N⁰ d'ordre : 2030

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Hervé GAMMELIN

ESPACES DE GORENSTEIN & APPLICATION D'ÉVALUATION

Soutenue le 5 juillet 1997 devant la Commission d'Examen :

Président :	J. D'ALMEIDA, Université de Lille I
Rapporteurs :	Y. FÉLIX, Université Catholique de Louvain
	A. MURILLO, Université de Malaga
Examinateurs :	N. DUPONT, Université de Lille I
	S. HALPERIN, Université de Toronto
	D. TANRÉ, Université de Lille I
Directeur de thèse :	J.C. THOMAS, Université d'Angers

à *Dolorès*

Remerciements

Je tiens à remercier Jean-Claude Thomas, qui a dirigé cette thèse avec une grande compétence. Ses encouragements, ses questions, ses conseils ont été déterminants pour la réalisation de ce travail. Il m'a initié à la recherche en mathématiques, il m'a appris à rédiger et m'a permis aussi de rencontrer de nombreux autres mathématiciens.

Je remercie très vivement Yves Félix et Aniceto Murillo qui ont bien voulu prendre sur leur temps précieux pour juger ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Jean D'Almeida, Nicolas Dupont, Steve Halperin et Daniel Tanré qui me font l'honneur de participer au jury.

Je suis aussi reconnaissant envers Yves Félix, Steve Halperin et Aniceto Murillo pour les nombreuses conversations qui ont été des plus importantes pour ce travail lors de mes séjours à Louvain, à Malaga et à Toronto. Ils m'ont posé des questions pertinentes, leurs remarques m'ont permis d'établir et de simplifier les démonstrations.

Lors de mes séjours, j'ai toujours été bien accueilli et j'ai une pensée toute particulière à mes amis locaux : Pascal (quand il était 100% belge), Sonia, les deux Antonios (le premier barbu avec de longs cheveux, le second barbu avec de longs cheveux, attention à ne pas les confondre) et Jonathan. Je n'oublie pas les autres, ceux qui ont subi du Gorenstein durant les séminaires et groupes de travail.

Je remercie le CNRS, le Fields Institute, l'Université d'Angers et l'Université de Malaga pour leurs supports financiers indispensables.

Enfin, mes pensées vont à ceux qui ont du et doivent me supporter au quotidien, mes parents et surtout Dolorès à qui je dédie cette thèse.

Table des matières

Introduction

Les espaces à dualité de Poincaré ont été, dans les années soixante, l'objet principal de la topologie algébrique. Ces espaces ressemblent le plus aux variétés différentiables. Henri Poincaré avait établi à la fin du siècle dernier que la cohomologie des variétés compactes orientables possédait une "dualité". En effet, le choix d'une orientation définit une forme bilinéaire non dégénérée :

$$H^*(M;\mathbb{R}) \otimes H^*(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Cette dualité s'étend aux variétés topologiques mais pas aux pseudo-variétés (ou variétés singulières). Par exemple, en 1961, W. Browder établit que les H-espaces finis satisfont la dualité de Poincaré pour tout corps de coefficients. D'autre part, M. Spivak montra que les espaces de Poincaré possède un analogue du fibré normal stable et qu'il existe un classe de Thom-Pontrjagin.

L'étude de la dualité de Poincaré des variétés singulières a connu ces dernières années un essor considérable sous l'impulsion en particulier de Mac Pherson, Goresky, A. Beilison, Jean-Paul Brasselet, Bernstein et Deligne. Ces travaux concernent la théorie de l'intersection et les faisceaux pervers.

Une autre voie, concernant la dualité de Poincaré des variétés algébriques a été ouverte par A. Grothendieck qui a introduit la notion de module dualisant. Daniel Gorenstein puis H. Bass ont été amenés à l'étude de ce que l'on appelle maintenant les anneaux (ou modules) de Gorenstein. Un anneau local (A, m) est dit de Gorenstein si le Ext_A^* $(\mathbb{K}, A)$ est de dimension 1, $\mathbb{K} = A_{/m}$ étant son corps résiduel. David Eisenbud rapporte l'anecdote suivante : Daniel Gorenstein, étudiant de Oscar Zariski, introduit,dans sa thèse, les anneaux de Gorenstein (1952) ; Ensuite, il s'est intéressé aux groupes finis (il a écrit une bible qui l'a rendu célèbre) et il a affirmé qu'il n'avait jamais compris la définition d'un anneau de Gorenstein !

En homotopie rationnelle, une question se posa naturellement dans les années 1985 après le théorème de dichotomie : quelles restrictions sur l'algèbre de Lie d'homotopie d'un espace topologique sont imposées si cet espace a sa cohomologie qui satisfait la dualité de Poincaré ? La réponse à cette question a été obtenue par l'introduction de la notion de Gorenstein sur les algèbres différentielles graduées. Moore a introduit un foncteur $\mathcal{E}$xt différentiel. Yves Félix, Stephen Halperin et Jean-Claude Thomas ont alors posé les définitions suivantes :

Définition 2.2.1
Une algèbre différentielle graduée est dite de Gorenstein sur $\mathbb{K}$ *si* $\mathcal{E}xt_{(A,d)}(\mathbb{K},(A,d))$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension un.*

Définition 2.2.2
Un espace topologique X *est dit de Gorenstein sur* $\mathbb{K}$ *si l'algèbre différentielle graduée* $(C^*(X,\mathbb{K}),d)$ *est de Gorenstein sur* $\mathbb{K}$.

Les espaces de Gorenstein généralisent les espaces dont la cohomologie satisfait la dualité de Poincaré. En effet :

Théorème 2.4.5([8], thm 3.6)
Soit X *un espace de Gorenstein sur* $\mathbb{K}$.
$H^*(X,\mathbb{K})$ *est de dimension finie si et seulement si* $H^*(X,\mathbb{K})$ *satisfait la dualité de Poincaré.*

Ce résultat découle de l'interprétation topologique du $\mathcal{E}xt_{C^*(X;\mathbb{K})}(\mathbb{K},C^*(X;\mathbb{K}))$ lorsque X est un CW-complexe fini, celui-ci est en fait identifié à la cohomologie réduite de la fibre de Spivak de X notée F_X. Cette dernière est de dimension 1 si et seulement si X est un complexe de Poincaré. Goettlieb ([16]) a montré que pour une fibration $F \to E \to B$ de complexes finis, les fibres de Spivak vérifient $F_E \simeq F_F * F_B$, où $*$ est le joint, en particulier si deux des fibres sont des sphères, il est clair que la troisième est aussi une sphère (une sphère est caractérisée par son homologie), d'où E est un complexe de Poincaré si et seulement si B et F sont des complexes de Poincaré. Yves Félix,Steeve Halperin et Jean-Claude Thomas dans ([8], thm 3.4), en ont donné une version $\mathbb{Q}$-locale, dont les hypothèses ont été affinées par Aniceto Murillo dans [27] dont voici l'énoncé :

Théorème 2.5.2
Soit $F \to E \xrightarrow{\rho} B$ *une fibration d'espaces simplement connexes telle que l'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :*

(i) $H^*(F,\mathbb{Q})$ *est de dimension finie.*

(ii) $\pi_*(F)\otimes\mathbb{Q}$ *est de dimension finie et* $\pi_*(\rho)\otimes\mathbb{Q}$ *est surjective.*

Alors on a un isomorphisme explicite :

$$\varphi\ :\ \mathcal{E}xt_{C^*(B;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q},C^*(B;\mathbb{Q}))\hat{\otimes}\,\mathcal{E}xt_{C^*(F;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q},C^*(F;\mathbb{Q}))\xrightarrow{\cong}\mathcal{E}xt_{C^*(E;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q},C^*(E;\mathbb{Q}))$$

En particulier, E *est un espace de Gorenstein sur* $\mathbb{Q}$ *si et seulement si* B *et* F *le sont.*

Ce théorème n'a évidemment d'intérêt que si l'on connaît des espaces de Gorenstein autres que les complexes de Poincaré. Félix, Halperin et Thomas ont prouvé que les espaces dont l'homotopie (rationnelle) est finie sont aussi des espaces de Gorenstein (sur $\mathbb{Q}$) (cf proposition 2.5.3). On peut alors construire différents types espaces de Gorenstein (sur $\mathbb{Q}$) dont voici l'exemple le plus important, $\mathbf{G}_N$, défini par

Définition 5.2.2
Un espace topologique rationnel 1-connexe B de type fini sera dit de type $\mathbf{G}_N$ s'il existe une fibration d'espaces rationnels 1-connexes de type fini :

$$B \longleftarrow E \longleftarrow F$$

où E a sa cohomologie qui satisfait la dualité de Poincaré et F a son homotopie finie.

L'ensemble des espaces de type $\mathbf{G}_N$ est inclus dans l'ensemble des espaces de Gorenstein (sur $\mathbb{Q}$). Il est alors naturel d'étudier le comportement de ces espaces avec une fibration. Pour cela, nous avons été amené à introduire une hypothèse sur la fibration : la e-minimalité, hypothèse qui englobe les deux cas du théorème 2.5.2. Une fibration $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$, où B, E et F sont 1-connexes, sera dite e-minimale si l'inclusion de la fibre $j : F \to E$ induit des homomorphismes injectifs $\pi_{2k}(j) \otimes \mathbb{Q} : \pi_{2k}(F) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_{2k}(E) \otimes \mathbb{Q}$, $k \geq 1$ ou de manière équivalente, la projection $E \xrightarrow{p} B$ induit des homomorphismes surjectifs $\pi_{2k+1}(j) \otimes \mathbb{Q} : \pi_{2k+1}(F) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_{2k+1}(E) \otimes \mathbb{Q}$, $k \geq 1$.

Nous établissons alors le théorème suivant :

Théorème 6.2.1
Soit la fibration e-minimale : $B \longleftarrow E \longleftarrow F$ avec F de type $\mathbf{G}_N$.

i) Si B est de type $\mathbf{G}_N$, alors E est aussi de type $\mathbf{G}_N$.

ii) Si B est dans $\mathbf{G}$, alors E est aussi dans $\mathbf{G}$.

Ce théorème nous assure que tous les espaces de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$ que l'on sait construire sont de type $\mathbf{G}_N$.

D'autre part, Yves Félix, Stephen Halperin et Jean-Claude Thomas ont défini l'application d'évaluation d'un espace X, comme une application linéaire, notée ev_X, de $\mathcal{E}xt_{C^*(X;\mathbb{K})}(\mathbb{K}, C^*(X;\mathbb{K}))$ dans $H^*(X,\mathbb{K})$. Son image est dans le socle de $H^*(X,\mathbb{K})$ (l'intersection de tous les annulateurs), sous ensemble très particulier de $H^*(X,\mathbb{K})$. Cette application est non nulle si l'espace X admet une cellule terminale, i.e. $X = Y \cup_f e^n$ (prop. 3.4.1). Donc, elle est non nulle pour les complexes de Poincaré.

Pour les espaces de Gorenstein en général, le $\mathcal{E}xt_{C^*(X;\mathbb{K})}(\mathbb{K}, C^*(X;\mathbb{K}))$ est de dimension 1, l'évaluation est donc plus facile à étudier. On s'intéresse au cas où elle est non nulle, il existe alors un élément particulier de $H^*(X,\mathbb{K})$.

Aniceto Murillo a étudié l'application d'évaluation, en a donnée diverses interprétations et a montré le résultat suivant :

Théorème 7.1.1([28], théorème A)
Soit S un espace topologique 1-connexe tel que $\pi_*(S)\otimes\mathbb{Q}$ soit de dimension finie. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $H^*(S;\mathbb{Q})$ est de dimension finie.

(ii) ev_S est non nulle.

D'autre part Yves Félix et Aniceto Murillo ont montré le résultat suivant :

Théorème ([12], théorème 2)
Soit S un CW-complexe 1-connexe. Supposons que $G = H_*(\Omega S;\mathbb{K})$ soit une algèbre de Hopf de Gorenstein. Alors il y a équivalence entre les propositions suivantes:

(i) la cohomologie satisfait la dualité de Poincaré

(ii) l'évaluation est non nulle

Puisque les espaces dont l'homotopie rationnelle est de dimension finie sont de Gorenstein, ces résultats nous engagent à poser naturellement la question suivante :

Question

Pour les espaces de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$, y-a-t-il équivalence entre les propositions suivantes:

(i) la cohomologie satisfait la dualité de Poincaré

(ii) l'évaluation est non nulle

Le sens $(i) \Rightarrow (ii)$ est connu, le théorème 2.4.5 nous réduit la question à :
Pour un espace X de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$ dont l'évaluation est non nulle, $H^*(X;\mathbb{Q})$ est-elle de dimension finie ?

On peut tout d'abord affaiblir la question en supposant que X admet une cellule terminale. La réponse est affirmative, ce pour n'importe quel corps :

Théorème 3.5.4
Soit un espace de Gorenstein 1-connexe de type fini.
Si il admet une cellule terminale alors sa cohomologie satisfait la dualité de Poincaré.

D'autre part, comme les espaces de type $\mathbf{G}_N$ contiennent tous les espaces de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$ que nous savons construire, la réponse partielle à la question, illustrée par le théorème suivant, nous engage à penser qu'il y de grandes chances pour une réponse positive :

Théorème 7.2.1
Soit X de type $\mathbf{G}_N$.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $H^*(X;\mathbb{Q})$ *est de dimension finie.*

(ii) ev_X *est non nulle.*

L'intérêt de $\mathbf{G}_N$ est donc double, il permet de décrire une grande partie des espaces de Gorenstein et de répondre à la question pour une grande classe d'espaces de Gorenstein. On trouvera aussi dans cette thèse un autre résultat sur l'évaluation avec les espaces de type $\mathbf{G}_N$ (thm 7.4.1).

Finalement, on s'intéressera aussi au cas où la cohomologie est de Gorenstein (prop. 2.7.1 et 7.6.2), on en déduira :

Théorème 7.6.1
Soit S un espace de Gorenstein 1-connexe. Alors

$$ev_S \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} S \text{ est un complexe de Poincaré sur } \mathbb{Q} \\ \text{ou} \\ H^*(S;\mathbb{Q}) \text{ n'est pas noethérienne et} \\ \text{n'est pas de Gorenstein.} \end{cases}$$

Théorème 7.7.1
Soit X un espace formel de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$, alors

$$\mathrm{ev}_X \neq 0 \Rightarrow H^*(X,\mathbb{Q}) \in \mathbf{DP}$$

La suite s'organise de la manière suivante : les trois premiers chapitres sont essentiellement des rappels, on y trouvera toutefois la preuve du théorème 3.5.4. Le chapitre 4 est entièrement dévoué aux exemples divers et variés, traités avec différentes méthodes. Le chapitre 5 met en place les définitions de quelques ensembles d'espaces de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$. Le chapitre 6 est consacré à la preuve du théorème 6.2.1 et à ses conséquences. Le dernier chapitre contient tous les résultats sur l'évaluation, notamment le théorème 7.2.1.

Chapitre 1

Préliminaires algébriques

1.1 Algèbres graduées différentielles

1.1.1 Une algèbre différentielle graduée (adg) est une algèbre graduée (associative) $A = \{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ avec unité $1 \in A_0$ et munie d'une différentielle satisfaisant $d(xy) = (dx)y + (-1)^{|x|}x(dy)$ (d est une dérivation). Il s'en suit que l'image Im (d) est un idéal de la sous-algèbre graduée du noyau Ker (d). $H(A)$ possède donc une structure d'algèbre graduée.

1.1.2 Un morphisme $\varphi : (A, d) \to (B, d)$ d'adg est un morphisme d'espace vectoriel gradué qui préserve les produits et l'unité ; ainsi, $H(\varphi)$ est un morphisme d'algèbres graduées. Si $H(\varphi)$ est un isomorphisme, on dit alors que φ est un quasi-isomorphisme (ou, en abrégé, quism) d'adg (noté $\xrightarrow{\simeq}$).

1.1.3 L'ensemble de graduation des adg est souvent $\mathbb{N}$ ou $-\mathbb{N}$, pour ce dernier cas, on note par convention A^n pour A_{-n}.

1.1.4 Un module gradué différentiel (à gauche) sur une adg (A, d), est un espace vectoriel gradué différentiel muni d'une application linéaire de degré zéro $A \otimes M \to M$, $a \otimes m \mapsto a.m$, telle que $(aa').m = a.(a'.m)$, $1.m = m$ et $d(a.m) = da.m + (-1)^{|a|}a.dm$.

1.1.5 Un morphisme de (A, d)-modules (à gauche) ou application A-linéaire (de degré i) est une application linéaire $f : M \to N$ (de degré i) telle que $f(a.m) = (-1)^{i|a|}a.(f(m))$. Ces applications A-linéaires $(\mathrm{Hom}_A(M, N), \mathcal{D})$ forment un sous-espace vectoriel gradué différentiel de $(\mathrm{Hom}(M, N), \mathcal{D})$ avec la différentielle

$$\mathcal{D}f = d_N \circ f - (-1)^{|f|}f \circ d_M$$

Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, -)$ ne préserve pas les quasi-isomorphismes.
Nous allons donc introduire les résolutions semilibres qui sont les analogues différentiels des résolutions projectives.

1.2 Modules semilibres.

Définition 1.2.1
Un module gradué M sur une algèbre A est appelé A-libre si il est de la forme $M \cong A \otimes V$ avec V espace vectoriel gradué.

Soit (A, d) une algèbre différentielle graduée.

Définition 1.2.2

(i) *Un (A,d)-module (P,d) est une extension semilibre d'un (A,d)-module (M,d) si il peut s'écrire comme l'union d'une famille de (A,d)-sous-modules $P(-1) \subset P(0) \subset \ldots$, tels que $P(-1) = (M,d)$ et, pour tout $k \geq 0$, $P(k)/P(k-1)$ soit A-libre sur une base de cycles. Si $M = 0$, (P,d) est un (A,d)-module semilibre.*

(ii) *Soit $f : (M,d) \to (N,d)$ un morphisme de (A,d)-modules. Une résolution semilibre de f est une extension semilibre (P,d) de (M,d) munie d'un quasi-isomorphisme de (A,d)-modules $(P,d) \xrightarrow{\simeq} (N,d)$ se restreignant à f sur (M,d).*

(iii) *Une résolution semilibre d'un (A,d)-module (N,d) est une résolution semilibre de $0 \to (N,d)$.*

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.2.3

(i) *Tout morphisme $f : (M,d) \to (N,d)$ de (A,d)-modules admet une résolution semilibre $(Q,d) \xrightarrow{\simeq} (N,d)$. En particulier, tout (A,d)-module admet une résolution semilibre.*

(ii) *Si (P,d) est un (A,d)-module semilibre, alors $\mathrm{Hom}_A(P,-)$ préserve les quasi-isomorphismes.*

(iii) *Si $(A,d) \xrightarrow{\simeq} (B,d)$ est un quasi-isomorphisme d'adg, alors les modules différentiels gradués $\mathrm{Hom}_A(P,N)$ et $\mathrm{Hom}_B(P,N)$ sont aussi quasi-isomorphes.*

Proposition 1.2.4
Si (P,d) est un (A,d)-module semilibre et $f : (M,d) \to (N,d)$ un quism de (A,d)-modules à gauche, alors :

$$P \otimes_A f : P \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A N$$

est encore un quism.

1.3 Le foncteur $\mathcal{E}xt$ différentiel.

1.3.1 Rappelons d'abord que, si R est un anneau, on utilise les résolutions projectives pour calculer $\mathrm{Ext}_R(-,-)$, le foncteur dérivé de $\mathrm{Hom}_R(-,-)$:

$$Ext_R^{p,q}\ (M,N) = H^{p+q}\left(\mathrm{Hom}_R(P_p,N),D\right)$$

où $P_* \xrightarrow{\simeq} M$ est une résolution projective du R-module M (qui permet de définir la différentielle D). Ceci est illustré par un exemple dans la section 4.3.
Dans le cadre différentiel, il est classique de définir l'analogue $\mathcal{E}xt^*$ du foncteur $Ext^{*,*}\ (\ ,\ )$:

Définition 1.3.2
Si (M,d_M) et (N,d_N) sont des (A,d)-modules à gauche, et si $(P,d_P) \xrightarrow{\simeq} (M,d_M)$ est une (A,d)-résolution semilibre, alors

$$\mathcal{E}xt^*_{(A,d)}\ ((M,d_M),(N,d_N)) = H^*\left(\mathrm{Hom}_{(A,d)}\left((P,d_P),(N,d_N)\right),\mathcal{D}\right)$$

Cette définition est indépendante du choix de (P,d_P).

1.3.3 Si (P,d_P) est une résolution (A,d)-semilibre d'un (A,d)-module (Q,d_Q), alors $\mathrm{Hom}_A(P,-)$ est un foncteur exact. Donc, de toute suite exacte courte de (A,d)-modules:

$$0 \longrightarrow (N,d_N) \longrightarrow (M,d_M) \longrightarrow (M_{/N},\bar{d}) \longrightarrow 0$$

On en déduit la longue suite exacte:

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^{i-1}\ (Q,M_{/N}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathcal{E}xt_A^i\ (Q,M) \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^i\ (Q,N) \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^i\ (Q,M_{/N}) \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^i\ (Q,M) \longrightarrow \ldots$$

1.3.4 Ici, on s'intressera essentiellement au $\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K},A)$. C'est un invariant de l'adg (A,d) comme le prouve la proposition suivante. Dans le cas où $A = C^*(X;\mathbb{K})$, avec X CW-complexe fini, cet invariant a une interprétation topologique : c'est la cohomologie réduite de la fibre de Spivak (cf proposition 2.4.4).

Proposition 1.3.5
Si on a un quasi-isomorphisme d'adg augmentées $A \xrightarrow{\simeq} B$, on peut alors identifier $\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K},A)$ avec $\mathcal{E}xt_B\ (\mathbb{K},B)$ via les isomorphismes :

$$\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K},A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K},B) \xleftarrow{\cong} \mathcal{E}xt_B\ (\mathbb{K},B)$$

1.4 Modèle de Sullivan, KS-extensions

Dans cette section, nous ne rappellerons que les résultats, pour les démonstrations et détails, nous renvoyons à [18], [32] et [9]. Nous travaillerons exclusivement sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

1.4.1 Une algèbre différentielle graduée commutative (adgc) est une adg telle que

$$a.b = (-1)^{|a|.|b|}b.a$$

Un morphisme d'adgc est un morphisme d'adg. On note $ADGC$ la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives.
Une adgc (A, d_A) est dite r-connexe si $A^0 = \mathbb{Q}$ et $A^i = 0$ pour $1 \leq i \leq r$.

1.4.2 Soit V^* un espace vectoriel gradué, ΛV désigne l'algèbre graduée commutative engendrée par V. L'algèbre graduée ΛV est le produit tensoriel de l'algèbre extérieure engendrée par V^{impair} avec l'algèbre symétrique engendrée par V^{pair} :

$$\Lambda V = \text{Exterieure}(V^{imp.}) \otimes \text{Symétrique}(V^{paire})$$

Si l'espace vectoriel V admet comme base $\{v_1, \ldots, v_n\}$, par convention, on notera alors ΛV par $\Lambda(v_1, \ldots, v_n)$.
On désigne par $\Lambda^p V$ le sous-espace vectoriel des mots de longueur p, et $\Lambda^{\geq p} V$ l'idéal engendré par $\Lambda^p V$, i.e. le sous-espace vectoriel des mots de longueur $\geq p$.

1.4.3 Un KS-complexe est une adgc $(\Lambda X, d)$, où $X = X^{\geq 0}$ admet une base bien ordonnée $\{x_\alpha\}$ vérifiant $dx_\alpha \in \Lambda(X_{<\alpha})$. Il est dit minimal si $i \leq j$ implique $|x_i| \leq |x_j|$; si $(\Lambda X, d)$ est 1-connexe ($X^1 = 0$) cette condition est équivalente à $d(X) \subset \Lambda^{\geq 2} X$.

1.4.4 Un modèle (minimal) de Sullivan d'une adgc (A, d_A) est un quasi-isomorphisme $\rho : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d_A)$ où $(\Lambda V, d)$ est un KS-complexe (minimal). Si $H^0(A, d_A) = \mathbb{Q}$ alors (A, d_A) admet un modèle minimal.

1.4.5 Il y équivalence entre les deux catégories homotopiques :

$$Top_{\mathbb{Q}} \underset{<\ .\ >}{\overset{A_{PL}}{\rightleftarrows}} ADGC_{\mathbb{Q}}$$

avec la paire de foncteurs adjoints A_{PL} est le foncteur de PL-formes rationnelles et $<\ .\ >$ est le foncteur réalisation. De plus $H^*(X; \mathbb{Q})$ est naturellement isomorphe à $H^*(A_{PL}(X))$. Un modèle de Sullivan de $A_{PL}(X)$ est appelé modèle de Sullivan de l'espace X. Tout espace connexe nilpotent admet un modèle minimal de Sullivan.

Exemples 1.4.6

1. Le modèle de Sullivan de $\mathbf{CP}^\infty$ est $(\Lambda x_2, 0)$ et celui de $\mathbf{CP}^n$ est $(\Lambda(x_2, y_{2n+1}), d)$ avec $dx = 0$ et $dy = x^{n+1}$.

2. Le modèle de Sullivan de S^{2n+1} est $(\Lambda(x_{2n+1}), 0)$ et celui de S^{2n} est $(\Lambda(x_{2n}, y_{4n-1}), d)$ avec $dx = 0$ et $dy = x^2$.

