N° d'ordre : 1934

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Jean-Marc THIERCELIN-PANAIS

L.S. CATÉGORIE D'UN ESPACE R-MODÉRÉ

Soutenue le 4 juillet 1997 devant la commission d'examen :

J. D'ALMEIDA, Professeur, Université de Lille (Président)
O. CORNEA, Professeur, Université de Lille (Rapporteur)
Y. FÉLIX, Professeur, Université de Louvain-La Neuve (Rapporteur)
K. HESS, Professeur, Université de Lausanne (Rapporteur)
J.C THOMAS, Professeur, Université d'Angers (Directeur de thèse)

Remerciements.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Jean-Claude Thomas qui a dirigé mes recherches avec une extrême compétence. Ses suggestions et ses encouragements sont à la base de la plupart des résultats obtenus. Sa précieuse aide et sa grande disponibilité, ont été déterminantes.

Je remercie très vivement Octavian Cornea, Yves Félix et Kathryn Hess pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de juger cette thèse.

Jean D'Almeida me fait également l'honneur de participer à ce jury et d'accepter la présidence de cette thèse ; qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma sincère gratitude.

Je veux aussi remercier les différents organismes (CIMPA, CNRS, Fields Institute, USTL) qui m'ont permis de participer à de fructueux colloques à Breil-sur-Roya, à Matagne-la Petite et à Toronto.

Mes remerciements vont bien sûr aussi à Isabelle, mon épouse, qui m'a soutenu et évidemment aussi à mes parents, Denise et Gabriel Thiercelin. Leur confiance et leurs encouragements ont été très appréciables.

Table des matières

1 Introduction

A tout espace topologique X est associé un invariant numérique, noté $catX$, appelé la *catégorie de Lusternick − Schnirelmann* de X. C'est le plus petit entier n tel que l'espace X puisse être recouvert par $n+1$ ouverts, chaque ouvert étant contractile dans X. Cet invariant a été introduit comme une minoration du nombre de points critiques d'une fonction sur une variété. Il joue un rôle très important, depuis ces dernières années, en théorie de l'homotopie.

La simplicité de la définition de $catX$ contraste avec la difficulté de son calcul. Par exemple, on ne connaît pas la LS-catégorie de tous les groupes de Lie. Aussi de nombreuses approximations ont-elles été introduites par différents auteurs. Nous nous intéressons ici à celles de nature algébrique considérées par S. Halperin et J.M. Lemaire [9] : si $\mathbf{k}$ désigne un corps, on définit, à partir de l'algèbre des cochaînes singulières de l'espace X à coefficients dans $\mathbf{k}$, les invariants numériques $Mcat(X;\mathbf{k})$ et $Acat(X;\mathbf{k})$ tels que

$$Mcat(X;\mathbf{k}) \leq Acat(X;\mathbf{k}) \leq catX.$$

Si X désigne le groupe de Lie Sp(2) alors $Acat(X;\mathbf{k}) = 2$ pour tout corps $\mathbf{k}$ et $catX = 3$, [9]. Si X désigne un espace 1-connexe rationnel dont la cohomologie est de type finie, alors, d'après K. Hess [11] :

$$Mcat(X;\mathbf{Q}) = Acat(X;\mathbf{Q}).$$

Ce dernier résultat, associé à celui de B. Jessup [13] permet de démontrer un cas particulier de la conjecture de Ganea :

$$Acat(X \times S^n;\mathbf{Q}) = Acat(X;\mathbf{Q}) + 1.$$

Ces résultats appellent les questions suivantes ([15], 7.3), lorsque R désigne un anneau principal :

(1) Est-il possible de définir des invariants algèbriques

$$l\text{-}Mcat(X;R) \quad r\text{-}Mcat(X;R) \quad \text{et} \quad Acat(X;R)\ ?$$

(2) Si X est un espace 1-connexe dont la cohomologie à coefficients dans l'anneau principal R est de type fini, a-t-on alors

$$Mcat(X;R) = Acat(X;R)\ ?$$

Afin de répondre à la première question, nous nous restreignons aux espaces dont l'homologie de l'espace des lacets $H_*(\Omega X; R)$ est R-libre. La réponse à la deuxième question nécessite, même lorsque $R = \mathbf{k}$, l'introduction d'une structure plus riche que la simple structure d'algèbre sur les cochaînes singulières, comme le montrent les contre-exemples d'Idrissi [12] et les travaux de Bitjong. En effet, dans sa thèse [2], Bitjong introduit la notion d'algèbre quasi-commutative, l'invariant Bicat$X$, et établit, pour tout corps $\mathbf{k}$ de caractéristique différente de 2, que :

$$Bicat(X; \mathbf{k}) = Acat(X; \mathbf{k}). \tag{1}$$

En corollaire du principal résultat de cette thèse, nous obtenons que pour tout CW complexe r-connexe de dimension n et pour tout corps R de caractéristique $p > n/r$

$$Mcat(X; R) = Acat(X; R)$$
$$Acat(X \times S^n; R) = Acat(X; R) + 1.$$

En fait, notre résultat le plus général concerne les espaces R-modérés au sens de D. Anick [1].

Rappelons qu'un CW complexe X, r-connexe de dimension n est dit R-modéré si

$$dim X < r\rho(R)$$

lorsque $\rho(R)$ désigne le plus petit nombre premier non inversible dans R.

Pour de tels espaces nous définissons les invariants

$$M_c cat(X; R) \text{ et } A_c cat(X; R)$$

tels que

$$M_c cat(X; R) \leq A_c cat(X; R)$$
$$\text{et} \quad M_c cat(X; R) = Mcat(X; R)$$

pour tout corps R de caractéristique $p > dim X/r$ et nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit R un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ et soit X un CW complexe R-modéré de dimension n tel que*

a) $H_*(\Omega X; R)$ est R-libre

b) $H^n(X; R)$ est R-libre

alors

$$M_c cat(X; R) = A_c cat(X; R).$$

Il résulte alors du théorème précédent :

Théorème 4. *Sous les hypothèses du théorème 1 et si $X \times S^n$, $n \geq 2$, est R-modéré alors*

$$A_c cat(X \times S^n; R) = A_c cat(X; R) + 1.$$

ie l'invariant $A_c cat(-; R)$ satisfait la conjecture de Ganea [7].

Signalons que très récemment, Bitjong a donné, [3], une démonstration de l'égalité

$$Mcat(X; \mathbf{k}) = Acat(X; \mathbf{k})$$

pour tout corps de caractéristique différente de 2, égalité obtenue en utilisant la structure d'algèbre quasi-commutative de $C^*(X; \mathbf{k})$. Notre démarche est complétement différente.

Le point de départ de notre démonstration est le résultat fondamental de D. Anick [1] qui assure l'existence d'une algèbre de Lie différentielle graduée de la forme :

$$L = \{L_i\}_{i \geq 1}, \quad dim L_i < \infty, \quad L_i \quad R\text{-libre}$$

et d'un quasi-isomorphisme d'algèbres de chaînes :

$$UL \longrightarrow C_*(\Omega X; R)$$

ceci pour tout anneau R et tout CW complexe X satisfaisant les hypothèses du théorème 1. Ce quasi-isomorphisme préserve la diagonale à homotopie près. Il suit alors l'existence de deux quasi-isomorphismes d'algèbres de cochaînes:

$$C^*(L) \longleftarrow B^\vee(C_*(\Omega X; R)) \longrightarrow C^*(X; R)$$

lorsque $C^*(L)$ désigne le complexe des cochaînes sur l'algèbre de Lie L et $B^\vee$ désigne la bar construction duale. Cette dernière équivalence permet d'associer à chaque CW complexe X, vérifiant les hypothèses ci-dessus, un modèle commutatif $(\Lambda W, d)$ similaire au modèle de Sullivan qui est considéré lorsque $R = \mathbf{Q}$.

En adaptant, grâce aux travaux de S. Halperin [8], la démonstration de K. Hess [11], nous établissons le théorème 1. Puis, à partir de la démonstration rationnelle de B. Jessup [13], nous démontrons le théorème 4.

2 Les invariants l-Mcat, r-Mcat et Acat

Nous nous plaçons sur un anneau principal R de caractéristique quelconque. Nous allons définir les notions de modèles libres sur un anneau principal

R en suivant la même démarche que S. Halperin et J.M. Lemaire [9] qui travaillaient sur un corps.

2.1 Modèle relatif libre d'un homomorphisme de R-adg

Proposition 1. *Soient (A, d_A) et (B, d_B) deux R-adg telles que*

i) $H^0(A, d_A) = H^0(B, d_B) = R$, $H^1(A, d_A) = H^1(B, d_B) = 0$

ii) $H^i(A, d_A)$ *et* $H^i(B, d_B)$ *sont des R-modules finiment engendrés pour tout i*

iii) $H^2(B, d_B)$ *est un R-module libre*

iv) A est R-libre.

Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme de R-adg tel que

v) $H^2(f) : H^2(A) \longrightarrow H^2(B)$ *soit injectif.*

Alors il existe un diagramme commutatif dans la catégorie des R-adg de la forme :

$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & (B, d_B) & \\ & (A \sqcup T(V), d) \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\rho"] & (T(V), \bar{d}) \end{tikzcd}$$

où :

1) *V est un R-module libre et $T(V)$ désigne l'algèbre tensorielle sur V*

2) *$A \sqcup T(V)$ désigne le produit libre des algèbres graduées A et $T(V)$*

3) *i désigne l'inclusion naturelle, $i(a) = a$, et ρ l'homomorphisme de R-adg de noyau l'idéal engendré par A dans $A \sqcup T(V)$*

4) *φ est un quasi-isomorphisme de R-adg.*

Un tel diagramme commutatif satisfaisant 1) 2) et 3) est appelé un modèle libre du morphisme de R-adg $f : A \longrightarrow B$.

La proposition 1 assure l'existence d'un tel modèle sous les hypothèses (i) à (iv).

Preuve de la proposition 1 : Supposons construit :

$$\varphi : (A \sqcup T(V), d) \longrightarrow (B, d)$$

tel que, pour tout entier $k \geq 2$:

a$_k$) $V = V^{\leq k}$ est un R-module libre

b$_k$) $H^{\leq k}(\varphi)$ est un isomorphisme

c$_k$) $H^{k+1}(\varphi)$ est surjective.

Notons Z un sous-module de $(A \sqcup T(V))^{k+1} \cap ker(d)$ qui se projette sur $kerH^{k+1}(\varphi)$. Nous pouvons choisir une base $z_1, \ldots, z_n$ de Z telle que

$$x_1 = r_1 z_1, \ldots, x_m = r_m z_m,$$

soit une base de $\mathrm{Im}d \cap Z$, avec $r_i \in R$, $m \leq n$ et $r_m | r_{m-1} | \ldots | r_1$.

Introduisons

$$U = u_1 R \oplus \cdots \oplus u_n R, \quad \deg u_i = k.$$

tel que $du_i = z_i$ et $\varphi(u_i) = 0$.

Il existe $y_i \in (TV^{\leq k})^{k+1}$ tel que

$$x_i = dy_i = r_i z_i = r_i du_i = d(r_i u_i).$$

Par suite $d(y_i - r_i u_i) = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$.

Introduisons

$$W = w_1 R \oplus \cdots \oplus w_m R, \quad \deg w_j = k - 1.$$

Posons $dw_i = y_i - r_i u_i$.

Alors φ s'étend de manière unique en un homomorphisme de R-adg

$$\psi : (A \sqcup T(V \oplus U \oplus W), d) \longrightarrow (B, d)$$

tel que $H^l(\varphi) = H^l(\psi)$ pour $l \leq k - 1$.

- Pour $l < k - 1$, aucun nouveau élément n'a été apporté, donc nous avons $H^l(\varphi) = H^l(\psi)$.

- Montrons que $H^{k-1}(\psi) = H^{k-1}(\varphi)$:
Si $\alpha \in (A \sqcup T(V \oplus U \oplus W))^{k-1}$ alors $\alpha = \alpha_0 + w$
avec $\alpha_0 \in (A \sqcup (T(V))^{k-1}$ et $w \in W$.
Les relations $d\alpha = 0$ et $dw_i - y_i \in W$ entraînent que $w = 0$.

- Montrons que $H^k(\psi) = H^k(\varphi)$:
Si $\alpha \in (A \sqcup T(V \oplus U \oplus W))^k$ alors $\alpha = \alpha_0 + u$
avec $\alpha_0 \in (A \sqcup (T(V))^k$ et $u \in U$.
Les relations $d\alpha = 0$ et $du_i = z_i \neq 0$ entraînent que $u = 0$.

- Montrons que $H^{k+1}(\psi)$ est injective :
  Si $\alpha \in (A \sqcup T(V \oplus U \oplus W))^{k+1}$ alors $\alpha = \alpha_0 + \beta w + w'\beta'$
  avec $\alpha_0 \in (A \sqcup (T(V))^{k+1} \quad w, w' \in W \quad \beta, \beta' \in (T(V))^2 = V^2$.
  Nous en déduisons que :

$$d\alpha = 0 = d\alpha_0 + d\beta\, w \pm \beta\, dw + dw'\, \beta \pm w'\, d\beta$$

  Nécessairement nous avons $\beta = \beta' = 0$ et donc $\alpha = \alpha_0$, ie il n'y a pas de nouveau cycle en degré k+1.

