

jean 2000 6285

N° d'ordre 2111

Thèse présentée par

Jean-François CARON

à L'Université des Sciences et Techniques de Lille  
en vue d'obtenir le grade de  
Docteur en Mécanique

Phénomène de bifurcation  
en électro-élasticité



Soutenu le 5 Décembre 1997 devant la Commission d'Examen

RAPPORTEURS :

Mr R. SOUCHET  
Mr N.E. ABRIAK

Professeur, ENSMA Poitiers  
H.D.R. Sciences Mathématiques,  
Ecole des Mines de Douai

EXAMINATEURS :

Mr F. PARSY  
Mr G. DE SAXCE

Professeur, Lille I, Directeur de thèse  
Professeur, Lille I

A mon père,

à Charlotte.

# REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur F. PARSY qui a dirigé mes travaux, qui m'a assuré de son soutien constant et qui a ainsi permis la réalisation de cette thèse.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur le Professeur R. SOUCHET pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour sa participation au jury.

Je remercie Monsieur N.E. ABRIAK pour ses nombreuses suggestions et pour sa participation au jury.

Je remercie Monsieur le Professeur G. DE SAXCE pour l'attention qu'il a porté à ce travail et pour sa participation au jury.

J'exprime également ma reconnaissance à Monsieur le Professeur G. MAUGIN qui m'a apporté de nombreux conseils.

Mes remerciements vont aussi à Mme F. PETIAUX pour les services qu'elle m'a rendu.

Je tiens particulièrement à remercier Isabelle, ma femme, pour sa patience et son soutien qui furent indispensables à la réalisation de cette thèse.

# SOMMAIRE

<b><u>INTRODUCTION :</u></b>	<b>1</b>
<b><u>CHAPITRE 1 :</u></b>	<b>5</b>
<u>I /RAPPEL D'ELECTROMAGNETISME. EQUATIONS DE MAXWELL DANS UN REPERE GALILEEN</u>	5
<u>1-Grandeurs physiques</u>	5
<u>2-Axiomes fondamentaux. Equations de Maxwell</u>	6
1] Conservation de la charge électrique	6
2] Loi de Faraday	7
3] Récapitulation : les équations locales de Maxwell	7
4] "Invariance Galiléenne"	7
<u>II /ELECTROMAGNETISME DANS UN MILIEU DEFORMABLE CONTINU EN MOUVEMENT</u>	9
<u>1-Equations de Maxwell</u>	9
<u>2-Force, couple et énergie</u>	12
1] Approche par la procédure de Lorentz	12
2] Approche formelle	14
a. Dans un repère Galiléen $R_G$	14
b. Dans le repère en co.mouvement $R_C$	16
3] Principe d'objectivité	21
<b><u>CHAPITRE 2 :</u></b>	<b>23</b>
<u>I /LOIS D'EQUILIBRE EN ELECTRODYNAMISME DU CONTINU</u>	23
<u>1-Lois d'équilibre dans la configuration Eulerienne</u>	24
<u>2-Lois d'équilibre dans la configuration Lagrangienne</u>	27
<u>II /LOIS DE COMPORTEMENT</u>	28
<u>1-Conséquences de l'inégalité de Clausius Duhem</u>	28
<u>2-Symétrie matérielle</u>	29
1] Isotropie et premières conséquences	29
2] Autres conséquences dans le cadre d'une évolution adiabatique	29
3] Linéarisation	30

<b><u>CHAPITRE 3 :</u></b>	<b>35</b>
<u>I /INTRODUCTION</u>	36
<u>II /ETUDE DES CHARGES</u>	40
1-Définitions	40
2-Conséquences des actions de groupes	44
3- <u>Caractéristiques de la charge astatique. Décomposition de l'espace des charges</u>	47
<u>II /CLASSIFICATION DES CHARGES EQUILIBREES</u>	51
1-Description des différents types de charges	52
2-Lien entre $(\Theta_{\bar{i}_m} \times \Theta_{\bar{i}_e}) \cap \mathcal{L}_o$ et $(\Theta_{k_m(\bar{i}_m)} \times \Theta_{k_e(\bar{i}_e)}) \cap \text{sym}$ : étude de la bijectivité	
des charges astatiques $k_m$ et $k_e$	56
3- <u>Comptabilisation des charges de <math>\Theta_{\bar{i}} \cap \mathcal{L}_o</math></u>	56
1] Etude de $\Theta_{\bar{i}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_o$	56
2] Etude de $\Theta_{\bar{i}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_o$	61
 <b><u>CHAPITRE 4 :</u></b>	 <b>65</b>
<u>I /LE PROBLEME DE TRACTION EN ELECTRO-ELASTICITE LINEAIRE</u>	67
1-Validité des hypothèses $(H_1)$ dans le cadre de la linéarisation des équations	67
2-Expression des différentes quantités linéarisées	70
3-Le problème de traction linéarisé	71
4-Le théorème d'inversion locale	73
<u>II /REFORMULATIONS DU PROBLEME DE TRACTION EN ELECTRO-ELASTICITE NON LINEAIRE</u>	77
1-Formulation du problème	77
2-Le théorème d'inversion locale	78
3- <u>Reformulations du problème</u>	81
1] 1 <sup>ère</sup> reformulation du problème	81
2] 2 <sup>ième</sup> reformulation du problème	84
3] 3 <sup>ième</sup> reformulation du problème	85

III /ETUDE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE TRACTION EN  
ELECTRO-ELASTICITE NON LINEAIRE

86

1-Etude des solutions de  $\Phi(\phi, \vec{\Pi}) = (\lambda_m \vec{I}_m, \lambda_e \vec{I}_e)$  au voisinage des solutions  
triviales  $(Q\vec{I}_\Omega, Q\vec{\Pi}_0)$  avec  $Q \in SO(3)$ , lorsque  $\vec{I} = (\vec{I}_m, \vec{I}_e)$  est de type  $(0,0)$   
ou  $(0,0')$

86

1] Solutions de  $\Phi(\phi, \vec{\Pi}) = (\lambda_m \vec{I}_m, \lambda_e \vec{I}_e)$ , voisines de  $(\vec{I}_\Omega, \vec{\Pi}_0)$ ,  
pour  $\vec{I} = (\vec{I}_m, \vec{I}_e)$  sans couple d'axes d'équilibre

86

2] Solutions de  $\Phi(\phi, \vec{\Pi}) = (\lambda_m \vec{I}_m, \lambda_e \vec{I}_e)$ , voisines des solutions triviales  
 $(Q\vec{I}_\Omega, Q\vec{\Pi}_0)$  avec  $Q \in SO(3)$ , pour  $\vec{I} = (\vec{I}_m, \vec{I}_e)$  de type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$

88

2-Etude de la stabilité des solutions

92

CONCLUSION

99

BIBLIOGRAPHIE

# GLOSSAIRE DES NOTATIONS

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$	configuration de référence
$X$	point de $\Omega$
$T_X \Omega$	plan tangent à $\Omega$ en $X$ , constitué des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ appliqués en $X$
$\delta \subset \mathbb{R}^3$	configuration actuelle
$x$	point de $\delta$
$T_x \delta$	plan tangent à $\delta$ en $x$ , constitué des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ appliqués en $x$
$\phi: \Omega \rightarrow \delta, x = \phi(X)$	déformation de $\Omega$
$\vec{\Pi}(X)$	vecteur de polarisation exprimé dans la configuration de référence appliqué en $X$
$\vec{\Pi}(\phi(X))$	vecteur de polarisation exprimé dans la configuration actuelle appliqué en $x = \phi(X)$
$\vec{\Pi}_0$	champ de vecteurs de polarisation initial
$\vec{\mathcal{E}}(\phi(X))$	vecteur champ électrique exprimé dans la configuration actuelle appliqué en $x = \phi(X)$
$\mathcal{C}$	ensemble de toutes les configurations (ou déformations) $\phi$ de $\Omega$
$\mathcal{C}^p$	ensemble des champs de vecteurs de polarisations $\vec{\Pi}$
$L^2(\Omega)$	ensemble des fonctions de carré intégrable sur $\Omega$
$\mathbb{H}^p(\Omega)$	$\mathbb{H}^p(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \forall  \alpha  \leq p \right\}$
$F$	gradient de déformation $D\phi$
$F^T$	transposée de $F$
$I$ ou $I_\Omega$	application identique de $\mathbb{R}^3$ ou $\Omega$
$C = F^T F$	tenseur de Cauchy-Green
$W$	fonction densité d'énergie
${}_E P = \frac{\partial W}{\partial F}$	premier tenseur de Piola-Kirchhoff dans le cadre de l'électro-élasticité
$P_m$	composante mécanique de ${}_E P$
$P_e$	composante électrique de ${}_E P$
${}_E S = 2 \frac{\partial W}{\partial C}$	second tenseur de Piola-Kirchhoff dans le cadre de l'électro-élasticité
${}_E C = \frac{\partial {}_E S}{\partial C}$	second tenseur d'électro-élasticité

$\vec{l}_m = (\vec{F}_m, \vec{\tau}_m)$	charge d'origine mécanique
$\vec{l}_e = (\vec{F}_e, \vec{\tau}_e)$	charge d'origine électrique
$\vec{l} = (\vec{l}_m, \vec{l}_e)$	couple de charges d'origine mécanique, respectivement d'origine électrique
$\mathcal{L}_m$	ensemble des charges d'origine mécanique de bilan nul sur $\Omega$
$\mathcal{L}_e$	ensemble des charges d'origine électrique de bilan nul sur $\Omega$
$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$	ensemble des couples de charges
$\mathcal{N}_3$	ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$
$O(3)$	groupe des transformations orthogonales de $\mathbb{R}^3$
$SO(3)$	groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$
skew = so(3)	ensemble des éléments antisymétriques de $\mathcal{N}_3$
sym	ensemble des éléments symétriques de $\mathcal{N}_3$
$\mathbb{R}P^1$	espace quotient $\mathbb{R}^2 - \{0\} / \mathbb{R} - \{0\}$ ou $S^1 / \mathbb{I}_2$ constitué des lignes passant par (0,0) de $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}P^2$	espace quotient $\mathbb{R}^3 - \{0\} / \mathbb{R} - \{0\}$ ou $S^2 / \mathbb{I}_2$ constitué des lignes passant par (0,0,0) de $\mathbb{R}^3$
$(\mathcal{L}_m)_0$	ensemble des charges d'origine mécanique équilibrées relativement à $l_\Omega$
$(\mathcal{L}_e)_0$	ensemble des charges d'origine électrique équilibrées relativement à $l_\Omega$
$\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$	ensemble des couples de charges équilibrées relativement à $l_\Omega$
$k_m: \mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{N}_3$	application « charge astatique » relative aux charges de l'espace $\mathcal{L}_m$
$k_e: \mathcal{L}_e \rightarrow \mathcal{N}_3$	application « charge astatique » relative aux charges de l'espace $\mathcal{L}_e$
$k: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_6$	$k = k_m + k_e$
$A_m = k_m(\vec{l}_m)$	charge astatique pour la charge $\vec{l}_m$
$A_e = k_e(\vec{l}_e)$	charge astatique pour la charge $\vec{l}_e$
$A = k(\vec{l})$	charge astatique pour le couple de charges $\vec{l} = (\vec{l}_m, \vec{l}_e)$
$j_m = \left( \frac{k_m}{(\ker k_m)^\perp} \right)^{-1}$	application réciproque de la partie non singulière de $k_m$
$j_e = \left( \frac{k_e}{(\ker k_e)^\perp} \right)^{-1}$	application réciproque de la partie non singulière de $k_e$

$\text{Skew}_m = j_m(\text{skew})$

$\text{Skew}_e = j_e(\text{skew})$

$\text{Sym}_m = j_m(\text{sym})$

$\text{Sym}_e = j_e(\text{sym})$

$\Phi: \mathcal{E} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$

$T_{l_\Omega} \mathcal{E}$

$\mathcal{E}_{\text{sym}}$

$\mathcal{N}$

$F: \mathcal{L}_0 \rightarrow \text{Skew}_m \oplus \text{Skew}_e$

$V_I(\phi)$

skew projeté dans l'espace des charges  $\mathcal{L}_m$

skew projeté dans l'espace des charges  $\mathcal{L}_e$

sym projeté dans l'espace des charges  $\mathcal{L}_m$

sym projeté dans l'espace des charges  $\mathcal{L}_e$

$\Phi(\phi, \vec{\Pi}) = \{(-\text{DIV}_x \mathbf{P}_m, \mathbf{P}_m \vec{N}), (-\text{DIV}_x \mathbf{P}_e, \mathbf{P}_e \vec{N})\}$

plan tangent à  $\mathcal{E}$  en  $l_\Omega$

$\mathcal{E}_{\text{sym}} = \{\vec{u} \in T_{l_\Omega} \mathcal{E} / \vec{u}(0) = \vec{0} \text{ et } (\nabla \vec{u})(0) \in \text{sym}\}$

variété image de  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{C}$  par  $\Phi$  au voisinage de la

solution triviale  $(l_\Omega, \vec{\Pi}_0)$

$\mathcal{N}$  est le graphe de  $F$

énergie potentielle relative au couple de charges  $\vec{I}$  en  $\phi$

# INTRODUCTION

En 1930, SIGNORINI<sup>(1)</sup> découvrit le résultat (étonnant à l'époque) qui suit : le problème de traction pur (équilibre d'un corps élastique soumis uniquement à des forces imposées) dont on sait qu'il admet une et une seule solution définie à un champ de moments près en élasticité linéaire, peut en présenter plusieurs en élasticité non linéaire définies à un champ de déplacement de solide près du corps et des charges.

Ce qui rendait ce résultat encore plus remarquable est le fait que cette non unicité dépend non seulement de la fonction densité d'énergie libre  $W$ , mais aussi du tenseur d'élasticité  $C$  de la théorie linéaire défini par :

$$C[\mathbb{E}] = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}}(0) \bar{\mathbb{E}}_i \otimes \bar{\mathbb{E}}_j \otimes \bar{\mathbb{E}}_k \otimes \bar{\mathbb{E}}_l$$

où  $\mathbb{E}$  désigne le tenseur des déformations de Green-Lagrange.

Cette apparition, en théorie non linéaire d'extra-solutions et leur absence en théorie linéarisée n'est pas facile à appréhender de façon intuitive et expérimentale (quoique, dans certains cas, on puisse la relier aux analogies du flambement des poutres). Cette constatation conduisit à un nombre important de travaux (surtout italiens) et souleva même une controverse sur la validité de l'élasticité linéarisée.

A présent, on n'y voit plus de contradiction mais plutôt un phénomène de bifurcation dans l'espace des solutions de l'élasticité statique : chaque fois qu'il y a bifurcation, la correspondance entre le problème non linéaire et le problème linéarisé devient singulière : il y a instabilité à la linéarisation.

Nous nous basons ici sur les travaux de J.E.MARSDEN et T.R.J.HUGHES [1978 et 1983 ]<sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup> ainsi que sur ceux de D.R.J CHILLINGWORTH, J.E.MARSDEN et Y.H.WAN [1982 ]<sup>(4)</sup>.

Ce travail pose le problème de savoir si des phénomènes similaires se produisent pour des matériaux soumis à des champs de forces d'origine mécanique, mais aussi d'origine électromagnétique. L'exemple choisi est celui des diélectriques piézo-électriques qui, lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique, ont la particularité de se déformer (électrostriction). De plus, certains de ces diélectriques génèrent une polarisation lorsqu'ils sont soumis à des efforts mécaniques (effet piézo-électrique). On

(1) A.SIGNORINI [1930]. Sulle deformazioni termoelastiche finite, *Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Cong. Appl. Mech.* 2, 80 -89.

(2) J.MARSDEN et T.HUGHES [1978]. Topics in the Mathematical Foundations of Elasticity, in Volume II, R.J KNOPS (ed.), Pitman.

(3) J.MARSDEN et T.HUGHES [1983]. *The Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall.

(4) D.R.J.CHILLINGWORTH, J.MARSDEN et Y.H. WAN [1982]. Symmetry and Bifurcation in Three -Dimensional Elasticity, Part I. *Arch. Rational Mech. Anal.* 80, 295-331.

ne se limitera ici qu'au premier type de matériau cité.

C'est donc dans le cadre de l'électro-élasticité que l'on apporte une généralisation au problème de traction. On observe que le phénomène de bifurcation se produit encore tout en amenant certaines restrictions quant au nombre de solutions obtenues dans le cadre de l'élasticité pure. Ces restrictions sont dues à une certaine interdépendance entre la déformation du solide et le champ électrique (ou plus précisément le champ de polarisation) à travers la fonction densité d'énergie libre (interdépendance due à la propriété d'objectivité). Bien entendu, on est amené à se poser la question de la stabilité des différentes solutions. Il s'avère difficile, dans une stricte généralité d'y répondre. Mais en distinguant deux notions de stabilité "stabilité mécanique" et "stabilité électrique", on peut dégager quelques règles. Un fait intéressant apparaît : une solution instable au sens de l'élasticité peut devenir stable lors de l'intervention d'un champ électrique.

Voici maintenant quelques indications sur le contenu.

Le premier chapitre consiste tout d'abord à un bref rappel sur les lois fondamentales de l'électromagnétisme des milieux continus. Les différentes grandeurs électromagnétiques et les équations de Maxwell sont alors exprimées dans un repère Galiléen de référence  $R_G$  que constitue le laboratoire. Celles-ci sont ensuite tour à tour exprimées dans un repère Galiléen quelconque, c'est à dire un repère en translation uniforme par rapport à  $R_G$ , puis dans un repère lié au matériau (continûment) déformable en mouvement. En redéfinissant dans chacun des cas les opérateurs de dérivation, on peut constater que la forme des équations de Maxwell est invariante.

Les notions de force, couple et énergie sont introduites de façon classique par la procédure de Lorentz. Dans un souci de rigueur, il est proposé une seconde approche tout à fait formelle de ces notions qui s'inspire d'une présentation de C.TRUEDELLE et R.TOUPIN<sup>(1)</sup>; celle-ci permet d'écarter toute approximation. L'intérêt se porte ensuite sur l'indépendance du choix de l'observateur (ou principe d'objectivité) des différentes quantités électromagnétiques.

Le deuxième chapitre présente les équations d'équilibre en électromagnétisme des milieux continus : bilan des forces et des moments des forces, conservation de l'énergie et second principe de la thermodynamique. On peut se référer par exemple à un article de G.A.MAUGIN et A.C.ERINGEN<sup>(2)</sup>. Ces équations sont exprimées tout d'abord dans la configuration actuelle, dite Eulerienne, en se préoccupant de ne faire intervenir que des quantités vérifiant le principe d'objectivité; on peut alors les ramener à une configuration de référence, dite Lagrangienne. En se plaçant dans le cas des diélectriques non magnétisables tels que les diélectriques piézo-électriques, de l'inégalité de Clausius-Duhem, on déduit des lois de comportement : par exemple  ${}_E P = \frac{\partial W}{\partial F}$ . Cette relation classique liant le premier tenseur de Piola-Kirchhoff généralisé  ${}_E P$  à la fonction densité d'énergie libre  $W$  figure, par exemple, dans les travaux de G.A.MAUGIN<sup>(3)</sup>.

- (1) C.TRUEDELLE and R.A.TOUPIN.,[1960], *The classical Field Theories, in Handbuch der physik*, Bd. III/I,ed. S. FLÜGGE, Springer Berlin, Sect. 279 et 283 à 286.
- (2) G.A.MAUGIN and A.C.ERINGEN.,[1977], *On the Equations of the Electrodynamics of Deformable Bodies of finite Excent*, J.Mecanique, 16 , pp101-147.
- (3) G.A.MAUGIN, [1988], *Continuum mechanics of electromagnetic solids*. Elsevier Science Pub., Amsterdam.

Il est choisi dans toute la suite pour variables indépendantes le gradient de déformation  $\mathbf{F}$  et le champ de vecteurs de polarisation  $\bar{\mathbf{\Pi}}$  (exprimé dans la configuration Lagrangienne). De plus on suppose que le matériau est isotrope et homogène. Ces hypothèses conduisent, dans le cadre d'une évolution adiabatique, à une linéarisation des équations du mouvement.

Dans le troisième chapitre, les équations non linéaires répondant au problème de traction dans le cadre de l'électro-élasticité statique sont présentées à l'aide d'un opérateur  $\Phi$ . Dans le cas où on ne s'intéresse qu'à des diélectriques ne possédant que la propriété d'électrostriction, il est possible d'effectuer un découplage de l'espace des charges  $\mathcal{L}$ . Ainsi la propriété d'objectivité énoncée au deuxième chapitre conduit à définir une action de groupe sur cet espace  $\mathcal{L}$ : action du groupe  $SO(3)$  sur la composante mécanique de l'espace des charges et action du groupe  $O(3)$  sur la composante électrique. Le but est alors d'étudier la « géométrie » de l'espace des charges. On définit une application appelée « charge astatique » qui établit une correspondance entre l'espace des charges d'origines mécanique et électrique et l'espace des matrices de  $\mathcal{M}_3 \times \mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_6$ . Celle-ci permet de traduire en terme de symétrie matricielle qu'un couple de charges est en équilibre relativement à une configuration (ou déformation) donnée. Les actions des groupes  $SO(3)$  et  $O(3)$  amènent à déterminer les éléments de  $SO(3) \times O(3)$  ne détruisant pas l'équilibre d'un couple de charges donné relativement à la configuration non déformée  $I_\Omega$ . Il en découle alors comme premier résultat une décomposition de l'espace des charges.

Puis on s'intéresse plus particulièrement au sous-espace  $\mathcal{L}_0$  de  $\mathcal{L}$  constitué des couples de charges équilibrées relativement à la configuration non déformée  $I_\Omega$ . On reprend la présentation de la classification en différents types de charges de la mécanique classique exposée par D.R.J.CHILLINGWORTH, J.E.MARSDEN et Y.H.WAN<sup>(1)</sup>, que l'on étend ensuite aux charges d'origine électrique. Cette classification est établie selon l'égalité ou non des valeurs propres de la matrice associée au couple de charge et selon l'existence ou non de couple d'axes d'équilibre. Le second résultat est alors le dénombrement des éléments de l'intersection de l'espace  $\mathcal{L}_0$  et de l'orbite d'un couple de charges selon le type de celui-ci.

Le chapitre quatre pose le problème de traction en électro-élasticité statique. Grâce à l'opérateur  $\Phi$ , il est possible de traduire ce problème comme une application du théorème des fonctions inverses. On suppose que dans la configuration non déformée  $I_\Omega$ , le matériau piézo-électrique n'étant soumis à aucun effort, il existe des contraintes résiduelles, ainsi qu'un champ de polarisation  $\bar{\mathbf{\Pi}}_0$  non nul tel que le couple  $(I_\Omega, \bar{\mathbf{\Pi}}_0)$  soit solution du problème pour un couple de charges nulles. Dans un premier temps, on présente le problème de traction dans le cadre linéaire pour un matériau isotrope et homogène. En reprenant les équations linéarisées au voisinage de  $(I_\Omega, \bar{\mathbf{\Pi}}_0)$  déterminées dans le chapitre deux, l'opérateur  $\Phi$  (qui est linéaire) permet d'énoncer le principe de

(1) Idem P 1(4)

superposition. Dans l'hypothèse d'une propriété forte dite « d'ellipticité » du premier tenseur d'électro-élasticité (cette propriété représente une généralisation de celle imposée dans la partie III de l'article de Y.H.WAN et J.E.MARSDEN<sup>(1)</sup> dans le cas de contraintes résiduelles), on peut démontrer que le problème linéaire admet un unique couple solution à un champ de déplacement près.

Dans un second temps, on s'intéresse au problème non linéaire. Tout en présentant encore l'ensemble des solutions comme graphe de l'opérateur  $\Phi$ , la démarche sera différente. En effet, on perd ici la propriété de linéarité de l'opérateur  $\Phi$ . Toutefois, grâce à la propriété d'objectivité de la fonction énergie libre  $W$ , l'opérateur  $\Phi$  permet de transposer l'action du groupe  $SO(3)$  agissant sur l'espace des déformations en l'action du groupe  $SO(3) \times O(3)$  sur l'espace des couples des charges décrite dans le chapitre trois. Il en résulte que les couples  $(QI_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  avec  $Q \in SO(3)$  (et  $\bar{\Pi}_0$  exprimé dans la configuration Eulerienne) sont aussi solution du problème, c'est-à-dire appartiennent aussi au graphe relatif au couple de charges nulles. Pour un couple de charges voisin du couple identiquement nul, la recherche du graphe se traduit encore par l'application du théorème des fonctions inverses. Mais lors de l'application du procédé d'inversion (et dans les cas les plus simples), à un couple de charges donné de  $\mathcal{L}_0$  voisin du couple identiquement nul, il peut correspondre 1, 2 ou 4 couples solutions. Cette correspondance assez inattendue tient au fait qu'à ce couple de charges donné, il correspond grâce à l'action de groupe 1, 2 ou 4 couples de charges de son orbite, chacun étant en relation biunivoque avec un couple solution.

Pour un couple de charges donné, les solutions ainsi exhibées dans le cadre non linéaire peuvent aussi apparaître comme points critiques de la fonction énergie potentielle  $V$ . On fera ici référence aux travaux de D.R.J.CHILLINGWORTH, J.E.MARSDEN et Y.H.WAN<sup>(2)</sup>. Traduisant l'instabilité mécanique (respectivement électrique) d'un couple solution comme dégénérescence de la forme quadratique définie par la partie mécanique (respectivement électrique) de la différentielle seconde de  $V$ , on observe que les différentes solutions, pour un couple de charges donné, sont d'indices d'instabilité mécanique (respectivement électrique) différents. Ainsi dans le cas de quatre couples solutions, les indices sont respectivement 3,2,1 et 0, ce dernier signifiant que le couple solution correspondant est stable au sens mécanique (ou au sens électrique). Malheureusement, il est impossible de conclure quant à la stabilité au sens électro-élastique sans en venir au cas par cas. Toutefois, un phénomène intéressant peut se produire : une solution instable au sens de l'élasticité peut devenir stable au sens de l'électro-élasticité lors de l'intervention d'un champ électrique extérieur. Le champ électrique peut ainsi avoir un rôle d'effet stabilisateur dans le problème de traction en électro-élasticité.

(1) Y.H. WAN et J.E.MARSDEN.,[1983], Symmetry and Bifurcation in three-dimensional Elasticity, Part III. *Arch. Rational Mech. Anal.* 83, 202-233.

(2) Idem P 1(4)

# CHAPITRE 1

## I / RAPPEL D'ELECTROMAGNETISME. EQUATIONS DE MAXWELL DANS UN REPERE GALILEEN

Dans cette première partie sont retracées les différentes étapes pour parvenir aux équations de Maxwell. Il ne s'agit pas ici de donner des explications expérimentales précises, mais d'effectuer une construction mathématique à l'aide des concepts classiques tels que la conservation de la charge électrique et la loi de Faraday. Les équations sont exprimées sous forme globale puis locale dans le repère Galiléen de référence  $R_G$  que constitue le laboratoire. On peut consulter les ouvrages de PANOFSKY-PHILLIPS<sup>(1)</sup>, G. BRUHAT<sup>(1)</sup>.

On exprime ensuite les différentes grandeurs électromagnétiques ainsi que les équations de Maxwell dans un repère Galiléen  $R'_G$  quelconque, c'est à dire un repère en translation uniforme par rapport à  $R_G$ . Pour cela, il est nécessaire de redéfinir les opérateurs de dérivation temporelle et spatiale. On peut alors remarquer que la plupart des grandeurs relatives à  $R'_G$  sont complétées par un terme correctif dépendant linéairement de la vitesse de  $R'_G$  par rapport à  $R_G$ . De plus les équations sont invariantes dans leurs formes : elles possèdent la propriété dite « d'invariance Galiléenne ».

### 1-Grandeurs physiques

Les principales grandeurs physiques qui interviennent dans la suite sont : le scalaire  $q_f$  qui désigne la densité volumique de charge libre et les vecteurs  $\vec{J}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$  désignant :

$\vec{J}$  : le flux électrique (appelé aussi densité de courant)

$\vec{E}$  : le champ électrique

$\vec{D}$  : le déplacement électrique

$\vec{H}$  : le champ magnétique

$\vec{B}$  : l'induction magnétique

Si le milieu est non polarisable et non magnétisable, on a :

$$(1.1) \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \text{ et } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

où  $\epsilon_0$  et  $\frac{1}{\mu_0}$  sont deux constantes caractéristiques du milieu ne dépendant uniquement que des unités de longueur, de temps, de charge, de flux magnétique. On peut choisir un système dans lequel ces constantes sont intégrées aux champs, c'est à dire tel que l'on ait  $\vec{D} = \vec{E}$  et  $\vec{H} = \vec{B}$ .

Si le milieu est polarisable et/ou magnétisable, on note  $\vec{P}$  le vecteur de polarisation et  $\vec{M}$  le vecteur de magnétisation définis par :

$$(1.2) \vec{P} = \vec{D} - \vec{E} \text{ et } \vec{M} = \vec{B} - \vec{H}$$

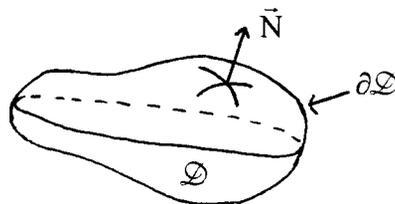
## 2-Axiomes fondamentaux. Equations de Maxwell

Les axiomes suivants sont exprimés dans le repère Galiléen  $R_G$  de référence.

### 1] Conservation de la charge électrique

Quel que soit le domaine  $\mathcal{D}$  fixe de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\mathcal{D}$  régulière, la variation par unité de temps de la charge électrique totale contenue à l'intérieur de  $\mathcal{D}$  est produite par le flux de charges à travers  $\partial\mathcal{D}$  ce qui se traduit par :

$$(1.3) \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} q dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \vec{N} dA = 0,$$



où  $\vec{N}$  est le vecteur normal unitaire extérieur à la frontière  $\partial\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}$ . Cette relation étant valable quel que soit  $\mathcal{D}$ , il en résulte d'après le théorème de localisation que, ponctuellement, on ait :

$$(1.4) \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

On introduit alors le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  défini par :

$$(1.5) \nabla \cdot \vec{D} = q_f,$$

ce qui est équivalent à

$$(1.6) \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{D} \cdot \vec{N} dA = \int_{\mathcal{D}} q_f dV.$$

Cette relation est connue sous le nom de la loi de Gauss.

L'équation (1.2) montre alors que le vecteur  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$  est à divergence nulle.

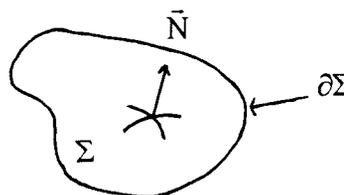
Il existe alors au moins un vecteur  $\vec{H}$ , appelé champ magnétique, tel que :

$$(1.7) \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{J}.$$

Si  $\Sigma$  désigne une surface de  $\mathbb{R}^3$  fixe de bord  $\partial\Sigma$ , (1.5) s'exprime sous la forme :

$$(1.8) \int_{\partial\Sigma} \vec{H} \cdot \vec{\tau} dL - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{N} dA = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{N} dA,$$

(loi d'Ampère)



où  $\vec{N}$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $\Sigma$ , qui définit son orientation, et  $\vec{\tau}$  un vecteur unitaire tangent à  $\partial\Sigma$ .

La formule (1.8) traduit que la dérivée par rapport au temps du flux du vecteur déplacement électrique à travers une portion de surface  $\Sigma$  fixe, de bord  $\partial\Sigma$ , additionné du flux de charges à travers  $\Sigma$  est égale à la circulation du champ magnétique le long du contour de  $\partial\Sigma$ .

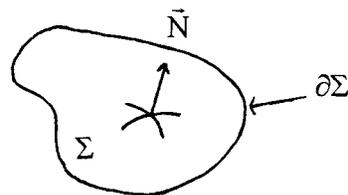
## 2] Loi de Faraday

La dérivée par rapport au temps du flux de l'induction magnétique  $\vec{B}$  à travers une portion de surface  $\Sigma$  fixe, de bord  $\partial\Sigma$ , est opposée à la circulation du champ électrique le long du contour  $\partial\Sigma$ , c'est à dire :

$$(1.9) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{N} dA + \int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{\tau} dL = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$(1.10) \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}.$$



En choisissant pour surface  $\Sigma$  la frontière  $\partial\mathcal{D}$  d'un ouvert  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Sigma$  étant alors fermée, on peut déduire de (1.7) que la divergence de  $\vec{B}$  est constante par rapport au temps. Si on suppose qu'à l'instant  $t_0$  la divergence est nulle, alors à tout instant  $t$  on a :

$$(1.11) \nabla \cdot \vec{B} = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$(1.12) \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{B} \cdot \vec{N} dA = 0.$$

Cette relation exprime la conservation du flux magnétique.

Remarque : la formule (1.11), contrairement à (1.5), traduit que les charges magnétiques, ou monopoles magnétiques, sont supposées ne pas exister.

## 3] Récapitulation : Les équations locales de Maxwell

Les équations locales de Maxwell dans le repère Galiléen  $R_G$  de référence sont :

$$(1.13) \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \text{ sur } \Sigma & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ dans } \mathcal{D} \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{J} \text{ sur } \Sigma & \nabla \cdot \vec{D} = q_f \text{ dans } \mathcal{D} \end{array} \right.$$

Remarque : Lorsque le milieu est polarisable et/ou magnétisable, les équations de Maxwell restent identiques, mais les grandeurs  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$  représentant le déplacement électrique et le champ magnétique sont définies par :

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P} \text{ et } \vec{H} = \vec{B} - \vec{M}.$$

## 4] « Invariance Galiléenne »

On peut remarquer que les équations de Maxwell sont invariantes pour toute transformation, indépendante du temps, entre repères d'inertie du groupe constitué par les translations et les rotations spatiales.

Si on introduit un nouveau repère  $R'_G$  en translation uniforme de vitesse  $\vec{V}$  par rapport à  $R_G$ , la transformation est déterminée par :

$$(1.14) \begin{cases} X' = X + Vt \\ t' = t \end{cases}$$

Par ce changement de repère, on est amené à définir les opérateurs relatifs à  $R'_G$  :

$$\text{L'opérateur de dérivation spatiale : } \nabla' = \nabla \quad \text{i.e. } \frac{\partial q}{\partial X'}(X', t') = \frac{\partial q}{\partial X}(X, t)$$

$$\text{L'opérateur de dérivation temporelle : } \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - (\vec{V} \cdot \nabla)$$

$$\text{i.e. } \frac{\partial q}{\partial t'}(X', t') = \frac{\partial q}{\partial t}(X, t) - V^B \frac{\partial q}{\partial X^B}(X, t)$$

Les équations de Maxwell sont alors invariantes par cette transformation si et seulement si les nouvelles grandeurs électromagnétiques dans le repère  $R'_G$  sont définies par :

$$(1.15) \begin{cases} q'_f(X', t') = q_f(X, t) \\ \vec{P}'(X', t') = \vec{P}(X, t) \\ \vec{J}'(X', t') = \vec{J}(X, t) + q_f(X, t)\vec{V} \\ \vec{M}'(X', t') = \vec{M}(X, t) - \frac{1}{c}\vec{V} \times \vec{P}(X, t) \\ \vec{E}'(X', t') = \vec{E}(X, t) - \frac{1}{c}\vec{V} \times \vec{B}(X, t) \\ \vec{B}'(X', t') = \vec{B}(X, t) + \frac{1}{c}\vec{V} \times \vec{E}(X, t) \end{cases}$$

les équations de Maxwell devenant alors dans  $R'_G$  :

$$(1.16) \begin{cases} \nabla' \times \vec{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t'} = \vec{0} & \nabla' \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla' \times \vec{H}' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t'} = \frac{1}{c} \vec{J}' & \nabla' \cdot \vec{D} = q_f \end{cases}$$

On dit que les équations de Maxwell possèdent l'invariance Galiléenne.

Preuve de (1.16) : en utilisant le fait que la vitesse  $\vec{V}$  est uniforme, on peut démontrer que  $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{B} = \nabla \times (\vec{B} \times \vec{V})$  et  $(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{D} = \nabla \times (\vec{D} \times \vec{V}) + \vec{V}(\nabla \cdot \vec{D})$ .

$$\text{D'où on obtient } \nabla' \times \vec{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t'} = \nabla \times (\vec{E} - \frac{1}{c}\vec{V} \times \vec{B}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{c}(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{B} = \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0},$$

l'équation (1.16)<sub>1</sub> se démontrant de la même manière.

Remarques :

\*Les formules de transformations (1.15) ne font apparaître aucune contribution d'ordre

$$\beta^2 = \frac{|\vec{V}|^2}{c^2}.$$

\*Elles constituent, dans la plupart des situations, une excellente approximation tant que

$$\beta = \frac{|\vec{V}|}{c} \ll 1.$$

\*Dans le cadre de cette approximation, on peut remarquer que la plupart des grandeurs relatives à  $R'_G$  sont complétées par un terme correctif dépendant linéairement de la vitesse  $\vec{V}$ .

\*On ne peut pas définir dans  $R'_G$  le déplacement électrique  $\vec{D}'(X', t')$  par :

$$\vec{D}'(X', t') = \vec{E}'(X', t') + \vec{P}'(X', t')$$

car un défaut de symétrie est à noter dans les équations (1.15)<sub>2</sub> et (1.15)<sub>3</sub>.

## II /ELECTROMAGNETISME DANS UN MILIEU DEFORMABLE CONTINU EN MOUVEMENT

Cette seconde partie consiste cette fois à exprimer les différentes grandeurs physiques et les équations de Maxwell dans un repère  $R_C$  lié au milieu déformable continu en mouvement. On peut alors constater que les formules de transformation (1.15) entre repères Galiléens se généralisent facilement entre un repère Galiléen et le repère  $R_C$ . Puis il est exposé brièvement la démarche présentée dans une étude de G.A.MAUGIN<sup>(1)</sup> pour définir les notions de force, couple et énergie : le raisonnement consiste à passer d'un point de vue microscopique à un point de vue macroscopique. Cette démarche qui met en jeu différents développements en série de Taylor ainsi que des approximations peut nuire à la rigueur demandée pour l'étude des équations non linéarisées. On est alors amené à redéfinir les notions de force, couple et énergie par une méthode purement formelle proposée dans un article de C.TRUEDELLE et R.TOUPIN<sup>(1)</sup>. Il est à noter que la plus grande partie des calculs présentés ici proviennent d'une démonstration de B.COLLET et G.A.MAUGIN<sup>(1)</sup>. Finalement, on se propose de distinguer parmi les grandeurs électromagnétiques celles qui répondent au principe d'objectivité (ou indépendance du choix de l'observateur) à celles qui n'y répondent pas.

### 1-Equations de Maxwell

On considère un élément de matière déformable en mouvement, on note  $\delta$  la configuration actuelle de repère  $\{x, (\vec{e}_a)\}$ ,  $\Omega$  la configuration de départ de repère  $\{X, (\vec{E}_A)\}$  et  $\phi_t$  la déformation  $\phi_t: \Omega \rightarrow \delta$  avec  $x = \phi(X, t)$ . On suppose que l'on a :  $\phi_t(\Omega) = \delta$ ,  $\phi_t(\partial\Omega) = \partial\delta$ ,  $\phi_t \in \mathbb{H}^3(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  avec  $J_\phi = \det(D_x \phi_t) > 0$  et  $\phi_t^{-1} \in \mathbb{H}^3(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ .

On suppose que le repère  $\{x, (\vec{e}_a)\}$  de la configuration actuelle soit un repère Galiléen :  $R_G = \{x, (\vec{e}_a)\}$ . Posons  $R_C = \{X, (\vec{E}_A)\}$ . Les lois de l'électromagnétisme sont alors régies par les équations de Maxwell exprimées dans  $R_G$ . Le but est alors de traduire ces équations dans le repère  $R_C$  de la configuration de départ, c'est à dire d'exprimer les équations de Maxwell dans un repère en co.mouvement lié à l'élément de matière déformable continu en mouvement.

Les différentes grandeurs de la formulation (1.13) liées au repère  $R_G$  sont transportées dans le repère  $R_C$  comme suit :

$$(1.17) \begin{cases} q(X, t) = J_\phi q(x, t) & \vec{J}(X, t) = J_\phi \vec{J}(x, t) \mathbb{F}^{-T} & \vec{E}(X, t) = \vec{E}(x, t) \mathbb{F} \\ \vec{D}(X, t) = J_\phi \vec{D}(x, t) \mathbb{F}^{-T} & \vec{B}(X, t) = J_\phi \vec{B}(x, t) \mathbb{F}^{-T} & \vec{H}(X, t) = \vec{H}(x, t) \mathbb{F} \\ \vec{P}(X, t) = J_\phi \vec{P}(x, t) \mathbb{F}^{-T} & \vec{M}(X, t) = \vec{M}(x, t) \mathbb{F} \end{cases}$$

où  $\mathbb{F}$  désigne le gradient de déformation  $\nabla_x \phi_t$ .

Remarque : on peut rapprocher cette situation à la situation classique où  $R_G$  et  $R_C$  représentent les repères liés aux configurations respectivement Lagrangienne et Eulerienne; dans ce cadre, on pourra alors utiliser les techniques habituelles de dérivation.

Par analogie au paragraphe intitulé “invariance Galiléenne”, on peut interpréter la situation ainsi : à tout instant  $t = t'$ , on considère que le mouvement du milieu continu, de vitesse  $\vec{v}$ , définit lui-même, localement et instantanément, une transformation Galiléenne du type (1.14) : pour cela, on pose  $R'_G = R_C(X, t)$  pour tout  $t$ , où  $R_C$  représente alors un repère en co.mouvement lié à l'élément de matière continu; on a donc  $\vec{v} = -\vec{V}$ .

On peut alors escompter que les nouvelles grandeurs induites par ce co.mouvement sont définies par :

$$(1.18) \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{J}}(X, t) = \vec{J}(X, t) - q_f \vec{v} \\ \vec{\mathcal{E}}(X, t) = \vec{E}(X, t) + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}(X, t) \\ \vec{\mathcal{B}}(X, t) = \vec{B}(X, t) - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}(X, t) \\ \vec{\mathcal{H}}(X, t) = \vec{H}(X, t) - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{D}(X, t) \end{array} \right.$$

Sur quelques exemples, on va justifier ces formules en évoquant le principe d'invariance de la forme des équations de Maxwell :

La conservation de la charge électrique se traduit dans le repère  $R_G$  par

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} q(x, t) dx + \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{J}(x, t) \cdot \vec{n} da = 0 .$$

Dans ce contexte,  $R_G$  est un repère de la configuration actuelle. Si on considère  $R_C$  comme un repère Lagrangien, l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  peut être assimilé à un dérivée matérielle (ou particulaire).

Grâce aux formules de transformation (1.17), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D q(X, t) dX + \int_{\partial D} \vec{J}(X, t) \cdot \vec{N} dA = 0 ,$$

$$\text{soit } \int_D \frac{\partial q}{\partial t}(X, t) dX + \int_{\partial D} \vec{J}(X, t) \cdot \vec{N} dA = 0 ,$$

ce qui peut se traduire localement par :

$$(1.19) \frac{\partial q}{\partial t}(X, t) + \text{DIV}_X \vec{J}(X, t) = 0 .$$

On va ici utiliser la notion de dérivée convective :

pour un scalaire  $q$ , la dérivée convective notée  $q^*$  est définie par :

$$(1.20) q^* = \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div}(q\vec{v}) = \dot{q} + q \text{ div } \vec{v} ;$$

pour un vecteur  $\vec{D}$ , la dérivée convective  $\vec{D}^*$  est définie par :

$$(1.21) \vec{D}^* = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{D} \times \vec{v}) + (\text{div} \vec{D})\vec{v} = \dot{\vec{D}} - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{v} + (\text{div } \vec{v})\vec{D} .$$

On a alors

$$\int_D \left[ \dot{q}(X, t) - \text{DIV}_X(\bar{q}\bar{v}(X, t)) \right] dX + \int_{\partial D} \bar{J}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA = 0,$$

$$\text{soit } \int_D \dot{q}(X, t) dX + \int_{\partial D} [\bar{J}(X, t) - \dot{q}(X, t)\bar{v}] \cdot \bar{N} \, dA = 0.$$

On pose alors  $\bar{\mathcal{J}}(X, t) = \bar{J}(X, t) - \dot{q}(X, t)\bar{v}$ , et on obtient :

$$\int_D \dot{q}(X, t) dX + \int_{\partial D} \bar{\mathcal{J}}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA = 0,$$

ce qui peut se traduire par

$$\dot{q}(X, t) + \text{DIV}_X(\bar{\mathcal{J}}(X, t)) = 0.$$

On a ainsi gardé la forme de l'équation traduisant la conservation de la charge électrique.

On procède de la même manière pour la loi d'Ampère. Dans  $R_G$ , on a :

$$\int_{\partial \Sigma} \bar{H}(x, t) \cdot \bar{\mathcal{A}} \, dl - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \bar{D}(x, t) \cdot \bar{n} \, da = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \bar{J}(x, t) \cdot \bar{n} \, da,$$

ce qui donne dans  $R_C$ , en posant  $\sigma$  et  $\partial\sigma$  telles que  $\phi_t(\sigma) = \Sigma$  et  $\phi_t(\partial\sigma) = \partial\Sigma$ ,

$$\int_{\partial\sigma} \bar{H}(X, t) \cdot \bar{\tau} \, dL - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \bar{D}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \bar{J}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA,$$

$$\text{soit } \int_{\partial\sigma} \bar{H}(X, t) \cdot \bar{\tau} \, dL - \frac{1}{c} \int_{\sigma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \bar{J}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA,$$

ce qui se traduit localement par :

$$(1.22) \text{ROT}_X \bar{H}(X, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}(X, t) = \frac{1}{c} \bar{J}(X, t).$$

A l'aide de la dérivée convective  $\dot{\bar{D}}$  de  $\bar{D}$ ,

$$\int_{\partial\sigma} \bar{H}(X, t) \cdot \bar{\tau} \, dL - \frac{1}{c} \int_{\sigma} \left[ \dot{\bar{D}}(X, t) - (\text{DIV}_X \bar{D}(X, t))\bar{v} - \text{Rot}_X(\bar{D}(X, t) \times \bar{v}) \right] \cdot \bar{N} \, dA = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \bar{J}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA$$

$$\int_{\partial\sigma} \left[ \bar{H}(X, t) - \frac{1}{c} \bar{v} \times \bar{D}(X, t) \right] \cdot \bar{\tau} \, dL - \frac{1}{c} \int_{\sigma} \dot{\bar{D}}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \left[ \bar{J}(X, t) - (\text{DIV}_X \bar{D}(X, t))\bar{v} \right] \cdot \bar{N} \, dA$$

On pose alors  $\bar{\mathcal{H}}(X, t) = \bar{H}(X, t) - \frac{1}{c} \bar{v} \times \bar{D}(X, t)$

$$\text{et } \bar{\mathcal{J}}(X, t) = \bar{J}(X, t) - (\text{DIV}_X \bar{D}(X, t))\bar{v}.$$

En remarquant que  $\text{DIV}_X \bar{D}(X, t) = J_r \text{div}_x \bar{D}(x, t) = J_r q_f(x, t) = q(X, t)$ , on peut dire que

$$\int_{\partial\sigma} \bar{\mathcal{H}}(X, t) \cdot \bar{\tau} \, dL - \frac{1}{c} \int_{\sigma} \dot{\bar{D}}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \bar{\mathcal{J}}(X, t) \cdot \bar{N} \, dA,$$

$$\text{soit } \text{ROT}_X \bar{\mathcal{H}}(X, t) - \frac{1}{c} \dot{\bar{D}}(X, t) = \frac{1}{c} \bar{\mathcal{J}}(X, t).$$

Les autres formules du I / 2- peuvent être obtenues de la même façon.

On a réussi à conserver la forme des équations de Maxwell grâce à la notion classique de dérivée convective. Cette dérivée répond au principe d'objectivité, qui est une propriété intéressante que l'on développera au paragraphe I / 3-.

Pour récapituler, l'expression des équations de Maxwell dans un repère  $R_C$  est :

$$(1.23) \begin{cases} \text{ROT}_X \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} = \vec{0} & \text{DIV}_X \vec{B} = 0 \\ \text{ROT}_X \vec{\mathcal{H}} + \frac{1}{c} \dot{\vec{D}} = \frac{1}{c} \vec{\mathcal{J}} & \text{DIV}_X \vec{D} = q_f \end{cases}$$

Remarque : lorsque le matériau est polarisable et /ou magnétisable les grandeurs  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$  sont définies par :

$$\vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{P} \text{ et } \vec{H} = \vec{H}_0 - \vec{M} \text{ où } \vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E} \text{ et } \vec{H}_0 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}.$$

Puisque  $\vec{D}_0$  et  $\vec{H}_0$  représentent respectivement un déplacement électrique et un champ magnétique, leur passage du repère  $R_G$  au repère  $R_C$  est régi par :

$$(1.24) \vec{D}_0(X, t) = J_f \vec{D}_0(x, t) F^{-T} \text{ et } \vec{H}_0(X, t) = \vec{H}_0(x, t) F.$$

## 2-Force, couple et énergie

### 1] Approche par la procédure de Lorentz

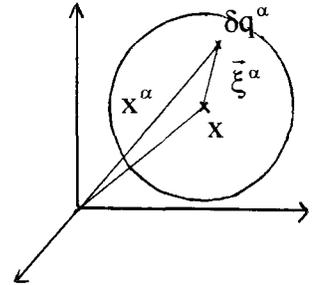
Pour déduire les effets macroscopiques, on applique la procédure dite de Lorentz, qui consiste à considérer un "micro-élément" de volume  $\Delta V$  contenant des charges  $\delta q^\alpha$  (la distance moyenne entre les charges voisines étant suffisamment petite par rapport aux dimensions de  $\Delta V$ ).

Notations :  $x$  est le centre du volume  $\Delta V$ .

:  $\delta q^\alpha$  est une charge ponctuelle contenue dans  $\Delta V$ .

:  $\vec{\xi}^\alpha$  est la coordonnée interne de  $\delta q^\alpha$  dans  $\Delta V$ .

:  $x^\alpha$  est la position moyenne de  $\delta q^\alpha$ .



La vitesse absolue  $\vec{V}^\alpha$  de la charge  $\delta q^\alpha$  est  $\vec{V}^\alpha = \vec{V} + \dot{\vec{\xi}}^\alpha + \vec{V}^\alpha$  avec  $\vec{V} = \dot{\vec{x}}$  où  $\vec{V}^\alpha$  est la vitesse de fluctuation de  $\delta q^\alpha$  due à l'agitation thermique.