1.4.7 Une KS-extension est l'analogue dans *ADGC* d'une fibration :
Une KS-extension d'une adgc augmentée $A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Q}$ est une suite de morphismes d'adgc de la forme

$$(A, \delta) \xrightarrow{id\otimes 1} (A \otimes \Lambda X, d) \xrightarrow{\varepsilon\otimes id} (\Lambda X, \bar{d})$$

où $(\Lambda X, \bar{d})$ est un KS-complexe et $dx_\alpha \in A \otimes \Lambda(X_{<\alpha})$. Elle est dite minimale si le KS-complexe $(\Lambda X, \bar{d})$ est minimal.
Le (A, δ)-module $(A \otimes \Lambda X, d)$ est une extension semilibre.

1.4.8 A toute fibration d'espaces 1-connexes

$$B \xleftarrow{p} E \longleftarrow F$$

on peut associer une KS-extension :

$$(\Lambda X, d_X) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \longrightarrow (\Lambda Y, d_Y)$$

où $(\Lambda X, d_X)$, $(\Lambda X \otimes \Lambda Y, d)$ et $(\Lambda Y, d_Y)$ sont des modèles de Sullivan respectifs de B, E et F. Tout comme pour les espaces, on a la longue suite exacte de cohomologie et la suite spectrale de Serre associées à une KS-extension.

1.4.9 Du point de vue de l'homotopie, il y a un lien très étroit entre $\pi^*(X) \otimes \mathbb{Q}$ et les générateurs du modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ de X :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_*(X), \mathbb{Q}) = V^*$$

Si l'on considère, par exemple, S^{2n} on retrouve la partie libre de $\pi_*(S^{2n})$ aux degrés n et $2n-1$ (cf 1.4.6).

1.4.10 La longue suite exacte d'homotopie associée à une fibration se traduit en modèle (cf [20]) et S. Halperin (cf [20], thm 1.4(iii)) a montré que si $H^*(F; \mathbb{Q})$ est de dimension finie, alors le connectant est nul pour les degrés pairs. Y. Félix et S.Halperin ont généralisé ([7], thm III) le résultat au cas où $\mathrm{cat}_0(F)$ est finie (la catégorie est finie si $H^*(F; \mathbb{Q})$ est de dimension finie).

1.4.11 A tout espace 1-connexe X, on peut lui associer la fibration des chemins :

$$X \longleftarrow PX \longleftarrow \Omega X$$

Ce qui se traduit dans *ADGC* par :

$$(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda \bar{V}, D) \longrightarrow (\Lambda \bar{V}, 0)$$

où $(\Lambda V, d)$ est le modèle minimal de Sullivan de X et $(\bar{V})^k = V^{k+1}$ (car $\pi_{k+1}(X) = \pi_k(\Omega X)$).
On dit que $(\Lambda V \otimes \Lambda \bar{V}, D)$ est la clôture acyclique de $(\Lambda V, d)$, d'autre part $(\Lambda V \otimes \Lambda \bar{V}, D)$ est une résolution semilibre de $\mathbb{Q}$ en tant que $(\Lambda V, d)$-module. Cette résolution nous sera utile pour les calculs de $\mathcal{E}xt$ (,) (cf chapitre 4).

Exemples 1.4.12

1. Pour $\mathbf{CP}^\infty$, son modèle de Sullivan est $(\Lambda x_2, 0)$, sa clôture acyclique est $(\Lambda(x, \bar{x}), D)$ avec $D\bar{x} = x$.
2. Pour $\mathbf{CP}^n$, son modèle de Sullivan est $(\Lambda(x_2, y_{2n+1}), d)$, sa clôture acyclique est $(\Lambda(x, y, \bar{x}, \bar{y}), D)$ avec $D\bar{x} = x$ et $D\bar{y} = y - \bar{x}x^n$.

1.4.13 Soit un espace X obtenu en attachant à un espace Y une n-cellule. On dit alors que X admet une cellule terminale.
Il existe un modèle commutatif de X de la forme $(\Lambda V \oplus \mathbb{Q}u, d)$ avec $\deg(u) = |u| = n$, ΛV (le modèle de Y) est une sous-algèbre, $u.\Lambda^+ V = 0 = u^2$, $du = 0$ et u n'est pas un cobord (cf [9]). On entend par modèle une suite de quasi-isomorphismes :

$$(\Lambda V \oplus \mathbb{Q}u, d) \xleftarrow{\simeq} . \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$$

On parle alors de cellule terminale algébrique. Sur $\mathbb{Q}$, les notions de cellule terminale et cellule terminale algébrique sont équivalentes.

1.5 Modèle d'Halperin-Stasheff

1.5.1 Halperin et Stasheff dans [22], section 3, donne la construction d'un modèle de Sullivan $(\Lambda Z, d)$ de $H^*(X, \mathbb{Q})$ en considérant $H^*(X, \mathbb{Q})$ comme une adgc en prenant la différentielle nulle. Ce modèle possède deux graduations, la première, haute, qui est le degré classique et la seconde, basse, dite filtrante qui est établie lors de la construction de ce modèle.

1.5.2 Z_0 est un espace vectoriel qui admet pour base les générateurs (en tant qu'algèbre) de $H^*(X, \mathbb{Q})$. L'espace vectoriel Z_1 admet une base en bijection avec les générateurs des relations avec une différence de 1 pour les degrés (hauts). On pose $dz_1 = r$ où r est une relation. De nouveaux cocycles peuvent apparaître en (bas) degré 1, on introduit alors l'espace vectoriel Z_2 ayant une base en bijection avec les générateurs de ces nouveaux cocycles avec une différence de 1 pour les degrés (hauts). On pose $dz_2 = c$ où c est un cocycle de $(\Lambda Z_{\leq 1}, d)_1$. On continue ainsi de suite. C'est un modèle minimal de $(H^*(X,\mathbb{Q}),0)$, appelé modèle bigradué de X.

Proposition 1.5.3 *([22], 3.8.2)*
$H^*(X,\mathbb{Q})$ est noethérienne si et seulement si Z_0 est de dimension finie.

1.5.4 Il existe une différentielle D définie sur ΛZ, telle que $(\Lambda Z, D)$ soit un modèle (pas forcément minimal) de X. $D = d + d_1 + d_2 + \ldots$ où d_i est de degré bas $-(i+1)$. Ce modèle s'appelle le modèle filtré. L'intérêt de ce modèle est multiple, étude de la formalité, même espace vectoriel pour les deux adgc $H^*(X,\mathbb{Q})$ et $A_{PL}(X)$ ...

1.5.5 Le modèle bigradué nous permet de trouver une résolution "d'Eilenberg-Moore" de $\mathbb{Q}$ comme $H = H^*(A)$-module, (A,d) étant une adgc. C'est une résolution projective (même libre) de $\mathbb{Q}$ en H-modules. Elle est construite à partir de la résolution acyclique du modèle bigradué $(\Lambda Z, d)$. Celle-ci est de la forme $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, d)$, avec $\bar{Z}_i^j = Z_{i-1}^{j+1}$, notons $\varphi : (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, d) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}$. La résolution $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, d)$ est un $(\Lambda Z, d)$-module semilibre, d'où, en tensorisant par ce module, le quism $\psi : (H,0) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda Z, d)$, on obtient, d'après la proposition 1.2.4, un quism :

$$\psi \otimes_{\Lambda Z} \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z} : H \otimes_{\Lambda Z} \Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z} = H \otimes \Lambda \bar{Z} \xrightarrow{\simeq} (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}, d)$$

En composant par φ, on trouve le quism $\eta : H \otimes \Lambda \bar{Z} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}$. En filtrant $\Lambda \bar{Z}$ par les bas degrés, on obtient la résolution cherchée :

$$\ldots \xrightarrow{\bar{d}} H \otimes (\Lambda \bar{Z})_2 \xrightarrow{\bar{d}} H \otimes (\Lambda \bar{Z})_1 \xrightarrow{\bar{d}} H \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q} \to 0$$

Il est facile de voir que $(\Lambda \bar{Z})_1 = \bar{Z}_1$, $(\Lambda \bar{Z})_2 = \Lambda^2 \bar{Z}_1 \oplus \bar{Z}_2$, et ainsi de suite ...

Cette résolution est très utile pour les calculs de Ext comme on le verra par la suite dans certaines démonstrations et exemples (cf section 4.3 ou encore dans la preuve de la proposition 7.6.2).

1.5.6 Illustrons ceci avec un exemple fort simple.

Prenons $(A,d) = (\Lambda(u,v,w),d)$ avec $du = dv = 0$, $dw = uv$, $|u| = |v| = 2$ et $|w| = 3$. C'est le modèle de Sullivan de $\mathbf{CP}^\infty \vee \mathbf{CP}^\infty$. L'adgc est formelle, i.e. (A,d) et $H^*(A)$ ont le même type d'homotopie, $(\Lambda(u,v,w),d)$ est donc aussi le modèle (bigradué) de $H^*(A)$. On a ici $Z_0 = \{u,v\}$ et $Z_1 = \{w\}$. Par conséquent, $\bar{Z}_1 = \{\bar{u},\bar{v}\}$ et $\bar{Z}_2 = \{\bar{w}\}$. Nous avons $d\bar{u} = u$, $d\bar{v} = v$ et $d\bar{w} = w - v\bar{u}$. Un calcul rapide montre que $H^*(A) = \Lambda u \oplus \Lambda v$. La résolution est donc de la forme :

$$\ldots \xrightarrow{\bar{d}} H \otimes (\Lambda \bar{Z})_i \xrightarrow{\bar{d}} \ldots \xrightarrow{\bar{d}} H \otimes (\Lambda \bar{Z})_2 \xrightarrow{\bar{d}} H \otimes (\Lambda \bar{Z})_1 \xrightarrow{\bar{d}} H \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q} \to 0$$

avec $(\Lambda \bar{Z})_{2i} = \{\bar{w}^i, \bar{u}\bar{v}\bar{w}^{i-1}\}$ et $(\Lambda \bar{Z})_{2i+1} = \{\bar{u}\bar{w}^i, \bar{v}\bar{w}^i\}$. La différentielle est définie par $\tilde{d}\bar{u} = u$, $\tilde{d}\bar{v} = v$ et $\tilde{d}\bar{w} = -v\bar{u}$.

1.5.7 Maintenant, nous allons donner un exemple de construction de modèle bigradué qui sera étudié au paragraphe 4.5.3.

Soit $(A, d) = (\Lambda(u, v, w, t), d)$ avec $du = dv = dw = 0, dt = uvw, |u| = |v| = 2, |w| = 3$ et $|t| = 6$. Les cycles sont $u^n v^m$ et $u^n v^m w t^p$, avec $n \geq 0$, $m \geq 0$ et $p \geq 0$, les bords sont $u^n v^m w t^p$, avec $n > 0$, $m > 0$ et $p \geq 0$. La cohomologie est donc engendrée en tant qu'espace vectoriel par $[u^n v^m]$, $[v^m w t^p]$ et $[u^n w t^p]$, avec $n \geq 0$, $m \geq 0$ et $p \geq 0$. En notant $t_i = [wt^i]$, $i \geq 0$, on a finalement $H^*(A) = \Lambda(u, v, t_i)_{/\{uvt_i, t_i t_j\}}$, la relation $t_i t_j$ vient du fait que w est de degré impair.

Nous allons calculer le modèle bigradué de A.

Il s'agit d'abord de déterminer les générateurs en tant qu'algèbre de $H^*(A)$, cet ensemble est noté Z_0, ici $Z_0 = \{u, v, t_i\}$. Les éléments de Z_1 éliminent les relations, en l'occurrence $\{uvt_i, t_i t_j\}$, on pose donc w_i et $t_{i,j}$, $0 \leq i < j$ tels que $dw_i = uvt_i$ et $dt_{i,j} = t_i t_j$, $Z_1 = \{w_i, t_{i,j}\}$. Les autres Z_i sont introduits de sorte que seuls les cocycles qui restent soient ceux de la première colonne, par exemple Z_2 contient un élément α_0 tel que $d\alpha_0 = t_0 w_0$.

1.5.8 Ce modèle peut être représenté par le tableau suivant :

		$\dots \nearrow$	L^8 $L^2 t_0 t_1$	16
		$L^2 t_{0,1} \nearrow$ $t_0 w_1 - uv t_{0,1}$ $t_1 w_0 + uv t_{0,1}$ $L^3 t_0 w_0$	t_2 $u^3 t_1, v^3 t_1$ $u^6 t_0, v^6 t_0$ $uv L^4 t_0, uv L^1 t_1$	15
	$\alpha_{0,1} \nearrow$ $\alpha_{1,0} \nearrow$ $L^3 \alpha_{0,0} \nearrow$	$L^4 w_0, L^1 w_1 \nearrow$ $t_0 t_{0,1}$	L^7 $L^1 t_0 t_1$	14
$\dots \nearrow$	$t_{0,0,1} \nearrow$ $L^1 t_0 \alpha_{0,0}$	$L^1 t_{0,1} \nearrow$ $L^2 t_0 w_0$	$u^2 t_1, v^2 t_1$ $u^5 t_0, v^5 t_0$ $uv t_1, uv L^3 t_0$	13
$L^1 \beta \nearrow$	$L^2 \alpha_{0,0} \nearrow$ $uv \alpha_{0,0} - \frac{1}{2} w_0^2$	$w_1, L^3 w_0 \nearrow$	L^6 $t_0 t_1$	12
$\gamma \nearrow$	$t_0 \alpha_{0,0}$	$t_{0,1} \nearrow$ $L^1 t_0 w_0$	$L^1 t_1$ $u^4 t_0, v^4 t_0$ $uv L^2 t_0$	11
$\beta \nearrow$	$L^1 \alpha_{0,0} \nearrow$	$L^2 w_0 \nearrow$	L^5	10
		$t_0 w_0$	t_1 $u^3 t_0, v^3 t_0$ $uv L^1 t_0$	9
	$\alpha_{0,0} \nearrow$	$L^1 w_0 \nearrow$	L^4	8
			$u^2 t_0, v^2 t_0$ $uv t_0$	7
		$w_0 \nearrow$	L^3	6
			$L^1 t_0$	5
			$L^2 = u^2, uv, v^2$	4
			t_0	3
			$L^1 = u, v$	2
3	2	1	0	

Chapitre 2

Espaces de Gorenstein

Dans tout ce qui suit espace signifie espace 1-connexe dont la cohomologie est de type fini.

2.1 Introduction, algèbre commutative.

2.1.1 La terminologie de Gorenstein vient de l'algèbre locale.
Soit (A, m) un anneau local, $\mathbb{K} = A_{/m}$ son corps résiduel. Un anneau de *Gorenstein* (cf [3]) est un cas particulier d'anneau de Cohen-Macaulay qui est défini comme suit.

Soit d la dimension de Krull de A alors A est un anneau de *Gorenstein* si :

$$\dim Ext^i_A(\mathbb{K}, A) = \begin{cases} 0 & i \neq d \\ 1 & i = d. \end{cases}$$

On se place maintenant dans le cas particulier d'un anneau gradué.
De bonnes références sont [5] et [25]. Soit H une algèbre commutative graduée finiment engendrée (noethérienne).

2.1.2 Un élément f de H est dit *régulier* dans H, si $Ann(f)$ est nul, il est évident que f a un degré pair.
Une suite $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de H est dite *régulière* si, pour tout i, f_i est régulier dans $H/_{(f_1,\ldots,f_{i-1})}$.

2.1.3 La *dimension de Krull* de H est n si H contient $\mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$ et H est un module finiment engendré sur $\mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_n]$.
H est de *Cohen-Macaulay* si il existe une suite régulière $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que $H/_{(f_1,\ldots,f_n)}$ est de dimension finie, alors on a $\mathrm{Kdim} H = n$.
Plus particulièrement, si il existe une suite régulière $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que $H/_{(f_1,\ldots,f_n)}$ satisfasse la dualité de Poincaré, on dira alors que H est de *Gorenstein*.

2.1.4 Le *socle* de H est l'intersection de tous les annulateurs, i.e. c'est l'ensemble des éléments ω tel que $\omega.H = 0$.
Si H est de Gorenstein avec un socle non nul, alors H satisfait la dualité de Poincaré.
En effet, il n'existe aucun élément régulier puisque le socle est dans l'annulateur de n'importe quel élément.

2.2 Définitions et premières propriétés

Par analogie, Félix, Halperin et Thomas dans [8] ont posé :

Définition 2.2.1
Une algèbre différentielle graduée (noté adg) est dite de Gorenstein sur un corps $\mathbb{K}$ *si* $\mathcal{E}xt_{(A,d)}\,(\mathbb{K},(A,d))$ *est de dimension un.*

Définition 2.2.2
Un espace topologique X *est dit de Gorenstein sur* $\mathbb{K}$ *si l'adg* $(C^*(X,\mathbb{K}),d)$ *est de Gorenstein sur* $\mathbb{K}$.

Remarquons qu'à un espace topologique X, on peut aussi lui associer l'adg $(C_*(\Omega X,\mathbb{K}),\delta)$, le théorème suivant nous montre que le choix de l'adg n'importe pas.

Théorème 2.2.3 *([8], Théorème 2.1)*

$$\mathcal{E}xt_{(C^*(X,\mathbb{K}),d)}\,(\mathbb{K},(C^*(X,\mathbb{K}),d)) \cong \mathcal{E}xt_{(C_*(\Omega X,\mathbb{K}),\delta)}\,(\mathbb{K},(C_*(\Omega X,\mathbb{K}),\delta))$$

2.2.4 L'algèbre $H^*(X,\mathbb{K})$ peut être considérée comme une adg en mettant une différentielle nulle. Le $\mathcal{E}xt\,(-,-)$ différentiel coïncide alors avec le Ext classique.
En général, la suite spectrale de Eilenberg-Moore converge :

$$E_2^{p,q} = Ext^{p,q}_{H^*(A;\mathbb{K})}\,(\mathbb{K},H^*(A;\mathbb{K})) \Longrightarrow \mathcal{E}xt_A^{p+q}(\mathbb{K},A)$$

en particulier, si on suppose que l'adg A est isomorphe au dual (gradué) d'une certaine coalgèbre (notons que c'est le cas pour $A = C^*(X;\mathbb{K})$).

De cette convergence, on en déduit immédiatement :

Proposition 2.2.5 *([8], prop 3.2(ii))*
Soit A *une adg telle que* $H^i(A)$ *soit de dimension finie pour tout* i, *si* $H^*(A)$ *est de Gorenstein, il en est de même pour* A.

La réciproque est fausse en général (section 4.5) même si on suppose que $H^*(A;\mathbb{K})$ est noethérienne en tant qu'algèbre (exemple 4.5.1).

2.3 Complexes de Poincaré

2.3.1 Les espaces de Gorenstein généralisent les complexes de Poincaré, on va rappeler quelques notions et la définition de complexes de Poincaré.
Les chaînes $(C_*(X,\mathbb{K}),d)$ forment un $(C^*(X,\mathbb{K}),d)$-module via le cap produit :

$$\begin{array}{ccccc} (C^*(X,\mathbb{K}),d) & \otimes & (C_*(X,\mathbb{K}),d) & \longrightarrow & (C_*(X,\mathbb{K}),d) \\ x & \otimes & \alpha & \mapsto & x \cap \alpha \end{array}$$

On a la formule de dualité : $< x \cup y, \alpha > = < x, y \cap \alpha >$ où $\cup$ désigne le cup produit. Le crochet passe à l'homologie :

$$\begin{array}{ccccccc} < \ , \ > & : & H^*(X,\mathbb{K}) & \otimes & H_*(X,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \otimes & \alpha & \mapsto & < x, \alpha > \end{array}$$

Définition 2.3.2
Soit X un CW-complexe de dimension n, on dit que X est un complexe de Poincaré s'il existe $\mu \in H_n(X,\mathbb{K})$ tel que :

$$\begin{array}{ccccc} \cap\mu & : & H^*(X,\mathbb{K}) & \longrightarrow & H_*(X,\mathbb{K}) \\ & & x & \mapsto & x \cap \mu \end{array}$$

soit un isomorphisme.

2.3.3 Comme on travaille sur un corps, cela signifie que $H^n(X,\mathbb{K}) = \mathbb{K}\omega$ et qu'il existe pour tout i, $0 \leq i \leq n$, un isomorphisme : $H^i(X,\mathbb{K}) \to H^{n-i}(X,\mathbb{K})$ qui, à une classe x, lui associe son dual $x^\vee$ tel que $x \cup x^\vee = \omega$.

2.3.4 Tous les résultats de ce travail sont dans le cadre rationnel, il est important de distinguer complexes de Poincaré et espaces dont la cohomologie sur un corps donné, en l'occurrence $\mathbb{Q}$, satisfait la dualité de Poincaré. Un complexe de Poincaré a sa cohomologie sur n'importe quel corps qui vérifie la dualité de Poincaré. Nous nous intéresserons plutôt aux espaces dont la cohomologie rationnelle satisfait la dualité de Poincaré, l'ensemble de ces espaces sera noté **DP**.

2.4 Fibre de Spivak

Soit X un sous-complexe de dimension n de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Définition 2.4.1 *[31]*
La fibre de Spivak, F_X, est la fibre homotopique de l'inclusion du bord d'un voisinage régulier de X.

A suspension près, c'est un invariant homotopique de X.

Proposition 2.4.2 *[31]*
Soit X un complexe fini 1-connexe.
F_X est une sphère homotopique si et seulement si X est un complexe de Poincaré.

2.4.3 Prenons un exemple simple, $X = S^1$, pour la fibre de Spivak :

Tore plein		Tore vide		Fibre homotopique
	$\hookleftarrow$		$\longleftarrow$	$F_{S^1} = S^1$

En effet, le tore vide a le type d'homotopie de $S^1 \times S^1$ et le tore plein celui de S^1, il est facile de voir que l'inclusion est la projection suivant un cercle, la fibre est donc S^1.

Proposition 2.4.4 *([8], corollaire 1.2)*

$$\tilde{H}_*(F_X;\mathbb{K}) = \mathcal{E}xt_{C^*(X,\mathbb{K})}\left(\mathbb{K}, s^{n+k-1}C^*(X,\mathbb{K})\right)$$

Ce qui a pour corollaire que les complexes de Poincaré sont des espaces de Gorenstein, plus précisément :

Théorème 2.4.5 *([8], thm 3.6)*
Soit X un espace de Gorenstein sur $\mathbb{K}$.
$H^*(X,\mathbb{K})$ est de dimension finie si et seulement si $H^*(X,\mathbb{K})$ satisfait la dualité de Poincaré.

2.5 Fibration

2.5.1 *Introduction*
Goettlieb ([16]) a montré que pour une fibration $F \to E \to B$ de complexes finis, les fibres de Spivak vérifient $F_E \simeq F_F * F_B$, où $*$ est le joint, en particulier si deux des fibres sont des sphères, il est clair que la troisième est aussi une sphère (une sphère est caractérisée par son homologie), d'où E est un complexe de Poincaré si et seulement si B et F sont des complexes de Poincaré. Félix, Halperin et Thomas dans ([8], thm 3.4) en ont donné une version $\mathbb{Q}$-locale, dont les hypothèses ont été affinées par Murillo dans [27] dont voici l'énoncé :

Théorème 2.5.2
Soit $F \to E \xrightarrow{\rho} B$ une fibration d'espaces simplement connexes telle que l'une des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :

(i) $H^*(F,\mathbb{Q})$ est de dimension finie.

(ii) $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie et $\pi_*(\rho) \otimes \mathbb{Q}$ est surjective.

Alors on a un isomorphisme explicite :

$$\varphi \quad : \quad \mathcal{E}xt_{C^*(B;\mathbb{Q})}\left(\mathbb{Q}, C^*(B;\mathbb{Q})\right) \hat{\otimes} \mathcal{E}xt_{C^*(F;\mathbb{Q})}\left(\mathbb{Q}, C^*(F;\mathbb{Q})\right)$$
$$\xrightarrow{\cong} \mathcal{E}xt_{C^*(E;\mathbb{Q})}\left(\mathbb{Q}, C^*(E;\mathbb{Q})\right)$$

En particulier, E est un espace de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si B et F le sont.

Ce théorème n'a d'intérêt que si l'on connaît des espaces de Gorenstein autres que les complexes de Poincaré.

Proposition 2.5.3 *([8], proposition 3.4)*
Soit X un espace 1-connexe tel que $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie, alors X est de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$.

2.5.4 Un espace X tel que $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie admet un modèle de Sullivan de la forme $(\Lambda V, d)$ avec V de dimension finie (cf 1.4.9). En particulier, comme on le vérifiera par le calcul dans la chapitre 4, $\mathbf{CP}^2$ et $\mathbf{CP}^\infty$ sont de Gorenstein.
On verra dans la chapitre 5 que, grâce à ce théorème, on peut construire des sous-ensembles de l'ensemble $\mathbf{G}$ des espaces de Gorenstein qui admettent des propriétés intéressantes vis à vis de l'évaluation.

2.6 Dimension formelle

2.6.1 *Introduction*
La dimension formelle est égale à la dimension classique lorsque celle-ci est finie comme l'illustre la proposition 2.6.3. Elle est avant tout définie à partir de l'invariant $\mathcal{E}xt_A(\mathbb{K}, A)$. Elle s'exprime en outre de façon explicite en fonction de la partie libre des groupes d'homotopie lorsque l'homotopie est finie (proposition 2.6.5). Elle est parfois négative (voir les exemples de calculs). Enfin, pour les espaces de Gorenstein, elle est finie et se comporte bien avec les fibrations (proposition 2.6.7).

