

gare 2006867

THESE

*présentée à l'*

UNIVERSITE DES SCIENCES  
ET  
TECHNIQUES DE LILLE

*par*

Hervé CORNILLE

*pour obtenir le titre de*

**Docteur en Mécanique**

**MODELISATION ASYMPTOTIQUE  
DE PHENOMENES D'ONDES A PETITE ECHELLE  
DANS CERTAINS TYPES DE TURBOMACHINES**

soutenue le 24 octobre 1997 devant la commission d'examen :

MM.	A. DYMENT, Professeur à l'Université de Lille I	Président
	B. DESMET, Professeur à l'Université de Valenciennes	Rapporteur
	K.D. NGUYEN, Professeur à l'Université de Caen	Rapporteur
	G. CAIGNAERT, Professeur à l'E.N.S.A.M de Lille	Examineur
	P.A. BOIS, Professeur à l'Université de Lille I	Examineur

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur P. A. Bois qui a dirigé ce travail et qui m'a fait bénéficier de son soutien, de la rigueur qui caractérise son approche de la mécanique, de ses conseils et de son savoir faire en matière de description asymptotique des phénomènes.

Je tiens particulièrement à remercier Monsieur G. Caignaert, co-initiateur du sujet avec Monsieur P. A. Bois, qui m'a fait profiter de ses remarques judicieuses au cours de cette étude.

J'adresse mes remerciements à Monsieur B. Desmet qui a bien voulu examiner ce travail du point de vue du turbomachiniste.

Mes remerciements vont également à Monsieur K. D. Nguyen qui a consenti à examiner ce travail du point de vue du géophysicien.

Je remercie aussi Monsieur A. Dymont qui m'a fait l'honneur de s'intéresser à mon étude et d'accepter la présidence de mon jury.

# TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....	1
-------------------	---

## Chapitre 1

### MODELISATION DES INSTATIONNARITES DANS LES TURBOMACHINES : REVUE CRITIQUE DES TRAVAUX RECENTS ET ACTUELS

I.1 Caractéristiques expérimentales des différents types de décrochage tournant.....	5
I.1.1 Aspect global en régime établi.....	5
I.1.2 Aspect local en régime établi.....	11
I.1.3 Remarques sur le décrochage en régime établi.....	13
I.1.4 Apparition du décrochage.....	13
I.1.5 Contrôle du décrochage.....	14
I.2 Modélisations du décrochage tournant : revue chronologique des approches couramment utilisées.....	14
I.3 Commentaires généraux.....	29
I.4 Conclusion : origines et finalités de l'étude.....	32

## Chapitre 2

### COMPARAISON ENTRE LES ECOULEMENTS GEOPHYSIQUES ET LES ECOULEMENTS DANS LES TURBOMACHINES

II.1 Analogie expérimentale de Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg.....	34
II.2 Conditions d'apparition des ondes de Rossby.....	39
II.3 Analyse de la géométrie caractéristique de machines radiale et axiale.....	44
II.4 Comparaison entre les écoulements géophysiques et les écoulements dans les turbomachines.....	45

## Chapitre 3

### MACHINE RADIALE

III.1	Position du problème.....	48
III.1.1	Choix des coordonnées et définition du repère local.....	48
III.1.2	Hypothèses sur le fluide.....	51
III.2	Analyse dimensionnelle du problème.....	52
III.2.1	Adimensionnement, normalisation, définition des paramètres $\delta$ , $\eta$ et $\alpha$ .....	52
III.2.2	Détermination des types de turbomachines et de l'ordre de grandeur du paramètre cinématique $\alpha$ pour une machine en utilisation industrielle...	54
III.3	Conditions d'apparition des ondes de Rossby : cas $\alpha = \epsilon^2$ .....	70
III.4	Ondes tournantes dans les machines radiales en application industrielle : cas $\alpha = 1$ .....	70
III.4.1	Ecoulement stationnaire de base à l'ordre $\epsilon^0$ et détermination de l'amplitude $\mu$ de la perturbation.....	70
III.4.2	Ecoulement Stationnaire de base à l'ordre $\epsilon^1$ ...	75
III.4.2.1	Solution dans la roue.....	76
III.4.2.2	Solution dans le diffuseur lisse.....	77
III.4.2.3	Recherche d'une solution à la périphérie de la roue.....	77
III.4.3	Ecoulement perturbé.....	84
III.4.4	Solution d'ondes tournantes du type $A e^{i(\ell y - \sigma t)}$ .....	85
III.4.5	Famille de solutions d'ondes fixes par rapport au rotor.....	93
III.4.6	Famille de solutions d'ondes tournantes avec le rotor.....	94

III.5 Recherche de solutions d'ondes planes dans le cas où $\alpha = \epsilon$ .....	95
III.5.1 Solution dans la roue.....	97
III.5.2 Solution dans le diffuseur lisse.....	98
III.5.3 Ecoulement perturbé.....	99
III.6 Conclusion.....	100

## Chapitre 4

### MACHINE AXIALE

IV.1 Hypothèses et équations.....	102
IV.1.1 Choix des coordonnées et définition du repère local.....	102
IV.1.2 Hypothèses sur le fluide.....	104
IV.1.3 Adimensionnement, normalisation, définition des paramètres $\eta$ et $\alpha$ .....	104
IV.1.4 Détermination des types de turbomachines et des ordres de grandeur significatifs des paramètres pour une machine en utilisation industrielle...107	
IV.2 Analyse asymptotique des solutions d'onde.....	109
IV.2.1 Ondes de Rossby dans la machine axiale : conditions d'apparition : $\alpha = \epsilon^2$ .....	109
IV.2.2 Ondes tournantes dans les machines axiales en application industrielle : $\alpha = 1$ .....	115
IV.2.3 Recherche de solutions d'ondes planes dans le cas où $\alpha = \epsilon$ .....	119
IV.3 Commentaires.....	121
CONCLUSION.....	122
REFERENCES.....	126

**ANNEXE 1**

Ondes de Rossby.....130

**ANNEXE 2**

Repère de Darboux-Ribaucour : Eléments de définition....139

**ANNEXE 3**

Machine radiale : Eléments de calculs.....144

**ANNEXE 4**

Triangle des vitesses (rappel).....168

Nomenclature.....169

## INTRODUCTION

Une turbomachine est conçue pour un point de fonctionnement donné. Celui-ci est caractérisé par un débit et une augmentation de pression à travers la machine. Dans leurs applications industrielles, les compresseurs alimentent des circuits d'utilisation. La caractéristique débit-pression du circuit varie en fonction de l'utilisation, et par conséquent celle de la machine également. Quand le débit atteint un minimum, on voit apparaître dans l'écoulement des instabilités. Ces instabilités sont classées par les utilisateurs en deux catégories : le *pompage* et le *décrochage tournant*.

Le pompage est une instabilité due au couplage de la machine avec son circuit. C'est en général un phénomène à basse fréquence. On le décrit souvent comme une pulsation de la vitesse débitante. C'est le même type de comportement qu'aurait un système-masse ressort avec amortissement (voir, par exemple, [1]). L'installation est alors modélisée par le compresseur, les conduites, un réservoir et une vanne finale. Le réservoir joue le rôle d'un ressort pneumatique, la masse est celle du fluide dans les conduites et les coefficients d'amortissement découlent de la présence du compresseur et de la vanne. La vanne a un coefficient négatif, celui du compresseur peut être positif ou négatif. Ce phénomène nécessite une approche globale du circuit.

Le décrochage tournant est une instabilité interne à la machine. Lorsque le débit atteint le point de décrochage, on observe une perte des caractéristiques qui se traduit par une diminution de la pression de refoulement. Le débit à l'extérieur de la machine reste sensiblement stationnaire, de même que la pression. Quant à l'intérieur

de la machine, on y observe un phénomène d'onde de pression tournante. Cette onde tourne à une vitesse angulaire généralement inférieure à celle du rotor. La transition de l'écoulement décroché à l'écoulement initial présente une hystérésis.

Ces instabilités sont nuisibles. Les parties mécaniques sont plus sollicitées et la durée de vie de la machine et de son circuit peut être compromise. La perte de caractéristique et le phénomène d'hystérésis sont néfastes pour l'utilisation. L'idéal pour l'application industrielle est de ne pas entrer dans le domaine d'instabilités. Toutefois les conditions d'utilisation ne permettent pas toujours de garantir un débit minimal. Dans ce cas il faut pouvoir revenir le plus rapidement possible dans la plage "normale" d'utilisation ou "abaisser" le point d'apparition du décrochage et du pompage.

Les instabilités dans les turbomachines ont fait l'objet de nombreuses études tant expérimentales que théoriques (voir par exemple [1]). L'objectif principal de ces études est de déterminer le point d'apparition de ces phénomènes afin de définir un domaine d'utilisation. Deux voies sont utilisées : le type de machine existe et les caractéristiques sont connues, on détermine les caractéristiques de la nouvelle machine par similitude ; ou bien le type de machine à concevoir n'existe pas et il est nécessaire de faire un calcul. Les modèles de calcul sont confrontés à la complexité de la géométrie de ces machines, et notamment celle du rotor. Le problème du pompage, de par sa nature, doit être traité à l'échelle de la machine. Le rotor du compresseur est alors remplacé par un "actuator disk". On en définit une "caractéristique", que l'on pourrait encore appeler fonction transfert du rotor dans une approche du type asservissement linéaire. Ce type de modélisation du rotor associé à une résolution numérique permet de prédire, avec une certaine précision, le point d'apparition du décrochage ou/et du pompage. L'écoulement

instationnaire dans le rotor n'est connu, dans cette modélisation, que par ses caractéristiques d'entrée et de sortie. L'"actuator disk" est équivalent à une roue possédant un nombre d'aubes infini. On perd la trace des espaces interaubes. Les schémas numériques permettent de traiter l'écoulement instationnaire pour un rotor isolé. Ces schémas utilisent les équations d'équilibre local. Les possibilités informatiques actuelles permettent de traiter une roue possédant quelques aubes. La préoccupation actuelle des chercheurs est de contrôler ces instabilités (contrôle actif).

L'étude présentée ici contribue à l'analyse et à la compréhension des écoulements instationnaires dans les rotors. L'originalité du travail est une description asymptotique des écoulements à petite échelle. Le point de départ de ce travail est un article de Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg [21]. Dans cet article, les auteurs mettent en évidence une analogie expérimentale entre le décrochage tournant et les ondes de Rossby dans les écoulements atmosphériques.

On présente dans un premier temps l'aspect expérimental et les principales modélisations du décrochage tournant. Une synthèse de l'état de l'art actuel fait apparaître naturellement le domaine non exploré dans lequel s'inscrit la présente étude. L'analyse ébauchée par Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg, très qualitative, est complétée et précisée quantitativement. On met ensuite en évidence les longueurs caractéristiques de la géométrie des rotors des machines axiale et radiale abordées par l'étude. Le cas de la machine radiale est traité tout d'abord. Un paramètre cinématique  $\alpha$  analogue au nombre de Rossby apparaît dans les équations d'équilibre local. Ce paramètre conditionne la hiérarchie des différentes grandeurs : pression, vitesse et forces volumiques. La valeur des paramètres sans dimension est déterminée pour le cas des machines dans leurs applications industrielles. On définit ensuite les

conditions d'apparition des ondes de Rossby. Leur existence nécessite une très faible vitesse caractéristique de l'écoulement. Cela ne correspond pas au domaine industriel. Dans le cas d'utilisations industrielles, une solution d'ondes tournantes identifiable à une forme limite du petit décrochage tournant est présentée. Cette solution est remarquable, car elle est de même forme pour la machine axiale et radiale.

## Chapitre 1

### LA MODELISATION DES INSTATIONNARITES DANS LES TURBOMACHINES REVUE CRITIQUE DES TRAVAUX RECENTS ET ACTUELS

Ce chapitre a pour objet la description expérimentale du décrochage et une présentation chronologique des diverses approches utilisées couramment pour sa modélisation. On présente les idées directrices de ces différentes approches afin de mettre en évidence les paramètres principaux intervenant dans le décrochage : échelle des longueurs et amplitude du décrochage en particulier. C'est également, par une analyse de ces échelles, la définition du domaine encore peu abordé de la présente étude.

#### I.1 Caractéristiques expérimentales des différents types de décrochage tournant

##### I.1.1 Aspect global en régime établi

Une turbomachine est caractérisée par sa courbe d'augmentation de pression en fonction de sa vitesse débitante (voir figure 1). La vitesse du rotor est constante.

La machine est conçue pour fonctionner à un débit  $\phi^*$ . Le point de fonctionnement  $\phi$  dépend du circuit d'utilisation. La plage d'utilisation industrielle correspond à  $\phi > \phi_c$  où  $\phi_c$  est un débit critique. Dans cette plage l'écoulement est généralement stationnaire (zone "stable"), la pente est négative. Dès que le débit devient inférieur à  $\phi_c$ , l'écoulement peut devenir instationnaire et le décrochage tournant peut apparaître ( $\phi < \phi_c$  : "zone de pompage").

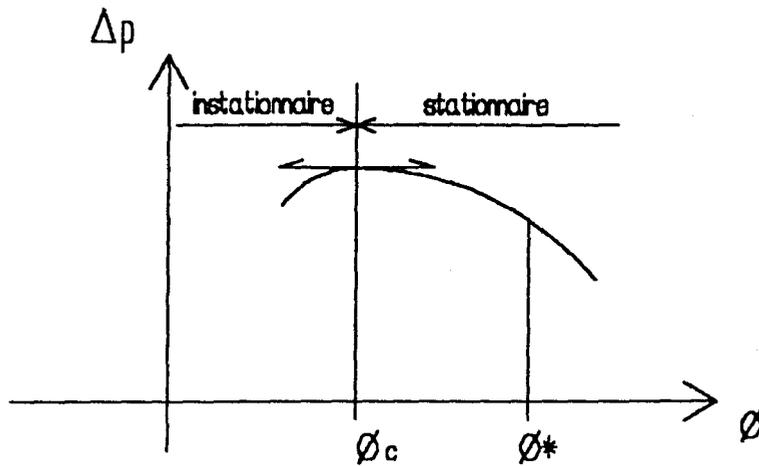


figure 1 : allure d'une caractéristique débit-pression d'une turbomachine et définition des plages d'écoulement stationnaire (zone "stable") et instationnaire (zone de pompage)

Le décrochage est une perturbation instationnaire de l'écoulement axisymétrique stationnaire (partie dite "saine" de l'écoulement). On observe une ou plusieurs zones où l'écoulement est ralenti (zones de blocage). Ces zones peuvent s'étendre sur une ou plusieurs aubes. Elles tournent ensemble à une vitesse constante différente de celle du rotor. Ces zones sont appelées cellules. Elles peuvent s'étendre sur tout ou partie de la hauteur de l'aubage des rotors et/ou des stators (préistributeurs et redresseurs).

Le décrochage dans les machines axiales et radiales présente de nombreux points communs. La présentation ci-après est principalement basée sur des résultats de machines axiales. Les machines axiales présentent des géométries dont l'analyse est plus aisée que celles des machines radiales. L'ensemble des résultats est plus homogène.

On distingue couramment deux types de décrochage tournant : le *grand décrochage* et le *petit décrochage* appelé aussi décollement tournant. Dans le cas d'une

machine axiale, lorsque les cellules sont localisées sur une partie de la hauteur de l'aubage, on qualifie le décrochage d'*annulaire*. Le petit décrochage correspond à un écoulement globalement peu perturbé, la caractéristique de la machine est, elle aussi, peu modifiée. Le grand décrochage correspond à un écoulement fortement perturbé : on observe parfois dans les canaux interaubes des débits inversés. La caractéristique globale est fortement modifiée (voir figure 2). La caractéristique de la machine montre un effet d'hystérésis dans la zone du décrochage.

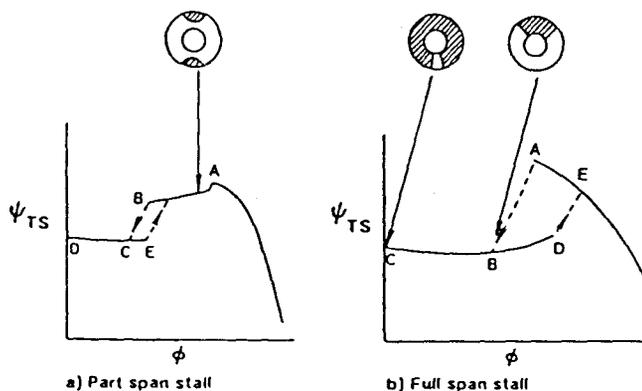


figure 2 : caractéristiques débit-pression de deux machines différentes - la caractéristique de la première machine (a) montre le cas d'apparition du petit décrochage (zone A-B) qui, lorsque le débit décroît, précède parfois le grand décrochage ( zone D-C). On voit également le phénomène d'hystérésis (A-B-D-E-A) - la caractéristique de la seconde machine (b) montre le cas d'apparition du grand décrochage seul et son phénomène d'hystérésis associé (A-B-D-E). Les parties hachurées des 3 figures illustrent l'étendue des zones bloquées entre le moyeu et le carter au point de fonctionnement de la machine axiale considérée. (d'après [1])

Le petit décrochage apparaît avant le grand décrochage quand on diminue le débit. Le petit décrochage n'apparaît pas systématiquement sur toutes les machines, ni dans tous les cas d'utilisation. La figure 3 montre pour une machine donnée quatre courbes correspondant à quatre vitesses de rotor. Le petit décrochage apparaît dans les deux cas où la pente est la plus importante.

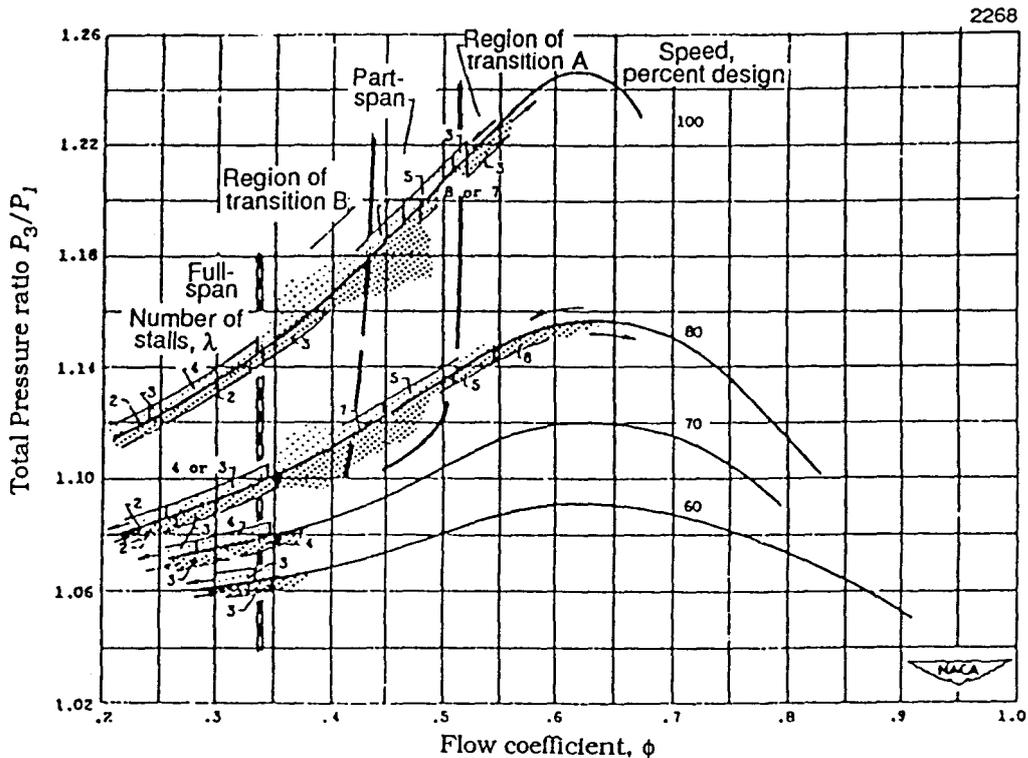
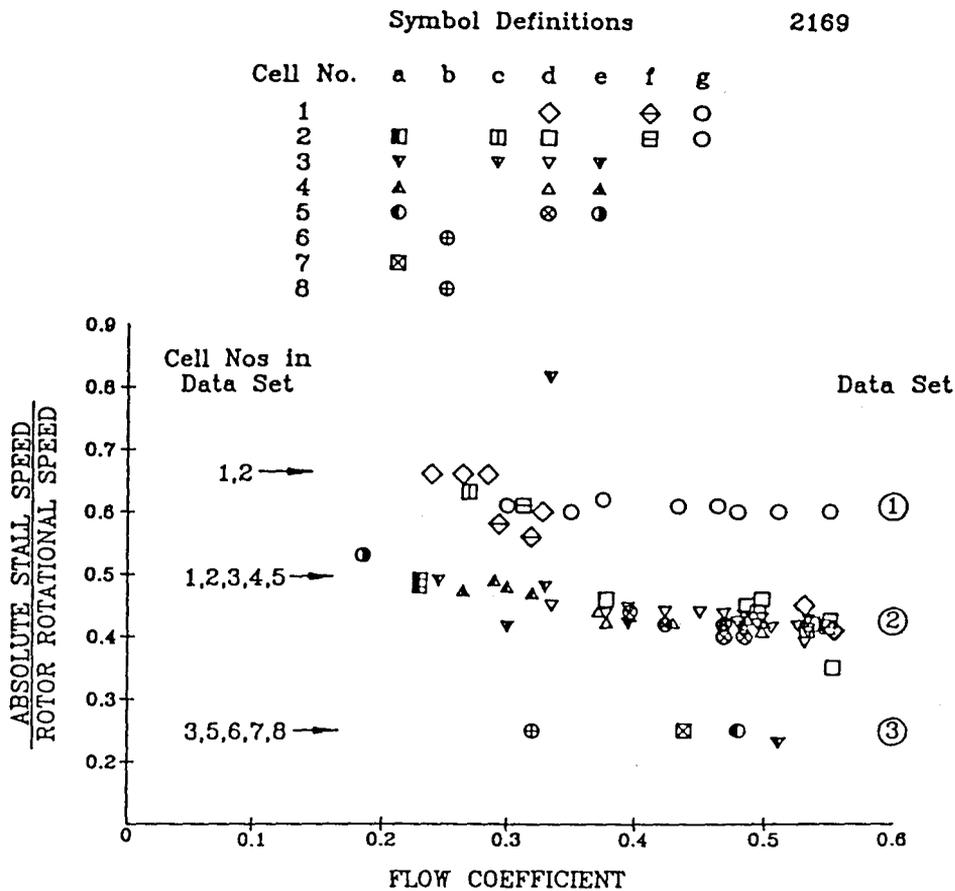


figure 3 : caractéristiques débit-pression d'une même machine - chacune des quatre courbes correspond à une vitesse de rotor : 100%, 80%, 70% et 60% de la vitesse pour laquelle a été conçue la machine ("Speed percent design") - cette figure montre les domaines d'apparition du petit décrochage ("Part-span"), du grand décrochage ("Full-span") et les zones de transition A et B - le petit décrochage apparaît avant le grand décrochage dans les deux cas où la pente est la plus élevée - (d'après [2])

Le nombre de cellules et la vitesse angulaire de rotation de ces cellules sont deux autres traits caractéristiques des décrochages (voir figure 4).



- |                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| a = Graham and Prian (1953) | e = Huppert, et al. (1952)      |
| b = Graham and Prian (1954) | f = Tysl, et al. (1955)         |
| c = Lewis, et al. (1954)    | g = Fabri and Siestrunck (1957) |
| d = Rockett (1959)          |                                 |

figure 4 : variation de la vitesse angulaire absolue des décrochages en fonction du débit ("FLOW COEFFICIENT") et du nombre de cellules (colonne sous "Cell Nos in data Set") - synthèse des relevés a, b, c, d, e, f et g - la vitesse angulaire des décrochages est adimensionnée par la vitesse angulaire du rotor - le tableau "Symbol Definitions" indique le nombre de cellules (colonne sous "Cell No") en fonction des relevés des différents auteurs - les trois groupes de décrochage 1, 2 et 3 sont repérés dans la colonne sous "Data Set" - (d'après [2])

On peut distinguer 3 groupes (figure 4) : le groupe 1 dont le nombre de cellules est de 1 à 2 et la vitesse de 0,55 à 0,65 ; ensuite le groupe 2 dont le nombre de cellules est de 1 à 5 et la vitesse de 0,35 à 0,55 ; finalement le groupe 3 dont le nombre de cellules est de 3 à 8 et la vitesse de 0,2 à 0,3. Le grand décrochage est caractérisé par son faible nombre de cellules, en général une à deux, et elles occupent toute la hauteur de l'aubage. On remarque que la vitesse de rotation diminue avec l'augmentation du nombre de cellules.

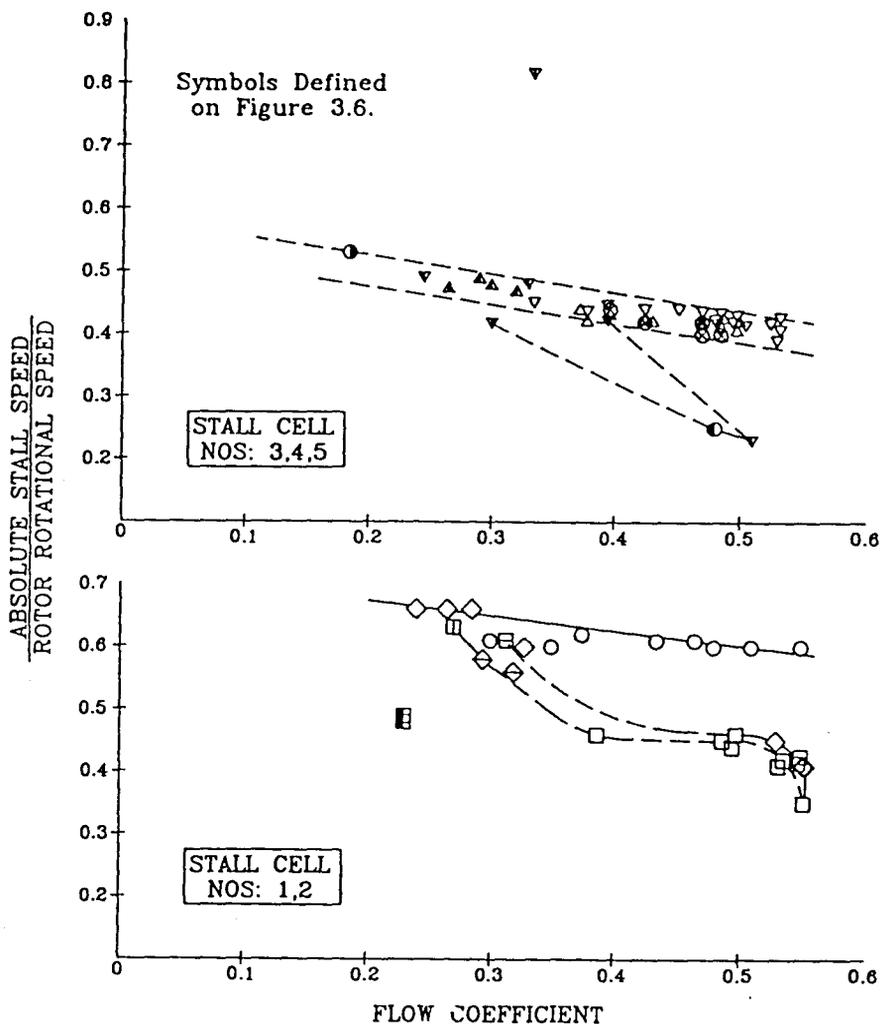


figure 5 : variation de la vitesse absolue des cellules décrochées en fonction du nombre de cellules et du débit (mêmes notations que pour la figure 4) - le graphe supérieur correspond à une partie du groupe 2 (3 à 5 cellules) et le graphe inférieur au groupe 1 - (d'après [2])

Un autre aspect de ces phénomènes d'ondes tournantes est, pour le décrochage d'un même groupe, la variation de la vitesse de rotation des cellules en fonction du débit (voir figure 5). Quand le nombre de cellules est faible, la variation n'est pas linéaire, et quand le nombre de cellules est plus élevé, la variation de vitesse est sensiblement linéaire. L'étendue des cellules augmente quand le débit décroît.

### I.1.2 Aspect local en régime établi

Classiquement, on explique le petit décrochage par le décollement, d'un ou plusieurs aubages, sous l'effet de l'augmentation d'incidence due à la diminution de débit global (voir figure 6 et 7). L'augmentation d'incidence dans la zone de décrochement provoque un décollement côté extrados. Ce décollement entraîne une diminution de débit du canal suivant, donc un effet de blocage. Cette perturbation se propage de façon continue au travers des aubes.

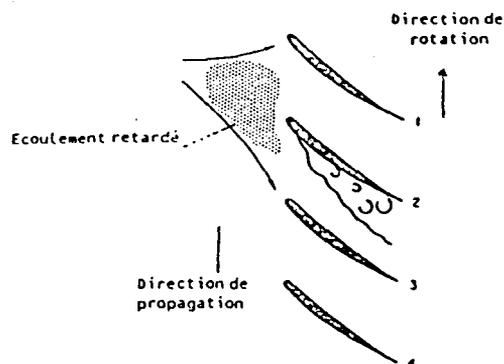


figure 6 : hypothèse couramment admise sur le mécanisme du petit décrochage - l'augmentation d'incidence de l'aube n°2 provoque un décollement à son extrados qui entraîne un effet de blocage du canal entre les aubes n°2 et n°3 et par conséquent une zone d'écoulement retardé - (d'après [3])

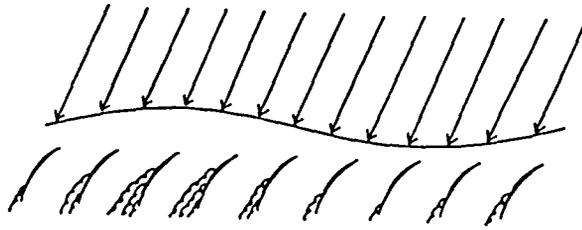


figure 7 : hypothèse faite sur le champ des vitesses du petit décrochage et validée expérimentalement par Day [4] - Le mécanisme décrit figure 6 opère de façon "continue" sur plusieurs aubes - (d'après [4]) -

Le grand décrochage s'étend sur plusieurs aubes et présente, dans certain cas, des débits inversés ( voir figure 8 ).

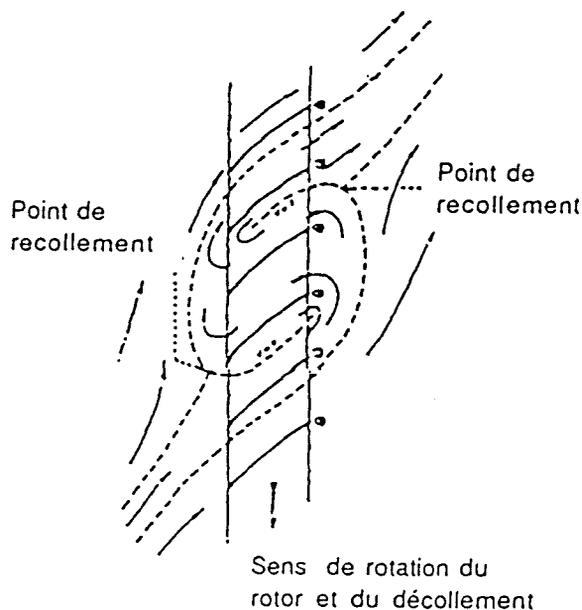


figure 8 : grand décrochage tournant caractérisé par ses recirculations ou débits inversés observés à l'intérieur de la cellule décrochée - (d'après [5]) -

Dans les deux cas de décrochage, on observe une séparation de l'écoulement côté aspiration. Cette séparation est due à l'effet de blocage. Au refoulement il y a un recollement.

### I.1.3 Remarques sur le décrochage en régime établi

Le décrochage apparaît comme une solution stable de l'écoulement à faible débit. On peut distinguer des caractères différents du décrochage établi. Une première distinction est le caractère non linéaire (grande amplitude de perturbation) du grand décrochage, et le caractère linéaire du petit décrochage (petite amplitude de perturbation). Une deuxième distinction est l'échelle de longueur en fonction du nombre de cellules. Un faible nombre de cellules implique une longueur caractéristique de l'écoulement décroché de l'ordre du rayon extérieur de la roue. Un grand nombre de cellules implique une longueur caractéristique plus petite que celle du rayon, de l'ordre de la distance interaubes. On peut alors classer les trois groupes de la figure 4 en fonction de ces deux critères. Le groupe 1 correspond aux phénomènes non linéaires à l'échelle du rayon. Le groupe 2 correspond aux phénomènes linéaires à l'échelle du rayon. Le groupe 3 correspond aux phénomènes linéaires à l'échelle de la distance interaubes.

### I.1.4 Apparition du décrochage

L'amélioration constante des moyens de mesure à permis plus récemment d'observer l'apparition du décrochage ([4], [6], [7], [8] et [9]). L'origine de la perturbation apparaît à l'échelle des couches limites, pour ensuite se développer à l'échelle de l'aubage puis à celle du rayon extérieur de la roue. Ce développement se fait en une dizaine à une centaine de tours de rotor. Le lieu privilégié d'émergence de la perturbation se situe à l'extrémité des aubes, là où existe un jeu de fonctionnement entre le carter et l'aube. En effet, dans

cette zone apparaissent un effet de fuite entre l'intrados et l'extrados, et un effet de laminage de la couche limite visqueuse.

### I.1.5 Contrôle du décrochage

Les effets du décrochage sont néfastes pour deux raisons majeures : (i) l'onde de pression tournante impose des sollicitations supplémentaires aux parties mécaniques du compresseur ; (ii) la perte de la caractéristique globale affecte les performances demandées par l'utilisateur. Les modèles de calcul de prédétermination ne permettent pas de prévoir avec exactitude le point d'apparition du décrochage. L'une des préoccupations actuelles des chercheurs est le *contrôle actif*. Cela consiste à détecter, au moyen de capteurs, la naissance du décrochage afin d'agir sur l'écoulement. Day [9] présente une méthode qui permet d'abaisser le point d'apparition de 6%. Cette méthode consiste à injecter de l'air au voisinage de la zone de décrochage. Paduano, Epstein, Valavani, Longley, Greitzer & Guenette [8] présentent une méthode de perturbation qui permet de baisser de 23% le point d'apparition. Le préistributeur est composé de 12 aubes commandées chacune par un servo-moteur. Les signes précurseurs du décrochage sont détectés par huit capteurs répartis régulièrement sur la périphérie à l'amont. Ce signal, après traitement, sert de consigne à un asservissement en position de chacune des aubes du préistributeur. Le gain et le déphasage sont déterminés expérimentalement.

### I.2 Modélisations du décrochage tournant : revue chronologique des approches couramment utilisées

Le décrochage tournant a fait l'objet de nombreuses études, initialement analytiques puis numériques. Le but de la description ci-après n'est pas d'exposer toutes les modélisations, ni d'en détailler les calculs, mais de

présenter les hypothèses principales de quelques modèles de référence afin de les classer en fonction des trois groupes de décrochage définis figure 4. Pampreen [2] présente dans son chapitre 6 un historique assez complet qui s'arrête à 1991.

La grande difficulté rencontrée dans la modélisation de ces écoulements provient de l'écoulement au voisinage des aubes et dans les canaux interaubes. Les premiers modèles analytiques sont basés sur une grille d'aubes plane. Cette hypothèse suppose que le rapport hauteur d'aube/rayon moyen est petit, et que les effets de Coriolis sont négligeables. Le comportement de la grille d'aubes est modélisé par une caractéristique continue. Cette hypothèse suppose que le nombre d'aubes est grand, et que l'écoulement est "parallèle" aux squelettes (à l'intérieur des canaux du rotor les lignes de courant sont parallèles aux squelettes des aubes). Avec cette hypothèse, la distance interaubes tend vers zéro, ou encore, la longueur caractéristique du décrochage est grande devant la distance interaubes. Les modèles ont eu chronologiquement pour objet une roue isolée, puis un compresseur avec ses différents étages, et ensuite le compresseur et son réservoir. L'apparition des calculateurs de plus en plus performants permet des simulations numériques de plus en plus pointues. Les écoulements tridimensionnels interaubes font l'objet de ces simulations.

Emmons (1955) [10] proposa un premier modèle capable de donner une vitesse de propagation. La grille d'aubes est plane, le fluide est parfait et incompressible, l'écoulement est irrotationnel à l'infini amont. L'auteur utilise une méthode de petites perturbations. Il suppose (i) que l'effet de blocage en sortie de roue varie linéairement avec la tangente de l'angle d'incidence d'entrée, (ii) qu'il y a un retard entre la variation de l'incidence à l'entrée et l'effet de blocage à la sortie de la roue, et (iii) que le comportement en fonction du temps

de la surface débitante non bloquée en sortie roue est modélisable par une équation différentielle linéaire du premier ordre. Le potentiel de vitesse de perturbation  $\phi$  en amont de la roue est cherché sous la forme d'une série de Fourier par rapport aux variables de position dans le plan  $x$  et  $y$  ( $x$  est la position axiale), et dont les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  dépendent du temps  $t$  :

$$\phi = \sum_1^{\infty} \left[ a_n(t) \cos \frac{n\pi y}{c} + b_n(t) \sin \frac{n\pi y}{c} \right] e^{\frac{n\pi x}{c}} \quad . \quad \text{La}$$

détermination de ces coefficients permet de définir une vitesse de propagation et un critère de stabilité.

Ce modèle traite l'écoulement à l'échelle du rayon. La grille d'aubes est plane, ce qui est équivalent à faire l'hypothèse que le rayon moyen (valeur moyenne du rayon du moyeu et du rayon du carter externe) est grand devant la distance entre le moyeu et le carter externe. Le système d'équations obtenu au moyen de la méthode de petites perturbations est un système linéarisé, qui permet ensuite le développement en série de Fourier.

Stenning (1955) [11] présente un modèle analogue à celui de Emmons. L'effet de blocage à la sortie de la roue dépend de l'incidence d'entrée. Au lieu d'utiliser la dérivée par rapport au temps de la surface débitante non bloquée en sortie de roue, il écrit l'équation de quantité de mouvement dans un canal, l'écoulement étant supposé parallèle à la corde. Il introduit les effets de couche limite, et modélise leur comportement en fonction du temps par une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Ce modèle affine la description faite par Emmons de l'écoulement dans la roue.

Sears (1955) [12] présente un modèle construit à partir de la théorie aérodynamique linéarisée des profils minces. Le fluide est parfait et incompressible. La petite

perturbation amont est formulée de la même façon que dans le cas du problème de la ligne portante :

$$u_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_-(\eta)}{y-\eta} d\eta \quad \text{et} \quad v_- = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\eta)}{y-\eta} d\eta. \quad u_0,$$

composante axiale de la vitesse, est supposée constante au travers la roue (conservation de la masse).  $v_-$  est la composante tangentielle à l'entrée de la roue.  $v_+$  est la composante tangentielle à la sortie de la roue. La roue est modélisée par une grille d'aube plane,  $x$  et  $y$  sont les positions axiales et tangentielles. Les grandeurs de perturbation en sortie de roue sont déterminées à partir de la caractéristique de la grille, supposée décomposable en série de Fourier. Il exprime ensuite la circulation  $v_- - v_+$  en fonction du coefficient de portance. La perturbation de l'angle d'incidence est décomposée en série de Fourier. Il introduit un retard de phase entre la perturbation de l'incidence et le coefficient de portance. La roue est modélisée par une grille d'aubes plane.

La particularité de ce modèle par rapport aux deux précédents est la modélisation du rotor par une succession de profils minces alors que précédemment le rotor est modélisé par une succession de canaux. L'échelle des longueurs est le rayon.

Fabri & Siestrunck (1957) [13] présentent une solution qui détermine la vitesse de propagation et l'étendue de la zone décrochée. La grille d'aube est plane, le fluide est parfait et incompressible. Les auteurs supposent que le débit à travers la cellule décrochée est nul. Ils utilisent l'équation de Bernoulli instationnaire en faisant apparaître la vitesse du rotor et la vitesse du décrochage. L'étendue de la cellule est obtenue à l'aide de l'équation de continuité. Cette étude a fait l'objet de deux approches : l'une linéaire et l'autre non linéaire.

La particularité de ce modèle est la détermination de l'étendue de la zone décrochée. C'est un modèle du décrochage à l'échelle du rayon.

Kriebel (1958) [14] et Stenning & Kriebel (1958) [15] présentent une modélisation basée sur une répartition de tourbillons observée expérimentalement. Le rotor est modélisé par une grille d'aubes plane. Quand le bord d'attaque d'une aube pénètre dans la cellule décrochée elle génère un tourbillon, et quand le bord de fuite sort de la cellule le tourbillon disparaît. En aval de la roue, dans le "sillage" de la cellule, une nappe tourbillonnaire se propage dans l'écoulement. Dans un repère lié à la cellule décrochée, la nappe est délimitée par deux droites parallèles qui bordent la cellule. L'exploitation du triangle des vitesses pour exprimer l'angle que font ces droites par rapport à la direction de la vitesse axiale permet de déterminer la vitesse de propagation du décrochage.

Ce modèle met en évidence l'aspect tourbillonnaire lié au phénomène de décrochage. Cette description de lâchers de tourbillons pour caractériser le décrochage est souvent rencontrée dans les articles. C'est un modèle du grand décrochage à l'échelle du rayon.