Au niveau microscopique, dans un champ électromagnétique, chaque charge  $\delta q^\alpha$  est soumise à la force  $\delta \vec{f}^\alpha$  de Lorentz définie par :

$$(1.25) \delta \vec{f}^\alpha = \delta q^\alpha \left[ \vec{e}(x^\alpha) + \frac{1}{c} \vec{V}^\alpha \times \vec{b}(x^\alpha) \right]$$

où  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  sont les champs électromagnétiques microscopiques évolués en  $x^\alpha$  d'où la résultante des forces :

$$(1.26) \vec{f} \Delta V = \sum_{\alpha} \delta \vec{f}^\alpha,$$

et le moment résultant des forces

$$(1.27) \vec{c} \Delta V = \sum_{\alpha} \vec{x}^\alpha \times \delta \vec{f}^\alpha.$$

On appelle couple pondéromoteur le couple  ${}_M \bar{c}$  défini par :

$$(1.28) \quad {}_M \bar{c} \Delta V = \sum_{\alpha} \bar{\xi}^{\alpha} \times \delta \bar{f}^{\alpha}.$$

L'énergie est notée  ${}_M w$  :

$$(1.29) \quad {}_M w \Delta V = \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \bar{V}^{\alpha} \cdot \bar{e}(\mathbf{x}^{\alpha})$$

On définit les champs macroscopiques comme suit :

$$(1.30) \quad \bar{E}(\mathbf{x}) \equiv \bar{e}(\mathbf{x}) \quad \bar{B}(\mathbf{x}) \equiv \bar{b}(\mathbf{x})$$

$$(1.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la charge libre } q_f \Delta V \equiv \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \\ \text{Dans le repère en co - mouvement,} \\ \text{le moment dipolaire électrique } \bar{P}_i \Delta V \equiv \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \xi_i^{\alpha} \\ \text{le moment quadripolaire électrique } Q_{ij} \Delta V \equiv \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \delta q^{\alpha} \xi_i^{\alpha} \xi_j^{\alpha} \\ \text{le moment dipolaire magnétique } m_i \Delta V \equiv \sum_{\alpha} \frac{1}{2c} \delta q^{\alpha} (\bar{\xi}^{\alpha} \times \dot{\bar{\xi}}^{\alpha})_i \\ \text{le courant de conduction } \mathcal{J}_i \Delta V \equiv \sum_{\alpha} \delta q^{\alpha} \hat{V}_i^{\alpha} \end{array} \right.$$

On note alors

$$(1.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la polarisation effective} \quad P_i \equiv \bar{P}_i - Q_{ij,j} \\ \text{la magnétisation effective} \quad \mathcal{M}_i \equiv m_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} V_{j,p} Q_{kp} \end{array} \right.$$

En écartant le cas des quadripôles, ce qui amène des simplifications, et en effectuant un développement en série de Taylor, on peut démontrer que les expressions de la force  ${}_M \bar{f}$ , du couple pondéromoteur  ${}_M \bar{c}$  et de l'énergie  ${}_M w$  sont de la forme :

$$(1.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_M \bar{f} = q_f \bar{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} (\bar{\mathcal{J}} + \dot{\bar{P}}) \times \bar{B} + (\bar{P} \cdot \nabla) \bar{\mathcal{E}} + (\nabla \bar{B}) \cdot \bar{\mathcal{E}} \\ {}_M \bar{c} = \bar{P} \times \bar{\mathcal{E}} + \bar{\mathcal{E}} \times \bar{B} \\ {}_M w = {}_M \bar{f} \cdot \bar{v} + \rho \bar{\mathcal{E}} \cdot \dot{\bar{\Pi}} - \bar{\mathcal{E}} \cdot \dot{\bar{B}} + \bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{E}} \end{array} \right.$$

où  $\bar{\Pi} = \frac{\bar{P}}{\rho}$  est la polarisation par unité de masse.

Pour toute précision, on peut consulter les travaux de G.A.MAUGIN [1988], pages 170 à 174.

## 2] Approche formelle

Comme il a été précisé auparavant, la procédure de Lorentz nécessite des développements en série de Taylor suivis d'approximations pour déterminer les expressions de  ${}_M \vec{f}$ ,  ${}_M \vec{c}$  et  ${}_M w$ . Il est clair que l'objectif de ce travail étant de mettre à profit certaines propriétés dues à la non linéarisation des équations du mouvement, il n'est pas possible de se baser sur cette procédure. Il s'agit donc de proposer une autre approche qui évite toute approximation. Ainsi dans ce paragraphe, il sera redéfini les notions de force, couple et énergie par une approche formelle exposée dans un article de C. TRUESDELL et R. TOUPIN, les expressions des différentes notions alors mises en évidence pouvant être considérées comme des notions premières :

- la variation dans le temps du vecteur quantité de mouvement  $\vec{G} = \frac{1}{c} \vec{D}_o \times \vec{B}$  fait apparaître l'expression de la force  ${}_M \vec{f}$  ainsi qu'un tenseur de contrainte, noté  ${}_M t$ , que l'on identifiera,
- la variation dans le temps de l'énergie  ${}_M u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D}_o + \vec{B} \cdot \vec{H}_o)$  fait apparaître l'expression d'une énergie  ${}_M w$  ainsi que le vecteur de Poynting  $\vec{S} = c \vec{E} \times \vec{H}$ .

Dans un premier temps on présente la méthode dans le repère Galiléen de référence  $R_G$  en s'intéressant à un milieu ni polarisé, ni magnétisé. Puis on effectue les calculs dans le repère en co.mouvement  $R_C$  en considérant tout de suite le cas d'un matériau polarisable et/ou magnétisable.

## a. Dans un repère Galiléen

Dans le repère Galiléen  $R_G$  de référence, si le milieu n'est ni polarisé, ni magnétisé, expérimentalement il est établi que  $\vec{D}_o = \epsilon_o \vec{E}$  et  $\vec{H}_o = \frac{1}{\mu_o} \vec{B}$ , soit  $\vec{D}_o = \vec{E}$  et  $\vec{H}_o = \vec{B}$

lorsque l'on se place dans un système adapté. On définit la quantité de mouvement électromagnétique par le vecteur  $\vec{G} = \vec{D}_o \times \vec{B}$ .

D'après les équations de Maxwell (1.13), on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \vec{G}(x, t) dx = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial \vec{D}_o}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{D}_o \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dx = \int_{\mathcal{D}} \left( \text{Rot } \vec{H}_o \times \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} + \text{Rot } \vec{E} \times \vec{D}_o \right) dx.$$

On définit le tenseur  ${}_F t$  par :

$$(1.34) {}_F t^{ij} = E^i D_o^j + H_o^i B^j - \frac{1}{2} (\vec{D}_o \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}_o) \delta^{ij}.$$

$$\int_{\partial \mathcal{D}} {}_F t^{ij} n^j da = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\partial E^i}{\partial x^j} D_o^j + E^i \frac{\partial D_o^j}{\partial x^j} + \frac{\partial H_o^i}{\partial x^j} B^j + H_o^i \frac{\partial B^j}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial D_o^k}{\partial x^i} E^k + D_o^k \frac{\partial E^k}{\partial x^i} + \frac{\partial B^k}{\partial x^i} H_o^k + B^k \frac{\partial H_o^k}{\partial x^i} \right) \right\} dx.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} G^i dx - \int_{\partial \mathcal{D}} {}_F t^{ij} n^j da &= - \int_{\mathcal{D}} \left( q_f E^i + \frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B})^i \right) dx \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \left\{ (\text{Rot } \vec{H}_o \times \vec{B})^i - B^j \frac{\partial H_o^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial B^k}{\partial x^i} H_o^k + \frac{1}{2} B^k \frac{\partial H_o^k}{\partial x^i} \right\} dx \end{aligned}$$

$$+ \int_{\mathcal{D}} \left\{ (\text{Rot } \vec{E} \times \vec{D}_o)^i - D_o^j \frac{\partial E^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial D_o^k}{\partial x^i} E^k + \frac{1}{2} D_o^k \frac{\partial E^k}{\partial x^i} \right\} dx.$$

Or on peut établir facilement que si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux champs de vecteurs différentiables, on a :

$$(1.35) (\text{Rot } \vec{u} \times \vec{v})^i - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} u^k + \frac{1}{2} v^k \frac{\partial u^k}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \left( v^k \frac{\partial u^k}{\partial x^i} - \frac{\partial v^k}{\partial x^i} u^k \right).$$

Puisque de plus on a  $\vec{D}_o = \vec{E}$  et  $\vec{H}_o = \vec{B}$ , les deux dernières intégrales sont nulles et :

$$(1.36) \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} G^i dx - \int_{\partial \mathcal{D}} t^{ij} n^j da = - \int_{\mathcal{D}} \left( q_f E^i + \frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B})^i \right) dx.$$

Cette égalité a la forme d'une équation d'équilibre. On y reconnaît  ${}_M \vec{f} = q_f \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$  qui est le siège de la transformation d'une force électromagnétique en une force mécanique. La formule (1.36) traduit que le flux du tenseur électromagnétique  ${}_F t$  est égal à la variation dans le temps du vecteur quantité de mouvement  $\vec{G}$  additionné à la force  ${}_M \vec{f}$ .

De même, on calcule la variation de l'énergie  ${}_M u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D}_o + \vec{B} \cdot \vec{H}_o)$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} {}_M u dx = \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{D}_o + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}_o}{\partial t} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H}_o + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{H}_o}{\partial t} \right) \right) dx,$$

$$\text{or } \vec{D}_o \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_o \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial (\epsilon_o \vec{E})}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}_o}{\partial t} \quad \text{et de même } \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{H}_o}{\partial t} = \vec{H}_o \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} {}_M u dx &= \int_{\mathcal{D}} \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}_o}{\partial t} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H}_o \right) dx = \int_{\mathcal{D}} \left\{ (c \text{Rot } \vec{H}_o - \vec{J}) \cdot \vec{E} - c \text{Rot } \vec{E} \cdot \vec{H}_o \right\} dx \\ &= c \int_{\mathcal{D}} (\text{Rot } \vec{H}_o \cdot \vec{E} - \text{Rot } \vec{E} \cdot \vec{H}_o) dx - \int_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \vec{E} dx. \end{aligned}$$

D'après la formule

$$(1.37) \text{Rot } \vec{u} \cdot \vec{v} - \text{Rot } \vec{v} \cdot \vec{u} = \text{Div } (\vec{u} \times \vec{v}),$$

on peut écrire :

$$(1.38) \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} {}_M u dx = - \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{S} \cdot \vec{n} da - \int_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \vec{E} dx.$$

On remarque que la puissance perdue  $-\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} {}_M u dx$  dans le volume  $\mathcal{D}$  correspond à la

puissance rayonnée à travers la surface fermée  $\partial \mathcal{D}$ . La formule (1.38) traduit alors que la puissance électromagnétique rayonnée à travers  $\partial \mathcal{D}$  est égale au flux sortant à travers  $\partial \mathcal{D}$  du vecteur de Poynting  $\vec{S} = c \vec{E} \times \vec{H}$  additionné de la puissance dissipée par effet

Joule  $\int_{\mathcal{D}} \vec{J} \cdot \vec{E} dx$ .

b. Dans le repère en co.mouvement  $R_C$

On suppose maintenant que le milieu est polarisable et/ou magnétisable : le déplacement électrique  $\vec{D}$  et le champ magnétique  $\vec{H}$  sont alors définis par :

$$\vec{D} = \vec{D}_o + \vec{P} \text{ et } \vec{H} = \vec{H}_o - \vec{M}.$$

On veut exprimer les relations analogues à (1.36) et (1.38) dans le repère  $R_C$ .

Grâce aux relations (1.24), on peut affirmer que :

$$\int_{\mathcal{D}} G^i(x, t) dx = \int_{\mathcal{D}} G^i(X, t) dX \text{ et } \int_{\mathcal{M}} u(x, t) dx = \int_{\mathcal{M}} u(X, t) dX$$

Calcul relatif à la force électromagnétique :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} G^i(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} G^i(X, t) dX = \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial G^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X^j} (G^i v^j) \right) dX \\ &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial X^j} (G^i v^j) dX + \frac{1}{c} \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)^i dX - \frac{1}{c} \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{P} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)^i dX \end{aligned}$$

$$\text{d'après (1.22), } \text{ROT}_X \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{J},$$

et la formule équivalente concernant le champ électrique et l'induction magnétique est

$$\text{ROT}_X \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}.$$

Si on introduit le tenseur intermédiaire

$${}_F \bar{t}^{ij} = E^i D^j + H^i B^j - \frac{1}{2} (\vec{D}_o \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}_o) \delta^{ij} = {}_F t^{ij} + E^i P^j - M^i B^j.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} G^i dX &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial ({}_F \bar{t}^{ij} + G^i v^j)}{\partial X^j} dX \\ &= - \int_{\mathcal{D}} \left( q_f E^i + \frac{1}{c} (\vec{J} \times \vec{B})^i \right) dX - \frac{1}{c} \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \times \vec{B} + c \text{ROT } \vec{E} \times \vec{P} \right)^i dX \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \left\{ (\text{ROT } \vec{H} \times \vec{B})^i - B^j \frac{\partial H^j}{\partial X^i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B^k}{\partial X^i} H_o^k + B^k \frac{\partial H_o^k}{\partial X^i} \right) \right\} dX \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \left\{ (\text{ROT } \vec{E} \times \vec{D})^i - D^j \frac{\partial E^j}{\partial X^i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial D_o^k}{\partial X^i} E^k + D_o^k \frac{\partial E^k}{\partial X^i} \right) \right\} dX \\ &= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ q_f E^i + \frac{1}{c} \left[ \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \right]^i + (\text{ROT } \vec{E} \times \vec{P})^i \right\} dX + \int_{\mathcal{D}} \left\{ (-\text{ROT } \vec{M} \times \vec{B})^i + B^j \frac{\partial M^i}{\partial X^j} \right\} dX \\ &+ \int_{\mathcal{D}} \left\{ (\text{ROT } \vec{E} \times \vec{P})^i - P^j \frac{\partial E^i}{\partial X^j} \right\} dX \\ &= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ q_f E^i + \frac{1}{c} \left[ \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{ROT } \vec{M} \right) \times \vec{B} \right]^i + P^j \frac{\partial E^i}{\partial X^j} - B^j \frac{\partial M^i}{\partial X^j} \right\} dX. \end{aligned}$$

On définit maintenant le tenseur  ${}_M t$  par :

$$(1.39) \quad {}_M t^{ij} = E^i D_o^j + H_o^i B^j + \mathcal{E}^i P^j - \mathcal{H}^i B^j - \frac{1}{2} (\bar{D}_o \cdot \bar{E} + \bar{B} \cdot \bar{H}_o - 2 \mathcal{H} \cdot \bar{B}) \delta^{ij},$$

$$\text{soit } {}_M t^{ij} = {}_F \bar{t}^{ij} + \frac{1}{c} (\bar{v} \times \bar{B})^i P^j - \frac{1}{c} (\bar{v} \times \bar{P})^i B^j + \mathcal{H}^k B^k \delta^{ij}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_D G^i dX - \int_D \frac{\partial ({}_M t^{ij} + G^i v^j)}{\partial X^j} dX \\ &= - \int_D \left\{ q_f E^i + \frac{1}{c} \left[ \left( \bar{J} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + c \text{Rot } \bar{M} \right) \times \bar{B} \right]^i + P^j \frac{\partial E^i}{\partial X^j} - B^j \frac{\partial M^i}{\partial X^j} \right\} dX \\ & - \frac{1}{c} \int_D \left\{ \frac{\partial (\bar{v} \times \bar{B})^i}{\partial X^j} P^j + (\bar{v} \times \bar{B})^i \frac{\partial P^j}{\partial X^j} - \frac{\partial (\bar{v} \times \bar{P})^i}{\partial X^j} B^j - (\bar{v} \times \bar{P})^i \frac{\partial B^j}{\partial X^j} + c \frac{\partial \mathcal{H}^k}{\partial X^i} B^k + c \mathcal{H}^k \frac{\partial B^k}{\partial X^i} \right\} dX \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^j}{\partial X^j} = 0 & \quad : \quad -B^j \frac{\partial M^i}{\partial X^j} - \frac{1}{c} B^j \frac{\partial (\bar{v} \times \bar{P})^i}{\partial X^j} = -B^j \frac{\partial \mathcal{H}^i}{\partial X^j} \\ q_f E^i + \frac{1}{c} (\bar{J} \times \bar{B})^i = q_f \mathcal{E}^i + \frac{1}{c} (\bar{\mathcal{J}} \times \bar{B})^i & \quad : \quad (\text{ROT } \bar{M} \times \bar{B})^i = (\text{ROT } \mathcal{H} \times \bar{B})^i \\ & \quad : \quad + \frac{1}{c} (\text{ROT}(\bar{v} \times \bar{P}) \times \bar{B})^i \\ P^j \frac{\partial E^i}{\partial X^j} + \frac{1}{c} P^j \frac{\partial (\bar{v} \times \bar{B})^i}{\partial X^j} = P^j \frac{\partial \mathcal{E}^i}{\partial X^j} & \quad : \quad \left( \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \times \bar{B} \right)^i - (\text{ROT}(\bar{v} \times \bar{P}) \times \bar{B})^i \\ & \quad : \quad + ((\bar{v} \times \bar{B}) \text{DIV } \bar{P})^i = \left( \bar{P} \times \bar{B} \right)^i \end{aligned}$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_D G^i dX - \int_D \frac{\partial ({}_M t^{ij} + G^i v^j)}{\partial X^j} dX \\ &= - \int_D \left\{ q_f \mathcal{E}^i + \frac{1}{c} \left[ \left( \bar{\mathcal{J}} + \bar{P} + c \text{ROT } \mathcal{H} \right) \times \bar{B} \right]^i + P^j \frac{\partial \mathcal{E}^i}{\partial X^j} - B^j \frac{\partial \mathcal{H}^i}{\partial X^j} + \frac{\partial \mathcal{H}^k}{\partial X^i} B^k \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{H}^k \frac{\partial B^k}{\partial X^i} \right\} dX, \end{aligned}$$

$$\text{or } (\text{ROT } \mathcal{H} \times \bar{B})^i = B^j \frac{\partial \mathcal{H}^i}{\partial X^j} - B^j \frac{\partial \mathcal{H}^j}{\partial X^i}, \text{ d'où on a :}$$

$$(1.40) \quad \frac{d}{dt} \int_D \bar{G} dX - \int_{\partial D} ({}_M t + \bar{G} \otimes \bar{v}) \cdot \bar{N} dA = - \int_D \bar{f} dX,$$

$$\text{où } \bar{f} = q_f \bar{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \left( \bar{\mathcal{J}} + \bar{P} \right) \times \bar{B} + (\bar{P} \cdot \nabla) \bar{\mathcal{E}} + (\nabla \bar{B}) \cdot \mathcal{H}.$$

Calcul relatif à l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} {}_M u(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_D {}_M u(X, t) dX = \int_D \left( \frac{\partial {}_M u}{\partial t} + \frac{\partial ({}_M uv^j)}{\partial X^j} \right) dX \\ &= \int_D \frac{\partial ({}_M uv^j)}{\partial X^j} dX + \int_D \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}_o + \vec{B} \cdot \vec{H}_o) dX . \end{aligned}$$

A l'aide d'une justification analogue à celle du paragraphe II / 2- 2] a., on a :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_D {}_M u dX \\ &= \int_D \frac{\partial ({}_M uv^j)}{\partial X^j} dX + \int_D \left( \frac{\partial \vec{D}_o}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H}_o \right) dX \\ &= \int_D \frac{\partial ({}_M uv^j)}{\partial X^j} dX + \int_D \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \vec{M} \right) dX \\ &= \int_D \frac{\partial ({}_M uv^j)}{\partial X^j} dX + \int_D \left\{ (c \text{ ROT } \vec{H} \cdot \vec{E} - \vec{J}) \cdot \vec{E} - c \text{ ROT } \vec{E} \cdot \vec{H} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{M} \right\} dX \\ &= \int_D \frac{\partial \left[ ({}_M u + \vec{E} \cdot \vec{P}) v^j - c (\vec{E} \times \vec{H})^j \right]}{\partial X^j} dX - \int_D \left\{ \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{M} + \text{DIV}[(\vec{E} \cdot \vec{P}) \vec{V}] \right\} dX , \end{aligned}$$

où  $c \vec{E} \times \vec{H}$  désigne le vecteur de Poynting  $\vec{S}$ .

On veut maintenant démontrer que cette égalité peut s'écrire sous la forme :

$$(1.41) \quad \frac{d}{dt} \int_D {}_M u dX - \int_{\partial D} \left\{ ({}_M t + \vec{G} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{v} - \vec{S} \right\} \cdot \vec{N} dA = - \int_D {}_M w dX ,$$

où  ${}_M w = {}_M \vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} - c \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{B} + \rho \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\Pi}$  et

$$(1.42) \quad \vec{S} = c \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} .$$

Pour cela, on démontre dans un premier temps que :

$$\vec{S} = \vec{S} + [{}_M t + \vec{G} \otimes \vec{v} - (u + \vec{E} \cdot \vec{P}) \mathbf{1}] \cdot \vec{v} ,$$

et dans un second temps que :

$$\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{M} + \text{DIV}[(\vec{E} \cdot \vec{P}) \vec{V}] = {}_M w .$$

$$* \vec{S} = c \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} = c (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}) \times (\vec{H} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{D})$$

$$\vec{S} = c \vec{E} \times \vec{H} - \vec{E} \times (\vec{v} \times \vec{D}) + (\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{H} - \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \times (\vec{v} \times \vec{D})$$

$$\vec{S} = \vec{S} + (\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{D} - (\vec{D} \cdot \vec{E}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{H}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{H}) \vec{v} - \frac{1}{c} [(\vec{D} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})) \vec{v} - (\vec{v} (\vec{v} \times \vec{B})) \vec{D}]$$

$$\vec{S} = \vec{S} + [\vec{E} \otimes \vec{D} - \vec{D} \cdot \vec{E} \mathbf{1} + \vec{H} \otimes \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{H} \mathbf{1}] \cdot \vec{v} - \frac{1}{c} [\vec{D} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})] \vec{v}$$

$$\vec{S} = \vec{S} + [\vec{E} \otimes \vec{D}_o + \vec{E} \otimes \vec{P} - \vec{D}_o \cdot \vec{E} \mathbf{1} - \vec{P} \cdot \vec{E} \mathbf{1} + \vec{H}_o \otimes \vec{B} - \vec{M} \otimes \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{H}_o \mathbf{1} + \vec{B} \cdot \vec{H} \mathbf{1}] \\ - \frac{1}{c} [\vec{D} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})] \vec{v}$$

$$\vec{S} = \vec{S} + {}_M t \cdot \vec{v} - (\vec{E} \cdot \vec{P} + u) \vec{v} - \frac{1}{c} [(\vec{v} \times \vec{B}) \otimes \vec{P}] \cdot \vec{v} + \frac{1}{c} [(\vec{v} \times \vec{B}) \otimes \vec{B}] \cdot \vec{v} - \frac{1}{c} [\vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{P})] \vec{v} \\ - \frac{1}{c} [\vec{D} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})] \vec{v} ,$$

$$\begin{aligned} \text{or } [(\vec{v} \times \vec{B}) \otimes \vec{P}] \cdot \vec{v} &= [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}] \vec{P} = \vec{0} ; \text{ de même } [(\vec{v} \times \vec{B}) \otimes \vec{B}] \cdot \vec{v} = \vec{0}, \\ -[\vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{P})] \vec{v} - [\vec{D} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})] \vec{v} &= [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{P}] \vec{v} - [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{D}] \vec{v} = -[(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{D}_o] \vec{v} \\ &= [(\vec{D}_o \times \vec{B}) \cdot \vec{v}] \vec{v} = [\vec{G} \otimes \vec{v}] \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Donc

$$\vec{S} = \vec{S}_{+M} t \cdot \vec{v} - (\vec{E} \cdot \vec{P}_{+M} u) \vec{v} + [\vec{G} \otimes \vec{v}] \cdot \vec{v}, \text{ d'où le premier résultat.}$$

$$\begin{aligned} * \quad \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{M} + \text{DIV}[(\vec{E} \cdot \vec{P}) \vec{v}] \\ = (\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\mathcal{J}} + q_f \vec{v} \cdot \vec{\mathcal{E}}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{P}) \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{DIV}[(\vec{E} \cdot \vec{P}) \vec{v}] \\ = (q_f \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \vec{\mathcal{J}} \times \vec{B} + \text{Rot } \vec{E} \times \vec{P}) \cdot \vec{v} + \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \mathcal{E} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{DIV}[(\vec{E} \cdot \vec{P}) \vec{v}] \\ = (q_f \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \vec{\mathcal{J}} \times \vec{B} + (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} - (\nabla \vec{E}) \cdot \vec{P}) \cdot \vec{v} + \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \mathcal{E} \cdot \dot{\vec{B}} + \mathcal{E} \cdot [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}] \\ + \text{DIV}[(\vec{E} \cdot \vec{P}) \vec{v}] \\ = (q_f \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \vec{\mathcal{J}} \times \vec{B} + (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} - (\nabla \vec{B}) \cdot \mathcal{E}) \cdot \vec{v} - \frac{1}{c} [(\vec{P} \cdot \nabla)(\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \vec{v} - [(\nabla \vec{E}) \cdot \vec{P}] \cdot \vec{v} \\ + \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \mathcal{E} \cdot \dot{\vec{B}} + \text{DIV}[(\vec{E} \cdot \vec{P}) \vec{v}] \\ = {}_M \vec{f} \cdot \vec{v} - \frac{1}{c} (\vec{P} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} - \frac{1}{c} [(\vec{P} \cdot \nabla)(\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \vec{v} - [(\nabla \vec{E}) \cdot \vec{P}] \cdot \vec{v} + [(\nabla \vec{E}) \cdot \vec{P}] \cdot \vec{v} + [(\nabla \vec{P}) \cdot \vec{E}] \cdot \vec{v} \\ + (\vec{E} \cdot \vec{P}) \text{DIV} \vec{v} + \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \mathcal{E} \cdot \dot{\vec{B}}, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot \vec{E} + [(\vec{P} \cdot \nabla) \vec{v}] \cdot \vec{\mathcal{E}} &= \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} + [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{P}] \cdot \vec{E} - [(\vec{P} \cdot \nabla) \vec{v}] \cdot \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{P}) \text{DIV} \vec{v} + \frac{1}{c} \vec{P} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \\ &+ [(\vec{P} \cdot \nabla) \vec{v}] \cdot \vec{E} + [(\vec{P} \cdot \nabla) \vec{v}] \cdot (\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}), \end{aligned}$$

et  $[(\vec{P} \cdot \nabla) \vec{v}] \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -[(\vec{P} \cdot \nabla)(\vec{v} \times \vec{B})] \cdot \vec{v}$ , ainsi que

$$[(\nabla \vec{P}) \cdot \vec{E}] \cdot \vec{v} = [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{P}] \cdot \vec{E}.$$

L'expression est alors égale à :

$${}_M \vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} - \mathcal{E} \cdot \dot{\vec{B}} + \vec{P} \cdot \vec{\mathcal{E}} + [(\vec{P} \cdot \nabla) \vec{v}] \cdot \vec{\mathcal{E}}.$$

Or on a la relation :

$$(1.43) \quad \vec{P} + (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{\Pi}.$$

$$\text{En effet } \rho \dot{\vec{\Pi}} = \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{P}}{\rho} \right) = \dot{\vec{P}} + \text{DIV}_x \vec{v} \vec{P} = \dot{\vec{P}} + (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{v}.$$

D'où le second résultat est établi.

Les relations traduisant la variation de la quantité de mouvement  $\vec{G} = \frac{1}{c} \vec{D}_o \times \vec{B}$  et de l'énergie  ${}_M u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D}_o + \vec{B} \cdot \vec{H}_o)$  par rapport au temps dans le repère  $R_C$  contiennent

bien les expressions de la force  ${}_M \vec{f}$  et de l'énergie  ${}_M w$  définies précédemment par la procédure de Lorentz. Elles mettent en évidence le célèbre vecteur de Poynting  $\vec{S} = c \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$  et un tenseur noté  ${}_M t$  qui est défini par B.COLLET et G.A.MAUGIN [1974] (1). On peut remarquer que ces égalités ont la forme d'équations de l'équilibre. Le tenseur  ${}_M t$  est alors interprété comme un tenseur de contraintes d'origine électromagnétique. Celui-ci se décompose en deux tenseurs :

$$(1.44) \quad {}_M \vec{t}^{ij} = \mathcal{E}^i P^j - \mathcal{H}^i B^j + \mathcal{H}^i \cdot \vec{B} \delta^{ij}, \text{ et}$$

$$(1.45) \quad {}_F t = E^i D_o^j + H_o^i B^j - \frac{1}{2} (\vec{D}_o \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}_o) \delta^{ij}, \text{ avec}$$

$$(1.46) \quad {}_M t = {}_M \vec{t} + {}_F t.$$

En se remémorant que  $\vec{D}_o = \epsilon_o \vec{E}$  et  $\vec{H}_o = \frac{1}{\mu_o} \vec{B}$ , il est clair que le tenseur  ${}_F t$  est symétrique.

Il reste à définir de façon formelle le couple pondéromoteur  ${}_M \vec{c}$  :

$$(1.47) \quad {}_M c^i = \epsilon^{ijk} {}_M t^{kj}.$$

on a :

$${}_M c^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} ({}_M t^{kj} - {}_M t^{jk}),$$

or les tenseurs  ${}_F t$  et  $(\mathcal{H} \cdot \vec{B})$  1 composants  ${}_M t$  sont symétriques, d'où il reste :

$${}_M c^i = \epsilon^{ijk} (\mathcal{E}^k P^j - \mathcal{H}^k B^j),$$

$$\text{soit } {}_M \vec{c} = \vec{P} \times \vec{\mathcal{E}} + \mathcal{H} \times \vec{B}.$$

Le vecteur  ${}_M \vec{c}$  défini par (1.47) correspond bien au couple pondéromoteur déterminé précédemment par la relation (1.33)<sub>2</sub>. Pour mettre en évidence la notion de couple du vecteur  ${}_M \vec{c}$ , on énonce :

$$(1.48) \quad \frac{d}{dt} \int_D \vec{X} \times \vec{G} dX = - \int_D (\vec{X} \times {}_M \vec{f} + {}_M \vec{c}) dX + \int_{\partial D} \left\{ \vec{X} \times [({}_M t + \vec{G} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{N}] \right\} dA.$$

Effectivement, cette égalité s'interprète comme les équations d'équilibre des moments des forces électromagnétiques.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D (\vec{X} \times \vec{G})^i dX &= \int_D \left\{ \frac{\partial (\vec{X} \times \vec{G})^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X^j} [(\vec{X} \times \vec{G})^i v^j] \right\} dX \\ &= \int_D \left( \vec{X} \times \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \right)^i dX + \int_D [(\vec{X} \times \vec{G})^i v^j N^j] dX, \end{aligned}$$

$$\text{or } (\vec{X} \times \vec{G})^i v^j N^j = \epsilon^{ikl} X^k G^l v^j N^j = \epsilon^{ikl} X^k [(\vec{G} \otimes \vec{v}) \vec{N}]^l = \left\{ \vec{X} \times [(\vec{G} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{N}] \right\}^i,$$

$$\text{et } \left( \vec{X} \times \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \right)^i = -\epsilon^{ijk} X^j {}_M f^k + \epsilon^{ijk} X^j \frac{\partial {}_M t^{kl}}{\partial X^l}$$

$$= -(\vec{X} \times {}_M \vec{f})^i + \frac{\partial}{\partial X^l} (\epsilon^{ijk} X^j {}_M t^{kl}) - \epsilon^{ilk} {}_M t^{kl}$$

$$= -(\vec{X} \times {}_M \vec{f})^i + \frac{\partial}{\partial X^l} (\epsilon^{ijk} X^j {}_M t^{kl}) - {}_M c^i \quad ; \text{ d'où le résultat.}$$

### 3] Principe d'objectivité

La description des quantités physiques associées au mouvement d'un corps dépend en général du choix de l'observateur. On se propose de distinguer les champs de tenseurs, vecteurs ou scalaires qui dépendent intrinsèquement de l'observateur de ceux qui en sont, par essence, indépendants. Ces derniers seront appelés champs objectifs.

Certaines quantités telles que  $q(x,t)$ ,  $\vec{J}(x,t)$ ,  $\vec{E}(x,t)$ ,  $\vec{D}(x,t)$ ,  $\vec{B}(x,t)$  et  $\vec{H}(x,t)$  sont supposées objectives (de façon naturelle). Cette propriété était sous-entendu lorsque l'on a énoncé les formules (1.17)<sub>1</sub> à (1.17)<sub>6</sub> régissant le changement de repère. Il s'agit donc ici d'étudier les quantités définies par la procédure de Lorentz telles que  $\vec{P}(x,t)$ ,  $\mathcal{E}(x,t)$ ,  $\vec{\mathcal{G}}(x,t)$ ,  ${}_M \vec{f}$  et  ${}_M \vec{c}$ .

On appelle changement d'observateur une transformation  $(x,t) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{t})$  définie par

$$(1.49) \begin{cases} \tilde{x} = Q(t)x + c(t) \\ \tilde{t} = t - t_0 \end{cases} \quad \text{où pour tout } t, Q(t) \in SO(3) \text{ et } c(t) \in \mathbb{R}^3$$

La charge libre  $q_f$  est, de façon évidente, un champ objectif (Lagrangien).

On note  $\tilde{R}_0$  le nouveau repère.

On a les relations suivantes :

$$(1.50) \quad \tilde{\xi}^\alpha = Q(t)\bar{\xi}^\alpha, \quad \delta\tilde{q}^\alpha = \delta q^\alpha, \quad \Delta\tilde{V} = \Delta V.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Le vecteur moment dipolaire électrique vérifie alors } \tilde{\vec{P}}\Delta\tilde{V} = Q(t)(\vec{P}\Delta V) \\ \text{Le tenseur moment quadripolaire électrique } \tilde{Q}\Delta\tilde{V} = Q(t)(Q\Delta V)Q^T(t) \\ \text{Le vecteur de fluctuation de vitesse } \tilde{\vec{V}}^\alpha = Q(t)\vec{V}^\alpha \\ \text{Le vecteur courant de conduction } \tilde{\vec{\mathcal{A}}}\Delta\tilde{V} = Q(t)\vec{\mathcal{A}}\Delta V \end{array} \right\} (1.51)$$

Les égalités étant triviales, on peut affirmer que ces quantités sont des champs objectifs (Euleriens)

Puisque l'on a l'égalité  $\tilde{Q}_{ij,j} = Q_{il}(t)Q_{lj}$ , on peut dire de même quant au vecteur  $\vec{P}$  de polarisation effective.

Par contre, le moment dipolaire magnétique  $\vec{m}$  dépend intrinsèquement de l'observateur, ceci étant dû à la présence dans son expression de la dérivée matérielle par rapport au temps.

Pour le vecteur magnétisation effective, on doit introduire une nouvelle forme :

$$(1.52) \quad \mathcal{E}_i \Delta V = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha} \delta q^\alpha \left[ \vec{\xi}^\alpha \times (D_J \vec{\xi}^\alpha) \right]_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} d_{jp} Q_{kp} \Delta V,$$

$$\text{où } (1.53) \quad (D_J \vec{\xi}^\alpha)_i = \dot{\xi}_i^\alpha - v_{[ij]} \xi_j^\alpha \text{ et } d_{jp} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x^p} + \frac{\partial v_p}{\partial x^j} \right)$$

On veut démontrer que la nouvelle dérivée  $D_J$  est objective, ainsi on pourra conclure à l'objectivité du vecteur  $\mathcal{E}$ .

On rappelle que :

$$\tilde{v}_i = \frac{\partial Q_{il}}{\partial t} \phi_l + Q_{il} v_l; \quad \tilde{d}_{jp} = Q_{jk} d_{kl} (Q^T)_{lp} \text{ et } \tilde{v}_{[ij]} = Q_{ik} v_{[k,l]} (Q^T)_{lj} + \frac{\partial Q_{il}}{\partial t} (Q^T)_{lj}.$$

Ainsi, on a alors :

$$\begin{aligned} \left( D_j \tilde{\xi}^\alpha \right)_i &= \dot{\tilde{\xi}}_i^\alpha - \tilde{v}_{[ij]} \tilde{\xi}_j^\alpha \\ &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial t} \xi_j^\alpha + Q_{ij} \dot{\xi}_j^\alpha - Q_{ik} v_{[kl]} (Q^T)_{lj} Q_{jm} \xi_m^\alpha - \frac{\partial Q_{il}}{\partial t} (Q^T)_{lj} Q_{jm} \xi_m^\alpha \\ &= Q_{ij} \left( D_j \bar{\xi}^\alpha \right)_i, \quad \text{d'où le résultat.} \end{aligned}$$

Puisque l'on se place dans un cadre non relativiste,  $\frac{|\vec{v}|}{c} \ll 1$ . On note  $O(|\vec{v}|) = \varepsilon O(c)$  où  $\varepsilon$  est un paramètre très petit proche de zéro. En effectuant un développement en série de Taylor et en retenant au plus les termes d'ordre  $\varepsilon^2$ , on admettra que la force de Lorentz appliquée à la charge  $\delta q^\alpha$  vérifie :

$$(1.54) \delta \tilde{f}^\alpha = Q(t) \delta \bar{f}^\alpha.$$

D'où la relation pour le couple pondéromoteur  ${}_M \bar{c}$  :

$$(1.55) {}_M \tilde{c} \Delta \tilde{V} = Q(t) [{}_M \bar{c} \Delta V].$$

On ne cherchera pas à conclure quant au scalaire  ${}_M w$  représentant une énergie, celui-ci sera en fait remanié lorsque l'on énoncera le 2<sup>nd</sup> principe de la thermodynamique dans le chapitre 2.

On remarque finalement que l'opérateur dérivée convective vérifie bien le principe d'objectivité :

si un champ de vecteurs  $\bar{B}$  vérifie  $\tilde{B} = Q\bar{B}$ , alors  $\tilde{B}^* = Q\bar{B}^*$ .

En effet :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i^* &= \dot{\tilde{B}}_i - \tilde{B}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}^j} + \tilde{B}_i \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \tilde{x}^k} \\ &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial t} B_j + Q_{ij} \dot{B}_j - Q_{jk} B_k \left[ Q_{il} \frac{\partial v_l}{\partial x^m} (Q^T)_{mj} + \frac{\partial Q_{il}}{\partial t} (Q^T)_{lj} \right] + Q_{ij} B_j \frac{\partial v_k}{\partial x^k} \\ &= Q_{ij} \dot{B}_j - Q_{il} B_k \frac{\partial v_l}{\partial x^k} + Q_{ij} B_j \frac{\partial v_k}{\partial x^k} \\ &= Q_{ij} \bar{B}_i^*. \end{aligned}$$

## CHAPITRE 2 :

Dans ce chapitre sont rappelées les lois de l'équilibre en électromagnétisme des milieux continus : l'équilibre des forces, l'équilibre des moments des forces, la conservation de l'énergie et le second principe de la thermodynamique. Il est mis en évidence deux formulations Eulériennes possibles de ces équations. La seconde répondant au principe d'objectivité est alors retranscrite dans la configuration Lagrangienne en ne considérant que le cas des diélectriques non magnétisables. Dans l'hypothèse du choix des variables indépendantes  $(F, \vec{\Pi}, \vec{B}, \theta)$ , l'inégalité de Clausius-Duhem apporte certaines restrictions : les lois de comportement. Bien entendu, celles-ci amènent à restreindre dans le cas des diélectriques non magnétisables le système de variables à  $(F, \vec{\Pi}, \theta)$ . Puis dans le cadre d'une évolution adiabatique, il est proposé pour les matériaux isotropes et homogènes une linéarisation des équations. On pourra constater que dans ce cadre seul le cas d'une polarisation initiale non nulle est intéressante.

### I / LOIS D'EQUILIBRE EN ELECTRODYNAMISME DU CONTINU

En respectant les notations du chapitre 1, on considère un corps matériel  $\Omega$  plongé dans un champ électromagnétique. Les hypothèses sous lesquelles les lois d'équilibre seront énoncées sont les suivantes :

- (i) il existe différentes contributions d'origine électromagnétique définies dans le paragraphe II / du chapitre 1 :
- une densité de force volumique  ${}_M \vec{f}$  définie sur  $\Omega$
  - un couple pondéromoteur  ${}_M \vec{c}$  définie sur  $\Omega$
  - une densité d'énergie volumique  ${}_M w$  définie sur  $\Omega$
  - une densité de force surfacique  ${}_M \vec{t}_{(n)}$  définie sur  $\partial\Omega$
- (ii) le corps est aussi soumis à des contraintes purement mécaniques :
- une densité de force volumique  $\vec{f}$  définie sur  $\Omega$
  - une densité de force surfacique  $\vec{t}_{(n)}$  définie sur  $\partial\Omega$
  - un apport calorique massique  $h$  défini sur  $\Omega$
  - un apport calorique surfacique  $Q_{(n)}$  définie sur  $\partial\Omega$  sous la forme d'un flux  $\vec{q}$  défini par  $Q_{(n)} = \vec{q} \cdot \vec{n}$
  - un apport surfacique  $N_{(n)}$  d'entropie définie sur  $\partial\Omega$  sous la forme d'un flux  $\vec{p}$  défini par  $N_{(n)} = \vec{p} \cdot \vec{n}$  ; on suppose que  $\vec{p} = \frac{\vec{q}}{\theta}$
- (iii) il existe une densité d'énergie interne,  $e$ , et une densité d'entropie,  $\eta$ , définies par unité de masse sur  $\Omega$ . On suppose que les sources d'entropie sont purement mécaniques.

On note  $\vec{t}_{(n)}$  la densité surfacique de force résultante des deux contributions :

$$\vec{t}_{(n)} = \vec{t}_{(n)} + {}_M \vec{t}_{(n)}.$$

On suppose l'existence du tenseur de contraintes de Cauchy généralisé  $\mathbf{t}$  défini par :

$$\mathbf{t}_{(n)i} = t_{ij} n_j.$$

## 1-Lois d'équilibre dans la configuration Eulerienne

Dans la configuration actuelle  $\delta$ , de frontière  $\partial\delta$ , lié au repère  $\{x, (\bar{e}_a)\}$ , les équations d'équilibre sont :

### Equations globales

Conservation de la masse : (2.1)  $\frac{d}{dt} \int_{\delta} \rho dx = 0$

Equilibre des forces : (2.2)  $\frac{d}{dt} \int_{\delta} \rho \bar{v} dx = \int_{\delta} (\bar{f} + {}_M \bar{f}) dx + \int_{\partial\delta} t \cdot \bar{n} da$

Equilibre des moments des forces :

(2.3)  $\frac{d}{dt} \int_{\delta} (\bar{x} \times \rho \bar{v}) dx = \int_{\delta} \left\{ \bar{x} \times (\bar{f} + {}_M \bar{f}) + {}_M \bar{c} \right\} dx + \int_{\partial\delta} \left\{ \bar{x} \times (t \cdot \bar{n}) \right\} da$

Conservation de l'énergie :

(2.4)  $\frac{d}{dt} \int_{\delta} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + e \right) dx = \int_{\delta} (\bar{f} \cdot \bar{v} + \rho h + {}_M w) dx + \int_{\partial\delta} \left\{ (t \cdot \bar{v}) \cdot \bar{n} + \bar{q} \cdot \bar{n} \right\} da$

2<sup>nd</sup> principe de la thermodynamique : (2.5)  $\frac{d}{dt} \int_{\delta} \rho \eta dx \geq \int_{\delta} \rho \frac{h}{\theta} dx + \int_{\partial\delta} \bar{p} \cdot \bar{n} da$

Remarque : on peut proposer une seconde formulation de (2.2), (2.3) et (2.4). En soustrayant membres à membres les égalités (2.2), (2.3), (2.4) respectivement aux égalités (1.40), (1.48), (1.41), on obtient :

(2.6)  $\frac{d}{dt} \int_{\delta} (\bar{G} + \rho \bar{v}) dx = \int_{\delta} \bar{f} dx + \int_{\partial\delta} (t + {}_M t + \bar{G} \otimes \bar{v}) \cdot \bar{n} da$

(2.7)  $\frac{d}{dt} \int_{\delta} \left\{ \bar{x} \times (\bar{G} + \rho \bar{v}) \right\} dx = \int_{\delta} \bar{x} \times \bar{f} dx + \int_{\partial\delta} \left\{ \bar{x} \times (t + {}_M t + \bar{G} \otimes \bar{v}) \cdot \bar{n} \right\} da$

(2.8)  $\frac{d}{dt} \int_{\delta} \left\{ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + e \right) + u \right\} dx = \int_{\delta} (\bar{f} \cdot \bar{v} + \rho h) dx + \int_{\partial\delta} \left\{ (t + {}_M t + \bar{G} \otimes \bar{v}) \cdot \bar{v} - \bar{S} + q \right\} \cdot \bar{n} da$

Dans la 1<sup>er</sup> forme (2.3), (2.4), (2.5), l'action des champs électromagnétiques sur la matière ressemble à une action à distance telle que la gravitation (de la mécanique Newtonienne), tandis que dans la 2<sup>nd</sup> forme (2.6), (2.7), (2.8), elle ressemble à des actions d'inerties et de contacts .

### Equations locales

Pour passer des équations globales aux équations locales, on utilise les théorèmes de localisation habituels et on obtient alors :

Conservation de la masse : (2.9)  $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0$

Equilibre des forces : (2.10)  $\rho \dot{\bar{v}} = \bar{f} + {}_M \bar{f} + \operatorname{div} t$

Equilibre des moments des forces : (2.11)  $\varepsilon_{ijk} t_{jk} + {}_M c_i = 0$

Preuve de (2.11) : on a d'après un théorème de localisation :

$$(\bar{\mathbf{r}} \times \rho \dot{\bar{\mathbf{v}}})_i + (\bar{\mathbf{r}} \times \rho \bar{\mathbf{v}})_i \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = \left\{ \bar{\mathbf{r}} \times (\bar{\mathbf{f}} + {}_M \bar{\mathbf{f}}) + {}_M \bar{\mathbf{c}} \right\}_i + \{ \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}} \}_{i,l} ,$$

donc d'après la conservation de la masse :

$$(\bar{\mathbf{r}} \times \rho \dot{\bar{\mathbf{v}}})_i = \left\{ \bar{\mathbf{r}} \times (\bar{\mathbf{f}} + {}_M \bar{\mathbf{f}}) \right\}_i + {}_M \mathbf{c}_i + \left\{ \bar{\mathbf{r}}_{,l} \times (\mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \right\}_i + \left\{ \bar{\mathbf{r}} \times (\mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}})_{,l} \right\}_i ;$$

en utilisant l'équilibre des forces, l'équation se simplifie :

$$0 = {}_M \mathbf{c}_i + \left\{ \bar{\mathbf{r}}_{,l} \times (\mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \right\}_i ,$$

ce qui revient à écrire :

$$0 = {}_M \mathbf{c}_i + \varepsilon_{ijk} t_{jk} \quad \text{cqfd .}$$

En remplaçant  ${}_M \mathbf{c}_i$  par son expression (1.33)<sub>2</sub>, on peut donner une autre formulation de l'équilibre des moments des forces :

$$(2.12) \quad t_{[jk]} = \mathcal{E}_{[j} P_{k]} + B_{[j} \mathcal{E}_{k]} , \quad \text{où } t_{[jk]} = \frac{1}{2} (t_{jk} - t_{kj})$$

Conservation de l'énergie : (2.13)  $\rho \dot{e} = \mathbf{t} : \nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{S}} + \rho \bar{\mathcal{S}} \cdot \dot{\bar{\Pi}} - \bar{\mathcal{E}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{B}}} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} + \rho h$

$$\text{où (2.14) } \quad \mathbf{t} : \nabla \bar{\mathbf{v}} = t_{ji} v_{i,j} .$$

Preuve : on a grâce à (2.7),  $\rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{v}}} + \rho \dot{e} = \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \rho h + {}_M \mathbf{w} + \operatorname{div}(\mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}$ ,

d'après l'équilibre des forces,  $\rho \dot{e} = \rho h - {}_M \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + {}_M \mathbf{w} + \operatorname{div}(\mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{v}}) - (\operatorname{div}^t \mathbf{t}) \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}$ ,

$$\text{soit } \rho \dot{e} = {}_M \mathbf{w} - {}_M \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{t} : \nabla \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} + \rho h .$$

L'équation (1.33)<sub>3</sub> donne alors  $\rho \dot{e} = \mathbf{t} : \nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{S}} + \rho \bar{\mathcal{S}} \cdot \dot{\bar{\Pi}} - \bar{\mathcal{E}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{B}}} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} + \rho h \quad \text{cqfd .}$

Les théorèmes de localisation permettent ainsi d'écrire immédiatement :

Second principe de la thermodynamique : (2.15)  $\rho \dot{\eta} \geq \frac{1}{\theta} (\rho h + \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\theta} \right)$

On introduit la notion d'énergie libre  $\Psi$  définie par :

$$(2.16) \quad \Psi \equiv e - \eta \theta .$$

Par élimination de  $\rho h + \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}$  à l'aide de l'équation (2.13), on énonce une forme du second principe :

$$(2.17) \quad -\rho (\dot{\Psi} + \eta \dot{\theta}) + \mathbf{t} : \nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{S}} + \rho \bar{\mathcal{S}} \cdot \dot{\bar{\Pi}} - \bar{\mathcal{E}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{B}}} + \frac{1}{\theta} \bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla \theta \geq 0 .$$

Remarques :

- Contrairement à la théorie de l'élasticité pure, l'équation de l'équilibre des moments des forces ne donnent pas la symétrie du tenseur de Cauchy  $\mathbf{t}$ .

- Les vecteurs  $\dot{\bar{\Pi}}$  et  $\dot{\bar{\mathbf{B}}}$  ne vérifient pas le principe d'objectivité, ceci étant dû à la dérivée matérielle.

Autre formulation des équations locales :

On définit le tenseur  ${}_E t$  par (2.18)  ${}_E t_{ji} = t_{(ji)} + \mathfrak{S}_{(i} P_{j)} + B_{(i} \mathcal{N}_{j)}$ , où  $t_{(ij)} = \frac{1}{2}(t_{ji} + t_{ij})$ .

${}_E t$  est un tenseur nécessairement symétrique.

En écrivant  $t_{ji} = t_{(ji)} + t_{[ji]}$  et en utilisant la 2<sup>ième</sup> formulation de l'équilibre des moments, on peut démontrer que  ${}_E t$  peut être aussi défini par :

$$(2.19) \quad {}_E t_{ji} = t_{ji} + P_j \mathfrak{S}_i + \mathcal{N}_j B_i .$$

Si l'on définit une nouvelle énergie interne  $\hat{e}$  et une nouvelle énergie libre  $\hat{\Psi}$  par :

$$(2.20) \quad \hat{e} \equiv e + \frac{1}{\rho} \mathcal{N} \cdot \bar{B} \quad \hat{\Psi} = \Psi + \frac{1}{\rho} \mathcal{N} \cdot \bar{B} ,$$

en remarquant que (2.21)  $\rho \dot{\bar{\Pi}} = \dot{\bar{P}} + (\bar{P} \cdot \nabla) \bar{v}$

$$\text{et (2.22) } {}_E t : \nabla \bar{v} = t : \nabla \bar{v} + \mathfrak{S} \cdot (\bar{P} \cdot \nabla) \bar{v} + \bar{B} \cdot (\mathcal{N} \cdot \nabla) \bar{v} ,$$

l'inégalité de Clausius Duhem peut alors s'écrire :

$$(2.23) \quad -\rho \left( \dot{\hat{\Psi}} + \eta \dot{\theta} \right) + {}_E t : \nabla \bar{v} + \dot{\bar{P}} \cdot \mathfrak{S} + \mathcal{N} \cdot \dot{\bar{B}} + \bar{\mathcal{J}} \cdot \mathfrak{S} + \frac{1}{\theta} \bar{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 ,$$

soit en introduisant la symétrie du tenseur  ${}_E t$

$$(2.24) \quad -\rho \left( \dot{\hat{\Psi}} + \eta \dot{\theta} \right) + {}_E t : d + \dot{\bar{P}} \cdot \mathfrak{S} + \mathcal{N} \cdot \dot{\bar{B}} + \bar{\mathcal{J}} \cdot \mathfrak{S} + \frac{1}{\theta} \bar{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 ,$$

$$\text{où (2.25) } d_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right) .$$

La conservation de l'énergie donne :

$$(2.26) \quad \rho \dot{e} = {}_E t : d + \dot{\bar{P}} \cdot \mathfrak{S} + \mathcal{N} \cdot \dot{\bar{B}} + \bar{\mathcal{J}} \cdot \mathfrak{S} + \text{div} \bar{q} + \rho h .$$

En introduisant la charge effective  $q^{\text{eff}}$ , ainsi que la force effective de Lorentz  ${}_L \bar{f}$

$$(2.27) \quad q^{\text{eff}} \equiv q_f - \text{div} \bar{P} \quad \text{et} \quad {}_L \bar{f} \equiv q^{\text{eff}} \mathfrak{S} + \frac{1}{2} \left( \bar{\mathcal{J}} + \dot{\bar{P}} \right) \times \bar{B} ,$$

l'équilibre des forces devient

$$(2.28) \quad \rho \dot{\bar{v}} = \bar{f} + {}_L \bar{f} + \text{div} {}_E t + \left[ (\nabla \bar{B}) \cdot \mathcal{N} - (\text{div} \mathcal{N}) \cdot \bar{B} - (\mathcal{N} \cdot \nabla) \bar{B} \right] .$$

Dans un diélectrique en mouvement sans propriété de magnétisation, cette relation se simplifie :

$$(2.29) \quad \rho \dot{\bar{v}} = \bar{f} + {}_L \bar{f} + \text{div} {}_E t .$$

## 2-Lois d'équilibre dans la configuration Lagrangienne

On se place dans le cas d'un diélectrique (en mouvement) non magnétisable :  $\vec{\mathcal{H}} \equiv \vec{0}$ .