Définition 2.6.2 *([8], section 5)*
La dimension formelle d'une adg A notée fd *est :*

$$\mathrm{fd}\ (A, \mathbb{K}) = sup\{r \in \mathbb{Z} / \left[\ \mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K}, A)\right]^r \neq 0\}.$$

Si $\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K}, A) = 0$, on pose $\mathrm{fd}\ (A) = \infty$.

Proposition 2.6.3 *([8], proposition 5.1)*
Si $H^*(A, \mathbb{K})$ est de dimension finie alors

$$\mathrm{fd}\ (A, \mathbb{K}) = sup\{r \in \mathbb{N} / \ H^r(A, \mathbb{K}) \neq 0\}$$

Proposition 2.6.4
Soit (A, d) *une adg de Gorenstein, alors* fd $(A, \mathbb{K}) = |f|$ *où* $\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K}, A)$ *est engendré par la classe* $[f]$.

Preuve : fd $(A, \mathbb{K}) = \{r \in \mathbb{Z} / [\ \mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K}, A)]^r \neq 0\} = |f|$ ∎

La proposition suivante est une généralisation d'une formule de S. Halperin dans [19] pour les complexes de Poincaré dont l'homotopie est finie (ici tout est rationnel).

Proposition 2.6.5 *(Proposition 5.2 de [8])*
Si $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ *est de dimension finie alors*

$$\text{fd } (X; \mathbb{Q}) = \sum_{|x_i| imp.} |x_i| - \sum_{|x_i| pairs} (|x_i| - 1)$$

où les $\{x_i\}$ *forment une base de* $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$.

2.6.6 *Exemples de calculs :*
Cette proposition nous permet de trouver, par exemples :
fd $(\mathbf{CP^n}) = 2n + 1 - 1 = 2n$ ou encore fd $(\mathbf{CP}^\infty) = -1$.
Ceci montre que la dimension formelle peut être négative. Attention, une dimension formelle positive ne signifie pas pour autant que la cohomologie est de dimension finie, il suffit de prendre le modèle de $S^3 \times \mathbf{CP}^\infty$: $(\Lambda(x_2, x_3), 0)$, un calcul a la portée de tous finit de nous convaincre.

Du théorème 2.5.2, on en déduit :

Proposition 2.6.7
Soit une KS-extension d'adgc simplement connexe de type fini :

$$(\Lambda X, \delta) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \longrightarrow (\Lambda Y, \bar{d})$$

$(\Lambda X, \delta)$ *et* $(\Lambda Y, \bar{d})$ *étant minimaux.*
Si l'une des hypothèses suivantes est vérifiées :

(i) $H^*(\Lambda X, \mathbb{Q})$ *est de dimension finie.*

(ii) X *est de dimension finie et* $(\Lambda X \otimes \Lambda Y, d)$ *est minimal.*

alors :

$$\text{fd } (\Lambda X \otimes \Lambda Y, \mathbb{Q}) = \text{fd } (\Lambda Y, \mathbb{Q}) + \text{fd } (\Lambda X, \mathbb{Q})$$

2.7 Algèbre commutative (le retour)

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre des adgc et de l'algèbre commutative, nous pouvons déjà énoncer un résultat dont la preuve nécessite des arguments de ces deux domaines :

Théorème 2.7.1
Si $H^*(A;\mathbb{Q})$ est de Cohen-Macaulay et (A,d) une adgc de Gorenstein alors $H^*(A;\mathbb{Q})$ est de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$.

Pour la preuve du théorème on utilisera le lemme suivant :

Lemme 2.7.2
Soit (A,d) une adgc de Gorenstein et f un élément régulier de $H^*(A;\mathbb{Q})$ alors il existe une KS-extension

$$(A,d) \rightarrowtail (A\otimes \Lambda x, D) \longrightarrow (\Lambda(x), 0)$$

telle que $(A\otimes\Lambda x, D)$ soit de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$ et $H^*(A\otimes\Lambda x;\mathbb{Q}) = H^*(A;\mathbb{Q})/_{(f)}$.

2.7.3 *Preuve du lemme 2.7.2 :*
Pour plus de commodité, on notera $H^*(A)$ pour $H^*(A;\mathbb{Q})$.
On définit x et la KS-extension en posant $Dx = w$ où w est un cocycle de A représentant f. Comme f est régulier, il est de degré pair, par conséquent celui de x est impair. Les hypothèses du théorème 2.5.2 étant satisfaites, on conclut que $(A\otimes\Lambda x, D)$ est de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$. D'autre part, la suite spectrale de Serre associée à cette KS-extension nous donne

$$H^*(A\otimes\Lambda x) = H^*(A;\mathbb{Q})/_{(f)} \oplus x\otimes Ann(f)$$

et le fait que f soit un élément régulier nous permet de conclure. ∎

2.7.4 *Preuve du théorème 2.7.1 :*
Il existe une suite régulière $(f_1,\ldots,f_n)$ telle que $H^*(A)/_{(f_1,\ldots,f_n)}$ soit de dimension finie. On définit, par récurrence, comme dans le lemme 2.7.2 des éléments $x_1,\ldots,x_n$ et une suite de KS-extensions

$$(A_i,d_i) \rightarrowtail (A_{i+1},d_{i+1}) = (A_i\otimes\Lambda x_i, d_{i+1}) \longrightarrow (\Lambda(x_i),0)$$

telle que $i = 0,\ldots,n$, $A_0 = A$, $d_{i+1}x_i$ soit un représentant de f_i dans $H^*(A_i) = H^*(A)/_{(f_1,\ldots,f_{i-1})}$ et les x_i soient de degré impair. Le lemme nous affirme que les (A_i,d_i) sont de Gorenstein et $H^*(A_n) = H^*(A)/_{(f_1,\ldots,f_n)}$ est de dimension finie. Comme $H^*(A_n)$ est de dimension finie et A_n est de Gorenstein, on en conclut, d'après le théorème 2.4.5, que $H^*(A_n)$ satisfait la dualité de Poincaré et, par conséquent, $H^*(A)$ est de Gorenstein. ∎

Chapitre 3

L'application d'évaluation

3.1 Introduction

3.1.1 L'application d'évaluation a été introduite par Félix, Halperin et Thomas dans [8] de façon algébrique, c'est une application linéaire de $\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K}, A)$ dans $H^*(A,\mathbb{K})$, c'est un invariant (cf prop. 3.2.2). A. Murillo [28] donne d'autres interprétations de l'application d'évaluation en termes d'algèbre homologique. Dans [11], on trouvera une interprétation géométrique basée sur la construction du fibré de Spivak.

3.1.2 Il intéressant de savoir ce que signifie l'évaluation non nulle. En fait, "l'évaluation non nulle" est une notion intermédiaire à "il existe une classe de cohomologie dont un représentant annule $A^+ = \ker \varepsilon$" et à "il existe une classe de cohomologie qui annule $\widetilde{H}^*(A,\mathbb{K})$" (cf prop. 3.3.5). Par exemple, elle est non nulle pour les complexes de Poincaré (cor. 3.3.15) ou plus généralement pour les espaces admettant une dernière cellule (prop. 3.4.1).

3.1.3 Pour les espaces de Gorenstein, le $\mathcal{E}xt$ est de dimension un, l'importance de l'évaluation non nulle en est agrandie. En effet, il est conjecturer que l'évaluation non nulle soit équivalent au fait que la cohomologie satisfasse la dualité de Poincaré, ce pour les espaces de Gorenstein. Il est à noter que sans l'hypothèse Gorenstein, ceci est faux, il suffit de prendre le wedge de deux sphères.

3.2 Définitions et premières propriétés

Soit (A,d) une algèbre différentielle graduée augmentée (adg).

Définition 3.2.1 *([8])*
L'application d'évaluation est une application linéaire :

$$ev_A : \mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K}, A) \longrightarrow H^*(A)$$

qui à un élément $[f]$ de $\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{Q}, A)$ représenté par un cycle $f : P \longrightarrow A$ (P étant une résolution A semilibre de $\mathbb{Q}$), lui associe $ev_A([f]) = [f(p)]$ où p est un cocycle de P représentant 1.

Soit $(A, d) \xrightarrow{\simeq} (B, d)$ un quasi-isomorphisme d'adg augmentées, on a vu (cf 1.3.5) qu'il induit un isomorphisme $\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K}, A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}xt_B\ (\mathbb{K}, B)$.

Proposition 3.2.2
Si on a $(A, d) \xrightarrow{\simeq} (B, d)$, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K}, A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_A"'] & \mathcal{E}xt_B\ (\mathbb{K}, B) \arrow[d, "\mathrm{ev}_B"] \\
H^*(A, \mathbb{K}) \arrow[r, "\cong"'] & H^*(B, \mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

on peut alors identifier ev_A et ev_B.

Définition 3.2.3
Pour un espace topologique 1-connexe S, ev_S désigne $\mathrm{ev}_{C^*(S)}$.

3.2.4 La proposition permet d'écrire, sur $\mathbb{Q}$:

$$\mathrm{ev}_S = \mathrm{ev}_{C^*(S,\mathbb{Q})} = \mathrm{ev}_{A_{PL}(S)} = \mathrm{ev}_{\Lambda X}$$

où $(\Lambda X, d)$ est le modèle minimal de Sullivan de S.
Si on se réfère aux deux exemples que l'on étudiera au chapitre 4, on trouve immédiatement $\mathrm{Im}\ \mathrm{ev}_{\mathbf{CP}^\infty} = 0$ et $\mathrm{Im}\ \mathrm{ev}_{\mathbf{CP}^n} = [x^n]$.

D'autre part, comme on a vu pour les espaces de Gorenstein, à un espace topologique, on peut associer une autre adg $(C_*(\Omega X, \mathbb{K}), \delta)$, l'application $\mathrm{ev}_{(C_*(\Omega X, \mathbb{K}), \delta)}$ n'est pas intéressante, mais on va définir un analogue pour les chaînes qui est utile.

Définition 3.2.5 *(cf [11],2.4)*
Soit ε l'application linéaire :

$$\varepsilon\ :\ \mathcal{E}xt_{(C_*(\Omega X, \mathbb{K}), \delta)}\ (\mathbb{K}, (C_*(\Omega X, \mathbb{K}), \delta)) \longrightarrow H_*(X, \mathbb{K})$$

qui à un élément $[f]$ de $\mathcal{E}xt_{(C_*(\Omega X, \mathbb{K}), \delta)}\ (\mathbb{K}, (C_*(\Omega X, \mathbb{K}), \delta))$ représenté par un cycle

$$f : P = C_*(\Omega X, \mathbb{K}) \otimes H_*(X, \mathbb{K}) \longrightarrow C_*(\Omega X, \mathbb{K})$$

(P étant une résolution $C_*(\Omega X, \mathbb{K})$ semilibre de $\mathbb{K}$), lui associe le morphisme de $H_*(X, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ (donc un élément de $H^*(X, \mathbb{K})$) définit par :

$$\varepsilon([f])(x) = q.C_*(\Omega p)(f(x))$$

où p est l'application constante et q l'augmentation canonique : $C_*(\Omega X, \mathbb{K}) \rightarrow C_0(\Omega X, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$.

3.2.6 Cette définition est la version duale de la définition de l'évaluation. Ici, $\varepsilon([f])$ sera non nulle si 1 a un antécédent. Ceci sera illustré dans le paragraphe sur les cellules terminales. Cette dualité s'exprime par le diagramme suivant :

Proposition 3.2.7
Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}xt_{(C^*(X,\mathbb{K}),d)}(\mathbb{K},(C^*(X,\mathbb{K}),d)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_X"'] & \mathcal{E}xt_{(C_*(\Omega X,\mathbb{K}),\delta)}(\mathbb{K},(C_*(\Omega X,\mathbb{K}),\delta)) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
H^*(X,\mathbb{K}) \arrow[r, equal] & H^*(X,\mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

L'isomorphisme est celui du théorème 2.2.3.

3.3 Le socle

Soit $A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K}$ une adgc augmentée.

Définition 3.3.1

$$\text{socle }(A) = \{\omega \in A \;/\; \omega.\ker \varepsilon = 0\}$$

De la définition, on en déduit immédiatement la proposition suivante :

Proposition 3.3.2
Soit Z_0 l'ensemble des générateurs de A en tant qu'algèbre, on a

$$(\omega \in \text{socle }(A)) \Leftrightarrow (\omega.z_0 = 0 \;\forall z_0 \in Z_0)$$

Proposition 3.3.3
Soit H une algèbre graduée, ($H^*(A)$ par exemple), alors :

$$Ext_H^{0,-}(\mathbb{Q}, H) = \text{socle }(H)$$

3.3.4 *Preuve de la proposition 3.3.3 :*

Nous nous plaçons dans le cadre rationnel, la preuve ne perd en rien sa généralité. Prenons la résolution projective de $\mathbb{Q}$ induite par le modèle bigradué de H (cf le paragraphe 1.5.5). Les éléments de $Ext_H^{0,-}(\mathbb{Q}, H)$ sont les applications H-linéaires $f : H \to H$ telles que $f \circ \check{d} : H \otimes (\Lambda\overline{Z})_1 \to H$ soit nulle. f est uniquement déterminée par l'image de 1, par conséquent, pour tout élément z_1 de $(\Lambda\overline{Z})_1 = \overline{Z}_1$, on a $\check{d}z_1.f(1) = 0$. Or, $\check{d}\overline{Z}_1 = Z_0$ est l'espace vectoriel dont une base est formée des générateurs de H en tant qu'algèbre. La proposition 3.3.2 nous permet de conclure. ∎

Proposition 3.3.5
On note $S(A)$ l'ensemble des cycles non triviaux de socle (A), *on a alors les inclusions strictes suivantes :*

$$S(A) \subset \mathrm{Im}\ \mathrm{ev}_A \subset \text{socle }(H^*(A,\mathbb{K}))$$

La proposition peut se traduire par :
"L'évaluation non nulle" est une notion intermédiaire à "il existe une classe de cohomologie dont un représentant annule $A^+ = \ker \varepsilon$" et à "il existe une classe de cohomologie qui annule $\widetilde{H}^*(A,\mathbb{K})$".

3.3.6 *Preuve de la proposition 3.3.5 :*

• La première inclusion.

Soit ω un cycle non trivial de socle (A), i.e. on a $\omega.A^+ = 0$, $d\omega = 0$ et ω n'est pas un bord. Soit $P \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}$, une résolution A semilibre de $\mathbb{K}$.
Posons $f \in (\mathrm{Hom}_A(P,A);\mathcal{D})$ définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & 1 & \mapsto & \omega \\ & p & \mapsto & 0 \end{array}$$

Le fait que ω soit un cycle et un élément du socle nous donne $\mathcal{D}f = 0$.
Supposons qu'il existe g tel que $f = \mathcal{D}g$, on aura en particulier :

$$\omega = \mathcal{D}g(1) = Dg(1) - (-1)^{|g|}g(d(1)) = Dg(1)$$

alors ω serait un bord, ce qui est exclu par hypothèse. Donc $[f]$ est un élément non nul de $\mathcal{E}xt_A\ (\mathbb{K},A)$ tel que $\mathrm{ev}_A([f]) = \omega \neq 0$.

Cette inclusion est stricte, il suffit de prendre le modèle de Sullivan de S^2.
Remarque : Si $\omega \in$ socle (A) , alors $d\omega \in$ socle (A), d'où la nécessité de l'hypothèse "cycle non trivial".

• La deuxième inclusion.

Soit $\alpha \in \mathrm{Im}\ (\mathrm{ev}_A)$, α non nul. Par définition $\alpha = H(f)[p] = [f(p)]$ pour un certain $f \in \mathrm{Hom}_A(P,A)$. Soit $\beta = [\Phi] \in H^+(A)$, montrons que $\alpha.\beta = 0$:

$$\alpha.\beta = [\Phi.f(p)] = (-1)^{|\Phi||f|}[f(\Phi.p)] = (-1)^{|\Phi||f|}H(f)[\Phi.p]$$

or $[\Phi.p] \in H^+(P) = 0$, par conséquent $\alpha.\beta = 0$.

Cette inclusion est stricte, comme le montre l'exemple 4.5.1. ∎

Corollaire 3.3.7

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{ev}_{H^*(A)} = \text{socle }(H^*(A))$$

Lemme 3.3.8
Soit (A,d) une adg de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$. Si $\mathrm{ev}_A \neq 0$, alors il existe un élément du socle de $H^*(A)$ dont le degré est exactement la dimension formelle de A.

3.3.9 *Preuve du lemme 3.3.8 :*
En effet, d'une part fd $(A) = |f|$ d'après la proposition 2.6.4, où $\mathcal{E}xt_A(\mathbb{Q}, A) = \mathbb{Q}[f]$; d'autre part $\omega = [f(1)] = ev_A([f])$ est un élément du socle d'après la proposition 3.3.5. On en conclut que $|\omega| = |f| =$ fd (A). ∎

Remarque 3.3.10
La réciproque est fausse, comme l'illustre l'exemple 4.5.2.

Corollaire 3.3.11

$$\mathrm{ev}_A \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{H^\bullet(A)} \neq 0$$

3.3.12 *Preuve du corollaire 3.3.11 :*
C'est une conséquence directe du corollaire 3.3.7 et de la proposition 3.3.5. ∎

Proposition 3.3.13
Si $H(A)$ est finie, n le plus grand entier tel que $H^k(A) \neq 0$, alors $H^n(A) \subset$ Im ev_A.

3.3.14 *Preuve de la proposition 3.3.13 :*
On pose $I = A^{>n} \oplus C$ où $C \oplus \ker d = A^n$. I est acyclique, donc on a un quasi-isomorphisme $A \xrightarrow{\simeq} A_{/I}$, d'où, d'après la proposition 3.2.2, $\mathrm{ev}_A = \mathrm{ev}_{A_{/I}}$. D'autre part, $\left(A_{/I}\right)^n \subset$ socle $\left(A_{/I}\right)$ et

$$H^n(A) = H^n\left(A_{/I}\right) = \left(S(A_{/I})\right)^n$$

La proposition 3.3.5 nous permet d'écrire :

$$S\left(A_{/I}\right) \subset \mathrm{Im}\ \mathrm{ev}_{A_{/I}}$$

On en conclut donc que : $H^n(A) \subset \mathrm{Im}\ \mathrm{ev}_A$.

Cette inclusion est aussi stricte, il suffit de prendre une adg qui ait des éléments de $S(A)$ de degrés différents, avec $H^*(A)$ finie. ∎

De la proposition 3.3.13, on en déduit immédiatement :

Corollaire 3.3.15
Soit X un espace dont la cohomologie $H^*(X, \mathbb{K})$ satisfait la dualité de Poincaré, alors $\mathrm{ev}_X \neq 0$.

3.4 Résultats sur l'évaluation non nulle

Le premier résultat sur l'évaluation non nulle est donné par Félix, Halperin et Thomas dans [8] :

Proposition 3.4.1 *([8], proposition 1.6)*
Soit $X = Y \cup_f e^n$ un espace obtenu en attachant à un espace 1-connexe Y une n-cellule ($n \geq 2$) et $\alpha \in H^n(X;\mathbb{K})$ la classe caractéristique de e^n.
Alors α est dans l'image de ev_X. En particulier, si $\alpha \neq 0$, alors $Im\ \mathrm{ev}_X \neq 0$.

Cette proposition nous permet de construire facilement des exemples d'espaces dont l'évaluation est non nulle, en particulier des bouquets.

Dans la suite de ce paragraphe, on travaillera exclusivement sur le corps de nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Aniceto Murillo a prouvé deux résultats importants [28] :

Théorème 3.4.2 *([28], théorème A)*
Soit S un espace topologique 1-connexe tel que $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$ soit de dimension finie. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $H^*(S;\mathbb{Q})$ est de dimension finie.

(ii) ev_S est non nulle.

Nous donnerons une généralisation de ce dernier dans la section 7.2.

Théorème 3.4.3 *([28], théorème B)*
Soit $F \to E \xrightarrow{\rho} B$ une fibration d'espaces simplement connexes.

(i) Si $H^*(F;\mathbb{Q})$ est de dimension finie, alors

$$\mathrm{ev}_B \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_E \neq 0$$

(ii) Si $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie et $\pi_*(\rho) \otimes \mathbb{Q}$ surjective, alors

$$\mathrm{ev}_E \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_F \neq 0$$

Un moyen mnémotechnique pour retenir ce dernier théorème :
"ça va dans le sens inverse des flèches"
Ces deux théorèmes se traduisent dans *ADGC* par :

Proposition 3.4.4
Soit $(\Lambda V, d)$ un KS-complexe tel que V est de dimension finie. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $H^*(\Lambda V;\mathbb{Q})$ est de dimension finie.

(ii) $ev_{\Lambda V}$ *est non nulle.*

Proposition 3.4.5
Soit $(A,d) \xrightarrow{\rho} (A \otimes \Lambda V, D) \to (\Lambda V, \bar{D})$ *une KS-extension d'adgc 1-connexes.*

(i) Si $H^*(\Lambda V)$ *est de dimension finie, alors*

$$ev_{(A,d)} \neq 0 \Rightarrow ev_{(A \otimes \Lambda V, D)} \neq 0$$

(ii) Si V *est de dimension finie et* $\pi_*(\rho) \otimes \mathbb{Q}$ *injective, alors*

$$ev_{(A \otimes \Lambda V, D)} \neq 0 \Rightarrow ev_{(\Lambda V, \bar{D})} \neq 0$$

Tout comme pour les espaces, un moyen simple de retenir ce théorème est de remarquer que "ça va dans le sens des flèches". Le théorème suivant est un des buts principaux de cette thèse :

Théorème 3.4.6
Soit X *un espace de type* $\mathbf{G}_N$ *tel que* $ev_X \neq 0$, *alors* $H^*(X, \mathbb{Q})$ *est de dimension finie, i.e.* $H^*(X, \mathbb{Q})$ *satisfait la dualité de Poincaré.*

où $\mathbf{G}_N$ désigne un ensemble large d'espaces de Gorenstein, qui contient notamment ceux dont la cohomologie est noethérienne.
Finissons avec un lemme qui nous servira dans la démonstration du théorème 3.4.6 :

Lemme 3.4.7
Soit $(A,d) \longrightarrow (A \otimes \Lambda(x), D) \to (\Lambda(x), 0)$ *une KS-extension, avec* x *de degré impair.*
Si A *est une adg de Gorenstein et si* $ev_A \neq 0$ *alors* $A \otimes \Lambda(x)$ *est une adg de Gorenstein et* $ev_{A \otimes \Lambda(x)} \neq 0$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du théorème 2.5.2 et de la proposition 3.4.5. ∎

3.5 Cellules terminales

Définition 3.5.1
On dit qu'un espace X *admet une dernière cellule si il est obtenu en attachant une* $(n+1)$*-cellule à un espace* Y. *On écrit* $X = Y \cup_\alpha e^{n+1}$ *où* $\alpha : S^n \to Y$ *est l'application d'attachement.*

En algèbre, l'analogue est la notion de cellule terminale algébrique, en *ADGC* cela donne :

Définition 3.5.2
Une adgc (A, d_A) admet une cellule terminale algébrique si il existe un modèle commutatif de la forme $(\Lambda V \oplus \mathbb{Q}u, d)$ avec $|u| = n$, ΛV est une sous-algèbre, $u \in$ socle $(\Lambda V \oplus \mathbb{Q}u$, $du = 0$ et u n'est pas un bord. On entend par modèle, une suite de quasi-isomorphismes :

$$(\Lambda V \oplus \mathbb{Q}u, d) \xleftarrow{\simeq} . \xrightarrow{\simeq} (A, d_A)$$

Proposition 3.5.3 *([9], proposition 13.17) Soit X un espace topologique qui admet une dernière cellule, alors il existe un modèle commutatif de X qui admet une cellule terminale algébrique.*

Théorème 3.5.4
Soit un espace de Gorenstein 1-connexe de type fini.
Si il admet une cellule terminale alors sa cohomologie qui satisfait la dualité de Poincaré.

3.5.5 Avant de prouver le théorème, nous allons traduire en modèle le fait qu'un espace admette une cellule terminale ([11], 1.5).

L'objet algébrique qui modélise le mieux la structure de CW-complexe $X = \bigcup_\alpha e_\alpha$ est le modèle d'Adams-Hilton (TV, d) ([1]) que nous prendrons à coefficient dans un corps $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel gradué V admet une base v_α en correspondance bijective avec l'ensemble des cellules e_α, $|v_\alpha| = |e_\alpha| - 1$. La différentielle d est induite par les applications d'attachement.

La cohomologie réduite de X est isomorphe à la suspension de la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}^+((V, d_1), \mathbb{K})$ où d_1 désigne la partie linéaire de la différentielle d. Cette construction montre que :

Proposition 3.5.6
Si $X = Y \cup_\alpha e^{n+1}$ est un espace qui admet une dernière cellule, son modèle d'Adams-Hilton est de la forme $(T(V) \sqcup \mathbb{K}x, D)$ où $(T(V), D)$ est le modèle d'Adams-Hilton de Y, $Dx \in T(V)$ et x est de degré n.

3.5.7 *Preuve du théorème 3.5.4 :*
Avant de commencer les hostilités, remarquons qu'il suffit de démontrer que $H^*(X, \mathbb{K})$ est de dimension finie (cf thm 2.4.5).