Takata & Nagano (1972) [16] présentent une modélisation qui sert de référence pour l'analyse du décrochage non linéaire. Dans ce modèle numérique le fluide est supposé incompressible et non visqueux. Dans la première partie de l'étude l'écoulement est supposé plan (grille d'aubes plane). Les grandeurs sont des fonctions de  $x$ ,  $y$  et  $t$ , respectivement : la position axiale, la position tangentielle et le temps. Les grilles d'aubes sont modélisées par des "actuator disks" (le nombre d'aubes est infini). L'écoulement est construit à partir d'un écoulement moyen stationnaire auquel est superposé un écoulement instationnaire. L'écoulement instationnaire est formulé de la même façon que par Sears [12]. L'écoulement en amont de la roue est irrotationnel. En aval deux conditions ont été considérées : la pression est constante à l'infini aval et la pression est constante juste derrière la roue. La conservation du débit implique la conservation

de la vitesse axiale de perturbation. La vitesse axiale est toujours positive. Les variations de la pression totale sont exprimées en fonction des grandeurs d'entrée, et d'un coefficient de pertes dynamiques désigné par  $X$ . L'écoulement dans le canal et les effets de couche limite sont pris en compte d'une façon similaire à celle de Stenning [11]. L'angle de sortie dynamique  $\beta_2$  est déterminé au moyen d'un paramètre de temps qui est fonction de l'angle d'entrée  $\beta_1$ . Une perturbation de vitesse sinusoïdale est introduite à l'amont. L'évolution de cette perturbation en fonction de l'angle d'incidence permet l'étude du décrochage tournant. Des résultats de calculs bidimensionnels et tridimensionnels pour une roue isolée sont présentés. Ces deux modèles ne peuvent pas prédire le nombre de cellules. Des résultats bidimensionnels avec prédistributeur, roue, et redresseur sont ensuite présentés. Ce modèle permet de prédire l'apparition du décrochage tournant, les zones de petit et grand décrochage avec une à quelques cellules.

Ce modèle est un des premiers schémas numériques du décrochage qui permet de prendre en compte l'interaction des grilles (prédistributeur, roue et redresseur) entre elles, notamment l'effet sur le nombre de cellules. C'est un modèle dont l'échelle des longueurs est le rayon.

Orner (1976) [17] présente un modèle numérique où l'écoulement est tridimensionnel. Les grilles d'aubes sont remplacées par des "actuator disks" d'épaisseur finie. Les variations des grandeurs thermodynamiques au travers de ces "actuator disks" sont obtenues par des corrélations expérimentales. Ces caractéristiques de grille d'aubes donnent en particulier l'angle de sortie et les pertes de pression totale en fonction de l'angle d'entrée. Ces grandeurs sont supposées varier linéairement au travers d'un "actuator disk". L'étude de l'écoulement est faite par la superposition de deux écoulements, l'un stationnaire et l'autre instationnaire. La partie instationnaire représente le décrochage tournant. L'écoulement stationnaire est

supposé axisymétrique. Les effets visqueux des couches limites sont pris en compte au travers de facteurs de blocage. Le fluide est supposé parfait et compressible. L'écoulement est défini par deux familles de surfaces de courant S1 et S2. S1 sont des surfaces circonférentielles, et les S2 sont des surfaces appelées méridiennes qui sont notamment définies dans les "actuator disks" par l'écoulement moyen dans les canaux interaubes. L'écoulement instationnaire est tridimensionnel. Deux hypothèses simplificatrices sont faites : (i) les surfaces de courant S1 et S2 ne sont pas modifiées, et (ii) la masse volumique reste celle de l'écoulement stationnaire. La première hypothèse est équivalente à supposer la perturbation de faible amplitude. Les conditions aux frontières sont : rotationnel nul à l'amont et gradient azimuthal de pression  $\partial p / \partial \theta$  nul à l'infini aval. Les conditions dans les roues sont données par les caractéristiques de grille de l'"actuator disk". Une simplification du modèle est présentée et permet de retrouver les équations de départ utilisées par Takata & Nagano [16]. Une solution analytique linéarisée est proposée. L'équation de la vorticité est associée à la continuité de la vitesse axiale et à la continuité de la perturbation de vorticité au travers d'un "actuator disk". Un critère d'apparition du décrochage ainsi qu'une vitesse de propagation sont déterminés. La vitesse de propagation est révélée être la moitié de la vitesse du rotor. Des calculs pour différentes configurations de machines sont présentés, notamment l'influence des conditions aux limites sur le nombre de cellules. Le nombre des cellules dépend de la présence d'un stator et de sa position par rapport à la roue.

Le modèle du rotor est ici tridimensionnel. L'écoulement azimuthal dans la roue est moyenné d'aube à aube. L'hypothèse faite sur les surfaces de courant équivaut à considérer le décrochage comme une petite perturbation. C'est un modèle dont l'échelle des longueurs est le rayon.

Ferrand (1980) [18] présente un modèle numérique où l'écoulement est supposé bidimensionnel. Les grandeurs sont des fonctions de  $z$ ,  $\theta$  et  $t$ , respectivement : la position axiale, la position angulaire et le temps. Les grilles d'aubes sont modélisées par des "actuator disks" d'épaisseur nulle. L'écoulement est construit à partir d'un écoulement de base stationnaire axisymétrique connu auquel est ajouté un écoulement instationnaire de faible amplitude. Ferrand s'intéresse à la partie instationnaire. L'écoulement est supposé périodique en  $\theta$ , ce qui lui permet une décomposition circonférentiellement en série de Fourier. La dérivation par rapport au temps est traitée par la transformée de Laplace. Le domaine d'étude est décomposé en parties cylindriques entre grilles d'aubes et en "actuator disks" pour les grilles d'aubes. Dans les domaines intergrilles le fluide est incompressible et non visqueux. L'amplitude de la perturbation est supposée petite, ce qui permet d'obtenir un système de trois équations différentielles linéaires par rapport à la variable  $z$ . La solution pour chaque harmonique est connue à trois constantes d'intégration près. Ces constantes sont déterminées par les conditions à l'infini amont et infini aval. Ferrand définit alors une matrice d'évolution de la perturbation dans la direction axiale pour chaque harmonique. La viscosité est prise en compte par un coefficient de perte. Toutes les valeurs sont moyennées, ce qui implique que la cellule est grande devant la distance interaubes. La conservation du débit implique la conservation de la vitesse axiale de perturbation à la traversée de la roue. La liaison azimutale des vitesses de sortie de roue est obtenue par le triangle des vitesses (vitesses absolue, relative et d'entraînement composées en fonction de  $\beta_s$ ). La variation de l'angle de sortie  $\beta_s$  est écrite, sous une forme linéarisée, en fonction de : l'angle d'entrée  $\beta_e$ , l'écoulement moyen, de l'écoulement perturbé d'entrée et de  $\partial\beta_s/\partial\beta_e$  qui est supposé connu. Les variations de la pression totale relative sont exprimées en fonction des grandeurs d'entrée, et du coefficient de pertes globales  $\bar{\omega}$  connu.  $\bar{\omega}$  prend en compte l'angle d'incidence et le nombre de Mach relatif. Un effet

instationnaire est pris en compte en modélisant un canal par un diffuseur (similaire à Sears [12]). Le manque d'épaisseur de l'"actuator disks" est pris en compte par l'introduction d'un retard (temps de traversée de la roue). L'inclinaison de l'aubage associée au manque d'épaisseur de l'"actuator disks" est prise en compte par l'introduction d'un déphasage entre entrée/sortie de l'"actuator". Ferrand détermine alors une matrice reliant les grandeurs perturbées d'entrée à celles de sortie pour chaque harmonique. Le produit des différentes matrices permet de caractériser la matrice transfert d'une machine. Les conditions à l'infini sont : à l'infini amont les perturbations sont nulles, et à l'infini aval les perturbations sont finies. Grâce à l'utilisation de la transformée de Laplace, Ferrand étudie le comportement d'une machine par une méthode inspirée de celle des asservissements linéaires. Il utilise comme signal d'entrée un échelon en temps et/ou un créneau en  $\theta$ . Il trace la réponse de la machine dans un plan de Nyquist pour chaque harmonique. Il définit une pulsation de résonance, un coefficient de surtension et une bande passante. Au coefficient de surtension maximum correspondent une harmonique et une pulsation. L'harmonique détermine le nombre de cellules et la pulsation la vitesse de rotation du décrochage. Le modèle est étendu au comportement d'une machine et son circuit.

L'originalité de cette modélisation est l'approche du type asservissement linéaire. Ce modèle est un modèle de petites perturbations dont l'échelle des longueurs est le rayon.

Moore & Greitzer (1986) [19] s'intéressent à la description d'une machine et son circuit. Cet ensemble comprend un préistributeur, N étages de compression (rotor + stator), une conduite, un réservoir et une vanne. L'écoulement est bidimensionnel. Les grandeurs sont des fonctions de  $\eta$ ,  $\theta$  et  $t$ , respectivement la position axiale, la position angulaire et le temps. Le temps, les vitesses,

les longueurs et les gradients de pression sont adimensionnés respectivement par  $R/U$ ,  $U$ ,  $R$ ,  $\rho U^2/2$ .  $U$ ,  $R$  et  $\rho$  sont respectivement la vitesse tangentielle du rotor au rayon moyen, le rayon moyen et la masse volumique. L'écoulement est irrotationnel à l'aspiration. Les secteurs aubés sont assimilés à des "actuator disks". L'augmentation de pression au travers un "actuator" est déterminée par une caractéristique  $F(\phi) - \tau \frac{d\phi}{dt}$  ( $\phi$  est la vitesse axiale). Le second terme représente le retard interne du compresseur. L'adimensionnement du temps permet d'écrire simplement la

dérivée particulière pour un rotor :  $\frac{d}{dt} = \frac{U}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$  ( $\xi$

est le temps adimensionné). La vitesse axiale  $\phi$  est décomposée en deux parties :  $\phi_{(\xi, \theta)} = \Phi(\xi) + g(\xi, \theta)$ .  $\Phi(\xi)$  est la moyenne de  $\phi_{(\xi, \theta)}$  sur un tour. La vitesse tangentielle est  $h = h_{(\xi, \theta)}$ . Par construction l'intégrale de  $g$  sur un tour de rotor est nulle. La condition à l'aspiration permet d'écrire la même intégrale pour  $h$ . A l'aspiration l'écoulement est irrotationnel. Il existe donc un potentiel des vitesses  $\bar{\phi}$ . Les auteurs posent  $\bar{\phi} = (\eta + \ell_1)\Phi(\xi) + \phi'(\xi, \eta, \theta)$  et  $\phi'(\eta = -\ell_1) = 0$ . A l'entrée du compresseur,  $\eta = 0$ , on obtient les relations

$\left[ \phi'_{\eta} \right]_{\eta=0} = g(\xi, \theta)$  et  $\left[ \phi'_{\theta} \right]_{\eta=0} = h(\xi, \theta)$ . La variation de

pression entre l'entrée de la conduite d'aspiration et l'entrée du réservoir et alors exprimée en fonction de  $\Phi$  et  $\phi'$ . Les variables sont  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\theta$ . Pour occulter la dépendance en  $\eta$ , Moore & Greitzer font l'approximation  $dh/d\theta = -g$ . En effet  $\phi'$  doit satisfaire l'équation de Laplace et être périodique en  $\theta$ . Une solution sous forme de

série trigonomérique  $\phi' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\eta}}{n} (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta)$

satisfait ces conditions. Pour la première harmonique, on peut écrire  $\left[ \phi'_{\eta} \right]_{\eta=0} = - \left[ \phi'_{\theta\theta} \right]_{\eta=0}$ . Ils posent  $h = Y_{\theta}$  et  $g = -Y_{\theta\theta}$ .  $Y(\xi, \theta)$  est périodique en  $\theta$  et son intégrale sur un tour est nulle. Il n'apparaît alors plus que 2 variables  $\xi$  et  $\theta$ . Le réservoir est assimilé à un ressort. On élimine toutes les variations spatiales, il ne subsiste que la

dépendance en temps. La caractéristique statique du compresseur est approchée par un polynôme du troisième degré. Une solution analytique et une solution numérique sont présentées. Pour la solution analytique  $Y = W A(\xi) \sin(\theta - r(\xi))$ . L'intégration de  $\theta=0$  à  $\theta=2\pi$  montre que  $r = f_0 \xi$ .  $f_0 = \frac{0,5}{1+ma}$  est la vitesse de propagation du décrochage tournant.  $m$  est une image de la tuyauterie aval et  $a$  une image du retard du compresseur. Ils obtiennent finalement le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\xi} &= \frac{W/H}{4B^2} \left[ \frac{\Phi}{W} - \frac{1}{W} F^{-1}(\Psi) \right] \frac{H}{l_c} \\ \frac{d\Phi}{d\xi} &= \left[ -\frac{\Psi - \Psi_{co}}{H} + 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \left( 1 - \frac{1}{2} J \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \frac{H}{l_c} \\ \frac{dJ}{d\xi} &= J \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} J \right] \frac{3 a H}{(1+ma)W} \end{aligned}$$

où  $J = A^2$ , et la caractéristique axisymétrique du compresseur est

$$\psi_c(\phi) = \psi_{co} + H \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\phi}{W} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\phi}{W} - 1 \right)^3 \right], \quad F \text{ caractérise}$$

la vanne et  $l_c$  une longueur de conduite équivalente. Le décrochage est caractérisé par  $J = C^{te}$  et  $\frac{d}{d\xi} = 0$ . La troisième équation permet de vérifier le domaine d'existence du décrochage. Il y a une solution dans la zone de pente positive de la caractéristique. Comparée à la solution numérique, la période et la forme de l'onde sont correctes au milieu du domaine. Il est à noter que dans ce cas la forme de la caractéristique stationnaire est modifiée. Le pompage est caractérisé par  $J = 0$  et  $\frac{d}{d\xi}$  non nul. Il ne subsiste que deux équations. Ces deux équations mettent en évidence l'influence du circuit sur le pompage.

Cette formulation permet d'analyser le comportement global d'une machine aussi bien en pompage qu'en décrochage. L'échelle des longueurs est le rayon.

McCaughan (1989) [20] applique la théorie des bifurcations aux trois équations de Moore & Greitzer. Il détermine les zones d'apparition du décrochage et du pompage en fonction du réservoir et de la vitesse axiale débitante.

L'ensemble des deux études de Moore & Greitzer [19] et McCaughan [20] permet de prédire les régimes stables (stationnaire, décrochage et pompage) de l'écoulement dans un compresseur équipé de son réservoir vus à l'échelle du rotor.

Chen, Haupt & Rautenberg (1990) [21] présentent des comparaisons expérimentales entre le décrochage tournant et les ondes de Rossby des écoulements atmosphériques. Ils comparent la cellule décrochée à la *cellule de Ferrel* d'un système météorologique. La surface du moyeu d'une machine radiale remplace la surface de la Terre. Pour une machine axiale, c'est l'intrados de l'aube qui joue le rôle de la surface terrestre. Les rotors des turbomachines possèdent, comme la terre, un mouvement de rotation. Chen, Haupt & Rautenberg proposent, par analogie, un mécanisme de propagation de la cellule décrochée similaire à celui des ondes de Rossby. Cette analogie sera détaillée dans le chapitre 2.

Spalart (1984) [22] présente un modèle numérique de l'écoulement dans les canaux interaubes d'un rotor. L'écoulement est à grand nombre de Reynolds. La méthode utilisée est la méthode des singularités. Les configurations étudiées sont des roues comportant 3 et 5 aubes. Différents calages et angles d'incidence sont

testés. Les résultats montrent deux types de décrochage : un décrochage sur environ 2 aubes, et un décrochage plus étendu sur la presque totalité des 5 aubes.

La particularité de ce modèle est d'aborder l'écoulement interaubes. Ce faible nombre d'aubes avec un écoulement bidimensionnel correspondrait à un rotor de machine dont la corde et la distance interaubes seraient de l'ordre de grandeur du rayon, alors que la distance moyeu/carter serait petite devant le rayon. C'est un modèle du grand décrochage à l'échelle du rayon.

Buisine (1988) [23] présente un modèle numérique du grand décrochage tournant tridimensionnel dans les compresseurs axiaux. L'objectif est de traiter les grosses structures de l'écoulement qui caractérisent ce type de décrochage. Dans ce but, une étude des résultats expérimentaux est menée au préalable afin de déterminer les longueurs caractéristiques significatives. Celles-ci servent à déterminer les pas de discrétisation. L'auteur définit, pour les équations locales, la projection des différents opérateurs dans le plan méridien et dans la direction azimutale. Le repère est cylindrique pour les espaces inter-roues. Le repère est "parallèle" au squelette dans les roues.

La particularité de ce modèle est d'aborder les effets tridimensionnels du grand décrochage. L'écoulement azimutal est moyenné de canal à canal, l'échelle des longueurs dans cette direction est le rayon.

Davoudzadeh, Liu, Shamroth & Thorens (1990) [24] présente un modèle numérique de l'écoulement à l'intérieur d'un rotor. Les auteurs partent des équations locales de la conservation de la masse, de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de l'énergie. La

température totale est constante. Le fluide est visqueux. La grille d'aubes plane comporte 5 aubes. Les résultats présentés font apparaître un phénomène d'onde tournante de très faible amplitude. Les variations apparaissent essentiellement aux bords de fuite.

La particularité de ce schéma numérique est le modèle du fluide visqueux. Le faible nombre d'aubes du rotor implique une distance interaubes de l'ordre de grandeur du rayon. Le décrochage est ici une petite perturbation dont l'échelle des longueurs est le rayon.

J.F. Escuret & V. Garnier (1994) [25] ont présenté récemment deux modèles numériques destinés à simuler le développement du pompage et du décrochage dans un compresseur axial. L'étude du pompage est réalisée au moyen d'un modèle axisymétrique des équations d'Euler. Les secteurs aubés sont connus par leurs caractéristiques entrées/sorties, le retard dû aux couches limites est pris en compte (similaire à Stenning [11]). Les espaces interaubes sont maillés (12 points radialement). Les grandeurs sont réparties le long de la corde. Le circuit est complété par un réservoir (maillage axial uniquement) et une vanne finale. L'étude du décrochage est faite au moyen d'un modèle tridimensionnel construit à partir du précédent. Les auteurs appréhendent les variations azimutales en ajoutant 47 plans méridiens. Le circuit ne possède pas de réservoir. Le pompage est obtenu par l'amplification d'une perturbation créée par une petite variation du coefficient de la vanne autour d'un point de fonctionnement. Le résultat du calcul montre l'évolution de la pression dans le temps et sur la caractéristique machine. Le point d'apparition du pompage est en accord avec les mesures. Le décrochage est obtenu en perturbant l'écoulement d'entrée. Les auteurs montrent l'évolution de l'amplitude, de la phase et de la vitesse de propagation des trois premières harmoniques.

L'originalité de ce modèle est de montrer le développement du décrochage et du pompage dans une machine équipée de son

réservoir. La caractéristique des secteurs aubés est indépendante de la position azimutale, ce qui équivaut à définir un écoulement moyen d'aube à aube. L'échelle des longueurs tangentiuellement au rotor est celle du rayon.

E. Outa, D. Kato et K. Chiba (1994) [26] présentent un modèle numérique de l'écoulement bidimensionnel dans le rotor et le redresseur d'une machine axiale. Le fluide est compressible et visqueux de type laminaire. Le rotor modélisé possède 6 aubes et le stator 10 aubes. Une vanne termine le circuit. Le point de fonctionnement est obtenu en accélérant le rotor jusqu'à sa vitesse de fonctionnement et en imposant une valeur du coefficient de perte de charge à la vanne finale. Ce coefficient est ensuite augmenté progressivement de façon à faire apparaître les différents stades de l'évolution du décrochage tournant. Les résultats du calcul montrent d'abord l'apparition de petits décollements sur l'extrados des aubes du stator et du rotor. Ces décollements restent " attachés " aux aubes correspondantes. Ensuite, en augmentant le coefficient de pertes de charge de la vanne finale, les décollements se développent pour atteindre sensiblement la taille de la distance interaubes. C'est dans le stator qu'apparaît en premier une cellule. A cet instant la cellule du rotor et celle du stator tournent à des vitesses différentes : 80% de la vitesse du rotor pour la cellule du rotor, et 10% de la vitesse du rotor pour la cellule du stator. Les auteurs attirent l'attention sur l'interaction du rotor sur la cellule du stator et celle du stator sur la cellule du rotor. Puis, en augmentant encore le coefficient de pertes de charge de la vanne, Les deux cellules se développent sur plusieurs aubes et tournent ensemble à 65% de la vitesse du rotor. La représentation des lignes de courant de la cellule décrochée est proche de celle observée expérimentalement (voir figure 8 d'après R Larguier [5]). La machine qui a été modélisée possède un rotor muni de 37 aubes et un redresseur équipé de 62 aubes.

Les particularités de ce modèle visqueux bidimensionnel sont l'interaction de la roue avec le redresseur et l'apparition du décrochage à l'intérieur de la roue sans qu'il soit nécessaire de créer une perturbation dans l'écoulement. Le rotor possède 6 aubes, la distance interaubes est de l'ordre du rayon. L'échelle de la cellule décrochée est de l'ordre de grandeur du rayon.

### I.3 Commentaires généraux

Les mesures expérimentales indiquent que le décrochage et le pompage sont des solutions stables (vers lesquelles tendent les écoulements) pour les machines travaillant à faible débit. La transition qui conduit de l'écoulement stationnaire à l'écoulement instationnaire, met en jeu plusieurs échelles de longueur. Le phénomène prend naissance à l'échelle des couches limites visqueuses, puis se développe à l'échelle de la distance interaubes, pour atteindre finalement, pour les plus faibles débits, l'échelle du rayon extérieur de la roue. La perturbation de pression a une amplitude de l'ordre de grandeur de l'élévation de pression de la machine.

Les grandeurs caractéristiques utilisées habituellement pour les similitudes dans les turbomachines sont le rayon extérieur de la roue  $R$ , la vitesse angulaire  $\Omega$  et la masse volumique  $\rho$ . Dans les études toutes les quantités sont adimensionnées par rapport à ces grandeurs. Compte tenu de la complexité des équations, il est nécessaire dans le développement de ces modèles d'opérer des simplifications. La première simplification est celle du grand nombre de Reynolds, la seconde est le faible nombre de Mach et le faible taux de compression de la machine. Ces hypothèses mènent au modèle classique du fluide non visqueux incompressible. La distance moyeu/carter est supposée petite devant le rayon moyen des aubages. Cela permet d'étudier un écoulement bidimensionnel. L'étude des conditions aux limites imposées par toutes les aubes à

l'écoulement est difficile à aborder. Les rotors sont généralement supposés posséder un grand nombre d'aubes, et sont remplacés par des "actuator disks". Seuls les modèles numériques [22], [24] et [26] abordent les écoulements bidimensionnels à l'intérieur des canaux pour des roues à faible nombre d'aubes. Les capacités des calculateurs actuels ne permettent pas encore des modèles possédant un maillage fin tridimensionnel des canaux interaubes pour des roues à grand nombre d'aubes.

A l'exception des modélisations de Moore & Greitzer [19], de Escuret & Garnier [25] et de Oota, Kato et Chiba [26], les modélisations décrites ci-dessus traitent du *décrochage établi*. Celles qui utilisent une grille d'aubes ou un "actuator disk" supposent implicitement une longueur caractéristique grande devant la distance interaubes : cela équivaut à un faible nombre de cellules. Les modèles qui utilisent une méthode de petites perturbations ne peuvent aborder, par l'effet même de la linéarisation, que le *petit décrochage*. Les modèles non linéaires abordent le *petit* et le *grand décrochage*. Pour appréhender un grand nombre de cellules, il faut travailler à l'échelle de la distance interaubes. A l'aide de ces divers critères on peut donner le domaine de validité des différentes modélisations. En reprenant les trois groupes précédemment définis figure 4 on identifie ainsi les caractérisations suivantes :

- groupe 1 : grand décrochage : non linéaire à l'échelle du rayon
- groupe 2 : petit décrochage avec peu de cellules : petites perturbations à l'échelle du rayon
- groupe 3 : petit décrochage avec beaucoup de cellules : petites perturbations à l'échelle de la distance interaubes.

Le tableau récapitulatif ci-dessous indique les différents types de décrochage abordés par les modélisations précédemment présentées :

	groupe 1	groupe 2	groupe 3
Emmons [10]		x	
Stenning [11]		x	
Sears [12]		x	
Fabri & Siestrunk [13]	x	x	
Kriebel [14] et Stenning & Kriebel [15]	x		
Takata & Nagano [16]	x	x	
Orner [17]		x	
Ferrand [18]		x	
Moore & Greitzer [19]	x	x	
McCaughan [20]	x	x	
Spalart [22]	x	x	
Buisine [23]	x		
Davoudzadeh, Liu, Shamroth & Thorens [24]		x	
Escuret & Garnier [25]	x	x	
Ota, Kato & Chiba [26]	x	x	

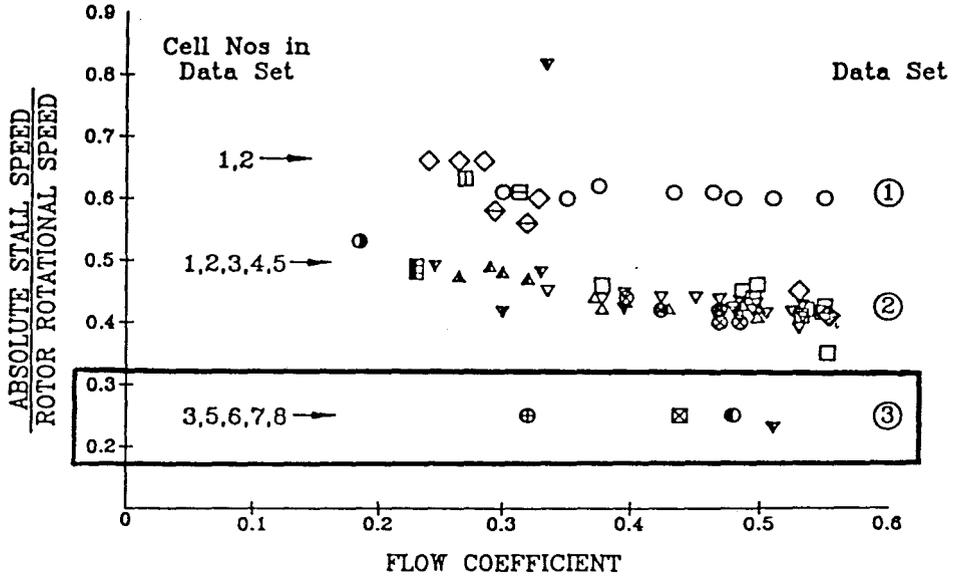
tableau récapitulatif des modélisations et de leurs décrochages associés

C'est d'abord l'écoulement à l'échelle du rayon, donc de la machine et de son réservoir, qui a préoccupé les turbomachinistes. Cela s'explique principalement par deux raisons : (i) le petit décrochage avec beaucoup de cellules est moins fréquent que les deux autres, et (ii) le problème était jusqu'à présent de déterminer la limite d'utilisation du domaine stationnaire. La mise en oeuvre du contrôle actif, qui est de date récente ([8] [9]), réclame une meilleure connaissance de ces écoulements instationnaires au moment de leur apparition, et donc à plus petite échelle. Cette échelle correspond à la colonne du groupe 3 du tableau ci-dessus : c'est le petit décrochage avec un grand nombre de cellules. Aucune modélisation n'a été réalisée jusqu'à présent dans ce domaine.

#### I.4 Conclusion : origines et finalités de l'étude

Deux raisons sont à l'origine de cette nouvelle approche des phénomènes instationnaires dans les turbomachines. La première par ordre chronologique est la comparaison faite par Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg [21] avec des phénomènes apparaissant dans les écoulements géophysiques. La deuxième est la quasi inexistence d'approche asymptotique des écoulements instationnaires appréhendés à l'échelle de la distance interaubes. Cette étude a amené une considération des échelles autre que les classiques  $R$  et  $\Omega R$ , et à prendre en compte la distance interaubes. Le premier volet met en évidence les paramètres qui caractérisent une machine et son utilisation, et précise les conditions d'apparition "d'ondes de Rossby" dans les turbomachines. Un second volet, pour les valeurs de paramètres correspondant aux plages d'utilisation industrielles, permet de déterminer une solution d'onde tournante dont la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la distance interaubes. Ce présent travail occupe un créneau non encore exploré. Le domaine abordé par le deuxième volet de la présente étude est défini par la zone encadrée dans la figure 9 ci-après. Il correspond au petit décrochage tournant avec un grand nombre de cellules dont la vitesse de rotation est faible par rapport à celle du rotor.

Cell No.	a	b	c	d	e	f	g
1				◇		◇	○
2	■		▣	□		▣	○
3	▼		▼	▼	▼		
4	▲			▲	▲		
5	●			⊗	●		
6		⊕					
7	⊠						
8		⊕					



- |                             |                                |
|-----------------------------|--------------------------------|
| a = Graham and Prian (1953) | e = Huppert, et al. (1952)     |
| b = Graham and Prian (1954) | f = Tysl, et al. (1955)        |
| c = Lewis, et al. (1954)    | g = Fabri and Slestunck (1957) |
| d = Rockett (1959)          |                                |

figure 9 : la zone encadrée définit le domaine abordé par le second volet de l'étude : petit décrochage avec un grand nombre de cellules - (d'après [2]).

### COMPARAISON ENTRE LES ECOULEMENTS GEOPHYSIQUES ET LES ECOULEMENTS DANS LES TURBOMACHINES

Les écoulements géophysiques et les écoulements de turbomachines possèdent de nombreuses caractéristiques communes et c'est cela qui a poussé Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg [21] à explorer comment pouvait être modélisée cette analogie.

Les points dominants de cette analogie sont : (i) le repère non galiléen dans lequel s'effectue le mouvement ; (ii) la surface solide au voisinage de laquelle on travaille est une surface de révolution ; (iii) la nature du mouvement : la cellule de Ferrel pour les écoulements géophysiques, la cellule décrochée pour les écoulements de turbomachines.

Nous présentons ici brièvement le travail de Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg [21].

#### II.1 Analogie expérimentale de Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg

Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg présentent dans leur article [21] une comparaison entre les écoulements géophysiques dits "géostrophiques" (principalement atmosphériques) et ceux des turbomachines. La figure 10 montre les grands mouvements de ces écoulements. Chaque hémisphère présente trois cellules de forme toroïdale. Elles sont générées par la rotation de la Terre, et par les différentes périodes d'ensoleillement.

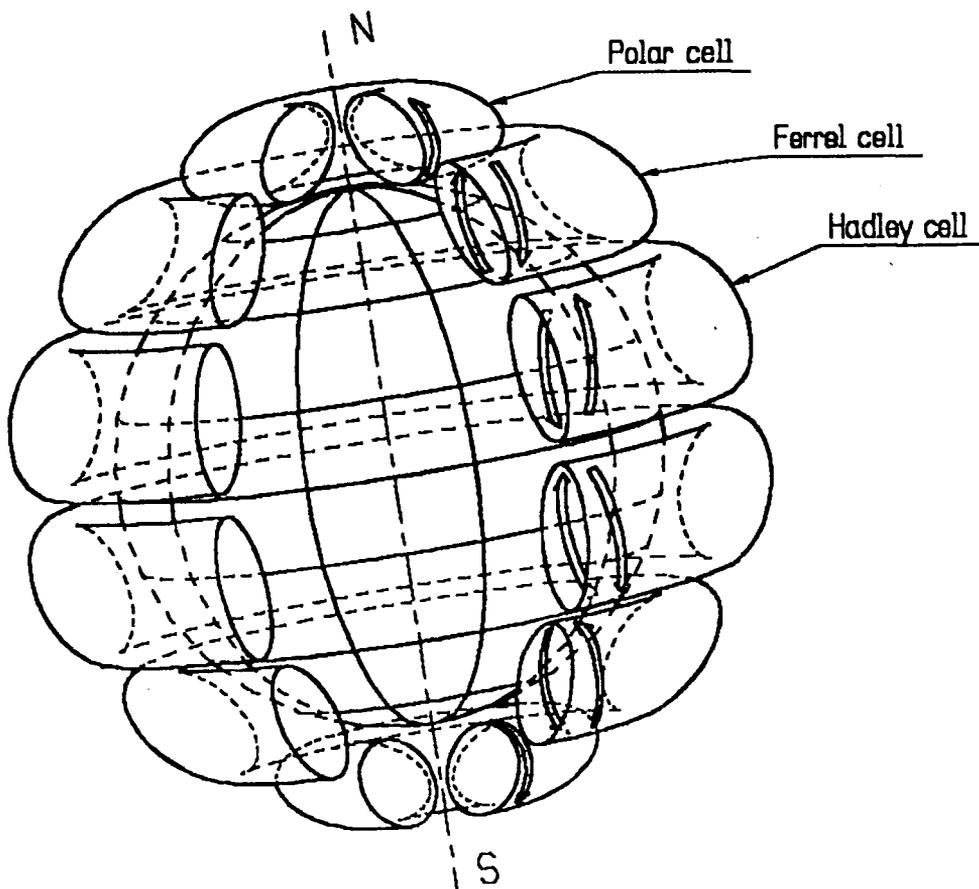


figure 10 : écoulements atmosphériques - chaque hémisphère possède trois cellules toroïdales générées par la rotation de la Terre et les différentes périodes d'ensoleillement - les ondes de Rossby apparaissent sur la cellule de Ferrel.

La figure 11 rappelle les formes générales des machines axiale et radiale. Le rotor de la machine axiale est de forme globalement cylindrique. Il est muni d'aubes qui peuvent être des profils de type mince, elles sont inclinées (calées) par rapport à l'axe de rotation du rotor. L'écoulement est globalement parallèle à l'axe. Le rotor de la machine radiale a la forme d'un disque avec un renflement en son centre. Il est muni d'aubes. Elles sont inclinées par rapport au rayon. Pour les compresseurs les

aubes sont généralement couchées en arrière. L'aspiration se fait axialement, et le refoulement radialement. Le fluide passe ensuite dans un diffuseur, puis est collecté dans une volute. Ces machines peuvent être équipées de systèmes "de guidage" du fluide. Un prédistributeur est une grille d'aubes fixe en amont du rotor. Un redresseur est une grille d'aubes fixe en aval du rotor. Dans le cas de la machine radiale, on parle de diffuseur aileté (muni d'ailettes). En absence d'ailettes, on parle de diffuseur lisse. On étudie dans la suite des roues "isolées", c'est à dire sans prédistributeur ni redresseur.

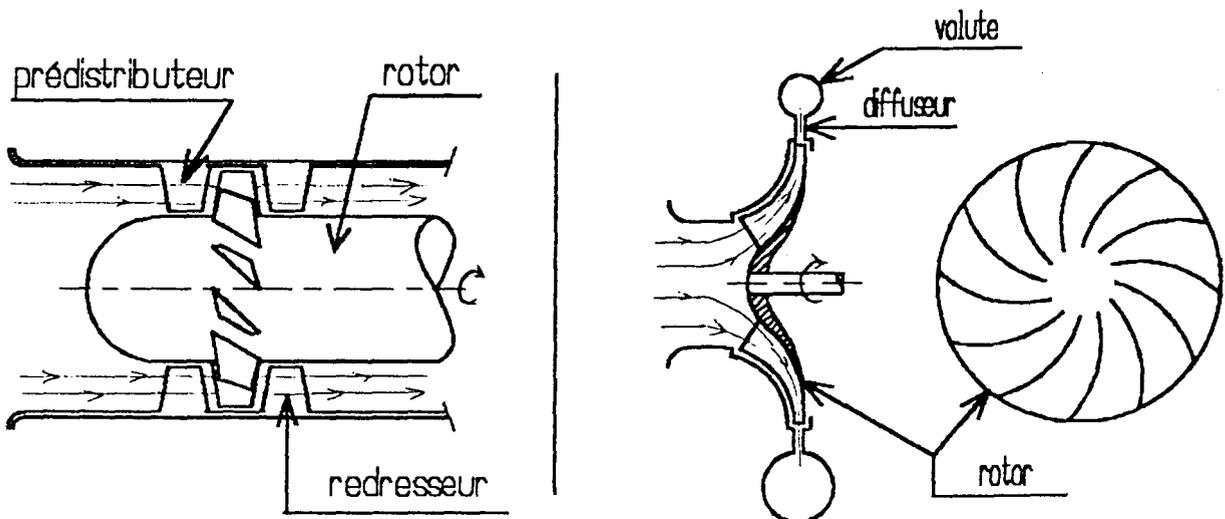


figure 11 : dessins de principe des machines axiale (à gauche) et radiale (à droite) -

La figure 12 montre les similitudes de la cellule décrochée avec la cellule de Ferrel. Les ondes de Rossby apparaissent sur la cellule de Ferrel. En raison de l'action de l'accélération de Coriolis, les écoulements se développant sur l'hémisphère nord sont toujours déviés vers la droite (par rapport au sens de la vitesse, vu du ciel), les masses d'air chaud, atteignent nos latitudes sous la forme d'un vent d'ouest chaud et les masses d'air froid provenant de la région polaire nous parviennent par ondes

sous forme d'un vent d'est froid. L'interaction des vents d'est froids de la cellule polaire avec les vents d'ouest chauds de la cellule de Ferrel créent un mouvement ondulatoire tourbillonnaire. Cette interaction génère les ondes de Rossby sur la cellule de Ferrel à une altitude moyenne d'environ cinq kilomètres, et simultanément le Jetstream à une altitude plus importante d'environ dix kilomètres (voir 12c et 12d). Ce mouvement ondulatoire a la particularité d'avoir une déviation d'ensemble vers l'ouest. Cette vitesse de propagation unidirectionnelle est due (i) aux effets de l'accélération de Coriolis, et (ii) au rayon de courbure de la Terre dans le plan méridien. La description asymptotique est celle des *écoulements géostrophiques* dite aussi *approximation du plan  $\beta$*  qui sera explicitée ci-après.

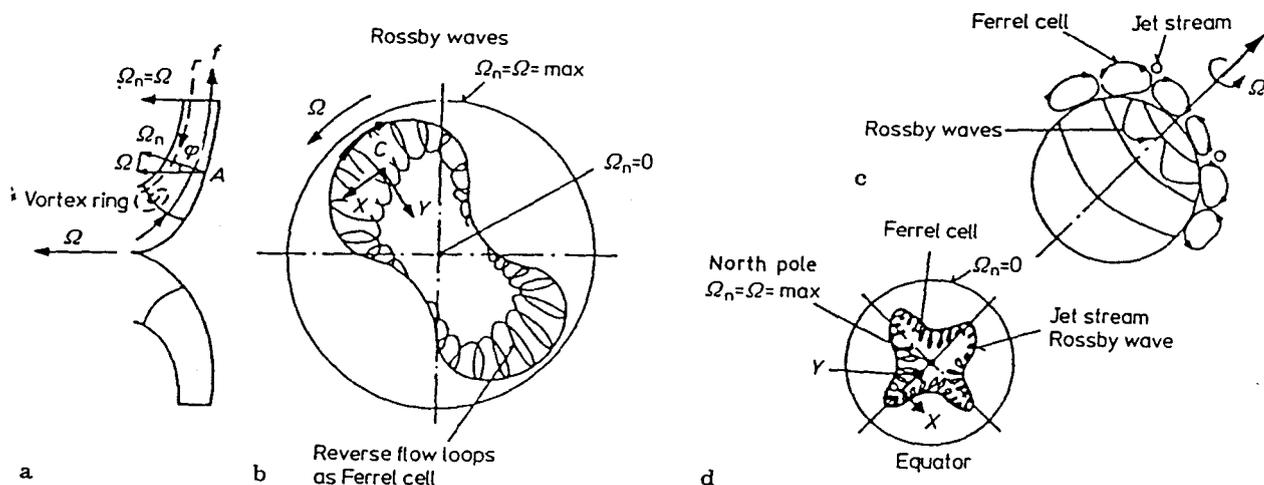


figure 12 : analogie météorologique entre la surface du moyeu et la surface terrestre - a boucle de recirculation r-f (avec formation d'un tourbillon à l'entrée) et composante normale locale de la vitesse angulaire  $\Omega_n$  - b projection du rotor montrant les ondes de Rossby et les boucles de recirculation (analogues à la cellule de Ferrel) ; c la Terre avec ses trois cellules et le "jet stream" - d projection de la surface terrestre montrant la déformation de la cellule de Ferrel et du "jet stream" par les ondes de Rossby - (d'après [21]).

Dans la comparaison faite par Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg, la surface du moyeu de la machine radiale joue le rôle de la surface terrestre. Elle possède une courbure dans le plan méridien analogue à celle de la Terre. Pour la machine axiale (voir figure 13) c'est l'aubage qui joue ce rôle, et c'est la courbure moyenne de l'aubage que l'on comparera à celle de la Terre. Dans les deux cas il est nécessaire de déterminer la composante normale locale du vecteur vitesse angulaire  $\Omega_n$  qui sert à définir le paramètre de Coriolis. La rotation d'ensemble des cellules est comparée à la déviation vers l'ouest des ondes de Rossby.

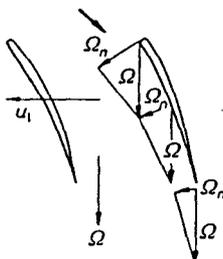


figure 13 : la surface de l'intrados de l'aube de la machine axiale joue le rôle de la surface terrestre avec sa composante normale locale de la vitesse angulaire  $\Omega_n$  - (d'après [21]).

Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg présentent une analyse qualitative qui ne situe pas les valeurs des paramètres les uns par rapport aux autres. A ce stade, il est nécessaire de pousser plus loin l'analyse en précisant les conditions d'apparition des ondes de Rossby.

## II.2 Conditions d'apparition des ondes de Rossby

La description asymptotique est celle des *écoulements géostrophiques* (voir, par exemple, J. Pedlosky [27], H.P. Greenspan [28]). Nous allons dans la suite de ce paragraphe utiliser quelques résultats de cette modélisation. Pour plus de précision dans les développements des équations on se reportera à l'annexe 1.

Le repère dans lequel sont écrites les équations d'équilibre local est un repère sphérique dont le premier angle est la longitude  $\varphi$  et le second angle est la latitude  $\theta$ . Le point origine du repère local est choisi à la surface de la Terre à une latitude moyenne qui correspond à la position de la cellule de Ferrel. Le premier axe du repère local est tangent au cercle de latitude du point origine et orienté vers l'est. Le second axe est tangent au méridien du point origine et orienté vers le nord. Le troisième axe est vertical et dirigé vers l'extérieur.