  Supposons que $\varphi(\alpha) = d\beta$ et $d\alpha = 0$ avec $\alpha \in (A \sqcup T(V \oplus U \oplus W))^k$.
  D'après ce qui précéde, $\alpha = \alpha_0 \in (A \sqcup T(V))^k$, ce qui entraîne que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i = d(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i).$$

- Montrons que ψ s'étend en un homomorphisme θ de R-adg :

$$\theta : A \sqcup T(V \oplus U \oplus W \oplus S) \longrightarrow (B, d_B)$$

  tel que $\begin{cases} H^{\leq k+1}(\theta) \text{ est un isomorphisme} \\ H^{k+2}(\theta) \text{ est surjective.} \end{cases}$
  Pour cela posons

$$H^{k+2}(B, d_B) = u_1 R \oplus \cdots \oplus u_r R \oplus v_1\,(R/t_1 R) \oplus \cdots \oplus v_s\,(R/t_s R)$$

  avec $t_{i+1} | t_i$ et posons :

$$S_1 = z_1 R \oplus \cdots \oplus z_r R \quad \text{avec deg } z_i = k+2$$

$$S_2 = x_1 R \oplus \cdots \oplus x_s R \quad \text{avec deg } x_i = k+2$$

  Nous avons $dz_i = 0 \quad \theta(z_i) = u_i \quad dx_i = 0$ et $\theta(x_i) = v_i$
  Clairement $H^{\leq k+1}(\theta) = H^{\leq k+1}(\psi)$ et $H^{k+2}(\theta)$ est surjective. ■

Définition 1. *Si $A = R$ alors $\varphi : T(V) \longrightarrow (B, d)$ est appelé le modèle libre de (B, d).*

Remarquons que nous avons introduit une partie linéaire de la différentielle au début de la démonstration en posant pour $w_j \in V^{k-1} \quad dw_j = y_j - r_i u_i$ avec $r_{i+1} | r_i$.

Si r_1 est une unité de R, il en est de même de chaque r_i et en fait, en posant $u_i = (r_i)^{-1} \bar{u}_i$, on obtient $dw_j = y_j - \bar{u}_i$.

Remarquons aussi que si $A = R$

$$y_j \in (T(V^{\leq k}))^{k+1} \subset T^{\geq 2}(V).$$

Définition 2. *Une R-adg $(T(V),d)$ est dite minimale si:*

a) $H^0(T(V),d) = R, \quad H^1(T(V),d) = 0, \quad H^2(T(V),d)$ *est libre*

b) V *est un R-module libre de type fini*

c) Pour chaque degré k, il existe un élément r_k non inversible de R, tel que

$$\forall v \in V^k \quad dv \in r_k V^{k+1} + T^{\geq 2}V.$$

La R-adg $(T(V),d)$ est dite décomposable si en outre $d_1 = 0$.
La R-adg $(T(V),d)$ est dite localement nilpotente s'il existe une filtration

$$0 = V(0) \subset V(1) \subset \cdots \subset V(i) \subset \cdots$$

de R-module gradué telle que $V = \bigcup\limits_i V(i)$ et $d(V(i)) \subset T(V(i-1))$

La proposition précédente entraîne, lorsque $A = R$, l'existence d'un modèle minimal libre pour toute R-adg (B,d) telle que

$$H^0(B,d) = R, \quad H^1(B,d) = 0, \quad H^2(B,d) \text{ libre.}$$

D'autre part, ce modèle minimal est localement nilpotent comme on le voit en posant

$$V(1) = S_1^2 \text{ et } V(k+1) = V(k) \oplus U^{k+1} \oplus W^{k-2} \oplus S_1^{k+1} \oplus S_2^{k+2}$$

avec les notations introduites dans la démonstration précédente.

Proposition 2 (Lemme de relèvement). *Etant donné un diagramme d'homomorphismes de R-adg:*

$$\begin{array}{ccc} & & (B,d_B) \\ & & \downarrow \psi \\ (T(V),d) & \xrightarrow{\varphi} & (A,d_A) \end{array}$$

où

a) $(T(V),d)$ *est une adg minimale*

b) ψ *est un quasi-isomorphisme surjectif*

alors il existe

$$f : (T(V),d) \longrightarrow (B,d_B) \text{ telle que } \psi \circ f = \varphi.$$

Preuve de la proposition 2: Par induction sur les $V(k)$ introduits ci-dessus.

■

Une autre conséquence de la propriété de nilpotence locale est :

Proposition 3. *[8, proposition 2.8] Si $(T(V), d)$ est une R-adg minimale et si B désigne la bar construction alors l'application naturelle*

$$B(T(V), d) \longrightarrow R \oplus s(V, d_1)$$

est un quasi-isomorphisme de R-modules.

Il résulte en particulier de la proposition 3 que $(T(V), d)$ est décomposable si et seulement si $H(B(T(V), d))$ est un R-module libre.

Proposition 4. *Un quasi-isomorphisme $\psi : (T(V), d) \longrightarrow (T(W), d')$ entre deux adg décomposables est un isomorphisme.*

Preuve de la proposition 4 : D'après la proposition 3, φ induit un quasi-isomorphisme

$$\bar{\varphi} : R \oplus s(V, d_1) \longrightarrow R \oplus s(W, d_1)$$

et puisque $d_1 = 0$, φ induit aussi un isomorphisme $\bar{\varphi} : V \longrightarrow W$. Par suite φ est un isomorphisme. ∎

Corollaire 1. *Soient*

$$(T(V), d) \xrightarrow{\simeq} (A, d_A) \xleftarrow{\simeq} (T(W), d')$$

deux modèles décomposables d'une adg, alors il existe un isomorphisme d'adg

$$(T(V), d) \xrightarrow{\cong} (T(W), d')$$

Preuve du corollaire 1 : Considérons l'adg acyclique

$$T(U \oplus dU) \longrightarrow (A, d_A)$$

au dessus de (A, d_A) et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & T(W) \sqcup T(U \oplus dU) \\ & & \downarrow \\ (T(V), d) & \longrightarrow & (A, d_A) \end{array}$$

où la flèche verticale est un quasi-isomorphisme surjectif.

D'après le lemme de relèvement, nous avons l'existence d'un quasi-isomorphisme :

$$T(V) \longrightarrow T(W) \sqcup T(U \oplus dU)$$

que l'on compose avec le quasi-isomorphisme :

$$T(W) \sqcup T(U \oplus dU) \longrightarrow T(W)$$

pour obtenir un quasi-isomorphisme :

$$T(V) \xrightarrow{\simeq} T(W)$$

On applique alors la proposition 4. ∎

2.2 Catégorie d'une R-adg

Soient (A, d_A) une R-adg telle que

$$(*)\begin{cases} H^0(A) = R, \quad H^1(A) = 0, \quad H^2(A) \text{ est libre} \\ H^i(A) \text{ est un } R\text{-module de type fini.} \end{cases}$$

et $(T(V), d) \longrightarrow (A, d_A)$ un modèle minimal de (A, d_A).

Notons par $T^{>m}(V)$ l'idéal des mots de longueur supérieure à m en V. Cet idéal est stable par la différentielle. Notons

$$q_m : (T(V), d) \longrightarrow (T(V)/T^{>m}(V), \bar{d})$$

la projection canonique associée.

D'après la proposition 1, q_m admet un modèle relatif libre:

$$\begin{tikzcd} (TV, d) \arrow[r, "q_m"] \arrow[dr, "i"'] & (TV/T^{>m}, \bar{d}) & \\ & (TV \sqcup TW, D) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\rho"] & (TV, \bar{D}) \end{tikzcd}$$

et, en particulier, l'inclusion i fait de $(TV \sqcup TW, D) = (T(V \oplus W), D)$ un (TV, d)-module à gauche (respectivement à droite, respectivement (TV, d)-bimodule).

Définition 3. *Si (A, d_A) est une R-adg vérifiant $(*)$ et si $(T(V), d)$ est un modèle libre décomposable de (A, d_A) alors $Acat\, A$ (respectivement r-$Mcat\, A$, l-$Mcat\, A$, bi-$Mcat\, A$) est le plus petit entier m (éventuellement ∞) tel que le morphisme i admette une rétraction r d'adg (respectivement de TV-modules à droite, à gauche, de bimodules), ie tel que $r \circ i = id_{TV}$.*

Remarque 1.

1) Le corollaire 1 montre que les invariants $Acat\,(A, d_A)$, l-$Mcat\,(A, d_A)$, r-$Mcat\,(A, d_A)$ et bi-$Mcat\,(A, d_A)$ sont indépendants du choix du modèle décomposable.

2) On a évidemment la suite d'inégalités:

$$l\text{-}Mcat\, A, r\text{-}Mcat\, A \leq bi\text{-}Mcat\, A \leq Acat\, A.$$

2.3 Catégorie d'un espace

Considérons X un espace 1-connexe de R-type fini, ie:

$$\begin{cases} H^0(X;R) = R \quad H^1(X;R) = 0 \\ H^i(X;R) \text{ est un R-module de type fini pour tout } i. \end{cases}$$

Il résulte alors du théorème des coefficients universels que $H^2(X;R)$ est un R-module libre. Par suite, l'algèbre des cochaînes singulières normalisées à coefficients dans R, $C^*(X;R)$, vérifie les conditions du paragraphe précédent. En particulier, $C^*(X;R)$ admet un modèle minimal

$$\varphi : (T(V), d) \longrightarrow C^*(X;R).$$

Définition 4. *La R-adg $(T(V), d)$ est appelée un R-modèle minimal libre de l'espace X.*

Il résulte de ce qui précéde que tout espace 1-connexe de R-type fini admet un R-modèle minimal libre.

Un espace X admet un R-modèle minimal décomposable si et seulement si $H_*(\Omega X;R)$ est R-libre.

Définition 5. *Soit X un espace 1-connexe de R-type fini admettant un modèle libre décomposable $(T(V), d)$, alors*

$$\begin{aligned} Acat(X;R) &= Acat(T(V), d) \\ l\text{-}Mcat(X;R) &= l\text{-}Mcat(T(V), d) \\ r\text{-}Mcat(X;R) &= r\text{-}Mcat(T(V), d) \\ bi\text{-}Mcat(X;R) &= bi\text{-}Mcat(T(V), d) \end{aligned}$$

Comme les adg $C^*(X;R)$ et $C^*(X;R)^{op}$ ont le même type d'homotopie nous avons $l\text{-}McatX = r\text{-}McatX$, ie dans le cadre topologique on ne distingue pas la catégorie à droite et la catégorie à gauche. Aussi dans la section suivante nous noterons simplement $McatX$ cet invariant.

3 Le cas commutatif

3.1 Modèle relatif commutatif d'un homomorphisme de R-adgc

Considérons R un anneau principal. Rappelons qu'une R-adgc est une R-adg $A = (A^i)$ telle que si $x \in A^i \quad y \in A^j$ alors $xy = (-1)^{ij} yx$.

Proposition 5. *Soient (A, d_A) et (B, d_B) deux R-adgc telles que*

i) $H^0(A, d_A) = H^0(B, d_B) = R$, $H^1(A, d_A) = H^1(B, d_B) = 0$

ii) $H^i(A, d_A)$ *et* $H^i(B, d_B)$ *sont des R-modules finiment engendrés, pour tout i*

iii) $H^2(B, d_B)$ *est un R-module libre*

iv) A est R-libre.

Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme de R-adgc tel que

v) $H^2(f) : H^2(A) \longrightarrow H^2(B)$ *soit injectif.*

Alors il existe un diagramme commutatif dans la catégorie des R-adgc de la forme :

$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & (B, d_B) & \\ & (A \otimes \Lambda V, d) \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\rho"] & (\Lambda V, \bar{d}) \end{tikzcd}$$

où :

1) V est un R-module libre et ΛV désigne l'algèbre commutative sur V

2) i désigne l'inclusion naturelle, $i(a) = a$ et ρ l'homomorphisme de R-adgc de noyau l'idéal engendré par A dans $A \otimes \Lambda V$

3) φ est un quasi-isomorphisme de R-adgc.

Un tel diagramme commutatif satisfaisant 1), 2) et 3) est appelé un modèle commutatif du morphisme de R-adgc $f : A \longrightarrow B$.

La proposition 5 assure l'existence d'un tel modèle sous les hypothèses (i) à (iv).

Preuve de la proposition 5 : Supposons construit :

$$\varphi : (A \otimes \Lambda V, d) \longrightarrow (B, d)$$

tel que, pour tout entier $k \geq 2$:

a$_k$) $V = V^{\leq k}$ est un R-module libre finiment engendré

b$_k$) $H^{\leq k}(\varphi)$ est un isomorphisme

c$_k$) $H^{k+1}(\varphi)$ est surjective.

Notons Z un sous-module de $(A \otimes \Lambda V)^{k+1} \cap ker(d)$ qui se projette sur $ker H^{k+1}(\varphi)$. Nous pouvons choisir une base $z_1, \dots, z_n$ de Z telle que

$$x_1 = r_1 z_1, \dots, x_m = r_m z_m,$$

soit une base de $\mathrm{Im} d \cap Z$, avec $r_i \in R$, $m \leq n$ et $r_m | r_{m-1} | \dots | r_1$.

Introduisons

$$U = u_1 R \oplus \dots \oplus u_n R, \quad \deg u_i = k.$$

tel que $du_i = z_i$ et $\varphi(u_i) = 0$.

Nous avons alors

$$x_i = dy_i = r_i z_i = r_i du_i = d(r_i u_i).$$

Par suite $d(y_i - r_i u_i) = 0$, pour $i = 1, \dots, m$.

Introduisons

$$W = w_1 R \oplus \dots \oplus w_m R, \quad \deg w_j = k - 1$$

Posons $dw_i = y_i - r_i u_i$.

Alors φ s'étend de manière unique en un homomorphisme de R-adgc

$$\psi : (A \otimes \Lambda(V \oplus U \oplus W), d) \longrightarrow (B, d)$$

tel que $H^l(\varphi) = H^l(\psi) \quad$ pour $l \leq k - 1$.

- Pour $l < k - 1$, aucun nouveau élément n'a été apporté, donc nous avons $H^l(\varphi) = H^l(\psi)$.