- Les hypothèses

Nous prenons bien évidemment les notations de la proposition 3.5.6, on a donc un quism

$$(A, D) = (T(V) \sqcup \mathbb{K}x, D) \xrightarrow{\simeq} (C_*(\Omega X, \mathbb{K}), \delta)$$

On décompose V de la manière suivante :

$$V = V(0) \oplus \ldots \oplus V(i) \oplus \ldots \ , \ DV(i) \in T(V(\leq i-1))$$

On peut construire une (A, D)-résolution semilibre de $\mathbb{K}$ de la forme $(P, D) = (A \otimes (\mathbb{K} \oplus sV \oplus sx), D)$ avec $Dsv = v - s(Dv)$.
Considérons l'application A-linéaire f_1 définie par $f_1(sx) = 1$ et $f_1(sV) = 0$. Cette application est clairement un cycle. Ce n'est pas un bord car sx n'est pas dans DsV. (On retrouve ici le fait que l'évaluation est non nulle). On a donc

$$\mathcal{E}xt_A^* \,(P, A) = \mathbb{K}.[f_1]$$

L'idée est la suivante : nous allons montrer que pour tout i et pour tout y de $V(i)$, on a $|y| \leq |x|$, ceci prouvera que la cohomologie est finie (on a supposé X de type fini).

• A propos du $\mathcal{E}xt$

De la courte suite exacte :

$$0 \longrightarrow (A, D) \longrightarrow (A \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0)), D) \longrightarrow (A \otimes sV(0), \bar{D}) \longrightarrow 0$$

on en déduit une longue suite exacte de $\mathcal{E}xt$ (cf paragraphe 1.3.3) :

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^i \,(\mathbb{K}, A) \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^i \,(\mathbb{K}, A \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0))) \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^i \,(\mathbb{K}, A \otimes (sV(0))) \longrightarrow \ldots$$

Or A est de Gorenstein donc les $\mathcal{E}xt_A^i \,(\mathbb{K}, A)$ sont nuls sauf pour $i = n$. D'autre part $\bar{D}sV(0) = 0$, donc $\mathcal{E}xt_A^i \,(\mathbb{K}, A \otimes (sV(0))) = \mathcal{E}xt_A^i \,(\mathbb{K}, A) \otimes (sV(0))$ est lui aussi presque toujours nul. L'hypothèse 1-connexe nous assure que $sv(0)$ sont de degré plus grand que 1. On obtient finalement que

$$\mathcal{E}xt_A^* \,(\mathbb{K}, A \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0))) = \mathcal{E}xt_A^* \,(\mathbb{K}, A) \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0)) = [f_1] \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0))$$

De la même façon, on montre

$$\mathcal{E}xt_A^* \,(\mathbb{K}, A \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0) \oplus \ldots \oplus sV(i)))$$

$$= \mathcal{E}xt_A^* \,(\mathbb{K}, A) \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0) \oplus \ldots \oplus sV(i)) = [f_1] \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0) \oplus \ldots \oplus sV(i))$$

• Montrons $|y| \leq |x|$

Soit $y \in V(i)$, on a $D(y - s(dy)) = 0$. L'application A-linéaire f_y définie par $f_y(sx) = y - s(dy)$ et $f_y(sV) = 0$ est un cycle de

$$\mathrm{Hom}((P, D), (A \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0) \oplus \ldots \oplus sV(i-1)), D))$$

Comme il n'est pas de la forme $[f_1] \otimes (\mathbb{K} \oplus sV(0) \oplus \ldots \oplus sV(i-1))$, c'est nécessairement un bord. Posons g telle que $\mathcal{D}g = f_y$, on a donc $\mathcal{D}g(sx) = Dg(sx) \pm xg(1) \pm g(sDx) = y - s(dy)$. On écrit

$$sDx = \sum_{v_i \in V} w_i . sv_i$$

avec $w_i \in T(V)$. Soit la projection

$$\Pi : A \otimes (\mathbb{K} \oplus sV \oplus sx) \longrightarrow V \oplus \mathbb{K}x$$

On a alors

$$y = \Pi(y - s(dy)) = \Pi(Dg(sx) \pm xg(1) \pm g(sDx)) = \Pi(xg(1) \pm \sum_{v_i \in V} w_i.g(sv_i))$$

Il reste à remarquer que les $\Pi(w_i)$ sont dans $V^{\leq |x|}$. Ceci prouve donc que pour tout élément y de $V(i)$, on a $|y| \leq |x|$. ∎

Chapitre 4

Calculs de $\mathcal{E}xt$ et exemples.

Dans ce chapitre, on effectue des calculs de $\mathcal{E}xt$, on s'aperçoit rapidement que les calculs sont très pénibles.

4.1 Etude de CP^∞

Notre but est de démontrer que CP^∞ est de Gorenstein (cf définition 2.2.1), il faut donc montrer que :

$$\dim \mathcal{E}xt_{C^*(CP^\infty;\mathbb{Q})}\left(\mathbb{Q}, C^*(CP^\infty;\mathbb{Q})\right) = 1$$

Pour cela, on prend le modèle de Sullivan de CP^∞ : $(\Lambda x, 0) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(CP^\infty)$ avec $|x| = 2$. On va prouver que :

$$\mathcal{E}xt_{(\Lambda(x),0)}\left(\mathbb{Q}, (\Lambda(x), 0)\right) = H^*\left(Hom_{(\Lambda(x),0)}\left((\Lambda(x)\otimes\Lambda(\bar{x}), D), (\Lambda(x), 0)\right), \mathcal{D}\right)$$

est de dimension 1, où $(\Lambda(x)\otimes\Lambda(\bar{x}), D) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}$ est la clôture acyclique de $(\Lambda(x), 0)$, avec $D\bar{x} = x$, $|\bar{x}| = 1$ et $\mathcal{D}f = d\circ f - (-1)^{|f|} f \circ D$, avec $d = 0$.
Tout d'abord, on va décrire :

$$\left(Hom_{(\Lambda(x),0)}\left((\Lambda(x)\otimes\Lambda(\bar{x}), D), (\Lambda(x), 0)\right), \mathcal{D}\right)$$

C'est l'ensemble des applications $(\Lambda(x), 0)$-linéaires de $(\Lambda(x)\otimes\Lambda(\bar{x}), D)$ vers $(\Lambda(x), 0)$, on peut le munir d'une base :
$$\begin{array}{cccc} f_k & : & 1 & \longrightarrow & x^k \\ g_k & : & \bar{x} & \longrightarrow & x^k \end{array}$$

Calculons leur différentielle :

$$\mathcal{D}f_k : \begin{tikzcd} \left\{\begin{array}{l} 1 \\ \bar{x} \end{array}\right. \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, "\mathcal{D}f_k"] & \left\{\begin{array}{l} x^k \\ 0 \end{array}\right. \arrow[d, "d"] \\ \left\{\begin{array}{l} 0 \\ x \end{array}\right. \arrow[r, "-f_k"'] & \left\{\begin{array}{l} 0 \\ -x^{k+1} \end{array}\right. \end{tikzcd} \qquad \mathcal{D}g_k : \begin{tikzcd} \left\{\begin{array}{l} 1 \\ \bar{x} \end{array}\right. \arrow[r, "g_k"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, "\mathcal{D}g_k"] & \left\{\begin{array}{l} 0 \\ x \end{array}\right. \arrow[d, "d"] \\ \left\{\begin{array}{l} 0 \\ x \end{array}\right. \arrow[r, "+g_k"'] & \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}\right. \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{D}f_k = -g_{k+1} \qquad\qquad \mathcal{D}g_k = 0$$

Il en résulte que le seul cycle qui ne soit pas un bord est $g_0 : \bar{x} \longrightarrow 1$, ce qui prouve que CP^∞ est de Gorenstein.

4.2 Etude de CP^n

L'espace CP^n a sa cohomologie qui satisfait la dualité de Poincaré, donc il est de Gorenstein (théorème 2.4.5), ce qui signifie que :

$$\dim \mathcal{E}xt_{C^*(CP^n;\mathbb{Q})}\left(\mathbb{Q}, C^*(CP^n;\mathbb{Q})\right) = 1$$

Nous allons le démontrer par le calcul.
En modèle de Sullivan, cela se traduit par :

$$\dim \mathcal{E}xt_{(\Lambda(x,y),d)}\left(\mathbb{Q}, (\Lambda(x,y),d)\right) = 1$$

où $(\Lambda(x,y),d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(CP^n)$, avec $dy = x^{n+1}$, $|x| = 2$, $|y| = 2n+1$.

$$\mathcal{E}xt_{(\Lambda(x,y),d)}\left(\mathbb{Q}, (\Lambda(x,y),d)\right) =$$

$$H^*\left(Hom_{(\Lambda(x,y),d)}\left((\Lambda(x,y)\otimes\Lambda(\bar{x},\bar{y}),D),(\Lambda(x,y),d)\right),\mathcal{D}\right)$$

où $(\Lambda(x,y)\otimes\Lambda(\bar{x},\bar{y}),D) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}$ est la clôture acyclique de $(\Lambda(x,y),d)$, avec $D\bar{x} = x$ et $D\bar{y} = y - \bar{x}x^n$ et $\mathcal{D}f = d\circ f - (-1)^{|f|} f\circ D$.
Tout d'abord, on va décrire :

$$\left(Hom_{(\Lambda(x,y),d)}\left((\Lambda(x,y)\otimes\Lambda(\bar{x},\bar{y}),D),(\Lambda(x,y),d)\right),\mathcal{D}\right)$$

C'est l'ensemble des applications $(\Lambda(x,y),d)$-linéaires de $(\Lambda(x,y)\otimes\Lambda(\bar{x},\bar{y}),D)$ vers $(\Lambda(x,y),d)$, on peut le munir d'une base :

$$\begin{array}{lcccl} f_{k,m} & : & \bar{y}^k & \longrightarrow & x^m \\ \check{f}_{k,m} & : & \bar{y}^k & \longrightarrow & x^m y \end{array} \qquad \begin{array}{lcccl} \check{g}_{k,m} & : & \bar{x}\bar{y}^k & \longrightarrow & x^m y \\ g_{k,m} & : & \bar{x}\bar{y}^k & \longrightarrow & x^m \end{array}$$

Calculons leur différentielle ($\delta_{p,k} = 1$ si $k = p$, 0 sinon) :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}f_{k,m} : \left\{\begin{matrix} \bar{y}^p \\ \bar{x}\bar{y}^p \end{matrix}\right. \arrow[r, "f_{k,m}"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, "\mathcal{D}f_{k,m}"] & \left\{\begin{matrix} \delta_{p,k}x^m \\ 0 \end{matrix}\right. \arrow[d, "d"] \\
\left\{\begin{matrix} py\bar{y}^{p-1} - px^n\bar{x}\bar{y}^{p-1} \\ x\bar{y}^p + py\bar{x}\bar{y}^{p-1} \end{matrix}\right. \arrow[r, "-f_{k,m}"'] & \left\{\begin{matrix} -\delta_{p-1,k}px^m y \\ -\delta_{p,k}x^{m+1} \end{matrix}\right.
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}\check{g}_{k,m} : \left\{\begin{matrix} \bar{y}^p \\ \bar{x}\bar{y}^p \end{matrix}\right. \arrow[r, "\check{g}_{k,m}"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, "\mathcal{D}\check{g}_{k,m}"] & \left\{\begin{matrix} 0 \\ \delta_{p,k}x^m y \end{matrix}\right. \arrow[d, "d"] \\
\left\{\begin{matrix} py\bar{y}^{p-1} - px^n\bar{x}\bar{y}^{p-1} \\ x\bar{y}^p + py\bar{x}\bar{y}^{p-1} \end{matrix}\right. \arrow[r, "-\check{g}_{k,m}"'] & \left\{\begin{matrix} \delta_{p,k-1}px^{m+n} y \\ \delta_{p,k}x^{m+n+1} \end{matrix}\right.
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{D}f_{k,m} = -(k+1)\check{f}_{k+1,m} - g_{k,m+1} \qquad \mathcal{D}\check{g}_{k,m} = (k+1)\check{f}_{k+1,m+n} + g_{k,m+n+1}$$

Les applications $u_{k,m} = f_{k,m+n} + \check{g}_{k,m}$ sont donc des cycles.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}\check{f}_{k,m} : \left\{\begin{matrix} \bar{y}^p \\ \bar{x}\bar{y}^p \end{matrix}\right. \arrow[r, "\check{f}_{k,m}"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, "\mathcal{D}\check{f}_{k,m}"] & \left\{\begin{matrix} \delta_{p,k}x^m y \\ 0 \end{matrix}\right. \arrow[d, "d"] \\
\left\{\begin{matrix} py\bar{y}^{p-1} - px^n\bar{x}\bar{y}^{p-1} \\ x\bar{y}^p + py\bar{x}\bar{y}^{p-1} \end{matrix}\right. \arrow[r, "+\check{f}_{k,m}"'] & \left\{\begin{matrix} \delta_{p,k}x^{m+n+1} \\ \delta_{p,k}x^{m+1}y \end{matrix}\right.
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}g_{k,m} : \left\{\begin{matrix} \bar{y}^p \\ \bar{x}\bar{y}^p \end{matrix}\right. \arrow[r, "g_{k,m}"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, "\mathcal{D}g_{k,m}"] & \left\{\begin{matrix} 0 \\ \delta_{p,k}x^m \end{matrix}\right. \arrow[d, "d"] \\
\left\{\begin{matrix} py\bar{y}^{p-1} - px^n\bar{x}\bar{y}^{p-1} \\ x\bar{y}^p + py\bar{x}\bar{y}^{p-1} \end{matrix}\right. \arrow[r, "+g_{k,m}"'] & \left\{\begin{matrix} -\delta_{p-1,k}px^{m+n} \\ -\delta_{p-1,k}px^m y \end{matrix}\right.
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{D}\check{f}_{k,m} = f_{k,m+n+1} + \check{g}_{k,m+1} \qquad \mathcal{D}g_{k,m} = -(k+1)f_{k+1,m+n} - (k+1)\check{g}_{k+1,m}$$

Les applications $v_{k,m} = (k+1)\check{f}_{k+1,m} + g_{k,m+1}$ sont aussi des cycles. On voit facilement que :

$$u_{k,m+1} = \mathcal{D}\check{f}_{f,m}, \; u_{k+1,0} = \mathcal{D}\left(\frac{-1}{k+1}\right) g_{k,0}, \; v_{k,m} = -\mathcal{D}f_{k,m}$$

Tous les cycles sont des bords excepté :

$$u_{0,0} = f_{0,n} + \check{g}_{0,0} \; : \; \begin{array}{ccll} 1 & \longrightarrow & x^n & \text{(évaluation non nulle)} \\ \bar{x} & \longrightarrow & y & \text{(dimension formelle)} \end{array}$$

4.3 Calcul de Ext avec le modèle d'Halperin-Stasheff

4.3.1 Nous allons effectuer un calcul de Ext sur un exemple assez simple. En règle générale, pour calculer $Ext_H^{*,*}(\mathbb{Q}, H)$, H étant une algèbre graduée, on utilise une résolution projective de $\mathbb{Q}$ en H-module :

$$\ldots \xrightarrow{d} P_i \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} H \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

Un élément de $\mathrm{Hom}_H^i(P, H)$ est une combinaison linéaire d'applications H-linéaires $f_j : P_j \to H$ de degré i i.e. $|f_j(p)| - |p| = i$. La différentielle $\mathcal{D} : \mathrm{Hom}_H(P_j, H) \to \mathrm{Hom}_H(P_{j+1}, H)$ est définie par $\mathcal{D}f_j = f_j \circ d$, et

$$Ext_H^{p,q}(\mathbb{Q}, H) = H^p\left(\mathrm{Hom}_H^{p+q}(P, H), \mathcal{D}\right)$$

4.3.2 Nous allons prendre l'exemple étudié au paragraphe 1.5.6, $H = H(A)$ avec $(A, d) = (\Lambda(u, v, w), d)$ avec $du = dv = 0, dw = uv, |u| = |v| = 2$ et $|w| = 3$. $H^*(A) = \Lambda u \oplus \Lambda v$ et la résolution est :

$$\ldots \xrightarrow{\tilde{d}} H \otimes (\Lambda\overline{Z})_i \xrightarrow{\tilde{d}} \ldots \xrightarrow{\tilde{d}} H \otimes (\Lambda\overline{Z})_2 \xrightarrow{\tilde{d}} H \otimes (\Lambda\overline{Z})_1 \xrightarrow{\tilde{d}} H \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

avec $(\Lambda\overline{Z})_{2i} = \{\bar{z}^i, \bar{x}\bar{y}, \bar{z}^{i-1}\}$, $(\Lambda\overline{Z})_{2i+1} = \{\bar{x}\bar{z}^i, \bar{y}\bar{z}^i\}$. La différentielle est définie par $\tilde{d}\bar{u} = u$, $\tilde{d}\bar{v} = v$ et $\tilde{d}\bar{w} = -y\bar{x}$.

4.3.3 Nous savons d'ores et déjà que $Ext_H^{0,-}(\mathbb{Q}, H)$ est nul car le socle est nul (cf la proposition 3.3.3). Toutefois, regardons la différentielle des éléments de degré 0.

$$\begin{array}{llll}
f_{0,0} : 1 \to 1 & \bar{x} \xrightarrow{\tilde{d}} x & \xrightarrow{f_{0,0}} & x & \\
 & \bar{y} \to y & \to & y & \mathcal{D}f_{0.0} = f_{1,1} + \check{g}_{1,1} \\
f_{0,p} : 1 \to x^p, p \geq 1 & \bar{x} \xrightarrow{\tilde{d}} x & \xrightarrow{f_{0,p}} & x^{p+1} & \\
 & \bar{y} \to y & \to & 0 & \mathcal{D}f_{0,p} = f_{1,p+1} \\
\check{f}_{0,p} : 1 \to y^p, p \geq 1 & \bar{x} \xrightarrow{\tilde{d}} x & \xrightarrow{\check{f}_{0,0}} & 0 & \\
 & \bar{y} \to y & \to & y^{p+1} & \mathcal{D}\check{f}_{0,p} = \check{g}_{1,p+1}
\end{array}$$

4.3.4 En degré 1 :

$$
\begin{array}{llllll}
f_{1,0} : \bar{x} \to 1 & \bar{z} & \xrightarrow{\bar{d}} & -y\bar{x} & \xrightarrow{f_{1,0}} & -y & \\
 & \bar{x}\bar{y} & \to & x\bar{y} - \bar{x}y & \to & -y & \mathcal{D}f_{1,0} = -\tilde{f}_{2,1} - \tilde{g}_{2,1} \\
f_{1,p} : \bar{x} \to x^p, p \geq 1 & \bar{z} & \xrightarrow{\bar{d}} & -y\bar{x} & \xrightarrow{f_{1,p}} & 0 & \\
 & \bar{x}\bar{y} & \to & x\bar{y} - \bar{x}y & \to & 0 & \mathcal{D}f_{1,p} = 0 \\
\tilde{f}_{1,p} : \bar{x} \to y^p, p \geq 1 & \bar{z} & \xrightarrow{\bar{d}} & -y\bar{x} & \xrightarrow{\tilde{f}_{1,0}} & -y^{p+1} & \\
 & \bar{x}\bar{y} & \to & x\bar{y} - \bar{x}y & \to & -y^{p+1} & \mathcal{D}\tilde{f}_{1,p} = -\tilde{f}_{2,p+1} - \tilde{g}_{2,p+1} \\
g_{1,0} : \bar{y} \to 1 & \bar{z} & \xrightarrow{\bar{d}} & -y\bar{x} & \xrightarrow{g_{1,0}} & 0 & \\
 & \bar{x}\bar{y} & \to & x\bar{y} - \bar{x}y & \to & x & \mathcal{D}g_{1,0} = -g_{2,1} \\
g_{1,p} : \bar{y} \to x^p, p \geq 1 & \bar{z} & \xrightarrow{\bar{d}} & -y\bar{x} & \xrightarrow{g_{1,p}} & 0 & \\
 & \bar{x}\bar{y} & \to & x\bar{y} - \bar{x}y & \to & x^{p+1} & \mathcal{D}g_{1,p} = g_{2,p+1} \\
\tilde{g}_{1,p} : \bar{y} \to y^p, p \geq 1 & \bar{z} & \xrightarrow{\bar{d}} & -y\bar{x} & \xrightarrow{\tilde{g}_{1,0}} & 0 & \\
 & \bar{x}\bar{y} & \to & x\bar{y} - \bar{x}y & \to & 0 & \mathcal{D}\tilde{g}_{1,p} = 0
\end{array}
$$

Les cycles sont $f_{1,p}$ et $\tilde{g}_{1,p}$, mais pour $p \geq 2$, ce sont des bords. D'autre part, on a $\mathcal{D}f_{0,0} = f_{1,1} + \tilde{g}_{1,1}$, les deux cycles $f_{1,1}$ et $\tilde{g}_{1,1}$ sont donc identifiés. Il reste donc un seul élément en homologie : $[f_{1,1}] \in Ext_H^{1,0}(\mathbb{Q}, H)$.

4.3.5 Pour $n \geq 0$, on pose :

$$
\text{en degré 2n+1} \left\{
\begin{array}{llll}
f_{2n+1,m} : & \bar{x}\bar{z}^n & \longrightarrow & x^m \\
\tilde{f}_{2n+1,m} : & \bar{x}\bar{z}^n & \longrightarrow & y^m \\
g_{2n+1,m} : & \bar{y}\bar{z}^n & \longrightarrow & x^m \\
\tilde{g}_{2n+1,m} : & \bar{y}\bar{z}^n & \longrightarrow & y^m
\end{array}\right.
$$

$$
\text{en degré 2n+2} \left\{
\begin{array}{llll}
f_{2n+2,m} : & \bar{z}^{n+1} & \longrightarrow & x^m \\
\tilde{f}_{2n+2,m} : & \bar{z}^{n+1} & \longrightarrow & y^m \\
g_{2n+2,m} : & \bar{x}\bar{y}\bar{z}^n & \longrightarrow & x^m \\
\tilde{g}_{2n+2,m} : & \bar{x}\bar{y}\bar{z}^n & \longrightarrow & y^m
\end{array}\right.
$$

Les cycles sont $f_{2n+1,m+1}$, $\tilde{g}_{2n+1,m}$, $(n+1)\tilde{f}_{2n+2,m} + \tilde{g}_{2n+2,m}$ et $g_{2n+2,m}$ avec $m \geq 1$. On a les relations suivantes :

$$f_{2n+1,m+1} = \mathcal{D}f_{2n,m}, m \geq 1 \quad f_{2n+1,1} = \mathcal{D}\left(f_{2n,0} - \frac{1}{n}\tilde{g}_{2n,0}\right)$$

$$\tilde{g}_{2n+1,m+1} = \mathcal{D}\tilde{f}_{2n,m} \qquad g_{2n+2,m+1} = \mathcal{D}g_{2n+1,m}$$

$$(n+1)\tilde{f}_{2n+2,m+1} + \tilde{g}_{2n+2,m+1} = \mathcal{D}\tilde{f}_{2n+1,m}$$

Il est donc clair qu'il n'y a qu'un seul cycle qui n'est pas un bord, i.e. $Ext_H^{*,*}(\mathbb{Q}, H)$ est de dimension un.

4.4 Exemple traité avec l'algèbre locale

4.4.1 Prenons $(A, d) = (\Lambda(u, v, w), d)$ avec $du = dv = 0, dw = uv, |u| = |v| = 2$ et $|w| = 3$. C'est le modèle de Sullivan de $CP^\infty \vee CP^\infty$. Nous allons montrer que $H^*(A)$ est de Gorenstein selon la définition de l'algèbre locale. Pour cela, il faut trouver une suite régulière $(f_1, \ldots, f_n)$ telle que $H^*(A)/_{(f_1,\ldots,f_n)}$ soit une algèbre à dualité de Poincaré.

4.4.2 Un calcul rapide montre que $H^*(A) = \Lambda u \oplus \Lambda v$. Comme premier élément de la suite régulière, prenons $f_1 = u - v$ (ni u, ni v ne conviennent). Cherchons maintenant un élément régulier de $H^*(A)/_{(f_1)} = \Lambda u$, cette fois-ci on peut prendre $u = f_2$. On a $H^*(A)/_{(f_1,f_2)} = 1$, qui est une algèbre à dualité de Poincaré, par conséquent $H^*(A)$ est de Gorenstein et sa dimension de Krull de $H^*(A)$ est 2.

4.4.3 L'adgc (A, d) est elle aussi de Gorenstein puisque $H^*(A)$ l'est, d'après la proposition 2.2.5. On peut le voir simplement en remarquant que A est formel, ou en remarquant que A est de la forme ΛV avec V de dimension finie (cf prop. 2.5.3).

4.4.4 C'est le seul exemple que je connaisse où $H^*(A)$ soit de Gorenstein et $H^*(A) = H_1 \oplus H_2$. D'autre part le socle de $H^*(A)$ étant nul, l'application d'évaluation de A est nulle (cf prop. 3.3.5).

4.4.5 Posons z tel que $dz = u - v$, et $\tilde{w} = w - uz$. On a un quasi-isomorphisme $(\Lambda(u, v, w, z), d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda(u, v, \tilde{w}, z), \tilde{d})$ où $\tilde{d}\tilde{w} = u^2$. D'autre part, si on considère la KS-extension :

$$(\Lambda(u, \tilde{w}), \tilde{d}) \rightarrowtail (\Lambda(u, v, \tilde{w}, z), \tilde{d}) \longrightarrow (\Lambda(v, z), \bar{d})$$

on montre facilement que l'on a un quasi-isomorphisme

$$(\Lambda(u, \tilde{w}), \tilde{d}) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda(u, v, \tilde{w}, z), \tilde{d})$$

d'où $H^*(\Lambda(u, v, w, z))$ est de dimension finie, et satisfait la dualité de Poincaré. Si on considère la KS-extension :

$$(\Lambda(u, v, w), d) \rightarrowtail (\Lambda(u, v, w, z), d) \longrightarrow (\Lambda(z), 0)$$

on peut appliquer le théorème 2.5.2 pour prouver que $(\Lambda(u, v, w), d)$ est de Gorenstein. Plus particulièrement, cela prouve que $(\Lambda(u, v, w), d) \in \mathbf{G}_N$ (cf définition 5.2.4).