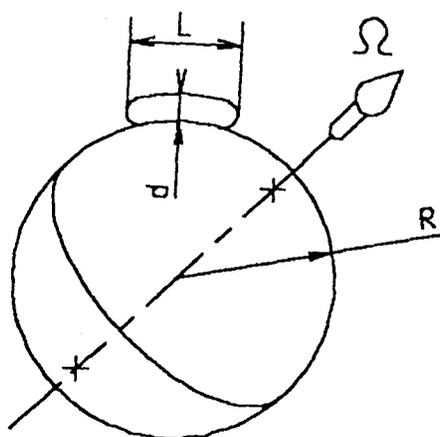


figure 14 : longueurs caractéristiques de la cellule de Ferrel nécessaires à la définition des paramètres sans dimension.

Les longueurs caractéristiques du mouvement sont celles liées à la cellule de Ferrel (voir figure 14). Elles correspondent aux phénomènes d'échelle synoptique.

L'approximation géostrophique conduit à examiner les ordres de grandeur suivants :

$$\lambda_0 = F^{-2} R_0^3 = O(1) ; \eta \longrightarrow 0 ; \delta \longrightarrow 0 ; \frac{\eta}{R_0} = O(1),$$

où  $R_0 = \frac{U}{2 \Omega L \sin \theta_0}$  est le nombre de Rossby de l'écoulement,  $U$  est une vitesse caractéristique de l'écoulement,  $\theta_0$  est la latitude du point origine du repère local,  $F$  le nombre de Froude défini par  $F^{-2} = \frac{g d}{U^2}$ ,  $\eta = \frac{L}{R}$  et  $\delta = \frac{d}{L}$ .  $L$ ,  $d$  et  $R$  étant respectivement la longueur caractéristique suivant une direction parallèle à la surface terrestre, la longueur caractéristique suivant la verticale et le rayon de la Terre (voir figure 14). La composante normale locale de la rotation  $\Omega_n = \Omega \sin \theta_0$  intervient au dénominateur du rapport qui définit le nombre de Rossby. Les grandeurs caractéristiques du mouvement sont introduites dans le système d'équations. Les valeurs des paramètres de l'approximation géostrophique conduisent à l'ordre un à l'approximation hydrostatique :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{\rho} = 0, \quad (1)$$

où le "—" indique que la grandeur est adimensionnée.  $p$  est la pression,  $\rho$  la masse volumique, et  $z$  la verticale ascendante. Le gradient de pression prépondérant est celui dû à la pesanteur.  $\bar{p}$  et  $\bar{\rho}$  sont fonctions de  $z$  en première approximation. Le petit paramètre utilisé dans les développements est le nombre de Rossby. On peut écrire  $\bar{p} = P(z) + O(R_0)$  et  $\bar{\rho} = R(z) + O(R_0)$ .  $P(z)$  et  $R(z)$  vérifient (1)  $P' + R = 0$ , où  $P' = \frac{dP}{dz}$ . Les premiers termes dus à la

vitesse apparaissent dans le système d'équations à l'ordre  $R_0^2$ . Ce sont les termes de l'accélération de Coriolis. Le nombre de Rossby qui apparaît lors de l'adimensionnement est issu du terme de Coriolis. Il vient à l'ordre  $R_0^2$  :

$$\left. \begin{aligned}
 -v_0 + \lambda_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 0 \\
 u_0 + \lambda_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial(R p_0)}{\partial z} + R \rho_0 &= 0 \\
 w_0 \frac{dR}{dz} + R \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right] &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

où :

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{p} &= P(z) + R_0^2 R(z) \left[ p_0 + R_0 p_1 + O(R_0^2) \right] \\
 \bar{\rho} &= R(z) \left[ 1 + R_0^2 \rho_0 + O(R_0^3) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

et où les composantes de la vitesse ont été développées par rapport aux puissances entières de  $R_0$  :

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{u} &= u_0 + R_0 u_1 + O(R_0^2) \\
 \bar{v} &= v_0 + R_0 v_1 + O(R_0^2) \\
 \bar{w} &= w_0 + R_0 w_1 + O(R_0^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Les trois premières équations de (2) sont celles de la conservation de la quantité de mouvement, La quatrième est celle de la conservation de la masse. Les deux premières équations montrent que le mouvement est en première approximation un mouvement dans le plan tangent, la courbure de la surface sphérique n'intervient pas à cet ordre. L'élimination de la pression entre les deux premières équations de (2) associée à la troisième équation de (2) donne :

$$\frac{\partial(R w_0)}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

La condition  $w_0 = 0$  au sol entraîne :

$$w_0 = 0 \quad (6)$$

L'effet de la courbure (effet  $\beta$ ) est mis en évidence dans l'équation de la variation de la composante normale du rotationnel  $\omega_0$ . A partir des deux premières équations (2), on écrit :

$$\omega_0 = \left[ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = \lambda_0 \left[ \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2} \right] = \lambda_0 \Delta_h p_0 \quad (7)$$

Les deux premières équations de la conservation de la quantité de mouvement, et l'équation de continuité s'écrivent à l'ordre  $R_0^3$  (voir annexe 1) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - v_1 - \beta \bar{y} v_0 + \\ + \lambda_0 \left[ \frac{\partial p_1}{\partial x} + \text{tg}\theta_0 \bar{y} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right] &= 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + u_1 + \beta \bar{y} u_0 + \lambda_0 \frac{\partial p_1}{\partial y} &= 0 \\ w_1 R' + R \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + \text{tg}\theta_0 \left[ \bar{y} \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \right] \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Les effets de la courbure apparaissent ici par le paramètre  $\beta$  qui vaut :

$$\beta = \frac{\eta}{R_0 \text{tg}\theta_0} \quad (9)$$

A l'origine de l'effet  $\beta$  il y a deux causes : (i) l'accélération de Coriolis et (ii) le rayon de courbure de la Terre dans le plan méridien. L'action de l'accélération de Coriolis se traduit par le terme  $\frac{1}{R_0}$  de (9). Le rayon de courbure du plan méridien apparaît par la partie  $\frac{\eta}{\text{tg}\theta_0} \bar{y}$  de  $\beta \bar{y}$  qui intervient dans le facteur multiplicateur de  $-v_0$  et de  $u_0$  des deux premières équations (8). Cette partie est le terme d'ordre  $R_0$  du développement de  $\sin\theta$  au voisinage de  $\theta_0$  (voir annexe 1).

L'élimination de  $p_1$  entre les deux premières équations de (8), l'utilisation de la troisième équation de (8) et des deux premières équations de (2) conduisent à :

$$\left[ \frac{d}{dt} \right]_o (\omega_o + \beta \bar{y}) = \frac{1}{R} \frac{\partial (w_1 R)}{\partial z}, \quad (10)$$

$$\text{où } \left[ \frac{d}{dt} \right]_o = \frac{\partial}{\partial t} + u_o \frac{\partial}{\partial x} + v_o \frac{\partial}{\partial y}.$$

L'équation (10) fait apparaître l'effet  $\beta$  (effet combiné de l'accélération de Coriolis avec le rayon de courbure dans le plan méridien). L'équation (7) relie  $\omega_o$  à la pression  $p_o$ , et les deux premières équations de (2) relient  $u_o$  et  $v_o$  à  $p_o$ . L'exploitation de l'équation de l'énergie, non encore utilisée, nous donne une relation supplémentaire entre  $w_1$  et  $p_o$ . On pose :

$$\psi = \lambda_o p_o \quad (11)$$

(10), (11) et l'équation de l'énergie fournissent une équation vérifiée par la seule fonction  $\psi$ . Si nous faisons l'hypothèse du fluide incompressible, l'équation de l'énergie peut être remplacée par  $d\bar{\rho}/dt=0$ . Compte tenu de (3), (4) et (6), celle-ci se réduit à :

$$w_1 R' + O(R_o) = 0 \quad (12)$$

d'où  $w_1=0$ . Si l'on tient compte de cette équation dans (10), on a alors :

$$\left[ \frac{d}{dt} \right]_o (\omega_o + \beta \bar{y}) = 0 \quad (13)$$

Compte tenu de (10) et (11), (13) fournit pour  $\psi$  l'équation :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

On obtient des solutions d'ondes planes de la forme

$$\psi = A \cos ( k \bar{x} + h \bar{y} - \sigma \bar{t} ) \quad (15)$$

à condition que  $k$ ,  $h$  et  $\sigma$  vérifient l'équation de dispersion :

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{-\beta}{k^2 + h^2} \quad (16)$$

On vérifie avec l'équation (16) que la propagation de ces ondes le long de l'axe des  $\bar{x}$  s'effectue uniquement vers les  $\bar{x}$  négatifs : la propagation se fait toujours dans le sens est vers l'ouest.

### II.3 Analyse de la géométrie caractéristique de machines radiale et axiale

La figure 15 montre les longueurs caractéristiques des deux types de machines abordés par l'étude (pour plus de détails on se reportera paragraphes III.2.2 et IV.1.4 ). Ces deux géométries ont la particularité d'avoir au moins une longueur du canal interaubes petite devant le rayon extérieur de la roue.

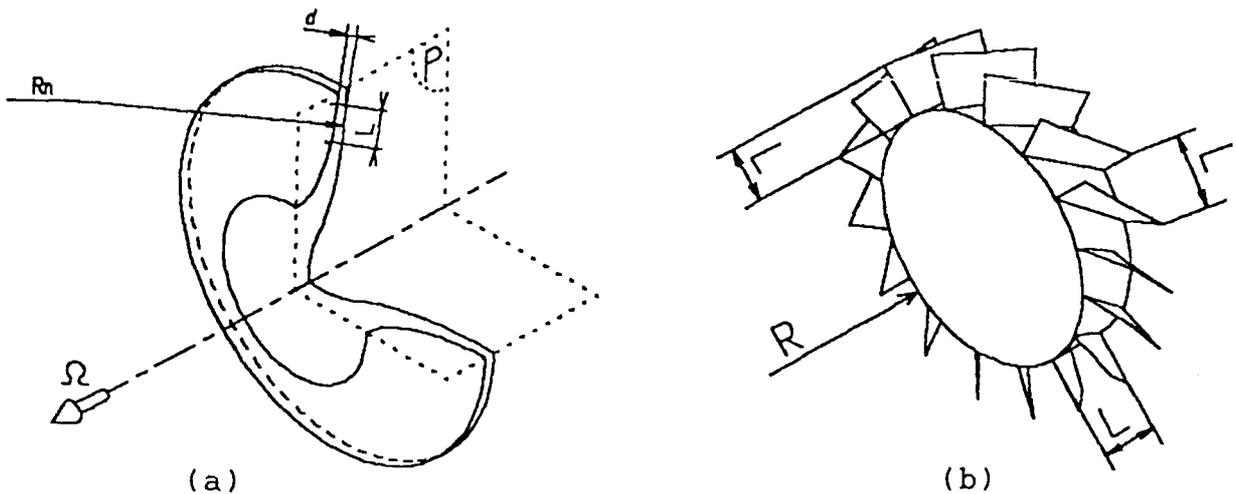


figure 15 : longueurs caractéristiques des machines radiale (a) et axiale (b) - les longueurs  $L$ ,  $d$  et  $R_n$  de la machine radiale sont similaires à celles des écoulements géophysiques -  $L$  correspond sensiblement à la distance interaubes.

Les dimensions analogues à celles des écoulements géophysiques sont mises en place sur la figure 15. On retrouve dans la machine radiale les longueurs similaires  $L$ ,  $d$  et  $R_n$ .  $L$  correspond sensiblement à la distance entre deux aubes. Dans ce cas, la surface du moyeu peut être concave ou convexe,  $R_n$  est alors soit positif soit négatif. Quant à la machine axiale, les dimensions du volume d'un canal interaubes ( $L \times L \times L$  : voir figure 15) ne permettent pas de faire apparaître la petite longueur caractéristique  $d$ .

L'échelle de l'écoulement de l'étude est celle de l'écoulement dans la roue, les dimensions d'un canal sont donc représentatives des longueurs caractéristiques de cet écoulement. Dans le rotor de la machine radiale il présente trois longueurs caractéristiques  $L$ ,  $d$  et  $R_n$ . Celles-ci vont permettre de faire apparaître deux paramètres géométriques sans dimension ( $d/L$  et  $L/R_n$ ) nécessaires à une modélisation analogue à celle qui conduit à la solution des ondes de Rossby. L'écoulement dans le rotor de la machine axiale ne présente que deux longueurs qui ne permettent de définir qu'un seul paramètre géométrique ( $L/R$ ). L'écoulement dans ce type de machine radiale présente plus de similitudes avec l'écoulement à la surface terrestre que n'en présente celui dans le rotor d'une machine axiale. On étudiera donc en premier le cas de la machine radiale.

#### II.4 Comparaison entre les écoulements géophysiques et les écoulements dans les turbomachines

Voici les principales différences entre les écoulements géophysiques et ceux des turbomachines : (i) le fluide aspiré par une turbomachine est généralement au repos dans un repère fixe à l'infini amont, son rotationnel  $\gamma$  est donc nul (sauf dans les couches limites), ce qui n'est pas le cas des écoulements géophysiques ; (ii) les forces volumiques prépondérantes dans les écoulements atmosphériques sont dues à la pesanteur (approximation hydrostatique), ce qui n'est pas le cas des écoulements dans les turbomachines ; (iii) une turbomachine possède des aubes, la Terre n'en a pas ; (iv) l'écoulement dans les

turbomachines possède une vitesse moyenne débitante, La cellule de Ferrel n'en a pas ; une machine est conçue pour débiter, son débit est un des principaux critères de son cahier des charges. (v) on utilise l'approximation du fluide non visqueux dans ce type d'écoulement géophysique, on utilisera l'approximation du fluide non visqueux et incompressible dans les turbomachines.

## Chapitre 3

### MACHINE RADIALE

L'objet de ce chapitre est d'analyser l'écoulement dans une machine radiale à l'échelle de la distance interaubes par une démarche asymptotique. L'objectif initial de cette démarche est de définir les conditions d'apparition des ondes de Rossby dans les turbomachines dans le but de confirmer ou non l'identification faite expérimentalement par Chen, Haupt, Rautenberg [21] de ces ondes avec le décrochage tournant. Pour cela, on s'attache à une description des écoulements la plus voisine de celle des écoulements géostrophiques. Notamment, dans le choix des paramètres de position, on fait apparaître les deux critères nécessaires à la définition de  $\beta$  : (i) le rayon de courbure local et (ii) un angle analogue à celui de la latitude. Le sens de la déviation des ondes de Rossby dépend de la concavité ou de la convexité de la surface qui borde l'écoulement : on fait apparaître cette concavité ou cette convexité par un signe positif ou négatif. Il est aussi nécessaire de faire ressortir des équations un paramètre cinématique  $\alpha$  analogue au nombre de Rossby qui permet, par une valeur appropriée, d'obtenir une approximation hydrostatique aux deux premiers ordres des développements, puis l'équilibre du terme de Coriolis par le gradient de pression au troisième ordre, la dérivée particulière n'apparaissant qu'au quatrième ordre. On définit les paramètres sans dimension liés à la géométrie de la machine et à l'écoulement. On précise ensuite les types de machines industrielles pour lesquelles la géométrie présente une analogie avec celle des écoulements géophysiques. Cela nous permet d'établir les conditions d'apparition des ondes de Rossby. Ensuite, pour le cas des applications industrielles, on présente des solutions d'ondes planes dont une solution d'ondes tournantes.

### III.1 Position du problème

#### III.1.1 Choix des coordonnées et définition du repère local

Le repère local tournant est lié au rotor. Le rotor possède une vitesse de rotation constante. La figure 16 montre le repère de Darboux-Ribaucour  $R_{DB}(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  associé à la surface du moyeu (voir annexe 2 et, par exemple, [29]). Dans la suite on choisit  $\vec{e}_3$  orienté de la surface du moyeu vers la surface du carter externe ( $R_{DB}$  est défini à partir des deux familles de courbes  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ ). La surface du moyeu est une surface de révolution. Sa trace dans le plan méridien la définit complètement. Soit  $s$  l'abscisse curviligne de cette trace. Un point  $P$  de la surface est repéré par les deux paramètres  $s$  et  $\theta$ .

Dans le but de définir un paramètre  $\beta_0$  analogue à  $\beta$ , celui des écoulements géophysiques, on choisit des paramètres de position qui font apparaître le rayon de courbure local  $R$  et un angle  $\varphi$  analogue à la latitude (voir figure 16). On désigne par  $\varphi = \varphi(s)$ ,  $A = A(\varphi)$ ,  $R = R(\varphi)$  et  $Z = Z(\varphi)$  les quatre fonctions connues qui définissent la trace du moyeu dans le plan méridien. La position d'un point courant  $P$  de la surface est alors définie par :

$$\vec{OP} = Z \vec{e}_z + A \vec{e}_\theta - R \vec{n}. \quad (17)$$

$\vec{n}$  est ici la normale au sens de Frenet (orientée vers le centre de courbure). La normale unitaire  $\vec{e}_3$  du repère de Darboux-Ribaucour associée à la surface du moyeu est égale à  $\vec{n}$  si la surface est concave, et vaut  $-\vec{n}$  si la surface est convexe (la normale  $\vec{e}_3$  du repère de Darboux-Ribaucour associée au moyeu reste toujours d'un même côté de la surface quelle que soit l'abscisse  $s$ ). On pose  $R = \Gamma R$  avec  $R > 0$  et  $\Gamma = +1$  si  $\vec{e}_3 = \vec{n}$  et  $\Gamma = -1$  si  $\vec{e}_3 = -\vec{n}$ . Le signe donné par  $\Gamma$  indique la concavité ou la convexité de la surface. Il vient :

$$\vec{OP} = Z \vec{e}_z + A \vec{e}_\theta - \Gamma R \vec{e}_3, \quad (18)$$

et la position d'un point quelconque  $M$  est donnée par :

$$\vec{OM} = z \vec{e}_z + A \vec{e}_\theta + (z - \Gamma R) \vec{e}_3, \quad (19)$$

$z$  est la position suivant  $\vec{e}_3$ .  $A$ ,  $Z$ ,  $R$  sont des fonctions de l'abscisse  $s$  à travers l'angle  $\varphi_{(s)}$ . La position d'un point quelconque  $P$  de la surface du moyeu est définie par les deux paramètres  $\varphi$ ,  $\theta$ . La position d'un point quelconque  $M$  est définie par les trois paramètres  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $z$ .

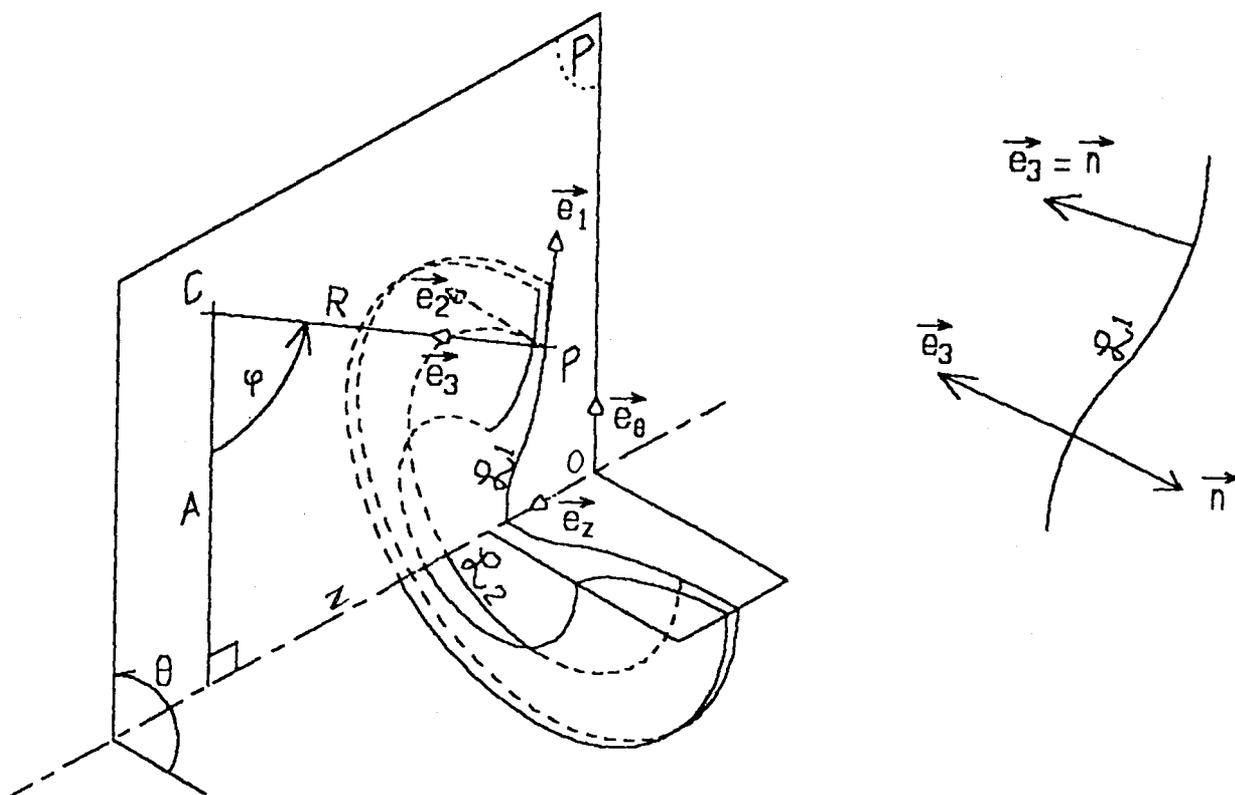


figure 16 : repère de Darboux-Ribaucour  $(P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  associé à la surface du moyeu - positions relatives de  $\vec{e}_3$  par rapport à la normale  $\vec{n}$  du repère de Frenet associé à la trace  $\mathcal{L}_1$  de la surface du moyeu dans le plan méridien.

On étudie l'écoulement au voisinage d'un point  $A$  du moyeu dont la position est définie par  $\theta = 0$  et  $\varphi = \varphi_0$  (voir figure 17).

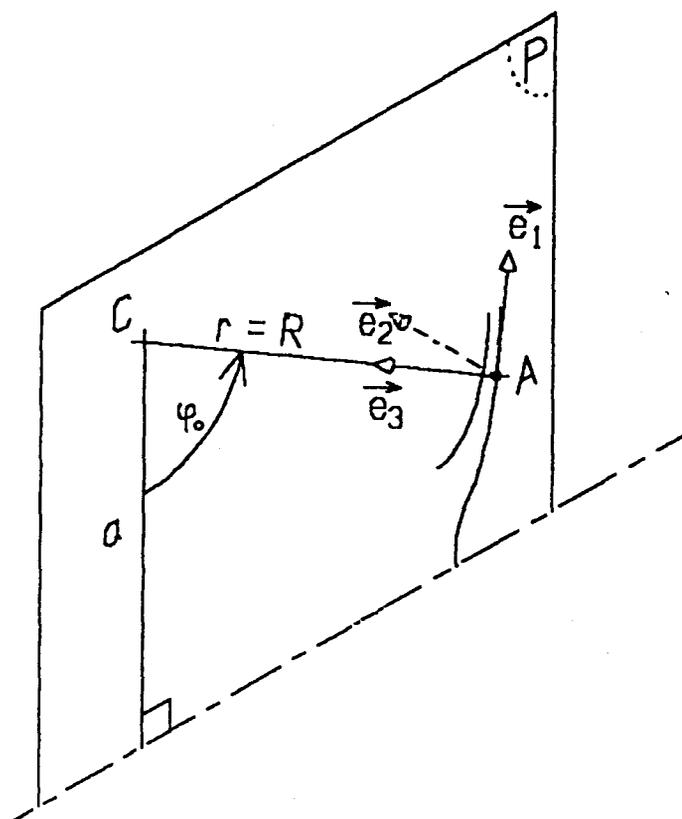


figure 17 : définition de la position du point A origine des coordonnées locales (curvilignes).

Dans l'étude on fait l'hypothèse que le rayon de courbure est grand (longueur caractéristique  $R$ ) devant la longueur caractéristique  $L$  qui définit la zone d'étude. Dans les différents cas étudiés, le rayon de courbure varie lentement. Pour chaque cas, la condition sur la variation du rayon dans la zone d'étude est déterminée en fonction du paramètre géométrique  $\frac{L}{R}$ . Avec cette condition, le rayon de courbure est constant dans les approximations successives nécessaires à l'étude. On se reportera à l'annexe 3 pour le détail des calculs. Avec la condition sur le rayon de courbure, le système de coordonnées ainsi défini est un système "torique".

La position d'un point  $M$  quelconque à partir de l'origine  $A$  du repère local est repérée par  $x$  suivant  $\vec{e}_1$ , par  $y$  suivant  $\vec{e}_2$  et par le  $z$  précédemment défini suivant  $\vec{e}_3$ . Les

coordonnées locales curvilignes  $x, y, z$  sont reliées aux trois paramètres précédents  $\varphi, \theta, z$  par :

$$\left. \begin{aligned} x &= \Gamma R(\varphi - \varphi_0) \\ y &= (a - \Gamma R \cos \varphi_0) \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

où  $a = A(\varphi_0)$ ,  $R = R(\varphi_0)$  et  $R' = \frac{dR}{d\varphi} = O\left[R\left(\frac{L}{R}\right)^{\nu-1}\right]$ .  $\nu$  vaut 4 ou

2 suivant le cas étudié (voir détails en annexe 3).

### III.1.2 Hypothèses sur le fluide

Les hypothèses énoncées ci-après sont couramment admises pour les types de turbomachines concernées par l'étude. On suppose que : (i) l'épaisseur des couches limites est faible devant les longueurs caractéristiques  $L$  et  $d$  ; (ii) le taux de compression par étage d'une turbomachine pour fluide compressible est voisin de l'unité et la pression est voisine de la pression atmosphérique ; (iii) le nombre de Mach est faible. Ces hypothèses permettent de faire l'approximation du fluide parfait et incompressible. Les équations d'Euler sont écrites dans le repère local tournant  $R_1$ . Les différents opérateurs, gradient, divergence et rotationnel, sont définis dans  $R_1$  (voir annexe 3). Remarquons que dans le cas où le rayon de courbure est constant on retrouve les opérateurs habituellement obtenus par l'utilisation des "formules classiques" de passage aux coordonnées curvilignes (voir, par exemple, [30]). On fait aussi l'approximation du fluide non pesant. En effet, prenons le cas d'une machine radiale, et plaçons nous à la périphérie du rotor. Comparons les effets de l'accélération d'entraînement  $\Omega^2 R$  à ceux dus à la pesanteur  $g$ . Prenons un rotor de 0,3 m de rayon et tournant à 1500 tr/min :  $g/\Omega^2 R = 0,0013$ . Dans la suite, on néglige les effets dus à l'accélération de la pesanteur (remarquons que la prise en compte des effets de la pesanteur dans une pression motrice ne changerait pas les résultats de l'étude)

### III.2 Analyse dimensionnelle du problème

#### III.2.1 Adimensionnement, normalisation, définition des paramètres $\delta$ , $\eta$ et $\alpha$

Afin d'évaluer les influences relatives de chacune des grandeurs considérées, il est nécessaire de procéder à une normalisation. Pour les longueurs on utilise les dimensions caractéristiques de la machine. On normalise  $x$ ,  $y$  par  $L$ ,  $z$  par  $d$  et  $a$  par  $R$ , d'où :

$$\bar{x} = \frac{x}{L} ; \bar{y} = \frac{y}{L} ; \bar{z} = \frac{z}{d} ; \bar{a} = \frac{a}{R} \quad (21)$$

Le "  $\bar{\quad}$  " indique qu'il s'agit d'une grandeur adimensionnée et normalisée. On désigne par  $U$  une vitesse caractéristique de l'écoulement (Elle sera précisée et discutée ultérieurement). On définit un temps caractéristique  $t_c = L/U$ , qui correspond à un nombre de Strouhal = 1, de façon à donner le même poids à la partie convective et à la partie instationnaire de la dérivée particulaire. On désigne par  $u$ ,  $v$  et  $w$  les composantes de la vitesse dans le repère local tournant  $R_1$ . Les ordres de grandeurs de ces composantes sont  $u = O(L/t_c)$ ,  $v = O(L/t_c)$ ,  $w = O(d/t_c)$ . On en déduit les grandeurs normalisées suivantes :

$$\bar{u} = \frac{u}{U} ; \bar{v} = \frac{v}{U} ; \bar{w} = \frac{L}{d} \frac{w}{U} ; \bar{t} = \frac{U}{L} t \quad (22)$$

Il ne reste plus qu'à évaluer un maximum pour le gradient de pression. Un maximum est obtenu quand la vitesse relative du fluide par rapport au rotor est nulle. Le fluide tourne comme un corps solide avec le rotor. On obtient alors :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = O(\rho \Omega^2 R(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)), \quad (23)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide, et  $\Omega$  la vitesse angulaire du rotor. En introduisant la valeur normalisée de  $x$ , on obtient un gradient de pression d'ordre  $L \rho \Omega^2 R(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)$ , d'où une variation de pression normalisée sur la longueur  $L$  :

$$\bar{\Delta p} = \frac{\Delta p}{L \rho \Omega^2 R(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)} \quad (24)$$

Le terme  $R(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)$  représente le rayon au point A. On voit ici une différence importante entre cet adimensionnement et l'adimensionnement classique du gradient de pression dans les turbomachines. En effet, en turbomachines on utilise habituellement  $\rho(\mathcal{R})^2$  ( $\mathcal{R}$  est le rayon extérieur du rotor). On retrouve dans (24) la force volumique due à l'accélération d'entraînement  $\rho \Omega^2 R(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)$ , la différence venant de la longueur de référence pour le gradient. Dans notre cas c'est  $L$ , habituellement c'est  $\mathcal{R}$ . Avec cette normalisation on obtient les équations suivantes dans le repère local  $R_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \Gamma \eta \delta z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \eta \bar{u} \frac{\sin \varphi}{\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi} - \\ - \eta \delta \Gamma \bar{w} \frac{\bar{a} - 2\Gamma(1 - \eta \delta z) \cos \varphi}{(1 - \Gamma \eta \delta z)(\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi)} = 0 \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{1}{\eta} (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{u}}{dt} - \alpha^2 \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \sin \varphi}{\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi} \bar{v}^2 - \alpha^2 \Gamma \delta \frac{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0}{1 - \Gamma \eta \delta z} \bar{u} \bar{w} - \\ - \alpha^2 2 \bar{v} \sin \varphi - \frac{\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \sin \varphi + \frac{1}{1 - \Gamma \eta \delta z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{1}{\eta} (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{v}}{dt} + \alpha^2 \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \sin \varphi}{\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi} \bar{u} \bar{v} + \alpha^2 \delta \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \cos \varphi}{\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi} \bar{v} \bar{w} + \\ + \alpha^2 2 \bar{u} \sin \varphi + \alpha \delta 2 \bar{w} \cos \varphi + \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)}{\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\delta}{\eta} (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{w}}{dt} + \alpha^2 \Gamma \frac{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0}{1 - \Gamma \eta \delta z} \bar{u}^2 - \alpha^2 \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \cos \varphi}{\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi} \bar{v}^2 - \\ - \alpha^2 2 \bar{v} \cos \varphi - \frac{\bar{a} - \Gamma(1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \cos \varphi + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

(25) est l'équation de conservation de la masse et (26) (27) (28) les trois équations de projection de la conservation de la quantité de mouvement. L'accélération relative (locale) est représentée par les trois premiers termes des équations (26), (27) et (28). L'accélération de Coriolis est représentée par le quatrième terme des équations (26) (28) et par le troisième terme et le quatrième terme de (27). L'accélération d'entraînement est représentée par l'avant-dernier terme de (26) et de (28). Le gradient de pression est représenté par le dernier terme des trois équations de conservation de la quantité de mouvement. Les paramètres sans dimensions significatifs sont  $\delta = d/L$ ,  $\eta = L/R$  et  $\alpha = U/[\Omega R(\bar{a} - \Gamma \cos \phi_0)]$ .  $\delta$  et  $\eta$  sont des paramètres géométriques et  $\alpha$  est le paramètre cinématique de l'écoulement.

### III.2.2 Détermination des types de turbomachines et de l'ordre de grandeur du paramètre cinématique $\alpha$ pour une machine en utilisation industrielle

Dans les équations (25) à (28), les propriétés de l'écoulement apparaissent au travers des paramètres sans dimension.

Toutes les machines radiales ne présentent pas une géométrie de rotor pour laquelle les paramètres  $\delta$  et  $\eta$  peuvent être considérés comme petits.

Plutôt que de faire un recensement des machines radiales susceptibles de répondre à ces critères géométriques, on définit une "machine type" qui sera l'élément de référence pour la comparaison avec les machines existantes.

La figure 17.1 montre les différentes dimensions nécessaires à l'évaluation des paramètres géométriques  $\delta$  et  $\eta$ .

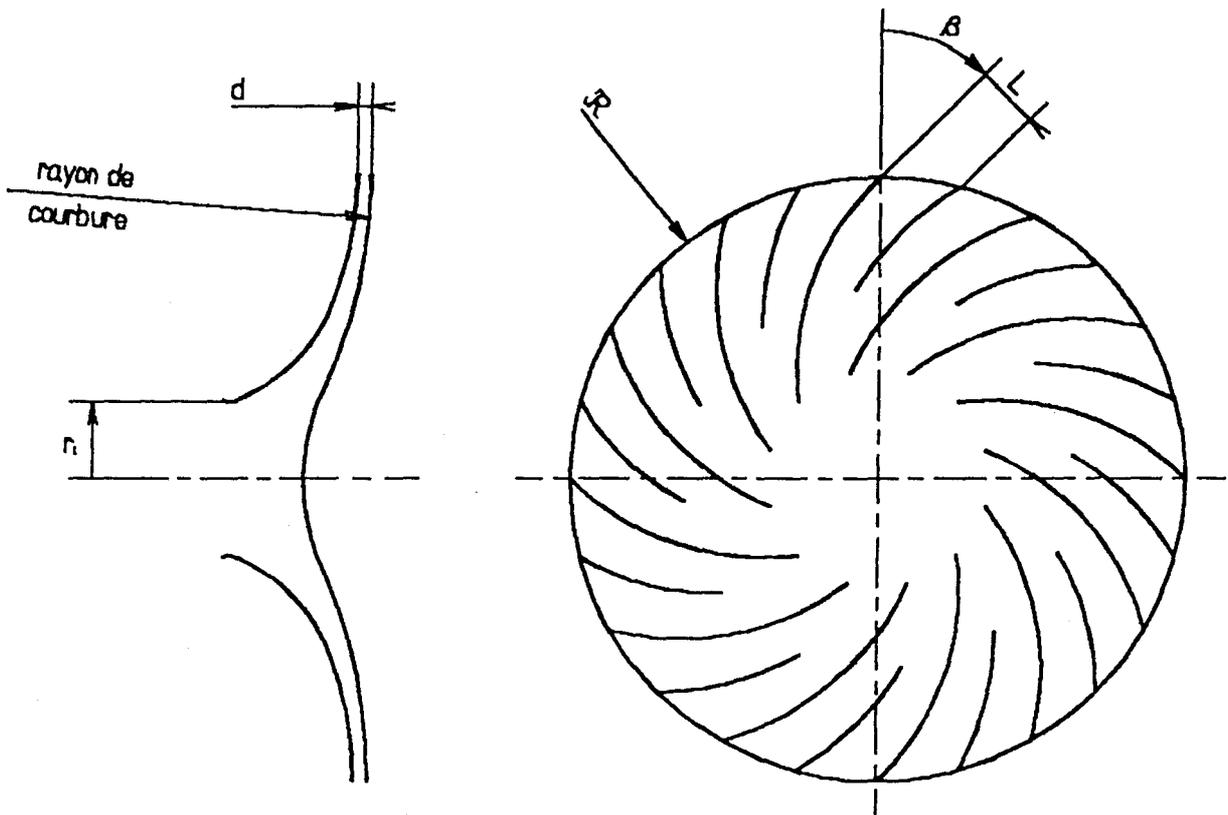


figure 17.1 : dimensions nécessaires à l'évaluation des paramètres géométriques  $\delta$  et  $\eta$ .  $R$  est le rayon extérieur du rotor,  $\beta$  est l'angle d'inclinaison de l'aubage en sortie de roue,  $r_1$  est le rayon à l'aspiration et  $d$  est la distance entre le moyeu et le carter externe en sortie du rotor.

A la sortie du rotor la longueur  $L$  peut être approchée par :

$$L = \frac{2 \pi R \cos\beta}{N}, \quad (29.1)$$

où  $N$  est le nombre d'aubes.  $\eta$  s'écrit alors :

$$\eta = \frac{L}{R} = \frac{2 \pi \cos\beta}{N}. \quad (29.2)$$

Le second paramètre géométrique  $\delta$  s'écrit :

$$\delta = \frac{d}{L} = \frac{N}{2 \pi \cos \beta} \frac{d}{R}. \quad (29.3)$$

Afin d'évaluer le rapport  $\frac{d}{R}$ , on fait l'hypothèse suivante sur la conception de la roue : la vitesse moyenne débitante est sensiblement constante dans la roue entre l'entrée et la sortie. Cette hypothèse en fluide incompressible homogène implique que la section de passage à l'aspiration est égale à celle en sortie de roue, il vient :

$$d = \frac{r_1^2}{2 R} \quad (29.4)$$

$\delta$  s'écrit avec (29.3) et (29.4) :

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{N}{4 \pi \cos \beta} \left[ \frac{r_1}{R} \right]^2 \\ &\text{ou} \\ \delta &= \frac{1}{2 \eta} \left[ \frac{r_1}{R} \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (29.5)$$

Les relations (29.2) et (29.5) permettent de déterminer  $\eta = \eta(\beta, N)$  et  $\delta = \delta(\beta, N, r_1/R)$  ou  $\delta = \delta(\eta, r_1/R)$  pour une machine donnée. (29.5) montre que les deux paramètres géométriques  $\delta$  et  $\eta$  ne sont pas indépendants. Une longueur  $L$  petite devant le rayon de la roue  $R$  impose un nombre d'aubes. Puis, une longueur  $d$  petite devant  $L$  impose un rayon  $R$ . Dans la modélisation qui conduit à la solution des ondes de Rossby, les deux paramètres géométriques sont petits et du même ordre de grandeur. Pour la définition d'une "machine type", on appelle  $\epsilon$  le petit paramètre géométrique vers lequel tendent  $\eta$  et  $\delta$ , puis on pose :

$$\eta = \delta = \epsilon \ll 1 \quad (29.6)$$

En remplaçant  $\eta$  et  $\delta$  par  $\epsilon$  dans les relations (29.2) et (29.5) on définit les rapports suivants pour une machine de référence :

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_1}{R \sqrt{2}} &= \epsilon \\ \frac{2 \pi \cos \beta}{N} &= \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (29.7)$$

Avec (29.7), on voit immédiatement que  $R$  et  $N$  tendent vers l'infini quand  $\epsilon$  tend vers zéro. Une telle machine n'est pas réaliste. La machine de référence doit présenter une géométrie pour laquelle  $\epsilon$  peut être considéré comme petit avec  $R$  et  $N$  réalistes. On peut admettre que cette condition est satisfaite pour  $\epsilon = 0,2$  avec un angle  $\beta$  de  $45^\circ$ . Une machine de référence ainsi définie a les caractéristiques générales suivantes :

$$N = 22 \text{ aubes ; } \beta = 45^\circ ; \frac{r_1}{R} = 0,28 \quad (29.8)$$

La figure (17.2) montre, pour des pompes existantes, différents rapports adimensionnés en fonction de la vitesse spécifique (caractéristiques au meilleur rendement). Le rapport  $r_1/R$  ( $d_1/d_2$  sur la figure) varie de 0,3 pour les machines radiales à 1 pour les machines purement axiales. la machine de référence (29.8) possède un rapport  $r_1/R$  réaliste de machine radiale élancée.

Les machines pour lesquelles l'hypothèse du fluide incompressible est admise sont les pompes, les ventilateurs et les cellules de compression à faible taux de compression (voir, par exemple, [31] et [32]).

l'angle d'inclinaison en sortie de roue  $\beta$  varie d'une machine à l'autre en fonction de l'utilisation. Les aubes peuvent être couchées en arrière ou en avant. Ce dernier cas pénalise en général le rendement et on observe plus

souvent des aubes couchées en arrière (voir, par exemple, [32]).