- Montrons que $H^{k-1}(\psi) = H^{k-1}(\varphi)$:
  Si $\alpha \in (A \otimes \Lambda(V \oplus U \oplus W))^{k-1}$ alors $\alpha = \alpha_0 + w$
  avec $\alpha_0 \in (A \otimes \Lambda V)^{k-1}$ et $w \in W$.
  Les relations $d\alpha = 0$ et $dw_i - y_i \in W$ entraînent que $w = 0$.

- Montrons que $H^k(\psi) = H^k(\varphi)$:
  Si $\alpha \in (A \otimes \Lambda(V \oplus U \oplus W))^k$ alors $\alpha = \alpha_0 + u$
  avec $\alpha_0 \in (A \otimes \Lambda V)^k$ et $u \in U$.
  Les relations $d\alpha = 0$ et $du_i = z_i \neq 0$ entraînent que $u = 0$.

- Montrons que $H^{k+1}(\psi)$ est injective :
  Si $\alpha \in (A \otimes \Lambda(V \oplus U \oplus W))^{k+1}$ alors $\alpha = \alpha_0 + \beta w$
  avec $\alpha_0 \in (A \otimes \Lambda V)^{k+1}, \quad w \in W \quad \beta \in (\Lambda V)^2 = V^2$.
  Nous en déduisons que :

$$d\alpha = 0 = d\alpha_0 + d\beta\, w \pm \beta\, dw$$

Nécessairement nous avons $\beta = 0$, ie $\alpha = \alpha_0$, ie il n'y a pas de nouveau cycle en degré k+1.

Supposons que $\varphi(\alpha) = d\beta$ et $d\alpha = 0$ avec $\alpha \in (A \otimes \Lambda V \oplus U \oplus W))^k$. D'après ce qui précéde, $\alpha = \alpha_0 \in (A \otimes \Lambda V)^k$ ce qui entraîne que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i = d(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i).$$

- Montrons que ψ s'étend en un homomorphisme θ de R-adg :

$$\theta : A \otimes \Lambda(V \oplus U \oplus W \oplus S) \longrightarrow (B, d_B)$$

tel que $\begin{cases} H^{\leq k+1}(\theta) \text{ est un isomorphisme} \\ H^{k+2}(\theta) \text{ est surjective.} \end{cases}$

Pour cela posons

$$H^{k+2}(B, d_B) = u_1 R \oplus \cdots \oplus u_r R \oplus v_1\,(R/t_1 R) \oplus \cdots \oplus v_s\,(R/t_s R)$$

avec $t_{i+1} | t_i$ et posons :

$$S_1 = z_1 R \oplus \cdots \oplus z_r R \quad \text{avec } \deg z_i = k+2$$

$$S_2 = x_1 R \oplus \cdots \oplus x_s R \quad \text{avec } \deg x_i = k+2$$

Nous avons $dz_i = 0 \quad \theta(z_i) = u_i \quad dx_i = 0$ et $\theta(x_i) = v_i$

Clairement $H^{\leq k+1}(\theta) = H^{\leq k+1}(\psi)$ et $H^{k+2}(\theta)$ est surjective. ∎

Définition 6. *Si $A = R$ alors $\varphi : (\Lambda V, d) \longrightarrow (B, d)$ est appelé un modèle commutatif de (B, d).*

Définition 7. *Une R-adgc $(\Lambda V, d)$ est dite <u>minimale</u> si*

a) $H^0(\Lambda V, d) = R$, $\quad H^1(\Lambda V, d) = 0$, $\quad H^2(\Lambda V, d)$ est libre

b) V est un R-module libre de type fini

c) Pour chaque degré k il existe un élément r_k non inversible de R, tel que

$$\forall v \in V^k \quad dv \in r_k V^{k+1} + \Lambda^{\geq 2} V.$$

La R-adgc $(\Lambda V, d)$ est dite <u>décomposable</u> si en outre $d_1 = 0$.
La R-adgc $(\Lambda V, d)$ est dite <u>nilpotente</u> s'il existe une filtration

$$0 = V(0) \subset V(1) \subset \cdots \subset V(i) \subset \cdots$$

de R-module gradué telle que $V = \bigcup_i V(i)$ et $d(V(i)) \subset \Lambda(V(i-1))$.

Nous avons, comme dans le cas des modèles libres, un lemme de relèvement, ainsi que l'a montré S. Halperin dans ([8], proposition 7.5).

Proposition 6 (Lemme de relèvement). *Etant donné un diagramme d'homomorphisme de R-adgc*

$$\begin{array}{ccc} & & (B, d_B) \\ & & \downarrow \psi \\ (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (A, d_A) \end{array}$$

où

a) $(\Lambda V, d)$ *est une adgc minimale*

b) ψ *est un quasi-isomorphisme surjectif*

alors il existe

$$f : (\Lambda V, d) \longrightarrow (B, d_B) \text{ telle que } \psi \circ f = \varphi.$$

Remarque 2. A la différence du cas rationnel, il n'existe pas de lemme de relèvement lorsque ψ n'est pas supposé surjectif. Ceci entraîne en particulier que nous n'avons pas unicité du modèle minimal. Par contre, il y a unicité dans le domaine d'Anick.

Définition 8. *Une R-adgc* (A, d_A) *est R-modéré si* (A, d_A) *est une R-adgc telle qu'il existe un entier n tel que*

$$\begin{array}{ll} (a) & H^{>n}(A, d_A) = 0 \\ (b) & \rho(R) > n/r \end{array}$$

lorsque $\rho(R)$ *désigne le plus petit entier non inversible dans R.*

Proposition 7. *Si* (A, d_A) *est une R-adgc telle que*

$$\begin{cases} H^i(A, d_A) = 0 & \text{pour } i > r \text{ et } r > 1 \\ dim H^i(A, d_A) < \infty \end{cases}$$

alors (A, d_A) *admet un modèle commutatif minimal au sens d'Anick*

$$(\Lambda W, d) \longrightarrow (A, d_A).$$

Si en outre (A, d_A) *est R-modéré, alors le modèle commutatif est unique à quasi-isomorphisme près.*

Preuve de la proposition 7 : La proposition 7.7 et le début de la remarque 7.8 de S. Halperin [8] nous donne exactement cette proposition. ■

3.2 c-catégorie d'une R-adgc minimale

Soit $(\Lambda V, d)$ une R-adgc minimale.

Notons par $\Lambda^{>m}V$ l'idéal des mots de longueur supérieure à m en V. Cet idéal est stable par la différentielle. Notons

$$q_m : (\Lambda V, d) \longrightarrow (\Lambda V/\Lambda^{>m}V, \bar{d})$$

la projection canonique associée.

D'après la proposition 5, q_m admet un modèle relatif commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda V, d) \arrow[r, "q_m"] \arrow[dr, "i"'] & (\Lambda V/\Lambda^{>m}V, \bar{d}) & \\
& (\Lambda V \otimes \Lambda W, D) \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\rho"] & (\Lambda W, \bar{D})
\end{tikzcd}$$

et, en particulier, l'inclusion i fait de $(\Lambda V \otimes \Lambda W, D) = (\Lambda(V \oplus W), D)$ un $(\Lambda V, d)$-module.

Définition 9. *Si q_m admet un modèle relatif i tel qu'il existe une rétraction r d'adgc (respectivement de ΛV-modules), ie tel que $r \circ i = id_{\Lambda V}$, alors $A_c cat(\Lambda V, d) \leq m$ (respectivement $M_c cat(\Lambda V, d) \leq m$).*

Remarque 3. On a évidemment l'inégalité:

$$M_c cat(\Lambda V, d) \leq A_c cat(\Lambda V, d).$$

Remarque 4. Le morphisme q_m admet une résolution semi-libre au sens de [5]

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda V, d) \arrow[r, "q_m"] \arrow[dr, "i'"'] & (\Lambda V/\Lambda^{>m}V, \bar{d}) \\
& P = \Lambda V \otimes E \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Du lemme de relèvement, il résulte que $M_c cat(\Lambda V) \leq m$ si et seulement si i' admet une rétraction de ΛV-modules.

Proposition 8. *Si $(T(X), d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda V, d)$ désigne un modèle décomposable de $(\Lambda V, d)$, alors pour tout corps de caractéristique $\neq 2$*

a) $A_c cat(\Lambda V, d) \geq Acat(TX, d)$

b) $M_c cat(\Lambda V, d) = l\text{-}Mcat(TX, d) = r\text{-}Mcat(TX, d)$

Preuve de la proposition 8:

a) La preuve de S. Halperin et J.M. Lemaire ([9], théorème 3.3) s'applique mot à mot au modèle commutatif $(\Lambda V, d)$, puisque sur un corps nous avons l'existence de supplémentaires.

b) Les égalités du b) résultent du fait que $(\Lambda V \otimes \Lambda W, D)$ est une résolution semi-libre de $(\Lambda V, d)$ à droite et à gauche.

3.3 c-catégorie d'un CW complexe R-modéré

Jusqu'à présent nous avons considéré un anneau principal R. Comme un anneau principal est intègre, l'image de l'application canonique

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbf{Z} & \rightarrow & R \\ & n & \mapsto & n.1 \end{array}$$

est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ ou est isomorphe au corps premier $\mathbf{F}_p$. Posons $\rho(R)$ le plus petit nombre premier $p \in \mathbf{Z}$ tel que $\varphi(p)$ soit non inversible dans R.

Les anneaux R que nous avons en vue sont plus particulièrement

$$\begin{cases} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right] \\ \mathbf{Z}_{(p)} \text{ l'anneau des entiers localisés à } p. \\ \mathbf{F}_p \text{ le corps premier de caractéristique } p. \end{cases}$$

Remarquons que $\mathbf{Z}_{(p)} \subset \mathbf{Q}$ et que nous avons la projection canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_{(p)} & \longrightarrow & \mathbf{F}_p \\ \frac{a}{b}, p \not| b & \longrightarrow & ab^{-1} \end{array}$$

Puisque la théorie de D. Anick repose sur les R-algèbres de Lie graduées, il est commode de supposer dès le départ que $1/2 \in R$, afin de garder la condition

$$[a, b] = -(-1)^{deg\, a. deg\, b}[b, a].$$

Définition 10. *Un CW complexe X de type fini r-connexe ($r > 1$) tel que :*

$$dim X \leq r\rho(R)$$

est dit R-modéré.

Le résultat fondamental de D. Anick ([1], théorème 4.8) énonce que si R est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ alors pour tout CW complexe R-modéré, il existe une algèbre de Lie différentielle graduée (ALDG en abrégé) (L, d) et un quasi-isomorphisme $\Phi : UL \xrightarrow{\Phi} C_*(\Omega X; R)$ d'adg tels que chaque L_i est R-libre et finiment engendré.

Ce quasi-isomorphisme préserve les diagonales à homotopie près. De plus, la classe d'homotopie dans la catégorie des adg de ce quasi-isomorphisme est unique. Il définit donc un unique isomorphisme d'algèbres de Hopf :

$$H(UL) \longrightarrow H_*(\Omega X; R)$$

lorsque $H_*(\Omega X; R)$ est R-libre.

Comme l'a remarqué S. Halperin ([8], p.274), le résultat de D. Anick s'étend à tous les CW complexes R-modérés par extension d'anneaux.

Rappelons que pour toute ALDG, (L, d), nous avons un morphisme :

$$C_*(L) = (\Gamma sL, d) \subset T(s\bar{U}L) = BUL$$

entre l'algèbre des chaînes sur (L, d), $C_*(L)$ et la bar construction sur UL. Ici, $\Gamma(V)$ désigne l'algèbre des puissances divisées engendrée par le module V.

On note $C^*(L) = (\Gamma(sL), d)^\vee$ l'algèbre des cochaînes de l'ALDG (L, d).

D'après [8], si L est R-libre alors l'inclusion des coalgèbres différentielles graduées

$$(i_*) : C_*(L) \subset BUL$$

est un quasi-isomorphisme. De plus si L est un R-module de type fini alors

$$(C^*(L))^\vee \cong C_*(L)$$

Notons ΩC la cobar construction de la coalgèbre graduée différentielle C. La suite de quasi-isomorphismes de coalgèbres

$$\begin{array}{ccccc} C_*(L) & \xrightarrow{i_*} & B(UL) & \xrightarrow{B\Phi} & BC_*(\Omega X; R) \\ & & & & \uparrow \simeq \\ & & C_*(X; R) & \longrightarrow & B\Omega C_*(X; R) \end{array}$$

se dualise en la suite de quasi-isomorphismes

$$(2) \qquad C^*(L) \longleftarrow B^\vee C_*(\Omega X; R) \xrightarrow{\Phi} C^*(X; R)$$

Autrement dit, l'adg $C^*(X; R)$ est équivalente à une adgc.

Notons $(\Lambda W, d) \longrightarrow C^*(L)$ un modèle minimal de $C^*(L)$.

Définition 11. *Soit X un espace R-modéré. Un modèle minimal de*

$$(\Lambda W, d) \longrightarrow C^*(L)$$

est appelé un R-modèle minimal commutatif de X.

Proposition 9. *Soit X un espace R-modéré. Si $H_*(\Omega X)$ est R-libre alors X admet un modèle minimal décomposable*

$$(\Lambda X, d) \longrightarrow C^*(L)$$

unique à isomorphisme près.

Preuve de la proposition 9: Cette proposition vient du théorème 7.8 de S. Halperin [8]. ∎

L'intérêt de considérer ce modèle commutatif réside dans le résultat suivant :

Notons E l'algèbre de Lie du modèle minimal $(\Lambda W, d)$, ie

$$\begin{cases} E \cong sW^\vee = (s^{-1}W)^\vee \\ \partial = (s^{-1}d_1)^\vee \\ d_2 \text{ définit le crochet de Lie par dualité} \end{cases}$$

alors d'après ([8], théorème 8.3) :

Théorème 2. *Si (L, d) est une DGL R-libre et de type fini, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $H(UL)$ est sans torsion

(ii) $C^*(L)$ admet un modèle minimal décomposable.

