

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE
LILLE
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES DE LA MATIÈRE
ET DU RAYONNEMENT

THÈSE

présentée par

Guillaume BOULANT

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université

DANS LA SPÉCIALITÉ : LASERS, MOLÉCULES ET RAYONNEMENT
ATMOSPHERIQUE

**CARACTÉRISATION TOPOLOGIQUE DE
LASERS CHAOTIQUES**

Soutenue le 24 septembre 1997 devant le jury:

Pierre Glorieux	Université de Lille 1	Président
Robert Gilmore	Drexel University, Philadelphia	Rapporteur
Jorge Tredicce	Institut non linéaire de Nice	Rapporteur
Christophe Letellier	Université de Rouen	Examineur
Serge Bielawski	Université de Lille 1	Codirecteur de thèse
Marc Lefranc	Université de Lille 1	Codirecteur de thèse
Dominique Derozier	Université de Lille 1	Directeur de thèse



Avant-propos

Entrer dans la théorie des systèmes dynamiques est un travail déstabilisant. Il s'agit, en effet, de lâcher prise avec le cadre familier du physicien, c'est-à-dire les concepts et théories appris au cours des cursus classiques. Le plus impressionnant, me semble-t-il, est le degré élevé d'abstraction. Ceci donne en contrepartie un champ d'application très large, qui s'étend bien au-delà du domaine des sciences physiques. Cet outil mathématique est utilisé, par exemple, en médecine pour analyser les arythmies cardiaques, en biologie pour modéliser la dynamique des populations, ou encore en économie pour décrire les organisations complexes et les flux sur les marchés financiers. Le point commun de ces disciplines, a priori si différentes, est la formulation mathématique de l'évolution des objets étudiés. En d'autres termes, les comportements dynamiques peuvent être décrits par des équations semblables dans leur forme, selon des méthodes de modélisation semblables. Je suis heureux d'avoir travaillé, durant ces trois dernières années, dans le cadre de cette discipline. Elle m'a donné le goût de l'aventure scientifique (au sens large du terme), c'est-à-dire l'envie d'explorer les pistes qui sortent des sentiers battus. C'est pour moi l'essentiel d'une formation doctorale.

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Je suis reconnaissant envers Monsieur le Professeur Pierre Glorieux, directeur de l'unité, de m'y avoir accueilli et d'être resté attentif au développement de mon travail. J'ai en particulier été très honoré qu'il préside le jury de cette thèse.

Je suis par ailleurs très fier et honoré que Messieurs Robert Gilmore, Professeur à Drexel University of Philadelphia, et Jorge Tredicce, Professeur à l'Institut Non Linéaire de Nice, aient accepté de juger ce travail. Je remercie également Monsieur Christophe Letellier, Maître de Conférences à l'université de Rouen, pour avoir apporté un regard critique et constructif.

Ce mémoire présente le résultat d'un travail d'équipe de trois années, réalisé sous la direction de Dominique Derozier, Maître de conférences, et la codirection de Serge Bielawski et Marc Lefranc, respectivement Maître de conférences et Chargé de recherche au CNRS. Leurs grandes qualités scientifiques et leur confiance m'ont été extrêmement précieuses pour mener ce projet à terme. Il m'est difficile de leur exprimer ma gratitude à sa juste valeur car les mots sont

insuffisants pour traduire toute ma sincérité. Aussi je dirais simplement que l'esprit d'équipe et l'optimisme qu'ils ont su créer et l'amitié qu'ils m'ont témoignée ont été des éléments déterminants pour surmonter les difficultés qui jalonnent le parcours de thèse. Ils ont accompli bien plus que leur rôle et je leur en suis infiniment reconnaissant.

A cette réussite, j'associe également Monsieur Jean-Marc Lapauw et son équipe de l'atelier électronique pour leur soutien technique efficace et leur disponibilité.

Plus largement, je tiens à remercier les étudiants, les doctorants et les membres de l'UFR qui, à diverses occasions, m'ont apporté leur soutien au cours de ces trois années. Je citerai en particulier Christophe Sz waj et Jérôme Plumecoq pour leur aide et les discussions stimulantes que nous avons eues, ainsi que Jaouad Zemmouri et Mohammed Bouazaoui pour leur enthousiasme et leurs conseils.

J'ai participé, en avril 1996, à la semaine des Doctoriales, qui avait lieu à Chantilly. Présentée comme une semaine de sensibilisation aux réalités de l'entreprise, elle a plus largement un effet déclic qui amène les doctorants à multiplier leurs centres d'intérêt, à observer la réalité économique qui les entoure et à réfléchir aux différentes pistes qui s'offrent à eux ou qu'ils peuvent construire. Je pense que la Recherche a tout à gagner des actions qui enrichissent les compétences des docteurs. C'est pourquoi je remercie Madame le Professeur Claire Demuynck et Monsieur le Professeur Bertrand Escaig, responsables de la formation doctorale, pour les efforts qu'ils font en ce sens, ainsi que tous les doctorants et membres permanents des laboratoires qui participent, de près ou de loin, à ces actions.

Je terminerais par un commentaire plus personnel. Je tiens, en effet, à remercier toute ma famille pour la confiance, l'aide et le soutien qu'elle m'a apporté tout au long de ma scolarité et durant la thèse.

Par ailleurs, les précipitations de dernières minutes, combinées à un éditeur de texte récalcitrant, avaient laissé, dans la première version du mémoire, une série d'imperfections grammaticales et orthographiques. Je pense pouvoir garantir cette version définitive, et ce grâce à l'aide de Mademoiselle Anne François, Professeur de Français, qui a eu la patience de décrypter deux cents pages de charabia. Je lui suis extrêmement reconnaissant.

Enfin, j'ai une pensée aujourd'hui pour Maria et sa famille, à qui je dois beaucoup, et sans qui jamais je n'aurais pu commencer l'ensemble de ces travaux.

*“L’aliment essentiel ne vient pas des choses,
mais du nœud qui noue les choses.”*

Antoine de Saint-Exupéry

Table des matières

Avant-propos	iii
Introduction	5
1 Analyse du chaos : des outils de base au gabarit	9
1.1 Eléments de dynamique non linéaire	9
1.1.1 Du phénomène physique à l'espace des phases	9
1.1.1.1 Modélisation d'un phénomène naturel	9
1.1.1.2 L'espace des phases	11
1.1.1.3 Le flot	14
1.1.1.4 En résumé	15
1.1.2 Point fixe et orbite périodique	15
1.1.3 Stabilité d'une orbite	16
1.1.3.1 Approche linéaire: les exposants de Lyapunov	17
1.1.3.2 Les variétés stables et instables	18
1.1.3.3 Torsion d'une orbite périodique	20
1.1.4 Dissipation et attracteur	21
1.1.5 Bifurcations	24
1.1.5.1 Une définition	24
1.1.5.2 Deux exemples	26
1.1.6 En résumé	27
1.2 Réconstruction de l'espace des phases expérimental	28
1.3 Les outils de base de l'analyse du chaos	30
1.3.1 Une définition du chaos	31
1.3.1.1 La sensibilité aux conditions initiales	31
1.3.1.2 Structure de l'attracteur chaotique	33
1.3.1.3 Pourquoi vouloir caractériser le chaos?	34
1.3.2 Les outils classiques d'analyse	35
1.3.2.1 L'application de Poincaré	35
1.3.2.2 La dynamique symbolique	38
1.3.2.3 Dimensions et entropies	43
1.4 L'analyse topologique	46
1.4.1 Les orbites périodiques instables	48

1.4.2	Caractérisation des orbites périodiques par la théorie des nœuds	51
1.4.2.1	Pourquoi la théorie des nœuds?	51
1.4.2.2	Nombre d'enlacement et d'auto-enlacement	54
1.4.2.3	Les taux de rotation relative	58
1.4.2.4	La torsion locale	62
1.4.2.5	En résumé	63
1.4.3	Le gabarit	64
1.4.3.1	Définition	66
1.4.3.2	Une représentation algébrique du gabarit	68
1.4.3.3	Positions relatives des orbites sur le gabarit	73
1.4.3.4	Détermination du gabarit	74
1.4.3.5	Classification des attracteurs par gabarit	77
2	Le chaos dans les lasers	79
2.1	Introduction	79
2.2	Dynamique des lasers	80
2.2.1	Quelques rudiments	80
2.2.2	Modèle et constantes de temps	82
2.2.3	Classification des lasers	83
2.3	Le laser monomode de classe B	85
2.3.1	Un oscillateur dans un potentiel de Toda	86
2.3.2	Propriétés dynamiques	88
2.3.2.1	Résonance	89
2.3.2.2	Chaos et diagrammes de bifurcations	89
2.4	Les systèmes expérimentaux	93
2.4.1	Le laser YAG monomode	94
2.4.2	Le laser à fibre	95
2.5	Conclusion	96
3	Détermination du gabarit à partir d'une série temporelle	99
3.1	Introduction	99
3.2	La méthode classique	100
3.2.1	L'espace de plongement	103
3.2.2	Traitement du signal	105
3.2.3	Détection des retours proches	107
3.2.4	Identification des orbites par un codage symbolique	109
3.2.5	Mesure des invariants topologiques	111
3.2.6	Détermination du gabarit	115
3.2.7	Commentaires sur la procédure d'analyse	118
3.3	Reconstruction des orbites périodiques instables	119
3.3.1	Formulation mathématique du problème	120
3.3.1.1	Formalisme	120

3.3.1.2	le lemme de poursuite et les pseudo-orbites	120
3.3.1.3	Recherche d'une pseudo-orbite périodique	122
3.3.2	L'arbre de reconstruction	123
3.3.3	Présélection des candidats	127
3.3.4	En résumé	128
3.4	Détermination du gabarit sans codage symbolique préalable . . .	129
3.4.1	Problématique	129
3.4.2	Principe de la méthode	130
3.4.3	Sélection d'une solution physique	133
3.5	Analyse topologique d'un modèle	134
3.6	Adaptation des techniques d'analyse aux systèmes autonomes . .	136
3.7	Conclusion	137
4	Classification des attracteurs et bifurcations de gabarits	139
4.1	Introduction	139
4.2	Mise en évidence de nouveaux gabarits	140
4.2.1	Expérience 1: fer à cheval avec torsions globales	142
4.2.2	Expérience 2: le fer à cheval inversé	149
4.2.3	Expérience 3: le "Gâteau roulé"	153
4.2.4	Synthèse et discussion	158
4.3	Classification des attracteurs des lasers	159
4.3.1	Structure du gabarit spirale	159
4.3.2	Les sous-gabarits	162
4.3.3	Premiers éléments de classification	164
4.4	Transitions entre gabarits	164
4.4.1	Crises, création et annihilation d'orbites	165
4.4.1.1	Les crises d'un régime chaotique	165
4.4.1.2	Création et annihilation d'orbites périodiques: propriétés topologiques.	167
4.4.2	Transition brusque de gabarits	169
4.4.3	Transition douce de gabarits	170
4.4.3.1	Mécanismes de base	170
4.4.3.2	Vers une analyse plus fine grâce au modèle mono-mode de classe B	171
4.5	Conclusion	174
	Conclusion	175
	A Horseshoe templates with global torsion in a driven laser.	177
	B A non-horseshoe template in a chaotic laser model.	193
	C Experimental observation of a chaotic attractor with a reverse horseshoe topological structure.	213

D Model validation and symbolic dynamics of chaotic lasers using template analysis.	219
Bibliographie	227
Index	237

Introduction

La majorité des phénomènes naturels suivent des évolutions irrégulières et complexes, qui semblent impossibles à prédire par des règles simples. On peut observer par exemple les branches d'un arbre dans le souffle du vent, l'écoulement d'un torrent, le cours de la bourse ou l'évolution des particules d'un gaz sans jamais distinguer de caractère invariant ou répétitif. Cette irrégularité a longtemps été exclusivement attribuée à la complexité des processus eux-mêmes, c'est-à-dire au grand nombre d'éléments évoluant librement. Dans cet esprit, L. Landau, en 1948, interprète la turbulence comme la combinaison d'une infinité de régimes simples mais sans cohérence entre eux. La réduction considérable du pouvoir de prédiction peut alors s'expliquer par l'insuffisance de l'esprit humain à embrasser l'ensemble des paramètres.

Dans bien des cas pourtant, la source essentielle de l'"imprédictibilité" est ailleurs. H. Poincaré l'avait identifiée au début du siècle en formulant des idées proches des considérations les plus modernes [Poincare08]:

“Une cause très petite qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même précision, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.”

Ainsi par exemple, un système aussi simple qu'un pendule dont on agite périodiquement le point d'attache peut suivre, dans certaines conditions, une évolution irrégulière qu'on ne peut pas prévoir, uniquement parce que les oscillations sont extrêmement sensibles aux conditions initiales, c'est-à-dire à la position et

la vitesse de la masse au départ ainsi qu'à la position du point d'attache. Ce contraste entre la simplicité du système et des lois qui le gouvernent d'une part, et la complexité du comportement d'autre part, choque l'intuition et a stimulé le développement de la dynamique non linéaire et plus particulièrement des études sur le chaos.

Les travaux de H. Poincaré sur les systèmes dynamiques n'ont pas eu à l'époque le retentissement, ni le développement expérimental, qu'ont connus par exemple la physique quantique et la relativité. Ce n'est qu'au cours des années soixante que fut révélée toute la richesse et la complexité des phénomènes chaotiques. En particulier, E. Lorenz publie en 1963 [Lorenz63] un modèle d'atmosphère, simple et parfaitement déterministe, possédant des solutions aperiodiques, c'est-à-dire sans régularité, qu'il est impossible d'exprimer au moyen des fonctions mathématiques connues. En 1971, D. Ruelle et F. Takens démontrent, par opposition à la théorie de Landau, que trois degrés de liberté suffisent pour que surgisse le chaos [Ruelle et al.71]. Il est depuis communément admis que des comportements complexes et imprévisibles peuvent être en fait le résultat de l'interaction d'un petit nombre d'éléments, gouvernés par des règles déterministes très simples.

Pour distinguer un comportement chaotique d'un comportement purement aléatoire, on peut tracer une trajectoire dans un espace à plusieurs dimensions, l'*espace des phases*, où chaque point est un état du système. Dans cette représentation, un mouvement régulier correspond à une courbe simple. Si le processus est aléatoire, les points successifs remplissent l'espace des phases au hasard. Quand le mouvement est chaotique, la trajectoire semble suivre, à première vue, un parcours aléatoire mais finit par dessiner, au bout d'un temps suffisamment long, une forme bien structurée, l'*attracteur chaotique*. La trajectoire issue d'un point est en fait complètement déterminée par les lois physiques et ce déterminisme interdit à deux trajectoires de se couper, car le point d'intersection aurait alors deux futurs.

La compréhension du chaos est aujourd'hui un enjeu scientifique important. La complexité d'un régime chaotique renferme en effet beaucoup plus d'informations sur les mécanismes physiques mis en jeu que les régimes stationnaires ou périodiques, pour lesquels on revient régulièrement dans la même configuration. Dans cet ordre d'idée, le développement des moyens de comparaison entre régimes chaotiques permettraient d'identifier les analogies entre différents systèmes (il est par exemple remarquable d'observer des similitudes entre les régimes de fonctionnement d'un laser à absorbant saturable et la réaction chimique de Belousov-Zhabotinskii) ou encore de valider un modèle de manière pertinente, en confrontant les régimes chaotiques expérimentaux à ceux qui sont simulés à partir du modèle. Pour cela il faut pouvoir caractériser ces comportements, c'est-à-dire mettre en chiffres les caractéristiques invariantes qui permettent de les distinguer les uns des autres.

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la caractérisation des régimes chaotiques de lasers par une approche topologique. Plus précisément, l'étude s'ar-

ticule autour de l'*analyse de gabarit*¹, proposée par Mindlin *et al.* pour classer les régimes chaotiques [Mindlin et al.90]. Les systèmes chaotiques les plus simples possèdent trois degrés de liberté, c'est-à-dire qu'ils peuvent être décrits de manière déterministe par trois variables globales dans un espace des phases à trois dimensions. Dans ces conditions, les trajectoires de l'attracteur s'emmêlent d'une manière complexe, puisque la dynamique est chaotique, et invariante, puisqu'elles ne peuvent pas se couper. Certaines de ces trajectoires sont des *orbites périodiques instables*, c'est-à-dire des courbes fermées correspondant à des régimes périodiques non observables sur un temps long. Elles forment le squelette de l'attracteur et l'analyse topologique consiste à caractériser l'enchevêtrement invariant de ces orbites par des nombres entiers, à l'aide de la *théorie des nœuds*. Elle permet donc une comparaison des comportements chaotiques bien plus efficace que les techniques traditionnelles, comme la mesure des dimensions fractales de l'entropie ou des exposants de Lyapunov, dont les résultats sont des nombres réels. Le gabarit est l'objet central de cette approche. C'est une surface simple qui représente la structure topologique de l'attracteur et qui décrit les nœuds et enlacements que forment ses orbites.

G. B. Mindlin *et al.* ont proposé et mis en œuvre cette méthode de caractérisation pour analyser la réaction de Belousov- Zhabotinskii [Mindlin et al.91] et ont observé la structure la plus simple, le gabarit du *fer à cheval*. Cette expérience a été suivie de plusieurs travaux d'analyse dans des domaines aussi variés que la mécanique [Tuffiaro et al.95], la résonance magnétique nucléaire [Tuffiaro et al.91], la chimie [Letellier et al.95b] et l'optique [Papoff et al.92, Lefranc et al.93][Lefranc et al.94]. Jusqu'à l'étude récente de C. Letellier *et al.* réalisées dans un circuit électronique [Letellier et al.96], les gabarits déterminés au cours des expériences correspondaient systématiquement à la structure du *fer à cheval*. Pourtant des études numériques prédisent l'existence de plusieurs types de gabarits dans une large classe d'oscillateurs non linéaires (citons par exemple le système de Rössler [Letellier et al.95a], l'oscillateur de Duffing [Gilmore93] et un modèle de laser [Boulant et al.a]).

La première étape de ce travail a été d'observer une structure topologique différente du paradigmatique *fer à cheval*, afin de confirmer la pertinence de l'analyse, c'est-à-dire son aptitude à discerner et à classer des régimes chaotiques expérimentaux [Boulant et al.97a]. Plus largement, une exploration de l'espace des paramètres de contrôle, dans un laser à fibre [Boulant et al.97b], puis dans un laser YAG [Boulant et al.b], mettent en évidence l'existence de gabarits différents dans un même système. Ces structures sont doublement intéressantes. Premièrement, elles sont les premiers éléments d'une classification des régimes chaotiques de ce type de lasers, qui de surcroît correspond à celle proposée par R. Gilmore et J. W. L. McCallum dans une étude théorique des oscillateurs non linéaires modulés [Gilmore et al.95]. Deuxièmement, elles permettent d'analyser

1. De l'anglais "Template analysis"

expérimentalement des transitions entre gabarits, c'est-à-dire une évolution de la structure topologique avec un paramètre de contrôle.

Pour présenter l'ensemble de ces résultats, obtenus en grande partie grâce au développement d'outils d'analyse des signaux chaotiques, quatre chapitres sont proposés :

1. Analyse du chaos: des outils de base au gabarit

Tout d'abord, nous présentons le cadre théorique de l'étude (espace des phases et éléments de théorie des systèmes dynamiques). Puis nous passons en revue les outils classiques d'analyse du chaos pour aborder ensuite l'analyse topologique et introduire le concept de gabarit.

2. Le chaos dans les lasers

Ce chapitre donne des éléments de base de la dynamique des lasers destinés aux lecteurs non spécialistes des systèmes optiques, et aux opticiens non familiers avec la dynamique non linéaire. Les systèmes expérimentaux, c'est-à-dire un laser à fibre et un laser YAG, ainsi que leurs propriétés dynamiques sont présentés.

3. Détermination du gabarit à partir d'une série temporelle

Il s'agit d'un chapitre technique qui présente d'une part les aspects expérimentaux propres à l'analyse topologique des lasers et d'autre part les procédures générales (i.e. non spécifiques aux lasers) que nous avons développées et qui permettent, combinées à la procédure originale de Mindlin *et al*, de déterminer le gabarit à partir d'un signal chaotique, pour des structures très complexes.

4. Classification d'attracteurs chaotiques et bifurcations de gabarits

On donne les résultats expérimentaux qui permettent d'aboutir à une classification des régimes chaotiques. En particulier, ce chapitre met en évidence l'existence de gabarits différents du fer à cheval, et ce, dans un même système, et donc de bifurcations de gabarits. Nous en expliquons les mécanismes.

Ces quatre chapitres peuvent être lus de manière indépendante puisqu'ils traitent chacun un aspect différent du sujet. Le lecteur intéressé par les outils théoriques de l'analyse topologique consultera plutôt le premier chapitre. Le deuxième concerne les particularités physiques des systèmes dynamiques que nous avons étudiés. Enfin, les résultats scientifiques sont regroupés dans le dernier chapitre, et les techniques expérimentales ainsi que les outils d'analyse que nous avons mis en place pour les obtenir, dans le troisième.

Chapitre 1

Analyse du chaos : des outils de base au gabarit

1.1 Éléments de dynamique non linéaire

La dynamique non linéaire fournit un cadre théorique, c'est-à-dire un espace de représentation abstrait combiné à un formalisme mathématique, dans lequel peuvent être développés les outils d'analyse des phénomènes naturels. Ce cadre s'avère particulièrement puissant pour analyser les comportements chaotiques. Nous proposons cette première section comme introduction aux concepts de base nécessaires à une lecture claire du mémoire.

1.1.1 Du phénomène physique à l'espace des phases

1.1.1.1 Modélisation d'un phénomène naturel

L'observation scientifique d'un phénomène naturel conduit à décrire l'évolution de quantités caractéristiques que l'on appelle les *variables physiques*. Les oscillations d'un pendule, par exemple, peuvent être décrites par la donnée d'un angle (l'écart à la verticale) en fonction du temps, l'évolution d'une population par le nombre d'individus ou la propagation de la lumière par un champ électrique. La modélisation du phénomène consiste alors à construire un système d'équations *déterministes* qui exprime, en règle générale, les variations de l'état du processus en fonction de l'état actuel :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \quad (1.1)$$

Le vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ regroupe les *variables dynamiques*, c'est-à-dire les variables physiques que l'on estime être impliquées dans le processus en question et les fonctions $f_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ mesurent les sources de modification de ces variables (ce sont par exemple les maladies et accidents dans la dynamique des populations).

Ces équations comportent un ensemble de constantes μ qui correspondent aux paramètres physiques (les masses des éléments, les résistances, la raideur d'un ressort, la fréquence d'un forçage où encore des paramètres métaboliques pour un processus biologique). On suppose donc implicitement dans cette démarche que des lois gouvernent le processus et qu'il est possible de les formuler de manière suffisamment précise pour que le comportement des variables physiques soit prévisible. Il est par exemple communément admis que les principes de Newton combinés à la loi de la gravitation déterminent l'évolution du pendule, c'est-à-dire la position et la vitesse de la masse.

La difficulté de cette opération réside en grande partie dans le fait que les variables physiques qui caractérisent l'état du processus n'existent pas de manière absolue mais sont relatives à une échelle d'observation donnée. Par exemple, l'état d'un fluide peut être caractérisé par des variables globales comme la pression et la température mais aussi de manière plus fine par les positions et vitesses de chacune des particules. Une seconde difficulté tient au fait que les processus naturels se déroulent généralement dans un milieu continu et étendu caractérisé par des propriétés locales. En effet, à l'échelle macroscopique, un fluide est un milieu continu et la pression comme la température dépendent a priori de la position où elles sont mesurées. On peut citer également les phénomènes de propagation et de diffusion. L'évolution est donc gouvernée localement par des équations aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = f_i(\{\psi_j\}, \{\nabla^k \psi_j\}) \quad (1.2)$$

Les variables physiques ne sont pas de simples scalaires mais des champs $\psi_i(\mathbf{r}, t)$ et la réduction à un système dynamique tel que (1.1) suppose que le phénomène étudié possède des propriétés spatiales particulières. Il existe essentiellement deux cas de figure. Première situation, les propriétés de l'espace sont suffisamment homogènes pour que seule la dépendance temporelle soit pertinente. Par exemple, aux échelles de temps classiques, les courants de charges dans un circuit électrique oscillent de manière suffisamment uniforme pour qu'ils puissent être décrits en terme d'intensités et tensions. Deuxième situation, il existe un effet de cohérence suffisant pour que la description du système puisse se faire sur une base de quelques modes spatiaux dont les amplitudes sont les variables dynamiques. Ainsi, le champ électromagnétique dans une cavité résonnante est donné par l'amplitude d'une onde stationnaire. L'exemple le plus fameux de réduction, pour son importance dans l'étude du chaos, reste le *système de Lorenz* [Lorenz63, Guckenheimer et al.83, Berge et al.88]. Il décrit la convection de Rayleigh-Bénard par les amplitudes de Fourier d'un développement tronqué des champs de vitesse et de température dans les équations de Navier-Stokes.

Nous retiendrons finalement qu'un processus naturel peut être réduit à un système dynamique (1.1) dès qu'il existe une échelle d'observation (en générale macroscopique) à laquelle l'aspect global suffit à définir l'état du processus, c'est-à-dire quand des variables qui caractérisent le système de manière globale peuvent

être liées par des équations déterministes. Notons que si ce dernier point n'est pas validé, cela ne remet pas en cause le déterminisme mais plutôt le choix de l'échelle d'observation ou le choix des variables. Nous reviendrons sur cet aspect en section 1.3.1.

On peut préciser également que le phénomène est dit *non linéaire* si un changement initial d'une variable dynamique produit un changement non proportionnel dans le comportement de cette variable ou des autres, autrement dit quand le rapport effet sur cause n'est pas constant (voir fig. 1.1). Le terme non linéaire,

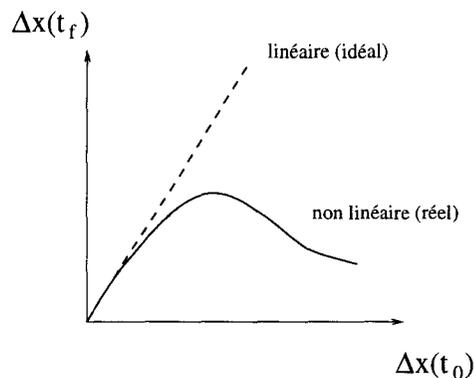


FIG. 1.1 – Un système réel est non linéaire, c'est-à-dire que les effets (mesurés ici par la variation d'une variable dynamique x) ne sont pas proportionnels aux causes.

qui semble faire référence à une classe particulière de processus, désigne donc en réalité l'immense majorité des phénomènes naturels. Un comportement linéaire reste une approximation idéale autour d'une situation d'équilibre. Par exemple, la vitesse maximale d'un pendule à la descente est approximativement proportionnelle à l'écart initial pour les oscillations de faibles amplitudes. Du point de vue mathématique, les équations (1.1) doivent traduire cet aspect non linéaire. C'est pourquoi \mathbf{f} est en général une fonction non linéaire des variables dynamiques et si $\mathbf{x}_1(t)$ et $\mathbf{x}_2(t)$ sont des solutions de (1.1), $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$ n'en est pas une.

1.1.1.2 L'espace des phases

Les comportements les plus simples que l'on peut observer sont les régimes stationnaires (aucune caractéristique n'évolue à l'échelle d'observation) et les régimes périodiques (les caractéristiques évoluent de manière cyclique). Ces comportements sont faciles à identifier puisque les variables dynamiques sont des fonctions constantes ou périodiques du temps. Des outils d'analyse comme la transformée de Fourier apportent une information simple (elle consiste à exprimer les variables sur une base de fonctions trigonométriques) et complète (l'avenir à long terme peut être prédit).

Cependant, la majorité des processus naturels sont irréguliers. Le mouvement d'un arbre, la trajectoire d'une particule dans un gaz, l'évolution des populations d'abeilles, la dynamique d'un laser, sont des exemples parmi tant d'autres. Si cela tient dans certains cas à la complexité même du système, il est désormais établi qu'un système très simple, c'est-à-dire caractérisé par un petit nombre de variables dynamiques, peut évoluer de manière très complexe. Par exemple, la figure 1.2 montre l'intensité du rayonnement émis par un laser en fonction du temps lorsque la puissance d'entrée est modulée sinusoidalement. La variable

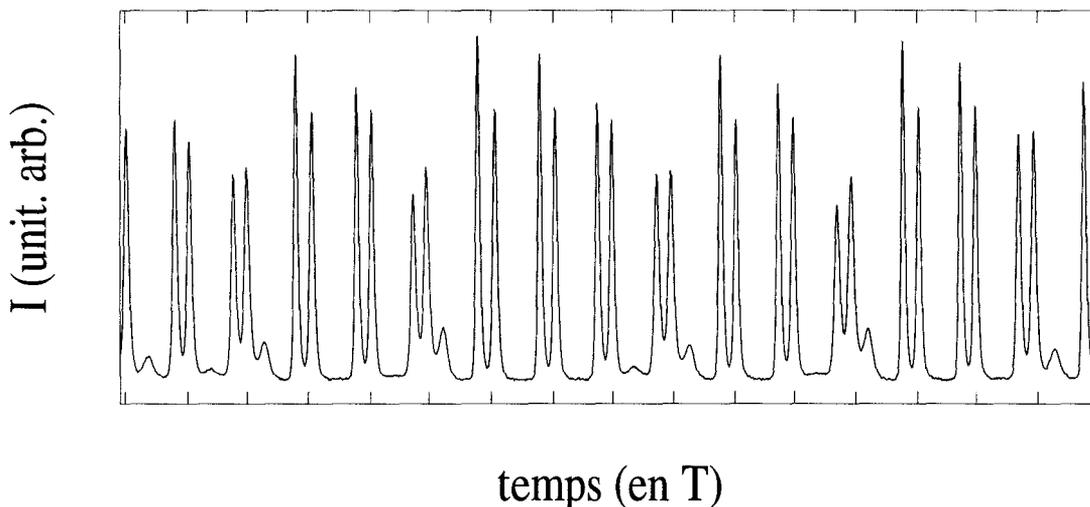


FIG. 1.2 – *Intensité du rayonnement émis par un laser en fonction du temps lorsque la puissance d'entrée est modulée sinusoidalement. Les graduations sont espacées d'une période de modulation.*

$I(t)$, associée à l'intensité, ne peut se décomposer sur aucune base de fonctions connues. Citons également l'exemple d'une corde vibrante et d'une balle qui rebondit sur un vibreur [Tuffiaro et al.92]. Dans ce cas, l'absence de régularité réduit considérablement la portée des prédictions bien que le système soit déterministe. Le signal est caractérisé par un spectre de Fourier large et une fonction d'autocorrélation rapidement décroissante à l'échelle de temps du processus. La représentation temporelle, c'est-à-dire la donnée des variables physiques en fonction du temps, est donc à l'évidence peu exploitable par les techniques classiques d'analyse. On introduit alors un espace de représentation mieux adapté, l'*espace des phases*, qui donne d'un seul coup d'oeil toute l'histoire du processus et grâce auquel il est possible de faire ressortir les aspects invariants du comportement.

Le vecteur $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^d$ introduit dans l'équation (1.1) définit l'*état* du système dans le sens où il permet de distinguer deux situations qui évolueront de manières différentes. Il définit également un point dans un espace abstrait de dimension d dont les axes portent les variables dynamiques x_i . L'ensemble des

états possibles constitue naturellement l'*espace des états*, communément appelé l'*espace des phases*. Il sera noté \mathcal{E}_φ par la suite.

L'application vectorielle $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ définit le champ de vitesse en \mathbf{x} et montre le sens d'évolution de l'état \mathbf{x} . L'ensemble des points successivement parcourus à partir d'un état initial \mathbf{x}_0 forme une courbe continue que l'on appelle une *orbite* du système. Cette trajectoire se réduit évidemment à un point lors d'un régime stationnaire ou à une courbe fermée lors d'un régime périodique.

On notera que la base de l'espace des phases doit comporter toutes les variables dynamiques, c'est-à-dire les variables physiques qui sont libres d'évoluer au cours du temps. La longueur du pendule est par exemple une variable dynamique si la corde qui relie la masse au pivot est élastique. Sinon elle est une variable statique qui s'ajoute aux autres paramètres. Pour tenir compte de cette éventualité il est commode de définir un espace plus vaste dans lequel les variables dynamiques et statiques sont indifférenciées (voir fig.1.3). Les variables désignées par $\boldsymbol{\mu}$ sont

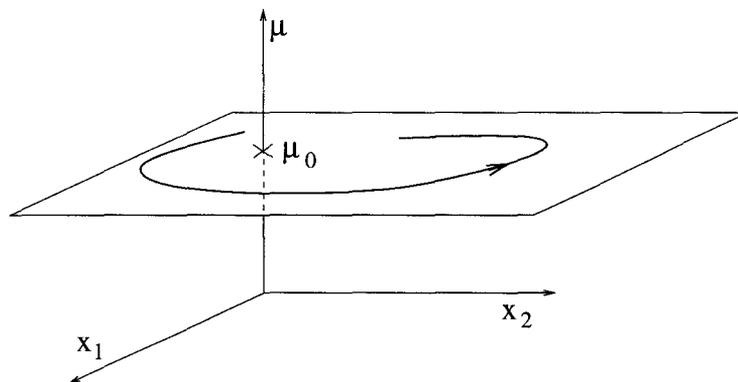


FIG. 1.3 – Espace construit sur la base de trois variables physiques x_1 , x_2 et μ . La variable μ est fixée à μ_0 . la dynamique est donc confinée dans un sous-espace à $d = 2$ dimensions qui correspond à l'espace des phases.

soumises à des contraintes qui leur imposent une valeur fixe. La dynamique est donc confinée dans un hyperplan défini par $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ et qui s'identifie à l'espace des phases. Pour cette raison les variables dynamiques sont également appelées les *degrés de liberté* et les variables statiques sont les paramètres qui spécifient les conditions de fonctionnement du système. Ce point de vue permet de comprendre un point important, à savoir qu'un degré de liberté est ajouté au système si l'on module un paramètre. Par exemple, si $\mu_i = m \cos \phi(t) = m \cos \omega t$ le système explore une dimension supplémentaire dans l'espace généralisé et la phase de modulation $\phi(t)$ doit être considérée comme une variable dynamique de sorte que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \phi, \boldsymbol{\mu}') \quad (1.3a)$$

$$\dot{\phi} = \omega \quad (1.3b)$$

où $\boldsymbol{\mu}' = (\{\mu_j\}_{j \neq i}, m, \omega)$ désigne les nouveaux paramètres. Plus généralement, il peut arriver que le champ de vecteur dépende explicitement du temps, c'est-à-dire que $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ne soit pas un champ statique dans l'espace des phases. Le système est dit non *autonome*. Toutefois, de manière équivalente à précédemment, tout système non autonome dans \mathbb{R}^d peut être rendu autonome dans \mathbb{R}^{d+1} trivialement en posant $x_{d+1} = t$. C'est pourquoi on considèrera systématiquement par la suite que le système est autonome, c'est-à-dire que le champ de vecteur ne dépend pas explicitement du temps, et ce, grâce à un choix convenable de l'espace des phases.

1.1.1.3 Le flot

Comme on part de l'hypothèse que l'état du processus, caractérisé par l'ensemble des variables dynamiques, évolue de manière déterministe, d'un point de l'espace des phases ne peut partir qu'une seule trajectoire. La conséquence directe et essentielle pour la suite est que deux trajectoires issues de deux points différents ne peuvent en aucun cas se couper. Comme le montre la figure 1.4, l'état associé au point d'intersection aurait deux passés et deux avenir.

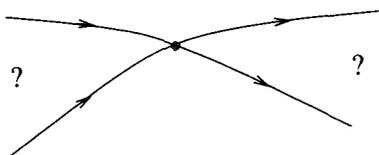


FIG. 1.4 – les trajectoires de phases ne peuvent se couper sans violer le déterminisme. l'état associé au point d'intersection aurait deux passés et deux avenir.

que l'on peut écrire formellement

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \phi(\mathbf{x}(t_n)) \quad (1.4)$$

où ϕ est une application qui définit de manière unique l'état du processus à chaque étape t_n . L'application ϕ possède donc des propriétés particulières qui garantissent l'unicité de la trajectoire. En l'occurrence, elle doit être une fonction continue, bijective et différentiable de \mathbf{x} dont l'inverse est aussi différentiable [Arnold73]. On dit que ϕ est un *difféomorphisme*¹. Si le processus est suivi à chaque instant t , l'évolution est donnée par une famille ϕ_t à un paramètre continu, le temps, de difféomorphismes:

$$\mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{x}_0) \quad (1.5)$$

1. Du point de vue mathématique, le champ de vecteurs doit en fait vérifier certaines conditions de régularité qui assurent l'existence et l'unicité de la solution de (1.1) dans un problème aux conditions initiales données (on pourra consulter par exemple [Hirsch et al.74] et [Arnold73]). Nous supposons ces conditions vérifiées par la suite.

Elle constitue un opérateur d'évolution dans \mathcal{E}_φ appelé le *flot* qui donne le devenir de \mathbf{x}_0 au bout du temps t . De même il permet de définir l'orbite issue du point \mathbf{x}_0 comme

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{E}_\varphi \\ t &\longrightarrow \mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Précisons que la famille des applications ϕ_t forme un groupe. En effet, elle possède un élément neutre (ϕ_0) et une loi de combinaison interne (la combinaison des applications):

1. $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_\varphi$
2. $\phi_{t+s}(\mathbf{x}) = \phi_t(\phi_s(\mathbf{x})) = \phi_{s+t}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_\varphi$ et $\forall s, t \in \mathbb{R}$

L'expression analytique du flot, qui est la solution intégrale de (1.1), ne s'obtient que dans de très rares cas et l'on doit en règle générale recourir à l'intégration numérique pour construire le portrait de phase, c'est-à-dire l'ensemble des orbites de l'espace des phases. C'est d'ailleurs le développement des calculateurs digitaux qui a remis l'analyse des systèmes dynamiques au goût du jour dans les années soixante.

1.1.1.4 En résumé

En résumé, nous supposons que le système physique peut être réduit à un modèle mathématique défini en terme d'un ensemble de variables d'état dépendant du temps et gouvernées par des équations d'évolution différentielles ordinaires. Les variables d'états ou *degrés de liberté* $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^d$ sont supposées former un ensemble complet de coordonnées généralisées dans un espace des phases adapté, c'est-à-dire dans lequel la trajectoire passant par un point \mathbf{x}_0 est définie de manière unique par un opérateur d'évolution $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ que l'on appelle le flot. Les conditions de fonctionnement seront spécifiées au moyen d'un ensemble de paramètres de contrôle $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_i\}_{i=1}^p$. Enfin, nous dirons qu'un système est *simple* si la dimension d de son espace des phases est petite, autrement dit s'il peut être décrit de manière déterministe par un petit nombre de variables dynamiques.

1.1.2 Point fixe et orbite périodique

Les comportements dynamiques les plus simples sont le régime stationnaire et le régime périodique. Dans l'espace des phases, le premier est un point d'équilibre \mathbf{x}^* , c'est-à-dire un point singulier du champ de vecteur solution de $\mathbf{f}_\mu(\mathbf{x}^*) = 0$. Pour cette raison, il n'évolue pas sous l'action du flot

$$\phi_t(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

et il est appelé un *point fixe* du flot.

Le régime périodique est une courbe fermée γ parcourue en un temps fini, la période T . Les points de γ évoluent sous l'action du flot mais restent sur γ : si $\mathbf{x} \in \gamma$, $\phi_t(\mathbf{x}) \in \gamma \forall t \in \mathbb{R}$. De manière plus condensée

$$\phi_t(\gamma) = \gamma \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Notons que dans un espace des phases de dimension 2 les orbites périodiques ne peuvent être que des déformations du cercle trivial puisqu'elles doivent se boucler sans aucune intersection. Ce sont d'ailleurs les seules trajectoires possibles, avec les points fixes, si l'on exclut les trajectoires errantes qui fuient vers l'infini [Guckenheimer et al.83]. Cela signifie en particulier qu'aucun comportement irrégulier ne peut exister dans un système à deux degrés de liberté. Dans des espaces de dimension 3 et plus, on peut au contraire imaginer n'importe quelle courbe nouée (voir fig. 1.5).

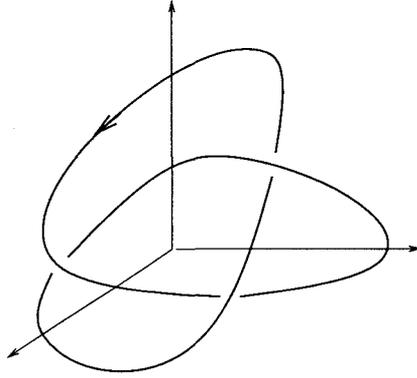


FIG. 1.5 – *Orbite périodique formant un nœud de trèfle dans un espace à trois degrés de liberté.*

Enfin, Les relations (1.7) et (1.8) montrent que les points fixes et les orbites périodiques sont des objets invariants par l'action du flot. Si le système est préparé initialement sur l'un de ces objets alors il y restera à tout jamais. Ce sont donc des situations d'équilibre.

1.1.3 Stabilité d'une orbite

L'état haut d'un pendule rigide, pour lequel la masse est à la verticale au dessus du pivot, est un état d'équilibre, en l'occurrence un point fixe de \mathcal{E}_φ . Cependant il n'est pas observable de manière permanente car il est *instable*. On entend par là que le moindre écart sera amplifié dans l'évolution naturelle.

Une situation d'équilibre, comme nous l'avons définie plus haut, est théoriquement invariante sous l'action du flot, mais une expérience réelle comporte du bruit qui agite de manière infinitésimale le système autour de l'équilibre. Celui-ci

ne sera donc observable sur le long terme que s'il est stable. Nous formalisons dans cette section la notion de stabilité d'une orbite. On introduit d'abord les *exposants de Lyapunov* qui mesurent le taux d'amplification au cours du temps des écarts infinitésimaux autour d'une trajectoire de phase. Puis le concept de *variété stable et instable* est présenté. Enfin, on définit la *torsion* d'une orbite qui caractérise la manière avec laquelle les trajectoires infiniment proches de l'orbite s'enroulent autour d'elle. Ce dernier élément sera de grande importance dans notre analyse du chaos.

1.1.3.1 Approche linéaire : les exposants de Lyapunov

La stabilité d'une orbite de référence $\mathbf{x}^*(t)$ est liée au comportement du système dans son voisinage immédiat, c'est-à-dire à l'évolution d'un écart infinitésimal $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$ de la trajectoire analysée $\mathbf{x}^*(t)$. Elle peut donc naturellement être définie au moyen du système linéarisé autour de $\mathbf{x}^*(t)$

$$\frac{d(\delta\mathbf{x}(t))}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*(t)) \times \delta\mathbf{x}(t), \quad (1.9)$$

où la matrice jacobienne² $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*(t))$ est donnée par:

$$J_{ij}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \quad (1.10)$$

La théorie des systèmes linéaires est bien connue [Arnold73]. Elle établit en particulier que l'espace peut être décomposé au voisinage de tout point \mathbf{x} sur la base des sous-espaces propres de la matrice jacobienne. On dit alors qu'un point est *hyperbolique* si on peut définir deux sous-espaces $E_s(\mathbf{x})$ et $E_i(\mathbf{x})$ respectivement stable et instable. Si le champ de vecteur est non nul en \mathbf{x} , il existe également un sous-espace neutre (ou central) $E_c(\mathbf{x})$ qui correspond à la direction du flot. La figure 1.6 donne un exemple de décomposition autour d'un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ de valeurs propres réelles $\lambda_s < 0$, $\lambda_i > 0$ et $\lambda_c = 0$. $E_s(\mathbf{x})$ et $E_i(\mathbf{x})$ contiennent l'ensemble des proches voisins de \mathbf{x} qui convergent exponentiellement vers l'orbite passant par \mathbf{x} quand le temps s'écoule respectivement de manière croissante et décroissante. L'analyse dans le cas de valeurs propres complexes est un peu plus subtile (on consultera par exemple [Guckenheimer et al.83]) mais les parties réelles caractérisent la stabilité du point de manière similaire.

Ces valeurs propres, où plus généralement leurs parties réelles, mesurent les taux de divergence (suivant E_i) et de contraction (suivant E_s) de trajectoires proches passant dans le voisinage de \mathbf{x} . En effet une boule de rayon ϵ_0 infinitésimal centrée sur \mathbf{x} se déforme sous l'action du flot en un ellipsoïde de grand axe orienté suivant E_i , et de longueur $\epsilon_0 e^{\lambda_i t}$ croissante, et de petit axe orienté suivant E_s , et de longueur $\epsilon_0 e^{\lambda_s t}$ tendant vers 0. Notons que dans ce cas les orbites possèdent localement une forme hyperbolique.

2. On suppose que la dimension de l'espace des phases est convenablement choisie pour que le système soit autonome. La matrice jacobienne ne dépend donc pas explicitement du temps.

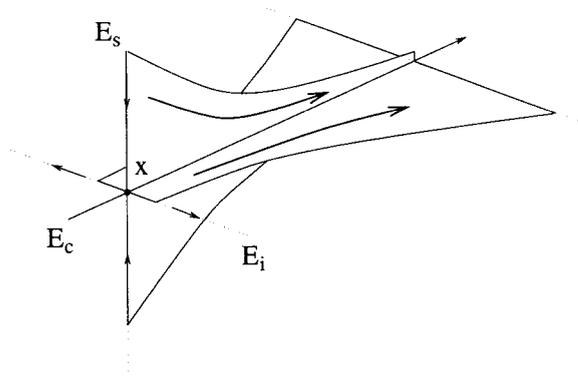


FIG. 1.6 – Décomposition de l'espace des phases autour d'un point hyperbolique x en directions stable E_s , instable E_i et neutre (ou centrale) E_c .

On définit communément les *exposants de Lyapunov* d'une orbite $\mathbf{x}^*(t)$ en étendant cette notion de stabilité locale. Les exposants de Lyapunov sont les moyennes temporelles de chaque taux de divergence et de convergence local, intégré sur un temps infini, c'est-à-dire moyenné le long de l'orbite analysée. La trajectoire de référence $\mathbf{x}^*(t)$ est bien entendu une orbite stable s'il n'existe aucune direction instable dans son voisinage, c'est-à-dire si aucun de ses exposants de Lyapunov n'est strictement positif.

1.1.3.2 Les variétés stables et instables

Les sous-espaces E_s et E_i définis ci-dessus sont des approximations locales d'espaces plus étendus et courbés que l'on appelle les variétés³ stable et instable. Prenons le cas simple où $\mathbf{x}^*(t)$ est un point fixe ($\phi_t(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^* \forall t \in \mathbb{R}$). On définit les deux variétés locales stable et instable de \mathbf{x}^* , et on note $\mathcal{W}_{loc}^s(\mathbf{x}^*)$ et $\mathcal{W}_{loc}^i(\mathbf{x}^*)$, comme le lieu des points qui convergent vers \mathbf{x}^* respectivement quand le temps s'écoule de manière croissante et décroissante [Guckenheimer et al.83]

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{loc}^s(\mathbf{x}^*) &= \{ \mathbf{x} \in U \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(\mathbf{x}), \mathbf{x}^*) = 0 \text{ et } \phi_t(\mathbf{x}) \in U \text{ pour tout } t \geq 0 \} \\ \mathcal{W}_{loc}^i(\mathbf{x}^*) &= \{ \mathbf{x} \in U \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_t(\mathbf{x}), \mathbf{x}^*) = 0 \text{ et } \phi_t(\mathbf{x}) \in U \text{ pour tout } t \leq 0 \} \end{aligned} \quad (1.11)$$

3. Une variété V de dimension n est un espace possédant la propriété suivante: en tout point de V , le système de coordonnées local est difféomorphe à celui de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . En clair, l'espace est suffisamment "lisse" pour qu'en chacun de ses points il puisse être localement approximé par \mathbb{R}^n . Les surfaces de la sphère et du tore qui, localement, peuvent être approximées par un plan, sont des variétés bidimensionnelles. Les surfaces du cône et du cube n'en sont pas à cause des singularités que constituent les coins et arêtes. Par variété invariante, on entend un domaine $V \subset \mathcal{E}_\varphi$ de l'espace des phases invariant sous l'action du flot, c'est-à-dire qui vérifie $\phi_t(V) = V$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si le système est préparé à un instant t_0 dans un état \mathbf{x}_0 appartenant à V , alors il restera à tout jamais dans V . Notons que, suivant cette définition, les points fixes, les orbites périodiques et l'espace des phases lui-même sont des variétés invariantes.

où U est un voisinage de \mathbf{x}^* et $d(.,.)$ une distance dans l'espace des phases.

Ces variétés sont donc invariantes sous l'action du flot et constituent le prolongement non linéaire des sous-espaces propres stable et instable "plats" que l'on peut comprendre comme leur développement limité à l'ordre 1 en \mathbf{x} (voir fig. 1.7). Ainsi la variété stable regroupe un ensemble d'états très particuliers,

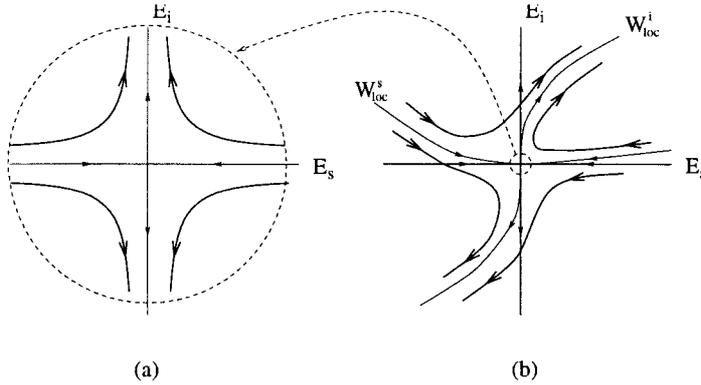


FIG. 1.7 – (a) Décomposition de l'espace des phases autour d'un point hyperbolique en directions stable et instable. (b) Les variétés stables et instables sont le prolongement non linéaire des sous-espaces propres du système linéaire.

ceux qui vont converger asymptotiquement vers le point fixe, quelle que soit sa stabilité. Par exemple, dans le cas du pendule rigide, ce sont tous les couples (position, vitesse) qui "lancent" la masse de telle sorte qu'elle s'arrête dans la situation d'équilibre instable, c'est-à-dire la position verticale haute.

Bien entendu, la définition des variétés stable et instable s'étend facilement au cas d'un point \mathbf{x} quelconque de \mathcal{E}_φ dont U est un voisinage

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{loc}^s(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{y} \in U \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_t(\mathbf{x}), \phi_t(\mathbf{y})) = 0 \text{ et } \phi_t(\mathbf{y}) \in U \text{ pour tout } t \geq 0\} \\ \mathcal{W}_{loc}^i(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{y} \in U \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_t(\mathbf{x}), \phi_t(\mathbf{y})) = 0 \text{ et } \phi_t(\mathbf{y}) \in U \text{ pour tout } t \leq 0\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

et par suite au cas d'une orbite périodique γ

$$\mathcal{W}_{loc}^{s(\text{resp. } i)}(\gamma) = \bigcup_{\mathbf{x} \in \gamma} \mathcal{W}_{loc}^{s(\text{resp. } i)}(\mathbf{x}) \quad (1.13)$$

La figure 1.8 représente une orbite périodique hyperbolique γ et ses variétés locales stable $\mathcal{W}_{loc}^s(\gamma)$ et instable $\mathcal{W}_{loc}^i(\gamma)$. Ces surfaces (de dimension 2 ici) indiquent comment les trajectoires évoluent dans le voisinage de γ . En particulier, une trajectoire typique s'approche de γ le long de la variété stable et s'éloigne le long de la variété instable.

De manière équivalente à l'analyse linéaire, une orbite est stable, et donc observable comme régime permanent, si elle n'a pas de variété instable, c'est-à-dire si toutes les directions transverses sont contractantes. Notons qu'une orbite

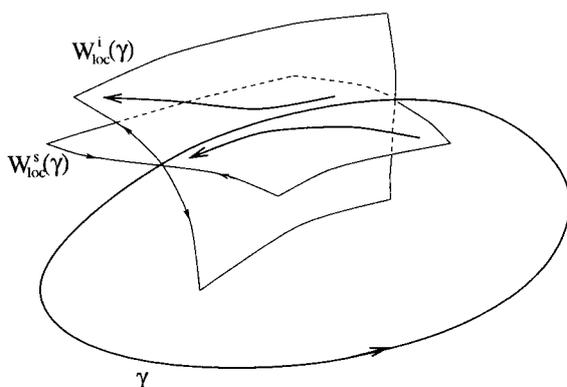


FIG. 1.8 – Les variétés indiquent le comportement des trajectoires dans le voisinage de l’orbite périodique.

qui n’est pas un point fixe possède inévitablement une variété centrale confondue avec elle-même. En effet, deux points voisins pris sur une orbite, resteront sur l’orbite et à distance finie et bornée.

Une propriété essentielle est que, en tant qu’ensembles invariants, les variétés stable et instable forment des parois que les trajectoires de phase, ni d’autres variétés d’ailleurs, ne peuvent traverser sans violer le déterminisme. Pour cela, une variété invariante est également appelée *séparatrice*. Elle constitue donc une véritable *frontière* dans l’espace des phases si, en plus, elle est *orientable*, c’est-à-dire s’il est possible de définir un “intérieur” et un “extérieur”. Plus formellement, si elle partitionne l’espace en deux domaines disjoints qui ne peuvent être visités par une même orbite. Par exemple, la sphère, le tore ou le ruban plat sont des variétés orientables. Le ruban de Mœbius et la bouteille de Klein n’en sont pas : si l’on parcourt leur surface, on se retrouve à volonté d’un côté ou de l’autre.

1.1.3.3 Torsion d’une orbite périodique

Lorsqu’on suit une orbite périodique γ sur une période complète, la variété instable $\mathcal{W}_{loc}^i(\gamma)$, et de manière équivalente la variété stable $\mathcal{W}_{loc}^s(\gamma)$ puisqu’elles ne peuvent pas s’interpénétrer, peut effectuer une rotation d’un nombre entier de demi-tours. Sur la figure 1.9, par exemple, $\mathcal{W}_{loc}^i(\gamma)$ effectue un demi-tour le long de l’orbite périodique γ . Ce nombre, égal à 1 ici, est appelé la *torsion locale* de l’orbite et sera noté $\theta_{loc}(\gamma)$.

Les variétés constituent localement un cloisonnement de l’espace des phases qui détermine l’organisation des trajectoires dans le voisinage de γ . La torsion locale $\theta_{loc}(\gamma)$ caractérise donc la rotation autour de γ des trajectoires infiniment proches.

Remarquons que si l’on dispose d’un modèle, cette quantité peut être calculée numériquement au moyen des équations (1.9) linéarisées autour de l’orbite pério-

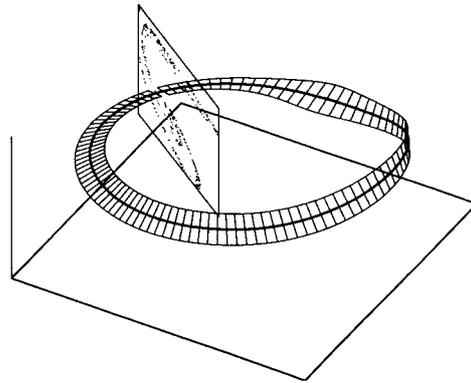


FIG. 1.9 – Evolution de la variété instable d'une orbite périodique d'un modèle de laser [Boulant et al.a]. La variété effectue une rotation d'un demi-tour et la torsion de l'orbite est donc égale à 1.

dique [Boulant et al.a]. Le vecteur propre de valeur propre positive est tangent à $\mathcal{W}_{loc}^i(\gamma)$ en chaque point de γ . La rotation de ce vecteur en unité de π correspond donc à la torsion locale.

Notons enfin que la parité de la torsion d'une orbite indique si les variétés stable et instable sont orientables. Si elle est impaire, comme sur l'exemple de la figure 1.9, les variétés sont des rubans de Möbius et par là même non orientables. Elles sont par contre des frontières, au sens défini plus haut, si la torsion est paire, c'est à dire si les variétés font un nombre entier de tours complets.

1.1.4 Dissipation et attracteur

Nous avons défini les propriétés de l'espace des phases et décrit les différents objets qui pouvaient y être rencontrés. Nous allons voir maintenant dans quelle mesure ces éléments permettent de décrire les phénomènes observables.

Un processus est dit *conservatif* quand le système mis en jeu n'échange pas d'énergie avec son environnement. C'est le cas par exemple du mouvement des planètes du système solaire mais il s'agit souvent d'une situation fictive idéale. Dans cette classe de systèmes, chaque état initial \mathbf{x}_0 conduit à un régime observable différent, défini implicitement par l'énergie $E(\mathbf{x}(t)) = E(\mathbf{x}_0)$ injectée au départ. Par exemple, l'amplitude des oscillations du pendule libre est fixée de manière bijective par la position et la vitesse initiale de la masse.

À l'opposé, un processus réel, qui est en règle générale *dissipatif*, commence par un régime transitoire qui évolue vers un régime permanent sans corrélation avec l'état initial. Par exemple, le pendule couplé à l'extérieur par un frottement visqueux évoluera vers la position verticale stable quelle que soit sa situation initiale. Pendant la phase transitoire, la dissipation vient en fait constamment réduire le nombre d'états accessibles, pour s'arrêter sur un régime d'équilibre

dans lequel le gain d'énergie compense en moyenne les pertes.

Observée dans l'espace des phases, la trajectoire associée au régime transitoire $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ semble être attirée vers un domaine de volume très réduit. Pour être exact, seuls les états contenus dans une région bornée appelée le *bassin d'attraction* évolue vers le domaine asymptotique (voir fig.1.10). On définit alors

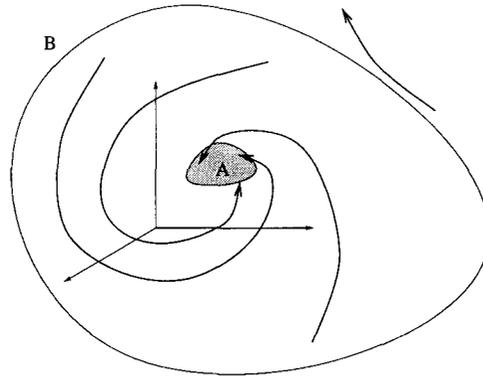


FIG. 1.10 – Allure schématique du portrait de phase d'un système dissipatif. Toutes les trajectoires issues de la région piège B convergent irréversiblement vers un objet de volume nul, l'attracteur A.

l'*attracteur* comme l'objet du bassin d'attraction sur lequel s'accroissent toutes les orbites $\phi_t(\mathbf{x})$ issues de la région piège. L'attracteur est par exemple un point fixe si le régime permanent est stationnaire, une orbite périodique si le régime est périodique, mais il peut être beaucoup plus complexe si le régime est irrégulier. Notons que sous l'action du flot un domaine quelconque U du bassin d'attraction va s'accroître sur l'ensemble limite attracteur de volume nul (voir fig.1.11). Cette

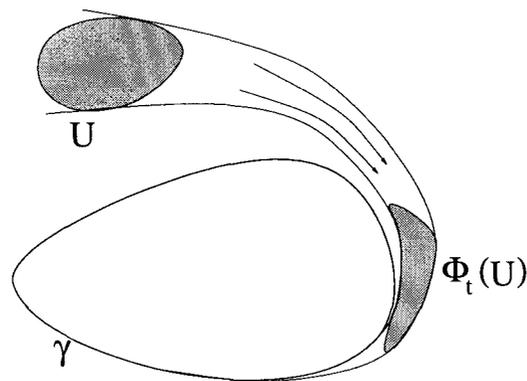


FIG. 1.11 – Illustration de la contraction des volumes dans l'espace des phases. L'attracteur est ici une orbite périodique stable.

contraction des volumes dans l'espace des phases est une propriété caractéristique

des systèmes dissipatifs qui signe l'existence d'un attracteur.

Le concept d'attracteur dépasse largement celui du point fixe ou de l'orbite périodique et mérite donc d'être précisé par une définition mathématique. Tout d'abord, on dit qu'un ensemble fermé de points $A \subset \mathcal{E}_\varphi$ est un *ensemble attracteur* de bassin d'attraction B si [Eckmann et al.85]

1. A est invariant sous l'action du flot, $\phi_t(A) = A \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (il s'agit bien entendu d'une invariance globale et non pas ponctuelle, c'est-à-dire $\mathbf{x} \in A \Rightarrow \phi_t(\mathbf{x}) \in A \quad \forall t \in \mathbb{R}$).
2. quel que soit le domaine U contenant A , on a $\phi_t(B) \subset U$ au bout d'un certain temps.

Cette deuxième condition traduit simplement le fait que toutes les orbites issues de la région piège finissent par s'accumuler sur A . On peut alors écrire de manière compacte

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(B) \quad (1.14)$$

c'est-à-dire l'intersection de toutes les images de B , et réciproquement

$$B = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(A) \quad (1.15)$$

c'est-à-dire l'union de toutes les préimages de A .

Pour que la définition mathématique reflète fidèlement les régimes asymptotiques observés, on impose à un attracteur d'être en plus indécomposable, c'est-à-dire qu'il ne soit pas l'union de plusieurs sous-ensembles attracteurs qui soient séparément invariants. Cela implique qu'il existe une orbite *dense* dans l'attracteur, c'est à dire une orbite qui passe arbitrairement près de chaque point de A . Cette contrainte est absolument nécessaire car rien n'interdit la coexistence de plusieurs attracteurs disjoints possédant chacun un bassin d'attraction, le tout formant un ensemble attracteur. Une telle situation est dite *multistable* car le régime effectivement observé dépend du domaine dans lequel le système est préparé. Notons que les bassins d'attractions coexistants ont nécessairement une intersection vide et sont séparés par un répulseur⁴, c'est-à-dire en général une orbite instable. Sur la figure 1.12 par exemple, deux attracteurs coexistent, un cycle limite γ et un nœud stable p . Les bassins d'attraction ont une frontière commune qui s'identifie à la variété stable d'un point selle q . En général, la frontière d'un bassin d'attraction est la variété stable d'une orbite instable. La torsion de cette orbite doit être paire pour que la variété soit orientable et empêche la communication entre l'intérieur et l'extérieur du bassin.

4. Un répulseur est défini comme un attracteur en remplaçant t par $-t$

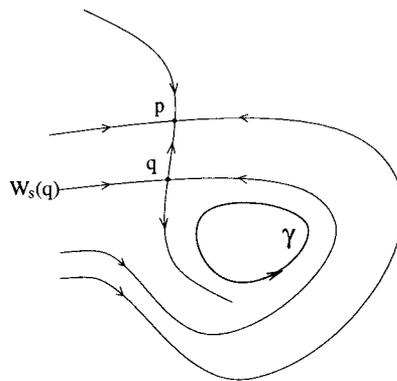


FIG. 1.12 – Deux attracteurs coexistent, un cycle limite γ et un nœud stable p . Les bassins d'attraction sont séparés par la variété stable d'un point selle q .

1.1.5 Bifurcations

Nous venons d'expliquer que le régime permanent d'un processus physique est insensible au choix des conditions initiales, si elles sont choisies dans le même bassin d'attraction. Ceci est lié à l'effet de contraction des volumes dans l'espace des phases qui conduit à une accumulation des trajectoires sur l'attracteur. Par contre, ce régime permanent dépend *a priori* des conditions expérimentales. Si un paramètre μ est modifié continûment, on observe en général une transformation continue de l'attracteur mais il peut arriver qu'un changement qualitatif dans le comportement du système survienne lorsque μ passe une valeur critique μ_c . Cette transition est appelée une *bifurcation*. Lorsqu'on module sinusoidalement la puissance de pompe d'un laser, la réponse en intensité est de même période T si l'amplitude de modulation m est suffisamment faible. Mais si elle dépasse une valeur critique m_c on peut assister par exemple à un doublement de période, la réponse est de période $2T$. De manière générale une bifurcation se manifeste dans l'observation directe d'une variable du système par une brisure spontanée de symétrie temporelle (l'invariance par translation de durée T dans l'exemple précédent). Spontanée car elle n'est imposée par aucune contrainte extérieure. Les bifurcations des systèmes dynamiques sont donc l'analogie des transitions de phase entre états de la matière, qui sont des brisures spontanées de symétrie spatiale.

1.1.5.1 Une définition

Si l'on observe le *portrait de phase*, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les orbites générées par le flot dans l'espace des phases, on s'aperçoit que les trajectoires n'ont pas la même allure de part et d'autre d'un point de bifurcation μ_c . Aussi la définition d'une bifurcation repose sur une comparaison et une classification des régimes dynamiques d'après leur portrait de phase et donc sur une relation

d'équivalence.

On dit qu'il y a *équivalence topologique orbitale* entre deux portraits de phase s'ils peuvent être déduits l'un de l'autre par une déformation continue sans coupure, ni déchirure et par suite sans intersection entre orbites [Jackson88] (voir fig.1.13). Cela signifie que les portraits de phase, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les orbites, peuvent être reliés par un *homéomorphisme*, c'est-à-dire une application bijective et continue de $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_\varphi$, qui préserve l'orientation.

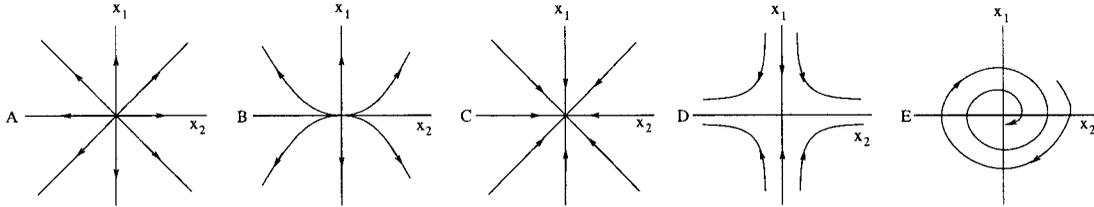


FIG. 1.13 – Illustration de l'équivalence topologique orbitale, avec les portraits de phases de quelques points fixes du plan (tirée de [Jackson88]). A, B et C sont de type nœud (les deux exposants de Lyapunov sont réels et de mêmes signes) mais seul C est stable. D est de type selle (les exposants sont réels mais de signes opposés). E est un foyer (les exposants sont complexes conjugués) stable (partie réelle négative). Les portraits A et B peuvent être déformés continûment l'un dans l'autre. Par contre, ils ne sont pas équivalents à C car l'orientation n'est pas préservée, ni à D. De manière moins évidente, E et C sont équivalents par un enroulement infini autour du point. D'ailleurs, une transition nœud stable \leftrightarrow foyer stable ne se voit pas expérimentalement lorsqu'on observe l'évolution de l'attracteur.

Une relation d'équivalence topologique peut également être définie pour le flot, mais de manière moins intuitive. Si $\phi_t(\mathbf{x})$ et $\varphi_t(\mathbf{y})$ sont les solutions respectives des systèmes $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ et $\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{y})$ de dimension d , on dit qu'ils sont des flots *topologiquement équivalents* s'il existe un homéomorphisme $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ tel que $\phi_t(\mathbf{x}) = h^{-1}(\varphi_t(h(\mathbf{x})))$ [Arnold73]. Il faut donc qu'ils puissent se déduire l'un de l'autre par un changement de variable bijectif et continu. Notons que cette relation d'équivalence peut tout à fait être utilisée pour comparer les flots d'un même système obtenus pour des valeurs de paramètres différentes.

Par conséquent, nous définirons une bifurcation d'un système dynamique de la manière suivante [Jackson88]:

définition 1. μ_c est un point de bifurcation sur l'axe μ pour le flot ϕ_t^μ si, quel que soit $\varepsilon > 0$, les flots $\phi_t^{\mu_c - \varepsilon}$ et $\phi_t^{\mu_c + \varepsilon}$ sont topologiquement non équivalents. Ceci revient à dire qu'il n'y a pas équivalence topologique orbitale entre les portraits de phase respectifs.

Plus globalement, on appellera *diagramme de bifurcations*, une partition de l'espace des paramètres en domaines dans lesquels les flots sont topologiquement

non équivalents.

La figure 1.14 illustre un diagramme de bifurcation de l'application discrète $x_{n+1} = \phi(x_n) = \mu - x_n^2$ où $x_n = x(t_n)$ est la variable dynamique observée à chaque étape t_n et μ le paramètre de contrôle [Glendinning94]. On distingue clairement

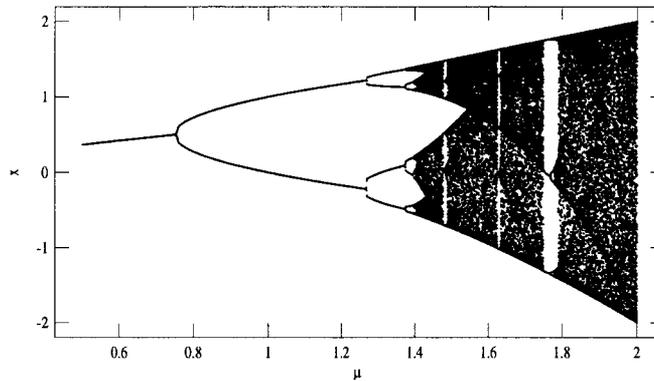


FIG. 1.14 – Diagramme de bifurcation de l'application $x_{n+1} = \phi(x_n) = \mu - x_n^2$ où $x_n = x(t_n)$ est la variable dynamique observée à chaque étape t_n et μ le paramètre de contrôle. Les branches indiquent les positions des points de l'attracteur. On distingue clairement des valeurs de μ pour lesquelles la dynamique est modifiée de manière qualitative.

des valeurs de μ pour lesquelles la dynamique est modifiée de manière qualitative.

Dans la pratique, une bifurcation correspond à un changement d'attracteur. Deux types doivent alors être distingués, les bifurcations globales et locales. Pour les premières, le régime saute brusquement sur un attracteur éloigné. C'est le cas par exemple de la commutation entre régimes bistables, ou des phénomènes de crises qui seront abordés au quatrième chapitre. Pour les secondes, les attracteurs $A_{\mu_c - \varepsilon}$ et $A_{\mu_c + \varepsilon}$ sont voisins et confondus au point de transition $\varepsilon = 0$. Dans ce cas, les bifurcations peuvent être caractérisées par une analyse locale du système et classées d'après l'évolution des exposants de Lyapunov de l'attracteur qui bifurque [Guckenheimer et al.83].

1.1.5.2 Deux exemples

Deux exemples de bifurcation sont à retenir pour la suite, le *doublément de période* (DP) et la *bifurcation nœud-selle* (NS), appelée également *bifurcation tangente*. La première est la déstabilisation d'une orbite périodique vers une orbite de période double. Elle est illustrée par la figure 1.15a. Avant la bifurcation, les directions transverses de l'orbite $1T$ sont contractantes et sa torsion est impaire de telle sorte que les trajectoires voisines passent alternativement d'un côté puis de l'autre des séparatrices à chaque période. A la bifurcation, un des exposants

de Lyapunov devient positif et l'orbite se déstabilise au profit d'une orbite stable de période double puisque les trajectoires locales divergent de manière alternée. Il est à noter qu'au point de bifurcation l'orbite $2T$ est confondue avec l'orbite $1T$ et la bifurcation ressemble à une brisure de l'orbite $1T$ en deux boucles connectées.

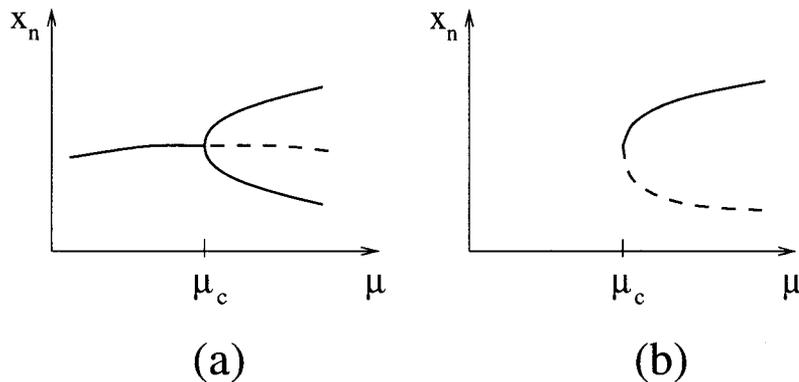


FIG. 1.15 – Diagrammes de bifurcations schématisés (a) du doublement de période et (b) de la bifurcation nœud-selle. L'ordonnée représente une variable dynamique $x_n = x(t_0 + nT)$ échantillonnée à chaque période de référence T et l'abscisse un paramètre de contrôle. (a) Avant la bifurcation, x_n (trait plein) prend toujours la même valeur : l'attracteur est de période T . Après la bifurcation, x_n prend alternativement deux valeurs distinctes : l'attracteur est toujours périodique mais de période double $2T$. L'orbite $1T$ existe encore mais est instable (pointillés). (b) Il apparaît une paire d'orbites stable et instable de type nœud et selle respectivement.

La bifurcation NS correspond à la création simultanée de deux orbites périodiques jumelles stable et instable (voir fig. 1.15b). La première est de type nœud, c'est-à-dire que ses exposants de Lyapunov sont tous réels et négatifs, et correspond à l'attracteur. La seconde est de type selle car au moins un exposant est positif [Guckenheimer et al.83]. Notons que les deux orbites possèdent des variétés séparatrices et peuvent donc être caractérisées par une torsion locale. Comme le nœud et la selle sont confondus à la bifurcation, les deux torsions doivent être égales, au moins sur une certaine plage de paramètres.

1.1.6 En résumé

Nous avons vu, au cours de cette première section qu'un processus de modélisation conduit, pour une large classe de phénomènes naturels, à un système dynamique, c'est-à-dire à un ensemble de variables dynamiques $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^d$ dont l'évolution est gouvernée par des équations différentielles ordinaires (en général non linéaires). Le cadre théorique d'analyse des systèmes dynamiques est l'espace des phases dans lequel agit un opérateur d'évolution, le flot ϕ_t . Celui-ci détermine de manière unique la trajectoire $\phi_t(\mathbf{x})$ issue de l'état \mathbf{x} . La conséquence directe

est qu'une orbite de l'espace des phases ne peut se couper elle-même ni avoir d'intersection avec d'autres trajectoires sans violer le déterminisme. Cependant le déterminisme n'interdit pas une évolution irrégulière, au cours de laquelle le pouvoir de prédiction est considérablement réduit⁵.

Le comportement d'un système dans une situation particulière spécifiée par ses paramètres de contrôle est complètement défini par son portrait de phase, c'est-à-dire l'allure, la *topologie*, des orbites dans l'espace des phases. Les objets qui organisent le portrait de phase sont essentiellement les points fixes, les orbites périodiques et leurs variétés séparatrices qui définissent leur stabilité et l'organisation du flot dans le voisinage. Dans l'exemple fréquemment choisi du pendule pesant, ces notions se conçoivent intuitivement mais il n'en est généralement pas ainsi et il était donc indispensable de donner des définitions suffisamment précises pour raisonner de manière abstraite dans l'espace des phases.

Enfin, les régimes permanents observés dans les systèmes dissipatifs correspondent dans l'espace des phases à des objets appelés attracteurs sur lesquels s'accumulent toutes les orbites issues d'une région piège appelée le bassin d'attraction. Dans les cas les plus simples, les attracteurs sont des points fixes stables ou des orbites périodiques stables, mais nous verrons en section 1.3 qu'ils peuvent être des objets bien plus complexes pour une dynamique irrégulière.

1.2 Reconstruction de l'espace des phases expérimental

Le cadre théorique d'analyse des systèmes dynamiques, présenté en section 1.1, repose sur le principe qu'il existe des variables physiques qui caractérisent l'état du phénomène étudié et qu'elles sont observables. Pourtant, dans la plupart des systèmes expérimentaux, une seule variable est accessible à la mesure. Par exemple, le comportement d'un laser est observable à travers l'intensité du rayonnement émis uniquement. Les données récoltées lors d'une expérience sont des *séries temporelles* scalaires, c'est-à-dire les valeurs du signal $s(t)$ à intervalles réguliers. L'analyse d'un système expérimental suppose donc qu'il est possible de reconstruire un espace des phases équivalent à l'espace naturel, ou plus formellement qu'il existe une fonctionnelle F telle que $\tilde{x}(t) = F\{s(t)\}$ soit une orbite équivalente à l'orbite naturelle $x(t)$. On entend par équivalent que les caractéristiques (généralement topologiques, mais aussi quantitatives tels que les exposants de Lyapunov) des orbites seront les mêmes, qu'elles soient calculées dans l'un ou l'autre des espaces. De nombreux travaux existent sur la *reconstruction*. On

5. On dit que le comportement est *imprédictible* bien que ce dernier mot n'existe pas encore dans le dictionnaire

consultera par exemple [Breedon et al.90, Casdagli et al.91, Gouesbet et al.94, Abarbanel et al.93, Abarbanel et al.94] et [Letellier94].

L'idée de base des méthodes de reconstruction est que le passé et le futur d'une variable dynamique contient de l'information sur les autres. En effet, les couplages entre degrés de liberté permettent la transmission d'informations d'une variable à l'autre. Aussi, deux méthodes ont été introduites par N. H. Packard *et al.* [Packard et al.80] et justifiées mathématiquement par F. Takens [Takens80]. Elles consistent à représenter l'état du système à l'instant t par un point dans un espace \mathbb{R}^m dont les coordonnées sont les dérivées successives de $s(t)$ pour la première:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \left(s(t), \frac{ds(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}s(t)}{dt^{m-1}} \right) \quad (1.16)$$

et les valeurs retardées d'un délai τ pour la seconde:

$$\tilde{\mathbf{x}} = (s(t), s(t + \tau), \dots, s(t + (m - 1)\tau)) \quad (1.17)$$

F. Takens a montré que le passage des variables naturelles à ces nouvelles variables revient dans certaines conditions, que l'on va préciser, à faire un changement de coordonnées $\tilde{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x})$ qui préserve les grandeurs caractéristiques (dimension fractale, entropie, exposants de Lyapunov, ...) et qui donne un portrait de phase topologiquement équivalent au portrait naturel. En fait, pour qu'aucune information ne soit perdue dans la reconstruction, il faut qu'il y ait correspondance bijective entre les points de \mathcal{E}_φ et de \mathbb{R}^m . L'application $g : \mathcal{E}_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^m$ doit donc être un *plongement*, c'est-à-dire une transformation différentiable bijective dont la transformation inverse différentiable existe [Sauer et al.91]. La figure 1.16 illustre par exemple une transformation de $M = \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^3 qui n'est pas un plongement à cause de l'auto-intersection de $g(M)$.

La dimension m de l'espace des phases reconstruit, appelée la *dimension de plongement*, doit évidemment être au moins égale à d , la dimension de l'espace naturel. Cependant il se peut que cette valeur ne suffise pas et que le changement de coordonnées introduise des intersections entre trajectoires reconstruites. F. Takens a montré que g est un plongement de manière générique lorsque $m \geq 2d + 1$. Ceci signifie que n'importe quel changement de coordonnées $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $m \geq 2d + 1$ est un plongement mais cela n'exclut pas l'existence de plongement avec $m = d$.

Les séries temporelles des systèmes optiques sont typiquement des enregistrements d'une intensité lumineuse $I(t)$. Les expériences que nous avons menées consistent globalement en une analyse du comportement induit par un forçage périodique d'un paramètre. Dans ce cas, une variable dynamique supplémentaire est connue, la phase de modulation $\phi(t)$. Nous verrons alors que les régimes dynamiques peuvent être analysés dans les espaces tridimensionnels (x, \dot{x}, ϕ) ou $(x(t), x(t + \tau), \phi)$, où $x(t)$ est le signal correspondant à la série temporelle (nous verrons qu'il est légèrement différent de l'intensité directe $I(t)$). Ces espaces sont

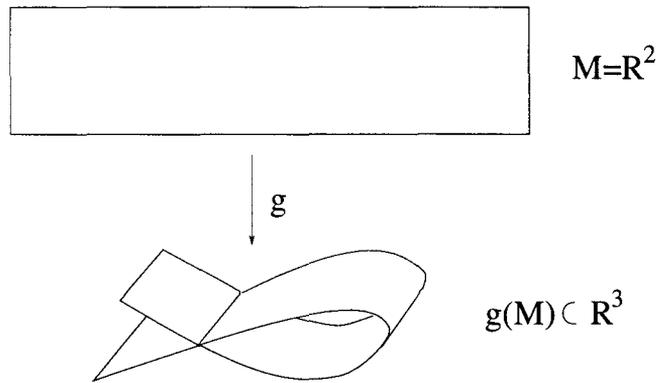


FIG. 1.16 – L'application g n'est pas un plongement. Les points de l'autointersection de $g(M)$ sont chacun l'image de deux points différents de l'espace original. De l'information est donc perdue puisque certains états naturels sont dégénérés dans l'espace reconstruit. (schéma inspiré de [Letellier94])

topologiquement équivalents à $\mathbb{R}^2 \times S^1$ où S^1 est le cercle unité qui porte la phase de modulation (voir la figure 1.21 pour un exemple d'espace des phases du type $\mathbb{R}^2 \times S^1$).

