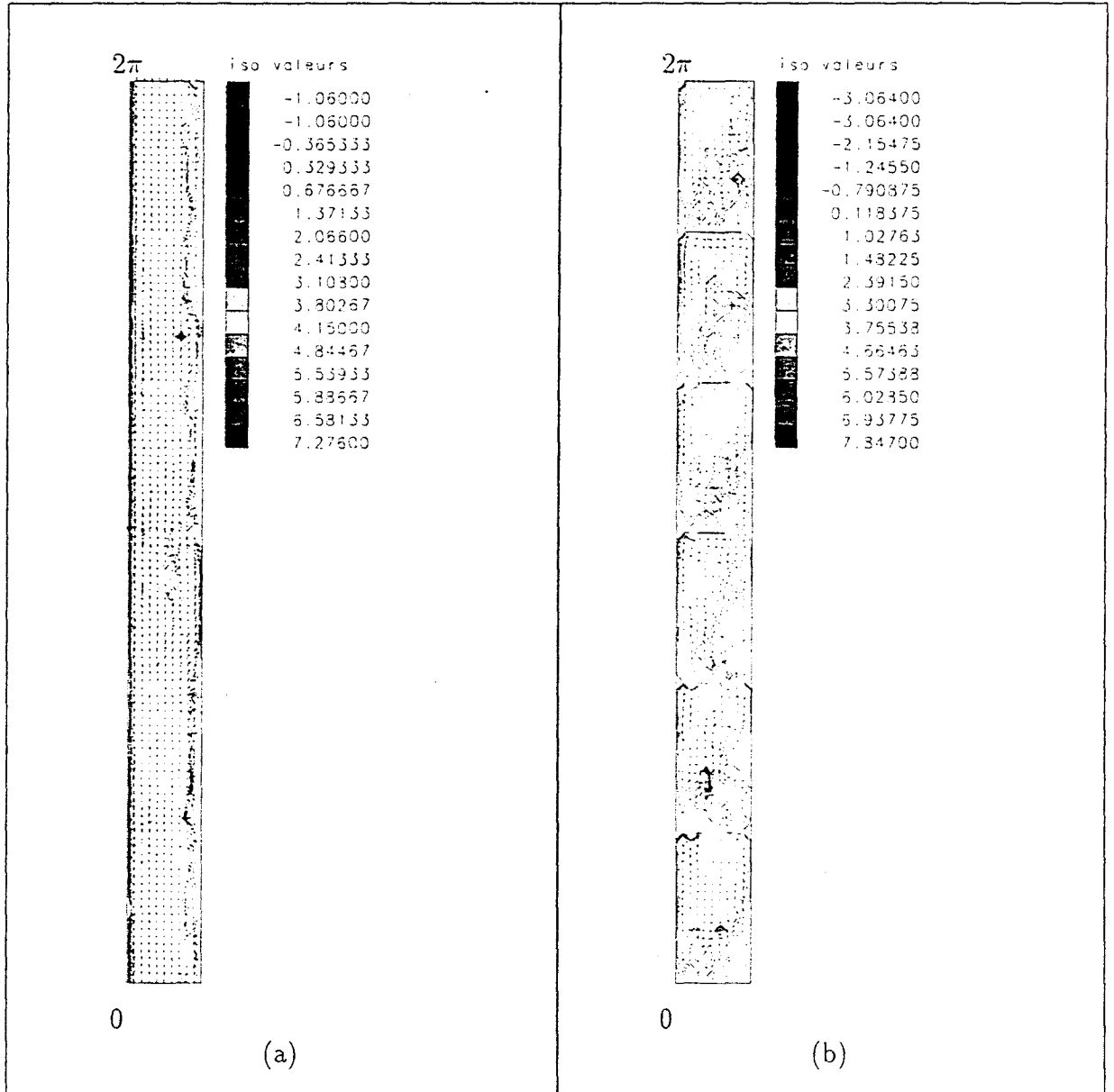


FIG. K.12 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - (a) entrée d'aubage, (b) à mi-corde - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