Lorsque ces deux conditions sont vérifiées alors UE est isomorphe à $H(UL)$ en tant qu'algèbre de Hopf graduée.

Corollaire 2. *Soit X un CW complexe R-modéré, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X admet un modèle minimal commutatif décomposable $(\Lambda W, d)$

(ii) X admet un modèle minimal libre décomposable $(T(V), d)$

(iii) $H_*(\Omega X; R)$ est R-libre.

Si l'une de ces trois conditions est vérifiée, alors :

$$H_*(\Omega X; R) \cong UE.$$

Preuve du corollaire 2:

$(i) \Longleftrightarrow (ii)$ d'après le théorème précédent et l'isomorphisme ([8], théorème 8.1) :

$$H_*(\Omega X; R) \cong HUL.$$

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$ d'après ([5], corollaire 2 et théorème 5) ∎

Remarque 5. Le corollaire 2 généralise aux CW complexes R-modérés tels que $H_*(\Omega X; R)$ est R-libre, le résultat fondamental de l'homotopie rationnelle :

$$E \cong \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbf{Q} \quad \text{et} \quad H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) = UE$$

3.4 c-catégorie d'un espace R-modéré

Définition 12. *Soit X un espace admettant un modèle commutatif $(\Lambda W, d)$ au sens d'Anick, alors*

$$M_c cat(X, R) = M_c cat(\Lambda W, d)$$

$$A_c cat(X, R) = A_c cat(\Lambda W, d)$$

Il résulte de la proposition 8 que si R est un corps de caractéristique $p > dimX/r$ alors

$$M_c cat(X; R) = Mcat(X; R)$$

$$A_c cat(X; R) \geq Acat(X; R).$$

Remarque 6.

(i) Si R est un corps de caractéristique $p > n/r$ alors

$$Mcat(X; R) = M_c cat(\Lambda W, d)$$

et ceci pour tout modèle $(\Lambda W, d)$. En effet, lorsque

$$T(V) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda W, d)$$

alors

$$M_c cat(\Lambda W, d) = Mcat(T(V), d).$$

D'autre part, si X est modéré

$$\begin{tikzcd} \Lambda W \arrow[r, "\simeq"] & C^*L & B^\vee(C_*(\Omega X); R) \arrow[l] \arrow[r] & C^*(X; R) \\ & T(V) \arrow[ul] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

Nous en déduisons que si $T(V)$ est un modèle de X alors

$$M_c cat(\Lambda W, d) = Mcat(X; R)$$

ceci quelque soit le $(\Lambda W, d)$-modèle.

Remarquons alors que $McatX$ peut-être calculé à partir de n'importe quel modèle d'Anick sur un corps et qu'une conséquence du théorème 1 de l'introduction est que $AcatX$ peut aussi être calculé à partir de n'importe quel modèle d'Anick sur un corps.

(ii) Nous pouvons noter que, si X est R-modéré, alors :

$$A_c cat(X;R) \geq Acat(X;\mathbf{Q}) \text{ et } M_c cat(X;R) \geq Mcat(X;\mathbf{Q}).$$

En effet, considérons le diagramme suivant où $(\Lambda V, d)$ est un modèle minimal décomposable de X :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) & \longrightarrow & (\Lambda V/\Lambda^{>m}V, \bar{d}) \\ & \searrow_{i} & \uparrow \\ & & (\Lambda V \otimes \Lambda Y, D) \end{array}$$

et tensorisons par $\mathbf{Q}$. Nous obtenons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) \underset{R}{\otimes} \mathbf{Q} & \longrightarrow & (\Lambda V/\Lambda^{>m}V \underset{R}{\otimes} \mathbf{Q}, \bar{d}) \\ & \searrow_{i \otimes id_{\mathbf{Q}}} & \uparrow \\ & & (\Lambda V \otimes \Lambda Y \underset{R}{\otimes} \mathbf{Q}, D) \end{array}$$

Ceci prouve que si r est une rétraction de i, alors $r \underset{R}{\otimes} id_{\mathbf{Q}}$ est une rétraction de $i \otimes id_{\mathbf{Q}}$. Donc

$$A_c cat(X;R) \geq A_c cat(X;\mathbf{Q}).$$

La même démarche s'applique pour $M_c cat$.

Remarque 7. Le modèle d'Adams-Hilton de $X = S^n \cup_p e^{n+1}$ est

$$T(x_{n-1}, y_n), \quad dy_n = px_{n-1}.$$

Nous avons alors

$$C^*(\mathbf{L}(x_{n-1}, y_n)) = (\Lambda V, d)$$

avec $V = a_n, b_{n+1}, u_{2n-1}, v_{2n}, t_{3n-1}, t_{3n}, \ldots$ avec

$$\begin{cases} da = pb & db = 0 \\ du = pv - a^2 & dv = ab \\ dt_{3n-1} = pt_{3n} - av & dt_{3n} = bv \\ \ldots & \end{cases}$$

Lorsque $R = \mathbf{Z}_{(q)}$, avec $p \not| q$ alors $T(x_{n-1}, y_n) \simeq R$ et donc nous avons $A_c catX = 0$. Tandis que si $R = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $pv = a^2 \neq 0$ dans $H(\Lambda V, d)$ ce qui implique que $cat_c(X, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \neq 0$

Remarque 8. Considérons un anneau $R \subset \mathbf{Q}$ et X un CW complexe R-modéré tel que $H(X)$ est R-libre. Supposons en outre que $\mathrm{Acat}(X; \mathbf{Q}) = 1$. Alors, pour tout sous-anneau R de $\mathbf{Q}$

$$A_c cat(X; R) = A_c cat(X; \mathbf{Q}) \text{ et } M_c cat(X; R) = M_c cat(X; \mathbf{Q}).$$

En effet, si $Acat(X, \mathbf{Q}) = 1$ alors $X \underset{\mathbf{Q}}{\simeq}$ wedge de sphères, donc si $(T(V), d)$ désigne le modèle d'Adams-Hilton de X

$$(T(V), d) \otimes R \longrightarrow ((T(V), d) \otimes \mathbf{Q} = T(V \otimes \mathbf{Q})$$

avec $V = s\tilde{H}$. Donc $d \otimes R = 0$ et $\mathcal{C}(\mathbf{L}(V \otimes R)) = (\Lambda V, d_2)$. Par suite $A_c cat(\Lambda V, d) = 1$. La même démarche s'applique ici aussi pour $M_c cat$.

4 Modèle de Ganea sur un anneau R

4.1 Filtration par la longueur des mots

Considérons $(\Lambda X, d)$ un modèle décomposable dont l'existence a été montrée à la section 3.3, et écrivons: $d = d_2 + d_3 + \cdots$, avec $d_i X \subset \Lambda^i X$.
Posons $X^r = X^{1, r-1}$ et définissons ainsi une bigraduation sur ΛX telle que:

$$(\Lambda X)^{k,l} = (\Lambda^k X)^{k+l} \quad \text{et } d_i((\Lambda X)^{k,*}) \subset (\Lambda X)^{k+i,*}$$

Ceci permet de définir une bigraduation sur $H(\Lambda X, d_2)$:

$$H(\Lambda X, d_2) = \underset{p,q}{\oplus} H^{p,q}(\Lambda X, d_2) \quad \text{où } H^{p,q}(\Lambda X, d_2) = (ker\, d_2)^{p,q}/(Im\, d_2)^{p,q}$$

La première graduation est la longueur des mots, la seconde est le degré complémentaire et la somme des deux est le vrai degré.

De même, nous pouvons considérer $\Lambda X/\Lambda^{>m} X$ comme une adgc bigraduée en posant : $(\Lambda X/\Lambda^{>m} X)^{k,l} = q_m((\Lambda X/\Lambda^{>m} X)^{k,l})$ où q_m est la projection canonique

$$(\Lambda X, d) \longrightarrow (\Lambda X/\Lambda^{>m} X, \bar{d}).$$

Considérons maintenant un modèle de $(\Lambda X/\Lambda^{>m} X, \bar{d})$:

$$(\Lambda X, d) \xrightarrow{j} (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \longrightarrow (\Lambda Y, \bar{D}).$$

et supposons l'existence d'une filtration sur Y: $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_\alpha \subset \cdots$ et d'une bigraduation $Y = \oplus Y^{p,q}$ vérifiant :

$$(D - \bar{D})(Y_\alpha) \subset \Lambda^+ X \otimes \Lambda Y_\beta, \quad \text{avec } \beta < \alpha,$$

$Y_\alpha^n = \underset{i,j}{\oplus} Y_\alpha^{i,j} \quad Y_\alpha^{i,*} = \underset{j}{\oplus} Y_\alpha^{i,j}$ et $Y^{(i,\alpha)} = Y_\alpha^{i,*}$.

Nous obtenons alors une bigraduation sur $\Lambda X \otimes \Lambda Y$ telle que :

$$\Lambda^i X \otimes \Lambda^j Y^{r,*} \subset (\Lambda(X \oplus Y))^{i+jr,*}.$$

Lorsque la différentielle D augmente strictement le premier degré

$$D(\Lambda(X \oplus Y))^{r,*} \subset (\Lambda(X \oplus Y))^{>r,*}.$$

Nous écrivons $D = D_2 + D_3 + \cdots$ avec $D_i((\Lambda(X \oplus Y))^{r,*}) \subset (\Lambda(X \oplus Y))^{r+i,*}$, D_2 est une différentielle et $H(\Lambda(X \oplus Y), D_2)$ est bigraduée :

$$H(\Lambda(X \oplus Y), D_2) = \underset{k,l}{\oplus} H^{k,l}(\Lambda(X \oplus Y), D_2).$$

4.2 Théorème d'existence du modèle de Ganea

Théorème 3. *S'il existe une application R-linéaire*

$$r : H(\Lambda X/\Lambda^{>m} X, \bar{d}) \longrightarrow H(\Lambda X, d)$$

telle que $r \circ H(q_m) = id_{H(\Lambda X, d)}$
alors il existe un diagramme commutatif dans la catégorie des R-adgc :

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda X, d) & \overset{j}{\hookrightarrow} & (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) & \overset{p}{\rightarrow} & (\Lambda Y, \bar{D}) \\ & \underset{q_m}{\searrow} & \downarrow \varphi & & \\ & & (\Lambda X/\Lambda^{>m} X, \bar{d}) & & \end{array}$$

vérifiant :

(1) $Y = Y^{m,*} \oplus Y^{m+1,*} \oplus \cdots$ *avec* $Y^{m+r} = \underset{j \geq 0}{\oplus} Y_j^{m+r} \oplus Y_\infty^{m+r}$ *pour* $r \geq 0$

(2) $(D - \bar{D})(Y^{(r,\alpha)}) \subset (\Lambda^+ X \otimes Y^{<(r,\alpha)})^{>r+1,*}$ *pour* $\alpha \in \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \infty$

(3) $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots$ *où* $\varphi_i(((\Lambda(X \oplus Y))^{r,*}) \subset (\Lambda X/\Lambda^{>m} X)^{r+i,*}$ *et* φ_0 *est un quasi-isomorphisme*

(4) $\bar{D} = \bar{D}_2$

(5) $(\Lambda X \otimes \Lambda Y)^{>m,*} \cap kerD \subset D((\Lambda X \otimes Y)^{>m-1,*})$.

Définition 13. *Un tel modèle est appelé modèle de Ganea de* q_m.

Corollaire 3. *L'homomorphisme φ est un quasi-isomorphisme.*

Preuve du corollaire 3: En filtrant par le premier degré, nous obtenons une suite spectrale de premier quadrant telle que $E_2(\varphi) = \varphi_0$. Comme φ_0 est un quasi-isomorphisme, φ aussi. ■

Preuve du théorème 3: Démontrons dans un premier temps l'existence d'un tel modèle. Nous le montrons tout d'abord dans le cas où $d = d_2$, puis dans le cas général.

Première étape: on suppose que $d = d_2$.

Dans ce cas, le théorème 3 devient:

Théorème 3'. *S'il existe une application R-linéaire*

$$r : H(\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}) \longrightarrow H(\Lambda X, d)$$

telle que $r \circ H(q_m) = id_{H(\Lambda X,d)}$
alors il existe un diagramme commutatif dans la catégorie des R-adgc:

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, d_2) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "q_m"'] & (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D_2) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi_0"] & (\Lambda Y, \bar{D}_2) \\
& (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2) &
\end{tikzcd}$$

vérifiant:

(*1*) $Y = Y^{m,*} \oplus Y^{m+1,*} \oplus \cdots$ avec $Y^{m+r} = \bigoplus_{j\geq 0} Y_j^{m+r} \oplus Y_\infty^{m+r}$ pour $r \geq 0$

(*2*) $(D_2 - \bar{D}_2)(Y^{(r,\alpha)}) \subset (\Lambda^+X \otimes Y^{<(r,\alpha)})^{r+1,*}$

(*3*) $\varphi_0(((\Lambda(X \oplus Y))^{r,*}) \subset (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2)^{r,*}$ *et φ_0 est un quasi-isomorphisme*

(*4*) $(\Lambda X \otimes \Lambda Y)^{>m,*} \cap ker D_2 \subset D_2((\Lambda X \otimes Y)^{>m-1,*})$.

L'idée est de mimer la construction du modèle relatif d'un homomorphisme d'adgc, avec le premier degré r dans $X^{r,*}$ jouant le rôle du degré total. Ici la construction se simplifie puisque $H(q_m)$ admet une rétraction linéaire et puisque $(\Lambda X/\Lambda^{>m}X)^{r,*} = 0$ pour $r > m$.