1.3 Les outils de base de l'analyse du chaos

Nous avons évoqué plusieurs fois, au cours des pages précédentes, l'existence de comportements déterministes sans régularité. Ceci apparaît dans les travaux de Henri Poincaré [Poincare99] mais l'idée qu'une évolution complexe puisse subvenir dans un système dynamique de petite dimension n'a été communément admise qu'au cours des années soixante, à la suite de l'article de E. N. Lorenz [Lorenz63]. Celui-ci établit, à l'aide de calculateurs digitaux, qu'un système déterministe de trois équations différentielles ordinaires possède des solutions apériodiques. Par cette analyse, il démontre à la fois qu'un système simple peut avoir un comportement très complexe et qu'un mouvement qui semble aléatoire peut en fait être gouverné par des règles très simples. Dans ces situations dites chaotiques, l'absence de régularité réduit bien entendu considérablement le pouvoir de prédiction mais l'évolution n'en est pas moins déterministe.

Nous avons également prétendu que l'espace des phases constituait un cadre d'analyse adapté aux comportements chaotiques, c'est-à-dire capable d'en faire ressortir les aspects déterministes et invariants. En particulier, pour les systèmes dissipatifs, un régime chaotique correspond à un attracteur, c'est-à-dire un ensemble invariant de volume nul sur lequel viennent s'accumuler toutes les trajectoires issues d'une région piège. Par contre, cet ensemble ne se réduit pas à un simple point ou à une orbite périodique. La figure 1.17 représente par exemple une

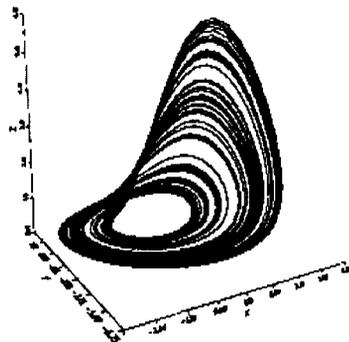


FIG. 1.17 – *Orbite correspondant à un régime permanent chaotique du système de Roessler. Cette orbite est contenue dans un attracteur appelé un attracteur chaotique.*

orbite correspondant à un régime permanent chaotique du système de Roessler [Roessler76].

Nous allons voir dans cette section que l'on peut définir le chaos comme un régime permanent irrégulier qui présente les deux caractéristiques suivantes:

1. La source principale d'imprédictibilité est une sensibilité extrême aux conditions initiales.
2. L'attracteur possède une structure fractale⁶.

Nous décrirons ensuite deux outils classiques d'analyse des attracteurs chaotiques, l'*application de Poincaré* et la *dynamique symbolique* ainsi que des moyens de caractérisation des propriétés statistiques dans \mathcal{E}_φ comme la *dimension* et l'*entropie*.

1.3.1 Une définition du chaos

1.3.1.1 La sensibilité aux conditions initiales

Prenons deux copies rigoureusement identiques d'un système dynamique. S'ils sont préparés dans des états initiaux quelconques idéalement identiques, le déterminisme impose qu'ils évoluent de manière rigoureusement identique. Ils décrivent la même orbite qu'elle soit stationnaire, périodique ou irrégulière. Imaginons maintenant qu'ils soient préparés dans des états légèrement distincts. Dans certaines situations, cet écart s'estompe au cours du temps, au pire reste du même ordre de grandeur. Les orbites restent dans le voisinage l'une de l'autre. Cela signifie qu'une mesure approximative de l'état initial d'un système unique

6. S'il présente cette caractéristique, un attracteur est dit étrange. Les attracteurs chaotiques expérimentaux sont étranges mais il existe des applications mathématiques possédant des attracteurs chaotiques non fractaux

permet de prédire son évolution avec une précision raisonnable du même ordre de grandeur. Dans d'autres situations, par contre, l'écart est amplifié exponentiellement de telle sorte que les orbites suivent très vite des trajectoires totalement différentes. Des mesures répétées sur un système unique donnerait l'impression qu'il n'est pas déterministe. Cette sensibilité extrême aux imprécisions de mesures, vulgarisée sous le nom d'*effet papillon*, est naturellement une source d'imprédictibilité, c'est-à-dire d'une impossibilité pratique à prédire l'évolution à long terme bien qu'elle soit déterministe.

La *sensibilité aux conditions initiales* n'est pas la seule source possible d'imprédictibilité. Bien souvent, les comportements complexes résultent de la complexité même du système. Par exemple, la quantité d'informations à traiter simultanément pour prédire le mouvement des particules d'un gaz est telle que l'observateur doit recourir à une description statistique globale. Dans ce type de situation, il s'ajoute à la sensibilité aux conditions initiales une limitation humaine et technique qui ne permet pas de prendre en compte l'ensemble des degrés de liberté.

Si au contraire l'espace des phases est de petite dimension, alors la seule source d'imprédictibilité est la sensibilité aux conditions initiales: on parle de *chaos déterministe*⁷. C'est ce type de chaos qui choque l'intuition et qui a ouvert un champ d'investigation très large car c'est une propriété intrinsèque au système qui interdit les prévisions à long terme.

Pour que le comportement reproduise la sensibilité aux conditions initiales dans l'espace des phases, il est nécessaire qu'en tout point de l'attracteur existe au moins une direction instable⁸. Cela signifie que toutes les orbites contenues dans un attracteur chaotique sont caractérisées par un exposant de Lyapunov positif qui donne une mesure du taux de divergence des trajectoires voisines. La somme des exposants reste cependant négative puisque l'étirement doit être compensé dans les directions transverses pour assurer globalement une contraction des volumes. En effet, le volume d'une boule infiniment petite centrée sur un point $\mathbf{x} \in A$ évolue en $\exp(\sum_{i=1}^d \lambda_i t)$ et doit tendre vers 0. Comme la contraction ne s'effectue pas dans toutes les directions, l'ensemble des états initiaux appartenant à la boule est rapidement dispersé dans tout l'attracteur, à l'image d'une goutte de colorant dans un pot de peinture que l'on mélange.

7. La terminologie est trompeuse car le déterminisme doit être admis à toutes les échelles ou pas du tout. L'existence d'une dimension critique au delà de laquelle un système n'est plus déterministe n'a aucun sens. Par contre, un problème évident de représentation des systèmes complexes de grande dimension oblige l'observateur à coder la majorité des degrés de liberté non pertinents par des fonctions aléatoires. Par exemple, les propriétés du mouvement brownien d'une particule dans un gaz se déterminent par des techniques de marche au hasard. Ainsi, le déterminisme est, dans la pratique, mis en défaut bien que fondamentalement valable.

8. Nous verrons en fait par la suite que les attracteurs des systèmes expérimentaux ou des simulations de modèles physiques ne sont pas hyperboliques, c'est-à-dire qu'en certains points il est impossible de définir une direction instable distincte d'une direction stable.

1.3.1.2 Structure de l'attracteur chaotique

La figure 1.18 illustre le mécanisme de base qui organise la structure d'un attracteur. L'ensemble des trajectoires subit un *étirement* dans une direction que l'on peut identifier à une variété instable. L'explosion est compensée par un processus de *repliement* et compression dans une direction transverse que l'on peut identifier à une variété stable. Ce processus réinjecte les trajectoires au cœur de l'attracteur. Enfin l'attracteur se reboucle sur lui-même car il correspond généralement à une situation oscillante. On peut constater que le mécanisme reproduit à l'infini donne à l'attracteur une structure feuilletée dans la direction associée à la variété stable, et une structure continue dans la direction associée à la variété instable. L'ensemble forme un objet *fractal* dynamiquement stable et invariant.

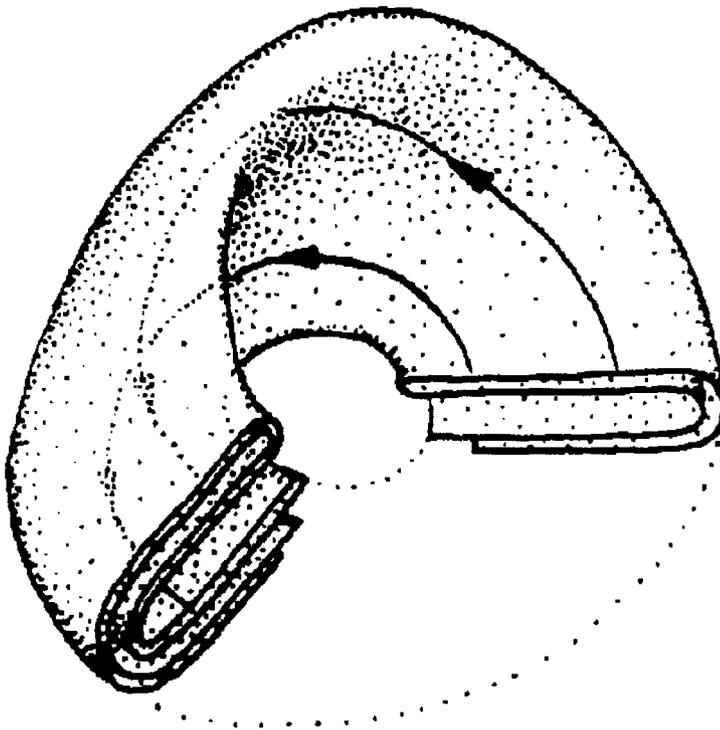


FIG. 1.18 – Mécanisme de base organisant la structure d'un attracteur chaotique: combinaison d'un étirement et d'un repliement. (tiré de [Nicolis95])

S. Smale a introduit un modèle simplifié, pour décrire cette organisation globale typique [Smale67, Guckenheimer83]. Ce modèle fameux, baptisé *Fer à cheval*, est un processus géométrique réduit aux deux seuls mécanismes élémentaires d'étirement et repliement. La figure 1.19(a) représente la transformation d'un

segment ABC par l'application de Smale⁹. Par itérations successives, apparaît la structure feuilletée caractéristique des attracteurs chaotiques. La transformation du segment par l'application Fer à cheval permet, à l'évidence, une sensibilité aux conditions initiales tout en assurant un confinement dans une région bornée de l'espace. Notons que l'opération subie par le segment ABC dans une itération peut être décrite par l'application à un maximum de la figure 1.19(b).

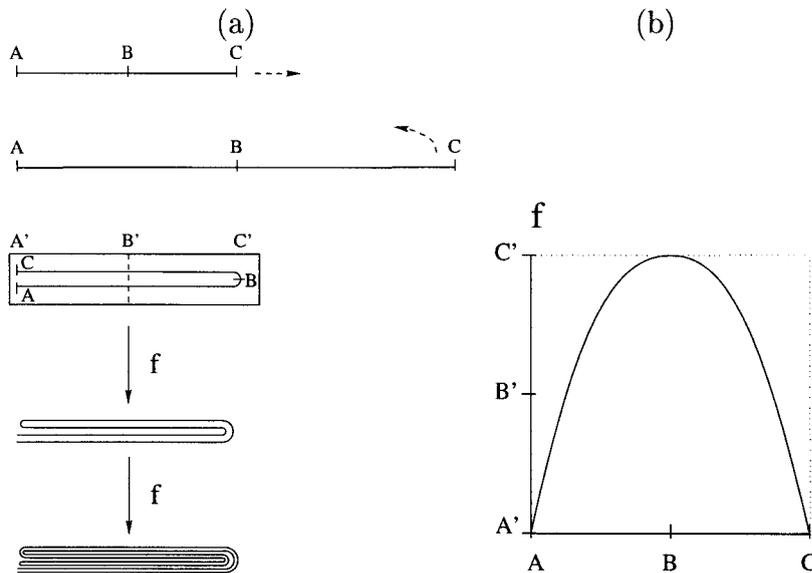


FIG. 1.19 – (a) Transformation du Fer à cheval de Smale. (b) Application de type Fer à cheval.

1.3.1.3 Pourquoi vouloir caractériser le chaos ?

Pour valider le modèle d'un processus, il faut pouvoir confronter les données expérimentales aux prévisions théoriques. La méthode la plus simple est de comparer les régimes de fonctionnement du système et de son modèle pour les mêmes valeurs des paramètres. Si l'on utilise pour cela les régimes stationnaires ou périodiques, on ne compare que des régions extrêmement réduites du portrait de phase, c'est-à-dire un nombre très limité de données. Un régime chaotique est par contre beaucoup plus "bavard" puisqu'il explore un nombre très important d'états et apparaît plus révélateur pour éprouver un modèle. Pour cela, il faut être capable de discerner des régimes chaotiques différents, c'est-à-dire avoir des outils de caractérisation et comparaison simples et pertinents.

9. Cette application est à l'origine définie pour un carré en deux dimensions.

1.3.2 Les outils classiques d'analyse

1.3.2.1 L'application de Poincaré

La direction principale d'un flot continu est en règle générale de peu d'intérêt d'un point de vue dynamique. Par exemple, les processus d'étirement et repliement, qui organisent un attracteur chaotique, se déroulent dans des directions transverses à l'orbite. La structure essentielle est donc préservée dans une coupe transversale soigneusement choisie. La figure 1.18 illustre déjà cette idée en faisant apparaître une section de l'attracteur. Cette opération se fait par le choix d'une *surface de Poincaré* et permet de transformer un processus continu en un processus suivi par étapes en définissant l'*application de Poincaré*.

On définit une *surface de Poincaré* Σ d'un flot continu comme une surface de l'espace des phases qui n'est tangente en aucun point aux orbites générées par le flot.

définition 2. Soit ϕ_t un flot dans un espace \mathcal{E}_φ de dimension d . Le champ de vitesse est donné par $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = d\phi_t(\mathbf{x})/dt$. Soit Σ une variété orientable de dimension $N - 1$ et $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ sa normale en \mathbf{x} . Σ est une surface de Poincaré pour le flot ϕ_t si, pour tout $\mathbf{x} \in \Sigma$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0$.

On s'assure, par cette contrainte, qu'une orbite qui rencontre Σ la traverse effectivement et qu'elle ne la traverse que dans un sens (fig.1.20).

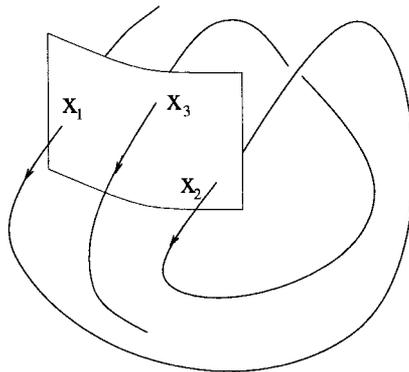


FIG. 1.20 – Illustration schématique d'une surface de Poincaré

L'ensemble des points d'intersection d'une orbite du flot avec la surface Σ s'appelle la section de Poincaré de l'orbite. Cette section est un outil d'analyse particulièrement intéressant, surtout quand elle est réalisable expérimentalement, car elle permet un diagnostic rapide et précis du régime observé. Par exemple, une orbite périodique est réduite à un nombre fini de points. C'est d'ailleurs la

surface de Poincaré qui permet la définition générale d'une orbite de période p .

définition 3. Une orbite de période p , ou orbite p -périodique est une orbite qui se reboucle après p passages par une surface de Poincaré.

Lors d'une exploration expérimentale des comportements d'un système, cet outil permet un diagnostic rapide sur la nature du régime observé puisqu'un régime quasipériodique, dont l'orbite s'inscrit de manière dense sur un tore, est identifié par un cercle et un régime chaotique, par une structure fractale.

En règle générale, le *temps de vol* entre deux passages successifs par Σ n'est pas constant. Par contre, dans le cas particulier des systèmes modulés, un choix évident de surface de Poincaré est un plan de phase constante (fig.1.21). Dans

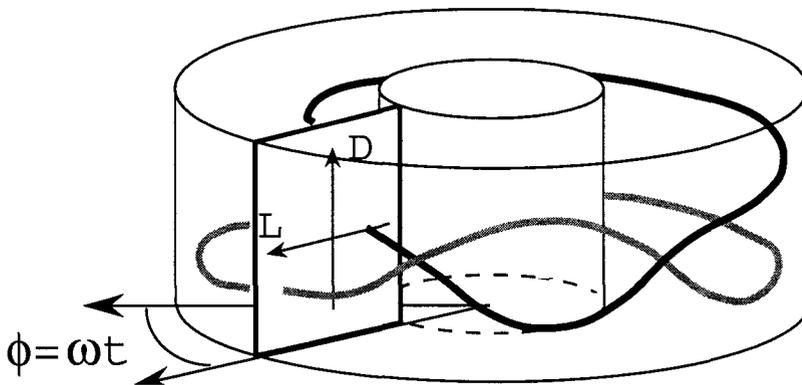


FIG. 1.21 – Surface de Poincaré d'un système modulé. L et D sont les variables dynamiques du système passif et $\phi = \omega t$ la phase de modulation

ce cas, et dans ce cas seulement, la période temporelle de l'orbite p -périodique est égale à pT où T est la période de modulation qui impose la cadence. Lors d'une exploration expérimentale des comportements d'un système, la section de l'attracteur peut donc être observée en temps réel, sur l'écran d'un oscilloscope, grâce à un échantillonnage stroboscopique de deux variables dynamiques. Cet outil permet un diagnostic rapide sur la nature du régime observé puisqu'un régime quasipériodique, dont l'orbite s'inscrit de manière dense sur un tore, est identifié par un cercle et un régime chaotique, par une structure fractale.

La surface de Poincaré transforme la courbe intégrale d'une équation différentielle ordinaire en une série de points $\{\mathbf{x}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Ce concept est essentiel dans l'étude qualitative des solutions et de leur stabilité puisqu'il réduit l'opérateur d'évolution continu ϕ_t en une application à temps discret, l'*application de Poincaré*. Cette application, dite également *de premier retour*, projette Σ dans elle-même en associant à un point \mathbf{x}_n son successeur:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ \mathbf{x}_n &\longrightarrow \mathbf{x}_{n+1} = \phi_{\tau_n}(\mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ est le temps de vol. Réciproquement, on définit une *suspension* d'une application \mathcal{P} comme un flot dont \mathcal{P} représente l'application de premier retour dans une surface de Poincaré. Cette application réduit par exemple l'analyse de stabilité d'une orbite de période p γ à celle d'un point "stationnaire": si \mathbf{x}^* est un des p points de la section $\gamma \cap \Sigma$, alors il est un point fixe de \mathcal{P}^p , $\mathcal{P}^p(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. On comprend donc l'importance des études sur les applications discrètes dont l'exemple le plus célèbre est l'application de Hénon du plan dans le plan (voir par exemple [Henon76]).

En règle générale, on représente graphiquement l'application par son *diagramme de premier retour* $(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n)$. Dans un souci évident de visualisation (ce diagramme est déjà à 4 dimensions si $\dim \Sigma = 2$), le diagramme est réduit à un plan par projection de Σ sur un axe. Dans la pratique, on représente un ensemble de points $M = (X_{n+1}, X_n)$ où $X_n \in \mathbb{R}$ est la valeur échantillonnée d'une variable dynamique. Ce diagramme est tout aussi simple à interpréter que la section de Poincaré: une orbite de période 1, c'est-à-dire qui vérifie $X_{n+1} = X_n$, est un point de la bissectrice, une orbite de période 2, vérifiant $X_{n+2} = X_n$, forme 2 points de part et d'autre de la bissectrice, et une orbite chaotique donne un ensemble dense de points (voir fig. 1.22).

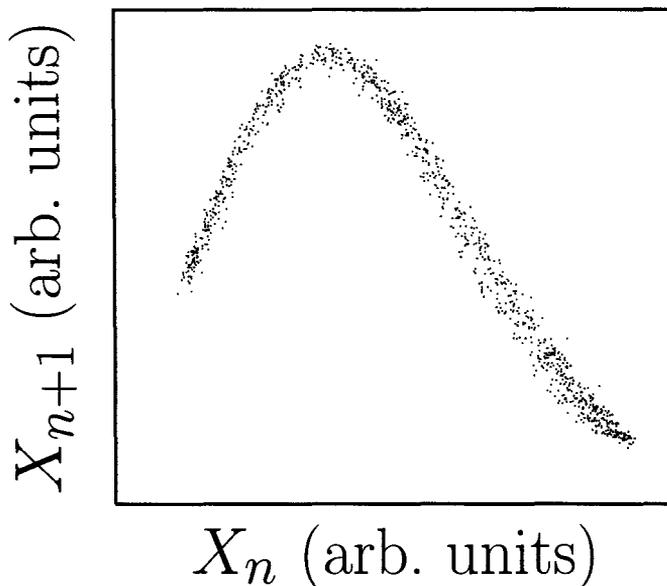


FIG. 1.22 – *diagramme de premier retour du laser à fibre modulé. $X_n = X(t_0 + n \times T)$ représente la valeur de l'intensité échantillonnée à chaque période de modulation T , c'est-à-dire à chaque passage par la section de Poincaré.*

Enfin, l'évolution de la section de Poincaré le long d'un attracteur chaotique permet de visualiser les mécanismes d'étirement et repliement qui organisent la structure fractale. La figure 1.23, par exemple, représente différentes sections

de Poincaré de l'attracteur d'un système numérique à trois degrés de liberté¹⁰ [Boulant et al.a]. Le système est modulé et les sections correspondent à des plans de phase de modulation constante $\phi = \phi_0$ ordonnés par valeurs croissantes de $\phi_0 = 0$ à $\phi_0 = 2\pi \times 11/12$. En plus du processus d'étirement, on distingue dans le cas présent deux étapes de repliement. La première devient visible à partir de la section (d) (en haut à droite) et la seconde à partir de la section (g). Il apparaît donc que toutes les parties de l'attracteur n'évoluent pas de la même manière sur une période. Un premier morceau, à l'extrême droite sur la section (a), est impliqué dans les deux repliements et opère une rotation d'un tour complet entre (a) et (l). Un deuxième morceau intermédiaire n'est impliqué que dans le premier repliement et effectue un demi tour. Enfin, un dernier morceau, à l'extrême gauche, ne tourne pas. Cette observation suggère que la surface de Poincaré peut être découpée en plusieurs régions dont les évolutions respectives sur une période sont qualitativement différentes.

1.3.2.2 La dynamique symbolique

Nous venons d'évoquer la possibilité de diviser une surface de Poincaré en plusieurs parcelles. L'idée de base de la dynamique symbolique repose sur cette observation et consiste à utiliser une partition de la surface de Poincaré pour coder les trajectoires.

Supposons que l'on dispose d'une surface de Poincaré Σ sur laquelle est définie une application de premier retour $\mathbf{x}_{n+1} = \mathcal{P}(\mathbf{x}_n)$. Il est évident que la série de points $\{\mathbf{x}_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ permet de localiser l'orbite avec une précision infinie dans Σ . Faisons maintenant une partition de Σ en un nombre m fini de parcelles étiquetées chacune par un symbole $s \in (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ (des lettres d'un alphabet, par exemple, ou tout simplement des entiers de 0 à $m - 1$). Les labels des parcelles successivement visitées par l'orbite définissent alors une séquence de symboles $\dots s_1 s_2 s_3 \dots = \{s_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ qui possède certaines propriétés de l'orbite. Par exemple, une orbite de période p est symbolisée par une séquence possédant la propriété $s_{n+p} = s_n \forall n \in \mathbb{Z}$. Par contre, il ne semble pas évident qu'elle puisse contenir autant d'informations que la série naturelle $\{\mathbf{x}_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Pourtant, il est établi que pour certaines partitions, dites *génératrices*, la séquence symbolique permet de localiser l'orbite dans Σ avec une précision infinie. Plus précisément, il y a dans ce cas une correspondance un-un entre les orbites $\{\mathbf{x}_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ et les séquences de longueur infinie $\{s_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Cela signifie qu'à une orbite correspond une unique séquence et qu'à une séquence donnée ne peut correspondre qu'une et une seule orbite. Cette correspondance est d'autant plus étonnante que, dans certains cas, deux symboles suffisent à définir une partition génératrice.

Même si elles sont communément admises à plusieurs dimensions, les règles de la dynamique symbolique ont été établies à partir des applications unidimensionnelles, c'est-à-dire définies de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . Pour une description détaillée,

10. Il s'agit d'un modèle de laser qui sera explicité au cours du chapitre 2

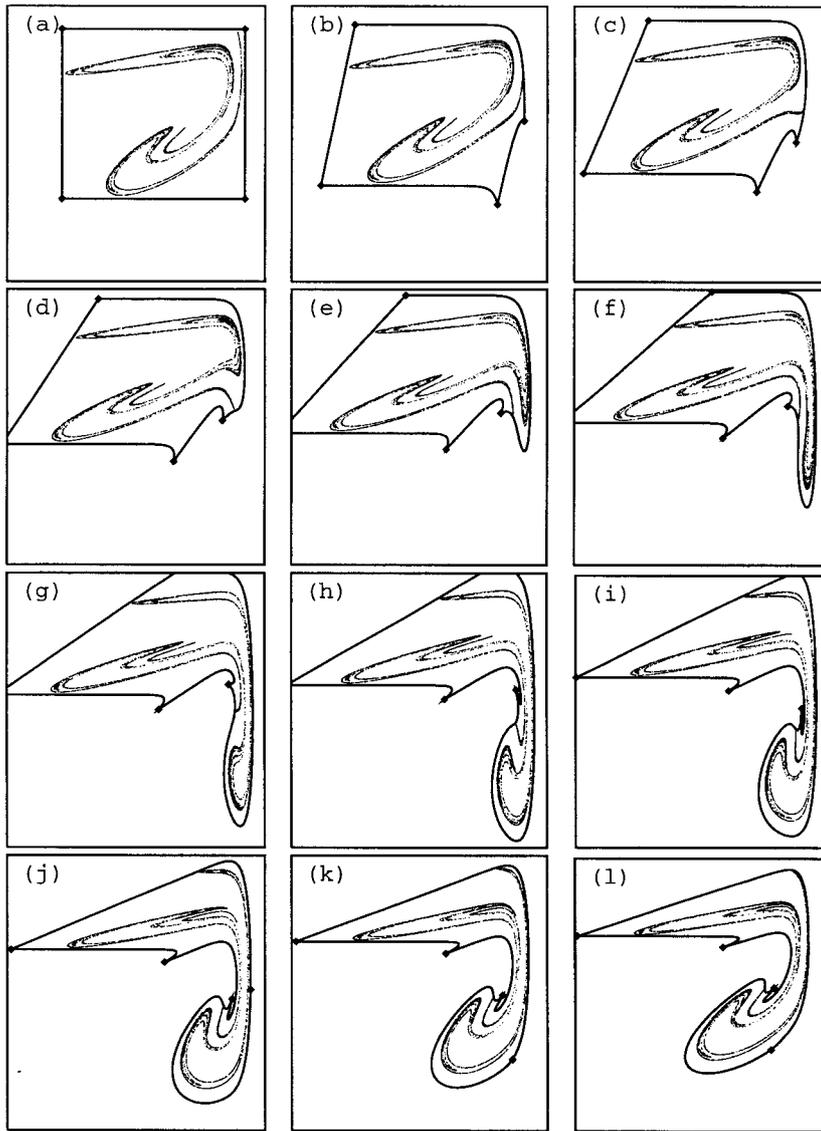


FIG. 1.23 – Evolution de la section de Poincaré d'un système numérique à trois degrés de liberté modélisant un laser modulé [Boulant et al.a]. Les sections correspondent à des plans de phase de modulation constante $\phi = \phi_0$ ordonnés par valeurs croissantes de $\phi_0 = 0$ à $\phi_0 = 2\pi \times 11/12$. La ligne solide correspond à un ensemble de points disposés initialement sur un rectangle.

on consultera par exemple [Hao89, Hao91] ainsi que les références qui y sont incluses. Nous allons ici préciser un peu plus la notion de partition génératrice et ses propriétés.

Partition génératrice

Considérons une application f d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans lui-même et la suite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ définie de manière récurrente par $x_{n+1} = f(x_n)$ ($x_n \in I$). La manière de découper l'intervalle est libre, mais elle ne conduit pas à une partition génératrice en général. Par contre, si f est continue et non monotone, une partition génératrice peut être construite à partir des singularités de f , par exemple les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est un extremum. Ainsi dans le cas des applications Fer à cheval, c'est-à-dire continues à un maximum, il apparaît deux intervalles $I_0 = [0, x_0[$ et $I_1 =]x_0, 1]$ où $f'(x_0) = 0$. Les cas à plus de deux intervalles se déduisant facilement, nous pouvons continuer sans perte de généralité et avec peut-être plus de clarté sur cet exemple.

À l'orbite $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ($x_n \in I$), on associe la séquence de symboles $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ ($s_n \in \{0, 1\}$) telle que

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_n \in I_0, \\ 1 & \text{si } x_n \in I_1 \end{cases} \quad (1.19)$$

et on identifie un point $x \in I$ par la séquence symbolique $s(x) = \{s_n(x)\}_{n=0}^\infty$ correspondant à son orbite en posant

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^n(x) \in I_0, \\ 1 & \text{si } f^n(x) \in I_1 \end{cases} \quad (1.20)$$

Comme I_0 et I_1 sont d'intersection vide, à un point x quelconque ne correspond qu'une et une seule chaîne de symboles.

Examinons la réciproque. Parmi l'ensemble des points d'un des deux intervalles, disons I_0 , un sous-ensemble I_{00} aura son image par f dans I_0 et le complémentaire, I_{01} , dans I_1 :

$$\begin{aligned} f(I_{00}) &\subset I_0 \\ f(I_{01}) &\subset I_1 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Ces sous-intervalles sont donc donnés par

$$\begin{aligned} I_{00} &= I_0 \cap f^{-1}(I_0) \\ I_{01} &= I_0 \cap f^{-1}(I_1) \end{aligned} \quad (1.22)$$

l'intervalle I_{00} contient par exemple tous les points dont le nom commence par 00, c'est-à-dire qui appartiennent à I_0 et qui, après une itération, se retrouvent

encore dans I_0 . Plus généralement, on définit l'intervalle

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f^{-1}(I_{s_1}) \cap f^{-2}(I_{s_2}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{s_n}) \quad (1.23)$$

On peut se convaincre facilement que $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ contient tous les points $x \in I$ dont la séquence symbolique $\mathbf{s}(x)$ commence par $s_0 s_1 \dots s_n$. Par ailleurs, quand n augmente, l'ensemble $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ est réduit à un nombre de plus en plus limité de points. On dit alors que la partition est génératrice s'il se réduit à un point pour la limite $n \rightarrow \infty$.

définition 4. *On dit d'une partition de l'intervalle I qu'elle est génératrice pour f si à une séquence infinie de symboles ne peut correspondre qu'un seul point de I .*

Cela signifie en particulier que deux séquences $\mathbf{s}(x)$ et $\mathbf{s}(y)$ correspondant à deux points différents de I finissent toujours par différer au bout d'une certaine valeur n_0 de n qui est d'autant plus grande que x et y sont proches. Retenons que, pour les applications continues et non monotones, la partition définie au moyen des extrema est génératrice.

Application aux orbites périodiques

Si x appartient à une orbite p -périodique de f , c'est-à-dire si x vérifie $f^p(x) = x$ ¹¹, sa séquence symbolique est également de période p :

$$\begin{aligned} s_{n+p} &= s_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{et} & \\ \mathbf{s}(x) &= (s_0 s_1 \dots s_{p-1})^\infty \end{aligned} \quad (1.24)$$

Si la partition est génératrice, alors on peut désigner ce point sans ambiguïté par le motif élémentaire $s_0 s_1 \dots s_{p-1}$ et l'orbite périodique par la notation $\overline{s_0 s_1 \dots s_{p-1}}$. Bien entendu, les p permutations circulaires du motif désignent la même orbite puisqu'elles correspondent aux noms symboliques des itérés successifs $f(x)$, $f^2(x)$, ..., $f^{p-1}(x)$ de x . Pour formaliser cette idée, on définit l'opérateur de décalage Δ tel que:

$$\Delta(\{s_n\}_{n=0}^\infty) = \{s_{n+1}\}_{n=0}^\infty \quad (1.25)$$

On a donc

$$\mathbf{s}(f(x)) = \Delta(\mathbf{s}(x)) \quad \forall x \in I \quad (1.26)$$

et plus généralement

$$\mathbf{s}(f^k(x)) = \Delta^k(\mathbf{s}(x)) \quad \forall x \in I \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.27)$$

11. Graphiquement, il s'agit des points d'intersection du graphe de f^p avec la bissectrice

Un point d'une orbite de période p vérifie, en plus, la condition

$$\Delta^p(\mathbf{s}(x)) = \mathbf{s}(f^p(x)) = \mathbf{s}(x) \quad (1.28)$$

Ainsi, les noms $\overline{\Delta^k(\mathbf{s}(x))}$ désignent, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la même orbite périodique $\overline{\mathbf{s}(x)}$, mais les points $\Delta^k(\mathbf{s}(x))$ et $\mathbf{s}(x)$ sont différents sauf pour $k = p$. Ce sont les p points de l'orbite de période p .

La conséquence immédiate est d'un intérêt fondamental. Le nombre fini de symboles dans la partition limite le nombre de combinaisons possibles pour une séquence de longueur finie et, par là-même, fixe le nombre d'orbites périodiques. Par exemple, s'il est possible de coder la dynamique sur deux symboles 0 et 1, alors l'application de premier retour définie par f ne possède que deux orbites 1-périodiques $\overline{0}$ et $\overline{1}$, une seule orbite 2-périodique $\overline{01} = \overline{10}$ dont les deux points sont x_1 et x_2 tels que $\mathbf{s}(x_1) = 010101\dots = (01)^\infty$ et $\mathbf{s}(x_2) = 101010\dots = (10)^\infty$, deux orbites 3-périodiques $\overline{011} = \overline{110} = \overline{101}$ et $\overline{001} = \overline{010} = \overline{100}$, etc... Plus généralement, on montre facilement que si n est le nombre de symboles, le nombre d'orbites de période p est $N(p)$ tel que

$$p \times N(p) = n^p - \sum_{p'} p' \times N(p') \quad (1.29)$$

où p' décrit tous les sous-multiples de p .

Localiser et ordonner des noms symboliques

Quand la partition est génératrice, la relation biunivoque entre l'ensemble des séquences symboliques de longueur infinie et l'intervalle I permet de définir de manière naturelle une relation d'ordre pour les noms symboliques

$$\mathbf{s}(x) < \mathbf{s}(y) \text{ si } x < y \quad (1.30)$$

Inversement, il est possible de connaître avec une précision infinie la position relative de deux points x et y de l'intervalle à partir de leur séquence symbolique. Ceci démontre que toute l'information est conservée dans la séquence symbolique. Nous montrerons à la section 1.4.3.3 comment la position des orbites peut être ainsi déterminée avec une précision infinie.

Extension aux attracteurs chaotiques

L'orbite correspondant à un régime chaotique possède au moins un exposant de

Lyapunov positif. Cela signifie que, localement au moins, une direction est dilatante et assure la sensibilité aux conditions initiales. S'il n'en existe qu'une seule, alors il arrive qu'une section de Poincaré bidimensionnelle apparaisse comme un objet unidimensionnel. Il faut pour cela que l'effet de contraction dans les directions transverses, lié essentiellement au caractère dissipatif du système, soit suffisamment important. Dans ces conditions, si on choisit correctement la surface de Poincaré, le diagramme de premier retour peut être décrit, en première approximation, par une application unidimensionnelle. Par exemple, la similitude du diagramme de la figure 1.22, réalisé sur l'intensité d'un laser à fibre [Boulant et al.97b], avec une application Fer à cheval est évidente. Dans ces cas très dissipatifs, on peut établir un codage symbolique des orbites en partageant l'intervalle des X_n au moyen des extrema du diagramme de premier retour.

1.3.2.3 Dimensions et entropies

Les attracteurs chaotiques peuvent être caractérisés par des mesures quantitatives. Le spectre des exposants de Lyapunov caractérise par exemple les propriétés dynamiques. La dimension et l'entropie sont d'autres propriétés mesurables d'un attracteur.

L'*entropie* est un nombre réel issu de la théorie de l'information qui mesure le degré de complexité du régime analysé [Eckmann et al.85]. Elle mesure en fait le manque d'informations ou, de manière équivalente, le taux de création d'informations par unité de temps. Elle est donc nulle pour un régime régulier, puisque toute l'information sur l'attracteur est obtenue au bout d'une période finie, alors qu'elle est strictement positive pour les régimes chaotiques. L'observation du régime chaotique apporte en effet une information qui n'est jamais redondante.

La dimension d'un attracteur chaotique est un nombre réel, comme l'entropie, qui caractérise la répartition des points dans l'espace des phases. Nous allons en faire une présentation un peu plus détaillée. Les régimes stationnaire, périodique ou quasipériodique, sont représentés respectivement par un point fixe, un cycle et un tore. Ces objets sont des variétés, c'est-à-dire des espaces que l'on peut en tout point décrire localement de manière approchée par des espaces euclidiens \mathbb{R}^d , et leurs dimensions sont respectivement 0, 1 et 2, c'est à dire les dimensions euclidiennes correspondant à l'exposant d . Cette dimension classique, appelée la *dimension topologique*, n'est pas définie dans le cas d'un attracteur fractal puisqu'il n'est pas une variété.

De manière intuitive, la dimension d'un objet est reliée à une loi de puissance entre le volume de cet objet et ses dimensions linéaires. Volume s'entend ici au sens large comme une mesure finie de l'espace occupé (la longueur pour un cycle, la surface pour un tore...). Par exemple la surface d'un plan peut être évaluée de manière approchée par la quantité $S_\epsilon = \mathcal{N}(\epsilon)\epsilon^2$, où $\mathcal{N}(\epsilon)$ est le nombre minimum de carrés de côté ϵ nécessaire pour recouvrir le plan. À la limite $\epsilon \rightarrow 0$, S_ϵ

correspond exactement à la surface S_0 . On a donc en fait

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}(\epsilon) \epsilon^d = \begin{cases} \infty & \text{si } d < 2, \\ S_0 & \text{si } d = 2, \\ 0 & \text{si } d > 2 \end{cases} \quad (1.31)$$

La dimension d peut donc être définie comme l'exposant qui permet d'obtenir une mesure finie de l'objet

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mathcal{N}(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \quad (1.32)$$

Lorsqu'on recouvre de cette manière un objet fractal, la limite (1.32) existe encore mais n'est plus entière. Elle est la formulation la plus simple du concept général de dimension. La *dimension fractale* (1.32), appelée également la *dimension de Hausdorff*, est une généralisation du concept de *capacité* introduit par Kolmogorov en 1958 [Kolmogorov58]. Elle caractérise bien sûr un attracteur chaotique, mais n'en reflète que les propriétés géométriques.

Les attracteurs chaotiques peuvent en fait être caractérisés par toute une famille de *dimensions généralisées* qui prennent en compte l'inhomogénéité de la répartition des points. Citons par exemple la dimension d'information et la dimension de corrélation. Une présentation détaillée de cette famille de dimensions nous éloignerait trop du cadre de la thèse (on consultera par exemple [Grassberger et al.83a, Grassberger et al.83b, Farmer et al.83]). Disons simplement que le principe est d'affecter un poids statistique, qui correspond à la densité locale de points sur l'attracteur, à chaque parcelle du recouvrement. La capacité est un cas particulier qui revient à considérer les parcelles comme étant équiprobables.

Il existe enfin une dimension définie à partir des propriétés dynamiques de l'attracteur, la *dimension de Lyapunov*. Cela peut se comprendre dans la mesure où la structure fractale est le résultat combiné de la contraction liée à la dissipation et l'étirement induit par la divergence entre trajectoires. Nous allons la préciser car nous l'avons utilisée pour évaluer la dimension des attracteurs expérimentaux. Nous avons vu en section 1.1.3 que la contraction des volumes, signature de l'existence d'un attracteur, est effective s'il y a suffisamment d'exposants de Lyapunov négatifs pour compenser l'étirement dû aux exposants positifs. Considérons alors la somme $L_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ des n premiers exposants de Lyapunov ($\lambda_1 > 0$ et $\lambda_{i+1} < \lambda_i$) et m l'entier pour lequel $L_m > 0$ et $L_{m+1} < 0$. Dans un espace de plongement de dimension m , il ne peut exister d'attracteur puisque le volume tend vers l'infini. Pour une dimension de plongement $m + 1$, par contre, le volume tend vers 0. Kaplan et Yorke [Kaplan et al.79] ont alors défini la dimension de Lyapunov d_L comme la valeur intermédiaire pour laquelle le volume resterait fini :

$$d_L = m + \frac{L_m}{|\lambda_{m+1}|} \quad (1.33)$$

Elle correspond au zéro de la courbe représentative des points (L_m, m) , obtenue par interpolation linéaire (voir la fig.1.24). C'est la dimension pour laquelle il n'y

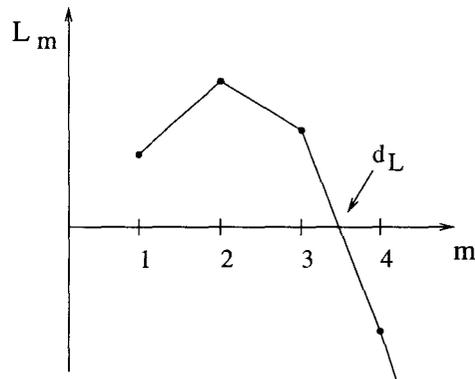


FIG. 1.24 – Exemple de courbe interpolée à partir des points (L_m, m) où L_m est la somme des exposants de Lyapunov dans l'espace de dimension m . Le zéro est défini comme étant la dimension de l'attracteur puisque c'est la valeur pour laquelle il n'y a ni contraction ni dilatation, c'est-à-dire pour laquelle on obtient une mesure finie de l'attracteur.

a ni contraction ni dilatation, c'est-à-dire pour laquelle on obtient une mesure finie de l'attracteur.

Par la suite, nous utiliserons cette dernière dimension pour mesurer les attracteurs. Les exposants de Lyapunov peuvent être évalués par exemple grâce à l'algorithme de Briggs [Briggs90].

1.4 L'analyse topologique

Nous avons présenté, dans la première partie de ce chapitre, les outils d'analyse communément utilisés pour caractériser le chaos. Ils correspondent à une approche quantitative qui consiste à mesurer, par des nombres réels, les propriétés de l'attracteur. Par exemple, la dimension fractale est une mesure qui caractérise la répartition des points et les exposants de Lyapunov renseignent sur les propriétés dynamiques. Cependant, il s'agit là de mesures globales qui apportent une information très limitée sur les mécanismes dynamiques au sein de l'attracteur.

Il existe une approche topologique plus pertinente qui consiste à étudier comment les orbites se positionnent les unes par rapport aux autres. Par exemple, les attracteurs représentés sur les figures 1.25(a) et 1.25(b), observés dans le même système mais pour des valeurs de paramètres différentes, sont caractérisés par des exposants de Lyapunov identiques et des dimensions fractales égales, aux incertitudes de calcul près. Pourtant, les trajectoires "tournent" davantage dans l'attracteur 1.25b que dans l'attracteur 1.25a et il apparaît impossible de déduire l'un de l'autre par une déformation continue du portrait de phase. L'organisation des orbites est donc différente mais les mesures quantitatives n'y sont pas sensibles. Inversement, les attracteurs 1.25c et 1.25d semblent topologiquement équivalents alors qu'ils correspondent à des systèmes très différents, à savoir le modèle de Roessler pour le premier et la réaction chimique de Belousov-Zhabotinskii pour le second. Ceci suggère que les mêmes règles organisent leur portrait de phase. De manière générale, les méthodes de caractérisations topologiques du chaos permettent de décrire les mécanismes de base qui organisent la structure de l'attracteur et sont, par là-même, bien plus sensibles et efficaces pour comparer des régimes chaotiques.

Nous présentons dans cette section une méthode récente d'analyse proposée par Mindlin *et al.* [Mindlin et al.90] pour classifier les régimes chaotiques des systèmes à trois degrés de liberté, c'est-à-dire qui peuvent être décrits de manière déterministe par trois variables globales. Elle repose sur le fait qu'il existe dans un attracteur des *orbites périodiques instables* qui forment des *nœuds* caractéristiques des processus d'étirement et de repliement. Le fait que l'espace des phases associé à ces systèmes ne possède que trois dimensions permet d'utiliser la *théorie des nœuds* pour caractériser les orbites périodiques par des invariants topologiques [Solari et al.88a], c'est-à-dire des nombres entiers qui restent invariants sous variation des paramètres de contrôle. La nature entière, et par là-même discrète, des mesures est d'un intérêt fondamental puisqu'elle offre la possibilité de définir une relation d'équivalence naturelle entre les attracteurs, avec un pouvoir discriminatoire clair et net (il s'agit de comparer des entiers).

Nous allons détailler tour à tour chacun de ces points, tout d'abord en justifiant l'existence d'orbites périodiques instables dans l'attracteur (sec. 1.4.1), puis en montrant comment leur enchevêtrement peut être décrit (sec. 1.4.2). Ensuite, nous ferons un premier bilan, pour aborder enfin la notion de *gabarit*, objet central

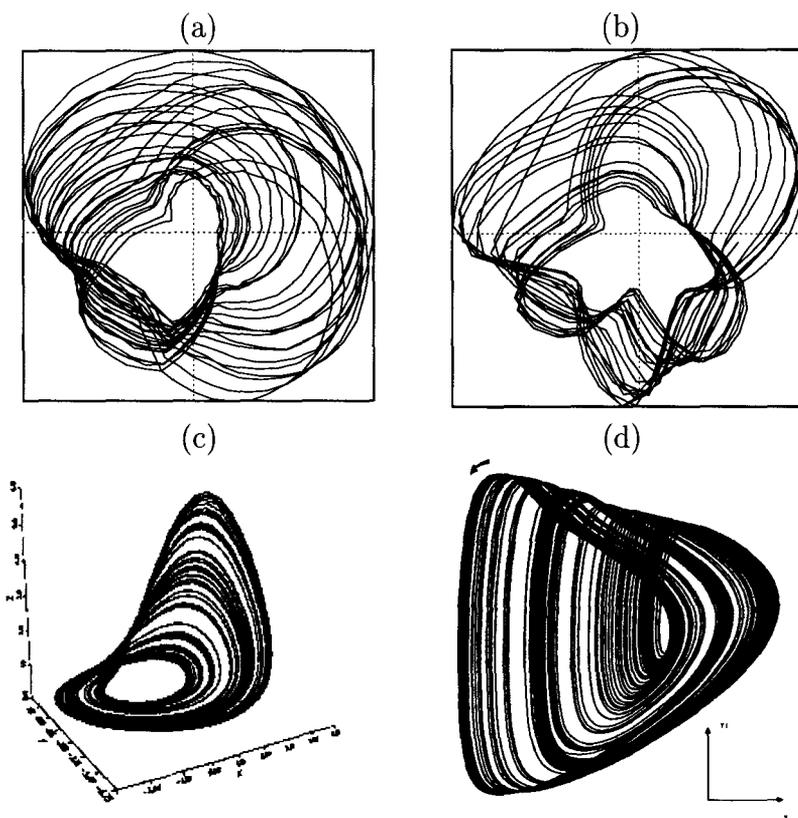


FIG. 1.25 – Portraits de phase de différents régimes chaotiques. Les croisements sont dus bien entendu à un effet de perspective lié à la représentation plane. (a) et (b) représentent des attracteurs d'un laser à fibre modulé, reconstruits dans le même espace de plongement (x, \dot{x}, ϕ) où ϕ est la phase de modulation. \dot{x} est porté par l'axe perpendiculaire à la feuille. (c) Un attracteur du système de Rössler. (d) Un attracteur de la réaction chimique de Belousov-Zhabotinskii (tiré de [Mindlin et al.91]).

de l'analyse topologique (sec. 1.4.3).

1.4.1 Les orbites périodiques instables

Si l'on observe méticuleusement l'évolution d'un système chaotique, on s'aperçoit que les variables dynamiques suivent par moment des épisodes périodiques (voir fig.1.26). Ces séquences signalent le passage de la trajectoire chaotique dans

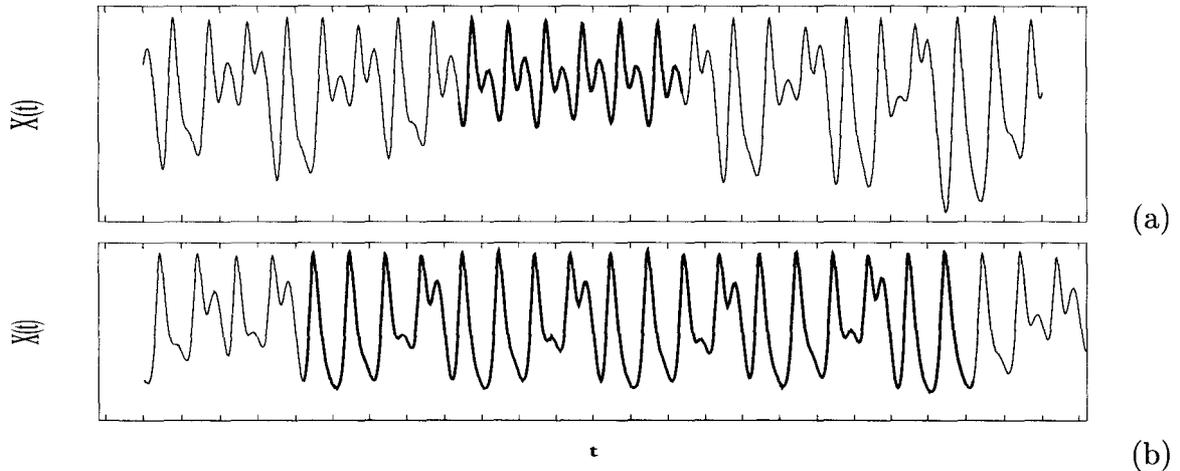


FIG. 1.26 – Série temporelle d'un régime chaotique d'un laser à fibre modulé. Les graduations sont espacées d'une période de modulation T . On observe des séquences de période (a) $1T$ et (b) $4T$.

le voisinage d'une orbite périodique. En fait, il est rigoureusement démontré (voir par exemple [Guckenheimer et al.83]) qu'un ensemble invariant hyperbolique, c'est-à-dire en tout point duquel sont définis un sous-espace stable et un sous-espace instable, contient une infinité dense d'orbites instables de toutes les périodes possibles. Autrement dit, tout voisinage, arbitrairement petit, d'un point quelconque de l'ensemble invariant est traversé par une infinité d'orbites périodiques instables (OPI).

Les attracteurs chaotiques sont en règle générale des ensembles invariants non hyperboliques à cause de tangences entre variétés stables et instables. En un point de tangence, souvent localisé aux points de repliement, il s'avère en effet impossible de définir une direction stable distincte d'une direction instable. Néanmoins, même si la présence d'une infinité dense d'orbites périodiques instables ne peut être garantie, il est sûr qu'au moins une fraction d'entre elles existe.

Cela s'explique essentiellement par la nature ergodique de l'évolution sur l'attracteur. Celle-ci implique que l'orbite chaotique, partant d'un point de référence, revienne dans le voisinage très proche de ce point au bout d'un certain temps (voir fig. 1.27). On peut donc aisément imaginer l'existence d'une orbite périodique,

dans l'ombre de la trajectoire, de période égale au temps de retour dans le voisinage du point de départ. La figure 1.26 donne justement deux exemples de séquences correspondant à des *retours proches*.

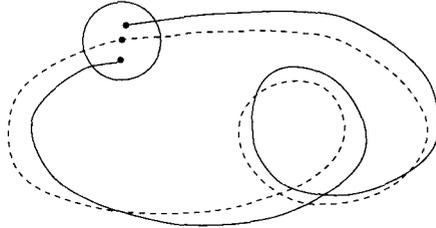


FIG. 1.27 – *Illustration schématique d'un retour proche (pointillés= orbites périodique instable. trait plein=orbite chaotique).*

Par ailleurs les cascades de bifurcations qui mènent au chaos sont créatrices d'orbites périodiques instables. Examinons par exemple le diagramme de bifurcation d'une *cascade de doublements de période* (fig. 1.28). Il représente la section de Poincaré de l'attracteur¹² en fonction d'un paramètre de contrôle. Le nombre de branches pour une valeur donnée du paramètre indique la période de l'attracteur. Après le premier doublement de période, la région de l'espace des phases représentée sur le diagramme contient un attracteur 2-périodique et l'orbite 1-périodique instable hyperbolique. Plus généralement, après la $n^{\text{ième}}$ bifurcation, l'espace contient un attracteur 2^n -périodique et n orbites instables de période 2^k ($k = 0, \dots, n - 1$). Lorsque le régime aperiodique est atteint (à la limite $n \rightarrow \infty$), l'orbite chaotique baigne dans une infinité d'orbites 2^k -périodiques instables. On peut alors accepter l'idée que l'attracteur contienne non seulement des orbites chaotiques observables mais aussi une infinité d'orbites périodiques qui ne sont pas observables sur le long terme car instables. On remarquera également la présence de *fenêtres périodiques* dans la région chaotique. Celles-ci correspondent à l'apparition d'une paire d'orbites périodiques par bifurcation nœud-selle. Une nouvelle cascade démarre, mais cette fois sur une orbite de période $l \neq 1$. Ce processus amène donc dans l'attracteur chaotique une famille d'orbites de période $l \times 2^k$.

C'est aujourd'hui un fait établi que les attracteurs chaotiques peuvent être caractérisés au moyen des orbites périodiques instables qu'ils contiennent [Auerbach et al.87, Cvitanovic88]. Par exemple, il est possible de relier les caractéristiques des orbites périodiques aux grandeurs telles que le spectre de Lyapunov, les dimensions et entropies [Lathrop et al.89]. Aussi nous retiendrons finalement qu'un attracteur chaotique contient

1. Une infinité d'orbites chaotiques.

12. Plus exactement, il représente la projection de la section sur un axe, c'est-à-dire la valeur d'une variable dynamique, échantillonnée à chaque passage

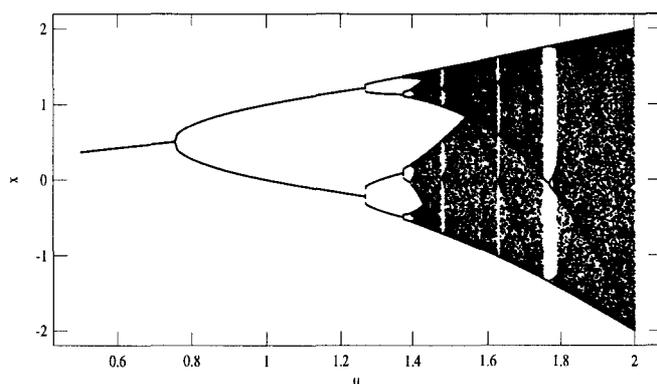


FIG. 1.28 – Diagramme de bifurcations d'une cascade de doublements de période. On notera la présence de fenêtres périodiques dans la région chaotique.

2. Une infinité d'orbites périodiques instables de type selle et qui couvrent de manière dense l'attracteur (fig. 1.29). Cependant, il n'y a que les ensembles hyperboliques qui contiennent toutes les orbites de chaque période.
3. Une orbite chaotique dense (au moins), c'est-à-dire une orbite qui visite le voisinage, aussi petit soit-il, de tous les points de l'attracteur (cette condition assure l'indécomposabilité de l'ensemble invariant).

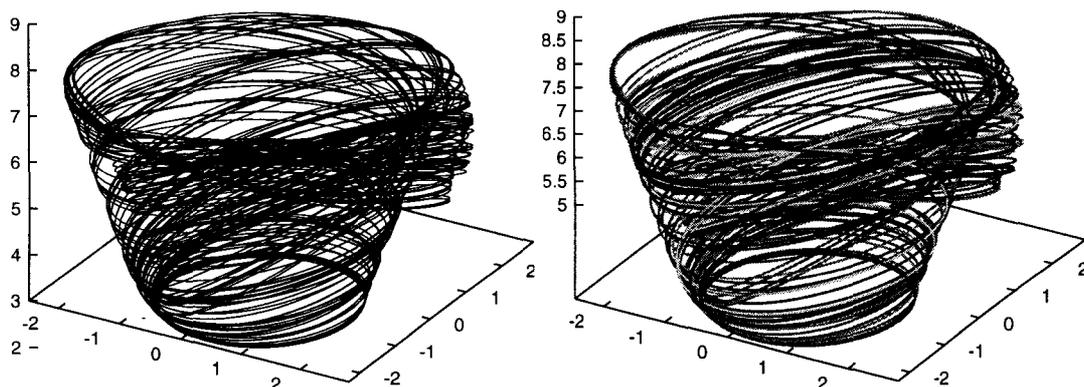


FIG. 1.29 – Un attracteur chaotique contient une infinité dense d'orbites périodiques instables. (a) Une orbite chaotique. (b) les orbites périodiques instables. Les deux représentations sont équivalentes.

On peut d'ailleurs se représenter un comportement chaotique comme une orbite voyageant dans un labyrinthe multidimensionnel, sans porte de sortie, et dont les murs sont les variétés séparatrices des orbites périodiques instables.

Ces caractéristiques ont deux conséquences essentielles. Premièrement, un attracteur est en règle générale représenté par une orbite chaotique donnée suivie

sur un temps long. La figure 1.29(a) montre que l'ensemble dense des orbites périodiques instables est une représentation entièrement équivalente et qu'il reflète le comportement dynamique à des échelles très fines. Deuxièmement, les orbites périodiques instables sont accessibles à partir d'une série temporelle. En effet, les orbites sont de type selle, c'est-à-dire qu'elles possèdent une variété stable et une variété instable. Aussi, une trajectoire chaotique typique peut s'approcher d'une orbite périodique le long de la variété stable, rester dans le voisinage de l'orbite d'autant plus longtemps qu'elle s'en est approchée près, et enfin repartir le long de la variété instable. Les variables dynamiques possèdent donc en règle générale des épisodes périodiques que l'on peut utiliser pour reconstruire, dans l'espace de plongement, des approximations des orbites périodiques instables (OPI).

1.4.2 Caractérisation des orbites périodiques par la théorie des nœuds

1.4.2.1 Pourquoi la théorie des nœuds?

¹³ Nous avons vu en section 1.1.2 que, dans un espace de dimension 2, les déformations du cercle trivial sont, avec les points fixes, les seules trajectoires possibles si l'on exclut les trajectoires errantes qui fuient vers l'infini [Guckenheimer et al.83]. Cela signifie en particulier que les attracteurs chaotiques n'existent pas dans un système à deux degrés de liberté.

Dans des espaces de dimension 3 et plus on peut au contraire imaginer n'importe quelle courbe nouée. La figure 1.30a représente par exemple une orbite périodique formant un nœud de trèfle dans un espace de dimension 3. Cette or-

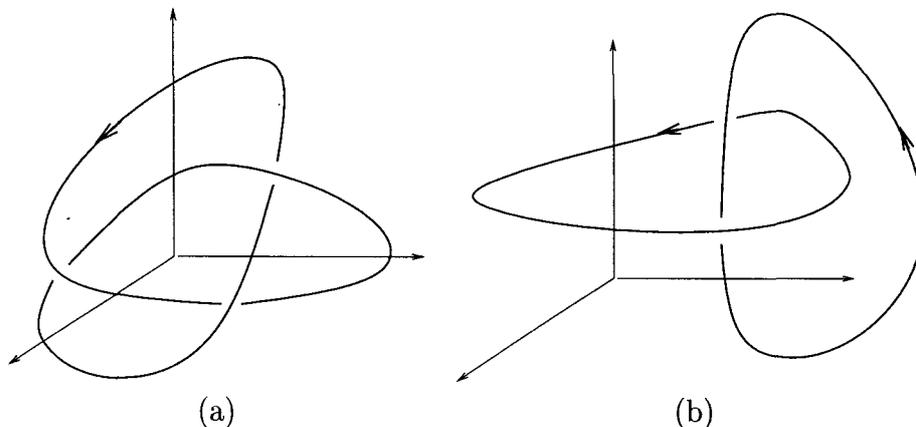


FIG. 1.30 – (a) Nœud de trèfle dans un espace de dimension 3. (b) Deux orbites enlacées.

bite possède alors la propriété remarquable que, lorsqu'un paramètre varie, sa

forme peut changer mais le déterminisme interdit que le nœud soit modifié. De manière équivalente, les deux orbites de la figure 1.30b restent enlacées sur tout leur domaine d'existence puisqu'aucun croisement n'est autorisé.

Si l'espace est de dimension supérieure à $d = 3$, par contre, les orbites peuvent toujours, dans une déformation continue, se ramener au cercle trivial sans violer le déterminisme. Cette remarque peut être justifiée en s'aidant d'une représentation tridimensionnelle. Considérons les orbites de la figure 1.30b comme la projection sur \mathbb{R}^3 d'un couple d'orbites périodiques d'un espace des phases de dimensions $d > 3$. Dans cette projection, tous les croisements peuvent être tolérés puisque la dégénérescence des états au point d'intersection est levée par au moins une quatrième variable dynamique. On peut donc en particulier les séparer et les éloigner l'une de l'autre d'une distance infinie. Or, le fait que les projections dans \mathbb{R}^3 soient séparées d'une distance infinie implique que les orbites originales soient elles-mêmes séparées d'une distance infinie. On montre donc que tout enlacement peut être défait dans \mathbb{R}^d ($d > 3$). De manière équivalente, tous les nœuds peuvent être déformés sans coupure vers le cercle trivial.

Il reste que les trajectoires dans un espace à trois dimensions sont analogues à des cordes et les orbites périodiques forment des nœuds qui ne peuvent être défaits. La manière avec laquelle sont enlacées les OPI contenues dans un attracteur possède donc un caractère invariant que l'on peut définir dans le cadre de la *théorie des nœuds*.

La théorie classique des nœuds étudie le problème de la position relative des objets homéomorphes au cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 ou la sphère S^3 . La théorie générale s'occupe du plongement des espaces S^n dans S^{n+2} , où S^n est l'hypersphère de dimension n . Un espace homéomorphe à S^1 désigne bien entendu une courbe fermée quelconque puisqu'un homéomorphisme de \mathbb{R}^3 est une application bijective et continue de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Une courbe fermée unique est un *nœud* et un ensemble de nœuds, un *lien*. Chacun des nœuds est une *composante* du lien, un nœud seul étant un lien à une composante. Par exemple, les courbes de la figure 1.30b forment un lien à deux composantes.

L'objectif de la théorie des nœuds est de définir une classification des liens basée sur une relation d'équivalence isotopique. Plus précisément, à l'intérieur d'une classe tous les liens se déduisent les uns des autres par une *isotopie*¹⁴, c'est-

14. Une isotopie est le mouvement qui déforme de manière continue un lien \mathcal{L}_α , partant d'une configuration \mathcal{L}_0 pour arriver à une configuration \mathcal{L}_1 sans que, à aucune étape, les composantes de \mathcal{L}_α ne se coupent (ni autointersection d'un nœud, ni intersection entre nœuds). Par exemple les deux liens de la figure 1.31 ne sont pas équivalents par isotopie car la déformation de l'un vers l'autre ne peut se faire sans intersection des deux cycles. Une isotopie qui transforme \mathcal{L}_0 en \mathcal{L}_1 est donc l'action sur \mathcal{L}_0 d'une famille continue f_α de difféomorphismes telle que $f_0 = Id$ (i.e. $f_0(\mathcal{L}_0) = \mathcal{L}_0$), $f_\alpha(\mathcal{L}_0) = \mathcal{L}_\alpha$ et $f_1(\mathcal{L}_0) = \mathcal{L}_1$. Un difféomorphisme de \mathbb{R}^n est une application de \mathbb{R}^n dans lui-même bijective et continue en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Lorsque α décrit l'intervalle $[0, 1]$, le lien passe de \mathcal{L}_0 à \mathcal{L}_1 . Aussi, bien que \mathcal{L}_1 soit difféomorphe à \mathcal{L}_0 sur la figure 1.31 (deux points voisins de \mathcal{L}_0 ont leurs images voisines dans \mathcal{L}_1 (continuité) et il y a relation biunivoque entre images

à-dire par une déformation continue des composantes sans intersection ni auto-intersection. Par exemple les deux liens de la figure 1.31 ne sont pas équivalents par isotopie car la déformation de l'un vers l'autre ne peut se faire sans intersection des deux cycles. On peut déjà retenir que deux liens ne peuvent être équivalents

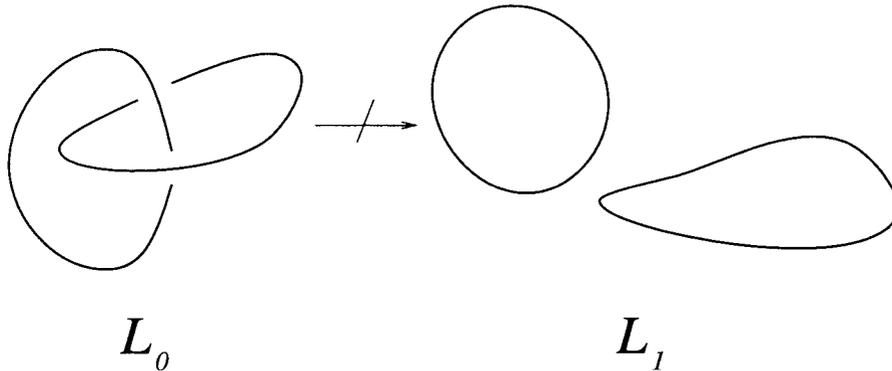


FIG. 1.31 – Les deux liens ne sont pas équivalents par isotopie car il est impossible de les déformer l'un vers l'autre sans intersection

que s'ils ont, au moins, le même nombre de composantes.

Suivant ces définitions, une orbite périodique d'un flot tridimensionnel est un nœud, tout ensemble d'orbites périodique, un lien, et une variation continue d'un paramètre de contrôle, une isotopie. Le type de nœud des orbites est invariant et un lien ne peut être modifié que s'il perd ou gagne une composante, par exemple lors d'une bifurcation nœud-col. L'objectif de l'analyse topologique des attracteurs chaotiques est alors de développer une classification sur les bases de la théorie des nœuds, c'est-à-dire une classification dans laquelle on poserait que deux attracteurs sont équivalents si les deux liens d'OPI peuvent être déduits l'un de l'autre par une isotopie. Cette classification serait pertinente et robuste puisqu'insensible aux variations des paramètres de contrôle.

Pour établir l'équivalence de deux liens, on est amené théoriquement à déterminer une isotopie qui transforme l'un en l'autre. Il est clair qu'il s'agit là d'une entreprise ardue. L'idée des mathématiciens a été alors de construire des grandeurs caractéristiques du lien et qui restent invariantes par isotopie. Ainsi, l'équivalence est établie par simple comparaison de ces *invariants topologiques*. Nous présentons dans les trois sections suivantes les invariants topologiques des orbites périodiques.

et antécédents (bijectivité)), les deux liens ne sont pas isotopiques car il existe $0 < \alpha_c < 1$ tel que l'application f_{α_c} n'est pas bijective. C'est la valeur de α pour laquelle les deux cycles se coupent, le point d'intersection possédant deux antécédants dans \mathcal{L}_0 .

1.4.2.2 Nombre d'enlacement et d'auto-enlacement

Le nombre d'enlacement est l'invariant topologique le plus intuitif. Il caractérise un couple d'orbites périodique et indique le nombre de tours qu'une orbite fait autour de l'autre avant de se refermer. Par exemple, les deux orbites de la figure 1.30b ont un nombre d'enlacement égal à 1. Si α et β sont deux courbes fermées de coordonnées \mathbf{x}_α et \mathbf{x}_β alors l'intégrale de Gauss

$$\frac{1}{4\pi} \int_\alpha \int_\beta \frac{(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha) \cdot (d\mathbf{x}_\alpha \wedge d\mathbf{x}_\beta)}{\|\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha\|^3} \quad (1.34)$$

converge et prend une valeur entière [Dobrovine et al.82] qui s'identifie à leur nombre d'enlacement $lk(\alpha, \beta)$ ¹⁵. Si $\mathbf{x}_\alpha(t)$ et $\mathbf{x}_\beta(t)$ désignent les trajectoires de phase des orbites α et β et T_α et T_β leur période respective, on peut écrire

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{T_\alpha} \int_0^{T_\beta} \frac{(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha \wedge \dot{\mathbf{x}}_\beta)}{\|\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha\|^3} dt_\alpha dt_\beta \quad (1.35)$$

où $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ et $\dot{\mathbf{x}}_\beta$ sont, par exemple, donnés par les équations différentielles d'un modèle. La formule 1.35 définit le nombre d'enlacement mais est difficilement exploitable, surtout dans un contexte expérimental.

Les invariants topologiques peuvent être définis plus simplement en utilisant une représentation plane, appelée le *diagramme de lien*, et obtenue par une projection régulière du lien \mathcal{L} dans \mathbb{R}^2 (voir fig.1.32). Des croisements apparaissent par l'effet de perspective mais la projection est effectuée de telle sorte que deux brins seulement soient impliqués dans chaque croisement. La coupure de l'un des deux brins indique naturellement leurs positions relatives. Toute l'information topologique est donc préservée dans ce diagramme.

On notera $\alpha \sqcap \alpha$ l'ensemble des auto-croisements du diagramme d'un nœud α et $\alpha \sqcap \beta$ l'ensemble des croisements entre composantes α et β du diagramme d'un lien. Ces ensembles sont bien entendu d'intersection vide puisque $\alpha \sqcap \beta$ exclut les auto-croisements de α et β .

Le mathématicien K. Reidemeister a montré qu'une isotopie quelconque d'un lien \mathcal{L} de \mathbb{R}^3 revient, sur le diagramme, à une séquence d'opérations élémentaires prises dans une base de trois mouvements [Reidemeister32], ceux décrits sur la figure 1.33. Cela signifie que les *mouvements de Reidemeister* correspondent à une isotopie dans \mathbb{R}^3 , mais aussi et surtout qu'ils sont suffisants pour décrire toutes les isotopies. Par conséquent, les invariants topologiques d'un lien de \mathbb{R}^3 correspondent à des invariants par mouvement de Reidemeister dans le diagramme plan associé, et nous allons voir qu'il est possible d'exprimer les premiers en fonction des seconds.

Supposons que l'on oriente les composantes d'un lien (Pour des orbites périodiques on prendra par exemple l'orientation naturelle du flot) de telle sorte qu'un

15. La notation lk vient du mot anglais linking number

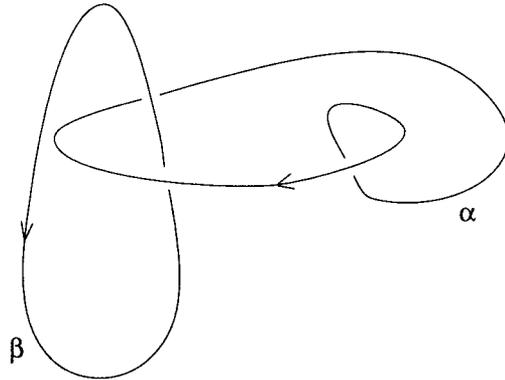


FIG. 1.32 – Diagramme d'un lien à deux composantes. Les courbes α et β ont, un nombre d'enlacement $lk(\alpha, \beta) = 1$. Il correspond au nombre de tours que α opère autour de β .

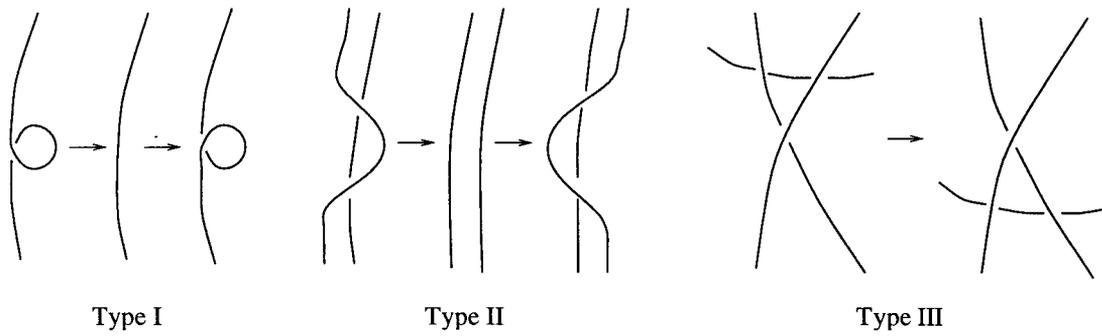


FIG. 1.33 – Les trois mouvements de Reidemeister.

signe $\varepsilon(p)$ puisse être attribué à chacun des croisements p du diagramme, suivant la convention définie sur la figure 1.34. Posons également

$$\sigma(E) = \sum_{p \in E} \varepsilon(p) \quad (1.36)$$

la somme des signes d'un ensemble E de croisements.

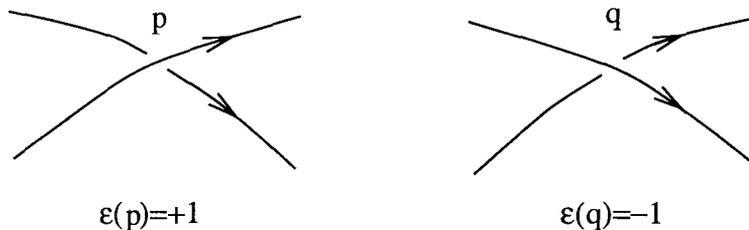


FIG. 1.34 – Convention de signe pour les croisements du diagramme.

Si α et β sont deux courbes fermées orientées et distinctes, alors il est démontré (voir par exemple [Kauffman]) que

1. $\sigma(\alpha \sqcap \beta)$ est invariant par les mouvements *I*, *II* et *III*
2. $\sigma(\alpha \sqcap \alpha)$ et $\sigma(\beta \sqcap \beta)$ sont invariants par les mouvements *II* et *III* uniquement.

Le mouvement *I* ne modifie que les auto-croisements et n'a effectivement d'influence que sur $\sigma(\alpha \sqcap \alpha)$ et $\sigma(\beta \sqcap \beta)$. Le mouvement *II* annihile une paire de croisements de signes opposés d'un même ensemble et n'a donc pas d'influence sur la somme. De même pour le mouvement *III* qui échange deux croisements d'un même ensemble. Par exemple, dans le diagramme de la figure 1.32, $\sigma(\alpha \sqcap \alpha) = 1$, $\sigma(\beta \sqcap \beta) = 0$ et $\sigma(\alpha \sqcap \beta) = 2$. Pour souligner le rôle particulier joué par le mouvement de type *I*, on distingue les mouvements *II* et *III* par le terme d'*isotopie régulière*, l'ensemble des trois mouvements formant la base de l'*isotopie ambiante*, c'est-à-dire complète.

Un examen plus approfondi montre que $\sigma(\alpha \sqcap \beta)$ est un entier pair égal au double du nombre d'enlacement

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sigma(\alpha \sqcap \beta) = lk(\beta, \alpha) \quad (1.37)$$

Les nombres $\sigma(\alpha \sqcap \alpha)$ et $\sigma(\beta \sqcap \beta)$ ne sont par contre invariants que par isotopie régulière et sont appelés les *nombre d'auto-enlacement*¹⁶

$$slk(\alpha) = \sigma(\alpha \sqcap \alpha) \quad (1.38)$$

16. La notation *slk* vient du terme anglais self-linking number.

Moyennant quoi, il existe des situations pour lesquelles les propriétés de symétrie ou une contrainte physique imposent à l'espace des phases une structure qui n'autorise que les isotopies régulières. Par exemple, la modulation d'un paramètre donne à l'espace des phases la structure d'un tore $D^2 \times S^1$ où le cercle S^1 porte la coordonnée $\varphi = \omega t \pmod{2\pi}$ et le disque D^2 les variables du système passif, supposé bidimensionnel. La figure 1.35 en donne une vue de dessus qui fait apparaître le diagramme du nœud d'une orbite $2T$. Pour que les trajectoires de

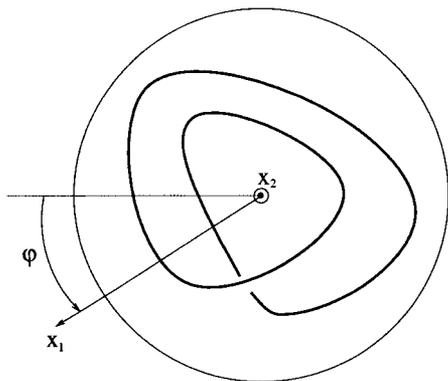


FIG. 1.35 – Espace des phases torique vu de dessus pour qu'apparaisse le diagramme du nœud. La boucle intérieure de l'orbite $2T$ ne peut être défait, par variation d'un paramètre de contrôle, à cause de l'axe central. Plus généralement les mouvements de Reidemeister de type I sont exclus. Les nombres d'auto-enlacement sont donc invariants dans cette espace puisque seules les isotopies régulières y sont possibles.

cet espace conservent un sens physique, elles doivent tourner avec un sens donné autour de l'axe central (le contraire représenterait une orbite qui remonte dans le temps). Toute tentative pour défaire une boucle, par exemple la boucle intérieure de l'orbite $2T$, sera donc entravée par la présence de l'axe fixe. Par conséquent, les mouvements de Reidemeister de type I sont exclus, et les nombres d'auto-enlacement peuvent être utilisés pour caractériser le type de nœud d'une orbite périodique.

En résumé, un lien à N composantes α_i , $i = 1, \dots, N$, est caractérisé par $N \times (N - 1)/2$ nombres d'enlacement $lk(\alpha_i, \alpha_j)$, chacun d'eux étant un invariant topologique. Cependant, ce jeu ne suffit pas à prouver l'équivalence avec d'autres liens isotopiques puisqu'il faut également caractériser, de manière individuelle, chaque nœud qui compose le lien. Pour cela, nous retiendrons que s'il existe une contrainte physique qui impose aux trajectoires de tourner autour d'un axe fixe, alors les nœuds peuvent être caractérisés par N nombres d'auto-enlacement $slk(\alpha_i)$, invariants par isotopie régulière.

1.4.2.3 Les taux de rotation relative

Les *taux de rotation relative* sont des nombres rationnels qui caractérisent l'enlacement de deux orbites [Solari et al.88b]. Comme les nombres d'auto-enlacement, il ne sont invariants que par isotopie régulière. Aussi, nous allons les définir dans le cas particulier où le système est modulé pour disposer d'un espace des phases torique $D^2 \times S^1$.

Il est utile dans ce type de situation d'introduire une représentation particulière qui consiste à déplier l'espace des phases, après coupure le long d'une surface de Poincaré Σ (voir fig 1.36). On obtient deux répliques de Σ qui sous-tendent

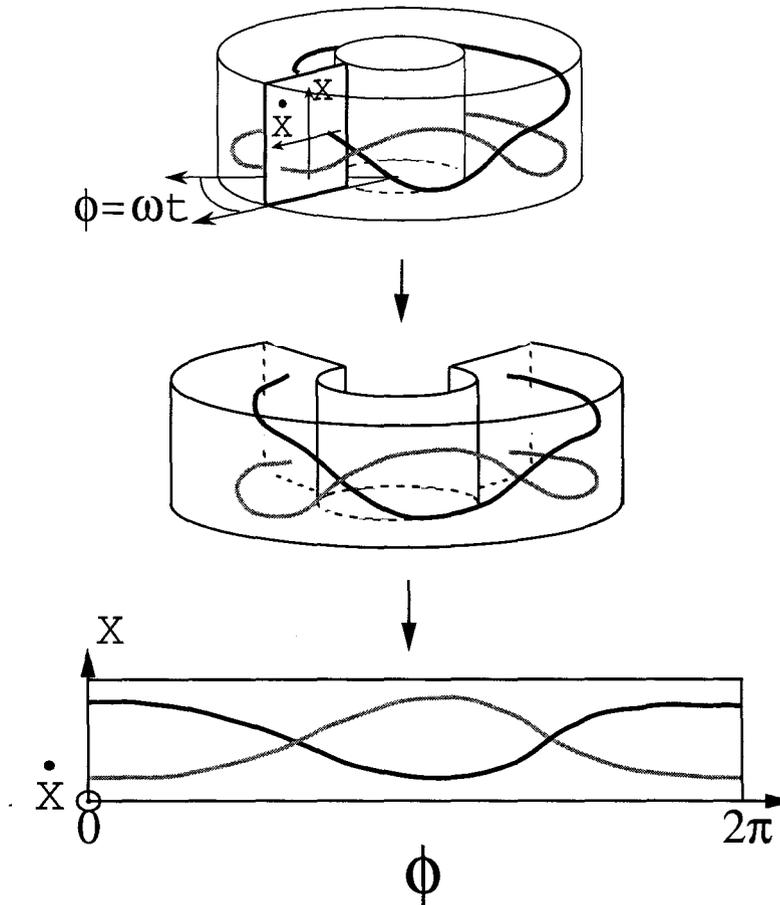


FIG. 1.36 – Si l'on déplie l'espace des phases, une orbite de période p forme une tresse à p brins.

le lien, l'ensemble formant ce que l'on appelle une *tresse*. Une orbite de période p traverse Σ en p points $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{p-1}$. La tresse d'une orbite p -périodique est donc composée de p brins qui sont les trajectoires reliant \mathbf{x}_i à $\mathbf{x}_{i+1} = \phi_T(\mathbf{x}_i)$ pour $i = 0, \dots, p-2$ et \mathbf{x}_{p-1} à $\mathbf{x}_0 = \phi_T(\mathbf{x}_{p-1})$ (où ϕ_t désigne le flot). Comme pour le lien, on définit le diagramme d'une tresse comme sa projection régulière

sur le plan de la feuille. La tresse est un véritable sujet d'étude en théorie des nœuds et les ouvrages de Birman [Birman75] et Louis Kauffman [Kauffman91], par exemple, en donnent une présentation complète. Retenons simplement que le diagramme de tresse contient exactement la même information topologique que le diagramme du lien associé, ce dernier pouvant être déduit par identification des plans qui sous-tendent la tresse. En particulier, les nombres d'enlacement et d'auto-enlacement sont définis comme pour le diagramme de lien puisque le nombre et les signes des croisements sont préservés dans le changement de représentation.