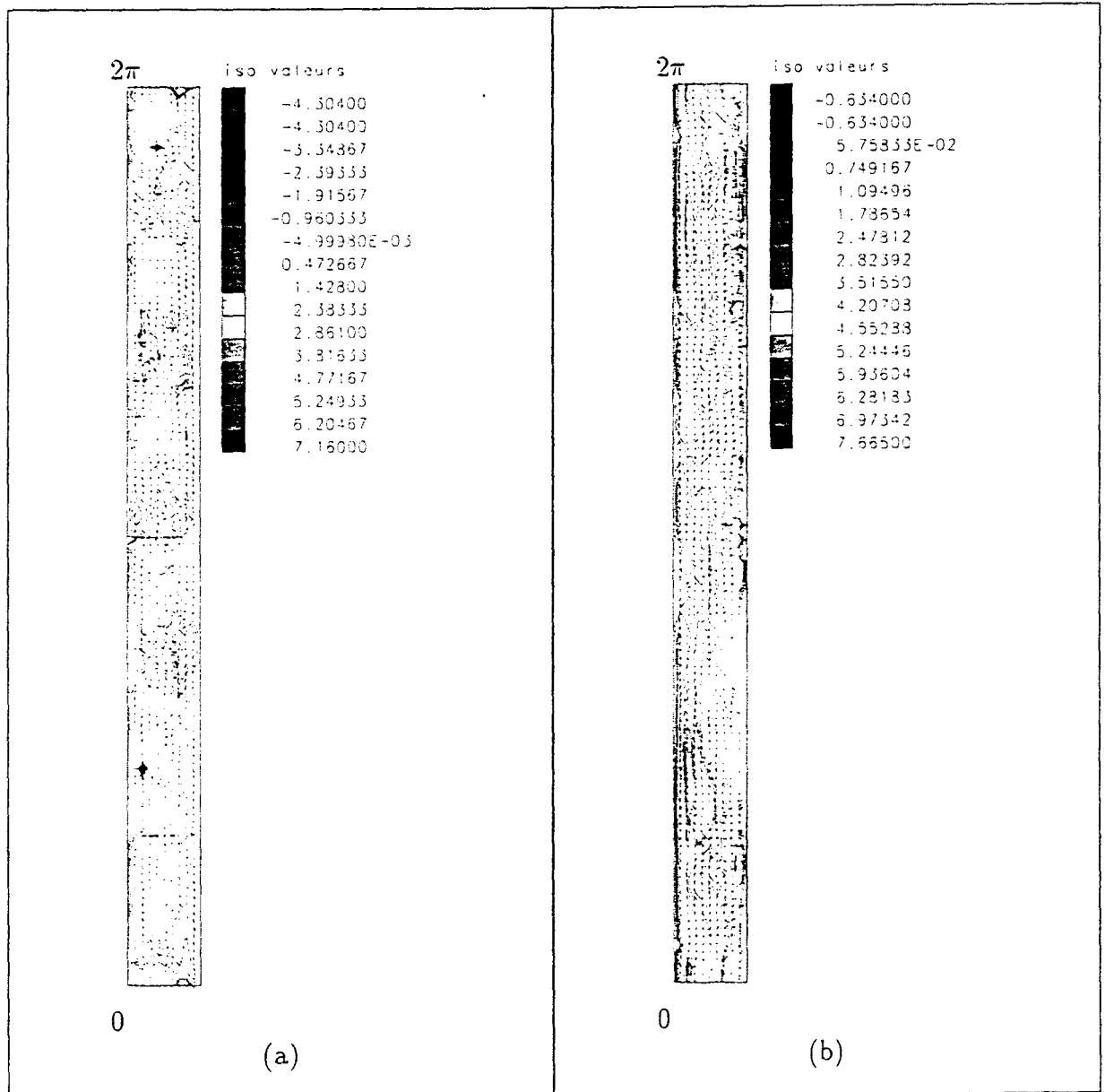


FIG. K.13 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - sortie d'aubage - (a) mi-corde, (b) une corde après la sortie de l'aubage - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