4.5 Exemples où $H^*(A)$ n'est pas Gorenstein

Dans ce paragraphe, on donne trois exemples d'adgc de Gorenstein dont la cohomologie n'est pas de Gorenstein. Pour chacun, on montrera d'une manière différente que $H^*(A)$ n'est pas de Gorenstein.

Exemple 4.5.1
Soit $(A,d) = (\Lambda(u,v,w,t),d)$ avec $du = dv = dw = 0, dt = uvw, |u| = 2, |v| = |w| = 3$ et $|t| = 7$.

$H^*(A) = \Lambda(u,v,w,a,b)_{/\{uvw,aw+bv\}}$ où $a = [vt]$ et $b = [wt]$. $H^*(A)$ est noethérienne. De la proposition 2.6.5, fd $(A) = 1 - |u| + |v| + |w| + |t| = 12$ donc il existe un élément de degré 12 dans $Ext_{H^*(A)}(\mathbb{Q}, H^*(A))$. Mais, $Ext^{0,-}_{H^*(A)}(\mathbb{Q}, H^*(A)) =$ socle $(H^*(A))$ (cf prop. 3.3.3) et $[vw]$ est dans le socle, $|vw| = 6$ donc $Ext^{*,*}_{H^*(A)}(\mathbb{Q}, H^*(A))$ contient au moins deux éléments (un de degré 12 et un de degré 6), donc $H^*(A)$ n'est pas de Gorenstein.
D'autre part, il est clair d'après le théorème 7.1.1 que $\mathrm{ev}_A = 0$ puisque $H(A)$ n'est pas finie.
En résumé, on a une adgc (A,d) de Gorenstein telle que $H(A)$ n'est pas de Gorenstein bien que $H(A)$ soit noethérienne, et telle que ev_A est nulle bien que le socle de $H(A)$ soit non nul.

Exemple 4.5.2
Soit $(A,d) = (\Lambda(a,x,y,z),d)$ avec $dy = ax$ et $dz = x^2$. $|x|$ est évidemment toujours pair.
Dans le cas où $|a|$ est pair, on a $H(A) = \Lambda(x)_{/x^2} \oplus \Lambda(a,t)$ avec $t = [xy + az]$. On se ramène à un cas semblable à l'exemple 4.5.1 (exercice !).
Dans le cas $|a|$ impair, on a $H(A) = \bigoplus_{i \geq 0}(\mathbb{Q}u_i \oplus \mathbb{Q}v_i) =$ socle $H(A)$ où $u_i = [xy^i]$ et $v_i = [ay^i]$.
Donc $H(A)$ n'est pas de Gorenstein car $Ext^{0,-}_{H^*(A)}(\mathbb{Q}, H^*(A)) =$ socle $(H^*(A))$ est de dimension infinie. Ceci illustre aussi la proposition 7.6.2.
D'autre part, d'après la proposition 2.6.5, fd $(A) = 2$, donc dans le cas où $|x| = 2$, on a x qui est dans le socle et $|x| =$ fd (A) bien que $\mathrm{ev}_A = 0$ puisque $H(A)$ n'est pas de dimension finie (cf théorème 7.1.1).
Cet exemple prouve donc que la réciproque au lemme 3.3.8 est fausse.

Exemple 4.5.3
Soit $(A,d) = (\Lambda(u,v,w,t),d)$ avec $du = dv = dw = 0, dt = uvw, |u| = |v| = 2, |w| = 3$ et $|t| = 6$, $H^*(A)$ n'est pas noethérienne et le socle est nul. $H^*(A)$ n'est pas de Gorenstein, en effet on va prouver que $Ext^{*,*}_{H^*(A)}(\mathbb{Q}, H^*(A))$ contient une infinité d'éléments.
$H^*(A) = H = \Lambda(u,v,t_i)_{/\{uvt_i,t_it_j\}}$ où $t_i = [wt^i]$. On utilise la résolution projective de $\mathbb{Q}$ en H-modules obtenue avec le modèle bigradué de H (cf paragraphe 1.5.5). Ici $(\Lambda\bar{Z})_1 = \bar{Z}_1 = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{t}_i\}$ et $\bar{Z}_2 = \{\bar{w}_i, \bar{t}_{ij}\}$ avec $d\bar{w}_i = -\bar{u}vt_i$ et $d\bar{t}_{ij} = -\bar{t}_it_j$.

Soient $(f_i)_{i\geq 0}$ une famille d'applications H-linéaires définies comme suit :

$$\begin{array}{rrcl} f_i : & H\otimes(\Lambda\overline{Z})_1 & \longrightarrow & H \\ & 1\otimes\bar{u} & \mapsto & ut_i \\ & 1\otimes\bar{v} & \mapsto & 0 \\ & 1\otimes\bar{t}_i & \mapsto & 0 \end{array}$$

Vérifions que $f_i\circ\check{d}=0$

$$\begin{array}{rccccc} f_i\circ\check{d}: & H\otimes(\Lambda\overline{Z})_2 & \xrightarrow{\check{d}} & H\otimes(\Lambda\overline{Z})_1 & \xrightarrow{f_i} & H \\ & 1\otimes\bar{w}_j & \longrightarrow & -vt_j\otimes\bar{u}vt_j & \longrightarrow & -vt_j.ut_i=0 \\ & 1\otimes\bar{t}_{j,k} & \longrightarrow & t_k\otimes\bar{t}_j & \longrightarrow & 0 \\ & 1\otimes\bar{u}^2 & \longrightarrow & 2u\otimes\bar{u} & \longrightarrow & 2u.ut_i=0 \\ & 1\otimes\bar{v}^2 & \longrightarrow & 2v\otimes\bar{v} & \longrightarrow & 0 \\ & 1\otimes\bar{u}\bar{v} & \longrightarrow & u\otimes\bar{v}+v\otimes\bar{u} & \longrightarrow & v.ut_i=0 \\ & 1\otimes\bar{t}_j\bar{t}_k & \longrightarrow & t_j\otimes\bar{t}_k+t_k\otimes\bar{t}_j & \longrightarrow & 0 \\ & 1\otimes\bar{t}_j\bar{u} & \longrightarrow & t_j\otimes\bar{u}+u\otimes\bar{t}_j & \longrightarrow & t_j.ut_i=0 \\ & 1\otimes\bar{t}_j\bar{v} & \longrightarrow & t_j\otimes\bar{v}+v\otimes\bar{t}_j & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

f_i est un bord si il existe une application H-linéaire $g:H\to H$ (i.e. uniquement déterminée par $g(1)$) telle que $f_i=g\circ\check{d}$. En particulier, on aurait $ut_i=f(\bar{u})=g(u)=u.g(1)$, ce qui force à avoir $g(1)=t_i$. Evaluons maintenant en $\bar{v}$, on obtient une contradiction : $0=f(\bar{v})=g(v)=vt_i$! Les f_i ne sont donc pas des bords, on a $f_i\in Ext_H^{1,|t_i|}(\mathbb{Q},H)$, donc $Ext_H^{*,*}(\mathbb{Q},H)$ est de dimension infinie et par conséquent H n'est pas de Gorenstein.

Chapitre 5

Ensembles d'espaces de Gorenstein sur Q

5.1 Introduction

5.1.1 On désigne par **G** l'ensemble des espaces de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$. Dans ce chapitre, on travaille exclusivement sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, on omettra donc de préciser le corps sur lequel on travaille. On note **DP** l'ensemble des espaces X tels que $H^*(X, \mathbb{Q})$ satisfasse la dualité de Poincaré. On a d'après le théorème 2.4.5

$$\mathbf{DP} \subset \mathbf{G}$$

Le but de cette section est de décrire différents ensembles d'espaces rationnels compris entre ces deux ensembles :

Proposition 5.1.2

$$\mathbf{DP} \overset{(1)}{\subset} \mathcal{N} \overset{(2)}{\subset} \mathbf{G}_f^{pair} \overset{(3)}{\subset} \mathbf{G}_f \overset{(4)}{\subset} \mathbf{G}_N \overset{(5)}{\subset} \mathbf{G}$$

5.1.3 Définissons succinctement ces différents ensembles :

- Le premier, $\mathcal{N}$, est l'ensemble des espaces X de Gorenstein dont la cohomologie $H^*(X; \mathbb{Q})$ est noethérienne, i.e. admet un nombre fini de générateurs en tant qu'algèbre.

- L'ensemble $\mathbf{G}_f$ (resp. $\mathbf{G}_f^{pair}$) est constitué des espaces qui admettent un modèle de Sullivan de la forme $(\Lambda V \otimes \Lambda P, D)$ qui une KS-extension de l'adgc $(\Lambda V, d)$ avec V un espace vectoriel finiment engendré (resp. par des éléments de degrés pairs) et $(\Lambda P, \bar{D}) \in \mathbf{DP}$.

- L'ensemble $\mathbf{G}_N$ est constitué des espaces admettant un modèle de Sullivan $(\Lambda X, d)$ tels qu'il existe une KS-extension :

$$(\Lambda X, d) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda U, D) \longrightarrow (\Lambda U, \bar{D})$$

où U est finiment engendré par des éléments de degrés impairs, et $\Lambda X \otimes \Lambda U \in \mathbf{DP}$.

5.1.4 Les inclusions (1) et (3) sont évidentes. L'inclusion (2) sera le but du paragraphe 5.4, la (4) celui du paragraphe 5.5 et la proposition 5.2.7 est consacrée à l'inclusion (5).

D'autre part, les inclusions (1) et (3) sont strictes. Pour (1), il suffit de prendre $\mathbf{CP}^\infty$ pour s'en convaincre. La seconde demande un peu plus de travail.

Exemple 5.1.5
On va la montrer en terme de modèles. Soit $(\Lambda(u_2, v_3, w_4), d)$ avec $dw = uv$, supposons que $\Lambda U = \Lambda(u, v, w) \in \mathbf{G}_f^{pair}$, on a alors un quasi-isomorphisme $\phi : (\Lambda V \otimes \Lambda P, D) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda U, d)$. Pour des raisons de degré (V ne contenant que des éléments de degré pair), v sera dans ΛP, et, par conséquent, il en est de même de w. Dans $(\Lambda P, \bar{d})$ on a $\bar{d}w = 0$, donc il existe ψ tel que $\bar{\psi} = w^k$ pour un certain k, puisque $H^*(\Lambda P, \bar{d})$ est finie ($(\Lambda P, \bar{d}) \in \mathbf{DP}$). Finalement, $\phi(d\psi) = w^k$ alors que $\phi(\psi) = 0$, donc ϕ ne commute pas à la différentielle. Absurde.

L'adgc $(\Lambda(u_2, v_3, w_4), d)$ avec $dw = uv$ est clairement dans $\mathbf{G}_f$ mais pas dans $\mathbf{G}_f^{pair}$. L'inclusion (3) est donc stricte. ∎

Le premier sous-ensemble de $\mathbf{G}$ que l'on va définir est $\mathbf{G}_N$:

5.2 L'ensemble $\mathbf{G}_N$

5.2.1 *Introduction*
Cet ensemble est très intéressant pour de multiples raisons, en premier lieu, il contient tous les espaces de Gorenstein connus. D'autre part, sur $\mathbf{G}_N$, (évaluation est non nulle) est équivalent à (la cohomologie satisfait la dualité de Poincaré), en effet on a (cf théorème 7.2.1) :

$$B \text{est de type } \mathbf{G}_N, \mathrm{ev}_B \neq 0 \Rightarrow B \in \mathbf{DP}$$

Enfin, cet ensemble reste stable par construction par fibration sous une certaine hypothèse, i.e. si la base et la fibre sont dans $\mathbf{G}_N$ alors il en est de même de l'espace total (cf théorème 6.2.2).

Définition 5.2.2
Un espace topologique 1-connexe B de type fini sera dit de type $\mathbf{G}_N$ s'il existe une fibration d'espaces 1-connexes de type fini :

$$B \longleftarrow E \longleftarrow F$$

où E a sa cohomologie qui satisfait la dualité de Poincaré et F a son homotopie rationnelle finie.

Ce qui se traduit dans *ADGC* par :

Définition 5.2.3
$\mathbf{G}_N$ est l'ensemble des algèbres différentielles graduées 1-connexes (A,d) telles qu'il existe une KS-extension :

$$(A,d) \rightarrowtail (A \otimes \Lambda U, D) \longrightarrow (\Lambda U, \bar{D}) \tag{5.1}$$

où U est espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs, et $A \otimes \Lambda U \in \mathbf{DP}$.

Cette définition est équivalente à la définition suivante :

Définition 5.2.4
L'ensemble $\mathbf{G}_N$ est constitué des algèbres différentielles graduées 1-connexes (A,d) telles qu'il existe une suite finie de KS-extensions :

$$(A_i, d_i) \rightarrowtail (A_{i+1}, d_{i+1}) \longrightarrow (\Lambda x_i, 0)$$

où $0 \leq i \leq N$, $(A_0, d_0) = (A,d)$, x_i est de degré impair et $A_{N+1} \in \mathbf{DP}$.

Proposition 5.2.5
Soit $(\Lambda X_1, d_1)$ un KS-complexe et une KS-extension :

$$(\Lambda X_1, d_1) \rightarrowtail (\Lambda X_1 \otimes \Lambda U_1, D_1) \longrightarrow (\Lambda U_1, \bar{D}_1)$$

avec U_1 un espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs. Soit $(\Lambda X_2, d_2)$ le modèle minimal de $(\Lambda X_1 \otimes \Lambda U_1, D_1)$, on a alors :

$$((\Lambda X_2, d_2) \in \mathbf{G}_N) \Rightarrow ((\Lambda X_1, d_1) \in \mathbf{G}_N)$$

5.2.6 *Preuve de la proposition 5.2.5 :*

Il existe U_2 espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs et une KS-extension :

$$(\Lambda X_2, d_2) \rightarrowtail (\Lambda X_2 \otimes \Lambda U_2, D_2) \longrightarrow (\Lambda U_2, \bar{D}_2)$$

avec $(\Lambda X_2 \otimes \Lambda U_2, D_2)$ dans $\mathbf{DP}$. Considérons la somme amalgamée suivante :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda X_2 \arrow[r, tail] \arrow[d, "\simeq"'] & \Lambda X_2 \otimes \Lambda U_2 \arrow[r] \arrow[d, "(2)"', "\simeq"] & \Lambda U_2 \\
\Lambda X_1 \otimes \Lambda U_1 \arrow[r, tail, "(1)"'] & \Lambda X_1 \otimes \Lambda U_1 \otimes \Lambda U_2 \arrow[r] & \Lambda U_2
\end{tikzcd}$$

La KS-extension (2) nous donne que $\Lambda X_1 \otimes \Lambda U_1 \otimes \Lambda U_2$ est dans $\mathbf{DP}$, en effet, la base et la fibre sont dans $\mathbf{DP}$. La composée de (1) avec la KS-extension donnée en hypothèse donne la KS-extension :

$$(\Lambda X_1, d_1) \rightarrowtail (\Lambda X_1 \otimes \Lambda U_1 \otimes \Lambda U_2, D) \longrightarrow (\Lambda U_1 \otimes \Lambda U_2, \bar{D})$$

ce qui montre que ΛX_1 est dans $\mathbf{G}_N$. ∎

Proposition 5.2.7

$\mathbf{G}_N$ est bien un sous-ensemble de $\mathbf{G}$

5.2.8 *Preuve de la proposition 5.2.7 :*

Soit A un élément de $\mathbf{G}_N$, on considère la KS-extension (5.1). D'après la proposition 2.5.3, $(\Lambda U, \bar{D})$ est de Gorenstein, on a même $(\Lambda U, \bar{D}) \in \mathbf{DP}$ puisque U ne contient que des éléments de degrés impairs. d'autre part, comme $(A \otimes \Lambda U, D) \in \mathbf{DP}$, il est de Gorenstein (cf théorème 2.4.5). La KS-extension (5.1) satisfait les hypothèses du théorème 2.5.2, on en conclut donc que A est de Gorenstein. ■

Remarque 5.2.9

Pour un élément A de $\mathbf{G}_N$, sa dimension formelle, fd (A) , peut être calculée grâce à la KS-extension (5.1), car on est bien dans le cadre de la proposition 2.6.7.
On a :

$$\text{fd}\,(A) = \text{fd}\,(A \otimes \Lambda U) - \text{fd}\,(\Lambda U)$$

5.3 L'ensemble $\mathbf{G}_f$

On définit maintenant $\mathbf{G}_f$ un autre sous-ensemble de $\mathbf{G}$:

Définition 5.3.1

Un espace topologique E, 1-connexe de type fini, sera dit de type $\mathbf{G}_f$ s'il existe une fibration d'espaces 1-connexes de type fini :

$$F \longrightarrow E \longrightarrow B \tag{5.2}$$

où $H^*(F, \mathbb{Q})$ satisfait la dualité de Poincaré et $\pi_*(B) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie.

Proposition 5.3.2

Soient deux fibrations du type (5.2) de même base :

$$F \longrightarrow E \longrightarrow B \quad \text{et} \quad F' \longrightarrow E' \longrightarrow B$$

alors le produit fibré : $E'' = E \times_B E'$ est encore un espace de type $\mathbf{G}_f$.

Avant de prouver la proposition, on va traduire la définition dans $ADGC$:

Définition 5.3.3

$\mathbf{G}_f$ est l'ensemble des algèbres différentielles graduées commutatives $(\Lambda V, d)$ telles qu'il existe une KS-extension :

$$(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda P, D) \longrightarrow (\Lambda P, \bar{D}) \tag{5.3}$$

où V est de dimension finie et $H^*(\Lambda P, \bar{D})$ satisfait la dualité de Poincaré.

5.3.4 *Preuve de la proposition 5.3.2 :*
On note $(\Lambda V \otimes \Lambda P, D)$ (resp. $(\Lambda V \otimes \Lambda P', D')$ le modèle de Sullivan de E (resp. E'), alors le modèle de Sullivan de E'' est :

$$(\Lambda V \otimes \Lambda P, D) \otimes_{(\Lambda V, D)} (\Lambda V \otimes \Lambda P', D') \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V \otimes \Lambda P \otimes \Lambda P, D'')$$

La KS-extension suivante est du type de (5.3) :

$$(\Lambda V, D) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda P \otimes \Lambda P, D'') \longrightarrow (\Lambda P \otimes \Lambda P, \bar{D}'')$$

donc $(\Lambda V \otimes \Lambda P \otimes \Lambda P, D'') \in \mathbf{G}_f$, d'où $E'' \in \mathbf{G}_f$. ■

5.3.5 De même que pour $\mathbf{G}_N$, on prouve que $\mathbf{G}_f \subset \mathbf{G}$, plus précisément dans le paragraphe 5.5, on montrera que $\mathbf{G}_f \subset \mathbf{G}_N$, ce qui a pour corollaire immédiat :

$$E \in \mathbf{G}_f, \mathrm{ev}_E \neq 0 \Rightarrow E \in \mathbf{DP}$$

On en donnera néanmoins une autre démonstration qui découle d'une propriété des espaces de type $\mathbf{G}_f$ avec l'évaluation (théorème 7.5.1). Pour cela, on aura besoin de la proposition suivante.
Une adgc $(\Lambda X, d)$ est dite e-minimale si $dX^{pair} \subset \Lambda^+(X) \otimes \Lambda^+(X)$.

Proposition 5.3.6
Soit $(\Lambda V \otimes \Lambda P, D)$ un élément de $\mathbf{G}_f$, alors si $(\Lambda V, D)$ et $(\Lambda P, \bar{D})$ sont des modèles minimaux alors $(\Lambda V \otimes \Lambda P, D)$ est e-minimale.

preuve : C'est une conséquence immédiate du théorème 4.15(iii) de [20] (voir paragraphe 1.4.10). ■

5.3.7 On s'intéressera aussi au sous-ensemble $\mathbf{G}_f^{pair}$ de $\mathbf{G}_f$ où, dans la fibration (5.2), $\pi_*(B) \otimes \mathbb{Q} = \pi_{pair}(B) \otimes \mathbb{Q}$. Ce sous-espace contient $\mathcal{N}$, l'ensemble des espaces de Gorenstein dont la cohomologie est noethérienne en tant qu'algèbre (cf le paragraphe 5.4). Il est clair d'autre part que $\mathbf{G}_f^{pair}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}_N$, il suffit de looper la base pour le prouver.

5.4 Preuve de $\mathcal{N} \subset \mathbf{G}_f^{pair}$

Proposition 5.4.1
Soit S un espace de Gorenstein tel que $H^*(S;\mathbb{Q})$ soit noethérienne, alors $S \in \mathbf{G}_f$.

5.4.2 *Preuve :*
Soit S un espace de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$ tel que $H^*(S;\mathbb{Q})$ soit noethérienne.
On considère le modèle filtré de $A_{PL}(S)$ (paragraphe 1.5) : $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(S)$, $Z = \oplus_{n \geq 2} \oplus_{i \geq 0} Z_i^n$, $DZ_i^n \subset (\Lambda Z)_{<i}^{n+1}$. L'espace vectoriel Z_0 engendre $H^*(S;\mathbb{Q})$.

On définit $\hat{Z}$ par $Z = \hat{Z} \oplus Z_0^{pair}$. Comme $H^*(S;\mathbb{Q})$ est noethérienne, Z_0 est de dimension finie (prop. 1.5.3), et donc il en est de même de Z_0^{pair}. On considère la KS-extension :

$$(\Lambda Z, D) \rightarrowtail (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}_0^{\mathrm{pair}}, D) \longrightarrow (\Lambda \bar{Z}_0^{\mathrm{pair}}, 0) \tag{5.4}$$

Le terme E_2 de la suite spectrale de Serre de la KS-extension (5.4) est un $H^*(\Lambda Z)$-module de type fini ($H^*(\Lambda \bar{Z}_0^{\mathrm{pair}}) = \Lambda \bar{Z}_0^{\mathrm{pair}}$ est de dimension finie). On en déduit que le terme E_∞ de la suite spectrale est un $H^*(\Lambda Z)_{/Z_0^{pair}}$-module de type fini. Or $H^*(\Lambda Z)_{/Z_0^{pair}}$ est de dimension finie, par conséquent $H(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}_0^{\mathrm{pair}}, D)$ est de dimension finie. Ceci montre que $\mathcal{N} \subset \mathbf{G}_N$.

De plus, en appliquant le théorème 2.5.2 à la KS-extension (5.4), on montre que $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}_0^{\mathrm{pair}}, D)$ est de Gorenstein et donc $H^*(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}_0^{\mathrm{pair}}, \mathbb{Q})$ satisfait la dualité de Poincaré (théorème 2.4.5). Maintenant, on remarque qu'il y a un quasi-isomorphisme naturel :

$$(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z}_0^{\mathrm{pair}}, D) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda Z/\Lambda Z_0^{\mathrm{pair}}, \bar{D}) = (\Lambda \hat{Z}, \bar{D})$$

La KS-extension :

$$(\Lambda Z_0^{\mathrm{pair}}, 0) \rightarrowtail (\Lambda Z, D) \longrightarrow (\Lambda \hat{Z}, \bar{D})$$

est du type de la KS-extension (5.3), on en déduit que $(\Lambda Z, D) \in \mathbf{G}_f$ et donc que $S \in \mathbf{G}_f$. ∎

5.5 Preuve de $\mathbf{G}_f \subset \mathbf{G}_N$

Proposition 5.5.1
Soit S un espace topologique 1-connexe tel que $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie, alors S est de type $\mathbf{G}_N$.

Nous allons prouver ce résultat avec les modèles, la proposition suivante est due à Halperin et Levin :

Proposition 5.5.2 *([21], proposition 3.1)*
Soit $(\Lambda V, d)$ une adgc avec V de dimension finie, alors il existe U_V et U espaces vectoriels finiment engendrés par des éléments de degrés impairs tels que l'on ait une KS-extension $(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda U_V, D)$ et un quism $(\Lambda U, d_U) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V \otimes \Lambda U_V, D)$ (modèle minimal).
En particulier, $(\Lambda V, d)$ est dans $\mathbf{G}_N$.

Corollaire 5.5.3

$\mathbf{G}_f$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}_N$.

5.5.4 *Preuve du corollaire 5.5.3 :*
Soit $(\Lambda V \otimes \Lambda P, d)$ un élément de $\mathbf{G}_f$, avec V de dimension finie et $(\Lambda P, \bar{d}) \in$ **DP**. D'après la proposition 5.5.2, il existe une adgc $(\Lambda U_V, \bar{\delta})$ avec U_V de dimension finie et ne contenant que des éléments de degrés impairs et une KS-extension :

$$(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda U_V, \delta) \longrightarrow (\Lambda U_V, \bar{\delta})$$

telle que $(\Lambda V \otimes \Lambda U_V, \delta)$ soit dans **DP**.
En faisant une somme amalgamée, on trouve le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & (2) & \\
(1) & \Lambda V \arrow[r, tail] \arrow[d] & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda U_V \\
(3) & \Lambda V \otimes \Lambda P \arrow[r, tail] \arrow[d] & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda P \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda U_V \\
 & \Lambda P & \Lambda P &
\end{tikzcd}$$

- La KS-extension (1) exprime le fait que ΛV est un élément de $\mathbf{G}_N$ (cf la KS-extension (5.1) de la définition 5.2.3).