Considérons les bigraduations sur ΛX et sur $\Lambda X/\Lambda^{>m}X$:

$$\begin{aligned}
(\Lambda^r X)^s &= (\Lambda X)^{r,s-r} \\
(\Lambda X/\Lambda^{>m}X)^{r,*} &= \begin{cases} (\Lambda X)^{r,*} & \text{pour } r \leq m \\ 0 & \text{pour } r > m \end{cases}
\end{aligned}$$

a) Posons $Y^{<m} = \{0\}, \quad D_2 = d_2 \quad \varphi = q_m$.

Nous avons $H^{<m}(\varphi) = H^{<m}(q_m)$ qui est un isomorphisme. L'existence de l'application r implique que $H^m(\varphi) = H^m(q_m)$ est injective.

b) Rendons $H(\varphi)$ surjective.

$$H^m(\Lambda X) \overset{H^m(q_m)}{\longrightarrow} H^m(\Lambda X/\Lambda^{>m}X) \xrightarrow{r} H^m(\Lambda X)$$

$\ker r$ est un sous-module de $H^m(\Lambda X/\Lambda^{>m}X) \cong \Lambda^m X$.

Notons $\Phi_1 = [\Phi_1], \dots \Phi_k = [\Phi_k]$ une base de $\ker r$.

Posons alors

$$Y_0^m = \bigoplus_{i=1}^{k} z_i R \qquad D_2(z_i) = 0 \qquad \varphi(z_i) = \Phi_i \qquad \varphi|_{\Lambda X} = q_m.$$

Clairement

$$H(\varphi) : H(\Lambda X \otimes \Lambda Y_0^m, D_2) \longrightarrow H(\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2\,)$$

est surjective et

$$H^{\leq m}(\varphi) : H^{\leq m}(\Lambda X \otimes \Lambda Y_0^m, D_2) \longrightarrow H^{\leq m}(\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2\,)$$

est un isomorphisme.

c) Considérons

$$H^{m+1}(\varphi) : H^{m+1}(\Lambda X \otimes \Lambda Y_0^m, D_2) \longrightarrow H^{m+1}(\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2\,) = \{0\}$$

Soit $\alpha = [a] \in H^{m+1}(\Lambda X \otimes \Lambda Y_0^m, D_2)$.

Nous avons $a \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y)^{m+1} = \Lambda^{m+1}X \oplus (X \otimes \Lambda Y_0^m) \oplus (\Lambda^2 Y_0^m)$ et donc nous pouvons écrire

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes z_i + \sum_{s,t=1}^{k} z_s \otimes z_t$$

avec $a_0 \in \Lambda^{m+1}X \quad$ et $x_i \in X$.

$D(a) = 0 \iff d_2 x_i = da_0 = 0$. Or $r \circ H(q_m)([a_0]) = 0 = [a_0]$ donc $a_0 = db$ avec $b \in \Lambda^m X$ et $[a] = \left[\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes z_i + \sum_{s,t=1}^{k} z_s \otimes z_t \right]$.

Posons

$$Y_1^m = (\bigoplus_{i=1}^{k} y_{ij} R) \oplus (\bigoplus_{s,t=1}^{k} y_{s,t} R) \quad D_2(y_{ij}) = \bar{x}_j \otimes z_i \quad D_2(y_{s,t}) = z_s \otimes z_t$$

lorsque $\begin{cases} (\bar{x}_j)_{i=1,\dots,l} \text{ désigne une base de } X \cap \ker d = K_0 \\ (z_i)_{i=1,\dots,k} \text{ désigne une base de } Y_0^m \end{cases}$

et $\varphi|_{Y_1^m} = 0$. L'homomorphisme φ s'étend alors en

$$\varphi : (\Lambda X \otimes \Lambda(Y_0^m \oplus Y_1^m), D_2) \longrightarrow (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2)$$

tel que $H(\varphi)$ soit surjectif et $H^{<m}(\varphi)$ soit un isomorphisme.

c$_1$) Vérifions que $H^m(\varphi)$ est toujours injectif.

Soit $a \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_0^m \otimes \Lambda Y_1^m)^m = \Lambda^m X \oplus Y_0^m \oplus Y_1^m$.

Ecrivons $a = a_0 + z + y$ avec $a_0 \in \Lambda^m X$ $z \in Y_0^m$ $y \in Y_1^m$.

Or $Da = 0 \Rightarrow da_0 = 0$ et $Dy = 0$. Nous en déduisons que $y = 0$, et que $a = a_0 + z$.

De plus $a = db$, $[a] = [z]$ et $\varphi([a]) = \varphi([z]) = 0 \Rightarrow z = 0$.

c$_2$) Soit $a \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_0^m \otimes \Lambda Y_1^m)^{m+1} = \Lambda^{m+1} X \oplus X \otimes Y_0^m \oplus X \otimes Y_1^m$.

Ecrivons

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes z_i + \sum_{r,s} x'_{r,s} \otimes y_{r,s}$$

$$Da = 0 \iff \begin{cases} da_0 = 0 \\ dx'_{r,s} = 0 \\ dx_i = \pm \sum x'_{r,i}\bar{x}_i \end{cases}$$

Notons $\pi : X \otimes (Y_0^{m+1} \oplus Y_1^{m+1}) \longrightarrow X \otimes Y_0^{m+1}$.

Alors $\ker \pi \cap \ker D$ est un sous-module libre de $X \otimes (Y_0^{m+1} \oplus Y_1^{m+1}) \subset X^+ \otimes Y^+$.

Considérons une base $\Phi_1, \dots \Phi_t$ de $\ker \pi \cap \ker D$ et posons alors

$$Y_2^m = \oplus y_i R \qquad Dy_i = \Phi_i \qquad \varphi(y_i) = 0.$$

c$_3$) Nous construisons ainsi par induction

$$\varphi : (\Lambda X \otimes \Lambda Y^m, D_2) \longrightarrow (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2)$$

tel que

1) $Y^m = Y_0^m \oplus Y_1^m \oplus \cdots$
2) $D_2 Y_0^m = 0$
   $D_2 Y_i^m \in X \otimes (Y_0^m \oplus Y_1^m \oplus \cdots Y_{i-1}^m)$
   $D_2 Y_i^m$ posséde une composante non nulle dans Y_{i-1}^m.

Remarquons maintenant que puisque X est de degré total ≥ 2 alors Y_0^m est de degré total $\geq 2m$ et plus généralement Y_i^m est de degré total $\geq 2m + i$.

Un cocycle de degré total N dans $\Lambda X \otimes \Lambda Y^m$ est un élément de

$$\Lambda X \otimes \bigoplus_{j=1}^{N-2m-1} Y_j^m$$

et par construction c'est le cobord d'un élément de

$$\Lambda X \otimes \bigoplus_{j=1}^{N-2m} Y_j^m.$$

Il en résulte que

$$\varphi : (\Lambda X \otimes \Lambda Y^m, D) \longrightarrow (\Lambda X / \Lambda^{>m} X, \bar{d}_2)$$

vérifie $\begin{cases} H(\varphi) \text{ surjective} \\ H^{\leq m+1}(\varphi) \text{ injective.} \end{cases}$

d) Notons Z un sous-module de $(\Lambda X \otimes \Lambda Y^m)^{m+2} \cap (\ker D_2)$ qui se projette sur $\ker H^{m+1}(\varphi)$. Nous pouvons choisir une base $z_1, \ldots, z_n$ de Z telle que

$$x_1 = r_1 z_1, \ldots, x_k = r_k z_k,$$

soit une base de $\mathrm{Im} D_2 \cap Z$, avec $r_i \in R$, $k \leq n$ et $r_k | r_{k-1} | \ldots | r_1$.

Introduisons

$$Y_0^{m+1} = u_1 R \oplus \cdots \oplus u_k R.$$

tel que $du_i = z_i$ et $\varphi(u_i) = 0$.

Nous avons alors

$$x_i = dy_i = r_i z_i = r_i du_i = d(r_i u_i).$$

Par suite $d(y_i - r_i u_i) = 0$, pour $i = 1, \ldots, k$.

Introduisons

$$Y_\infty^m = w_1 R \oplus \cdots \oplus w_k R.$$

Posons $dw_i = y_i - r_i u_i$.

Alors φ s'étend de manière unique en un homomorphisme de R-adgc

$$\varphi_1 : (\Lambda X \otimes \Lambda(Y_*^m \oplus Y_\infty^m \oplus Y_0^{m+1}), D_2) \longrightarrow (\Lambda X / \Lambda^{>m} X, \bar{d}_2)$$

tel que $H^l(\varphi_1) = H^l(\varphi) \quad$ pour $l \leq m$.

– Pour $l < m$, aucun nouveau élément n'a été apporté, donc nous avons $H^l(\varphi_1) = H^l(\varphi)$.
– Montrons que $H^m(\varphi_1) = H^m(\varphi)$:
Si $\alpha \in (\Lambda X \otimes \Lambda(Y_*^m \oplus Y_\infty^m \oplus Y_0^{m+1}))^m$ alors $\alpha = \alpha_0 + w$
avec $\alpha_0 \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_*^m)^m$ et $w \in Y_\infty^m$.
Les relations $d\alpha = 0$ et $dw_i - y_i \in Y_\infty^m$ entraînent que $w = 0$.

Remarquons que l'existence de l'application linéaire

$$r : H(\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}) \longrightarrow H(\Lambda X, d)$$

telle que $r \circ H(q_m) = id_{H(\Lambda X,d)}$, nous donne $H^{>m}(\Lambda X, d_2) = 0$.
Notons alors

$$\pi : (\Lambda X \otimes \Lambda^+(Y_*^m \oplus Y_\infty^m \oplus Y_0^{m+1})) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda^+(Y_0^{m+1}))$$

Alors $\ker \pi \cap \ker D_2$ est un sous-module libre de

$$(\Lambda X \otimes \Lambda^+(Y_*^m \oplus Y_\infty^m \oplus Y_0^{m+1})).$$

Considérons une base $\Phi_1, \ldots, \Phi_t$ de $\ker \pi \cap \ker D_2$ et posons

$$Y_1^{m+1} = \oplus a_i R \qquad Da_i = \Phi_i \qquad \varphi_2(a_i) = 0$$

Alors φ_1 s'étend en un unique homomorphisme de R-adgc

$$\varphi_2 : (\Lambda X \otimes \Lambda(Y_*^m \oplus Y_\infty^m \oplus Y_{\leq 1}^{m+1}), d) \longrightarrow (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2)$$

tel que $H^l(\varphi_2) = H^l(\varphi_1)$ pour $l \leq m$.
Nous continuons ainsi par induction et nous construisons

$$\varphi : (\Lambda X \otimes \Lambda(Y_*^m \oplus Y_\infty^m \oplus Y_*^{m+1}), d) \longrightarrow (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2)$$

tel que

1) $Y^m = Y_{\geq 0}^m \qquad Y^{m+1} = Y_{\geq 0}^{m+1}$
2) $D_2 Y_i^{m+1} \in \Lambda X \otimes \Lambda^+(Y_*^m \oplus Y_\infty^m \oplus Y_0^{m+1} \cdots Y_{i-1}^{m+1})$
$D_2 Y_i^{m+1}$ posséde une composante non nulle dans Y_{i-1}^{m+1}
3) $H^{\leq m+1}(\varphi)$ et un isomorphisme.

Le même argument sur le degré total nous donne alors que

$$\varphi : (\Lambda X \otimes \Lambda(Y_*^m \oplus Y_\infty^m \oplus Y_*^{m+1}), d) \longrightarrow (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2)$$

vérifie $\begin{cases} H(\varphi) \text{ est surjective} \\ H^{\leq m+2}(\varphi) \text{ est injective.} \end{cases}$

La construction se poursuit alors par induction en suivant la même démarche.

La construction du modèle étant effectuée, vérifions les différentes assertions du théorème 3:
Les points (1) et (3) se trouvent prouvés par construction.
Le point (4) est immédiat puisque:

$$H^{r,*}(\Lambda X \otimes \Lambda Y, D_2) \cong H^{r,*}(\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}_2) = 0.$$

Prouvons le point (2):
Nous pouvons remarquer que

$$\begin{cases} D_2 Y^{(r,i)} \subset (\Lambda X \otimes \Lambda Y^{<(r,i)})^{r+1,*} \\ D_2 Y^{(r,\infty)} \subset (\Lambda X \otimes \Lambda Y_*^{<r})^{r+1,*} \oplus Y_0^{r+1} \end{cases}$$

donc

$$(D_2 - \bar{D}_2) Y^{(r,i)} \subset (\Lambda^+ X \otimes \Lambda Y^{<(r,i)})^{r+1,*}$$

et

$$\begin{cases} \bar{D}_2 Y^{(r,i)} \subset \Lambda^{\geq 2} Y^{<(r,i)} & \text{pour } i \in \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{D}_2 Y^{(r,\infty)} \subset \Lambda^{\geq 2} Y^{<r} \oplus Y_0^{r+1} & \end{cases}$$

Lemme 1. *Nous avons :*

$$H^+(\Lambda Y, \bar{D}_2) = H^m(\Lambda Y, \bar{D}_2).$$

Preuve du lemme 1: En effet, considérons la construction acyclique bigraduée:

$$(\Lambda X \otimes \Gamma s X, d_2) \longrightarrow R$$

avec $s(X^{r,k}) = (sX)^{r-1,k}$, nous avons alors des quasi-isomorphismes:

$$(\Lambda Y, \bar{D}_2) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D_2) \underset{\Lambda X}{\otimes} (\Lambda X \otimes \Gamma s X, d_2) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda X/\Lambda^{>m}X \otimes \Gamma s X, d_2')$$

De plus, on a une courte suite exacte de modules gradués:

$$0 \to (\Lambda^{>m}X \otimes \Gamma s X, d_2) \to (\Lambda X \otimes \Gamma s X, d_2) \to (\Lambda X/\Lambda^{>m}X \otimes \Gamma s X, d_2') \to 0$$

dont on déduit que

$$H^{+,*}(\Lambda Y, \bar{D}_2) = H^{m,*}(\Lambda Y, \bar{D}_2)$$

■

Remarquons que nous pouvons choisir un modèle particulier :

Lemme 2. *Nous pouvons choisir Y et D_2 vérifiant :*

$$Y = Y^m \oplus Y^{2m-1} \oplus Y^{3m-2} \oplus \cdots$$

avec $\bar{D}_2(Y^m) = 0$ et $\bar{D}_2(Y^{>m}) \subset \Lambda^2 Y$.