Considérons maintenant un couple d'orbites α et β de période $p_\alpha = 4$ et $p_\beta = 2$. Le diagramme de tresse est représenté sur la figure 1.37 et leur nombre d'enlacement vaut $lk(\alpha, \beta) = \sigma(\alpha \cap \beta)/2 = 3$. On note $\mathbf{x}_\alpha^0, \dots, \mathbf{x}_\alpha^{p_\alpha-1}$ et $\mathbf{x}_\beta^0, \dots, \mathbf{x}_\beta^{p_\beta-1}$ les intersections de α et β avec la surface de Poincaré qui sous-tend la tresse. Si l'on choisit deux points, disons \mathbf{x}_α^0 et \mathbf{x}_β^0 , et que l'on suit les orbites jusqu'à ce qu'elles reviennent simultanément aux deux points de départ, en l'occurrence au bout de $ppcm(p_\alpha, p_\beta) = 4$ périodes, on constate qu'elles s'enroulent une seule fois l'une autour de l'autre (fig. 1.37b). Les orbites α et β opèrent une rotation de $1/4$ de tour par période de modulation. Pourtant, si l'on refait la mesure en partant des points \mathbf{x}_α^0 et \mathbf{x}_β^1 (fig. 1.37c), on constate qu'elles s'enroulent deux fois et opèrent donc une rotation de $1/2$ tour par période de modulation. Ceci est dû au fait que les périodes p_α et p_β ne sont pas premières entre elles. La période effective du lien est inférieure à $p_\alpha \times p_\beta$ (elle vaut $ppcm(p_\alpha, p_\beta)$) et les configurations ne sont donc pas toutes explorées lorsqu'on suit les orbites à partir de deux points \mathbf{x}_α^i et \mathbf{x}_β^j . Une organisation sous-jacente existe, que le nombre d'enlacement ne peut pas discerner.

Cette observation a conduit H. Solari et R. Gilmore à introduire les *taux de rotation relative* [Solari et al.88a]. Ce sont des invariants par isotopie régulière qui donnent d'un lien une caractérisation plus fine que le nombre d'enlacement. Le taux de rotation relative R_{ij} est défini comme le nombre de tours par unité de temps que les trajectoires issues de \mathbf{x}_α^i et \mathbf{x}_β^j font l'une autour de l'autre. Il peut se mesurer en observant la rotation du vecteur $\mathbf{r}_{ij}(t) = \phi_t(\mathbf{x}_\beta^j) - \phi_t(\mathbf{x}_\alpha^i)$ qui joint les orbites issues des points \mathbf{x}_α^i et \mathbf{x}_β^j (fig. 1.38):

$$R_{ij} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\tau \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}_{ij} \wedge \dot{\mathbf{r}}_{ij}}{\|\mathbf{r}_{ij}\|^2} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^\tau d\theta \quad (1.39)$$

Étant donné la périodicité de l'intégrande,

$$R_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{1}{p_\alpha p_\beta T} \int_0^{p_\alpha p_\beta T} \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{lT} \int_0^{lT} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (1.40)$$

$$= \frac{\theta_{ij}(\alpha, \beta)}{2\pi lT} \quad (1.41)$$

où $l = ppcm(p_\alpha, p_\beta)$ est la période effective de l'évolution de $\mathbf{r}_{ij}(t)$ et $\theta_{ij}(\alpha, \beta)$ l'angle décrit par $\mathbf{r}_{ij}(t)$ sur ces l périodes de modulation. En pratique, la période

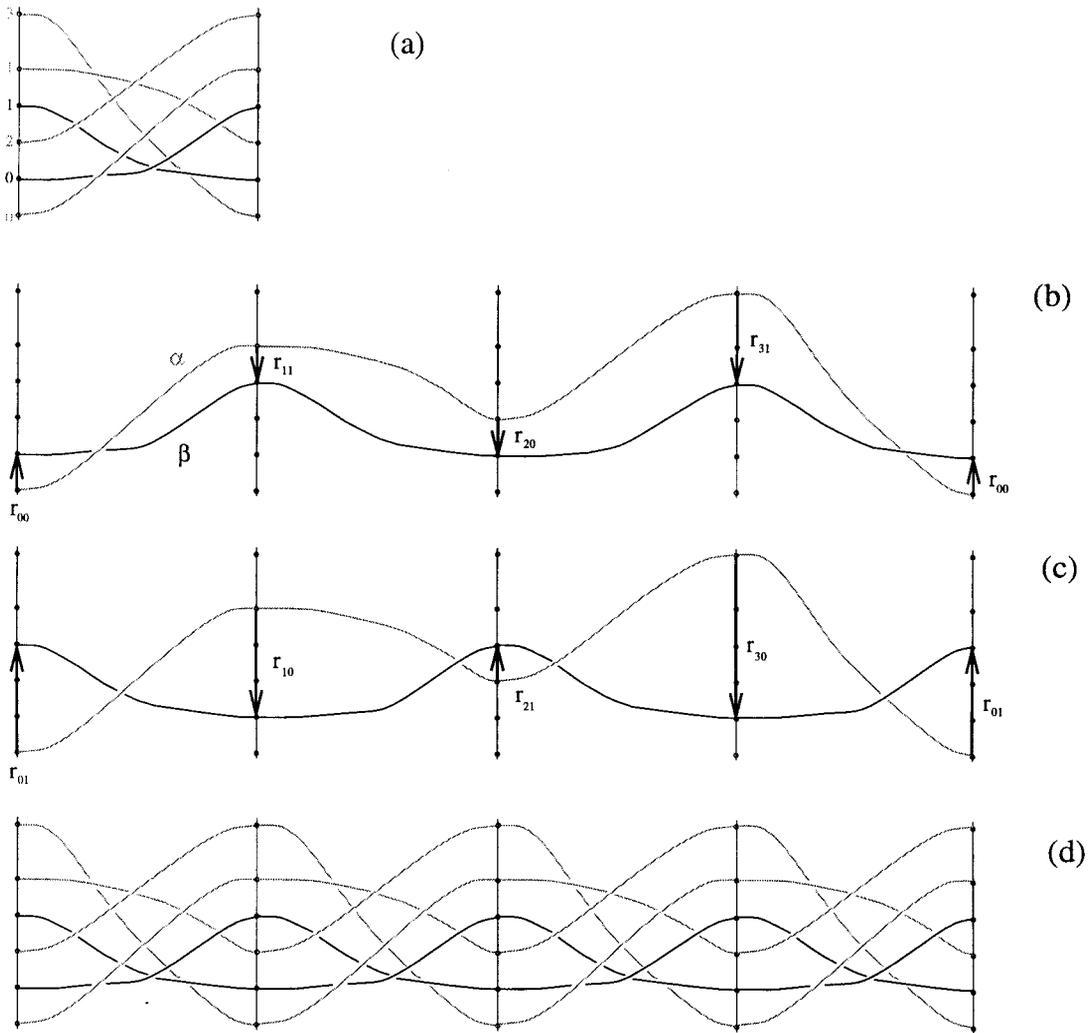


FIG. 1.37 – Diagramme de tresse d'un couple d'orbites de périodes 2 (en noir) et 4 (en gris). Suivant le choix des points de départ dans la section de Poincaré, les trajectoires issues des deux points s'enroulent différemment l'une autour de l'autre.

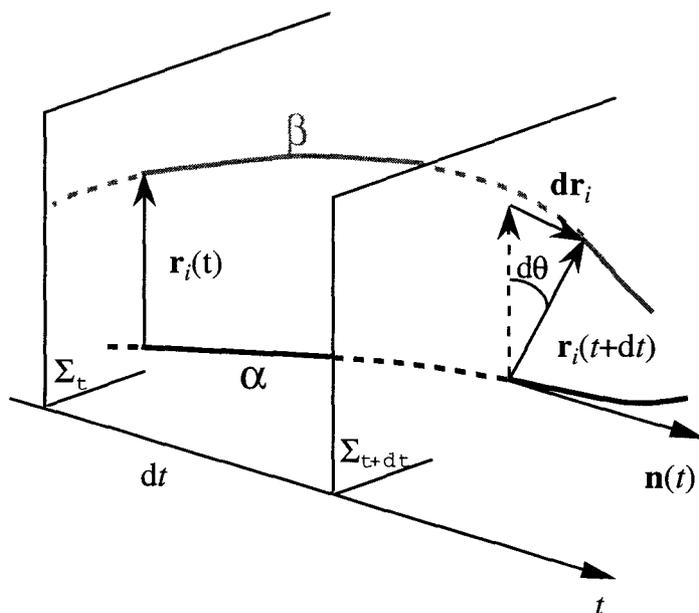


FIG. 1.38 - Rotation élémentaire du vecteur $\mathbf{r}(t)$ joignant les orbites α et β .

T est prise comme unité de temps de telle sorte que

$$R_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi l} \theta_{ij}(\alpha, \beta) \quad (1.42)$$

Pour les deux orbites de la figure 1.37 on a par exemple $R_{00} = 1/4$ et $R_{01} = 1/2$. De manière équivalente, des *taux d'autorotation relative* sont définis pour une orbite unique α en remplaçant simplement β par α et avec la convention

$$R_{ii}(\alpha, \alpha) = 0 \quad (1.43)$$

On notera que les taux de rotation relative ne dépendent pas du choix particulier de la surface de Poincaré qui sous-tend les tresses. En effet, l'enroulement des trajectoires ne dépend pas de l'endroit où on le regarde et n'est donc pas altéré si on fait glisser le plan le long de l'axe temporel. Pour la même raison, on a $R_{00} = R_{11} = R_{20} = R_{31} = 1/4$ et $R_{01} = R_{10} = R_{21} = R_{30} = 1/2$, c'est-à-dire que l'on a deux groupes de quatre taux de rotations identiques. En effet, \mathbf{r}_{11} , \mathbf{r}_{20} , \mathbf{r}_{31} d'une part et \mathbf{r}_{10} , \mathbf{r}_{21} , \mathbf{r}_{30} d'autre part sont respectivement les images de \mathbf{r}_{00} et \mathbf{r}_{01} par itérations successives de l'application de Poincaré et conduisent au même parcours. Plus généralement,

$$R_{i \bmod p_\alpha \ j \bmod p_\beta} = R_{(i+1) \bmod p_\alpha \ (j+1) \bmod p_\beta} \quad (1.44)$$

Un couple d'orbites α et β de périodicité p_α et p_β est donc caractérisé par un jeu de $p_\alpha p_\beta$ taux de rotation relative $\{R_{ij} ; i = 1, \dots, p_\alpha \text{ et } j = 1, \dots, p_\beta\}$ qui se

répartissent en g groupes de l éléments identiques, où $g = \text{pgcd}(p_\alpha, p_\beta)$ est le plus grand diviseur commun à p_α et p_β et $l = \text{ppcm}(p_\alpha, p_\beta)$ est le plus petit multiple commun à p_α et p_β .

Dans la pratique, le nombre de tours que α fait autour de β peut être évalué de la même façon que pour le diagramme de lien, c'est-à-dire par dénombrement des croisements signés. Pour cela on définit le brin b_α^i de la tresse comme la trajectoire qui relie x_α^i à son image $x_\alpha^{i+1} = \phi_T(x_\alpha^i)$:

$$b_\alpha^i = \{\phi_t(x_\alpha^i); 0 \leq t \leq T\} \quad (1.45)$$

Avec une définition équivalente pour β on peut écrire

$$\frac{\theta_{ij}(\alpha, \beta)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{lT} d\theta = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{l-1} \sigma(b_\alpha^{i+k} \cap b_\beta^{j+k}) \quad (1.46)$$

et donc

$$R_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2l} \sum_{k=0}^{l-1} \sigma(b_\alpha^{i+k} \cap b_\beta^{j+k}) \quad (1.47)$$

On peut vérifier que cette formule redonne bien les mesures annoncées précédemment pour l'exemple de la figure 1.37.

Les taux de rotation relative sont les demi-sommes partielles de croisements signés alors que le nombre d'enlacement en est la demi-somme totale. Ces quantités sont donc inévitablement liées et on peut vérifier que

$$lk(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \sum_{j=0}^{p_\beta-1} R_{ij}(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{g-1} l \times R_{0i}(\alpha, \beta) \quad (1.48)$$

Remarquons que chaque R_{ij} , pris individuellement, n'est pas un invariant topologique puisque la numérotation i et j des points dans la section de Poincaré comporte un certain arbitraire, tout au moins dans le choix du premier point de chaque orbite. Par contre, l'ensemble est, lui, un jeu invariant puisque leur somme est égale au nombre d'enlacement.

Rappelons enfin que les taux de rotation relative ainsi définis ne doivent leur caractère invariant qu'à la structure topologique $D^2 \times S^1$ de l'espace de plongement. Aussi, bien qu'ils soient présentés ici dans un système modulé, ils sont, de manière générale, des invariants topologiques dès lors que les trajectoires tournent avec un sens fixe autour d'un point central.

1.4.2.4 La torsion locale

La *torsion* d'une orbite périodique selle est un invariant topologique défini sur les seules propriétés dynamiques locales de l'orbite, et sort donc du cadre de la théorie des nœuds.

Comme nous l'avons évoqué à la section 1.1.3, lorsque l'on suit une orbite périodique selle α sur la durée de sa période, l'orientation de sa variété stable (et de manière identique instable) locale $\mathcal{W}_{loc}^s(\alpha)$ ($\mathcal{W}_{loc}^i(\alpha)$) effectue un nombre entier de demi-révolution. Ce nombre est par définition la *torsion locale* $\theta_{loc}(\alpha)$ de l'orbite α .

On notera que, dans un espace à trois degrés de liberté, la torsion locale n'est définie que pour une orbite périodique selle, c'est-à-dire une orbite qui possède en tout point une direction stable et une direction instable et donc des variétés séparatrices à deux dimensions. Comme $\mathcal{W}_{loc}^s(\alpha)$ et $\mathcal{W}_{loc}^i(\alpha)$ ne peuvent pas se couper ni s'interpénétrer par variation continue d'un paramètre de contrôle, la torsion locale est invariant par isotopie quelconque dans \mathbb{R}^3 .

Remarquons que ce nombre est extrêmement difficile à évaluer expérimentalement puisque l'information est dans les propriétés locales d'enlacement. Sa mesure est donc très sensible au bruit. Dans les simulations numériques, au contraire, il s'évalue facilement au moyen des équations linéarisées autour de l'orbite (voir sec.1.1.3).

1.4.2.5 En résumé

Un attracteur chaotique contient une quantité infinie d'orbites périodiques instables (OPI) réparties de manière dense. Cela signifie que toutes les parties de l'attracteur sont explorées par des OPI. L'ensemble reflète donc le comportement dynamique à des échelles très fines et constitue une très bonne approximation de la structure géométrique de l'attracteur. L'analyse topologique du chaos consiste à caractériser les OPI par des nombres *entiers* et *invariants* avec les paramètres de contrôle. Ce sont les invariants topologiques des nœuds et enlacements que forment les orbites périodiques.

L'analyse d'un régime expérimental est possible puisque les OPI peuvent être extraites d'une série temporelle. En effet, une trajectoire chaotique possède en règle générale des épisodes presque périodiques qui résultent des passages au voisinage des orbites périodiques et qui sont visibles sur la série temporelle (voir fig. 1.26. Si on détecte les segments correspondants et qu'on les représente dans l'espace reconstruit (par exemple $(x(t), x(t+\tau), \phi = \omega t)$ pour un système modulé), on obtient des représentants des OPI à partir desquels les invariants peuvent être mesurés.

Précisons enfin que l'analyse topologique d'un attracteur est un moyen de caractérisation robuste, c'est-à-dire qui ne dépend pas de manière sensible de la qualité des mesures. Par exemple, les nombres d'enlacement peuvent être déterminés même si le positionnement des OPI dans l'espace des phases est approximatif, et ni cette imprécision, ni le bruit éventuel ne modifie la mesure.

1.4.3 Le gabarit

L'analyse topologique d'un attracteur chaotique consiste à caractériser les orbites périodiques instables (OPI) qu'il contient par des nombres topologiques invariants. L'objectif est de développer une classification sur les bases de la théorie des nœuds, c'est-à-dire une classification dans laquelle on poserait que deux attracteurs sont équivalents s'ils sont caractérisés par les mêmes invariants topologiques.

Elle présente cependant deux inconvénients. Premièrement, les tables d'invariants sont une représentation fort peu commode des propriétés d'enlacement et elles n'autorisent pas une comparaison rapide entre attracteurs. Deuxièmement, deux liens ne sont effectivement équivalents que s'ils ont, au minimum, le même nombre de composantes. Or, une modification continue d'un paramètre peut créer ou annihiler des paires d'orbites par bifurcation nœud-selle. Le nombre d'OPI contenues dans un attracteur est donc modifié à chaque fois qu'une fenêtre périodique est traversée. Par ailleurs, rien ne garantit que toutes les OPI puissent être détectées dans une expérience réelle. Il semble donc très improbable que deux attracteurs soient équivalents au sens de la théorie des nœuds car en règle générale (i) ils n'ont pas le même nombre d'OPI et (ii) celles qui existent et que l'on détecte ne peuvent pas être mises en correspondance. Le concept de *gabarit* permet de s'affranchir de ces difficultés.

Pour étudier la topologie des flots hyperboliques à trois degrés de liberté, Birman et Williams ont montré [Birman et al.83] qu'il est possible de définir une surface simple \mathcal{K} et un flot $\bar{\phi}_t$ sur cette surface dont les orbites périodiques se nouent et s'enlacent comme les orbites du flot original. La donnée de la surface \mathcal{K} et du flot $\bar{\phi}_t$ forme un gabarit. Cela signifie qu'il est possible de projeter les orbites d'un flot hyperbolique sur une surface simple sans altérer leurs invariants topologiques. Par exemple, la figure 1.39a représente un ensemble d'orbites périodiques instables de l'attracteur de la figure 1.29, que l'on a déformé sans qu'elles se coupent, c'est-à-dire par un mouvement d'isotopie. Cette nouvelle configuration suggère fortement l'existence d'une surface simple qui peut décrire leur organisation. La figure 1.39b représente un exemple qui décrit la topologie des systèmes chaotiques les plus simples : le *gabarit du fer à cheval*. Un gabarit contient finalement la même information topologique que le flot original qu'il décrit, mais il offre l'avantage d'être une représentation beaucoup plus simple et plus facile à comparer.

Mindlin *et al.* furent les premiers à reprendre la notion de gabarit pour analyser un attracteur réel [Mindlin et al.90, Mindlin et al.91], c'est-à-dire qui ne contient pas toutes les orbites de toutes les périodes. Le point essentiel de l'analyse est que la surface du gabarit peut être déterminée à partir de quelques orbites représentatives de basses périodes. L'idée est donc de déduire, de l'organisation topologique des orbites existantes dans l'attracteur, la topologie de l'ensemble hyperbolique associé, dont elles seraient un échantillon représentatif. Ceci est tout à

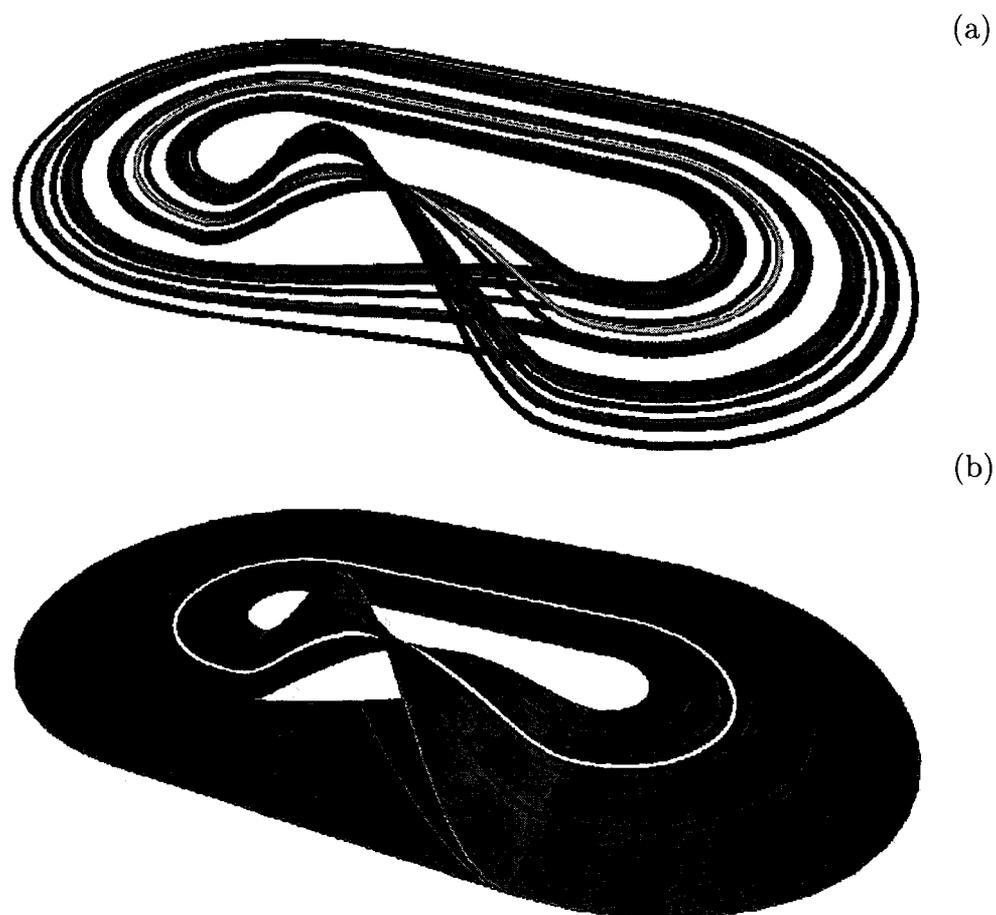


FIG. 1.39 – (a) Il est possible de disposer les orbites périodiques d'un attracteur (en l'occurrence celui de la figure 1.29) dans une configuration plus simple sans modifier leurs invariants topologiques, c'est-à-dire sans qu'elles se coupent. (b) Le gabarit du fer à cheval décrit l'organisation topologique des systèmes chaotiques les plus simples.

fait envisageable car les nombres topologiques des OPI existantes sont strictement invariables et caractérisent encore leur organisation dans une limite hyperbolique, c'est-à-dire une situation potentielle où toutes les orbites seraient présentes dans l'attracteur.

L'objectif de cette section est de donner les éléments qui permettent de déterminer un gabarit à partir de la donnée des orbites périodiques contenues dans un attracteur chaotique. Nous allons tout d'abord donner la définition mathématique du gabarit pour examiner ses propriétés. Puis nous verrons qu'il peut être défini par quelques entiers, qui constituent sa représentation algébrique. Enfin, nous montrerons que ces entiers sont directement liés aux invariants topologiques des orbites du gabarit et qu'il peuvent être calculés à partir de quelques orbites de basses périodes.

1.4.3.1 Définition

Considérons un flot tridimensionnel ϕ_t qui possède un ensemble limite hyperbolique Ω correspondant à une dynamique chaotique. Notons \sim la relation d'équivalence telle que, si \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 désignent deux points de Ω ,

$$\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(\mathbf{x}_1), \phi_t(\mathbf{x}_2)) = 0 \quad (1.49)$$

où $d(.,.)$ est une distance dans l'espace des phases. De manière générale, deux points pris au hasard dans Ω , même arbitrairement proches, divergent l'un de l'autre sous l'effet du flot. Par contre, certains points, comme par exemple les points de la variété stable d'une orbite, convergent vers le même futur. La relation range en fait dans une même classe tous les points d'une variété stable qui sont confondus au bout d'un temps infini (fig. 1.40). Appliqué aux orbites

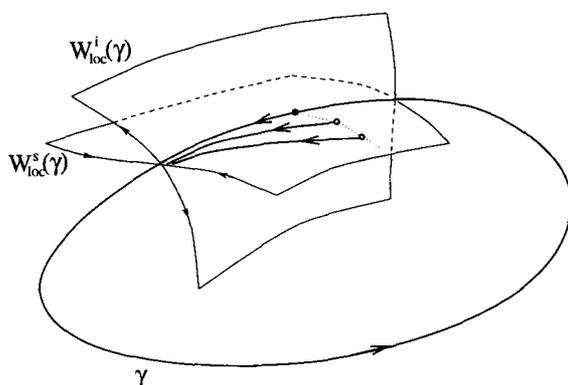


FIG. 1.40 – Les trois points de W_{loc}^s sont confondus au bout d'un temps infini. La relation \sim les range donc dans une même classe que l'on peut désigner par exemple par le représentant appartenant à l'orbite.

de Ω , la relation \sim comprime le flot tridimensionnel le long des variétés les plus

stables, produisant un semi-flot $\bar{\phi}_t$ sur une variété \mathcal{K} de dimension 2 à plusieurs branches. La donnée de la surface et du semi-flot constitue le gabarit de l'ensemble hyperbolique [Birman et al.83, Holmes88].

Par exemple, la suspension du fer à cheval, illustrée sur la figure 1.41, est réduite à une surface à deux branches étirées le long de la variété instable. L'une

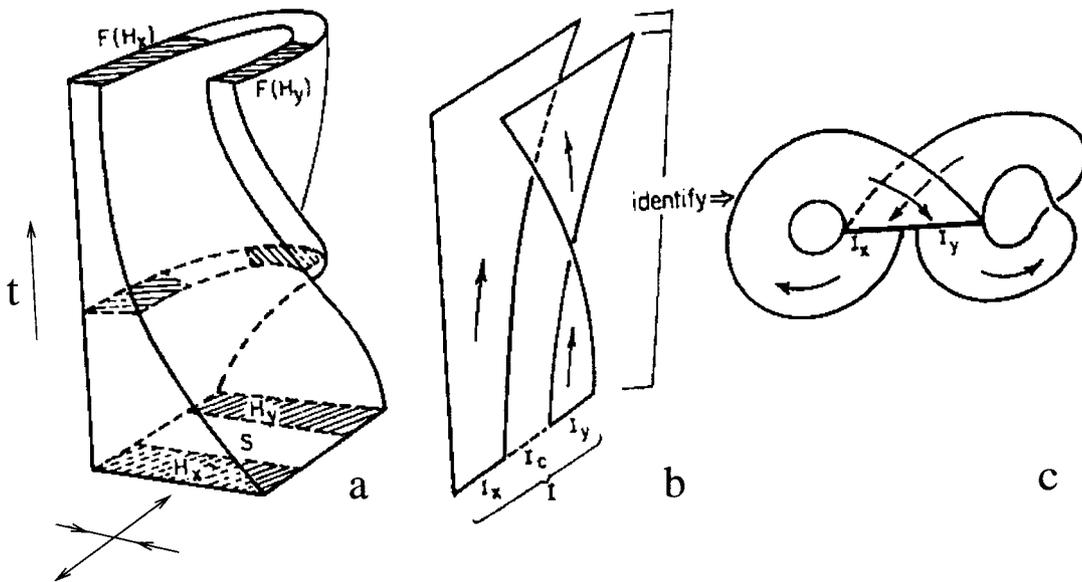


FIG. 1.41 – (a) Suspension de l'application du fer à cheval de Smale. (b) La surface du gabarit. (c) En générale une boucle triviale liée à la nature continue du semi-flot est ajoutée pour préciser que l'on identifie les lignes de départ et d'arrivée.

est plate alors que la seconde retourne l'ensemble des trajectoires qui y passent, créant ainsi la réinjection par effet de repliement. Les deux branches entrent ensuite en coïncidence sur une *ligne d'insertion* par l'effet de compression. Enfin, le ruban global qui identifie la ligne d'entrée (où *ligne de branchement*) à la ligne d'insertion traduit la nature continue de la suspension. Ce ruban n'est parfois pas représenté et les orbites apparaissent dans ce cas comme une tresse plutôt qu'un lien. Par référence à l'application de Smale, ce gabarit est appelé le *gabarit du fer à cheval*.

La nature fractale du chaos disparaît avec les variétés stables mais les propriétés fondamentales sont préservées : il y a une sensibilité aux conditions initiales suivant la direction instable et l'unicité de la trajectoire passant par un point est conservée. Par contre, l'opérateur d'évolution est un semi-flot car le déterminisme est brisé à la ligne d'insertion lorsqu'on remonte le temps. Tout point de la ligne possède deux passés potentiels, portés chacun d'eux par une branche, de sorte que seul le futur soit déterminé. Notons qu'une coupe transverse définit une section

de Poincaré du semi-flot.

Néanmoins, la propriété essentielle du gabarit est la suivante. Comme les variétés stables ne peuvent pas se couper, le processus de réduction d'une dimension correspond à une isotopie. Par conséquent,

1. chaque orbite du flot hyperbolique ϕ_t est associée à une orbite du semi-flot $\bar{\phi}_t$ de même période (comptée en nombre de passage par la ligne de branchement), et de même type de nœud, et
2. un jeu quelconque d'orbites périodiques du flot hyperbolique et le jeu correspondant sur \mathcal{K} possèdent les mêmes invariants topologiques.

Aussi nous pouvons affirmer que deux flots hyperboliques sont équivalents au sens de la théorie des nœuds s'ils possèdent le même gabarit.

La structure à plusieurs branches du gabarit permet de définir une dynamique symbolique de manière assez naturelle. Par exemple, à chaque tour dans le gabarit du fer à cheval, les trajectoires passent soit par la branche plate, que l'on peut désigner par le symbole 0, soit par la branche inversant l'orientation, de symbole 1. La liste des symboles des branches successivement empruntées par une orbite définit alors une séquence infinie de 0 et de 1. De même, un point x de la ligne de branchement peut être désigné par la séquence de son orbite $\bar{\phi}_t(x)$, le premier symbole étant le numéro de la branche à laquelle appartient le point x . On notera tout particulièrement que la partition de la ligne de branchement est génératrice, c'est-à-dire qu'une séquence de longueur infinie ne peut correspondre qu'à une et une seule orbite sur le gabarit et, par suite, à un seul point de départ sur la ligne de branchement. Pour le démontrer, supposons qu'il existe sur le gabarit deux orbites périodiques α et β de même période p et de même nom symbolique. Prenons alors un point de α et un point de β séparés d'une distance finie d sur la ligne de branchement et de même nom symbolique, c'est-à-dire appartenant à la même branche. Les trajectoires issues de ces points suivent les mêmes branches et divergent l'une de l'autre suivant la direction instable. Pourtant, au bout de p passages par la ligne d'insertion, elles doivent se trouver à la même distance d . L'incompatibilité des deux faits montre que l'hypothèse de départ est fautive et, par là-même, que la partition est génératrice. Enfin on peut vérifier sur l'exemple du fer à cheval que la partition de la ligne de branchement correspond à la partition de la surface de Poincaré du flot original (voir également [Holmes88]).

1.4.3.2 Une représentation algébrique du gabarit

Historiquement, cette procédure de réduction d'une dimension fut introduite par Birman et Williams pour simplifier l'étude de l'organisation des orbites périodiques d'une suspension d'un ensemble hyperbolique, en partant du gabarit supposé connu. C'est exactement l'inverse qu'on se propose de faire ici. Il s'agit, partant des orbites périodiques détectées dans l'attracteur réel, de remonter au

gabarit du flot hyperbolique qui les contient. Il est donc nécessaire d'exprimer la géométrie du gabarit sous une forme mathématique utilisable, l'idée étant de relier les paramètres géométriques du gabarit aux caractéristiques de ses orbites, c'est-à-dire aux invariants topologiques.

Toutes les géométries sont envisageables mathématiquement et la figure 1.42 en est un exemple à trois branches. Le semi-flot est orienté du haut vers le bas et

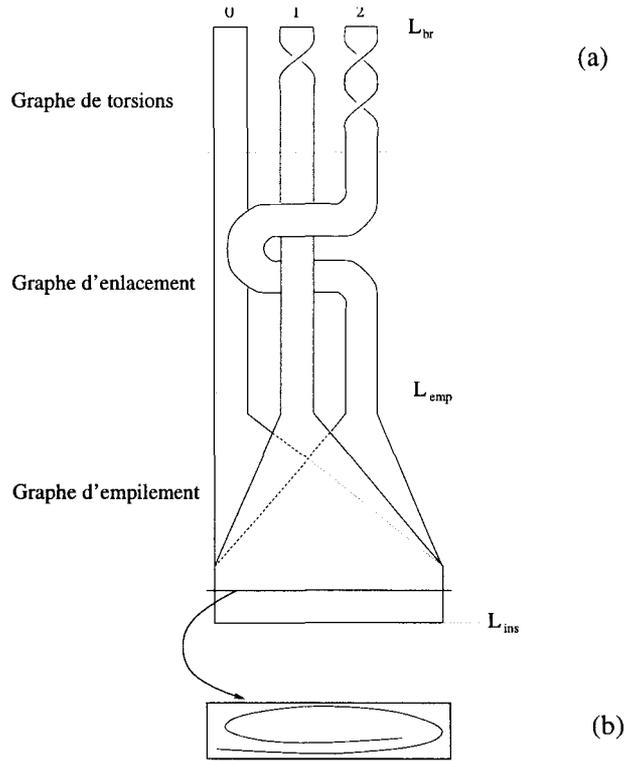


FIG. 1.42 – (a) Exemple de diagramme de gabarit. Les branches sont numérotées par ordre croissant de la gauche vers la droite. Il est commode pour la description de séparer les différentes caractéristiques en trois zones qui sont chronologiquement le graphe de torsion, le graphe d'enlacement et le graphe d'empilement, appelé également le graphe d'insertion. L_{br} et L_{ins} sont respectivement les lignes de branchement et d'insertion. L_{emp} marque le début du graphe d'empilement. (b) Section de Poincaré du semi-flot.

les branches sont numérotées par ordre croissant de 0 à $N - 1$ de la gauche vers la droite. On doit mettre en chiffres les trois paramètres libres suivants :

1. chaque branche peut avoir une torsion propre,
2. indépendamment de leur torsion respective, deux branches peuvent être enlacées un certain nombre de fois, et enfin

3. les branches peuvent être empilées dans un ordre quelconque sur la ligne d'insertion.

La figure 1.42 représente un *diagramme de gabarit*, c'est-à-dire une projection plane analogue aux diagrammes utilisés pour les liens ou les tresses. Par souci de clarté, on effectue une séparation géographique arbitraire des différents éléments: les torsions dans la partie supérieure, les enlacements entre branches dans une partie intermédiaire, et l'empilement des branches dans la partie inférieure, appelée le *graphe d'empilement*. On notera L_{br} et L_{ins} les lignes de branchement et d'insertion. La ligne L_{emp} marque le début du graphe d'empilement.

À ces représentations sont également associées des conventions de signe sur les croisements entre branches (fig. 1.43) et sur les torsions propres d'une branche (1.44).

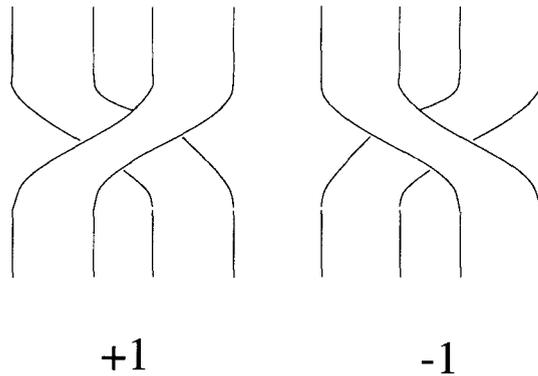


FIG. 1.43 – Convention de signe pour le croisement des branches

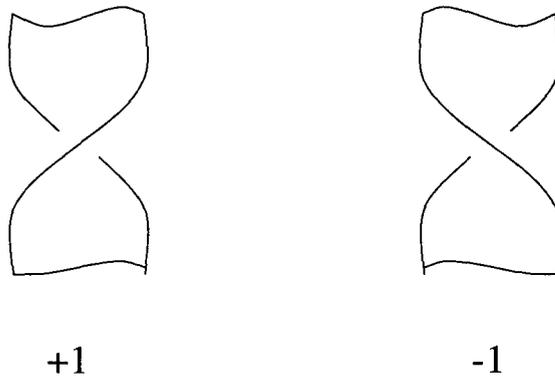


FIG. 1.44 – Convention de signe pour les torsions.

Mindlin et al. [Mindlin et al.90] ont introduit la description algébrique de base à toutes les méthodes de détermination du gabarit. Elle consiste à caractériser

les paramètres libres 1 (torsion propre) et 2 (enlacement des branches) par une matrice carrée $n \times n$ dite *matrice de gabarit*, que l'on notera \mathcal{T} , et la propriété (iii) par une matrice linéaire $1 \times n$ dite *matrice d'insertion*, que l'on notera \mathcal{I} , où n est le nombre de branches du gabarit¹⁷, c'est-à-dire le nombre de symboles qui composent la dynamique. L'élément diagonal \mathcal{T}_{ii} mesure, en nombre de demi-tours signés, la torsion de la branche i . L'élément \mathcal{T}_{ij} avec $i \neq j$ mesure l'enlacement des branches i et j en nombre de croisements signés. Enfin, les éléments de \mathcal{I} définissent l'ordre relatif d'empilement des branches à l'insertion : $\mathcal{I}_i > \mathcal{I}_j$ indique que la branche i est au-dessus de la branche j . Ainsi, avec les conventions de signe des figures 1.43 et 1.44, le gabarit du fer à cheval est simplement donné par

$$\mathcal{T}_{fc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.50a)$$

$$\mathcal{I}_{fc} = (0 \ 1), \quad (1.50b)$$

et le gabarit de la figure 1.42 par

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (1.51a)$$

$$\mathcal{I} = (0 \ 2 \ 1), \quad (1.51b)$$

Une remarque essentielle sur la description algébrique doit ici être faite. Les éléments de la matrice \mathcal{T} sont évidemment les paramètres géométriques du gabarit mais ils sont aussi et surtout les invariants des orbites 1-périodiques. Il est facile de vérifier que \mathcal{T}_{ii} est la torsion de l'orbite \bar{i} et que $\mathcal{T}_{ij}/2 = lk(\bar{i}, \bar{j})$ à condition que les conventions de signe du gabarit et des tresses soient accordées. Ceci suggère un résultat fondamental qui sera précisé plus loin, à savoir que toute la topologie de l'attracteur hyperbolique est fixée par la topologie d'un très petit nombre d'orbites périodiques.

Melvin et Tuffilaro [Melvin et al.91] ont montré qu'une réduction à une seule matrice effective $n \times n$ est possible à condition d'adopter une convention d'insertion dite "standard". Celle-ci consiste à imposer à la matrice d'insertion d'être de la forme

$$\mathcal{I} = (0 \ 1 \ \dots \ n) \quad (1.52)$$

qui devient par là-même inutile. En contrepartie, les branches doivent être réorganisées dans la zone intermédiaire pour préserver la topologie globale. Toutefois cette convention est délicate à utiliser car elle éloigne la forme du gabarit de la forme du flot tridimensionnel et brise la signification physique des éléments \mathcal{T}_{ij} .

17. Les notations évoquent les mots anglais Template et Insertion

Pour notre part, nous utilisons une convention d'écriture qui, nous le verrons plus loin, simplifie la mise en équation du problème [Lefranc et al.95]. L'empilement des branches est décrit par une matrice d'insertion $n \times n$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij} &= \operatorname{sgn}(\mathcal{I}_j^M - \mathcal{I}_i^M) \times \operatorname{sgn}(j - i) \\ \text{et } \mathcal{I}_{ii} &= 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

où \mathcal{I}^M désigne la matrice d'insertion écrite selon les conventions originales de Mindlin *et al.* et où $\operatorname{sgn}(x)$ est la fonction signe qui prend la valeur $+1$ (resp. -1) si x est positif (resp. négatif). L'élément \mathcal{I}_{ij} ainsi défini correspond directement au signe du croisement que deux trajectoires, issues des branches i et j , peuvent afficher dans le graphe d'insertion (fig. 1.45). Par exemple, les matrices d'insertion

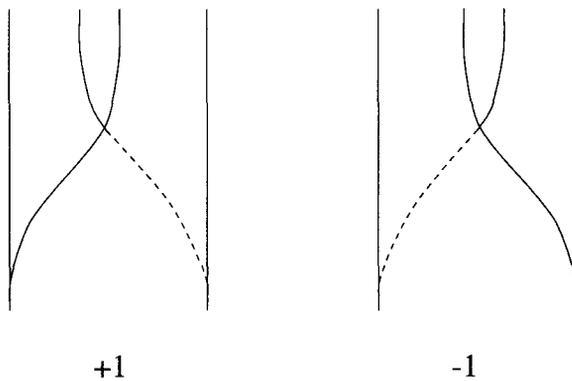


FIG. 1.45 – Convention de signe pour l'empilement des branches à l'insertion.

du fer à cheval et du gabarit de la figure 1.42 sont réécrites respectivement comme

$$\mathcal{I}_{fc} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

et

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

Précisons que cette notation n'altère pas la matrice de gabarit, dans la mesure où l'ordre des branches au début du graphe d'empilement (L_{emp}) est le même que l'ordre initial sur la ligne de branchement (L_{br}).

Finalement, la géométrie du gabarit est entièrement décrite par quelques entiers regroupés dans une structure matricielle. Ces entiers correspondent aux invariants topologiques des orbites de période 1. Ce résultat est extrêmement important puisqu'il signifie que la topologie de toutes les orbites du gabarit et par suite du flot hyperbolique est dictée par la topologie de quelques orbites de basses périodes.

1.4.3.3 Positions relatives des orbites sur le gabarit

La dynamique symbolique permet de définir une relation d'ordre entre les points des orbites et donc d'évaluer les positions relatives des orbites sur le gabarit. Ceci constitue une analyse préalable nécessaire à la détermination du gabarit.

Les branches du gabarit forment une partition génératrice du semi-flot, c'est-à-dire qu'une séquence infinie de symboles définit un point unique x sur la ligne de branchement et, par là-même, une orbite unique $\overline{\phi}_t(x)$. Cette propriété permet de déterminer la position relative de deux points x et y d'après leur séquence symbolique $\mathbf{s}(x)$ et $\mathbf{s}(y)$. Nous utilisons ici les mêmes notations qu'à la section 1.3.2.2, à savoir que $\mathbf{s}(x) = \{s_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ où $s_n(x)$ est le symbole de la branche à laquelle appartient la $n^{\text{ième}}$ image de x par l'application de Poincaré du gabarit. Celle-ci fait correspondre à un point son successeur sur la ligne de branchement. Par exemple, la séquence 132... désigne un point de la branche 1 qui se retrouve sur la branche 3 après un tour dans le gabarit, puis sur la branche 2 après deux tours, etc... De même $\overline{\mathbf{s}(x)}$ désigne l'unique orbite qui passe par x .

Si $s_0(x)$ est différent de $s_0(y)$, c'est-à-dire si x et y n'appartiennent pas à la même branche, la position relative des points est immédiatement connue puisque les branches sont numérotées par ordre croissant de la gauche vers la droite. En effet, en supposant l'axe de coordonnées orienté de la gauche vers la droite, on a

$$\text{sgn}(x - y) = \text{sgn}(s_0(x) - s_0(y)) \quad (1.56)$$

Dans le cas non trivial où les points appartiennent à la même branche, x et y possèdent une séquence initiale commune \mathbf{S} de longueur l d'autant plus longue qu'ils sont proches :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(x) &= \mathbf{S}s_l(x) \dots \\ \mathbf{s}(y) &= \mathbf{S}s_l(y) \dots \end{aligned} \quad (1.57)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= s_0(x)s_1(x) \dots s_{l-1}(x) \\ &= s_0(y)s_1(y) \dots s_{l-1}(y) \\ &= S_0S_1 \dots S_{l-1} \end{aligned} \quad (1.58)$$

et

$$s_l(x) \neq s_l(y) \quad (1.59)$$

Le nombre total de croisements signés observé entre les deux trajectoires issues de x et y pendant la séquence \mathbf{S} est

$$\sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{T}_{S_k S_k} \quad (1.60)$$

c'est-à-dire la somme des torsions des branches visitées. Une conséquence intéressante de ce résultat est que l'ordre des points x et y est celui des images $f^l(x)$ et $f^l(y)$, où f désigne l'application de Poincaré, à condition que (1.60) soit pair. Aussi, en définissant la fonction parité $\Pi(i)$ de variable entière $i \in \mathbb{Z}$ telle que

$$\Pi(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.61)$$

on a

$$\text{sgn}(x - y) = \Pi\left(\sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{T}_{s_k s_k}\right) \times \text{sgn}(f^l(x) - f^l(y)) \quad (1.62)$$

Comme $\mathbf{s}(f^l(x)) = \Delta^l(\mathbf{s}(x)) = s_l(x)s_{l+1}(x)\dots$, où Δ est l'opérateur décalage introduit à la section 1.3.2.2, et que, par hypothèse, $s_l(x) \neq s_l(y)$, il vient

$$\text{sgn}(f^l(x) - f^l(y)) = \text{sgn}(s_l(x) - s_l(y)) \neq 0 \quad (1.63)$$

Finalement, quels que soient x et y , deux points de la ligne de branchement, on a

$$\text{sgn}(x - y) = \Pi\left(\sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{T}_{s_k s_k}\right) \times \text{sgn}(s_l(x) - s_l(y)) \quad (1.64)$$

où l est la longueur de la séquence initiale commune. Si l est nul on retrouve évidemment le cas trivial (1.56).

1.4.3.4 Détermination du gabarit

Déterminer le gabarit d'un flot hyperbolique consiste à calculer les matrices \mathcal{T} et \mathcal{I} qui en sont la représentation algébrique. Le gabarit solution est le gabarit dont les OPI ont les mêmes invariants topologiques que les OPI associées du flot original. Or, il est possible d'exprimer les invariants topologiques des orbites du gabarit en fonction des éléments des matrices \mathcal{T} et \mathcal{I} (voir par exemple [Tuffillaro et al.92, Lesceller et al.94]), c'est-à-dire que l'on peut écrire une relation de la forme

$$\mathbf{i}(\mathcal{L}) = f(\mathcal{T}, \mathcal{I}, \mathcal{L}) \quad (1.65)$$

où $\mathbf{i}(\mathcal{L})$ désigne les invariants topologiques d'un lien \mathcal{L} sur le gabarit. Par identification des invariants $\mathbf{i}(\mathcal{L})$ avec ceux mesurés dans le flot tridimensionnel, la détermination du gabarit devient un *problème d'inversion* de l'équation algébrique 1.65. Les données du problème sont les matrices \mathcal{T} et \mathcal{I} et deux orbites α et β dont les périodicités p_α et p_β et les noms symboliques $\bar{\alpha} = \overline{\mathbf{s}(\alpha)}$ et $\bar{\beta} = \overline{\mathbf{s}(\beta)}$ sont connus. La question est : que valent leurs invariants topologiques?

L'orbite α coupe la ligne de branchement, qui fait office de surface de Poincaré, en p_α points $x_\alpha^0, \dots, x_\alpha^{p_\alpha-1}$. Son nom symbolique est donc

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \overline{\mathbf{s}(x_\alpha^0)} = \dots = \overline{\mathbf{s}(x_\alpha^{p_\alpha-1})} \\ &= \overline{s_0(x_\alpha^i) s_1(x_\alpha^i) \dots s_{p_\alpha-1}(x_\alpha^i)} \quad \forall i\end{aligned}\quad (1.66)$$

où $\mathbf{s}(x_\alpha^i)$ est le nom symbolique du point x_α^i . Si le ruban qui identifie les lignes de branchement et d'insertion n'est pas représenté, l'orbite α est une tresse à p_α brins $b_\alpha^i = \{\bar{\phi}_t(x_\alpha^i); 0 \leq t \leq T\}$. Des notations équivalentes sont prises pour l'orbite β . Moyennant quoi, pour alléger l'écriture et dans la mesure où aucune ambiguïté n'est possible, on gardera $s_0(x_\alpha^i) = s_i(x_\alpha^0) = \alpha_i$ de telle sorte que

$$\bar{\alpha} = \overline{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{p_\alpha-1}} \quad \text{et} \quad \bar{\beta} = \overline{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{p_\beta-1}} \quad (1.67)$$

Le calcul de la torsion locale $\theta_{loc}(\bar{\alpha})$ est immédiat puisqu'elle est donnée par la somme des demi-tours des branches successivement visitées par α :

$$\theta_{loc}(\bar{\alpha}) = c \times \sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \mathcal{T}_{\alpha_i \alpha_i} \quad (1.68)$$

où c est une constante, égale à ± 1 , introduite pour accorder, s'il y a lieu, les conventions de signes entre la tresse et le gabarit. Par exemple, les schémas 1.34, d'une part, et 1.43 et 1.44, d'autre part, correspondent à des conventions inverses et requierent une valeur de $c = -1$.

Le nombre d'enlacement $lk(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ est calculé par dénombrement des croisements signés sur la tresse. Il faut donc évaluer la contribution de chacun des couples de brins (b_α^i, b_β^j) , puis en faire la somme. Formellement, cela s'écrit

$$lk(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \sum_{j=0}^{p_\beta-1} \sigma(b_\alpha^i \sqcap b_\beta^j) \quad (1.69)$$

Différentes sources de croisements peuvent alimenter l'ensemble $b_\alpha^i \sqcap b_\beta^j$

1. Si $\alpha_i = \beta_j$, i.e. $s_0(x_\alpha^i) = s_0(x_\beta^j)$, alors les brins b_α^i et b_β^j sont sur la même branche de numéro α_i et seule la torsion des branches crée des croisements

$$\sigma(b_\alpha^i \sqcap b_\beta^j) = c \times \mathcal{T}_{\alpha_i \alpha_i} = c \times \mathcal{T}_{\beta_j \beta_j} = c \times \mathcal{T}_{\alpha_i \beta_j} \quad (1.70)$$

2. Si $\alpha_i \neq \beta_j$, alors les brins sont sur des branches différentes et les sources sont les croisements entre les branches α_i et β_j et un croisement éventuel à l'insertion dans le graphe d'empilement.

$$\sigma(b_\alpha^i \sqcap b_\beta^j) = c \times (\mathcal{T}_{\alpha_i \beta_j} + \eta_{\alpha_i \beta_j}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \times \mathcal{I}_{\alpha_i \beta_j}) \quad (1.71)$$

où $\eta_{\alpha_i \beta_j}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 1$ si un croisement existe dans le graphe d'empilement et 0 sinon. $\mathcal{I}_{\alpha_i \beta_j}$ donne le signe de ce croisement.

Comme on a pris la précaution de poser $\mathcal{I}_{kk} = 0$ pour tout $k = 0, \dots, N-1$, l'expression (1.71) redonne (1.70) si les brins b_α^i et b_β^j sont sur la même branche, c'est-à-dire si $\alpha_i = \beta_j$, et le nombre d'enlacement est donné par l'expression générale

$$lk(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \frac{c}{2} \sum_{i=0}^{p_\alpha-1} \sum_{j=0}^{p_\beta-1} (\mathcal{T}_{\alpha_i\beta_j} + \eta_{\alpha_i\beta_j}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \times \mathcal{I}_{\alpha_i\beta_j}) \quad (1.72)$$

Cette écriture est relativement immédiate, la réelle difficulté est d'évaluer la quantité $\eta_{\alpha_i\beta_j}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ pour $\alpha_i \neq \beta_j$. Il faut construire une fonction qui prenne la valeur 1 (resp. 0) si les brins b_α^i et b_β^j se croisent (resp. ne se croisent pas) entre les lignes L_{emp} et L_{ins} , c'est-à-dire entre la ligne qui marque le début du graphe d'empilement et la ligne d'insertion (voir fig. 1.42). Autrement dit, il s'agit de déterminer un critère qui indique si les brins ont, sur L_{emp} et L_{ins} , des positions relatives différentes. En fait, dans la mesure où la représentation algébrique que nous avons choisie ne change pas l'ordre des branches entre les lignes L_{br} et L_{emp} , la position relative des brins sur L_{emp} est la même que sur L_{br} . Elle est donc définie par le signe de $x_\alpha^i - x_\beta^j$. La disposition sur L_{ins} est, quant à elle, donnée par le signe de $x_\alpha^{i+1} - x_\beta^{j+1}$. Il vient ainsi naturellement

$$\eta_{\alpha_i\beta_j}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \Gamma((x_\alpha^i - x_\beta^j)(x_\beta^{j+1} - x_\alpha^{i+1})) \quad (1.73)$$

où Γ est la fonction échelon définie par

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1.74)$$

Cependant, les données du problème, en ce qui concerne les orbites α et β , sont uniquement leurs noms symboliques. Par définition, $\mathbf{s}(x) = \{s_k(x)\}_{k=0}^\infty$ est la série de symboles associés aux branches du gabarit successivement visitées par la trajectoire issue de x . Le premier symbole $s_0(x)$ identifie la branche qui porte le point x , la localisation précise étant définie par le reste de la séquence. Aussi, comme par hypothèse b_α^i et b_β^j appartiennent à des branches α_i et β_j distinctes, le signe de $x_\alpha^i - x_\beta^j$ est simplement le signe de $s_0(x_\alpha^i) - s_0(x_\beta^j) = \alpha_i - \beta_j$.

L'évaluation de $x_\beta^{j+1} - x_\alpha^{i+1}$ est par contre beaucoup plus délicate puisque rien ne garantit que ces deux points appartiennent à deux branches distinctes. La solution est donnée par l'ordre naturel des séquences symboliques défini plus haut (voir l'équation 1.64) qui permet de connaître la position relative de deux points sur la ligne de branchement. En posant $x = x_\alpha^{i+1}$ et $y = x_\beta^{j+1}$, c'est-à-dire $s_k(x) = s_k(x_\alpha^{i+1}) = s_{k+1}(x_\alpha^i) = \alpha_{i+k+1}$, et de manière équivalente $s_k(y) = \beta_{j+k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et après remplacement dans (1.64), il reste

$$\eta_{\alpha_i\beta_j}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \Gamma\left((\alpha_i - \beta_j) \left[\prod_{k=1}^{l_{ij}} \mathcal{T}_{\alpha_{i+k}\alpha_{i+k}} \right] (\beta_{j+l_{ij}+1} - \alpha_{i+l_{ij}+1}) \right] \quad (1.75)$$

où l_{ij} est la longueur de la séquence commune à $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ en partant respectivement des symboles α_{i+1} et β_{j+1} (ces symboles étant compris).

Le nombre d'enlacement est finalement exprimé, à travers les formules (1.72) et (1.75), en fonction et uniquement en fonction des données du problème, à savoir \mathcal{T} , \mathcal{I} , $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$. La constante c est choisie pour mettre en accord les conventions de signes sur les diagrammes de tresse et de gabarit et les paramètres l_{ij} se déduisent des séquences $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$. Par exemple, le nombre d'enlacement entre les orbites $\bar{1} = 1111\dots$ et $\bar{10} = \overline{01} = 101010\dots$ du fer à cheval, de période respective 1 et 2, vaut (avec $c = 1$)

$$lk(\bar{1}, \bar{10}) = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{T}_{11} + \eta_{11} \mathcal{I}_{11}) + (\mathcal{T}_{10} + \eta_{10} \mathcal{I}_{10}) \right] \quad (1.76)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{11} &= 1 \\ \mathcal{T}_{10} &= 0 \\ \mathcal{I}_{11} &= 0 \\ \mathcal{I}_{10} &= 1 \\ \text{et } \eta_{10} &= \Gamma\left((1-0) \times \Pi(\mathcal{T}_{11}) \times (0-1)\right) = 1 \end{aligned} \quad (1.77)$$

d'où $lk(\bar{1}, \bar{10}) = 1$. Ajoutons que le nombre d'auto-enlacement d'une orbite unique α peut être défini par les mêmes expressions dans lesquelles β est remplacé par α .

Il est à noter que les fonctions échelon $\Gamma(x)$ et parité $\Pi(i)$ sont extrêmement simples à formuler numériquement et l'automatisation informatique des procédures de calcul des invariants topologiques ne pose pas de problème. Par contre, étant donné qu'elles sont des fonctions non inversibles, il est impossible d'exprimer directement les éléments de \mathcal{T} et \mathcal{I} en fonction des invariants topologiques. L'aspect technique de la procédure d'inversion qui consiste à déduire \mathcal{T} et \mathcal{I} du spectre d'orbites périodiques est abordé au troisième chapitre. Pour le moment, retenons qu'en identifiant ces invariants à ceux mesurés dans le flot hyperbolique ϕ_t sur \mathcal{V} , les relations deviennent des équations dont les éléments de \mathcal{T} et \mathcal{I} sont les inconnues.

1.4.3.5 Classification des attracteurs par gabarit

Un résultat essentiel qui ressort de l'analyse du gabarit est que sa topologie, décrite par les matrices \mathcal{T} et \mathcal{I} , est complètement déterminée par un petit nombre d'orbites périodiques. En effet, si N est le nombre de branches, le nombre d'éléments indépendants est

$$\mathcal{N} = \underbrace{\frac{N(N-1)}{2}}_{\mathcal{T}} + N + \underbrace{\frac{N(N-1)}{2}}_{\mathcal{I}} \quad (1.78)$$

c'est-à-dire 4 et 9 respectivement pour les structures à $N = 2$ et $N = 3$ branches par exemple. Aussi, il peut suffire de 4 équations, si elles sont indépendantes, pour déterminer un gabarit à deux branches sans ambiguïté. Dans ce cas, il suffit de mesurer 4 invariants topologiques, et ce sans compter les contraintes physiques éventuelles qui peuvent réduire le nombre d'éléments indépendants. Cela signifie que les invariants topologiques de toutes les OPI d'un flot sont fixés par ceux des OPI de plus basse période. On peut attribuer cette propriété au fait que ce sont des règles très simples, comme les étirements et repliements, qui organisent les nœuds et enlacements des orbites.

Par conséquent, il est tout à fait envisageable de déterminer un gabarit pour un attracteur chaotique réel¹⁸, c'est-à-dire dans lequel toutes les orbites de toutes les périodes ne sont pas obligatoirement présentes. Mieux encore, le gabarit peut être déterminé même si l'on ne détecte qu'un petit nombre d'OPI. Par exemple, depuis l'expérience de G. B. Mindlin *et al* [Mindlin et al.91], de nombreux travaux d'analyse ont été faits dans des domaines aussi variés que la chimie [Letellier et al.95b], la mécanique [Tufillaro et al.95], la résonance magnétique nucléaire [Tufillaro et al.91] et l'optique [Papoff et al.92, Lefranc et al.93, Lefranc et al.94]. Tous les gabarits déterminés au cours de ces expériences sont identiques et correspondent au fer à cheval. Il y a également des études numériques qui prédisent l'existence de gabarits à plus de deux branches dans les oscillateurs non linéaires (citons par exemple le système de Rossler [Letellier et al.95a], l'oscillateur anharmonique de Duffing [Gilmore93, Gilmore et al.95] et un modèle de laser de classe B [Boulant et al.a])

Cependant, l'interprétation que l'on peut en faire est différente de celle des cas hyperboliques. En effet, deux attracteurs peuvent avoir le même gabarit sans pour autant être équivalents au sens de la théorie des nœuds. Certes, il peut exister des orbites en correspondance mais, en règle générale, les deux ensembles ne peuvent pas être déduits l'un de l'autre par un mouvement d'isotopie puisque chacun d'eux possède des OPI que l'autre n'a pas. Une correspondance complète tiendrait d'un hasard extraordinaire et serait brisée dès qu'un des deux systèmes traverserait une fenêtre périodique. Par contre, cela signifie que les OPI sont nouées et enlacées entre elles selon des règles identiques, c'est-à-dire par la même combinaison d'étirement et repliement.

L'analyse topologique d'un attracteur réel suivie de la détermination du gabarit est finalement un moyen de caractérisation robuste et pertinent. Robuste car les grandeurs manipulées sont des données topologiques qui ne sont altérées ni par des imprécisions de mesures des OPI ni par le bruit. Pertinente car elle permet de discerner des attracteurs différents de manière claire et nette. Aussi est-il naturel de vouloir faire une classification par gabarit des attracteurs chaotiques. La classe la plus simple est par exemple celle du fer à cheval.

18. Le terme attracteur réel désigne ici aussi bien les régimes permanents observés dans des expériences physiques que des simulations numériques de systèmes dynamiques du type 1.1

Chapitre 2

Le chaos dans les lasers

2.1 Introduction

Les lasers, et plus largement les oscillateurs optiques, ont de nombreux atouts comme outils d'exploration des comportements chaotiques. Tout d'abord, à des échelles de temps, allant de la microseconde à la milliseconde suivant les dispositifs, ces systèmes peuvent être modélisés par un petit nombre de variables dynamiques. Ensuite, par leur énorme intérêt industriel, ils bénéficient d'une solide technologie instrumentale pour le traitement et l'acquisition du rayonnement. Enfin, il est aujourd'hui relativement simple, grâce à l'accès à de larges plages de paramètres, d'observer un comportement chaotique dans un laser. Soulignons également que les temps typiques d'évolution autorisent une exploration rapide des différents comportements. À titre indicatif, la réaction chimique oscillante de *Belousov-Zhabotinski* par exemple présente des transitoires de l'ordre de l'heure [Berge et al.88].

Ainsi, le laser est devenu ces dernières années un outil de choix pour l'exploration du chaos et plus généralement des instabilités dans les systèmes dynamiques. Yakov Khanin écrit à ce propos [Khanin95], qu'on peut distinguer deux périodes depuis la réalisation du premier laser à rubis en 1960 [Maiman60]. La première consacrée au développement de la physique pour le laser et la seconde, après la démonstration par H. Haken en 1975 [Haken75] d'une analogie avec le fameux système de Lorenz, au développement du laser pour la physique, sous-entendu l'étude des systèmes dynamiques.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les deux systèmes expérimentaux que nous avons étudiés, à savoir un laser à fibre et un laser YAG, et plus largement d'examiner les propriétés dynamiques essentielles des oscillateurs lasers. Ce sont des notions bien connues des opticiens mais qu'il est important de rappeler pour le lecteur qui souhaitera établir le lien avec les autres systèmes dynamiques, et mieux en apprécier les analogies. Par ailleurs elles permettent d'identifier plus précisément les difficultés expérimentales propres à une analyse topologique des attracteurs chaotiques d'un laser. La structure est la suivante. Une première section

définit l'échelle d'observation des comportements chaotiques dans les lasers, c'est-à-dire les variables physiques et les échelles de temps concernées. La deuxième section précise les propriétés dynamiques de la classe de lasers à laquelle appartiennent le laser YAG et le laser à fibre. Elle examine notamment la localisation des régimes chaotiques dans l'espace des paramètres de contrôle. Enfin, les dispositifs expérimentaux retenus sont détaillés dans la troisième et dernière section.

2.2 Dynamique des lasers

2.2.1 Quelques rudiments

Un laser est un générateur de rayonnement optique de grande cohérence temporelle et spatiale. Il est hors de propos de reproduire ici l'ensemble des processus physiques mis en jeu. On consultera par exemple [Sargent et al.79, Tarassov81, Siegman86, Svelto89, Yariv91] et nous nous limiterons à l'exposé du principe général de fonctionnement.

À la base existe un mécanisme d'amplification du rayonnement par un milieu matériel. Un milieu traversé par la lumière possède du *gain*, par exemple quand il existe une *inversion de population* entre deux niveaux atomiques ou moléculaires accordés sur la gamme de fréquences optiques concernée. Dans cette situation l'*émission stimulée* de photons est alors supérieure à l'absorption (stimulée). Notons qu'une inversion de population est une configuration hors de l'équilibre thermodynamique réalisé par un mécanisme dit de *pompage* qui surpeuple le niveau excité de la transition laser.

Ce milieu actif est généralement enfermé dans une cavité résonante qui assure (i) l'accroissement de la densité de photons par passages répétés dans le milieu amplificateur et (ii) la sélection d'un spectre discret de fréquences optiques $\omega_i \approx THz$. Cette sélection impose au rayonnement une structure proche des modes propres de la cavité et garantit la haute monochromaticité et directivité de la lumière émise.

L'amplification n'est effective que si le gain, d'autant plus important que le pompage est élevé, est supérieur à un niveau de *pertes*. Celles-ci ont des origines diverses, indésirables pour certaines, comme la diffraction, des diffusions et imperfections à la réflexion, voulues pour d'autres, comme la transmission d'une intensité vers l'extérieur et les processus d'interférences destructeurs créés par le résonateur. À titre d'illustration, la figure 2.1 donne l'allure typique des courbes de gain et de perte d'un milieu actif enfermé dans une cavité *Pérot-Fabry*, c'est-à-dire constituée de deux miroirs en vis à vis. Le peigne reflète les processus d'interférences évoqués ci-dessus et détermine la localisation spectrale des modes. Rappelons que si L est la longueur optique de la cavité, l'*intervalle spectral libre* entre modes longitudinaux est $c/2L$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

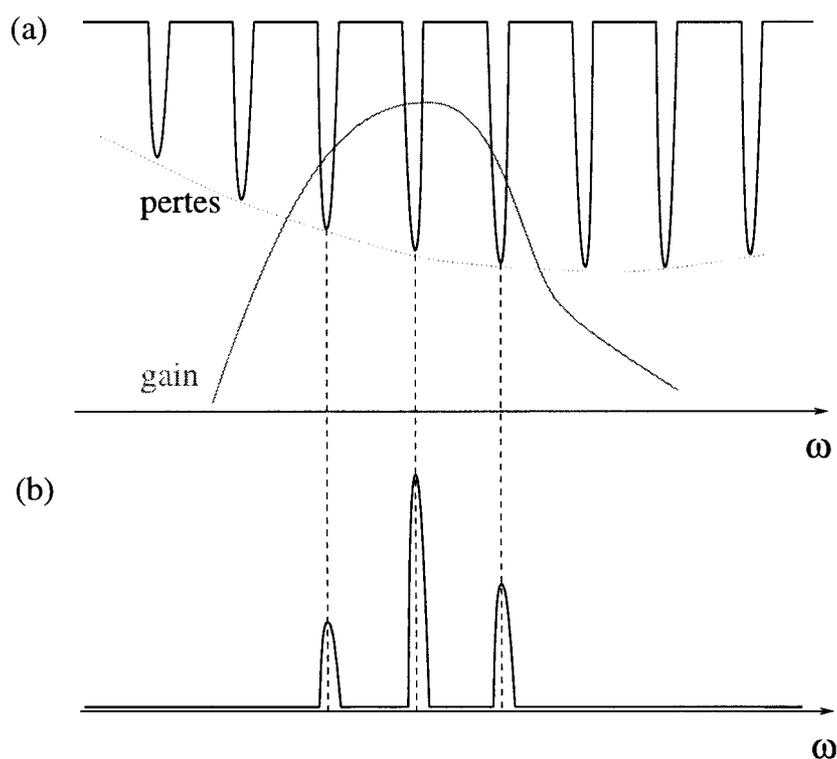


FIG. 2.1 – La courbe de gain est d'autant plus haute que le pompage est élevé. La courbe de "perte", entendue ici au sens large, est le résultat combiné (i) d'une enveloppe généralement large devant la courbe de gain et liée essentiellement à la transmission du rayonnement à travers les miroirs de la cavité et (ii) d'un phénomène d'interférences destructrices au sein de la cavité qui sélectionne un peigne de fréquences discrètes. Seuls sont excités les modes du rayonnement dont le gain non saturé est supérieur aux pertes.

Dans l'exemple donné sur la figure 2.1, trois modes ont suffisamment de gain pour osciller. Savoir s'ils oscilleront effectivement fait appel à des notions plus subtiles que nous n'aborderons pas. Moyennant quoi, on peut affirmer qu'il existe un seuil de pompage au delà duquel les oscillations du laser démarrent et que le nombre de modes d'oscillations du rayonnement augmente avec la pompe.

En résumé, nous retiendrons qu'un laser est un oscillateur dissipatif multimode forcé par un mécanisme de pompage.

2.2.2 Modèle et constantes de temps

Dans le cadre d'une *théorie semi-classique*, le rayonnement est décrit de manière classique par les équations de Maxwell et le milieu actif de manière quantique par l'équation de Shrödinger. Le comportement dynamique d'un système laser réduit aux deux niveaux de la transition peut alors être modélisé sur la base de trois variables, le champ électrique $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$, l'inversion de population $\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ et la polarisation atomique $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ qui couple localement rayonnement et matière, c'est-à-dire $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$. Il s'agit du jeu d'équations aux dérivées partielles connues sous le nom d'*équations de Bloch-Maxwell* [Sargent et al.79]

La réduction à un système dynamique (au sens d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires) suppose donc que la dépendance spatiale des variables dynamiques possèdent des propriétés particulières. Nous avons vu dans la section précédente que la cavité ne laisse survivre que certains modes discrets d'oscillations. Il est communément admis que les modes propres du rayonnement de la cavité vide en sont une bonne approximation. Aussi, si l'on exprime les variables $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ sur cette base (composée typiquement de fonctions trigonométriques de la forme $\exp i(\omega_n t - k_n z)$), on peut obtenir un système d'équations, dérivées des équations de Bloch-Maxwell, pour les amplitudes des modes. Bien entendu, la base étant impropre, ces amplitudes dépendent encore de l'espace et du temps mais de manière très lente à l'échelle de la longueur d'onde $2\pi/k_n$ et des périodes optiques $2\pi/\omega$. Aussi, un système dynamique peut être obtenu en négligeant la variation spatiale¹. Si l'on suppose qu'un seul mode oscille, les équations s'écrivent

$$\frac{dE}{dt} = \kappa \left[(1 + i\delta)E + AP \right] \quad (2.1a)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma_{\parallel} \left[(D - 1) - \frac{1}{2}(P^*E + PE^*) \right] \quad (2.1b)$$

$$\frac{dP}{dt} = \gamma_{\perp} \left[(1 + i\Delta)P + ED \right] \quad (2.1c)$$

$$(2.1d)$$

1. Le phénomène physique observé est limité dans l'espace par la taille de la cavité mais pas dans le temps. C'est pourquoi les amplitudes peuvent avoir de fortes oscillations temporelles qui ne peuvent pas être négligées.

où $E(t)$, $D(t)$ et $P(t)$ sont les amplitudes lentement variables. Les paramètres κ , γ_{\parallel} et γ_{\perp} sont les taux de relaxation des trois variables dynamiques, A mesure la puissance de pompe et $\delta = (\omega_c - \omega_l)/\kappa$ et $\Delta = (\omega_l - \omega_a)/\gamma_{\parallel}$ sont les désaccords entre la fréquence du rayonnement laser sélectionnée et, d'une part celle du mode de la cavité vide ω_c pris comme approximation, d'autre part celle de la transition atomique ω_a . Les processus de relaxation introduits phénoménologiquement pour tenir compte du couplage avec le milieu extérieur quantifient la nature dissipative du système.

Le modèle (2.1) est certes une version simplifiée de la dynamique d'un laser mais il en révèle les deux aspects essentiels, à savoir :

1. dans certaines conditions et à certaines échelles d'observation (en l'occurrence celle des amplitudes lentement variables), il peut exister un jeu restreint de variables dynamiques qui décrivent le laser de manière globale, et qui définissent son état dans un espace des phases de faible dimension effective.
2. La dynamique à cette échelle de temps est pilotée par trois paramètres: (i) κ le taux de perte, inversement proportionnel au temps de vie τ_c des photons dans la cavité vide (il ne dépend que de la qualité de la cavité) (ii) γ_{\parallel} et (iii) γ_{\perp} les taux de relaxation respectivement de l'inversion de population et de la polarisation macroscopique (ils ne dépendent que du milieu actif).

Suivant les lasers, les taux de relaxation peuvent varier de plusieurs ordres de grandeur mais ils restent très inférieurs aux fréquences optiques. Ils mesurent la vitesse de réaction des degrés de liberté lors d'un changement de situation et définissent l'échelle d'observation des *comportements dynamiques* des lasers et en particulier du chaos.

Précisons enfin que le système d'équations (2.1) a cela de remarquable qu'il coïncide, dans une forme adimensionnée et à la résonance exacte $\delta = \Delta = 0$, avec le fameux système de Lorenz [Lorenz63]. H. Haken, en montrant cette correspondance en 1975 [Haken75], établit une analogie entre l'hydrodynamique et la dynamique des lasers, et par suite la portée très générale des résultats obtenus en optique sur les instabilités.

2.2.3 Classification des lasers

Outre l'inégalité $\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}, \kappa \ll \omega$ qui garantit la validité du changement d'échelle, plusieurs ordres de grandeur peuvent exister entre les taux de relaxation. Leur considération permet de définir une classification des lasers sur un critère dynamique. Elle conduit aussi et surtout à une réduction du nombre de degrés de liberté effectifs par élimination adiabatique de variables dynamiques

(voir par exemple [Haken83]). On distingue aujourd'hui trois classes représentatives [Tredicce et al.85, Arecchi87]

- classe A : $\kappa \ll \gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$.
La polarisation et l'inversion de population peuvent être éliminées adiabatiquement.
- classe B : $\gamma_{\perp} \gg \kappa, \gamma_{\parallel}$ La polarisation atomique peut être éliminée adiabatiquement.
- classe C : $\kappa \sim \gamma_{\perp} \sim \gamma_{\parallel}$.
Les trois degrés de liberté réagissent de manière similaire.

Par exemple, on dit qu'un laser est de *classe B* quand la polarisation $P(t)$ réagit beaucoup plus rapidement que $E(t)$ et $D(t)$. À l'échelle de temps de $P(t)$, les variables $E(t)$ et $D(t)$ ne changent pas de manière appréciable et jouent le rôle de paramètres. Par conséquent, l'évolution de E et D est une transformation adiabatique suffisamment lente devant les transitoires de P pour que cette troisième variable soit à tout instant dans une situation d'équilibre définie implicitement par

$$\dot{P} = f(E, D, P) = 0 \quad (2.2)$$

Dans l'espace des phases, la dynamique ainsi asservie par E et D est confinée dans une variété bidimensionnelle d'équation $f(E, D, P) = 0$ (voir fig.2.2). La

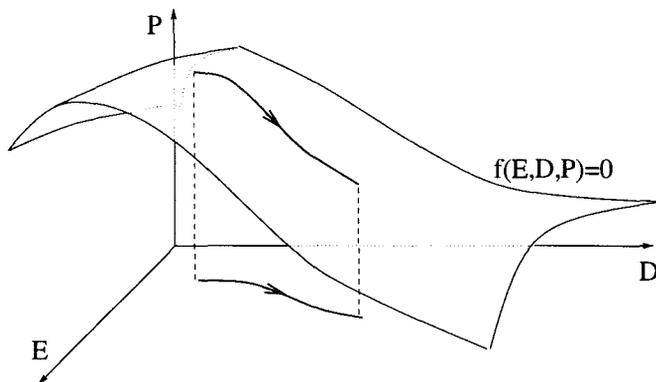


FIG. 2.2 – Représentation schématique dans l'espace des phases d'une élimination adiabatique. La variable $P(t)$ évolue tellement vite devant $E(t)$ et $D(t)$ qu'elle est toujours dans une situation d'équilibre définie par $f(E, D, P) = 0$. La dynamique à l'échelle de temps de $E(t)$ et $D(t)$ est confinée dans une surface et peut être analysée sur la base de ces variables lentes.

polarisation P devenant une fonction implicite des autres variables, on se contente de suivre l'évolution de E et D . Remarquons que cette opération de réduction est

classique en théorie des systèmes dynamiques. Elle consiste de manière générale à éliminer les variables rapides, asservies par les variables lentes, du jeu de degrés de liberté.

La classe B regroupe une grande variété de lasers puisqu'on y trouve les lasers à milieu solide, dont le laser à fibre et le laser YAG, les lasers à semi-conducteurs et certains lasers à gaz sous basse pression tels que les lasers à CO_2 et à N_2O .

2.3 Le laser monomode de classe B

Dans cette section sont abordées plus en détail les caractéristiques dynamiques communes aux lasers de classe B, catégorie à laquelle appartiennent les lasers YAG et les lasers à fibre dopée. Ces deux types de systèmes correspondent, dans les expériences que nous avons entreprises, à deux limites opposées, monomodes pour le premier et fortement multimode pour le second. Néanmoins, les caractéristiques présentées ici sont développées à partir de la base très simple du *modèle du bilan*, mieux connu sous le nom des *rate equations*. Il s'agit plus précisément de définir la cartographie des régimes chaotiques dans l'espace des paramètres de contrôle et de justifier l'analogie avec les oscillateurs non linéaires.

L'élimination adiabatique de la polarisation du milieu amplificateur consiste dans la pratique à exprimer $P(t)$ comme une fonction de $E(t)$ et $D(t)$. Aussi n'apparaît-elle plus explicitement dans les équations différentielles. Le modèle du bilan est le système adimensionné suivant, où $I(t)$ et $D(t)$ sont l'intensité lumineuse et l'inversion de population [Tredicce et al.86, Dangoisse et al.87] [Narducci et al.88, Khanin95]

$$\frac{dI}{dt} = I(D - 1) + e_s D \quad (2.3a)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma[A - D(1 + I)] \quad (2.3b)$$

Bien qu'elles dérivent du système de Bloch-Maxwell (2.1) dans lequel l'amplitude E est remplacée par sa variable quadratique, ces équations peuvent être obtenues à partir d'un simple bilan énergétique [Sargent et al.79]. Elles ont déjà été utilisées dans de nombreuses études numériques [Tredicce et al.86, Dangoisse et al.87, Solari et al.87, Solari et al.88b, Schwartz88] et analytiques [Erneux et al.87, Schwartz et al.94, Erneux et al.95], en particulier des lasers CO_2 et Nd:YAG. On notera la présence d'un terme source d'intensité $e_s D(t)$. Celui-ci est ajouté phénoménologiquement pour tenir compte de l'émission spontanée de photons dans le mode qui oscille, source qui peut être importante dans les lasers guidés comme le laser à fibre. Cependant nous supposons, sauf quand cela sera dit explicitement, que $e_s = 0$. Ce terme ne modifie pas qualitativement les résultats présentés ci-après mais améliore l'accord quantitatif avec les observations expérimentales.

L'unité de temps est $\tau_c = 1/\kappa$, le temps de vie des photons dans la cavité, de telle sorte que l'intensité ait un taux de relaxation égale à 1. A est le paramètre de

pompe normalisé pour que $A = 1$ au seuil d'oscillation. Le paramètre γ est le taux de relaxation de l'inversion de population exprimé dans l'unité de temps réduite, c'est-à-dire $\gamma = \gamma_{\parallel}/\kappa$. Cette écriture montre que seuls les deux paramètres A et γ sont pertinents. Notons également que γ est souvent petit dans les lasers de classe B, si bien que celle-ci est généralement définie par l'inégalité $\gamma_{\perp} \gg \kappa \gg \gamma_{\parallel}$. Il est par exemple de l'ordre de 10^{-3} pour le laser CO_2 et de 10^{-4} pour le laser YAG.

Nous allons dans un premier temps préciser l'analogie avec un oscillateur pour ensuite aborder les propriétés dynamiques et en particulier nous préciserons le lieu des régimes chaotiques dans l'espace des paramètres de contrôle.

2.3.1 Un oscillateur dans un potentiel de Toda

L'équation d'évolution d'un oscillateur est typiquement une équation différentielle du second ordre du type

$$\ddot{u} + \alpha\dot{u} = -\frac{dV}{du} \quad (2.4)$$

où u est le paramètre d'ordre, $V(u)$ une fonction potentiel et α un coefficient d'amortissement.

Le modèle du bilan (2.3) sans émission spontanée ($e_s = 0$) peut être écrit sous cette forme. Le système possède un unique régime stationnaire d'intensité non nulle qui correspond, dans l'espace des phases, au point fixe de coordonnées $I_{st} = A - 1$ et $D_{st} = 1$ (le coefficient d'émission spontanée e_s est pris égal à 0). Si on opère le changement de variable [Kleinmann64, Oppo et al.85, Erneux et al.87, Oppo et al.89]

$$u = \ln\left(\frac{I}{I_{st}}\right) \quad (2.5)$$

l'équation en intensité (2.3a) devient linéaire

$$\dot{u} = D - 1 \quad (2.6a)$$

$$\dot{D} = \gamma[A - D(1 + (A - 1)e^u)] \quad (2.6b)$$

Remarquons que ce changement de variable est naturel puisqu'il fait apparaître l'équivalence topologique entre l'espace reconstruit (u, \dot{u}) et l'espace original (I, D) . En substituant $D = \dot{u} + 1$ dans l'équation (2.6b), on obtient l'équation (2.4) avec

$$\alpha = \alpha(u) = \gamma[1 + (A - 1)e^u] \quad (2.7a)$$

$$\text{et } V(u) = \gamma(A - 1)(e^u - u) \quad (2.7b)$$

qui est l'équation d'un oscillateur de *Toda*, c'est-à-dire d'une particule plongée dans le potentiel $V(u) \sim e^u - u$ [Toda75] représenté sur la figure 2.3a.