Le corps  $\Omega$  est affecté de la déformation  $\phi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \delta$

$$(X, t) \mapsto \phi(X, t) = x$$

$(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est une famille de difféomorphisme de  $\Omega$  sur  $\phi_t(\Omega)$ .

On note  $F_t$  le gradient de déformation  $\phi_t : T_X \Omega \rightarrow T_x \delta$ , de Jacobien  $J_F$ .

On supposera que pour tout  $t$   $J_F > 0$ .

Le passage de la configuration Eulerienne à la configuration Lagrangienne est régi par les formules suivantes :

Les scalaires :  $\Psi(X, t) = \Psi(x, t)$ ,  $\eta(X, t) = \eta(x, t)$ ,  $\theta(X, t) = \theta(x, t)$ ,  $h(X, t) = h(x, t)$

$$(2.30) \quad \rho_o(X, t) = J_F \rho(x, t) \quad \text{où } x = \phi(X, t).$$

Les vecteurs :  $\vec{\mathcal{E}}(X, t) = \vec{\mathcal{E}}(x, t) \cdot F$      $\vec{B}(X, t) = J_F \vec{B}(x, t) F^{-T}$      $\vec{\mathcal{J}}(X, t) = J_F \vec{\mathcal{J}}(x, t) F^{-T}$

$$(2.31) \quad \nabla_X \theta = \nabla_x \theta \cdot F \quad \vec{\Pi}(X, t) = J_F \vec{P}(x, t) F^{-T} \quad \vec{q}(X, t) = J_F \vec{q}(x, t) F^{-T}$$

Le tenseur :  $S^\#(X, t) = J_F F^{-1} t^\#(x, t) F^{-T}$

$$(2.32)$$

Par conséquent, on a :  ${}_E S^\#(X, t) = J_F F^{-1} {}_E t^\#(x, t) F^{-T}$  donc  $J_F {}_E t^\#(x, t) : d = {}_E S(X, t) : D$

$$(2.33) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}(X, t) &= J_F \dot{\vec{P}}(x, t) F^{-T} \text{ donc } J_F \vec{\mathcal{E}}(x, t) \cdot \dot{\vec{P}}(x, t) = \vec{\mathcal{E}}(X, t) \cdot \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}(X, t) \\ J_F \vec{\mathcal{J}}(x, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}(x, t) &= \vec{\mathcal{J}}(X, t) \cdot \vec{\mathcal{E}}(X, t) \text{ et } J_F \vec{q}(x, t) \cdot \nabla_x \theta = \vec{q}(X, t) \cdot \nabla_X \theta \\ {}_L \vec{f}(X, t) &= J_F {}_L \vec{f}(x, t) F \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse des charges mortes, on a aussi :

$$(2.34) \quad \vec{f}(X, t) = J_F \vec{f}(x, t) F.$$

On peut alors écrire les équations locales dans la configuration Lagrangienne :

Equilibre des forces :  $(2.35) \quad \rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f} + {}_L \vec{f} + \text{DIV}_X {}_E S$

Equilibre des moments des forces :

$$(2.36) \quad {}_E S_{ji} = {}_E S_{ij}$$

Conservation de l'énergie:  $(2.37) \quad \rho_o \frac{\partial e}{\partial t} = {}_E S : D + \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \text{DIV}_X \vec{q} + \rho_o h$

Inégalité de Clausius Duhem :

$$(2.38) \quad -\rho_o \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \eta \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + {}_E S : D + \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{\theta} \vec{q} \cdot \nabla \theta \geq 0$$

$$\text{où } (2.39) \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \right).$$

## II / LOIS DE COMPORTEMENT

Dans toute la suite, on écarte toute source de chaleur, c'est à dire  $h=0$  et  $\bar{q} = \bar{0}$ .

## 1-Conséquences de l'inégalité de Clausius Duhem

En posant  ${}_E P(X, t) = J_{F \in E} t(x, t) F^{-T}$ , l'inégalité (2.38) s'écrit :

$$(2.40) -\rho_o \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \eta \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + {}_E P : \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \cdot \bar{\mathcal{E}} + \bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{E}} \geq 0.$$

On choisit pour variables indépendantes le système  $\Gamma = \Gamma(F, \bar{\Pi}, \bar{B}, \theta)$  :

$$(2.41) \Psi = \hat{\Psi}(F, \bar{\Pi}, \bar{B}, \theta), \quad {}_E P = {}_E \hat{P}(F, \bar{\Pi}, \bar{B}, \theta) \dots$$

On est alors amené à poser les restrictions suivantes :

$$(2.42) \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \theta} \equiv -\hat{\eta}, \quad \rho_o \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{\Pi}} \equiv \bar{\mathcal{E}}, \quad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{B}} \equiv \bar{0}, \quad \rho_o \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial F} \equiv {}_E \hat{P} \text{ et } \bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{E}} \geq 0.$$

Démonstration : On considère deux cas :

\* la déformation est indépendante du temps ; soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels quelconques.

$$\text{On pose } \tilde{\theta}_t \text{ tel que } \begin{cases} \tilde{\theta}_{t_o} = \theta_{t_o} \\ \dot{\tilde{\theta}}_{t_o} = \alpha \dot{\theta}_{t_o} \end{cases}, \quad \tilde{\bar{\Pi}}_t \text{ tel que } \begin{cases} \tilde{\bar{\Pi}}_{t_o} = \bar{\Pi}_{t_o} \\ \dot{\tilde{\bar{\Pi}}}_{t_o} = \beta \dot{\bar{\Pi}}_{t_o} \end{cases}, \quad \tilde{\bar{B}}_t \text{ tel que } \begin{cases} \tilde{\bar{B}}_{t_o} = \bar{B}_{t_o} \\ \dot{\tilde{\bar{B}}}_{t_o} = \gamma \dot{\bar{B}}_{t_o} \end{cases},$$

et on suppose ces différentes fonctions constitutives :  $\tilde{\mathcal{E}}_{t_o} = \bar{\mathcal{E}}_{t_o}$ ,  $\tilde{\mathcal{J}}_{t_o} = \bar{\mathcal{J}}_{t_o}$  et  $\hat{\eta}_{t_o} = \hat{\eta}_{t_o}$ .

Puisqu'en  $t_o$ , l'équation (2.40) devient :

$$-\alpha \rho_o \left( \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \hat{\eta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + \beta \left( -\rho_o \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{\Pi}} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \cdot \bar{\mathcal{E}} \right) + \gamma \left( -\rho_o \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{B}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \right) + \bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{E}} \geq 0,$$

on obtient les restrictions (2.42)<sub>1</sub>, (2.42)<sub>2</sub>, (2.42)<sub>3</sub>, (2.42)<sub>4</sub>.

\* les variables  $\theta$ ,  $\bar{\Pi}$ ,  $\bar{B}$  sont indépendantes du temps ; soit  $\alpha$  un réel quelconque.

$$\text{On pose } \tilde{\phi}_t \text{ tel que } \begin{cases} \tilde{\phi}_{t_o} = \phi_{t_o} \\ \dot{\tilde{\phi}}_{t_o} = \alpha \dot{\phi}_{t_o} \end{cases} \text{ donc } \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} \right)_{t_o} = \alpha \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_o}$$

$$\text{En } t_o \text{ (2.40) devient } \alpha \left( -\rho_o \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial F} : \frac{\partial F}{\partial t} + {}_E \hat{P} : \frac{\partial F}{\partial t} \right) + \bar{\mathcal{J}} \cdot \bar{\mathcal{E}} \geq 0 \text{ d'où la restriction (2.42)<sub>4</sub>.$$

Remarques :

\* on suppose ici que le milieu est homogène, ce qui permet de ne pas prendre  $X$  comme variable dans le système  $\Gamma$ .

\* puisque  $\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \bar{B}} = \bar{0}$ , on est amené à restreindre le système des variables indépendantes à

$$\Gamma = \Gamma(F, \bar{\Pi}, \theta).$$

\* grâce à l'axiome d'indifférence matérielle :

$$(2.43) \text{ pour tout } Q \in \text{SO}(3), \quad \hat{\Psi}(QF, Q\bar{\Pi}, \theta) = \hat{\Psi}(F, \bar{\Pi}, \theta),$$

on peut dire que  $\hat{\Psi}$  ne dépend pas directement du couple  $(\mathbf{F}, \bar{\Pi}(\mathbf{x}))$ , mais du couple  $(\mathfrak{C}, \bar{\Pi}(\mathbf{X}))$

où  $\mathfrak{C}$  désigne le tenseur de déformation de Cauchy-Green défini par  $\mathfrak{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$

On posera alors :

$$(2.44) \quad \Psi = \tilde{\Psi}(\mathfrak{C}, \bar{\Pi}(\mathbf{X})) .$$

${}_E \mathcal{S}$  représentant le 2<sup>nd</sup> tenseur de Piola-Kirchhoff défini par la relation (2.33), on peut établir :

$$(2.45) \quad {}_E \tilde{\mathcal{S}} = \rho_0 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathfrak{C}} .$$

## 2-Symétrie matérielle

### 1] Isotropie et premières conséquences

On supposera que le matériau est isotrope, c'est à dire que le groupe de symétrie matérielle de  $\tilde{\Psi}$  est  $O_3^+(T\mathcal{B}, T\tilde{\mathcal{B}})$ .

$$(2.46) \text{ Pour tout } Q \in O_3^+(T\mathcal{B}, T\tilde{\mathcal{B}}), \quad \hat{\Psi}(\mathbf{F}Q^{-1}, Q\bar{\Pi}, \theta) = \hat{\Psi}(\mathbf{F}, \bar{\Pi}, \theta)$$

En conséquence, on obtient les relations suivantes :

$$(2.47) \quad \begin{cases} {}_E \check{\mathfrak{t}}(QCQ^T, Q\bar{\Pi}, \theta) = {}_E \check{\mathfrak{t}}(\mathfrak{C}, \bar{\Pi}, \theta) \\ {}_E \check{\mathfrak{P}}(QCQ^T, Q\bar{\Pi}, \theta) = {}_E \check{\mathfrak{P}}(\mathfrak{C}, \bar{\Pi}, \theta) Q^{-1} \\ {}_E \check{\mathfrak{S}}(QCQ^T, Q\bar{\Pi}, \theta) = Q {}_E \check{\mathfrak{S}}(\mathfrak{C}, \bar{\Pi}, \theta) Q^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{B} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & T\delta \\ Q \downarrow & \nearrow & \tilde{\mathbf{F}} \\ T\tilde{\mathcal{B}} & & \end{array}$$

### 2] Autres conséquences dans le cadre d'une évolution adiabatique

Dans l'hypothèse de l'isotropie du matériau,  $\tilde{\Psi}$  doit être une fonction isotrope du tenseur  $\mathfrak{C}$  et du champ de vecteurs  $\bar{\Pi}(\mathbf{X})$ . Sans explications techniques, on admettra que  $\tilde{\Psi}$  ne dépend pas alors directement du couple  $(\mathfrak{C}, \bar{\Pi}(\mathbf{X}))$  mais de leurs invariants par l'action du groupe  $SO(3)$ , soit :

$$(2.48) \quad I_1 = \text{Tr } \mathfrak{C}, \quad I_2 = (\text{Det } \mathfrak{C}) \text{Tr } \mathfrak{C}^{-1}, \quad I_3 = \text{Det } \mathfrak{C}, \quad I_4 = \bar{\Pi} \cdot \bar{\Pi}, \quad I_5 = \bar{\Pi} \cdot (\mathfrak{C}\bar{\Pi}), \quad I_6 = (\mathfrak{C}\bar{\Pi}) \cdot (\mathfrak{C}\bar{\Pi}).$$

On pourra pour ces résultats se référer à un ouvrage de C.C. WANG (1).

On se propose simplement de vérifier que ces différentes quantités sont bien des invariants :

$$\text{Pour tout } Q \in SO(3), \quad (Q\bar{\Pi}) \cdot (Q\bar{\Pi}) = \bar{\Pi} \cdot \bar{\Pi}.$$

On considère les tenseurs  $\tilde{\mathfrak{F}}$  et  $\tilde{\mathfrak{C}}$  définis par :

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{B} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & T\delta \\ Q \downarrow & \nearrow & \tilde{\mathfrak{F}} \\ T\tilde{\mathcal{B}} & & \end{array} \quad \tilde{\mathfrak{F}} = \mathbf{F}Q^{-1} \quad \begin{array}{ccc} T\mathcal{B} & \xrightarrow{\mathfrak{C}} & T\mathcal{B} \\ Q \downarrow & & \downarrow Q^{-1} \\ T\tilde{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\mathfrak{C}} & T\tilde{\mathcal{B}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathfrak{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \\ \tilde{\mathfrak{C}} = Q^{-1} \mathfrak{C} Q^{-1} \end{array}$$

$$\text{On a } (Q\bar{\Pi}) \cdot (\tilde{\mathfrak{C}}Q\bar{\Pi}) = (Q\bar{\Pi}) \cdot (Q^{-1}\mathfrak{C}\bar{\Pi}) = (Q\bar{\Pi}) \cdot (Q\mathfrak{C}\bar{\Pi}) = \bar{\Pi} \cdot (\mathfrak{C}\bar{\Pi}),$$

$$\text{et } (\tilde{\mathfrak{C}}Q\bar{\Pi}) \cdot (\tilde{\mathfrak{C}}Q\bar{\Pi}) = (Q^{-1}\mathfrak{C}\bar{\Pi}) \cdot (Q^{-1}\mathfrak{C}\bar{\Pi}) = (Q\mathfrak{C}\bar{\Pi}) \cdot (Q\mathfrak{C}\bar{\Pi}) = (\mathfrak{C}\bar{\Pi}) \cdot (\mathfrak{C}\bar{\Pi}).$$

Puisque  ${}_{\mathcal{E}}\check{S} = \frac{\partial\check{\Psi}}{\partial\mathcal{C}}$  et  ${}_{\mathcal{E}}\check{\mathcal{E}} = \frac{\partial\check{\Psi}}{\partial\Pi}$ , on a  ${}_{\mathcal{E}}\check{S} = \frac{\partial\check{\Psi}}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial\mathcal{C}}$  et  ${}_{\mathcal{E}}\check{\mathcal{E}} = \frac{\partial\check{\Psi}}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial\Pi}$ .

Or on peut démontrer que : (2.49)

$$\frac{\partial I_1}{\partial\mathcal{C}} = G^\# , \quad \frac{\partial I_2}{\partial\mathcal{C}} = I_2\mathcal{C}^{-1} - I_3\mathcal{C}^{-2} , \quad \frac{\partial I_3}{\partial\mathcal{C}} = I_3\mathcal{C}^{-1} , \quad \frac{\partial I_4}{\partial\mathcal{C}} = 0 ,$$

$$\text{avec } \mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{I_3}(\mathcal{C}^2 - I_1\mathcal{C} + I_2\mathbf{1}) \text{ et } \mathcal{C}^{-2} = \frac{1}{I_3} \left[ \frac{I_2}{I_3}\mathcal{C}^2 + \left(1 - \frac{I_1 I_2}{I_3}\right)\mathcal{C} + \left(\frac{I_2^2}{I_3} - I_1\right)\mathbf{1} \right] ,$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial\mathcal{C}} = \bar{\Pi} \otimes \bar{\Pi} , \quad \frac{\partial I_6}{\partial\mathcal{C}} = (\mathcal{C}\bar{\Pi}) \otimes \bar{\Pi} + \bar{\Pi} \otimes (\mathcal{C}\bar{\Pi}) , \quad \frac{\partial I_1}{\partial\Pi} = \frac{\partial I_2}{\partial\Pi} = \frac{\partial I_3}{\partial\Pi} = \bar{0} , \quad \frac{\partial I_4}{\partial\Pi} = 2\bar{\Pi} ,$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial\Pi} = 2\mathcal{C}\bar{\Pi} , \quad \frac{\partial I_6}{\partial\Pi} = 2\mathcal{C}^2\bar{\Pi} .$$

Donc le tenseur  ${}_{\mathcal{E}}\check{S}$  et le vecteur champ électrique  ${}_{\mathcal{E}}\check{\mathcal{E}}$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$(2.50) \quad \begin{cases} {}_{\mathcal{E}}\check{S}(\mathcal{C}, \bar{\Pi}) = \gamma_0 \mathbf{1} + \gamma_1 \mathcal{C} + \gamma_2 \mathcal{C}^2 + \gamma_3 \bar{\Pi} \otimes \bar{\Pi} + \frac{1}{2} \gamma_4 \left[ (\mathcal{C}\bar{\Pi}) \otimes \bar{\Pi} + \bar{\Pi} \otimes (\mathcal{C}\bar{\Pi}) \right] \\ {}_{\mathcal{E}}\check{\mathcal{E}}(\mathcal{C}, \bar{\Pi}) = \alpha_1 \bar{\Pi} + \alpha_2 \mathcal{C}\bar{\Pi} + \alpha_3 \mathcal{C}^2 \bar{\Pi} \end{cases}$$

où les  $\gamma_i$  et les  $\alpha_i$  sont des fonctions de  $X$  et des invariants  $I_1, \dots, I_6$  de  $\mathcal{C}$  et  $\bar{\Pi}$ .

On supposera que les fonctions  $\gamma_i(X, \cdot)$  et  $\alpha_i(X, \cdot)$  soient différentiables.

### 3] Linéarisation

\*Linéarisation des champs de vecteurs et de tenseurs :

Puisque on a

$${}_{\mathcal{E}}\check{S}^{AB}(\mathcal{C}, \bar{\Pi}) = \gamma_0 \delta^{AB} + \gamma_1 \mathcal{C}^{AB} + \gamma_2 \mathcal{C}^{AE} \mathcal{C}^{EB} + \gamma_3 \Pi^A \Pi^B + \frac{1}{2} \gamma_4 (\mathcal{C}_E^A \Pi^E \Pi^B + \Pi^A \mathcal{C}_E^B \Pi^E)$$

où  $\mathcal{C} = \mathbf{1} + 2\mathbf{E}$ , pour  $\mathbf{E}$  proche de  $\bar{0}$  et  $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_0 + \bar{p}$  avec  $\bar{p}$  proche de  $\bar{0}$ , alors

$${}_{\mathcal{E}}\check{S}^{AB}(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) \underset{0}{=} {}_{\mathcal{E}}\check{S}^{AB}(\mathbf{1}, \bar{\Pi}_0) + \left( \frac{\partial {}_{\mathcal{E}}\check{S}^{AB}}{\partial \mathcal{C}^{CD}} \right)_0 2\mathbf{E}^{CD} + \left( \frac{\partial {}_{\mathcal{E}}\check{S}^{AB}}{\partial \Pi^C} \right)_0 p^C + o(\mathbf{E}, \bar{p}) .$$

Or de simples calculs montrent que l'on a :

$$\left( \frac{\partial I_1}{\partial \mathcal{C}^{CD}} \right)_0 \mathbf{E}^{CD} = \text{Tr } \mathbf{E} , \quad \left( \frac{\partial I_2}{\partial \mathcal{C}^{CD}} \right)_0 \mathbf{E}^{CD} = (I_2 - I_3) \text{Tr } \mathbf{E} , \quad \left( \frac{\partial I_3}{\partial \mathcal{C}^{CD}} \right)_0 \mathbf{E}^{CD} = I_3 \text{Tr } \mathbf{E} ,$$

$$\left( \frac{\partial I_4}{\partial \mathcal{C}^{CD}} \right)_0 \mathbf{E}^{CD} = 0 , \quad \left( \frac{\partial I_5}{\partial \mathcal{C}^{CD}} \right)_0 \mathbf{E}^{CD} = \mathbf{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0) , \quad \left( \frac{\partial I_6}{\partial \mathcal{C}^{CD}} \right)_0 \mathbf{E}^{CD} = 2\mathbf{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0) ,$$

$$\left( \frac{\partial I_1}{\partial \Pi^C} \right)_0 = \left( \frac{\partial I_2}{\partial \Pi^C} \right)_0 = \left( \frac{\partial I_3}{\partial \Pi^C} \right)_0 = 0 ,$$

$$\left( \frac{\partial I_4}{\partial \Pi^C} \right)_0 p^C = \bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p} , \quad \left( \frac{\partial I_5}{\partial \Pi^C} \right)_0 p^C = 2\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p} , \quad \left( \frac{\partial I_6}{\partial \Pi^C} \right)_0 p^C = 2\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p} .$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial_E \check{S}^{AB}}{\partial \mathcal{A}^{CD}}\right)_0 \mathbb{E}^{CD} &= (\gamma_1 + 2\gamma_2)_0 \mathbb{E}^{AB} \\
&+ \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial I_1} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_2} (I_2 - I_3) + \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_3} I_3\right)_0 \text{Tr } \mathbb{E} \delta^{AB} + \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial I_5} + 2 \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_6}\right)_0 \mathbb{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0) \delta^{AB} \\
&+ \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial I_1} + \frac{\partial \gamma_j}{\partial I_2} (I_2 - I_3) + \frac{\partial \gamma_j}{\partial I_3} I_3\right)_0 \text{Tr } \mathbb{E} \Pi_0^A \Pi_0^B + \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial I_5} + 2 \frac{\partial \gamma_j}{\partial I_6}\right)_0 \mathbb{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0) \Pi_0^A \Pi_0^B \\
&+ \frac{1}{2} (\gamma_4)_0 (\mathbb{E}^{AD} \Pi_{0,D} \Pi_0^B + \Pi_0^A \mathbb{E}^{BD} \Pi_{0,D}) \quad \text{où } i \in \{0,1,2\} \text{ et } j \in \{3,4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial_E \check{S}^{AB}}{\partial \Pi^C}\right)_0 p^C &= \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial I_4} + 2 \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_5} + 2 \frac{\partial \gamma_i}{\partial I_6}\right)_0 \bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p} \delta^{AB} \\
&+ \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial I_4} + 2 \frac{\partial \gamma_j}{\partial I_5} + 2 \frac{\partial \gamma_j}{\partial I_6}\right)_0 \bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p} \Pi_0^A \Pi_0^B \\
&+ (\gamma_3 + \gamma_4)_0 (p^A \Pi_0^B + \Pi_0^A p^B) \quad \text{où } i \in \{0,1,2\} \text{ et } j \in \{3,4\},
\end{aligned}$$

d'où il existe des fonctions  $\lambda_1, \lambda_2, \beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2, \alpha_1, \alpha_2$  et  $\eta$  de variable  $X$  telles que :

$$\begin{aligned}
(2.51) \quad \check{S}(1 + 2\mathbb{E}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) &= \check{S}(1, \bar{\Pi}_0) \\
&+ \left[ \lambda_1 (\text{Tr } \mathbb{E}) + \alpha_1 (\mathbb{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)) + \beta_1 (\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p}) \right] 1 + \mu_1 \mathbb{E} + \eta \left[ (\mathbb{E} \bar{\Pi}_0) \otimes \bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_0 \otimes (\mathbb{E} \bar{\Pi}_0) \right] \\
&+ \left[ \lambda_2 (\text{Tr } \mathbb{E}) + \alpha_2 (\mathbb{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)) + \beta_2 (\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p}) \right] \bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0 + \mu_2 (\bar{p} \otimes \bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_0 \otimes \bar{p}) \\
&+ o(\mathbb{E}, \bar{p}) .
\end{aligned}$$

De même,

$$\check{\mathfrak{S}}^A(1 + 2\mathbb{E}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) = \check{\mathfrak{S}}^A(1, \bar{\Pi}_0) + \left(\frac{\partial \check{\mathfrak{S}}^A}{\partial \mathcal{A}^{CD}}\right)_0 2\mathbb{E}^{CD} + \left(\frac{\partial \check{\mathfrak{S}}^A}{\partial \Pi^C}\right)_0 p^C + o(\mathbb{E}, \bar{p})$$

où

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \check{\mathfrak{S}}^A}{\partial \mathcal{A}^{CD}}\right)_0 2\mathbb{E}^{CD} &= \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial I_1} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial I_2} (I_2 - I_3) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial I_3} I_3\right)_0 \text{Tr } \mathbb{E} \Pi_0^A + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial I_5} + 2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial I_6}\right)_0 \mathbb{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0) \Pi_0^A \\
&+ (\alpha_2 + 2\alpha_3)_0 (\mathbb{E} \bar{\Pi}_0)^A
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \check{\mathfrak{S}}^A}{\partial \Pi^C}\right)_0 p^C = \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial I_4} + 2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial I_5} + 2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial I_6}\right)_0 \bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p} \Pi_0^A + (\alpha_i)_0 p^A .$$

D'où il existe des fonctions  $\lambda_3, \beta_3, \alpha_3, \gamma,$  et  $\xi$  de  $X$  telles que :

$$\begin{aligned}
(2.52) \quad \check{\mathfrak{S}}(1 + 2\mathbb{E}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) &= \check{\mathfrak{S}}(1, \bar{\Pi}_0) \\
&+ \left[ \lambda_3 (\text{Tr } \mathbb{E}) + \alpha_3 (\mathbb{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)) + \beta_3 (\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p}) \right] \bar{\Pi}_0 + \gamma \mathbb{E} \bar{\Pi}_0 + \xi \bar{p} + o(\mathbb{E}, \bar{p}) .
\end{aligned}$$

**Remarques :** lorsque le matériau n'est soumis à aucun effort extérieur, que ce soit mécanique ou électrique, on a  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  et  $\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{0}}$ . Dans les formules (2.51) et (2.52), il reste :

-  $\check{\mathbb{S}}(\mathbf{1}, \bar{\Pi}_0)$  le tenseur de contraintes résiduelles ; d'après (2.50), on a

$${}_{\mathbf{E}}\check{\mathbb{S}}(\mathbf{1}, \bar{\Pi}_0) = (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)_0 \mathbf{1} + (\gamma_3 + \gamma_4)_0 \bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0.$$

-  $\check{\mathbb{E}}(\mathbf{1}, \bar{\Pi}_0)$  le champ électrique résiduel, avec  $\check{\mathbb{E}}(\mathbf{1}, \bar{\Pi}_0) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)_0 \bar{\Pi}_0 = \xi \bar{\Pi}_0$ .

Dans l'hypothèse où  $\check{\mathbb{E}}(\mathbf{1}, \bar{\Pi}_0) = \bar{\mathbf{0}}$ ,

si  $\bar{\Pi}_0 \neq \bar{\mathbf{0}}$ , alors  $\xi = 0$ , d'où dans l'expression de  $\check{\mathbb{E}}(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}, \bar{\Pi}_0 + \bar{\mathbf{p}})$ , la composante  $\xi \bar{\mathbf{p}}$  disparaît.

Par contre si  $\bar{\Pi}_0 = \bar{\mathbf{0}}$ , alors (2.51) et (2.52) deviennent :

$$(2.53) \quad {}_{\mathbf{E}}\check{\mathbb{S}}(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}, \bar{\mathbf{p}}) = {}_{\mathbf{E}}\check{\mathbb{S}}(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{0}}) + \lambda_1 (\text{Tr } \mathbf{E}) \mathbf{1} + \mu_1 \mathbf{E} \quad \text{où } {}_{\mathbf{E}}\check{\mathbb{S}}(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{0}}) = (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)_0 \mathbf{1},$$

$$\text{et } \check{\mathbb{E}}(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}, \bar{\mathbf{p}}) = \xi \bar{\mathbf{p}}.$$

Donc sous les hypothèses  $\bar{\Pi}_0 = \bar{\mathbf{0}}$  et  $\check{\mathbb{E}}(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{0}}) = \bar{\mathbf{0}}$ , le tenseur  ${}_{\mathbf{E}}\check{\mathbb{S}}(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}, \bar{\mathbf{p}})$  se résume au second tenseur de Piola-Kirchhoff de la mécanique classique, ce qui sous-entend que les contraintes d'origine électrique sont au moins dans ce cas d'ordre 2. De plus le champ électrique est alors proportionnel à la polarisation.

D'après les lois de comportement (2.42) et (2.45), on a  $\frac{\partial \check{\mathbb{E}}}{\partial \mathcal{U}} = \frac{\partial {}_{\mathbf{E}}\check{\mathbb{S}}}{\partial \Pi}$ .

Or d'après les égalités utilisées pour établir les formules (2.51) et (2.52), on peut écrire :

$$\frac{\partial \check{\mathbb{E}}^C}{\partial \mathcal{U}_{AB}} = \lambda_3 \Pi_0^C \delta^{AB} + \alpha_3 \Pi_0^C \Pi_0^A \Pi_0^B + \frac{1}{2} \gamma (\Pi_0^B \delta^{CA} + \Pi_0^A \delta^{CB}),$$

et

$$\frac{\partial {}_{\mathbf{E}}\check{\mathbb{S}}^{AB}}{\partial \Pi_C} = \beta_1 \Pi_0^C \delta^{AB} + \beta_2 \Pi_0^C \Pi_0^A \Pi_0^B + \mu_2 (\Pi_0^B \delta^{CA} + \Pi_0^A \delta^{CB}).$$

On peut alors conclure que  $\beta_1 = \lambda_3$ ,  $\beta_2 = \alpha_3$  et  $\mu_2 = \frac{1}{2} \gamma$ .

\* Linéarisation des équations du mouvement :

Soit  $\phi_0$  la configuration non déformée  $\mathbf{1}_\Omega$  et  $\bar{\Pi}_0$  un vecteur de polarisation non nul.

Le but de ce paragraphe est de linéariser au point  $(\phi, \bar{\Pi}) = (\phi_0, \bar{\Pi}_0)$  les équations du mouvement  $\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} = \bar{\mathbf{f}} + \text{DIV}_E \hat{\mathbf{P}}$  pour un petit déplacement de vecteur  $\bar{\mathbf{u}}$  et une petite variation  $\bar{\mathbf{p}}$  du vecteur de polarisation.

On supposera que le champ électrique  $\check{\mathbb{E}}(\mathbf{1}, \bar{\Pi}_0)$  est nul. Par contre le matériau étant initialement polarisé, il existe des contraintes résiduelles c'est à dire  ${}_{\mathbf{E}}\check{\mathbb{S}}(\mathbf{1}, \bar{\Pi}_0) \neq \mathbf{0}$ .

Soit l'application  $f: (\phi, \bar{\Pi}) \rightarrow f(\phi, \bar{\Pi})$  de classe  $C^k$  sur  $\mathcal{E} \times \mathcal{A}$ , où  $\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des configurations  $\phi$  de  $\bar{\Omega}$  et  $\mathcal{A}$  celui des champs de vecteurs de polarisation (voir le début du chapitre 3 pour de plus amples précisions). On note  $T_{(\phi_0, \bar{\Pi}_0)} f$  la différentielle de  $f$  en  $(\phi_0, \bar{\Pi}_0)$ , qui est une application de classe  $C^{k-1}$  sur  $T_{\phi_0} \mathcal{E} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$ , où  $T_{\phi_0} \mathcal{E}$  désigne le plan tangent à l'ensemble  $\mathcal{E}$  des déformations sur  $\Omega$  en  $\phi_0$  et  $T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$  désigne le plan tangent à l'ensemble  $\mathcal{A}$  des champs de vecteurs de polarisation en  $\bar{\Pi}_0$ .

La linéarisation de l'application  $f$  au point  $(\phi_0, \bar{\Pi}_0)$  est définie par :

$$(2.54) \quad L_{(\phi_0, \bar{\Pi}_0)} f(\bar{u}, \bar{p}) = f(\phi_0, \bar{\Pi}_0) + T_{(\phi_0, \bar{\Pi}_0)} f(\bar{u}, \bar{p}).$$

On linéarise de cette façon chacune des composantes figurant dans les équations du mouvement :

Soit  $\alpha : h \rightarrow \alpha_h$  une famille de déplacements continûment différentiables (ainsi que leur gradient) au voisinage de  $h = 0$  telle que  $\left. \frac{d\alpha_h}{dh} \right|_{h=0} = \bar{u}$  et  $\alpha_h|_{h=0} = \phi_0$ .

Soit  $\bar{\Pi} : \lambda \rightarrow \bar{\Pi}_\lambda$  une famille de champs de polarisation continûment différentiables au voisinage de  $\lambda = 0$  telle que  $\left. \frac{d\bar{\Pi}_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \bar{p}$  et  $\bar{\Pi}_\lambda|_{\lambda=0} = \bar{\Pi}_0$ .

La linéarisation des différentes composantes sont données par : (2.55)

$$\begin{aligned} f : (\phi, \bar{\Pi}) &\rightarrow F & L_{(\phi_0, \bar{\Pi}_0)} f(\bar{u}, \bar{p}) &= F_0 + \nabla \bar{u} = 1 + \nabla \bar{u}, \\ f : (\phi, \bar{\Pi}) &\rightarrow \text{Det } F = J & L_{(\phi_0, \bar{\Pi}_0)} f(\bar{u}, \bar{p}) &= J_0 + (\text{div } \bar{u}) J_0, \\ f : (\phi, \bar{\Pi}) &\rightarrow \frac{d^2 \phi}{dt^2} & L_{(\phi_0, \bar{\Pi}_0)} f(\bar{u}, \bar{p}) &= \left. \frac{d^2 \alpha_h}{dh^2} \right|_{h=0} + \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2}, \\ f : (\phi, \bar{\Pi}) &\rightarrow {}_E \hat{P} & L_{(\phi_0, \bar{\Pi}_0)} f(\bar{u}, \bar{p}) &= {}_E \hat{P}_0 + \left( \frac{\partial {}_E \hat{P}}{\partial F} \right)_0 : \nabla \bar{u} + \left( \frac{\partial {}_E \hat{P}}{\partial \Pi} \right)_0 \bar{p}, \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{\partial {}_E \hat{P}}{\partial F} : \nabla \bar{u} = \frac{\partial (F_E \hat{S})}{\partial F} : \nabla \bar{u} = F \frac{\partial ({}_E \hat{S})}{\partial F} : \nabla \bar{u} + {}_E \hat{S} : \nabla \bar{u} = 2F \frac{\partial {}_E \check{S}}{\partial F} : e(\bar{u}) + {}_E \hat{S} : \nabla \bar{u},$$

$$\text{où } e(\bar{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T).$$

On notera  $\frac{\partial {}_E \check{S}}{\partial F} = {}_E \check{C}$  qui désigne ainsi le second tenseur d'électro-élasticité.

$$\text{On peut aussi remarquer que } \frac{\partial {}_E \check{P}}{\partial \Pi} = \frac{\partial (F_E \check{S})}{\partial \Pi} = F \frac{\partial {}_E \check{S}}{\partial \Pi} = F \frac{\partial \check{\mathcal{E}}}{\partial \Pi}.$$

$$f : (\phi, \bar{\Pi}) \rightarrow -\text{DIV}_X \bar{\Pi} \check{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) \quad L_{(\phi_0, \bar{\Pi}_0)} f(\bar{u}, \bar{p}) = -(\text{DIV}_X \bar{\Pi}_0) \left[ \left( \frac{\partial \check{\mathcal{E}}(\mathbf{x})}{\partial \Pi} \right)_0 \bar{p} + \left( \frac{\partial \check{\mathcal{E}}(\mathbf{x})}{\partial F} \right)_0 : \nabla \bar{u} \right]$$

lorsque l'on suppose  $\check{\mathcal{E}}(\phi_0, \bar{0}) = \bar{0}$ .

$$\text{Or } \frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial \Pi} \bar{p} = \frac{\partial (\mathbf{F} \tilde{\xi}(X))}{\partial \Pi} \bar{p} = \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \Pi} \bar{p},$$

$$\text{et } \frac{\partial \tilde{\xi}(x)}{\partial \mathbf{F}} : \nabla \bar{u} = \frac{\partial (\mathbf{F} \tilde{\xi}(X))}{\partial \mathbf{F}} : \nabla \bar{u} = \tilde{\xi} \cdot \nabla \bar{u} + \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{F}} : \nabla \bar{u} = \tilde{\xi} \cdot \nabla \bar{u} + 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{F}} : \mathbf{e}(\bar{u}).$$

En supposant qu'au point  $(\phi_0, \bar{\Pi}_0)$  on ait

$$(2.56) \quad \rho_0 \left( \frac{d^2 \alpha_h}{dt^2} \right)_0 = \bar{f}_0 + {}_L \bar{f}_0 + \text{DIV}_E \hat{\mathbf{P}}_0,$$

la linéarisation des équations du mouvement est alors :

$$(2.57) \quad \rho_0 \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = \delta \bar{f} + \delta_L \bar{f} + \text{DIV}_X [\Sigma + {}_E S_0 \cdot \nabla \bar{u}]$$

$$\text{où } \Sigma = 2 {}_E \check{C}_0 : \mathbf{e}(\bar{u}) + \left( \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{F}} \right)_0 \bar{p} \text{ et } \delta_L \bar{f} = -(\text{DIV}_X \bar{\Pi}_0) \left\{ \left( \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \Pi} \right)_0 \bar{p} + 2 \left( \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \mathbf{F}} \right)_0 : \mathbf{e}(\bar{u}) \right\}.$$

On notera que le tenseur linéarisé  $\Sigma$  est exprimé en fonction de  $(\bar{u}, \bar{p})$  par : (2.58)

$$\begin{aligned} \Sigma = & \left[ \lambda_1 (\text{Tr } \mathbf{e}(\bar{u})) + \alpha_1 (\mathbf{e}(\bar{u}) : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)) + \beta_1 (\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p}) \right] \mathbf{1} + \mu_1 \mathbf{e}(\bar{u}) + \eta \left[ (\mathbf{e}(\bar{u}) \bar{\Pi}_0) \otimes \bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_0 \otimes (\mathbf{e}(\bar{u}) \bar{\Pi}_0) \right] \\ & + \left[ \lambda_2 (\text{Tr } \mathbf{e}(\bar{u})) + \alpha_2 (\mathbf{e}(\bar{u}) : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)) + \beta_2 (\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p}) \right] \bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0 + \mu_2 (\bar{p} \otimes \bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_0 \otimes \bar{p}). \end{aligned}$$

## CHAPITRE 3

Le chapitre 3 se décompose en trois parties :

- dans la première partie, les équations non linéarisées répondant au problème de traction dans le cadre de l'électro-élasticité statique sont présentées à l'aide d'un opérateur  $\Phi$ . Cet opérateur est défini du produit  $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$  de l'espace des configurations  $\mathcal{E}$  et de l'espace des champs de polarisation  $\mathcal{P}$  sur l'espace des charges  $\mathcal{L}$ . Grâce au tenseur  ${}_M t$  défini dans le chapitre 2, il est possible en se restreignant au cadre de l'électrostriction d'effectuer un découplage de l'espace des charges :  $\mathcal{L}$  se décompose en somme directe de l'espace des charges  $\mathcal{L}_m$  d'origine mécanique et de l'espace  $\mathcal{L}_e$  des charges d'origine électrique. L'action naturelle du groupe  $SO(3)$  sur l'espace de départ  $\mathcal{E} \times \mathcal{P}$  amène à définir une action de groupe sur l'espace  $\mathcal{L}$  : action du groupe  $SO(3)$  sur la composante mécanique  $\mathcal{L}_m$  et action du groupe  $O(3)$  sur la composante électrique  $\mathcal{L}_e$ . Le but est alors d'étudier la « géométrie » de l'espace des charges  $\mathcal{L}$ .

- l'objectif de la deuxième partie est double : caractériser le fait qu'un couple de charges  $\bar{\mathbf{I}} = (\bar{\mathbf{I}}_m, \bar{\mathbf{I}}_e)$  n'admette pas de couple d'axes d'équilibre et décomposer l'espace des charges  $\mathcal{L}$ . D'abord on définit les applications linéaires notées  $\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathbf{M}}$  et  $k$  désignant respectivement les applications « résultante », « moment résultant » et « charge astatique ». Cette dernière application permet de traduire simplement qu'un couple de charges  $\bar{\mathbf{I}}$  est en équilibre relativement à une configuration  $\phi$  en terme de symétrie du tenseur  $k(\bar{\mathbf{I}}, \phi)$  de  $\mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_6$ . D'après les actions des groupes  $SO(3)$  et  $O(3)$  sur les espaces  $\mathcal{L}_m$  et  $\mathcal{L}_e$ , on caractérise pour un couple de charges donné les éléments de  $SO(3) \times O(3)$  conservant son équilibre relativement à la configuration non déformée  $l_\Omega$  : par exemple, le couple de charges  $\bar{\mathbf{I}} = (\bar{\mathbf{I}}_m, \bar{\mathbf{I}}_e)$  n'admet pas de couple d'axes d'équilibre si et seulement si les valeurs propres des composantes respectives mécanique et électrique du tenseur  $k(\bar{\mathbf{I}}, l_\Omega)$  ne sont pas opposées deux à deux. Ensuite on s'intéresse à décomposer grâce à l'application « charge astatique »  $k$  l'espace des charges  $\mathcal{L}$  : on caractérise le noyau de l'application  $k$ , on démontre que  $k$  est une surjection de  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3$ , puis on utilise la décomposition algébrique en « noyau et image ».

- la troisième partie consiste d'une part à classer les couples de charges en différents types et d'autre part à décrire suivant le type du couple  $\bar{\mathbf{I}}$  l'intersection de l'orbite de  $\bar{\mathbf{I}}$  et de l'espace  $\mathcal{L}_0$  constitué des couples de charges équilibrées relativement à  $l_\Omega$ . La classification des couples de charges équilibrées  $\bar{\mathbf{I}}$  se transpose grâce à l'application « charge astatique »  $k$  à la classification des tenseurs symétriques  $k(\bar{\mathbf{I}}, l_\Omega)$  de  $\mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3$ . Celle-ci s'effectue selon l'égalité ou non des valeurs propres de chacune des composantes mécanique et électrique du tenseur  $k(\bar{\mathbf{I}}, l_\Omega)$  et selon la condition de non-existence de couple d'axes d'équilibre. On dénombre alors cinq types de charges d'origine mécanique et sept types d'origine électrique. Afin de décrire l'intersection de l'orbite d'un couple de charge  $\bar{\mathbf{I}}$  donné et de l'espace  $\mathcal{L}_0$ , on se pose alors le problème de la bijectivité de l'application  $k$  qui permet cette transposition. L'étude de cette intersection se fait en deux temps : étude des charges d'origine mécanique suivie de

l'étude des charges d'origine électrique. Il est à noter que dans le cas le plus simple, cas des couples de charges de types (0,0) ou (0,0'), cette intersection dénombre quatre couples de charges.

## I /INTRODUCTION

En considérant pour matériau les diélectriques non magnétisables, on a  $\vec{\mathcal{H}} = \vec{0}$  et  $q_f = 0$ , cette dernière égalité traduisant que les diélectriques ne possèdent aucune charge électrique libre. On suppose de plus que le champ magnétique  $\vec{\mathcal{H}}$  est constamment nul :  $\vec{\mathcal{H}} = \vec{C}\vec{B} = \vec{0}$ .

On considère un diélectrique  $\Omega(\subset \mathbb{R}^3)$ , qui est plongé dans un champ électrique et qui est aussi soumis à des efforts mécaniques. La densité de force volumique d'origine mécanique est notée  $\vec{f}$  et celle d'origine électrique  ${}_M\vec{f}$ . La densité surfacique de force résultante des deux contributions est notée  $\vec{t}_{(n)} = t \cdot \vec{n}$  où  $t$  désigne le tenseur de contraintes de Cauchy.

On a démontré dans le chapitre 2 que les équations du mouvement peuvent s'écrire dans la configuration actuelle  $\delta = \phi(\Omega)$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta} (\vec{G} + \rho \vec{v}) dx = \int_{\delta} \vec{f} dx + \int_{\partial\delta} (t + {}_M t + \vec{G} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{n} da, \quad (2.6)$$

où  ${}_M t$  est un tenseur défini par

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta} \vec{G} dx - \int_{\partial\delta} ({}_M t + \vec{G} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{n} da = - \int_{\delta} {}_M \vec{f} dx. \quad (1.40)$$

On avait remarqué dans le chapitre précédent que ces deux égalités peuvent s'interpréter de façon formelle comme équations de l'équilibre, où  ${}_M t$  désignerait un tenseur de contraintes d'origine électromagnétique.

Dans le cadre de l'électro-élasticité statique, elles s'écrivent plus simplement :

$$(3.1) \quad \int_{\delta} \vec{f} dx + \int_{\partial\delta} (t + {}_M t) \cdot \vec{n} da = \vec{0}$$

$$(3.2) \quad \int_{\delta} {}_M \vec{f} dx + \int_{\partial\delta} ({}_M t) \cdot \vec{n} da = \vec{0}$$

$$\text{où } {}_M t^{ij} = E^i D_o^j + \mathcal{E}^i P^j - \frac{1}{2} \vec{D}_o \cdot \vec{E} \delta^{ij}$$

$$\text{et } {}_M \vec{f} = (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{\mathcal{E}}$$

avec le tenseur  $t + {}_M t$  symétrique.

A l'égalité (3.2), on peut préférer

$$(3.3) \quad \int_{\delta} \vec{f} dx + \int_{\partial\delta} ({}_F t) \cdot \vec{n} da = \vec{0}$$

$$\text{où } {}_F t^{ij} = E^i D_o^j - \frac{1}{2} \vec{D}_o \cdot \vec{E} \delta^{ij}$$

$$\text{et } {}_L \vec{f} = -\text{div}_x \vec{P} \vec{\mathcal{E}}.$$

Ainsi, la force d'origine électrique  ${}_L \vec{f}$  ressemble à une force exercée sur une « charge »  $-\text{div}_x \vec{P}$ , quantité qui reflète la propriété de polarisation du matériau au point  $x$ ; cette charge est appelée « charge de polarisation ».

Remarques :

\* dans le cadre de la statique, on a  $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}$ .

\* si l'on additionne membre à membre les équations (3.2) et (3.3), on retrouve les équations d'équilibre (2.29) :

$$\int_{\delta} (\vec{f} + {}_L\vec{f}) dx + \int_{\partial\delta} {}_E t \cdot \vec{n} da = \vec{0},$$

$$\text{où } {}_E t = t + \vec{P} \otimes \vec{\mathcal{E}}.$$

On peut alors reformuler le problème de traction ainsi, en prenant des notations plus uniformes :

Un diélectrique  $\Omega (\subset \mathbb{R}^3)$  est soumis à :

- des efforts mécaniques surfaciques  $\vec{\tau}_m$  et volumiques  $\vec{F}_m$

- un champ électrique qui engendre des efforts surfaciques  $\vec{\tau}_e$  et volumiques  $\vec{F}_e$ .

Si l'on suppose qu'il est en état d'équilibre, alors les équations suivantes sont vérifiées :

$$(E) \begin{cases} \text{DIV}_X \mathbf{P}_m + \vec{F}_m = \vec{0} \\ \text{DIV}_X \mathbf{P}_e + \vec{F}_e = \vec{0} \\ \mathbf{P}_m \vec{N} = \vec{\tau}_m \\ \mathbf{P}_e \vec{N} = \vec{\tau}_e \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{P}_m = J_F(t + {}_M t) F^{-T}$  et  $\mathbf{P}_e = J_F(-{}_M t) F^{-T}$  ou  $\mathbf{P}_e = J_F(-{}_F t) F^{-T}$  suivant que l'on choisisse  ${}_M \vec{f}$  ou  ${}_L \vec{f}$  pour expression de la force volumique d'origine électrique.

En regroupant on a aussi :

$$\begin{cases} \text{DIV}_X {}_E \mathbf{P} + \vec{F}_m + \vec{F}_e = \vec{0} \\ {}_E \mathbf{P} \vec{N} = \vec{\tau}_m + \vec{\tau}_e \end{cases} \quad (3.5)$$

où  ${}_E \mathbf{P} = \mathbf{P}_m + \mathbf{P}_e$ . On dira que  $\mathbf{P}_m$  et  $\mathbf{P}_e$  sont les composantes d'origines respectives mécanique et électrique du premier tenseur de Piola-Kirchhoff généralisé  ${}_E \mathbf{P}$ .

La décomposition (3.4) suggère de considérer les forces d'origines mécanique et électrique de façon indépendante. Il est clair que la présence d'un champ électrique n'a aucune influence sur les forces d'origine mécanique. Tandis que le fait de soumettre le matériau à des efforts mécaniques influe sur l'expression des efforts d'origine électrique, ceci étant dû à l'effet piézo-électrique direct. Donc en toute rigueur, pour effectuer un découplage de l'espace des charges en l'espace des charges d'une part d'origine mécanique et d'autre part d'origine électrique, il faut supposer que le diélectrique ne possède que la propriété piézo-électrique inverse, c'est à dire la propriété d'électrostriction.

Sous cette condition, on peut alors supposer que toute charge volumique (respectivement surfacique) soit représentée par un vecteur de  $\mathbb{R}^6$ , les 3 premières composantes représentant le vecteur charge d'origine mécanique et les 3 autres composantes représentant celui d'origine électrique.

Ainsi,

une charge volumique d'origine mécanique  $\vec{F}_m$  est représentée par le vecteur de  $\mathbb{R}^6$   $\begin{pmatrix} \vec{F}_m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ ,

une charge volumique d'origine électrique  $\vec{F}_e$  est représentée par le vecteur de  $\mathbb{R}^6$   $\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{F}_e \end{pmatrix}$ ,

et on procédera de même pour les charges surfaciques  $\vec{\tau}_m$  et  $\vec{\tau}_e$ .

On note  $\mathbf{L}$  l'espace des charges  $\vec{I} = (\vec{F}, \vec{\tau}) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ .

On munit  $\mathbb{R}^6$  de la métrique usuelle et on définit un produit scalaire sur l'espace  $\mathbf{L}$  par :  
pour toutes charges  $\vec{I} = (\vec{F}, \vec{\tau})$  et  $\vec{I}' = (\vec{F}', \vec{\tau}')$  de  $\mathbf{L}$ ,

$$(3.6) \quad \langle \vec{I}, \vec{I}' \rangle = \int_{\Omega} \langle \vec{F}(X), \vec{F}'(X) \rangle_{\mathbb{R}^6} dX + \int_{\partial\Omega} \langle \vec{\tau}(X), \vec{\tau}'(X) \rangle_{\mathbb{R}^6} dA.$$

$\mathbf{L}$  est alors muni de la norme de l'espace produit  $L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ .

Remarques :

\* si  $\vec{I}_m$  et  $\vec{I}_e$  désignent respectivement des charges d'origine purement mécanique et purement électrique, on a  $\langle \vec{I}_m, \vec{I}_e \rangle = 0$ .

\* il sera commode de décomposer l'espace  $\mathbf{L}$  en  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_m \oplus \mathbf{L}_e$  où  $\mathbf{L}_m$  et  $\mathbf{L}_e$  désignent respectivement l'espace des charges d'origine mécanique et électrique.