Preuve du lemme 2 :
Pour $y \in Y_i^m$, $i \geq 1$, nous avons $D_2 y \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_{<i}^m)^{m+1}$.
Si $m+1 < 2m$, alors $\bar{D}_2 y = 0$. Ceci entraîne que

$$y = \bar{D}_2(\Psi) \quad \text{avec } \Psi \in \bigoplus_{j=0}^{i-1} Y_j^m.$$

Comme $D_2 Y_j^m \subset \Lambda X \otimes \Lambda Y_{<j}^m$, $j \geq 1$, nous avons nécessairement $\Psi \in Y_0^m$ et donc $y = 0$, ce qui permet d'affirmer que $Y^m = Y_0^m$.

Si $y' \in Y_\infty^m$, alors $D_2 y' \in \Lambda^{m+1} X \oplus X \otimes Y_0^m \oplus Y_0^{m+1}$ et donc $\bar{D}_2 y' \in Y_0^{m+1}$.

Si $z \in Y_0^{m+1}$, alors $D_2 z \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y^m)^{m+2} = \Lambda^{m+2} X \oplus \Lambda^2 X \otimes Y^m$, si $m+2 < 2m$.
Le lemme 1 nous donne alors l'existence de $\varphi \in Y_0^m \oplus Y_\infty^m$ tel que $z = \bar{D}_2 \varphi$.
Nous en déduisons que $z = \bar{D}_2 \varphi'$ avec $\varphi' \in Y_\infty^m$.

Nous pouvons alors affirmer que

$$\bar{D}_2 : Y_\infty^m \longrightarrow Y_0^{m+1}$$

est surjective.

Donc il existe $w_i' \in Y_\infty^m$ tel que $\bar{D}_2 w_i' = u_i$ où $w_i' \in Y_\infty^m$, u_i est une base de Y_0^m et w_i est une base de Y_∞^m vérifiant

$$D_2 w_i = r_i u_i \in (\Lambda X \otimes Y_0^m)^{m+1}.$$

Ceci entraîne que

$$D_2(w_i - r_i w_i') \in (\Lambda X \otimes Y_0^m)^{m+1}.$$

En posant $v_i = w_i - r_i w_i'$, nous avons $\bar{D}_2 v_i = 0$ et donc $Y_0^{m+1} = 0$.

Nous pouvons itérer le procédé tant que $m + i < 2m$, ie $i \leq m-1$.

Nous reprenons ensuite le même raisonnement pour $y \in Y_i^{2m-1}$, $y' \in Y_\infty^{2m-1}$ et $z \in Y_0^{2m}$ et ainsi de suite, en remarquant qu'à chaque étape nous pouvons prendre la différentielle $\bar{D}_2$ purement quadratique pour la longueur des mots en Y, ie $\bar{D}_2(Y^{>m}) \subset \Lambda^2 Y$.

Finalement, nous avons :

$$Y = Y^m \oplus Y^{2m-1} \oplus Y^{3m-2} \oplus \cdots$$

avec

$$D_2 Y^{m+k} \subset (\Lambda X \otimes \Lambda Y^{<m+k})^{m+k+1}$$

et

$$(\Lambda X \otimes \Lambda Y)^{>m} \cap \ker D_2 \subset D_2(\Lambda X \otimes \Lambda Y)^{>m-1}.$$

De plus, nous trouvons que

$$H(\Lambda Y, \bar{D}_2) = R \oplus Y^m.$$

■

Poursuivons la démonstration du point (2) du théorème 3 en écrivant : $D_2 = \bar{D}_2 + D_{2,0} + D_{2,1} + \ldots$ avec $D_{2,k}(Y^{(r,i)}) \subset \Lambda^+ X \otimes \Lambda^k(Y^{<(r,i)})$ et montrons par induction sur (r,i) que $D_{2,k} = 0 \quad$ pour $k \geq 2$.
On suppose donc que $D_{2,k} = 0$ sur $Y^{<(r,i)}$ et on considére $x \in Y^{<(r,i)}$.
Alors pour un certain $l \leq \frac{|x|+1}{m}$, la relation $D_2 D_2 = 0$ implique que : $\bar{D}_2 D_{2,l}(x) = 0$ (pour des raisons de degré et car $\bar{D}_2(Y^{(r,i)}) \subset \Lambda^2 Y^{<(r,i)}$).
Si on écrit $D_{2,l}(x) = \sum_j \lambda_j \otimes \Phi_j$, avec λ_j une base de $\Lambda^+ X$ et $\Phi_j \in \Lambda^l Y^{<(r,i)}$, alors : $\sum_j \lambda_j \otimes \bar{D}_2 \Phi_j = 0$ et donc

$$[\Phi_j] \in H^{\geq lm,*}(\Lambda Y, \bar{D}_2) = 0 \quad \text{pour } l \geq 2.$$

On écrit

$$\Phi_j = \bar{D}_2 \Psi_j \ \text{ alors } \Psi_j \in \Lambda^+ Y \ \text{ et } D_{2,l}(x) = \sum_j \lambda_j \otimes \bar{D}_2 \Psi_j = \bar{D}_2(\sum_j (\lambda_j \otimes \Psi_j)).$$

Si $y = x - \sum_j (\alpha_j \otimes \Psi_j)$ alors $D_2(y) = \bar{D}_2(y) + D_{2,0}(y) + \ldots + D_{2,l-1}(y)$.
D'où par induction sur $l \geq 2$, on obtient, après un changement fini de différentielles, que

$$D_2(x) = \bar{D}_2(x) + D_{2,0}(x) + D_{2,1}(x)$$

L'application de ce procédé à tous les éléments d'une base de $Y^{(r,i)}$ permet de conclure, ce qui achève la démonstration du théorème 3 dans le cas où $d = d_2$. ■

Deuxième étape : on suppose que $d = d_2 + d_3 + \cdots$
Dans ce cas le modèle de Ganea de $(\Lambda X, d)$ est filtré.
Remarquons que $Y = \bigoplus_\alpha Y_\alpha$, avec $Y_0 = Y_0^{m,*}$
et si $\alpha \geq 1 \quad D_2 Y_\alpha^{r,*} \subset (\Lambda X \otimes \Lambda Y_{\leq \alpha - 1}^{\leq r,*})^{r+1,*}$
Nous allons construire par récurrence sur α une différentielle D sur $\Lambda X \otimes \Lambda Y$ telle que :

a) $D = D_2 + D_3 + \cdots$ où D_2 désigne la différentielle définie précédemment

b) $\varphi \circ D = D \circ \varphi$

c) D et φ respectent la filtration par le premier degré.

Ces trois conditions assurent que

$$\varphi : (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \longrightarrow (\Lambda X / \Lambda^{>m} X, \bar{d})$$

est un quasi-isomorphisme. En effet, en filtrant par le premier degré, nous obtenons un homomorphisme de suites spectrales dont le terme E_1 est précisemment :

$$\varphi : (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D_2) \longrightarrow (\Lambda X / \Lambda^{>m} X, \bar{d}_2).$$

- Pour $\alpha = 0$, on pose : $D|_X = d$, $\quad D|_{Y_0^{m,*}} = 0$ et on vérifie facilement que
$$\varphi_0 : (\Lambda X \otimes \Lambda Y_0^{m,*}, D) \longrightarrow (\Lambda X / \Lambda^{>m} X, \bar{d})$$
satisfait les conditions a) b) et c).

- Pour α arbitraire :
Soit $y \in Y_{\alpha-1}^{m+r,*}$ tel que $D_2 y = \Phi \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_{\leq \alpha-1}^{\leq m+r,*})^{m+r+1,*}$ et supposons que D définie sur $\Lambda X \otimes \Lambda Y_{\leq \alpha-1}^{\leq m+r,*}$ satisfait a) b) et c).
Alors $D\Phi$ est définie et puisque $D_2\Phi = 0$
$$\begin{aligned} D\Phi &= D_3\Phi + D_4\Phi + \cdots \\ &= \theta + \omega \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \theta \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_{\leq \alpha-2}^{\leq m+r,*})^{m+r+3,*} \\ \omega \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_{\leq \alpha-2}^{\leq m+r,*})^{m+r+4,*} \end{array} \right. . \end{aligned}$$
Nous avons $D \circ D\Phi = 0 \Longrightarrow D_2\theta = 0$
$\Longrightarrow \exists \theta_1 \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_{\leq \alpha-1}^{\leq m+r,*})^{m+r+2,*}$ tel que $\theta = D_2\theta_1$
$\Longrightarrow D(\Phi - \theta_1) \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_{\leq \alpha-2}^{\leq m+r,*})^{m+r+4,*}$.
En itérant ce procédé, on trouve que pour un certain k (pour des raisons de degré)
$$D(\Phi - \theta_1 - \theta_2 \cdots - \theta_k) = 0$$
avec $\theta_i \in (\Lambda X \otimes \Lambda Y_{\leq \alpha-1}^{\leq m+r,*})^{m+r+i+1,*}$.
Posons alors $Dy = \Phi - \theta_1 - \theta_2 \cdots - \theta_k$

En effectuant la construction précédente pour les éléments d'une base de Y, nous définissons une différentielle D sur $\Lambda X \otimes \Lambda Y$ qui vérifie les conditions a) b) et c). ∎

L'existence du modèle semi-libre de Ganea bigradué étant établi, montrons les différentes assertions du théorème 3.

Les points (1) et (3) se trouvent prouvés automatiquement par construction.

Le point (5) est immédiat puisque, pour $r > m$:

$$H^{(r,*)}(\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \cong H^{(r,*)}(\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}) = 0$$

et donc $(\Lambda X \otimes \Lambda Y)^{r,*} \cap ker D \subset D((\Lambda X \otimes \Lambda Y)^{<r-1,*})$

Montrons que $\bar{D} = \bar{D}_2$ (point (4) du théorème 3) :

Procédons par induction sur (r, α) et donc supposons que $\bar{D} = \bar{D}_2$ sur $Y^{<(r,\alpha)}$.

Considérons $x \in Y^{(r,\alpha)}$ et écrivons :

$$\bar{D}x = \bar{D}_2 x + \bar{D}_3 x + \cdots + \bar{D}_k x \quad \text{avec } k \leq \frac{|x|+1}{m} \text{ et } \bar{D}_l x \in \Lambda^l Y^{<(r,\alpha)}.$$

De la relation $\bar{D} \circ \bar{D} = \bar{D}_2 \circ \bar{D}_2 = 0$, nous déduisons, puisque $\bar{D}_2 x \in \Lambda Y^{<(r,\alpha)}$, que

$$0 = \bar{D}_2 \bar{D}_3 x + \bar{D}_3 \bar{D}_2 x = \bar{D}_2 \bar{D}_3 x.$$

Comme $\bar{D}_3 x \in \Lambda^3 Y \subset (\Lambda Y)^{\geq 3m}$, il existe $\Phi \in \Lambda^+ Y$ tel que $\bar{D}_3 x = \bar{D}_2 \Phi$. En posant $y = x - \Phi$, nous obtenons $\bar{D}y = \bar{D}_2 y + \bar{D}_4 y + \cdots + \bar{D}_l y$ avec $l \geq \frac{|x|}{m+1}$. Le même argument de changement de générateurs que précèdemment nous permet de supposer que $\bar{D}x = \bar{D}_2 x + \bar{D}_4 x + \cdots + \bar{D}_k x$.

En itérant ce procédé, nous prouvons ainsi que

$$\bar{D} = \bar{D}_2 \quad \text{pour } x \in Y^{(r,\alpha)}.$$

Une induction sur une base linéaire de $Y^{(r,\alpha)}$ permet de conclure.

Il nous reste à montrer le point (2) :

$$D - \bar{D}(Y^{(r,i)}) \subset (\Lambda^+ X \otimes (R \oplus Y^{<(r,i)}))^{>r+1,*}.$$

Comme dans le cas où $d = d_2$, nous pouvons choisir Y et D tels que

$$\bar{D}(Y^{(r,i)}) \subset \Lambda^2 Y^{<(r,i)}.$$

Supposons que (2) est vraie sur $Y^{<(r,i)}$, choisissons $x \in Y^{(r,i)}$ et écrivons

$$Dx = \bar{D}x + \bar{D}_0 x + \bar{D}_1 x + \cdots + \bar{D}_k x \quad \text{avec } k \leq \frac{|x|+1}{m}.$$

L'égalité $D \circ Dx = 0$ implique que $\bar{D} \circ D_k = \bar{D}_2 D_k x = 0$, ce qui permet de conclure comme dans le cas $d = d_2$. ∎

Corollaire 4. *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda X, d) & \overset{j}{\hookrightarrow} & (\Lambda X \otimes (R \oplus Y^{m,*}), D') & \overset{p}{\rightarrow} & (R \oplus Y^{m,*}, 0) \\ & \underset{q_m}{\searrow} & \downarrow \varphi & & \\ & & (\Lambda X / \Lambda^{>m} X, \bar{d}) & & \end{array}$$

où φ est un quasi-isomorphisme de $(\Lambda X, d)$-modules.