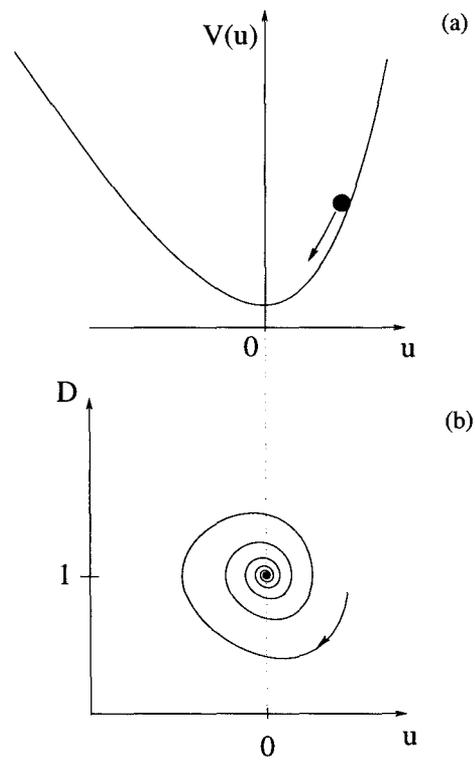


FIG. 2.3 – Évolution d'une particule dans un potentiel de Toda. (a) Potentiel de Toda. (b) Portrait de phase.

Les lasers monomodes de classe B sont donc formellement analogues à des oscillateurs de Toda. Le minimum de potentiel correspond, bien évidemment, à l'état stationnaire, comme le montre la figure 2.3b. Il est par contre intéressant de remarquer que la raideur d^2V/du^2 du potentiel en $u = 0$ est proportionnelle à $\gamma(A - 1)$. Or cette courbure définit la raideur k de la "force de rappel". Aussi, la fréquence de relaxation, qui typiquement vaut $\sim \sqrt{k}$, est ici donnée par $\sim \sqrt{\gamma(A - 1)}$. Ajoutons que la forme anharmonique du potentiel impose à la fréquence, dans ce cas particulier, de diminuer avec l'amplitude des oscillations [Oppo et al.85].

Cette analogie formelle, non seulement démontre la grande généralité des comportements des lasers, mais aussi et surtout justifie la comparaison avec des systèmes dynamiques de champs divers comme la mécanique, l'électronique et même la chimie et la biologie.

2.3.2 Propriétés dynamiques

Une analyse de stabilité linéaire du système (2.3) confirme que l'état stationnaire lasant est un foyer inconditionnellement stable et que les transitoires consistent en des oscillations de relaxation de pulsation ω_r et de taux d'amortissement Γ_r , donnés par

$$\omega_r = \sqrt{\gamma(A - 1)} + \mathcal{O}(\gamma^{3/2}) \quad (2.8a)$$

$$\Gamma_r = -\gamma \frac{A}{2} \quad (2.8b)$$

en unités réduites. La fréquence de relaxation principale est une fréquence de référence pour l'exploration des régime chaotiques, dans le laser YAG comme dans le laser à fibre. L'expression (2.8a) indique qu'elle dépend du taux de pompage A_0 et du rapport des constantes de temps $\tau_c = 1/\kappa$ et $1/\gamma_{\parallel}$. Néanmoins, les unités réduites sont trompeuses. En effet, l'expression en rad.s^{-1} est obtenue en divisant (2.8a) par τ_c , l'unité de temps, si bien que, pour des taux de pompage usuels, la fréquence de relaxation est de l'ordre de la moyenne géométrique des taux de relaxation

$$\omega_r[\text{rad.s}^{-1}] \sim \sqrt{\kappa\gamma_{\parallel}} \quad (2.9)$$

Pour $A_0 = 2$, elle est de l'ordre de 30KHz dans notre laser à fibre et de 150KHz pour le laser YAG.

Un troisième degré de liberté au moins doit être ajouté pour que se développe un comportement chaotique. Cela peut être réalisé, par exemple, en ajoutant un absorbant saturable dans la cavité [Zamboni91, Lefranc et al.91] ou tout simplement par l'action d'un forçage [Arecchi et al.82, Midavaine et al.85]. En particulier, la modulation du paramètre de pompe $A(t) = A_0(1 + m \cos \omega t)$ autour d'une valeur moyenne A_0 , avec une pulsation ω et une amplitude relative m , conduit

au système tridimensionnel suivant

$$\dot{I} = I(D - 1) \quad (2.10a)$$

$$\dot{D} = \gamma [A_0(1 + m \sin(\phi)) - D(1 + I)] \quad (2.10b)$$

$$\dot{\phi} = \omega \quad (2.10c)$$

Dans cette situation, l'espace des phases naturel est topologiquement équivalent au tore $D^2 \times S^1$ de la figure 2.4 et γ , A_0 , m et $\omega = 2\pi/T$ sont les paramètres de

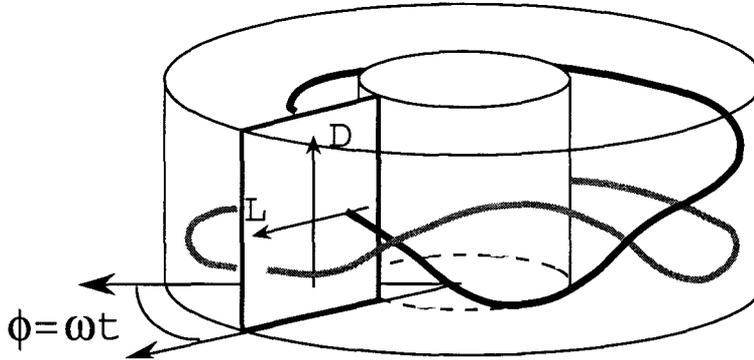


FIG. 2.4 – Espace des phases du système (2.10)

contrôle.

2.3.2.1 Résonance

La première propriété dynamique concerne la *fréquence de résonance* de cet oscillateur forcé. Si le taux de modulation m est suffisamment faible pour que la réponse reste harmonique, on constate naturellement que $\omega_r/2\pi$ est une fréquence de résonance. Ceci peut être montré par un traitement perturbatif en m des équations (2.10) [Khanin95]. Par contre, le système génère des harmoniques d'ordre plus élevé dès que l'on sollicite les “non linéarités”. Ce phénomène se traduit par une distorsion du signal en réponse qui s'accompagne d'un déplacement de la résonance vers les basses fréquences [Khanin95] (inférieures à ω_r) (voir fig.2.5). Ce déplacement peut être important et rend la définition de la résonance délicate. On assiste par exemple à des diminutions de près de 50% pour des taux de modulation $m \approx 0,3$ (avec $A_0 \approx 2$) dans un laser YAG [Celet96]. Enfin, en augmentant encore le taux de modulation, l'orbite T -périodique se destabilise dans une cascade de bifurcations, éventuellement jusqu'à un régime chaotique.

2.3.2.2 Chaos et diagrammes de bifurcations

Une seconde propriété concerne précisément la localisation du chaos dans l'espace des paramètres de contrôle et plus particulièrement dans le plan des paramètres ω et m (ou de manière équivalente dans le plan (T, m)). De nombreuses

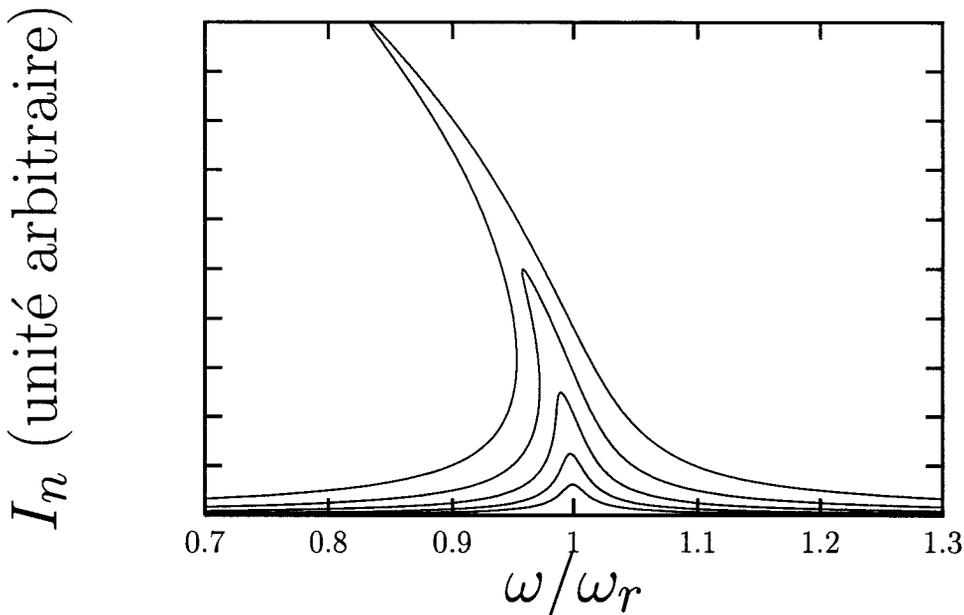


FIG. 2.5 – Illustration du déplacement de la résonance vers les basses fréquences. Les courbes successives sont obtenues pour des taux de modulation croissants (graphe tiré de [Celet96]). La forme particulière des courbes traduit naturellement le phénomène d’hystérésis que l’on observe lorsque l’on varie la fréquence de modulation.

études numériques des oscillateurs non linéaires, dont les oscillateurs de *Duffing*, de *Morse* et de *Toda*, ont révélé de grandes similitudes dans la structure de leurs *diagrammes de bifurcations* (voir [Gilmore et al.95] et références incluses). Pour un taux de modulation donné, le balayage adiabatique du paramètre de contrôle T conduit à un diagramme qui affiche une structure presque périodique de période $T_r = 2\pi/\omega_r$, la période de relaxation du système non forcé. Le laser monomode classe B, en tant qu’oscillateur de *Toda*, n’échappe pas à la règle. La figure 2.6 montre par exemple un diagramme de bifurcations, c’est-à-dire l’évolution de l’attracteur avec un paramètre de contrôle (ici T la période de modulation). Il représente l’évolution d’une section de Poincaré (plus exactement de sa projection sur l’axe de l’intensité) en fonction de T pour les valeurs de paramètres $\gamma = 10^{-4}$, $A_0 = 2$, $m = 0.45$ et $e_s = 10^{-5}$. On observe que le système entre en régime chaotique au voisinage des sous-harmoniques de la fréquence de résonance, c’est-à-dire en $T \sim n \times T_r$ ($n \in \mathbb{N}$).

À titre d’exemple expérimental, la figure 2.7 est un diagramme de bifurcations d’un laser à fibre modulé [Boulant et al.97b]. Dans cette expérience, $\omega_r/2\pi$ est égale à 36 KHz et les régimes chaotiques sont localisés autour de $\omega/2\pi = 18, 12$ et 9 KHz, c’est-à-dire en $\omega \approx \omega_r/2, \omega_r/3$ et $\omega_r/4$. Ce diagramme montre de plus la robustesse de la propriété dans une situation fortement multimode.

Ce phénomène s’interprète en terme de *résonances sous-harmoniques* induites

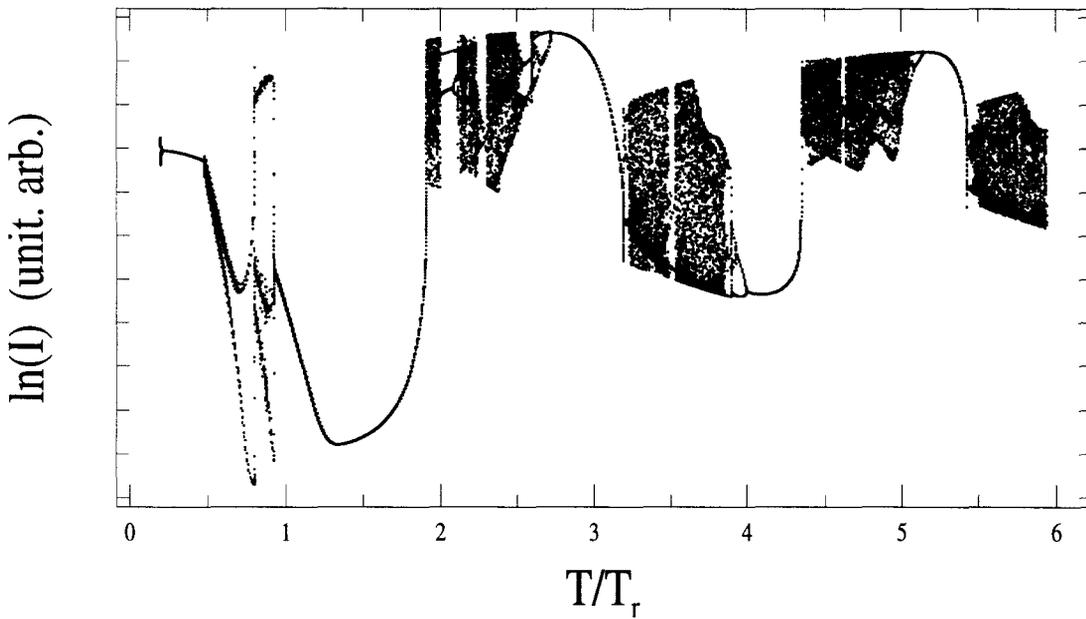


FIG. 2.6 – Diagramme de bifurcations du modèle du laser monomode classe B 2.10 obtenu avec les paramètres $\gamma = 10^{-4}$, $A_0 = 2$, $m = 0.45$ et $e_s = 10^{-5}$. L'ordonnée représente le logarithme de l'intensité échantillonné à chaque période de modulation. Les domaines chaotiques, et plus généralement les régions riches en bifurcations, sont localisés autour des sous-harmoniques de la fréquence de résonance, c'est-à-dire en $T \sim n \times T_r$.

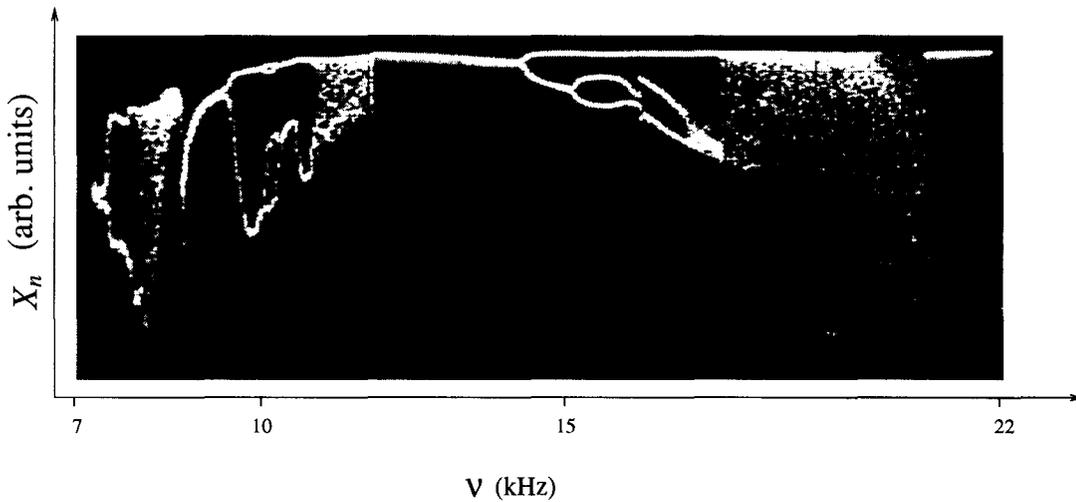


FIG. 2.7 – Diagramme de bifurcations expérimental d'un laser à fibre modulé (photo d'écran d'un oscilloscope analogique). Les points lumineux représentent les valeurs de l'intensité échantillonnées à chaque période de modulation, c'est-à-dire à chaque passage par une section de Poincaré. On distingue trois zones chaotiques, autour des fréquences $\nu = 9, 12$ et 18 kHz, c'est-à-dire en $\nu \approx \nu_r/4, \nu_r/3$ et $\nu_r/2$ où $\nu_r = \omega_r/2\pi \approx 36$ kHz est la fréquence de relaxation du système passif.

par la nature non linéaire du système. Lorsque le système est forcé à une pulsation $\omega = \omega_r/n$ ($n \in \mathbb{N}$), la réponse T -périodique contient, outre la fréquence de modulation, les harmoniques $k \times \omega$ ($k \in \mathbb{N}$) qui résultent de la distorsion non linéaire. L'harmonique $k = n$ est donc résonante avec la fréquence de relaxation du laser et exaltée dans l'évolution des variables dynamiques. La figure 2.8 montre par exemple une série temporelle de l'intensité du laser à fibre enregistrée dans la région $\omega \approx \omega_r/3$. Le régime est chaotique et on distingue trois impulsions (deux grandes et une petite) par période de modulation. Aussi est-il naturel d'observer

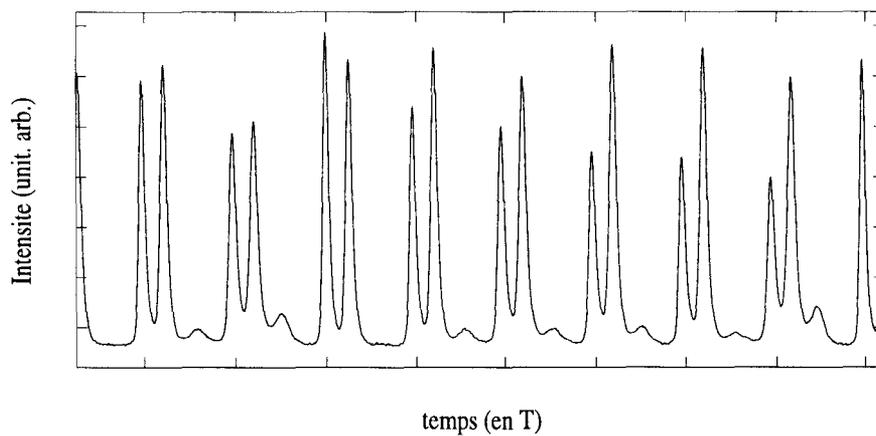


FIG. 2.8 – Série temporelle typique de l'intensité du laser à fibre modulé à une pulsation $\omega \approx \omega_r/3$. Le régime est chaotique et on distingue trois impulsions (deux grandes et une petite) par période de modulation

les structures non triviales des diagrammes de bifurcations autour de ces valeurs singulières de la pulsation de modulation.

En résumé, l'espace des paramètres (m, T) possède une structure presque périodique suivant l'axe T composée de *langues chaotiques*, c'est-à-dire de domaines dans lesquels dominant les régimes chaotiques (fig. 2.9). Pour des faibles taux de modulation, les langues sont séparées par un régime de période $1T$, et en général se rejoignent pour des taux de modulation plus élevés.

2.4 Les systèmes expérimentaux

L'analyse topologique s'applique à tout système dynamique dès lors que l'attracteur étudié peut être plongé dans un espace des phases tridimensionnel. Parmi les systèmes optiques, les lasers monomodes de classe B sont des candidats de choix. En effet, ils n'ont que deux degrés de liberté, et la modulation, nécessaire à l'apparition du chaos, impose une cadence de référence et une géométrie torique

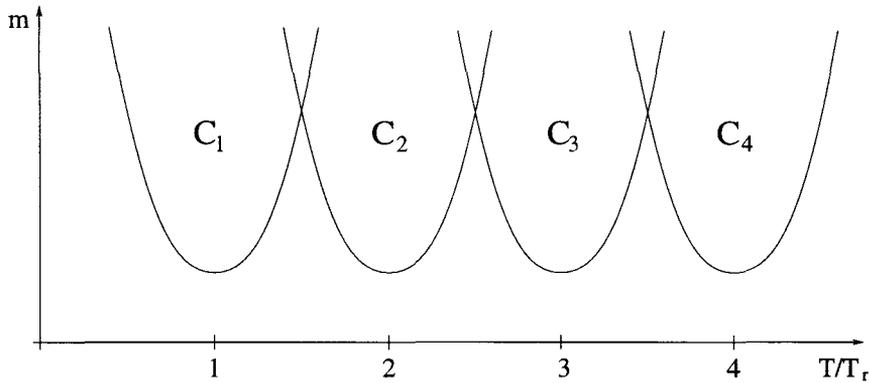


FIG. 2.9 – Diagramme de bifurcations schématisé, dans l'espace des paramètres T et m , de nombreux oscillateurs non linéaires [Gilmore et al.95].

à l'espace des phases. Cette section présente les particularités expérimentales des deux systèmes étudiés, leurs points communs et leurs différences essentielles.

2.4.1 Le laser YAG monomode

Le système consiste en une cavité laser type Pérot-Fabry. Le milieu actif est composé d'une matrice cristalline de *grenat aluminium yttrium* ($Y_3Al_5O_{12}$) dopée aux ions de néodyme Nd^{3+} . Le barreau de YAG a une longueur de 10 mm, un diamètre de 7 mm et une concentration nominale d'ions actifs de 1.1%. Comme il est indiqué sur le dispositif expérimental 2.10, une face du barreau, hautement réfléchissante ($R = R_{max} \approx 99,9\%$ en puissance) à la longueur d'onde laser $\lambda = 1.064 \mu m$, constitue le miroir d'entrée. La seconde face est traitée antireflet. Le deuxième miroir, indépendant et mobile, est un miroir concave de rayon de courbure de 40 mm et de coefficient de réflexion en puissance de 97%. Notons qu'il s'agit là d'une configuration classique [Yariv91] et que l'intensité lumineuse transmise par ce miroir, seule source d'information sur l'état du laser, est proportionnelle à l'intensité intracavité. Les ions Nd^{3+} sont pompés optiquement par une diode laser fonctionnant à 810 nm (SDL2352) dont le rayonnement est injecté par la face du barreau de YAG réfléchissante à $\lambda = 1.064 \mu m$.

Dans cette configuration, le laser oscille en régime multimode et suivant les deux axes propres de polarisation de la cavité. C'est pourquoi, un étalon Pérot-Fabry, sélecteur spectral, et une lame de Brewster, sélectrice en polarisation, sont insérés dans la cavité. Malgré les pertes supplémentaires introduites par ces éléments intra-cavité, il est possible d'accéder, avec des puissances de diode de 100 mW, à des paramètres de pompe allant jusque 3.

Enfin le spectre optique du rayonnement est observé au moyen d'un analyseur Pérot-Fabry en sortie, pour s'assurer de la nature monomode du laser.

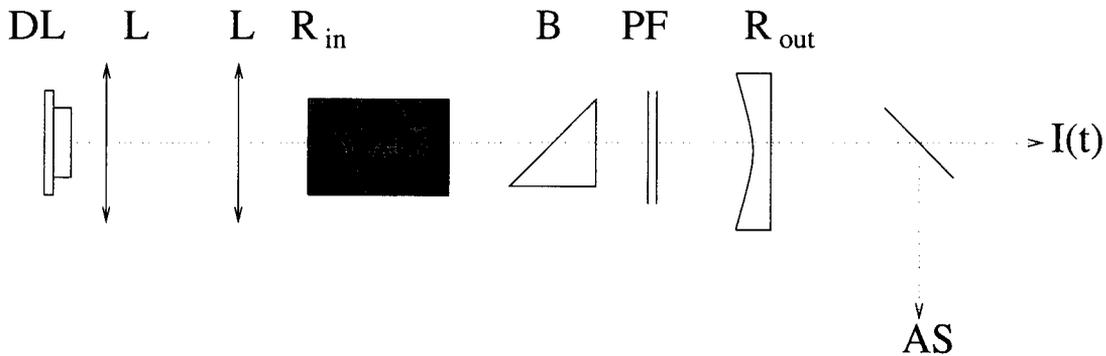


FIG. 2.10 – Le laser YAG: dispositif expérimental. DL=diode laser, L=lentille de focalisation, R_{in} =miroir d'entrée $R_{max} \approx 99,9\%$ en puissance à $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$, B=lame de Brewster, PF= étalon Pèrot-Fabry, R_{out} =miroir de sortie, LS=lame séparatrice, AS=analyse du spectre optique. Le trait en pointillés indique l'axe optique de la cavité.

2.4.2 Le laser à fibre

Ce second système consiste en une cavité type Pèrot-Fabry (fig.2.11). L'amplification est également assurée par des ions Nd^{3+} , mais ceux-ci sont plongés dans une matrice non plus cristalline mais vitreuse. Plus précisément, le milieu

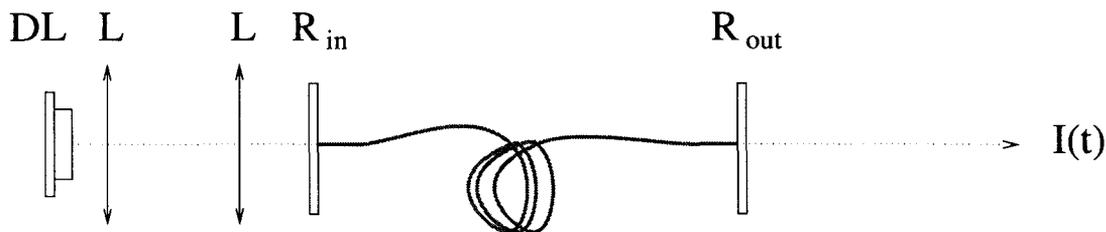


FIG. 2.11 – Le laser à fibre: dispositif expérimental. DL=diode laser (pompage optique), L=lentille de collimation et de focalisation, $R_{in} = R_{max} \approx 99,9\%$ en puissance à $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$, $R_{out} = 80\%$.

amplificateur est une fibre optique en silice de 4 mètres de long dont le cœur, de diamètre égal à $5 \mu\text{m}$, est dopé avec du Nd^{3+} à 300 ppm^2 . Les deux extrémités de la fibre sont fixées dans des connecteurs maintenus contre des miroirs hautement réfléchissants à la longueur d'onde laser $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$ (les coefficients en puissance sont $R_{in} = R_{max} \approx 99,9\%$ et $R_{out} = 80\%$). Signalons que les propriétés optogéométriques de la fibre rendent le fonctionnement transversalement

2. Cette fibre dopée a été fournie par le CNET Lannion

monomode à $1,06\mu\text{m}$. Enfin, l'ensemble est pompé optiquement par une diode monomode transverse linéairement polarisée à 810nm (SDL5412).

Revenons plus particulièrement sur les différences fondamentales avec le laser YAG. Premièrement, les ions actifs baignent dans une matrice amorphe. Aussi, contrairement au cas d'un réseau cristallin où les sites actifs sont indiscernables pour le rayonnement, il existe plusieurs classes d'ions actifs qui interagissent avec des gammes de fréquence différentes. Le résultat est un profil de gain environ 50 fois plus large que dans la matrice cristalline ($\text{FWHM} = 300\text{cm}^{-1}$ [Snitzer et al.68] contre 6cm^{-1} [Kushida et al.68] dans le YAG à température ambiante). Deuxièmement, la longueur de la cavité (de l'ordre de 4m contre 6cm pour le laser YAG) induit un intervalle spectral libre typiquement 100 fois plus étroit. Ces deux caractéristiques font du laser à fibre un système fortement multimode. On peut estimer, avec un profil de gain de largeur 300cm^{-1} et un intervalle spectral libre de $c/2L \sim 3.10^7\text{Hz} = 1.10^{-3}\text{cm}^{-1}$, à plusieurs milliers le nombre de modes longitudinaux, sans parler des deux états propres de polarisation de la cavité.

Malgré la nature fortement multimode, le laser se comporte dans certaines situations comme un système à petit nombre de degrés de liberté. S. Bielawski *et al.* ont proposé par exemple un modèle bimode pour décrire les phénomènes d'antiphase entre les deux modes propres de polarisation [Bielawski et al.92]. Par ailleurs, des comportements chaotiques s'y développent avec des dimensions d'attracteurs extrêmement faibles, inférieures à 3 bien souvent. Ceci suggère fortement que des espaces de plongement de dimension 3 puissent être construits. Dans ces conditions, il convient de vérifier systématiquement la dimension fractale des attracteurs avant toute analyse topologique.

2.5 Conclusion

Le laser est un oscillateur optique multimode, c'est-à-dire qu'il peut osciller sur plusieurs fréquences du domaine optique simultanément. La dynamique des lasers s'intéresse à des oscillations de fréquences beaucoup plus basses, de l'ordre de la fréquence de relaxation de l'intensité lumineuse. Nous avons vu qu'en situation monomode, les comportements pouvaient être modélisés par des systèmes dynamiques très simples, analogues aux oscillateurs non linéaires (l'oscillateur de Toda par exemple pour les lasers de classe B, c'est-à-dire les lasers pour lesquels la polarisation atomique peut être éliminée adiabatiquement du jeu des variables dynamiques).

Le laser à fibre et le laser YAG que nous avons présentés sont tout deux des lasers de classe B mais ils fonctionnent sur des régimes d'oscillations très différents, fortement multimode pour le premier et monomode pour le second. Pourtant, leurs propriétés dynamiques présentent de grandes similitudes. En particulier, les diagrammes de bifurcations dans l'espace des paramètres de modulation m et T possèdent une structure presque périodique. Cette structure n'est certes qu'ap-

proximative et varie sensiblement avec le contexte expérimental. Néanmoins, il apparaît des langues riches en bifurcations à intervalles réguliers (de l'ordre de $T_r = 2\pi/\omega_r$) suivant l'axe T séparées par des régimes de période $1T$. Ces langues s'élargissent lorsqu'on augmente le taux de modulation et peuvent se rejoindre au delà d'une certaine valeur.

Enfin, les simulations numériques d'un modèle monomode de classe B reproduisent la structure observée et suggèrent que ce modèle puisse être utilisé pour une analyse plus fine des diagrammes de bifurcations du laser YAG et, avec un peu plus de retenue, du laser à fibre.



Chapitre 3

Détermination du gabarit à partir d'une série temporelle

3.1 Introduction

L'analyse topologique d'un attracteur chaotique consiste à caractériser ses orbites périodiques instables (OPI) par les types de nœuds et d'enlacements qu'elles forment. Cette analyse est pertinente car l'ensemble des OPI couvre de manière dense l'attracteur et constitue par là-même une représentation fidèle de sa structure. Elle est également robuste car les caractéristiques topologiques mesurées sont des nombres entiers et invariants avec les paramètres de contrôle sur tout le domaine d'existence des orbites. Par exemple, le nombre d'enlacement de deux orbites indique le nombre de tours que l'une effectue autour de l'autre, et il est invariant car le déterminisme interdit toute intersection entre les trajectoires de phases.

Ces informations topologiques peuvent être synthétisées par un *gabarit*. Il représente la configuration la plus simple que l'on puisse donner aux OPI par un mouvement d'isotopie, c'est-à-dire une déformation continue qui laisse inchangés les invariants topologiques. Rappelons qu'il s'agit d'une surface à plusieurs branches sur laquelle est défini un semi-flot chaotique dont les OPI se nouent et s'enlacent suivant les mêmes règles que dans l'attracteur. Le point essentiel est qu'il peut être déterminé à partir des invariants topologiques de quelques orbites (voir chap. 1, section 1.4.3).

En règle générale, la seule donnée expérimentale dont on dispose pour déterminer un gabarit est une série temporelle, c'est-à-dire les valeurs d'un signal $x(t) \in \mathbb{R}$ échantillonnées à intervalles de temps réguliers. Mindlin et al, qui les premiers ont réalisé l'analyse d'un attracteur expérimental [Mindlin et al.91], ont proposé une méthode qui suppose un contexte favorable, c'est-à-dire une série temporelle contenant toute les informations nécessaires. On entend par là qu'il existe un nombre suffisant de séquences périodiques détectables et que les noms symboliques des orbites périodiques correspondantes puissent être identifiés, par

exemple au moyen d'un diagramme de premier retour. Cela suppose que les orbites ne soient pas trop instables et que le système soit très dissipatif. Ces conditions ne sont pas réunies si fréquemment¹, en particulier dans le cadre des systèmes optiques chaotiques que nous avons analysés, et nous avons été amenés à développer des procédures différentes.

Ce chapitre passe en revue les techniques expérimentales et numériques de l'analyse de gabarit à partir d'une simple série temporelle. L'organigramme (figures 3.1 puis 3.2), que nous commenterons au cours de la discussion, tente de reprendre la diversité des situations possibles. Après la présentation en première section des techniques classiques, nous expliquerons comment nous avons procédé pour déterminer le gabarit dans les situations très peu favorables. La section 3.3 présente en particulier une méthode de reconstruction des orbites périodiques et la section 3.4 décrit une méthode de détermination du gabarit qui permet de s'affranchir d'un codage symbolique préalable, souvent difficile à établir. Puis nous donnerons brièvement le principe de l'analyse de l'attracteur d'un système numérique, en l'occurrence un modèle de laser qui reproduit les comportements observés dans nos expériences. Enfin, la section 3.6 propose une méthode d'approche des systèmes autonomes, c'est-à-dire naturellement chaotiques, par les techniques désormais bien établies utilisées pour les systèmes forcés.

3.2 La méthode classique

La méthode qui permet de déterminer le gabarit dans les situations favorables évoquées en introduction est bien connue [Mindlin et al.91, Tuffillaro et al.92]. Les grandes lignes se résument aux quatre étapes suivantes :

1. Définir un espace de plongement à trois dimensions pour reconstruire l'attracteur à partir de la série temporelle.
2. Extraire les OPI contenues dans l'attracteur et, si possible, les identifier par leur nom symbolique.
3. Mesurer les invariants topologiques dans l'espace de plongement.
4. Déterminer les matrices de gabarit et d'insertion \mathcal{T} et \mathcal{I} qui décrivent la géométrie du gabarit et qui ont été présentées au premier chapitre (section 1.4.3.2).

Un exemple de régime chaotique du laser à fibre modulé nous permet ici à la fois d'en faire une présentation générale et de décrire les techniques expérimentales particulières à l'analyse des lasers. La série temporelle correspond à un

1. On peut même supposer que c'est pour cette raison que seule la structure simple du fer à cheval ait été identifiée expérimentalement jusqu'à très récemment [Letellier et al.96, Boulant et al.97a, Boulant et al.b]

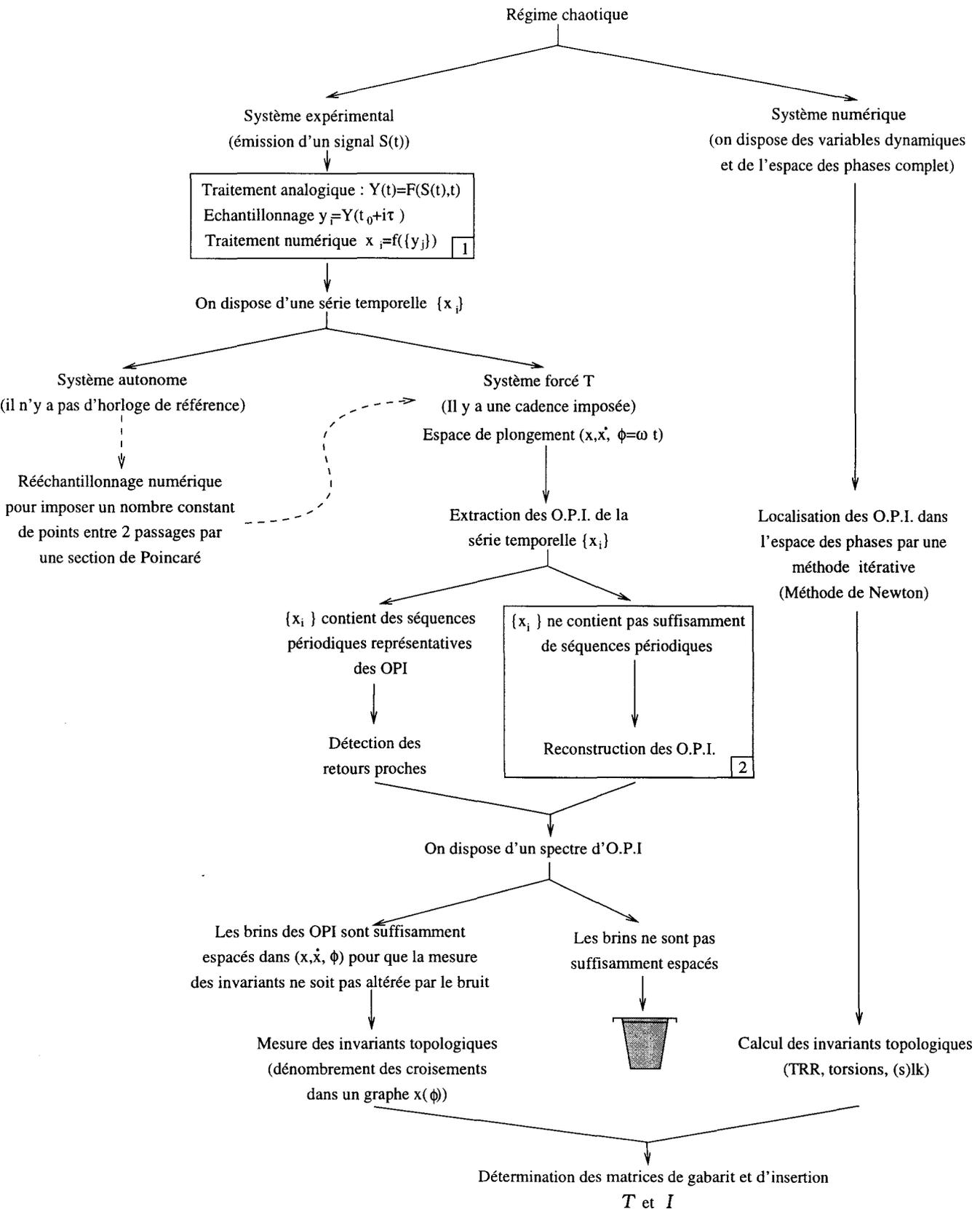
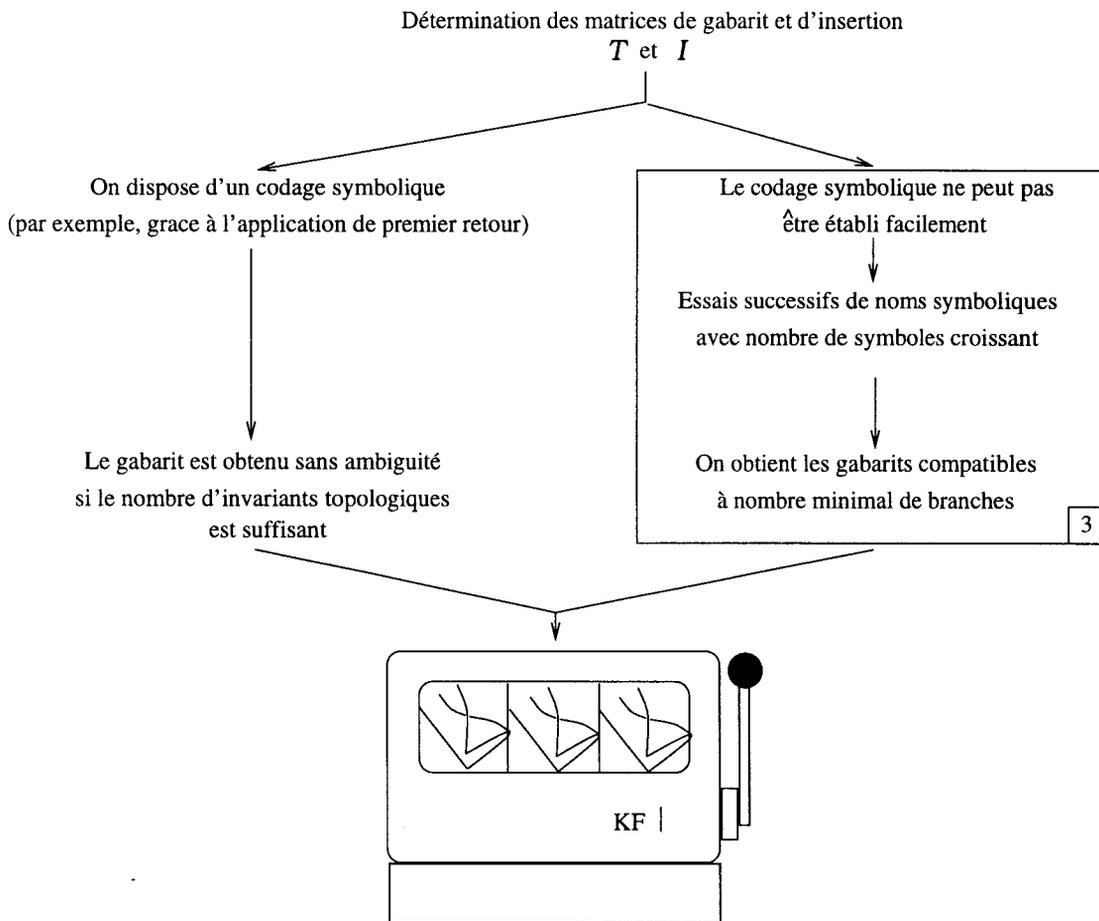


FIG. 3.1 – L'analyse topologique I: du signal aux invariants. Les parties encadrées représentent les points que nous avons tout particulièrement développés (la numérotation renvoie à la section concernée: 1=section 3.2.2, 2=section 3.3, 3=section 3.4). Les flèches en pointillés indiquent un chemin que nous proposons, afin d'exploiter sans modification les algorithmes mis en place pour les systèmes forcés.

FIG. 3.2 – *L'analyse topologique II: des invariants au gabarit.*

paramètre de pompe $A = A_0(1 + m \cos \omega t)$ modulé sinusoidalement à la fréquence de 12KHz autour d'une valeur moyenne $A_0 = 2,7$ et avec un taux $m = 0,6$. Ce régime chaotique se situe dans la langue chaotique C_3 ($1/T_\tau \approx 36\text{KHz}$). Une évaluation des exposants de Lyapunov de l'orbite chaotique grâce au programme DLIA de Briggs [Briggs90] permet de s'assurer que la dimension de l'attracteur est inférieure à 3 et suggère la possibilité de plonger l'attracteur dans un espace des phases à trois dimensions.

3.2.1 L'espace de plongement

Dans notre expérience, l'espace de plongement (x, \dot{x}, ϕ) où $x(t)$ désigne la série temporelle et $\phi = \omega t \pmod{2\pi} = 2\pi t/T \pmod{2\pi}$ la phase de modulation, s'impose de manière naturelle. Rappelons qu'il est topologiquement équivalent au tore $D^2 \times S^1$.

Outre l'avantage qu'une section de Poincaré est simplement donnée par un échantillonnage stroboscopique, la topologie de cet espace restreint le mouvement des orbites périodiques à la classe d'isotopie régulière. De ce fait, les taux de rotation relative, introduits par Solari et Gilmore [Solari et al.88b], et les nombres d'auto-enlacement peuvent être utilisés pour une caractérisation plus complète des enlacements (voir les sections 1.4.2.2 et 1.4.2.3). Enfin, comme il est rappelé par la figure 3.3, le diagramme de tresse de deux orbites α et β , de séquences temporelles $x_\alpha(t)$ et $x_\beta(t)$, est simplement le graphe de x_α et x_β dans le diagramme $x(\phi)$ [Lefranc et al.93]. Toute l'information topologique s'y trouve puisque le signe des croisements est imposé par la nature du plongement: parmi les deux brins d'un croisement, celui de plus grande pente passe systématiquement au-dessus de l'autre puisqu'il possède la valeur de \dot{x} la plus élevée. Ceci reste vrai pour la tresse d'une orbite unique. Aussi la mesure des invariants topologiques se réduit-elle au dénombrement des croisements dans un diagramme $x(\phi)$, \dot{x} étant une variable virtuelle qui à aucun moment n'est évaluée. Remarquons que pour la même raison, l'organisation topologique des OPI dans l'espace $(x(t), x(t + \tau), \phi)$, reconstruit par la méthode des délais est rigoureusement identique à condition que τ soit suffisamment petit (voir par ex. [Gibson et al.92]).

Le choix d'un espace de plongement est une étape importante dans l'analyse topologique. En particulier, si on veut comparer des données expérimentales à des données numériques provenant d'un modèle, ou même comparer deux régimes expérimentaux, il faut pouvoir garantir l'équivalence topologique des plongements respectifs. Elle peut être établie par exemple en montrant l'existence d'une famille à un paramètre de difféomorphismes qui permet de passer continûment sans coupure ni déchirure d'un système de coordonnées à l'autre. G. Mindlin et H. Solari présentent dans [Mindlin et al.95] un exemple de régime pour lequel l'organisation topologique des OPI diffère selon le choix particulier de l'espace de plongement. Par conséquent, on retiendra que le résultat d'une analyse topologique doit être donné accompagné de l'espace de plongement, indissociable, de la

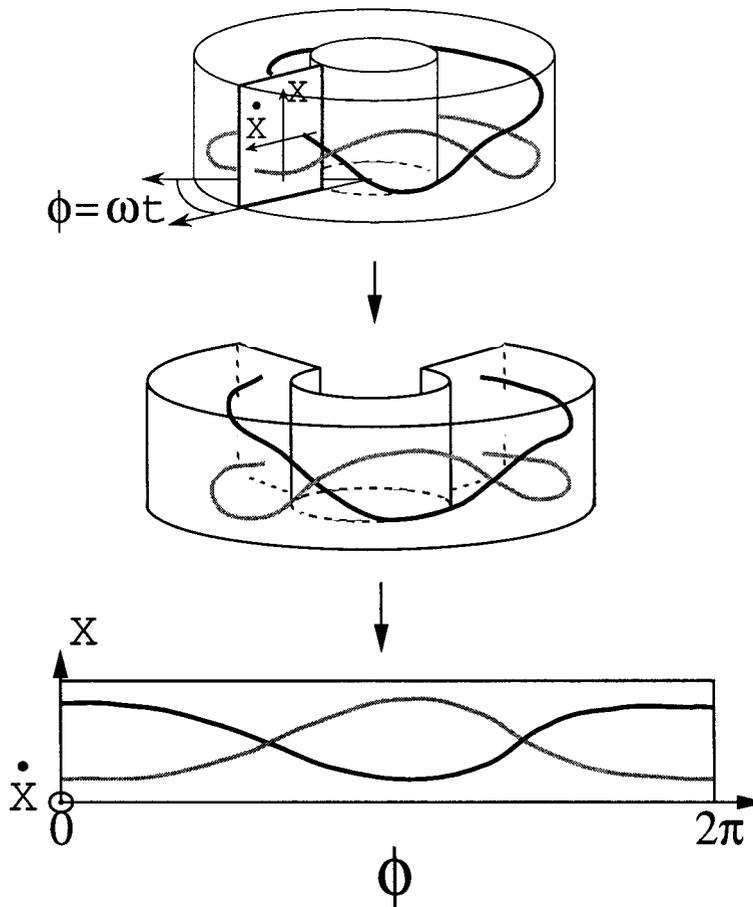


FIG. 3.3 – Espace des phases obtenu par plongement différentiel: (x, \dot{x}, ϕ) . La tresse des orbites est obtenue en dépliant le tore. L'information topologique est préservée dans le diagramme $x(\phi)$ puisque tous les croisements ont le même signe (le brin de plus grande pente passe systématiquement devant l'autre). Par exemple, les deux croisements entre les orbites $1T$ indique un nombre d'enlacement égal à $lk = 1$.

série temporelle.

3.2.2 Traitement du signal

La figure 3.4(a) représente l'intensité lumineuse I en fonction de la phase de modulation. On y retrouve la forme piquée à trois impulsions caractéristique des signaux appartenant à la langue chaotique C_3 . Elle montre surtout, et c'est un comportement général sous forte modulation, que le laser s'éteint quasiment pendant une durée de l'ordre de $1/4$ à $1/3$ de la période de modulation. Dans ces régions de faible intensité, et à cause de la précision finie du convertisseur analogique-digital, les différentes trajectoires sont indiscernables. Il est dans ces conditions impossible de déterminer si des croisements entre brins existent et par suite de mesurer les invariants topologiques. L'intensité brute n'est donc pas une variable adaptée à l'analyse topologique.

L'idée consiste à éloigner les brins les uns des autres sans provoquer d'intersection dans l'espace de plongement. Il s'agit donc de réaliser un traitement analogique du signal d'intensité, qui aurait pour effet de répartir les brins de manière plus homogène dans le diagramme $x(\phi)$. La figure 3.4(b) montre qu'une amplification logarithmique, qui délivre un signal $L(t) = \ln(I(t) + I_0)$ où I_0 est une constante ajustable, lève la dégénérescence. Cette procédure a déjà été utilisée avec succès pour l'analyse du laser CO_2 modulé [Lefranc et al.93, Lefranc et al.94]. Cependant, le signal $L(t)$ est marqué d'une forte composante périodique de fréquence $1/T$: la dynamique reste confinée dans une bande étroite autour de l'oscillation de période T . La seconde opération consiste donc simplement à soustraire la composante T -périodique $L_T(t)$ de $L(t)$ pour pouvoir exploiter toute la dynamique du convertisseur. Dans nos expériences nous avons choisi la correction

$$L_T(t) = \frac{\xi_+(\phi(t)) + \xi_-(\phi(t))}{2} \quad (3.1)$$

où $\xi_+(\phi(t))$ et $\xi_-(\phi(t))$ sont respectivement les enveloppes supérieures et inférieures de $L(\phi(t))$, calculées à partir d'un enregistrement d'environ 1000 périodes de modulation

$$\xi_+(\phi_0) \text{ (resp. } \xi_-(\phi_0)) = \max \text{ (resp. } \min)(L(t); \phi(t) = \phi_0) \quad (3.2)$$

La correction $L_T(t)$ est alors générée par un synthétiseur programmable synchronisé sur la modulation, et soustrait de la sortie de l'amplificateur logarithmique. Le résultat final $L(t) - L_T(\phi(t))$, représenté sur la figure 3.4(d), fait apparaître clairement l'information topologique, c'est-à-dire les croisements entre brins. C'est la série temporelle $x(t)$ analysée.

Si l'on veut montrer que les deux transformations n'induisent pas de croisements entre orbites dans l'espace des phases, il faut établir que le changement de variable entre (I, \dot{I}, ϕ) et (x, \dot{x}, ϕ) peut correspondre au résultat d'une isotopie. Pour la première transformation, considérons la famille d'applications

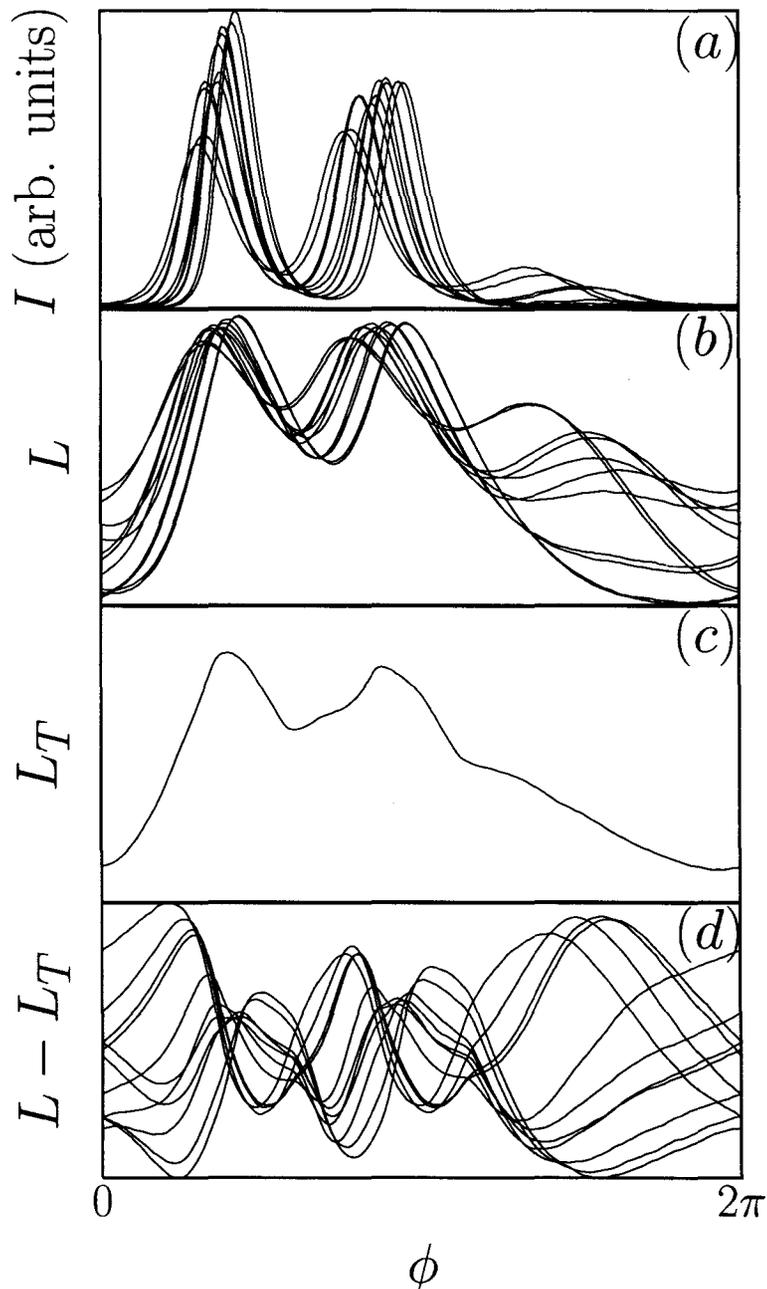


FIG. 3.4 – Le traitement analogique du signal a pour effet de répartir les brins de manière plus homogène dans le diagramme $x(\phi)$, et ce, sans induire d'intersection dans l'espace de plongement. (a) L'intensité lumineuse. (b) Amplification logarithmique de l'intensité. (c) Signal périodique correspondant à la moyenne des enveloppes supérieure et inférieure de (b). (d) Soustraction de (b) et (c).

$(I, \dot{I}, \phi) \rightarrow (L_\alpha, \dot{L}_\alpha, \phi)$ où $L_\alpha(t) = \alpha L(t) + (1 - \alpha)I(t)$ passe continûment de $I(t)$ à $L(t)$ quand α décrit l'intervalle $[0, 1]$. Si L est une fonction monotone et dérivable de I , alors les applications sont des difféomorphismes, c'est-à-dire des plongements, pour toute valeur de α . Dans notre cas, $L(t) = \ln(I(t) + I_0)$ est une fonction monotone et dérivable de I et le changement de variables correspondant à la première transformation est donc le résultat d'une isotopie, c'est à dire de l'action d'une famille à un paramètre continu de plongements. En ce qui concerne la soustraction, la démonstration est immédiate puisque les transformations de la forme $L(t) \rightarrow L(t) + f(\phi(t))$ n'affectent pas la position relative des croisements dans le diagramme de tresse. Elles ne modifient donc pas les invariants topologiques et correspondent par là même à des isotopies.

En conclusion, la série temporelle utilisée pour analyser les signaux du laser à fibre correspond à la variable $x(t) = L(t) - L_T(\phi(t))$. Cette préparation analogique permet de garantir, avec une bonne confiance, une mesure des invariants topologiques robustes au bruit et la précision parfois médiocre de la localisation exacte des brins des OPI.

3.2.3 Détection des retours proches

La technique classique [Mindlin et al.91] d'extraction des OPI consiste à détecter dans la série temporelle des séquences $\{x(t); t \in [t_0; t_0 + pT]\}$ satisfaisant à l'inégalité

$$|x(t + pT) - x(t)| < \epsilon \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0 + pT \quad (3.3)$$

En effet, cette séquence indique que la trajectoire chaotique reste de t_0 à $t_0 + 2pT$ (au moins) dans le voisinage d'une orbite de période p . Le plongement de la séquence dans l'espace (x, \dot{x}, ϕ) est donc une approximation de l'orbite d'autant meilleure que ϵ est petit. Notons que l'on demande à la trajectoire chaotique de parcourir au moins deux fois l'orbite pour pouvoir établir la périodicité mais les séquences détectées sont en général plus longues (voir fig. 3.5).

Le seuil ϵ est un paramètre libre dont le choix résulte d'un compromis entre une bonne précision et la détection d'un grand nombre de séquences. En effet, plus ϵ est petit, plus la sélection est sévère, c'est-à-dire moins on détecte de séquences périodiques et plus celles détectées sont précises. Grâce au traitement du signal, les brins des orbites sont bien détachés dans les diagrammes de tresse. De ce fait, il est possible d'utiliser, pour évaluer les invariants, des approximations grossières obtenues pour des valeurs de ϵ allant jusqu'à 5% de l'amplitude Δx maximale de $x(t)$.

Une série temporelle de durée finie n'approche qu'un nombre fini d'OPI. De plus, le bruit expérimental réduit fortement la probabilité qu'a une trajectoire de rester dans le voisinage d'une orbite instable, aussi proches soient-elles au départ. L'observation de séquences de périodicité élevée supérieure à $p = 10$ est donc exceptionnelle. Par exemple, la série ici analysée est longue de 10000 périodes

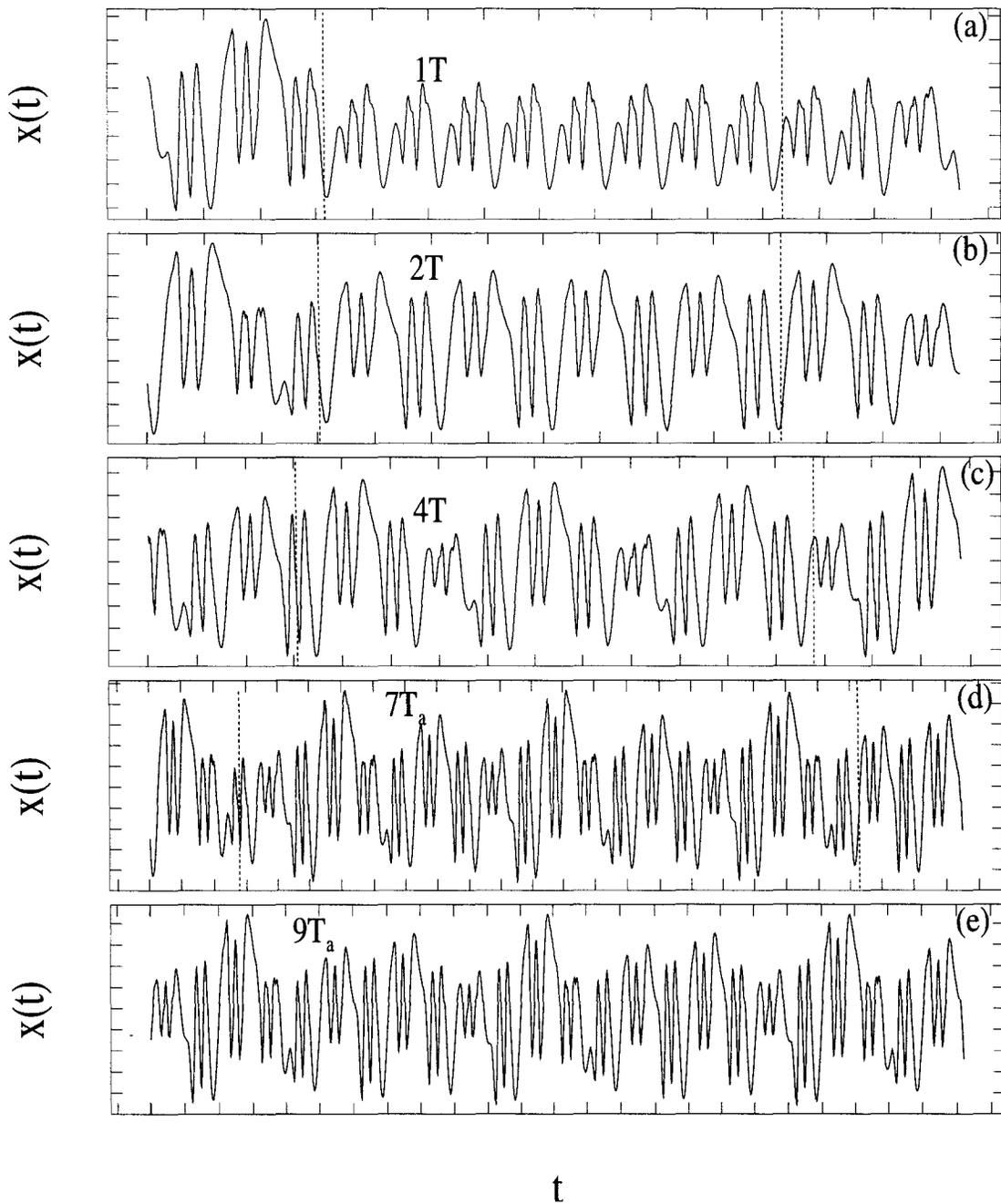


FIG. 3.5 – Exemples de séquences périodiques détectées dans la série temporelle. Les graduations sont espacées d'une période de modulation T . (a) $1T$ (b) $2T$ (c) $4T$ (d) $7T_a$ (e) $9T_a$. Plusieurs orbites $7T$ et $9T$ différentes ont été détectées et un indice est donné pour les distinguer.

de modulation. Elle contient quelques centaines de séquences périodiques, pour $\epsilon = 5\% \Delta x$, correspondant à 12 orbites différentes de périodicité allant de $p = 1$ à $p = 9$. La figure 3.5 donne quelques exemples de séquence et la figure 3.6 les tresses correspondantes.

3.2.4 Identification des orbites par un codage symbolique

Les OPI détectées dans l'attracteur peuvent être caractérisées chacune par un *nom symbolique*. Cette étape n'est pas indispensable à l'analyse mais elle simplifie énormément la détermination du gabarit.

Comme le montre la figure 3.7, le diagramme de premier retour (x_n, x_{n+1}) , où les $x_n = x(t_0 + nT)$ sont les valeurs successives de $x(t)$ dans la section de Poincaré définie par $\phi_0 = \omega t_0 \pmod{2\pi}$, peut, avec une très bonne approximation, être décrit par une application de l'intervalle sur lui-même. Or, nous l'avons vu en section 1.3.2.2, la théorie du codage symbolique des orbites des applications unidimensionnelles est bien établie et peut être utilisée pour coder les orbites de l'attracteur d'un flot continu présentant de telles caractéristiques [Mindlin et al.91, Tuffillaro et al.91, Papoff et al.92, Lefranc et al.93].

Rappelons que les extrema de l'application définissent la partition de l'intervalle. Dans le cas particulier de la série temporelle ici analysée, l'application est du type fer à cheval, i.e. de forme quadratique à un maximum en un point critique x_c . Une orbite p -périodique, identifiée par p valeurs échantillonnées $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_1 + T), \dots, x_p = x(t_1 + (p - 1)T)$ est donc codée par le nom symbolique $\overline{s_1 s_2 \dots s_p}$ où $s_i = 0$ (resp. 1) si $x_i < x_c$ (resp. $x_i > x_c$). Par exemple, les carrés numérotés de 1 à 5 sur la figure 3.7 correspondent aux points successifs de l'orbite $5T$ de nom $\overline{01011}$. De la même manière, on identifie les 12 orbites extraites de la série temporelle (voir la table 3.1).

T	1
$2T$	01
$4T$	0111
$5T_a$	01111
$5T_b$	01011
$6T_a$	011111
$6T_b$	010111
$7T_a$	0101011
$7T_b$	0111111
$7T_c$	0101111
$9T_a$	011010111
$9T_b$	010101111

TAB. 3.1 – Spectre des orbites périodiques instables identifiées par leur nom symbolique

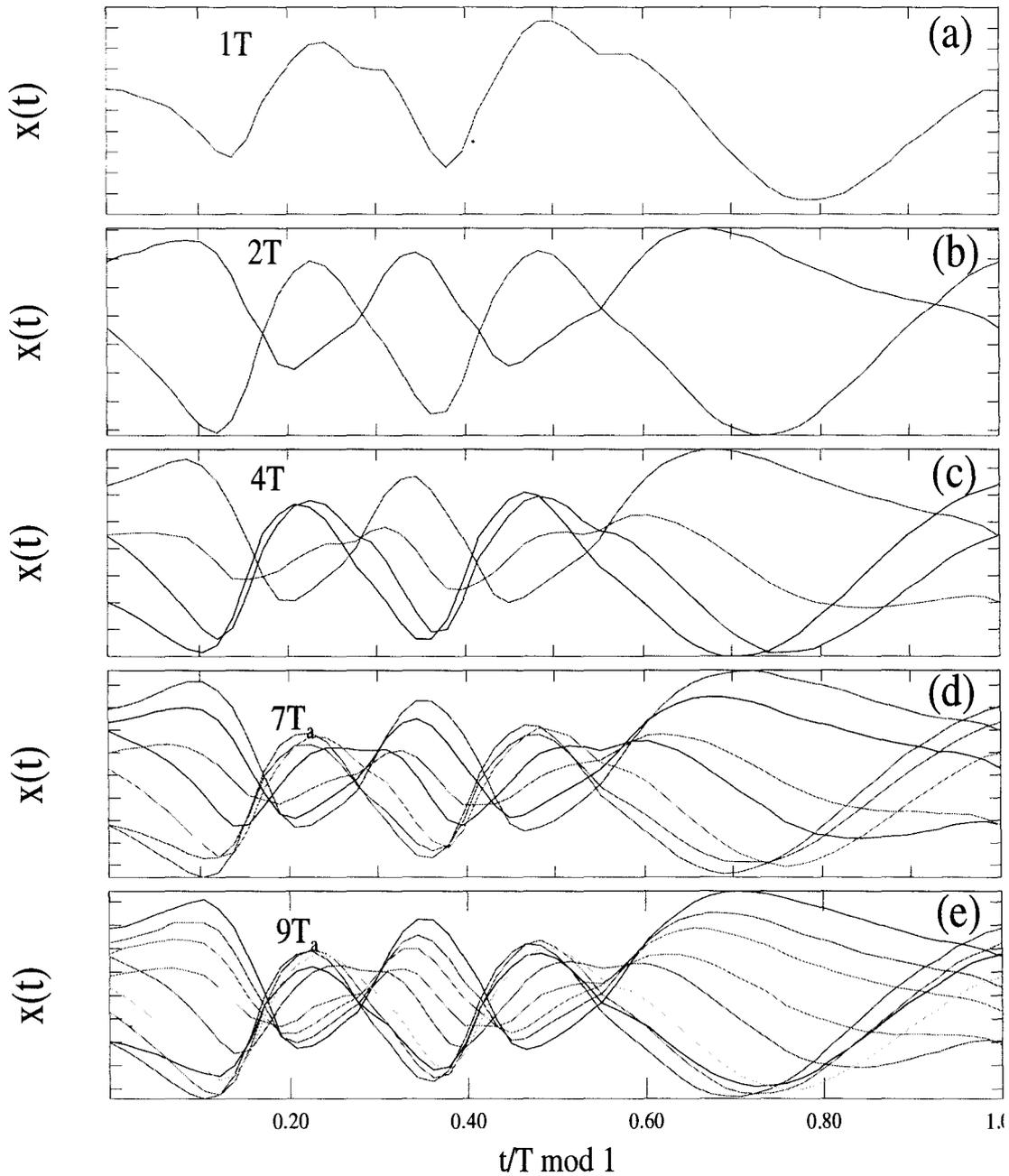


FIG. 3.6 – Graphe des séquences périodiques de la figure 3.5 dans un diagramme $x(\phi)$ où $\phi = \omega t \pmod{2\pi}$ (et de manière équivalente $t/T \pmod{1}$) est la phase de modulation. L'ensemble des brins d'une orbite forme son diagramme de tresse. (a) $1T$ (b) $2T$ (c) $4T$ (d) $7T_a$ (e) $9T_a$.

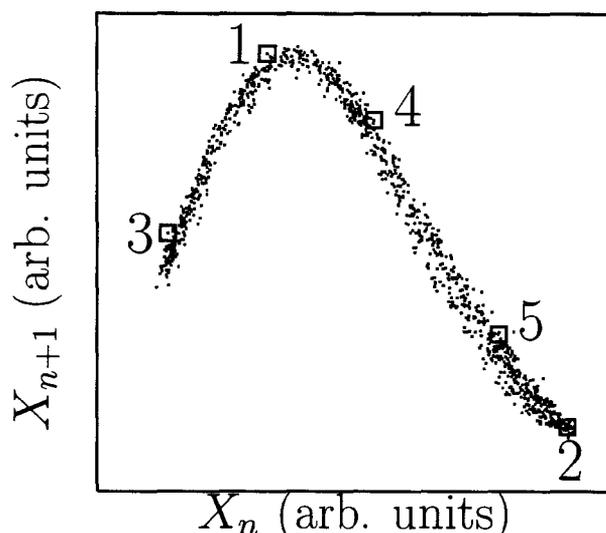


FIG. 3.7 – Diagramme de premier retour du régime chaotique. Les carrés numérotés de 1 à 5 sont les points successifs d'une orbite de période $5T$. Son nom symbolique est $\overline{01011}$.

On remarquera qu'aucune orbite $3T$ ou $8T$ n'apparaît dans le spectre. Une orbite de période 8 existe, celle créée lors de la cascade de doublement de période menant au chaos, mais elle n'a pas été détectée, c'est-à-dire que la trajectoire chaotique n'est jamais restée dans son voisinage suffisamment longtemps sur la durée de l'enregistrement. L'orbite de période 3, par contre, n'existe pas car la série temporelle a été enregistrée avant la fenêtre $3T$.

Notons enfin que l'existence d'une dynamique à deux symboles suggère une organisation topologique décrite par un gabarit à deux branches.

3.2.5 Mesure des invariants topologiques

L'étape qui suit la détection est la caractérisation des orbites périodiques par un jeu d'invariants topologiques. La mesure est relativement simple à mettre en œuvre dans les systèmes modulés puisque la tresse d'une orbite correspond au graphe dans le diagramme $x(\phi)$ de la séquence associée (voir fig.3.6).

Si b_α^i et b_β^j désignent les brins i et j de deux orbites α et β , de périodes p_α et p_β , alors les taux de rotation relative et les nombres d'enlacement sont donnés par des sommes de croisements (voir la section 1.4.2.3 du premier chapitre):

$$R_{ij}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2l} \sum_{k=0}^{l-1} \sigma(b_\alpha^{i+k} \sqcap b_\beta^{j+k}) \quad (3.4a)$$

$$\text{et } lk(\alpha, \beta) = l \times \sum_{i=0}^{g-1} R_{0i} \quad (3.4b)$$

où l et g sont respectivement le plus petit multiple commun et le plus grand diviseur commun à p_α et p_β ($l = \text{ppcm}(p_\alpha, p_\beta)$ et $g = \text{pgcd}(p_\alpha, p_\beta)$). Rappelons que la fonction $\sigma(b \cap b')$ donne le nombre de croisements signés² entre les brins b et b' du diagramme de tresse. Précisons également que le brin $b_\alpha^i(t)$ est la trajectoire qui va de x_α^i à son image x_α^{i+1} où les points x_α^i , $i = 0, \dots, p_\alpha - 1$ sont les positions successives de l'orbite α dans la section de Poincaré qui sous-tend la tresse.

Les figures 3.8a et 3.8b représentent par exemple les deux tresses différentes ($g = 2$) formées par les orbites $4T = \overline{0111}$ et $2T = \overline{01}$. Les orbites sont issues des points x_{4T}^0 et x_{2T}^0 pour la première (en (a)) et des points x_{4T}^0 et x_{2T}^1 pour la seconde (en (b)) et sont observées sur $l = 4$ périodes de modulation. On

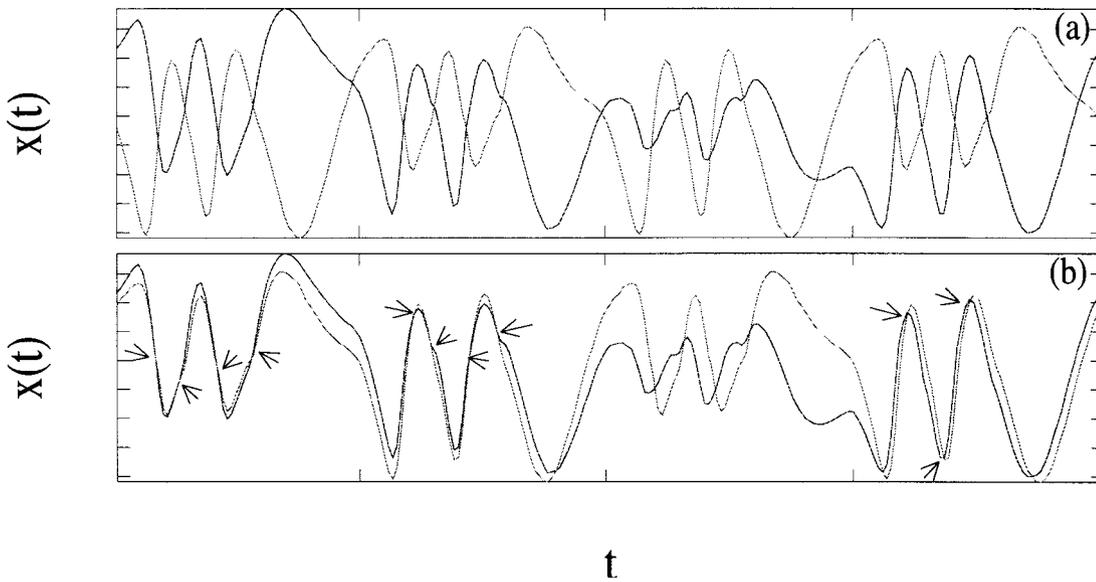


FIG. 3.8 – On représente sur cette figure les deux tresses différentes formées par les orbites $2T = \overline{01}$ et $4T = \overline{0111}$. Les graduations sont séparées d'une période de modulation. (a) Les orbites sont issues des points x_{4T}^0 et x_{2T}^0 . On compte 20 croisements, ce qui indique un taux de rotation relative $R_{00} = 20/8 = 5/2$. (b) Les orbites sont issues des points x_{4T}^0 et x_{2T}^1 et le taux de rotation relative R_{01} vaut $18/8 = 9/4$. L'échelle temporelle sur le graphe ne permet pas de voir distinctement chacun des croisements. Dans ce cas, des flèches indiquent leurs positions, qui sont parfaitement résolues à l'échelle numérique.

mesure $R_{00}(\overline{0111}, \overline{01}) = 20/8 = 5/2$ et $R_{01}(\overline{0111}, \overline{01}) = 18/8 = 9/4$ et on calcule $lk(\overline{0111}, \overline{01}) = 4 \times (5/2 + 9/4) = 19$. De la même manière, on remplit les tables d'invariants 3.2 et 3.3.

La procédure de mesure, automatisée sur ordinateur, repose sur un algorithme

2. Dans la situation présente, il s'agit simplement de la somme puisque les croisements ont tous le même signe (que l'on prendra positif)

orbites	$1T$	$2T$	$4T$	$5T_a$	$5T_b$	$6T_a$	$6T_b$
$1T = 1$	0						
$2T = 01$	$\frac{5}{2}$	$0, \frac{5}{2}$					
$4T = 0111$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}, \frac{9}{4}$	$0, (\frac{5}{2})^2, \frac{9}{4}$				
$5T_a = 01111$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	$0, (\frac{12}{5})^4$			
$5T_b = 01011$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	$0, (\frac{12}{5})^4$		
$6T_a = 011111$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}, \frac{5}{2}$		$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	$0, (\frac{5}{2})^3, (\frac{7}{3})^2$	
$6T_b = 010111$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}, \frac{7}{3}$	$\frac{5}{2}, \frac{7}{3}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$		$0, (\frac{5}{2})^3, (\frac{7}{3})^2$
$7T_a = 0101011$	$\frac{17}{7}$	$\frac{33}{14}$	$\frac{67}{28}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{83}{35}$	$\frac{101}{42}$	$\frac{50}{21}$
$7T_b = 0111111$	$\frac{17}{7}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$		$\frac{17}{5}$
$7T_c = 0101111$	$\frac{17}{7}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{17}{7}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{17}{7}$	
$9T_a = 011010111$	$\frac{22}{9}$	$\frac{43}{18}$	$\frac{43}{18}$	$\frac{12}{5}$		$(\frac{43}{18})^2, \frac{22}{9}$	
$9T_b = 010101111$	$\frac{22}{9}$	$\frac{43}{18}$	$\frac{29}{12}$				
orbites	$7T_a$	$7T_b$	$7T_c$	$9T_a$	$9T_b$		
$7T_a = 0101011$	$0, (\frac{17}{7})^4, (\frac{16}{7})^2$						
$7T_b = 0111111$	$(\frac{17}{7})^6, \frac{16}{7}$	$0, (\frac{17}{7})^6$					
$7T_c = 0101111$			$0, (\frac{17}{7})^6$				
$9T_a = 011010111$			$\frac{151}{63}$	$0, (\frac{22}{9})^4, (\frac{7}{3})^4$			
$9T_b = 010101111$					$0, (\frac{22}{9})^6, (\frac{7}{3})^2$		

TAB. 3.2 – Taux de rotation relative des orbites périodiques extraites de la série temporelle. La notation est celle utilisée dans [Solari et al.88b]: l'exposant indique le nombre de conditions initiales conduisant au même taux, quand il est différent du nombre total $p_\alpha \times p_\beta$. Par exemple, la paire $(5T_b, 5T_c)$ est caractérisée par $5 \times 5 = 25$ taux de rotation qui prennent les valeurs $17/5$ et $16/5$ dans des proportions relatives 3 et 2 respectivement (donc 15 et 10 en absolu). Une case vide indique que les invariants ne peuvent être assurés, parce que différentes mesures sont obtenues si on utilise différents segments temporels correspondant à la même orbite.

Orbites	T	$2T$	$4T$	$5T_a$	$5T_b$	$6T_a$	$6T_b$	$7T_a$	$7T_b$	$7T_c$	$9T_a$	$9T_b$
$T = 1$	0											
$2T = 01$	5	5										
$4T = 0111$	10	19	29									
$5T_a = 01111$	12	24	48	48								
$5T_b = 01011$	12	24	48	60	48							
$6T_a = 011111$	15	29		72	72	73						
$6T_b = 010111$	15	29	58	72	72		73					
$7T_a = 0101011$	17	33	67	84	83	101	100	100				
$7T_b = 0111111$	17	34	68	84	84		102	118	102			
$7T_c = 0101111$	17	34	68	84	84	102				102		
$9T_a = 011010111$	22	43	86	108		130				151	172	
$9T_b = 010101111$	22	43	87									174

TAB. 3.3 – Nombre d'enlacement et d'auto-enlacement des orbites périodiques extraites de la série temporelle.

qui dénombre les zéros des fonctions $b_\alpha^i(t) - b_\beta^j(t)$. Or, malgré le traitement du signal, il peut arriver que deux brins de deux orbites restent très proches sur une durée supérieure au pas d'échantillonnage. Le bruit a alors pour effet d'introduire localement des *croisements artificiels* qui ne sont pas liés à la dynamique du système³. Aussi est-il nécessaire de munir l'algorithme de filtres qui distinguent les croisements artificiels (rares mais possibles surtout entre orbites de périodes élevées) des croisements naturels. Les croisements artificiels sont faciles à détecter car ils correspondent, en règle générale, à une évolution beaucoup plus rapide que celle de l'orbite chaotique et apparaissent donc en groupements très rapprochés à l'échelle de la période de modulation. Nous donnons ci-après l'exemple le plus simple de filtre. En remarquant que deux croisements artificiels, c'est-à-dire deux croisements qui se succèdent dans un intervalle de temps inférieur à un certain seuil, échangent puis replacent dans leur configuration initiale les brins mis en jeu dans leur configuration initiale, on peut adopter la règle suivante :

Si on détecte une séquence de n croisements tels que l'intervalle de temps entre deux croisements successifs est inférieur à $\tau = e \times T$, où $e \ll 1$ est une constante préalablement fixée, alors la séquence est comptabilisée comme 1 croisement si n est impaire, c'est-à-dire si la position relative de brins est finalement inversée, et 0 sinon (voir fig.3.9).

Il y a bien entendu deux réactions possibles face à une séquence de croisements artificiels, qui sont (i) de prendre en compte les invariants corrigés par soustraction des croisements artificiels, où (ii) de laisser vides les cases correspondantes dans les

3. Les croisements liés au bruit correspondent à une évolution selon des degrés de liberté non décrits par l'espace des phases.

tables. Pour notre part, nous avons choisi une solution intermédiaire qui consiste à prendre en compte le nombre d'enlacement corrigé de deux orbites α et β uniquement si les valeurs calculées à partir de toutes les séquences représentatives de α et β sont identiques.

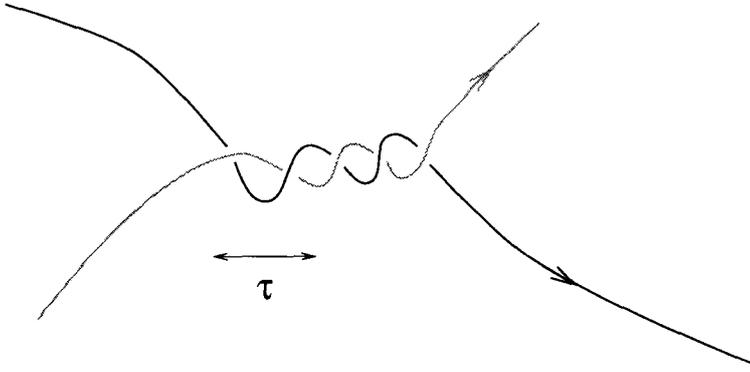


FIG. 3.9 – Deux croisements sont dits artificiels s'ils se succèdent dans un intervalle de temps $\tau = e \times T$, où $e \ll 1$ est une constante. Après la série de croisements artificiels, les brins ressortent dans des positions relatives différentes. Un seul croisement est donc comptabilisé au total.