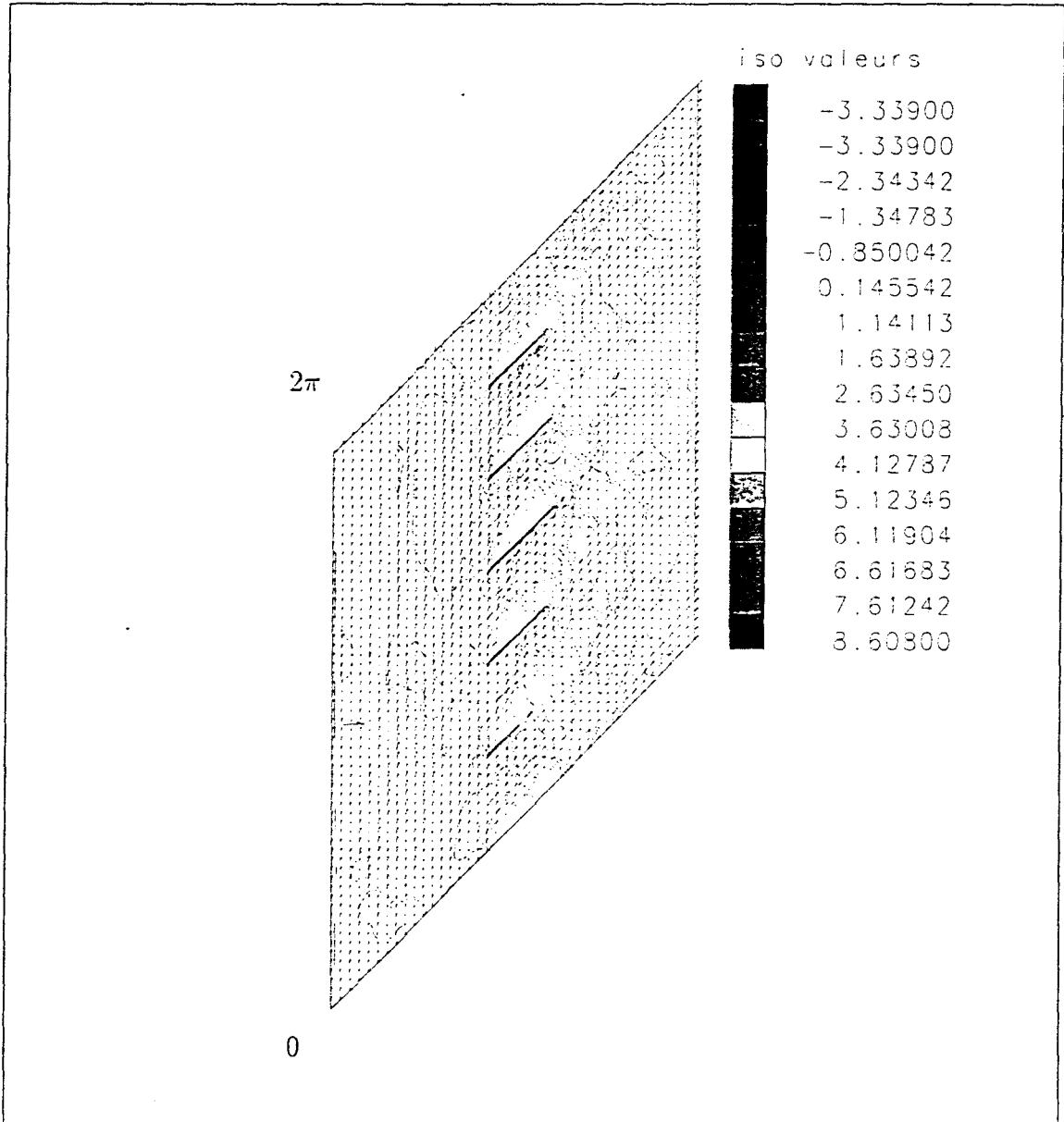


FIG. K.14 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Champ de vitesse et iso-pressure - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - proche parois A ("arbre") ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