- La base et la fibre de la KS-extension (2) sont deux éléments de **DP**, donc l'espace total aussi.

- La KS-extension (3) est de la forme de la KS-extension (5.1) de la définition 5.2.3 d'un élément de $\mathbf{G}_N$, ce qui prouve que $(\Lambda V \otimes \Lambda P, d)$ est dans $\mathbf{G}_N$.

■

5.5.5 *Preuve de la proposition 5.5.2 :*
On suppose $(\Lambda V, d)$ minimal, avec V de dimension finie.
On décompose $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ avec $dV_0 = 0$ et $dV_i \subset \Lambda(V_0 \oplus \ldots V_{i-1})$. On remarque que tous les V_i sont évidemment de dimension finie. On va démontrer la proposition par récurrence sur k.
• Pour $k = 0$: On a donc $(\Lambda V, d) = (\Lambda V_0, 0)$. On écrit $V = V^{pair} \oplus V^{impair}$ et on pose $U_V = \bar{V}^{pair}$ et $D\bar{v} = v$, on considère alors la KS-extension :

$$(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda U_V, D) \longrightarrow (\Lambda U_V, 0)$$

Notons $U = V^{imp}$, on a un quasi-isomorphisme $(\Lambda U, d_U) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V \otimes \Lambda U_V, D)$.
• On suppose le résultat vrai pour $k = K$, on va le montrer pour $k = K + 1$. On pose $U_0 = \bar{V}_0^{pair}$ avec $D\bar{v} = v$ et l'ensemble U_1 tel que $DU_1 = \Lambda^2(V_0^{impair})$ (on tue tous les doubles produits d'impairs). On considère la KS-extension :

$$(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda(U_0 \oplus U_1), D) \longrightarrow (\Lambda(U_0 \oplus U_1), 0)$$

On minimalise $(\Lambda \check{V}, \check{d}) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V \otimes \Lambda(U_0 \oplus U_1), D)$ et on décompose $\check{V} = \check{V}_0 \oplus \ldots \oplus \check{V}_K$ avec $\check{V}_0 = V_0^{impair} \oplus V_1$, $\check{V}_1 = V_2 \oplus U_1$ et $\check{V}_i = V_{i+1}$ pour $2 \leq i \leq K$. On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence, il existe $\check{U}$ tel que la KS-extension

$$(\Lambda \check{V}, \check{d}) \rightarrowtail (\Lambda \check{V} \otimes \Lambda \check{U}, \check{D}) \longrightarrow (\Lambda \check{U}, \bar{\check{D}})$$

soit du type (5.1). En posant $U_V = U_0 \oplus U_1 \oplus \check{U}$, on obtient une KS-extension :

$$(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda U_V, D) \longrightarrow (\Lambda U_V, \bar{D})$$

L'hypothèse de récurrence nous assure que le modèle minimal de $(\Lambda V \otimes \Lambda U_V, D)$ ne contient que des impairs. ■

5.5.6 Illustrons la technique de la preuve avec deux exemples, on remarquera que pour ceux-ci, la cohomologie n'est pas noethérienne, i.e. les deux adgc ne sont pas des éléments de $\mathcal{N}$.

Exemple 5.5.7
Soit $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x, y, z), d)$ avec $dx = dy = 0$, $dz = xy$, $|x| = 2$, $|y| = 3$ et $|z| = 4$.
On introduit tout d'abord u tel que $Du = x$, on obtient la KS-extension :

$$(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda u, D) \longrightarrow (\Lambda u, 0)$$

On minimalise : $(\Lambda(y,z),0) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V \otimes \Lambda u, D)$, la dernière étape consiste à éliminer z. On introduit $\bar{z}$ tel que $\check{D}\bar{z} = z$, ce qui donne :

$$(\Lambda(y,z),0) \rightarrowtail (\Lambda(y,z) \otimes \Lambda\bar{z}, \check{D}) \longrightarrow (\Lambda\bar{z},0)$$

Ce qui prouve que $(\Lambda V, d)$ satisfait les conditions de la définition 5.2.4. En une étape, cela donne

$$(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda(u,\bar{z}), \check{D}) \longrightarrow (\Lambda(u,\bar{z}),0)$$

avec $\check{D}u = x$ et $\check{D}\bar{z} = z - uy$.

Exemple 5.5.8
Soit $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x,y,z,t), d)$ avec $dx = dy = dz = 0$, $dt = xyz$, $|x| = |y| = |z| = 3$ et $|t| = 8$.
Avant de tuer sauvagement l'élément t, on doit en faire un cycle, pour cela on introduit u tel que $du = xy$ et on fait le changement de variable $\tilde{t} = t - uz$, ce qui donne le quasi-isomorphisme :

$$(\Lambda V \otimes \Lambda u, d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda(x,y,z,\tilde{t},u), D)$$

avec $Du = xy$ et $x, y, z, \tilde{t}$ des cycles. Il suffit donc de poser v tel que $Dv = \tilde{t}$ pour montrer que $(\Lambda V, d) \subset \mathbf{G}_N$.

5.5.9 La proposition suivante généralise la proposition 5.5.2 et la preuve s'inspire de la preuve de la proposition 3.2 de [27]. Elle nous sera très utile pour la preuve du théorème 6.2.2 (les $\mathbf{G}_N$ sont stables par fibrations)

Proposition 5.5.10
Soit $(\Lambda X, d)$ un KS-complexe quelconque.
Pour tout $m \geq 0$, il existe W, espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs, tel que l'on ait la KS-extension $\Lambda X \rightarrowtail \Lambda X \otimes \Lambda W$ et tel que le modèle minimal ΛZ de $\Lambda X \otimes \Lambda W$ satisfasse $\left(Z^{\leq m}\right)^{imp.} = Z^{\leq m}$.

5.5.11 *preuve de la proposition 5.5.10 :*

Plusieurs méthodes sont possibles, on peut utiliser la même idée que celle du paragraphe 5.5.5. Nous utiliserons ici une autre méthode.

Projetons $(\Lambda X, d)$ sur X^{imp} et prenons un modèle de cette projection :

$$\begin{tikzcd} \Lambda X \arrow[r, tail] \arrow[dr] & \Lambda X \otimes \Lambda V \arrow[r, dash, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"] & \Lambda \check{Z} \\ & X^{imp} & \end{tikzcd}$$

Ici $\Lambda\check{Z}$ est le modèle minimal de $\Lambda X \otimes \Lambda V$, i.e. le modèle de Sullivan d'un wedge de sphères, $\check{Z}$ contient donc que des éléments de degrés impairs. Par conséquent, en supposant la KS-extension $\Lambda X \rightarrowtail \Lambda X \otimes \Lambda V$ minimale, V ne contiendra que des éléments de degrés impairs. Il suffit alors de prendre $W = V^{\leq m}$, et le modèle minimal $\Lambda Z \xrightarrow{\simeq} \Lambda X \otimes \Lambda W$ vérifie bien $\left(Z^{\leq m}\right)^{imp.} = Z^{\leq m}$. ∎

5.6 Nombres intéressants

5.6.1 Que ce soit pour $\mathbf{G}_N$, $\mathbf{G}_f$ ou encore $\mathbf{G}_f^{pair}$, on peut se demander ce que signifie la dimension de l'espace vectoriel finiment engendré. On les notera respectivement N_N, N_f et N_f^p. J'avoue ma quasi ignorance sur le domaine. Je me suis toutefois intéressé au cas de $\mathbf{G}_N$, je me suis demandé si ce nombre, N_N, était égal à la dimension de Krull dans le cas où la cohomologie serait noethérienne. L'exemple qui suit prouve que ces deux nombres sont différents.

Exemple 5.6.2
Prenons $(A, d) = (\Lambda(u, v, w), d)$ avec $du = dv = 0, dw = uv, |u| = |v| = 2$ et $|w| = 3$. Dans la section 4.4, on a montré que sa dimension de Krull était 2 alors N_N est 1, il suffit de considérer la KS-extension :

$$(\Lambda(u, v, w), d) \rightarrowtail (\Lambda(u, v, w, z), d) \longrightarrow (\Lambda(z), 0)$$

avec $dz = u - v$ (cf paragraphe 4.4.5).

5.6.3 D'autre part, on pourrait espérer aussi une formule du type $N_N(E) = N_N(B) + N_N(F)$ pour les fibrations, vu le théorème 6.2.2. Il suffit de considérer la KS-extension suivante pour perdre tout espoir :

$$(\Lambda x, 0) \rightarrowtail (\Lambda(u, v, w), d) \longrightarrow (\Lambda(v, w), 0)$$

où l'espace total est l'exemple 5.6.2 qui précède.

5.6.4 Bien que ne sachant pas si l'inclusion (2) de la proposition 5.1.2 : $\mathcal{N} \subset \mathbf{G}_f^{pair}$ est stricte ou non, on peut raisonnablement se demander si N_f^p est lui égal à la dimension de Krull dans le cas où la cohomologie serait noethérienne. Il est clair en tous cas que $N_f^p \geq N_N$ (il suffit de looper la fibration) et que $N_f \leq N_f^p$. On peut se demander quel est le lien entre N_f et N_N (cette question est évidemment liée à l'inclusion (4)de la proposition 5.1.2 $\mathbf{G}_f \subset \mathbf{G}_N$).

Chapitre 6

$\mathbf{G}_N$ est stable par fibration e-minimale

6.1 Introduction

6.1.1 Le théorème 2.5.2 nous donne la possibilité de construire différents espaces de Gorenstein au moyen d'une fibration, comme les espaces de type $\mathbf{G}_f$ par exemple. Mais il ne définit pas un cadre stable. Le but de ce chapitre est de démontrer que si la base et la fibre d'une fibration "e-minimale" sont de type $\mathbf{G}_N$, alors l'espace total est aussi de type $\mathbf{G}_N$.

6.1.2 L'hypothèse e-minimale signifie pour une fibration :

$$B \xleftarrow{p} E \xleftarrow{j} F$$

1) que $\pi_{imp}(p) \otimes \mathbb{Q}$ est surjective en degrés impairs
2) ou que $\pi_{imp}(j) \otimes \mathbb{Q}$ est injective en degrés pairs
3) ou encore que le connectant de la longue suite exacte d'homotopie associé à cette fibration est nul pour les degrés impairs.

Cela se traduit en modèle par le fait que la différentielle D est minimale sur les éléments pairs dans la KS-extension :

$$(\Lambda X, d) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \longrightarrow (\Lambda V, \bar{D})$$

où $(\Lambda X, d)$ et $(\Lambda V, \bar{D})$ sont les modèles minimaux respectifs de B et F. On dit alors que la KS-extension est e-minimale.

6.1.3 Dans les hypothèses du théorème 2.5.2, Aniceto Murillo a introduit l'alternative (ii), où apparaît l'hypothèse de "e-minimalité". En effet, ceci s'illustre dans le cas où $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ ne contient qu'un seul élément de degré pair. Dans le cas où $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ ne contient qu'un seul élément de degré impair, l'alternative (i)

nous suffit et ne nous impose pas de condition de minimalité. Une récurrence sur le nombre de générateurs de $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ nous permet alors d'affaiblir (ii) en :

(ii)bis $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie et la fibration est e-minimale.

D'autre part, l'alternative (i) n'est pas étrangère à la e-minimalité. En effet, Steve Halperin a montré que si $H^*(F, \mathbb{Q})$ est de dimension finie, alors la fibration est e-minimale (cf paragraphe 1.4.10).

Au vu de ce qui précède, on peut énoncer sans mal :

Proposition 6.1.4
Soit la fibration e-minimale d'espaces 1-connexes

$$B \longleftarrow E \longleftarrow F$$

avec $B \in \mathbf{G}$ et $F \in \mathbf{G}_f$, alors E est de Gorenstein.

6.1.5 *Preuve de la proposition 6.1.4:*
Nous nous plaçons dans le cadre des *ADGC*. Prenons $(\Lambda X, d)$ et $(\Lambda V \otimes \Lambda P, D)$ les modèles minimaux de Sullivan respectifs de B et F, V est de dimension finie et $(\Lambda P, \bar{D})$ est dans **DP** (cf définition 5.3.3). Le modèle de E est obtenu par la KS-extension (e-minimale) :

$$(\Lambda X, d) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda P, \Delta) \longrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda P, D)$$

Elle se décompose en deux KS-extensions, la première :

$$(\Lambda X, d) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda V, \Delta) \longrightarrow (\Lambda V, D)$$

Elle entre tout à fait dans le cadre de l'hypothèse $(ii)bis$ donc $(\Lambda X \otimes \Lambda V, \Delta)$ est de Gorenstein.
La seconde :

$$(\Lambda X \otimes \Lambda V, \Delta) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda P, \Delta) \longrightarrow (\Lambda P, \bar{D})$$

entre dans le cadre de l'hypothèse *(i)*. D'où, finalement, $(\Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda P, \Delta)$ est de Gorenstein. ∎

Remarque 6.1.6
L'hypothèse $(ii)bis$ peut être aussi introduite dans les hypothèses de la proposition 2.6.7 sans beaucoup de travail. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la preuve de la proposition précédente, on peut prouver que l'on a :

$$\text{fd } (\Lambda X \otimes \Lambda Y) = \text{fd } (\Lambda X) + \text{fd } (\Lambda Y)$$

où ΛX, ΛY et $\Lambda X \otimes \Lambda Y$ sont les modèles respectifs de B, F et E.

Dans ce qui suit, nous allons donc généraliser cette proposition.

6.2 Théorème

Théorème 6.2.1
Soit la fibration e-minimale :

$$B \longleftarrow E \longleftarrow F$$

avec F de type $\mathbf{G}_N$.

i) Si B est de type $\mathbf{G}_N$, alors E est aussi de type $\mathbf{G}_N$.

ii) Si B est dans $\mathbf{G}$, alors E est aussi dans $\mathbf{G}$.

Ce qui se traduit en *AGDC* par :

Théorème 6.2.2
Soit la KS-extension e-minimale :

$$(\Lambda X, d_X) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \longrightarrow (\Lambda V, d_V)$$

avec $(\Lambda V, d_V)$ dans $\mathbf{G}_N$.

i) Si $(\Lambda X, d_X)$ est dans $\mathbf{G}_N$, alors $(\Lambda X \otimes \Lambda V, D)$ est aussi dans $\mathbf{G}_N$.

ii) Si $(\Lambda X, d_X)$ est dans $\mathbf{G}$, alors $(\Lambda X \otimes \Lambda V, D)$ est aussi dans $\mathbf{G}$.

D'autre part la dimension formelle peut toujours être calculée :

Proposition 6.2.3
Avec les mêmes hypothèses du théorème 6.2.2 et $(\Lambda X, d_X) \in \mathbf{G}$, on a :

$$\mathrm{fd}\ (\Lambda X \otimes \Lambda V) = \mathrm{fd}\ (\Lambda X) + \mathrm{fd}\ (\Lambda V)$$

Remarque 6.2.4
Le théorème nous montre que tous les espaces de Gorenstein que nous savons construire sont de type $\mathbf{G}_N$. D'autre part, l'hypothèse e-minimale est nécessaire comme le montre l'exemple 6.2.5. Il existe néanmoins des fibrations dont la base, la fibre et l'espace total sont de type $\mathbf{G}_N$ tout en n'étant pas e-minimales, ceci est illustré par l'exemple 6.2.6.

Exemple 6.2.5 *([8], exemple 4.4.5)*
Soit la fibration :

$$(S^3 \times S^3)\#(S^3 \times S^3) \longleftarrow F \longleftarrow (\mathbf{CP}^2)^4$$

Elle n'est pas e-minimale, on a la base et la fibre de type $\mathbf{G}_N$ mais F n'est pas de Gorenstein, a fortiori pas de type $\mathbf{G}_N$. F est un produit infini de sphère, le $\mathcal{E}$xt est donc nul.

Exemple 6.2.6 *([27], exemple p. 81)*
Soit la fibration :

$$S^3 \longleftarrow * \longleftarrow (\Omega S^3)$$

Elle n'est pas e-minimale, mais la base, l'espace total et la fibre sont de type $\mathbf{G}_N$.

Remarque 6.2.7
Il est important de remarquer que pour ces deux exemples la proposition 6.2.3 n'est pas vérifiée.
• Pour l'exemple 6.2.5, fd $((S^3 \times S^3)\#(S^3 \times S^3))+$fd $((\mathbf{CP}^2)^4) = 9-4 = 5$ alors que fd $(F) = \infty$.
• Pour l'exemple 6.2.6, fd $(S^3) +$ fd $(\Omega S^3) = 3 - 1 = 2$ alors que fd $(*) = 0$.

6.3 Preuve du théorème 6.2.2

Nous admettons pour l'instant la proposition suivante :

Proposition 6.3.1
Soient les deux KS-extensions e-minimales :

$$\begin{cases} (\Lambda X, d_X) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \\ (\Lambda V, d_V) \longrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda U, d) \end{cases}$$

avec X et U des espaces vectoriels finiment engendrés par des éléments de degrés impairs et $(\Lambda X, d_X)$ est minimal.
Alors il existe $\check{U}$, espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs tel que l'on ait les KS-extensions :

$$\begin{cases} (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda\check{U}, D) \\ (\Lambda V \otimes \Lambda U, d) \longrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda\check{U}, d) \end{cases}$$

Rappelons la proposition suivante :

Proposition 5.5.10
Soit $(\Lambda X, d)$ un KS-complexe quelconque.
Pour tout $m \geq 0$, il existe W, espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs, tel que l'on ait la KS-extension $\Lambda X \longrightarrow \Lambda X \otimes \Lambda W$ et tel que le modèle minimal ΛZ de $\Lambda X \otimes \Lambda W$ satisfasse $\left(Z^{\leq m}\right)^{imp.} = Z^{\leq m}$.

Nous allons donc prouver le théorème dans le cas où $(\Lambda X, d_X) \in \mathbf{G}_N$ (la preuve est résumé par le diagramme 6.3.6).

6.3.2 *Les hypothèses*
Considérons une KS-extension e-minimale :

$$(\Lambda X, d_X) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \longrightarrow (\Lambda V, d_V)$$

où $(\Lambda X, d_X)$ et $(\Lambda V, d_V)$ sont deux éléments de $\mathbf{G}_N$ (on les considère minimaux). D'après la définition 5.2.3, il existe donc deux espaces vectoriels finiment engendrés par des éléments de degrés impairs et deux KS-extensions :

$$\begin{cases} (\Lambda X, d_X) & \rightarrowtail & (\Lambda X \otimes \Lambda U_X, D_X) & \longrightarrow & (\Lambda U_X, \bar{D}_X) \\ (\Lambda V, d_V) & \rightarrowtail & (\Lambda V \otimes \Lambda U_V, D_V) & \longrightarrow & (\Lambda U_V, \bar{D}_V) \end{cases}$$

où $(\Lambda X \otimes \Lambda U_X, D_X)$ et $(\Lambda V \otimes \Lambda U_V, D_V)$ sont des éléments de **DP**.

6.3.3 *Réduction au cas* $(\Lambda X, d_X) \in \mathbf{DP}$ *:*
En faisant une somme amalgamée, on obtient la KS-extension e-minimale suivante :

$$(\Lambda X \otimes \Lambda U_X, D_X) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda V, \Delta) \longrightarrow (\Lambda V, \bar{d}_V)$$

On applique alors la proposition 5.5.10 à $(\Lambda X \otimes \Lambda U_X, D_X)$ avec m tel que l'on ait les KS-extensions (e-minimales) :

$$\begin{cases} (\Lambda X^{\leq m}, d_X) & \rightarrowtail & (\Lambda X^{\leq m} \otimes \Lambda V^{\leq m-1}, D) \\ (\Lambda V^{\leq m-1}, d_V) & \rightarrowtail & (\Lambda V^{\leq m-1} \otimes \Lambda U_V, d) \end{cases}$$

On peut prendre par exemple $m = \mathrm{Max}_{u \in U_V} |u| + 2$. On a alors un espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs W tel que l'on ait la KS-extension :

$$(\Lambda X \otimes \Lambda U_X, D_X) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W, D_W) \longrightarrow (\Lambda W, \bar{D}_W)$$

et le modèle minimal $(\Lambda Z, d_Z) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W, D_W)$ vérifie $\left(Z^{\leq m}\right)^{imp.} = Z^{\leq m}$.
En faisant une somme amalgamée, on obtient la KS-extension (e-minimale) :

$$(\Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W, D_W) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V, \Delta_W) \longrightarrow (\Lambda V, d_V)$$

D'autre part en minimalisant la base, on obtient la KS-extension (e-minimale) :

$$(\Lambda Z, D_Z) \rightarrowtail (\Lambda Z \otimes \Lambda V, \Delta) \longrightarrow (\Lambda V, d_V)$$

Il est intéressant de remarquer que l'on a la KS-extension :

$$(\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W, D_W) \longrightarrow (\Lambda U_X \otimes \Lambda W, \bar{D}_W)$$

Comme $U_X \oplus W$ est un espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs, $(\Lambda X \otimes \Lambda V, D)$ sera dans $\mathbf{G}_N$ si $(\Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W, D_W)$ est dans $\mathbf{G}_N$, i.e. si $(\Lambda Z \otimes \Lambda V, \Delta)$ est dans $\mathbf{G}_N$ (cf proposition 5.2.5). D'autre part, comme $(\Lambda X \otimes \Lambda U_X, D_X)$ est dans **DP**, il en est de même de $(\Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W, D_W)$ et par conséquent de $(\Lambda Z, d_Z)$.

6.3.4 *Montrons que* $(\Lambda Z \otimes \Lambda V, \Delta)$ *est dans* $\mathbf{G}_N$ *:*
On a les deux KS-extensions e-minimales suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\Lambda Z^{\leq m}, d_Z) & \longrightarrow & (\Lambda Z^{\leq m} \otimes \Lambda V^{\leq m-1}, \Delta) \\ (\Lambda V^{\leq m-1}, d_V) & \longrightarrow & (\Lambda V^{\leq m-1} \otimes \Lambda U, d) \end{array}\right.$$

On se trouve alors tout à fait dans les hypothèses de la proposition 6.3.1, il existe $\tilde{U}$, espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs tel que l'on ait les KS-extensions :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\Lambda Z^{\leq m}, d_Z) & \longrightarrow & (\Lambda Z^{\leq m} \otimes \Lambda V^{\leq m-1} \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}, D_U) \\ (\Lambda V^{\leq m-1} \otimes \Lambda U_V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V^{\leq m-1} \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}, \bar{D}_U) \end{array}\right.$$

De ces KS-extensions, on en déduit les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\Lambda Z, d_Z) & \longrightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}, D_U) \\ (\Lambda V \otimes \Lambda U_V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}, \bar{D}_U) \end{array}\right.$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & (3) & (1) & \\
 & \Lambda Z \otimes \Lambda V \arrow[d] & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \arrow[d] & \\
\Lambda Z \arrow[r] & \Lambda Z \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U} \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U} \arrow[d] & (2) \\
 & \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U} & \Lambda \tilde{U} &
\end{tikzcd}$$

- La KS-extension (2) est la composée de la KS-extension (3) avec la KS-extension $(\Lambda Z, D_Z) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda V, \Delta)$.
- Dans la KS-extension (1), la base et la fibre sont dans **DP**, donc $(\Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}, \bar{D}_U)$ est aussi dans **DP**.
- Dans la KS-extension (2), la base et la fibre sont dans **DP**, donc $(\Lambda Z \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}, D_U)$ est aussi dans **DP**.
- La KS-extension (3) montre que $(\Lambda Z \otimes \Lambda V, \Delta)$ est dans $\mathbf{G}_N$, en effet $U_V \oplus \tilde{U}$ sont des espaces vectoriels finiment engendrés par des éléments de degrés impairs.

On peut résumer la démonstration par le joli diagramme 6.3.6

6.3.5 *Cas où* $(\Lambda X, d_X) \in \mathbf{G}$ *:*
Dans ce cas, il est inutile de s'embarrasser du U_X, on passe donc cette étape. $(\Lambda Z, d_Z)$ n'est donc plus dans **DP**, mais simplement dans **G**.

- Dans la KS-extension (1), nous donne que $(\Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}, \bar{D}_U)$ est dans **DP**.

- Dans la KS-extension (2), nous donne que $(\Lambda Z \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}, D_U)$ est dans $\mathbf{G}_N$.

- La KS-extension (3) montre que $(\Lambda Z \otimes \Lambda V, \Delta)$ est dans **G**, en effet $U_V \oplus \tilde{U}$ est dans **DP**.

- De la KS-extension :

$$\Lambda X \otimes \Lambda V \rightarrowtail \Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W \longrightarrow \Lambda U_X \otimes \Lambda W \tag{6.1}$$

et du quism

$$\Lambda Z \otimes \Lambda V \overset{\simeq}{\rightarrowtail} \Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W \tag{6.2}$$

on en déduit que $\Lambda X \otimes \Lambda V$ est de Gorenstein.