3.2.6 Détermination du gabarit

Le gabarit solution, c'est-à-dire le gabarit qui décrit l'organisation topologique des orbites périodiques instables de l'attracteur, doit vérifier les conditions suivantes :

1. Chaque orbite périodique instable de l'attracteur possède une orbite qui lui correspond sur le gabarit de même nom symbolique et de même type de nœud.
2. Tout ensemble d'OPI (par exemple un couple quelconque d'orbites α et β) de l'attracteur et l'ensemble correspondant sur le gabarit possèdent les mêmes invariants topologiques.

Notons que ces conditions imposent aux OPI de l'attracteur et du gabarit d'être équivalentes par isotopie (elles ont mêmes nombres d'(auto)enlacement et taux de rotation relative) mais également par leurs propriétés dynamiques locales (mêmes torsions locales).

Or, on sait exprimer les invariants topologiques des orbites du gabarit en fonction des éléments des matrices \mathcal{T} et \mathcal{I} et des noms symboliques. En notant de manière formelle $i(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ les invariants des orbites α et β , de noms symboliques

$\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$, il existe une équation (voir le chapitre 1, section 1.4.3.4)

$$i(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = f(\mathcal{T}, \mathcal{I}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) \quad (3.5)$$

Si l'on connaît les noms symboliques des orbites de l'attracteur, grâce à un codage réalisé avec une application de premier retour par exemple, il suffit d'injecter les mesures expérimentales des invariants dans les équations (3.5) pour réduire la détermination du gabarit à un *problème d'inversion* d'équations algébriques dont les éléments de \mathcal{T} et \mathcal{I} sont les seules inconnues.

Par exemple, le régime analysé ici est caractérisé par une structure topologique à deux branches puisque le codage possède une base de deux symboles. Par conséquent, quatre éléments de matrices indépendants sont à déterminer: \mathcal{T}_{00} , \mathcal{T}_{11} , $\mathcal{T}_{01} = \mathcal{T}_{10}$ et $\mathcal{I}_{01} = \mathcal{I}_{10}$. considérons les cinq équations suivantes, dérivées des formules (1.72) et (1.75):

$$slk(\overline{01}) = \mathcal{T}_{01} + \mathcal{I}_{01} = 5 \quad (3.6a)$$

$$slk(\overline{0111}) = 3(\mathcal{T}_{01} + \mathcal{T}_{11}) + 2\mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{01}\Gamma(\Pi(\mathcal{T}_{11})) = 29 \quad (3.6b)$$

$$lk(\overline{1}, \overline{01}) = \frac{1}{2}[\mathcal{T}_{01} + \mathcal{T}_{11} + \mathcal{I}_{01}\Gamma(-\Pi(\mathcal{T}_{11}))] = 5 \quad (3.6c)$$

$$lk(\overline{1}, \overline{0111}) = \frac{1}{2}[\mathcal{T}_{01} + 3\mathcal{T}_{11} + \mathcal{I}_{01}\Gamma(-\Pi(\mathcal{T}_{11}))] = 10 \quad (3.6d)$$

$$lk(\overline{01}, \overline{01011}) = \frac{1}{2}[2\mathcal{T}_{00} + 5\mathcal{T}_{01} + 3\mathcal{T}_{11} + 4\mathcal{I}_{01} + \mathcal{I}_{01}\Gamma(-\Pi(\mathcal{T}_{11}))] = 24 \quad (3.6e)$$

La soustraction des équations (3.6d) et (3.6c) fournit \mathcal{T}_{11}

$$lk(\overline{1}, \overline{0111}) - lk(\overline{1}, \overline{01}) = \mathcal{T}_{11} = 5 \quad (3.7)$$

Il vient que $\Pi(\mathcal{T}_{11}) = -1$ (impair). La combinaison des équations (3.6a) et (3.6b) permet alors de déterminer \mathcal{T}_{01} et \mathcal{I}_{01}

$$\begin{aligned} 3\mathcal{T}_{01} + 2\mathcal{I}_{01} &= 14 \\ \mathcal{T}_{01} + \mathcal{I}_{01} &= 5 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \mathcal{T}_{01} &= 4 \\ \mathcal{I}_{01} &= 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Enfin l'équation 3.6e donne la dernière inconnue

$$\mathcal{T}_{00} = 24 - \frac{1}{2}(5\mathcal{T}_{01} + 3\mathcal{T}_{11} + 5\mathcal{I}_{01}) = 4 \quad (3.9)$$

Ainsi obtient-on la représentation algébrique du gabarit

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (3.10a)$$

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10b)$$

où la matrice \mathcal{I} est écrite sous la forme initialement introduite par Mindlin et al. [Mindlin et al.90].

Notons que le calcul aurait pu être légèrement simplifié si on avait posé dès le départ $\Pi(\mathcal{T}_{00}) = 1$ et $\Pi(\mathcal{T}_{11}) = -1$, c'est-à-dire une torsion paire (resp. impaire) pour la branche 0 (resp. 1)⁴. En effet, les passages par les branches 0 et 1 correspondent, dans le diagramme de premier retour, aux passages dans les intervalles de pente respectivement positive, c'est-à-dire qui préserve les positions relatives de deux points, et négative, c'est-à-dire qui inverse les positions relatives (voir la figure 3.10). Plus généralement, la détermination du gabarit est beaucoup plus simple si les torsions sont connues, par exemple via les torsions locales des orbites (cf. équ. 1.68): on dispose alors des valeurs numériques des fonctions parité et les équations deviennent linéaires et par suite inversibles.

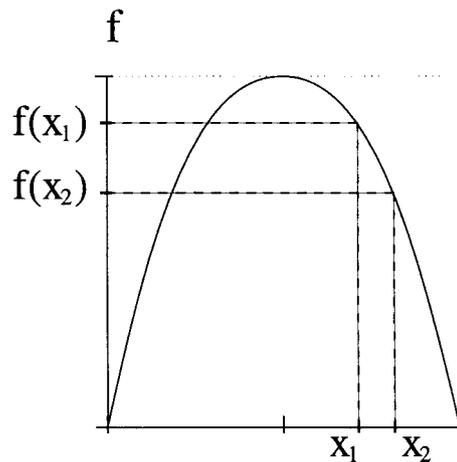


FIG. 3.10 – Les positions relatives des images sont inversées par rapport aux points de départ x_1 et x_2 . Une pente négative sur le diagramme correspond donc à une branche de torsion impaire sur le gabarit.

On remarquera tout particulièrement que très peu d'invariants ont été nécessaires à la détermination du gabarit. En corrolaire, cela montre que l'organisation topologique de l'infinité dense des OPI de l'attracteur est fixée par l'organisation de quelques orbites de basses périodes. Moyennant quoi, il convient de valider la solution (3.10) en vérifiant que les invariants qu'elle prédit pour les orbites de période plus élevée correspondent aux mesures expérimentales. Par exemple, on vérifie que le nombre d'enlacement prédit pour les orbites $5T_b = \overline{01011}$ et

4. On peut rappeler que la torsion est mesurée en nombres de demi-tours

$$7T_b = \overline{01111111}$$

$$\begin{aligned} lk(\overline{01011}, \overline{01111111}) &= \frac{1}{2}(2\mathcal{T}_{00} + 15\mathcal{T}_{01} + 18\mathcal{T}_{11}) \\ &\quad + \mathcal{I}_{01} [2 + 2\Gamma(-\Pi(\mathcal{T}_{11})) + \Gamma(\Pi(\mathcal{T}_{11})) + \Gamma(-\Pi(\mathcal{T}_{00} + \mathcal{T}_{11}))] \\ &= 84 \end{aligned} \tag{3.11}$$

est égal à la mesure expérimentale. Un invariant différent, ne serait-ce que d'une unité, de la valeur prédite invaliderait à lui seul la solution (3.10) et révélerait une structure topologique plus complexe.

3.2.7 Commentaires sur la procédure d'analyse

Il s'agissait dans cette section de décortiquer la procédure expérimentale d'analyse, depuis la série temporelle jusqu'au gabarit. Nous discuterons de l'importance physique du résultat au chapitre 4. La première étape de l'analyse, après la construction d'un espace de plongement adapté, est la détection des séquences périodiques de la série temporelle. Si la dynamique symbolique sur l'attracteur est établie, la seconde est le codage des OPI correspondant aux séquences détectées. La troisième est la mesure des invariants topologiques. Enfin la quatrième étape consiste à déterminer la représentation algébrique du gabarit. L'ensemble de la procédure est relativement simple à mettre en œuvre et à automatiser, mais elle repose entièrement sur le fait que des séquences périodiques existent dans la série temporelle et que les OPI correspondantes puissent être codées chacune par un nom symbolique différent.

Imaginons maintenant que l'orbite chaotique passe si peu de temps dans le voisinage immédiat des OPI, même de plus basse période, qu'aucun retour proche ne puisse être détecté dans la série temporelle. L'analyse s'achève avant même d'avoir commencé. Imaginons également une situation dans laquelle le codage symbolique est difficile à établir. C'est par exemple le cas des systèmes faiblement dissipatifs, pour lesquels les diagrammes de premier retour ne sont pas correctement décrits par une application de l'intervalle sur lui-même. Le problème d'inversion des équations algébriques devient impossible à résoudre car il ne peut pas être écrit explicitement. Ces situations, fréquentes dans les systèmes laser que nous avons étudiés, sont les obstacles fondamentaux à l'aboutissement de l'analyse topologique des régimes chaotiques.

La section 3.3 présente une méthode différente de la technique classique de détection des retours proches et qui consiste à reconstruire les orbites périodiques. La section 3.4 décrit une méthode de détermination du gabarit qui permet de s'affranchir d'un codage symbolique préalable.

3.3 Reconstruction des orbites périodiques instables

C'est la nature hyperbolique des OPI, c'est-à-dire l'existence d'une variété stable, qui offre à l'orbite chaotique la possibilité de s'approcher des orbites périodiques. Elle y reste d'autant plus longtemps qu'elle s'est approchée près de l'OPI et que l'exposant de Lyapunov positif, associé à la variété instable, est petit. Aussi, même dans des conditions expérimentales excellentes, il arrive que les OPI soient trop instables pour que des séquences périodiques complètes puissent être détectées dans la série temporelle. Ce phénomène se manifeste tout particulièrement pour les structures topologiques complexes. En effet, plus les orbites s'étendent sur un grand nombre de branches, plus le processus d'étirement, et par là-même la sensibilité aux conditions initiales, est important. De nombreuses séries temporelles se sont avérées inutilisables dans nos expériences par la seule technique de détection des retours proches.

La solution qui consiste à enregistrer des séries temporelles plus longues est inefficace, même si l'ergodicité de la trajectoire garantit l'existence de retours proches, car il existe une longueur à partir de laquelle la probabilité d'observer une séquence périodique n'augmente plus.

La technique proposée ici repose sur l'hypothèse que même si l'orbite chaotique ne reste jamais deux périodes consécutives dans le voisinage d'une OPI, elle les visite en partie à plusieurs reprises dans une série temporelle de longueur finie (voir fig. 3.11). Aussi l'information complète sur l'orbite périodique existe en

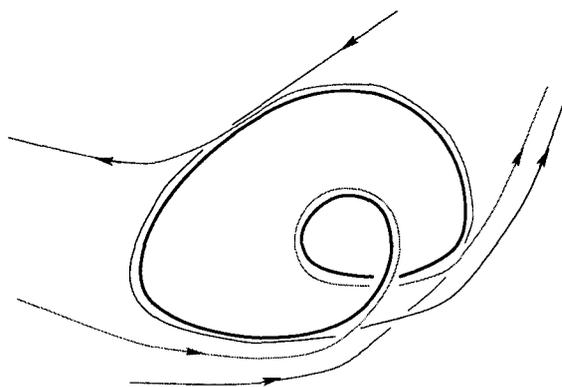


FIG. 3.11 – L'orbite chaotique se trouve à plusieurs reprises dans le voisinage de l'orbite périodique mais n'y reste pas suffisamment longtemps pour qu'une séquence périodique complète soit détectée dans la série temporelle.

morceaux dans les données expérimentales et l'idée consiste à rassembler les pièces du puzzle. Il s'agit (i) de détecter les morceaux susceptibles de convenir, sans information préalable sur les OPI, puis (ii) de reconstruire une orbite périodique en ordonnant convenablement les morceaux.

3.3.1 Formulation mathématique du problème

3.3.1.1 Formalisme

La série temporelle $x(t)$ représente un signal expérimental de durée $N \times T$ où T est la période de modulation. Il est donc pertinent de décomposer $x(t)$ en N morceaux de signal de durée T

$$\psi_i(u) = x(t_i + u)[\Gamma(u) - \Gamma(u - T)] \quad \text{avec } u \in [0, T[\quad (3.12)$$

où $t_i = i \times T$ et Γ est la fonction échelon définie par

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

La fonction $\psi_i(u) : u \in [0, T[$ détermine l'état du système à l'instant t_i . Notons que le choix du découpage est libre et que nous utilisons T uniquement parce qu'il est un temps caractéristique du système. En pratique, les ψ_i ne sont pas des fonctions continues mais des ensembles discrets de d valeurs où d est le nombre de points échantillonnés par période de modulation. ψ_i est donc le résultat d'un plongement par la méthode des délais dans un espace à d dimensions. On dispose ainsi d'une *collection* de N morceaux d'orbites⁵ qui correspondent à des points d'un espace de dimension d . On notera formellement P l'application de premier retour telle que $\psi_{i+1} = P(\psi_i)$.

Le problème de la reconstruction peut alors se formuler comme suit. Soit $\{\psi_{i(n)}\}_{n=0}^{p-1}$ une séquence de p états pris dans la collection. La *fonction indice* $i(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ indique la position t_i , dans la série temporelle, du point n de la séquence. Cette séquence de morceaux de trajectoire peut-elle être une approximation correcte d'une orbite p -périodique? Le *lemme de poursuite*⁶ répond positivement à cette question. Il faut bien entendu que la séquence de points vérifie certaines conditions que nous allons préciser maintenant.

3.3.1.2 le lemme de poursuite et les pseudo-orbites

Imaginons que l'on dispose d'un ensemble d'états quelconques $\{x_i\}_{i=0}^m$ répartis dans une surface de Poincaré. Si l'orbite issue du point x_i traverse la surface de Poincaré dans le voisinage du point x_{i+1} , et ce quel que soit i , on est naturellement tenté de dire que la séquence $\{x_i\}_{i=0}^m$ est une approximation correcte d'une orbite réelle de l'application de premier retour. Cette affirmation est rigoureusement démontrée dans le cadre d'un système hyperbolique et le lemme de poursuite en est la synthèse. Pour énoncer ce théorème, nous devons définir les notions de *pseudo-image* et de *pseudo-orbite* d'une application.

5. Pour une série temporelle typique, N est de l'ordre de quelques milliers et d varie de 50 à 100 suivant les expériences.

6. Poursuite est dans ce contexte la traduction du mot anglais *shadowing*.

Considérons l'application f d'un système dynamique discret et $d(., .)$ une distance dans l'espace des phases. On donne la définition suivante:

définition 5. On dira que y est une ϵ -pseudo-image de x par f si $d(f(x), y) < \epsilon$ (voir fig. 3.12)

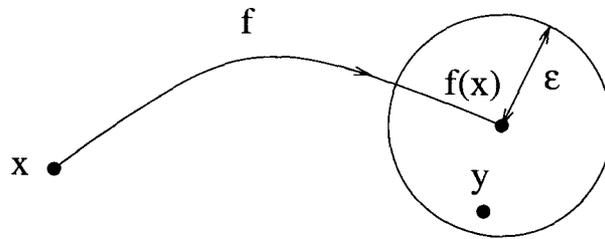


FIG. 3.12 – Le point y est une ϵ -pseudo-image de x par f .

Cela signifie que le point y n'est pas l'image de x par f mais qu'il en est une approximation d'autant meilleure que ϵ est petit. On définit alors une pseudo-orbite de f de la manière suivante (voir par exemple [Guckenheimer et al.83]):

définition 6. On dit que la séquence $\{x_i\}_{i=0}^m$ est une ϵ -pseudo-orbite de f si $d(x_{i+1}, f(x_i)) < \epsilon$ pour tout $0 \leq i < m$ (voir fig. 3.13).

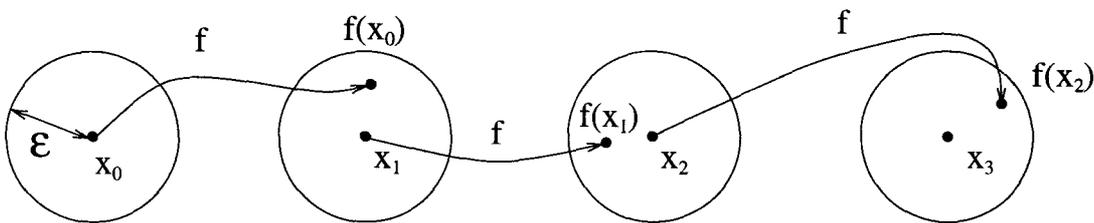


FIG. 3.13 – La succession des points x_i forme une ϵ -pseudo-orbite de f .

Une ϵ -pseudo-orbite peut être vue comme une trajectoire de f perturbée à chaque itération d'une quantité inférieure à ϵ .

En toute rigueur, le lemme de poursuite établit qu'il existe une trajectoire réelle de f qui reste dans le voisinage de toute pseudo-orbite si les points de celle-ci appartiennent à un ensemble invariant hyperbolique. On dit que cette trajectoire poursuit la pseudo-orbite. Plus précisément, on définit la poursuite par:

définition 7. On dit que le point y β -poursuit $\{x_i\}_{i=0}^m$ si $d(f^i(y), x_i) < \beta$ pour tout $0 \leq i < m$ (voir fig. 3.14).

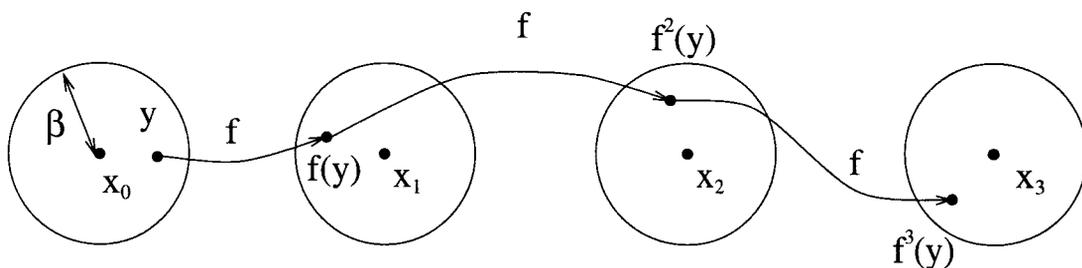


FIG. 3.14 – Le point y poursuit la pseudo-orbite $\{x_i\}_{i=0}^m$.

et enfin on peut énoncer le théorème [Bowen70a, Bowen70b]

théorème 1. (*Lemme de poursuite*). Soit Λ un ensemble hyperbolique invariant d'une application f . Pour tout $\beta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que chaque ϵ -pseudo-orbite $\{x_i\}_{i=0}^m$ est β -poursuivie par un point $y \in \Lambda$.

En clair, toute ϵ -pseudo-orbite a dans son voisinage une véritable orbite du système. Ce théorème est fondamental en théorie des systèmes dynamiques puisqu'il assure que les orbites réalisées dans une simulation numérique ou enregistrées dans une expérience physique peuvent être considérées comme des orbites réelles du système, même en régime chaotique, alors que, rigoureusement, elles ne sont que des pseudo-orbites.

3.3.1.3 Recherche d'une pseudo-orbite périodique

Si l'on s'autorise une extension du lemme de poursuite aux systèmes non hyperboliques, une succession de p morceaux ψ_i pris dans la collection donne la forme approchée d'une OPI de période p si la séquence $\{\psi_{i(n)}\}_{n=0}^{p-1}$ est une pseudo-orbite périodique de l'application de premier retour P , c'est-à-dire l'application telle que $\psi_{i(n)+1} = P(\psi_{i(n)})$.

Reste à définir précisément ce qu'est une pseudo-orbite périodique. Pour cela, nous dirons que:

définition 8. La séquence $\{\psi_{i(n)}\}_{n=0}^{p-1}$ est une ϵ -pseudo-orbite de période p pour l'application P si les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées (voir la figure 3.15 pour illustration):

1. $d(\psi_{i(n)+1}, \psi_{i(n+1)}) < \epsilon \quad \forall n = 0, \dots, p-2$ (condition pour être une pseudo-orbite)
2. $d(\psi_{i(p-1)+1}, \psi_{i(0)}) < \epsilon$ (condition de périodicité)

Ceci étant posé, extraire les orbites périodiques de la série temporelle consiste à déterminer les fonctions indices $i(n)$. Remarquons que la technique de détection des retours proches n'est que le cas particulier où l'on cherche des séquences pour lesquelles $i(n+1) = i(n) + 1$.

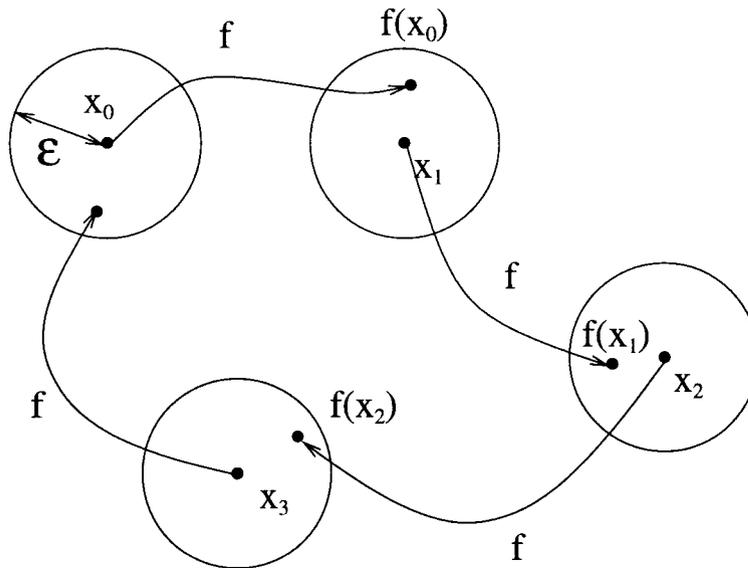


FIG. 3.15 – La séquence des points x_0, x_1, x_2, x_3 constitue une pseudo-orbite de période 4 pour f .

3.3.2 L'arbre de reconstruction

Plutôt que de tester les deux conditions de la définition 8 sur un ensemble de points $\{\psi_{i(n)}\}_{n=0}^{p-1}$ pris au hasard dans la série, la construction des pseudo-orbites est basée sur une technique d'exploration *arborescente*. On part d'un état $\psi_{i(0)}$ donné ($1 \leq i(0) \leq N$) et on cherche le plus court chemin qui y revient en empruntant les morceaux de trajectoire disponibles dans la série temporelle.

Signalons que la distance entre deux points ψ_i et ψ_j est évaluée dans l'espace de plongement par $d(\psi_i, \psi_j) = \|\psi_i - \psi_j\| = d_{ij}$ où $\|\cdot\|$ désigne une norme dont la définition particulière importe peu. Nous utilisons par exemple une norme quadratique

$$\|\psi\|^2 = \sum_{n=0}^{d-1} \psi(n\frac{T}{d})^2 \quad (3.14)$$

On dit alors que ψ_i et ψ_j sont des ϵ -voisins si $d_{ij} < \epsilon$ et on définit une matrice $N \times N$ notée V^ϵ telle que

$$V_{ij}^\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{ij} < \epsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Cette *matrice de voisins*, construite au départ de la procédure, contient l'information nécessaire et suffisante pour une recherche des ϵ -pseudo-images et par suite des ϵ -pseudo-orbites. En effet, si $V_{i+1j}^\epsilon \neq 0$ alors les points ψ_{i+1} et ψ_j sont

voisins, ce qui signifie de manière équivalente que ψ_j est une ϵ -pseudo-image de ψ_i . En notant

$$T_{ij}^\epsilon = V_{i+1j}^\epsilon, \quad (3.16)$$

on définit implicitement une *matrice de transition* T^ϵ telle que $T_{ij}^\epsilon \neq 0$ si la transition de ψ_i vers ψ_j est possible. Notons que V est une matrice symétrique alors que T ne l'est pas.

À partir de l'état $\psi_{i(0)}$, on tolère les transitions vers ses ϵ -pseudo-images, où ϵ est une constante fixée au départ, c'est-à-dire vers les états $\psi_{i(1)}$ tels que $T_{i(0) i(1)}^\epsilon \neq 0$ (ce sont tous les points contenus dans une boule de rayon ϵ centrée sur $\psi_{i(0)+1}$). Puis, de chacune des ϵ -pseudo-images, on tolère à nouveau les transitions vers leur ϵ -pseudo-images respectives, etc... La figure 3.16 illustre le processus arborescent avec uniquement deux pseudo-images par point à chaque itération par souci de simplicité. Cet arbre représente l'ensemble des ϵ -pseudo-orbites issues de $\psi_{i(0)}$, et contient en particulier les ϵ -pseudo-orbites périodiques qui passent dans le voisinage de $\psi_{i(0)}$. Par conséquent, si un point $\psi_{i(p)}$, à l'itération p du processus, est un ϵ -voisin de $\psi_{i(0)}$, alors la branche qui le porte est une ϵ -pseudo-orbite de période p de l'application de premier retour. Par exemple, la succession des points $\psi_{i(0)}$, $\psi_{i(1)}^a$, $\psi_{i(2)}^{ab}$ et $\psi_{i(3)}^{abb}$ sur la figure 3.16 (où les lettres en exposants indiquent le chemin parcouru à chaque étape) est une ϵ -pseudo-orbite de période 4 parce qu'on a mesuré $d(\psi_{i(4)}^{abba}, \psi_{i(0)}) < \epsilon$. En fait, la condition de périodicité prouve qu'il existe un chemin dans l'attracteur pour aller de $\psi_{i(0)}$ vers lui-même en quelques itérations. Mis bout à bout, les morceaux correspondant à la séquence $\{\psi_{i(n)}\}_{n=0}^{p-1}$ constituent finalement une approximation d'une orbite de période p d'autant meilleure que ϵ est petit.

La figure 3.17 donne un exemple concret de construction d'une pseudo-orbite périodique à partir d'une série temporelle de $N = 2000$ périodes de modulation, générée par le laser à fibre, et ne contenant pas de séquence $3T$ détectable. Le développement d'un arbre à partir de ψ_{227} conduit à la pseudo-orbite $3T$ $\{\psi_{227}, \psi_{1228}, \psi_{85}\}$ reproduite sur la figure 3.17

On peut se représenter chaque itération comme une perturbation du système, et l'ensemble des trajectoires issues de la démultiplication de l'orbite initiale comme une exploration rapide d'un large domaine de l'attracteur, grâce à l'effet d'une sensibilité aux conditions initiales, et donc en particulier des orbites de basse période qui pourraient exister dans le voisinage. La démarche s'apparente en fait à l'idée directrice des techniques de "ciblage"⁷. Le "ciblage" est une procédure de contrôle qui oblige un système chaotique, initialement dans un état x_s (point source), à suivre le chemin le plus court dans l'attracteur jusqu'au voisinage d'un état cible x_t (target) [Shinbrot et al.90]. Ceci est réalisé par des petites perturbations, judicieusement choisies, d'un paramètre, qui poussent l'orbite chaotique,

7. Le terme "ciblage" est ici la traduction du mot anglais *targeting*. Target est traduit usuellement par cible.

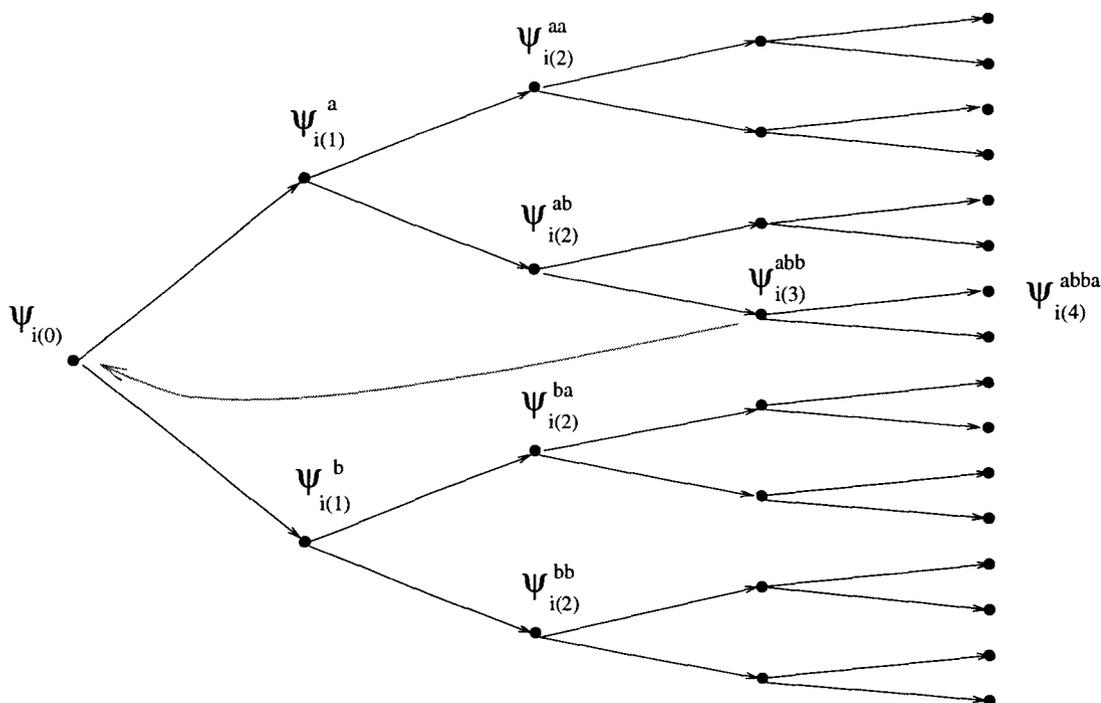


FIG. 3.16 – Illustration de l'arbre de reconstruction. Chaque état peut transiter vers un certain nombre de points. Seulement deux images par états sont représentées ici par souci de clarté. Elles sont différenciées par les deux exposants a et b et le cumul des exposants caractérise la branche parcourue. Parmi les 16 images obtenues à la quatrième itération, une se trouve dans le voisinage de $\psi_{i(0)}$ ($d(\psi_{i(4)}^{abba}, \psi_{i(0)}) < \epsilon$). La branche correspondante, c'est-à-dire la succession des points $\psi_{i(0)}, \psi_{i(1)}^a, \psi_{i(2)}^{ab}, \psi_{i(3)}^{abb}$ est une ϵ -pseudo-orbite de période 4 de l'application de premier retour.

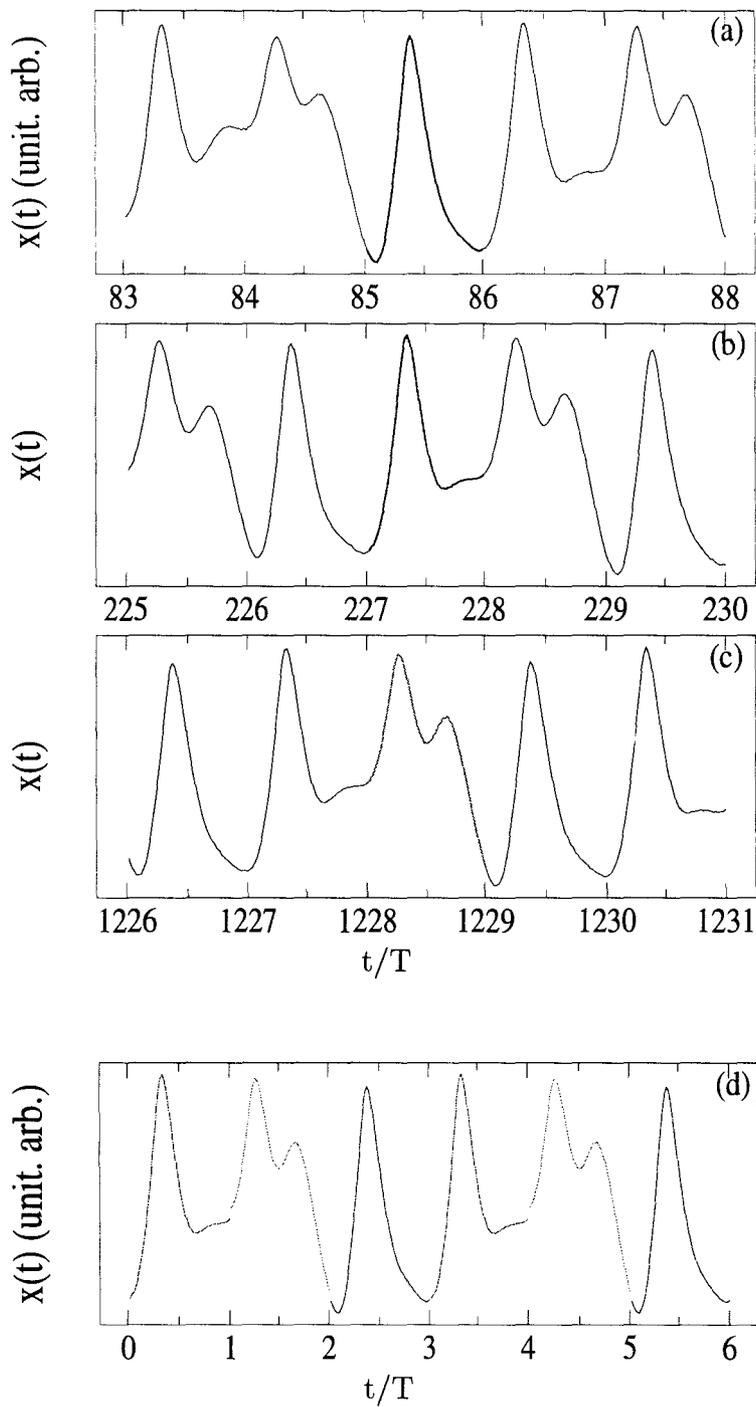


FIG. 3.17 – Les séquences (a), (b) et (c) correspondent à des passages brefs (i.e. pas suffisamment longs pour qu'une séquence périodique soit détectable) de l'orbite chaotique dans le voisinage d'une orbite $3T$. Les segments en gras sont (a) ψ_{85} (b) ψ_{227} et (c) ψ_{1228} . (d) L'assemblage $\{\psi_{227}, \psi_{1228}, \psi_{85}\}$ forme une pseudo-orbite $3T$.

issue de x_s , sur la variété stable de l'orbite qui passe par x_t . Dans la procédure de reconstruction, une fois la séquence pseudo périodique identifiée, tout se passe comme si on récoltait le chemin du ciblage de ψ_a vers lui-même par perturbation, non pas d'un paramètre de contrôle, mais des variables dynamiques.

3.3.3 Présélection des candidats

La technique de l'arbre présente un inconvénient. Le temps d'exploration, proportionnel au nombre de test de proximité entre les pseudo-images et la racine $\psi_{i(0)}$, croît en $\sum_{n=1}^p v^n$ avec la périodicité p maximale recherchée, où v est le nombre typique de ϵ -pseudo-images d'un point présentes dans la série temporelle. Ce nombre varie d'un point à un autre mais il n'en reste pas moins que la durée s'allonge exponentiellement avec la périodicité recherchée. Pour conserver des temps de calcul raisonnables, il apparaît donc indispensable de présélectionner les candidats $\psi_{i(0)}$.

L'idée est d'utiliser la matrice de transition T^ϵ définie précédemment par l'équation (3.16). L'élément $T_{ij}^\epsilon = \langle \psi_j | T^\epsilon | \psi_i \rangle$ indique si une transition de l'état ψ_i vers l'état ψ_j peut avoir lieu sous l'effet d'une perturbation d'ordre ϵ . De ce fait, $T^\epsilon | \psi_i \rangle$, c'est-à-dire la $i^{\text{ème}}$ colonne de T^ϵ , est un vecteur à N dimensions dont les composantes non nulles correspondent aux ϵ -pseudo-images de ψ_i par l'application de premier retour P : tous les états ψ_j , tels que $\langle \psi_j | T^\epsilon | \psi_i \rangle \neq 0$, sont des pseudo-images de ψ_i .

$$| \psi_i \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1(i^{\text{ème}}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T^\epsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Une seconde application de la matrice de transition sur ce dernier vecteur donne, de la même façon, toutes les pseudo-images de chaque pseudo-image de ψ_i . Autrement dit, $(T^\epsilon)^2 | \psi_i \rangle$ donne les pseudo-images de ψ_i par P^2 et, plus généralement, les composantes non nulles de $(T^\epsilon)^p | \psi_i \rangle$ correspondent aux pseudo-images de ψ_i par P^p , contenues dans la série temporelle. Il vient naturellement qu'un état ψ_i est connecté à lui-même par une pseudo-orbite p -périodique si $\langle \psi_i | (T^\epsilon)^p | \psi_i \rangle \neq 0$. On peut donc sélectionner les points dans le voisinage desquels passe une orbite de période p en relevant les éléments diagonaux non nuls de $(T^\epsilon)^p$.

Il convient de préciser que la procédure établit l'existence d'une pseudo-orbite $\{\psi_{i(n)}\}_{n=0}^{p-1}$ liant deux états mais ne permet pas de déterminer le chemin $i(n)$.

Il s'agit donc uniquement d'une procédure de sélection des candidats, l'arbre intervenant par la suite pour définir le chemin exact $i(n)$ de la pseudo-orbite. Notons enfin que la recherche des candidats se fait par période croissante et on utilise pour cela la relation de récurrence entre T^{p+1} et T^p

$$(T^{p+1})_{ij} = (T^p T)_{ij} = \sum_{k=1}^{N-1} (T^p)_{ik} V_{k+1j} \quad (3.18)$$

Dans la pratique, la somme sur k est stoppée dès qu'un produit $(T^p)_{ik} V_{k+1j}$ est non nul. Si tel est le cas, on assigne la valeur 1 à $(T^{p+1})_{ij}$, le rôle de cet élément étant uniquement d'indiquer si les états ψ_i et ψ_j sont connectés par une pseudo-orbite. Le temps de calcul est donc en général très court par rapport au produit de matrices usuel.

3.3.4 En résumé

La procédure présentée dans cette section construit des pseudo-orbites, c'est-à-dire des orbites que le système suivrait s'il était perturbé à chaque passage par la surface de Poincaré. Le lemme de poursuite, rigoureusement établi pour les ensembles hyperboliques, assure que dans leur voisinage existe une orbite réelle du système. Par conséquent, les pseudo-orbites périodiques peuvent être utilisées, dans les mêmes conditions que les segments temporels associés aux retours proches, comme approximation des OPI pour évaluer les invariants topologiques.

Les étapes de la reconstruction sont les suivantes:

1. Création de la matrice $N \times N$ des proches voisins V^ϵ . Ceci est réalisé par évaluation de la distance entre chacun des N morceaux ψ_i dans l'espace de plongement d -dimensionnel (où d est le nombre de points échantillonnés par période de modulation).
2. Recherche des candidats à la poursuite d'une orbite p -périodique. Ceci est réalisé par détection des éléments diagonaux non nuls des matrices de transition $(T^\epsilon)^p$, déduites de la matrice V^ϵ .
3. Construction des pseudo-orbites. À partir de chaque candidat retenu est initiée une exploration arborescente des chemins dans l'attracteur accessible, pour déterminer la trajectoire périodique.

En règle générale, la procédure nécessite des temps de calcul plus importants que pour la détection des séquences périodiques. Typiquement, celui-ci augmente exponentiellement avec la périodicité p maximale recherchée alors qu'il n'augmente que linéairement pour la détection des retours proches. Par contre, dans la mesure où il est inutile que l'orbite chaotique reste longtemps dans le voisinage des orbites périodiques recherchées, la procédure se satisfait de séries temporelles beaucoup plus courtes. Par exemple, il a pu être vérifié, en analysant certains

enregistrements, que l'utilisation de 1000 périodes de modulation d'une série en contenant 10000 fournissait un spectre d'OPI reconstruites équivalent au spectre de retours proches extraits des 10000 périodes initiales.

L'avantage essentiel reste toutefois qu'elle est capable de construire des orbites non observables dans la série temporelle. Par exemple, la méthode des retours proches n'avait pas su détecter l'orbite $3T$ de la figure 3.17.

3.4 Détermination du gabarit sans codage symbolique préalable

3.4.1 Problématique

La détermination des matrices \mathcal{T} et \mathcal{I} à partir des invariants topologiques est tributaire de la connaissance des noms symboliques des orbites périodiques, c'est-à-dire des branches successivement suivies sur le gabarit. Ce codage est en correspondance avec celui défini par la dynamique symbolique construite à partir d'une partition génératrice de l'attracteur et peut être déduit facilement d'un diagramme de premier retour si celui-ci est correctement décrit par une application de l'intervalle sur lui-même. La dynamique symbolique des applications unidimensionnelles a pu, pour cette raison, être utilisée pour identifier les OPI de l'attracteur analysé en section 3.2.

La figure 3.4.1 montre le diagramme de premier retour d'un régime chaotique du laser YAG obtenu en modulant le paramètre de pompe autour d'une valeur moyenne $A_0 = 1.2$ avec un taux $m = 0.4$ et une fréquence de 32KHz. Ces conditions expérimentales situent le régime dans la deuxième langue chaotique et importent peu pour la suite de la section. On note immédiatement qu'aucune

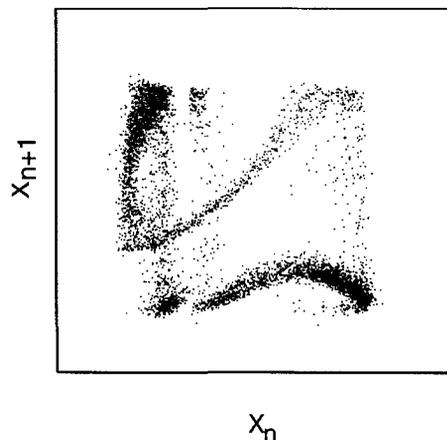


FIG. 3.18 – Diagramme de premier retour d'un régime chaotique du laser YAG

application unidimensionnelle ne convient comme approximation du diagramme,

et qu'un codage des orbites par la méthode utilisée précédemment est impossible. Des méthodes de construction d'un codage symbolique pour les application bidimensionnelles existent [Cvitanovic et al.88, Grassberger et al.89] mais leur mise en œuvre expérimentale reste difficile. Dans ces conditions, le système d'équations qui exprime les nombres d'enlacement et d'auto-enlacement des orbites du gabarit (tel que 3.6) a comme inconnues, non seulement les matrices \mathcal{T} et \mathcal{I} , mais aussi les noms symboliques des orbites. Plus précisément, on doit trouver le jeu ou les jeux pour lesquels le système d'équations tel que (3.6) possède au moins une solution, et ce avec comme seul critère de validité la cohérence des équations. Si plusieurs jeux existent, chaque solution associée est un gabarit compatible avec les données expérimentales.

3.4.2 Principe de la méthode

Prenons comme exemple le régime évoqué ci-dessus. Plusieurs OPI ont été extraites de la série temporelle: une orbite $1T$, trois orbites 2-périodiques $2T_a$, $2T_b$ et $2T_c$, une orbite $3T$, une $4T$ et une $5T$. Les nombres d'enlacement ont été mesurés et sont reportés dans la table 3.4. L'hypothèse la plus simple est

orbites	$1T$	$2T$	$2T$	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$
$1T$	0						
$2T$	3	3					
$2T$	3	6	3				
$2T$	3	6	6	3			
$3T$	4	8	8	8	8		
$4T$		11	12	12		17	
$5T$	7		14		20		28

TAB. 3.4 – Nombre d'enlacement des orbites extraites de l'attracteur du laser YAG

que le gabarit possède trois branches puisque seule l'orbite $2T \overline{01}$ existe dans une structure à deux symboles. Dans ce cas, il existe 3 noms possibles pour la $1T$ ($\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$), 3 noms pour chacune des orbites $2T$ ($\overline{01}$, $\overline{02}$, $\overline{12}$), 8 noms pour la $3T$, 18 pour la $4T$ et 48 pour la $5T$ (voir la section 1.3.2.2), soit au total $3 \times 3! \times 8 \times 18 \times 48 = 124416$ jeux potentiels. On considère tout d'abord les deux premières orbites $1T$ et $2T_a$ pour lesquelles il existe déjà $3 \times 3 = 9$ jeux de noms (voir fig. 3.19). Pour chaque jeu, si on essaye de résoudre le système d'équations après y avoir injecté les invariants mesurés expérimentalement pour ces deux orbites, on peut aboutir à trois résultats différents:

1. les équations sont incohérentes, c'est-à-dire qu'elles ne possèdent pas de solution.

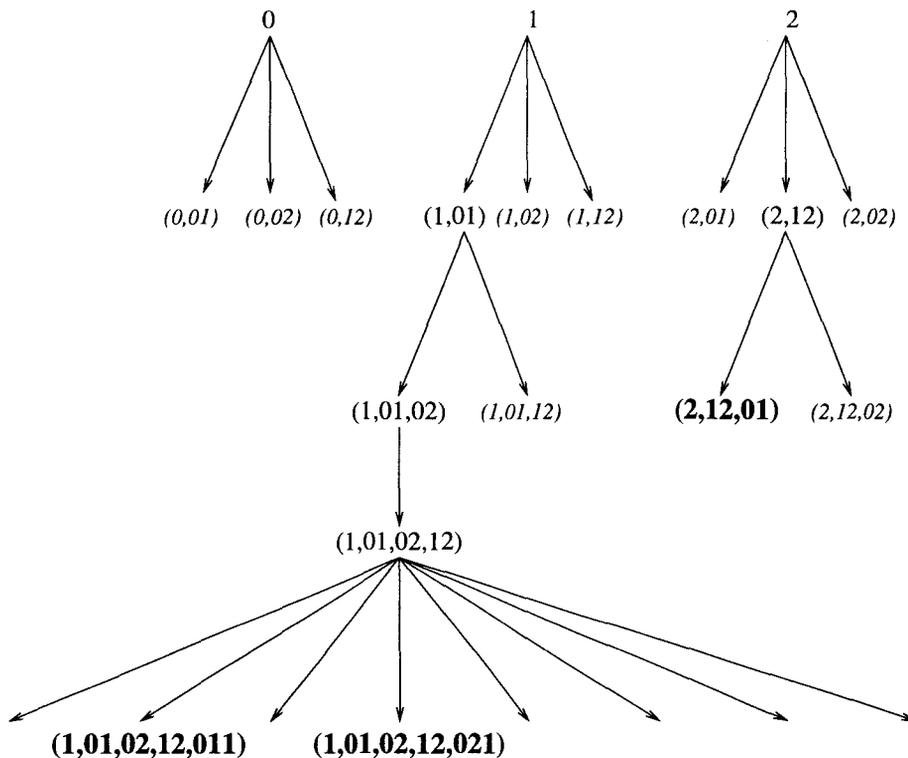


FIG. 3.19 – La détermination du gabarit suit une technique arborescente. italique=jeu écarté (cas 1), normal=jeu avec solution indéterminée (cas 2a), gras=jeu avec solution déterminée (cas 2b). Par exemple, à la première itération, 9 jeux sont à priori possibles pour le couple d'orbite $(1T, 2T_a)$. Deux seulement donnent des équations cohérentes lorsqu'on injecte les invariants topologiques mesurés pour les orbites $1T$ et $2T_a$. Par contre les deux systèmes d'équations restent indéterminés. On considère alors tous les jeux obtenus en tenant compte de l'orbite $2T_b$. Le processus est poursuivi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de jeux avec solution indéterminée.

2. elles sont cohérentes et la solution est

- (a) indéterminée, compte tenu des mesures disponibles (c'est-à-dire que le nombre d'équations indépendantes est insuffisant pour le nombre d'inconnues), ou
- (b) complètement déterminée.

Dans le premier cas, le jeu examiné est écarté. Dans le cas 2(b), la solution est retenue. Dans le dernier cas 2(a), où la solution est indéterminée, une nouvelle itération est lancée en considérant tous les jeux construits sur la base de celui examiné à la première itération auquel on a ajouté un des noms possibles de l'orbite suivante (la $2T_b$ dans l'exemple choisi). On prend donc en compte un ensemble d'invariants supplémentaire qui peut, comme précédemment, invalider le jeu complet, le valider avec une solution déterminée ou indéterminée. Ce processus récursif est appliqué aux jeux de noms qui possèdent une solution indéterminée, jusqu'à ce que chacune des combinaisons soit (i) sans solution, et par suite écartée, ou (ii) avec une solution complètement déterminée. Précisons que toutes les combinaisons ne sont, en général, pas examinées puisque dès qu'on écarte un jeu à une itération, on écarte du même coup toutes les ramifications, c'est-à-dire tous les jeux dérivés par ajout des autres orbites. Sur l'arbre de la figure 3.19 par exemple, toutes les combinaisons ont pu être écartées sauf trois (en gras) qui donnent chacune une solution complètement déterminée, c'est-à-dire qui permettent d'obtenir tous les éléments \mathcal{T}_{ij} et \mathcal{I}_{ij} . Cependant, les gabarits correspondants sont *a priori* différents.

Lorsque cette première étape est achevée, les solutions retenues doivent être confrontées aux orbites non utilisées. Comme les gabarits sont connus, pour chaque solution il s'agit de vérifier, par une technique d'arbre analogue, que l'on peut associer à chacune des orbites un nom symbolique différent et pour lequel les invariants calculés correspondent aux mesures expérimentales. Si, à la fin de cette seconde étape, il reste encore plusieurs solutions, alors le problème mathématique reste indéterminé.

L'application de la méthode établit que trois ensembles de noms symboliques à trois lettres sont compatibles avec les invariants de la table 3.4, c'est-à-dire qu'il existe trois ensembles pour lesquels les équations possèdent une solution déterminée pour toutes les orbites. Les matrices de gabarit correspondantes s'écrivent:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.19a)$$

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.19b)$$

$$\mathcal{T}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (3.20a)$$

$$\mathcal{I}' = (0 \ 2 \ 1) \quad (3.20b)$$

$$\mathcal{T}'' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (3.21a)$$

$$\mathcal{I}'' = (0 \ 2 \ 1) \quad (3.21b)$$

Cela signifie qu'il existe sur chacun des trois gabarits un jeu d'orbites qui possèdent les mêmes périodicités et les mêmes invariants que les orbites détectées dans l'attracteur. En l'état, le gabarit reste donc indéterminé.

3.4.3 Sélection d'une solution physique

Les matrices 3.19, 3.20 et 3.21 sont les solutions d'un problème mathématique qui ne tient pas compte des contraintes physiques qui peuvent s'exercer sur le semi-flot du gabarit. En particulier, le processus d'étirement et repliement doit être une application continue des variables dynamiques. Autrement dit, le semi-flot $\overline{\phi}_t$ doit vérifier, quelque soit $t \in \mathbb{R}$ et pour tout x de l'intervalle ouvert sur lequel il est défini,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \overline{\phi}_t(x) - \overline{\phi}_t(x + \epsilon) = 0 \quad (3.22)$$

La figure 3.20 illustre cette condition sur l'exemple d'une dynamique à trois symboles. Elle représente la partition de l'intervalle sur la ligne d'entrée du gabarit et les images possibles après traversée du gabarit (il existe également les symétries par rapport à un axe horizontal). Cet exemple montre graphiquement que les torsions de deux branches successives diffèrent obligatoirement d'un demi-tour:

$$|\mathcal{T}_{ii} - \mathcal{T}_{i+1 \ i+1}| = 1 \quad \forall i = 0, \dots, N - 1 \quad (3.23)$$

où N est le label de la dernière branche. Cette relation constitue un critère de sélection des solutions physiques, c'est-à-dire correspondant à un semi-flot continu. Notons que cela impose de manière équivalente à la surface du gabarit d'être continue. Dans le régime analysé, les deux solutions (3.20) et (3.21) doivent par exemple être écartées car elles ne décrivent pas un gabarit continu, et (3.19) reste la seule solution à trois branches compatible avec les données expérimentales.

Dans une situation favorable où la dynamique symbolique est clairement établie, le nombre de branches est connu. Dans la situation présente par contre, il

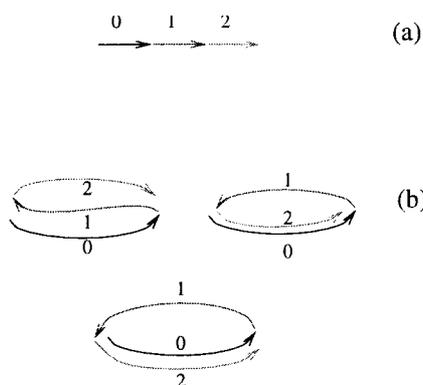


FIG. 3.20 – (a) partition de l'intervalle sur la ligne de branchement (ligne d'entrée) du gabarit (exemple à trois branches). (b) Images possibles, par l'application de premier retour, quand on respecte la continuité du semi-flot défini sur le gabarit. Il existe également les symétries par rapport à un axe horizontal. Dans tous les cas, les trois flèches restent liées. Cela impose aux torsions locales de ne différer que d'un demi-tour d'une branche à l'autre.

reste une ambiguïté dans la mesure où l'on ne détecte qu'un nombre fini d'OPI. Compte tenu des éléments avancés jusqu'ici, il est en effet possible que le gabarit comporte plus de trois branches mais qu'aucune des OPI détectées n'y passe. Il est donc important de vérifier que l'organisation topologique observable par le biais des quelques orbites traduit celle de l'ensemble du flot. Pour cela, on dispose les points des OPI détectées dans une section de Poincaré. La figure 3.21 montre par exemple que les OPI visitent toutes les branches de la section et couvrent l'attracteur de manière relativement uniforme. Ceci suggère fortement que toutes les branches du gabarit sont décrites et par là-même que celui-ci ne comporte effectivement que trois branches. La solution (3.19) décrit finalement le seul gabarit compatible.

3.5 Analyse topologique d'un modèle

L'analyse de l'attracteur d'un système d'équations différentielles est dans son principe identique à l'analyse expérimentale. Néanmoins, il existe deux avantages majeurs, mis à part le fait que toutes les variables dynamiques sont connues. Premièrement, toutes les OPI présentes dans l'attracteur sont accessibles et leur localisation dans l'espace des phases peut être déterminée avec une excellente précision. Les solutions périodiques du système sont en effet calculées au moyen d'une méthode itérative de Newton-Raphson (voir par exemple [Hao88]). Deuxièmement, la torsion locale θ_i d'une orbite, c'est-à-dire le nombre de demi-tours subis par ses variétés séparatrices, peut être calculée (voir par exemple [Boulant et al.a]).

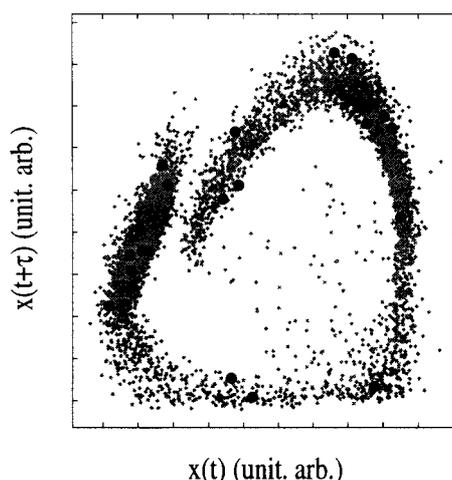


FIG. 3.21 – *Section de Poincaré du régime analysé. La surface de coupe est un plan de phase constante dans l'espace des délais $(x(t), x(t + \tau), \phi)$ avec $\tau = T/3$. Les gros points représentent les positions des orbites périodiques détectées dans la série temporelle.*

La connaissance de cet invariant simplifie énormément la détermination du gabarit puisque l'on dispose d'équations algébriques supplémentaires, reliant les torsions des branches à la torsion des orbites :

$$\theta_i(\bar{\alpha}) = c \times \sum_{i=1}^p \mathcal{T}_{\alpha_i \alpha_i} \quad (3.24)$$

Cela suppose, bien entendu, qu'un codage préalable des orbites ait pu être effectué. Le système d'équations qui exprime les nombres d'enlacement et d'auto-enlacement en fonction de \mathcal{T} et \mathcal{I} ne comporte alors plus de fonctions parité et devient par là-même inversible.

De nombreux attracteurs observés dans des simulations numériques ont été caractérisés par une analyse topologique. Citons par exemple le système de Roessler [Letellier94], l'oscillateur de Duffing [Solari et al.88a, Gilmore et al.95], un modèle de corde vibrante [Tuffillaro et al.95] ou encore des systèmes lasers [Solari et al.88b, Fioretti et al.93]. Dans ce dernier cas [Fioretti et al.93], il s'agissait explicitement, en utilisant le pouvoir discriminatoire de l'analyse de gabarit, de confronter un modèle théorique de laser à absorbant saturable à des données expérimentales. En effet, si l'analyse d'une série temporelle expérimentale puis de la série obtenue par simulation du modèle conduit, dans le même espace de plongement, à des gabarits différents, alors le modèle doit être remis en cause, tout au moins sur la plage des paramètres examinés.

Pour notre part, nous nous sommes intéressés tout particulièrement au sys-

tème d'équations (3.25)

$$\dot{L} = D - 1 \quad (3.25a)$$

$$\dot{D} = \gamma [A - D(1 + e^L)] \quad (3.25b)$$

qui décrit la dynamique des lasers de classe B, et dans lequel $L(t)$ est le logarithme de l'intensité lumineuse et $D(t)$ l'inversion de population (voir chap. 2). Ce système peut osciller de manière chaotique dès que l'on module un paramètre et nous avons établi que des structures topologiques différentes du simple fer à cheval existaient dans l'espace des phases naturel (L, D, ϕ) où ϕ est la phase de modulation. Le compte rendu de cette analyse pourra être trouvé dans [Boulant et al.a]. Nous voulons surtout discuter ici de la validité d'une comparaison avec les résultats expérimentaux. En fait, c'est immédiat dans la mesure où les analyses expérimentales sont effectuées dans un espace de plongement (x, \dot{x}, ϕ) où $x(t)$ correspond typiquement au logarithme de l'intensité, c'est-à-dire à $L(t)$. En effet, d'après l'équation (3.25a), l'inversion de population $D(t)$ est égale à \dot{L} à une constante près, et par suite l'espace (L, D, ϕ) est topologiquement équivalent à (L, \dot{L}, ϕ) . Cela signifie que l'analyse du modèle donne le même résultat à partir des variables dynamiques naturelles et à partir d'une série temporelle plongée dans un espace différentiel.

3.6 Adaptation des techniques d'analyse aux systèmes autonomes

Un *système autonome* est un système dans lequel un régime chaotique peut se développer sans modulation d'un paramètre. Il n'existe donc pas de temps de référence. Or, expérimentalement, l'échantillonnage est synchronisé sur un signal de fréquence bien déterminée. Le nombre de points échantillonnés entre deux passages par une surface de Poincaré n'est donc, en règle générale, pas constant pour cette catégorie de systèmes. Or, les algorithmes d'extraction des orbites périodiques et de calcul des invariants ont été développés sur cette hypothèse.

L'idée est alors de s'arranger, par une procédure d'interpolation, pour que le nombre de points dans la série temporelle soit constant entre deux passages par une surface de Poincaré. On effectue en quelque sorte un échantillonnage numérique adapté à la cadence naturelle du système. La série temporelle qui en résulte est alors formellement identique à celle d'un système modulé puisque numériquement le temps est compté en nombre de points.

Ceci est une procédure préliminaire à l'analyse topologique que nous n'avons pas encore développée mais qui, lorsqu'elle sera validée, offrira la possibilité de réutiliser intégralement les algorithmes d'analyse des systèmes modulés, déjà opérationnels.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue un ensemble de différentes techniques qui peuvent être utilisées pour l'analyse topologique. La procédure générale consiste à (i) rassembler un échantillon représentatif d'orbites périodiques instables puis (ii) calculer leurs invariants topologiques dans l'espace de plongement et enfin (iii) déterminer la représentation algébrique du gabarit, c'est-à-dire les matrices \mathcal{T} et \mathcal{L} . Ceci avec pour seule donnée expérimentale, une série temporelle qui reflète la dynamique chaotique. Nous avons abordé en particulier le problème délicat de la détermination du gabarit lorsque les OPI sont très instables ou lorsque le système est peu dissipatif.

Dans le premier cas, la détection de séquences périodiques dans la série temporelle devient difficile puisque la trajectoire chaotique ne reste pas suffisamment longtemps dans le voisinage des orbites périodiques. Nous avons pour cela mis en place une procédure de reconstruction des OPI qui consiste à assembler des morceaux de trajectoire, un peu comme les éléments d'un puzzle à une dimension (sec.3.3).

Dans le second cas, les diagrammes de premier retour ne sont pas correctement décrits par une application unidimensionnelle et le codage symbolique ne peut pas être établi de manière simple. Nous avons présenté en section 3.4 une méthode systématique de détermination du gabarit à partir des invariants topologiques qui permet de s'affranchir d'un codage symbolique préalable des OPI. En particulier, le nombre de branches est au départ inconnu. L'algorithme donne alors les solutions à nombre minimal de branches, compatibles avec les invariants mesurés. Ce résultat a des conséquences fondamentales puisque le gabarit permet de définir, de manière naturelle, le codage symbolique. Il est donc possible, grâce à l'analyse de gabarit, de remonter à une partition génératrice de l'attracteur, et ce uniquement à partir des mesures expérimentales [Lefranc et al.94, Plumecoq et al.].

La combinaison de ces deux méthodes, intégrées à la procédure originale [Mindlin et al.91], nous a permis de résoudre des structures topologiques expérimentales très complexes.

Chapitre 4

Classification des attracteurs et bifurcations de gabarits

4.1 Introduction

Les systèmes chaotiques les plus simples possèdent trois degrés de liberté, c'est-à-dire qu'ils peuvent être décrits de manière déterministe par trois variables globales. Dans ce cas, l'attracteur chaotique, ainsi que les orbites qu'il contient, sont représentés dans un espace à trois dimensions. Nous avons vu au cours du chapitre 1, puis de manière plus technique au chapitre 3, qu'il est alors possible de caractériser la topologie de l'attracteur au moyen d'un gabarit, c'est-à-dire une surface sur laquelle est défini un semi-flot [Birman et al.83, Ghrist et al.97]. Celui-ci décrit de manière très fine les enlacements caractéristiques que les processus d'étirement et de repliement induisent entre les OPI contenues dans l'attracteur. Le gabarit est donc une représentation d'un régime chaotique à la fois simple (quelques entiers suffisent à le définir), précise (il décrit l'organisation topologique de toutes les orbites) et robuste (il est insensible aux petites variations des paramètres de contrôle). Ces trois qualités font de lui un outil de comparaison efficace qui permet naturellement d'effectuer une classification des comportements chaotiques [Mindlin et al.90] bien plus pertinente que ne le permettraient les propriétés statistiques (dimension fractale, entropie) ou dynamiques (exposants de Lyapunov) [Eckmann et al.85] de l'attracteur.

Depuis l'expérience de G. B. Mindlin *et al* sur la réaction de Belousov- Zhabotinskii [Mindlin et al.91], de nombreux travaux d'analyse topologique du chaos ont été faits dans des domaines aussi variés que la mécanique [Tufillaro et al.95], la résonance magnétique nucléaire [Tufillaro et al.91], la chimie [Letellier et al.95b] et l'optique [Papoff et al.92, Lefranc et al.93, Lefranc et al.94]. Jusqu'à très récemment, les gabarits déterminés au cours des expériences correspondaient systématiquement au fer à cheval. Pourtant des études numériques prédisent l'existence de plusieurs types de gabarits dans une large gamme d'oscillateurs non linéaires (citons par exemple le système de Roessler [Letellier et al.95a], l'oscillateur anhar-

monique de Duffing [Gilmore93, Gilmore et al.95] et un modèle de laser de classe B [Boulant et al.a]). Ces résultats expérimentaux apportent assurément une information très riche sur les comportements chaotiques des différents systèmes, et montrent que les processus d'étirement et repliement du fer à cheval sont des règles de bases communes pour la formation du chaos. Cependant, ils semblent indiquer que seule la structure simple du fer à cheval peut être identifiée, ce qui, dans le cadre d'une classification des régimes chaotiques, ne présenterait pas un grand intérêt. Une dynamique non gouvernée par le fer à cheval a bien été observée par Firle *et al* mais sans identification claire du gabarit associé [Firle et al.95].

Très récemment, deux caractérisations d'attracteurs non fer à cheval ont été réalisées dans un circuit électronique [Letellier et al.96] et dans un laser YAG [Boulant et al.97a]. Ces résultats sont très importants car ils établissent pour la première fois la pertinence expérimentale de l'analyse topologique comme moyen de caractérisation et de comparaison des attracteurs chaotiques. Par ailleurs, des expériences menées dans un laser à fibre [Boulant et al.97b], puis dans un laser YAG [Boulant et al.b], mettent en évidence l'existence de structures topologiques différentes dans un même système. Ces résultats sont en fait doublement intéressants. Premièrement, ils s'accordent avec une classification générale des régimes chaotiques proposée par R. Gilmore et J. W. L. McCallum [Gilmore et al.95] pour les oscillateurs non linéaires tridimensionnels. Deuxièmement, ils montrent des transitions d'un gabarit vers l'autre, c'est-à-dire une évolution de la structure topologique avec un paramètre de contrôle, qui peuvent être analysées expérimentalement.

Ce chapitre présente une vue synthétique de l'ensemble des analyses que nous avons effectuées dans un laser à fibre et un laser YAG. La première section expose simplement les résultats expérimentaux et dégage une organisation des régimes chaotiques dans l'espace des paramètres suivant leurs propriétés topologiques. La seconde montre que toutes les structures observées sont décrites par un gabarit très général et qu'elles constituent les premiers éléments de la classification proposée par R. Gilmore et J. W. L. McCallum. Enfin, dans la troisième section, nous examinons les mécanismes de bifurcations qui permettent à l'attracteur d'évoluer d'un gabarit à un autre par variation d'un paramètre de contrôle.

4.2 Mise en évidence de nouveaux gabarits

Une exploration de l'espace des paramètres d'un laser à fibre et d'un laser YAG révèle l'existence d'une gamme de gabarits différents du paradigmatique fer à cheval. Cette étude est encore en développement et nous avons sélectionné ici trois expériences clés pour en faire un premier bilan synthétique.

Les aspects techniques ont été abordés aux chapitres 2 et 3. Rappelons sim-

plement que

1. les lasers sont forcés par une modulation sinusoïdale du paramètre de pompe $A(t) = A_0(1 + m \cos 2\pi\nu t)$,
2. ils possèdent une fréquence de résonance qui s'identifie à la fréquence de relaxation principale $\nu_r = \omega_r/2\pi$ pour les faibles taux de modulation m , et
3. ils présentent un diagramme de bifurcation régulier dans l'espace des paramètres $(T = 1/\nu, m)$, structuré en langues chaotiques (fig. 4.1) et similaire à ceux observés pour une large gamme d'oscillateurs non linéaires [Parlitz et al.91].

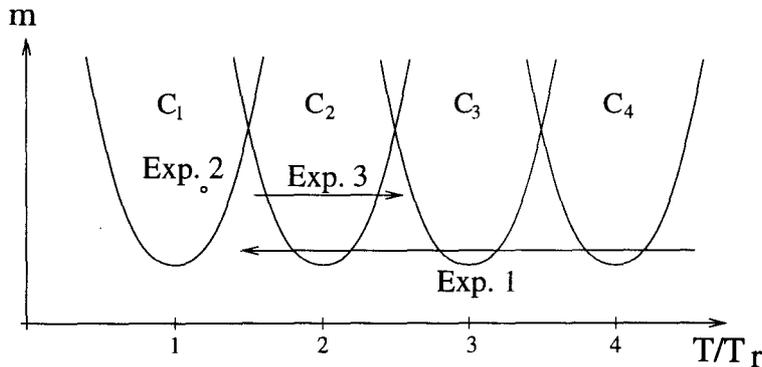


FIG. 4.1 – Diagramme de bifurcations typique des oscillateurs non linéaires. Il existe une structure en langues C_1, C_2, \dots , riches en bifurcations et séparées par des régimes de période de base $1T$. Nous avons sélectionné trois expériences clés. *Exp. 1*: le paramètre T décrit un large intervalle étendu sur plusieurs langues (laser à fibre). *Exp. 2*: Analyse en un point de la langue C_1 (laser YAG). *Exp. 3*: le paramètre T décrit finement une langue particulière (laser YAG).

La première expérience, effectuée dans le laser à fibre, consiste en un balayage de la fréquence de modulation, et donc du paramètre T , sur une bande large qui décrit plusieurs langues chaotiques. La deuxième et la troisième ont été réalisées sur le laser YAG. La seconde est une analyse, en un point unique de la langue C_1 , qui constitue un résultat en soi. Enfin, la troisième expérience est un balayage plus fin d'une seule langue, C_2 . En ce qui concerne les deux premières expériences, nous donnerons les résultats essentiels dans la mesure où elles sont décrites en détail dans les références [Boulant et al.97b] et [Boulant et al.97a]. Précisons également que toutes les analyses sont faites dans le même espace de plongement $(x, \dot{x}, \phi = 2\pi\nu t)$ (voir la section 3.2.1) et que les conventions de signes sont choisies pour que les invariants topologiques soient positifs (voir section 1.4.2.2).

4.2.1 Expérience 1: fer à cheval avec torsions globales

Cette expérience a été réalisée dans le laser à fibre avec les valeurs de paramètres $A_0 = 2.7$, $m = 0.6$. La fréquence de modulation décrit un intervalle allant de 0 à ν_r qui, dans ces conditions, était de l'ordre de 36KHz. Le diagramme de bifurcations de la figure 4.2 montre que le système traverse trois langues, C_4 , C_3 et C_2 .

Dans chaque région, plusieurs régimes ont été analysés par la procédure exposée en section 3.2. Nous avons constaté qu'à l'intérieur d'une région C_n donnée, les invariants topologiques ne dépendaient que des noms symboliques des orbites mises en jeu. Par exemple, $lk(\bar{1}, \overline{01}) = 7$ pour tous les régimes enregistrés dans la langue C_4 . C'est pourquoi, nous ne reportons la table d'invariants que d'un seul régime type par région chaotique (voir Tab.4.1). On notera que le codage des orbites a pu être établi. En effet, la figure 4.3 montre que le taux de dissipation est suffisamment important pour que les diagrammes de premier retour puissent être décrits par une application unidimensionnelle. Cette figure présente également l'allure des attracteurs reconstruits.

Si l'on examine rapidement les tables d'invariants, on observe par exemple que $lk(\bar{1}, \overline{01}) = 7$ dans la région C_4 alors que $lk(\bar{1}, \overline{01}) = 5$ (resp. 3) dans la région C_3 (resp. C_2). Il est donc immédiat que l'organisation topologique des OPI change d'une région à l'autre. Plus précisément, la résolution des équations qui expriment les nombres d'enlacement et d'autoenlacement en fonction des éléments de \mathcal{T} et \mathcal{I} conduit aux solutions suivantes¹

$$\mathcal{T}_4 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.1a)$$

$$\mathcal{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1b)$$

pour les régimes de la région C_4 , puis

$$\mathcal{T}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.2a)$$

$$\mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2b)$$

pour les régimes de la région C_3 , et enfin

$$\mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.3a)$$

$$\mathcal{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3b)$$

pour les régimes de la région C_2 .

Dans les équations (4.1), (4.2) et (4.3), la décomposition de la matrice \mathcal{T} montre que les gabarits possèdent une structure de base du type fer à cheval, à

1. On pourra relire par exemple la section 3.2 dans laquelle l'analyse d'une série temporelle de la région C_3 est faite en détail

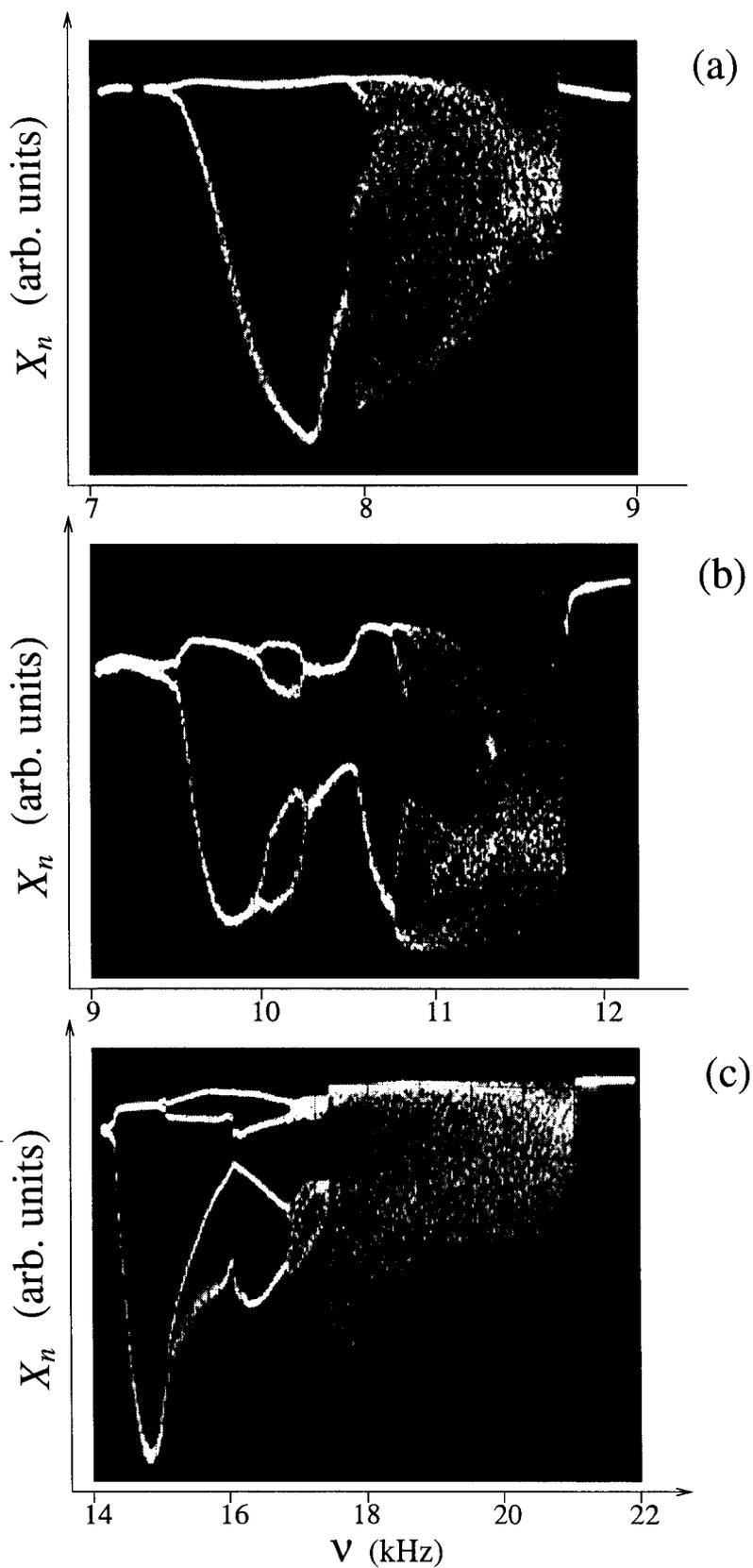


FIG. 4.2 – diagramme de bifurcations du laser à fibre réalisé avec $A_0 = 2.7$ et $m = 0.6$. (a) traversée de la langue C_4 . (b) C_3 . (c) C_2 .

Orbites $\in C_4$	T	$2T$	$3T_a$	$3T_b$	$4T$	$5T_a$	$5T_b$	$5T_c$	$6T_a$	$6T_b$	$6T_c$	$8T$
$T = \bar{1}$	0											
$2T = \overline{01}$	7	7										
$3T_a = \overline{02^11}$	10	20	20									
$3T_b = \overline{01^2}$	10	20	30	20								
$4T = \overline{01^3}$	14	27	40	40	41							
$5T_a = \overline{0^21^3}$	17	33	49	50	67	66						
$5T_b = \overline{0^2101}$	17			50	67		66					
$5T_c = \overline{1^2010}$	17	34	50			83	83	68				
$6T_a = \overline{0^21^201}$	20	40	59	60	80	99	99	100	99			
$6T_b = \overline{0^21^4}$	20	40	59	60	80	99	99	100		99		
$6T_c = \overline{0^2101^2}$	20	40		60	80	99			119		99	
$8T = \overline{0^21^30^21}$	27	53										185

Orbites $\in C_3$	T	$2T$	$4T$	$5T_a$	$5T_b$	$6T_a$	$6T_b$	$7T_a$	$7T_b$	$7T_c$	$9T$
$T = \bar{1}$	0										
$2T = \overline{01}$	5	5									
$4T = \overline{01^3}$	10	19	29								
$5T_a = \overline{01^4}$	12	24	48	48							
$5T_b = \overline{0101^2}$	12	24	48	60	48						
$6T_a = \overline{01^5}$	15	29		72	72	73					
$6T_b = \overline{0101^3}$	15	29	58	72	72		73				
$7T_a = \overline{010101^2}$	17	33	67	84	83	101	100	100			
$7T_b = \overline{01^6}$	17	34	68	84	84		102	118	102		
$7T_c = \overline{0101^4}$	17	34	68	84	84	102				102	
$9T_a = \overline{01^20101^3}$	22	43	86	108		130				151	172
$9T_b = \overline{010101^4}$	22	43	87								174

Orbites $\in C_2$	T	$2T$	$3T$	$4T$	$10T$
$T = \bar{1}$	0				
$2T = \overline{01}$	3	3			
$3T = \overline{01^2}$	4	8	8		
$4T = \overline{1^20^2}$	5	10	15	15	
$10T = \overline{10^21^20^21^20}$	13				

TAB. 4.1 – Nombres d'enlacement et d'autoenlacement des OPI détectées dans un attracteur de type C_4 (en haut) C_3 (milieu) et C_2 (en bas). Les noms symboliques sont écrits d'une manière condensée où $1^2 = 11$, $1^3 = 111$,

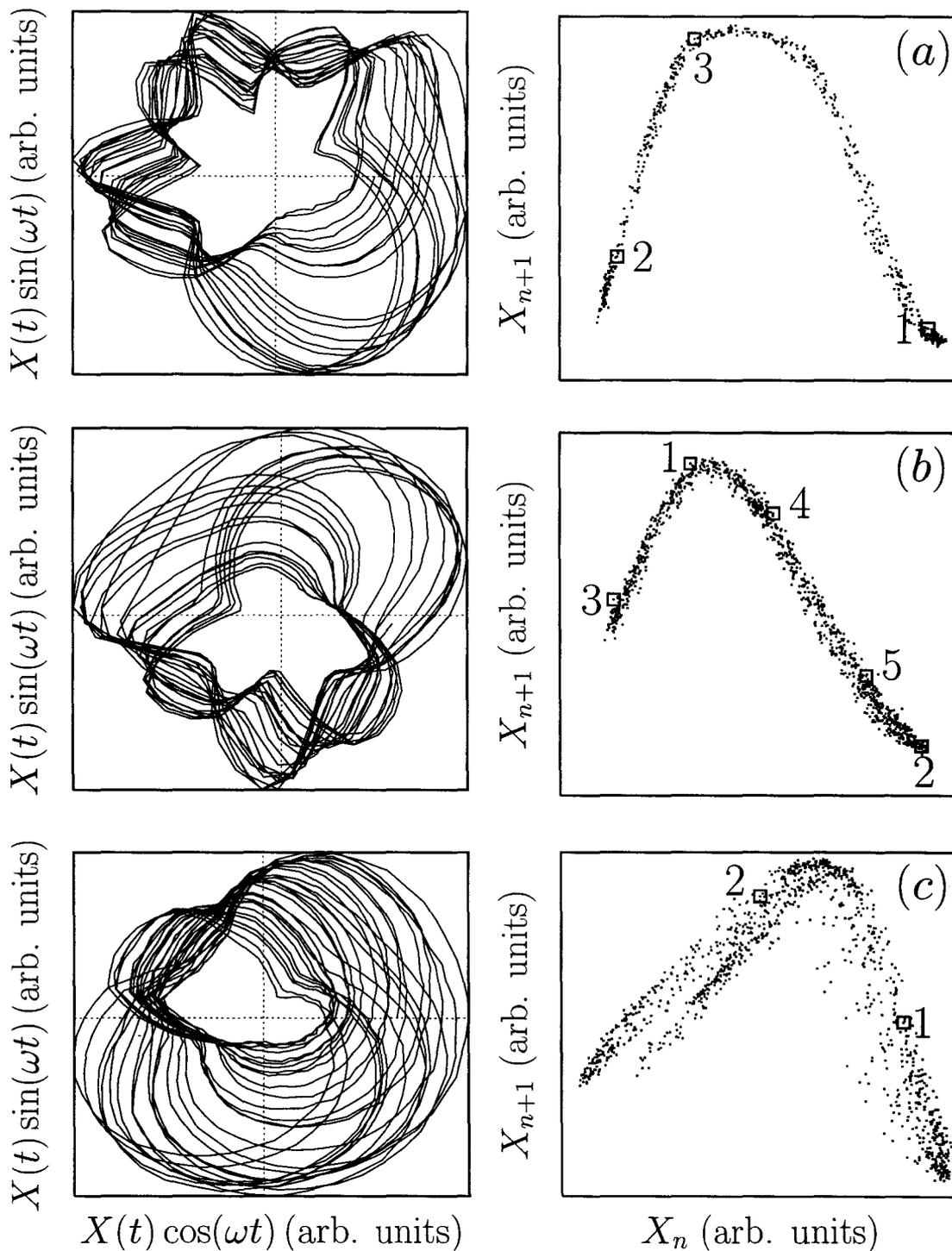


FIG. 4.3 – À gauche: projection des attracteurs dans le plan $(x \cos \phi, x \sin \phi)$ où $\phi = 2\pi\nu t \pmod{2\pi}$ est la phase de modulation. À droite: les diagrammes de premier retour correspondants. (a) régime C_4 . (b) régime C_3 . (c) régime C_2 . On notera tout particulièrement que ces diagrammes sont correctement décrits par une application unidimensionnelle et permettent d'établir le codage symbolique des orbites. Par exemple, en (a) sont reportés les points de l'orbite $3T = \overline{001}$, en (b) l'orbite $5T = \overline{01011}$ et en (c) l'orbite $2T = \overline{01}$.

laquelle s'ajoute une *torsion globale*, c'est-à-dire une torsion de l'ensemble de la surface. En effet, comme l'illustre la figure 4.4, chaque élément de \mathcal{T} est augmenté de 2 quand on ajoute une torsion de 2π à la surface du gabarit. La torsion globale sera par la suite notée θ_g et donnée en nombre de tours complets, de sorte que $\theta_g = 3, 2$ et 1 respectivement pour les régimes des régions C_4, C_3 et C_2 . Notons

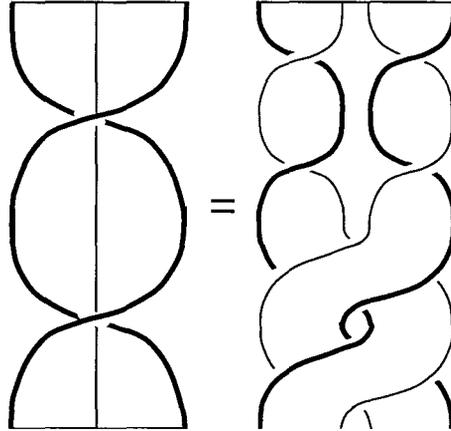


FIG. 4.4 – Illustration d'une torsion globale du ruban pour un gabarit à deux branches. Lorsqu'on découpe le ruban en son milieu, les deux branches résultantes ont chacune une torsion de 2π et effectuent un tour complet l'une autour de l'autre.

qu'une torsion globale non nulle traduit physiquement que le flot effectue une rotation d'ensemble d'un angle $\theta_g \times 2\pi$ par période de modulation. Ceci apparaît sur la figure 4.3 et sera rediscuté à la fin de cette section.