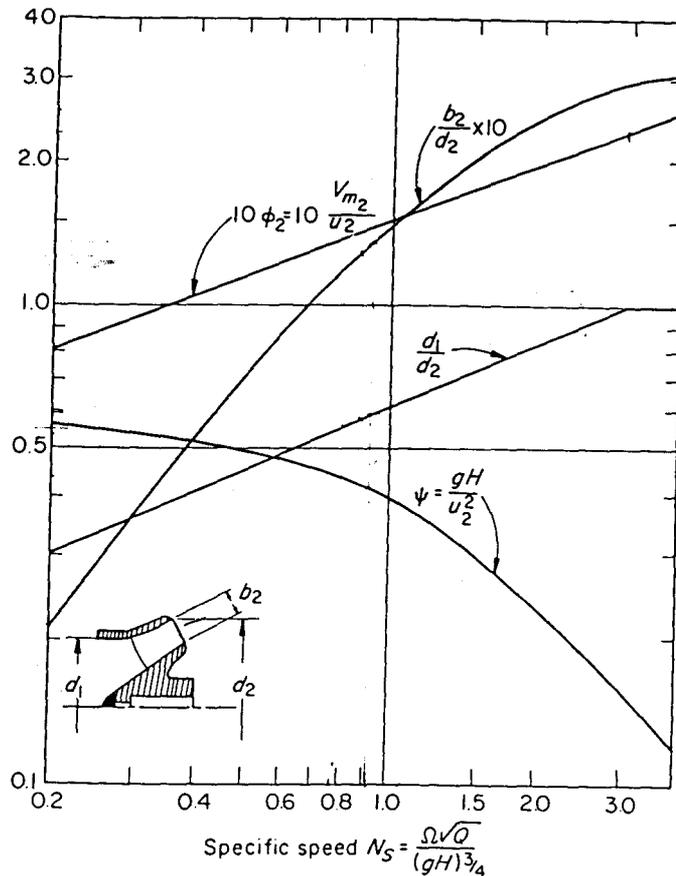


figure 17.2 : caractéristiques dimensionnelles des pompes en vue d'un bon rendement.  $\psi$  est le coefficient de travail net.  $u_2$  est la vitesse tangentielle du rotor à son diamètre de sortie  $d_2$ .  $V_{m2}$  est la vitesse moyenne débitante en sortie de roue.  $N_s$  est la vitesse spécifique.  $\Omega$  est la vitesse angulaire du rotor.  $Q$  est le débit volume.  $H$  est la hauteur d'élévation.  $g$  est l'accélération de la pesanteur - (d'après [33])

Le nombre d'aubes et l'angle  $\beta$  sont dépendants : plus l'angle  $\beta$  est petit et plus le nombre d'aubes est grand (voir, par exemple, [31] et [32]). L'angle  $\beta$  est fonction de plusieurs paramètres dont le rapport de la vitesse moyenne débitante sur la vitesse tangentielle en sortie de roue. Ce rapport est plus faible dans le cas des pompes que dans celui des ventilateurs et compresseurs. Ceci est dû,

entre autres, aux circuits alimentés et à la nature du fluide (problème de cavitation). Ces critères conditionnent la géométrie des roues. Les pompes ont souvent les aubes couchées en arrière avec un angle  $\beta$  important et un faible nombre d'aubes. Les ventilateurs ont souvent des aubes couchées en arrière avec un angle  $\beta$  moins important et un nombre d'aubes plus élevé que les pompes. Et, les compresseurs ont souvent des aubes couchées en arrière avec un angle  $\beta$  plus faible, voire nul (aubes radiales), et un nombre d'aubes plus élevé. Le nombre d'aubes et l'angle  $\beta$  approximatifs en fonction du type de machine peuvent être présentés synthétiquement sous la forme du tableau suivant :

	pompes	ventilateurs	compresseurs
nombre d'aubes (approximatif)	4 à 8	10 à 20	20 à 30
angle $\beta$ (approximatif)	60° à 80°	30° à 60°	0° à 45°

Compte tenu de la diversité géométrique des machines évoquée ci-dessus, ce tableau n'a qu'une valeur indicative, son but est de préciser une famille de machines susceptibles de présenter deux paramètres géométriques  $\eta$  et  $\delta$  qui pourront être considérés comme petits.

Les machines, dont le nombre d'aubes et la géométrie se rapprochent de la "machine type" (29.8), sont des ventilateurs et des compresseurs à faible taux de compression.

On suppose dans la suite de l'étude que le petit paramètre géométrique de la machine est  $\epsilon$  défini par (29.6) :

$$\eta = \delta = \epsilon \ll 1.$$

Cela correspond à une machine élançée qui possède un bon nombre d'aubes, pour laquelle la zone d'étude est suffisamment éloignée de l'axe de rotation.

Le paramètre cinématique  $\alpha = U/[\Omega R(\bar{a} - \Gamma \cos \phi_0)]$  est le nombre de Rossby du présent écoulement.

Le poids de chacun des termes des équations dépend de la valeur relative entre  $\alpha$  et  $\epsilon$ . La vitesse de référence qui apparaît dans le coefficient  $\alpha$  est  $\Omega R(\bar{a} - \Gamma \cos \phi_0)$  qui est la vitesse tangentielle du point A origine du repère local.  $U$  est la vitesse caractéristique de l'écoulement dans le repère local, c'est à dire la valeur caractéristique de la vitesse relative. Le domaine de validité de l'approximation (29.6) implique que la zone d'étude est suffisamment éloignée de l'axe de rotation du rotor. Pour estimer un ordre de grandeur de cette vitesse relative, on se place à la sortie de la roue. La relation entre la vitesse absolue, la vitesse d'entraînement (vitesse tangentielle) et la vitesse relative se construit au moyen du triangle des vitesses. l'angle en sortie de roue de la vitesse relative est donné, à une faible déviation près, par l'angle d'inclinaison de l'aube (voir annexe 4). Quel que soit le type de machine, on prend habituellement en première approximation de l'angle de sortie de roue des filets de fluide l'angle de sortie de roue des aubes (voir, par exemple [31], [32] et [33]). Cette hypothèse est celle du nombre d'aubes infini. On peut donc utiliser les grandeurs adimensionnées de la figure (17.2) pour les pompes afin d'évaluer un ordre de grandeur de la vitesse relative de l'écoulement d'un fluide incompressible dans les machines industrielles.

Dans le coefficient de travail  $\psi = gH/u_2^2$ ,  $gH$  est le travail net et  $u_2$  est la vitesse tangentielle à la périphérie du rotor. On a  $gH = \eta_h g H_1$  où  $H_1$  est la hauteur obtenue avec une roue possédant un nombre infini d'aubes, et  $\eta_h$  est le rendement hydraulique. En supposant

l'écoulement à l'aspiration sans prérotation on a  $H_1 = u_2 c_{u2}$  ( $c_{u2}$  est la projection de la vitesse absolue sur la vitesse d'entraînement en sortie de roue). le coefficient de travail net peut donc s'écrire  $\psi = \eta_h c_{u2} / u_2$ . Le coefficient de travail net représente le rapport  $c_{u2} / u_2$  au rendement près. Les courbes sont établies pour un rendement optimal. On prendra pour valeur approchée de  $c_{u2} / u_2$  celle de  $\psi$ . On peut alors avec la courbe  $\phi_2$  et  $\psi$  de la figure (17.2) reconstruire le triangle des vitesses, et déterminer un ordre de grandeur de la vitesse relative de l'écoulement d'un fluide incompressible dans le rotor d'une machine industrielle. Il vient avec les notations précédentes :

$$\frac{w}{u_2} = \sqrt{\left[ \frac{V_{m2}}{u_2} \right]^2 + \left[ 1 - \frac{c_{u2}}{u_2} \right]^2} \quad (29.9)$$

où  $w$  est le module de la vitesse relative.

Le rapport  $w/u_2$  représente l'ordre de grandeur du paramètre cinématique  $\alpha$  précédemment défini. Ce rapport varie de 0,5 pour les machines radiales à 0,9 pour les machines axiales. Les instabilités apparaissent à débits réduits, ces valeurs sont alors "grandes" pour un petit paramètre et "petites" pour une valeur voisine de l'unité. La vitesse caractéristique à retenir pour l'écoulement doit être un ordre de grandeur de valeur maximale. C'est pour cela que l'on retiendra comme ordre de grandeur l'unité pour le paramètre cinématique. On considèrera dans la suite de l'étude  $\alpha = O(1)$  pour le cas l'écoulement d'un fluide incompressible dans le rotor d'une machine industrielle.

(29.8) définit une géométrie analogue à celle des écoulements géophysiques. Les types de machines radiales concernées sont les ventilateurs et les compresseurs à faible taux de compression. La valeur du paramètre cinématique  $\alpha$  sera prise égale à un dans les équations.

La deuxième équation (20) permet d'exprimer  $\varphi$  en fonction de la position  $\varphi_0$  de l'origine A du repère local, de l'abscisse  $\bar{x}$  et  $\eta$ , il vient :

$$\varphi = \varphi_0 + \eta \Gamma \bar{x} \quad (30)$$

et avec (29.6) :

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \Gamma \bar{x} \quad (31)$$

$\varepsilon$  étant petit, on développe  $\sin\varphi$  et  $\cos\varphi$  en série de Taylor :

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin\varphi_0 [1 + \varepsilon \Gamma \bar{x} \cotg\varphi_0 - \varepsilon^2 \frac{\bar{x}^2}{2} - \varepsilon^3 \Gamma \frac{\bar{x}^3}{6} \cotg\varphi_0 + O(\varepsilon^4)] \\ \cos\varphi &= \cos\varphi_0 [1 - \varepsilon \Gamma \bar{x} \tg\varphi_0 - \varepsilon^2 \frac{\bar{x}^2}{2} + \varepsilon^3 \Gamma \frac{\bar{x}^3}{6} \tg\varphi_0 + O(\varepsilon^4)] \end{aligned} \quad (32)$$

On développe  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  et  $\bar{p}$  par rapport aux puissances entières de  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots ; \quad \bar{v} = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \\ \bar{w} &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots ; \quad \bar{p} = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Avec (31), (32) et (33), le système (25) à (28) s'écrit au moyen de la position du point A, des grandeurs normalisées et des abscisses curvilignes normalisées. Ce système décrit l'écoulement par approximations successives en fonction des puissances entières de  $\varepsilon$  et du paramètre  $\alpha$ . Dans cette description la valeur du paramètre cinématique  $\alpha$  a un rôle fondamental. En effet, il donne l'ordre de grandeur de l'influence des effets de la vitesse, et organise à ce titre la hiérarchie des approximations successives.

Le cas pour lequel on obtient un système dont la hiérarchie conduit à un système d'ondes de Rossby est le cas où  $\alpha = \varepsilon^2$ . On est donc amené à considérer trois cas : (i) le "cas des ondes de Rossby"  $\alpha = \varepsilon^2$  ; (ii) le cas industriel  $\alpha = 1$  et (iii) le cas intermédiaire  $\alpha = \varepsilon$ .

### III.3 Conditions d'apparition des ondes de Rossby :

$$\text{cas } \alpha = \varepsilon^2$$

Dans ce cas la condition sur le rayon de courbure est  $\nu = 4$ . Les trois équations de quantité de mouvement s'écrivent (pour le détail des calculs voir l'annexe 3) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \underline{p}_0}{\partial \underline{x}} - \sin \varphi_0 + \varepsilon \left[ \frac{\partial \underline{p}_1}{\partial \underline{x}} - \bar{x} \left[ \Gamma \cos \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right] \right] \\ & + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial \underline{p}_2}{\partial \underline{x}} + \Gamma \bar{z} \frac{\partial \underline{p}_0}{\partial \underline{x}} - \sin \varphi_0 \left\{ \bar{x}^2 \left[ \frac{2}{3} \frac{\Gamma \cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} - 1 \right] + \bar{z} \frac{\cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right\} - 2 v_0 \right. \\ & \left. + \varepsilon^3 \left\{ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{d\underline{u}}{dt} \right]_0 - 2 v_0 \Gamma \bar{x} \cos \varphi_0 - 2 v_1 \sin \varphi_0 + \Gamma \bar{z} \frac{\partial \underline{p}_1}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{p}_3}{\partial \underline{x}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{x} \left\{ \bar{x}^2 \left[ \frac{3 \cos^2 \varphi_0 - 4 \sin^2 \varphi_0}{6 (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)} - \frac{\Gamma}{6} \cos \varphi_0 \right] - \bar{z} \left[ \frac{\Gamma \sin^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right] \right\} \right\} = O(\varepsilon^4) \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \underline{p}_0}{\partial \underline{y}} + \varepsilon \left[ - \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial \underline{p}_0}{\partial \underline{y}} + \frac{\partial \underline{p}_1}{\partial \underline{y}} \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left\{ a \frac{\partial \underline{p}_0}{\partial \underline{y}} - \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial \underline{p}_1}{\partial \underline{y}} + \frac{\partial \underline{p}_2}{\partial \underline{y}} + \right. \\ & \left. + 2 \Gamma \bar{x} u_0 \cos \varphi_0 + 2 u_1 \sin \varphi_0 \right\} + \\ & + \varepsilon^3 \left\{ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{d\underline{v}}{dt} \right]_0 + 2 w_0 \cos \varphi_0 + \right. \\ & \left. + b \frac{\partial \underline{p}_0}{\partial \underline{y}} + a \frac{\partial \underline{p}_1}{\partial \underline{y}} - \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial \underline{p}_2}{\partial \underline{y}} + \frac{\partial \underline{p}_3}{\partial \underline{y}} \right\} = O(\varepsilon^4) \quad (35) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{p}_0}{\partial \underline{z}} + \varepsilon \left[ \frac{\partial \underline{p}_1}{\partial \underline{z}} - \cos \varphi_0 \right] + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial \underline{p}_2}{\partial \underline{z}} - \bar{x} \sin \varphi_0 \left[ \frac{\cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} - \Gamma \right] \right] +$$

$$+\varepsilon^3 \left\{ \frac{\partial p_3}{\partial z} - 2 v_0 \cos \varphi - \frac{x^2}{2} \left[ \Gamma \frac{\cos^2 \varphi_0 - 2 \sin^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} - \cos \varphi_0 \right] - \frac{z}{2} \frac{\cos^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right\} = O(\varepsilon^4) \quad (36)$$

La démarche que l'on utilise est celle de la modélisation des écoulements géostrophiques qui conduit à la solution des ondes de Rossby. Les deux premières approximations, celles à l'ordre  $\varepsilon^0$  et  $\varepsilon^1$ , sont des approximations hydrostatiques (la vitesse n'y apparaît pas). Le système à l'ordre  $\varepsilon^2$  fait apparaître les termes de Coriolis et permet d'écrire l'équation de la composante normale du rotationnel. Le système à l'ordre  $\varepsilon^3$  permet d'établir l'équation de la variation de la composante normale du rotationnel dans laquelle apparaît l'effet  $\beta_0$ .

Dans la suite du chapitre les variables normalisées ne sont plus surlignées (pour la direction des axes on se reportera à la figure 17 page 49).

La solution du système à l'ordre  $\varepsilon^0$  s'écrit :

$$p_0 = x \sin \varphi_0 + C_0^{\text{te}}, \quad (37)$$

où  $C_0^{\text{te}}$  est une constante. La solution du système à l'ordre  $\varepsilon^1$  s'écrit :

$$p_1 = \frac{x^2}{2} \left[ \Gamma \cos \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right] + z \cos \varphi_0 + C_1^{\text{te}}, \quad (38)$$

où  $C_1^{\text{te}}$  est une constante. (37) et (38) montrent que la pression ici est uniquement due à l'accélération d'entraînement qui est un gradient. Les équations à l'ordre  $\varepsilon^2$  s'écrivent :

$$- 2 v_0 \sin\varphi_0 + \frac{\partial P_2}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

$$2 u_0 \sin\varphi_0 + \frac{\partial P_2}{\partial y} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (42)$$

$$\text{où } P_2 = -x z \sin\varphi_0 \left( \frac{\cos\varphi_0}{a - \Gamma \cos\varphi_0} - \Gamma \right) - \frac{x^3}{3} \sin\varphi_0 \left( \frac{2}{3} \frac{\Gamma \cos\varphi_0}{a - \Gamma \cos\varphi_0} - 1 \right) + p_2 \quad (43)$$

(39), (40) et (41) montrent que  $u_0$  et  $v_0$  sont indépendants de  $z$ . Les deux premiers termes du membre de droite de (43) proviennent de la fonction de force due à l'accélération d'entraînement. L'élimination de  $P_2$  entre (39) et (40) permet d'obtenir :

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (44)$$

Les conditions de glissement sur le moyeu ( $z=0$ ) et sur le carter externe ( $z=1$ ) s'écrivent :

$$w_0(z=0) = 0 \text{ et } w_0(z=1) = 0 \quad (45)$$

(42), (44) et (45) entraînent :

$$w_0 = 0 \quad (46)$$

Le mouvement s'effectue donc en première approximation dans le plan  $x, y$ . (39), (40) et (46) constituent l'approximation du plan tangent.

(39) et (40) permettent d'écrire l'équation de la composante normale du rotationnel :

$$\omega_z = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{1}{2 \sin\varphi_0} \left[ \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} \right] \quad (47)$$

L'équation de la variation de  $\omega_z$  est obtenue en écrivant le système à l'ordre  $\varepsilon^3$ . Après avoir effectué le changement de variable suivant :

$$P_3 = -z \frac{x^2}{2} \left[ \Gamma \frac{\cos^2 \varphi_0 - 2 \sin^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} - \cos \varphi_0 \right] + \\ + \frac{z^2}{2} \frac{\cos^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} - \frac{x^4}{4} \left( -\frac{\Gamma}{6} \cos \varphi_0 + \frac{3 \cos^2 \varphi_0 - 4 \sin^2 \varphi_0}{6(a - \Gamma \cos \varphi_0)} \right) + p_3,$$

Les trois premiers termes du membre de droite de  $P_3$  proviennent de la fonction de force due à l'accélération d'entraînement.

On obtient :

$$(a - \Gamma \cos \varphi_0) \left( \frac{du}{dt} \right)_o - 2 \Gamma x v_0 \cos \varphi_0 - 2 v_1 \sin \varphi_0 + \frac{\partial P_3}{\partial x} = 0 \quad (48)$$

$$(a - \Gamma \cos \varphi_0) \left( \frac{dv}{dt} \right)_o + 2 \Gamma x u_0 \cos \varphi_0 + 2 u_1 \sin \varphi_0 - \\ - x \frac{\sin \varphi_0}{a - \cos \varphi_0} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial P_3}{\partial y} = 0 \quad (49)$$

$$- 2 v_0 \cos \varphi_0 + \frac{\partial P_3}{\partial z} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} - x \frac{\sin \varphi_0}{a - \cos \varphi_0} \frac{\partial v_0}{\partial y} + u_0 \frac{\sin \varphi_0}{a - \cos \varphi_0} = 0 \quad (51)$$

L'élimination de  $P_3$  entre (48) et (49) donne :

$$(a - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{dv}{dt} \right)_o - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{du}{dt} \right)_o \right] + 2 \Gamma x \cos \varphi_0 \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] + \\ + 2 \Gamma u_0 \cos \varphi_0 + 2 \sin \varphi_0 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] - \frac{\sin \varphi_0}{a - \cos \varphi_0} \frac{\partial p_2}{\partial y} - \\ - x \frac{\sin \varphi_0}{a - \cos \varphi_0} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x \partial y} = 0 \quad (52)$$

La seconde parenthèse du premier terme de (52) s'écrit avec (44) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = \frac{d\omega_z}{dt}, \quad (53)$$

$$\text{où } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}.$$

(44) rend le second terme de (52) nul. L'évaluation de la parenthèse du quatrième terme s'obtient à partir de (48), (49) et (51) en utilisant ; (i) la propriété qu'ont  $u_0$  et  $v_0$  d'être indépendants de  $z$ , (ii) la condition de glissement sur les carters, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial(30)}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial(29)}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial(31)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) = 0 \quad (55)$$

De (54) et (55) on tire :

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0 \quad (56)$$

La condition de glissement s'écrit :

$$w_1(z=0) = 0 \text{ et } w_1(z=1) = 0, \quad (57)$$

d'où :

$$w_1 = 0 \quad (58)$$

Le quatrième terme de (52) s'écrit à partir de (51) en utilisant (58) :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = x \frac{\sin\phi_0}{a - \cos\phi_0} \frac{\partial v_0}{\partial y} - u_0 \frac{\sin\phi_0}{a - \cos\phi_0} \quad (59)$$

En exprimant respectivement  $u_0$  et  $v_0$  en fonction de  $P_2$  avec (39) et (40), il vient :

$$\frac{d}{dt} (\omega_z + \Gamma \beta_0 x) = 0 \quad (60)$$

$$\text{où } \beta_0 = \frac{2 \cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0}$$

L'équation de la variation du rotationnel (60) fait apparaître l'effet  $\beta_0$ . La relation (60) s'écrit en terme de pression en posant  $\phi = P_2 / (2 \sin \varphi_0)$ , en utilisant (47) pour relier  $\omega_z$  à  $P_2$  et (39)(40) pour relier  $u_0$  et  $v_0$  à  $P_2$  :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right] (\Delta \phi + \Gamma \beta_0 x) = 0 \quad (61)$$

$\phi = a e^{i(kx + \ell y - \sigma t)}$  est solution de (61), et conduit à l'équation de dispersion :

$$\frac{\sigma}{\ell} = \Gamma \frac{\beta_0}{k^2 + \ell^2} \quad (62)$$

Le domaine de validité de cette solution est défini par  $\phi$  et  $\beta_0$  d'ordre unité, ce qui implique  $\sin \varphi_0$  et  $\cos \varphi_0$  non nuls ( $\varphi_0 \neq 0$  et  $\varphi_0 \neq \pi/2$ ).  $\beta_0$  est, dans notre cas, positif. (62) traduit une direction de la vitesse de propagation suivant l'axe des  $y$  (tangentiuellement) qui dépend de  $\Gamma$ . Si la zone d'étude est concave, la déviation est vers les  $y > 0$ . Si la zone d'étude est convexe, la déviation est vers les  $y < 0$ . On retrouve ici la particularité de ce type d'onde, dont la vitesse de propagation est liée  $\Gamma \beta_0$ . Cette quantité représente la courbure de la surface dans le plan méridien. L'équation (60) peut être considérée comme "l'équation des ondes de Rossby" pour les machines radiales.

Cette solution n'est pas identifiable à celle du décrochage tournant. En voici les principales raisons : (i) la valeur du paramètre cinématique ( $\alpha = \epsilon^2$ ) ne correspond pas à celle des applications industrielles du type de machine considérée ( $\alpha = 1$ ) ; (ii) cette famille de solutions ne possède pas de vitesse moyenne débitante (une vitesse débitante serait d'ordre  $\epsilon^3$ ), ce qui est une caractéristique essentielle pour une machine ; (iii) le

gradient de pression de l'onde tournante est très faible, d'ordre  $\varepsilon^2$  ; (iv) l'ordre de grandeur des vitesses n'est pas compatible avec la condition d'irrotationnalité à l'aspiration de la machine, l'équation de la composante normale du rotationnel dans ce cas s'écrit (voir annexe 2) :

$$\varepsilon \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + = - 2 \frac{\sin \varphi_0}{a - r \cos \varphi_0} + O(\varepsilon). \quad (63)$$

Le terme de droite de (63) traduit la condition d'irrotationnalité. Cette condition ne peut être satisfaite avec les ordres de grandeur de  $u_0$  et  $v_0$  du cas  $\alpha = \varepsilon^2$ . Cette solution ne pourrait apparaître que dans le cas où l'écoulement serait fortement rotationnel, ce qui correspond à un fluide qui tourne avec la roue comme un corps solide aux deux premières approximations ; (v) le moyeu d'une machine radiale ne possède pas nécessairement de courbure dans le plan méridien. Cette solution ne peut donc pas être observée dans les machines industrielles.

La présence d'aubes n'a pas été prise en compte dans l'étude ci-dessus. Toutefois, si ce cas avait été représentatif d'une application industrielle, la présente analyse montre comment il aurait fallu poser le problème pour rechercher une solution à l'aide des conditions aux limites.

Néanmoins, on peut préciser les conditions d'apparition de ces ondes de Rossby dans les turbomachines : (i) La vitesse caractéristique de l'écoulement est très faible devant la vitesse tangentielle du rotor, d'ordre  $\varepsilon^2$  ; (ii) La machine ne débite pas ou débite très peu, d'ordre  $\varepsilon^3$  ; (iii) la surface doit posséder une courbure dans le plan méridien, ne pas avoir d'aubage, et  $\varphi_0$  doit être différent de 0 et  $\pi/2$  : la zone ainsi définie pourrait être un diffuseur lisse et torique d'hélico-compresseur.

### III.4 Ondes tournantes dans les machines radiales en application industrielle : cas $\alpha = 1$

La condition sur le rayon de courbure est ici :

$$R' = \frac{dR}{d\varphi} = O \left[ R \left( \frac{L}{R} \right) \right]$$

Ce cas est traité par une méthode de petites perturbations. Le paramètre cinématique  $\alpha$  a été remplacé par 1 dans le système (25)-(28)

#### III.4.1 Ecoulement stationnaire de base à l'ordre $\varepsilon^0$ et détermination de l'amplitude $\mu$ de la perturbation

Nous recherchons une solution de (25)-(28) sous forme d'une petite perturbation instationnaire (d'amplitude  $\mu$ ) d'une solution stationnaire non déterminée a priori. Ces solutions dépendent également de  $\varepsilon$  de sorte que nous développons  $u$  et  $v$  sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{0s} + \varepsilon u_{1s} + O(\varepsilon^2) + \mu \{ u_{0*} + \varepsilon u_{1*} + O(\varepsilon^2) \} \\ v &= v_{0s} + \varepsilon v_{1s} + O(\varepsilon^2) + \mu \{ v_{0*} + \varepsilon v_{1*} + O(\varepsilon^2) \} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

L'indice "s" indique la partie stationnaire, et l' "\*" la partie perturbée.  $\mu$  est l'amplitude de la perturbation.

Ce développement se présente comme une suite formelle dépendant de 2 paramètres indépendants. Afin de ne considérer que des cas réalistes et d'éviter des calculs inutiles, nous précisons dans ce qui suit les considérations qui conduisent à placer ces paramètres l'un par rapport à l'autre.

Précisons d'abord les influences relatives de la vitesse et du gradient de pression en fonction du paramètre géométrique. Dans ce but analysons le système d'équations obtenu en l'absence de perturbation :

$$(\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0)\left(\frac{du}{dt}\right)_0 + \varepsilon \left\{ (\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0)\left(\frac{du}{dt}\right)_1 + \frac{\partial p_{os}}{\partial x} - v_{os}^2 \sin\varphi_0 - \right. \\ \left. - 2 v_{os} \sin\varphi_0 - \sin\varphi_0 \right\} = O(\varepsilon^2) \quad (65)$$

$$(\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0)\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 + \varepsilon \left\{ (\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0)\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 + \frac{\partial p_{os}}{\partial y} + \right. \\ \left. + u_{os} v_{os} \sin\varphi_0 + 2 u_{os} \sin\varphi_0 \right\} = O(\varepsilon^2) \quad (66)$$

$$\frac{\partial p_{os}}{\partial z} + \varepsilon \left\{ (\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0)\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 + \Gamma(\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0) u_{os}^2 - \cos\varphi_0 v_{os}^2 - \right. \\ \left. - 2 v_{os} \cos\varphi_0 - \cos\varphi_0 + \frac{\partial p_1}{\partial z} \right\} = O(\varepsilon^2) \quad (67)$$

$$\frac{\partial u_{os}}{\partial x} + \frac{\partial v_{os}}{\partial y} + \frac{\partial w_{os}}{\partial z} + \\ + \varepsilon \left[ \frac{\partial u_{1s}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} + \frac{\partial w_{1s}}{\partial z} + u_{os} \frac{\sin\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} - \bar{x} \frac{\sin\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} \frac{\partial v_{os}}{\partial y} \right] = O(\varepsilon^2) \quad (68)$$

La particularité de ce cas est de faire apparaître au premier ordre des équations (65) et (66) uniquement la dérivée particulière de la vitesse, le premier terme du gradient de pression n'apparaissant que dans le système d'équations d'ordre  $\varepsilon$ . Le système d'équations à l'ordre  $\varepsilon^0$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{os}}{\partial x} - \frac{\partial u_{os}}{\partial y} &= 0 && \text{(irrotationnalité)} \\ \frac{\partial u_{os}}{\partial x} + \frac{\partial v_{os}}{\partial y} + \frac{\partial w_{os}}{\partial z} &= 0 && \text{(continuité)} \\ \frac{\partial u_{os}}{\partial t} + u_{os} \frac{\partial u_{os}}{\partial x} + v_{os} \frac{\partial u_{os}}{\partial y} &= 0 && \text{q}^{\text{té}} \text{ de } m^{\text{vt}} \\ \frac{\partial v_{os}}{\partial t} + u_{os} \frac{\partial v_{os}}{\partial x} + v_{os} \frac{\partial v_{os}}{\partial y} &= 0 && \text{q}^{\text{té}} \text{ de } m^{\text{vt}} \\ \frac{\partial p_{os}}{\partial z} &= 0 && \text{q}^{\text{té}} \text{ de } m^{\text{vt}} \end{aligned} \quad (69)$$

Les conditions de glissement sur l'aubage (voir figure 18) et sur les carters externe et interne s'écrivent :

$$\frac{v_{os}}{u_{os}} = \operatorname{tg} \beta ; w_{os} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = 1 \quad (70)$$

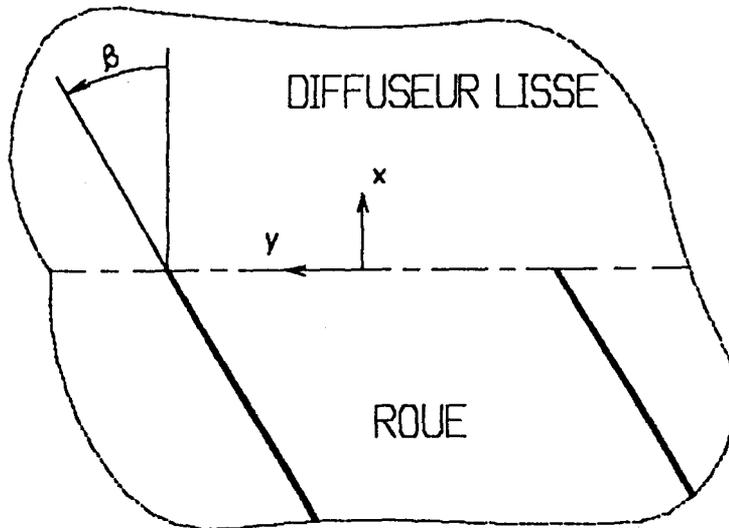


figure 18 : géométrie de l'aubage en sortie de roue - le trait mixte fin représente le diamètre extérieur du rotor, les traits forts inclinés d'un angle  $\beta$  représentent les aubages.

$u_{os}$  et  $v_{os}$  doivent assurer la condition sur le débit  $Q_c$  dans un canal :

$$\int_{\text{aube } n}^{\text{aube } n+1} \vec{u}_{os} \cdot \vec{n} \, ds = Q_c \quad (71)$$

L'écoulement uniforme défini par :

$$u_{os} = \mathcal{U}, \quad v_{os} = \mathcal{U} \operatorname{tg} \beta \quad \text{et} \quad w_{os} = 0 \quad (72)$$

où  $\mathcal{U}$  est une constante, vérifie toutes les équations (69), (70) et (71).  $\mathcal{U}$  est la vitesse débitante. Ce résultat est cohérent avec les modèles couramment employés. Dans le modèle de la grille d'aubes plane l'accélération de Coriolis est négligée et l'écoulement amont est uniforme, dans notre cas les effets dus à l'accélération de Coriolis apparaissent à l'ordre  $\epsilon$  des équations (66) et (67). Dans le modèle de détermination des efforts globaux sur une roue de turbomachine (Euler-Rateau) le gradient de vitesse azimutal en entrée et en sortie de roue est nul. Les effets de l'accélération de Coriolis sont là aussi négligés car, si ce n'était pas le cas, le gradient de pression azimutal ne serait pas nul et par conséquent celui de vitesse azimutal non plus.

Le gradient de pression est donc le résultat d'un écoulement (72) faiblement perturbé par la géométrie de la machine. L'onde tournante due au petit décrochage avec un grand nombre de cellules apparaît quand on diminue le débit. L'amplitude de son gradient est du même ordre de grandeur que celui de l'écoulement stationnaire de base (intervient dans les équations à l'ordre  $\epsilon$ ). L'ordre de grandeur de l'amplitude de la vitesse de perturbation peut être estimé par la diminution relative de débit entre le point de fonctionnement au meilleur rendement et le point de décrochage. Afin d'évaluer l'ordre de grandeur de cette diminution on utilise la courbe figure 3 page 8. On obtient 0,3 à 0,4 ( courbe 100 % de la vitesse de conception - zone de petit décrochage). Cette diminution relative est supérieure à la valeur  $\epsilon$  précédemment déterminée pour une "machine type" ( $\epsilon=0,2$ ). On va donc chercher l'amplitude de

la vitesse de perturbation  $\mu \gg \epsilon$ . Raisonnons sur la première équation de quantité de mouvement (65) pour déterminer la valeur de  $\mu$  par rapport à  $\epsilon$ . Avec  $\mu \gg \epsilon$ , (65) s'écrit :

$$(a - \Gamma \cos \varphi_0) \left\{ \frac{\partial(\mathcal{U} + \mu u_0^*)}{\partial t} + (\mathcal{U} + \mu u_0^*) \frac{\partial(\mathcal{U} + \mu u_0^*)}{\partial x} + \right. \\ \left. + (\mathcal{U} \operatorname{tg} \beta + \mu v_0^*) \frac{\partial(\mathcal{U} + \mu u_0^*)}{\partial y} + \mu w_0^* \frac{\partial(\mathcal{U} + \mu u_0^*)}{\partial z} \right\} = O(\epsilon),$$

et en développant le terme de gauche, il vient :

$$\mu (a - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{\partial u_0^*}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial u_0^*}{\partial x} + \mathcal{U} \operatorname{tg} \beta \frac{\partial u_0^*}{\partial y} \right] + \\ + \mu^2 (a - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial y} + w_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial z} \right] = O(\epsilon)$$

Pour que  $\mu$  soit supérieur à  $\epsilon$  et que le gradient de pression engendré par  $u_0^*$  joue un rôle dans l'équation d'ordre  $\epsilon^1$ , il faut  $\mu^2 = O(\epsilon)$ . Dans la suite de l'étude on fait donc l'hypothèse :

$$\mu^2 = \epsilon \quad (73)$$

La hiérarchie des ordres est alors la suivante :

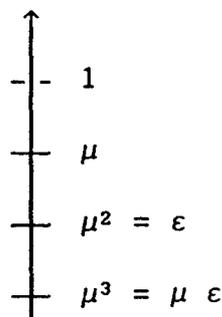


figure 19 : hiérarchie des ordres avec  $1 \gg \mu \gg \epsilon$  et  $\mu^2 = \epsilon$ .

Compte tenu de la valeur de  $\mu$ , on cherche maintenant pour la partie stationnaire de  $u$  et  $v$  une solution de la forme :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_{0s} + \epsilon u_{1s} + O(\epsilon^2) \\ v &= v_{0s} + \epsilon v_{1s} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

### III.4.2 Ecoulement Stationnaire de base à l'ordre $\epsilon^1$

Le système s'écrit à l'ordre  $\epsilon^1$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_{1s}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_{1s}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1s}}{\partial y} &= -(2 + \nu \operatorname{tg} \beta) \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

$$\frac{\partial u_{1s}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} + \frac{\partial w_{1s}}{\partial z} = -\nu \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \quad (76)$$

$$(a - \Gamma \cos \varphi_0) \left( \frac{\partial u_{1s}}{\partial t} + \nu \frac{\partial u_{1s}}{\partial x} + \nu \operatorname{tg} \beta \frac{\partial u_{1s}}{\partial y} \right) - (\nu \operatorname{tg} \beta + 1)^2 \sin \varphi_0 + \frac{\partial p_{0s}}{\partial x} = 0 \quad (77)$$

$$(a - \Gamma \cos \varphi_0) \left( \frac{\partial v_{1s}}{\partial t} + \nu \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} + \nu \operatorname{tg} \beta \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} \right) + (\nu \operatorname{tg} \beta + 2) \nu \sin \varphi_0 + \frac{\partial p_{0s}}{\partial y} = 0 \quad (78)$$

$$\frac{\partial p_{0s}}{\partial z} = 0 \quad (79)$$

Les conditions de glissement sur les carters (voir figure 18) s'écrivent :

$$\frac{v_{1s}}{u_{1s}} = \operatorname{tg} \beta ; w_{1s}(z=0) = w_{1s}(z=1) = 0, \quad (80)$$

(75) est la condition d'irrotationnalité à l'aspiration. (76) est l'équation de continuité. (77), (78) et (79) sont les trois équations de projection de la conservation de la quantité de mouvement. En associant (76), (80) et la propriété donnée par (75) de  $u_{1s}$  et  $v_{1s}$  d'être indépendants de  $z$ , on obtient :

$$w_{1s} = 0, \quad (81)$$

et (76) devient :

$$\frac{\partial u_{1s}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} = - u \frac{\sin \varphi_0}{a - r \cos \varphi_0} \quad (82)$$

En éliminant  $p_{0s}$  entre (77) et (78) il vient :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + u \operatorname{tg} \beta \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1s}}{\partial y} \right] = 0 \quad (83)$$

(83) est vérifiée par (75).  $u_{1s}$ ,  $v_{1s}$  dépendent uniquement de  $x$  et de  $y$ , et doivent être solutions du système :

$$\frac{\partial v_{1s}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1s}}{\partial y} = - (2 + u \operatorname{tg} \beta) \frac{\sin \varphi_0}{a - r \cos \varphi_0} \quad (84)$$

$$\frac{\partial u_{1s}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} = - u \frac{\sin \varphi_0}{a - r \cos \varphi_0} \quad (85)$$

$$\frac{v_{1s}}{u_{1s}} = \operatorname{tg} \beta \quad (\text{sur l'aubage}) \quad (86)$$

La condition de glissement sur l'aubage (86) n'est à satisfaire que dans la roue. En sortie de roue et dans le diffuseur, il faut que la solution assure la continuité de pression d'aube à aube. L'objet des sous-chapitres III.4.2.1, III.4.2.2, III.4.2.3 ci-après est de chercher une solution dans la roue à "l'infini amont" puis une solution dans le diffuseur à "l'infini aval" qui serviront d'écoulements limites pour la solution à la périphérie de la roue, là où est la limite de la condition glissement (86).

#### III.4.2.1 Solution dans la roue

Prenons le cas de l'écoulement limite dans une roue dont le rayon tend vers l'infini : le rotationnel constant dans le repère lié à la roue impose un écoulement "parallèle aux aubes" faiblement cisailé dans la direction azimuthale . La solution de (84), (85), (86) est du type :

$$\left. \begin{aligned}
 u_{1s} &= A x + B y + C^{te}, \quad v_{1s} = u_{1s} \operatorname{tg} \beta, \\
 \text{où } A &= - \frac{(2 \operatorname{tg} \beta + \nu \{ \operatorname{tg}^2 \beta + 1 \}) \sin \varphi_0}{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(a - \Gamma \cos \varphi_0)} \\
 \text{et } B &= \frac{2 \sin \varphi_0}{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(a - \Gamma \cos \varphi_0)}, \\
 \frac{\partial p_{os}}{\partial y} &= -\nu \frac{\sin \varphi_0}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \left[ (1 - \operatorname{tg} \beta)^2 + 1 + 3 \operatorname{tg}^2 \beta \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

$\frac{\partial p_{os}}{\partial y}$  est négatif (voir figure 20), ce qui correspond bien à un couple résistant sur la roue. L'écoulement cisailé est dû à la composante normale du rotationnel générée par la rotation du rotor.

#### III.4.2.2 Solution dans le diffuseur lisse

Considérons un diffuseur lisse de rayon infini. "Loin" dans le diffuseur l'écoulement est axisymétrique et le gradient de pression tangentiel  $\frac{\partial p_{os}}{\partial y}$  est nul. Les grandeurs  $u_{1s}$ ,  $v_{1s}$  et  $p_{os}$  ne dépendent radialement que de la variable  $x$ . La solution :

$$\left. \begin{aligned}
 u_{1s} &= -\nu \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} x + C_2, \\
 v_{1s} &= -(\nu \operatorname{tg} \beta + 2) \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} x + C_1,
 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

vérifie le système (84)-(86). (92) correspond à une décélération du fluide (voir figure 20).

#### III.4.2.3 Recherche d'une solution à la périphérie de la roue

La zone de passage de la roue au diffuseur lisse présente une discontinuité de conditions aux limites.

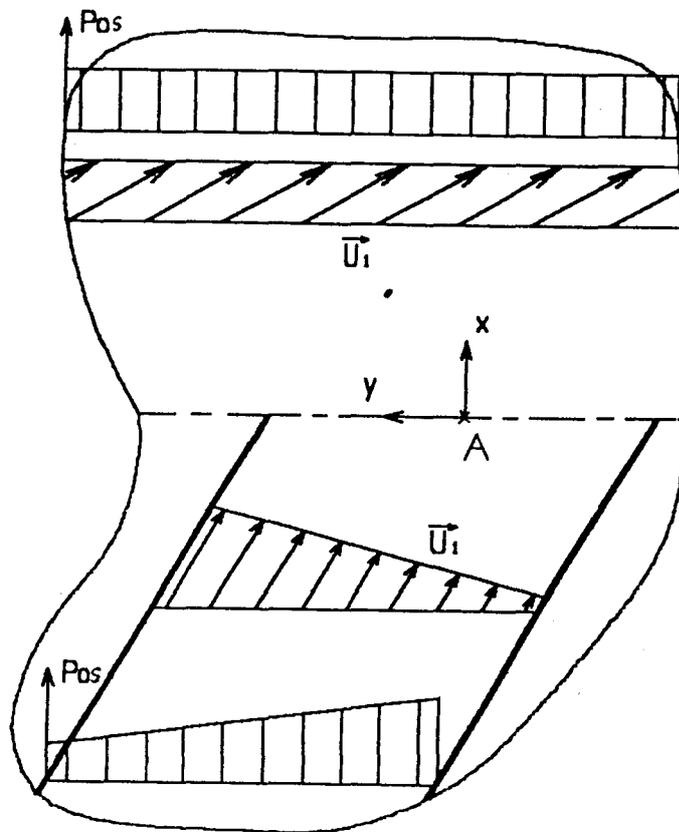


figure 20 : représentation des solutions "loin dans la roue" et "loin dans le diffuseur lisse" - dans la roue on obtient un écoulement cisailé parallèle aux aubes et un  $\partial p_{os}/\partial y < 0$  - dans le diffuseur on obtient un écoulement décéléré indépendant de  $y$ .