Remarque 9. Le corollaire 4 exprime que la projection q_m admet une $(\Lambda X, d)$-résolution semi-libre au sens de [5], d'un type particulier.

5 Démonstration du théorème 1

L'objet de ce chapitre est la démonstration du théorème 1 .

Théorème 1. *Soit R un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ et soit X un CW complexe R-modéré de dimension $n < \infty$ tel que :*

a) $H_*(\Omega X; R)$ est R-libre

b) $H^n(X; R)$ est R-libre

alors

$$Mcat_c(X; R) = Acat_c(X; R).$$

Remarquons que si X est 1-connexe et à dualité de Poincaré, nous avons $H^n(X; R) = R$ et l'hypothèse du théorème 1 est vérifiée.

Remarquons aussi que si $R = \mathbf{Q}$, alors le théorème est celui de K Hess [11]. Nous pouvons donc supposer que $H^{>n} = 0$ pour un certain n.

Le théorème 1 est une conséquence du résultat algébrique suivant :

Théorème 1'. *Soient $1 < r < n$ deux entiers, R un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ et $(\Lambda X, d)$ une adgc décomposable tels que :*

a) $H^{<r}(\Lambda X, d) = 0 = H^{>n}(\Lambda X, d)$ et $H^n(\Lambda X, d)$ est R-libre

b) Les entiers $k \in \mathbf{N} - \{0\}$, $k \leq n/r$ sont inversibles dans R

alors

$$M_c cat(\Lambda X) = A_c cat(\Lambda X).$$

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration de ce théorème algébrique.

5.1 Réduction

R désignant un sous anneau de $\mathbf{Q}$, la réduction consiste à remplacer l'adgc $(\Lambda X, d)$ par une adgc (A, d_A) telle que $A^{>n} = 0$.

Proposition 10. *Soit $(\Lambda X, d)$ décomposable. Si $H^{>n}(\Lambda X, d) = 0$ et si $H^n(\Lambda X, d)$ est R-libre alors il existe un idéal I de ΛX tel que la projection $\psi : \Lambda X \longrightarrow \Lambda X/I = A$ soit un quasi-isomorphisme et $A^{>n} = 0$.*

Preuve de la proposition 10: Soit p un nombre premier qui n'est pas inversible dans R. Posons:

- $Y = X \underset{R}{\otimes} \mathbf{F}_p$, $(\Lambda Y)^n = S \oplus \ker d$
- $J =$ l'idéal engendré par S et $(\Lambda Y)^{>n}$
- $\varphi : (\Lambda X, d) \longrightarrow (\Lambda Y, d) = (\Lambda X, d) \underset{R}{\otimes} \mathbf{F}_p$
- $I = \varphi^{-1}(J)$.

Remarquons que

$$(\Lambda X)^{>n} \subset I \subset (\Lambda X)^{\geq n}$$

et que I est un idéal différentiel. Par suite la projection

$$(\Lambda X, d) \longrightarrow (\Lambda X/I, \bar{d})$$

induit

$$H^i(\Lambda X, d) \longrightarrow H^i(\Lambda X/I, \bar{d})$$

qui est un isomorphisme pour $i \neq n$.

Remarquons aussi que φ induit un isomorphisme $\Lambda X/I \otimes \mathbf{F}_p \simeq \Lambda Y/J$, d'où le diagramme commutatif, pour tout $i \geq 0$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & H^i(\Lambda X) \underset{R}{\otimes} \mathbf{F}_p & \rightarrow & H^i(\Lambda Y, d) & \rightarrow & Tor_1^R(H^{i+1}(\Lambda X); \mathbf{F}_p) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & H^i(\Lambda X/I) \underset{R}{\otimes} \mathbf{F}_p & \rightarrow & H^i(\Lambda Y/J, \bar{d}) & \rightarrow & Tor_1^R(H^{i+1}(\Lambda X/I); \mathbf{F}_p) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

et l'isomorphisme

$$H^n(\Lambda X) \underset{R}{\otimes} \mathbf{F}_p \longrightarrow H^n(\Lambda X/I) \underset{R}{\otimes} \mathbf{F}_p$$

et ceci pour tout p premier qui n'est pas inversible dans R.

Puisque $H^n(\Lambda X)$ est un R-module libre de type fini

$$H^n(\psi) : H^n(\Lambda X) \longrightarrow H^n(\Lambda X/I)$$

est injective. D'autre part, puisque $I \supset (\Lambda X)^{n+1}$, de la suite exacte longue d'homologie il résulte que $H^n(\psi)$ est surjective. ■

Remarque 10. Le quasi-isomorphisme $\psi : \Lambda X \longrightarrow \Lambda X/I = A$ respecte la filtration par la longueur des mots et induit un quasi-isomorphisme

$$\Lambda X/\Lambda^{>m}X \longrightarrow A/A^{>m} \qquad \text{où } A^{>m} = \psi(\Lambda^{>m}X).$$

Considérons alors un modèle de Ganea

$$\begin{tikzcd} (\Lambda X, d) \arrow[r] \arrow[dr] & (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}) \\ & (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et posons

$$(A \otimes \Lambda Y, d) = A \underset{\Lambda X}{\otimes} (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D)$$

Alors

$$\theta : \Lambda X \underset{\Lambda X}{\otimes} (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) = (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \longrightarrow (A \otimes \Lambda Y, d)$$

est un quasi-isomorphisme puisque $(\Lambda X \otimes \Lambda Y, D)$ est $(\Lambda X, d)$-semi-libre. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A/A^{>m} & A \arrow[l] & \Lambda X \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r] \arrow[dr, "i"'] & \Lambda X/\Lambda^{>m}X \\ A \otimes \Lambda Y \arrow[u, "\eta"] & & & \Lambda X \otimes \Lambda Y \arrow[u, "\simeq", "\varphi"'] \arrow[lll, "\theta"'] \\ \end{tikzcd}$$

où θ, ψ, φ, η sont des quasi-isomorphismes.

Proposition 11. *Avec les notations précédentes, l'homomorphisme j admet une rétraction d'algèbres (respectivement de A-modules) si et seulement si i admet une rétraction d'algèbres (respectivement de ΛX-modules).*

Preuve de la proposition 11: Le quasi-isomorphisme ψ étant surjectif, d'après le lemme de relèvement, il existe $\alpha : A \longrightarrow \Lambda X$ tel que $\psi \circ \alpha = id_{\Lambda X}$. Si r est une rétraction de j, alors $\alpha \circ r \circ \theta$ est une rétraction de i. L'autre implication est claire. ■

5.2 Fin de la démonstration du théorème 1'

Supposons que $Mcat(\Lambda X, d) = m$. Alors

$$H(q_m) : H(\Lambda X, d) \longrightarrow H(\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d})$$

admet une rétraction linéaire. Il existe donc, d'après le théorème 3, un modèle de Ganea

$$\Lambda X \longrightarrow \Lambda X \otimes \Lambda Y \longrightarrow \Lambda Y.$$

D'après le lemme de réduction, considérons le pull-back de cette fibration le long de $\Lambda X \longrightarrow A$.

$$A \longrightarrow A \otimes \Lambda Y \longrightarrow Y.$$

D'après la proposition 11, il suffit alors de montrer que l'existence d'une rétraction A-linéaire entraîne celle d'une rétraction d'adgc de

$$A \longrightarrow A \otimes \Lambda Y$$

Donc, pour établir le théorème 1', il suffit de montrer que s'il existe un homomorphisme de A-modules

$$r : (A \otimes \Lambda Y, D) \longrightarrow (A, d)$$

tel que $r \circ j = id_A$
alors il existe un homomorphisme d'adgc

$$\hat{r} : (A \otimes \Lambda Y, D) \longrightarrow (A, d)$$

tel que $\hat{r} \circ j = id_A$.

De plus, puisque $A^{>n} = 0$, il suffit de construire $\hat{r}(y)$ pour les $y \in Y$ tels que $\deg y \leq n$.

Construction de $\hat{r}$ par induction sur la filtration de Y par les (s, α) définis dans le chapitre 4 :

Nous avons $A \xleftarrow{\simeq} \Lambda X$ $(A = \Lambda X/I)$ et d'après le théorème 3, nous avons un diagramme commutatif où les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
(\Lambda X, d) & \xrightarrow{q_m} & (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}) \\
\downarrow & & \uparrow\varphi \\
(\Lambda X \otimes (R \oplus Y^{m,*}), D) & \xrightarrow{j} & (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D)
\end{array}$$

Ceci donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
(A, d) & \xrightarrow{q} & (A/A^{>m}, \bar{d}) \\
\downarrow & & \uparrow\varphi \\
(A \otimes (R \oplus Y^{m,*}), D) & \xrightarrow{j} & (A \otimes \Lambda Y, D)
\end{array}$$

Considérons

$$r : (A \otimes (R \oplus Y^{m,*}), D) \longrightarrow (A, d)$$

homomorphisme de (A, d)-modules, tel que $r \circ i = id_A$. r se prolonge en un unique homomorphisme d'adgc

$$r : (A \otimes \Lambda Y^{m,*}), D) \longrightarrow (A, d)$$

tel que $r \circ j = id_A$.
Remarquons, par le lemme 2, que

$$Y^{s,\alpha} = Y_\alpha^{m+i(m-1),*} \qquad \text{pour un certain } i$$

Posons $\| y \| = i+1$ pour $y \in Y_\alpha^{m+i(m-1),*}$

Supposons pour le moment :

Lemme 3. *Si deg $y \leq n$ alors $||y||$ est inversible dans R.*

et supposons avoir construit :

$$-\text{une application linéaire : } \quad \varphi : Y^{<(s,\alpha)} \longrightarrow A \otimes (R \oplus Y^{m,*})$$

$$-\text{un morphisme d'adgc : } \quad \hat{r} : (A \otimes \Lambda Y^{(s,\alpha)}, D\,) \longrightarrow (A, d\,)$$

tels que $\hat{r} \circ j = id_A$ et $\hat{r}(y) = \frac{1}{\|y\|} r\varphi(y)$ pour $y \in Y^{<(s,\alpha)}$ et deg $y \leq n$.

Pour la première étape de l'induction, il suffit de prendre $\varphi = id$ et $\hat{r} = r$.
Soit $x \in Y^{(s,\alpha)}$, alors

$$Dx = a + \sum_i a_i y_i + \sum_{j,k} y_j y_k.$$

avec $a, a_i \in A^+$, $\quad y_l \in Y^{(s,\alpha)}$. On pose :

$$\psi(x) = \| x \| \, a + \sum_i a_i (\| x \| - \| y_i \|) \hat{r}(y_i) + \sum_i \hat{r}(y_j)\varphi(y_k) + \varphi(y_j)\hat{r}(y_k)$$

Admettons pour le moment que :

(i) $r\psi(x) = \| x \| \, \hat{r} D x$

(ii) $D\psi(x) = 0$

(iii) $\psi(x) \in (A \otimes (R \oplus Y^{m,*}))^{>m,*}$.

La condition (5) du théorème 3 ainsi que (i) et (ii) entraînent l'existence de

$$\varphi(x) \in (A \otimes (R \oplus Y^{m,*}))^{>m,*}$$

vérifiant

(iv) $D\varphi(x) = \psi(x)$.

Posons alors $\hat{r}(x) = \frac{1}{\|x\|} r\varphi(x)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} D\hat{r}(x) &= \tfrac{1}{\|x\|} D(r\varphi(x)) = \tfrac{1}{\|x\|} r(D\varphi(x)) \\ &= \tfrac{1}{\|x\|} r\psi(x)) \quad \text{par } (iv) \\ &= \hat{r}(Dx) \quad \text{par } (i). \end{aligned}$$

Démontrons maintenant les points (i), (ii) et (iii).

(i) On a :

$$\begin{aligned} r\psi(x) = \; & \| x \| \, a + \sum_i a_i((\| x \| - \| y_i \|)\hat{r}(y_i) + r\varphi(y_i)) \\ & + \sum_{j,k} \hat{r}(y_j) r\varphi(y_k) + r\varphi(y_j)\hat{r}(y_k) \\ = \; & \| x \| \, a + \sum_i a_i((\| x \| - \| y_i \|)\hat{r}(y_i) + \| y_i \| \, \hat{r}(y_i)) \\ & + \sum_{j,k} \hat{r}(y_j) \| y_k \| \, \hat{r}(y_k) + \| y_j \| \, \hat{r}(y_j)\hat{r}(y_k) \\ = \; & \| x \| \, a + \| x \| \sum_i a_i \hat{r}(y_i) + \sum_{j,k} (\| y_j \| + \| y_k \|)\hat{r}(y_j)\hat{r}(y_k) \end{aligned}$$

Or, $\| y_j \| + \| y_k \| = \| x \|$ donc :

$$\begin{aligned} r\psi(x) = \; & \| x \| \, (a + \sum_i a_i \hat{r}(y_i) + \sum_{j,k} \hat{r}(y_j)\hat{r}(y_k)) \\ = \; & \| x \| \, \hat{r}D(x). \end{aligned}$$

(iii) remarquons que si $\| x \| - \| y_i \| \neq 0$ alors

$$\| x \| - \| y_i \| \geq m \text{ et donc } a_i \in A^{\geq m}$$

(ii) nous définissons une $\hat{r}$-dérivation θ sur $A \otimes \Lambda Y^{<(s,\alpha)}$ par

$$\theta \,|_X = 0, \quad \theta(y) = (\| y \| \, \hat{r}(y)) - \varphi(y), \quad y \in Y.$$

Donc, pour $y \in Y^{<(s,\alpha)}$, nous avons

a) $\psi(y) = (\| y \| \, \hat{r} - \theta)Dy$

b) $D\theta - \theta D$ est une $\hat{r}$-dérivation qui s'annule sur $Y^{<(s,\alpha)}$ et donc $D\theta = \theta D$

Nous déduisons de ces deux points que

$$D\psi(y) = (\| y \| \, \hat{r} - \theta)\,(DDy) = 0.$$

ce qui achève la démonstration de l'existence d'une rétraction d'adgc.