De manière générale, on peut toujours écrire le gabarit, défini par $(\mathcal{T}, \mathcal{I})$, comme la somme d'une structure de base $(\mathcal{T}^*, \mathcal{I}^*)$, c'est-à-dire la structure dont les éléments de matrices sont les plus petits entiers positifs possibles², et d'une torsion globale de sorte que

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^* + \theta_g \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \quad (4.4a)$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^* \quad (4.4b)$$

Cette écriture est intéressante puisque les invariants topologiques, et en particulier les nombres d'enlacement et d'autoenlacement, se déduisent simplement de la

2. Il est naturel de conserver des éléments \mathcal{T}_{ij} positifs dans la mesure où les nombres d'enlacement et d'autoenlacement sont positifs (en fait, ils ont tous le même signe, que nous avons choisi positif par convention). En effet, dans l'espace de plongement (x, \dot{x}, ϕ) , les brins s'enroulent tous dans un sens donné.

structure de base par les formules:

$$lk(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = lk^*(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) + \theta_g \times p_\alpha p_\beta \quad (4.5a)$$

$$slk(\bar{\alpha}) = slk^*(\bar{\alpha}) + \theta_g \times p_\alpha (p_\alpha - 1) \quad (4.5b)$$

où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont les noms symboliques de deux orbites de périodes respectives p_α et p_β , et $lk^*(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ et $slk^*(\bar{\alpha})$ le nombre d'enlacement et d'auto-enlacement des orbites $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ du gabarit de base.

Dans cette première expérience, nous avons donc observé les formes dérivées de la structure fer à cheval, pour lesquelles le flot de trajectoires peut présenter une torsion globale non nulle. La forme générique des matrices de gabarit est naturellement

$$\mathcal{T}_n = \begin{pmatrix} 2\theta_g & 2\theta_g \\ 2\theta_g & 1 + 2\theta_g \end{pmatrix} = \mathcal{T}_{fc} + \theta_g \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.6a)$$

$$\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_{fc} \quad (4.6b)$$

où \mathcal{T}_{fc} et \mathcal{I}_{fc} désignent les matrices du fer à cheval (voir equ. 1.50, chap. 1) et

$$\theta_g(n) = n - 1 \quad (4.7)$$

où n indique le numéro de la langue C_n . Cela signifie que la torsion globale augmente de 1 tour quand le système passe de la langue n à la langue $n + 1$ (voir fig. 4.5).

La torsion globale du gabarit correspond à un phénomène d'oscillation. Par exemple, la figure 4.6 représente l'intensité lumineuse du laser, enregistrée dans le domaine chaotique C_3 , en fonction de la phase de modulation. On observe trois oscillations par période T . Ceci a déjà été évoqué en section 2.3.2.2 et interprété comme un phénomène de résonance non linéaire des sous-harmoniques de ν_r . Les deux premières oscillations correspondent dans l'espace de plongement à des rotations globales de l'ensemble des brins. En ce qui concerne la dernière, seuls les brins correspondants aux plus hautes intensités se replient pour former la structure fer à cheval, la branche plate correspondant aux faibles intensités.

En conclusion, cette première expérience

1. démontre l'existence de gabarits différents dans un seul système
2. permet de relier les caractéristiques des gabarits à des paramètres physiques mesurables, en l'occurrence au rapport des fréquences de résonance et de modulation $n \approx \nu_r / \nu = T / T_r$.

Par ailleurs, comme le processus ne dépend pas des particularités du système, on peut s'attendre à l'observer dans tous les oscillateurs non linéaires forcés. En particulier, il est également observé dans le laser YAG modulé pour les faibles taux de modulation.

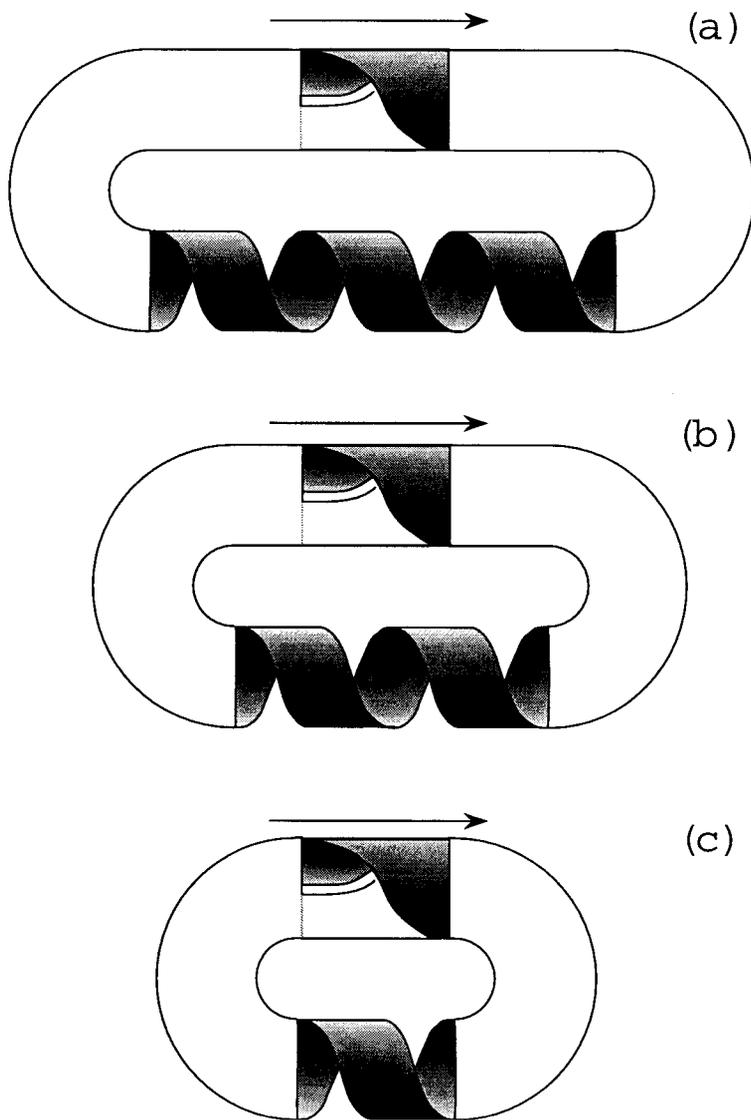


FIG. 4.5 – Évolution du gabarit avec le paramètre de contrôle. (a) C_4 (b) C_3 (c) C_2 .
 La torsion globale augmente d'un tour entre les régions chaotiques C_n et C_{n+1}

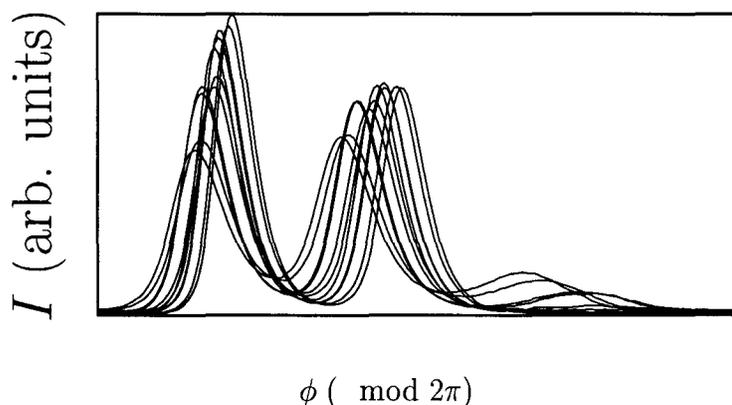


FIG. 4.6 – Graphe de l'intensité lumineuse du laser en fonction de la phase de modulation $\phi = 2\pi\nu t \pmod{2\pi}$. Ce régime a été enregistré dans la langue chaotique C_3 , comme peuvent en témoigner les trois pics d'oscillations.

4.2.2 Expérience 2: le fer à cheval inversé

Nous décrivons ici les résultats de l'analyse d'un régime chaotique du laser YAG modulé situé dans la première langue C_1 . Cette expérience est très importante car elle met en évidence une structure de base différente du fer à cheval. Les paramètres de modulation sont $A_0 = 1.2$, $m = 0.5$ et $\nu = 54\text{KHz}$ et la fréquence de relaxation a été mesurée égale à $\nu_r \approx 100\text{KHz}$. Ces conditions expérimentales situent le régime dans la première langue bien que le rapport ν/ν_r soit inférieur à 1. Ce décalage est lié au fait que la fréquence de résonance du laser YAG (qui ne s'identifie à ν_r que dans la limite $m = 0$) décroît fortement quand m augmente (voir sec.2.3.2).

Les figures 4.7a et 4.7b suggèrent fortement que nous soyons en présence d'un fer à cheval sans torsion globale. Ce résultat s'accorderait parfaitement d'ailleurs avec les analyses précédentes. Pourtant, la tresse de la figure 4.8 indique à elle seule l'existence d'une organisation topologique différente. En effet, la mesure du nombre d'auto-enlacement $slk(3T) = 4$ ne concorde pas avec la valeur $2 + 6\theta_g$ prédite par la formule (4.5b) lorsque le fer à cheval est pris comme structure de base.

Une analyse approfondie à partir de la table 4.2 d'invariants expérimentaux aboutit effectivement à la solution suivante:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.8a)$$

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.8b)$$

qui décrit le gabarit de la figure 4.9(b), appelé le *fer à cheval inversé* dans l'étude théorique de R. Gilmore et J. W. L. McCallum [Gilmore et al.95].

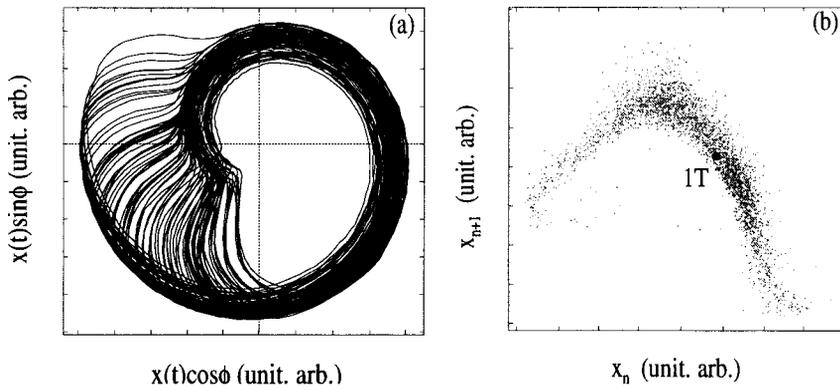


FIG. 4.7 – (a) Portrait de phase de l'attracteur reconstruit. Projection dans le plan $(x \cos \phi, x \sin \phi)$ où $\phi = 2\pi\nu t$ est la phase de modulation. (b) diagramme de premier retour. Le gros point marque la position de l'orbite $1T$.

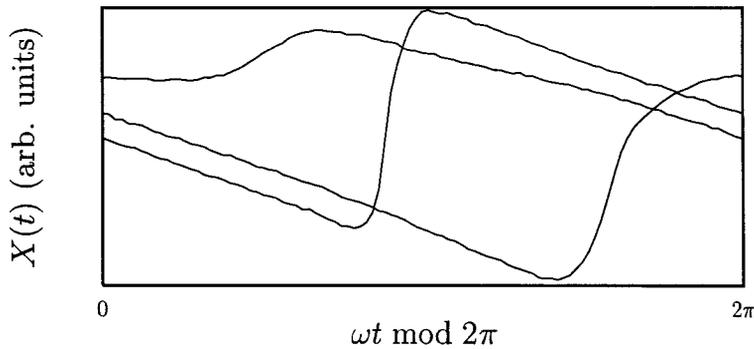


FIG. 4.8 – Diagramme de tresse de l'orbite $3T$. Le nombre de croisements donne le nombre d'autoenlacement $slk(3T) = 4$. Cette valeur contraste avec celles prédites par les structures fer à cheval, à savoir $2 + 6\theta_g$ où θ_g est la torsion globale (voir la formule (4.5b)).

	$1T$	$2T$	$3T_a$	$3T_b$	$4T$	$5T$	$7T$	$9T$
$1T$	0							
$2T$	1	1						
$3T_a$	2	4	4					
$3T_b$	2	4	6	4				
$4T$	2	5	8		7			
$5T$	3	6	10	10		12		
$7T$		8	14	14			24	
$9T$	5		18					

TAB. 4.2 – Nombres d'enlacement et d'autoenlacement des orbites détectées dans la série temporelle.

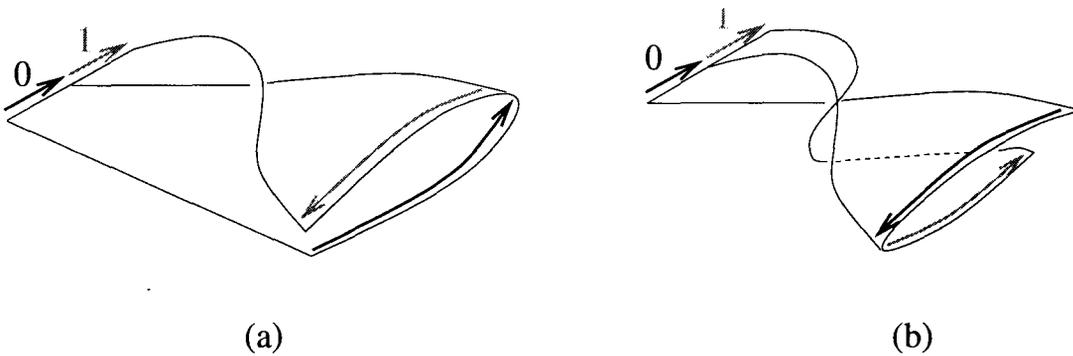


FIG. 4.9 – Distinction entre (a) le fer à cheval et (b) le fer à cheval inversé. Le ruban qui identifie la ligne d'insertion à la ligne de branchement n'est pas représenté car il n'apporte pas d'information supplémentaire. La structure (b) peut être obtenue en tournant d'un demi tour la ligne d'insertion de la structure (a) en laissant fixe la ligne de branchement.

Ouvrons ici une parenthèse pour discuter d'un point de convention. De manière évidente, on peut donner deux représentations équivalentes d'un gabarit, l'une correspondant à la vue de dessus et l'autre à la vue de dessous. Par exemple la figure 4.10 montre les deux représentations symétriques du fer à cheval qui peuvent se déduire l'une de l'autre par une rotation globale de π suivant l'axe longitudinal. Comme par convention les branches sont numérotées de la gauche

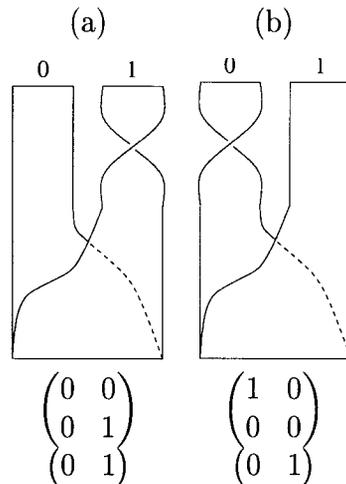


FIG. 4.10 – Représentation éclatée du fer à cheval. (a) vue de dessus. (b) vue de dessous. Le label 0 est affecté par convention à la branche la plus à gauche. Les deux matrices définissent le même gabarit mais, par la convention d'attribution des labels, l'orbite $1T$ passe par la branche 1 dans le cas (a) et par la branche 0 dans le cas (b).

vers la droite, la matrice \mathcal{T} change d'une représentation à l'autre. De manière générale, les deux matrices se déduisent l'une de l'autre en faisant une transposition par rapport à la ligne antidiagonale, ce qui revient à échanger les éléments \mathcal{T}_{00} et \mathcal{T}_{11} dans un cas à deux branches. Cela signifie que suivant le choix de la représentation, l'orbite $1T$ peut être codée par $\bar{0}$ ou $\bar{1}$. La structure du fer à cheval inversé décrite par les matrices (4.8) et illustrée par la figure 4.9(b), correspond au point de vue pour lequel l'orbite $1T$ passe par la branche 0. En effet, le diagramme de premier retour (fig. 4.7b) montre que l'orbite passe par une branche qui inverse la position relative de deux points, c'est-à-dire par une branche de torsion impaire³. Cette convention dénote avec le choix usuel qui consiste à coder l'orbite $1T$ par $\bar{1}$ (tout au moins dans les structures à deux branches), et nous verrons lors de la troisième expérience qu'elle va de soi.

Retenons finalement de cette seconde expérience qu'il existe des attracteurs réels dont la structure de base est différente du paradigmatique fer à cheval.

3. Contrairement à la torsion globale du gabarit, les torsions locales des orbites et des branches sont données en nombre de demi-tours

Il s'agit, à notre connaissance, d'une des premières mises en évidence, avec le travail récent de C. Letellier *et al.* sur le circuit de Chua [Letellier et al.96], d'une organisation topologique expérimentale non gouvernée par le fer à cheval. Elle ouvre donc le champ à des investigations plus complètes qui vont permettre de dégager une première classification par gabarit d'attracteurs expérimentaux.

4.2.3 Expérience 3: le "Gâteau roulé"

En révélant le gabarit du fer à cheval inversé, l'expérience 2 indique l'existence d'organisations topologiques complexes. Dans la mesure où le passage d'une langue à une autre correspond simplement à une modification de la torsion globale (cf. exp. 1), nous allons dans cette troisième expérience examiner plus finement une région chaotique donnée. Nous reprenons le laser YAG avec des valeurs de paramètres semblables à l'expérience 2, à savoir $A_0 = 1.2$ et $m = 0.4$. Comme précédemment, les conditions expérimentales situent les régimes observés juste en-dessous de la zone où les langues se rejoignent (voir fig. 4.1).

Lorsqu'on balaye la fréquence de modulation de $\nu_+ = 37\text{KHz}$ à $\nu_- = 25\text{KHz}$, les limites de la langue C_2 dans les conditions expérimentales spécifiées plus haut, le laser traverse deux fenêtres $2T$ étroites en $\nu_1 \approx 34\text{KHz}$ et $\nu_2 \approx 30\text{KHz}$ (voir fig. 4.11). Cette observation suggère la présence dans l'attracteur de plusieurs

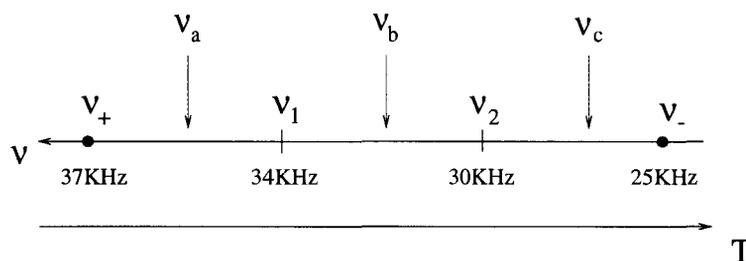


FIG. 4.11 – Diagramme de bifurcations schématisé le long de l'axe ν . Les fréquences ν_+ et ν_- sont les limites de la région chaotique C_2 et ν_1 et ν_2 indiquent les positions des fenêtres $2T$. On effectue trois analyses, en $\nu_a = 36\text{KHz}$, $\nu_b = 32\text{KHz}$ et $\nu_c = 27\text{KHz}$.

orbites $2T$ entre ν_1 et ν_2 . En effet, trois orbites $2T$ coexistent dans le bassin d'attraction, l'une est issue de la cascade de doublement de période initiale et les deux autres de la bifurcation nœud-selle responsable de la fenêtre. Il y a donc une forte probabilité qu'il existe entre ν_1 et ν_2 une structure topologique à trois branches ou plus puisqu'un gabarit à deux branches 0 et 1 ne peut avoir qu'une seule orbite $2T = \overline{01}$.

Nous en apportons ici la confirmation par l'analyse de trois séries temporelles enregistrées respectivement en $\nu_a = 36\text{KHz} > \nu_1$, $\nu_b = 32\text{KHz} \in [\nu_1, \nu_2]$ et $\nu_c = 27\text{KHz} < \nu_2$. On notera qu'il est absolument impossible de deviner les structures

des gabarits d'après les portraits de phases (fig. 4.12), contrairement au cas de la première expérience menée dans le laser à fibre. Les invariants mesurés pour

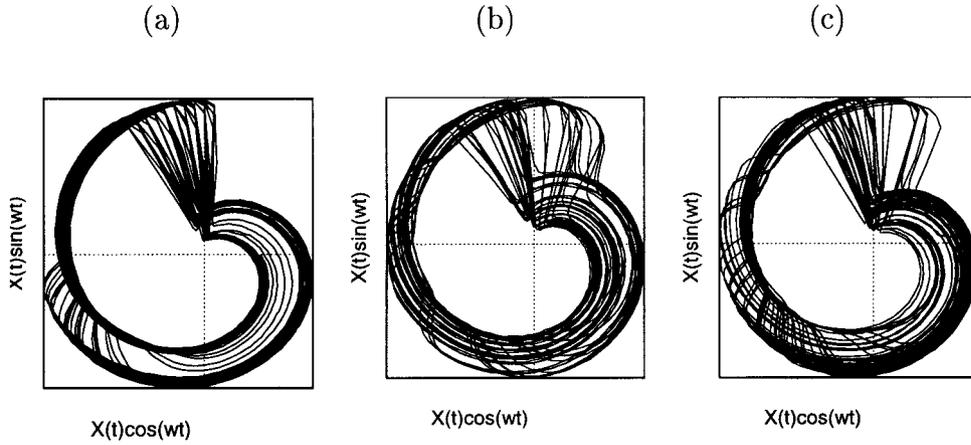


FIG. 4.12 - *Projection des attracteurs reconstruits dans le plan $(x(t) \cos \phi, x(t) \sin \phi)$ où $\phi = 2\pi\nu t$ est la phase de modulation.* (a) $\nu_a > \nu_1$. (b) $\nu_1 > \nu_b > \nu_2$. (c) $\nu_c < \nu_2$.

chacun des attracteurs sont reportés dans les tables 4.3, 4.4 et 4.5. Signalons que

Orbites	$1T$	$2T$	$3T$	$3T$	$4T$	$5T$	$7T$
$1T$	0						
$2T$	3	3					
$3T$	4	8	8				
$3T$	4	8		8			
$4T$					17		
$5T$		14				28	
$7T$							56

TAB. 4.3 - *Nombres d'enlacement et d'auto-enlacement des OPI détectées dans la série temporelle enregistrée en $\nu = \nu_a$.*

la détermination des gabarits est faite ici sans l'aide du codage symbolique des OPI, c'est-à-dire au moyen de la méthode présentée en section 3.4.

La solution compatible avec les données de la table 4.3 est

$$\mathcal{T}_a = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.9a)$$

$$\mathcal{I}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9b)$$

orbites	$1T$	$2T$	$2T$	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$
$1T$	0						
$2T$	3	3					
$2T$	3	6	3				
$2T$	3	6	6	3			
$3T$	4	8	8	8	8		
$4T$		11	12	12		17	
$5T$	7		14		20		28

TAB. 4.4 – Nombres d'enlacement et d'auto-enlacement des OPI détectées dans la série temporelle enregistrée en $\nu = \nu_b$.

orbites	$1T$	$2T$	$3T$	$3T$	$4T$
$1T$	0				
$2T$	3	3			
$3T$	5	10	10		
$3T$	5	10	15	10	
$4T$	6	13			19

TAB. 4.5 – Nombres d'enlacement et d'auto-enlacement des OPI détectées dans la série temporelle enregistrée en $\nu = \nu_c$.

et définit un fer à cheval avec une torsion globale de 1. La table 4.4 est algébriquement compatible avec trois gabarits mais un seul d'entre eux décrit un flot continu. On peut rappeler (voir sec. 3.4) que la condition nécessaire pour que le semi-flot défini sur le gabarit soit continu est que deux torsions consécutives diffèrent d'un demi-tour: $|\mathcal{T}_{i_i} - \mathcal{T}_{i_{i+1}}| = 1$. La solution physique retenue est:

$$\mathcal{T}_b = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.10a)$$

$$\mathcal{I}_b = (0 \ 2 \ 1) \quad (4.10b)$$

La figure 4.13 illustre la structure de base (i.e. sans la torsion globale) de ce gabarit à trois branches, auquel nous donnerons par la suite le nom de "gâteau roulé" pour rappeler le processus d'enroulement concentrique des branches.

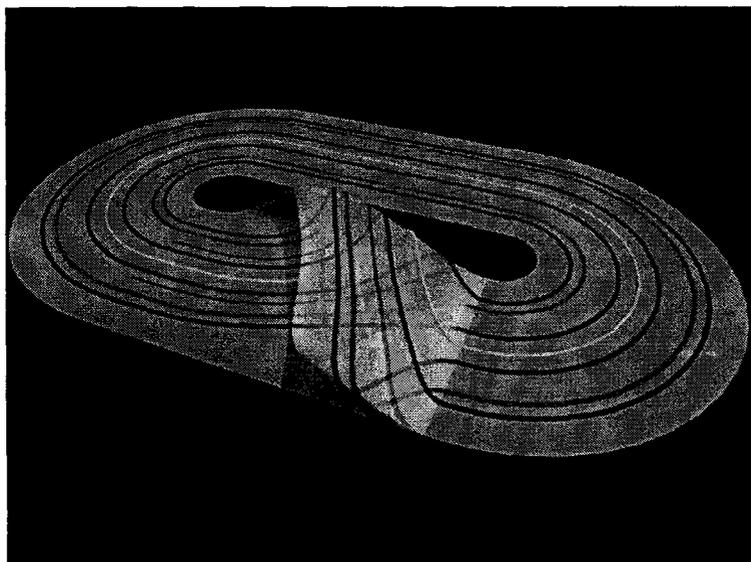


FIG. 4.13 – Le gabarit du "gâteau roulé" possède trois branches enroulées de manière concentrique.

Enfin la solution obtenue avec la table 4.5 est

$$\mathcal{T}_c = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.11a)$$

$$\mathcal{I}_c = (0 \ -1) \quad (4.11b)$$

et correspond au fer à cheval inversé observé dans l'expérience 2, avec une torsion globale d'un tour supplémentaire. Il convient de préciser que la série temporelle associée à ce dernier régime, ainsi que les séries enregistrées dans le voisinage, ne contenaient aucune séquence périodique détectable autre que celles de l'orbite

1T. Le spectre d'OPI est donc constitué de pseudo-orbites reconstruites par la méthode présentée en section 3.3.

La présence d'une torsion globale $\theta_g = 1$ dans les trois gabarits s'accorde parfaitement avec le résultat de l'expérience 1: elle est simplement liée à la localisation des régimes analysés dans la langue C_2 . La succession des structures fer à cheval, "gâteau roulé" et fer à cheval inversé, illustrée par la figure 4.14, mérite par contre un commentaire. Il ressort en effet que les branches 0 et 1 du "gâteau

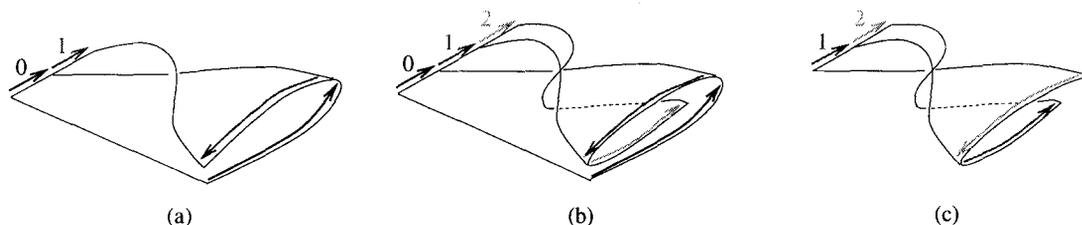


FIG. 4.14 – Évolution du gabarit en fonction du paramètre de contrôle. La torsion globale n'est pas représentée par souci de clarté. (a) le fer à cheval ($\nu > \nu_1$). (b) le "gâteau roulé" ($\nu_2 < \nu < \nu_1$). (c) le fer à cheval inversé ($\nu < \nu_2$).

roulé" (fig. 4.14(b)) correspondent aux deux branches du fer à cheval (fig. 4.14(a)) alors que les branches 1 et 2 donnent le fer à cheval inversé⁴ (fig. 4.14(c)). Autrement dit, le fer à cheval et le fer à cheval inversé apparaissent chacun comme un *sous-gabarit* du "gâteau roulé". On peut le constater de manière équivalente en remarquant que \mathcal{T}_a et \mathcal{T}_c sont des sous-matrices de \mathcal{T}_b . Plus précisément,

1. la solution $(\mathcal{T}_a, \mathcal{I}_a)$ correspond au premier bloc diagonal 2×2 de $(\mathcal{T}_b, \mathcal{I}_b)$ ($\mathcal{I}_a = (0 \ 1) \equiv (0 \ 2)$ puisque seules les positions relatives des branches comptent pour définir leur empiement à l'insertion),
2. $(\mathcal{T}_c, \mathcal{I}_c)$ correspond au dernier bloc 2×2 , et
3. \mathcal{T}_a et \mathcal{T}_c ont l'élément \mathcal{T}_{11} de \mathcal{T}_b en commun, c'est-à-dire la branche 1 du "gâteau roulé" .

Ces observations seront essentielles pour discuter du fait que le gabarit peut évoluer par variation d'un paramètre de contrôle (voir sec. 4.4), et ce, en respectant le caractère invariant des nœuds et enlacements.

En conclusion, cette expérience amène trois résultats fondamentaux. Tout d'abord, elle marque l'observation d'une structure topologique à plus de deux branches dans un système expérimental. D'autres structures complexes ont également été observées récemment dans un circuit électronique [Letellier et al.96].

4. Le fait de coder l'orbite 1T du fer à cheval inversé par $\bar{0}$ plutôt que $\bar{1}$, comme nous l'avons fait en section 4.2.2, permet de mettre en évidence cette observation de manière plus claire

Par ailleurs, elle démontre l'efficacité des méthodes d'analyse que nous avons présentées au chapitre 3, à savoir (i) la procédure de résolution systématique sans codage symbolique préalable des orbites et (ii) la technique de reconstruction des orbites. Enfin elle montre que le gabarit peut évoluer à l'intérieur d'une langue chaotique donnée par variation d'un paramètre de contrôle. Cette caractérisation précise des diagrammes de bifurcations par des éléments topologiques permettra, dans un futur proche, une confrontation plus fine avec les modèles de ce type de laser.

4.2.4 Synthèse et discussion

La synthèse des trois expériences conduit naturellement à la généralisation empirique suivante. Dans l'espace des paramètres exploré, à savoir les régions du plan de modulation ($T = 1/\nu, m$) où les langues chaotiques restent séparées par un régime $1T$, les matrices de gabarit s'écrivent

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^* + \theta_g(n) \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \\ 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \quad (4.12a)$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^* \quad (4.12b)$$

avec

$$\theta_g(n) = n - 1 \quad (4.13)$$

où $n \in \mathbb{N}$ indique le numéro de la langue dans laquelle est observé le régime. $(\mathcal{T}^*, \mathcal{I}^*)$ définit une structure de base qui peut évoluer du fer à cheval au fer à cheval inversé en passant par le "gâteau roulé" quand le paramètre T décrit la langue par valeurs croissantes.

Ces données expérimentales suggèrent le diagramme de bifurcations schématisé de la figure 4.15. Il peut être affiné par des expériences complémentaires mais nous pouvons d'ores et déjà affirmer qu'il existe une structure fine et régulière des langues chaotiques, chacune étant partagée en zones qui peuvent être distinguées par les propriétés topologiques des attracteurs.

Le fait que seul le fer à cheval a été observé dans la première expérience peut être interprété par le fait que pour des taux de modulation m trop faibles, les régions où existent les structures "gâteau roulé" et fer à cheval inversé ne sont pas suffisamment développées, voire inexistantes, pour pouvoir être observées expérimentalement. Les expériences 2 et 3, réalisées pour des taux de modulation élevés, c'est à dire à la limite de la zone où les langues se rejoignent, mettent en évidence un élargissement de ces domaines suivant l'axe T/T_r .

Ainsi, non seulement nous avons pu observer des structures d'attracteurs non décrites par le fer à cheval mais nous pouvons aussi exprimer leurs particularités topologiques en fonction des paramètres de contrôle. Enfin, et il s'agit là sans

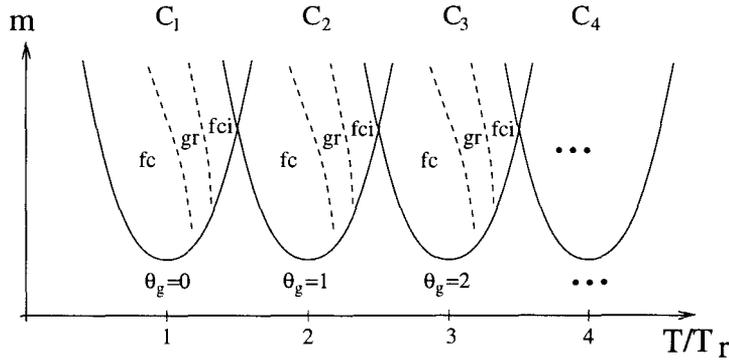


FIG. 4.15 – Structure fine de l'espace des paramètres (T, m) où T et m sont respectivement la période et le taux de modulation. fc =fer à cheval, gr ="gâteau roulé" et fci =fer à cheval inversé.

doute du point le plus important, ces résultats sont le fruit du développement des techniques d'analyses présentées aux sections 3.3 et 3.4 et ne sont pas liés aux particularités physiques du système. Il est donc raisonnable de prétendre que ces comportements apparaissent dans une large gamme d'oscillateurs non linéaires.

4.3 Classification des attracteurs des lasers

R. Gilmore et J. W. L. McCallum proposent un gabarit générique, le *gabarit spirale*, pour décrire les structures topologiques des flots tridimensionnels modélisant les oscillateurs non linéaires [Gilmore93, Gilmore et al.95]. Ils ont établi ce résultat sur la base de données numériques et de considérations théoriques. Par ailleurs, C. Letellier *et al.* mettent en évidence le même type de gabarit dans un travail numérique sur l'oscillateur de Rossler [Letellier et al.95a]. Nous montrons, dans cette section, que nos observations sont prédites par cette structure théorique et, par là-même, apparaissent comme les premiers éléments d'une confirmation expérimentale des études de R. Gilmore et J. W. L. McCallum.

4.3.1 Structure du gabarit spirale

Le gabarit est constitué d'une infinité de branches enroulées de manière concentrique. Les processus d'étirement et de repliement conduisent à la formation d'une spirale que l'on peut visualiser dans une section de Poincaré du semi-flot (voir fig.4.16).

Il est facile de constater que la branche i se replie i fois et par suite que $\mathcal{T}_{ii} = i$. Cela signifie que la torsion locale de l'orbite $1T = \bar{i}$ est égale à i . Par ailleurs, la

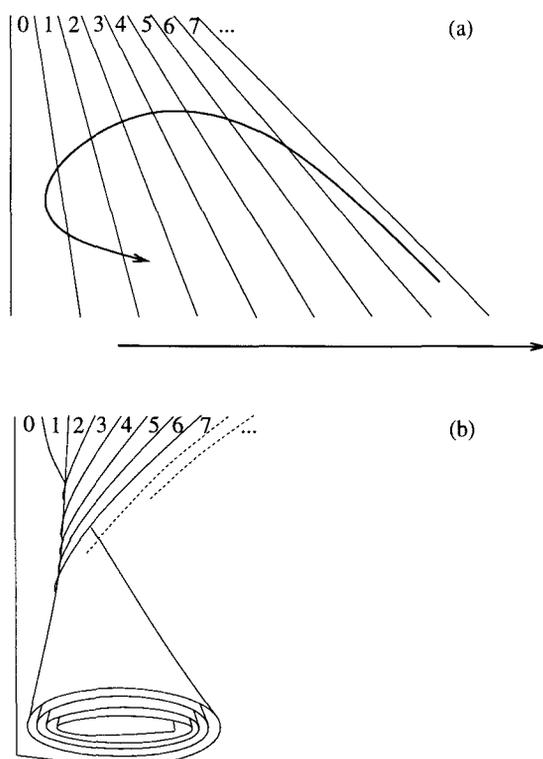


FIG. 4.16 – Illustration du gabarit spirale. Il est composé d'une infinité de branches. La construction peut être décomposée en deux étapes (a) un étirement, (b) un enroulement correspondant à une infinité de repliements.

continuité de la surface impose à une branche j d'effectuer autour de la branche $j - 1$ une rotation d'un angle égale à sa torsion $\mathcal{T}_{jj} = j$, en unité de π . Par exemple, la branche 7 est pliée une première fois sur la branche 6 puis l'ensemble se replie 6 fois. La branche 7 fait donc au total une rotation de 7π sur elle-même ($\mathcal{T}_{77} = 7$) et autour de la branche 6. Autrement dit, une branche impaire ne fait pas un nombre entier de révolutions autour de la précédente. Or, par définition, $\mathcal{T}_{ij} = 2 \times lk(\bar{i}, \bar{j})$ est un nombre pair. Ceci est lié à la convention qui impose à l'ordre des branches d'être au début du graphe d'empilement le même que sur la ligne de branchement (fig. 4.17). Les branches reflètent l'enlacement des orbites de période 1 et effectuent un nombre entier de révolutions les unes autour des autres. Les branches impaires effectuent par contre une rotation supplémentaire de π dans le graphe d'empilement. Par exemple, sur la figure 4.17 montrant une version restreinte aux quatre premières branches, la branche 3 fait un tour complet autour de la branche 2 et complète la rotation de 3π en repassant au-dessus de cette dernière à l'empilement. Par conséquent, une branche j paire tourne $j/2$ fois

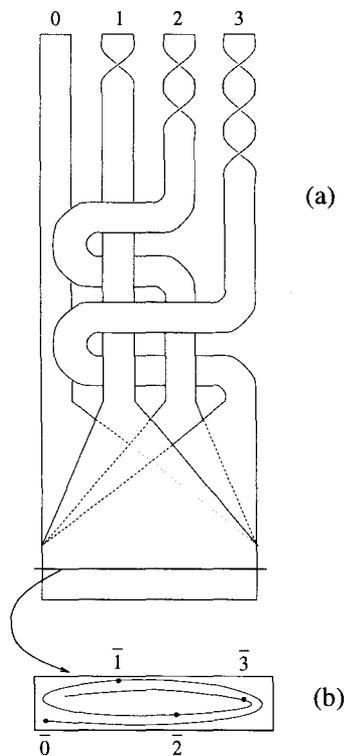


FIG. 4.17 – (a) Représentation éclatée du gabarit spirale restreint aux quatre premières branches. (b) Section de Poincaré du semi-flot et les orbites de période 1. Dans le graphe d'empilement, les traits pleins représentent les branches visibles, les tirets longs représentent des lignes cachées par une seule branche et les pointillés les lignes cachées par deux branches ou plus.

existent et sont nouées et enlacées comme sur le fer à cheval. En effet, la restriction de \mathcal{T}_{sp} au premier bloc diagonal 2×2 s'identifie à la matrice du fer à cheval \mathcal{T}_{fc} , et $\mathcal{I} = (0 \ N)$ contient la même information que $\mathcal{I}_{fc} = (0 \ 1)$, à savoir que la branche 1 est au-dessus de la branche 0 à l'insertion. La surface correspondante et les orbites qu'elle porte constituent donc un *sous-gabarit* de la structure spirale (on pourra par exemple consulter [Ghrist et al.97] pour une définition mathématique précise d'un sous-gabarit). Ce sous-gabarit sera noté $SP(0, 1)$. De manière équivalente, les restrictions $SP(0, 1, 2)$ et $SP(1, 2)$ s'identifient respectivement aux gabarits du "gâteau roulé" et du fer à cheval inversé et constituent également des sous-gabarits.

Si l'on s'enfonce au cœur de la spirale, on ajoute alors un certain nombre de tours à la torsion globale. Par exemple, le sous-gabarit $SP(2, 3)$, représenté sur la figure 4.18, correspond au fer à cheval avec une torsion globale de 1. Plus

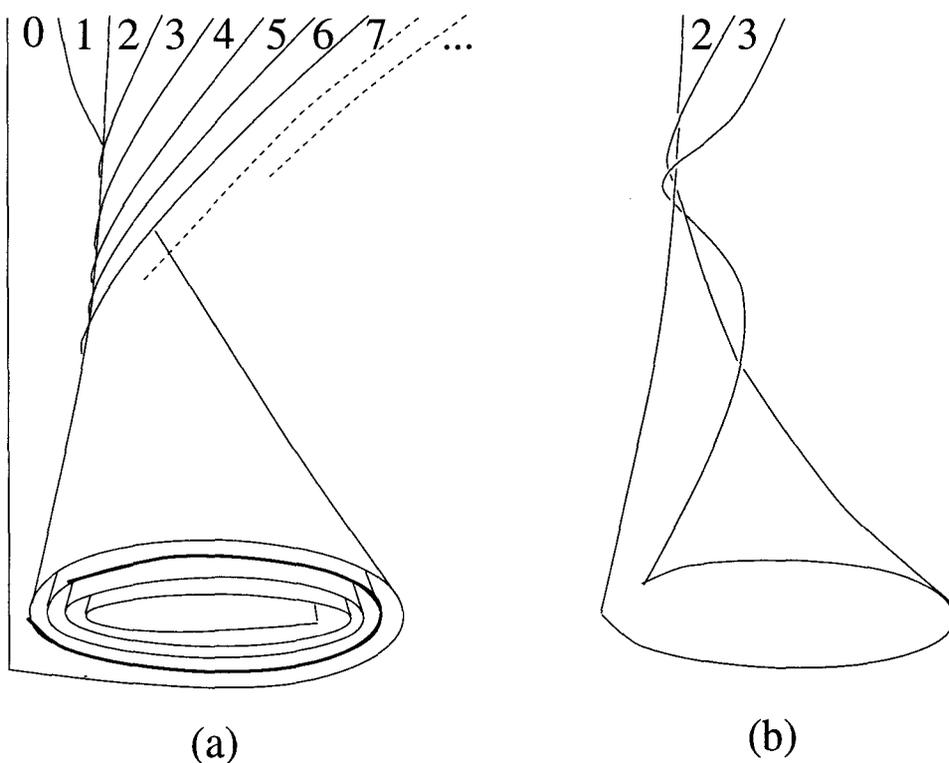


FIG. 4.18 – Restriction du gabarit spirale aux branches 2 et 3. Elle s'identifie au fer à cheval avec une torsion globale de 1.

généralement, les sous-gabarits $SP(2\theta, 2\theta + 1)$, $SP(2\theta, 2\theta + 1, 2\theta + 2)$ et $SP(2\theta + 1, 2\theta + 2)$, où $\theta \in \mathbb{N}$, sont respectivement le fer à cheval, le "gâteau roulé" et le fer à cheval inversé avec une torsion globale $\theta_g = \theta$.

Tous les attracteurs que nous avons analysés sont finalement décrits par la structure spirale puisqu'ils en sont des sous-gabarits. Cela signifie que les orbites

périodiques instables d'un attracteur correspondent à un nombre très limité d'orbites du gabarit. Pour les valeurs de paramètres de l'expérience 2 par exemple, seules les orbites passant par les branches 2 et 3 existent.

4.3.3 Premiers éléments de classification

Le gabarit spirale est une structure générique qui prédit l'existence de nombreux types d'organisations topologiques. Il définit donc implicitement une classification des attracteurs. Cette classification est pertinente puisque ses éléments sont des sous-gabarits, c'est à dire des classes discernables qui forment un ensemble discret.

Les gabarits des expériences 1, 2 et 3, à savoir les structures décrites par la famille des sous-gabarits $SP(2\theta_g, 2\theta_g + 1, 2\theta_g + 2)$, apparaissent comme les premiers éléments, différents du fer à cheval $SP(0,1)$, de la classification et donnent un espoir raisonnable d'observer dans les oscillateurs lasers les éléments plus complexes correspondant aux structures développées sur quatre branches et plus.

Deux attracteurs sont rangés dans la même classe s'ils sont décrits par le même gabarit. Physiquement, cela ne signifie pas qu'ils peuvent se déduire l'un de l'autre par déformation continue du portrait de phase puisqu'ils n'ont pas, a priori, le même nombre d'orbites. Par contre, cela implique que les OPI suivent les mêmes règles pour se nouer et s'enlacer, c'est-à-dire la même combinaison d'étirements et repliements. Par conséquent, si les attracteurs d'un modèle ne se rangent pas dans les mêmes classes que les attracteurs expérimentaux obtenus pour les mêmes valeurs des paramètres, alors le modèle doit être rejeté. Cela signifie en effet que les règles de bases qui génèrent le portrait de phases ne concordent pas.

C'est pourquoi il est important d'étendre plus largement la caractérisation topologique de ce type de lasers pour valider de manière efficace les modèles proposés, par exemple en mettant en évidence des structures à quatre branches et plus et, éventuellement, des gabarits non décrits par la structure spirale.

4.4 Transitions entre gabarits

Le gabarit est l'objet central d'une analyse du chaos qui consiste à caractériser l'enchevêtrement des orbites périodiques instables par des nombres topologiques. Ces nombres sont entiers mais aussi et surtout invariants avec les paramètres de contrôle sur tout le domaine d'existence des orbites. Pourtant, les expériences 1 et 3 montrent chacune une évolution du gabarit, et donc de l'organisation topologique des OPI, en fonction de la fréquence de modulation. Cette section montre, en s'appuyant sur les travaux théoriques de R. Gilmore et J. W. L. McCallum [Gilmore et al.95] et sur des simulations numériques du modèle monomode du laser de classe B, qu'une *transition* d'un gabarit vers un autre est un processus

(i) tout a fait compatible avec le caractère invariant des nœuds et enlacements que forment les OPI, (ii) qui s'explique au moyen des crises d'attracteurs, liées à la création et annihilation d'orbites.

La première expérience indique que la torsion globale du gabarit varie d'un tour complet d'une langue à l'autre. La transformation n'est donc pas continue et nécessite un changement radical d'attracteur, qui fait intervenir un processus de *crise*. La troisième expérience, au contraire, montre une évolution progressive du fer à cheval vers le fer à cheval inversé en passant par le "gâteau roulé". C'est dans ce cas la combinaison des processus de création et d'annihilation d'orbites lors des fenêtres périodiques qui permet à l'attracteur de progresser des deux premières branches du "gâteau roulé" vers les deux dernières.

4.4.1 Crises, création et annihilation d'orbites

4.4.1.1 Les crises d'un régime chaotique

Lorsqu'un paramètre de contrôle varie, on peut observer des bifurcations globales de l'attracteur chaotique, c'est-à-dire un changement brutal du régime, comme par exemple les fenêtres périodiques. Ces modifications soudaines sont dues essentiellement à deux phénomènes :

1. les bifurcations nœud-selle qui peuvent survenir dans l'attracteur, c'est-à-dire la création d'une paire d'orbites périodiques respectivement stable et instable. Le régime chaotique disparaît au profit de l'orbite stable. Ce phénomène correspond à l'apparition d'une fenêtre périodique.
2. Les *crises* [Grebogi et al.82], où l'on observe la collision avec un autre ensemble invariant, généralement une orbite périodique instable de type selle.

Deux types de crises peuvent être distinguées [Grebogi et al.83] suivant la nature de la collision. On parle de *crise de frontière* si l'orbite périodique instable se situe à la limite du bassin d'attraction. Dans ce cas, sa variété stable constitue la frontière du bassin (voir fig.4.19b). A la collision, l'ensemble attracteur touche la frontière et donc n'est plus invariant puisque la trajectoire peut fuir vers l'extérieur après un court transitoire chaotique. L'attracteur et son bassin sont détruits par la crise, dans le sens où les OPI n'appartiennent plus à un ensemble attracteur. A l'opposé, la crise est dite *intérieure* quand la collision se produit avec une orbite instable contenue dans le bassin d'attraction. Comme le montre la figure 4.20, l'attracteur s'étend brusquement mais le bassin n'est pas altéré.

La plupart des OPI que contient l'attracteur chaotique continue d'exister après une crise où une fenêtre périodique, tout au moins sur une certaine plage de paramètre. Par contre, à la suite d'une crise de frontière, la trajectoire du système se retrouve dans un bassin d'attraction différent de celui du régime chaotique en crise. Cela signifie que même si les OPI subsistent, elles ne peuvent plus être visitées par la nouvelle trajectoire.

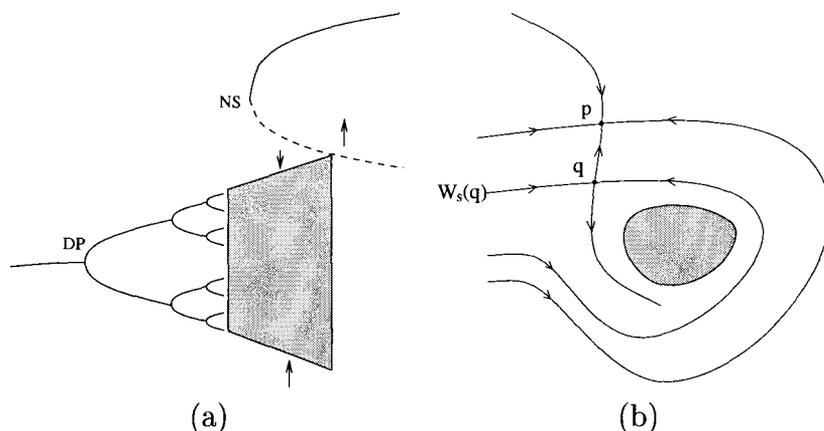


FIG. 4.19 – Crise de frontière. (a) Exemple de diagramme de bifurcations. NS désigne une bifurcation nœud-selle qui crée simultanément deux orbites, l'une stable (en trait plein) et l'autre instable (en tirets). (b) Section schématique du portrait de phases avant la collision. La variété stable de l'orbite instable q constitue la frontière entre les bassins d'attraction de l'orbite stable p et de l'attracteur chaotique. Par conséquent, les variétés de l'orbite q sont orientables et sa torsion est paire

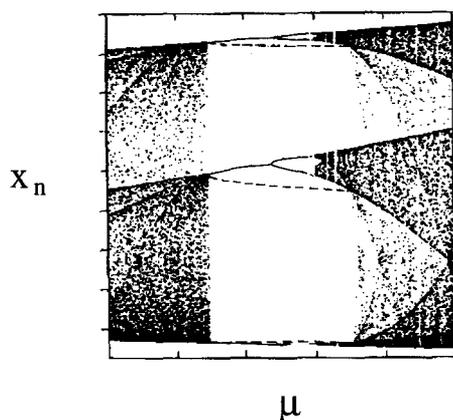


FIG. 4.20 – Ce diagramme de bifurcations illustre à la fois l'apparition d'une fenêtre périodique et le phénomène de crise intérieure. L'orbite $3T$ stable (en trait plein), responsable de la fenêtre périodique, apparaît simultanément avec une $3T$ instable (en pointillés). Cette dernière orbite entre en collision par la suite avec l'attracteur chaotique issu de la cascade de doublement de période. A la crise l'attracteur s'étend brusquement.

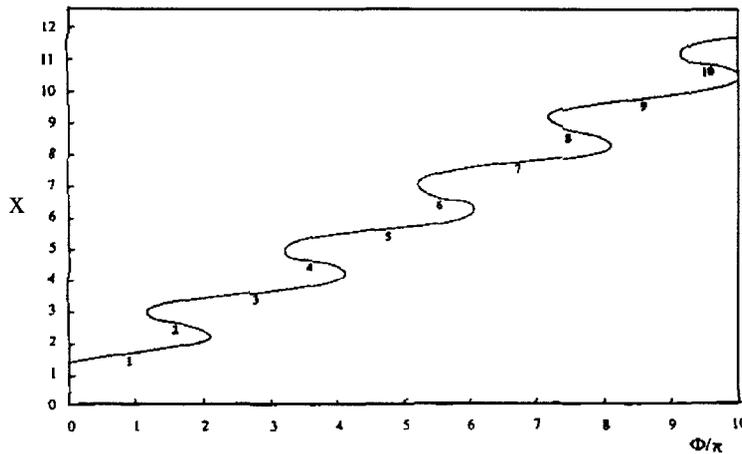


FIG. 4.21 – Solutions de période 1 de l'oscillateur de Duffing. (tirée de [Gilmore et al.95]). Le paramètre ϕ/π est équivalent à $2 \times T/T_r$, et x est la valeur d'une variable dynamique dans une section de Poincaré.

Notons enfin qu'une fenêtre périodique comme celle de la figure 4.20 amène dans l'attracteur chaotique toutes les orbites issues de la cascade de doublement de période et l'orbite instable responsable de la crise intérieure. Cette famille s'ajoutent aux OPI qui existaient avant la fenêtre. Cependant, le processus inverse, c'est-à-dire une cascade de bifurcations inverse terminée par une bifurcation nœud-selle inverse, existe et élimine de l'attracteur toute la famille d'OPI correspondante.

4.4.1.2 Création et annihilation d'orbites périodiques: propriétés topologiques.

En règle générale, les diagrammes de bifurcations sont marqués par une succession incessante de processus de création et annihilation d'orbites et de crises de régimes chaotiques. R. Gilmore et J. W. L. McCallum décrivent très bien ce phénomène dans leur étude théorique de l'oscillateur de Duffing [Gilmore et al.95]. Ils construisent un modèle d'application de Poincaré de l'oscillateur pour analyser les mécanismes qui structurent le diagramme de bifurcation et expliquer les grandes similarités avec de nombreux autres oscillateurs. Par exemple, la structure de base en langues chaotiques est liée à la création-annihilation des orbites $1T$. La figure 4.21 représente les solutions de période 1 de l'application de premier retour en fonction d'un paramètre de contrôle noté ϕ/π qui est équivalent à $2 \times T/T_r$. Les points de coordonnées $(1, 3)$, $(3, 5)$, ... d'une part et $(2, 2)$, $(4, 4)$, ... d'autre part sont des bifurcations nœud-selle respectivement directes et inverses et les orbites de numéro pair sont les selles. Par exemple, la bifurcation en $(1, 3)$ crée les orbites selle et nœud 2 et 3 qui s'annihilent ensuite dans des bifurcations inverses

respectivement avec les orbites 1 et 4. Les cascades de doublement de période qui conduisent au chaos sont initiées sur les orbites stables de numéro impair et les régimes chaotiques sont détruits soit par cascade inverse soit dans une crise de frontière avec les orbites selles, de numéro pair. Nous aborderons précisément ce dernier point dans la section suivante.

Examinons plus en détail les propriétés topologiques des orbites $1T$ le long de la courbe “serpent”, et ce avec l'exemple précédent. À leur création, les orbites jumelles 2 et 3 ont la même torsion puisqu'elles sont confondues et donc ont les mêmes variétés séparatrices. L'orbite 2 est une selle de torsion paire, en l'occurrence égale à 2, invariablement sur tout son domaine d'existence puisque sa variété stable est la frontière de deux bassins d'attraction. Par contre, l'orbite stable 3, de torsion 2 au départ, doit évoluer vers un nœud de torsion impaire pour initier un doublement de période. En fait, quand ϕ/π augmente, le nœud bifurque vers un foyer stable puis, de là, vers un nœud stable de torsion impaire égale à 3. Ceci ne viole pas l'invariance de la torsion puisque, pendant la phase où l'orbite est un foyer, ses variétés invariantes ne sont plus définies comme des surfaces réelles⁵. Celles-ci peuvent donc être reconstruites de manière différente à la bifurcation foyer \rightarrow nœud. Retenons que tout se passe comme si la torsion locale de l'orbite $1T$ passait doucement de 2 à 3. Lorsqu'elle perd sa stabilité au doublement de période, elle devient la selle, de torsion invariable, correspondant à l'orbite $\bar{1}$ du fer à cheval de torsion globale 1. Si ϕ/π augmente encore, elle redevient un nœud stable par cascade inverse et s'approche de l'orbite 4, de torsion paire égale à 4. Elle traverse donc à nouveau une phase foyer pendant laquelle sa torsion passe de 3 à 4 de telle sorte qu'elle puisse interagir avec l'orbite 4 dans une bifurcation nœud-selle inverse.

En résumé, et plus généralement, les orbites d'indice $2n$ ont une torsion locale invariablement paire égale à $2n$ sur tout leur domaine d'existence. Leurs orbites jumelles d'indice $2n + 1$ voit par contre leur torsion évoluer de $2n$ à $2n + 1$ puis de $2n + 1$ à $2n + 2 = 2(n + 1)$ entre leur création et leur annihilation.

Notons qu'une courbe en forme de serpent (fig. 4.21) traduit l'existence de domaines de bistabilité entre différents régimes de période $1T$ de l'oscillateur de Duffing. Ce phénomène est également observé dans les lasers. Plus exactement, on constate dans les situations de modulation faible (en dessous des langues chaotiques) un saut d'intensité sur la réponse de période 1 à chaque fois que la fréquence de modulation passe une sous-harmonique de la fréquence de résonance. Ce point, ajouté aux observations précédentes (voir chapitre 2), suggère fortement une interprétation des mécanismes de transition sur la base des données théoriques qui viennent d'être présentées.

5. Les valeurs propres de l'analyse de stabilité linéaire dans les directions transverses à l'orbite foyer sont complexes conjuguées.

4.4.2 Transition brusque de gabarits

Le diagramme expérimental de la figure 4.2 montre que les régimes chaotiques du laser à fibre sont initiés par une cascade de doublements de période et détruits dans une crise de frontière avec une orbite $1T$. La figure 4.22 reprend de manière schématique les mécanismes mis en jeu lorsque l'on passe de part et d'autre de la région chaotique C_n et montre l'évolution de la torsion locale de l'orbite $1T$. Étant donné les éléments avancés à la section précédente, l'ajout d'un tour à la torsion globale du gabarit apparaît naturel.

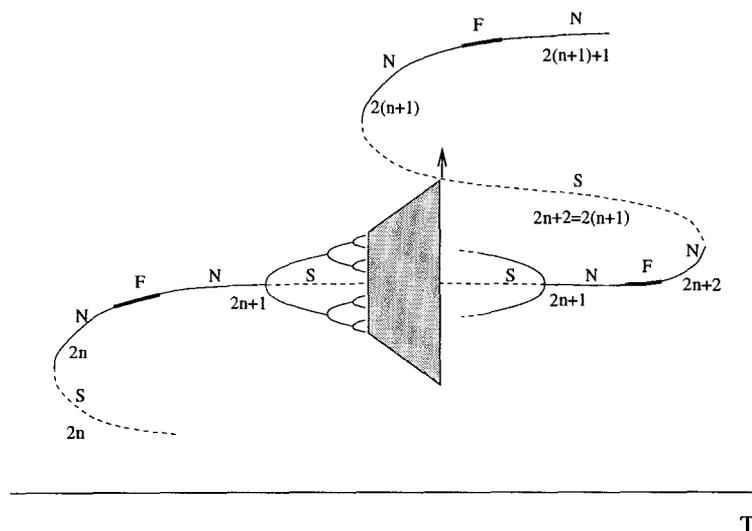


FIG. 4.22 – Diagramme de bifurcations schématisé correspondant à la traversée de la langue C_{n+1} , dans laquelle le gabarit a une torsion globale $\theta_g = n$. Les numéros correspondent aux torsions locales des orbites $1T$ et le trait indique le type (trait simple=nœud, tirets=selle et trait épais=foyer). À sa création l'orbite stable est de type nœud et sa torsion est égale à $2n$. Elle bifurque ensuite vers un foyer stable puis, de là, vers le nœud stable de torsion $2n+1$ pour pouvoir initier un doublement de période.

L'orbite $2n+1$ s'identifie à l'orbite $\bar{1}$ du fer à cheval de torsion globale $\theta_g = n$ puisqu'elle doit passer par une branche de torsion $2n+1$, autrement dit la branche $2n+1$ du gabarit spirale. La variété instable, et de manière équivalente la variété stable, de cette orbite opère alors une rotation de $n \times 2\pi$ dans la torsion globale et de π sur la branche 1 du fer à cheval.

À la crise de frontière, le régime transite brusquement vers l'orbite nœud $1T$ de torsion locale $2n+2$. Notons que l'ensemble des OPI peut coexister avec ce nouvel attracteur régulier sur une certaine plage de paramètre mais est vite détruit dans une cascade inverse. L'attracteur régulier traverse ensuite une phase où il est un foyer pendant laquelle sa torsion passe de $2n+2$ à $2n+3 = 2(n+1)+1$. Le

système se retrouve donc dans une situation identique à celle de départ mais avec n incrémenté de 1 et l'attracteur chaotique est reconstruit à partir d'une orbite $1T$ dont la torsion possède un tour supplémentaire.

En résumé, la transition est violente car il y a un renouvellement complet des OPI contenues dans l'attracteur chaotique. Dans le cadre plus général de la classification proposée par R. Gilmore et J. W. L. McCallum, la transition correspond à la destruction des orbites du sous-gabarit $SP(2n, 2n + 1)$ puis à la création des orbites de $SP(2(n + 1), 2(n + 1) + 1)$ qui ont globalement pour effet de décaler l'attracteur de deux branches à l'intérieur du gabarit spirale. Précisons que le scénario dans lequel le système sort du régime chaotique par une cascade inverse de doublements de période, plutôt que par une crise de frontière, conduit au même phénomène. La seule différence est que le système saute sur l'orbite $2(n + 1) + 1$ au point tournant correspondant à la bifurcation nœud-selle inverse des orbites $2n + 2$. Notons enfin, à titre indicatif, que le raisonnement est identique pour un balayage du paramètre en sens inverse.

4.4.3 Transition douce de gabarits

Dans une expérience du type 3, la structure topologique évolue de manière plus douce. En effet, quand le paramètre T/T_r augmente et décrit la langue C_{n+1} , on observe une transition entre les sous-gabarits $SP(2n, 2n + 1)$ et $SP(2n, 2n + 1, 2n + 2)$ puis entre $SP(2n, 2n + 1, 2n + 2)$ et $SP(2n + 1, 2n + 2)$, le premier et le dernier étant eux-mêmes des sous-gabarits du "gâteau roulé" $SP(2n, 2n + 1, 2n + 2)$ de torsion globale $\theta_g = n$. Le mécanisme de la transition s'explique simplement par des processus simultanés de création et annihilation d'OPI.

4.4.3.1 Mécanismes de base

La cascade de doublements de période initiée sur l'orbite $2n + 1$ conduit à un régime chaotique décrit par le gabarit de type fer à cheval $SP(2n, 2n + 1)^6$. Cela signifie que toutes les orbites créées dans l'attracteur peuvent être projetées sur les deux premières branches du "gâteau roulé". Lorsqu'on augmente T/T_r , de nouvelles orbites sont créées à chaque fenêtre périodique. Cependant, pour une certaine valeur du paramètre, il apparaît une orbite qui ne peut pas être projetée sur le fer à cheval car un de ses brins passe par la troisième branche. Quand suffisamment d'orbites de basses périodes passent par la troisième branche, l'analyse topologique révèle le "gâteau roulé" complet.

Parallèlement au processus de création d'orbites périodiques, il existe le processus inverse d'annihilation qui *élague* progressivement certaines orbites de la première branche. Quand la dernière orbite contenant le symbole 0 disparaît, l'attracteur passe finalement à la structure du fer à cheval inversé .

6. On ne discutera pas de la torsion globale qui dans ce cas est égale à n

Ainsi, l'attracteur se détruit d'un côté et se construit de l'autre pour progresser des branches $(2n, 2n + 1)$ aux branches $(2n + 1, 2n + 2)$ du "gâteau roulé", sans modifier les nœuds et enlacements des OPI. Ce processus contraste avec le précédent qui résultait d'une destruction brutale et irréversible de l'attracteur par crise de frontière. Moyennant quoi, si l'on continue d'augmenter la période de modulation, le système saute sur l'orbite $2(n + 1) + 1$, soit par une crise de frontière, soit par la route classique de la cascade de doublement inverse terminée par l'annihilation des orbites $2n + 2$ (voir fig. 4.23). Le scénario que l'on vient de décrire reprend alors avec un tour supplémentaire dans la torsion globale.

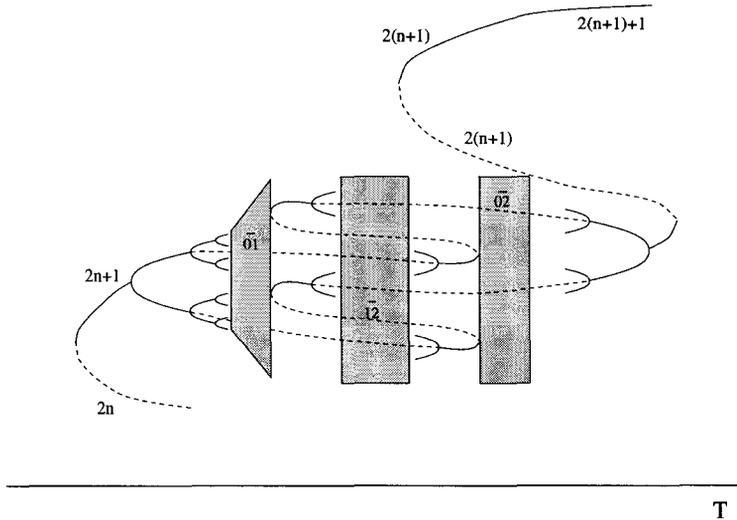


FIG. 4.23 – Structure fine du diagramme de bifurcation de la figure 4.22. Seule les fenêtres $2T$ sont représentées.

4.4.3.2 Vers une analyse plus fine grâce au modèle monomode de classe B

Les orbites qui correspondent aux fenêtres responsables des deux transitions restent non identifiées dans l'état actuel de nos observations. Dans l'expérience 3, ce sont les fenêtres $2T$ qui suggéraient la transition. En effet, comme l'illustre la figure 4.23, il existe un domaine du paramètre pour lequel l'attracteur peut contenir simultanément deux, voire trois, orbites $2T$ et par suite être décrit par un gabarit à trois branches ou plus. Cependant, aucun argument à notre connaissance ne permet de donner à ces orbites un rôle privilégié. Elles ont simplement la propriété de créer des fenêtres périodiques observables expérimentalement.

Des simulations numériques du modèle monomode d'un laser de classe B (voir les équations (2.3)) reproduisent fidèlement ce comportement [Boulant et al.b] et permettent d'analyser plus finement la transition. Par exemple, la figure 4.24

représente la superposition du diagramme de bifurcations et des solutions de période $2T$ calculées au moyen d'une méthode itérative de Newton-Raphson (voir par exemple [Hao88]). Le paramètre de contrôle ν/ν_r décrit l'intervalle $[0.35, 0.52]$

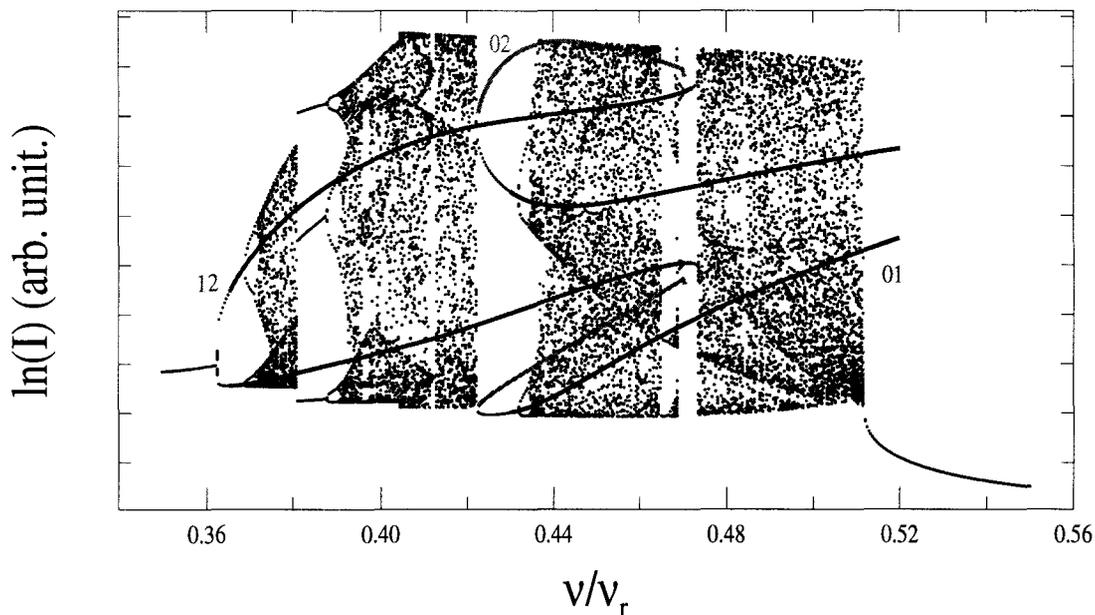


FIG. 4.24 – Solutions de période $2T$ superposées au diagramme de bifurcations du modèle monomode du laser de classe B (équations (2.3)). Le paramètre de contrôle ν/ν_r , où ν est la fréquence de modulation, décrit l'intervalle $[0.35, 0.52]$ avec $A_0 = 2$, $\gamma = 1 \times 10^{-4}$, $e_s = 1 \times 10^{-5}$ et $m = 0.49$. Mise à part une torsion globale de 1, le gabarit est un fer à cheval inversé jusque $\nu/\nu_r \approx 0.41$ puis un “gâteau roulé” jusque $\nu/\nu_r \approx 0.5$ et enfin un fer à cheval. Les noms symboliques des orbites $2T$ sont donc respectivement $\overline{12}$, $\overline{02}$ et $\overline{01}$ où 0, 1 et 2 sont les symboles des branches du “gâteau roulé”.

avec $A_0 = 2$, $\gamma = 1 \times 10^{-4}$, $e_s = 1 \times 10^{-5}$ et $m = 0.49$. Des analyses topologiques réalisées selon la même procédure que dans [Boulant et al.a] pour différentes valeurs de ν/ν_r montrent que le gabarit de l'attracteur est un fer à cheval inversé jusque $\nu/\nu_r \approx 0.41$ puis un “gâteau roulé” jusque $\nu/\nu_r \approx 0.5$ et enfin un fer à cheval (voir la table 4.6). Les tables 4.7 et 4.8 donnent, à titre indicatif, les invariants calculés en $\nu/\nu_r = 0.46$. Par souci de clarté, seules les orbites de périodes inférieures ou égales à $6T$ figurent dans les tables mais les gabarits ont été déterminés avec des spectres d'une quarantaine d'orbites de période $1T$ à $10T$.

On notera avant tout commentaire que ces résultats numériques peuvent être comparés directement aux données expérimentales dans la mesure où l'espace des phases du modèle est topologiquement équivalent à l'espace de plongement des séries temporelles (voir sec. 3.5). Il apparaît que les orbites $2T$ $\overline{02}$ et $\overline{12}$ ne

gabarit	plage examinée
SP(3, 4)	de 0.378 à 0.400
SP(2, 3, 4)	de 0.410 à 0.490
SP(2, 3)	de 0.500 à 0.510

TAB. 4.6 – Résultats de l'analyse topologique des attracteurs chaotiques du modèle 2.3 pour les valeurs de paramètres $A_0 = 2$, $\gamma = 1 \times 10^{-4}$, $e_s = 1 \times 10^{-5}$ et $m = 0.49$.

orbites	1T	2T _a	2T _b	2T _c	4T _a	4T _b	5T _a	5T _b	6T _a	6T _b	6T _c	6T _d	6T _e	6T _f	6T _g
1T	0														
2T _a	3	3													
2T _b	3	6	3												
2T _c	3	6	6	3											
4T _a	6	12	13	12	19										
4T _b	6	11	12	12	24	17									
5T _a	7	14	14	14	28	28	28								
5T _b	7	14	14	14	28	28	35	28							
6T _a	9	18	19	18	38	36	42	42	47						
6T _b	9	18	19	18	38	36	42	42	57	47					
6T _c	9	17	18	18	36	34	42	42	54	54	43				
6T _d	9	18	19	18	38	36	42	42	56	57	54	47			
6T _e	9	17	18	18	36	34	42	42	54	54	51	54	43		
6T _f	9	18	19	18	38	36	42	42	56	57	54	56	54	47	
6T _g	9	17	18	18	36	34	42	42	54	54	51	54	52	54	43

TAB. 4.7 – Nombres d'enlacement et d'autoenlacement des orbites de périodicité $p \leq 6$ contenues dans l'attracteur du système numérique 2.3 pour les valeurs de paramètres $\nu/\nu_r = 0.46$, $A_0 = 2$, $\gamma = 1 \times 10^{-4}$, $e_s = 1 \times 10^{-5}$ et $m = 0.49$.

orbites	$1T$	$2T_a$	$2T_b$	$2T_c$	$4T_a$	$4T_b$	$5T_a$	$5T_b$	$6T_a$	$6T_b$	$6T_c$	$6T_d$	$6T_e$	$6T_f$	$6T_g$
θ_{loc}	3	5	7	6	13	11	14	13	19	20	16	19	18	18	17
orbites	$7T_a$	$7T_b$	$7T_c$	$7T_d$	$7T_e$	$7T_f$	$7T_g$	$7T_h$	$8T_a$	$8T_b$	$8T_c$	$8T_d$	$9T_a$	$9T_b$	$9T_c$
θ_{loc}	21	20	19	20	22	18	19	21	23	26	24	25	27	27	27
orbites	$9T_d$	$9T_e$	$9T_f$	$9T_g$	$9T_h$	$9T_i$	$9T_j$	$10T_a$	$10T_b$	$10T_c$	$10T_d$	$10T_e$	$10T_f$		
θ_{loc}	26	25	25	26	28	25	24	27	29	27	31	33	30		

TAB. 4.8 – *Torsions locales.*

sont pas les premières à peupler la branche 2 ni $\overline{01}$ et $\overline{02}$ les dernières à être supprimées de la branche 0. Il s'avère par contre difficile d'identifier les fenêtres qui bornent l'intervalle sur lequel le gabarit est à trois branches. Ceci est dû au fait qu'entre deux fenêtres périodiques il existe une infinité d'autres fenêtres périodiques, infiniment étroites. Nos dernières études établissent par contre que les fenêtres de période inférieure à 10 les plus proches sont les $5T$.

4.5 Conclusion

Nous avons établi dans ce chapitre une classification des régimes chaotiques de lasers modulés, en l'occurrence un laser à fibre et un laser YAG. Ceci constitue une caractérisation fine de ces systèmes qui permet d'envisager, dans un futur proche, une comparaison robuste avec les modèles de ce type de laser. Ces résultats ont été obtenus en grande partie grâce au développement des outils d'analyse des séries temporelles, que nous avons présenté au chapitre 3.

De manière plus générale, on peut observer des transitions de gabarits dans une région chaotique C_n donnée quand l'attracteur progresse des branches $(2n, 2n+1)$ aux branches $(2n+1, 2n+2)$ du gabarit spirale. La progression est assurée par un processus de créations d'orbites périodiques, qui peuple la branche $2n+2$, combiné à un processus d'annihilation qui élague les orbites de la branche $2n$. Par ailleurs, un tour est ajouté à la torsion globale lorsque l'on passe de la langue C_n à C_{n+1} . Notons enfin que ce processus ne dépend pas des particularités physiques des lasers et qu'on peut donc s'attendre à l'observer dans une large classe d'oscillateurs modulés.

conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire une méthode de caractérisation topologique du chaos de basse dimension, l'analyse de gabarit, et son application à la dynamique des lasers.

Les systèmes chaotiques les plus simples possèdent trois degrés de liberté, c'est-à-dire qu'ils peuvent être décrits de manière déterministe par trois variables globales. Dans ce cas l'attracteur chaotique ainsi que les orbites qu'il contient sont représentés dans un espace à trois dimensions. Les orbites périodiques instables, qui définissent le squelette de l'attracteur, forment alors des nœuds caractéristiques des processus d'étirement et repliement à la base de la dynamique chaotique. Le gabarit est une représentation topologique simple de ces mécanismes qui décrit complètement l'enchevêtrement des orbites de l'attracteur. La détermination du gabarit est donc une méthode de caractérisation bien plus pertinente que les approches quantitatives, dont les résultats sont des nombres réels, et permet une comparaison très efficace entre les régimes chaotiques.

L'analyse des régimes chaotiques de lasers modulés, en l'occurrence un laser à fibre et un laser YAG, a permis de mettre en évidence des structures topologiques différentes du fer à cheval. Ce résultat est important en soit car il contraste avec les études expérimentales précédentes et affirme, par là-même, la pertinence de l'analyse topologique comme moyen de caractérisation des comportements chaotiques. Une étude plus approfondie conduit à une classification des régimes suivant leur localisation dans l'espace des paramètres de contrôle. Plus précisément, les différentes régions chaotiques ont été caractérisées par les propriétés topologiques des attracteurs correspondants, c'est-à-dire par un gabarit.

Les structures topologiques identifiées dans ces lasers sont doublement intéressantes. Premièrement, elles s'accordent avec une classification générale des régimes chaotiques proposée par R. Gilmore et J. W. L. McCallum pour les oscillateurs non linéaires tridimensionnels. Cela renforce les analogies entre les lasers et de nombreux systèmes dynamiques. Deuxièmement, elles montrent l'existence de transitions entre gabarits, c'est-à-dire une évolution de la structure topologique avec un paramètre de contrôle. Celles-ci ont été analysées expérimentalement et s'expliquent par un processus de création et d'annihilation d'orbites périodiques instables.

Les résultats ont été obtenus, en grande partie, grâce au développement d'outils d'analyse des séries temporelles. En particulier, nous avons mis en place une

méthode de reconstruction des orbites périodiques instables et une procédure systématique de détermination du gabarit à partir des invariants topologiques des orbites. Cette dernière procédure permet, entre autres avantages, de s'affranchir d'un codage symbolique préalable des orbites. La combinaison de ces deux méthodes, intégrées à la procédure originale proposée par Mindlin *et al*, nous permet aujourd'hui de résoudre des structures topologiques expérimentales très complexes.