Plaçons la zone d'étude à la périphérie du rotor (voir figure 20). La région  $x > 0$  définit la zone du diffuseur lisse. La région  $x \leq 0$  définit la zone de la roue. L'équation des aubes est donnée par :

$$y - \operatorname{tg}\beta x = -0,5 + n, \quad (93)$$

$$\forall x \leq 0,$$

où  $n \in [1, 2 \dots N]$ ,  $N$  est le nombre d'aubes. Pour  $x \leq 0$  la condition de glissement (86) doit être vérifiée sur les aubes. Toutefois il peut exister une discontinuité de pression entre l'extrados et l'intrados de chacune des aubes. Pour  $x=0$  il faut assurer la continuité de la pression et de la direction de la vitesse. Les conditions aux limites sont : quand  $x \longrightarrow -\infty$  la solution tend vers

(91) ; quand  $x \longrightarrow +\infty$  la solution tend vers (92).  
L'écoulement doit être périodique d'aube à aube.

Cherchons une solution à partir des écoulements "loin dans la roue" (91), et "loin dans le diffuseur" (92). A l'intérieur de la roue le système s'écrit :

$$u_{1s} = u_1(91) + u_{1r} \text{ et } v_{1s} = v_1(91) + v_{1r}. \quad (94)$$

A l'intérieur du diffuseur le système s'écrit :

$$u_{1s} = u_1(92) + u_{1d} \text{ et } v_{1s} = v_1(92) + v_{1d}. \quad (95)$$

$u_{1r}$  et  $v_{1r}$ , de même que  $u_{1d}$  et  $v_{1d}$ , doivent être solutions du système d'équations suivant :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad (96)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (97)$$

Les écoulements définis par  $u_{1r}$ ,  $v_{1r}$  et  $u_{1d}$ ,  $v_{1d}$  sont des écoulements plans, irrotationnels, permanents d'un fluide incompressible. Les conditions à l'infini amont et aval sont :

$$u_{1r}(x \longrightarrow -\infty) \longrightarrow 0, \text{ et } v_{1r}(x \longrightarrow -\infty) \longrightarrow 0, \quad (98)$$

$$u_{1d}(x \longrightarrow +\infty) \longrightarrow 0 \text{ et } v_{1d}(x \longrightarrow +\infty) \longrightarrow 0. \quad (99)$$

La condition de raccordement en  $x=0$  s'écrit :

$$\left[ \begin{array}{l} u_1(91) + u_{1r} = u_1(92) + u_{1d} \\ v_1(91) + v_{1r} = v_1(92) + v_{1d} \end{array} \right] (x=0). \quad (100)$$

La condition de périodicité d'aube à aube s'écrit :

$$\left[ u_1(91) + u_{1r} \right] (y=-1,5+n) = \left[ u_1(91) + u_{1r} \right] (y=-2,5+n) \quad (101)$$

$$\left[ v_1(92) + v_{1d} \right] (y=-1,5+n) = \left[ v_1(92) + v_{1d} \right] (y=-2,5+n) \quad (102)$$

La condition de continuité de pression au bord de fuite s'écrit :

$$P_{os}(x=0, y=-1,5+n) = P_{os}(x=0, y=-2,5+n) \quad (103)$$

La condition de glissement sur l'aubage s'écrit :

$$\left[ \frac{v_1(91) + v_{1r}}{u_1(91) + u_{1r}} \right]_{(y-tg\beta \ x=-1,5+n)} = tg\beta \quad (104)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1(91)+u_{1r} \\ v_1(91)+v_{1r} \end{array} \right\} \text{ sont continues dans un canal} \quad (105)$$

Il apparaît une zone de transition à la périphérie du rotor entre la solution (91) et (92) (voir figure 21). Elle est due à la discontinuité que représente l'extrémité des aubes. Cette zone se définit radialement au voisinage de  $x=0$  (zone 2) et au voisinage des extrémités des aubes en  $x=0$  et  $y=-1,5+n$  (zones 1). Le problème ainsi posé, il devient nécessaire d'évaluer l'échelle de ces zones. Pour ce faire on utilise la méthode des développements asymptotiques raccordés. Il faut ici définir l'épaisseur dite de "couche limite". Les variables intérieures pour les deux zones sont :

$$\left. \begin{array}{l} \text{zones 1 : } \varepsilon^\tau \xi = x \text{ et } \varepsilon^\tau \vartheta = y - 1,5 + n \\ \text{zone 2 : } \varepsilon^\tau \xi = x \end{array} \right\} \quad (106)$$

Les conditions aux limites pour les zones 1 et 2 sont :

zones 1 :

$$\left. \begin{array}{l} \text{quand } \xi \longrightarrow -\infty, \text{ la solution } \longrightarrow \text{ solution (91)} \\ \text{quand } \xi \longrightarrow +\infty, \text{ la solution } \longrightarrow \text{ solution (92)} \\ \text{quand } \vartheta \longrightarrow \pm\infty, \text{ la solution } \longrightarrow \text{ solution zone 2} \\ \text{condition de glissement sur l'aubage} \end{array} \right\} \quad (107)$$

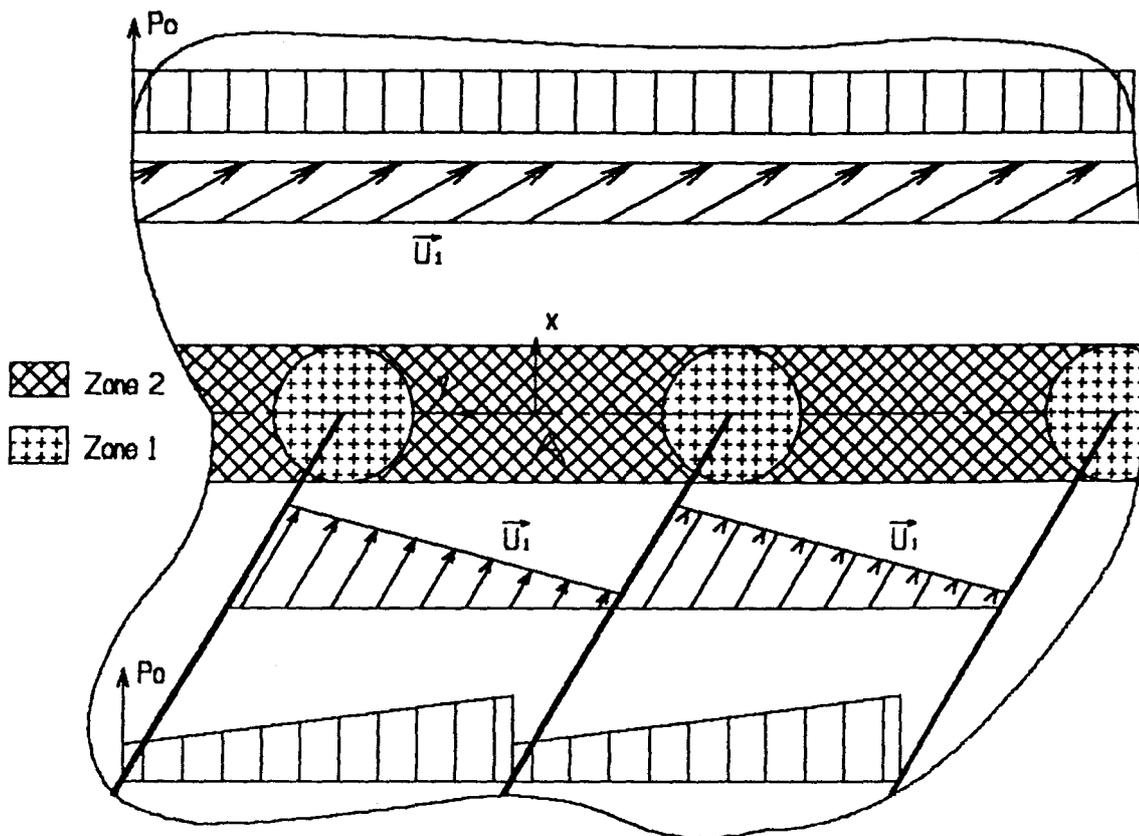


figure 20 : définition des zones de transition de l'écoulement à la périphérie du rotor - les zones 1, au voisinage des extrémités des aubes, définies afin d'étudier l'écoulement à l'extrémité des aubes - la zone 2 définie afin d'étudier l'écoulement transitoire entre l'écoulement "loin dans la roue" et l'écoulement "loin dans le diffuseur".

zone 2 :

$$\left. \begin{array}{l} \text{quand } \xi \longrightarrow -\infty, \text{ la solution } \longrightarrow \text{solution (91)} \\ \text{quand } \xi \longrightarrow +\infty, \text{ la solution } \longrightarrow \text{solution (92)} \\ \text{pas de condition de glissement sur l'aubage} \end{array} \right\} (108)$$

Seules les conditions aux limites pour la zone 2 sont connues. Cherchons donc, dans un premier temps, une solution dans cette zone. Les conditions aux limites pour la zone 1 seront alors définies.

La zone 2 à la sortie de roue est définie quand  $x$  est petit. On pose  $\varepsilon^\tau \xi = x$ . La détermination de  $\tau$  nous permettra de définir l'épaisseur de couche limite. On cherche une solution de la forme :

$$\left. \begin{aligned} u(x,y) &= u(\xi,y) & ; & & v(x,y) &= v(\xi,y) & ; & & p(x,y) &= p(\xi,y) \\ & & & & \text{quand } \xi &= O(1) & & & & \end{aligned} \right\}, \quad (109)$$

$$\text{on a alors : } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon^\tau} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (110)$$

On réintroduit (110) dans le système initiale (65) (66), il vient en première approximation , d'ordre  $\frac{1}{\varepsilon^\tau}$  :

$$(a - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{\partial u_{os}}{\partial t} + u_{os} \frac{1}{\varepsilon^\tau} \frac{\partial u_{os}}{\partial \xi} + v_{os} \frac{\partial u_{os}}{\partial y} + w_{os} \frac{\partial u_{os}}{\partial z} \right] = 0 \quad (111)$$

$$(a - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{\partial v_{os}}{\partial t} + u_{os} \frac{1}{\varepsilon^\tau} \frac{\partial v_{os}}{\partial \xi} + v_{os} \frac{\partial v_{os}}{\partial y} + w_{os} \frac{\partial v_{os}}{\partial z} \right] = 0 \quad (112)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^\tau} \frac{\partial u_{os}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{os}}{\partial y} + \frac{\partial w_{os}}{\partial z} = 0 \quad (113)$$

$$v_{os} = u_{os} \operatorname{tg} \beta \quad (114)$$

$$\int_{\text{aube } n}^{\text{aube } n+1} \vec{u}_{os} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad (115)$$

On cherche  $\tau > 0$ , dans ce cas le système s'écrit en première approximation :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_{os}}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial v_{os}}{\partial \xi} &= 0 \\ v_{os} &= u_{os} \operatorname{tg} \beta \\ \int_{\text{aube } n}^{\text{aube } n+1} \vec{u}_{os} \cdot \vec{n} \, ds &= Q_c \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

La solution précédemment définie (72) est solution du système (116). L'équation de continuité et la condition d'irrotationnalité à l'ordre suivant  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon\tau}$  s'écrivent :

$$\frac{1}{\varepsilon\tau} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = -(2 + \nu \operatorname{tg}\beta) \frac{\sin\varphi_0}{a-\Gamma\cos\varphi_0} \quad (117)$$

$$\frac{1}{\varepsilon\tau} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = -\nu \frac{\sin\varphi_0}{a-\Gamma\cos\varphi_0} \quad (118)$$

Pour  $\tau > 0$  (117) et (118) entraînent :

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0 \text{ et } \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0 \quad (119)$$

Pour  $\tau$  non nul, (119) implique  $u_1 = u_1(y)$  et  $v_1 = v_1(y)$ . Ce n'est pas compatible avec l'écoulement limite amont (91) et l'écoulement limite aval (92). Ils nécessiteraient  $u_1 = u_1(\xi, y)$  et  $v_1 = v_1(\xi, y)$ . Une solution compatible avec ces conditions est  $\tau = 0$ , qui correspond à  $\xi = x$ . L'épaisseur de couche limite est alors égale à un. Il faut donc chercher la solution à l'échelle de la distance interaubes.

Remarquons que l'échelle de la couche limite définie par  $\tau > 0$  est de l'ordre de grandeur des couches limites visqueuses et que l'approximation du fluide parfait n'est plus valable dans ce cas. Il faudrait conserver dans les équations les termes liés à la viscosité qui apparaîtraient dans les équations du premier ordre.

Dans la suite de l'étude on supposera connu l'écoulement stationnaire à l'ordre  $\varepsilon^1$  solution de (84) (85) (86).

### III.4.3 Écoulement perturbé

Conséquence du paragraphe précédent, on cherche pour  $u$  et  $v$  une solution de la forme :

$$\left. \begin{aligned} u &= \mathcal{U} + \varepsilon u_{1s} + \mu \{u_{0*} + \mu u_{01*} + \varepsilon u_{1*} + O(\varepsilon \mu^2)\} \\ v &= \mathcal{U} \operatorname{tg}\beta + \varepsilon v_{1s} + \mu \{v_{0*} + \mu v_{01*} + \varepsilon v_{1*} + O(\varepsilon \mu^2)\} \end{aligned} \right\} (121)$$

Le système d'équations, pour la partie instationnaire, à l'ordre  $\mu^1$  s'écrit :

$$\frac{\partial u_{0*}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial u_{0*}}{\partial x} + \mathcal{U} \operatorname{tg}\beta \frac{\partial u_{0*}}{\partial y} = 0 \quad (122)$$

$$\frac{\partial v_{0*}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial v_{0*}}{\partial x} + \mathcal{U} \operatorname{tg}\beta \frac{\partial v_{0*}}{\partial y} = 0 \quad (123)$$

$$\frac{\partial u_{0*}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0*}}{\partial y} + \frac{\partial w_{0*}}{\partial z} = 0 \quad (124)$$

Le système d'équations, pour la partie instationnaire, à l'ordre  $\mu^2$  s'écrit (voir l'expression complète de la dérivée particulaire en annexe 3) :

$$\begin{aligned} u_{0*} \frac{\partial u_{0*}}{\partial x} + v_{0*} \frac{\partial u_{0*}}{\partial y} + w_{0*} \frac{\partial u_{0*}}{\partial z} + \frac{\partial p_{0*}}{\partial x} &= \\ &= \frac{\partial u_{01*}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial u_{01*}}{\partial x} + \mathcal{U} \operatorname{tg}\beta \frac{\partial u_{01*}}{\partial y} \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} u_{0*} \frac{\partial v_{0*}}{\partial x} + v_{0*} \frac{\partial v_{0*}}{\partial y} + w_{0*} \frac{\partial v_{0*}}{\partial z} + \frac{\partial p_{0*}}{\partial y} &= \\ &= \frac{\partial v_{01*}}{\partial t} + \mathcal{U} \frac{\partial v_{01*}}{\partial x} + \mathcal{U} \operatorname{tg}\beta \frac{\partial v_{01*}}{\partial y} \end{aligned} \quad (126)$$

$$\frac{\partial p_{0*}}{\partial z} = 0 \quad (127)$$

où :

$$\begin{aligned} p &= p_{0s} + \varepsilon p_{1s} + O(\varepsilon^2) + \\ &+ (a - \Gamma \cos \varphi_0) p_{0*} + \mu \{p_{01*} + \varepsilon p_{1*} + O(\varepsilon^2)\} \end{aligned} \quad (128)$$

Pour les raisons exposées précédemment sur les ordres de grandeurs de la perturbation c'est  $u_{0*}$  qui génère la

perturbation du gradient de pression  $p_0^*$ . On cherche donc a priori une solution particulière pour laquelle  $u_{01}^*$ ,  $v_{01}^*$  et  $w_{01}^*$  sont nuls.  $p_0^*$  ne dépend alors que des premières approximations de l'écoulement stationnaire de base ( $u_{0s} = u$ ,  $v_{0s} = u \operatorname{tg}\beta$ ) et de l'écoulement instationnaire ( $u_0^*$ ,  $v_0^*$  et  $w_0^*$ ).

Le système (122)-(123) nous permet de chercher  $u_0^*$  et  $v_0^*$  indépendants de  $z$ . Alors (124) montre que  $w_0^* = z f(x, y, t) + g(x, y, t)$ . Les conditions de glissement sur les parois  $w_0^*(z=0) = w_0^*(z=1) = 0$  doivent être vérifiées quelles que soient  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , d'où :

$$w_0^* = 0. \quad (129)$$

(124) montre l'existence d'une fonction de courant  $\psi^*$  définie par :

$$u_0^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_0^* = - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \quad (130)$$

(122) et (123) s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + u \operatorname{tg}\beta \frac{\partial}{\partial y} \right] \psi^* = 0 \quad (131)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + u \operatorname{tg}\beta \frac{\partial}{\partial y} \right] \psi^* = 0 \quad (132)$$

#### III.4.4 Solution d'ondes tournantes du type $A e^{i(\ell y - \sigma t)}$

On cherche une solution de (131)-(132) d'ondes tournantes du type :

$$\psi^* = A e^{i\theta} \quad \text{où} \quad \theta = \ell y - \sigma t \quad \text{et} \quad A = A(x, y) \quad (133)$$

Pour vérifier (131) et (132) on cherche  $\psi^*$  solution de l'équation :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + u \operatorname{tg}\beta \frac{\partial}{\partial y} \right] \psi^* = 0 \quad (134)$$

L'amplitude  $A$  de la solution cherchée doit assurer les conditions aux limites qui sont : (i) glissement sur les aubes et (ii) périodicité par tour de roue (continuité de la solution). La première condition est à l'échelle de la distance interaubes. La seconde est à l'échelle du tour de roue. Les variables rapides  $x$  et  $y$  sont à l'échelle de la distance interaubes. Il est nécessaire d'introduire une variable lente pour travailler à l'échelle du tour de roue. On cherche l'amplitude  $A$  de la forme :

$$\left. \begin{aligned} A &= A(x, y, Y) \\ \text{où } y &= y, \text{ et } Y = \epsilon y. \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

On obtient la relation de dérivation :

$$\frac{\partial A}{\partial Y} = \frac{\partial A}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial A}{\partial Y} \quad (136)$$

En remplaçant  $\psi^*$  par (133) dans (134), il vient en ne retenant que les termes d' $O(1)$  :

$$i(\ell u \operatorname{tg}\beta - \sigma) A + u \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \operatorname{tg}\beta \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0 \quad (137)$$

Le terme  $\epsilon \frac{\partial A}{\partial Y}$  contribue au système d'équations à l'ordre  $\mu^3$ . Rappelons que (137) intervient à l'ordre  $\mu$  dans la hiérarchie des systèmes d'équations. La parenthèse du second terme de (137) nous suggère de chercher à l'échelle des variables rapides  $A$  fonction de  $x$  et de  $y$  à travers d'une seule variable  $\gamma$  définie par :

$$\gamma = a x + y \quad (138)$$

d'où (137) s'écrit avec (138) :

$$i(\ell u \operatorname{tg}\beta - \sigma)A + u(a + \operatorname{tg}\beta)A' = 0 \quad (139)$$

$$\text{où } A' = \frac{\partial A}{\partial \gamma}$$

La condition de glissement sur l'aubage  $v_0^* = u_0^* \operatorname{tg}\beta$  s'écrit avec (133) et (138) :

$$i \ell \operatorname{tg}\beta A + A'(a + \operatorname{tg}\beta) = 0 \text{ sur les aubes} \quad (140)$$

L'équation (139) traduit la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de la masse. (140) est la condition de glissement sur les aubes à l'échelle des variables rapides. On cherche ici pour (139)-(140) une solution d'onde tournante avec  $\sigma$  non nul. Une solution de ce type s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \ell u \operatorname{tg}\beta - \sigma &= 0 \\ a + \operatorname{tg}\beta &= 0 \\ A(\text{aubes}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

On en déduit la vitesse de propagation :

$$\frac{\sigma}{\ell} = u \operatorname{tg}\beta, \quad (142)$$

et la valeur de  $\gamma$  :

$$\gamma = - \operatorname{tg}\beta x + y. \quad (143)$$

Les lignes définies par  $\gamma = C_{te}$  sont des droites parallèles aux aubes. La vitesse de propagation donnée par (142) est cohérente avec les résultats expérimentaux (voir zone encadrée figure 9). Dans le cas où le rotor a les aubes "couchées en arrière", ce qui correspond à  $\operatorname{tg}\beta < 0$ . L'onde tourne moins vite que le rotor. La longueur d'onde est de l'ordre de la distance interaubes. Cela correspond à un nombre de cellules de l'ordre de grandeur du nombre d'aubes, donc un grand nombre de cellules. Cette description est celle du *petit décrochage tournant, ou décollement tournant avec un grand nombre de cellules.*

La détermination de l'amplitude A se fait par l'exploitation des conditions aux limites. Dans un premier temps par la condition de glissement sur les aubes à l'échelle des variables rapides x et y, puis dans un second temps par la condition de périodicité par tour de roue à l'échelle de la variable lente Y.

L'élimination de  $p_0^*$  entre (125) et (126) (où  $u_{01}^* = v_{01}^* = 0$ ) conduit à l'équation suivante :

$$\ell \left[ i (a^2+1) (AA'''' - A'A'') + 2\ell (A'^2 - AA'') \right] = 0 \quad (144)$$

où les primes, secondes etc... désignent les dérivations par rapport à la variable  $\gamma$ . La condition de glissement sur les aubes s'écrit :

$$A(\text{aubes}) = 0 \quad (145)$$

Il est à remarquer que dans le système (144) (145) La courbure n'intervient pas. En posant  $x = i(a^2+1)A'' - 2\ell A'$ , (144) devient :

$$A x' - A' x = 0. \quad (146)$$

La solution qui satisfait la condition de glissement sur l'aubage est  $x = 0$ , qui compte tenu de l'équation des aubes (93) conduit à :

$$A = c \left[ e^{ib\gamma} - e^{-0,5ib} \right], \quad (147)$$

où  $b = -\frac{2\ell}{a^2+1}$ ,  $\ell = \pi m (a^2+1)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ , et le terme  $-c e^{-0,5ib}$  assure la condition de glissement (145) que l'on a écrit  $A(-0,5 + n) = 0$ .

La solution en variables rapides s'écrit :

$$\psi^* = c \left( e^{ib\gamma} - e^{-0,5ib} \right) e^{i\ell(\gamma - \nu \operatorname{tg}\beta t)} \quad (148)$$

$$p_0^* = c^2 b e^{ib(\gamma - 0,5)} e^{2i\ell(\gamma - \nu \operatorname{tg}\beta t)} \quad (149)$$

Rappelons que  $\psi^*$  est la fonction de courant qui détermine les termes  $u_0^*$  et  $v_0^*$ . Le rotationnel de la solution (148) n'est pas nul. Ce rotationnel intervient dans la hiérarchie des systèmes d'équations à l'ordre  $\mu$ . L'amplitude du rotationnel de la perturbation est donc d'amplitude  $\mu$  dans l'écoulement de base (72). Par conséquent, la solution (148) détermine un écoulement dans la roue faiblement rotationnel. Le décrochage est dû à une diminution de débit, qui provoque une augmentation d'incidence des aubes par rapport à l'écoulement. Cette augmentation d'incidence provoque des instabilités dans les couches limites visqueuses. L'amplitude de ces instabilités croît jusqu'à atteindre l'échelle de la distance interaubes. De par leur origine dans les couches visqueuses, ces instabilités possèdent une vorticité. Une solution cohérente de décrochage doit posséder une vorticité. Ici la vorticité est du même ordre que la perturbation.

Le terme de la parenthèse de (148) permet d'assurer la condition de glissement sur les aubes (145)   l'échelle des variables rapides. Cette condition est liée à la distance interaubes. Cette distance reste constante autour de la roue. La condition de périodicité par tour doit être vérifiée par une partie lentement variable de la fonction  $A$  définie par (147). La partie lentement variable ne peut donc affecter que le coefficient d'amplitude  $c$ . On cherche donc  $c$  fonction de la variable lente  $Y$ ,  $c = c(Y)$ . Les termes dus aux variations de  $c$  proviennent des opérations de dérivation par rapport à  $y$ , et interviennent à l'ordre  $\mu^3$  dans les systèmes d'équations. Le système d'équations à l'ordre  $\mu^3$  s'écrit avec (72) (77) et (148) :

$$\begin{aligned}
 (a - \Gamma \cos \varphi_0) \left\{ \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + \nu \frac{\partial u_1^*}{\partial x} + \nu \operatorname{tg} \beta \frac{\partial u_1^*}{\partial y} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\partial u_{1s}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial u_{1s}}{\partial y} \right. \\
 + u_{1s} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} + \left( v_{1s} - x \nu \operatorname{tg} \beta \frac{a \sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right) \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} + \\
 \left. + i c' \nu \operatorname{tg} \beta \left( b e^{i b y} + \ell \left( e^{i b y} - e^{-\frac{1}{2} i b} \right) \right) e^{i \theta} \right\} +
 \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \sin \varphi_0 (\nu \operatorname{tg} \beta + 1) + \frac{\partial p_{01}^*}{\partial x} = 0 \quad (150)$$

Le terme  $i c' \nu \operatorname{tg} \beta (b e^{i b y} + \ell (e^{i b y} - e^{-\frac{1}{2} i b})) e^{i \theta}$  provient de la partie lentement variable de la dérivation par rapport à  $y$  de la fonction de courant  $\psi^*$  de la dérivée particulière dans la première équation de quantité de mouvement du système d'équations à l'ordre  $\mu$ .

$$\begin{aligned} (a - \cos \varphi_0) \left\{ \frac{\partial v_1^*}{\partial t} + \nu \frac{\partial v_1^*}{\partial x} + \nu \operatorname{tg} \beta \frac{\partial v_1^*}{\partial y} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\partial v_{1s}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial v_{1s}}{\partial y} - \right. \\ \left. - u_{1s} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \left( v_{1s} - x \nu \operatorname{tg} \beta \frac{a \sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right) \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + i c' \nu \operatorname{tg} \beta b \operatorname{tg} \beta e^{i b y} e^{i \theta} \right\} + \\ + \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial y} (\nu \operatorname{tg} \beta + 2) - \nu \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \sin \varphi_0 + \frac{\partial p_{01}^*}{\partial y} = 0 \quad (151) \end{aligned}$$

$$\text{où } c' = \frac{dc}{dY} = O(1)$$

$$\frac{\partial p_{01}^*}{\partial z} = 0 \quad (152)$$

Le terme  $i c' \nu \operatorname{tg} \beta b \operatorname{tg} \beta e^{i b y} e^{i \theta}$  provient de la partie lentement variable de la dérivation par rapport à  $y$  de la fonction de courant  $\psi^*$  de la dérivée particulière dans la deuxième équation de quantité de mouvement du système d'équations à l'ordre  $\mu$ .

La conservation de la masse pour la partie issue de la fonction de courant :

$$\frac{\partial u_0^*}{\partial x} + \frac{\partial x_0^*}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} = 0,$$

est vérifiée à tous les ordres et n'intervient donc pas dans les systèmes d'équations des ordres supérieurs. L'équation de continuité à l'ordre  $\mu^3$  du système d'équations s'écrit :

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x} + \frac{\partial v_1^*}{\partial x} + x \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} = 0 \quad (153)$$

Pour assurer la continuité de la solution entre le 1<sup>er</sup> et le N<sup>ème</sup> canal (après avoir fait le tour de la roue), on cherche pour  $c$  une solution périodique par tour et, compte tenu de la symétrie de révolution du rotor, une solution indépendante de l'origine des  $Y$ .

Dans chacun des termes des équations (150) (151) (153) où apparaît  $\psi^*$  on peut mettre  $c$  en facteur. On cherche des solutions sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= u_{11}^* + c(Y) u_{12}^*(x, y, t) \\ v_1^* &= v_{11}^* + c(Y) v_{12}^*(x, y, t) \\ p_{01}^* &= p_{011}^* + c(Y) p_{012}^*(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

On pose :

$$\begin{aligned} c F(x, y, t) &= (a - \Gamma \cos \varphi_0) \left\{ c \frac{\partial u_{12}^*}{\partial t} + c u \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x} + c u \operatorname{tg} \beta \frac{\partial u_{12}^*}{\partial y} + \right. \\ &+ \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \frac{\partial u_{1s}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial u_{1s}}{\partial y} + u_{1s} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} + \\ &+ \left. \left( v_{1s} - x u \operatorname{tg} \beta \frac{a \sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right) \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} \right\} \\ &+ 2 \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \sin \varphi_0 (u \operatorname{tg} \beta + 1) + c \frac{\partial p_{012}^*}{\partial x} \quad (155) \end{aligned}$$

et :

$$c' G(x, y, t) = c' i u \operatorname{tg} \beta \left( b e^{iby_+} + \ell (e^{iby_-} - e^{-\frac{1}{2}ib}) \right) e^{i\theta} \quad (156)$$

l'équation (151) s'écrit :

$$c F(x, y, t) + c' G(x, y, t) = -(a - \Gamma \cos \varphi_0) \left\{ \frac{\partial u_{11}^*}{\partial t} + u \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x} + \right.$$

$$+ u \operatorname{tg} \beta \frac{\partial u_{11}^*}{\partial y} \left. \right\} - \frac{\partial p_{011}^*}{\partial x} \quad (157)$$

Les équations (152) et (153) sont mises sous une même forme. On cherche une solution particulière sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} c F(x, y, t) + c' G(x, y, t) &= 0 \\ \text{et} \\ (a - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{\partial u_{11}^*}{\partial t} + u \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x} + u \operatorname{tg} \beta \frac{\partial u_{11}^*}{\partial y} \right] - \frac{\partial p_{011}^*}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} (158)$$

la première équation (158) permet d'écrire :

$$F(x, y, t) + \frac{c'}{c} G(x, y, t) = 0 \quad (159)$$

La solution que l'on cherche doit être indépendante de  $Y$ , d'où  $c'/c = C_{te}$ , et la solution doit être périodique par tour, ce qui entraîne :

$$c = B e^{i \pi L Y}, \quad (160)$$

où  $B$  est une constante

à partir de (148), la fonction de courant  $\psi^*$  s'écrit :

$$\psi^* = B ( e^{i b y} - e^{-0,5 i b} ) e^{i \ell [ y ( 1 + \varepsilon \pi \frac{L}{\ell} ) - u \operatorname{tg} \beta t ]} \quad (161)$$

On voit que localement ( $y$  est d'ordre 1) l'influence de la condition de périodicité par tour est négligeable. C'est la partie  $\varepsilon \pi L / \ell$  de la parenthèse  $(1 + \varepsilon \pi L / \ell)$  de la phase, cette partie est d'ordre  $\varepsilon$  et est donc négligeable devant 1. Cette condition de périodicité par tour s'écrit :

$$\psi^*(y = 0) = \psi^*(y = N) \quad (162)$$

où  $N$  est le nombre d'aubes

(162) doit être solution aussi bien dans la roue que dans le diffuseur lisse. Il ne doit donc pas y avoir de

discontinuité de la vitesse ni de la pression de perturbation dans le diffuseur. Cela implique que la longueur d'onde locale doit être un sous multiple entier de la longueur périphérique du rotor.  $L$  est déterminé de façon à "ajuster" la longueur d'onde locale au sous multiple le plus proche de la longueur périphérique du rotor. Il suffit donc dans (161) de poser  $y = N$  et la phase doit être un multiple entier de  $2\pi$  indépendamment de  $t$ , d'où :

$$\begin{aligned} \ell N + \varepsilon N \pi L &= 2 \pi n \text{ avec } n \in \mathcal{Z} \\ \text{avec (147) : } \ell &= \pi m (a^2+1) \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de  $L$  :

$$L = \frac{2 n - m (a^2+1) N}{\varepsilon N}, \quad (163)$$

où  $\varepsilon N = O(1)$ ,  $n \in \mathcal{Z}$  et est tel que  $2 n - m(a^2+1)N = O(1)$ . La condition de périodicité est localement négligeable. Elle modifie faiblement la longueur d'onde locale  $\frac{2\pi}{\ell}$  pour qu'il y ait raccordement par tour.  $B$  est une constante complexe qui dépend des conditions initiales.

#### III.4.5 Famille de solutions d'ondes fixes par rapport au rotor

A partir des équations (139) et (140) rappelées ci-dessous :

$$i(\ell \psi \operatorname{tg} \beta - \sigma)A + \psi(a + \operatorname{tg} \beta)A' = 0 \quad (139)$$

$$i \ell \operatorname{tg} \beta A + A'(a + \operatorname{tg} \beta) = 0 \text{ sur aubes} \quad (140)$$

on obtient une solution d'ondes stationnaires par rapport au rotor quand  $\sigma$  est nul et  $\psi$  non nul.  $\psi^*$  se substitue à  $A$ , et n'est plus fonction que de  $x$  et de  $y$  à travers l'unique variable  $\gamma$ . l'équation restante s'écrit :

$$(a + \operatorname{tg} \beta) \frac{\partial A}{\partial \gamma} = 0 \quad (164)$$

Les solutions  $\partial A / \partial \gamma = 0$  en variables rapides doivent être écartées. Elles correspondent à une perturbation de pression d'ordre  $\mu^3$ . La famille de fonctions définies par  $a + \text{tg}\beta = 0$  pourraient être des solutions. Il faut ajouter à ces fonctions une condition de périodicité par tour. L'écoulement serait alors parallèle à l'aubage. Les solutions sont de la forme :

$$\psi^* = \psi^*(y - x \text{tg}\beta) \text{ et } \psi^*(y=0) = \psi^*(y=N) \quad (165)$$

Cette famille de solutions potentielles de (164) est indépendante du temps. Une de ces solutions ne pourrait être observée que si elle existait initialement. Cela ne peut pas être le cas pour la raison suivante : la diminution de débit de la machine entraîne une augmentation d'incidence de chaque aube, cette augmentation d'incidence donne naissance à un écoulement instationnaire (voir [30] : le modèle de décrochage d'aile présenté par K. V. Truong dans son article [35] montre la nécessité de rechercher une solution fonction du temps). Les fonctions définies par (165) ne peuvent donc pas être des solutions de (164).

#### III.4.6 Famille de solutions d'ondes tournantes avec le rotor

Les machines radiales peuvent avoir des aubes dirigées suivant le rayon, ou tout au moins telles que  $\text{tg}\beta = O(\varepsilon)$ . l'équation (134) s'écrit alors :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi^* = 0 \quad (166)$$

La condition de glissement s'écrit :

$$v_o^* = 0 \text{ (sur les aubes)}, \quad (167)$$

une solution du type :

$$\left( A(y) e^{i(kx-\sigma t)}, \right) \quad (168)$$

est solution de (166) pour toute fonction A telle que soit satisfaite l'équation (167). On obtient :

$$\frac{\sigma}{k} = u \quad (169)$$

$$A(\text{aubes}) = 0, A \text{ est périodique d'aube à aube.} \quad (170)$$

### III.5 Recherche de solutions d'ondes planes dans le cas où

$$\underline{\alpha = \epsilon}$$

La condition d'irrotationnalité dans le repère fixe à l'infini amont s'écrit dans le repère local :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -2 \frac{\sin\varphi_0}{a-\Gamma\cos\varphi_0} \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

La troisième équation (171) montre les effets dus à la rotation du rotor. Ils apparaissent ici à l'ordre  $\epsilon^0$ . La conservation de la quantité de mouvement à l'ordre  $\epsilon^0$  est une approximation hydrostatique. On obtient :

$$p_0 = x \sin\varphi_0 + C^te \quad (172)$$

Le système obtenu à l'ordre  $\epsilon^1$  est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} (a-\Gamma\cos\varphi_0) \left[ \frac{du_0}{dt} \right]_0 - 2 v_0 \sin\varphi_0 + \frac{\partial P_1}{\partial x} &= 0 \\ (a-\Gamma\cos\varphi_0) \left[ \frac{dv_0}{dt} \right]_0 + 2 u_0 \sin\varphi_0 + \frac{\partial P_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P_1}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

où on a posé  $P_1 = p_1 - \frac{x^2}{2} \left[ \Gamma \cos \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right] - z \cos \varphi_0$ , et

avec  $\left( \frac{d}{dt} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} + w_0 \frac{\partial}{\partial z}$ . L'accélération de Coriolis et la dérivée particulaire interviennent à cet ordre. L'influence de la vitesse locale sur l'écoulement est donc faible, puisque les premiers termes significatifs  $u_0$  et  $v_0$  contribuent à faire varier la pression d'une amplitude  $\epsilon$ .

Le système (173) montre que  $P_1$  est indépendant de  $z$ . On cherche  $u_0$  et  $v_0$  indépendants eux aussi de  $z$ . La quatrième équation (173) associée aux conditions de glissement sur le moyeu et sur le carter externe entraînent :

$$w_0 = 0. \quad (174)$$

Il existe donc une fonction de courant  $\psi$  telle que :

$$u_0 = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v_0 = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (175)$$

L'élimination de  $P_1$  entre les deux premières équations de (173) réduit la conservation de la quantité de mouvement à l'unique équation suivante :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (176)$$

La troisième équation (171) devient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 2 \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \quad (177)$$

l'équation (176) est toujours vérifiée par une solution de (177).

On recherche une solution d'onde plane par une méthode de petites perturbations. Dans un premier temps, par une démarche analogue à celle utilisée en III.4.2.1 et III.4.2.2., on définit des écoulements stationnaires de base limites.

### III.5.1 Solution dans la roue

On recherche une solution "loin" dans la roue dont l'écoulement est parallèle aux aubes. La relation entre  $u_0$  et  $v_0$  s'écrit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \operatorname{tg} \beta \quad (178)$$

On introduit (178) dans (177), il vient :

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \beta\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 2 \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0}, \quad (179)$$

On intègre (179) par rapport à  $y$ , il vient :

$$\psi = \frac{\sin \varphi_0}{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(a - \Gamma \cos \varphi_0)} y^2 + y D(x) + E(x) \quad (180)$$

L'équation (178) doit être vérifiée, d'où :

$$y D' + E' = - \left[ 2 \frac{\sin \varphi_0}{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(a - \Gamma \cos \varphi_0)} y + D(x) \right] \operatorname{tg} \beta, \quad (181)$$

par identification on en déduit :

$$D' = - 2 \frac{\sin \varphi_0}{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(a - \Gamma \cos \varphi_0)} \operatorname{tg} \beta, \quad E' = - D \operatorname{tg} \beta \quad (182)$$

$$\text{avec } \mathcal{A} = \frac{\sin \varphi_0}{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)(a - \Gamma \cos \varphi_0)} :$$

$$D = - 2 \mathcal{A} \operatorname{tg} \beta x - \mathfrak{B} ; \quad E = \mathcal{A} \operatorname{tg}^2 \beta x^2 + \mathfrak{B} \operatorname{tg} \beta x + \mathfrak{C} \quad (183)$$

d'où :

$$\psi = \alpha y^2 - \gamma (2 \alpha \operatorname{tg} \beta x + \mathfrak{B}) + \dots$$

$$\dots + \alpha \operatorname{tg}^2 \beta x^2 + \mathfrak{B} \operatorname{tg} \beta x + \mathfrak{C}$$

et en introduisant la variable  $\gamma$  définie par (143), il vient :

$$\psi = \gamma(\alpha \gamma - \mathfrak{B}) \quad (184)$$

L'écoulement de la machine doit être débitant. Soit  $u$  la vitesse débitante moyenne d'un canal, il vient :

$$u = \psi_{(2^{\text{ème}} \text{ aube})} - \psi_{(1^{\text{ère}} \text{ aube})} \quad (185)$$

avec (93) et (143), l'équation de la première aube est définie par  $\gamma = -0,5$  et la deuxième par  $\gamma = +0,5$ , d'où :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \gamma(\alpha \gamma + u) \\ u_0 &= 2 \alpha \gamma + u \\ v_0 &= (2 \alpha \gamma + u) \operatorname{tg} \beta \\ P_1 &= -2 \sin \varphi_0 \psi + \mathfrak{D} \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Compte tenu du choix du repère,  $\overrightarrow{\text{grad}} \gamma$  est orienté vers les  $y > 0$ , la pression décroît d'aube à aube quand  $\gamma$  croît, ce qui correspond à un couple dû à la pression qui s'oppose à la rotation de la roue, donc un couple résistant.

### III.5.2 Solution dans le diffuseur lisse

$u_0$  et  $v_0$  sont des fonctions de  $x$  uniquement et la machine débite d'où  $u_0 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \text{Cte} = u$ , d'où :

$$\psi = \Psi(x) + u y \quad (187)$$

Le gradient de pression azimuthal est nul, la deuxième équation (173) donne :

$$-(a-\Gamma\cos\varphi_0) \mathcal{U} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \mathcal{U} \sin\varphi_0 = 0 \quad (188)$$

avec  $\mathcal{U}$  non nul, (188) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 2 \frac{\sin\varphi_0}{a-\Gamma\cos\varphi_0}, \quad (189)$$

qui est à la même équation que celle de la composante normale du rotationnel (177) dans laquelle on a introduit (188). d'où :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \mathcal{A} x^2 + C x + \mathcal{U} y \\ u_{os} &= \mathcal{U} \\ v_{os} &= -2 \mathcal{A} x - C \\ P_1 &= -2 \mathcal{A} x^2 - 2 C x + D \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

où  $C$  est une constante.

### III.5.3 Ecoulement perturbé

La fonction courant  $\psi$  des écoulements stationnaires (186) (190) peut s'écrire sous la forme suivant :

$$\psi = \psi_s = \psi_m + \mathcal{U} \gamma, \quad (191)$$

Afin de distinguer la partie stationnaire dans la suite, on a ajouté l'indice "s".  $\mathcal{U} \gamma$  est la partie débitante qui existe partout dans l'écoulement. Cette partie débitante satisfait à toutes les conditions aux limites pour la vitesse, aussi bien dans la roue, que dans le diffuseur.  $\psi_m$  est la partie de la fonction de courant qui permet de satisfaire les conditions liées à la pression et à la vitesse dans la roue, à la périphérie de la roue, et dans le diffuseur. Dans la suite on suppose  $\psi_m$  connu partout dans l'écoulement.