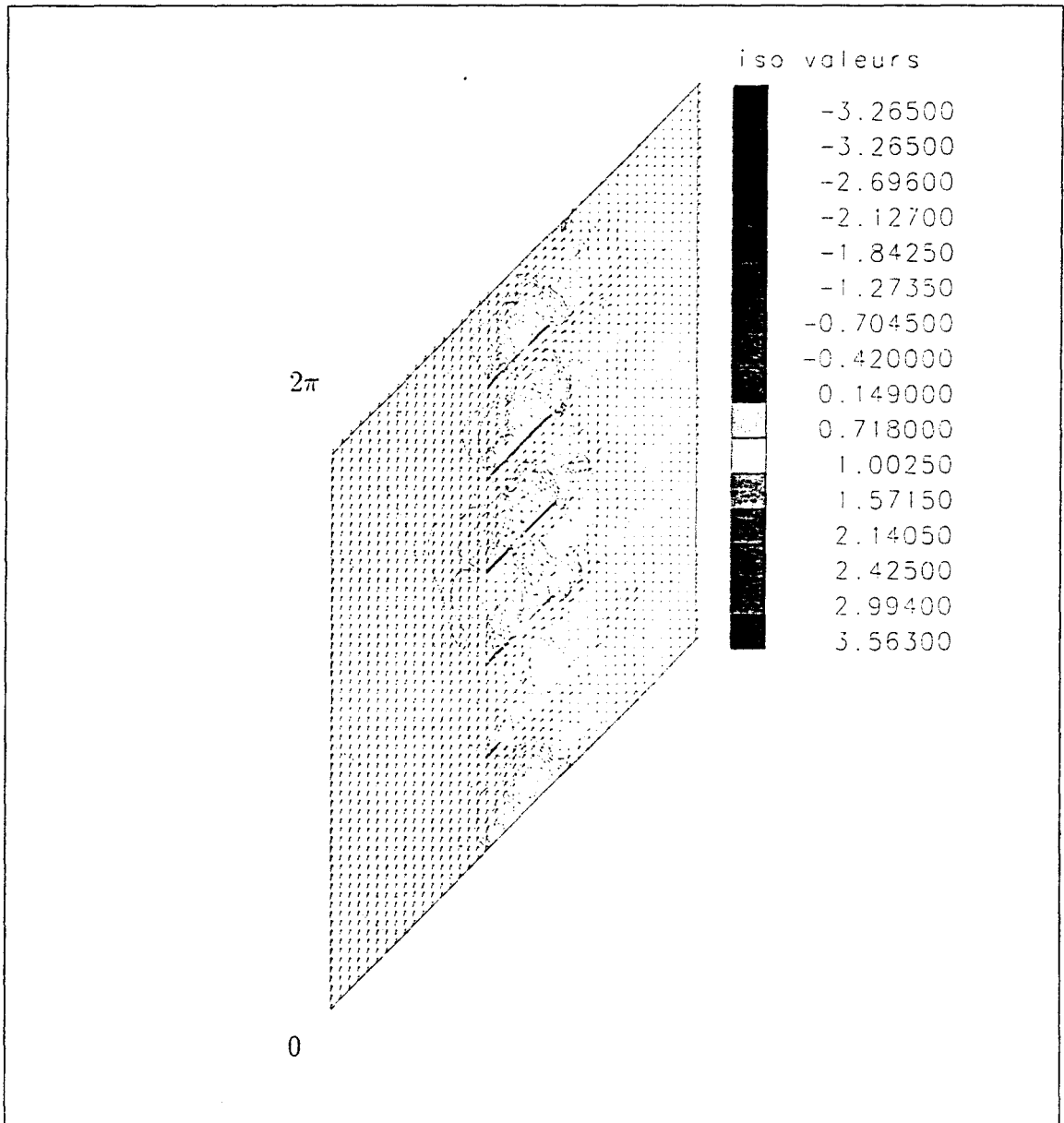


FIG. K.15 - Cas 3D - Envergure : 0,5 - $R_o = 6,2$ - Champ de vitesse et iso-pression -
 Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - à mi-envergure - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