On définit un nouvel espace vectoriel des charges  $\mathcal{L}$  par :

$$(3.7) \quad \mathcal{L} = \left\{ (\vec{F}, \vec{\tau}) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 / \int_{\Omega} \vec{F}(X) dX + \int_{\partial\Omega} \vec{\tau}(X) dA = \vec{0} \right\}.$$

Celui-ci peut aussi se décomposer en  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$  avec

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_m = \left\{ (\vec{F}_m, \vec{\tau}_m) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 / \int_{\Omega} \vec{F}_m(X) dX + \int_{\partial\Omega} \vec{\tau}_m(X) dA = \vec{0} \right\} \\ \mathcal{L}_e = \left\{ (\vec{F}_e, \vec{\tau}_e) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 / \int_{\Omega} \vec{F}_e(X) dX + \int_{\partial\Omega} \vec{\tau}_e(X) dA = \vec{0} \right\} \end{array} \right.$$

Les équations de l'équilibre peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$(3.9) \quad \Phi(\phi, \vec{\Pi}) = \left\{ (\vec{F}_m, \vec{\tau}_m), (\vec{F}_e, \vec{\tau}_e) \right\}$$

où  $\Phi$  désigne l'application définie par :

$$(3.10) \quad \Phi(\phi, \vec{\Pi}) = \left\{ (-\text{DIV}_X \mathbf{P}_m, \mathbf{P}_m \vec{N}), (-\text{DIV}_X \mathbf{P}_e, \mathbf{P}_e \vec{N}) \right\}.$$

On peut remarquer que si  $\left[ (\vec{F}_m, \vec{\tau}_m), (\vec{F}_e, \vec{\tau}_e) \right]$  vérifie les équations (3.4) pour un couple  $(\phi, \vec{\Pi})$ , alors  $\left[ (\vec{F}_m, \vec{\tau}_m), (\vec{F}_e, \vec{\tau}_e) \right] \in \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$ .

En effet, les équations (3.5) permettent d'écrire

$$\int_{\Omega} \vec{F}_m(X) dX + \int_{\partial\Omega} \vec{\tau}_m(X) dA = - \int_{\Omega} \text{DIV}_X \mathbf{P}_m dX + \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}_m \vec{N} dA = \vec{0}$$

d'après la relation  $\int_{\partial\Omega} P_m \vec{N} dA = \int_{\Omega} \text{DIV}_X P_m dX$  ; d'où le résultat pour les charges d'origine mécanique, celui pour les charges d'origine électrique étant identique.

Si on désigne par  $\mathcal{E}$  l'ensemble des configurations (ou déformations) de  $\Omega$  défini par :

$$(3.11) \mathcal{E} = \left\{ \phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 / \phi(O) = O, \phi \in \mathbb{H}^3(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3), J_{\mathbf{F}} = \det D_X \phi > 0 \right\},$$

( $\phi^{-1} : \phi(\bar{\Omega}) \rightarrow \bar{\Omega}$  est supposé aussi dans  $\mathbb{H}^3$  :  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont alors de classe  $\mathcal{E}^1$ )

et par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des champs de vecteurs de polarisation défini par :

$$(3.12) \mathcal{A} = \left\{ \vec{\Pi} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{\Pi} \in \mathbb{H}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \right\},$$

l'opérateur  $\Phi$  est défini de  $\mathcal{E} \times \mathcal{A}$  dans  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$ .

Le tenseur  ${}_E \mathbf{P} = \mathbf{P}_m + \mathbf{P}_e$  est défini par la loi de comportement (2.42),  ${}_E \hat{\mathbf{P}} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}}$ , où la fonction énergie libre  $\hat{W} = \rho_0 \hat{\Psi}$  est une fonction de  $(X, \mathbf{F}, \vec{\Pi}) \in \Omega \times \mathcal{E}_3^+ \times \mathbb{R}^3$  sur  $\mathbb{R}$ . On supposera la fonction  $W$  de classe  $C^2(\Omega \times \mathcal{E}_3^+ \times \mathbb{R}^3)$ .

On pourra alors dire d'après la relation (2.42),  $\frac{\partial \hat{W}}{\partial \vec{\Pi}} \equiv \vec{\mathcal{E}}$  que le champ de vecteurs  $\vec{\mathcal{E}}$  est de classe  $C^1(\Omega \times \mathcal{E}_3^+ \times \mathbb{R}^3)$ .

L'axiome d'indifférence matérielle (2.43)

pour tout  $Q$  de  $SO(3)$ ,  $\hat{W}(Q\mathbf{F}, Q\vec{\Pi}(\phi(X))) = \hat{W}(\mathbf{F}, \vec{\Pi}(\phi(X)))$

permet d'affirmer que

$$(3.13) {}_E \hat{\mathbf{P}}(Q\mathbf{F}, Q\vec{\Pi}(\phi(X))) = Q {}_E \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \vec{\Pi}(\phi(X))).$$

On supposera de même pour  $\mathbf{P}_m$  et  $\mathbf{P}_e$  :

$$(3.14) \hat{\mathbf{P}}_m(Q\mathbf{F}, Q\vec{\Pi}(\phi(X))) = Q \hat{\mathbf{P}}_m(\mathbf{F}, \vec{\Pi}(\phi(X))) \text{ et } \hat{\mathbf{P}}_e(Q\mathbf{F}, Q\vec{\Pi}(\phi(X))) = Q \hat{\mathbf{P}}_e(\mathbf{F}, \vec{\Pi}(\phi(X))).$$

L'opérateur  $\Phi$  possède alors la propriété suivante :

$$(3.15) \text{pour tout } Q \text{ de } SO(3), \Phi(Q\phi, Q\vec{\Pi}(\phi(X))) = (Q\vec{\Gamma}_m, Q\vec{\Gamma}_e).$$

Cette propriété amène à définir des actions sur les espaces  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{L}_m$  et  $\mathcal{L}_e$  par :

action de  $SO(3)$  sur  $\mathcal{E}$  :  $Q\phi = Q \circ \phi$

$$\text{de } SO(3) \text{ sur } \mathcal{L}_m : Q \vec{\Gamma}_m(X) = (Q\vec{F}_m(X), Q\vec{\tau}_m(X)) \quad (3.16)$$

$$\text{de } O(3) \text{ sur } \mathcal{L}_e : Q \vec{\Gamma}_e(X) = (Q\vec{F}_e(X), Q\vec{\tau}_e(X)).$$

**Remarque** : la première action est naturelle puisque l'axiome d'indifférence matérielle consiste à conserver l'élément de volume ainsi que l'orientation, cette dernière propriété imposant que le déterminant de  $Q$  soit positif. La deuxième est tout aussi naturelle puisqu'elle découle à travers l'opérateur  $\Phi$  de la première. Tandis que dans la dernière, on peut se permettre éventuellement un changement d'orientation. Cet aspect qui est lié au phénomène d'électrostriction sera repris dans le chapitre 4.

## II / ETUDES DES CHARGES

### 1-Définitions

Il s'agit de définir sur chacun des espaces  $L_m$  et  $L_e$  différentes applications. L'espace noté dans la suite  $L$  désignera alors respectivement  $L_m$  ou  $L_e$ . Pour que ces applications aient un sens, il suffira de supposer que  $\vec{F}_m \in \mathbb{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\vec{F}_e \in \mathbb{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $\vec{\tau}_m \in \mathbb{H}^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $\vec{\tau}_e \in \mathbb{H}^1(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)$ . On peut remarquer que les conditions relatives à  $\vec{F}_e$  et  $\vec{\tau}_e$  sont nécessairement vérifiées puisque  $\vec{\Pi} \in \mathbb{H}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  et que  $W$  est de classe  $C^2$  sur  $\Omega \times \mathcal{N}_3^+ \times \mathbb{R}^3$  ce qui implique  $\vec{\mathfrak{S}}$  de classe  $C^1$  sur  $\Omega \times \mathcal{N}_3^+ \times \mathbb{R}^3$ .

Considérons...

(i) l'application linéaire "résultante"  $\vec{\mathcal{R}}$  :

$$(3.17) \quad \vec{\mathcal{R}} : \begin{array}{l} L \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{I} \rightarrow \vec{\mathcal{R}}(\vec{I}) \end{array}$$

$$\text{où } \vec{\mathcal{R}}(\vec{I}) = \int_{\Omega} \vec{F}(X) dX + \int_{\partial\Omega} \vec{\tau}(X) dA$$

(ii) l'application linéaire "moment résultant en O"  $\vec{M}(O, \cdot)$  :

$$(3.18) \quad \vec{M}(O, \cdot) : \begin{array}{l} L \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{I} \rightarrow \vec{M}(O, \vec{I}) \end{array}$$

$$\text{où } \vec{M}(O, \vec{I}) = \int_{\Omega} \vec{F}(X) \times \vec{OX} dX + \int_{\partial\Omega} \vec{\tau}(X) \times \vec{OX} dA$$

Ce vecteur est associé à la partie antisymétrique de...

(iii) l'application linéaire "charge astatique en O"  $k(O, \cdot)$  :

$$(3.19) \quad k(O, \cdot) : \begin{array}{l} L \rightarrow \mathcal{N}_3 \\ \vec{I} \rightarrow k(O, \vec{I}) \end{array}$$

$$\text{où } k(O, \vec{I}) = \int_{\Omega} \vec{F}(X) \otimes \vec{OX} dX + \int_{\partial\Omega} \vec{\tau}(X) \otimes \vec{OX} dA.$$

Remarque : Ces applications sont relatives aux espaces  $L_m$  ou  $L_e$  ; elles sont alors au nombre de 6 :  $\vec{\mathcal{R}}_m, \vec{\mathcal{R}}_e, \vec{M}_m(O, \cdot), \vec{M}_e(O, \cdot), k_m(O, \cdot), k_e(O, \cdot)$ .

On peut aussi définir ces applications sur l'espace tout entier  $L = L_m \oplus L_e$  :

par exemple,

$$(3.20) \quad k : \begin{array}{l} L_m \oplus L_e \rightarrow \mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_6 \\ (\vec{I}_m, \vec{I}_e) \rightarrow k(O, \vec{I}_m, \vec{I}_e) \end{array}$$

$$\text{où } k(O, \vec{I}_m, \vec{I}_e) = \begin{bmatrix} k_m(O, \vec{I}_m) & 0 \\ 0 & k_e(O, \vec{I}_e) \end{bmatrix}$$

Autres remarques :

\*les applications  $\bar{M}$  et  $k$  peuvent être considérées comme appliquant  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{L}$  respectivement à  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{E}_3$ .

\*elles vérifient :

$$\begin{aligned} \bar{M}(O', \bar{I}) &= \bar{M}(O, \bar{I}) + O' \vec{O} \times \bar{\mathcal{Q}}(\bar{I}) \\ k(O', \bar{I}) &= k(O, \bar{I}) + O' \vec{O} \otimes \bar{\mathcal{Q}}(\bar{I}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

En particulier, on peut énoncer :

Proposition (3.22): Les applications  $\bar{M}$  et  $k$  sont indépendantes du choix du point  $O$  si et seulement si  $\bar{\mathcal{Q}}(\bar{I}) = \vec{0}$ , ce qui est équivalent à  $\bar{I} \in \ker \bar{\mathcal{Q}} (= \mathcal{L})$ .

Comme par hypothèse  $\phi(O) = O$ , on peut définir

$$(3.23) \quad k(O, \bar{I}_m, \bar{I}_e, \phi) = \begin{bmatrix} k_m(O, \bar{I}_m, \phi) & 0 \\ 0 & k_e(O, \bar{I}_e, \phi) \end{bmatrix} \text{ avec}$$

$$k_m(O, \bar{I}_m, \phi) = \int_{\Omega} \bar{F}_m(X) \otimes \phi(X) dX + \int_{\partial\Omega} \bar{\tau}_m(X) \otimes \phi(X) dA,$$

$$k_e(O, \bar{I}_e, \phi) = \int_{\Omega} \bar{F}_e(X) \otimes \phi(X) dX + \int_{\partial\Omega} \bar{\tau}_e(X) \otimes \phi(X) dA,$$

où  $\phi(X)$  désigne le vecteur  $\vec{O}\phi(X)$ .

On a alors

$$\begin{aligned} k_m(O, \bar{I}_m, I_{\Omega}) &= k_m(O, \bar{I}_m) \text{ noté } k_m(\bar{I}_m) \\ k_e(O, \bar{I}_e, I_{\Omega}) &= k_e(O, \bar{I}_e) \text{ noté } k_e(\bar{I}_e) \end{aligned} \quad (3.24).$$

Définition (3.25):  $\phi \in \mathcal{E}$ ,  $\bar{I} \in \mathcal{L}$ .

$\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  est relativement équilibrée à  $\phi$  lorsque  $\bar{I}_m$  et  $\bar{I}_e$  sont simultanément équilibrées relativement à  $\phi$ , c'est à dire  $\bar{M}_m(\bar{I}_m, \phi) = \vec{0}$  et  $\bar{M}_e(\bar{I}_e, \phi) = \vec{0}$ .

On désigne par  $\mathcal{L}_0$  l'espace des charges de  $\mathcal{L}$  relativement équilibrées à  $I_{\Omega}$ .

On peut remarquer que  $\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$ ,

où  $(\mathcal{L}_m)_0$  est l'espace des charges d'origine mécanique relativement équilibrées à  $I_{\Omega}$  et

$(\mathcal{L}_e)_0$  est l'espace des charges d'origine électrique relativement équilibrées à  $I_{\Omega}$ .

Il découle directement de la définition :

**Proposition** (3.26):

$\bar{\mathbf{I}}_m$  est équilibrée relativement à  $\phi$  si et seulement si  $k_m(O, \bar{\mathbf{I}}_m, \phi)$  est indépendant de  $O$  et  $k_m(\bar{\mathbf{I}}_m, \phi)$  est une matrice de  $\mathcal{N}_3$  symétrique.

$\bar{\mathbf{I}}_e$  est équilibrée relativement à  $\phi$  si et seulement si  $k_e(O, \bar{\mathbf{I}}_e, \phi)$  est indépendant de  $O$  et  $k_e(\bar{\mathbf{I}}_e, \phi)$  est une matrice de  $\mathcal{N}_3$  symétrique.

$\bar{\mathbf{I}}$  est équilibrée relativement à  $\phi$  si et seulement si  $k_m(O, \bar{\mathbf{I}}_m, \bar{\mathbf{I}}_e, \phi)$  est indépendant de  $O$  et  $k_m(\bar{\mathbf{I}}_m, \bar{\mathbf{I}}_e, \phi)$  est matrice de  $\mathcal{N}_6$  symétrique.

En particulier  $\bar{\mathbf{I}} \in \mathcal{L}_0$  ssi  $k(\bar{\mathbf{I}})$  est matrice de  $\mathcal{N}_6$  symétrique.

**Démonstration** : On démontre la dernière partie de la proposition.

$\bar{\mathbf{I}}$ ,  $k$ ,  $\mathcal{L}$  ... désignent à tour de rôle soit  $\bar{\mathbf{I}}_m$ ,  $k_m$ ,  $\mathcal{L}_m$ ... soit  $\bar{\mathbf{I}}_e$ ,  $k_e$ ,  $\mathcal{L}_e$ ...

$\bar{\mathbf{I}} \in \mathcal{L}_0$  équivaut à  $\bar{\mathcal{Q}}(\bar{\mathbf{I}}) = \bar{\mathbf{0}}$  et  $\bar{\mathbf{M}}(O, \bar{\mathbf{I}}) = \bar{\mathbf{0}}$  ce qui est équivalent à dire que  $k(O, \bar{\mathbf{I}})$  est indépendant de  $O$  d'après la proposition (3.22) et que la partie antisymétrique de  $k(O, \bar{\mathbf{I}})$  est nulle. D'où le résultat.

$L$ ,  $L_m$  et  $L_e$  munis du produit scalaire (3.6) sont des espaces de Hilbert. Les applications  $\bar{\mathcal{Q}}_m$  et  $\bar{\mathcal{Q}}_e$  étant continues de  $L_m$  et  $L_e$  respectivement dans  $\mathbb{R}^3$ , leurs noyaux  $\mathcal{L}_m$  et  $\mathcal{L}_e$  sont des sous-espaces fermés de  $L_m$  et  $L_e$ . Ils admettent chacun un supplémentaire orthogonal, noté respectivement  $\mathcal{L}_m^\perp$  et  $\mathcal{L}_e^\perp$ , qui sont des sous-espaces fermés de  $L$ , tel que  $L_m = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_m^\perp$ ,  $L_e = \mathcal{L}_e \oplus \mathcal{L}_e^\perp$  et  $L = L_m \oplus L_e$ .

Tout élément  $\lambda = (\lambda_m, \lambda_e) \in L$  se décompose alors de manière unique en  $\lambda = \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{I}}^\perp$  avec  $\bar{\mathbf{I}} = (\bar{\mathbf{I}}_m, \bar{\mathbf{I}}_e) \in \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$ ,  $\bar{\mathbf{I}}^\perp = (\bar{\mathbf{I}}_m^\perp, \bar{\mathbf{I}}_e^\perp) \in \mathcal{L}_m^\perp \oplus \mathcal{L}_e^\perp$  et  $\langle \bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{I}}^\perp \rangle = 0$ .

Puisque  $\mathcal{L}_m = \ker \bar{\mathcal{Q}}_m$  et  $\mathcal{L}_e = \ker \bar{\mathcal{Q}}_e$ , par les applications  $\bar{\mathcal{Q}}_m$  et  $\bar{\mathcal{Q}}_e$  les espaces  $\mathcal{L}_m^\perp$  et  $\mathcal{L}_e^\perp$  s'identifient chacun à  $\mathbb{R}^3$ . De façon plus précise :

**Proposition** (3.27): L'espace vectoriel  $L$  se décompose en  $L = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$  avec  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$ ,  $\mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}_m^\perp \oplus \mathcal{L}_e^\perp$ , où  $\mathcal{L}_m^\perp$  et  $\mathcal{L}_e^\perp$  sont des espaces vectoriels de dimension 3 formés des champs constants de  $\mathbb{R}^3$ .

**Démonstration** : Soit  $\bar{\mathbf{v}}$  un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  indépendant de  $X \in \bar{\Omega}$ .

On définit la charge mécanique constante  $\bar{\mathbf{I}}_m = (\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}})$ .

Pour tout  $\bar{\mathbf{I}}_m \in \mathcal{L}_m$ ,  $\langle \bar{\mathbf{I}}_m, \bar{\mathbf{I}}_m \rangle = \left[ \int_{\Omega} \bar{\mathbf{F}}_m(X) dX + \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}}_m(X) dA \right] \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$ .

Donc l'espace vectoriel des champs constants, qui est de dimension 3, est contenu dans  $\mathcal{L}_m^\perp$  qui est lui aussi de dimension 3. D'où l'égalité des espaces. On procédera de même pour  $\mathcal{L}_e^\perp$ .

On peut remarquer que pour tous  $\vec{I}_m^\perp = (\vec{v}_m, \vec{v}_m) \in \mathcal{L}_m^\perp$  et  $\vec{I}_e^\perp = (\vec{v}_e, \vec{v}_e) \in \mathcal{L}_e^\perp$ , on a :

$$\vec{\mathcal{Q}}_m(\vec{I}_m^\perp) = \text{mes}(\vec{\Omega})\vec{v}_m, \quad \vec{\mathcal{Q}}_e(\vec{I}_e^\perp) = \text{mes}(\vec{\Omega})\vec{v}_e,$$

$$\vec{M}_m(O, \vec{I}_m^\perp) = \text{mes}(\vec{\Omega})\vec{OG} \times \vec{v}_m, \quad \vec{M}_e(O, \vec{I}_e^\perp) = \text{mes}(\vec{\Omega})\vec{OG} \times \vec{v}_e,$$

où  $\text{mes}(\vec{\Omega}) = \text{mes}(\Omega) + \text{mes}(\partial\Omega)$  et  $G$  est le centre de gravité de  $\vec{\Omega}$ .

On a alors  $\vec{M}_m(G, \vec{I}_m^\perp) = \vec{M}_e(G, \vec{I}_e^\perp) = \vec{0}$  :  $\mathcal{L}^\perp = \mathcal{L}_m^\perp \oplus \mathcal{L}_e^\perp$  est l'espace des glisseurs dont le support passe par  $G$ .

De plus,  $k_m(O, \vec{I}_m^\perp) = \text{mes}(\vec{\Omega})\vec{OG} \otimes \vec{v}_m$ ,  $k_e(O, \vec{I}_e^\perp) = \text{mes}(\vec{\Omega})\vec{OG} \otimes \vec{v}_e$ ,

$$k_m(G, \vec{I}_m^\perp) = \int_{\Omega} \vec{v}_m \otimes \vec{GX} dX + \int_{\partial\Omega} \vec{v}_m \otimes \vec{GX} dA = 0_{\mathcal{A}_3},$$

$$k_e(G, \vec{I}_e^\perp) = \int_{\Omega} \vec{v}_e \otimes \vec{GX} dX + \int_{\partial\Omega} \vec{v}_e \otimes \vec{GX} dA = 0_{\mathcal{A}_3},$$

c'est à dire, tout élément de  $\mathcal{L}^\perp$  a une charge astatique en  $G$  nulle.

réciproquement, si  $k(G, \vec{I}) = 0_{\mathcal{A}_6}$ , on a d'après (3.24)  $k_m(O, \vec{I}_m) = \vec{OG} \otimes \vec{\mathcal{Q}}_m(\vec{I}_m)$  et

$k_e(O, \vec{I}_e) = \vec{OG} \otimes \vec{\mathcal{Q}}_e(\vec{I}_e)$  qui sont respectivement les charges astatiques des champs

constants  $\vec{\mathcal{Q}}_m(\vec{I}_m) / \text{mes}(\vec{\Omega})$  et  $\vec{\mathcal{Q}}_e(\vec{I}_e) / \text{mes}(\vec{\Omega})$ . D'où on peut énoncer :

**Lemme** (3.28):  $\vec{I} \in \mathcal{L}^\perp$  si et seulement si  $k(G, \vec{I}) = 0_{\mathcal{A}_6}$ .

Grâce aux actions sur les espaces  $\mathcal{E}$ ,  $L_m$  et  $L_e$  définies par (3.16), l'application « charge astatique »  $k$  possède les propriétés suivantes :

**Proposition** (3.29):

(A<sub>1</sub>) Soient  $\vec{I} \in \mathcal{L}$  et  $\phi \in \mathcal{E}$ .

Pour tous  $Q_1, Q_2$  de  $SO(3)$ ,  $k_m(Q_1\vec{I}_m, Q_2\phi) = Q_1 k_m(\vec{I}_m, \phi) Q_2^{-1}$ ,

en particulier  $k_m(Q_1\vec{I}_m) = Q_1 k_m(\vec{I}_m)$ .

Pour tous  $\bar{Q}_1, Q_2$  de  $O(3)$  et  $SO(3)$ ,  $k_e(\bar{Q}_1\vec{I}_e, Q_2\phi) = \bar{Q}_1 k_e(\vec{I}_e, \phi) Q_2^{-1}$ ,

en particulier  $k_e(\bar{Q}_1\vec{I}_e) = \bar{Q}_1 k_e(\vec{I}_e)$ .

(A<sub>2</sub>) Soient  $\vec{I} \in \mathcal{L}$  et  $\phi \in \mathcal{E}$ .

Pour tous  $W_1, W_2$  de skew,  $k_m(W_1\vec{I}_m, \phi) = W_1 k_m(\vec{I}_m, \phi)$  et  $k_m(\vec{I}_m, W_2\phi) = -k_m(\vec{I}_m, \phi) W_2$ .

Pour tous  $\bar{W}_1, W_2$  de skew,  $k_e(\bar{W}_1\vec{I}_e, \phi) = \bar{W}_1 k_e(\vec{I}_e, \phi)$  et  $k_e(\vec{I}_e, W_2\phi) = -k_e(\vec{I}_e, \phi) W_2$ .

Démonstration :

$\bar{I}$ ,  $k$ ,  $\mathcal{L} \dots$  désignent soit  $\bar{I}_m$ ,  $k_m$ ,  $\mathcal{L}_m \dots$ , soit  $\bar{I}_e$ ,  $k_e$ ,  $\mathcal{L}_e \dots$ .

(A<sub>1</sub>) Soient  $Q_1$  et  $Q_2$  de  $SO(3)$ .

$$\begin{aligned} k(Q_1 \bar{I}, Q_2 \phi) &= \int_{\Omega} [Q_1 \bar{F}(X)] \otimes [Q_2 \phi] dX + \int_{\partial\Omega} [Q_1 \bar{\tau}(X)] \otimes [Q_2 \phi] dA \\ &= Q_1 \left[ \int_{\Omega} \bar{F}(X) \otimes [Q_2 \phi] dX + \int_{\partial\Omega} \bar{\tau}(X) \otimes [Q_2 \phi] dA \right] \end{aligned}$$

$$\text{car } (Q\bar{u}) \otimes \bar{v}(\bar{w}) = (\bar{v} \cdot \bar{w})Q\bar{u} = Q(\bar{v} \cdot \bar{w} \bar{u}) = Q[\bar{u} \otimes \bar{v}(\bar{w})].$$

$$\text{Or } \bar{u} \otimes Q\bar{v}(\bar{w}) = (Q\bar{v}) \cdot \bar{w} \bar{u} = \bar{v} \cdot (Q^T \bar{w}) \bar{u} = \bar{u} \otimes \bar{v}(Q^T \bar{w}),$$

$$\text{soit } \bar{u} \otimes Q\bar{v} = \bar{u} \otimes \bar{v} \cdot Q^T.$$

$$k(Q_1 \bar{I}, Q_2 \phi) = Q_1 \left[ \int_{\Omega} \bar{F}(X) \otimes \phi dX + \int_{\partial\Omega} \bar{\tau}(X) \otimes \phi dA \right] Q_2^{-1}$$

$$\text{donc } k(Q_1 \bar{I}, Q_2 \phi) = Q_1 k(\bar{I}, \phi) Q_2^{-1}.$$

(A<sub>2</sub>) Soient  $W_1$  et  $W_2$  de skew. On note  $I$  un voisinage centré en 0 de  $\mathbb{R}$ .

On considère les arcs paramétrés  $Q_1$  et  $Q_2$  définis par :

$$Q_1 : \begin{array}{l} I \rightarrow SO(3) \\ t \rightarrow \exp(tW_1) \end{array} \quad \text{et} \quad Q_2 : \begin{array}{l} I \rightarrow SO(3) \\ t \rightarrow \exp(tW_2) \end{array}, \text{ avec}$$

$$Q_1(0) = Q_2(0) = 1, \quad \left. \frac{dQ_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = W_1 \quad \text{et} \quad \left. \frac{dQ_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = W_2.$$

D'après (A<sub>1</sub>), on a  $k(Q_1(t) \bar{I}, \phi) = Q_1(t) k(\bar{I}, \phi)$  et  $k(\bar{I}, Q_2(t) \phi) = k(\bar{I}, \phi) Q_2^{-1}(t)$ .

Puisque les intégrales sont finies, on peut dériver sous le signe intégrale, et on obtient immédiatement les résultats en remarquant pour le second que :

$$Q_2^{-1}(t) = \exp(-tW_2) \quad \text{et} \quad \left. \frac{dQ_2^{-1}(t)}{dt} \right|_{t=0} = -W_2.$$

## 2-Conséquences des actions de groupes

Théorème de Da Silva (3.30): Soit  $\bar{I} \in \mathcal{L}$ , alors  $(\Theta_{\bar{I}_m} \times \Theta_{\bar{I}_e}) \cap \mathcal{L}_0 \neq \emptyset$ .

i.e. tout couple de charges  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  de  $\mathcal{L}$  peut être équilibré relativement à la configuration non déformée  $I_\Omega$  par un couple de transformations  $(Q, \bar{Q})$  de  $SO(3) \times O(3)$ .

Démonstration : On utilise le théorème classique de décomposition polaire appliqué dans le cadre de l'espace des matrices de  $\mathcal{M}_3$ . Ce théorème, qui figure par exemple dans un ouvrage de MNEIMNE et TESTARD(1), permet de dire que :

$k_m(\bar{I}_m) \in \mathcal{M}_3$  implique l'existence d'un  $Q \in SO(3)$  et  $A \in \text{sym}$  tel que  $k_m(\bar{I}_m) = {}^TQA$ ,

et  $k_e(\bar{I}_e) \in \mathcal{M}_3$  celle d'un  $\bar{Q} \in SO(3) \subset O(3)$  et  $B \in \text{sym}$  tel que  $k_e(\bar{I}_e) = {}^T\bar{Q}B$ .

On a alors  $\left. \begin{array}{l} k_m(Q\bar{I}_m) = A \in \text{sym} \\ k_e(\bar{Q}\bar{I}_e) = B \in \text{sym} \end{array} \right\}$ , donc  $(Q\bar{I}_m, \bar{Q}\bar{I}_e) \in \mathcal{L}_0$  et  $(Q\bar{I}_m, \bar{Q}\bar{I}_e) \in \Theta_{\bar{I}_m} \times \Theta_{\bar{I}_e}$ .

**Définition** (3.31) : Soient  $\bar{I} \in \mathcal{L}_0$  et  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = 1$ .

On dit que  $(\bar{u}, \bar{v})$  est un couple d'axes d'équilibre pour  $\bar{I}$  lorsque

pour tous  $\theta, \bar{\theta}$  de  $\mathbb{R}$ ,  $(\exp(\theta W_{\bar{u}})\bar{I}_m, \exp(\bar{\theta} W_{\bar{v}})\bar{I}_e) \in \mathcal{L}_0$ .

i.e. toute rotation de  $\bar{I}_m$  autour de l'axe de vecteur  $\bar{u}$  issu de  $X$  ainsi que toute rotation de  $\bar{I}_e$  autour de l'axe de vecteur  $\bar{v}$  issu de  $X$  ne détruit pas l'équilibre relatif à l'identité.

**Proposition** (3.32) : Soit  $\bar{I} \in \mathcal{L}_0$ . On note  $A_m = k_m(\bar{I}_m)$ ,  $A_e = k_e(\bar{I}_e)$  et  $A = k(\bar{I})$  qui sont symétriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1)  $\bar{I}$  admet un couple d'axes d'équilibre  $(\bar{u}, \bar{v})$ .

(2) il existe  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = 1$  tel que  $W_{\bar{u}}\bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  et  $W_{\bar{v}}\bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ .

$$\text{skew} \oplus \text{skew} \subset \mathcal{O}_{3,6} \rightarrow \text{skew} \oplus \text{skew} \subset \mathcal{O}_{3,6}$$

(3)  $\begin{pmatrix} W \\ \bar{W} \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} W \\ \bar{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W \\ \bar{W} \end{pmatrix} A$  n'est pas un isomorphisme.

(4)  $\text{Tr}A_m$  est une valeur propre de  $A_m$  ou  $\text{Tr}A_e$  est une valeur propre de  $A_e$ .

**Démonstration** :

(1)  $\Rightarrow$  (2) Si  $\bar{I}$  admet un couple d'axes d'équilibre  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = 1$ ,

pour tous  $\theta, \bar{\theta}$  de  $\mathbb{R}$ ,  $(\exp(\theta W_{\bar{u}})\bar{I}_m, \exp(\bar{\theta} W_{\bar{v}})\bar{I}_e) \in \mathcal{L}_0$  ou  $\begin{cases} \exp(\theta W_{\bar{u}})\bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0 \\ \text{et} \\ \exp(\bar{\theta} W_{\bar{v}})\bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0 \end{cases}$ .

On considère l'application  $t \rightarrow \theta_t$  telle que  $\theta_t|_{t=0} = 0$  et  $\frac{d\theta_t}{dt}|_{t=0} = 1$ .

Puisque  $\exp(\theta_t W_{\bar{u}})\bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$ , alors  $W_{\bar{u}}\bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  car  $(\mathcal{L}_m)_0$  est un espace vectoriel ; de même  $W_{\bar{v}}\bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) On suppose qu'il existe  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = 1$ , telle que  $W_{\bar{u}}\bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  et  $W_{\bar{v}}\bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ .

Puisque  $\bar{I} \in \mathcal{L}_0$ ,  $\bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  donc  $A_m = k_m(\bar{I}_m)$  est symétrique.

Puisque  $W_{\bar{u}}\bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$ ,  $k_m(W_{\bar{u}}\bar{I}_m) = W_{\bar{u}}k_m(\bar{I}_m)$  est symétrique.

On veut démontrer que si  $W_{\bar{u}}^n k_m(\bar{I}_m)$  est symétrique, alors  $W_{\bar{u}}^{n+1} k_m(\bar{I}_m)$  est symétrique.

Pour cela, on remarque tout d'abord que  $W_{\bar{u}}k_m(\bar{I}_m) = -k_m(\bar{I}_m)W_{\bar{u}}$  ; en effet :

$$\left[ W_{\bar{u}}k_m(\bar{I}_m) \right]^T = \left[ k_m(\bar{I}_m) \right]^T W_{\bar{u}}^T = -k_m(\bar{I}_m)W_{\bar{u}} \text{ car } k_m(\bar{I}_m) \in \text{sym} \text{ et } W_{\bar{u}} \in \text{skew or}$$

$W_{\bar{u}}k_m(\bar{I}_m)$  est symétrique, soit  $\left[ W_{\bar{u}}k_m(\bar{I}_m) \right]^T = W_{\bar{u}}k_m(\bar{I}_m)$ , donc  $W_{\bar{u}}k_m(\bar{I}_m) = -k_m(\bar{I}_m)W_{\bar{u}}$ .

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \left[ W_{\bar{u}}^{n+1} k_m(\bar{I}_m) \right]^T &= \left[ W_{\bar{u}} \left( W_{\bar{u}}^n k_m(\bar{I}_m) \right) \right]^T = \left[ W_{\bar{u}}^n k_m(\bar{I}_m) \right]^T W_{\bar{u}}^T = -W_{\bar{u}}^n k_m(\bar{I}_m) W_{\bar{u}} \\ &= W_{\bar{u}}^n W_{\bar{u}} k_m(\bar{I}_m) = W_{\bar{u}}^{n+1} k_m(\bar{I}_m). \end{aligned}$$

Par récurrence, on a alors  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_{\bar{u}}^n \bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$ .

Or  $k_m[\exp(\theta W_{\bar{u}}) \bar{I}_m]$  est définie par :

$$k_m[\exp(\theta W_{\bar{u}}) \bar{I}_m] = \exp(\theta W_{\bar{u}}) k_m(\bar{I}_m) = \left[ 1 + \frac{\theta W_{\bar{u}}}{1!} + \frac{\theta^2 W_{\bar{u}}^2}{2!} + \dots \right] k_m(\bar{I}_m).$$

Chaque composante étant symétrique,  $k_m[\exp(\theta W_{\bar{u}}) \bar{I}_m]$  est alors symétrique.

Donc on a  $\exp(\theta W_{\bar{u}}) \bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  pour tout  $\theta$  de  $\mathbb{R}$   
de même  $\exp(\bar{\theta} W_{\bar{v}}) \bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$  pour tout  $\bar{\theta}$  de  $\mathbb{R}$   $\left( \exp(\theta W_{\bar{u}}) \bar{I}_m, \exp(\bar{\theta} W_{\bar{v}}) \bar{I}_e \right) \in \mathcal{L}_0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) On suppose qu'il existe  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\| = 1$  tel que  $W_{\bar{u}} \bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  et  $W_{\bar{v}} \bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ .

On a vu que  $W_{\bar{u}} k_m(\bar{I}_m)$  symétrique implique que  $W_{\bar{u}} A_m = -A_m W_{\bar{u}}$ ,

de même  $W_{\bar{v}} k_e(\bar{I}_e)$  symétrique implique que  $W_{\bar{v}} A_e = -A_e W_{\bar{v}}$ ,

c'est à dire que pour  $(\bar{u}, \bar{v})$ ,  $A \begin{pmatrix} W_{\bar{u}} \\ W_{\bar{v}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{\bar{u}} \\ W_{\bar{v}} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} A_m W_{\bar{u}} + W_{\bar{u}} A_m \\ A_e W_{\bar{v}} + W_{\bar{v}} A_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ .

D'où l'application linéaire  $\begin{pmatrix} W \\ \bar{W} \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} W \\ \bar{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W \\ \bar{W} \end{pmatrix} A$  n'est pas un isomorphisme.

(3)  $\Rightarrow$  (2) Si  $\begin{pmatrix} W \\ \bar{W} \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} W \\ \bar{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W \\ \bar{W} \end{pmatrix} A$  n'est pas un isomorphisme, alors il existe un

couple  $(W, \bar{W}) \in \text{skew} \oplus \text{skew}$ , autrement dit un couple de vecteurs  $(\bar{u}, \bar{v})$  de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  tel

que  $A \begin{pmatrix} W_{\bar{u}} \\ W_{\bar{v}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{\bar{u}} \\ W_{\bar{v}} \end{pmatrix} A = 0$ . On a  $\begin{cases} A_m W_{\bar{u}} + W_{\bar{u}} A_m = 0 \\ A_e W_{\bar{v}} + W_{\bar{v}} A_e = 0 \end{cases}$ .

$k_m(\bar{I}_m) W_{\bar{u}} + W_{\bar{u}} k_m(\bar{I}_m) = 0$  équivaut à  $W_{\bar{u}} k_m(\bar{I}_m) = -k_m(\bar{I}_m) W_{\bar{u}} = \left[ W_{\bar{u}} k_m(\bar{I}_m) \right]^T$   
équivaut à  $W_{\bar{u}} k_m(\bar{I}_m)$  est symétrique.

De même  $W_{\bar{v}} k_e(\bar{I}_e)$  est symétrique, d'où  $W_{\bar{u}} \bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  et  $W_{\bar{v}} \bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) Soit  $L \in \mathcal{H}_6$  définie par  $L = \begin{bmatrix} (\text{Tr} A_m) I - A_m & 0 \\ 0 & (\text{Tr} A_e) I - A_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m & 0 \\ 0 & L_e \end{bmatrix}$ .

Puisque  $A$  est symétrique,  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormale  $(\bar{e}_i)$  de  $\mathbb{R}^6$  ;

on note  $\lambda_i$  les valeurs propres associées.  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  désignent les trois vecteurs propres de  $A_m$  et  $(\bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6)$  ceux de  $A_e$ .

On veut démontrer que pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$   $A_m W_{\bar{e}_i} + W_{\bar{e}_i} A_m = W_{L_m \bar{e}_i}$ ,

et pour tout  $i \in \{4, 5, 6\}$   $A_e W_{\bar{e}_i} + W_{\bar{e}_i} A_e = W_{L_e \bar{e}_i}$ .

Pour  $i \in \{1,2,3\}$ ,  $(A_m W_{\bar{e}_i} + W_{\bar{e}_i} A_m)_{jk} = (A_m)_{jl} (W_{\bar{e}_i})_{lk} + (W_{\bar{e}_i})_{jl} (A_m)_{lk}$

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{l} \text{la sommation se fait} \\ \text{sur les indices } \{1,2,3\} \end{array} \right) &= \lambda_j (W_{\bar{e}_i})_{jk} + (W_{\bar{e}_i})_{jk} \lambda_k \\ &= (\lambda_j + \lambda_k) (W_{\bar{e}_i})_{jk} \end{aligned}$$

$$(W_{L_m \bar{e}_i})_{jk} = (W_{(\text{Tr} A_m - \lambda_i) \bar{e}_i})_{jk} = (\text{Tr} A_m - \lambda_i) (W_{\bar{e}_i})_{jk} = (\lambda_j + \lambda_k) (W_{\bar{e}_i})_{jk}$$

donc  $A_m W_{\bar{e}_i} + W_{\bar{e}_i} A_m = W_{L_m \bar{e}_i}$ . L'autre formule s'établit de la même manière.

D'où pour tout  $\bar{u} \in \mathcal{D} \text{ect}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ,  $A_m W_{\bar{u}} + W_{\bar{u}} A_m = W_{L_m \bar{u}}$ ,

et pour tout  $\bar{v} \in \mathcal{D} \text{ect}(\bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6)$ ,  $A_e W_{\bar{v}} + W_{\bar{v}} A_e = W_{L_e \bar{v}}$ .

Si l'application  $\left(\frac{W}{W}\right) \rightarrow A \left(\frac{W}{W}\right) + \left(\frac{W}{W}\right) A$  n'est pas un isomorphisme, il existe un couple

$$(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \text{ où } \bar{u} \text{ ou } \bar{v} \text{ est non nul tel que } \begin{cases} A_m W_{\bar{u}} + W_{\bar{u}} A_m = 0 \\ A_e W_{\bar{v}} + W_{\bar{v}} A_e = 0 \end{cases}$$

$$\text{ce qui équivaut à } \begin{cases} W_{L_m \bar{u}} = 0 \\ W_{L_e \bar{v}} = 0 \end{cases}, \text{ soit encore à } \begin{cases} L_m \bar{u} = \vec{0} \\ L_e \bar{v} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\text{c'est à dire } \begin{cases} A_m \bar{u} = (\text{Tr} A_m) \bar{u} \\ A_e \bar{v} = (\text{Tr} A_e) \bar{v} \end{cases}$$

Puisque l'un des deux vecteurs au moins est non nul, soit  $\text{Tr} A_m$  est une valeur propre de  $A_m$ , soit  $\text{Tr} A_e$  est une valeur propre de  $A_e$  (ou éventuellement les deux).

(4)  $\Rightarrow$  (3) Si  $\text{Tr} A_m$  est une valeur propre de  $A_m$  ou  $\text{Tr} A_e$  est une valeur propre de  $A_e$ , il existe un couple  $(\bar{u}, \bar{v})$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  dont un au moins est non nul tel que

$$\begin{cases} L_m \bar{u} = \vec{0} \\ L_e \bar{v} = \vec{0} \end{cases}, \text{ c'est à dire tel que } \left(\frac{W}{W}\right) \rightarrow A \left(\frac{W}{W}\right) + \left(\frac{W}{W}\right) A \text{ ne soit pas un isomorphisme.}$$

Puisque l'on choisit un couple de charges  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  dans  $\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$ , d'après la proposition (3.26) la matrice  $A$  est symétrique ainsi que les matrices  $A_m$  et  $A_e$ . Donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{N}_6$ . Notons  $\lambda_i$  les six valeurs propres de  $A$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  étant celles de  $A_m$  et  $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$  celles de  $A_e$ , de vecteurs propres associés  $\bar{e}_i$ . Le système de vecteurs  $(\bar{e}_i)$  forme une base de  $\mathbb{R}^6$ . Avec ces notations, on peut énoncer :

**Corollaire (3.33) :** Soient  $\bar{I} \in \mathcal{L}_0$ ,  $A = k(\bar{I})$ ,  $A_e = k_e(\bar{I}_e)$  et  $A_m = k_m(\bar{I}_m)$ .

On note  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les valeurs propres de  $A_m$  et  $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$  celles de  $A_e$ .

La charge  $\bar{I}$  n'admet pas de couple d'axes d'équilibre si et seulement si

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_4 + \lambda_5)(\lambda_4 + \lambda_6)(\lambda_5 + \lambda_6) \neq 0.$$

Démonstration : D'après la proposition (3.29),  $\bar{\Gamma}$  n'admet pas de couple d'axes d'équilibre si et seulement si  $\text{Tr}A_m$  n'est pas une valeur propre de  $A_m$  et  $\text{Tr}A_e$  n'est pas une valeur propre de  $A_e$ , c'est à dire si et seulement si l'application linéaire  $L$  est un isomorphisme. Or dans la base  $(\bar{e}_i)$  de  $\mathbb{R}^6$  composée des vecteurs propres de  $A_m$  et  $A_e$  (dans cet ordre),  $L = \text{diag}(\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_5 + \lambda_6, \lambda_4 + \lambda_6, \lambda_4 + \lambda_5)$ . D'où l'assertion est équivalente à  $(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_4 + \lambda_5)(\lambda_4 + \lambda_6)(\lambda_5 + \lambda_6) \neq 0$ .

### 3-Caractéristiques de la charge astatique. Décomposition de l'espace des charges

Proposition (3.34) :

- (1)  $\ker k$  consiste en les charges de  $\mathcal{L}_0$  pour lesquelles tout couple d'axes est un couple d'axes d'équilibre.
- (2)  $k : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_6$  est une surjection.

Démonstration :

- (1)  $\Rightarrow$  Soit  $\bar{\Gamma} \in \ker k$ . On a  $k(\bar{\Gamma}) = 0$  soit  $k_m(\bar{\Gamma}_m) = 0$ ,  $k_e(\bar{\Gamma}_e) = 0$  et  $(\bar{\Gamma}_m, \bar{\Gamma}_e) \in \mathcal{L}_0$ .

$$\text{Pour tout } (W_{\bar{u}}, W_{\bar{v}}) \in \text{skew} \oplus \text{skew}, \begin{cases} k_m(W_{\bar{u}} \bar{\Gamma}_m) = W_{\bar{u}} k_m(\bar{\Gamma}_m) = 0 \\ k_e(W_{\bar{v}} \bar{\Gamma}_e) = W_{\bar{v}} k_e(\bar{\Gamma}_e) = 0 \end{cases},$$

et  $k(W_{\bar{u}} \bar{\Gamma}_m, W_{\bar{v}} \bar{\Gamma}_e) = 0$  implique que  $(W_{\bar{u}} \bar{\Gamma}_m, W_{\bar{v}} \bar{\Gamma}_e) \in \mathcal{L}_0$ .

D'où  $\bar{\Gamma}$  est une charge de  $\mathcal{L}_0$  pour laquelle tout couple d'axes est un couple d'axes d'équilibre.

$\Leftarrow$  Si pour tout  $(W_{\bar{u}}, W_{\bar{v}}) \in \text{skew} \oplus \text{skew}$ ,  $(W_{\bar{u}} \bar{\Gamma}_m, W_{\bar{v}} \bar{\Gamma}_e) \in \mathcal{L}_0$ ,

$$\text{pour tout } (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} W_{\bar{u}} \\ W_{\bar{v}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{\bar{u}} \\ W_{\bar{v}} \end{pmatrix} A = 0 \text{ c'est à dire } \begin{cases} W_{L_m \bar{u}} = 0 \\ W_{L_e \bar{v}} = 0 \end{cases}.$$

$$\text{On a alors } \begin{cases} L_m \bar{u} = \bar{0} \\ L_e \bar{v} = \bar{0} \end{cases} \text{ ou encore } L \equiv 0.$$

$$\text{Ceci implique que } \begin{cases} (\text{Tr}A_m)I - A_m \equiv 0 \\ (\text{Tr}A_e)I - A_e \equiv 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} A_m = (\text{Tr}A_m)I \\ A_e = (\text{Tr}A_e)I \end{cases}.$$

Si  $A_m = (\text{Tr}A_m)I$ , on a  $\text{Tr}A_m = 3\text{Tr}A_m$ , soit  $\text{Tr}A_m = 0$ . Donc  $A_m \equiv 0$ .

De même  $A_e \equiv 0$ , c'est à dire  $A \equiv 0$ .

Si  $k(\bar{\Gamma}) = 0$ , cela signifie que  $\bar{\Gamma} \in \ker k$ .

- (2) On veut démontrer que les applications  $k_m$  et  $k_e$  sont des surjections de  $\mathcal{L}_m$ , respectivement  $\mathcal{L}_e$ , sur  $\mathcal{N}_3$ .

$\mathcal{L}_m$  et  $\mathcal{L}_e$  sont munis du produit scalaire défini en (3.6).

On munit l'espace vectoriel  $\mathcal{N}_3$  du produit scalaire usuel :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\rightarrow \langle A, B \rangle_{\mathcal{N}_3} \text{ où } \langle A, B \rangle_{\mathcal{N}_3} = \text{Tr}(A^T \cdot B). \end{aligned}$$

On a la décomposition  $\mathcal{N}_3 = \text{Im } k_m \oplus \ker k_m^T$  et  $\mathcal{N}_3 = \text{Im } k_e \oplus \text{Im } k_e^T$ .

Le but est alors de mettre en évidence les applications adjointes  $k_m^T$  et  $k_e^T$  des applications linéaires  $k_m$  et  $k_e$ , puis de démontrer que  $\ker k_m^T = \{0_{\mathcal{N}_3}\}$  et  $\ker k_e^T = \{0_{\mathcal{N}_3}\}$ .

Ainsi on aura  $\mathcal{N}_3 = \text{Im } k_m$  et  $\mathcal{N}_3 = \text{Im } k_e$ , ce qui signifie que les applications  $k_m: \mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{N}_3$  et  $k_e: \mathcal{L}_e \rightarrow \mathcal{N}_3$  sont des surjections, soit  $k: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3$  est surjective.

Dans la suite de la démonstration,  $\bar{I}, \bar{k}, \mathcal{L} \dots$  désignent soit  $\bar{I}_m, \bar{k}_m, \mathcal{L}_m \dots$ , soit  $\bar{I}_e, \bar{k}_e, \mathcal{L}_e \dots$ .

Puisque l'application  $k(O, \cdot)$  est linéaire et continue, elle admet une application linéaire adjointe  $k^T(O, \cdot)$  définie de  $\mathcal{N}_3$  dans  $L$  par :

Pour tout  $(I, D) \in L \times \mathcal{N}_3$ ,  $\langle \bar{I}, k^T(O, D) \rangle_L = \langle k(O, \bar{I}), D \rangle_{\mathcal{N}_3}$ .

$$\begin{aligned} \text{Or } \langle k(O, \bar{I}), D \rangle_{\mathcal{N}_3} &= \int_{\Omega} F_j(X) X_i D_{ij} dX + \int_{\partial\Omega} \tau_j(X) X_i D_{ij} dA \\ &= \left\langle \bar{I}, D^T \vec{O}X \right\rangle_L. \end{aligned}$$

Donc l'application linéaire adjointe en  $O$  est définie par :

$$k^T(O, \cdot) : \mathcal{N}_3 \rightarrow L$$

$$D \rightarrow \left( D^T \vec{O}X, D^T \vec{O}X \right)$$

$$\text{On a alors } k^T(O', D) = k^T(O, D) + \left( D^T \vec{O}'O, D^T \vec{O}'O \right).$$

La définition de l'application adjointe appliquée en  $G$  (centre de gravité de  $\bar{\Omega}$ ) permet de dire, grâce au lemme (3.28), que si  $\bar{I} \in \mathcal{L}^\perp$ , alors  $k^T(G, D) \in \mathcal{L}$ .

De plus, on a les équivalences suivantes :

$$"k^T(G, D) = 0_L" \text{ équivaut à } "D = 0_{\mathcal{N}_3}" \text{ équivaut à } " \ker k^T(G, \cdot) = \{0_{\mathcal{N}_3}\} "$$

D'après la proposition (3.22), la restriction de  $k$  à  $\mathcal{L}$  est indépendante du choix du point  $O$ , ainsi que  $k^T$ . L'application  $k^T$  est alors définie de  $\mathcal{N}_3$  sur  $\mathcal{L}$  par :

$$\text{pour tout } D \in \mathcal{N}_3, \quad k^T(D) = \left( D^T \vec{O}X - \bar{v}, D^T \vec{O}X - \bar{v} \right),$$

$$\text{où } \bar{v} = \frac{1}{\text{mes}(\bar{\Omega})} \left[ \int_{\Omega} D^T \vec{O}X dX + \int_{\partial\Omega} D^T \vec{O}X dA \right].$$

En effet,  $\bar{\mathcal{Q}}(k^T(D))$  est ainsi égale à

$$\int_{\Omega} D^T \vec{O}X dX + \int_{\partial\Omega} D^T \vec{O}X dA - \frac{1}{\text{mes}(\bar{\Omega})} \left[ \int_{\Omega} D^T \vec{O}X dX + \int_{\partial\Omega} D^T \vec{O}X dA \right] \times \text{mes}(\bar{\Omega}),$$

donc  $\bar{\mathcal{Q}}(k^T(D)) = \bar{0}$ , c'est à dire  $k^T(D) \in \mathcal{L}$ .

On peut alors affirmer que l'application  $k^T: \mathcal{N}_3 \rightarrow \mathcal{L}$  est une injection, c'est à dire  $\ker k^T = \{0_{\mathcal{N}_3}\}$ . D'où le résultat.