On cherche l'écoulement sous la forme :

$$\psi = \psi_s + \mu \psi^*, \quad (192)$$

où  $\psi_s$  est l'écoulement stationnaire de base (191) supposé connu,  $\psi^*$  est la perturbation d'ordre 1, et  $\mu$  son amplitude. On fait l'hypothèse  $\epsilon \ll \mu \ll 1$ .

(192) introduit dans (176) conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Delta \psi^*}{\partial t} + \left( u + \frac{\partial \psi_m}{\partial y} \right) \frac{\partial \Delta \psi^*}{\partial x} + \left( u \operatorname{tg} \beta - \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \right) \frac{\partial \Delta \psi^*}{\partial y} = 0 \quad (193)$$

La recherche d'une solution d'onde tournante sous la forme d'onde plane mène à la solution triviale. C'est la non uniformité de l'écoulement stationnaire de base qui en est la cause. Cette non uniformité provient de  $\psi_m$ . Cette méthode ne conduit pas à l'obtention de solutions particulières d'onde plane.

Ce dernier cas n'est pas celui du domaine des applications industrielles des turbomachines, pour lequel la vitesse débitante est d'ordre 1. Il correspond à une utilisation à très faible débit. Pour observer ce cas, il faudrait diminuer le débit de la machine à partir de son point de fonctionnement habituel. On verrait apparaître le décrochage tournant bien avant que la vitesse débitante ne soit d'ordre  $\epsilon$ . Toutefois, si ce cas venait à présenter un intérêt industriel, il pourrait être traité par un modèle numérique.

### III.6 Conclusion

L'analyse des grandeurs caractéristiques de la machine radiale a permis d'établir les paramètres sans dimension nécessaires à l'étude du mouvement du fluide à l'échelle de la distance interaubes. Les ondes de Rossby sont trouvées mais leurs conditions d'apparition ne correspondent pas à un cas réaliste d'application industrielle. Un cas plus réaliste peut être traité analytiquement et être interprété comme une forme limite du *petit décrochage tournant avec un*

*grand nombre de cellules.* Il faut remarquer qu'en première approximation cette solution ne dépend pas de la courbure du moyeu mais de l'angle d'inclinaison des aubes. C'est équivalent à approximer localement le moyeu par une surface conique. Le domaine de validité de la solution (148) peut donc être étendu à l'écoulement dans un diffuseur lisse radial.

**MACHINE AXIALE**

Le type de machine concerné par l'étude présente des différences géométriques par rapport à la machine radiale du chapitre précédent. Ce sont notamment (i) la forme de la surface du moyeu, (ii) la longueur de l'aubage et (iii) les dimensions du canal interaubes. L'objet de ce chapitre est de montrer que moyennant quelques hypothèses, il est toutefois possible de chercher la même modélisation.

IV.1 Hypothèses et équations

IV.1.1 Choix des coordonnées et définition du repère local

La surface du moyeu est cylindrique. La position d'un point P de la surface du moyeu est repérée par :

$$\vec{OP} = R \vec{e}_1(\theta) + z \vec{e}_3 \quad (194)$$

où R est le rayon du moyeu, O appartient à l'axe du cylindre,  $\theta$  est la position angulaire de  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  est perpendiculaire à  $\vec{e}_1$  et tangent au cylindre (orienté dans le même sens que la vitesse tangentielle du rotor par rapport au bati) et  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$  (parallèle à l'axe de rotation du rotor). Un point quelconque M au dessus de la surface du moyeu est repéré par :

$$\vec{OM} = (R + x) \vec{e}_1(\theta) + z \vec{e}_3 \quad (195)$$

x représente "l'altitude" du point P par rapport à la surface du moyeu. On étudie le mouvement au voisinage d'un point A appartenant à la surface du moyeu dont la position est définie par  $\theta = 0$  et  $z = 0$  (voir figure 22).

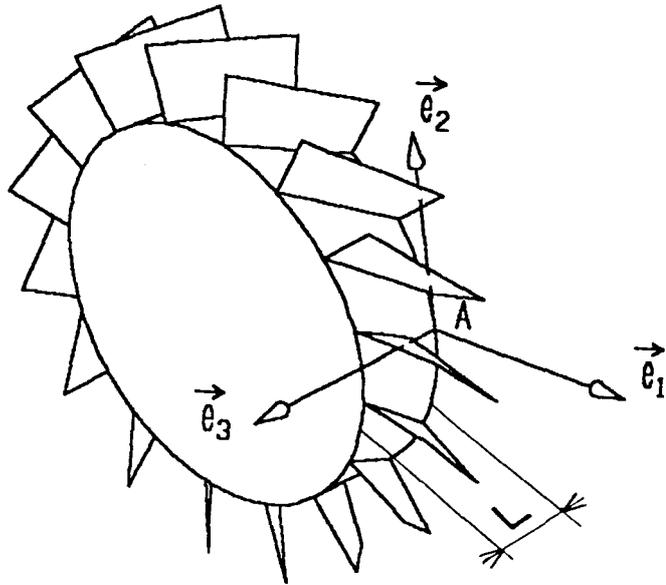


figure 22 : définition du repère local  
 $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  lié à la surface du moyeu.

Les coordonnées locales curvilignes issues de A sont :

$$\left. \begin{array}{l} x = x \\ y = R \theta \\ z = z \end{array} \right\} \quad (196)$$

Remarquons que  $r = R + x$ ,  $\theta$ ,  $z$  sont les coordonnées cylindriques habituellement utilisées. On utilise Les opérateurs gradient divergence et rotationnel définis en coordonnées cylindriques en appliquant les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} r = R + x ; \theta = \frac{y}{R} ; z = z \\ \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial \theta} = R \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (197)$$

#### IV.1.2 Hypothèses sur le fluide

Ce sont les mêmes que celles du fluide des écoulements dans les machines radiales. Le fluide est non visqueux, incompressible et non pesant.

#### IV.1.3 Adimensionnement, normalisation, définition des paramètres $\eta$ et $\alpha$

Le volume du canal interaubes (voir figure 15) est dans ce cas caractérisé par une seule longueur L (ce choix sera justifié au paragraphe IV.1.4). C'est l'ordre de grandeur de la corde, c'est aussi la distance entre deux aubes, et aussi l'ordre de grandeur de la hauteur de l'aube. On normalise  $x$ ,  $y$  et  $z$  par L :

$$\bar{x} = \frac{x}{L} ; \bar{y} = \frac{y}{L} ; \bar{z} = \frac{z}{L} \quad (198)$$

U est une vitesse caractéristique de l'écoulement. Les trois composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  de la vitesse sont normalisées par U :

$$\bar{u} = \frac{u}{U} ; \bar{v} = \frac{v}{U} ; \bar{w} = \frac{w}{U} \quad (199)$$

Le temps normalisé qui se déduit de U et L est :

$$\bar{t} = \frac{U}{L} t \quad (200)$$

La projection sur  $\vec{e}_i$  de l'équation de la quantité de mouvement en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} - 2 \Omega v - \Omega^2 r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (201)$$

Les deux premiers termes représentent l'accélération locale (relative), le troisième terme est l'accélération de Coriolis, le quatrième terme est l'accélération d'entraînement, et le dernier terme du membre de gauche est

le gradient de pression. L'équation (201) dans laquelle on introduit (197) s'écrit :

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{R+x} - 2 \Omega v - \Omega^2 (R+x) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

puis on introduit (198), (199) et (200), et il vient :

$$\frac{U^2}{L} \frac{d\bar{u}}{dt} - \frac{U^2}{R} \frac{\bar{v}^2}{1+\frac{L}{R}x} - 2 \Omega U \bar{v} - \Omega^2 R \left(1+\frac{L}{R}x\right) + \frac{1}{L\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (202)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\frac{U^2}{\Omega^2 R^2} \frac{d\bar{u}}{dt} - \frac{L}{R} \frac{U^2}{\Omega^2 R^2} \frac{\bar{v}^2}{1+\frac{L}{R}x} - 2 \frac{L}{R} \frac{U}{\Omega R} \bar{v} - \frac{L}{R} \left(1+\frac{L}{R}x\right) + \frac{L}{R} \frac{1}{\Omega^2 R L \rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (203)$$

et avec :

$$\eta = \frac{L}{R} ; \alpha = \frac{U}{\Omega R} \quad (204)$$

(203) s'écrit :

$$\alpha^2 \frac{d\bar{u}}{dt} - \eta \alpha^2 \frac{\bar{v}^2}{1+\eta x} - 2 \eta \alpha \bar{v} - \eta (1+\eta x) + \frac{\eta}{\Omega^2 R L \rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (205)$$

Notons que  $\alpha$  est toujours un nombre de Rossby défini à l'aide d'une longueur caractéristique qui est le rayon  $R$ . On normalise la variation de pression sur la distance  $L$  par  $\rho \Omega^2 R L$  (ce choix sera justifié au paragraphe IV.1.4) , il vient :

$$\bar{p} = \frac{\Delta p}{\rho L R \Omega^2} \quad (206)$$

On obtient la même normalisation de la variation de pression avec (205) quand la vitesse relative est nulle. L'équation (205) devient :

$$\alpha^2 \frac{d\bar{u}}{dt} - \eta \alpha^2 \frac{\bar{v}^2}{1+\eta\bar{x}} - 2 \eta \alpha \bar{v} - \eta \frac{R}{L}(1+\eta\bar{x}) + \eta \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad (207)$$

l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right] + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (208)$$

en introduisant (197) et les grandeurs normalisées, il vient :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{1+\eta\bar{x}} \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \eta \bar{u} \right] + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (209)$$

le petit paramètre géométrique est  $\eta$ . Avec  $\eta = \epsilon \ll 1$ , il vient :

$$\frac{1}{1+\eta\bar{x}} = \frac{1}{1+\epsilon\bar{x}} = 1 - \epsilon \bar{x} + \epsilon^2 \bar{x}^2 - \epsilon^3 \bar{x}^3 + O(\epsilon^4) \quad (210)$$

Le système d'équations obtenu pour l'équation de continuité et les trois équations de quantité de mouvement est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \epsilon \left[ \bar{u} - \bar{x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] = O(\epsilon^2) \\ \alpha^2 \frac{d\bar{u}}{dt} + \epsilon \left[ -\alpha^2 \bar{v}^2 - 2 \alpha \bar{v} - 1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right] &= O(\epsilon^2) \\ \alpha^2 \frac{d\bar{v}}{dt} + \epsilon \left[ \alpha^2 \bar{u} \bar{v} + 2 \alpha \bar{u} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right] &= O(\epsilon^2) \\ & \alpha^2 \frac{d\bar{w}}{dt} + \epsilon \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = O(\epsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

où :  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} - \epsilon \bar{x} \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + O(\epsilon^2)$

#### IV.1.4 Détermination des types de turbomachines et des ordres de grandeur significatifs des paramètres pour une machine en utilisation industrielle

Dans la modélisation qui conduit aux ondes de Rossby, il est nécessaire d'avoir trois longueurs caractéristiques  $R$ ,  $L$  et  $d$  telles que (i) la grande longueur  $L$  du mouvement du fluide dans le plan tangent soit petite devant le rayon de référence  $R$ , et que (ii) la troisième dimension  $d$  (la "verticale") soit petite devant  $L$ . Dans le cas présent, le rayon de référence est celui du moyeu  $R$ . La condition (i) impose un pas de grille  $t$  et une corde  $c$  de longueur approximativement égale à  $L$  (solidité  $\sigma = c/t \approx 1$ ). La condition (ii) nécessiterait une hauteur d'aube  $h$  (longueur mesurée radialement) petite devant le pas de grille  $t$  et la corde du profil  $c$ .

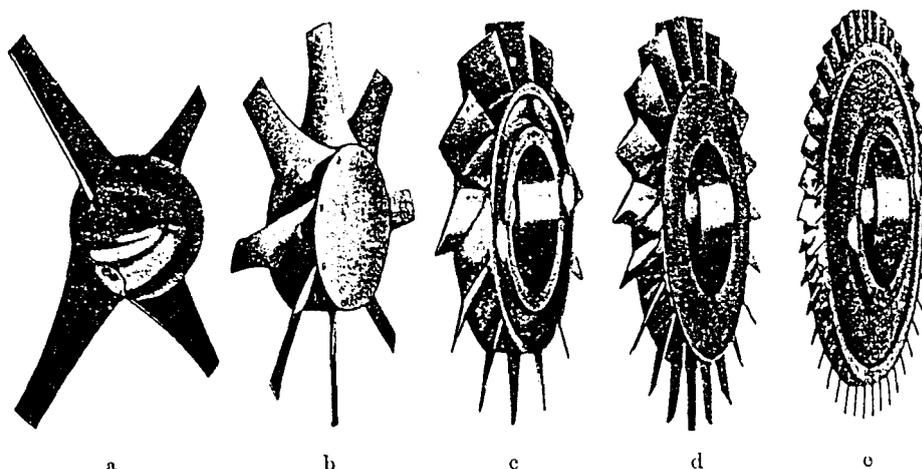


figure 22.1 : géométries de rotors de machines axiales couramment rencontrées - (d'après [34])

La figure (22.1) montre des géométries de rotors de machines axiales couramment rencontrées.  $h$  est généralement de l'ordre de grandeur du pas. On remarque que la hauteur  $h$  est d'autant plus voisine du pas  $t$  que le nombre d'aubes  $N$  est important. Avec ce type de roue on ne pourra faire apparaître qu'un seul paramètre géométrique  $\eta = L/R$ . En prenant pour valeur de  $L$  la plus courte distance entre deux

cordes de deux aubes consécutives, on peut écrire  $\eta$  sous la même forme que dans le cas des machines radiales :

$$\eta = \frac{L}{R} = \frac{2 \pi \cos \beta}{N}, \quad (212)$$

où  $\beta$  est ici l'angle de calage de l'aubage par rapport à l'axe de rotation du rotor. En prenant 0,2 pour valeur du petit paramètre  $\eta$  et  $45^\circ$  pour le calage on obtient  $N = 22$  aubes. L'approximation  $\eta \ll 1$  peut donc être valide pour les roue comportant une vingtaine d'aubes et plus.

Pour les machines axiales (voir paragraphe III.2.2), la vitesse relative est de l'ordre de grandeur de la vitesse tangentielle à la périphérie du rotor. Le paramètre cinématique  $\alpha$  est d'ordre un :

$$\alpha = O(1). \quad (215)$$

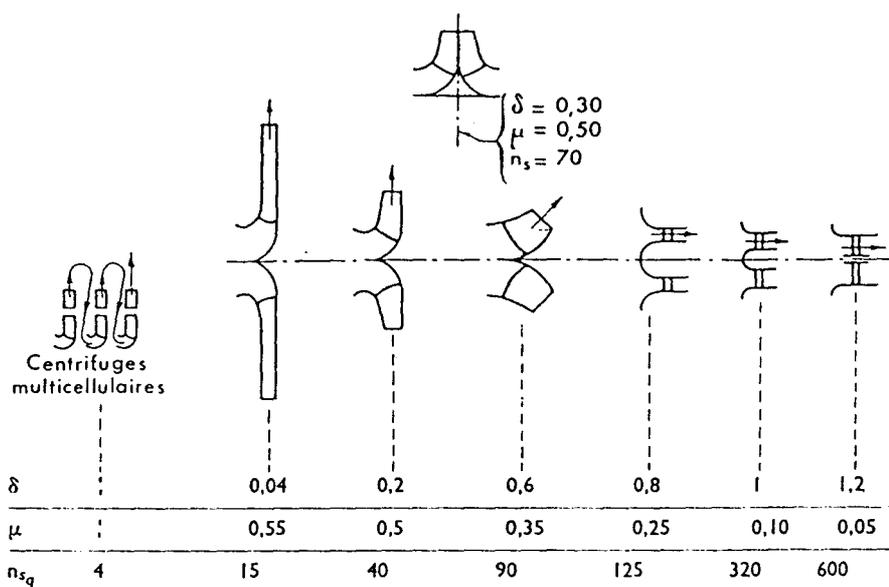


figure 22.2 : valeurs de paramètres adimensionnés pour différents types de machines (au rendement optimal).  $\delta$  est le coefficient de débit.  $\mu$  est le coefficient de travail net.  $n_{sq}$  nombre de tours spécifiques ( $N_s = \frac{n_{sq}}{53}$  :  $N_s$  est la vitesse spécifique définie sur la figure (17.2)) - (d'après [32])

Il est nécessaire d'estimer l'ordre de grandeur de la variation de pression sur la traversée de la roue. La largeur axiale approximative est  $L$ . En fluide incompressible le coefficient de travail net au meilleur rendement  $\mu$  peut être mis sous la forme suivante :

$$\mu = \frac{\Delta p}{\rho \Omega^2 R^2} = \frac{L}{R} \frac{\Delta p}{\rho \Omega^2 R L} = \eta \frac{\Delta p}{\rho \Omega^2 R L} \quad (213)$$

La figure 22.2 indique les différentes valeurs du coefficient de travail net  $\mu$  en fonction du type de machine. Pour les machines axiales, il varie de 0,25 à 0,05. On obtient avec cette plage de valeurs et  $\eta = 0,2$  :

$$0,25 < \frac{\Delta p}{\rho \Omega^2 R L} < 1,25 \quad (214)$$

$\Delta p / \rho \Omega^2 R L$  est d'ordre 1. La quantité  $\rho \Omega^2 R L$  est retenue pour normaliser la variation de pression.

On posera dans ce qui suit  $\alpha = 1$  et  $\eta \ll 1$  pour l'étude du cas des machines axiales dans leurs applications industrielles.

Le cas correspondant à un système qui permet de définir les conditions d'apparition des ondes de Rossby est  $\alpha = \varepsilon^2$ . On est donc amené à considérer trois cas  $\alpha = \varepsilon^2$ ,  $\alpha = \varepsilon$  et  $\alpha = 1$ .

## IV.2 Analyse asymptotique des solutions d'onde

### IV.2.1 Ondes de Rossby dans la machine axiale : conditions d'apparition : $\alpha = \varepsilon^2$

La démarche est la même que celle utilisée dans le chapitre précédent. Les deux premières approximations sont

des approximations hydrostatiques. Les premiers termes dus à la vitesse apparaissent en troisième approximation, ce sont les termes de l'accélération de Coriolis. La quatrième approximation permet d'écrire l'équation de la variation de la composante normale du rotationnel. Le rotor de la machine axiale ne présente pas de courbure dans le plan méridien. C'est une différence fondamentale avec la machine radiale et le système géophysique des écoulements autour de la Terre. La vitesse de propagation unidirectionnelle est en effet due à cette courbure. On peut déjà en déduire que la solution d'ondes, si elle existe, sera ici stationnaire par rapport au rotor. On pose  $\alpha = \epsilon^2$  et on introduit dans le système (214) les développements de  $\bar{u}$   $\bar{v}$   $\bar{w}$   $\bar{p}$  suivants :

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2) \\ \bar{v} &= v_0 + \epsilon v_1 + O(\epsilon^2) \\ \bar{w} &= w_0 + \epsilon w_1 + O(\epsilon^2) \\ \bar{p} &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + O(\epsilon^4) \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Les quantités normalisées ne sont plus surlignées dans la suite du chapitre.

il vient :

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} + \varepsilon \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + u_0 - x \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] = O(\varepsilon^2) \\
& \frac{\partial p_0}{\partial x} - 1 + \varepsilon \left[ \frac{\partial p_1}{\partial x} + x \right] + \varepsilon^2 \left[ -2 v_0 - x^2 + \frac{\partial p_2}{\partial x} \right] + \\
& \quad \varepsilon^3 \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)_0 - 2 v_1 + x^3 + \frac{\partial p_3}{\partial x} \right] = O(\varepsilon^4) \\
& \frac{\partial p_0}{\partial y} + \varepsilon \left[ \frac{\partial p_1}{\partial x} - x \frac{\partial p_0}{\partial y} \right] + \varepsilon^2 \left[ 2 u_0 + x^2 \frac{\partial p_0}{\partial y} - x \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right] + \\
& \quad \varepsilon^3 \left[ \left( \frac{dv}{dt} \right)_0 + 2 u_1 - x^3 \frac{\partial p_0}{\partial y} + x^2 \frac{\partial p_1}{\partial y} - x \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial y} \right] = O(\varepsilon^4) \\
& \frac{\partial p_0}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial p_2}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial p_3}{\partial z} = O(\varepsilon^4) \\
& \text{où : } \left( \frac{dv}{dt} \right)_0 = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} + w_0 \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \right\} (217)$$

Le système à l'ordre  $\varepsilon^0$  s'écrit :

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} - 1 = 0 ; \quad \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0 \quad (218)$$

La solution de (218) est :

$$p_0 = x + C^{t0}, \quad (219)$$

où  $C^{t0}$  est une constante. Le système à l'ordre  $\varepsilon^1$  s'écrit :

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + x = 0 ; \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \quad (220)$$

La solution de (220) est :

$$p_1 = -\frac{x^2}{2} + C^{t1}, \quad (221)$$

où  $C^{11}$  est une constante. Le système à l'ordre  $\varepsilon^2$  s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} -2 v_0 + \frac{\partial P_2}{\partial x} &= 0 \\ 2 u_0 + \frac{\partial P_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial P_2}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} &= 0 \\ \text{où } P_2 &= -\frac{x^3}{3} + p_2 \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

Les deux premières équations nous indiquent, avec la troisième, que  $u_0$  et  $v_0$  sont indépendants de  $z$ . Les conditions de glissement sur le moyeu et le carter externe associées à (222) permettent d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0 \\ w_0 &= 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} &= \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

La condition de glissement sur les aubages implique une dépendance des grandeurs à la variable  $z$ . Une solution d'ondes ne peut exister que "loin" des aubes : voir figure (23).

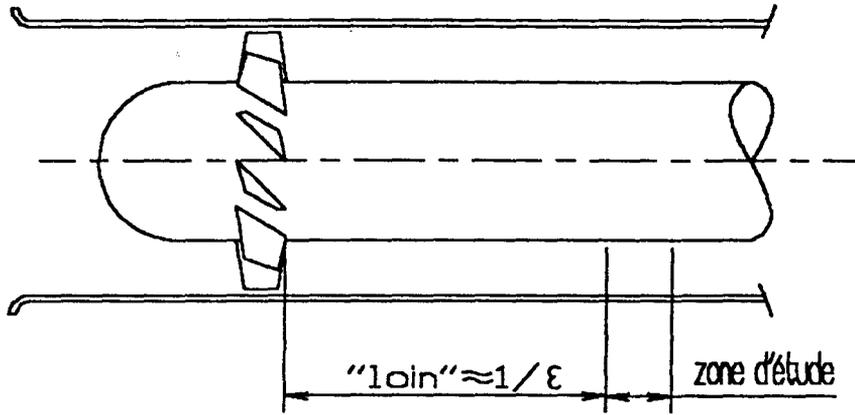


figure 23 : définition d'une zone d'apparition des ondes de Rossby "loin" des aubes.

Le système à l'ordre  $\epsilon^3$  s'écrit :

$$\left. \begin{aligned}
 \left( \frac{du}{dt} \right)_0 - 2 v_1 + \frac{\partial P_3}{\partial x} &= 0 \\
 \left( \frac{dv}{dt} \right)_0 + 2 u_1 - x \frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial P_3}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial P_3}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + u_0 - x \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0 \\
 \text{où } P_3 &= \frac{x^4}{4} + p_3
 \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

L'élimination de  $P_3$  entre les deux premières équations de (224) conduit à :

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_0 \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial P_2}{\partial y} - x \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} = 0 \quad (225)$$

(222) permet d'écrire  $\frac{\partial P_2}{\partial y} = -2 u_0$  et  $\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial v_0}{\partial y}$  ,

(225) s'écrit alors en utilisant la troisième équation de (224) :

$$\frac{d\omega_z}{dt} = 2 \frac{\partial w_1}{\partial z}. \quad (226)$$

$$\text{où } \omega_z = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

C'est l'équation homologue de (60) de l'écoulement dans la machine radiale. On cherche pour  $\omega_z$  une solution particulière de la forme suivante :

$$\frac{d\omega_z}{dt} = 0 \text{ et } 2 \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0. \quad (227)$$

La deuxième équation de (227) implique  $w_1 = w_1(x, y, t)$ . On exprime  $u_0$  et  $v_0$  en fonction de  $P_2$  au moyen de (222) et  $\omega_z$  en fonction de  $P_2$  avec (223). On pose  $\phi = P_2/2$ , (227) conduit à :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta_h \phi = 0. \quad (228)$$

$$\text{où } \Delta_h \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

On cherche pour  $\phi$  une solution d'onde plane de la forme suivante :

$$\phi = A(x) e^{i(\ell y - \sigma t)}, \quad (229)$$

où  $A$  assure les conditions de glissement sur le moyeu et le carter externe. En introduisant (229) dans (228), il vient :

$$(A'' - A \ell^2) \left[ -\sigma + \ell [A'' - A \ell^2] \frac{d}{dx} \left[ \frac{A}{A'' - A \ell^2} \right] \right] = 0 \quad (230)$$

$$\text{où } A'' = \frac{d^2 A}{dx^2}.$$

La seule solution qui satisfasse les conditions aux limites  $u_0 = 0$  sur le moyeu et le carter externe est  $\sigma = 0$  et  $\frac{d}{dx} \left[ \frac{A}{A'' - A \ell^2} \right] = 0$ . Finalement la solution s'écrit :

$$\left[ \phi = a ( e^{irx} - e^{-irx} ) e^{i\ell y}, \right] \quad (231)$$

où  $r^2 = - \frac{1 + k \ell^2}{k}$ , et  $k = \frac{-1}{\ell^2 + n^2 \pi^2}$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas

l'onde est stationnaire par rapport au rotor. Cela était prévisible, puisque le moyeu ne possède pas de courbure dans le plan méridien. On peut préciser les conditions d'apparition de ces ondes dans les machines axiales : (i) La vitesse caractéristique de l'écoulement est faible devant la vitesse tangentielle du rotor, d'ordre  $\epsilon^2$  ; (ii) La machine ne débite pas, ou débite très peu, d'ordre  $\epsilon^3$  ; (iii) l'écoulement est loin des aubes (indépendance en  $z$ ) : la zone ainsi définie est celle de la figure 23.

#### IV.2.2 Ondes tournantes dans les machines axiales en applications industrielles : $\alpha = 1$

Avec les hypothèses énoncées ci-après, l'écoulement de la machine axiale possède la même solution d'ondes tournantes que celui de la machine radiale. La première hypothèse est celle des profils minces. L'équation de chaque profil peut s'écrire (voir figure 24) :

$$\Psi = y - z \operatorname{tg} \beta + n + \delta \Psi_{E,I}(x, y, z), \quad (232)$$

où les indices  $E$  et  $I$  désignent l'extrados et l'intrados,  $\delta = \frac{e}{c} \ll 1$  est l'épaisseur relative de l'aube, et  $n$  le numéro de l'aube.

La seconde hypothèse est celle de la théorie des corps minces tridimensionnels (voir, par exemple, [36]) qui permet d'écrire la vitesse sous la forme suivante :

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \delta \vec{u}_1 + \vec{O}(\delta^2). \quad (233)$$

La troisième hypothèse est celle du fluide incompressible. La conservation de la masse s'écrit alors  $\text{div } \vec{u} = 0$ . Elle permet d'écrire la vitesse sous la forme suivante :

$$\vec{u} = u \overrightarrow{\text{grad}} \psi \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \xi, \quad (234)$$

où  $\psi$  et  $\xi$  sont deux fonctions de courant. Ces deux fonctions doivent vérifier les conditions aux limites :  $\psi$  doit s'identifier aux profils des aubes,  $\xi$  doit s'identifier au moyeu et au carter (voir [37] et [38]). Les fonctions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= y - z \text{tg}\beta + C_1 + O(\delta) \\ \xi &= x + C_2 + O(\delta) \end{aligned} \right\}, \quad (235)$$

vérifient les conditions aux limites.  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes. Le premier terme de la vitesse s'écrit :

$$\vec{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -u \text{tg}\beta \\ -u \end{bmatrix}. \quad (236)$$

La quatrième hypothèse concerne la vitesse de perturbation. Lorsque le débit de la machine diminue, l'incidence augmente dans le plan  $y, z$ . Cela permet d'écrire le premier terme de la vitesse de perturbation sous la forme suivante :

$$\vec{u}_0^* = \begin{bmatrix} 0 \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix}. \quad (237)$$

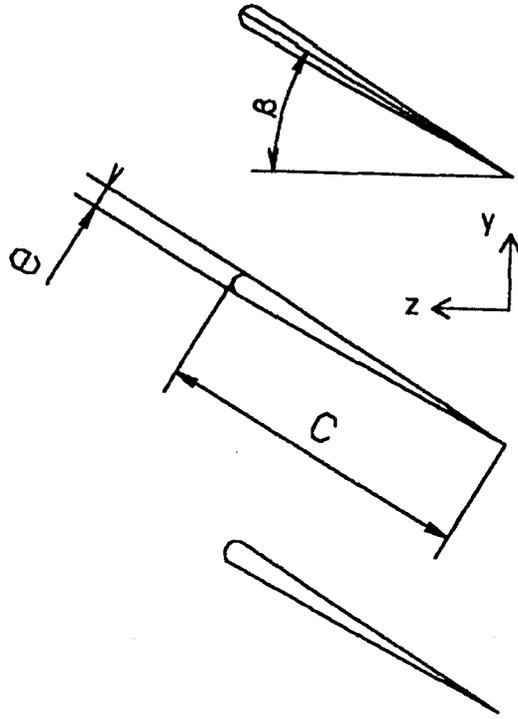


figure 24 : définition de l'épaisseur relative de l'aube  $\delta = e/c$ , et de l'angle de calage  $\beta$ .

Les deux petits paramètres géométriques sont ici  $\eta$  et  $\delta$ . On pose  $\eta = \delta = \epsilon \ll 1$ , le système d'équations s'écrit :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} + \epsilon \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + u_0 - x \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] &= O(\epsilon^2) \\
 \left[ \frac{du}{dt} \right]_0 + \epsilon \left[ \left[ \frac{du}{dt} \right]_1 - v_0^2 - 2 v_0 - 1 + \frac{\partial p_0}{\partial x} \right] &= O(\epsilon^2) \\
 \left[ \frac{dv}{dt} \right]_0 + \epsilon \left[ \left[ \frac{dv}{dt} \right]_1 + u_0 v_0 + 2 u_0 + \frac{\partial p_0}{\partial y} \right] &= O(\epsilon^2) \\
 \left[ \frac{dw}{dt} \right]_0 + \epsilon \left[ \left[ \frac{dw}{dt} \right]_1 + \frac{\partial p_0}{\partial z} \right] &= O(\epsilon^2)
 \end{aligned} \right\} (238)$$

Pour les mêmes raisons exposées dans le cas analogue du chapitre précédent de la machine radiale, on cherche une solution où l'amplitude de la perturbation  $\mu$  est supérieure à celle générée par la géométrie  $\epsilon$ . Les deux paramètres sont liés par la même relation (73)  $\mu^2 = \epsilon$ . On applique la même démarche que dans le sous-chapitre III.4 et après avoir fait le changement d'axe  $\vec{e}_1 = -\vec{e}_3$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{e}_z$  et  $\beta = -\beta$ , on retrouve pour l'écoulement perturbé les équations (122) à (126) dont la solution est (148). Bien que l'écoulement stationnaire de base du système d'équations à l'ordre  $\epsilon$  soit différent de celui de la machine radiale, la condition de périodicité par tour (160) est la même pour la machine axiale. (161) est aussi solution de l'écoulement perturbé (237) de la machine axiale.

On définit un *critère d'apparition* de ces ondes en utilisant l'hypothèse de la théorie des corps minces tridimensionnels. L'augmentation d'incidence crée une augmentation d'épaisseur du profil  $\mu$  ( voir figure 25). Cette épaisseur  $\mu$  définit l'amplitude de la vitesse de perturbation.

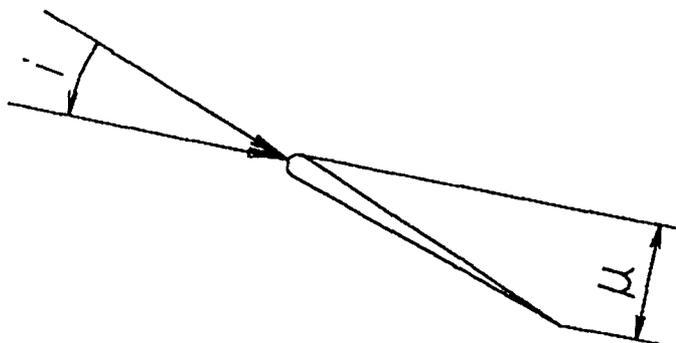


figure 25 : définition du paramètre d'amplitude  $\mu$  en fonction de l'augmentation d'incidence  $i$ .

On définit une incidence limite  $i$  au dessus de laquelle on pourra voir apparaître l'onde tournante :

$$i = \mu \cos\beta = \sqrt{\epsilon} \cos\beta = \sqrt{\frac{e}{c}} \cos\beta \quad (239)$$

Pour les machines axiales, la figure (17.2) montre que la direction de la vitesse absolue est faiblement modifiée pendant la traversée de la roue. On obtient donc une valeur de la vitesse de propagation  $|u \operatorname{tg} \beta|$  de l'ordre de grandeur de la vitesse tangentielle. Dans les machines considérées, les aubes sont "couchées en arrière". L'onde tournante possède donc une vitesse faible par rapport au bâti. Cela correspond au groupe 3 du décrochage avec un grand nombre de cellules défini figure 4 page 9. L'apparition de ce type d'onde, comme le décrochage tournant, est dépendant d'une augmentation d'incidence. Comme dans le cas de la machine radiale traité dans le chapitre précédent, la solution (161) ne dépend que du calage des aubages. C'est ce critère qui caractérise l'écoulement en première approximation. La perturbation vient en seconde approximation avant que se manifeste l'influence des autres critères géométriques liés à la conception de la machine.

#### IV.2.3 Recherche de solution d'ondes planes dans le cas

$$\underline{\text{où } \alpha = \varepsilon}$$

Le système (214) s'écrit avec  $\alpha = \varepsilon$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} + \varepsilon \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + u_0 - x \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) &= O(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial p_0}{\partial x} - 1 + \varepsilon \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)_0 - 2v_0 + x + \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] &= O(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial p_0}{\partial y} + \varepsilon \left[ \left( \frac{dv}{dt} \right)_0 + 2u_0 - x \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial y} \right] &= O(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial p_0}{\partial z} + \varepsilon \left[ \left( \frac{dw}{dt} \right)_0 + \frac{\partial p_1}{\partial z} \right] &= O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} (240)$$

Le système d'équations à l'ordre  $\epsilon^0$  est le même que celui du cas analogue de la machine radiale avec  $\varphi_0 = \pi/2$ . La solution est donc la même (172).

De façon similaire au cas de la machine radiale on fait apparaître un écoulement débitant. Cet écoulement est défini par (236) :

$$\left. \begin{aligned} u_d &= 0 \\ v_d &= -\mathcal{U} \operatorname{tg} \beta \\ w_d &= -\mathcal{U} \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

La solution cherchée doit satisfaire les conditions aux limites imposées par la géométrie aussi bien sur la vitesse que sur la pression. La vitesse intervient dans le système d'équation d'ordre  $\epsilon$ , l'épaisseur du profil est ici à prendre en considération pour sa détermination. Quant au terme de pression il doit être continu dans l'écoulement, sauf au contact des parois. La machine axiale ne possède pas de petite échelle  $d$  qui fait apparaître un écoulement plan en première approximation. toutefois on cherche une solution stationnaire de base de la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u_m \\ v_0 &= v_d + v_m \\ w_0 &= w_d + w_m \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

La condition d'irrotationnalité s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial z} &= -2 \end{aligned} \right\} \quad (248)$$

(241) introduit dans (248) conduit à :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_m}{\partial y} - \frac{\partial v_m}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_m}{\partial z} - \frac{\partial w_m}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_m}{\partial x} - \frac{\partial u_m}{\partial z} &= -2 \end{aligned} \right\} \quad (248)$$

Un écoulement plan où  $u_m$  serait nul n'est pas une solution compatible avec les conditions de glissement sur les aubes. En effet, si  $u_m$  était nul, la deuxième équation de (248) impliquerait  $w_m$  indépendant de  $x$  et la troisième équation un écoulement cisailé suivant  $x$  pour  $v_m$ , ce qui n'est pas compatible avec la condition de glissement sur les aubes que l'on peut écrire  $v_o = w_o \operatorname{tg}\beta(x, y, z)$ . L'écoulement est tridimensionnel et non uniforme.

La recherche d'une solution d'onde tournante sous la forme d'onde plane par une méthode de petites perturbations mène à la solution triviale. C'est la non uniformité de l'écoulement stationnaire de base qui en est la cause. Cette conclusion rejoint celle du paragraphe III.5.3.

#### IV.3 Commentaires

L'analyse menée sur la machine axiale donne des résultats analogues à ceux de la machine radiale : (i) les conditions d'apparition des "ondes de Rossby" sont définies pour  $\alpha = \varepsilon^2$  ; (ii) la plage d'utilisation industrielle des machines correspond à  $\alpha = 1$ , et (iii) La solution d'onde tournante dans ce cas est la même. On définit pour la machine axiale un critère d'apparition (239). Le cas  $\alpha = \varepsilon$  est différent par l'absence de l'échelle  $d$  qui change la condition d'irrotationnalité des équations normalisées et impose un écoulement stationnaire tridimensionnel.

## CONCLUSION

Le point de départ de cette étude a été l'article de Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg [21]. On s'est d'abord attaché à la recherche d'ondes de Rossby dans les turbomachines. Cette démarche nous a ensuite amené à reconsidérer les grandeurs caractéristiques de l'écoulement dans les applications industrielles. Cette analyse a permis de faire correspondre à chacun des trois types de décrochage un modèle d'écoulement, puis, finalement de proposer une modélisation de l'écoulement à une petite échelle. L'étude de l'écoulement à cette échelle, auparavant peu étudié, prend un intérêt croissant avec l'apparition du contrôle actif (technique d'abaissement du point d'apparition du décrochage tournant par action mécanique sur l'écoulement).

La démarche asymptotique appliquée aux turbomachines apporte une précision supplémentaire par rapport à l'adimensionnement couramment utilisé. Ce dernier est le résultat de l'application du théorème de Vaschy-Buckingham, et a pour unique but sa vocation initiale, à savoir la définition des grandeurs réduites nécessaires aux similitudes. La démarche asymptotique apporte en plus du théorème de Vaschy-Buckingham la possibilité d'étudier le mouvement à l'échelle souhaitée. Ici cette méthode permet d'aborder facilement les écoulements dans le rotor, dont les grandeurs caractéristiques peuvent être diverses : les longueurs  $L$  et  $d$  pour le canal de la machine radiale ; la longueur  $R$  et la vitesse angulaire  $\Omega$  pour les forces volumiques ; la longueur  $L$  pour le gradient de pression. C'est cette dernière longueur  $L$ , *longueur de référence pour le gradient de pression* qui est la clé de voûte de l'étude. Le second point fort de cette démarche est de faire apparaître clairement l'importance des différents termes dans les équations, notamment les effets de la vitesse à

travers le paramètre cinématique  $\alpha$  qui joue le rôle du nombre de Rossby.

L'analogie entre les écoulements géophysiques et ceux des machines radiales mène à une définition similaire des différents paramètres. Pour déterminer les conditions d'apparition des ondes de Rossby, le paramètre cinématique  $\alpha$  doit être petit devant l'unité comme l'est le nombre de Rossby  $R_0$  dans l'approximation géostrophique des écoulements géophysiques. On retrouve alors des équations similaires qui donnent un résultat analogue : La déviation se fait tangentiellement. Cette déviation est due à l'association de la rotation et de la courbure de la surface dans le plan méridien. Le sens est donné par la concavité ou la convexité de la surface du moyeu. Les rotors des machines axiales ne possèdent pas de courbure dans le plan méridien, et ces ondes sont stationnaires. Cette solution d'ondes de Rossby dans les turbomachines considérées n'est pas réaliste car la vitesse caractéristique de l'écoulement ne correspond pas à la plage habituelle d'utilisation industrielle de ces machines.

Le domaine industriel nécessite, si l'on veut rester réaliste pour le petit décrochage, de poser  $\alpha = 1$ . On obtient dans ces conditions un écoulement faiblement perturbé par les aubes du rotor. La solution présentée ici décrit une onde qui tourne à la périphérie d'un rotor de machine axiale ou radiale, et qui satisfait à toutes les conditions aux limites : glissement sur les aubes ; glissement sur le moyeu ; glissement sur le carter externe ; périodicité par tour. Cette solution analytique a la particularité de décrire un écoulement à l'intérieur du rotor qui n'est pas parallèle aux squelettes des aubes. Elle peut être interprétée comme une *forme limite du petit décrochage avec un grand nombre de cellules*. Elle permet également de définir un *paramètre d'apparition du décrochage* en terme d'incidence limite.

L'analyse présentée repose sur la valeur du paramètre cinématique  $\alpha$  qui est l'image de l'ordre de grandeur des effets de la vitesse. C'est le rapport de la vitesse relative sur la vitesse d'entraînement à la périphérie du rotor. L'analyse des paramètres sans dimension de la théorie des similitudes, montre que ce paramètre cinématique  $\alpha$  peut être considéré d'ordre un même quand la vitesse moyenne débitante est petite. Le cas intermédiaire  $\alpha = \epsilon$  apparu lors de l'établissement des conditions d'apparition des ondes de Rossby n'a pas de réalité industrielle.