La classification des comportements chaotiques des lasers que nous avons entreprise constitue une caractérisation très fine de ces systèmes. Elle permet donc d'envisager dans un futur proche une comparaison robuste entre les modèles de ces types de laser et les données expérimentales. Par ailleurs, étant donnée l'efficacité de l'analyse de gabarit, on peut aujourd'hui s'interroger sérieusement sur le développement de méthodes topologiques pour caractériser le chaos de plus grande dimension.

Annexe A

Horseshoe templates with global torsion in a driven laser.

G. Boulant, M. Lefranc, S. Bielawski et D. Derozier,
Phys. Rev. E **55**, 5082 (1997).

Horseshoe templates with global torsion in a driven laser

G. Boulant,^{*} M. Lefranc,[†] S. Bielawski,[‡] and D. Derozier[§]

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, URA CNRS 249, Centre d'Etudes et de Recherches Lasers et Applications, Université de Lille I, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

(Received 26 December 1996)

We perform a topological analysis of chaotic signals from a Nd-doped fiber laser with pump modulation at different values of the modulation frequency. In this experiment, the system displays chaotic behavior in three regions $C_{1/4}$, $C_{1/3}$, and $C_{1/2}$ of parameter space, located around the subharmonics $\omega_r/4$, $\omega_r/3$, and $\omega_r/2$ of the relaxation frequency ω_r . We observe that the topological structures of the chaotic regimes inside a given region $C_{1/n}$ are described by the same template. However, templates corresponding to different regions display different global torsions θ_g , which we find to be related to the order of the subharmonics by $\theta_g(C_{1/n}) = n - 1$. [S1063-651X(97)09804-8]

PACS number(s): 05.45.+b, 42.65.Sf, 42.55.Wd

I. INTRODUCTION

Template analysis allows a relevant classification and comparison of chaotic attractors according to their topological properties and provides a clear-cut characterization thereof by a set of integer topological indices [1] which are robust with respect to variations in control parameters. In particular, attractors observed experimentally in various fields such as chemistry [2,3], mechanics [4], nuclear magnetic resonance [5], and optics [6–8], have been shown to belong to the same class, namely, that of the Smale's horseshoe with zero global torsion. Let us note, however, that nonhorseshoe dynamics has been reported by Firlé, Natiello, and Eiswirth [9] and that other structures have been predicted to be observable in experiments [10,11].

In this paper, our aim is to use topological analysis in order to study and compare the attractors of a single system (a modulated Nd-doped fiber laser), at different values of a control parameter (the modulation frequency ω). We do this in an experimental situation where chaotic behavior is observed when ω lies near the subharmonics $1/2$, $1/3$, and $1/4$ of the natural relaxation frequency ω_r , the highest linear resonance frequency (see, e.g., [12,13]) of the system.

Let us briefly recall the principle of the method. A chaotic attractor has typically embedded in it a dense set of unstable periodic orbits (see, e.g., [14]) which cannot intersect because of the deterministic nature of the evolution laws. Thus the way the unstable periodic orbits (UPO) are linked together can be characterized using concepts from knot theory, provided the attractor is confined to a three-dimensional (3D) manifold. The existence of a two-dimensional manifold, the *template*, such that all UPO can be placed on it while preserving their invariant linking properties, allows one then to describe concisely the global topological organization of the attractor under study.

The fiber laser (FL) is known to be a possibly high-

dimensional system with many longitudinal modes oscillating simultaneously. Hence, in Sec. II we describe the experimental system and check that topological analysis is applicable by estimating the Lyapunov dimension of the attractors. Then, Sec. III is devoted to the extraction of UPO from experimental data and the computation of their topological invariants. We show there how careful signal processing can greatly help in extracting topological information from noisy time series of finite length and precision. Finally, in Sec. IV, we determine the templates of the different attractors, compare them, and relate them to the values of the modulation frequency. In particular, we show that these templates have a nonzero global torsion, and that this torsion increases by one full turn when the period of modulation increases by $2\pi/\omega_r$. This observation is in close agreement with the theoretical studies of modulated nonlinear oscillators by Gilmore and McCallum [10].

II. THE EXPERIMENTAL SYSTEM

The experimental setup is a Fabry-Pérot laser cavity. The active medium, a 4 m long silica fiber doped with 300 ppm Nd^{3+} , is pumped by a laser diode emitting a single polarized mode at 810 nm. The optogeometrical properties of the fiber make the laser transversally monomode at the operating wavelength $\lambda = 1.08 \mu\text{m}$. However, the large cavity length and the broad inhomogeneous gain profile (100 cm^{-1}) allow some 10 000 longitudinal modes to oscillate simultaneously. In addition, in the absence of polarization selective elements in the cavity, each mode is split into two eigenstates of polarization depending on the birefringence of the fiber [15]. On output, the two polarization eigenstates of the cavity are separated by a polarizing beam splitter combined with a half-wave plate to select the direction of analysis. In typical operating conditions, the low laser threshold allows us to reach pump parameters (i.e., the ratio of the pump power to its value at threshold) up to 5 and to explore a wide range of parameters.

Under modulation of a control parameter, this laser exhibits chaotic oscillations [16], reached via period doubling cascade or quasiperiodicity. In our experiment, we modulate sinusoidally the pump parameter $A(t) = A_0(1 + m \cos \omega t)$

^{*}Electronic address: Guillaume.Boulant@univ-lille1.fr

[†]Electronic address: Marc.Lefranc@univ-lille1.fr

[‡]Electronic address: Serge.Bielawski@univ-lille1.fr

[§]Electronic address: Dominique.Derozier@univ-lille1.fr

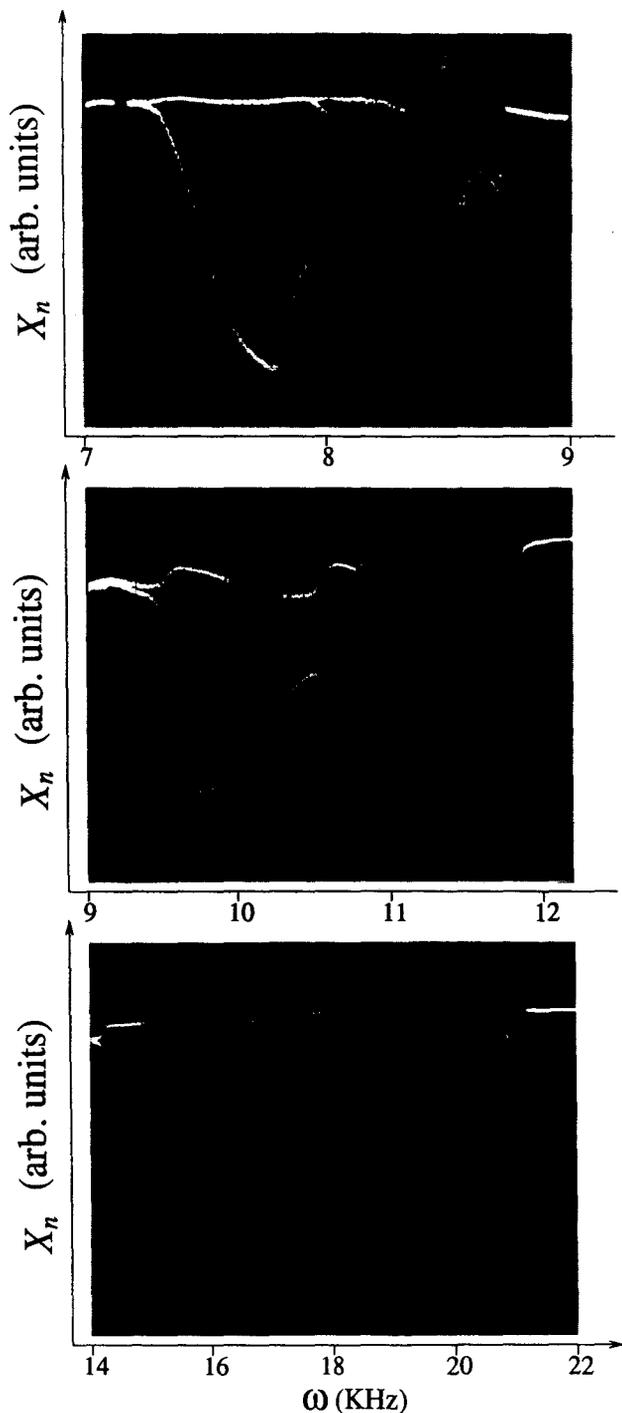


FIG. 1. Experimental bifurcation diagram for increasing modulation frequency. Note the localization of the three chaotic regimes around $\omega_r/4$, $\omega_r/3$, and $\omega_r/2$.

around an average value $A_0=2.7$ with a rate $m=0.6$. The frequency is chosen as a control parameter and swept from 0 to the relaxation frequency ω_r , which, under these conditions, is about 36 kHz. The bifurcation diagram, shown in Fig. 1, displays a sequence of three chaotic windows $C_{1/4}$, $C_{1/3}$, and $C_{1/2}$ located around $\omega_{1/4} \approx 9$ kHz, $\omega_{1/3} \approx 12$ kHz, and $\omega_{1/2} \approx 18$ kHz, respectively. The notations have been chosen to emphasize the harmonic relation between the chaotic frequencies and ω_r .

$$\omega_r \approx 2\omega_{1/2} \approx 3\omega_{1/3} \approx 4\omega_{1/4}. \quad (1)$$

TABLE I. Estimated Lyapunov exponents of sample regimes in $C_{1/4}$, $C_{1/3}$, and $C_{1/2}$ regions, given in modulation frequency units. d_L is the Lyapunov dimension defined as $d_L = 2 + |\lambda_1/\lambda_3|$ according to the Kaplan-Yorke conjecture [29] and is believed to estimate the dimension of the attractor.

Regime	λ_1	λ_2	λ_3	d_L
$C_{1/4}$	0.37	-0.06	-0.57	2.6
$C_{1/3}$	0.34	-0.00	-0.92	2.3
$C_{1/2}$	0.52	-0.03	-0.66	2.7

This bifurcation structure is common in nonlinear oscillators (see, e.g., [10]) except that, in the present case, we do not observe chaotic behavior around the relaxation frequency ω_r .

To verify that, in spite of the great number of degrees of freedom, the dynamics is sufficiently low dimensional so that template analysis can be applied, we have performed Lyapunov exponent estimates for regimes in the three regions using the program DLIA by Briggs [17]. Table I displays the results obtained for three sample regimes. While the numerical values should be taken with caution, especially for the negative exponent (the regimes appear to be much more dissipative than indicated by this analysis), they definitely show that there is only one unstable direction and that three-dimensional volumes are contracted under the action of the flow. This means that most of the dynamical variables relax so quickly that they are enslaved by a few number of collective variables which are confined to a three-dimensional manifold. This motivates the topological analysis carried out in the sequel of this paper, whose relevance will, furthermore, be confirmed by the consistency of the measured topological invariants [18].

III. TOPOLOGICAL ANALYSIS

As complex as it may appear, a strange attractor is a highly organized geometrical object. In particular, it contains an infinite number of unstable periodic orbits (UPO), densely embedded in it (see, e.g., [14]): the neighborhood of any point of the attractor, however small it is, is visited by periodic orbits. As it evolves on a strange attractor, a typical chaotic trajectory visits the neighborhood of a number of these UPO, approaching them along their stable direction and leaving them along the local unstable direction, after an interval of time whose duration depends on how closely the periodic orbit has been approached.

In low-dimensional attractors, the crossing of the neighborhood of an UPO of relatively low period by a chaotic trajectory shows itself clearly in the temporal signal as a burst of almost periodic behavior. This allows one to extract approximations of periodic orbits from experimental time series. Some examples of such sequences, with a high signal to noise ratio, can be found, for instance, in Ref. [7].

Unstable periodic orbits have been recognized as a major tool to analyze chaotic systems. Indeed, they provide a hierarchical approximation of a strange attractor: low-period orbits model the global structure of the attractor, while finer details can be resolved using high-period orbits. One promising and powerful method based on this approach is the

topological analysis proposed by Mindlin *et al.* [1], which proceeds as follows.

Periodic orbits are associated with closed curves in the phase space of the system. When this phase space is three dimensional, these curves can be characterized using the mathematical framework of knot theory (see, e.g., Ref. [19]). The latter associates with a three-dimensional closed curve (or a set of such curves) topological numbers which are invariants with respect to isotopy, i.e., which remain unchanged when the curve is continuously deformed without intersecting itself.

The relevance of these invariants stems from the deterministic nature of chaotic behavior. Indeed the uniqueness theorem (see, e.g., Ref. [20]) implies that a periodic orbit cannot intersect itself or another orbit without violating determinism at the point of intersection. As a result, invariants from knot theory are well defined and are insensitive to deformations induced by modifying a control parameter. For example, the relative placement of a pair (α, β) of unstable periodic orbits can be characterized on its whole domain of existence in parameter space by several topological quantities such as the linking number $lk(\alpha, \beta)$, which indicates how many times α winds around β .

The keystone of topological analysis is that any set of periodic orbits embedded in the attractor is associated to a set of orbits with identical topological invariants on a two-dimensional manifold, called the *template* [21–23,1]. This surface can be viewed as a *knot holder* on which all the periodic orbits extracted from the attractor can be laid down via a continuous deformation without crossing. Thus the template provides a simple and complete description of the global topological organization of the flow.

In this section, we describe the steps we have followed to extract UPO from experimental signals of the FL and to compute their topological invariants. The determination of the corresponding templates will be presented in Sec. IV.

To perform a topological analysis, a time series $X(t)$ has to be embedded in a three-dimensional phase space, so that knot theory can be applied. In Sec. III A, we first describe the particular phase space we have used. Due to the relatively complex nature of the signals coming from the FL, it has been necessary to process them using analog techniques — which we present in Sec. III B — in order to obtain a time series suitable for topological analysis. Indeed, computing the topological invariants of the UPO detected in the time series requires an embedding phase space where orbits are well separated. If two orbits are too close to each other in some region of the attractor, the experimental noise and the slight uncertainty in their precise localization (we use orbits approximating the true UPO) may result in unreliable measurements of their relative positions and, thus, of their linking invariants. In Sec. III C, we briefly review the close-return technique used to extract the unstable periodic orbits from the time series. Last, we classify the detected orbits using symbolic dynamics and compute their topological invariants for chaotic regimes inside the $C_{1/4}$, $C_{1/3}$, and $C_{1/2}$ chaotic regions in Sec. III D.

A. Embedding phase space

As mentioned above, topological analysis requires that the time series $X(t)$ under study be embedded in a 3D phase

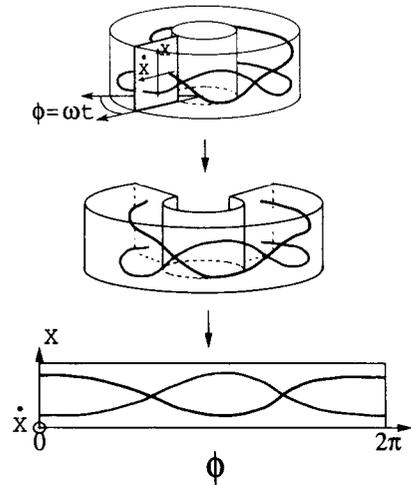


FIG. 2. 3D differential embedding phase space. $X(t)$ is a dynamical variable and ϕ the modulation phase. The topological information (contained in overcrossings and undercrossings) is completely preserved in a plot of X vs ϕ . For example, the two crossings in the latter reflect the fact that each orbit winds one time around the other, which corresponds to a linking number of 1.

space. In our experiments, we have used a phase space with coordinates $[X(t), \dot{X}(t), \phi(t)]$, where $\phi(t) = \omega t \pmod{2\pi}$ is the phase of the period- T modulation. This phase space, which is schematically displayed in Fig. 2, is topologically equivalent to a solid torus $D^2 \times S^1$ (D^2 being the unit disk and S^1 the unit circle). This is a natural geometry for a modulated system, as a Poincaré section of the attractor can be readily obtained by means of a stroboscopic sampling. Moreover, this topology restricts isotopy moves to a smaller class, namely, regular isotopy, and allows one to make use of more powerful invariants, such as the relative rotation rates introduced by Solari and Gilmore [24,25], which provide a finer description of the relative rotation of the UPO than the linking number.

$X(t)$ and its time derivatives are natural variables to describe a dynamical system. There is, however, one more reason for choosing the time derivative $\dot{X}(t)$ as the second coordinate. Indeed, the topological structure of a periodic orbit α of period T_α can then be completely analyzed by plotting its representative time series segment $X_\alpha(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T_\alpha]$ as a function of $\phi = \omega t \pmod{2\pi}$ [7]. As illustrated in Fig. 2, this plot can be seen as a projection of the orbit onto the $\dot{X} = 0$ cylinder along the \dot{X} direction, and presents the orbit as a braid on n strands. Topological information is preserved provided that we know at each crossing which of the two strands passes over the other in the 3D space. This is, in fact, trivial since the strand with the greater slope corresponds to the higher value of \dot{X} .

As a result, listing the successive crossings as ϕ increases from 0 to 2π provides an algebraic description of the topological structure of the orbit, from which any topological invariant can be readily computed. As a simple example, computing the linking number of two orbits amounts to counting the number of crossings between the strands of these two orbits in a $X(\phi)$ plot (see the example of Fig. 2).

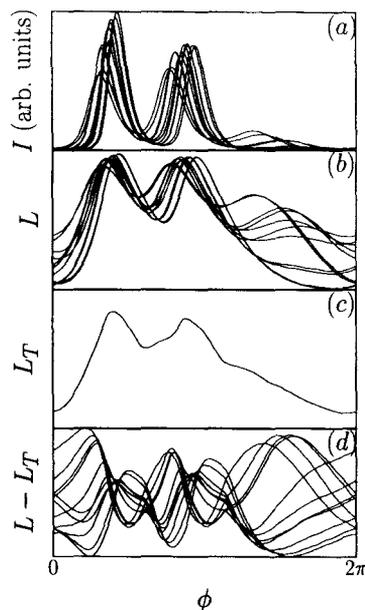


FIG. 3. Enhancement of the topological information of the signal by analog processing. (a) A polarization eigenstate intensity: I . (b) Logarithmic amplification of this signal: $L = \ln(I)$. (c) The unwanted period- T oscillation L_T . (d) The final signal $X = L - L_T$.

Clearly, evaluating this number requires that different strands be well separated, particularly because of the limited resolution of the eight-bit transient digitizer used in the experiments. This is not necessarily so when directly recording a natural variable of the system, for example, the laser intensity. In this case, the signal has to be processed using analog techniques before the topological analysis of digitized data can be carried out.

B. Signal processing

As Fig. 3(a) shows, the intensity I of a polarization eigenstate is not a suitable variable, because it almost completely vanishes during long periods of time. In these regions of low intensity, the different orbits are indiscernible and we cannot determine whether some crossings occur. As advocated in Ref. [26], this problem can be overcome by using a logarithmic amplifier which delivers an output signal $L(t) = \ln(I(t) + I_0)$. Let us note that this procedure, successfully followed in previous topological investigations of the modulated CO_2 laser [7,8], preserves the topological information since $L(t)$ is a monotonic function of $I(t)$.

As can be seen in Fig. 3(b), this first step improves the quality of the signal to some extent but yet does not suffice. Indeed, the resulting signal $L(t)$ displays a strong periodic component at frequency $1/T$ which masks the rest of the dynamics: the signal remains confined to a narrow band around this period- T oscillation. Fortunately, any T -periodic transformation of the form $L(t) \rightarrow L(t) + f(\phi(t))$ does not modify the relative positions of crossings and, hence, leaves isotopy invariants unchanged.

Experimentally, one simple way to proceed is thus to subtract a T -periodic signal $L_T(t) = L_T(\phi(t))$ from $L(t)$, where $L_T(t)$ approximates the unwanted period- T oscillation. In our experiments, we have chosen $L_T(t)$ to be

$$L_T(t) = \frac{\xi_+(\phi(t)) + \xi_-(\phi(t))}{2}, \quad (2)$$

where $\xi_+(\phi(t))$ and $\xi_-(\phi(t))$ are, respectively, the high and low envelopes of $L(t)$ computed from a record of about 1000 modulation periods

$$\xi_+(\phi_0) [\text{resp. } \xi_-(\phi_0)] = \max(\text{resp. } \min)\{L(t); \phi(t) = \phi_0\}.$$

Figure 3(c) displays the L_T correction corresponding to the signal of Fig. 3(b).

This periodic signal is then generated with a programmable synthesizer phase locked on the modulation, and subtracted from the output of the logarithmic amplifier. The final signal, shown in Fig. 3(d), clearly displays the topological information and provides a suitable dynamical variable. In the following, the time series $X(t)$ will, thus, always designate the dynamical variable

$$X(t) = L(t) - L_T(\phi(t)) \quad (3)$$

and the embedding 3D phase space will be the $D^2 \times S^1$ torus $[X(t), \dot{X}(t), \phi(t)]$.

C. Detection of the unstable periodic orbits

The extraction of periodic orbits embedded in the attractor is carried out by applying to time series of $X(t)$ the close-return technique proposed in Ref. [2]. The latter proceeds by looking for time series segments $\{X(t); t \in [t_0, t_0 + pT]\}$ satisfying

$$|X(t + pT) - X(t)| < \varepsilon \quad \text{for } t_0 < t < t_0 + pT. \quad (4)$$

Such a sequence indicates that the trajectory in phase space is shadowing a period- pT orbit and can be used as an approximation of this orbit, as better as ε is smaller.

In our experiments, with a signal to noise ratio in the order of 1%, we have chosen ε to be 5% of the maximum amplitude of $X(t)$ and have narrowed the search to orbits of period pT up to $p = 10$.

Due to ergodicity, an infinitely long chaotic trajectory passes arbitrary close to any UPO. On the contrary, a finite experimental time series can only approach a finite number of periodic orbits. Furthermore, the presence of noise will prevent higher-period orbits to be shadowed over a sufficient interval of time. Therefore, only a relatively small number of orbits can, in practice, be extracted, except when the signal to noise ratio is high. For each attractor we have recorded signals over 10 000 modulation periods, which typically contained some hundred almost periodic sequences, corresponding to about ten distinct UPO for the $C_{1/4}$ and $C_{1/3}$ regions. In the $C_{1/2}$ region, we have observed the chaotic regimes to be much less dissipative than in the two former ones. This adversely affects the detection of the UPO for two reasons: the time needed before entering the neighborhood of a given UPO is significantly increased, and the influence of noise is strengthened. This explains why the results we present for this part of the parameter space are obtained from a smaller number of periodic orbits than for the $C_{1/4}$ and $C_{1/3}$ regimes. We are currently trying to design an alternate detection method to overcome this limitation.

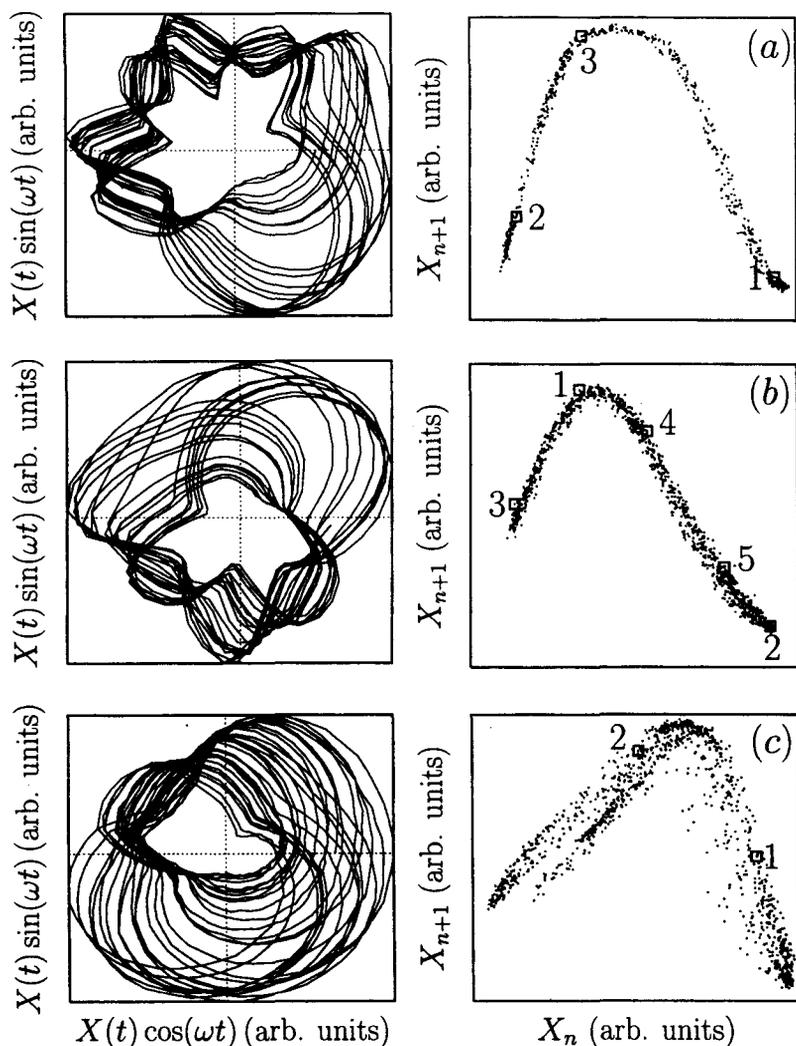


FIG. 4. Two-dimensional projections of attractors (on the left) and their corresponding first return diagram (X_{n+1}, X_n) , where X_n is the stroboscopically sampled variable $X_n = X(\phi_0 + 2n\pi)$. (a) Regime $C_{1/4}$. (b) Regime $C_{1/3}$. (c) Regime $C_{1/2}$. Note that these return diagrams are well approximated by a unimodal map, and can be used to perform a symbolic encoding of the orbits. On diagram (a) is plotted the $xyx = x^2y$ period- $3T$ orbit, on (b) the x^2y^3 period- $5T$ orbit, and on (c) the xy period- $2T$ orbit.

D. Spectrum of periodic orbits and computation of the topological invariants

Template analysis is significantly easier when the extracted periodic orbits can be classified using symbolic dynamics. Symbolic dynamics is a powerful approach of chaotic behavior and proceeds by representing a chaotic trajectory as a sequence of symbols while retaining most of the dynamical information. Most topological investigations, so far, have been carried out in cases where symbolic coding could be obtained by means of 1D first return maps [2,5-7], with the exception of Ref. [8].

For each regime of the FL, the 1D first return diagram (X_n, X_{n+1}) , where the $X_n = X(t_0 + nT)$ are obtained by a stroboscopic sampling, is well approximated by a unimodal map of an interval onto itself: $X_{n+1} = P(X_n)$, as can be seen in Fig. 4. The theory of symbolic dynamics for such maps is well established (see, e.g., Ref. [27]) and thus can be used here to encode periodic orbits.

A unimodal map has a single critical point X_c which separates the regions with positive and negative slope. A pT orbit, identified by p samples $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_1 + T)$, \dots , $X_p = X(t_1 + (p-1)T)$, is encoded by a binary string $s_1 s_2 \dots s_p$, where $s_i = x$ (respectively, y) when $X_i < X_c$ (respectively, $X_i > X_c$). As an example, the period-

$3T$ orbit $\overline{yxx} = \overline{yx^2}$ of a $C_{1/4}$ regime, the period- $5T$ $\overline{yxxyy} = \overline{yx^2y^2} = \overline{x^2y^3}$ of a $C_{1/3}$ regime, and the period- $2T$ xy of the $C_{1/2}$ regime are displayed in Figs. 4(a)–4(c). The relevance of this symbolic encoding will fully appear in Sec. IV.

Once the periodic orbits have been extracted and classified according to symbolic dynamics, one can proceed to compute their topological invariants. For each periodic orbit, we have computed its self-linking number and self-relative rotation rates, while pairs of orbits have been characterized by their linking number and relative rotation rates. Note that, with the exception of the linking number, these invariants are available thanks to the toroidal topology of the phase space.

(Self-)linking numbers are determined by counting crossings in $X(\phi)$ plots as described in Sec. III A: the self-linking (respectively, linking) number is simply the sum (respectively, half-sum) of the number of crossings of the orbit with itself (respectively, the other orbit).

As for the relative rotation rates, let us briefly recall that a period- pT orbit α and a period- qT orbit β can be characterized by $p \times q$ relative rotation rates $\{R_{ij}(\alpha, \beta); i = 1, \dots, p \text{ and } j = 1, \dots, q\}$. If the intersections of α and β with a Poincaré section are labeled $X_1^\alpha, \dots, X_p^\alpha$ and $X_1^\beta, \dots, X_q^\beta$, the R_{ij} relative rotation rate is defined as the

TABLE II. Relative rotation rates of UPO extracted from the $C_{1/4}$ regime. The exponents indicate the relative weight of the given values. For example, the pair $(5T_b, 5T_c)$ is characterized by $5 \times 5 = 25$ rotation rates, of which $15 = 3 \times 5$ (respectively, $10 = 2 \times 5$) take the value $17/5$ (respectively, $16/5$). Blank entries correspond to measurements whose exact value could not be ascertained.

Orbits	T	$2T$	$3T_a$	$3T_b$	$4T$	$5T_a$	$5T_b$	$5T_c$
$T=y$	0							
$2T=xy$	$\frac{7}{2}$	$0, \frac{7}{2}$						
$3T_a=x^2y^2$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$0, (\frac{10}{3})^2$					
$3T_b=x^2y$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$0, (\frac{10}{3})^2$				
$4T=xy^3$	$\frac{7}{2}$	$\frac{13}{4}, \frac{7}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$0, \frac{13}{4}, (\frac{7}{2})^2$			
$5T_a=x^2y^3$	$\frac{17}{5}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{49}{15}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{67}{20}$	$0, (\frac{16}{5})^2, (\frac{17}{5})^2$		
$5T_b=x^2yxy$	$\frac{17}{5}$			$\frac{10}{3}$	$\frac{67}{20}$		$0, (\frac{16}{5})^2, (\frac{17}{5})^2$	
$5T_c=xyxy^2$	$\frac{17}{5}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{10}{3}$			$(\frac{16}{5})^2, (\frac{17}{5})^3$	$(\frac{16}{5})^2, (\frac{17}{5})^3$	$0, (\frac{17}{5})^4$
$6T_a=x^2y^2xy$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{19}{6}, (\frac{10}{3})^2$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{10}{3}$
$6T_b=x^2y^4$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{19}{6}, (\frac{10}{3})^2$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{10}{3}$
$6T_c=x^2yxy^2$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$		$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{10}{3}$
$8T=x^2y^3x^2y$	$\frac{27}{8}$	$\frac{13}{4}, \frac{27}{8}$						
		$6T_a$		$6T_b$		$6T_c$		$8T$
$6T_a=x^2y^2xy$		$0, \frac{19}{6}, (\frac{10}{3})^4$						
$6T_b=x^2y^4$			$0, \frac{19}{6}, (\frac{10}{3})^4$					
$6T_c=x^2yxy^2$		$\frac{19}{6}, (\frac{10}{3})^5$			$0, \frac{19}{6}, (\frac{10}{3})^4$			
$8T=x^2y^3x^2y$							$0, (\frac{27}{8})^3, (\frac{13}{4})^4$	

number of times trajectories starting from X_i^α and X_j^β wind around each other until both return simultaneously to their initial condition, divided by the number of elapsed periods. Self-relative rotation rates are similarly defined for single orbits with the convention that $R_{ii}(\alpha, \alpha) = 0$. The reader may find a more detailed exposition in Refs. [24,25,5,28]. In practice their determination amounts to evaluating partial sums of crossings.

Inside each of the $C_{1/4}$, $C_{1/3}$, and $C_{1/2}$ regions of parameter space, we have analyzed several chaotic regimes, and we present below the spectra of orbits and the measured invariants for three sample regimes. Table II collects the symbolic sequences and (self-)relative rotation rates for the one located in the $C_{1/4}$ region. Table III displays the corresponding

linking numbers, which are computed from the relation [24,25,28]

$$lk(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q R_{ij}(\alpha, \beta). \tag{5}$$

The self-linking number of an orbit α is simply given by $slk(\alpha) = lk(\alpha, \alpha)$. Tables IV and V contain the linking numbers for the regimes located inside the $C_{1/3}$ and $C_{1/2}$ regions.

A variation of a control parameter modifies the spectrum of orbits. This explains why no period $3T$ orbit appears in Table IV: the corresponding chaotic regime is located before the $3T$ periodic window, in contrast with the two other

TABLE III. Linking and self-linking numbers of the UPO extracted from the $C_{1/4}$ regime. For example, $lk(2T, 4T) = 4 \times \frac{13}{4} + 4 \times \frac{7}{2} = 27$.

Orbits	T	$2T$	$3T_a$	$3T_b$	$4T$	$5T_a$	$5T_b$	$5T_c$	$6T_a$	$6T_b$	$6T_c$	$8T$
$T=y$	0											
$2T=yx$	7	7										
$3T_a=x^2y$	10	20	20									
$3T_b=xy^2$	10	20	30	20								
$4T=xy^3$	14	27	40	40	41							
$5T_a=x^2y^3$	17	33	49	50	67	66						
$5T_b=x^2yxy$	17			50	67		66					
$5T_c=y^2xyx$	17	34	50			83	83	68				
$6T_a=x^2y^2xy$	20	40	59	60	80	99	99	100	99			
$6T_b=x^2y^4$	20	40	59	60	80	99	99	100		99		
$6T_c=x^2yxy^2$	20	40		60	80	99			119		99	
$8T=x^2y^3x^2y$	27	53										

TABLE IV. Linking and self-linking numbers of the UPO extracted from the $C_{1/3}$ regime.

Orbits	T	$2T$	$4T$	$5T_a$	$5T_b$	$6T_a$	$6T_b$	$7T_a$	$7T_b$	$7T_c$	$9T_a$	$9T_b$
$T=y$	0											
$2T=xy$	5	5										
$4T=xy^3$	10	19	29									
$5T_a=xy^4$	12	24	48	48								
$5T_b=xyxy^2$	12	24	48	60	48							
$6T_a=xy^5$	15	29		72	72	73						
$6T_b=xyxy^3$	15	29	58	72	72		73					
$7T_a=xyxyxy^2$	17	33	67	84	83	101	100	100				
$7T_b=xy^6$	17	34	68	84	84		102	118	102			
$7T_c=xyxy^4$	17	34	68	84	84	102				102		
$9T_a=xy^2xyxy^3$	22	43	86	108		130				151	172	
$9T_b=xyxyxy^4$	22	43	87									174

sample regimes. We have observed that inside a single region $C_{1/n}$, topological invariants depend on symbolic sequences only. For example, we have found $lk(y,xy)=7$ for any $C_{1/4}$ -type regime. Since the linking number of two orbits does not depend on control parameters in their whole domain of existence, this gives strong evidence that a given periodic orbit is associated to one and only one symbolic sequence throughout a chaotic region $C_{1/n}$.

On the contrary, two orbits with the same symbolic sequence, but which belong to two different $C_{1/n}$ regions, appear to be different, as shown by their topological properties. For example, we have found that $lk(y,xy)=7$ in the $C_{1/4}$ region but $lk(y,xy)=5$ (respectively, 3) in the $C_{1/3}$ (respectively, $C_{1/2}$) one. As we will see in Sec. IV, this discrepancy is explained by the fact that these regions correspond to three different templates, and thus to three different types of topological organization.

IV. DETERMINATION OF THE TEMPLATES

As we have seen in the preceding section, the first stage of topological analysis yields tables collecting the invariants of orbits and pairs of orbits, from which the global structure of the flow is hard to discern.

To gain more insight into this structure, the organization of the knotted orbits can be modeled by means of a branched 2D manifold, the *template*. The mathematical definition of a template (a.k.a. ‘‘knot holder’’) has been introduced by Birman and Williams [21]. They have proved that the periodic orbits of a three-dimensional hyperbolic flow exhibiting chaos are in one-to-one correspondence with those of a semi-flow defined on the template. The latter is obtained by col-

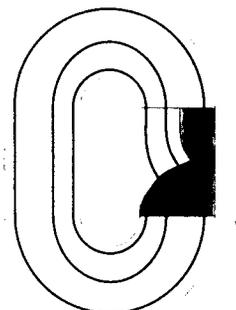
TABLE V. Linking and self-linking numbers of UPO extracted from the $C_{1/2}$ regime.

Orbits	T	$2T$	$3T$	$4T$	$10T$
$T=x$	0				
$2T=xy$	3	3			
$3T=x^2y$	4	8	8		
$4T=x^2y^2$	5	10	15	15	
$10T=xy^2x^2y^2x^2y$	13				

lapsing the invariant set of the 3D flow along its stable manifold, i.e., by identifying points whose images converge to each other as time goes to infinity. As, for obvious reasons, a periodic orbit intersects neither its stable manifold nor those of other periodic orbits, the topological organization is preserved in the process.

Strange attractors are generally not hyperbolic. In particular, periodic orbits can be created or destroyed as a control parameter is varied. However, existing periodic orbits are linked as in the hyperbolic limit, since their topological invariants do not depend on control parameters, and can be put in correspondence with some periodic orbits of the hyperbolic template. Thus, for experimental systems, the template is still a relevant concept but differ from the mathematical definition by the fact that not all its periodic orbits do have a counterpart in the attractor.

One of the most simple chaotic topological structures is the one described by the horseshoe template, named after the Smale’s horseshoe, a celebrated paradigm of a chaotic dynamical system (see, e.g., Ref. [28]). Figure 5 shows the horseshoe template holding a $3T$ orbit. It is essentially divided into two parts. The most important one models the folding and stretching processes organizing the strange attractor. At its beginning, the surface splits into several branches (two in the present case). Each branch may be twisted by an integer number of half turns and/or wind around the other branches. All branches then rejoin each other along a common line (the *branch line*) where they are

FIG. 5. The horseshoe template holding the x^2y period- $3T$ orbit. Its algebraic representation is given by the matrices in Eqs. (8).

superimposed in a certain order. The remaining part merely connects the branch line with the one where branches split off. It may display one or more full twists, whose number is called the global torsion of the template.

The horseshoe template is of particular interest not only because of its simplicity but also because it is the only one that has been, so far, clearly observed in experimental systems. It has been identified in optical systems, such as CO₂ lasers with modulated losses [7,8] or with a saturable absorber [6], a NMR laserlike oscillator [5], and other dynamical systems such as the Belousov-Zhabotinskii chemical reaction [2], an electrochemical reaction [3], or a vibrating string [4].

To relate experimentally measured invariants to the structure of the template, an algebraic description of the latter is needed. As proposed by Mindlin *et al.* [1,2], this can be achieved by defining two matrices, the $n \times n$ template matrix T and the $1 \times n$ insertion matrix \mathcal{I} , where n is the number of branches of the template.

As we will see below, the topological organization of the chaotic regimes described in previous sections, corresponds to templates with two branches, and we therefore limit ourselves in the sequel to the $n=2$ case. Let us label the two branches x and y . We recall that each periodic orbit on the template can be given a unique symbolic name (which we write overlined) by listing the symbols of the branches that it successively visits. For example, the $\overline{x^2y^3}$ orbit visits branch x twice, then branch y thrice before returning to its starting point. In particular, there are two period-1 orbits \overline{x} and \overline{y} associated to the two branches of the template.

The template matrix is written out as

$$T = \begin{pmatrix} t_x & 2l \\ 2l & t_y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

where t_x (respectively, t_y) is the local torsion, in units of π , of the \overline{x} (respectively, \overline{y}) orbit, and thus the number of half-twists of the associated branch, and $l = lk(\overline{x}, \overline{y})$ is the linking number of the \overline{x} and \overline{y} orbits.

The insertion matrix \mathcal{I} reads

$$\mathcal{I} = (0 \quad m), \quad (7)$$

where $m=1$ (respectively, -1) if the y branch is above (respectively, below) the x branch on the branch line.

For example, the horseshoe structure with zero global torsion of Fig. 5 is described by the two following matrices:

$$T_{hs} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8a)$$

$$\mathcal{I}_{hs} = (0 \quad 1). \quad (8b)$$

The four numbers t_x , t_y , l , and m completely describe the structure of a two-branch template. As a result, the linking number of two periodic orbits with given symbolic sequences, as well as their self-linking numbers, can be expressed as functions of these numbers using techniques similar to those presented in Ref. [28]. In fact, these formulas are almost nearly linear, except for the presence of terms

involving $o(t_{x,y})$, where $o(t)$ indicates the parity of $t \in \mathbb{Z}$: $o(t)=1$ (respectively, 0) if t is odd (respectively, even).

Determining the template structure from the experimentally measured invariants thus amounts to equating the formulas yielding the invariants of some extracted orbits with the measured values, and then solving for the four unknowns t_x , t_y , l , and m . Four equations should, in principle, suffice. However, due to the presence of the $o(t_{x,y})$ terms, the computation is usually simpler when using a few more equations. As an example, we now determine the topological structure of the $C_{1/4}$ sample regime from the following five equations:

$$slk(\overline{xy}) = 2l + m = 7, \quad (9a)$$

$$lk(\overline{y}, \overline{xy}) = l + \frac{1}{2}[t_y + o(t_y)m] = 7, \quad (9b)$$

$$lk(\overline{y}, \overline{xyy}) = l + t_y = 10, \quad (9c)$$

$$lk(\overline{y}, \overline{xyyy}) = l + \frac{1}{2}[3t_y + o(t_y)m] = 14, \quad (9d)$$

$$lk(\overline{xy}, \overline{xy}) = 3l + m + t_x + \frac{1}{2}[t_y + o(t_y)m] = 20. \quad (9e)$$

Combining Eqs. (9b) and (9d) yields

$$t_y = lk(\overline{y}, \overline{xyyy}) - lk(\overline{y}, \overline{xy}) = 7. \quad (10)$$

Substituting this value of t_y in Eq. (9c) readily gives

$$l = 10 - t_y = 3. \quad (11)$$

Equation (9a) then indicates that

$$m = 7 - 2l = 1, \quad (12)$$

and, finally, Eq. (9e) yields the last unknown

$$t_x = 20 - 3l - m - \frac{1}{2}[t_y + o(t_y)m] = 6. \quad (13)$$

The template and insertion matrices are thus equal to

$$T = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{horseshoe}} + 3 \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{global torsion}}$$

$$\mathcal{I} = (0 \quad 1), \quad (14b)$$

In Eq. (14a), the decomposition of T shows that the corresponding template has a horseshoelike structure with a global torsion of 3. Indeed, as illustrated by Fig. 6, each element of a template matrix is increased by two when one full turn is added to the global torsion.

Note that we have found t_x and t_y to be even and odd, respectively. This could have been expected, as x and y , respectively, correspond to the branches of positive and negative slope of the 1D first return map. Hence, we could have slightly simplified the calculation by assuming from the beginning that $o(t_x)=0$ and $o(t_y)=1$. However, we wanted to stress that this piece of information is not strictly required.

As the reader may have noticed, we have used fewer topological invariants than have been measured. The remain-

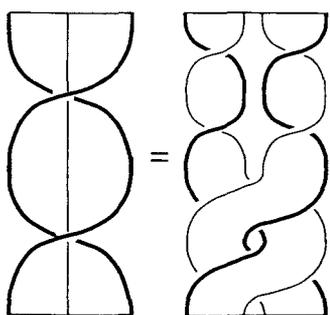


FIG. 6. Illustration of global torsion. Cutting the left ribbon in the middle yields the two ribbons on the right. It is easily seen that the contribution of the latter to the template matrix elements t_x , t_y , and $2l$ is equal to two.

ing ones can, thus, be used to validate the template by verifying that they are correctly predicted by the solution displayed in Eqs. (14). As an example,

$$lk(\overline{xyxy^2}, \overline{x^2y^2xy}) = 15l + 3t_x + \frac{9}{2}t_y + m\{6 - o(t_y)[\frac{1}{2} + o(t_x)]\}. \quad (15)$$

It can be easily checked that the experimentally measured value of 100 is obtained by substituting in Eq. (15) the values of t_x , t_y , l , and m given by Eqs. (14). In the same way, we have verified that all the unambiguous invariants listed in Tables II and III were correctly predicted by the template given in Eqs. (14).

The same procedure has been carried out for the chaotic attractors of the $C_{1/3}$ and $C_{1/2}$ windows and reveals horseshoe templates with global torsions of 2 and 1, respectively, [see Figs. 7(b) and 7(c)]

$$T_{1/3} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (16a)$$

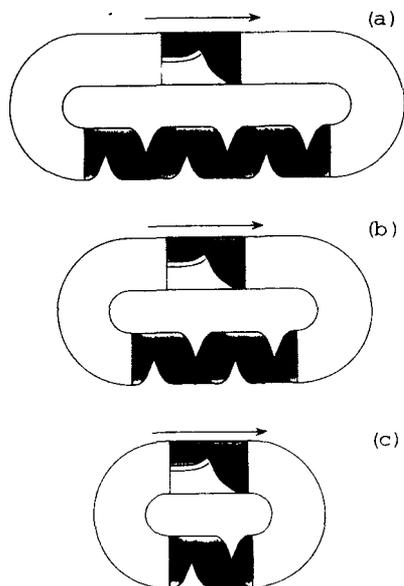


FIG. 7. Evolution of the template with the control parameter. (a) $C_{1/4}$ (b) $C_{1/3}$ (c) $C_{1/2}$.

$$T_{1/3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16b)$$

and

$$T_{1/2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (17a)$$

$$T_{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17b)$$

It should be noted that for $T_{1/2}$, due to the limited number of invariants, another template, with $t_y = 4$ instead of 3, is compatible with the measured topological invariants. We have, however, discarded this solution as (i) it does not reproduce the known parities of the two branches, (ii) a difference of two between the torsions of the two branches seems incompatible with the existence of a continuous flow.

It thus appears that chaotic regimes located inside the three chaotic regions $C_{1/2}$, $C_{1/3}$, and $C_{1/4}$ experience the same stretching and folding mechanisms as those described by Smale's horseshoe, but that they can be distinguished according to the global torsion of the template. The latter is closely connected to the ratio of the control parameter ω to the linear resonance frequency ω_r , as expected from the theoretical studies on nonlinear oscillators by Gilmore and McCallum [10]. The reader may verify that the existence of this global torsion is visible in Fig. 4 where global twists of, respectively, three, two, and one full turns can easily be seen.

V. CONCLUSION

We have analyzed the topological structure of chaotic attractors of a pump-modulated Nd-doped fiber laser for various values of the modulation frequency. Under the experimental conditions investigated, these chaotic regimes are found in islands $C_{1/n}$ located around the subharmonics ω_r/n ($n=2,3,4$) of the relaxation frequency ω_r .

Our main result is that the topological organization of the regimes found inside the $C_{1/n}$ region is not described by a simple horseshoe template, but by a horseshoe with a global torsion θ_g of $n-1$ in 2π units. This relation agrees with the theoretical study of the topology of nonlinear driven oscillators carried out by Gilmore and McCallum [10], and should accordingly hold in other experimental driven systems exhibiting chaos at subharmonic resonances. However, the present work provides, to our best knowledge, the first experimental illustration of this phenomenon, as well as the first experimental characterization of a system yielding different templates for different regions of the parameter space, in particular, templates with a nonzero global torsion.

Let us conclude by noting that more complex templates than those reported here should be found in other regions of parameter space. In the present study, indeed, the successive resonance tongues $C_{1/n}$ are separated by stable period- T behavior. When leaving the $C_{1/n}$ domain, all periodic orbits embedded in the strange attractor must be annihilated before the $C_{1/(n+1)}$ region is reached, because their invariants are

incompatible with the new topological organization. However, it is well known that resonance tongues may overlap when the modulation amplitude is sufficiently increased (see, e.g., [10]). In this case, some UPO of the $C_{1/m}$ domain can coexist in the same attractor with UPO of the $C_{1/(n+1)}$ region. As none of the above-mentioned templates can support simultaneously both types of orbits, this calls for the existence of more complex templates with more than two branches. The hope of observing such a template certainly

motivates further experimental investigations of the fiber laser and of other modulated class-*B* lasers.

ACKNOWLEDGMENTS

The Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne is Unité de Recherche Associée au CNRS. The Centre d'Études et Recherches Lasers et Applications is supported by the Ministère Chargé de la Recherche, the Région Nord-Pas de Calais and the Fonds de Développement Économique des Régions.

-
- [1] G. B. Mindlin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2350 (1990).
 [2] G. B. Mindlin *et al.*, J. Nonlinear Sci. **1**, 147 (1991).
 [3] C. Letellier, L. L. Sceller, and J. L. Hudson, J. Phys. Chem. **99**, 7016 (1995).
 [4] N. B. Tufillaro *et al.*, Phys. Rev. E **51**, 164 (1995).
 [5] N. B. Tufillaro *et al.*, Phys. Rev. A **44**, 4786 (1991).
 [6] F. Papoff *et al.*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1128 (1992).
 [7] M. Lefranc and P. Glorieux, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. **3**, 643 (1993).
 [8] M. Lefranc *et al.*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1364 (1994).
 [9] S. O. Firlle, M. A. Natiello, and M. Eiswirth, Phys. Rev. E **53**, 1257 (1995).
 [10] R. Gilmore and J. W. L. McCallum, Phys. Rev. E **51**, 935 (1995).
 [11] G. Boulant, M. Lefranc, S. Bielawski, and D. Derozier, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. (to be published).
 [12] D. Pieroux and P. Mandel, Opt. Commun. **107**, 245 (1994).
 [13] Y. I. Khanin, *Principles of Laser Dynamics* (Elsevier, Amsterdam, 1995).
 [14] D. Auerbach *et al.*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2387 (1987).
 [15] S. Bielawski, D. Derozier, and P. Glorieux, Phys. Rev. A **46**, 2811 (1992).
 [16] D. Derozier, S. Bielawski, and P. Glorieux, Opt. Commun. **83**, 97 (1991).
 [17] K. Briggs, Phys. Lett. A **151**, 27 (1990).
 [18] G. B. Mindlin and R. Gilmore, Physica D **58**, 229 (1992), special issue on Interpretation of Time Series from Nonlinear Dynamics.
 [19] L. H. Kaufmann, *Knots and Physics* (World Scientific, Singapore, 1991).
 [20] J. Guckenheimer and P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, Berlin, 1983).
 [21] J. S. Birman and R. F. Williams, Topology **22**, 47 (1983).
 [22] P. J. Holmes, in *New Directions in Dynamical Systems*, edited by T. Bedford and J. Swift (Cambridge University Press, Cambridge, 1988), pp. 150–191.
 [23] P. J. Holmes, Physica D **40**, 42 (1989).
 [24] H. G. Solari and R. Gilmore, Phys. Rev. A **37**, 3096 (1988).
 [25] N. B. Tufillaro, H. G. Solari, and R. Gilmore, Phys. Rev. A **41**, 5717 (1990).
 [26] M. Lefranc, D. Hennequin, and P. Glorieux, Phys. Lett. A **163**, 269 (1992).
 [27] B.-L. Hao, *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems* (World Scientific, Singapore, 1989).
 [28] N. B. Tufillaro, T. A. Abbott, and J. P. Reilly, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, Reading, 1992).
 [29] J. L. Kaplan and J. A. Yorke, in *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, edited by H. O. Walter and H.-O. Peitgen (Springer, Berlin, 1979), Vol. 730, pp. 204–227.

Annexe B

A non-horseshoe template in a chaotic laser model.

G. Boulant, M. Lefranc, S. Bielawski et D. Derozier,
Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng., à paraître.

A Non-Horseshoe Template in a Chaotic Laser Model

G. Boulant*, M. Lefranc†, S. Bielawski‡ and D. Derozier§

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, URA CNRS 249,
Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications,
Université des Sciences et Technologies de Lille,
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).

September 13, 1996

Abstract

We have performed a topological analysis of a chaotic regime of a modulated single-mode class B laser model, at realistic parameter values. In contrast with previous numerical and experimental studies of this type of laser, we observe a topological structure which differs from the one described by the paradigmatic horseshoe template. In view of this result, class B lasers appear to be good candidates for the first clear characterization of a non-horseshoe template in an experimental system.

1 Introduction

In the last years, unstable periodic orbits (UPO) have been recognized as a major tool to extract invariant quantities from the apparently erratic regimes of chaotic systems [Auerbach *et al.*, 1987]. In particular, the template analysis proposed by Mindlin *et al.* [1990; 1991; 1992] is a powerful method to compare and classify chaotic attractors (see also [Tuffillaro *et al.*, 1992]). It proceeds by characterizing the topological organization of the UPO embedded in a strange attractor through their invariant linking properties. In the phase space of the system, UPO are represented by intertwined closed curves which can be analyzed using concepts from knot theory, provided the system is three-dimensional (3D) [Kaufmann, 1991]. Key to this approach is the existence of a 2D branched manifold, the so-called “template”, or knot-holder, such that for any set of UPO of the attractor, one can find a set of closed curves on the template with identical topological invariants. This allows a systematic study of the structure of chaotic attractors, which is all the more

*e-mail: boulant@lsh.univ-lille1.fr

†e-mail: lefranc@lsh.univ-lille1.fr

‡e-mail: serge@lsh.univ-lille1.fr

§e-mail: domi@lsh.univ-lille1.fr

relevant as the topology of the UPO has a major influence on the bifurcation sequences of a chaotic system, as illustrated by Mindlin *et al.* [1993] and Gilmore & Mc Callum [1995]. In particular, template analysis can dramatically highlight the difference between two attractors if they are found to be associated to different templates.

The dynamics of several chaotic lasers has been studied by a topological analysis of their attractors: the CO₂ laser with a saturable absorber [Papoff *et al.*, 1992] or with modulated losses [Lefranc & Glorieux, 1993; Lefranc *et al.*, 1994], the nuclear magnetic resonance laser-type oscillator [Tuffillaro *et al.*, 1991], and the Nd³⁺-doped fiber laser [Boulant *et al.*, 1996]. Except for the laser with a saturable absorber which displays autonomous chaotic oscillations, these are modulated systems. The topological organizations of all these attractors have been shown to be described by a Smale's horseshoe template, including with non-zero global torsions in the case of the fiber laser. Similar results have been reported for other experimental systems such as the Belousov-Zhabotinskii chemical reaction [Mindlin *et al.*, 1991], an electrochemical reaction [Letellier *et al.*, 1995a], a glow discharge [Braun *et al.*, 1995] and a vibrating string [Tuffillaro *et al.*, 1995].

Contrary to what these results may seem to imply, the horseshoe template is not universal, as shown by numerical studies of the Rössler system [Letellier *et al.*, 1995b] and of the Duffing oscillator [Gilmore & McCallum, 1995]. On the experimental side, the existence of a non-horseshoe topological organization has been evidenced in only one system, a catalysis experiment, whose data were however not of sufficient quality to resolve the exact form of the associated template [Firle *et al.*, 1996].

In this paper, we report the observation of a non-horseshoe template for chaotic regimes of a realistic dynamical model, the modulated single-mode class B laser equations, at physically relevant parameter values. The three-branch structure of the corresponding template clearly differs from the one of the horseshoe template. This result is particularly interesting because previous template analyses of a modulated CO₂ laser [Lefranc & Glorieux, 1993; Lefranc *et al.*, 1994], which is well described by this model, had found a horseshoe template with zero global torsion, as had been predicted by previous numerical studies of this model [Solari & Gilmore, 1988]. Furthermore, the template we have found corresponds to one of those described by Gilmore & McCallum [1995] for a generic nonlinear driven oscillator. Thus, our result gives some confidence that a non-horseshoe template may be soon evidenced in a modulated class-B laser.

The paper is organized as follows. In Sec. 2, we describe the single-mode class B laser equations and give relevant derived quantities such as the relaxation frequency and damping rate. We then detail in Sec. 3 the procedure leading from the equations to the determination of the template via the computation of unstable periodic solutions and their topological invariants in phase space. Finally, we discuss how this work could be validated by an experimental study.

2 The Modulated Single-Mode Class B Laser Equations

In “two-level” schemes, semi-classical theory models laser dynamics using three variables, the radiation field, the population inversion of the two-level gain medium and the atomic polarization coupling the two former variables [Narducci & Abraham, 1988; Khanin, 1995]. A laser is said to be class B when the polarization evolves much faster than the two other ones, and thus can be adiabatically eliminated [Tredicce *et al.*, 1985; Narducci & Abraham, 1988; Khanin, 1995]. In this case, when operated in single-mode regime, the laser dynamics is described, under the mean field approximation and neglecting any transverse spatial dependence, by the following dimensionless ordinary differential equations (ODE) for the light intensity $I(t)$ and the population inversion $D(t)$ [Narducci & Abraham, 1988; Khanin, 1995; Dangoisse *et al.*, 1987]:

$$\frac{dI}{dt} = I(D - 1) \quad (1a)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma[A - D(1 + I)] \quad (1b)$$

These rate equations (or equivalent versions) have been extensively used in numerous numerical [Tredicce *et al.*, 1986; Dangoisse *et al.*, 1987; Solari *et al.*, 1987; Solari & Gilmore, 1988; Schwartz, 1988] and analytical [Erneux *et al.*, 1987; Schwartz & Erneux, 1994; Erneux *et al.*, 1995] studies of the modulated CO₂ and Nd:YAG lasers. Time t is measured in units of the photon lifetime in the cavity. A is the pump parameter normalized so that $A = 1$ at lasing threshold. The parameter γ is the population inversion relaxation rate in inverse reduced time units, and is usually small in class B lasers (of the order of 10^{-3} for a CO₂ laser and 10^{-4} for a Nd:YAG laser).

A linear stability analysis of Eqs. (1) shows that for $A > 1$ the steady state $I = A - 1$, $D = 1$ is unconditionally stable and that transients consist of relaxation oscillations with relaxation frequency ω_r and damping rate Γ_r given by:

$$\omega_r = \sqrt{\gamma(A - 1)} + O(\gamma^{3/2}) \quad (2a)$$

$$\Gamma_r = -\gamma A/2 \quad (2b)$$

At least one more degree of freedom is thus necessary to observe chaotic behavior. This may be achieved by modulating a parameter of the system, for example the intracavity losses. In this case, Eq. (1a) becomes:

$$\frac{dI}{dt} = I(D - 1 - m \cos \omega t) \quad (3)$$

where m ($|m| < 1$) and ω are respectively the amplitude and the frequency of the periodic modulation.

The parameter values we have used in our numerical experiment are $\gamma = 10^{-3}$, $A = 1.1$, and $m = 2.5 \times 10^{-2}$. The modulation frequency is $\omega = \omega_r = 10^{-2}$. Numerical integration has been performed using an adaptative step-size Runge-Kutta algorithm of order 8 [Hairer

et al., 1987]. When integrating Eqs. (3) and (1b), the I variable displays an alternation of almost constant sequences near $I = 0$ and of abrupt variations, which adversely affects the efficiency of the algorithm. We thus perform the change of variable $L = \ln I$ (see e.g. [Schwartz, 1988; Lefranc *et al.*, 1992]) and integrate the following ODE for L and D :

$$\frac{dL}{dt} = D - 1 - m \cos \omega t \quad (4a)$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma [A - D(1 + e^L)] \quad (4b)$$

The natural phase space of this dynamical system, schematically displayed in Fig. 1, is three-dimensional and reads $\{L(t), D(t), \phi(t)\}$, where $\phi(t) = (t/T) \pmod{1}$ is the phase of the period- T modulation. It has the same topology as a solid torus $D^2 \times S^1$, D^2 being the unit disk and S^1 the unit circle.

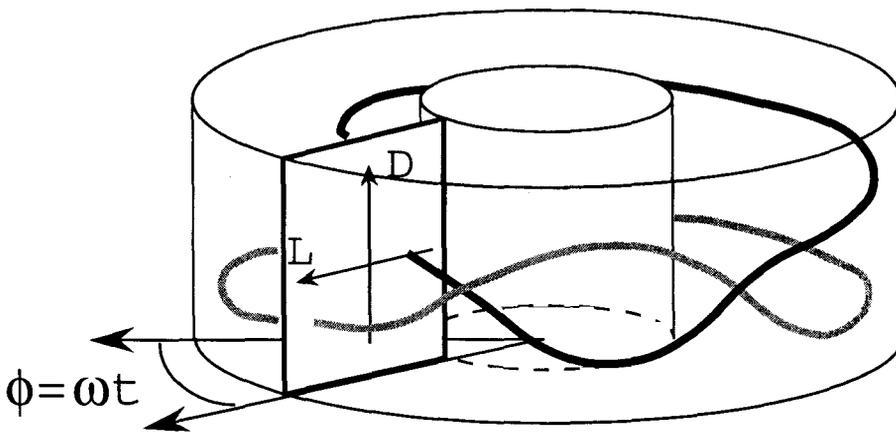


Figure 1: Phase space of the modulated system (4). The plane of constant phase shown can be used to perform a Poincaré section. Two periodic orbits of period T are schematically drawn. Their linking number is equal to 1.

In this phase space, a Poincaré section of the attractor can be readily obtained by means of a stroboscopic sampling, i.e. by choosing a section plane of constant phase. Fig. 2 shows the Poincaré section of the attractor corresponding to $\phi = 0$ in the given operating conditions.

It should be pointed out that the knot invariants of the unstable periodic orbits have identical values in the $\{L(t) = \ln I(t), D(t), \phi(t)\}$ and $\{I(t), D(t), \phi(t)\}$ phase spaces. This can easily be seen by considering the one-parameter family of embeddings $\{\xi_\alpha(t), D(t), \phi(t)\}$, where $\xi_\alpha(t) = \alpha \ln I(t) + (1 - \alpha)I(t)$ depends continuously on α . Since $\ln I$ is a monotonic function of I , the map $(I, D, \phi) \rightarrow (\xi_\alpha, D, \phi)$ is a diffeomorphism for each α . Therefore, going from the $\alpha = 0$ to the $\alpha = 1$ phase space amounts to performing an isotopy move and does not affect the topological invariants of the UPO. The results of the template analysis we will now carry out on system (4) are therefore transposable to the original system (1).

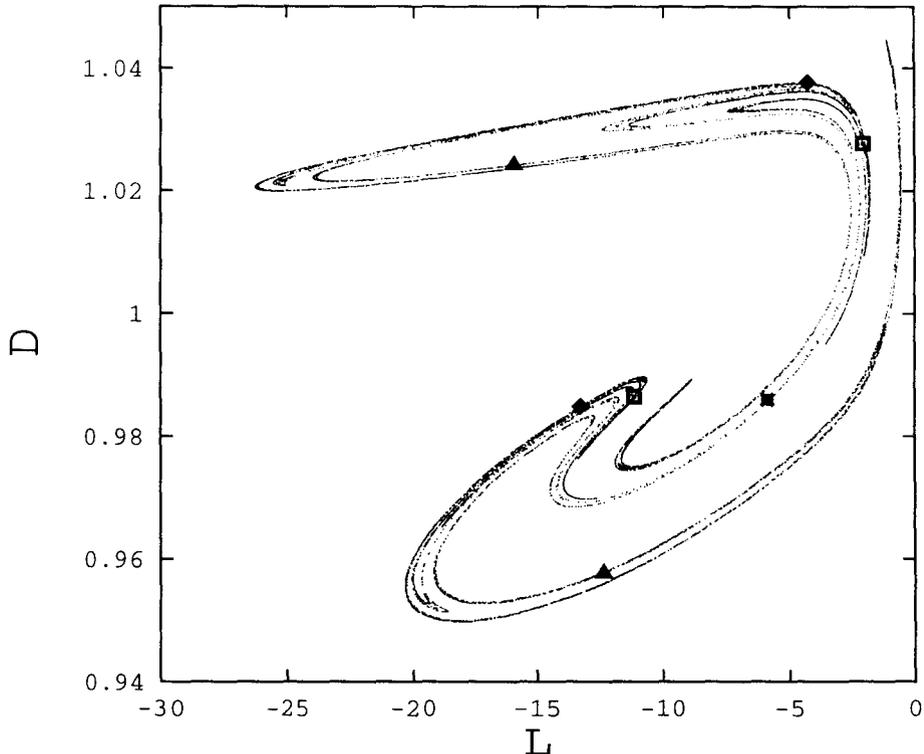


Figure 2: Poincaré section of the attractor (10^4 points). The section plane is defined by $\phi = 0$ where ϕ is the modulation phase. The period- T orbit α (star), the period- $2T$ orbits β (diamond), γ (square) and δ (triangle) are plotted.

3 Template Analysis

As complex as it may appear, a strange attractor is a highly organized geometrical object. In particular, it contains an infinite number of unstable periodic orbits (UPO), densely embedded in it (see e.g. [Auerbach *et al.*, 1987]): arbitrary close to any point of the attractor passes a periodic orbit. As it evolves on a strange attractor, a typical chaotic trajectory visits the neighborhood of these UPO, approaching them along their stable direction and, after an interval of time whose duration depends on how closely the periodic orbit has been approached, leaving them along the local unstable direction.

Periodic orbits are closed curves in phase space which cannot intersect themselves or another orbit without violating determinism at the point of intersection [Guckenheimer & Holmes, 1983]. Consequently, in a three-dimensional phase space, the way an UPO is knotted and linked with other ones does not change in its whole domain of existence in parameter space. These properties thus constitute a robust tool for characterizing strange attractors.

The intertwining of the UPO can be described in the mathematical framework of knot theory by quantities which are invariant with respect to isotopy moves, i.e. which are not modified when the curves are continuously deformed without intersection [Kaufmann, 1991]. For example, the relative placement of a pair (α, β) of UPO can be characterized

by their linking number $lk(\alpha, \beta)$, which indicates how many times α winds around β , as illustrated in Fig. 1.

In the hyperbolic limit, i.e. when all the UPO are present, the UPO of a three-dimensional chaotic flow are in one-to-one correspondence with those of a semi-flow defined on a two-dimensional branched manifold. The existence of such a manifold, termed a “template”, is the keystone of this topological approach [Birman & Williams, 1983; Holmes, 1988; Mindlin *et al.*, 1990; Mindlin & Gilmore, 1992; Tufillaro *et al.*, 1992].

Strange attractors are usually not hyperbolic. In particular, periodic orbits can be created or destroyed as a control parameter is varied. However, existing periodic orbits are organized as in the hyperbolic limit, since their topological invariants do not depend on control parameters. As a result, even if not in the hyperbolic limit, the template keeps a physical relevance as a “knot-holder”, a two-dimensional surface on which all the UPO of the attractor can be projected by continuous deformation without modifying their topological invariants.

It should be noted that if two attractors are associated to the same template, one cannot conclude to their complete topological equivalence because they may have not the same set of UPO. However, two attractors are most likely not topologically equivalent if they are found to be associated to different templates while topologically equivalent embeddings are used.

The derivation of the template from the topological invariants will be discussed in Sec. 3.3. We now locate the UPO in phase space and characterize their linking properties.

3.1 Detection of the unstable periodic orbits

The periodic solutions of the system (4) are computed by means of an iterative Newton-Raphson method (see e.g. [Hao, 1988]). The Poincaré section is first divided with a 64×64 grid. Then, for each period pT ($p = 1, 2, \dots, p_{max}$), we perform the following procedure.

In each visited cell of the grid where no periodic orbit of lower period has been detected, we choose a point of the attractor as the initial condition of a Newton-Raphson step applied to the time- pT return map. If the output of this initial step is located in the same cell or one of its neighbors, the Newton-Raphson method is iterated until convergence to a periodic solution is obtained.

With $p_{max} = 10$, we detect 27 periodic orbits in the chosen operating conditions. Figure 2 indicates the location of the period- T and one of the period- $2T$ UPO in the Poincaré plane.

3.2 Computation of topological invariants

Once the UPO have been extracted from the attractor, one can proceed to compute their topological invariants. Since template identification can be achieved using only a few of them, we have limited ourselves to the computation of (i) the self-linking number and the local torsion of each periodic orbit, and (ii) the linking number of pairs of orbits. We now briefly recall how they can be computed in numerical simulations and refer the reader

to [Solari & Gilmore, 1988; Mindlin *et al.*, 1991; Mindlin & Gilmore, 1992; Gilmore & McCallum, 1995; Tufillaro *et al.*, 1992] for further details.

The linking number $lk(\alpha, \beta)$ of two orbits α and β indicates how many times α winds around β . Obviously, $lk(\alpha, \beta) = lk(\beta, \alpha)$. If $\mathbf{x}_\alpha(t)$ and $\mathbf{x}_\beta(t)$ denote their trajectories in phase space, and $p_\alpha T$ and $p_\beta T$ their periods, then the linking number of α and β is the Gauss integral:

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_0^{p_\alpha T} \int_0^{p_\beta T} \frac{(\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_\alpha \wedge \dot{\mathbf{x}}_\beta)}{\|\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_\alpha\|^3} dt_\alpha dt_\beta \quad (5)$$

where $\epsilon = \pm 1$ depending on the sign convention. In this formula and the following ones, we set $\epsilon = -1$ so that topological invariants have positive values.

In the case of modulated systems, this double integral may be rewritten as a sum of simple integrals:

$$lk(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{g-1} R_i(\alpha, \beta) \quad (6)$$

where g is the greatest common divisor of p_α and p_β and

$$R_i(\alpha, \beta) = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{lT} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i}{\|\mathbf{r}_i\|^2} \right) dt = \frac{\epsilon}{2\pi} \int d\theta \quad (7)$$

In Eq. (7), l is the least common multiple of p_α and p_β , $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{x}_\beta(t + iT) - \mathbf{x}_\alpha(t)$, and $\mathbf{n}(t)$ is a unitary vector normal to the plane Σ_t defined by $\phi = (t/T) \pmod{1}$ (see Fig. 3). Note that $\mathbf{r}_i(t)$ and $\dot{\mathbf{r}}_i(t)$ belong to the plane Σ_t and are therefore orthogonal to $\mathbf{n}(t)$.

$R_i(\alpha, \beta)$ is an integer giving the number of revolution that $\mathbf{r}_i(t)$ operates around α before coming back to its initial position after a time lT .

The self-linking number $slk(\alpha)$ is given by:

$$slk(\alpha) = \sum_{i=1}^{p_\alpha-1} R_i(\alpha, \alpha) \quad (8)$$

Obviously, period- T orbits have a self-linking number of zero. It should be noted that while linking numbers are well-defined in any three-dimensional phase space, self-linking numbers are topological invariants only when the phase space has the topology of $D^2 \times S^1$, as is the case for modulated systems, or for attractors where trajectories rotate in a fixed sense around a central point. Table 1 gives the self-linking (diagonal terms) and linking numbers (off-diagonal terms) measured for the detected periodic orbits of period lower or equal to $7T$.

Finally, the local torsion, that we will note $\theta_l(\alpha)$, characterizes in which way trajectories infinitely close to a periodic orbit wind around it. More precisely, as one follows the UPO over one period $p_\alpha T$, the direction of the local stable (unstable) manifold $W_l^s(\alpha)$ ($W_l^u(\alpha)$) rotates by an integer number of half turns, as is illustrated in Fig. 4. This number is

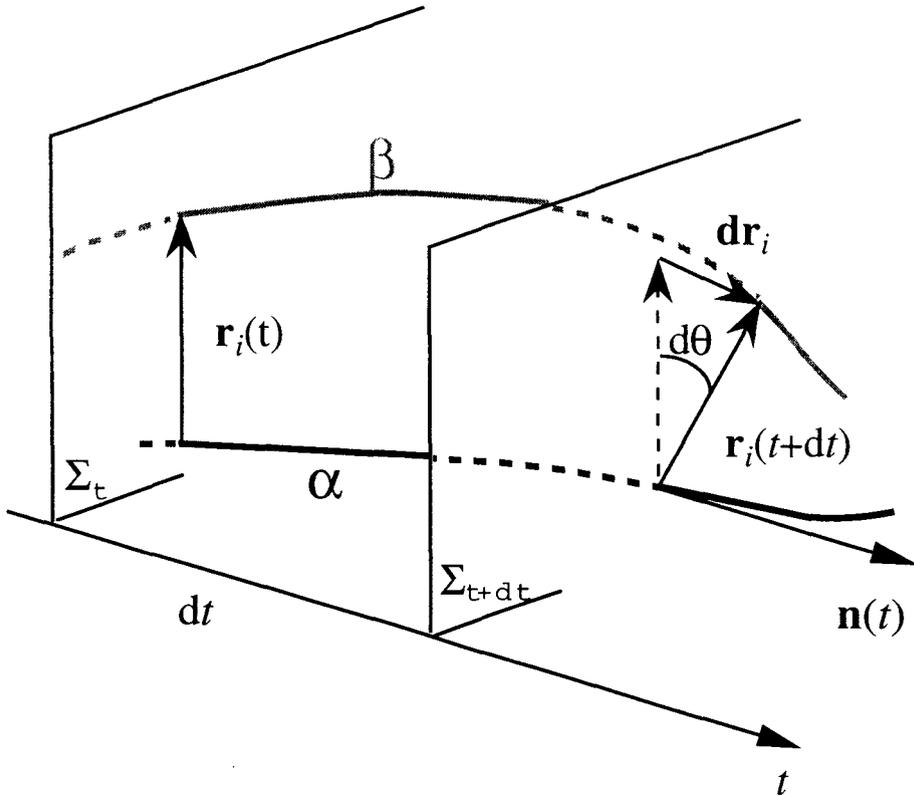


Figure 3: Illustration of the computation of $R_i(\alpha, \beta)$ (Eq. 7).

defined to be the local torsion.

In numerical simulations, θ_l can be computed by using a linearization of the equations of motion around the periodic orbit. Given a set of ODE:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (9)$$

the linearized equations govern the time evolution of infinitesimal perturbations $\delta\mathbf{x}$ of the trajectory \mathbf{x} :

$$\frac{d(\delta\mathbf{x}(t))}{dt} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \times \delta\mathbf{x}(t), \quad (10)$$

where the Jacobian matrix $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ is given by:

$$J_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \quad (11)$$

Given a periodic orbit $\mathbf{x}_\alpha(t)$ of period $p_\alpha T$, its Floquet matrix $\mathbf{M}_\alpha(t)$, which expresses the linear relation between $\mathbf{x}(t + p_\alpha T)$ and $\mathbf{x}(t)$:

$$\delta\mathbf{x}(t + p_\alpha T) = \mathbf{M}_\alpha(t) \times \delta\mathbf{x}(t) \quad (12)$$

	T		$2T$		$4T$		$6T$				$7T$					
α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	v	ρ	σ	χ
α	0															
β	1	1														
γ	1	2	1													
δ	1	2	2	1												
ϵ	2	4	4	3	5											
ζ	2	4	5	4	8	7										
η	3	6	6	5	10	12	13									
ι	3	6	6	5	10	12	15	13								
κ	3	6	6	5	10	12	15	16	13							
λ	3	6	7	6	12	14	18	18	18	17						
μ	3	6	6	5	10	12	15	16	16	18	13					
ν	3	6	7	6	12	14	18	18	18	21	18	17				
ξ	3	7	7	6	12	14	18	18	18	21	18	21	18			
v	3	7	7	6	12	14	18	18	18	21	18	21	21	18		
ρ	3	7	7	6	12	14	18	19	18	21	19	21	21	21	18	
σ	3	7	7	6	12	14	18	18	18	21	18	21	21	21	21	18
χ	3	7	7	6	12	14	18	18	18	21	18	21	21	21	21	18

Table 1: Linking numbers and self-linking numbers of the lowest-order periodic orbits ($p \leq 7$).

can be computed by integrating Eqs. (10) over one period of the orbit for a basis of initial conditions.

The eigenvector $\xi_s(t)$ ($\xi_u(t)$) of $\mathbf{M}_\alpha(t)$ with eigenvalue smaller (greater) than one indicates the direction of the local stable (unstable) manifold at time t . Integrating Eqs. (10) from the initial condition $\delta\mathbf{x}(0) = \xi_u(0)$, the local torsion is then given by a formula similar to Eq. (7):

$$\theta_l(\alpha) = \frac{\epsilon}{\pi} \int_0^{p\alpha T} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\delta\mathbf{x} \wedge \dot{\delta\mathbf{x}}}{\|\delta\mathbf{x}\|^2} \right) dt \quad (13)$$

where we choose $\epsilon = -1$ as previously. Table 2 lists the torsions of orbits with periods lower or equal to $7T$. Note that the local torsion is sometimes defined as the mean number of full turns per period [Gilmore & McCallum, 1995]. In this case, the expression (13) should be divided by twice the period of the orbit.

	T		$2T$		$4T$		$6T$				$7T$						
α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	v	ρ	σ	χ	
θ_l	1	2	3	1	3	5	4	6	5	7	5	8	6	6	7	5	7

Table 2: Local torsion θ_l of the lowest-order periodic orbits ($p \leq 7$).

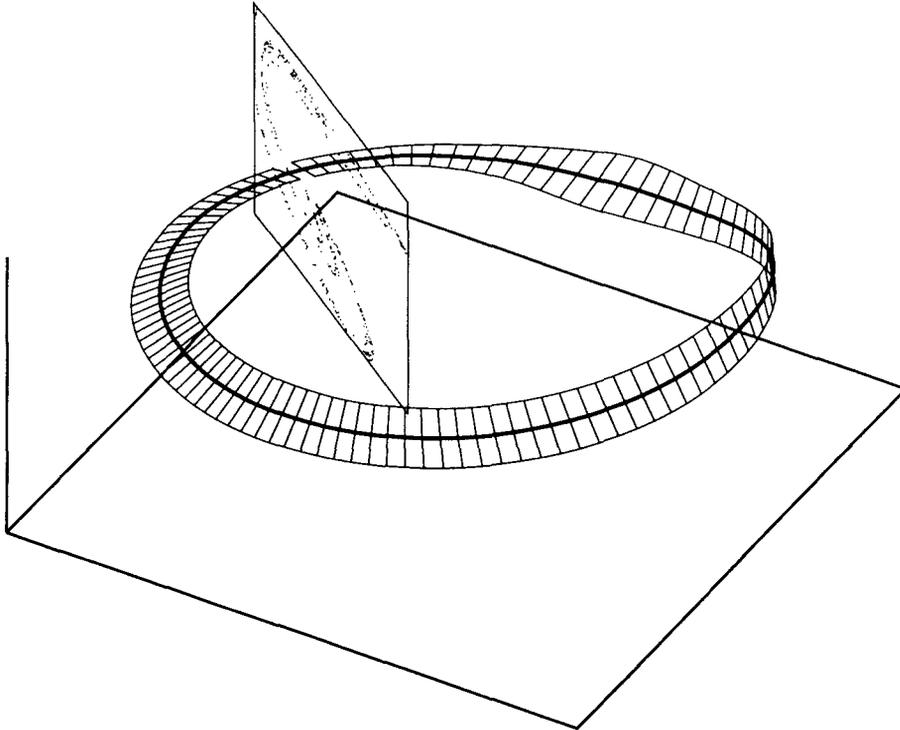


Figure 4: The local stable manifold of the T -periodic orbit α rotates clockwise by a half-turn along the orbit. Thus, the local torsion of α is 1 if the sign convention $\epsilon = -1$ is used. The Poincaré section defined by $\phi = 0$ is also indicated.

3.3 Determination of the underlying template

The spectrum of detected periodic orbits gives a first indication about the complexity of the template corresponding to tables 1 and 2: it must have three or more branches, since two-branch templates can only hold one period-2 orbit. Hence, the simple procedure which consists of checking that the computed topological invariants are those predicted by a horseshoe template cannot be applied. To determine the exact form of this new template from the data of Tables 1 and 2, we proceed as follows.

As proposed by Mindlin *et al.* [1990; 1991], the basic topological structure of a n -branch template can be described by a $n \times n$ matrix Θ , the *template matrix* and a $1 \times n$ matrix \mathbf{l} , the *layering matrix* whose indices are labeled from 0 to $n - 1$, as are the branches of the template. The template matrix Θ describes the geometry of the period-1 orbits of the template (one per branch):

$$\Theta_{ii} = \theta_l(\bar{i}) \quad (14a)$$

$$\Theta_{ij} = 2lk(\bar{i}, \bar{j}), \quad i \neq j \quad (14b)$$

where the symbolic name $\overline{s_1 s_2 \dots s_p}$ ($s_i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$) represents the only period- p orbit of the template visiting successively branches s_1, s_2, \dots, s_p .

As for the layering matrix \mathbf{I} , its elements are integer numbers chosen so that $l_0 = 0$ and $l_i < l_j$ if branch i lies under branch j when branches are joined after being stretched and folded.

Given the symbolic name of a periodic orbit of the template, its (self-)linking numbers and torsion can be computed as a function of the template and layering matrices. For example, we have:

$$lk(\bar{1}, \overline{0121}) = 1 + \Theta_{11} + \frac{1}{2} (\Theta_{01} + \Theta_{12} - (l_{01} + l_{12})\Pi(\Theta_{11})) \quad (15)$$

where $\Pi(m) = 0$ (1) if $m \in N$ is even (odd), and $l_{ij} = 1$ (resp. -1) when $(i-j) \times (l_i - l_j) > 0$ (resp. < 0).

Template identification is most easily performed when a symbolic encoding of the attractor is available. When the first return map in a Poincaré section is well approximated by a map of an interval onto itself, such an encoding is usually performed by using the well known symbolic dynamics of one-dimensional (1D) maps [Hao, 1989] (see e.g. [Mindlin *et al.*, 1991; Tufillaro *et al.*, 1991; Papoff *et al.*, 1992; Lefranc & Glorieux, 1993]). The template is then determined so that any periodic orbit of the attractor has the same invariants as the periodic orbit of the template with identical symbolic name, using formulas similar to Eq. (15).