**Proposition** (3.35):

$k/(\ker k)^\perp : (\ker k)^\perp \rightarrow \mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3 \subset \mathcal{N}_6$  est un isomorphisme,

et on a les décompositions suivantes :  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m \oplus_{\mathcal{L}} \mathcal{L}_e$  avec

$$\mathcal{L}_m = (\text{Skew}_m \oplus_{\text{alg}} \text{Sym}_m) \oplus_{\mathcal{L}_m} \ker k_m, \quad (\mathcal{L}_m)_0 = \text{Sym}_m \oplus_{\mathcal{L}_m} \ker k_m,$$

$$\mathcal{L}_e = (\text{Skew}_e \oplus_{\text{alg}} \text{Sym}_e) \oplus_{\mathcal{L}_e} \ker k_e, \quad (\mathcal{L}_e)_0 = \text{Sym}_e \oplus_{\mathcal{L}_e} \ker k_e.$$

**Démonstration** : Puisque  $k_m : \mathcal{L}_m \rightarrow \mathcal{N}_3$  et  $k_e : \mathcal{L}_e \rightarrow \mathcal{N}_3$  sont des surjections,

$k_m/(\ker k_m)^\perp : (\ker k_m)^\perp \rightarrow \mathcal{N}_3$  et  $k_e/(\ker k_e)^\perp : (\ker k_e)^\perp \rightarrow \mathcal{N}_3$  sont des

isomorphismes, d'applications réciproques respectivement notées  $j_m$  et  $j_e$ .

On note  $\text{Skew}_m = j_m(\text{skew}) \subset (\ker k_m)^\perp$ ,  $\text{Sym}_m = j_m(\text{sym}) \subset (\ker k_m)^\perp$ ,

$$\text{Skew}_e = j_e(\text{skew}) \subset (\ker k_e)^\perp, \quad \text{Sym}_e = j_e(\text{sym}) \subset (\ker k_e)^\perp.$$

$\text{Skew}_m \subset \mathcal{L}_m$  et  $\dim \text{Skew}_m = \dim \text{skew} = 3$ .

$\text{Sym}_m \subset \mathcal{L}_m$  et  $\dim \text{Sym}_m = \dim \text{sym} = 6$ .

On a de plus  $\text{skew} \oplus_{\text{alg}} \text{sym} = \mathcal{N}_3$ , donc  $j_m$  respectant la somme algébrique on a

$$j_m(\text{skew}) \oplus_{\text{alg}} j_m(\text{sym}) = j_m(\mathcal{N}_3), \text{ c'est à dire } \text{Skew}_m \oplus_{\text{alg}} \text{Sym}_m = (\ker k_m)^\perp.$$

Donc  $\mathcal{L}_m = (\text{Skew}_m \oplus_{\text{alg}} \text{Sym}_m) \oplus_{\mathcal{L}_m} \ker k_m$ .

De plus on sait que  $\bar{l}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  ssi  $k_m(\bar{l}_m)$  est symétrique. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{l}_m \in (\mathcal{L}_m)_0 \text{ ssi } k_m(\bar{l}_m) \in \text{Sym} \text{ ssi } & \left( \text{soit } \bar{l}_m \in \ker k_m, \text{ soit } k_m/(\ker k_m)^\perp(\bar{l}_m) \in \text{sym} \right) \\ & \text{ssi } \left( \text{soit } \bar{l}_m \in \ker k_m, \text{ soit } \bar{l}_m \in j_m(\text{sym}) \right) \\ & \text{ssi } \left( \text{soit } \bar{l}_m \in \ker k_m, \text{ soit } \bar{l}_m \in \text{Sym}_m \right) \\ & \text{ssi } \bar{l}_m \in \ker k_m \oplus_{\mathcal{L}_m} \text{Sym}_m \end{aligned}$$

Donc  $(\mathcal{L}_m)_0 = \text{Sym}_m \oplus_{\mathcal{L}_m} \ker k_m$

On pourra faire de même pour  $\mathcal{L}_e$ .

**Remarque** : La décomposition peut s'écrire

$$\mathcal{L} = \left[ (\text{Skew}_m \oplus_{\text{alg}} \text{Skew}_e) \oplus_{\text{alg}} (\text{Sym}_m \oplus_{\text{alg}} \text{Sym}_e) \right] \oplus_{\mathcal{L}} \ker k,$$

$$\text{et } \mathcal{L}_0 = (\text{Sym}_m \oplus_{\text{alg}} \text{Sym}_e) \oplus_{\mathcal{L}} \ker k.$$

**Proposition** (3.36):  $\ker k_m$  et  $\ker k_e$  sont les plus grands sous espaces vectoriels respectivement de  $(\mathcal{L}_m)_0$  et  $(\mathcal{L}_e)_0$  invariants respectivement par  $\text{SO}(3)$  et  $\text{O}(3)$ .

Démonstration : Leurs invariances respectives sont évidentes.

On remarquera que la proposition (3.34) sur la description de  $\ker k$  peut en fait se décomposer en deux propositions :

$\ker k_m$  consiste en les charges de  $(\mathcal{L}_m)_0$  pour lesquelles tout axe est un axe d'équilibre.

$\ker k_e$  consiste en les charges de  $(\mathcal{L}_e)_0$  pour lesquelles tout axe est un axe d'équilibre.

Si  $\bar{l}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  et  $\bar{l}_m \notin \ker k_m$ , il existe un vecteur  $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$  tel que

$Q\bar{l}_m \notin \ker k_m$ , où  $Q = \exp(\theta W_{\bar{u}}) \in SO(3)$ .

Donc  $\ker k_m$  est bien le plus grand sous l'espace vectoriel de  $(\mathcal{L}_m)_0$  invariant par  $SO(3)$ .

On procédera de même pour  $\ker k_e$  avec  $\bar{Q} = \exp(\bar{\theta} W_{\bar{v}}) \in SO(3) \subset O(3)$ .

### III / CLASSIFICATION DES CHARGES EQUILIBREES.

Dans le paragraphe I, il a été mis en évidence que les groupes  $SO(3)$  et  $O(3)$  agissent respectivement sur les espaces des charges  $\mathcal{L}_m$  et  $\mathcal{L}_e$ . Il s'agit dans cette partie de décrire l'intersection de l'orbite  $\Theta_{\bar{l}_m} \times \Theta_{\bar{l}_e}$  d'un couple de charges  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  et de l'espace  $\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$  constitué des couples de charges équilibrés relativement à la configuration non déformée  $l_\Omega$ . En choisissant le couple de charges  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  dans  $\mathcal{L}_0$ , on peut dire que les tenseurs  $A_m = k_m(\bar{l}_m)$  et  $A_e = k_e(\bar{l}_e)$  sont des tenseurs symétriques de  $\mathcal{N}_3$ . Ainsi cette étude peut se transposer grâce à l'application « charge astatique »  $k$  à l'étude de l'intersection de l'orbite  $\Theta_{A_m} \times \Theta_{A_e}$  et de l'espace  $\text{sym} \times \text{sym}$  des tenseurs symétriques de  $\mathcal{N}_3 \times \mathcal{N}_3$ .

Il s'agit dans un premier temps de classer les couples de charges en différents types. Puisque  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  appartient à  $\mathcal{L}_0$ , les tenseurs symétriques  $A_m$  et  $A_e$  sont diagonalisables dans  $\mathcal{N}_3$ . Trois critères vont alors intervenir pour cette classification :

- l'égalité ou non des valeurs propres de  $A_m$ , respectivement de  $A_e$ . Cette condition influe sur le nombre d'éléments appartenant à  $\Theta_{A_m} \cap \text{sym}$  et à  $\Theta_{A_e} \cap \text{sym}$ .
- le cas où il existe des valeurs propres de  $A_m$ , respectivement de  $A_e$ , qui sont opposées. Dans le cas contraire, on peut affirmer que le couple de charges  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  n'admet pas de couple d'axes d'équilibre.
- l'éventuelle nullité des valeurs propres qui est liée à la notion d'isotropie des tenseurs  $A_m$  et  $A_e$ .

Dans un second temps, on s'intéresse aux conditions que doivent remplir les tenseurs  $A_m = k_m(\bar{l}_m)$  et  $A_e = k_e(\bar{l}_e)$  pour que les applications « charge astatique »  $k_m$  et  $k_e$  réalisent une relation biunivoque entre  $\Theta_{A_m} \cap \text{sym}$  et  $\Theta_{\bar{l}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  d'une part,  $\Theta_{A_e} \cap \text{sym}$  et  $\Theta_{\bar{l}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  d'autre part. Ces conditions se révéleront être liées aux propriétés d'isotropie des tenseurs  $A_m$  et  $A_e$ .

Dans un troisième temps, à l'aide de la classification, on étudie selon le type du couple de charges  $\bar{\mathbf{l}} = (\bar{\mathbf{l}}_m, \bar{\mathbf{l}}_e)$  la description de l'intersection  $(\Theta_{\bar{\mathbf{l}}_m} \times \Theta_{\bar{\mathbf{l}}_e}) \cap \mathcal{L}_0$ . On présentera tout d'abord l'étude de  $\Theta_{\bar{\mathbf{l}}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  réalisée dans le cadre de l'élasticité classique par D.R.J.CHILLINGWORTH, J.E.MARSDEN et Y.H.WAN (1). Puis on adaptera le raisonnement au cas des charges d'origine électrique afin de décrire  $\Theta_{\bar{\mathbf{l}}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$ .

### 1-Description des différents types de charges

Il est question dans cette partie de cataloguer les couples de charges en équilibre relativement à la configuration non déformée  $l_\Omega$ .

D'après la proposition (3.26), on sait qu'un couple  $\bar{\mathbf{l}} = (\bar{\mathbf{l}}_m, \bar{\mathbf{l}}_e) \in \mathcal{L}_0$  si et seulement si  $k_m(\bar{\mathbf{l}}_m) = A_m$  et  $k_e(\bar{\mathbf{l}}_e) = A_e$  sont deux tenseurs de  $\mathcal{K}_3$  symétriques.  $A_m$  et  $A_e$  sont alors diagonalisables, c'est à dire qu'il existe une base orthonormale de  $\mathbb{R}^3$  pour chacun notée respectivement  $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ ,  $(\bar{\mathbf{e}}_4, \bar{\mathbf{e}}_5, \bar{\mathbf{e}}_6)$  et deux triplets de réels notés  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$  tels que l'on ait les décompositions  $A_m = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) P^{-1}$  et  $A_e = \bar{P} \text{diag}(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \bar{P}^{-1}$  où  $P$  et  $\bar{P}$  sont respectivement les matrices de passage de la base canonique  $(\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}})$  aux bases respectives  $(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$  et  $(\bar{\mathbf{e}}_4, \bar{\mathbf{e}}_5, \bar{\mathbf{e}}_6)$ . Le premier critère qui s'impose est l'égalité ou non des valeurs propres. Cette question revient alors à déterminer la dimension du sous-espace propre associé à chacune de ces valeurs propres de  $A_m$ , respectivement de  $A_e$ . Comme on pourra observer dans la suite, ce premier critère s'avérera être important puisqu'il conditionnera le nombre d'éléments appartenant à  $\Theta_{A_m} \cap \text{sym}$  et à  $\Theta_{A_e} \cap \text{sym}$ , et par voie de conséquence celui des éléments appartenant à  $\Theta_{\bar{\mathbf{l}}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  et à  $\Theta_{\bar{\mathbf{l}}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$ .

La propriété qui fait l'objet du deuxième critère a été abordée précédemment dans le corollaire (3.33). On a émis une condition nécessaire et suffisante pour que  $\bar{\mathbf{l}} = (\bar{\mathbf{l}}_m, \bar{\mathbf{l}}_e)$  n'admette pas de couple d'axes d'équilibre qui est :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_4 + \lambda_5)(\lambda_4 + \lambda_6)(\lambda_5 + \lambda_6) \neq 0.$$

Il faut donc observer s'il existe des valeurs propres de  $A_m$ , respectivement  $A_e$ , qui sont opposées. Dans le cas contraire, on peut affirmer que le couple de charges  $\bar{\mathbf{l}} = (\bar{\mathbf{l}}_m, \bar{\mathbf{l}}_e)$  n'admet pas de couple d'axes d'équilibre. Cette condition se révélera nécessaire dans le chapitre 4 lors de l'étude des solutions des équations de l'électro-élasticité statique.

Le troisième critère est l'éventuelle nullité des valeurs propres. Il s'agit donc de classer les couples de charges suivant la dimension des noyaux  $\ker A_m$  et  $\ker A_e$  des tenseurs  $A_m$  et  $A_e$ . Ce critère est aussi lié à la notion d'isotropie de ces tenseurs :

Définition (3.37):

Soit  $G$  le groupe agissant sur l'espace des charges. On considère la matrice  $A$  de  $\mathcal{K}_3$  définie par  $A = k(1)$  où  $k$  est la charge astatique.

Lorsque  $A$  possède la propriété : "s'il existe  $Q \in G$  tel que  $QA = A$ , alors  $Q = 1_{\mathbb{R}^3}$ ", on dit que  $A$  n'a pas d'isotropie.

D'après l'action de groupe définie par (3.16) sur l'espace  $\mathcal{L}_m$  donnant  $G = SO(3)$ , on étudie l'isotropie de  $A_m$  suivant la dimension du noyau  $\ker A_m$  :

Proposition (3.38): Soit  $A_m \in \text{Sym}$ .

Si  $\dim \ker A_m \leq 1$ , alors  $A_m$  n'a pas d'isotropie.

Si  $\dim \ker A_m = 2$ , alors  $QA_m = A_m$  avec  $Q \in SO(3)$  entraîne "Q est une rotation d'axe  $\text{Im}A_m$  et d'angle quelconque". On dit que  $A_m$  admet le cercle  $S^1$  pour isotropie.

Si  $\dim \ker A_m = 3$ , alors  $A_m \equiv 0$ .  $A_m$  admet  $SO(3)$  pour isotropie.

Pour les charges d'origine électrique, le groupe d'action  $G$  est  $O(3)$  :

Proposition (3.39): Soit  $A_e \in \text{Sym}$ .

Si  $\dim \ker A_e = 0$ , alors  $A_e$  n'a pas d'isotropie.

Si  $\dim \ker A_e = 1$ , alors  $QA_e = A_e$  avec  $Q \in O(3)$  entraîne "Q est soit la réflexion plane par rapport à  $\text{Im}A_e$ , soit l'identité  $1_{\mathbb{R}^3}$ ".

Si  $\dim \ker A_e = 2$ , alors  $QA_e = A_e$  avec  $Q \in O(3)$  entraîne "Q est soit une rotation d'axe  $\text{Im}A_e$  et d'angle quelconque, soit une réflexion plane par rapport à un plan contenant  $\text{Im}A_e$ , soit l'identité  $1_{\mathbb{R}^3}$ ".

Si  $\dim \ker A_e = 3$ , alors  $A_e \equiv 0$ .  $A_e$  admet  $O(3)$  pour isotropie.

Démonstration des deux propositions :

Sur  $\text{Im}A$ ,  $QA=A$  signifie  $\frac{Q}{\text{Im}A} = 1_{\text{Im}A}$ .

C'est à dire  $\text{Im}A \subset \mathcal{D}'$ , où  $\mathcal{D}'$  est l'espace vectoriel des vecteurs invariants par  $Q$ .

\*Si  $\dim \ker A = 0$ ,  $\dim \text{Im}A = 3$  donc  $Q = 1_{\mathbb{R}^3}$ .

\*Si  $\dim \ker A = 1$ ,  $\dim \text{Im}A = 2$  donc  $\dim \mathcal{D}' \geq 2$ .

Dans  $O(3)$ , deux éléments répondent aux conditions : la réflexion plane par rapport à  $\text{Im}A$  et  $1_{\mathbb{R}^3}$  ; seul  $1_{\mathbb{R}^3}$  appartient à  $SO(3)$ .

\*Si  $\dim \ker A = 2$ ,  $\dim \text{Im}A = 1$  donc  $\dim \mathcal{D}' \geq 1$ .

Soit  $\dim \mathcal{D}' = 1$ ,  $Q$  est une rotation d'axe  $\text{Im}A$  et d'angle quelconque ;  $Q \in SO(3)$ .

Soit  $\dim \mathcal{D}' = 2$ ,  $Q$  est la réflexion plane par rapport à  $\text{Im}A$  ;  $Q \notin SO(3)$ .

Soit  $\dim \mathcal{D}' = 3$ ,  $Q$  est  $1_{\mathbb{R}^3}$ .

\*Soit  $\dim \ker A = 3$ ,  $A \equiv 0$ .  $Q$  est un élément quelconque du groupe d'action.

On peut observer le fait que pour les charges d'origine électrique, contrairement à celles d'origine mécanique, le tenseur  $A_e$  admet un élément d'isotropie dans le cas où  $\dim \ker A_e = 1$ . Par conséquent, lors de la classification des charges d'origine électrique, il faudra considérer l'éventualité où une valeur propre de  $A_e$  s'annule.

Description des différents types :

(1) Les trois valeurs propres de  $A_m$ , respectivement de  $A_e$ , sont deux à deux distinctes :

\*On dit que  $\bar{I}_m$  est de type 0.

\*Si les trois valeurs propres de  $A_e$  sont non nulles, on dit que  $\bar{I}_e$  est de type 0 ; sinon, si une des trois valeurs est nulle, on dit que  $\bar{I}_e$  est de type 0'.

(2) Deux valeurs propres exactement sont identiques (et nécessairement non nulles) :

\*On dit que  $\bar{I}_m$  est de type 1.

\*Si la troisième valeur propre de  $A_e$  est non nulle, on dit que  $\bar{I}_e$  est de type 1 ; sinon, on dit que  $\bar{I}_e$  est de type 1'.

(3) Les trois valeurs propres sont identiques (et nécessairement non nulles) :

\*On dit que  $\bar{I}_m$ , respectivement  $\bar{I}_e$ , est de type 2.

Lorsque  $\bar{I}_m$ , respectivement  $\bar{I}_e$ , admet au moins un axe d'équilibre, c'est à dire  $(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3) = 0$ , respectivement  $(\lambda_4 + \lambda_5)(\lambda_4 + \lambda_6)(\lambda_5 + \lambda_6) = 0$ , on se propose de décrire d'abord les différents types de charges  $\bar{I}_m$ , puis de déterminer où la différence réside quant à l'étude de  $\bar{I}_e$ .

Trois cas de figure se présentent :

(1)  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq -\lambda_3$  et  $\lambda_2 \neq -\lambda_3$  :

$$A_m = P \operatorname{diag}(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_3) P^{-1} = Q_{(\bar{e}_1, \pi)} P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_3) P^{-1}.$$

α) Soit  $\lambda_1 \neq 0$ . Puisque  $\lambda_1 \neq -\lambda_3$  et  $\lambda_1 \neq \lambda_3$ ,  $A_m$  appartient à l'orbite d'une charge de type 1.

β) Soit  $\lambda_1 = 0$ , donc  $\lambda_3 \neq 0$ .  $\dim \ker A_m = 2$ .

(2)  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ,  $\lambda_1 = -\lambda_3$  et  $\lambda_2 \neq -\lambda_3$  :

$$A_m = P \operatorname{diag}(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_1) P^{-1} = Q_{(\bar{e}_1, \pi)} P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) P^{-1}.$$

Nécessairement,  $\lambda_1 \neq 0$ .  $A_m$  appartient à l'orbite d'une charge de type 2.

(3)  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ,  $\lambda_1 = -\lambda_3$  et  $\lambda_2 \neq -\lambda_3$ . Alors  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  et  $A_m \equiv 0$ .

Dans le cas où  $\bar{I}_m$  admet au moins un axe d'équilibre, soit  $A_m$  appartient à l'orbite d'une charge n'ayant aucun axe d'équilibre, soit  $A_m$  admet un noyau de dimension 2, ou de dimension 3 ; les deux dernières possibilités représentent les charges dites de types respectifs 3 et 4.

Pour l'étude de  $\bar{I}_e$ , une seule différence se dégage : dans le cas (1) α),  $A_e$  appartient à l'orbite d'une charge soit de type 1 si la troisième valeur propre est non nulle, soit de type 1' sinon.

Récapitulatif : (3.40)

On dit que $\bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$ est de ...	On dit que $\bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ est de ...
<u>Type 0</u> : Lorsque les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de $k_m(\bar{I}_m)$ sont deux à deux distinctes et $(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3) \neq 0$ i.e. $\bar{I}_m$ n'a pas d'axe d'équilibre.	<u>Type 0</u> : Lorsque les valeurs propres $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ de $k_e(\bar{I}_e)$ sont deux à deux distinctes et non nulles et $(\lambda_4 + \lambda_5)(\lambda_4 + \lambda_6)(\lambda_5 + \lambda_6) \neq 0$ i.e. $\bar{I}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre.
	<u>Type 0'</u> : Dans les mêmes conditions que le type 0 mais une des valeurs propres est nulle. i.e. $\bar{I}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre.
<u>Type 1</u> : Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ et $\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3) \neq 0$ i.e. $\bar{I}_m$ n'a pas d'axe d'équilibre.	<u>Type 1</u> : Lorsque $\lambda_4 = \lambda_5 \neq \lambda_6$ et $\lambda_4(\lambda_4 + \lambda_6) \neq 0$ i.e. $\bar{I}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre et $\lambda_6 \neq 0$ .
	<u>Type 1'</u> : lorsque $\lambda_4 = \lambda_5 \neq 0$ et $\lambda_6 = 0$ $\bar{I}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre.
<u>Type 2</u> : Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ $\bar{I}_m$ n'a pas d'axe d'équilibre.	<u>Type 2</u> : Lorsque $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 \neq 0$ $\bar{I}_e$ n'a pas d'axe d'équilibre.
<u>Type 3</u> : Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \neq \lambda_3$ .	<u>Type 3</u> : Lorsque $\lambda_4 = \lambda_5 = 0 \neq \lambda_6$ .
<u>Type 4</u> : Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \bar{I}_m \in \ker k_m$ .	<u>Type 4</u> : Lorsque $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0 \Leftrightarrow \bar{I}_e \in \ker k_e$ .

Définition (3.41): Une charge  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  est dite de type (p,q) lorsque les charges  $\bar{I}_m$  et  $\bar{I}_e$  sont respectivement de type p et q.

2- Lien entre  $(\Theta_{\bar{I}_m} \times \Theta_{\bar{I}_e}) \cap \mathcal{L}_0$  et  $(\Theta_{k_m(\bar{I}_m)} \times \Theta_{k_e(\bar{I}_e)}) \cap \text{sym}$  : étude de la bijectivité des charges astatiques  $k_m$  et  $k_e$ .

Pour que l'étude des intersections  $\Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  et  $\Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  puisse se transposer en l'étude de  $\Theta_{k_m(\bar{I}_m)} \cap \text{sym}$  et  $\Theta_{k_e(\bar{I}_e)} \cap \text{sym}$  de façon biunivoque, il est nécessaire d'examiner la bijectivité des applications « charge astatique »  $k_m$  et  $k_e$ . Comme on pourra observer, la bijectivité est en fait liée à la propriété d'isotropie des tenseurs  $A_m = k_m(\bar{I}_m)$  et  $A_e = k_e(\bar{I}_e)$ .

**Proposition (3.42):** Les applications  $k_m: \Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_0)_m \rightarrow \Theta_{k_m(\bar{I}_m)} \cap \text{sym}$  et  $k_e: \Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_0)_e \rightarrow \Theta_{k_e(\bar{I}_e)} \cap \text{sym}$  sont surjectives mais ne sont bijectives que si  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e) \in \mathcal{L}_0$  est telle que  $\bar{I}_m$  soit de type 0, 1 ou 2 ainsi que  $\bar{I}_e$ .

**Démonstration :**

**Surjection :**  $\Theta_{k_m(\bar{I}_m)} = \{Qk_m(\bar{I}_m) / Q \in SO(3)\} = \{k_m(Q\bar{I}_m) / Q \in SO(3)\} = k_m(\Theta_{\bar{I}_m})$ .

$$\Theta_{k_e(\bar{I}_e)} = \{\bar{Q}k_e(\bar{I}_e) / \bar{Q} \in O(3)\} = \{k_e(\bar{Q}\bar{I}_e) / \bar{Q} \in O(3)\} = k_e(\Theta_{\bar{I}_e}).$$

Soit  $B_m \in \Theta_{k_m(\bar{I}_m)} \cap \text{sym}$ ,  $B_m \in k_m(\Theta_{\bar{I}_m})$  donc il existe  $\bar{I}'_m \in \Theta_{\bar{I}_m}$  tel que  $k_m(\bar{I}'_m) = B_m$  et  $\bar{I}'_m \in (\mathcal{L}_m)_0$  puisque  $B_m$  est symétrique, donc  $k_m: \Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_0)_m \rightarrow k_m(\Theta_{\bar{I}_m}) \cap \text{sym}$  est une surjection. De même on démontrera que  $k_e$  est surjective.

**Injection :** S'il existe deux rotations  $Q_1$  et  $Q_2$  de  $SO(3)$  tels que  $k_m(Q_1\bar{I}_m) = k_m(Q_2\bar{I}_m)$  alors  $Q_1A_m = Q_2A_m$ , soit  $Q_2^{-1}Q_1A_m = A_m$ . Dans le cas où  $\bar{I}_m$  est de type 0, 1 ou 2,  $\dim \ker A_m \leq 1$  et donc d'après la proposition (3.38)  $A_m$  n'a pas d'isotropie :  $Q_2^{-1}Q_1 = 1$ , soit  $Q_1 = Q_2$ . D'où l'injection de  $k_m$ .

Pour  $\bar{I}_e$ , le raisonnement est identique avec  $\bar{Q}_1$  et  $\bar{Q}_2 \in O(3)$ .  $\bar{I}_e$  étant de type 0, 1 ou 2,  $\dim \ker A_e = 0$  et donc d'après la proposition (3.39)  $A_e$  n'a pas d'isotropie.

### 3-Comptabilisation des charges de $\Theta_{\bar{I}} \cap \mathcal{L}_0$

On peut remarquer qu'il existe 35 types de charges, soit 15 sans couple d'axes d'équilibre et 20 avec au moins 1 couple d'axes d'équilibre. Etant donné cette diversité, pour la comptabilisation il est préférable de procéder en deux temps : étude de  $\Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  puis de  $\Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$ .

#### 1) Etude de $\Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$

**Proposition (3.43):** Soit  $\bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$ , de type 0. L'ensemble  $\Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  consiste en 4 charges de type 0.

**Démonstration :** On considère le tenseur  $A_m = k_m(\bar{I}_m)$  qui est symétrique.

Dans la base orthonormale  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  constituée des vecteurs propres de  $A_m$ , de valeurs propres associées  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ,  $\Theta_{A_m} \cap \text{sym}$  consiste en 4 points.

- (1)  $\tilde{A}_m = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  pour  $Q = 1$  ;  $\tilde{A}_m = A_m$
- (2)  $\tilde{A}_m = \text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3)$  pour  $Q = \text{diag}(-1, -1, 1)$  ;  $\tilde{A}_m = Q(\bar{e}_3, \pi)A_m$
- (3)  $\tilde{A}_m = \text{diag}(-\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3)$  pour  $Q = \text{diag}(-1, 1, -1)$  ;  $\tilde{A}_m = Q(\bar{e}_2, \pi)A_m$

(4)  $\tilde{A}_m = \text{diag}(\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$  pour  $Q = \text{diag}(1, -1, -1)$  ;  $\tilde{A}_m = Q(\tilde{e}_1, \pi)A_m$

On peut remarquer que les 4 points sont distincts puisque les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont deux à deux distinctes.

Soit  $\tilde{A}_m \in \Theta_{A_m} \cap \text{sym}$ , alors il existe  $Q \in \text{SO}(3)$  tel que  $\tilde{A}_m = QA_m$ .

On note  $\tilde{e}_i$  les vecteurs propres de  $A_m$  de valeurs propres associées  $\lambda_i$ .

Chaque sous-espace propre est, par hypothèse, de dimension 1 car les  $\lambda_i$  sont deux à deux distinctes.

On peut remarquer que  $\tilde{A}_m^2 = {}^T \tilde{A}_m \tilde{A}_m = {}^T A_m {}^T Q Q A_m = {}^T A_m A_m = A_m^2$ ,

or  $\tilde{A}_m^2 \tilde{e}_i = A_m^2 \tilde{e}_i = \lambda_i^2 \tilde{e}_i$ . Donc les  $\lambda_i^2$  sont les valeurs propres de  $\tilde{A}_m^2$ , de vecteurs propres associés les  $\tilde{e}_i$ . Puisque l'on sait que les valeurs  $\lambda_i$  sont, deux à deux, ni égales, ni opposées, les  $\lambda_i^2$  sont distinctes. Chaque sous-espace propres de  $\tilde{A}_m^2$  est alors de dimension 1. On peut ainsi en déduire que les vecteurs propres de  $\tilde{A}_m$  sont nécessairement les  $\tilde{e}_i$ , de valeurs propres associées les  $\pm \lambda_i$ .

Dans la base des vecteurs propres  $\tilde{e}_i$ , on a alors 8 possibilités pour  $\tilde{A}_m$  :

- |   |   |
|---|---|
| (1) $\tilde{A}_m = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  | (5) $\tilde{A}_m = \text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3)$  |
| (2) $\tilde{A}_m = \text{diag}(-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ | (6) $\tilde{A}_m = \text{diag}(-\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3)$  |
| (3) $\tilde{A}_m = \text{diag}(\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3)$ | (7) $\tilde{A}_m = \text{diag}(\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$  |
| (4) $\tilde{A}_m = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3)$ | (8) $\tilde{A}_m = \text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$ |

Puisque  $\det Q = +1$ , les possibilités (1), (5), (6), (7) conviennent et concordent avec celles qui sont énoncées au début de la démonstration. Par contre, celles qui sont numérotées (2), (3), (4) et (8) ne conviennent pas a priori. En prenant exemple sur la possibilité (2), on observe que celle-ci conviendra à la seule condition que  $\lambda_1$  soit nulle ; or dans ce cas la possibilité (2) revient à la possibilité (1). De même pour les 3 autres. D'où on se ramène effectivement au 4 points énoncés.

L'application  $k_m : \Theta_{\tilde{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0 \rightarrow \Theta_{A_m} \cap \text{sym}$  étant une bijection, aux 4 points de  $\Theta_{A_m} \cap \text{sym}$  correspond 4 charges de  $\Theta_{\tilde{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$ , qui sont de type 0.

**Proposition** (3.44): Soit  $\tilde{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$ , de type 1.  $\Theta_{\tilde{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  consiste en deux éléments (dont  $\tilde{I}_m$  lui-même), chacun n'ayant aucun axe d'équilibre, et en un ensemble isomorphe à  $\mathbb{RP}^1$ , chaque élément ayant un axe d'équilibre.

**Démonstration** : L'espace est rapporté à la base orthonormale directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit le tenseur  $A_m = k_m(\tilde{I}_m)$  de type 1. Puisque  $A_m$  est symétrique,  $A_m$  est diagonalisable dans  $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$  ;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  désignent les trois valeurs propres, de vecteurs propres associés  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ . On peut choisir les trois vecteurs tels que  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$  soit une base orthonormale. La matrice  $A_m$  étant de type 1, on peut dire que  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_3$  et  $\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3)^2 \neq 0$ . Donc  $A_m = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) P^{-1}$  où  $P$  est la matrice de passage de  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ .

Soit  $\tilde{A}_m \in \Theta_{A_m} \cap \text{sym}$ , par un raisonnement analogue à la démonstration précédente, on peut dire que  $\tilde{A}_m$  est diagonalisable dans la même base que  $A_m$  avec pour valeurs propres respectives  $\pm \lambda_1, \pm \lambda_1, \pm \lambda_3$ . De la même façon, puisque  $\det Q = +1$ , on se ramène à 4 solutions : dans  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,

$$\tilde{A}_m = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3) P^{-1} = A_m, \quad \tilde{A}_m = P \text{diag}(-\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_3) P^{-1} = Q(\vec{e}_2, \pi) A_m$$

$$\tilde{A}_m = P \text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_3) P^{-1} = Q(\vec{e}_3, \pi) A_m, \quad \tilde{A}_m = P \text{diag}(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_3) P^{-1} = Q(\vec{e}_1, \pi) A_m$$

Puisque les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont confondues,  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  désigne une base orthonormale quelconque du plan  $\{\vec{e}_3\}^\perp$ . Les deux dernières solutions constituent en fait une famille qui est :

$$\{Q(\vec{u}, \pi) A_m / \vec{u} \in S^1 \text{ d'axe } \vec{e}_3\}. \text{ Notons } X = \{Q(\vec{u}, \pi) / \vec{u} \in S^1\}.$$

L'application  $\begin{matrix} S^1 & \rightarrow & X \\ \vec{u} & \mapsto & Q(\vec{u}, \pi) \end{matrix}$  qui est surjective, est de plus injective si l'on quotiente  $S^1$  par  $\mathbb{Z}_2$ . Donc  $X$  est isomorphe à  $S^1/\mathbb{Z}_2$ , soit encore à  $\mathbb{RP}^1$ . Cette famille est alors de la forme  $\mathbb{RP}^1 \cdot A_m$ .

Il reste à remarquer que les deux premières solutions n'ont pas d'axe d'équilibre car le produit des sommes des termes pris deux à deux est non nul. Par contre, chacune des solutions de la famille  $\mathbb{RP}^1 \cdot A_m$  admet un unique axe d'équilibre qui est  $\vec{e}_3$ . En effet, dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , on a  $\tilde{A}_m W_{\vec{e}_3} + W_{\vec{e}_3} \tilde{A}_m = 0$  pour  $\tilde{A}_m = \text{diag}(-\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_3)$

$$\left( \text{ou } \tilde{A}_m = \text{diag}(\lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_3) \right) \text{ avec } W_{\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et on pourra vérifier que pour}$$

$i=1,2, \tilde{A}_m W_{\vec{e}_i} + W_{\vec{e}_i} \tilde{A}_m \neq 0$ , donc pour tout  $\vec{u} \in \{\vec{e}_3\}^\perp, \tilde{A}_m W_{\vec{u}} + W_{\vec{u}} \tilde{A}_m \neq 0$ .

Finalement, l'application  $k_m: \Theta_{\vec{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0 \rightarrow \Theta_{A_m} \cap \text{sym}$  étant une bijection pour  $\vec{I}_m$  de type 1, on obtient deux solutions qui sont  $\vec{I}_m$  et  $Q(\vec{e}_3, \pi) \vec{I}_m$ , ainsi que la famille  $\mathbb{RP}^1 \cdot \vec{I}_m$ .

**Proposition** (3.45): Soit  $\vec{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$ , de type 2.  $\Theta_{\vec{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  consiste en une charge qui est  $\vec{I}_m$  lui-même et en un ensemble isomorphe à  $\mathbb{RP}^2$ , dont chaque élément admet un plan d'équilibre.

**Démonstration** : Soit  $A_m$  de type 2. Les trois valeurs propres étant identiques, on la note  $\lambda$ ; dans toute base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  orthonormale,  $A_m = \lambda \mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}$ .

De plus  $A_m$  n'admettant pas d'axe d'équilibre, on peut dire que  $\lambda$  est non nul.

Soit  $\tilde{A}_m \in \Theta_{A_m} \cap \text{sym}$ .  $\tilde{A}_m$  est diagonalisable dans la même base que  $A_m$  avec pour valeurs respectives  $\pm \lambda, \pm \lambda, \pm \lambda$ . Puisque  $\det \tilde{A}_m = \det A_m$ , on a quatre familles de solutions :

$$\text{dans } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \tilde{A}_m = \text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda) = A_m.$$

$$\tilde{A}_m = \text{diag}(\lambda, -\lambda, -\lambda) = Q(\vec{e}_1, \pi) A_m.$$

$$\tilde{A}_m = \text{diag}(-\lambda, \lambda, -\lambda) = Q(\tilde{e}_2, \pi)A_m.$$

$$\tilde{A}_m = \text{diag}(-\lambda, -\lambda, \lambda) = Q(\tilde{e}_3, \pi)A_m.$$

Puisque  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$  désigne une base orthonormale quelconque, les trois dernières familles constituent en fait une même et unique famille qui est  $\{Q(\tilde{u}, \pi)A_m / \tilde{u} \in S^2\}$ .

On note  $Y = \{Q(\tilde{u}, \pi) / \tilde{u} \in S^2\}$ .

L'application  $\begin{array}{ccc} S^2 & \rightarrow & Y \\ \tilde{u} & \rightarrow & Q(\tilde{u}, \pi) \end{array}$  qui est surjective, est de plus injective si l'on quotiente  $S^2$  par  $\mathbb{I}_2$ .

Donc  $Y$  est un isomorphe à  $S^2 / \mathbb{I}_2$ , soit encore  $\mathbb{RP}^2$ . Cette famille est alors de la forme  $\mathbb{RP}^2 \cdot A_m$ . Chaque élément  $Q(\tilde{u}, \pi)A_m$  de  $\mathbb{RP}^2 \cdot A_m$  admet un plan d'équilibre qui est  $\{\tilde{u}\}^\perp$ .

**Proposition** (3.46): Soit  $\tilde{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0$ .

$\Theta_{A_m} \cap \text{sym}$  consiste soit en deux éléments qui sont  $A_m$  et  $-A_m$  si  $A_m$  est de type 3, soit en un élément qui est  $A_m \equiv 0$  si  $A_m$  est de type 4.

Il en résulte que pour le type 3,  $\Theta_{\tilde{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0 = \{\tilde{I}_m + \ker k_m\} \cup \{-\tilde{I}_m + \ker k_m\}$ , et pour le type 4,  $\Theta_{\tilde{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0 = \Theta_{\tilde{I}_m}$ .

**Démonstration :**

\*Si  $A_m$  est de type 3, il existe une base orthonormale  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$  dans laquelle on a  $A_m = \text{diag}(0, 0, \lambda)$  avec  $\lambda \neq 0$ . Si  $\tilde{A}_m \in \Theta_{A_m} \cap \text{sym}$ ,  $\ker \tilde{A}_m = \ker A_m$  et  $\tilde{e}_3$  est un vecteur propre de valeur propre associée  $\pm \lambda$ . On a alors soit  $\tilde{A}_m = \text{diag}(0, 0, \lambda) = A_m$ , soit  $\tilde{A}_m = \text{diag}(0, 0, -\lambda) = -A_m$ .

Maintenant  $\tilde{u} \in \Theta_{\tilde{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  si et seulement si il existe une rotation  $Q \in \text{SO}(3)$  tel que  $\tilde{u} = Q\tilde{I}_m$  avec  $k_m(\tilde{u}) = QA_m \in \text{sym}$ . Puisque  $k_m(\tilde{u}) \in \Theta_{A_m} \cap \text{sym}$ ,  $k_m(\tilde{u}) = \pm A_m$ , soit  $k_m(\tilde{u}) = k_m(\pm \tilde{I}_m)$ , donc  $\tilde{u} = \pm \tilde{I}_m + \ker k_m$ .

\*Si  $A_m$  est de type 4,  $k_m(\tilde{I}_m) = 0$  ce qui équivaut à  $\tilde{I}_m \in \ker k_m$  et  $Q\tilde{I}_m \in \ker k_m$  pour tout  $Q$  de  $\text{SO}(3)$ . Donc  $\Theta_{\tilde{I}_m} \subset \ker k_m \subset (\mathcal{L}_m)_0$ , soit  $\Theta_{\tilde{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0 = \Theta_{\tilde{I}_m}$ .

**Remarque :**  $\{\tilde{I}_m + \ker k_m\} \cup \{-\tilde{I}_m + \ker k_m\}$  représente l'union de deux cercles

disjoints. En effet,  $\ker k_m$  représente, par abus de langage,  $\ker \left( \frac{k_m}{\Theta_{\tilde{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0} \right)$ ; et

$$\ker k_m = \{Q \in \text{SO}(3) / k_m(Q\tilde{I}_m) = k_m(\tilde{I}_m)\} = \{Q \in \text{SO}(3) / QA_m = A_m\}, \text{ soit}$$

$$\ker k_m = \{Q \in \text{SO}(3) / Q = Q(\tilde{e}_3, \theta) \text{ avec } \theta \text{ quelconque}\}.$$

Donc  $\ker k_m$  est isomorphe au cercle  $S^1$  d'axe  $\tilde{e}_3$ .

On peut démontrer par une autre méthode que dans le cas où  $\bar{I}_m$  est de type 3,  $\Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  consiste en deux cercles :

$\bar{u} \in \Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  si et seulement si il existe  $Q \in SO(3)$  tel que  $\bar{u} = Q\bar{I}_m$  et  $k_m(\bar{u}) = QA_m \in \text{sym}$ . Puisque  $k_m(\bar{u}) \in \Theta_{A_m} \cap \text{sym}$ ,  $QA_m = \pm A_m$ .

Pour  $QA_m = A_m$ ,  $Q = Q(\bar{e}_3, \theta)$  avec  $\theta$  quelconque. Donc l'ensemble  $\Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$  est isomorphe à  $S^1 \cdot \bar{I}_m$ .

Pour  $QA_m = -A_m$ ,  $Q(-A_m) = A_m$  si et seulement si  $QQ(\bar{u}, \pi)A_m = A_m$  où  $\bar{u}$  est unitaire quelconque dans  $\{\bar{e}_3\}^\perp$ . D'après la proposition (3.38), puisque  $\dim \ker A_m = 2$ ,  $QQ(\bar{u}, \pi)A_m = Q(\bar{e}_3, \theta)$  avec  $\theta$  quelconque, donc  $Q = Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}, \pi)$ .

D'où  $\Theta_{\bar{I}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0 = \{Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_m / \theta \in \mathbb{R}\}$  qui est isomorphe à  $S^1 \cdot Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_m$  où  $\bar{u}$  est un vecteur quelconque unitaire du plan  $\{\bar{e}_3\}^\perp$  et  $S^1$  est le cercle d'axe  $\bar{e}_3$ .

On peut remarquer que si  $\bar{u}$  et  $\bar{u}'$  sont deux vecteurs unitaires de  $\{\bar{e}_3\}^\perp$ , les deux ensembles  $\{Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_m / \theta \in \mathbb{R}\}$  et  $\{Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}', \pi)\bar{I}_m / \theta \in \mathbb{R}\}$  sont identiques.

En effet : la base  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  peut être choisie orthonormale directe.

Soient  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}'_1$  deux vecteurs tels que  $(\bar{u}, \bar{u}_1, \bar{e}_3)$  et  $(\bar{u}', \bar{u}'_1, \bar{e}_3)$  soient des bases orthonormales directes. Soient  $\varphi$  et  $\varphi'$  deux réels tels que dans  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ,

$$\bar{u} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_1 \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}' \begin{bmatrix} \cos \varphi' \\ \sin \varphi' \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}'_1 \begin{bmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}, \pi) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}, \pi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta + 2\varphi) & \sin(\theta + 2\varphi) & 0 \\ \sin(\theta + 2\varphi) & -\cos(\theta + 2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ De même,}$$

$$Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}', \pi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta + 2\varphi') & \sin(\theta + 2\varphi') & 0 \\ \sin(\theta + 2\varphi') & -\cos(\theta + 2\varphi') & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

D'où lorsque  $\theta$  décrit  $\mathbb{R}$ , les charges  $Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_m$  et  $Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}', \pi)\bar{I}_m$  décrivent le même ensemble.

## 2] Etude de $\Theta_{\bar{l}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$

L'étude de  $\Theta_{\bar{l}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  s'effectue comme celle de  $\Theta_{\bar{l}_m} \cap (\mathcal{L}_m)_0$ . Toutefois, il a été remarqué lors de la proposition (3.39) qu'il est nécessaire de considérer dans chacun des cas l'éventualité où une valeur propre de  $A_e$  s'annule.

Pour des raisons évidentes, on choisit à nouveau  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  pour système de vecteurs propres de  $A_e$  constituant une base de  $\mathbb{R}^3$ . Puisqu'il n'y a pas de confusion possible avec le paragraphe précédent, on peut encore prendre comme notation pour les valeurs propres associées  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , au lieu de  $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ .

**Proposition (3.47):** Soit  $\bar{l}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ , de type 0 (respectivement 0').  $\Theta_{\bar{l}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  consiste en 8 charges de type 0 (respectivement 0').

### Démonstration :

\*Lorsque  $\bar{l}_e$  est de type 0 :

Dans la base orthonormale  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  constituée des vecteurs propres de  $A_e$ , de valeurs propres respectives  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ,  $\Theta_{A_e} \cap \text{sym}$  consiste en 8 éléments. On retrouve les quatre éléments de la proposition (3.43) complétés des quatre éléments suivants :

- (5)  $\tilde{A}_e = \bar{P} \text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3) \bar{P}^{-1}$  pour  $\bar{Q} = \text{diag}(-1, -1, -1)$   $\tilde{A}_e = -A_e$
- (6)  $\tilde{A}_e = \bar{P} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3) \bar{P}^{-1}$  pour  $\bar{Q} = \text{diag}(1, 1, -1)$   $\tilde{A}_e = Q(\bar{e}_3, \pi)(-A_e)$
- (7)  $\tilde{A}_e = \bar{P} \text{diag}(\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_3) \bar{P}^{-1}$  pour  $\bar{Q} = \text{diag}(1, -1, 1)$   $\tilde{A}_e = Q(\bar{e}_2, \pi)(-A_e)$
- (8)  $\tilde{A}_e = \bar{P} \text{diag}(-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \bar{P}^{-1}$  pour  $\bar{Q} = \text{diag}(-1, 1, 1)$   $\tilde{A}_e = Q(\bar{e}_1, \pi)(-A_e)$

où  $\bar{P}$  désignent la matrice de passage de la base canonique  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  à la base  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ .

Puisque  $k_e : \Theta_{\bar{l}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0 \rightarrow \Theta_{A_e} \cap \text{sym}$  est bijective pour  $\bar{l}_e$  de type 0, aux 8 éléments de  $\Theta_{A_e} \cap \text{sym}$  correspondent 8 charges de  $\Theta_{\bar{l}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  :  $\bar{l}_e, Q(\bar{e}_1, \pi)\bar{l}_e, Q(\bar{e}_2, \pi)\bar{l}_e,$

$Q(\bar{e}_3, \pi)\bar{l}_e, -\bar{l}_e, Q(\bar{e}_1, \pi)(-\bar{l}_e), Q(\bar{e}_2, \pi)(-\bar{l}_e), Q(\bar{e}_3, \pi)(-\bar{l}_e)$ . Il a été démontré que les 4 premières sont de type 0. Les 4 autres sont alors aussi de type 0 comme opposées de charges de type 0.

\*Lorsque  $\bar{l}_e$  est de type 0',  $\dim \ker A_e = 1$  : soit  $\lambda_3 = 0$ .

On peut voir que les 8 éléments de  $\Theta_{A_e} \cap \text{sym}$  se réduisent en fait à 4 qui sont :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_e &= \bar{P} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0) \bar{P}^{-1} = A_e \\ \tilde{A}_e &= \bar{P} \text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, 0) \bar{P}^{-1} = -A_e \\ \tilde{A}_e &= \bar{P} \text{diag}(-\lambda_1, \lambda_2, 0) \bar{P}^{-1} = Q(\bar{e}_2, \pi)A_e \\ \tilde{A}_e &= \bar{P} \text{diag}(\lambda_1, -\lambda_2, 0) \bar{P}^{-1} = Q(\bar{e}_2, \pi)(-A_e). \end{aligned}$$

Mais dans le cas où  $\bar{I}_e$  est de type 0',  $k_e$  n'est pas bijective. On observe alors cas par cas :  $\bar{u} \in \Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  si et seulement si il existe une transformation  $Q \in O(3)$  tel que  $\bar{u} = Q\bar{I}_e$  avec  $k_e(\bar{u}) = QA_e \in \text{sym}$ .

$QA_e \in \text{sym}$  signifie que  $k_e(\bar{u}) = QA_e \in \Theta_{A_e} \cap \text{sym}$ .

Or d'après la proposition (3.39), puisque  $\dim \ker A_e = 1$ , si  $QA_e = A_e$ , alors soit  $Q = s(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = -Q(\bar{e}_3, \pi)$ , soit  $Q = 1$ .

1<sup>er</sup> cas :  $QA_e = A_e$  donc  $\bar{u} = \bar{I}_e$  ou  $\bar{u} = -Q(\bar{e}_3, \pi)\bar{I}_e$ .

2<sup>ieme</sup> cas :  $QA_e = -A_e$  équivaut à  $QA_e = Q(\bar{e}_3, \pi)A_e$  équivaut à  $Q(\bar{e}_3, \pi)QA_e = A_e$ .

Donc soit  $Q(\bar{e}_3, \pi)Q = 1$  c'est à dire  $Q = Q(\bar{e}_3, \pi)$ ,

soit  $Q(\bar{e}_3, \pi)Q = -Q(\bar{e}_3, \pi)$  c'est à dire  $Q = -1$ .

D'où soit  $\bar{u} = -\bar{I}_e$ , soit  $\bar{u} = Q(\bar{e}_3, \pi)\bar{I}_e$ .

3<sup>ieme</sup> cas :  $QA_e = Q(\bar{e}_2, \pi)A_e$  si et seulement si  $Q(\bar{e}_2, \pi)QA_e = A_e$ .

Donc soit  $Q(\bar{e}_2, \pi)Q = 1$  c'est à dire  $Q = Q(\bar{e}_2, \pi)$ ,

soit  $Q(\bar{e}_2, \pi)Q = -Q(\bar{e}_3, \pi)$  c'est à dire  $Q = -Q(\bar{e}_2, \pi)Q(\bar{e}_3, \pi) = -Q(\bar{e}_1, \pi)$ .

D'où soit  $\bar{u} = Q(\bar{e}_2, \pi)\bar{I}_e$ , soit  $\bar{u} = Q(\bar{e}_1, \pi)(-\bar{I}_e)$ .

4<sup>ieme</sup> cas :  $QA_e = Q(\bar{e}_2, \pi)(-A_e) = Q(\bar{e}_1, \pi)A_e$  si et seulement si  $Q(\bar{e}_1, \pi)QA_e = A_e$ .

Donc soit  $Q(\bar{e}_1, \pi)Q = 1$  c'est à dire  $Q = Q(\bar{e}_1, \pi)$ ,

soit  $Q(\bar{e}_1, \pi)Q = -Q(\bar{e}_3, \pi)$  c'est à dire  $Q = -Q(\bar{e}_1, \pi)Q(\bar{e}_3, \pi) = -Q(\bar{e}_2, \pi)$ .

D'où  $\bar{u} = Q(\bar{e}_1, \pi)\bar{I}_e$ , soit  $\bar{u} = Q(\bar{e}_2, \pi)(-\bar{I}_e)$ .

On peut alors conclure que, pour  $\bar{I}_e$  de type 0',  $\Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  est aussi constitué de 8 charges qui sont de la même forme. Ces 8 charges sont de type 0'.

**Proposition (3.48):** Soit  $\bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ , de type 1 (respectivement 1').  $\Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  consiste en quatre éléments (dont  $\bar{I}_e$  et  $-\bar{I}_e$ ) chacun n'ayant aucun axe d'équilibre, et en deux ensembles isomorphes à  $\mathbb{RP}^1 \cdot \bar{I}_e$  et à  $\mathbb{RP}^1 \cdot (-\bar{I}_e)$ , chaque élément ayant un axe d'équilibre.

#### Démonstration :

\*En appliquant le même principe que celui utilisé lors la démonstration de la proposition (3.47), lorsque  $\bar{I}_e$  est de type 1, on retrouve pour l'intersection  $\Theta_{A_e} \cap \text{sym}$  les 4 éléments de la démonstration (3.44), complétés de leurs opposés respectifs. Puisque l'application  $k_e : \Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0 \rightarrow \Theta_{A_e} \cap \text{sym}$  est bijective pour  $\bar{I}_e$  de type 1, on obtient alors les 4 charges  $\pm \bar{I}_e$ ,  $Q(\bar{e}_3, \pi)(\pm \bar{I}_e)$ , et les deux ensembles isomorphes à  $\mathbb{RP}^1 \cdot (\pm \bar{I}_e)$ .

\*Lorsque  $\bar{I}_e$  est de type 1',  $\dim \ker A_e = 1$  : soit  $\lambda_3 = 0$ .