■

6.3.6

$$\begin{tikzcd}
\Lambda X \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \Lambda X \otimes \Lambda V \arrow[r] \arrow[d, tail] & \Lambda V \\
\Lambda X \otimes \Lambda U_X \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda V \arrow[r] \arrow[d, tail] & \Lambda V \\
\Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W \arrow[r, tail] & \Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V \arrow[r] & \Lambda V \\
\Lambda Z \arrow[r, tail] \arrow[u, tail, "\simeq"] \arrow[dd, equal] & \Lambda Z \otimes \Lambda V \arrow[r] \arrow[u, tail, "\simeq"'] \arrow[dd, tail, "(3)"] & \Lambda V \arrow[d, tail] \\
 & & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \arrow[d, tail, "(1)"] \\
\Lambda Z \arrow[r, tail, "(2)"'] & \Lambda Z \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U} \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U} \arrow[d] \\
 & \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U} & \Lambda \tilde{U}
\end{tikzcd}$$

Toutes les KS-extensions horizontales sont e-minimales.

6.3.7 *Preuve de la proposition 6.2.3 :*
On considère le diagramme 6.3.6 : Considérons tout d'abord la KS-extension (1), la base et la fibre sont des éléments de **DP**, donc l'espace total aussi. Les quatre KS-extensions satisfont donc les hypothèses de la proposition 2.6.7. D'où, le calcul :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{fd}\ (\Lambda X \otimes \Lambda V) & \overset{6.1}{=} & \mathrm{fd}\ (\Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W) - \mathrm{fd}\ (\Lambda U_X \otimes \Lambda W) \\
& \overset{6.2}{=} & \mathrm{fd}\ (\Lambda Z \otimes \Lambda V) - \mathrm{fd}\ (\Lambda U_X \otimes \Lambda W) \\
\mathrm{fd}\ (\Lambda Z \otimes \Lambda V) & \overset{(3)}{=} & \mathrm{fd}\ (\Lambda Z \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}) - \mathrm{fd}\ (\Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}) \\
& \overset{(2)}{=} & \mathrm{fd}\ (\Lambda Z) + \mathrm{fd}\ (\Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}) - \mathrm{fd}\ (\Lambda U_V) - \mathrm{fd}\ (\Lambda \tilde{U}) \\
& \overset{(1)}{=} & \mathrm{fd}\ (\Lambda Z) + \mathrm{fd}\ (\Lambda V \otimes \Lambda U_V) - \mathrm{fd}\ (\Lambda U_V) \\
& \overset{5.2.9}{=} & \mathrm{fd}\ (\Lambda Z) + \mathrm{fd}\ (\Lambda V) \\
\mathrm{fd}\ (\Lambda Z) & = & \mathrm{fd}\ (\Lambda X \otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W) \\
& = & \mathrm{fd}\ (\Lambda X) + \mathrm{fd}\ (\otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W) \\
\mathrm{fd}\ (\Lambda X \otimes \Lambda V) & = & \mathrm{fd}\ (\Lambda Z) + \mathrm{fd}\ (\Lambda V) - \mathrm{fd}\ (\otimes \Lambda U_X \otimes \Lambda W) \\
& = & \mathrm{fd}\ (\Lambda X) + \mathrm{fd}\ (\Lambda V)
\end{array}$$

■

6.4 Preuve de la proposition 6.3.1

Il est à remarquer que cette proposition est liée à la proposition 3.1 de [23]. Rappelons tout d'abord la proposition :

Proposition 6.3.1
Soient les deux KS-extensions e-minimales :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\Lambda X, d_X) & \longrightarrow & (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \\ (\Lambda V, d_V) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda U, d) \end{array} \right.$$

avec X et U des espaces vectoriels finiment engendrés par des éléments de degrés impairs et $(\Lambda X, d_X)$ est minimal.
Alors il existe $\tilde{U}$, espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs tel que l'on ait les KS-extensions :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) & \longrightarrow & (\Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}, D) \\ (\Lambda V \otimes \Lambda U, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}, d) \end{array} \right.$$

Remarques 6.4.1
- L'hypothèse *e-minimale* ne porte évidemment que sur la première KS-extension.
- La proposition 6.3.1 peut se transcrire par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda X \arrow[r, tail, "(1)"] \arrow[dd, equal] & \Lambda X \otimes \Lambda V \arrow[r] \arrow[dd, dashed, "(1bis)"] & \Lambda V \arrow[d, "(2)"] \\
 & & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \arrow[d, dashed, "(2bis)"] \\
\Lambda X \arrow[r, tail, dashed, "(1ter)"'] & \Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U} \arrow[r] & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \tilde{U}
\end{tikzcd}$$

Les KS-extensions (1) et (2) sont données par hypothèses, on doit trouver les KS-extensions (1bis) et (2bis), la (1ter) est simplement la composée de (1) avec (1bis), elle est e-minimale. On introduit $\tilde{U}$ afin de pouvoir étendre la différentielle D aux éléments de U.

6.4.2 *Cas où $X = x$, $|x|$ impair et $U = u$*
On a donc deux KS-extensions (e-minimales) :

$$\begin{cases} (\Lambda x, 0) \longrightarrow (\Lambda x \otimes \Lambda V, D) \\ (\Lambda V, d) \longrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda u, d) \end{cases}$$

du est un cocycle de $(\Lambda V, d)$ mais pas forcément un cocycle de $(\Lambda x \otimes \Lambda V, D)$. Il faut faire en sorte que l'on puisse étendre la différentielle. Il est clair que si $Ddu = 0$, il suffit de poser $Du = du$.
Dans le cas contraire, remarquons tout d'abord que D peut s'écrire de la forme $D = d + x \otimes \theta$ où θ est une dérivation de ΛV de degré $1 - |x|$. On vérifie facilement que $\theta \circ d = d \circ \theta$. L'hypothèse e-minimale se traduit simplement ici par le fait que x n'est pas un cobord. Pour θ, cela donne $\theta(V) \subset \Lambda^+(V)$. i.e. $\mathbb{Q} \notin \operatorname{Im} \theta$. Pour définir Du, il suffit de définir $\theta(u)$. Comme $Ddu \neq 0$, on a $Ddu = \theta(du) = d$"$\theta(u)$", on introduit donc un nouvel élément u_1 tel que $du_1 = \theta(du)$ et $\theta(u) = u_1$ ($\theta(du) \neq 1$, c'est ici qu'intervient l'hypothèse de e-minimalité). Notons que le degré de u_1 est impair, en effet on a $|u_1| = |u| + 1 - |x|$. Du est maintenant bien défini :

$$Du = du + x \otimes u_1$$

Mais il reste à définir Du_1, on sait déjà que $du_1 = \theta(du)$. De la même manière, il suffit de connaître $\theta(u_1)$, celui-ci devra satisfaire la relation $d\theta(u_1) = \theta(du_1) = \theta(\theta(du))$. Si $\theta(\theta(u))$ est nul, on a alors $Du_1 = du_1 = \theta(du)$, sinon on pose u_2 tel que $du_2 = \theta(\theta(du))$ et

$$Du_1 = \theta(du) + x \otimes u_2$$

On peut définir de façon générique une suite $(u_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de degrés impairs, avec $u_0 = u$ telle que

$$Du_i = \theta^i(du) + x \otimes u_{i+1}$$

Cette suite est finie pour des raisons de degrés, en effet θ est une dérivation de degré négatif (pair). Notons $\check{U} = \{u_1, \ldots\}$, on a alors les KS-extensions recherchées :

$$\begin{cases} (\Lambda x \otimes \Lambda V, D) & \longrightarrow & (\Lambda x \otimes \Lambda V \otimes \Lambda u \otimes \Lambda\check{U}, D) \\ (\Lambda V \otimes \Lambda u, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda u \otimes \Lambda\check{U}, d) \end{cases}$$

Par composition, on trouve la KS-extension (e-minimale) :

$$(\Lambda x, 0) \rightarrowtail (\Lambda x \otimes \Lambda V \otimes \Lambda u \otimes \Lambda\check{U}, D) \longrightarrow (\Lambda u \otimes \Lambda\check{U}, \bar{D})$$

■

6.4.3 *Cas où $X = x$, $|x|$ impair.*

On rappelle que U est finiment engendré par des éléments de degrés impairs, on fait donc une récurrence sur le nombre n de générateurs de U.

- Pour le cas $n = 1$, c'est le but du paragraphe précédent.
- Supposons le résultat vrai pour $n = i$, montrons le pour $i + 1$.

On pose $\Lambda U = \Lambda U_i \otimes \Lambda u$ de sorte que la KS-extension $(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda U, d)$ se décompose par la suite de KS-extensions :

$$(\Lambda V, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda U_i, d) \rightarrowtail (\Lambda V \otimes \Lambda U, d)$$

Appliquons alors l'hypothèse de récurrence, il existe donc $\check{U}_i$, espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs tel que l'on ait les KS-extensions :

$$\begin{cases} (\Lambda x \otimes \Lambda V, D) & \longrightarrow & (\Lambda x \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_i \otimes \Lambda\check{U}_i, D) \\ (\Lambda V \otimes \Lambda U_i, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda U_i \otimes \Lambda\check{U}_i, d) \end{cases}$$

Posons $\Lambda W = \Lambda V \otimes \Lambda U_i \otimes \Lambda\check{U}_i$, on a les KS-extensions (e-minimales) suivantes :

$$\begin{cases} (\Lambda x, 0) & \longrightarrow & (\Lambda x \otimes \Lambda W, D) \\ (\Lambda W, d) & \longrightarrow & (\Lambda W \otimes \Lambda u, d) \end{cases}$$

La première est obtenue par composition, la seconde est la KS-extension (1) de la somme amalgamée :

$$\begin{tikzcd} \Lambda V \otimes \Lambda U_i \arrow[r, tail] \arrow[d] & \Lambda V \otimes \Lambda U \arrow[r] \arrow[d, "(2)"] & \Lambda u \\ \Lambda W \arrow[r, tail, "(1)"'] & \Lambda W \otimes \Lambda u \arrow[r] & \Lambda u \end{tikzcd}$$

On est donc réduit au cas $n = 1$, il existe $\check{U}_0$, espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs tel que l'on ait les KS-extensions :

$$\begin{cases} (\Lambda x \otimes \Lambda W, d) & \longrightarrow & (\Lambda x \otimes \Lambda W \otimes \Lambda u \otimes \Lambda\check{U}_0, D) \\ (\Lambda W \otimes \Lambda u, d) & \longrightarrow & (\Lambda W \otimes \Lambda u \otimes \Lambda\check{U}_0, d) \end{cases}$$

Notons $\tilde{U} = \tilde{U}_0 \oplus \tilde{U}_i$, on obtient les deux KS-extensions :

$$\begin{cases} (\Lambda x \otimes \Lambda V, D) & \longrightarrow & (\Lambda x \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}, D) \\ (\Lambda V \otimes \Lambda U, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}, d) \end{cases}$$

La première est la composée des KS-extensions

$$(\Lambda x \otimes \Lambda V, D) \longrightarrow (\Lambda x \otimes \Lambda W, D) \longrightarrow (\Lambda x \otimes \Lambda W \otimes \Lambda u \otimes \Lambda \tilde{U}_0, D)$$

en remarquant que $(\Lambda x \otimes \Lambda W \otimes \Lambda u \otimes \Lambda \tilde{U}_0, D) = (\Lambda x \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}, D)$.
La seconde est la composée des KS-extensions

$$(\Lambda V \otimes \Lambda U, d) \xrightarrow{(2)} (\Lambda W \otimes \Lambda u, d) \longrightarrow (\Lambda W \otimes \Lambda u \otimes \Lambda \tilde{U}_0, d)$$

En remarquant que $(\Lambda W \otimes \Lambda u \otimes \Lambda \tilde{U}_0, d) = (\Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}, d)$.

Remarquons finalement que la KS-extension suivante est e-minimale :

$$(\Lambda x, 0) \longrightarrow (\Lambda x \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}, D) \longrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}, d)$$

■

6.4.4 *Cas où X est finiment engendré par des impairs.*
La preuve se fait par récurrence sur le nombre n de générateurs de X :

• Si $n = 1$, cela a été prouvé lors de l'étape précédente.

• Supposons que cela soit prouvé pour $n = i$, montrons le pour $n = i + 1$. Ecrivons $X = X_i \oplus \mathbb{Q}x$ de sorte que $\Lambda X_i \longrightarrow \Lambda X_i \otimes \Lambda x$ soit une KS-extension. Dans ce cas, on a les deux KS-extensions e-minimales :

$$\begin{cases} (\Lambda x, 0) & \longrightarrow & (\Lambda x \otimes \Lambda V, D) \\ (\Lambda X_i, d) & \longrightarrow & (\Lambda X_i \otimes \Lambda x \otimes \Lambda V, D) = (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \end{cases}$$

Il existe donc $\tilde{U}_0$, espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs tel que l'on ait les KS-extensions :

$$\begin{cases} (\Lambda x \otimes \Lambda V, D) & \longrightarrow & (\Lambda x \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}_0, D) \\ (\Lambda V \otimes \Lambda U, d) & \longrightarrow & (\Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda \tilde{U}_0, d) \end{cases}$$

Posons maintenant $V_1 = x \oplus V$ et $U_1 = U \oplus \tilde{U}_0$, on a les KS-extensions suivantes :

$$\begin{cases} (\Lambda X_i, d_i) & \longrightarrow & (\Lambda X_i \otimes \Lambda V_1, D) \\ (\Lambda V_1, d_V) & \longrightarrow & (\Lambda V_1 \otimes \Lambda U_1, d) \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $\tilde{U}_1$, espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs tel que l'on ait les KS-extensions :

$$\begin{cases} (\Lambda X_i, d_i) & \longrightarrow & (\Lambda X_i \otimes \Lambda V_1 \otimes \Lambda U_1 \otimes \Lambda \tilde{U}_1, D) \\ (\Lambda V_1 \otimes \Lambda U_1, d) & \longrightarrow & (\Lambda V_1 \otimes \Lambda U_1 \otimes \Lambda \tilde{U}_1, d) \end{cases}$$

De ces KS-extensions, on obtient celles que nous cherchions, en posant $\check{U} = \check{U}_0 \oplus \check{U}_1$:

$$\begin{cases} (\Lambda X, d_X) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda\check{U}, D) \\ (\Lambda V \otimes \Lambda U, d) \longrightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda\check{U}, d) \end{cases}$$

La première est la composée

$$(\Lambda X, d_X) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) = (\Lambda X_i \otimes \Lambda V_1, D)$$

$$\rightarrowtail (\Lambda X_i \otimes \Lambda V_1 \otimes \Lambda U_1 \otimes \Lambda\check{U}_1, D) = (\Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda\check{U}, d)$$

La seconde se déduit de la KS-extension

$$(\Lambda x \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U, d) \rightarrowtail (\Lambda x \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U \otimes \Lambda\check{U}, d)$$

■

6.5 Nouvelle définition de $\mathbf{G}_N$

6.5.1 La proposition qui suit donne une définition plus large d'un élément de $\mathbf{G}_N$.

Proposition 6.5.2
Soit $(\Lambda X, d)$ un KS-complexe tel qu'il existe une KS-extension e-minimale

$$(\Lambda X, d) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \longrightarrow (\Lambda V, \bar{D})$$

avec V un espace vectoriel de dimension finie et $(\Lambda X \otimes \Lambda V, D) \in$ **DP**.

Alors $(\Lambda X, d)$ est un élément de $\mathbf{G}_N$.

6.5.3 *Preuve de la proposition 6.5.2 :*
Pour le prouver, il suffit de considérer le diagramme suivant, obtenu de la même manière que dans la preuve du théorème 6.2.2

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda X \arrow[r] \arrow[d, "(1)"'] & \Lambda X \otimes \Lambda V \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda V \\
\Lambda X \otimes \Lambda W \arrow[r] & \Lambda X \otimes \Lambda W \otimes \Lambda V \arrow[r] & \Lambda V \\
\Lambda Z \arrow[r] \arrow[u, "\simeq", "(2)"'] \arrow[dd, equal] & \Lambda Z \otimes \Lambda V \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[dd, "(5)"'] & \Lambda V \arrow[d, "(3)"'] \\
 & & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \arrow[d, "(4)"'] \\
\Lambda Z \arrow[r, "(6)"'] \arrow[d, equal] & \Lambda Z \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \check{U} \arrow[r] & \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \check{U} \\
\Lambda Z \arrow[r, "(8)"'] & \Lambda Z \otimes \Lambda U_Z \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"'] & \Lambda U_Z \arrow[u, "(7)", "\simeq"']
\end{tikzcd}
$$

Toutes les KS-extensions horizontales sont e-minimales et tous les U_* sont espaces vectoriels finiment engendrés par des éléments de degrés impairs.

- Les KS-extensions (1) et (2) sont celles de la proposition 5.5.10.
- La KS-extension (3) est celle de la proposition 5.5.2.
- On a donc $\Lambda Z \otimes \Lambda V$ et $\Lambda V \otimes \Lambda U_V$ tous deux dans **DP**.
- Les KS-extensions (4), (5) et (6) sont celles obtenues par la proposition 6.3.1. Comme dans la preuve du théorème, il convient de remarquer que l'on choisit m de façon adéquate.
- La KS-extension (7) est un modèle minimal, avec $U_Z = U \oplus \check{U}$, U étant celui de la proposition 5.5.2.
- $\Lambda Z \otimes \Lambda V \otimes \Lambda U_V \otimes \Lambda \check{U}$ est dans **DP**, par conséquent $\Lambda Z \otimes \Lambda U_Z$ aussi. Comme U_Z est un espace vectoriel finiment engendré par des éléments de degrés impairs, on en déduit que ΛZ est dans $\mathbf{G}_N$.
- La proposition 5.2.5 nous permet de conclure.

∎

Chapitre 7

Lien avec l'évaluation

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons une généralisation des deux résultats suivants d'Aniceto Murillo.

Théorème 7.1.1 *([28], théorème A)*
Soit S un espace topologique 1-connexe tel que $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $H^*(S; \mathbb{Q})$ est de dimension finie.

(ii) ev_S est non nulle.

Théorème 7.1.2 *([29], lemme 3.3)*
Soit $(\Lambda V, d)$ avec V de dimension finie, $V = (v_0, \ldots, v_n)$, alors

$$\mathrm{ev}_{(\Lambda V, d)} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{(\Lambda V_i, D_i)} \neq 0, \text{ avec } V_i = (v_i, \ldots, v_n)$$

7.1.3 Si $\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie, alors S est, de façon évidente dans $\mathbf{G}_f$, lui même inclus dans $\mathbf{G}_N$ (proposition 5.5.2). D'une part, théorème 7.2.1 généralise son premier résultat aux éléments de $\mathbf{G}_N$, d'autre part le théorème 7.4.1 montre que

$$\mathrm{ev}_{(\Lambda V \otimes \Lambda X, d)} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{(\Lambda V_i \otimes \Lambda X, D_i)} \neq 0$$

avec $V_i = (v_i, \ldots, v_n)$ et ΛX dans $\mathbf{G}_N$ (modulo une hypothèse de e-minimalité).

Nous réécrivons enfin la version dans *ADGC* du théorème 3.4.3 qui nous servira par la suite :

Théorème 7.1.4
Soit une KS-extension d'adgc 1-connexes :

$$(\Lambda X, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \longrightarrow (\Lambda Y, \bar{D})$$

(i) Si $H^*(\Lambda Y, \bar{D})$ est de dimension finie, alors

$$\mathrm{ev}_{(\Lambda X, d)} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{(\Lambda X \otimes \Lambda Y, D)} \neq 0$$

(ii) Si Y est de dimension finie et $\pi_*(\rho) \otimes \mathbb{Q}$ injective (i.e. $(\Lambda X \otimes \Lambda Y, D)$est minimal), alors

$$\mathrm{ev}_{(\Lambda X \otimes \Lambda Y, D)} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{(\Lambda Y, \bar{D})} \neq 0$$

7.2 L'évaluation non nulle sur $\mathbf{G}_N$

Théorème 7.2.1
Soit X un espace de type $\mathbf{G}_N$.
Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

*(i) $H^*(X; \mathbb{Q})$ est de dimension finie, i.e. $H^*(X, \mathbb{Q}) \in$ **DP**.*

(ii) ev_X est non nulle.

Pour démontrer le théorème, on admet pour l'instant le lemme suivant :

Lemme 7.2.2
Soit $(A, d) \rightarrowtail (A \otimes \Lambda(u), D) \longrightarrow (\Lambda(u), 0)$ une KS-extension telle que :

- *A est une adgc de Gorenstein,*
- *il existe un élément ω du socle de $H^*(A)$ dont le degré est exactement la dimension formelle de A,*
- *$H^*(A \otimes \Lambda(u))$ est de dimension finie, cl $Du \neq 0$ dans $H^*(A)$ et u est de degré impair.*

Alors $H^*(A)$ est de dimension finie.

7.2.3 *Preuve du théorème 7.2.1 :*
Soit X un élément de $\mathbf{G}_N$, le sens $(ii) \Rightarrow (i)$ est déjà connu (cf 3.3.15). Nous allons prouver l'autre sens dans le cadre de l'algèbre.

Soit (A, d) une adgc qui est un modèle de X, par exemple son modèle de Sullivan. On a donc $(A, d) \in \mathbf{G}_N$ avec $\mathrm{ev}_A \neq 0$. D'après la définition 5.2.4, il existe une suite finie de KS-extensions :

$$(A_i, d_i) \rightarrowtail (A_{i+1}, d_{i+1}) = A_i \otimes \Lambda(u_i) \longrightarrow (\Lambda(u_i), 0)$$

où $i = 0, \ldots, N$, $(A_0, d_0) = (A, d)$, $H^*(A_{N+1})$ est de dimension finie et u_i de degré impair. En utilisant le lemme 3.4.7, une récurrence (croissante) prouve que chaque (A_i, d_i) est de Gorenstein avec une application d'évaluation non nulle.

On a, d'après le lemme 3.3.8, un élément du socle de $H^*(A_N)$ dont le degré est exactement la dimension formelle de A_N puisque $\mathrm{ev}_{A_N} \neq 0$. La KS-extension :

$$(A_N, d_N) \rightarrowtail (A_{N+1}, d_{N+1}) \longrightarrow (\Lambda(u_N), 0)$$

satisfait les hypothèses du lemme 7.2.2, donc A_N est aussi un élément de **DP**. Une récurrence décroissante prouve le théorème. ∎

Corollaire 7.2.4 *([14], thm 1)*
Soit (A, d) une adg de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$ tel que $H^*(A; \mathbb{Q})$ soit noethérienne. Si $ev_A \neq 0$ alors $H^*(A; \mathbb{Q})$ est de dimension finie, i.e. $H^*(A; \mathbb{Q})$ satisfait la dualité de Poincaré.

Preuve :
C'est une conséquence directe du théorème 7.2.1 et de l'inclusion $\mathcal{N} \subset \mathbf{G}_N$ (proposition 5.1.2). ∎

7.3 Preuve du lemme 7.2.2

La preuve du lemme utilise le lemme suivant :

Lemme 7.3.1
Soit la KS-extension

$$(A, d) \rightarrowtail (A \otimes \Lambda(u), D) \longrightarrow (\Lambda(u), 0)$$

telle que $H^*(A \otimes \Lambda(u))$ soit de dimension finie, $f = cl\ Du \neq 0$ dans $H^*(A)$ et u de degré impair.
Alors, pour tout j, la KS-extension

$$(A, d) \rightarrowtail (A \otimes \Lambda(y_j), D) \longrightarrow (\Lambda(y_j), 0)$$

définie par $cl\ Dy_j = f^j$ vérifie $H^*(A \otimes \Lambda(y_j))$ de dimension finie.

7.3.2 *Preuve du lemme 7.3.1 :*
La preuve du lemme se décompose en trois étapes.

Première étape. Soit f un élément de degré pair de $H^*(A)$, notons (f) l'idéal engendré par f. Si $H^*(A)/(f)$ est de dimension finie alors $Ann(f)$ est aussi de dimension finie.
Preuve : en effet, si $H^*(A)/(f)$ est de dimension finie, $H^*(A)$ est un $\mathbb{Q}[f]$-module de type fini et par conséquent il en est de même de $Ann(f)$ ($\mathbb{Q}[f]$ est noethérien), or $f.Ann(f) = 0$, donc $Ann(f)$ est de dimension finie.

Deuxième étape. $H^*(A \otimes \Lambda(u))$ est de dimension finie si et seulement si $H^*(A)/(f)$ est de dimension finie où $f = \mathrm{cl}\ Du$.

Preuve : on a $H^*(A\otimes\Lambda(u)) = H^*(A)/(f)\oplus Ann(f)\otimes u\mathbb{Q}$, on conclut avec l'étape précédente.

Conclusion.

Ecrivons $H^*(A) = B_0 \oplus (f)$

Remarquons que $B_0 \cong H^*(A)/(f)$ et $H^*(A) = \sum_{i\geq 0} B_0 f^i$.

Comme $H^*(A\otimes\Lambda(x))$ est de dimension finie, il en est de même de $H^*(A)/(f)$, de B_0 et de $H^*(A)/(f^j) = \sum_{i=0}^{i=j-1} B_0 f^i$. On conclut grâce à l'étape précédente.

■

7.3.3 *Preuve du lemme 7.2.2 :*

• Soit $\omega \in$ socle $(H^*(A))$ telle que fd $(A) = |\omega|$, remarquons que $|\omega| \geq |f|$. En effet $A\otimes\Lambda(u)$ est une adgc de Gorenstein avec une cohomologie de dimension finie, donc $H^*(A\otimes\Lambda(u))$ est à dualité de Poincaré (cf 2.4.5). De plus

$$\text{fd } H^*(A\otimes\Lambda(u)) = \text{fd } (A\otimes\Lambda(u)) = \text{fd } (A) + \text{fd } (\Lambda(u)) = |\omega| + |u|$$

Supposons que $|\omega| < |f|$ alors ω se projette sur un élément non trivial de $H^*(A)/(f)$. Appelons α la classe duale (au sens de Poincaré) de ω dans $H^*(A\otimes\Lambda(u))$, alors $|\alpha| = |u|$. Pour des raisons de degré et parce que cl $Du \neq 0$, α est dans $H^*(A)/(f)$, ce qui est impossible car ω est dans le socle.