La valeur du paramètre cinématique  $\alpha$  déterminée dans l'étude a été obtenue à partir de résultats expérimentaux formulés par la théorie des similitudes pour des turbomachines travaillant en fluide incompressible et à leur meilleur rendement. Cette valeur associée à celle du petit paramètre géométrique  $\eta$  fait apparaître dans les équations d'équilibre local la dérivée particulière de la vitesse relative en première approximation, puis le gradient de pression dû à la roue en seconde approximation. Cette hiérarchie permet d'interpréter les effets du gradient de pression comme une petite perturbation de ceux de la vitesse relative. L'écoulement est alors en première approximation un écoulement uniforme. Le gradient de pression de l'onde du décrochage tournant est du même ordre que celui de la roue, il est par conséquent lui aussi une petite perturbation de l'écoulement uniforme de la vitesse relative. La méthode de petites perturbations utilisée dans l'étude est parfaitement justifiée pour le petit décrochage avec un grand nombre de cellules. Les deux autres types de décrochages possèdent une longueur caractéristique de l'onde de l'ordre de grandeur du rayon extérieur du rotor. En introduisant cette longueur caractéristique dans le système d'équations d'équilibre local, la dérivée particulière et le gradient de pression apparaissent alors en première approximation. Le gradient de pression de l'onde du décrochage doit dans ce cas apparaître aussi en première approximation. Si on suppose que l'écoulement est

faiblement perturbé par le petit décrochage avec peu de cellules, l'utilisation de la méthode de petites perturbations est justifiée dans ce cas (voir revue bibliographique). Par contre dans le cas du grand décrochage, pour lequel l'écoulement est fortement perturbé, cette méthode n'est plus utilisable.

Comme l'a montré l'étude bibliographique préalable, cette approche asymptotique des écoulements dans les turbomachines a permis d'étudier un créneau non abordé dans la littérature, et le travail présenté ici a donné prétexte à une publication [39]. D'autres applications de cette démarche sont envisageables. La stabilité de l'écoulement à petite échelle est un premier exemple. L'aide à la modélisation numérique par la définition d'un maillage variable associé à des systèmes d'équations simplifiées pour l'application au domaine du contrôle actif en serait un second.

## REFERENCES

- [1] E. M. Greitzer - " The stability of Pumping Systems - The 1980 Freeman Scholar Lecture " - *ASME - Journal of Fluids Engineering* - Vol. 103, p. 193-242 - june 1981.
- [2] R. C. Pampreen - *compressor surge and stall* - Concepts E T I , Inc - 1993.
- [3] J. Chauvin, P. Ferrand, M. Cen & B. Schavello - " Décollement tournant dans les pompes et les compresseurs " - *La Houille Blanche* - n°1, p. 69-75 - février 1980.
- [4] I. J. Day - " Stall inception in axial Flow Compressors " - *Journal of turbomachinery* - vol 115, p 1-9 - january 1993.
- [5] R. Larguier - " Méthodes Expérimentales pour l'Analyse Instationnaire des Ecoulements dans les Turbomachines " - *Revue Française de Mécanique* - n° 1983-2 - p. 13-32[5]
- [6] N. M. McDougall, N. A. Cumpsty & T. P. Hynes - " Stall Inception in Axial Compressors " - *ASME - Journal of Turbomachinery* - Vol. 112, p. 116-125 - january 1990.
- [7] M. Inoue, M. Kroumaru, T. Iwamoto & Y Ando - " Detection of a Rotating Stall Precursor in Isolated Axial Flow Compressor Rotors " - *ASME - Journal of Turbomachinery* - Vol. 113, p. 281-289 - april 1991.
- [8] J. D. Paduano, A. H. Epstein, L. Valavani, J. P. Longley, E. M. Greitzer & G. R. Guenette - " Active Control of rotating Stall in a Low-Speed Axial Compressor " - *ASME - Journal of Turbomachinery* - Vol. 115, p. 48-56 - january 1993.
- [9] I. J. Day - " Active Suppression of Rotating Stall and Surge in Axial Compressors " - *ASME - Journal of Turbomachinery* - Vol. 115, p. 40-47 - january 1993.

- [10] H. W. Emmons, C. E. Pearson & H. P. Grant - " Compressor Surge and Stall Propagation " - *Transaction of the ASME* - Vol. 77, p. 455-467 - N°4 - May 1955.
- [11] A. H. Stenning, A. R. Kriebel & S. Montgomery - " Stall Propagation in Axial Compressors " - NACA TN 3580 - May 1955.
- [12] W. R. Sears - " Rotating Stall in Axial Compressors " - *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik* - Birkhäuser Verlag AG, Basel, Switzerland - Vol. 35 - N°6 - p. 429-455 - 1955.
- [13] J Fabri & R. Siestrunck - "Rotating Stall in Axial Flow Compressors " - *Journal of the Aeronautical Sciences* - p. 805-812 - November 1957.
- [14] A. R. Kriebel, B. S. Seidel & R. G. Schwind - " Stall Propagation in Cascade of Airfoils " - NACA TN 4134 - 1958.
- [15] A. H. Stenning & A. R. Kriebel - " Stall Propagation in Cascade of airfoils" - *Transaction of the ASME* - Vol. 80, p. 777-790 - May 1958.
- [16] H. Takata & S. Nagano - " Nonlinear analysis of rotating Stall " - *ASME - Journal of Engineering for Power* - Vol. 84, p. 279-293 - october 1972.
- [17] N. Orner - " Prédiction du Décrochage Tournant dans les Compresseurs Axiaux " - Thèse - Institut von Karman de Dynamique des Fluides, Faculté Polytechnique de Mons - Mai 1976.
- [18] P. Ferrand - " Etude theorique des instabilités de l'écoulement dans les compresseurs axiaux " - Thèse - U. E. R. Institut de Mécanique des Fluides, Université d'Aix, Marseille II - avril 1980.
- [19] F. K. Moore & E. M. Greitzer - " A Theory of Post-Stall Transients in axial Compression Systems : Part I - development of Equations " - *ASME - Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* - Vol. 108, p. 68-76 - january 1986.

- [20] F. E. McCaughan - " Application of bifurcation Theory to Axial Flow Compressor instability - *ASME - Journal of Turbomachinery* - Vol. 111, p. 426-433 - october 1989.
- [21] Y. N. Chen, U. Haupt, M. Rautenberg - " Rossby waves and associated transient rotating stall vortices in radial and axial turbocompressors " - *Z. Fluwiss. Weltraumforsch.* 14 (1990) - p. 233-246 - Springer-Verlag, Berlin - 1990.
- [22] P. R. Spalart - " Two Extensions of Vortex Method " - *AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting* - p. 1-10 - january 9-12, 1984/Reno, Nevada.
- [23] D. Buisine - " Modélisation du Grand Décrochage dans les Compresseurs Axiaux " - Von Karman Institute for Fluids Dynamics - Note technique 164 - février 1988.
- [24] F. Davoudzadeh, N.-S. Liu, S. J. Shamroth and S. J. Thorens - " Navier-Stokes Study of Rotating Stall in Compressor Cascades " - *AIAA Journal* - Vol. 28, NO. 3, p. 492-498 - march 1990.
- [25] J.F. Escuret & V. Garnier - " Numerical simulations of Surge and Rotating Stall in Multi-stage Axial-flow compressors - *AIAA paper 94-3202* - june 1994.
- [26] E. Outa, D. Kato and K. Chiba - " An N-S Simulation of Stall Cell Behavior in a 2-D Compressor Rotor-Stator System at Various Loads " - *ASME paper 94-GT-257* - june 1994.
- [27] J. Pedlosky - *Geophysical Fluid Dynamics* - Springer-Verlag - 1979.
- [28] H.P. Greenspan - *The Theory of Rotating Fluids* - Breukelen Press, Brokline - 1990.
- [29] S. Laroze - *Résistance des Matériaux et Structures* - Tome 1 - *Milieux Continus Solides, Plaques et Coques* - Eyrolles Masson - 1984.
- [30] P. Germain & P.Muller - *Introduction à la Mécaniques des Milieux Continus* - Masson - 1986.

[31] M. Sedille - *Ventilateurs et Compresseurs Centrifuges et Axiaux* - tome I - Eyrolles . Masson et Cie - Paris, 1973.

[32] M. Sedille - *Turbomachines Hydrauliques et Thermiques* - tome II - Masson et Cie - Paris, 1967.

[33] R. H. Sabersky, A. J. Acosta & E. J. Hauptmann - *Fluid Flow, A First Course in Fluid Mechanics* - second edition - Macmillan - 1973.

[34] Pfleiderer/Petermann - *Strömungsmaschinen* - Vierte Auflage - Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York - 1972.

[35] K. V. Truong - " Modèle de Décrochage 2-D Basé sur la Notion de Bifurcation de Hopf " - *La Recherche Aéronautique* - p. 55-65 - n°4 (Juillet-Août) - 1993.

[36] J. S. Darrozes & C. François - *Lecture Notes in Physics 163 - Mécanique des Fluides Incompressibles* - Springer - Verlag, Berlin Heidelberg NewYork - 1982.

[37] R. Kh. Zeytounian - *Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens* - Springer-Verlag, Berlin - 1994.

[38] J. P. Veuillot - *Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale* - Thèse, Université de Paris 6 - 1975.

[39] H. Cornille & P. A. Bois - " A Mathematical Modeling of Rotating Waves in Axial and Radial Compressors " - *Archive of Applied Mechanics*, vol 67, p. 2-14, 1996.

## ANNEXE 1

### Ondes de Rossby dans un fluide incompressible Stratifié

Les ondes de Rossby se propagent dans les fluides en mouvement dans un repère non galiléen, lorsque ce repère, soit  $O,x,y,z$ , est en rotation  $\vec{\Omega}$  par rapport à un repère absolu et si  $\vec{\Omega}$ , projeté sur  $O,x,y,z$ , dépend de ces variables :  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(x,y,z)$ .

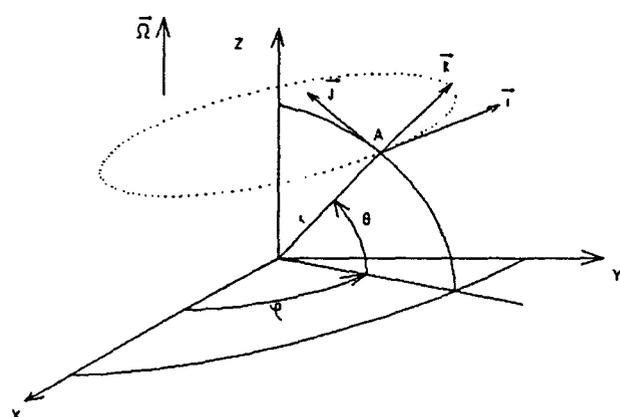
Un exemple caractéristique de cette situation est celui des ondes de Rossby dans les écoulements géophysiques : par suite d'approximations conduisant à représenter le repère local comme cartésien ( $O,x,y,z$ ,  $z$  vertical) et à tenir compte de la manière la plus économique de la rotondité de la Terre on obtient une expression de  $\vec{\Omega}$  dépendant de la latitude, soit  $\vec{\Omega}(y)$  (voir figure). Cette approximation, dite "du plan  $\beta$ ", caractérise les écoulements géostrophiques.

On peut obtenir les ondes de Rossby dans plusieurs modélisations : par exemple les écoulements en eau peu profonde (l'équation de dispersion est alors liée aux conditions aux limites) et les écoulements en fluide continuellement stratifié (écoulements atmosphériques). C'est cette dernière analyse qui est suivie ici, l'équation de dispersion étant alors liée uniquement à la forme (sinusoïdale) des solutions propres recherchées.

Par souci de compréhension, on présente un modèle d'écoulement incompressible, ce qui permet de ne pas considérer la thermodynamique du milieu. La démonstration qui suit est calquée sur celle de Pedlosky [27].

L'écoulement s'effectue dans un référentiel en rotation (vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ ), autour d'une sphère (la Terre).

### système de coordonnées utilisé



$\varphi$  : longitude  
 $\theta$  : latitude  
 $r$  : altitude mesurée à partir du centre de la terre

On désigne par  $u, v, w$  les composantes de la vitesse dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les équations d'Euler dans les coordonnées sphériques s'écrivent :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u w}{r} - \frac{u v}{r} \operatorname{tg} \theta - 2 \Omega v \sin \theta + 2 \Omega v \cos \theta + \frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad (Z1)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u v}{r} + \frac{u^2}{r} \operatorname{tg} \theta + 2 \Omega u \sin \theta + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (Z2)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2 \Omega u \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + g = 0 \quad (Z3)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho \left[ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2 w}{r} \right] = 0 \quad (Z4)$$

### définition du repère local et adimensionnement

On étudie les écoulements au voisinage d'un point A de la surface de la Terre dont la position est définie par  $(0, \theta_0, R)$ .  $R$  est le rayon de la Terre. Les coordonnées curvilignes issues de ce point (voir figure) sont :

$$x = (R \cos \theta_0) \varphi ; y = R(\theta - \theta_0) ; z = r - R. \quad (Z5)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = R \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial \theta} = R \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \quad (Z6)$$

### normalisation des grandeurs

L : longueur caractéristique du mouvement dans le plan x,y.

d : longueur caractéristique du mouvement suivant z.

U : vitesse caractéristique du mouvement

$\rho_0$  : masse volumique caractéristique du fluide

On introduit dans les équations les grandeurs normalisées (surlignées) définies comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} L = x ; \bar{y} L = y ; \bar{z} d = z ; \bar{t} \frac{L}{U} = t \\ \bar{u} U = u ; \bar{v} U = v ; \bar{w} \frac{d}{L} U = w ; \bar{\rho} \rho_0 = \rho \end{aligned} \right\} \quad (Z7)$$

L'ordre de grandeur du gradient de pression est obtenu quand la vitesse relative est nulle. On pose  $u = v = w = 0$  dans l'équation (Z3) et il vient :

$$\Delta \bar{p} = \frac{\Delta p}{g \frac{d}{L} \rho_0} \quad (Z8)$$

Dans les écoulements considérés, les paramètres :

$$\eta = \frac{L}{R} \text{ et } \delta = \frac{d}{L} \quad (Z9)$$

sont petits. Avec l'hypothèse  $\eta$  petit on a :

$$\sin \theta = \sin \theta_0 (1 + \eta \bar{y} \cot \theta_0 + O(\eta^2))$$

$$\cos \theta = \cos \theta_0 (1 - \eta \bar{y} \operatorname{tg} \theta_0 + O(\eta^2))$$

L'équation (Z3) devient :

$$\delta^2 \frac{d\bar{w}}{dt} - \eta \delta \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{1 + \eta \delta \bar{z}} - \frac{\delta}{R_0} \bar{u} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_0} - \eta \bar{y} \right) + F^{-2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + F^{-2} = 0 \quad (Z10)$$

où  $R_0 = \frac{U}{2 \Omega L \sin \theta_0}$  est le nombre de Rossby de l'écoulement

et F le nombre de Froude,  $F = \frac{U}{\sqrt{g d}}$ .

L'approximation géostrophique conduit à considérer les passages à la limite suivants :

$$\lambda_0 = F^{-2} R_0^3 = O(1) ; \eta \longrightarrow 0 ; \delta \longrightarrow 0 ; \frac{\eta}{R_0} = O(1)$$

$$\text{avec } \beta = \frac{\eta}{R_0 \operatorname{tg} \theta_0}$$

L'équation (Z1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{\eta\delta}{1+\eta\delta z} \bar{u} \bar{w} + \frac{\eta}{1+\eta\delta z} \bar{u} \bar{v} \operatorname{tg} \theta_0 (1+O(\eta)) - \bar{v} \left( \frac{1}{R_0} + \beta \bar{y} + O(\eta) \right) + \\ + \frac{\delta}{R_0} \bar{w} \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} (1+O(\eta)) + \frac{\lambda_0}{R_0^3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} (1+O(\eta)) = 0 \quad (Z11) \end{aligned}$$

L'équation (Z2) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{\eta}{1+\eta\delta z} \bar{u} \bar{v} + \frac{\eta}{1+\eta\delta z} \bar{u}^2 \operatorname{tg} \theta_0 (1+O(\eta)) + \bar{u} \left( \frac{1}{R_0} + \beta \bar{y} + O(\eta) \right) \\ + \frac{\lambda_0}{R_0^3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} (1+O(\eta)) = 0 \quad (Z12) \end{aligned}$$

On étudie le système quand  $\delta \longrightarrow 0$ .

L'effet  $\beta$  apparaît dans le terme de Coriolis des équations (Z11) et (Z12). Ce terme  $\beta \bar{y}$  provient du développement de  $\sin \theta$  associé au nombre de Rossby de l'écoulement. Il est la première manifestation du rayon de courbure du plan méridien dans les équations.

L'équation (Z3) devient :

$$\begin{aligned} \delta^2 \frac{d\bar{w}}{dt} - \eta \delta \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{1+\eta\delta z} - \frac{\delta}{R_0} \bar{u} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_0} - \eta \bar{y} + O(\eta^2) \right) + \\ + \frac{\lambda_0}{R_0^3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\lambda_0}{R_0^3} = 0 \quad (Z13) \end{aligned}$$

Le premier terme significatif de (Z13),  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + 1 = 0$ ,

représente l'approximation hydrostatique. On cherche  $\bar{p} = P + \epsilon_1 p'$  et  $\bar{\rho} = R + \epsilon_2 r'$ . (Z11), (Z12) et (Z13) montrent  $P=P(z)$  et  $R=R(z)$  avec  $P' + R = 0$ . On introduit ces développements dans (Z11), il vient :

$$\frac{\lambda_0}{R_0^3} \frac{\epsilon_1}{R + \epsilon_2 r'} \frac{\partial p'}{\partial x} (1+O(\eta)) - \bar{v} \frac{1}{R_0} = O(1).$$

On en déduit  $\epsilon_1 = R_0^2$  dans le développement de  $\bar{p}$ . On développe  $\bar{p}$  par rapport aux puissances entières de  $R_0$  (soit  $\epsilon_2 = R_0$ ) :

$$\bar{p} = P + R_0 r_1 + R_0^2 r_2 + R_0^3 r_3 + O(R_0^4) \quad (Z14)$$

(Z13) s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{\rho} + O(R_0^3) = 0$$

puis on introduit (Z14), il vient :

$$\frac{\partial P}{\partial z} + R + R_0 r_1 + R_0^2 \left[ \frac{\partial p'}{\partial z} + r_2 \right] = O(R_0^3) \quad (Z15)$$

(Z15) entraîne  $r_1 = 0$ . On cherche en définitive  $\bar{p}$  et  $\bar{\rho}$  sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= P(z) + R_0^2 R(z) \left[ p_0 + R_0 p_1 + O(R_0^2) \right] \\ \bar{\rho} &= R(z) \left[ 1 + R_0^2 \rho_0 + O(R_0^3) \right] \\ \text{où : } r_2 &= R(z) \rho_0 \text{ et } p' = R(z) p_0 \end{aligned} \right\} \quad (Z16)$$

On développe les composantes de la vitesse par rapport aux puissances entières de  $R_0$  :

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u_0 + R_0 u_1 + O(R_0^2) \\ \bar{v} &= v_0 + R_0 v_1 + O(R_0^2) \\ \bar{w} &= w_0 + R_0 w_1 + O(R_0^2)\end{aligned}$$

Le système (Z11), (Z12), (Z13), (Z4) s'écrit à l'ordre  $R_0^2$  :

$$\left. \begin{aligned} -v_0 + \lambda_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 0 \\ u_0 + \lambda_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(R \rho_0)}{\partial z} + R \rho_0 &= 0 \\ w_0 \frac{dR}{dz} + R \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (Z17)$$

Les deux premières équations de (Z17) constituent l'approximation géostrophique. En éliminant  $p_0$  entre ces deux équations, il vient :

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (Z18)$$

De sorte que la quatrième équation de (Z17) fournit :

$$\frac{\partial(R w_0)}{\partial z} = 0 \quad (Z19)$$

$w_0$  est nul en  $\bar{z} = 0$ , (Z19) implique :

$$w_0 = 0 \quad (Z20)$$

Pour obtenir les équations fournissant  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$ , il est nécessaire d'écrire le développement des équations à l'ordre  $R_0^3$ . Les équations satisfaites par  $u$  et  $v$  s'écrivent :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - v_1 - \beta \bar{y} v_0 + \lambda_0 \left[ \frac{\partial p_1}{\partial x} + \operatorname{tg} \theta_0 \bar{y} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right] = 0 \quad (Z21)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + u_1 + \beta \bar{y} u_0 + \lambda_0 \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0 \quad (Z22)$$

L'effet  $\beta$  peut être mis en évidence dans l'équation du tourbillon. pour cela on développe d'abord l'équation de continuité (Z4) à l'ordre suivant. On pose  $\frac{dR}{dz} = R'$ , il

vient :

$$w_1 R' + R \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + \operatorname{tg} \theta_0 \left[ \bar{y} \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \right] \right] = 0$$

que l'on peut encore écrire :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = \operatorname{tg} \theta_0 \left[ v_0 - \bar{y} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] - \frac{1}{R} \frac{\partial (w_1 R)}{\partial z} \quad (Z23)$$

On désigne par  $\omega_0$  la composante normale du rotationnel. En éliminant  $p_0$  entre les deux premières équations de (Z17), il vient :

$$\omega_0 = \left[ \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = \lambda_0 \left[ \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2} \right] = \lambda_0 \Delta_n p_0 \quad (Z24)$$

après élimination de  $p_1$  entre les équations (Z21) et (Z22), il vient :

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \beta v_0 -$$

$$- \lambda_0 \operatorname{tg} \theta_0 \left[ \frac{\partial p_0}{\partial x} + \bar{y} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad (Z25)$$

Utilisons (Z23) pour remplacer  $\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}$ , et remplaçons  $\frac{\partial p_0}{\partial x}$

et  $\frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial y}$  à l'aide des deux premières équations de (Z17), il

vient :

$$\left[ \frac{d}{dt} \right]_0 (\omega_0 + \beta \bar{y}) = \frac{1}{R} \frac{\partial (w_1 R)}{\partial z}, \quad (Z26)$$

$$\text{où } \left[ \frac{d}{dt} \right]_0 = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}.$$

L'équation de la composante normale du rotationnel (Z26) constitue une relation entre  $p_0$  (par l'intermédiaire de  $u_0$  et  $v_0$ ) et  $w_1$ .

L'incompressibilité du fluide stratifié fournit la relation supplémentaire  $\frac{d\bar{\rho}}{dt} = 0$ . Compte tenu de (Z16), on obtient en

suivant l'enchaînement des calculs effectués pages 43 et suivantes l'équation satisfaite par le tourbillon :

$$\left[ \frac{d}{dt} \right]_0 (\omega_0 + \beta \bar{y}) = 0. \quad (Z27)$$

qui conduit ensuite à l'équation de dispersion :

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{-\beta}{k^2 + h^2} \quad (Z28)$$

L'équation (Z28) montre que la propagation de ces ondes le

long de l'axe des  $\bar{x}$  s'effectue uniquement vers les  $\bar{x}$  négatifs : la propagation se fait toujours dans le sens est vers l'ouest.

Les ondes de Rossby ne sont pas spécifiques aux écoulements atmosphériques, elles sont observées dans d'autres écoulements : par exemple écoulements en eau peu profonde, écoulements océaniques, écoulements confinés à l'intérieur d'un cylindre dont un fond est faiblement incliné pour n'en citer que quelques uns (voir, par exemple, [27] et [28]). La démonstration précédente est un cas particulier qui a pour unique but de donner une description des ondes de Rossby adaptée à notre cas d'étude des turbomachines en fluide parfait incompressible.

## ANNEXE 2

### Repère de Darboux-Ribaucour : Eléments de définition

Un trièdre associé à une courbe tracée sur une surface est un trièdre de Darboux-Ribaucour : le premier vecteur unitaire du trièdre est le vecteur tangent à la courbe au sens de Frenet, le second vecteur est pris normal au premier et tangent à la surface, le troisième est normal aux deux autres et, par construction, normal à la surface. Le sens du second vecteur est arbitraire, le troisième peut donc être orienté d'un côté ou de l'autre de la surface.

Cette annexe se limite à la définition d'un trièdre de Darboux-Ribaucour associé à une surface définie par deux familles de lignes orthogonales entre elles. Pour plus de détails on pourra se reporter à [29].

#### Notations : repère de Frenet

P : point courant de la courbe

s : abscisse curviligne de P

La représentation paramétrique de la courbe dans un repère orthonormé  $\{0, x, y, z\}$  est :

$$\vec{OP} = \begin{cases} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{cases}$$

On appelle  $x' = \frac{dx}{ds}$  et  $x'' = \frac{d^2x}{ds^2}$ . Le rayon de courbure  $R_F$  est défini par :

$$R_F = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}}$$

$\frac{1}{R_F}$  est la courbure. La torsion est définie par :

$$\frac{1}{T_F} = R_F^2 D \quad \text{avec } D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

$T_F$  est le rayon de torsion.

Le premier vecteur du repère de Frenet est le vecteur tangent à la courbe  $\vec{e} = \frac{d\vec{OP}}{ds}$ . Le second vecteur est la normale principale  $\vec{n} = R_F \frac{d\vec{e}}{ds}$ . Le troisième vecteur est la binormale  $\vec{b}$  telle que le trièdre  $\vec{e}, \vec{n}, \vec{b}$  est direct. Les formules de Frenet s'écrivent :

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_F} & 0 \\ -\frac{1}{R_F} & 0 & \frac{1}{T_F} \\ 0 & -\frac{1}{R_F} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \quad (V1)$$

### Repère de Darboux-Ribaucour associé à une surface définie par deux familles de courbes orthogonales

$\{0, x, y, z\}$  est un repère orthonormé fixe et  $S$  une surface de point générique  $P(x, y, z)$  dont nous donnons une représentation paramétrique par les trois fonctions suivantes :

$$x = x(\alpha_1, \alpha_2) ; y = y(\alpha_1, \alpha_2) ; z = z(\alpha_1, \alpha_2)$$

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les coordonnées curvilignes du point  $P$  sur la surface  $S$ .

On suppose :

- que toutes les fonctions de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont pourvues de dérivées partielles continues, d'ordre aussi élevé que nécessaire. Les éventuelles singularités de la surface  $S$  sont exclues.
- que la correspondance entre les points  $P$  et les couples  $(\alpha_1, \alpha_2)$  est biunivoque.

- que les lignes coordonnées de S :  $\mathcal{L}_1$  où  $\alpha_1 = \text{cte}$  et  $\mathcal{L}_2$  où  $\alpha_2 = \text{cte}$ , constituent des familles orthogonales.

On appelle :

- $s_1$  et  $s_2$ , les abscisses curvilignes de P sur  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ .
- $\beta_1$  et  $\beta_2$ , les dérivées partielles :  $\beta_1 = \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_1}$ ,  $\beta_2 = \frac{\partial s_2}{\partial \alpha_2}$

Ces notations permettent d'écrire :

$$\frac{\partial \vec{OP}}{\partial \alpha_1} = \beta_1 \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{OP}}{\partial \alpha_2} = \beta_2 \vec{e}_2 \quad (V2)$$

$\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont unitaires et tangents en P à  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ . Ils sont perpendiculaires car les familles de lignes  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont orthogonales. Le troisième vecteur est obtenu par :

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \quad (V3)$$

$\{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  est un repère de Darboux-Ribaucour associé à la surface S définie par les deux familles de courbes orthogonales  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ .

On obtient les relations suivantes :

$$\frac{1}{\beta_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{G1}} & \frac{1}{R_{N1}} \\ -\frac{1}{R_{G1}} & 0 & \frac{1}{T_{G1}} \\ -\frac{1}{R_{N1}} & -\frac{1}{T_{G1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (V4)$$

et

$$\frac{1}{\beta_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_{G2}} & \frac{1}{R_{N2}} \\ -\frac{1}{R_{G2}} & 0 & \frac{1}{T_{G2}} \\ -\frac{1}{R_{N2}} & -\frac{1}{T_{G2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}, \quad (V5)$$

où les différents éléments de la matrice sont :

$\frac{1}{R_G}$  : courbure géodésique,

$\frac{1}{R_N}$  : courbure normale,

$\frac{1}{T_G}$  : torsion géodésique.

$\frac{1}{R_G}$ ,  $\frac{1}{R_N}$  et  $\frac{1}{T_G}$  sont les éléments géodésiques de la ligne  $\mathcal{L}$  considérée.  $\frac{1}{R_G}$ ,  $\frac{1}{R_N}$  et  $\frac{1}{T_G}$  sont des quantités algébriques de dimension  $L^{-1}$ . Les éléments géodésiques sont déterminés à partir de la courbure et de la torsion au sens de Frenet de la ligne considérée :

$$\begin{cases} \frac{1}{R_G} = -\frac{\sin \gamma}{R_F} \\ \frac{1}{R_N} = \frac{\cos \gamma}{R_F} \\ \frac{1}{T_G} = \frac{1}{T_F} - \frac{d\gamma}{ds} \end{cases} \quad (V6)$$

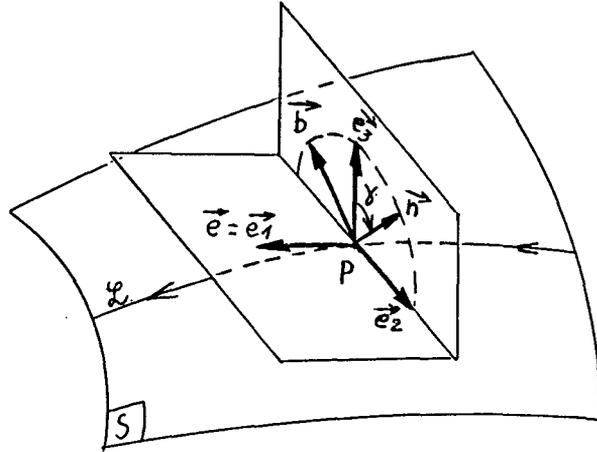


figure U1

Machine radiale : repère de Darboux-Ribaucour associé à la surface du moyeu.

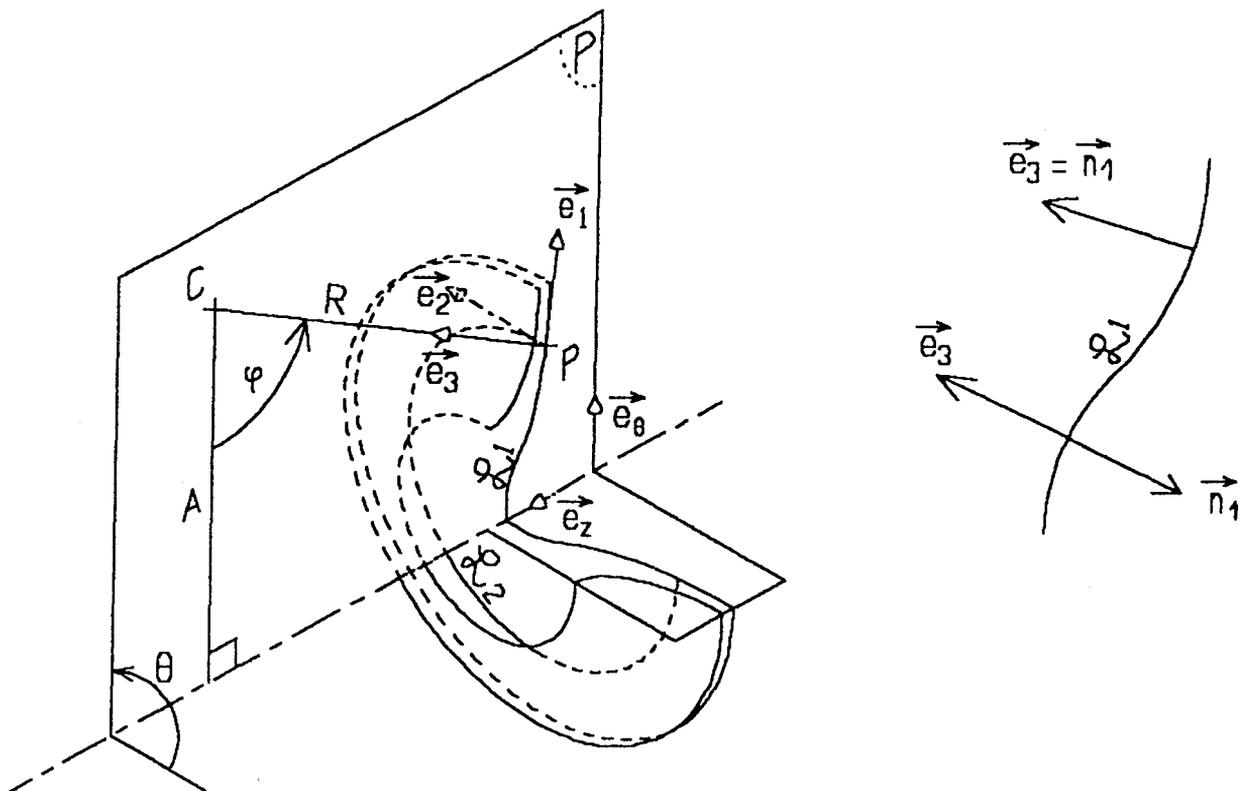


fig U2

La surface du plafond (figure U2) est définie par deux familles de courbes : la trace du plafond dans le plan méridien  $\mathcal{L}_1$ , et les cercles concentriques  $\mathcal{L}_2$  centrés sur l'axe de rotation du rotor. Ces deux familles de lignes sont orthogonales.  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont planes, leur torsion est nulle. La surface du moyeu est une surface de révolution. Cette propriété implique que  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont toujours dans le plan méridien. La normale  $\vec{n}_2$  est toujours dirigée vers l'axe de rotation.  $\vec{n}_1$  peut être orientée dans un sens ou dans l'autre suivant la concavité ou la convexité de la surface. Le sens de parcours sur  $\mathcal{L}_1$  est choisi de l'axe de rotation vers l'extérieur de la roue. Le sens de parcours de  $\mathcal{L}_2$  est choisi vers les  $\theta$  croissants. Ce choix définit le repère de Darboux-Ribaucour  $\{P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  tracé sur la figure U2. Il en découle :

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_3 &= \vec{n}_1 \text{ lorsque la surface est concave} \\ \vec{e}_3 &= -\vec{n}_1 \text{ lorsque la surface est convexe} \end{aligned} \right\} \quad (V7)$$

### ANNEXE 3

#### Machine radiale : Eléments de calculs

##### définition du repère local

Le rayon de courbure et la latitude sont deux paramètres géométriques qui sont nécessaires à la modélisation qui conduit à la solution des ondes de Rossby. Pour faire apparaître les paramètres analogues, La figure X1 montre le paramétrage retenu pour définir la surface du plafond.

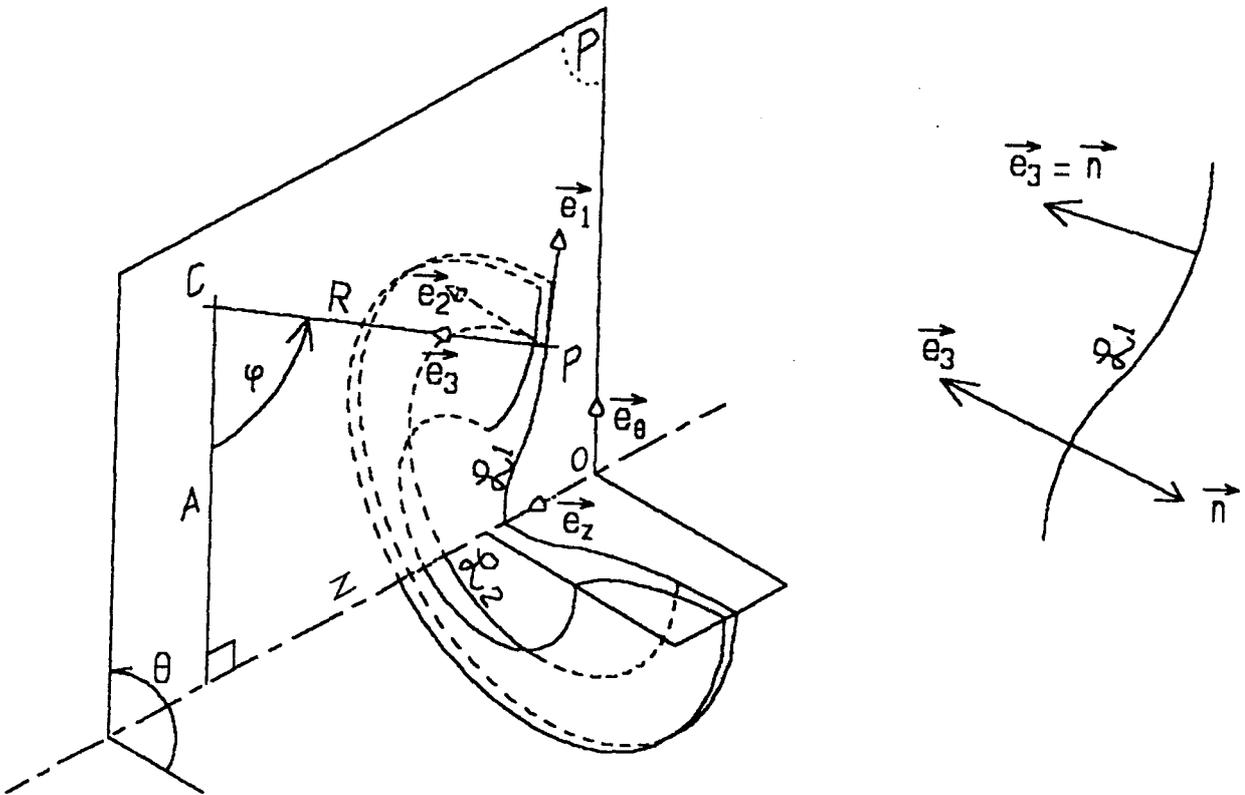


figure X1 : paramétrage de la surface du moyeu et définition de son repère de Darboux-Ribaucour.

La surface du moyeu est de révolution. Sa trace dans le plan méridien la définit complètement. Soit  $s$  l'abscisse curviligne de cette trace. Un point  $P$  de la surface est repéré par les deux paramètres  $s$  et  $\theta$ . On appelle  $\varphi = \varphi(s)$ ,

$A=A(\varphi)$ ,  $R=R(\varphi)$  et  $Z=Z(\varphi)$  les quatre fonctions connues qui définissent la trace du moyeu dans le plan méridien.

La position d'un point courant P de la surface est alors définie par :

$$\vec{OP} = Z \vec{e}_z + A \vec{e}_\theta - R \vec{n}, \quad (Y1)$$

$\vec{n}$  est ici la normale au sens de Frenet (orientée vers le centre de courbure). La normale unitaire  $\vec{e}_3$  du repère de Darboux-Ribaucour associée à la surface du moyeu est égale à  $\vec{n}$  si la surface est concave, et vaut  $-\vec{n}$  si la surface est convexe (la normale  $\vec{e}_3$  du repère de Darboux-Ribaucour associée au moyeu reste toujours d'un même côté de la surface quelque soit l'abscisse s). On pose  $R = \Gamma R$  avec  $R > 0$  et  $\Gamma = +1$  si  $\vec{e}_3 = \vec{n}$  et  $\Gamma = -1$  si  $\vec{e}_3 = -\vec{n}$ . Le signe donné par  $\Gamma$  indique la concavité ou la convexité de la surface. Il vient :

$$\vec{OP} = Z \vec{e}_z + A \vec{e}_\theta - \Gamma R \vec{e}_3, \quad (Y2)$$

et la position d'un point quelconque M est donnée par :

$$\vec{OM} = Z \vec{e}_z + A \vec{e}_\theta + (z - \Gamma R) \vec{e}_3, \quad (Y2)$$

Il faut maintenant exprimer  $\vec{OM}$  dans la base du repère local de Darboux-Ribaucour  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . avec :

$$\vec{e}_z = -\cos\varphi \vec{e}_1 + \sin\varphi \vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = \sin\varphi \vec{e}_1 + \cos\varphi \vec{e}_3, \quad (Y3)$$

il vient :

$$\vec{OM} = (A \sin\varphi - Z \cos\varphi) \vec{e}_1 + (A \cos\varphi + Z \sin\varphi + z - \Gamma R) \vec{e}_3 \quad (Y4)$$

gradient d'une fonction scalaire  $g(\varphi, \theta, z)$

On a :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial g}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial g}{\partial z} dz \quad (Y5)$$

et

$$dg = \overrightarrow{\text{grad}} g \cdot d\overrightarrow{OM} \quad (Y6)$$

\* Détermination de  $d\overrightarrow{OM}$  :

$$\overrightarrow{OM} = (A \sin\varphi - Z \cos\varphi) \overrightarrow{e_1} + (A \cos\varphi + Z \sin\varphi + z - \Gamma R) \overrightarrow{e_3}$$

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} = & (A \sin\varphi - Z \cos\varphi) d\overrightarrow{e_1} + \\ & + (A' \sin\varphi + A \cos\varphi - Z' \cos\varphi + Z \sin\varphi) d\varphi \overrightarrow{e_1} + \\ & + (A \cos\varphi + Z \sin\varphi + z - \Gamma R) d\overrightarrow{e_3} + \\ & + [(A' \cos\varphi + Z' \sin\varphi - A \sin\varphi + Z \cos\varphi - \Gamma R') d\varphi + dz] \overrightarrow{e_3} \quad (Y7) \end{aligned}$$

A l'aide de la figure X1 on détermine  $d\overrightarrow{e_1}$  et  $d\overrightarrow{e_3}$  de la façon suivante :

$$d\overrightarrow{e_1} = d\varphi \overrightarrow{e_3} + \sin\varphi d\theta \overrightarrow{e_2} \quad (Y8)$$

$$d\overrightarrow{e_3} = -d\varphi \overrightarrow{e_1} + \cos\varphi d\theta \overrightarrow{e_2} \quad (Y9)$$

d'où :

$$d\overrightarrow{OM} = \begin{cases} (A' \sin\varphi - Z' \cos\varphi + \Gamma R - z) d\varphi \\ (A - (\Gamma R - z) \cos\varphi) d\theta \\ (A' \cos\varphi + Z' \sin\varphi - \Gamma R') d\varphi + dz \end{cases} \begin{matrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{matrix} \quad (Y10)$$

On a ensuite (figure X2) les relations géométriques suivantes :

$$\Gamma dR = dA \cos\varphi + dZ \sin\varphi, \text{ et} \quad (Y11)$$

$$dA \sin\varphi = dZ \cos\varphi \quad (Y12)$$

(Y11) peut s'écrire :

$$(A' \cos\varphi + Z' \sin\varphi - \Gamma R') d\varphi = 0 \quad (Y13)$$

et (Y12) peut s'écrire :

$$(A' \sin\varphi - Z' \cos\varphi) d\varphi = 0 \quad (Y14)$$

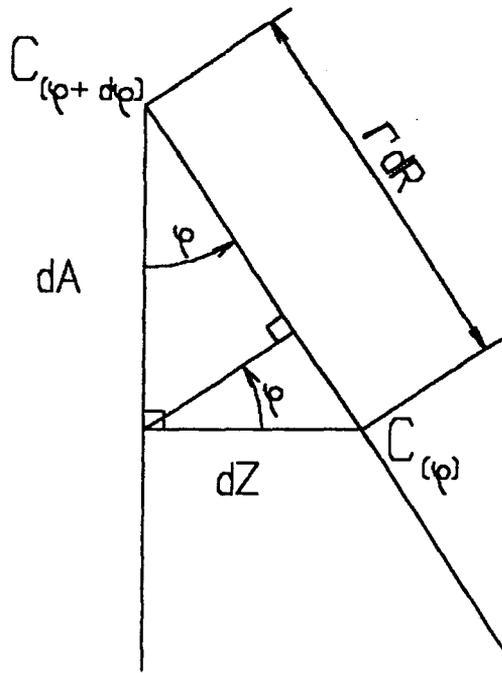


figure X2 : relations géométriques entre  $\Gamma dR$ ,  $dA$  et  $dZ$ .