On peut reprendre l'étude des charges de type 0'. Puisque ici  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  désigne une base orthonormale quelconque du plan  $\{\bar{e}_3\}^\perp$ . Donc on obtient 4 charges :  $\bar{I}_e$ ,  $-\bar{I}_e$ ,  $Q(\bar{e}_3, \pi)\bar{I}_e$ ,  $Q(\bar{e}_3, \pi)(-\bar{I}_e)$ , ainsi que 2 familles de charges:  $\{Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_e / \bar{u} \in S^1 \text{ d'axe } \bar{e}_3\}$  et  $\{Q(\bar{u}, \pi)(-\bar{I}_e) / \bar{u} \in S^1 \text{ d'axe } \bar{e}_3\}$  qui sont isomorphes respectivement à  $\mathbb{RP}^1 \cdot \bar{I}_e$  et  $\mathbb{RP}^1 \cdot (-\bar{I}_e)$ . On a déjà démontré que les deux premières charges n'ont aucun axe d'équilibre et que celles de la première famille n'ont qu'un axe d'équilibre. Il en sera de même pour leurs opposées.

**Proposition** (3.49): Soit  $\bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ , de type 2.  $\Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  consiste en deux charges qui sont  $\bar{I}_e$  et  $-\bar{I}_e$ , et deux ensembles isomorphes à  $\mathbb{RP}^2 \cdot \bar{I}_e$  et  $\mathbb{RP}^2 \cdot (-\bar{I}_e)$ , dont chaque élément admet un plan d'équilibre.

**Démonstration** : En s'appuyant sur la proposition (3.45), on utilise le même genre de justification qu'à la proposition précédente puisque  $k_e$  est aussi bijective pour une charge  $\bar{I}_e$  de type 2.

**Proposition** (3.50): Soit  $\bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0$ .

L'ensemble  $\Theta_{A_e} \cap \text{sym}$  consiste soit en deux éléments qui sont  $A_e$  et  $-A_e$  si  $A_e$  est de type 3, soit en un élément qui est  $A_e \equiv 0$  si  $A_e$  est de type 4.

Il en résulte que :

Pour le type 3,  $\Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  consiste en quatre ensembles isomorphes à  $S^1 \cdot \bar{I}_e$ ,  $S^1 \cdot Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_e$ ,  $\mathbb{RP}^1 \cdot \bar{I}_e$  et  $\mathbb{RP}^1 \cdot Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_e$  où  $\bar{u}$  est un vecteur (unitaire) de  $\text{Ker} A_e$ .

Pour le type 4,  $\Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0 = \Theta_{\bar{I}_e}$ .

**Démonstration** : Si  $A_e$  est de type 3, il existe une base orthonormale  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ , qui peut être choisie directe, dans laquelle  $A_e = \text{diag}(0, 0, \lambda)$  avec  $\lambda \neq 0$ . De la même façon, on a  $\Theta_{A_e} \cap \text{sym} = \{\pm A_e\}$ .

$\bar{u} \in \Theta_{\bar{I}_e} \cap (\mathcal{L}_e)_0$  si et seulement si  $Q \in O(3)$  tel que  $\bar{u} = Q\bar{I}_e$  avec  $QA_e = \pm A_e$ .

Pour  $QA_e = A_e$ ,  $Q = Q(\bar{e}_3, \theta)$  avec  $\theta$  quelconque ou  $Q = s(\bar{u}, \bar{e}_3)$  avec  $\bar{u} \in \{\bar{e}_3\}^\perp$ .

$\{Q(\bar{e}_3, \theta)\bar{I}_e / \theta \in \mathbb{R}\} \approx S^1 \cdot \bar{I}_e$  et  $\{s(\bar{u}, \bar{e}_3)\bar{I}_e / \bar{u} \in \{\bar{e}_3\}^\perp\} \approx \mathbb{RP}^1 \cdot \bar{I}_e$ .

Pour  $QA_e = -A_e$ ,  $Q = Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}, \pi)$  ou  $s(\bar{w}, \bar{e}_3)Q(\bar{u}, \pi)$  avec  $\bar{u}$  et  $\bar{w}$  quelconques dans  $\{\bar{e}_3\}^\perp$ .

$\{Q(\bar{e}_3, \theta)Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_e / \theta \in \mathbb{R}\} \approx S^1 \cdot Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_e$  et  $\{s(\bar{w}, \bar{e}_3)Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_e / \bar{w} \in \{\bar{e}_3\}^\perp\} \approx \mathbb{RP}^1 \cdot Q(\bar{u}, \pi)\bar{I}_e$ .

On peut remarquer que quelque soit le vecteur  $\bar{u}$  du plan  $\{\bar{e}_3\}^\perp$ , le support de chacun des deux ensembles ne change pas. En effet, pour l'ensemble  $S^1 \cdot Q(\bar{u}, \pi) \bar{I}_e$ , cela a été démontré lors de la remarque relative à la proposition (3.46).

De la même façon, soit  $\bar{u}'$  un vecteur non nul de  $\{\bar{e}_3\}^\perp$ , il faut montrer que  $\mathbb{R}P^1 \cdot Q(\bar{u}, \pi) \bar{I}_e$  et  $\mathbb{R}P^1 \cdot Q(\bar{u}', \pi) \bar{I}_e$  ont le même support. Dans la base orthonormale directe  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ , on considère  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}'_1$  et  $\bar{w}_1$  tels que  $(\bar{u}, \bar{u}_1, \bar{e}_3)$ ,  $(\bar{u}', \bar{u}'_1, \bar{e}_3)$  et  $(\bar{w}, \bar{w}_1, \bar{e}_3)$  soient des bases orthonormales directes.

Soient  $\varphi$ ,  $\varphi'$  et  $\psi$  trois réels tels que dans  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ,

$$\bar{u} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_1 \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}' \begin{bmatrix} \cos \varphi' \\ \sin \varphi' \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}'_1 \begin{bmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{w} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{w}_1 \begin{bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dans  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ ,

$$s(\bar{w}, \bar{e}_3) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q(\bar{u}, \pi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc,  $s(\bar{w}, \bar{e}_3)Q(\bar{u}, \pi)$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi & 0 \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2(\psi - \varphi) & -\sin 2(\psi - \varphi) & 0 \\ \sin 2(\psi - \varphi) & \cos 2(\psi - \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

et  $s(\bar{w}, \bar{e}_3)Q(\bar{u}', \pi)$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi & 0 \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\varphi' & \sin 2\varphi' & 0 \\ \sin 2\varphi' & -\cos 2\varphi' & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2(\psi - \varphi') & -\sin 2(\psi - \varphi') & 0 \\ \sin 2(\psi - \varphi') & \cos 2(\psi - \varphi') & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Donc lorsque  $\psi$  décrit  $\mathbb{R}$ , les charges  $s(\bar{w}, \bar{e}_3)Q(\bar{u}, \pi) \bar{I}_e$  et  $s(\bar{w}, \bar{e}_3)Q(\bar{u}', \pi) \bar{I}_e$  décrivent le même ensemble.

## CHAPITRE 4

Le chapitre quatre pose le problème de traction en électro-élasticité. On suppose que dans la configuration non déformée  $l_\Omega$ , le matériau piézo-électrique n'étant soumis à aucun effort, il existe des contraintes résiduelles, ainsi qu'un champ de polarisation  $\bar{\Pi}_0$  non nul tel que le couple  $(l_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  soit solution du problème pour un couple de charges nulles. Dans un premier temps, on présente le problème de traction dans le cadre linéaire pour un matériau isotrope et homogène. En reprenant les équations linéarisées au voisinage de  $(l_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  déterminées dans le chapitre 2, on met en évidence un opérateur  $\bar{\Phi}$  défini de  $T_{l_\Omega} \mathcal{E} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$ , où  $T_{l_\Omega} \mathcal{E}$  désigne le plan tangent à l'ensemble  $\mathcal{E}$  des déformations sur  $\Omega$  en  $l_\Omega$  et  $T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$  désigne le plan tangent à l'ensemble  $\mathcal{A}$  des champs de vecteurs de polarisation (exprimés dans la configuration Lagrangienne) en  $\bar{\Pi}_0$ , sur l'ensemble des couples de charges de  $\mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$ .  $\bar{\Phi}$  est un opérateur linéaire. Le problème de traction linéarisé pour un couple de charges  $(\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  voisin de  $(\bar{0}, \bar{0})$  peut alors se traduire comme une application du théorème des fonctions inverses au voisinage de  $(l_\Omega, \bar{\Pi}_0)$ . Il ne s'agit pas ici d'effectuer une étude complète du problème linéaire, ni d'exprimer une condition sur les coefficients  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ , et  $\eta$  caractéristiques du matériau qui permettrait l'obtention de la condition « d'ellipticité » nécessaire à l'application du théorème. Il est question dans ce paragraphe de mettre en évidence les différentes causes pour lesquelles la multiplicité des solutions n'a pas lieu. En effet dans ce cadre linéaire, le théorème des fonctions inverses permet de conclure pour un couple de charges  $(\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  donné en l'existence d'un unique couple  $(\phi, \bar{\Pi})$  solution défini à un champ de déplacements près.

Dans un deuxième temps, on s'intéresse au problème non linéaire qui est le véritable propos de ce travail. Les conditions initiales sont identiques, mais l'opérateur  $\bar{\Phi}$  est remplacé par l'opérateur  $\Phi$  défini sur  $\mathcal{E} \times \mathcal{A}$  qui a été mis en place dans le chapitre 3. La démarche est similaire. Toutefois  $\Phi$  ne possède pas les mêmes propriétés. En effet  $\Phi$  n'est pas un opérateur linéaire. De plus  $\Phi$ , qui peut cette fois bénéficier de la propriété d'objectivité de la fonction densité d'énergie  $W$ , permet de transposer l'action du groupe  $SO(3)$  agissant sur  $\mathcal{E}$  en l'action du groupe  $SO(3) \times O(3)$  agissant sur  $\mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$ . Il en résulte que les couples  $(Ql_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  avec  $Q \in SO(3)$  (et  $\bar{\Pi}_0$  exprimé dans la configuration Eulerienne) sont aussi solution du problème, c'est à dire appartiennent aussi au graphe relatif au couple de charges nulles. Pour un couple de charges  $(\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  donné voisin du couple identiquement nul, la recherche du graphe se traduit encore par l'application du théorème des fonctions inverses. Mais à ce couple de charges  $(\bar{l}_m, \bar{l}_e)$ , l'action de  $SO(3) \times O(3)$  permet d'exhiber d'autres couples de charges auxquels peuvent aussi s'appliquer le procédé d'inversion. Ceci a pour conséquence de mettre (éventuellement) en évidence des couples  $(\phi, \bar{\Pi})$  voisins de  $(Ql_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  avec  $Q \in SO(3)$  solutions du problème relativement au même couple de charges  $(\bar{l}_m, \bar{l}_e)$ . Dans le cas où  $\bar{l}$  est du type le plus « simple », noté type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$ , les couples  $(Ql_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  sont au nombre de

1, 2 ou 4, ce nombre variant suivant des conditions de « compatibilité » entre les composantes  $\bar{I}_m$  et  $\bar{I}_e$  de  $\bar{I}$ .

Pour un couple de charges  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  donné, les solutions ainsi exhibées dans le cadre non linéaire peuvent aussi apparaître comme points critiques de la fonction énergie potentielle  $V_{\bar{I}}$ . L'instabilité d'un couple  $(\phi, \bar{\Pi})$  solution se traduit par la dégénérescence de la forme quadratique définie par la différentielle seconde  $D_{\phi}^2 V_{\bar{I}}$  de  $V_{\bar{I}}$ . On observe que dans la direction transverse à l'orbite de la configuration  $\phi$ , le couple solution  $(\phi, \bar{\Pi})$  est nécessairement stable grâce à l'hypothèse « d'ellipticité ». Pour l'étude de la stabilité dans la direction de l'orbite de  $\phi$ , il s'impose de différencier la stabilité mécanique de la stabilité électrique. En reprenant les travaux de D.R.J.CHILLINGWORTH, J.E.MARSDEN et Y.H.WAN, on remarque que les différents couples solutions sont d'indices d'instabilité mécanique (respectivement électrique) différents. Ainsi, dans le cas de quatre couples solutions, les indices sont respectivement 3, 2, 1 et 0, ce dernier signifiant que le couple solution correspondant est stable (au sens mécanique ou au sens électrique). Malheureusement, pour conclure au sens de l'électro-élasticité il faut certaines conditions de « compatibilité » entre les composantes  $\bar{I}_m$  et  $\bar{I}_e$  de  $\bar{I}$ , d'où il est impossible de se fixer quant à la stabilité électro-élastique sans en venir au cas par cas. Toutefois, un phénomène intéressant peut se produire : une solution instable au sens de l'élasticité peut devenir stable au sens de l'électro-élasticité lors de l'intervention d'un champ électrique extérieur. Le champ électrique peut ainsi avoir un rôle d'effet stabilisateur dans le problème de traction en électro-élasticité.

Comme il a été précisé au début de l'introduction, on suppose qu'à l'état initial le matériau n'est soumis à aucun effort d'origine mécanique, soit  $(\bar{F}_m, \bar{\tau}_m) = (\bar{0}, \bar{0})$ , et à aucun effort d'origine électrique, soit  $(\bar{F}_e, \bar{\tau}_e) = (\bar{0}, \bar{0})$ . On suppose que le matériau est alors dans la position non déformé  $l_{\Omega}$ , et on fait l'hypothèse que dans ces conditions il existe un champ de polarisation  $\bar{\Pi}_0$  non nul, ainsi que des contraintes  ${}_{\mathcal{E}}\hat{P}(l, \bar{\Pi}_0)$  dites résiduelles. Les hypothèses peuvent alors se résumer à : (4.1)

$$(H_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } (\phi, \bar{\Pi}) = (l_{\Omega}, \bar{\Pi}_0), \hat{\mathcal{E}}(l_{\Omega}, \bar{\Pi}_0) = \bar{0}, \hat{P}_e(l_{\Omega}, \bar{\Pi}_0) \equiv 0 \text{ et } \hat{P}_m(l_{\Omega}, \bar{\Pi}_0) \neq 0 \\ \text{avec } \text{DIV}_X \hat{P}_m(l_{\Omega}, \bar{\Pi}_0) = \bar{0} \text{ et } \hat{P}_m(l_{\Omega}, \bar{\Pi}_0) \bar{N} = \bar{0} \end{array} \right.$$

remarque : puisque  $\hat{\mathcal{E}}(l_{\Omega}, \bar{\Pi}_0) = \bar{0}$ , dans le cadre de la statique on peut dire que  $\hat{E}(l_{\Omega}, \bar{\Pi}_0) = \bar{0}$ . Donc d'après les expressions vues en (3.2) et (3.3) de  $P_e$ , il est clair que  $\hat{P}_e(l_{\Omega}, \bar{\Pi}_0) \equiv 0$ .

On rappelle que :

$\mathcal{E}$  désigne l'ensemble des configurations (ou déformations) de  $\Omega$  défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ \phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 / \phi(O) = O, \phi \in \mathbb{H}^3(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3), J_{\phi} = \det D_x \phi > 0 \right\},$$

$(\phi^{-1} : \phi(\bar{\Omega}) \rightarrow \bar{\Omega})$  est supposé aussi dans  $\mathbb{H}^3$  :  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont alors de classe  $\mathcal{E}^1$ )

$\mathcal{C}$  désigne l'ensemble des champs de vecteurs de polarisation défini par :

$$\mathcal{C} = \left\{ \bar{\Pi} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 / \bar{\Pi} \in \mathbb{H}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \right\}.$$

Les charges  $\bar{I}_m = (\bar{F}_m, \bar{\tau}_m)$  et  $\bar{I}_e = (\bar{F}_e, \bar{\tau}_e)$  appartiennent à  $\mathbb{H}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3) \times \mathbb{H}^1(\partial\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ .

On suppose de plus que la fonction densité d'énergie libre  $W$  qui est une fonction de  $(X, F, \bar{\Pi}) \in \Omega \times \mathcal{C}_3^+ \times \mathbb{R}^3$  est de classe  $C^2(\Omega \times \mathcal{C}_3^+ \times \mathbb{R}^3)$ . Le champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{E}}$

est alors de classe  $C^1(\Omega \times \mathcal{C}_3^+ \times \mathbb{R}^3)$  puisque d'après la relation (2.42)<sub>2</sub> on a  $\frac{\partial \hat{W}}{\partial \Pi} \equiv \bar{\mathcal{E}}$ .

## I / LE PROBLEME DE TRACTION EN ELECTRO-ELASTICITE LINEAIRE

Dans le chapitre 2, on a vu que dans le cadre de l'électro-élasticité statique pour un milieu isotrope et homogène, les équations linéarisées au voisinage de la solution naturelle  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  sont :

$$(4.2) \begin{cases} \text{DIV}_{X E} \bar{P} + \bar{F}_m + \bar{F}_e = \bar{0} \\ {}_E \bar{P} \bar{N} = \bar{\tau}_m + \bar{\tau}_e \end{cases} \quad \text{où } {}_E \bar{P} = F(\Sigma + {}_E S_0 \cdot \nabla \bar{u}).$$

On reprend ici les hypothèses énoncées dans le chapitre 3 : on suppose que le champ magnétique  $\bar{\mathcal{H}}$  est nul et on considère les diélectriques non magnétisables ne possédant que la propriété d'électrostriction. Cette dernière hypothèse permet alors d'écrire les équations sous la forme :

$$(E) \begin{cases} \text{DIV}_X \bar{P}_m + \bar{F}_m = \bar{0} \\ \text{DIV}_X \bar{P}_e + \bar{F}_e = \bar{0} \\ \bar{P}_m \bar{N} = \bar{\tau}_m \\ \bar{P}_e \bar{N} = \bar{\tau}_e \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $\bar{P}_m$  et  $\bar{P}_e$  sont les composantes mécanique et électrique respectives du tenseur  ${}_E \bar{P}$ .

### 1-Validité des hypothèses (H<sub>1</sub>) dans le cadre de la linéarisation des équations

On a vu dans le chapitre 2 que lors de la linéarisation des équations du mouvement au point  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$ , il est nécessaire de supposer qu'initialement on ait :

$$\rho_0 \left( \frac{d^2 \alpha_h}{dt^2} \right)_0 = \bar{f}_0 + {}_L \bar{f}_0 + \text{DIV}_{X E} \hat{P}_0, \quad (2.56)$$

où  ${}_E \hat{P}_0$  désigne le premier tenseur de Piola-Kirchhoff non linéarisé en  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  :

$${}_E \hat{P}_0 = {}_E \hat{P}(I_\Omega, \bar{\Pi}_0).$$

Il est question ainsi dans ce paragraphe de corroborer les hypothèses (H<sub>1</sub>) dans le cadre de la linéarisation des équations. En effet, on a choisi le cas restrictif des matériaux homogènes isotropes pour exprimer les équations linéarisées au voisinage de  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$ . Dans ce contexte particulier, il s'agit donc de montrer que les hypothèses (H<sub>1</sub>) sont valables.

Dans le cadre de la statique avec les notations de (3.4), s'il on prend en compte qu'initialement

$$(\bar{\mathbf{F}}_m, \bar{\boldsymbol{\tau}}_m) = (\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{0}}) \text{ et } (\hat{\mathbf{F}}_m, \hat{\boldsymbol{\tau}}_m) = (\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{0}}),$$

alors il faut s'assurer que :

$$\text{DIV}_{X E} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = \bar{\mathbf{0}}.$$

D'après le découplage, il faut alors vérifier que :

$$(4.4) \begin{cases} \text{DIV}_X \hat{\mathbf{P}}_m(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = \bar{\mathbf{0}} \\ \text{DIV}_X \hat{\mathbf{P}}_e(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = \bar{\mathbf{0}} \end{cases} \text{ sur } \Omega \text{ et } \begin{cases} \hat{\mathbf{P}}_m(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) \cdot \bar{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{0}} \\ \hat{\mathbf{P}}_e(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) \cdot \bar{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{0}} \end{cases} \text{ sur } \partial\Omega.$$

En utilisant le second tenseur de Piola-Kirchhoff  ${}_E \mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} {}_E \mathbf{P}$ , il revient à vérifier :

$$(4.5) \begin{cases} \text{DIV}_X \check{\mathbf{S}}_m(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = \bar{\mathbf{0}} \\ \text{DIV}_X \check{\mathbf{S}}_e(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = \bar{\mathbf{0}} \end{cases} \text{ sur } \Omega \text{ et } \begin{cases} \check{\mathbf{S}}_m(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) \cdot \bar{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{0}} \\ \check{\mathbf{S}}_e(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) \cdot \bar{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{0}} \end{cases} \text{ sur } \partial\Omega.$$

En considérant des matériaux homogènes et isotropes, on a choisi dans le chapitre 2 pour invariants les scalaires  $I_i$  avec  $i \in \{1, \dots, 6\}$ . Dans cette hypothèse, d'après (2.50) on a en  $(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0)$  :

$$(4.6) {}_E \check{\mathbf{S}}(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)_0 \mathbf{I} + (\gamma_3 + \gamma_4)_0 \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0 \otimes \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0.$$

Si l'on prend pour condition initiale

$$\hat{\mathfrak{S}}(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = \bar{\mathbf{0}},$$

on a remarqué dans l'introduction du chapitre que la composante électrique  $\hat{\mathbf{P}}_e(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0)$  du premier tenseur de Piola-Kirchhoff est nul, ce qui revient à dire que la composante  $\check{\mathbf{S}}_e(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0)$  du second tenseur de Piola-Kirchhoff l'est aussi. Il est alors légitime de supposer dans le cadre du choix des invariants  $I_i$  que la partie électrique du second tenseur de Piola-Kirchhoff est nul, ce qui signifie en d'autres termes que toute l'expression du second membre  $(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)_0 \mathbf{I} + (\gamma_3 + \gamma_4)_0 \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0 \otimes \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0$  représente en fait la partie mécanique du tenseur  ${}_E \check{\mathbf{S}}(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0)$ .

Puisque l'on suppose que le matériau n'admet pas de charge libre  $q_f$ , d'après les équations de Maxwell on a :

$$\text{DIV}_X \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{0}} \text{ sur } \Omega \tag{1.23}_4$$

Dans la configuration de référence, on a

$$\bar{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{\Pi}}.$$

Puisque initialement

$$\hat{\mathfrak{S}}(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{I}_\Omega, \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0) = \bar{\mathbf{0}},$$

on a

$$(4.7) \quad \bar{\mathbf{D}} = \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0, \text{ soit}$$

$$(4.8) \quad \text{DIV}_X \bar{\boldsymbol{\Pi}}_0 = \bar{\mathbf{0}} \text{ sur } \Omega.$$

Pour tout volume  $\mathcal{D}$  contenu dans  $\Omega$ , de frontière  $\partial\mathcal{D}$ , on a alors

$$0 = \int_{\mathcal{D}} \text{DIV}_X \vec{\Pi}_0 dV = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{\Pi}_0 \cdot \vec{N} dA, \text{ soit}$$

$$\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{N} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{D}.$$

Cette relation signifie qu'en l'absence de charge libre le champ de polarisation initial  $\vec{\Pi}_0$  est tangentiel à toute surface fermée, en particulier à la surface  $\partial\Omega$  :

$$(4.9) \quad \vec{\Pi}_0 \cdot \vec{N} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

De plus,

$$\int_{\mathcal{D}} \text{DIV}_X (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0) dV = \int_{\partial\mathcal{D}} (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0) \cdot \vec{N} dA = \int_{\partial\mathcal{D}} (\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{N}) \vec{\Pi}_0 dA, \text{ soit}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \text{DIV}_X (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0) dV = \vec{0}, \text{ soit encore}$$

$$(4.10) \quad \text{DIV}_X (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0) = \vec{0} \text{ sur tout } \mathcal{D}, \text{ donc en particulier sur } \Omega.$$

On a ainsi démontré que

$$\text{DIV}_X \left[ (\gamma_3 + \gamma_4)_0 \vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0 \right] = \vec{0} \text{ sur } \Omega \text{ et } \left[ (\gamma_3 + \gamma_4)_0 \vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0 \right] \cdot \vec{N} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

On peut alors remarquer que

$$(4.11) \quad (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)_0 = 0.$$

En effet la condition

$${}_E \tilde{\mathcal{S}}(\mathbf{1}_\Omega, \vec{\Pi}_0) \cdot \vec{N} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega$$

implique que

$$(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)_0 \vec{N} + (\gamma_3 + \gamma_4)_0 (\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{N}) \vec{\Pi}_0 = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Or  $\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{N} = 0$  sur  $\partial\Omega$

donc  $(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)_0 \vec{N} = \vec{0}$ ,

ce qui revient à dire que

$$(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)_0 = 0.$$

D'où on a

$$\text{DIV}_X \tilde{\mathcal{S}}_m(\mathbf{1}_\Omega, \vec{\Pi}_0) = \vec{0} \text{ sur } \Omega \text{ et } \tilde{\mathcal{S}}_m(\mathbf{1}_\Omega, \vec{\Pi}_0) \cdot \vec{N} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Pour un matériau homogène et isotrope, le choix des invariants  $I_i$  avec  $i \in \{1, \dots, 6\}$  permet d'obtenir ainsi grâce à l'hypothèse de non-existence de charge libre

$$\text{DIV}_X \hat{\mathcal{P}}_m(\mathbf{1}_\Omega, \vec{\Pi}_0) = \vec{0} \text{ sur } \Omega \text{ et } \hat{\mathcal{P}}_m(\mathbf{1}_\Omega, \vec{\Pi}_0) \cdot \vec{N} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Puisque d'autre part la condition  $\hat{\mathcal{S}}(\mathbf{1}_\Omega, \vec{\Pi}_0) = \vec{0}$  permet d'affirmer que

$$\text{DIV}_X \hat{\mathcal{P}}_e(\mathbf{1}_\Omega, \vec{\Pi}_0) = \vec{0} \text{ sur } \Omega \text{ et } \hat{\mathcal{P}}_e(\mathbf{1}_\Omega, \vec{\Pi}_0) \cdot \vec{N} = \vec{0} \text{ sur } \partial\Omega,$$

on peut alors dire que les hypothèses  $(H_1)$  sont bien compatibles avec les conditions initiales requises pour l'obtention des équations linéarisées de la statique.

## 2-Expression des différentes quantités linéarisées

Pour une petite déformation et un petit champ de polarisation, i.e.  $\mathbf{E}$  voisin du tenseur  $\mathbf{0}$  et  $\vec{p}$  voisin du vecteur  $\vec{0}$ , il s'agit de traduire à l'aide des coefficients (définis dans le chapitre 2)  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \eta_i, \lambda_i, \mu_i$  caractéristiques du matériau un développement limité d'ordre 2 en  $\mathbf{E}$  et  $\vec{p}$  de l'énergie emmagasinée  $W$ . Puis à l'aide de celui-ci, on retrouvera le développement limité de chacun des tenseurs en utilisant soit les lois de comportement soit les définitions, en évaluant pour chacun l'ordre de l'approximation.

Le développement limité (4.12)

$$\begin{aligned} W(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}, \vec{\Pi}_0 + \vec{p}) &= W(\mathbf{1}, \vec{\Pi}_0) + \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \right)_0 : 2\mathbf{E} + \left( \frac{\partial W}{\partial \vec{\Pi}} \right)_0 \cdot \vec{p} \\ &\quad + \left[ 2\mathbf{E} : \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}^2} \right)_0 : 2\mathbf{E} + 2 \times 2\mathbf{E} : \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \vec{\Pi}} \right)_0 \cdot \vec{p} + \vec{p} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \vec{\Pi}^2} \right)_0 \cdot \vec{p} \right] + o(\mathbf{E}^2, \vec{p}^2) \end{aligned}$$

se traduit grâce aux formules établies pour la relation (2.51) du chapitre 2 par : (4.13)

$$\begin{aligned} W(\mathbf{1} + 2\mathbf{E}, \vec{\Pi}_0 + \vec{p}) &= W(\mathbf{1}, \vec{\Pi}_0) + 2(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)_0 \text{tr} \mathbf{E} + 2(\gamma_3 + \gamma_4)_0 (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0) : \mathbf{E} \\ &\quad + \lambda_1 (\text{tr} \mathbf{E})^2 + \mu_1 \mathbf{E} : \mathbf{E} + (\alpha_1 + \lambda_2) (\text{tr} \mathbf{E}) (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0) : \mathbf{E} + \eta (\mathbf{E} \vec{\Pi}_0) \cdot (\mathbf{E} \vec{\Pi}_0) + \alpha_2 (\mathbf{E} : (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0))^2 \\ &\quad + 2\beta_1 (\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{p}) (\text{tr} \mathbf{E}) + 2\beta_2 (\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{p}) [(\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0) : \mathbf{E}] + 2\mu_2 [(\vec{p} \otimes \vec{\Pi}_0) : \mathbf{E} + (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{p}) : \mathbf{E}] \\ &\quad + \frac{1}{3} \beta_3 (\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{p})^2 + o(\mathbf{E}^2, \vec{p}^2). \end{aligned}$$

On veut déterminer le tenseur  ${}_E S = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}$  à partir du développement limité de  $W$ , dont la partie régulière donnera le 2<sup>nd</sup> tenseur de Piola-Kirchhoff du cadre de l'électro-élasticité linéaire. Un simple calcul donne : (4.14)

$$\begin{aligned} {}_E S^{AB} (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}, \vec{\Pi}_0 + \vec{p}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial E_{AB}} \\ &\quad + \left[ \lambda_1 (\text{Tr} \mathbf{E}) + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \lambda_2) (\mathbf{E} : (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)) + \beta_1 (\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{p}) \right] \mathbf{1} + \mu_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \eta [(\mathbf{E} \vec{\Pi}_0) \otimes \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_0 \otimes (\mathbf{E} \vec{\Pi}_0)] \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} (\alpha_1 + \lambda_2) (\text{Tr} \mathbf{E}) + \alpha_2 (\mathbf{E} : (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)) + \beta_2 (\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{p}) \right] \vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0 + \mu_2 (\vec{p} \otimes \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_0 \otimes \vec{p}) \\ &\quad + o(\mathbf{E}, \vec{p}^2) \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient le 2<sup>nd</sup> tenseur d'électro-élasticité en prenant la partie régulière de  ${}_E C = \frac{\partial {}_E S}{\partial \mathbf{E}} = \frac{1}{2} \frac{\partial {}_E S}{\partial \mathbf{E}}$  :

$$\begin{aligned} (4.15) \quad {}_E C^{ABCD} (\mathbf{1} + \mathbf{E}, \vec{\Pi}_0 + \vec{p}) &= \frac{1}{2} \lambda_1 G^{AB} G^{CD} \\ &\quad + \frac{1}{4} \mu_1 (G^{AD} G^{BC} + G^{AC} G^{BD}) + \frac{1}{4} (\alpha_1 + \lambda_2) \left[ G^{AB} (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)^{CD} + (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)^{AB} G^{CD} \right] \\ &\quad + \frac{1}{8} \eta \left[ G^{AC} (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)^{BD} + G^{AD} (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)^{BC} + (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)^{AC} G^{BD} + (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)^{AD} G^{BC} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha_2 (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)^{AB} (\vec{\Pi}_0 \otimes \vec{\Pi}_0)^{CD} + O(\mathbf{E}) + o(\vec{p}). \end{aligned}$$

Le calcul de  $\frac{\partial^2 W}{\partial \mathcal{A} \partial \Pi}$  et  $\frac{\partial^2 W}{\partial \Pi^2}$  donne :

$$(4.16) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \mathcal{A}_{AB} \partial \Pi_C} = \beta_1 G^{AB} \Pi_0^C + \beta_2 (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)^{AB} \Pi_0^C + \mu_2 (G^{AC} \Pi_0^B + \Pi_0^A G^{BC}) + o(\mathbb{E}, \bar{p}),$$

$$(4.17) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \Pi_A \partial \Pi_B} = \beta_3 (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)^{AB} + o(\mathbb{E}^2) + O(\bar{p}).$$

Finalement, on peut exprimer à l'aide des expressions précédentes le tenseur  $\Sigma$  qui intervient dans les équations linéarisées. Puisque l'on a l'égalité

$$\Sigma(\mathbb{I} + 2\mathbb{E}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) = 2 {}_E C : \mathbb{E} + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathcal{A} \partial \Pi} \cdot \bar{p} \quad (2.56)_2,$$

alors on obtient

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \Sigma^{AB}(\mathbb{I} + 2\mathbb{E}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) &= \left[ \lambda_1 (\text{tr} \mathbb{E}) + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \lambda_2) (\mathbb{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)) + \beta_1 (\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p}) \right] G^{AB} + \mu_1 \mathbb{E}^{AB} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta \left[ (\mathbb{E} \bar{\Pi}_0) \otimes \bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_0 \otimes (\mathbb{E} \bar{\Pi}_0) \right]^{AB} \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} (\alpha_1 + \lambda_2) (\text{tr} \mathbb{E}) + \alpha_2 (\mathbb{E} : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)) + \beta_2 (\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p}) \right] (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)^{AB} \\ &\quad + \mu_2 (\bar{p} \otimes \bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_0 \otimes \bar{p})^{AB} + o(\mathbb{E}, \bar{p}). \end{aligned}$$

Remarque : Les linéarisations se sont ici effectuées suivant le tenseur  $\mathbb{E}$ . Il est à noter qu'en général, elles se font suivant le tenseur  $\nabla \bar{u}$ , représentant la partie linéaire du gradient de déformation  $F$  au voisinage de  $I_\Omega$ . En notant

$$(4.19) \quad \mathbf{e}(\bar{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T)$$

l'approximation linéaire du tenseur

$$(4.20) \quad \mathbb{E}(\bar{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u}^T + \nabla \bar{u}^T \nabla \bar{u}),$$

l'expression (4.18) devient (4.21) :

$$\begin{aligned} \Sigma^{AB}(\mathbb{I} + \bar{u}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) &= \left[ \lambda_1 (\text{tr} \mathbf{e}(\bar{u})) + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \lambda_2) (\mathbf{e}(\bar{u}) : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)) + \beta_1 (\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p}) \right] G^{AB} + \mu_1 \mathbf{e}(\bar{u})^{AB} \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta \left[ (\mathbf{e}(\bar{u}) \bar{\Pi}_0) \otimes \bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_0 \otimes (\mathbf{e}(\bar{u}) \bar{\Pi}_0) \right]^{AB} \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} (\alpha_1 + \lambda_2) (\text{tr} \mathbf{e}(\bar{u})) + \alpha_2 (\mathbf{e}(\bar{u}) : (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)) + \beta_2 (\bar{\Pi}_0 \cdot \bar{p}) \right] (\bar{\Pi}_0 \otimes \bar{\Pi}_0)^{AB} \\ &\quad + \mu_2 (\bar{p} \otimes \bar{\Pi}_0 + \bar{\Pi}_0 \otimes \bar{p})^{AB} + o(\nabla \bar{u}, \bar{p}). \end{aligned}$$

### 3-Le problème de traction linéarisé

Les équations linéarisées au voisinage de  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  peuvent s'écrire :

$$(4.22) \quad \bar{\Phi}(\mathbb{I} + \bar{u}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) = (\bar{l}_m, \bar{l}_e),$$

avec  $\bar{l}_m = (\bar{F}_m, \bar{\tau}_m)$  et  $\bar{l}_e = (\bar{F}_e, \bar{\tau}_e)$ ,

où  $\bar{\Phi}$  désigne l'opérateur défini par :

$$(4.23) \quad \bar{\Phi}(\mathbb{I} + \bar{u}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) = \left\{ (-\text{DIV}_X \bar{P}_m, \bar{P}_m \bar{N}), (-\text{DIV}_X \bar{P}_e, \bar{P}_e \bar{N}) \right\}.$$

Ainsi pour un couple de charges  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  fixé,  $(1 + \bar{u}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p})$  est solution des équations d'équilibre ( $\bar{E}$ ) si et seulement si  $\bar{\Phi}(1 + \bar{u}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$ .

L'opérateur  $\bar{\Phi}$  est défini sur  $T_{l_\Omega} \mathcal{E} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$ , où  $T_{l_\Omega} \mathcal{E}$  désigne le plan tangent à l'ensemble  $\mathcal{E}$  des déformations sur  $\Omega$  en  $l_\Omega$  et  $T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$  désigne le plan tangent à l'ensemble  $\mathcal{A}$  des champs de vecteurs de polarisation en  $\bar{\Pi}_0$ . Ces deux espaces sont regardés ici comme les espaces affines associés aux espaces vectoriels d'origine respective  $l_\Omega$  et  $\bar{\Pi}_0$ .

Comme il a été mis en évidence au niveau de la formule (3.10) du chapitre 3,  $\bar{\Phi}$  admet pour ensemble d'arrivée l'espace vectoriel  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$  des couples de charges de bilan nul.

Si l'on regarde  $T_{l_\Omega} \mathcal{E} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$  comme un produit d'espaces vectoriels, on peut remarquer alors d'après les expressions (4.21), (4.2), et (4.23) que l'opérateur  $\bar{\Phi}$  est une application linéaire en le couple  $(\bar{u}, \bar{p})$  :

$$(4.24) \quad \bar{\Phi}(\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{p}_1 + \bar{p}_2) = \bar{\Phi}(\bar{u}_1, \bar{p}_1) + \bar{\Phi}(\bar{u}_2, \bar{p}_2).$$

Par conséquent, si  $(\phi_1, \bar{\Pi}_1)$  et  $(\phi_2, \bar{\Pi}_2)$  avec  $\phi_1 = 1 + \bar{u}_1$ ,  $\phi_2 = 1 + \bar{u}_2$ ,  $\bar{\Pi}_1 = \bar{\Pi}_0 + \bar{p}_1$  et  $\bar{\Pi}_2 = \bar{\Pi}_0 + \bar{p}_2$  sont des couples solutions relativement aux charges  $\bar{l}_1$  et  $\bar{l}_2$ , alors le couple  $(\phi_1 + \phi_2, \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2)$  est solution du problème relativement à la charge  $\bar{l}_1 + \bar{l}_2$ . Ce résultat est connu sous le nom de « principe de superposition ».

Un simple calcul permet de montrer que si  $\bar{a}$  est un vecteur constant de  $\mathbb{R}^3$  et si  $K$  est un tenseur antisymétrique de  $\mathcal{C}_3$ , alors :

$$(4.25) \quad \bar{\Phi}(\bar{a}, \bar{\Pi}_0) = (\bar{0}, \bar{0}), \quad \bar{\Phi}(K\bar{X}, \bar{\Pi}_0) = (\bar{0}, \bar{0}), \quad \text{soit } \bar{\Phi}(\bar{a} + K\bar{X}, \bar{\Pi}_0) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

Le deuxième résultat peut aussi écrire  $\bar{\Phi}(1 + K\bar{X}, \bar{\Pi}_0) = (\bar{0}, \bar{0})$ .

On retrouve ici que les solutions du problème de traction linéaire sont définies à un champ de déplacement près. En effet si  $\theta: t \rightarrow e^{Kt}$  avec  $K \in \text{skew}$  est une famille de rotations continûment différentiable au voisinage de  $t=0$ , on a  $\theta_t|_{t=0} = 1$  et

$\left. \frac{d\theta_t}{dt} \right|_{t=0} = K$ . En reprenant les notations du chapitre 2, la linéarisation de l'application

$$f: (\phi, \bar{\Pi}) \rightarrow e^{Kt} \text{ est } L_{(1, \bar{\Pi}_0)} f(K, \bar{p}) = 1 + K.$$

On impose dans la suite que la déformation  $\phi$  vérifie  $\phi(0) = 0$ .

Les résultats (4.16) conduisent à définir la relation d'équivalence :

$$(4.26) \quad \bar{u} \approx \bar{v} \text{ lorsqu'il existe un tenseur } K \text{ de } \text{skew}(T\delta) \text{ tel que } \bar{u}(X) = \bar{v}(X) + K\bar{X},$$

et on est alors amené à considérer la restriction  $\dot{\bar{\Phi}}$  de  $\bar{\Phi}$  définie sur  $T_{l_\Omega} \mathcal{E} / \approx \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$ .

#### 4-Le théorème d'inversion locale

Pour un couple de charges  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  donné voisin du couple  $(\bar{0}, \bar{0})$ , on recherche les couples solutions  $(\mathbf{l}_\Omega + \bar{u}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p})$  voisins de  $(\mathbf{l}_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  vérifiant les équations  $\dot{\Phi}(\mathbf{l}_\Omega + \bar{u}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$ . La méthode consiste à appliquer le théorème d'inversion locale en déterminant la différentielle  $D\dot{\Phi}(\mathbf{l}_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  de  $\dot{\Phi}$  en  $(\mathbf{l}_\Omega, \bar{\Pi}_0)$ .

$D\dot{\Phi}(\mathbf{l}_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  est définie de  $T_{\mathbf{l}_\Omega} \mathcal{E} / \approx \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{C}$  sur  $\mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$  par :

$$(4.27) D\dot{\Phi}(\mathbf{l}_\Omega, \bar{\Pi}_0)(\bar{u}, \bar{p}) = \left\{ \begin{array}{l} \left( -\text{DIV}_x \left( \frac{\partial \bar{P}_m}{\partial \mathcal{F}} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \bar{P}_m}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right), \left( \frac{\partial \bar{P}_m}{\partial \mathcal{F}} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \bar{P}_m}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) \bar{N} \right) \\ \left( -\text{DIV}_x \left( \frac{\partial \bar{P}_e}{\partial \mathcal{F}} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \bar{P}_e}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right), \left( \frac{\partial \bar{P}_e}{\partial \mathcal{F}} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \bar{P}_e}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) \bar{N} \right) \end{array} \right\}.$$

D'après la linéarité du tenseur  $\Sigma$  en  $(\nabla \bar{u}, \bar{p})$ , on remarque que

$$\frac{\partial_E \bar{P}}{\partial \mathcal{F}} : \nabla \bar{u} = F_E \bar{P}(\mathbf{l}_\Omega + \nabla \bar{u}, \bar{\Pi}_0) \text{ et } \frac{\partial_E \bar{P}}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} = F_E \bar{P}(\mathbf{l}_\Omega, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}) \text{ soit encore}$$

$$\frac{\partial_E \bar{P}}{\partial \mathcal{F}} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial_E \bar{P}}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} = F_E \bar{P}(\mathbf{l}_\Omega + \nabla \bar{u}, \bar{\Pi}_0 + \bar{p}).$$

D'après (4.25), on peut alors affirmer que pour tout tenseur  $K$  de  $\text{skew}(T\delta)$ , où  $T\delta$  désigne le plan tangent à l'espace d'arrivée de la configuration  $\phi$ , on a :

$$D\dot{\Phi}(\mathbf{l}_\Omega, \bar{\Pi}_0)(K\bar{X}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

En posant l'ensemble  $\mathcal{K} = \{K\bar{X} / K \in \text{skew}(T\delta)\}$  qui n'est autre que la classe nulle relativement à la relation d'équivalence (4.26), on peut dire que :

$$\mathcal{K} \times \{\bar{0}\} \subset \text{Ker} D\dot{\Phi}(\mathbf{l}_\Omega, \bar{\Pi}_0).$$

En imposant que la première composante  $\bar{u}$  de tout élément  $(\bar{u}, \bar{p})$  du noyau  $\text{Ker} D\dot{\Phi}(\mathbf{l}_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  vérifie  $\bar{u}(0) = \bar{0}$ , on peut remarquer que ...

$$\text{si } \bar{u} = K\bar{X}, (\nabla \bar{u})_{aA} = \frac{\partial u_a}{\partial X^A} = K_{ab} \delta^b_A \text{ où } K \in \text{skew},$$

$$\text{et réciproquement si } \frac{\partial u_a}{\partial X^A} = K_{ab} \delta^b_A \text{ avec } K \in \text{skew} \text{ et } K \text{ constant,}$$

$$\text{alors } u_a = K_{ab} \delta^b_A X^A + k_a,$$

$$\text{or puisque } \bar{u}(0) = \bar{0} \text{ on a } k_a = 0,$$

$$\text{donc } u_a = K_{ab} \delta^b_A X^A, \text{ soit } \bar{u} = K\bar{X}.$$

D'où on redéfinit l'ensemble  $\mathcal{K}$  par :

$$(4.28) \mathcal{K} = \left\{ \bar{u} \in T_{\mathbf{l}_\Omega} \mathcal{E} / \bar{u}(0) = \bar{0} \text{ et } (\nabla \bar{u})(0) \in \text{skew} \right\}.$$

Puisque  $\mathcal{K} \times \{\bar{0}\} \subset \text{Ker} D\dot{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)$ , on montre maintenant que si  $(\bar{u}, \bar{p})$  vérifie  $D\dot{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)(\bar{u}, \bar{p}) = (\bar{0}, \bar{0})$ , alors  $\bar{u} \in \mathcal{K}$  et  $\bar{p} = \bar{0}$ .

Lorsque  $D\dot{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)(\bar{u}, \bar{p}) = (\bar{0}, \bar{0})$ , en utilisant la forme de la différentielle (4.27), on peut écrire que pour tout vecteur  $\bar{v} \in \mathbb{H}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ , on a

$$-\int_{\Omega} \text{DIV}_X \left( \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial \mathbb{F}} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) \cdot \bar{v} dX + \int_{\partial\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial \mathbb{F}} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) \bar{N} \right\} \cdot \bar{v} dA = 0$$

et

$$-\int_{\Omega} \text{DIV}_X \left( \frac{\partial \hat{P}_c}{\partial \mathbb{F}} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \hat{P}_c}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) \cdot \bar{v} dX + \int_{\partial\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \hat{P}_c}{\partial \mathbb{F}} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \hat{P}_c}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) \bar{N} \right\} \cdot \bar{v} dA = 0$$

$$\text{or pour tout tenseur } A = (A^{aa}), \quad -\int_{\Omega} (\text{DIV}_X A) \cdot \bar{v} dX + \int_{\partial\Omega} (A \bar{N}) \cdot \bar{v} dA = \int_{\Omega} A : \nabla \bar{v} dX \quad (4.29)$$

$$\text{en effet : } \int_{\partial\Omega} A^{aa} N_a v_a dA = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X^A} (A^{aa} v_a) dX = \int_{\Omega} \frac{\partial A^{aa}}{\partial X^A} v_a dX + \int_{\Omega} A^{aa} \frac{\partial v_a}{\partial X^A} dX$$

Donc pour tout vecteur  $\bar{v}$ ,

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \nabla \bar{v} : \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial \mathbb{F}} : \nabla \bar{u} + \nabla \bar{v} : \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) dX = 0 \\ \int_{\Omega} \left( \nabla \bar{v} : \frac{\partial \hat{P}_c}{\partial \mathbb{F}} : \nabla \bar{u} + \nabla \bar{v} : \frac{\partial \hat{P}_c}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) dX = 0 \end{aligned} \right\} \text{ soit } \int_{\Omega} \left( \nabla \bar{v} : \frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbb{F}} : \nabla \bar{u} + \nabla \bar{v} : \frac{\partial \hat{P}}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) dX = 0$$

On note  $\omega$  la forme définie sur  $(T_1 \mathcal{E} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{E})^2$  par (4.30) :

$$\omega [(A, \zeta), (A', \zeta')] = A : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbb{F}^2} : A' + A : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbb{F} \partial \Pi} \cdot \zeta' + \zeta \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \Pi \partial \mathbb{F}} : A' + \zeta \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \Pi^2} \cdot \zeta'$$

On fera l'hypothèse forte dite « d'ellipticité » de la forme  $\omega$  : (4.31)

$$(H_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un réel } \varepsilon > 0 \text{ tel que pour tous } A, A', \zeta, \zeta' \\ \omega [(A, \zeta), (A', \zeta')] \geq \varepsilon \left\| \left( \frac{1}{2}(A + A^T), \zeta \right) \right\| \times \left\| \left( \frac{1}{2}(A' + A'^T), \zeta' \right) \right\| \end{array} \right.$$

$$\text{où } \|(A, \zeta)\| = \sup \left( \|A\|_{\mathcal{E}_3}, \|\zeta\|_{\mathbb{R}^3} \right)$$

Cette hypothèse  $(H_2)$  permet d'affirmer que  $\|(e(\bar{u}), \bar{p})\| = 0$ , c'est à dire  $e(\bar{u}) = \bar{0}$  et  $\bar{p} = \bar{0}$ , soit encore  $(\bar{u}, \bar{p}) \in \mathcal{K} \times \{\bar{0}\}$

$$\text{en effet : } 0 = \int_{\Omega} \left( \nabla \bar{v} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbb{F}^2} : \nabla \bar{u} + \nabla \bar{v} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbb{F} \partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) dX \geq \varepsilon \int_{\Omega} \|(e(\bar{v}), \bar{0})\| \times \|(e(\bar{u}), \bar{p})\| dX \geq 0$$

**Proposition** (4.32):  $\text{Ker} D\dot{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0) = \left\{ \bar{u} \in T_{1_\Omega} \mathcal{E} / \bar{u}(0) = \bar{0} \text{ et } (\nabla \bar{u})(0) \in \text{skew} \right\} \times \{\bar{0}\}$ .

Pour le produit scalaire  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ , on a la décomposition en somme directe  $\mathcal{E}_3 = \text{sym} \oplus \text{skew}$ .

Par conséquent, on a la décomposition suivante :

$$\left[ \text{Ker} D\dot{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0) \right]^\perp = \mathcal{E}_{\text{sym}} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{E} \text{ où } \mathcal{E}_{\text{sym}} = \left\{ \bar{u} \in T_{1_\Omega} \mathcal{E} / \bar{u}(0) = \bar{0} \text{ et } (\nabla \bar{u})(0) \in \text{sym} \right\}$$

Donc sur  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{E}$ ,  $D\dot{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  est une injection.

Etude de la surjectivité :

Pour cela, il faut se rappeler qu'en élasticité classique, la surjectivité de l'application

$D\bar{\Phi}(1_\Omega)$  s'obtient grâce à l'alternative de Fredholm : (4.33)

$$(F) \quad \text{ker } D\bar{\Phi}(1_\Omega) = \mathcal{K} \text{ et } \text{Im } D\bar{\Phi}(1_\Omega) = \mathcal{K}^\perp \text{ où } \mathcal{K}^\perp = \left\{ \bar{I} \in \mathcal{L} / \langle \bar{I}, K\bar{X} \rangle = 0 \forall K \in \text{skew} \right\}$$

Comme dans FICHERA(1972)<sup>(1)</sup>, on montre que l'alternative de Fredholm est obtenue en

établissant l'inégalité de Garding pour la forme bilinéaire  $B(\bar{u}, \bar{u}) = \int_\Omega \nabla \bar{u} : \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} : \nabla \bar{u} dX$  :

$$(4.34) \quad \text{pour tout } \bar{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \int_\Omega \nabla \bar{u} : \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} : \nabla \bar{u} \geq \gamma_0 \|\bar{u}\|_{H^1}^2 - \lambda_0 \|\bar{u}\|_{L^2}^2$$

où  $\gamma_0$  et  $\lambda_0$  sont des constantes,  $\gamma_0 > 0$  et  $\lambda_0 \geq 0$ .