Nous avons ainsi, par la proposition 11, une rétraction $\hat{r}$ d'adgc

$$\hat{r} : (\Lambda X, d) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D).$$

■

Preuve du lemme 3: Reprenons les notations de la section 4, alors :

- $D_2(Y^{m+1}) \subset (\Lambda X \otimes \Lambda Y^{<m+r,*})^{m+s+1}$

- $Y = Y^m \oplus Y^{m+(m-1)} \oplus Y^{m+2(m-1)} \oplus \cdots$

Puisque X est concentré en degré $> r$ et que si $y \in Y_\alpha^{m+i(m-1),*}$ alors dy posséde une composante non nulle dans $\Lambda^m X \otimes Y^{m+(i-1)(m-1),*}$, nous déduisons facilemment que si $y \in Y_\alpha^{m+i(m-1),*}$ alors

$$deg\, y \geq i[(m-1)(r+1)+1] + 2(r+1).$$

D'où, si deg $y \leq n$ alors $i < n/r$, ie $||y||$ est inversible dans R.

6 Démonstration de Acat($X \times S^n$)=Acat(X)+1 pour les espaces X R-modérés

Dans cette section, nous adaptons la démonstration de B. Jessup [13] au cas des espaces R-modérés.

Soient R un anneau principal et X un espace R-modéré, ie X est un CW complexe de type fini tel que dim $X \leq r\rho(R)$ lorsque

$$\begin{cases} X \text{ est } r\text{-connexe} \\ \rho(R) \text{ désigne le plus petit élément premier non inversible dans } R. \end{cases}$$

Remarque 11.

a) Si X et Y sont R-modérés alors

$$dim\, X \leq r_1\rho(R)$$

$$dim\, Y \leq r_2\rho(R)$$

$$\text{et} \qquad dim\, X \times Y \leq (r_1 + r_2)\rho(R).$$

Comme $X \times Y$ est r-connexe avec $r = sup(r_1, r_2)$, le produit $X \times Y$ n'est pas nécessairement R-modéré, mais il existe un sur-anneau R' de R tel que $X \times Y$ soit R'-modéré.

b) Une sphère S^n, $n \geq 2$ est R-modérée pour tout anneau principal contenant $1/2$.

c) Si R est un sous-anneau de R' et si X est R-modéré alors X est R'-modéré.

d) Si $X \times Y$ est R-modéré alors X et Y sont R-modérés.

Théorème 4. *Soient R un sous-anneau de $\mathbf{Q}$, X un CW complexe R-modéré de dimension n tel que*

a) $H_*(\Omega X; R)$ est R-libre

b) $H^n(X; R)$ est R-libre.

Si de plus $X \times S^n$, $n \geq 2$, est R-modéré alors

$$Acat(X \times S^n; R) = Acat(X; R) + 1$$

Preuve du théorème 4:
Il résulte du théorème 1 et des remarques précédentes qu'il suffit d'établir que :

$$Mcat(X \times S^n; R) = Mcat(X; R) + 1$$

Lemme 4. *Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle commutatif de X alors le produit tensoriel des adgc $\mathcal{M} \otimes (\Lambda V, d)$ est un modèle commutatif de $X \times S^n$ lorsque*

$$\mathcal{M} = \begin{cases} (\Lambda a, 0) & |a| = n \quad si \;\; n \text{ est impair} \\ (\Lambda(a, b), d) & |a| = n \quad db = a^2 \quad si \;\; n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Preuve du lemme 4: Le modèle d'Adams-Hilton de S^n (respectivement de $X \times S^n$) est de la forme $(T(u), 0)$, $|u| = n - 1$ (respectivement de la forme $(T(uR \oplus W), d)$ lorsque $(T(W), d)$ désigne un modèle d'Adams-Hilton de X). Nous en déduisons que :

$$(T(u), 0) = U(\mathbf{L}(u), 0)$$

et

$$(T(uR \oplus W), d) = U(\mathbf{L}(uR \oplus W), \partial).$$

La relation

$$C^*(L \oplus L') = C^*(L) \otimes C^*(L')$$

permet alors de conclure. ∎

Le lemme précédent montre que le théorème 4 est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 12. *Soit*

$$(\Lambda X, d) \xrightarrow{i} (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \xrightarrow{\rho} (\Lambda Y, \bar{d})$$

une KS extension de R-adgc. Si $H(\rho)$ est surjective alors

$$Mcat(\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \geq Mcat(\Lambda X, d) + e$$

lorsque e désigne le plus grand entier n tel qu'il existe

$$\alpha \in \Lambda^n(X \oplus Y) \cap ker\ d$$

satisfaisant $[\rho(\alpha)] \neq 0$ dans $H^*(\Lambda Y, \bar{d})$.

En effet, on applique la proposition 12 à la KS extension

$$(\Lambda V, d) \longrightarrow (\Lambda V, d) \otimes \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

en remarquant que dans ce cas e=1.
Preuve de la proposition 12: Choisissons α comme dans l'énoncé. Définissons un homomorphisme de $(\Lambda X, d)$-modules:

$$\mu : (\Lambda X, d) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d)$$

en posant $\mu(x) = x\,\alpha$.
Admettons pour le moment le lemme suivant:

Lemme 5. *Il existe un homomorphisme de $(\Lambda X, d)$-modules*

$$\nu : (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}) \longrightarrow (\Lambda(X \oplus Y)/\Lambda^{>m+e}(X \oplus Y), \bar{d}).$$

Considérons alors les résolutions semi-libres

$$\psi : (\Lambda X \otimes T, d) \longrightarrow (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d})$$

et

$$\varphi : (\Lambda(X \oplus Y) \otimes S, d) \longrightarrow (\Lambda(X \oplus Y)/\Lambda^{>m+e}(X \oplus Y), \bar{d})$$

pour un m et un e fixés.
Nous obtenons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
(\Lambda X, d) & \xrightarrow{\mu} & (\Lambda(X \oplus Y), d) & \xrightarrow{j_1} & (\Lambda(X \oplus Y) \otimes S, d) \\
j_2 \downarrow & \searrow & & \searrow & \simeq \downarrow \varphi \\
(\Lambda X \otimes T, d) & \longrightarrow & (\Lambda X/\Lambda^{>m}X, \bar{d}) & \xrightarrow{\bar{\mu}} & (\Lambda(X \oplus Y)/\Lambda^{>m+e}(X \oplus Y), \bar{d})
\end{array}$$

Supposons que $Mcat(\Lambda(X \oplus Y), d) = m + e$. Alors, par la remarque 4, il existe

$$r_1 : (\Lambda(X \oplus Y) \otimes S, d) \longrightarrow (\Lambda(X \oplus Y), d)$$

tel que

$$r_1 \circ j_1 = id_{\Lambda(X \oplus Y)}$$

D'autre part, φ étant un quasi-isomorphisme surjectif, il existe un homomorphisme de $(\Lambda X, d)$-modules

$$\theta : (\Lambda X \otimes T, d) \longrightarrow (\Lambda(X \oplus Y) \otimes S, d)$$

tel que

$$\varphi \circ \theta = \bar{\mu} \circ \psi.$$

Posons

$$r_2 = \nu \circ r_1 \circ \theta : (\Lambda X \otimes T, d) \longrightarrow (\Lambda X, d).$$

Alors

$$\begin{aligned} r_2 \circ \bar{j}_2 &= \nu \circ r_1 \circ \theta \circ j_2 \\ &= \nu \circ r_1 \circ j_1 \circ \mu \\ &= \nu \circ \mu = id_{\Lambda X}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que

$$Mcat(\Lambda X, d) \leq m$$

et donc que

$$Mcat(\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \geq Mcat(\Lambda X, d) + e.$$

Reste à établir la preuve du lemme 5.
Preuve du lemme 5: Remarquons que la condition $H(\rho)$ surjectif équivaut à la condition

$$H(\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \simeq H(\Lambda X, d) \otimes H(\Lambda Y, \bar{d})$$

En effet la suite spectrale obtenue en filtrant par le degré en ΛX dégénère au terme E_2.

Il existe donc un quasi-isomorphisme

$$\eta : (\Lambda X, d) \otimes (H(\Lambda Y, d), 0) \longrightarrow (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d)$$

de $(\Lambda X, d)$-modules.

Notons $H = H(\Lambda Y, d)$ et $(\Lambda X, d) \otimes (H(\Lambda Y, d), 0) = (\Lambda X \otimes H, D)$.

Comme $(\Lambda X \otimes \Lambda Y, d)$ est aussi un module semi-libre, il existe un homomorphisme de $(\Lambda X, d)$-modules :

$$m : (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \longrightarrow (\Lambda X \otimes H, D)$$

tel que

$$\eta \circ m \simeq id_{\Lambda X \otimes \Lambda Y}.$$

Remarquons que m est un homomorphisme qui est nécessairement surjectif et donc quitte à appliquer une nouvelle fois le lemme de relèvement, nous pouvons supposer que $\eta \circ m = id_{\Lambda X \otimes \Lambda Y}$.

Posons $[\rho(\alpha)] = a \neq 0 \in H = H^*(\Lambda Y, d)$ et choisissons $q : H \longrightarrow R$ une forme R-linéaire telle que $q(a) = 1$.

Nous avons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda X & \xrightarrow{\mu} & \Lambda X \otimes \Lambda Y & & \\ \| & & {\scriptstyle \eta} \uparrow\downarrow {\scriptstyle m} & & \\ \Lambda X & \xrightarrow{\mu'} & \Lambda X \otimes H & \xrightarrow{\nu'} & \Lambda X \end{array}$$

où $\begin{cases} \nu'(x \otimes h) = xq(h) \\ \mu'(x) = ax. \end{cases}$

ce qui nous donne $m \circ \mu = \mu'$ et $\nu' \circ \mu' = id_{\Lambda X}$, d'où, en posant $\nu = \nu' \circ m$, nous obtenons

$$\nu \circ \mu = \nu' \circ m \circ \mu = \nu' \circ \mu' = id_{\Lambda X}.$$

■

Références

[1] D. Anick, *Hopf algebras up to homotopy,* Journal of the American Mathematical Society, **2**, (1989), 417-453

[2] Bitjong N'Dombol, Thèse, Université de Nice, (1990)

[3] Bitjong N'Dombol, *L'invariant Acat des algèbres quasi-commutatives*, Preprint, (1996)

[4] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas, *Adam's cobar equivalence* Transactions of the American Mathematical Society, **329**, (1992), 531-549

[5] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas, *Differential Graded Algebras in Topology,* Handbook in algebraic topology, Edited by I.M.James, Elsevier Science B.V., (1995)

[6] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas, *Gorenstein spaces*, Advanced in Maths., **71**, (1988), 92-112.

[7] B. Jessup,*Rational approximations to L-S category and a conjecture of Ganea,* Transactions of the American Mathematical Society, **317**, (1990), 655-660

[8] S. Halperin, *Universal enveloping algebras and loop space homology,* Journal of Pure and Applied Algebra, **83** (1992), 237-282

[9] S. Halperin and J.M. Lemaire, *Notions of category in differential algebra,* Algebric Topology: Rational Homotopy, Lectures Notes in Math., **1318**, Springer-Verlag, Berlin and New-York, (1988), 138-153

[10] S. Halperin and J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences,* Advanced in Maths., **32**, (1979), 233-279

[11] K. Hess, *A proof of Ganea's conjecture for rational spaces,* Topology, **30**, (1991), 205-214

[12] E. Idrissi, *La L.S-catégorie d'une application,* Thèse, Lille, (1990)

[13] B. Jessup, *Rational approximations to L-S category and a conjecture of Ganea*, J. Pure and Applied Algebra, **65**, (1990), 655-660

[14] J.W. Milnor and J.C. Moore, *On the Structure of Hopf Algebras*, Annals of Math. **81**, (1965), 211-264

[15] J.C. Thomas, *Homologie de l'espace des lacets, problèmes et questions*,, J. Pure and Applied Algebra, **91**, (1994),355-379

Résumé

A partir de l'algèbre des cochaînes singulières de l'espace X à coefficients dans un anneau principal R, nous définissons les invariants $Mcat(X;R)$ et $Acat(X;R)$ en généralisant les définitions données par S. Halperin et J.M. Lemaire.

Lorsque l'homologie de l'espace des lacets sur R est R-libre, l'espace X admet un modèle minimal décomposable commutatif qui joue le rôle du modèle de Sullivan lorsque $R = \mathbf{Q}$. En mimant les définitions rationnelles nous introduisons les invariants $M_c cat$ et $A_c cat$.

Nous démontrons alors que pour un CW complexe R-modéré, au sens de D. Anick, tel que l'homologie de l'espace des lacets sur R et la cohomologie de l'espace X sur R soient R-libres, nous avons

$$M_c cat(X;R) = A_c cat(X;R).$$

Puis à partir de la démonstration rationnelle, nous établissons que

$$M_c cat(X \times S^n;R) = A_c cat(X;R) + 1.$$

Lorsque R est un corps de caractéristique plus grande que la dimension de X, comme l'ont montré S. Halperin et J.M. Lemaire, nous avons $M_c cat X = Mcat X$ et $A_c cat X \leq Acat X$. Il en résulte dans ces conditions que $Mcat(X;R) = Acat(X;R)$ ce qui constitue une généralisation du résultat obtenu par K. Hess dans le cas rationnel.

De plus nous avons aussi $Acat(X \times S^n;R) = Acat(X;R) + 1$ ce qui signifie que $Acat(-;R)$ vérifie la conjecture de Ganea.