Y(13) et Y(14) dans Y(10) donnent :

$$\vec{dOM} = \begin{cases} (\Gamma R - z) d\varphi \\ (A - (\Gamma R - z)\cos\varphi) d\theta \\ dz \end{cases} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix} \quad (Y15)$$

Par identification, on obtient avec (Y5), (Y6) et (Y15) :

$$\vec{\text{grad}} g = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma R - z} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{A - (\Gamma R - z)\cos\varphi} \frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{cases} \quad (Y16)$$

Détermination du gradient d'une fonction vectorielle

$$\vec{V} = u \vec{e}_1 + v \vec{e}_2 + w \vec{e}_3 \quad (Y17)$$

$$d\vec{V} = u d\vec{e}_1 + du \vec{e}_1 + v d\vec{e}_2 + dv \vec{e}_2 + dw \vec{e}_3 + w d\vec{e}_3 \quad (Y18)$$

avec :

$$d\vec{e}_1 = d\varphi \vec{e}_3 + \sin\varphi d\theta \vec{e}_2 \quad (Y8)$$

$$d\vec{e}_3 = -d\varphi \vec{e}_1 + \cos\varphi d\theta \vec{e}_2 \quad (Y9)$$

$$d\vec{e}_2 = -\cos\varphi d\theta \vec{e}_3 - \sin\varphi d\theta \vec{e}_1 \quad (Y19)$$

$$d\vec{V} = u(d\varphi \vec{e}_3 + \sin\varphi d\theta \vec{e}_2) + du \vec{e}_1 + \\ + v(-\cos\varphi d\theta \vec{e}_3 - \sin\varphi d\theta \vec{e}_1) + dv \vec{e}_2 + dw \vec{e}_3 + \\ + w(-d\varphi \vec{e}_1 + \cos\varphi d\theta \vec{e}_2)$$

$$d\vec{V} = \begin{cases} du - v \sin\varphi d\theta - w d\varphi & (\vec{e}_1) \\ dv + u \sin\varphi d\theta + w \cos\varphi d\theta & (\vec{e}_2) \\ dw + u d\varphi - v \cos\varphi d\theta & (\vec{e}_3) \end{cases}$$

$$d\vec{V} = \begin{cases} (\frac{\partial u}{\partial \varphi} - w)d\varphi + (\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin\varphi) d\theta + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi + (\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin\varphi + w \cos\varphi) d\theta + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ (\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u) d\varphi + (\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos\varphi) d\theta + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases} \quad (Y20)$$

On identifie les termes du [ grad  $\vec{V}$  ] en utilisant la relation :

$$(d\vec{V}) = [\text{grad } \vec{V}] (dOM)$$

d'où la matrice [ grad  $\vec{V}$  ] ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{rR-z} (\frac{\partial u}{\partial \varphi} - w) & \frac{1}{r-(rR-z)\cos\varphi} (\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin\varphi) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{rR-z} \frac{\partial v}{\partial \varphi} & \frac{1}{r-(rR-z)\cos\varphi} (\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin\varphi + w \cos\varphi) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{rR-z} (\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u) & \frac{1}{r-(rR-z)\cos\varphi} (\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos\varphi) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

### Détermination de la divergence d'un vecteur

On a  $\text{div } \vec{V} = \text{tr} [\text{grad } \vec{V}]$ , d'où :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{\Gamma R - z} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) + \frac{1}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \varphi + w \cos \varphi \right) + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} = & \frac{1}{\Gamma R - z} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} + \\ & + \frac{u \sin \varphi}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} - w \frac{A - 2(\Gamma R - z) \cos \varphi}{(\Gamma R - z)[A - (\Gamma R - z) \cos \varphi]} \end{aligned} \quad (Y21)$$

### Détermination du rotationnel d'un vecteur

soit  $\operatorname{Rot} \vec{V} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  sont déterminées par la matrice antisymétrique de [grad  $\vec{V}$ ].

$$\text{antisymétrique [grad } \vec{V}] = \frac{1}{z} \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\operatorname{Rot} \vec{V} = \begin{cases} \frac{1}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \varphi \right) - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\Gamma R - z} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right) \\ \frac{1}{\Gamma R - z} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \varphi \right) \end{cases} \quad (Y22)$$

### Détermination de la dérivée particulière dans le repère local

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + [\operatorname{grad} \vec{V}] (\vec{V}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma R - z} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) & \frac{1}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \varphi \right) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{\Gamma R - z} \frac{\partial v}{\partial \varphi} & \frac{1}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \varphi + w \cos \varphi \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{\Gamma R - z} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right) & \frac{1}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \varphi \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\Gamma R - z} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) + \frac{v}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \varphi \right) + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{\Gamma R - z} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{v}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \varphi + w \cos \varphi \right) + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{\Gamma R - z} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right) + \frac{v}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \varphi \right) + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

et avec  $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma R - z} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\Gamma R - z} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{v}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (Y23)$$

Les différentes composantes de l'accélération locales s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{du}{dt} - \frac{u w}{\Gamma R - z} - \frac{v^2 \sin \varphi}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \\ \gamma_2 &= \frac{dv}{dt} + \frac{u v \sin \varphi}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} + \frac{v w \cos \varphi}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \\ \gamma_3 &= \frac{dw}{dt} + \frac{u^2}{\Gamma R - z} - \frac{v^2 \cos \varphi}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (Y24)$$

### Détermination de l'accélération de Coriolis dans le repère local

La vitesse angulaire angulaire du rotor  $\vec{\Omega}$  s'écrit dans le repère local :

$$\vec{\Omega} = \begin{cases} -\Omega \cos\varphi \\ 0 \\ \Omega \sin\varphi \end{cases}$$

L'accélération de Coriolis  $\vec{\gamma}_c$  s'écrit :

$$\vec{\gamma}_c = 2 \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\text{vitesse relative}} = 2 \begin{cases} -\Omega \cos\varphi \\ 0 \\ \Omega \sin\varphi \end{cases} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_c = \begin{cases} -2\Omega v \sin\varphi \\ 2\Omega u \sin\varphi + 2\Omega w \cos\varphi \\ -2\Omega v \cos\varphi \end{cases} \quad (Y25)$$

#### Détermination de l'accélération d'entraînement dans le repère local

Dans l'étude la vitesse du rotor est constante, l'accélération d'entraînement  $\vec{\gamma}_e$  s'écrit dans le repère local :

$$\vec{\gamma}_e = \begin{cases} -\Omega^2[A-(\Gamma R-z)\cos\varphi] \sin\varphi \\ 0 \\ -\Omega^2[A-(\Gamma R-z)\cos\varphi] \cos\varphi \end{cases} \quad (Y26)$$

#### équation quantité de mouvement dans le repère local

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_e + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad } p} = \vec{0}$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{u w}{\Gamma R - z} - \frac{v^2 \sin\varphi}{A - (\Gamma R - z)\cos\varphi} - 2\Omega v \sin\varphi - \Omega^2[A - (\Gamma R - z)\cos\varphi] \sin\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{1}{\Gamma R - z} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (Y27)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u v \sin\varphi}{A - (\Gamma R - z)\cos\varphi} + \frac{v w \cos\varphi}{A - (\Gamma R - z)\cos\varphi} + 2\Omega u \sin\varphi + 2\Omega w \cos\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{1}{A - (\Gamma R - z)\cos\varphi} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad (Y28)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{u^2}{\Gamma R - z} - \frac{v^2 \cos \varphi}{A - (\Gamma R - z) \cos \varphi} - 2 \Omega v \cos \varphi - \Omega^2 [A - (\Gamma R - z) \cos \varphi] \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (Y29)$$

(Y27), (Y28), (Y29) sont les trois équations de projection respectivement sur  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ .

### passage aux coordonnées locales x, y, z

L'étude se fait au voisinage d'un point A de la surface repéré par  $\varphi = \varphi_0$  et  $\theta = 0$ . La position à partir de ce point est repérée par x suivant  $\vec{e}_1$ , par y suivant  $\vec{e}_2$  et par le z précédemment défini suivant  $\vec{e}_3$ . On relie y à  $\theta$  par :

$$y = (a - \Gamma R \cos \varphi_0) \theta, \quad (Y30)$$

$$\text{avec } a = A(\varphi_0) \text{ et } R = R(\varphi_0),$$

et on relie x à  $\varphi$  par la relation :

$$x = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \Gamma R \, d\varphi \quad (Y31)$$

Dans le système d'équations adimensionnées (celui qui conduit à la solution des ondes de Rossby), le rayon de courbure doit être constant jusqu'au développement à l'ordre  $\epsilon^3$ . Dans les deux autres cas envisagés il doit être constant jusqu'au développement à l'ordre  $\epsilon$ .

Le développement de Taylor de  $\Gamma R$  au voisinage de  $\varphi_0$  pour  $\varphi - \varphi_0$  petit s'écrit :

$$\Gamma R(\varphi) = \Gamma R(\varphi_0) + (\varphi - \varphi_0) \Gamma R'(\varphi_0) + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \Gamma R''(\varphi_0) + \dots$$

avec  $R = R(\varphi_0)$  et  $R' = R'(\varphi_0)$ . x s'écrit sous la forme :

$$x = \int_{\varphi_0}^{\varphi} (rR + (\varphi - \varphi_0)rR') d\varphi + \text{termes d'ordre supérieur}$$

La longueur caractéristique pour  $R$  est  $R$ , et celle pour  $x$  est  $L$ . On choisit  $x = \bar{x} L$  et  $R = \bar{r} R$ . L'intégration du premier terme de entraîne :

$$(\varphi - \varphi_0) = O\left(\frac{L}{R}\right) \quad (Y32)$$

L'ordre de grandeur de  $(\varphi - \varphi_0)rR'$  est égal à l'ordre de grandeur de  $(\varphi - \varphi_0)$  multiplié par l'ordre de grandeur  $rR'$ .

Il vient avec  $\bar{\varphi} = (\varphi - \varphi_0)\frac{R}{L}$  :

$$\frac{R}{R} = O(1) + O\left(\frac{L}{R} \bar{\varphi} \cdot \frac{R'}{R}\right)$$

Dans le cas qui nous intéresse, la variation du rayon de courbure due à  $\left(\frac{L}{R} \bar{\varphi} \cdot \frac{R'}{R}\right)$  doit être d'ordre  $\epsilon^\nu$ .  $\nu$  vaut 4 pour le cas des ondes de Rossby, et  $\nu$  vaut 2 pour les deux autres cas. Le petit paramètre  $\epsilon$  à considérer dans la géométrie est  $\frac{L}{R}$ , il vient :

$$\frac{R'}{R} = O(\epsilon^{\nu-1}). \quad (Y33)$$

L'équation (Y33) indique le taux de variation que doit avoir la fonction  $R(\varphi)$  par rapport à  $\epsilon$ . On peut l'interpréter géométriquement en observant qu'elle peut s'écrire également :

$$R = R(\epsilon^{\nu-1} \varphi). \quad (Y34)$$

La condition (Y34) est une condition nécessaire pour que soit valable la présente approximation. Le rayon de courbure de la surface du carter externe est du même ordre de grandeur que celui du moyeu. Au voisinage du point d'étude, la surface du carter externe doit avoir un centre

de courbure confondu avec celui du moyeu à un  $R \epsilon^{\nu}$  près, et avoir la même condition (Y33) sur son rayon de courbure.

La figure (X2) montre que  $A' = R' \cos \varphi$ . Dans la zone d'étude le  $\cos \varphi$  est d'ordre un. La condition (Y33) sur le rayon R implique que  $A/R$  est constant à un  $\epsilon^{\nu}$  près lui aussi.

### normalisation du système d'équations

Les coordonnées locales précédemment définies sont :

$$\left. \begin{aligned} x &= \Gamma R (\varphi - \varphi_0) \\ y &= (a - \Gamma R \cos \varphi_0) \theta \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (Y34)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \Gamma R \frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial \theta} = (a - \Gamma R \cos \varphi_0) \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (Y35)$$

La longueur caractéristique dans le plan  $x, y$  est  $L$ . la longueur caractéristique suivant la normale est  $d$ .  $L$  est la distance entre deux aubes.  $d$  est la distance entre le moyeu et le carter externe. les longueurs normalisées sont :

$$\bar{x} L = x ; \bar{y} L = y ; \bar{z} d = z ; \bar{a} R = a \quad (Y36)$$

Soit  $U$  une vitesse caractéristique du mouvement. On choisit le temps caractéristique  $t_c = L/U$ , le temps normalisé qui en découle est :

$$\bar{t} \frac{L}{U} = t \quad (Y37)$$

Le choix (Y36) et (Y37) entraîne les vitesses normalisées suivantes :

$$\bar{u} U = u ; \bar{v} U = v ; \bar{w} \frac{d}{L} U = w \quad (Y38)$$

Les paramètres géométriques sont :

$$\eta = \frac{L}{R} ; \delta = \frac{d}{L} \quad (Y39)$$

Les relations (Y35) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \Gamma R \frac{\partial}{\partial x} = \Gamma \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= (a - \Gamma R \cos \varphi_0) \frac{\partial}{\partial y} = \frac{R}{L} (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (Y40)$$

la conservation de la masse en écoulement incompressible s'écrit  $\text{div } \vec{V} = 0$ , en utilisant (Y21) il vient :

$$\begin{aligned} \frac{U}{R} \frac{1}{\Gamma - \eta \delta z} \Gamma \frac{R}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{U}{L} \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)}{\bar{a} - (\Gamma - \eta \delta z) \cos \varphi} \frac{R}{L} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{U}{d} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \\ + \frac{U}{R} \frac{\bar{u} \sin \varphi}{\bar{a} - (\Gamma - \eta \delta z) \cos \varphi} - \frac{U}{R} \frac{d}{L} \bar{w} \frac{\bar{a} - 2(\Gamma - \eta \delta z) \cos \varphi}{(\Gamma - \eta \delta z) [\bar{a} - (\Gamma - \eta \delta z) \cos \varphi]} = 0 \end{aligned}$$

qui s'écrit après simplification :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \Gamma \eta \delta z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \eta \bar{u} \frac{\sin \varphi}{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi} - \\ - \eta \delta \Gamma \bar{w} \frac{\bar{a} - 2\Gamma (1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi}{(1 - \Gamma \eta \delta z) (\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta z) \cos \varphi)} = 0 \quad (Y41) \end{aligned}$$

La conservation de la quantité de mouvement en projection sur  $\vec{e}_1$  s'écrit en variables normalisées :

$$\frac{U^2}{L} \frac{d\bar{u}}{dt} - \frac{d}{L} \frac{U^2}{R} \frac{\bar{u} \bar{w}}{\Gamma - \eta \delta z} - \frac{U^2}{R} \frac{\bar{v}^2 \sin \varphi}{\bar{a} - (\Gamma - \eta \delta z) \cos \varphi} - 2 \Omega U \bar{v} \sin \varphi -$$

$$- \Omega^2 R [\bar{a} - (\Gamma - \eta \delta \bar{z}) \cos \varphi] \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{1}{R} \frac{1}{\Gamma - \eta \delta \bar{z}} \Gamma \frac{R}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad (Y42)$$

Il faut à ce stade normaliser le gradient de pression. Un maximum est obtenu quand la vitesse relative est nulle, l'équation précédente implique :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 (\rho \Omega^2 L R (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)), \quad (Y43)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide. D'où une variation de pression normalisée sur la longueur  $L$  :

$$\bar{\Delta p} = \frac{\Delta p}{L \rho \Omega^2 R (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)} \quad (Y44)$$

Après avoir défini le paramètre cinématique  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{U}{\Omega R (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)} \quad (Y45)$$

et en utilisant (Y44) , (Y42) devient :

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{1}{\eta} (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{u}}{dt} - \alpha^2 \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \sin \varphi}{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}) \cos \varphi} \bar{v}^2 - \alpha^2 \Gamma \delta \frac{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0}{1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}} \bar{u} \bar{w} - \\ - \alpha^2 \bar{v} \sin \varphi - \frac{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}) \cos \varphi}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \sin \varphi + \frac{1}{1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad (Y46) \end{aligned}$$

Les deux autres équations de conservation de la quantité de mouvement (Y27) et (Y28) deviennent :

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{1}{\eta} (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{v}}{dt} + \alpha^2 \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \sin \varphi}{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}) \cos \varphi} \bar{u} \bar{v} + \alpha^2 \delta \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \cos \varphi}{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}) \cos \varphi} \bar{v} \bar{w} + \\ + \alpha^2 \bar{u} \sin \varphi + \alpha \delta^2 \bar{w} \cos \varphi + \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)}{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}) \cos \varphi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (Y47) \end{aligned}$$

$$\alpha^2 \frac{\delta}{\eta} (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{w}}{dt} + \alpha^2 \Gamma \frac{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0}{1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}} \bar{u}^2 - \alpha^2 \frac{(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \cos \varphi}{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}) \cos \varphi} \bar{v}^2 -$$

$$- \alpha^2 \bar{v} \cos \varphi - \frac{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}) \cos \varphi}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \cos \varphi + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (Y48)$$

La première équation de (Y34) permet d'écrire :

$$\varphi = \varphi_0 + \eta \Gamma \bar{x} \quad (Y49)$$

$\eta$  est petit dans l'étude, on développe  $\sin \varphi$  et  $\cos \varphi$  de la façon suivante :

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 [1 + \eta \Gamma \bar{x} \cot \varphi_0 - \eta^2 \frac{\bar{x}^2}{2} - \eta^3 \Gamma \frac{\bar{x}^3}{6} \cot \varphi_0 + O(\eta^4)] \quad (Y50)$$

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0 [1 - \eta \Gamma \bar{x} \operatorname{tg} \varphi_0 - \eta^2 \frac{\bar{x}^2}{2} + \eta^3 \Gamma \frac{\bar{x}^3}{6} \operatorname{tg} \varphi_0 + O(\eta^4)]$$

On appelle  $\epsilon$  le petit paramètre géométrique, et on étudie le cas où  $\epsilon = \eta = \delta \ll 1$ . Les différents rapports de (Y41), (Y46), (Y47) et (Y48) nécessaires à l'étude s'écrivent :

$$\frac{1}{1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}} = 1 + \epsilon^2 \Gamma \bar{z} + O(\epsilon^4)$$

$$\frac{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0}{1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}} = \bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0 + \epsilon^2 \Gamma \bar{z} (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) + O(\epsilon^4)$$

$$\frac{\bar{a} - \Gamma (1 - \Gamma \eta \delta \bar{z}) \cos \varphi}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \cos \varphi = \cos \varphi_0 + \epsilon \bar{x} \sin \varphi_0 \left[ \frac{\cos \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} - \Gamma \right] +$$

$$+ \epsilon^2 \left\{ \frac{\bar{x}^2}{2} \left[ \Gamma \frac{\cos^2 \varphi_0 - 2 \sin^2 \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} - \cos \varphi_0 \right] + \bar{z} \frac{\cos^2 \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \right\} +$$

$$+ \epsilon^3 \bar{x} \sin \varphi_0 \left\{ \frac{\bar{x}^2}{2} \left[ \frac{\Gamma}{3} - \frac{7}{6} \frac{\cos \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \right] - 2 \Gamma \bar{z} \left[ \frac{\cos \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \right] \right\} + O(\epsilon^4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}-\Gamma(1-\Gamma\eta\delta\bar{z})\cos\varphi}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} \sin\varphi &= \sin\varphi_0 + \epsilon \bar{x} \left[ \Gamma \cos\varphi_0 + \frac{\sin^2\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} \right] + \\ &+ \epsilon^2 \sin\varphi_0 \left\{ \bar{x}^2 \left[ \frac{2}{3} \frac{\Gamma \cos\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} - 1 \right] + \bar{z} \frac{\cos\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} \right\} + \\ &+ \epsilon^3 \bar{x} \left\{ \bar{x}^2 \left[ -\frac{\Gamma}{6} \cos\varphi_0 + \frac{3\cos^2\varphi_0 - 4\sin^2\varphi_0}{6(\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0)} \right] - \bar{z} \left[ \frac{\Gamma \sin^2\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} \right] \right\} + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}-\Gamma(1-\Gamma\eta\delta\bar{z})\cos\varphi}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} &= 1 + \epsilon \bar{x} \frac{\sin\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} + \epsilon^2 \frac{\cos\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} \left[ \Gamma \frac{\bar{x}^2}{\bar{z}} + \bar{z} \right] + \\ &+ \epsilon^3 \bar{x} \frac{\sin\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} \left[ \Gamma \bar{z} + \frac{\bar{x}^2}{6} \right] + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\frac{(\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0)}{\bar{a}-\Gamma(1-\Gamma\eta\delta\bar{z})\cos\varphi} = 1 - \epsilon \bar{x} \frac{\sin\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} + \epsilon^2 a + \epsilon^3 b + O(\epsilon^4)$$

L'équation de conservation de la masse (Y41) indépendante de  $\alpha$  s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \epsilon \left[ \bar{u} \frac{\sin\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} - \bar{x} \frac{\sin\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] = O(\epsilon^2) \quad (Y51)$$

Dans l'étude on considère les cas  $\alpha = \epsilon^2$ ,  $\alpha = \epsilon$  et  $\alpha = 1$ .

quantité de mouvement dans le cas  $\alpha = \epsilon^2$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \sin\varphi_0 - \epsilon \bar{x} \left[ \Gamma \cos\varphi_0 + \frac{\sin^2\varphi_0}{\bar{a}-\Gamma\cos\varphi_0} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon^2 \left\{ \Gamma \bar{z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \sin \varphi_0 \left\{ \bar{x}^2 \left[ \frac{2}{3} \frac{\Gamma \cos \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} - 1 \right] + \bar{z} \frac{\cos \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \right\} - 2 \bar{v} \sin \varphi_0 \right. \\
& + \epsilon^3 \left\{ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{u}}{dt} - 2 \bar{v} \Gamma \bar{x} \cos \varphi_0 - \right. \\
& \quad \left. - \bar{x} \left\{ \bar{x}^2 \left[ \frac{3 \cos^2 \varphi_0 - 4 \sin^2 \varphi_0}{6(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)} - \frac{\Gamma}{6} \cos \varphi_0 \right] - \bar{z} \left[ \frac{\Gamma \sin^2 \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \right] \right\} \right\} = 0(\epsilon^4) \quad (Y52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \epsilon \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \epsilon^2 \left[ a \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + 2 \bar{u} \sin \varphi_0 \right] + \\
\epsilon^3 \left[ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{v}}{dt} + 2 \bar{w} \cos \varphi_0 + b \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right] = 0(\epsilon^4) \quad (Y53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \epsilon \cos \varphi_0 - \epsilon^2 \bar{x} \sin \varphi_0 \left[ \frac{\cos \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} - \Gamma \right] - \\
- \epsilon^3 \left\{ 2 \bar{v} \cos \varphi_0 + \frac{\bar{x}^2}{2} \left[ \Gamma \frac{\cos^2 \varphi_0 - 2 \sin^2 \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} - \cos \varphi_0 \right] + \bar{z} \frac{\cos^2 \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \right\} = \\
= 0(\epsilon^4) \quad (Y54)
\end{aligned}$$

quantité de mouvement dans le cas  $\alpha = \epsilon$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \sin \varphi_0 + \\
+ \epsilon \left[ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{u}}{dt} - 2 \bar{v} \sin \varphi_0 - \bar{x} \left[ \Gamma \cos \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \right] \right] \\
= 0(\epsilon^2) \quad (Y55)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \varepsilon \left[ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{v}}{dt} + 2 \bar{u} \sin \varphi_0 - \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right] = 0(\varepsilon^2) \quad (Y56)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \varepsilon \cos \varphi_0 = 0(\varepsilon^2) \quad (Y57)$$

quantité de mouvement dans le cas  $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} & (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{u}}{dt} + \\ & + \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \bar{v}^2 \sin \varphi_0 - 2 \bar{v} \sin \varphi_0 - \sin \varphi_0 \right] = 0(\varepsilon^2) \quad (Y58) \end{aligned}$$

$$(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{v}}{dt} + \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{u} \bar{v} \sin \varphi_0 + 2 \bar{u} \sin \varphi_0 \right] = 0(\varepsilon^2) \quad (Y59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \varepsilon \left\{ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \frac{d\bar{w}}{dt} + \Gamma (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \bar{u}^2 - \cos \varphi_0 \bar{v}^2 - \right. \\ \left. - 2 \bar{v} \cos \varphi_0 - \cos \varphi_0 \right\} = 0(\varepsilon^2) \quad (Y60) \end{aligned}$$

On développe  $\bar{u}$   $\bar{v}$   $\bar{w}$  et  $\bar{p}$  par rapport aux puissances entières d' $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots ; \quad \bar{v} = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \quad (Y55) \\ \bar{w} &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots ; \quad \bar{p} = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \end{aligned}$$

Les systèmes deviennent :

conservation de la masse

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} + \varepsilon \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + \bar{u} \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} - \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right] = O(\varepsilon^2) \text{ (Y56)}$$

quantité de mouvement dans le cas  $\alpha = \varepsilon^2$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_0}{\partial x} - \sin \varphi_0 + \varepsilon \left[ \frac{\partial p_1}{\partial x} - \bar{x} \left( \Gamma \cos \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right) \right] \\ & + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial p_2}{\partial x} + \Gamma \bar{z} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \sin \varphi_0 \left\{ \bar{x}^2 \left[ \frac{2}{3} \frac{\Gamma \cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} - 1 \right] + \bar{z} \frac{\cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right\} - \right. \\ & + \varepsilon^3 \left[ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left( \frac{d\bar{u}}{dt} \right)_0 - 2 v_0 \Gamma \bar{x} \cos \varphi_0 - 2 v_1 \sin \varphi_0 + \Gamma \bar{z} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_3}{\partial x} - \right. \\ & \left. \left. - \bar{x} \left\{ \bar{x}^2 \left[ \frac{3 \cos^2 \varphi_0 - 4 \sin^2 \varphi_0}{6(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)} - \frac{\Gamma}{6} \cos \varphi_0 \right] - \bar{z} \left[ \frac{\Gamma \sin^2 \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right] \right\} \right] \right] = O(\varepsilon^4) \text{ (Y52)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_0}{\partial y} + \varepsilon \left[ - \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial y} \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left[ a \frac{\partial p_0}{\partial y} - \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\partial p_2}{\partial y} + \right. \\ & \left. + 2 \Gamma \bar{x} u_0 \cos \varphi_0 + 2 u_1 \sin \varphi_0 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^3 \left\{ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left( \frac{d\bar{v}}{dt} \right)_0 + 2 w_0 \cos \varphi + \right. \\
& \left. + b \frac{\partial p_0}{\partial y} + a \frac{\partial p_1}{\partial y} - \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_3}{\partial y} \right\} = 0(\varepsilon^4) \quad (Y53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_0}{\partial z} + \varepsilon \left[ \frac{\partial p_1}{\partial z} - \cos \varphi_0 \right] + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial p_2}{\partial z} - \bar{x} \sin \varphi_0 \left( \frac{\cos \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} - \Gamma \right) \right] + \\
+ \varepsilon^3 \left\{ \frac{\partial p_3}{\partial z} - 2 v_0 \cos \varphi - \frac{\bar{x}^2}{z} \left[ \Gamma \frac{\cos^2 \varphi_0 - 2 \sin^2 \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} - \cos \varphi_0 \right] - \frac{\bar{z}}{z} \frac{\cos^2 \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \right\} = \\
= 0(\varepsilon^4) \quad (Y54)
\end{aligned}$$

quantité de mouvement dans le cas  $\alpha = \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_0}{\partial x} - \sin \varphi_0 + \\
+ \varepsilon \left[ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left( \frac{d\bar{u}}{dt} \right)_0 - 2 v_0 \sin \varphi_0 - \bar{x} \left[ \Gamma \cos \varphi_0 + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \right] + \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] \\
= 0(\varepsilon^2) \quad (Y55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_0}{\partial y} + \varepsilon \left[ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left( \frac{d\bar{u}}{dt} \right)_0 + 2 u_0 \sin \varphi_0 - \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial y} \right] \\
= 0(\varepsilon^2) \quad (Y56)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} + \epsilon \left[ \frac{\partial p_1}{\partial z} - \cos \varphi_0 \right] = O(\epsilon^2) \quad (Y57)$$

quantité de mouvement dans le cas  $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} & (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{d\bar{u}}{dt} \right]_0 + \\ & + \epsilon \left\{ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{d\bar{u}}{dt} \right]_1 + \frac{\partial p_0}{\partial x} - v_0^2 \sin \varphi_0 - \right. \\ & \left. - 2 v_0 \sin \varphi_0 - \sin \varphi_0 \right\} = O(\epsilon^2) \quad (Y58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{d\bar{v}}{dt} \right]_0 + \\ & + \epsilon \left[ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{d\bar{v}}{dt} \right]_1 + \frac{\partial p_0}{\partial y} + u_0 v_0 \sin \varphi_0 + 2 u_0 \sin \varphi_0 \right] = O(\epsilon^2) \quad (Y59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial z} + \epsilon \left\{ (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) \left[ \frac{d\bar{w}}{dt} \right]_0 + \Gamma (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0) u_0^2 - \cos \varphi_0 v_0^2 - \right. \\ \left. - 2 v_0 \cos \varphi_0 - \cos \varphi_0 + \frac{\partial p_1}{\partial z} \right\} = O(\epsilon^2) \quad (Y60) \end{aligned}$$

dérivée particulière d'une fonction  $\bar{a} = a + \epsilon a_1 + O(\epsilon^2)$

à partir de (Y23), il vient :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} - \epsilon \bar{v} \bar{x} \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \frac{\partial}{\partial y} + O(\epsilon^2)$$

après introduction des développements de  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  et  $\bar{w}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d(a_0 + \epsilon a_1 + O(\epsilon^2))}{dt} &= \frac{\partial a_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial a_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial a_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial a_0}{\partial z} + \dots \\ &\dots + \epsilon \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial a_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial a_1}{\partial y} + w_0 \frac{\partial a_1}{\partial z} + \dots \right. \\ &\left. + u_1 \frac{\partial a_0}{\partial x} + \left[ v_1 - \bar{x} v_0 \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right] \frac{\partial a_0}{\partial y} + w_1 \frac{\partial a_0}{\partial z} \right\} + O(\epsilon^2) \quad (Y61) \end{aligned}$$

avec :

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \left( \frac{d\bar{a}}{dt} \right)_0 + \epsilon \left( \frac{d\bar{a}}{dt} \right)_1 + O(\epsilon^2)$$

par identification on définit :

$$\left( \frac{d\bar{a}}{dt} \right)_0 = \frac{\partial a_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial a_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial a_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial a_0}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\bar{a}}{dt} \right)_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial a_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial a_1}{\partial y} + w_0 \frac{\partial a_1}{\partial z} + \\ &+ u_1 \frac{\partial a_0}{\partial x} + \left[ v_1 - \bar{x} v_0 \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right] \frac{\partial a_0}{\partial y} + w_1 \frac{\partial a_0}{\partial z} \end{aligned}$$

expression du rotationnel de  $\vec{V}$

à partir de (Y22) et en utilisant (Y40), il vient :

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} = \frac{U}{R} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \bar{v} \frac{\cos \varphi}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\epsilon) \\ \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \Gamma \bar{u} \right) + O(\epsilon) \\ \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] + \left[ \bar{x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \right] \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\epsilon) \end{array} \right. \quad (\text{Y62})$$

Cas où l'écoulement est irrotationnel dans le repère absolu

avec :  $\vec{c}$  : vitesse absolue  
 $\vec{u}$  : vitesse d'entraînement  
 $\vec{V}$  : vitesse relative

La condition sur le rotationnel s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{c} = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{u} + \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} = \vec{0}$$

d'où :

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} = - \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{u} = - 2 \vec{\Omega}$$

Cette condition dans le repère local s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} = \Omega (a - \Gamma \cos \varphi_0) \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\cos \varphi}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \\ 0 \\ - 2 \frac{\sin \varphi}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \end{array} \right. \quad (\text{Y63})$$

Finalement, dans ce cas, (Y62) et (Y63) donnent la condition suivante :

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \bar{v} \frac{\cos \varphi}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) &= \frac{1}{\alpha} \left[ 2 \frac{\cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) \right] \\
 \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \Gamma \bar{u} \right) + O(\varepsilon) &= 0 \\
 \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] + \left[ x \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \right] \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) &= -\frac{1}{\alpha} \left[ 2 \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) \right]
 \end{aligned} \right\} (Y64)$$

condition d'irrotationnalité dans le cas  $\alpha = \varepsilon^2$

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \bar{v} \frac{\cos \varphi}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right] + O(\varepsilon^3) &= 2 \frac{\cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) \\
 \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \Gamma \bar{u} \right) + O(\varepsilon) &= 0 \\
 \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] + \varepsilon^2 \left[ x \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \right] \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) &= -2 \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon)
 \end{aligned} \right\} (Y65)$$

La dernière équation de (Y65) montre que l'ordre de grandeur de la vitesse caractéristique n'est pas compatible avec un écoulement irrotationnel.

condition d'irrotationnalité dans le cas  $\alpha = \varepsilon$

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \varepsilon \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \bar{v} \frac{\cos \varphi}{a - \Gamma \cos \varphi_0} \right] + O(\varepsilon^2) &= 2 \frac{\cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) \\
 \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \Gamma \bar{u} \right) + O(\varepsilon) &= 0 \\
 \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] + \varepsilon \left[ x \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \right] \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon^2) &= -2 \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon)
 \end{aligned} \right\} (Y66)$$

condition d'irrotationnalité dans le cas  $\alpha = 1$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \bar{v} \frac{\cos \varphi}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) &= 2 \frac{\cos \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \Gamma \bar{u} \right) + O(\varepsilon) &= 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \left( \bar{x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \right) \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) &= -2 \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} (Y67)$$

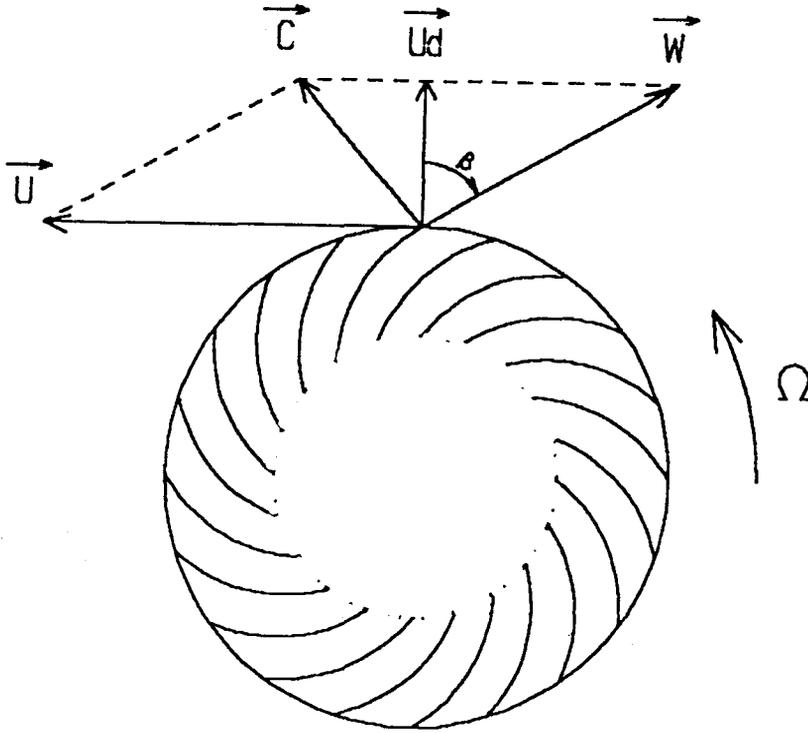
qui s'écrit en introduisant les développements des composantes de la vitesse :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial z} &= O(1) \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_1}{\partial z} &= O(1) \\ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} + \left( \bar{x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \right) \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} &= -2 \frac{\sin \varphi_0}{a - \Gamma \cos \varphi_0} + O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} (Y67)$$

Dans ce cas l'irrotationnalité n'affecte que les termes d'ordre  $\varepsilon$  de la vitesse.

## ANNEXE 4

### triangle des vitesses



Le triangle des vitesses est la construction vectorielle :

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{U} \quad (W1)$$

où :

- $\vec{C}$  : vitesse absolue
- $\vec{U}$  : vitesse d'entrainement (vitesse tangentielle du rotor)
- $\vec{W}$  : vitesse relative
- $\vec{U}_d$  : vitesse débitante.

## NOMENCLATURE

$x, y, z$  : coordonnées dans le repère local  
 $u, v, w$  : composantes de la vitesse dans le repère local  
 $t$  : temps  
 $p$  : pression  
 $\rho$  : masse volumique  
 $\bar{\quad}$  : indique que la grandeur est normalisée  
 $o, 1 \dots$  : indique l'ordre du développement asymptotique  
 $s$  : indice signifiant stationnaire  
 $*$  : exposant signifiant instationnaire  
 $L$  : longueur caractéristique dans le plan tangent à la surface  
 $d$  : longueur caractéristique perpendiculaire au plan tangent  
 $U$  : vitesse caractéristique de l'écoulement  
 $\eta = L/R$   
 $g$  : accélération de la pesanteur  
 $k, h, m$  : nombre d'ondes  
 $\sigma$  : pulsation  
 $\varepsilon$  : petit paramètre  
 $\mathcal{U}$  : vitesse débitante

### approximation géostrophique ondes de Rossby

$R$  : rayon de la Terre  
 $\Omega$  : vitesse angulaire de la Terre  
 $\theta$  : latitude  
 $\varphi$  : longitude  
 $\delta = d/L$   
 $F$  : nombre de Froude ;  $F^2 = U^2/gd$   
 $Ro$  : nombre de Rossby ;  $Ro = U/(2 \Omega L \sin\theta_0)$   
( $\theta_0$  est la latitude de l'origine du repère local)  
 $\lambda_0 = F^{-2} Ro^3 = O(1)$   
 $R$  : première approximation de la masse volumique  
 $P$  : première approximation de la pression  
 $\omega_0$  : composante normale du rotationnel  
 $\beta = \eta/(Ro \operatorname{tg} \theta_0)$   
 $\Psi = \lambda_0 p_0$

## machine radiale

- $R_n$  : rayon de courbure moyen local ; positif ou négatif
- $R_{DB}$  : repère de Darboux-Ribaucour  $R_{DB}$
- $s$  : abscisse curviligne
- $\theta$  : position angulaire du plan méridien
- $\varphi_{(s)}$  : position angulaire similaire à la latitude
- $A_{(\varphi)}$  : position radiale du centre de courbure de la surface du moyeu dans le plan méridien.
- $Z_{(\varphi)}$  : position axiale du centre de courbure de la surface du moyeu
- $R_{(\varphi)}$  : rayon de courbure de la surface du moyeu
- $\Gamma$  : vaut +1 ou -1 si le moyeu est concave ou convexe
- $R$  défini par  $R = \Gamma R$  avec  $R > 0$
- $R' = \frac{dR}{d\varphi}$  : variation du rayon de courbure dans le plan méridien
- $R$  : longueur caractéristique de  $A$  et  $R$
- $\delta = d/L$
- $a = A(\varphi_0)$  :  $\varphi_0$  position angulaire de l'origine du repère local
- $R_1$  : repère local
- $\mathcal{R}$  : rayon extérieur de la roue
- $\alpha$  : paramètre cinématique ;  $\alpha = U / [\Omega R(\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)]$
- $\omega_z$  : composante normale du rotationnel
- $\beta_0$  : paramètre lié au rayon de courbure local
- $\beta_0 = 2 \cos \varphi_0 / (\bar{a} - \Gamma \cos \varphi_0)$
- $\ell$  : nombre d'ondes
- $\beta$  : angle de calage de l'aubage par rapport au rayon
- $\gamma = a \bar{x} + \bar{y}$
- $\psi$  : fonction de courant
- $u$  : vitesse débitante

## machine axiale

$r, \theta, z$  : coordonnées cylindriques

$R$  : rayon de la surface du moyeu

$c$  : corde

$e$  : épaisseur maximale du profil

$\delta = e/c$

$\alpha$  : paramètre cinématique ;  $\alpha = U / \Omega R$

$\beta$  : angle de calage de l'aubage par rapport à l'axe du rotor