In our case however, no well-defined 1D map can be found, as is shown in Fig. 5. We thus must find sets of symbolic names for which the equations expressing the measured (self-)linking numbers and torsions of the periodic orbits as a function of the template and layering matrices, such as Eq. (15), are consistent and have a valid solution (see e.g. [Solari & Gilmore, 1988; Lefranc *et al.*, 1994]). If such sets exist, each of the corresponding solutions yields a template that is compatible with the given data.

The simplest hypothesis is that the unknown template has three branches. In this case, the period- T orbit and each of the period- $2T$ orbits have three possible symbolic names (resp. $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$ and $\overline{01}$, $\overline{02}$, $\overline{12}$). We first consider the $9 = 3 \times 3$ possible sets of symbolic names for the first two orbits.

For each set, we may get three different results when trying to solve the above-mentioned equations: either (i) the equations are inconsistent, or they are consistent and the solution is (ii) underdetermined, or (iii) fully determined. In the first case, the current set of symbolic names is discarded. In the second case, all sets made of the current set for the first two orbits and of one possible name for the next orbit are considered. The process described above is recursively applied to these sets until all combinations have either no solution or a fully determined solution.

Applying this method to the data given in Tables 1 and 2, we get the two following

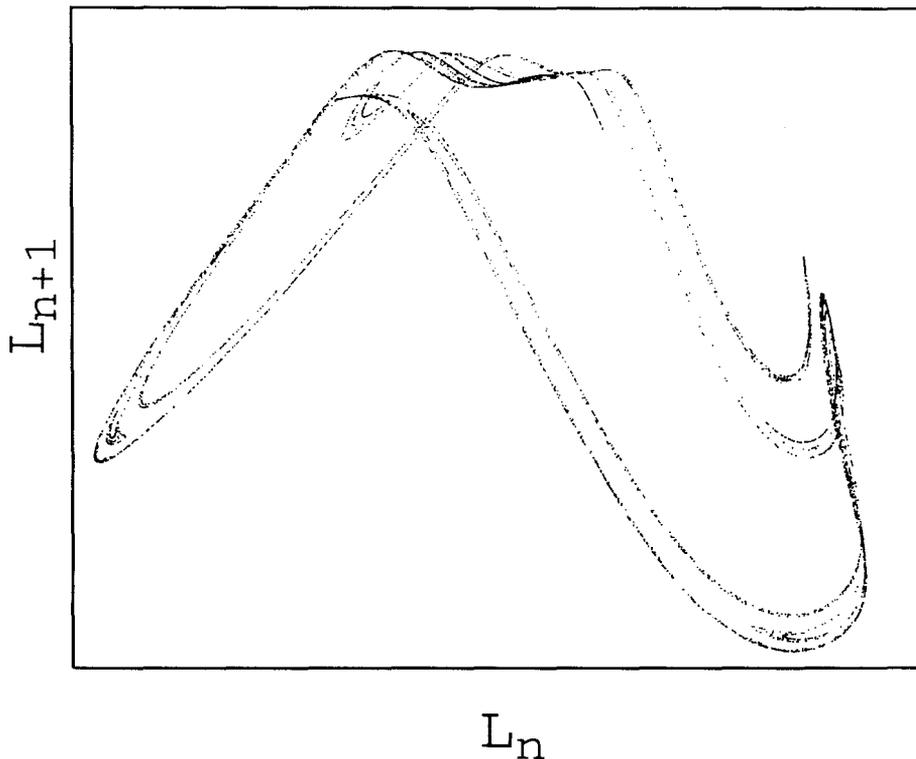


Figure 5: First return map : $L_{n+1} = P(L_n)$ with $L_n = L(t_0 + nT)$. The time t_0 corresponds to the Poincaré plane (f) of Fig. 7, defined by $\phi_0 = t_0/T \pmod{1} = 5/12$, where the $L_{n+1} = P(L_n)$ graph is the closest to a 1D map.

solutions:

$$\Theta_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (16a)$$

$$\mathbf{l}_a = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16b)$$

and

$$\Theta_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (17a)$$

$$\mathbf{l}_b = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (17b)$$

with two other solutions which can be obtained from Eqs. (16) and (17) by the transformations $T'_{ij} = T_{2-i,2-j}$ and $l'_i = l_2 - l_{2-i}$ and correspond to the same templates viewed from the rear side. We have checked that these templates correctly predict the topological invariants of all the detected UPO (up to period $10T$).

In solution (17), the torsions of branches 0 and 1 differ by more than one half-turn:

this template cannot describe continuous stretching and folding mechanisms and must be discarded. Solution (16) thus remains as the simplest template that can describe the topological organization of the chaotic attractor we have analyzed, and is represented in Fig. 6. The reader may check that this solution is nothing but the $(0, 1, 2)$ spiral template that has been predicted to occur in some regions of the parameter space of a generic driven nonlinear oscillator by Gilmore & McCallum [1995].

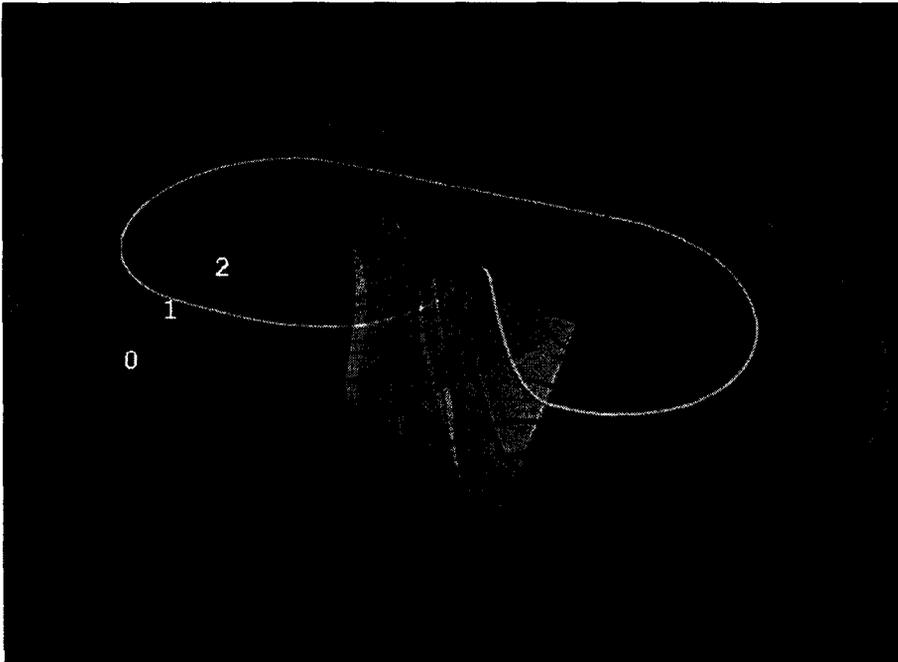


Figure 6: This template describes the topological organization of the chaotic regime studied in this paper. It displays three branches, which are rolled-up by the stretching and folding mechanisms. The projections of the four lowest-order orbits of the attractor have been represented with the following colors: (i) yellow: period- T orbit α ($\overline{1}$), (ii) green: period- $2T$ orbit β ($\overline{02}$), (iii) red: period- $2T$ orbit γ ($\overline{12}$) and (iv) blue: period- $2T$ orbit δ ($\overline{01}$).

To get further confidence in the validity of this result, we may examine the evolution of the Poincaré section of the attractor as the modulation phase ϕ is swept from 0 to 1, as is shown in Fig. 7. In principle, this could have allowed us to guess the template structure by studying how the folding and stretching mechanisms act on trajectories. For templates with more than two branches, however, this is a difficult exercise and the method we have presented has the distinct advantage that it can be fully automated. In any case, we can verify that the template given by Eqs. (16) correctly models the evolution of the Poincaré sections in Fig. 7.

4 Conclusion

We have carried out a template analysis of a chaotic attractor of the modulated class B laser model, at parameter values corresponding to realistic experimental conditions. This

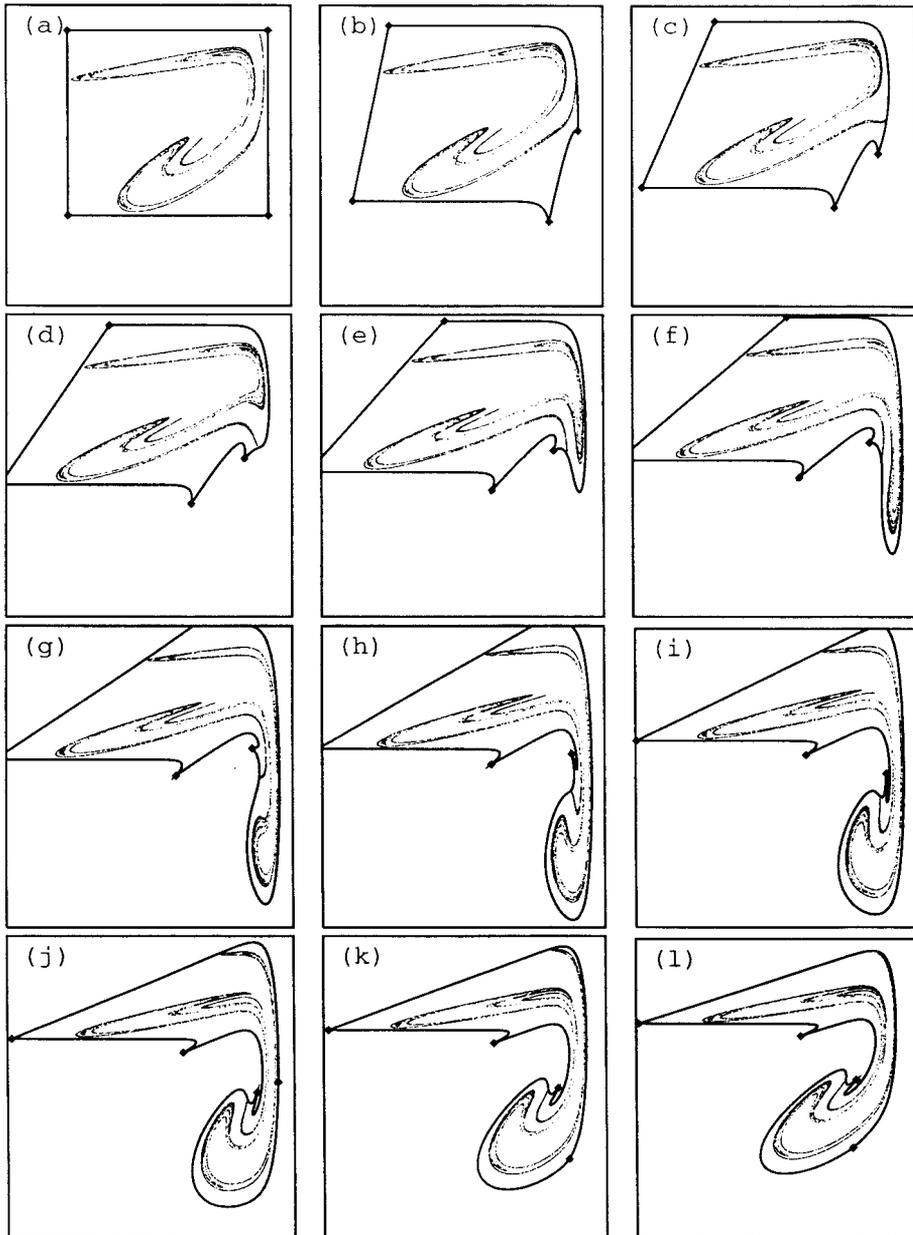


Figure 7: Evolution of the Poincaré section from (a) $\phi = 0$ to (l) $\phi = 11/12$ by steps of $1/12$. This sequence shows the rolling process demonstrated by the template analysis. The solid line corresponds to a set of points initially disposed along a rectangle and illustrates the action of the return map on the section plane. Two folding mechanisms may be seen. The first becomes visible in the right part of Fig. (d) and the second is initiated in the bottom part of Fig. (g).

study has revealed that the topological structure of this attractor is described by a three-branch template, the (0,1,2) spiral template described by Gilmore & McCallum [1995], and thus differs from the horseshoe structure reported by previous numerical [Solari & Gilmore, 1988] and experimental [Lefranc & Glorieux, 1993; Lefranc *et al.*, 1994] investigations of this type of laser.

This not only shows that the modulated class B laser model can exhibit more complex behaviors than was generally believed, but also gives reasonable confidence that a non-horseshoe template may be soon clearly evidenced in an experimental system. Indeed, most experimental investigations so far, in optics, chemistry, or mechanics, have reported the observation of a horseshoe template [Mindlin *et al.*, 1991; Papoff *et al.*, 1992; Lefranc & Glorieux, 1993; Lefranc *et al.*, 1994; Tuffillaro *et al.*, 1991; Boulant *et al.*, 1996; Letellier *et al.*, 1995a; Braun *et al.*, 1995; Tuffillaro *et al.*, 1995], except for a catalysis reaction for which the exact topological structure has however not been resolved [Firle *et al.*, 1996]. Class B lasers are all the more good candidates for the observation of a non-horseshoe template as they comprise several widely used lasers such as the modulated CO₂, Nd:YAG, or optical fiber lasers. Furthermore, their fast time scales and high signal to noise ratios considerably ease the experimental detection of unstable periodic orbits by close-return techniques.

We believe that the experimental observation of a three-branch template in a class B laser, as we predict in this paper, would certainly emphasize the usefulness of template analysis to validate theoretical models of experimental systems.

Acknowledgments

The Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne is Unité de Recherche Associée au CNRS. The Centre d'Études et Recherches Lasers et Applications is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord-Pas de Calais and the Fonds de Développement Économique des Régions.

References

- AUERBACH, D., CVITANOVIC, P., ECKMANN, J.-P., GUNARATNE, G., & PROCACCIA, I. [1987] Exploring chaotic motion through periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2387.
- BIRMAN, J. S., & WILLIAMS, R. F. [1983] Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz's equations. *Topology* **22**, 47.
- BOULANT, G., LEFRANC, M., BIELAWSKI, S., & DEROZIER, D. [1996] *Global torsion of templates of a driven fiber laser*. submitted to *Phys. Rev. E*.
- BRAUN, T., CORREIRA, R. R. B., & ALTMANN, N. [1995] Topological model of homoclinic chaos in a glow discharge. *Phys. Rev. E* **51**, 4165.
- DANGOISSE, D., GLORIEUX, P., & HENNEQUIN, D. [1987] Chaos in a CO₂ laser with modulated parameters: Experiments and numerical calculations. *Phys. Rev. A* **35**, 4775.
- ERNEUX, T., BAER, S. M., & MANDEL, P. [1987] Subharmonic bifurcation and bistability of solutions of periodic solutions in a periodically modulated laser. *Phys. Rev. A* **35**, 1165.
- ERNEUX, T., BIELAWSKI, S., DEROZIER, D., & GLORIEUX, P. [1995] Stabilizing or destabilizing lasers by continuous delayed feedback. *Quantum Semiclass. Opt.*, **7**, 951.
- FIRLE, S. O., NATIELLO, M. A., & EISWIRTH, M. [1996] Topological dynamics in a catalysis experiment - a non-horseshoe template. *Phys. Rev. E* **53**, 1257.
- GILMORE, R., & MCCALLUM, J. W. L. [1995] Structure in the bifurcation diagram of the Duffing oscillator. *Phys. Rev. E* **51**, 935.
- GUCKENHEIMER, J., & HOLMES, P. J. [1983] *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields* (Springer, Berlin).
- HAIRER, E., NORSETT, S. P., & WANNER, G. [1987] *Solving Ordinary Differential Equations: I. Non Stiff Problems* (Springer, Berlin).
- HAO, B.-L.. [1988] Numerical methods to study chaos in ordinary differential equations, in *Directions in chaos*, vol. 2., ed. HAO, B.-L. (World Scientific, Singapore), p. 294.
- HAO, B.-L. [1989] *Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems* (World Scientific, Singapore).
- HOLMES, P. J. [1988] Knots and orbit genealogies in nonlinear oscillators, in *New directions in dynamical systems*, eds. BEDFORD, T., & SWIFT, J. (University Press, Cambridge), p.150.
- KAUFMANN, L[OUI]S H. [1991] *Knots and Physics* (World Scientific, Singapore).
- KHANIN, Y. I. [1995] *Principles of Laser Dynamics* (Elsevier, Amsterdam).

- LEFRANC, M., HENNEQUIN, D., & GLORIEUX, P. [1992] Improved correlation dimension estimates through change of variable. *Phys. Lett.* **A163**, 269.
- LEFRANC, M., & GLORIEUX, P. [1993] Topological analysis of chaotic signals from a CO2 laser with modulated losses. *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **3**, 643.
- LEFRANC, M., GLORIEUX, P., PAPOFF, F., MOLESTI, F., & ARIMONDO, E. [1994] Combining topological analysis and symbolic dynamics to describe a strange attractor and its crises. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1364.
- LETELLIER, C., SCELLER, L. LE, & HUDSON, J. L. [1995a] Topological characterization and global vector field reconstruction of an experimental electrochemical system. *J. Phys. Chem.* **99**, 7016.
- LETELLIER, C., DUTERTRE, P., & MAHEU, B. [1995b] Unstable periodic orbits and templates of the Rossler system: toward a systematic topological characterization. *Chaos* **5**, 271.
- MINDLIN, G. B., HOU, X.-J., SOLARI, H. G., GILMORE, R., & TUFILLARO, N. B. [1990] Classification of strange attractors by integers. *Phys. Rev. Lett.* **64**(20), 2350–2353.
- MINDLIN, G. B., SOLARI, H. G., NATIELLO, M. A., GILMORE, R., & HOU, X.-J. [1991] Topological analysis of chaotic time series data from Belousov-Zhabotinski reaction. *J. Nonlinear Sci.* **1**, 147.
- MINDLIN, G. B., & GILMORE, R. [1992] Topological analysis and synthesis of time series. *Physica D* **58**, 229.
- MINDLIN, G. B., LOPEZ-RUIZ, R., SOLARI, H. G., & GILMORE, R. [1993] Horseshoe implications. *Phys. Rev. E* **48**, 4297.
- NARDUCCI, L. M., & ABRAHAM, N. B. [1988] *Laser Physics and Laser Instabilities* (World Scientific, Singapore).
- PAPOFF, F., FIORETTI, A., ARIMONDO, E., MINDLIN, G. B., SOLARI, H. G., & GILMORE, R. [1992] Structure of chaos in the laser with saturable absorber. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1128.
- SCHWARTZ, I. B. [1988] Sequential horseshoe formation in the birth and death of chaotic attractors. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1359.
- SCHWARTZ, I. B., & ERNEUX, T. [1994] Subharmonic hysteresis and period doubling bifurcations for a periodically driven laser. *SIAM J. Appl. Math.* **54**, 1083.
- SOLARI, H. G., ESCHENAZI, E., GILMORE, R., & TREDICCE, J. R. [1987] Influence of coexisting attractors on the dynamics of a laser system. *Opt. Commun.* **64**, 49.
- SOLARI, H. G., & GILMORE, R. [1988] Relative rotation rates for driven dynamical systems. *Phys. Rev. A* **37**, 3096.

TREDICCE, J. R., ARECCHI, F. T., LIPPI, G. L., & PUCCIONI, G. P. [1985] Instabilities in lasers with an injected signal. *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 173.

TREDICCE, J. R., ARECCHI, F. T., PUCCIONI, G. P., POGGI, A., & GADOMSKI, W. [1986] Dynamic behavior and onset of low-dimensional chaos in a modulated homogeneously broadened single-mode laser: experiment and theory. *Phys. Rev. A* **34**, 2073.

TUFILLARO, N. B., HOLZNER, R., FLEPP, L., BRUN, R., FINARDI, M., & BADI, R. [1991] Template analysis for a chaotic NMR laser. *Phys. Rev. A* **44**, 4786.

TUFILLARO, N. B., ABBOTT, T. A., & REILLY, J. P. [1992] *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos* (Addison-Wesley, Reading).

TUFILLARO, N. B., WYCKOFF, P., BROWN, R., SCHREIBER, T., & MOLTENO, T. [1995] Topological time series analysis of a string experiment and its synchronized model. *Phys. Rev. E* **51**, 164.

Annexe C

Experimental observation of a chaotic attractor with a reverse horseshoe topological structure.

G. Boulant, S. Bielawski, D. Derozier et M. Lefranc,
Phys. Rev. E **55**, R3801 (1997).



PHYSICAL REVIEW E

STATISTICAL PHYSICS, PLASMAS, FLUIDS, AND RELATED INTERDISCIPLINARY TOPICS

THIRD SERIES, VOLUME 55, NUMBER 4

APRIL 1997

RAPID COMMUNICATIONS

The Rapid Communications section is intended for the accelerated publication of important new results. Since manuscripts submitted to this section are given priority treatment both in the editorial office and in production, authors should explain in their submittal letter why the work justifies this special handling. A Rapid Communication should be no longer than 4 printed pages and must be accompanied by an abstract. Page proofs are sent to authors.

Experimental observation of a chaotic attractor with a reverse horseshoe topological structure

G. Boulant, S. Bielawski, D. Derozier, and M. Lefranc

*Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, URA CNRS 249, Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications,
Université de Lille I, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

(Received 31 December 1996)

We have characterized the topological organization of chaotic regimes of a modulated Nd:YAG (yttrium aluminum garnet) laser using template analysis. This investigation revealed a topological structure not previously observed in an experimental system nor in numerical simulations of models of this laser to our knowledge. This structure corresponds to the so-called reverse horseshoe theoretically described by Gilmore and McCallum [Phys. Rev. E **51**, 935 (1995)]. [S1063-651X(97)50104-8]

PACS number(s): 05.45.+b, 42.65.Sf, 42.55.Rz

The experimental study of a system displaying chaotic behavior requires characterization methods which can extract in a robust way the invariant properties of a chaotic regime from apparently erratic signals. This is usually done by reconstructing a strange attractor, an invariant set of the phase space which the asymptotic dynamics is confined to, and analyzing this highly complex geometrical object (see, e.g., [1]). Traditionally, quantitative measures of chaos have focused on global statistical properties of the attractor, such as fractal dimensions or Lyapunov exponents [1].

However, attractors are not the only invariant sets of chaotic dynamics. In recent years, there has been an increased interest in using unstable periodic orbits (UPO) to characterize chaotic attractors. Indeed, a typical chaotic attractor has embedded in it a dense set of UPO, and one may reasonably hope to use these to approximate the attractor in a hierarchical way: low-period orbits model the overall structure of the attractor, while finer details can be resolved using higher-period ones (see, e.g., [2]). Of particular importance is the fact that UPO can be extracted from experimental time series.

In the phase space of the system, unstable periodic orbits are represented by closed curves. While these are relatively simple objects, they are intertwined in a very complex way due to the chaotic dynamics. For three-dimensional systems with at most one positive Lyapunov exponent, the template

analysis proposed by Mindlin *et al.* [3,4] allows one to unfold this complexity by analyzing UPO using concepts from knot theory [5,6]. For example, a pair of periodic orbits can be characterized by their linking number, which measures how many times one orbit winds around the other. The relevance of knot invariants to chaotic dynamics owes much to the fact that determinism precludes that different trajectories intersect. As a consequence, linking numbers and other topological invariants remain constant as a control parameter is varied. Additionally, their invariance with respect to small deformations makes their experimental determination quite insensitive to noise, provided periodic orbits are well separated.

Moreover, a systematic study of the topological organization of the UPO embedded in a chaotic attractor is allowed by the existence of a two-dimensional branched manifold, the *template* (or "knot-holder") [7,8], such that all the periodic orbits can be laid on it without modifying any of their topological invariants. The template, whose structure can be concisely described by small integer matrices [3], thus describes the global topological organization of the chaotic attractor. Experimentally, measuring the invariants of a few periodic orbits suffices to determine the associated template, the remaining orbits being used to check the validity of the results [4].

As advocated by their authors [3,4,9], one distinct advantage of this approach is its ability to give a clear-cut

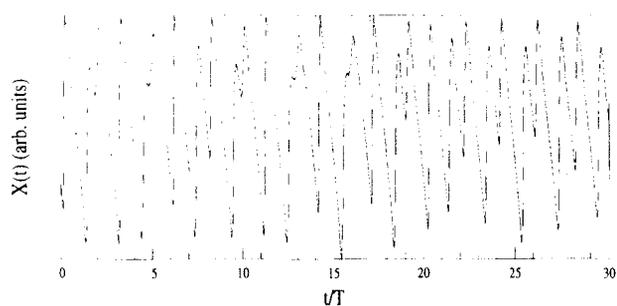


FIG. 1. Time series of $X(t) = \log(I + I_0)$ where I is the laser output intensity and I_0 is a small constant which can be adjusted in the logarithmic amplifier used for signal processing. T is the modulation period.

answer as to whether a theoretical model is incompatible with given experimental data. If the analysis of experimental time series and of time series generated from numerical simulations of a model, embedded in the same phase space, yields different templates, then this model, at least for the values of the parameters used in the simulations, has to be rejected.

However, except for a catalytic reaction whose template has unfortunately not been exactly determined [10], most experimental investigations so far, in optics [9,11–13], in chemistry [4,14] or mechanics [15], have revealed the same topological structure, namely the one described by the so-called Smale's horseshoe with zero global torsion. Horseshoe templates with global torsions have been observed in an optical fiber laser [16]. One may then wonder whether the horseshoe class is so ubiquitous as to make template analysis helpless for testing the relevance of a model.

In this Communication we show that this is not the case, by reporting the observation of regimes of a Nd:YAG (yttrium aluminum garnet) laser with pump modulation that are associated with a different type of template. The corresponding topological organization has been theoretically predicted to be observable in nonlinear driven oscillators by Gilmore and McCallum [17] (they termed it "reverse horseshoe"), but to our knowledge has not yet been encountered in other experiments, nor in numerical studies of models of this type of laser. While this template has a two-branch structure as is the case of the above-mentioned templates, the difference is readily shown by analyzing the lowest-period orbits: the period- $2T$ orbit (T is the modulation period) is unknotted, but the knot type of the period- $3T$ orbits is that of a trefoil knot, the simplest knot beyond a trivial loop. In contrast to this, the period- $2T$ and $3T$ orbits of experimental chaotic attractors characterized by topological analysis were either all unknotted [4,9,11–15] or all knotted [16].

The experimental system consists of a Fabry-Perot laser cavity, end-pumped by a cw laser diode operating at 812 nm. The Nd:YAG rod is 10 mm long, 7 mm in diameter, and contains a nominal Nd^{3+} concentration of 1.1%. One of the two plane ends is highly reflective at the laser wavelength (1064 nm), and the other is antireflection coated. The output coupler is concave, with a radius of curvature of 40 mm, and has a reflectivity of 97%. A Fabry-Perot etalon and a Brewster plate are inserted inside the cavity to select single-mode oscillation on a linear polarization. In these conditions, the

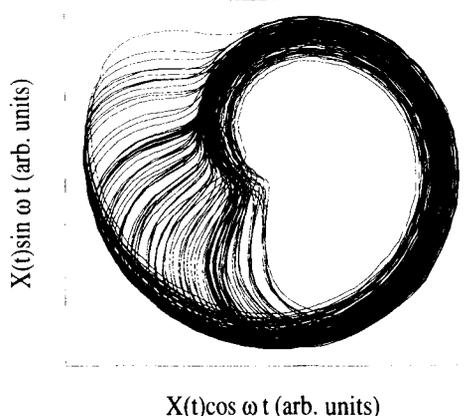


FIG. 2. Phase portrait of the attractor in the plane $[X(t)\cos \phi, X(t)\sin \phi]$, where $\phi = \omega t$ is the modulation phase.

pump parameter A (the ratio of pump power to its value at threshold) can range up to 3. In our experiment, the pump power is sinusoidally modulated, $A = A_0(1 + m \cos \omega t)$, and the laser undergoes a classical period-doubling cascade leading to chaos when the frequency modulation is of the order of the relaxation frequency ω_r of the laser, which is about 100 kHz here. In this paper, the topological organization of a chaotic regime for parameters $A_0 = 1.2$, $m = 0.5$, and $\omega = 54$ kHz, is analyzed. It should be noted that as the resonance frequency markedly decreases when the modulation amplitude is increased, these parameters in fact belong to the resonance tongue originating at $\omega = \omega_r$. The laser output intensity was monitored with a $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ detector, and processed using a logarithmic amplifier in order to obtain a signal suitable for topological analysis (see, e.g., [12]). The present analysis has been carried out on a time series corresponding to 5×10^3 periods of modulation, recorded at a rate of 100 samples per modulation period. A typical signal is shown in Fig. 1.

Let us now briefly describe the procedure of the analysis. First, unstable periodic orbits are extracted from the time series using close return techniques similar to those described in Refs. [4,9,12,13]: a time series segment $\{X(t); t_0 < t < t_0 + nT\}$ is considered to shadow an unstable period- nT orbit if $|X(t) - X(t + nT)| < \epsilon$ for each $X(t)$ belonging to that segment, where ϵ is in the order of a few percent. Doing so, we detected eight orbits, with periods up to $9T$.

These periodic segments then have to be embedded in a phase space, so that the topological invariants of the corresponding trajectories can be computed. As in previous investigations [12,13], we embedded the time series in a phase space with cylindrical coordinates $[X(t), \dot{X}(t), \phi(t)]$, where $\phi(t) = \omega t \bmod 2\pi$ is the modulation phase. A plane phase portrait of the embedded attractor is displayed in Fig. 2, and a first return map in a section plane of constant phase is plotted in Fig. 3. We recall that the analysis does not require the actual computation of the time derivative of $X(t)$. Rather, given a time series segment corresponding to a period- nT orbit, a simple plot of $X(\phi(t))$ versus $\phi(t)$ displays the orbit as a braid on n strands (see, e.g., [12,13]), as can be seen in Fig. 4. Listing the crossings which occur as ϕ is increased from 0 to 2π gives an algebraic description of the braid, the braid word [6], from which the various topological invariants

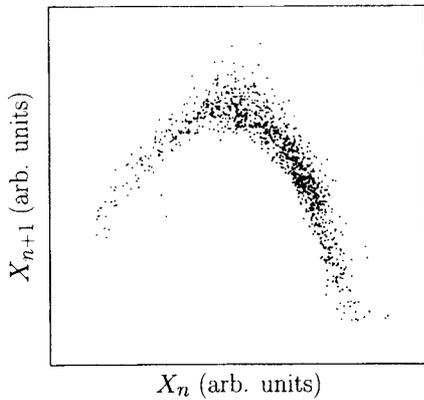


FIG. 3. First return diagram X_{n+1} vs X_n , where $X_n = X(t_0 + nT)$ is a stroboscopic sampling of the signal, and T is the modulation period. This map corresponds to a section plane of constant modulation phase. It can be seen to be highly similar to those observed in systems whose topological organization is described by the standard Smale's horseshoe template.

can be computed. One distinct feature of the embedding we have used is that periodic orbits are naturally presented as positive braids, i.e., all their crossings have the same sign, which can be chosen to be positive. This implies that the entries of the template matrix, which are directly related to the torsions and linking numbers of period- T orbits [3,4], are positive. This property will be of particular importance in the foregoing discussion.

Table I displays the (self-) linking numbers of the lowest-period orbits detected in our experiment. Given this information about the relative placement of the UPO, we may now seek a template that holds a set of periodic orbits with identical periods and topological invariants. As usual, the template branches are labeled "0," "1," ... , starting from the leftmost branch. We find that two two-branch templates are compatible with the experimental data. They correspond to two equivalent representations of the same topological structure, and can be distinguished according to whether the orbit corresponding to the experimental period- T orbit is located on the "0" or the "1" branch of the template. For definiteness, and to ease comparison with other works, let this orbit be held by the "1" branch. The template matrix of the corresponding solution reads

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1a}$$

with the insertion matrix being

$$\mathcal{I} = (0 \quad -1). \tag{1b}$$

This result is to be contrasted with the standard horseshoe template, whose template and insertion matrices are given by

$$\mathcal{T}_\theta^{\text{HS}} = \begin{pmatrix} 2\theta & 2\theta \\ 2\theta & 1+2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{2a}$$

$$\mathcal{I}_\theta^{\text{HS}} = (0 \quad 1), \tag{2b}$$

where the integer θ stands for the global torsion.

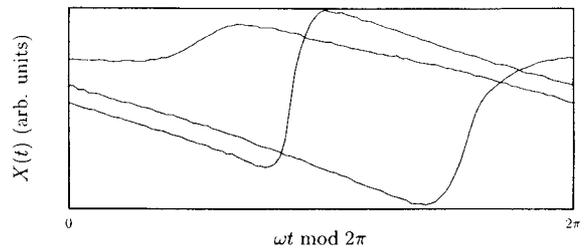


FIG. 4. A time series segment shadowing one of the period- $3T$ orbits is plotted as a function of $\phi(t) = \omega t \bmod 2\pi$. This presents this orbit as a braid on three strands. The number of crossings in this plot gives the self-linking number of the orbit which here is 4. This value is to be contrasted with that obtained for standard horseshoe templates, i.e., $2+6\theta$, where the integer θ is the global torsion.

It should be recalled that, depending on the sign conventions, the same system can be described by two templates differing only by their handedness. However, when using, as here, an embedding which forbids negative topological invariants, only one of them may be a solution. To compare our result to those of previous investigations, we thus choose in each case the sign convention leading to positive invariants. With this point in mind, the $\theta=0$ case corresponds to the experiments reported in Refs. [4,9,11–15], while horseshoe templates with $\theta=1, 2$, or 3 have been observed in an optical fiber laser [16].

Rewriting Eq. (1a) as

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

it is easily seen that the template we have observed is in fact the mirror image of the standard horseshoe template with zero global torsion [as described by Eqs. (2)], plus a global torsion of one turn. From the discussion above, it should be clear that this discrepancy with previous reports does not stem from an unfortunate choice of sign convention nor of phase-space orientation. Moreover, we do not think that the phenomenon recently described by Mindlin and Solari—under certain conditions the topology of an attractor may dramatically depend on the chosen embedding [18]—can ex-

TABLE I. Self-linking numbers and linking numbers of the lowest-period orbits detected in the experimental time series. The entries left blank correspond to invariants whose value could not be ascertained, because different estimates were obtained when using two different time series segments corresponding to the same orbit.

	$1T$	$2T$	$3T_a$	$3T_b$	$4T$	$5T$	$7T$	$9T$
$1T$	0							
$2T$	1	1						
$3T_a$	2	4	4					
$3T_b$	2	4	6	4				
$4T$	2	5	8		7			
$5T$	3	6	10	10		12		
$7T$		8	14	14			24	
$9T$	5		18					

plain our observations, since the attractors we studied are not split into several disjoint pieces. We can therefore conclude that our results are the signature of a different type of topological organization, and are not due to artifacts of the analysis.

What makes this result highly interesting is that previous template analyses of a modulated CO₂ laser [12,13], using the same embedding as here, found a horseshoe template with zero global torsion. Indeed, the Nd:YAG laser and the CO₂ laser are generally both considered to be class-B lasers, i.e., lasers where the polarization of the gain medium evolves much faster than the inversion population or the radiation intensity [19–21]. As a result, the single-mode behaviors of these two lasers can in principle be modeled by the very same set of equations, the so-called “two-level rate equations” [20,21], and correspond to parameters of the same order of magnitude. Furthermore, numerical studies of this model with parameters corresponding to the CO₂ experiments seemed to indicate that the topological organization of its chaotic regimes was globally described by the horseshoe template with zero global torsion [22], until a three-branch spiral template was discovered very recently for slightly different values of the control parameters [23]. As for the reverse horseshoe template that corresponds to our experiment, it remains to be observed in numerical simulations of the modulated class-B laser model.

To summarize, we are in a situation where (i) standard and reverse horseshoes have been observed in laser experi-

ments, and (ii) standard horseshoes and a spiral three-branch template have been identified in numerical studies of these lasers. In view of the complex structure of the bifurcation diagram of nonlinear driven oscillators described by Gilmore and McCallum [17], this gives us some confidence that a systematic exploration of the parameter space of these systems using template analysis may provide an accurate test of the validity of the class-B laser model.

In conclusion, we performed a template analysis of chaotic regimes from a Nd:YAG laser. This characterization showed a topological organization of the reverse horseshoe type, which to our knowledge has not yet been observed experimentally. Topological analysis thus allowed us to unveil clear-cut differences from previous laser experiments which would likely have remained otherwise unnoticed, given the high similarity of the signals corresponding to standard and reverse horseshoes.

We believe that the present work certainly motivates further experiments and numerical investigations of the model describing both these lasers, and illustrates the relevance of template analysis in the study of the dynamical properties of low-dimensional chaotic systems.

The Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne is Unité de Recherche Associée au CNRS. The Centre d'Études et Recherches Lasers et Applications is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord-Pas de Calais, and the Fonds de Développement Economique des Régions.

-
- [1] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
 - [2] D. Auerbach *et al.*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2387 (1987).
 - [3] G. B. Mindlin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2350 (1990).
 - [4] G. B. Mindlin *et al.*, J. Nonlinear Sci. **1**, 147 (1991).
 - [5] N. B. Tufillaro, T. A. Abbott, and J. P. Reilly, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1992).
 - [6] L. H. Kaufmann, *Knots and Physics* (World Scientific, Singapore, 1991).
 - [7] J. S. Birman and R. F. Williams, Topology **22**, 47 (1983).
 - [8] P. J. Holmes, in *New Directions in Dynamical Systems*, edited by T. Bedford and J. Swift (Cambridge University Press, Cambridge, 1988), pp. 150–191.
 - [9] F. Papoff *et al.*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1128 (1992).
 - [10] S. O. Firle, M. A. Natiello, and M. Eiswirth, Phys. Rev. E **53**, 1257 (1995).
 - [11] N. B. Tufillaro *et al.*, Phys. Rev. A **44**, 4786 (1991).
 - [12] M. Lefranc and P. Glorieux, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. **3**, 643 (1993).
 - [13] M. Lefranc *et al.*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1364 (1994).
 - [14] C. Letellier, L. L. Sceller, and J. L. Hudson, J. Phys. C **99**, 7016 (1995).
 - [15] N. B. Tufillaro *et al.*, Phys. Rev. E **51**, 164 (1995).
 - [16] G. Boulant, M. Lefranc, S. Bielawski, and D. Derozier, Phys. Rev. E (to be published).
 - [17] R. Gilmore and J. W. L. McCallum, Phys. Rev. E **51**, 935 (1995).
 - [18] G. B. Mindlin and H. G. Solari, Phys. Rev. E **52**, 1497 (1995).
 - [19] F. T. Arecchi, in *Instabilities and Chaos in Quantum Optics*, edited by F. T. Arecchi and R. G. Harrison (Springer, Berlin, 1987), p. 9.
 - [20] L. M. Narducci and N. B. Abraham, *Laser Physics and Laser Instabilities* (World Scientific, Singapore, 1988).
 - [21] Y. I. Khanin, *Principles of Laser Dynamics* (Elsevier, Amsterdam, 1995).
 - [22] H. G. Solari and R. Gilmore, Phys. Rev. A **37**, 3096 (1988).
 - [23] G. Boulant, M. Lefranc, S. Bielawski, and D. Derozier, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. (to be published).

Annexe D

Model validation and symbolic dynamics of chaotic lasers using template analysis.

G. Boulant, J. Plumecoq, S. Bielawski, D. Derozier et M. Lefranc,
The Fourth Experimental Chaos Conference, Marriott Hotel, Boca
Raton, Florida (USA). August 6-8, 1997.

MODEL VALIDATION AND SYMBOLIC DYNAMICS OF CHAOTIC LASERS USING TEMPLATE ANALYSIS

G. Boulant, J. Plumecoq, S. Bielawski, D. Derozier, and M. Lefranc
*Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, URA CNRS 249,
Centre d'Études et de Recherches Lasers et Applications,
Université de Lille I, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

Using template analysis, we have characterized bifurcations between different topological organizations occurring in a Nd:YAG laser. We compare this result to theoretical predictions. A new and efficient algorithm using the topological invariants of unstable periodic orbits to perform a symbolic encoding of an experimental attractor, even if weakly dissipative, is also discussed.

1 Introduction

In the last decade, there has been an increased interest in using the unstable periodic orbits (UPO) embedded in a strange attractor to characterize and control chaos. In particular, Mindlin *et al.*^{1,2} have proposed to unfold the complexity of a chaotic attractor by analyzing the topological organization of UPO. In phase space, unstable periodic orbits are represented by closed curves that are intertwined in a complex way due to the chaotic dynamics. In the case of a three-dimensional attractor, this intertwining can be analyzed using topological invariants from knot theory, such as the linking number of two orbits, that indicates how many times one orbit winds around the other.

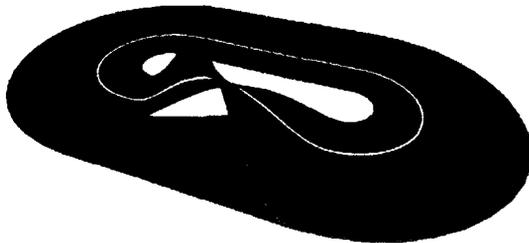


Figure 1: The Smale's horseshoe template

What allows a systematic study of these topological properties is the existence of a two-dimensional branched manifold, the *template* (see Fig. 1), such that all the UPO can be projected on it without modifying their invariants^{3,4}.

The geometry of the template, which can be specified by a few integers¹, thus describes the global topological organization of the attractor. The invariants of a few low-period UPO contain enough information to reconstruct the associated template, the invariants of the higher-order ones being used to assess the correctness of the result.

A distinctive advantage of this approach is that it can provide a clear-cut answer to whether a theoretical model is compatible with experimental data. If experimental time series and numerical simulations of the model correspond to different templates, the model has to be revised. Until recently, however, most experimental template analyses, in lasers, NMR oscillators, chemical reactions, or vibrating strings⁵ had reported the observation of the topological organization described by the standard Smale's horseshoe template (SHT), shown in Fig. 1. An experimental non-horseshoe dynamics had first been observed by Firlé *et al.*, but without a clear identification of the associated template⁶.

Very recently, two characterizations of non-horseshoe templates have been performed for chaotic regimes of an electronic circuit⁷ and of a Nd:YAG laser⁸. In the latter case, the topological organization was described by the so-called "reverse horseshoe" template⁹ (RHT), which is the mirror image of the standard horseshoe template with an additional global torsion of one full turn.

2 Structure of the bifurcation diagrams of nonlinear oscillators

Both the standard and reverse horseshoe templates fit into a general classification proposed by Gilmore and McCallum⁹ for generic nonlinear oscillators, which we briefly recall here. As a control parameter of such an oscillator is varied, periodic orbits are created or annihilated. At some parameter value, new orbits that are incompatible with the current topological organization may appear: beyond this value, regimes are characterized by a different template which can hold these newly born orbits. Different regions of parameter space may thus correspond to different topological organizations.

When sweeping the modulation frequency at low modulation amplitudes, the structure of chaotic regimes inside a resonance tongue is globally described by a SHT, with a global torsion related to the ratio of the modulation frequency to the natural frequency of the oscillator. This scenario has been recently confirmed in a doped fiber laser¹⁰.

At higher modulation amplitudes, template bifurcations may occur inside a single tongue: regimes on the high-frequency (resp. low-frequency) side of the tongue are described by a SHT (resp. RHT). Between these two regions, more complicated regimes may be observed, that are described by templates with three and more branches, including a spiral three-branch template.

According to Gilmore and McCallum⁹, all these templates are pieces of a generalized spiral template with an infinite number of branches which are in one-to-one correspondence with the integers $0, 1, 2, 3, \dots$, that indicate the torsion in half-turns of the associated branch. In this scheme, the SHT is the template made of the two branches of torsions $2n$ and $2n + 1$ — we note it accordingly $\mathcal{T}(2n, 2n + 1)$ —, the RHT is $\mathcal{T}(2n + 1, 2n + 2)$, and the three-branch spiral template is $\mathcal{T}(2n, 2n + 1, 2n + 2)$, where the integer n indicates the global torsion of the template. It can be seen that the latter template can be constructed by combining the two former ones. The stretching and folding mechanisms described by these three templates are represented in Fig. 2.

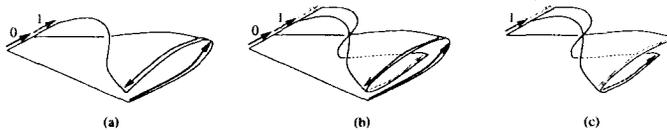


Figure 2: Geometry of the branches of the templates $f\mathcal{T}(0, 1)$, $\mathcal{T}(0, 1, 2)$, and $\mathcal{T}(1, 2)$

3 Template bifurcations in a Nd:YAG laser

In this paper, we report the first experimental observation of the transition from the SHT to the RHT via the spiral three-branch template. As in Boulant *et al.*⁸, the experimental system is a Nd:YAG laser with pump modulation $A(t) = A_0(1 + m \cos 2\pi\nu t)$, here with $A_0 = 1.2$ and $m = 0.4$. In these conditions, we observe a chaotic tongue for $\nu_- < \nu < \nu_+$, with $\nu_+ = 37$ kHz and $\nu_- = 25$ kHz. This tongue is divided in three by two period-2 windows located around $\nu_1 = 30$ kHz and $\nu_2 = 34$ kHz. This is a strong indication that at least two period-2 orbit exist between these two windows, which implies that the corresponding templates should have three or more branches.

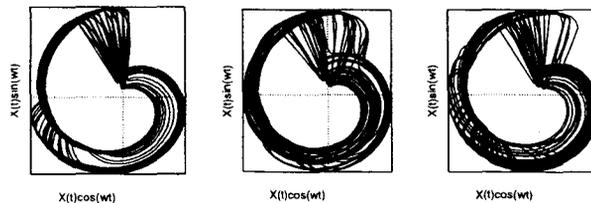


Figure 3: Attractors observed at (a) $\nu = 36$ kHz, (b) $\nu = 32$ kHz, (c) $\nu = 27$ kHz

Indeed, we have found that $\mathcal{T}(2,3,4)$ describes the structure of all the regimes observed for $\nu_1 < \nu < \nu_2$, while regimes located near ν_+ (resp. ν_-) are associated with the SHT $\mathcal{T}(2,3)$ (resp. RHT $\mathcal{T}(3,4)$). The transitions $\mathcal{T}(2,3) \rightarrow \mathcal{T}(2,3,4)$ and $\mathcal{T}(2,3,4) \rightarrow \mathcal{T}(3,4)$ occur slightly above ν_2 and slightly under ν_1 . Attractors associated respectively to $\mathcal{T}(2,3)$, $\mathcal{T}(2,3,4)$, and $\mathcal{T}(3,4)$ are displayed in Fig. 3. Their overall similarity shows that template analysis can be a powerful technique to discriminate chaotic attractors.

We have performed numerical simulations of the following model of this laser, at parameter values $A_0 = 2$, $\gamma = 10^{-4}$, $m = 0.49$, $a = 10^{-5}$:

$$\dot{I} = I[D - 1] + aD \quad (1a)$$

$$\dot{D} = \gamma[A_0(1 + m \cos \omega t) - D(1 + I)] \quad (1b)$$

The corresponding bifurcation diagram for $r = \omega/\omega_r$ ranging from 0.35 to 0.52 ($\omega_r = \sqrt{\gamma(A_0 - 1)}$ is the free relaxation frequency) is shown in Fig. 4. As in the experimental situation, it can be seen that three different period-2 solutions coexist in the intermediate region. Accordingly, we find that for $r < 0.404$, $0.404 < r < 0.490$, and $r > 0.490$, the dynamics is described by $\mathcal{T}(3,4)$, $\mathcal{T}(2,3,4)$, and $\mathcal{T}(2,3)$, respectively. The fact that this transition is entirely similar to the experimental one certainly motivates a detailed comparison for a more complete set of control parameters. This should allow us to perform an extended check of the validity of this model.

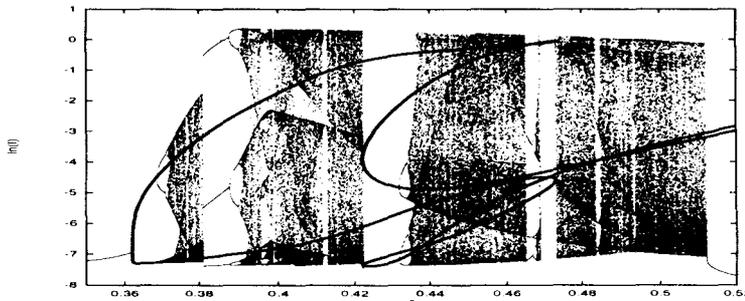


Figure 4: Bifurcation diagram of Eqs. (1), with period-2 solutions.

4 Symbolic encoding with template analysis

Template analysis is intimately linked to symbolic dynamics^{3,4,1,2}. If a different symbol is assigned to each branch, each periodic orbit held by the template is

completely specified by a unique symbolic name listing the successively visited branches. This name describes in which way stretching and folding act on the orbit to braid its strands. As a result, the knot invariants of an orbit contain precise information about its symbolic name. In a SHT, for instance, the “0101011” orbit is the only period-7 orbit with even torsion whose self-linking number is 16, and thus can be identified by merely counting the number of crossings of the associated braid.

For an arbitrary experimental UPO, there are in general only a few ways, usually a single one for low-period orbits, to project it on the template while preserving its topological invariants, and thus only a few compatible symbolic names. Following this observation, Lefranc *et al.*¹¹ have proposed a method to perform the symbolic encoding of an experimental chaotic attractor, using the locations and the topological invariants of the UPO to construct a partition of a section plane. An algorithm based on this approach and on Delaunay tessellations has been recently designed, and its validity and robustness has been checked in numerical simulations involving hundreds of UPO¹², as shown in Fig. 5. This algorithm can easily be applied to experimental data.

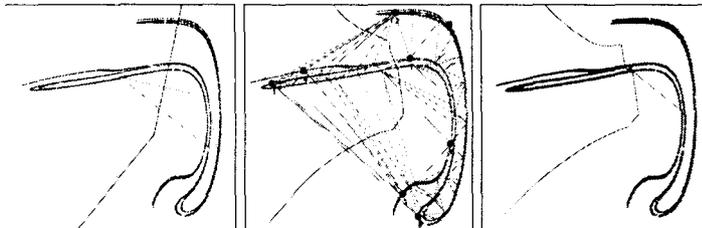


Figure 5: Construction of a generating partition from a set of 524 UPO with periods up to 23. (a) initial partition using the period-1 and period-2 orbits (b) partition during the construction (c) final partition. The region of symbol “0” (“1”) is to the left (right) of the border line, and contains points whose nearest periodic point is associated to “0” (“1”).

5 Conclusion

Because of the existence of template bifurcations, template analysis is a powerful tool for carrying out detailed comparisons between theory and experiment: the measure of integer invariants is robust to noise, and the whole procedure (extraction of UPO, computation of their invariants, and determination of the underlying template) can be fully automated. Furthermore, when the experimental and theoretical templates match, the comparison may be refined by extracting the symbolic dynamical information from the topological invariants.

References

1. G. B. Mindlin, X.-J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore, and N. B. Tufillaro. Characterization of strange attractors by integers. *Phys. Rev. Lett.*, 64(20):2350, 1990.
2. G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore, and X.-J. Hou. Topological analysis of chaotic time series data from Belousov-Zhabotinski reaction. *J. Nonlinear Sci.*, 1:147, 1991.
3. J. S. Birman and R. F. Williams. Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz's equations. *Topology*, 22:47, 1983.
4. P. J. Holmes. Knots and orbit genealogies in nonlinear oscillators. In T. Bedford and J. Swift, editors, *New directions in dynamical systems*, page 150. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
5. See refs. in Ref. ⁸.
6. S. O. Firlé, M. A. Natiello, and M. Eiswirth. Topological dynamics in a catalysis experiment — a non horseshoe template. *Phys. Rev. E*, 53:1257, 1996.
7. C. Letellier, G. Gouesbet, and N. F. Rulkov. Topological analysis of chaos in equivariant electronic circuits. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 6:2531, 1996.
8. G. Boulant, S. Bielawski, D. Derozier, and M. Lefranc. Experimental observation of a chaotic attractor with a reverse horseshoe topological structure. *Phys. Rev. E*, 55:R3801, 1997.
9. R. Gilmore and J. W. L. McCallum. Structure in the bifurcation diagram of the Duffing oscillator. *Phys. Rev. E*, 51:935, 1995.
10. G. Boulant, M. Lefranc, S. Bielawski, and D. Derozier. Horseshoe templates with global torsion in a driven laser. *Phys. Rev. E*, 55:5082, 1997.
11. M. Lefranc, P. Glorieux, F. Papoff, F. Molesti, and E. Arimondo. Combining topological analysis and symbolic dynamics to describe a strange attractor and its crises. *Phys. Rev. Lett.*, 73:1364, 1994.
12. J. Plumecoq and M. Lefranc. in preparation.

Acknowledgments

The Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne is Unité de Recherche Associée au CNRS. The Centre d'Études et Recherches Lasers et Applications is supported by the Ministère chargé de la Recherche, the Région Nord-Pas de Calais and the Fonds Européen de Développement Économique des Régions.

Bibliographie

- [Abarbanel et al.93] Abarbanel (H. D. I.), Brown (R.), Sidorowich (J. L.) et Tsimring (L. Sh.). – The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 65, 1993, pp. 1331–1392.
- [Abarbanel et al.94] Abarbanel (H. D. I.), Carroll (T. A.), Pecora (L. M.), Sidorowich (J. J.) et Tsimring (L. S.). – Predicting physical variables in time-delay embedding. *Phys. Rev. E*, vol. 49, 1994, pp. 1840–1853.
- [Arecchi et al.82] Arecchi (F. T.), Meucci (R.), Puccioni (P.) et Tredicce (J.). – Experimental evidence of subharmonic bifurcations multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 49, 1982, p. 1217.
- [Arecchi87] Arecchi (F. T.). – In: *Instabilities and Chaos in Quantum Optics*, éd. par Arecchi (F. T.) et Harrison (R. G.). p. 9. – Berlin, 1987.
- [Arnold73] Arnold (V. I.). – *Ordinary differential equations*. – Cambridge Mass., MIT Press, 1973.
- [Auerbach et al.87] Auerbach (D.), Cvitanovic (P.), Eckmann (J.-P.), Gunaratne (G.) et Procaccia (I.). – Exploring chaotic motion through periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, 1987, pp. 2387–2389.
- [Berge et al.88] Bergé (P.), Pomeau (Y.) et Vidal (Ch.). – *L'ordre dans le chaos*. – Hermann, 1988.
- [Bielawski et al.92] Bielawski (S.), Derozier (D.) et Glorieux (P.). – Anti-phase dynamics and polarization effects in the nd-doped fiber laser. *Phys. Rev. A*, vol. 46 (5), 1992, pp. 2811–2822.

- [Birman et al.83] Birman (J. S.) et Williams (R. F.). – Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz's equations. *Topology*, vol. 22, 1983, pp. 47–82.
- [Birman75] Birman (J. S.). – *Braids, links and mapping class groups*. – Princeton, Univ. Press, 1975.
- [Boulant et al.a] Boulant (G.), Lefranc (M.), Bielawski (S.) et Derozier (D.). – A non-horseshoe template in a chaotic laser model. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. – à paraître.
- [Boulant et al.b] Boulant (G.), Plumecoq (J.), Bielawski (S.), Derozier (D.) et Lefranc (M.). – Model validation and symbolic dynamics of chaotic lasers using template analysis. The Fourth Experimental Chaos Conference, Florida (USA). – à paraître.
- [Boulant et al.97a] Boulant (G.), Bielawski (S.), Derozier (D.) et Lefranc (M.). – Experimental observation of a chaotic attractor with a reverse horseshoe topological structure. *Phys. Rev. E*, vol. 55 (4), April 1997, p. R3801.
- [Boulant et al.97b] Boulant (G.), Lefranc (M.), Bielawski (S.) et Derozier (D.). – Horseshoe templates with global torsion in a driven laser. *Phys. Rev. E*, vol. 55 (5), 1997, p. 5082.
- [Bowen70a] Bowen (R.). – Markov partitions for axiom A diffeomorphisms. *Amer. J. Math.*, vol. 92, 1970, p. 725.
- [Bowen70b] Bowen (R.). – On axiom A diffeomorphisms. *In: CBMS Regional conference series in mathematics*. – Providence, 1970.
- [Breedon et al.90] Breedon (J. L.) et Hübler (A.). – Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables. *Phys. Rev. A*, vol. 42, 1990, pp. 5817–5826.
- [Briggs90] Briggs (K.). – An improved method for estimating lyapunov exponents of chaotic time series. *Phys. Lett. A*, vol. 151, 1990, pp. 27–32.
- [Casdagli et al.91] Casdagli (M.), Eubank (S.), Farmer (J. D.) et Gibson (J.). – State space reconstruction in the presence of noise. *Physica D*, vol. 51, 1991, pp. 52–98.

- [Celet96] Celet (J. C.). – Résonances linéaires et non linéaires des lasers de classe b, 1996. Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [Cvitanovic et al.88] Cvitanovic (P.), Gunaratne (G. H.) et Procaccia (I.). – Topological and metric properties of henon-type strange attractors. *Phys. Rev. A*, vol. 38, 1988, pp. 1503–1520.
- [Cvitanovic88] Cvitanovic (P.). – Invariant measures of strange sets in terms of cycles. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, 1988, pp. 2729–2732.
- [Dangoisse et al.87] Dangoisse (D.), Glorieux (P.) et Hennequin (D.). – Chaos in a CO2 laser with modulated parameters: Experiments and numerical calculations. *Phys. Rev. A*, vol. 35, 1987, pp. 4775–4791.
- [Dubrovine et al.82] Dubrovine (B.), Novikov (S.) et Fomenko (A.). – *Géométrie contemporaine. Géométrie et topologie des variétés*. – Moscou, Mir Moscou, 1982.
- [Eckmann et al.85] Eckmann (J.-P.) et Ruelle (D.). – Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 57, 1985, pp. 617–656.
- [Erneux et al.87] Erneux (T.), Baer (S. M.) et Mandel (P.). – Subharmonic bifurcation and bistability of periodic solutions in a periodically modulated laser. *Phys. Rev. A*, vol. 35, 1987, p. 1165.
- [Erneux et al.95] Erneux (T.), Bielawski (S.), Derozier (D.) et Glorieux (P.). – Stabilizing or destabilizing lasers by continuous delayed feedback. *Quantum Semiclass. Opt.*, vol. 7, 1995, pp. 951–963.
- [Farmer et al.83] Farmer (J. D.), Ott (E.) et Yorke (J. A.). – The dimension of chaotic attractors. *Physica D*, vol. 7, 1983, pp. 153–180.
- [Fioretti et al.93] Fioretti (A.), Molesti (F.), Zambon (B.), Arimondo (E.) et Papoff (F.). – Topological analysis of laser with saturable absorber in experiments and models. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. 3 (3), 1993, pp. 559–564.

- [Firle et al.95] Firle (S. O.), Natiello (M. A.) et Eiswirth (M.). – Topological dynamics in a catalysis experiment - a non-horseshoe template. *Phys. Rev. E*, vol. 53 (1), January 1995, pp. 1257–1260.
- [Ghrist et al.97] Ghrist (R. W.), Holmes (P. J.) et Sullivan (M. C.). – *Knots and links in three-dimensional flows*. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.
- [Gibson et al.92] Gibson (J. F.), Farmer (J. D.), Casdagli (M.) et Eubank (S.). – An analytic approach to practical state space reconstruction. *Physica D*, vol. 57, 1992, pp. 1–30.
- [Gilmore et al.95] Gilmore (R.) et McCallum (J. W. L.). – Structure in the bifurcation diagram of the duffing oscillator. *Phys. Rev. E*, vol. 51 (2), 1995, pp. 935–956.
- [Gilmore93] Gilmore (R.). – Summary of the second workshop on measures of complexity and chaos. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. 3 (3), 1993, pp. 491–519.
- [Glendinning94] Glendinning (P.). – *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. – Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [Gouesbet et al.94] Gouesbet (G.) et Letellier (C.). – Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L2 approximation on nets. *Phys. Rev. E*, vol. 49, 1994, pp. 4955–4972.
- [Grassberger et al.83a] Grassberger (P.) et Procaccia (I.). – Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 50, 1983, pp. 346–349.
- [Grassberger et al.83b] Grassberger (P.) et Procaccia (I.). – Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, vol. 9, 1983, pp. 189–208.
- [Grassberger et al.89] Grassberger (P.), Kantz (H.) et Moenig (U.). – On the symbolic dynamics of the henon map. *J. Phys. A*, vol. 22, 1989, pp. 5217–5230.
- [Grebogi et al.82] Grebogi (C.), Ott (E.) et Yorke (J. A.). – Chaotic attractors in crisis. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 48, 1982, pp. 1507–1510.

- [Grebogi et al.83] Grebogi (C.), Ott (E.) et Yorke (J. A.). – Crisis, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D*, vol. 7, 1983, pp. 181–200.
- [Guckenheimer et al.83] Guckenheimer (J.) et Holmes (P. J.). – *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. – Berlin, Springer, 1983.
- [Guckenheimer83] Guckenheimer (J.). – Strange attractors in fluid dynamics. In: *Dynamical systems and chaos, (Lecture Notes in Physics)*, pp. 149–157. – 1983.
- [Haken75] Haken (H.). – Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. *Phys. Lett. A*, vol. 53, 1975, p. 77.
- [Haken83] Haken (H.). – *Advanced synergetics*. – Berlin, Springer, 1983.
- [Hao88] Hao (Bai-Lin). – Numerical methods to study chaos in ordinary differential equations. In: *Directions in chaos*, éd. par Bai-LinI (Hao), pp. 294–309. – Singapore, World Scientific, 1988.
- [Hao89] Hao (B.-L.). – *Elementary symbolic dynamics and chaos in dissipative systems*. – Singapore, World Scientific, 1989.
- [Hao91] Hao (B.-L.). – Symbolic dynamics and characterisation of complexity. *Physica D*, vol. 51, 1991.
- [Henon76] Hénon (M.). – A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.*, vol. 50, 1976, pp. 69–77.
- [Hirsch et al.74] Hirsch (M. W.) et Smale (S.). – *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. – New York, Academic Press, 1974.
- [Holmes88] Holmes (P. J.). – Knots and orbit genealogies in nonlinear oscillators. In: *New directions in dynamical systems*, éd. par Bedford (T.) et Swift (J.), pp. 150–191. – Cambridge, University Press, 1988.
- [Jackson88] Jackson (A. E.). – *Perspectives in Nonlinear Dynamics*. – Cambridge, Cambridge University Press, 1988 volume 1.

- [Kaplan et al.79] Kaplan (J. L.) et Yorke (J. A.). – Chaotic behavior of multidimensional difference equations. *In: Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, éd. par Walter (H. O.) et Peitgen (H.-O.), pp. 204–227. – Berlin, Springer, 1979.
- [Kauffman] Kauffman (L. H.). – *On Knots*. – Annals of Mathematics Studies 115.
- [Kauffman91] Kauffman (L. H.). – *Knots and Physics*. – Singapore, World Scientific, 1991.
- [Khanin95] Khanin (Y. I.). – *Principles of Laser Dynamics*. – Amsterdam, Elsevier, 1995.
- [Kleinmann64] Kleinmann (D. A.). – *Syst. Tech. J.*, vol. 37, 1964, p. 2203.
- [Kolmogorov58] Kolmogorov (A. N.). – Eine neue metrische invariante transitiver dynamischer systeme und automorphismen von lebesgue-Räumen (in russ.). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 119, 1958, p. 861.
- [Kushida et al.68] Kushida (T.), Marcos (H. M.) et Geusic (J. E.). – Laser transition cross section and fluorescence branching ratio for Nd^{3+} in yttrium aluminium garnet. *Phys. Rev.*, vol. 167, 1968, p. 1289.
- [Lathrop et al.89] Lathrop (D. P.) et Kostelich (E. J.). – Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits. *Phys. Rev. A*, vol. 40, 1989, pp. 4028–4031.
- [Lefranc et al.91] Lefranc (M.), Hennequin (D.) et Dangoisse (D.). – Homoclinic chaos in a laser with saturable absorber. *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 8, 1991, p. 239.
- [Lefranc et al.93] Lefranc (M.) et Glorieux (P.). – Topological analysis of chaotic signals from a CO₂ laser with modulated losses. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. 3 (3), 1993, pp. 643–649.
- [Lefranc et al.94] Lefranc (M.), Glorieux (P.), Papoff (F.), Molesti (F.) et Arimondo (E.). – Combining topological analysis and symbolic dynamics to describe a strange attractor and its crises. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, 1994, pp. 1364–1367.

- [Lefranc et al.95] Lefranc (M.), Bielawski (S.), Derozier (D.) et Glorieux (P.). – Characterization and control of laser chaos using unstable periodic orbits. *In: LEOS '95. IEEE Lasers and Electro-Optics Soc., 8th Annual Meeting 1995, Conf. Proc. (Cat. No. 95CH35739)*, pp. 35–36. – New York, IEEE 1995, 1995.
- [Lesceller et al.94] Lesceller (L.), Letellier (C.) et Gouesbet (G.). – Algebraic evaluation of linking numbers of unstable periodic orbits in chaotic attractors. *Phys. Rev. E*, vol. 49, 1994, pp. 4693–4695.
- [Letellier et al.95a] Letellier (C.), Dutertre (P.) et Maheu (B.). – Unstable periodic orbits and templates of the rossler system: toward a systematic topological characterization. *Chaos*, vol. 5 (1), 1995, pp. 271–282.
- [Letellier et al.95b] Letellier (C.), Sceller (L. Le) et Hudson (J. L.). – Topological characterization and global vector field reconstruction of an experimental electrochemical system. *J. Phys. Chem.*, vol. 99 (18), May 1995, p. 7016.
- [Letellier et al.96] Letellier (C.), Gouesbet (G.) et Rulkov (N. F.). – Topological analysis of chaos in equivariant electronic circuits. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. 6, 1996, p. 2531.
- [Letellier94] Letellier (C.). – Caractérisation topologique et reconstruction d'attracteurs étranges, 1994. Thèse de Doctorat de l'université de Paris VII.
- [Lorenz63] Lorenz (E. N.). – Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, vol. 20, 1963, pp. 130–141.
- [Maiman60] Maiman (T. H.). – Stimulated optical radiation in ruby masers. *Nature*, vol. 187, 1960, p. 493.
- [Melvin et al.91] Melvin (P.) et Tufillaro (N. B.). – Templates and framed braids. *Phys. Rev. A*, vol. 44, 1991, pp. 3419–3422.
- [Midavaine et al.85] Midavaine (T.), Dangoisse (D.) et Glorieux (P.). – Observation of chaos in a frequency-modulated CO₂ laser. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, 1985, p. 1989.
- [Mindlin et al.90] Mindlin (G. B.), Hou (X.-J.), Solari (H. G.), Gilmore (R.) et Tufillaro (N. B.). – Classification of strange attractors by integrers. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64 (20), 1990, pp. 2350–2353.

- [Mindlin et al.91] Mindlin (G. B.), Solari (H. G.), Natiello (M. A.), Gilmore (R.) et Hou (X.-J.). – Topological analysis of chaotic time series data from belousov-zhabotinski reaction. *J. Nonlinear Sci.*, vol. 1, 1991, pp. 147–173.
- [Mindlin et al.95] Mindlin (G. B.) et Solari (H. G.). – Topologically inequivalent embeddings. *Phys. Rev. E*, vol. 52 (2), 1995, pp. 1497–1502.
- [Narducci et al.88] Narducci (L. M.) et Abraham (N. B.). – *Laser Physics and Laser Instabilities*. – Singapore, World Scientific, 1988.
- [Nicolis95] Nicolis (G.). – *Introduction to nonlinear science*. – Cambridge University Press, 1995.
- [Oppo et al.85] Oppo (G. L.) et Politi (A.). – *Z. Phys. B*, vol. 59, 1985, p. 111.
- [Oppo et al.89] Oppo (G.-L.), Tredicce (J. R.) et Narducci (L. M.). – Dynamics of vibro-rotational CO₂ laser transitions in a two-dimensional phase space. *Opt. Commun.*, vol. 69, 1989, p. 393.
- [Packard et al.80] Packard (N. H.), Crutchfield (J. P.), Farmer (J. D.) et Shaw (R. S.). – Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, 1980, pp. 712–716.
- [Papoff et al.92] Papoff (F.), Fioretti (A.), Arimondo (E.), Mindlin (G. B.), Solari (H. G.) et Gilmore (R.). – Structure of chaos in the laser with saturable absorber. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 68, 1992, pp. 1128–1131.
- [Parlitz et al.91] Parlitz (U.), Scheffczyk (C.), Kurz (T.) et Lauterborn (W.). – On modeling driven oscillators by maps. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. 1 (1), 1991, pp. 261–264.
- [Plumecoq et al.] Plumecoq (J.) et Lefranc (M.). en préparation.
- [Poincare99] Poincaré (H.). – *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. – Paris, Gauthier-Villars, 1899 volume 3.
- [Poincare08] Poincaré (H.). – *Science et Méthode*. – Bibliothèque Scientifique, 1908.
- [Reidemeister32] Reidemeister (K.). – *Knotentheorie*. – Berlin, Springer Verlag, 1932.

- [Roessler76] Roessler (O. E.). – An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, vol. 57, 1976, pp. 397–398.
- [Ruelle et al.71] Ruelle (D.) et Takens (F.). – On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys.*, vol. 20, 1971, pp. 167–192.
- [Sargent et al.79] Sargent (M.), Scully (M. O.) et Lamb (W. E.). – *Laser physics*. – Addison Wesley, 1979.
- [Sauer et al.91] Sauer (T.), Yorke (J. A.) et Casdagli (M.). – Embedology. *J. Stat. Phys.*, vol. 65, 1991, pp. 579–616.
- [Schwartz et al.94] Schwartz (I. B.) et Erneux (T.). – Subharmonic hysteresis and period doubling bifurcations for a periodically driven laser. *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 54, 1994, p. 1083.
- [Schwartz88] Schwartz (I. B.). – Sequential horseshoe formation in the birth and death of chaotic attractors. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, 1988, p. 1359.
- [Shinbrot et al.90] Shinbrot (T.), Ott (E.), Grebogi (C.) et Yorke (J. A.). – Using chaos to direct trajectories to targets. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65, 1990, pp. 3215–3218.
- [Siegman86] Siegman (A. E.). – *Lasers*. – Mill Valley, California, University Sciences Books, 1986.
- [Smale67] Smale (S.). – Differentiable dynamical systems. *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 73, 1967, pp. 747–817.
- [Snitzer et al.68] Snitzer (E.) et Young (C. G.). – Glass lasers. *In: Lasers*, éd. par New-York (Marcel Dekker), p. 191. – 1968.
- [Solari et al.87] Solari (H. G.), Eschenazi (E.), Gilmore (R.) et Tredicce (J. R.). – Influence of coexisting attractors on the dynamics of a laser system. *Opt. Commun.*, vol. 64, 1987, p. 453.
- [Solari et al.88a] Solari (H. G.) et Gilmore (R.). – Organization of periodic orbits in the driven duffing oscillator. *Phys. Rev. A*, vol. 38, 1988, pp. 1566–1572.
- [Solari et al.88b] Solari (H. G.) et Gilmore (R.). – Relative rotation rates for driven dynamical systems. *Phys. Rev. A*, vol. 37, 1988, p. 3096.
- [Svelto89] Svelto (O.). – *Principles of lasers*. – New York and London, Plenum Press, 1989.

- [Takens80] Takens (F.). – Detecting strange attractors in turbulence. In : *Dynamical Systems and Turbulence (Warwick 1980) (Lecture Notes in Mathematics)*, éd. par Rand, A. (D.) et L.-S. (Young), pp. 366–381. – Berlin, Springer, 1980.
- [Tarassov81] Tarassov (L.). – *Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent*. – Moscou, Mir Moscou, 1981.
- [Toda75] Toda (M.). – *Phys. Rep.*, vol. 18, 1975, p. 1.
- [Tredicce et al.85] Tredicce (J. R.), Arecchi (F. T.), Lippi (G. L.) et Pucioni (G. P.). – Instabilities in lasers with an injected signal. *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 2, 1985, p. 173.
- [Tredicce et al.86] Tredicce (J. R.), Arecchi (F. T.), Poggi (G. P. Pucioni A.) et Gadomski (W.). – Dynamic behavior and onset of low-dimensional chaos in a modulated homogeneously broadened single-mode laser: experiment and theory. *Phys. Rev. A*, vol. 34, 1986, pp. 2073–2081.
- [Tufillaro et al.91] Tufillaro (N. B.), Holzner (R.), Flepp (L.), Brun (R.), Finardi (M.) et Badii (R.). – Template analysis for a chaotic NMR laser. *Phys. Rev. A*, vol. 44, 1991, pp. 4786–4788.
- [Tufillaro et al.92] Tufillaro (N. B.), Abbott (T. A.) et Reilly (J. P.). – *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos*. – Reading, Addison-Wesley, 1992.
- [Tufillaro et al.95] Tufillaro (N. B.), Wyckoff (P.), Brown (R.), Schreiber (T.) et Molteno (T.). – Topological time series analysis of a string experiment and its synchronized model. *Phys. Rev. E*, vol. 51 (1), 1995, pp. 164–174.
- [Yariv91] Yariv (A.). – *Optical electronics*. – New York, Saunders College Publishing, 1991.
- [Zambon91] Zambon (B.). – Theoretical investigation of models for the laser with a saturable absorber: A case of homoclinic tangency to a periodic orbit. *Phys. Rev. A*, vol. 44, 1991, pp. 688–702.

Index

- application de Poincaré, 31, 35, 36
- application de premier retour, 36
- arborescence, 123
- attracteur, 22
- attracteur chaotique, 6
- autonome, 14

- bassin d'attraction, 22
- Belousov-Zhabotinski, 79
- bifurcation, 24
- bifurcation nœud-selle, 26
- bifurcation tangente, 27
- brins, 58

- capacité, 44
- cascade de doublements de période, 49
- chaos déterministe, 32
- ciblage, 124
- classe B, 84
- collection, 120
- comportements dynamiques, 83
- composante, 52
- conservatif, 21
- contraction des volumes, 22
- crise, 165
- crise intérieure, 165
- crise de frontière, 165
- crises, 165
- croisements artificiels, 114

- degrés de liberté, 13, 15
- dense, 23
- diagramme de bifurcations, 26
- diagramme de gabarit, 70
- diagramme de lien, 54
- diagramme de premier retour, 37
- diagrammes de bifurcations, 90
- difféomorphisme, 14
- dimension, 31
- dimension de Hausdorff, 44
- dimension de Lyapunov, 44
- dimension de plongement, 29
- dimension fractale, 44
- dimension topologique, 43
- dimensions généralisées, 44
- dissipatif, 22
- doublement de période, 26
- Duffing, 90
- dynamique symbolique, 31
- déterministes, 9

- effet papillon, 32
- ensemble attracteur, 22
- entropie, 31, 43
- espace des phases, 6, 12, 13
- espace des états, 13
- exposants de Lyapunov, 17, 18

- fenêtres périodiques, 49
- Fer à cheval, 34
- fer à cheval, 7
- fer à cheval inversé, 149
- flot, 15
- fonction indice, 120
- fractal, 33
- frontière, 20
- fréquence de résonance, 89

- gabarit, 46, 64, 99, 139
- gabarit du fer à cheval, 64, 67
- gabarit spirale, 159
- gain, 80
- graphe d'empilement, 69, 70

- graphe d'enlacement, 69
- graphe d'insertion, 69
- graphe de torsion, 69
- grenat aluminium yttrium, 94
- gâteau roulé, 156
- homéomorphisme, 25
- hyperbolique, 17
- imprédictible, 28
- instable, 16
- intervalle spectral libre, 80
- invariants topologiques, 53
- inversion de population, 80
- isotopie, 52
- isotopie ambiante, 56
- isotopie régulière, 56
- langues chaotiques, 93
- lemme de poursuite, 120
- lien, 52
- ligne d'insertion, 67
- ligne de branchement, 67
- matrice d'insertion, 71
- matrice de gabarit, 71
- matrice de transition, 124
- matrice de voisins, 123
- modèle du bilan, 85
- Morse, 90
- mouvements de Reidemeister, 54
- multistabilité, 23
- nœud, 52
- nœuds, 46
- nom symbolique, 109
- nombre d'auto-enlacement, 77
- nombre d'enlacement, 54
- nombres d'auto-enlacement, 56
- nombres d'enlacement, 111
- non linéaire, 11
- opérateur de décalage, 41
- orbite, 13
- orbites périodiques instables, 7, 46
- orientable, 20
- partition génératrices, 38
- pertes, 80
- plongement, 29
- point fixe, 15
- pompage, 80
- portrait de phase, 25
- problème d'inversion, 74, 116
- pseudo-image, 120
- pseudo-orbite, 120
- Pérot-Fabry, 80
- reconstruction, 29
- repliement, 33
- retours proches, 49
- résonance, 89
- résonances sous-harmoniques, 90
- sensibilité aux conditions initiales, 32
- shadowing, 120
- sous-gabarit, 157, 163
- surface de Poincaré, 35
- suspension, 37
- système autonome, 136
- système de Lorenz, 10
- système simple, 15
- séparatrice, 20
- séries temporelles, 28
- targeting, 124
- taux d'autorotation relative, 61
- taux de rotation relative, 58, 59, 111
- temps de vol, 36
- théorie des nœuds, 7, 46, 52
- théorie semi-classique, 82
- Toda, 86, 90
- topologie, 28
- torsion, 17, 62
- torsion globale, 146
- torsion locale, 20, 63
- transition, 164
- tresse, 103
- variables dynamiques, 9

variables physiques, 9

variété stable, 18

variété instable, 18

variété stable, 17

YAG, 94

élaguage, 170

émission stimulée, 80

équations de Bloch-Maxwell, 82

équivalence topologique, 25

équivalence topologique orbitale, 25

état, 12

étirement, 33

Abstract

The studies reported in this thesis are devoted to the characterization of chaos in lasers by means of a topological approach. More precisely, we made use of the *template analysis*, proposed by Mindlin *et al.* [*Phys. Rev. Lett.*, **64**, (1990), 2350] to classify low-dimensional chaos.

A chaotic attractor contains a dense set of *unstable periodic orbits*. Due to the chaotic dynamics, these orbits, represented by closed curves, are intertwined in a very complex way. As determinism precludes that different trajectories intersect, *knot theory* can be used to characterize this complexity by integer invariant numbers, provided the phase space is three-dimensional. Thus, it makes a clear-cut comparison between different regimes possible and much more relevant than the classical measures, as fractal dimension, resulting in real numbers. The central object of this approach is the *template*, a surface representing the topological structure of the attractor and describing the intertwining of its orbits.

An exploration of the parameter space of a fiber laser, and of a YAG laser, revealed topological structures not previously observed in an experimental system nor in models of these lasers. These structures appear as the first elements of a general classification of chaos proposed for driven oscillators. Furthermore, they provide experimental illustrations of *transitions* between templates. This characterization gives a reasonable hope that a robust and detailed comparison between experimental data and theoretical models of these lasers will be performed in the near future.

The investigations have required the development of tools to analyse time series. In particular, a method of reconstructing unstable periodic orbits and a systematic procedure to determine the template from topological invariants have been elaborated. A great advantage of this last procedure is that it does not require a previous symbolic encoding of the orbits.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la caractérisation des régimes chaotiques de lasers par une approche topologique. Plus précisément, l'étude s'articule autour de l'*analyse de gabarit*, proposée par Mindlin *et al.* [*Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1990, 2350] pour classer les régimes chaotiques de basse dimension.

Dans un espace des phases à trois dimensions, les *orbites périodiques instables*, qui constituent le squelette de l'attracteur chaotique, forment des nœuds complexes et invariants. La *théorie des nœuds* permet de caractériser cette organisation par des nombres entiers et fournit donc un moyen de comparaison, entre régimes chaotiques, bien plus efficace que les techniques traditionnelles, comme la mesure de dimension fractale, dont les résultats sont des nombres réels. L'objet central de cette approche est le *gabarit* (de l'anglais *template*), une surface représentant la structure topologique de l'attracteur et qui décrit complètement l'enchevêtrement de ses orbites.

Une exploration de l'espace des paramètres, d'un laser à fibre, puis d'un laser YAG, a mis en évidence l'existence de gabarits différents du paradigmatique *fer à cheval*, dans un même système. Ces structures sont les premiers éléments d'une classification générale des régimes chaotiques, proposée pour les systèmes modulés. Par ailleurs, Elles illustrent expérimentalement des processus de *transitions* entre gabarits. Enfin, ces résultats permettent d'envisager dans un futur proche un test robuste des modèles de ces types de laser.

Nous avons pu entreprendre cette classification en grande partie grâce au développement d'outils d'analyse des séries temporelles. En particulier, nous avons mis en place une méthode de reconstruction des orbites périodiques instables, et une procédure systématique de détermination du gabarit, à partir des invariants topologiques, qui permet de s'affranchir d'un codage symbolique préalable des orbites.