Si l'on suppose, comme dans Y.H.WAN et J.E.MARSDEN<sup>(1)</sup>, que :

$$(4.35) \quad \int_\Omega \nabla \bar{u} : \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} : \nabla \bar{u} dX \geq \varepsilon \|\bar{u}\|_{L^2}^2 \text{ où } \varepsilon \text{ est une constante, } \varepsilon > 0,$$

on obtient l'inégalité voulue en utilisant la seconde inégalité de Korn [FICHERA(1972)] :

$$(4.36) \quad \|\bar{e}(\bar{u})\|_{L^2}^2 + \|\bar{u}\|_{L^2}^2 \geq c \|\bar{u}\|_{H^1}^2 \text{ où } c \text{ est une constante, } c > 0.$$

Dans le cadre de l'électro-élasticité, on supposera que dans l'hypothèse forte de l'ellipticité (H<sub>2</sub>), on peut généraliser l'alternative de Fredholm : (4.37)

$$(F') \quad \text{ker } D\dot{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0) = \mathcal{K} \times \{\bar{0}\} \text{ et } \text{Im } D\dot{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0) = \left[ \mathcal{K} \times \{\bar{0}\} \right]^\perp \text{ où}$$

$$\left[ \mathcal{K} \times \{\bar{0}\} \right]^\perp = \left\{ (\bar{I}_m, \bar{I}_e) \in \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e / \langle \bar{I}_m, K\bar{X} \rangle = 0 \text{ et } \langle \bar{I}_e, K\bar{X} \rangle = 0 \forall K \in \text{skew} \right\}$$

or  $\bar{I} = (\bar{F}, \bar{\tau})$ , on a

$$\langle \bar{I}, K\bar{X} \rangle = \int_\Omega \bar{F} \cdot (K\bar{X}) dX + \int_{\partial\Omega} \bar{\tau} \cdot (K\bar{X}) dA = \int_\Omega (\bar{X} \wedge \bar{F}) \cdot \bar{\omega} dX + \int_{\partial\Omega} (\bar{X} \wedge \bar{\tau}) \cdot \bar{\omega} dA .$$

où  $K = \bar{\omega}^\wedge$

$$\langle \bar{I}, K\bar{X} \rangle = \left[ \int_\Omega \bar{X} \wedge \bar{F} dX + \int_{\partial\Omega} \bar{X} \wedge \bar{\tau} dA \right] \cdot \bar{\omega}$$

$$\text{donc } (\bar{I}_m, \bar{I}_e) \in \text{Im } D\dot{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0) \text{ ssi } \begin{cases} \int_\Omega \bar{X} \wedge \bar{F}_m dX + \int_{\partial\Omega} \bar{X} \wedge \bar{\tau}_m dA = 0 \text{ soit } \bar{I}_m \in (\mathcal{L}_m)_0 \\ \int_\Omega \bar{X} \wedge \bar{F}_e dX + \int_{\partial\Omega} \bar{X} \wedge \bar{\tau}_e dA = 0 \text{ soit } \bar{I}_e \in (\mathcal{L}_e)_0 \end{cases}$$

d'où le résultat :

**Proposition** (4.38):  $\text{Im } D\tilde{\Phi}(I_\Omega, \bar{\Pi}_0) = (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$ .

**Remarque** : pour rendre compte de l'effet d'électrostriction, il est nécessaire de restreindre  $\text{Im } D\tilde{\Phi}(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  à  $(\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0 /_{\pm 1}$ . En effet, l'effet piézo-électrique inverse exprime qu'une variation de champ électrique  $\delta\bar{\mathfrak{E}}$  (ici choisie petite) créant une (petite) variation de la charge  $\delta\bar{l}_e$  engendre une (petite) déformation, de plus la variation  $-\delta\bar{\mathfrak{E}}$  qui crée la variation  $-\delta\bar{l}_e$  engendre la même déformation.

D'où la proposition suivante :

**Proposition** (4.39) : l'application  $D\tilde{\Phi}(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{E}$  sur  $(\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\dot{\mathcal{L}}_e)_0$  où  $(\dot{\mathcal{L}}_e)_0 = (\mathcal{L}_e)_0 /_{\pm 1}$ .

On munit  $T_{I_\Omega} \mathcal{E}$  et  $T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{E}$  des normes respectives  $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^1}$  et  $\| \cdot \|_{L^2}$ .

$(T_{I_\Omega} \mathcal{E} /_{\approx} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{E}, \sup(\| \cdot \|_{\mathbb{R}^1}, \| \cdot \|_{L^2}))$  et  $((\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\dot{\mathcal{L}}_e)_0, \| \cdot \|_{L^2})$  sont des espaces de Banach.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe une boule ouverte  $U \times U'$  centrée sur  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  de  $T_{I_\Omega} \mathcal{E} /_{\approx} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{E}$  et un voisinage  $W \times W'$  de  $(\bar{0}, \bar{0})$  de  $(\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\dot{\mathcal{L}}_e)_0$  tels que  $\tilde{\Phi}$  soit un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $U \times U'$  sur  $W \times W'$ . D'où ...

**Corollaire** (4.40) : Soit  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  un couple de charges de  $\mathcal{L}_0$  proche de  $(\bar{0}, \bar{0})$ . Il existe un unique couple  $(\phi, \bar{\Pi})$  dans  $T_{I_\Omega} \mathcal{E} /_{\approx} \times T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{E}$  solution du problème de traction  $\bar{\Phi}(\phi, \bar{\Pi}) = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$ .

**Remarque 1** : La déformation  $\phi = I_\Omega + \bar{u}$  du couple solution est alors par l'espace quotient  $T_{I_\Omega} \mathcal{E} /_{\approx}$  définie à un déplacement près (cf. (4.25))

**Remarque 2** : Le résultat ne vaut que dans la recherche de solutions au voisinage de  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  du fait du caractère local de la linéarisation des équations de la statique. Il est clair que dès lors que l'on connaît un autre couple de solutions trivial, on peut appliquer le même principe de recherche des couples solutions au voisinage de ce couple donné. Il est à noter que dans ce cadre, la linéarisation étant effectuée, il n'est pas possible de bénéficier de l'axiome d'indifférence matérielle.

## II/FORMULATIONS DU PROBLEME DE TRACTION EN ELECTRO-ELASTICITE NON LINEAIRE

### 1-Le problème de traction non linéarisé

Les équations non linéaires en électro-élasticité statique s'expriment sous les hypothèses du chapitre 3 :

$$(E) \begin{cases} \text{DIV}_X \mathbf{P}_m + \bar{\mathbf{F}}_m = \bar{\mathbf{0}} \\ \text{DIV}_X \mathbf{P}_e + \bar{\mathbf{F}}_e = \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{P}_m \bar{\mathbf{N}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_m \\ \mathbf{P}_e \bar{\mathbf{N}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_e \end{cases}$$

Elles peuvent aussi s'écrire  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\bar{\mathbf{I}}_m, \bar{\mathbf{I}}_e)$  où l'opérateur  $\Phi$  est défini par

$$(4.41) \Phi : \mathcal{L} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}$$

$$(\phi, \bar{\Pi}) \mapsto \Phi(\phi, \bar{\Pi}) = \left\{ (-\text{DIV}_X \mathbf{P}_m, \mathbf{P}_m \bar{\mathbf{N}}), (-\text{DIV}_X \mathbf{P}_e, \mathbf{P}_e \bar{\mathbf{N}}) \right\}$$

Comme dans le cadre linéaire, on dira que pour un couple de charges  $\bar{\mathbf{I}} = (\bar{\mathbf{I}}_m, \bar{\mathbf{I}}_e)$  fixé,  $(\phi, \bar{\Pi})$  est solution des équations d'équilibre (E) si et seulement si  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = \bar{\mathbf{I}}$ .

Il est clair que dans le cadre non linéaire l'espace des déformations  $\mathcal{L}$  ne peut pas être regardé comme un espace vectoriel;  $\Phi$  n'est donc pas une application linéaire, d'où le principe de superposition n'est pas vérifié. Par contre, d'après l'axiome d'indifférence matérielle on a vu dans le chapitre 3 que :

$$(4.42) \text{ pour tout } Q \text{ de } SO(3), \Phi(Q\phi, Q\bar{\Pi}(\phi(X))) = (Q\bar{\mathbf{I}}_m, Q\bar{\mathbf{I}}_e)$$

On peut alors dire que les éléments  $(Q.I_\Omega, \bar{\Pi}_0(X))$  [ou  $(Q.I_\Omega, Q\bar{\Pi}_0(\phi(X)))$ ] avec  $Q \in SO(3)$  sont aussi solution de (E) pour  $\bar{\mathbf{I}} = (\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{0}})$ .

Le problème de traction se formule alors ainsi :

(P<sub>1</sub>) Décrire l'ensemble des solutions de  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{\mathbf{I}}_m, \lambda_e \bar{\mathbf{I}}_e)$  voisines de  $(Q.I_\Omega, \bar{\Pi}_0(X)) \in \mathcal{L} \times \mathcal{C}$  pour  $(\lambda_m \bar{\mathbf{I}}_m, \lambda_e \bar{\mathbf{I}}_e) \in \mathcal{L}$ ,  $\lambda_m$  et  $\lambda_e$  étant des réels positifs proches de 0 et le couple  $\bar{\mathbf{I}} = (\lambda_m \bar{\mathbf{I}}_m, \lambda_e \bar{\mathbf{I}}_e)$  étant voisin du couple  $\bar{\mathbf{I}}_0 = (\bar{\mathbf{I}}_{m0}, \bar{\mathbf{I}}_{e0})$  donné dans  $\mathcal{L}$ . Plus précisément :

\*dénombrer les solutions,

et

\*étudier leur stabilité.

## 2-Le théorème d'inversion locale

La différentielle de  $\Phi$  en  $(1, \bar{\Pi}_0)$  est:

$$(4.43) D\Phi(1, \bar{\Pi}_0)(\bar{u}, \bar{p}) = \left\{ \begin{array}{l} \left( -\text{DIV}_X \left( \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial F} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right), \left( \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial F} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \hat{P}_m}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) \bar{N} \right) \\ \left( -\text{DIV}_X \left( \frac{\partial \hat{P}_e}{\partial F} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \hat{P}_e}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right), \left( \frac{\partial \hat{P}_e}{\partial F} : \nabla \bar{u} + \frac{\partial \hat{P}_e}{\partial \Pi} \cdot \bar{p} \right) \bar{N} \right) \end{array} \right\}$$

Bien entendu, d'après les définitions (4.2), et (2.57)<sub>2</sub>, on a :

$$(4.44) \frac{\partial_E \hat{P}}{\partial F} = \frac{\partial_E \bar{P}}{\partial F} \text{ et } \frac{\partial_E \hat{P}}{\partial \Pi} = \frac{\partial_E \bar{P}}{\partial \Pi}, \text{ soit } D\Phi(1, \bar{\Pi}_0) \equiv D\bar{\Phi}(1, \bar{\Pi}_0).$$

Si dans un premier temps on examine l'injectivité de l'application  $D\Phi(1, \bar{\Pi}_0)$ , on utilise soit la propriété d'équivariance (3.15) de  $\Phi$  et on a :

$$\Phi(e^{Kt} X, \bar{\Pi}_0) = (\bar{0}, \bar{0}) \text{ pour tout réel } t \text{ et pour tout } K \in \text{skew}(T\delta)$$

donc en calculant la différentielle pour  $t = 0$ ,

$$D\Phi(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)(KX, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \text{ où } (KX)_a = K_{ab} \delta^b_A X^A,$$

soit on reprend le raisonnement du cadre linéaire.

Dans l'hypothèse forte « d'ellipticité » (4.31) de la forme  $\omega$ , on peut aussi conclure que le noyau de  $D\Phi(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  est défini par :

$$\text{Ker } D\Phi(1_\Omega, \bar{\Pi}_0) = \left\{ \bar{u} \in T_{1_\Omega} \mathcal{E} / \bar{u}(0) = \bar{0} \text{ et } (\nabla \bar{u})(0) \in \text{skew} \right\} \times \{ \bar{0} \}.$$

La surjectivité de  $D\Phi(1, \bar{\Pi}_0)$  se traite aussi de la même façon et on peut affirmer que  $D\Phi(1, \bar{\Pi}_0)$  est une surjection de  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}$  sur  $(\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$ .

La différence réside ici en le fait que  $\Phi$  n'étant pas une application linéaire,  $\Phi$  est un isomorphisme local de  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}$  sur une variété de l'espace  $\mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$ . Pour mettre en évidence cette variété, on va reprendre la démonstration des fonctions implicites en trois points.

Tout d'abord on peut remarquer que pour tout  $\bar{u} \in \mathcal{E}_{\text{sym}}$ ,  $\phi = 1_\Omega + \bar{u} \in \mathcal{E}$  :  $\mathcal{E}_{\text{sym}}$  peut être regardé comme un sous espace affine de  $\mathcal{E}$  centré sur  $1_\Omega$ .

Si on considère  $\mathcal{A}$  comme un espace affine d'espace vectoriel associé  $\mathcal{A}$  attaché en  $\bar{\Pi}_0$ , de la même façon on peut regarder  $T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$  comme un sous espace affine de  $\mathcal{A}$  centré en  $\bar{\Pi}_0$  et  $T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$  est isomorphe à  $\mathcal{A}$ . Dans la démonstration, on utilise alors l'espace  $\mathcal{A}$  au de  $T_{\bar{\Pi}_0} \mathcal{A}$ .

$$\tilde{\Phi} \text{ est une application de } \mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A} \text{ dans } \mathcal{L} = \left( (\mathcal{L}_m)_0 \oplus \text{Skew} \right) \oplus \left( (\mathcal{L}_e)_0 \oplus \text{Skew} \right).$$

On notera  $\tilde{\Phi}$  la différentielle  $D\tilde{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  tant qu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

$$\tilde{\Phi} \text{ est alors un isomorphisme tel que } \tilde{\Phi}(1_\Omega, \bar{\Pi}_0) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

$\mathcal{E}_{\text{sym}}$  et  $\mathcal{A}$  sont munis des normes respectives  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$ , et on munit  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}$  de la norme « sup. ».

$(\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}, \sup(\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}, \|\cdot\|_{L^2}))$  et  $(\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0, \|\cdot\|_{L^2}$  sont des espaces de Banach.

[a] D'après le théorème d'inversion locale, il existe une boule ouverte  $U \times U'$  centrée sur  $(1_\Omega, \vec{\Pi}_0)$  de  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}$  et un voisinage  $W \times W'$  de  $(\vec{0}, \vec{0})$  de  $(\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$  tels que  $\tilde{\Phi}$  soit un difféomorphisme de classe  $C^1$  de  $U \times U'$  sur  $W \times W'$ .

[b] Comme  $\tilde{\Phi}^{-1}$  applique  $(\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$  sur  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}$ , l'application composée  $\Psi: U \times U' \xrightarrow{\tilde{\Phi}} W \times W' \xrightarrow{\tilde{\Phi}^{-1}} \mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}$  est différentiable en  $(1_\Omega, \vec{\Pi}_0)$  de  $U \times U'$  et  $\Psi'(1_\Omega, \vec{\Pi}_0) = 1_{\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}}$ . En effet...

$$\Psi(1_\Omega + \vec{u}, \vec{\Pi}_0 + \vec{p}) - \Psi(1_\Omega, \vec{\Pi}_0) = \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{\Phi}(1_\Omega + \vec{u}, \vec{\Pi}_0 + \vec{p}) - \tilde{\Phi}(1_\Omega, \vec{\Pi}_0)) \text{ car } \tilde{\Phi}^{-1} \text{ est linéaire,}$$

$$\Psi(1_\Omega + \vec{u}, \vec{\Pi}_0 + \vec{p}) - \Psi(1_\Omega, \vec{\Pi}_0) = \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{\Phi}'(\vec{u}, \vec{p}) + o(\vec{u}, \vec{p})),$$

$$\Psi(1_\Omega + \vec{u}, \vec{\Pi}_0 + \vec{p}) - \Psi(1_\Omega, \vec{\Pi}_0) = (\vec{u}, \vec{p}) + \tilde{\Phi}^{-1}(o(\vec{u}, \vec{p})),$$

d'où le résultat.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{on peut remarquer que } \tilde{\Phi}'(\vec{u}, \vec{p}) \text{ se décompose ainsi:} \\ \tilde{\Phi}'(\vec{u}, \vec{p}) = (\tilde{\Phi}_m / \mathcal{E}_{\text{sym}})' \vec{u} + (\tilde{\Phi}_m / \mathcal{A})' \vec{p} + (\tilde{\Phi}_e / \mathcal{E}_{\text{sym}})' \vec{u} + (\tilde{\Phi}_e / \mathcal{A})' \vec{p} \\ \text{où } \tilde{\Phi}_m = p_m \circ \tilde{\Phi}, p_m \text{ désignant la projection de } \mathcal{L} \text{ sur } \mathcal{L}_m \\ \tilde{\Phi}_e = p_e \circ \tilde{\Phi}, p_e \text{ désignant la projection de } \mathcal{L} \text{ sur } \mathcal{L}_e \end{array} \right]$$

On considère alors  $g: (\vec{u}, \vec{p}) \mapsto (\vec{u}, \vec{p}) - \Psi(\vec{u}, \vec{p})$  qui est différentiable en  $(1_\Omega, \vec{\Pi}_0)$ ,  $g'(1_\Omega, \vec{\Pi}_0) = 1_{\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}} - 1_{\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}} = 0$

Puisque  $g': U \times U' \rightarrow \mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}$  est continue, il existe un réel  $r$  positif tel que dès que  $\|(\vec{u}, \vec{p})\| < r$  alors  $\|g'(\vec{u}, \vec{p})\| \leq \frac{1}{2}$ . D'après le théorème des accroissements finis, on a  $\|g(\vec{u}, \vec{p}) - g(\vec{0}, \vec{0})\| \leq \frac{1}{2} \|(\vec{u}, \vec{p}) - (\vec{0}, \vec{0})\|$ , soit  $\|g(\vec{u}, \vec{p})\| \leq \frac{1}{2} \|(\vec{u}, \vec{p})\|$

$g$  est alors lipschitzienne de rapport  $\frac{1}{2} \in ]0, 1[$  dans la boule  $\|(\vec{u}, \vec{p})\| < r$ .

On peut appliquer la méthode des approximations successives pour montrer que  $\Psi$  est un homéomorphisme d'un ouvert  $V \times V'$  de  $(\vec{0}, \vec{0}) \subset U \times U'$  dans un voisinage ouvert  $W_1 \times W_1'$  de  $\Psi(\vec{0}, \vec{0}) \subset \mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}$ .

L'application  $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}' \circ \Psi$  est alors un homéomorphisme de  $V \times V'$  sur  $W \times W'$  où  $W \times W' = \Phi'(V \times V') \subset (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$ .

[c]  $\tilde{\Phi}$  est une bijection continue et ouverte de  $U \times U'$  sur  $\tilde{\Phi}(U \times U')$ , donc

$$\Psi = \tilde{\Phi}^{-1} / \tilde{\Phi}(U \times U') \rightarrow U \times U' \text{ est continue.}$$

L'application  $\tilde{\Phi}$  est bien un homéomorphisme de  $U \times U'$  sur  $\tilde{\Phi}(U \times U') \subset \mathcal{L}_0$  où  $\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$ .

Pour tout  $(\bar{l}_{m0}, \bar{l}_{e0}) \in W \times W' = \tilde{\Phi}(U \times U')$ ,  $(\bar{u}, \bar{\Pi}) = \Psi(\bar{l}_{m0}, \bar{l}_{e0}) \in U \times U'$ .

Par conséquent,

$$(4.45) \mathcal{N} = \tilde{\Phi}(U \times U') = \left\{ (\bar{l}_0, \bar{l}_s) \in \dot{\mathcal{L}}_0 \oplus \text{Skew} / \bar{l}_s = (\tilde{\Phi} \circ \Psi - 1_{\dot{\mathcal{L}}_0}) \bar{l}_0, \bar{l}_0 \in W \times W' \right\}$$

est une variété lisse de  $\mathcal{L}$ , graphe de l'unique application

$F: (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\dot{\mathcal{L}}_e)_0 \rightarrow \text{Skew} \oplus \text{Skew}$  telle que

$$F = \tilde{\Phi} \circ \Psi - 1_{\dot{\mathcal{L}}_0} = \tilde{\Phi} \circ (\tilde{\Phi}' / \Phi(U \times U'))^{-1} - 1_{\dot{\mathcal{L}}_0} \text{ vérifie}$$

$$F(\bar{0}, \bar{0}) = \tilde{\Phi}(1_{\Omega}, \bar{0}) - (\bar{0}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}) \text{ et } F'(\bar{0}, \bar{0}) = \tilde{\Phi}'(1_{\Omega}, \bar{0}) \cdot (\bar{0}, \bar{0}) - (\bar{0}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0}),$$

ce qui signifie que  $\mathcal{N}$  est tangente en  $(\bar{0}, \bar{0})$  à  $(\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\dot{\mathcal{L}}_e)_0$ .

En distinguant les charges d'origines mécaniques et électriques, on peut aussi définir cette variété  $\mathcal{N}$  ainsi :

$$(4.46) \mathcal{N} = \left\{ [(\bar{l}_{m0}, \bar{l}_{s0}), (\bar{l}_{e0}, \bar{l}_{es})] \in ((\mathcal{L}_m)_0 \oplus \text{Skew}) \oplus ((\dot{\mathcal{L}}_e)_0 \oplus \text{Skew}) / \bar{l}_{ms} = F_m(\bar{l}_{m0}, \bar{l}_{e0}) \right.$$

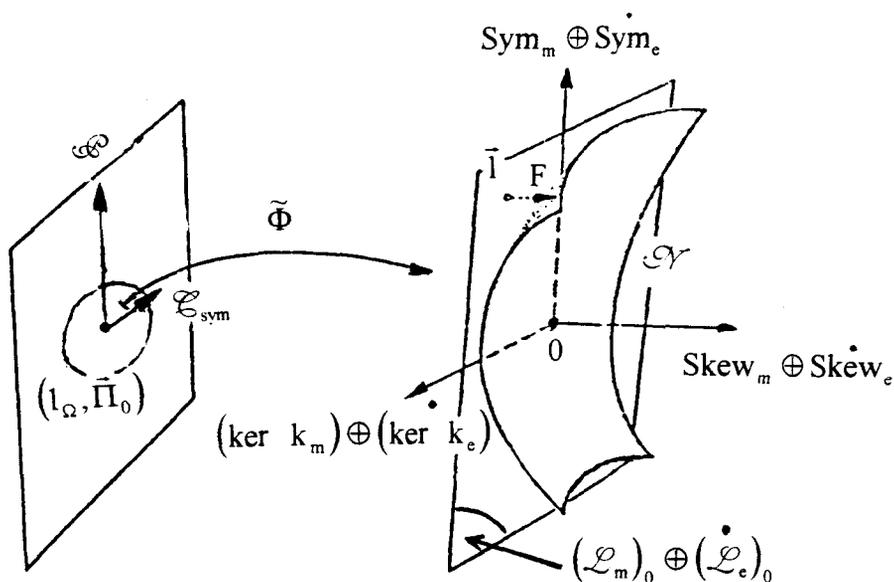
$$\left. \text{et } \bar{l}_{es} = F_e(\bar{l}_{m0}, \bar{l}_{e0}) \text{ où } \bar{l}_0 \in W \times W' \right\}$$

$$\text{où } F_m = \tilde{\Phi}_m \circ (\tilde{\Phi}' / \Phi(U \times U'))^{-1} - 1_{(\mathcal{L}_m)_0}$$

$$F_e = \tilde{\Phi}_e \circ (\tilde{\Phi}' / \Phi(U \times U'))^{-1} - 1_{(\dot{\mathcal{L}}_e)_0}$$

avec  $F = F_m + F_e$ .

**Proposition (4.47):** Il existe une boule centrée en  $(1_{\Omega}, \bar{\Pi}_0)$  dans  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{E}$  dont l'image par  $\tilde{\Phi}$  est une sous variété lisse de  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e$  tangente en  $(\bar{0}, \bar{0})$  à  $(\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\dot{\mathcal{L}}_e)_0$ . Cette variété  $\mathcal{N}$  est le graphe d'une et une seule application  $F: (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\dot{\mathcal{L}}_e)_0 \rightarrow \text{Skew} \oplus \text{Skew}$  telle que  $F(\bar{0}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$  et  $F'(\bar{0}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$ .



Remarque 1 : soit  $\phi \in \mathcal{E}$ ,  $\phi = I_\Omega + \bar{u}$  où  $\bar{u} \in T_{I_\Omega} \mathcal{E}$  avec  $\bar{u}(0) = \bar{0}$ . Il existe un unique  $Q \in SO(3)$  tel que  $Q\phi \in I_\Omega + \mathcal{E}_{\text{sym}}$ . En effet ...

$$D\phi = I_\Omega + \nabla \bar{u} \in \mathcal{L}^+(T\mathcal{B}, \mathbb{R}^3).$$

D'après le théorème de décomposition polaire, il existe un unique  $Q \in SO(3)$  et un unique  $U \in \text{sym}$ , tels que  $D\phi = Q^T U$ , alors  $QD\phi = U \in \text{sym}$ , soit  $QI_\Omega + Q\nabla \bar{u} \in \text{sym}$ .

or  $Q\phi$  peut s'écrire  $Q\phi = I_\Omega + \bar{u}_Q$  où  $\bar{u}_Q = QI_\Omega - I_\Omega + Q\bar{u}$ ,

et  $\nabla \bar{u}_Q = QI_\Omega - I_\Omega + Q\nabla \bar{u} \in \text{sym}$ , donc

$$\bar{u}_Q(0) = \bar{0} \text{ et } (\nabla \bar{u}_Q)(0) = QI_\Omega - I_\Omega + (Q\nabla \bar{u})(0) \in \text{sym}$$

c'est à dire  $Q\phi \in I_\Omega + \mathcal{E}_{\text{sym}}$ .

Remarque 2 : si  $(\phi, \bar{\Pi})$  vérifie les équations (E) avec  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e) \in \mathcal{L}$ , il existe un unique  $Q$  de  $SO(3)$  tel que  $\bar{\phi} = Q\phi \in \mathcal{E}_{\text{sym}}$ . On pose  $\bar{\bar{\Pi}} = Q\bar{\Pi}$ .

$$\Phi(\bar{\phi}, \bar{\bar{\Pi}}) = \Phi(Q\phi, Q\bar{\Pi}) = Q\Phi(\phi, \bar{\Pi}) \text{ d'après la propriété (4.42) de } \Phi, \text{ donc}$$

$$\Phi(\bar{\phi}, \bar{\bar{\Pi}}) = (Q\bar{I}_m, Q\bar{I}_e) \text{ d'où } \Phi(\bar{\phi}, \bar{\bar{\Pi}}) \in (\Theta_{\bar{I}_m} \times \Theta_{\bar{I}_e}) \cap \mathcal{N}.$$

### 3-Les reformulations équivalentes du problème

#### 1] 1<sup>ère</sup> reformulation du problème

(P<sub>2</sub>) Pour  $\bar{I}_0 = (\bar{I}_{m0}, \bar{I}_{e0})$  une charge fixée dans  $\mathcal{L}_0$  proche de  $(\bar{0}, \bar{0})$ , étudier comment  $\Theta_{\bar{I}_m} \times \Theta_{\bar{I}_e}$  rencontre  $\mathcal{N}$  pour  $\bar{I}$  variable proche de  $\bar{I}_0$ .

On pose  $(\Theta_{\bar{I}_m} \times \Theta_{\bar{I}_e}) \cap \mathcal{N} = \{(Q_{im} \bar{I}_m, Q_{je} \bar{I}_e) / i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, k\}$ .

A chaque couple  $(Q_{im} \bar{I}_m, Q_{je} \bar{I}_e)$  correspond, d'après la proposition (4.47), un couple

$(\bar{\phi}_{ij}, \bar{\bar{\Pi}}_{ij})$  de  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{C}$  tel que  $\Phi(\bar{\phi}_{ij}, \bar{\bar{\Pi}}_{ij}) = (Q_{im} \bar{I}_m, Q_{je} \bar{I}_e)$ . La propriété (4.42) de  $\Phi$  ne

peut s'appliquer que dans le seul cas où  $Q_{im} = \pm Q_{je} \in SO(3)$ . Lorsque  $Q_{im} = Q_{je}$ , alors

$\Phi(Q_i^{-1} \bar{\phi}_i, Q_i^{-1} \bar{\bar{\Pi}}_i) = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$ , c'est à dire  $(Q_i^{-1} \bar{\phi}_i, Q_i^{-1} \bar{\bar{\Pi}}_i)$  est solution de l'équation (E)

avec  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$ . Lorsque  $Q_{im} = -Q_{je} \in SO(3)$ , puisque  $(\mathcal{L}_e)_0$  est quotienté par  $\pm 1$ ,

$Q_{je} \bar{I}_e \approx Q_{im} \bar{I}_e$ , et on est alors ramené au cas précédent.

Il est nécessaire de se poser la question suivante :

Pour deux charges distinctes  $(Q_i \bar{I}_m, Q_i \bar{I}_e), (Q_j \bar{I}_m, Q_j \bar{I}_e)$ , a-t-on deux couples de

$\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{C}$  distincts ?

si  $(Q_i^{-1}\bar{\phi}_i, Q_i^{-1}\bar{\Pi}_i) = (Q_j^{-1}\bar{\phi}_j, Q_j^{-1}\bar{\Pi}_j)$ , alors  $\bar{\phi}_i = Q_i Q_j^{-1}\bar{\phi}_j$  où  $\bar{\phi}_i$  et  $\bar{\phi}_j$  sont voisines de  $I_\Omega$  dans  $\mathcal{E}_{\text{sym}}$ . Or,

Lemme (4.48) : il existe un voisinage  $U$  de  $I_\Omega$  dans  $\mathcal{E}_{\text{sym}}$  tel que

$$\text{si } \phi \in U \text{ et } Q\phi \in U \text{ alors } Q = 1 .$$

D'après le lemme, on peut alors affirmer que  $Q_i = Q_j$ , donc que les charges  $(Q_i \bar{I}_m, Q_i \bar{I}_e)$  et  $(Q_j \bar{I}_m, Q_j \bar{I}_e)$  sont identiques d'où une contradiction.

On peut alors conclure effectivement que pour deux couples de charges distincts  $(Q_i \bar{I}_m, Q_i \bar{I}_e)$ ,  $(Q_j \bar{I}_m, Q_j \bar{I}_e)$ , les deux couples respectifs associés de  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{C}^0$  sont distincts .

Démonstration du lemme :  $\phi = I_\Omega + \bar{u} \in U \subset \mathcal{E}_{\text{sym}}$  peut se traduire par l'existence d'un réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que  $\|\bar{u}\|_{H^1} \leq \varepsilon$ , ce qui entraîne  $\|\nabla \bar{u}\|_{L^2} \leq \varepsilon$  .

On a vu dans la remarque 2 relative à la proposition (4.47) que  $Q\phi$  peut s'écrire  $Q\phi = I_\Omega + \bar{u}_Q$  où  $\bar{u}_Q = Q - I_\Omega + Q\bar{u}$ , avec  $(\nabla \bar{u}_Q)(0) = QI_\Omega - I_\Omega + (Q\nabla \bar{u})(0) \in \text{sym}$ .

Puisque de plus  $\nabla \bar{u}(0) \in \text{sym}$ , on a  $Q^T - Q = Q\nabla \bar{u}(0) - \nabla \bar{u}(0)Q^T$ .

Cette égalité peut se traduire dans une base orthonormée directe  $(\bar{e}_i)$  dans laquelle  $\nabla \bar{u}(0) = (G_{ij})$  et  $Q$  désigne la rotation d'axe  $\bar{e}_3$  et d'angle  $\theta$ . Un simple calcul montre en effet que  $Q^T - Q$  et  $Q\nabla \bar{u}(0) - \nabla \bar{u}(0)Q^T$  sont représentés respectivement dans la base  $(\bar{e}_i)$  par :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2\sin\theta & 0 \\ -2\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 & -\sin\theta(G_{11} + G_{22}) & -G_{13}(1 - \cos\theta) - G_{23}\sin\theta \\ \sin\theta(G_{11} + G_{22}) & 0 & G_{23}(-1 + \cos\theta) + G_{13}\sin\theta \\ G_{13}(1 - \cos\theta) + G_{23}\sin\theta & -G_{23}(-1 + \cos\theta) - G_{13}\sin\theta & 0 \end{bmatrix} .$$

L'égalité des deux quantités implique alors le système suivant :

$$\begin{cases} G_{22}\sin\theta + G_{11}\sin\theta = -2\sin\theta \\ G_{13}(1 - \cos\theta) + G_{23}\sin\theta = 0 \\ G_{23}(-1 + \cos\theta) + G_{13}\sin\theta = 0 \end{cases} , \text{ soit } \begin{cases} (G_{11} + G_{22} + 2)\sin\theta = 0 \\ G_{13}(1 - \cos\theta) - G_{23}\sin\theta = 0 \\ G_{23}(1 - \cos\theta) + G_{13}\sin\theta = 0 \end{cases} , \text{ c'est à dire}$$

$$\begin{cases} (G_{11} + G_{22} + 2)\sin\theta = 0 \\ 2G_{13}\sin^2\frac{\theta}{2} - 2G_{23}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \\ 2G_{23}\sin^2\frac{\theta}{2} + 2G_{13}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0 \end{cases} , \text{ soit } \begin{cases} (G_{11} + G_{22} + 2)\sin\theta = 0 \\ \sin\frac{\theta}{2}\left(G_{13}\sin\frac{\theta}{2} - G_{23}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0 \\ \sin\frac{\theta}{2}\left(G_{23}\sin\frac{\theta}{2} + G_{13}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0 \end{cases} .$$

1<sup>er</sup> cas :  $\sin\theta = 0$  ,  $\theta = k\pi$

\* si  $k$  est pair,  $\theta = 2p\pi$  et  $\sin\frac{\theta}{2} = \sin p\pi = 0$ . Il n'y a donc pas de condition sur  $G_{13}$  et  $G_{23}$  , et  $Q = I$ .

\* si  $k$  est impair,  $\theta = (2p+1)\pi$ ,  $\sin\frac{\theta}{2} = (-1)^p$ ,  $\cos\frac{\theta}{2} = 0$  et nécessairement  $G_{13} = G_{23} = 0$ . Ainsi  $Q = \text{diag}(-1, -1, 1)$ ,

$$\nabla\bar{u}(0) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{bmatrix} \text{ et } \nabla\bar{u}_Q(0) = \begin{bmatrix} -2 - G_{11} & -G_{12} & 0 \\ -G_{21} & -2 - G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{bmatrix}.$$

Pour que  $\|\nabla\bar{u}\|_{L^2} \leq \varepsilon$  et  $\|\nabla\bar{u}_Q\|_{L^2} \leq \varepsilon$ , il est nécessaire que l'on ait simultanément  $|G_{11}| \leq \varepsilon$  et  $|-2 - G_{11}| \leq \varepsilon$ , ce qui est contradictoire sachant que  $\varepsilon$  est petit.

\* 2<sup>eme</sup> cas :  $\sin\frac{\theta}{2} = 0$  ,  $\theta = 2p\pi$  et donc  $Q = I$  (voir 1<sup>er</sup> cas).

\* 3<sup>eme</sup> cas :  $\sin\theta \neq 0$  et  $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ . Le système devient alors :

$$\begin{cases} G_{11} + G_{22} + 2 = 0 \\ G_{13} \sin\frac{\theta}{2} - G_{23} \cos\frac{\theta}{2} = 0 \\ G_{23} \sin\frac{\theta}{2} + G_{13} \cos\frac{\theta}{2} = 0 \end{cases} \text{ où } \det \begin{vmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{vmatrix} = \sin\theta \neq 0,$$

ce qui impose  $G_{11} + G_{22} + 2 = 0 = G_{13} = G_{23}$ .

Or pour que  $\|\nabla\bar{u}\|_{L^2} \leq \varepsilon$ , il faut  $|G_{11}| \leq \varepsilon$  et  $|G_{22}| \leq \varepsilon$  donc  $|G_{11} + G_{22}| \leq 2\varepsilon$ ,

d'où  $|G_{11} + G_{22}| < 2$  dès que  $\varepsilon < 1$ . Ceci est impossible puisque  $G_{11} + G_{22} = -2$ .

En conclusion de cette démonstration,  $Q = I$  est bien la seule possibilité.

D'après la proposition (3.35) du chapitre 3,

étant donné $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e) \in \mathcal{L}$ , $A_m = k_m(\bar{l}_m)$	et $A_e = k_e(\bar{l}_e)$ , on peut écrire :
$\mathcal{L}_m = j_m(\text{skew}_m) \oplus j_m(\text{sym}_m) \oplus \ker k_m$	$\mathcal{L}_e = j_e(\text{skew}_e) \oplus j_e(\text{sym}_e) \oplus \ker k_e$
$(\mathcal{L}_m)_0 = j_m(\text{sym}_m) \oplus \ker k_m$	$(\mathcal{L}_e)_0 = j_e(\text{sym}_e) \oplus \ker k_e$
$\bar{l}_m = j_m(\text{skew}A_m) + j_m(\text{sym}A_m) + n_m$ où $n_m \in \ker k_m$	$\bar{l}_e = j_e(\text{skew}A_e) + j_e(\text{sym}A_e) + n_e$ où $n_e \in \ker k_e$
L'action de $SO(3)$ sur $\mathcal{L}_m$ étant donnée par :	L'action de $O(3)$ sur $\mathcal{L}_e$ étant donnée par :
$Q_m \bar{l}_m = j_m(\text{skew}Q_m A_m) + j_m(\text{sym}Q_m A_m) + Q_m n_m$	$Q_e \bar{l}_e = j_e(\text{skew}Q_e A_e) + j_e(\text{sym}Q_e A_e) + Q_e n_e$

Ainsi, d'après la définition (4.46) de la variété  $\mathcal{N}$ , dire que  $(Q_m \bar{I}_m, Q_e \bar{I}_e) \in \mathcal{N}$  signifie que :

$$\begin{pmatrix} j_m(\text{skew}Q_m A_m) \\ j_e(\text{skew}Q_e A_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m(j_m(\text{sym}Q_m A_m), j_e(\text{sym}Q_e A_e), Q_m n_m, Q_e n_e) \\ F_e(j_m(\text{sym}Q_m A_m), j_e(\text{sym}Q_e A_e), Q_m n_m, Q_e n_e) \end{pmatrix}$$

D'où la reformulation du problème (P<sub>2</sub>) :

2] 2<sup>ième</sup> reformulation du problème

(P<sub>3</sub>): Pour  $\bar{I}_0 = (A_{m0}, A_{e0}, n_{m0}, n_{e0})$  donnée dans  $\mathcal{L}_0$ , voisine de  $(\bar{0}, \bar{0})$  et  $\bar{I} = (A_m, A_e, n_m, n_e)$  voisine de  $\bar{I}_0$ , trouver  $(Q_m, Q_e) \in SO(3) \times O(3)$  tel que :

$$\begin{pmatrix} j_m(\text{skew}Q_m A_m) - F_m(j_m(\text{sym}Q_m A_m), j_e(\text{sym}Q_e A_e), Q_m n_m, Q_e n_e) \\ j_e(\text{skew}Q_e A_e) - F_e(j_m(\text{sym}Q_m A_m), j_e(\text{sym}Q_e A_e), Q_m n_m, Q_e n_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

La charge  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  sera caractérisée par un couple de paramètres réels  $(\lambda_m, \lambda_e)$  voisin du couple  $(0,0)$  qui permettra de distinguer la taille ainsi que l'orientation de chacune des charges  $\bar{I}_m$  et  $\bar{I}_e$ .

On remplacera alors :

l'équation  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  par  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e), (\lambda_m, \lambda_e)$  voisin de  $(0,0)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Comme  $F(\bar{0}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$  et  $F'(\bar{0}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$  on a, pour  $(\lambda_m, \lambda_e)$  voisin du couple  $(0,0)$

$$F(\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e) = \frac{1}{2} [\lambda_m^2 D_{mmm}^2 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_m) + 2\lambda_m \lambda_e D_{mme}^2 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_e) + \lambda_e^2 D_{mee}^2 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_e, \bar{I}_e)]$$

$$+ \frac{1}{6} [\lambda_m^3 D_{mmm}^3 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_m, \bar{I}_m) + 3\lambda_m^2 \lambda_e D_{mme}^3 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_m, \bar{I}_e) + 3\lambda_m \lambda_e^2 D_{mee}^3 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_e, \bar{I}_e)$$

$$+ \lambda_e^3 D_{eee}^3 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_e, \bar{I}_e, \bar{I}_e)] + O(\lambda_m^i \lambda_e^j) \text{ avec } i+j=4$$

Or  $F_m = p_m \circ F$  et  $F_e = p_e \circ F$ , donc

$$F_m(\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e) = \frac{1}{2} [\lambda_m^2 p_m \circ D_{mmm}^2 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_m) + 2\lambda_m \lambda_e p_m \circ D_{mme}^2 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_e)]$$

$$+ \frac{1}{6} [\lambda_m^3 p_m \circ D_{mmm}^3 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_m, \bar{I}_m) + 3\lambda_m^2 \lambda_e p_m \circ D_{mme}^3 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_m, \bar{I}_e)$$

$$+ 3\lambda_m \lambda_e^2 p_m \circ D_{mee}^3 F(\bar{0}, \bar{0})(\bar{I}_m, \bar{I}_e, \bar{I}_e)] + O(\lambda_m^i \lambda_e^j) \text{ avec } i+j=4 \text{ et } i \geq 1.$$

D'où  $F_m$  peut s'écrire  $F_m(\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e) = \lambda_m \bar{F}_m(\lambda_m, \lambda_e, \bar{I}_m, \bar{I}_e)$  où  $\bar{F}_m$  est une application

$$\text{vérifiant } \begin{cases} \bar{F}_m(0,0, \bar{I}_m, \bar{I}_e) = \bar{0} \\ D_m \bar{F}_m(0,0, \bar{I}_m, \bar{I}_e) = 0 \\ D_e \bar{F}_m(0,0, \bar{I}_m, \bar{I}_e) = 0 \end{cases}$$

On peut faire de même pour  $F_e$  et mettre ainsi une application  $\bar{F}_e$  en évidence possédant le même type de propriétés:

$$\text{Puisque } \text{skew}(Q_m k_m(\lambda_m \bar{I}_m)) = \lambda_m \text{skew}(Q_m A_m),$$

$$\text{et } \text{skew}(Q_e k_e(\lambda_e \bar{I}_e)) = \lambda_e \text{skew}(Q_e A_e),$$

les équations de  $(P_3)$  s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \lambda_m \left[ j_m(\text{skew} Q_m A_m) - \bar{F}_m(\lambda_m, \lambda_e, j_m(\text{sym} Q_m A_m), j_e(\text{sym} Q_e A_e), Q_m n_m, Q_e n_e) \right] \\ \lambda_e \left[ j_e(\text{skew} Q_e A_e) - \bar{F}_e(\lambda_m, \lambda_e, j_m(\text{sym} Q_m A_m), j_e(\text{sym} Q_e A_e), Q_m n_m, Q_e n_e) \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \begin{pmatrix} \lambda_m H_m(\lambda_m, \lambda_e, A_m, A_e, n_m, n_e, Q_m, Q_e) \\ \lambda_e H_e(\lambda_m, \lambda_e, A_m, A_e, n_m, n_e, Q_m, Q_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \text{ où}$$

$H_m$  et  $H_e$  sont deux applications définies par ces relations.

Ce qui mène à la formulation définitive suivante :

3] 3<sup>eme</sup> reformulation du problème

(P<sub>4</sub>) Pour  $\bar{I}_o = (A_{m_o}, A_{e_o}, n_{m_o}, n_{e_o})$  donnée dans  $\mathcal{L}_o$  voisine de  $(\vec{0}, \vec{0})$ ,  $\bar{I} = (A_m, A_e, n_m, n_e)$  voisine de  $\bar{I}_o$ , trouver  $(Q_m, Q_e) \in SO(3) \times O(3)$  tel que :

$$\begin{pmatrix} H_m(\lambda_m, \lambda_e, A_m, A_e, n_m, n_e, Q_m, Q_e) \\ H_e(\lambda_m, \lambda_e, A_m, A_e, n_m, n_e, Q_m, Q_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Cette dernière formulation, mettant en évidence les équations de bifurcation, sera la base de l'étude des solutions de l'équation  $\Phi(\phi, \bar{I}) = (\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e)$ .

III / ETUDE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE TRACTION EN  
ELECTRO-ELASTICITE NON LINEAIRE

Après l'extension de l'un des théorème fondamentaux de Stopelli [1958] <sup>(1)</sup> qui démontre qu'il existe une solution et une seule au voisinage de  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  pour  $(\lambda_m, \lambda_e)$  proche de  $(0,0)$  si la charge  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  n'a pas de couple d'axes d'équilibre, on montrera que ceci n'est plus vrai au voisinage des solutions triviales  $(QI_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  avec  $Q \in SO(3)$ , le nombre des solutions et leur stabilité dépendant du type de  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$ .

1-Etude des solutions de  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{l}_m, \lambda_e \bar{l}_e)$  au voisinage des solutions triviales  $(QI_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  avec  $Q \in SO(3)$ , lorsque  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  est de type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$ .

1] Solutions de  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{l}_m, \lambda_e \bar{l}_e)$  voisines de  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$ , pour  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  sans couple d'axes d'équilibre

Théorème (4.49): Soit  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e) \in \mathcal{L}_0$ , sans couple d'axes d'équilibre. Pour  $(\lambda_m, \lambda_e)$  suffisamment proche de  $(0,0)$ , il existe un unique couple  $(\bar{\phi}, \bar{\Pi})$  de  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}^{\mathcal{P}}$  et un unique  $Q$  dans un voisinage de l'identité dans  $SO(3)$  tels que le couple  $(\phi, \bar{\Pi}) = (Q^{-1}\bar{\phi}, Q^{-1}\bar{\Pi})$  soit solution du problème de traction  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{l}_m, \lambda_e \bar{l}_e)$ .

Démonstration:  $\bar{l} = (\bar{l}_m, \bar{l}_e)$  étant fixé,  $A_m, n_m, A_e, n_e$  sont fixés.

Soit  $H$  l'application définie par  $H : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 \times SO(3) \times O(3) & \rightarrow & \text{skew} \oplus \text{skew} \\ (\lambda_m, \lambda_e, Q_m, Q_e) & \rightarrow & H(\lambda_m, \lambda_e, Q_m, Q_e) \end{matrix}$

où

$$H(\lambda_m, \lambda_e, Q_m, Q_e) = \begin{pmatrix} \text{skew}(Q_m A_m) - \bar{F}_m(\lambda_m, \lambda_e, \text{sym}(Q_m A_m), Q_m n_m, \text{sym}(Q_e A_e), Q_e n_e) \\ \text{skew}(Q_e A_e) - \bar{F}_e(\lambda_m, \lambda_e, \text{sym}(Q_m A_m), Q_m n_m, \text{sym}(Q_e A_e), Q_e n_e) \end{pmatrix}$$

Le but est de déterminer,  $\bar{l}$  étant fixé, le (ou les) couple(s)  $(Q_m, Q_e) \in SO(3) \times O(3)$  tel(s) que  $(Q_m(\lambda_m \bar{l}_m), Q_e(\lambda_e \bar{l}_e)) \in \mathcal{N}$ , soit  $H(\lambda_m, \lambda_e, Q_m, Q_e) = (0,0)$ .

On utilise le théorème des fonctions implicites.

Puisque on cherche à déterminer des déformations  $\phi$  proches de  $I_\Omega$ , on verra qu'il est nécessaire de chercher  $Q_m$  voisin de  $I$  dans  $SO(3)$ . Par contre aucune condition de cet ordre n'est fixée sur le vecteur  $\bar{\Pi}$ , donc par conséquent sur  $Q_e$  de  $O(3)$ . Toutefois, pour utiliser la propriété d'équivariance <sup>(4.42)</sup> de l'application  $\Phi$  concernant le couple  $(Q_m(\lambda_m \bar{l}_m), Q_e(\lambda_e \bar{l}_e)) \in \mathcal{N}$ , il est nécessaire que  $Q_m = Q_e \in SO(3)$ .

La différentielle de  $H$  en  $(0,0,1,Q)$ , où  $Q$  est quelconque dans  $O(3)$ , est définie par :

$$T_1SO(3) \times T_QO(3) \rightarrow \text{skew} \oplus \text{skew}$$

$$DH(0,0,1,Q) : (W_m, QW_e) \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_m A_m - (W_m A_m)^T \\ QW_e A_e - (QW_e A_e)^T \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_m A_m + A_m W_m \\ QW_e A_e + A_e W_e Q^T \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si l'on note } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^T \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que  $DH(0,0,1,Q) = \text{Ad}(B) \circ DH(0,0,1,1)$ ,

où l'application  $\text{Ad}(B)$  est définie sur  $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$  par  $\text{Ad}(B) : M \mapsto B M B^{-1}$ .

$\text{Ad}(B)$  est un isomorphisme de  $\text{skew} \oplus \text{skew}$  sur  $\text{skew} \oplus \text{skew}$ .

Puisque  $\bar{1} = (\bar{1}_m, \bar{1}_e)$  n'a pas de couple d'axes d'équilibre, d'après la proposition (3.32) du

chapitre 3,  $DH(0,0,1,1)$  est un isomorphisme de  $T_1SO(3) \times T_1O(3)$  sur  $\text{skew} \oplus \text{skew}$ , d'où

$DH(0,0,1,Q)$  est un isomorphisme de  $T_1SO(3) \times T_QO(3)$  sur  $\text{skew} \oplus \text{skew}$ .

Il existe alors un voisinage  $U_m \times U_e$  de  $(0,0)$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,

il existe une unique application  $Q_m$  définie par :

$$Q_m : \begin{matrix} U_m \times U_e \rightarrow SO(3) \\ (\lambda_m, \lambda_e) \rightarrow Q_m(\lambda_m, \lambda_e) \end{matrix}, \text{ de classe } C^1 \text{ avec } Q_m(0,0) = 1,$$

il existe une unique application  $Q_e$  définie par :

$$Q_e : \begin{matrix} U_m \times U_e \times O(3) \rightarrow O(3) \\ (\lambda_m, \lambda_e, Q) \rightarrow Q_e(\lambda_m, \lambda_e, Q) \end{matrix}, \text{ de classe } C^1 \text{ avec } Q_e(0,0,Q) = Q$$

$$\text{tels que } H(\lambda_m, \lambda_e, Q_m(\lambda_m, \lambda_e), Q_e(\lambda_m, \lambda_e, Q)) = 0.$$

On cherche maintenant  $Q$  tel que  $Q_e(\lambda_m, \lambda_e, Q) = Q_m(\lambda_m, \lambda_e)$ .

L'application  $Q_e$ , qui est de classe  $C^1$  sur  $U_m \times U_e \times O(3)$ , vérifie  $D_Q Q_e(0,0,Q) = 1$  qui est un isomorphisme de  $T_QO(3)$  sur  $T_QO(3)$ . Donc d'après le théorème des fonctions

implicites, il existe un voisinage  $U'_m \times U'_e$  de  $(0,0)$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,

il existe une unique application  $Q$  définie par :

$$Q : \begin{matrix} U'_m \times U'_e \rightarrow O(3) \\ (\lambda_m, \lambda_e) \rightarrow Q(\lambda_m, \lambda_e) \end{matrix}, \text{ de classe } C^1 \text{ avec } Q(0,0) = Q$$

$$\text{tels que } Q_e(\lambda_m, \lambda_e, Q(\lambda_m, \lambda_e)) = Q_m(\lambda_m, \lambda_e).$$

$$\text{On a alors } H(\lambda_m, \lambda_e, Q_m(\lambda_m, \lambda_e), Q_m(\lambda_m, \lambda_e)) = 0,$$

$$\text{soit } (Q_m(\lambda_m, \lambda_e)(\lambda_m \bar{1}_m), Q_m(\lambda_m, \lambda_e)(\lambda_e \bar{1}_e)) \in \mathcal{N}.$$

A cet unique couple de  $\mathcal{N}$  associé à la charge  $\bar{1} = (\bar{1}_m, \bar{1}_e)$ , grâce à la proposition (4.47)

on associe un unique couple  $(\bar{\Phi}_{\lambda_m, \lambda_e}, \bar{\Pi}_{\lambda_m, \lambda_e})$  voisin de  $(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  dans  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{E}$  tel que

$(Q_m^T(\lambda_m, \lambda_e) \bar{\Phi}_{\lambda_m, \lambda_e}, Q_m^T(\lambda_m, \lambda_e) \bar{\Pi}_{\lambda_m, \lambda_e})$  soit la solution (unique) des équations

d'équilibre (E).

En effet,

$$\begin{aligned} \Phi(Q_m^T(\lambda_m, \lambda_e)\bar{\phi}_{\lambda_m, \lambda_e}, Q_m^T(\lambda_m, \lambda_e)\bar{\Pi}_{\lambda_m, \lambda_e}) \\ = Q_m^T(\lambda_m, \lambda_e)(Q_m(\lambda_m, \lambda_e)(\lambda_m \bar{I}_m), Q_m(\lambda_m, \lambda_e)(\lambda_e \bar{I}_e)) \\ = (\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e), \end{aligned}$$

et  $Q_m^T(\lambda_m, \lambda_e)\bar{\phi}_{\lambda_m, \lambda_e}$  est voisin de  $QI_\Omega$  puisque  $\bar{\phi}_{\lambda_m, \lambda_e}$  appartient à  $\mathcal{E}_{\text{sym}}$  donc voisin de  $I_\Omega$  et  $Q_m(\lambda_m, \lambda_e)$  est aussi voisin de 1.