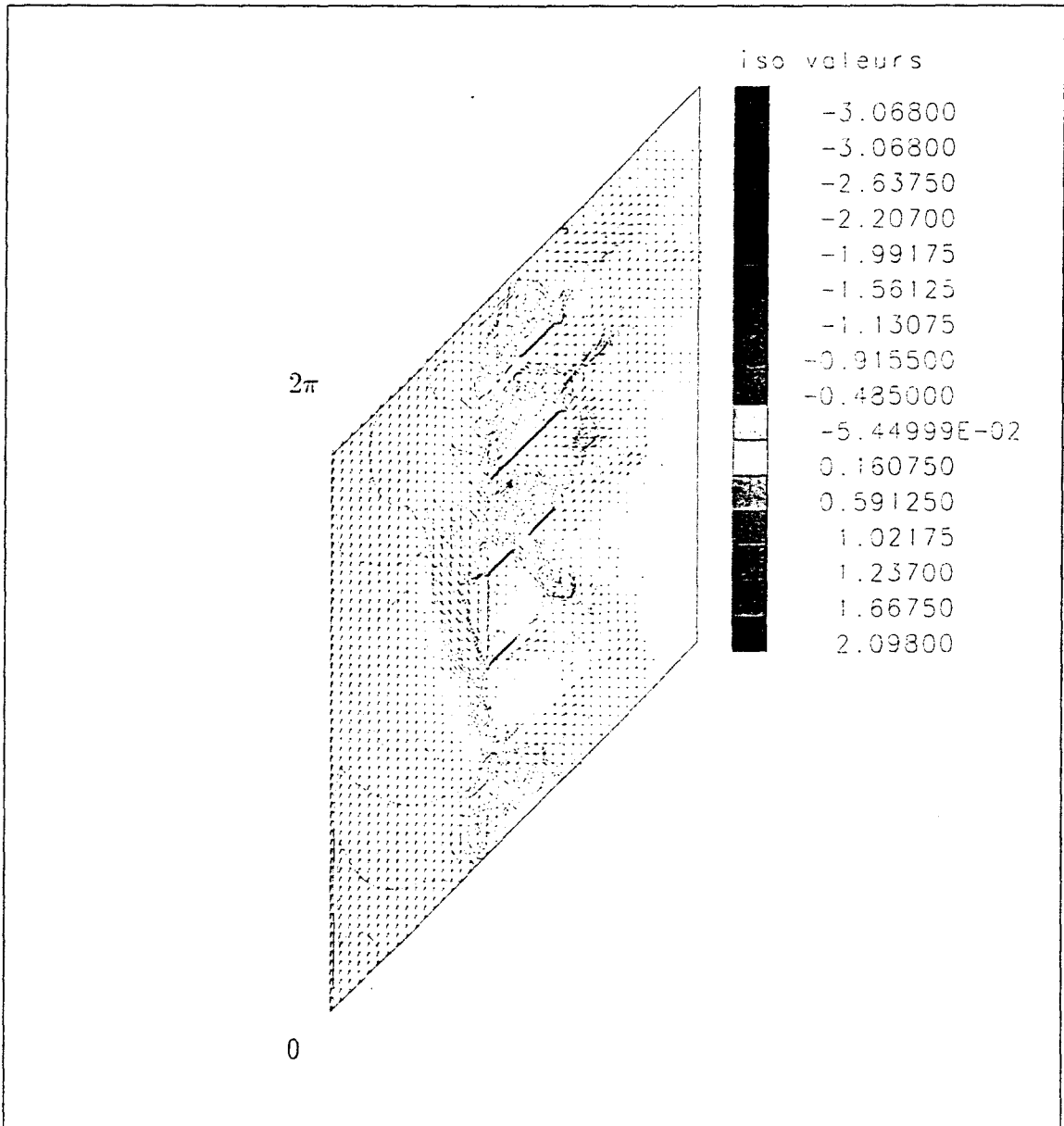


FIG. K.16 - Cas 3D - Envergure: 0,5 - $R_o = 6,2$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - Champ de vitesse et iso-pression - Initialisation: Cellule 2D (essai 19) - proche parois B ("carter") - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)