• Si on suppose que pour chaque i on ait $f^i \neq 0$ alors il existe un j tel que $|f^j| > |\omega|$. Le lemme 7.3.1 nous permet de dire que la KS-extension

$$(A,d) \rightarrowtail (A\otimes\Lambda(y),D) \longrightarrow (\Lambda(y),0)$$

avec $cl(Dy) = f^j$ satisfait aussi les hypothèses du lemme, mais $|f^j| > |\omega|$ ce qui est en contradiction avec l'étape précédente. Ceci prouve que, pour un certain j, on a $f^j = 0$ et donc que

$$H^*(A) = \sum_{i=0}^{i=j-1} B_0 f^i$$

ce qui prouve que $H^*(A)$ est de dimension finie. ■

7.4 L'évaluation non nulle sur $\mathbf{G}_N$ (suite)

Théorème 7.4.1

Soit V un espace vectoriel finiment engendré, $V = (v_0,\ldots,v_n)$ et la KS-extension e-minimale :

$$(\Lambda V,d) \rightarrowtail (\Lambda V\otimes\Lambda X,D) \longrightarrow (\Lambda X,\bar{D})$$

avec $(\Lambda V\otimes\Lambda X,D) \in \mathbf{G}_N$. Posons $V_i = (v_i,\ldots,v_n)$.

On a alors :

$$\mathrm{ev}_{(\Lambda V\otimes\Lambda X,D)} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{(\Lambda V_i\otimes\Lambda X,D)} \neq 0$$

La preuve est basée sur le lemme général suivant, analogue du lemme 3.3 (iii) dans [29]. La preuve utilise le même argument.

Lemme 7.4.2
Soit $(\Lambda X, d)$ le modèle minimal d'un espace de Gorenstein, et supposons que $(\Lambda y \otimes \Lambda X, d)$ soit de Gorenstein :

(i) Si y est de degré pair

(ii) Ou si y est de degré impair et y n'est pas un cobord dans $(\Lambda y \otimes \Lambda X, d)$

alors

$$\mathrm{ev}_{(\Lambda y \otimes \Lambda X, d)} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{(\Lambda X, d)} \neq 0$$

Remarques 7.4.3 1. Dans le lemme 7.4.2, quand $|y|$ est pair, $(\Lambda X, d) \in \mathbf{G}$ implique que $(\Lambda y \otimes \Lambda X, d) \in \mathbf{G}$.

2. L'hypothèse "y n'est pas un cobord" est en fait l'hypothèse de e-minimalité.

Exemple 7.4.4
On ne peut pas omettre l'hypothèse "y n'est pas un cobord dans $(\Lambda y \otimes \Lambda X, d)$". En effet, si on considère l'adgc $(\Lambda x, 0)$ avec $|x|$ pair, alors $(\Lambda x, 0) \in \mathbf{G}_f$. Maintenant on définit $(\Lambda y \otimes \Lambda x, d)$ avec $dx = y$, alors $\mathrm{ev}_{(\Lambda y \otimes \Lambda x, d)} \neq 0$ bien que $\mathrm{ev}_{(\Lambda x, 0)} = 0$.

7.4.5 *Preuve du théorème 7.4.1 :*
Le théorème 6.2.2 nous donne immédiatement que chaque $(\Lambda V_i \otimes \Lambda X, D)$ sont dans $\mathbf{G}_N$. En utilisant le lemme 7.4.2, on montre par récurrence sur i que

$$\mathrm{ev}_{(\Lambda V_i \otimes \Lambda X, D)} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{(\Lambda V_{i+1} \otimes \Lambda X, D)} \neq 0$$

■

7.4.6 *Preuve du lemme 7.4.2 :*
(i) Si $|y|$ est pair, on considère la KS-extension

$$(\Lambda y \otimes \Lambda X, d) \rightarrowtail (\Lambda y \otimes \Lambda X \otimes \Lambda sy, \delta) \longrightarrow (\Lambda sy, 0)$$

L'espace vectoriel $H^*(\Lambda sy)$ est de dimension finie et le théorème 7.1.4 nous donne que $\mathrm{ev}_{(\Lambda y \otimes \Lambda X \otimes \Lambda sy, \delta)} \neq 0$, mais $(\Lambda y \otimes \Lambda X \otimes \Lambda sy, \delta) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda X, \bar{d})$, d'où par naturalité $\mathrm{ev}_{(\Lambda X, \bar{d})} \neq 0$.

(ii) Si $|y|$ est impair. Comme y n'est pas un cobord, on a :

$$d(\Lambda y \otimes \Lambda X) \subset 1 \otimes \Lambda X \oplus y \otimes \Lambda^+ X \tag{7.1}$$

On considère les clôtures acycliques :
$C = (\Lambda y \otimes \Lambda X \otimes \Lambda sy \otimes \Lambda sX, D) \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{Q}, 0)$ de $(\Lambda y \otimes \Lambda X, d)$ et

$(\Lambda X \otimes \Lambda sX, \bar{D}) \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{Q}, 0)$ de $(\Lambda X, \bar{d})$. On décompose la différentielle de $\Lambda y \otimes \Lambda X$ de la manière suivante, en transcrivant la relation (7.1)

$$d = \tilde{d} + y \otimes \theta$$

θ est une dérivation de ΛX de degré $1 - |y|$ et $\tilde{d} = 1 \otimes \bar{d}$. De même, on décompose D, la différentielle de C : $D = \tilde{D} + y \otimes \Theta$, Θ est une dérivation sur $(\Lambda y \otimes \Lambda X \otimes \Lambda sy \otimes \Lambda sX)$ de degré $1 - |y|$. La relation (7.1) permet de supposer que $dsx \in \Lambda y \otimes \Lambda^+ X \otimes \Lambda sX$, on en déduit alors

$$\tilde{D} = 1 \otimes \bar{D} \otimes id_{\Lambda sX} \tag{7.2}$$

où $\bar{D}$ est la différentielle sur $\Lambda X \otimes \Lambda sX$.
Soit $g \in \left(\mathrm{Hom}_{(\Lambda y \otimes \Lambda X, d)}\left((C, D); (\Lambda y \otimes \Lambda X, d)\right), \mathcal{D}\right)$ et on écrit $g = g_1 + y.g_2$ avec $\mathrm{Im}\, g_{i|\Lambda sy \otimes \Lambda sX} \in \Lambda X$, par un calcul direct, on montre que :

$$\mathcal{D}g = \tilde{\mathcal{D}}g_1 + y \otimes \left[\theta \circ g_1 - (-1)^{|g_1|.|\theta|} g_1 \circ \Theta\right] + (-1)^{|y|} y \otimes \tilde{\mathcal{D}}g_2 \tag{7.3}$$

où $\tilde{\mathcal{D}}g_i = \tilde{d} \circ g_i - (-1)^{|g_i|} g_i \circ \tilde{D}$. On écrit : $g_i = \sum_{k \geq 0} g_i^k$ où $g^k_{i\,|(sy)^j \otimes \Lambda sX} = 0$ pour $j \neq k$. On a $g^k_{i\,|\Lambda X \otimes \Lambda sX} = \bar{g}_i^k$ et $|\bar{g}_i^k| = |g_i^k| + k(|y| - 1)$. De (7.2), on en déduit que $\left(\tilde{\mathcal{D}}g_i\right)^k = \tilde{\mathcal{D}}(g_i^k)$ et on a $\tilde{\mathcal{D}}g_i = 0$ ce qui donne $\tilde{\mathcal{D}}(g_i^k) = 0$, finalement $\bar{\mathcal{D}}\bar{g}_i^k = 0\ \forall k$, où $\bar{\mathcal{D}}$ est la différentielle dans $\mathrm{Hom}_{(\Lambda X, \bar{d})}\left((\Lambda X \otimes \Lambda sX, \bar{D}); (\Lambda X, \bar{d})\right)$.
Soit $[f]$ une base de $\mathcal{E}xt_{(\Lambda X, \bar{d})}\,(\mathbb{Q}, (\Lambda X, \bar{d}))$ (on suppose que $(\Lambda X, \bar{d})$ est de Gorenstein). En particulier $\bar{\mathcal{D}}f = \bar{d} \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \bar{D} = 0$.
On définit $h \in \mathrm{Hom}_{(\Lambda y \otimes \Lambda X, d)}\left((C, D); (\Lambda y \otimes \Lambda X, d)\right)$ par

$$h \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcll} 1 & \longmapsto & y \otimes f(1) & \\ s\Phi & \longmapsto & y \otimes f(s\Phi) & \\ (sy)^n \otimes s\Phi & \longmapsto & 0 & (n \geq 1) \end{array} \right.$$

On a $h = yh_2$ avec $h_2 = h_2^0 = f$, donc, en appliquant, (7.3), on obtient que h est un cocycle. On suppose que ce soit un cobord : $h = yf = \mathcal{D}g = \mathcal{D}(g_1 + yg_2)$. Avec (7.3), on montre que $\tilde{\mathcal{D}}g_1 = 0$, d'où $\bar{\mathcal{D}}\bar{g}_1^k = 0\ \forall k$ et, comme $(\Lambda X, \bar{d})$ est de Gorenstein, on a nécessairement $\bar{g}_1^k = \bar{\mathcal{D}}u^k$, en effet $|\bar{g}_1^k| = |f| + (k+1)(|y| - 1)$.
Comme $\tilde{\mathcal{D}}_{|\Lambda sX} = \bar{\mathcal{D}}$, $g_{1|\Lambda sX} = \bar{g}_1^0 = \bar{\mathcal{D}}u^0$, $g_{2|\Lambda sX} = \bar{g}_2^0$ et on en déduit par (7.3) que :

$$f = \left[\theta \circ \bar{\mathcal{D}}u^0 - (-1)^{(|u^0|+1).|\theta|} \bar{\mathcal{D}}u^0 \circ \Theta\right] + (-1)^{|y|} \bar{\mathcal{D}}g_2^0 \tag{7.4}$$

De $d^2 = 0$, on montre que $\theta \circ \bar{d} = (-1)^{|\theta|} \bar{d} \circ \theta$, et on conclut que $\theta \circ \bar{\mathcal{D}}u^0 = (-1)^{|\theta|} \bar{\mathcal{D}} \circ \theta u^0$, d'où (7.4) s'écrit :

$$f = (-1)^{|\theta|} \bar{\mathcal{D}}\left[\theta \circ u^0 - (-1)^{|u^0|.|\theta|} u^0 \circ \Theta + g_2^0\right]$$

Donc f est un cobord ce qui est impossible.
Comme $\mathcal{E}xt_{(\Lambda y \otimes \Lambda X, d)}\,(\mathbb{Q}, (\Lambda y \otimes \Lambda X, d))$ est de dimension une, $[h]$ est une base et comme $\mathrm{ev}_{\Lambda y \otimes \Lambda X}([h]) = [h(1)] = [y.f(1)] \neq 0$, $\mathrm{ev}_{\Lambda X}([f]) = [f(1)] \neq 0$, d'où $\mathrm{ev}_{\Lambda X, \bar{d}} \neq 0$. ∎

7.5 Sur $\mathbf{G}_f$

De l'inclusion $\mathbf{G}_f \subset \mathbf{G}_N$ (cf proposition 5.1.2) on en déduit les théorèmes suivants.

Théorème 7.5.1
Soit X un espace de type $\mathbf{G}_f$ tel que $\mathrm{ev}_X \neq 0$, alors $H^*(X,\mathbb{Q})$ est de dimension finie, i.e. $H^*(X,\mathbb{Q})$ satisfait la dualité de Poincaré.

Théorème 7.5.2
Soit $(\Lambda V \otimes \Lambda P, D) \in \mathbf{G}_f$ avec $V = (v_0, \dots, v_n)$. Posons $V_i = (v_i, \dots, v_n)$. On a alors :

$$\mathrm{ev}_{(\Lambda V \otimes \Lambda P, D)} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{(\Lambda V_i \otimes \Lambda P, D)} \neq 0$$

Nous donnerons néanmoins une autre démonstration de ces résultats.

7.5.3 *Autre preuve du théorème 7.5.1 :*
Soit $(\Lambda X, d)$ un modèle de Sullivan S, on écrit $(\Lambda X, d) = (\Lambda V \otimes \Lambda P, d)$ où V est de dimension finie et $H^*(\Lambda P)$ est une algèbre satisfaisant la dualité de Poincaré. De la proposition 5.3.6, $(\Lambda X, d)$ est e-minimal donc on peut appliquer le lemme 7.4.2. On fait une preuve par récurrence sur la dimension N de V.

Si N = 0, c'est immédiat.

Si N = 1 : si $|v|$ est impair, il est clair que $H^*(\Lambda X, d)$ est de dimension finie, donc $H^*(\Lambda X, d)$ satisfait la dualité de Poincaré, on se ramène au cas N = 0.
Si $|v|$ est pair, on considère la KS-extension

$$(\Lambda X, d) \rightarrowtail (\Lambda X \otimes \Lambda \bar{v}, D) \longrightarrow (\Lambda \bar{v}, 0)$$

avec $D\bar{v} = v$, $(\Lambda(X, \bar{v}), D) \to (\Lambda P, \bar{d})$ est un quasi-isomorphisme, donc
$H^*(\Lambda(X, \bar{v}), D)$ est de dimension finie. Finalement, en utilisant le lemme 7.2.2, on conclut.

Pour N = n+1, on suppose le résultat vrai pour N $\leq$ n.
On a $\Lambda X = \Lambda(v_0, \dots, v_n) \otimes \Lambda P$. On pose $\Lambda X_1 = \Lambda(v_1, \dots, v_n) \otimes \Lambda P$, il est clair que $(\Lambda X_1, d_1) \in \mathbf{G}_f$ et $\mathrm{ev}_{(\Lambda X, d)} = \mathrm{ev}_{(\Lambda v_0 \otimes \Lambda X_1, d)} \neq 0$ donc du lemme 7.4.2 on en déduit que, $\mathrm{ev}_{(\Lambda X_1, d_1)} \neq 0$. L'hypothèse de récurrence nous permet de conclure que $(\Lambda X_1, d_1)$ est un élément de **DP**, on s'est ramené au cas $N = 1$, donc $H^*(\Lambda X)$ satisfait la dualité de Poincaré. ■

7.5.4 *Preuve du théorème 7.5.2 :*
Comme chaque $(\Lambda V_i \otimes \Lambda P, D)$ sont par définition dans $\mathbf{G}_f$, en utilisant le lemme 7.4.2 et la proposition 5.3.6 on montre par récurrence sur i que

$$\mathrm{ev}_{(\Lambda V_i \otimes \Lambda P, D)} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{ev}_{(\Lambda V_{i+1} \otimes \Lambda P, D)} \neq 0$$

■

7.6 Quand la cohomologie n'est pas noethérienne

Théorème 7.6.1
Soit S un espace de Gorenstein 1-connexe. Alors

$$ev_S \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} S \text{ est un complexe de Poincaré sur } \mathbb{Q} \\ \text{ou} \\ H^*(S;\mathbb{Q}) \text{ n'est pas noethérienne et} \\ \text{n'est pas de Gorenstein.} \end{cases}$$

Le théorème 7.6.1 est un corollaire de la proposition suivante :

Proposition 7.6.2
Si $H^*(A;\mathbb{Q})$ n'est pas noethérienne avec un socle non nul alors $H^*(A;\mathbb{Q})$ n'est pas de Gorenstein.

Corollaire 7.6.3
Si $H^*(A;\mathbb{Q})$ n'est pas noethérienne alors

$$\mathrm{ev}_A \neq 0 \Rightarrow H^*(A;\mathbb{Q}) \text{ n'est pas de Gorenstein.}$$

7.6.4 *Preuve du théorème 7.6.1 :*
Soit S un espace de Gorenstein tel que $ev_S \neq 0$:

- Si $H^*(S)$ est noethérienne, alors $H^*(S)$ satisfait la dualité de Poincaré d'après le corollaire 7.2.4.
- Si $H^*(S)$ n'est pas noethérienne, le socle est non nul puisque Im $ev_S \subset$ socle $(H^*(S))$ et de la proposition 7.6.2, on en conclut que $H^*(S)$ n'est pas de Gorenstein .

■

Remarque 7.6.5
Soit X un espace 1-connexe tel que $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ a une croissance polynomiale, $H^*(X)$ est noethérienne et $ev_X \neq 0$ donc X est un espace elliptique.
En effet, par [10], la croissance polynomiale de $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ implique que $\pi_*(\Omega X)\otimes \mathbb{Q}$ est de dimension finie, donc X est un espace de Gorenstein (proposition 2.5.3), finalement $H^*(X;\mathbb{Q})$ est de dimension finie par le corollaire 7.2.4, donc X est un espace elliptique.

7.6.6 *Preuve de la proposition 7.6.2 :*
On utilise le modèle bigradué de $H^*(A) = H$ (paragraphe 1.5.5) : $(\Lambda Z, d) \longrightarrow (H, 0)$. On considère la résolution projective de $\mathbb{Q}$ en H-modules :

$$\dots \xrightarrow{d} H \otimes (\Lambda \overline{Z})_2 \xrightarrow{d} H \otimes (\Lambda \overline{Z})_1 \xrightarrow{d} H \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

où $\overline{Z}_i^j = Z_{i-1}^{j+1}$. Comme H n'est pas noethérienne, Z_0 est de dimension infinie (prop. 1.5.3), donc $(\Lambda\overline{Z})_1 = \overline{Z}_1$ est aussi de dimension infinie. Soit $\omega \in$ socle (H), $\omega \in \Lambda(x_1,\ldots,x_n), x_i \in Z_0$. On définit alors pour $k > 0$

$$\begin{array}{rrcl} f_k : & H \otimes (\Lambda\overline{Z})_1 & \longrightarrow & H \\ & 1 \otimes \bar{x}_{n+k} & \mapsto & \omega \\ & 1 \otimes \bar{x}_j & \mapsto & 0 \end{array}$$

pour $j \neq n+k$. Ces applications vérifient $f_k \circ d = 0$ et il n'existe pas d'applications $g : H \mapsto H$ telles que $f_k = g \circ d$, d'où $Ext_H\,(\mathbb{Q}, H)$ est de dimension infinie, donc H n'est pas de Gorenstein. ■

7.7 Espaces formels

Un espace X est formel si il a le même type d'homotopie que sa cohomologie. Les modèles de X et $H^*(X,\mathbb{Q})$ sont donc les mêmes. Il est clair que X est de Gorenstein si et seulement si $H^*(X,\mathbb{Q})$ est de Gorenstein. De plus on a :

Théorème 7.7.1
Soit X un espace formel de Gorenstein sur $\mathbb{Q}$, alors

$$\mathrm{ev}_X \neq 0 \Rightarrow H^*(X,\mathbb{Q}) \in \mathbf{DP}$$

Preuve :
Le fait que $\mathrm{ev}_X \neq 0$ nous oblige $H^*(X,\mathbb{Q})$ à être noethérienne, sinon $H^*(X,\mathbb{Q})$ ne serait pas de Gorenstein (cf corollaire 7.6.3) et donc d'après le corollaire 7.2.4 $H^*(X,\mathbb{Q})$ est de dimension finie. Le théorème 2.4.5 nous permet de conclure. ■

Bibliographie

[1] J.F. Adams and P.J. Hilton, *On the chain algebra of a loop space*, Comment. Math. Helv. **30** (1956) 305-330.

[2] L. Avramov and S. Halperin, *Through the looking glass : A dictionary between rational homotopy theory and local algebra*, Algebra, Algebraic Topology and their Interactions, Lecture Notes in Math., vol. 1183, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[3] H. Bass, *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Z. **82** (1963), 8-28.

[4] L. Bisiaux, *Grade et invariant de Toomer d'une application*, thèse, univ. de Lille (1995).

[5] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with view toward algebraic geometry*, GTM 150, Springer-Verlag.

[6] Y. Félix, *La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle*, Astérisque **176** (1989).

[7] Y. Félix and S. Halperin, *Rational L.-S. Category and its application*, Trans. Amer. Soc. **273** (1982), 1-37.

[8] Y. Félix, S. Halperin and J.C. Thomas, *Gorenstein spaces*, Adv. in Math. **71** (1988), 92-112.

[9] Y. Félix, S. Halperin and J.C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Prépublication d'Angers **32** (Fev. 1997).

[10] Y. Félix, S. Halperin and J.C. Thomas,*The homotopy Lie algebra for finite complexes*, Publ. Math. IHES **56** (1982) 179-202.

[11] Y. Félix, J.-M. Lemaire and J.C. Thomas, *L'application d'évaluation, les groupes de Gottlieb duaux et les cellules terminales*, J. Pure and Applied Algebra, **91** (1994) 143-164.

[12] Y. Félix and A. Murillo, *Gorenstein graded algebra and the evaluation map*, preprint.

[13] Y. Félix, D. Tanré et J.C. Thomas, *Minimal Models and Geometry*, 1993.

[14] H. Gammelin, *Gorenstein spaces with a non zero evaluation map*, to appear in trans. Amer. Math. Soc.

[15] H. Gammelin, *Espaces de Gorenstein et fibrations*, soumis pour publication aux Annales de l'Institut Fourier.

[16] D. Goettlieb, *Poincaré duality and fibrations*, Proc. A.M.S. **76** (1979), 148-150.

[17] D. Gorenstein, *An arihmetic theory of adjoint plane curves*, trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 414-436.

[18] S. Halperin, *Lectures on minimal models*, Mém. Soc. Math. France **244** (1978), 199-224.

[19] S. Halperin, *Finiteness in the minimal models of Sullivan*, Trans. Amer. Soc. **230** (1977) 173-199.

[20] S. Halperin, *Rational fibrations, minimal models and fibrings of homogenous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **244** (1978) 199-224.

[21] S. Halperin and G. Levin, *High skeleta of CW-complexes*, L.N.M. **1183** (1986) Springer-Verlag, 211-217.

[22] S. Halperin and J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences*, Adv. in Math. **32** (1979) 233-279.

[23] B. Jessup and A. Murillo-Mas, *Approximating rational spaces with elliptic complexes and a conjecture of Anick*, preprint.

[24] P. Lambrecht, *Coissance des Nombres de Betti des espaces de Lacets*, thèse, IRMA **36** nII (1995).

[25] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, W.A.Benjamin Co., New York (1970).

[26] J.C. Moore, *Algèbre homologique et homologie des espaces classifants*, Séminaire Cartan 1959/1960, exposé 7.

[27] A. Murillo, *Rational fibrations in differential homological algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992) 79-91.

[28] A. Murillo, *On the evaluation map*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993) 611-622.

[29] A. Murillo, *On the evaluation map of some Gorenstein algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra **91** (1994) 209-218.

[30] E. Spanier, *Algebraic topology*, GTM , Springer-Verlag.

[31] M. Spivak, *Spaces satisfying Poincaré duality*, Topology **6** (1967) 77-101.

[32] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 47, 1978, pp. 269-331.

[33] D. Tanré, *Homotopie Rationnelle : Modèle de Chen,Quillen, Sullivan*, Lecture Notes in Mathematics, **1025**, Springer-Verlag (1983).

[34] G. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, GTM , Springer-Verlag.

Département de Mathématiques, Université des Sciences et technologies de Lille, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ, FRANCE
E-mail address : gammelin@gat.univ-lille1.fr

Résumé

Dans cette thèse, on étudie les espaces de Gorenstein, introduits par Y. Félix, S. Halperin et J.C. Thomas par analogie avec l'algèbre locale. Ceux-ci généralisent les espaces dont la cohomologie satisfait la dualité de Poincaré. Sur le corps des nombres rationnels, les mêmes auteurs et A. Murillo ont prouvé le résultat suivant : avec diverses hypothèses sur la fibre, si deux espaces d'une fibration sont de Gorenstein, alors il en est de même du troisième. Ce théorème nous permet d'introduire différents types d'espaces de Gorenstein, notamment $\mathbf{G}_N$. Par exemple, les espaces dont l'homotopie est finie sont de type $\mathbf{G}_N$. En les considérant, on établit des théorèmes plus généraux dans deux domaines :

D'une part, on s'intéresse aux fibrations dont la fibre est de type $\mathbf{G}_N$. On met en évidence une nouvelle hypothèse : la e-minimalité. Une fibration est dite e-minimale si le connectant de la longue suite exacte d'homotopie est nul en degré impair. Pour de telles fibrations, on prouve que si la base est de Gorenstein (resp. est de type $\mathbf{G}_N$) alors l'espace total est de Gorenstein (resp. est de type $\mathbf{G}_N$). De ce fait, tous les espaces de Gorenstein que nous savons construire sont de type $\mathbf{G}_N$.

D'autre part, sur $\mathbf{G}_N$, l'évaluation est non nulle si et seulement si la cohomologie satisfait la dualité de Poincaré. Bien que ce résultat ne soit pas encore prouvé pour les espaces de Gorenstein (conjecture), nous démontrons, pour n'importe quel corps, l'équivalence avec l'assertion "avoir une cellule terminale", condition plus faible que l'évaluation non nulle.

En conclusion, il s'avère que les espaces de Gorenstein de type $\mathbf{G}_N$ forment un nouveau cadre, très large, sur lequel on peut faire des calculs et des raisonnements par récurrence.