2] Solutions de  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e)$  voisines des solutions triviales  $(QI_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  avec  $Q \in \text{SO}(3)$  pour  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  de type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$

D'après l'unicité de la solution  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e)$  voisine de  $(I_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  pour  $(\lambda_m, \lambda_e)$  proche de  $(0,0)$  et  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  sans couple d'axes d'équilibre, on cherche maintenant à déterminer le nombre de solutions voisines des solutions triviales  $(QI_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  avec  $Q \in \text{SO}(3)$ .

Comme l'ont montré D.R.J. CHILLINGWORTH, J.E. MARSDEN et Y.H. WAN dans les deux articles intitulés "Symmetry and Bifurcation in Three-Dimensional Elasticity Part I. and Part II."<sup>(1)</sup>, la réponse dépend du type de la charge  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$ . Dans ce travail, on ne traite que les cas les moins compliqués que sont ceux des charges de type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$  ( $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e) \in \mathcal{L}_0$  et  $\bar{I}$  est sans couple d'axes d'équilibre).

**Théorème** (4.50): Soit  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e) \in \mathcal{L}_0$ , de type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$ . Pour  $(\lambda_m, \lambda_e)$  suffisamment proche de  $(0,0)$ , dans un voisinage d'un couple de solutions triviales  $(QI_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  avec  $Q \in \text{SO}(3)$ , l'équation  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e)$  admet soit...

-1<sup>er</sup> cas : 1 unique couple solution lorsqu'aucun vecteur propre de  $k_m(\bar{I}_m)$  n'est vecteur propre de  $k_e(\bar{I}_e)$ .

-2<sup>ème</sup> cas : 2 couples solution exactement lorsqu'il existe un unique vecteur qui soit vecteur propre simultanément de  $k_m(\bar{I}_m)$  et  $k_e(\bar{I}_e)$ .

-3<sup>ème</sup> cas : 4 couples solution exactement lorsque les vecteurs propres de  $k_m(\bar{I}_m)$  sont aussi vecteurs propres de  $k_e(\bar{I}_e)$ .

**Remarque** : comme il sera possible de le voir à travers la démonstration, il n'y a pas d'intermédiaire entre le 2<sup>ème</sup> cas et le 3<sup>ème</sup> cas.

**Démonstration** : Soit  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  un couple de charges de  $\mathcal{L}_0$  de type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$ . Le couple  $(\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e)$  est du même type. D'après les propositions (3.43) et (3.47) du chapitre 3,  $(\Theta_{\lambda_m \bar{I}_m} \times \Theta_{\lambda_e \bar{I}_e}) \cap \mathcal{L}_0$  est formée de 32 couples de charges du même type que le couple initial  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$ , soit  $(Q_{mi}(\lambda_m \bar{I}_m), Q_{ej}(\lambda_e \bar{I}_e))$  avec  $i \in \{1,2,3,4\}$  et  $j \in \{1,2,\dots,8\}$ .

En remarquant que les transformations orthogonales  $\{Q_{ej}\}_{j \in \{1,2,\dots,8\}}$  sont du type  $\{\pm Q_{ej}\}_{j \in \{1,2,3,4\}}$  avec  $Q_{ej} \in SO(3)$ ,  $(\Theta_{\lambda_m \bar{I}_m} \times \Theta_{\lambda_e \bar{I}_e}) \cap ((\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0)$  consiste en 16 couples de charges qui sont sans couples d'axes d'équilibre.

D'après le théorème généralisé de Stopelli appliqué à  $(Q_{mi}(\lambda_m \bar{I}_m), Q_{ej}(\lambda_e \bar{I}_e))$ , pour  $(\lambda_m, \lambda_e)$  voisin de  $(0,0)$ , il existe un unique couple  $(\bar{\Phi}_{ij}, \bar{\Pi}_{ij})$  voisin de  $(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)$  dans  $\mathcal{E}_{\text{sym}} \times \mathcal{A}^{\mathcal{P}}$  et un unique  $R_{ij}$  voisin de 1 dans  $SO(3)$  tels que le couple  $(\phi_{ij}, \bar{\Pi}_{ij}) = (R_{ij}^{-1} \bar{\Phi}_{ij}, R_{ij}^{-1} \bar{\Pi}_{ij})$  soit solution du problème  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (Q_{mi}(\lambda_m \bar{I}_m), Q_{ej}(\lambda_e \bar{I}_e))$  avec  $(\phi, \bar{\Pi})$  voisin de  $(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)$ .

On utilise maintenant la propriété d'équivariance de  $\Phi$  qui nécessite l'égalité  $Q_{mi} = Q_{ej}$ .

Trois cas se présentent alors :

-1<sup>er</sup> cas : si aucun vecteur propre de  $k_m(\bar{I}_m) = A_m$  n'est vecteur propre de  $k_e(\bar{I}_e) = A_e$ , seule 1 vérifie la condition  $Q_{mi} = Q_{ej}$ .

-2<sup>ème</sup> cas : s'il existe un unique vecteur  $\bar{u}$  qui soit vecteur propre simultanément de  $A_m$  et  $A_e$ , alors 1 et  $Q(\bar{u}, \bar{\Pi})$  sont les deux uniques rotations communes.

-3<sup>ème</sup> cas : s'il existe plus d'un vecteur qui soit vecteur propre simultanément de  $A_m$  et  $A_e$ , alors nécessairement  $A_m$  et  $A_e$  sont diagonalisables dans la même base et quatre rotations sont communes.

Par conséquent, parmi les seize couples de charges de type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$ , on en retient respectivement que 1, 2 ou 4 qui sont alors de la forme  $(Q_i(\lambda_m \bar{I}_m), Q_i(\lambda_e \bar{I}_e))$ .

Puisqu'alors

$\Phi(R_i^{-1} \bar{\Phi}_i, R_i^{-1} \bar{\Pi}_i) = (Q_i(\lambda_m \bar{I}_m), Q_i(\lambda_e \bar{I}_e))$ ,  $\Phi(Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Phi}_i, Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Pi}_i) = (\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e)$ . Donc les couples  $(Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Phi}_i, Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Pi}_i)$  sont solution de l'équation  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e)$  et sont de plus voisins des solutions triviales du type  $(Q1_\Omega, Q\bar{\Pi}_0)$  avec  $Q \in SO(3)$  puisque les couples  $(R_i^{-1} \bar{\Phi}_i, R_i^{-1} \bar{\Pi}_i)$  sont voisins de  $(1_\Omega, \bar{\Pi}_0)$ .

Dans les cas où ils sont au nombre de 2 ou 4, les couples  $(Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Phi}_i, Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Pi}_i)$  sont a priori deux à deux distincts. Pour le vérifier, il suffit de montrer qu'à deux couples de

charges distincts de  $\left(\Theta_{\lambda_m \bar{I}_m} \times \Theta_{\lambda_e \bar{I}_e}\right) \cap \left(\left(\mathcal{L}_m\right)_0 \oplus \left(\mathcal{L}_e\right)_0\right)$  correspond deux couples distincts de  $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ .

Si on considère les deux couples de charges distincts  $\left(Q_i(\lambda_m \bar{I}_m), Q_i(\lambda_e \bar{I}_e)\right)$  et  $\left(Q_j(\lambda_m \bar{I}_m), Q_j(\lambda_e \bar{I}_e)\right)$ , alors on a  $Q_i \neq Q_j$ . Si les deux couples  $\left(Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Phi}_i, Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Pi}_i\right)$  et  $\left(Q_j^{-1} R_j^{-1} \bar{\Phi}_j, Q_j^{-1} R_j^{-1} \bar{\Pi}_j\right)$  étaient identiques, on aurait  $Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Phi}_i = Q_j^{-1} R_j^{-1} \bar{\Phi}_j$  avec

$$\begin{cases} Q_i, Q_j \in \text{SO}(3) \\ R_i, R_j \text{ voisins de } 1 \text{ dans } \text{SO}(3), \text{ soit } \bar{\Phi}_i = R_i Q_i Q_j^{-1} R_j^{-1} \bar{\Phi}_j. \\ \bar{\Phi}_i, \bar{\Phi}_j \text{ voisins de } 1_\Omega \text{ dans } \mathcal{E}_{\text{sym}} \end{cases}$$

$\bar{\Phi}_i$  étant voisin de  $1_\Omega$  dans  $\mathcal{E}_{\text{sym}}$ ,  $R_i Q_i Q_j^{-1} R_j^{-1} \bar{\Phi}_j$  et  $\bar{\Phi}_j$  sont voisins de  $1_\Omega$  dans  $\mathcal{E}_{\text{sym}}$  avec  $R_i Q_i Q_j^{-1} R_j^{-1} \in \text{SO}(3)$ . D'après le lemme (4.48), on a alors  $R_i Q_i Q_j^{-1} R_j^{-1} = 1$  soit  $Q_i = R_i^{-1} R_j Q_j$ , et donc  $Q_i A_m = R_i^{-1} R_j Q_j A_m$  où  $A_m = k_m(\mathbf{1}_m) \in \text{sym}$ .

On pose  $Q_i A_m = \tilde{B}$ ,  $Q_j A_m = B$  et  $R_i^{-1} R_j = Q$ .

Puisque  $Q_i \bar{I}_m$  et  $Q_j \bar{I}_m$  appartient à  $(\mathcal{L}_m)_0$ ,  $Q_i A_m$  et  $Q_j A_m$  sont symétriques et  $Q$  est voisin de 1 dans  $\text{SO}(3)$ .

On est ramené à un résultat déjà utilisé dans la proposition (3.43) du chapitre 3 :

Puisque  $\tilde{B} = QB$  avec  $\tilde{B} \in \text{sym}$ ,  $B \in \text{sym}$  et  $Q \in \text{SO}(3)$ ,  $\tilde{B}^2 = \tilde{B}^T \tilde{B} = A_m^2 = B^2$ . Les deux matrices  $\tilde{B}$  et  $B$ , qui sont diagonalisables, le sont nécessairement dans la même base de vecteurs propres et les valeurs propres associées sont soit identiques, soit opposées. Puisque de plus  $Q \in \text{SO}(3)$ , on se ramène à quatre cas :

$Q = 1$ ,  $Q = \text{diag}(-1, -1, 1)$ ,  $Q = \text{diag}(-1, 1, -1)$ ,  $Q = \text{diag}(1, -1, -1)$ .

Puisque de plus  $Q$  est proche de 1, l'unique cas possible est 1. Donc  $R_i = R_j$  et  $Q_i = Q_j$ .

L'égalité  $Q_i = Q_j$  est contradictoire avec l'hypothèse, d'où les deux couples  $\left(Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Phi}_i, Q_i^{-1} R_i^{-1} \bar{\Pi}_i\right)$  et  $\left(Q_j^{-1} R_j^{-1} \bar{\Phi}_j, Q_j^{-1} R_j^{-1} \bar{\Pi}_j\right)$  sont nécessairement distincts.

Remarque : D'après les deux dernières démonstrations, entre autre par le fait que les applications  $(\lambda_m, \lambda_e) \mapsto Q_m(\lambda_m, \lambda_e)$  et  $(\lambda_m, \lambda_e) \mapsto Q_e(\lambda_m, \lambda_e)$  soient de classe  $C^1$  sur un voisinage  $U_m \times U_e$  de  $(0,0)$ , il est clair que les couples solution dépendent continûment de  $(\lambda_m, \lambda_e)$  qui caractérise la taille ainsi que l'orientation des charges.

De façon plus précise, on démontre que si  $\bar{I}$  est un couple de charges voisin de  $\bar{I}_0$  dans  $\mathcal{L}_0$ , tous deux de type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$ , alors les couples solution relatifs au couple  $\bar{I}$  sont proches des couples solution relatifs à  $\bar{I}_0$ . Pour cela, il suffit de démontrer que les rotations  $Q_i$  telles que les couples  $\left(Q_i(\lambda_m \bar{I}_m), Q_i(\lambda_e \bar{I}_e)\right)$  appartiennent à l'espace  $\mathcal{L}_0$  sont proches des rotations  $Q_{0i}$  telles que les couples  $\left(Q_{0i}(\lambda_m \bar{I}_{m0}), Q_{0i}(\lambda_e \bar{I}_{e0})\right)$  appartiennent à  $\mathcal{L}_0$ .

Si  $\bar{I}$  est voisin de  $\bar{I}_0$ , avec  $\bar{I} = \{(\bar{F}_m, \bar{F}_e), (\bar{\tau}_m, \bar{\tau}_e)\}$  et  $\bar{I}_0 = \{(\bar{F}_{m0}, \bar{F}_{e0}), (\bar{\tau}_{m0}, \bar{\tau}_{e0})\}$ , on a :

$$\int_{\Omega} \|\bar{F}_m - \bar{F}_{m0}\|^2 dV + \int_{\Omega} \|\bar{F}_e - \bar{F}_{e0}\|^2 dV + \int_{\partial\Omega} \|\bar{\tau}_m - \bar{\tau}_{m0}\|^2 dA + \int_{\partial\Omega} \|\bar{\tau}_e - \bar{\tau}_{e0}\|^2 dA \langle \varepsilon^2$$

où  $\varepsilon$  est un réel strictement positif suffisamment petit .

Puisque  $\Omega$  est borné, on a alors  $\|\bar{F}_m - \bar{F}_{m0}\| \langle k\varepsilon$ ,  $\|\bar{F}_e - \bar{F}_{e0}\| \langle k\varepsilon$ ,  $\|\bar{\tau}_m - \bar{\tau}_{m0}\| \langle k\varepsilon$  et  $\|\bar{\tau}_e - \bar{\tau}_{e0}\| \langle k\varepsilon$  pour presque tout  $X$  de  $\bar{\Omega}$ ,  $k$  étant une constante positive.

On peut donc écrire que :

$\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{O}(\varepsilon)$  et  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 + \bar{O}'(\varepsilon)$  où  $\bar{F}, \bar{F}_0, \bar{\tau}, \bar{\tau}_0$  désignent les charges d'origine mécanique, respectivement d'origine électrique.

D'où

$$A = k(\bar{I}) = k(\bar{I}_0) + O(\varepsilon) = A_0 + O(\varepsilon).$$

Si  $(Q_0 \bar{I}_{m0}, Q_0 \bar{I}_{e0}) \in (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$ , d'après la bijection de  $k_m$  et  $k_e$  (respectivement  $k_e$ ) dans le cas des couples de charges de type  $(0,0)$  (respectivement  $(0,0')$ ), on a  $(Q_0 A_{m0}, Q_0 A_{e0}) \in (\Theta_{A_{m0}} \times \Theta_{A_{e0}}) \cap \text{Sym}$ .

Puisque  $Q_0 A_{m0} \in \text{Sym}$ ,  $(Q_0 A_{m0})^T = Q_0 A_{m0}$ , soit  $A_{m0} = Q_0 A_{m0} Q_0$ . Or d'après les expressions des rotations  $Q_i$ , on peut affirmer que  $Q_i = Q_i^{-1}$ , donc  $A_{m0} = Q_0 A_{m0} Q_0^{-1}$ . De même  $A_{e0} = Q_0 A_{e0} Q_0^{-1}$ .

Puisque  $(Q(\varepsilon) \bar{I}_m(\varepsilon), Q(\varepsilon) \bar{I}_e(\varepsilon)) \in (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$ , on a aussi

$$A_m(\varepsilon) = Q(\varepsilon) A_m(\varepsilon) Q^{-1}(\varepsilon) \text{ et } A_e(\varepsilon) = Q(\varepsilon) A_e(\varepsilon) Q^{-1}(\varepsilon).$$

Donc pour les couples de charges d'origine mécanique, respectivement électrique, on a

$$Q(\varepsilon) A(\varepsilon) Q^{-1}(\varepsilon) = A(\varepsilon), \text{ soit } Q(\varepsilon) [A_0 + O(\varepsilon)] Q^{-1}(\varepsilon) = A_0 + O(\varepsilon).$$

Or  $A_0 = Q_0 A_0 Q_0^{-1}$  ou  $A_0 = Q_0^{-1} A_0 Q_0$ , donc

$$Q(\varepsilon) Q_0^{-1} A_0 Q_0 Q^{-1}(\varepsilon) + Q(\varepsilon) O(\varepsilon) Q^{-1}(\varepsilon) = A_0 + O(\varepsilon), \text{ soit}$$

$$Q(\varepsilon) Q_0^{-1} A_0 (Q(\varepsilon) Q_0^{-1})^{-1} - A_0 = \tilde{O}(\varepsilon) \text{ où } \tilde{O}(\varepsilon) = O(\varepsilon) - Q(\varepsilon) O(\varepsilon) Q^{-1}(\varepsilon).$$

$A_0$  étant fixée, on introduit l'application  $\varphi_{A_0} : \begin{array}{l} \text{SO}(3) \rightarrow \mathcal{N}_3(\mathbb{R}) \\ Q \rightarrow QA_0Q^{-1} - A_0 \end{array}$ .

Cette application vérifie  $\varphi_{A_0}(I) = 0$ .

Pour déterminer la différentielle de  $\varphi_{A_0}$  en  $I$ , on considère un intervalle  $I$  centré sur  $0$  et

la famille des rotations  $(Q_t)_{t \in I}$  définie par :

$$Q : \begin{array}{l} I \rightarrow \text{SO}(3) \\ t \rightarrow \exp(tM) \end{array} \text{ où } M \in \text{so}(3), \text{ avec } Q(0) = I \text{ et } \left. \frac{dQ(t)}{dt} \right|_{t=0} = M \in \text{so}(3).$$

$$\left. \frac{d\varphi_{A_0}(Q(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dQ(t)}{dt} \right|_{t=0} A_0 + A_0 \left. \frac{dQ^{-1}(t)}{dt} \right|_{t=0} = MA_0 + A_0(-M) = MA_0 - A_0M$$

$$\text{donc } D\varphi_{A_0}(I) : \begin{array}{l} \text{so}(3) \rightarrow \mathcal{N}_3(\mathbb{R}) \\ M \rightarrow MA_0 - A_0M \end{array}$$

Dans la base des vecteurs propres de  $A_0$ , de valeurs propres associées  $a, b$  et  $c$ ,

$$A = \text{diag}(a, b, c), \quad M = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et}$$

$$D\varphi_{A_0}(l)(M) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(a-b) & \omega_2(a-c) \\ -\omega_3(a-b) & 0 & \omega_1(c-b) \\ \omega_2(a-c) & \omega_1(c-b) & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque  $A_0$  est de type 0 (ou  $0'$ ), les valeurs propres  $a, b, c$  sont deux à deux distinctes, donc  $D\varphi_{A_0}(l)$  est un isomorphisme. D'où d'après le théorème des fonctions inverses, il existe un voisinage  $U$  de  $l$  dans  $SO(3)$  et un voisinage  $V$  de  $0$  dans  $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$  tels que  $\varphi_A$  soit un difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ . Par conséquent, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $Q(\varepsilon)Q_0^{-1} \rightarrow I$ , soit  $Q(\varepsilon) \rightarrow Q_0$ . D'où le résultat.

On vient en fait de montrer que, pour  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e)$  suffisamment voisin de  $\bar{I}_0 = (\bar{I}_{m0}, \bar{I}_{e0})$ , le problème  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = (\lambda_m \bar{I}_m, \lambda_e \bar{I}_e)$  admet respectivement 1, 2 ou 4 couples solution, et que la configuration des charges de types  $(0,0)$  ou  $(0,0')$  est stable pour de petites perturbations du couple de charges  $\bar{I}_0$ .

## 2-Etude de la stabilité

On étudie maintenant la stabilité des solutions trouvées, qui se définit ainsi :

**Définition** (4.51) : Soit  $\bar{I}_0 = (\bar{I}_{m0}, \bar{I}_{e0})$  un couple de charges fixé.

La déformation  $\phi$ , telle que le couple  $(\phi, \bar{\Pi})$  soit solution de  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = \bar{I}_0$ , est dite stable si elle réalise un minimum local de l'énergie potentielle

$$V_{\bar{I}_0}(\phi) = \int_{\Omega} W(X, F, \bar{\Pi}) dX - \langle \bar{I}_0, \phi \rangle, \text{ où}$$

$$\langle \bar{I}, \phi \rangle = \int_{\Omega} (\bar{F}_m + \bar{F}_e) \cdot \phi(X) dX + \int_{\partial\Omega} (\bar{\tau}_m + \bar{\tau}_e) \cdot \phi(X) dA = \text{Tr}[k(\bar{I}, \phi)].$$

Si  $\phi$  n'est pas stable, l'indice de  $\phi$  est défini comme la dimension du plus grand sous-espace vectoriel des  $\bar{u} \in T_{\phi} \mathcal{E}$ , tels que  $V_{\bar{I}_0}(\phi)$  décroisse le long d'une courbe tangente à  $\bar{u}$  en  $\phi$  (l'indice 0 correspond donc à la stabilité).

On montre dans un premier temps que les déformations  $\phi_0$  telles que  $(\phi_0, \bar{\Pi}_0)$  soient solutions de  $\Phi(\phi, \bar{\Pi}) = \bar{I}_0$  sont les points critiques de  $V_{\lambda \bar{I}_0}$ .

On cherche alors à déterminer la différentielle  $D_{\phi_0} V_{\lambda \bar{I}_0} : \begin{matrix} T_{\phi_0} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \bar{u} & \rightarrow & D_{\phi_0} V_{\lambda \bar{I}_0}(\bar{u}) \end{matrix}$ .

Soit  $\alpha : \begin{matrix} I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ h & \rightarrow & \alpha_h \end{matrix}$  où  $\left. \frac{d\alpha_h}{dh} \right|_{h=0} = \bar{u}$  et  $\alpha_h|_{h=0} = \phi_0$ .

$$D_{\phi_0} V_{\lambda \bar{l}_0}(\bar{u}) = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=0} \int_{\Omega} W(X, F, \bar{\Pi}) dX - \langle \lambda \bar{l}_0, \bar{u} \rangle = \int_{\Omega} \left. \frac{dW}{dh} \right|_{h=0} (X, F, \bar{\Pi}) dX - \langle \lambda \bar{l}_0, \bar{u} \rangle,$$

$$D_{\phi_0} V_{\lambda \bar{l}_0}(\bar{u}) = \int_{\Omega} \left. \frac{\partial W}{\partial F} \right|_{h=0} : \nabla \bar{u} dX - \langle \lambda \bar{l}_0, \bar{u} \rangle = \int_{\Omega} {}_E P_0 : \nabla \bar{u} dX - \langle \lambda \bar{l}_0, \bar{u} \rangle.$$

Or on a la relation  ${}_E P_0 : \nabla \bar{u} = \text{DIV}_X ({}_E P_0 \bar{u}) - (\text{DIV}_X {}_E P_0) \bar{u}$ .

$$\text{Donc } D_{\phi_0} V_{\lambda \bar{l}_0}(\bar{u}) = \int_{\Omega} ({}_E P_0 \bar{u}) \cdot \bar{N} dA - \int_{\Omega} (\text{DIV}_X {}_E P_0) \cdot \bar{u} dX - \langle \lambda \bar{l}_0, \bar{u} \rangle,$$

soit  $D_{\phi_0} V_{\lambda \bar{l}_0}(\bar{u}) = \langle \Phi(\phi_0, \bar{\Pi}_0), \bar{u} \rangle - \langle \lambda \bar{l}_0, \bar{u} \rangle$  car  $({}_E P_0 \bar{u}) \cdot \bar{N} = ({}_E P_0 \bar{N}) \cdot \bar{u}$ ,

soit encore  $D_{\phi_0} V_{\lambda \bar{l}_0}(\bar{u}) = \langle \Phi(\phi_0, \bar{\Pi}_0) - \lambda \bar{l}_0, \bar{u} \rangle$ .

D'où  $\phi_0$  est un point critique de  $V_{\lambda \bar{l}_0}$  équivaut à  $\langle \Phi(\phi_0, \bar{\Pi}_0) - \lambda \bar{l}_0, \bar{u} \rangle = 0 \quad \forall \bar{u} \in T_{\phi_0} \mathcal{E}$   
équivaut à  $\Phi(\phi_0, \bar{\Pi}_0) = \lambda \bar{l}_0$ .

L'étude de la stabilité se fait à l'aide de la différentielle seconde de  $V_{\lambda \bar{l}_0}$  en  $\phi_0$  :

$$D_{\phi_0}^2 V_{\lambda \bar{l}_0} : \begin{matrix} (T_{\phi_0} \mathcal{E})^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\bar{u}, \bar{v}) & \rightarrow & D_{\phi_0}^2 V_{\lambda \bar{l}_0}(\bar{u}, \bar{v}) \end{matrix}.$$

Cette différentielle seconde définie une forme bilinéaire en  $(\bar{u}, \bar{v})$ . Puisque  $\phi_0$  est un point critique de  $V_{\lambda \bar{l}_0}$ ,  $\phi_0$  est stable, c'est à dire réalise un minimum local de l'énergie potentielle, lorsque la forme quadratique associée  $\bar{u} \in T_{\phi_0} \mathcal{E} \rightarrow D_{\phi_0}^2 V_{\lambda \bar{l}_0}(\bar{u}, \bar{u})$  est définie positive. Ce résultat découle directement du lemme de Morse. Il sera pratique, étant donné le raisonnement que l'on est sur le point de suivre, de se référer pour ce lemme à la version donnée par TROMBA<sup>(1)</sup> ou par GOLUBITSKY & MARSDEN<sup>(2)</sup>.

On peut remarquer, d'une part, que pour tout  $Q \in \text{SO}(3)$ , d'après le principe d'objectivité, pour une déformation  $\phi_0$  fixée,  $W(X, Q\phi_0, \bar{\Pi}_0) = W(X, \phi_0, \bar{\Pi}_0) = c^{te}$ , en d'autres termes, la fonction énergie est constante sur l'orbite de  $\phi_0$ . On décompose par conséquent  $T_{\phi_0} \mathcal{E}$  en  $T_{\phi_0} \mathcal{E} = (T_{\phi_0} \Theta_{\phi_0}) \oplus (T_{\phi_0} \Theta_{\phi_0})^{\perp}$  et donc on effectue l'étude de la stabilité sur chacun des deux sous espaces.

D'autre part, on peut aussi remarquer que, dans l'étude des solutions proches des solutions triviales  $(QI_{\Omega}, \bar{\Pi}_0)$ , plus le paramètre  $\lambda = (\lambda_m, \lambda_c)$  est voisin de  $(0,0)$ , plus les solutions  $Q_i^T R_i^T \bar{\phi}_i$  sont voisines de  $Q_i^T (= Q_i)$  : les solutions dépendent continûment du paramètre  $\lambda$ . Ainsi, dans la démonstration qui va suivre, on pourra se placer dans un premier temps dans le cas où la déformation solution est  $\phi_0 = Q^T (= Q)$ , puis dans un second temps, conclure quant à la stabilité de la solution  $\phi_0$  proche de  $Q^T$  par un critère de continuité. De plus aucune erreur ne pourra être commise au niveau de l'univocité de

la stabilité entre les solutions triviales  $Q_i$  et les solutions  $Q_i^T R_i^T \bar{\phi}_i$  correspondantes car on sait que la configuration des charges est stable pour de petites perturbations de  $\bar{I}_0$ .

\* Sur  $(T_{\phi_0} \Theta_{\phi_0})^\perp$  :

$$D_{\phi_0}^2 V_{\lambda \bar{I}_0}(\bar{u}) = \int_{\Omega} \nabla \bar{u} : \left( \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} \right) : \nabla \bar{u} dX - 0$$

Pour  $\phi_0 = Q$ , solution triviale du problème, grâce à l'hypothèse d'ellipticité  $(H_2)$ , on a :

$$\nabla \bar{u} : \frac{\partial^2 W}{\partial F \partial F} : \nabla \bar{u} + 2 \nabla \bar{u} : \frac{\partial^2 W}{\partial F \partial \Pi} \cdot \bar{p} + \bar{p} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \Pi \partial \Pi} \cdot \bar{p} \geq \varepsilon \|(\mathbf{e}(\bar{u}), \bar{p})\|^2$$

où  $\varepsilon$  désigne un réel strictement positif et  $\|(\mathbf{e}(\bar{u}), \bar{p})\| = \sup(\|\mathbf{e}(\bar{u})\|_{\mathcal{E}^3}, \|\bar{p}\|_{\mathbb{R}^3})$ .

Ici, pour  $\bar{p} = \bar{0}$ , on a :

$$D_{\phi_0}^2 V_{\lambda \bar{I}_0}(\bar{u}) \geq \varepsilon \int_{\Omega} \|\mathbf{e}(\bar{u})\|_{\mathcal{E}^3}^2 dX.$$

Or  $\bar{u} \in \mathbb{H}_0^2 = \left\{ \bar{u} \in \mathbb{H}^2 / \bar{u} = \bar{0} \text{ sur } \partial_d \text{ et } \left( \frac{\partial^2 W}{\partial F^2} : \nabla \bar{u} \right) \cdot \bar{N} = 0 \text{ sur } \partial_\tau \right\}$  car le tenseur  $\frac{\partial^2 W}{\partial F^2}$

est appliqué en  $\phi_0 = Q$ . D'après la 1<sup>er</sup> égalité de Korn, on a de plus :

$$(4.52) \text{ pour tout } \bar{u} \in \mathbb{H}_0^2, \int_{\Omega} \|\mathbf{e}(\bar{u})\|_{\mathcal{E}^3}^2 dX \geq \eta \|\bar{u}\|_{H^1}^2 \text{ avec } \eta > 0,$$

soit  $D_{\phi_0}^2 V_{\lambda \bar{I}_0}(\bar{u}) \geq c \|\bar{u}\|_{H^1}^2$  avec  $c > 0$ .

D'où pour tout  $\bar{u} \in (T_{\phi_0} \Theta_{\phi_0})^\perp$  avec  $\phi_0 = Q$ ,  $D_{\phi_0}^2 V_{\lambda \bar{I}_0}(\bar{u}) \geq c \|\bar{u}\|_{H^1}^2$ .

Par un argument de continuité sur  $\lambda$ , on a alors :

pour tout  $\bar{u} \in (T_{\phi_0} \Theta_{\phi_0})^\perp$ ,  $D_{\phi_0}^2 V_{\lambda \bar{I}_0}(\bar{u}) \geq c \|\bar{u}\|_{H^1}^2$ .

On peut conclure que dans la direction transverse à  $\Theta_{\phi_0}$ , pour  $\phi_0$  proche de  $Q$ , la forme quadratique est définie positive, c'est à dire que la solution  $\phi_0$  est stable.

\* Sur  $T_{\phi_0} \Theta_{\phi_0}$  :

On sait que sur l'orbite de  $\phi_0$ , la fonction énergie est constante,

$$\text{donc } V_{\lambda \bar{I}_0}(Q\phi_0) = c^{te} - \langle \lambda \bar{I}_0, Q\phi_0 \rangle.$$

$\phi_0$  étant un point critique de l'application  $V_{\lambda \bar{I}_0}$  définie sur  $\mathcal{E}$ , il l'est aussi pour la

restriction  $V_{\lambda \bar{I}_0} / \Theta_{\phi_0}$ .

On introduit alors l'application  $l$  définie par  $l : \begin{array}{l} \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi \rightarrow l(\phi) = \langle \lambda \bar{I}_0, \phi \rangle \end{array}$ .

Puisque  $V_{\lambda_0}(Q\phi_0) = c^{te} - l(Q\phi_0)$ , on peut affirmer que  $\phi_0$  est aussi un point critique de  $\frac{1}{\Theta_{\phi_0}}$  et que la stabilité de  $\phi_0$  dépend de l'indice de la différentielle seconde  $D_{\phi_0}^2\left(\frac{1}{\Theta_{\phi_0}}\right)$ .

Comme pour l'étude sur  $(T_{\phi_0}\Theta_{\phi_0})^\perp$ , grâce à un critère de continuité on peut choisir la déformation  $\phi_0 = Q$ .

Il faut tout d'abord vérifier que  $Q$  est bien un point critique de  $\frac{1}{\Theta_Q} = \frac{1}{\Theta_{I_\Omega}}$ .

D'après l'extension de l'alternative de Fredholm (4.33), on a

$$\text{Im } D\Phi(I_\Omega, \bar{\Pi}_0) = \left\{ (\bar{I}_m, \bar{I}_e) \in \mathcal{L}_m \oplus \mathcal{L}_e \mid \langle \bar{I}_m, KX \rangle = 0 \text{ et } \langle \bar{I}_e, KX \rangle = 0 \ \forall K \in \text{skew} \right\}.$$

$$\begin{aligned} (Q\lambda_m \bar{I}_{m0}, Q\lambda_e \bar{I}_{e0}) \in (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0 \text{ ssi } & \begin{cases} \langle Q\lambda_m \bar{I}_{m0}, KX \rangle = 0 \ \forall K \in \text{skew} \\ \langle Q\lambda_e \bar{I}_{e0}, K'X \rangle = 0 \ \forall K' \in \text{skew} \end{cases} \\ \text{ssi } & \begin{cases} \langle \lambda_m \bar{I}_{m0}, Q^T KX \rangle = 0 \ \forall K \in \text{skew} \\ \langle \lambda_e \bar{I}_{e0}, Q^T K'X \rangle = 0 \ \forall K' \in \text{skew} \end{cases} \\ \text{ssi } & \begin{cases} D_{I_{m0}}(Q^T)(KX) = 0 \ \forall K \in \text{skew} \\ D_{I_{e0}}(Q^T)(K'X) = 0 \ \forall K' \in \text{skew} \end{cases} \\ \text{ssi } & D(I^T)(KX, K'X) = 0 \ \forall (K, K') \in (\text{skew})^2 \\ \text{ssi } & Q^T \text{ est un point critique de } \frac{Dl}{\Theta_{I_\Omega}}, \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque les rotations qui interviennent ici vérifient  $Q^T = Q$ .

Pour étudier la stabilité, il faut déterminer  $D_Q^2\left(\frac{1}{\Theta_{I_\Omega}}\right)$ .

Soit alors l'arc paramétré  $\exp : \begin{matrix} I & \rightarrow & SO(3) \\ t & \rightarrow & \exp(tW) \end{matrix}$  où  $W \in \text{so}(3) = \text{skew}$ .

$$\left. \frac{d}{dt}(\exp(tW)) \right|_{t=0} = W \in T_1SO(3) \text{ et } \left. \frac{d}{dt}(\exp(tW)Q) \right|_{t=0} = WQ \in T_QSO(3)$$

Pour l'application  $t \rightarrow l(\exp(tW)Q)$ , on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} l(\exp(tW)Q) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d^2}{dt^2} (\langle \lambda \bar{I}_0, \exp(tW)Q \rangle) \right|_{t=0} = \langle \lambda \bar{I}_0, W^2 Q \rangle \\ &= \text{Tr}[k_m(\lambda_m \bar{I}_{m0}, W^2 Q)] + \text{Tr}[k_e(\lambda_e \bar{I}_{e0}, W^2 Q)] \\ &= \text{Tr}[k_m(\lambda_m \bar{I}_{m0}, I_\Omega) Q^T W^2] + \text{Tr}[k_e(\lambda_e \bar{I}_{e0}, I_\Omega) Q^T W^2] \\ &= \text{Tr}[A_m Q W^2] + \text{Tr}[A_e Q W^2] \\ &= \text{Tr}[W^2 Q A_m] + \text{Tr}[W^2 Q A_e]. \end{aligned}$$

On note  $\vec{\omega}$  le vecteur tel que pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$   $W\vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$ .

La matrice  $W^2$  vérifie  $W^2 = \vec{\omega} \otimes \vec{\omega} - \|\vec{\omega}\|^2 1$ .

Donc  $W^2 Q A = (\vec{\omega} \otimes \vec{\omega}) Q A - \|\vec{\omega}\|^2 Q A = \vec{\omega} \otimes (Q A \vec{\omega}) - \|\vec{\omega}\|^2 Q A$ ,

soit  $\text{Tr}(W^2QA) = \langle \bar{\omega}, QA\bar{\omega} \rangle - \|\bar{\omega}\|^2 \text{Tr}(QA) = \langle (QA - \text{Tr}(QA)I)\bar{\omega}, \bar{\omega} \rangle$ .

D'où  $\frac{d^2}{dt^2} l(\exp(tW)Q) \Big|_{t=0} = \langle (QA_m - \text{Tr}(QA_m)I)\bar{\omega}, \bar{\omega} \rangle + \langle (QA_e - \text{Tr}(QA_e)I)\bar{\omega}, \bar{\omega} \rangle$ ,

soit  $D_{\phi_0}^2 V_{\lambda, \bar{\omega}}(\bar{u}) = \langle (\text{Tr}(QA_m)I - QA_m)\bar{\omega}, \bar{\omega} \rangle + \langle (\text{Tr}(QA_e)I - QA_e)\bar{\omega}, \bar{\omega} \rangle$ .

La solution triviale Q est alors stable si la somme des deux formes quadratiques

$q_m : \bar{\omega} \rightarrow \langle (\text{Tr}(QA_m)I - QA_m)\bar{\omega}, \bar{\omega} \rangle$  et  $q_e : \bar{\omega} \rightarrow \langle (\text{Tr}(QA_e)I - QA_e)\bar{\omega}, \bar{\omega} \rangle$  est une forme quadratique définie positive.

L'étude de la stabilité de la solution Q se ramène ainsi à l'étude des deux formes quadratiques  $q_m$  et  $q_e$ . Pour déterminer leurs expressions relativement à une base, il faut se rappeler que puisque  $\bar{I} = (\bar{I}_m, \bar{I}_e) \in (\mathcal{L}_m)_0 \oplus (\mathcal{L}_e)_0$ , les matrices  $A_m = k_m(\bar{I}_m)$  et  $A_e = k_e(\bar{I}_e)$  sont symétriques ce qui permet de les diagonaliser. On se référera alors à l'étude du chapitre 3. Pour homogénéiser les notations, on notera dans la suite a, b, c les valeurs propres de  $A_m$  et a', b', c' celles de  $A_e$ .

Etude de la 1<sup>ère</sup> forme quadratique  $q_m$  :

Puisque  $\bar{I}_m$  est choisi de type 0, d'après le chapitre 3 on sait que l'on a au maximum quatre possibilités pour la rotation Q. On va pour chacune d'elles traduire la matrice de la forme quadratique relativement à la base orthonormale directe constituée des vecteurs propres de  $A_m$ . Cette matrice étant diagonale, l'indice de Q est alors le nombre de valeurs (strictement) négatives de la diagonale.

Pour  $Q_0 = \text{diag}(1,1,1) = I$ ,  $\text{Tr}(QA_m)I - QA_m = \text{diag}(b+c, a+c, a+b)$

Pour  $Q_1 = \text{diag}(-1,-1,1)$ ,  $\text{Tr}(QA_m)I - QA_m = \text{diag}(-b+c, -a+c, -a-b)$

Pour  $Q_2 = \text{diag}(-1,1,-1)$ ,  $\text{Tr}(QA_m)I - QA_m = \text{diag}(b-c, -a-c, -a+b)$

Pour  $Q_3 = \text{diag}(1,-1,-1)$ ,  $\text{Tr}(QA_m)I - QA_m = \text{diag}(-b-c, a-c, a-b)$

Pour des raisons de symétrie, on peut supposer  $a < b < c$ . De plus  $\bar{I}_m$  étant de type 0, on a  $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ . 8 cas se présentent alors :

	$a < b < c$	$a < b < c$ et $ a  <  b  <  c $	$a < b < c$ et $ b  <  a  <  c $	$a < b < c$ et $ b  <  c  <  a $	$a < b < c$ et $ c  <  b  <  a $	$a < b < c$ et $ b  <  c  <  a $	$a < b < c$ et $ b  <  a  <  c $	$a < b < c < 0$
<b>indice de <math>Q_0</math></b>	0	0	1	2	3	2	1	3
<b>indice de <math>Q_1</math></b>	1	1	0	0	0	0	0	0
<b>indice de <math>Q_2</math></b>	2	2	2	1	1	1	2	1
<b>indice de <math>Q_3</math></b>	3	3	3	3	2	3	3	2

On peut conclure que lorsque  $|a| < |b| < |c|$ ,  $Q_0$  est stable, sinon dans les autres cas, c'est  $Q_1$  qui est stable, c'est à dire la rotation d'angle  $\pi$  autour de l'axe défini par le vecteur propre dont la valeur propre associée est la plus grande (ici la valeur  $c$ ).

Pour la 2<sup>nd</sup> forme quadratique, l'étude est identique car bien qu'éventuellement une unique valeur propre peut s'annuler, cette unicité n'implique pas la nullité des valeurs propres de  $\text{Tr}(QA_e)I - QA_e$ .

Afin de conclure pour la forme quadratique  $q = q_m + q_e$ , il faut considérer les deux problèmes suivants :

\* l'indépendance des charges  $\bar{I}_m$  et  $\bar{I}_e$  implique d'une part l'indépendance des bases orthonormales (directes) dans lesquelles  $A_m = k_m(\bar{I}_m)$  et  $A_e = k_e(\bar{I}_e)$  sont diagonalisables, et d'autre part l'indépendance des valeurs propres  $a, b, c$  de  $A_m$  avec les valeurs propres  $a', b', c'$  de  $A_e$ .

\* la propriété d'objectivité de  $\Phi$  rencontrée dans le théorème d'existence des solutions impose que la rotation  $Q$  soit identique pour chacune des deux formes  $q_m$  et  $q_e$ .

D'où la situation dans laquelle on puisse faire une lecture immédiate à partir du tableau ci-dessus (le tableau relatif à la charge électrique étant similaire), est celle où les deux formes quadratiques sont toutes deux définies positives. Dans ce cadre, on va alors reprendre les 3 cas de figure du théorème précédent et préciser, lorsque cela est possible sans une étude plus approfondie, la stabilité des solutions.

1<sup>er</sup> cas : Si aucun vecteur propre de  $A_m$  n'est vecteur propre de  $A_e$ , alors  $Q_0 = 1$ .

D'après le tableau si les valeurs propres de  $A_m$ , et respectivement celles de  $A_e$ , sont rangées dans le même ordre que leurs valeurs absolues, alors  $Q_0 = 1$  est stable.

2<sup>ème</sup> cas : S'il existe un unique vecteur  $\bar{u}$  qui soit simultanément vecteur propre de  $A_m$  et de  $A_e$ , alors soit  $Q_0 = 1$ , soit  $Q = Q(\bar{u}, \pi)$ .

Les conditions de stabilité de  $Q_0 = 1$  sont les mêmes que celles citées précédemment.

Si elles ne sont pas remplies, et si la valeur propre associée à  $\bar{u}$  de  $A_m$ , et respectivement celle de  $A_e$ , est la plus grande dans l'ensemble des valeurs propres de  $A_m$ , respectivement de  $A_e$ , alors la solution triviale  $Q = Q(\bar{u}, \pi)$  est stable.

3<sup>ème</sup> cas : Si les vecteurs propres de  $A_m$  sont aussi les vecteurs propres de  $A_e$ , alors on a les quatre rotations possibles pour  $Q$ .

Les conditions de stabilité de  $Q_0 = 1$  sont les mêmes que précédemment, ainsi que celles de  $Q = Q(\bar{u}, \pi)$  où  $\bar{u}$  est un vecteur propre commun à  $A_m$  et  $A_e$ , qui admet comme valeur propre associée pour  $A_m$ , et respectivement pour  $A_e$ , la plus grande dans l'ensemble des valeurs propres de  $A_m$ , respectivement de  $A_e$ .

La situation où les deux formes quadratiques sont toutes deux définies positives, n'est qu'une condition suffisante à notre problème, mais pas nécessaire.

On peut ainsi envisager, par exemple, la situation suivante :

les charges  $\bar{I}_m$  et  $\bar{I}_e$  sont telles que  $A_m = k_m(\bar{I}_m)$  et  $A_e = k_e(\bar{I}_e)$  soient diagonalisables dans la même base orthonormale directe, de valeurs propres associées respectives  $a, b, c$  et  $a', b', c'$  où  $a < 0 < b < c$  avec  $|b| < |a| < |c|$  et  $0 \leq a' < b' < c'$ . Alors la solution  $Q_0 = 1$  n'est pas stable relativement à la forme quadratique  $q_m$  mais, par contre, l'est relativement à  $q_e$ .

Dans cette base, la forme quadratique  $q = q_m + q_e$  est représentée par la matrice diagonale  $\text{diag}(b+c+b'+c'; a+c+a'+c'; a+b+a'+b')$ . Ici  $b+c > 0$ ,  $b'+c' > 0$  donc  $b+c+b'+c' > 0$ ; de même  $a+c > 0$ ,  $a'+c' > 0$  donc  $a+c+a'+c' > 0$ . Par contre  $a+b < 0$  et  $a'+b' < 0$ . Si on pose, par hypothèse,  $|a'+b'| > |a+b|$ , alors  $a+b+a'+b' > 0$ . D'où la forme quadratique  $q$  est définie positive.

En conclusion :

**Proposition** (4.53): Soient  $\bar{\Gamma} = (\bar{\Gamma}_m, \bar{\Gamma}_e) \in \mathcal{L}_0$  une charge de type  $(0,0)$  ou  $(0,0')$ ,  $A = k(\bar{\Gamma})$  se décomposant en  $A = A_m + A_e$  avec  $A_m = k_m(\bar{\Gamma}_m)$  et  $A_e = k_e(\bar{\Gamma}_e)$ , et  $S_A = \{Q \in \text{SO}(3) / (QA_m, \pm QA_e) \in \text{sym} \oplus \text{sym}\} = \{Q \in \text{SO}(3) / (Q\bar{\Gamma}_m, \pm Q\bar{\Gamma}_e) \in \mathcal{L}_0\}$ .  $S_A$ , regardé comme sous-espace de  $\mathcal{E}$ , est l'ensemble des points critiques de  $\frac{1}{\Theta_{\text{in}}}$ .

La rotation  $Q = I \in S_A$  est stable si les valeurs propres de  $A_m$ , et respectivement celles de  $A_e$ , sont rangées dans le même ordre que leurs valeurs absolues.

Sinon, s'il existe au moins un vecteur propre  $\bar{u}$  commun à  $A_m$  et  $A_e$ , alors la rotation  $Q = Q(\bar{u}, \pi) \in S_A$  est stable si la valeur propre associée pour  $A_m$ , et respectivement pour  $A_e$ , est la plus grande dans l'ensemble des valeurs propres de  $A_m$ , respectivement de  $A_e$ .

**Nota Bene** : Les conditions de stabilité exprimées dans la proposition (4.53) sont suffisantes mais non nécessaires. Il peut se produire qu'une solution instable au sens de l'élasticité (donc relativement à la forme  $q_m$ ) puisse devenir stable au sens de l'électro-élasticité (donc relativement à la forme  $q = q_m + q_e$ ) grâce à un phénomène de compensation due à la partie électrique. Le champ électrique peut ainsi avoir un rôle d'effet stabilisateur dans le problème de traction en électro-élasticité.



## CONCLUSION

Le phénomène de bifurcation lors de la linéarisation du problème de traction n'est pas facile à appréhender de façon intuitive et expérimentale. Ce travail établit à nouveau l'unicité de la solution répondant au problème linéarisé au voisinage de l'identité dans le cadre de l'électro-élasticité. Lors de l'étude du problème non linéarisé, la propriété d'objectivité permet d'exhiber des solutions triviales du problème et aussi de rendre compte des actions sur l'espace des charges. Elle élargit ainsi la recherche des solutions au voisinage d'autres solutions triviales que la solution identique. C'est donc la propriété d'objectivité qui permet l'éventuelle multiplicité des solutions du problème non linéarisé, et qui est donc à la source du phénomène de bifurcation lors du passage du problème linéarisé au problème non linéarisé. On peut remarquer que l'approche globale, qui est tout aussi efficace dans l'étude de la stabilité des solutions en élasticité non linéaire pure, ne l'est malheureusement plus dans le cadre de l'électro-élasticité. La classification des charges permet tout de même de donner quelques éléments d'information, mais ne permet pas de conclure sans en venir au cas par cas.

Le cadre de cette étude est celui des matériaux piézo-électriques ne possédant que la propriété d'électrostriction. Cette condition restrictive qui permet un découplage de l'espace des charges apporte une simplification certaine dans le raisonnement. Mais le phénomène piézo-électrique direct étant un phénomène important, il serait utile de réexaminer cette restriction. De façon plus générale, il serait aussi intéressant d'étudier le phénomène de bifurcation pour des matériaux électro-magnéto-élastiques.

Bien entendu, on se propose d'associer ultérieurement à cette étude théorique l'étude du flambement des poutres possédant la propriété d'électrostriction. Cette mise en évidence sur un plan pratique du phénomène de bifurcation à la linéarisation constituera un second travail dans lequel on pourra très certainement observer l'effet stabilisateur que peut avoir un champ électrique sur de tels matériaux.

# BIBLIOGRAPHIE



D.CHILLINGWORTH, J.MARSDEN&Y.WAN [1982]. Symmetry and Bifurcation in tree-dimensional Elasticity, Part I. Arch. Rational Mech. Anal. 80, 295-331.

D.CHILLINGWORTH, J.MARSDEN&Y.WAN [1983]. Symmetry and Bifurcation in three-dimensional Elasticity, Part II. Arch. Rational Mech. Anal. 83,362-395.

P.G.CIARLET [1986]. Elasticité tridimensionnelle. R.M.A.1. Masson Editeur.

B.COLLET&G.A.MAUGIN [1974]. "Sur l'électrodynamique des milieux continus avec interactions", C.R. Acad. Sc. Paris, 279 B, 379-382.

G.FICHERA [1972]. Existence theorems in elasticity. Handbuch der physik, Bd. VI a/2, 347-389, Springer-Verlag.

P.GERMAIN [1973]. Cours de mécanique des milieux continus, vol. I. Masson Editeur.

M.GOLUBITSKY&J.MARSDEN [1982]. The Morse lemma in infinite dimensions via singularity theory (preprint).

H.A.LORENTZ [1952]. The theory of electrons, (Reprint of the 2<sup>nd</sup> Edition), Dover, New-York.

J.MARSDEN&T.HUGHES [1978]. Topics in the mathematical foundations of elasticity, in volume II. R.J.KNOPS (ed), Pitman.

J.MARSDEN&T.HUGHES [1983]. The mathematical foundations of elasticity. Prentice-Hall.

G.MAUGIN [1988]. Continuum mechanics of electromagnetic solids. Elsevier Science Publ., Amsterdam.

G.MAUGIN&A.ERINGEN [1977]. On the equations of the electrodynamics of deformable bodies of finite extent. J. Mécanique, 16, pp. 101-147.

R.MNEIMNE&F.TESTARD [1986]. Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, pp. 18-19 et 57-89. Herman Editeur.

PANOFSKY&M.PHILIPS [1962]. Classical electricity and magnetism, Addison-Wesley Publishing Compagny.

R.ROGERS&S.ANTMAN [1986]. Steady-state problems of non linear electro-magneto-thermo-elasticity, pp. 281-323.

F.STOPELLI [1958]. Sulla esistenza di soluzioni delle equazioni dell'elastostatica isoterma nel caso di sollecitazioni dotate di assi di equilibrio. *Ricerche Mat.* 6 (1957), pp. 241-287, 7, (1958), 71-101, 138-152.

A.SIGNORINI [1930]. Sulle deformazioni termoelastiche finite. *Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Cong. Appl. Mech.* 2, 80-89.

A.TROMBA [1976]. Almost Riemannian structure on Banach manifolds, the Morse lemma and the Darboux theorem. *Can. J. Math.* 28, 640-652.

C.TRUEDELLE&R.TOUPIN [1960]. The classical field theories . *Handbuch der Physik*, Bd. III/I, Sect.279 and 283-286, ed. S.Flügge, Springer-Berlin.

C.WANG [1970]. Scalar-Valued isotropic functions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 36, 166-223.

Y.WAN&J.MARSDEN [1983]. Symmetry and Bifurcation in three-dimensional elasticity, Part III. *Arch. Rational Mech. Anal.* 83, 202-233.