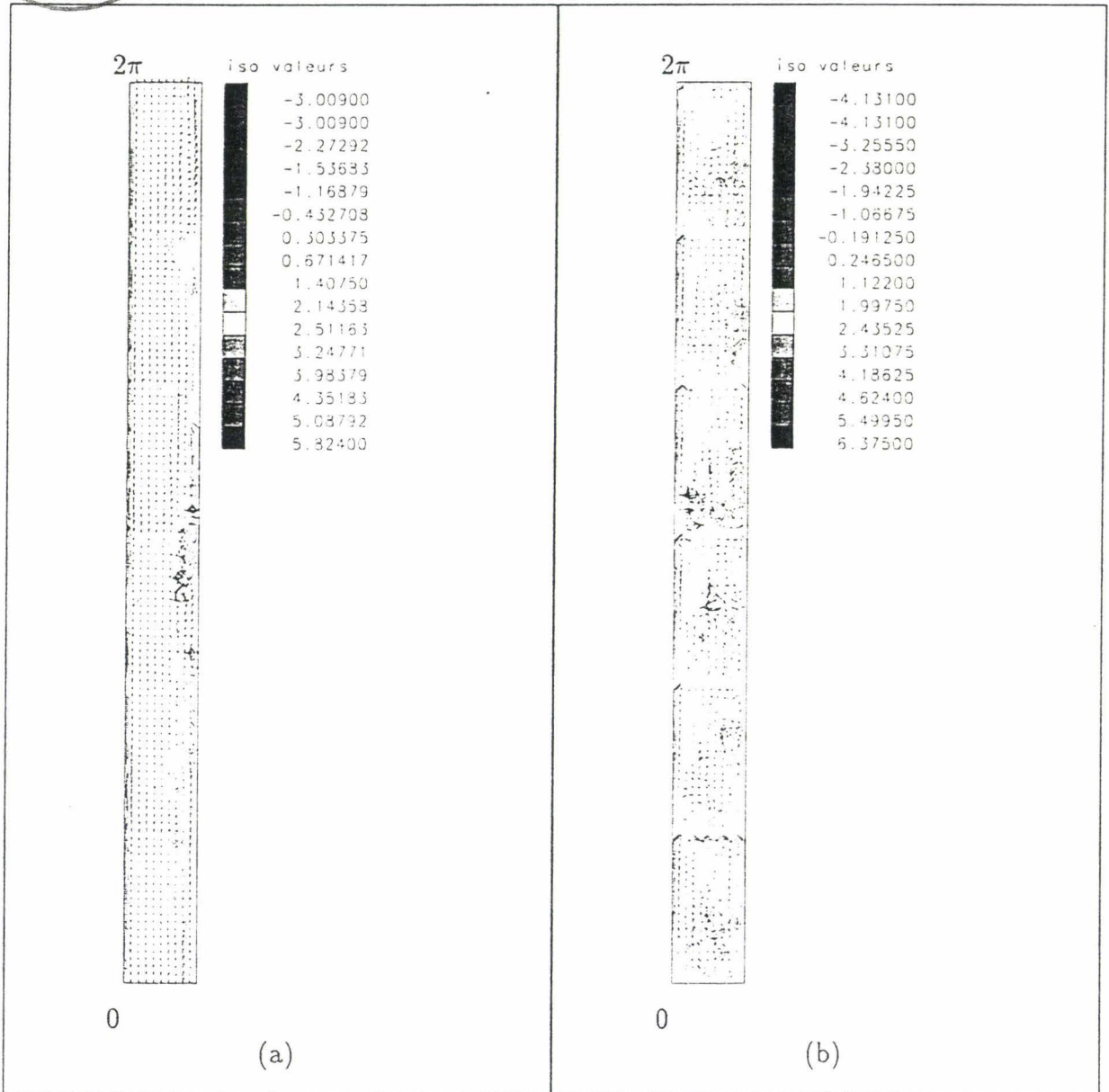


FIG. K.17 - Cas 3D - Envergure : $0,5$ - $R_o = 4,6$ - $\nu_r = 5.10^{-4}$ - iso vitesse débitante et champ de vitesse transverse - schéma : P-C - Initialisation : Cellule 2D (essai 19) - (a) entrée d'aubage, (b) à mi-corde - ($\lambda = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$)